

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PETRÓLEO

Dissertação Apresentada a
Faculdade de Engenharia de Campinas
Como Requisito Parcial à Obtenção do
Título de Mestre em Engenharia de Petróleo

ESTUDO DA INTERAÇÃO ENTRE O SOLO E A CABEÇA DE POÇO
PELO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

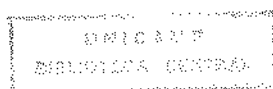
*Este exemplar corresponde a redação final da Tese
defendida pelo Eng. Paulo Roberto Ribeiro e aprovada
pela comissão julgadora em 31/07/89*

Autor : Paulo Roberto Ribeiro
Orientador : Celso Kazuyuki Morioaka
Co-orientador : Fernando Iguti

Celso K. Morioaka

32/89

Julho de 1989

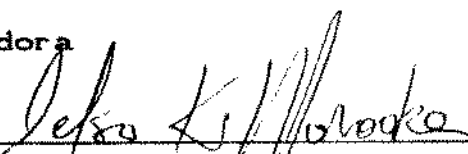


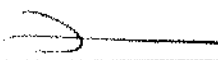
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PETRÓLEO

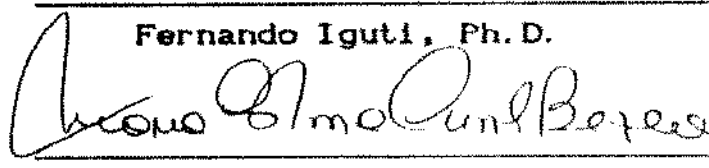
A dissertação "Estudo da Interação entre o Solo e a Cabeça de Poço pelo método de Elementos Finitos", elaborada por Paulo Roberto Ribeiro e aprovada por todos os membros da Banca Examinadora, foi aceita pela Sub - Comissão de Pós-Graduação em Engenharia de Petróleo como requisito parcial à obtenção do Título de Mestre em Engenharia de Petróleo.

Campinas, 31 de Julho de 1989.

Banca Examinadora


Celso Kazuyuki Morooka, Ph.D.


Fernando Iguti, Ph.D.


Maria Cristina Cunha Bezerra, Ph.D.

AGRADECIMENTOS

O autor agradece ao Prof.Dr. Fernando Iguti pela assessoria técnica, sem a qual este trabalho não teria sido realizado, aos membros que incorporam a equipe de Cálculo Estrutural do Depto. de Mecânica Computacional desta Universidade, no nome dos professores Janito Vaqueiro, Marco Lúcio Bittencourt e Alberto Serpa, pelo auxílio na implantação do algoritmo de ciclo-simetria no programa "Anafin" e ao Prof.Dr Celso K. Morooka pela orientação.

O autor também agradece ao Prof.Dr. Victor Prodonoff e Prof.Dr. Alvaro Maia do CENPES - PETROBRAS, pela orientação técnica na aplicação do Método de Elementos Finitos à área de Engenharia de Petróleo, aos engenheiros do DEPER - PETROBRAS pela explanação do tema relacionado à exploração de petróleo em lâminas de água profundas, ao analista de sistemas Carlos Eduardo Pereira, pelo auxílio na elaboração dos programas para preparação dos dados e às pessoas que contribuíram de forma direta ou indireta na elaboração deste trabalho.

Finalmente, agradeço a Maíra Pieri, pelo carinho e compreensão no decorrer do período de tese, e aos meus pais, pelo apoio e incentivo, a quem dedico este trabalho.

INDICE

Resumo	(i)
Lista de Figuras	(ii)
Lista de Tabelas	(iv)
Sistema de Unidades	(v)
Capítulo 1 Introdução	1
Capítulo 2 Formulação do Elemento Isoparamétrico de 20 Nós para Estado Tridimensional de Tensões	
2.1 Funções de Interpolação	6
2.2 Coordenadas Paramétricas Curvilíneas	7
Capítulo 3 Implementação do Algoritmo para Estruturas com Simetria Cíclica	
3.1 Introdução	12
3.2 Transformação Discreta de Fourier	13
3.3 Solução do Sistema de Equações	18
3.4 Condensação Estática.....	20
3.5 Condições de Contorno do Problema	22
3.6 Comentários.....	26

Capítulo 4	Calibração da Malha de Elementos Finitos	
4.1	Introdução	30
4.2	Soluções Teóricas Consideradas	
4.2.1	Carga Concentrada vertical, aplicada no interior de um sólido semi-infinito	31
4.2.2	Carga concentrada horizontal, aplicada no interior de um sólido semi-infinito.....	33
4.3	Influência do Nível de Refinamento da Malha e das Condições de Contorno	33
4.4	Sensibilidade do Modelo a Pequenas Variações do Raio Neutro	50
Capítulo 5	Comparação do Modelo com Soluções da Elasticidade para Fundações de Estaca	
5.1	Estacas sob Carregamento Axial	53
5.1.1	Apresentação	53
5.1.2	Teoria da Elasticidade	54
5.1.3	Influência do Índice de Esbeltez e Rigidez Relativa	58
5.2	Estacas sob Flexão	
5.2.1	Apresentação	71
5.2.2	Teoria da Elasticidade	72
5.2.3	Influência do Fator de Flexibilidade e Índice de Esbeltez	77
Capítulo 6	Comentários Finais	83
SIMBOLOGIA.....		84
BIBLIOGRAFIA		87

RESUMO

O trabalho aborda, de forma introdutória, o problema da interação entre o solo e a cabeça do poço, utilizando-se uma estaca alojada num meio linear, elástico, isotrópico e homogêneo, de características semi-infinitas, como modelo.

Foi desenvolvido um algoritmo para análise estática de estruturas ciclo-simétricas pelo Método de Elementos Finitos, para viabilizade do estudo em termos da infra-estrutura computacional existente.

Inicialmente é feita uma calibração do modelo composto por elementos isoparamétricos de 20 nós da Família Serendipity, com soluções analíticas para cargas concentradas atuantes na superfície de um sólido semi-infinito.

A partir deste estudo é feita uma comparação do modelo de Elementos Finitos para uma estaca sob carregamento axial e lateral com o Modelo de Elasticidade (Poulos & Davis) para análise do problema.

LISTA DE FIGURAS

- fig. 1.1 Cabeça de poço para operações de perfuração em lâminas de água profundas
- fig. 2.1 Elemento isoparamétrico de 20 nós da Família Serndipity
- fig. 2.2 Elemento representado no sistema local de coordenadas(ξ, η, ϵ) e no sistema cartesiano (x, y, z)
- fig. 3.1 Modelo proposto
- fig. 3.2 Estrutura mecânica com simetria cíclica
- fig. 3.3 Interface de três segmentos adjacentes
- fig. 4.1 Carga concentrada atuante no interior e um sólido semi-infinito
- fig. 4.2 Geratriz da malha (carga concentrada vertical; 25 elementos por segmento)
- fig. 4.3 Gráfico de decaimento dos deslocamentos verticais (carga concentrada vertical ; 25 elementos por segmento)
- fig. 4.4 Geratriz da malha (carga concentrada vertical; 30 elementos por segmento)
- fig. 4.5 Gráfico de decaimento dos deslocamentos verticais (carga concentrada vertical; 30 elementos por segmento)
- fig. 4.6 Geratriz da malha (carga concentrada vertical; 36 elementos por segmento)
- fig. 4.7 Gráfico de decaimento dos deslocamentos verticais (carga concentrada vertical; 36 elementos por segmento)

- fig. 4.8 Geratriz da malha (carga concentrada lateral; 25 elementos por segmento)
- fig. 4.9 Gráfico de decaimento dos deslocamentos laterais (carga concentrada lateral; 25 elementos por segmento)
- fig. 4.10 Geratriz da malha (carga concentrada lateral; 30 elementos por segmento)
- fig. 4.11 Gráfico de decaimento dos deslocamentos laterais (carga concentrada lateral; 30 elementos por segmento)
- fig. 4.12 Gráfico de decaimento dos deslocamentos verticais (carga concentrada vertical; $r_o = 0.10$)
- fig. 4.13 Gráfico de decaimento dos deslocamentos laterais (carga concentrada lateral; $r_o = 0.10$)
-
- fig. 5.1 Estaca sob carregamento axial num meio semi-infinito
- fig. 5.2 Geratriz da malha ($L/D = 10$; $K = 1000$)
- fig. 5.3 Fator de influência de deslocamento vertical ($L/D = 10$; $K = 1000$)
- fig. 5.4 Geratriz da malha ($L/D = 10$; $K = 100$)
- fig. 5.5 Fator de influência de deslocamento vertical ($L/D = 10$; $K = 100$)
- fig. 5.6 Geratriz da malha ($L/d = 5$; $K = 1000$)
- fig. 5.7 Fator de influência de deslocamento vertical ($L/D = 5$; $K = 1000$)
- fig. 5.8 Geratriz da malha ($L/D = 5$; $K = 100$)
- fig. 5.9 Fator de influência de deslocamento vertical ($L/D = 5$; $K = 100$)
- fig. 5.10 Estaca sob flexão
- fig. 5.11 Geratriz da malha ($L/D = 10$; $K_R = 10^{-2}$)
- fig. 5.12 Gráfico dos deslocamentos laterais ($L/D = 10$; $K_R = 10^{-2}$)
- fig. 5.13 Geratriz da malha ($L/D = 10$; $K_R = 1$)
- fig. 5.14 Gráfico dos deslocamentos laterais ($L/D = 10$; $K_R = 1$)

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 : Referente à Fig. 4.5 ($Z = 0$)

Tabela 4.2 : Referente à Fig. 4.5 ($Z = 10$)

Tabela 4.3 : Referente à Fig. 4.5 ($Z = 30$)

Tabela 4.4 : Referente à Fig. 4.11 ($x = 0.75$)

Tabela 4.5 : Referente à Fig. 4.11 ($x = 9$)

Tabela 4.6 : Referente à Fig. 4.11 ($x = 27$)

Tabela 5.1 : Deslocamento Vertical ($L/D=10$, $K=1000$)

Tabela 5.2 : Deslocamento Vertical ($L/D=10$, $K=100$)

Tabela 5.3 : Deslocamento Vertical ($L/D=5$, $K=1000$)

Tabela 5.4 : Deslocamento Vertical ($L/D=5$, $K=100$)

Tabela 5.5 : Deslocamento lateral na ponta da estaca

SISTEMA DE UNIDADES

Todas grandezas descritas no trabalho possuem unidades do Sistema Internacional (S.I.), mesmo quando não explicitadas.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Nas fases iniciais de perfuração de um poço marítimo de petróleo, além da etapa de perfuração, propriamente dita, existem as fases de cimentação e revestimento, para garantir a estabilidade das paredes do poço em rochas pouco consolidadas e suportar os esforços decorrentes da instalação de equipamentos necessários à operação (ref. 16).

A cabeça de poço é composta por um sistema de bases guias (temporária e permanente) (ref. 17) acoplado aos revestimentos (fig 1.1), possuindo tanto a função de conexão do poço com a sonda na superfície, através do riser, quanto a função estrutural de uma fundação, para suportar os esforços de origem operacional.

Em operações de perfuração marítima em lâminas de água rasas (inferiores a 300 metros) é possível se fazer uma previsão mais realista do desempenho estrutural da cabeça de poço, face às condições ambientais e operacionais mais favoráveis. Entretanto, esta avaliação prévia é dificultada em operações de perfuração em lâminas de água profundas, face à baixa resistência mecânica do solo marinho nestas regiões e à própria dificuldade de monitoração de suas características mecânicas (ref. 17, 18), bem como às severas condições de carregamento impostas à cabeça de poço devido aos efeitos de correnteza no riser, possível reação causada pelo acoplamento com o template manifold e cargas intermitentes ocasionadas na fase de revestimento e cimentação do poço (refs. 21,22).

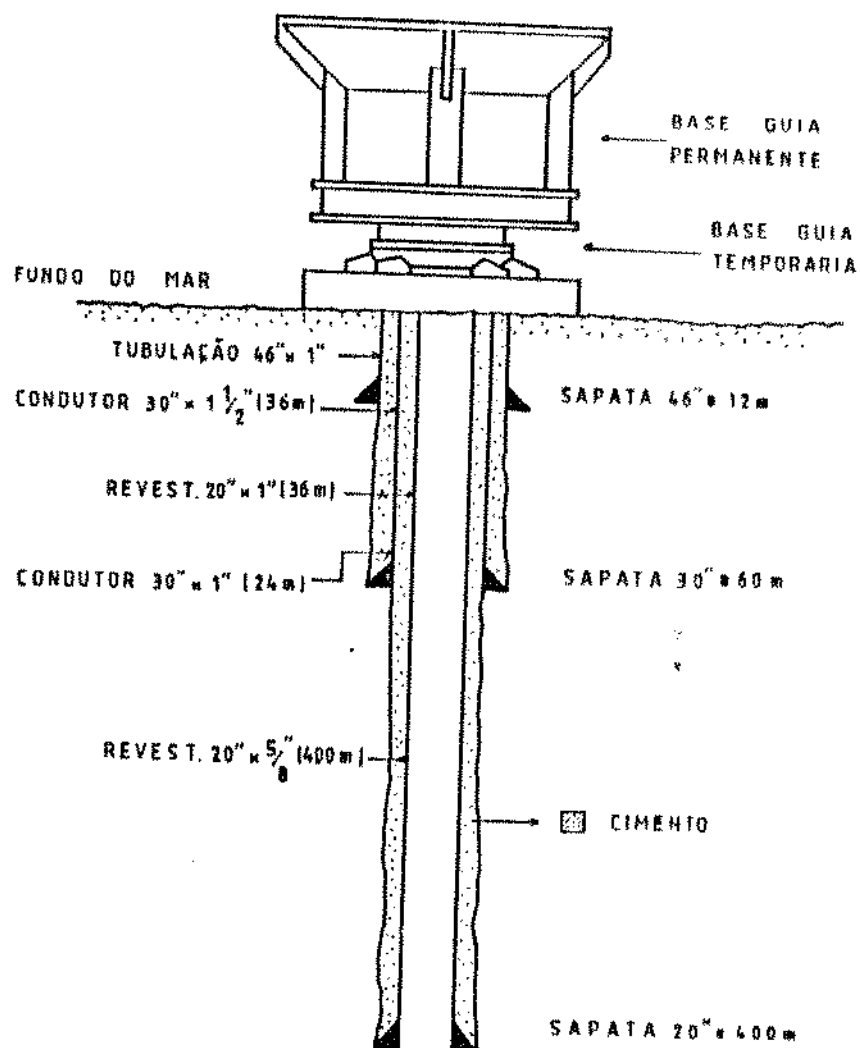


FIG 1.1

CABEÇA DE POÇO PARA OPERAÇÕES DE PERFURAÇÃO EM LÂMINAS DE ÁGUA PROFUNDAS

Face ao quadro exposto, observa-se a necessidade de um estudo da interação entre o solo e a cabeça de poço, que possibilite uma previsão mais efetiva do comportamento estrutural do sistema.

O problema pode ser abordado segundo a utilização de conceitos sobre fundações de estacas, que se enquadram em três categorias principais:

- Método de Transferência de Carga e Reação Horizontal
(refs. 23, 24, 25)
- Métodos baseados na Teoria da Elasticidade para Estacas
(refs. 1, 2, 14, 15)
- Métodos Numéricos (refs. 9, 11, 19)

Na primeira categoria, a reação existente na interface solo-estaca é modelada utilizando-se molas do tipo Winkler, cujas constantes elásticas são obtidas através de ensaios em laboratório ou em campo.

Na Elasticidade existem vários modelos que tratam o problema de uma estaca submetida a carregamento axial ou flexão, onde a diferença básica entre eles reside na forma de distribuição da tensão cisalhante e normal na interface solo-estaca adotada. A determinação de deslocamentos de pontos do solo e da interface, oriundos da aplicação de carga na estaca, é feita através da integração de soluções analíticas (Mindlin - 1936) para cargas concentradas atuantes no interior de um sólido semi-infinito.

Apesar das duas categorias descritas utilizarem conceitos de Diferenças Finitas para a formulação matemática do modelo, elas não se classificam como métodos numéricos de solução do problema, devido ao fato da discretização se verificar somente na estaca, sendo que o efeito do solo é incorporado ao modelo através de coeficientes de influência de origem experimental ou teórica.

O Método de Elementos Finitos completa a terceira classe de análise do problema, tendo como fatores primordiais para o bom modelamento do sistema, o tipo de elemento a ser utilizado e o

refinamento da malha.

Embora os métodos da primeira segunda categorias sejam mais imediatos do ponto de vista analítico, eles não conseguem superar a generalidade de aplicação do Método de Elementos Finitos, que exige um estudo mais criterioso do problema em termos dos dois fatores mencionados, ponderados em função do tempo de processamento e memória computacionais disponíveis.

Como o problema em questão exibe características não-lineares, inelásticas e anisotrópicas, inerentes aos materiais que compõem o sistema, existem fenômenos estruturais associados a estas características, que exigem uma sofisticação do modelo e disponibilidade de recursos computacionais para serem fielmente representados, que podem, eventualmente, inviabilizar o estudo.

Apesar da complexidade mencionada, existem modelos de Elementos Finitos para a simulação do sistema (refs.19,30), munidos de recursos técnicos para a representação da não-linearidade geométrica e material do sistema (associadas aos fenômenos de "SLIPPAGE" e "GAPPING") (ref. 19), formulação elastoplástica da interface solo-estaca e inclusão de efeitos de anisotropia.

O objetivo deste trabalho é uma análise introdutória do problema em questão, utilizando-se uma formulação linear-elástica pelo Método de Elementos Finitos, considerando-se os materiais isotrópicos e homogêneos.

Como o trabalho apresenta um caráter de base para futuros pesquisadores desta universidade, que venham a utilizar o Método de Elementos Finitos para a abordagem do problema, não se ateve ao detalhamento dos parâmetros que caracterizam o problema real, considerando-se valores arbitrários na análise.

O sistema de cabeça de poço foi considerado como uma estaca maciça num meio semi-infinito, definida por um Índice de esbeltez e rigidez relativa, que são coeficientes característicos do sistema, para sua abordagem segundo a Teoria da Elasticidade sobre estacas. Foi utilizado no modelamento o elemento isoparamétrico de 20 nós, da Família Serendipity, disponível no programa para análise estrutural "ANAFIN" (ref. 26).

Para a viabilidade do tratamento do problema em termos de infra-estrutura computacional, tempo de CPU e preparação de dados, foi desenvolvido um algoritmo para análise estática de estruturas ciclo-simétricas.

Devido à característica semi-infinita da hipótese adotada, foi feito um estudo do refinamento da malha e condições de contorno do problema de uma carga concentrada atuante na superfície livre do modelo, com o intuito de calibração do mesmo através de soluções analíticas existentes (ref. 2).

Através do conhecimento adquirido no estudo anterior, em termos de qualidade dos resultados, ponderados em função do limite de memória computacional disponível, o modelo de Elementos Finitos foi comparado com as soluções da Elasticidade para estacas, para diferentes condições de carregamento e diferentes parâmetros característicos do sistema.

Devido à insuficiência de recurso computacional, apesar da implementação do algoritmo de ciclo-simetria, não foi possível a determinação das condições em que se viabiliza a utilização de um método ou de outro, segundo critérios de otimização do modelo : objetivo inicial do trabalho.

CAPITULO 2
FORMULAÇÃO DO ELEMENTO ISOPARAMÉTRICO DE 20 NÓS
PARA ESTADO TRIDIMENSIONAL DE TENSÕES

2.1 FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO - FAMÍLIA SERENDIPITY

Para a formulação do elemento finito em questão, utiliza-se o elemento quadrático (20 nós) da Família Serendipity cujas funções de interpolação são construídas por inspeção, gerando-se polinômios incompletos de segunda ordem expressos em coordenadas paramétricas.

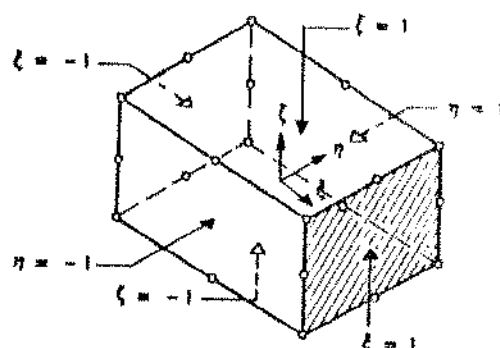


FIG. 2.1

ELEMENTO QUADRÁTICO (20 NÓS)
DA FAMÍLIA SERENDIPITY

É importante observar que, embora a interpolação do campo de deslocamentos seja de 2^a ordem, o campo de tensões gerado é

linear, que no caso de uma viga em flexão, incorre em solução exata.

Introduzindo-se as variáveis paramétricas:

$$\begin{aligned}\xi_o &= \xi \xi_i \\ \eta_o &= \eta \eta_i \\ \xi_o &= \xi \xi_i\end{aligned}\tag{2.1}$$

onde, ξ_i, η_i, ξ_i são as coordenadas locais do nó i

Para os nós dos vértices do prisma, temos:

$$N_i = \frac{1}{8} (1 + \xi_o)(1 + \eta_o)(1 + \xi_o)(\xi_o + \eta_o + \xi_o - 2)\tag{2.2}$$

Para os nós centrais das arestas:

$$\xi_i = 0, \quad \eta_i = \pm 1, \quad \xi_i = \pm 1$$

$$N_i = \frac{1}{4} (1 - \xi^2)(1 + \eta_o)(1 + \xi_o)\tag{2.3}$$

A vantagem na utilização do elemento sólido quadrático desta família em relação à Lagrangiana é a eliminação do nó interior e dos centrais das faces do prisma, já que estes não melhoram significativamente o desempenho do elemento em termos de precisão e diminuem o rendimento computacional na solução de um problema.

2.2 - COORDENADAS PARAMÉTRICAS CURVILÍNEAS

Com a finalidade de se manter a precisão da solução utilizando-se um menor número de elementos regulares (triângulos, retângulos, prismas, tetraedros, etc) para a representação do problema a ser analisado, incorrendo-se, assim, num menor custo

computacional, faz-se uso do recurso mostrado neste item.

O princípio consiste num mapeamento que é feito de forma unívoca, através de uma transformação linear, de um sistema local de coordenadas paramétricas para um sistema de coordenadas cartesianas, respeitando-se algumas restrições geométricas.

Desta forma, elementos distorcidos no sistema de coordenadas cartesiano (x,y,z) poderiam ser tratados no sistema de coordenadas local (ξ, η, ζ) , segundo geometrias regulares descritas anteriormente.

