

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA  
TESE DEFENDIDA POR ...ANDERSON...S.A.B.R.I.C.  
...SANTIA G.O. CRAVO... APROVADA  
PELA COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ...30/08/2008.

  
.....  
ORIENTADOR

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**  
**FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**  
**COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

# **Análise de Problemas de Anisotropia 3D com Sub Regiões Utilizando o Método dos Elementos de Contorno**

Autor: Anderson Gabriel Santiago Cravo  
Orientador: Paulo Sollero

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

**Análise de Problemas de Anisotropia 3D com Sub Regiões  
Utilizando o Método dos Elementos de Contorno**

Autor: Anderson Gabriel Santiago Cravo

Orientador: Prof. Dr. Paulo Sollero

Curso: Engenharia Mecânica

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Dissertação de mestrado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

**Campinas, 2008**

**S.P. - Brasil**

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

C855a Cravo, Anderson Gabriel Santiago  
Análise de Problemas de Anisotropia 3D com Sub Regiões  
Utilizando o Método dos Elementos de Contorno  
Anderson Gabriel Santiago Cravo. – Campinas, SP: [s.n],  
2008.

Orientador: Paulo Sollero  
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de  
Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Anisotropia. 2. Método dos Elementos de Contorno.  
I. Sollero, Paulo. II. Universidade Estadual de Campinas.  
Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Titulo em Inglês: 3D anisotropic problems analysis with sub regions using the  
boundary element method.

Palavras-chave em Inglês: Boundary elements, Sub regions, 3D anisotropy

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica

Banca examinadora: Euclides de Mesquita Neto e Leandro Palermo Junior.

Data da defesa: 30/07/2008

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADEMICO

# Análise de Problemas de Anisotropia 3D com Sub Regiões Utilizando o Método dos Elementos de Contorno

Autor: Anderson Gabriel Santiago Cravo  
Orientador: Paulo Sollero

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:



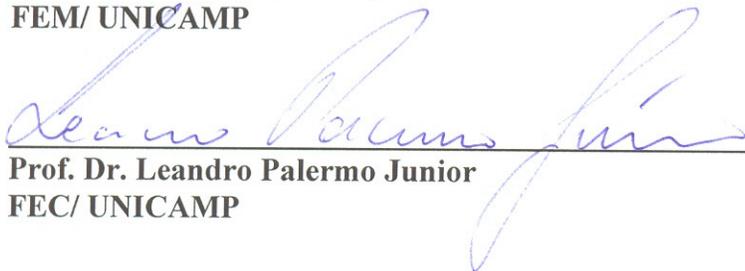
---

**Prof. Dr. Paulo Sollero**, Presidente  
FEM/ UNICAMP



---

**Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto**  
FEM/ UNICAMP



---

**Prof. Dr. Leandro Palermo Junior**  
FEC/ UNICAMP

Campinas, 30 de Julho de 2008

## Dedicatória

Dedico este trabalho a Deus, a minha mãe, Sandra, aos meus avós, Diva e Hamilton e a minha irmã Lia.

## Agradecimentos

Agradeço a Deus, pelas experiências e lições que me proporciona e pela vida repleta de possibilidades e desafios, que me fazem crescer e aprender cada vez mais.

À minha mãe, Sandra, meus avós, Diva e Hamilton e à minha irmã Lia, pelo amor incondicional, sempre me apoiando a seguir meu caminho.

Ao meu primo, Willian, pelas boas horas de conversa e pela companhia no cinema aos finais de semana.

Ao meu orientador, professor Dr. Paulo Sollero, pelo apoio e orientação e também pelos “puxões de orelha”, que me fizeram crescer tanto pessoalmente como profissionalmente.

Ao pesquisador Dr. Pedro Yoshito Noritomi, pela orientação, revisão de texto, e por ser um exemplo de profissional a ser seguido.

Ao professor Dr. Éder Lima de Albuquerque pelo apoio, dedicação e pelas boas sugestões para enriquecer este trabalho.

Aos meus amigos de república, Luís Otávio Mataveli, Lucas Oliveira, Michel Troyano e às minhas vizinhas e amigas, Renata Mataveli e Valéria Cristina, pelas horas de conversas descontraídas.

Aos meus amigos de laboratório, Carlos Alexandre de Oliveira Souza, Gabriela Motta, Marcel Sato, Martim Mauler Neto, Rafael Schmidt Venturini, Renan Ozelo, Renan Rodrigues dos Santos pelas sugestões, correções do texto, conversas e risadas na hora do café.

Aos amigos do Departamento de Mecânica Computacional, Rafael (“*Ruffles*”) Morini, Josué Labaki, Flávio Nunes, Alberto (“*Hitler*”), Fábio Dalmazzo e Ricardo Passalacqua, que gentilmente me ajudou a criar alguns dos modelos apresentados neste trabalho.

Aos professores Dr. Euclides de Mesquita Neto e Dr. Renato Pavanello pelas críticas e sugestões.

A todas as pessoas que conheço por me ajudarem a crescer e amadurecer.

*“All we have to decide is what to do with the time that is given to us”*  
(O Senhor dos Anéis - A Sociedade do Anel, J. R. R. Tolkien)

## Resumo

Cravo, Anderson Gabriel Santiago, *Análise de Problema de Anisotropia Plena 3D com Sub Regiões Utilizando o Método dos Elementos de Contorno*. Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2008, 78 p. Dissertação (Mestrado).

Este trabalho apresenta uma ferramenta para análise de sub-domínios utilizando o Método dos Elementos de Contorno 3D (MEC3D). Para a implementação são considerados elementos retangulares, quadráticos e contínuos, isto é, os nós compartilham graus de liberdade e assim, há a necessidade de uma formulação adequada para o tratamento de quinas entre as sub-regiões. As matrizes  $[H]$  e  $[G]$  são calculadas independentemente do programa de sub-regiões. Isto permite um tratamento computacional eficiente, tendo em vista que atualmente os microcomputadores contam com mais de um processador, viabilizando a computação paralela. Também é apresentada a implementação e o estudo da solução fundamental para anisotropia plena utilizando a Transformada de Radon. Esta formulação é especialmente atraente devido a sua simplicidade de programação, entretanto, ela apresenta uma integral numérica no núcleo do problema o que compromete sua aplicação em problemas de grande porte. Assim, são propostas estratégias para a melhoria do desempenho computacional, como um esquema de interpolação para obtenção das funções de deslocamento e forças de superfície.

*Palavras chaves:*

Elementos de Contorno, Sub-regiões, Anisotropia 3D

## Abstract

Cravo, Anderson Gabriel Santiago *3D Anisotropic Problems Analysis with Sub Regions Using The Boundary Element Method*. Campinas, 78 p. Mechanical Engineering Faculty, University of Campinas, 2008. Dissertation (Master Degree).

This work presents a tool for sub-domains analysis using the 3D Boundary Element Method (BEM3D). For its implementation are considered rectangular, quadratic and continuous elements, which means that the nodes share degrees of freedom and so, a proper formulation to deal with corners and edges between the sub regions is required. The matrices  $[H]$  and  $[G]$  are computed independent of the sub regions program. This makes possible an efficient computational treatment, since the actual computers have more than one processor, and parallel computing is used. Also presents the implementation and the study of the fundamental solution for anisotropic elasticity using the Radon Transform. This formulation is especially attractive due to its simplicity for computational implementations, but it requires a numerical integration in the kernel and then, some strategies are proposed to improve the computational performance.

*Key words:*

Boundary Elements, Sub-regions, 3D Anisotropy

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Objetivos . . . . .	2
1.2	Estrutura do Trabalho . . . . .	3
<b>2</b>	<b>O Método dos Elementos de Contorno</b>	<b>4</b>
2.1	Formulação das Equações Integrais de Contorno . . . . .	6
2.2	Discretização do Problema em Elementos de Contorno . . . . .	11
<b>3</b>	<b>A Solução Fundamental Anisotrópica</b>	<b>16</b>
3.1	Solução Fundamental Isotrópica . . . . .	16
3.2	Solução Fundamental para Problemas Transversalmente Isotrópicos . . . . .	19
3.3	Solução Fundamental para Anisotropia Plena 3D . . . . .	24
3.4	Estratégias para o Cálculo da Solução Fundamental . . . . .	30
3.4.1	Validação . . . . .	37
<b>4</b>	<b>Sub-regiões</b>	<b>41</b>
4.1	Tratamento de Cantos entre as Sub-Regiões . . . . .	45
4.1.1	Validação . . . . .	49
<b>5</b>	<b>Implementação Computacional</b>	<b>52</b>
5.1	Leitura de Dados e Cálculo das Matrizes $[H]$ e $[G]$ . . . . .	53
5.2	Verificação de Cantos na Interface . . . . .	53
5.3	Reordenamento das Matrizes $[H]$ e $[G]$ . . . . .	54
5.4	Aplicação das Condições de Contorno . . . . .	56
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>59</b>
<b>7</b>	<b>Trabalhos Futuros</b>	<b>60</b>

# Lista de Figuras

2.1	Representação do Delta de Dirac . . . . .	9
2.2	Representação de um elemento de oito nós no sistema de coordenadas intrínseco	13
2.3	Gráficos para as funções de forma $N_1$ e $N_8$ . . . . .	13
2.4	Modelo de problema bem condicionado em elementos de contorno 2D . . . . .	15
3.1	Fibras ao longo de um modelo de osso e uma haste de madeira . . . . .	20
3.2	Plano onde é efetuada a Transformada de Radon . . . . .	25
3.3	Esfera de raio unitário sobre a qual é efetuada a transformada inversa de Radon	25
3.4	Interseção da esfera de raio unitário com o plano definido pelo versor $r_i^0$ . . . . .	27
3.5	Versor $z_i$ como combinação dos versores $\alpha_i$ e $\beta_i$ . . . . .	27
3.6	Sistema de coordenadas esféricas . . . . .	28
3.7	Comparação dos gráficos para a componente $G_{22}^u$ obtidos usando diferentes quantidades de pontos de Gauss para um material isotrópico . . . . .	31
3.8	Comparação dos gráficos para a componente $G_{23,1}^t$ obtidos usando diferentes quantidades de pontos de Gauss para um material isotrópico . . . . .	31
3.9	Influência dos pontos de Gauss na componente $G_{22}^u$ para kevlar-epoxi . . . . .	32
3.10	Influência dos pontos de Gauss na componente $G_{23,1}^t$ para kevlar-epoxi . . . . .	32
3.11	Convergência do erro para kevlar-epóxi. . . . .	33
3.12	Convergência do erro para grafite-epóxi. . . . .	34
3.13	Influência dos pontos de Gauss para grafite-epóxi. . . . .	34
3.14	Comparação entre o uso de 20 pontos e 25 pontos na integração do tensor $G_{ij}^u$ .	35
3.15	Esquema para interpolação linear . . . . .	36
3.16	Modelo com propriedades isotrópicas . . . . .	38
3.17	Modelo de um cubo com propriedades transversalmente isotrópicas . . . . .	38
4.1	Corpo composto por dois materiais sujeito a carregamentos e vinculações . . . . .	41
4.2	Cantos entre duas sub-regiões . . . . .	45
4.3	Sistema de coordenadas intrínseco para definição das componentes tangenciais	48
4.4	Modelo para o problema 1 . . . . .	49

4.5	Modelo para o problema 2 . . . . .	50
4.6	Comparação entre a solução analítica e os resultados obtidos para o problema 1	51
4.7	Comparação entre a solução analítica e os resultados obtidos para o problema 2	51
5.1	Diagrama do programa para análise de sub-regiões . . . . .	52
5.2	Três elementos conectados a um único nó . . . . .	54
5.3	Barra discretizada em elementos de contorno usando sub-regiões . . . . .	56
5.4	Possíveis modelos para aplicação das condições de contorno . . . . .	57
5.5	Divisão das matrizes $[H]$ e $[G]$ para aplicação das condições de contorno . . .	57

# Lista de Tabelas

3.1	Constantes elásticas para um compósito de kevlar-epóxi . . . . .	32
3.2	Comparação quantitativa da influência dos pontos de Gauss na integração para um material transversalmente isotrópico . . . . .	33
3.3	Comparação entre os tipos de interpolação e a integração direta para kevlar-epóxi. . . . .	36
3.4	Comparação entre os valores para $G_{22}^u$ e $G_{23,1}^t$ usando interpolação e integração direta para um material isotrópico. . . . .	37
3.5	Comparação entre os valores para $G_{22}^u$ e $G_{23,1}^t$ usando interpolação e integração direta para um material anisotrópico. . . . .	37
3.6	Propriedades para o modelo isotrópico . . . . .	38
3.7	Propriedades para o modelo transversalmente isotrópico . . . . .	39
3.8	Resultados para forças de superfície em um problema isotrópico . . . . .	39
3.9	Resultados para deslocamentos em um problema transversalmente isotrópico . . . . .	39
3.10	Resultados para forças de superfície em um problema transversalmente isotrópico. . . . .	40
3.11	Resultados para deslocamentos em um problema transversalmente isotrópico. . . . .	40
5.1	Comparação entre os tipos de armazenamento das matrizes $[H]$ e $[G]$ . . . . .	56

# Nomenclatura

## Letras latinas

$N_i$	- Funções de forma
$t_i$	- Vetor de forças de superfície
$u_i$	- Vetor de deslocamentos lineares
$C_{ijkl}$	- Tensor de propriedades materiais
$n_i$	- Versor normal a um plano
$e_i$	- Versor paralelo ao eixo $x_i$
$t_{ij}^*$	- Solução fundamental para forças de superfície
$u_{ij}^*$	- Solução fundamental para deslocamentos
$N_{nos}$	- Quantidade de nós
$b_i$	- Forças de corpo
$\hat{f}(\alpha, x_i)$	- Transformada de Radon de $f(x_i)$
$R\{\cdot\}$	- Operador da Transformada de Radon
$d_i$	- Vetor distância entre o ponto fonte e o ponto campo
$r$	- Distância entre o ponto fonte e o ponto campo
$E_1, E_2$	- Módulo de elasticidade longitudinal e transversal
$t'_i$	- Forças de superfície no sistema local de coordenadas
$[H]_s, [G]_s$ ou $[H]^s, [G]^s$	- Matrizes $[H]$ e $[G]$ referentes a sub-região $s$

## Letras Gregas

$\sigma_{ij}$	- Tensor de Tensões
$\varepsilon_{ij}$	- Tensor de Deformações
$\delta_{ij}$	- Delta de Kronecker
$\xi$	- Ponto de colocação, ou ponto fonte
$\Omega$	- Domínio do problema

- $\Gamma$  - Contorno do problema  
 $\lambda, \mu$  - Coeficientes de Lamé  
 $\nu_1, \nu_2$  - Coeficiente de Poisson longitudinal e transversal

## Abreviações

- MEC - Método dos Elementos de Contorno  
MEF - Método dos Elementos Finitos  
MDF - Método das Diferenças Finitas

# Capítulo 1

## Introdução

Anisotropia de um material diz respeito a variação das propriedades em função da direção. Materiais compósitos podem ser citados como exemplos deste tipo de material. Neles, suas características dependem fundamentalmente de três fatores: o tipo de fibra empregado e sua orientação, e a matriz utilizada. A fibra, na maioria das vezes, fornece maior resistência mecânica, enquanto a matriz é necessária para proteção das fibras contra o meio externo e por mante-las unidas.

Se as fibras são particuladas, este tende a exibir um comportamento isotrópico. Entretanto, se é constituído por fibras curtas ou contínuas, ele exibe graus de anisotropia mais acentuados. Materiais com fibras contínuas unidirecionais, ou seja, dispostas sempre em uma única direção, podem ser modelados como transversalmente isotrópicos. Já quando as fibras são dispostas em várias direções, há a necessidade de uma formulação mais geral, que possibilite a modelagem de materiais anisotrópicos.

A aplicação deste tipo de material decorre da necessidade de se obter propriedades particulares para um determinado propósito, seja condutividade térmica ou elétrica, rigidez, resistência mecânica ou densidade. Estas características são alcançadas variando seus materiais constituintes, fibra e matriz, a quantidade de cada um e o tipo e orientação das fibras. Visto que os compósitos apresentam maior relação rigidez por densidade (rigidez específica) e resistência por densidade (resistência específica) (Albuquerque, 2001), é possível desenvolver modelos ótimos para uma determinada aplicação, seja na construção civil, em bioengenharia como na confecção de próteses otimizadas, na indústria aeroespacial como nas asas e fuselagens e em reparos das estruturas, e também na indústria automotiva, encontrados principalmente em pneumáticos, onde as fibras metálicas unidirecionais são revestidas por uma matriz de borracha, garantindo uma resistência superior na direção de sollicitação da pressão circunferencial.

Este tipo de material também é muito encontrado na natureza, os chamados compósitos

naturais. Alguns exemplos são a madeira, que é constituída por fibras de celulose revestidas em matriz de lignina e também o material ósseo, em ossos corticais, ou densos, que são fibras de colágeno revestidas por uma matriz mineral.

Para a análise dessas estruturas, são necessárias em geral, a utilização de métodos numéricos, ou aproximados, uma vez que as geometrias tendem a ter formas complexas, o que torna impossível uma solução analítica, ou fechada. Alguns dos métodos mais robustos e difundidos atualmente são o Método dos Elementos de Contorno, o Método dos Elementos Finitos e o Método das Diferenças Finitas. Os dois primeiros são métodos que aproximam a formulação integral do problema, enquanto o último parte da discretização diretamente das equações diferenciais que governam o problema. Os três métodos são discutidos no Capítulo 2, onde são apresentadas as vantagens e desvantagens de cada um.

O emprego do Método dos Elementos de Contorno possui uma formulação mais complexa que o Método dos Elementos Finitos, isto porque é necessário ter o que se chama de solução fundamental. Também deve-se notar que para o tratamento de problemas que envolvam mais de um tipo de material, é necessário o emprego de técnicas como sub-regiões, onde o domínio é dividido em sub-domínios. É possível empregar soluções fundamentais específicas para estes problemas, mas estas podem ser bastante complexas (Gaul et al., 2003). Hartmann (1989) mostra que é possível desenvolver uma formulação alternativa que evita o uso de sub-regiões, entretanto é necessário o cálculo das forças de superfície separadamente e não permite que as matrizes  $[H]$  e  $[G]$  sejam calculadas separadamente.

