

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE OFERECIDA POR Leonardo Pereira
Paulino E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 22/12/2004.

Alberto Luiz Serpa
ORIENTADOR

BC
CI/DEF

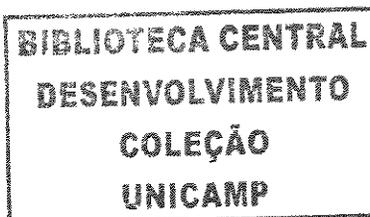
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

Método de Continuação Baseado em
Programação Matemática na
Mecânica Estrutural Não-Linear

Autor: Leonardo Pereira Paulino

Orientador: Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa

20-2004



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

Método de Continuação Baseado em Programação Matemática na Mecânica Estrutural Não-Linear

Autor: Leonardo Pereira Paulino

Orientador: Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa

Curso: Engenharia Mecânica

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Dissertação de mestrado apresentada à comissão de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2004

SP - Brasil

UNIDADE BC
Nº CHAMADA FUNICAMP
P284m
V _____ EX _____
TOMBO BC/ 67810
PROC 16-P.00123-06
C _____ \$ _____
PREÇO 11.00
DATA 05/04/06
Nº CPD _____

BIB ID - 376972

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

P284m Paulino, Leonardo Pereira
Método de continuação baseado em programação
matemática na mecânica estrutural não-linear / Leonardo
Pereira Paulino. --Campinas, SP: [s.n.], 2004.

Orientador: Alberto Luiz Serpa.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Mecânica não-linear. 2. Programação não-linear.
3. Métodos de continuação. 4. Programação
(Matemática). 5. Métodos dos elementos finitos. I.
Serpa, Alberto Luiz. II. Universidade Estadual de
Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III.
Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINÁS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Método de Continuação Baseado em
Programação Matemática na
Mecânica Estrutural Não-Linear

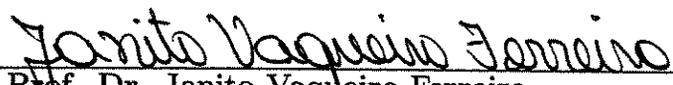
Autor: Leonardo Pereira Paulino

Orientador: Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa

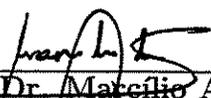
Banca Examinadora:



Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa, Presidente
Faculdade de Engenharia Mecânica - UNICAMP



Prof. Dr. Janito Vaqueiro Ferreira
Faculdade de Engenharia Mecânica - UNICAMP

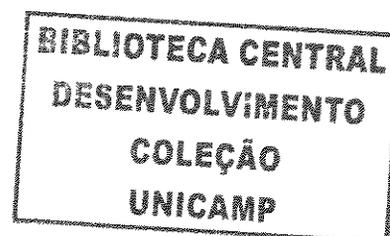


Prof. Dr. Marcelo Alves
Escola Politécnica - USP

Campinas, 22 de dezembro de 2004.

Dedicatória

Dedico este trabalho a todos que acreditaram e me fizeram acreditar em todos os meus sonhos que acabaram por se tornar realidade. Em especial dedico este trabalho a meus pais, pelo apoio incondicional em todas as situações.



”Um pedaço de bolo todo dia não deixa a barriga vazia”, Zé Colméia.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer às pessoas e instituições que colaboraram para o sucesso deste trabalho:

- Ao CNPQ pelo apoio financeiro durante o desenvolvimento deste trabalho.
- A todos professores, funcionários e alunos de Pós-Graduação do Departamento de Mecânica Computacional da Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, pela colaboração e atenção dispensadas.
- Aos amigos mais próximos: Fabiano, Elson, Bianchini, Ilson, Éder e a todos os outros que sempre estiveram dispostos a ajudar em qualquer situação.
- Ao Professor Alberto, pela oportunidade concedida a mim para que eu realizasse o meu mestrado em uma instituição de tanto renome como a UNICAMP, pelo grande apoio durante todo o mestrado e principalmente durante a fase de conclusão de nossos trabalhos.
- E agradeço também a minha namorada, Karen, pela compreensão, pela ajuda e apoio concedidos nos momentos de maiores necessidades e dificuldades.

Resumo

Paulino, Leonardo Pereira, *Método de Continuação Baseado em Programação Matemática na Mecânica Estrutural Não-Linear*. Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2004, 100 p., Dissertação (Mestrado).

Em muitos problemas não lineares na mecânica estrutural é necessário o emprego de métodos de solução que controlam os deslocamentos e o nível de carregamento simultaneamente. Um dos métodos mais conhecidos para estas situações é o método do *arc-length*. Este método consiste na introdução de uma restrição ("esfera generalizada", por exemplo) à equação de equilíbrio não linear do problema. A solução do problema de equilíbrio juntamente com a restrição "esférica" mantém o deslocamento limitado, evitando a divergência durante o processo de resolução. O método clássico do *arc-length* apresenta certa complexidade por envolver duas fases de cálculo, predição e correção da solução, além do fato de que mais de uma solução satisfaz as equações envolvidas, sendo necessário o emprego de alguns critérios ainda não suficientemente robustos para a escolha da solução adequada. Propõe-se neste trabalho o estudo de uma formulação alternativa para o método do *arc-length* através do emprego dos conceitos de programação matemática, onde um problema de minimização com restrições é formulado, minimizando-se uma função objetivo que caracterize o problema de equilíbrio e esteja sujeita a restrições que garantam o controle dos deslocamentos. Além disso, uma restrição adicional é imposta ao problema para buscar a unicidade da solução. A verificação do desempenho da metodologia proposta é feita através da solução de problemas de estruturas reticuladas envolvendo efeitos de grandes deslocamentos. A implementação foi feita em Matlab pela facilidade e disponibilidade de ferramentas computacionais tais como as funções do "toolbox" de otimização.

Palavras chaves: Arc-length, Análise Estrutural Não Linear, Programação Matemática, Métodos de Continuação.

Abstract

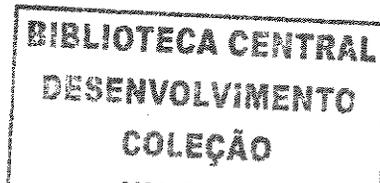
Paulino, Leonardo Pereira, *Continuation Methods Based on Mathematical Programming in Nonlinear Structural Mechanics*. Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2004, 100 p., Dissertação (Mestrado).

Non-linear problems in structural mechanics in general require the use of solution methods that control the displacements and the load level simultaneously. One of the most popular method used in these cases is the *arc-length* method. The *arc-length* method introduces one additional constraint equation to the non-linear equilibrium equations of the problem. The solution of the equilibrium equations with the additional constraints should keep a limited displacement to avoid numerical divergence during the solution procedure. The classical *arc-length* method involves two solution phases, prediction and correction. A difficulty of this method is that it can re-compute a solution already determined, requiring the use of some criteria that are not robust enough to choose the adequate solution. This work proposes an alternative formulation for the *arc-length* method using the concepts of mathematical programming, where a constrained minimization problem is formulated. The objective function is established in terms of the equilibrium residue and the *arc-length* constraint should ensure displacements and load level control. Besides this, an additional constraint equation is employed to guarantee the uniqueness of the solution, improving the solution path compared to the classical *arc-length* method. To verify the proposed methodology computational performance some problems involving the effects of large displacements in truss structures are presented. The implementation was done in the software Matlab due to its facility and the computational tools that are available, such as the optimization toolbox functions.

Key words: *Arc-length*, Non-Linear Structural Analysis, Mathematical Programming, Continuation Methods.

Sumário

1	Introdução	14
1.1	A necessidade e aplicação dos métodos de continuação	15
1.2	Descrição do trabalho	19
2	Não linearidade geométrica em estruturas	21
2.1	Princípio da mínima energia potencial total	21
2.2	Resíduo e matriz de rigidez tangente - não linearidade geométrica	25
2.2.1	Elemento de treliça com grandes deformações	30
2.2.2	Equação de equilíbrio (resíduo) - elemento de treliça	37
2.2.3	Transformação de coordenadas e montagem das matrizes elementares	38
2.3	Método de Newton-Raphson	40
3	O método <i>arc-length</i> sob o ponto de vista de minimização	43
3.1	Energia potencial total	43
3.2	Aspectos da formulação usual do método <i>arc-length</i>	44
3.3	O método <i>arc-length</i> como problema de minimização	51
4	Implementação computacional	57
4.1	Otimização restrita	57
4.2	Programação seqüencial quadrática - <i>SQP</i>	58
4.3	Algoritmo do método proposto	62
4.4	Alguns comentários sobre a implementação neste trabalho	64

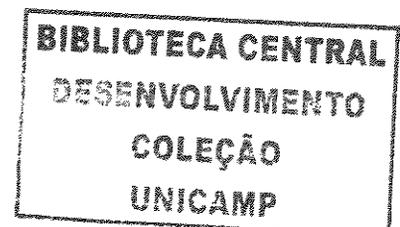


4.5	Algumas limitações do método proposto	65
5	Resultados e discussão	70
5.1	Senóide	71
5.2	Treliça com 2 graus de liberdade	72
5.3	Treliça com 6 graus de liberdade	74
5.4	Treliça de 14 graus de liberdade	79
5.5	Treliça com 3 graus de liberdade	83
5.6	Treliça com 5 graus de liberdade	87
6	Conclusões e sugestões para próximos trabalhos	90
6.1	Conclusões	90
6.2	Sugestões para próximos trabalhos	92
A	Dedução analítica para o exemplo de treliça com 2 graus de liberdade	97

Lista de Figuras

1.1	Ilustração dos fenômenos "snap-through" e "snap-back".	16
2.1	Esquema de um elemento de treliça bi-dimensional.	30
2.2	Esquema de um elemento de treliça bi-dimensional inclinado.	39
3.1	Restrição esférica e suas limitações.	45
3.2	Ilustração de um método tradicional para se evitar o "snap-back" e o "snap-through".	48
3.3	Esquema do <i>arc-length</i> visto como um problema de programação matemática ($h(\cdot) = 0$ é a restrição de igualdade esférica, $g(\cdot) \leq 0$ é uma restrição de desigualdade que busca garantir a unicidade da solução).	52
3.4	Ilustração da determinação do vetor normal no caso inicial e em um caso geral.	55
4.1	Possível falha onde duas soluções são possíveis.	66
4.2	Possível falha identificada no método onde grande parte do caminho pode ser perdido.	67
4.3	Possível falha onde o método não encontraria solução.	68
4.4	Possível falha onde o método não encontraria solução.	68
5.1	Resultados obtidos para a função senóide.	71
5.2	Exemplo de treliça com 3 nós e 2 graus de liberdade.	72
5.3	Solução analítica e solução numérica para o deslocamento na direção y do nó 2 da estrutura mostrada na figura 5.2.	73
5.4	Exemplo de treliça com 5 nós e 6 graus de liberdade.	75
5.5	Deslocamento do nó 5 na direção y para a treliça da figura 5.4.	76

5.6	Deslocamento do nó 2 na direção x para a treliça da figura 5.4.	77
5.7	Deslocamento do nó 2 na direção y para a treliça da figura 5.4.	78
5.8	Exemplo de treliça com 9 nós e 14 graus de liberdade.	80
5.9	Deslocamento do nó 7 na direção x para a treliça da figura 5.8.	81
5.10	Deslocamento do nó 9 na direção y para a treliça da figura 5.8.	82
5.11	Exemplo de treliça com 4 nós e 3 graus de liberdade.	83
5.12	Deslocamento do nó 1 na direção x para a treliça da figura 5.11.	84
5.13	Deslocamento do nó 2 na direção x para a treliça da figura 5.11.	85
5.14	Deslocamento do nó 3 na direção y para a treliça da figura 5.11.	86
5.15	Exemplo de treliça com 6 nós e 5 graus de liberdade.	87
5.16	Deslocamento do nó 1 na direção x para a treliça da figura 5.15	88
5.17	Deslocamento do nó 5 na direção y para a treliça da figura 5.15	89
A.1	Esquema da treliça para solução analítica.	97
A.2	Esquema da formulação simétrica usada para solução analítica da treliça com 2 graus de liberdade.	98
A.3	Equilíbrio entre forças externas e internas.	99



Lista de Tabelas

5.1	Dados de desempenho computacional do método para a função senóide. . . .	72
5.2	Dados de desempenho computacional do método para o problema da figura 5.2.	74
5.3	Dados de desempenho computacional do método para o problema da figura 5.4.	79
5.4	Dados de desempenho computacional do método para o problema da figura 5.8.	83
5.5	Dados de desempenho computacional do método para a treliça da figura 5.11.	86
5.6	Dados de desempenho computacional do método para a treliça da figura 5.15.	89

Capítulo 1

Introdução

Em muitos problemas da mecânica estrutural, o comportamento não linear das estruturas passa a ser relevante e deve ser considerado nas respectivas análises. Isto vem sendo motivado pelo interesse em se projetar estruturas mais leves e para as quais os fatores de segurança usualmente empregados devem ser menores, tornando os produtos mais competitivos. Os primeiros trabalhos que tratam da não linearidade no contexto do método dos elementos finitos datam do início da década de 60 (Crisfield, 1991a), impulsionados principalmente pelo grande desenvolvimento e popularização dos computadores.

Neste sentido, as formulações numéricas e computacionais têm ganhado espaço e se mostrado eficientes na solução de problemas de grande porte, particularmente através do uso do método dos elementos finitos que possui atualmente grande difusão no meio acadêmico e industrial. Particularmente, as análises lineares são utilizadas sem maiores dificuldades pela maioria dos usuários dos programas comerciais de elementos finitos. Por outro lado, as análises não lineares envolvem um conhecimento específico para a seleção dos vários parâmetros requeridos pelos aplicativos, bem como um melhor julgamento crítico pelo usuário em termos da qualidade da resposta obtida. A título de exemplo, pode-se citar o caso de análises estruturais no regime de grandes deslocamentos, grandes deformações e no regime plástico onde parâmetros como número de incrementos de carga e tipo de formulação devem ser adequadamente escolhidos (Crisfield, 1991a). O responsável pela análise deve possuir formação específica nas teorias e nos modelos envolvidos, bem como nos métodos de solução

para que venha a obter resultados satisfatórios e consistentes.

1.1 A necessidade e aplicação dos métodos de continuação

Problemas com não linearidades físicas (de material) ou geométricas freqüentemente se caracterizam pela presença de pontos críticos com os fenômenos de "snap-through" e "snap-back" na resposta da estrutura. Estas instabilidades estruturais ou de material normalmente levam a uma ineficiência dos métodos de solução numérica tradicionais (Geers, 1999).

A maioria dos métodos de solução para problemas estruturais não lineares é baseada no método de Newton-Raphson, que na sua formulação clássica não é capaz de ultrapassar os chamados "pontos limites" (pontos críticos) da curva força por deslocamento. Isso ocorre pelo fato de que a matriz de rigidez tangente torna-se singular nestes pontos (Crisfield, 1991a). O método de Newton-Raphson modificado também é bastante popular e utilizado em muitas situações (Zienkiewicz and Taylor, 1991). A diferença básica em relação ao método de Newton-Raphson é que a matriz de rigidez tangente não é continuamente atualizada, porém, esse método continua incapaz de ultrapassar os "pontos limites" que possam vir a surgir em uma curva de força por deslocamento.

Na figura 1.1 são apresentadas algumas curvas de força por deslocamento típicas de problemas não lineares com pontos limites.

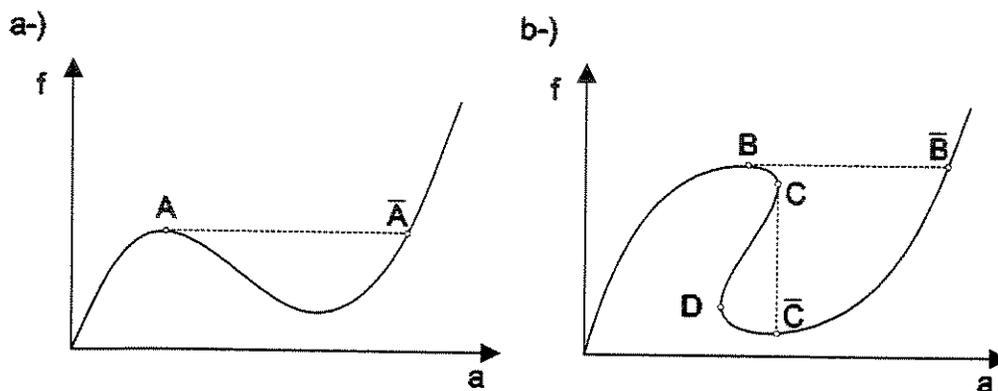


Figura 1.1: Ilustração dos fenômenos "snap-through" e "snap-back".

Observa-se que no primeiro gráfico da figura 1.1 existe a presença de um ponto limite, **A**. Nestes pontos limites existe uma certa dificuldade em dar continuidade no acompanhamento da curva, e a tendência é que se salte para o ponto \bar{A} , fenômeno conhecido por "snap-through", ou que simplesmente haja uma divergência neste ponto da solução. Já no segundo gráfico da figura 1.1, existem três pontos críticos, os pontos **B**, **C** e **D**. No caso do ponto crítico representado por **B**, o fenômeno "snap-through" levaria o método ao ponto \bar{B} . No caso do ponto crítico **C**, o fenômeno conhecido por "snap-back" o levaria ao ponto \bar{C} , e em ambos os casos o processo de solução deixaria de representar a curva completa de força por deslocamento (Crisfield, 1991a). Procedimentos numéricos especiais são necessários para se ultrapassar estes pontos críticos (Geers, 1999).

As análises de respostas não lineares de estruturas são freqüentemente dificultadas pela presença de pontos de instabilidade crítica ou curvas de equilíbrio instáveis. O estudo aprofundado desses problemas tem sido tema de pesquisas nas últimas décadas, o que acabou levando ao surgimento de uma grande variedade de procedimentos de solução. Uma das maiores dificuldades envolvida nesses estudos é a passagem pelos pontos críticos nas curvas não lineares (Geers, 1999).

Muitos métodos têm sido propostos para contornar o problema dos pontos críticos que é inerente à análise não linear de estruturas. Um dos métodos mais diretos é o método da supressão das iterações de equilíbrio próximo dos pontos limites. Este método foi apresentado com sucesso por Bergan, (Bergan, 1979), que utilizava o parâmetro de rigidez atualizado para detectar a necessidade da supressão das equações de equilíbrio. Um outro método também conhecido é o método da "mola-artificial", inicialmente proposto por Wright and Gaylord, (Wright and Gaylord, 1968). Este método faz com que a matriz de rigidez tangente volte a ser positivo definida, pela adição de uma mola linear artificial. Este método só se mostrou eficiente para problemas que manifestam o fenômeno de "snap-through" (Geers, 1999).

Um método que acabou por se tornar bastante popular é o método do controle direto dos deslocamentos. Este método foi primeiramente apresentado por Argyris, (Argyris, 1965), e consiste basicamente em se determinar um parâmetro de controle como sendo um componente unitário do deslocamento e para cada deslocamento pré-determinado um nível de carga correspondente é calculado (Batoz and Dhatt, 1979). Outra proposta neste sentido foi feita por Haisler, (Haisler et al., 1977), que propôs um método de "auto-correção" que se utilizava de incrementos no deslocamento para traçar a curva de resposta não linear de uma estrutura. Contudo estes métodos baseados em incrementos no deslocamento são limitados e tendem a falhar na presença de "snap-backs" (Geers, 1999).

Para contornar este tipo de dificuldade, surgiram métodos que controlam simultaneamente o nível de carregamento e os deslocamentos. Basicamente estes métodos introduzem uma condição de contorno à equação governante de equilíbrio (não linear) do problema, procurando evitar a divergência da solução (Feng et al., 1995).

Riks, (Riks, 1972), foi um dos primeiros a incorporar uma equação de restrição no procedimento iterativo de solução do método de Newton-Raphson. Estas equações de restrição são geralmente formuladas em termos da norma do vetor dos deslocamentos e de um fator de carga adimensional, λ .

A partir daí, uma importante classe de métodos surgiu e se popularizou como métodos do *arc-length*.

Crisfield, (Crisfield, 1981), foi o primeiro a propor uma restrição quadrática que gerava uma esfera (*arc-length* esférico) ou um cilindro (*arc-length* cilíndrico) em um espaço de $n + 1$ dimensões, onde n é correspondente à dimensão do vetor dos deslocamentos e 1 se refere ao parâmetro de carga λ , que neste caso também é uma variável do problema. Porém, apesar da eficiência em análise de não-linearidades geométricas, a restrição quadrática sempre apresenta duas soluções possíveis das quais uma deve ser escolhida. Um critério para seleção da solução adequada também foi proposto por Crisfield mas o método ainda é deficiente nas vizinhanças de pontos críticos com não linearidades acentuadas. Uma melhoria foi proposta por Hellweg, (Hellweg and Crisfield, 1998), mas a resposta definitiva para o problema de escolha da solução da restrição quadrática ainda não foi dada (Geers, 1999). Qi e Tianqi, (Qi and Tianqi, 1995), também propuseram melhorias para a restrição quadrática no algoritmo do *arc-length* deslocando a superfície da restrição no hiper-espaço de $n + 1$ dimensões com o objetivo de reduzir o número de possíveis soluções. Ainda com o objetivo de solucionar o problema de múltiplas raízes no *arc-length*, alguns autores propuseram uma classe de restrições linearizadas baseadas no princípio da ortogonalidade.

Outra dificuldade com o método do *arc-length* é a inconsistência das dimensões físicas utilizadas na equação da restrição esférica, que se dá principalmente devido a diferença entre as dimensões dos deslocamentos e do nível de carga. Isto foi abordado em vários trabalhos e foi, sem dúvida, um dos principais argumentos para justificar uma nova classe de métodos chamada de: métodos baseados em energia (Geers, 1999). A base desses métodos é acrescentar ao *arc-length* um esquema de incrementos de trabalho externo e controlar estes incrementos de trabalho. Widjaja, (Widjaja, 1998), propôs a supressão da energia residual para traçar a curva de equilíbrio utilizando estes métodos de controle da energia.

A solução dos problemas não lineares geralmente é associada à métodos de solução que requerem que o ponto \mathbf{x}_0 seja conhecido e seja suficientemente próximo da solução \mathbf{x}^* , tal que algum processo iterativo convirja, por exemplo:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \Delta\mathbf{x}. \quad (1.1)$$

onde n denota o número de uma dada iteração e $\Delta\mathbf{x}$ representa um incremento.

Na prática, encontrar um ponto inicial \mathbf{x}_0 aceitável, nesse domínio de "atração", especialmente em problemas de maiores dimensões, pode ser impossível. Também, mesmo que se tenha esse ponto inicial, mau condicionamento, pontos de sela, etc, podem fazer o processo iterativo inviável computacionalmente (Richter and DeCarlo, 1983). Em problemas de maiores dimensões, estas dificuldades se tornam mais freqüentes. Outra dificuldade ocorre quando se pretende obter todas as soluções possíveis para este tipo de problema. Freqüentemente acontece que em teoria todos os pontos podem ser obtidos bastando uma seleção adequada do ponto \mathbf{x}_0 . Porém, na prática, a não ser que se tenha muita sorte, apenas algumas das soluções serão encontradas (Richter and DeCarlo, 1983).

1.2 Descrição do trabalho

Neste trabalho propõe-se, formula-se e implementa-se um método de continuação, baseado nos conceitos de otimização e de programação matemática, capaz de traçar curvas de força por deslocamento de estruturas não lineares, ultrapassando os pontos críticos presentes nessas curvas para a maioria dos casos.