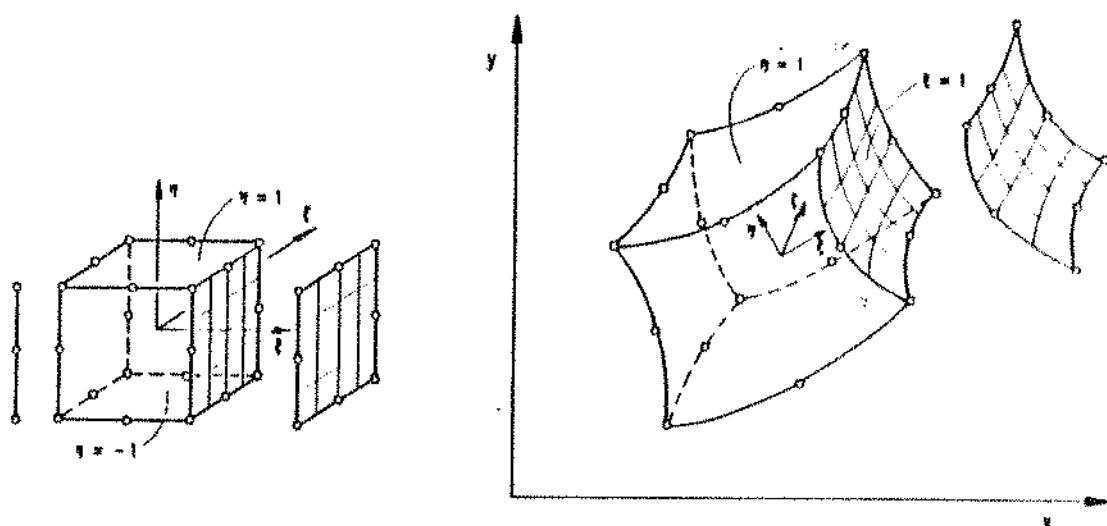


FIG. 2.2

ELEMENTO SÓLIDO REPRESENTADO NO SISTEMA LOCAL DE COORDENADAS
 (ξ, η, ζ) E NO SISTEMA CARTESIANO (x, y, z)

Para o elemento isoparamétrico, a ordem de interpolação da variável física (u, v, w) é igual à da variável geométrica (x, y, z), logo:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [N] \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [N] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

sendo $[N]$ = matriz das funções de interpolação em termos de coordenadas locais, $N_i(\xi, \eta, \xi)$.

Para se avaliar as matrizes (rigidez, carregamento, etc) que caracterizam as propriedades do elemento, deve-se primeiramente expressar a matriz das derivadas globais (ref. 4) em termos de derivadas locais, já que $N_i(\xi, \eta, \xi)$.

Da mesma forma, as integrais envolvidas na formulação matemática do método devem passar para o sistema local, com troca adequada de seus limites de integração.

Para a determinação das derivadas $\frac{\partial}{\partial(x,y,z)}(u,v,w)$, que serão utilizadas na determinação do vetor de deformações do sistema, utilizamos a regra da derivação em cadeia:

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} \quad (2.6)$$

Na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

A matriz jacobiana [J] pode ser obtida a partir de (2.4) e como N_i é função das coordenadas locais, temos:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

Para efetuarmos as integrais necessarias na formulação (ref.4) temos:

$$dvol = dx \, dy \, dz = \det [J] \, d\xi \, d\eta \, d\xi \quad (2.9)$$

$$dA = dx \, dy = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{Bmatrix} d\xi \, d\eta \quad (2.10)$$

$$dL = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{array} \right\} d\xi \quad (2.11)$$

em superfícies $\eta = \text{cte.}$

Considerando-se a possibilidade da obtenção de $[J]^{-1}$, pois isso não ocorrerá somente em situações em que as distorções no mapeamento sejam muito acentuadas, podemos avaliar a matriz de rigidez do elemento (refs. 4,28), na forma:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{G}(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \quad (2.12)$$

É interessante ressaltar o fato de que o mapeamento só será unívoco se o $\det[J]$ mantiver seu sinal em todos os pontos do domínio mapeado.

Embora a integração seja feita dentro de um prisma reto (em coordenadas locais) e não dentro de um sólido distorcido, a determinação da forma explícita de $\bar{G}$ não é simples.

As integrações numéricas envolvidas na formulação, após a transformação para o sistema local de coordenadas, são melhor avaliadas utilizando-se a quadratura de Gauss, já que é possível a obtenção de uma maior ordem de integração para um determinado número de pontos de interpolação, em comparação com outros métodos (ref. 28).

Vale ressaltar que ao se trabalhar com uma ordem de integração muito baixa pode ser gerada uma matriz de rigidez mal condicionada, tornando-se impossível a solução do sistema de equações.

Para o elemento em questão, normalmente se utiliza uma integração numérica de ordem (3 X 3 X 3) para sanar este tipo de problema (ref. 28).

CAPITULO 3 -
IMPLEMENTAÇÃO DE UM ALGORITMO PARA ESTRUTURAS COM
SIMETRIA CÍCLICA

3.1 - INTRODUÇÃO

Devido à geometria do modelo proposto, que se configura basicamente por cilindros concêntricos com propriedades mecânicas constantes, podemos utilizar o conceito de simetria cíclica na formulação matemática do problema.

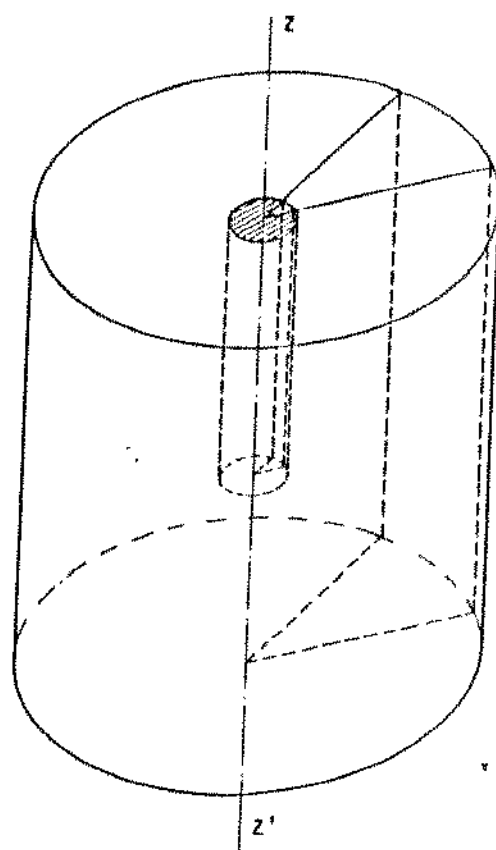


FIG. 3.1

MODELO PROPOSTO

Estabelecida a possibilidade da aplicação do conceito, pode-se utilizar a transformação discreta de Fourier para a solução do problema. As principais vantagens associadas ao processo são:

- sensível redução na preparação de dados necessários para a caracterização do modelo, para a utilização do método de Elementos Finitos.
- significativa diminuição do tempo de processamento e memória computacional, comparado à técnica convencional de solução do problema.
- não há perda do rigor matemático envolvido na técnica.

3.2 - TRANSFORMAÇÃO DISCRETA DE FOURIER

Um sistema mecânico possui simetria cíclica, quando ele pode ser subdividido em N regiões ou segmentos que, se repetem em relação a um eixo de simetria a cada rotação de $(2\pi/N)$, num dado sentido e a partir de uma origem pré-fixados.

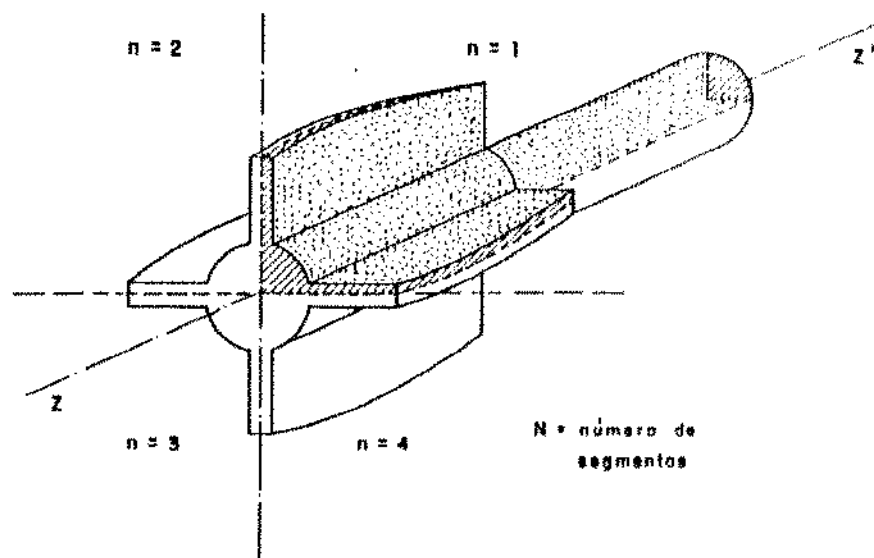


FIG. 3.2

ESTRUTURA MECÂNICA COM SIMETRIA CÍCLICA

No exemplo da fig.3.2, a estrutura é composta por 4 segmentos, podendo ser caracterizado o primeiro segmento por uma região fundamental, que a cada rotação $\pi/2$ ao redor do eixo de simetria ZZ' se repete geometricamente.

Considerando-se, numa análise discreta do problema, como $\langle U_n \rangle$ o vetor dos deslocamentos nodais (ou qualquer outra variável física que caracteriza o problema) do segmento n , temos que:

$$\left\{ U_n \right\} = \left\{ U_{n+N} \right\} \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (3.1)$$

sendo o ângulo entre os segmentos dado por

$$a = 2\pi/N \quad (3.2)$$

Utilizando-se a transformação discreta de Fourier (refs. 3, 12, 13), podemos transferir o modelo descrito no domínio físico para o domínio complexo de Fourier, possibilitando-se o tratamento do sistema mecânico completo, em termos, somente, da região fundamental ($n=1$).

Ao transformarmos o hiper-vetor deslocamento $\langle U \rangle$ do sistema mecânico completo, obtemos o hiper-vetor $\langle X \rangle$:

$$\langle U \rangle = \begin{Bmatrix} \langle U_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle U_N \rangle \end{Bmatrix} \xrightarrow{\text{DFT}} \langle X \rangle = \begin{Bmatrix} \langle X_0 \rangle \\ \vdots \\ \langle X_{N-1} \rangle \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

onde,

$$\langle X_k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \langle U_n \rangle e^{i(n-1)ka} \quad (3.4)$$

Com a numeração dos segmentos feita no sentido anti-horário podemos então definir as variáveis que caracterizam a parte real e a parte imaginária de $\langle X_k \rangle$:

$$\{X_{kc}\} = \{X_k\} + \{X_{N-k}\}$$

$$\{X_{ks}\} = -i \left[\{X_k\} - \{X_{N-k}\} \right] \quad (3.5)$$

sendo

$$\{X_k\} = \frac{1}{2} \left[\{X_{kc}\} + i \{X_{ks}\} \right] \quad (3.6)$$

Pelas relações (3.4), (3.5) e (3.6) podemos determinar todos componentes de $\langle X \rangle$:

$$\{X_0\} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \{U_n\}$$

$$\{X_{kc}\} = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N \{U_n\} \cos[(n-1) k a]$$

$$\{X_{ks}\} = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N \{U_n\} \sin[(n-1) k a] \quad (3.7)$$

$$\{X_M\} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} \{U_n\}$$

Observando-se o fato de que $\langle X_k \rangle$ e $\langle X_{N-k} \rangle$ são complexos conjugados, o índice k variará de 1 a J :

$$J = \frac{(N-1)}{2}, \quad N \text{ ímpar} \quad (\langle X_M \rangle \text{ não existente})$$

$$J = \frac{(N-2)}{2}, \quad N \text{ par} \quad (\langle X_M \rangle \text{ existente})$$

Aplicando-se, agora, a transformada discreta inversa de Fourier, podemos retornar ao espaço real obtendo-se o hiper-vetor $\langle U \rangle$.

$$\langle X \rangle = \begin{Bmatrix} \{X_0\} \\ \{X_{kc}\} \\ \{X_{ks}\} \\ \{X_M\} \end{Bmatrix}_{k=1,2,\dots,J} \xrightarrow{\text{IDFT}} \langle U \rangle = \begin{Bmatrix} \{U_1\} \\ \vdots \\ \{U_N\} \end{Bmatrix}$$

com

$$\{U_n\} = \sum_{k=0}^{N-1} \{X_k\} e^{-i(n-1)ka} \quad (3.10)$$

Na forma reduzida:

$$\begin{aligned} \{U_n\} = \{X_0\} + \sum_{k=1}^J \left[\{X_{kc}\} \cos[(n-1)ka] + \{X_{ks}\} \sin[(n-1)ka] \right] + \\ + (-1)^{n-1} \{X_M\} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Escrevendo-se, agora, as expressões (3.7) e (3.11) na forma matricial, temos:

$$\begin{Bmatrix} \{X_0\} \\ \{X_{1c}\} \\ \{X_{1s}\} \\ \vdots \\ \{X_{jc}\} \\ \{X_{js}\} \\ \{X_M\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{N} & \frac{1}{N} & \frac{1}{N} & \dots & \frac{1}{N} \\ \frac{2}{N} & \frac{2}{N}\cos(a) & \frac{2}{N}\cos(2a) & \dots & \frac{2}{N}\cos((n-1)a) \\ 0 & \frac{2}{N}\sin(a) & \frac{2}{N}\sin(2a) & \dots & \frac{2}{N}\sin((n-1)a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{2}{N} & \frac{2}{N}\cos(ja) & \frac{2}{N}\cos(2ja) & \dots & \frac{2}{N}\cos((n-1)ja) \\ 0 & \frac{2}{N}\sin(ja) & \frac{2}{N}\sin(2ja) & \dots & \frac{2}{N}\sin((n-1)ja) \\ \frac{1}{N} & -\frac{1}{N} & \frac{1}{N} & \dots & \frac{1}{N}(-1)^{n-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_1\} \\ \{U_2\} \\ \vdots \\ \{U_N\} \end{Bmatrix}$$

ou $\langle X \rangle = \begin{bmatrix} T_{xu} \end{bmatrix} \langle U \rangle \quad (3.12)$

e

$$\begin{Bmatrix} \{U_1\} \\ \{U_2\} \\ \{U_3\} \\ \vdots \\ \{U_N\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \cos(a) & \sin(a) & \dots & \sin(ja) & -1 \\ 1 & \cos(2a) & \sin(2a) & \dots & \cos(2ja) & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos((n-1)a) & \sin((n-1)a) & \dots & \sin(j(n-1)a) & (-1)^{n-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{X_0\} \\ \{X_{1c}\} \\ \{X_{1s}\} \\ \vdots \\ \{X_{js}\} \\ \{X_M\} \end{Bmatrix}$$

$$\langle U \rangle = \begin{bmatrix} T_{ux} \end{bmatrix} \langle X \rangle \quad (3.13)$$

Por propriedades de ortogonalidade (ref. 3), temos:

$$\begin{bmatrix} T_{xu} \\ T_{ux} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{ux} \\ T_{xu} \end{bmatrix} = [I] \quad (3.14)$$

3.3 - SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

Considerando-se o sistema de equações que modela matematicamente o sistema mecânico completo, temos:

$$\langle F \rangle = [K] \langle U \rangle \quad (3.15)$$

onde: $\langle F \rangle = \begin{Bmatrix} \langle F_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle F_N \rangle \end{Bmatrix} = \text{hiper-vetor de carregamento externo no domínio físico}$

$[K]$ = matriz de rigidez da estrutura completa

Utilizando-se a transformação (DFT) do item anterior, o sistema (3.15) pode ser representado no espaço de Fourier da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} T_{ux} \end{bmatrix}^T \langle F \rangle = \begin{bmatrix} T_{ux} \end{bmatrix}^T [K] \begin{bmatrix} T_{ux} \end{bmatrix} \langle X \rangle \quad (3.16)$$

ou seja:

$$\langle R \rangle = [G] \langle X \rangle \quad (3.17)$$

$$\text{sendo: } \langle R \rangle = \begin{Bmatrix} \langle R_0 \rangle \\ \langle R_{k_c} \rangle \\ \langle R_{k_s} \rangle \\ \langle R_M \rangle \end{Bmatrix} = [T_{ux}]^T \langle F \rangle = \text{híper-vetor carregamento externo no domínio de Fourier} \quad (k=1,2,\dots,J)$$

$$[G] = [T_{ux}]^T [K] [T_{ux}] = \text{matriz de rigidez no domínio de Fourier}$$

O interesse em se tratar o sistema (3.15) na forma do (3.17), reside no desacoplamento existente entre os segmentos que compõem o sistema mecânico, no domínio complexo. Desta forma, a matriz de rigidez $[K]$ pode ser diagonalizada em termos das sub-matrizes de rigidez de cada segmento $[K_i]$ ($i=1,\dots,N$) propiciando-se a solução independente de cada subsistema.

Pelo conceito de simetria cíclica, $[K_1] = [K_2] = \dots = [K_N]$, logo, o sistema (3.17) pode ser representado da seguinte forma:

$$\langle R \rangle = [K_1] \left([T_{ux}]^T [I] [T_{ux}] \right) \langle X \rangle$$

$$\langle R \rangle = \begin{bmatrix} [G_0] & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & [G_1] & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & [G_2] & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ & & & & & [G_{N-1}] \end{bmatrix} \langle X \rangle \quad (3.18)$$

sendo: $[K_1] = \text{matriz de rigidez da região fundamental (segmento 1)}$

$$[G_k] = \begin{cases} N [K_1] & , \text{ para } k = 0 \text{ e } k = \frac{N}{2} \\ \frac{N}{2} [K_1] & , \text{ para } 1 \leq k \leq J \end{cases}$$

Note-se que para $[K_1]=[K_2]=\dots=[K_N]$ ocorra é necessário que a representação matricial de cada segmento esteja referida a um sistema de coordenadas local conveniente.

3.4 - CONDENSACÃO ESTÁTICA

Condensação estática é uma das técnicas de sub-estruturação, que viabiliza o tratamento de sistemas com grande número de graus de liberdade, em termos de memória RAM disponível (ref. 27).

Observando-se a fig.(3.1), podemos utilizar a técnica no sentido de se representar o super-elemento que caracteriza a região fundamental, somente em termos das variáveis livres das faces direita e esquerda.

O processo consiste na representação do sistema de equações original em termos de um sistema condensado, cuja influência das variáveis livres internas do super-elemento é incorporadas às variáveis das faces direita e esquerda, segundo a formulação que segue:

Considerando-se um segmento aleatório da estrutura, definido por, um vetor de deslocamentos nodais $\langle A \rangle$, um vetor de carregamento externo $\langle P \rangle$ e matriz de rigidez $[H]$ no domínio físico, temos:

$$\langle P \rangle = [H] \langle A \rangle \quad (3.19)$$

Através de um rearranjo matemático, (3.19) pode ser expresso da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \langle P_d \rangle \\ \langle P_e \rangle \\ \langle P_i \rangle \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [H_{dd}] & [H_{de}] & [H_{di}] \\ [H_{ed}] & [H_{ee}] & [H_{ei}] \\ [H_{id}] & [H_{ie}] & [H_{ii}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \langle A_d \rangle \\ \langle A_e \rangle \\ \langle A_i \rangle \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

Sendo:

$[H_{dd}]$ = matriz de rigidez das variáveis livres da face direita

$[H_{di}]$ = matriz de rigidez das variáveis livres da face direita e internas

$[H_{de}]$ = matriz de rigidez das variáveis livres das faces direita e esquerda

$[H_{ee}]$ = matriz de rigidez das variáveis da face esquerda

$[H_{ii}]$ = matriz de rigidez das variáveis livres da face internas

$[H_{id}] = [H_{di}]^T$

$[H_{ed}] = [H_{de}]^T$

$\langle P_d \rangle$ = vetor de carregamento da face direita

$\langle P_e \rangle$ = vetor de carregamento da face esquerda

$\langle P_i \rangle$ = vetor de carregamento interno

$\langle A_d \rangle$ = variáveis livres da face direita

$\langle A_e \rangle$ = variáveis livres da face esquerda

O sistema (3.20) é representado na forma condensada da seguinte forma:

$$\langle \bar{P} \rangle = [\bar{H}] \langle \bar{A} \rangle \quad (3.21)$$

ou,

$$\begin{Bmatrix} \langle \bar{P}_d \rangle \\ \langle \bar{P}_e \rangle \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\bar{H}_{dd}] & [\bar{H}_{de}] \\ [\bar{H}_{ed}] & [\bar{H}_{ee}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \langle \bar{A}_d \rangle \\ \langle \bar{A}_e \rangle \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

sendo:

$[H_{dd}]$ = matriz de rigidez condensada dos graus de liberdade da face direita

$[H_{ee}]$ = matriz de rigidez condensada dos graus de liberdade da face esquerda

$[H_{de}]$ = matriz de rigidez condensada dos graus de liberdade das faces direita e esquerda

$[H_{ed}] = [H_{de}]^T$

$[F_d]$ = vetor dos carregamentos da face direita condensado

$[F_e]$ = vetor dos carregamentos da face esquerda condensado

sendo:

$$[H_{dd}] = [H_{dd}] - [H_{di}][H_{ii}]^{-1}[H_{id}] \quad (3.23)$$

$$[H_{ee}] = [H_{ee}] - [H_{ei}][H_{ii}]^{-1}[H_{ie}] \quad (3.24)$$

$$[H_{ed}] = [H_{de}]^T = [H_{ed}] - [H_{ei}][H_{ii}]^{-1}[H_{id}] \quad (3.25)$$

$$\langle F_d \rangle = \langle P_d \rangle - [H_{di}][H_{ii}]^{-1} \langle P_i \rangle \quad (3.26)$$

$$\langle F_e \rangle = \langle P_e \rangle - [H_{ei}][H_{ii}]^{-1} \langle P_i \rangle \quad (3.27)$$

Após a solução do sistema (3.21), recupera-se o vetor de deslocamentos internos $\langle A_i \rangle$:

$$\langle A_i \rangle = [H_{ii}]^{-1} \left[\langle P_i \rangle - [H_{id}]\langle A_d \rangle - [H_{ie}]\langle A_e \rangle \right] \quad (3.28)$$

3.5 - CONDIÇÕES DE CONTORNO DO PROBLEMA

As condições de contorno de cada segmento são baseadas na

compatibilidade das variáveis na interface de dois segmentos adjacentes.

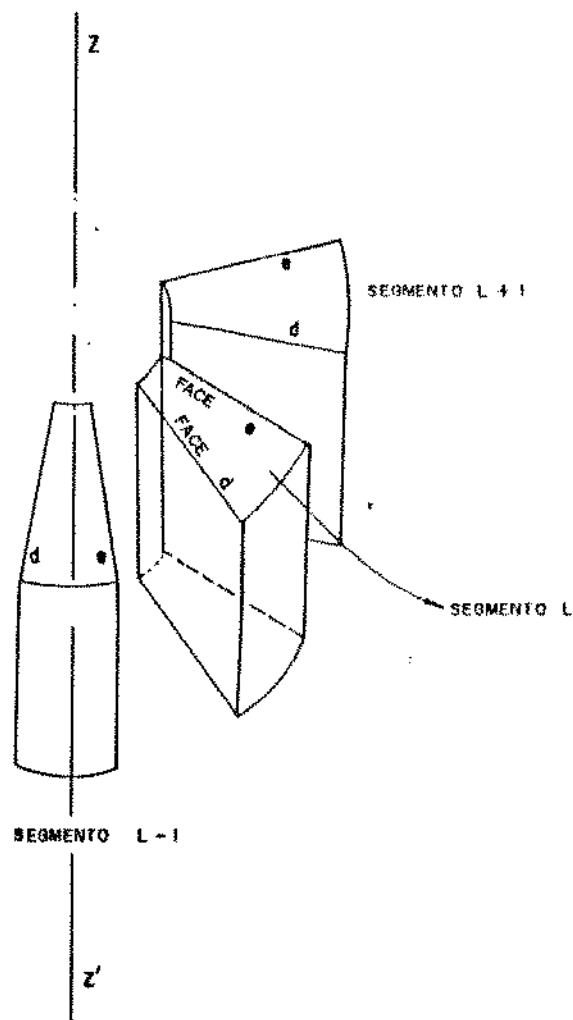


FIG. 3.3

INTERFACE DE TRÊS SEGMENTOS ADJACENTES

Para um observador no eixo de simetria ZZ' da fig.(3.3), identifica-se as faces direita e esquerda de um dado segmento e consequentemente, as variáveis nodais pertencentes às respectivas faces.