Este trabalho faz parte do desenvolvimento de um módulo de análise por elementos de contorno 3D - E-Con3D, desenvolvido por Noritomi (2000, 2006) para análise de estruturas isotrópicas e transversalmente isotrópicas, contando também com um módulo de remodelagem óssea para estudo de problemas em bioengenharia. Este programa usa elementos contínuos bi-quadráticos de oito nós e também triangulares linear, e assim, o desenvolvimento deste trabalho foi todo baseado em elementos contínuos, o que implica na adoção de uma abordagem para tratamento de cantos entre as sub-regiões.

## 1.1 Objetivos

- Objetivos gerais: Implementar um módulo para tratamento de sub-regiões em problemas 3D e a solução fundamental para anisotropia plena em um código de elementos de contorno para modelagem de problemas de elastostática.
- Objetivos específicos: Estudar o comportamento da solução fundamental para anisotropia plena mediante a variação de parâmetros, testar métodos para otimização do cálculo e verificar a robustez do programa desenvolvido para sub-regiões.

## 1.2 Estrutura do Trabalho

Este texto conta com sete capítulos assim estruturados:

**Capítulo 1:** Introdução. O propósito deste capítulo é fazer uma breve explanação sobre o tema, justificativa do método escolhido e fornecer uma visão geral do problema.

**Capítulo 2:** O Método dos Elementos de Contorno. Aqui serão apresentados os conceitos básicos do método, a formulação, comparação com outros métodos numéricos, vantagens, desvantagens e aplicações.

**Capítulo 3:** A Solução Fundamental Anisotrópica. Aqui é discutida a formulação e implementação da solução fundamental para problemas anisotrópicos 3D e as estratégias adotadas para tornar mais eficiente seu cálculo. Também serão apresentadas as formulações para o caso isotrópico e transversalmente isotrópico.

**Capítulo 4:** Sub-regiões. Apresentação do método, formulação, vantagens e limitações. Tratamento de cantos na interface das sub-regiões e aplicação das condições de contorno, estudos de casos e exemplos numéricos.

**Capítulo 5:** Implementação Computacional. Neste capítulo é discutido o programa E-Con3D e a implementação do método de sub-regiões.

**Capítulo 6:** Conclusões.

**Capítulo 7:** Trabalhos Futuros.

# Capítulo 2

## O Método dos Elementos de Contorno

Para a solução de certos problemas são necessários métodos numéricos, ou seja, soluções aproximadas. Isto devido à complexidade do problema, ou até mesmo a impossibilidade de uma solução analítica.

A maioria dos fenômenos físicos pode ser descrita por equações diferenciais ordinárias, envolvendo apenas uma dimensão, ou parciais envolvendo duas ou mais dimensões. Para a solução numérica de equações diferenciais podem ser citados o Método dos Elementos de Contorno (MEC), Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método das Diferenças Finitas (MDF). A seguir são descritas vantagens e desvantagens relacionadas a cada método (Kane, 1994; Pouzada, 1999):

- Método das Diferenças Finitas:
  - Vantagens:
    1. Extremamente geral;
    2. Extensivamente usado em Mecânica dos Fluídos;
    3. Não requer integração numérica;
    4. Matrizes esparsas;
    5. Trata não homogeneidades;
    6. Menor tempo para desenvolvimento de formulação.
  - Desvantagens:
    1. Requer malhas estruturadas;
    2. Não é apropriado para tratar domínios infinitos;
    3. Requer malhas refinadas;
    4. Dificuldade em modelar contorno e condições de contorno.

- Método dos Elementos Finitos:

- Vantagens:

1. Tecnologia bem desenvolvida;
2. Usado extensivamente em Mecânica dos Sólidos, Térmica e Fluidos e Eletromagnetismo;
3. Integração de funções simples;
4. Matrizes esparsas;
5. Modela contornos e condições de contorno naturalmente;
6. Não requer malhas estruturadas e possibilita mesclar vários tipos de elementos.

- Desvantagens:

1. Necessita de malhas de domínio;
2. Requer relações integrais de funcionais ou resíduos ponderados na sua formulação;
3. Dificuldade em se tratar de domínios infinitos;
4. Resolução dos gradientes de resposta bastante relacionado ao refinamento da malha.

- Método dos Elementos de Contorno:

- Vantagens:

1. Modela contorno e condições de contorno naturalmente;
2. Requer apenas malhas de contorno;
3. Usado em Mecânica Estrutural, Térmica, Acústica, Elastodinâmica, Mecânica dos Fluidos e Eletromagnetismo;
4. Ideal para domínios infinitos;
5. Resolução do gradiente de resposta não relacionado ao refinamento da malha do volume;
6. Matrizes esparsas em blocos, se utilizado sub-regiões;
7. Única alternativa para certos problemas.

- Desvantagens:

1. Requer relações integrais, além da transformação para equações de contorno usando soluções fundamentais;

2. Requer integração numérica de funções complexas;
3. Matrizes não simétricas em geral;
4. Tecnologia em desenvolvimento;
5. Dificuldade em se tratar não homogeneidades.

Nas próximas seções serão apresentadas a formulação para as Equações Integrais de Contorno (EIC's) e a formulação do MEC.

## 2.1 Formulação das Equações Integrais de Contorno

Para problemas de elasticidade linear, três equações descrevem o equilíbrio do corpo e outras três a compatibilidade cinemática. A saber:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (2.1)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.2)$$

Na Equação 2.1  $b_i$  são as forças de corpo resultantes do peso próprio, de reações químicas no corpo ou devido a campos eletromagnéticos, e  $\sigma_{ij,j}$  é o divergente do tensor de tensões  $\sigma_{ij}$ . O vetor  $u_i$  na Equação 2.2 é o vetor de deslocamento linear.

Há também as equações constitutivas, que relacionam as tensões com os deslocamentos. De uma forma geral, são escritas da seguinte forma (Fung & Tong, 2001):

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (2.3)$$

$$= C_{ijkl}\frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k}) = C_{ijkl}u_{k,l} \quad (2.4)$$

A Equação 2.3 é também conhecida como Lei de Hooke generalizada. Em relação ao tensor  $C_{ijkl}$ , devido a simetria de tensões e deslocamentos, é possível escrever as Equações 2.5 e 2.6 respectivamente, enquanto pela forma quadrática da energia de deformação, permite escrever a Equação 2.7.

$$C_{ijkl} = C_{jikl} \quad (2.5)$$

$$C_{ijkl} = C_{ijlk} \quad (2.6)$$

$$C_{ijkl} = C_{klij} \quad (2.7)$$

Assim, tendo a simetria do tensor  $C_{ijkl}$ , ao invés de oitenta e uma constantes, restam apenas vinte e uma componentes a serem determinadas e a Lei de Hooke é escrita na forma:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1113} & C_{1123} & C_{1112} \\ & C_{2222} & C_{2233} & C_{2213} & C_{2232} & C_{2212} \\ & & C_{3333} & C_{3313} & C_{3323} & C_{3312} \\ & & & sym & C_{1313} & C_{1323} & C_{1312} \\ & & & & & C_{2323} & C_{2312} \\ & & & & & & C_{1212} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Outra equação fundamental para a Mecânica dos Sólidos é o Tensor de Cauchy. Ele determina as forças de superfície em uma determinada direção  $t_i$  em um dado ponto, relacionando o estado de tensão descrito pelo tensor  $\sigma_{ij}(x)$  com o versor normal  $n_j(x)$ :

$$t_i = \sigma_{ij}n_j \quad (2.9)$$

Neste ponto, é interessante descrever algumas ferramentas matemáticas que serão usadas para o desenvolvimento da formulação das EIC's.

O Teorema do Divergente, ou Teorema de Gauss, relaciona integrais de domínio com integrais de contorno utilizando relações diferenciais (Butkov, 1988) como mostra a Equação 2.10 e a primeira identidade de Green, Equação 2.11:

$$\int_{\Omega} f_{i,i} d\Omega = \int_{\Gamma} f_i n_i d\Gamma \quad (2.10)$$

$$\int_{\Omega} (g \cdot f_{,ii} - f \cdot g_{,ii}) d\Omega = \int_{\Gamma} (g \cdot f_{,i} - f \cdot g_{,i}) n_i d\Gamma \quad (2.11)$$

Para a obtenção das EIC's, a Equação 2.1 é ponderada por uma função  $w$  qualquer e integrada no domínio  $\Omega$ . Assim:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + b_i) \cdot w d\Omega = 0 \quad (2.12)$$

Como o índice livre  $i$  representa três equações distintas, estas devem ser ponderadas por funções diferentes. Desta forma, a Equação 2.12 fica:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + b_i) w_i d\Omega = 0 \quad (2.13)$$

Integrando por partes o primeiro termo da Equação 2.13:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,j} w_i d\Omega = \int_{\Omega} \left( [\sigma_{ij} w_i]_{,j} - \sigma_{ij} w_{i,j} \right) d\Omega \quad (2.14)$$

Utilizando o Teorema de Gauss, o primeiro termo do lado esquerdo da igualdade fica:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij} w_i)_{,j} d\Omega = \int_{\Gamma} \sigma_{ij} w_i n_j d\Gamma \quad (2.15)$$

Substituindo as Equações 2.15 e 2.14 em 2.13 e rearranjando os termos:

$$\int_{\Gamma} \sigma_{ij} w_i n_j d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij} w_{i,j} d\Omega + \int_{\Omega} b_i w_i d\Omega = 0 \quad (2.16)$$

Por fim, aplicando o Teorema de Cauchy no primeiro termo da Equação 2.16:

$$\int_{\Gamma} t_i w_i d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij} w_{i,j} d\Omega + \int_{\Omega} b_i w_i d\Omega = 0 \quad (2.17)$$

A Equação 2.17 pode ser interpretada como uma equação integral de equilíbrio. Lembrando da Equação 2.4, escolhendo a função  $w_i = u_i^*$ , onde  $u_i^*$  é um campo de deslocamentos arbitrário, e integrando por partes o segundo termo da Equação 2.17:

$$\int_{\Omega} C_{ijkl} u_{k,l} u_{i,j}^* d\Omega = \int_{\Omega} C_{ijkl} \left[ (u_k u_{i,j}^*)_{,l} - u_k u_{i,jl}^* \right] d\Omega \quad (2.18)$$

Substituindo 2.18 em 2.17 e aplicando as relações 2.1, 2.9 e 2.10:

$$\int_{\Gamma} (t_i u_i^* - t_i^* u_i) d\Gamma + \int_{\Omega} (b_i u_i^* - b_i^* u_i) d\Omega = 0 \quad (2.19)$$

A Equação 2.19 é o análogo em Mecânica dos Sólidos da segunda identidade de Green, também conhecido como Teorema de Betti (Gaul et al., 2003).

Fazendo  $b_i = 0$ :

$$\int_{\Gamma} (t_i u_i^* - t_i^* u_i) d\Gamma = \int_{\Omega} b_i^* u_i d\Omega \quad (2.20)$$

Como já discutido, o objetivo do MEC é, em última análise, evitar o cálculo de integrais no domínio do problema. Para que isto aconteça, deve-se escolher uma função ponderadora tal que, dado um operador diferencial  $\mathcal{L}$ :

$$\mathcal{L} w_i^* = \delta(x - \xi) \quad (2.21)$$

Sendo que  $\delta(x - x_i)$  é a representação Delta de Dirac e possui as seguintes propriedades

e é representado graficamente pela Figura 2.1:

$$\delta(x - x_i) = \begin{cases} 0 & x \neq x_i \\ \infty & x = x_i \end{cases} \quad (2.22)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_i) dx = 1 \quad (2.23)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_i) dx = f(x_i) \quad (2.24)$$

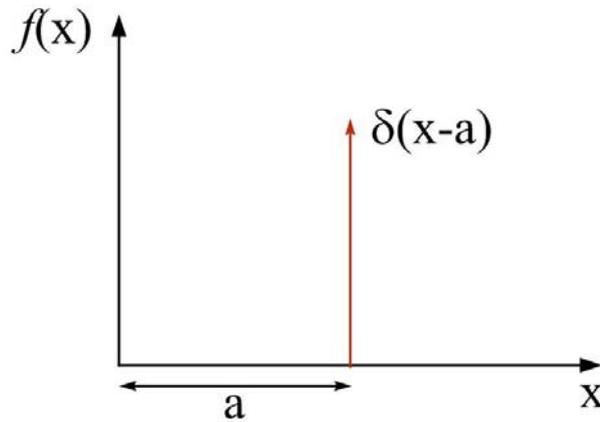


Figura 2.1: Representação do Delta de Dirac

A função  $w_i^*$  é chamada solução fundamental e constitui um desafio e algumas vezes um limitante para o desenvolvimento de uma formulação analítica para método. Telles & Gusmão (2000); Vera-Tudela & Telles (2005) apresentam tratamentos numéricos para a solução fundamental. Para problemas de elasticidade isotrópica, a solução fundamental para deslocamentos e conseqüentemente para forças de superfície, é obtida resolvendo o problema de Kelvin (Kane, 1994), no qual uma das abordagens clássicas para a solução do problema é a aplicação do vetor de Galerkin, que é usado para desacoplar as equações diferenciais. Já para problemas transversalmente isotrópicos, ou seja, isotrópicos por planos, Pan & Chou (1976) apresentam uma formulação geral para o problema posteriormente trabalhada por Loloi (2000) para implementações computacionais e tratamento de singularidades. Este equationamento utiliza escolha de diferentes funções para a composição da solução fundamental de deslocamentos e de forças de superfície. Mais detalhes sobre estas soluções fundamentais e a formulação para problemas com anisotropia plena serão discutidos com maior abrangência no Capítulo 3 desta dissertação.

Neste momento, deve-se observar que, em consequência da aplicação de uma força qualquer  $F$  na direção  $i$ , implica em um campo de deslocamentos  $u_j$ , então, se as forças são aplicadas nas três direções simultaneamente, os deslocamentos são a superposição das componentes referentes a cada excitação (Carrion, 2002):

$$\begin{aligned} u_1^* &= u_{11}^* e_1 + u_{12}^* e_2 + u_{13}^* e_3 \\ u_2^* &= u_{21}^* e_1 + u_{22}^* e_2 + u_{23}^* e_3 \\ u_3^* &= u_{31}^* e_1 + u_{32}^* e_2 + u_{33}^* e_3 \end{aligned} \quad (2.25)$$

O conjunto de Equações 2.25 pode ser generalizado para uma direção qualquer, sendo  $n_k$  o versor associado a esta direção e o sub-índice  $i$  a direção na qual está aplicada a carga pontual:

$$u_i^* = u_{ik}^* n_k \quad (2.26)$$

Escolhe-se  $b_k^* = \delta(x - \xi) n_k$ , que é a representação de uma carga pontual de módulo unitário aplicada na direção  $n_k$  e  $\xi$  é o ponto onde está aplicada a carga (ponto de colocação). O tensor de tensões passa a ser um tensor de ordem 3, isto porque para cada carga pontual  $b_k^*$  é associado um estado de tensão  $\sigma_{ij}^*$ , e assim o Tensor de Cauchy fica:

$$t_{ik}^* = \sigma_{ijk}^* n_j \quad (2.27)$$

Substituindo os termos  $u_i^*$  e  $t_{ik}^*$  em 2.20 por seus respectivos tensores ( $u_{ij}^*$  e  $t_{ik}^*$ ):

$$\int_{\Gamma} (t_j u_{ij}^* - u_j t_{ij}^*) d\Gamma = \int_{\Omega} b_j^* u_j d\Omega \quad (2.28)$$

Usando a propriedade 2.24, a Equação 2.28 fica:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (t_j u_{ij}^* - u_j t_{ij}^*) d\Gamma &= \int_{\Omega} \delta(x - \xi) u_j d\Omega \\ \int_{\Gamma} (t_j u_{ij}^* - u_j t_{ij}^*) d\Gamma &= u_j(\xi) n_j \end{aligned} \quad (2.29)$$

Agora, alinhando o vetor  $n_i$  com os eixos coordenados cartesianos, o termo  $u_j(\xi) n_j$  passa a ser apenas  $u_j(\xi)$  pois apenas  $j$ -ésima componente na direção do eixo  $x_i$  não é zero. Assim

a Equação 2.29 passa a ser apenas:

$$\int_{\Gamma} (t_j u_{ij}^* - u_j t_{ij}^*) d\Gamma = u_i(\xi) \quad (2.30)$$

Observando a Equação 2.30, chamada de Identidade de Somigliana, nota-se que a integral no domínio do problema desaparece, porém agora é necessário obter o valor para a função  $u_i(\xi)$ .

A propriedade 2.24 permite determinar o valor de  $u_i(\xi)$  em duas situações:

$$u_i(\xi) = \begin{cases} \delta_{ij} & \text{se } \xi \in \Omega \\ 0 & \text{se } \xi \notin \Omega \end{cases} \quad (2.31)$$

Resta determinar para a situação quando  $\xi \in \Gamma$ . Kane (1994) mostra que, para um material isotrópico e contornos suaves, o valor de  $u_i(\xi)$  é dado por:

$$u_i(\xi) = -\frac{1}{2} \delta_{ij} u_j \quad (2.32)$$

Definindo  $c_{ij}(\xi) u_j = u_i(\xi)$ :

$$c_{ij}(\xi) = \begin{cases} 0 & \xi \notin \Omega \\ \delta_{ij} & \xi \in \Omega \\ -\frac{1}{2} \delta_{ij} & \xi \in \Gamma \text{ (contorno suave)} \end{cases} \quad (2.33)$$

Hartmann (1989) mostra o desenvolvimento adequado para contornos não suaves e Mantic & Paris (1995) apresentam a formulação para o tensor de para meios anisotrópicos.