No Capítulo 2, apresenta-se uma descrição de problemas com não linearidade geométrica em estruturas, particularmente para o caso de estruturas de treliças.

O Capítulo 3 faz uma introdução à visão do *arc-length* como método de otimização e a necessidade de métodos robustos capazes de acompanhar curvas com grandes não linearidades.

Neste capítulo também é mostrada toda a formulação do método de continuação proposto e a formulação de um problema da mecânica estrutural como um problema de otimização.

O Capítulo 4 apresenta como o problema de otimização formulado neste trabalho foi resolvido. Uma descrição do método de programação seqüencial quadrática é feita, e o algoritmo proposto é descrito. Algumas de suas limitações são também discutidas.

No Capítulo 5 são apresentados exemplos numéricos usados para validação do método e os resultados obtidos em modelos de elementos finitos de treliças com não-linearidade geométrica.

No capítulo 6, as conclusões e proposições para trabalhos futuros são apresentadas.

Finalmente, as referências usadas no trabalho são apresentadas.

Capítulo 2

Não linearidade geométrica em estruturas

2.1 Princípio da mínima energia potencial total

A energia potencial total de um sistema mecânico qualquer pode ser escrita como sendo a soma da energia de deformação, do trabalho das forças de volume, do trabalho das forças de superfície e do trabalho das forças concentradas. A equação que representa a energia potencial total está escrita abaixo (Cook et al., 1989):

$$\Pi = \frac{1}{2} \left(\int_V \boldsymbol{\varepsilon}^t \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV - \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^t \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_i dV + \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^t \boldsymbol{\sigma}_i dV \right) - \int_V \mathbf{u}^t \boldsymbol{\mathcal{S}} dV - \int_A \mathbf{u}^t \phi dA - \mathbf{a}^t \mathbf{f}, \quad (2.1)$$

sendo que os três primeiros termos, integrais no volume, representam a energia de deformação U do sistema. O quarto termo, integral de volume, representa o trabalho de forças de volume $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ ou forças de corpo. O quinto termo, integral de área, representa o trabalho de forças de superfície ϕ e o último termo da equação representa o trabalho das forças concentradas \mathbf{f} . Nesta equação e nas demais deste trabalho o sobre-índice t denota transposição de matrizes ou vetores.

Uma forma sucinta de se representar a equação da energia potencial total de um sistema é dizer que ela é equivalente a soma das energias e dos trabalhos envolvidos no sistema, ou seja:

$$\Pi = U + W. \quad (2.2)$$

A relação entre a tensão σ e a deformação ε pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\sigma = \mathbf{D}(\varepsilon - \varepsilon_i) + \sigma_i, \quad (2.3)$$

sendo que ε_i é a deformação inicial a qual o corpo já estava sujeito, σ_i é a tensão inicial já presente no corpo, e \mathbf{D} é uma matriz que representa o comportamento do material, ou seja, matriz que relaciona diretamente as deformações às tensões (Cook et al., 1989).

Outra relação importante, é a relação entre o campo de deslocamentos e os deslocamentos nodais de um sistema. Esta relação só depende das funções de forma usadas no problema. As funções de forma têm exatamente este papel, descrever o campo de deslocamentos a partir dos deslocamentos nodais da estrutura. Sendo assim, pode-se dizer que:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{a}, \quad (2.4)$$

sendo \mathbf{N} é uma matriz que contém as funções de interpolação, ou funções de forma que relacionam os deslocamentos nodais, \mathbf{a} , ao campo, \mathbf{u} , de deslocamentos da estrutura.

É interessante definir uma relação entre a deformação, ε , e os deslocamentos nodais, \mathbf{a} , da estrutura. Para tal parte-se de que a deformação é a derivada dos deslocamentos, ou seja,

$$\varepsilon = \delta\mathbf{u}, \quad (2.5)$$

sendo que δ representa um operador derivativo.

Substituindo a equação (2.4) na equação (2.5), obtém-se:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \delta(\mathbf{N}\mathbf{a}), \\ \varepsilon &= \delta\mathbf{N}\mathbf{a}, \\ \varepsilon &= \mathbf{B}_0\mathbf{a}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

sendo,

$$\mathbf{B}_0 = \delta \mathbf{N}. \quad (2.7)$$

A matriz \mathbf{B}_0 é a matriz das derivadas das funções de interpolação. Através da relação (2.6) entre deslocamentos nodais e deformações, pode-se reescrever a equação (2.1) da energia potencial total da seguinte maneira:

$$\Pi = \frac{1}{2} \left(\int_V \mathbf{a}^t \mathbf{B}_0^t \mathbf{D} \mathbf{B}_0 \mathbf{a} dV - \int_V \mathbf{a}^t \mathbf{B}_0^t \mathbf{D} \varepsilon_i dV + \int_V \mathbf{a}^t \mathbf{B}_0^t \sigma_i dV \right) - \int_V \mathbf{a}^t \mathbf{N}^t \mathfrak{S} dV - \int_A \mathbf{a}^t \mathbf{N}^t \phi dA - \mathbf{a}^t \mathbf{f}. \quad (2.8)$$

A matriz de rigidez \mathbf{K}_0 e o vetor de carga aplicada no elemento \mathbf{r}_e também podem ser definidos em função da matriz \mathbf{B}_0 (Zienkiewicz and Taylor, 1991; Cook et al., 1989):

$$\mathbf{K}_0 = \int_V \mathbf{B}_0^t \mathbf{D} \mathbf{B}_0 dV; \quad (2.9)$$

$$\mathbf{r}_e = \int_V \mathbf{B}_0^t \mathbf{D} \varepsilon_i dV - \int_V \mathbf{B}_0^t \sigma_i dV - \int_V \mathbf{N}^t \mathfrak{S} dV - \int_A \mathbf{N}^t \phi dA. \quad (2.10)$$

Definindo uma força resultante igual a soma de \mathbf{r}_e e \mathbf{f} , ou seja, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_e + \mathbf{f}$ a equação da energia potencial total agora se resume a:

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{a}^t \mathbf{K}_0 \mathbf{a} - \mathbf{a}^t \mathbf{r}. \quad (2.11)$$

Finalmente, pelo princípio da mínima energia potencial total, que garante um ponto de equilíbrio da estrutura, pode-se dizer que:

$$\frac{d\Pi}{d\mathbf{a}} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{K}_0 \mathbf{a} - \mathbf{r} = \mathbf{0}. \quad (2.12)$$

Note que a equação (2.12) representa a equação usual de equilíbrio de problemas estáticos. No caso de problemas não lineares, é preciso rever a equação de equilíbrio. Neste caso, o diferencial da energia potencial total é dado por:

$$d\Pi = dU + dW = \int_V d\varepsilon^t \sigma dV - \mathbf{r}^t da. \quad (2.13)$$

Substituindo a equação (2.6) em (2.13) tem-se:

$$\begin{aligned} d\Pi &= \int_V da^t \mathbf{B}_0^t \sigma dV - da^t \mathbf{f} \Rightarrow \\ d\Pi &= \left(\int_V \mathbf{B}_0^t \sigma dV - \mathbf{f} \right)^t da \Rightarrow \\ d\Pi &= \psi^t da, \end{aligned} \quad (2.14)$$

onde

$$\psi = \int_V \mathbf{B}_0^t \sigma dV - \mathbf{f}. \quad (2.15)$$

Pelo princípio da estacionariedade de Π :

$$d\Pi = \psi^t da = 0, \quad (2.16)$$

e portanto:

$$\psi = \int_V \mathbf{B}_0^t \sigma dV - \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad (2.17)$$

que é a equação que expressa o equilíbrio entre as forças internas e as forças externas da estrutura. ψ é conhecido como o resíduo da equação de equilíbrio, (Zienkiewicz and Taylor, 1991), e é equivalente ao gradiente da energia potencial total Π .

A partir daí, outra definição de grande importância no estudo de estruturas com respostas não lineares é a matriz de rigidez tangente \mathbf{K}_t , definida como sendo o gradiente do resíduo ψ , ou seja, é a matriz hessiana da energia potencial total:

$$\mathbf{K}_t = \frac{d\psi}{da}. \quad (2.18)$$

2.2 Resíduo e matriz de rigidez tangente - não linearidade geométrica

A equação do equilíbrio representa a diferença entre as forças internas de reação da estrutura e as forças externas aplicadas sobre a mesma e, num ponto em equilíbrio, deve ser igual a zero. Este conceito não é alterado no caso de respostas não lineares da estrutura.

Para o caso de estruturas com não linearidade geométrica, é necessário levar em consideração os efeitos desta na formulação do problema. Para tal é possível generalizar a matriz das derivadas das funções de forma \mathbf{B}_0 para estes casos. É necessário que se introduza agora um termo relacionado aos grandes deslocamentos e grandes deformações. Estes efeitos podem ser representados em uma nova matriz \mathbf{B}_{NL} que será somada a matriz \mathbf{B}_0 do caso linear. Desta forma, define-se:

$$\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_{NL}, \quad (2.19)$$

onde é importante ressaltar que \mathbf{B}_{NL} é função dos deslocamentos \mathbf{a} . Conseqüentemente, o resíduo, equação (2.17), passa a ser:

$$\psi = \int_V \bar{\mathbf{B}}^t \sigma dV - \mathbf{f}. \quad (2.20)$$

A matriz de rigidez tangente \mathbf{K}_t , como foi definida na seção 2.1, é o gradiente do resíduo ψ . Então para escrevê-la explicitamente é feita a diferenciação do resíduo em relação aos

deslocamentos \mathbf{a} , como segue:

$$d\psi = \int_V d\bar{\mathbf{B}}^t \sigma dV + \int_V \bar{\mathbf{B}}^t d\sigma dV = \mathbf{K}_t da. \quad (2.21)$$

Pode-se dizer que:

$$d\sigma = \mathbf{D}d\varepsilon = \mathbf{D}\bar{\mathbf{B}}da = \mathbf{D}(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_{NL})da, \quad (2.22)$$

e

$$d\bar{\mathbf{B}}^t = d\mathbf{B}_{NL}, \quad (2.23)$$

pois \mathbf{B}_0 , que é relacionado à formulação linear, não depende dos deslocamentos.

Sendo assim, substituindo as equações (2.22) e (2.23) na equação diferencial do resíduo (2.21), obtém-se:

$$\begin{aligned} d\psi &= \int_V d\mathbf{B}_{NL}^t \sigma dV + \int_V (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_{NL})^t \mathbf{D}(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_{NL}) da dV = \mathbf{K}_t da \Rightarrow \\ d\psi &= \int_V d\mathbf{B}_{NL}^t \sigma dV + \int_V \mathbf{B}_0^t \mathbf{D} \mathbf{B}_0 dV da + \int_V (\mathbf{B}_0^t \mathbf{D} \mathbf{B}_{NL} + \mathbf{B}_{NL}^t \mathbf{D} \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_{NL}^t \mathbf{D} \mathbf{B}_{NL}) dV da. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Na equação (2.24), pode-se identificar três diferentes componentes da matriz de rigidez tangente. De uma forma mais sucinta podemos escrever o diferencial do resíduo como sendo:

$$d\psi = (\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_\sigma + \mathbf{K}_L) da = \mathbf{K}_t da, \quad (2.25)$$

onde a matriz \mathbf{K}_0 é a matriz de rigidez da análise linear, (2.9), \mathbf{K}_L é responsável pelos efeitos de grandes deslocamentos na estrutura e é normalmente chamada de "large displacement matrix" (Zienkiewicz and Taylor, 1991), sendo escrita como:

$$\mathbf{K}_L = \int_V (\mathbf{B}_0^t \mathbf{D} \mathbf{B}_{NL} + \mathbf{B}_{NL}^t \mathbf{D} \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_{NL}^t \mathbf{D} \mathbf{B}_{NL}) dV; \quad (2.26)$$

e finalmente, o terceiro termo da matriz de rigidez tangente, a matriz \mathbf{K}_σ , que é denominada de matriz de rigidez geométrica, que satisfaz a seguinte relação:

$$\mathbf{K}_\sigma da = \int_V d\mathbf{B}_{NL}^t \sigma dV. \quad (2.27)$$

As deformações, incluindo os efeitos não lineares, passam a ser escritas da seguinte maneira:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_L, \quad (2.28)$$

onde ε_0 é o termo linear correspondente às pequenas deformações e ε_L é o termo não linear correspondente às grandes deformações e definido como:

$$\varepsilon_L = \frac{1}{2} \mathbf{A} \theta, \quad (2.29)$$

e

$$d\varepsilon_L = \frac{1}{2} d\mathbf{A} \theta + \frac{1}{2} \mathbf{A} d\theta = \mathbf{A} d\theta, \quad (2.30)$$

pois $d\mathbf{A} \theta = \mathbf{A} d\theta$ (Zienkiewicz and Taylor, 1991), onde θ é definido como a seguir:

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix}, \quad (2.31)$$

e cada um de seus termos pode ser escrito de acordo com a equação (2.32):

$$\theta_x = \begin{bmatrix} \frac{du}{dx} \\ \frac{dv}{dx} \\ \frac{dw}{dx} \end{bmatrix} = \frac{d\mathbf{u}}{dx}. \quad (2.32)$$

A matriz \mathbf{A} é construída com termos das derivadas dos deslocamentos em posições específicas de forma a recuperar os termos de ε_L , conforme equação (2.29) (Zienkiewicz and

Taylor, 1991). Esta matriz é apresentada de forma explícita para treliças na seção 2.2.1.

A relação entre campo de deslocamentos e deslocamentos nodais, equação (2.4), permite que a equação (2.32), para θ_x , seja reescrita como:

$$\theta_x = \frac{d}{dx}(\mathbf{N}\mathbf{a}) = \frac{d\mathbf{N}}{dx}\mathbf{a}, \quad (2.33)$$

e analogamente pode-se definir os termos θ_y e θ_z :

$$\theta_y = \frac{d\mathbf{N}}{dy}\mathbf{a},$$

$$\theta_z = \frac{d\mathbf{N}}{dz}\mathbf{a}. \quad (2.34)$$

Outra definição conveniente é a da matriz \mathbf{G} que contém as derivadas parciais das funções de forma em relação a cada uma das direções no espaço:

$$\mathbf{G} = \delta\mathbf{N}. \quad (2.35)$$

Assim, utilizando-se das equações (2.31), (2.33), (2.34) e da equação (2.35), pode-se reescrever a equação de θ de uma forma mais sucinta:

$$\theta = \mathbf{G}\mathbf{a}, \quad (2.36)$$

e conseqüentemente,

$$d\theta = \mathbf{G}d\mathbf{a}. \quad (2.37)$$

Reescrevendo-se a equação (2.29) em função da matriz \mathbf{G} , obtém-se:

$$\begin{aligned} d\varepsilon_L &= A d\theta \Rightarrow \\ d\varepsilon_L &= \mathbf{AG} da \Rightarrow \\ d\varepsilon_L &= \mathbf{B}_{NL} da, \end{aligned} \quad (2.38)$$

ou seja:

$$\mathbf{B}_{NL} = \mathbf{AG}. \quad (2.39)$$

Através de (2.39) as matrizes \mathbf{K}_L e \mathbf{K}_σ podem ser calculadas.

Substituindo a equação (2.39) na equação de \mathbf{K}_σ , (2.27), pode-se escrever o seguinte:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_\sigma da &= \int_V d\mathbf{B}_{NL}^t \sigma dV \Rightarrow \\ \mathbf{K}_\sigma da &= \int_V \mathbf{G}^t d\mathbf{A}^t \sigma. \end{aligned} \quad (2.40)$$

O produto $d\mathbf{A}^t \sigma$ pode ser definido em função das tensões de um elemento e em função do vetor $d\theta$, (Zienkiewicz, 1971):

$$d\mathbf{A}^t \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x \mathbf{I} & \tau_{xz} \mathbf{I} & \tau_{xz} \mathbf{I} \\ \tau_{yx} \mathbf{I} & \sigma_y \mathbf{I} & \tau_{yz} \mathbf{I} \\ \tau_{zx} \mathbf{I} & \tau_{zy} \mathbf{I} & \sigma_z \mathbf{I} \end{bmatrix} d\theta = \mathbf{S} d\theta, \quad (2.41)$$

com

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \sigma_x \mathbf{I} & \tau_{xz} \mathbf{I} & \tau_{xz} \mathbf{I} \\ \tau_{yx} \mathbf{I} & \sigma_y \mathbf{I} & \tau_{yz} \mathbf{I} \\ \tau_{zx} \mathbf{I} & \tau_{zy} \mathbf{I} & \sigma_z \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

e \mathbf{I} é uma matriz identidade de dimensões compatíveis.

Substituindo a relação da equação (2.37) em (2.41), obtém-se:

$$dA^t \sigma = \mathbf{S}G da, \quad (2.43)$$

e através de (2.40) tem-se:

$$\mathbf{K}_\sigma da = \int_V \mathbf{G}^t \mathbf{S}G da. \quad (2.44)$$

Conseqüentemente:

$$\mathbf{K}_\sigma = \int_V \mathbf{G}^t \mathbf{S}G dV. \quad (2.45)$$

Na próxima seção deste trabalho, os vários termos definidos nesta seção são determinados explicitamente para elementos finitos de treliça.

2.2.1 Elemento de treliça com grandes deformações

Para verificar a formulação proposta neste trabalho são empregadas estruturas de elementos de treliça que levam em conta os efeitos não lineares devido à deformação. Esta formulação será descrita a seguir para treliças bi-dimensionais.

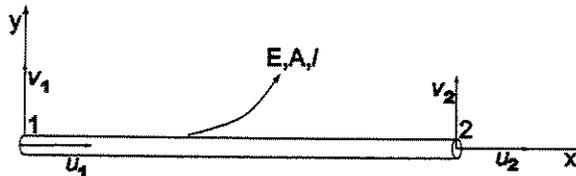


Figura 2.1: Esquema de um elemento de treliça bi-dimensional.

A deformação em um elemento de treliça só acontece na respectiva direção axial. Considera-se que todos os esforços em uma treliça são de tração ou de compressão em sua direção

longitudinal. Então, a deformação de um elemento de treliça, como mostrado na figura 2.1, pode ser definida da seguinte maneira (Chen and Saleeb, 1982):

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right]. \quad (2.46)$$

Pode-se escrever a relação entre campo de deslocamentos (u, v) , e deslocamentos nodais (u_1, v_1, u_2, v_2) , para elemento de treliça como:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}, \quad (2.47)$$

sendo as funções de forma iguais a:

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \frac{x}{l}; \\ N_2 &= \frac{x}{l}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Sabe-se da equação (2.32) que:

$$\theta = \begin{Bmatrix} \frac{du}{dx} \\ \frac{dv}{dx} \end{Bmatrix},$$

e

$$\theta = \mathbf{Ga}, \quad (2.49)$$

e portanto pode-se dizer que:

$$\begin{Bmatrix} \frac{du}{dx} \\ \frac{dv}{dx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} & 0 & \frac{dN_2}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{dN_1}{dx} & 0 & \frac{dN_2}{dx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}, \quad (2.50)$$

ou seja,

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{du}{dx} \\ \frac{dv}{dx} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{l} & 0 & \frac{1}{l} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{l} & 0 & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}. \quad (2.51)$$

Pode-se definir os termos de deformação relativos às parcelas linear e não linear. O termo de deformação linear será:

$$\varepsilon_0 = \left\{ \frac{du}{dx} \right\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}, \quad (2.52)$$

e a partir daí defini-se a matriz \mathbf{B}_0 como sendo:

$$\mathbf{B}_0 = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.53)$$

Portanto:

$$\varepsilon_0 = \mathbf{B}_0 \mathbf{a}. \quad (2.54)$$

A parcela de deformação responsável pela resposta não linear será:

$$\varepsilon_L = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \mathbf{A} \boldsymbol{\theta} = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \frac{du}{dx} \\ \frac{dv}{dx} \end{array} \right\}. \quad (2.55)$$

Nota-se nesse caso, que:

$$\mathbf{A} = \boldsymbol{\theta}^t = \mathbf{a}^t \mathbf{G}^t. \quad (2.56)$$

Substituindo a equação (2.56) na equação (2.29), e usando (2.49), obtém-se:

$$\varepsilon_L = \frac{1}{2} \mathbf{a}^t \mathbf{G}^t \mathbf{G} \mathbf{a}. \quad (2.57)$$

A matriz \mathbf{B}_{NL} representa a derivada de ε_L em relação aos deslocamentos nodais. Assim, pode-se escrever a matriz \mathbf{B}_{NL} da seguinte forma:

$$\mathbf{B}_{NL} = \mathbf{a}^t \mathbf{G}^t \mathbf{G}, \quad (2.58)$$

onde de (2.35) e de (2.48) obtém-se:

$$\mathbf{G} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.59)$$

Calculando \mathbf{B}_{NL} de forma explícita através de (2.58), tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{NL} &= \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 \end{bmatrix} \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \mathbf{B}_{NL} &= \frac{1}{l^2} \begin{bmatrix} u_1 - u_2 & v_1 - v_2 & u_2 - u_1 & v_2 - v_1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Para a maioria das implementações em elementos finitos, torna-se conveniente que se escreva a matriz de rigidez tangente de forma explícita, ou seja, escrevê-la em função dos parâmetros físicos referentes à treliça. Para maior simplicidade no desenvolvimento das equações cada uma das matrizes \mathbf{K}_0 , \mathbf{K}_L e \mathbf{K}_σ será escrita separadamente. Convém lembrar que a matriz de rigidez tangente para um elemento de treliça é igual a soma de todas estas matrizes.

