

Este exemplar corresponde à Redacção
Final da tese defendida por Pedro
Carvalho Filho e aprovada pela Comissão
Julgadora em 16.10.87.

Leonardo Goldstein Jr.

CONVECÇÃO NATURAL EM PLACA PLANA VERTICAL COM
DISTRIBUIÇÃO NÃO UNIFORME DE TEMPERATURA

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

TESE DE: MESTRADO

TÍTULO DA TESE: CONVECÇÃO NATURAL EM PLACA PLANA VERTICAL COM
DISTRIBUIÇÃO NÃO UNIFORME DE TEMPERATURA

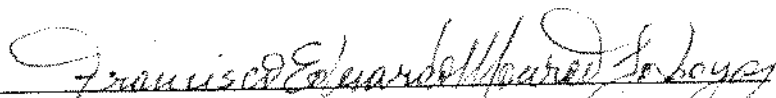
AUTOR: PEDRO CARVALHO FILHO

ORIENTADOR: LEONARDO GOLDSTEIN JR.

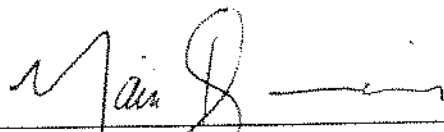
APROVADO POR:



PROF.DR. LEONARDO GOLDSTEIN JR., Presidente



PROF.DR. FRANCISCO EDUARDO MOURÃO SABOYA



PROF.DR. MÁRIO GRANZIERA

CAMPINAS-SP-BRASIL

1987

A G R A D E C I M E N T O S

Ao Prof. Dr. Leonardo Goldstein Jr. pela orientação deste trabalho e incentivo demonstrado.

Ao CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - pela bolsa de estudo concedida.

À TELEBRÁS pela infra-estrutura e pelo apoio fornecido.

A Sonia Auxiliadora Galanti pela qualidade e dedicação na datilografia deste trabalho.

Ao Wilton Furquim pelos desenhos que compõem este trabalho.

Aos meus pais e familiares pelo incentivo recebido durante estes anos.

Aos professores do DEM e aos amigos, pela amizade e colaboração na elaboração deste trabalho.

R E S U M O

Este trabalho analisa a convecção natural laminar em placa plana vertical sujeita a uma distribuição arbitrária de temperatura.

Primeiramente, é feita uma transformação de variáveis nas equações diferenciais parciais que descrevem o fenômeno: conservação da massa, 2ª lei de Newton e conservação da energia, reduzindo o sistema para duas equações diferenciais parciais acopladas. Para a solução destas equações, as derivadas em relação a uma das duas variáveis independentes são aproximadas por diferenças finitas, obtendo-se um sistema diferencial ordinário acoplado, que é resolvido por integração numérica pelo método de Adams-Moulton. Como há a necessidade de condições iniciais para a aplicação do método e o problema a ser resolvido é do tipo condição de contorno, são necessárias estimativas iniciais, tendo-se desenvolvido uma metodologia adequada para esta finalidade. Essas estimativas são corrigidas a cada passo da integração pelo método de Nachtsheim & Swigert.

Os resultados são apresentados para diversos tipos de distribuição da temperatura na superfície da placa, incluindo-se casos de funções contínuas, com derivadas contínuas ou descontínuas, e de funções com descontinuidade.

A B S T R A C T

A procedure has been developed for the analysis of laminar free convection from a vertical flat plate with an arbitrary temperature distribution.

By applying appropriate variable transformation the governing mass conservation, momentum and energy equations are expressed as a set of coupled partial differential equations. This system is solved by approximating the derivatives related to one of the two independent variables by finite differences, resulting in a set of coupled ordinary differential equations, that can be integrated by the Adams-Moulton method. An initial condition is necessary to apply this method to the problem, which is a boundary value problem, and a technique for such has been developed. The estimates are corrected at each step by the Nachtsheim & Swigert procedure.

Computation can be performed for several temperature distributions, continuous and discontinuous functions being considered with or without discontinuities in their derivatives. Several result are presented and discussed.

I N D Í C E

	<u>Pág.</u>
CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO 2 - EQUACIONAMENTO DO PROBLEMA	9
2.1- Equações Fundamentais	9
2.2- Análise de Escala	16
2.3- Transformação das Variáveis	23
CAPÍTULO 3 - MÉTODO DE SOLUÇÃO	27
3.1- Redução do Sistema de Equações a um Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias	27
3.2- Método de Integração	33
3.3- Método de Correção das Estimativas Iniciais	34
3.4- Estimativa Inicial de f_0'' e θ_0'	42
3.5- Considerações a Respeito dos Incrementos e de n_∞	45
3.6- Otimização do Método de Estimativas de f_0'' e θ_0'	47
3.7- Programa de Computador	48
CAPÍTULO 4 - APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	51
4.1- Distribuição de Temperatura na Forma de Funções Contínuas e com Derivadas Contínuas	52
4.1.1- Variação senoidal da temperatura de parede	52
4.1.2- Variação exponencial da temperatura de parede	57

4.2-	Distribuição de Temperatura na Forma de Função Contínua e com Descontinuidade ao Longo da Altura	60
4.2.1-	Análise para $T_{w_2}(x) - T_{\infty} = 0,5x + 0,25$	63
4.2.2-	Análise para $T_{w_2}(x) - T_{\infty} = 0,5 \dots$	66
4.2.3-	Análise para $T_{w_2}(x) - T_{\infty} = 1-x \dots$	68
4.3-	Distribuição de Temperatura na Forma de Funções Descontínuas	73
4.3.1-	Descontinuidade de temperatura-um degrau de temperatura	73
4.3.2-	Descontinuidade de temperaturas vários degraus de temperatura..	82
CAPÍTULO 5	- CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	91
ANEXO 1	- TRANSFORMAÇÃO DE VARIÁVEIS NAS EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS	94
ANEXO 2	- MÉTODO DE ADAMS-MOULTON	100
ANEXO 3	- MINIMIZAÇÃO DO ERRO E_n	104
ANEXO 4	- EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARA O ESQUEMA DE INTEGRAÇÃO	108
ANEXO 5	- PROGRAMA DE COMPUTADOR	111
NOMENCLATURA		118
REFERÊNCIAS		122

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

A convecção natural em placa plana vertical é um dos problemas básicos em transferência de calor. A maioria dos trabalhos publicados sobre o assunto, no entanto, refere-se a condições de contorno uniformes ao longo da altura, ou seja, temperatura de parede constante ou fluxo de calor constante, correspondendo ao chamado escoamento similar. Para o caso de condições de contorno não uniformes, como nesta tese, poucos trabalhos foram realizados. O interesse por este tipo de problema surgiu da necessidade de se modelar condições de contorno em equipamentos de transmissão digital, objeto do convênio Telebrás-Unicamp, para o estudo das características de transferência de calor na chamada Mecânica Vertical Padrão. Este sistema se caracteriza pela colocação alternada de placas de blindagens no sentido vertical, sendo estas dispostas horizontalmente. O conjunto é alojado em um compartimento chamado sub-bastidor, conforme a Figura 1.1, os quais são agrupados e montados lado a lado, de costas para outros sub-bastidores, conforme a Figura 1.2.

Inicialmente, Carvalho [1] fez o modelamento das condições de contorno externas da Mecânica para placas de circuito impresso dissipando uniformemente ao longo da altura, correspondendo o problema à situação de temperatura uniforme ao longo das paredes dos sub-bastidores. Dando sequência à pesquisa, houve a necessidade de se determinar condições de contorno externas correspondentes ao caso de dissipação não uniforme ao longo da altura, o que sugeriu o estudo da convecção natural em placas planas verticais sujeitas a uma distribuição genérica de temperaturas, incluindo o caso da distribuição em degraus de temperatura.

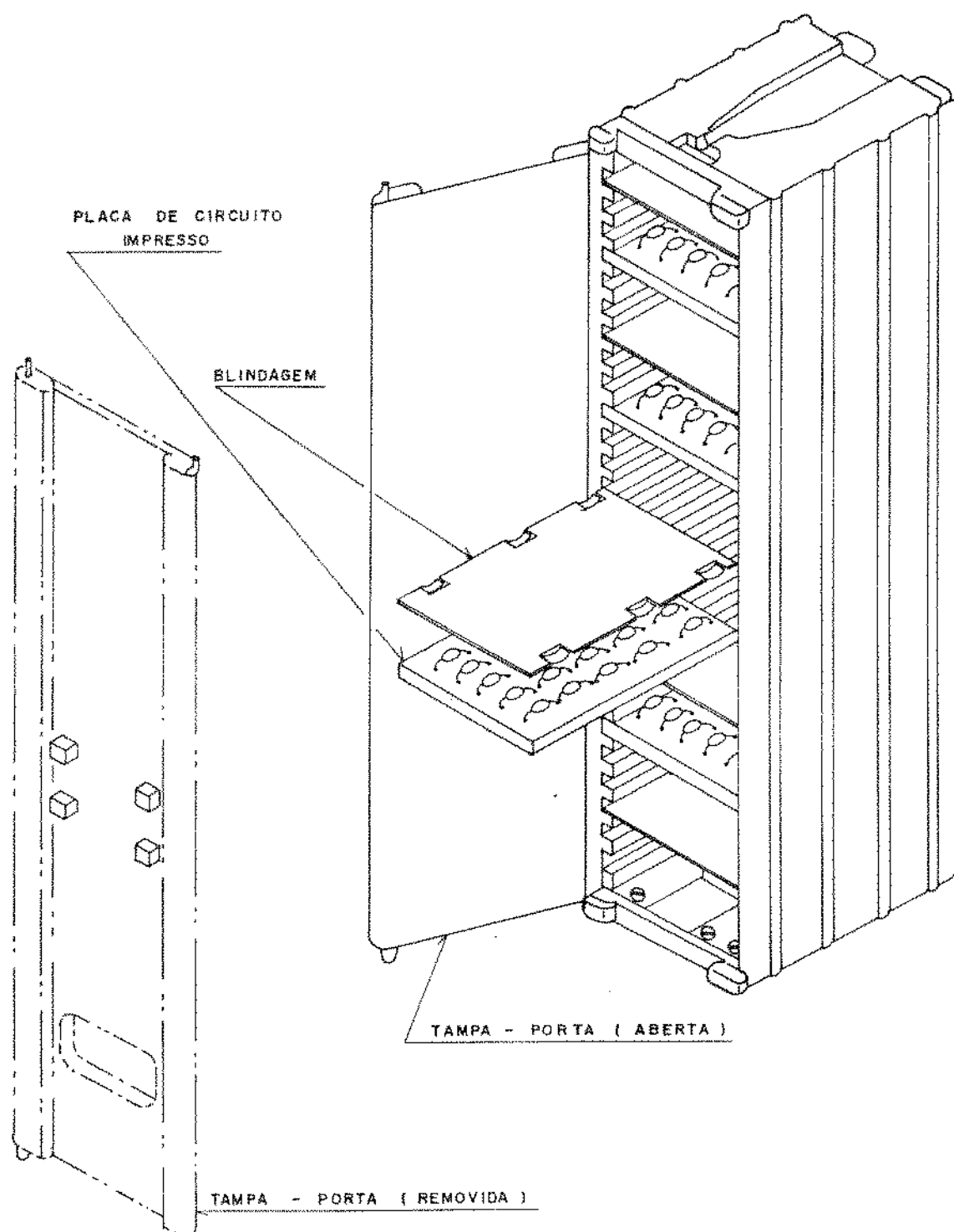


Figura 1.1 - O sub-bastidor

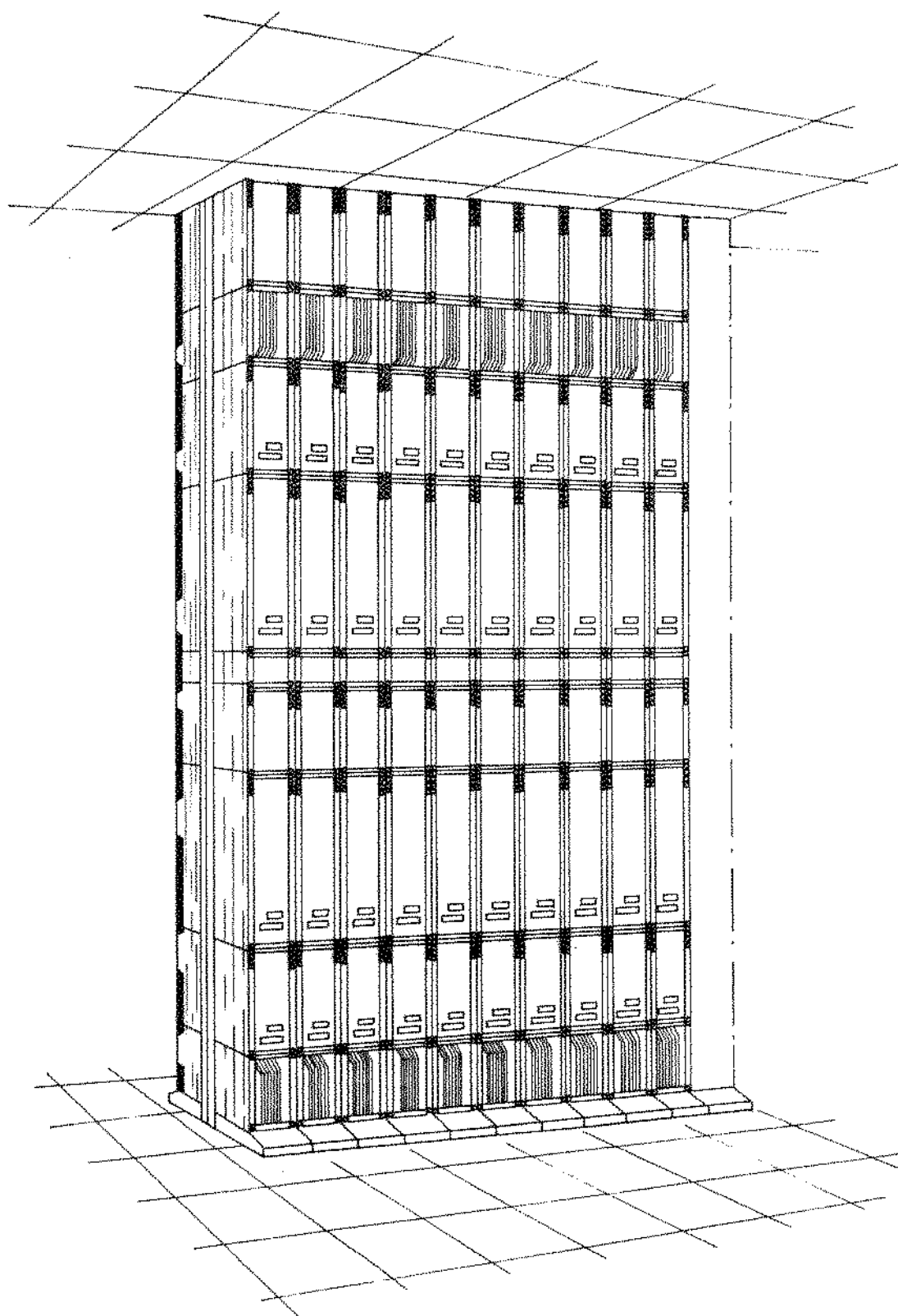


Figura 1.2 - Conjunto de sub-bastidores formando a estrutura da Mecânica Vertical Padrão

Há um número reduzido de trabalhos publicados sobre o assunto. Um dos primeiros trabalhos publicados sobre convecção natural para superfícies não isotérmicas foi o de Sparrow e Gregg [2], o qual faz uma análise da solução por similaridade da sobretemperatura de parede, ou seja, a diferença entre a temperatura de parede e a temperatura ambiente, pertencentes a duas classes de distribuição de temperatura:

$$a) \quad T_w - T_\infty = B x^b \quad e$$

$$b) \quad T_w - T_\infty = M e^{mx} .$$

Mais tarde, Yang [3] fez uma análise mais generalizada sobre soluções de similaridade para convecção natural laminar, englobando os casos comentados anteriormente e apresentando as condições necessárias e suficientes para que se possa aplicar solução de similaridade para placas e cilindros verticais. Certos tipos de funções para a variação de temperatura de parede, no entanto, não admitem soluções por similaridade. Assim, a partir do método de similaridade local, no qual cada solução é localmente autônoma, foi desenvolvido o método de não-similaridade local, a qual incorpora todas as derivadas que são descartadas quando se aplica a similaridade local. Inicialmente, Sparrow et al [4] aplicaram este método para resolução da equação da quantidade de movimento na convecção forçada, quando se tem condições de escoamento que não podem ser resolvidas por similaridade local. Uma extensão deste método foi feita por Sparrow e Yu [5] para solução da equação da energia com o mesmo tipo de problema. A partir dos dois trabalhos citados anteriormente, Minkowycz e Sparrow [6] propuseram uma solução para a convecção natural em cilindros verticais pelo método da não-similaridade local.

Scherberg [7] utiliza o método integral para resolver o problema da distribuição arbitrária da temperatura de parede, tendo analisado o caso:

$$T = 1 + \tau(x) (1 - y/\delta)^2$$

onde $\tau(x)$ é uma função de x , y é a coordenada normal à parede e δ a espessura da camada limite.

Para o caso de descontinuidade da temperatura ao longo de uma placa plana vertical, o primeiro trabalho publicado se deve à experiência realizada por Schetz e Eichhorn [8], para somente uma descontinuidade de temperatura ao longo da altura da placa, cobrindo seis valores diferentes da relação entre as temperaturas anterior e posterior à descontinuidade. Os resultados são apresentados em termos do perfil de temperaturas para algumas posições ao longo da altura, após a descontinuidade e, também, em termos de fluxo de calor na parede. Motivados pelo assunto e à fim de lhe dar um tratamento conceitual, Hayday et al [9] fizeram uma análise teórica, na qual as derivadas em relação à uma das variáveis independentes são aproximadas por diferenças finitas, transformando o problema em um sistema diferencial ordinário e acoplado, resolvido por integração numérica. Jeng et al [10] analisaram a descontinuidade de temperaturas em cilindros circulares sob regime de convecção forçada. As variáveis dependentes, obtidas na transformação de variáveis, são expandidas em séries de potenciais e é feito uso de funções universais para resolução do problema. O termo "funções universais" se deve ao fato que essas funções são independentes de certos coeficientes que aparecem nas equações à serem resolvidas. Kelleher [11] faz uma análise das descontinuidades de temperatura em convecção natural no mesmo tipo de problema analisado por Hayday et al [9], usando séries assintóticas para os perfis adimensionais de velocidade e temperatura, citando como método seguido o desenvolvido por Goldstein [12] para o estudo da esteira do escoamento em uma placa plana no regime de convecção forçada.

Kelleher resolveu o problema para dois domínios: o primeiro para valores pequenos da variável independente normal à placa e o segundo para grandes valores desta. Os resultados obtidos são interpolados nos pontos de separação dos dois domínios, obtendo-se assim a solução para os perfis adimensionais de temperatura e velocidade. Uma análise semelhante à esta foi utilizada anteriormente por Kuiken [13], para uma temperatura de parede do tipo:

$$T_w = T_\infty + r(x) ,$$

onde

$$r(x) = r_0 \bar{x}^s (1 + a_1 \bar{x}^{\hat{m}} + a_2 \bar{x}^{2\hat{m}} + \dots)$$

sendo

$$\bar{x} = x/L;$$

$$L = \text{comprimento};$$

$$a_n = \text{constantes e}$$

$$r_0 = \text{temperatura constante.}$$

Kelleher e Yang [14] sugeriram uma única série para a resolução do problema. Eles utilizaram séries do tipo Gortler, uma extensão da série usada por Gortler [15] para a convecção forçada em cilindros de configuração arbitrária. A análise de Kelleher e Yang é feita para funções contínuas e os resultados apresentados para variação do tipo:

$$G_w/G_{w0} = \frac{T_w - T_\infty}{T_{w0} - T_\infty} = 1 + \hat{\epsilon} (x/L)^{\hat{p}} ,$$

onde G_w é o número de Grashof, G_{w0} é o número de Grashof na borda de ataque, $\hat{\epsilon}$ e $\hat{p}$ são constantes e L o comprimento da placa. Meena e Nath [16] analisaram o mesmo tipo de função utilizando o método de diferenças finitas implícito, citando como método utilizado o desenvolvido por Marvin e Sheaffer [17]. Uma das conclusões tiradas é que para esse tipo de função a transferência de calor aumenta ao longo da altura da placa.

Dos trabalhos analisados acima, pode-se notar que a análise de condições de contorno não uniformes ao longo da altura da placa é feita para um determinado tipo de variação de temperatura de parede. Com a idéia de apresentar um método mais geral na abordagem do problema, Kao et al [18] introduziram uma nova transformação de variáveis na qual o sistema

de equações diferenciais resultante é função de um parâmetro dependente das condições de contorno empregadas. A análise é feita usando-se similaridade local como primeira aproximação e funções universais para um melhoramento adicional. Os resultados são apresentados para variações de temperatura de parede do tipo senoidal e exponencial e para variações linear e exponencial do fluxo de calor na parede. Yang et al [19] utilizaram a mesma transformação de variáveis proposta anteriormente, apresentando um método alternativo para solução dessas equações, empregando séries do tipo Merk, usadas anteriormente por Chao e Fagbenle [20] para convecção forçada, para os perfis de velocidade e temperatura, transformando as equações diferenciais parciais que regem o escoamento numa sequência de equações diferenciais ordinárias acopladas, as quais são resolvidas por integração numérica. Os resultados são do mesmo tipo dos apresentados por Kao et al [18]. Uma consideração feita por Yang et al é que a distribuição de temperatura ou do fluxo de calor na parede deve ser contínua, descartando assim problemas com descontinuidades da temperatura de parede. Vedhanayagam et al [21] fizeram transformações similares às introduzidas por Kao et al, considerando também o caso de injeção de massa pela parede; o sistema de equações diferenciais parciais assim obtido após a transformação de variáveis é função de dois coeficientes, um relacionado com o perfil de temperaturas na parede e outro com a injeção de massa ao longo desta. Tendo como parâmetros esses dois coeficientes, é feita a apresentação de uma tabela que contém duas variáveis adimensionais, uma correspondente ao fluxo de calor na parede e outra à tensão de cisalhamento nesta. Mais recentemente, Hasan e Mundel [22] analisaram o problema da variação de temperatura na parede, utilizando a mesma transformação de variáveis introduzidas por Kao et al [18] e aplicando o método de expansão em séries de potências desenvolvido por Ishizawa [23 e 24]. Os resultados são aplicados para variações de temperatura do tipo exponencial e senoidal, além daquela apresentada por Meena e Nath [16]. Uma das condições requeridas para aplicação desse método é que a função que dá a distribuição de temperatura na parede $T_w(x)$ seja infinitamente diferenciável. Na [25] utilizou equações adimensionais para convecção natural com temperatura de parede variando ao longo da altura,

transformando essas equações através de uma nova transformação de variáveis. O sistema de equações diferenciais parciais resultante é resolvido pelo método das diferenças finitas, no qual as equações não lineares são linearizadas pelo método apresentado por Bellman e Kalaba [26], já utilizadas anteriormente por Radbill [27] para o regime de convecção forçada. O sistema algébrico resultante é então resolvido por uma técnica de fatoração bloco-tridiagonal. Nesta análise, Na incluiu o caso de descontinuidades de temperaturas na parede, além de analisar funções do tipo exponencial e senoidal, além do tipo apresentado por Kuiken [13].

Neste trabalho é desenvolvido um método geral para o cálculo do coeficiente de película na convecção natural ao longo de uma placa plana vertical para o caso de variação arbitrária da temperatura de parede. Não serão analisados os casos de injeção de massa pela parede ou de variação do fluxo de calor ao longo desta, embora seja de se esperar que o método seja aplicável a esses casos, com apenas algumas modificações.

Ao sistema de equações que rege o escoamento laminar ao longo de uma placa plana vertical, sob o regime de convecção natural, aplica-se uma transformação de variáveis, que reduz o sistema de equações originais à um sistema de duas equações diferenciais parciais acopladas, mais as respectivas condições de contorno. A derivada em relação a uma das variáveis independentes é aproximada por diferenças finitas, e o sistema diferencial ordinário resultante desta aproximação é integrado numericamente pelo método de Adams-Moulton. Como o esquema de integração utilizado é do tipo que necessita de condições iniciais e o problema a ser resolvido é do tipo condição de contorno, estimativas iniciais são feitas e reavaliadas a cada passo da integração. Um procedimento adequado foi desenvolvido para tanto, dando flexibilidade à metodologia proposta, o que permite aplicá-la para distribuições de temperatura de parede genéricas, incluindo descontinuidades da função e/ou de sua derivada.

CAPÍTULO 2

EQUACIONAMENTO DO PROBLEMA

Para que se possa chegar às equações que regem o escoamento e a transferência de calor no problema em questão, as equações das leis básicas obedecidas pelos meios contínuos são apresentadas inicialmente, sendo as simplificações devidas feitas a seguir, ordenadamente. As leis básicas são:

- . Conservação da Massa (Equação da Continuidade);
- . Segunda Lei de Newton (Equação da Quantidade de Movimento) e
- . Conservação da Energia (Primeira Lei da Termodinâmica).

2.1 EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS

A obtenção das equações fundamentais não é discutida neste trabalho, em que elas são inicialmente apresentadas em seu formato mais geral. Maiores detalhes podem ser encontrados por exemplo, em [28] e [29]. O sistema de coordenadas adotado pode ser visto na Figura 2.1.

Para aplicação no estudo da convecção natural em placa plana vertical, a forma mais adequada para as equações é:

- . Equação da Continuidade:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (2.1)$$

onde:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z}$$

$$\vec{V} = u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k}$$

$$\vec{V} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

. Equação da Quantidade de Movimento:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \vec{F} - \vec{\nabla}P + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (2.2)$$

onde:

$$\vec{F} = \rho \vec{g} \equiv \text{força de campo por unidade de volume}$$

. Equação da Energia:

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot (K \vec{\nabla} T) + q''' + \beta T \frac{Dp}{Dt} + \mu \Phi \quad (2.3)$$

onde:

$$q''' \equiv \text{energia gerada por unidade de volume;}$$

$$\beta T \frac{Dp}{Dt} \equiv \text{efeitos de compressibilidade;}$$

$$\beta = - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p ; \quad (2.4)$$

$$\mu \Phi \equiv \text{dissipação viscosa;}$$

$$\begin{aligned} \Phi = & 2 \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \\ & + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ & - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Devido ao fato do movimento do fluido dentro da camada limite ser causado por diferença de densidade e sendo esta provocada por diferenças de temperatura, temos um acoplamento entre as equações, as quais precisam ser resolvidas simultaneamente. Deve-se, portanto, introduzir hipóteses simplificadoras para que as equações sejam mais acessíveis para se trabalhar. As hipóteses iniciais adotadas são:

- . Regime Permanente;
- . Ausência de Geração de Energia e
- . Escoamento Bidimensional nas Coordenadas (x,y) .

Mesmo com a introdução dessas hipóteses simplificadas, as equações ainda são de tratamento difícil, pois se está considerando a possível variação das propriedades μ , k , C_p , β e ρ . Assim, para solucionar este problema, introduz-se a aproximação de Boussinesq, a qual considera que:

- . A densidade é constante, exceto quando causa diretamente forças de empuxo;
- . Todas as outras propriedades do fluido são constantes.

A primeira hipótese implica em considerar a incompressibilidade na equação da continuidade; a densidade, no entanto, é considerada variável no termo gravitacional da equação da quantidade de movimento. Uma análise mais acurada quanto à validade da aproximação de Boussinesq pode ser encontrada em Gray e Giorgini [30].

Com a introdução dessas simplificações nas equações 2.1 à 2.3 e sendo este um problema de placa plana vertical, onde:

$$\vec{g} = -g_x = -g,$$

tem-se que:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.6)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \rho g \quad (2.7)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (2.8)$$

$$\rho C_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = K \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \mu \Phi_1, \quad (2.9)$$

onde Φ_1 é obtido aplicando as mesmas hipóteses à equação 2.5:

$$\Phi_1 = 2 \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right\} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (2.10)$$

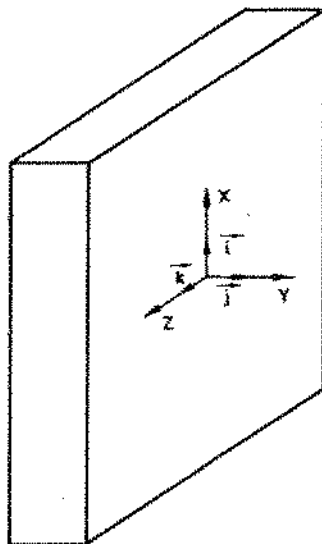


Figura 2.1 - Sistema de coordenadas adotado

Nas equações (2.7) e (2.8), pode-se decompor a pressão local P como sendo a soma de dois termos:

$$P = P_{\infty} + P_d$$

onde:

$P_{\infty} \equiv$ pressão hidrostática de repouso e

$P_d \equiv$ pressão dinâmica.

Assim:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P_{\infty}}{\partial x} + \frac{\partial P_d}{\partial x} \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial P_{\infty}}{\partial y} + \frac{\partial P_d}{\partial y} \quad (2.12)$$

A pressão hidrostática de repouso pode ser obtida das equações (2.7) e (2.8) considerando um ponto no espaço onde não ocorre escoamento. Assim:

$$0 = - \frac{\partial P_{\infty}}{\partial x} + 0 - \rho_{\infty} g$$

$$- \frac{\partial P_{\infty}}{\partial x} = \rho_{\infty} g \quad (2.13)$$

e

$$0 = - \frac{\partial P_{\infty}}{\partial y} + 0$$

$$- \frac{\partial P_{\infty}}{\partial y} = 0 \quad (2.14)$$

Assim, substituindo (2.11) à (2.14) nas equações (2.7) e (2.8) resulta:

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial P_d}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - (\rho - \rho_\infty) g \quad (2.15)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial P_d}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (2.16)$$

Conforme pode ser visto em [31] a densidade ρ_∞ pode ser escrita:

$$\begin{aligned} \rho_\infty = \rho &+ \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P (T_\infty - T) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial T^2} \right)_P (T_\infty - T)^2 + \dots \\ &+ \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T (P_\infty - P) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial P^2} \right)_T (P_\infty - P)^2 + \dots \\ &+ \frac{\partial^2 \rho}{\partial P \partial T} (P_\infty - P) (T_\infty - T) + \dots \end{aligned} \quad (2.17)$$

Fazendo-se agora uma estimativa para o valor máximo da velocidade característica de convecção U_c , ou seja, considerando somente a força motora do escoamento e desprezando as forças viscosas, tem-se, igualando a energia adicionada ao longo do eixo x à energia cinética por unidade de volume, que:

$$\frac{\rho U_c^2}{2} \approx g x (\rho_\infty - \rho) \quad (2.18)$$

Admitindo um fluido não-viscoso, tem-se, aplicando a equação de Bernoulli entre um ponto dentro do escoamento e um ponto no espaço onde não há escoamento:

$$P_{\infty} - P \approx \frac{\rho U_c^2}{2}$$

Da equação (2.18):

$$P_{\infty} - P = g x (\rho_{\infty} - \rho) \quad (2.19)$$

Substituindo (2.4) e (2.19) em (2.17) vem:

$$\begin{aligned} \rho_{\infty} - \rho &= \rho \beta (T - T_{\infty}) + \frac{\rho \beta^2}{2!} (T - T_{\infty})^2 + \dots \\ &+ \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T \left[g x (\rho_{\infty} - \rho) \right] + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial P^2} \right)_T \left[g x (\rho_{\infty} - \rho) \right]^2 + \dots \\ &+ \frac{\partial^2 \rho}{\partial P \partial T} \left[g x (\rho_{\infty} - \rho) (T_{\infty} - T) \right] + \dots \end{aligned} \quad (2.20)$$

Para que se possa simplificar esta série, deve-se considerar:

$$\beta (T - T_{\infty}) \ll 1 \quad (2.21)$$

e

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T g x \ll 1 \quad (2.22)$$

Isto implica que o termo:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial P \partial T} \left[g x (\rho_{\infty} - \rho) (T_{\infty} - T) \right] = \beta (T - T_{\infty}) \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T g x (\rho_{\infty} - \rho)$$

fica sendo bem pequeno.

Com as hipóteses (2.21) e (2.22) vê-se que somente o primeiro termo da série (2.20) é importante, sendo exigido termos adicionais somente se houver diferenças muito grandes de temperatura. Portanto:

$$\rho_{\infty} - \rho = \rho \beta (T - T_{\infty}) \quad (2.23)$$

Substituindo a equação (2.23) na equação (2.15) vem:

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial P_d}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \rho g \beta (T - T_{\infty})$$

ou

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_d}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + g \beta (T - T_{\infty}) \quad (2.24)$$

2.2 ANÁLISE DE ESCALA

De posse das equações acima, é feito uma análise de escala para se localizar os termos não predominantes. Na realidade, é feita uma aproximação de camada limite, já que este conceito considera que os efeitos viscosos no escoamento estão restritos à uma camada de fluido adjacente à superfície. Assim, considerando que a dimensão característica ao longo do eixo x seja L e a espessura da camada limite térmica ao longo do eixo y seja δ_t , o campo do escoamento está restrito ao espaço delimitado por:

$$0 \leq x \leq L$$

$$0 \leq y \leq \delta_t$$

Considerando que $\delta_t \ll L$, tem-se:

. Equação da Continuidade

$$\frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{\partial v}{\partial y}$$

ou

$$\frac{u}{L} \sim \frac{v}{\delta_t}$$

Assim:

$$v \sim \frac{\delta_t}{L} u \quad (2.25)$$

onde " $\sim$ " significa "da ordem de grandeza de".