## 2.2 Discretização do Problema em Elementos de Contorno

Todo o desenvolvimento das EIC's até agora é feito de forma exata, isto é, nenhuma simplificação foi feita ou nenhum valor foi aproximado. Entretanto, para problemas reais de engenharia serão necessárias aproximações para que se possa descrever o modelo físico e geométrico. A discretização do fenômeno analisado e da geometria do problema é feito utilizando funções de forma. Neste trabalho, as funções de forma são contínuas (os elementos compartilham nós) e quadráticas de oito nós.

O uso de elementos contínuos implica num resultado mais refinado que se usado elementos descontínuos e a geração de malha também é mais simples, uma vez que podem ser usados modelos empregados em elementos finitos. A maior dificuldade está na montagem da matriz  $[H]$ , que fica mais complexa que se usado elementos descontínuos.

As funções de forma  $N_i(\xi, \eta)$  devem obedecer aos seguintes requisitos<sup>1</sup>:

$$N_i(\xi_j, \eta_j) = \delta_{ij} \quad (2.34)$$

$$\sum_{n=1}^{N_{nos}} N_n(\xi, \eta) = 1 \quad (2.35)$$

Tendo em vista as propriedades 2.34 e 2.35, as funções de forma para o elemento em coordenadas intrínsecas mostrado na Figura 2.2 são:

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)(-\xi - \eta - 1) \\ N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)(\xi - \eta - 1) \\ N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)(\xi + \eta - 1) \\ N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)(-\xi + \eta - 1) \\ N_5(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta) \\ N_6(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 + \xi) \\ N_7(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta) \\ N_8(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 - \xi) \end{aligned} \quad (2.36)$$

---

<sup>1</sup> $N_{nos}$  o número de nós presentes no elemento.

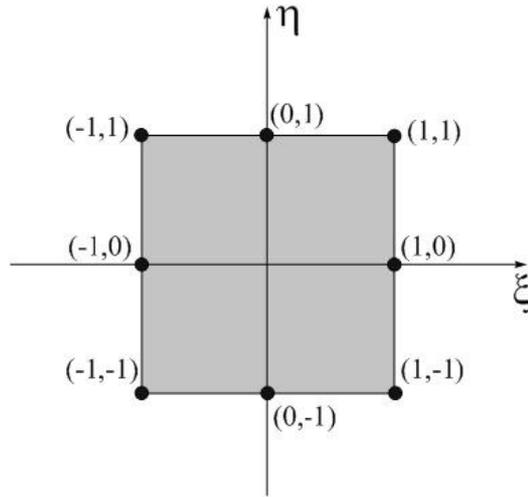


Figura 2.2: Representação de um elemento de oito nós no sistema de coordenadas intrínseco

A Figura 2.3 ilustra os gráficos das funções  $N_1$  e  $N_8$ .

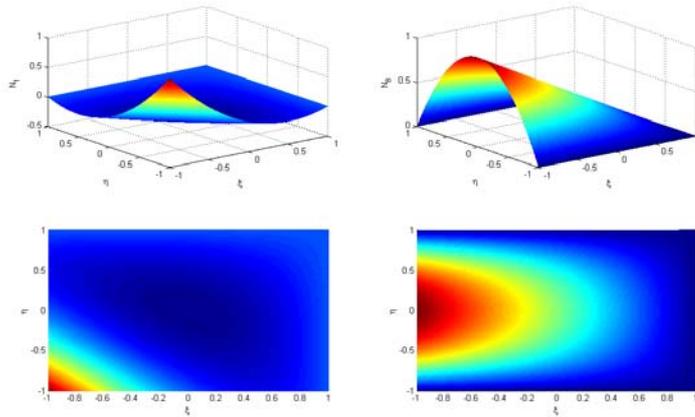


Figura 2.3: Gráficos para as funções de forma  $N_1$  e  $N_8$

O conjunto de Equações 2.36 é usado para mapear tanto o fenômeno físico quanto a geometria do problema. Se o mesmo conjunto de equações é usado em ambos os casos, este é então chamado de elemento isoparamétrico.

A quantidade interpolada é expressa da seguinte forma:

$$v = \sum_{n=1}^8 v_n N_n \quad (2.37)$$

Na Equação 2.37  $v$  pode ser tanto as coordenadas nodais como forças de superfície ou

deslocamentos. O somatório varia de um até o número de nós presentes no elemento, no caso, oito.

Para um problema 3D, existem seis incógnitas por nó: três forças de superfície e três deslocamentos, assim, a grandeza vetorial pode ser expressa em forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \\ v_3^1 \\ \vdots \\ v_1^8 \\ v_2^8 \\ v_3^8 \end{Bmatrix} \quad (2.38)$$

Desta forma, a Equação Integral de Contorno para  $N$  elementos pode ser escrita como:

$$c(\xi) u_i = \sum_{e=1}^N \sum_{n=1}^8 \left( \int_{\Gamma_e} u_{ij}^* N_n(\xi, \eta) t_j^n - t_{ij}^* N_n(\xi, \eta) u_j^n d\Gamma_e \right) \quad (2.39)$$

Sendo  $t_j^n$  e  $u_j^n$  constantes em  $\Gamma_e$ , a Equação 2.39 é reescrita na forma:

$$c(\xi) u_i + \sum_{e=1}^N \left( \sum_{n=1}^8 \int_{\Gamma_e} t_{ij}^* N_n(\xi, \eta) d\Gamma_e u_j^n \right) = \sum_{e=1}^N \left( \sum_{n=1}^8 \int_{\Gamma_e} u_{ij}^* N_n(\xi, \eta) d\Gamma_e t_j^n \right) \quad (2.40)$$

Definindo:

$$H_{ij}^e = \sum_{n=1}^8 \int_{\Gamma_e} t_{ij}^* N_n(\xi, \eta) d\Gamma_e + c_{ij}(\xi) \quad (2.41)$$

$$G_{ij}^e = \sum_{n=1}^8 \int_{\Gamma_e} u_{ij}^* N_n(\xi, \eta) d\Gamma_e \quad (2.42)$$

A Equação 2.40 passa a ser:

$$\sum_{e=1}^N H_{ij}^e u_j^e = \sum_{e=1}^N G_{ij}^e t_j^e \quad (2.43)$$

E em forma matricial:



# Capítulo 3

## A Solução Fundamental Anisotrópica

Como citado na capítulo anterior, a solução fundamental é a peça chave para o desenvolvimento do MEC. Neste capítulo serão mostrados o tratamento de problemas isotrópicos, transversalmente isotrópicos e a solução para anisotropia 3D.

### 3.1 Solução Fundamental Isotrópica

Para um problema isotrópico, a Equação 2.8 pode ser escrita como se segue:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (3.1)$$

Sendo  $\lambda$  e  $\mu$  as constantes de Lamé e podem ser escritas como:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad (3.2)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.3)$$

Substituindo a Equação 3.1 em 2.1, obtém-se as Equações de Navier-Lamé:

$$\frac{\mu}{1-2\nu} u_{i,ij} + \mu u_{i,jj} + b_i = 0 \quad (3.4)$$

O problema de Kelvin consiste em encontrar o vetor  $u_i$  sendo  $b_i = \delta(x - \xi) e_i$  (ou simplesmente  $b_i = \delta(x - \xi) \delta_{ij}$ ).

A Equação 3.4 é uma equação diferencial de segunda ordem acoplada, ou seja, cada uma das três equações é escrita em função de todos os três deslocamentos. Um dos métodos mais difundidos para solução deste problema é a aplicação do vetor de Galerkin.

Os deslocamentos são expressos em função do vetor de Galerkin:

$$u_i^* = G_{i,kk} - \frac{G_{k,ik}}{2(1-\nu)} \quad (3.5)$$

Substituindo 3.5 em 3.4:

$$\mu G_{i,kkjj} - \frac{\mu}{2(1-\nu)} G_{k,ikjj} + \frac{\mu}{(1-\nu)} \left( G_{j,kkij} - \frac{G_{k,jkij}}{2(1-\nu)} \right) + \delta_i(x-\xi) = 0 \quad (3.6)$$

Sabendo que  $G_{k,ikjj} = G_{k,jjki}$ ,  $G_{j,kkij} = G_{k,jjki}$  e  $G_{k,jkij} = G_{k,jjki}$ , 3.6 pode ser escrita como:

$$\mu G_{i,kkjj} + \delta_i(x-\xi) = 0 \quad (3.7)$$

Substituindo  $F_i = G_{i,kk}$ , tem-se:

$$\mu F_{i,jj} + \delta_i(x-\xi) = 0 \quad (3.8)$$

Para problemas 3D, Aliabadi (2002) mostra que o vetor  $F_i$  é:

$$F_i = \frac{1}{4\pi\mu d} e_i \quad (3.9)$$

E o vetor de Galerkin:

$$G_i = \frac{1}{8\pi\mu} d e_i \quad (3.10)$$

Sendo  $d = \sqrt{(x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j)} \delta_{ij}$ .

Substituindo 3.10 em 3.5:

$$u_i^* = \frac{1}{8\pi\mu} \left[ d_{,kk} e_i - \frac{1}{2(1-\nu)} d_{,ik} e_k \right] \quad (3.11)$$

Deve-se notar que  $d_{,ik} = (\delta_{ik} - d_{,i} d_{,j}) d^{-1}$  e  $d_{,kk} = 2d^{-1}$  e desta forma, 3.11 pode ser simplificada, ficando somente:

$$u_i^* = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)d} [(3-4\nu)\delta_{ij} + d_{,i} d_{,j}] e_j \quad (3.12)$$

Lembrando da Equação 2.26:

$$u_{ij}^* = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)d} [(3-4\nu)\delta_{ij} + d_{,i} d_{,j}] \quad (3.13)$$

O tensor de tensões é obtido aplicando a relação de deformação-deslocamento em 3.12 e em seguida aplicando 2.3. Por fim, com 2.9, a solução fundamental para forças de superfície é:

$$t_i^* = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)d^2} \left\{ \frac{\partial d}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{ij} + 3d_{,i}d_{,j}] - (1-2\nu)(n_j d_{,i} - n_i d_{,j}) \right\} e_j \quad (3.14)$$

O termo  $\partial d/\partial n$  significa a contração do gradiente de  $d$  com o versor normal  $n$ . Novamente, relembrando a relação 2.27:

$$t_{ij}^* = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)} d^{-2} \{ d_{,i} n_i [(1-2\nu)\delta_{jk} + 3d_{,k}d_{,j}] + (1-2\nu)[d_{,k}n_j - d_{,j}n_k] \} \quad (3.15)$$

Neste ponto, deve-se observar que a solução fundamental para  $t_{ij}^*$  apresenta singularidade de ordem  $\mathcal{O}(d^{-2})$  e pode ser tratada no sentido do Valor Principal de Cauchy (Carrion, 2002). Para uma formulação alternativa para este problema, que é adotada por Noritomi (2000), deve-se lembrar que tanto para o desenvolvimento das EIC's, quanto para o desenvolvimento do MEC, não foi, em momento algum, citada a aplicação de nenhuma condição de contorno. Sendo assim, a Equação 2.44 é uma equação que descreve o estado geral do modelo analisado, sem nenhuma suposição quanto às condições de contorno. Em outras palavras, depende apenas da geometria e das características materiais do problema.

É possível aplicar deslocamentos que não induzam forças de superfície, ou seja,  $\{t\} = \{0\}$ . Este procedimento é conhecido como argumento de corpo rígido. Sem perda de generalidade, para ilustrar o cálculo dos valores singulares da matriz  $[H]$ , supondo um modelo discretizado em elementos constantes, a matriz  $[H]^e$  é dada por:

$$[H]^e = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

A matriz do sistema global fica:

$$[H] = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & & H_{1(n-2)} & H_{1(n-1)} & H_{1n} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & \cdots & H_{2(n-2)} & H_{2(n-1)} & H_{2n} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & & H_{3(n-2)} & H_{3(n-1)} & H_{3n} \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ H_{(n-2)1} & H_{(n-2)2} & H_{(n-2)3} & & H_{(n-2)(n-2)} & H_{(n-2)(n-1)} & H_{(n-2)n} \\ H_{(n-1)1} & H_{(n-1)2} & H_{(n-1)3} & \cdots & H_{(n-1)(n-2)} & H_{(n-1)(n-1)} & H_{(n-1)n} \\ H_{n1} & H_{n2} & H_{n3} & & H_{n(n-2)} & H_{n(n-1)} & H_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Para aplicação do argumento de corpo rígido, aplica-se  $u = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}^t$  em cada nó do sistema:

$$[H] \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} = [G] \{0\} \quad (3.18)$$

Assim, o valor singular  $H_{11}$  é calculado como:

$$H_{11} = - (H_{13} + H_{16} + \cdots + H_{1(n-2)})$$

Estabelecendo a mesma relação para as outras linhas do sistema, é determinado o primeiro elemento de cada bloco da diagonal. Para a segunda e terceira coluna, são aplicados  $u = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \right\}^t$ ,  $u = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right\}^t$  respectivamente.

## 3.2 Solução Fundamental para Problemas Transversalmente Isotrópicos

Esta formulação é utilizada para o tratamento de problemas como modelagem de ossos e madeira, uma vez que ambos são materiais compósitos constituídos por fibras contínuas imersas em uma matriz como mostra a Figura 3.1. Alguns autores apresentam soluções alternativas para o problema transversalmente isotrópico, entretanto, estas são condicionadas a certos requisitos e portanto, muito limitadas.

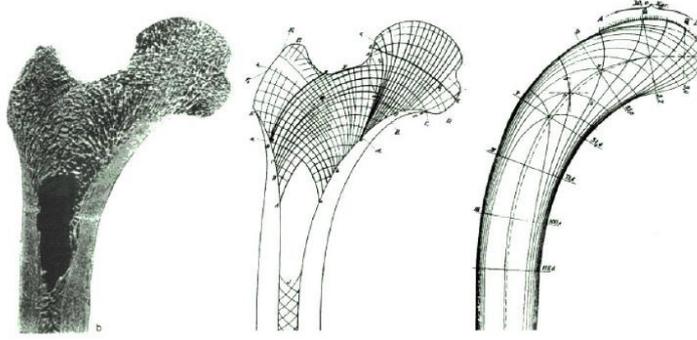


Figura 3.1: Fibras ao longo de um modelo de osso e uma haste de madeira

Pan & Chou (1976) apresentam uma solução bastante geral, que posteriormente foi trabalhada por Loloï (2000) para implementações computacionais. Esta, quando comprada a formulação para anisotropia plena, se mostra de difícil programação, pois envolve uma seqüência de chaves de escolha, para determinar o conjunto de equações a serem utilizadas em um determinado caso.

A solução para deslocamentos é:

$$u_{ij}^* = \sum_{n=1}^3 \alpha_n F_n^{(ij)} \quad (3.19)$$

Segue que:

$$u_{ij,l}^* = \sum_{n=1}^3 \alpha_n F_{n,l}^{(ij)} \quad (3.20)$$

A solução para forças de superfície é obtida utilizando a relação entre deformação-deslocamentos em 3.20, aplicando a Lei de Hook e por fim, o tensor de Cauchy.

Os coeficientes  $\alpha_n$  são contantes, e podem ser encontrados em Loloï (2000), onde o autor também aponta que são possíveis as seguintes situações que devem ser consideradas:

1.  $\nu_1 \neq \nu_2$ : Problema não degenerativo;
2.  $\nu_1 = \nu_2$ : Problema degenerativo.