Matriz \mathbf{K}_0

A matriz \mathbf{K}_0 é a matriz de rigidez elástica linear do elemento de treliça, como definido na equação (2.9). Substituindo nesta equação os termos referentes a \mathbf{B}_0 , da equação (2.53), tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_0 &= \int_V \mathbf{B}_0^t \mathbf{D} \mathbf{B}_0 dV = \int_0^l \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} E \frac{1}{l} [-1 \ 0 \ 1 \ 0] A dx \Rightarrow \\ \mathbf{K}_0 &= \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

onde

$$\begin{aligned} \int_V dV &= \int_0^l A dx = Al, \\ D &= E. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Matriz K_L

Para a matriz K_L pode-se escrever:

$$\mathbf{B}_0^t \mathbf{D} \mathbf{B}_{NL} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} E \frac{1}{l^2} [u_1 - u_2 \quad v_1 - v_2 \quad u_2 - u_1 \quad v_2 - v_1] \Rightarrow$$

$$\mathbf{B}_0^t \mathbf{D} \mathbf{B}_{NL} = \frac{E}{l^3} \begin{bmatrix} u_2 - u_1 & v_2 - v_1 & u_1 - u_2 & v_1 - v_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_1 - u_2 & v_1 - v_2 & u_2 - u_1 & v_2 - v_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (2.63)$$

$$\mathbf{B}_{NL}^t \mathbf{D} \mathbf{B}_0 = \frac{E}{l^3} \begin{bmatrix} u_2 - u_1 & 0 & u_1 - u_2 & 0 \\ v_2 - v_1 & 0 & v_1 - v_2 & 0 \\ u_1 - u_2 & 0 & u_2 - u_1 & 0 \\ v_1 - v_2 & 0 & v_2 - v_1 & 0 \end{bmatrix}; \quad (2.64)$$

$$\mathbf{B}_{NL}^t \mathbf{D} \mathbf{B}_L = \frac{E}{l^4} \begin{bmatrix} (u_1 - u_2)^2 & (u_1 - u_2)(v_1 - v_2) & (u_1 - u_2)(u_2 - u_1) & (u_1 - u_2)(v_2 - v_1) \\ (u_1 - u_2)(v_1 - v_2) & (v_1 - v_2)^2 & (v_1 - v_2)(u_2 - u_1) & (v_1 - v_2)(v_2 - v_1) \\ (u_1 - u_2)(u_2 - u_1) & (v_1 - v_2)(u_2 - u_1) & (u_2 - u_1)^2 & (u_1 - u_2)(v_2 - v_1) \\ (u_1 - u_2)(v_2 - v_1) & (v_1 - v_2)(v_2 - v_1) & (u_1 - u_2)(v_2 - v_1) & (v_2 - v_1)^2 \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

Usando a equação (2.26) tem-se de forma explícita:

$$\mathbf{K}_L = \frac{EA}{l^2} \left[\begin{bmatrix} u_2 - u_1 & v_2 - v_1 & u_1 - u_2 & v_1 - v_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_1 - u_2 & v_1 - v_2 & u_2 - u_1 & v_2 - v_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_2 - u_1 & 0 & u_1 - u_2 & 0 \\ v_2 - v_1 & 0 & v_1 - v_2 & 0 \\ u_1 - u_2 & 0 & u_2 - u_1 & 0 \\ v_1 - v_2 & 0 & v_2 - v_1 & 0 \end{bmatrix} \right] +$$

$$\frac{EA}{l^3} \begin{bmatrix} (u_1 - u_2)^2 & (u_1 - u_2)(v_1 - v_2) & (u_1 - u_2)(u_2 - u_1) & (u_1 - u_2)(v_2 - v_1) \\ (u_1 - u_2)(v_1 - v_2) & (v_1 - v_2)^2 & (v_1 - v_2)(u_2 - u_1) & (v_1 - v_2)(v_2 - v_1) \\ (u_1 - u_2)(u_2 - u_1) & (v_1 - v_2)(u_2 - u_1) & (u_2 - u_1)^2 & (u_1 - u_2)(v_2 - v_1) \\ (u_1 - u_2)(v_2 - v_1) & (v_1 - v_2)(v_2 - v_1) & (u_1 - u_2)(v_2 - v_1) & (v_2 - v_1)^2 \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

Matriz \mathbf{K}_σ

Sabe-se da equação (2.45) que:

$$\mathbf{K}_\sigma = \int_V \mathbf{G}^t \mathbf{S} \mathbf{G} dV. \quad (2.67)$$

Para um elemento de treliça, onde existe uma única componente de tensão, pode-se dizer que:

$$\mathbf{S} = \sigma = E\varepsilon = E(\varepsilon_0 + \varepsilon_L). \quad (2.68)$$

Reescrevendo as equações (2.54) e (2.57) para um elemento de treliça, tem-se:

$$\varepsilon_0 = \mathbf{B}_0 \mathbf{a} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{l} (u_2 - u_1), \quad (2.69)$$

e

$$\begin{aligned} \varepsilon_L &= \frac{1}{2} \mathbf{a}^t \mathbf{G}^t \mathbf{G} \mathbf{a} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}^t \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \\ \varepsilon_L &= \frac{1}{2l^2} [(u_2 - u_1)^2 + (v_2 - v_1)^2]. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Reescrevendo-se a equação de \mathbf{K}_σ e substituindo os termos de deformação linear, equação (2.69) e não linear, equação (2.70), encontrados, obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_\sigma &= E(\varepsilon_0 + \varepsilon_L) \mathbf{G}^t \mathbf{G} \int_0^l A dx \Rightarrow \\ \mathbf{K}_\sigma &= \left\{ \frac{EA}{l^2} (u_2 - u_1) + \frac{EA}{2l^3} [(u_2 - u_1)^2 + (v_2 - v_1)^2] \right\} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.71)$$

A definição mostrada na equação (2.71) é a forma completa em que se apresenta a matriz \mathbf{K}_σ , porém, algumas simplificações são usuais (Przemieniecki, 1968). São elas:

$$\begin{aligned} \frac{EA}{2l^3} [(u_2 - u_1)^2 + (v_2 - v_1)^2] &\ll \frac{EA}{l^2} (u_2 - u_1); \\ u_2 - u_1 &\cong \frac{Pl}{AE} \Rightarrow P = \frac{EA}{l} (u_2 - u_1), \end{aligned}$$

onde P é a carga axial sob a qual o elemento de treliça está submetido.

Portanto:

$$\mathbf{k}_\sigma \cong \frac{P}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.72)$$

Além disso, os termos $\mathbf{K}_{\sigma_{11}}$, $\mathbf{K}_{\sigma_{13}}$, $\mathbf{K}_{\sigma_{31}}$, e $\mathbf{K}_{\sigma_{33}}$, se sobrepõem aos termos de \mathbf{K}_0 , e na soma de \mathbf{K}_0 e \mathbf{K}_σ surgem termos do tipo $\frac{AE}{l} + \frac{P}{l}$. Porém, para problemas práticos, em geral, $AE \gg P$. Portanto, uma aproximação usual para \mathbf{K}_σ é:

$$\mathbf{k}_\sigma \cong \frac{P}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.73)$$

2.2.2 Equação de equilíbrio (resíduo) - elemento de treliça

Com os termos de deformação linear e não linear definidos na seção 2.2.1 pode-se definir a função resíduo também de forma explícita para um elemento de treliça.

Partindo da equação (2.20) e escrevendo a deformação total, considerando os termos lineares e não lineares definidos nas equações (2.69) e (2.70) tem-se:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_L = \frac{1}{l}(u_2 - u_1) + \frac{1}{2l^2}[(u_2 - u_1)^2 + (v_2 - v_1)^2]. \quad (2.74)$$

A matriz $\bar{\mathbf{B}}^t$ também pode ser reescrita de forma explícita, somando-se as matrizes \mathbf{B}_0 , equação (2.53), e \mathbf{B}_{NL} , equação (2.60):

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{B}}^t &= \mathbf{B}_0^t + \mathbf{B}_{NL}^t, \\ \bar{\mathbf{B}}^t &= \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{l^2} \begin{bmatrix} u_1 - u_2 \\ v_1 - v_2 \\ u_2 - u_1 \\ v_2 - v_1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Considerando-se a relação (2.68) entre tensão e deformação e substituindo as equações (2.74), (2.75) e (2.68) na equação (2.20), obtém-se:

$$\psi = Al \left(\frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{l^2} \begin{bmatrix} u_1 - u_2 \\ v_1 - v_2 \\ u_2 - u_1 \\ v_2 - v_1 \end{bmatrix} \right) E \left\{ \frac{1}{l}(u_2 - u_1) + \frac{1}{2l^2}[(u_2 - u_1)^2 + (v_2 - v_1)^2] \right\} - \begin{Bmatrix} f_{x_1} \\ f_{x_2} \\ f_{y_1} \\ f_{y_2} \end{Bmatrix}, \quad (2.76)$$

que representa a equação de equilíbrio de um elemento finito de treliça incluindo os termos não lineares da deformação.

2.2.3 Transformação de coordenadas e montagem das matrizes elementares

Todos os procedimentos de cálculo vistos nas seções 2.2.1 e 2.2.2 para o cálculo da matriz de rigidez tangente e para o cálculo do resíduo são válidos para a condição de que o elemento de treliça esteja posicionado com seu eixo longitudinal alinhado com o eixo x do sistema de coordenadas. Como isso não ocorre na maioria dos casos, é preciso conduzir uma transformação

de coordenadas que leve em conta a inclinação do elemento finito (Kwon and Bang, 1997) conforme na figura 2.2.

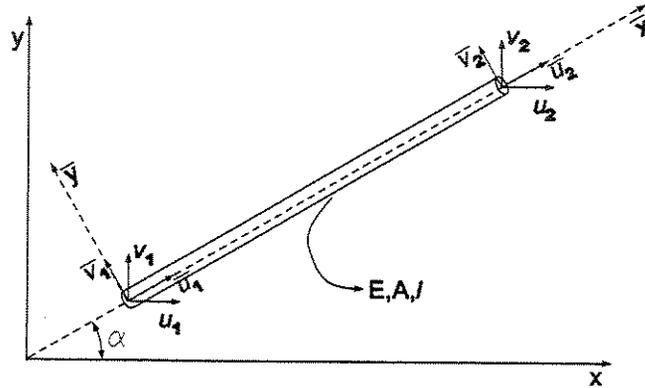


Figura 2.2: Esquema de um elemento de treliça bi-dimensional inclinado.

A matriz de transformação \mathbf{T} é definida em termos de senos e cossenos do ângulo α que o elemento de treliça faz com o eixo horizontal e é escrita da seguinte maneira:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}, \quad (2.77)$$

e os deslocamentos locais são relacionados aos deslocamentos globais por:

$$\mathbf{a}_{local} = \mathbf{T}\mathbf{a}_{global}. \quad (2.78)$$

Da mesma forma, a matriz de rigidez tangente local se relaciona com a matriz de rigidez tangente global por:

$$\mathbf{K}_{tglobal} = \mathbf{T}^t \mathbf{K}_{tlocal} \mathbf{T}. \quad (2.79)$$

Mostrou-se como são calculadas as matrizes de rigidez tangente e o resíduo para apenas um elemento, mas, quando se tem estruturas com mais de um elemento é necessário que se tenha apenas uma matriz de rigidez tangente e um resíduo para a estrutura. Para isso utiliza-se da soma das matrizes e vetores calculados para cada elemento individualmente de forma que se considere a influência de cada elemento nos respectivos graus de liberdade da estrutura (Kwon and Bang, 1997).

Como exemplo, para uma estrutura com dois elementos de treliça, com dois nós cada um e dois graus de liberdade por nó, pode-se representar a montagem da matriz de rigidez seguinte maneira:

$$\mathbf{K}_{t_{ele1}} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{t_{ele2}} = \begin{bmatrix} d & e \\ e & f \end{bmatrix},$$

e depois da operação de "soma" (montagem), tem-se:

$$\mathbf{K}_{t_{estrutura}} = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ b & c+d & e \\ 0 & e & f \end{bmatrix}.$$

2.3 Método de Newton-Raphson

Uma das técnicas mais empregadas na solução de problemas não lineares é o método de Newton-Raphson (Zienkiewicz, 1971) que é brevemente descrito a seguir.

Uma expansão em série de Taylor, considerando até termos de primeira ordem, em torno de um ponto \mathbf{a}_0 para a condição de resíduo nulo é:

$$\psi(\mathbf{a}) = \psi(\mathbf{a}_0) + \frac{\partial \psi(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} \Big|_{\mathbf{a}_0} (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0) = \mathbf{0}. \quad (2.80)$$

Contudo, usando a equação (2.18) tem-se:

$$\psi(\mathbf{a}) = \psi(\mathbf{a}_0) + \mathbf{K}_t(\mathbf{a}_0)(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0) = \mathbf{0}, \quad (2.81)$$

ou ainda

$$\mathbf{K}_t(\mathbf{a}_0)(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0) = -\psi(\mathbf{a}_0). \quad (2.82)$$

Simplificando a notação escreve-se que:

$$\mathbf{K}_{ti} = \mathbf{K}_t(\mathbf{a}_i),$$

$$\Delta \mathbf{a}_i = \mathbf{a}_{i-1} - \mathbf{a}_i,$$

$$\psi_i = \psi(\mathbf{a}_i),$$

que permite reescrever a equação (2.82) na forma

$$\mathbf{K}_{ti} \Delta \mathbf{a}_i = -\psi_i, \quad (2.83)$$

que representa a equação iterativa do método de Newton-Raphson.

Um algoritmo genérico do método de Newton-Raphson é dado a seguir.

1. Calcular a solução linear elástica:

$$\mathbf{K}_{t0} \mathbf{a}_0 = \mathbf{f}.$$

2. $i = 0$ (contador de iterações).

3. Montar a matriz de rigidez tangente para o ponto \mathbf{a}_i :

$$\mathbf{K}_{ti} = \mathbf{K}_t(\mathbf{a}_i).$$

4. Calcular o resíduo no ponto \mathbf{a}_i :

$$\psi_i = \psi(\mathbf{a}_i).$$

5. Resolver o sistema linear de equações:

$$\mathbf{K}_{ti}\Delta\mathbf{a}_i = -\psi_i.$$

6. Calcular o próximo ponto:

$$\mathbf{a}_{i+1} = \mathbf{a}_i + \Delta\mathbf{a}_i.$$

7. Teste de convergência. Se não convergiu faça $i = i + 1$ e volte para 3.

Observa-se que o método de Newton-Raphson requer o cálculo do resíduo e da matriz de rigidez tangente a cada iteração, bem como a solução de um sistema de equações. No sentido de evitar a necessidade de atualizar a matriz de rigidez tangente em todas as iterações, existe o método de Newton-Raphson modificado que não atualiza esta matriz, ou a atualiza somente algumas vezes, com o objetivo principal de ganhar tempo computacional. Contudo, o tempo final dependerá do tipo de problema, pois o número de iterações poderá aumentar significativamente.

Os métodos de Newton-Raphson e Newton-Raphson modificado, embora muito utilizados na solução de problemas não lineares não são capazes de tratar situações onde existem pontos limites.

Algumas alternativas procuram adaptar estas metodologias no sentido de que venham a ser capazes de ultrapassar os pontos limites incluindo mecanismos de controle, como por exemplo nos trabalhos de (Batoz and Dhatt, 1979) e (Powell and Simons, 1981).

Capítulo 3

O método *arc-length* sob o ponto de vista de minimização

Neste capítulo são apresentados os principais aspectos do método do *arc-length* e como este pode ser formulado como um problema do ponto de vista da otimização. O objetivo é seguir a curva de equilíbrio de uma estrutura que apresenta comportamento não linear, assegurando o resíduo nulo.

3.1 Energia potencial total

Uma importante vantagem de se adotar o ponto de vista da energia potencial total é que ele permite a introdução de vários algoritmos de solução desenvolvidos no campo da programação matemática. Rigorosamente, essas técnicas não são aplicáveis diretamente à vários problemas estruturais, tais como os que envolvem plasticidade e têm a solução dependente do caminho. Apesar disso, é possível obter benefícios adotando alguns algoritmos de solução que derivam da aproximação por energia, (Crisfield, 1991a).

O problema de análise não linear pode ser visto como um problema de achar o mínimo da energia potencial total Π , que é uma função dos deslocamentos \mathbf{a} . Expandindo-se esta função em uma série de Taylor, pode-se escrever o seguinte:

$$\Pi(\mathbf{a} + \delta\mathbf{a}) = \Pi_0(\mathbf{a}) + \psi^t(\mathbf{a})\delta\mathbf{a} + \frac{1}{2}\delta\mathbf{a}^t\mathbf{K}_t(\mathbf{a})\delta(\mathbf{a}) + \dots \quad (3.1)$$

O princípio da conservação da energia potencial total requer que, para o equilíbrio em um deslocamento \mathbf{a} ,

$$\psi(\mathbf{a}) = \frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{a}} = 0, \quad (3.2)$$

enquanto que, para que a energia seja mínima e para que o estado de equilíbrio seja estável,

$$\delta\mathbf{a}^t\mathbf{K}_t(\mathbf{a})\delta\mathbf{a} = \delta\mathbf{a}^t\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{a}}\delta\mathbf{a} > 0, \quad (3.3)$$

ou seja, matriz de rigidez tangente (hessiana) positivo definida.

3.2 Aspectos da formulação usual do método *arc-length*

O método do *arc-length* é muito usado na solução de problemas não lineares pelo fato de permitir a determinação da curva de força por deslocamento em situações onde existem pontos limites.

A formulação do método do *arc-length* pode ser considerada, de certa forma, complexa, envolvendo uma fase inicial de predição e uma fase de correção da solução a cada iteração. Além disso, mais de uma solução satisfaz as equações do problema, sendo necessário o emprego de critérios ainda não suficientemente robustos para a escolha da solução adequada (Hellweg and Crisfield, 1998).

O método do *arc-length* consiste em resolver o sistema de equações não linear que caracteriza o problema de equilíbrio com uma restrição adicional para controlar os deslocamentos e o nível de carregamento, possibilitando assim a ultrapassagem dos pontos limites. A restrição imposta é usualmente uma "esfera generalizada" no espaço das variáveis do problema.

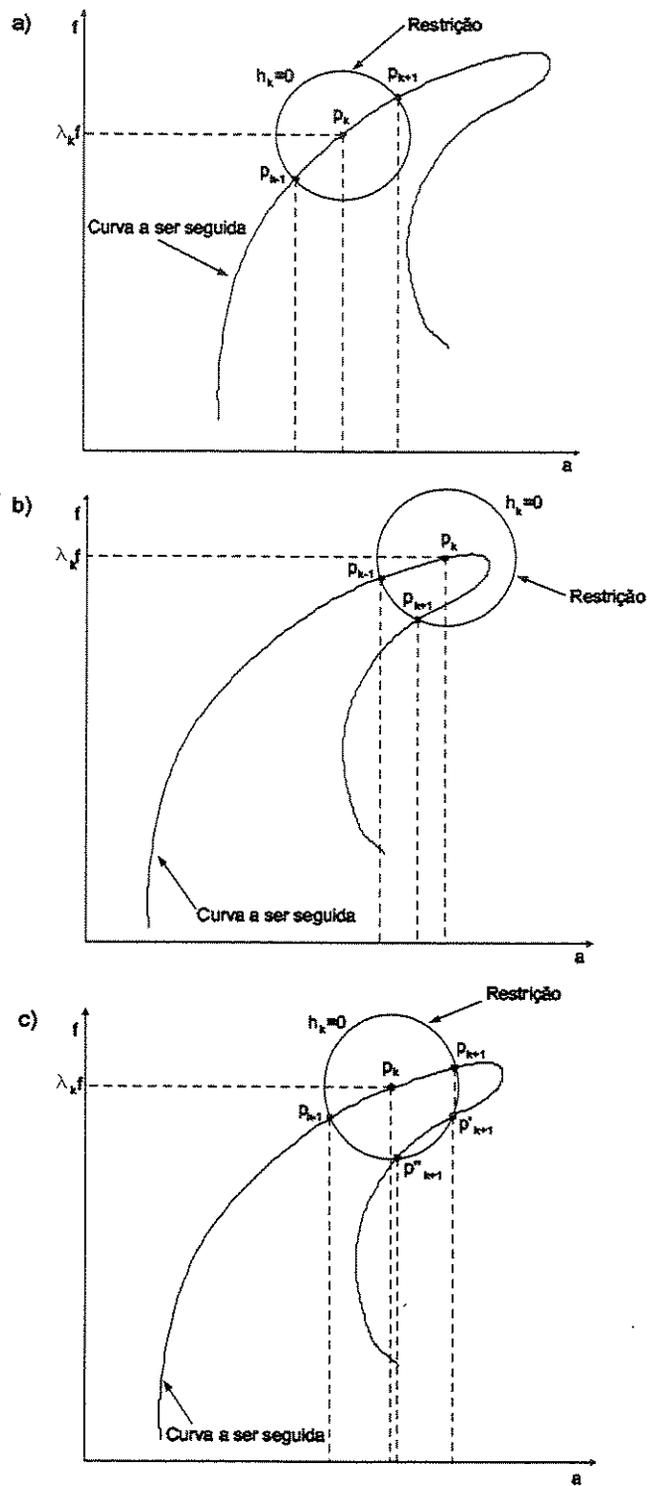


Figura 3.1: Restrição esférica e suas limitações.

A figura 3.1 ilustra o conceito do método *arc-length* e algumas de suas limitações.

A figura 3.1-a mostra a situação mais freqüentemente encontrada quando se utiliza o método do *arc-length*. Neste caso, quando se impõe a restrição esférica duas soluções possíveis satisfazem as equações do problema. Uma delas, p_{k+1} , indica o caminho que deve ser seguido (solução desejada) e a outra, p_{k-1} , leva a um ponto do trecho já computado anteriormente da curva força por deslocamento.

Na figura 3.1-b, onde há uma não linearidade mais acentuada, ocorre uma situação interessante, onde tanto o ponto p_{k+1} quanto o ponto p_{k-1} estão à esquerda de p_k , situação que dificulta a determinação do caminho a ser seguido através de critérios geométricos.

Na figura 3.1-c a dificuldade é ainda maior. Pode-se observar que existem quatro pontos diferentes que satisfazem a restrição esférica.

Nota-se facilmente a dificuldade associada ao problema da escolha do próximo ponto da curva força por deslocamento. Por esses motivos, a questão da escolha da direção a ser tomada pelo método do *arc-length*, a cada iteração, vem sendo objeto de pesquisas, e ainda existem limitações nas metodologias que garantam sempre a escolha da direção correta, podendo ocorrer a divergência da solução pelo fenômeno conhecido por "double-back" (Feng et al., 1995).

De forma bastante geral pode-se escrever a equação de equilíbrio da seguinte forma:

$$\psi(\mathbf{a}, \lambda) = \mathbf{f}_i(\mathbf{a}) - \lambda \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad (3.4)$$

onde \mathbf{f}_i são as forças internas que dependem dos deslocamentos \mathbf{a} , o vetor \mathbf{f} é um vetor de carga externa e o escalar λ é o parâmetro de controle do carregamento. Porém na equação (3.4), perto de um ponto limite, pode não existir a intersecção da equação de equilíbrio e o plano $\lambda = \text{constante}$ que representa o próximo nível de carregamento. A partir daí surgiram os métodos que passam a controlar tanto o carregamento quanto o deslocamento.

A essência do método do *arc-length* é que o parâmetro de carga, λ , se torna uma variável. Portanto, o problema terá $n+1$ variáveis, n dos deslocamentos e uma para λ . Para solucionar este problema, tem-se n equações de equilíbrio e uma equação adicional que é a restrição que representa uma esfera generalizada, ou bola, dada por:

$$h(\mathbf{a}, \lambda) = \Delta \mathbf{a}^t \Delta \mathbf{a} + \Delta \lambda^2 \mathbf{f}^t \mathbf{f} - l^2, \quad (3.5)$$

onde $\Delta \mathbf{a} = \mathbf{a} - \mathbf{a}_0$, $\Delta \lambda = \lambda - \lambda_0$.

Este problema pode ser resolvido para as $n+1$ variáveis, utilizando diretamente o método de Newton-Raphson com as equações de equilíbrio e a equação de restrição (Crisfield, 1991a).

A equação (3.5) define uma superfície de restrição esférica pela introdução do comprimento de arco l , que é mantido fixo durante um incremento. Esta formulação é normalmente chamada de *arc-length* esférico.

Uma outra forma de restrição é obtida quando uma superfície cilíndrica é definida, ou seja, a influência do carregamento é desprezada (Crisfield, 1983). Esta formulação é normalmente chamada de *arc-length* cilíndrico, cuja restrição é:

$$h'(\mathbf{a}, \lambda) = \Delta \mathbf{a}^t \Delta \mathbf{a} - \Delta l^2. \quad (3.6)$$

Um dos critérios usuais para evitar que o ponto anteriormente computado seja também solução do sistema e, por conseqüência, re-computado é selecionar a raiz que formará um menor ângulo com o vetor tangente da função no ponto anterior, ou seja, a nova solução deve ser aquela que forma um menor ângulo com o vetor tangente da função no centro da restrição esférica (Crisfield, 1983). A figura 3.7 ilustra como funciona este critério, ou seja,

$$\angle \Delta \mathbf{p}_{k+1}^t \Delta \mathbf{p}_k \Rightarrow \text{deve ser mínimo.} \quad (3.7)$$

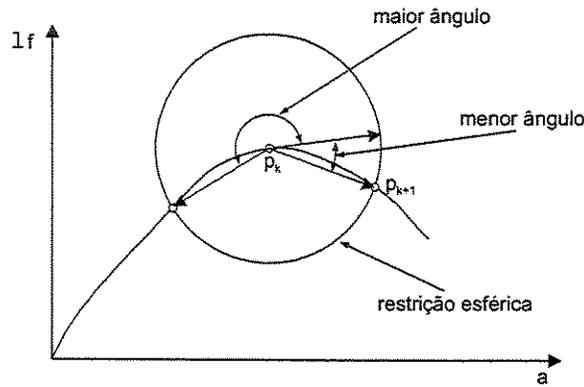


Figura 3.2: Ilustração de um método tradicional para se evitar o "snap-back" e o "snap-through".