Equação da Quantidade de Movimento

- direção x:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_d}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + g\beta (T - T_\infty) \quad (2.24)$$

Tendo em mente a relação (2.25):

$$\frac{u \frac{\partial u}{\partial x}}{v \frac{\partial u}{\partial y}} \sim \frac{u \cdot \frac{u}{L}}{(u \cdot \frac{\delta_t}{L}) \frac{u}{\delta_t}} = \frac{u \cdot \frac{u}{L}}{u \cdot \frac{u}{L}} = 1 \quad (2.26)$$

Portanto, os dois termos do lado esquerdo da equação (2.24) são $\sim (u \cdot \frac{u}{L})$,

$$\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} = \frac{\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)}{\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)} \sim \frac{\frac{1}{L} \cdot \frac{u}{L}}{\frac{1}{\delta_t} \cdot \frac{u}{\delta_t}} = \left(\frac{\delta_t}{L} \right) \ll 1 \quad (2.27)$$

- direção y:

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p_d}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (2.16)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_d}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (2.28)$$

$$\frac{u \frac{\partial v}{\partial x}}{v \frac{\partial v}{\partial y}} = \frac{u \cdot \frac{1}{L} (u \frac{\delta_t}{L})}{(u \cdot \frac{\delta_t}{L}) \frac{1}{\delta_t} (u \frac{\delta_t}{L})} = \frac{u \cdot u \frac{\delta_t}{L^2}}{u \cdot u \frac{\delta_t}{L^2}} = 1 \quad (2.29)$$

$$\frac{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}} = \frac{\frac{\partial}{\partial x} (\frac{\partial v}{\partial x})}{\frac{\partial}{\partial y} (\frac{\partial v}{\partial y})} = \frac{\frac{1}{L} \cdot \frac{1}{L} (u \frac{\delta_t}{L})}{\frac{1}{\delta_t} \cdot \frac{1}{\delta_t} (u \frac{\delta_t}{L})} = \left(\frac{\delta_t}{L} \right)^2 \ll 1 \quad (2.30)$$

Conforme Bejan [28], a pressão em qualquer ponto do escoamento é, em geral, função de x e de y . Assim, a sua diferencial total é:

$$dP_d = \frac{\partial P_d}{\partial x} dx + \frac{\partial P_d}{\partial y} dy$$

Derivando em relação a x :

$$\frac{dP_d}{dx} = \frac{\partial P_d}{\partial x} + \frac{\partial P_d}{\partial y} \frac{dy}{dx} \quad (2.31)$$

Das relações (2.26) e (2.29) obtém-se:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_d}{\partial x} = \frac{u^2}{L} \quad (2.32)$$

e

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_d}{\partial y} = \frac{u^2 \delta_t}{L^2} \quad (2.33)$$

Comparando os termos da equação (2.31):

$$\frac{\frac{\partial P_d}{\partial y} \frac{dy}{dx}}{\frac{\partial P_d}{\partial x}} = \frac{\rho \frac{u^2 \delta_t}{L^2} \frac{\delta_t}{L}}{\rho \frac{u^2}{L}} = \left(\frac{\delta_t}{L} \right)^2 \ll 1$$

Assim:

$$\frac{dP_d}{dx} = \frac{\partial P_d}{\partial x} \quad (2.34)$$

Da igualdade (2.34) pode-se concluir que a pres
são P_d dentro da camada limite é praticamente
igual a pressão imediatamente exterior à esta:

$$P_d = P_{d\infty} \quad (2.35)$$

$$\frac{dP_d}{dx} = \frac{dP_{d\infty}}{dx}$$

Entretanto, $P_{d\infty}$ está localizada no fluido em re
pouso no meio ambiente e, neste caso, o termo
 $\frac{dP_d}{dx}$ pode ser desprezado.

. Equação da Energia:

Das equações (2.9) e (2.10):

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \frac{v}{C_p} \cdot \left\{ 2 \cdot \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} \quad (2.36)$$

onde $\alpha = \frac{K}{\rho \cdot C_p}$ é a difusividade térmica do fluido.

Da análise do primeiro termo do lado direito da
equação (2.36) resulta:

$$\frac{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}{\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}} = \frac{\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)}{\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)} = \frac{\frac{1}{L} \cdot \frac{T}{L}}{\frac{1}{\delta_t} \cdot \frac{T}{\delta_t}} = \left(\frac{\delta_t}{L} \right)^2 \ll 1$$

O termo da transferência de calor na direção y é, portanto, predominante em relação ao da direção x .

$$\frac{u \frac{\partial T}{\partial x}}{v \frac{\partial T}{\partial y}} = \frac{u \cdot \frac{T}{L}}{u \frac{\delta_t}{L} \cdot \frac{T}{\delta_t}} = \frac{u \frac{T}{L}}{u \frac{T}{L}} = 1 \quad (2.37)$$

Introduzindo na equação (2.36) que:

$$\bar{x} = \frac{x}{L}; \quad \bar{y} = \frac{y}{L}; \quad \bar{u} = \frac{u}{u_R}; \quad \bar{v} = \frac{v}{u_R}; \quad \theta = \frac{T - T_\infty}{T_R - T_\infty}$$

onde u_R e T_R são, respectivamente, a velocidade e a temperatura de referência obtém-se:

$$\bar{u} \frac{\partial \theta}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \theta}{\partial \bar{y}} = \frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Pr}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{y}^2} \right) + \frac{\text{Ec}}{\text{Re}} \cdot \left\{ 2 \cdot \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right\} \quad (2.38)$$

Como para convecção natural $\text{Ec} \ll 1$, pode-se desprezar o termo da dissipação viscosa. De fato, segundo Eckert [29], deve-se ter velocidades da ordem da velocidade do som e diferenças de temperatura da ordem de 100°C para que $\text{Ec} = 1$.

Assim, considerando todas as simplificações acima, as equações que governam o escoamento sobre uma placa plana vertical em regime de convecção natural, no sistema de coordenadas da Figura 2.2 são:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.39)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\beta (T - T_\infty) \quad (2.40)$$

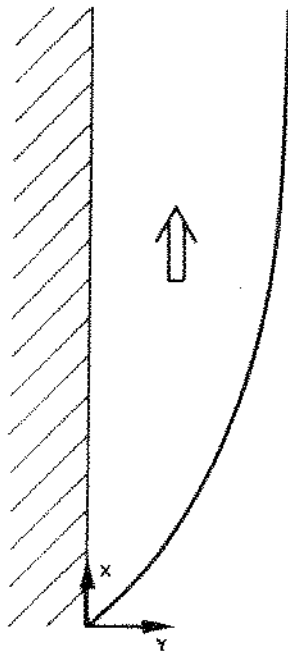
$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (2.41)$$

Associada à estas equações, estão as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0 \quad ; \quad v(x, 0) = 0 \\ T(x, 0) &= T_w(x) \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = 0 \quad ; \quad \lim_{y \rightarrow \infty} T(x, y) = T_\infty \quad (2.43)$$

Os casos a serem analisados consideram que $T_w(x) - T_\infty \geq 0$. Possíveis casos quando $T_w(x) - T_\infty < 0$ devem ser analisados segundo o sistema de coordenadas apresentado na Figura 2.3.



CAMPO
GRAVITACIONAL

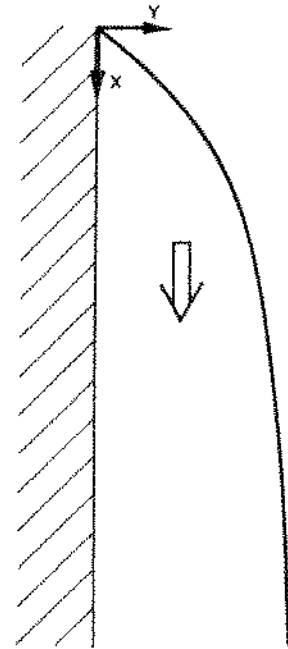


Figura 2.2 - Sistema de coordenadas bidimensional para $T_w(x) - T_\infty \geq 0$

Figura 2.3 - Sistema de coordenadas bidimensional para $T_w(x) - T_\infty < 0$

2.3 TRANSFORMAÇÃO DAS VARIÁVEIS

As equações (2.39) a (2.41) sujeitas às condições de contorno (2.42) e (2.43) não estão em um formato adequado para sua resolução. Assim, uma técnica já desenvolvida é a de se fazer uma transformação de variáveis para reduzir o número de equações e o número de variáveis dependentes.

O primeiro passo a ser dado é a introdução do conceito de função corrente, onde:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.44)$$

Observando a Figura 2.4, onde A e B são linhas de corrente, verifica-se que não pode haver fluxo de massa cortando estas linhas. Assim, do triângulo infinitesimal da Figura 2.2, onde

$$d\psi = dQ \equiv \text{vazão volumétrica infinitesimal}$$

tem-se:

$$d\psi = u dy - v dx \quad (2.45)$$

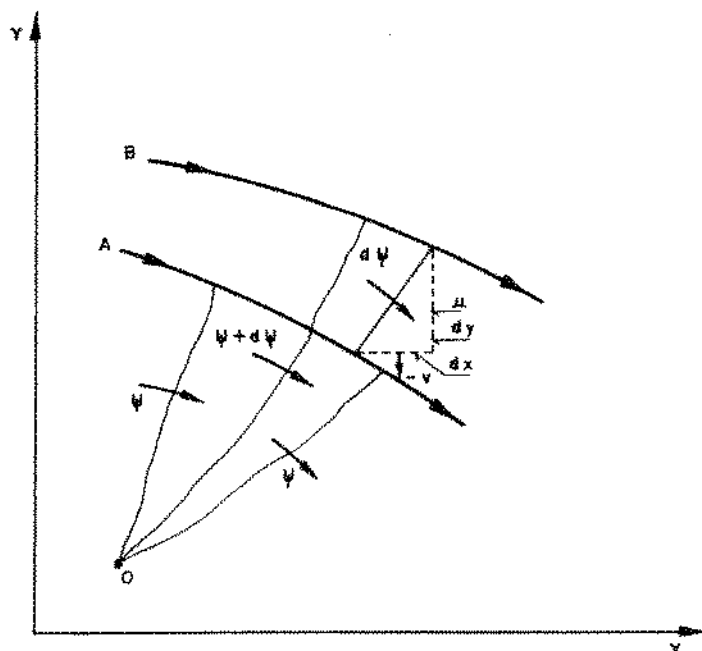


Figura 2.4 - Linhas de Corrente

Mas, como $\psi = \psi(x, y)$ pode expressá-la por:

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\psi}{\partial y} dy \quad (2.46)$$

Comparando as relações (2.45) e (2.46) pode-se concluir que:

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} \quad e \quad v = - \frac{\partial\psi}{\partial x}$$

Substituindo este conceito nas equações (2.39) à (2.41), vê-se que a equação da continuidade (2.39) é igualmente satisfeita. Das equações da quantidade de movimento e da energia, tem-se:

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = g\beta (T - T_\infty) + \nu \frac{\partial^3\psi}{\partial y^3} \quad (2.47)$$

e

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (2.48)$$

O sistema de coordenadas a que estão sujeitas as equações (2.47) e (2.48) não é conveniente para sua resolução. Recorre-se assim ao artifício de uma transformação de coordenadas. O processo a ser aplicado é o desenvolvido por Kao et al [18], semelhante ao utilizado por Kelleher e Yang [14], e anteriormente desenvolvido por Gortler [15] para a convecção forçada.

O novo sistema de coordenadas proposto é constituído pelas coordenadas ξ e η , tais que:

$$\xi = \int_0^x F(x) dx \quad (2.49)$$

$$\eta = C_1 F(x)^{1/2} \frac{y}{\xi^{1/4}} \quad (2.50)$$

onde, para o caso de temperatura de parede variável:

$$F(x) = T_w(x) - T_\infty \quad (2.51)$$

e

$$C_1 = \left(\frac{g\beta}{4\nu^2} \right)^{1/4} \quad (2.52)$$

A função corrente e a temperatura, são adimensionalizadas através das relações:

$$f(\xi, \eta) = \frac{F(x)^{1/2} \cdot \psi}{4 C_1 \nu \xi^{3/4}} \quad (2.53)$$

$$\theta(\xi, \eta) = \frac{T - T_\infty}{F(x)} \quad (2.54)$$

Comparando o formato de (2.50), (2.53) e (2.54) com o sugerido por Yang [3] para regime permanente, ou seja:

$$\eta = y \cdot \phi_1(x) \quad , \quad f(\eta) = \frac{\psi(x, y)}{\phi_2(x)} \quad e \quad \theta(\eta) = \frac{G(x, y)}{G_w(x)}$$

onde

$$G \equiv \text{nº de Grashof}$$

Verifica-se que estas equações estão num formato geral, pois foi introduzida uma segunda variável independente (ξ) para permitir a consideração de variações nas condições de contorno. Problemas com solução por similaridade seriam resolvidos, fazendo-se:

$$f(\eta, \xi) = f(\eta) \quad e \quad \theta(\eta, \xi) = \theta(\eta)$$

Substituindo (2.53) e (2.54) nas equações (2.47) e (2.48), com as novas variáveis independentes (2.49) e (2.50), obtem-se, conforme detalhado no Anexo 1, que:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + (3 - 2 \Omega) \cdot f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - 2 \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + \theta = 4 \xi \cdot \left[\frac{\partial f}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial \xi} \right] \quad (2.55)$$

e

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + (3 - 2 \Omega) \text{Pr} f \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - 4 \text{Pr} \Omega \theta \frac{\partial f}{\partial \eta} = 4 \text{Pr} \xi \cdot \left[\frac{\partial f}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial f}{\partial \xi} \right] \quad (2.56)$$

onde

$$\Omega = \frac{\xi}{F(\bar{x})} \frac{dF(x)}{dx}$$

Estas equações estão sujeitas às condições de contorno:

$$f(\xi, 0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \eta}(\xi, 0) = 0, \quad \theta(\xi, 0) = 1 \quad (2.57)$$

e

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{\partial f}{\partial \eta}(\xi, \eta) = 0, \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} \theta(\xi, \eta) = 0 \quad (2.58)$$

De posse destas equações, o passo seguinte é a sua solução pela aplicação de um método de cálculo adequado.

CAPÍTULO 3

MÉTODO DE SOLUÇÃO

3.1 REDUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES A UM SISTEMA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

A solução do sistema de equações diferenciais parciais não linear e acoplado, que descreve o problema tratado é obtida via um método numérico adequado.

Para simplificar a notação das equações (2.55) e (2.56) ao longo do texto, adota-se:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \equiv \cdot$$

Assim, as equações (2.55) e (2.56) ficam:

$$f''' + (3 - 2\Omega) \cdot f \cdot f'' - 2(f')^2 + \theta = 4\xi \left[f' \cdot \frac{\partial f'}{\partial \xi} - f'' \cdot \frac{\partial f}{\partial \xi} \right] \quad (3.1)$$

e

$$\theta'' + (3 - 2\Omega) \text{Pr} f \theta' - 4\Omega \text{Pr} \theta f' = 4 \text{Pr} \xi \cdot \left[f' \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \theta' \cdot \frac{\partial f}{\partial \xi} \right] \quad (3.2)$$

onde:

$$\Omega = \frac{\xi}{F(x)} \frac{dF(x)}{dx} \quad (3.3)$$

As condições de contorno são:

$$f(\xi, 0) = 0 \quad , \quad f'(\xi, 0) = 0 \quad , \quad \theta(\xi, 0) = 1 \quad (3.4)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} f'(\xi, \eta) = 0 \quad , \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} \theta(\xi, \eta) = 0 \quad (3.5)$$

O método de solução adotado é baseado nos trabalhos de Smith e Clutter [32 e 33] e Smith e Jaffe [34] para resolução das equações da camada limite em regime de convecção forçada. Mais tarde, Hayday et al [9] utilizou o mesmo procedimento para resolver o problema da descontinuidade de temperatura ao longo da altura de uma placa plana vertical em convecção natural. Este procedimento motivou a extensão do método adotado para outras geometrias, inclusive para o caso de funções que descrevem a temperatura de parede que sejam contínuas, mas que tenham descontinuidade de derivada ao longo do seu domínio.

A idéia básica consiste em aproximar a derivada em relação à uma das variáveis independentes por diferenças finitas, resultando um sistema de equações diferenciais ordinárias que pode ser resolvido por integração numérica.

Observando as equações (3.1) e (3.2), nota-se que somente há derivadas de 1ª ordem em relação à ξ , enquanto derivadas de ordem superior são requeridas em relação à η . Dessa maneira, a aproximação da derivada é feita em relação a variável ξ . Smith e Clutter [32] analisaram a aproximação das derivadas de primeira, segunda e terceira ordem, observando que as aproximações de segunda e terceira ordem são mais precisas e estáveis. Smith e Clutter [33] concluíram que a aproximação de terceira ordem não acrescenta uma precisão que compense a sua utilização. Assim sendo, optou-se pela aproximação da derivada pela fórmula Lagrangeana de segunda ordem:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial \bar{K}}{\partial \xi} \right)_n &\approx \left[\frac{1}{\xi_n - \xi_{n-1}} + \frac{1}{\xi_n - \xi_{n-2}} \right] \bar{K}_n \\
 &- \left[\frac{\xi_n - \xi_{n-2}}{(\xi_n - \xi_{n-1})(\xi_{n-1} - \xi_{n-2})} \right] \bar{K}_{n-1} \\
 &+ \left[\frac{\xi_n - \xi_{n-1}}{(\xi_n - \xi_{n-2})(\xi_{n-1} - \xi_{n-2})} \right] \bar{K}_{n-2}
 \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde "n" representa a n-ésima localização ao longo de ξ e "K" representa f, f' ou θ . .

O erro associado a esta aproximação é dado por:

$$E = \frac{(\xi_n - \xi_{n-1}) \cdot (\xi_n - \xi_{n-2})}{6} \frac{\partial^3 \bar{K}(\phi)}{\partial \xi^3}, \quad (3.7)$$

onde ϕ é um valor de ξ situado no intervalo $(\xi_n - \xi_{n-2})$.

Pela relação (3.6), nota-se que é necessário o conhecimento prévio de dois valores da variável, ou seja, $\bar{K}_{n-1}$ e $\bar{K}_{n-2}$. Assim, para que esses valores sejam obtidos, deve-se usar a aproximação de primeira ordem para o primeiro incremento na direção ξ , a qual é dada por:

$$\left(\frac{\partial \bar{K}}{\partial \xi} \right)_n \approx \frac{\bar{K}_n - \bar{K}_{n-1}}{\xi_n - \xi_{n-1}} \quad (3.8)$$

Observando atentamente o formato das equações (3.1) e (3.2), nota-se que no primeiro ponto ao longo da direção ξ , ou seja, em $\xi = 0$, os termos do lado direito dessas equações desaparecem, resultando um sistema diferencial ordinário da do por:

$$f''' + (3 - 2\Omega) f f'' - 2(f')^2 + \theta = 0 \quad (3.9)$$

e

$$\theta'' + (3 - 2\Omega) \text{Pr } f\theta' - 4\Omega \text{Pr } \theta f' = 0, \quad (3.10)$$

sujeito às condições de contorno (3.4) e (3.5).

Resolvendo o sistema (3.9) e (3.10) obtem-se os valores no primeiro ponto ao longo da direção ξ : $\xi \equiv \xi_1$. Aplicando em seguida a aproximação de primeira ordem para a derivada (equação 3.8) às equações (3.1) e (3.2), obtem-se os valores para o segundo ponto em $\xi \equiv \xi_2$. Em seguida, usa-se a aproximação de segunda ordem (equação 3.6) até a posição ξ na qual se deve para a integração.

Ainda nas equações (3.1) e (3.2) nota-se a presença do coeficiente Ω . Como este coeficiente é dependente de $F(x)$, o seu valor poderá variar com o incremento nos valores de ξ , dependendo do tipo de função a ser analisado. Isso leva este coeficiente a ser uma particularidade para cada tipo de problema. Para o caso de temperatura de parede isotérmica, por exemplo:

$$F(x) = T_w(x) - T_\infty = C$$

onde $C = \text{constante}$, e

$$\frac{dF(x)}{dx} = 0 \quad \therefore \quad \Omega = 0,$$

e o sistema se reduz à conhecida equação da convecção natural de solução por similaridade:

$$f''' + 3ff'' - 2(f')^2 + \theta = 0 \quad (3.11)$$

$$\theta'' + 3\text{Pr } f\theta' = 0 \quad (3.12)$$

O formato final das equações a serem integradas é dado por:

. aproximação de primeira ordem da derivada:

$$\begin{aligned}
 f_n''' + (3 - 2 \Omega_n) f_n f_n'' - 2 (f_n')^2 + \theta_n \\
 = 4 \xi_n \left[f_n' \cdot \left(\frac{f_n' - f_{n-1}'}{\xi_n - \xi_{n-1}} \right) - f_n'' \cdot \left(\frac{f_n - f_{n-1}}{\xi_n - \xi_{n-1}} \right) \right]
 \end{aligned}
 \tag{3.13}$$

e

$$\begin{aligned}
 \theta_n'' + (3 - 2 \Omega_n) \text{Pr } f_n \theta_n' - 4 \Omega_n \text{Pr } \theta_n f_n' \\
 = 4 \text{Pr } \xi_n \cdot \left[f_n' \left(\frac{\theta_n - \theta_{n-1}}{\xi_n - \xi_{n-1}} \right) - \theta_n' \left(\frac{f_n - f_{n-1}}{\xi_n - \xi_{n-1}} \right) \right]
 \end{aligned}
 \tag{3.14}$$

. aproximação de segunda ordem da derivada:

$$\begin{aligned}
 f_n''' + (3 - 2 \Omega_n) f_n f_n'' - 2 (f_n')^2 + \theta_n \\
 = 4 \xi_n \cdot \left[f_n' \cdot (A \cdot f_n' + B \cdot f_{n-1}' + C \cdot f_{n-2}') \right. \\
 \left. - f_n'' \cdot (A \cdot f_n + B \cdot f_{n-1} + C \cdot f_{n-2}) \right]
 \end{aligned}
 \tag{3.15}$$

e

$$\begin{aligned}
 \theta_n'' + (3 - 2 \Omega_n) \text{Pr } f_n \theta_n' - 4 \Omega_n \text{Pr } \theta_n f_n' \\
 = 4 \xi_n \text{Pr} \cdot \left[f_n' \cdot (A \cdot \theta_n + B \cdot \theta_{n-1} + C \cdot \theta_{n-2}) \right.
 \end{aligned}$$

$$- \theta_n' \cdot (A \cdot f_n + B \cdot f_{n-1} + C \cdot f_{n-2}) \Big] \quad (3.16)$$

onde

$$A = \frac{1}{\xi_n - \xi_{n-1}} + \frac{1}{\xi_n - \xi_{n-2}},$$

$$B = \frac{\xi_{n-2} - \xi_n}{(\xi_n - \xi_{n-1}) \cdot (\xi_{n-1} - \xi_{n-2})} \quad e$$

$$C = \frac{\xi_n - \xi_{n-1}}{(\xi_n - \xi_{n-2}) \cdot (\xi_{n-1} - \xi_{n-2})}$$

e, também:

$$\Omega_n = \frac{\xi_n}{F^2(x_n)} \cdot \left. \frac{dF(x)}{dx} \right|_{x=x_n} \quad (3.17)$$

Condições de contorno:

$$n = 0: \quad f_n = 0, \quad f_n' = 0, \quad \theta_n = 1 \quad (3.18)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n' = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = 0 \quad (3.19)$$

Nota-se nas equações (3.15) e (3.16) que os termos nos pontos (n-1) e (n-2) são coeficientes para o ponto (n) e o sistema diferencial ordinário acoplado é resolvido numericamente por um método de integração conveniente.

3.2 MÉTODO DE INTEGRAÇÃO

Dentre os vários métodos de integração numérica, pode-se citar o método de Runge-Kutta de quarta ordem, o qual foi muito usado em vários trabalhos. Esse método tem a vantagem de ser auto-inicializado, ser estável e de fornecer boa precisão [35]. Não fornece, todavia, uma estimativa da precisão a ser atingida que permita avaliar se o intervalo no processo de integração está adequado; tem também, a desvantagem de necessitar de quatro cálculos de derivada por intervalo de integração. Já os métodos de predição-correção fornecem uma estimativa automática do erro em cada intervalo, permitindo selecionar um valor ótimo do intervalo de integração, além de terem a vantagem de serem mais rápidos, pois requerem somente dois cálculos de derivada por intervalo de integração. Entretanto, estes métodos não são auto-inicializados, devendo ser usado, por exemplo, o método de Runge-Kutta para a estimativa dos valores iniciais necessários. Optou-se pelo uso do método preditor corretor de Adams-Moulton, embora o método preditor corretor de Milne também pudesse ser usado. Este método, no entanto, se bem que apresenta um erro menor do que o método de Adams-Moulton, em alguns casos está sujeito à instabilidades numéricas. Segundo Granziera [36], além dos métodos de predição correção indicarem a grandeza do erro, eles são muito eficientes e, atualmente, muitos trabalhos os utilizam. A formulação utilizada no método de Adams-Moulton está apresentada no Anexo 2. Uma descrição mais detalhada pode ser vista, por exemplo, em Conte [35] ou em Carnahan et al [37].

Como o sistema de equações (3.1) e (3.2) é de 5a ordem, necessita-se de cinco condições iniciais para que se possa iniciar o processo de integração. Entretanto, das condições de contorno (3.4) e (3.5), nota-se que há somente três condições iniciais. Assim, é necessário uma avaliação das duas condições iniciais restantes para que o processo de integração se inicie. Como estas estimativas não são "a priori" conhecidas, é necessário fazer correções para que elas se aproximem do valor correto.

3.3 MÉTODO DE CORREÇÃO DAS ESTIMATIVAS INICIAIS

O método de correção adotado é uma extensão do trabalho publicado por Nachtsheim e Swigert [38] e utilizado por Hayday et al [9]. Como notação para estas duas estimativas iniciais será usado:

$$f''_0 = f''(\xi_n, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}(\xi_n, 0) \quad (3.20)$$

$$\theta'_0 = \theta'(\xi_n, 0) = \frac{\partial \theta}{\partial \eta}(\xi_n, 0) \quad (3.21)$$

Como não temos conhecimento desses dois valores, uma estimativa preliminar é feita, não se podendo utilizar valores aleatórios. Na realidade, estes valores devem ser próximos da solução, sendo que o processo para sua obtenção é comentado na seção subsequente.

De posse desta primeira estimativa para f''_0 e θ'_0 , o processo de integração propriamente dito se inicia e a técnica desenvolvida em [38] é utilizada. Com as equações integradas até η_∞ , utiliza-se a aproximação de Newton-Raphson para as condições de contorno (3.5):

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} f'_n = 0 \approx \bar{f}'_n + \frac{\partial \bar{f}'_n}{\partial f''_0} \Delta f''_0 + \frac{\partial \bar{f}'_n}{\partial \theta'_0} \Delta \theta'_0 \quad (3.22)$$

e

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \theta_n = 0 \approx \bar{\theta}_n + \frac{\partial \bar{\theta}_n}{\partial f''_0} \Delta f''_0 + \frac{\partial \bar{\theta}_n}{\partial \theta'_0} \Delta \theta'_0 \quad (3.23)$$

onde $\bar{f}'_n = \bar{f}'(\xi_n, \eta_\infty)$ e $\bar{\theta}_n = \bar{\theta}(\xi_n, \eta_\infty)$ são valores obtidos pelo processo de integração e $\Delta f''_0$ e $\Delta \theta'_0$ são as correções a serem feitas nas estimativas iniciais. Na notação acima, η_∞ significa o valor máximo de η onde serão admitidas as condições de contorno (3.5).

Para obter os valores de $\frac{\partial \bar{f}'_n}{\partial f''_0}$, $\frac{\partial \bar{f}'_n}{\partial \theta'_0}$, $\frac{\partial \bar{\theta}_n}{\partial f''_0}$ e $\frac{\partial \bar{\theta}_n}{\partial \theta'_0}$

deve-se diferenciar as equações (3.13) e (3.14) ou (3.15) e (3.16) em relação a f''_0 e θ'_0 .

Assim:

Diferenciação das equações (3.13) e (3.14):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f'''_n}{\partial f''_0} + (3 - 2\Omega_n) \left(\frac{\partial f_n}{\partial f''_0} f''_n + f_n \frac{\partial f''_n}{\partial f''_0} \right) - 4 f'_n \frac{\partial f'_n}{\partial f''_0} + \frac{\partial \theta_n}{\partial f''_0} \\ = 4 \cdot \xi_n \cdot \left[\frac{\partial f'_n}{\partial f''_0} \cdot \left(\frac{2f'_n - f'_{n-1}}{\xi_n - \xi_{n-1}} \right) - \frac{\partial f''_n}{\partial f''_0} \cdot \left(\frac{f_n - f_{n-1}}{\xi_n - \xi_{n-1}} \right) \right. \\ \left. - \frac{f''_n \frac{\partial f_n}{\partial f''_0}}{\xi_n - \xi_{n-1}} \right] \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f'''_n}{\partial \theta'_0} + (3 - 2\Omega_n) \cdot \left(\frac{\partial f_n}{\partial \theta'_0} f''_n + f_n \frac{\partial f''_n}{\partial \theta'_0} \right) - 4 f'_n \frac{\partial f'_n}{\partial \theta'_0} + \frac{\partial \theta_n}{\partial \theta'_0} \\ = 4 \cdot \xi_n \cdot \left[\frac{\partial f'_n}{\partial \theta'_0} \cdot \left(\frac{2f'_n - f'_{n-1}}{\xi_n - \xi_{n-1}} \right) - \frac{\partial f''_n}{\partial \theta'_0} \cdot \left(\frac{f_n - f_{n-1}}{\xi_n - \xi_{n-1}} \right) \right. \\ \left. - \frac{f''_n \frac{\partial f_n}{\partial \theta'_0}}{\xi_n - \xi_{n-1}} \right] \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \theta_n''}{\partial f_o''} + (3 - 2 \Omega_n) \text{Pr} \left(\theta_n' \frac{\partial f_n}{\partial f_o''} + f_n \frac{\partial \theta_n}{\partial f_o''} \right) - 4 \Omega_n \text{Pr} \left(\theta_n \frac{\partial f_n'}{\partial f_o''} \right. \\
 & \quad \left. + f_n' \frac{\partial \theta_n}{\partial f_o''} \right) = 4 \xi_n \text{Pr} \cdot \left[\frac{\partial f_n'}{\partial f_o''} \cdot \left(\frac{\theta_n - \theta_{n-1}}{\xi_n - \xi_{n-1}} \right) + \frac{f_n' \frac{\partial \theta_n}{\partial f_o''}}{\xi_n - \xi_{n-1}} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\partial \theta_n'}{\partial f_o''} \cdot \left(\frac{f_n - f_{n-1}}{\xi_n - \xi_{n-1}} \right) - \frac{\theta_n' \frac{\partial f_n}{\partial f_o''}}{\xi_n - \xi_{n-1}} \right] \quad (3.26)
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \theta_n''}{\partial \theta_o'} + (3 - 2 \Omega_n) \text{Pr} \left(\theta_n' \frac{\partial f_n}{\partial \theta_o'} + f_n \frac{\partial \theta_n'}{\partial \theta_o'} \right) - 4 \Omega_n \text{Pr} \left(\theta_n \frac{\partial f_n'}{\partial \theta_o'} \right. \\
 & \quad \left. + f_n' \frac{\partial \theta_n}{\partial \theta_o'} \right) = 4 \xi_n \text{Pr} \cdot \left[\frac{\partial f_n'}{\partial \theta_o'} \cdot \left(\frac{\theta_n - \theta_{n-1}}{\xi_n - \xi_{n-1}} \right) + \frac{f_n' \frac{\partial \theta_n}{\partial \theta_o'}}{\xi_n - \xi_{n-1}} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\partial \theta_n'}{\partial \theta_o'} \cdot \left(\frac{f_n - f_{n-1}}{\xi_n - \xi_{n-1}} \right) - \frac{\theta_n' \frac{\partial f_n}{\partial \theta_o'}}{\xi_n - \xi_{n-1}} \right] \quad (3.27)
 \end{aligned}$$

Diferenciação das equações (3.15) e (3.16)

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial f_n'''}{\partial f_o''} + (3 - 2 \Omega_n) \left(\frac{\partial f_n}{\partial f_o''} f_n'' + f_n \frac{\partial f_n''}{\partial f_o''} \right) - 4 f_n' \frac{\partial f_n'}{\partial f_o''} + \frac{\partial \theta_n}{\partial f_o''} \\
 & = 4 \xi_n \cdot \left[\frac{\partial f_n'}{\partial f_o''} \cdot (A \cdot f_n' + B f_{n-1}' + C f_{n-2}') + A f_n' \frac{\partial f_n'}{\partial f_o''} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\partial f_n''}{\partial f_o''} (A f_n + B f_{n-1} + C f_{n-2}) - A f_n'' \frac{\partial f_n}{\partial f_o''} \right] \quad (3.28)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial f_n'''}{\partial \theta_o'} + (3 - 2 \Omega_n) - \left(\frac{\partial f_n}{\partial \theta_o'} f_n'' + f_n \frac{\partial f_n''}{\partial \theta_o'} \right) - 4 f_n' \frac{\partial f_n'}{\partial \theta_o'} + \frac{\partial \theta_n}{\partial f_o''} \\
 & = 4 \xi \cdot \left[\frac{\partial f_n'}{\partial \theta_o'} (A f_n' + B f_{n-1}' + C f_{n-2}') + A f_n' \frac{\partial f_n'}{\partial \theta_o'} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\partial f_n''}{\partial \theta_o'} (A f_n + B f_{n-1} + C f_{n-2}) - A f_n'' \frac{\partial f_n}{\partial \theta_o'} \right] \quad (3.29)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \theta_n''}{\partial f_o''} + (3 - 2 \Omega_n) \text{Pr} \left(\theta_n' \frac{\partial f_n}{\partial f_o''} + f_n \frac{\partial \theta_n'}{\partial f_o''} \right) - 4 \Omega_n \text{Pr} \cdot \left(\theta_n \frac{\partial f_n'}{\partial f_o''} \right. \\
 & \quad \left. + f_n' \frac{\partial \theta_n}{\partial f_o''} \right) = 4 \xi_n \text{Pr} \cdot \left[\frac{\partial f_n'}{\partial f_o''} \cdot (A \theta_n + B \theta_{n-1} \right. \\
 & \quad \left. + C \theta_{n-2}) + A f_n' \frac{\partial \theta_n}{\partial f_o''} - \frac{\partial \theta_n'}{\partial f_o''} \cdot (A f_n + B f_{n-1} + C f_{n-2}) \right. \\
 & \quad \left. - A \theta_n' \frac{\partial f_n}{\partial f_o''} \right] \quad (3.30)
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \theta_n''}{\partial \theta_o'} + (3 - 2 \Omega_n) \text{Pr} \left(\theta_n' \frac{\partial f_n}{\partial \theta_o'} + f_n \frac{\partial \theta_n'}{\partial \theta_o'} \right) - 4 \Omega_n \text{Pr} \cdot \left(\theta_n \frac{\partial f_n'}{\partial \theta_o'} \right. \\
 & \quad \left. + f_n' \frac{\partial \theta_n}{\partial \theta_o'} \right) = 4 \xi_n \text{Pr} \left[\frac{\partial f_n'}{\partial \theta_o'} (A \theta_n + B \theta_{n-1} + C \theta_{n-2}) \right. \\
 & \quad \left. + A f_n' \frac{\partial \theta_n}{\partial \theta_o'} - \frac{\partial \theta_n'}{\partial \theta_o'} (A f_n + B f_{n-1} + C f_{n-2}) - A \theta_n' \frac{\partial f_n}{\partial \theta_o'} \right] \quad (3.31)
 \end{aligned}$$

As equações (3.24) a (3.31) estão sujeitas às seguintes condições iniciais ($\eta = 0$) :

$$\frac{\partial f_n}{\partial f''_0} = \frac{\partial f_n}{\partial \theta'_0} = \frac{\partial f'_n}{\partial f''_0} = \frac{\partial f'_n}{\partial \theta'_0} = \frac{\partial f''_n}{\partial \theta'_0} = 0 ,$$

$$\frac{\partial \theta_n}{\partial f''_0} = \frac{\partial \theta_n}{\partial \theta'_0} = \frac{\partial \theta'_n}{\partial f''_0} = 0 \quad e \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial f''_n}{\partial f''_0} = \frac{\partial \theta'_n}{\partial \theta'_0} = 1$$

Assim, as equações (3.13), (3.14) e (3.24) a (3.27), ou, alternativamente, as equações (3.15), (3.16) e (3.28) a (3.31) são integradas simultaneamente, resultando um sistema de 6 equações diferenciais parciais acopladas. Com isso, obtem-se todos os valores que são necessários para o cálculo dos incrementos $\Delta f''_0$ e $\Delta \theta'_0$.