Para a primeira situação, as funções  $F_n^{(ij)1}$  são:

---


$${}^1_{i,j} = 1, 2$$

$$\begin{aligned}
F_n^{(ij)} &= \frac{\delta_{ij}}{R_n^*} - \frac{d_i d_j}{R_n R_n^{*2}} \\
F_n^{(i3)} &= \text{sign}(d_3) \frac{d_i}{R_n R_n^*} \\
F_n^{(33)} &= \frac{1}{R_n} \\
F_3^{(11)} &= \frac{1}{R_3^*} - \frac{d_2^2}{R_3 R_3^*} \\
F_3^{(22)} &= \frac{1}{R_3^*} - \frac{d_1^2}{R_3 R_3^*} \\
F_3^{(12)} &= F_3^{(21)} = \frac{d_1 d_2}{R_3 R_3^{*2}}
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Sendo:

$$d_i = (x_i - \xi_i) \tag{3.22}$$

$$R_n = \sqrt{d_1^2 + d_2^2 + \nu_n^2 d_3^2} \tag{3.23}$$

$$R_n^* = R_n + \text{sign}(d_3) \nu_n d_3 \tag{3.24}$$

E

$$\text{sign}(d_3) = \begin{cases} -1 & d_3 < 0 \\ 1 & d_3 > 0 \end{cases} \tag{3.25}$$

As derivadas em relação aos eixos  $x_1$  e  $x_2$  do conjunto de Equações 3.21 em notação indicial:

$$\begin{aligned}
F_{n,i}^{(ij)} &= -\frac{d_j + \delta_{(ij)}d_i}{R_n R_n^{*2}} + \frac{d_j d_i^2}{R_n^2 R_n^{*3}} \left(2 + \frac{R_n^*}{R_n}\right) \\
F_{n,i}^{(i3)} &= \text{sign}(d_3) \left[ \frac{1}{R_n R_n^*} - \frac{d_i^2}{R_n^2 R_n^{*2}} \left(1 + \frac{R_n^*}{R_n}\right) \right] \\
F_{n,i}^{(33)} &= -\frac{d_i}{R_n^3} \\
F_{3,i}^{(11)} &= -\frac{d_i}{R_3 R_3^{*2}} - d_2 \left[ \frac{2\delta_{i2}}{R_3 R_3^*} - \frac{d_i}{R_3^2 R_3^{*2}} \left(1 + \frac{R_3^*}{R_3}\right) \right] \\
F_{3,i}^{(22)} &= -\frac{d_i}{R_3 R_3^{*2}} - d_1 \left[ \frac{2\delta_{i1}}{R_3 R_3^*} - \frac{d_i}{R_3^2 R_3^{*2}} \left(1 + \frac{R_3^*}{R_3}\right) \right] \\
F_{3,i}^{(12)} &= F_{3,i}^{(21)} = \frac{d_1 d_2}{d_i R_3 R_3^{*2}} - \frac{d_1 d_2 d_i}{R_3^2 R_3^{*3}} \left(2 + \frac{R_3^*}{R_3}\right)
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Em relação ao eixo  $x_3$ :

$$\begin{aligned}
F_{n,3}^{(ij)} &= -\frac{\delta_{ij}}{R_n^{*2}} \left( \frac{\nu_n^2 d_3}{R_n} + \nu_n \text{sign}(d_3) \right) + \frac{d_i d_j}{(R_n R_n^{*2})^2} \left[ \frac{\nu_n^2 d_3}{R_n} R_n^{*2} + 2R_n R_n^* \left( \frac{\nu_n^2 d_3}{R_n} + \nu_n \text{sign}(d_3) \right) \right] \\
F_{n,3}^{(i3)} &= -\frac{\text{sign}(d_3) d_i}{(R_n R_n^*)^2} \left[ \nu_n^2 d_3 \left(1 + \frac{R_n^*}{R_n}\right) + \nu_n R_n \text{sign}(d_3) \right] \\
F_{n,3}^{(33)} &= -\frac{\nu_n^2 d_3}{R_n^3} \\
F_{3,3}^{(11)} &= -\frac{1}{R_3^{*2}} \left( \frac{\nu_3^2 d_3}{R_3} + \nu_3 \text{sign}(d_3) \right) + \frac{d_2^2}{(R_3 R_3^*)^2} \left[ \nu_3^2 d_3 \left(1 + \frac{R_3^*}{R_3}\right) + \nu_3 R_3 \text{sign}(d_3) \right] \\
F_{3,3}^{(22)} &= -\frac{1}{R_3^{*2}} \left( \frac{\nu_3^2 d_3}{R_3} + \nu_3 \text{sign}(d_3) \right) + \frac{d_1^2}{(R_3 R_3^*)^2} \left[ \nu_3^2 d_3 \left(1 + \frac{R_3^*}{R_3}\right) + \nu_3 R_3 \text{sign}(d_3) \right] \\
F_{3,3}^{(12)} &= F_{3,3}^{(21)} = -\frac{d_1 d_2}{(R_3 R_3^{*2})^2} \left[ \frac{\nu_3^2 d_3 R_3^{*2}}{R_3} + 2R_3^* \left( \nu_3^2 d_3 + \nu_3 R_3 \text{sign}(d_3) \right) \right]
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Para o segundo caso, o conjunto de equações fica:

$$\begin{aligned}
F_1^{(ij)} &= \frac{\delta_{ij}}{R_1} - \frac{d_i d_j}{R_1^3} \\
F_2^{(ij)} &= \frac{\delta_{ij}}{R_1^*} - \frac{d_i d_j}{R_1 R_1^{*2}} \\
F_1^{(i3)} &= \frac{d_i d_3 \nu_1^2}{R_1^3} \\
F_2^{(i3)} &= 0 \\
F_1^{(33)} &= \frac{1}{R_1} \\
F_2^{(33)} &= \frac{d_3^3 \nu_1^4}{R_1^3}
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Suas derivadas em relação aos eixos  $x_1$  e  $x_2$  são dadas por 3.29<sup>2</sup>, enquanto em relação ao eixo  $x_3$  por 3.30:

$$\begin{aligned}
F_{1,i}^{(ij)} &= -\frac{d_i \delta_{(ij)}}{R_1^3} - \frac{d_j}{R_1^5} \left( \frac{R_1^2 - 3d_i^2}{R_1} \right) \\
F_{2,i}^{(ij)} &= -\frac{d_i \delta_{(ij)}}{R_1} - d_j \left[ \frac{1}{R_1 R_1^{*2}} - \frac{d_i^2}{R_1^2 R_1^3} \left( 2 + \frac{R_1^*}{R_1} \right) \right] \\
F_{1,i}^{(i3)} &= \nu_1^2 d_3 \left( \frac{1}{R_1^3} - 3 \frac{d_i^2}{R_1^5} \right) \\
F_{2,i}^{(i3)} &= 0 \\
F_{1,i}^{(33)} &= -\frac{d_i}{R_1^3} \\
F_{2,i}^{(33)} &= -3d_3^3 \nu_1^4 \frac{d_i}{R_1^5}
\end{aligned} \tag{3.29}$$

---

<sup>2</sup> $F_3^{(i3)}$  e  $F_3^{(33)}$  não são consideradas, pois  $\alpha_3^{(i3)} = \alpha_3^{(33)} = 0$ .

$$\begin{aligned}
F_{1,3}^{(ij)} &= \nu_1^2 \frac{d_3}{R_1^3} \left( \frac{3}{R_1^2} - \delta_{ij} \right) \\
F_{2,3}^{(ij)} &= -\frac{\delta_{ij}}{R_1^{*2}} \left( \frac{\nu_1^2 d_3}{R_1} + \text{sign}(d_3) \nu_1 \right) + \nu_1^2 d_3 \left( 2 + \frac{R_1^*}{R_1} \right) + 2R_1^* R_1 \nu_1 \text{sign}(d_3) \\
F_{1,3}^{(i3)} &= \nu_1^2 d_i \left( \frac{1}{R_1^3} - 3\nu_1^2 \frac{d_3^2}{R_1^5} \right) \\
F_{2,3}^{(i3)} &= 0 \\
F_{1,3}^{(33)} &= -3\nu_1^2 \frac{d_3}{R_1^5} \\
F_{2,3}^{(33)} &= \frac{3\nu_1^4 d_3^2}{R_1^3} \left( 1 - \nu_1^2 \frac{d_3^2}{R_1^2} \right)
\end{aligned} \tag{3.30}$$

### 3.3 Solução Fundamental para Anisotropia Plena 3D

A solução fundamental para anisotropia plena 3D possui apenas termos integrais, o que torna inviável uma solução fechada. O uso de variáveis complexas foi proposta a princípio por Cruse & Sweldlow (1971) para problemas 2D, sendo a partir de então, extensamente utilizada para estes tipos de análises (Sollero & Aliabadi, 1993; Albuquerque & Sollero, 1997; Deb, 1996; Deb & Banerjee, 1990). Schlar (1994) apresenta uma solução utilizando a Transformada de Fourier para problemas 3D, assim como Vogel & Rizzo (1973) e Wilson & Cruse (1978) também apresentam uma formulação para domínios tridimensionais.

Entretanto, essas formulações implicam em um grande esforço computacional para o cálculo da solução fundamental, o que é indesejável, uma vez que a montagem das matrizes  $[H]$  e  $[G]$  tomam grande parte do tempo de processamento da análise. Em contrapartida, é possível obter uma solução eficiente utilizando a Transformada de Radon como apresenta Gaul et al. (2003). A Transformada de Radon, na qual a representação Delta de Dirac ( $\delta(x - \xi)$ ) age como um filtro no domínio, e tem diversas aplicações no processamento de imagens e de raio-x. A expressão para a transformada e sua inversa são dadas pelas Equações 3.31 e 3.32:

$$\hat{f}(\alpha, x_i) = R \{ f(x_i) \} = - \int_{\Omega} f(x_i) \delta(\alpha - z_i x_i) d\Omega \tag{3.31}$$

$$f(x_i) = R^{-1} \left\{ \hat{f}(\alpha, x_i) \right\} = \frac{1}{8\pi^2} \int_{z_i z_i=1} \left. \frac{\partial^2 \hat{f}(\alpha, x_i)}{\partial \alpha^2} \right|_{\alpha=z_i x_i} d\Gamma(z_i) \tag{3.32}$$

As Figuras 3.2e 3.3 ilustram o plano onde é efetuada a Transformada de Radon e a casca

esférica de raio unitário para a transformada inversa:

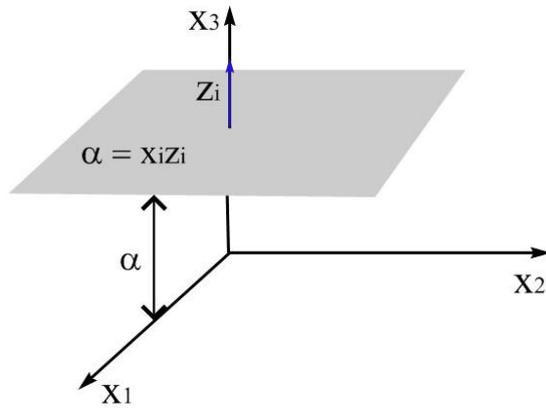


Figura 3.2: Plano onde é efetuada a Transformada de Radon

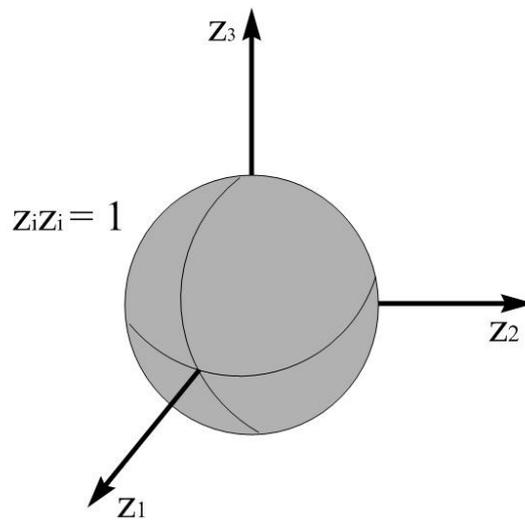


Figura 3.3: Esfera de raio unitário sobre a qual é efetuada a transformada inversa de Radon

A propriedade de homogeneidade e a transformação de derivadas são dadas pelas Equações 3.33 e 3.34:

$$R \{ f(k\alpha, kz_i) \} = \frac{1}{|k|} R \{ f(\alpha, z_i) \} \quad (3.33)$$

$$R \left\{ \frac{\partial^n f}{\partial x_i \partial x_j \dots} \right\} = z_i z_j \dots \frac{\partial^n R \{ f \}}{\partial \alpha^n} \quad (3.34)$$

A solução fundamental para deslocamentos é obtida aplicando a Transformada de Radon à Equação 2.1, que escrita em função dos deslocamentos  $u_{im}^*$  fica :

$$C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_{mk}^*}{\partial x_l \partial x_j} = -\delta_{im} \delta(x, \xi) \quad (3.35)$$

Desta forma, usando a propriedade 3.34, tem-se a seguinte equação diferencial no domínio de Radon:

$$C_{ijkl} z_l z_j \frac{\partial^2 u_{mk}^*(\alpha, z_n)}{\partial \alpha^2} = \delta(\alpha) \delta_{im} \quad (3.36)$$

Sabendo que  $\alpha = z_i d_i$ , onde o vetor  $d_i$  representa a distância do ponto fonte ao ponto campo, e pode ser expresso como  $d_i = \|d_i\| d_i^0$ , sendo  $\|d_i\|$  a norma euclidiana do vetor, a Equação 3.36 pode ser reescrita com ajuda da propriedade 3.33 como:

$$C_{ijkl} z_l z_j \frac{\partial^2 u_{mk}^*}{\partial \alpha^2} = \frac{1}{\|d_i\|} \delta(z_i d_i^0) \delta_{im} \quad (3.37)$$

Definindo:

$$M_{ik}^{zz} = M_{ik}^{zz}(z_i) = C_{ijkl} z_l z_j \quad (3.38)$$

A Equação 3.37 fica:

$$\frac{\partial^2 u_{mk}^*(\alpha, z_n)}{\partial \alpha^2} = \frac{1}{\|d_i\|} [M_{mk}^{zz}]^{-1} \delta(z_i d_i^0) \quad (3.39)$$

A solução fundamental para deslocamentos é obtida aplicando a transformada inversa à Equação 3.39:

$$u_{mk}^* = R^{-1} \left\{ \frac{\partial^2 u_{mk}^*(\alpha, z_n)}{\partial \alpha^2} \right\} = \frac{1}{8\pi^2 \|d_i\|} \int_{z_i z_i = 1} [M_{mk}^{zz}]^{-1} \delta(z_i d_i^0) d\Gamma \quad (3.40)$$

A Figura 3.4 ilustra a interseção do plano definido pelo versor  $d_i^0$  com a esfera de raio unitário onde é efetuada a transformada inversa, definida pela igualdade  $z_i z_i = 1$ :

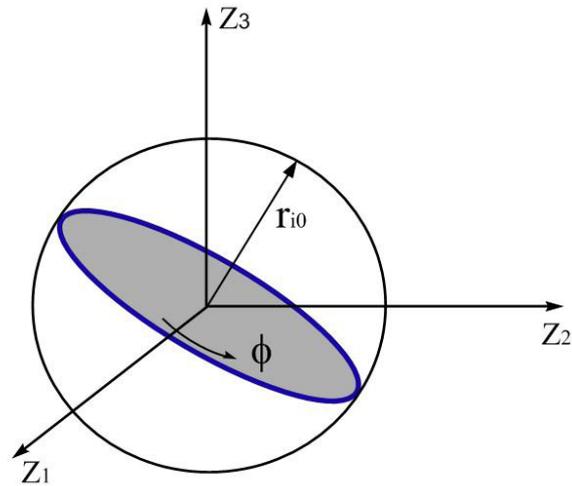


Figura 3.4: Interseção da esfera de raio unitário com o plano definido pelo vetor  $r_i^0$

O vetor  $z_i$  deve ser determinado de forma que seu produto interno com o vetor  $d_i^0$  seja nulo, isto é,  $z_i d_i^0 = 0$  para que o integrando da Equação 3.40 não se anule (propriedade 2.22). A Figura 3.5 mostra o plano  $\Pi$ , definido pelo vetor  $d_i$  e dois vetores,  $\alpha_i$  e  $\beta_i$ , que junto com  $d_i^0$  formam uma base ortonormal. O vetor  $z_i$  é então, determinado como uma combinação linear entre  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  para cada ponto da circunferência de raio unitário em um dado ângulo  $\phi$  como mostra a Equação 3.41.

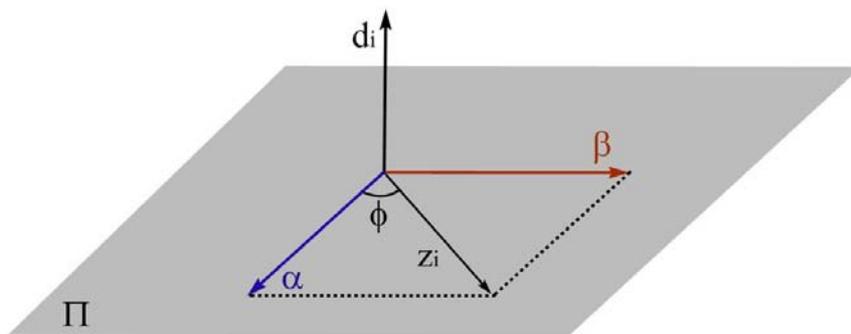


Figura 3.5: Versor  $z_i$  como combinação dos vetores  $\alpha_i$  e  $\beta_i$

$$z_i = \alpha_i \cos \phi + \beta_i \sin \phi \quad (3.41)$$

Deve-se observar que devido a propriedade 2.24, a integral deixa de ser efetuada sobre a superfície da esfera e passa a ser calculada na interseção entre o plano definido por  $d_i$  e a casca esférica de raio unitário  $z_i z_i = 1$ , ficando:

$$u_{mk}^* = \frac{1}{8\pi^2 ||d_i||} \oint_0^{2\pi} [M_{mk}^{zz}]^{-1} d\phi \quad (3.42)$$

O vetor  $d_i$  pode ser escrito em coordenadas esféricas como:

$$d_i = r_i = r \left\{ \sin\theta_1 \cos\theta_2 \quad \sin\theta_1 \sin\theta_2 \quad \cos\theta_1 \right\}^t \quad (3.43)$$

$$r = ||d_i|| \quad (3.44)$$

E:

$$d_i^0 = r_i^0 = \frac{r_i}{r} = \left\{ \sin\theta_1 \cos\theta_2 \quad \sin\theta_1 \sin\theta_2 \quad \cos\theta_1 \right\}^t \quad (3.45)$$

Os versores  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  são dados em coordenadas esféricas pelas Equações 3.46 e 3.47:

$$\alpha_i(\theta_1, \theta_2) = \left\{ \sin\theta_2 \quad -\cos\theta_2 \quad 0 \right\}^t \quad (3.46)$$

$$\beta_i(\theta_1, \theta_2) = \left\{ \cos\theta_1 \cos\theta_2 \quad \cos\theta_1 \sin\theta_2 \quad -\sin\theta_1 \right\}^t \quad (3.47)$$

Os ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$  e o raio  $r$  estão ilustrados na Figura 3.6:

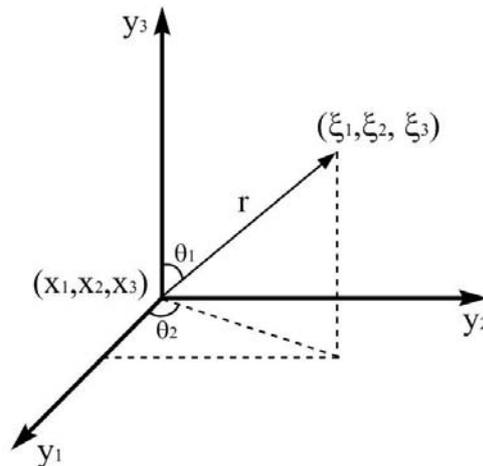


Figura 3.6: Sistema de coordenadas esféricas

Assim, a expressão 3.42 fica:

$$u_{mk}^* = \frac{1}{8\pi^2 r} \oint_0^{2\pi} [M_{mk}^{zz}]^{-1} d\phi \quad (3.48)$$

Derivando a expressão 3.48:

$$u_{mk,s}^* = \frac{1}{8\pi^2 r^2} \oint_0^{2\pi} [-r_s^0 (M_{mk}^{zz})^{-1} + z_s F_{mk}] d\phi \quad (3.49)$$

Sendo:

$$F_{jm} = (M_{jn}^{zz})^{-1} (M_{nq}^{r^0z} + M_{qn}^{r^0z}) (M_{qm}^{zz})^{-1} \quad (3.50)$$

$$M_{nq}^{r^0z} = C_{njql} z_j r_l^0 \quad (3.51)$$

Finalmente, a solução fundamental para forças de superfície é dada por:

$$t_{ij}^* = C_{ijmk} u_{mk,s}^* n_s \quad (3.52)$$

Sendo  $n_s$  o vetor normal ao elemento calculado sobre o ponto fonte.