Descreve-se a seguir os principais aspectos do equacionamento de uma das formulações usuais do método do *arc-length* (Crisfield, 1991a; Crisfield, 1991b).

A condição de resíduo nulo pode ser escrita de forma linearizada como:

$$\psi = \psi_0 + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{a}} \delta \mathbf{a} + \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \delta \lambda = \psi_0 + \mathbf{K}_t \delta \mathbf{a} - f \delta \lambda = \mathbf{0}. \quad (3.8)$$

A equação da restrição esférica também pode ser linearizada na forma:

$$h = h_0 + \frac{\partial h}{\partial \mathbf{a}} \delta \mathbf{a} + \frac{\partial h}{\partial \lambda} \delta \lambda = h_0 + 2\Delta \mathbf{a} \delta \mathbf{a} + 2\Delta \lambda \mathbf{f} \delta \lambda = 0, \quad (3.9)$$

com

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\delta \mathbf{a}} = 2\Delta \mathbf{a}^t \frac{\partial \Delta \mathbf{a}}{\partial \mathbf{a}} = 2\Delta \mathbf{a}^t, \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\delta \lambda} = 2\Delta \lambda \mathbf{f}^t \frac{\partial \Delta \lambda}{\partial \lambda} = 2\Delta \lambda \mathbf{f}^t. \quad (3.11)$$

As equações (3.8) e (3.9) podem ser escritas como o seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_t & -\mathbf{f} \\ 2\Delta\mathbf{a}^t & 2\Delta\lambda^t\mathbf{f} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta\mathbf{a} \\ \delta\lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\psi_0 \\ -h_0 \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

Este sistema de equações caracteriza o chamado método consistente e tem a desvantagem de não ser simétrico.

A formulação conhecida como não-consistente não lineariza a equação da restrição. Neste caso, da equação (3.8) juntamente com a equação da restrição, escreve-se o sistema de equações:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_t\delta\mathbf{a} - \mathbf{f}\delta\lambda &= -\psi_0, \\ \Delta\mathbf{a}^t\Delta\mathbf{a} + \Delta\lambda^2\mathbf{f}^t\mathbf{f} &= l^2. \end{aligned} \quad (3.13)$$

que pode ser resolvido para obter $(\delta\mathbf{a}, \delta\lambda)$.

A solução deste sistema no método do *arc-length* é usualmente feita da seguinte forma.

A equação (3.8) é reescrita na forma:

$$\delta\mathbf{a} = -\mathbf{K}_t^{-1}\psi_0 - \mathbf{K}_t^{-1}\mathbf{f}\delta\lambda = \delta\bar{\mathbf{a}} + \delta\mathbf{a}_t. \quad (3.14)$$

onde

$$\delta\bar{\mathbf{a}} = -\mathbf{K}_t^{-1}\psi_0 \quad (3.15)$$

$$\delta\mathbf{a}_t = \mathbf{K}_t^{-1}\mathbf{f}, \quad (3.16)$$

e conseqüentemente,

$$\delta\mathbf{a} = \delta\bar{\mathbf{a}} + \delta\lambda\delta\mathbf{a}_t. \quad (3.17)$$

A equação (3.15) pode ser resolvida iterativamente através do método de Newton-Raphson para $\delta\bar{a}$ e caracteriza a fase conhecida como predição ("predictor"). A equação (3.16) caracteriza solução conhecida como solução tangencial.

É possível escrever as seguintes equações incrementais para o deslocamento e para o nível de carregamento:

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_0 + \sum_k \delta\mathbf{a}_k = \mathbf{a}_0 + \Delta\mathbf{a}_k, \quad \Delta\mathbf{a}_k = \sum_k \delta\mathbf{a}_k, \quad (3.18)$$

$$\Delta\mathbf{a}_{k+1} = \Delta\mathbf{a}_k + \delta\mathbf{a}_k, \quad (3.19)$$

$$\lambda_1 = \lambda_0 + \sum_k \delta\lambda_k = \lambda_0 + \Delta\lambda_k, \quad \Delta\lambda_k = \sum_k \delta\lambda_k, \quad (3.20)$$

$$\Delta\lambda_{k+1} = \Delta\lambda_k + \delta\lambda_k. \quad (3.21)$$

A equação da restrição para o ponto $k + 1$ pode ser escrita como:

$$\Delta\mathbf{a}_{k+1}^t \Delta\mathbf{a}_{k+1} + \Delta\lambda_{k+1}^2 \mathbf{f}^t \mathbf{f} = l^2 \quad (3.22)$$

Substituindo as equações (3.19) e (3.21), e omitindo o sub-índice k para simplificar a notação, obtém-se:

$$\begin{aligned} & \delta\lambda^2 (\delta\mathbf{a}_t^t \delta\mathbf{a}_t + \mathbf{f}^t \mathbf{f}) + \delta\lambda (2\Delta\mathbf{a}^t \delta\mathbf{a}_t + 2\delta\bar{\mathbf{a}}^t \delta\mathbf{a}_t + 2\Delta\lambda \mathbf{f}^t \mathbf{f}) + \\ & + (\Delta\mathbf{a}^t \Delta\mathbf{a} + \Delta\mathbf{a}^t \delta\bar{\mathbf{a}} + \Delta\mathbf{a}^t \delta\bar{\mathbf{a}} + \delta\bar{\mathbf{a}}^t \delta\mathbf{a} + \Delta\lambda^2 \mathbf{f}^t \mathbf{f} - l^2) = 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

que representa uma equação de segundo grau em $\delta\lambda$, correspondendo então a $\delta\lambda_k$. Deve ser escolhida a raiz correta para o bom funcionamento do método. Vários critérios têm sido

usados, contudo, ainda com dificuldades de robustez para aqueles casos de curvas mais complexas.

Com a determinação correta de $\delta\lambda_k$ retorna-se à equação (3.17), que caracteriza a fase de correção ("corrector"). Estes processos iterativos são repetidos para a determinação dos vários pontos sobre a curva força por deslocamento.

3.3 O método *arc-length* como problema de minimização

O método do *arc-length* pode ser visto como um problema de otimização, onde se deseja encontrar um ponto de resíduo nulo (ponto de equilíbrio - valores das forças internas iguais aos valores das forças externas aplicadas). Este problema pode ser formulado como um problema de programação não linear onde uma função objetivo associada ao resíduo é minimizada, e sujeita à restrição de que o ponto deve satisfazer uma restrição de controle do deslocamento (por exemplo, estar sobre a região esférica).

A unicidade da solução pode ser buscada através da imposição de restrições adicionais tais como a de que o deslocamento deva pertencer a um semi-espaço, como ilustrado na Figura 3.3.

Este tipo de ponto de vista, onde o problema é formulado como um problema de programação não linear e com uma restrição adicional para escolher a raiz mais adequada, é o principal interesse deste trabalho.

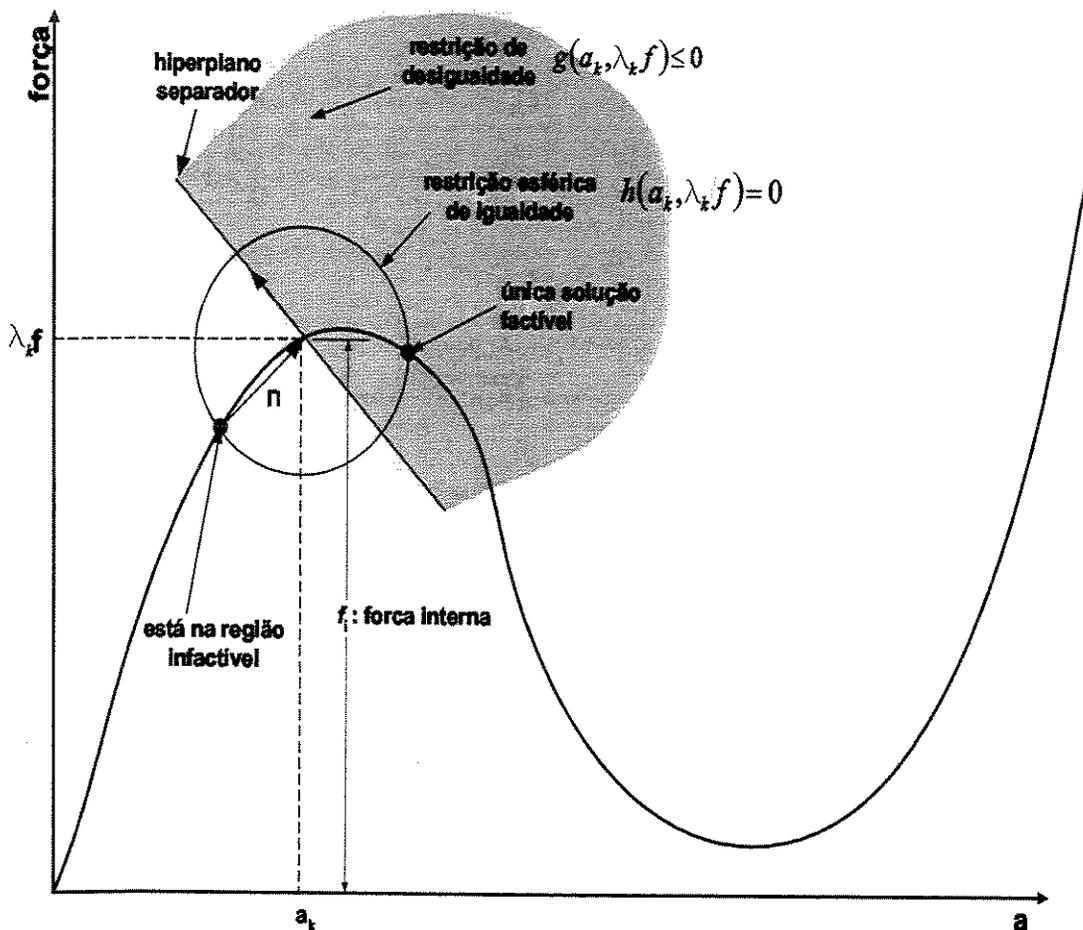


Figura 3.3: Esquema do *arc-length* visto como um problema de programação matemática ($h(\cdot) = 0$ é a restrição de igualdade esférica, $g(\cdot) \leq 0$ é uma restrição de desigualdade que busca garantir a unicidade da solução).

Para resolver este tipo de problema, as ferramentas da programação matemática, especificamente da programação não linear, constituem uma base sólida de análise (Luenberger, 1984; Bazaraa et al., 1993), onde o problema é formulado classicamente como um problema do tipo:

$$\text{Minimizar: } \gamma(\mathbf{a}, \lambda \mathbf{f})$$

$$\begin{aligned} \text{Sujeito a: } g(\mathbf{a}, \lambda \mathbf{f}) &\leq 0 \\ h(\mathbf{a}, \lambda \mathbf{f}) &= 0 \end{aligned}$$

sendo que $\gamma(\mathbf{a}, \lambda \mathbf{f})$ é uma função objetivo que ao ser minimizada conduz à situação de resíduo nulo, por exemplo,

$$\gamma(\mathbf{a}, \lambda \mathbf{f}) = (\mathbf{f}_i(\mathbf{a}) - \lambda \mathbf{f})^t (\mathbf{f}_i(\mathbf{a}) - \lambda \mathbf{f}) \quad (3.24)$$

onde \mathbf{f}_i é a força interna; $h(\mathbf{a}, \lambda \mathbf{f}) = 0$ é uma restrição de igualdade que garante o controle do deslocamento e do nível de carga, por exemplo, uma região esférica; e $g(\mathbf{a}, \lambda \mathbf{f})$ representam restrições adicionais que devem ser impostas ao problema no sentido de buscar a unicidade de solução, por exemplo, criando-se semi-espacos que contenham a solução desejada.

Como já foi dito anteriormente, o método do *arc-length* tradicional, apesar de garantir que os pontos limites de uma curva força por deslocamentos sejam ultrapassados, tem como desvantagem a maior complexidade envolvida em sua implementação, que requer fases de predição e correção e a adoção de critérios para a escolha das raízes. Por esse motivo, este trabalho explora a idéia de uma formulação que usa a restrição esférica generalizada do *arc-length*, mas que seja de implementação mais simples, pelo menos quando se conhece as ferramentas da programação matemática. Um primeiro passo neste sentido é dado quando se passa a olhar o problema como um problema de otimização.

O que se propõe é definir uma nova restrição, adicional, fazendo com que o problema passe a ter apenas uma solução possível. A restrição adicional que se propõe nesse trabalho é uma restrição que define um semi-espaco a partir de um plano definido por um vetor que aponte na direção de interesse da curva força por deslocamento, figura 3.3.

Sabe-se que, em problemas da mecânica estrutural, deve haver o equilíbrio entre as forças externas aplicadas e as forças internas de reação da estrutura. Isto significa que o resíduo da estrutura, como definido no capítulo 2, deve ser igual a zero. Sendo assim, a função objetivo deste problema de otimização será a função resíduo da estrutura ao quadrado, pois, desta forma o mínimo da função objetivo será sempre zero.

Uma restrição esférica generalizada, como dito anteriormente, é uma restrição de igualdade que posiciona o centro de uma esfera generalizada no ponto computado, ou ponto de partida. Com o centro e o raio definidos, tem-se a completa definição desta primeira restrição, que tem o papel de controlar simultaneamente os deslocamentos e o nível de carga.

Do ponto de vista geométrico, a restrição esférica generalizada define o lugar geométrico onde todos os pontos são equidistantes de um ponto central. Então, para este caso, onde um ponto é definido pelos deslocamentos nodais e pelo vetor de carga, tem-se que:

$$\begin{aligned} \left\| \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \lambda \mathbf{f} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \lambda_0 \mathbf{f} \end{Bmatrix} \right\|^2 &= l^2 \Rightarrow \\ \left\| \begin{Bmatrix} \mathbf{a} - \mathbf{a}_0 \\ (\lambda - \lambda_0) \mathbf{f} \end{Bmatrix} \right\|^2 &= l^2 \Rightarrow \\ (\mathbf{a} - \mathbf{a}_0)^t (\mathbf{a} - \mathbf{a}_0) + (\lambda - \lambda_0)^2 \mathbf{f}^t \mathbf{f} &= l^2. \end{aligned} \quad (3.25)$$

que é exatamente a restrição já apresentada.

É possível definir uma restrição de desigualdade do semi-espço que irá diminuir a região factível do problema no sentido de se encontrar uma solução única. Para definir o plano separador que define o semi-espço de interesse, é preciso do vetor normal a ele e de pelo menos mais um ponto pertencente ao plano. O ponto pelo qual passará o plano é o ponto que define o centro da restrição esférica, figura 3.3. Com isso a esfera fica dividida ao meio.

O vetor normal do plano pode ser definido como sendo o vetor diferença entre o centro da restrição esférica e o ponto anteriormente computado. Isso caracteriza uma escolha bastante simples e eficiente computacionalmente pelo fato destes pontos já serem conhecidos. No caso da primeira iteração, quando não há um ponto anteriormente computado, utiliza-se a solução linear do problema para determinar o primeiro ponto $(\mathbf{p}_1, \lambda_1)$ e a partir dele define-se

o primeiro vetor normal. Ou seja, resolve-se o sistema linear

$$\mathbf{K}_0 \mathbf{a}_1 = \lambda_1 \mathbf{f}, \quad (3.26)$$

e com o ponto encontrado e o ponto inicial define-se o vetor normal

$$\mathbf{n} = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \lambda_1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \lambda_0 \end{Bmatrix}, \quad (3.27)$$

com $(\mathbf{a}_0, \lambda_0) = (0, 0)$.

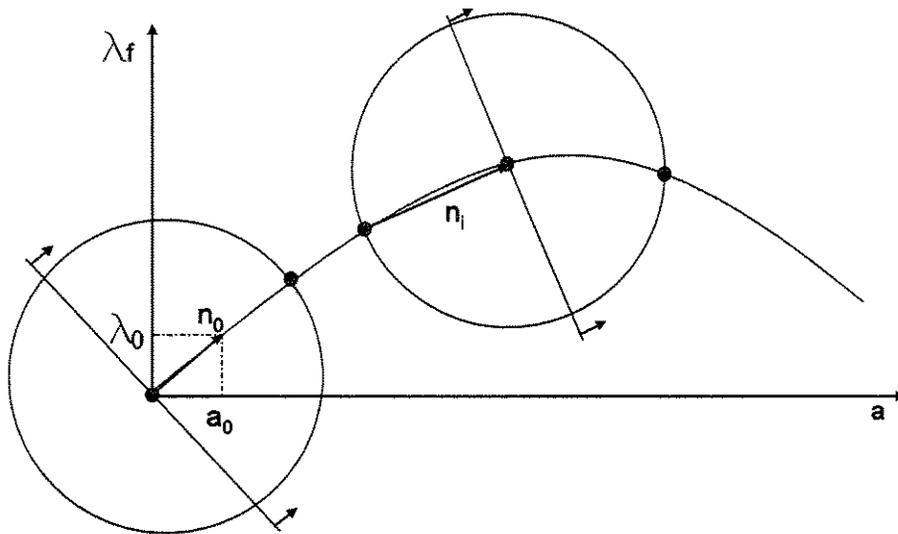


Figura 3.4: Ilustração da determinação do vetor normal no caso inicial e em um caso geral.

A utilização da solução linear para solução desta primeira iteração não compromete a fidelidade do método mesmo no caso de análise de estruturas com resposta não linear. Este procedimento é feito só para determinar a direção que a resposta da estrutura irá tomar no início dos cálculos. O fator de carga utilizado nesta primeira iteração é adotado pequeno, o que diminui bastante a influência de qualquer que seja o fator não linear presente no problema. Nas próximas iterações, o vetor normal é calculado da mesma maneira com a única diferença de não mais necessitar de uma aproximação linear para o problema.

Com o vetor normal determinado, a equação de um plano separador pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\mathbf{n}^t \begin{Bmatrix} \mathbf{a} - \mathbf{a}_0 \\ \lambda - \lambda_0 \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.28)$$

Um semi-espaco que restrinja a região factível do problema assegurando que o ponto desejado seja unicamente determinado pode ser escrito como:

$$\mathbf{n}^t \begin{Bmatrix} \mathbf{a} - \mathbf{a}_0 \\ \lambda - \lambda_0 \end{Bmatrix} \geq 0 \quad (3.29)$$

Desta forma, um problema de otimização da forma:

minimizar:

$$\gamma = \psi^t \psi,$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^t \begin{Bmatrix} \mathbf{a} - \mathbf{a}_0 \\ \lambda - \lambda_0 \end{Bmatrix} &\geq 0 \\ (\mathbf{a} - \mathbf{a}_0)^t (\mathbf{a} - \mathbf{a}_0) + (\lambda - \lambda_0)^2 \mathbf{f}^t \mathbf{f} &= l^2, \end{aligned} \quad (3.30)$$

terá como solução um ponto sobre a curva de resíduo nulo e que esteja no semiplano de interesse e sobre a esfera de interesse. Para a maioria das situações, o ponto obtido como solução deste problema de minimização com restrições é o ponto desejado sobre a curva força por deslocamento.

Esta metodologia proposta foi verificada neste trabalho através de problemas de estruturas reticuladas com resposta não linear devido à não linearidade geométrica.

Capítulo 4

Implementação computacional

Uma breve descrição da formulação de um problema de otimização restrita nos moldes da Programação Seqüencial Quadrática será feita neste capítulo. Em seguida, a implementação utilizada neste trabalho será descrita.

4.1 Otimização restrita

Nos problemas de otimização restrita, o objetivo geral é o de transformar o problema em um sub-problema mais fácil que pode ser resolvido e usado como base de um processo iterativo. Alguns métodos transformam um problema de otimização restrita em um problema básico irrestrito usando funções de penalidade para as restrições. Desta maneira, o problema de otimização restrito é resolvido utilizando-se uma seqüência de problemas de otimização irrestritos, que no limite da seqüência de iterações, tende à solução do problema restrito. Dentre estes métodos estão o método da Penalidade e da Barreira (Luenberger, 1984).

Outra categoria de métodos, considerados mais eficientes, exploram as condições de Kuhn-Tucker (Bazaraa et al., 1993). As equações de Kuhn-Tucker são condições necessárias de optimalidade na solução de um problema de otimização restrito. Se o problema for um problema de programação convexa, onde a função objetivo e as restrições são convexas, então as equações de Kuhn-Tucker são necessárias e suficientes para garantir um ponto de solução global.

A solução das equações de Kuhn-Tucker é a base de vários algoritmos de programação não linear tais como os métodos lagrangianos. Nestes casos, o emprego de métodos do tipo Quase-Newton garantem boa convergência por acumular informações de segunda ordem referentes as equações de Kuhn-Tucker. Uma classe destes métodos é formada pelos Métodos de Programação Seqüencial Quadrática (SQP - "sequential quadratic programming"), que resolvem sub-problemas de programação quadrática a cada iteração (Bazaraa et al., 1993).

Neste trabalho, para resolver o problema de otimização restrito foi utilizado o método de programação quadrática seqüencial já disponível no "toolbox" de otimização do aplicativo Matlab. Este método é brevemente descrito a seguir.

4.2 Programação seqüencial quadrática - *SQP*

Segundo Schittowski (Schittowski, 1985) que implementou e testou uma versão que superou todos os outros métodos testados em termos de eficiência, precisão e porcentagem de sucesso em suas soluções, os Métodos de Programação Seqüencial Quadrática representam o estado da arte no que se refere aos métodos de programação não-linear (Branch and Grace, 1996).

O conceito básico do método SQP é fazer uma aproximação quadrática para a função lagrangiana do problema e linearizar as restrições, dando origem a um problema quadrático. Este problema quadrático pode ser facilmente resolvido pelas técnicas de programação quadrática. Particularmente, nas formulações usuais dos métodos SQP, a matriz hessiana da função lagrangiana é atualizada usando os conceitos dos métodos de Quase-Newton. Uma breve descrição dos aspectos mais importantes dos métodos SQP é apresentada a seguir.

Seja um problema de minimização:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && f(\mathbf{x}) \\ & \text{sujeito a} && \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

onde \mathbf{x} representa o vetor das variáveis de otimização, e $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ é o vetor das restrições, neste caso de igualdade para simplificar as deduções matemáticas.

A função lagrangiana correspondente a este problema de minimização é:

$$L(\mathbf{x}, \mu) = f(\mathbf{x}) + \mu^t \mathbf{h}(\mathbf{x}), \quad (4.1)$$

sendo μ o vetor dos multiplicadores de Lagrange.

As condições de Kuhn-Tucher para este problema são (Bazaraa et al., 1993):

$$\nabla f(\mathbf{x}) + \mu \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}; \quad \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \quad (4.2)$$

sendo que ∇ representa o operador gradiente.

