

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL
TESE DEFENDIDA POR Jorge Luis Palacios Felix
E APROVADA PE
COMISSÃO JULGADORA EM 25. 07. 2002

J. S.
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Teoria de Sistemas Vibratórios Aporticados Não-Lineares e Não-Ideais

Autor: **Jorge Luis Palacios Felix**
Orientador: Prof. Dr. **José Manoel Balthazar**
Co-Orientador: Prof. Dr. **João Maurício Rosário**

07/2002

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO**

Teoria de Sistemas Vibratórios Aporticados Não-Lineares e Não-Ideais

**Autor: Jorge Luis Palacios Felix
Orientador: Prof. Dr. José Manoel Balthazar
Co-Orientador: Prof. Dr. João Maurício Rosário**

**Curso: Engenharia Mecânica
Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico**

Tese de doutorado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

**Campinas, 2002
S.P. – Brasil**

UNIDADE	CE
Nº CHAMADA	TUNICAMP
	P171t
V	EX
TOMBO BC	53546
PROC.	124/03
C	☐
D	☒
PREÇO	R\$11,00
DATA	01/05/03
Nº CPD	

CM00182245-2

BIB ID 289764

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

P171t Palacios Felix, Jorge Luis
Teoria de sistemas vibratórios aporticados não-lineares e não-ideais / Jorge Luis Palacios Felix. --Campinas, SP: [s.n.], 2002.

Orientador: José Manoel Balthazar.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Vibração ressonante. 2. Sistemas de controle por realimentação. 3. Teoria da aproximação. 4. Motores elétricos de corrente continua. 5. Teorias não-lineares. I. Balthazar, José Manoel. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA TÉRMICA E FLUIDOS

TESE DE DOUTORADO

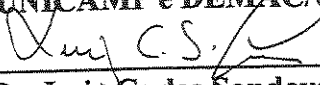
Teoria de Sistemas Vibratórios Aporticados
Não-Lineares e Não-Ideais

Autor: **Jorge Luis Palacios Felix**

Orientador: **Prof. Dr. José Manoel Balthazar**



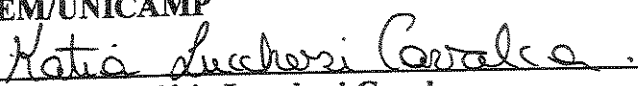
Prof. Dr. José Manoel Balthazar, Presidente
DPM/UNICAMP e DEMAC/UNESP



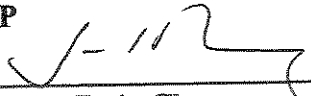
Prof. Dr. Luiz Carlos Sandoval Góes
ITA



Prof. Dr. Paulo Roberto Gardel Kurka
FEM/UNICAMP



Profa. Dra. Kátia Lucchesi Cavalca
FEM/UNICAMP



Prof. Dr. Julio Cesar Ruiz Clayssen
PROMEC/UFRGS

Campinas, 25 de julho de 2002

076576

Dedicatória:

Dedico este trabalho a Germaine R. Xavier que soube ser a companheira desta passagem de minha vida.

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. José Manoel Balthazar, pela orientação e paciência durante a elaboração deste trabalho. Mais que um orientador, um grande amigo sempre disposto a ajudar e aconselhar.

Aos meus professores que tive durante as aulas que transmitiram suas experiências acadêmicas e souberam me motivar no caminho certo da engenharia mecânica: Prof. Dr. Paulo Kurka e Prof. Dr. Douglas Zampieri.

Ao Prof. Dr. Reyolando M.L.R.F. Brasil pelo incentivo e sugestões durante os ensaios numéricos.

Ao Prof. Dr. João Maurício Rosário pelo incentivo e apoio como co-orientador em meus estudos.

Agradeço à FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa de Estado de São Paulo), pelo apoio financeiro através da bolsa de doutorado.

Às secretárias de Pós-Graduação Sônia A. G. de Oliveira, Cleusa da Silva Meira e Denisse A. Villela pela presteza no atendimento e amizade demonstrada.

Precisamos reconhecer a unidade dos seres humanos, lembrando-nos de que fomos todos feitos à imagem de Deus. É preciso que o mundo se irmane, se devemos ser capazes de praticar a verdadeira arte de viver.

Paramahansa Yogananda

Resumo

Felix, Jorge Luis Palacios, *Teoria de Sistemas Vibratórios Aporticados Não-Lineares e Não-Ideais*, Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2002. 170 p. Tese (Doutorado)

Apresenta-se o estudo do comportamento dinâmico não linear de um pórtico plano, excitado por uma fonte não ideal – um motor elétrico de corrente contínua, desbalanceado e de potência limitada. Toma-se, um problema cujo modelo matemático representa um sistema simplificado (com característica do motor em regime estacionário) e completo (considera-se a equação elétrica do motor). Adota-se a formulação Lagrangeana para gerar as equações de movimento, contendo termos não lineares até ordem cúbica. Tomam-se os valores dos parâmetros, tais que se observa a existência de ressonância interna 1:2. A solução numérica é obtida através da utilização do método de Runge-Kutta com passo variável do programa MATLAB®. Os resultados numéricos e analíticos mostram boa correlação entre si, além de apresentarem alguns dos fenômenos associados, observados, como o efeito Sommerfeld. Outros fenômenos, devidos ao comportamento geometricamente não linear da estrutura, são também detectados, tais como saturação modal, a transferência de energia entre os modos e, além destes, é detectado a auto-sincronização entre dois motores apoiados em uma estrutura aporticada. A implementação e desempenho da técnica de controle por saturação para a supressão de vibrações de um sistema ideal e não ideal é estudada numericamente via SIMULINK®.

Palavras Chave

Sistema Não-Ideal, Ressonância Interna, Fenômeno de Saturação, Método da Média, Controle por Saturação.

Abstract

Felix, Jorge Luis Palacios., *Theory of Nonlinear and Nonideal Portal frame Vibratory System*, Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2002. 170 p. Tese (Doutorado)

This work concerns the computational and analytical study of the non-linear dynamic behavior of a portal frame, excited by a non-ideal source – an unbalanced direct current electric motor of limited power. A problem whose mathematical model represents a simplified system (the characteristic of the motor in stationary state) and complete (the electric equation of the motor is considered). Lagrange formularization for deducing the equations of motion, up to cubic non-linear terms is followed. The values of the parameters are chosen to have one-to-two internal Resonance. The numerical solution is obtained through the use of the method of Runge-Kutta with variable step length by MATLAB®. The numerical and analytical results show good correlation, besides presenting some of the phenomena associated, observed, such as the Sommerfeld effect. Other phenomena, due to the geometric non-linear behavior of the structure, are also detected, such as modal saturation and energy transference between the modes. The self-synchronization phenomenon is also studied when two DC motors are considered. The implementation and performance of the saturation control for the suppression of vibrations of an ideal and non-ideal system is numerical studied by SIMULINK®.

Key Words

Non-ideal System, Internal Resonance, Saturation Phenomenon, Averaging Method, Saturation Control

Índice

Lista de Figuras	iv
Lista de Tabelas	x
Nomenclatura	xi
1 Introdução	1
1.1 Motivação do Estudo Efetuado	1
1.2 Sistemas dinâmicos modelados como sendo do tipo não-ideais	3
1.3 A estrutura aporticada	9
1.4 Estratégias de controle por saturação em problemas não-ideais	9
1.5 Objetivos	11
1.6 Materiais e métodos	11
1.7 Descrição sucinta da Tese	12
2 Modelagem Dinâmica do Problema	14
2.1 Introdução	14
2.2 Descrição do problema estudado	15
2.3 Obtenção das equações de Movimento	17

3	Simulações Numéricas Utilizando Integração Direta	26
3.1	Introdução	26
3.2	Propriedades da passagem pela primeira ressonância $\Omega_m \approx \omega_1$	29
3.3	Propriedades da passagem pela segunda ressonância $\Omega_m \approx \omega_2$	35
4	Obtenção de uma Solução Analítica Aproximada Para as Equações do Movimento	56
4.1	Idéia básica do método da média	56
4.2	Busca da solução analítica aproximada na primeira região de ressonância	59
4.2.1	Obtenção das soluções constantes do sistema “médio”	64
4.2.2	Obtenção das soluções dinâmicas do sistema “médio”	68
4.3	Busca da solução analítica na segunda região de ressonância	74
4.3.1	Obtenção das soluções constantes do sistema “médio”	79
4.3.2	Obtenção das soluções dinâmicas do sistema “médio”	84
5	Supressão de Vibrações, Utilizando Técnicas de Controle por Saturação e Ressonâncias Internas	91
5.1	Introdução	91
5.2	Modelo de controle por saturação para um sistema ideal	92
5.2.1	Sistema ideal	92
5.2.2	Desempenho do controle por saturação	96
5.3	Modelo do controle por saturação para um sistema não-ideal	103
6	Discussão de alguns casos Particularizados do Sistema Pórtico Não-ideal	112

6.1 Modelo dinâmico do sistema Particularizado	112
6.2 Simulações numéricas do sistema Particularizado	115
6.3 Modelo de controle do sistema Particularizado	121
7 Alguns Comentários sobre Fundações Elásticas Excitados por dois Motores Não-ideais	127
7.1 Descrição do sistema a ser estudado	128
7.2 Modelo dinâmico do sistema a ser estudado	130
7.2.1 A energia potencial	133
7.2.2 A energia cinética	134
7.2.3 Equações de movimento	136
7.3 Resultados das simulações numéricas	139
7.4 Modelo particularizado do sistema estudado	144
8 Conclusões e Trabalhos Futuros	151
Referências Bibliográficas	156
Apêndice A: Rotinas Computacionais em MATLAB/SIMULINK	
Utilizados no Trabalho	163
Apêndice B: Comentários Sobre o Desenvolvimento	
da Simulação Computacional	175

Lista de Figuras

1.1	Modelo experimental realizado por Garzeri em 2001 na USP.	2
1.2	Exemplos de sistemas com um ou dois motores (a) Bate-estaca tipo Hammer, (b) Peneira vibratória e (c) Helicóptero .	3
2.1	Modelo Real de um Pórtico Excitado por um Motor de Corrente Contínua	16
2.2	Modelo Físico do Sistema Não-Ideal.	17
2.2	Modelo Geométrico do Sistema Não-Ideal.	18
2.3	Representação esquemática de um circuito elétrico do motor de corrente contínua.	24
3.1	Amplitudes dos modos horizontal e vertical do pórtico durante a passagem pela 1ª ressonância com rotação crescente.	31
3.2	Amplitudes dos modos horizontal e vertical do pórtico e rotação do motor durante passagem pela 1ª ressonância com parâmetro de controle crescente	31
3.3	Resposta dinâmica do sistema: (a) rotação do motor com efeito Sommerfeld, (b) modo horizontal e (c) modo vertical para o parâmetro de controle $\hat{a}=0.24 Nm$.	32
3.4	Comportamento dinâmico regular do pórtico no regime estacionário correspondente ao parâmetro de controle $\hat{a}=0.24$.	33
3.5	Comportamento dinâmico regular do pórtico na passagem pela primeira ressonância. Para os parâmetros de controle (a) $\hat{a}=0.18$, (b) $\hat{a}=0.21$ e (c) $\hat{a}=0.27$.	34
3.6	Amplitudes do ponto central da viga durante passagem pela 2ª ressonância com rotação crescente.	35

3.7	Amplitudes do ponto central da viga e rotação do motor durante passagem pela 2ª ressonância com parâmetro de controle crescente.	36
3.8	Históricos da velocidade rotacional do motor (a) e dos modos horizontal (b) e vertical (c) do pórtico para o parâmetro de controle $\hat{a}=0.42$.	38
3.9	Comportamentos da velocidade rotacional do motor (a) e dos modos horizontal (b) e vertical (c) do pórtico para o parâmetro de controle $\hat{a}=0.50$.	39
3.10	Comportamentos da velocidade rotacional do motor (a) e dos modos horizontal (b) e vertical (c) do pórtico para o parâmetro de controle $\hat{a}=0.56$.	40
3.11	Comportamentos da velocidade rotacional do motor (a) e dos modos horizontal (b) e vertical (c) do pórtico para o parâmetro de controle $\hat{a}=0.60$.	41
3.12	Planos de fase no regime estacionário do pórtico para os parâmetros de controle (a) $\hat{a}=0.42$, (b), $\hat{a}=0.47$, (c) $\hat{a}=0.50$, (d) $\hat{a}=0.56$, (e) $\hat{a}=0.60$ e (f) $\hat{a}=0.64$ Nm.	42
3.13	Magnitudes do FFT de q_1 e q_2 para (a) $\hat{a}=0.42$, (b) $\hat{a}=0.50$, (c) $\hat{a}=0.56$, (d) $\hat{a}=0.60$.	44
3.14	Mapas de Poincaré sobre o plano $(q_1, \dot{q}_1)$ correspondentes ao parâmetro de controle: (a) $\hat{a}=0.42$, (b) $\hat{a}=0.50$, (c) $\hat{a}=0.56$ e (d) $\hat{a}=0.60$.	46
3.15	Respostas dos modos horizontal e vertical do pórtico e da velocidade rotacional do motor para o parâmetro de controle $\hat{a}=0.50$.	49
3.16	Respostas dos modos horizontal e vertical do pórtico e da velocidade rotacional do motor para o parâmetro de controle $\hat{a}=0.80$.	50
3.17	Respostas dos modos horizontal e vertical do pórtico e da velocidade rotacional do motor para o parâmetro de controle $\hat{a}=1.1$.	51
3.18	Respostas dos deslocamentos do pórtico e da velocidade rotacional do motor para $\hat{a}=1.3$.	52
3.19	Velocidade rotacional e planos de fase do pórtico para $\hat{a}=3.0$: para o modelo do motor simplificado (a)(b)(c) e completo (d)(e)(f).	54
3.20	Velocidade rotacional e planos de fase do pórtico para $\hat{a}=4.0$: para o modelo do motor simplificado (a)(b)(c) e completo (d)(e)(f).	55

4.1	Resultados das amplitudes dos modos horizontal a_1 e vertical a_2 do pórtico para rotações crescentes do motor durante a passagem pela primeira ressonância.	67
4.2	Resultados das amplitudes dos modos horizontal a_1 e vertical a_2 do pórtico para valores crescentes do parâmetro e controle durante a passagem pela primeira ressonância.	67
4.3	Amplitudes e frequência rotacional sem atravessar a primeira ressonância do sistema para o parâmetro de controle $\hat{a} = 0.22 Nm$.	70
4.4	Amplitudes e frequência rotacional que atravessa e capturada na primeira ressonância do sistema para o parâmetro de controle $\hat{a} = 0.244 Nm$.	71
4.5	Amplitudes e frequência rotacional que abandona a primeira ressonância do sistema para o parâmetro de controle $\hat{a} = 0.258 Nm$.	72
4.6	Comparação das respostas modais obtidas da integração da equação média e da equação diferencial original correspondente ao parâmetro de controle $\hat{a} = 0.0244 Nm$.	73
4.7	Soluções constantes dos modos vertical e horizontal do pórtico para rotações crescentes do motor durante passagem pela segunda ressonância.	83
4.8	Soluções constantes dos modos vertical e horizontal do pórtico para valores crescentes do parâmetro e controle durante passagem pela segunda ressonância.	84
4.9	Início da 2da ressonância para o parâmetro de controle $\hat{a} = 0.46 Nm$. (a) Velocidade angular do motor Ω e (b) Amplitudes dos modos horizontal a_1 e vertical a_2	86
4.10	Fenômeno de captura pela segunda ressonância, efeito Sommerfeld e saturação modal para o parâmetro de controle $\hat{a} = 0.55 Nm$. (a) Velocidade angular do motor Ω e (b) Amplitudes dos modos horizontal a_1 e vertical a_2	87
4.11	Término da 2da ressonância para o parâmetro de controle $\hat{a} = 0.65 Nm$. (a) Velocidade angular do motor Ω e (b) Amplitudes dos modos horizontal a_1 e vertical a_2	88
4.12	Comparação das soluções na série temporal entre os resultados obtidos da equação 4.42 via método da média (a) e 2.21 via integração numérica direta (b).	89

4.13	Comparação das soluções no plano fase entre os resultados obtidos da equação (4.42) via método da média (linha azul ooo) e (2.21) via integração numérica direta (linha vermelha ...).	90
5.1	Curva resposta-frequência quando $(\omega_2 \neq 2\omega_1)$ e $(\Omega \approx \omega_2)$ e sem controle.	94
5.2	Curva resposta-frequência quando $(\omega_2 \approx 2\omega_1)$ e $(\Omega \approx \omega_2)$ e sem controle.	95
5.3	Resposta do pórtico plano no movimento lateral (a) e no vertical (b) quando $\omega_2 \neq 2\omega_1$ e $\Omega \approx \omega_2$ com $\Omega=94$ rad/s.	95
5.4	Resposta do pórtico plano no movimento lateral (a) e vertical (b) quando $\omega_2 \approx 2\omega_1$ e $\Omega \approx \omega_2$ com $\Omega=148$ rad/s.	96
5.5	Amplitudes do modo horizontal: (ooo) sem controle, (+++) com controle e, do modo vertical: (ooo) sem controle, (+++) com controle quando $\omega_2 \neq 2\omega_1$ e $\Omega \approx \omega_2$ e com controle.	98
5.6	Comparação no regime permanente do modo vertical q_2 e do controlador q_4 quando $\Omega=94$ rad/s.	99
5.7	Resposta no tempo do (a) modo vertical q_2 e (b) controlador q_3 quando $\Omega=94$ rad/s.	99
5.8	Amplitudes do modo horizontal (a) e vertical (b) quando $\omega_2 \approx 2\omega_1$ e $\Omega \approx \omega_2$. (ooo) sem controle, (+++) com controle (caso ideal).	100
5.9	Respostas no tempo do pórtico no movimento lateral (a), no movimento vertical (b) e resposta do controlador (c) para $\Omega=148$ rad/s.	101
5.10	Comparação dos modos do pórtico e do controlador para $\Omega=148$ rad/s no regime permanente.	102
5.11	Resposta dos modos horizontal (a) e vertical (b) versus velocidade rotacional. (ooo) controlador inativo e (+++) controlador ativo	106
5.12	Resposta dos modos horizontal (a) e vertical (b) versus parâmetro de controle. (ooo) controlador ativo e (+++) controlador inativo.	107
5.13	Respostas no tempo do deslocamento horizontal (a) e vertical (b) da estrutura aporticada para o parâmetro de controle $\hat{a}=3.5$.	108

5.14	Comportamento do pórtico controlado: (a) resposta horizontal, (b) resposta vertical e do (c) controlador para o parâmetro de controle $\hat{a}=3.5$.	109
5.15	Comportamento do motor não-ideal: (a) sem controle e (b) com controle para o parâmetro de controle $\hat{a}=3.5$.	110
5.16	Uma proposta da configuração do sistema controle por saturação.	111
6.1.	Modelo esquemático de um motor não-ideal apoiado sobre uma estrutura aporticada de tipo “shear building”.	113
6.2.	Comportamento dinâmico do sistema aporticada não-ideal de tipo “shear building” para (a) $\hat{a}=1.2$, (b) $\hat{a}=1.5$, (c) $\hat{a}=1.9$ e (d) $\hat{a}=2.0$.	117
6.3.	Resposta no tempo da velocidade rotacional do motor para o parâmetro de controle $\hat{a}=1.9$.	118
6.4.	Resposta no tempo da velocidade rotacional do motor Para o parâmetro de controle $\hat{a}=2.0$.	119
6.5.	Resultados do sistema que leva em conta o termo cúbico e a força harmônica para $\hat{a}=2.0$, $p=0.6$: (a) $\hat{f}=3$, (b) $\hat{f}=5$, (c) $\hat{f}=6$, (d) $\hat{f}=7$.	120
6.6.	Resposta das amplitudes do modo lateral para valores crescentes do parâmetro de controle quando o controlador está: (ooo) desativado e (+++) ativado. Com $p=1.2$.	122
6.7.	Resposta no tempo do (a) controlador, (b) do pórtico sem controle e (c) do pórtico com controle para $\hat{a}=1.2$. Com rigidez não-linear.	123
6.8.	Resposta do sistema controlado quando o amortecimento é modificado: $\mu_1=0.2$ com o parâmetro de controle $\hat{a}=1.2$.	124
6.9.	Respostas das amplitudes do modo lateral do pórtico para valores crescentes do parâmetro de controle quando: (ooo) o controlador está desativado e (+++) o controlador está ativado. Com $p=0.0$.	125
6.10.	Resposta no tempo do (a) controlador, (b) do pórtico sem controle e (c) do pórtico com controle para $\hat{a}=1.2$. Com rigidez linear.	126

7.1	Modelo de uma estrutura elástica excitada por dois motores não idéias.	129
7.2	Modelo do sistema não ideal em posição deformada.	129
7.3	Modelo esquemático do circuito elétrico de um motor elétrico de corrente contínua.	131
7.4	Respostas no tempo da rotação dos motores e dos modos horizontal e vertical do ponto central da viga da estrutura aporticada para $\hat{a}_3 = 1.3$ e $\hat{a}_4 = 0.1$.	140
7.5	Respostas no tempo da rotação dos motores e dos modos horizontal e vertical do ponto central da viga da estrutura aporticada para $\hat{a}_3 = 1.2$ e $\hat{a}_4 = 0.3$.	142
7.6	Respostas no tempo das rotações dos motores e dos modos horizontal e vertical da estrutura aporticada para $\hat{a}_3 = 2.45$ e $\hat{a}_4 = 0.7$.	143
7.7	Modelo esquemático de dois motores não-ideais apoiados sobre uma estrutura aporticada do tipo “shear building”.	144
7.8	Auto-sincronização dos motores desbalanceados quando $\hat{a}_1 = 1.9 = \hat{a}_2$.	148
7.9	Ausência de Auto-sincronização dos motores desbalanceados quando $\hat{a}_1 = 1.2$, $\hat{a}_2 = 1.9$.	149
7.10	Auto-sincronização dos motores desbalanceados e o efeito Sommerfeld quando $\hat{a}_1 = 1.4$, $\hat{a}_2 = 1.7$.	150
A1	Modelo em SIMULINK da equação 2.25 correspondente ao motor não-ideal e a estrutura aporticada.	167
A2	Modelo em SIMULINK da equação (5.5) do sistema ideal: (a) controlador e (b) a estrutura aporticada.	168
A3	Modelo em SIMULINK para as simulações numéricas do método por controle por saturação da equação (5.6): (a) o controlador, (b) o motor não-ideal e (c) a estrutura aporticada.	170
A4	Modelo em SIMULINK do sistema não-ideal do tipo “shear building”. (a) dinâmica do motor, (b) dinâmica do pórtico e (c) dinâmica do controlador.	172
A5	Modelo em SIMULINK para as simulações numéricas do sistema não-ideal (a) primeiro motor, (b) segundo motor e (c) estrutura aporticada.	174

- B1 Comportamento dinâmico do sistema não-ideal para o parâmetro de controle $\hat{a}=0.24$ durante a passagem pela 1ra ressonância quando o passo de integração tem os valores (a) $\Delta t = 0.0025$ e (b) $\Delta t = 0.001$, (c) $\Delta t = 0.0001$ e (d) $\Delta t = 0.015$. 176
- B2 Comportamento dinâmico do sistema não-ideal para o parâmetro de controle $\hat{a}=0.50$ durante a passagem pela 2da ressonância quando o passo de integração tem os valores (a) $\Delta t = 0.0025$ e (b) $\Delta t = 0.01$, (c) $\Delta t = 0.0001$ e (d) $\Delta t = 0.015$. 178
- B3 Modelo SIMULINK da dinâmica da estrutura aporticada. 180

Lista de Tabelas

3.1	Propriedades físicas e geométricas do sistema.	28
-----	--	----

Nomenclatura

Letras Latinas

a	parâmetro de controle	[Nm]
$\hat{a}$	parâmetro de controle adimensional	
$\hat{a}_1$	parâmetro de controle adimensional do primeiro motor	
$\hat{a}_2$	parâmetro de controle adimensional do segundo motor	
a_j	amplitudes das soluções aproximadas	
b	constante positiva para um modelo de motor	[Nm/s]
$\hat{b}$	constante adimensional para um modelo de motor	
$\hat{b}_1$	constante adimensional para o primeiro modelo de motor	
$\hat{b}_2$	constante adimensional para o segundo modelo de motor	
A_b	seção transversal constante de área da viga	[m ²]
A_c	seção transversal constante de área da coluna	[m ²]
c_1	amortecimento viscoso linear	[Ns/m]
c_2	amortecimento viscoso linear	[Ns/m]
E	modulo de elasticidade de Young	[N/m ²]
E_b	força contra-eletromotriz	
g	aceleração da gravidade	[m/s ²]
h	comprimento da coluna	[m]

H	torque de atrito	[Nm]
i_a	corrente elétrica	[A]
I_a	corrente adimensional	[A]
I_b	momento de inércia da seção transversal da viga	[m ⁴]
I_c	momento de inércia da seção transversal da coluna	[m ⁴]
I_m	momento de inércia do rotor	[kgm ²]
J_1	momento de inércia do rotor 1	[kgm ²]
J_2	momento de inércia do rotor 2	[kgm ²]
k_b	rigidez linear da viga	[N/m]
k_c	rigidez linear da coluna	[N/m]
k_E	constante de voltagem do motor	[Volts/rads ⁻¹]
k_m	constante de torque do motor	[Nm/A]
k_2	rigidez não-linear	[N/m ³]
L	comprimento da viga	[m]
L_a	inductância da armadura	[H]
m	massa	[kg]
m_0	massa desbalanceada do motor	[m]
m_1	massa desbalanceada do motor 1	[m]
m_2	massa desbalanceada do motor 2	[m]
M	massa do motor	[kg]
M_1	torque gerado pelo motor 1	[Nm]
M_2	torque gerado pelo motor 2	[Nm]
M_m	torque gerado pelo motor	[Nm]
M_z	torque de oposição do disco	[Nm]
q_1	coordenada generalizada do modo horizontal	
q_2	coordenada generalizada do modo vertical	
q_3	coordenada generalizada da posição angular	

q_4	coordenada generalizada do controlador	
r	excentricidade do rotor	[m]
r_1	excentricidade do rotor 1	[m]
r_2	excentricidade do rotor 2	[m]
R_a	resistência da armadura	[Ω]
T	energia cinética do sistema	
T_p	energia cinética do pórtico	
T_m	energia do motor	
u	deformação estática no extremo da coluna	
v	deformação estática no centro da viga	
u_0	deslocamento horizontal da massa desbalanceada	
u_2	deslocamento lateral da seção da viga	[m]
v_0	deslocamento vertical da massa desbalanceada	
v_2	deslocamento vertical	[m]
V_a	tensão de alimentação	[Volts]
V	energia potencial do sistema	
V_p	energia potencial do pórtico	
V_m	energia potencial do motor	
x	coordenada cartesiana	
x_0	abscissa da massa desbalanceadora	
x_1	abscissa da massa no extremo direito da viga	
x_2	abscissa da massa do centro da viga	
x_3	abscissa da massa no extremo direito da viga	
y_1	ordenada da massa no extremo esquerdo da viga	
y_2	ordenada da massa do centro da viga	
y_3	ordenada da massa no extremo direito da viga	
y_0	ordenada da massa desbalanceadora	

Letras Gregas

φ	posição angular do rotor	[rad]
φ_1	posição angular do motor 1	[rad]
φ_2	posição angular do motor 2	[rad]
ω_1	frequência natural do primeiro modo	[rad/s]
ω_2	frequência natural do segundo modo	[rad/s]
Ω	frequência de excitação externa	[rad/s]
μ_1	primeiro coeficiente de amortecimento	
μ_2	segundo coeficiente de amortecimento	
σ_j	parâmetro de sintonia	
τ	tempo adimensional	
ξ_j	deslocamento de fase das soluções aproximadas	[rad]

Capítulo 1

Introdução

O objetivo deste capítulo é o de mostrar como será desenvolvido o presente trabalho, incluindo-se as nossas considerações iniciais deste doutorado, aqui na UNICAMP. Ele se insere dentro de uma série de trabalhos, em Teoria de Vibrações Não-Lineares, do grupo do Prof. Balthazar. A seguir, apresenta-se a motivação do presente assunto, passando-se pelo posicionamento do problema na literatura e pela descrição dos capítulos e apêndices que comporão o presente trabalho, financiado pela FAPESP, processo de número 98/02759-2.

1.1 Motivação do Estudo Efetuado

A Investigação das vibrações e das interações modais que podem ocorrer em uma estrutura flexível, excitada por um ou dois motores de corrente contínua desbalanceados e com potências limitadas tem importância na moderna engenharia mecânica. Estes problemas, são denominados de sistemas dinâmicos não-ideais Kononenko (1969) e serão discutidos em detalhes gerais no item 1.2. Neste trabalho será estudado um problema não-ideal, particular, que será definido posteriormente, no capítulo 2, cujo modelo esquemático deduz-se do modelo experimental realizado por Garzeri (2001) mostrado na figura 1.1.

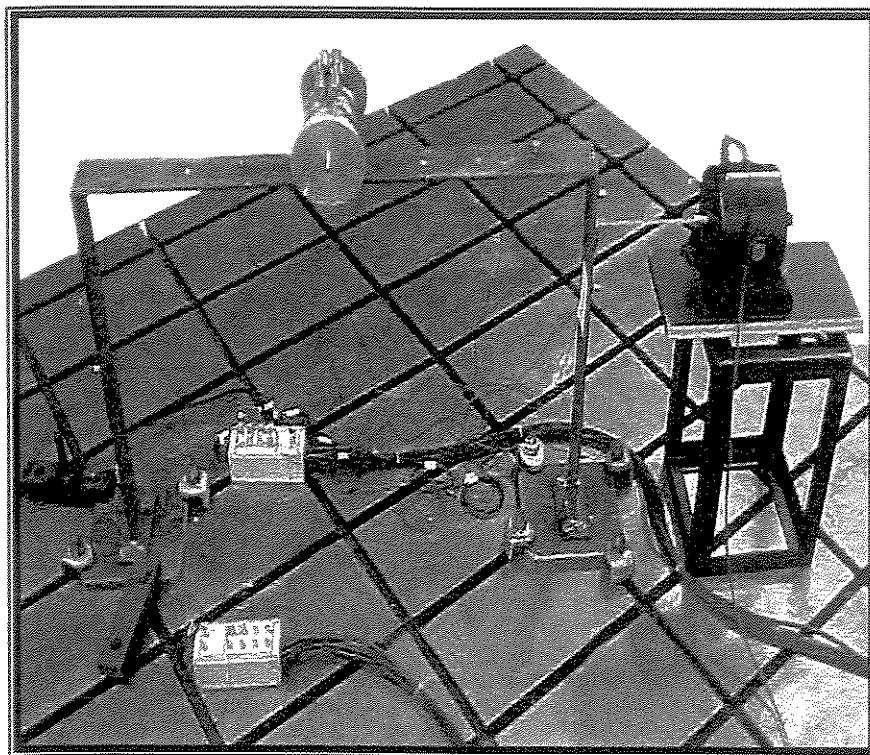


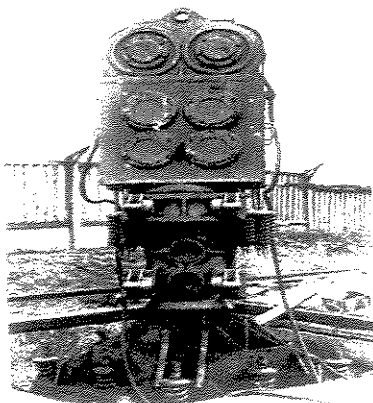
Figura 1.1 Modelo experimental realizado por Garzeri (2001).

Nota-se que existem, na literatura, diversos exemplos de fundações para um ou dois motores de corrente contínuas. Pode-se citar, à título de ilustração, alguns exemplos, tais como:

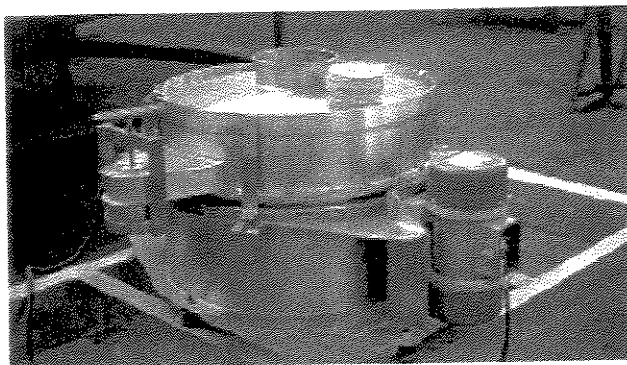
- das peneiras vibratórias,
- dos alimentadores vibratórios,
- das máquinas agitadoras oscilantes,
- dos transportadores vibratórios,
- dos misturadores,
- dos bate-estacas vibratórios tipo Hammer, entre muitos outros.

A investigação sobre controle por saturação em estruturas flexíveis e rotores tem importância na engenharia aeronáutica. Pode-se citar a título de ilustração por exemplo de controlar a resposta de um rotor de um helicóptero.

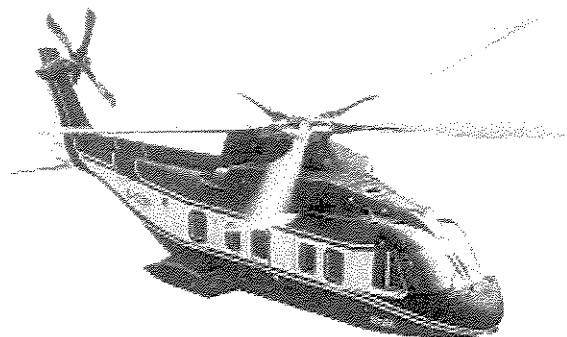
A seguir, Na figura 1.2 exibem-se alguns exemplos, citados , logo acima.



(a)



(b)



(c)

Figura 1.2. Exemplos de sistemas com um ou dois motores (a) Bate-estaca tipo “ Hammer”,
(b) Peneira vibratória e (c) Helicóptero.

1.2 Sistemas dinâmicos modelados como sendo do tipo não- ideais

Nos últimos anos foram dadas significantes contribuições para a teoria de vibrações dos sistemas não-lineares. Contudo, apesar dos grandes avanços, a atual teoria de vibrações não pode explicar alguns fenômenos.

Recentemente, muitos tipos de vibrações surgiram da interação dos sistemas com suas próprias fontes de energia. É conveniente introduzir-se novos termos, uma fonte de energia ideal e uma fonte não-ideal, as quais tem os seguintes significados: Uma fonte de energia ideal é

aquela que age sobre um sistema vibratório, mas não experimenta qualquer influência do sistema físico. Uma fonte de energia não-ideal é aquela que age sobre um sistema vibratório e, ao mesmo tempo, experimenta uma ação recíproca do sistema. Alterações nos parâmetros do sistema podem ser efetuadas modificando-se as condições de trabalho da fonte de energia. Estas alterações podem tornar-se especialmente ativas quando a fonte de energia tem potência limitada.

Pesquisando-se a vasta bibliografia disponível, constata-se, que é usual desconsiderar-se, no modelo matemático que representa vários problemas de engenharia (Mecânica), a influência do movimento do próprio sistema em sua excitação.

Todavia, em muitos casos, esta simplificação, no modelo matemático, não é razoável, devendo-se levar em conta que a excitação ou sua fonte, é influenciada pela própria resposta do sistema.

Este fato prejudica a formulação de uma grande maioria dos modelos matemáticos da Teoria de Vibrações tradicional, necessitando-se de estabelecer uma formulação mais realística que leve em conta a interação entre as variáveis de controle e as de estado da excitação.

Tem-se assim, um sistema vibratório não-ideal, ou um sistema com fonte de excitação, não-ideal. O sistema ideal é o tradicional onde não existe este fenômeno.

Entenda-se, que a máquina não-ideal é uma conceituação que depende fundamentalmente da estrutura que a suporta.

Um exemplo clássico de um sistema não-ideal é o de uma estrutura flexível (por exemplo uma viga em balanço) sobre o qual um motor elétrico de corrente contínua desbalanceada, com fonte de potência limitada, está montado.

Nestes casos, mencionados, o movimento do sistema devido a sua própria flexibilidade, afeta o desempenho da máquina.

Notam-se, características importantes, deste tipo de modelo matemático de sistema dinâmico, provenientes da interação da estrutura com a fonte de excitação, tais como:

- Presença de variações bruscas (saltos ou “jumps”) da amplitude de deslocamento da estrutura e da frequência de excitação no caso particular em que considera-se as condições estacionárias do movimento;
- Descontinuidade da curva amplitude versus frequência;
- Influência do perfil da curva “amplitude versus frequência” quando o operador altera a velocidade do motor elétrico, em acréscimos e/ou decréscimos;
- Dependência destes efeitos com as características eletromecânicas do motor.

Portanto, percebe-se que os sistemas dinâmicos, modelados matematicamente, como sendo não-ideais, possuem um grau de liberdade (ou mais dependendo do número de motores presentes no sistema) , superior ao sistema ideal correspondente.

Nota-se que as equações governantes do movimento, representativa do sistema dinâmico não-ideal de vibrações, podem ser esquematizadas, modeladas matematicamente, da seguinte forma (onde neste caso só se considera um motor de corrente continua):

1-“ primeiro conjunto de equações ”:

equações dinâmicas da “estrutura vibratória” em x + termos interação (termos em x e em φ) = equações da excitação externa.

2-“ segundo conjunto de equações ”:

equações de rotação do eixo do motor (termos em $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$) + equações características do motor (termos em $M_m (\frac{d\varphi}{dt})$) + outros termos de interação(em x e em φ) = 0.

onde

$\frac{d\varphi}{dt}$ é a velocidade angular do eixo do rotor e,

$\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ a aceleração correspondente, onde supõe-se a existência de um único motor.

Salienta-se o fato importante de que as linearidades ou não-linearidades vem da modelagem matemática da estrutura, no caso do problema ideal; a presença, por exemplo, de uma única fonte de energia, em geral, contribui com a ação de não-linearidades do tipo quadráticas presentes no termo de energia cinética devido o desbalanceamento do motor de corrente contínua.

Ressaltam-se que as vibrações oriundas dos movimentos de aceleração (partida) e desaceleração (desligamento) de motores elétricos são representados pela função M_m , ou seja ela representa o torque desenvolvido pelo motor elétrico e a curva característica do motor relaciona o torque M_m com a velocidade de rotação angular.

Cada ponto, desta curva, considerada, pode ser obtida da seguinte maneira: Mantém-se a velocidade angular $\frac{d\varphi}{dt}$ constante, enquanto se determina o torque no eixo do motor.

Como cada ponto gira a uma velocidade angular constante, essa curva é chamada de característica estática, determinando seu funcionamento em estado estacionário. Na realidade, todo motor possui uma família destas curvas, em discussão, e todas elas representam a mesma relação de grandezas, mas a cada uma corresponde um certo valor de Regulagem.

Imagine-se, por exemplo, que um motor possua uma família de curvas, as quais são diferenciadas variando-se a tensão elétrica U que é aplicada aos seus terminais.

Cada posição de controle de regulagem com o qual se aumenta ou se diminui a tensão elétrica, produz uma correspondente curva característica, cada uma delas, relacionada a um valor de potência constante, mas diferentes entre si. A primeira delas sendo do tipo exponencial (mais realística) e, a segunda sendo do tipo linear para cada valor da tensão U que será o parâmetro de

controle do problema. Neste trabalho, adota-se o tipo linear, sendo mais comum na prática, para motores de corrente contínua.

A seguir, discute-se o problema na região de ressonância.

Região de ressonância

A região de ressonância é, definida por:

$$\frac{d\varphi}{dt} - \omega = O(\varepsilon_1)$$

onde:

- ε_1 : é um pequeno parâmetro e,
- ω : é a frequência natural do sistema dinâmico vibratório.

Supondo-se que o sistema dinâmico, em questão, partisse do repouso, a velocidade angular $\frac{d\varphi}{dt}$ do eixo do rotor cresceria até atingir a região de ressonância dependendo das condições iniciais e dos parâmetros físicos, tais como:

- Massa desbalanceada;
- Massa do motor;
- Momento de inércia do rotor;
- Excentricidade da massa desbalanceada e;
- Constantes de torque desenvolvido pelo motor.

Para valores crescentes da tensão aplicada nos terminais do motor, a velocidade angular $\frac{d\varphi}{dt}$ continuaria crescendo além da região de ressonância (**Fenômeno da Passagem pela Ressonância**) ou, permaneceria próxima a frequência natural ω do sistema (**Fenômeno da**

Captura pela Ressonância). O tempo de passagem pela ressonância, dependerá, também das condições iniciais do sistema.

O problema da passagem pela ressonância, tem sido objeto de estudo por vários centros de pesquisa, sendo que o maior esforço concentra-se nos sistemas tradicionais ditos ideais.

O primeiro autor a sistematizar estas propriedades dos modelos matemáticos tomados como sendo do tipo não-ideais, foi o Prof. Kononenko (1969), depois dele poucos autores se preocuparam com este tipo de problema, entre eles, citam-se Nayfeh e Mook (1979) e Dimentberg (1997).

Atualmente, uma completa e compreensível revisão deste assunto, considerando o período de 1904- 2001, pode ser encontrada nos trabalhos feitos por Balthazar et al. (1999, 2001, 2002).

Finalmente, uma característica importante de um sistema não-ideal é a presença do **Efeito Sommerfeld** que pode ser observado em uma região de ressonância do sistema. Este efeito está associado ao fenômeno de salto e ao aumento de potência exigida pela fonte de energia: Ao se elevar continuamente a tensão de alimentação do motor, estando esse com frequência de rotação próxima a da região de ressonância do sistema, provoca-se o aumento da sua rotação, até o momento que essa se estabiliza em torno de um determinado valor (igual a da frequência natural do sistema). A partir desse instante, sucessivos acréscimos da tensão somente elevam a potência elétrica absorvida pelo motor, que não é mais canalizada para alterar a sua rotação, mas sim para aumentar as amplitudes de vibração da estrutura. O processo possui um limite: quando a estrutura não é mais capaz de absorver a energia cedida pelo motor, a rotação desse dispara, atingindo, após um certo período, valores estáveis e proporcionais à tensão de alimentação. Este efeito foi estudado, inicialmente por Sommerfeld (1904) e Kononenko (1969), seguido de outros trabalhos citados anteriormente.

Ressalta-se que em (de Mattos et al.) refez o experimento de Sommerfeld, com sucesso e constatou os resultados que foram obtidos anteriormente, mencionados em Kononenko (1969). Além destes resultados, constatou-se que o modelo matemático não-ideal deveria ter não-

linearidades quadráticas (oriundas do motor de corrente contínua) e cúbicas da mesma ordem de grandeza.

Nesse contexto insere-se este trabalho original que busca investigar a dinâmica de um sistema ideal e não-ideal, definido posteriormente como sendo um pórtico plano simples.

1.3 A estrutura aporticada

A análise teórica de pórticos tem sido objeto de estudo por parte de alguns pesquisadores, citam-se:

Barr and McWannell (1971) estudaram o efeito da ressonância interna no pórtico plano sob uma excitação sísmica. Eles definem o campo de deslocamentos em termos de coordenadas generalizadas e descartam as forças dissipativas.

Mazzili (1988) analisa o mesmo pórtico plano. Desenvolve o análises não-linear da maneira consistente.

Neste trabalho, considerou-se um pórtico plano simples cujas dimensões foram estabelecidas de tal forma que possibilitam uma relação de, aproximadamente, um para dois entre os dois primeiros modos de vibração. As dimensões são similares do pórtico de Garzeri (2001).

1.4 Estratégia de controle por saturação em problemas não-ideais

Poucas estratégias de controle, com o objetivo de reduzir as vibrações, vêm sendo estudadas para problemas não-ideais, dependendo de sua característica, utilizou-se o método dos gradientes conjugados em Yamanawa e Murakami (1989) e a técnica de Regularização de Tikhonov em Balthazar et al. (2001).

Neste trabalho, estuda-se uma técnica de controle por saturação aplicada a uma estrutura aporticada excitada por uma força harmônica e por uma fonte de energia não-ideal, que poderá ser descrita, sucintamente, como sendo da seguinte maneira:

Introduz-se um controlador, que toma a forma de um sistema de segunda ordem, o qual é acoplado ao sistema não ideal (planta), através da definição de termos quadráticos (não-lineares).

O esquema do controle adotado baseia-se na conexão da planta para o controlador, através de um atuador e de uma lei de retroalimentação não-linear.

Quando a planta é forçada a entrar em ressonância, os termos quadráticos geram um acoplamento que canaliza a energia para o controlador, por conseguinte, satura a resposta da planta.

Através dos ganhos adequadamente colocados no controlador, a resposta em ressonância da planta poderá ser reduzida para amplitudes relativamente pequenas, enquanto que o excesso de energia oscilatória será transferido para o controlador.

O método de controle, exposto, baseia-se no fenômeno de saturação e na ressonância interna 1:2, a ser elucidado durante o transcorrer da tese.

Várias abordagens teóricas e experimentais da técnica de controle baseado no fenômeno de saturação e ressonância interna, foram efetuadas, entre elas citam-se os trabalhos de : Golnaraghi (1991), Queini (1997), Queini and Nayfeh (1999), Pai (1998), Tuer (1994).

Ressaltam-se que todos eles se preocuparam com a investigação de problemas do tipo ideais. Os ensaios numéricos, via SIMULINK, do sistema de controle por saturação – um controlador não linear acoplado ao sistema aporticado ideal e não ideal – tem sido objeto de estudo por nós em Palacios et al. (2001, 2002).

A seguir, mencionam-se os objetivos do presente trabalho.

1.5 Objetivos

Os principais objetivos desta tese podem-se ser resumidos como, a seguir:

- Elaboração de um modelo matemático do sistema eletro-estrutural não-ideal que consiste de um pórtico plano de comportamento geométrico não-linear excitado por um motor elétrico de corrente contínua com desbalanceamento e de potência limitada.
- Realização de um estudo numérico-analítico de vibrações não lineares que pode ocorrer na interação entre a estrutura do tipo pórtico simples e de um motor de corrente contínua com desbalanceamentos.
- Desenvolvimento e análise de algoritmos de controle por saturação para sistemas não-ideais por meio de ensaios numéricos usando o programa de SIMULINK/MATLAB.

1.6 Materiais e métodos

Para os ensaios numéricos deste trabalho utilizou-se um computador Pentium III, rotinas de programação em MATLAB 5.3 como:

- ODE45 do MATLAB para integração direta das equações de movimento nas variáveis de estado de primeira ordem ou um modelo de SIMULINK,
- Diagramas de bloco de SIMULINK para ver o desempenho o sistema de controle por saturação,
- Obtenção dos mapas de Poincaré, para caracterização da topologia do problema.

A seguir, descreve-se como será esquematizado o presente trabalho.

1.7 Descrição sucinta da tese

O desenvolvimento da tese está dividido em seis capítulos, que serão apresentados como se segue:

Neste capítulo inicial apresenta-se uma visão geral sobre “sistemas não-ideais e de controle por saturação” e que tem importância na área de engenharia mecânica.

No capítulo 2, trata-se do modelo matemático de um sistema não ideal que consiste de uma estrutura elástica aporticada que suporta um motor não ideal. As equações de movimento na forma discretizada surgem da utilização do método de Lagrange em sua forma completa e simplificada, como será visto.

No capítulo 3, apresentam-se os resultados numéricos obtidos através da integração direta usando o integrador de Runge-Kutta de ordem 4-5 com passo de integração variável programado em linguagem MATLAB que foram realizados durante a passagem pela primeira e segunda ressonância da estrutura para cada valor crescente do parâmetro de controle (relativo a tensão de alimentação ou torque constante).

No capítulo 4, apresenta-se o método da média aplicado a um sistema não-ideal para obter-se as soluções aproximadas, destacando-se o desempenho deste método nas soluções de sistemas de equações diferenciais não-lineares e não-ideais.

No capítulo 5, apresentam-se os resultados numéricos da técnica de controle por saturação aplicado inicialmente em um sistema ideal com o fim de construir um sistema de controle adequado para o problema não-ideal (pórtico plano excitado por um motor não ideal) usando o programa SIMULINK/MATLAB®.

No capítulo 6, apresentam-se alguns resultados referentes a particularizações do problema estudado, neste trabalho, com o objetivo de completar os estudos, aqui efetuados.

No capítulo 7, apresenta-se uma extensão do problema estudado para excitação não-ideal com dois motores de corrente contínua, mostrando alguns fenômenos não-lineares, tais como: efeito de Sommerfeld e auto-sincronização.

No capítulo 8 apresentam-se as discussões finais e o resumo das principais conclusões, desta tese.

A seguir, foram citadas as principais referências bibliográficas e, o apêndice que completam o trabalho.

No apêndice A, apresentam-se as rotinas computacionais no ambiente do programa MATLAB®, usadas durante o desenvolvimento da tese.

No apêndice B, apresentam-se os comentários sobre o desenvolvimento computacional utilizado neste trabalho.

Capítulo 2

Modelagem Dinâmica do Problema

Neste capítulo, discute-se o problema da modelagem matemática, adotada na solução do problema, não-ideal, objeto de nossa pesquisa de doutorado.

2.1 - Introdução

A consideração das não-linearidades presentes em um sistema físico faz com que este seja mais difícil de ser modelado, analisado e identificado quando comparado com os sistemas lineares Keisler et al. (1986).

Contudo, à maior parte dos sistemas físicos encontrados na prática são, de fato, não lineares em natureza. Mesmo sistemas que podem ser representados por modelos lineares tendem a exibir comportamento não linear sob certas condições. Em tais casos, um engenheiro (moderno) freqüentemente é forçado a tomar decisões acerca da inclusão ou não de efeitos não lineares em seus modelos matemáticos.

Este capítulo apresenta a inclusão de não-linearidades geométricas no modelo matemático que será tomado como pesquisa.

Ressalta-se que o modelo matemático proposto neste trabalho para a curvatura não linear da estrutura flexível de fundação parte do pressuposto de que qualquer elemento infinitesimal localizado ao longo da estrutura irá ocupar, após a deflexão desta, uma nova posição no plano,

tendo alteradas tanto a sua abscissa quanto a sua ordenada em relação ao sistema de referência móvel XOY .

2.2 – Descrição do problema estudado

O problema proposto, cujo modelo matemático foi tomado como sendo um **sistema não-ideal**, consiste no acoplamento entre uma fundação elástica linear do tipo pórtico plano (estrutura aporticada) e de um motor elétrico de corrente contínua desbalanceada com potência limitada (motor não-ideal).

A figura 2.1 apresenta um modelo real de um sistema não-ideal que consiste de um pórtico metálico esbelto com um motor elétrico de corrente (CC) fixado no centro do seu vão livre.

A figura 2.2 apresenta os parâmetros da estrutura elástica e do motor não-ideal analisados neste capítulo.

- **Sobre a estrutura aporticada:**

A estrutura aporticada tem:

As duas colunas engastadas em suas bases de comprimento h ,

A seção transversal constante de área A_c e,

Momento de inércia da seção transversal da coluna I_c que suportam massa m na extremidade superior.

A viga horizontal é articulada às colunas em seus extremos com comprimento L ,

A seção transversal constante de área A_b e,

Momento de inércia da seção transversal da viga I_b .

Considera-se um material linear com módulo de Young E e densidade ρ .

- **Sobre o motor não-ideal:**

O motor não-ideal,

Está apoiado no meio da viga horizontal com massa M ,

Seu rotor tem momento de inércia I_m e,

Carrega uma massa desbalanceada m_0 localizada a uma distância r de suas flechas “shafts”.

- **Sobre o modelo matemático:**

O sistema não-ideal é modelado como sendo de **três graus de liberdade**:

dois deles relativos aos deslocamentos do ponto central da viga (horizontal e vertical) e o outro relacionado com o motor elétrico (rotação angular).

As dimensões do pórtico são estabelecidas de tal forma que possibilitam uma relação de ressonância de 1:2, entre os dois primeiros modos de vibração (característica que permite a ocorrência do fenômeno de acoplamento de modos ou de **ressonância interna**)

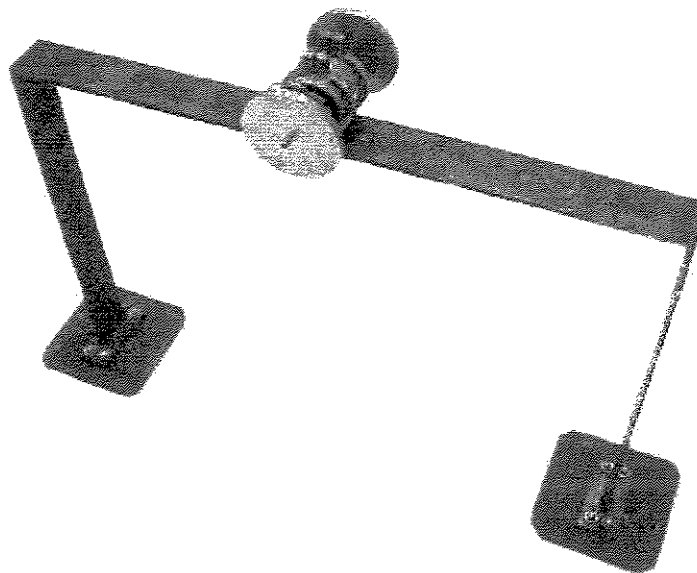


Figura 2.1 Modelo Real de um Pórtico Excitado por um Motor de Corrente Contínua.

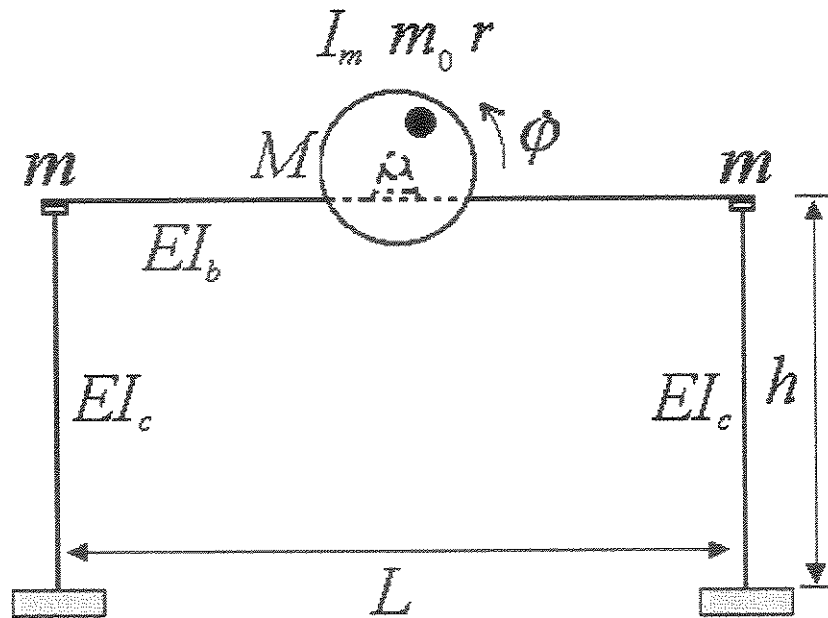


Figura 2.2 Modelo Físico do Sistema Não-Ideal.

2.3 – Obtenção das Equações de Movimento

O modelo geométrico para o sistema não-ideal é estabelecido de acordo com a representação esquemática mostrada na figura 2.3.

Para a descrição do movimento, toma-se o sistema de referência XOY no extremo esquerdo do pórtico plano e escolhe-se as variáveis adimensionais generalizadas, como sendo:

$$q_1 = \frac{u_2}{h}, \quad q_2 = \frac{v_2}{L}, \quad (2.1)$$

onde

u_2 é o deslocamento lateral da seção da viga do vão central e,
 v_2 seu deslocamento vertical.

Note que as coordenadas (q_1, q_2) estão relacionadas ao modo de vibração horizontal com frequência ω_1 e ao modo de vibração vertical da viga com frequência ω_2 , respectivamente.

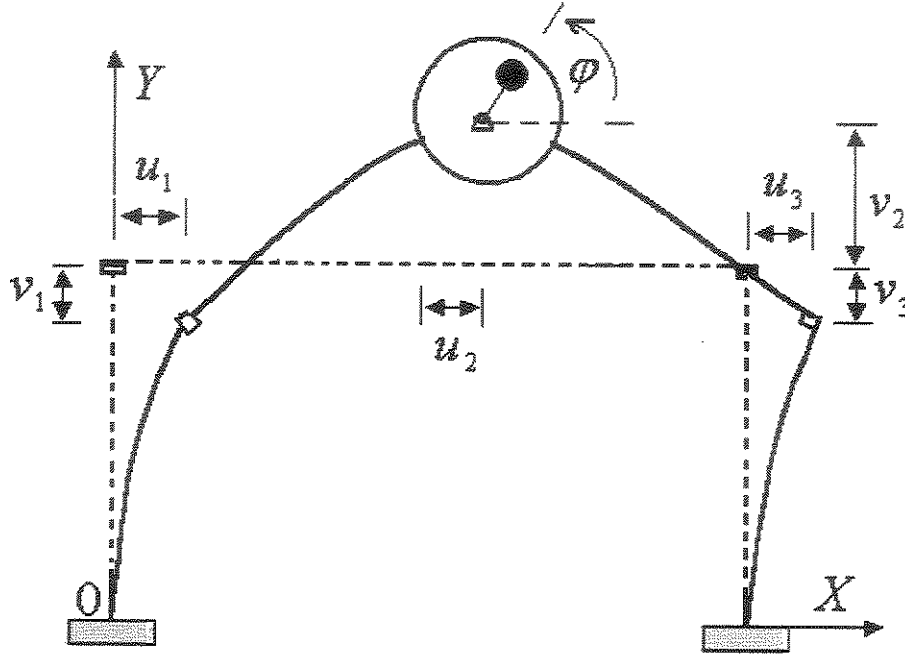


Figura 2.3 Modelo Geométrico do Sistema Não-Ideal.

Considerando-se os dois primeiros modos de vibrar do pórtico (para a ocorrência do fenômeno de saturação modal), ou seja, tem-se que as formas de vibrar das colunas e viga podem ser aproximadas por funções matemáticas, denominadas funções de forma.

Uma aproximação para as colunas é da forma:

$$u = \frac{3}{h^3} \left(\frac{hx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right), \quad 0 \leq x \leq h \quad (2.2)$$

e uma aproximação para a viga seria da forma

$$v = \frac{12}{L^3} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{L^2 x}{4} \right), \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \quad (2.3)$$

onde

u e v descrevem, respectivamente, as deformações estáticas que uma viga engasta em um extremo com massa concentrada no seu extremo livre e de uma viga de suporte simples com massa concentrada em seu ponto central, respectivamente com x sendo a coordenada do eixo de suporte (“strut”).

A rigidez linear das colunas e da viga associados aos primeiros modos de vibração k_c e k_b são calculados pelo processo clássico de Rayleigh-Ritz, obtendo-se

$$\begin{aligned} k_c &= \frac{3EI_c}{h^3}, \\ k_b &= \frac{48EI_b}{L^3}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

Considerando-se o encurtamento das colunas e da viga quando deformados e desprezando-se termos de ordem superior a dois, escrevem-se as seguintes relações:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_2 + \frac{B}{4} v_2^2, \\ u_3 &= u_2 - \frac{B}{4} v_2^2, \\ v_1 &= -\frac{C}{2} u_1^2, \\ v_3 &= -\frac{C}{2} u_3^2, \end{aligned} \tag{2.5}$$

onde as constantes B e C são calculadas das funções definidas nas equações (2.2) e (2.3) cujos valores são

$$B = \frac{24}{5L}, \quad C = \frac{6}{5h}, \tag{2.6}$$

Um motor não-ideal desbalanceado é posicionado no vão central da viga. O deslocamento angular de seu rotor é dado por

$$q_3 = \varphi, \quad (2.7)$$

O desbalanceamento do motor produz as forças necessárias para a excitação do pórtico.

O torque gerado pelo motor $M_m(t)$ e o torque de atrito $H(t)$, para cada nível de tensão, são assumidos como conhecidos, conseguidas pelo modelo de fábrica ou de prévios testes experimentais, a parte experimental com mais detalhes foi tratada por Brasil et al. (2001).

Os deslocamentos horizontal e vertical da massa desbalanceada são

$$\begin{aligned} u_0 &= u_2 + r \cos q_3, \\ v_0 &= v_2 + r \sin q_3, \end{aligned} \quad (2.8)$$

As equações de Lagrange são utilizadas na obtenção das equações diferenciais do movimento em termos das coordenadas generalizadas sendo, então, necessárias as obtenções das expressões da energia potencial total T , da energia cinética V , das funções de dissipação de Rayleigh e o trabalho das forças conservativas e não-conservativas aplicadas ao sistema não-ideal:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j - \frac{\partial V}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, 3, \quad (2.9)$$

onde os Q_j são as forças não conservativas definidas como

$$\begin{aligned} Q_1 &= -c_1 h \dot{q}_1, \\ Q_2 &= -c_2 L \dot{q}_2, \end{aligned}$$

$$Q_3 = M_m(t) - H(t), \quad (2.10)$$

onde c_1 e c_2 são os amortecimentos viscosos lineares.