Considerando-se, agora, que os segmentos da fig.(3.3) estejam equacionados na forma condensada, aplicamos as condições de compatibilidade entre eles, na forma:

$$\left\{U_L\right\}_d = \left\{U_{L-1}\right\}_e$$

$$\left\{U_L\right\}_e = \left\{U_{L+1}\right\}_d \quad (3.29)$$

As relações (3.29) no espaço real, correspondem às seguintes relações no espaço complexo de Fourier:

$$\left\{X_o\right\}_e = - \left\{X_o\right\}_d \quad (3.30)$$

$$\left\{X_M\right\}_e = \left\{X_M\right\}_d \quad (3.31)$$

e para $1 \leq k \leq J$, temos:

$$\left\{X_k\right\}_e = \left\{X_k\right\}_d e^{-ika} \quad (3.32)$$

e

$$\begin{Bmatrix} \left\{X_{kc}\right\}_e \\ \left\{X_{ks}\right\}_e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos ka & \sin ka \\ -\sin ka & \cos ka \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \left\{X_{kc}\right\}_d \\ \left\{X_{ks}\right\}_d \end{Bmatrix} \quad (3.33)$$

Escrevendo-se, então, (3.18) na forma condensada, e aplicando-se as condições de compatibilidade (3.30), (3.31) e (3.33) resolve-se o sistema somente em função das variáveis nodais da face direita, já que as da face esquerda são dependentes.

Explicitando-se o sistema de equações resuntantes, temos:

$$N \left(\left[\bar{K}_1 \right]_{dd} + \left[\bar{K}_1 \right]_{de} \right) \left\{ X_o \right\}_d = \left\{ R_o \right\}_d, \quad K=0 \quad (3.34)$$

sendo:

$$[\bar{K}_1] = \begin{bmatrix} \left[\bar{K}_1 \right]_{dd} & \left[\bar{K}_1 \right]_{de} \\ \left[\bar{K}_1 \right]_{ed} & \left[\bar{K}_1 \right]_{ee} \end{bmatrix} = [K_1] \text{ condensada}$$

$$N \left(\left[\bar{K}_1 \right]_{dd} - \left[\bar{K}_1 \right]_{de} \right) \left\{ X \right\} = \left\{ R \right\}_d \quad K = \frac{N}{2} \quad (3.35)$$

e para $1 \leq k \leq J$:

$$\frac{N}{2} \begin{bmatrix} [r] & [t] \\ -[t] & [r] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \left\{ X_{kc} \right\}_d \\ \left\{ X_{ke} \right\}_d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \left\{ f_{kc} \right\} \\ \left\{ f_{ke} \right\} \end{Bmatrix} \quad (3.36)$$

onde:

$$[r] = \left\{ \left[\bar{K}_1 \right]_{dd} + \left[\bar{K}_1 \right]_{ee} + \cos ka \left(\left[\bar{K}_1 \right]_{de} + \left[\bar{K}_1 \right]_{ed} \right) \right\}$$

$$[t] = \sin ka \left(\left[\bar{K}_1 \right]_{de} - \left[\bar{K}_1 \right]_{ed} \right)$$

$$\left\{ f_{kc} \right\} = \left\{ R_{kc} \right\}_d + \cos ka \left\{ R_{kc} \right\}_e - \sin ka \left\{ R_{ke} \right\}_e$$

$$\left\{ f_{ke} \right\} = \left\{ R_{ke} \right\}_d + \sin ka \left\{ R_{kc} \right\}_e + \cos ka \left\{ R_{ke} \right\}_e$$

e

$$J = \frac{(N-1)}{2}, \quad N \text{ ímpar}$$

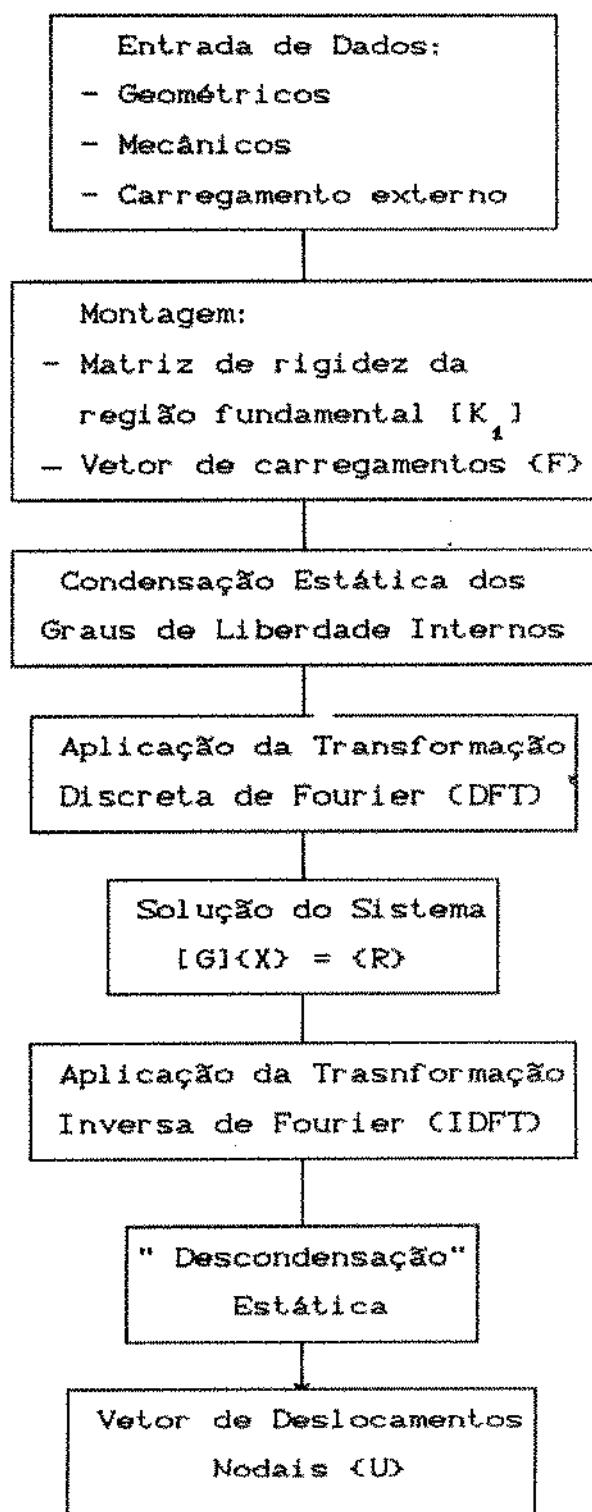
$$J = \frac{(N-2)}{2}, \quad N \text{ par}$$

É importante observar que a aplicação das condições de contorno no domínio complexo, requer que as duas faces dos segmentos adjacentes estejam num mesmo sistema de coordenadas. Para tanto, é feita uma transformação de coordenadas na matriz de rigidez de (3.22), de forma que a se representar $[\bar{H}_{ee}]$ e $[\bar{H}_{ed}]$ no sistema de coordenadas da face direita, que caracteriza as variáveis independentes do sistema.

Outro fato interessante na formulação é que a solução de um modelo com carregamento simétrico é feita somente para a região fundamental, já que os segmentos são desacoplados no domínio complexo.

3.6 - COMENTARIOS

Podemos representar o processo apresentado neste capítulo, através do seguinte algoritmo:



Vale ressaltar a viabilidade e a conveniência da implementação do algoritmo em um programa de Elementos Finitos, três aspectos principais: preparação de dados, memória computacional e tempo de CPU.

A preparação de dados de entrada do programa é feita somente para um dos segmentos que compõem a estrutura mecânica, sendo que as restrições de contorno e carregamentos externos em outros segmentos são expressos, localmente, em relação a esta região fundamental.

Pode-se também notar que o sistema de equações que é resolvido no domínio complexo de Fourier, possui como incógnitas, somente variáveis livres da face direita (ou da esquerda) da região fundamental. Esta economia de memória se deve à condensação estática dos graus de liberdade internos, bem como às condições de compatibilidade impostas.

Em termos do parâmetro tempo de CPU, observa-se que para a determinação do vetor de deslocamentos nodais da estrutura mecânica completa, necessita-se resolver um sistema reduzido (no espaço de Fourier referente à região fundamental), aproximadamente $N/2$ vezes, tornando-se este parâmetro significativamente inferior quando comparado à técnica convencional. Note-se também que a condensação estática é realizada uma só vez.

Finalmente, é importante ressaltar a possibilidade do tratamento do problema abordado na tese, em termos dos dois últimos aspectos considerados, utilizando-se um super-microcomputador, cuja performance e capacidade são sensivelmente limitados em comparação com um computador de grande porte, provavelmente necessário para a realização do trabalho proposto.

Para o trabalho em questão, no cálculo dos deslocamentos no modelo, causados por um carregamento lateral (capítulos 4 e 5), foi utilizada uma malha com 12 elementos e 30 elementos por segmento, para obtenção de resultados aceitáveis em engenharia.

Este modelo é representado por um sistema com 306 graus de liberdade, com um tempo de processamento médio de 330 minutos num super-microcomputador DIGI-REDE, dotado de co-processador

matemático. Este mesmo modelo seria representado, de forma convencional, por um sistema de equações com 4968 graus de liberdade.

CAPÍTULO 4

CALIBRAÇÃO DA MALHA DE ELEMENTOS FINITOS

4.1 - INTRODUÇÃO

A importância do estudo de soluções básicas na elasticidade, antecedendo a análise do comportamento de um tubo cilíndrico cravado no solo pelo Método de Elementos Finitos, reside na tentativa de um estabelecimento de diretrizes para a calibração do modelo, em termos de condições de contorno, nível de discretização e influência do raio neutro, necessário para utilização do algoritmo desenvolvido para estruturas com simetria cíclica.

Pelo fato do problema físico não possuir uma fronteira definida em termos de distância radial e profundidade do local de aplicação da carga, há necessidade da definição das características e localização da fronteira do modelo proposto, de forma que seu efeito sobre os resultados obtidos não incorra num erro em relação aos resultados teóricos, que seja superior à tolerância pré-especificada.

Devido à maior variação nas tensões e deformações do meio semi-infinito se localizar na região que circunda o local de aplicação da carga, há necessidade de um estudo ponderado do nível de discretização na direção radial e longitudinal até as fronteiras do modelo, de forma a otimizar a qualidade dos resultados obtidos, em termos de memória computacional existente.

Como o algoritmo desenvolvido para estruturas com simetria cíclica requer a inexistência de nós centrais ao longo do eixo de simetria que sejam comuns a todos segmentos, estamos introduzindo fisicamente no modelo, um furo, cujas dimensões devem ser caracterizadas para a menor influência possível nos resultados obtidos.

Vale ressaltar que as soluções elásticas para o deslocamento de pontos de um meio semi-infinito devido à influência de uma estaca submetida a um carregamento axial ou lateral, são obtidas pela integração das soluções básicas de Mindlin abordadas neste capítulo.

4.2 - SOLUÇÕES TEÓRICAS CONSIDERADAS

4.2.1 - Carga concentrada vertical, aplicada no interior de um sólido semi-infinito (ref. 2).

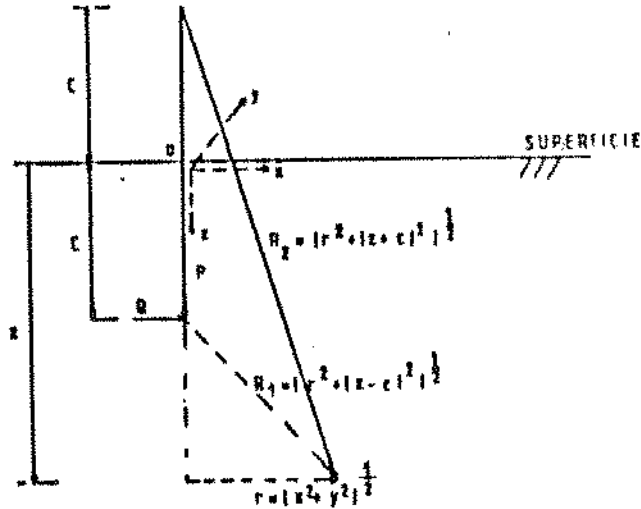


FIG. 4.1

CARGA CONCENTRADA ATUANTE NO INTERIOR DE UM SÓLIDO SEMI - INFINITO

$$\rho_r = \frac{Pr}{16\pi G(1-\nu_s)} \left[\frac{z-c}{R_1^3} + \frac{(3-4\nu_s)(z-c)}{R_2^3} - \frac{4(1-\nu_s)(1-2\nu_s)}{R_2(R_2+z+c)} + \frac{6cz(z+c)}{R_2^5} \right] \quad (4.1)$$

$$\rho_z = \frac{P}{16\pi G(1-\nu_s)} \left[\frac{3-4\nu_s}{R_1} + \frac{8(1-\nu_s)^2 - (3-4\nu_s)}{R_2} + \frac{(z-c)^2}{R_1^3} + \frac{(3-4\nu_s)(z+c)^2 - 2cz}{R_2^3} + \frac{6cz(z+c)^2}{R_2^5} \right] \quad (4.2)$$

G = módulo de cisalhamento do material que constitui o solo

ν_s = coeficiente de Poisson do solo

O problema de uma carga concentrada vertical, atuante na superfície de um sólido semi-infinito foi inicialmente estudado por Boussinesq (1892), sendo que as expressões (4.1) e (4.2), obtidas por Mindlin (1936), são utilizadas na formulação do modelo matemático de uma estaca sob carregamento axial (ref. 1).

Para efeito de análise foram consideradas as soluções propostas por Boussinesq, que são uma particularidade de (4.1) e (4.2).

O interesse em se estudar este caso se justifica pelo fato das maiores tensões de cisalhamento na interface entre o solo e a estaca compressível sob carregamento axial, ocorrerem próximas à superfície (ref. 1), preservando-se uma análise mais conservadora do problema.

4.2.2) Carga concentrada horizontal, aplicada no interior de um sólido semi-infinito (ref. 2).

$$\rho_x = \frac{Q}{16\pi G(1-\nu_s)} \left[\frac{3-4\nu_s}{R_1^3} + \frac{1}{R_2} + \frac{x^2}{R_1^3} + \frac{(3-4\nu_s)x^2}{R_2^3} + \frac{2cz}{R_2^3} \left(1 - \frac{3x^2}{R_2^2} \right) + \frac{4(1-\nu_s)(1-2\nu_s)}{R_2(z+c)} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{R_2(R_2+z+c)} \right) \right] \quad (4.3)$$

$$\rho_y = \frac{Qxy}{16\pi G(1-\nu_s)} \left[\frac{1}{R_1^3} + \frac{(3-4\nu_s)}{R_2^3} - \frac{6cz}{R_2^5} - \frac{4(1-\nu_s)(1-2\nu_s)}{R_2(R_2+z+c)^2} \right] \quad (4.4)$$

$$\rho_z = \frac{Qx}{16\pi G(1-\nu_s)} \left[\frac{z-c}{R_1^3} + \frac{(3-4\nu_s)(z-c)}{R_2^3} - \frac{6cz(z+c)}{R_2^5} + \frac{4(1-\nu_s)(1-2\nu_s)}{R_2(R_2+z+c)} \right] \quad (4.5)$$

De forma análoga ao caso anterior, foram utilizadas as soluções acima (Mindlin-1936) para uma carga lateral aplicada na superfície de um sólido semi-infinito, já que os maiores valores de tensões normais atuantes na interface solo-estaca, para este tipo de carregamento, ocorrem próximos à superfície.

4.3 - INFLUENCIA DO NIVEL DE REFINAMENTO DA MALHA E DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO

Por se tratar de um problema tridimensional, há necessidade de um estudo da discretização do sistema em três direções perpendiculares, segundo o sistema de coordenadas utilizado.

Observando-se as expressões de deslocamento para os dois

casos de carregamento do sólido, é feita inicialmente a discretização do super-elemento que caracteriza a região fundamental, no plano geratriz do mesmo, analisando-se a variação dos deslocamentos nas duas direções, ponto a ponto. Para tanto, foi feito um estudo preliminar comparando a formulação matemática do elemento utilizado com equações (4.1), (4.2), (4.3), de forma a se estimar as dimensões características dos elementos em função da localização no plano (r - z), que incorram num erro aproximadamente constante entre o Modelo de Elementos Finitos e as soluções exatas.

Quando representa-se o caso vertical segundo um sistema de coordenadas cilíndrico, o problema passa a ser tratado na forma bidimensional, facilitando-se a análise do refinamento da malha, que é feita apenas no plano da geratriz.

Para a análise do caso lateral, onde não é possível a simplificação anterior, é aproveitada a discretização na direção da profundidade (eixo z), devido à semelhança de (4.2) e (4.5); reavaliada a discretização na direção de aplicação da carga, sendo feita finalmente a variação do número de segmentos que compõem o sistema, obtendo-se desta forma o refinamento da malha na direção circunferencial.

No refinamento descrito foram consideradas dois tipos de condições de contorno aplicadas ao modelo:

- 1) base do cilindro que representa o meio semi-infinito com os nós fixados nas três direções;
- 2) base e superfície lateral do cilindro que representa o meio semi-infinito, com os respectivos nós fixados nas três direções.

Estas considerações são feitas com o intuito de simular a característica da fronteira de um meio semi-infinito, já que não dispomos dos chamados "elementos infinitos" (ref. 29), cujas funções de interpolação são construídas de forma a representar este tipo de contorno.

Como as soluções consideradas são exatas, podemos definir a faixa de nós da malha que apresentam deslocamentos dentro de uma tolerância aceitável em engenharia, face à influência gerada pela

simulação do contorno. Esta faixa de operação é definida em função da localização dos nós dentro do contorno e do número de elementos utilizados na representação da região fundamental, fator limitante do estudo, dada a limitação da capacidade de memória computacional do equipamento utilizado.

Para o caso de carga vertical foram verificadas malhas em função do número de elementos da região fundamental e disposição dos mesmos, tipo de condição de contorno, localização dos nós no plano da geratriz e tolerância do erro em relação à solução exata.

As malhas utilizadas variam de vinte a trinta e seis elementos, dispostos de forma variada no plano da geratriz figs.(4.2, 4.4, 4.6, 4.8, 4.10), sendo que a que possui o maior número de elementos foi tratada com um contorno tipo 2. Embora esta última malha represente o sistema com o maior número de graus de liberdade (fig. 4.6), a influência do contorno lateral torna-se significativa (fig. 4.7), invalidando-se seus resultados, perante a tolerância do erro.

Embora este efeito da fronteira possa ser minimizado com o seu distanciamento do ponto de aplicação da carga, isto incorreria numa distorção muito acentuada dos elementos que compõem o segmento, que são limitados em número pela memória computacional disponível, gerando um mal condicionamento da matriz de rigidez da região fundamental e impossibilitando a solução do sistema de equações.

Observando-se as figs.(4.2) a (4.11), conclui-se que, apesar das malhas apresentarem resultados satisfatórios de deslocamentos, a sua faixa de operação é muito restrita, caracterizando a superioridade dos resultados obtidos com as malhas de 30 elementos.

Devido à consideração elástico-linear do problema, foram atribuídos valores arbitrários de Carregamento (P) e Módulo de Young (E), já que as curvas podem ser facilmente corrigidas para outros parâmetros. Também foi atribuído um valor para o Coeficiente de Poisson do material do solo arbitrário ($\nu = 0.4$), devido à irrelevância deste parâmetro neste tipo de estudo (ref. 1)

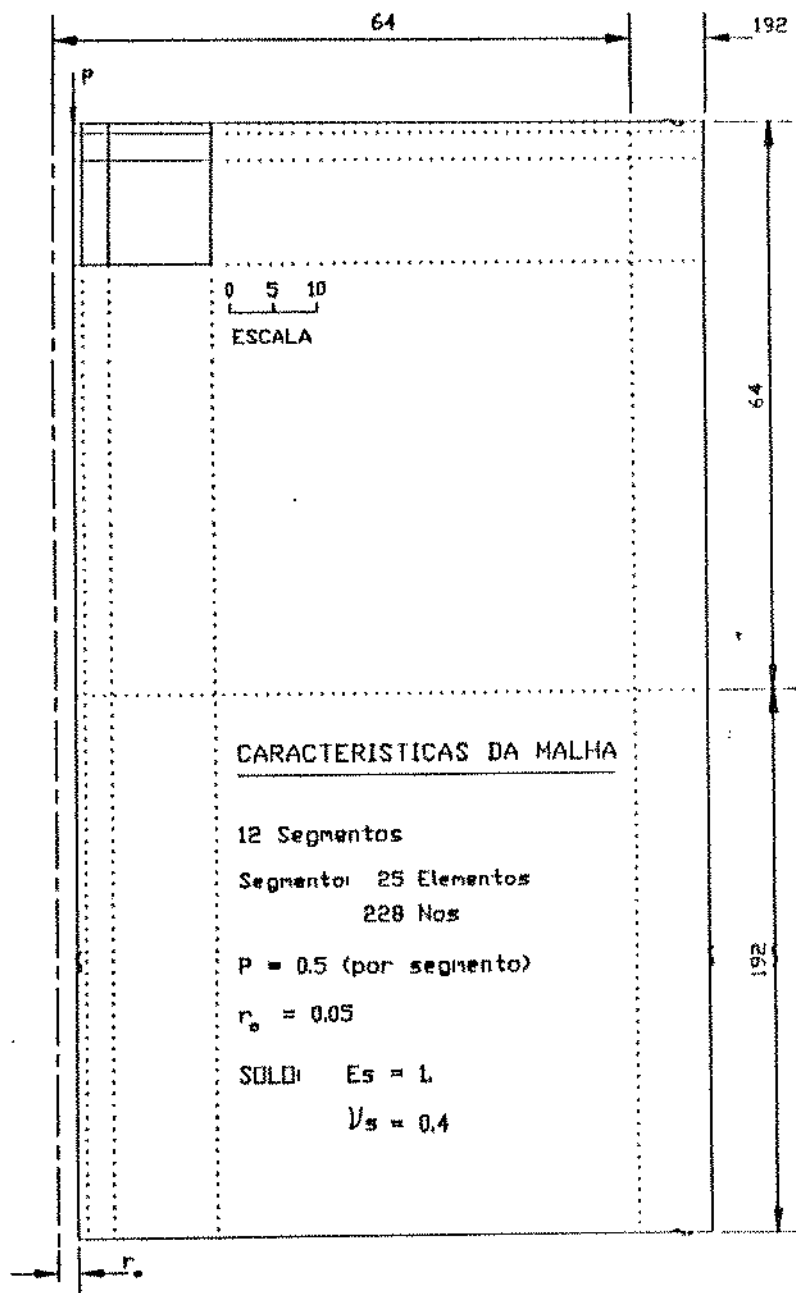


Fig. 42 GERATRIZ DA MALHA (CARGA CONCENTRADA VERTICAL, 25 ELEMENTOS POR SEGMENTO) *

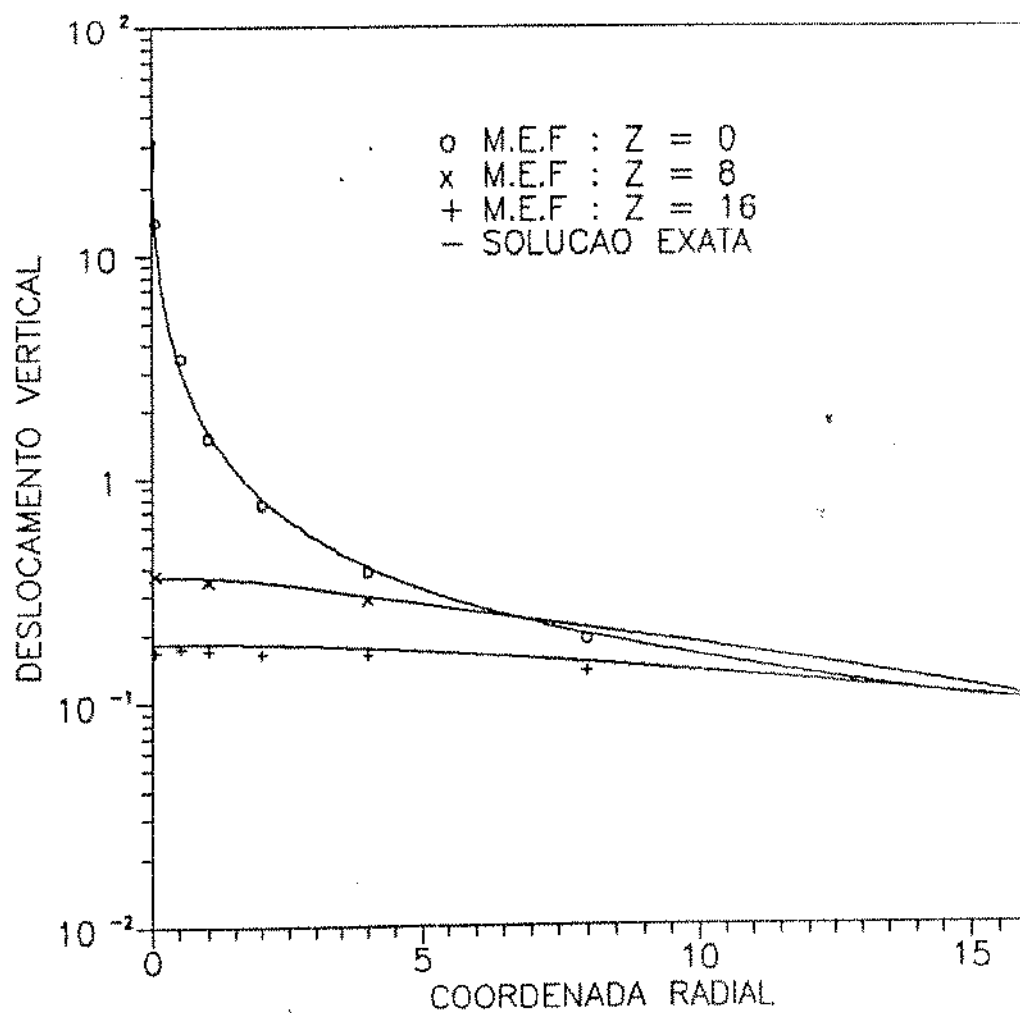


Fig. 4.3- Gráfico de decaimento dos deslocamentos verticais
(carga concentrada vertical; 25 elementos por segmento)