As condições de Kuhn-Tucher representam um sistema de equações em \mathbf{x} e em μ , que pode ser escrito como $\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mu) = \mathbf{0}$. Este sistema pode ser expandido e aproximado em série de Taylor como:

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}_k, \mu_k) + \nabla \mathbf{W}(\mathbf{x}_k, \mu_k) \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mu_k \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.3)$$

sendo que $\nabla \mathbf{W}$ denota a matriz jacobiana, dada por:

$$\nabla \mathbf{W}(\mathbf{x}_k, \mu_k) = \begin{bmatrix} \nabla^2 L(\mathbf{x}_k) & \nabla h^t(\mathbf{x}_k) \\ \nabla h(\mathbf{x}_k) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

e $\nabla^2 L(\mathbf{x}_k) = \nabla^2 f(\mathbf{x}_k) + \mu^t \nabla^2 h(\mathbf{x}_k)$ é a matriz hessiana da função lagrangiana com relação à variável \mathbf{x} .

O sistema de equações (4.3) pode ser reescrito de forma iterativa como:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \mu_{k+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mu_k \end{Bmatrix} - \nabla \mathbf{W}^{-1}(\mathbf{x}_k, \mu_k) \mathbf{W}(\mathbf{x}_k, \mu_k), \quad (4.5)$$

que caracteriza uma equação da iteração do método de minimização de Newton. Um passo de busca unidimensional α pode ser introduzido no sentido de melhorar a convergência e robustez do método, ou seja,

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \mu_{k+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mu_k \end{Bmatrix} - \alpha \nabla \mathbf{W}^{-1}(\mathbf{x}_k, \mu_k) \mathbf{W}(\mathbf{x}_k, \mu_k). \quad (4.6)$$

A equação (4.6) representa uma seqüência típica de processo iterativo de minimização, inclusive permitindo que $\nabla W^{-1}(\mathbf{x}_k, \mu_k)$ seja estimada diretamente pelas fórmulas usuais dos métodos Quase-Newton tais como DFP e BFGS (Luenberger, 1984).

Usando (4.2) e (4.4) é possível reescrever (4.3) como:

$$\nabla^2 L(\mathbf{x}_k)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) + \nabla \mathbf{h}^t(\mathbf{x}_k)(\mu - \mu_k) = -\nabla f(\mathbf{x}_k) - \nabla \mathbf{h}^t(\mathbf{x}_k)\mu_k,$$

$$\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}_k)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) = -\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}_k).$$

Definindo $\mathbf{d} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_k$ pode-se reescrever:

$$\begin{aligned} \nabla^2 L(\mathbf{x}_k)\mathbf{d} + \nabla \mathbf{h}^t(\mathbf{x}_k)\mu &= -\nabla f(\mathbf{x}_k), \\ \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}_k)\mathbf{d} &= -\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}_k). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Um problema quadrático em \mathbf{d} que possui as mesmas condições de otimalidade (Bazaraa et al., 1993) dadas em (4.7) pode ser formulado como:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & f(\mathbf{x}_k) + \nabla f^t(\mathbf{x}_k)\mathbf{d} + \frac{1}{2}\mathbf{d}^t \nabla^2 L(\mathbf{x}_k)\mathbf{d} \\ \text{sujeito a} \quad & \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) + \nabla \mathbf{h}^t(\mathbf{x}_k)\mathbf{d} = \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Este problema quadrático pode então ser resolvido sucessivas vezes, caracterizando a metodologia conhecida como SQP. Nota-se que as restrições são linearizadas dentro de cada problema quadrático.

Verifica-se também que a função objetivo do problema (4.8) pode ser substituída por uma aproximação quadrática da função lagrangiana, caracterizando-se o seguinte problema quadrático, que também possui as condições de otimalidade desejadas:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \quad L(\mathbf{x}_k) + \nabla_{\mathbf{x}} L^t(\mathbf{x}_k) \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{d}^t \nabla^2 L(\mathbf{x}_k) \mathbf{d} \\ & \text{sujeito a} \quad \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) + \nabla \mathbf{h}^t(\mathbf{x}_k) \mathbf{d} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

A solução de um problema quadrático é facilmente encontrada do ponto de vista da programação matemática.

O problema da equação (4.9) pode ser reescrito na notação padrão de um problema quadrático como:

$$\text{minimizar} \quad f(\mathbf{d}) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^t \mathbf{Q} \mathbf{d} + \mathbf{d}^t \mathbf{c} \quad (4.10)$$

$$\text{sujeito a:} \quad \mathbf{A} \mathbf{d} = \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{A} \mathbf{d} - \mathbf{b} = \mathbf{0}. \quad (4.11)$$

As condições de otimalidade de Kuhn-Tucker (4.2) para este problema permitem obter o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \mathbf{Q} \mathbf{d} + \mathbf{c} + \mathbf{A}^t \mu = \mathbf{0} \\ \mathbf{A} \mathbf{d} - \mathbf{b} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (4.12)$$

que pode ser escrito de forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{A}^t \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d} \\ \mu \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\mathbf{c} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix}. \quad (4.13)$$

Note que o sistema de equações (4.13) permite obter a solução do problema quadrático diretamente. Outro ponto de vista que pode ser usado é empregar alguma metodologia de

minimização para resolver o problema (4.9), cuja solução será facilmente encontrada, a menos de dificuldades relacionadas ao condicionamento da matriz Q .

Uma extensão para o caso de restrições de desigualdade pode ser encontrada em (Bazaraa et al., 1993).

Sumarizando, pode-se dizer que o método SQP envolve uma aproximação quadrática para a função lagrangiana do problema original, juntamente com uma linearização das restrições. Isso gera um problema quadrático padrão que pode ser resolvido facilmente. Esse processo é repetido sucessivas vezes atualizando-se a matriz hessiana da função lagrangiana através de uma fórmula do tipo Quase-Newton e atualizando a linearização das restrições em torno do novo ponto obtido.

4.3 Algoritmo do método proposto

Tendo em vista que se deseja resolver o problema de minimização (3.30) para determinar cada ponto da curva força por deslocamento, o seguinte algoritmo foi proposto neste trabalho:

1. Considerar o ponto de partida $\mathbf{a}_0 = \mathbf{0}$, $\lambda_0 = 0$;
2. Resolver o problema linear:

$$\mathbf{K}_0 \mathbf{a}_1 = \lambda_1 \mathbf{f}$$

com λ_1 pequeno (por exemplo $\lambda_1 = 0.01$) para que possa se aproximar a solução linear da solução não linear.

3. Calcular a direção normal do hiperplano separador:

$$\mathbf{n} = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \lambda_1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \lambda_0 \end{Bmatrix}$$

4. Formular o problema de otimização:

minimizar:

$$\gamma = \psi^t \psi,$$

sujeito a:

$$\mathbf{n}^t \begin{Bmatrix} \mathbf{a} - \mathbf{a}_0 \\ \lambda - \lambda_0 \end{Bmatrix} \geq 0$$
$$(\mathbf{a} - \mathbf{a}_0)^t (\mathbf{a} - \mathbf{a}_0) + (\lambda - \lambda_0)^2 \mathbf{f}^t \mathbf{f} = l^2.$$

5. Resolver o problema de otimização. Utilizou-se o método de Programação Sequencial Quadrática, (detalhes na seção 4.2), obtendo o novo ponto $(\mathbf{a}_1, \lambda_1)$.

6. Caso o resultado da minimização tenha sido insatisfatório, por exemplo, $\gamma \geq \epsilon_1$, então, reduza o raio pelo fator t ($l = t \times l$, $0 < t < 1$) e volte para o passo 4.

7. Atualizar a direção normal:

$$\mathbf{n} = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \lambda_1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \lambda_0 \end{Bmatrix}$$

8. Redefinir o centro da esfera, ou seja, $\mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_1$, $\lambda_0 = \lambda_1$.

9. Voltar ao passo 4 para determinar o próximo ponto.

A solução do problema de otimização empregou o método de programação quadrática sequencial implementado no "toobox" de otimização do Matlab, mais especificamente através da função *fmincon* que resolve problemas não lineares de minimização com restrições.

Os critérios de convergência empregados na resolução do problema de otimização foram considerados em termos da variação da função objetivo entre duas iterações sucessivas (ϵ_2) e em termos da diferença absoluta do componente de maior variação das variáveis de otimização (deslocamento / nível de carga) entre duas iterações sucessivas (ϵ_3). O parâmetro usado para verificar a factibilidade das restrições é chamado de ϵ_4 . Os gradientes da função objetivo e

das restrições foram estimados usando diferenças finitas com maior variação de 10^{-8} e menor variação de 10^{-12} .

4.4 Alguns comentários sobre a implementação neste trabalho

No caso da formulação proposta neste trabalho, foi criada uma rotina principal responsável pela atribuição de todos os parâmetros físicos e de geometria de todos os elementos presentes na estrutura a ser estudada. Esta rotina principal é responsável também pelo cálculo da matriz de rigidez elástica da estrutura e pelo cálculo de todos os parâmetros iniciais necessários para que se dê a partida no método.

Além das atribuições acima especificadas, a rotina principal ainda é responsável pelo controle de todos os parâmetros relacionados à otimização. É aqui que os critérios de convergência e de parada são definidos, assim como o fator de redução do raio.

Foi criado, também, um sub-programa responsável pelo cálculo da função objetivo. Neste sub-programa estão presentes as formulações mostradas no capítulo 3 para o cálculo do resíduo e da função objetivo em si, que é o resíduo ao quadrado.

Outro sub-programa foi criado com o objetivo de definir as restrições as quais o problema estará sujeito. Nele, a formulação da restrição esférica, capítulo 3, está implementada.

A restrição de desigualdade que define o semi-espaço factível da solução, por ser uma restrição linear foi definida no programa principal, devido à função *fmincon* do Matlab ter um argumento específico de entrada para restrições lineares.

É importante notar que com a formulação do problema em termos de um problema de minimização de uma função objetivo, não houve a necessidade de cálculo da matriz de rigidez

tangente da estrutura em nenhum passo do algoritmo, embora o gradiente do resíduo esteja sendo estimado indiretamente por diferenças finitas. Acredita-se que o fato de não computar a matriz de rigidez tangente caracterize um aspecto computacionalmente relevante da metodologia proposta.

4.5 Algumas limitações do método proposto

O método proposto neste trabalho apresenta algumas limitações. Algumas destas situações são brevemente discutidas nesta seção.

Como já foi dito, o problema de se encontrar a solução correta que deve ser adotada no método do *arc-length* caracteriza uma das dificuldades deste método. Embora este trabalho procure evitar que soluções inadequadas sejam obtidas através da imposição de uma restrição adicional, ainda existem casos em que mais de uma solução pode existir ocasionando uma escolha indevida.

A primeira limitação da formulação proposta é ilustrada na figura 4.1. Existem duas soluções possíveis que satisfazem as condições de otimalidade do problema, ou seja, resíduo nulo, ponto sobre a restrição esférica e no semi-espço adequado delimitado pelo hiper-plano separador.

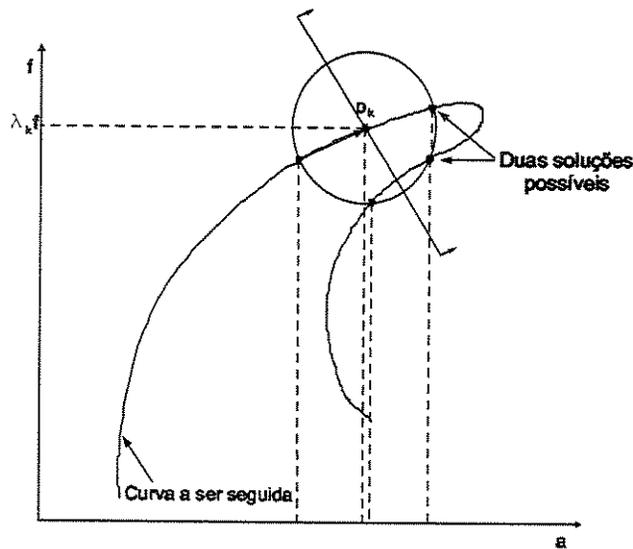


Figura 4.1: Possível falha onde duas soluções são possíveis.

A dificuldade ilustrada na figura 4.1 é que dois pontos podem ser considerados como soluções do problema de otimização, mas somente um deles define o caminho correto pelo qual o método deve seguir. Caso a solução obtida no problema de minimização seja a inadequada, parte da curva de equilíbrio será perdida e a definição da nova direção normal poderá comprometer a continuidade do processo de solução.

Outra situação onde é possível que ocorra falha do método proposto está ilustrada na figura 4.2.

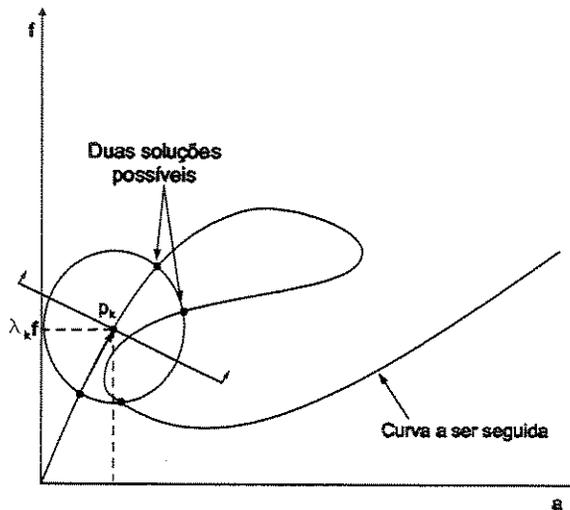


Figura 4.2: Possível falha identificada no método onde grande parte do caminho pode ser perdido.

A situação ilustrada na figura 4.2 é similar à ilustrada na figura 4.1. Neste caso, a mesma situação onde mais de um ponto satisfaz as condições de otimalidade do problema é presente. Este caso se torna mais crítico devido à acentuada presença do fenômeno de "snap-back". Nota-se que a escolha indevida do ponto desejado pode representar a perda de boa parte da curva de equilíbrio, inclusive com pontos críticos que seriam importantes em uma análise estrutural. Uma alternativa para contornar este tipo de situação é calcular a solução com diferentes raios e verificar se a curva obtida é a mesma.

A redução do raio é empregada no sentido de evitar a situação mostrada na figura 4.3. Note que, com o raio original a solução que corresponde ao resíduo mínimo dentro da região factível (sobre a esfera e à direita do hiperplano separador) não estará sobre a curva de resíduo nulo. A solução da minimização neste caso será ou o ponto p_1 ou o ponto p_2 . Neste caso, o resíduo não será próximo de zero, e uma redução do raio é adequada para buscar uma situação em que um novo ponto factível esteja sobre a curva de resíduo nulo.

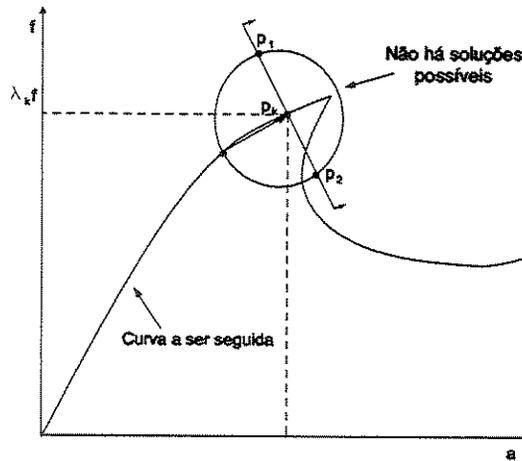


Figura 4.3: Possível falha onde o método não encontraria solução.

Neste caso, a redução do raio caracteriza uma alternativa que contorna o problema. Contudo, um caso limite, como o mostrado na figura 4.4 pode ser encontrado, e o processo de redução de raio não será capaz de contornar esta dificuldade, fazendo com que a formulação proposta não seja capaz de superar esta dificuldade.

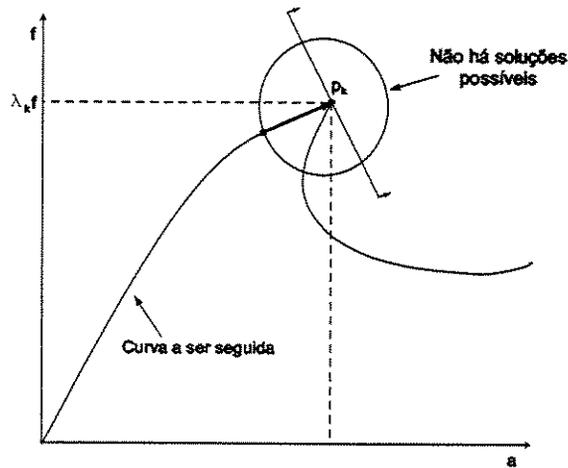


Figura 4.4: Possível falha onde o método não encontraria solução.

Neste caso, observa-se a presença de um ponto de inflexão muito agudo. Existe a possi-

bilidade, ainda que remota, de que o centro da restrição esférica esteja exatamente sobre o ponto de inflexão. Se isso acontecer, o problema de otimização não terá solução, pois não há nenhum ponto pertencente à curva que satisfaça a restrição de igualdade esférica e satisfaça a condição estabelecida pela restrição do hiper-plano separador. Mesmo com o recurso de diminuição do raio para a busca de uma solução, o método proposto não encontraria um outro ponto sobre a curva, e tenderia ao centro da restrição à medida que o raio fosse diminuído.

Capítulo 5

Resultados e discussão

Neste capítulo, são apresentados alguns exemplos e os respectivos resultados obtidos com a formulação desenvolvida neste trabalho.

Os exemplos procuram avaliar a capacidade do método proposto em ultrapassar pontos limites para problemas com diversos graus de liberdade (ou diversos números de variáveis de otimização). É apresentado um teste para uma função senoidal e vários exemplos para estruturas formadas por elementos de treliças.

Alguns critérios e parâmetros são definidos com o objetivo de permitir a reprodução dos resultados. Estes parâmetros são: o raio (l) usado na restrição esférica; os critérios de parada: a variação dos valores da variável de otimização (ϵ_3) e a variação do valor da função objetivo (ϵ_2); o parâmetro para verificação se o resíduo ao quadrado está suficiente próximo de zero (ϵ_1); o parâmetro para verificação se as restrições podem ser consideradas satisfeitas ou não (ϵ_4); e o fator de redução do raio (t). Estes parâmetros foram usados na implementação computacional feita neste trabalho, ver seção 4.3.

O equipamento usado nos testes foi um micro-computador com processador Pentium 4 de 3 Giga-hertz e memória RAM de 1047 Mega-bites usando a versão 6.5 do software Matlab.

5.1 Senóide

A função seno pode ser considerada um bom exemplo para verificação da capacidade do método proposto em ultrapassar pontos limites. Este exemplo representa um sistema fictício onde as forças internas correspondem a uma função senoidal, ou seja:

$$\psi = \text{sen}(\mathbf{a}) - \lambda \mathbf{f}. \quad (5.1)$$

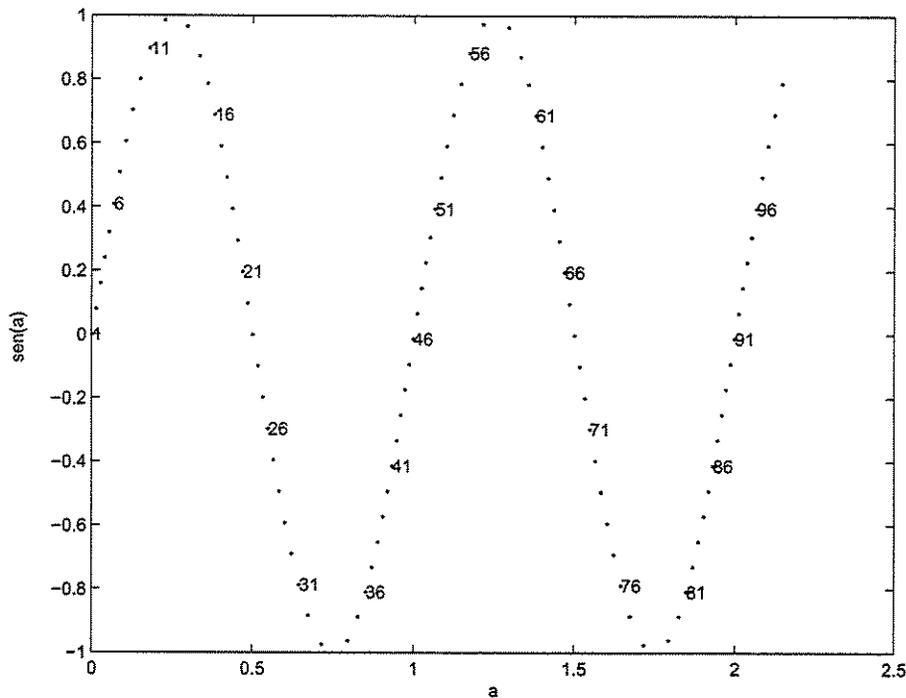


Figura 5.1: Resultados obtidos para a função senóide.

Foram computados 100 pontos e pode-se observar na figura 5.1, que tanto os pontos críticos superiores quanto os inferiores presentes na curva senoidal foram ultrapassados sem qualquer problema. O raio utilizado foi de $l = 0.1$, e os demais parâmetros foram: $\epsilon_1 = 10^{-8}$, $\epsilon_2 = 10^{-8}$, $\epsilon_3 = 10^{-8}$, $\epsilon_4 = 10^{-8}$ e $t = 0.9$.

A tabela 5.1 mostra alguns dos parâmetros relativos ao desempenho computacional do método deste trabalho sob as condições especificadas neste exemplo.

Tabela 5.1: Dados de desempenho computacional do método para a função senóide.

Tempo de processamento	Número máximo de iterações do SQP	Menor raio e respectivo ponto	Norma do resíduo (pior caso)
10.7s	130 (trecho do ponto 51 ao 52)	0.0729 (trecho do ponto 12 ao 13)	1.3108×10^{-5}

5.2 Treliça com 2 graus de liberdade

Neste exemplo procurou-se um problema de pequenas dimensões, ou seja, um problema que contivesse um pequeno número graus de liberdade para que o problema numérico também fosse reduzido, e que ainda tivesse uma solução analítica para fins de comparação (Bathe, 1982). Optou-se então, por um exemplo clássico no caso de estruturas não lineares como mostrado na figura 5.2.

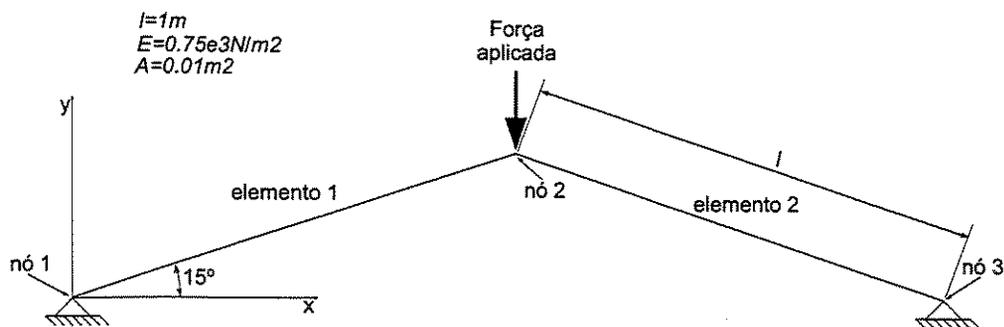


Figura 5.2: Exemplo de treliça com 3 nós e 2 graus de liberdade.