Para garantir que nas equações (3.22) e (3.23), f' (ξ_n, η_∞) e θ (ξ_n, η_∞) aproximem-se de zero assintoticamente, excluindo assim a possibilidade de se obter resultados incorretos, o método de Newton-Raphson é modificado e aplicado de modo a achar $\Delta f''_0$ e $\Delta \theta'_0$ que satisfaça não somente $\bar{f}'_n = 0$ e $\bar{\theta}_n = 0$, mas também a condição $\bar{f}''_n = 0$ e $\bar{\theta}'_n = 0$, pelo método de mínimos quadrados. Assim:

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} f''_n = 0 \approx \bar{f}''_n + \frac{\partial \bar{f}''_n}{\partial f''_0} \Delta f''_0 + \frac{\partial \bar{f}''_n}{\partial \theta'_0} \Delta \theta'_0 \quad (3.33)$$

e

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \theta'_n = 0 \approx \bar{\theta}'_n + \frac{\partial \bar{\theta}'_n}{\partial f''_0} \Delta f''_0 + \frac{\partial \bar{\theta}'_n}{\partial \theta'_0} \Delta \theta'_0 \quad (3.34)$$

A expressão do erro do método dos mínimos quadrados é dada por:

$$\begin{aligned}
 E_n = & \left(\bar{f}_n' + \frac{\partial \bar{f}_n'}{\partial f_o''} \Delta f_o'' + \frac{\partial \bar{f}_n'}{\partial \theta_o'} \Delta \theta_o' \right)^2 \\
 & + \left(\bar{\theta}_n + \frac{\partial \bar{\theta}_n}{\partial f_o''} \Delta f_o'' + \frac{\partial \bar{\theta}_n}{\partial \theta_o'} \Delta \theta_o' \right)^2 \\
 & + \left(\bar{f}_n'' + \frac{\partial \bar{f}_n''}{\partial f_o''} \Delta f_o'' + \frac{\partial \bar{f}_n''}{\partial \theta_o'} \Delta \theta_o' \right)^2 \\
 & + \left(\bar{\theta}_n' + \frac{\partial \bar{\theta}_n'}{\partial f_o''} \Delta f_o'' + \frac{\partial \bar{\theta}_n'}{\partial \theta_o'} \Delta \theta_o' \right)^2
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

Para minimizar o erro E_n , deve-se diferenciá-lo em relação à $\Delta f_o''$ e $\Delta \theta_o'$ e estas derivadas devem ser igualadas a zero.

Assim, tem-se o seguinte sistema:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial P_n}{\partial f_o''} * \frac{\partial P_n}{\partial f_o''} & \frac{\partial P_n}{\partial f_o''} * \frac{\partial P_n}{\partial \theta_o'} \\ \frac{\partial P_n}{\partial f_o''} * \frac{\partial P_n}{\partial \theta_o'} & \frac{\partial P_n}{\partial \theta_o'} * \frac{\partial P_n}{\partial \theta_o'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta f_o'' \\ \Delta \theta_o' \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} P_n * \frac{\partial P_n}{\partial f_o''} \\ P_n * \frac{\partial P_n}{\partial \theta_o'} \end{pmatrix} \tag{3.36}$$

onde o vetor $P_n \equiv (\bar{f}_n', \bar{\theta}_n, \bar{f}_n'', \bar{\theta}_n')$ e o símbolo (*) representa o produto interno. Os detalhes de obtenção do sistema (3.36) podem ser vistos no Anexo 3. Resolvendo o sistema (3.36), vem:

$$\Delta f''_0 = \frac{\left(P_n \cdot \frac{\partial P_n}{\partial \theta'_0} \right) \left(\frac{\partial P_n}{\partial f''_0} \cdot \frac{\partial P_n}{\partial \theta'_0} \right) - \left(P_n \cdot \frac{\partial P_n}{\partial f''_0} \right) \left(\frac{\partial P_n}{\partial \theta'_0} \cdot \frac{\partial P_n}{\partial \theta'_0} \right)}{\left(\frac{\partial P_n}{\partial \theta'_0} \cdot \frac{\partial P_n}{\partial \theta'_0} \right) \left(\frac{\partial P_n}{\partial f''_0} \cdot \frac{\partial P_n}{\partial f''_0} \right) - \left(\frac{\partial P_n}{\partial f''_0} \cdot \frac{\partial P_n}{\partial \theta'_0} \right)^2} \quad (3.37)$$

e

$$\Delta \theta'_0 = \frac{\left(P_n \cdot \frac{\partial P_n}{\partial f''_0} \right) \left(\frac{\partial P_n}{\partial f''_0} \cdot \frac{\partial P_n}{\partial \theta'_0} \right) - \left(P_n \cdot \frac{\partial P_n}{\partial \theta'_0} \right) \left(\frac{\partial P_n}{\partial f''_0} \cdot \frac{\partial P_n}{\partial f''_0} \right)}{\left(\frac{\partial P_n}{\partial \theta'_0} \cdot \frac{\partial P_n}{\partial \theta'_0} \right) \left(\frac{\partial P_n}{\partial f''_0} \cdot \frac{\partial P_n}{\partial f''_0} \right) - \left(\frac{\partial P_n}{\partial f''_0} \cdot \frac{\partial P_n}{\partial \theta'_0} \right)^2} \quad (3.38)$$

Com a obtenção destes dois valores, uma correção é feita nas estimativas iniciais, de forma que:

$$(f''_0)^{(j+1)}_n = (f''_0)^{(j)}_n + \Delta f''_0^{(j)} \quad (3.39)$$

e

$$(\theta'_0)^{(j+1)}_n = (\theta'_0)^{(j)}_n + \Delta \theta'_0^{(j)} \quad , \quad (3.40)$$

onde a notação "j" significa a j-ésima iteração dentro da n-ésima localização em ξ .

O número de iteração necessários à cada passo em ξ é dependente da ordem de grandeza de $\Delta f''_0$ e $\Delta \theta'_0$. Comentários a respeito serão feitos mais à frente.

Satisfeita a condição:

$$E_n \leq (\text{erro máximo}) \quad , \quad (3.41)$$

o processo se repete para um novo valor de ξ :

$$\xi_{n+1} = \xi_n + \Delta \xi \quad (3.42)$$

A condição na qual todo processo de integração deverá parar é imposta em cada problema, de forma que, quando:

$$\xi_n = \xi_{\text{máx}} \quad (3.43)$$

o processo termina.

A título de comentário, observa-se que Adams e Rogers [39] obtêm as derivadas das equações (3.22), (3.23), (3.33) e (3.34) usando diferenças finitas, ou seja, é feito a primeira integração com o par de valores (f_0'', θ_0') . Posteriormente são feitas mais duas integrações, uma com um par $(f_0'' + \epsilon, \theta_0')$ e outra com $(f_0'', \theta_0' + \epsilon)$, onde ϵ é um incremento pequeno. Obtidos os valores das variáveis, as derivadas são aproximadas por diferenças finitas. Como este procedimento constitui uma aproximação, o método apresentado anteriormente é mais preciso, pois requer somente uma integração por passo e as derivadas em relação a θ_0' e f_0'' não são aproximadas.

3.4 ESTIMATIVA INICIAL DE f_0'' E θ_0'

Como foi visto, há necessidade de se ter uma boa estimativa inicial de f_0'' e θ_0' , pois não ocorrendo isto, a integração pode levar a resultados errôneos ou mesmo a uma não convergência. Como não há um método geral, no qual se inclui este tipo de problema, a solução do mesmo é particular e obtida, na prática, pelo uso de integração numérica. O método utilizado tem por base o desenvolvido por Hayday et al [9], além de considerações fornecidas pela prática ao longo do desenvolvimento do trabalho. Para se ter uma idéia da influência dos valores de f_0'' e θ_0' , considere-se a solução do sistema de equações (3.11) e (3.12), analisado em [38]. A Tabela 3.1 apresenta estimativas sucessivas e convergentes destas duas incógnitas. A influência destas estimativas sobre os perfis adimensionais da temperatura e da velocidade pode ser analisada nas Figuras 3.1 e 3.2, onde os números de 1 a 7 estão em correspondência com a ordem em que foi feita a estimativa (Tabela 3.1). A análise destas figuras comprova o que foi comentado anteriormente, ou seja, que valores não próximos do resultado procurado dificultam a solução numérica. Observe-se, além do mais, que a análise de Nachtsheim & Swigert [38] foi feita para um sistema diferencial ordinário, sem levar em conta a variação das condições de contorno ao longo de x . Quando analisadas as equações (3.1) e (3.2) o problema causado pela estimativa inicial nas variáveis da equação se torna mais crítico ainda. Constatada a importância de um bom método de escolha para os valores iniciais à serem integrados, descreve-se a seguir o procedimento desenvolvido com tal finalidade.

O primeiro passo é a seleção de um par de valores de f_0'' e θ_0' :

$$P_n^j \equiv (f_0'', \theta_0') , \quad (3.44)$$

onde "j" representa o j-ésimo valor do par (f_0'', θ_0') na n-ésima localização ξ_n .

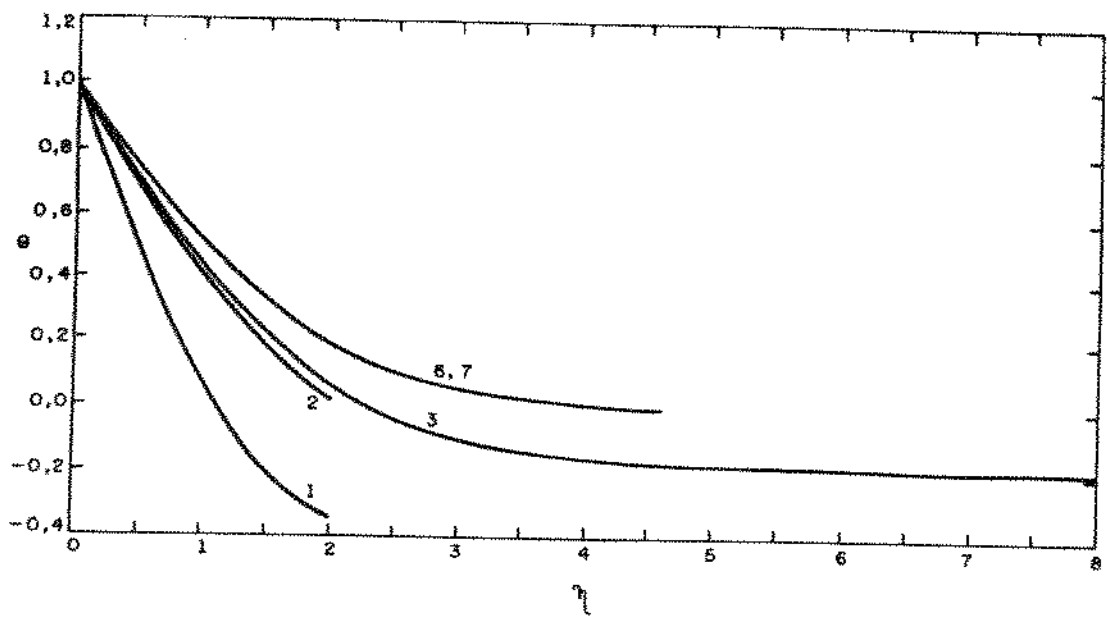


Figura 3.1 - Perfil adimensional de temperatura em função das estimativas iniciais. $Pr = 0,7333$

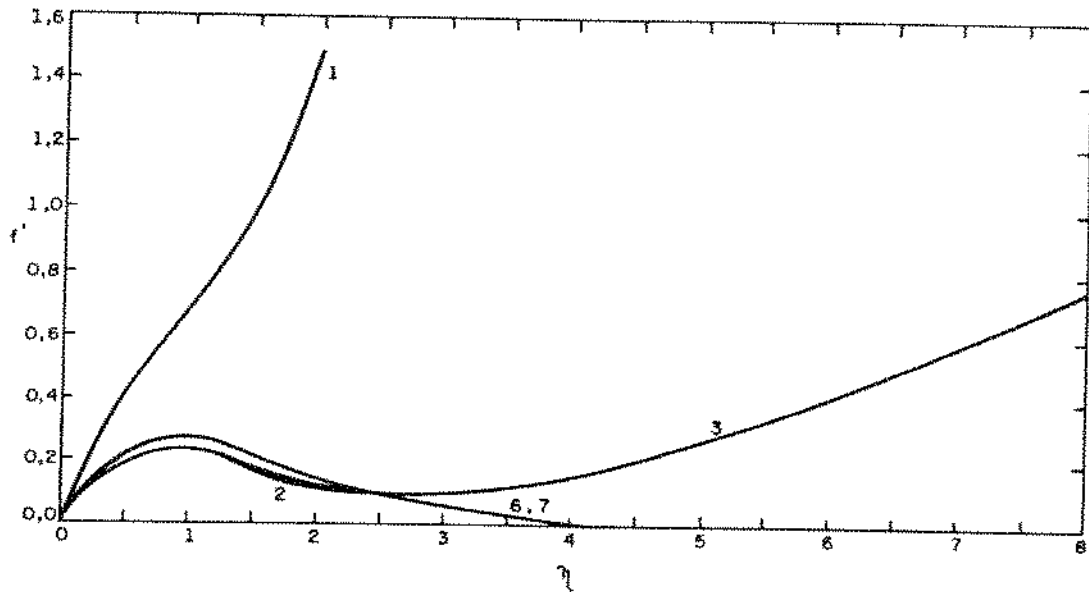


Figura 3.2 - Perfil adimensional de velocidade em função das estimativas iniciais. $Pr = 0,7333$

Tabela 3.1 - Valores das estimativas $f''(0)$ e $\theta'(0)$ conforme as correções feitas. $Pr = 0,733$

Iteração	Correção	η_{∞}	$f''(0)$	$\theta'(0)$
1		2,0	1,0	-1,0
2	1	2,0	0,61735605	-0,59008297
3	2	8,0	0,62211384	-0,57655550
4	3	8,0	0,66795925	-0,52593128
5	4	8,0	0,67387305	-0,50916398
6	5	8,0	0,67412049	-0,50790411
7	6	8,0	0,67412438	-0,50789273
	7		0,67412438	-0,50789273

A escolha do par P_n^j é feita pela combinação de valores de f_o'' e θ_o' , de forma que:

$$(f_o'')_{\min} \leq f_o'' \leq (f_o'')_{\max} \quad (3.45)$$

$$(\theta_o')_{\min} \leq \theta_o' \leq (\theta_o')_{\max} \quad (3.46)$$

Assim, da posse de n_f valores de f_o'' e de n_θ valores de θ_o' , obtem-se $n_f \times n_\theta \equiv n_T$ pares de valores P_n^j .

Para um dado par de valores P_n^j , as equações do sistema são integradas de forma que:

- a) A porção inicial dos perfis de velocidade e temperatura sejam fisicamente razoáveis, e
- b) Para todo $\eta \leq 1$, os valores absolutos $|f''(\xi_n, \eta)|$ e $|\theta'(\xi_n, \eta)| < \hat{M}$.

Por considerações práticas, Hayday et al [9] propõem $\hat{M} = 5$.

Durante a aplicação do método proposto, deparou-se com o problema de que alguns pares de valores P_n^j satisfaziam as condições a) e b), criando o problema de se escolher o melhor entre eles. Da análise prática do comportamento de $f''(\xi_n, \eta)$ e $\theta'(\xi_n, \eta)$, optou-se pela escolha da condição em que, após satisfeitas a) e b), o par P_n^j deveria apresentar o menor valor da soma:

$$S_n^j = |f''(\xi_n, \eta)| + |\theta'(\xi_n, \eta)|, \quad 0 \leq \eta \leq 1 \quad (3.47)$$

Assim, obtida a estimativa inicial P_n^j , as equações do sistema são integradas e o método de correção dessas estimativas, apresentado em 3.3, é aplicado.

3.5 CONSIDERAÇÕES A RESPEITO DOS INCREMENTOS E DE η_∞

A precisão das variáveis obtidas pelo processo de integração e a convergência destes valores dependem em grande parte da escolha de $\Delta\eta$, $\Delta\xi$ e η_∞ .

O incremento $\Delta\eta$ é na realidade o passo h do método de integração. Como se pode ver no Anexo 2, o erro associado ao método utilizado é da ordem de h^5 :

$$\text{Erro} = \sigma(h^5) \quad (3.48)$$

Assim, o incremento $\Delta\eta$ deve ser tão pequeno quanto se possa fazê-lo, até um ponto no qual a diminuição de seu valor não afeta mais a precisão desejada. Esse valor influi no tempo de computação e, conseqüentemente, deve ser feita uma ponderação entre precisão e tempo de computação. Nachtsheim e Swigert [38] usaram $\Delta\eta = 2^{-4}$. No problema em questão, optou-se pelo uso de $\Delta\eta = 0,05$, tendo-se verificado que valores abaixo deste não acrescentaram uma precisão que compensasse o tempo de computação necessário.

Com relação ao incremento $\Delta\xi$ no sentido do escoamento, Smith e Clutter [32] e Smith e Jaffe [34] analisaram o fato de que não basta que ξ_η se aproxime de zero para que o erro associado à solução das equações seja diminuído; o que deve ser levado em conta é o fator:

$$\frac{\xi}{\Delta\xi} \quad (3.49)$$

obtido quando se faz a aproximação por diferenças finitas.

De fato, quando foi feita as aproximações (3.6) e (3.8), quando $\Delta\xi$ se aproxima de zero, ΔK também deveria se aproximar de zero. Entretanto, quando na prática é feita uma integração por computador, erros existem e os mesmos são multiplicados pela quantia $(\xi/\Delta\xi)$. Smith e Clutter [33] concluem que quando $(\xi/\Delta\xi)$ se torna muito grande, o processo

de integração se torna sensível às estimativas iniciais. Smith e Jaffe [34] propõe o valor limite de:

$$\frac{\xi}{\Delta\xi} \approx 45 \quad (3.50)$$

Esse valor depende de cada problema, sendo determinado na prática pelo uso do computador. Smith e Clutter [33] propõe $\xi/\Delta\xi \approx 50$ enquanto o valor proposto em [32] é $\xi/\Delta\xi \approx 25$. Hayday et al [9] propõe $\xi/\Delta\xi \approx 40$. No trabalho em questão, esse valor depende do tipo de função de temperatura de parede a ser analisado, situando-se desde $\xi/\Delta\xi \approx 10$, para variação senoidal, até $\xi/\Delta\xi \approx 50$, para descontinuidades de temperatura

A influência de n_∞ pode ser observada nas Figuras 3.3 e 3.4, provenientes da análise apresentada em [38] para a solução das equações (3.11) e (3.12).

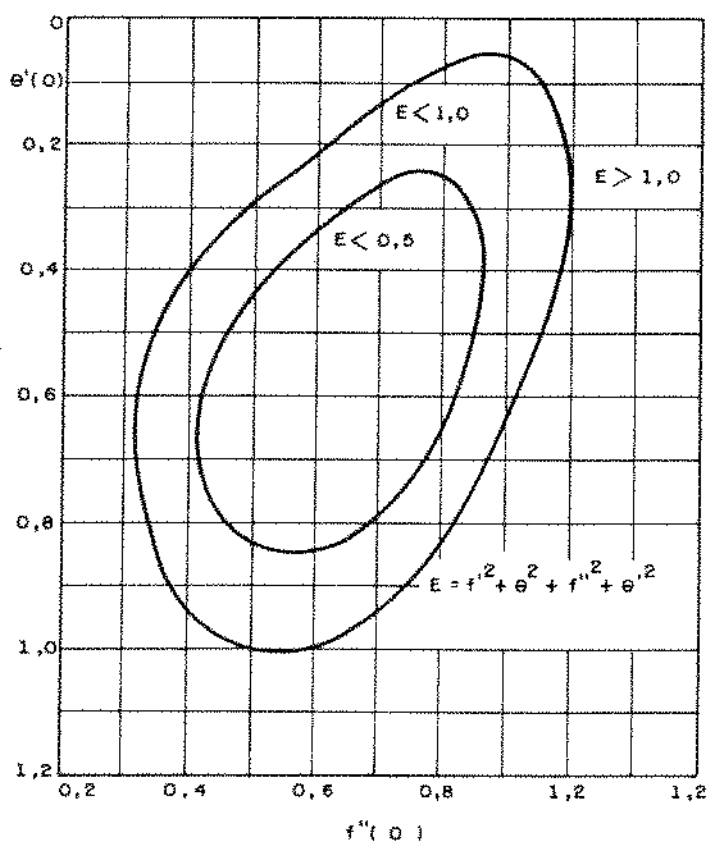


Figura 3.3 - $n_\infty = 2$

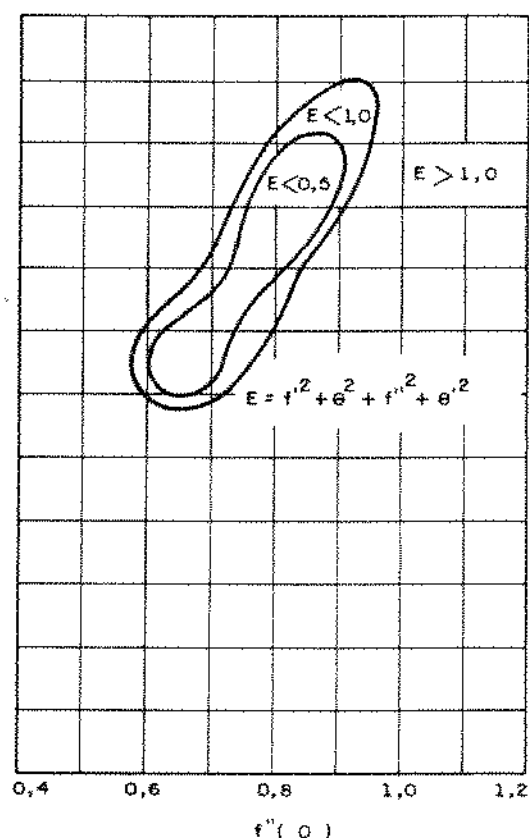


Figura 3.4 - $n_\infty = 5$

Como se pode constatar pela análise dessas figuras, a faixa de estimativas iniciais que produzem um determinado erro E da equação (3.35) é muito maior para valores menores de η_{∞} . Para grandes valores de η_{∞} , ou seja, $\eta_{\infty} > 8$, a curva fechada que produz um erro $E < 1$ reduz-se a um ponto e as estimativas iniciais são limitadas ao valor correto destas. Assim, selecionando um valor muito pequeno para η_{∞} pode não ocorrer solução por convergência assintótica dentro da precisão requerida; selecionando um valor muito alto, pode resultar uma divergência do processo de integração ou mesmo uma convergência demorada, tornando-se muito caro em termos de computação. Dos valores testados na prática, optou-se pelo uso de:

$$\eta_{\infty} \sim 7 \text{ a } 10 \quad (3.51)$$

3.6 OTIMIZAÇÃO DO MÉTODO DE ESTIMATIVA DE f_0'' E θ_0'

Conforme se pode verificar pelo exame das Figuras 3.3 e 3.4, a região que contém o par de estimativas f_0'' e θ_0' vai se restringindo à medida que aumenta η_{∞} e diminui o erro E . Neste trabalho usou-se $E = 10^{-6}$. Isso levou ao desenvolvimento de uma técnica de reavaliação das estimativas iniciais descrita a seguir.

Após ser obtida uma estimativa inicial, conforme o item 3.4, o método de correção das estimativas iniciais - (item 3.3) é aplicado para um $\eta_{\text{máx}}$, ou seja, um valor de η compreendido entre 0 e η_{∞} , que pode assumir valores diferentes em cada passo da integração. Esse valor de $\eta_{\text{máx}}$ é obtido num ponto determinado de η para o qual:

$$| f''(\xi_n, \eta) | > \bar{M} \quad (3.52)$$

ou

$$| \theta'(\xi_n, \eta) | > \bar{M} \quad (3.53)$$

Com o valor das variáveis dependentes obtidas no ponto $\eta_{\text{máx}}$, a correção do item 3.3 é aplicada, repetindo-se o mesmo procedimento até o ponto:

$$\eta_{\text{máx}} = \eta_{\infty} \quad (3.54)$$

Para o presente problema, a região dos valores das estimativas para $E < 10^{-6}$ é tão restrita que variações de:

$$\Delta f''_0 = \sigma (10^{-10}) \quad (3.55)$$

ou

$$\Delta \theta'_0 = \sigma (10^{-10}) \quad (3.56)$$

afetam o valor das variáveis dependentes, prejudicando a convergência dos resultados em $\eta = \eta_{\infty}$.

3.7 PROGRAMA DE COMPUTADOR

A fim de resolver as equações do sistema, um programa de computador foi desenvolvido, baseado em Nachtsheim e Swigert [38]. O programa consiste basicamente de 3 partes:

- a) Uma sub-rotina que contém o método de integração utilizado. No programa, essa sub-rotina é chamada "ADAMS";
- b) Uma sub-rotina que contém as equações diferenciais do sistema. No programa, essa sub-rotina é chamada "DIFF";
- c) O programa principal, o qual contém o método da estimativa inicial e de sua correção. Este programa controla as duas sub-rotinas anteriores.

Com relação à sub-rotina "Adams" nota-se que a integração é feita pelo método de Runge-Kutta para os primeiros três pontos após o que é aplicado o método de Adams-Moulton (Anexo 2).

A sub-rotina "Diff" contém as equações diferenciais do sistema, conforme o Anexo 4, incluindo as relativas às diferenciais em relação à f_0'' e θ_0' . Esta sub-rotina contém três partes principais: a primeira relativa aos termos do lado esquerdo das equações do sistema; a segunda relativa à aproximação de primeira ordem das derivadas em relação à t dos termos do lado direito das equações e a terceira que contém a aproximação de segunda ordem das derivadas. A escolha da aproximação de primeira ou segunda ordem das derivadas é feita no programa principal e esta condição é testada na sub-rotina.

No programa principal é estabelecida a base do problema a ser resolvido, explicitando-se a geometria do problema. Ele controla as sub-rotinas citadas anteriormente e, além disso, contém duas rotinas básicas do sistema: uma relativa ao item 3.4, na qual são feitas as estimativas iniciais de f_0'' e θ_0' , incluindo todas as condições comentadas neste item; a outra é relativa à correção das estimativas, de acordo com o equacionamento desenvolvido no item 3.3. Nesta rotina, nota-se que certos coeficientes são multiplicados pelo fator 10^{-10} , procedimento adotado pelo seguinte motivo: como foi comentado na secção anterior, o valor das variáveis dependentes é sensivelmente afetado pelas estimativas iniciais f_0'' e θ_0' . Se estas variáveis apresentarem um valor grande, mesmo que as estimativas iniciais sejam boas, devido à sensibilidade das variáveis, comentada anteriormente, o valor numérico dos coeficientes excederia a capacidade de memória reservada, mesmo com o uso de dupla precisão em notação exponencial e o problema não mais se resolveria. Assim, adotou-se este artifício para resolver o inconveniente; como se pode notar no programa, os valores de $\Delta f_0''$ e $\Delta \theta_0'$ não sofrem alterações pelo seu uso. O programa faz o teste de E_n da equação (3.35) para a condição de convergência.

Ainda com relação às estimativas iniciais da secção

3.3, a certos problemas correspondem incrementos $(\Delta f''_0)_n$ e $(\Delta \theta'_0)_n$ pequenos quando se caminha ao longo da direção ξ .

Assim sendo, aplica-se um teste para verificar a magnitude destes incrementos; constatando-se que os mesmos são pequenos, a estimativa inicial seguinte é feita igual à estimativa correta anterior.

O programa principal também controla os dados de entrada e saída do sistema, apresentando os resultados em um formato adequado.

O programa completo é apresentado no Anexo 5, e contém comentários ao longo das linhas de programação, o que facilita seu entendimento.

CAPÍTULO 4

APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

O método de solução apresentado na solução anterior foi aplicado a diversos tipos de funções de temperatura de parede e os resultados obtidos foram comparados com valores disponíveis na literatura, quando possível. Foi mantida uma coerência com estes trabalhos relativamente à forma na qual foram apresentados os resultados. Os parâmetros usados são comentados nas secções correspondentes a cada situação.

Para a obtenção dos resultados foi usado um computador VAX e o tempo de computação necessário é dependente do tipo de função a ser resolvido. Problemas com distribuições da temperatura de parede na forma de funções contínuas e que possuem derivadas contínuas são rapidamente resolvidos, sendo que os casos com funções descontínuas ou derivadas descontínuas necessitam um tempo maior. O tempo para a solução completa do problema e a precisão desta dependem do tipo de computador utilizado, de sua capacidade de memória e do tipo de variáveis utilizadas. No problema em questão, devido ao comentado na secção 3.4, usou-se dupla precisão.

Foram estudadas, como exemplo, neste trabalho as seguintes distribuições de temperatura:

1. Distribuições de temperatura na forma de funções contínuas e com derivadas contínuas.
 - . Distribuição Senoidal;
 - . Distribuição Exponencial.
2. Distribuições de temperatura na forma de funções contínuas mas com descontinuidade de derivada.
 - . Distribuição Linear em Dois Trechos, sendo que no segundo trecho a derivada pode ser negativa, positiva ou nula (Figura 4.8).

3. Distribuição de temperaturas na forma de funções descontínuas.

- . Um Degrau de Temperatura;
- . Vários Degraus de Temperatura.

4.1 DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA NA FORMA DE FUNÇÕES CONTÍNUAS E COM DERIVADAS CONTÍNUAS

4.1.1 Variação Senoidal da Temperatura de Parede

Como primeira aplicação do método, estudou-se a variação da temperatura de parede dada por:

$$F(x) = T_w(x) - T_\infty = \bar{A} \cdot \text{sen } x \quad (4.1)$$

Daí:

$$\begin{aligned} \xi &= \int_0^x F(x) \, dx = \int_0^x \bar{A} \cdot \text{sen } x \, dx \\ &= \bar{A} (1 - \cos x) \end{aligned} \quad (4.2)$$

e

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{\xi}{F(x)^2} \frac{dF(x)}{dx} = \frac{\bar{A} \cdot (1 - \cos x)}{(\bar{A} \cdot \text{sen } x)^2} \frac{d}{dx} (\bar{A} \cdot \text{sen } x) \\ &= \frac{\cos x}{1 + \cos x} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Os parâmetros adequados para a apresentação dos resultados são $-\theta(\xi, 0)$ e x , os quais permitem comparações com outros trabalhos.

De fato, pode-se observar que:

$$Nu_x = \frac{h_x x}{K} \quad (4.4)$$

onde:

$$\begin{aligned} h_x &= - \frac{K}{(T_w(x) - T_\infty)} \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = - \frac{K}{F(x)} \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} \\ &= - \frac{K}{F(x)} \left. \frac{\partial T}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ &= - \frac{K}{F(x)} \left. \frac{\partial (\theta(\xi, \eta) \cdot F(x) + T_\infty)}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ &= - \frac{K}{F(x)} \cdot F(x) \theta'(\xi, 0) \cdot F(x)^{1/2} \left(\frac{g\beta}{4\nu^2} \right)^{1/4} \xi^{-1/4} \\ &= - K F(x)^{1/2} \theta'(\xi, 0) \left(\frac{g\beta}{4\nu^2} \right)^{1/4} \xi^{-1/4} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Portanto:

$$Nu_x = - F(x)^{1/2} \theta'(\xi, 0) \left(\frac{g\beta}{4\nu^2} \right)^{1/4} \xi^{-1/4} \cdot x \quad (4.6)$$

Também:

$$Gr_x = \frac{g\beta (T_w(x) - T_\infty) x^3}{\nu^2} = \left(\frac{g\beta}{4\nu^2} \right) 4 F(x) x^3 \quad (4.7)$$

Daí:

$$\frac{Nu_x}{Gr_x^{1/4}} = - \frac{\theta'(\xi, 0)}{\sqrt{2}} \left[\frac{(T_w(x) - T_\infty) x}{\int_0^x (T_w(x) - T_\infty) dx} \right]^{1/4} \quad (4.8)$$

Para variação senoidal de temperatura de parede:

$$\frac{Nu_x}{Gr_x^{1/4}} = - \frac{\theta'(\xi, 0)}{\sqrt{2}} \left[\frac{x \sin x}{(1 - \cos x)} \right]^{1/4} \quad (4.9)$$

A variação de $-\theta'(\xi, 0)$ com x pode ser vista na Figura 4.1.