A Equação 3.42 pode ser escrita como:

$$u_{mk}^*(r, \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{r} G_{mk}^u(\theta_1, \theta_2) \quad (3.53)$$

$$G_{mk}^u(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{8\pi^2} \oint_0^{2\pi} [M_{mk}^{zz}]^{-1} d\phi \quad (3.54)$$

E a Equação 3.52 como:

$$t_{mk}^* = \frac{1}{r^2} G_{mk,s}^t(\theta_1, \theta_2) n_s \quad (3.55)$$

$$G_{mk,s}^t(\theta_1, \theta_2) = C_{ijmk} \frac{1}{8\pi^2} \oint_0^{2\pi} [-r_s^0 (M_{ij}^{zz})^{-1} + z_s F_{ij}] d\phi \quad (3.56)$$

### 3.4 Estratégias para o Cálculo da Solução Fundamental

Como visto na Seção 3.3, a solução fundamental para anisotropia plena possui uma integração numérica no núcleo. Isto é indesejável, pois torna o processo de obtenção das matrizes  $[H]$  e  $[G]$  ainda mais dispendioso. Nesta seção serão apresentadas estratégias para melhorar o desempenho do processo de obtenção da solução fundamental.

A integração numérica é realizada utilizando quadratura de Gauss-Legendre. Para isto, os limites de integração são normalizados no intervalo  $[-1, 1]$ :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^1 g(\zeta) d\zeta \quad (3.57)$$

A integral 3.57 é aproximada por um somatório:

$$\int_{-1}^1 g(\zeta) d\zeta \approx \sum_{n=1}^N w_n g(\zeta_n) \quad (3.58)$$

O ponto  $\zeta_n$  é a  $n$ -ésima raiz do polinômio de Legendre (Hughes, 2000):

$$P_N(\zeta) = \frac{1}{2^N N!} \frac{d^N}{d\zeta^N} (\zeta^2 - 1)^N \quad (3.59)$$

E os pesos,  $w_n$  são obtidos:

$$w_n = \frac{2}{[(1 - \zeta_n^2) P_N'(\zeta_n)^2]'} \quad (3.60)$$

$$P_N'(\zeta) = \left. \frac{d}{d\zeta} P_N(\zeta) \right|_{\zeta=\zeta_n} \quad (3.61)$$

A quantidade de pontos de Gauss utilizada para a integração numérica varia de acordo com o grau de anisotropia do problema. Para um material isotrópico sugere-se entre 6 a 8 pontos de Gauss. As Figuras 3.7 e 3.8 ilustram os gráficos para as componentes  $G_{22}^u$  e  $G_{23,1}^t$  para o aço, com constantes elásticas  $E = 200GPa$ ,  $\nu = 0.29$ .

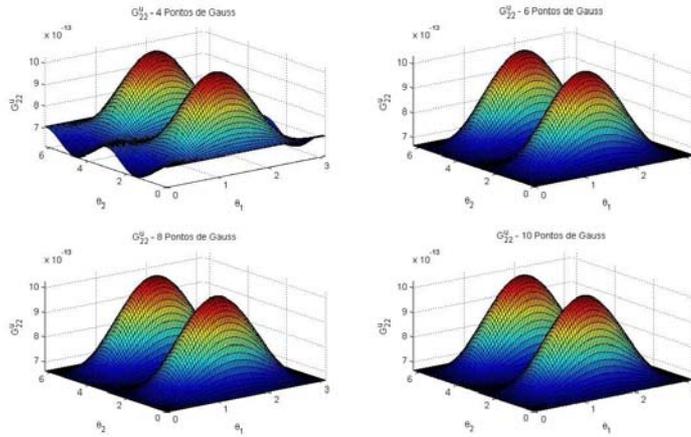


Figura 3.7: Comparação dos gráficos para a componente  $G_{22}^u$  obtidos usando diferentes quantidades de pontos de Gauss para um material isotrópico

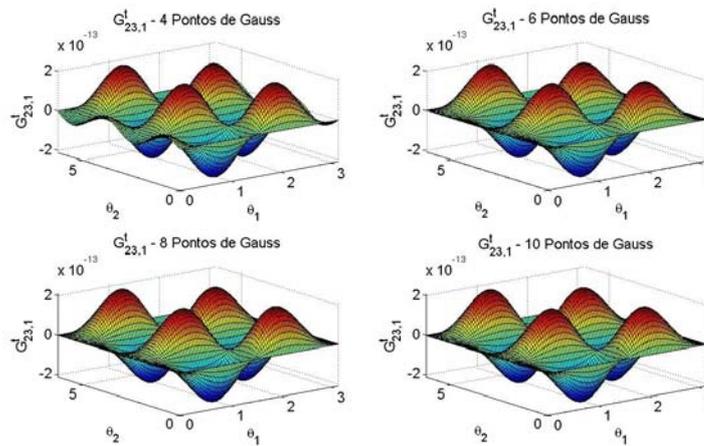


Figura 3.8: Comparação dos gráficos para a componente  $G_{23,1}^t$  obtidos usando diferentes quantidades de pontos de Gauss para um material isotrópico

Para um material transversalmente isotrópico, obtem-se valores razoáveis com o uso de 16 a 25 pontos de Gauss. Para um material transversalmente isotrópico (kevlar-epóxi) com constantes elásticas dadas pela Tabela 3.1, as curvas para  $G_{22}^u$  e  $G_{23,1}^t$  são mostradas nas Figuras 3.9 e 3.10.

Propriedade	Valor
$E_1$	$80GPa$
$E_2$	$5.5GPa$
$\nu_1$	$0.31$
$\nu_2$	$0.021$

Tabela 3.1: Constantes elásticas para um compósito de kevlar-epóxi

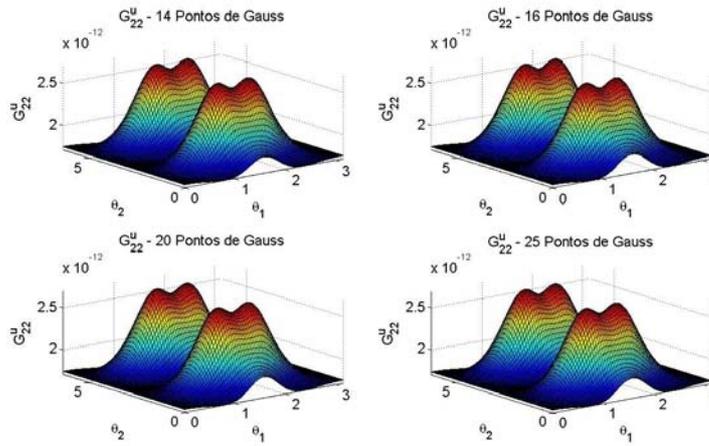


Figura 3.9: Influência dos pontos de Gauss na componente  $G_{22}^u$  para kevlar-epóxi

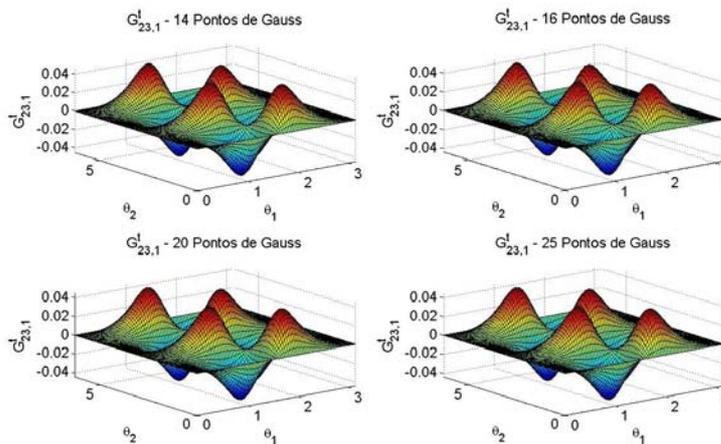


Figura 3.10: Influência dos pontos de Gauss na componente  $G_{23,1}^t$  para kevlar-epóxi

A Tabela 3.2 mostra uma comparação quantitativa da variação da quantidade de pontos de Gauss na qualidade de resposta. Os valores de  $G_{22}^u$  e  $G_{23,1}^t$  foram calculados no ponto

$$(\theta_1, \theta_2) = (3\pi/4, 3\pi/4).$$

Pontos de Gauss	$G_{22}^u (\times 10^{-11})$	$\Delta (\%)$	$G_{23,1}^t$	$\Delta (\%)$
8	0.193381	-	-0.019819	-
14	0.193206	0.0908	-0.021524	7.9192
16	0.193209	0.0017	-0.021488	0.1665
20	0.193209	0.0001	-0.021496	0.0355
25	0.193209	0.0000	-0.021494	0.0070

Tabela 3.2: Comparação quantitativa da influência dos pontos de Gauss na integração para um material transversalmente isotrópico

Neste trabalho, foram considerados erros percentuais da ordem de  $10^{-4}$ , no entanto para uma análise mais refinada, o gráfico da Figura 3.11 mostra a convergência do erro com até doze casas decimais para o tensor  $G_{ij}^u$  e também pode ser observado que para o tensor  $G_{ij,k}^t$  são necessários mais pontos de Gauss para um erro percentual menor que  $10^{-12}$ .

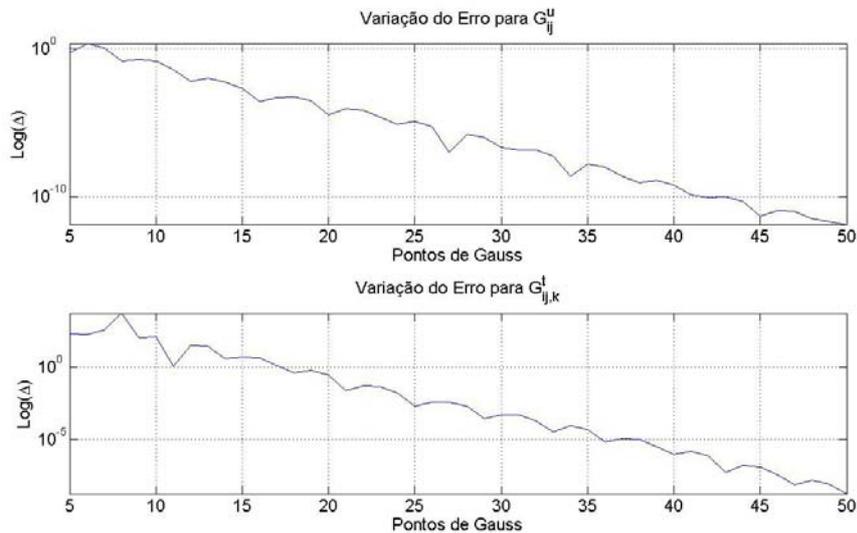


Figura 3.11: Convergência do erro para kevlar-epóxi.

Para materiais com um grau ainda mais acentuado de anisotropia, são sugeridos de 20 a 30 pontos de Gauss para a integração do tensor  $G_{ij}^u$  e de 30 a 40 pontos para a integração do tensor  $G_{ij,k}^t$ . As curvas de convergência de erro para grafite-epóxi (monoclínico), são mostradas na Figura 3.12 e uma comparação qualitativa da componente  $G_{22}^u$  pode ser feita observando a Figura 3.13.

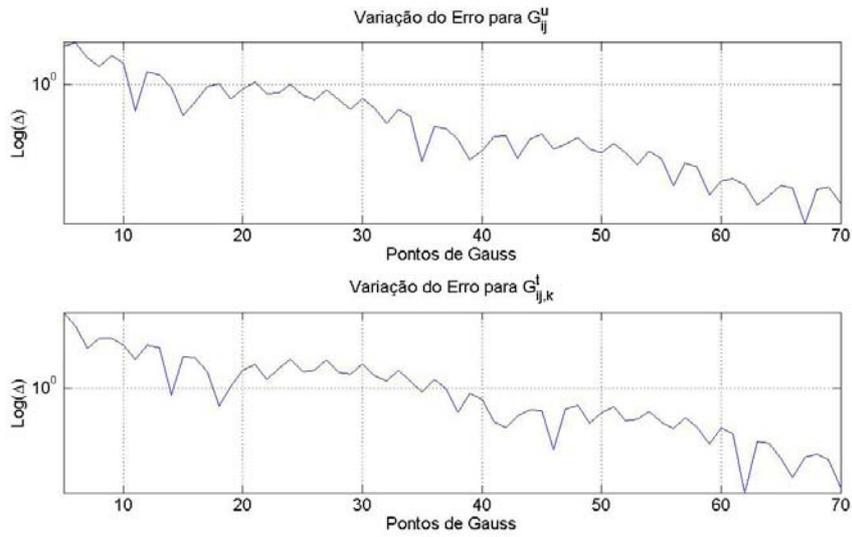


Figura 3.12: Convergência do erro para grafite-epóxi.

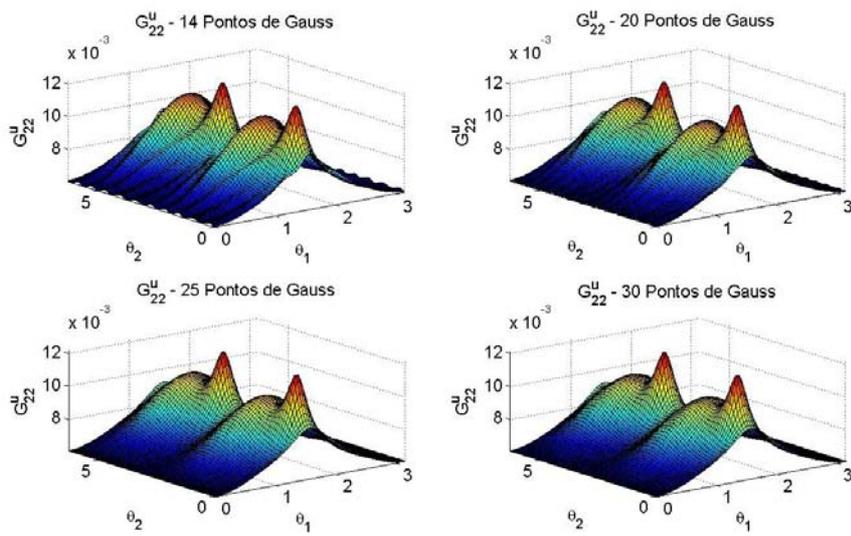


Figura 3.13: Influência dos pontos de Gauss para grafite-epóxi.

Nota-se que mesmo com o uso de 20 pontos de Gauss, a curva ainda apresenta oscilações que passam ser mais suaves com 25 pontos:

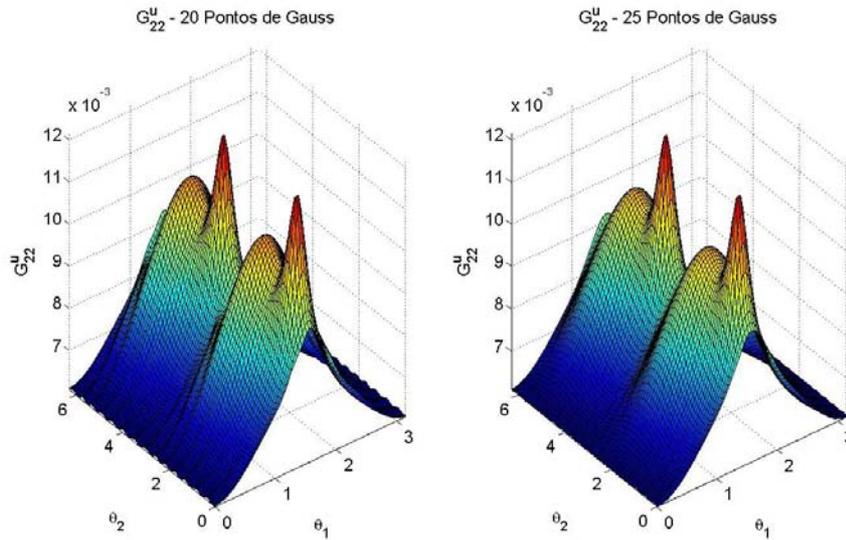


Figura 3.14: Comparação entre o uso de 20 pontos e 25 pontos na integração do tensor  $G_{ij}^u$ .