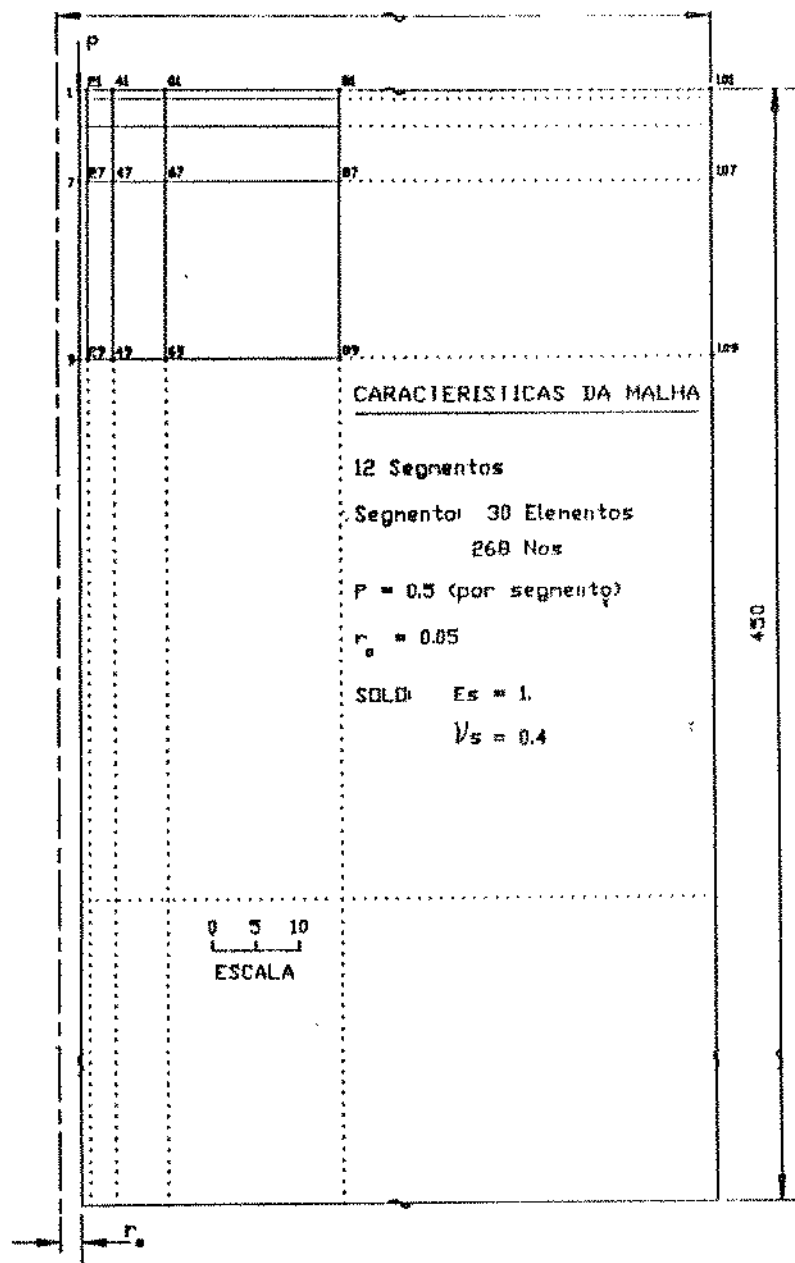


Fig. 4.4 GERATRIZ DA MALHA (CARGA CONCENTRADA VERTICAL, 30 ELEMENTOS POR SEGMENTO)

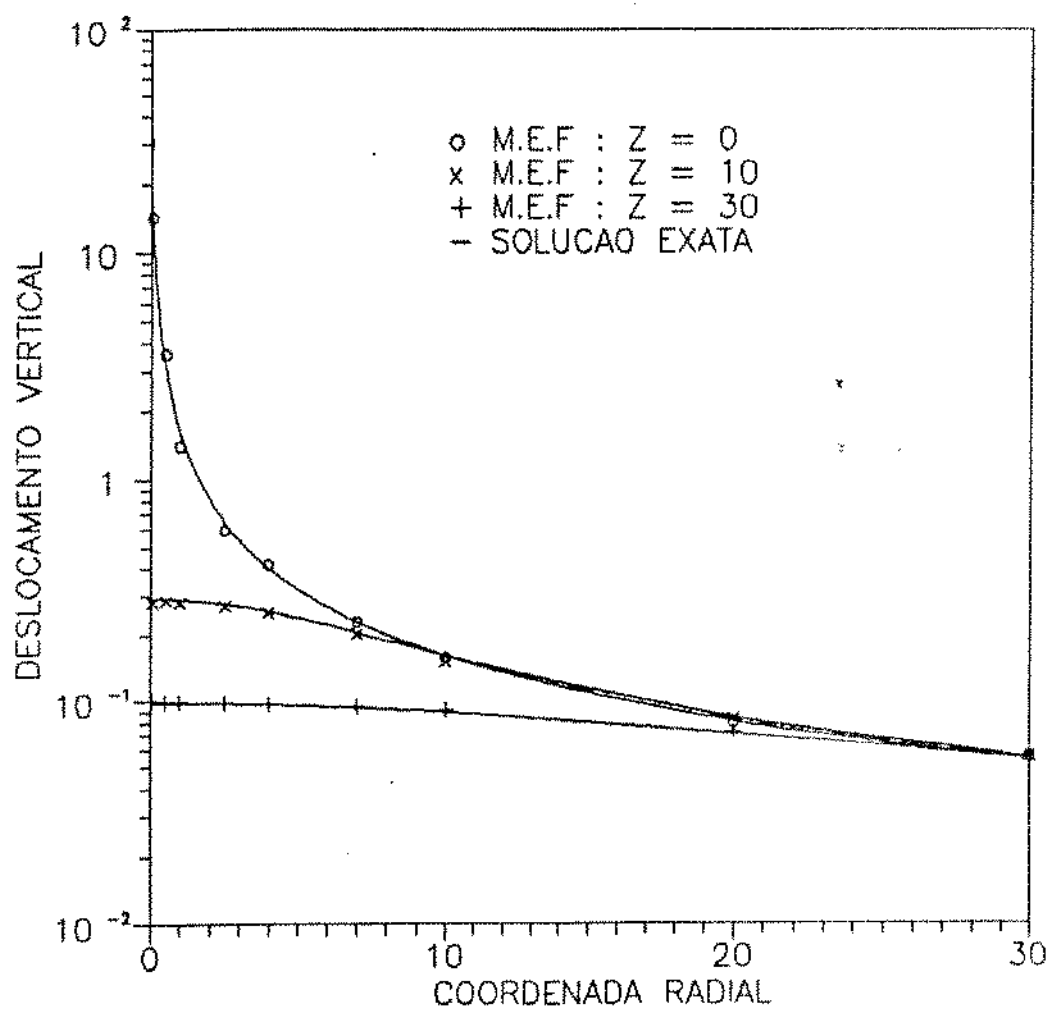


Fig. 4.5 - Gráfico de deslocamentos verticais
(carga concentrada vertical; 30 elementos por segmento)

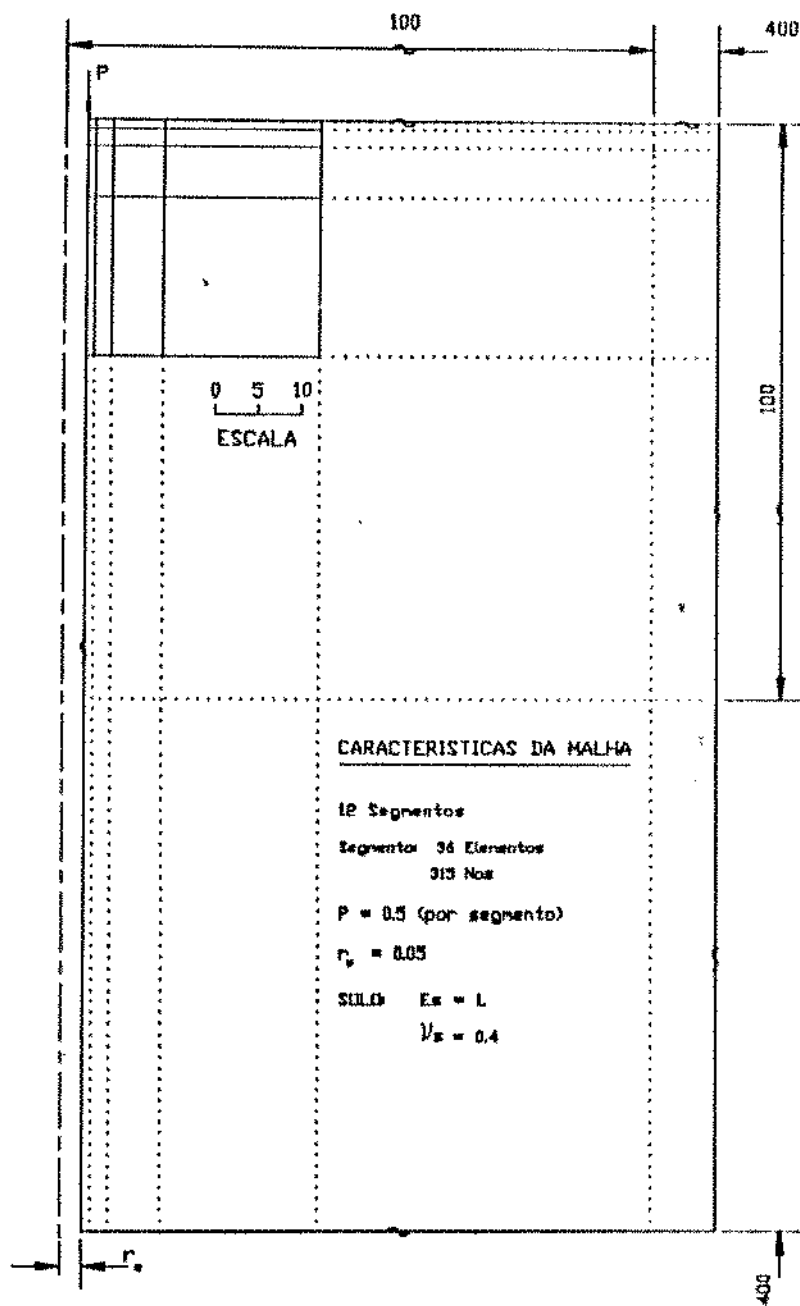


Fig. 4.6 GERATRIZ DA MALHA (CARGA CONCENTRADA VERTICAL, 36 ELEMENTOS POR SEGMENTO)

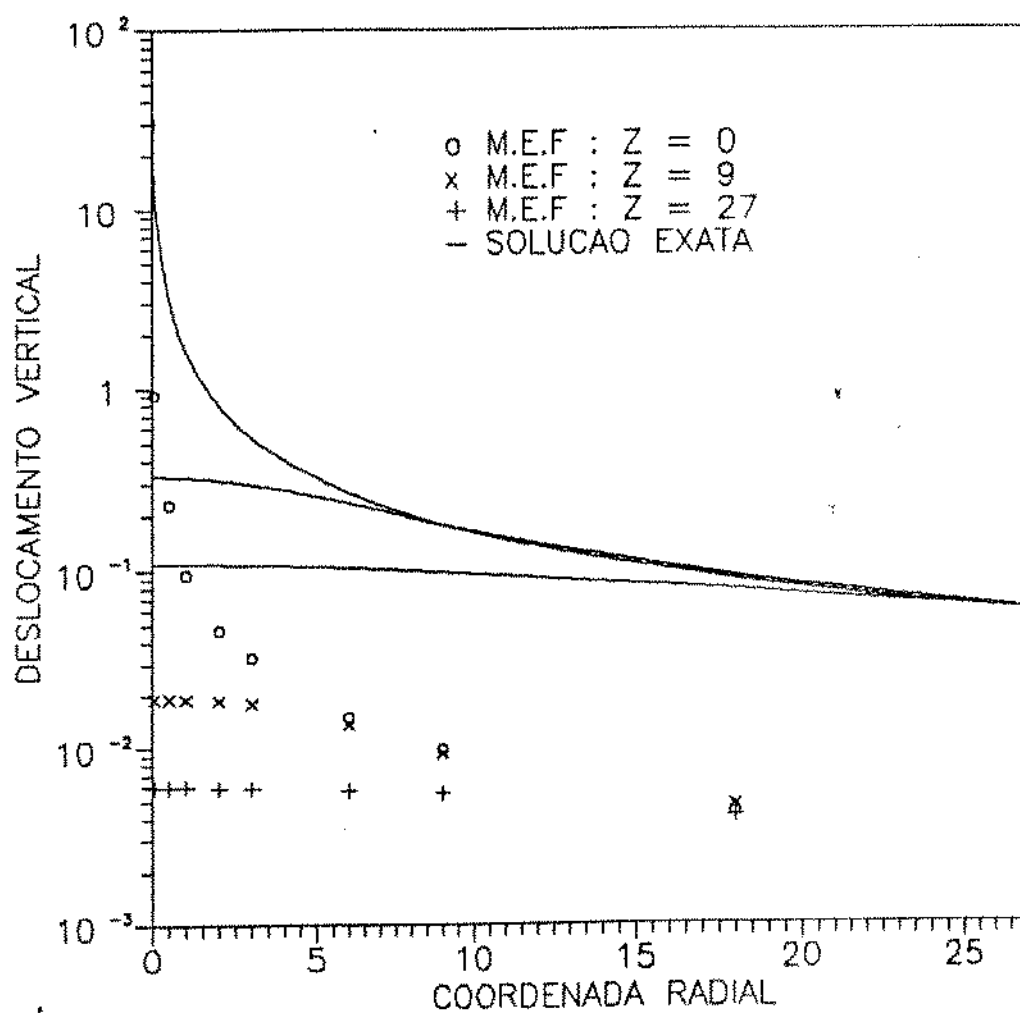


Fig. 4.7 - Gráfico dos deslocamentos verticais
(carga concentrada vertical; 36 elementos por segmento)

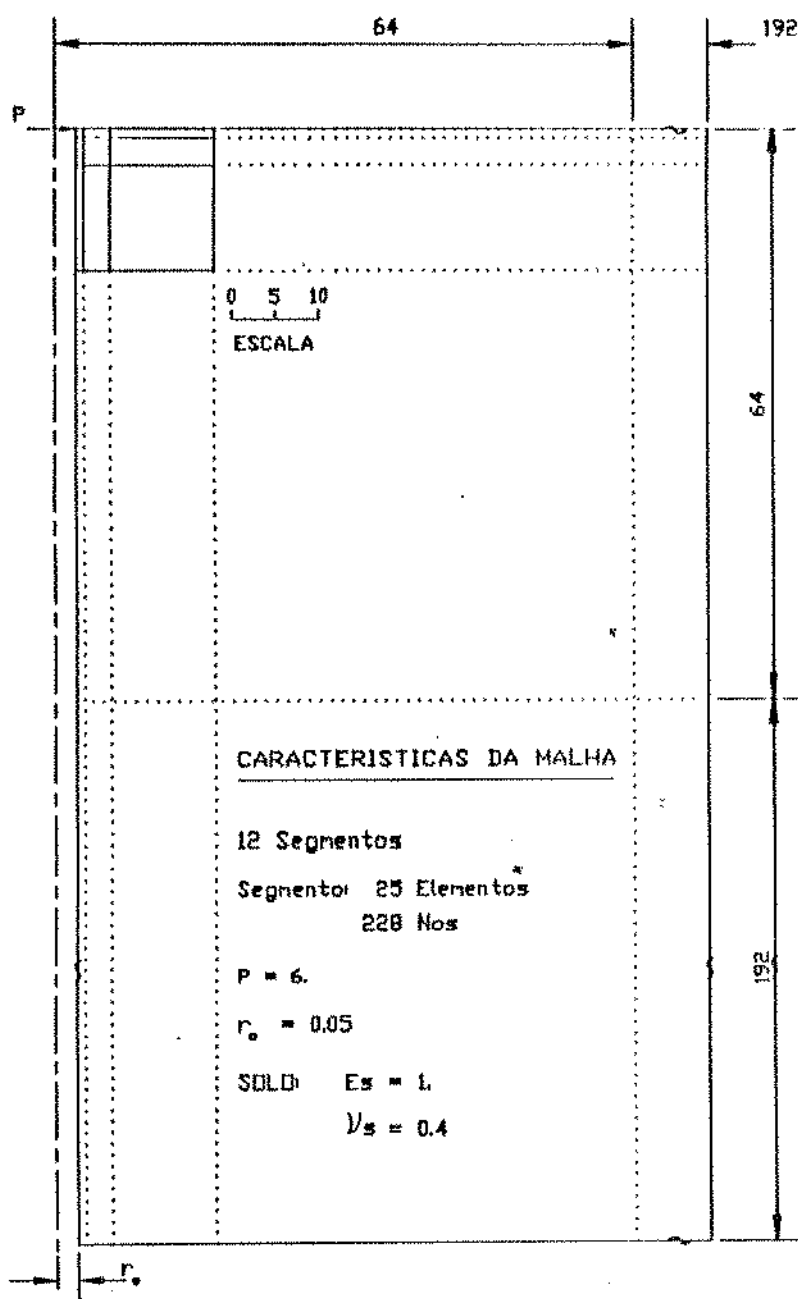


Fig. 4.8 GERATRIZ DA MALHA (CARGA CONCENTRADA LATERAL ; 25 ELEMENTOS POR SEGMENTO)

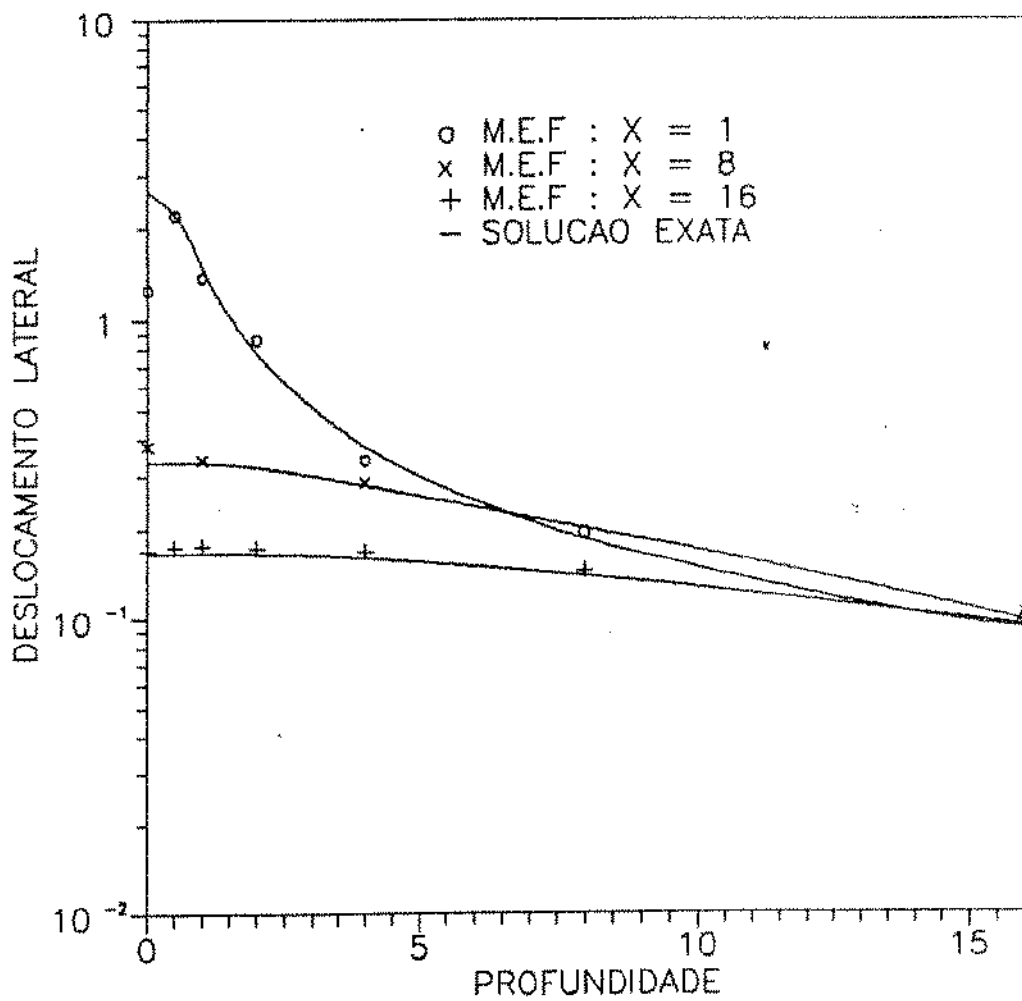


Fig. 4.9 - Gráfico dos deslocamentos laterais
(carga concentrada lateral; 25 elementos por segmento)