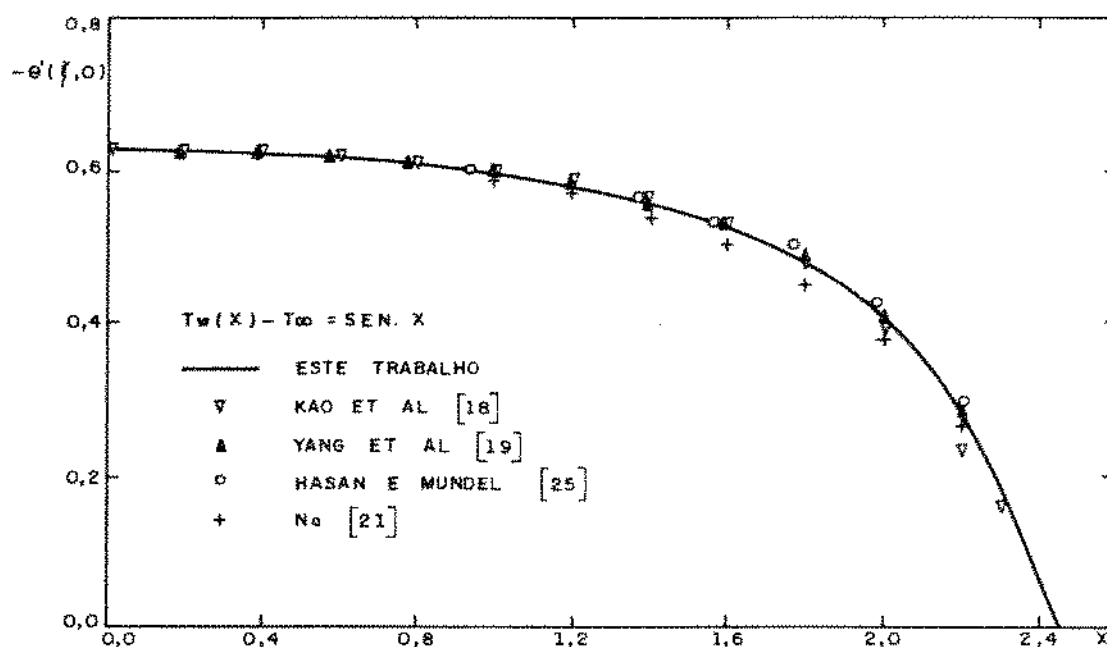


Figura 4.1 - Variação de $-\theta'(\xi, 0)$ em função de x para $F(x) = \sin x$, $Pr = 0,7$

Como se pode ver, é feita uma comparação dos resultados obtidos com os apresentados em outros trabalhos, com boa concordância. Pode-se notar que em torno do ponto $x = 2,44$, $-\theta'(\xi, 0) = 0$, o que significa que a placa está numa condição na qual não há fluxo de calor pela sua superfície. Pontos de x acima deste valor configuram a condição na qual a placa está recebendo calor do ar próximo à parede. Isto pode ser explicado observando o gráfico da Figura 4.2, onde está representada a função $\sin x$.

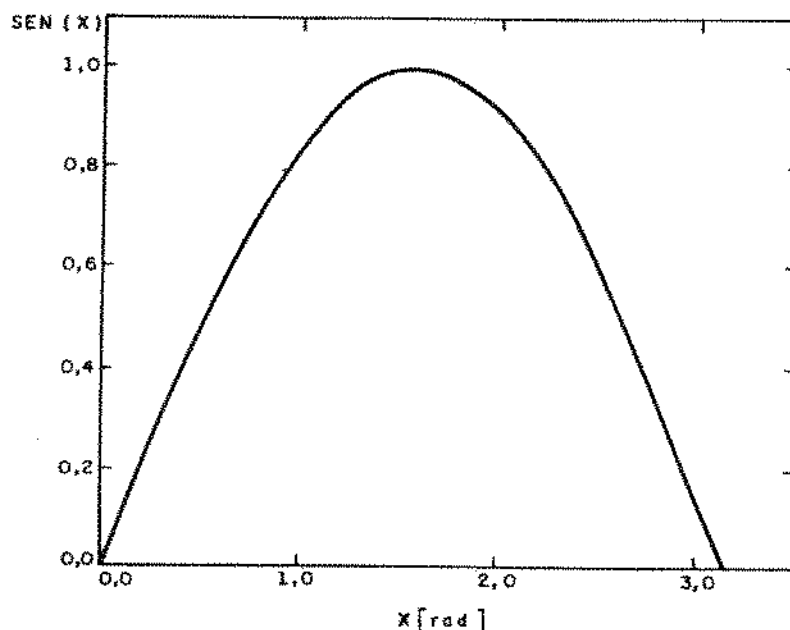


Figura 4.2 - Gráfico da função $\sin x$

Como se pode observar, esta função é decrescente no intervalo $1,57 < x < 3,14$, o que resulta numa temperatura de parede decrescente no intervalo, resultando que, num dado ponto ξ_n , haja maior transferência de calor para o fluido do que numa posição posterior a este. Como a temperatura de parede está decrescendo e o fluido recebeu uma quantidade de calor maior, haverá um ponto no qual o ar previamente aquecido na posição ξ_n atingirá uma temperatura maior do que a temperatura da parede na posição ξ_{n+1} . Este comportamento pode ser observado na curva 3 da Figura 4.3. pode-se ainda observar na figura que há um processo de diminuição da espessura da cama

da limite, pelo motivo comentado anteriormente. Isto também pode ser constatado na Figura 4.4 que apresenta o gráfico de $f'(\xi, \eta)$, pois a velocidade na direção do escoamento (u) é diretamente proporcional à $f'(\xi, \eta)$, conforme foi visto no capítulo 2.

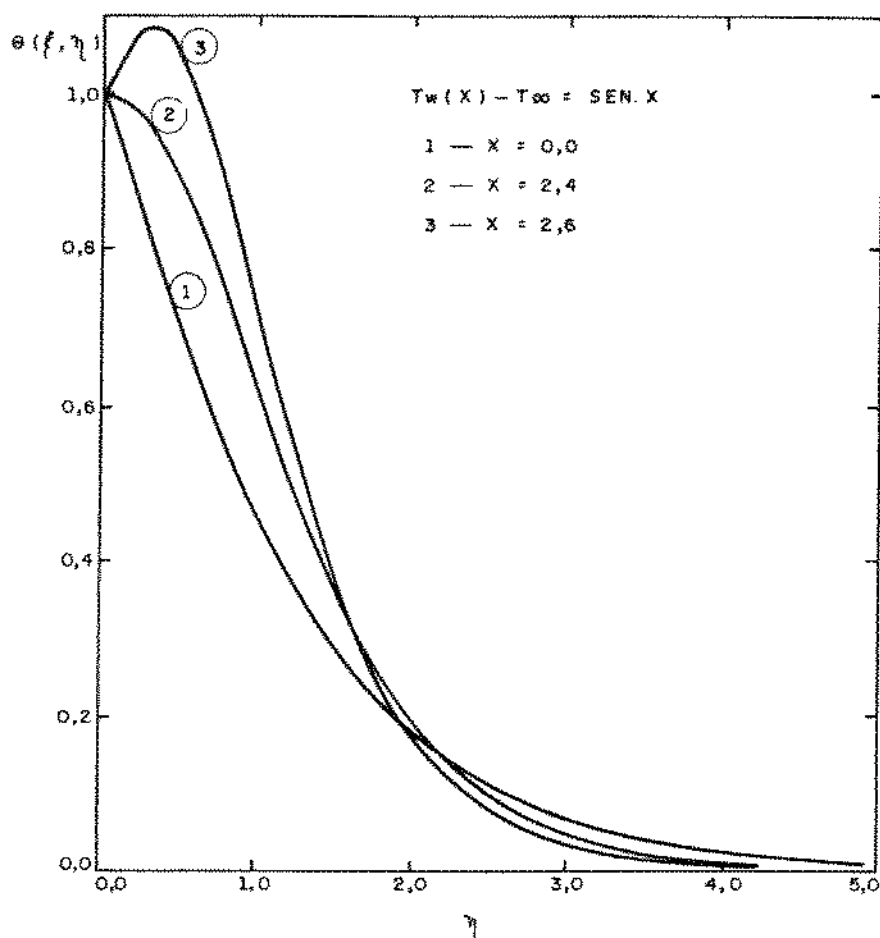


Figura 4.3 - Perfil adimensional de temperatura para $F(x) = \sin x$, $Pr = 0,7$

Os cálculos foram feitos para $\eta_{\infty} = 8$ e, por se tratar de uma função contínua, com derivadas contínuas, usou-se como técnica para aceleração dos cálculos das estimativas iniciais que, conforme (3.38):

$$P_{n+1}^1 = P_n^C \quad (4.10)$$

onde

$$P_n^C \equiv \text{solução para o ponto } \xi_n.$$

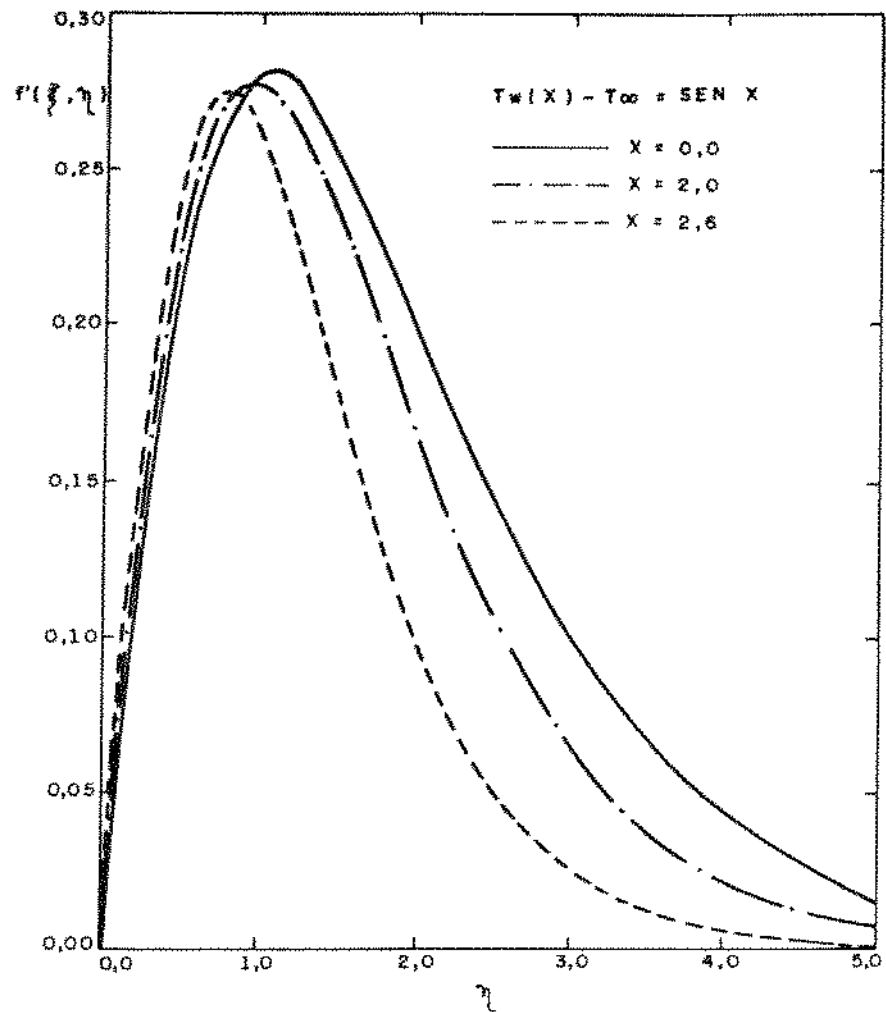


Figura 4.4 - Perfil adimensional de velocidade de para $F(x) = \text{sen } x$, $Pr = 0,7$

4.1.2 Variação Exponencial da Temperatura de Parede

Neste caso:

$$F(x) = M e^{mx} \quad (4.11)$$

Daí:

$$\xi = \frac{M}{m} (e^{mx} - 1) \quad (4.12)$$

e

$$\Omega = 1 - e^{-mx} \quad (4.13)$$

Os parâmetros empregados são os mesmos do item anterior.

Da relação (4.8):

$$\frac{Nu_x}{Gr_x^{1/4}} = - \frac{\theta'(\xi, 0)}{\sqrt{2}} \cdot \left[\frac{m x e^{mx}}{(e^{mx} - 1)} \right]^{1/4} \quad (4.14)$$

A variação de $-\theta'(\xi, 0)$ com x é mostrada na Figura 4.5. Novamente, os resultados obtidos estão em boa concordância relativamente aos trabalhos já publicados. Pode-se observar no gráfico o resultado obtido por Sparrow et al [2], onde foi considerada a solução por similaridade, resultando no valor constante $-\theta'(\xi, 0) = 0,735$.

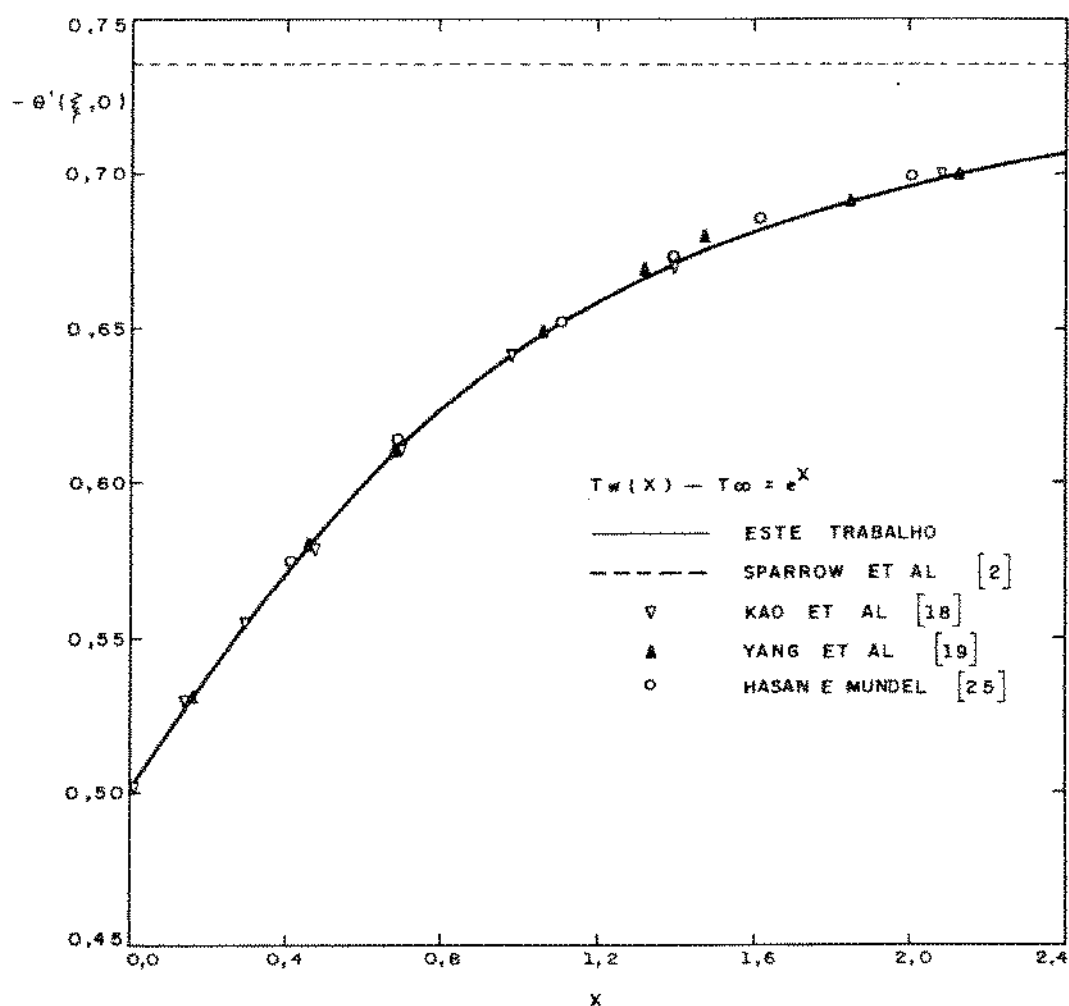


Figura 4.5 - Variação de $-\theta'(\xi, 0)$ em função de x para $F(x) = e^x$, $Pr = 0,7$

De fato, conforme o comentário de Gebhart e Mollen-dorf [40], a solução por similaridade de Sparrow et al [2] é uma solução assintótica, para quando x tende a infinito, ou para o caso da borda de ataque da placa localizada em $x = -\infty$. Conforme a análise feita no atual trabalho, pode-se concluir que para uma placa plana vertical finita a solução é não-simi-lar. Para o caso em que $m = 0$, o problema se reduz à uma pla-ca plana vertical isotérmica.

A distribuição de temperatura $\theta(\xi, \eta)$ em função de η é apresentada na Figura 4.6.

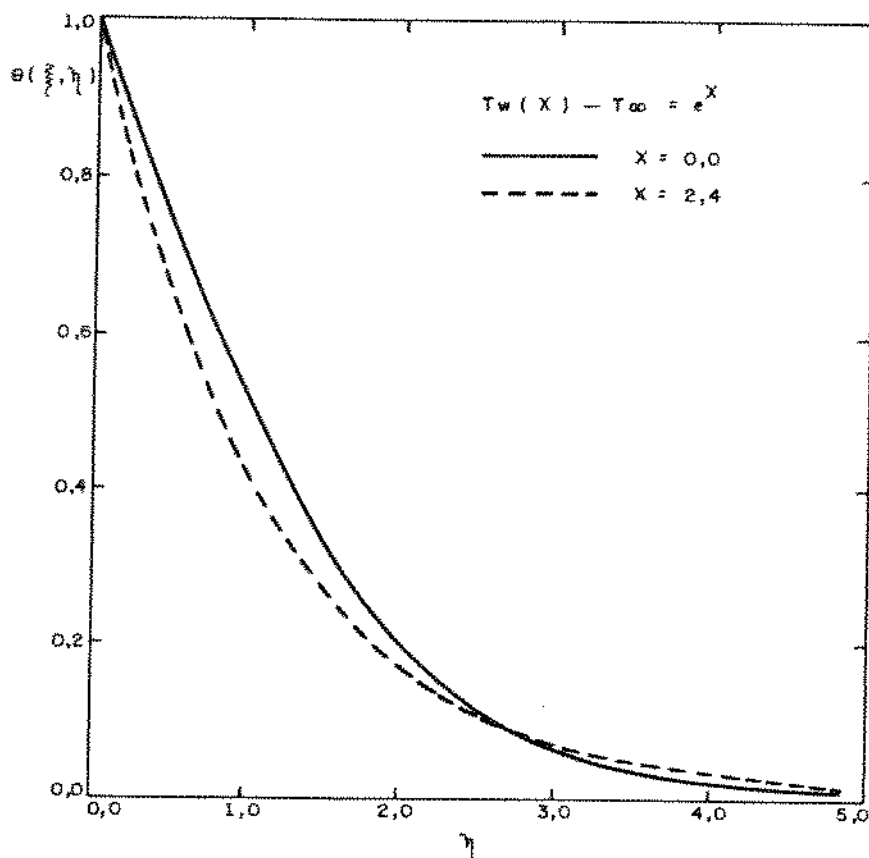


Figura 4.6 - Perfil adimensional de tempera-tura para $F(x) = e^x$, $Pr = 0,7$

Como se pode ver neste caso, há um aumento da espes-sura da camada limite ao longo da altura. O mesmo comportamen-to pode ser visto na Figura 4.7 para o perfil adimensional de velocidade. Conforme o comentado anteriormente, estes perfis

assumem um comportamento assintótico para $x \rightarrow \infty$.

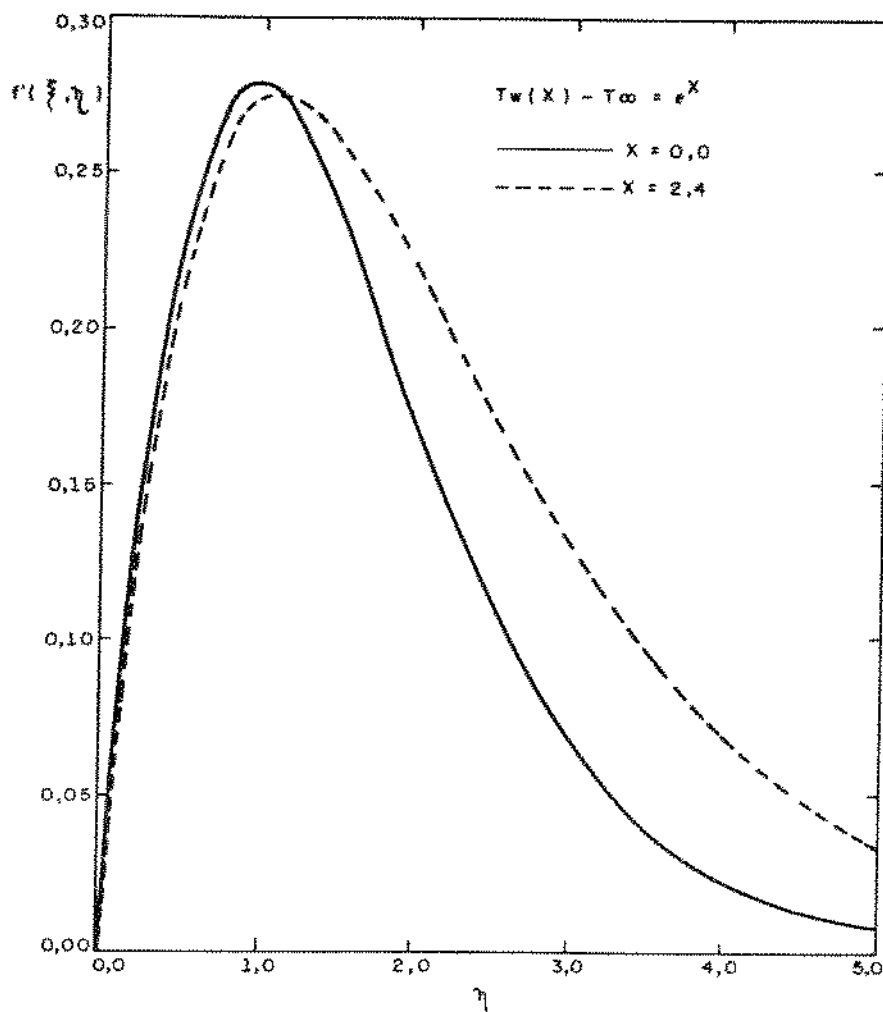


Figura 4.7 - Perfil adimensional de velocidade de para $F(x) = e^x$, $Pr = 0,7$

Os resultados foram obtidos para $\eta_\infty = 9$ e a mesma técnica das estimativas iniciais comentada anteriormente foi usada.

4.2 DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA NA FORMA DE FUNÇÃO CONTÍNUA E COM DESCONTINUIDADE DE DERIVADA AO LONGO DA ALTURA

Para este tipo de comportamento da temperatura de parede não há trabalhos publicados.

Foram analisados três tipos de função, conforme a Figura 4.8.

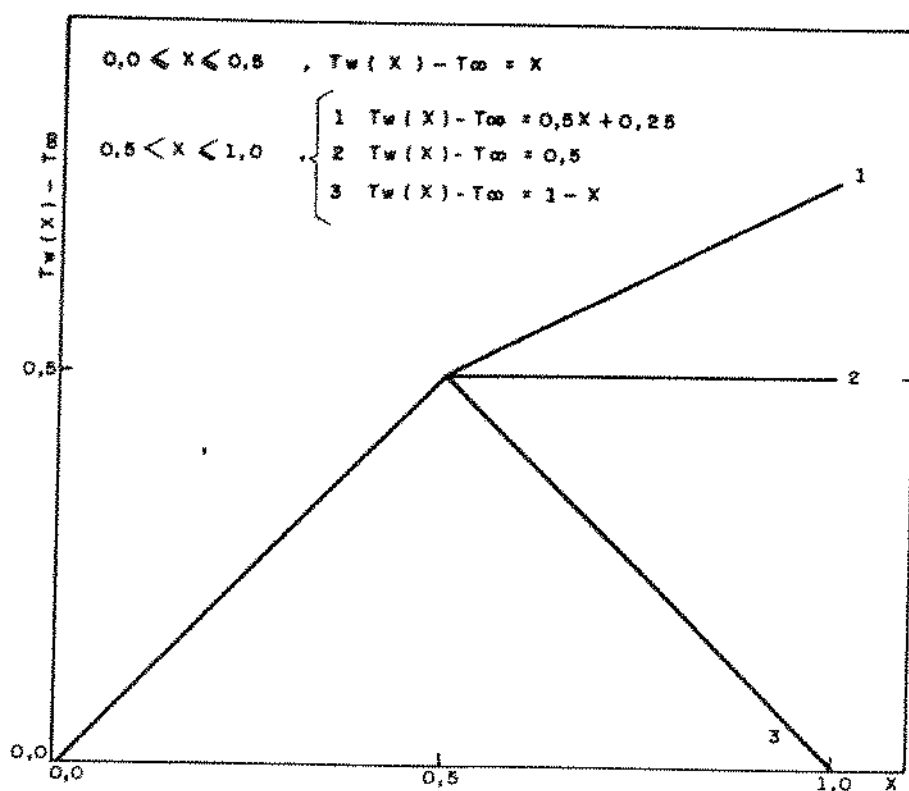


Figura 4.8 - Distribuição de temperatura com descontinuidade de derivada

Para $0,0 \leq x \leq 0,5$, tem-se que:

$$F(x) = x \quad (4.15)$$

Daí:

$$\xi = \frac{x^2}{2} \quad (4.16)$$

e

$$\Omega = \frac{1}{2} \quad (4.17)$$

Da relação (4.8)

$$\frac{Nu_x}{Gr_x^{1/4}} = - \frac{\theta'(\xi, 0)}{(2)^{1/4}} \quad (4.18)$$

Para efeito de notação, relacionar-se-á:

$$\cdot (T_{w1}(x) - T_{\infty}) \quad \text{PARA} \quad 0,0 \leq x \leq 0,5$$

$$\cdot (T_{w2}(x) - T_{\infty}) \quad \text{PARA} \quad 0,5 < x \leq 1,0$$

Dessa forma, o comportamento das variáveis para $0,0 \leq x \leq 0,5$ é o mesmo para os três casos descritos a seguir. Nesses problemas, usou-se $\eta_{\infty} = 8,0$.

A título de comparação, a Tabela 4.1 apresenta os valores de $-\theta(\xi, 0)$ em função de x para $T_w(x) - T_{\infty} = x$, $0,0 \leq x \leq 1,0$.

Tabela 4.1 - Valores de $-\theta'(\xi, 0)$ em função de x para $T_w(x) - T_{\infty} = x$, $Pr = 0,7$

x	$-\theta'(\xi, 0)$
0,0	0,6339
0,2	0,6326
0,4	0,6317
0,6	0,6306
0,8	0,6297
1,0	0,6287

4.2.1 Análise para $T_{w2}(x) - T_{\infty} = 0,5x + 0,25$

Esta distribuição corresponde à curva 1 da Figura 4.8. Como esta função é dividida em dois domínios, para $0,5 < x \leq 1,0$:

$$F(x) = 0,5x + 0,25 \quad (4.19)$$

Daí:

$$\begin{aligned} \xi &= \int_0^{0,5} x \, dx + \int_{0,5}^x (0,5x + 0,25) \, dx \\ &= 0,25x^2 + 0,25x - 0,0625 \end{aligned} \quad (4.20)$$

e

$$\Omega = \frac{(0,125x^2 + 0,125x - 0,03125)}{(0,5x + 0,25)^2} \quad (4.21)$$

Assim:

$$\frac{Nu_x}{Gr_x^{1/4}} = - \frac{\theta'(\xi, 0)}{\sqrt{2}} \left[\frac{0,5x^2 + 0,25x}{0,125x^2 + 0,125x - 0,3125} \right]^{1/4} \quad (4.22)$$

A variação de $-\theta'(\xi, 0)$ em função de x é apresentada na Figura 4.9. Pode-se notar que no ponto próximo à interface, no qual se verifica a descontinuidade da derivada, há uma queda brusca no valor de $-\theta'(\xi, 0)$. O efeito da descontinuidade de derivada neste problema, no entanto, não é tão forte a ponto de haver reversão no sentido do fluxo de calor na parede. O que ocorre é uma diminuição de $-\theta(\xi, 0)$ até o

ponto $x \approx 0,75$, seguido de uma variação mais suave ao longo da altura da placa. Na realidade, está havendo um ajuste no escoamento para as novas condições de contorno.

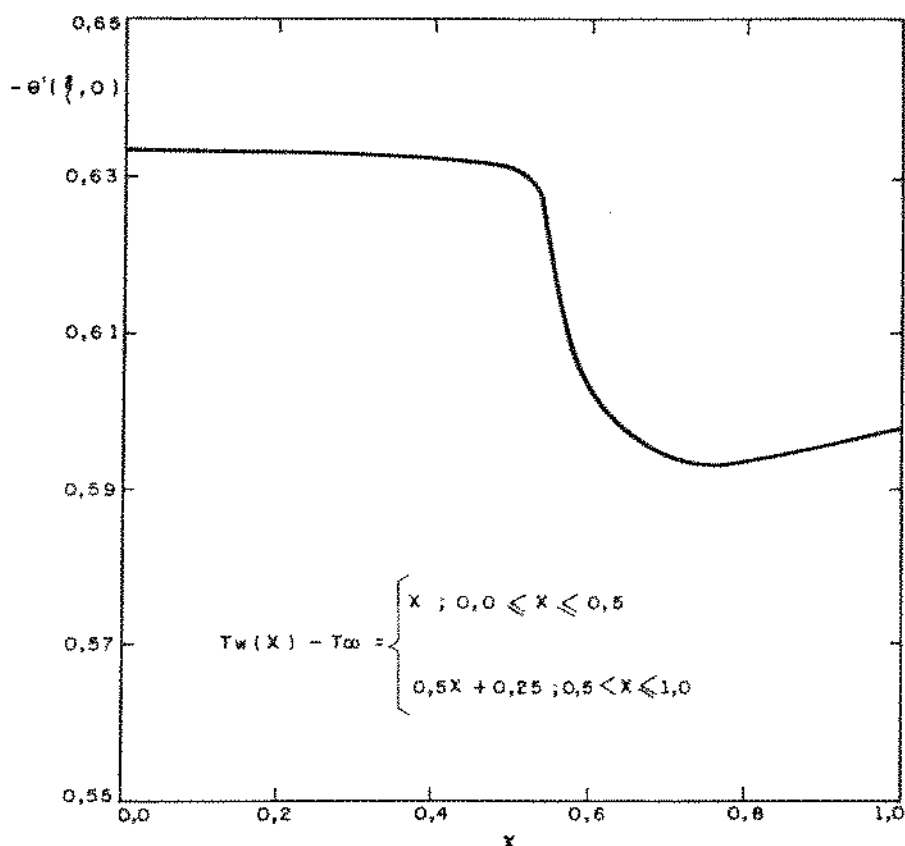


Figura 4.9 - Variação de $-\theta'(\xi,0)$ em função de x
para $T_{w2}(x) - T_\infty = 0,5x + 0,25$, $Pr = 0,7$

A Figura 4.10 apresenta o perfil adimensional de temperatura para dois níveis de altura na placa. Como se pode notar, há somente uma pequena diferença entre as duas curvas. Já na Figura 4.11, pode-se observar uma maior variação nos valores de $f'(\xi,\eta)$, notando-se o estreitamento da camada-limite, já que a placa está sendo aquecida na região $0,5 < x \leq 1,0$ a uma taxa menor do que na região anterior.

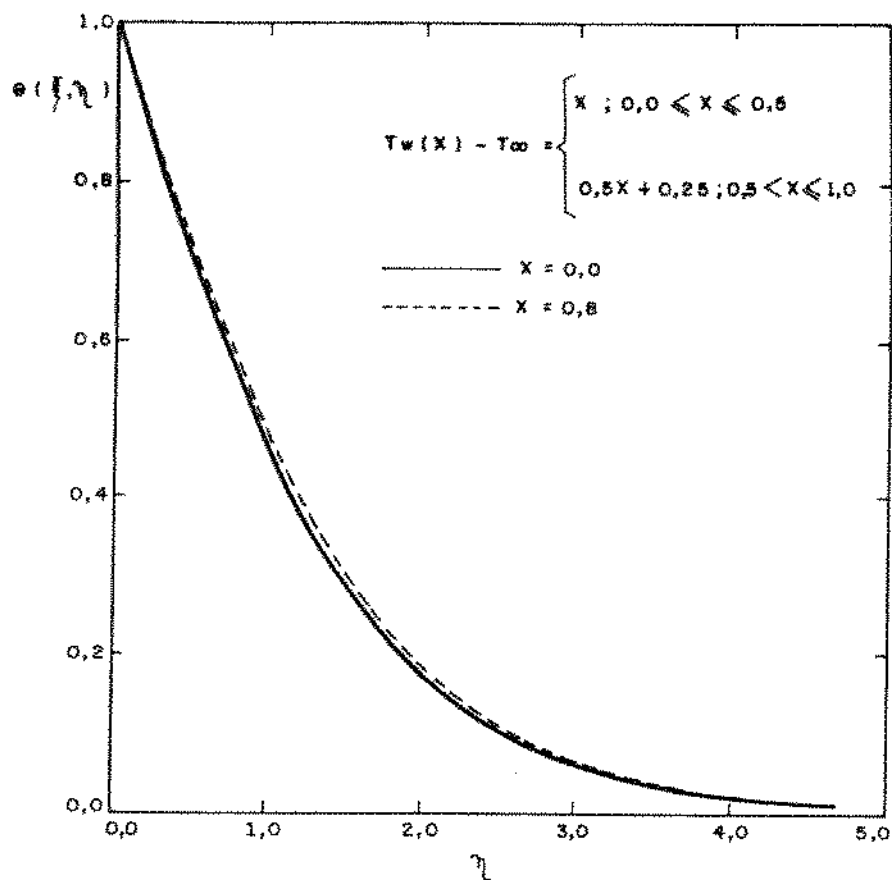


Figura 4.10 - Perfil adimensional de temperatura para $T_{w2}(x) = 0,5x + 0,25$, $Pr = 0,7$

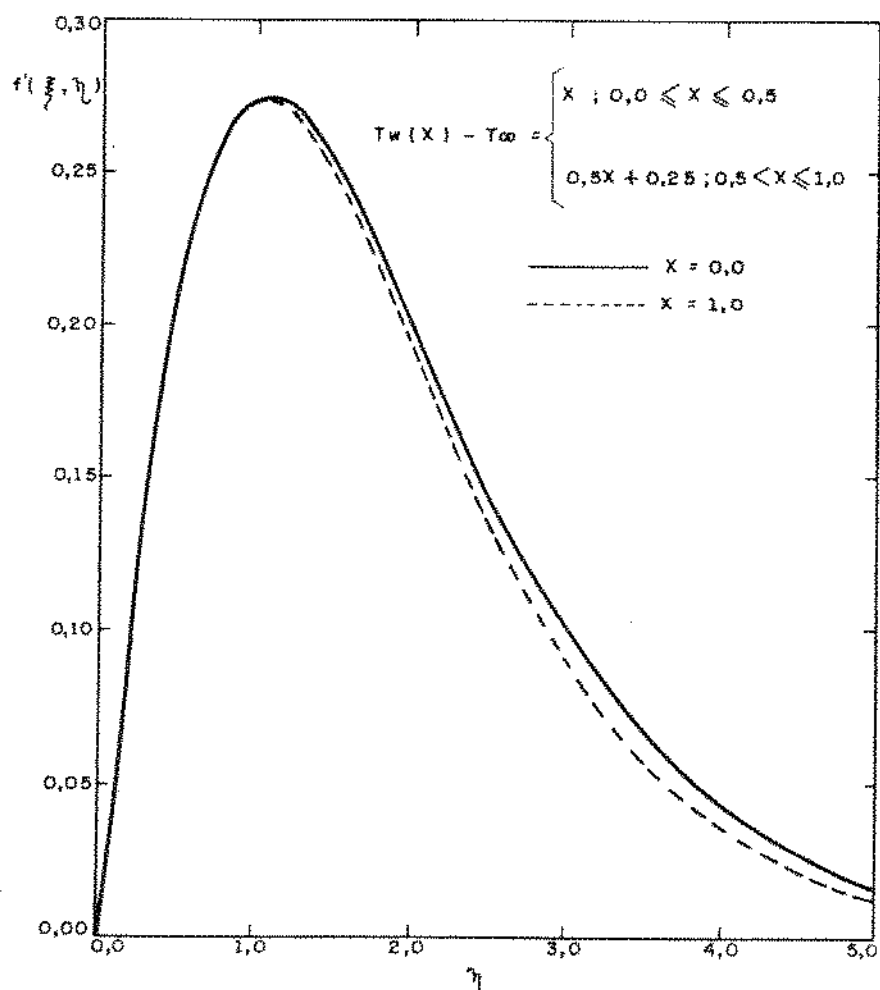


Figura 4.11 - Perfil adimensional de velocidade para $T_{w2}(x) - T_\infty = 0,5x + 0,25$, $Pr = 0,7$

4.2.2 Análise para $T_{w2}(x) - T_{\infty} = 0,5$

Neste caso, tem-se, na região $0,5 < x \leq 1,0$:

$$F(x) = 0,5 \quad (4.23)$$

Daí:

$$\begin{aligned} \xi &= \int_0^{0,5} x \, dx + \int_{0,5}^x 0,5 \, dx \\ &= 0,5 x - 0,125 \end{aligned} \quad (4.24)$$

e

$$\Omega = 0 \quad (4.25)$$

Com isso:

$$\frac{Nu_x}{Gr_x^{1/4}} = - \frac{\theta'(\xi, 0)}{\sqrt{2}} \left[\frac{0,5 x}{0,5 x - 0,125} \right]^{1/4} \quad (4.26)$$

A Figura 4.12 mostra a variação de $-\theta'(\xi, 0)$ em função de x . Como era de se esperar, há uma variação mais acentuada desta variável em relação à que ocorreu no item anterior. Isto se deve ao fato de que a placa na região $0,5 < x < 1,0$ está sendo aquecida a uma taxa menor do que a do item anterior. Como se pode observar na Figura 4.13, há também uma maior variação de $\theta(\xi, \eta)$, podendo-se verificar o estreitamento da camada limite. A Figura 4.14 exhibe o perfil adimensional de velocidade, notando-se o mesmo efeito comentado anteriormente.