• **A Energia Cinética:**

A energia cinética do pórtico T_p , é dada por

$$T_p = \frac{1}{2}[m(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + (M - m_0)(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)], \quad (2.11)$$

onde

x_1 , y_1 , x_2 e y_2 são as coordenadas de posição das massas, dadas por

$$\begin{aligned} x_1 &= u_1, \\ y_1 &= h + v_1, \\ x_2 &= \frac{L}{2} + u_2, \\ y_2 &= h + v_2, \end{aligned} \quad (2.12)$$

A energia cinética do motor não-ideal T_m , é dada por

$$T_m = \frac{1}{2}[m_0(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) + I_m\dot{\phi}^2], \quad (2.13)$$

onde x_0 e y_0 são as coordenadas de posição da massa desbalanceada, dada por

$$x_0 = \frac{L}{2} + u_0, \quad y_0 = h + v_0, \quad (2.14)$$

Finalmente, a energia cinética do sistema T em coordenadas generalizadas, retendo até termos cúbico, é dada por

$$T = T_p + T_m, \quad (2.15)$$

ou

$$T = \frac{1}{2}[(2m + M)h^2\dot{q}_1^2 + ML^2\dot{q}_2^2 + (I_m + m_0r^2)\dot{q}_3^2 + 2m_0r(-h\dot{q}_1\dot{q}_3\sin q_3 + L\dot{q}_2\dot{q}_3\cos q_3)], \quad (2.16)$$

• **A Energia Potencial:**

A energia potencial do pórtico V_p , é dada por

$$V_p = \frac{1}{2}\left[k_c(u_1^2 + u_3^2) + k_b\left(v_2 - \frac{v_1 + v_3}{2}\right)^2\right] + mg(v_1 + v_3) + (M - m_0)gv_2, \quad (2.17)$$

A energia potencial do motor não-ideal V_m , é dada por

$$V_m = m_0gv_0, \quad (2.18)$$

Finalmente, a energia potencial do sistema V em coordenadas generalizadas, retendo até termos cúbicos, é dada por

$$V = V_p + V_m, \quad (2.19)$$

ou

$$V = MgLq_2 + (k_c - mgC)h^2q_1^2 + \frac{k_bL^2}{2}q_2^2 + \frac{k_bCh^2L}{2}q_1^2q_2 + m_0gr\sin q_3, \quad (2.20)$$

• **As Equações Governantes:**

Substituindo as expressões da energia cinética (2.16) e da energia potencial (2.20) na expressão das equações de Lagrange (2.9), depois de certas manipulações algébricas, obtém-se

$$\ddot{q}_1 + \omega_1^2q_1 = -\alpha_5q_1q_2 + \alpha_1(\ddot{q}_3\sin q_3 + \dot{q}_3^2\cos q_3) - \mu_1\dot{q}_1,$$

$$\ddot{q}_2 + \omega_2^2q_2 = -\alpha_6q_1^2 + \alpha_2(-\ddot{q}_3\cos q_3 + \dot{q}_3^2\sin q_3) - \mu_2\dot{q}_2 - \alpha_8,$$

$$\ddot{q}_3 = \alpha_3 \ddot{q}_1 \sin q_3 - \alpha_4 \ddot{q}_2 \cos q_3 - \alpha_7 \cos q_3 + \frac{M_m(t) - H(t)}{(I_m + m_0 r^2)}, \quad (2.21)$$

onde

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{m_0 r}{(2m + M)h}, \quad \alpha_2 = \frac{m_0 r}{ML}, \quad \alpha_3 = \frac{m_0 h r}{I_m + r^2 m_0}, \quad \alpha_4 = \frac{m_0 L r}{I_m + r^2 m_0}, \\ \alpha_5 &= \frac{k_b CL}{2m + M}, \quad \alpha_6 = \frac{k_b Ch^2}{2mL}, \quad \alpha_7 = \frac{m_0 r g}{I_m + m_0 r^2}, \quad \alpha_8 = \frac{g}{L}, \\ \mu_1 &= \frac{c_1}{(2m + M)h}, \quad \mu_2 = \frac{c_2}{ML}, \quad \omega_1^2 = \frac{2(k_c - mgC)}{2m + M}, \quad \omega_2^2 = \frac{k_b}{M}. \end{aligned}$$

Para completar o sistema de equações dinâmicas 2.21, considera-se a equação governante do circuito elétrico de um motor que é dada (Warminsky and Balthazar, 2001) por

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + E_b = V_a, \quad (2.22)$$

onde

E_b é a força contra-eletromotriz entre os terminais da armadura do motor e pode ser escrita como

$$E_b = k_E \frac{d\varphi}{dt}.$$

O torque gerado pelo motor é definido como

$$M_m = k_m i_a \quad (2.23)$$

A Figura 2.3. exibe uma representação esquemática de um circuito elétrico do motor de corrente contínua.

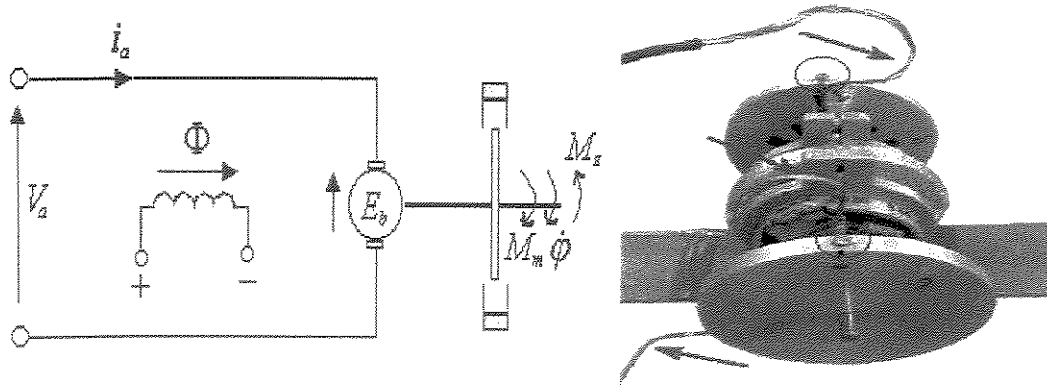


Figura 2.3. Representação esquemática de um circuito elétrico do motor de corrente contínua.

onde

V_a é a tensão de alimentação;

L_a é a indutância da armadura;

i_a é a corrente de alimentação;

R_a é a resistência da armadura;

k_m é a constante de torque do motor;

k_E é a constante de voltagem do motor

φ é a posição angular do motor;

Φ é o fluxo magnético;

M_s é o torque de oposição do disco.

Definindo-se uma quarta variável generalizada q_4 como

$$I_a = \frac{i_a}{i_r}, \quad (2.24)$$

onde i_r é uma corrente tomada como sendo inicial na armadura.

Introduzindo o tempo adimensional $\tau = \omega_1 t$, pode-se reescrever o sistema de equações diferenciais (2.21) da forma adimensional, tem-se:

$$\begin{aligned}
q_1'' + \hat{\omega}_1^2 q_1 &= -\hat{\alpha}_5 q_1 q_2 + \hat{\alpha}_1 (q_3'' \text{sen} q_3 + q_3'^2 \cos q_3) - \hat{\mu}_1 q_1', \\
q_2'' + \omega_2^2 q_2 &= -\hat{\alpha}_6 q_1^2 + \alpha_2 (-q_3'' \cos q_3 + q_3'^2 \text{sen} q_3) - \hat{\mu}_2 q_2' - \hat{\alpha}_8, \\
q_3'' &= \hat{\alpha}_3 q_1'' \text{sen} q_3 - \hat{\alpha}_4 q_2'' \cos q_3 - \hat{\alpha}_7 \cos q_3 + p_3 I_a - \hat{H}(t), \\
I_a' &= -p_1 I_a - p_2 q_3' = \hat{V}_a,
\end{aligned} \tag{2.25}$$

onde

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}_1 &= \alpha_1, \hat{\alpha}_2 = \alpha_2, \hat{\alpha}_3 = \alpha_3, \hat{\alpha}_4 = \alpha_4, \hat{\mu}_1 = \frac{\mu_1}{\omega_1}, \hat{\mu}_2 = \frac{\mu_2}{\omega_1}, \hat{\alpha}_5 = \frac{\alpha_5}{\omega_1^2}, \hat{\alpha}_6 = \frac{\alpha_6}{\omega_1^2}, \hat{\alpha}_7 = \frac{\alpha_7}{\omega_1^2}, \\
\hat{\alpha}_8 &= \frac{\alpha_8}{\omega_1^2}, \hat{\omega}_1 = 1, \hat{\omega}_2 = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \\
p_1 &= \frac{R_a}{L_a \omega_1}, p_2 = \frac{k_E}{L_a i_r}, p_3 = \frac{k_E i_r}{(I_m + m_0 r^2) \omega_1^2}, \hat{V}_a = \frac{V_a}{L_a \omega_1 i_r}, \hat{H} = \frac{H}{(I_m + m_0 r^2) \omega_1^2}.
\end{aligned}$$

Para se estudar a interação entre a estrutura aporticada e o motor considera-se o motor de corrente contínua da forma simplificada, exposta no Kononenko (1969), levando-se em conta que $I_a' = 0$, o torque gerado pelo motor pode ser expressado da forma

$$M_m = \hat{a} - \hat{b} q_3', \tag{2.26}$$

que representaria a curva característica do motor na forma linear, onde:

A constante adimensional $\hat{a}$ representa o parâmetro de controle (torque constante ou relativo à tensão de alimentação) e, a constante $\hat{b}$ escolhida para um determinado tipo de motor,

$$\text{onde } \hat{a} = \frac{p_2}{p_1} \hat{V}_a, \hat{b} = \frac{p_2 p_3}{p_1}.$$

Capítulo 3

Resultado das Simulações Numéricas: Utilizando-se O Método de Integração Direta das Equações de Movimento

3.1 Introdução

Muitos métodos de integração numérica direta são utilizados para achar as respostas transientes e estados estacionários de sistemas mecânicos vibratórios lineares e não-lineares.

Temos os seguintes métodos: método da Diferença Central, método de Runge-Kutta com diferentes versões, método de Houbolt, método de Newmark e método de Theta-Wilson que foram comparadas em Xie (1996) pela qual sugere que o algoritmo mais eficiente seria o método de Runge-Kutta para a integração de equações dinâmicas não-lineares.

Os primeiros ensaios numéricos com as equações de movimento em questão foram realizados para diferentes passos de integração fixa comprovou-se a mudança nas características dinâmicas da estrutura aporticada e da rotação do motor (ver mais detalhe no Apêndice B).

O objetivo deste capítulo é o de exibir os resultados obtidos através das simulações numéricas por integração numérica direta das equações de movimento original do sistema não-ideal (2. 21) utilizando-se o software MATLAB/SIMULINK. Neste caso, utiliza-se o integrador de Runge-Kutta com passo de integração variável (ODE45 do aplicativo de MATLAB).

Através dos resultados obtidos, neste capítulo, é possível um melhor entendimento da dinâmica do problema, em estudo. Ressalta-se que os resultados que foram obtidos, são compatíveis com os resultados experimentais, relativamente ao pórtico não-ideal, estudados nesta tese, foram realizados, recentemente por Garzeri (2001) e Brasil et al. (2002).

Ressalta-se que os parâmetros físicos e geométricos do sistema não-ideal considerados estão listados na tabela 3.1, agrupados para diferentes estruturas (sistema I e sistema II, por exemplo) similares aos dados experimentais desenvolvidos por Garzeri (2001). A idéia deste agrupamento de dados é o de poder observar as influências dos parâmetros quando são modificados, por exemplo, tomando-se a excentricidade da massa desbalanceada, o momento de inércia do rotor, etc.

Tomou-se as dimensões da estrutura aporticada, mostrada na tabela 3.1, de tal forma que a condição de ressonância interna se satisfaça, ou seja, as frequências naturais dos dois primeiros modos de vibração tomam os valores seguintes: $\omega_1=74$ rad/s e $\omega_2=147.8$ rad/s ($\omega_2 \approx 2\omega_1$).

Entenda-se, aqui, que a passagem pela primeira ressonância é considerada como sendo a frequência de rotação do motor de corrente contínua (velocidade rotacional média ou média de $\dot{q}_3$) Ω_m que está próxima da frequência natural ω_1 ($\Omega_m \approx \omega_1$) e, a passagem pela segunda ressonância é tomada como sendo a frequência de rotação do motor de corrente contínua que está próxima da frequência natural ω_2 ($\Omega_m \approx \omega_2$).

As condições iniciais (consideradas) para a estrutura aporticada são dadas por

$$q_1(0)=0.0018, \dot{q}_1(0)=0.0, q_2(0)=0.0012, \dot{q}_2(0)=0.0 \text{ e,}$$

para o motor são dadas por

$$q_3(0)=0.0, \dot{q}_3(0)=60.0 \text{ (}\dot{q}_3(0)=115.0 \text{ para a segunda região de ressonância).}$$

Tabela 3.1. Propriedades físicas e geométricas do sistema.

Nomenclatura	Sistema I	Sistema II
$L (m)$	0.52	0.518
$h (m)$	0.36	0.359
$EI (Nm^2)$	128	128
$c_1 (Ns/m)$	1.55	1.55
$c_2 (Ns/m)$	2.14	2.14
$m (Kg)$	0.5	0.5
$m_0 (Kg)$	0.1	0.1
$M (Kg)$	2.0	2.0
$r (m)$	0.01	0.06
$I_m (Kgm^2)$	0.000017	0.00014
$g (ms^{-2})$	9.81	9.81
$b (Nm/s)$	0.003	0.003

Nas duas primeiras simulações computacionais da equação (2.21) efetuadas, considerou-se apenas a interação entre a estrutura aporticada e o motor elétrico de corrente contínua, isto é, considerou-se apenas a variação do torque gerado pelo motor como constante ($\dot{M}_m = 0$) que representará as curvas características do motor elétrico, tomadas como sendo da forma de linha reta:

$$M_m - H = \hat{a} - \hat{b}\dot{q}_3, \quad (3.1)$$

onde

$\hat{a}$ é o parâmetro de controle (relativo a tensão de alimentação na armadura do motor elétrico ou torque constante) e $\hat{b}$ é o valor escolhido para um determinado tipo de motor.

3.2 Propriedades da passagem pela primeira ressonância ($\Omega_m \approx \omega_1$)

Simulação numérica 1:

Na primeira simulação numérica, realizada, os resultados numéricos foram obtidos da equação (2.21) com a condição dada pela equação (3.1) para observar o comportamento dinâmico do problema não-ideal.

Para obter os resultados numéricos durante a passagem pela primeira ressonância utilizaram-se os dados do sistema I da tabela 3.1.

Foram utilizados os gráficos de ressonância tais como resposta-frequência e resposta-parâmetro de controle que explicarão certos fenômenos não-lineares: fenômeno de salto e transferência de energia.

A figura 3.1 apresenta as amplitudes, no estado permanente, dos deslocamentos do ponto central da viga para rotações crescentes do motor de corrente contínua, durante passagem pela primeira ressonância.

Nota-se que a amplitude do movimento é calculada como sendo a metade da diferença entre o máximo de q_1 e o mínimo de q_1 e, a frequência é calculada como sendo a média da velocidade rotacional do motor de corrente contínua.

Observam-se os seguintes resultados, exibidos na figura 3.1:

Nota-se que, quando a rotação está se aproximando da primeira frequência natural $\omega_1 = 74 \text{ rad/s}$, nesse instante, tem-se uma acumulação de energia na vibração horizontal maior do que na vibração vertical.

Nota-se, também que não haverá mais aumento de amplitude do deslocamento do modo vertical, quando o modo horizontal aumenta repentinamente (o pórtico tem deslocamento lateral muito elevado) e ocorre o fenômeno de salto (“Jump”) na faixa formada entre os pontos A e B, correspondente à resposta do modo vertical e entre os pontos C e D que correspondem à resposta do modo horizontal indicando uma faixa de instabilidade (acelerações bruscas da rotação do motor).

Na figura 3.2 apresenta-se o gráfico da curva resposta-parâmetro de controle com uma certa escala (50 vezes os resultados dos modos horizontais e verticais, e 1/74 vezes o resultado da velocidade rotacional) para se ter uma melhor visualização dos resultados obtidos. Ao se elevar continuamente o parâmetro de controle (a tensão de alimentação do motor) durante a passagem pela 1ª ressonância, provoca-se valores elevados das amplitudes de vibração do modo horizontal enquanto as amplitudes do modo vertical crescem proporcionalmente ao crescimento gradativo da rotação do motor.

Na figura 3.3 são apresentados os resultados das simulações numéricas considerando $\hat{a}=0.24 Nm.$, onde observa-se as oscilações do sistema em função do tempo e a interação entre a resposta do pórtico e do motor de corrente contínua.

Os resultados que foram obtidos da figura 3.3 (a), sugerem que a rotação do motor é mantida em curto tempo acima da região de ressonância (por exemplo, aproximadamente, de 80 rad/s) para logo ser capturada na primeira região de ressonância acontecendo um aumento mais predominante nas amplitudes do deslocamento do modo horizontal do que no modo vertical, atingindo um movimento de estado permanente (ver figuras 3.3 (b) e (c)) ocorrendo uma transferência de energia entre os modos de vibração devido a ressonância interna da estrutura aporticada e o efeito Sommerfeld no motor elétrico de corrente contínua.

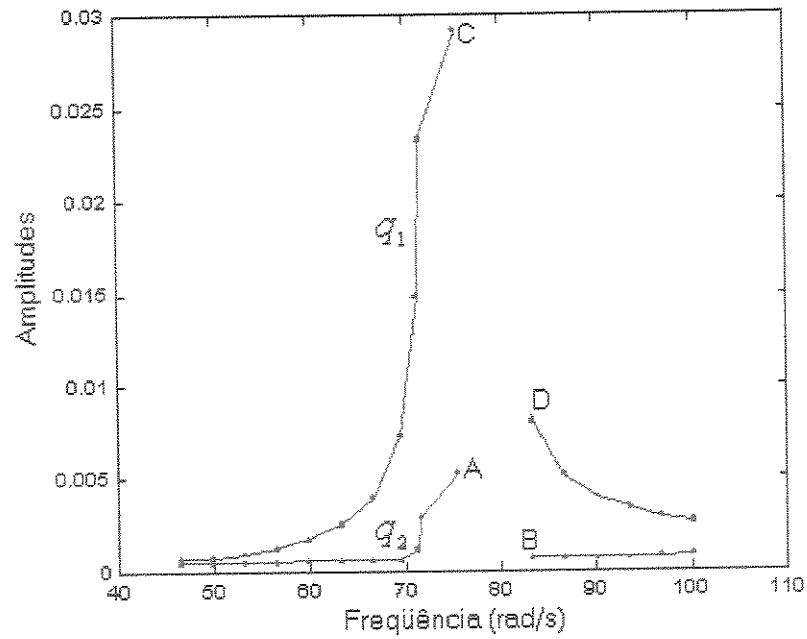


Figura 3.1. Amplitudes dos modos horizontal e vertical do pórtico durante passagem pela 1ª ressonância com rotação crescente.

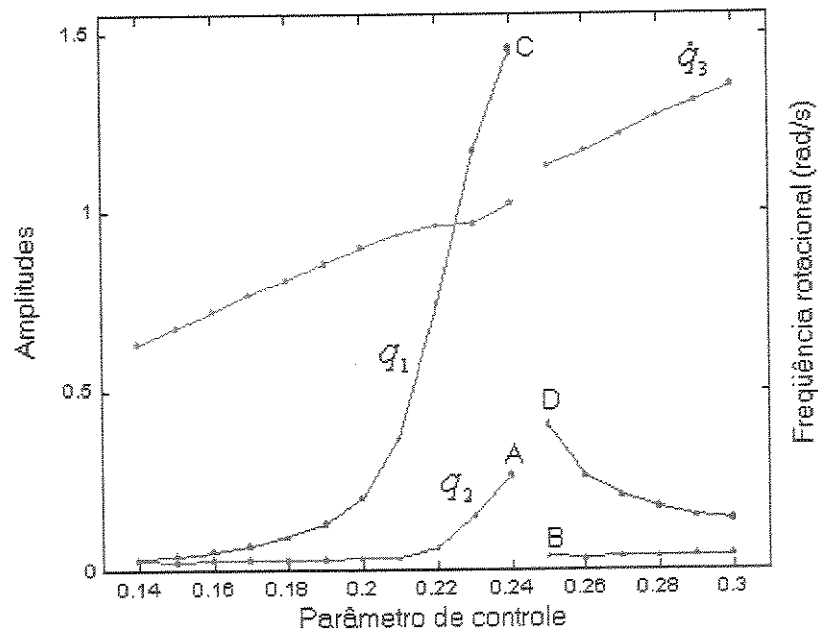


Figura 3.2. Amplitudes dos modos horizontal e vertical do pórtico e rotação do motor durante passagem pela 1ª ressonância com parâmetro de controle crescente.

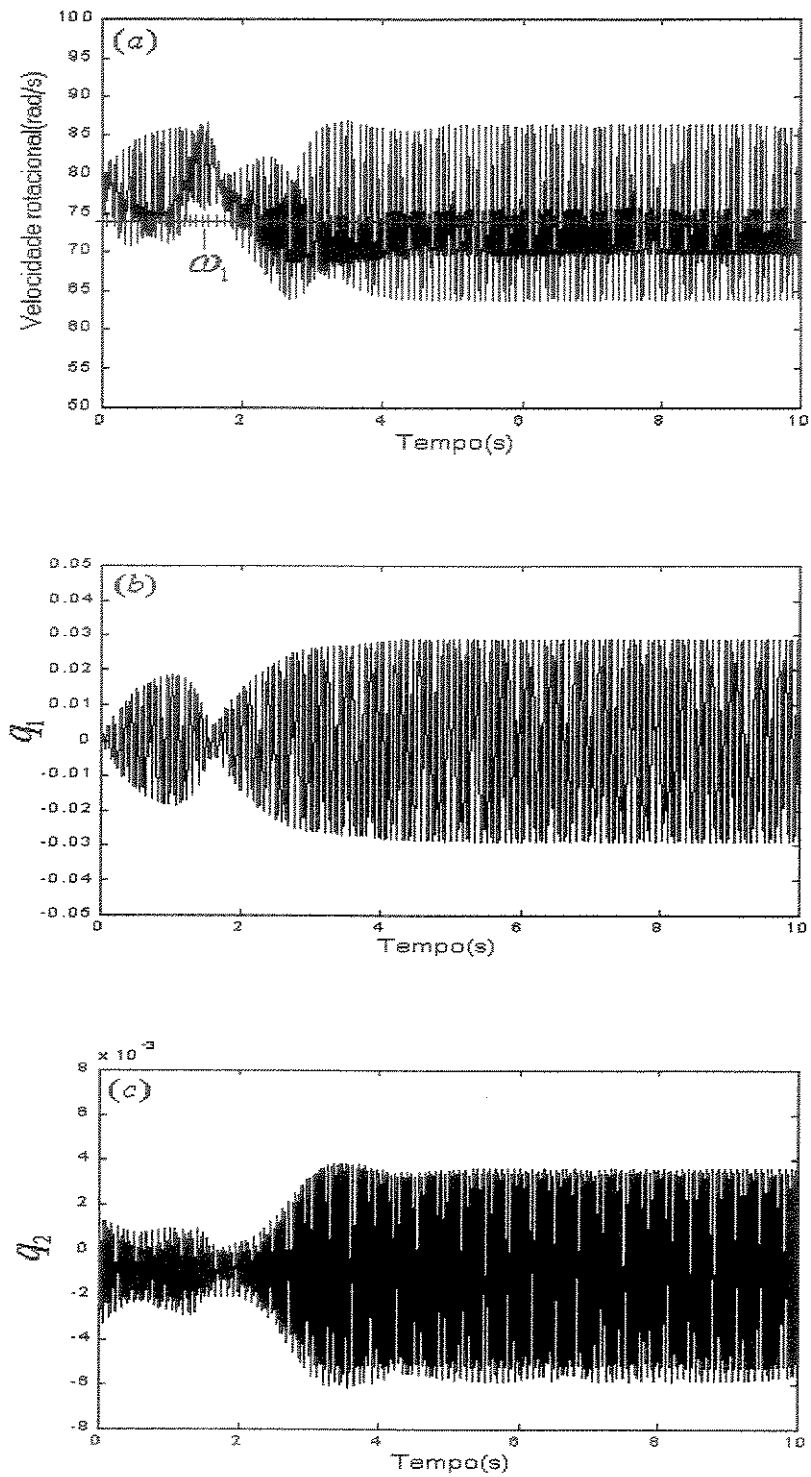


Figura 3.3. Resposta dinâmica do sistema: (a) rotação do motor com efeito Sommerfeld, (b) modo horizontal e (c) modo vertical para o parâmetro de controle $\hat{a}=0.24 \text{ Nm}$.

Pode-se visualizar no regime estacionário a característica dinâmica do pórtico correspondente ao parâmetro de controle $\hat{a}=0.24 \text{ Nm}$ (correspondente aos pontos A e C da curva ressonante da figura 3.2), escolhendo um certo intervalo de tempo como é mostrada na figura 3.4. Como pode-se observar que o pórtico tem uma característica típica de movimento periódico como são representadas em série temporal e plano fase.

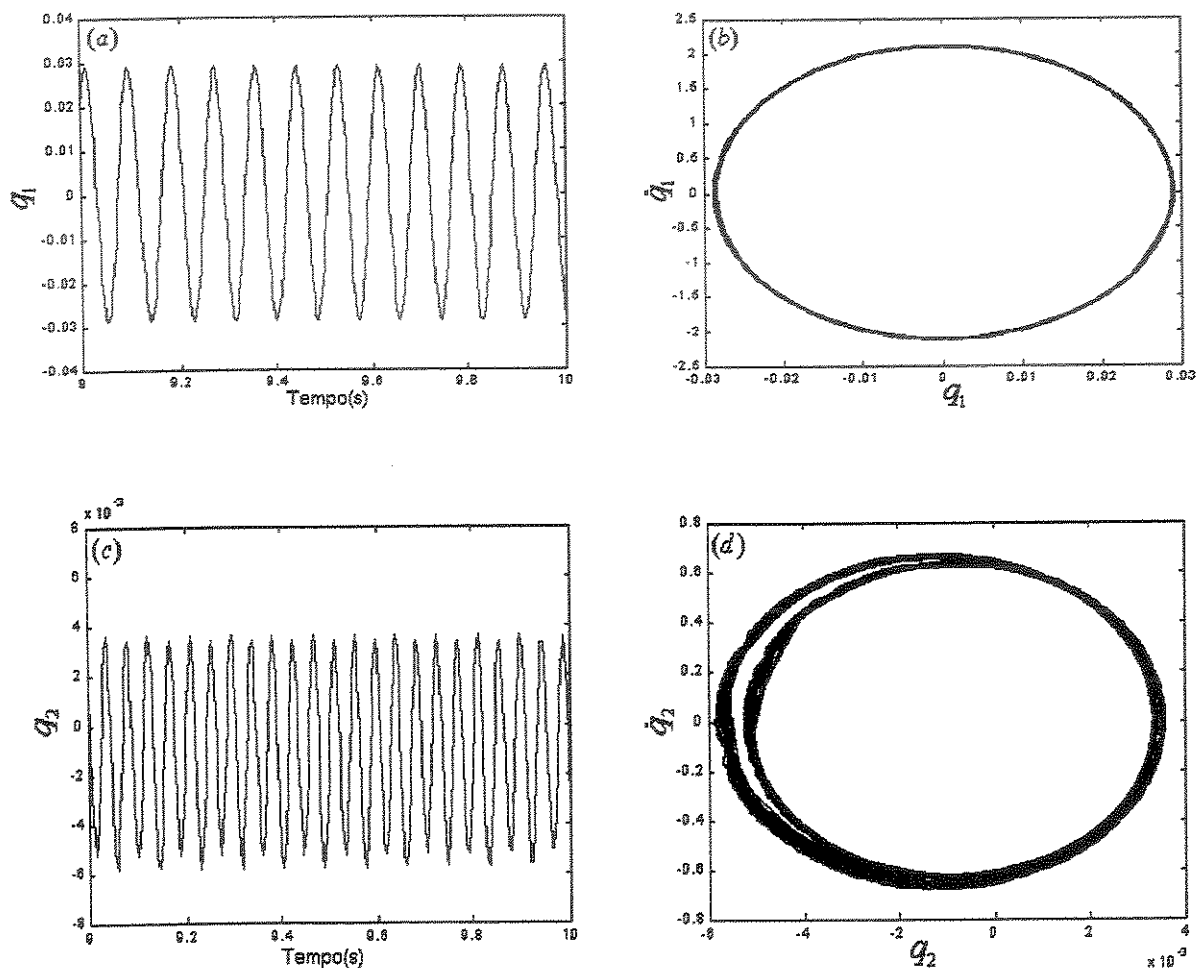


Figura 3.4. Comportamento dinâmico regular do pórtico no regime estacionário correspondente ao parâmetro de controle $\hat{a}=0.24 \text{ Nm}$.

Para outros valores do parâmetro de controle, por exemplo, para $\hat{a}=0.18, 0.21$ e 0.27 Nm , os gráficos, obtidos, sugerem que o sistema vibratório por meio de planos fase, tem característica dinâmica de movimento periódico como são mostradas na figura 3.5. Observando-se a mudança

em sua característica dinâmica do modo vertical enquanto o modo horizontal mantém sua característica dinâmica

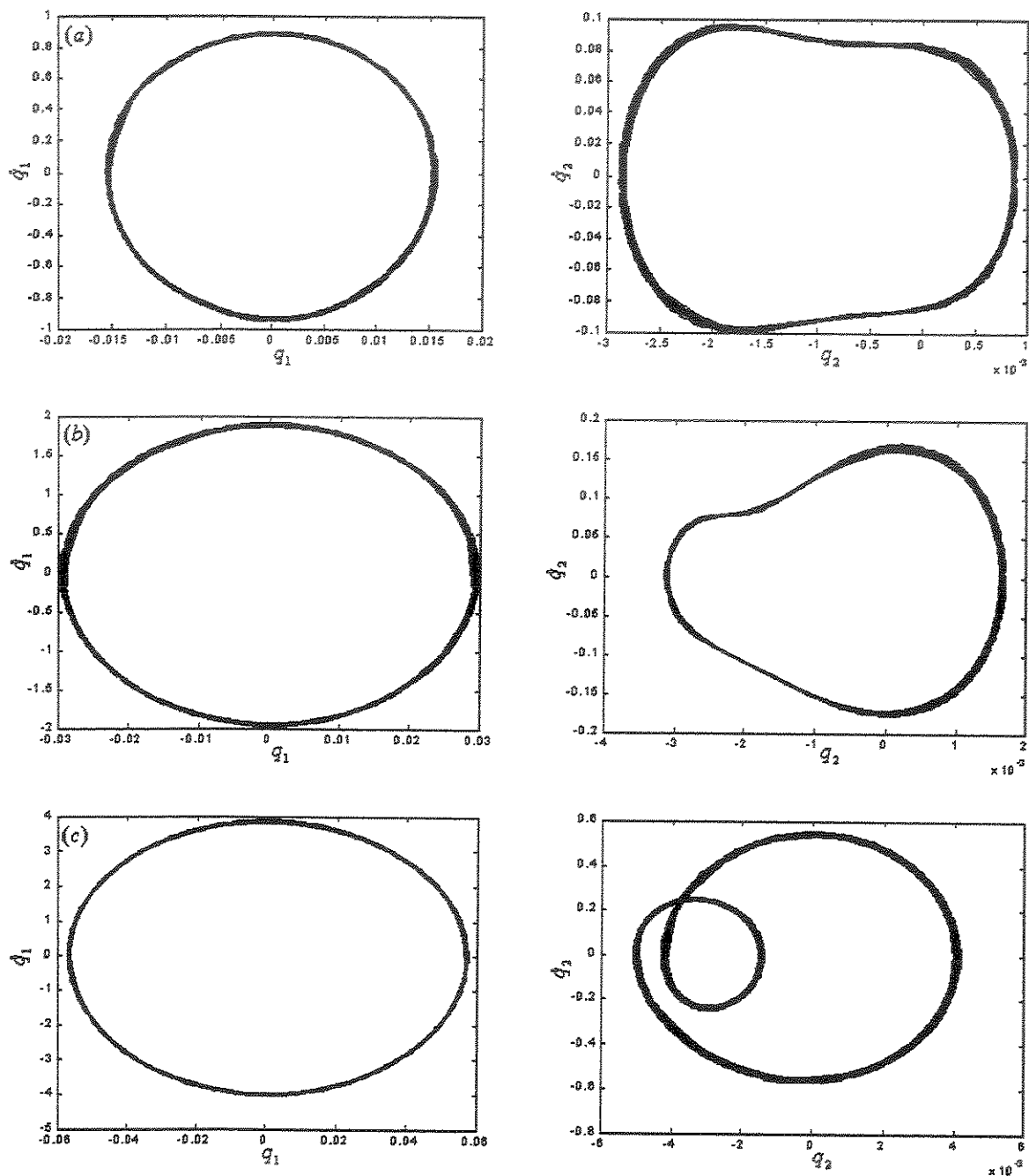


Figura 3.5. Comportamento dinâmico regular do pórtico na passagem pela primeira ressonância para os parâmetros de controle: (a) $\hat{a}=0.18 \text{ Nm}$, (b) $\hat{a}=0.21 \text{ Nm}$ e (c) $\hat{a}=0.27 \text{ Nm}$.

3.3 Propriedades da passagem pela segunda ressonância ($\Omega_m \approx \omega_2$)

Simulação numérica 2:

Os resultados numéricos são obtidos usando-se as equações de movimento governante (2.21) na passagem pela segunda ressonância, usando-se os dados fornecidos pelo sistema I da tabela 3.1.

Na figura 3.6 é apresentado o gráfico da curva resposta-frequência onde as amplitudes correspondem à metade da diferença entre os valores máximos e mínimos das oscilações dos modos horizontal e vertical do pórtico e, as frequências correspondem os valores da velocidade rotacional média do motor.

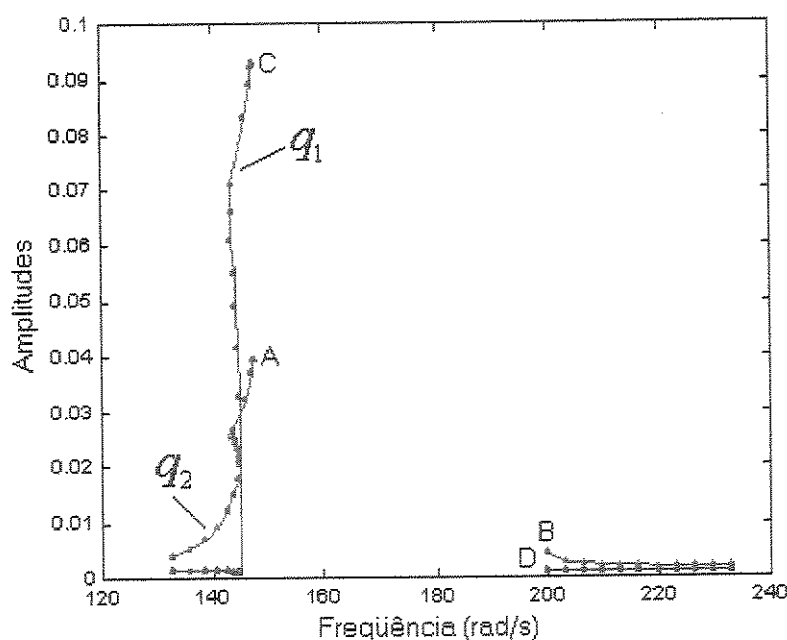


Figura 3.6. Amplitudes do ponto central da viga durante passagem pela 2ª ressonância com rotação crescente.

Nota-se, a região vazia formada entre os pontos A e B correspondente à resposta do modo vertical e, entre os pontos C e D correspondente à resposta do modo horizontal que indica uma faixa de instabilidade na estrutura e as acelerações bruscas do motor.

Na figura 3.7, ao se elevar continuamente o valor do parâmetro de controle (tensão de alimentação do motor de corrente contínua) a frequência de rotação está-se aproximando a da segunda ressonância do sistema, onde ocorrerão dois fenômenos não-lineares:

O fenômeno de saturação modal (a resposta horizontal teve seu valor elevado bruscamente, enquanto a resposta vertical permaneceu relativamente estável) e,

O fenômeno salto (que fornece o termino do fenômeno da segunda ressonância estrutural).

O gráfico da curva resposta-parâmetro de controle é calculado numericamente no estado permanente para o parâmetro de controle $\hat{a} \in (0.40, 0.70) \text{ Nm}$, onde as amplitudes são colocadas em escala de $q_j \times 50$ e a frequência rotacional em escala $\dot{q}_3 \div 74$ (com $\omega_2 \approx 2 \text{ rad/s}$) para maior visualização dos fenômenos mencionados acima.

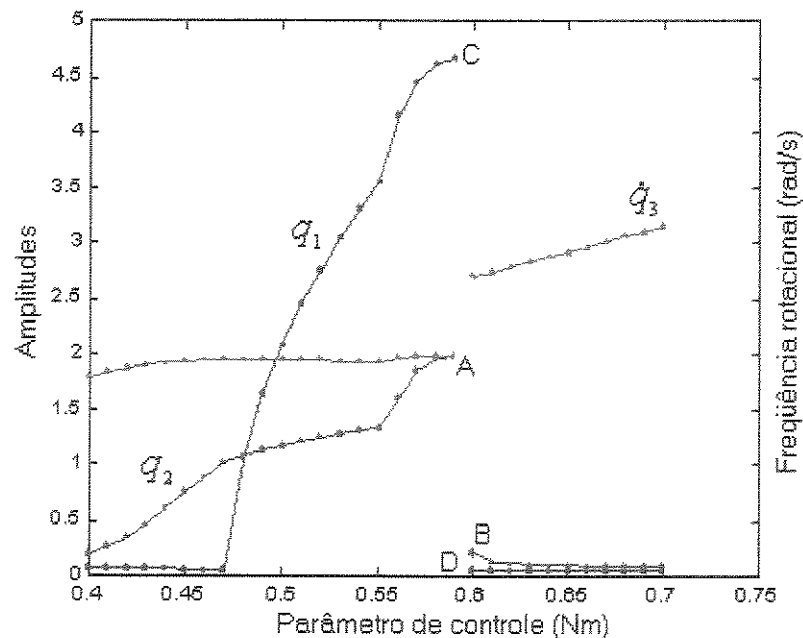


Figura 3.7. Amplitudes do ponto central da viga e rotação do motor durante passagem pela 2ª ressonância com parâmetro de controle crescente.

A seguir, adicionam-se as seguintes observações para a figura 3.7:

Primeira observação:

Para $\hat{a} \in [0.4, 0.48] Nm$: notar como as amplitudes do modo vertical estão crescendo proporcionalmente ao crescimento da frequência rotacional do motor ($\Omega_m < \omega_2$) e as amplitudes do modo horizontal são próximas a zero. Logo, as oscilações do pórtico são similares às oscilações lineares que não tem a influência da ressonância interna e dos termos não lineares quadráticos.

Segunda observação:

Para $\hat{a} \in [0.49, 0.59] Nm$: notar que as amplitudes do modo horizontal já não são nulas e aumentam abruptamente quando a frequência rotacional média do motor está muito próxima da frequência natural ω_2 ($\Omega_m \approx \omega_2$) e as amplitudes do modo vertical pára de crescer (fenômeno de saturação). A condição de ressonância interna e os termos não lineares quadráticos nas equações governantes produzem oscilações não lineares na estrutura aporticada.

Terceira observação:

Para $\hat{a} \in [0.60, 0.70] Nm$: Note que se tem a mesma característica da primeira observação com a diferença de que a frequência rotacional do motor de corrente contínua, atravessa a frequência ω_2 ($\Omega_m > \omega_2$), ocorrendo o fenômeno de salto e abandonando o fenômeno de saturação.

Complementam-se estes resultados, obtidos através da figura 3.7 onde, analisa-se o comportamento dinâmico do sistema durante a passagem pela segunda ressonância nos seguintes gráficos de séries temporais, planos de fase que correspondem aos resultados numéricos para os parâmetros de controle $\hat{a}=0.42 Nm$ (ver figura 3.8), $\hat{a}=0.50 Nm$ (ver figura 3.9), $\hat{a}=0.56 Nm$ (ver figura 3.10) e, $\hat{a}=0.60 Nm$ (ver figura 3.11). Note, figura 3.10, a captura da velocidade rotacional do motor na segunda ressonância ocorrendo uma parada no mecanismo. O fenômeno é conhecido como efeito Sommerfeld.

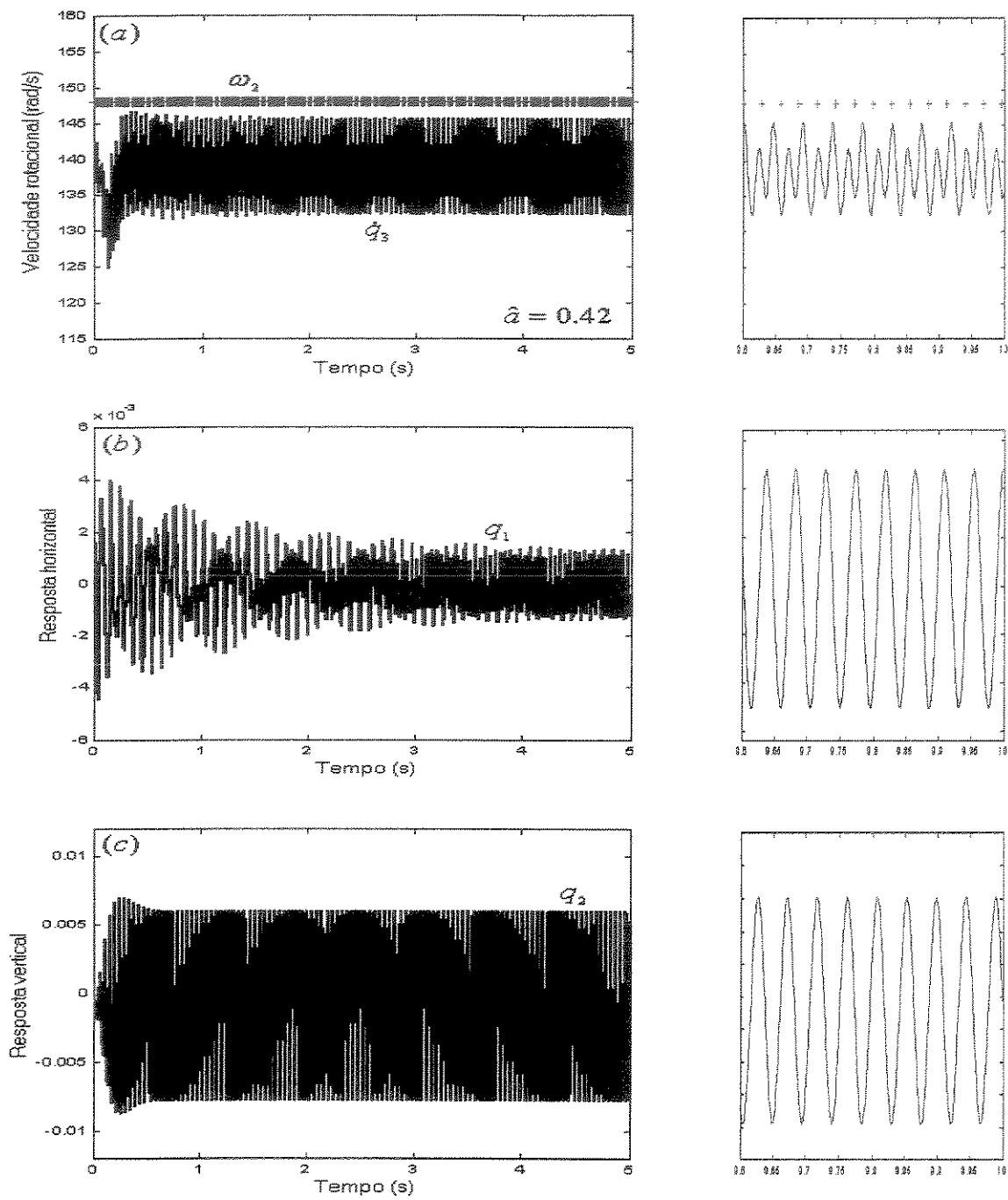


Figura 3.8. Históricos da velocidade rotacional do motor (a) e dos modos horizontal (b) e vertical (c) do pórtico para o parâmetro de controle $\hat{a}=0.42 \text{ Nm}$.

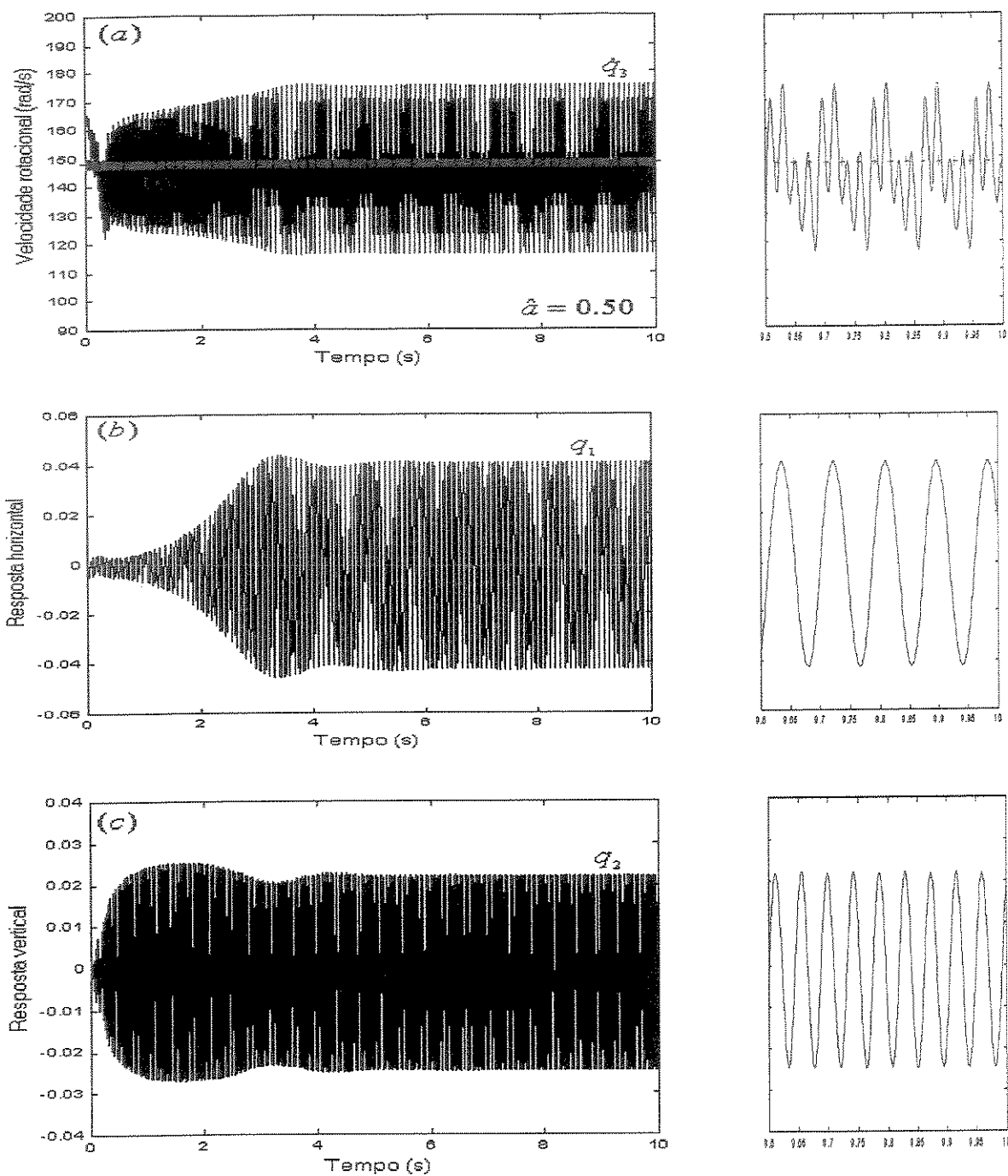


Figura 3.9. Comportamentos da velocidade rotacional do motor (a) e dos modos horizontal (b) e vertical (c) do pórtico para o parâmetro de controle $\hat{a}=0.50 \text{ Nm}$.

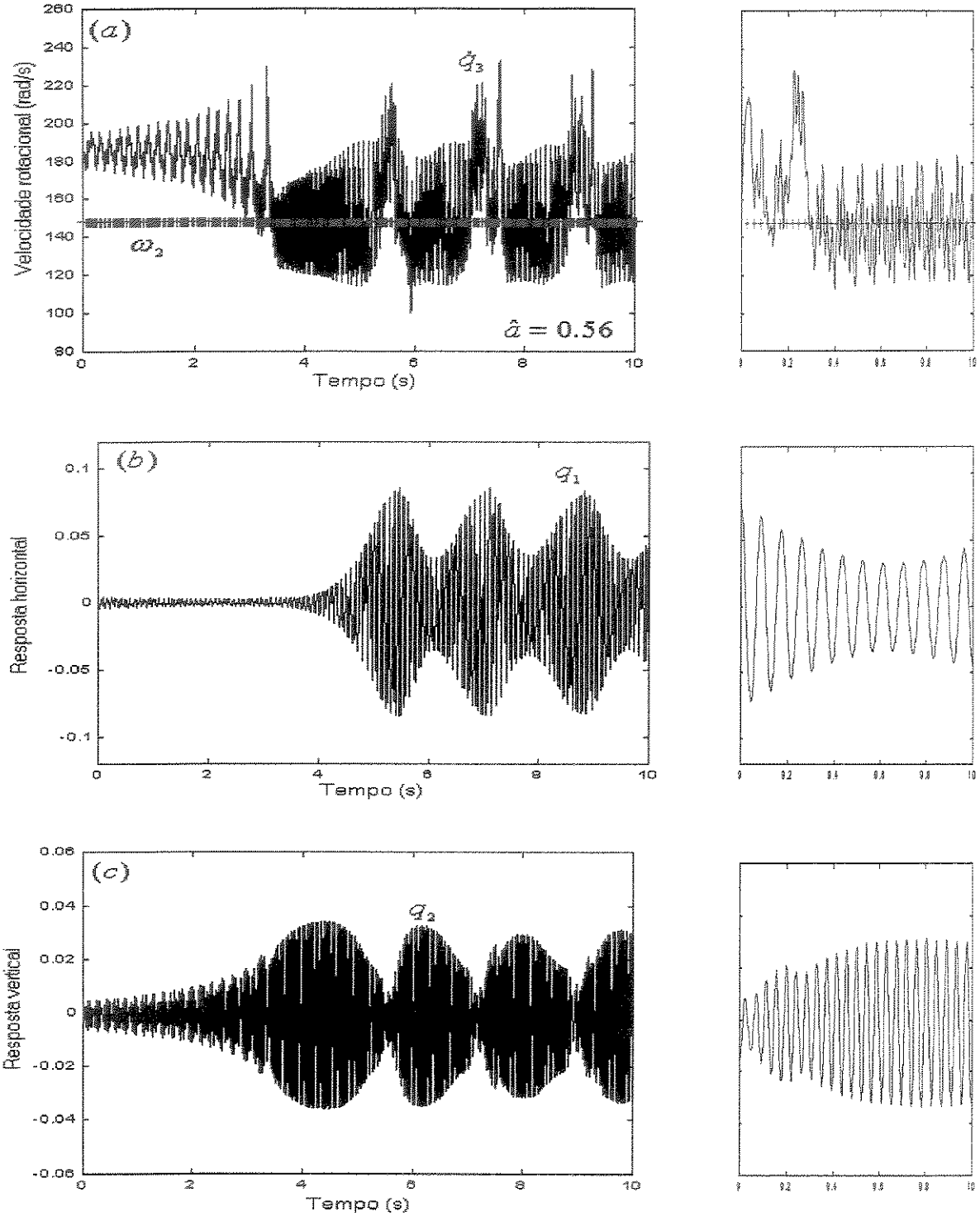


Figura 3.10. Comportamentos da velocidade rotacional do motor (a) e dos modos horizontal (b) e vertical (c) do pórtico para o parâmetro de controle $\hat{a}=0.56 \text{ Nm}$.

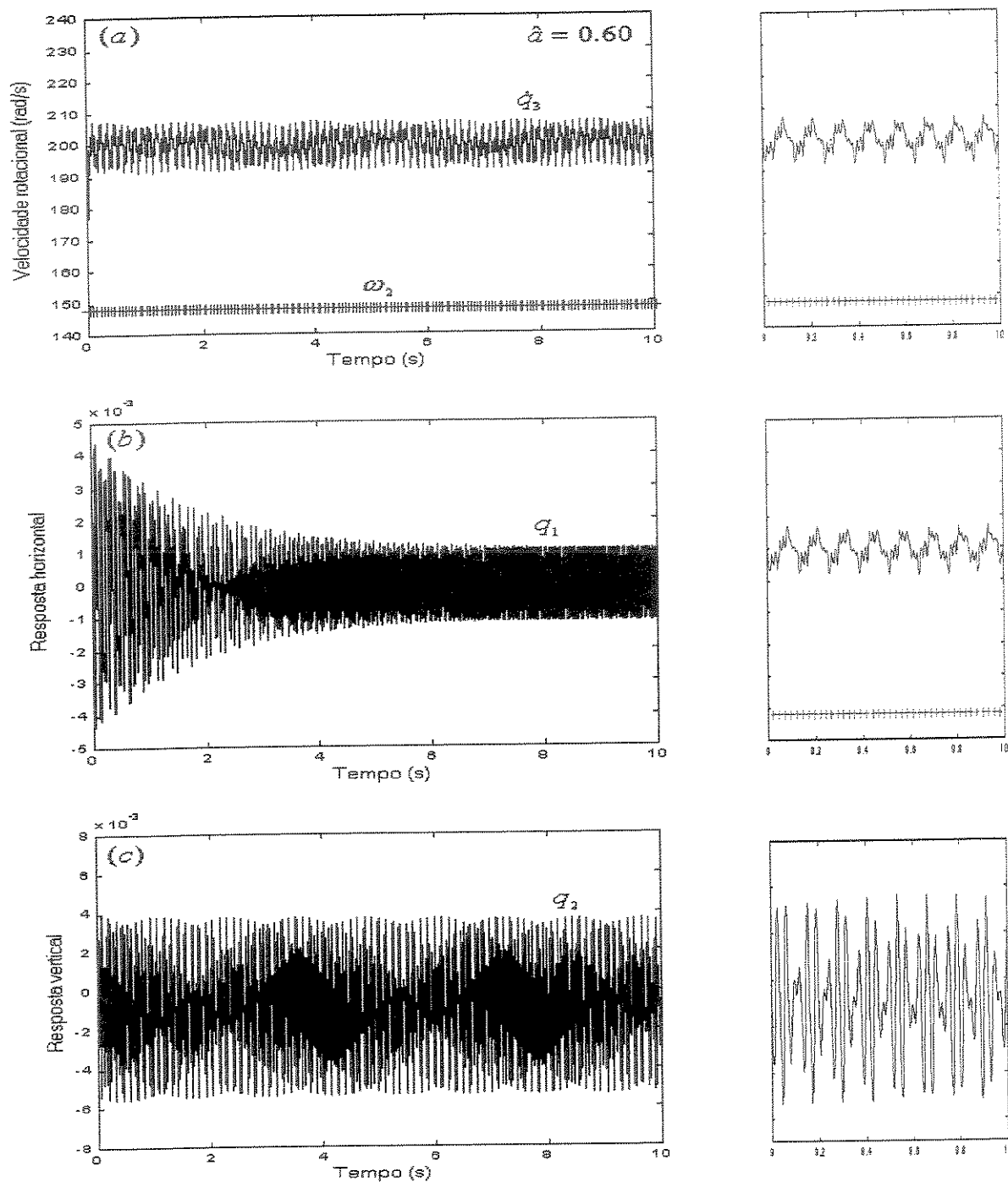


Figura 3.11. Comportamentos da velocidade rotacional do motor (a) e dos modos horizontal (b) e vertical (c) do pórtico para o parâmetro de controle $\hat{a} = 0.60$ Nm.

Observa-se que a figura 3.12 mostra o comportamento dinâmico do pórtico forçado pelo motor de corrente contínua não-ideal, durante a passagem pela segunda ressonância através da visualização gráfica retrato de fase.

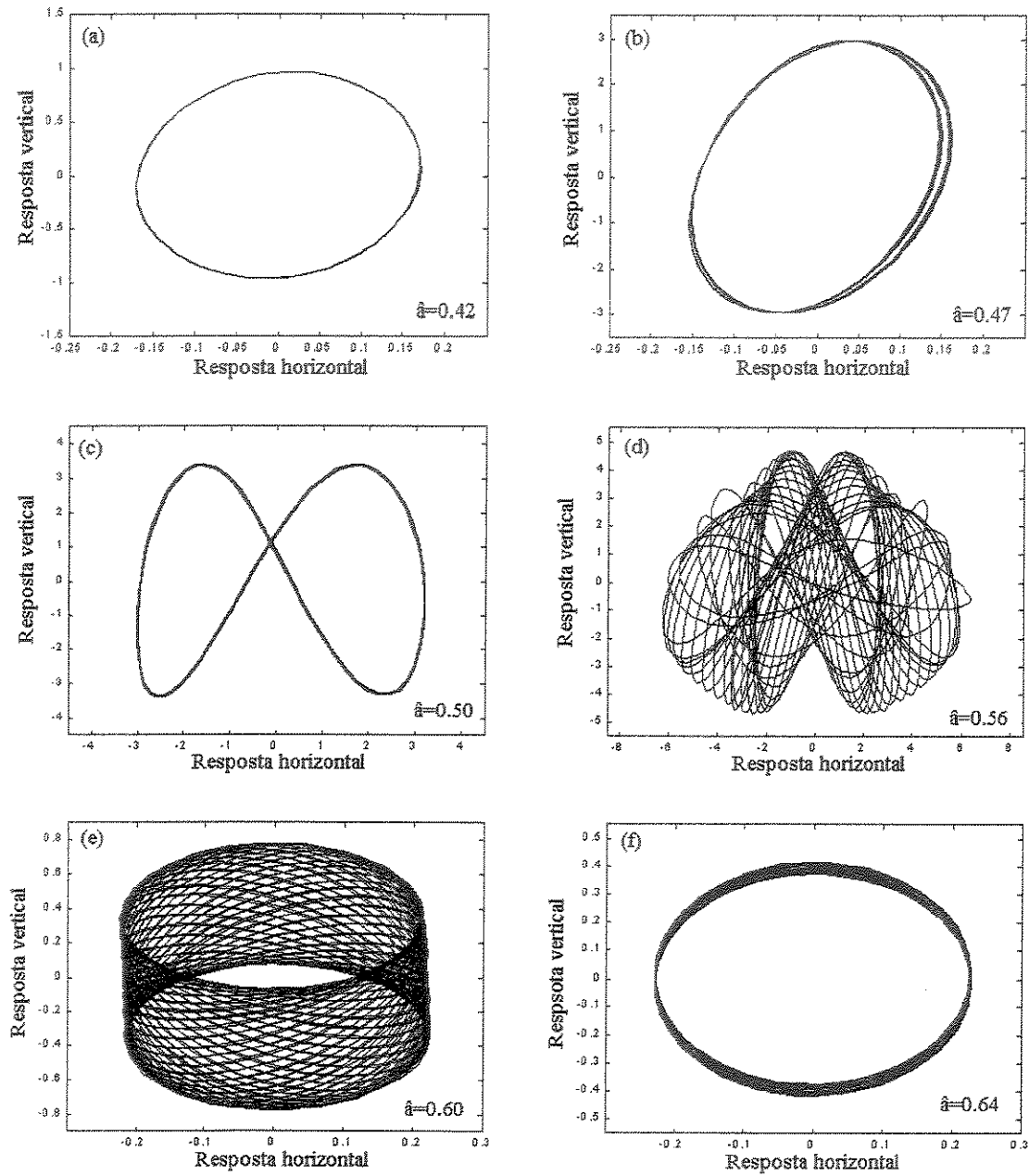


Figura 3.12. Planos de fase no regime estacionário do pórtico para os parâmetros de controle

(a) $\hat{a}=0.42$, (b) $\hat{a}=0.47$, (c) $\hat{a}=0.50$, (d) $\hat{a}=0.56$, (e) $\hat{a}=0.60$ e (f) $\hat{a}=0.64$ Nm.

Para justificar o comportamento dinâmico, mostrado através dos gráficos de histórico no tempo e dos planos de fase, utilizam-se as seguintes técnicas de análise da dinâmica não linear: FFT e mapa de Poincaré, com mais detalhes podem ver no trabalho de Comin (1995).

Transformada Rápida de Fourier (FFT):

Para a análise dos resultados precisa-se do FFT de MATLAB.

O espectro de frequências de um sinal periódico apresenta picos simples.