Deve-se observar que os tensores  $G_{mk}^u$  e  $G_{mk,s}^t$  *não dependem* de  $r$ , isto é, o cálculo dos tensores não depende das propriedades geométricas do problema, apenas das constantes elásticas. Gaul et al. (2003) sugere que pode-se obter de forma antecipada os valores para  $G_{mk}^u$  e  $G_{mk,s}^t$  para diferentes valores de  $\theta_1$  e  $\theta_2$  para um mesmo material para uma posterior interpolação. Os valores de  $\theta_1$  e  $\theta_2$  variam da seguinte forma:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \theta_1 \leq \pi \\ 0 &\leq \theta_2 \leq 2\pi \end{aligned}$$

As integrais são realizadas para cada par ordenado  $(\theta_1, \theta_2)$ . Tal abordagem pode parecer confusa em um primeiro momento, sendo que, dependendo do refinamento da malha de elementos de contorno, o processo para obtenção dos valores de  $G_{mk}^u(\theta_1, \theta_2)$  e  $G_{mk,s}^t(\theta_1, \theta_2)$  pode se tornar mais dispendioso que realizar a integração diretamente no núcleo do problema. Entretanto, uma vez obtidas as malhas para um determinado material, estas poderão ser utilizadas em qualquer outra análise para geometrias diferentes, fazendo com que o cálculo de  $u_{ij}^*$  e  $t_{ij}^*$  passe a ser apenas um processo de interpolação. Um exemplo de malha para interpolação pode ser vista na Figura 3.15:

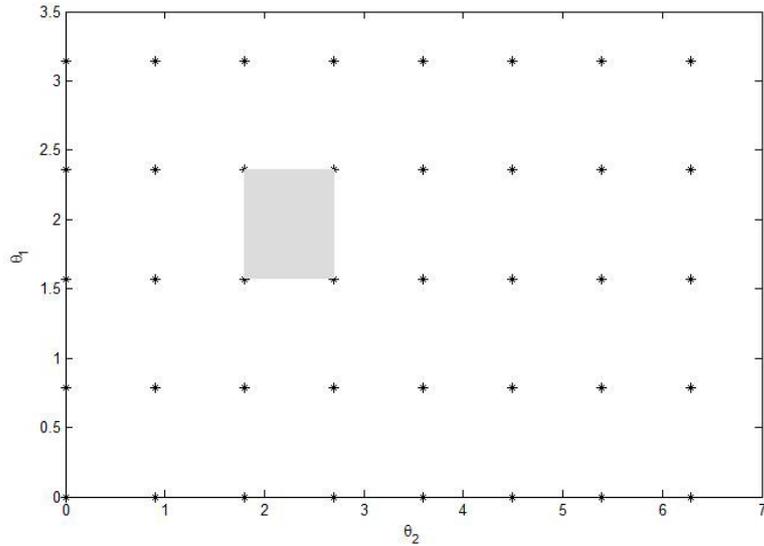


Figura 3.15: Esquema para interpolação linear

Neste trabalho, a interpolação é feita usando a função *interp2.m* do *software* MatLab e os métodos de interpolação disponíveis, aproximação por valor mais próximo, linear e por spline cúbica, foram comparados com o resultado usando integração numérica com 80 pontos de Gauss. Os resultados para kevlar-epóxi com uma malha de  $400 \times 400$  pontos, são mostrados na Tabela 3.3.:

	$G_{22}^u (\times 10^{-12})$	$\Delta (\%)$
Integração numérica	1.9320	-
Aprox. valor mais próximo	1.9244	0.3944
Interp. Linear	1.9322	0.0094
Spline cúbica	1.9320	0.0000

Tabela 3.3: Comparação entre os tipos de interpolação e a integração direta para kevlar-epóxi.

Novamente, o grau de anisotropia é decisivo para determinar a quantidade de pontos na malha de interpolação. Para materiais isotrópicos, sugere-se que cada vetor  $\{\theta_1\}$  e  $\{\theta_2\}$  com 80 pontos igualmente espaçados. Os valores obtidos por interpolação linear e por integração direta podem ser observados na Tabela 3.4:

	$G_{22}^u (\times 10^{-12})$	$\Delta (\%)$	$G_{23,1}^t$	$\Delta (\%)$
Integração direta	0.755453	-	-0.0297199	-
80 × 80	0.755456	0.0003	-0.0296103	0.3689
100 × 100	0.755450	0.0003	-0.0296799	0.1345
200 × 200	0.755453	0.0000	-0.029702	0.0583

Tabela 3.4: Comparação entre os valores para  $G_{22}^u$  e  $G_{23,1}^t$  usando interpolação e integração direta para um material isotrópico.

No entanto, para materiais com alto grau de anisotropia, são necessários de 200 a 500 pontos para cada vetor. A Tabela 3.5 mostra os resultados para um compósito de kevlar-epóxi:

	$G_{22}^u (\times 10^{-12})$	$\Delta (\%)$	$G_{23,1}^t$	$\Delta (\%)$
Integração	0.193209	-	-0.021488	-
100 × 100	0.193222	0.0066	-0.021479	0.0414
200 × 200	0.193212	0.0015	-0.021480	0.0352
400 × 400	0.193210	0.0003	-0.021486	0.0087
500 × 500	0.193210	0.0002	-0.021488	0.0016

Tabela 3.5: Comparação entre os valores para  $G_{22}^u$  e  $G_{23,1}^t$  usando interpolação e integração direta para um material anisotrópico.

Pode-se observar tanto pela Tabela 3.4 quanto 3.5 que o tensor  $G_{mk}^u$  é menos sensível a uma malha mais esparsa que o tensor  $G_{mk,s}^t$ . Desta forma, as malhas para  $G_{mk,s}^t$  e  $G_{mk}^u$  podem ser geradas separadamente, com um maior número de pontos para  $G_{mk,s}^t$ . Isto implica que os processos podem ser realizados em paralelo e é necessário menor espaço em disco para armazenamento das malhas.

### 3.4.1 Validação

Para a validação do modelo desenvolvido, foram comparados os resultados usando a solução transversalmente isotrópica e isotrópica.

Os modelos analisados são mostrados nas figuras a seguir:

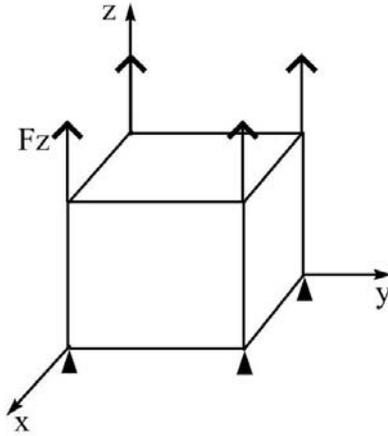


Figura 3.16: Modelo com propriedades isotrópicas

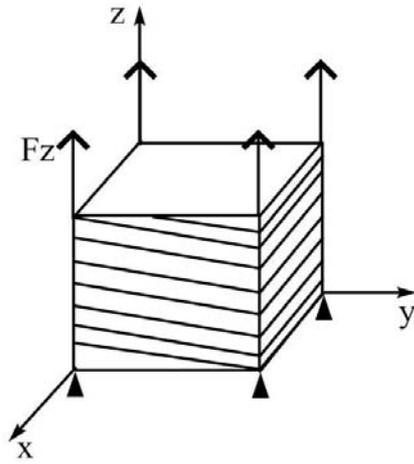


Figura 3.17: Modelo de um cubo com propriedades transversalmente isotrópicas

As propriedades para cada modelo são dadas pela Tabelas 3.6 e 3.7:

Propriedade	Valor
$E$	$200GPa$
$\nu$	$0.29$

Tabela 3.6: Propriedades para o modelo isotrópico

Propriedade	Valor
$E_1$	2GPa
$E_2$	1GPa
$\nu_1$	0.3
$\nu_2$	0.2
Rotação	30°

Tabela 3.7: Propriedades para o modelo transversalmente isotrópico

A solução fundamental para anisotropia é calculada usando o esquema de interpolação apresentado. Os resultados obtidos para um problema transversalmente isotrópico são mostrados nas Tabelas 3.8 e 3.9, enquanto para o problema transversalmente isotrópico nas Tabelas 3.10<sup>3</sup> e 3.11<sup>4</sup>:

	$F_x$	$F_y$	$F_z$
Iso.	-0.5560	-0.3899	-0.9630
Aniso.	-0.5560	-0.3899	-0.9630
$\Delta$ (%)	0.0000	0.0000	0.0000

Tabela 3.8: Resultados para forças de superfície em um problema isotrópico

	$u_x$	$u_y$	$u_z$
Iso.	-0.0728	-0.0728	0.4710
Aniso.	-0.0728	-0.0728	0.4710
$\Delta$ (%)	0.0000	0.0000	0.0000

Tabela 3.9: Resultados para deslocamentos em um problema transversalmente isotrópico

<sup>3</sup>Os valores foram calculados no nó de coordenadas (0, 0, 0)

<sup>4</sup>Os valores foram calculados no nó de coordenadas (1, 1/2, 1)

	$F_x$	$F_y$	$F_z$
Trans. Iso.	-0.4585	-0.6104	-1.0215
Aniso.	-0.4585	-0.5962	-1.0181
$\Delta$ (%)	0.0003	2.3209	0.3379

Tabela 3.10: Resultados para forças de superfície em um problema transversalmente isotrópico.

	$u_x$	$u_y$	$u_z$
Trans. Iso.	-0.3300	0.0000	0.7185
Aniso.	-0.3972	0.0000	0.7646
$\Delta$ (%)	16.9298	0.0000	6.0226

Tabela 3.11: Resultados para deslocamentos em um problema transversalmente isotrópico.

# Capítulo 4

## Sub-regiões

O método de sub-regiões é empregado em problemas nos quais as propriedades materiais variam ao longo da estrutura ou quando é necessária uma otimização do armazenamento dos elementos das matrizes  $[H]$  e  $[G]$ , uma vez que, como será apresentado mais adiante neste capítulo, estas matrizes exibem esparsidade por blocos. Um modelo de sub-região pode ser exemplificado como mostra a Figura 4.1, onde o domínio é dividido em dois sub-domínios.

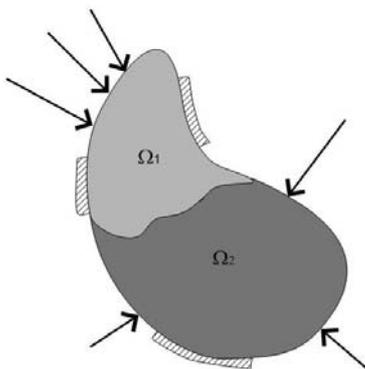


Figura 4.1: Corpo composto por dois materiais sujeito a carregamentos e vinculações

Para o equacionamento do método de sub-regiões, será considerado a princípio, o uso de elementos descontínuos e em seguida, a formulação será estendida para elementos contínuos.

Supondo então que o modelo apresentado seja discretizado por elementos constantes, as matrizes  $[H]$  e  $[G]$  podem ser escritas para cada domínio individualmente, sendo cada uma delas uma matriz quadrada<sup>1</sup>:

$$[H]_1 \{u\}_1 = [G]_1 \{t\}_1 \quad (4.1)$$

---

<sup>1</sup>Cada ponto fonte gera um conjunto de seis equações com seis incógnitas (três deslocamentos e três forças de superfície).

E:

$$[H]_2 \{u\}_2 = [G]_2 \{t\}_2 \quad (4.2)$$

Cada matriz pode então, ser dividida da seguinte forma:

$$[H]_s = \begin{bmatrix} H_E & H_I \end{bmatrix}_s \quad (4.3)$$

$$[G]_s = \begin{bmatrix} G_E & G_I \end{bmatrix}_s \quad (4.4)$$

O sub-índice  $E$  representa os elementos que não estão na interface, ou seja, as variáveis que pertencem apenas a uma sub-região,  $I$  o conjunto de variáveis relacionadas aos elementos da interface e  $s$  a sub-região em questão. O sistema modificado fica:

$$\begin{bmatrix} H_E & \vdots & H_I \end{bmatrix}_s \begin{Bmatrix} u_E \\ \cdots \\ u_I \end{Bmatrix}_s = \begin{bmatrix} G_E & \vdots & G_I \end{bmatrix}_s \begin{Bmatrix} t_E \\ \cdots \\ t_I \end{Bmatrix}_s \quad (4.5)$$

Na interface, é possível escrever relações de equilíbrio de forças e de compatibilidade de deslocamentos:

$$\{t_I\}_1 + \{t_I\}_2 = \{t\}_A \quad (4.6)$$

$$\{u_I\}_1 - \{u_I\}_2 = \{u\}_A \quad (4.7)$$

Sendo  $\{t\}_A$  e  $\{u\}_A$  condições pré-estabelecidas de forças de superfície e deslocamentos impostas na interface. Neste trabalho, supõe-se que estas condições são nulas e desta forma, as Equações 4.6 e 4.7 podem ser escritas como:

$$\{t_I\}_1 = -\{t_I\}_2 = \{t_I\} \quad (4.8)$$

$$\{u_I\}_1 = \{u_I\}_2 = \{u_I\} \quad (4.9)$$

Neste ponto, podem ser adotadas duas formas para a solução do problema:

1. Pré-multiplicando 4.5 por  $[G]_s^{-1}$ , o que equivale a encontrar a matriz de rigidez  $[K]$  no MEF:

$$[K]_s = [G]_s^{-1} \left[ H_E \quad \vdots \quad H_I \right]_s \quad (4.10)$$

$$[K]_s = \begin{bmatrix} K_{EE} & K_{EI} \\ K_{IE} & K_{II} \end{bmatrix}_s \quad (4.11)$$

$$[K]_s \begin{Bmatrix} u_E \\ \dots \\ u_I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} t_E \\ \dots \\ t_I \end{Bmatrix} \quad (4.12)$$

Esta operação é realizada para  $s = 1, 2$ . Os dois sistemas são acoplados, ficando:

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{EE}^1 & K_{EI}^1 & 0 \\ K_{IE}^1 & K_{II}^1 + K_{II}^2 & K_{IE}^2 \\ 0 & K_{IE}^2 & K_{EI}^2 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Os termos de 4.13 são rearranjados de forma a separar incógnitas de condições prescritas.:

$$[K] \{x\} = \{f\} \quad (4.14)$$

2. Nesta segunda abordagem, as matrizes das sub-regiões 1 e 2 são acopladas aplicando as Equações 4.8 e 4.9 em 4.3 e 4.4:

$$\begin{bmatrix} G_E^1 & G_I^1 & 0 \\ 0 & -G_I^2 & G_E^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_E^1 \\ t_I \\ t_E^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_E^1 & H_I^1 & 0 \\ 0 & H_I^2 & H_E^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_E^1 \\ u_I \\ u_E^2 \end{Bmatrix} \quad (4.15)$$

Deve-se notar que, ao contrário do que ocorre no MEF, as contribuições dos elementos/nós da interface não são somadas.

As colunas de  $[H]_E$  e  $[H]_I$  ainda são rearranjadas de forma a separar as incógnitas em  $\{t\}$  e  $\{u\}$  das condições de contorno impostas:

$$\begin{bmatrix} G_E^1 & G_E^{1N} & G_I^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -G_I^2 & G_E^{2N} & G_E^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_E^1 \\ t_E^{1N} \\ t_I \\ t_E^{2N} \\ t_E^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_E^1 & H_E^{1D} & H_I^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_I^2 & H_E^{2D} & H_E^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_E^1 \\ u_E^{1D} \\ u_I \\ u_E^{2D} \\ u_E^2 \end{Bmatrix} \quad (4.16)$$

Onde o super índice  $N$  e  $D$  se referem as condições de contorno de Neumann e Dirichlet respectivamente.

Por fim, as condições de contorno são impostas e as colunas de 4.15 rearranjadas ficando:

$$\begin{bmatrix} G_E^1 & G_I^1 & 0 & -H_E^1 & -H_I^1 & 0 \\ 0 & -G_I^2 & G_E^2 & 0 & -H_I^2 & -H_E^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_E^1 \\ t_I \\ t_E^2 \\ u_E^1 \\ u_I \\ u_E^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -G_E^{1N} & 0 & H_E^{1D} & 0 \\ 0 & -G_E^{2N} & 0 & H_E^{2D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_E^{1N} \\ t_E^{2N} \\ u_E^{1D} \\ u_E^{2D} \end{Bmatrix} \quad (4.17)$$

Como mencionado anteriormente, ao observar 4.14 e 4.17, as matrizes resultantes são em geral, esparsas.

Neste trabalho foi adotado o segundo método por não utilizar inversão matricial e determinar as incógnitas da interface diretamente.

Todo o equacionamento elaborado até agora, levou em consideração dois fatores fundamentais:

1. Os elementos são descontínuos, portanto, os nós não compartilham graus de liberdade e as matrizes  $[H]$  e  $[G]$  de cada domínio são quadradas;
2. Não existem quinas ou cantos nas interfaces: as superfícies de contato são suaves e contínuas.

Para elementos contínuos as relações desenvolvidas acima continuam válidas, entretanto, como os nós passam a compartilhar graus de liberdade, a matriz  $[G]$  deixa de ser quadrada, pois cada ponto da malha de elementos de contorno, gera um conjunto de três equações, mas as forças de superfície podem ser descontínuas entre um elemento e outro<sup>2</sup> e desta forma, são adicionadas mais variáveis no sistema de equações.

---

<sup>2</sup>A normal calculada sobre um nó de um determinado elemento pode ser diferente da normal calculada sobre o mesmo nó para um elemento adjacente.

O uso de elementos contínuos implica em uma série de vantagens, como a continuidade do fenômeno entre um elemento e outro e maior facilidade de geração de malha, mas também resulta em uma série de dificuldades como: a montagem das matrizes, aplicação das condições de contorno e, quando usado em análises de sub-regiões, há a necessidade de se tratar de quinas e cantos nas interfaces.

Outro fator importante no emprego de elementos contínuos em sub-regiões, é a complexidade em acoplar as matrizes. Embora a formulação seja simples, (Paiva, 2000) ressalta que a implementação é um processo extremamente complexo, sendo necessário um tratamento prévio de dados.

## 4.1 Tratamento de Cantos entre as Sub-Regiões

Outro ponto fundamental quando aplicado elementos contínuos em análises usando sub-regiões, é a presença de cantos na interface.

Observando a Figura 4.2, percebe-se que para um nó comum a três elementos, existem nove componentes de força de superfície para um mesmo nó, ou seja, três vetores  $t = \{ t_x \ t_y \ t_z \}$ , cada um deles associado a uma normal  $n_1$ ,  $n_2$  e  $n_3$ . No entanto, as equações integrais de contorno fornecem apenas três equações para um nó. Para solucionar este problema, (Beer, 2001) aponta quatro possibilidades:

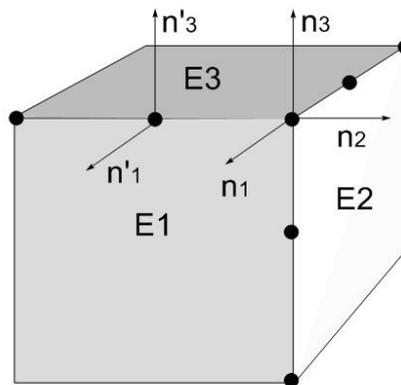


Figura 4.2: Cantos entre duas sub-regiões

- Usar uma normal média, isto é, uma média entre todas as normais associadas ao ponto;
- Usar elementos híbridos, contínuos/ descontínuos;
- As forças de superfície são calculadas por extrapolação dos nós adjacentes ao nó do canto;

- Gerar equações adicionais para completar o sistema.