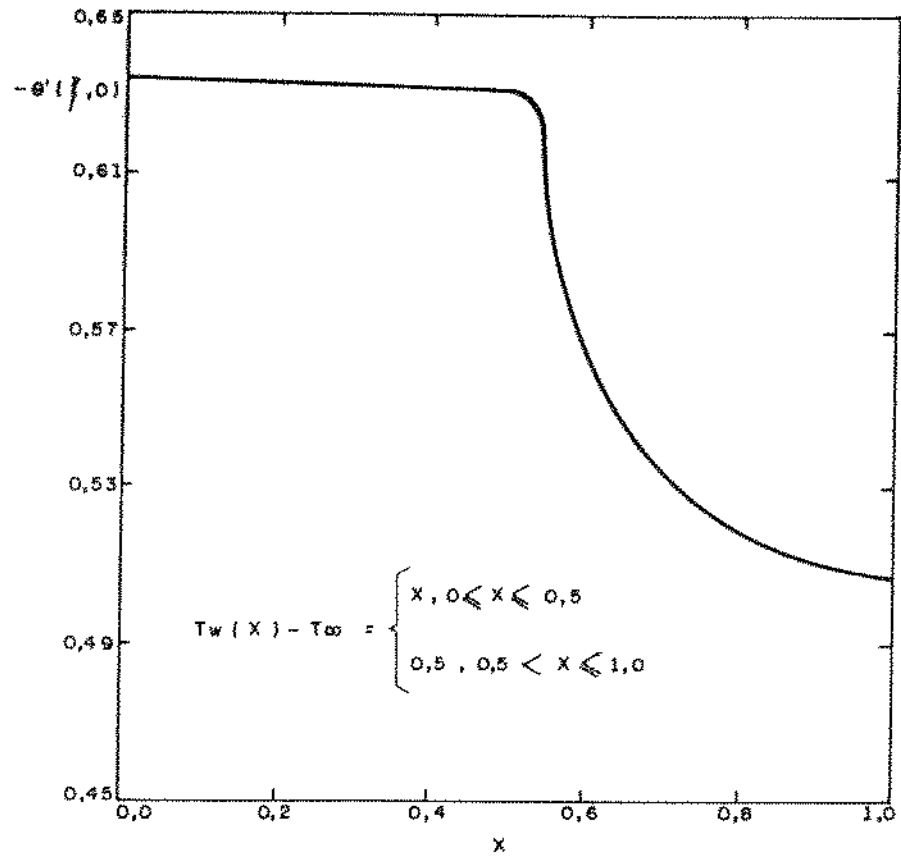


Figura 4.12 - Variação de $-\theta(\xi, 0)$ em função de x para $T_{w2}(x) - T_\infty = 0,5$, $Pr = 0,7$

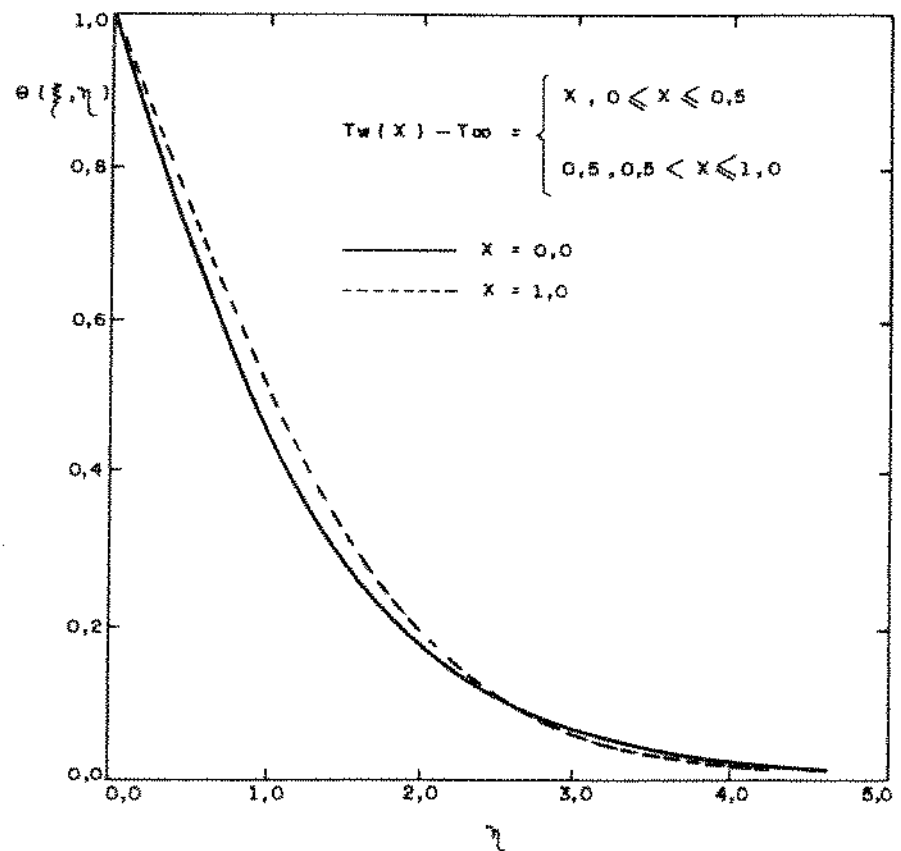


Figura 4.13 - Perfil adimensional de temperatura para $T_{w2}(x) - T_\infty = 0,5$, $Pr = 0,7$

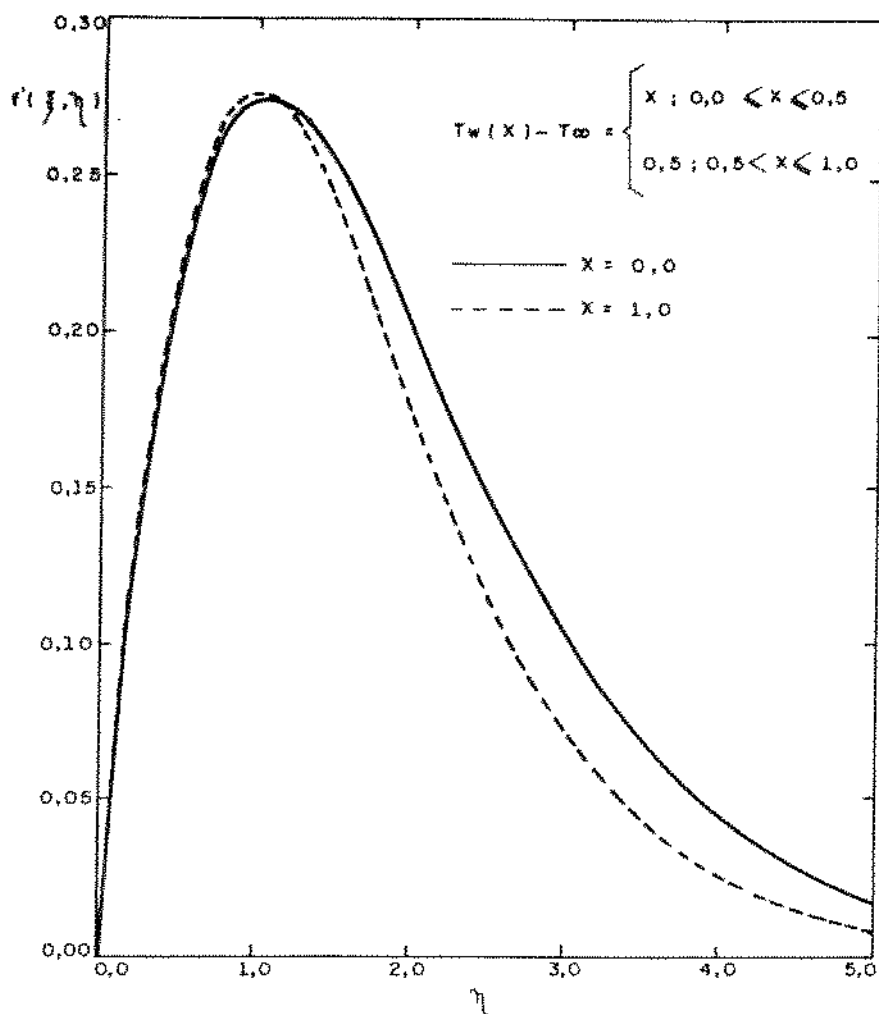


Figura 4.14 - Perfil adimensional de velocidade para $T_{w2}(x) - T_\infty = 0,5$,
 $Pr = 0,7$

4.2.3 Análise para $T_{w2}(x) - T_\infty = 1 - x$

Neste caso, tem-se que:

$$F(x) = 1 - x \quad (4.27)$$

Assim:

$$\begin{aligned} \xi &= \int_0^{0,5} x \, dx + \int_{0,5}^x (1 - x) \, dx \\ &= -0,5 x^2 + x - 0,25 \end{aligned} \quad (4.28)$$

e

$$\Omega = \frac{0,5 x^2 - x + 0,25}{(1 - x)^2} \quad (4.29)$$

Com isso:

$$\frac{Nu_x}{Gr_x^{1/4}} = - \frac{\theta'(\xi, 0)}{\sqrt{2}} \left[\frac{x^2 - x}{0,5 x^2 - x + 0,25} \right]^{1/4} \quad (4.30)$$

Como se pode observar pela relação (4.29), em $x=1,0$ ocorre um ponto de singularidade, pois:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \Omega = \infty \quad (4.31)$$

Também pode-se observar a partir da relação (4.30) que quando $x = 1,0$:

$$\frac{Nu_x}{Gr_x^{1/4}} = 0 \quad (4.32)$$

Assim, na análise deste tipo de problema, adotou-se o intervalo $0,5 < x \leq 0,9$, não causando assim problemas na integração das equações.

A variação de $-\theta'(\xi, 0)$ em x pode ser vista na Figura 4.15. Como era de se esperar, há uma queda de $-\theta'(\xi, 0)$ à uma taxa crescente ao longo da altura x . Pode-se notar ainda que em torno do ponto $x = 0,73$ o fluxo de calor na parede é zero. Novamente, a partir deste valor, inicia-se a inversão no sentido do fluxo de calor, ou seja, a placa começa a receber calor ao invés de ceder calor. A análise desse fenômeno é idêntica à da secção 4.1.1, tendo-se em mente o formato da cur

va 3 da Figura 4.8.

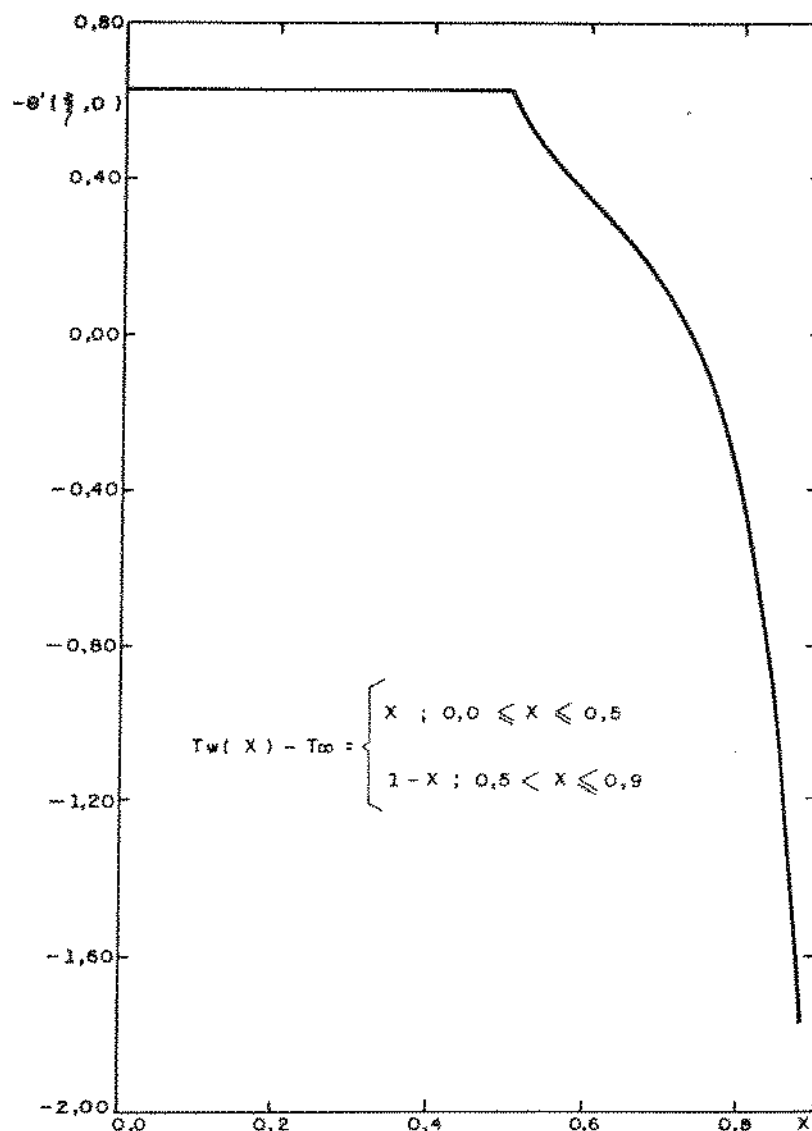


Figura 4.15 - Variação de $-\theta'(\xi, 0)$ em função de x para $T_{w2}(x) - T_\infty = 1 - x$, $Pr = 0,7$

O comportamento de $\theta(\xi, \eta)$ com η é apresentado na Figura 4.16. Nota-se o crescente estreitamento da camada limite para valores crescentes de x , $x > 0,5$. A inversão no sentido do fluxo de calor pode também ser explicada, observando as curvas para o qual $x = 0,80$ e $x = 0,875$, nas faixas compreendidas entre $0 < \eta \leq 0,6$ e $0 < \eta \leq 0,9$ respectivamente, nas quais o fluido está a uma temperatura maior do que a temperatura da parede da placa.

A Figura 4.17 mostra o perfil adimensional de velo

idades, onde se observa o crescente estreitamento da camada limite.

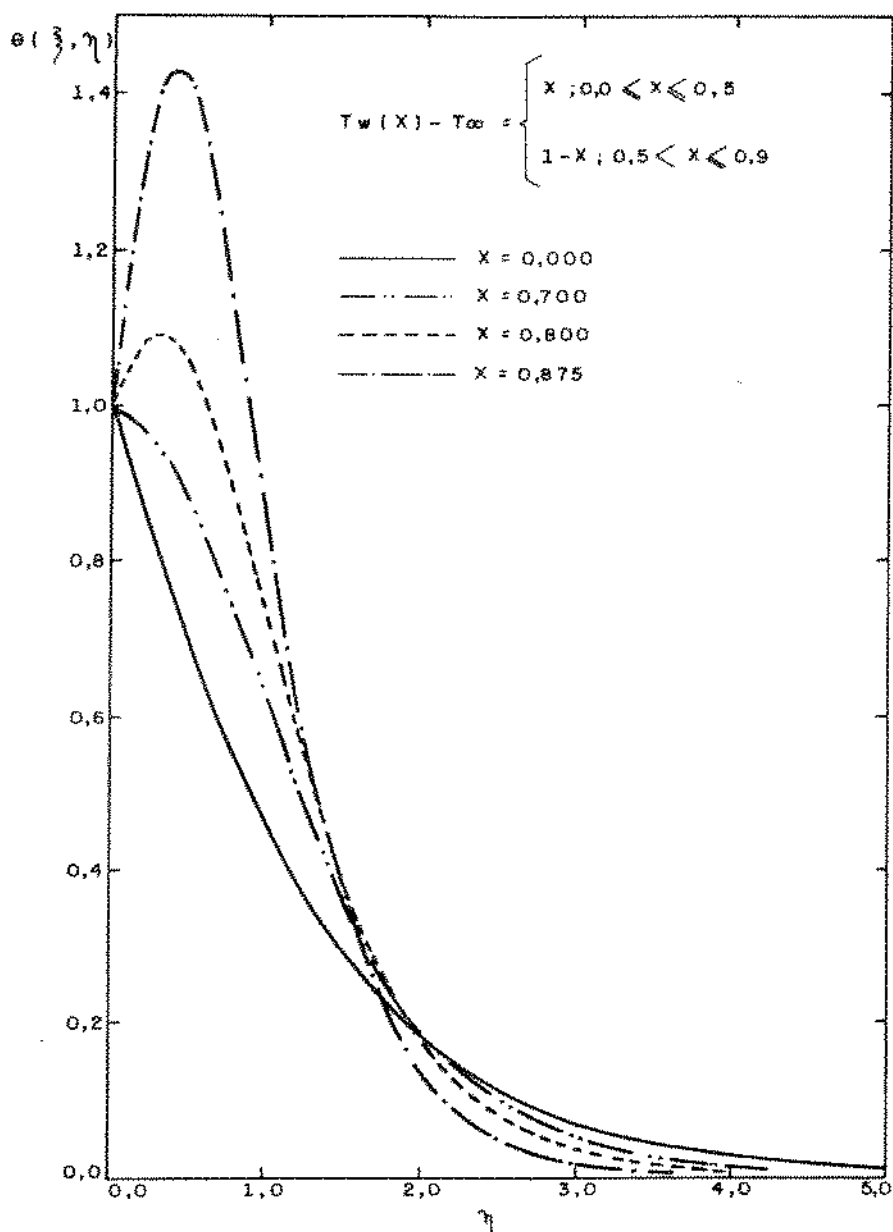


Figura 4.16 - Perfil adimensional de temperatura para $T_{w2}(x) - T_\infty = 1 - x$, $Pr = 0,7$

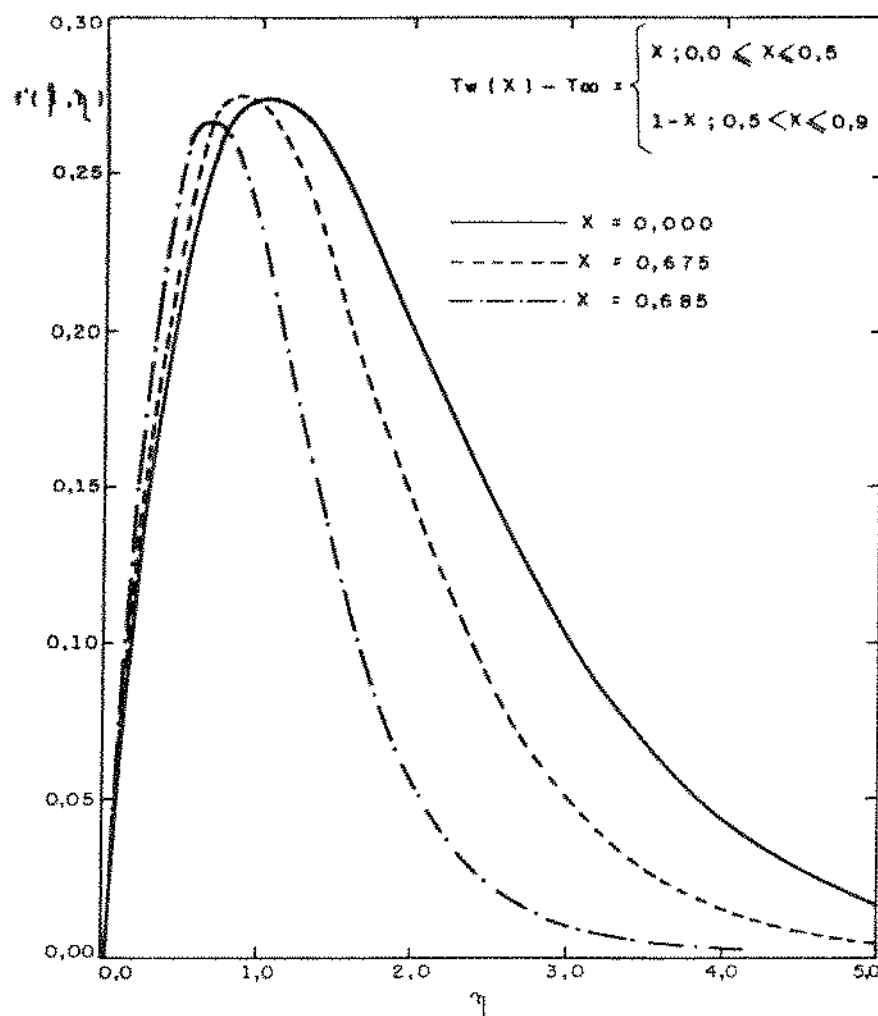


Figura 4.17 - Perfil adimensional de velocidade para $T_{w2}(x) - T_\infty = 1 - x$, $Pr = 0,7$

Na análise feita nesta seção, considerou-se a variação nas condições de contorno em uma dada altura da placa. Notou-se, pelo exame dos gráficos de $-\theta'(\xi, 0)$ em função de x que ocorre um comportamento assintótico, significando que a placa fosse infinita, as condições de fluxo encontradas a partir de uma certa altura seriam idênticas àquelas da situação em que toda a placa estivesse mantida na condição $F(x) = T_{w2}(x) - T_\infty$.

Exemplificando, no item 4.2.2, tem-se a condição de temperatura uniforme para $0,5 < x \leq 1,0$. Assim, se essa placa fosse infinita, numa posição suficientemente longe da borda de ataque ela assumiria um comportamento de placa plana isotérmica, sendo que o efeito da condição de contorno térmica em $0 \leq x \leq 0,5$ deixaria de ser sentido. Dessa forma:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} -\theta'(\xi, 0) = 0,5046 \quad , \quad (4.33)$$

que é o valor correspondente de $-\theta'(\xi, 0)$ para uma placa plana vertical isotérmica, correspondente a $T_{w2} = \text{constante}$.

4.3 DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURAS NA FORMA DE FUNÇÕES DESCONTÍNUAS

4.3.1 Descontinuidade de Temperaturas - Um Degrau de Temperatura

Neste tipo de distribuição de temperaturas na parede, tem-se, conforme a Figura 4.18, dois trechos ao longo da altura da placa, um com temperatura uniforme T_{w1} e o outro com temperatura uniforme T_{w2} , constituindo um degrau de temperaturas.

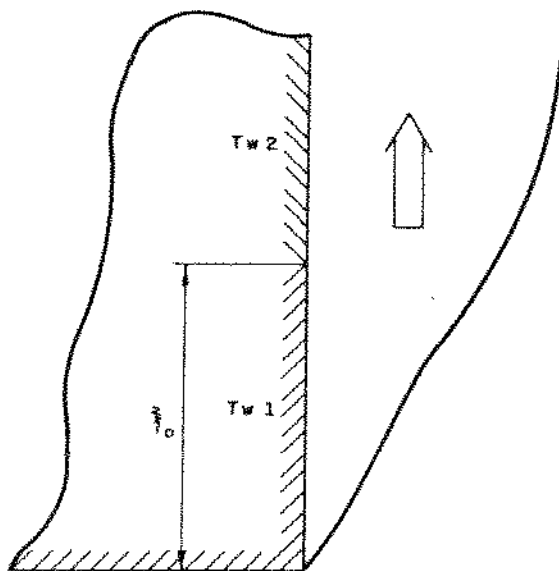


Figura 4.18 - Placa plana vertical com descontinuidade de temperaturas

Nos casos analisados, supõe-se que:

$$T_{w1} > T_{\infty} \quad , \quad 0 \leq \xi \leq \xi_0$$

e

$$T_{w2} \geq T_{\infty} \quad , \quad \xi_0 < \xi$$

O trecho $0 \leq \xi \leq \xi_0$ corresponde ao caso da placa plana vertical isotérmica, e as equações (3.1) e (3.2) reduzem-se às equações (3.9) e (3.10), correspondentes à solução por similaridade. Neste trecho os perfis adimensionais de temperatura e velocidade são semelhantes e são apresentados nas Figuras 4.19 e 4.20.

Os trabalhos que analisaram este tipo de problema utilizaram uma formulação menos geral; a fim de permitir coerência na apresentação dos resultados e possibilitar sua comparação, adotou-se que:

$$F(x) = T_{w1} - T_{\infty} \equiv \text{constante}$$

ao longo da altura da placa.

Com isso:

$$\theta = \frac{T - T_{\infty}}{T_{w1} - T_{\infty}} \quad (4.34)$$

e as condições de contorno relativas à $\theta(\xi, 0)$ transformam-se em:

$$\theta(\xi, 0) = \theta_{w1} \equiv \frac{T_{w1} - T_{\infty}}{T_{w1} - T_{\infty}} = 1 \quad , \quad 0 \leq \xi \leq \xi_0 \quad (4.35)$$

$$\theta(\xi, 0) = \theta_{w2} \equiv \frac{T_{w2} - T_{\infty}}{T_{w1} - T_{\infty}} \quad , \quad \xi_0 < \xi$$

$$\text{Além disso, como } \frac{dF(x)}{dx} = 0 :$$

$$\Omega = 0 \quad (4.36)$$

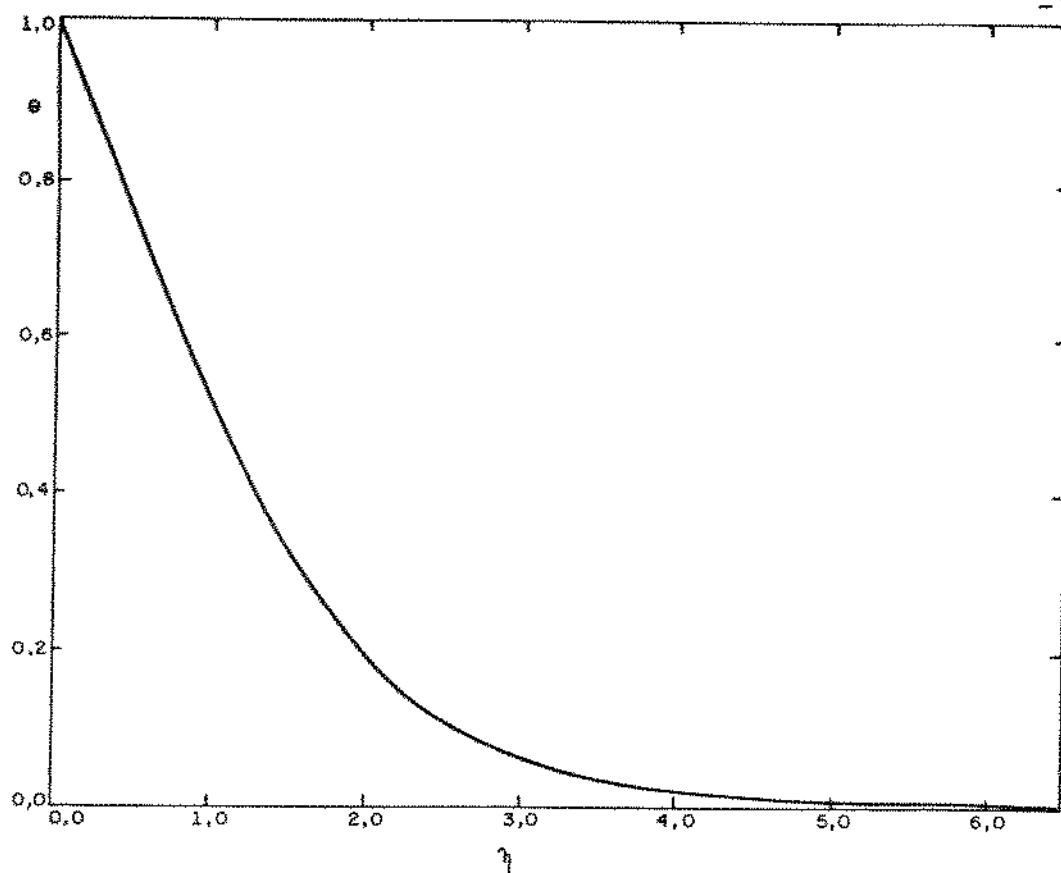


Figura 4.19 - Perfil adimensional de temperatura para
 $Pr = 0,72$

Assim, as equações (3.1) e (3.2) se transformam para:

$$f''' + 3ff'' - 2(F')^2 + \theta = 4\xi \left[f' \frac{\partial f'}{\partial \xi} - f'' \frac{\partial f}{\partial \xi} \right] \quad (4.37)$$

e

$$\theta'' + 3Pr f \theta' = 4Pr \xi \left[f' \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \theta' \frac{\partial f}{\partial \xi} \right], \quad (4.38)$$

Com as seguintes condições de contorno

$$\begin{aligned} f(\xi, 0) &= 0 & ; & & f'(\xi, 0) &= 0 \\ \theta(\xi, 0) &= \theta_{w1} & , & & 0 \leq \xi \leq \xi_0 \\ & \theta_{w2} & , & & \xi_0 < \xi \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} f'(\xi, \eta) = 0 \quad ; \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} \theta(\xi, \eta) = 0$$

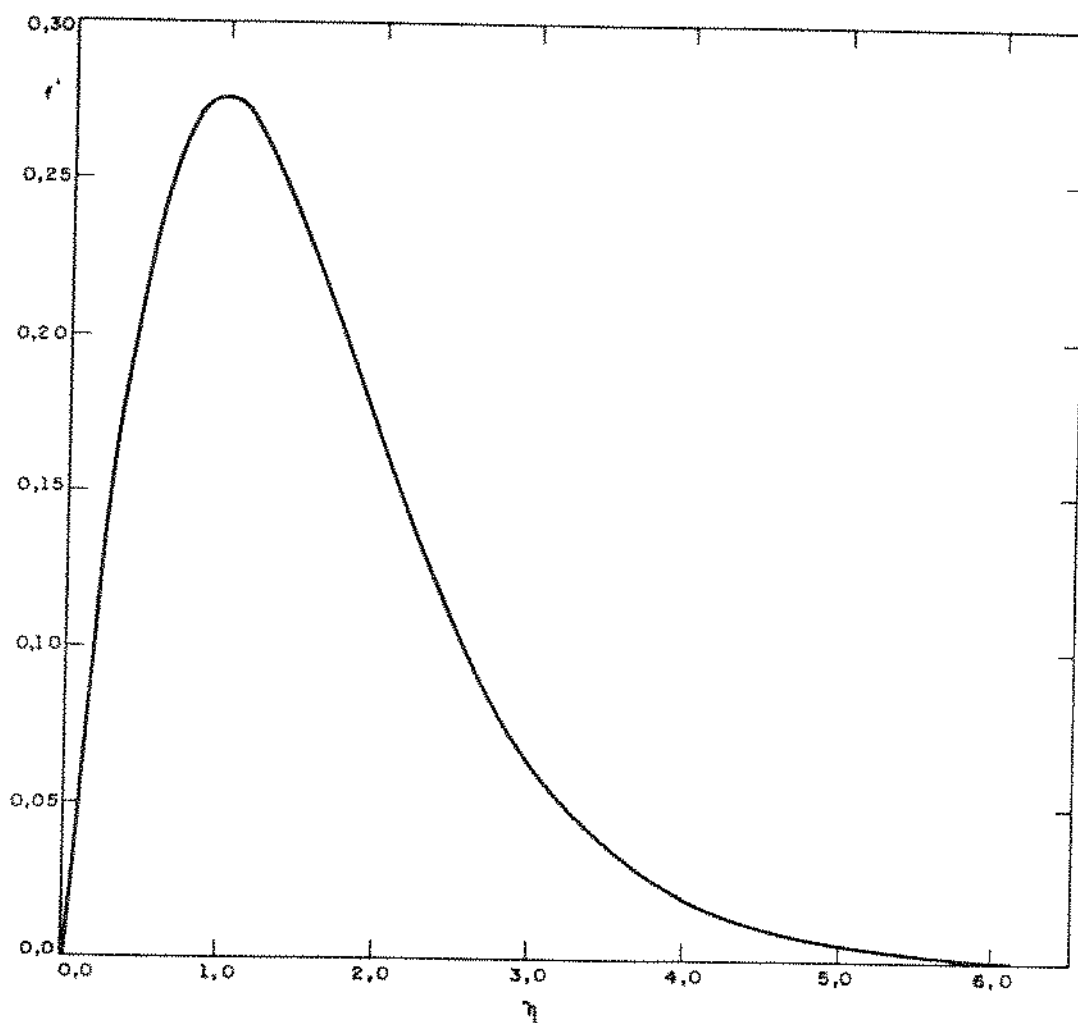


Figura 4.20 - Perfil adimensional de velocidade para $Pr = 0,72$

As Figuras 4.21 a 4.23 apresentam os perfis adimensionais de temperaturas para as relações $\frac{\theta_{w2}}{\theta_{w1}} = 0,000; 0,503$ e $0,820$ comparados com valores experimentais [8]. Os resultados foram obtidos, considerando-se $\xi_0 = 1$.