O espectro de frequências de um sinal quase periódico apresenta uma banda de picos discretos.

O espectro de frequências de um sinal caótico apresenta faixas contínuas contendo infinitas frequências ou uma banda cheia.

Mapa de Poincaré:

O mapa de Poincaré é uma ferramenta de estudo qualitativa do comportamento dinâmico de um sistema. Recorre-se sempre a mapas de Poincaré bidimensionais, nos quais uma simples inspeção visual nos permite tirar algumas conclusões sobre o comportamento do sistema em estudo.

Se a saída amostrada for periódica com período igual a da função forçante e for sincronizada com ela, então o mapa de Poincaré será um ponto. Se for uma sub harmônica de período dois então o mapa será dois pontos sobre o plano.

Mapa de Poincaré de um sistema quase periódico é um conjunto infinito de pontos sobre uma curva fechada.

No caso do sistema ser caótico o mapa de Poincaré será uma coleção infinita de pontos, podendo revelar uma estrutura fractal que é uma prova qualitativa de ocorrência de caos.

Tem-se os resultados da aplicação da FFT aos modos de vibração horizontal e vertical do pórtico e o mapa de Poincaré sobre o plano $(q_1, \dot{q}_1)$, exibidos através das figuras 3.13 e 3.14, respectivamente, onde se observa que:

Para os valores do parâmetro de controle $\hat{a}=0.42 \text{ Nm}$ e $\hat{a}=0.50 \text{ Nm}$ o sistema tem um comportamento regular de período 1 e 2 respectivamente.

Para $\hat{a}=0.56 \text{ Nm}$ e $\hat{a}=0.60 \text{ Nm}$, sugerem que o sistema tem um comportamento irregular ou caótico.

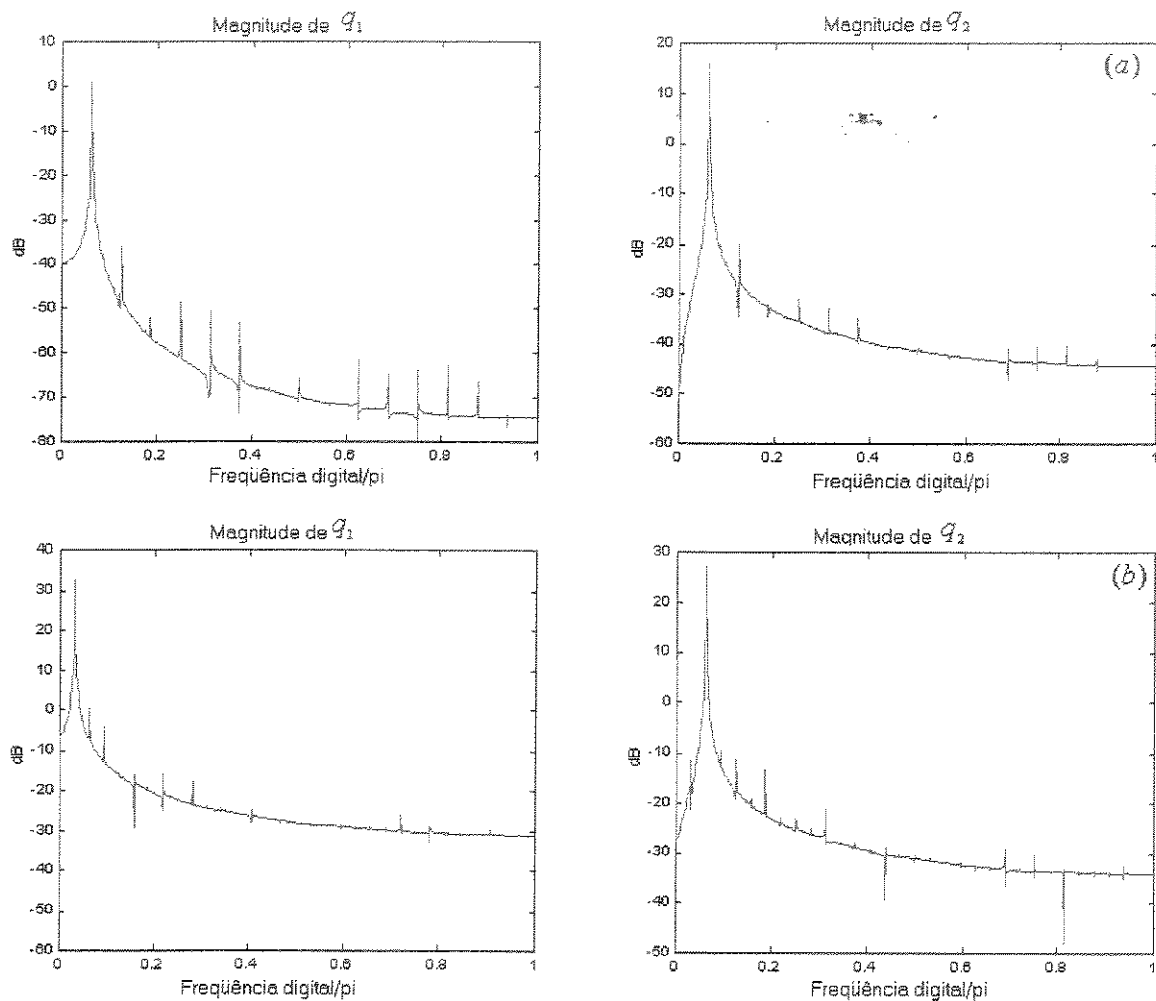


Figura 3.13. Magnitudes do FFT de q_1 e q_2 para (a) $\hat{a}=0.42$, (b) $\hat{a}=0.50$, (c) $\hat{a}=0.56$, (d) $\hat{a}=0.60 \text{ Nm}$.

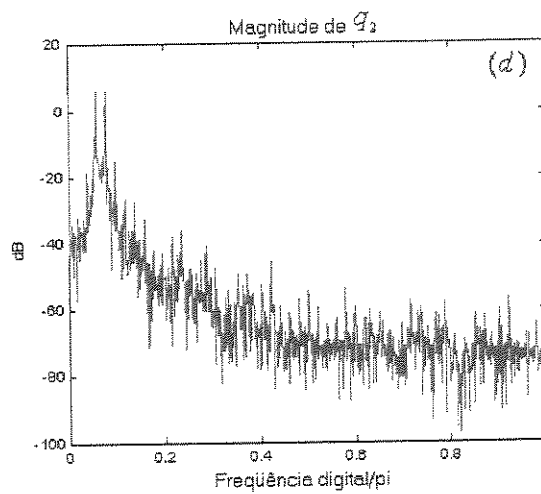
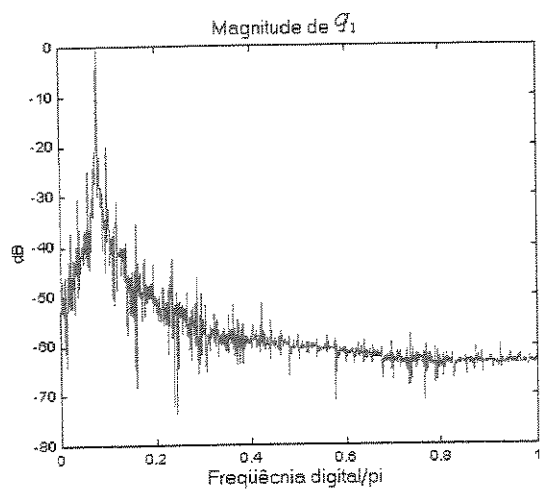
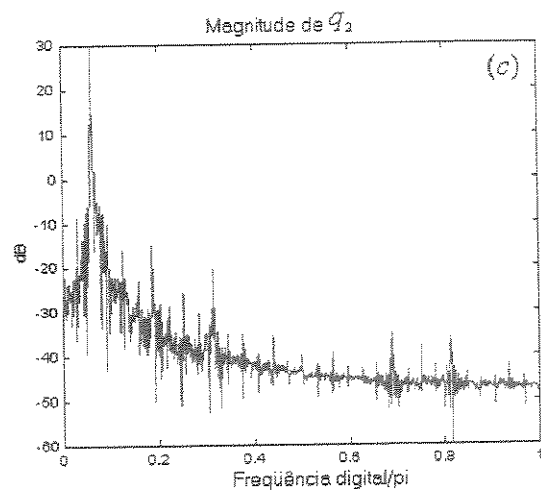
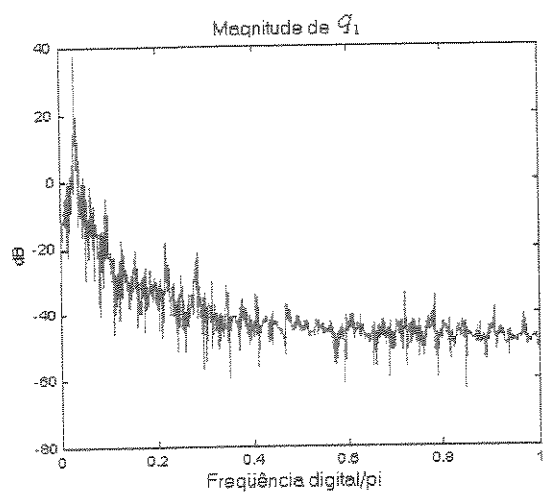


Figura 3.13. Continuação.

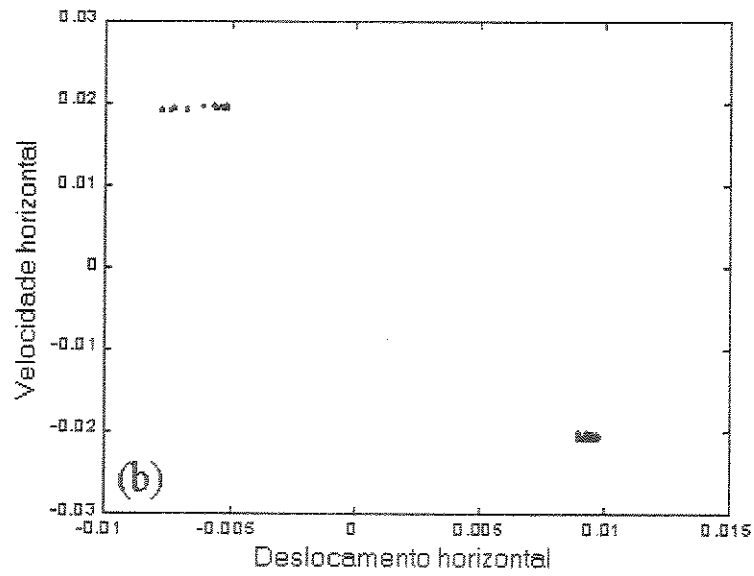
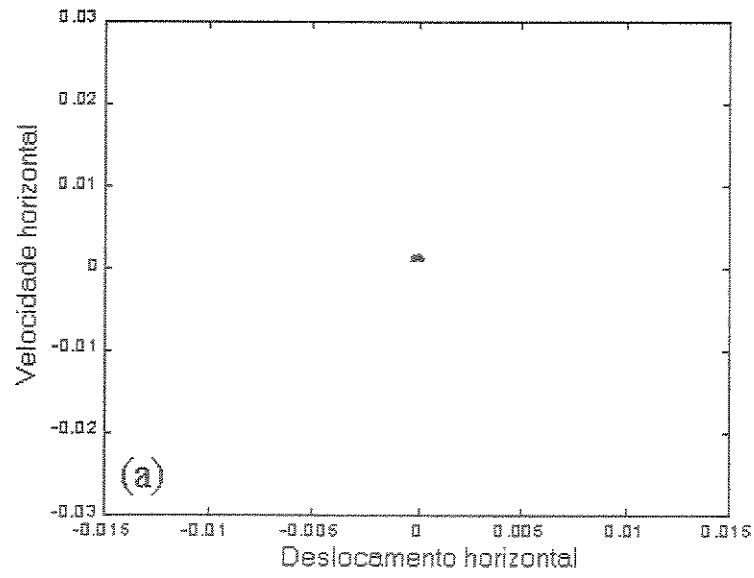


Figura 3.14. Mapas de Poincaré sobre o plano $(q_1, \dot{q}_1)$ correspondentes aos parâmetros de controle: (a) $\hat{a}=0.42$, (b) $\hat{a}=0.50$, (c) $\hat{a}=0.56$ e (d) $\hat{a}=0.60$ Nm.

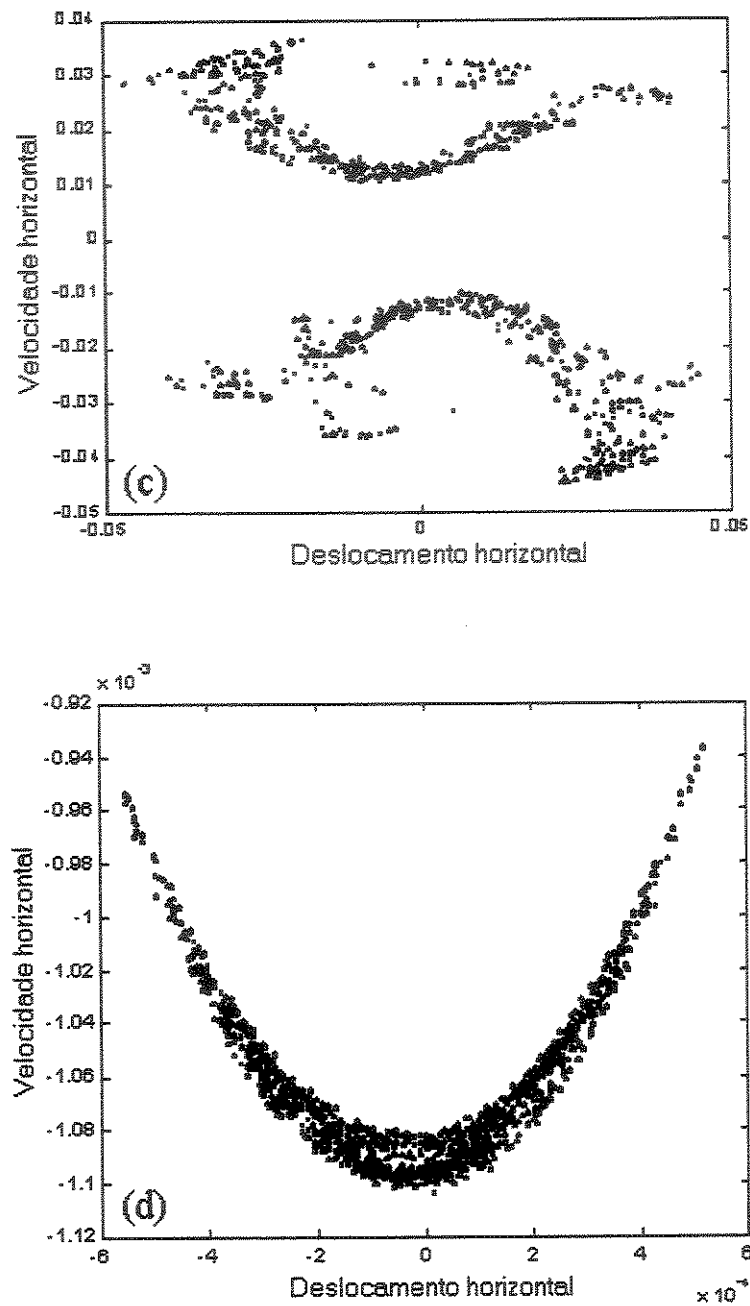


Figura 3.14. Continuação.

Simulação numérica 3:

No terceiro conjunto de simulações numéricas, considerou-se o sistema II da tabela 3.1, obtendo-se os seguintes resultados numéricos durante a passagem pela segunda ressonância:

A figura 3.15 exibe os históricos no tempo dos modos horizontal e vertical do pórtico com suas respectivas órbitas e a velocidade rotacional do motor de corrente contínua, quando a frequência de excitação (rotação média do motor) está abaixo da região de ressonância ou não atravessa a segunda ressonância do sistema vibratório, correspondente ao parâmetro de controle $\hat{a}=0.50 Nm$. Conclui-se que o comportamento dinâmico do pórtico é do tipo periódico de período 1.

A figura 3.16 exibe os históricos no tempo dos modos horizontal e vertical do pórtico com suas respectivas órbitas e a velocidade rotacional do motor de corrente contínua quando a frequência de excitação (rotação média do motor) está dentro da região de ressonância ou é capturada pela a segunda ressonância do sistema correspondente ao parâmetro de controle $\hat{a}=0.80 Nm$. Conclui-se que o comportamento dinâmico do pórtico é do tipo periódico de período 2.

Pode se observar o aumento repentino da amplitude do modo horizontal do pórtico e da amplitude do modo vertical que se mantém estável (ver as figuras 3.15 (a),(c) e 3.16(a),(c)) nas proximidades da segunda ressonância, ocorrendo o fenômeno de saturação entre os dois primeiros modos de vibração do pórtico.

A figura 3.17 exibe a frequência de excitação (rotação média do motor de corrente contínua) que permanece na região de ressonância por um tempo de 4 segundos e repentinamente abandona a segunda ressonância do sistema vibratório correspondente ao parâmetro de controle $\hat{a}=1.1 Nm$. Conclui-se que o comportamento dinâmico do pórtico tem uma aparência de movimento irregular dentro da ressonância, passando para um movimento regular quando abandona a ressonância.

A figura 3.18 exibe os históricos dos modos de vibração do pórtico e a rotação do motor de corrente contínua quando a frequência de excitação atravessa a segunda ressonância do sistema para $\hat{a}=1.3 Nm$.

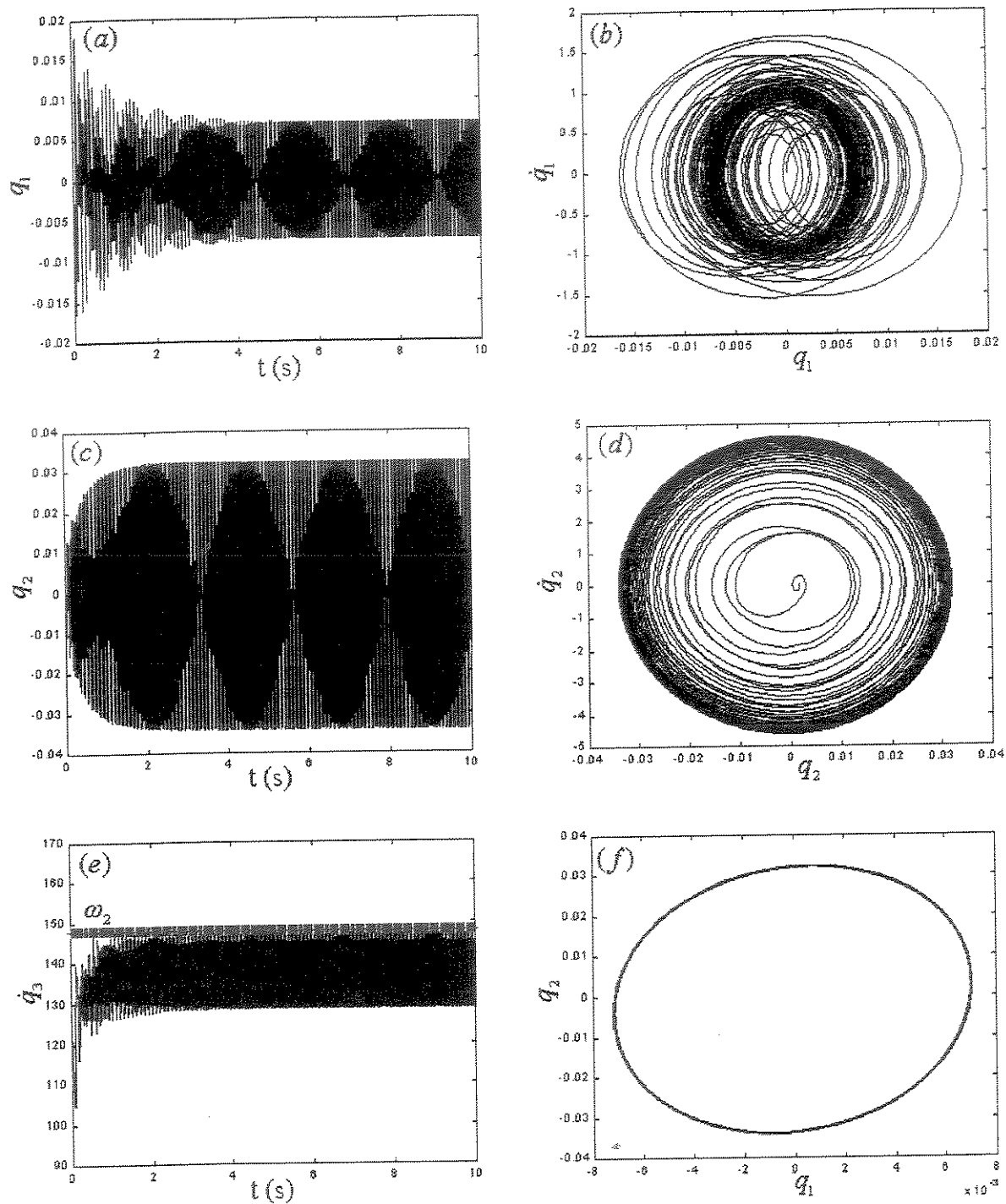


Figura 3.15. Respostas dos modos horizontal e vertical do pórtico e da velocidade rotacional do motor para o parâmetro de controle $\hat{a}=0.50 \text{ Nm}$.

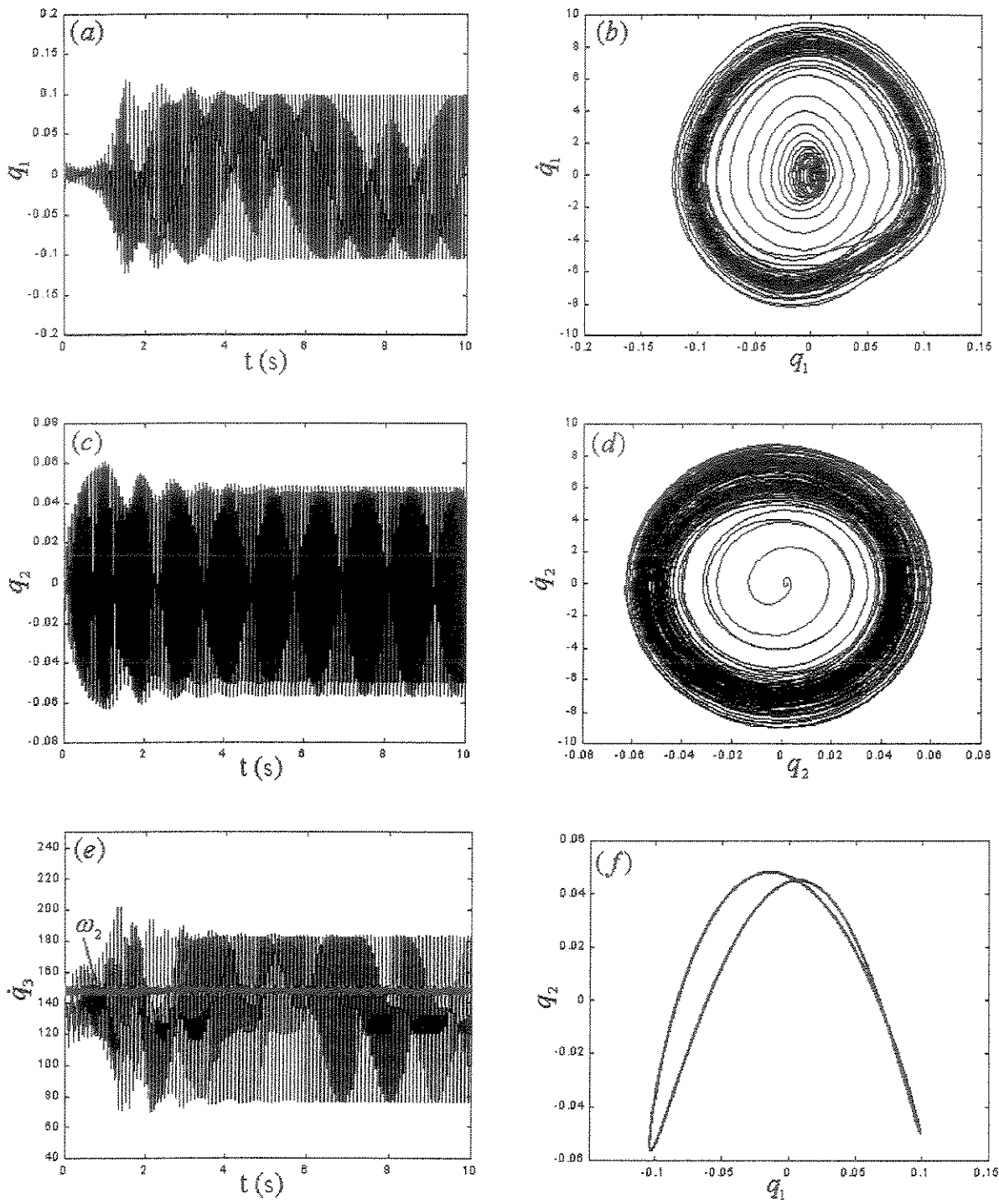


Figura 3.16. Respostas dos modos horizontal e vertical do pórtico e da velocidade rotacional do motor para o parâmetro de controle $\hat{a} = 0.80 \text{ Nm}$.

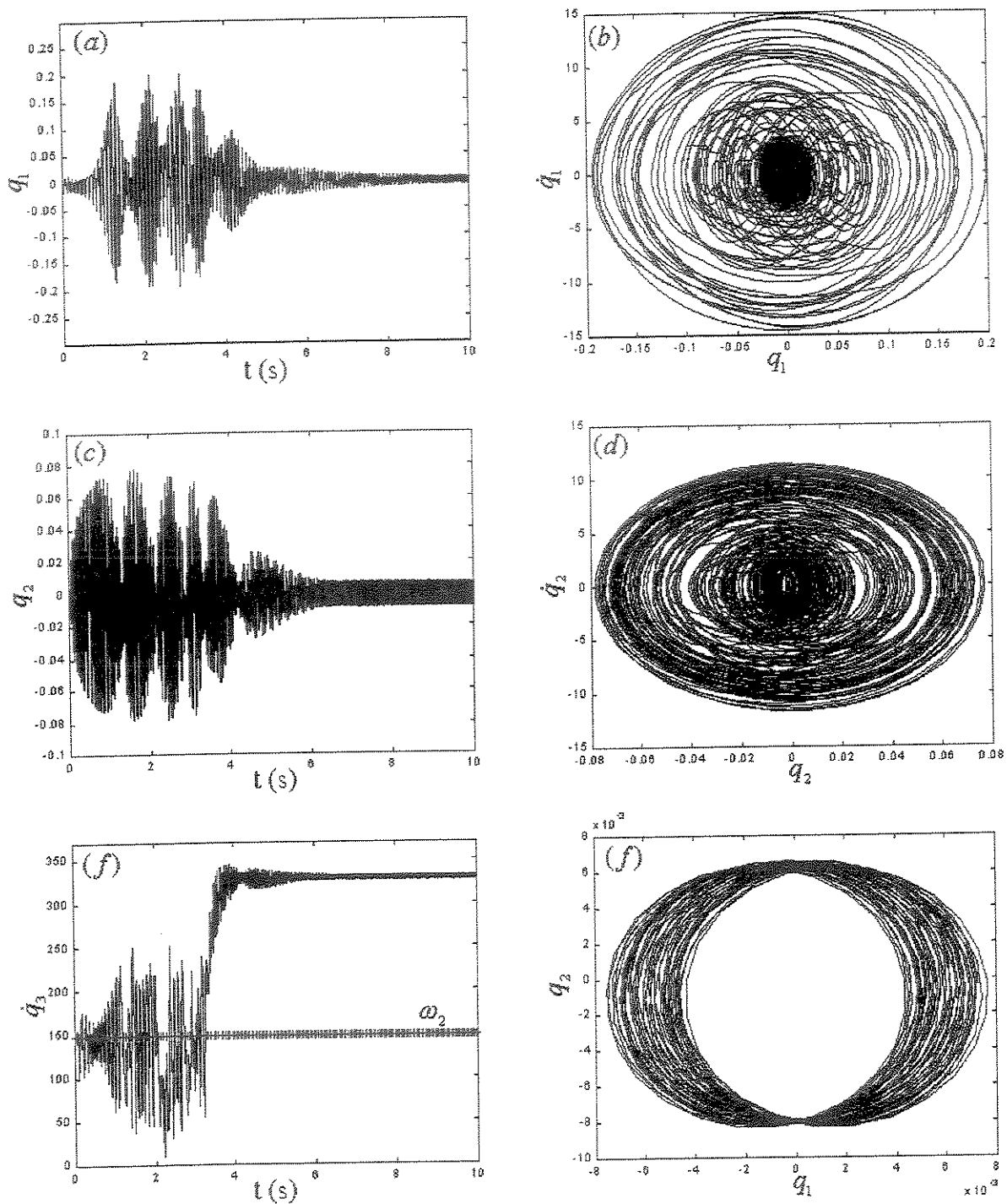


Figura 3.17. Respostas dos modos horizontal e vertical do pórtico e da velocidade rotacional do motor para o parâmetro de controle $\hat{a}=1.1 \text{ Nm}$.

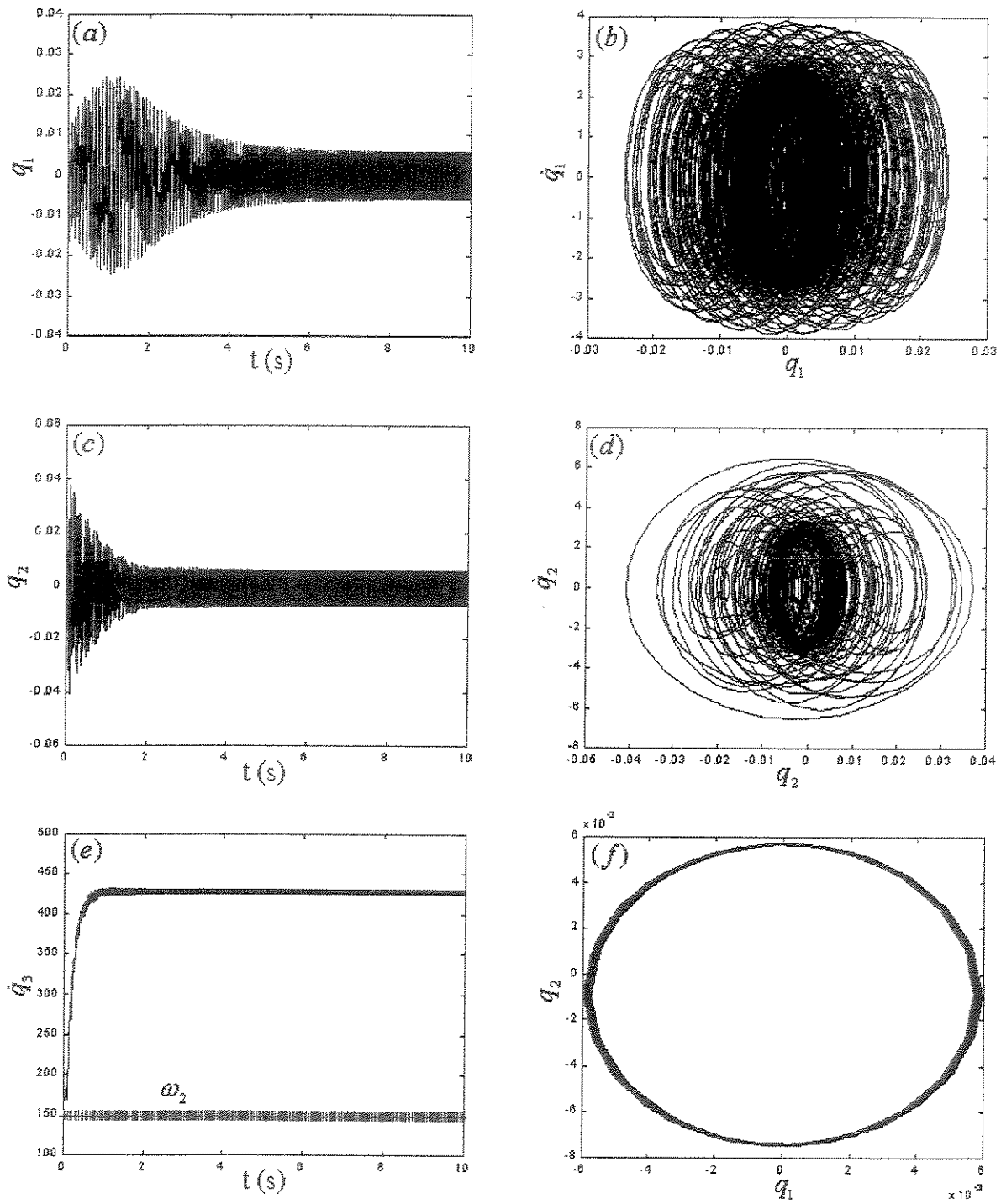


Figura 3.18. Respostas dos modos horizontal e vertical do pórtico e da velocidade rotacional do motor para o parâmetro de controle $\hat{a}=1.3 \text{ Nm}$.

Simulação numérica 4:

No quarto conjunto de simulações numéricas, utilizou-se o integrador de Runge-kutta-Fehlberg com passo de integração variável do MATLAB®, considerou-se o sistema vibratório completo adimensional (2.25) e o sistema simplificado adimensional usando a equação (2.26), neste caso, utilizam-se os dados da tabela 3.1 para o sistema II. O desenvolvimento do sistema foi observado para dois valores do parâmetro de controle nos gráficos históricos da velocidade rotacional do motor de corrente contínua e, as órbitas de fase das respostas do pórtico.

A figura 3.19 exibe os resultados obtidos para os dois modelos correspondente à $\hat{a}=3.0Nm$: para o modelo simplificado (figuras 3.19(a),(b),(c)), pela qual a influência do motor de corrente contínua sobre o pórtico é descrito pela equação (2.26) e para o modelo completo (figura 3.19(d),(e),(f)), descrito pelo sistema de equações diferenciais (2.25). Pode-se observar que a característica dinâmica do pórtico é similar para ambos os modelos adotados em regime permanente e da mudança que sofre na variação da velocidade rotacional do modelo completo.

A figura 3.20 exibe os resultados numéricos obtidos para os dois modelos do sistema para $\hat{a}=4.0 Nm$: no modelo simplificado, mostrado nas figuras 3.20(a)(b)(c), o motor de corrente contínua não consegue sustentar sua velocidade rotacional acima da segunda ressonância, sendo logo capturada por ela e produzindo um comportamento dinâmico regular no estado permanente do pórtico. Ao contrário, com o modelo completo, mostrado pelas figuras 3.20(d)(e)(f), observou-se que na primeira metade do tempo a velocidade rotacional do motor tem um comportamento irregular, precisou-se de mais tempo para entrar no regime permanente e regular, onde as respostas do pórtico são consideradas nos gráficos.

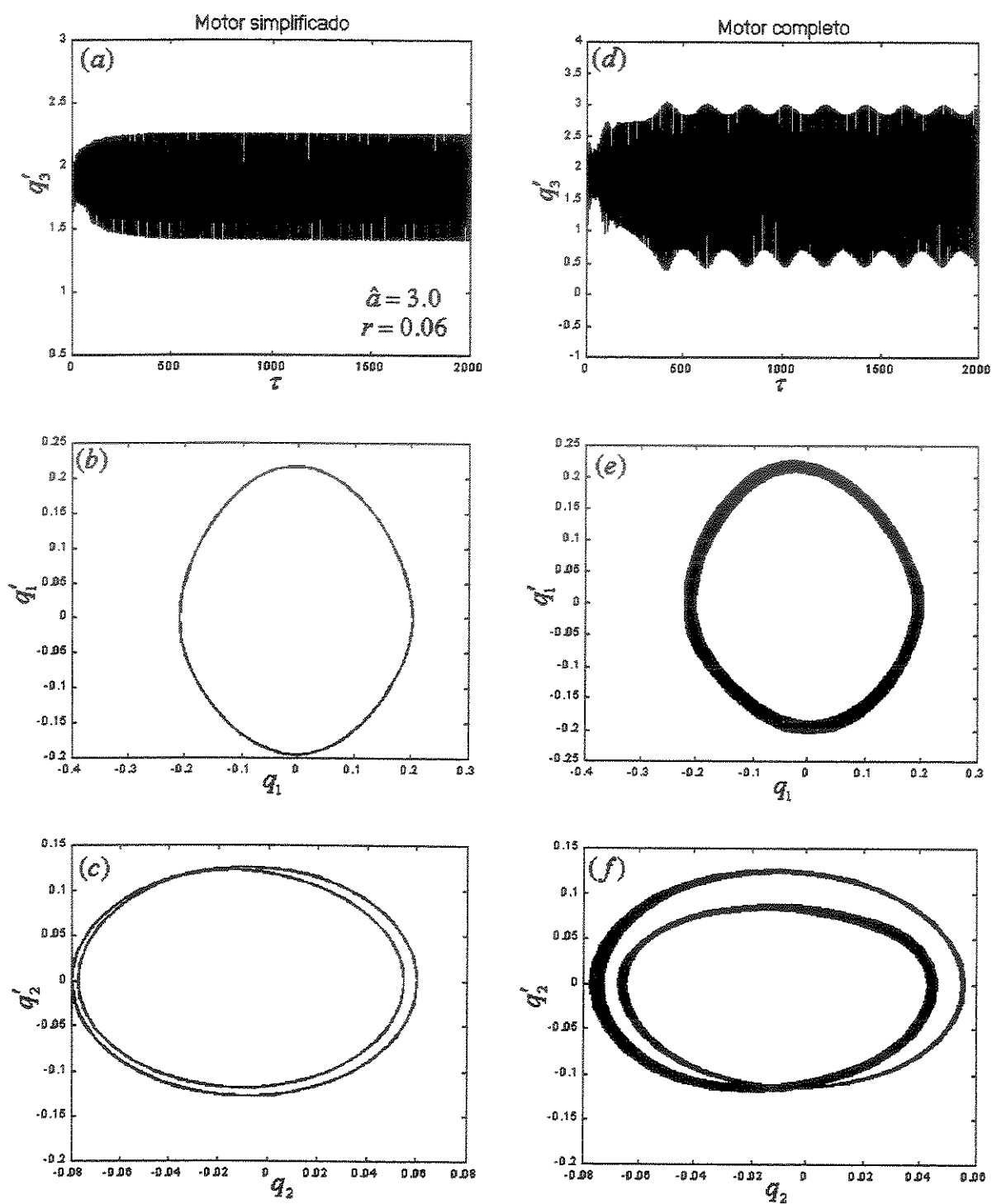


Figura 3.19. Velocidade rotacional e planos de fase do pórtico para $\hat{a} = 3.0 \text{ Nm}$: para o modelo do motor simplificado (a)(b)(c) e completo (d)(e)(f).

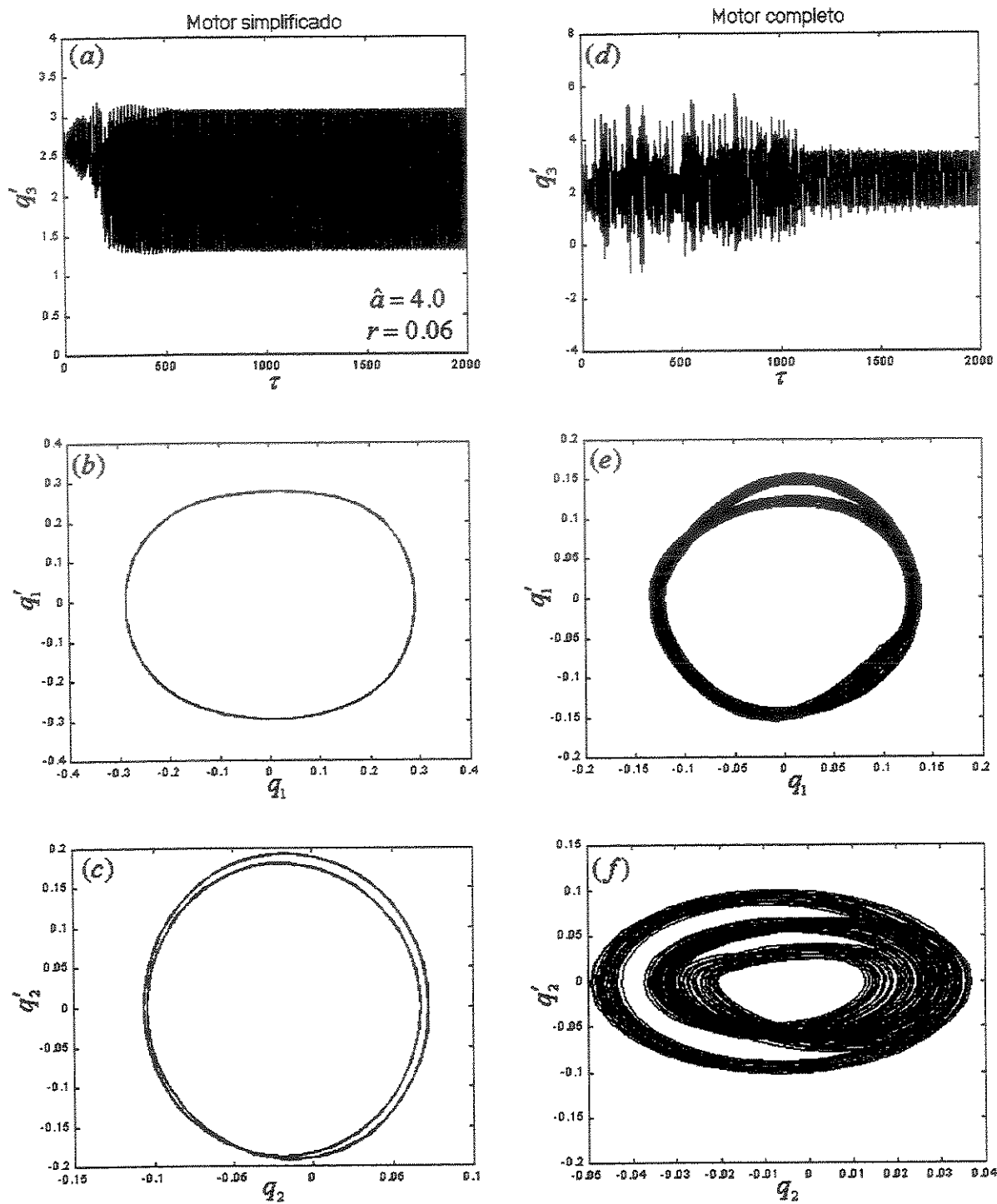


Figura 3.20. Velocidade rotacional e planos de fase do pórtico para $\hat{a}=4.0 \text{ Nm}$: para modelo do motor simplificado (a)(b)(c) e completo (d)(e)(f).

Capítulo 4

Obtenção de Uma Solução Analítica Aproximada Para as Equações do Movimento

O objetivo deste capítulo é o de buscar uma solução analítica aproximada para as equações governantes do movimento do pórtico, considerado, nesse trabalho. A seguir, fazem-se alguns comentários, do método de perturbação, denominado de método da média, que será usado, neste trabalho.

4.1 Idéia básica do método da média

O método da média é útil para a análise de sistemas fracamente não lineares, e é usado através de pequenas perturbações de um oscilador linear. Este método foi desenvolvido por Krylov e Bogoliubov, e sua fórmula, foi inicialmente feita em Kononenko (1969). É aplicado em sistemas da forma:

$$\ddot{x} + \omega x = \varepsilon f(x, \dot{x}), \quad (4.1)$$

onde o parâmetro ε é uma pequena constante ($\varepsilon \ll 1$) e $f(x, \dot{x})$ é uma função expressa em x e em sua derivada. Equações deste tipo são chamados equações diferenciais quase-lineares.

Existem muitas versões do método da média: método de Krylov-Bogoliubov, método da média generalizada, método de Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky, método da média usando variáveis canônicas e método da média usando transformadas de Lie. O método de Krylov-

Bogoliubov é adequado para obter as aproximações de primeira ordem, mas não o é para aproximações de ordem mais elevada, já o método da média generalizado e o método Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky podem ser usados para obter aproximações de ordem mais elevada.

Neste método, primeiro usamos o método de variação de parâmetros para transformar a variável dependente x em novas variáveis independentes A e Φ , fazendo

$$x = A(t) \cos(\omega t + \Phi(t)), \quad \dot{x} = -\omega A(t) \sin(\omega t + \Phi(t)). \quad (4.2)$$

Então, a equação (4.1) transforma-se num sistema da forma clássica:

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \frac{\varepsilon}{\omega} f(A \cos \phi, -\omega A \sin \phi) \sin \phi \equiv \mathcal{E}_1(A, \Phi), \\ \frac{d\Phi}{dt} &= \frac{\varepsilon}{\omega A} f(A \cos \phi, -\omega A \sin \phi) \cos \phi \equiv \mathcal{E}_2(A, \Phi), \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde $\phi = \omega t + \Phi$.

Depois, introduzindo a transformação:

$$A = a + \hat{\mathcal{E}}_1, \quad \Phi = \beta + \hat{\mathcal{E}}_2, \quad (4.4)$$

onde $\hat{f}_i (i = 1, 2)$ são funções periódicas com período 2π .

As equações (4.3) transformam-se em

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \mathcal{E}_{10}(a, \beta) \\ \dot{\beta} &= \mathcal{E}_{20}(a, \beta), \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde $f_{i0}, (i = 1, 2)$, são as médias das funções $f_i, (i = 1, 2)$, definidas por

$$f_{i0}(a, \beta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{E}_i(a, \beta) dt, \quad (i = 1, 2), \quad (4.6)$$

desprezando os termos $O(\varepsilon^2)$ e de ordem superior da equação (4.5), obtemos as equações médias:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \mathcal{E}_{10}(a, \beta) \\ \dot{\beta} &= \mathcal{E}_{20}(a, \beta). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Para se aplicar o método (perturbativo) da média, no problema do pórtico, em questão, deve-se reescrever o sistema de equações de movimento (2.21), na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 &= \varepsilon [-\alpha_5 q_1 q_2 + \alpha_1 (\ddot{q}_3 \sin q_3 + \dot{q}_3^2 \cos q_3) - \mu_1 \dot{q}_1] \\ \ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 &= \varepsilon [-\alpha_6 q_1^2 + \alpha_2 (-\ddot{q}_3 \cos q_3 + \dot{q}_3^2 \sin q_3) - \mu_2 \dot{q}_2 - \alpha_8] \\ \ddot{q}_3 &= \varepsilon [\alpha_3 \ddot{q}_1 \sin q_3 - \alpha_4 \ddot{q}_2 \cos q_3 - \alpha_7 \cos q_3 + \Gamma(\dot{q}_3)], \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde

ε é um parâmetro pequeno (positivo e finito), sendo que para $\varepsilon=0$, tem-se o problema não perturbado, isto é, obtém-se dois osciladores harmônicos, desacoplados com aceleração de rotação nula. Este pequeno parâmetro será o responsável pelo balanço de ordens das equações do movimento (Nayfeh, 1981),

$$\begin{aligned} \varepsilon \alpha_1 &= \frac{m_0 r}{(2m + M)h}, \quad \varepsilon \alpha_2 = \frac{m_0 r}{ML}, \quad \varepsilon \alpha_3 = \frac{m_0 h r}{I_m + r^2 m_0}, \quad \varepsilon \alpha_4 = \frac{m_0 L r}{I_m + r^2 m_0}, \\ \varepsilon \alpha_5 &= \frac{k_b CL}{2m + M}, \quad \varepsilon \alpha_6 = \frac{k_b Ch^2}{2mL}, \quad \varepsilon \alpha_7 = \frac{m_0 r g}{I_m + m_0 r^2}, \quad \varepsilon \alpha_8 = \frac{g}{L}, \\ \varepsilon \mu_1 &= \frac{c_1}{(2m + M)h}, \quad \varepsilon \mu_2 = \frac{c_2}{ML}, \end{aligned}$$

$$\varepsilon \Gamma(\dot{q}_3) = \frac{M_m(\dot{q}_3) - H(\dot{q}_3)}{I_m + m_0 r^2},$$

$$\omega_1^2 = \frac{2(k_c - mgC)}{2m + M}, \quad \omega_2^2 = \frac{k_b}{M}.$$

E, a curva característica do motor de corrente contínua, suposta ser da forma linear

$$M_m(\dot{q}_3) - H(\dot{q}_3) = \hat{a} - \hat{b}\dot{q}_3, \quad (4.9)$$

onde o parâmetro $\hat{a}$ está relacionado com a tensão aplicada sobre a armadura, que será tomado como sendo o parâmetro de controle e $\hat{b}$ é a constante para cada modelo de motor de corrente contínua, considerado.

A seguir, para se efetuar a investigação do comportamento dinâmico do sistema em tela, considera-se o caso de ressonância interna 1:2, no qual a velocidade angular média do motor de corrente contínua, variará próximo à frequência natural do primeiro ou do segundo modo de oscilação do pórtico (onde se consideram somente os dois primeiros modos de oscilação correspondentes a ω_1 e ω_2 como respostas vibratórias do pórtico mais a resposta vibratória do motor correspondente a Ω). Ressalta-se que a primeira região de ressonância corresponde a $\dot{q}_3 \approx \omega_1$ e a segunda região de ressonância corresponde a $\dot{q}_3 \approx \omega_2$.

4.2 Busca da solução analítica aproximada na primeira região de ressonância

A dinâmica do sistema descrito pela equação (4.8) próxima à primeira região de ressonância será estudado pelo método da média (MM); entretanto, para se aplicar o MM, deve-se, primeiro utilizar do método de variação de parâmetros (Nayfeh, 1981).

Impondo-se $\varepsilon = 0$ (problema não-perturbado), as soluções da equação (4.8) podem ser expressas como

$$q_1 = A_1 \cos(q_3 - \beta_1), \quad q_2 = A_2 \cos(2q_3 - \beta_2), \quad q_3 = \Delta t \quad (4.10)$$

cuja derivadas são escritas como:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= -A_1 \omega_1 \sin(q_3 - \beta_1), \\ \dot{q}_2 &= -2A_2 \omega_1 \sin(2q_3 - \beta_2), \\ \dot{q}_3 &= \Delta, \end{aligned} \quad (4.11)$$

Diferenciando-se as equações de (4.10), obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \frac{dA_1}{dt} \cos(q_3 - \beta_1) - A_1 \left(\Delta - \frac{d\beta_1}{dt} \right) \sin(q_3 - \beta_1), \\ \dot{q}_2 &= \frac{dA_2}{dt} \cos(2q_3 - \beta_2) - A_2 \left(2\Delta - \frac{d\beta_2}{dt} \right) \sin(2q_3 - \beta_2), \end{aligned} \quad (4.12)$$

Levando-se em conta as equações (4.11) e (4.12), obtém-se, facilmente que:

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dt} \cos(q_3 - \beta_1) + A_1 \sin(q_3 - \beta_1) \frac{d\beta_1}{dt} &= A_1 (\Delta - \omega_1) \sin(q_3 - \beta_1), \\ \frac{dA_2}{dt} \cos(2q_3 - \beta_2) + A_2 \sin(2q_3 - \beta_2) \frac{d\beta_2}{dt} &= 2A_2 (\Delta - \omega_1) \sin(2q_3 - \beta_2), \end{aligned} \quad (4.13)$$

e diferenciando as equações de (4.11), tem-se que:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 &= -\frac{dA_1}{dt} \omega_1 \sin(q_3 - \beta_1) - A_1 \omega_1 \left(\Delta - \frac{d\beta_1}{dt} \right) \cos(q_3 - \beta_1), \\ \ddot{q}_2 &= -2\frac{dA_2}{dt} \omega_1 \sin(2q_3 - \beta_2) - 2A_2 \omega_1 \left(2\Delta - \frac{d\beta_2}{dt} \right) \cos(2q_3 - \beta_2), \end{aligned} \quad (4.14)$$

que após a substituição das equações (4.10), (4.11) e (4.14) na equação (4.8), tem-se:

$$\begin{aligned}
-\frac{dA_1}{dt}\omega_1 \sin(q_3 - \beta_1) + A_1\omega_1 \cos(q_3 + \beta_1)\frac{d\beta_1}{dt} &= A_1\omega_1(\Delta - \omega_1)\cos(q_3 - \beta_1) \\
+ \varepsilon[-\alpha_5 A_1 A_2 \cos(q_3 - \beta_1)\cos(2q_3 - \beta_2) + \alpha_1 \frac{d\Delta}{dt} \sin q_3 \\
+ \alpha_1 \cos q_3 \Delta^2 + \mu_1 A_1 \omega_1 \sin(q_3 - \beta_1)], & \quad (4.15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-2\frac{dA_2}{dt}\omega_1 \sin(2q_3 - \beta_2) + 2A_2\omega_1 \cos(2q_3 - \beta_2)\frac{d\beta_2}{dt} &= A_2[4\omega_1\Delta - \omega_2^2]\cos(2q_3 - \beta_2) \\
+ \varepsilon[-\alpha_6 A_1^2 \cos^2(q_3 - \beta_1) + \alpha_2 \sin q_3 \Delta^2 + \alpha_2 \frac{d\Delta}{dt} \cos q_3 \\
+ 2\mu_2 A_2 \omega_1 \sin(2q_3 - \beta_2) - \alpha_8], & \quad (4.16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\Delta}{dt} &= \varepsilon\{\alpha_3[-\frac{dA_1}{dt}\omega_1 \sin(q_3 - \beta_1) - A_1\omega_1(\Delta - \frac{d\beta_1}{dt})\cos(q_3 - \beta_1)]\sin q_3 \\
- \alpha_4[-2\frac{dA_2}{dt}\omega_1 \sin(2q_3 - \beta_2) - A_2 2\omega_1(2\Delta - \frac{d\beta_2}{dt})\cos(2q_3 - \beta_2)]\cos q_3 \\
- \alpha_7 \cos q_3 + \Gamma(\Delta)\}, & \quad (4.17)
\end{aligned}$$

Para se efetuar o isolamento das variáveis $\frac{dA_j}{dt}$, $\frac{d\beta_j}{dt}$, $j = 1, 2$ e $\frac{d\Delta}{dt}$ das equações (4.15)-(4.17) utilizam-se facilmente identidades trigonométricas e para se investigar a dinâmica do sistema na presença da ressonância principal ($\Delta \approx \omega_1$) e da ressonância interna ($\omega_2 \approx 2\omega_1$), é necessário a introdução dos parâmetros de sintonia σ_1 e σ_2 (Nayfeh, 1981) de modo que:

$$\begin{aligned}
\Delta &= \omega_1 + \varepsilon\sigma_1, \\
\omega_2 &= 2\omega_1 + \varepsilon\sigma_2, & (4.18)
\end{aligned}$$

onde σ_1 representará a variação da frequência de excitação não-ideal a partir da frequência natural do primeiro modo de vibração, σ_2 representará a variação da frequência natural do segundo modo de vibração a partir do dobro da frequência natural do primeiro modo e, o pequeno parâmetro ε é um pequeno parâmetro positivo.

Desprezando-se todos os termos de $o(\varepsilon^2)$ que aparecem nas equações (4.13), e (4.15)-(4.17), obtém-se, facilmente o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dt} = & -\frac{\varepsilon}{\omega_1} [-\alpha_3 A_1 A_2 \cos(q_3 - \beta_1) \cos(2q_3 - \beta_2) + \alpha_1 \Delta^2 \cos q_3 \\ & + \mu_1 A_1 \omega_1 \sin(q_3 - \beta_1)] \sin(q_3 - \beta_1), \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \beta_1 = & \varepsilon \sigma_1 + \frac{\varepsilon}{A_1 \omega_1} [-\alpha_3 A_1 A_2 \cos(q_3 - \beta_1) \cos(2q_3 - \beta_2) + \alpha_1 \Delta^2 \cos q_3 \\ & + \mu_1 A_1 \omega_1 \sin(q_3 - \beta_1)] \cos(q_3 - \beta_1), \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{dA_2}{dt} = & -\frac{\varepsilon}{2\omega_1} [A_2 4\omega_1 \sigma_2 \sin(2q_3 - \beta_2) \cos(2q_3 - \beta_2) + \alpha_6 A_1^2 \cos^2(q_3 - \beta_1) \\ & - \alpha_2 \Delta^2 \sin q_3 - 2\mu_2 \omega_1 A_2 \sin(2q_3 - \beta_2) - \alpha_8] \sin(2q_3 - \beta_2), \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \beta_2 = & \varepsilon (2\sigma_1 - 2\sigma_2 \cos^2(2q_3 - \beta_2)) - \frac{\varepsilon}{2A_2 \omega_2} [-\alpha_6 A_1^2 \cos^2(q_3 - \beta_1) + \hat{\alpha}_2 \Delta^2 \sin q_3 \\ & + 2\mu_2 A_2 \omega_1 \sin(2q_3 - \beta_2) - \alpha_8] \cos(2q_3 - \beta_2), \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Delta = & \varepsilon \{ -\alpha_3 \omega_1 A_1 \Delta \cos(q_3 - \beta_1) \sin q_3 + \alpha_4 4\omega_1 A_2 \Delta \cos(2q_3 - \beta_2) \cos q_3 \\ & - \alpha_7 \cos q_3 + \Gamma(\frac{d\Delta}{dt}) \}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

O método a ser utilizado, a seguir, foi proposto por Krilov-Bogoliubov e foi exibido em (Kononenko, 1969).

Desta forma, considerando-se as seguintes transformações nas equações (4.19)-(4.23):

$$\begin{aligned}\Delta &= \Omega + \varepsilon U_{11}, \\ A_1 &= a_1 + \varepsilon U_{12}, \quad \beta_1 = \xi_1 + \varepsilon U_{13}, \\ A_2 &= a_2 + \varepsilon U_{14}, \quad \beta_2 = \xi_2 + \varepsilon U_{15},\end{aligned}\tag{4.24}$$

onde

$U_{1j} = U_{1j}(t, \Omega, a_1, a_2, \xi_1, \xi_2)$, $j = 1 \dots 5$, são funções periódicas no tempo que oscilam suavemente.

Para se obter as primeiras soluções aproximadas $a_1, a_2, \xi_1, \xi_2, \Omega$, calcula-se a sua média do lado direito das equações (4.19)-(4.23) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\frac{da_1}{dt} &= \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_{a_1} dq_3, \quad \frac{d\beta_1}{dt} = \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_{\beta_1} dq_3, \\ \frac{da_2}{dt} &= \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_{a_2} dq_3, \quad \frac{d\beta_2}{dt} = \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_{\beta_2} dq_3, \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_{\Omega} dq_3,\end{aligned}\tag{4.25}$$

onde $f_{a_1}, f_{\beta_1}, f_{a_2}, f_{\beta_2}, f_{\Omega}$ são as funções que representam os termos do lado direito da equação (4.19)-(4.23).

Após da integração da equação (4.25), obtém-se as equações:

$$\begin{aligned}
\frac{da_1}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{\omega_1} \left[-\frac{\alpha_5}{4} a_1 a_2 \sin(\xi_2 - 2\xi_1) - \frac{\alpha_1}{2} \Omega^2 \sin \xi_1 + \frac{\mu_1}{2} a_1 \omega_1 \right], \\
\frac{d\xi_1}{dt} &= \varepsilon \sigma_1 + \frac{\varepsilon}{a_1 \omega_1} \left[-\frac{\alpha_5}{4} a_1 a_2 \cos(\xi_2 - 2\xi_1) + \frac{\alpha_1}{2} \Omega^2 \cos \xi_1 \right], \\
\frac{da_2}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{2\omega_1} \left[\frac{\alpha_6}{4} a_1^2 \sin(\xi_2 - 2\xi_1) + \mu_2 a_2 \omega_1 \right], \\
\frac{d\xi_2}{dt} &= \varepsilon (2\sigma_1 - \sigma_2) - \frac{\varepsilon}{2a_2 \omega_1} \left[\frac{\alpha_6}{4} a_1^2 \cos(\xi_2 - 2\xi_1) \right], \\
\frac{d\Omega}{dt} &= \varepsilon \left[-\frac{\alpha_3}{2} a_1 \omega_1 \Omega \sin \xi_1 + \Gamma(\Omega) \right], \tag{4.26}
\end{aligned}$$

A seguir, analisam-se as soluções de equilíbrio destas equações.