O primeiro método não é aconselhável, uma vez que a geometria também sofrerá alterações, principalmente em casos extremos como o mostrado na Figura 4.2.

O segundo método é válido uma vez que é possível gerar equações adicionais e permite uma solução elegante do problema, mas isto implicaria em um sistema maior e como os pontos de colocação (pontos onde o elemento é descontínuo) são muito próximos um do outro, poderia ocasionar em um sistema numericamente instável.

O terceiro método é relativamente simples de ser implementado, no entanto sua precisão depende fortemente da dimensão dos elementos adjacentes ao nó.

A quarta possibilidade, formulada por (Gao & Davies, 2002), é adotada neste trabalho.

Para determinar a forma das equações adicionais a serem usadas, considera-se inicialmente a Equação 2.9:

$$t_i = \sigma_{ij}n_j$$

Agora, definindo um sistema de eixos cartesianos no sistema de coordenadas local, com  $x'_1$ ,  $x'_2$  tangentes ao plano e  $x'_3$  normal ao plano, pode-se definir um tensor de transformação  $L_{ij}$  tal que:

$$x'_i = L_{ij}x_j \quad (4.18)$$

Portanto:

$$t'_i = L_{ij}t_j \quad (4.19)$$

O tensor  $L_{ij}$  é:

$$L_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \quad (4.20)$$

Substituindo 4.19 em 2.9, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial t'_k}{\partial x'_k} &= L_{ki} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x'_k} n_j \\ &= \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} n_j \end{aligned} \quad (4.21)$$

Por equilíbrio:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = 0 \quad (4.22)$$

Isto implica que:

$$\frac{\partial t'_k}{\partial x'_k} = 0 \quad (4.23)$$

Sabendo que tanto o fenômeno analisado quanto as coordenadas nodais podem ser escritas usando as funções de forma  $N_n(\xi, \eta)$ , como funções interpoladoras<sup>3</sup>:

$$x_i = \sum_{n=1}^{N_{nos}} N_n(\xi, \eta) x_i^n \quad (4.24)$$

As direções  $x'_i$  para cada elemento são definidas pelos versores  $v^i$ , tangenciais ao elemento e calculados sobre o nó comum aos elementos. A direção  $x'_1$  é calculada tendo  $\eta = \text{constante}$ :

$$v^1 = \frac{1}{J_1} \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{1}{J_1} \sum_{n=1}^{N_{nos}} \frac{\partial N_n}{\partial \xi} x_n \quad (4.25)$$

Com  $J_1 = \sqrt{(v_1^1)^2 + (v_1^2)^2 + (v_1^3)^2}$ . A direção  $x'_2$  é dada pelo vetor  $v^2$  como:

$$v^2 = v^1 \times n \quad (4.26)$$

A Equação 4.23 pode ser reescrita em termos do sistema intrínseco de coordenadas como:

$$\frac{\partial t'_k}{\partial x'_{1k}} = \frac{\partial \xi}{\partial x'_1} \frac{\partial t'_{1j}}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x'_1} \frac{\partial t'_{1j}}{\partial \eta} \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial t'_k}{\partial x'_{2k}} = \frac{\partial \xi}{\partial x'_2} \frac{\partial t'_{2j}}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x'_2} \frac{\partial t'_{2j}}{\partial \eta} \quad (4.28)$$

Onde:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x'_1} = \frac{1}{J_1} \quad \frac{\partial \eta}{\partial x'_1} = \frac{1 \cos \theta}{J_1 \sin \theta} \quad \frac{\partial \xi}{\partial x'_2} = 0 \quad \frac{\partial \eta}{\partial x'_2} = \frac{1}{J_2 \sin \theta} \quad (4.29)$$

O ângulo  $\theta$  é medido entre o eixo  $\eta$  e o versor  $v_1$  como mostra a Figura 4.3:

---

<sup>3</sup> $N_{nos}$  representa o número de nós presentes no elemento.

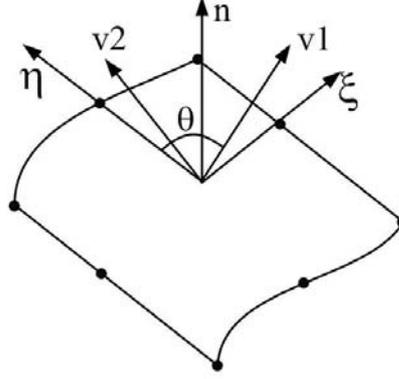


Figura 4.3: Sistema de coordenadas intrínseco para definição das componentes tangenciais

Usando as funções de forma, as derivadas das forças de superfície em um nó  $j$  podem ser calculadas como:

$$\frac{\partial t'_{1j}}{\partial \xi} = \sum_{n=1}^{N_{nos}} \frac{\partial N_n(\xi_j, \eta_j)}{\partial \xi} t'_{1n} \quad \frac{\partial t'_{1j}}{\partial \eta} = \sum_{n=1}^{N_{nos}} \frac{\partial N_n(\xi_j, \eta_j)}{\partial \eta} t'_{1n} \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial t'_{2j}}{\partial \xi} = \sum_{n=1}^{N_{nos}} \frac{\partial N_n(\xi_j, \eta_j)}{\partial \xi} t'_{2n} \quad \frac{\partial t'_{2j}}{\partial \eta} = \sum_{n=1}^{N_{nos}} \frac{\partial N_n(\xi_j, \eta_j)}{\partial \eta} t'_{2n} \quad (4.31)$$

As componentes do vetor  $t'_i$  são obtidas pela projeção do vetor  $t_i$  sobre o vetor tangente  $v_i$ .

Definindo:

$$a_n = \frac{\partial \xi}{\partial x'_1} \frac{\partial N_n}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x'_1} \frac{\partial N_n}{\partial \eta} \quad b_n = \frac{\partial \xi}{\partial x'_2} \frac{\partial N_n}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x'_2} \frac{\partial N_n}{\partial \eta} \quad (4.32)$$

As Equações 4.30 e 4.31 podem ser escritas como:

$$\frac{\partial t'_1}{\partial x'_1} = \sum_{n=1}^{N_{nos}} a_n t'_{1n} = 0 \quad (4.33)$$

$$\frac{\partial t'_2}{\partial x'_2} = \sum_{n=1}^{N_{nos}} b_n t'_{2n} = 0 \quad (4.34)$$

As equações auxiliares são obtidas multiplicando  $a_n$  e  $b_n$  pelos versores  $v_1$  e  $v_2$  respectivamente:

$$[a]_n^e = \begin{bmatrix} a_n v_1^1 & a_n v_1^2 & a_n v_1^3 \\ b_n v_2^1 & b_n v_2^2 & b_n v_2^3 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

Sendo o índice  $e$  referente ao elemento onde é necessária as equações auxiliares.

As matrizes  $[a]_n^e$  são acopladas como as últimas linhas da matriz  $[G]$  e a matriz  $[H]$  é completada com linhas nulas para satisfazer as Equações 4.33 e 4.34.

### 4.1.1 Validação

Para a validação do módulo de sub regiões, foram propostos dois problemas:

1. Dois cubos superpostos com um elemento em cada face como mostra a Figura 4.4;
2. Dois polígonos superpostos simulando uma barra engastada, com um canto na região da interface como mostra a Figura 4.5.

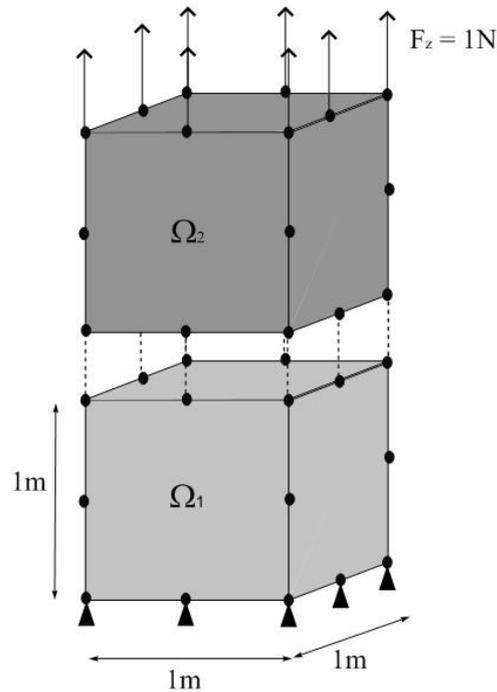


Figura 4.4: Modelo para o problema 1

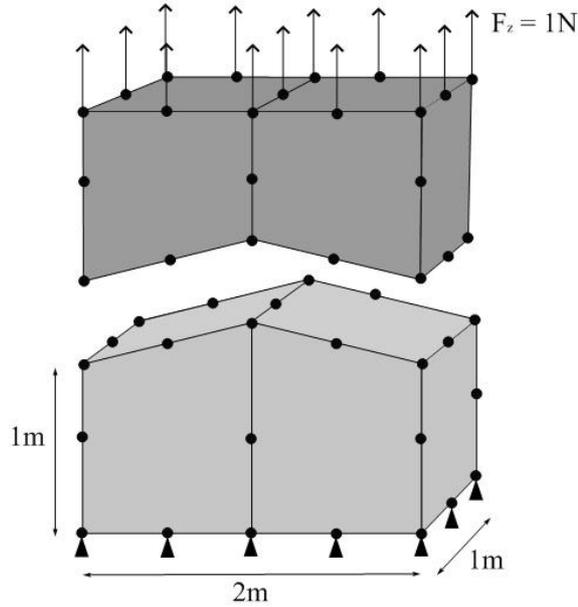


Figura 4.5: Modelo para o problema 2

Os modelos foram pensados de forma a testar o algoritmo de sub-regiões, ou seja, a permutação das colunas e a formulação para tratamento de cantos. Cada função desenvolvida foi testada separadamente e depois inserida no programa principal. Para um maior controle, os módulos de elasticidade dos dois materiais que compõe as sub-regiões foram considerados iguais e de valor unitário ( $E_{s1} = E_{s2} = 1Pa$ ) e os módulos de Poisson nulos ( $\nu_{s1} = \nu_{s2} = 0$ ), pois se trata de modelos simples, possíveis de serem validados usando a teoria de Mecânica dos Sólidos.

Os resultados obtidos foram comparados com os resultados analíticos usando a equação para deslocamento em uma barra, 4.37, que é obtida integrando a Equação 4.36, considerando seção transversal constante e desprezando tensões de contato entre as superfícies (Popov, 1978):

$$\frac{du_z}{dz} = \frac{F_z}{EA(z)} \quad (4.36)$$

$$u_z = \frac{F_z}{EA} \Delta L_z \quad (4.37)$$

A comparação entre a solução analítica e a solução obtida usando o programa desenvolvido é mostrada nas Figuras 4.6 e 4.7:

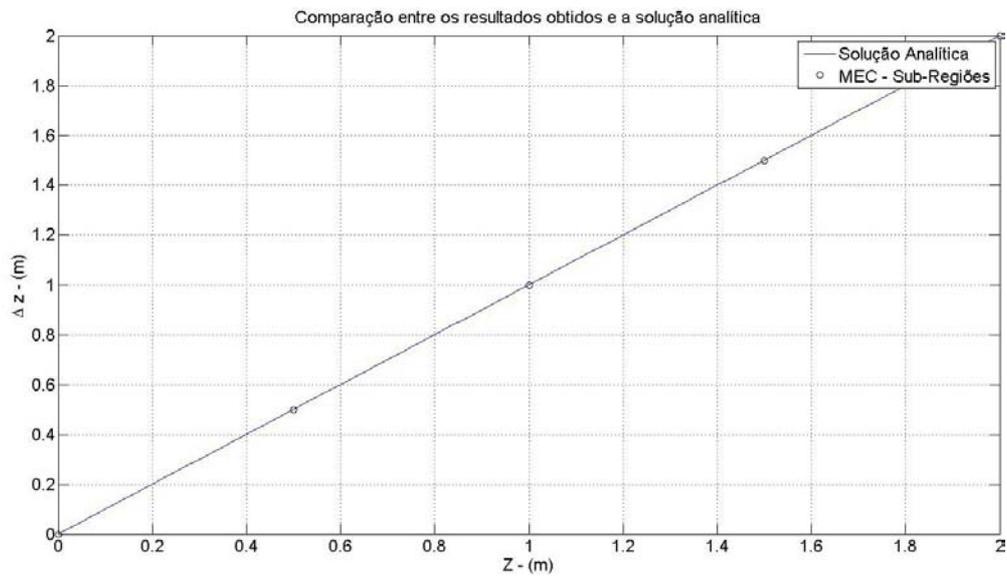


Figura 4.6: Comparação entre a solução analítica e os resultados obtidos para o problema 1

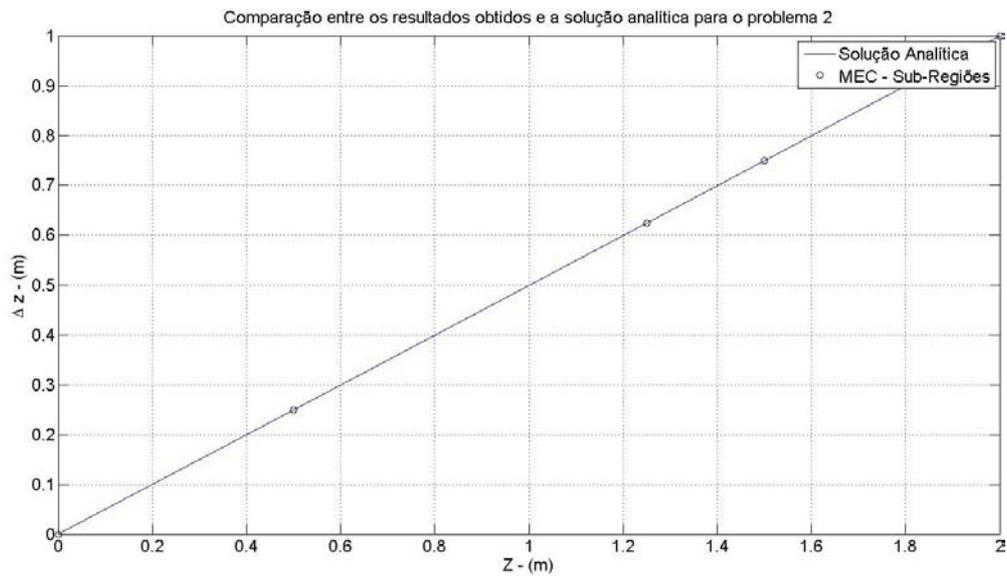


Figura 4.7: Comparação entre a solução analítica e os resultados obtidos para o problema 2

# Capítulo 5

## Implementação Computacional

Para a implementação do módulo de sub-regiões, foi usado como módulo para cálculo das matrizes  $[H]$  e  $[G]$  o programa E-Con3D. Também foi inserido o módulo para o cálculo da solução fundamental para anisotropia 3D. A Figura 5.1 mostra um diagrama contendo as principais etapas do programa desenvolvido.

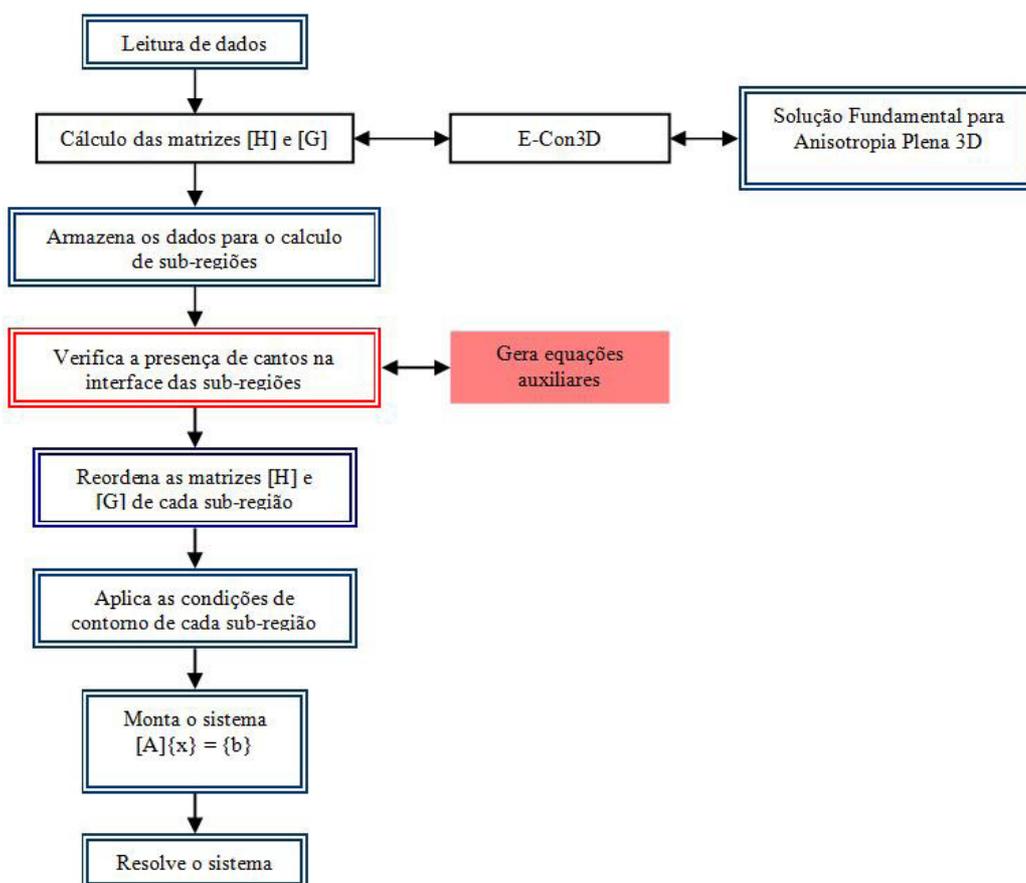


Figura 5.1: Diagrama do programa para análise de sub-regiões

A seguir serão detalhados cada um dos principais módulos desenvolvidos.