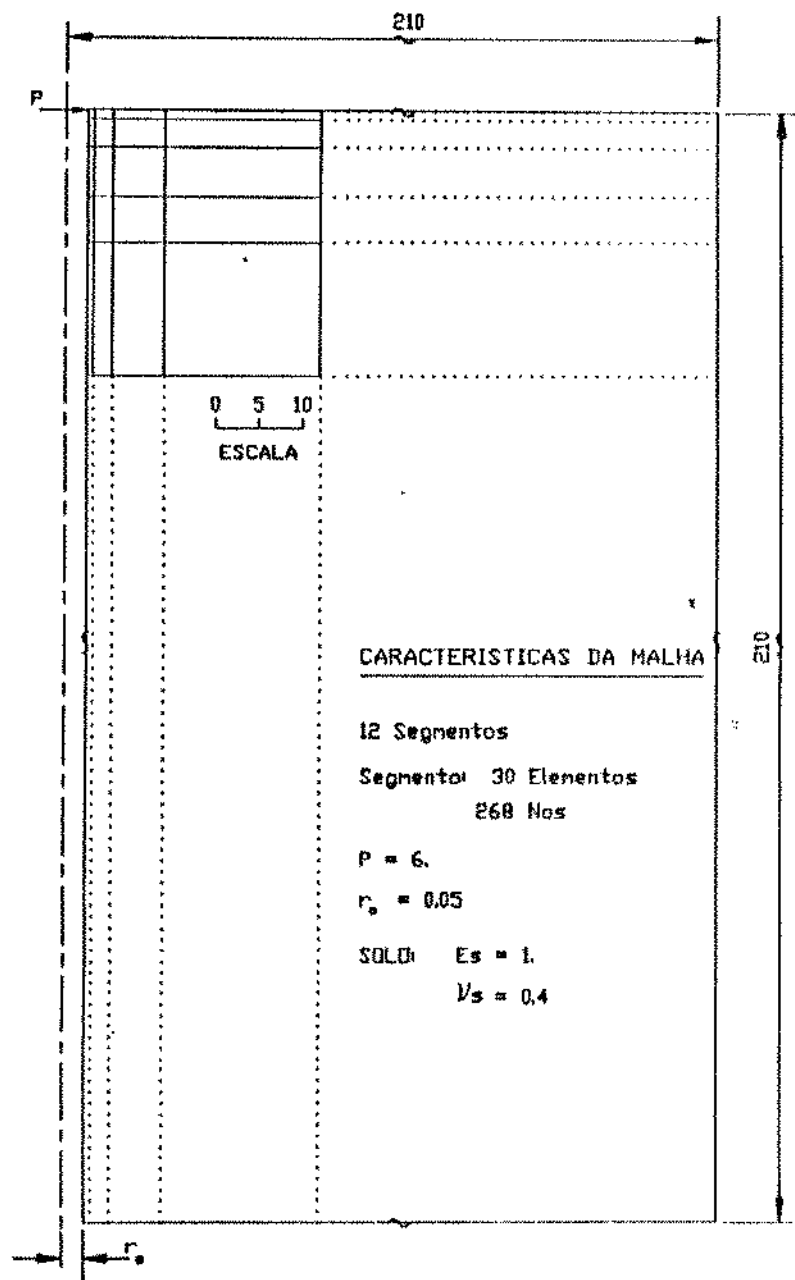


Fig. 4.10 GERATRIZ DA MALHA (CARGA CONCENTRADA LATERAL ; 30 ELEMENTOS POR SEGMENTO)

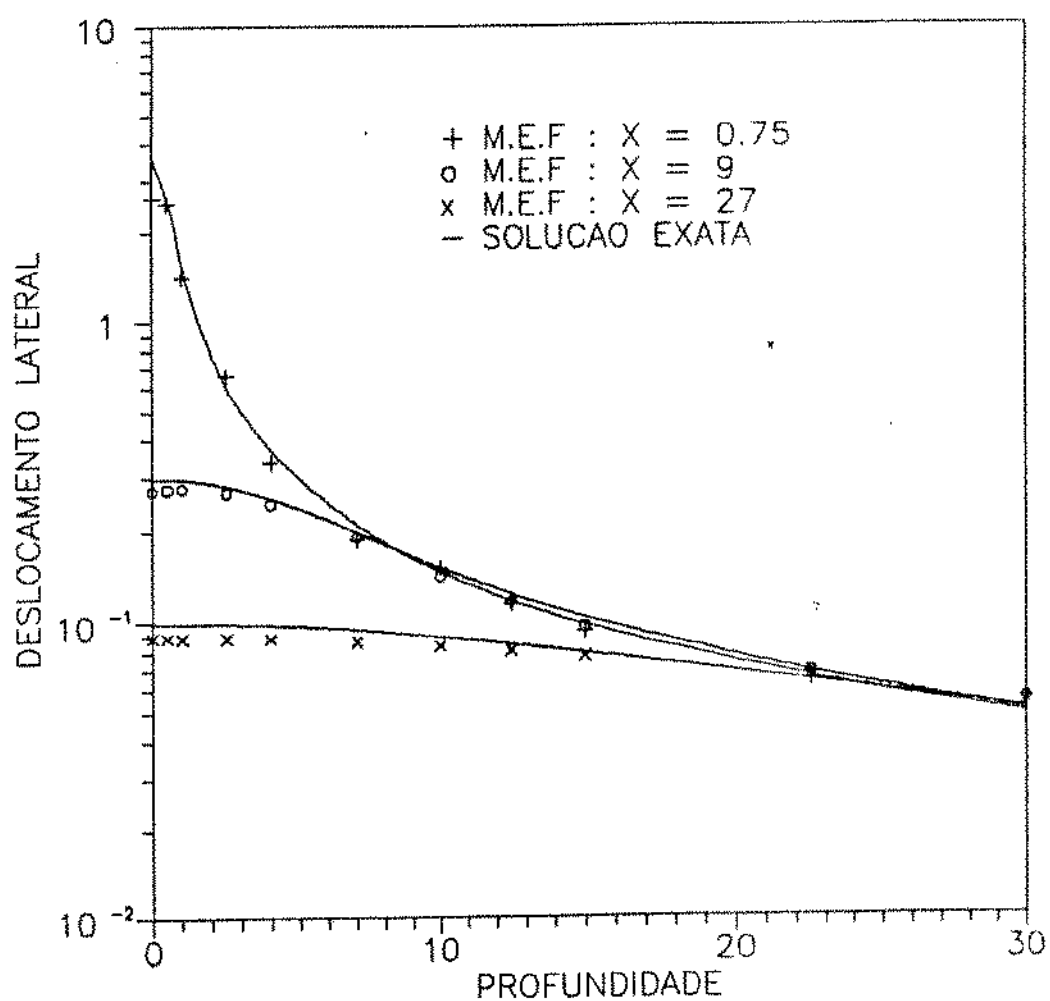


Fig. 4.11 - Gráfico dos deslocamentos laterais
 (carga concentrada lateral; 30 elementos por segmento)

Observando-se as tabelas (4.1) a (4.6), nota-se que os erros maiores ocorrem em regiões muito próximas ao ponto de aplicação do esforço e nos pontos localizados fora da faixa definida pelos gráficos.

Embora os erros de deslocamento para os pontos fora da faixa de operação sejam inaceitáveis do ponto de vista de engenharia, as suas amplitudes são desprezíveis em comparação com os resultados obtidos da solução analítica em pontos próximos à região de aplicação do esforço.

Tabela 4.1 - Referente à Fig. 4.5 (Z = 0)

x	ρ_z	w	$(w-\rho_z)/\rho_z$
.05	.32087E+02	.14170E+02	-.55838E+00
1.00	.16043E+01	.14010E+01	-.12674E+00
4.00	.40108E+00	.41610E+00	.37443E-01
10.00	.16043E+00	.15720E+00	-.20151E-01
30.00	.53478E-01	.55430E-01	.36508E-01
170.00	.94372E-02	.21160E-01	.12422E+01

Tabela 4.2 - Referente à Fig. 4.5 (Z = 10)

x	ρ_z	w	$(w-\rho_z)/\rho_z$
.05	.29412E+00	.28080E+00	-.45288E-01
1.00	.29135E+00	.28240E+00	-.30720E-01
4.00	.25597E+00	.25300E+00	-.11597E-01
10.00	.16071E+00	.15070E+00	-.62293E-01
30.00	.54961E-01	.55240E-01	.50741E-02
170.00	.94480E-02	.20500E-01	.11698E+01

Tabela 4.3 - Referente à Fig. 4.5 ($Z = 30$)

x	ρ_z	w	$(w-\rho_z)/\rho_z$
.05	.98042E-01	.10060E+00	.26090E-01
1.00	.97938E-01	.99230E-01	.13187E-01
4.00	.96411E-01	.96900E-01	.50751E-02
10.00	.88783E-01	.90100E-01	.14830E-01
30.00	.53570E-01	.52230E-01	-.25021E-01
170.00	.95275E-02	.19390E-01	.10352E+01

Tabela 4.4 - Referente à Fig. 4.11 ($x = 0.75$)

z	ρ_x	u	$(u-\rho_x)/\rho_x$
.00	.35652E+01	.26290E+01	-.26259E+00
1.00	.15497E+01	.14230E+01	-.81736E-01
4.00	.37223E+00	.33680E+00	-.95195E-01
10.00	.14738E+00	.15160E+00	.28643E-01
15.00	.98136E-01	.93060E-01	-.51728E-01
30.00	.49033E-01	.54680E-01	.11517E+00
210.00	.70031E-02	.00000E+00	-.10000E+01

Tabela 4.5 - Referente à Fig. 4.11 ($x = 9$)

z	ρ_x	u	$(w-\rho_x)/\rho_x$
.00	.29710E+00	.27250E+00	-.62794E-01
-1.00	.29642E+00	.27810E+00	-.61794E-01
-4.00	.25694E+00	.24600E+00	-.42586E-01
-10.00	.15232E+00	.14210E+00	-.67092E-01
-15.00	.10372E+00	.96810E-01	-.66578E-01
-30.00	.50386E-01	.54890E-01	.89384E-01
-210.00	.70080E-02	.00000E+00	-.10000E+01

Tabela 4.6 - Referente à Fig. 4.11 ($x = 27$)

z	ρ_x	u	$(u-\rho_x)/\rho_x$
.00	.99033E-01	.89440E-01	-.96864E-01
1.00	.99250E-01	.89260E-01	-.10066E+00
4.00	.98164E-01	.88420E-01	-.99259E-01
10.00	.89661E-01	.83540E-01	-.68263E-01
15.00	.79191E-01	.77030E-01	-.27292E-01
30.00	.50773E-01	.53390E-01	.51540E-01
210.00	.70459E-02	.00000E+00	-.10000E+01

4.4 - SENSIBILIDADE DO MODELO A VARIAÇÕES DO RAI0 NEUTRO

Para a verificação deste item, foram comparados os deslocamentos nas malhas da fig.(4.4) e fig.(4.10), com raio neutro (r_0) igual a 0.05 (fig.4.5 fig.4.11) e também igual a 0.10 (fig.4.12 e 4.13).

Observando-se os deslocamentos dos nós localizados a partir de uma distância unitária do ponto de aplicação da carga, nota-se a diferença insignificante entre os deslocamentos calculados nos dois casos. Para tanto, pode ser concluído que um raio neutro inferior a 10% do raio de medidia do primeiro ponto a ser tratado na análise incorre em perturbações desprezíveis no modelo, face à hipótese de linearidade adotada.

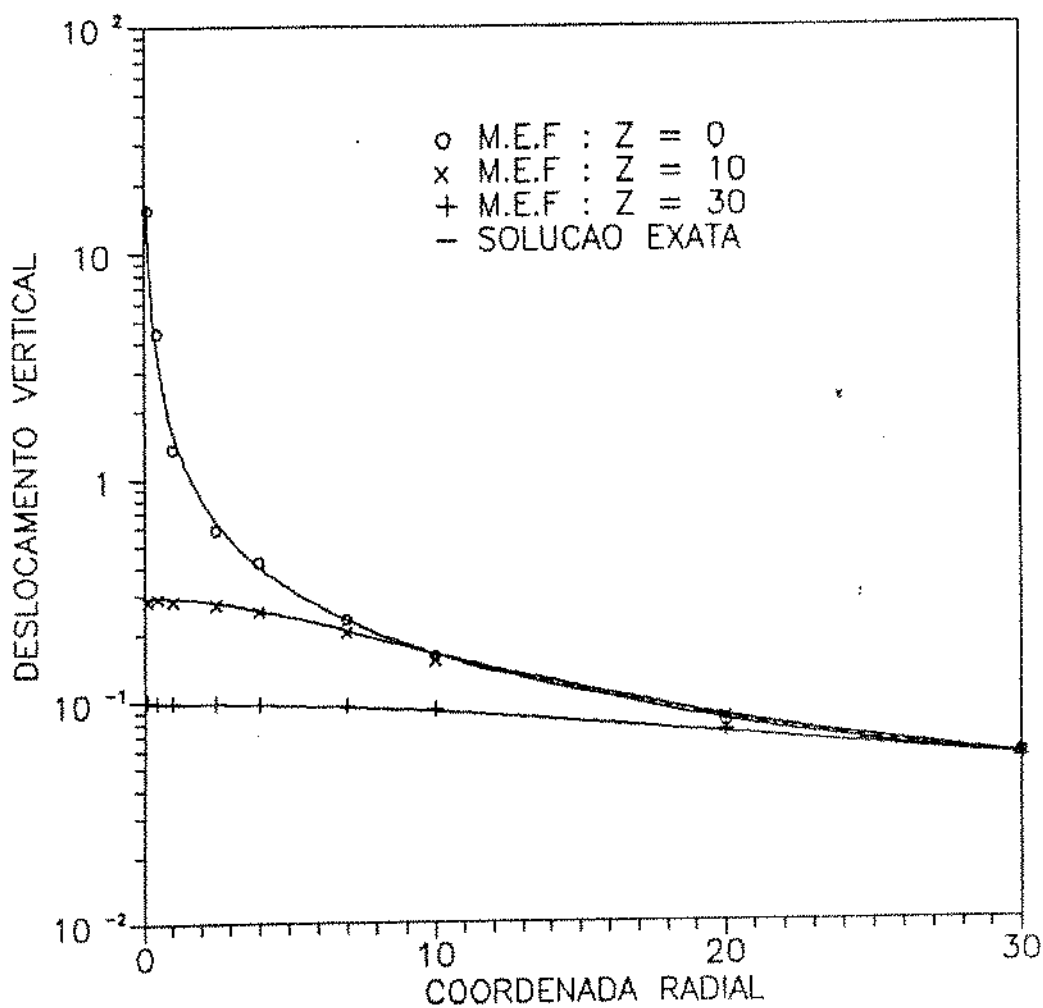


Fig. 4.12 - Gráfico de decaimento dos deslocamentos verticais
(carga concentrada vertical; $r_0 = 0.10$)

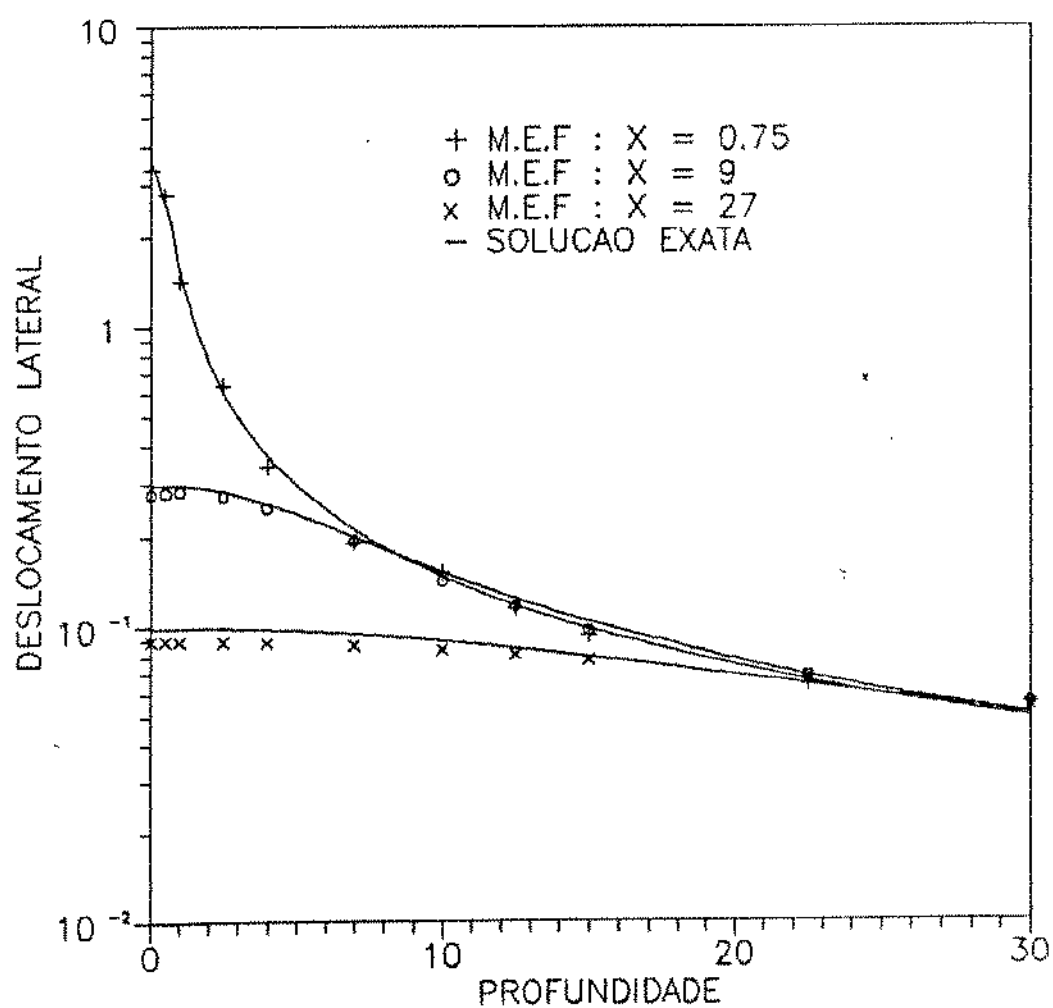


Fig. 4.13 - Gráfico de decaimento dos deslocamentos laterais
(carga concentrada lateral; $r_0 = 0.10$)

CAPITULO 5
COMPARAÇÕES DO MODELO COM SOLUÇÕES DA ELASTICIDADE
PARA FUNDAÇÕES DE ESTACA

5.1 - ESTACAS SOB CARREGAMENTO AXIAL.

5.1.1 - APRESENTAÇÃO

Atualmente, os métodos para análise deste problema, se enquadram em três categorias básicas:

- a) Métodos de transferência de carga (ref. 10, 23)
- b) Métodos baseados na Teoria de Elasticidade (ref. 1, 2)
- c) Métodos numéricos (ref. 30)

Os métodos de transferência de carga se baseiam em dados de solos, obtidos através de testes de estacas em escala real no campo, ou protótipos em laboratório. Estes dados se traduzem em curvas de adesão e tensão de cisalhamento em função do deslocamento da estaca, para várias profundidades.

Já os baseados na Teoria da Elasticidade, utilizam as soluções básicas de cargas pontuais atuantes no interior de um meio semi-infinito obtidas por Mindlin (1936), descritas no capítulo anterior.

O Método de Elementos Finitos se enquadra na terceira categoria, se destacando pela sua generalidade de aplicações.

O fator que difere os métodos da primeira categoria dos outros, do ponto de vista estrutural, é a não consideração da continuidade da massa do solo, valendo salientar o grande custo envolvido nos testes para obtenção dos parâmetros de interesse.

5.1.2 - TEORIA DA ELASTICIDADE

Devido à grande quantidade de pesquisadores neste assunto, (ref.25), será considerado o Método de Poulos, Davis e Mattes (ref.1), no qual a qual a tensão de cisalhamento desenvolvida na interface entre o solo e a estaca, é distribuída uniformemente na área desta interface.

O método consiste, basicamente, na divisão da estaca em elementos uniformemente carregados, considerando-se o solo como um material isotrópico, homogêneo, elástico e com propriedades mecânicas (E_s , ν_s) constantes.

Assumindo condições de elasticidade na interface solo-estaca, não haverá deslizamento, incorrendo-se em condições de compatibilidade de deslocamentos verticais para a solução do problema.

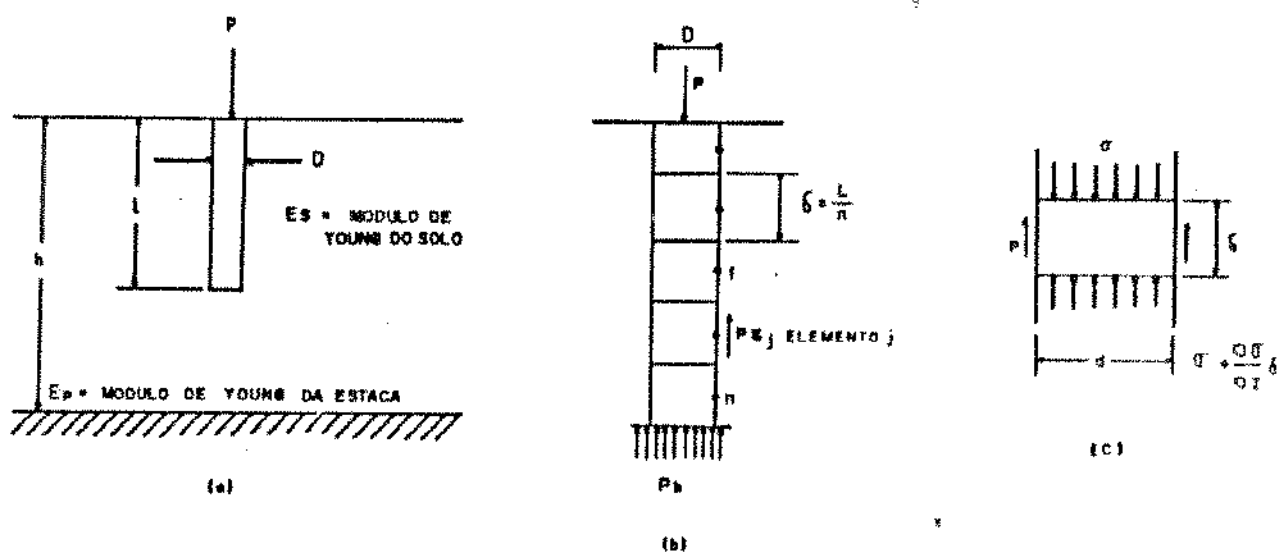


FIG. 5.1

ESTACA SOB CARREGAMENTO AXIAL

P = força axial na estaca

$p_{\tau j}$ = tensão de cisalhamento no elemento j

σ_z = tensão normal na estaca (média na secção transversal)

P_b = tensão na base da estaca

Para a determinação da tensão de cisalhamento na lateral da estaca (p), tensão na base (P_b) e deslocamentos verticais dos nós da interface, utiliza-se o seguinte equacionamento (ref. 1):

$$P_{si} = \frac{d}{E_s} \sum_{j=1}^n (I_{ij} p_j) + \left(\frac{d}{E_s} I_{ib} \right) P_b \quad (5.1)$$

P_{si} = deslocamento do solo no ponto i

I_{ij} = fator de deslocamento vertical para o elemento i , devido à tensão de cisalhamento (P_j) no elemento j

I_{ib} = fator de deslocamento vertical para o elemento i , devido à tensão uniforme na base

Na forma matricial:

$$\langle P_s \rangle = \frac{d}{E_s} [I_s] \langle P \rangle \quad (5.2)$$

sendo

$\langle P_s \rangle$ = vetor de deslocamentos

$[I_s]$ = matriz dos fatores de influência do deslocamento do solo

$\{P_{\tau j}\}$ = vetor de tensões de cisalhamento

$$[I_s] = \begin{bmatrix} I_{11} & \dots & I_{1n} & I_{1b} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ I_{n1} & \dots & I_{nn} & I_{nb} \end{bmatrix}$$

Os coeficientes da matriz $[I]_e$ são obtidos por integração de (4.1) e (4.2).