4.2.1 Obtenção das soluções constantes do sistema “médio”

As soluções constantes ou soluções de equilíbrio ou pontos fixos da equação (4.26) (as respostas do sistema no estado permanente) são obtidas definindo $\dot{a}_1 = \dot{a}_2 = 0$, $\dot{\xi}_1 = \dot{\xi}_2 = 0$ e $\dot{\Omega} = 0$, obtendo-se :

$$-\frac{\alpha_5}{4} a_1 a_2 \sin(\xi_2 - 2\xi_1) - \frac{\alpha_1}{2} \Omega^2 \sin \xi_1 + \frac{\mu_1}{2} a_1 \omega_1 = 0, \tag{4.27}$$

$$\sigma_1 \omega_1 a_1 - \frac{\alpha_5}{4} a_1 a_2 \cos(\xi_2 - 2\xi_1) + \frac{\alpha_1}{2} \Omega^2 \cos \xi_1 = 0, \tag{4.28}$$

$$\frac{\alpha_6}{4} a_1^2 \sin(\xi_2 - 2\xi_1) + \mu_2 a_2 \omega_1 = 0, \tag{4.29}$$

$$2(2\sigma_1 - \sigma_2) \omega_1 a_2 - \frac{\alpha_6}{4} a_1^2 \cos(\xi_2 - 2\xi_1) = 0, \tag{4.30}$$

$$-\frac{\alpha_3}{2} a_1 \omega_1 \Omega \sin \xi_1 + \Gamma(\Omega) = 0, \tag{4.31}$$

Simplificando-se as equações (4.29) e (4.30) com o intuito de se obter uma relação algébrica entre a_1 e a_2 , tem-se :

$$a_1^2 = \frac{2\omega_1}{\alpha_6\Gamma_1} a_2, \quad (4.32)$$

onde

$$\sin(\xi_2 - 2\xi_1) = -2\mu_2\Gamma_1, \quad \cos(\xi_2 - 2\xi_1) = (2\sigma_1 - \sigma_2)\Gamma_1, \quad (4.33)$$

e

$$\Gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{4\mu_2^2 + (2\sigma_1 - \sigma_2)^2}}, \quad (4.34)$$

Simplificando-se as equações (4.27) e (4.28), para a obtenção de uma equação implícita em termos de a_2 , tem-se::

$$a_2^3 + 4[2\mu_1\mu_2 - (2\sigma_1 - \sigma_2)\sigma_1] \frac{\alpha_6\omega_1\Gamma_1}{\alpha_5} a_2^2 + 4(\mu_1^2 + \sigma_1^2) \frac{\omega_1^2}{\alpha_5} a_2 - \frac{2\alpha_1^2\alpha_6\Gamma_1}{\alpha_5^2\omega_1} \Omega^4 = 0. \quad (4.35)$$

Logo, a primeira solução aproximada, obtida, seria da forma seguinte:

$$q_1 = a_1 \cos(\Omega t - \xi_1), \quad q_2 = a_2 \cos(2\Omega t - \xi_2), \quad q_3 = \Omega t, \quad (4.36)$$

onde a_1 , a_2 , ξ_1 , ξ_2 , e Ω são governados pelas equações (4.27)-(4.31).

Considerando o fato de que o sistema tem ressonância interna tem-se $\sigma_2=0$ e se a frequência rotacional do motor está muito próxima da primeira ressonância tem-se $\sigma_1=0$. Desta forma as amplitudes a_1 e a_2 expressadas nas equações 4.32 e 4.35 respectivamente, ficam em função de Ω (determinada da equação 4.31 para cada parâmetro de controle). Para cada valor crescente do parâmetro de controle a amplitude do modo horizontal teve seu valor elevado bruscamente, enquanto a amplitude do modo vertical permaneceu relativamente estável.

Para se efetuar a análise do comportamento dinâmico do sistema, em tela, na primeira região de ressonância precisam-se obter das curvas ressonantes: resposta-freqüência e resposta-parâmetro de controle.

Para atingir-se estes objetivos, transforma-se o sistema “médio” na forma cartesiana, introduzindo-se as seguintes transformações cartesianas:

$$\begin{aligned} P_1 &= a_1 \cos \xi_1, \quad Q_1 = a_1 \sin \xi_1, \\ P_2 &= a_2 \cos \xi_2, \quad Q_2 = a_2 \sin \xi_2, \end{aligned} \quad (4.37)$$

que após a substituição nas equações de (4.37) nas equações (4.27)-(4.31), obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{dP_1}{dt} &= -\varepsilon \sigma_1 Q_1 + \frac{\varepsilon}{2\omega_1} \left[\frac{\alpha_5}{2} (P_1 Q_2 - Q_1 P_2) - \mu_1 \omega_1 P_1 \right], \\ \frac{dQ_1}{dt} &= \varepsilon \sigma_1 P_1 + \frac{\varepsilon}{2\omega_1} \left[-\frac{\alpha_5}{2} (P_1 P_2 + Q_1 Q_2) + \alpha_1 \Omega^2 - \mu_1 \omega_1 Q_1 \right], \\ \frac{dP_2}{dt} &= -\varepsilon (2\sigma_1 - \sigma_2) Q_2 + \frac{\varepsilon}{4\omega_1} [\alpha_6 P_1 Q_1 - \mu_2 \omega_1 P_2], \\ \frac{dQ_2}{dt} &= \varepsilon (2\sigma_1 - \sigma_2) P_2 - \frac{\varepsilon}{4\omega_1} \left[\frac{\alpha_6}{2} (P_1^2 - Q_1^2) + \mu_2 \omega_1 Q_2 \right], \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \varepsilon \left[-\frac{\alpha_3}{2} \omega_1 \Omega Q_1 + \Gamma(\Omega) \right], \end{aligned} \quad (4.38)$$

Desta forma, de acordo com os resultados obtidos, logo acima, tem-se as figuras 4.1 e 4.2 que ilustram o problema, em estudo, para o caso de resposta-freqüência e resposta-parâmetro de controle, respectivamente, onde $a_1 = \sqrt{P_1^2 + Q_1^2}$ e $a_2 = \sqrt{P_2^2 + Q_2^2}$ correspondem as soluções constantes da equação 4.38 ($\dot{P}_1 = \dot{Q}_1 = \dot{P}_2 = \dot{Q}_2 = \dot{\Omega} = 0$) obtidas pelo método de Newton-Raphson, Parker (1989).

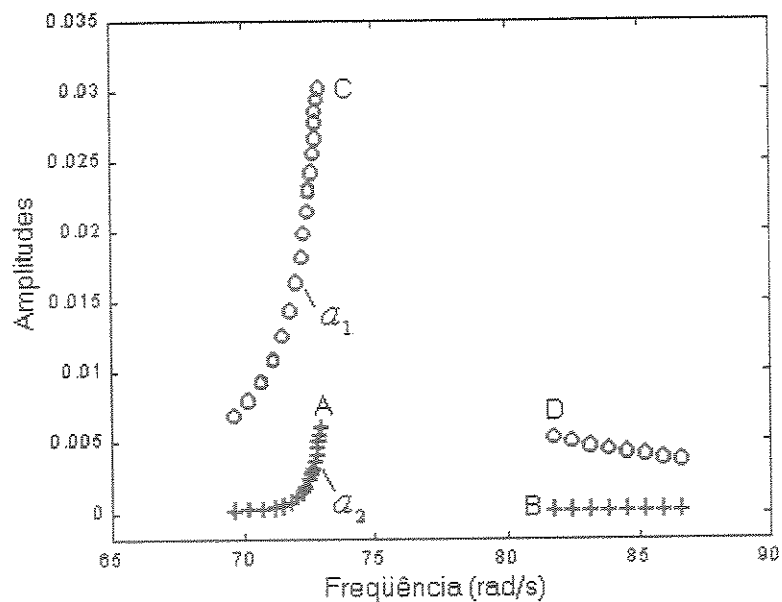


Figure 4.1. Resultados das amplitudes dos modos horizontal a_1 e vertical a_2 do pórtico para rotações crescentes do motor durante a passagem pela primeira ressonância.

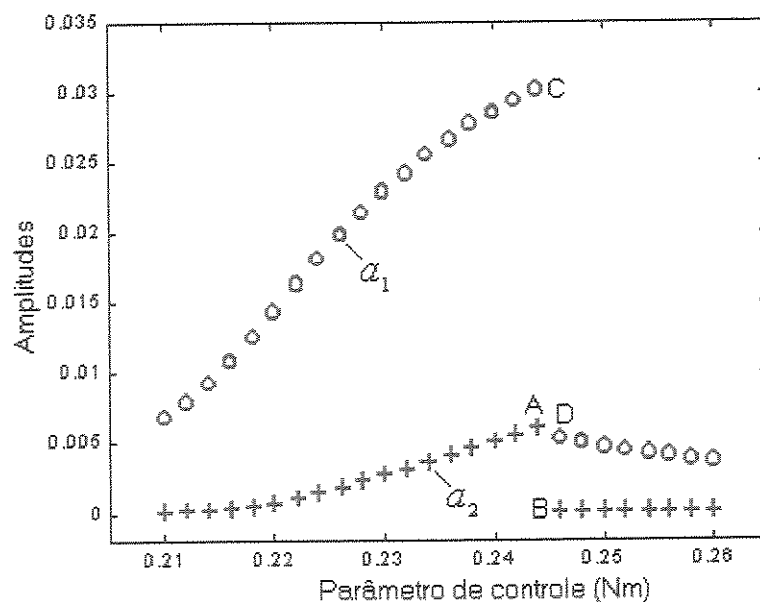


Figure 4.2 Resultados das amplitudes dos modos horizontal a_1 e vertical a_2 do pórtico para valores crescentes do parâmetro de controle durante a passagem pela primeira ressonância.

Interpretação das figuras 4.1 e 4.2:

Nas proximidades da primeira região de ressonância observou-se o crescimento repentino das amplitudes do modo horizontal, enquanto que as amplitudes do modo vertical para de crescer (transferência de energia). A faixa de descontinuidade formada pelos pontos A e B (do modo vertical) e pelos pontos C e D (do modo horizontal) que indica a região de instabilidade onde ocorrem as acelerações bruscas do motor e as vibrações instáveis do pórtico.

4.2.2 Obtenção das soluções dinâmicas do sistema “médio”

Na simulação numérica, exibida através das figuras 4.3-4.5, obtém-se as respostas no tempo das amplitudes do modo horizontal a_1 e vertical a_2 , obtidas através das equações (4.26).

Na figura 4.3, mostra-se como a frequência da excitação (velocidade angular do motor de corrente contínua) Ω se aproxima da frequência natural ω_1 . Nota-se que a figura 4.3(a) é aquela correspondente ao parâmetro de controle, tomado como sendo, $\hat{a} = 0.22 \text{ Nm}$. Mostram-se que as amplitudes do modo horizontal estão crescendo gradativamente “mais” do que o modo vertical, a_2 que começa a oscilar no estado de regime permanente próximo de zero além do fato de que a_1 oscilará próximo do valor 0.015 para o tempo variando no intervalo $t \in (0, 10) \text{ seg.}$ (ver figura 4.3(b)).

Na figura 4.4, mostra-se como a frequência da excitação Ω consegue atravessar a segunda frequência natural da estrutura mas o motor de corrente contínua, não consegue sustentar a rotação próxima dos 85 rad/s para ser capturada nas proximidades de ω_1 , ver figura 4.4(a), correspondente ao parâmetro de controle $\hat{a} = 0.244 \text{ Nm}$. Mostram-se que as amplitudes do modo horizontal aumentam expressivamente em relação ao do modo vertical a partir de $t = 6 \text{ seg.}$, a_1 que está oscilando no estado permanente próximo de 0.030 e a_2 próximo de 0.005 para o tempo $t \in (0, 25) \text{ seg.}$ (ver figura 4.4(b)).

A figura 4.5, mostra como a frequência da excitação Ω está acima da frequência natural (longe da região de ressonância) ω_1 , ver figura 4.5(a), correspondente ao parâmetro de controle $\hat{a} = 0.258 \text{ Nm}$. Mostram-se que as amplitudes dos deslocamentos horizontal e vertical decrescem

rapidamente próximo de zero, a_2 está oscilando no estado permanente próximo de 0.0 e a_1 próximo de 0.004 para o tempo $t \in (0, 25)$ seg., ver figura 4.5(b).

Os resultados obtidos através de simulações numéricas da equação (4.26), colocados nas figuras 4.3-4.5, induzem as seguintes interpretações que são próximas a realidade experimental (Garzeri, 2001):

Figura 4.3:

A energia acumulada pelo motor de corrente contínua, durante a aceleração, não foi suficiente para “atravessar” a primeira região de ressonância e as oscilações do pórtico são pequenas.

Figura 4.4:

O motor de corrente contínua conseguiu “atravessar” a primeira ressonância do sistema, devido à energia acumulada nos volantes de inércia. Como a energia elétrica fornecida não era suficiente para sustentar a rotação do motor, esse começou a desacelerar, sendo capturado próximo da primeira frequência natural do pórtico; nesse instante, observa-se uma transferência de energia entre a vibração horizontal e vertical.

Note como para de crescer a amplitude de vibração vertical e a amplitude de vibração do modo horizontal aumenta expressivamente, ambos alcançam o estado permanente após esse fenômeno de saturação, bem como a estagnação da rpm do motor.

Figura 4.5:

A rotação do motor de corrente contínua se libera da primeira região de ressonância onde a tensão do motor foi elevada e o comportamento de oscilações do pórtico na direção dos modos vertical e horizontal são pequenas.

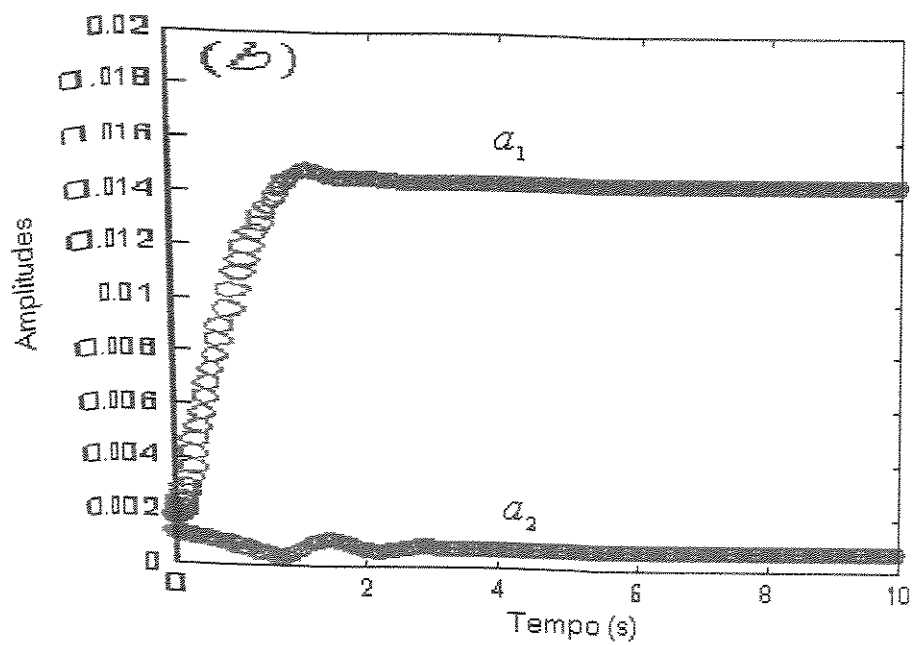
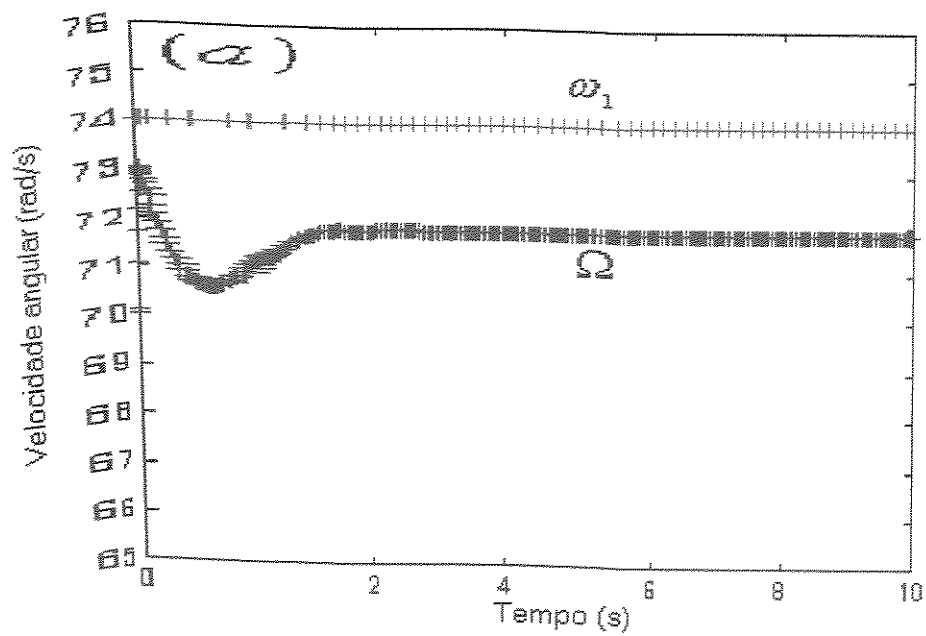


Figura 4.3. Amplitudes e frequência rotacional sem atravessar a primeira ressonância do sistema para o parâmetro de controle $\hat{a} = 0.22 \text{ Nm}$.

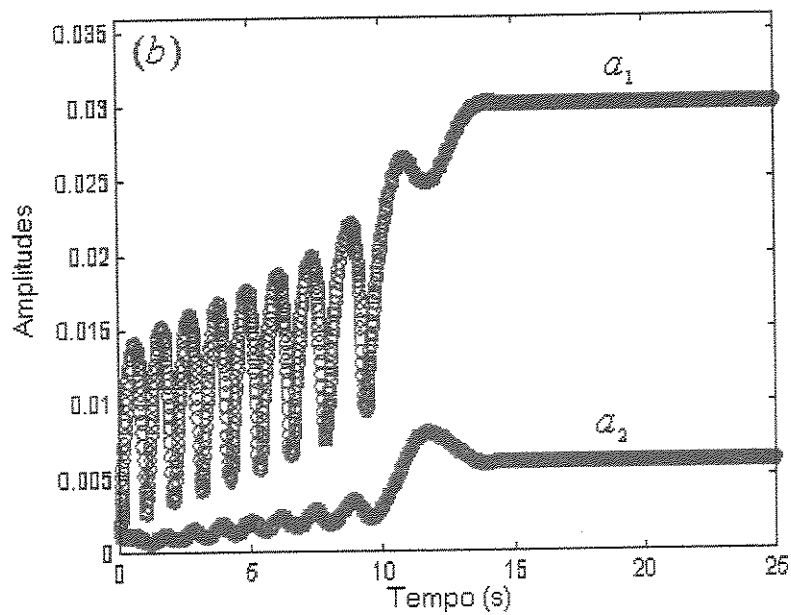
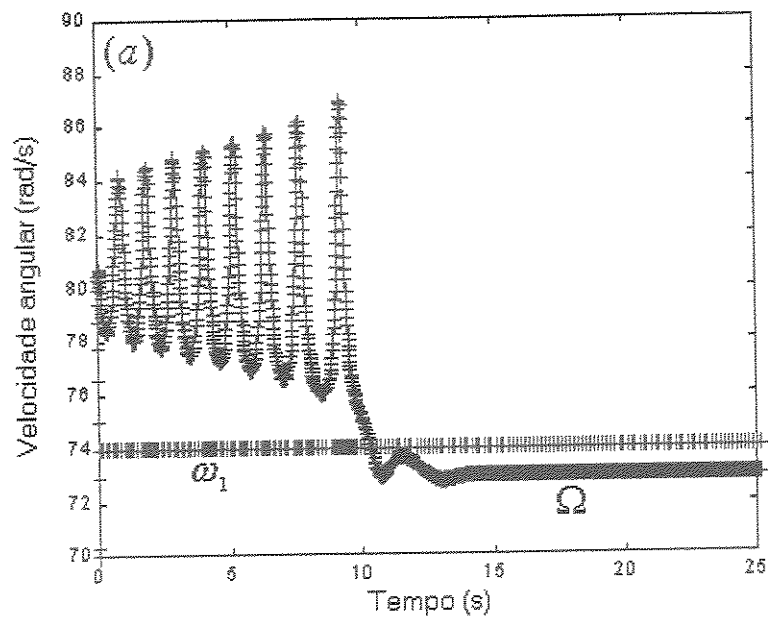
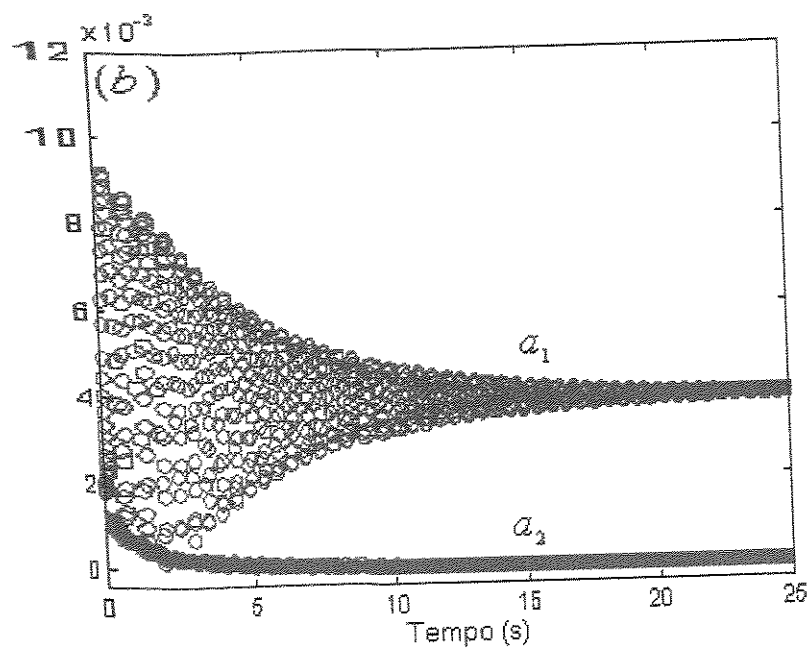
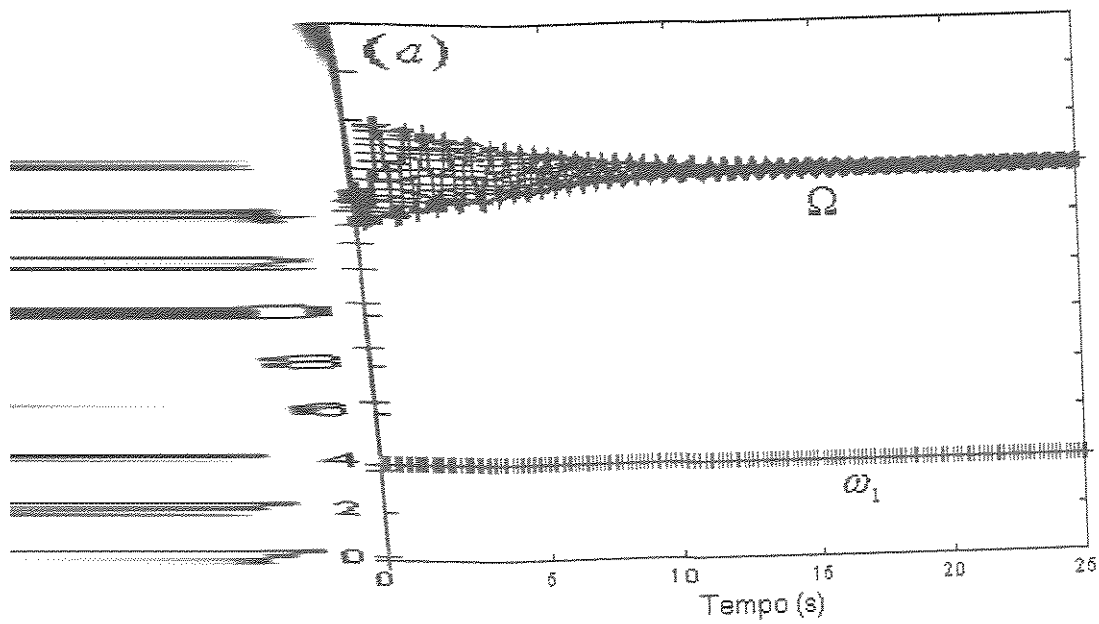


Figura 4.4. Amplitudes e frequência rotacional que atravessa e capturada na primeira ressonância do sistema para o parâmetro de controle $\hat{a} = 0.244 \text{ Nm}$.



udes e frequência rotacional que abandona a primeira ressonância do sistema para o parâmetro de controle $\hat{a} = 0.258 \text{ Nm}$.

Para completar os resultados obtidos aqui, mostram-se na Fig. 4.6 as soluções aproximadas dos modos horizontal q_1 e vertical q_2 do pórtico usando (4.36) para o valor de $\hat{a} = 0.0244 \text{ Nm}$ e que são comparadas com as soluções obtidas da equação (2.21) via integração direta. Observa-se boa concordância entre ambas soluções.

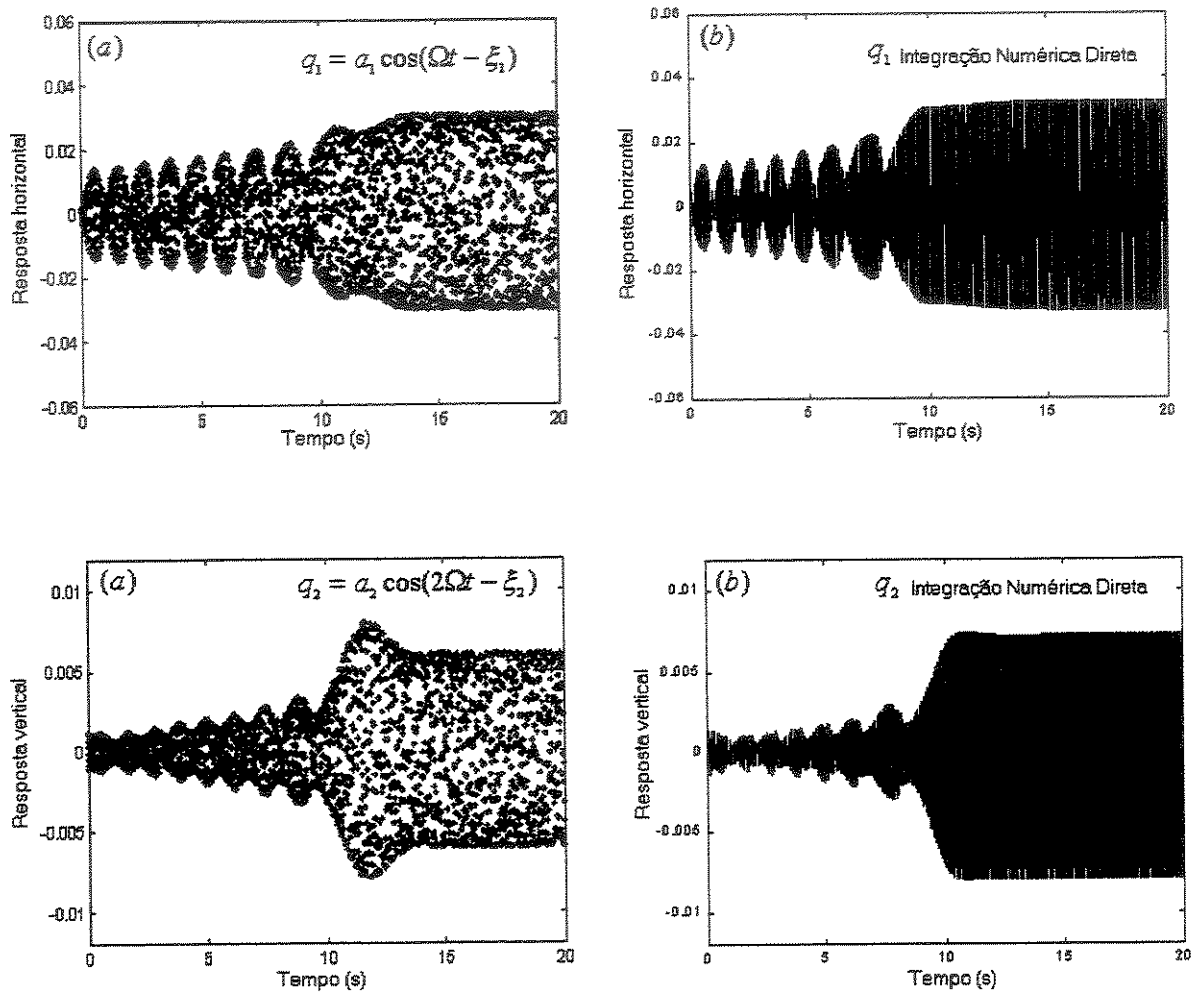


Figura 4.6. Comparação das respostas modais obtidas da integração da equação média e da equação diferencial original correspondente ao parâmetro de controle $\hat{a} = 0.0244 \text{ Nm}$.

A seguir, discute-se a busca de uma solução analítica na segunda região de ressonância.

4.3 Busca da solução analítica na segunda região de ressonância

A dinâmica do sistema descrito pela equação (4.8), próxima à Segunda região de ressonância, será estudada pelo método da média (MM). Para aplicar o MM, primeiro deve-se usar o método de variação de parâmetros (Nayfeh, 1981).

Quando $\varepsilon=0$, as soluções da equação (4.8) podem ser expressas como sendo:

$$\begin{aligned} q_1 &= A_1 \cos\left(\frac{1}{2}q_3 - \beta_1\right), \\ q_2 &= A_2 \cos(q_3 - \beta_2), \\ q_3 &= \Delta t, \end{aligned} \tag{4.39}$$

cujas derivadas podem ser expressas como

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= -A_1 \frac{1}{2} \omega_2 \sin\left(\frac{1}{2}q_3 - \beta_1\right), \\ \dot{q}_2 &= -A_2 \omega_2 \sin(q_3 - \beta_2) \\ \dot{q}_3 &= \Delta \end{aligned} \tag{4.40}$$

onde A_1 , A_2 , β_1 , β_2 e Δ são constantes, o qual algumas vezes são consideradas como parâmetros.

Quando tem-se $\varepsilon \neq 0$, assume-se que a solução da equação (4.8) ainda possa ser dada pela equação (4.39) mas tomando-se, $A_1 = A_1(t)$, $A_2 = A_2(t)$, $\beta_1 = \beta_1(t)$, $\beta_2 = \beta_2(t)$ e $\Delta = \Delta(t)$.

Logo, diferenciando-se a equação (4.39), tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \frac{dA_1}{dt} \cos\left(\frac{1}{2}q_3 - \beta_1\right) - A_1 \left(\frac{1}{2}\Delta - \frac{d\beta_1}{dt}\right) \sin\left(\frac{1}{2}q_3 - \beta_1\right) \\ \dot{q}_2 &= \frac{dA_2}{dt} \cos(q_3 - \beta_2) - A_2 \left(\Delta - \frac{d\beta_2}{dt}\right) \sin(q_3 - \beta_2), \end{aligned} \tag{4.41}$$

igualando-se a equação (4.41) com a equação (4.40), tem-se

$$\begin{aligned}\frac{dA_1}{dt}\cos(\frac{1}{2}q_3 - \beta_1) + A_1\sin(\frac{1}{2}q_3 - \beta_1)\frac{d\beta_1}{dt} &= \frac{1}{2}A_1(\Delta - \omega_2)\sin(\frac{1}{2}q_3 - \beta_1) \\ \frac{dA_2}{dt}\cos(q_3 - \beta_2) + A_2\sin(q_3 - \beta_2)\frac{d\beta_2}{dt} &= A_2(\Delta - \omega_2)\sin(q_3 - \beta_2)\end{aligned}\quad (4.42)$$

e, diferenciando a equação (4.40), obtém-se

$$\begin{aligned}\ddot{q}_1 &= -\frac{1}{2}\frac{dA_1}{dt}\omega_2\sin(\frac{1}{2}q_3 - \beta_1) - \frac{1}{2}A_1\omega_2(\frac{1}{2}\Delta - \frac{d\beta_1}{dt})\cos(\frac{1}{2}q_3 - \beta_1), \\ \ddot{q}_2 &= -\frac{dA_2}{dt}\omega_2\sin(q_3 - \beta_2) - A_2\omega_2(\Delta - \frac{d\beta_2}{dt})\cos(q_3 - \beta_2), \\ \ddot{q}_3 &= \frac{d\Delta}{dt},\end{aligned}\quad (4.43)$$

cujas substituições das equações (4.39), (4.40) e (4.43) no sistema (4.8) resultam em:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\frac{dA_1}{dt}\omega_2\sin(\frac{1}{2}q_3 - \beta_1) + \frac{1}{2}A_1\omega_2\cos(\frac{1}{2}q_3 - \beta_1)\frac{d\beta_1}{dt} &= A_1[\frac{1}{4}\omega_2\Delta - \omega_1^2]\cos(\frac{1}{2}q_3 - \beta_1) \\ &+ \varepsilon[-\alpha_5 A_1 A_2 \cos(\frac{1}{2}q_3 - \beta_1)\cos(q_3 - \beta_2) + \alpha_1 \frac{d\Delta}{dt}\sin q_3 \\ &+ \alpha_1 \cos q_3 \Delta^2 + \frac{1}{2}\mu_1 A_1 \omega_2 \sin(\frac{1}{2}q_3 - \beta_1)], \\ -\frac{dA_2}{dt}\omega_2\sin(q_3 - \beta_2) + A_2\omega_2\cos(q_3 - \beta_2)\frac{d\beta_2}{dt} &= A_2[\omega_2\Delta - \omega_2^2]\cos(q_3 - \beta_2) \\ &+ \varepsilon[-\alpha_6 A_1^2 \cos^2(\frac{1}{2}q_3 - \beta_1) + \alpha_2 \sin q_3 \Delta^2 - \alpha_2 \frac{d\Delta}{dt}\cos q_3 \\ &+ \mu_2 A_2 \omega_2 \sin(q_3 - \beta_2) - \alpha_8],\end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned}
\frac{d\Delta}{dt} = & \varepsilon \left\{ \alpha_3 \left[-\frac{1}{2} \frac{dA_1}{dt} \omega_2 \sin\left(\frac{1}{2}q_3 - \beta_1\right) - \frac{1}{2} A_1 \omega_2 \left(\frac{1}{2}\Delta - \frac{d}{dt}\beta_1\right) \cos\left(\frac{1}{2}q_3 - \beta_1\right) \right] \sin q_3 \right. \\
& - \alpha_4 \left[-\frac{dA_2}{dt} \omega_2 \sin(q_3 - \beta_2) - A_2 \omega_2 \left(\Delta - \frac{d}{dt}\beta_2\right) \cos(q_3 - \beta_2) \right] \cos q_3 \\
& \left. - \alpha_7 \cos q_3 + \Gamma(\Delta) \right\}, \tag{4.44}
\end{aligned}$$

Para se efetuar a investigação da dinâmica do sistema na presença da ressonância principal ω_2 ($\Delta \approx \omega_2$) e da ressonância interna ($\omega_2 \approx 2\omega_1$), deve-se introduzir os parâmetros de sintonia σ_1 e σ_2 de modo que:

$$\begin{aligned}
\Delta &= \omega_2 + \varepsilon \sigma_2, \\
\omega_2 &= 2\omega_1 + \varepsilon \sigma_1, \tag{4.45}
\end{aligned}$$

onde σ_2 representa a variação da frequência de excitação não-ideal a partir da frequência natural segundo o modo de vibração, σ_1 representa a variação da frequência natural do segundo modo de vibração, a partir do dobro da frequência natural do primeiro modo de vibração e o parâmetro ε é uma pequena constante positiva.

Usando-se identidades trigonométricas para isolar-se as variáveis $\frac{dA_j}{dt}$, $\frac{d\beta_j}{dt}$ e $\frac{d\Delta}{dt}$ da equação (4.44) e desprezando todos os termos $O(\varepsilon^2)$ que aparecem nas equações (4.42) e (4.44), obtém-se:

$$\begin{aligned}
\frac{dA_1}{dt} = & -\varepsilon \left[A_1 \sigma_1 \sin\left(\frac{1}{2}q_3 - \beta_1\right) \cos\left(\frac{1}{2}q_3 - \beta_1\right) \right] \\
& - \frac{2\varepsilon}{\omega_2} \left[-\alpha_3 A_1 A_2 \cos\left(\frac{1}{2}q_3 - \beta_1\right) \cos(q_3 - \beta_2) + \alpha_1 \Delta^2 \cos q_3 \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \mu_1 A_1 \omega_2 \sin\left(\frac{1}{2}q_3 - \beta_1\right) \right] \sin\left(\frac{1}{2}q_3 - \beta_1\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\beta_1}{dt} &= \varepsilon \left[\frac{1}{2} \sigma_2 + \sigma_1 \cos^2 \left(\frac{1}{2} q_3 - \beta_1 \right) \right] \\
&\quad + \frac{2\varepsilon}{A_1 \omega_2} \left[-\alpha_5 A_1 A_2 \cos \left(\frac{1}{2} q_3 - \beta_1 \right) \cos(q_3 - \beta_2) + \alpha_1 \Delta^2 \cos q_3 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \mu_1 A_1 \omega_2 \sin \left(\frac{1}{2} q_3 - \beta_1 \right) \right] \cos \left(\frac{1}{2} q_3 - \beta_1 \right), \\
\frac{dA_2}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{\omega_2} \left[-\alpha_6 A_1^2 \cos^2 \left(\frac{1}{2} q_3 - \beta_1 \right) + \alpha_2 \Delta^2 \sin q_3 \right. \\
&\quad \left. + \mu_2 \omega_2 A_2 \sin(q_3 - \beta_2) - \alpha_8 \right] \sin(q_3 - \beta_2), \\
\frac{d\beta_2}{dt} &= \varepsilon \sigma_2 + \frac{\varepsilon}{A_2 \omega_2} \left[-\alpha_6 A_1^2 \cos^2 \left(\frac{1}{2} q_3 - \beta_1 \right) + \alpha_2 \Delta^2 \sin q_3 + \right. \\
&\quad \left. + \mu_2 A_2 \omega_2 \sin(q_3 - \beta_2) - \alpha_8 \right] \cos(q_3 - \beta_2), \\
\frac{d\Delta}{dt} &= \varepsilon \left\{ -\frac{1}{4} \alpha_3 \omega_2 A_1 \Delta \cos \left(\frac{1}{2} q_3 - \beta_1 \right) \sin q_3 + \alpha_4 \omega_2 A_2 \Delta \cos(q_3 - \beta_2) \cos q_3 \right. \\
&\quad \left. - \alpha_7 \cos q_3 + \Gamma(\Delta) \right\}, \tag{4.46}
\end{aligned}$$

Para a resolução das equações de (4.46) usa-se o Método da Média de Bogoliubov com a idéia proposta no livro do Prof. Kononenko(Kononenko, 1969). Desta forma, de acordo com este método, a primeira aproximação:

$$\begin{aligned}
\Delta &= \Omega + \varepsilon U_{11}, \quad A_1 = a_1 + \varepsilon U_{12}, \quad \beta_1 = \xi_1 + \varepsilon U_{13}, \\
A_2 &= a_2 + \varepsilon U_{14}, \quad \beta_2 = \xi_2 + \varepsilon U_{15} \tag{4.47}
\end{aligned}$$

onde: $U_{1j} = U_{1j}(t, \Omega, a_1, a_2, \xi_1, \xi_2)$, $j = 1 \dots 5$, são funções periódicas no tempo que oscilam suavemente.

Para se encontrar as soluções $a_1, a_2, \xi_1, \xi_2, \Omega$ na primeira aproximação calcula-se a média do lado direito da equação (4.46), da forma:

$$\begin{aligned}
\frac{da_1}{dt} &= \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_{a_1} dq_3, \quad \frac{d\beta_1}{dt} = \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_{\beta_1} dq_3, \\
\frac{da_2}{dt} &= \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_{a_2} dq_3, \quad \frac{d\beta_2}{dt} = \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_{\beta_2} dq_3, \\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_{\Omega} dq_3,
\end{aligned} \tag{4.48}$$

e após a integração, tem-se

$$\begin{pmatrix} \frac{da_1}{dt} \\ \frac{d\xi_1}{dt} \\ \frac{da_2}{dt} \\ \frac{d\xi_2}{dt} \\ \frac{d\Omega}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\varepsilon}{\omega_2} \left[-\frac{\alpha_5}{2} a_1 a_2 \sin(\xi_2 - 2\xi_1) + \frac{\mu_1}{2} a_1 \omega_2 \right] \\ \varepsilon \frac{1}{2} [\sigma_2 + \sigma_1] - \frac{2\varepsilon}{a_1 \omega_2} \alpha_5 a_1 a_2 \cos(\xi_2 - 2\xi_1) \\ -\frac{\varepsilon}{\omega_2} \left[\frac{\alpha_6}{4} a_1^2 \sin(\xi_2 - 2\xi_1) + \frac{\alpha_2}{2} \Omega^2 \cos(\xi_2) + \frac{1}{2} \mu_2 a_2 \omega_2 \right] \\ \varepsilon \sigma_2 + \frac{\varepsilon}{a_2 \omega_2} \left[-\frac{\alpha_6}{4} a_1^2 \cos(\xi_2 - 2\xi_1) + \frac{1}{2} \alpha_2 \Omega^2 \sin \xi_2 \right] \\ \varepsilon \left[\frac{1}{2} \alpha_4 a_2 \omega_2 \Omega \cos \xi_2 + \Gamma(\Omega) \right] \end{pmatrix} \tag{4.49}$$

As equações de (4.49) são referentes ao sistema médio. Elas determinam as amplitudes $a_1(t)$, $a_2(t)$, as fases $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, e a frequência de excitação não-ideal $\Omega(t)$ como as aproximações de primeira ordem no pequeno parâmetro das respostas generalizadas do sistema (4.8). Na primeira aproximação, as soluções do sistema (4.8) são

$$q_1 = a_1 \cos\left(\frac{1}{2}\Omega t - \xi_1\right), \quad q_2 = a_2 \cos(\Omega t - \xi_2), \quad q_3 = \Omega t, \tag{4.50}$$

onde os a_j , ξ_j e Ω são determinados pela solução da equação (4.49).

A seguir, discute-se a busca de uma solução constante na segunda região de ressonância.

4.3.1 Obtenção das soluções constantes do sistema "médio"

As soluções constantes ou soluções de equilíbrio ou pontos fixos da equação (4.49), que são as respostas do sistema no estado permanente, são dadas, definindo-se $\dot{a}_1 = \dot{a}_2 = 0$, $\dot{\xi}_1 = \dot{\xi}_2 = 0$ e $\dot{\Omega} = 0$, obtém-se, então:

$$0 = -\alpha_5 a_1 a_2 \sin(\xi_2 - 2\xi_1) + \mu_1 \omega_2 a_1, \quad (4.51)$$

$$0 = [\sigma_2 + \sigma_1] a_1 - \frac{1}{\omega_2} \alpha_3 a_1 a_2 \cos(\xi_2 - 2\xi_1), \quad (4.52)$$

$$0 = -\frac{\alpha_6}{2} a_1^2 \sin(\xi_2 - 2\xi_1) + \alpha_2 \Omega^2 \cos \xi_2 + \mu_2 a_2 \omega_2, \quad (4.53)$$

$$0 = \sigma_2 a_2 + \frac{1}{\omega_2} \left[-\frac{\alpha_6}{4} a_1^2 \cos(\xi_2 - 2\xi_1) + \frac{1}{2} \alpha_2 \Omega^2 \sin \xi_2 \right], \quad (4.54)$$

$$0 = \frac{1}{2} \alpha_4 a_2 \omega_2 \Omega \cos \xi_2 + \Gamma(\Omega), \quad (4.55)$$

A seguir, analisam-se as respostas lineares, não-lineares e o fenômeno de saturação por meio da busca de soluções analíticas das equações (4.51)-(4.55) para se poder validar os resultados obtidos através da integração numérica da equação (4.49).

Caso I: Análise das soluções constantes quando $a_1 = 0$ e $a_2 \neq 0$.

Neste caso, usando-se as equações (4.53) e (4.54) obtém-se:

$$\begin{aligned} \alpha_2 \Omega^2 \cos \xi_2 &= -\mu_2 a_2 \omega_2, \\ \alpha_2 \Omega^2 \sin \xi_2 &= -2\sigma_2 a_2, \end{aligned} \quad (4.56)$$

cuja solução para os a_j , ξ_j e Ω , tem-se

$$a_2 = \frac{\alpha_2 \Omega^2}{\omega_2 \sqrt{4(\Omega - \omega_2)^2 + \mu_2^2}}, \quad \xi_2 = \arctan\left(-\frac{2(\Omega - \omega_2)}{\mu_2}\right). \quad (4.57)$$

Usando-se a equação (4.55) tem-se que

$$\frac{\hat{a} - \hat{b}\Omega}{I_m - m_0 r^2} = \frac{\alpha_4 \mu_2 \omega_2^2}{2\alpha_2 \Omega} a_2^2, \quad (4.58)$$

onde a equação (4.58) determina a frequência de excitação do motor de corrente contínua.

Usando-se as soluções (4.57), e levando-se em conta que $a_1 = 0$, rescreve-se (4.50) da seguinte forma:

$$q_1 = 0, \quad q_2 = \frac{\alpha_2 \Omega^2}{\omega_2 \sqrt{4(\Omega - \omega_2)^2 + \mu_2^2}} \cos(\Omega t - \xi_2) \text{ e } q_3 = \Omega t, \quad (4.59)$$

que são essencialmente as soluções lineares do regime permanente do sistema (4.8) (Nayfeh, (1995)).

Caso II: Analisa-se as soluções constantes quando $a_1 \neq 0$ e $a_2 \neq 0$.

Usando as equações (4.51) e (4.52) e levando-se em conta que $a_1 \neq 0$, tem-se que

$$0 = -\alpha_5 a_2 \sin(\xi_2 - 2\xi_1) + \omega_2 \mu_1, \quad (4.60)$$

$$0 = [\sigma_2 + \sigma_1] - \frac{1}{\omega_2} \alpha_5 a_2 \cos(\xi_2 - 2\xi_1), \quad (4.61)$$

$$0 = -\frac{\alpha_6}{2} a_1^2 \sin(\xi_2 - 2\xi_1) + \alpha_2 \Omega^2 \cos \xi_2 + \mu_2 a_2 \omega_2, \quad (4.62)$$

$$0 = \sigma_2 a_2 + \frac{1}{\omega_2} \left[-\frac{\alpha_6}{4} a_1^2 \cos(\xi_2 - 2\xi_1) + \frac{1}{2} \alpha_2 \Omega^2 \sin \xi_2 \right], \quad (4.63)$$

$$0 = \frac{1}{2} \alpha_4 a_2 \omega_2 \Omega \cos(\xi_2) + \Gamma(\Omega), \quad (4.64)$$

Logo, obtém-se que:

$$a_1 = \sqrt{\frac{\Gamma_1 \pm \sqrt{\Gamma_3^2 - \Gamma_2^2}}{2}}, \quad a_2 = \frac{\omega_2}{\alpha_5} \sqrt{\mu_1^2 + (\sigma_1 + \sigma_2)^2}, \quad (4.65)$$

onde

$$\Gamma_1 = \frac{4\omega_2^2}{\alpha_5\alpha_6} [2(\sigma_1 + \sigma_2)\sigma_2 - \mu_1\mu_2], \quad (4.66)$$

$$\Gamma_2 = \frac{4\omega_2^2}{\alpha_5\alpha_6} [2\mu_1\sigma_2 + \mu_2(\sigma_1 + \sigma_2)], \quad (4.67)$$

$$\Gamma_3 = \frac{4\alpha_2\Omega^2}{\alpha_6}, \quad (4.68)$$

Neste caso, a resposta no estado estacionário do sistema não-ideal é dado por (4.50) onde os a_j , ξ_j e Ω são constantes obtidas das equações (4.51) - (4.55). Esta resposta periódica é do tipo não-linear.

Considerando-se o fato de que o sistema tem ressonância interna ($\omega_2 = 2\omega_1$) então $\sigma_1 = 0$ e se $\sigma_2 = 0$ da equação (4.65) tem-se que a_2 é proporcional a $\omega_2\mu_1/\alpha_5$ e é independente de Ω (fenômeno de saturação(Nayfeh e Mook, 1979)), e que a_1 é proporcional a $\sqrt{(2\alpha_2\alpha_5\Omega^2 - 2\omega_2^2\mu_1\mu_2)/\alpha_5\alpha_6}$ e dependente de Ω .

Finalmente, verifica-se analiticamente o fenômeno de saturação nos resultados da equação (4.49) (ver figura 4.8).

Para a análise do comportamento dinâmico do sistema durante a passagem pela segunda ressonância, de forma completa, precisam-se das curvas típicas deste fenômeno, tais como: curvas amplitudes versus frequência e curvas amplitudes versus parâmetro de controle. Com este intuito, o sistema de equações média (4.49) deve ser transformada na forma cartesiana. Para este fim, introduzem-se as seguintes transformações cartesianas:

$$P_1 = a_1 \cos \xi_1, \quad Q_1 = a_1 \sin \xi_1,$$

$$P_2 = a_2 \cos \xi_2, \quad Q_2 = a_2 \sin \xi_2 \quad (4.69)$$

que após a substituição nas equações (4.69) e nas equações (4.49), obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{dP_1}{dt} &= -\varepsilon \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)Q_1 + \frac{\varepsilon}{2\omega_2}[\alpha_5(P_1Q_2 - Q_1P_2) + \mu_1\omega_2P_1], \\ \frac{dQ_1}{dt} &= \frac{1}{2}\varepsilon(\sigma_1 + \sigma_1)P_1 - \frac{\varepsilon}{2\omega_2}[\alpha_5(P_1P_2 + Q_1Q_2) + \mu_1\omega_2Q_1], \\ \frac{dP_2}{dt} &= -\varepsilon\sigma_2Q_2 - \varepsilon \frac{1}{2\omega_2}[-\alpha_6P_1Q_1 + \alpha_2\Omega^2 + \mu_2\omega_2P_2], \\ \frac{dQ_2}{dt} &= \varepsilon\sigma_2P_2 - \frac{\varepsilon}{4\omega_2}[\alpha_6(P_1^2 - Q_1^2) + 2\mu_2\omega_2Q_2], \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \varepsilon[\frac{1}{2}\alpha_4\omega_2\Omega P_2 + F(\Omega)], \end{aligned} \quad (4.70)$$

onde, pode-se tomar, agora, por conveniência $\varepsilon=1$ (Nayfeh, 1981).

As soluções constantes são, agora, obtidas da equação (4.70) com derivadas nulas, ou seja, para soluções constantes: $\dot{P}_1 = \dot{Q}_1 = \dot{P}_2 = \dot{Q}_2 = \dot{\Omega} = 0$, através do método de Newton-Raphson.

As figura 4.7 e 4.8 exibem as curvas ressonantes tais como resposta-freqüência e a resposta-parâmetro de controle para rotações crescentes (freqüência rotacional) do motor de corrente contínua e para valores crescentes do parâmetro de controle (tensão de alimentação do motor) $\hat{a} \in (0.40, 0.70) Nm$ durante a passagem pela segunda ressonância do sistema.

Na figura 4.7 observam-se nos resultados os efeitos da não linearidade quadrática no sistema de equações diferenciais e da ressonância interna dos dois primeiros modos de vibração do pórtico quando o segundo modo é excitado diretamente pelo motor não-ideal.

Na figura 4.8 observa-se claramente o fenômeno de saturação entre os primeiros modos de vibração correspondentes aos modos vertical e horizontal do pórtico e o efeito de Sommerfeld para valores crescentes do parâmetro de controle durante a passagem pela segunda ressonância.

Antes de entrar na ressonância, observa-se que as respostas no modo horizontal são nulas e não nulas para o modo vertical (similar na análise analítico feito acima) que são as soluções do problema linear que não tem influencia da ressonância interna. Na faixa muito próxima da segunda ressonância observa-se que as soluções não nulas dos modos horizontal $a_1 = \sqrt{P_1^2 + Q_1^2}$ e vertical $a_2 = \sqrt{P_2^2 + Q_2^2}$ corresponde ao problema não-linear ocorrendo o aumento repentino da amplitude horizontal enquanto que a amplitude vertical permanece estável em seus valores (fenômeno de saturação: S ponto inicial da saturação modal, ver figura 4.8).

Tem-se uma transição descontínua (ocorrendo vibrações instáveis do pórtico e acelerações bruscas do motor) até o termino do fenômeno de saturação de oscilações não-lineares (a linha de círculos representa as amplitudes a_1 e a linha de cruzeiros representa as amplitudes a_2).

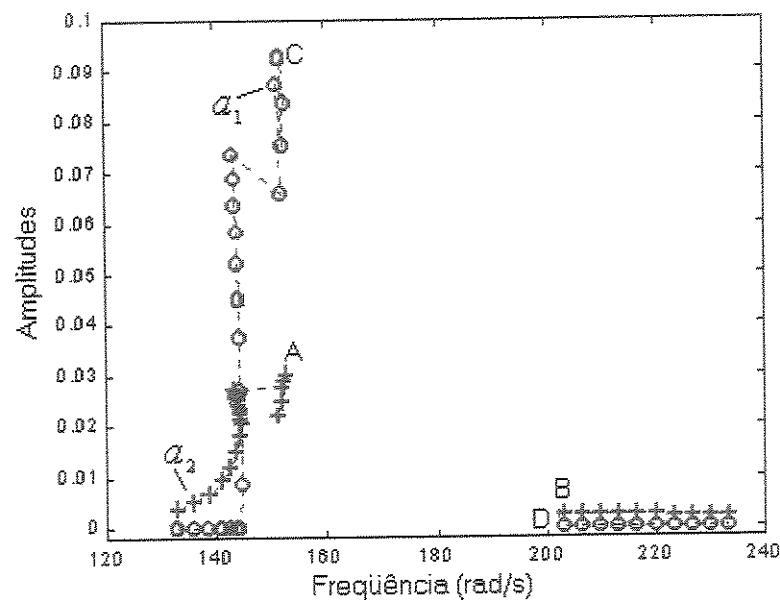


Figura 4.7. Soluções constantes modos vertical e horizontal do pórtico para rotações crescentes do motor durante a passagem pela segunda ressonância.

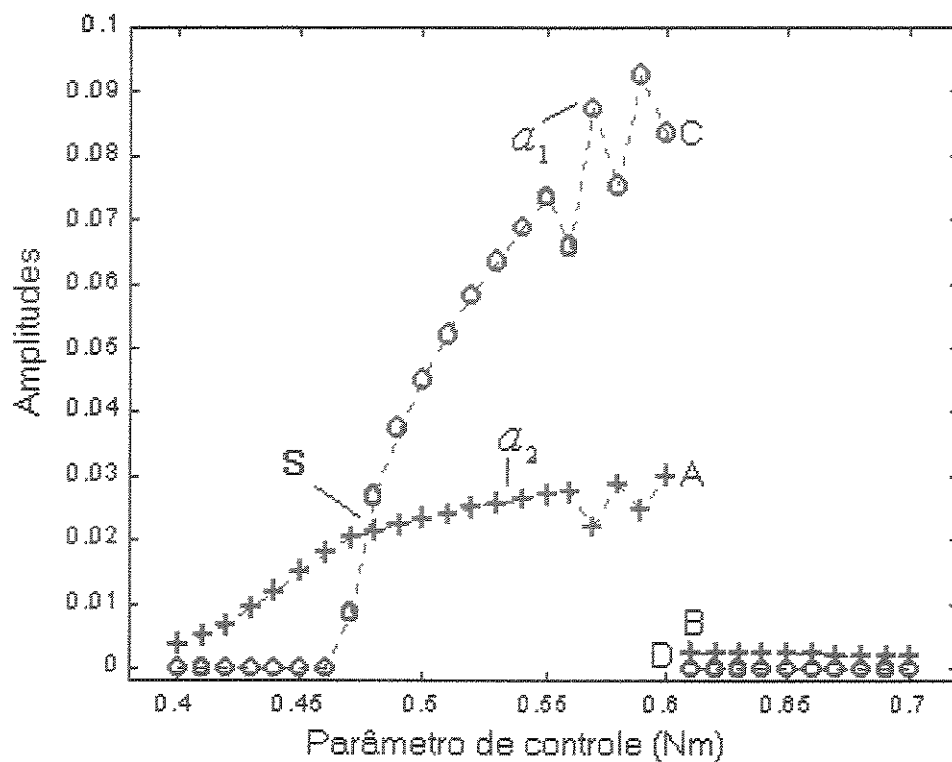


Figura 4.8. Soluções constantes dos modos vertical e horizontal do pórtico para valores crescentes do parâmetro de controle durante a passagem pela segunda ressonância.

4.3.2 Obtenção das soluções dinâmicas do sistema "médio"

Os resultados obtidos através de simulações numéricas da equação (4.49) são exibidas através das figuras 4.9, 4.10 e 4.11, consideram-se as respostas no tempo das amplitudes a_1 e a_2 , para certos valores do parâmetro de controle $\hat{a}$, a saber, 0.46, 0.55, 0.65 Nm, respectivamente. Estes valores do parâmetro de controle foram escolhidos de acordo aos resultados prévios obtidos, anteriormente, na seção 4.3.1.

Na figura 4.9, observa-se que a frequência da excitação (velocidade angular do motor) Ω está abaixo da frequência natural ω_2 e não consegue atravessar a segunda ressonância do sistema (devido a que a energia acumulada pelo motor durante a aceleração não foi suficiente) correspondente ao parâmetro de controle $\hat{a} = 0.46 \text{ Nm}$. Nota-se que as amplitudes do modo horizontal são nulas e as do modo vertical de valores pequenos representam as soluções do sistema sem a influencia da ressonância interna.

Na figura 4.10, a frequência da excitação Ω consegue atravessar a frequência natural ω_2 mas o motor de corrente contínua, não consegue sustentar essa rotação próxima de 175 rad/s (devido à energia acumulada nos volantes do motor) para ser capturado na proximidade da segunda ressonância, ver figura 4.10(a), correspondente ao parâmetro de controle $\hat{a}=0.55 \text{ Nm}$ (efeito Sommerfeld). Nota-se que as amplitudes do modo horizontal aumentam expressivamente em relação ao modo vertical a partir de $t=6\text{seg}$ (ocorrendo o fenômeno de saturação, ver figura 4.10(b)).

Na figura 4.11, a frequência da excitação Ω está acima da frequência natural (longe da região de ressonância) ω_2 (ver figura 4.11(a)), correspondente ao parâmetro de controle $\hat{a} = 0.65 \text{ Nm}$, abandonando o fenômeno de saturação depois de ter acontecido o fenômeno de salto.

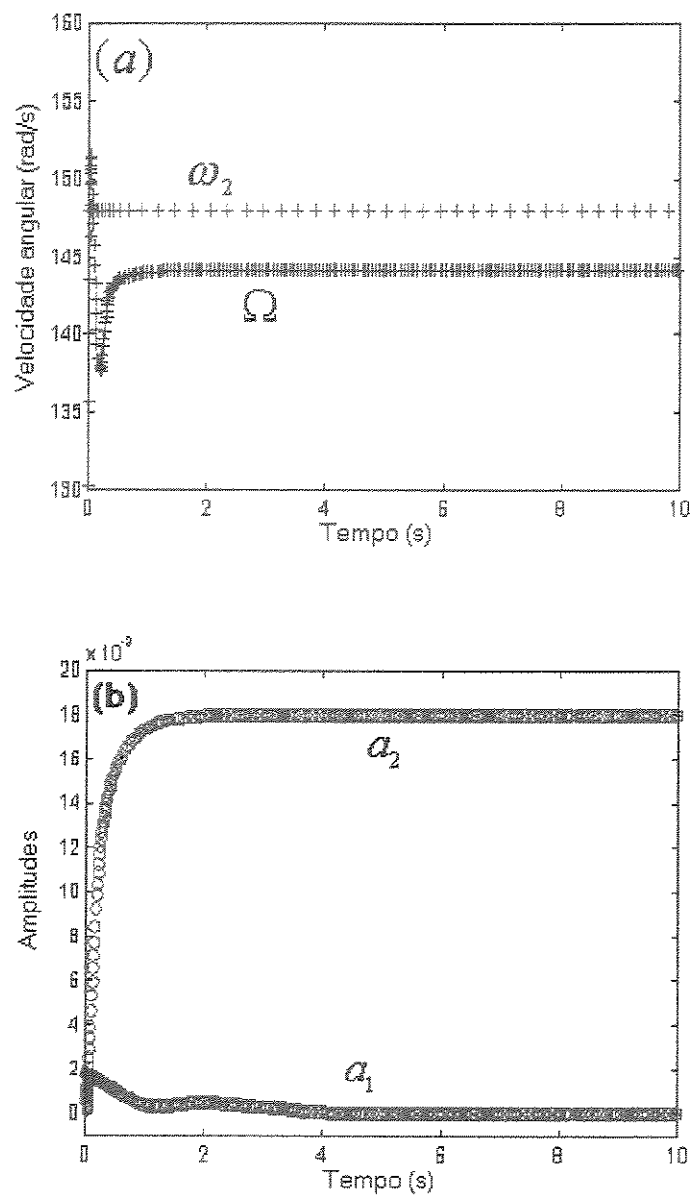


Figura 4.9. Início da 2da ressonância para o parâmetro de controle $\hat{a} = 0.46 \text{ Nm}$.
(a) Velocidade angular do motor Ω e (b) Amplitudes dos modos horizontal a_1 e vertical a_2 .