De fato isso pode ser feito sem perda de generalidade. Supondo-se que L seja o comprimento da placa mantido a T_{w1} e como para esse problema $\Omega = 0$, pode-se definir:

$$\xi = \frac{\bar{\xi}}{L} \quad (4.40)$$

Associando-se a $\bar{\xi}_0$ o valor L:

$$\xi_0 = \frac{L}{L} = 1 \quad (4.41)$$

Agora, observando o formato das equações (4.37) e (4.38), pode-se concluir que a substituição de (4.40) nestas equações não causa variação em seu formato, pois L é uma constante.

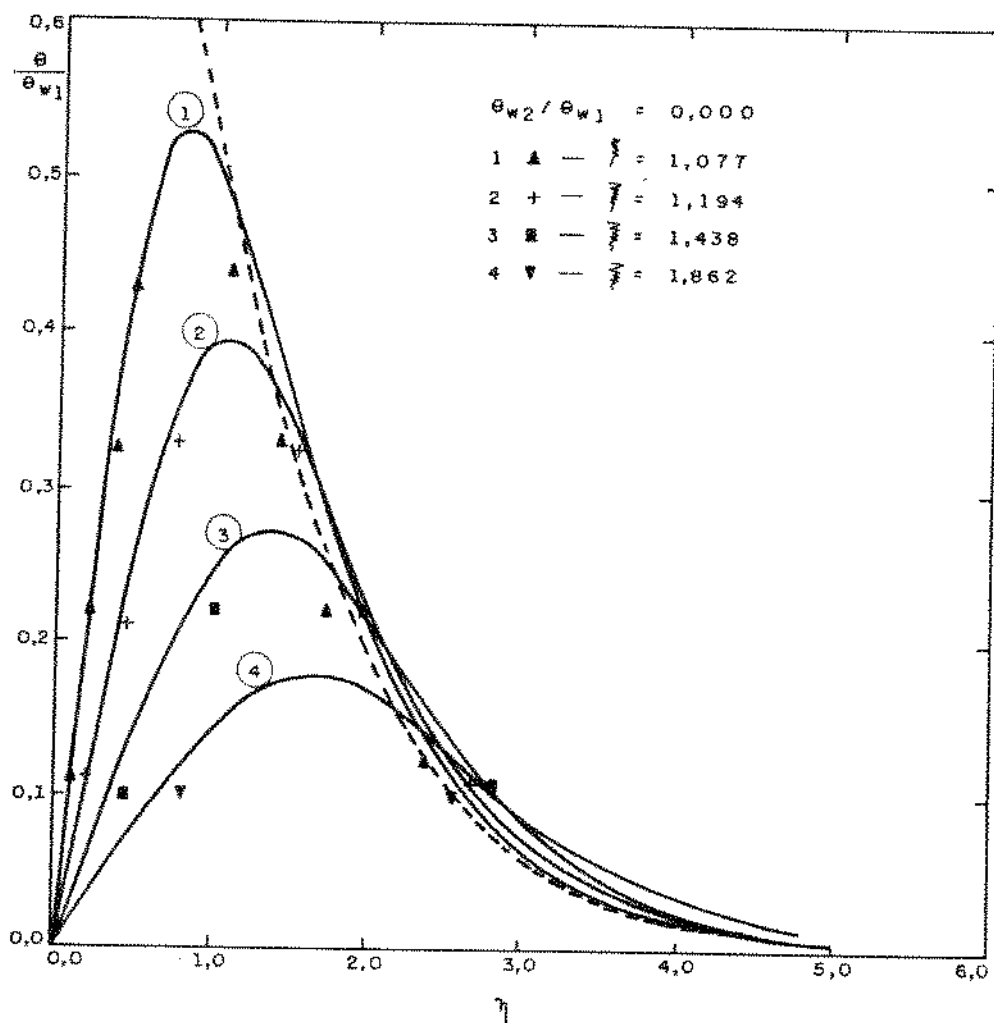


Figura 4.21 - Perfil adimensional de temperatura para $\theta_{w2}/\theta_{w1} = 0,0$, $Pr = 0,72$

A diferença entre os valores teóricos e experimentais se deve, em grande parte, a erros experimentais. Também, deve-se levar em conta que a condução de calor pela placa faz com que $\frac{\partial \theta(\xi, 0)}{\partial \eta}$ seja menor no experimento.

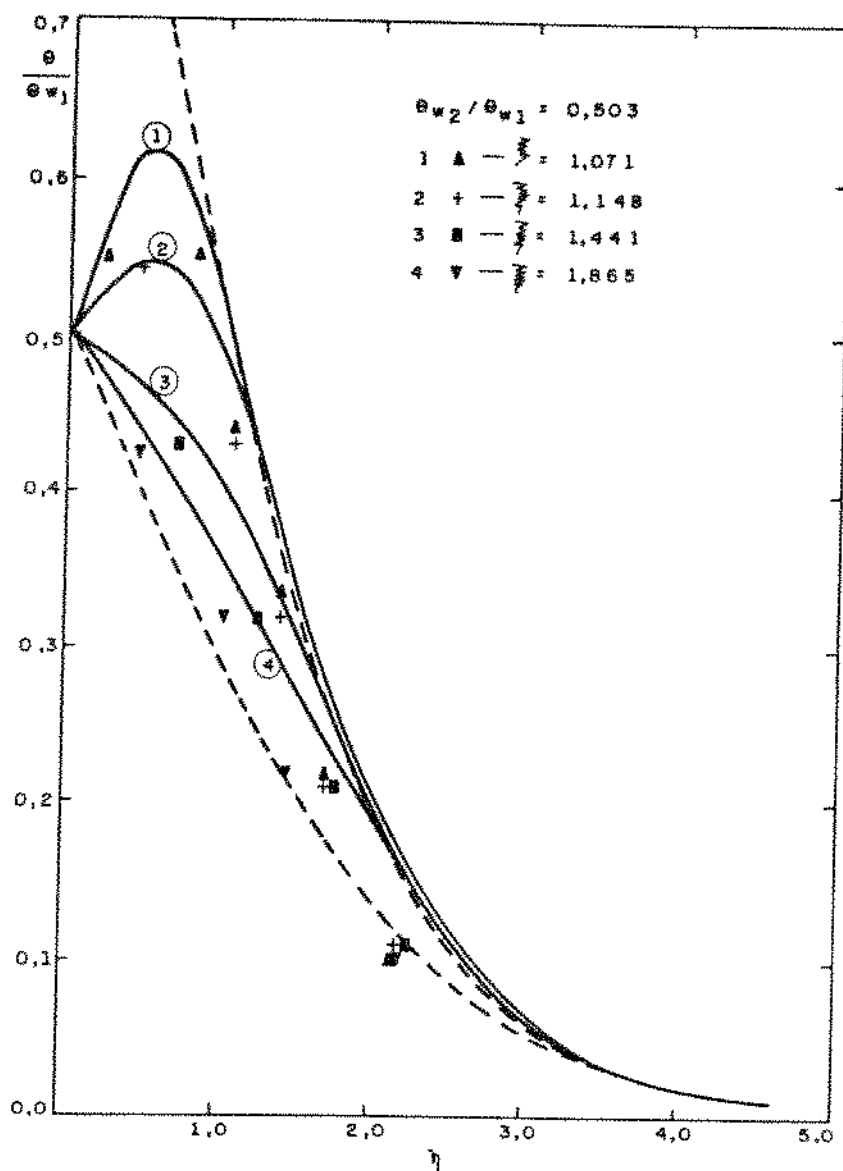


Figura 4.22 - Perfil adimensional de temperatura para $\theta_{w2}/\theta_{w1} = 0,503$, $Pr = 0,72$

Nas Figuras 4.21 a 4.23, nota-se a presença da linha tracejada, a qual indica os perfis assintóticos que os perfis adimensionais de temperaturas tenderiam a atingir. Como se pode observar, tem-se a relação ($\theta_{w2}/\theta_{w1} < 1,0$ para os três casos, significando que o trecho superior da placa está a uma temperatura menor do que a do inferior. Assim, pontos ξ próximos à descontinuidade tenderiam a atingir o perfil relativo ao existente em $\xi \leq \xi_0$, ou seja, o relativo à Figura 4.19. O perfil assintótico para $\xi > \xi_0$ seria obtido considerando toda a placa à temperatura T_{w2} . Isso implicaria em se fazer $F(x) = T_{w2} - T_\infty$.

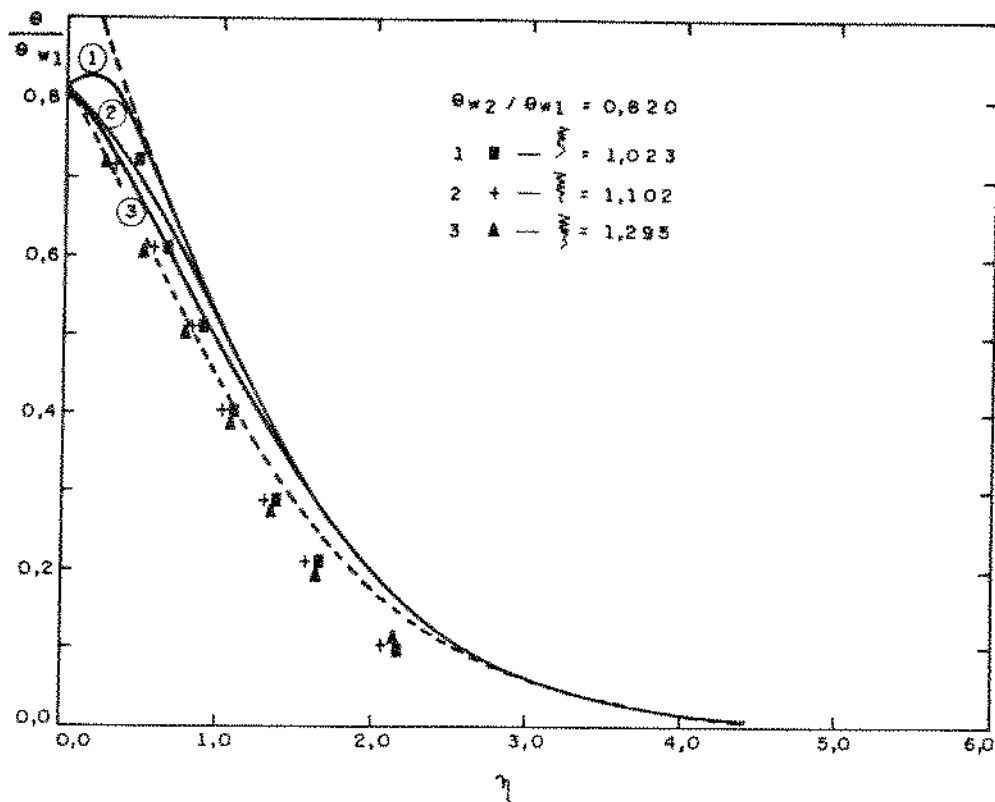


Figura 4.23 - Perfil adimensional de temperatura para $\theta_{w2}/\theta_{w1} = 0,820$, $Pr = 0,72$

A relação entre as variáveis definidas dessa forma e as da formulação atual seria:

$$\eta = \left(\frac{T_{w1} - T_{\infty}}{T_{w2} - T_{\infty}} \right)^{1/4} \eta_2 \quad (4.42)$$

$$f' = \left(\frac{T_{w2} - T_{\infty}}{T_{w1} - T_{\infty}} \right)^{1/2} f'_2 \quad (4.43)$$

$$\theta = \left(\frac{T_{w2} - T_{\infty}}{T_{w1} - T_{\infty}} \right) \theta_2 , \quad (4.44)$$

onde o índice "2" indica as variáveis obtidas considerando-se $F(x) = T_{w2} - T_{\infty}$.

Como comentado anteriormente, uma posição suficientemente longe da descontinuidade implicaria em condições de fluxo próximas àquelas que existiriam se toda a placa fosse mantida à T_{w2} . Pode-se também determinar nessas figuras as posições ao longo da altura nas quais a placa está recebendo calor do escoamento de ar próximo a parede, devido a este estar com temperatura superior à da placa.

A Figura 4.24 mostra o perfil adimensional de velocidades para $\theta_{w2}/\theta_{w1} = 0,50251$. Pode-se notar que os pontos estão em boa concordância com os resultados obtidos por Hayday [9].

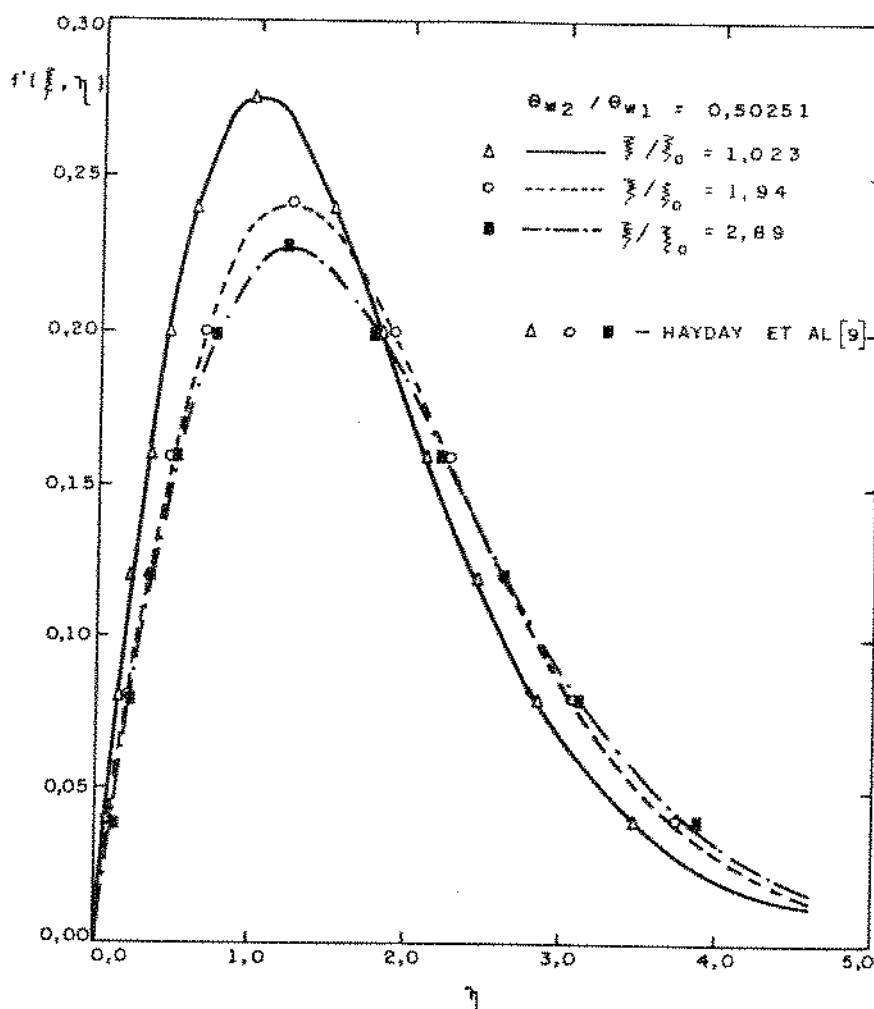


Figura 4.24 - Perfil adimensional de velocidade para $\theta_{w2}/\theta_{w1} = 0,50251$, $Pr = 0,72$

Na Figura 4.25 tem-se o gráfico de q_w/q_{w1} em função de ξ/ξ_0 , onde q_w representa o fluxo de calor na posição $\xi_n > \xi_0$ e q_{w1} o fluxo de calor que existiria se a placa fosse mantida a T_{w1} até o ponto ξ_n . Os pontos nos quais $q_w/q_{w1} = 0$ representam a condição na qual não há fluxo de calor através da parede da placa, caracterizando a posição onde ocorre reversão no sentido do fluxo de calor. Assim, por exemplo, para $\theta_{w2}/\theta_{w1} = 0,503$, uma posição compreendida entre $1,0 \leq \xi/\xi_0 \leq 1,25$ caracteriza uma região na qual a placa está recebendo calor, sendo a região acima de $\xi/\xi_0 = 1,25$ aquela na qual a placa está cedendo calor.

Pode-se notar ainda que os resultados obtidos estão em boa concordância com os pontos experimentais, principalmente para os valores de θ_{w2}/θ_{w1} compreendidos entre 0,503 e 1,25.

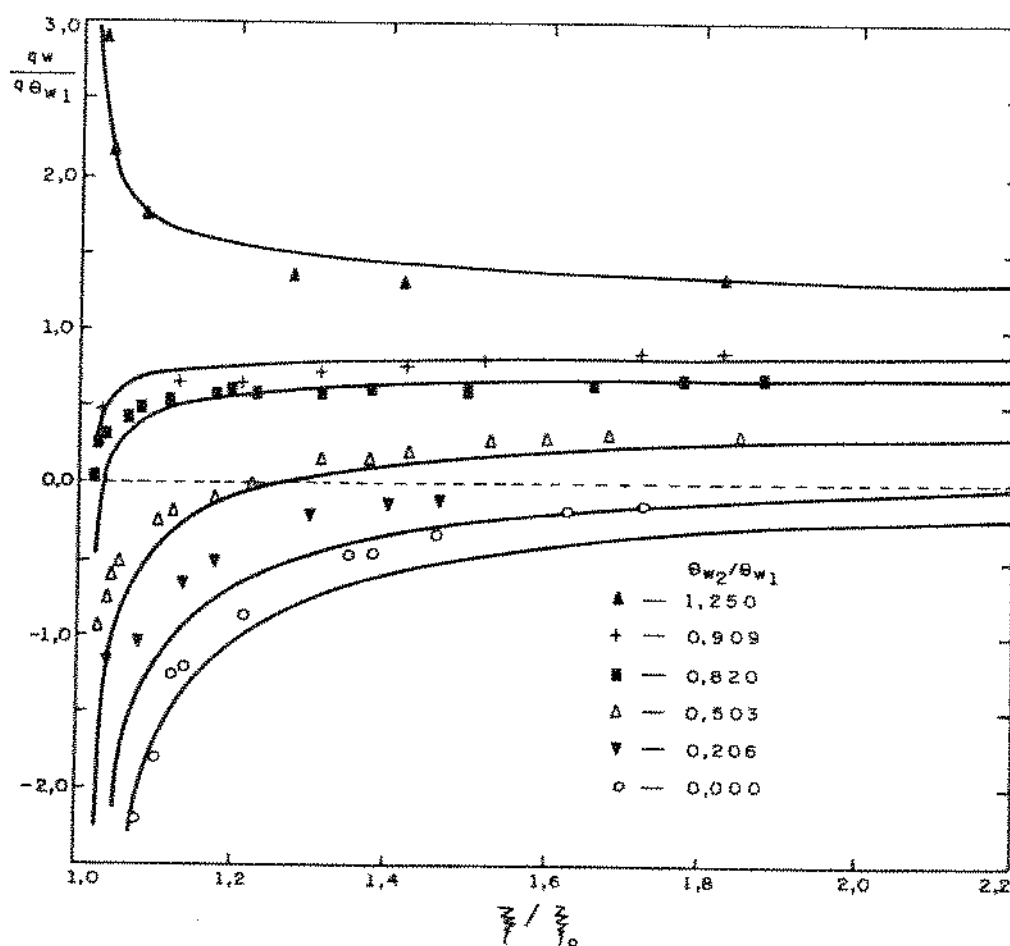


Figura 4.25 - Variação de q_w/q_{w1} em função de ξ/ξ_0 para $Pr = 0,72$

4.3.2 Descontinuidade de Temperaturas - Vários Degraus de Temperatura

A distribuição de temperaturas em degraus é uma expansão de uma descontinuidade de temperaturas para várias descontinuidades. Não há trabalhos publicados sobre o assunto e o mesmo é de interesse em problemas modelados correspondentemente, como o de uma parede vertical com faixas de temperatura de parede constante. A formulação usada neste problema é a mesma da secção anterior; nas condições de contorno (4.39) para $\theta(\xi, 0)$ tem-se, no entanto, que:

$$\begin{aligned} \theta(\xi, 0) &= \theta_{w1} \quad , \quad 0 \leq \xi \leq \xi_0 \\ &\theta_{w2} \quad , \quad \xi_0 < \xi \leq \xi_1 \\ &\vdots \\ &\theta_{wn} \quad , \quad \xi_{n-2} < \xi \leq \xi_{n-1} \end{aligned} \quad (4.45)$$

Neste trabalho a análise foi feita para três degraus de temperatura, conforme a Figura 4.26; casos com mais de graus seriam resolvidos igualmente.

A Figura 4.27 traz o gráfico de $q_w/q_{\theta_{w1}}$ em função de ξ/ξ_0 para a condição:

$$\begin{aligned} \frac{\theta_{w2}}{\theta_{w1}} &= 1,25 \quad ; \\ \frac{\theta_{w3}}{\theta_{w1}} &= 0,75 \quad e \\ \frac{\theta_{w4}}{\theta_{w1}} &= 0,50 \end{aligned} \quad (4.46)$$

ou seja, a região "2" estaria com uma temperatura superior à região "1" e as regiões "3" e "4" com uma temperatura inferior e decrescente.

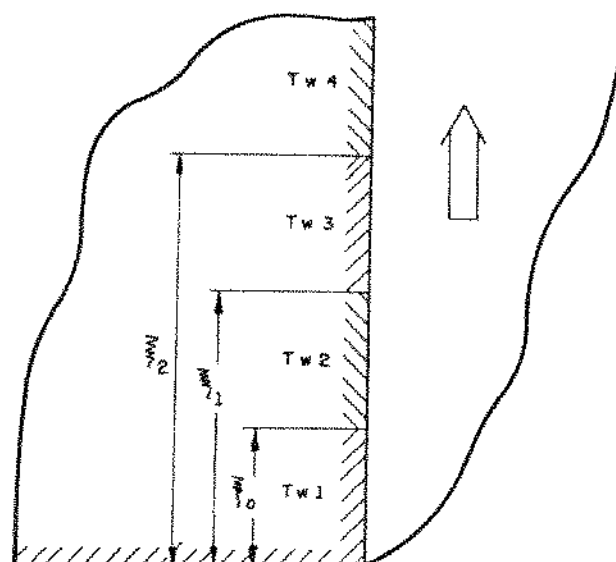


Figura 4.26 - Placa plana vertical com distribuição de temperatura em degraus

Como se pode observar, na região "3" os pontos com preendidos entre $2,00 < \xi/\xi_0 < 2,25$ e entre $3,0 < \xi/\xi_0 < 3,53$ na região "4" caracterizam uma situação na qual a parede da placa está recebendo calor do ar próximo a esta. Isso também pode ser observado e explicado pela análise da Figura 4.28, onde as curvas de $\theta(\xi, \eta)$ para $\xi/\xi_0 = 2,025$ e $\xi/\xi_0 = 3,025$ indicam uma temperatura do ar adjacente superior à temperatura da parede da placa. Os pontos acima destas regiões passam então a ceder calor, como pode ser observado nas duas figuras. A Figura 4.29 mostra o perfil adimensional de velocidades para este caso, podendo-se observar que o mesmo não apresenta muita variação em seu formato, como no caso da Figura 4.28.

Uma situação oposta à esta está representada na Figura 4.30, onde:

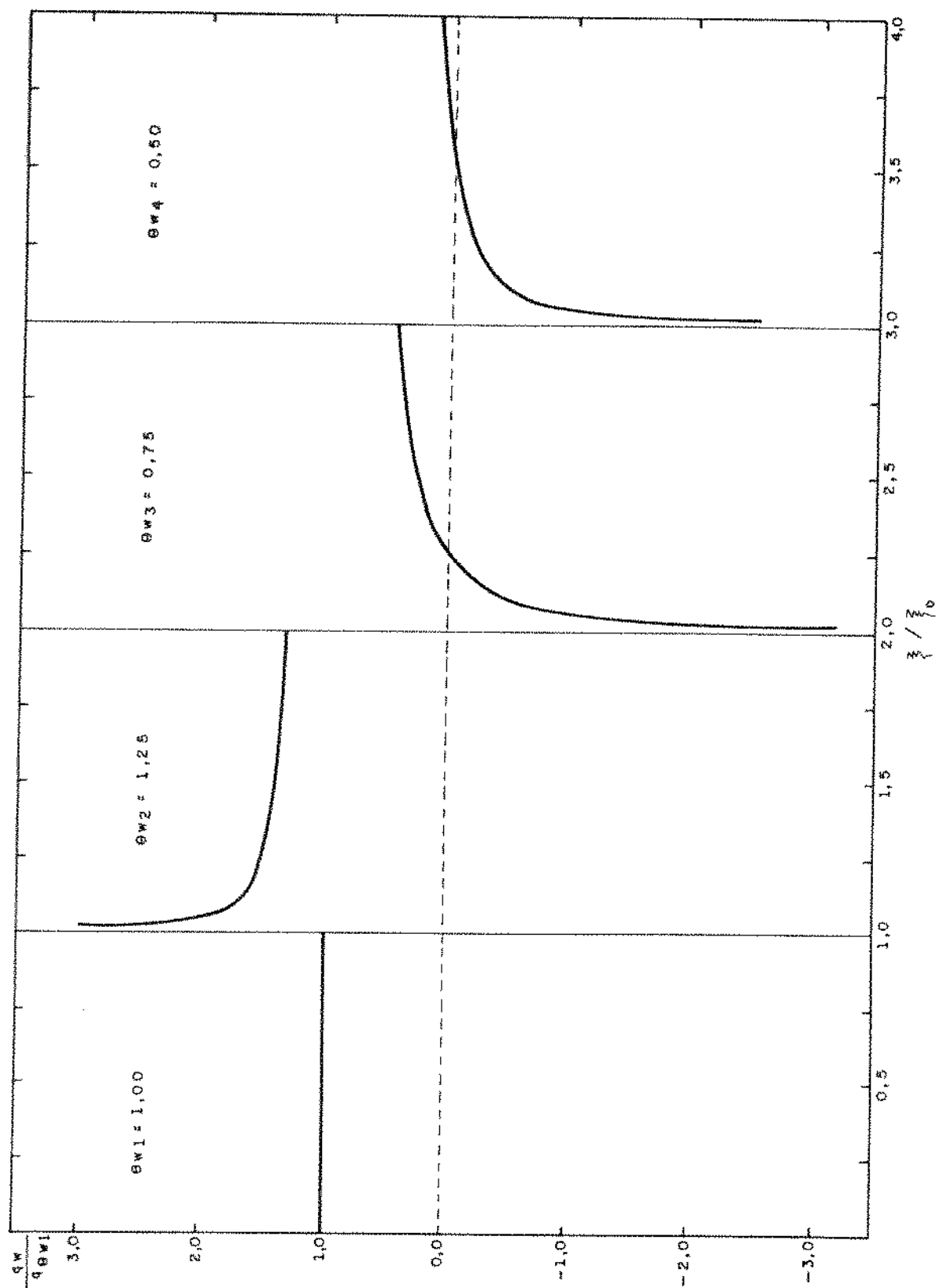


Figura 4.27 - Variação de q_w/q_{w1} em função de ξ/ξ_0 para $\theta_{w2} = 1,25$, $\theta_{w3} = 0,75$, $\theta_{w4} = 0,50$, $Pr = 0,72$

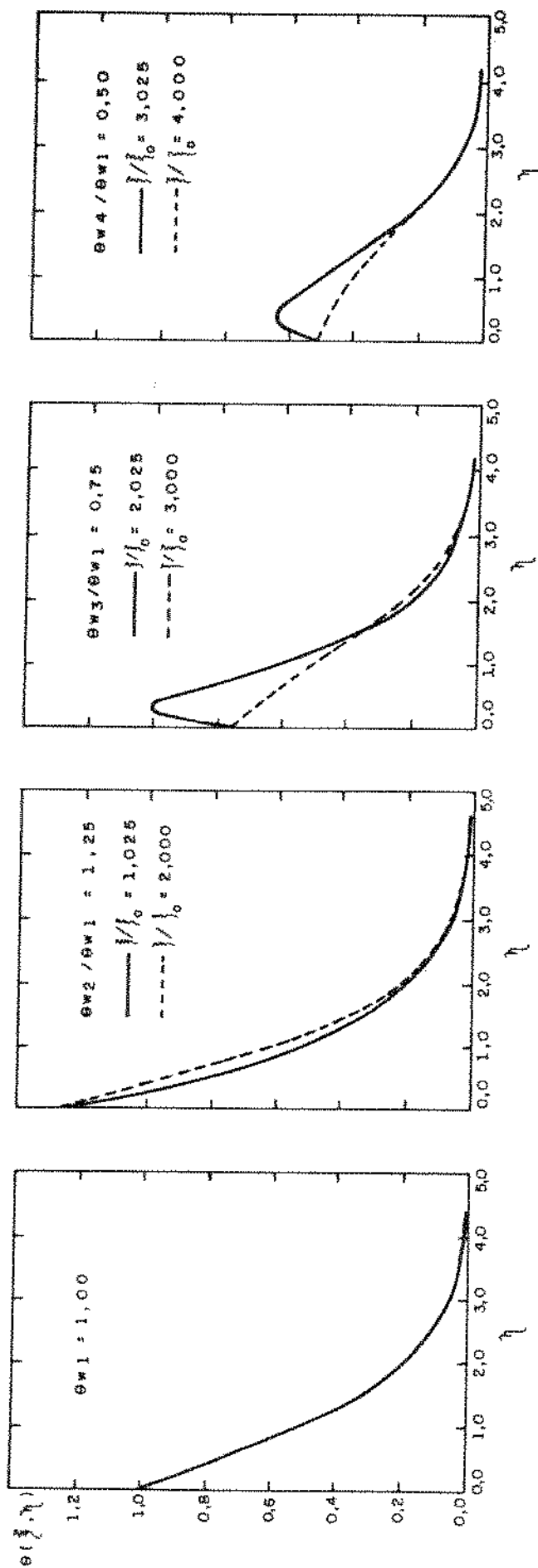


Figura 4.28 - Perfis adimensionais de temperatura para $\theta_{w2} = 1.25$, $\theta_{w3} = 0.75$, $\theta_{w4} = 0.50$, $\text{Pr} = 0.72$

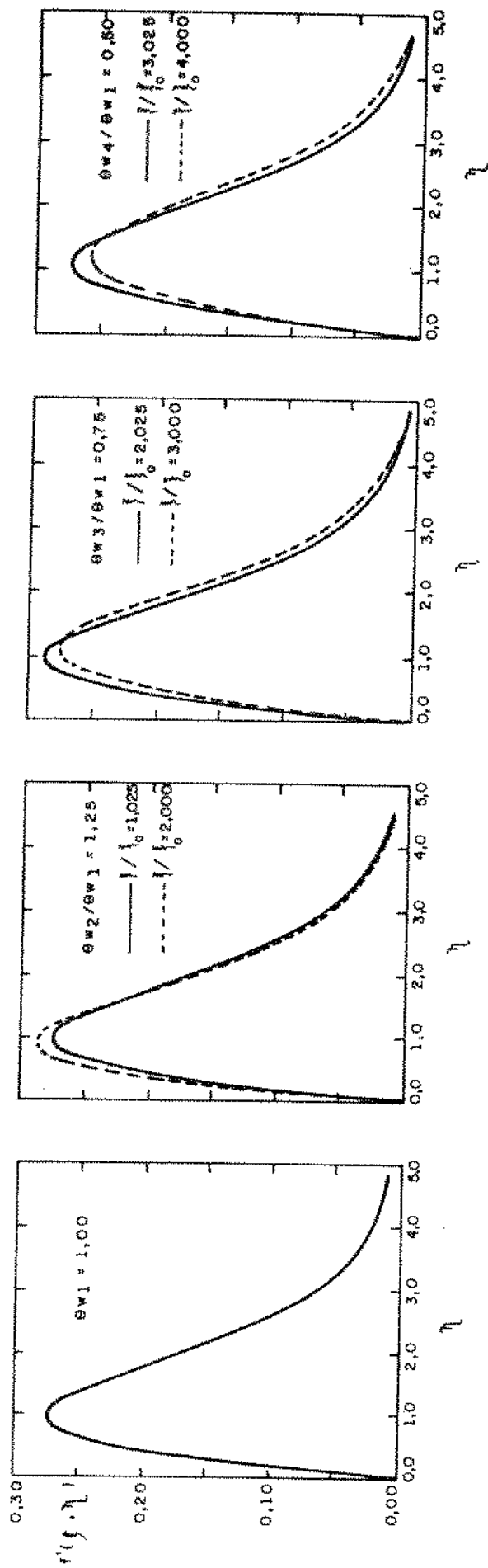


Figura 4.29 - Perfis adimensionais de velocidade para $\theta_{w_2} = 1,25$, $\theta_{w_3} = 0,75$, $\theta_{w_4} = 0,50$, $Pr = 0,72$

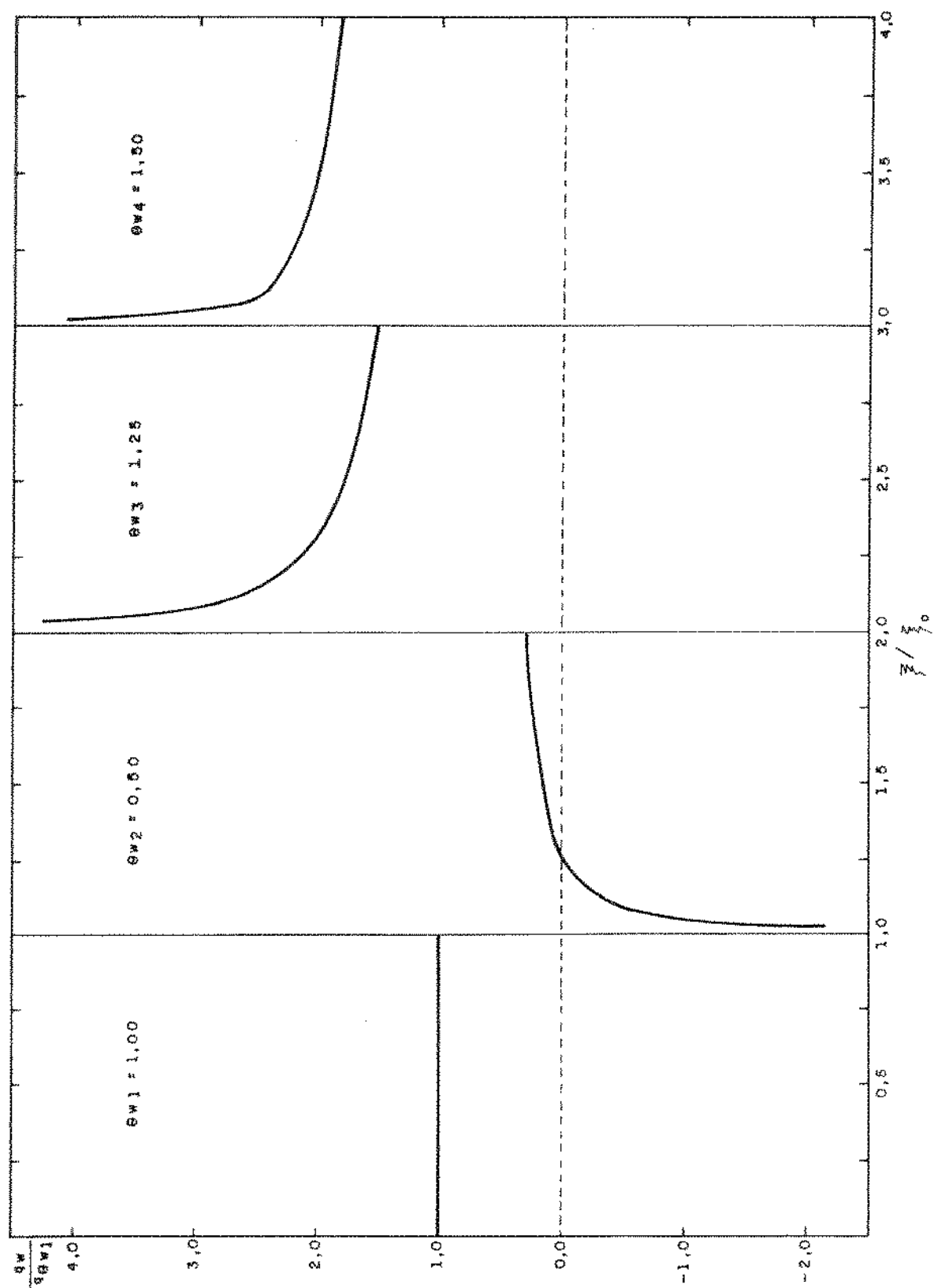


Figura 4.30 - Variação de q_w/q_{w1} em função de z/z_0 para $\theta_{w2} = 0,50$, $\theta_{w3} = 1,25$, $\theta_{w4} = 1,50$, $Pr = 0,72$

$$\frac{\theta_{w2}}{\theta_{w1}} = 0,50 \ ;$$

$$\frac{\theta_{w3}}{\theta_{w1}} = 1,25 \quad e \quad (4.47)$$

$$\frac{\theta_{w4}}{\theta_{w1}} = 1,50 \ .$$

Como era de se esperar, somente a região "2" apresenta o fenômeno da reversão no sentido do fluxo de calor na parede, que ocorre em torno do ponto $\xi/\xi_0 = 1,27$. Como a região "4" possui uma temperatura maior do que a região "3" nota-se que esta região apresenta valores de $q_w/q_{\theta_{w1}}$ superiores aos valores relativos à região "3". A Figura 4.31 apresenta o perfil adimensional de temperaturas, enquanto a Figura 4.32 mostra o perfil adimensional de velocidades. Pode-se notar nestas figuras o efeito causado pela presença das discontinuidades, ou seja, a tendência das curvas se aproximarem dos perfis assintóticos comentados anteriormente.