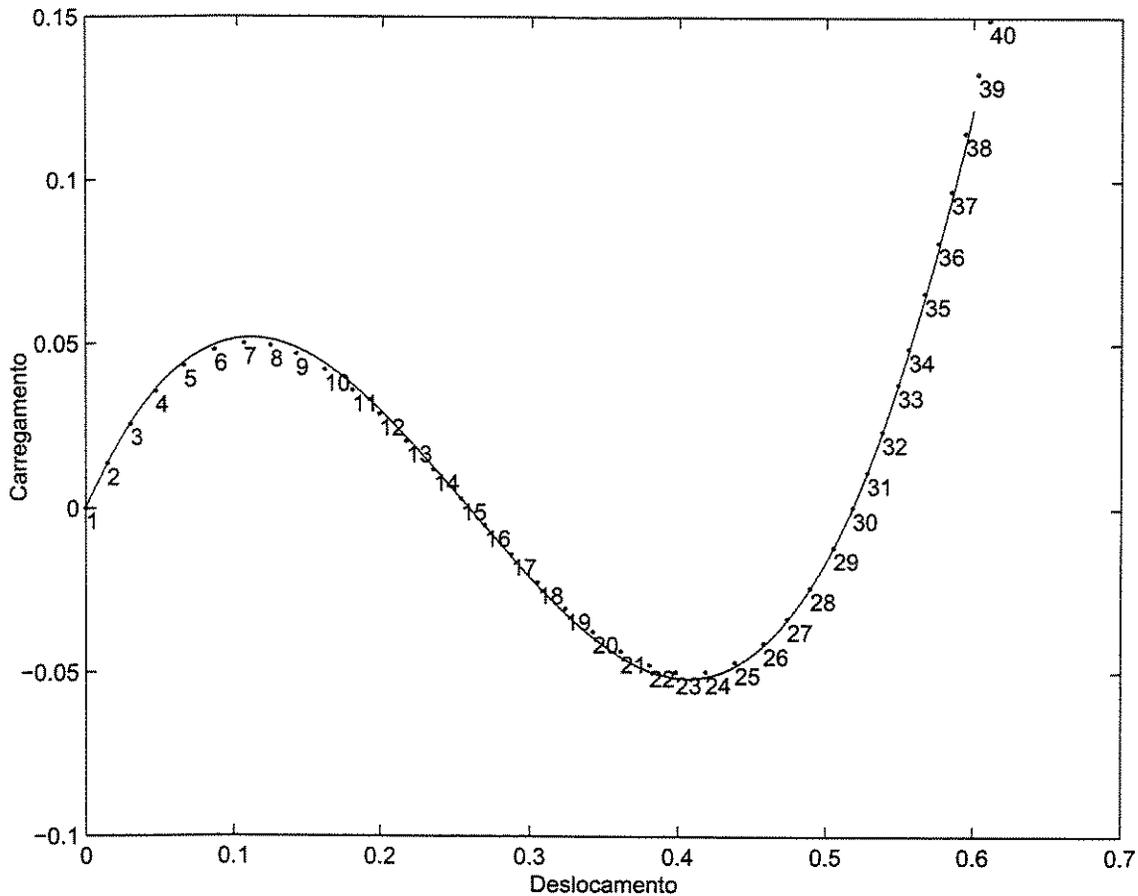


Figura 5.3: Solução analítica e solução numérica para o deslocamento na direção y do nó 2 da estrutura mostrada na figura 5.2.

Na figura 5.3 a curva de linha contínua é a solução analítica conforme dedução mostrada no anexo A. Os pontos numerados na figura 5.3 são os pontos obtidos pelo método implementado neste trabalho para o mesmo problema. É fácil perceber o bom desempenho do método em seguir uma curva não linear.

Na formulação empregada neste trabalho utilizou-se a deformação com os respectivos termos não lineares, equação (2.46), e a descrição lagrangiana do problema. Contudo, a solução analítica usada considerou a deformação pequena, mas o equilíbrio na posição deformada, motivo pelo qual observa-se uma pequena diferença entre os resultados na figura 5.3.

Na solução numérica foram computados quarenta pontos e utilizou-se um raio $l = 0.02$, sendo que quando a solução não atingia o objetivo de resíduo pequeno, o raio é reduzido pelo fator $t = 0.9$. Os demais critérios estabelecidos foram: $\epsilon_1 = 10^{-8}$, $\epsilon_2 = 10^{-10}$, $\epsilon_3 = 10^{-10}$ e $\epsilon_4 = 10^{-10}$.

Na tabela 5.2, estão mostrados os parâmetros de desempenho computacional obtido pelo método implementado na solução do problema ilustrado na figura 5.2.

Tabela 5.2: Dados de desempenho computacional do método para o problema da figura 5.2.

Tempo de processamento	Número máximo de iterações do SQP	Menor raio e respectivo ponto	Norma do resíduo (pior caso)
24.47s	61 (trecho do ponto 2 ao 3)	0.0131 (trecho do ponto 33 ao 34)	3.4363×10^{-6}

5.3 Treliça com 6 graus de liberdade

Com a metodologia proposta validada para um caso relativamente simples, problemas mais complexos e com maior número de graus de liberdade podem ser testados. O primeiro dentre estes exemplos é o mostrado na figura 5.4.

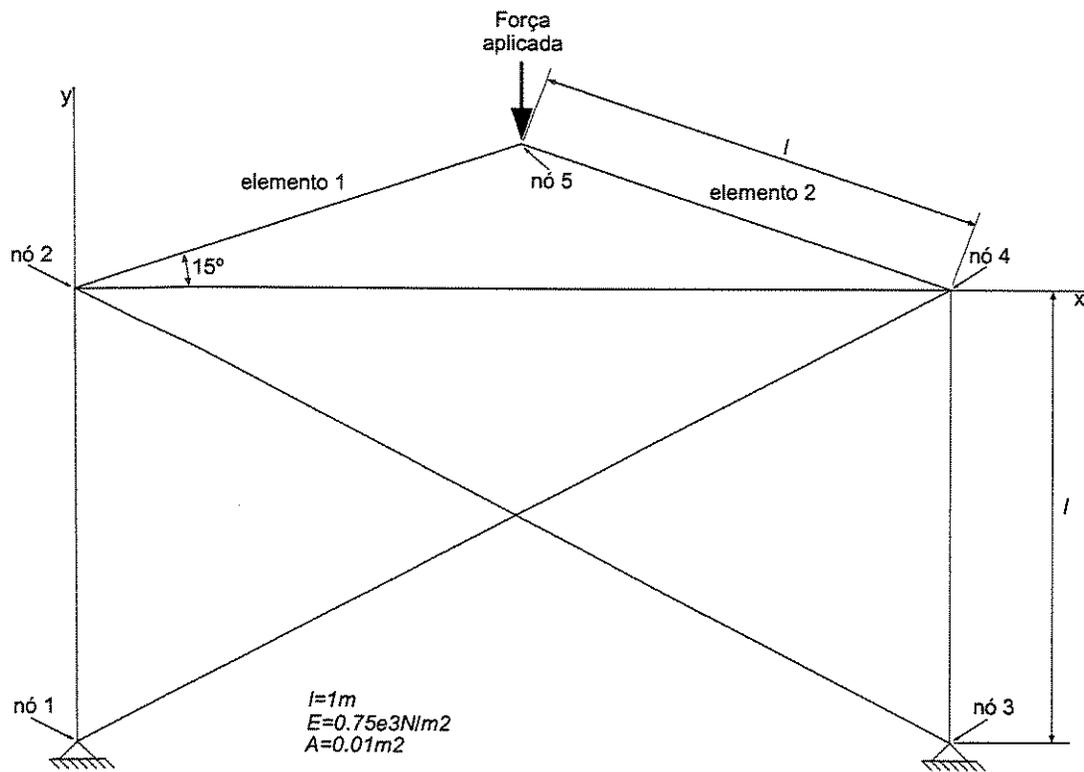


Figura 5.4: Exemplo de treliça com 5 nós e 6 graus de liberdade.

Neste exemplo existem três nós dos quais se espera uma resposta não linear, o nó 2 e seu simétrico, 4, e o nó 5. Aplicou-se a formulação proposta para a solução deste problema e obteve-se excelentes resultados, mostrados nas figuras 5.5, 5.6 e 5.7.

Para uma melhor visualização e conseqüentemente um maior poder de análise preferiu-se traçar a curva de cada grau de liberdade separadamente.

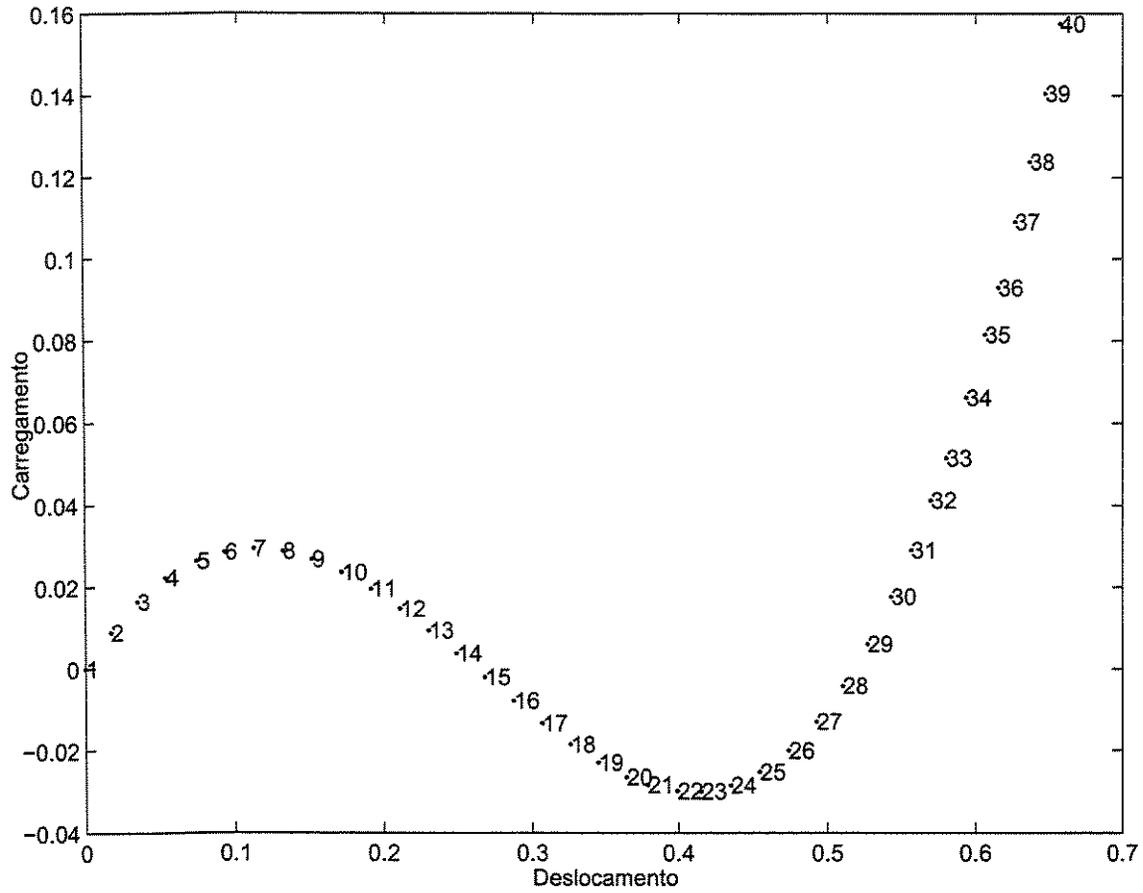


Figura 5.5: Deslocamento do nó 5 na direção y para a treliça da figura 5.4.

Observa-se que a metodologia proposta, mais uma vez, ultrapassa com sucesso os pontos críticos presentes na curva força por deslocamento.

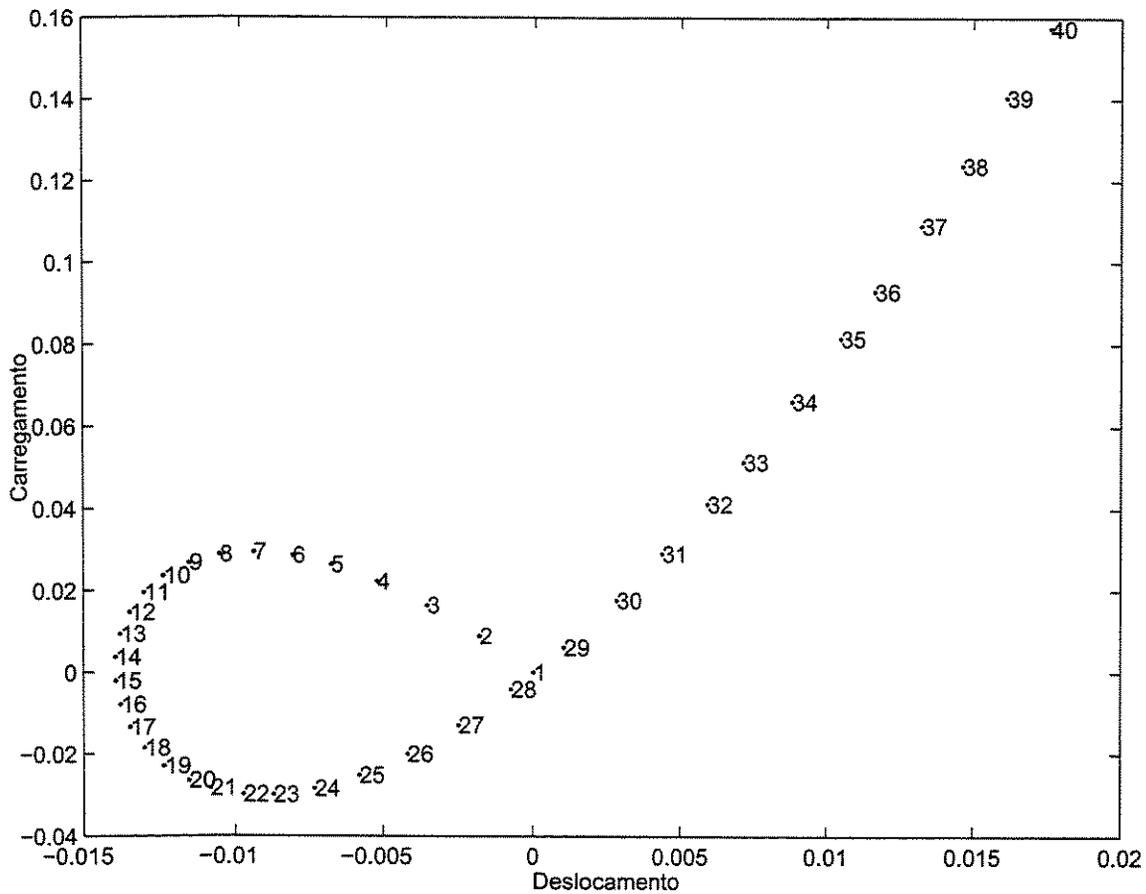


Figura 5.6: Deslocamento do nó 2 na direção x para a treliça da figura 5.4.

Observa-se na figura 5.6 uma não linearidade bastante acentuada para o deslocamento do nó 2 a direção x, e que vários pontos críticos foram ultrapassados com a metodologia deste trabalho.

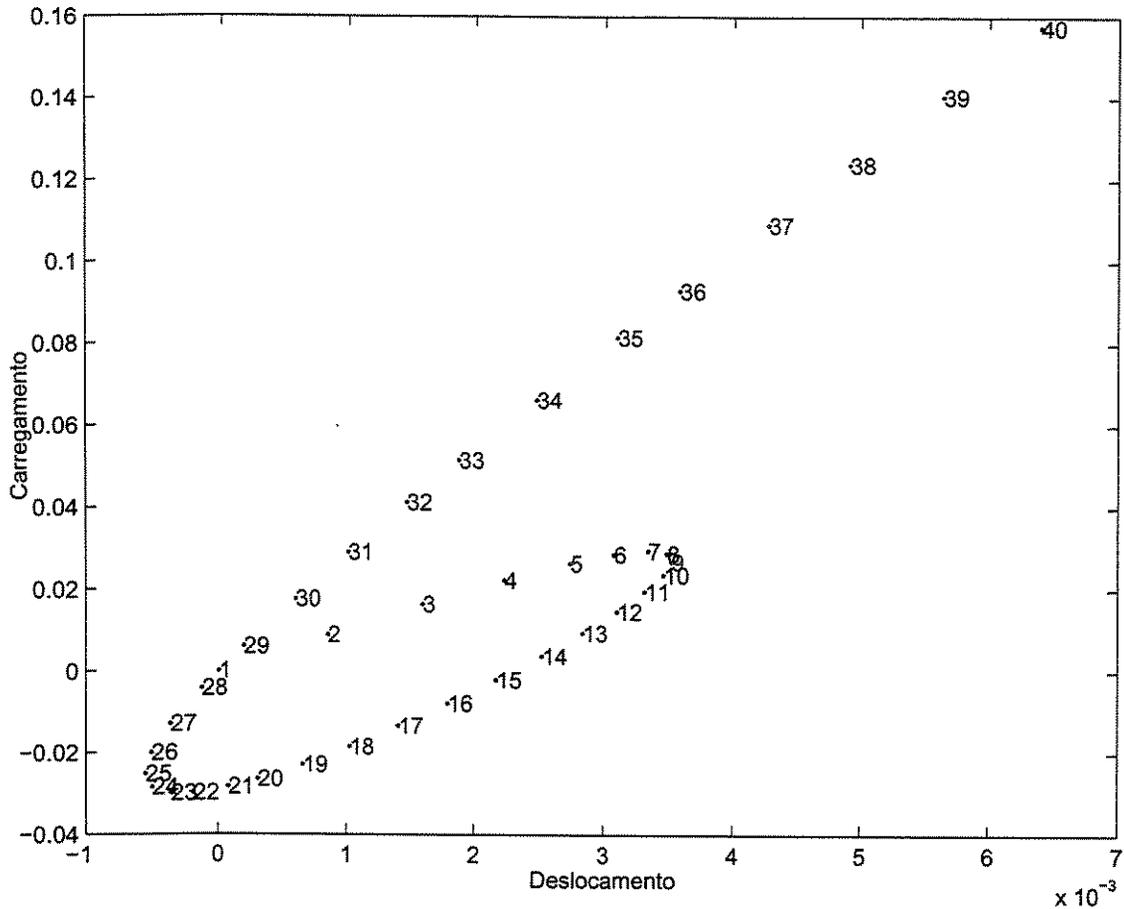


Figura 5.7: Deslocamento do nó 2 na direção y para a treliça da figura 5.4.

O gráfico da figura 5.7 corresponde ao deslocamento em y do nó 2 da estrutura. Neste caso também há um comportamento que apresenta uma grande não linearidade.

Apesar da dificuldade associada a solução deste tipo de problema, com a formulação do método proposto, consegue-se com relativa facilidade transpor quaisquer que sejam os pontos críticos presentes na curva não linear deste exemplo.

Na solução deste exemplo critérios similares aos usados no exemplo anterior foram utilizados. Também foram computados quarenta pontos e o raio usado é $l = 0.02$. Quando a solução não atingia o objetivo de resíduo pequeno, o raio é reduzido pelo fator $t = 0.9$,

automaticamente. Os demais critérios estabelecidos foram: $\epsilon_1 = 10^{-8}$, $\epsilon_2 = 10^{-10}$, $\epsilon_3 = 10^{-10}$ e $\epsilon_4 = 10^{-10}$.

A tabela 5.3 mostra o desempenho computacional do método implementado frente a solução do problema proposto na figura 5.4.

Tabela 5.3: Dados de desempenho computacional do método para o problema da figura 5.4.

Tempo de processamento	Número máximo de iterações do SQP	Menor raio e respectivo ponto	Norma do resíduo (pior caso)
80.27s	184 (trecho do ponto 36 ao 37)	0.0146 (trecho do ponto 20 ao 21)	3.2249×10^{-6}

5.4 Treliça de 14 graus de liberdade

Neste exemplo procurou-se verificar o método proposto frente à um problema de maior dimensão, embora ainda pequeno do ponto de vista da mecânica estrutural. Neste caso, são dezoito elementos de treliça formando uma estrutura com 14 graus de liberdade. A figura 5.8 ilustra a estrutura.

Foram computados vinte pontos e o raio usado é $l = 0.04$. Nos casos em que o resíduo ao quadrado era maior que $\epsilon_1 = 10^{-8}$ o raio era reduzido pelo fator $t = 0.9$.

Os demais parâmetros de convergência foram $\epsilon_2 = 10^{-10}$, $\epsilon_3 = 10^{-10}$ e $\epsilon_4 = 10^{-10}$.

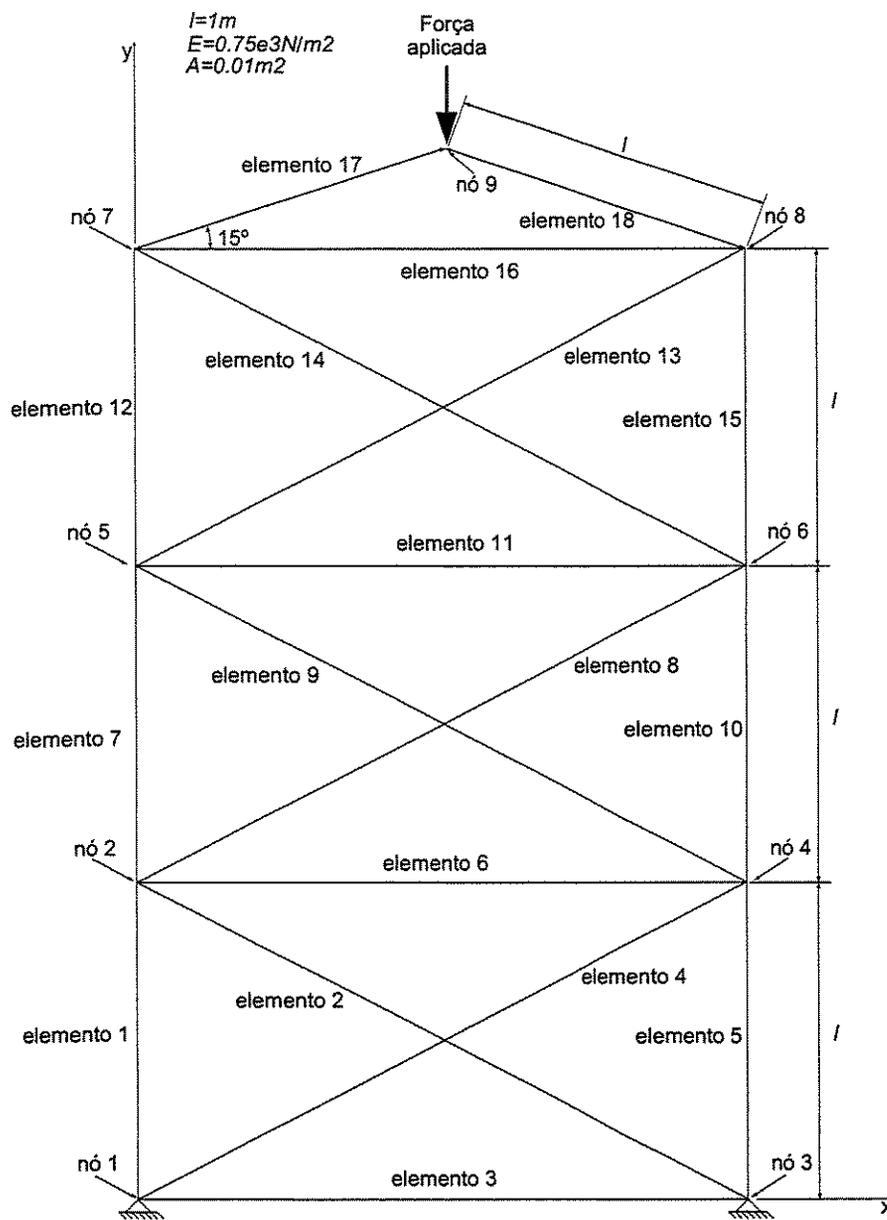


Figura 5.8: Exemplo de treliça com 9 nós e 14 graus de liberdade.