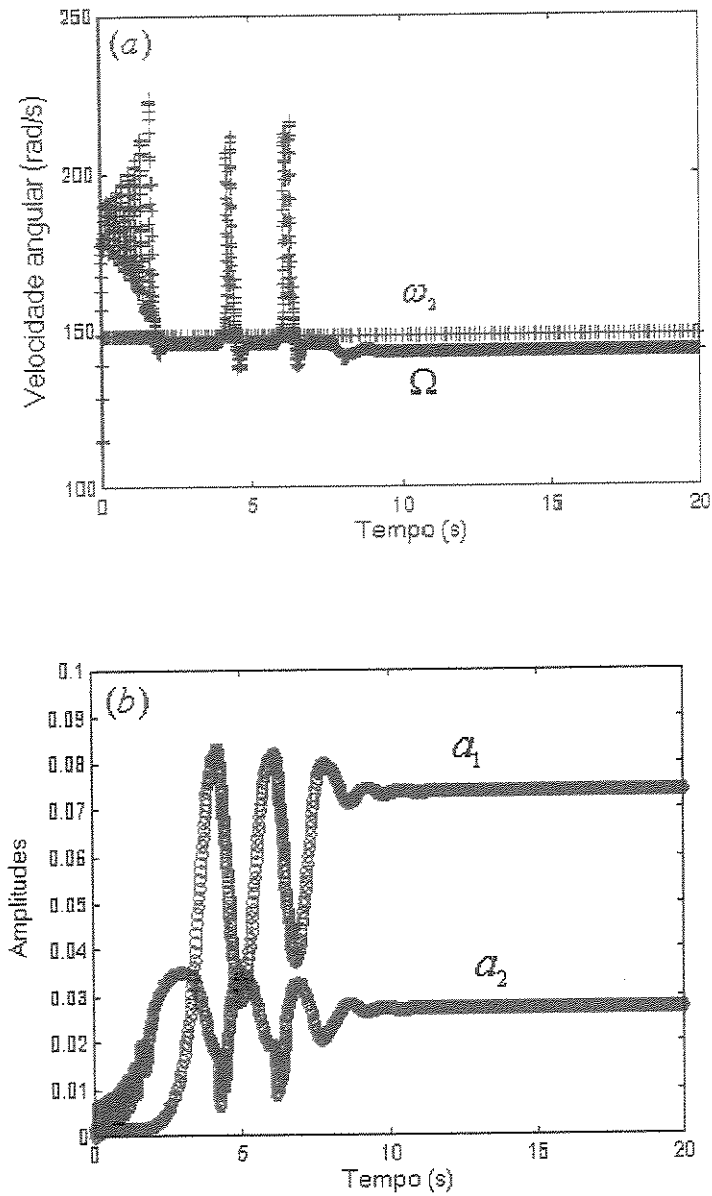


Figura 4.10. Fenômeno de captura pela segunda ressonância, efeito Sommerfeld e saturação modal para o parâmetro de controle $\hat{a} = 0.55 \text{ Nm}$.

(a) Velocidade angular do motor Ω e (b) Amplitudes dos modos horizontal a_1 e vertical a_2 .

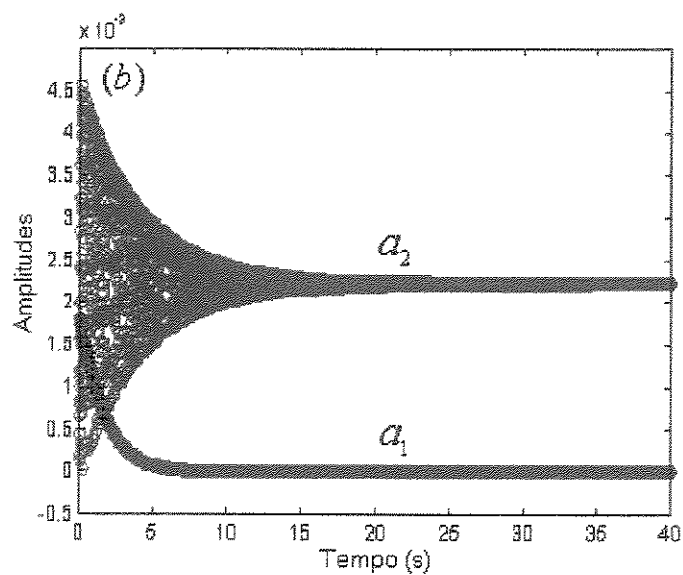
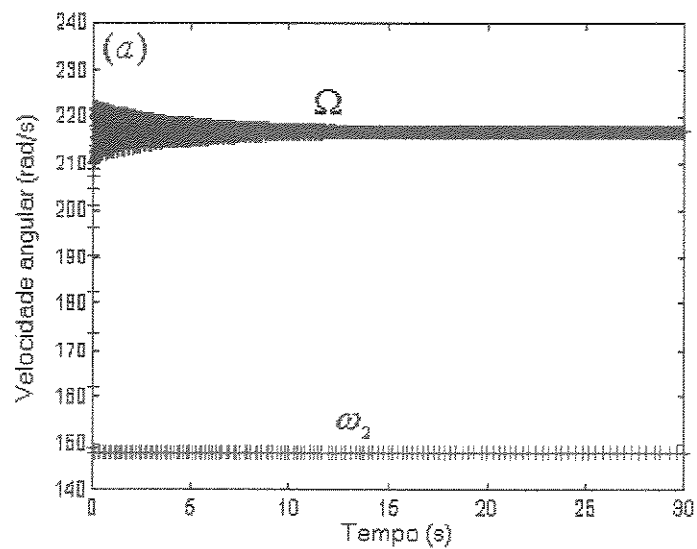


Figura 4.11. Término da 2da ressonância para o parâmetro de controle $\hat{a} = 0.65 \text{ Nm}$.
(a) Velocidade angular do motor Ω e (b) Amplitudes dos modos horizontal a_1 e vertical a_2 .

Na terceira simulação numérica, mostrada na Fig. 4.12, compara-se à solução analítica aproximada com a integração numérica direta, para a comprovação de que o método da média de Bogoliubov é uma ferramenta válida para soluções aproximadas de um sistema não-ideal. Mostram-se no gráfico de séries temporais a resposta dos modos horizontal e vertical do pórtico das equações 2.21 e 4.50 no valor do parâmetro de controle $\hat{a} = 0.55 \text{ Nm}$.

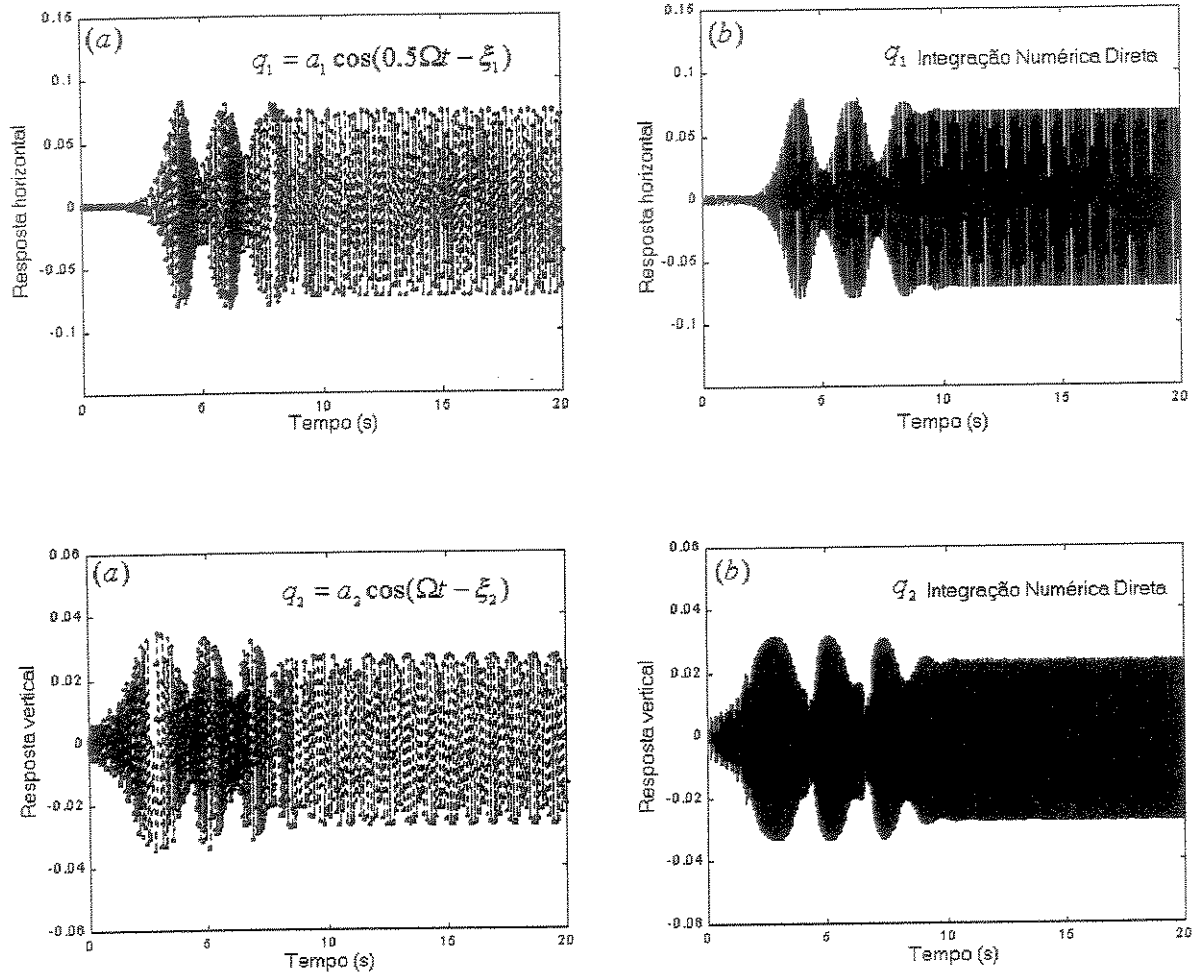


Figura 4.12. Comparação das soluções na série temporal entre os resultados obtidos da equação 4.42 via método da média (a) e 2.21 via integração numérica direta (b).

Na figura 4.13, mostram-se as comparações das respostas dos modos horizontal e vertical das (4.42) e (2.21) no plano fase para os seguintes parâmetros de controle:

$$\hat{a} = 0.5 \text{ Nm}, \quad \hat{a} = 0.55 \text{ Nm}.$$

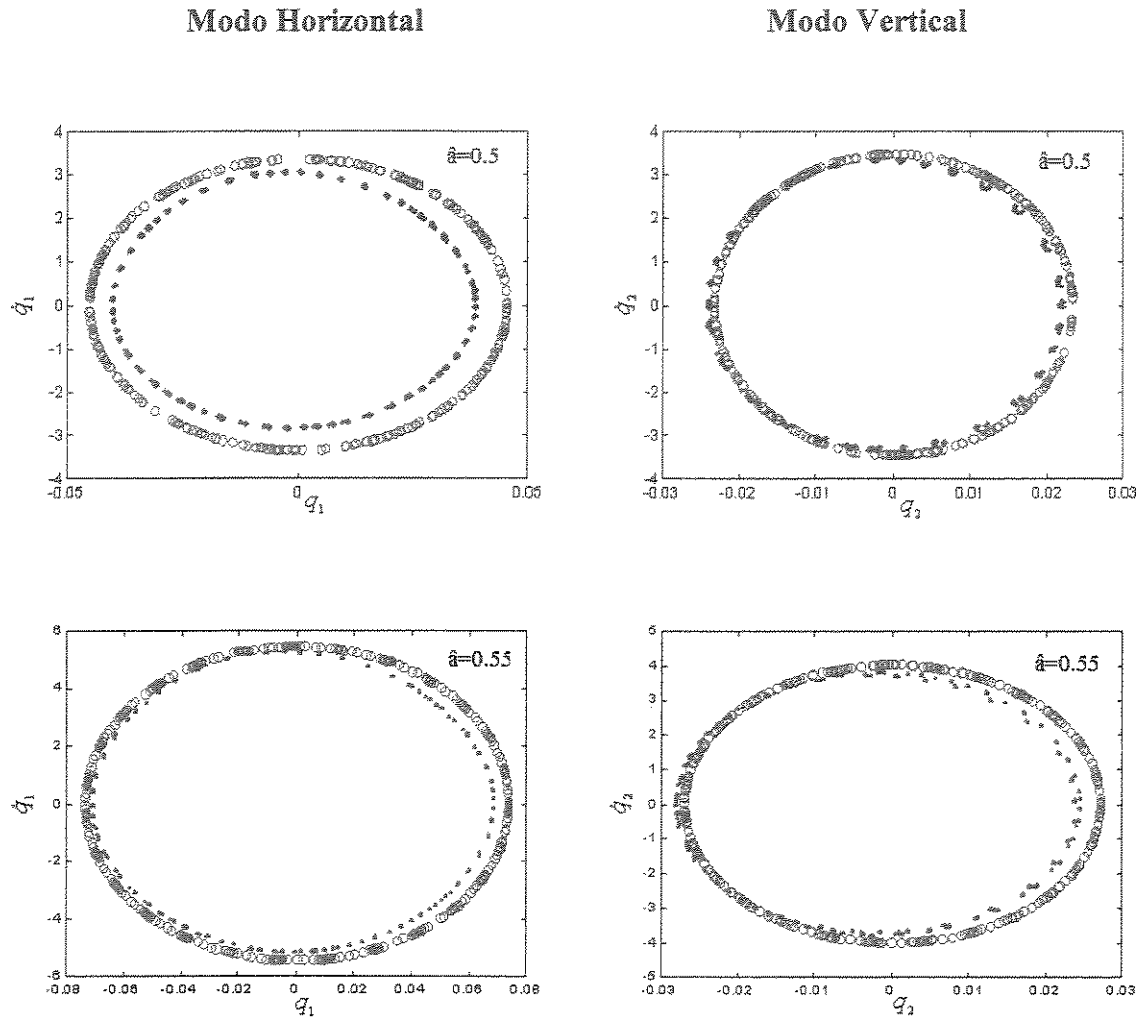


Figura 4.13. Comparação das soluções no plano fase entre os resultados obtidos da equação (4.42) via método da média (linha azul ooo) e (2.21) via integração numérica direta (linha vermelha ...).

Comprovando-se de que o método da média de Bogoliubov é uma ferramenta válida para obter soluções aproximadas de um sistema não-ideal.

Capítulo 5

Supressão de Vibrações, Utilizando-se Técnicas de Controle por Saturação e Ressonâncias Internas

5.1 Introdução

Várias estratégias de controle estão sendo desenvolvidas e utilizadas na literatura corrente na busca de soluções de problemas em engenharia mecânica. No caso de problemas não-ideais pouco esforço foi efetuado nesta direção.

Entre os poucos trabalhos, de controle para problemas não-ideais, mencionam-se os publicados por Yamakawa e Murakami (1989) que utilizou a técnica dos gradientes conjugados em um problema de rotores; Dimetenberg et al. (1997) que utilizou métodos heurísticos no controle da amplitude de vibração quando da passagem pela ressonância em um problema de um grau de liberdade e recentemente Balthazar et al. (2001) utilizou-se da técnica de Tikhonov na obtenção de tempo mínimo de passagem pela ressonância em um problema vibratório não-ideal de dois graus de liberdade.

Para que a estratégia de controle por saturação, que será utilizada, neste capítulo, tenha efeito sobre o sistema, deve-se levar em conta os seguintes pontos:

- O acoplamento modal entre o controlador e os modos de vibração do sistema em questão
- A definição dos parâmetros físicos de tal modo que exibam o efeito de acoplamento modal.

- A velocidade média de rotação do carregamento não-ideal deve estar em ressonância com a frequência natural do segundo modo de vibração e/ou primeiro modo de vibração.

Os estudos que faremos, irão se concentrar em dois casos: quando o método de controle for aplicado a um pórtico plano sob carregamento harmônico e quando o método de controle for aplicado a um pórtico plano sob carregamento não-ideal. O desempenho do sistema de controle por saturação será realizado por simulações numéricas já que com o aumento de números de graus de liberdade no sistema implica a complexidade na análise analítica (método da média).

As idéias principais sobre controle por saturação contidas neste capítulo foram tiradas dos trabalhos desenvolvidos por Tuer, et al. (1994), Queini, et al. (1997), Pai, et al. (1998), Queini e Nayfeh (2000), Nayfeh, (2000), porém as aplicações aqui efetuadas são completamente diferentes dos trabalhos mencionados, por tratar-se de um problema cuja complexidade exigiu adaptações e a originalidade da aplicação da técnica.

A seguir, discute-se este problema, em detalhes.

5.2 Modelo do controle por saturação para um sistema ideal

5.2.1 Sistema ideal

Inicialmente, apresenta-se um modelo matemático de um sistema ideal associado ao sistema não-ideal, em questão, para estudo. Entende-se, aqui, conforme se disse anteriormente, por fonte de energia ideal aquela que atua sobre um sistema vibratório, mas não experimenta qualquer influência do sistema físico sobre ela.

Tomando-se o sistema não-ideal representado pela equação (2.21) pode-se obter um sistema ideal, considerando-se que a velocidade rotacional do motor de corrente contínua seja constante, ou seja,

$$\dot{q}_3 = \Omega = \text{constante}, \quad (5.1)$$

então

$$q_3 = \Omega t. \quad (5.2)$$

Substituindo-se a equação (5.2) na equação (2.21), chega-se ao sistema de equações do tipo ideais:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + \mu_1 \dot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 &= -\alpha_5 q_1 q_2 + F_1 \cos(\Omega t), \\ \ddot{q}_2 + \mu_2 \dot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 &= -\alpha_6 q_1^2 + F_2 \sin(\Omega t) - \alpha_8, \end{aligned} \quad (5.3)$$

onde

$$\alpha_1 = \frac{m_0 r}{(2m + M)h}, \alpha_2 = \frac{m_0 r}{ML}, \alpha_5 = \frac{k_b CL}{2m + M}, \alpha_6 = \frac{k_b Ch^2}{2mL}, \alpha_8 = \frac{g}{L},$$

$$\mu_1 = \frac{c_1}{(2m + M)h}, \mu_2 = \frac{c_2}{ML},$$

$$F_1 = \alpha_1 \Omega^2, F_2 = \alpha_2 \Omega^2$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2(k_c - mgC)}{2m + M}} \text{ e}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k_b}{M}}.$$

A equação (5.3) representa um modelo de um pórtico plano sob carregamento harmônico similar aos trabalhos do Prof. Brasil e colaboradores(ver referencias bibliográficas)

Ressalta-se que os gráficos da curva de resposta- frequência do sistema ideal quando ω_2 não está próximo de $2\omega_1$ e ω_2 está próximo de $2\omega_1$ são representados nas figuras 5.1 e 5.2 respectivamente. Desta forma tem-se uma informação importante das oscilações que predominam no pórtico na direção horizontal e vertical.

A figura 5.1 exibe as amplitudes do modo vertical que predominam no pórtico plano sem satisfazer as condições de ressonância interna ($\omega_2 \neq 2\omega_1$) e próximo da ressonância externa ($\Omega \approx \omega_2$). Para que este fato se efetivasse, tomou-se o conjunto de parâmetros $L=0.7$ m, $h=0.4$ m, $c_1=1.55$ Nm/s, $c_2=3.14$ Nm/s, $EI=128\text{Nm}^2$, $F_1=7$ s⁻², $F_2=6$ s⁻¹. A frequência de excitação está variando de 85 a 105 rad./s em torno da segunda frequência natural $\omega_2=94.6$ rad./s com $\omega_1=63.2$ rad./s. A figura 5.2 mostra o fato de que as amplitudes do modo horizontal predominam no pórtico plano e satisfazem a condição de ressonância interna ($\omega_2 \approx 2\omega_1$) e próximo da ressonância externa ($\Omega \approx \omega_2$). Para isto, escolheu-se os seguintes parâmetros: $L=0.52$ m, $h=0.36$ m, $c_1=1.55$ Nm/s, $c_2=3.14$ Nm/s, $EI=128\text{Nm}^2$, $F_1=20$ s⁻², $F_2=21$ s⁻¹. Note que a frequência de excitação está variando de 135 a 156 rad./s em torno da segunda frequência natural $\omega_2=147.8$ rad./s com $\omega_1=74$ rad./s.

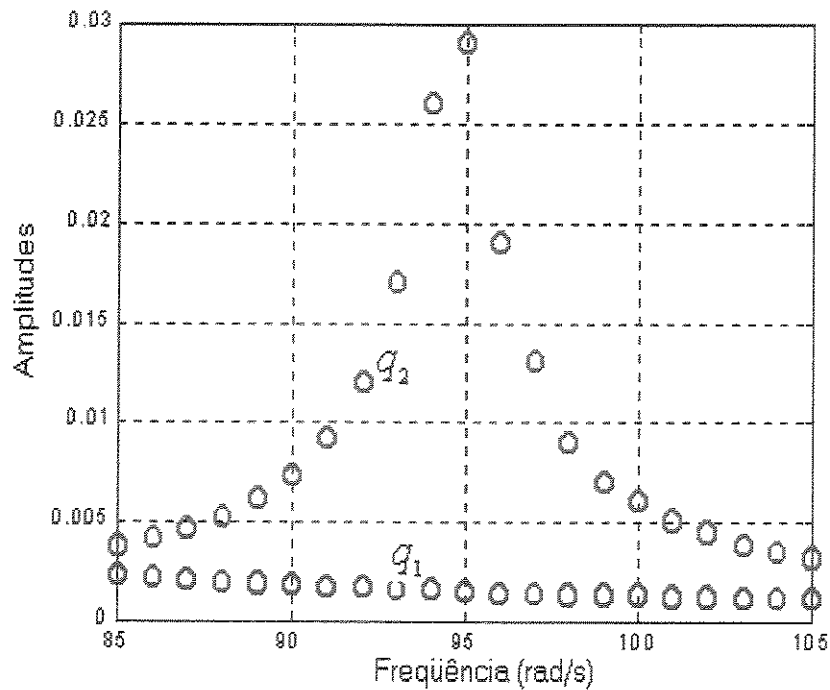


Figura 5.1. Curva resposta-frequência quando ($\omega_2 \neq 2\omega_1$) e ($\Omega \approx \omega_2$) e sem controle

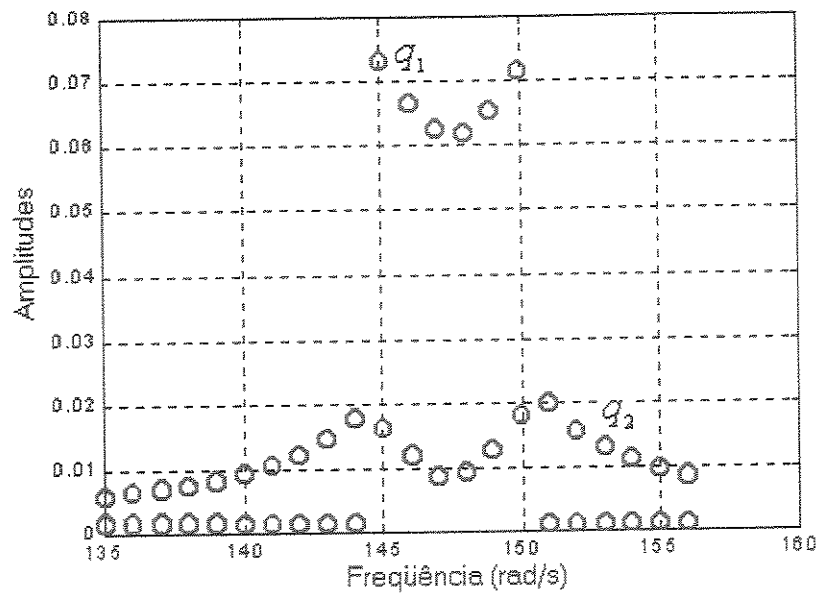


Figura 5.2. Curva resposta-freqüência quando $(\omega_2 \approx 2\omega_1)$ e $(\Omega \approx \omega_2)$ e sem controle

A figura 5.3 mostra a resposta no tempo do pórtico quando $\Omega=94$ rad./s e não satisfaz a condição de ressonância interna $\omega_2 \neq 2\omega_1$ e a figura 5.4 mostra a resposta no tempo do pórtico quando $\Omega=148$ rad./s e satisfaz a condição de ressonância interna $\omega_2 \approx 2\omega_1$.

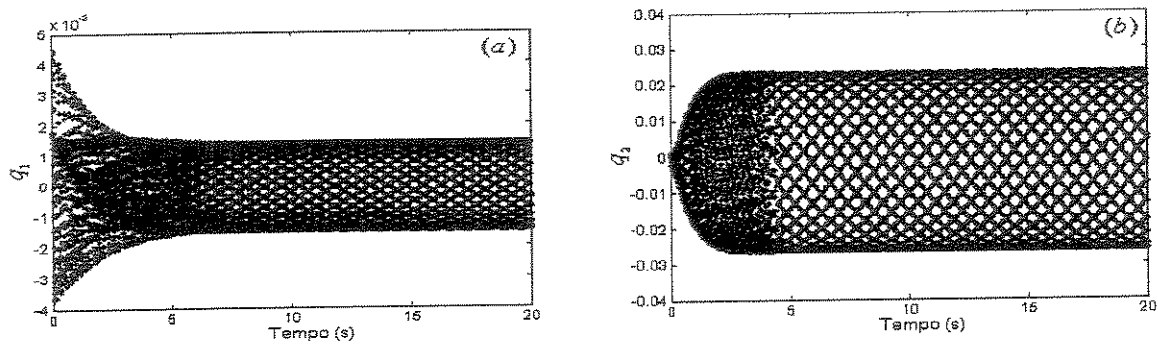


Figura 5.3. Resposta do pórtico plano no movimento lateral (a) e no vertical (b) quando $\omega_2 \neq 2\omega_1$ e $\Omega \approx \omega_2$ com $\Omega=94$ rad./s.

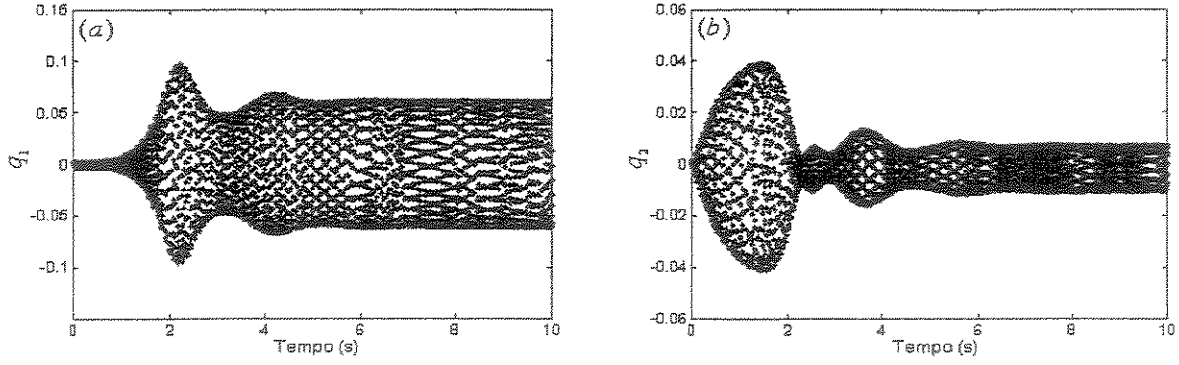


Figura 5.4. Resposta do pórtico plano no movimento lateral (a) e vertical (b) quando $\omega_2 \approx 2\omega_1$ e $\Omega \approx \omega_2$ com $\Omega=148$ rad./s.

5.2.2 Desempenho do controle por saturação

Agora, consideraremos dois sistemas vibratórios de controle por saturação, aplicado a um pórtico sem ressonância interna (ver figura 5.1) e com ressonância interna (ver figura 5.2) sob uma excitação harmônica.

O controlador por saturação proposto para o sistema ideal sem ressonância interna tem a seguinte forma, Queini et al. (1997):

$$\begin{aligned}
 \ddot{q}_1 + \mu_1 \dot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 &= -\alpha_5 q_1 q_2 + F_1 \cos(\Omega t), \\
 \ddot{q}_2 + \mu_2 \dot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 &= -\alpha_6 q_1^2 + F_2 \sin(\Omega t) - \alpha_8 - g_{33} q_4^2, \\
 \ddot{q}_4 + \mu_3 \dot{q}_4 + \omega_3^2 q_4 &= -g_{23} q_2 q_4,
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

onde

q_1 e q_2 são as respostas do pórtico no movimento dos modos lateral e vertical respectivamente,

q_4 é a resposta do controlador e

as constantes g_{33} e g_{23} são ganhos positivos.

Ademais $\Omega \approx \omega_2$, $\omega_2 \approx 2\omega_3$ e $\omega_2 \neq 2\omega_1$.

A configuração do sistema de controle por saturação foi implementada, utilizando-se o programa de computador, SIMULINK, interface gráfica de simulação do MATLAB versão 5.3. O diagrama de blocos é ilustrado no apêndice A.

Por outro lado, o controlador por saturação proposto para o sistema ideal com ressonância interna tem a seguinte forma, Pai et al. (2000):

$$\begin{aligned}\ddot{q}_1 + \mu_1 \dot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 &= -\alpha_5 q_1 q_2 + F_1 \cos(\Omega t), \\ \ddot{q}_2 + \mu_2 \dot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 &= -\alpha_6 q_1^2 + F_2 \sin(\Omega t) - \alpha_8 - g_{33} q_4^2 \dot{q}_4^2, \\ \ddot{q}_4 + \mu_3 \dot{q}_4 + \omega_3^2 q_4 &= g_{123} q_1 q_2 q_4,\end{aligned}\tag{5.5}$$

onde

q_1 e q_2 são as respostas do pórtico no movimento dos modos lateral e vertical respectivamente, q_4 é a resposta do controlador e, as constantes g_{33} e g_{123} são ganhos positivos.

Ademais $\Omega \approx \omega_2$, $\omega_2 \approx 2\omega_1$ e $\omega_2 \approx 4\omega_3$.

A configuração do sistema controle por saturação foi implementada utilizando-se o programa SIMULINK, interface gráfica de simulação do MATLAB versão 5.3. O diagrama de blocos é ilustrado no apêndice A.

Os primeiros resultados numéricos da equação 5.4 são mostrados no gráfico da curva resposta-freqüência da figura 5.5.

Pode-se observar que na figura 5.5, o efeito do controlador sobre a resposta do modo de vibração vertical na faixa de freqüência de 90 e 97 rad./s reduz as vibrações verticais do sistema ideal e produz uma variação mínima no modo de vibração horizontal.

Considera-se na integração numérica da equação 5.5 os seguintes valores dos ganhos $g_{23}=50000$ e $g_{33}=1000$.

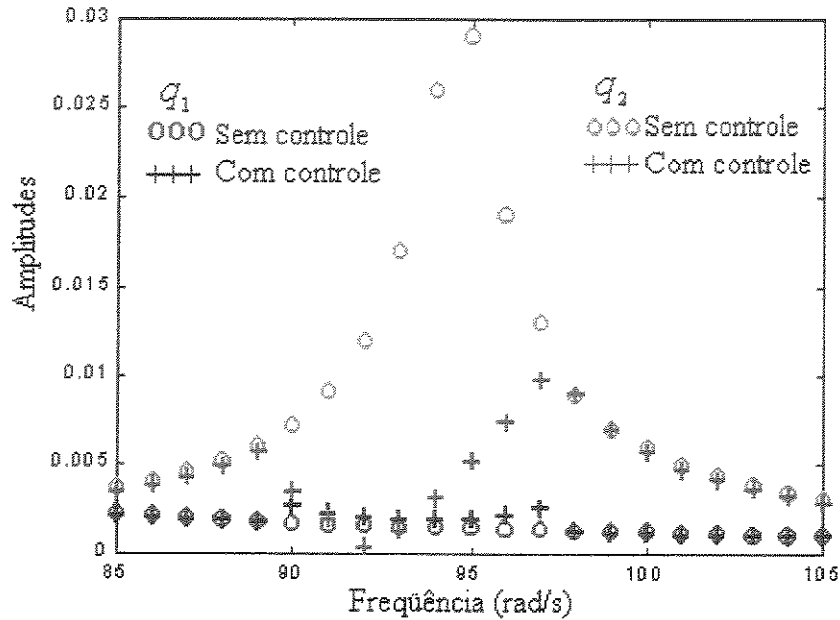


Figura 5.5. Amplitudes do modo horizontal: (ooo) sem controle, (+++) com controle e, do modo vertical: (ooo) sem controle, (+++) com controle quando $\omega_2 \neq 2\omega_1$ e $\Omega \approx \omega_2$.

Por outro lado, na figura 5.6 exibe-se a resposta do modo vertical do pórtico q_2 que não satisfaz a condição de ressonância interna ($\omega_2 \neq 2\omega_1$) mas satisfaz a condição de ressonância externa ($\Omega \approx \omega_2$) para $\Omega=94$ rad./s. Na resposta do controlador q_4 pode-se observar a efetividade do controlador por saturação no movimento de estado permanente.

Na figura 5.7 mostra-se a interação entre a resposta do controlador e a resposta do modo vertical do pórtico, observando-se no movimento de regime permanente, a efetividade do controlador.

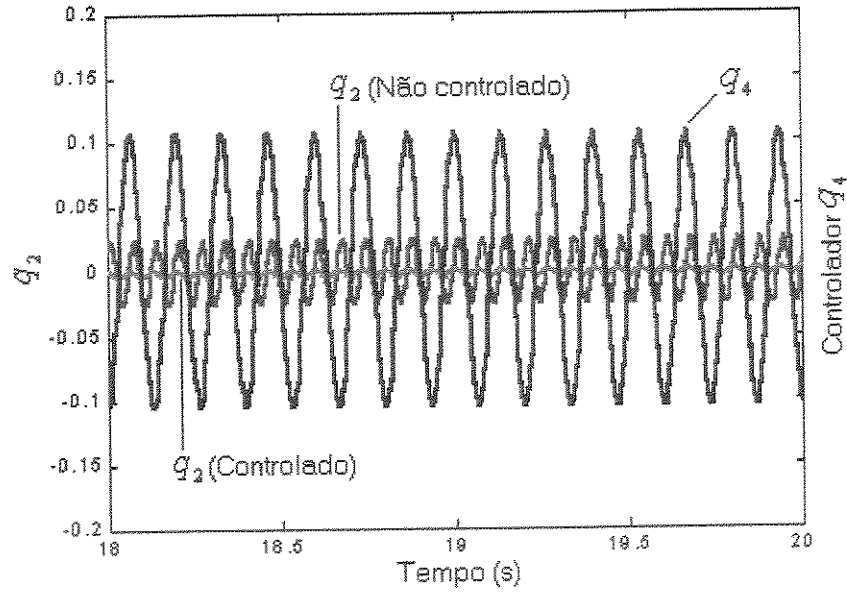


Figura 5.6. Comparação no regime permanente do modo vertical q_2 e do controlador q_4 quando $\Omega=94$ rad./s.

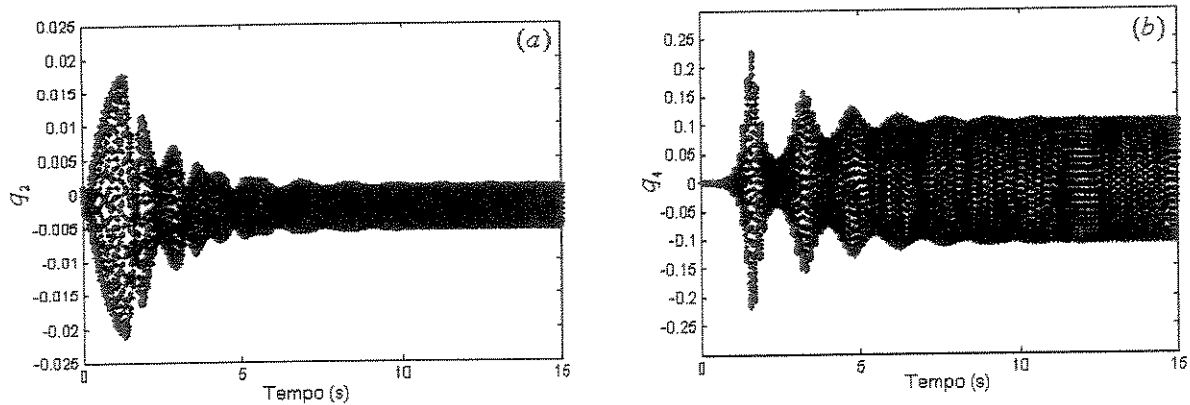


Figura 5.7. Resposta no tempo do (a) modo vertical q_2 e (b) controlador q_4 quando $\Omega=94$ rad./s.

Os resultados numéricos da equação 5.5 são mostrados no gráfico da curva resposta-frequência da figura 5.8. Pode-se observar que na faixa de frequência de 145 e 150 rad./s as respostas em ressonância do modo horizontal são reduzidas, enquanto que o modo vertical não sofre modificações nas suas amplitudes. Considerou-se para a integração numérica os seguintes valores $g_{123}=100000$ e $g_{33}=1000$.

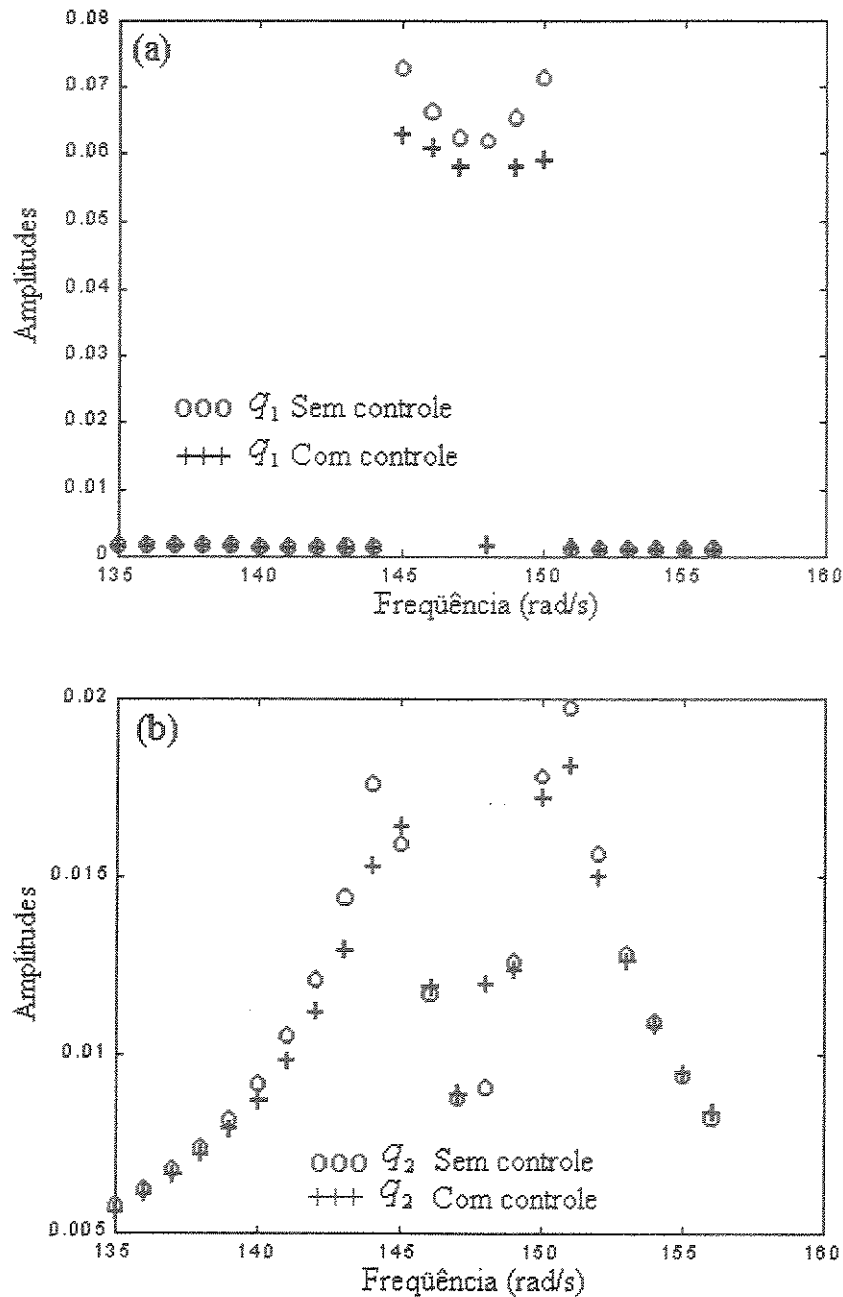


Figura 5.8. Amplitudes do modo horizontal (a) e vertical (b) quando $\omega_2 \approx 2\omega_1$ e $\Omega \approx \omega_2$.
(ooo) sem controle, (+++) com controle (caso ideal).

A figura 5.9 exibe as resposta no tempo do pórtico de movimento lateral e vertical quando o controlador for ativado para $\Omega=148$ rad./s e a figura 5.10 mostra as respostas, no movimento de regime permanente, dos movimentos dos modos lateral e vertical do pórtico quando o

controlador for ativado, observando-se a efetividade do controlador sobre o modo de vibração horizontal.

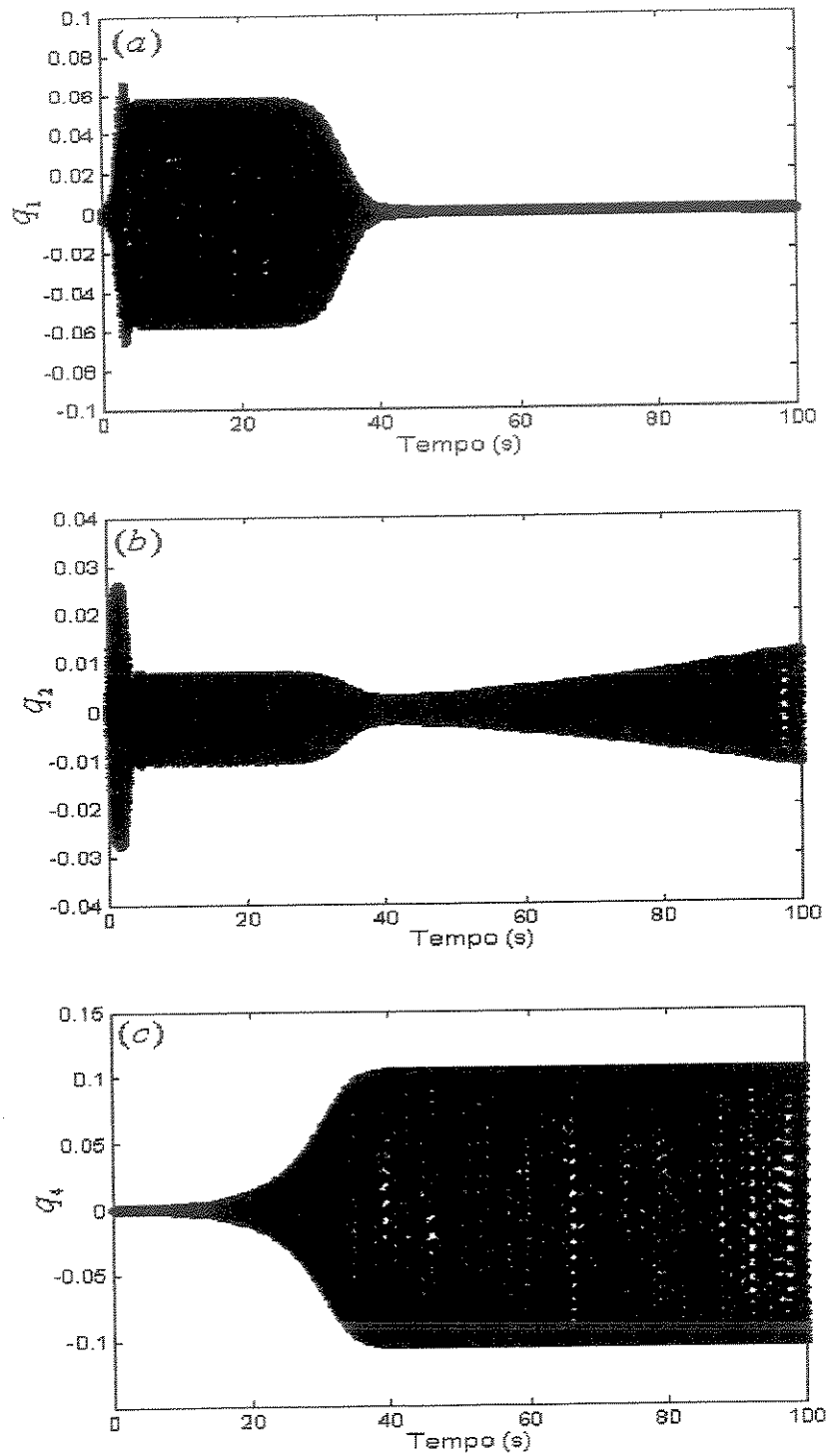


Figura 5.9. Respostas no tempo do pórtico no movimento lateral (a), no movimento vertical (b) e resposta do controlador (c) para $\Omega=148$ rad./s.

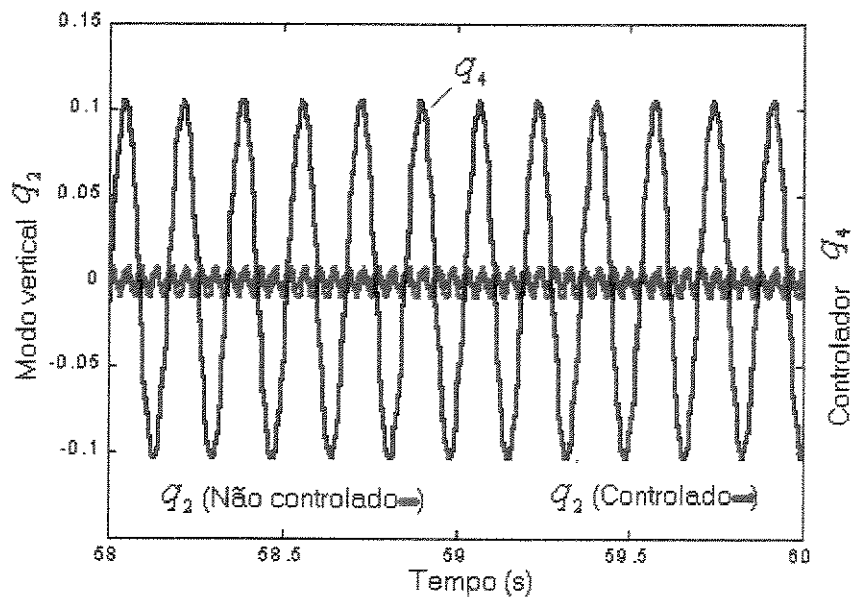
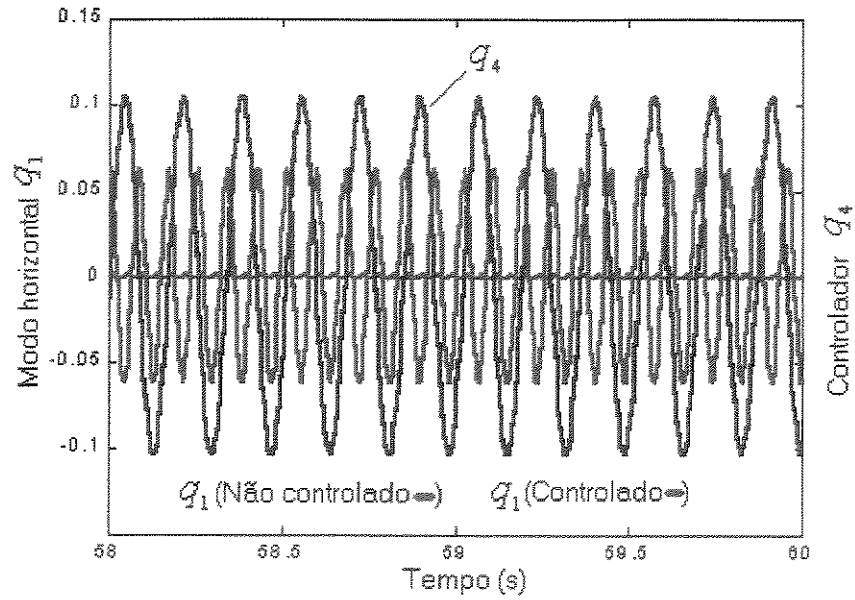


Figura 5.10. Comparação dos modos do pórtico e do controlador para $\Omega=148$ rad./s no regime permanente.

5.3 Modelo de controle por saturação para um sistema não-ideal

Neste item, apresentam-se os ensaios numéricos realizados na verificação da efetividade da estratégia do controlador para um sistema não-ideal.

Aqui, considera-se o controle sobre a resposta lateral do pórtico devido ao fato de que o primeiro modo de vibração entra em ressonância através da condição de ressonância interna entre os primeiros modos de vibração do pórtico.

O gráfico da curva resposta-freqüência é calculado numericamente para se poder demonstrar a efetividade do controlador, na proximidade da segunda região de ressonância. Por outro lado, o gráfico da resposta-parâmetro-de-controle é obtido numericamente para verificação do fenômeno de saturação, para o sistema de controle com não linearidades quadráticas e com ressonância interna 1:2.

Consideram-se as equações de movimento adimensional do sistema não-ideal (2.21), cujo objetivo é o de deixá-las numa forma mais conveniente permitindo o acoplamento a um controlador não-linear adimensional. Para estas simulações numéricas, utilizou-se o programa SIMULINK/ MATLAB versão 5.3 na geração dos resultados deste item.

Primeiramente nota-se que as equações (2.21) podem ser rescritas na seguinte forma adimensional e acoplando-se ao controlador, Pai et al. (2000):

$$\begin{aligned} q_1'' + \hat{\mu}_1 q_1' + \hat{\omega}_1^2 q_1 &= -\hat{\alpha}_5 q_1 q_2 + \hat{\alpha}_1 (q_3'' \text{sen} q_3 + q_3'^2 \cos q_3) + \mathbf{g}_{44} q_4^2 q_4'^2, \\ q_2'' + \hat{\mu}_2 q_2' + \hat{\omega}_2^2 q_2 &= -\hat{\alpha}_6 q_1^2 + \hat{\alpha}_2 (-q_3'' \cos q_3 + q_3'^2 \text{sen} q_3) - \alpha_8, \\ q_3'' &= \hat{\alpha}_3 q_1' \text{sen} q_3 - \hat{\alpha}_4 q_2'' \cos q_3 - \hat{\alpha}_7 \cos q_3 + \hat{M}(q_3') - \hat{H}(q_3'), \\ q_4'' + \mu_4 q_4' + \omega_4^2 q_4 &= \mathbf{g}_{124} q_1 q_2 q_4, \end{aligned} \quad (5.6)$$

onde

A coordenada generalizada q_4 denota a resposta do controlador de segunda ordem,

A frequência natural ω_4 satisfaz a condição $4\omega_4 \approx \hat{\omega}_2$, $\omega_2 \approx 2\hat{\omega}_1$,

A constante μ_4 é seu amortecimento e,

g_{124} , g_{44} são os ganhos positivos.

O tempo adimensional é definido como $\tau = \omega_1 t$ e as derivadas serão tomadas com respeito ao tempo τ .

Ressalta-se que o diagrama de blocos efetuado em SIMULINK da equação (5.6) é ilustrado no apêndice A.

A seguir, consideram-se os seguintes valores adimensionais dos parâmetros na solução por SIMULINK:

Para a estrutura não-ideal:

$\hat{\mu}_1=0.01$, $\hat{\mu}_2=0.03$, $\hat{\omega}_1=1$, $\hat{\omega}_2=2$, $\hat{\alpha}_1=9.26 \times 10^{-4}$, $\hat{\alpha}_2=9.61 \times 10^{-4}$, $\hat{\alpha}_3=13.33$, $\hat{\alpha}_4=19.26$,
 $\hat{\alpha}_5=4.61$, $\hat{\alpha}_6=1.657$, $\hat{\alpha}_7=0.066$, $\hat{\alpha}_8=3.45 \times 10^{-3}$. E,

para o controlador:

$\mu_4=0.001$, $g_{124}=200$, $g_{44}=55$.

Ademais, as condições iniciais são escolhidas como: $q_1=0.0018$, $q_2=0.0012$, $q'_1 = q'_2 = 0$, $q_4=0.001$ e $q'_4=0$.

Os resultados são obtidos na variação do parâmetro de controle $\hat{a} \in [2, 4]$ e com $\hat{b}=1.5$ na seguinte equação característica do motor na forma adimensional:

$$\hat{M}_m(q'_3) - \hat{H}(q'_3) = \hat{a} - \hat{b}q'_3. \quad (5.7)$$

Observação da figura 5.11:

Para a obtenção da figura 5.11 tomaram-se as amplitudes calculadas como sendo a metade da diferença entre o máximo e mínimo das respostas dos modos horizontal e vertical da estrutura aporticada, em questão e dos valores da velocidade rotacional que é calculada como $\hat{\omega}_2 \approx \hat{\omega}_2 * 74$.

Observando-se nos resultados obtidos, mostrados na figura 5.11, que o controlador tem maior efetividade na resposta do modo horizontal do pórtico e mantém a dinâmica da resposta do modo vertical (isso era a intenção de manter ou diminuir as vibrações verticais).

Observação da figura 5.12:

A curva de respostas-parâmetro de controle, mostrada na figura 5.12, mostra o fenômeno de saturação existente entre as respostas do modo horizontal quando o controlador for ativado e desativado. Pode-se observar com mais clareza o efeito do controlador atuando sobre as amplitudes do modo horizontal e mantendo-se aproximadamente as mesmas amplitudes do modo vertical.

Note que quando a excitação não-ideal atua no segundo modo de vibração da estrutura aporticada e no valor do parâmetro de controle $\hat{a}=3.4$ ocorre o fenômeno de saturação modal para as amplitudes do modo horizontal quando o controlador estiver ativado.

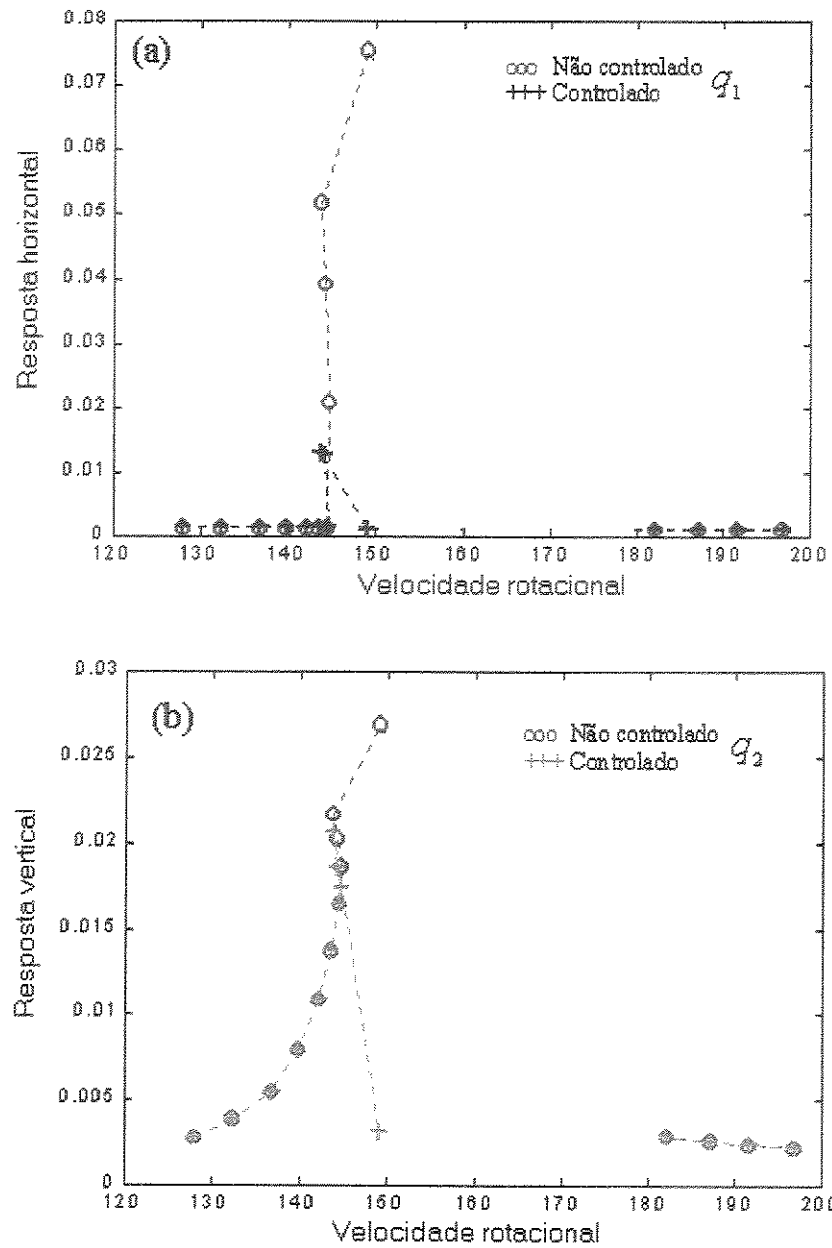


Figura 5.11. Resposta dos modos horizontal (a) e vertical (b) versus velocidade rotacional.
(ooo) controlador inativo e (+++) controlador ativo

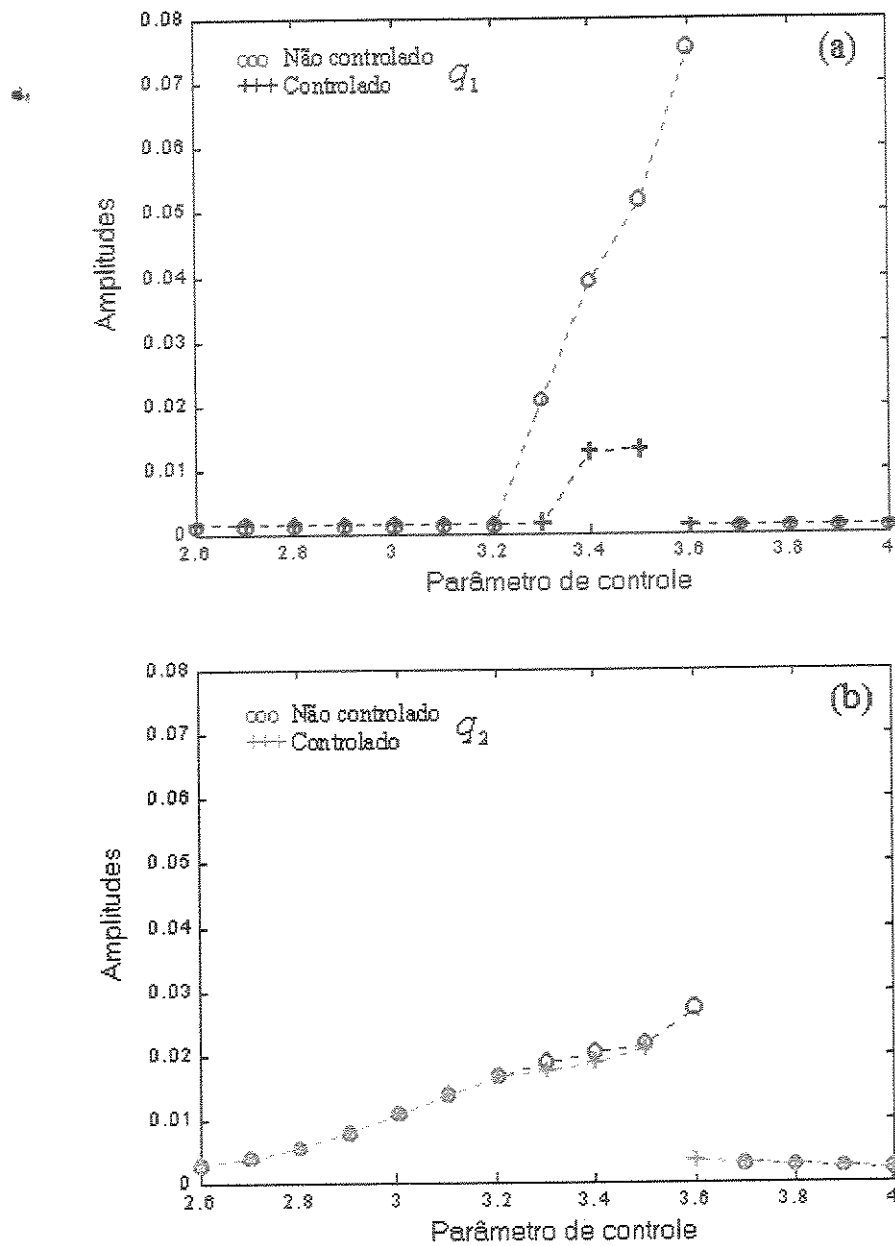


Figura 5.12. Resposta dos modos horizontal (a) e vertical (b) versus parâmetro de controle.
(ooo) controlador ativo e (+++) controlador inativo.

A figura 5.13 exibe as respostas dos modos horizontal e vertical quando o controlador está desativado, correspondente ao parâmetro de controle $\hat{a}=3.5$.