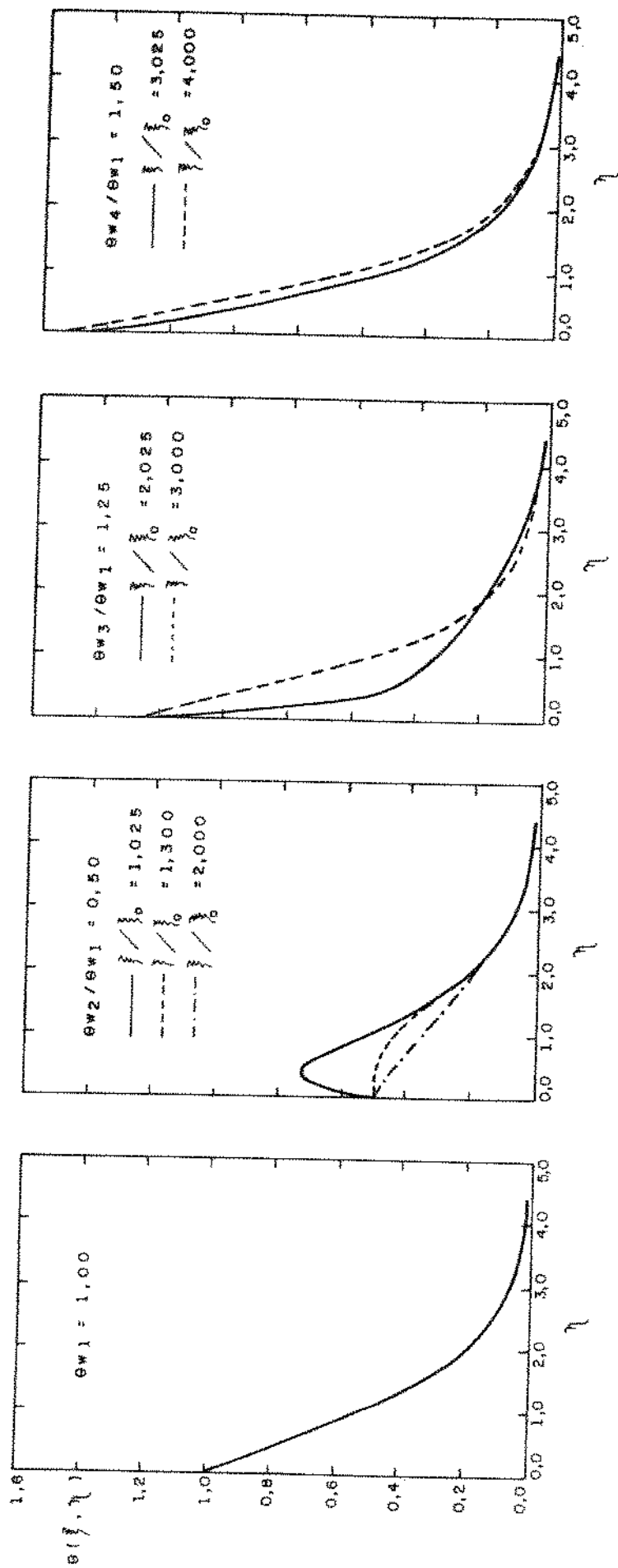


Figura 4.31 - Perfis adimensionais de temperatura para $\theta_{w2} = 0.50$, $\theta_{w3} = 1.25$, $\theta_{w4} = 1.50$, $Pr = 0.72$

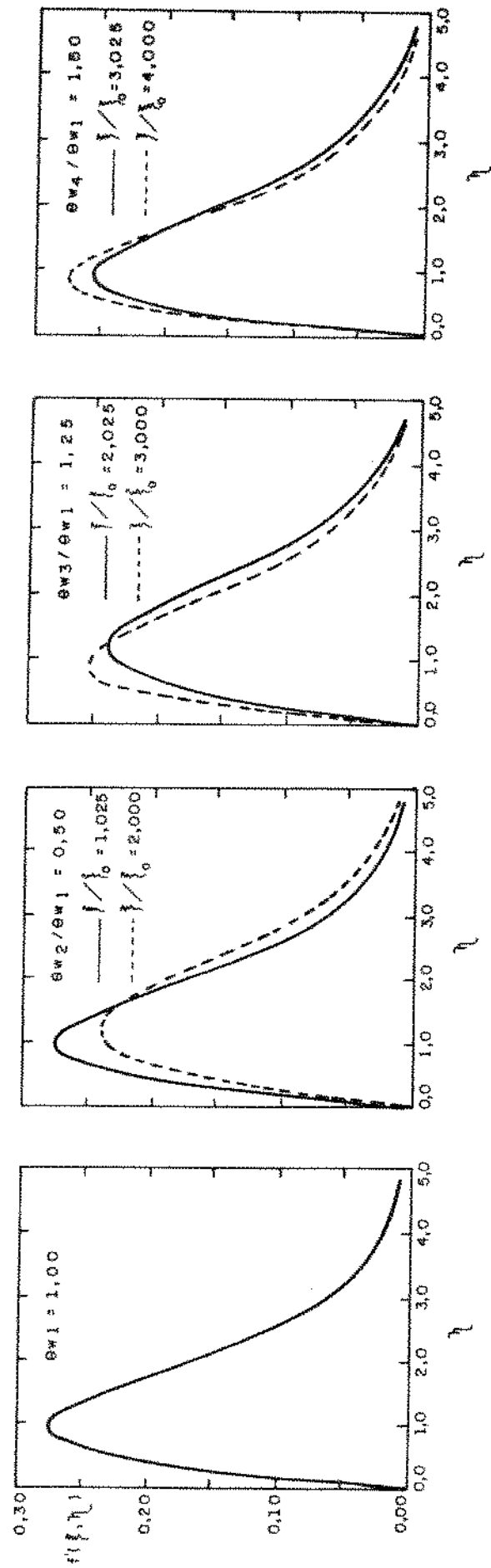


Figura 4.32 - Perfis adimensionais de velocidade para $\theta_{w2} = 0,50$, $\theta_{w3} = 1,25$, $\theta_{w4} = 1,50$, $Pr = 0,72$

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Neste trabalho estudou-se a convecção natural em placas planas verticais com distribuição de temperatura não uniforme ao longo de sua superfície. O método proposto para a solução do sistema de equações diferenciais parciais que descrevem o fenômeno, compreende:

- . Aproximação das derivadas parciais em relação a uma das variáveis independentes por diferenças finitas, transformando o sistema num sistema de equações diferenciais ordinárias, do tipo condição de contorno;
- . Integração numérica deste sistema pelo método de Adams-Moulton, que sendo um método que necessita de condições iniciais, requer um procedimento para a avaliação dos valores iniciais não conhecidos;
- . Correção dos valores iniciais admitidos pelo método de Nachtshein & Swigert, utilizando as condições de contorno especificadas.

Da análise dos resultados apresentada no capítulo anterior, pode-se concluir, de uma maneira geral, que eles estão em boa concordância com os trabalhos já publicados. A metodologia apresentada, no entanto, tem a vantagem de ser aplicável a problemas que possuem descontinuidades na função que descreve a distribuição de temperaturas e/ou em sua derivada, além de ser aplicável aos problemas que possuem função e derivadas contínuas.

Os resultados apresentados permitiram avaliar o comportamento do fluxo de calor através da parede da placa, tanto qualitativamente, ou seja, analisar questões como o senti

do do fluxo, perfis de velocidade e de temperatura, existência ou não de regiões de reversão no sentido do fluxo, etc., como quantitativamente.

Problemas semelhantes ao apresentado na secção 4.2.3, ou seja, que possuem singularidades, devem ser analisados primeiramente antes de se fazer a integração, determinando-se os limites para os valores da variável independente ou então os valores máximos que estas deverão atingir em função do interesse específico de cada problema. A omissão desta análise pode trazer consequências numéricas indesejáveis.

Os problemas estudados nas secções 4.2 e 4.3.2 ainda não foram tratados na literatura. Como os resultados apresentados em outras secções estão em boa concordância com os trabalhos já publicados, pode-se concluir que os resultados correspondentes seguem a precisão do método proposto, ficando a sugestão de uma possível comprovação experimental.

Com relação ao tempo de computação necessário à solução completa do problema, deve-se levar em conta a precisão desejada e a capacidade do método resolver o tipo de problema em interesse. A metodologia de escolha das estimativas iniciais apresentado na secção 3 requer um certo tempo de computação mas, no entanto, torna o método capaz de resolver problemas mais gerais.

Problemas com condições de contorno que envolvem fluxo de calor ao invés de temperatura podem ser igualmente tratados, sendo que para tanto deve-se fazer a seguinte mudança na definição de $F(x)$, conforme [18]:

$$F(x) = Q^{2/3} \cdot \left[\frac{5}{6} \int_0^x Q^{2/3} dx \right]^{1/5} \quad (5.1)$$

onde:

$$Q = \frac{q_w(x)}{C_1 \cdot K} \quad e$$

$q_w(x)$ $\equiv$ fluxo de calor na superfície da placa.

Assim, as estimativas iniciais necessárias seriam as de $\theta(\xi,0)$ e de $f''(\xi,0)$ e os incrementos necessários para a correção dessas estimativas seriam os de $\Delta\theta(\xi,0)$ e de $\Delta f''(\xi,0)$.

ANEXO 1

TRANSFORMAÇÃO DE VARIÁVEIS NAS EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS

Sabendo que:

$$\xi = \int_0^x F(x) \, dx \quad \therefore \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = F(x)$$

$$\eta = C_1 F(x)^{1/2} \frac{y}{\xi^{1/4}} \quad \therefore \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{C_1 F(x)^{1/2}}{\xi^{1/4}}$$

$$F(x) = T_w(x) - T_\infty \quad \therefore \quad \frac{\partial F(x)}{\partial x} = \frac{dF(x)}{dx}$$

$$C_1 = \left(\frac{g\beta}{4\nu^2} \right)^{1/4}$$

De (2.53) e (2.54), tem-se que:

$$\psi(x,y) = \frac{4 C_1 \nu \xi^{3/4} f(\xi,\eta)}{F(x)^{1/2}}$$

$$T(x,y) = F(x) \cdot \theta(\xi,\eta) + T_\infty$$

Com isso em mente e lembrando que:

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} \overset{0}{=} \frac{\partial}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

pois x é independente de y , tem-se que:

a) Equação da Quantidade de Movimento (2.47):

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = g \beta F(x) \theta + \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{4 C_1 \nu \xi^{3/4}}{F(x)^{1/2}} \frac{\partial f}{\partial \eta} \cdot C_1 \cdot F(x)^{1/2} \xi^{-1/4} = 4 C_1^2 \nu \xi^{1/2} \frac{\partial f}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(4 C_1^2 \nu \xi^{1/2} \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) = 4 C_1^2 \nu \left(\xi^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \right.$$

$$\left. + \frac{\partial f}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial (\xi^{1/2})}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) = 4 C_1^2 \nu \left(\xi^{1/2} \cdot F(x) \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \xi^{-1/2} F(x) \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 4 C_1 \nu \frac{\partial}{\partial x} \left(\xi^{3/4} \cdot f \cdot F(x)^{-1/2} \right) = 4 C_1 \nu \left[\xi^{3/4} \cdot f \cdot \left(-\frac{1}{2} F(x)^{-3/2} \frac{dF(x)}{dx} \right. \right.$$

$$\left. + \xi^{3/4} \cdot F(x)^{-1/2} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + f \cdot F(x)^{-1/2} \cdot \left(\frac{\partial (\xi^{3/4})}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \right]$$

$$= 4 C_1 \nu \cdot \left(-\frac{1}{2} F(x)^{-3/2} \cdot f \cdot \xi^{3/4} \frac{dF(x)}{dx} + F(x)^{-1/2} \cdot \xi^{3/4} \cdot \frac{\partial f}{\partial \xi} \right.$$

$$\left. + \frac{3}{4} \cdot F(x)^{1/2} \cdot f \cdot \xi^{-1/4} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} = 4 C_1^2 \nu \xi^{1/2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \cdot C_1 \cdot F(x) \cdot \xi^{-1/4}$$

$$= 4 C_1^3 \nu F(x) \xi^{1/4} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} = 4 C_1^3 \nu F(x) \xi^{1/4} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \cdot C_1 \cdot F(x) \cdot \xi^{-1/4}$$

$$= 4 C_1^4 \nu F(x) \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3}$$

Substituindo os termos na equação, tem-se:

$$4 C_1^2 \nu \xi^{1/2} \frac{\partial f}{\partial \eta} \cdot 4 C_1^2 \nu \cdot (\xi^{1/2} F(x) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{2} \xi^{-1/2} \frac{\partial f}{\partial \eta} \cdot F(x))$$

$$- 4 C_1 \nu \left(-\frac{1}{2} F(x)^{-3/2} f \xi^{3/4} \frac{dF(x)}{dx} + F(x)^{1/2} \xi^{3/4} \frac{\partial f}{\partial \xi} \right.$$

$$\left. + \frac{3}{4} F(x)^{1/2} f \xi^{-1/4} \right) \cdot 4 \cdot C_1^3 \nu F(x) \xi^{1/4} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}$$

$$= g \beta F(x) \theta + 4 C_1^4 \nu^2 F(x) \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3}$$

Dividindo os termos por $(4 C_1^4 \nu^2 F(x))$, resulta:

$$4 \xi \frac{\partial f}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right) + 2 \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + 2 \frac{\xi}{F(x)} \frac{dF(x)}{dx} f \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}$$

$$- 4 \xi \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \frac{\partial f}{\partial \xi} - 3 f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = \frac{g \beta}{4 C_1^4 \nu^2} \theta + \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3}$$

Chamando

$$\Omega = \frac{\xi}{F(x)} \frac{dF(x)}{dx}$$

e lembrando que

$$\frac{g \beta}{4 C_1^4 v^2} = \frac{g \beta}{4 \left(\frac{g \beta}{4 v^2} \right) v^2} = 1$$

tem-se, reagrupando os termos, que:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + (3 - 2\Omega) f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - 2 \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + \theta$$

$$= 4 \xi \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \frac{\partial f}{\partial \xi} \right)$$

b) **Equação da Energia:**

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\theta \cdot F(x) + T_\infty) = F(x) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \theta \cdot \frac{dF(x)}{dx}$$

$$= F(x)^2 \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \theta \frac{dF(x)}{dx}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (\theta \cdot F(x) + T_\infty) = \frac{\partial}{\partial \eta} (\theta \cdot F(x) + T_\infty) \frac{\partial \eta}{\partial y} =$$

$$= F(x) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \cdot C_1 \cdot F(x)^{-1/2} \cdot \xi^{1/4} = F(x)^{3/2} C_1 \xi^{-1/4} \frac{\partial \theta}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(F(x)^{3/2} C_1 \xi^{-1/4} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) \cdot C_1 F(x)^{1/2} \xi^{-1/4}$$

$$= F(x)^2 \cdot C_1^2 \cdot \xi^{-1/2} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2}$$

Substituindo os termos na equação:

$$4 C_1^2 \nu \xi^{1/2} \frac{\partial f}{\partial \eta} \cdot \left(F(x)^2 \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \theta \frac{dF(x)}{dx} \right) - 4 C_1 \nu \left(-\frac{1}{2} F(x) f \xi^{-3/2} \frac{dF(x)}{dx} \right.$$

$$\left. + F(x)^{1/2} \xi^{3/4} \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{3}{4} F(x)^{1/2} \xi^{-1/4} f \right) \cdot F(x)^{3/2} C_1 \xi^{-1/4} \frac{\partial \theta}{\partial \eta}$$

$$= \alpha \cdot F(x) \cdot C_1^2 \cdot \xi^{-1/2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2}$$

Dividindo por $(F(x)^2 \cdot C_1^2 \cdot \xi^{-1/2} \cdot \nu)$ e lembrando que:

$$\alpha = \frac{\nu}{Pr}$$

tem-se que:

$$4 \xi \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + 4 \frac{\xi}{F(x)^2} \frac{dF(x)}{dx} \theta \frac{\partial f}{\partial \eta} + 2 \frac{\xi}{F(x)^2} \frac{dF(x)}{dx} f \frac{\partial \theta}{\partial \eta}$$

$$- 4 \xi \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial f}{\partial \xi} - 3 f \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2}$$

Como $\Omega = \frac{\xi}{F(x)} \frac{dF(x)}{dx}$, reagrupando os termos vem:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + (3 - 2\Omega) \text{Pr} f \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - 4 \text{Pr} \Omega \theta \frac{\partial f}{\partial \eta}$$

$$= 4 \xi \text{Pr} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial f}{\partial \xi} \right)$$

ANEXO 2MÉTODO DE ADAMS-MOULTON

O método de Adams-Moulton consiste na integração de uma dada função num ponto escolhido, fornecendo uma estimativa ou predição dos valores desejados. De posse desses valores é feita uma avaliação da derivada desta função neste ponto, a qual é aplicada para obter os valores corrigidos da predição. O método é, por isso, classificado como sendo do tipo preditor-corretor e sua fórmula básica é:

$$\bar{y}_{i+1}^P = \bar{y}_i + \frac{h}{24} \left[55 f_i^* - 59 f_{i-1}^* + 37 f_{i-2}^* - 9 f_{i-3}^* \right]$$

$$\bar{y}_{i+1}^C = \bar{y}_i + \frac{h}{24} \left[9 f(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1}^P) + 19 f_i^* - 5 f_{i-1}^* + f_{i-2}^* \right]$$

onde:

$h \equiv$ passo de integração ou incremento, e

$$f^* = \bar{y}',$$

O erro associado a esta fórmula é dado por:

$$E_m = - \frac{19}{720} \cdot h^5 \cdot \bar{y}^{(5)}(\lambda),$$

onde

$$x_{n-2} \leq \lambda \leq x_{n+1}.$$

Com o novo valor $\bar{y}_{i+1}^C$, é feita uma nova avaliação da derivada e a função é novamente integrada até que:

$$\left[\frac{(\bar{y}_{i+1})_{j+1}^C - (\bar{y}_{i+1})_j^C}{(\bar{y}_{i+1})_j^C} \right] < \epsilon_r$$

onde

$j \equiv j$ -ésima iteração e

$\epsilon_r \equiv$ erro relativo.

Como se vê, o método não é auto-inicializado, pois envolve a avaliação da derivada no ponto $(i-3)$. Assim, para os três primeiros pontos, deve-se usar um outro método de integração, que seja auto-inicializado como, por exemplo, o método de Runge-Kutta de 4ª ordem, o qual foi utilizado neste trabalho.

Sua fórmula básica é:

$$\bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + \frac{1}{6} \left[K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4 \right]$$

onde:

$$K_1 = h \cdot f^*(x_i ; \bar{y}_i) ;$$

$$K_2 = h \cdot f^*(x_i + h/2 ; \bar{y}_i + K_1/2) ;$$

$$K_3 = h \cdot f^*(x_i + h/2 ; \bar{y}_i + K_2/2) \text{ e}$$

$$K_4 = h \cdot f^*(x_i + h ; \bar{y}_i + K_3).$$

O erro associado a esta fórmula é da ordem de h^5 ; a extensão do método de Adams-Moulton para um sistema de equações é dada por:

$$\bar{y}_{i+1}^p = \bar{y}_i + \frac{h}{24} \left[55 f_i^* - 59 f_{i-1}^* + 37 f_{i-2}^* - 9 f_{i-3}^* \right]$$

$$\bar{z}_{i+1}^P = \bar{z}_i + \frac{h}{24} \left[55 g_i^* - 59 g_{i-1}^* + 37 g_{i-2}^* - 9 g_{i-3}^* \right]$$

$$\vdots$$

$$\bar{y}_{i+1}^C = \bar{y}_i + \frac{h}{24} \left[9 f(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1}^P, \bar{z}_{i+1}^P, \dots) + 19 f_i^* - 5 f_{i-1}^* + f_{i-2}^* \right]$$

$$\bar{z}_{i+1}^C = \bar{z}_i + \frac{h}{24} \left[9 g(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1}^P, \bar{z}_{i+1}^P, \dots) + 19 g_i^* - 5 g_{i-1}^* + g_{i-2}^* \right]$$

$$\vdots$$

O mesmo procedimento aplicado ao método de Runge - Kutta produz:

$$\bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + \frac{1}{6} \left[K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4 \right]$$

$$\bar{z}_{i+1} = \bar{z}_i + \frac{1}{6} \left[\ell_1 + 2\ell_2 + 2\ell_3 + \ell_4 \right]$$

$$\vdots$$

onde:

$$K_1 = h \cdot f^*(x_i ; \bar{y}_i) ;$$

$$\ell_1 = h \cdot g^*(x_i ; \bar{z}_i) ;$$

$$\vdots$$

$$K_2 = h \cdot f^*(x_i + h/2 ; \bar{y}_i + K_1/2) ;$$

$$\ell_2 = h \cdot g^*(x_i + h/2 ; \bar{z}_i + \ell_1/2) ;$$

$$\vdots$$

$$K_3 = h.f^*(x_1 + h/2 ; \hat{y}_1 + K_{2/2}) ;$$

$$\ell_3 = h.g^*(x_1 + h/2 ; \hat{z}_1 + \ell_{2/2}) ;$$

$\vdots$

$$K_4 = h.f^*(x_1 + h ; \hat{y}_1 + K_3) ;$$

$$\ell_4 = h.g^*(x_1 + h ; \hat{z}_1 + \ell_3) ;$$

$\vdots$

ANEXO 3MINIMIZAÇÃO DO ERRO E_n

O erro é dado por:

$$E_n = \left(\bar{f}'_n + \frac{\partial \bar{f}'_n}{\partial f''_0} \Delta f''_0 + \frac{\partial \bar{f}'_n}{\partial \theta'_0} \Delta \theta'_0 \right)^2 + \left(\bar{\theta}_n + \frac{\partial \bar{\theta}_n}{\partial f''_0} \Delta f''_0 + \frac{\partial \bar{\theta}_n}{\partial \theta'_0} \Delta \theta'_0 \right)^2$$

$$+ \left(\bar{f}''_n + \frac{\partial \bar{f}''_n}{\partial f''_0} \Delta f''_0 + \frac{\partial \bar{f}''_n}{\partial \theta'_0} \Delta \theta'_0 \right)^2 + \left(\bar{\theta}'_n + \frac{\partial \bar{\theta}'_n}{\partial f''_0} \Delta f''_0 + \frac{\partial \bar{\theta}'_n}{\partial \theta'_0} \Delta \theta'_0 \right)^2$$

Assim, desenvolvendo:

$$E_n = (\bar{f}'_n)^2 + 2 \bar{f}'_n \cdot \frac{\partial \bar{f}'_n}{\partial f''_0} \Delta f''_0 + 2 \bar{f}'_n \cdot \frac{\partial \bar{f}'_n}{\partial \theta'_0} \Delta \theta'_0 + \left(\frac{\partial \bar{f}'_n}{\partial f''_0} \right)^2 (\Delta f''_0)^2$$

$$+ 2 \frac{\partial \bar{f}'_n}{\partial f''_0} \cdot \frac{\partial \bar{f}'_n}{\partial \theta'_0} \Delta f''_0 \Delta \theta'_0 + \left(\frac{\partial \bar{f}'_n}{\partial \theta'_0} \right)^2 (\Delta \theta'_0)^2 + (\bar{\theta}_n)^2$$

$$+ 2 \bar{\theta}_n \cdot \frac{\partial \bar{\theta}_n}{\partial f''_0} \Delta f''_0 + 2 \bar{\theta}_n \cdot \frac{\partial \bar{\theta}_n}{\partial \theta'_0} \Delta \theta'_0 + \left(\frac{\partial \bar{\theta}_n}{\partial f''_0} \right)^2 (\Delta f''_0)^2$$

$$+ 2 \frac{\partial \bar{\theta}_n}{\partial f''_0} \cdot \frac{\partial \bar{\theta}_n}{\partial \theta'_0} \Delta f''_0 \Delta \theta'_0 + \left(\frac{\partial \bar{\theta}_n}{\partial \theta'_0} \right)^2 (\Delta \theta'_0)^2 + (\bar{f}''_n)^2$$

$$+ 2 \bar{f}''_n \frac{\partial \bar{f}''_n}{\partial f''_0} \Delta f''_0 + 2 \bar{f}''_n \cdot \frac{\partial \bar{f}''_n}{\partial \theta'_0} \Delta \theta'_0 + \left(\frac{\partial \bar{f}''_n}{\partial f''_0} \right)^2 (\Delta f''_0)^2$$

$$+ 2 \frac{\partial \bar{f}''_n}{\partial f''_0} \frac{\partial \bar{f}''_n}{\partial \theta'_0} \Delta f''_0 \Delta \theta'_0 + \left(\frac{\partial \bar{f}''_n}{\partial \theta'_0} \right)^2 (\Delta \theta'_0)^2 + (\bar{\theta}'_n)^2 + 2 \bar{\theta}'_n \frac{\partial \bar{\theta}'_n}{\partial f''_0} \Delta f''_0 +$$

$$+ 2 \bar{\theta}'_n \frac{\partial \bar{\theta}'_n}{\partial \theta'_0} \Delta \theta_0 + \left(\frac{\partial \bar{\theta}'_n}{\partial f''_0} \right)^2 (\Delta f''_0)^2 + 2 \frac{\partial \bar{\theta}'_n}{\partial f''_0} \frac{\partial \bar{\theta}'_n}{\partial \theta'_0} \Delta f''_0 \Delta \theta'_0 + \left(\frac{\partial \bar{\theta}'_n}{\partial \theta'_0} \right)^2 (\Delta \theta'_0)^2$$

Diferenciando E_n em relação à $\Delta f''_0$ e igualando a zero, tem-se que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_n}{\partial \Delta f''_0} = 0 = & 2 \bar{f}'_n \frac{\partial \bar{f}'_n}{\partial f''_0} + 2 \left(\frac{\partial \bar{f}'_n}{\partial f''_0} \right)^2 \Delta f''_0 + 2 \frac{\partial \bar{f}'_n}{\partial f''_0} \cdot \frac{\partial \bar{f}'_n}{\partial \theta'_0} \Delta \theta'_0 + 2 \bar{\theta}'_n \frac{\partial \bar{\theta}'_n}{\partial f''_0} \\ & + 2 \left(\frac{\partial \bar{\theta}'_n}{\partial f''_0} \right)^2 \Delta f''_0 + 2 \frac{\partial \bar{\theta}'_n}{\partial f''_0} \cdot \frac{\partial \bar{\theta}'_n}{\partial \theta'_0} \Delta \theta'_0 + 2 \bar{f}''_n \frac{\partial \bar{f}''_n}{\partial f''_0} + 2 \left(\frac{\partial \bar{f}''_n}{\partial f''_0} \right)^2 \Delta f''_0 \\ & + 2 \frac{\partial \bar{f}''_n}{\partial f''_0} \cdot \frac{\partial \bar{f}''_n}{\partial \theta'_0} \Delta \theta'_0 + 2 \bar{\theta}'_n \frac{\partial \bar{\theta}'_n}{\partial f''_0} + 2 \left(\frac{\partial \bar{\theta}'_n}{\partial f''_0} \right)^2 \Delta f''_0 + 2 \frac{\partial \bar{\theta}'_n}{\partial f''_0} \cdot \frac{\partial \bar{\theta}'_n}{\partial \theta'_0} \Delta \theta'_0 \end{aligned}$$

Reagrupando os termos, resulta:

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{\partial \bar{f}'_n}{\partial f''_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\theta}'_n}{\partial f''_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{f}''_n}{\partial f''_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\theta}'_n}{\partial f''_0} \right)^2 \right] \Delta f''_0 \\ & + \left[\left(\frac{\partial \bar{f}'_n}{\partial f''_0} \cdot \frac{\partial \bar{f}'_n}{\partial \theta'_0} \right) + \left(\frac{\partial \bar{\theta}'_n}{\partial f''_0} \cdot \frac{\partial \bar{\theta}'_n}{\partial \theta'_0} \right) + \left(\frac{\partial \bar{f}''_n}{\partial f''_0} \cdot \frac{\partial \bar{f}''_n}{\partial \theta'_0} \right) + \left(\frac{\partial \bar{\theta}'_n}{\partial f''_0} \cdot \frac{\partial \bar{\theta}'_n}{\partial \theta'_0} \right) \right] \Delta \theta'_0 \\ & = - \left[\left(\bar{f}'_n \cdot \frac{\partial \bar{f}'_n}{\partial f''_0} \right) + \left(\bar{\theta}'_n \cdot \frac{\partial \bar{\theta}'_n}{\partial f''_0} \right) + \left(\bar{f}''_n \cdot \frac{\partial \bar{f}''_n}{\partial f''_0} \right) + \left(\bar{\theta}'_n \cdot \frac{\partial \bar{\theta}'_n}{\partial f''_0} \right) \right] \end{aligned}$$

Definindo o vetor P_n como sendo:

$$P_n \equiv (\bar{f}'_n, \bar{\theta}'_n, \bar{f}''_n, \bar{\theta}'_n)$$

e usando como notação "*" para representar o produto interno, tem-se:

$$\left(\frac{\partial P_n}{\partial f''_0} * \frac{\partial P_n}{\partial f''_0} \right) \Delta f'' + \left(\frac{\partial P_n}{\partial f''_0} * \frac{\partial P_n}{\partial \theta'_0} \right) \Delta \theta'_0 = - \left(P_n * \frac{\partial P_n}{\partial f''_0} \right)$$

Diferenciando agora E_n em relação a $\Delta \theta'_0$ e igualando a zero, vem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_n}{\partial \Delta \theta'_0} = 0 = & 2 \bar{f}'_n \frac{\partial \bar{f}'_n}{\partial \theta'_0} + 2 \left(\frac{\partial \bar{f}'_n}{\partial \theta'_0} \right)^2 \Delta \theta'_0 + 2 \frac{\partial \bar{f}'_n}{\partial f''_0} \cdot \frac{\partial \bar{f}'_n}{\partial \theta'_0} \Delta f''_0 \\ & + 2 \bar{\theta}_n \frac{\partial \bar{\theta}_n}{\partial \theta'_0} + 2 \left(\frac{\partial \bar{\theta}_n}{\partial \theta'_0} \right)^2 \Delta \theta'_0 + 2 \frac{\partial \bar{\theta}_n}{\partial f''_0} \cdot \frac{\partial \bar{\theta}_n}{\partial \theta'_0} \Delta f''_0 \\ & + 2 \bar{f}''_n \frac{\partial \bar{f}''_n}{\partial \theta'_0} + 2 \left(\frac{\partial \bar{f}''_n}{\partial \theta'_0} \right)^2 \Delta \theta'_0 + 2 \frac{\partial \bar{f}''_n}{\partial f''_0} \cdot \frac{\partial \bar{f}''_n}{\partial \theta'_0} \Delta f''_0 \\ & + 2 \bar{\theta}'_n \frac{\partial \bar{\theta}'_n}{\partial \theta'_0} + 2 \left(\frac{\partial \bar{\theta}'_n}{\partial \theta'_0} \right)^2 \Delta \theta'_0 + 2 \frac{\partial \bar{\theta}'_n}{\partial f''_0} \cdot \frac{\partial \bar{\theta}'_n}{\partial \theta'_0} \Delta f''_0 \end{aligned}$$

Reagrupando os termos:

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{\partial \bar{f}'_n}{\partial \theta'_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\theta}_n}{\partial \theta'_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{f}''_n}{\partial \theta'_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\theta}'_n}{\partial \theta'_0} \right)^2 \right] \Delta \theta'_0 \\ & + \left[\left(\frac{\partial \bar{f}'_n}{\partial f''_0} \cdot \frac{\partial \bar{f}'_n}{\partial \theta'_0} \right) + \left(\frac{\partial \bar{\theta}_n}{\partial f''_0} \cdot \frac{\partial \bar{\theta}_n}{\partial \theta'_0} \right) + \left(\frac{\partial \bar{f}''_n}{\partial f''_0} \cdot \frac{\partial \bar{f}''_n}{\partial \theta'_0} \right) + \left(\frac{\partial \bar{\theta}'_n}{\partial f''_0} \cdot \frac{\partial \bar{\theta}'_n}{\partial \theta'_0} \right) \right] \Delta f''_0 \\ & = - \left[\left(\bar{f}'_n \cdot \frac{\partial \bar{f}'_n}{\partial \theta'_0} \right) + \left(\bar{\theta}_n \cdot \frac{\partial \bar{\theta}_n}{\partial \theta'_0} \right) + \left(\bar{f}''_n \cdot \frac{\partial \bar{f}''_n}{\partial \theta'_0} \right) + \left(\bar{\theta}'_n \cdot \frac{\partial \bar{\theta}'_n}{\partial \theta'_0} \right) \right] \end{aligned}$$

Utilizando a definição do vetor P_n e do produto interno:

$$\left(\frac{\partial P_n}{\partial \theta'_0} * \frac{\partial P_n}{\partial \theta'_0} \right) \Delta \theta'_0 + \left(\frac{\partial P_n}{\partial f''_0} * \frac{\partial P_n}{\partial \theta'_0} \right) \Delta f''_0 = - \left(P_n * \frac{\partial P_n}{\partial \theta'_0} \right)$$

Agrupando as duas equações e usando a notação matricial, tem-se:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial P_n}{\partial f''_0} * \frac{\partial P_n}{\partial f''_0} & \frac{\partial P_n}{\partial f''_0} * \frac{\partial P_n}{\partial \theta'_0} \\ \frac{\partial P_n}{\partial f''_0} * \frac{\partial P_n}{\partial \theta'_0} & \frac{\partial P_n}{\partial \theta'_0} * \frac{\partial P_n}{\partial \theta'_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta f''_0 \\ \Delta \theta'_0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} P_n * \frac{\partial P_n}{\partial f''_0} \\ P_n * \frac{\partial P_n}{\partial \theta'_0} \end{pmatrix}$$

ANEXO 4EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARA
O ESQUEMA DE INTEGRAÇÃO

Conforme se pode ver no Anexo 2, é necessário avaliar as derivadas (f^* , g^* , ...) das variáveis ($\bar{y}$, $\bar{z}$, ...) nos pontos considerados.