Todos os elementos de treliça da figura 5.8 têm o mesmo módulo de elasticidade e a mesma área da seção transversal.

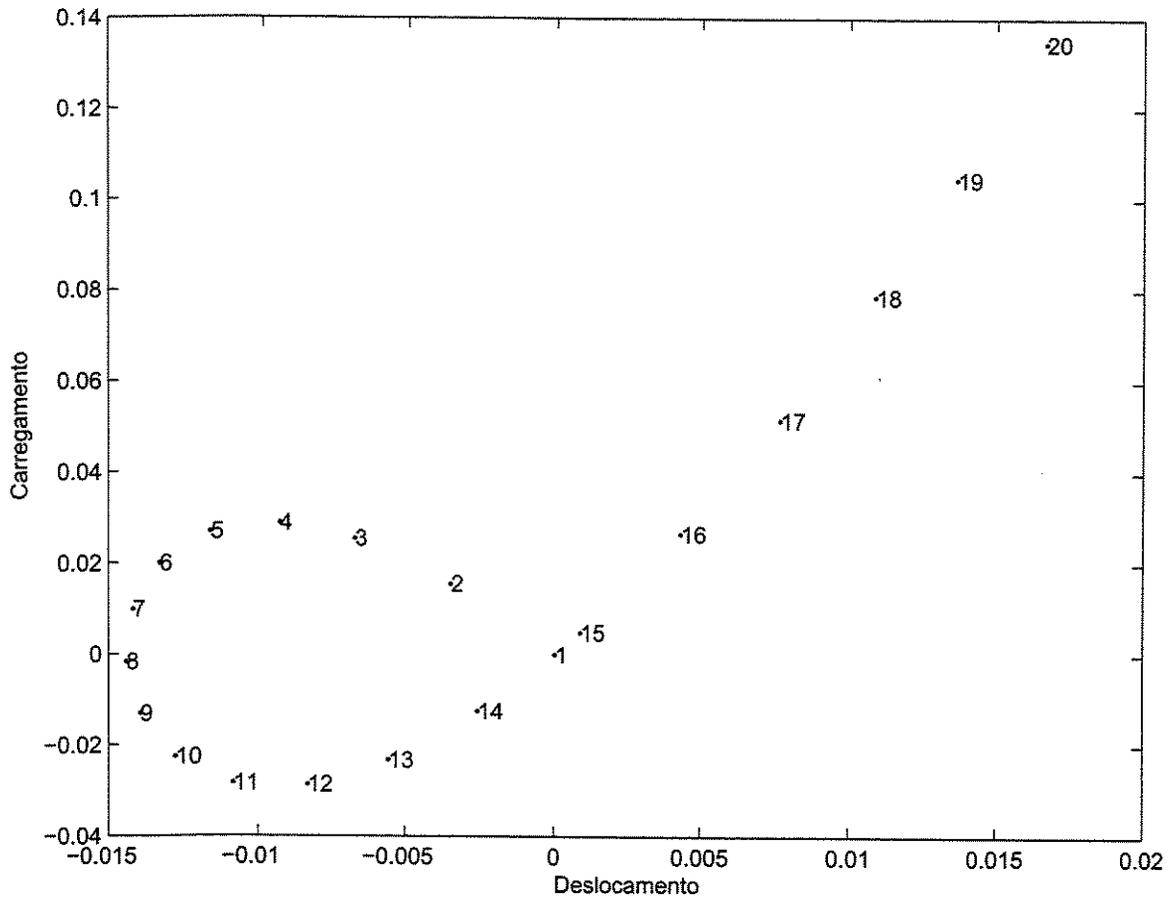


Figura 5.9: Deslocamento do nó 7 na direção x para a treliça da figura 5.8.

O gráfico da figura 5.9 mostra o sucesso da metodologia proposta ultrapassando os pontos limites presentes na curva.

Mais uma vez, percebe-se uma grande não linearidade na resposta da estrutura que consegue ser representada com bastante precisão pelo método.

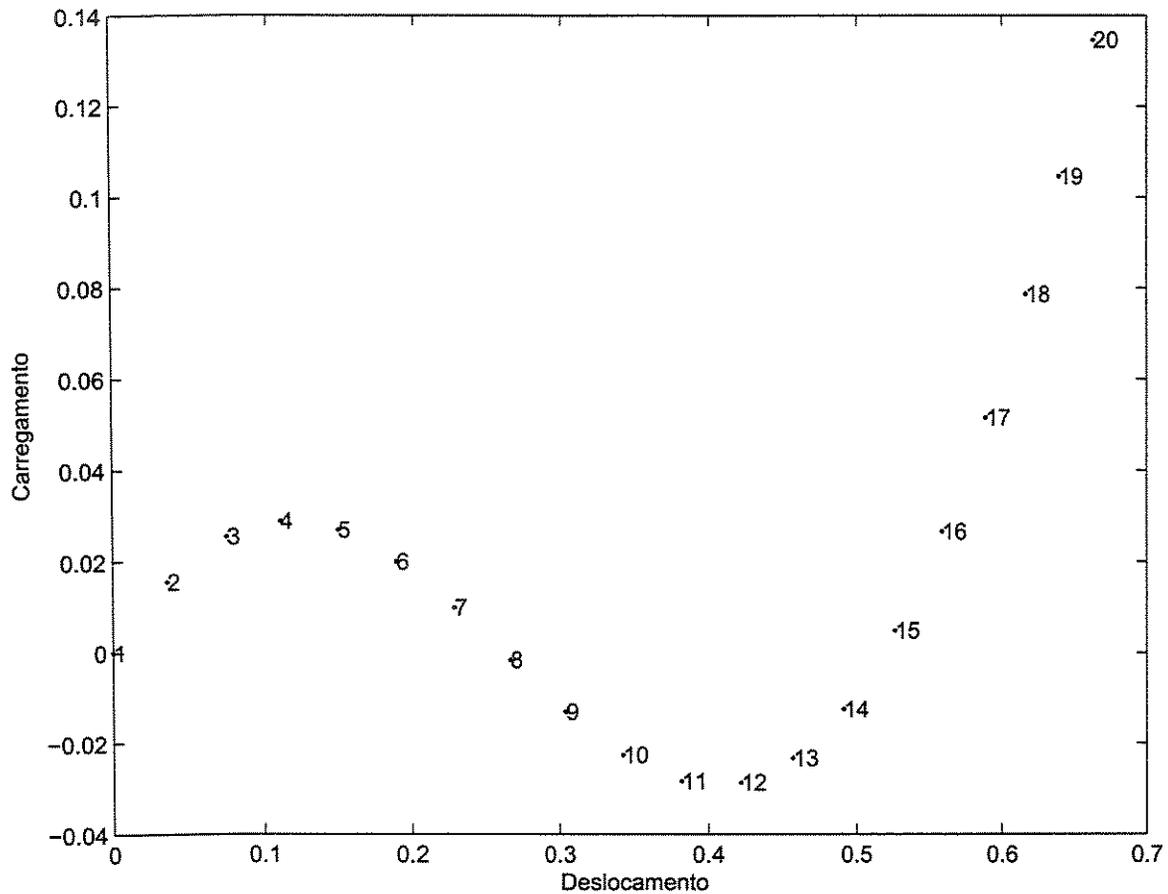


Figura 5.10: Deslocamento do nó 9 na direção y para a treliça da figura 5.8.

Para o nó 9 na direção y (figura 5.10) é esperada uma resposta similar à obtida no exemplo da treliça da seção 5.2. Percebe-se que a forma da curva é a esperada.

A tabela 5.4 fornece algumas informações sobre o desempenho computacional da metodologia proposta neste trabalho.

Tabela 5.4: Dados de desempenho computacional do método para o problema da figura 5.8.

Tempo de processamento	Número máximo de iterações do SQP	Menor raio e respectivo ponto	Norma do resíduo (pior caso)
144.5s	237 (trecho do ponto 12 ao 13)	0.0360 (trecho do ponto 3 ao 4)	4.3948×10^{-11}

5.5 Treliça com 3 graus de liberdade

Um outro exemplo testado, com uma configuração diferente, é a estrutura mostrada na figura 5.11, que também tem curvas de força por deslocamento com presença de pontos limites para todos os seus graus de liberdade.

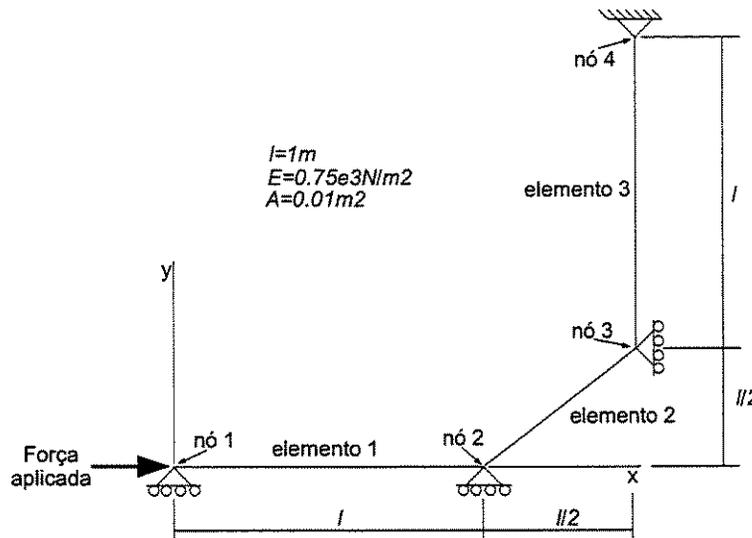


Figura 5.11: Exemplo de treliça com 4 nós e 3 graus de liberdade.

Os resultados obtidos estão mostrados nas figuras 5.12, 5.13 e 5.14.

Foram computados 40 pontos utilizando-se um raio $l = 0.08$, um parâmetro $\epsilon_1 = 10^{-8}$

para verificação de resíduo ao quadrado pequeno. Os demais parâmetros de convergência são $\epsilon_2 = 10^{-10}$, $\epsilon_3 = 10^{-10}$, $\epsilon_4 = 10^{-10}$ e $t = 0.9$.

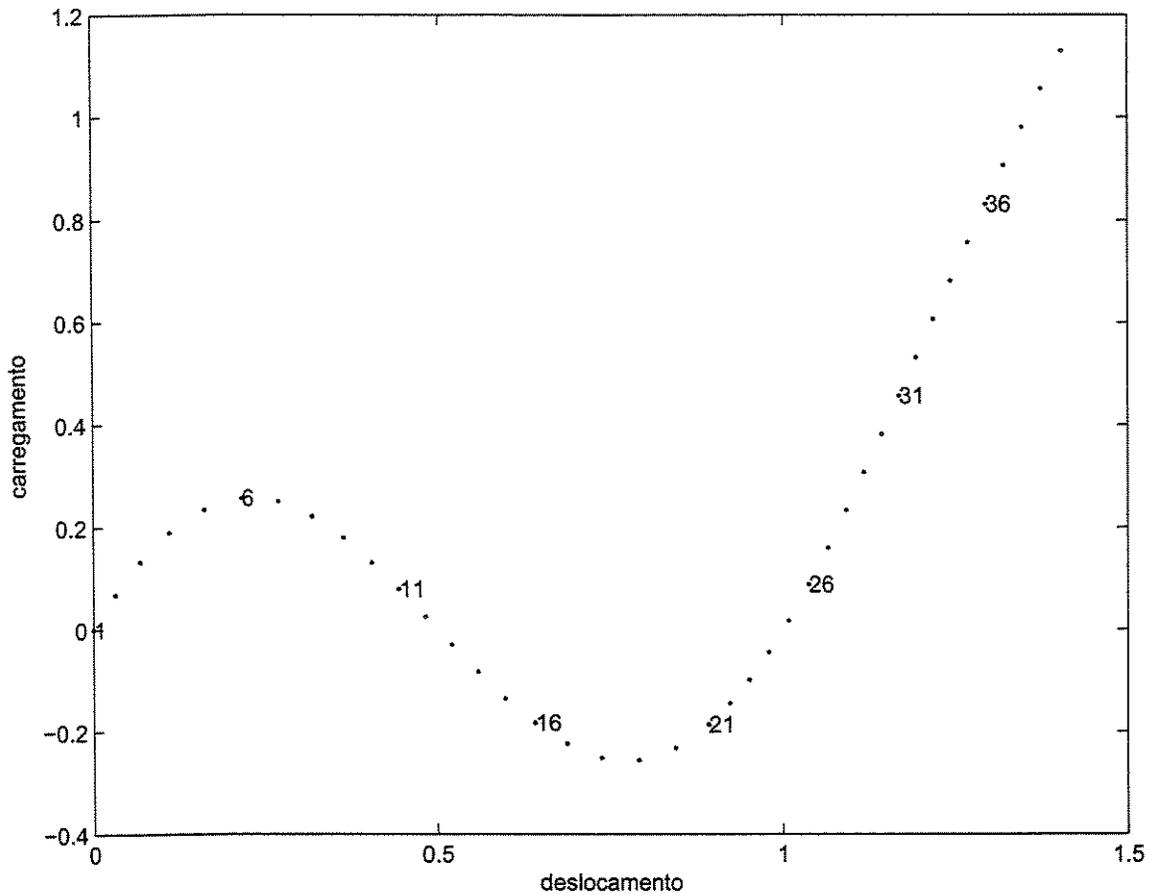


Figura 5.12: Deslocamento do nó 1 na direção x para a treliça da figura 5.11.

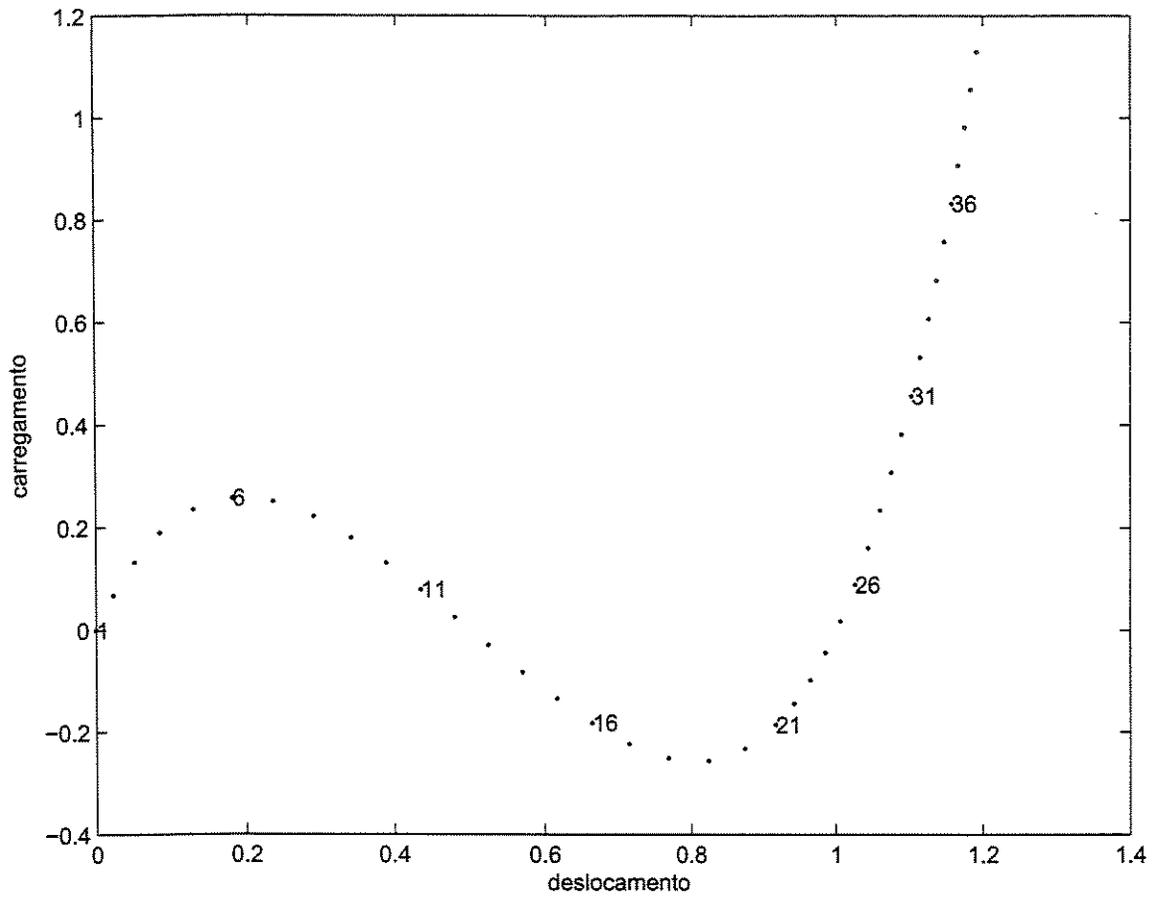


Figura 5.13: Deslocamento do nó 2 na direção x para a treliça da figura 5.11.

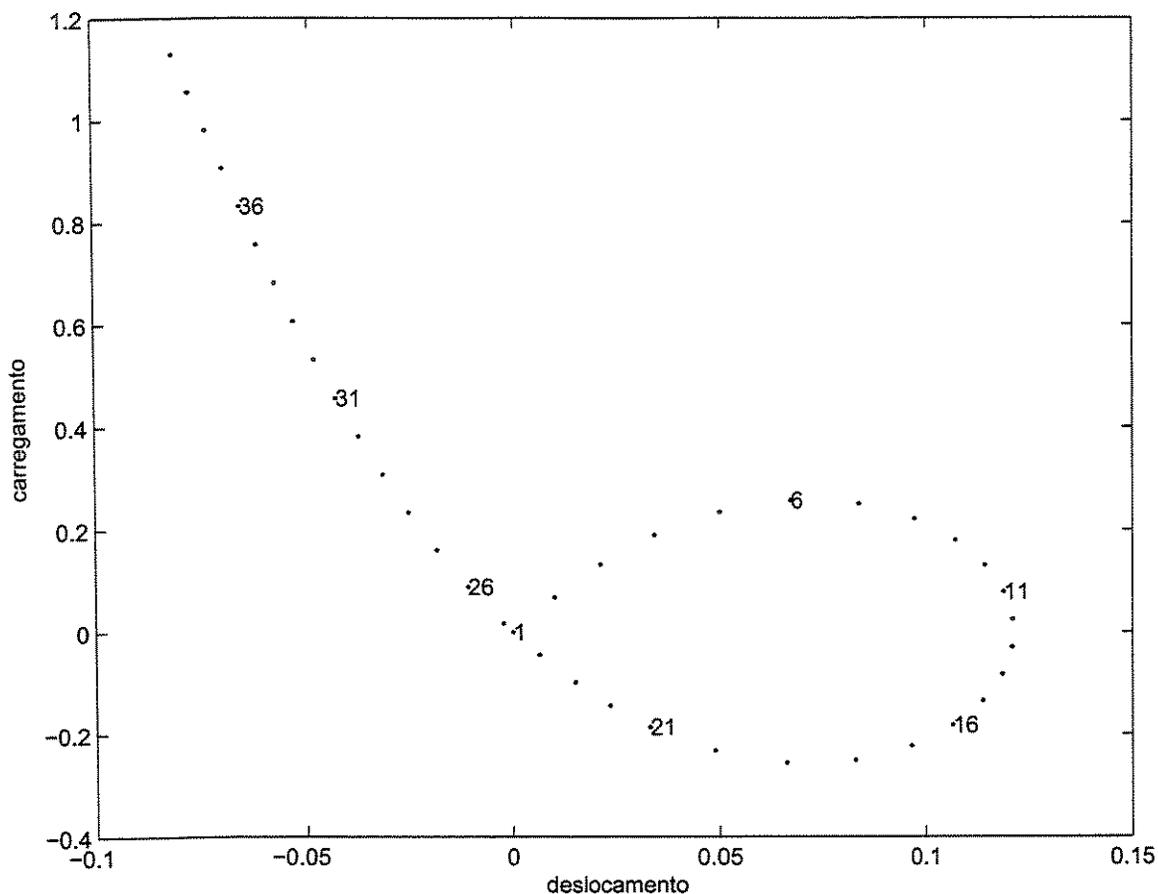


Figura 5.14: Deslocamento do nó 3 na direção y para a treliça da figura 5.11.

Observa-se que a metodologia proposta foi capaz de ultrapassar os pontos limites com sucesso para este exemplo.

A tabela 5.5 apresenta alguns resultados computacionais deste exemplo.

Tabela 5.5: Dados de desempenho computacional do método para a treliça da figura 5.11.

Tempo de processamento	Número máximo de iterações do SQP	Menor raio e respectivo ponto	Norma do resíduo (pior caso)
22.3s	68 (trecho do ponto 22 ao 23)	0.0583 (trecho do ponto 21 ao 22)	4.2517×10^{-6}

5.6 Treliça com 5 graus de liberdade

Este exemplo tem como objetivo resolver o problema da estrutura mostrada na figura 5.15.

Foram calculados 40 pontos da curva de equilíbrio usando os seguintes parâmetros: raio $l = 0.08$, $\epsilon_1 = 10^{-8}$, $\epsilon_2 = 10^{-10}$, $\epsilon_3 = 10^{-10}$, $\epsilon_4 = 10^{-10}$ e $t = 0.9$.

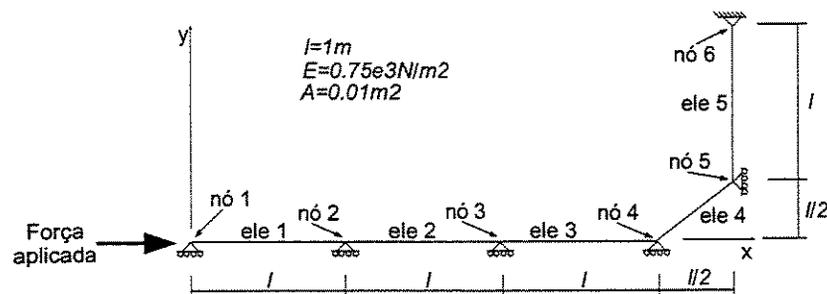


Figura 5.15: Exemplo de treliça com 6 nós e 5 graus de liberdade.

Observa-se na figura 5.16 o desloamento do nó 1 na direção x. Nota-se que a metodologia proposta funcionou adequadamente ultrapassando o ponto limite.