Aplicando-se a condição de equilíbrio vertical fig.(5.1c) temos:

$$\sigma A_p = P \Pi D \delta + \left(\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \delta \right) A_p$$

A_p = Área da secção transversal da estaca

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = - \frac{P \Pi D}{A_p}$$

Definindo-se a razão de áreas da estaca (R_a)

$$R_a = \frac{A_p}{\Pi D^2 / 4} \quad (5.3)$$

temos

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = - \frac{4p}{R_a D} \quad (5.4)$$

Considerando-se a deformação (ξ_z) do elemento, temos:

$$\sigma_z = E_p \xi_z \quad (5.5)$$

com E_p = módulo de Young da estaca

$$\frac{\partial \rho_p}{\partial z} = - \frac{\sigma_z}{E_p} \quad (5.6)$$

com ρ_p = deslocamento da estaca, considerando-se o elemento sob compressão pura.

De (5.4) e (5.6), temos:

$$\frac{\partial^2 \rho_p}{\partial z^2} = \frac{4p}{DE_p R_a} \quad (5.7)$$

Escrevendo (5.7) na forma de diferenças finitas e aplicando as condições (ref. 1):

$$\sigma_z = \frac{P}{A_p}, \text{ para } z=0$$

$$\sigma_z = P_b, \text{ para } z=L$$

Em (5.4) e (5.6) respectivamente, temos:

$$\{p_{rj}\} = \frac{d}{4\delta^2} E_p R_a [I_p] \{\rho_p\} + \{F\} \quad (5.8)$$

$[I_p]_{(n+1,n+1)}$ = matriz dos fatores de influência de deslocamento da estaca

$$[I_p] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 2 & -5 & 3.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -4f/3 & 12f & -32f/3 \end{bmatrix}$$

com:

$$f = \frac{L}{nR_a} \quad e \quad \langle F \rangle = \begin{Bmatrix} \left(\frac{p}{nD^2} \right) \left(\frac{n}{L/D} \right) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

Aplicando-se, então, a condição de compatibilidade de deslocamentos verticais:

$$\langle \rho_s \rangle = \langle \rho_p \rangle \quad (5.9)$$

Com (5.2), (5.5) e (5.8), obtemos:

$$\{P_{\tau J}\} = \left[[I] - \left[\frac{n^2}{4(L/d)^2} \right] \left[K[I_p] \right] \left[[I_s] \right] \right]^{-1} \cdot \langle F \rangle \quad (5.10)$$

$[I]$ = matriz identidade

$$K = \frac{E R_a}{E_s} = \text{fator de rigidez da estaca} \quad (5.11)$$

A partir de (5.10) pode-se, então, se obter os deslocamentos na interface e para qualquer ponto localizado no solo.

5.1.3 - INFLUÊNCIA DO ÍNDICE DE ESBELTEZ E RIGIDEZ RELATIVA

Na análise deste item é importante observar que, apesar da formulação elástica do problema utilizar considerações tridimensionais para a determinação dos deslocamentos de pontos do solo, a estaca é discretizada com elementos sob estado unidimensional de tensões.

Para efeito de comparação, foram plotadas curvas

adimensionais de fator de influência de deslocamento vertical (I_{ρ}), expresso por :

$$I_{\rho} = \frac{L E_s}{P} \rho_z \quad (5.12)$$

sendo as curvas parametrizadas em termos de :

- (H/L) = profundidade relativa
- (r/L) = distância radial relativa.

Para a obtenção das curvas com $K=100$ e $K=1000$, para os dois índices de esbeltez utilizados ($L/D=5$ e $L/D=10$), foram considerados dois tipos de discretização, representados respectivamente nas figuras (5.2) e (5.4) e nas figuras (5.6) e (5.8).

Para $K=100$, foi feita uma discretização na estaca, mais próxima à superfície, pois é nesta região em que se localiza a maior variação da tensão de cisalhamento na interface solo-estaca.

Analogamente, para $K=1000$, houve uma discretização mais acentuada na base da estaca, de forma a se garantir uma melhor representação do campo de deslocamentos nesta região.

Embora não seja possível a localização dos pontos da malha, em que há o pronunciamento do efeito tridimensional do modelo de elementos finitos sobre a aproximação unidimensional para a estaca (ref.1), nota-se a concordância da tendência das curvas obtidas pelos dois métodos, apesar do reduzido número de elementos utilizados na malha do modelo.

Observando-se as figuras (5.3), (5.5), (5.7) e (5.9), nota-se a influência do contorno da base do cilindro que representa o meio semi-infinito, principalmente para os pontos com profundidade relativa ($H/L=2$).

O resíduo de deslocamento associado aos nós da malha devido ao contorno, poderiam ser minimizados de duas formas:

1) Afastando o contorno do ponto de aplicação do esforço, utilizando-se um maior número de elementos, para evitar distorção

dos mesmos, incorrendo-se em um mal condicionamento da matriz de rigidez da região fundamental.

2) Fazendo uma condensação estática dos graus de liberdade externos à fronteira definida pelo modelo. Desta forma, o modelo seria calculado em duas etapas:

- solução do sistema de equações da malha externa à fronteira do modelo, incorporando-se seu efeito às variáveis que caracterizam a fronteira

- solução do sistema de equações que regem o modelo, sendo agora, a fronteira do sistema composta pelas variáveis calculadas na etapa anterior.

É interessante observar que um procedimento análogo pode ser utilizado na análise de estacas com rigidez relativa (K) alta, figuras (5.3) e (5.7). Nestes casos, observa-se que o campo de deslocamentos passa a apresentar maiores variações somente nos pontos do solo localizados abaixo da base da estaca.

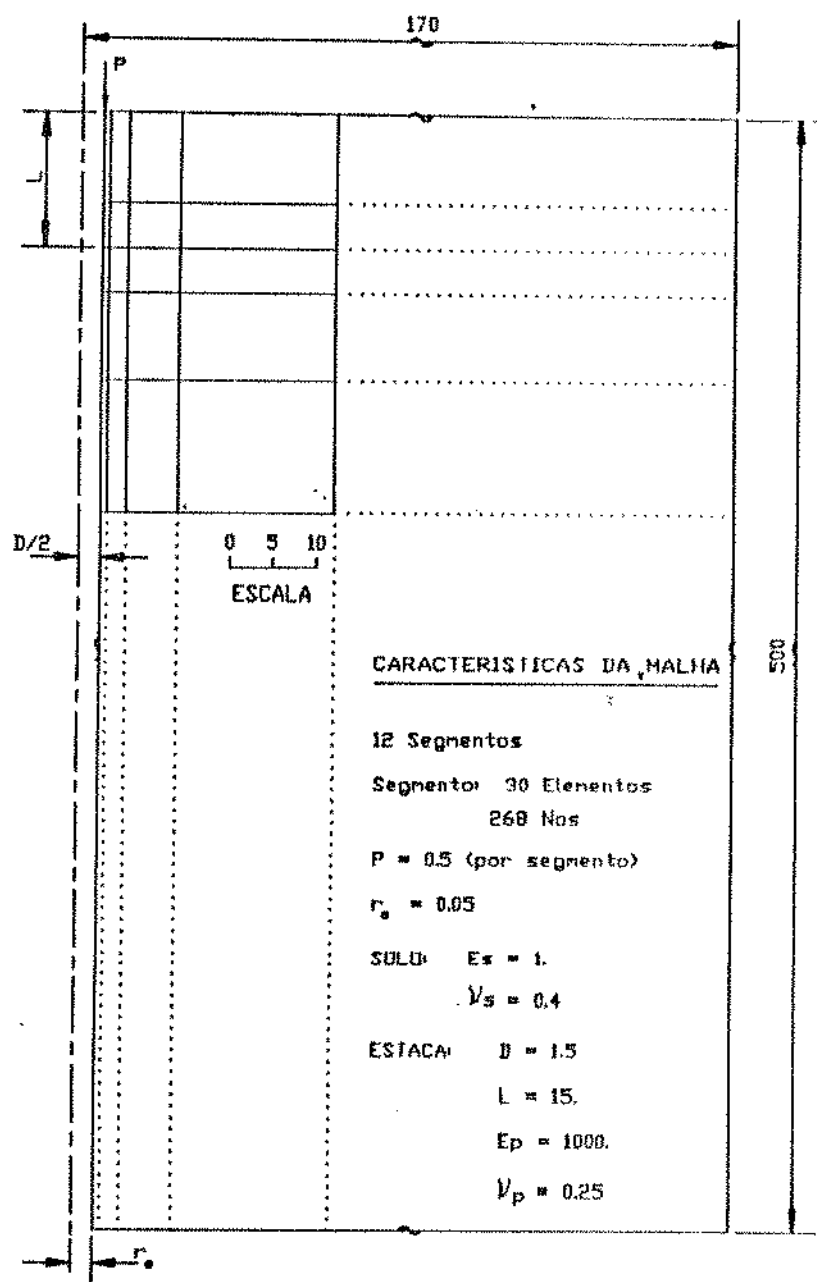
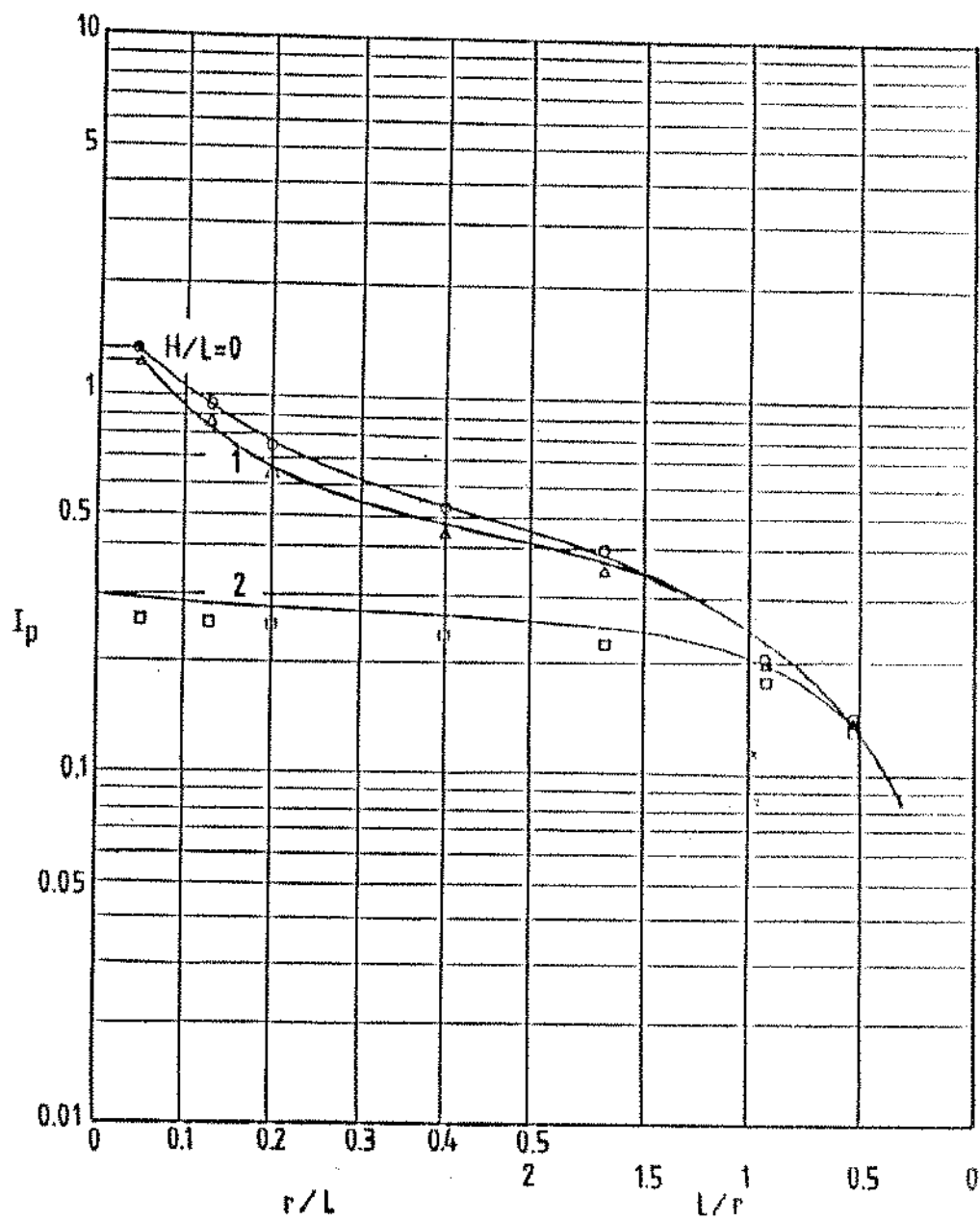


Fig. 5.2 GERATRIZ DA MALHA ($L/D = 10$; $K = 1000$).



- M.E.F. para $H/L = 0$
- △ M.E.F. para $H/L = 1$
- M.E.F. para $H/L = 2$
- Poulos & Davis (Ref.2)

Fig.5.3 - Fator de influência de deslocamento vertical ($L/D = 10$; $K = 1000$)

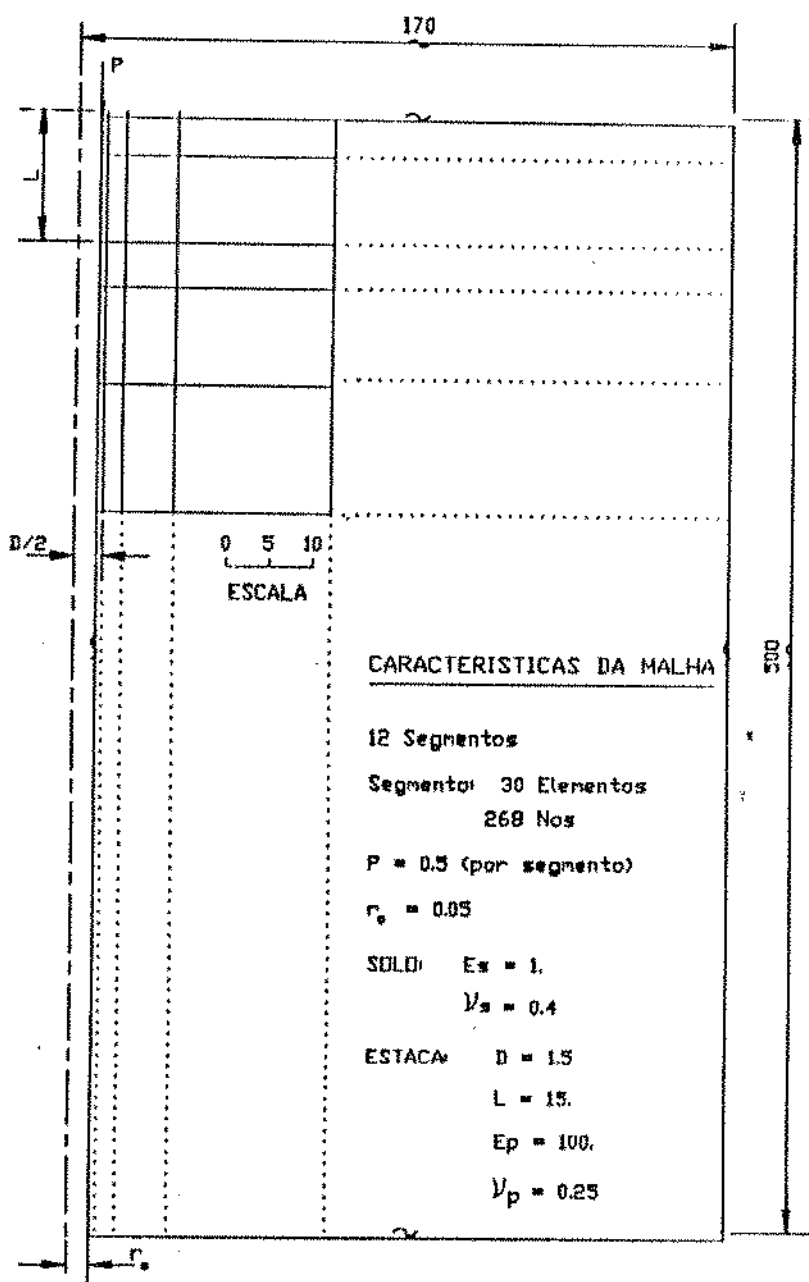
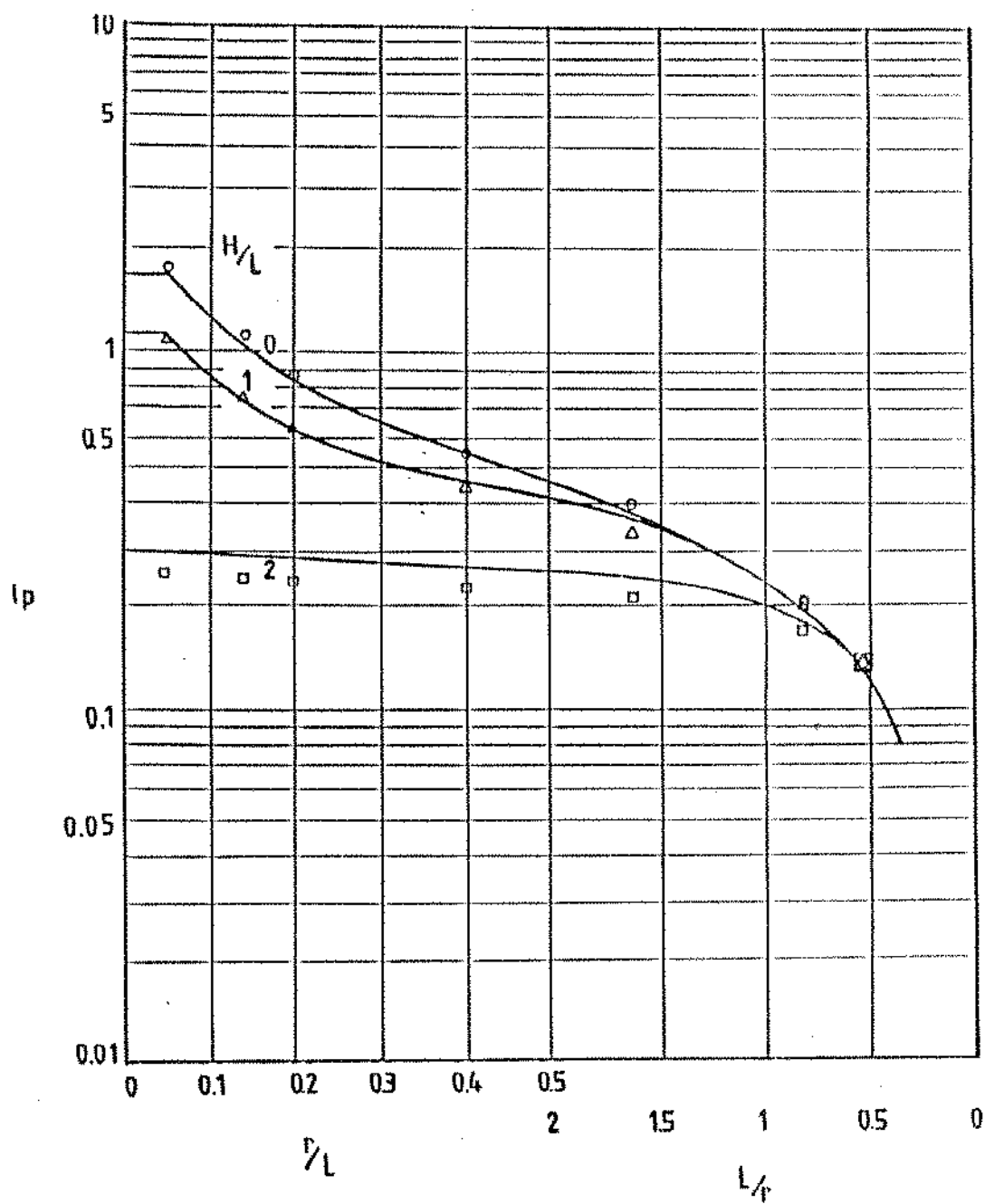


Fig. 5.4 GERATRIZ DA MALHA ($L/D = 10$, $K = 100$)



○ M.E.F. para $H/L = 0$
 △ M.E.F. para $H/L = 1$
 □ M.E.F. para $H/L = 2$
 - Poulos & Davis (Ref.2)
 Fig.5.5 - Fator de influência de deslocamento
 vertical ($L/D = 10$; $K = 100$)