Assim, definindo o vetor $y(K)$ como sendo:

$$\begin{array}{ll}
 y(1) = f & ; \quad y(2) = f' \\
 y(3) = f'' & ; \quad y(4) = \theta \\
 y(5) = \theta' & ; \quad y(6) = \frac{\partial f}{\partial f_0''} \\
 y(7) = \frac{\partial f'}{\partial f_0''} & ; \quad y(8) = \frac{\partial f''}{\partial f_0''} \\
 y(9) = \frac{\partial \theta}{\partial f_0''} & ; \quad y(10) = \frac{\partial \theta'}{\partial f_0''} \\
 y(11) = \frac{\partial f}{\partial \theta_0'} & ; \quad y(12) = \frac{\partial f'}{\partial \theta_0'} \\
 y(13) = \frac{\partial f''}{\partial \theta_0'} & ; \quad y(14) = \frac{\partial \theta}{\partial \theta_0'} \\
 y(15) = \frac{\partial \theta'}{\partial \theta_0'} &
 \end{array}$$

As derivadas necessárias à integração pelo método do Anexo 2, definindo-se inicialmente o vetor derivada como sendo:

$$Dy(K) = \frac{\partial}{\partial \eta} y(K)$$

são:

$$Dy(1) = \frac{\partial}{\partial \eta} y(1) = \frac{\partial}{\partial \eta} f = f' = y(2)$$

$$Dy(2) = f'' = y(3)$$

$$Dy(3) = f''' \equiv \text{equação (3.13) ou (3.15)}$$

$$Dy(4) = \theta' = y(5)$$

$$Dy(5) = \theta'' \equiv \text{equação (3.14) ou (3.16)}$$

$$Dy(6) = \frac{\partial f'}{\partial f''_0} = y(7)$$

$$Dy(7) = \frac{\partial f''}{\partial f''_0} = y(8)$$

$$Dy(8) = \frac{\partial f'''}{\partial f''_0} = \text{equação (3.24) ou (3.28)}$$

$$Dy(9) = \frac{\partial \theta'}{\partial f''_0} = y(10)$$

$$Dy(10) = \frac{\partial \theta''}{\partial f''_0} \equiv \text{equação (3.26) ou (3.30)}$$

$$Dy(11) = \frac{\partial f'}{\partial \theta'_0} = y(12)$$

$$Dy(12) = \frac{\partial f''}{\partial \theta'_0} = y(13)$$

$$Dy(13) = \frac{\partial f'''}{\partial \theta'_0} \equiv \text{equação (3.25) ou (3.29)}$$

$$Dy(14) = \frac{\partial \theta'}{\partial \theta'_0} = y(15)$$

$$Dy(15) = \frac{\partial \theta''}{\partial \theta'_0} \equiv \text{equação (3.27) ou (3.31)}$$

ANEXO 5

PROGRAMA DE COMPUTADOR

```

C      ** PROGRAMA PRINCIPAL **
C
C
C      DIMENSION YY(5,164,3),Y(15),YA(5),YAA(5),DY(15),W(10)
C      DOUBLE PRECISION YY,Y,YA,YAA,DY,H,ETA,X,Z,Q,QSI,W,DELX,DELZ
C      ,A11,A12,A21,A22,B1,B2,DEM,Q1
C      EXTERNAL DIFF
C      COMMON PR
C
C      OS PARAMETROS "H,PR,ETAEND" PODEM SER MUDADOS
C
C      H=0.05D0
C      PR=0.70E0
C      QSIA=0.0
C      ETAEND=8.00E0
C      TEST=1.00E-06
C      A=0.0
C      B=0.0
C      C=0.0
C      DO 30 M=1,164
C      DO 30 L=1,5
30      YY(L,M,3)=0.00D0
C
C      METODO DAS ESTIMATIVAS INICIAIS -   KKK=1 --> SIM
C                                          KKK=0 --> NA0
C
C      KKK=0
C      IF(KKK.EQ.0) GOTO 58
C      NN=1
C      IJ=1
C      JK=1
C      ID=0
C      IX=0
C      KX=1
C      KZ=1
C
C      ALTERAR,QUANDO NECESSARIO,,OS VALORES DE "QSI,0"
C
C      Q=0.025D0
C      QSI=0.0D0
C      DL=0.05D0
C      AX=0.0D0
C      AZ=-10.0D0
C
C      MODIFICAR W(N),QUANDO HOVER PROBLEMAS COM DESCONTINUIDADES
C
C      W(1)=1.25D0
C      W(2)=0.75D0
C      W(3)=0.50D0
C      J=1

```

```

IM=0
IVI=1
ITI=1
40 IF(JK.EQ.0) GOTO 60
   IF(IJ.EQ.0) GOTO 60
   SA=1.0E10
   IF(J.EQ.3) GOTO 45
   IVM=INT(1.5/DL)+1
   ITM=INT(20.0/DL)+1
   GOTO 55
45 DDF=DF/Q1
   DDT=DT/Q1
   DL=0.02
   IVI=1
   ITI=1
   IVM=INT(ABS(DDF*Q/DL))+2
   ITM=INT(ABS(DDT*Q/DL))+2
   IF(J.NE.3) GOTO 50
   KX=1
   IF(DF.LE.0.0) KX=-1
   KZ=1
   IF(DT.LE.0.0) KZ=-1
   AX=YY(3,1,1)-DL
   AZ=YY(5,1,1)-DL
   IX=0
   ID=0
   DO 115 IV=IVI,IVM
   IB=0
   IZ=0
   IX=IX+ID
   IF(IX.GE.3) GOTO 120
   DO 110 IT=ITI,ITM
   IZ=IZ+IB
   IF(IZ.GE.3) GOTO 115
   S=0.0
   X=AX+IV*DL*KX
   Z=AZ+IT*DL*KZ
   IF(KKK.EQ.1) GOTO 59
58 DO 700 IL=1,13
   W(1)=1
   X=YY(3,1,2)
   Z=YY(5,1,2)
   XS=0.20*IL
   COF=COS(XS)/(COS(XS)+1)
   QSI=(1-COS(XS))/3.1416
59 Q=QSI-QSIA
   IF(IL.LE.3) GOTO 60
   A=1.0/(QSI-QSIA)+1.0/(QSI-QSIAA)
   B=(QSIAA-QSI)/((QSI-QSIA)*(QSIA-QSIAA))
   C=(QSI-QSIA)/((QSI-QSIAA)*(QSIA-QSIAA))

```

```

60      M=1
      ETA=0.00D0
      DO 70 L=1,15
70      Y(L)=0.00D0
      Y(3)=X
      Y(4)=W(NN)
      Y(5)=Z
      Y(8)=1.00D0
      Y(15)=1.00D0
      DO 80 L=1,5
      YY(L,1,3)=Y(L)
      YAA(L)=YY(L,1,1)
80      YA(L)=YY(L,1,2)
      CALL ADAMS(H,ETA,0,Y,DY,DIFF,YA,YAA,QSI,0,COF,A,B,C)
90      CALL ADAMS(H,ETA,1,Y,DY,DIFF,YA,YAA,QSI,0,COF,A,B,C)
      M=M+1
      DO 100 L=1,5
      YY(L,M,3)=Y(L)
      YAA(L)=YY(L,M,1)
100     YA(L)=YY(L,M,2)
      IF(KKK.EQ.0) GOTO 130
      IF(JK.EQ.0) GOTO 130
      IF(IJ.EQ.0) GOTO 130
      IF(IC.EQ.0) GOTO 105
      IF(ETA.LT.EA) GOTO 105
      IF(ETA.GT.EA) GOTO 102
102     EA=ETA
      X1=YY(3,1,2)
      Z1=YY(5,1,2)
105     IF(DABS(Y(3)).GE.5.0D0.OR.DABS(Y(5)).GE.5.0D0) GOTO 110
      S=S+DABS(Y(3))+DABS(Y(5))
      IF(ETA.LT.1.0D0) GOTO 90
      IF(S.GT.SA) GOTO 110
      SA=S
      IX=0
      IZ=0
      IB=1
      ID=1
      X1=YY(3,1,2)
      Z1=YY(5,1,2)
110     CONTINUE
115     CONTINUE
120     X=X1
      Z=Z1
      IJ=0
      GOTO 40
130     IF(DABS(Y(3)).GE.5.0D0.OR.DABS(Y(5)).GE.5.0D0) GOTO 140
      IF(ETA.LT.ETAEND) GOTO 90
140     A11=Y(7)**2+Y(8)**2+Y(9)**2+Y(10)**2
      A12=Y(7)*Y(12)+Y(8)*Y(13)+Y(9)*Y(14)+Y(10)*Y(15)

```

```

A21=A12
A22=Y(12)**2+Y(13)**2+Y(14)**2+Y(15)**2
B1=-(Y(2)*Y(7)+Y(3)*Y(8)+Y(4)*Y(9)+Y(5)*Y(10))
B2=-(Y(2)*Y(12)+Y(3)*Y(13)+Y(4)*Y(14)+Y(5)*Y(15))
A11=1.0D-10*A11
A22=1.0D-10*A22
A12=1.0D-10*A12
A21=1.0D-10*A21
IF(DABS(A11).GE.1.0D19.AND.DABS(A22).GE.1.0D19) GOTO 150
IF(DABS(A21).GE.1.0D19) GOTO 150
DEM=A11*A22-A12*A21
IF(DEM.LT.1.0D-30) GOTO 150
DELX=(B1*A22-B2*A12)/DEM
DELZ=(B2*A11-B1*A21)/DEM
DELX=1.0D-10*DELX
DELZ=1.0D-10*DELZ
E=Y(2)**2+Y(3)**2+Y(4)**2+Y(5)**2
GOTO 160
150 X=X+0.8*DELX
Z=Z+0.8*DELZ
GOTO 60
160 IF(DELX.LT.1.0D-14.AND.DELZ.LT.1.0D-14) GOTO 170
IM=0
GOTO 180
170 IM=IM+1
180 IF(IM.EQ.15.AND.ETA.EQ.7.0E0) GOTO 190
X=X+DELX
Z=Z+DELZ
IF(DABS(DELX/X).GT.TEST.OR.DABS(DELZ/Z).GT.TEST) GOTO 60
IF(E.LT.TEST) GOTO 190
GOTO 60
190 WRITE(22,830) X,Z
WRITE(22,815) XS
WRITE(22,810) QSI
WRITE(30,820) QSI
WRITE(30,815) XS
WRITE(30,830) X,Z
WRITE(5,820) QSI
WRITE(5,830) X,Z
WRITE(5,815) XS
DO 200 M=1,166,4
ETA=(M-1)*H
200 WRITE(22,800)ETA,YY(1,M,3),YY(2,M,3),YY(3,M,3),YY(4,M,3),YY(5,M
C ,3)
IF(KKK.EQ.0) GOTO 235
Q1=0
IF(J.GE.4) Q=0.050D0
J=J+1
IF(YY(5,1,1).EQ.0.00D0) GOTO 120
IJ=1

```

```

IF(DABS((YY(5,1,2)-YY(5,1,1))/YY(5,1,1)).LT.0.05D0) JK=0
210 IF(J.NE.23) GOTO 215
NN=NN+1
IF(NN.EQ.4) GOTO 1000
IJ=1
JK=1
J=1
Q=0.025
DL=0.05
215 IX=0
ID=0
IZ=0
IB=0
IM=0
DF=YY(3,1,2)-YY(3,1,1)
DT=YY(5,1,2)-YY(5,1,1)
235 DO 240 M=1,164
DO 240 L=1,5
YY(L,M,1)=YY(L,M,2)
YY(L,M,2)=YY(L,M,3)
240 YY(L,M,3)=0.00D0
QSIAA=QSIA
QSIA=QSI
700 CONTINUE
800 FORMAT(1X,F4.2,3X,D10.4,3X,D10.4,3X,D10.4,3X,D10.4,3X,D10.4)
810 FORMAT(1X,'QSI=',D11.4,/,1X,'ETA',8X,'F',13X,'F*'
C ',8X,'F**',9X,'TETA',10X,'TETA*')
815 FORMAT(1X,'X=',D11.4)
820 FORMAT(1X,/,1X,'QSI=',D11.4)
830 FORMAT(1X,'F**'(0)=' ,D10.4,/,1X,'TETA*(0)=' ,D10.4)
1000 END
C ** SUBROTINA PARA CALCULO DAS DERIVADAS **
C
SUBROUTINE DIFF(ETA,Y,YA,YAA,DY,QSI,Q,COF,A,B,C)
DOUBLE PRECISION ETA,Y,YA,YAA,DY,QSI
DIMENSION Y(1),YA(1),YAA(1),DY(1)
COMMON PR
DY(1)=Y(2)
DY(2)=Y(3)
DY(3)=2.0D0*Y(2)**2-(3.0D0-2.0D0*COF)*Y(1)*Y(3)-Y(4)
DY(4)=Y(5)
DY(5)=((2.0D0*COF-3.0D0)*Y(1)*Y(5)+4.0D0*COF*Y(2)*Y(4))*PR
DY(6)=Y(7)
DY(7)=Y(8)
DY(8)=4.0D0*Y(2)*Y(7)-(3.0D0-2.0D0*COF)*(Y(3)*Y(6)+Y(1)*Y
C Y(8))-Y(9)
DY(9)=Y(10)
DY(10)=((2.0D0*COF-3.0D0)*(Y(5)*Y(6)+Y(1)*Y(10))+4.0D0*COF*
C (Y(7)*Y(4)+Y(2)*Y(9)))*PR
DY(11)=Y(12)

```

```

        DY(12)=Y(13)
        DY(13)=4.0D0*Y(2)*Y(12)-(3.0D0-2.0D0*COF)*(Y(3)*Y(11)+Y(1)*
C      Y(13))-Y(14)
        DY(14)=Y(15)
        DY(15)=((2.0D0*COF-3.0D0)*(Y(5)*Y(11)+Y(1)*Y(15))+4.0D0*COF*
C      (Y(12)*Y(4)+Y(2)*Y(14)))*PR
        IF(QSI.EQ.0.0) GOTO 200
        IF(A.NE.0.0) GOTO 100
        DY(3)=DY(3)+4.0D0*QSI*(Y(2)*(Y(2)-YA(2))-Y(3)*(Y(1)-YA(1)))/
C      Q
        DY(5)=DY(5)+4.0D0*PR*QSI*(Y(2)*(Y(4)-YA(4))-Y(5)*(Y(1)-YA(1)
C      ))/Q
        DY(8)=DY(8)+4.0D0*QSI*(Y(7)*(2.0D0*Y(2)-YA(2))-Y(8)*(Y(1)-
C      YA(1))-Y(6)*Y(3))/Q
        DY(10)=DY(10)+4.0D0*PR*QSI*(Y(7)*(Y(4)-YA(4))+Y(2)*Y(9)-
C      Y(10)*(Y(1)-YA(1))-Y(5)*Y(6))/Q
        DY(13)=DY(13)+4.0D0*QSI*(Y(12)*(2.0D0*Y(2)-YA(2))-Y(13)*
C      (Y(1)-YA(1))-Y(11)*Y(3))/Q
        DY(15)=DY(15)+4.0D0*PR*QSI*(Y(12)*(Y(4)-YA(4))+Y(2)*Y(14)-
C      Y(15)*(Y(1)-YA(1))-Y(5)*Y(11))/Q
        GOTO 200
100      DY(3)=DY(3)+4.0D0*QSI*(Y(2)*(A*Y(2)+B*YA(2)+C*YAA(2))-
C      Y(3)*(A*Y(1)+B*YA(1)+C*YAA(1)))
        DY(5)=DY(5)+4.0D0*PR*QSI*(Y(2)*(A*Y(4)+B*YA(4)+C*YAA(4))-
C      Y(5)*(A*Y(1)+B*YA(1)+C*YAA(1)))
        DY(8)=DY(8)+4.0D0*QSI*(Y(7)*(A*Y(2)+B*YA(2)+C*YAA(2))+A*
C      Y(2)*Y(7)-Y(8)*(A*Y(1)+B*YA(1)+C*YAA(1))-A*Y(3)*Y(6))
        DY(10)=DY(10)+4.0D0*QSI*PR*(Y(7)*(A*Y(4)+B*YA(4)+C*YAA(4))+A*
C      Y(2)*Y(9)-Y(10)*(A*Y(1)+B*YA(1)+C*YAA(1))-A*Y(5)*Y(6))
        DY(13)=DY(13)+4.0D0*QSI*(Y(12)*(A*Y(2)+B*YA(2)+C*YAA(2))+A*Y(
C      2)*Y(12)-Y(13)*(A*Y(1)+B*YA(1)+C*YAA(1))-A*Y(3)*Y(11))
        DY(15)=DY(15)+4.0D0*QSI*PR*(Y(12)*(A*Y(4)+B*YA(4)+C*YAA(4))+A*
C      Y(2)*Y(14)-Y(15)*(A*Y(1)+B*YA(1)+C*YAA(1))-A*Y(5)*Y(11))
200      RETURN
        END
C      ** SUBROTINA PARA INTEGRACAO DO SISTEMA DE EQUACOES
C      DIFERENCIAIS PELO METODO DE ADAMS-MOULTON **
C
        SUBROUTINE ADAMS(H,X,ISET,Y,DY,F,YA,YAA,QSI,Q,COF,A,B,C)
        DOUBLE PRECISION P,Y,YA,YR,DY,DYR,DYL,DYLL,DYLLL,C2,C3,C4,X,H
C      YAA
        DIMENSION Y(1),YA(1),DY(1),P(15),YR(15),DYR(15),DYL(15),DYLL(15)
C      ),DYLLL(15),C2(15),C3(15),C4(15),YAA(1)
        IF(ISET.GT.0) GOTO 6
        K=1
        CALL F(X,Y,YA,YAA,DY,QSI,Q,COF,A,B,C)
        RETURN
6        GOTO (7,8,9,11),K
7        K=2
        GOTO 10

```

```

8      K=3
      GOTO 10
9      K=4
10     DO 1001 I=1,15
1001   P(I)=Y(I)+(H/2.0D0)*DY(I)
      CALL F(X+H/2.0D0,P,YA,YAA,C2,QSI,Q,COF,A,B,C)
      DO 1002 I=1,15
1002   P(I)=Y(I)+(H/2.0D0)*C2(I)
      CALL F(X+H/2.0D0,P,YA,YAA,C3,QSI,Q,COF,A,B,C)
      DO 1003 I=1,15
1003   P(I)=Y(I)+H*C3(I)
      CALL F(X+H,P,YA,YAA,C4,QSI,Q,COF,A,B,C)
      DO 1004 I=1,15
1004   YR(I)=Y(I)+(H/6.0D0)*(DY(I)+2.0D0*C2(I)+2.0D0*C3(I)+C4(I))
      CALL F(X+H,YR,YA,YAA,DYR,QSI,Q,COF,A,B,C)
      GOTO 12
11     DO 1101 I=1,15
1101   P(I)=Y(I)+(H/24.0D0)*(55.0D0*DY(I)-59.0D0*DYL(I)+37.0D0*DYLL(I)
C      -9.0D0*DYLLL(I))
      CALL F(X+H,P,YA,YAA,DYR,QSI,Q,COF,A,B,C)
      DO 1102 I=1,15
1102   YR(I)=Y(I)+(H/24.0D0)*(9.0D0*DYR(I)+19.0D0*DY(I)-5.0D0*DYL(I)+D
C      YLL(I))
      CALL F(X+H,YR,YA,YAA,DYR,QSI,Q,COF,A,B,C)
12     X=X+H
      DO 1201 I=1,15
      Y(I)=YR(I)
      DYLLL(I)=DYLL(I)
      DYLL(I)=DYL(I)
      DYL(I)=DY(I)
1201   DY(I)=DYR(I)
      RETURN
      END

```

NOMENCLATURA

a_n	Constantes.
A, B, C	Coefficientes da aproximação de segunda ordem da derivada.
$\tilde{A}$	Constante da função $\text{sen } x$.
b	Expoente de x .
$\tilde{B}$	Constante.
C_1	Constante, $(\frac{g\beta}{4\nu^2})^{1/4}$.
C_p	Calor específico à pressão constante do fluido.
E	Erro.
E_c	Número de Eckert, $E_c = \frac{u_R^2}{C_p (T_w - T_\infty)}$.
E_n	Erro do método dos mínimos quadrados.
f	Variável dependente adimensional.
f'	Derivada primeira da variável f.
f''	Derivada segunda da variável f.
f'''	Derivada terceira da variável f.
f*	Derivada do método de Adams-Moulton.
F	Força de campo por unidade de volume.
F(x)	Sobretensão de parede, $T_w(x) - T_\infty$.
g	Aceleração da gravidade.
Gr_x	Número de Grashof, $g\beta\Delta T x^3/\nu^2$.
G_w	Número de Grashof na parede.
G_{w0}	Número de Grashof na parede, na borda de ataque.

h	Passo de integração.
h_x	Coefficiente de transferência de calor.
K	Condutividade térmica do fluido.
$\tilde{K}$	Símbolo que representa f , f' ou θ .
K_1, K_2, K_3, K_4 $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ }	Função do método de Runge-Kutta.
L	Comprimento da placa.
m	Expoente da função exponencial.
$\tilde{m}$	Expoente da função $r(x)$.
M	Constante da função exponencial.
$\tilde{M}$	Valor numérico de comparação.
Nu_x	Número de Nusselt, hx/K .
P	Pressão.
P_d	Pressão dinâmica.
P_∞	Pressão hidrostática ambiente.
Pr	Número de Prandtl, ν/α .
$\tilde{P}$	Expoente de (x/L) .
q'''	Energia gerada por unidade de volume.
q_w	Fluxo de calor na parede.
Q	Função do fluxo de calor.
$\tilde{Q}$	Vazão volumétrica.
$r(x)$	Temperatura como função de x .
r_0	Temperatura constante.

Re	Número de Reynolds, $\frac{u_R L}{\nu}$.
S	Expoente de $\bar{x}$.
t	Tempo.
T	Temperatura.
T_R	Temperatura de referência.
T_w	Temperatura da parede da placa.
T_{w_0}	Temperatura da parede da placa, na borda de ataque.
T_∞	Temperatura ambiente.
u	Componente vertical da velocidade.
u_R	Velocidade de referência.
$\bar{u}$	u/u_R .
U_c	Velocidade característica de convecção natural.
v	Componente horizontal da velocidade.
$\bar{v}$	v/u_R .
V	Velocidade.
x	Coordenada espacial vertical.
$\bar{x}$	x/L .
y	Coordenada espacial horizontal.
$\bar{y}$	y/L .
$\hat{y}, \hat{z}$	Variáveis do método de Adams-Moulton.
w	Componente da velocidade na direção da coordenada z.
z	Coordenada espacial normal ao plano xy.

Índice

n	n -ésima localização ao longo de ξ .
w	na parede da placa.
∞	ambiente.

Símbolos Gregos

α	Difusividade térmica do fluido, $K/\rho C_p$.
β	Coefficiente de expansão volumétrica.
δ	Espessura da camada limite.
δ_t	Espessura da camada limite térmica.
ϵ	Incremento.
$\bar{\epsilon}$	Constante.
η	Variável independente.
θ	Temperatura adimensional.
θ'	Derivada primeira de θ .
θ''	Derivada segunda de θ .
μ	Viscosidade dinâmica.
ν	Viscosidade cinemática.
ξ	Variável independente.
$\bar{\xi}$	$\xi \cdot L$.
ρ	Densidade do fluido.
$\tau(x)$	Uma função de x .
$\phi_1(x), \phi_2(x)$	Funções de x .
Φ, Φ_1	Função dissipação viscosa.
ψ	Função corrente.
Ω	Parâmetro, $\frac{\xi}{F(x)} \frac{dF(x)}{dx}$.

REFERÊNCIAS

- [1] CARVALHO, RICARDO D.M., "Análise da Transferência de Calor em Equipamentos de Transmissão Digital com Placas de Circuito Impresso Dispostas Horizontalmente", Tese de Mestrado, Publicação FEC 112/85.
- [2] SPARROW, E.M. and GREGG, J.L., "Similar Solutions for Free Convection from a Nonisothermal Vertical Plate", Transactions of the ASME, Vol. 80, pp. 379-386, 1958.
- [3] YANG, KWANG-TZU, "Possible Similarity Solutions for Laminar Free Convection on Vertical Plates and Cylinders", Transactions of the ASME, Vol. 82, No 2, pp. 230-236, 1960.
- [4] SPARROW, E.M., QUACK, H. and BOERNER, C.J., "Local Nonsimilarity Boundary-Layer Solutions", AIAA Journal, Vol. 8, No 11, pp.1936-1942, 1970.
- [5] SPARROW, E.M. and YU, H.S., "Local Non-similarity Thermal Boundary-Layer Solutions", Journal of Heat Transfer, Vol. 93, pp. 328-334, 1971.
- [6] MINKOWYCZ, W.J. and SPARROW, E.M., "Local Nonsimilar Solutions for Natural Convection on a Vertical Cylinder", Journal of Heat Transfer, Vol. 96, pp. 178-183, 1974.
- [7] SCHERBERG, MAX G., "Natural Convection from Wall Sections of Arbitrary Temperature Distribution by an Integral Method", International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 7, pp. 501-516, 1964.
- [8] SCHETZ, JOSEPH A. and EICHHORN, ROGER, "Natural Convection with Discontinuous Wall-Temperature Variations", Journal of Fluid Mechanics, Vol. 18, Part 2, pp. 167-176, 1964.

- [9] HAYDAY, A.A., BOWLUS, D.A. and MCGRAW, R.A., "Free Convection from a Vertical Flat Plate with Step Discontinuities in Surface Temperature", Journal of Heat Transfer, Vol. 89, No 3, pp.244-250, 1967.

- [10] JENG, D.R., LEE, M.H. and DeWITT, K.J., "Convective Heat Transfer Through Boundary Layers with Arbitrary Pressure Gradient and Non-Isothermal Surfaces", International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 21, pp. 499-509, 1978.

- [11] KELLEHER, MATTHEW, "Free Convection from a Vertical Plate with Discontinuous Wall Temperature", Journal of Heat Transfer, Vol. 93, pp. 349-356, 1971.

- [12] GOLDSTEIN, S., "Concerning Some Solutions of the Boundary-Layer Equations in Hydrodynamics", Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Vol. 26, pp. 1-30, 1929-1930.

- [13] KUIKEN, H. K., "General Series Solution for Free Convection Past a Non-Isothermal Vertical Flat Plate", Applied Scientific Research, Vol. 20, pp. 205-215, 1969.

- [14] KELLEHER, MATTHEW and YANG, KWANG-TZU, "A Görtler-Type Series for Laminar Free Convection Along a Non-Isothermal Vertical Plate", Quarterly Journal of Mechanical and Applied Mathematic, Vol. 25, Part 4, pp. 446-457, 1972.

- [15] GÖRTLER, H., "A New Series for the Calculation of Steady Laminar Boundary Layer Flows", Journal of Mathematic Mechanical, Vol. 6, No 1, pp. 1-66, 1957.

- [16] MEENA, B.K. and NATH, G., "Nonsimilar Laminar Free Convection Flow Along a Nonisothermal Vertical

Plate", Journal of Heat Transfer, Vol. 100, pp. 163-165, 1978.

- [17] MARVIN, J.G. and SHEAFFER, Y.S., "A Method for Solving Nonsimilar Boundary Layer Equations Including Foreign Gas Injection", NASA Technical Note, No D-5516, 1969.
- [18] KAO, TSAI-TSE, DOMOTO, G.A. and ELROD Jr., H.G., "Free Convection Along a Nonisothermal Vertical Flat Plate", Journal of Heat Transfer, Vol. 99, pp. 72-78, 1977.
- [19] YANG, JIWON, JENG, D.R. and De WITT, K.J., "Laminar Free Convection from a Vertical Plate with Nonuniform Surface Conditions", Numerical Heat Transfer, Vol. 5, pp. 165-184, 1982.
- [20] CHAO, B.T. and FAGBENLE, R.O., "On Merk's Method of Calculating Boundary Layer Transfer", International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 17, pp. 223-240, 1974.
- [21] VEDHANAYAGAM, M., ALTENKIRCH, R.A. and EICHHORN, R., "A Transformation of the Boundary Layer Equations for Free Convection Past a Vertical Flat Plate with Arbitrary Blowing and Wall Temperature Variations", International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 23, pp. 1286-1288, 1980.
- [22] HASAN, M.M. and MUNDEL, J.E., "Natural Convection Along a Vertical Plate Subjected to an Arbitrary Variation of Surface Temperature", Proceedings National Heat Transfer Conference, Denver - Colorado, August 4-7, 1985.
- [23] ISHIZAWA, S., "A New Multifold Series General Solution of the Steady Laminar Boundary Layers", 1st Report. Bulletin of the JSME, Vol. 25, No 209, pp. 1703-1715, 1982.

- [24] ISHIZAWA, S., "A New Multifold Series General Solution of the Steady Laminar Boundary Layers", 2nd Report. Bulletin of the JSME, Vol. 25, Nº 209, pp. 1717-1728, 1982.
- [25] NA, T.Y., "Numerical Solution of Natural Convection Flow Past a Non-Isothermal Vertical Flat Plate", Applied Scientific Research, Vol. 33, pp. 519-543, 1978.
- [26] BELLMAN, R. and KALABA, R.E., "Quazilinearization and Nonlinear Boundary Value Problems", American Elsevier, New York, 1965.
- [27] RADBILL, JOHN R., "Application of Quasilinearization to Boundary-Layer Equations", AIAA Journal, Vol. 2, Nº 10, pp. 1860-1862, 1964.
- [28] BEJAN, A., "Convection Heat Transfer", John Wiley & Sons, 1984.
- [29] ECKERT, E.R.G. and DRAKE, Jr. R.M., "Analysis of Heat and Mass Transfer", Part II, McGraw-Hill International Book Company, 1972.
- [30] GRAY, D.D. and GIORGINI, A., "The Validity of the Boussinesq Aproximation for Liquids and Gases", International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 19, pp. 545-551, 1976.
- [31] MILANEZ, L.F., "Transferência de Calor em Equipamentos Eletrônicos: Convecção Natural em Fontes Térmicas sobre uma Superfície Vertical", Tese de Livre-Docência, UNICAMP, 1985.
- [32] SMITH, A.M.O. and CLUTTER, D.W., "Solution of the Incompressible Laminar Boundary-Layer Equations", AIAA Journal, Vol. 1, Nº 9, pp. 2062-2071, 1963.

- [33] SMITH, A.M.O. and CLUTTER, D.W., "Machine Calculation of Compressible Laminar Boundary Layers", AIAA Journal, Vol. 3, Nº 4, pp. 639-647, 1965.
- [34] SMITH, A.M.O. and JAFFE, N.A., "General Method for Solving the Laminar Nonequilibrium Boundary-Layer Equations of a Dissociating Gas", AIAA Journal, Vol. 4, Nº 4, pp. 611-620, 1966.
- [35] CONTE, S.D., "Elementos de Análise Numérica", Edito ra Globo, 3ª ed., 1977.
- [36] GRANZIERA, M., "Métodos Numéricos em Fenômenos de Transporte", Notas de Aula, UNICAMP, 1986.
- [37] CARNAHAN, B., LUTHER, H.A. and WILKES, J.O., "Applied Numerical Methods", John Wiley & Sons, New York, 1969.
- [38] NACHTSHEIM, P.R. and SWIGERT, P., "Satisfaction of Asymptotic Boundary Conditions in Numerical Solution of Systems of Nonlinear Equations of Boundary Layer Type", NASA, TN D-3004, 1965.
- [39] ADAMS, J.A. and ROGERS, D.F., "Computer-Aided Heat Transfer Analysis", McGraw-Hill International Book Company, 1973.
- [40] GEBHART, B. and MOLLENDORF, J., "Viscous Dissipation in External Natural Convection Flows", Journal of Fluid Mechanics, Vol. 38, pp. 97-107, 1969.