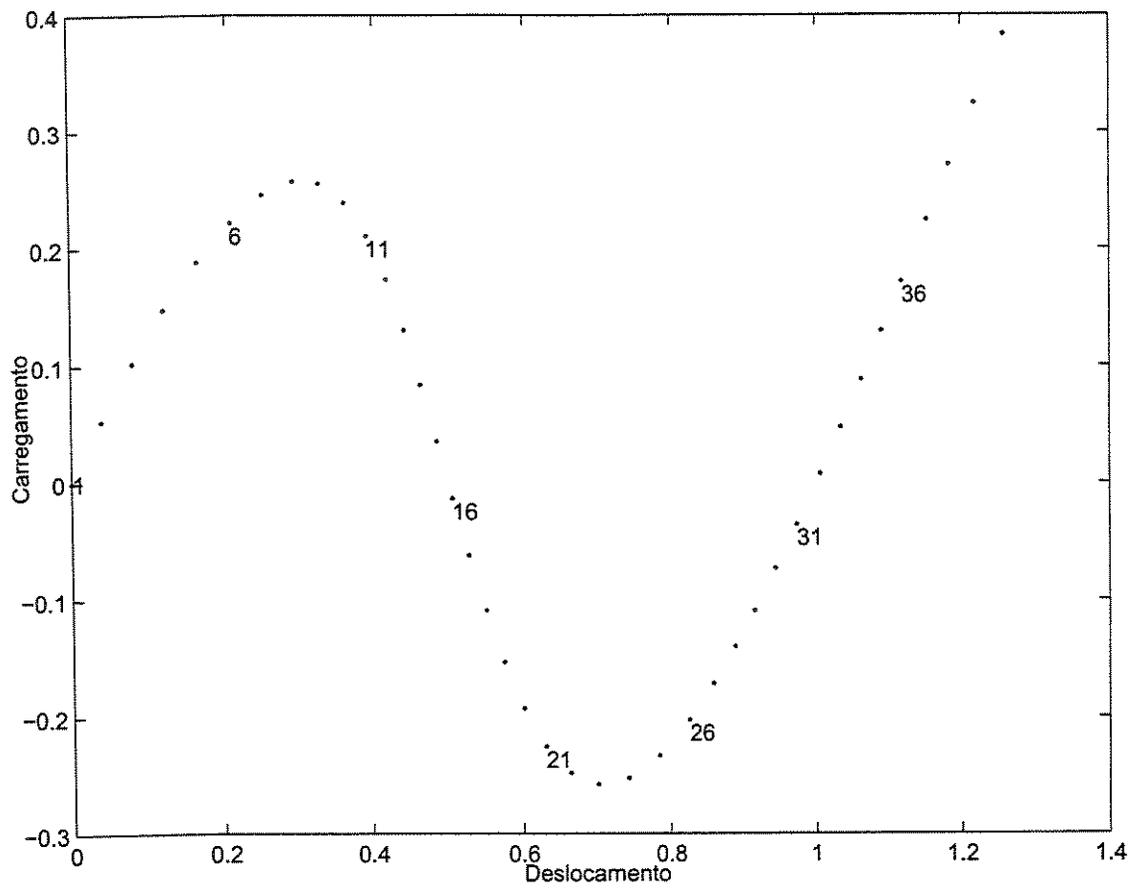


Figura 5.16: Deslocamento do nó 1 na direção x para a treliça da figura 5.15

Na figura 5.17 tem-se o deslocamento do nó 5 na direção y. Nota-se, novamente, que a metodologia proposta funcionou adequadamente ultrapassando os pontos limites.

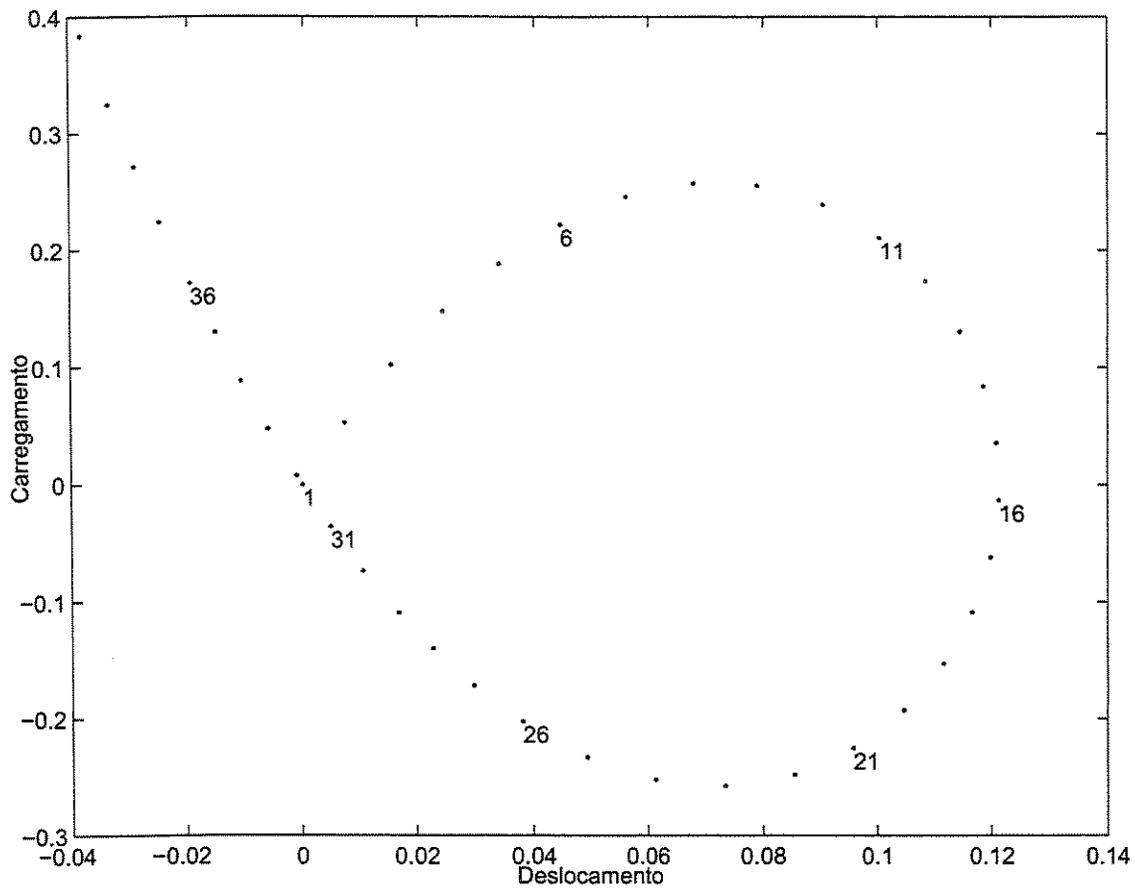


Figura 5.17: Deslocamento do nó 5 na direção y para a treliça da figura 5.15

A tabela 5.6 apresenta alguns resultados em termos de desempenho computacional para este exemplo.

Tabela 5.6: Dados de desempenho computacional do método para a treliça da figura 5.15.

Tempo de processamento	Número máximo de iterações do SQP	Menor raio e respectivo ponto	Norma do resíduo (pior caso)
343.03s	538 (trecho do ponto 171 ao 172)	0.0472 (trecho do ponto 102 ao 103)	6.2623×10^{-6}

Capítulo 6

Conclusões e sugestões para próximos trabalhos

6.1 Conclusões

Tendo em vista a importância e aplicações do estudo de fenômenos não lineares em estruturas mecânicas, e a complexidade envolvida nestes problemas, considera-se de interesse qualquer investigação que se faça à respeito deste assunto.

Neste trabalho procurou-se explorar formas mais simples para a implementação do método do *arc-length* tradicionalmente utilizado na análise de estruturas não lineares, e que fossem capazes de ultrapassar pontos limites de curvas de força por deslocamento de forma eficiente.

Com este objetivo, um problema de otimização (minimização) que buscasse a situação de equilíbrio foi proposto. O resíduo ao quadrado foi definido como função objetivo. Este problema de otimização considerou como restrição para assegurar o controle simultâneo do nível de carregamento e de deslocamentos a restrição esférica usual do método do *arc-length*. Uma restrição adicional com o objetivo de definir de forma única a solução desejada foi imposta na forma de uma desigualdade que representa o semi-espaço da solução procurada. Com esta restrição adicional, uma maior robustez do método proposto é conseguida.

No que diz respeito a formulação e implementação, considera-se este ponto de vista mais simples do que o método tradicional do *arc-length* usado na solução de problemas estruturais

com resposta não linear. Certamente esta maior simplicidade pressupõe o conhecimento de metodologias de otimização e de programação não linear.

De acordo com os resultados obtidos e mostrados no capítulo 5, observa-se a boa capacidade do método proposto para determinar curvas de força por deslocamentos onde estavam presentes grandes efeitos não lineares. Isto comprova de forma satisfatória a validade da formulação proposta. Salienta-se, contudo, que existem situações onde o método proposto apresentará dificuldades para seguir a curva de equilíbrio, como por exemplo aquelas discutidas na seção 4.5.

Tendo em vista a simplicidade, no que diz respeito a formulação e implementação, em relação à outros pontos de vista, os resultados obtidos são bastante relevantes e inspiram outros estudos e investigações no campo da programação matemática aplicada à solução de problemas da mecânica estrutural, como por exemplo, a inclusão de restrições adicionais que venham a superar algumas das limitações existentes na formulação proposta.

Nota-se que a formulação proposta trabalhou somente sobre o resíduo da equação de equilíbrio. Isso dispensou o cálculo e atualização da matriz de rigidez tangente, o que pode caracterizar uma vantagem em termos computacionais. Salienta-se, contudo, que o gradiente da função objetivo foi estimado através de diferenças finitas e que este poderia ser calculado explicitamente, envolvendo então o cálculo da matriz tangente.

Uma das dificuldades encontradas com a formulação proposta é associada à compatibilidade dimensional da restrição esférica. Esta restrição envolve a variação dos deslocamentos ao quadrado e a variação das forças ao quadrado. Estas grandezas são muito diferentes e dificuldades numéricas podem ser encontradas. Uma alternativa para isso é considerar um fator de escala na formulação da restrição para compatibilizar os termos de deslocamento e de força como já sugerido em (Crisfield, 1991a).

Uma outra dificuldade está associada à escolha dos critérios de convergência, que são muito dependentes do problema. Neste sentido, a investigação de critérios estabelecidos de forma relativa entre as grandezas envolvidas no problema é um aspecto importante a ser investigado, para tornar a metodologia mais independente do problema específico a ser resolvido.

6.2 Sugestões para próximos trabalhos

Como dito anteriormente, o sucesso obtido com este estudo inicial faz com que estudos mais aprofundados sobre o tema sejam propostos. Alguns destes aspectos são brevemente descritos a seguir.

A formulação deste trabalho pode ser comparada, em termos de eficiência computacional e de capacidade de ultrapassar pontos limites ainda mais críticos, com o método clássico do *arc-length*. Isto permitiria avaliar as vantagens e desvantagens de cada formulação.

Uma outra possibilidade é o estudo para incluir a restrição de desigualdade do semi-espaço na formulação usual do método do *arc-length* e avaliar seu comportamento. Uma possível maneira para isso, é que a desigualdade seja tratada como uma restrição de igualdade através da introdução de uma variável de folga que passa a fazer parte do problema, já que na formulação usual do *arc-length* é resolvido um sistema de equações.

Uma extensão evidente deste trabalho é a de se implementar outros tipos de elementos finitos, estendendo a formulação para a solução de problemas que envolvam, por exemplo, elementos de treliça em três dimensões, elementos de viga e elementos de cascas com os respectivos efeitos não lineares.

Pode-se testar a viabilidade de se utilizar outras funções objetivo. Um exemplo seria a utilização de uma norma do resíduo, por exemplo $|\psi|$. Neste caso, a função objetivo deixa

de ser quadrática talvez dificultando a solução. Mas certamente outras possibilidades podem ser investigadas.

Outros tipos de restrições também podem ser propostas para assegurar que alguns casos não considerados, e que caracterizam limitações atuais, passem a apresentar uma única solução.

Outro aspecto que necessita estudo e investigação é um critério para compatibilizar dimensionalmente as restrições e parâmetros de convergência para que problemas quaisquer possam ser calculados sem a necessidade prévia de ajustes de escala por parte do usuário. Talvez essa seja uma das razões do emprego da restrição cilíndrica ao invés da restrição esférica em algumas situações. Uma comparação neste sentido pode ser conduzida. Salienta-se que, particularmente para os exemplos escolhidos, procurou-se adequar as escalas dos deslocamentos e das forças aplicadas no sentido de compatibilizar dimensionalmente os termos da restrição esférica.

A idéia de se trabalhar com outros tipos de não linearidade também é uma extensão natural, por exemplo, incluindo efeitos de não linearidade de material nos problemas formulados. Pode-se propor a aplicação do método em problemas dinâmicos, como por exemplo, na determinação de funções de resposta em frequência não lineares (Ferreira and Serpa, 2005) e em problemas de contato e vibro-impacto que também envolvem respostas não lineares.

Referências

- Argyris, J. H. (1965). Continua and discontinua. *Proceedings of the 1st Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics*, 11:189.
- Bathe, K. J. (1982). *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice-Hall.
- Batoz, J. L. and Dhatt, G. (1979). Incremental displacement algorithms for nonlinear problems. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 14(8):1262–1267.
- Bazaraa, M. S., Sherali, H., and Shetty, C. M. (1993). *Nonlinear Programming - Theory and Algorithms*. John Wiley & Sons.
- Bergan, P. J. (1979). Solution algorithms for nonlinear structural problems. *International Conference on Engineering Applications of the F.E. Method*.
- Branch, M. A. and Grace, A. (1996). *Optimization Toolbox - Users Guide*. The Mathworks Inc.
- Chen, W. F. and Saleeb, A. F. (1982). *Constitutive Equations for Engineering Materials, Vol. 1, Elasticity and Modeling - Part One*. John Wiley & Sons.
- Cook, R. D., Malkus, D. S., and Plesha, M. E. (1989). *Concepts and Applications of finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, 3rd edition.
- Crisfield, M. (1991a). *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Vol. 1*. John Wiley & Sons.
- Crisfield, M. (1991b). *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Vol. 2*. John Wiley & Sons.

- Crisfield, M. A. (1981). A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap-through. *Computers and Structures*, 13:55–62.
- Crisfield, M. A. (1983). An arc-length method including line searches and accelerations. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 19(5):43–59.
- Feng, Y. T., Peric, D., and Owen, D. R. J. (1995). Determination of travel directions in path-following methods. *Mathl. Comput. Modelling*, 21(7):43–59.
- Ferreira, J. V. and Serpa, A. L. (2005). Application of the arc-length method in nonlinear frequency response. *Journal of Sound and Vibration*, to appear.
- Geers, M. G. D. (1999). Enhanced solution control for physically and geometrically nonlinear problems. part-1 - the subplane control approach. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 46:177–204.
- Haisler, W. E., Stricklin, J. A., and Key, J. E. (1977). Displacement incrementation in nonlinear structural analysis by the self-correcting method. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 11:3–10.
- Hellweg, H. B. and Crisfield, M. A. (1998). A new arc-length method for handling sharp snap-backs. *Computer and Structures*, 66(5):705–709.
- Kwon, Y. E. and Bang, H. (1997). *The Finite Element Method Using Matlab*. CRC Press.
- Luenberger, D. G. (1984). *Linear and Nonlinear Programming*. Addison-Wesley, Reading, Mass, 2nd edition.
- Powell, G. and Simons, J. (1981). Improved iteration strategy for nonlinear structures. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 17:1455–1467.
- Przemieniecki, J. S. (1968). *Theory of Matrix Structural Analysis*. Dove Publications Inc.
- Qi, Z. and Tianqi, Y. (1995). The adaptive parameter incremental method for the analysis of snapping problems. *Applied Mathematics and Mechanics*, 16(9):851–858.

- Richter, S. L. and DeCarlo, R. A. (1983). Continuation methods - theory and applications. *IEEE Transactions on Automatic*, 28(6):660-665.
- Riks, E. (1972). The application of newton's method to the problem of elastic stability. *Journal of Applied Mechanics*, 39:1060-1066.
- Schittowski, K. (1985). Nlqpl: A fortran-subroutine solving constrained nonlinear programming problems. *Annals of Operations Research*, 5:485-500.
- Widjaja, B. R. (1998). Path-following technique based on residual energy supression for non-linear finite element analysis. *Computers and Structures*, 66(2-3):201-209.
- Wright, E. W. and Gaylord, E. H. (1968). Analysis of umbraced multi-storey steel rigid frames. *Journal of Structural Division*, pages 1143-1163.
- Zienkiewicz, O. C. (1971). *The Finite Element Method*. MacGraw-Hill, New York.
- Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. H. (1991). *The Finite Element Method, Volume 2 - Solid and Fluid Mechanics, Dynamics and Non-linearity*. MacGraw-Hill, New York, 4th edition.

Apêndice A

Dedução analítica para o exemplo de treliça com 2 graus de liberdade

Para a estrutura da figura A.1 composta por dois elementos de treliça, é possível escrever a função que descreve o deslocamento em função da força aplicada considerando que o problema é simétrico e portanto pode ser representado pelo esquema da figura A.2.

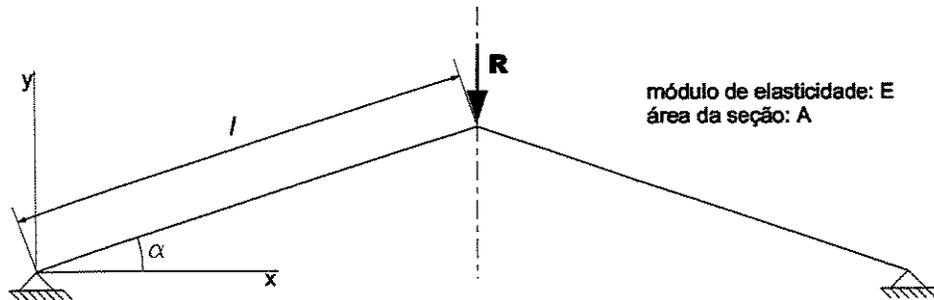


Figura A.1: Esquema da treliça para solução analítica.

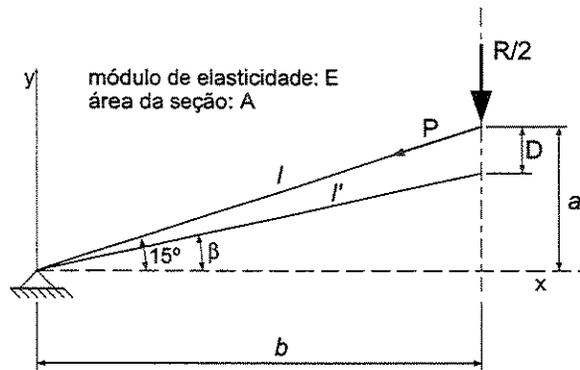


Figura A.2: Esquema da formulação simétrica usada para solução analítica da treliça com 2 graus de liberdade.

Portanto, pode-se dizer que:

$$l'^2 = b^2 + (a - \Delta)^2 \Rightarrow l' = \sqrt{b^2 + (a - \Delta)^2}, \quad (\text{A.1})$$

e sabe-se também que:

$$\sin 15 = \frac{a}{l}; \quad (\text{A.2})$$

$$\cos 15 = \frac{b}{l}. \quad (\text{A.3})$$

Substituindo-se as equações (A.2) na equação (A.1), obtém-se:

$$l' = \sqrt{(l \cos 15)^2 + (l \sin 15 - \Delta)^2} = l - \Delta l. \quad (\text{A.4})$$

Pode-se definir Δl pela seguinte expressão:

$$\Delta l = \frac{Pl}{AE}, \quad (\text{A.5})$$

onde:

$$P = K\Delta l \quad (\text{A.6})$$

é a força axial na barra e

$$K = \frac{AE}{l}. \quad (\text{A.7})$$

Para uma posição em equilíbrio tem-se que:

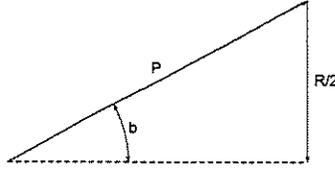


Figura A.3: Equilíbrio entre forças externas e internas.

Da figura A.3 pode-se escrever que:

$$\text{sen}\beta = \frac{R/2}{P} \Rightarrow \quad (\text{A.8})$$

$$P = \frac{R}{2\text{sen}\beta}. \quad (\text{A.9})$$

Também pode ser dito que:

$$\text{sen}\beta = \frac{a - \Delta}{l'} = \frac{l \sin 15 - \Delta}{l - \Delta l}. \quad (\text{A.10})$$

Substituindo a equação (A.8) na equação (A.5), tem-se:

$$\begin{aligned} \Delta l &= \frac{P}{K} = \frac{R}{2K \text{sen}\beta} = \frac{R}{2K} \frac{l - \Delta l}{l \text{sen}15 - \Delta} \Rightarrow \\ \Delta l &= \frac{Rl}{2K(l \text{sen}15 - \Delta)} - \frac{R\Delta l}{2K(l \text{sen}15 - \Delta)} \Rightarrow \\ \Delta l \left(1 + \frac{R}{2K(l \text{sen}15 - \Delta)} \right) &= \frac{Rl}{2K(l \text{sen}15 - \Delta)} \Rightarrow \\ \Delta l &= \frac{Rl}{2K(l \text{sen}15 - \Delta)} \frac{1}{\left(1 + \frac{R}{2K(l \text{sen}15 - \Delta)} \right)} \Rightarrow \\ \Delta l &= \frac{Rl}{2K(l \text{sen}15 - \Delta) + R}. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Escrevendo a equação de deformação $l - \Delta l$ e utilizando a equação (A.11), obtém-se:

$$\begin{aligned}
l - \frac{Rl}{2K(l\text{sen}15 - \Delta) + R} &= \sqrt{(l\text{cos}15)^2 + (l\text{sen}15 - \Delta)^2} \Rightarrow \\
\frac{Rl}{2K(l\text{sen}15 - \Delta) + R} &= l - \sqrt{l^2\text{cos}^215 + l^2\text{sen}^215 - 2l\text{sen}15\Delta + \Delta^2} \Rightarrow \\
\frac{Rl}{2K(l\text{sen}15 - \Delta) + R} &= l - \sqrt{l^2 - 2l\text{sen}15\Delta + \Delta^2} \Rightarrow \\
Rl &= (2K(l\text{sen}15 - \Delta) + R)(l - \sqrt{l^2 - 2l\text{sen}15\Delta + \Delta^2}) \Rightarrow \\
Rl &= [2Kl(\text{sen}15 - \frac{\Delta}{l}) + R][l(1 - \sqrt{1 - \frac{2\Delta}{l}\text{sen}15 + (\frac{\Delta}{l})^2})] \Rightarrow \\
Rl &= 2Kl(\text{sen}15 - \frac{\Delta}{l})[l(1 - \sqrt{1 - \frac{2\Delta}{l}\text{sen}15 + (\frac{\Delta}{l})^2})] + Rl(1 - \sqrt{1 - \frac{2\Delta}{l}\text{sen}15 + (\frac{\Delta}{l})^2}) \Rightarrow \\
Rl[1 - (1 - \sqrt{1 - \frac{2\Delta}{l}\text{sen}15 + (\frac{\Delta}{l})^2})] &= 2Kl(\text{sen}15 - \frac{\Delta}{l})[l(1 - \sqrt{1 - \frac{2\Delta}{l}\text{sen}15 + (\frac{\Delta}{l})^2})] \Rightarrow \\
\frac{R}{2Kl} &= \frac{(1 - \sqrt{1 - \frac{2\Delta}{l}\text{sen}15 + (\frac{\Delta}{l})^2})(\text{sen}15 - \frac{\Delta}{l})}{\sqrt{1 - \frac{2\Delta}{l}\text{sen}15 + (\frac{\Delta}{l})^2}} \Rightarrow \\
\frac{R}{2Kl} &= \{-1 + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2\Delta}{l}\text{sen}15 + (\frac{\Delta}{l})^2}}\}(\text{sen}15 - \frac{\Delta}{l}), \tag{A.12}
\end{aligned}$$

que representa a relação entre a carga R e o deslocamento Δ (Bathe, 1982).