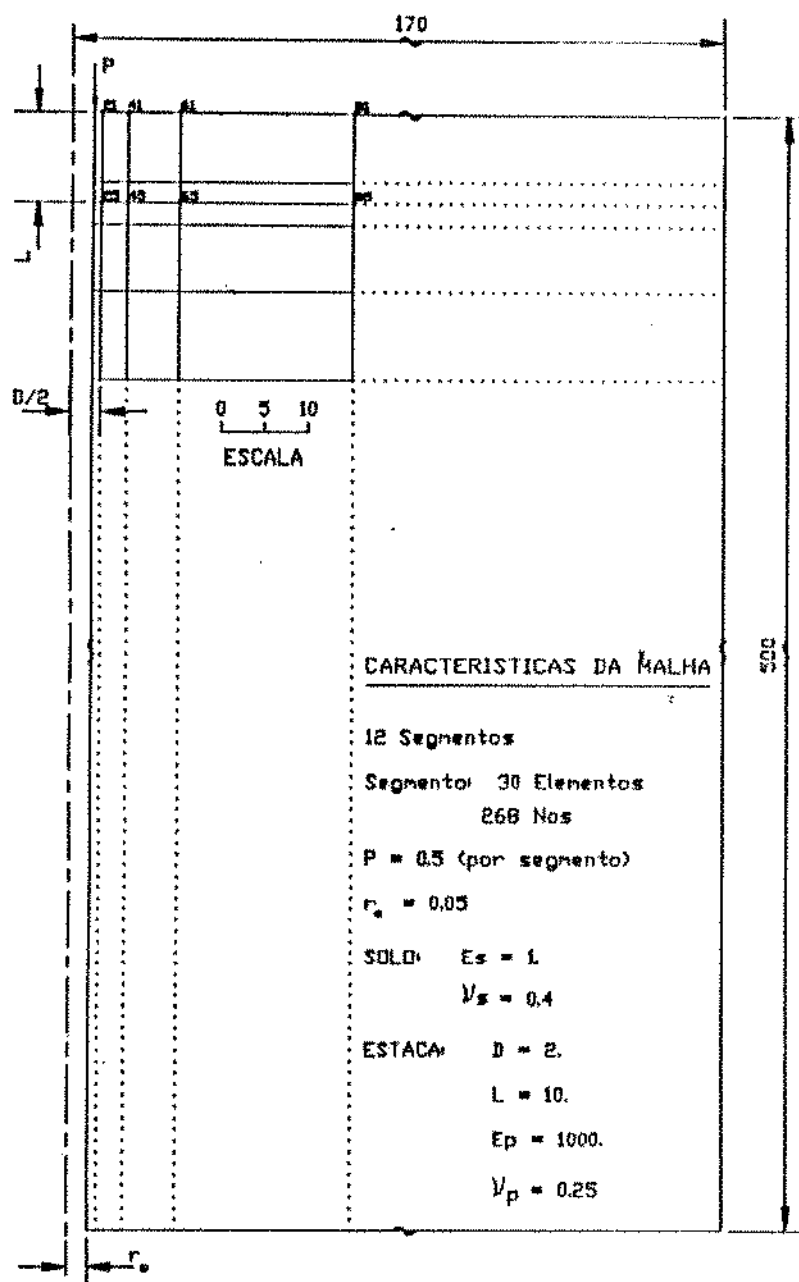
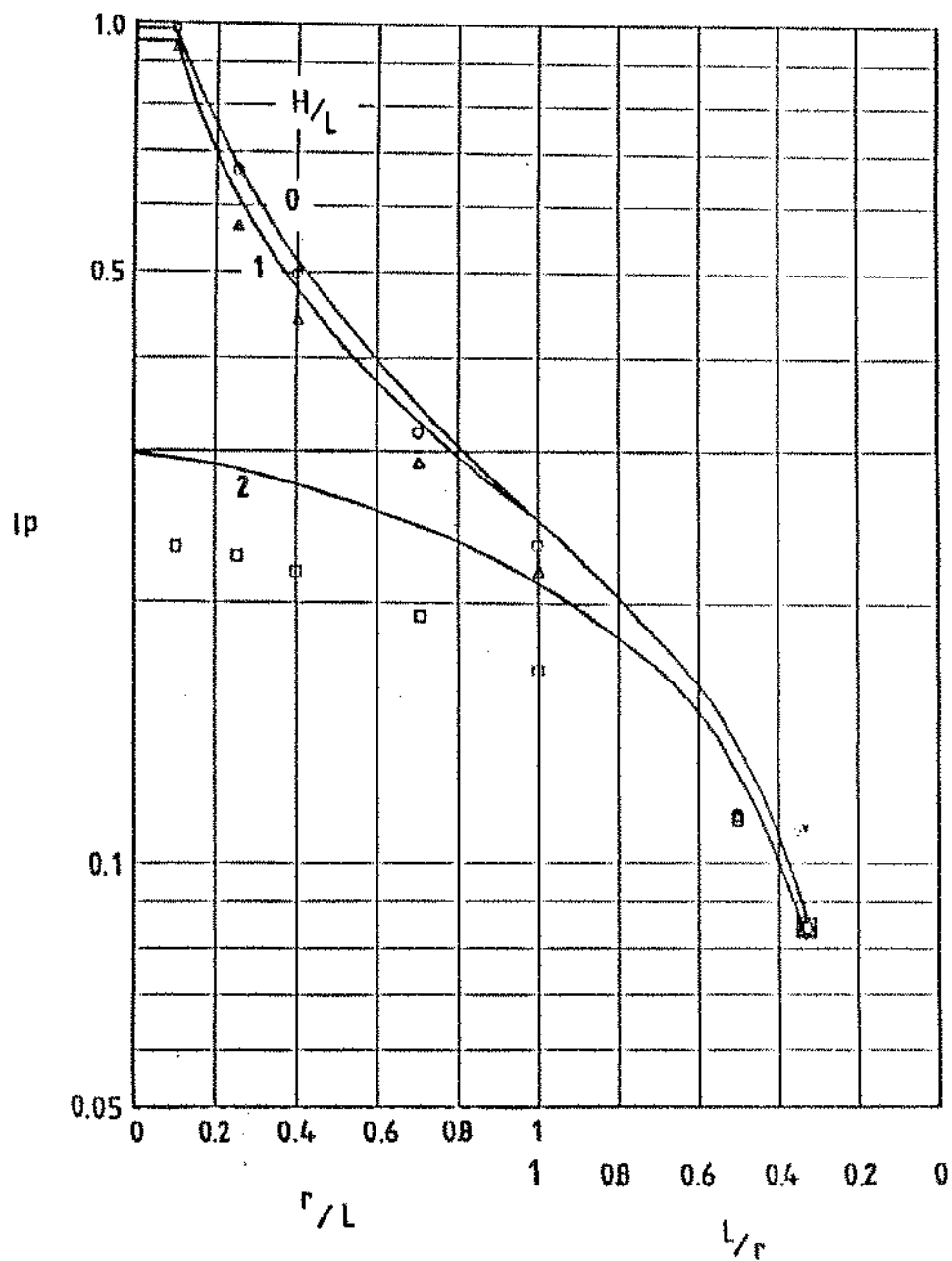


Fig. 5.6 GERATRIZ DA MALHA ($L/D = 5$) $K = 1000$)



○ M.E.F. para $H/L = 0$
 △ M.E.F. para $H/L = 1$
 □ M.E.F. para $H/L = 2$
 — Poulos & Davis (Ref.2)
 Fig.5.7 - Fator de influência de deslocamento vertical ($L/D = 5$; $K = 1000$)

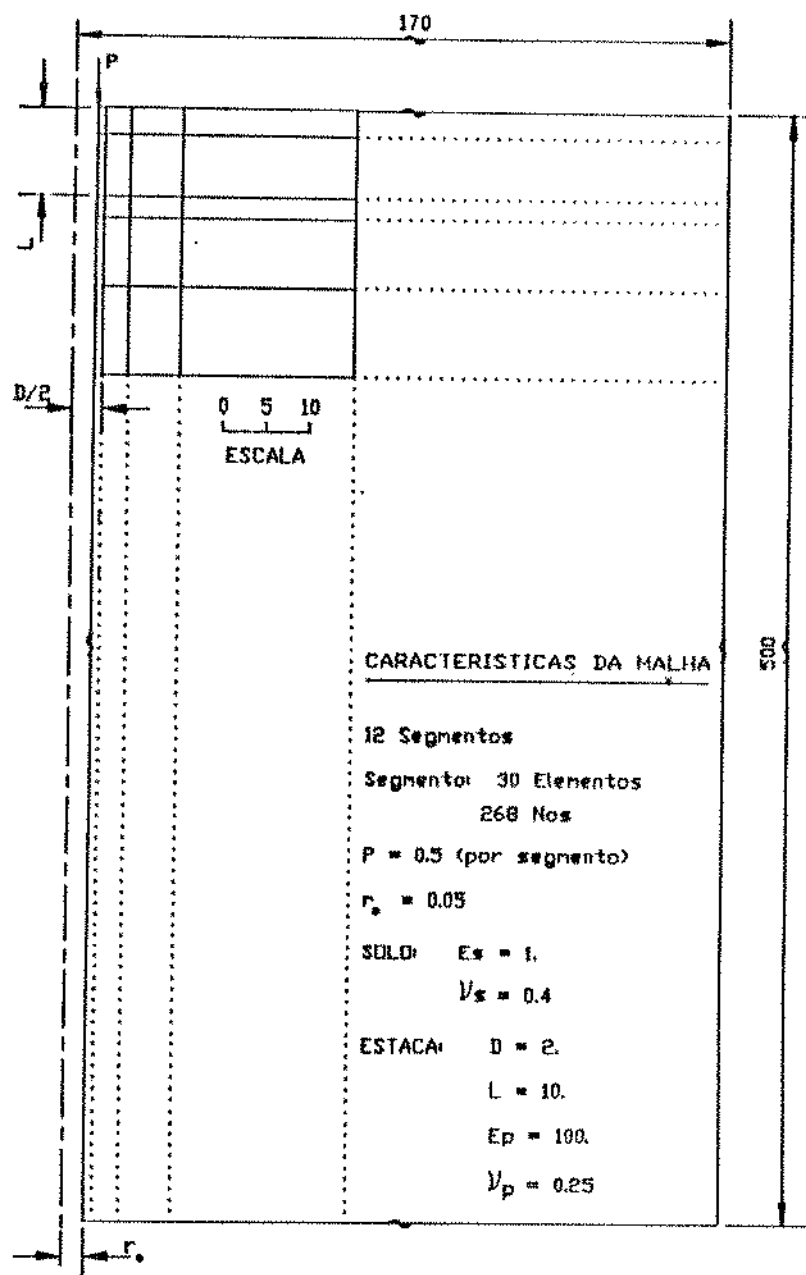


Fig. 5.8 GERATRIZ DA MALHA ($L/D = 5$, $K = 100$)

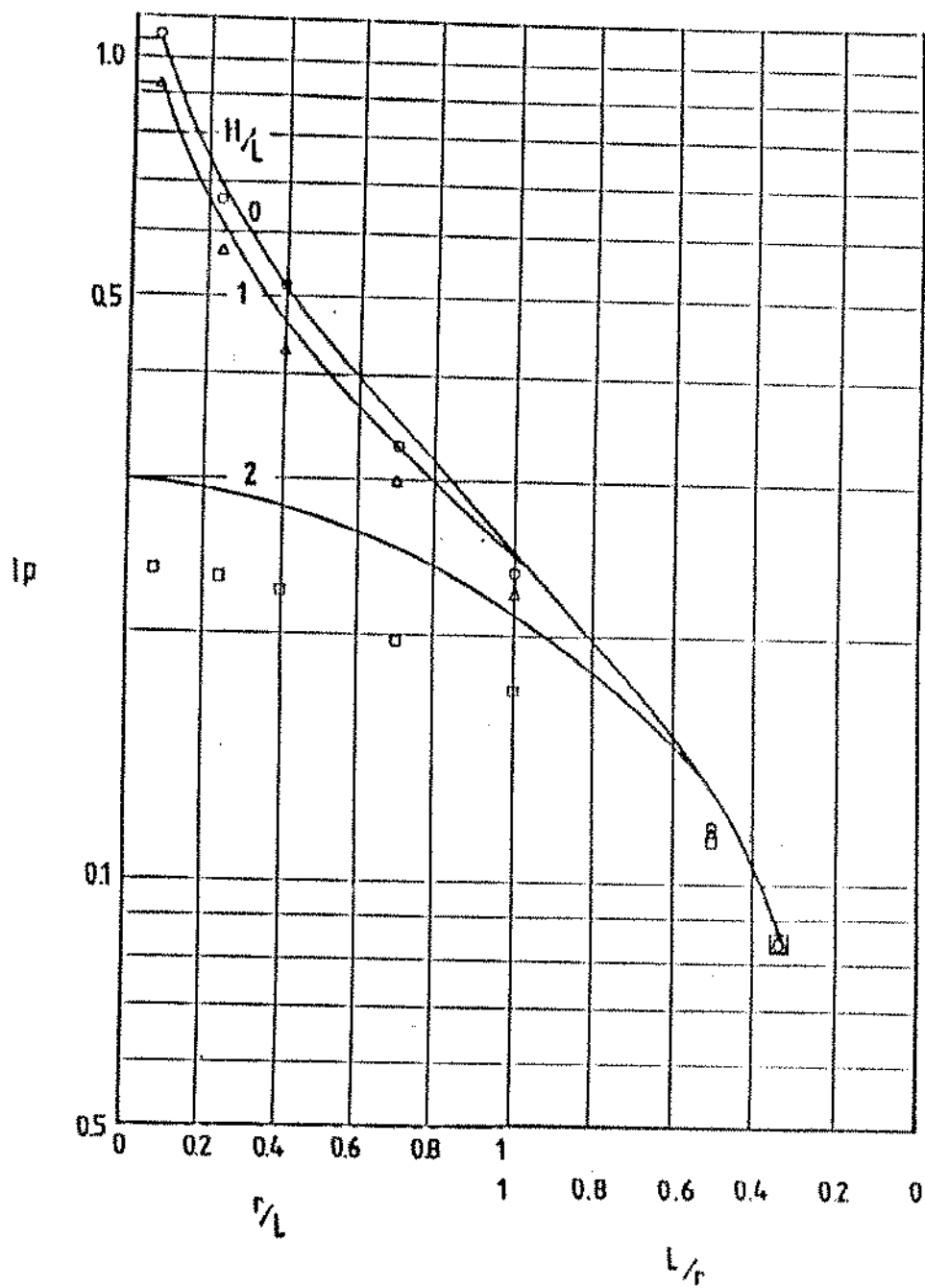


Fig.5.9 - Fator de influência de deslocamento vertical ($L/D = 5$; $K = 100$)

As tabelas 5.1 a 5.4 mostram os deslocamentos verticais (w) e respectivos fatores de influência de deslocamento vertical (I_p) dos nós localizados na faixa de operação das malhas anteriores para $H/L = 0$.

Tabela 5.1 - Deslocamento vertical ($L/D=10$; $K=1000$)

x	w	I_p
.75	.53750E+00	.13438E+01
1.88	.39120E+00	.97800E+00
3.00	.30960E+00	.77400E+00
6.00	.21290E+00	.53225E+00
9.00	.16170E+00	.40425E+00
18.00	.84890E-01	.21223E+00
27.00	.56680E-01	.14170E+00

Tabela 5.2 - Deslocamento vertical ($L/D=10$; $K=100$)

x	w	I_p
.75	.68410E+00	.17102E+01
1.88	.45630E+00	.11407E+01
3.00	.34940E+00	.87350E+00
6.00	.22110E+00	.55275E+00
9.00	.16130E+00	.40325E+00
18.00	.83240E-01	.20810E+00
27.00	.55670E-01	.13968E+00

Tabela 5.3 - Deslocamento vertical ($L/D=5$; $K=1000$)

x	w	$I\rho$
1.00	.58570E+00	.97617E+00
2.50	.40010E+00	.66683E+00
4.00	.29810E+00	.49683E+00
7.00	.19450E+00	.32417E+00
10.00	.14110E+00	.23517E+00
20.00	.69340E-01	.11557E+00
30.00	.50520E-01	.84200E-01

Tabela 5.4 - Deslocamento vertical ($L/D=5$; $K=100$)

x	w	$I\rho$
1.00	.64870E+00	.10812E+01
2.50	.41900E+00	.69833E+00
4.00	.31500E+00	.52500E+00
7.00	.19760E+00	.32933E+00
10.00	.14050E+00	.23417E+00
20.00	.69600E-01	.11600E+00
30.00	.50940E-01	.84900E-01

5.2 - ESTACAS SOB FLEXÃO

5.2.1 - APRESENTAÇÃO

Analogamente ao caso de estacas com carregamento axial, existem três categorias de métodos para a abordagem do problema em questão:

- A) Método do Módulo de Reação Horizontal (refs. 10 e 24)
- B) Métodos baseados na Teoria de Elasticidade (refs. 1 e 14)
- C) Métodos Numéricos (ref. 19).

O primeiro método foi inicialmente proposto por Winkler (1867), no qual a grande desvantagem consiste na não consideração da continuidade da massa de solo. Embora aspectos de não linearidade do solo, variação de propriedades mecânicas com a profundidade e estratificação possam ser incorporados ao modelo de forma aproximada, persiste o alto custo associado aos testes necessários para a coleta dos dados de interesse.

A segunda categoria se baseia na integração das equações de Mindlin (1936) para uma carga pontual aplicada lateralmente em um meio semi-infinito elástico e contínuo.

Nos métodos numéricos dá-se maior ênfase ao Método de Elementos Finitos, no qual os problemas associados a um caso real podem ser estudados, através de variações do nível de discretização e de complexidade do elemento finito a ser utilizado.

5.2.2 - TEORIA DA ELASTICIDADE

Como existem muitos trabalhos abordando a análise do problema (ref. 25), que são similares no princípio, como no caso de estacas com carga axial, será utilizada a análise proposta por Poulos (ref. 1).

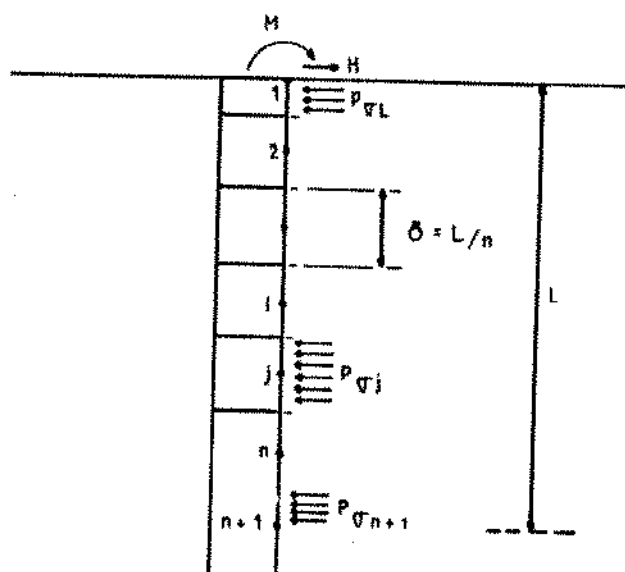


FIG 5.10

ESTACA SOB FLEXÃO

A estaca é considerada como uma viga cilíndrica de diâmetro D , comprimento L e constante de rigidez (EI) .

O solo é assumido como um material homogêneo, isotrópico, elástico e contínuo, com módulo de Young E_s e coeficiente de Poisson ν_s .

Devido às considerações elásticas do problema, assume-se que não ocorra os fenômenos conhecidos por "SLIPPAGE" e "GAPPING" interface entre o solo e a estaca, de forma a garantir as condições de compatibilidade do problema.

De forma análoga a uma estaca submetida a um carregamento axial (ref. 1), o comportamento do solo é dado por:

$$\langle \rho_s \rangle = \frac{D}{E_s} [I_s] \{p_{sj}\} \quad (5.12)$$

$\{p_{sj}\}$ = vetor de tensão normal exercida entre o solo e a estaca

$\langle \rho_s \rangle$ = vetor de deslocamentos

E_s = módulo de Young

$[I_s]_{(n+1,n+1)}$ = matriz dos fatores de influência de deslocamento do solo

Os coeficientes I_{ij} de $[I_s]$ são obtidos por integração das equação (4.3).

O comportamento da estaca é expresso pela equação da viga:

$$E_p I_p \frac{\partial^4 \rho_p}{\partial z^4} = -pD \quad (5.13)$$

onde: E_p = módulo de Young do material da estaca
 I_p = momento de inércia da secção transversal da estaca
 ρ_p = deslocamento da estaca

Desconsiderando-se os efeitos de tensão axial, aplica-se as condições de contorno para uma estaca com o topo e a base não restringidos.

No topo ($z=0$):

$$E_p I_p \left[\frac{\partial^3 \rho_p}{\partial z^3} \right] = H \quad (5.14)$$

$$E I_P \left[\frac{\partial^2 \rho_P}{\partial z^2} \right] = M \quad (5.15)$$

sendo H = carga lateral

M = momento puro

Na base ($z=L$):

$$E I_P \left[\frac{\partial^3 \rho_P}{\partial z^3} \right] = 0 \quad (5.16)$$

$$E I_P \left[\frac{\partial^2 \rho_P}{\partial z^2} \right] = 0 \quad (5.17)$$

Escrevendo a equação (5.13) na forma de diferenças finitas (ref. 1) e utilizando-se condições de contorno apropriadas, temos:

$$- \left\{ \rho_P \right\} = \frac{E I_P n^4}{dL^4} [D] \{ \rho_P \} + \frac{E I_P}{dL^4} \{ A \} \quad (5.18)$$

$\{ \rho_P \}_{(n-1)}$ = vetor de deslocamentos

$$[D]_{(n-1, n+1)} = \begin{bmatrix} -2 & 5 & -4 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 1 & -4 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\langle A \rangle = \begin{Bmatrix} \frac{ML^2}{E I_P n^2} + \frac{HL^3}{E I_P n^3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

Aplicando-se a condição de compatibilidade, $\rho_p = \rho_s$, temos:

$$\left[[I] + K_R n^4 [D] [I_s] \right] \{ p_{\sigma j} \} = \begin{Bmatrix} - \left(\frac{Mn^2}{DL^2} + \frac{Hn^3}{DL} \right) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (5.19)$$

$$K_R = \frac{E I_P}{E_s L^4} \quad (5.20)$$

K_R = índice de flexibilidade relativa estaca/solo

Com (5.9) podem ser determinados os vetores $\{ p_{Tj} \}$ e $\{ p \}$ na interface solo-estaca para os pontos 2 a n da figura 5.

Para os pontos 1 e n+1, utilizamos as equações de equilíbrio de forças e momentos.

$$[C] \{ p_{\sigma j} \} = \frac{n H}{D L} \quad (5.21)$$

$$C_j = \begin{cases} 1, & 1 < j < n+1 \\ 0.5, & j=1 \text{ e } j=n+1 \end{cases}$$

$$[M]\langle p_{\sigma_j} \rangle = -n^2 \left(\frac{L}{d} \right) \frac{M}{L^2} \quad (5.22)$$

$$M_j = \begin{cases} j-1, & 1 < j < n+1 \\ 0.125, & j=1 \\ 0.5n-0.125, & j=n+1 \end{cases}$$

5.2.3 - INFLUÊNCIA DO FATOR DE FLEXIBILIDADE E ÍNDICE DE ESBELTEZ

Neste caso, a teoria elástica (ref. 1) utiliza a formulação de viga (bidimensional) para a representação de um problema tipicamente tridimensional.

São utilizadas duas malhas, figuras (5.11) e (5.13) para duas estacas com mesmo índice de esbeltez ($L/d=10$) e com flexibilidade relativas diferentes, sendo que a discretização adotada foi baseada na distribuição de tensão normal na interface solo-estaca (ref. 2). Como se observa pelas figuras (5.12) e (5.14), os deslocamentos calculados ao longo da parede da estaca indicam que é desnecessário o refinamento de malha na estaca para valores de flexibilidade relativa (K_R) altos.