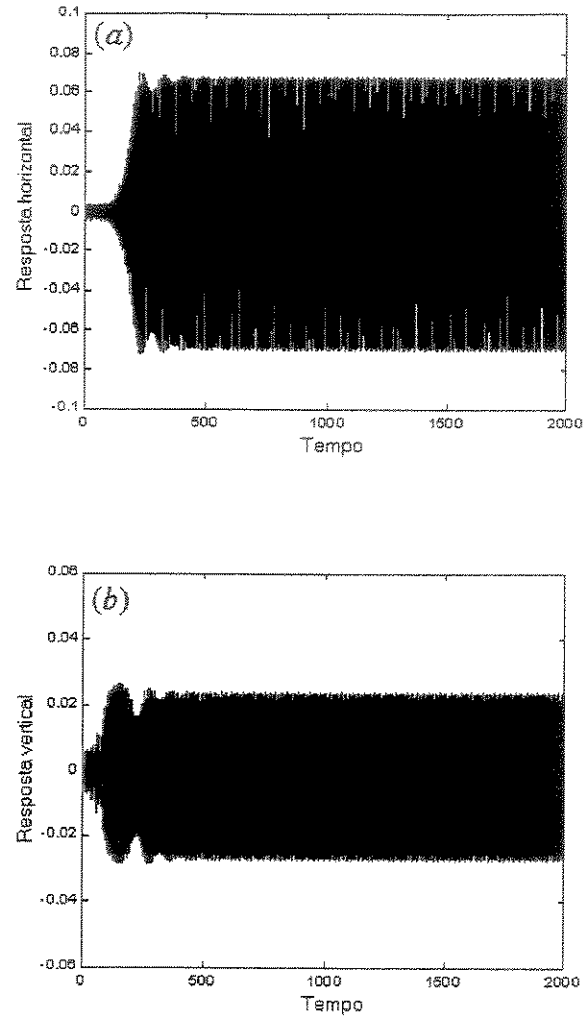


Figura 5.13. Respostas no tempo do modo horizontal (a) e vertical (b) da estrutura aporticada para o parâmetro de controle $\hat{a}=3.5$.

A figura 5.14 exibe a resposta dos modos horizontal e vertical do pórtico quando o controlador por saturação for ativado, observando-se a efetividade no estado estacionário para a faixa de ressonância.

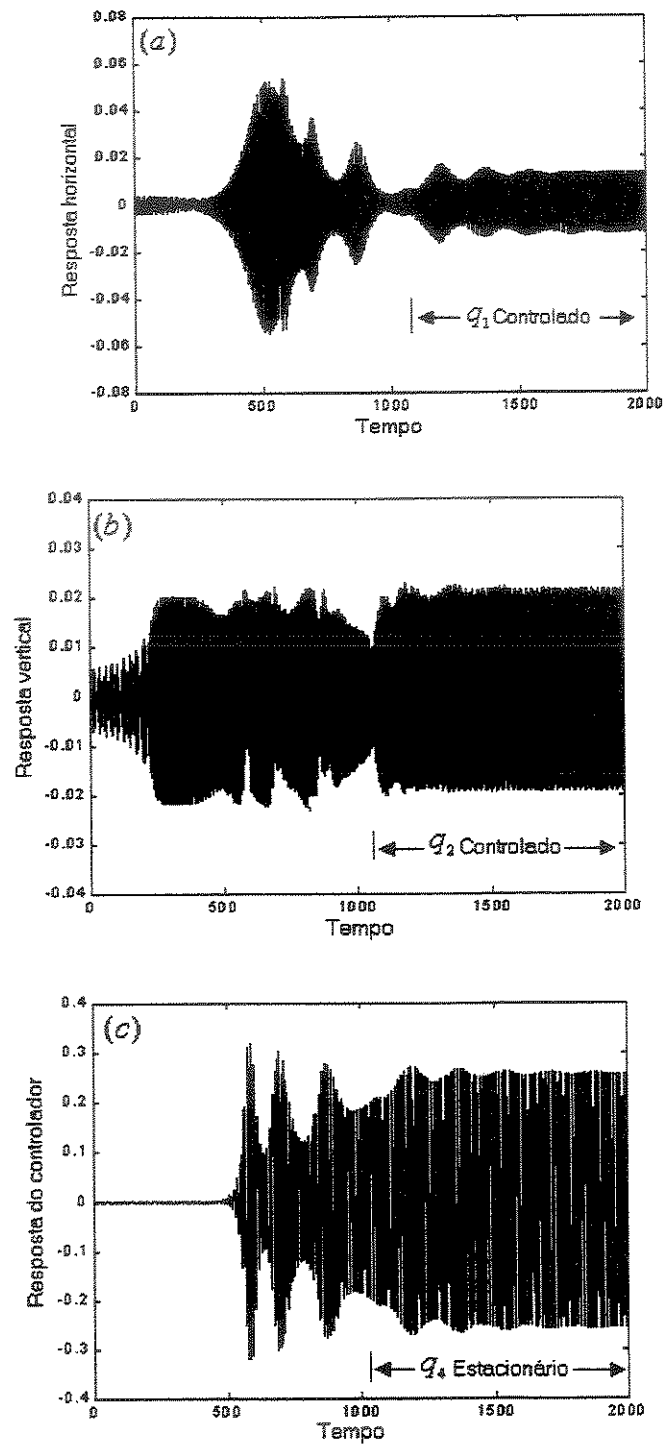


Figura 5.14. Comportamento do pórtico controlado: (a) resposta horizontal, (b) resposta vertical e do (c) controlador para o parâmetro de controle $\hat{a}=3.5$.

Por outro lado, a figura 5.15 mostra o comportamento dinâmico da rotação do motor de corrente contínua quando o controlador estiver ativo.

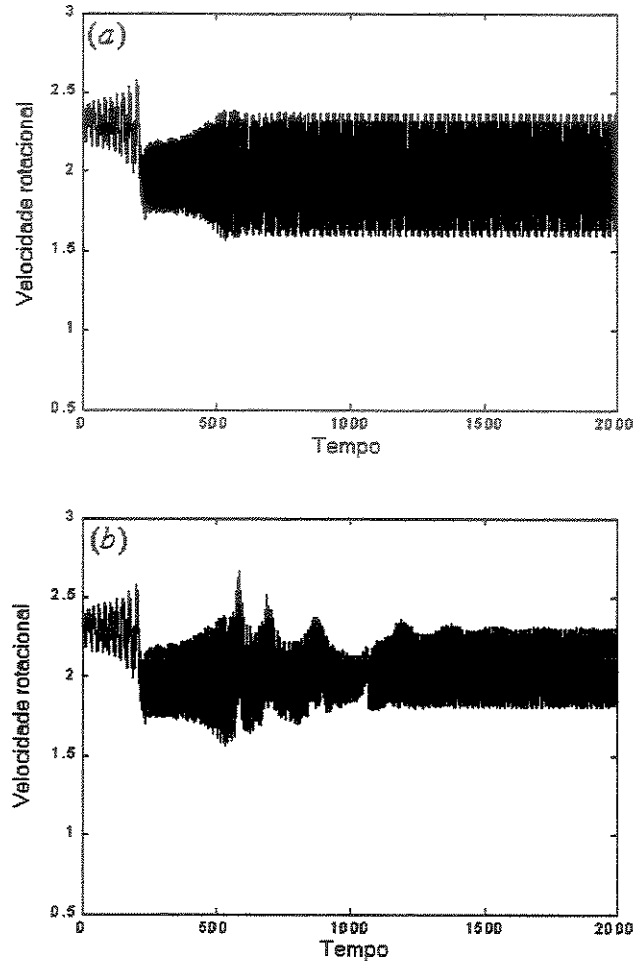


Figura 5.15. Comportamento do motor não-ideal: (a) sem controle e (b) com controle para o parâmetro de controle $\hat{a}=3.5$.

O controlador ativado terá influência na velocidade rotacional do motor a partir do tempo $\tau \approx 1000$, no estado estacionário, isto é, a velocidade rotacional média do motor deixa de ser capturada na região de ressonância da frequência natural $\hat{\omega}_2=2$.

A seguir, apresenta-se uma proposta da configuração do sistema controle por saturação que consiste de uma estrutura aporticada não-ideal, mostrada na figura 5.16, um controlador

representado por uma placa de controle DS1102 da dSPACE, um atuador (ação do controle) e um sensor (detecta as respostas) representados por piezoelétricos.

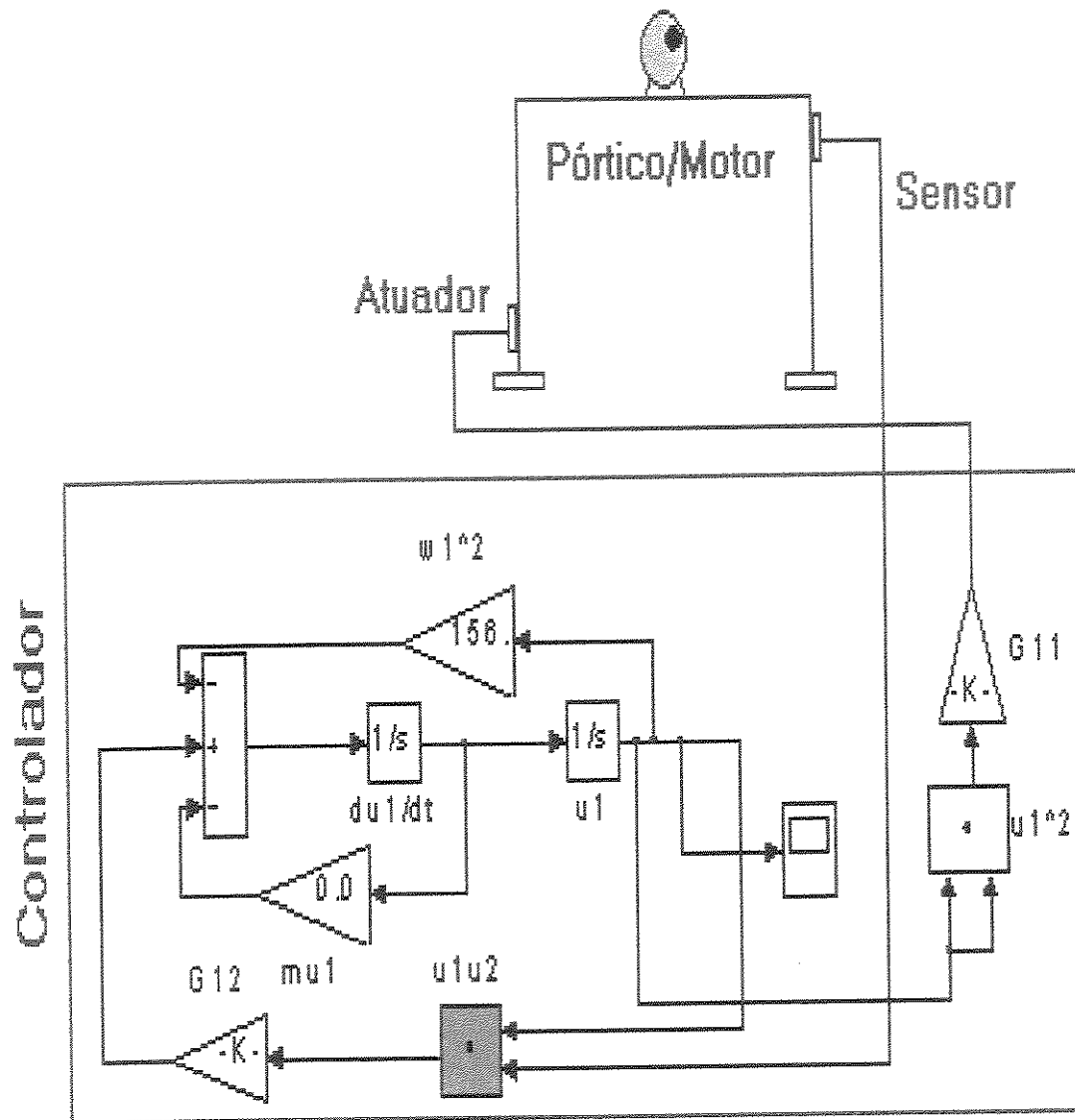


Figura 5.16. Uma proposta da configuração do sistema controle por saturação.

Capítulo 6

Discussão de alguns Casos Particularizados do Sistema Pórtico Não-ideal

Neste capítulo, apresentam-se os casos particulares, onde se consideram os movimentos dos modos horizontais (verticais) com objetivo de complementar os resultados obtidos anteriormente no corpo da tese.

Ressalta-se que nas simulações numéricas, efetuadas, a seguir, tomaremos a constante de mola com rigidez linear e não linear e força externa do tipo harmônica.

Os resultados obtidos referem-se tanto ao estudo da dinâmica e do controle dos casos particularizados. Serão considerados, alguns modelos matemáticos, descritos, a seguir.

6.1 Modelo dinâmico do sistema particularizado

Neste item apresenta-se um problema, modelado como sendo o de uma estrutura aporticada de tipo “shear building”, excitado por motor não ideal, descrito pela figura 6.1.

O objetivo principal, deste item, é o de se observar a influência da não linearidade cúbica (rigidez não-linear) e da força harmônica axial quando for aplicada no extremo superior da estrutura.

Para este estudo, assume-se que a força harmônica é dada por $F_a(t) = f \cos \Omega t$ e, a rigidez não linear da estrutura aporticada é da forma $k(x) = kx + k_2 x^3$, onde as constantes k e k_2 são os coeficientes elásticos linear e não-linear, respectivamente e x é o deslocamento horizontal da estrutura aporticada que suporta um motor não-ideal.

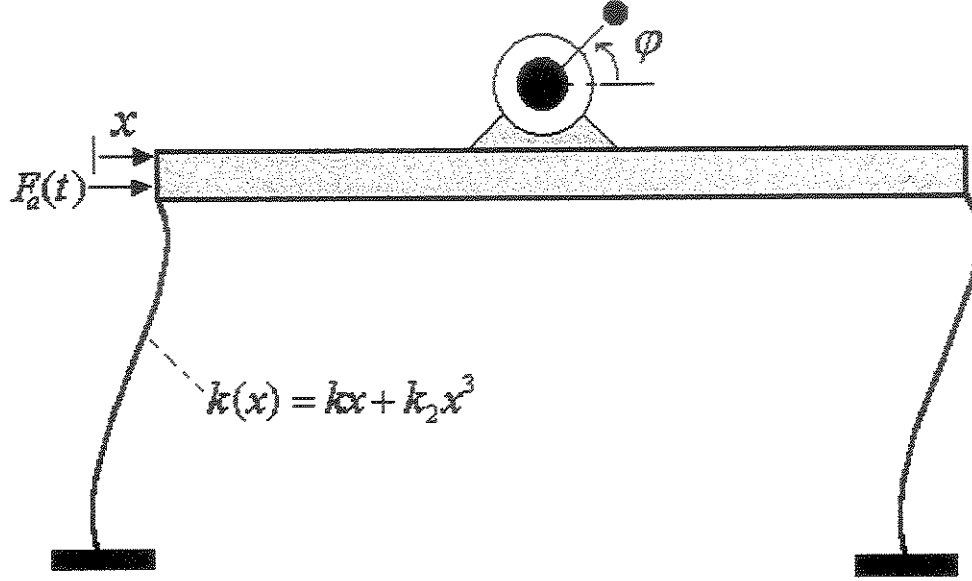


Figure 6.1. Modelo esquemático de um motor não-ideal apoiado sobre uma estrutura aporticada de tipo “shear building”.

A energia potencial do sistema é dada por

$$V = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{4} k_2 x^4 + m_0 g r \sin \varphi \quad (6.1)$$

e, a energia cinética do sistema é dada por

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I_m \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_0 [\dot{x} - r \dot{\varphi} \sin \varphi]^2 + \frac{1}{2} m_0 [r \dot{\varphi} \cos \varphi]^2 \quad (6.2)$$

onde

r é a excentricidade da massa desbalanceada m_0 ,

M é a massa conjunta da estrutura aporticada mais a massa do motor,

I_m é o momento de inércia do motor,

φ é a posição angular do rotor.

Logo, as equações de movimento são dadas por:

$$\begin{aligned}(m_0 + M)\ddot{x} + c_1\dot{x} + kx + k_2x^3 &= f \cos \Omega t + m_0 r (\ddot{\phi} \sin \varphi + \dot{\phi}^2 \cos \varphi), \\ (I_m + m_0 r^2)\ddot{\phi} - m_0 r \ddot{x} \sin \varphi + m_0 g r \cos \varphi &= \Gamma(\phi) - H(\phi),\end{aligned}\quad (6.3)$$

onde $\Gamma(\phi)$ é o torque gerado pelo motor e $H(\phi)$ é o torque de atrito.

Considerando uma aproximação linear para a curva característica do motor de corrente contínua:

$$\Gamma(\phi) - H(\phi) = a - b\dot{q}_3 \quad (6.4)$$

Reescrevem-se as equações de movimento 6.3 na forma adimensional:

$$\begin{aligned}X'' + \mu_1 X' + X + pX^3 &= \hat{f} \cos \hat{\Omega} \tau + q(\varphi'' \sin \varphi + \varphi'^2 \cos \varphi), \\ \varphi'' &= \alpha_1 X'' \sin \varphi - \alpha_2 \cos \varphi + \hat{\Gamma}(\varphi') - \hat{H}(\varphi'), \\ \hat{\Gamma}(\varphi') - \hat{H}(\varphi') &= \hat{a} - \hat{b} \varphi',\end{aligned}\quad (6.5)$$

onde:

$$\mu_1 = \frac{c_1}{\omega_1(m_0 + M)},$$

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m_0 + M},$$

$$p = \frac{k_2}{k} r^2,$$

$$\hat{f} = \frac{f}{kr},$$

$$q = \frac{m_0}{(m_0 + M)},$$

$$x = rX,$$

$$\alpha_1 = \frac{m_0 r}{I_m + m_0 r^2},$$

$$\alpha_2 = \frac{m_0 g r}{(I_m + m_0 r^2) \omega_1^2},$$

$$\hat{a} = \frac{a}{(I_m + m_0 r^2) \omega_1^2},$$

$$\hat{b} = \frac{b}{(I_m + m_0 r^2) \omega_1},$$

$\omega_1 t = \tau$ é o tempo adimensional.

A seguir, discute-se as simulações do sistema, em questão.

6.2 Simulações numéricas do sistema particularizado

A seguir, exibem-se as simulações numéricas, efetuadas.

- **Simulação Numérica 1:**

Utilizou-se os dados numéricos(adimensionais) para o modelo apresentado na equação 6.5. Eles são os seguintes: $\alpha_1=0.93$, $\alpha_2=0.03$, $\mu_1=0.02$, $\hat{b}=1.2$, $q=0.1$, $\hat{a} \in (1, 3)$ cujas condições iniciais foram tomadas como sendo $x(0)=0.002$, $x'(0)=0.0$, $\phi'(0)=0.5$, $\phi(0)=0.0$.

Para efetuar a simulação numérica do modelo matemático do sistema não-ideal (equação 6.5), utilizou-se o programa MATLAB-SIMULINK®, descrito no Apêndice A. Não levou-se em conta a influência do termo cúbico e da força harmônica, para se obter estes dados fez-se $p=0.0$, $\hat{f}=0.0$.

Os resultados obtidos, são mostrados no plano fase, durante a passagem pela ressonância ($\phi' \approx 1$), observando-se que o movimento do sistema tem comportamento regular para os valores do parâmetro de controle $\hat{a} \in (1, 1.8)$ (indicados por curvas fechadas ao longo do tempo). Exemplifica-se para os casos em que $\hat{a}=1.2$ e 1.5 , ver figura 6.2 (a), (b).

Por outro lado, observa-se, nos planos de fase, que para os valores dos parâmetros de controle $\hat{a}=1.9$ e 2.0 , antes de entrarem em estado estacionário, as trajetórias preenchem toda uma área deste plano, sem gerar uma curva fechada, que nos dá a entender que o sistema apresenta um comportamento do tipo irregular ou não periódico. Quando se entra no estado estacionário, após um longo tempo, sua trajetória consegue preencher uma curva fechada, o que nos induz a pensar que o sistema possuiu comportamento regular e periódica (ver figura 6.2 (c), (d)).

Para se saber a que propriedade se deve o fato de que o sistema pode apresentar dois tipos de movimento, relativamente a esses parâmetros de controle, se apresentam às respostas da rotação do motor de corrente contínua, ao longo do tempo (ver figuras 6.3 e 6.4).

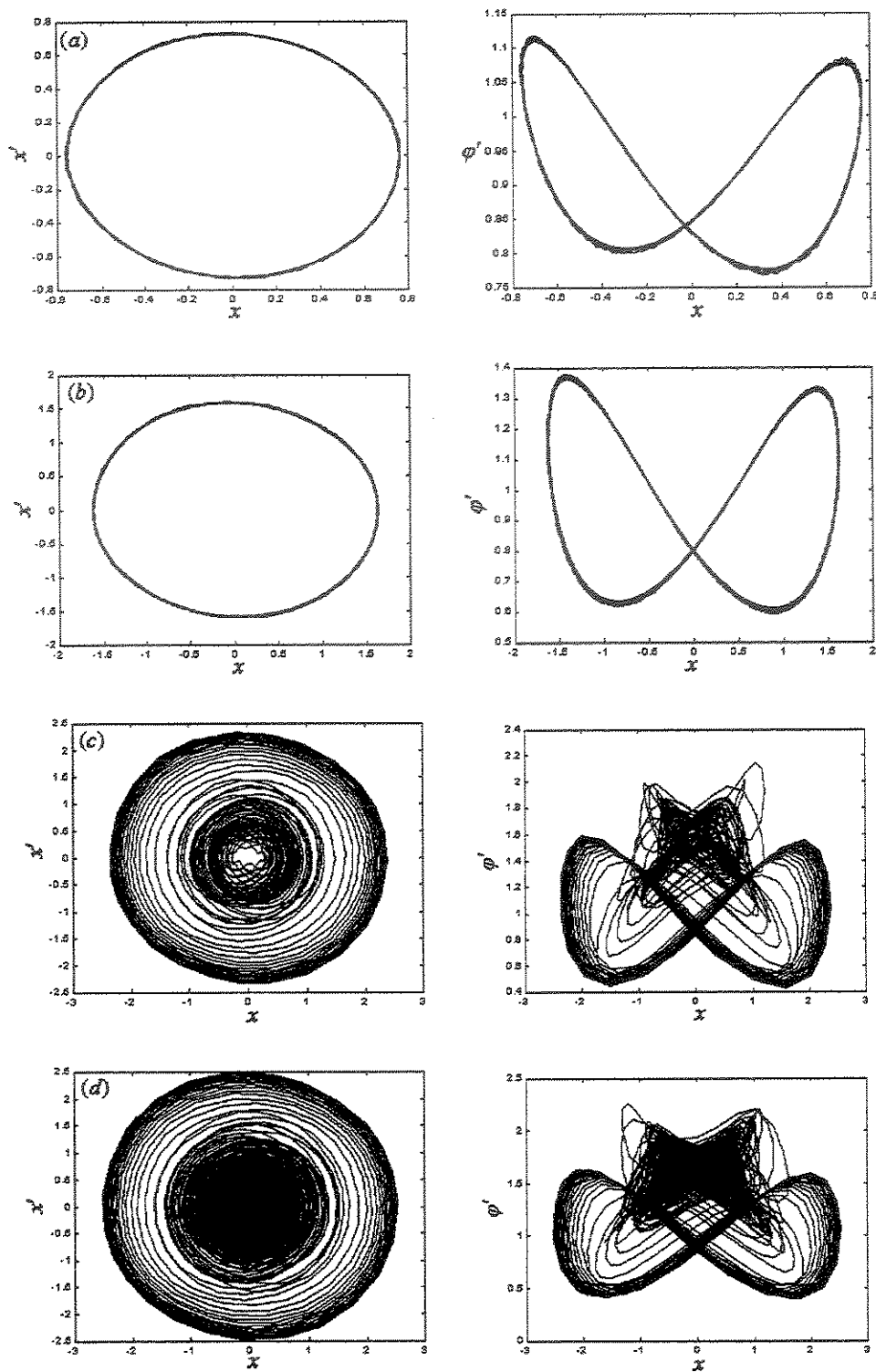


Figura 6.2. Comportamento dinâmico da estrutura aporcada não-ideal do tipo “shear building” para (a) $\hat{a}=1.2$, (b) $\hat{a}=1.5$, (c) $\hat{a}=1.9$ e (d) $\hat{a}=2.0$.

Pode-se observar que a rotação do motor de corrente contínua, utiliza pouco tempo para entrar no estado estacionário (ver figura 6.3 (a)). Para o intervalo de tempo (adimensional) $\tau \in (0, 600)$, tem-se que a frequência rotacional está acima da frequência natural da estrutura, (figura 6.3 (b)), desta forma, influenciando a estrutura aporticada a ter movimento não periódico. Nota-se que no intervalo de tempo $\tau \in (600, 1000)$ o sistema entra no estado estacionário com comportamento periódico e em ressonância, desde que a frequência rotacional do motor de corrente contínua, esteja muito próximo da frequência natural da estrutura(ver figura 6.3 (c)). Este fato é conhecido, na literatura, como efeito Sommerfeld (Kononenko, 1969)

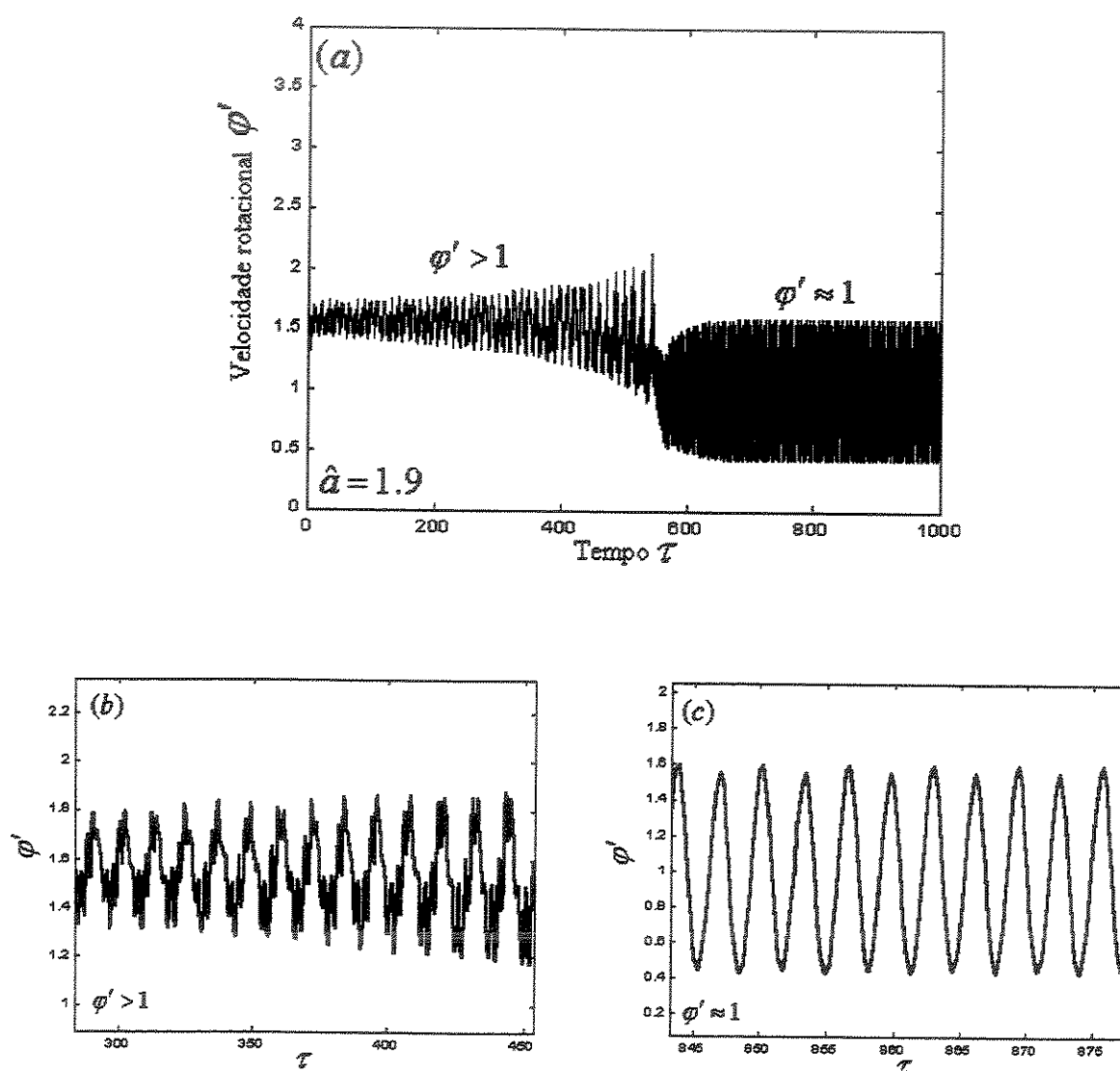


Figura 6.3. Resposta no tempo da velocidade rotacional do motor para o parâmetro de controle $\hat{a} = 1.9$.

Com o mesmo critério anterior, observa-se que a rotação do motor de corrente contínua, demora um tempo maior para entrar no estado estacionário (figura 6.4 (a)). Para o tempo adimensional $\tau \in (0, 2500)$ tem-se uma frequência rotacional acima da frequência natural da estrutura(figura 6.4 (b)), exercendo influência na estrutura aporticada a ter movimento não periódico. No intervalo de tempo $\tau \in (2500, 3000)$, o sistema entra em estado estacionário de comportamento periódico e em ressonância (ver figura 6.4 (c)). Este fato é conhecido, na literatura, como efeito Sommerfeld (Kononenko, 1969)

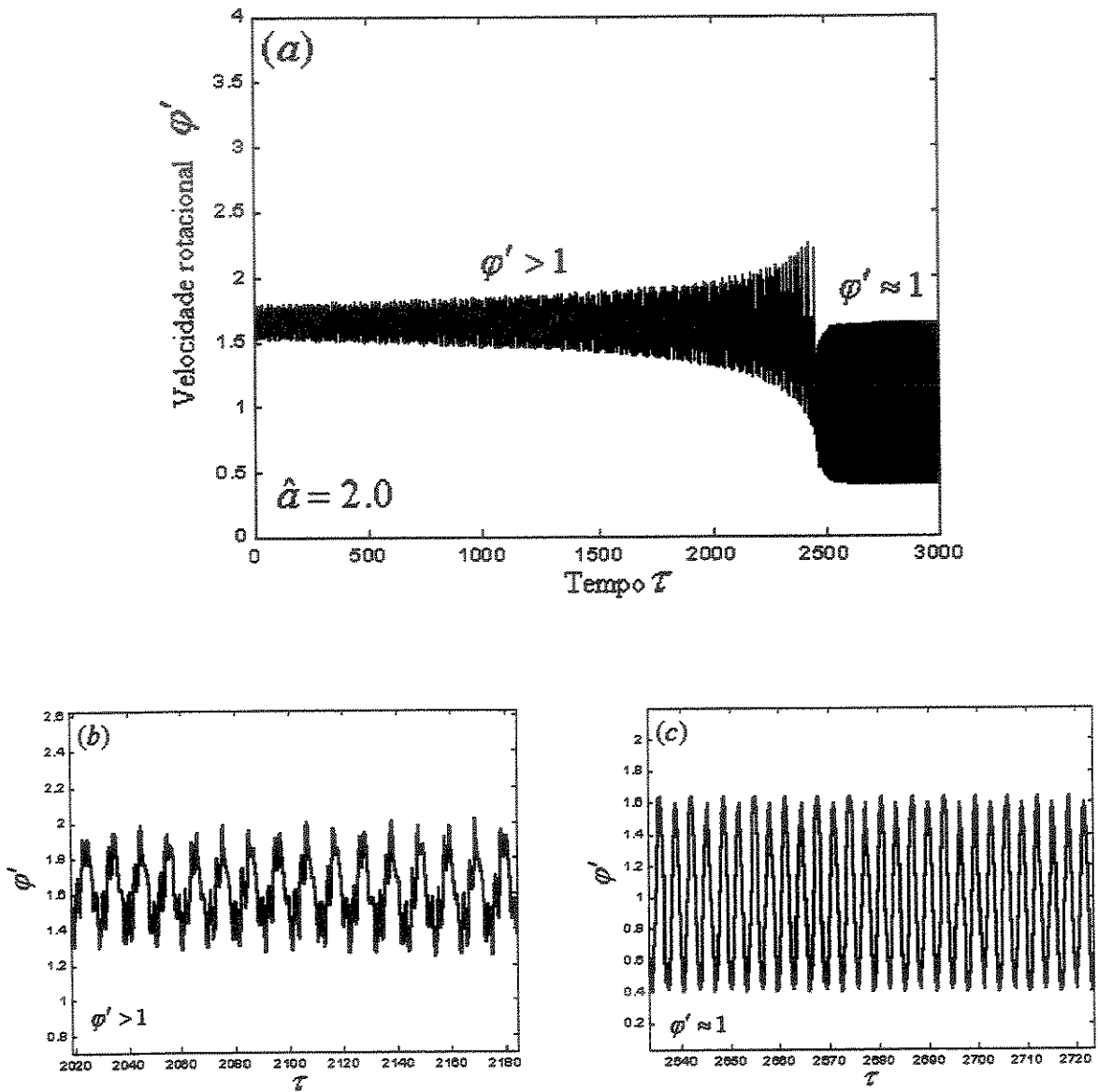


Figura 6.4. Resposta no tempo da velocidade rotacional do motor para o parâmetro de controle $\hat{a}=2.0$.

• **Simulação Numérica 2:**

Neste caso, a simulação numérica, leva em conta a influência do termo cúbico e da força harmônica na equação 6.5. Os dados utilizados, são os mesmos da simulação numérica 1, adicionando valores não nulos para p e $\hat{f}$. A título de exemplo, toma-se $p=0.6$, $\hat{\Omega}=1$ para diferentes valores de $\hat{f}=3, 5, 6, 7$. Os resultados obtidos correspondem ao valor fixo do parâmetro de controle $\hat{a}=2.0$. Observa-se que, para cada amplitude crescente desta força harmônica e para a frequência de excitação, igual à da frequência natural da estrutura, a influência no sistema não-ideal, fará com que ele mude seu comportamento original para outro movimento regular e irregular.

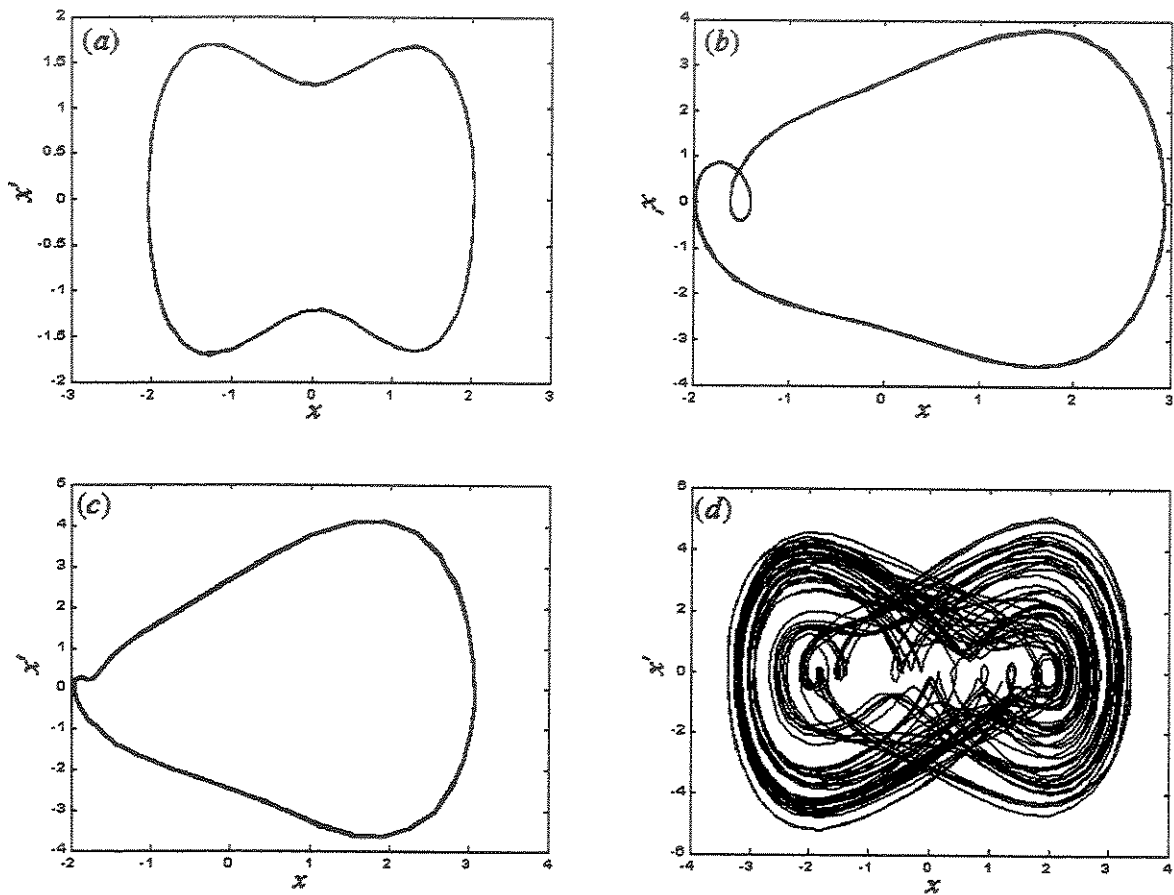


Figura 6.5. Resultados do sistema que leva em conta o termo cúbico e a força harmônica para

$\hat{a}=2.0$, $p=0.6$: (a) $\hat{f}=3$, (b) $\hat{f}=5$, (c) $\hat{f}=6$, (d) $\hat{f}=7$.

6.3 Modelo de controle do sistema particularizado

Neste item, apresenta-se a utilização do método de controle, por saturação no sistema não-ideal do tipo “shear building”, com rigidez não-linear.

Reescrevem-se as equações (6.5) acoplados com o controlador dinâmico por meio de termos não-lineares quadráticos da forma seguinte:

$$\begin{aligned}u'' + \mu_1 u' + \omega_1^2 u &= -g_{12} u x, \\X'' + \mu_2 X' + \omega_2^2 X + pX^3 &= q(\varphi'' \sin \varphi + \varphi'^2 \cos \varphi) - g_{11} u^2, \\ \varphi'' &= \alpha_1 X'' \sin \varphi - \alpha_2 \cos \varphi + \hat{a} - \hat{b} \varphi',\end{aligned}\tag{6.7}$$

onde

u_1 é a resposta do controlador,

ω_1 é a frequência natural do controlador,

μ_1 representa o amortecimento do controlador,

$\omega_2 \approx 2\omega_1$, $\dot{\varphi} \approx \omega_2$.

Simulação Numérica 3:

Nas simulações numéricas, os parâmetros (adimensionais) do sistema não-ideal e do controlador por saturação são escolhidos de tal forma que:

$$\alpha_1=0.5, \alpha_2=0.0, \mu_1=0.03, \mu_2=0.03, p=1.2, q=0.01, \omega_1=0.5, \omega_2=1.0, g_{11}=0.9, g_{12}=1.7, \hat{b}=1.2 \text{ e ,}$$

As condições iniciais são: $x(0)=0.01$, $\dot{x}(0)=0.0$, $\varphi(0)=0.0$, $\dot{\varphi}(0)=0.5$, e $u(0)=0.001$, $\dot{u}(0)=0.0$.

A curva de respostas - parâmetros de controle, mostrada na figura 6.6, mostra o fenômeno de saturação existente entre as respostas das amplitudes do modo lateral do pórtico quando o controlador for ativado e desativado. A linha de círculos corresponde às amplitudes do modo lateral quando o controlador não está ativado e a linha de cruzeiros corresponde às amplitudes do modo lateral quando o controlador está ativado.

Pode-se observar que as amplitudes do modo lateral tem valores grandes quando o controlador estiver desativado e para valores crescentes do parâmetro de controle, enquanto que as amplitudes que correspondem ao controlador ativado saturam-se a partir de $\hat{a}=1.12$ (ver figura 6.6).

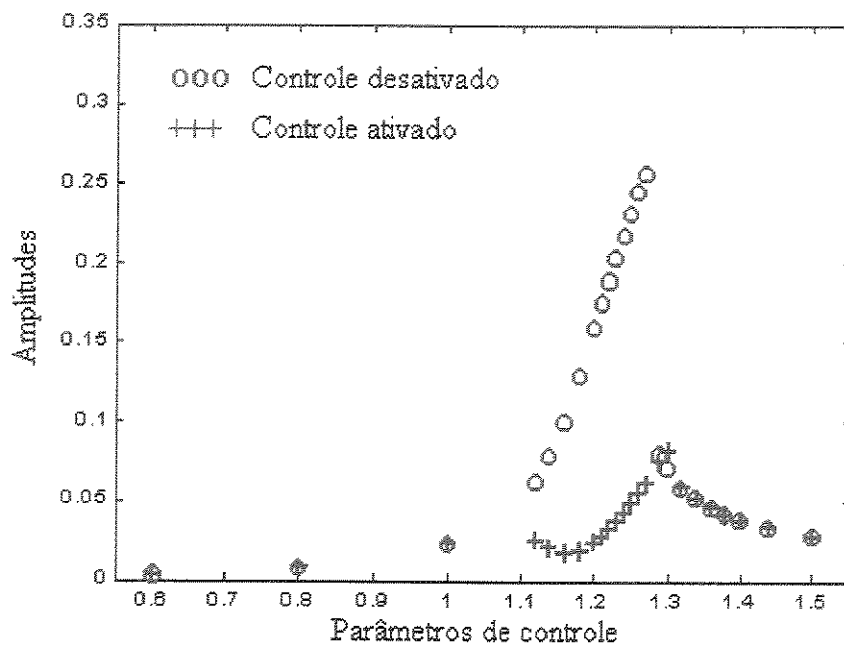


Figura 6.6. Resposta das amplitudes do modo lateral para valores crescentes do parâmetro de controle quando o controlador está: (ooo) desativado e (+++) ativado. Com $p=1.2$.

Na figura 6.7 mostram-se os resultados do método de controle por saturação correspondente ao parâmetro de controle $\hat{a} = 1.2$. Pode-se observar que o controlador absorve a energia do pórtico devido à ressonância interna de relação 1:2 e do acoplamento que produz os termos não-lineares quadráticos, onde a frequência de excitação não-ideal está próxima à frequência natural do pórtico.

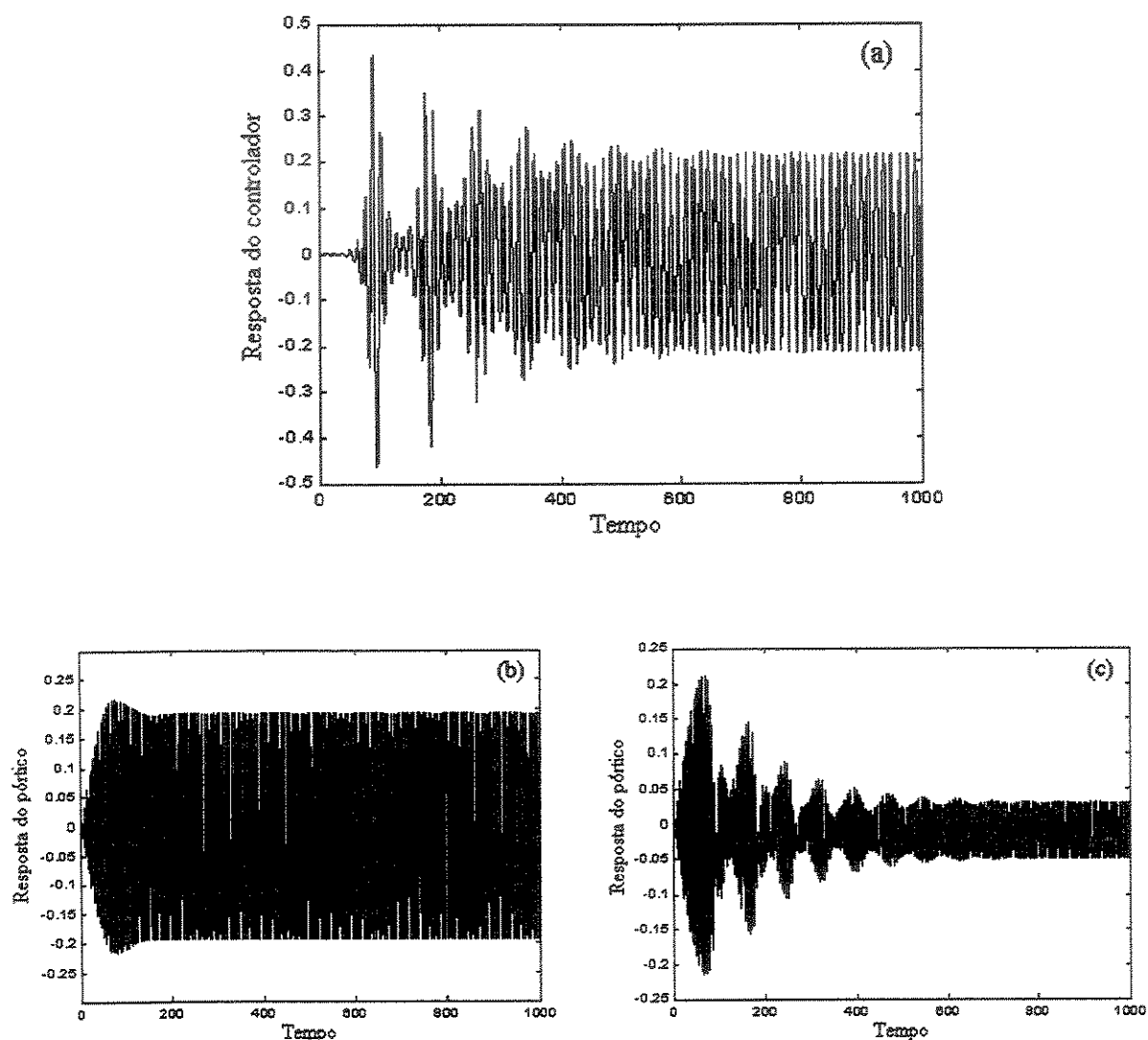


Figura 6.7. Resposta no tempo do (a) controlador, (b) do pórtico sem controle e (c) do pórtico com controle para $\hat{a}=1.2$. Com rigidez não-linear.

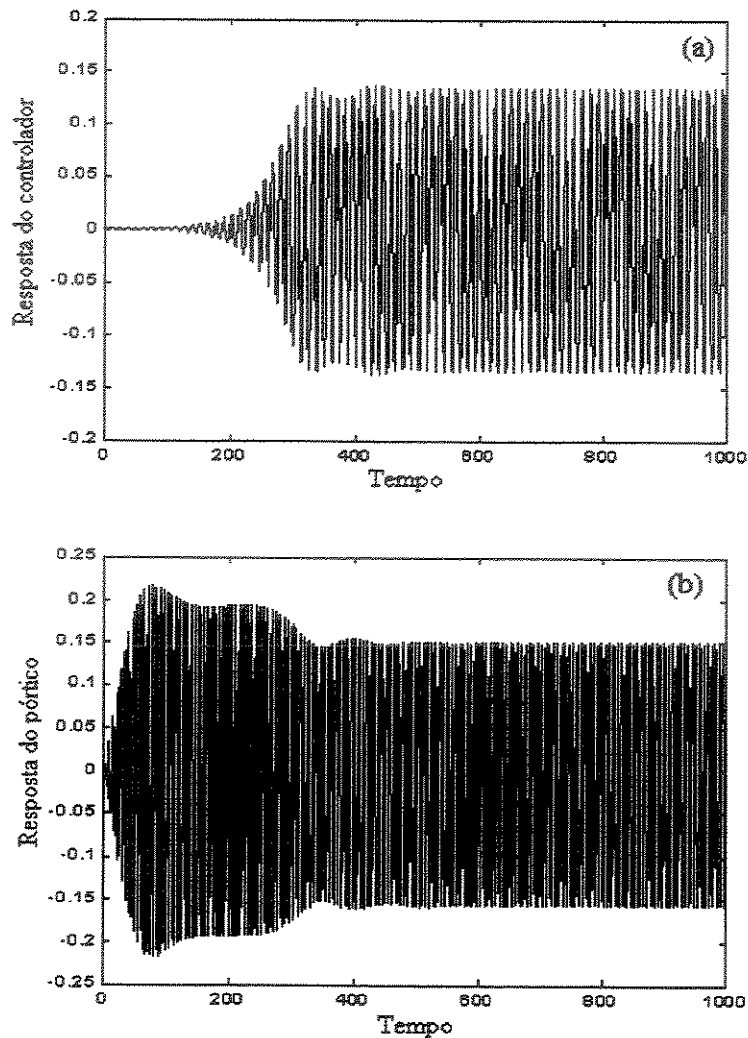


Figure 6.8. Resposta do sistema controlado quando o amortecimento é modificado: $\mu_1=0.2$ com o parâmetro de controle $\hat{a}=1.2$.

Nota-se o fato de que se a constante de amortecimento for modificada, por exemplo de $\mu_1=0.05$ para $\mu_1=0.2$, observa-se que a amplitude do controlador se reduz enquanto que a amplitude do pórtico aumenta. Neste caso o controlador não absorve a energia com eficiência da estrutura aporticada quando o amortecimento de um deles é modificado.

Simulação Numérica 4:

Com o objetivo, de completar os resultados, aqui, discutidos, apresenta-se a utilização do método de controle, por saturação no sistema não-ideal do tipo “shear building”, com rigidez linear. Ressalta-se que, o caso não-linear foi discutido, logo acima.

Nas simulações numéricas, os parâmetros (adimensionais) do sistema não-ideal e do controlador por saturação, são escolhidos da simulação 3 e que $p=0$.

Na figura 6.9, nota-se que a curva de amplitudes de x versus velocidade angular média $\dot{\phi}$ são exibidas para ambos os casos de sem (linha de círculos) e com (linha de cruzes) controles por saturação. Observando-se que as amplitudes de vibração do sistema com rigidez não-linear são menores que as amplitudes de vibração do sistema com rigidez linear.

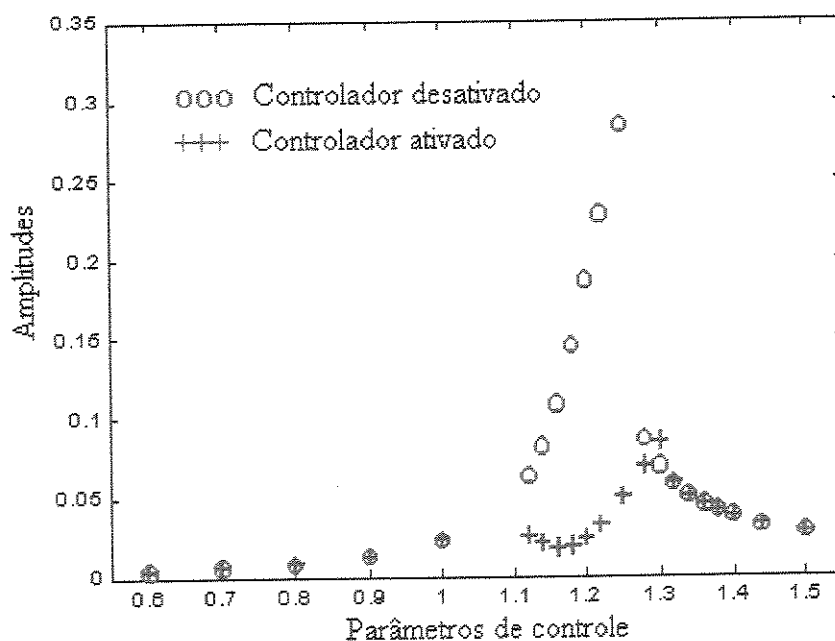


Figure 6.9. Respostas das amplitudes do modo lateral do pórtico para valores crescentes do parâmetro de controle quando: (ooo) o controlador está desativado e (+++) o controlador está ativado. Com $p=0$.

Na figura 6.10, exibe-se a resposta do sistema não-ideal, bem como a resposta do controlador para valor do parâmetro de controle $\hat{a}=1.2$.

É evidente que este método de controle é efetivo na redução das amplitudes de vibração.

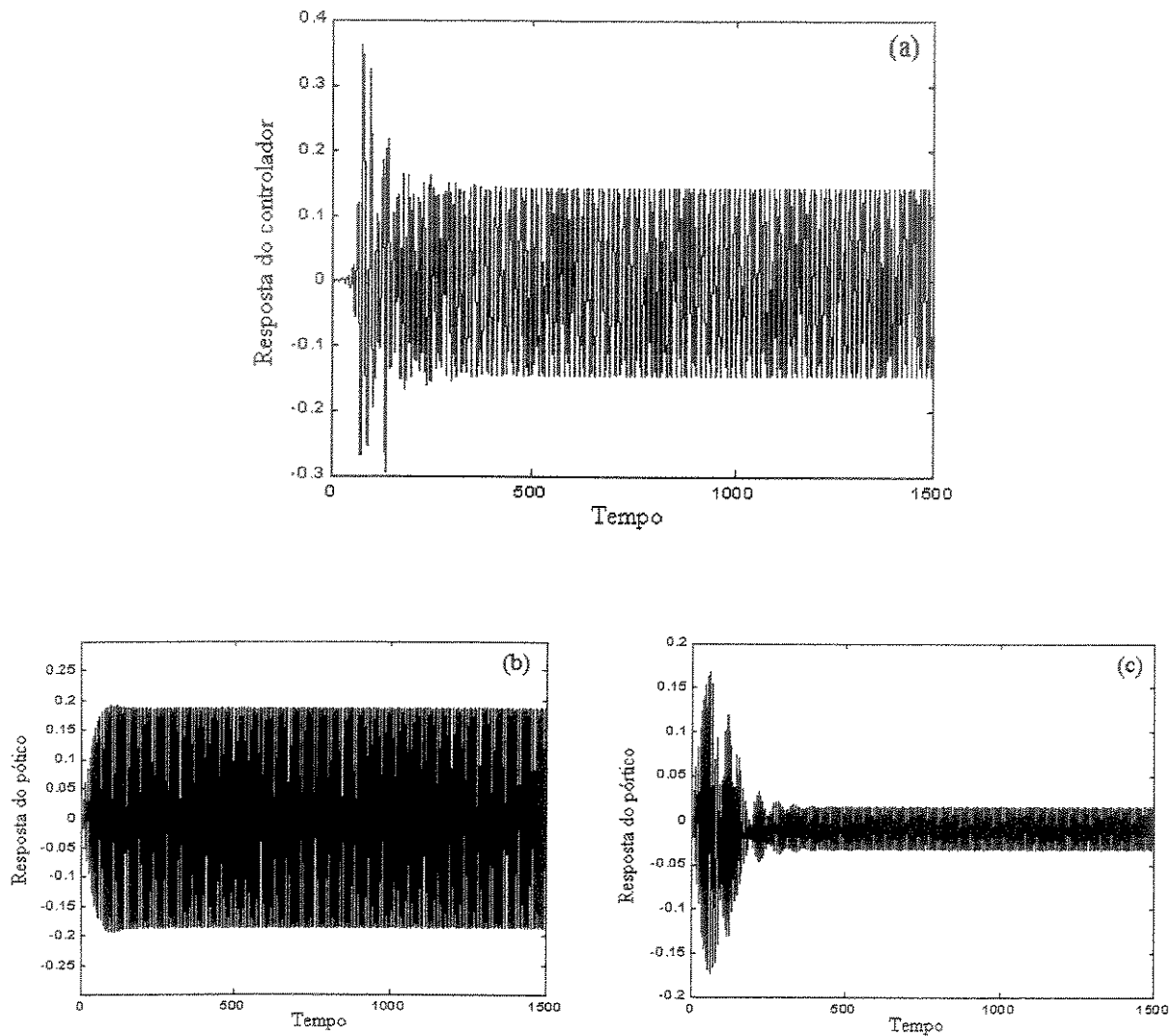


Figure 6.10. Resposta no tempo do (a) controlador, (b) do pórtico sem controle e (c) do pórtico com controle para $\hat{a}=1.2$. Com rigidez linear.

Capítulo 7

Alguns Comentários Sobre Fundações Elásticas Excitadas por dois Motores Não Ideais

Apresenta-se uma extensão da formulação, discutida, anteriormente, com o objetivo de complementar os resultados obtidos, nesta tese, para um sistema não ideal, consistindo de dois motores de corrente contínua, desbalanceados com potências limitadas, montados sobre uma estrutura aporticada elástica com não linearidades geométricas, com ressonância interna entre seus primeiros modos de vibração (dois graus de liberdade).

A interação de dois motores de corrente contínua e uma fundação elástica (vigas, pórticos) foi baseada nos trabalhos de Brasil (1999) que estudou analiticamente uma estrutura aporticada sob excitações harmônicas nos extremos, Dimentberg (2001) que estudou a auto-sincronização de dois motores elétricos de corrente contínuas e de potências limitadas além de Nóbrega (1994) que estudou a auto-sincronização de dois motores não-ideais apoiados em uma estrutura aporticada do tipo “shear building” de movimento somente lateral.

A seguir, comenta-se a derivação das equações de movimento, mostrando sua complexidade. Realizar um número de simulações numéricas a fim de validar o modelo matemático do problema em questão e, de investigar alguns fenômenos não-lineares, tais como: saturação modal, efeito Sommerfeld e auto-sincronização. Os estudos analíticos, as simulações numéricas em detalhe e o uso da síntese de controle serão realizados em trabalhos futuros.

7.1 Descrição do sistema a ser estudado:

A seguir, descreve-se a problemática, envolvida, na obtenção das equações governantes do movimento.

- **Sobre os motores de corrente contínua:**

Consideram-se os motores elétricos de corrente contínua com desbalanceamento e de potências limitadas apoiados nos extremos da viga. Os parâmetros considerados nos motores, mostrados na figura 7.1, são dados por:

I_{ms} = momento de inércia dos rotores 1 e 2 que passa pelo centro de massa do motor,

M_{ms} = massa do motor 1 e 2,

m_s = massa excêntrica dos motores 1 e 2,

r_s = excentricidade da massa desbalanceada dos motores 1 e 2,

φ_s = ângulo de rotação dos motores 1 e 2.

- **Sobre a estrutura aporticada:**

O pórtico, considerado, consta de duas colunas engastadas na base e conectadas à viga horizontal. Seus parâmetros são mostrados na figura 7.1 com as seguintes descrições:

L = comprimento da viga horizontal apoiada nas duas colunas nas suas extremidades,

h = comprimento das duas colunas engastadas em suas bases,

EI_b , EI_c = rigidez do pórtico,

I_b e I_c o momento de inércia da seção transversal da viga horizontal e vertical respectivamente ,

E o módulo de Young do material linear.

As dimensões do pórtico são estabelecidas de tal forma que possibilitam uma relação de ressonância do tipo 1:2, entre os dois primeiros modos de vibração (característica que permite a ocorrência do fenômeno de acoplamento de modos ou ressonância interna).

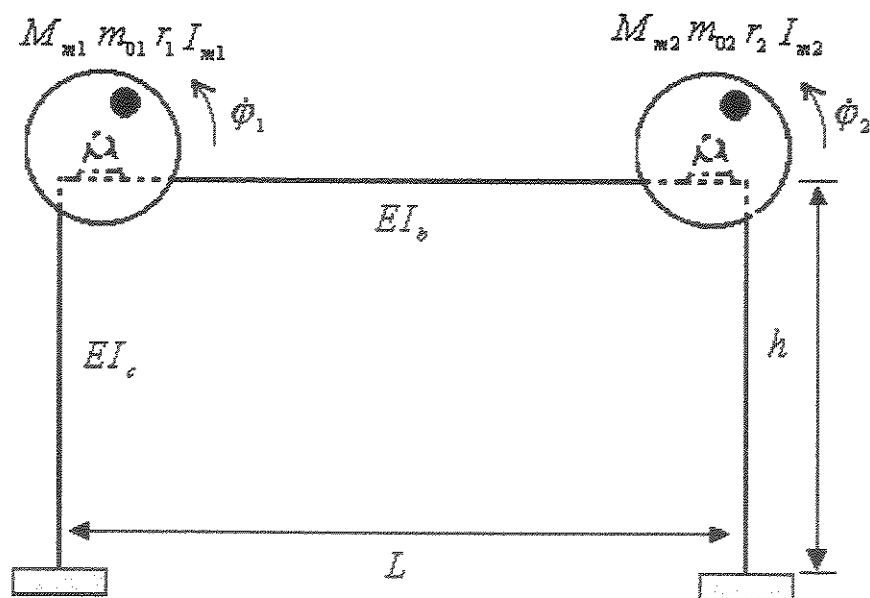


Figura 7.1. Modelo de uma estrutura elástica excitada por dois motores não idéias.