## 5.1 Leitura de Dados e Cálculo das Matrizes $[H]$ e $[G]$

Para a leitura de dados, é necessário um arquivo contendo o diretório com as informações do problema 1 e 2 e também um arquivo contendo os elementos pertencentes a interface de cada sub-região. Estes dados são então, usados para a chamada do programa E-Con3D que gera as matrizes  $[H]$  e  $[G]$  de cada sub-região. Após este processo, são armazenadas as variáveis de interesse para o módulo de sub-regiões referentes a cada domínio. Para não sobrecarregar o escopo das funções, estas variáveis foram armazenadas em estruturas, que permitem o agrupamento de dados em uma única variável (Hanselman & Littlefield, 2003) e são listadas a seguir:

- Condições de contorno de forças de superfície não nulas e os elementos em que estão aplicadas;
- Condições de contorno de deslocamentos e os nós onde estão aplicadas;
- Conectividade nodal dos elementos da interface;
- Coordenadas nodais dos elementos da interface;
- Nós comuns à interface;
- Quantidade de elementos em cada sub-região.

## 5.2 Verificação de Cantos na Interface

A presença de cantos entre elementos é feita pela verificação do produto interno entre as normais calculadas sobre um mesmo nó e é realizada apenas se há mais de um elemento comum a interface. A Figura 5.2 mostra três elementos conectados por um mesmo nó.

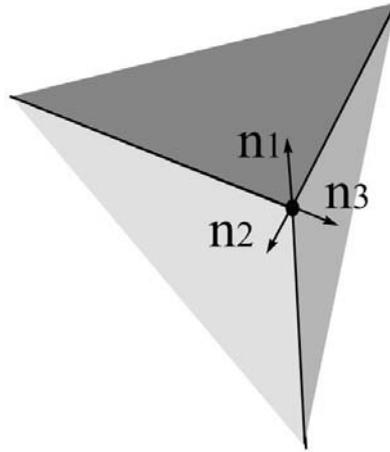


Figura 5.2: Três elementos conectados a um único nó

Para o exemplo acima, a verificação é realizada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} n_1 &\longrightarrow n_2 \\ n_1 &\longrightarrow n_3 \\ n_2 &\longrightarrow n_3 \end{aligned}$$

O número de verificações necessárias,  $Vf$ , é dado pela combinação da quantidade de elementos conectados a um mesmo nó ( $N_c$ ) tomados dois a dois:

$$Vf = \frac{N_c!}{2!(N_c - 2)!} \quad (5.1)$$

Se o produto interno entre as normais é menor que 0.90, é considerado que naquele nó há um canto e então é gerado um conjunto de três equações auxiliares conforme descrito no Capítulo 4, caso o nó pertença a mais de um elemento mas não seja um canto, as colunas referentes a este nó são somadas vetorialmente.

No exemplo da Figura 5.2, são gerados dois conjuntos de seis equações, um quando a normal  $n_1$  é comparada com a normal  $n_2$  e outro quando  $n_1$  é comparada com  $n_3$ .

### 5.3 Reordenamento das Matrizes $[H]$ e $[G]$

As matrizes  $[H]$  e  $[G]$  são reordenadas separadamente. Como a matriz  $[G]$  diz respeito às variáveis de forças de superfície, ou seja, os nós de um determinado elemento não compartilham graus de liberdade com outro elemento adjacente, esta matriz é formada tendo um

conjunto de colunas relacionadas a um único elemento. Desta forma, pode-se encontrar as colunas referentes a um determinado elemento usando as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
 \mathit{linf} &= (\text{numero de nós por elemento}) \times (\text{graus de liberdade}) \times (\text{numeração do elemento}) - \\
 &\quad ((\text{numero de nós por elemento}) \times (\text{graus de liberdade}) - 1) \quad (5.2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathit{lsup} &= (\text{numero de nós por elemento}) \times \\
 &\quad (\text{graus de liberdade}) \times (\text{numeração do elemento}) \quad (5.3)
 \end{aligned}$$

Isto é, a localização da primeira coluna relacionada a um determinado elemento na matriz  $[G]$  é dada por 5.2 e a última coluna dada por 5.3. Com esta informação, é possível reorganizar a matriz  $[G]$  de forma a satisfazer a Equação 4.5.

A reordenação das colunas da matriz  $[H]$  é um processo mais complexo, sendo necessário saber a quantidade de nós compartilhados entre as sub-regiões e sua ocorrência na matriz de conectividade. Para obter tal informação, é feita uma verificação de cada nó da matriz de conectividade dos elementos da interface e assim, cada nó comum à interface tem suas respectivas colunas realocadas. Também é necessário saber se há condições de deslocamento prescrito em algum dos nós da interface, como será explicado na seção seguinte. As colunas de  $[H]$  são localizadas basicamente, usando relações análogas as usadas para a matriz  $[G]$ :

$$\mathit{linf} = (\text{graus de liberdade}) \times (\text{numeração do nó}) - (\text{graus de liberdade} - 1) \quad (5.4)$$

$$\mathit{lsup} = (\text{graus de liberdade}) \times (\text{numeração do nó}) \quad (5.5)$$

As matrizes, após terem suas colunas rearranjadas, são acopladas umas às outras e para aproveitar a esparsidade do sistema, é utilizada a função *sparse.m*, que armazena apenas os termos não nulos.

Como mencionado no Capítulo 4, o uso de técnicas para armazenamento de estruturas esparsas provenientes do emprego de sub-regiões torna o armazenamento das matrizes mais eficiente. Para o modelo da Figura 5.3, o espaço necessário para armazenamento das matrizes  $[H]$  e  $[G]$  é mostrado na Tabela 5.1, onde são comparados o armazenamento com e sem o uso da função *sparse.m*.

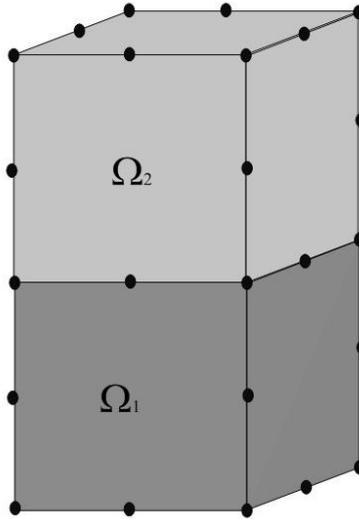


Figura 5.3: Barra discretizada em elementos de contorno usando sub-regiões

	Bytes
matriz esparsa	276284
matriz cheia	345600

Tabela 5.1: Comparação entre os tipos de armazenamento das matrizes  $[H]$  e  $[G]$

## 5.4 Aplicação das Condições de Contorno

Para a aplicação das condições de contorno deve-se levar em consideração as seguintes situações:

1. Há condições de contorno, tanto em forças de superfície quanto em deslocamentos, aplicadas nas duas sub-regiões, Figura 5.4 (a);
2. As condições de contorno de forças de superfície estão aplicadas a uma sub-região enquanto as de deslocamentos estão aplicadas a outra sub-região, Figura 5.4 (b);
3. Há condições de contorno de forças de superfície e de deslocamentos em apenas uma sub-região, Figura 5.4 (c);

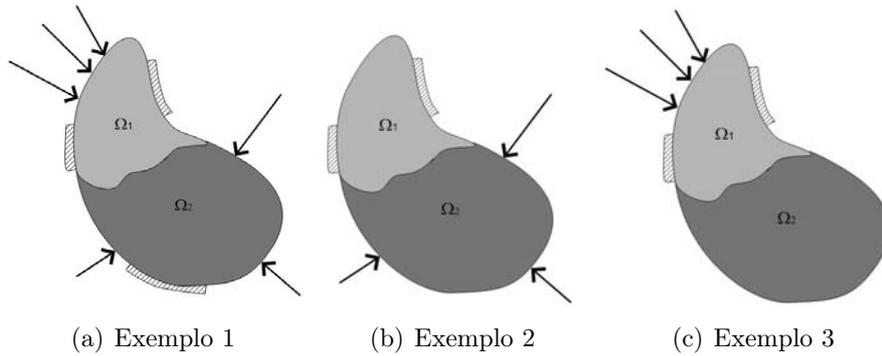


Figura 5.4: Possíveis modelos para aplicação das condições de contorno

As funções de entrada de dados do programa E-Con3D foram alteradas para tratar do segundo e terceiro caso.

As condições de força de superfície são aplicadas por elemento, enquanto de deslocamento são aplicadas por nós. Isto porque para dois elementos adjacentes é possível ter duas normais distintas para um nó comum e isto implica em dois vetores de forças de superfície diferentes, enquanto o deslocamento é único para o nó. As matrizes são então, separadas em três sub matrizes como mostra a Figura 5.5, onde a matriz  $[M]$  se refere tanto a matriz  $[H]$  quanto a  $[G]$  :

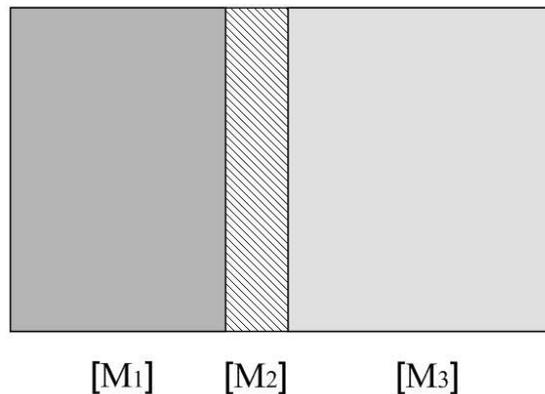


Figura 5.5: Divisão das matrizes  $[H]$  e  $[G]$  para aplicação das condições de contorno

A primeira matriz,  $[M_1]$  se refere a primeira sub-região, enquanto a matriz  $[M_3]$  a segunda sub-região. A matriz  $[M_2]$  contém os elementos comuns à interface, e portanto, não estão sujeitos a nenhuma condição de contorno.

Novamente, a aplicação das condições de contorno para deslocamentos é um processo mais complexo que para forças de superfície e exige um tratamento de dados prévio. Se algum nó

da interface está sujeito a um deslocamento prescrito, as colunas associadas ao nó e a direção restrita, não são realocadas para a matriz  $[M_2]$  (Kane, 1994).

Após a aplicação das condições de contorno, as colunas remanescentes de  $[H]$  e de  $[G]$  são reagrupadas para formar a matriz  $[A]$ , dando origem ao sistema  $[A] \{x\} = \{b\}$ .

Por fim, o sistema é resolvido usando o solver do software MatLab.

# Capítulo 6

## Conclusões

Neste trabalho foi apresentada a implementação da solução fundamental para anisotropia plena 3D usando a Transformada de Radon, junto com técnicas de interpolação para melhoria do desempenho de seu cálculo. Também foi apresentada uma implementação do método de sub-regiões para elementos de contorno 3D usando elementos contínuos.

Para a validação da solução fundamental, foram simulados modelos transversalmente isotrópicos e isotrópicos e estes foram comparados aos resultados disponíveis na literatura mostrando boa concordância.

Em relação ao tempo de processamento e memória requerida, o esquema de interpolação se mostrou muito eficiente, podendo ser empregado principalmente a problemas que apresentem elevado grau de anisotropia e necessitem de uma quantidade razoável de pontos de Gauss para a integração numérica.

A validação do algoritmo para sub-regiões foi realizada por simulações de modelos simples, como barras engastadas, visando testar a permutação de colunas das matrizes  $[H]$  e  $[G]$  e a aplicação das condições de contorno e se mostrou robusto e eficiente.

# Capítulo 7

## Trabalhos Futuros

Para continuação dos trabalhos nesta linha de pesquisa, sugerem-se os seguintes temas:

- Reescrever o código em uma linguagem mais eficiente, como Fortran, C ou C++, visando melhorar o tempo de cálculo;
- Estender o código de sub-regiões para o tratamento de  $n$  regiões;
- Modificar o código do programa E-Con3D e o módulo de sub-regiões possibilitando análises com malhas com vários tipos de elementos, isto é, uso de elementos quadrilaterais e triangulares em uma mesma malha, facilitando a geração de malhas para futuras análises;
- Inclusão de um módulo para tratamento de problemas dinâmicos 3D;
- Uso de elementos híbridos, ou uso de diferentes tipos de elementos para interpolar os deslocamentos e as forças de superfície. Por exemplo, usando elementos híbridos para forças de superfície que é descontínua entre as sub-regiões e elementos contínuos para deslocamentos, que são únicos em um ponto.
- Criação de um banco de dados para a solução fundamental para anisotropia plena, a serem empregados no esquema de interpolação para obtenção dos tensores  $G_{ij}^u$  e  $G_{ij,k}^t$  para diferentes materiais, variando a quantidade de pontos de Gauss e refinamento da malha de interpolação mediante ao grau de anisotropia do material;
- Desenvolvimento de um pós processador que permita visualizar campos de tensões e deformações e que também leve em consideração as sub-regiões;
- Implementação de um gerador de malha que possibilite a modelagem de geometrias complexas.

# Referências Bibliográficas

- Albuquerque, E. L. (2001). *Análise de Problemas Dinâmicos em Materiais Anisotrópicos Usando o Método dos Elementos de Contorno*. PhD thesis, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP).
- Albuquerque, E. L. & Sollero, P. (1997). Boundary element analysis applied to dynamic crack problems. In *XVII Int. Conf. Dynamic Problems in Mechanics* (pp. 277 – 279). Angra dos Reis, Brasil: ABCM.
- Aliabadi, M. H. (2002). *The Boundary Element Method - Vol. 2*. John Wiley & Sons.
- Beer, G. (2001). *Programing the Boundary Element Method - An Introduction to Engineers*. John Wiley & Sons.
- Butkov, E. (1988). *Física Matemática*. LTC.
- Carrion, R. (2002). *Uma Implementação do Método dos Elementos de Contorno para Problemas Viscoelastodinâmicos Estacionários Tridimensionais em Domínios Abertos e Fechados*. PhD thesis, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP).
- Cruse, T. A. & Sweldlow, J. L. (1971). *Interactive Program for Analysis and Design Problems in Advanced Composites*. Technical report, Carnegie-Mellon University.
- Deb, A. (1996). Boundary elements analysis of anisotropic bodies under thermo mechanical body force loadings. *Computers and Structures*, 58, 715 – 726.
- Deb, A. & Banerjee, P. K. (1990). Bem for general anisotropic 2d elasticity using particular integrals. *Communications in Applied Numerical Methods*, 6, 111 – 119.
- Fung, Y. C. & Tong, P. (2001). *Classical and Computational Solid Mechanics (Advanced Series in Engineering Science)*. World Scientific.
- Gao, X.-W. & Davies, T. (2002). *Boundary Element Programing in Mechanics*. Cambridge University Press.

- Gaul, L., Kögl, M., & Wagner, M. (2003). *Boundary Element Methods for Engineers and Scientists: An Introductory Course with Advanced Topics*. Springer.
- Hanselman, D. & Littlefield, B. (2003). *MatLab 6 Curso Completo*. Prentice-Hall, Inc.
- Hartmann, F. (1989). *Introduction to Boundary Elements: Theory and Applications*. Springer.
- Hughes, T. J. R. (2000). *The Finite Element Method: Linear and Dynamic Finite Element Analysis*. Dover Science.
- Kane, J. H. (1994). *Boundary Element Analysis in Engineering Continuum Mechanics*. Prentice-Hall, Inc.
- Loloi, M. (2000). Boundary integral equation solution of three-dimensional elastostatic problems in transversely isotropic solids using closed-form displacement fundamental solutions. *Int. J. Numer. Meth. Engng, John Wiley & Sons, Ltd.*, 48, 823 – 842.
- Mantic, V. & París, F. (1995). Explicit formulae of the integral kernels and c-matrix. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 15, 283 – 288.
- Noritomi, P. Y. (2000). Desenvolvimento de um programa base em elementos de contorno para aplicações a análises mecânicas tridimensionais em bioengenharia. Master's thesis, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP).
- Noritomi, P. Y. (2006). *Desenvolvimento de uma Metodologia para Análise de Bioengenharia em Ossos Compactos com Remodelagem Óssea Superficial pelo Método dos Elementos de Contorno 3D em Meios Transversalmente Isotrópicos*. PhD thesis, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP).
- Paiva, W. P. (2000). Análise de problemas de trincas interfaciais usando o método dos elementos de contorno. Master's thesis, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP).
- Pan, Y. C. & Chou, T. W. (1976). Point force solution for an infinite transversely isotropic solid. *Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME*, 43, 608–612.
- Popov, E. P. (1978). *Introdução à Mecânica dos Sólidos*. LTC.
- Pouzada, E. V. S. (1999). *Estudo da Aplicação do Método dos Elementos de Contorno à Análise de Propagação em Estruturas Guiantes*. PhD thesis, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (POLI/USP).

- Schlar, N. A. (1994). *Anisotropic Analysis Using Boundary Elements*. Computational Mechanics Publications.
- Sollero, P. & Aliabadi, M. H. (1993). Fracture mechanics analysis of anisotropic plates by the boundary element method. *Int. J. of Fracture*, 64, 269 – 284.
- Telles, J. C. F. & Gusmão, S. (2000). Green's function: a numerical generation for fracture mechanics problems via boundary element. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 188, 847 – 858.
- Vera-Tudela, C. A. R. & Telles, J. C. F. (2005). A numerical green's function and dual reciprocity bem method to solve elastodynamic crack problems. *Engeneering Analysis with Boundary Elements*, 29, 204 – 209.
- Vogel, S. M. & Rizzo, F. J. (1973). An integral equation formulation of three dimensional anisotropic elastostatic boundary value problems. *J. of Elasticity*, 3, 203 – 216.
- Wilson, R. B. & Cruse, T. A. (1978). Efficient implentation of anisotropic three dimensional boundary integral equation stress analysis. *Int. J. Numer. Meth. Engn*, 12, 1383 – 1397.