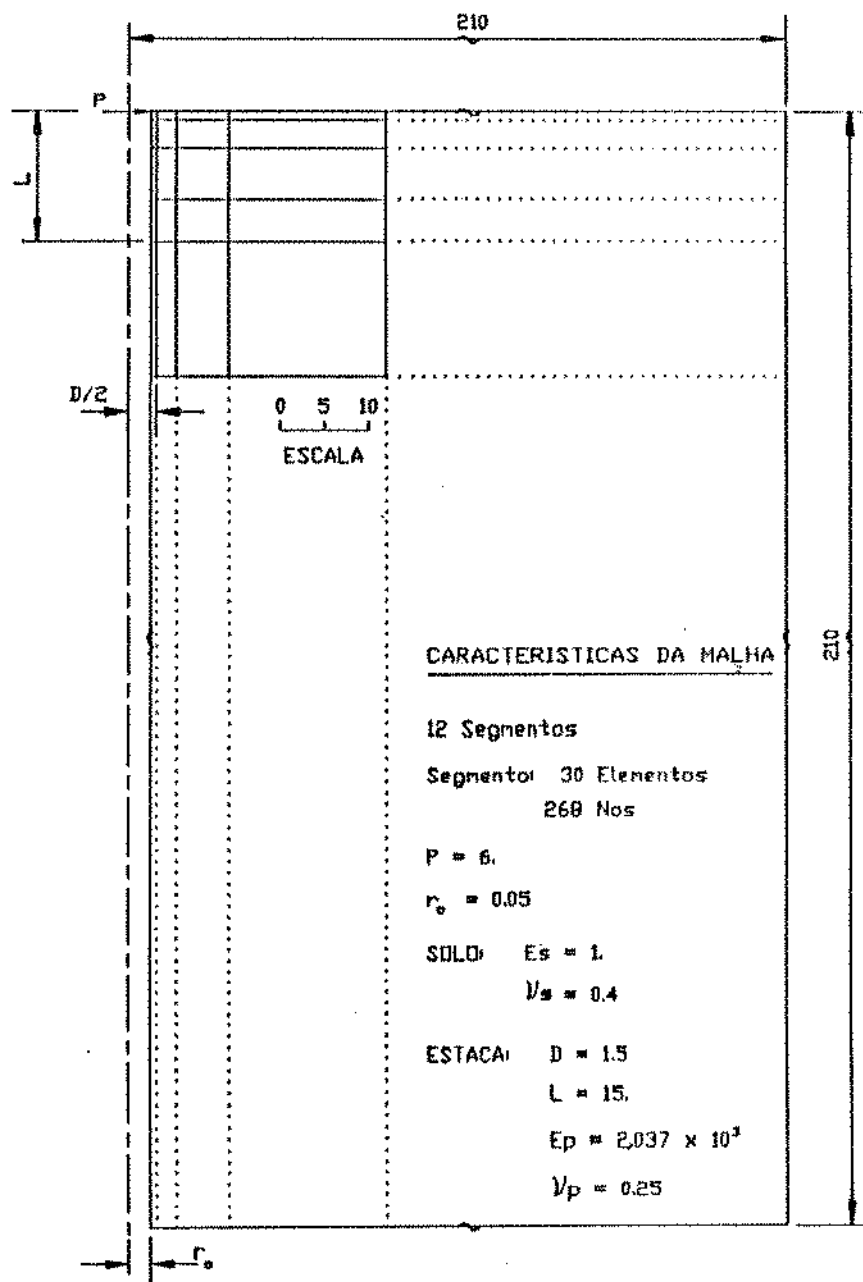


Fig. 5.11 GERATRIZ DA MALHA ($L/D = 10$) $K_R = 10^{-2}$)

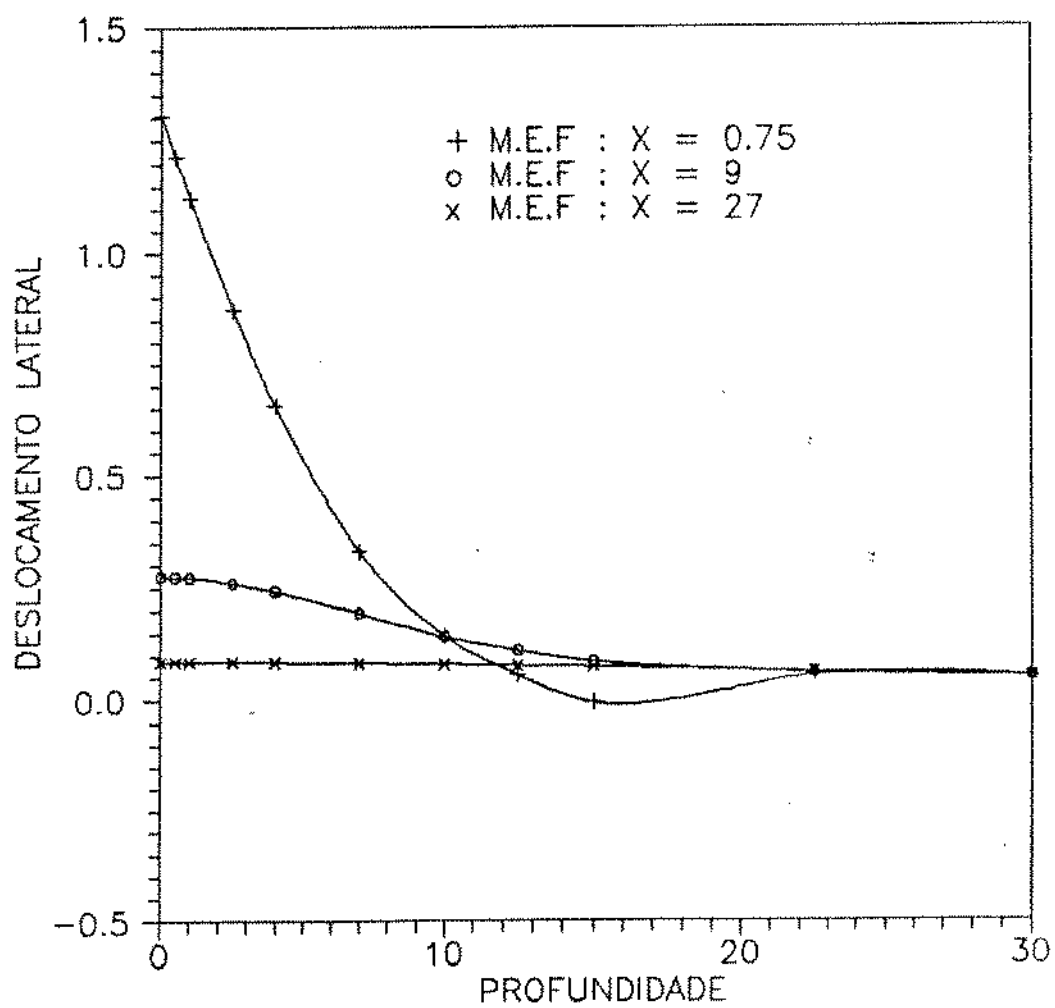


Fig. 5.12 - Gráfico dos deslocamentos laterais
 ($L/D = 10$; $K_R = 10^{-2}$)

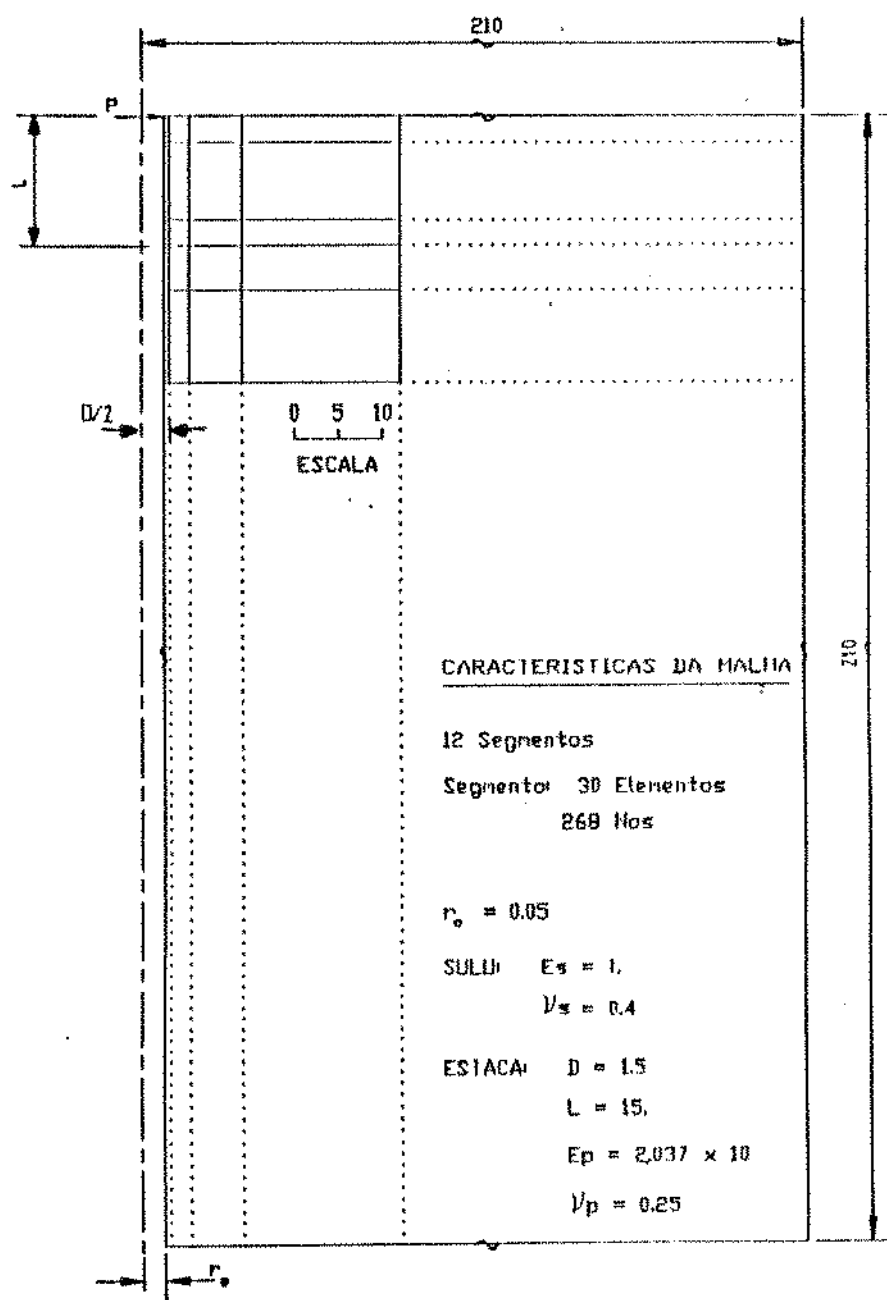


Fig. 5.13 GERATRIZ DA MALHA ($L/D = 10$; $K_R = 1$)

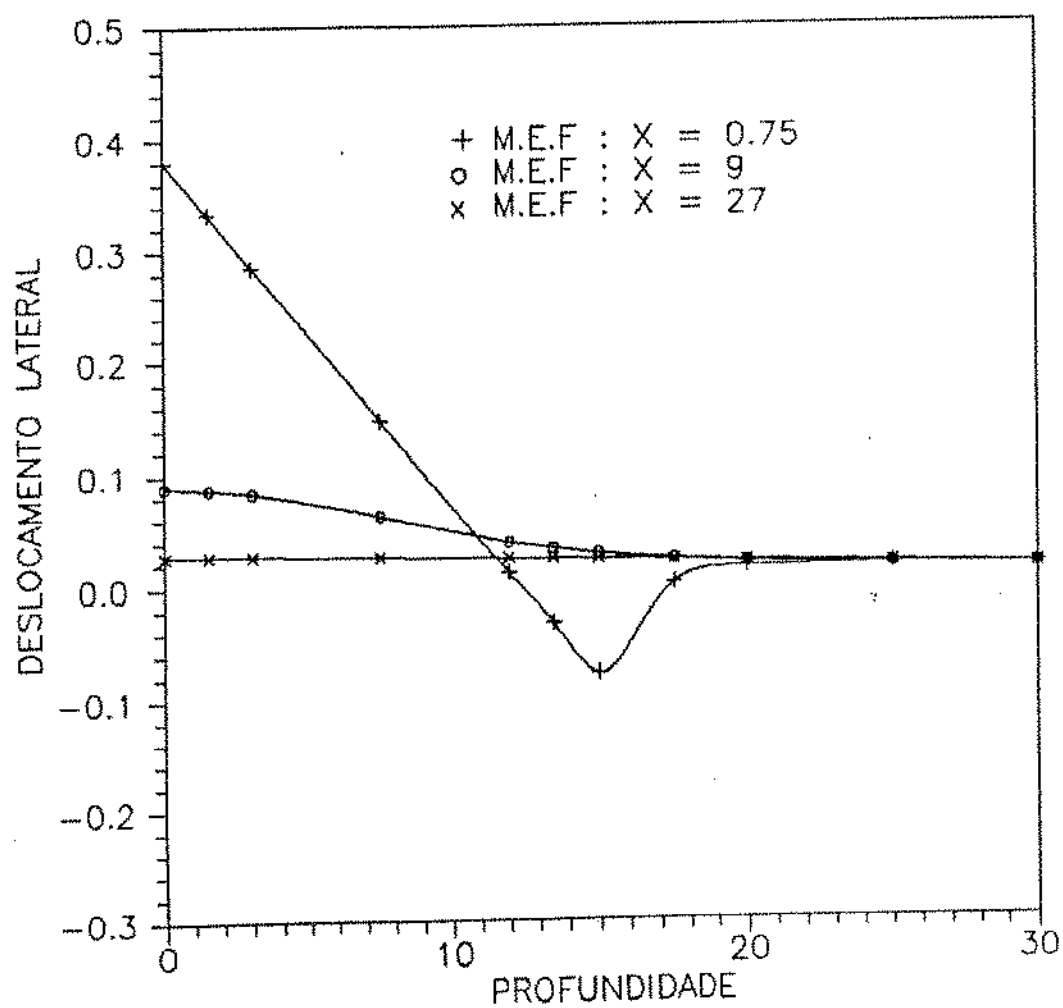


Fig. 5.14 - Gráfico dos deslocamentos laterais
 ($L/D = 10$; $K_R = 1$)

Comparando-se os valores de deslocamento lateral na ponta da estaca (tabela 5.5), observa-se a disparidade dos resultados obtidos pelos dois métodos, contrariando sensivelmente com a análise feita para carregamento axial, onde a hipótese unidimensional para o estado de tensões na estaca não resulta em erros significativos, face às condições de geometria e simetria do problema.

Tab. 5.5 : Deslocamento lateral na ponta da estaca

K_R	u	p_x	$(u - p_x)/p_x$
10^{-2}	1.304	1.688	0.227
1	0.379	1.412	0.730

CAPÍTULO 6

COMENTÁRIOS FINAIS

O estudo apresentado mostrou um bom desempenho do elemento isoparamétrico de 20 Nós, para a análise do problema, apesar das limitações do modelo em termos de memória computacional disponível.

O algoritmo para análise estática de estruturas ciclo-simétricas caracterizou sua viabilidade de aplicação a sistemas que necessitam de um grande número de graus de liberdade para serem modelados pelo Método de Elementos Finitos e também por uma grande massa de entrada de dados.

O estudo do refinamento de malha e condições de contorno para soluções exatas da Elasticidade foi válido, no sentido de se determinar as faixas de operação e características do contorno das malhas, para a análise dos casos de estacas.

Embora não tenha sido feita uma análise dos casos de estacas sob carregamento axial e lateral, em termos de parâmetros característicos de um sistema de cabeça de poço, foi feito um tratamento básico do problema, em termos de parâmetros arbitrários, que é imprescindível para futuras abordagens do problema pelo Método de Elementos Finitos.

Devido ao fato da análise elástico-linear do problema não representar propriamente o caso real, recomenda-se a implementação de recursos no programa utilizado, que representem os fenômenos associados à não linearidade material e geométrica, que são muito relevantes nestes casos.

Para futuros pesquisadores que eventualmente venham dar continuidade ao trabalho, recomenda-se a implementação do algoritmo no IBM - 3090, recém-instalado nesta universidade, dado seu recurso de processamento vetorial e capacidade de memória.

SIMBOLOGIA

A	: área de seção transversal da estaca
D	: diâmetro da estaca
D.F.T	: transformação discreta de Fourier
E_s	: módulo de Young do solo
E_p	: módulo de Young do material da estaca
$E_p I_p$	: constante de rigidez da estaca
H	: carga lateral
I_{ib}	: fator de deslocamento vertical para o elemento i , devido à tensão uniforme na base
I_{ij}	: fator de deslocamento vertical para o elemento i , devido à tensão de cisalhamento ($p_{\tau j}$) no elemento j
I_p	: momento de inércia da seção transversal da estaca
I_p	: fator de influência de deslocamento vertical
I.D.F.T	: inversa da transformação discreta de Fourier
K_R	: índice de flexibilidade relativa estaca-solo
L	: comprimento da estaca
M	: momento puro
N_i	: funções de interpolação
P	: força axial na ponta da estaca
P_b	: tensão na base da estaca
$P_{\tau j}$	: tensão de cisalhamento no elemento j
$P_{\sigma j}$	: tensão normal no elemento j
Q	: carregamento na direção x
r_o	: raio neutro
R_a	: razão de áreas da estaca
u	: deslocamento na direção x , pela formulação de Elementos Finitos
v	: deslocamento na direção y , pela formulação de Elementos Finitos
w	: deslocamento na direção z , pela formulação de Elementos Finitos

$\langle A \rangle$: vetor de deslocamentos nodais
 $\langle \bar{A} \rangle$: vetor de deslocamentos nodais condensado
 $\langle A_i \rangle$: vetor de deslocamentos internos
 $\langle d \rangle$: vetor de deslocamentos
 $\langle F \rangle$: hiper-vetor de carregamento externo no domínio físico
 $\langle P \rangle$: vetor de carregamento externo
 $\langle \bar{P} \rangle$: vetor de carregamento externo condensado
 $\langle P_\tau \rangle$: vetor de tensões de cisalhamento
 $\langle P_\sigma \rangle$: vetor de tensão normal exercida entre o solo e a estaca
 $\langle R \rangle$: hiper-vetor de carregamento externo no domínio de Fourier
 $\langle U \rangle$: hiper-vetor de deslocamentos nodais
 $\langle U_n \rangle$: vetor de deslocamentos nodais do segmento n
 $\langle X \rangle$: hiper-vetor de deslocamento no domínio complexo de Fourier
 $\langle X_k \rangle$: vetor de deslocamento no domínio complexo de Fourier de ordem (k)
 $\langle \sigma \rangle$: vetor de tensões
 $\langle \rho_p \rangle$: vetor de deslocamentos de pontos da estaca
 $\langle \rho_s \rangle$: vetor de deslocamentos de pontos do solo

 $[G]$: matriz de rigidez no domínio de Fourier
 $[G_k]$: matriz de rigidez de ordem k no domínio complexo
 $[H]$: matriz de rigidez
 $[\bar{H}]$: matriz de rigidez condensada
 $[I]$: matriz identidade
 $[I]_{p(n-1,n-1)}$: matriz dos fatores de influência de deslocamentos da estaca
 $[I_s]$: matriz dos fatores de influência de deslocamentos do solo
 $[J]$: matriz jacobiana
 $[J]^{-1}$: inversa da matriz jacobiana
 $\det[J]$: determinante de $[J]$ (jacobiano)
 $[K]$: matriz de rigidez do sistema
 $[K_1]$: matriz de rigidez da região fundamental (segmento 1)
 $[N]$: matriz das funções de interpolação
 $[T_{ux}]$: matriz de transformação do domínio complexo para o físico
 $[T_{xu}]$: matriz de transformação do domínio físico para o complexo

ρ_p : deslocamento de pontos da estaca
 ρ_r : deslocamento na direção radial
 ρ_{si} : deslocamento do solo no ponto i
 ρ_x : deslocamento na direção x, calculados pela solução exata
 ρ_y : deslocamento na direção y, calculados pela solução exata
 ρ_z : deslocamento na direção z, calculados pela solução exata
 ϵ_z : deformação do elemento em z
 $\xi_i, \eta_i, \epsilon_i$: coordenadas locais do nó i
 ν_s : coeficiente de Poisson
 σ_z : tensão normal na estaca

BIBLIOGRAFIA

- 1) Poulos, H.G. & Davis, E.H. (1980), "Pile Foundation Analysis and Design", John Wiley and Sons, Inc.
- 2) Poulos, H.G. & Davis, E.H. (1974), "Elastic Solutions for Soil and Rock Mechanics", John Wiley and Sons, Inc.
- 3) Anderson, T.W. (1971), "The Statistical Analysis of Time Series", John Wiley and Sons, Inc.
- 4) Zienkiewicz, O.C. (1977), "The Finite Element Method", Prentice-Hall, Inc.
- 5) Gallagher, R.H. (1975), "Finite Element Analysis - Fundamentals", Prentice-Hall, Inc.
- 6) Timoshenko, J.P., Goodier, J.N. (1982), "Theory of Elasticity", McGraw-Hill.
- 7) Jaegger, J.C., Cook, N.G.K. (1979), "Fundamentals of Rock Mechanics", Chapman and Hall.
- 8) Chen, W., Saleeb, A.F. (1982), "Constitutive Equations for Engineering Materials", volume 1, John Wiley and Sons, Inc.
- 9) Gudehus, G. (1977), "Finite Elements in Geomechanics", John Wiley and Sons, Inc.
- 10) Bowles, J.E. (1974), "Analytical and Computer Methods in Foundation Engineering", McGraw-Hill.
- 11) Desai, C.J., Christian, J.T. (1977), "Numerical Methods in Geotechnical Engineering", McGraw-Hill.
- 12) Vold, H., Knapp, H., Herman, P. (1977), "Cyclic Symmetry", Aska-Cs User's Guide, University of Stuttgart.
- 13) MSC/Nastran (1978), Application Manual.
- 14) Poulos, H.G. (1971), "Behavior of Laterally Loaded Piles : I - Single Piles", Journal of the Soil Mechanics and Foundation Engineering, Proceedings of the American Society of Civil Engineers.

- 15) Poulos, H.G. (1981), "Pile Foundations Subjected to Lateral Loading", Proceedings of the Symposium on Geotechnical Aspects of Coastal and Offshore Structures (Bangkok).
- 16) Matlock, H. (1988), "Offshore Geotechnical Challenges", Proceedings of the 7th. International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering, Houston-Texas.
- 17) Falcão, H.L.M., Chita, L.C., Rodrigues, R.S. (1986), "Perfuração em Águas Profundas no Brasil", trabalho apresentado no 3^o Congresso Brasileiro de Petróleo, Rio de Janeiro.
- 18) Poulos, H.G. (1985), "Foundation Problems in Marine Calcareous Sands", Proceedings of the International Symposium on Ocean Space Utilization, Tokyo-Japan.
- 19) Pollalis, J.N., Kavvadas, M.J. (1986), "A Numerical Model for Offshore Foundations", Proceedings of the 5th. Offshore Mechanics and Arctic Engineering (OMAE) Symposium.
- 20) Krigger, G.A., Earl, Wright (1980), "Modeling of Piled Foundations", Proceedings of the 1980 Offshore Technology Conference.
- 21) Fowler, J.R., Valka, W.A. (1985), "The Design and Analysis of a TLP Subsea Wellhead", Proceedings of the 17th. Annual Offshore Technology Conference, Houston-Texas (OTC 4983)
- 22) Boehm, C.F. (1986), "Severe Environment 18 $\frac{3}{4}$ " 15,000 psi Wellhead", Proceedings of the 18th. Annual Offshore Technology Conference (OTC 5152).
- 23) Coyle, H.M., Reese, L.C. (1986), "Load Transfer for Axially Loaded Piles Inclays", Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers.

- 24) Reese, L.C., Matlock, H. (1956), "Non-Dimensional Solutions for Laterally Loaded Piles with Soil Modulus Assumed Proportional to the Depth", Proceedings of the 8th. Texas Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Special Publication nº29, Bureau of Engineering Research, The University of Texas at Austin.
- 25) Relatório Final sobre Estudo de Cargas Máximas em Cabeças de Poço (1988). Elaborado pela Geomecânica S.A. (Tecnologia de Solos, Rochas e Materiais) em serviços prestados à Petrobras.
- 26) Iguti, F., Serpa, A.L., Vaqueiro, J.F. (1988), "ANAFIN" manual do usuário.
- 27) Przemieniecki, J.S. (1968), "Theory of Matrix Structural Analysis", McGraw-Hill, Inc.
- 28) Bathe, K.J., Wilson, E.L. (1976), "Numerical Methods in Finite Element Analysis", Prentice Hall, Inc.
- 29) Saboya, F., Leite, M.H.S., Vargas, E.A. (1986), "Um estudo sobre a aplicação de elementos infinitos na análise de escavações subterrâneas em meios anisotrópicos", Solos e Rochas - revista brasileira de geotécnica, vol. 9, nº 3.
- 30) Costa, A.M., Moreira, L. F. R. (1988), "Recent Applications of Computer Methods for Driving Analysis of Offshore Piles in Brazil", Proceedings of the International Conference on Computer Modelling in Ocean Engineering, Venice.