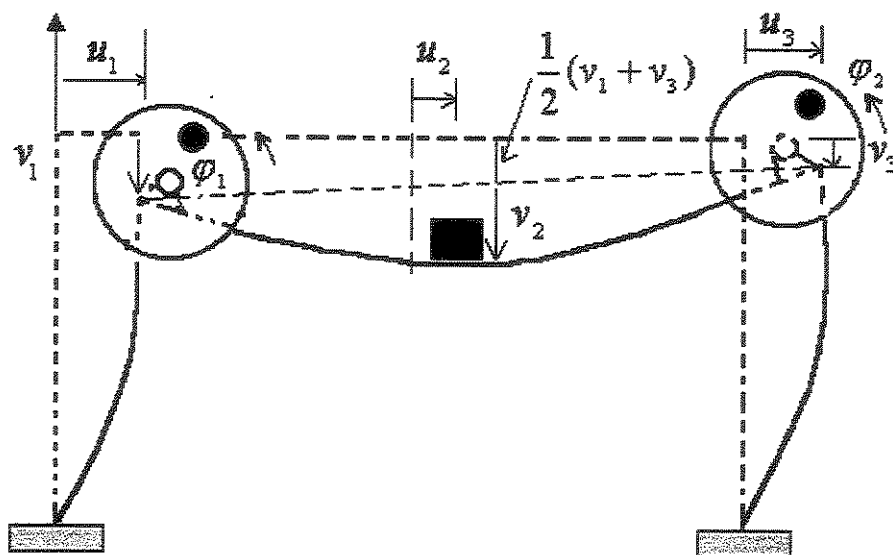


Figura 7. 2. Modelo do sistema não ideal em posição deformada.

7.2 Modelo dinâmico do sistema a ser estudado

- **Sobre a estrutura aporticada**

Considerando-se o encurtamento dos elementos estruturais quando ocorre a deformação (Ver Figura 7.2). Se desprezarmos os termos de ordem superior a três, pode-se escrever as seguintes relações, Barr (1971):

$$\begin{aligned} u_2 &= u_1 - \frac{1}{4} B v_2^2, \quad u_3 = u_1 - \frac{1}{2} B v_2^2, \\ v_1 &= \frac{C}{2} u_1^2, \quad v_3 = \frac{C}{2} u_3^2, \end{aligned} \quad (7.1)$$

Definem-se as seguintes coordenadas generalizadas,

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{u_1}{h}, \\ q_2 &= \frac{v_2}{L}, \end{aligned} \quad (7.2)$$

o campo de deslocamentos, em termos de $q_1(t)$ e $q_2(t)$, é dado por:

$$\begin{aligned} u_2 &= h q_1 - \frac{1}{4} B L^2 a q_2^2, \quad u_3 = h q_1 - \frac{1}{2} B L^2 a q_2^2, \\ v_1 &= \frac{C}{2} h^2 q_1^2, \quad v_3 = \frac{C}{2} (h^2 q_1^2 - B h L^2 q_1 q_2^2 + \frac{1}{4} B^2 L^4 q_2^4), \end{aligned} \quad (7.3)$$

- **Sobre o motor elétrico de corrente contínua**

O circuito elétrico representativo de duas máquinas elétricas de corrente contínua pode ser tomado como de Warminsky, Balhazar (2001) e é apresentado na figura 7.3, juntamente com os componentes mecânicos equivalentes desse tipo de motor.

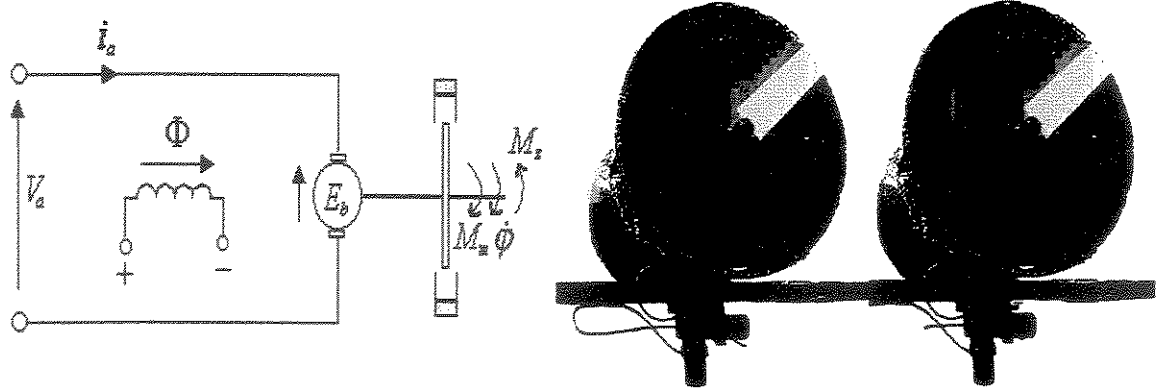


Figura 7.3. Modelo esquemático do circuito elétrico de dois motores elétricos de corrente contínua.

As equações de movimento de um motor de corrente contínua, são dadas por:

$$I_m \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_m(t) - M_z(t) - H(t)$$

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + E_b(t) = V_a \quad (7.4)$$

onde

V_a é a tensão de alimentação,

L_a é a indutância aparente do rotor,

i_a é a corrente de alimentação,

R_a é a resistência da armadura,

$E_b(t)$ é a tensão gerado internamente,

$M_z(t)$ é o torque oposto do disco,

φ é a posição angular do motor,

$H(t)$ é o torque de atrito,

$M_m(t)$ denota o torque gerado pelo motor, dado por

$$M_m = k_m i_a(t) \quad (7.5)$$

$$E_b = k_E \frac{d\phi}{dt} \quad (7.6)$$

onde k_m e k_E são as constantes mecânica e elétrica e Φ é o fluxo magnético.

Definindo-se umas novas coordenadas generalizadas como:

$$I_{a5} = \frac{i_{a5}}{i_{05}}, I_{a6} = \frac{i_{a6}}{i_{06}} \quad (7.7)$$

onde

i_{a5} , i_{a6} são as correntes de armadura de ambos motores,

i_{05} , i_{06} são as correntes iniciais de armadura.

O campo de deslocamento das massas desbalanceadas são dadas por:

$$\begin{aligned} u_{01} &= u_1 + r \cos \varphi_1, \quad v_{01} = v_1 + r \sin \varphi_1 + h, \\ u_{02} &= u_3 + r \cos \varphi_2 + L, \quad v_{02} = v_3 + r \sin \varphi_2 + h \end{aligned} \quad (7.8)$$

que em termos de coordenadas generalizadas, tem-se:

$$u_{01} = h q_1 + r \cos \varphi_1,$$

$$v_{01} = \frac{C}{2} h^2 q_1^2 + r \sin \varphi_1 + h$$

$$u_{02} = h q_1 - \frac{1}{2} B L^2 q_2^2 + r \cos \varphi_2 + L$$

$$v_{02} = \frac{C}{2}(h^2 q_1^2 - BhL^2 q_1 q_2^2 + \frac{1}{4}B^2 L^4 q_2^4) + r \sin \varphi_2 + h \quad (7.9)$$

As energias cinética e potencial do problema, são obtidas como, a seguir

7.2.1 A energia potencial

A energia potencial total do sistema é obtida através da seguinte expressão:

$$V = U + W_c \quad (7.10)$$

onde

U é a energia de deformação,

W_c é a energia potencial das forças conservativas.

Escrevem-se as seguintes expressões para U e W_c :

$$U = \frac{1}{2}k_c(u_1^2 + u_3^2) + \frac{1}{2}k_b v_2^2$$

$$W_c = -g[(M_m - m_0)(v_1 + v_3) + M(v_2 + \frac{v_1 + v_3}{2}) + m_0(v_{01} + v_{02})] \quad (7.11)$$

ou em termos das coordenadas generalizadas:

$$V = \{k_c - \frac{1}{2}[M + 2M_m]gC\}h^2 q_1^2$$

$$- \frac{1}{2}\{k_c - \frac{1}{2}[M + 2M_m]gC\}BhL^2 q_1 q_2^2$$

$$- MgLq_2 - m_0 gr(\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2) + \frac{1}{2}k_b L^2 q_2^2 \quad (7.12)$$

Fazendo $\hat{k}_c = k_c - \frac{1}{2}[M + 2M_m]gC$ para a simplificação de notação.

7.2.2 A Energia Cinética

$$\begin{aligned}
 T = & \frac{1}{2}(M_m - m_0)(\dot{x}_{1m}^2 + \dot{y}_{1m}^2 + \dot{x}_{2m}^2 + \dot{y}_{2m}^2) \\
 & + \frac{1}{2}M(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2}m_0(\dot{x}_{01}^2 + \dot{y}_{01}^2 + \dot{x}_{02}^2 + \dot{y}_{02}^2) + \frac{1}{2}I_m\dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2}I_m\dot{\phi}_2^2
 \end{aligned} \tag{7.13}$$

onde as coordenadas indicadas são as coordenadas das massas definidas da forma:

- **Massa do motor esquerdo:**

$$\begin{aligned}
 x_{1m} &= u_1 = hq_1 \\
 y_{1m} &= v_1 + h = \frac{C}{2}h^2q_1^2
 \end{aligned} \tag{7.14}$$

- **Massa desbalanceada do motor esquerdo:**

$$\begin{aligned}
 x_{01} &= u_1 + r \cos \varphi_1 = hq_1 + r \cos \varphi_1 \\
 y_{01} &= v_1 + r \sin \varphi_1 + h = \frac{C}{2}h^2q_1^2 + r \sin \varphi_1 + h
 \end{aligned} \tag{7.15}$$

- **Massa colocada no meio da viga:**

$$\begin{aligned}
 x_2 &= \frac{L}{2} + u_2 = \frac{L}{2} + hq_1 - \frac{1}{4}BL^2q_2^2 \\
 y_2 &= h + v_2 + \frac{v_1 + v_3}{2} = \frac{C}{4}(2h^2q_1^2 - BL^2hq_1q_2^2)
 \end{aligned} \tag{7.16}$$

- **Massa do motor direito:**

$$\begin{aligned}
 x_{2m} &= L + u_3 = L + hq_1 - \frac{1}{2}BL^2q_2^2 \\
 y_{2m} &= h + v_3 = h + \frac{C}{2}(h^2q_1^2 - BhL^2q_1q_2^2 + \frac{1}{4}B^2L^4q_2^4)
 \end{aligned} \tag{7.17}$$

- **Massa desbalanceada do motor direito:**

$$\begin{aligned}
 x_{02} &= L + u_3 + r \cos \varphi_2 = L + hq_1 - \frac{1}{2}BL^2q_2^2 + r \cos \varphi_2 \\
 y_{02} &= v_3 + r \sin \varphi_2 + h = \frac{C}{2}(h^2q_1^2 - BhL^2q_1q_2^2 + \frac{1}{4}B^2L^4q_2^4) \\
 &\quad + r \sin \varphi_2 + h
 \end{aligned} \tag{7.18}$$

A energia cinética total do sistema em coordenadas generalizadas é a seguinte:

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2}(2M_m + M)h^2\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}ML^2\dot{q}_2^2 \\
 &\quad - \frac{1}{2}(2M_m + M)BhL^2\dot{q}_1\dot{q}_2q_2 - m_0rh\dot{q}_1\dot{\varphi}_1\sin\varphi_1 - m_0rh\dot{q}_1\dot{\varphi}_2\sin\varphi_2 \\
 &\quad + \frac{1}{2}(I_m + m_0r^2)(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2) + MCh^2Lq_1\dot{q}_1\dot{q}_2
 \end{aligned} \tag{7.19}$$

desta forma, tem-se as equações governantes do movimento.

7.2.3 Equações de Movimento

Para se obter as equações do movimento, em questão, usam-se as expressões da energia cinética e potencial e das forças externas atuantes, na equação de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_n} + \frac{\partial V}{\partial q_n} = N_n, \quad n = 1, \dots, 4 \quad (7.20)$$

onde os N_n são as forças generalizadas.

Desta forma, tem-se:

$n = 1$:

$$\begin{aligned} M_E h^2 \ddot{q}_1 - \frac{1}{2} M_E B h L^2 (\ddot{q}_2 q_2 + \dot{q}_2^2) - m_0 r h (\ddot{\phi}_1 \sin \phi_1 + \dot{\phi}_1^2 \cos \phi_1) \\ - m_0 r h (\ddot{\phi}_2 \sin \phi_2 + \dot{\phi}_2^2 \cos \phi_2) + 2 \hat{k}_c h^2 q_1 - \frac{1}{2} \hat{k}_c B h L^2 q_2^2 \\ + M C L h^2 (q_1 \ddot{q}_2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2) - M C L h^2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 = -c_1 h \dot{q}_1 \end{aligned} \quad (7.21)$$

$n = 2$:

$$\begin{aligned} M L^2 \ddot{q}_2 - \frac{1}{2} M_E B h L^2 (\ddot{q}_1 q_2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2) + k_b L^2 q_2 + M C L h^2 (\dot{q}_1^2 + q_1 \ddot{q}_1) \dots \\ - \hat{k}_c B h L^2 q_1 q_2 - M g L + \frac{1}{2} M_E B h L^2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 = -c_2 L \dot{q}_2 \end{aligned} \quad (7.22)$$

$n = 3$:

$$(I_m + m_0 r^2) \ddot{\phi}_1 - m_0 r h \ddot{q}_1 \sin \phi_1 + m_0 r g \cos \phi_1 = M_1(t) - H_1(t) \quad (7.23)$$

$n = 4$:

$$(I_m + m_0 r^2) \ddot{\phi}_2 - m_0 r h \ddot{q}_1 \sin \phi_2 + m_0 r g \cos \phi_2 = M_2(t) - H_2(t). \quad (7.24)$$

Após manipulações algébricas, obtém-se:

$$\ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = \alpha_1(\ddot{q}_2 q_2 + \dot{q}_2^2) + \alpha_2(\ddot{\phi}_1 \sin \phi_1 + \dot{\phi}_1^2 \cos \phi_1 + \ddot{\phi}_2 \sin \phi_2 + \dot{\phi}_2^2 \cos \phi_2) + \alpha_3 q_2^2 - \mu_1 \dot{q}_1 - \alpha_4 q_1 \ddot{q}_2$$

$$\ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = \alpha_5 \ddot{q}_1 q_2 + \alpha_6 q_1 q_2 - \mu_2 \dot{q}_2 - \alpha_{10} - \alpha_7(\dot{q}_1^2 + q_1 \ddot{q}_1),$$

$$\ddot{\phi}_1 = \alpha_8 \ddot{q}_1 \sin \phi_1 - \alpha_9 \cos \phi_1 + \frac{k_m i_{05} I_{a5} - H_1(t)}{I_m + m_0 r^2},$$

$$\ddot{\phi}_2 = \alpha_8 \ddot{q}_1 \sin \phi_2 - \alpha_9 \cos \phi_2 + \frac{k_m i_{06} I_{a6} - H_2(t)}{I_m + m_0 r^2},$$

$$\frac{dI_{a5}}{dt} = -p_1 I_{a5} - p_2 \dot{\phi}_1 + \hat{V}_{a5},$$

$$\frac{dI_{a6}}{dt} = -p_3 I_{a6} - p_4 \dot{\phi}_2 + \hat{V}_{a6}, \quad (7.25)$$

onde

$$\omega_1^2 = \frac{2k_c h^2}{M_E}, \quad \omega_2^2 = \frac{k_b}{M},$$

$$\alpha_1 = \frac{BL^2}{2h}, \quad \alpha_2 = \frac{m_0 r}{M_E h}, \quad \alpha_3 = \frac{BL^2 \hat{k}_c}{2M_E h}, \quad \alpha_4 = \frac{MCL}{M_E},$$

$$\alpha_5 = \frac{M_E Bh}{2M}, \quad \alpha_6 = \frac{\hat{k}_c Bh}{M}, \quad \alpha_7 = \frac{Ch^2}{L},$$

$$\alpha_8 = \frac{m_0 r h}{I_m + m_0 r^2}, \quad \alpha_9 = \frac{m_0 r g}{I_m + m_0 r^2}, \quad \alpha_{10} = \frac{g}{L},$$

$$\mu_1 = \frac{c_1}{M_E h}, \quad \mu_2 = \frac{c_2}{ML},$$

$$M_E = 2M_m + M,$$

$$p_1 = \frac{R_a}{L_a} = p_3, \quad p_2 = \frac{k_E}{L_a i_{05}}, \quad p_4 = \frac{k_E}{L_q i_{06}},$$

$$\hat{V}_{05} = \frac{V_a}{L_a i_{05}}, \quad \hat{V}_{06} = \frac{V_a}{L_a i_{06}}.$$

Para efetuar-se as simulações numéricas, considerou-se o sistema simplificado, levando-se em conta o fato de que a corrente de alimentação seja constante e a curva característica do motor seja linear, além de considerar o tempo adimensional $\tau = \omega_1 t$. Desta forma, reescreve-se as equações diferenciais (7.25) na forma adimensional, como a seguir:

$$q_1'' + \hat{\omega}_1^2 q_1 = \hat{\alpha}_1(q_2'' q_2 + q_2'^2) + \hat{\alpha}_2(\varphi_1'' \text{sen} \varphi_1 + \varphi_1'^2 \cos \varphi_1 + \varphi_2'' \text{sen} \varphi_2 + \varphi_2'^2 \cos \varphi_2) + \hat{\alpha}_3 q_2^2 - \hat{\mu}_1 q_1' - \hat{\alpha}_4 q_1 q_2'',$$

$$q_2'' + \hat{\omega}_2^2 q_2 = \hat{\alpha}_5 q_1' q_2 + \hat{\alpha}_6 q_1 q_2' - \hat{\mu}_2 q_2' - \hat{\alpha}_{10} - \hat{\alpha}_7(q_1'^2 + q_1 q_1''),$$

$$\varphi_1'' = \hat{\alpha}_8 q_1'' \text{sen} \varphi_1 - \hat{\alpha}_9 \cos \varphi_1 + \hat{a}_1 - \hat{b}_1 \varphi_1',$$

$$\varphi_2'' = \hat{\alpha}_8 q_1'' \text{sen} \varphi_2 - \hat{\alpha}_9 \cos \varphi_2 + \hat{a}_2 - \hat{b}_2 \varphi_2'. \quad (7.26)$$

onde

$$\hat{\omega}_1 = 1, \quad \hat{\omega}_2 = \frac{\omega_2}{\omega_1} \approx 2, \quad \hat{\alpha}_1 = \alpha_1, \quad \hat{\alpha}_2 = \alpha_2, \quad \hat{\alpha}_3 = \frac{\alpha_3}{\omega_1^2}, \quad \hat{\alpha}_4 = \alpha_4, \quad \hat{\alpha}_5 = \alpha_5,$$

$$\hat{\alpha}_6 = \frac{\alpha_6}{\omega_1^2}, \quad \hat{\alpha}_7 = \alpha_7, \quad \hat{\alpha}_8 = \alpha_8, \quad \hat{\alpha}_9 = \frac{\alpha_9}{\omega_1^2}, \quad \hat{\alpha}_{10} = \frac{\alpha_{10}}{\omega_1^2}$$

$$\hat{\mu}_1 = \frac{\mu_1}{\omega_1}, \quad \hat{\mu}_2 = \frac{\mu_2}{\omega_1},$$

$$\hat{a}_1 = \frac{a_1}{(I_m + m_0 r^2) \omega_1^2}, \quad \hat{b}_1 = \frac{b_1}{(I_m + m_0 r^2) \omega_1}$$

$$\hat{a}_2 = \frac{a_2}{(I_m + m_0 r^2) \omega_1^2}, \quad \hat{b}_2 = \frac{b_2}{(I_m + m_0 r^2) \omega_1^2}.$$

7.3 Resultados das simulações numéricas:

Para se observar a dinâmica da interação existente entre os dois motores não-ideais, (considerados, aqui) e a estrutura aporticada, foram realizadas um número de simulações numéricas, usando SIMULINK, com o objetivo, de mostrar alguns resultados qualitativos, validando o modelo matemático, em questão.

Para efetuar as simulações, tomou-se alguns valores numéricos de parâmetros adimensionais, que foram utilizadas no modelo em SIMULINK da equação (7.26). Eles são:

$$\hat{\alpha}_1=5.76, \hat{\alpha}_2=0.0025, \hat{\alpha}_3=18, \hat{\alpha}_4=0.96, \hat{\alpha}_5=3, \hat{\alpha}_6=18.76, \hat{\alpha}_7=0.5, \hat{\alpha}_8=4.8, \hat{\alpha}_9=0.049, \\ \hat{\alpha}_{10}=0.0042, \hat{\mu}_1=0.014, \hat{\mu}_2=0.019, \hat{\omega}_1=1, \hat{\omega}_2=2.$$

Nota-se que as frequências naturais do problema, em questão, dimensionais da estrutura aporticada, eram $\omega_1=49.08$ rad/s, $\omega_2=98.27$ rad/s, satisfazendo a condição de ressonância interna $\omega_2 \approx 2\omega_1$.

Além disso, nota-se que os dois motores de corrente contínua, são diferentes somente nos elementos de suas curvas características de forma de linha reta: $\hat{a}_3 - \hat{b}_3\phi'_1$ e $\hat{a}_4 - \hat{b}_4\phi'_2$ da equação (7.26).

- **Resultados da Primeira Simulação Numérica:**

Tomou-se para esta simulação, os elementos adimensionais dos dois motores de corrente contínua:

$$\hat{a}_1 = 1.3, \hat{b}_1 = 1.19$$

$$\hat{a}_2 = 0.1, \hat{b}_2 = 0.37$$

Além das condições iniciais:

$$\varphi_1(0)=1.5, \varphi_2(0)=0.5, \varphi_1'(0) = 0.0 = \varphi_2'(0).$$

Observa-se também que na figura 7.4(a), a rotação do primeiro motor está muito próxima da primeira ressonância e a do segundo motor está fora da primeira ressonância. Desta forma, obtém-se o fenômeno de saturação, entre as respostas dos deslocamentos dos modos horizontal e vertical da estrutura aporticada e, a ausência de auto-sincronização entre os dois motores. Lembrando de que os valores das amplitudes dos deslocamentos são relevantes no movimento lateral e vertical da estrutura, figura 7.4 (b) e (c).

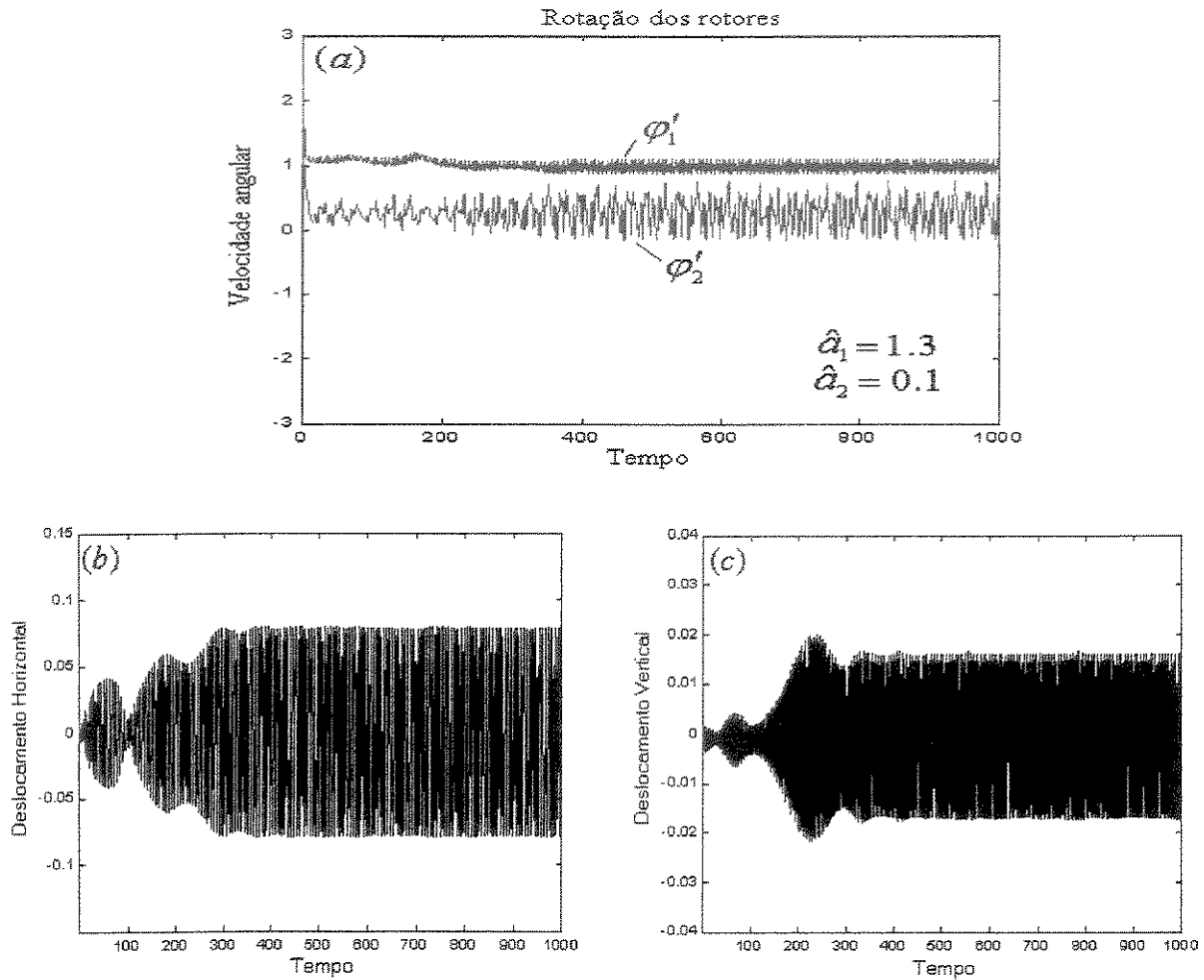


Figura 7.4. Respostas no tempo da rotação dos motores e dos modos horizontal e vertical do ponto central da viga da estrutura aporticada para $\hat{a}_1 = 1.3$ e $\hat{a}_2 = 0.1$.

- **Resultados da Segunda Simulação Numérica:**

Tomou-se para esta simulação, os parâmetros de controle $\hat{a}_j$ adimensionais dos dois motores de corrente contínua:

$$\hat{a}_1 = 1.2, \hat{b}_1 = 1.19$$

$$\hat{a}_2 = 0.3, \hat{b}_2 = 0.37$$

Além das condições iniciais, tem-se:

$$\varphi_1(0)=1.5, \varphi_2(0)=0.5, \varphi'_1(0) = 0.0 = \varphi'_2(0)$$

Observa-se que na figura 7.5(a) que a rotação do primeiro motor e do segundo motor estão muito próximos da primeira ressonância e tendem a entrar em auto-sincronização múltipla.

Durante o fenômeno de saturação, nota-se as quedas das amplitudes dos modos horizontal e vertical da estrutura aporticada. Como amplitude do modo vertical é nula, sugere-se que a estrutura aporticada tem somente movimento lateral (figura 7.5 (b) e (c)).

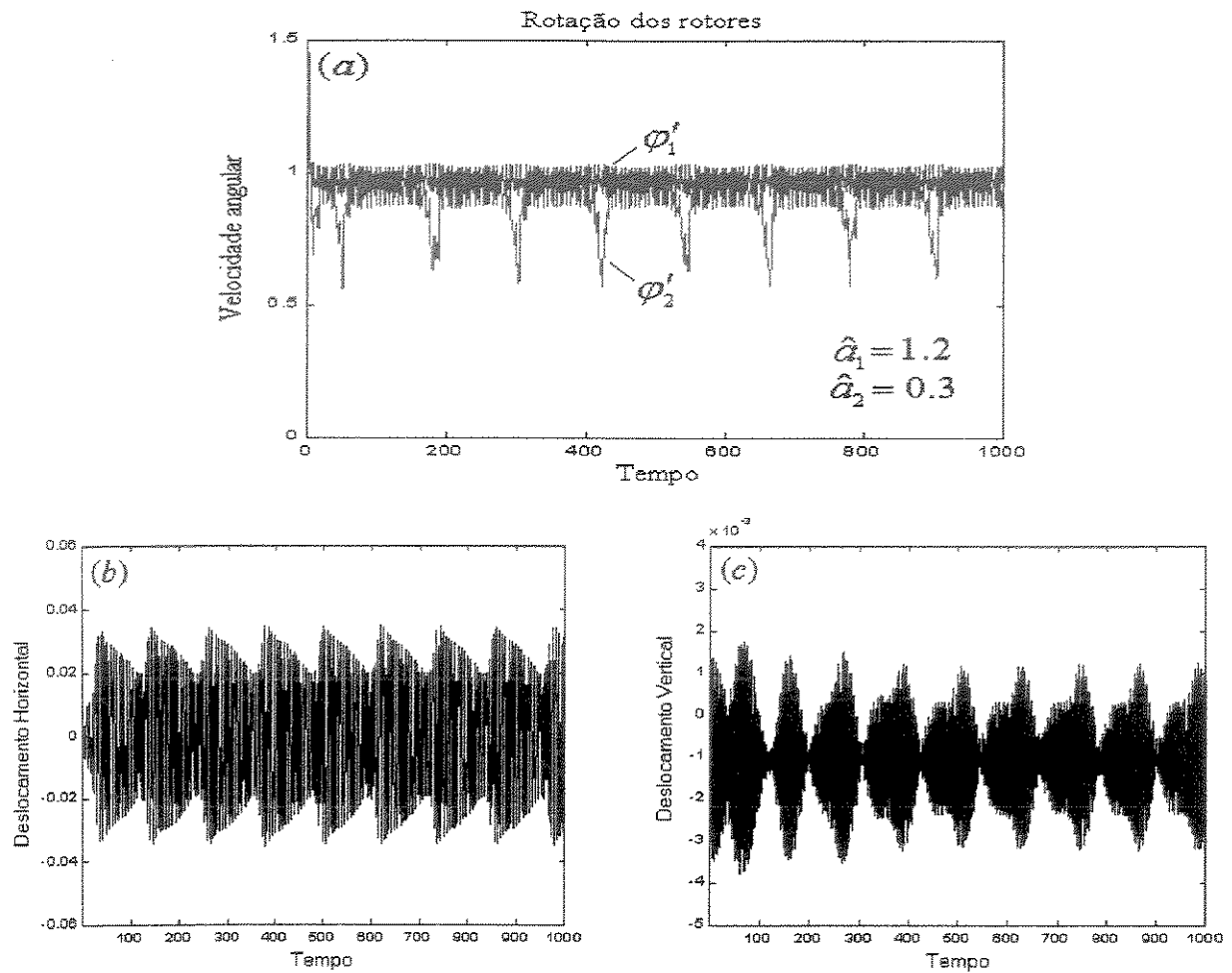


Figura 7.5. Respostas no tempo da rotação dos motores e dos modos horizontal e vertical do ponto central da viga da estrutura aporcada para $\hat{a}_1 = 1.2$ e $\hat{a}_2 = 0.3$.

- **Resultados da Terceira Simulação Numérica:**

Tomam-se os parâmetros de controle $\hat{a}_j$ dos dois motores de corrente contínua:

$$\hat{a}_1 = 2.45, \hat{b}_1 = 1.19$$

$$\hat{a}_2 = 0.7, \hat{b}_2 = 0.37$$

Além das condições iniciais:

$$\phi_1(0)=3.0, \phi_2(0)=1.5, \phi_1'(0) = 0.0 = \phi_2'(0)$$

Observa-se que, figura 7.6(a), a rotação do primeiro motor e do segundo motor estão muito próximos da segunda ressonância que entram em auto-sincronização. Durante a segunda ressonância, nota-se as quedas das amplitudes dos modos horizontal e vertical da estrutura aporticada próximos de zero sugerem que a estrutura aporticada tem vibrações pequenas no movimento dos modos lateral e vertical (figura 7.6 (b) e (c)).

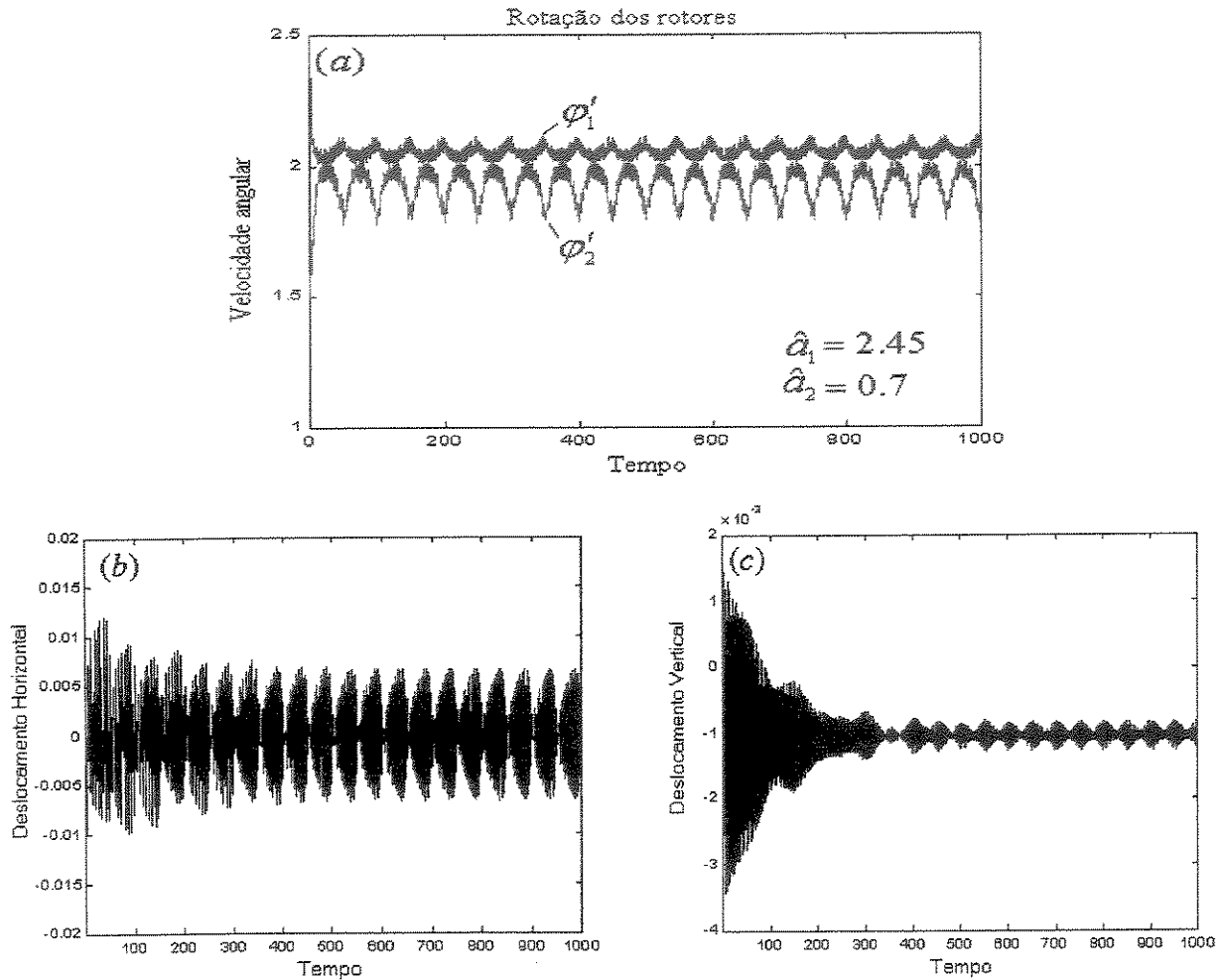


Figura 7.6. Respostas no tempo das rotações dos motores e dos modos horizontal e vertical da estrutura aporticada para $\hat{a}_1=2.45$ e $\hat{a}_2=0.7$.

7.4 Modelo particularizado do sistema estudado

Neste item apresenta-se um problema, modelado como sendo o de uma estrutura aporticada do tipo “shear building”, excitado por dois motores não-ideais, descrito na figura 7.7.

O objetivo principal, deste item, é o de se observar a auto-sincronização entre os dois motores apoiados sobre uma estrutura aporticada com rigidez não-linear.

Para este estudo, assume-se que a rigidez não-linear da estrutura aporticada é da forma $k(x) = kx + k_2x^3$, onde as constantes k e k_2 são os coeficientes elástico linear e não-linear, respectivamente e, x é o deslocamento horizontal da estrutura aporticada que suporta dois motores não-ideais.

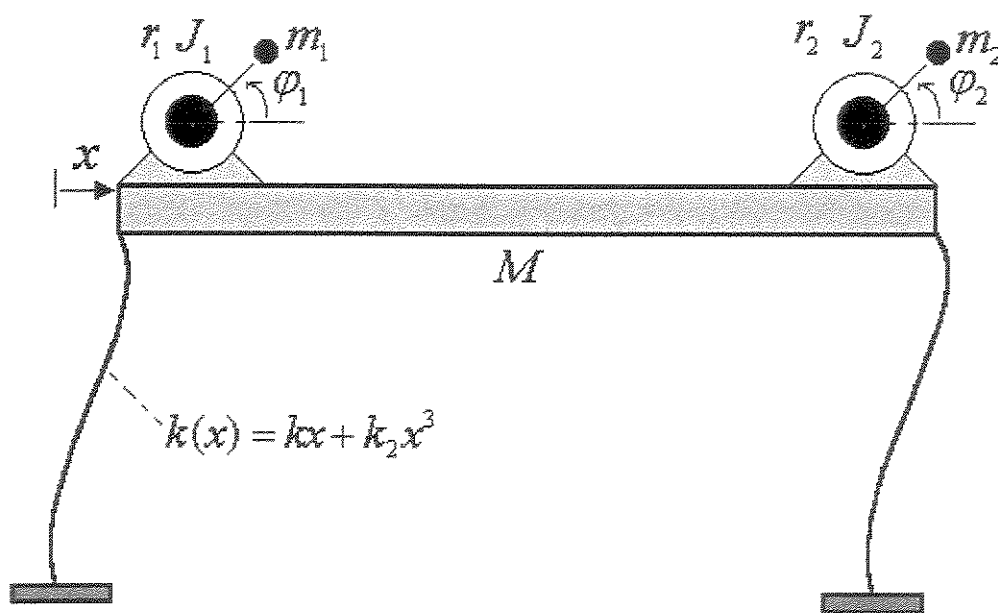


Figure 7.7. Modelo esquemático de dois motores não-ideais apoiados sobre uma estrutura aporticada do tipo “shear building”.

A energia potencial do sistema é dada por

$$V = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{4}k_2x^4 + m_1gr_1\sin\varphi_1 + m_2gr_2\sin\varphi_2 \quad (7.27)$$

e, a energia cinética do sistema é dada por

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J_1\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m_1[\dot{x} - r_1\dot{\varphi}_1\sin\varphi_1]^2 + \frac{1}{2}m_1[r_1\dot{\varphi}_1\cos\varphi_1]^2 \\ & + \frac{1}{2}J_2\dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2}m_2[\dot{x} - r_2\dot{\varphi}_2\sin\varphi_2]^2 + \frac{1}{2}m_2[r_2\dot{\varphi}_2\cos\varphi_2]^2 \end{aligned} \quad (7.28)$$

onde

r_1, r_2 são as excentricidades dos rotores,

m_1, m_2 são as massas desbalanceadas,

M é a massa conjunta da estrutura aporticada mais as massas dos motores,

J_1, J_2 são os momentos de inércia dos rotores,

φ_1, φ_2 são as posições angulares dos rotores.

Logo, as equações de movimento são dadas por:

$$\begin{aligned} (M_E)\ddot{x} + c_1\dot{x} + kx + k_2x^3 &= m_1r_1(\ddot{\varphi}_1\sin\varphi_1 + \dot{\varphi}_1^2\cos\varphi_1) + m_2r_2(\ddot{\varphi}_2\sin\varphi_2 + \dot{\varphi}_2^2\cos\varphi_2), \\ (J_1 + m_1r_1^2)\ddot{\varphi}_1 - m_1r_1\ddot{x}\sin\varphi_1 + m_1gr_1\cos\varphi_1 &= M_1 - H_1, \\ (J_2 + m_2r_2^2)\ddot{\varphi}_2 - m_2r_2\ddot{x}\sin\varphi_2 + m_2gr_2\cos\varphi_2 &= M_2 - H_2, \end{aligned} \quad (7.29)$$

onde

M_1, M_2 são os torques gerados pelos motores,

H_1, H_2 são torques de atritos,

c_1 é o amortecimento viscoso linear da estrutura,

$M_E = M + m_1 + m_2$.

Considerando-se uma aproximação linear para as curvas características dos motores de correntes contínuas, tem-se:

$$\begin{aligned} M_1 - H_1 &= \hat{a}_1 - \hat{b}_1 \dot{\phi}_1, \\ M_2 - H_2 &= \hat{a}_2 - \hat{b}_2 \dot{\phi}_2, \end{aligned} \quad (7.30)$$

onde

$\hat{a}_1, \hat{a}_2$ são os parâmetros de controle (tensão de alimentação na armadura de cada motor elétrico)
 $\hat{b}_1, \hat{b}_2$ são os valores para cada tipo de motor.

Reescrevem-se as equações de movimento (7.29) na forma adimensional

$$\begin{aligned} X'' + \mu X' + X + pX^3 &= q_1(\phi_1'' \sin \phi_1 + \phi_1'^2 \cos \phi_2) + q_2(\phi_2'' \sin \phi_2 + \phi_2'^2 \cos \phi_2), \\ \phi_1'' &= \alpha_1 X'' \sin \phi_1 - \alpha_2 \cos \phi_1 + \hat{a}_1 - \hat{b}_1 \phi_1', \\ \phi_2'' &= \alpha_3 X'' \sin \phi_2 - \alpha_4 \cos \phi_2 + \hat{a}_2 - \hat{b}_2 \phi_2', \end{aligned} \quad (7.31)$$

onde:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{c_1}{\omega_1 M_E}, \quad \omega_1^2 = \frac{k}{M_E}, \\ p &= \frac{k_2}{k} r^2, \quad q_1 = \frac{m_1}{M_E}, \\ q_2 &= \frac{m_2}{M_E}, \quad x = rX, \\ \alpha_1 &= \frac{m_1 r_1}{J_1 + m_1 r_1^2}, \quad \alpha_2 = \frac{m_1 g r_1}{(J_1 + m_1 r_1^2) \omega_1^2}, \\ \alpha_3 &= \frac{m_2 r_2}{J_2 + m_2 r_2^2}, \quad \alpha_4 = \frac{m_2 g r_2}{(J_2 + m_2 r_2^2) \omega_1^2}, \\ \hat{a}_1 &= \frac{a_1}{(J_1 + m_1 r_1^2) \omega_1^2}, \quad \hat{b}_1 = \frac{b_1}{(J_1 + m_1 r_1^2) \omega_1}, \end{aligned}$$

$$\hat{a}_2 = \frac{a_2}{(J_2 + m_2 r_2^2) \omega_1^2}, \quad \hat{b}_2 = \frac{b_2}{(J_2 + m_2 r_2^2) \omega_1},$$

$\omega_1 t = \tau$ é o tempo adimensional.

A seguir, discutem-se as simulações do sistema, em questão.

Simulações numéricas:

Nas simulações numéricas, os parâmetros (adimensionais) do sistema não-ideal são escolhidos de tal forma que:

$\alpha_1 = 4.8 = \alpha_3$, $\alpha_2 = 0.049 = \alpha_4$, $\mu = 0.01$, $p = 5.76$, $q_1 = q_2 = 0.01$, $\omega_1 = 1.0$, $\hat{b} = 1.19$ e, as condições iniciais para a estrutura aporticada são: $x(0) = 0.001$, $\dot{x}(0) = 0.0$.

A figura 7.8, mostra a auto-sincronização de dois motores desbalanceados e de potências limitadas, fora da região de ressonância da estrutura (ver figura 7.8(a)). Os resultados são obtidos de acordo com as condições iniciais: $\varphi_1(0) = \pi/2$, $\varphi_2(0) = -\pi/2$, $\dot{\varphi}_1(0) = 0 = \dot{\varphi}_2(0)$ e correspondentes aos parâmetros de controle: $\hat{a}_1 = 1.9 = \hat{a}_2$. Note como está decrescendo o deslocamento do pórtico (ver figura 7.8(c)) enquanto que a diferença entre as velocidades rotacionais médias dos motores é nula (ver figura 7.8(b)).

A figura 7.9, mostra a ausência de auto-sincronização quando os parâmetros de controle e as condições iniciais tomam os seguintes valores: $\hat{a}_1 = 1.2$, $\hat{a}_2 = 1.9$ e $\varphi_1(0) = \pi/4$, $\varphi_2(0) = -\pi/4$, $\dot{\varphi}_1(0) = 0 = \dot{\varphi}_2(0)$. Note que a velocidade angular do primeiro motor entra em ressonância (ver figura 7.9(a)), a diferença entre as velocidades rotacionais médias dos motores não é nula (ver figura 7.9(b)) e o deslocamento da estrutura não decresce (ver figura 7.9(c)).

A figura 7.10, mostra o fenômeno de auto-sincronização e o fenômeno Sommerfeld no tempo $\tau = 1000$ quando os parâmetros de controle e as condições iniciais tomam os seguintes valores: $\hat{a}_1 = 1.4$, $\hat{a}_2 = 1.7$ e $\varphi_1(0) = \pi/2$, $\varphi_2(0) = -\pi/2$, $\dot{\varphi}_1(0) = 0 = \dot{\varphi}_2(0)$.

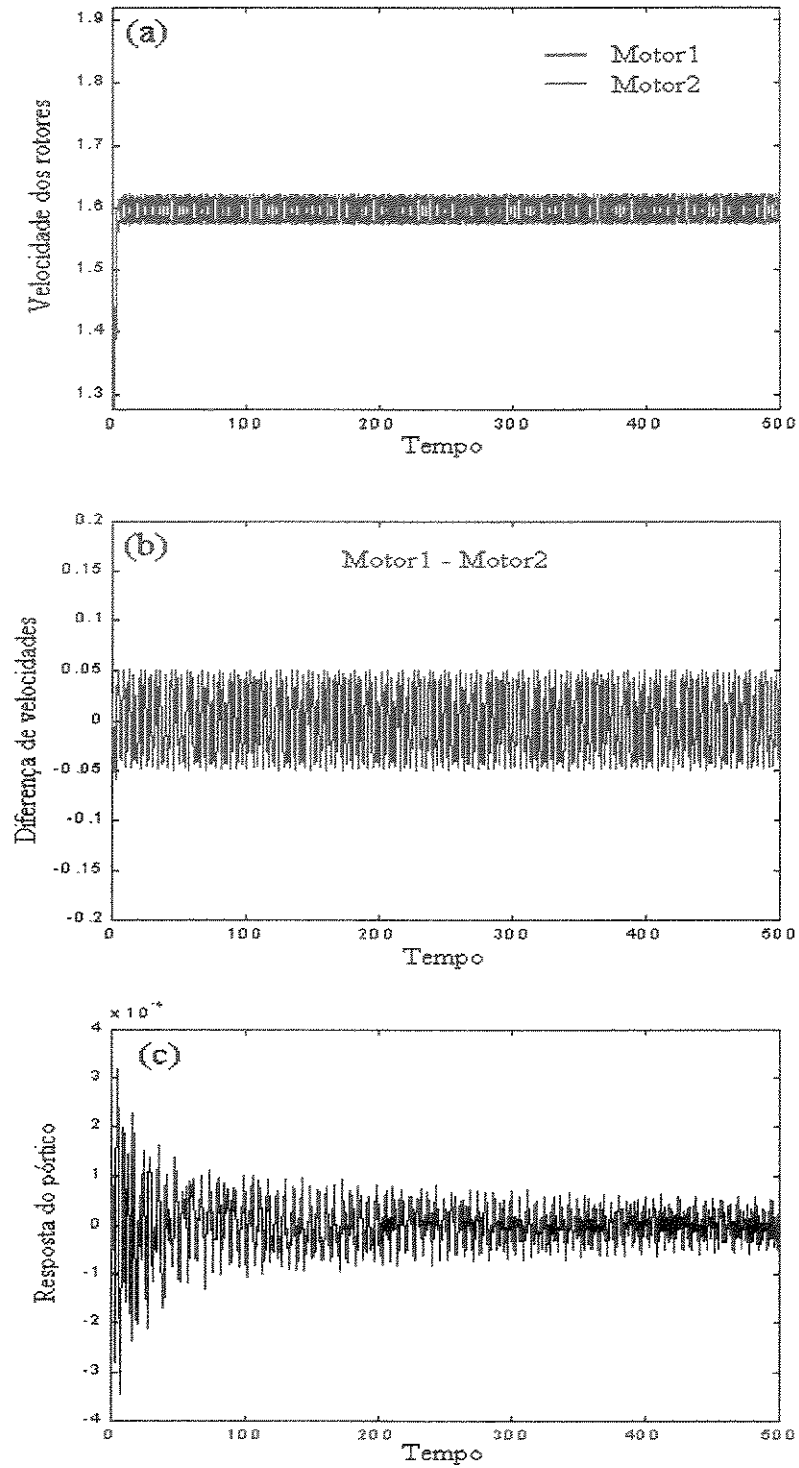


Figura 7.8. Auto-sincronização dos motores desbalanceados quando $\hat{a}_1 = 1.9 = \hat{a}_2$.

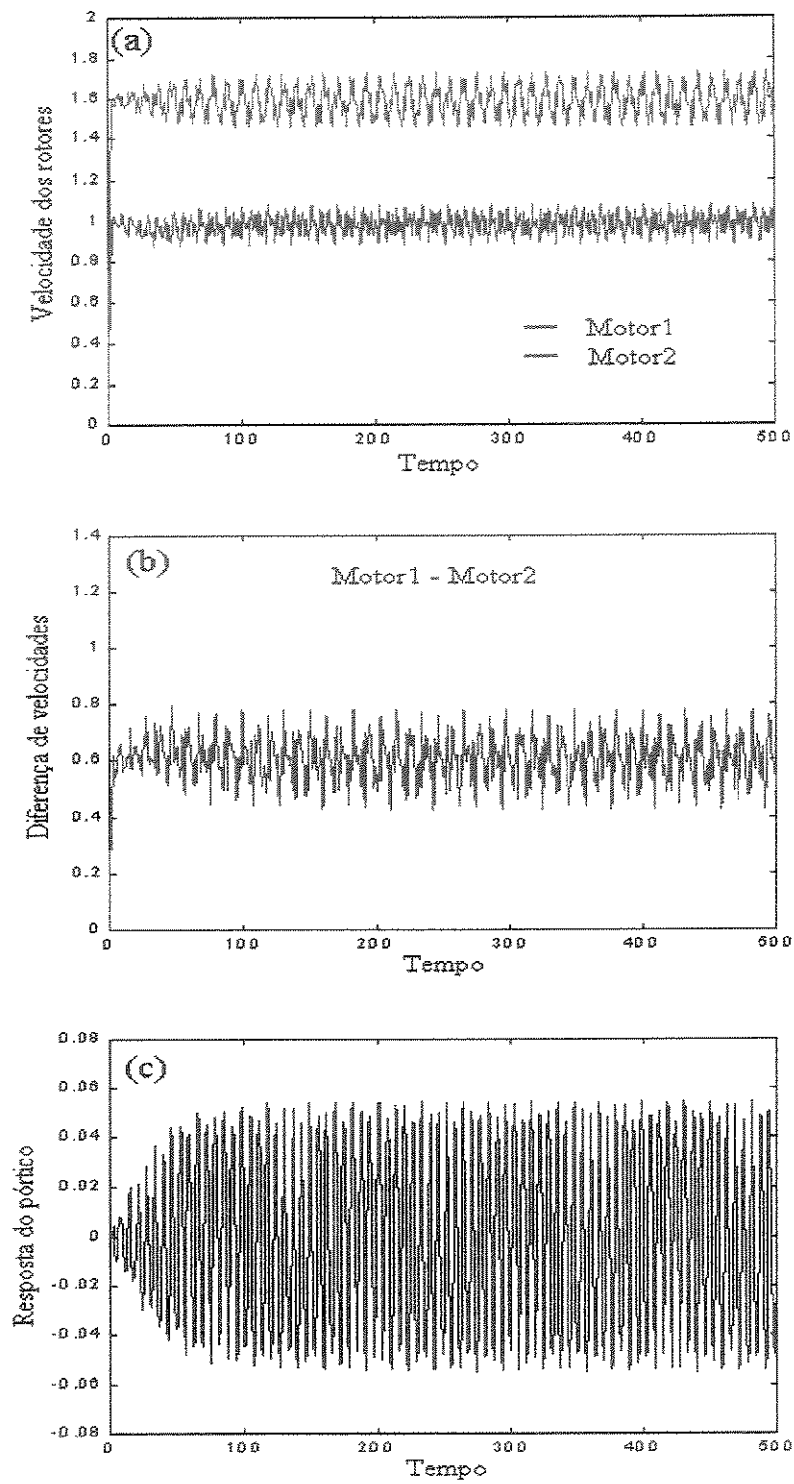


Figura 7.9. Ausência de Auto-sincronização dos motores desbalanceados quando $\hat{a}_1=1.2$, $\hat{a}_2=1.9$.

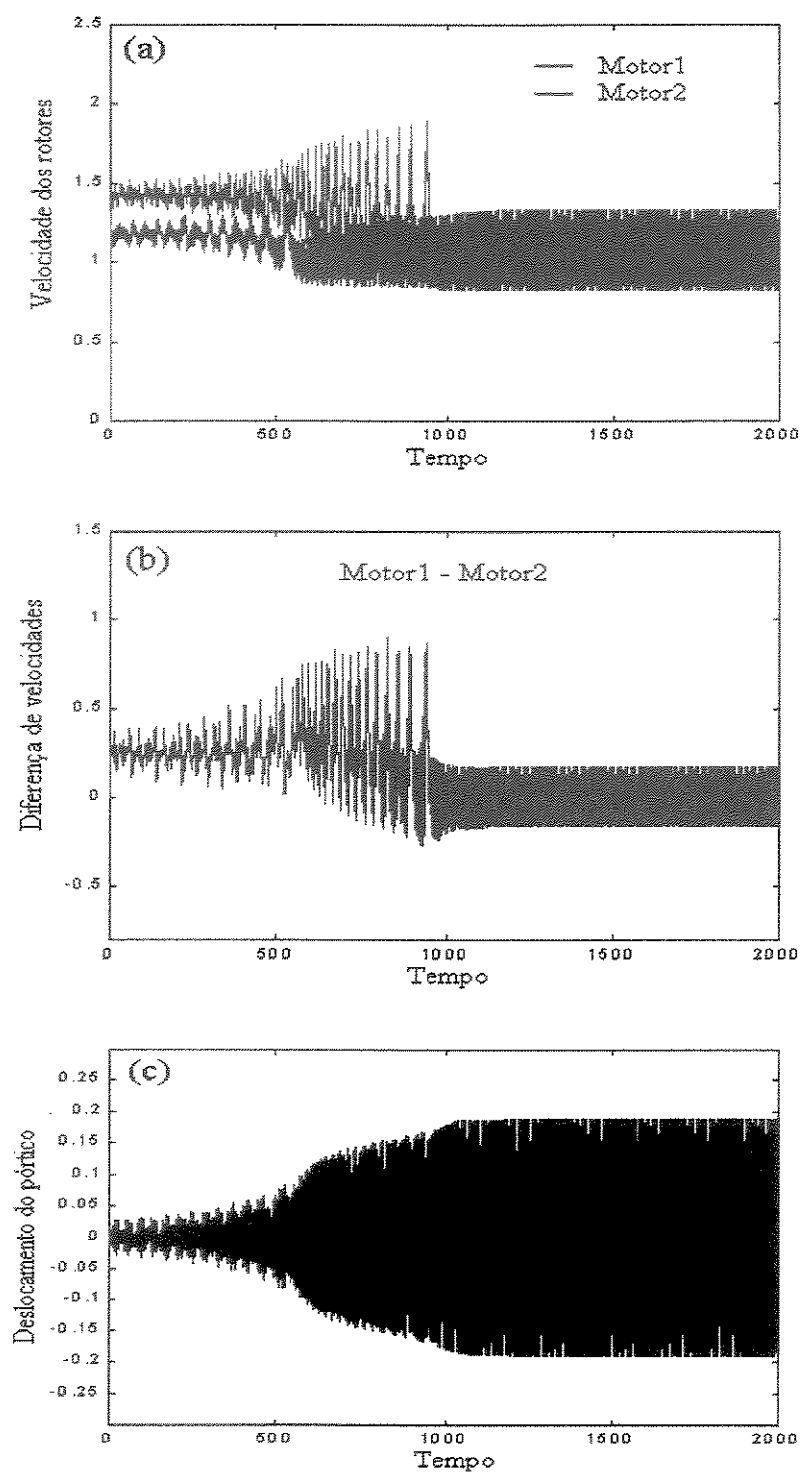


Figura 7.10. Auto-sincronização dos motores desbalanceados e o efeito Sommerfeld quando

$$\hat{a}_1=1.4, \hat{a}_2=1.7.$$

Capítulo 8

Conclusões e Trabalhos Futuros

Inicialmente, faremos alguns comentários, acerca das principais conclusões desta tese financiada pela FAPESP, processo de número: 98/02759-2.

Esta tese abordou o estudo da dinâmica e controle de uma estrutura aporticada, excitada por um motor não-ideal, e obteve-se, a partir dos resultados, apresentados, nos diversos capítulos, os seguintes resultados principais:

No capítulo 2, discutiu-se o problema tomando-se um motor elétrico de corrente contínua desbalanceado com potência limitada e apoiado no meio da viga de um pórtico plano

O modelo matemático foi formulado, da seguinte forma:

- Considerou-se neste modelo imperfeições geométricas devidas às deformações estáticas.
- Nas expressões da Energia Potencial total e na Energia Cinética foram desprezando-se os termos com ordem superior a 4 (relativos às coordenadas generalizadas) obtendo-se nas equações de movimento termos não lineares quadráticos e seus efeitos foram investigados, em detalhes, no capítulo 3.

- Os parâmetros físicos e geométricos foram estabelecidos de tal forma que se possibilitou a existência de uma ressonância interna de relação 1:2 entre os dois primeiros modos de vibração, cuja influência foi investigada no capítulo 3.
- Tomou-se inicialmente um sistema dinâmico, simplificado, de 3 graus de liberdade onde somente os deslocamentos dos modos horizontal e vertical do ponto central da viga do pórtico e a posição angular do rotor (onde não foi considerada a equação do circuito elétrico do motor (sem a corrente de alimentação do motor) para posteriormente considerar-se um sistema completo de 4 graus de liberdade(neste caso foi incluída a corrente de alimentação do motor).

No capítulo 3, foram realizados os ensaios numéricos de integração direta das equações do movimento, utilizando-se o integrador ODE45 do MATLAB (Runge-Kutta de ordem 4-5) no sistema de equações de primeira ordem, tomadas como sendo as variáveis de estado.

Obteve-se uma redução do sistema de equações diferenciais originais e, pode-se utilizar, com facilidade, o modelo configurado de blocos de SIMULINK/MATLAB que são mostrados no Apêndice A.

Para se observar o comportamento dinâmico deste sistema em menos tempo, utilizou-se diretamente o integrador ODE45, diretamente nas equações de estado e para tempo maiores utilizou-se o modelo programado no SIMULINK.

Com base nos resultados, descritos acima, aqui apresentados, pode-se concluir:

- O fenômeno de saturação dos modos ocorreu pela presença da ressonância interna, das não linearidades do tipo quadráticas e pela configuração geométrica e física da estrutura, considerada.
- Observou-se o efeito Sommerfeld (como o motor será capturado pela ressonância do sistema, bem como as características da rápida aceleração da sua velocidade angular

após a saturação do segundo modo de vibração) e, o fenômeno de salto (“jump”), peculiar desta classe de problemas, do tipo não-ideal.

- Considerou-se dois modelos diferentes que aproxima o sistema não ideal em questão.

O primeiro deles, puramente mecânico, que leva em conta a característica estacionária da fonte de energia de potência limitada onde se considera unicamente a interação entre o sistema oscilatório e a fonte de energia (modelo simplificado).

No segundo modelo eletro-mecânico (modelo completo) leva-se em conta a influência da dinâmica dos elementos mecânicos oscilatórios sobre as propriedades elétricas do motor de corrente contínua (adicionado a equação elétrica do motor no modelo original simplificado).

Os resultados numéricos mostram que os dois modelos apresentam movimentos similares regulares para um certo parâmetro de controle, próximo da segunda ressonância do sistema.

Para outro valor do parâmetro de controle, observou-se uma maior tendência para ter-se movimentos irregulares do sistema completo que do sistema simplificado, em questão.

Observou-se, adicionalmente, o aumento nas variações de oscilação da rotação do motor de corrente contínua, no modelo completo, confirmando-se a influência das respostas da estrutura sobre a dinâmica do motor. Esta propriedade é de importância nesta classe de problemas.

- Utilizou-se o mapa de Poincaré e a magnitude do FFT de cada resposta generalizada para a caracterização do sistema simplificado ter ou não movimentos regulares e irregulares para certos parâmetros de controle.

No capítulo 4, utilizou-se o método da média (“averaging method”) baseado no método de Krylov-Bogoliubov para a obtenção de uma solução analítica aproximada de primeira ordem, relativamente ao pequeno parâmetro do problema. O sistema original de equações foi reduzido para um sistema contendo as equações de amplitudes e fases da estrutura e da frequência rotacional do motor de corrente contínua, conhecida como equações “média”.

Com base nos resultados aqui obtidos, conclui-se o seguinte:

- O bom desempenho deste método que foi utilizado para sistemas do tipo não ideais auxiliou na análise, do ponto de vista analítico, do comportamento dinâmico não linear do sistema tomado como sendo simplificado em questão.
- As soluções obtidas, tomadas em regime permanente, justificaram a presença do fenômeno de saturação no regime estacionário do sistema simplificado, durante passagem pelas ressonâncias do sistema e mostrando estabilidade antes de entrar na descontinuidade das curvas de resposta-frequência.
- As soluções dinâmicas (soluções não estacionárias) justificaram a presença do efeito Sommerfeld com relação ao motor e da interação com as respostas do pórtico plano. Este efeito deve estar sempre presente neste tipo de fenômeno.

No capítulo 5, dois modelos de controle por saturação foram tomados, um para o sistema ideal e outro para o sistema não ideal.

O desempenho deste método de controle por saturação foi verificado por ensaios numéricos usando os modelos em SIMULINK.

Este método baseia-se no fenômeno de saturação devido à ressonância interna (mostrados nos capítulos 3 e 4) e ao efeito dos termos não lineares quadráticos presentes no modelo.

Vários ensaios numéricos foram feitos para diferentes modelos de controle por saturação até se chegar aos dois tipos de modelos, utilizados aqui.

Com base nos resultados apresentados, conclui-se o seguinte:

- Observou-se o bom desempenho do controlador sobre a estrutura com e sem ressonância interna tanto para o sistema ideal e não ideal. .
- O tamanho de redução das respostas de vibração da estrutura foi considerada suficiente na faixa de ressonância dependendo da estrutura que apresentava ressonância interna em seus primeiros modos de vibração.

No capítulo 6, discutiu-se casos particularizados do problema estudado, com o objetivo da visualização da dinâmica e do controle dos movimentos laterais do pórtico, considerados, neste trabalho.

No capítulo 7, estendeu-se a teoria estudada para o caso da excitação não-ideal efetuado no pórtico, por dois motores de corrente contínua de potência limitada, supondo-se a existência de ressonância interna na estrutura aporticada, com o objetivo de completar os resultados, aqui obtidos.

Finalmente, citam-se alguns trabalhos futuros que poderão ser desenvolvidos, usando-se a teoria exposta, nesta tese.

- Pode-se estudar o fenômeno caótico, com maior profundidade, usando , por exemplo, técnicas de Melnikov
- Pode-se efetuar um estudo mais detalhado do fenômeno da auto-sincronização e de controle por saturação, no caso de tomar-se dois motores de corrente contínua de potência limitada, como foi iniciado o estudo no capítulo 7.
- Utilização de não-idealização de problemas com o objetivo de se poder utilizar as técnicas de controle, expostas aqui, por exemplo na supressão de caos.

Referências Bibliográficas

BALACHANDRAN, B., NAYFEH, A. H. Nonlinear motions of beam-mass structure. *Nonlinear Dynamics*, v. 1: p. 39-61, 1991.

BALTHAZAR, J.M., MOOK, D.T., WEBER, H.I., BRASIL, R.M.L.R.F., FENILI, A., BELATO, D., FELIX, J.L.P. Recent results on vibrating problems with limited power supply. In: Awrejcewicz, Brabski, J. Nowakoski (Editors), *Sixth Conference on Dynamical Systems Theory and Applications*, Lodz, Poland, December 10-12, p. 27-50, 2001.

BALTHAZAR, J.M., MOOK, D.T., WEBER, H.I., BRASIL, R.M.L.R.F., FENILI, A., BELATO, D., FELIX, J.L.P. An overview on Non-ideal vibrations with limited power supply. *Mecannica*, aceito para publicação, 2002.

BALTHAZAR, J.M., CHESHANKOV, B.I., RUSCHEV, D.T., BARBANTI, L., WEBER, H. I. Remarks on the passage through resonance of a vibrating system with two degree of freedom, excited by a Non-ideal source. *Journal of sound and vibration*, 295(5), p. 1075-1085, 2001.

BALTHAZAR, J. M., BRASIL, R. M. L. R. F., WEBER, H. I., FENILI, A., BELATO, D., FELIX, J.L.P., GARZERI, F.J. A review of new issues due to Non-ideal sources. In: *Dynamics and Their Controls*, Edited by F E Udwaia, H Gordon Breach, & I Weber, 2001.

- BALTHAZAR, J.M., MOOK, D.T., WEBER, H.I., BRASIL, R.M.L.R.F., DE MATTOS, M.C. FENILI, A., BELATO, D., WIECZIOREK, S., DE OLIVEIRA, V.A., PONTES, B.R., FELIX, J.L.P., DANTAS, M.H., BARBANTI, L. Comments on mathematical modeling of vibrating system with a limited power supply and their applications to engineering sciences. In: *III Italian –Latin-American Conference on Applied and Industrial Mathematics*, Petrópolis, November 3-5, p. 4, 1999.
- BARR, A.D.S., MCWANNELL, D.C. Parametric instability in structures under support motion. *Journal of Sound and Vibration*, 14, No 4, p. 491-509, 1971.
- BRASIL, R.M.L.R.F., MOOK, D.T. Vibrations of a portal frame excited by a nonideal motor. In: *Proceedings of the fifth conference on nonlinear vibrations, stability and dynamics of structures*. Blacksburg, VA, USA, 1994.
- BRASIL, R.M.L.R.F., PALACIOS, J.L., BALTHAZAR, J.M. Some comments on numerical analysis of nonlinear vibrations of a civil structure induced by a Non-ideal energy source. In: *21 St. Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, XXI CILAMCE*, CD-ROM (15 páginas) and In: *Computational Methods in Engineering ' 2000*, Rio de Janeiro, Brasil, Dec., pp. 115, 2000.
- BRASIL, R.M.L.R.F., PALACIOS, J.L., BALTHAZAR, J.M. On nonlinear behavior of a nonideal machine foundation: numerical simulations. In: *III Conference on Nonlinear Dynamics, Chaos, Control and their Applications to Engineering Sciences (ICONNE 2000)*. Vol. 4: Developments in Nonlinear Phenomena. Campos do Jordão, SP, Brasil, pp. 305-332, 2002.
- BRASIL, R.M.L.R.F., PALACIOS, J.L., BALTHAZAR, J.M. Geometric study on nonideal dynamics of a nonlinear portal frame. In: *Resumos das Comunicações XXII Congresso de Matemática Aplicada e Computacional*, p. 119, 1999.

- BRASIL, R.M.L.R.F, GARZERI F.J., BALTHAZAR, J.M. An Experimental study of the nonlinear dynamics of a portal frame foundation for a Non-ideal motor. Proceedings of DETC'01 ASME 2001 Design Engineering Technical Conference and Computers and Information in Engineering Conference, Pittsburgh, Pennsylvania, September 9-12, CD ROM, 2001.
- BRASIL, R.M.L.R.F, GARZERI F.J., BALTHAZAR, J.M. Experimental study of the dynamics of a portal frame foundation for a non ideal machine. Jornadas Sul-Americanas, de Engenharia Structural, 27-31 de Maio de 2002, Universidade de Brasilia, DF, Brasil, 2002, aceito para publicação.
- COMIN, P.R. Ferramentas para identificação experimental de caos em sistemas de engenharia. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica, 1995.
- DE MATTOS M.C., BALTHAZAR J. M., MOOK D.T., WIECZOREK S. An experimental study of vibrations of nonideal systems. In: *Proceedings of DETEC'97. ASME Design Engineering Technical Conferences*. Sacramento, CA, September 1997.
- DIMENTBERG, M.F., MCGOVERN, L., NORTON, R.L., CHAPDELAIN, J., HARRISON, R. Dynamics of an unbalanced shaft interacting with limited power supply. *Nonlinear Dynamics* 13, p. 171-187, 1997.
- GARZERI, F.J. Dinâmica não linear de um pórtico plano sob carregamento não ideal: análise numérica e experimental. Tese de doutorado, EPUSP, 2001.
- GOLNARAGHI, M.F. Vibration suppression of flexible structures using internal resonance. *Mechanics Research Communications*, v. 18, pp. 135-143, 1991.
- KEISLER, H.J. *Elementary calculus – an infinitesimal approach*. 2 edition, Prindle, Weber & Schmidt, Boston, Massachusetts, 1986.

KONONENKO, V. *Vibrating Systems with Limited Power Supply*. Illife Books Ltd, 1969.

MAZZILLI, C.E.N. Dinâmica não-linear e estabilidade: uma formulação para sistemas submetidos a excitação de suporte ou a carregamentos não conservativos. Post-Doctoral Thesis, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1988.

MOOK, D. T., HAQUAND, N. The influence of an internal resonance on non-linear Structural vibrations under combination resonance conditions. *Journal of Sound and Vibration* 10(2), pp. 229-241, 1986.

NAYFEH, A. H. *Nonlinear Interactions: Analytical, Computational, and Experimental Methods*. John Wiley, 2000.

NAYFEH, A. H. AND MOOK, D. T. *Nonlinear Oscillations*. New York: Wiley, 1979.

NAYFEH, A. H. *Introduction to Perturbation Methods*. New York: Wiley, 1981.

NÓBREGA, PETRUS G. B. Auto-sincronização de motores não-ideais apoiados em estruturas elásticas. Dissertação de mestrado, EPUSP, 1994.

PAI P. F., WEN B., NASER, A. S., SCHULZ, M. J. Structural vibration control using PZT patches and non-linear phenomena. *Journal of Sound and Vibration* 215, pp. 273-296, 1998.

PAI P. F., ROMMEL, B., SCHULZ, M. J. Non-linear vibration absorber using higher order internal resonances. *Journal of Sound and Vibration* 234(5), pp. 799-817, 2000.

PALACIOS, J.L., BALTHAZAR, J. M., BRASIL, R.M.L.R.F. On nonideal dynamics of nonlinear portal frame analysis using averaging method. In: *Proceedings of the Dynamic Problems of Mechanics (DINAME)*, J J Spindola, E M O Lopes e FS Bazan, Editores, 05-09 march, ISBN: 85-85769-05-X, p. 143-147, 2001.

PALACIOS, J.L., BALTHAZAR, J. M., BRASIL, R.M.L.R.F. On nonideal vibrations of a portal frame: analysis of the passage through resonance. In: *XVI COBEM*, Uberlândia-MG, CD-ROM, 2001.

PALACIOS, J.L., BALTHAZAR, J. M., BRASIL, R.M.L.R.F. A computational study of vibrations of a nonideal system. In: *XXII CILAMCE*, Campinas-SP, CD-ROM, 2001.

PALACIOS, J.L., BALTHAZAR, J. M., BRASIL, R.M.L.R.F. On Non-ideal and nonlinear portal frame dynamics analysis using Bogoliubov averaging method. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Systems*. Aceito para publicação, 2001.

PALACIOS, J.L., BALTHAZAR, J.M. AND BRASIL, R.M.L.R.F. Some comments on a control technique by using internal resonance and saturation phenomenon: applications to a simple machine foundation. In: *PACAM VII, 7th Pan American Congress of Applied Mechanics*. Temuco, Chile, January 2-4, pp. 141-144, 2002.

PALACIOS, J.L., BALTHAZAR, J.M. & BRASIL, R.M.L.R.F. On a control method applied to a portal frame foundation of an unbalanced rotating machine. In: *CONEM 2002*, João Pessoa, Brasil, Agosto, aceito para publicação, 2002.

PALACIOS, J.L., BALTHAZAR, J.M. AND BRASIL, R.M.L.R.F. Some comments on a control technique by using internal resonance and saturation phenomenon: applications to a simple machine foundation. *Journal of Vibration and Control*. Aceito para publicação, 2002.

PALACIOS, J. L., BALTHAZAR, J.M. & BRASIL, R.M.L.R.F. Some comments on a control technique by using internal resonance and saturation phenomenon. Part II: excitation by a Non-ideal motor. *Journal of Vibration and Control*. Submetido, 2002.

PALACIOS, J.L., BALTHAZAR, J.M. & BRASIL, R.M.L.R.F. A computational study of the nonlinear dynamics and control of a portal frame foundation for an unbalanced rotating machine. In: *Sixth International Conference on Rotor Dynamics*. Sydney, Australia. Aceito para publicação, 2002.

PARKER, T.S., CHUA, L.O. Practical numerical algorithms for chaotic systems. Springer-Verlag, New York, 1989.

QUEINI, S.S., NAYFEH, A. H., GOLNARAGHI, M.F. A Theoretical and experimental implementation of a control method based on saturation. *Nonlinear Dynamics* 13, pp.189-202, 1997.

QUEINI, S.S., NAYFEH, A. H. Analysis and application of a nonlinear vibration absorber. *Journal of Vibration and Control*, 6, pp. 999-1016, 2000.

SIMULINK®: Dynamic System Simulation Software. Natick, MA: The MathWorks.

SOMMERFELD, A. Beitrage zum dynamischen ausbau de festigkeitslehre. *Physikalische Zeitschr*, v. 4, pp. 631-636, 1904.

TUER, K.L., GOLNARAGUI, M.F., WANG, D. Development of a generalized active vibration suppression strategy for a cantilever beam using internal resonance. *Nonlinear Dynamics* 5, pp. 131-151, 1994.

YAMANAKA, H., MURAKAMI, S. Optimum design of operating curves for rotating shaft systems with limited power supply. In: Chung, H (ed.), Current Topics in Structural Mechanics PVP, 179, ASME NY, pp.181-185, 1989.

WARMINSKY, J., BALTHAZAR J.M. Vibrations of the parametrically and self-excited with Non-ideal energy source, , in: Awrejcewicz, Brabski, J. Nowakoski (Editors), *Sixth Conference on dynamical Systems Theory and Applications*, Lodz, Poland, December 10-12, pp. 407- 414, 2001.

WARMINSKY, J., BALTHAZAR, J. M. On vibrations of the parametrically and self-excited system , excited by ideal and Non-ideal energy sources. *International journal of bifurcation and chaos*, submetido, 2002.

XIE, Y. M. An Assessment of the time integration schemes for non-linear dynamic equations.
Journal of Sound and Vibration, 192(1), pp.321-331, 1996.

Apêndice A

Rotinas Computacionais

Neste apêndice apresentam-se as rotinas computacionais que foram utilizadas no transcorrer da tese, desenvolvidas no programa de MATLAB/SIMULINK®.

Rotinas Utilizadas no Capítulo 3:

No capítulo 3, foram utilizadas certas rotinas que resolveram a integração direta do modelo, a transformada rápida de Fourier (FFT), o mapa de Poincaré.

Rotina1:

Trata-se da rotina de programação em MATLAB da integração do sistema de equações de movimento (2.21) em sistema equivalente de primeira ordem nas variáveis de estado.

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%      Funções do lado direito      %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

g1 = -w1q*y(1)+alpha1*y(6)^2*cos(y(5))-mu1*y(2)-alpha5*y(1)*y(3);
g2 = -w2q*y(3)+alpha2*y(6)^2*sin(y(5))-mu2*y(4)-g/L-
      alpha6*y(1)^2;

g3 = (a-b*y(6))/(1+r^2*m0); % caracteristica do Motor

D = 1-alpha2*alpha4*cos(y(5))^2-alpha1*alpha3*sin(y(5))^2;

D1 = g1*(1-alpha2*alpha4*cos(y(5))^2)...
      +g2*alpha1*alpha4*sin(y(5))*cos(y(5))-g3*alpha1*sin(y(5))...
      +alpha1*alpha7*cos(y(5))*sin(y(5));

D2 = g2*(1-alpha1*alpha3*sin(y(5))^2)...
      -g1*alpha2*alpha3*cos(y(5))*sin(y(5))-g3*alpha2*cos(y(5))...
      +alpha2*alpha7*cos(y(5))^2;

D3 = g3-g2*alpha4*cos(y(5))+g1*alpha3*sin(y(5))-alpha7*cos(y(5));

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% O sistema Não-Linear de primeira ordem %
%      dX/dt=F(X)      %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

F(1) = y(2);
F(2) = D1/D;
F(3) = y(4);
F(4) = D2/D;
F(5) = y(6);
F(6) = D3/D;

F = reshape(F,6,1);

```

Rotina 2:

Trata-se de um programa em MATLAB que calcula a magnitude do FFT de umas das respostas da estrutura aporticada.


```

function [mag,ph] = fftplot(Y,T)
%
%
%   compute and/or plot the magnitude in dB and phase in degrees
%   of the FFT data in Y
%
%   T = sampling period, if this parameter is not given it is
%   assumed to be equal to one.
%
%   if called with both output arguments, i.e. / [m,p] =
%   fftplot(Y)
%   the magnitude and phase are returned in m and p respectively
%   and no plot is generated
%
%   if called with one output argument, i.e. / m = fftplot(Y)
%   the magnitude of Y in dB is returned and a plot of the
%   magnitude
%   of Y is generated in the range 0 s w s pi
%
lab = ['DIGITAL FREQUENCY / pi'
      '    FREQUENCY HERTZ    '];
ly = log(Y);
mag = 20 * real(ly) / log(10);
if nargin == 2
    ph = imag(ly);
elseif nargin <= 1
    n = max(size(Y))/2;
    f = (0:n-1)/n;
    if nargin == 2, f = 0.5*f/T; end
    plot(f,mag(1:n)),title('MAGNITUDE'),ylabel('dB'),
    xlabel(lab(nargin,:))
end

```

Rotina 3:

Trata-se de um programa em MATLAB que gráfica o mapa de Poincaré

```

function [XM]=poinca5;
tic;
clc
home;
disp(sprintf('Iteracao: %g',1));
disp(sprintf('Tempo Computacional: %g seg',toc));
N = 5;
load dat060
xout=x; niter=length(xout); xout=xout(1:niter,:);

%Um ponto da velocidade de q2
Dq1=max(xout(40000:length(xout),4));

%Trocando de posição

xout(:,1)=x(:,1); xout(:,2)=x(:,2); xout(:,3)=x(:,4);
xout(:,4)=x(:,3); xout(:,5)=x(:,5);

% Ponto xp no plano desejado

xp(1)=0; xp(2)=0; xp(3)=Dq2; xp(4)=0; xp(5)=0;
xp = reshape(xp,N,1);

% Vetor normal ao plano desejado

xn(1)= 0; xn(2)= 0; xn(3)= 0; xn(4)= 1; xn(5)= 0;
xn = reshape(xn,N,1);

for i=60000:niter-1
    home;
    disp(sprintf('Iteracao: %g',i+1));
    disp(sprintf('Tempo Computacional: %g seg',toc));
    a1 = xn'*(xout(i,:)'-xp); a2 = xn'*(xout(i+1,1:N)'-xp);
    saida = 0;
    if (a1>0)&(a1*a2<0)
        saida = saida + 1;
        xmed = (a2/(a2-a1))*xout(i+1,:)'+...
            +(a1/(a1-a2))*xout(i,:)';
        XM = [XM xmed];
    end
    disp(sprintf('a1: %g ',a1));
    disp(sprintf('a2: %g ',a2));
    [MM,NN] = size(XM);
    disp(sprintf('pontos achados: %g ',NN));
end
XM=XM(:,1:length(XM));

```

Rotina 4:

Trata-se de um diagrama de blocos em SIMULINK para integração do sistema não-ideal completo, ou seja, da equação 2.25.

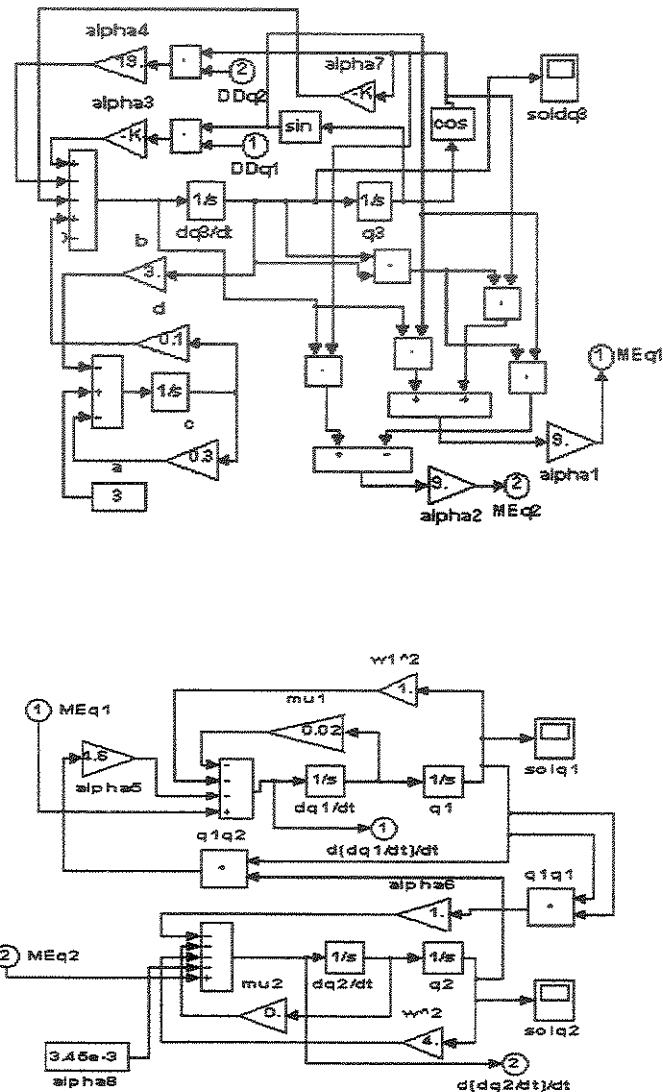


Figura A1. Modelo em SIMULINK da equação 2.25 correspondente ao motor não-ideal e a estrutura aporticada.

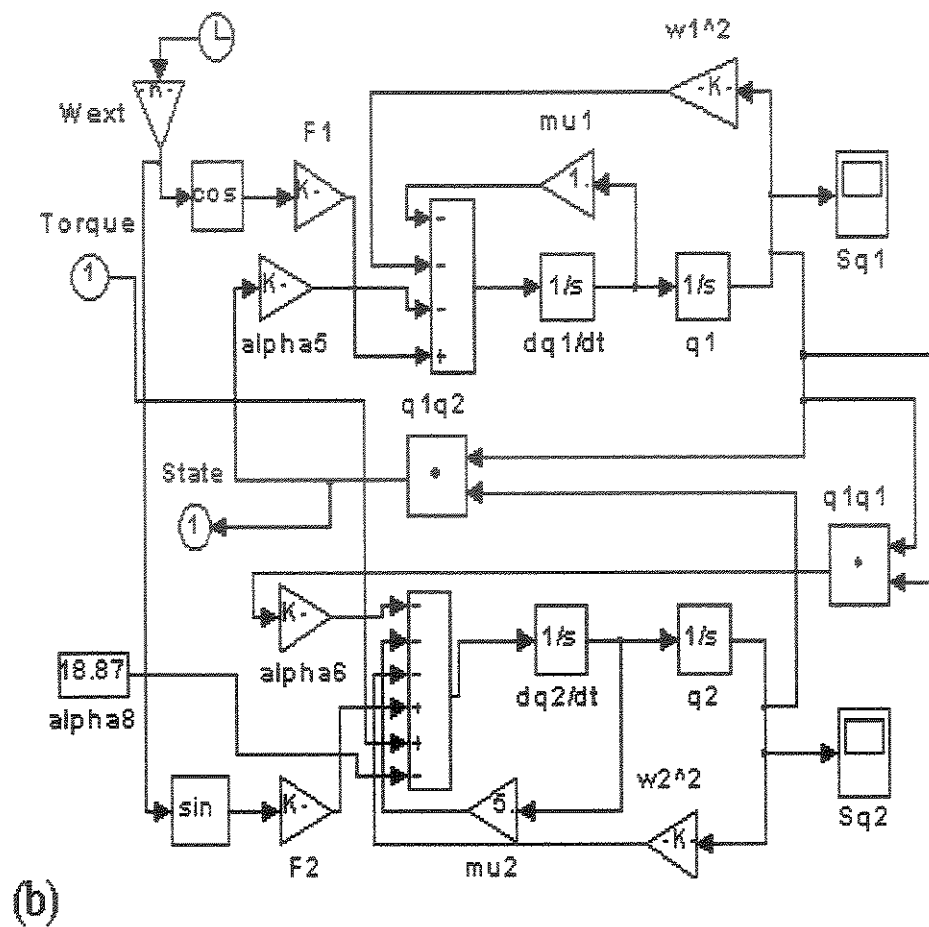


Figura A2. Continuação.

Os blocos denominados de Torque e “State” são os terminais de acoplamento entre o controlador e a estrutura aporticada.

Os ganhos G_{123} e G_{44} do SIMULINK representam os ganhos positivos da equação (5.5) g_{123} e g_{44} .

Rotina 6- Sistema Não-ideal:

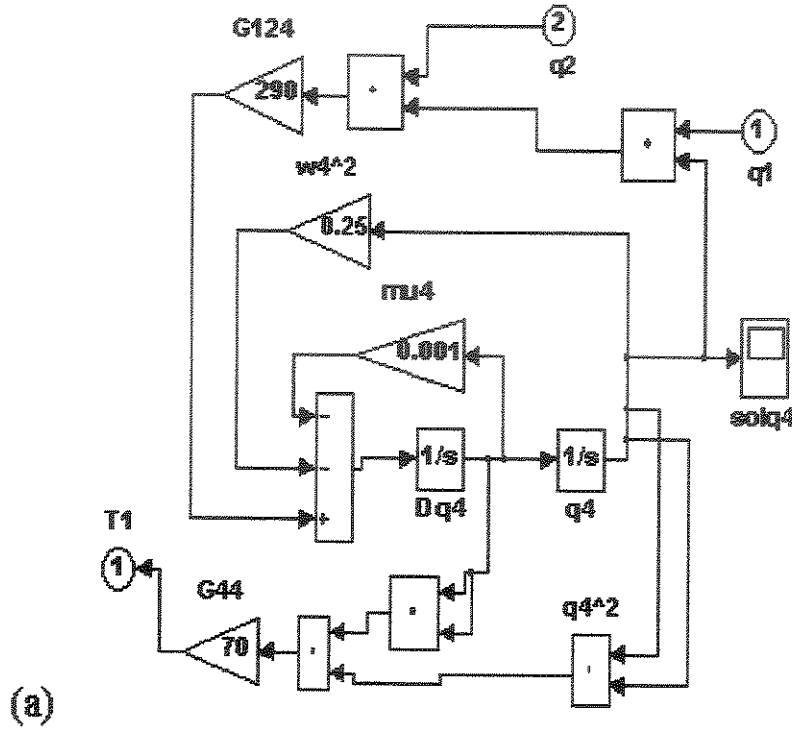


Figura A3. Modelo em SIMULINK para as simulações numéricas do método por controle por saturação da equação (5.6): (a) o controlador, (b) o motor não-ideal e (c) a estrutura aporticada.

Os blocos T1, q_1 e q_2 são os terminais de acoplamento entre o controlador e a estrutura aporticada não-ideal.

Os ganhos G_{124} e G_{44} do SIMULINK representam os ganhos positivos da equação (5.6) g_{124} e g_{44} .

Os blocos $EM1$, $EM2$, DDq_1 e DDq_2 são os terminais de acoplamento entre o motor não-ideal e a estrutura aporticada.

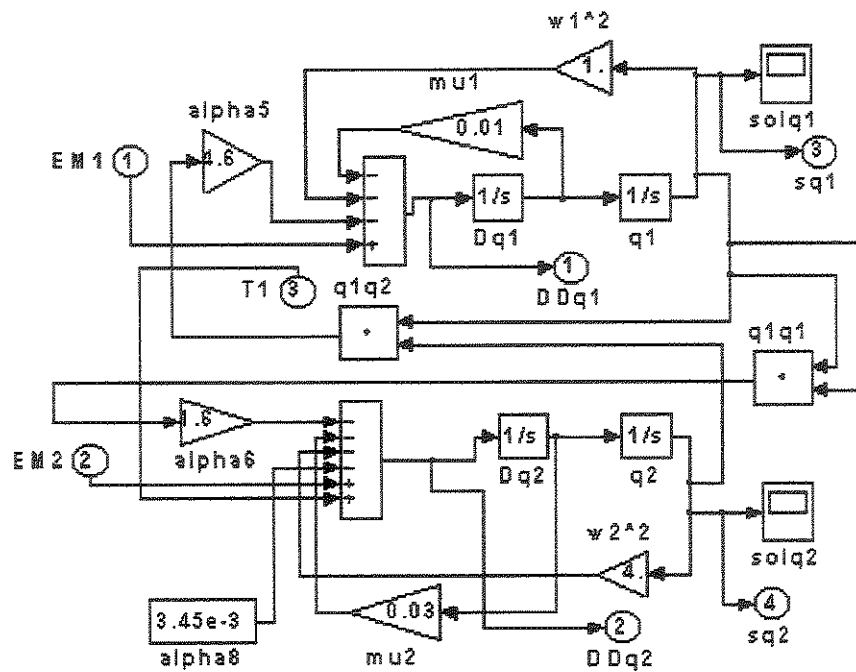
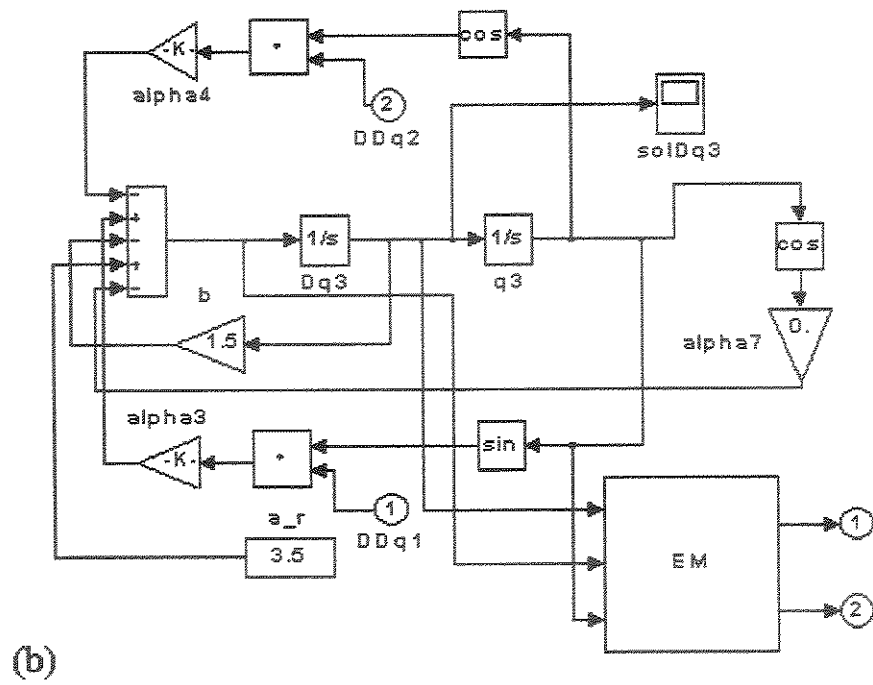


Figura A3. Continuação.

Rotinas Utilizadas no Capítulo 6:

Os modelos das equações 6.5 e 6.7 em SIMULINK são apresentados nas seguintes figuras:

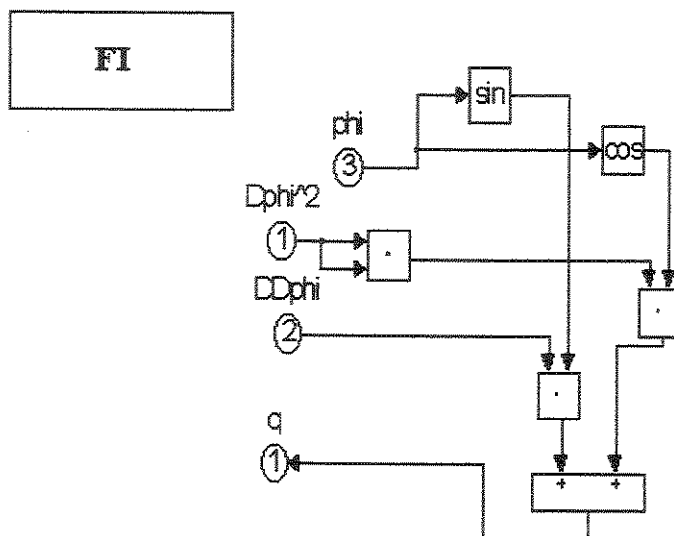
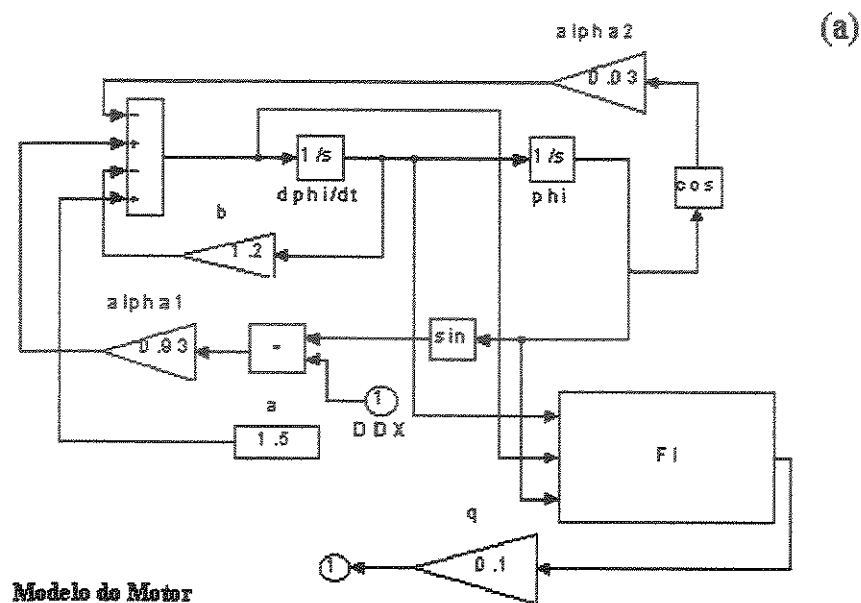


Figura A4. Modelo em SIMULINK do sistema não-ideal do tipo “shear building”.

(a) dinâmica do motor, (b) dinâmica do pórtico e (c) dinâmica do controlador.

Rotinas Utilizadas no Capítulo 7:

Apresentam-se os modelos em SIMULINK dos dois motores de corrente contínua e da estrutura aporticada da equação 7.26 e 7.31.

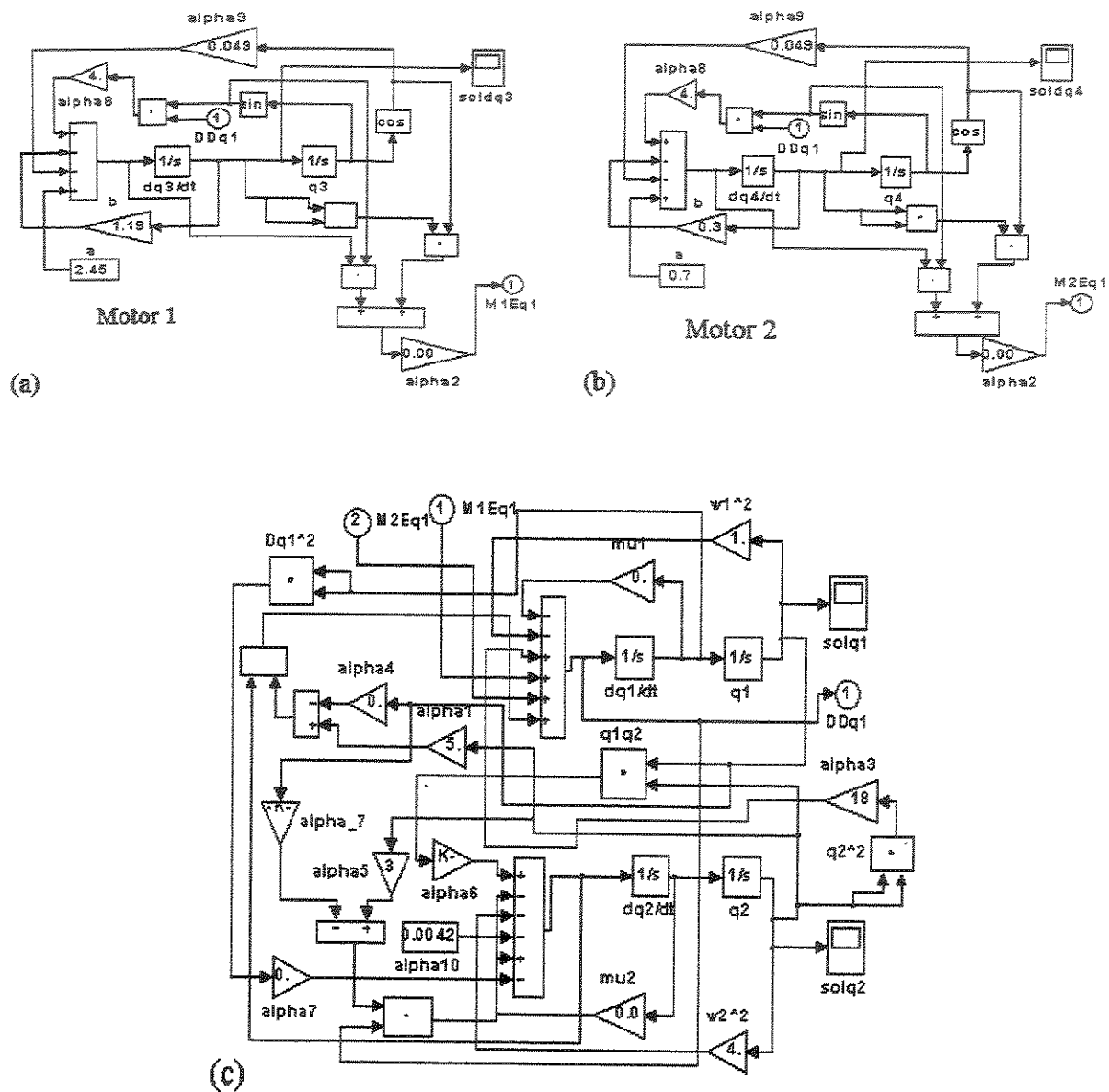


Figura A5. Modelo em SIMULINK para as simulações numéricas do sistema não-ideal (a) primeiro motor, (b) segundo motor e (c) estrutura aporticada.

Apêndice B

Comentários Sobre o Desenvolvimento da Simulação Computacional

Neste apêndice apresentam-se os comentários sobre o desenvolvimento da simulação computacional do problema em questão, por exemplo, da escolha do passo de integração variável, o tempo computacional e o modelo dinâmico.

As simulações são realizadas para diferentes passos fixos de integração usando o método de Runge-Kutta de quarta ordem e são comparadas durante a passagem pela primeira e segunda ressonância para um tempo final de 10 segundos.

Nas figuras B1-B2, observam-se que para os seguintes passos fixos $\Delta t = 0.0001$ e 0.0025 , as respostas da estrutura aporticada e do motor tem as mesmas características dinâmicas enquanto que para os passos fixos $\Delta t = 0.01$ e 0.015 , tem grandes mudanças nas características dinâmicas do pórtico. Então, a diminuição do passo é necessária para indicar com precisão a convergência das soluções, evitando os possíveis estouros da solução devido à proximidade das regiões instáveis de movimento. Isto ocorre pela brusca mudança nas características geométricas das diversas regiões de um retrato de fase, que faz com que as soluções numéricas se afastem da solução exata pela má definição do tamanho do passo de integração.

Por conseguinte adotou-se o integrador numérico ODE45 do aplicativo MATLAB com passo de integração variável para a simulação das equações. Este integrador é conhecido como o algoritmo de Runge-Kutta-Fehlberg 4(5).

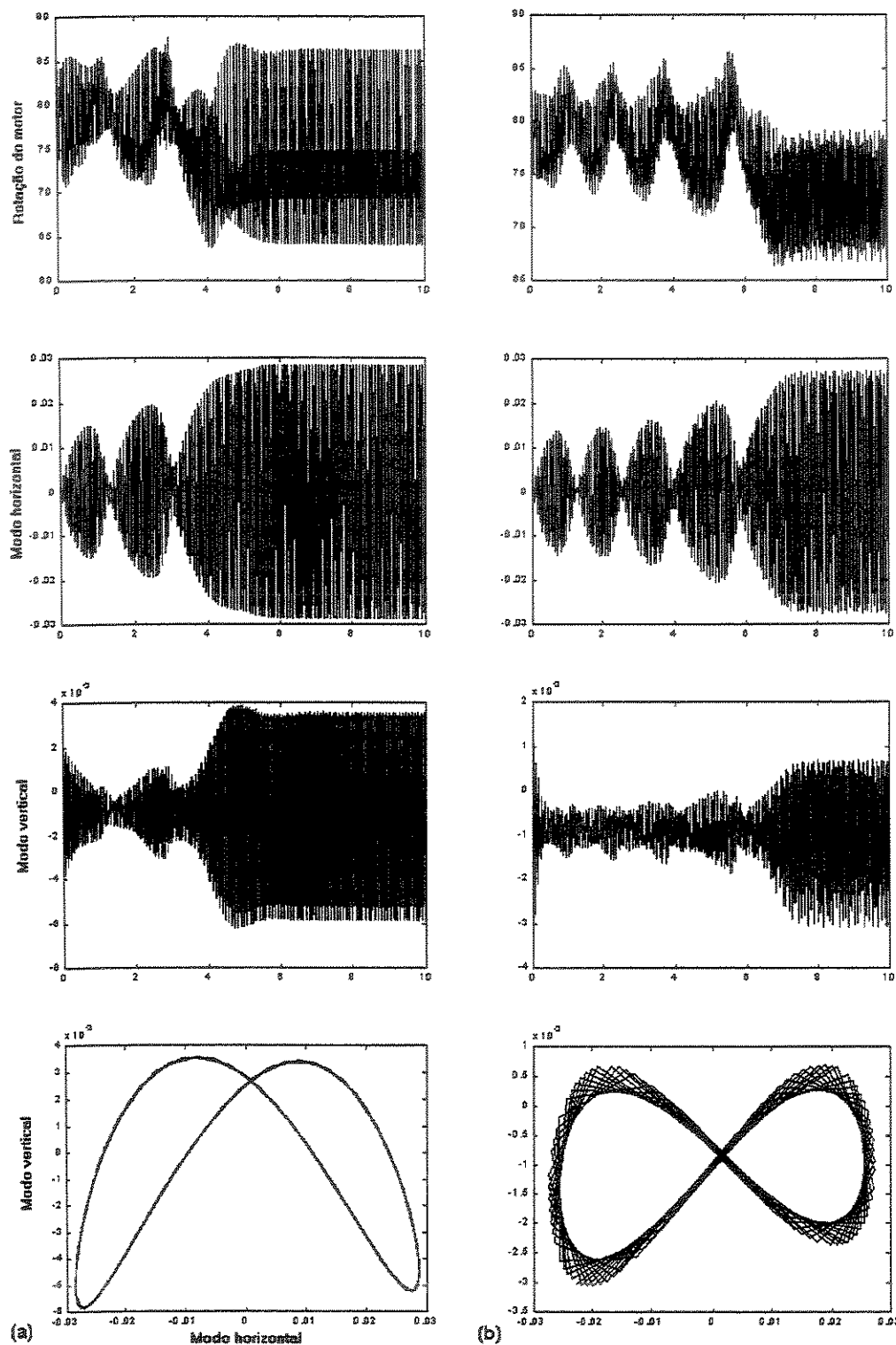


Figura B1. Comportamento dinâmico do sistema não-ideal para o parâmetro de controle $\hat{a}=0.24$ durante a passagem pela 1ra ressonância quando o passo de integração tem os valores (a) $\Delta t = 0.0025$ e (b) $\Delta t = 0.001$, (c) $\Delta t = 0.0001$ e (d) $\Delta t = 0.015$.

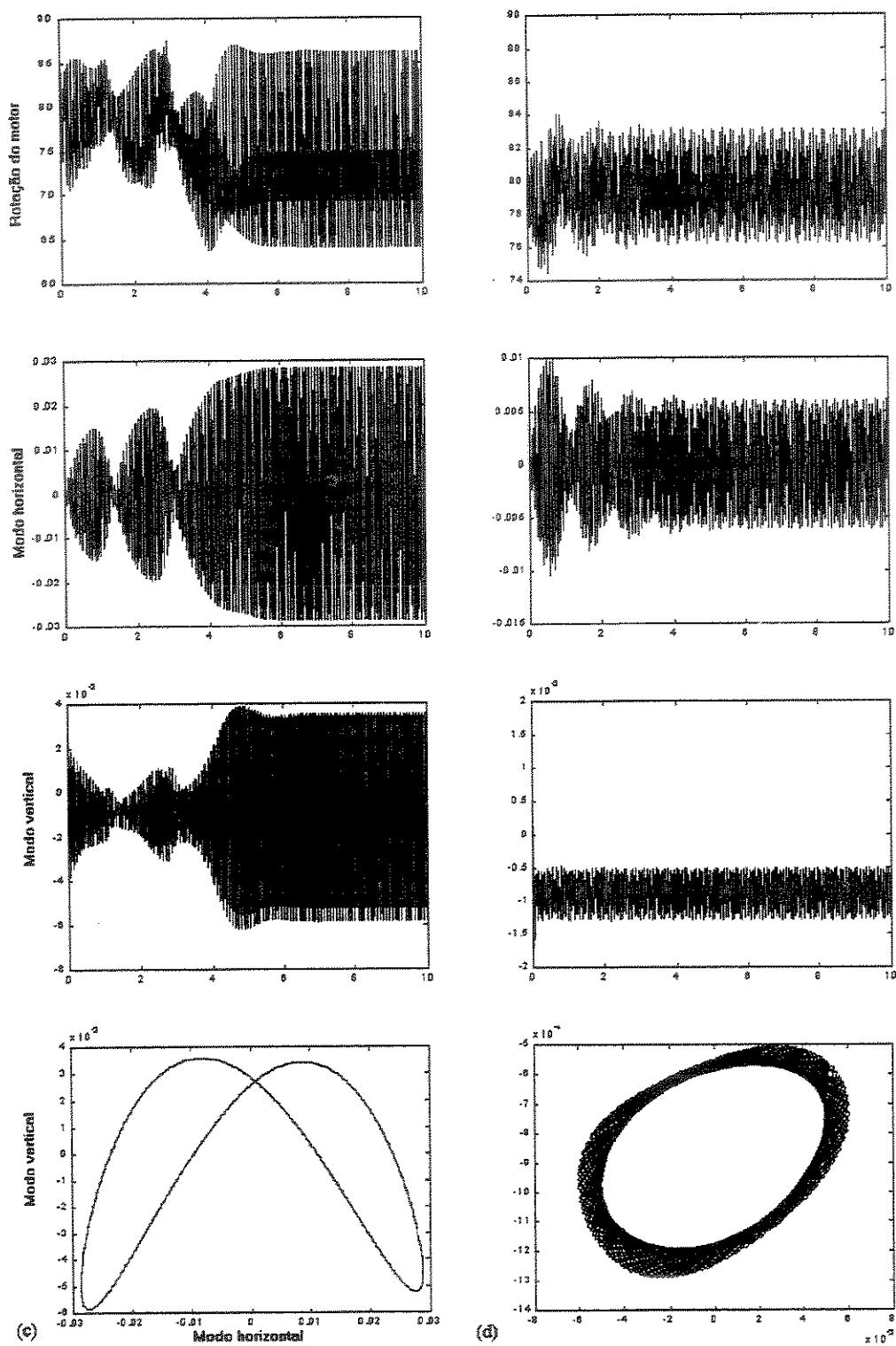


Figura B1. Continuação.

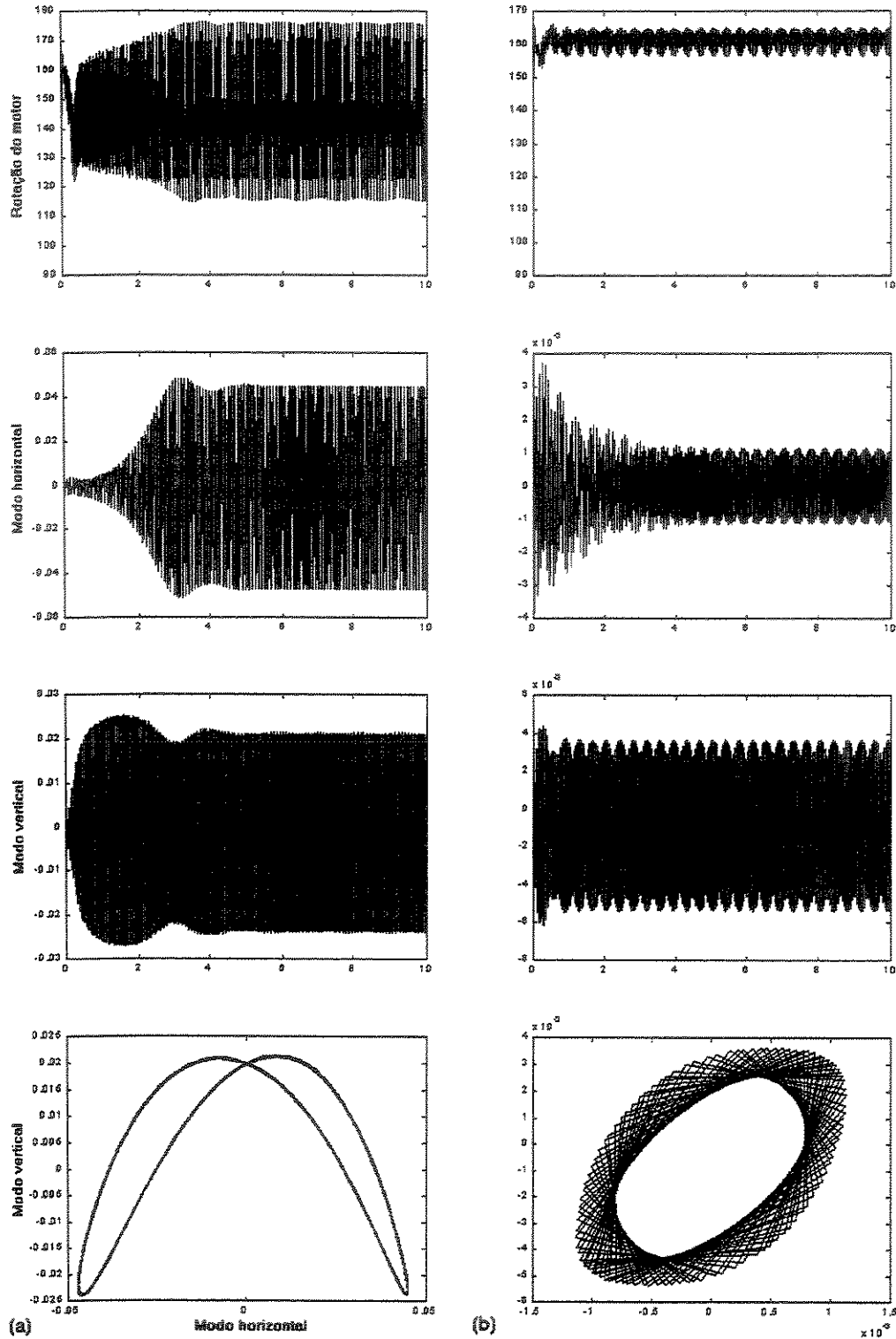


Figura B2. Comportamento dinâmico do sistema não-ideal para o parâmetro de controle $\hat{a}=0.50$ durante a passagem pela 2da ressonância quando o passo de integração tem os valores (a) $\Delta t = 0.0025$ e (b) $\Delta t = 0.01$, (c) $\Delta t = 0.0001$ e (d) $\Delta t = 0.015$.

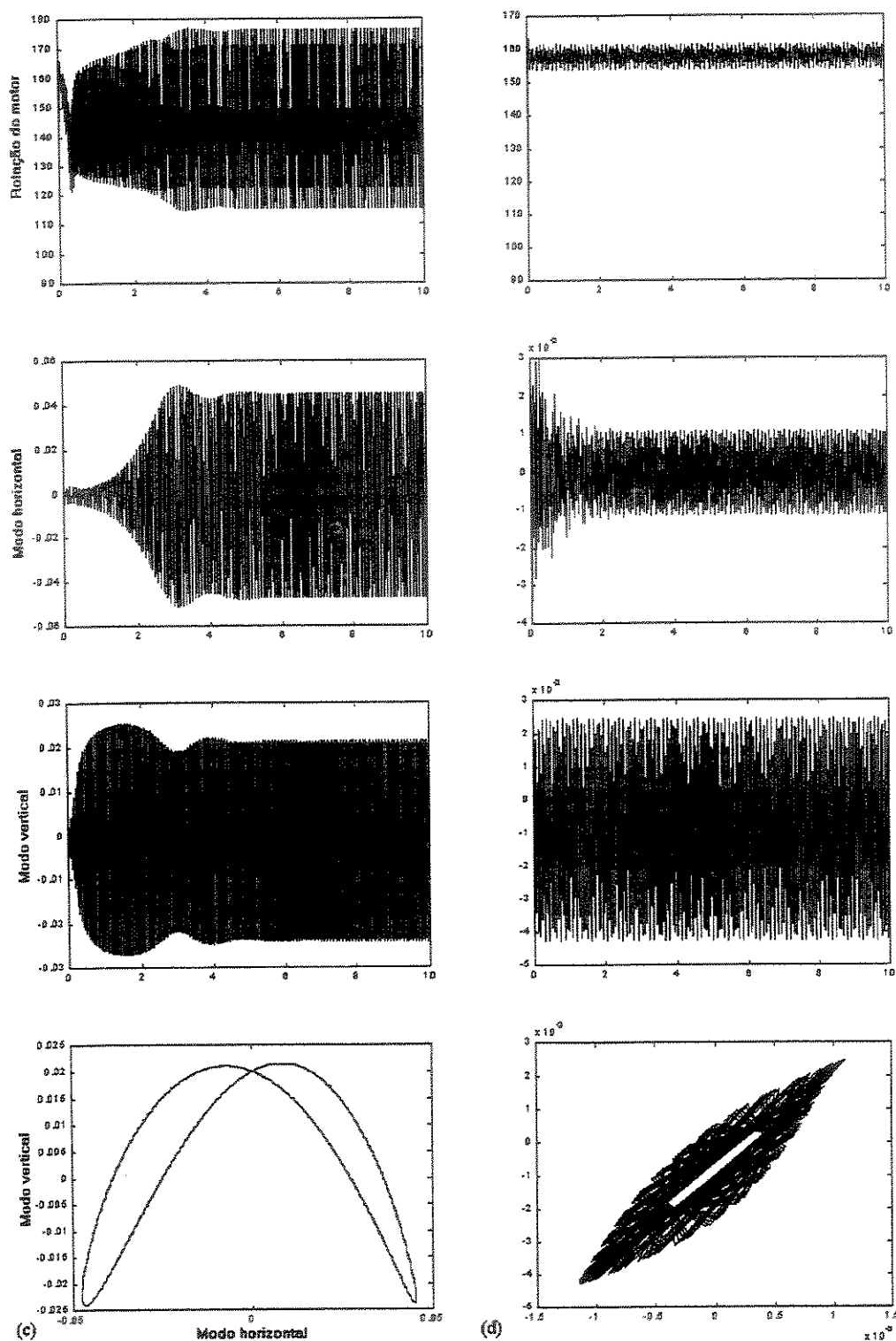


Figura B2. Continuação.

Implementou-se uma técnica para reduzir o custo do tempo computacional, poder manipular os parâmetros de controle existentes no modelo e fazer uma integração direta das equações diferenciais governantes não-ideais e não-lineares de segunda ordem (do sistema pórtico e do motor elétrico de corrente contínua) sem precisar transformá-lo em espaço de variáveis de estado de primeira ordem e mantê-lo em sua forma acoplada. Com este fim, utilizou-se o programa SIMULINK com o objetivo de construir em diagramas de blocos às equações de movimento dos sistemas não-ideais como são mostrados nas figuras do Apêndice A, por exemplo, a figura a seguir mostra o modelo SIMULINK da dinâmica da estrutura aporticada.

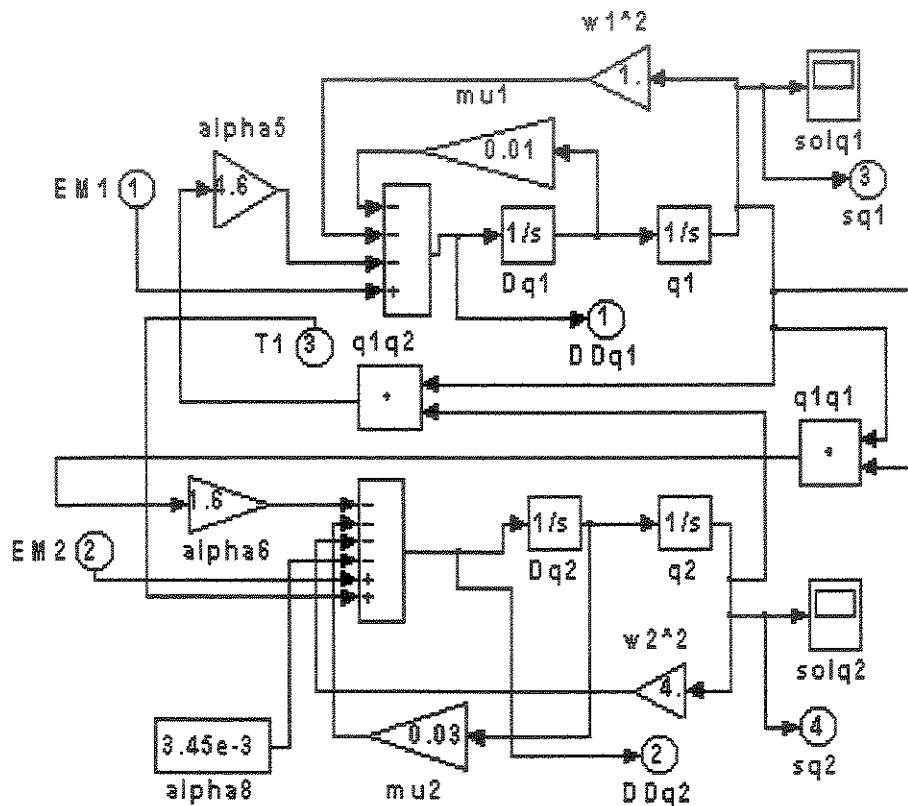


Figura B3. Modelo SIMULINK da dinâmica da estrutura aporticada.

Para a simulação das equações “média” e cartesiana de primeira ordem do capítulo 4, utilizou-se diretamente o método de Runge-Kutta 4(5). Neste caso, foi suficiente utilizar um tempo final de integração menor devido ao fato das soluções alcançarem o regime permanente em um tempo curto. As equações de movimento original (equação 2.21) que foram reduzidas a um sistema de cinco variáveis de amplitudes, ângulos de fase e frequência rotacional (Equações 4.26 e 4.49), permitem minimizar o tempo computacional.

Para obter as soluções da equação 2.21 que alcançam o regime permanente em menos tempo correspondentes a certos parâmetros de controle adotou-se diretamente o método de Runge-Kutta 4(5) de passo variável, para isto a equação 2.21 transforma-se em um sistema equivalente de equações diferenciais de primeira ordem em variáveis de estado (ver rotina 1 do Apêndice A):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \\ \dot{x}_5 = x_6 \\ \dot{x}_6 = \frac{\Delta_3}{\Delta} \end{cases}$$

onde

$$x_1 = q_1, \quad x_2 = \dot{q}_1, \quad x_3 = q_2, \quad x_4 = \dot{q}_2, \quad x_5 = q_3, \quad x_6 = \dot{q}_3,$$

$$\Delta = 1 - \alpha_2 \alpha_4 \cos^2 q_3 - \alpha_1 \alpha_3 \sin^2 q_3,$$

$$\begin{aligned} \Delta_1 = & g_1(1 - \alpha_2 \alpha_4 \cos^2 q_3) - g_2 \alpha_1 \alpha_4 \sin q_3 \cos q_3 \\ & + g_3 \alpha_1 \sin q_3 - \alpha_1 \alpha_7 \cos q_3 \sin q_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 = & g_2(1 - \alpha_2 \alpha_3 \sin^2 q_3) - g_1 \alpha_2 \alpha_3 \sin q_3 \cos q_3 \\ & - g_3 \alpha_2 \cos q_3 + \alpha_2 \alpha_7 \cos^2 q_3, \end{aligned}$$

$$\Delta_3 = g_3 - g_2 \alpha_4 \cos q_3 - \alpha_7 \cos q_3 + g_1 \alpha_3 \sin q_3,$$

$$g_1 = -\omega_1^2 q_1 + \alpha_1 \dot{q}_3^2 \cos q_3 - \mu_1 \dot{q}_1 - \alpha_5 q_1 q_2, \quad g_2 = -\omega_2^2 q_2 + \alpha_2 \dot{q}_3^2 \sin q_3 - \mu_2 \dot{q}_2 - \alpha_8 - \alpha_6 q_1^2,$$

$$g_3 = \frac{M_m(t) - H(t)}{I_m + m_0 r^2}.$$