UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Implementação do Cálculo das Tensões em Placas Laminadas de Materiais Compósitos usando o Método dos Elementos de Contorno

Autor: Fernando Luiz Torsani
Orientador: Prof. Dr. Éder Lima de Albuquerque
Co-orientador: Prof. Dr. Paulo Sollero

72/2008

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

Implementação do Cálculo das Tensões em Placas Laminadas de Materiais Compósitos usando o Método dos Elementos de Contorno

Autor: Fernando Luiz Torsani
Orientador: Prof. Dr. Éder Lima de Albuquerque
Co-orientador: Prof. Dr. Paulo Sollero

Curso: Engenharia Mecânica
Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Dissertação de mestrado acadêmico apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2007
SP –Brasil

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

T638i	Torsani, Fernando Luiz Implementação do cálculo das tensões em placas laminadas de materiais compósitos usando o método dos elementos de contorno / Fernando Luiz Torsani. -- Campinas, SP: [s.n.], 2007. Orientadores: Éder Lima de Albuquerque, Paulo Sollero Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica. 1. Placas (Engenharia). 2. Materiais compostos. 3. Materiais laminados. 4. Métodos de elementos de contorno. 5. Deformações e tensões. I. Albuquerque, Éder Lima de. II. Sollero, Paulo. III. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. IV. Título.

Título em Inglês: Implementation the computation of stresses in composite laminate plates using the boundary element method
Palavras-chave em Inglês: Plates, Composite materials, Laminate, Boundary element method, stress, Failure criteria
Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico
Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica
Banca examinadora: Rogério José Marczak e Leandro Palerno Júnior
Data da defesa: 11/07/2007
Programa de Pós-Graduação: Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

Implementação do Cálculo das Tensões em Placas Laminadas de Materiais Compósitos usando o Método dos Elementos de Contorno

Autor: Fernando Luiz Torsani
Orientador: Prof. Dr. Éder Lima de Albuquerque
Co-orientador: Prof. Dr. Paulo Sollero

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:

____
Prof. Dr. Rogério José Marczak
DEMEC-UFRGS

____
Prof. Dr. Leandro Palermo Júnior
FEC-UNICAMP

____
Prof. Dr. Éder Lima de Albuquerque
FEM-UNICAMP

Campinas, 11 de julho de 2007

Dedicatória

Dedico este trabalho à Cristiane, minha esposa.

Agradecimentos

Agradeço aqui a todos que, de uma forma ou de outra, colaboraram para a realização deste trabalho.

À Cristiane, pela compreensão.

Aos meus pais, Antonio e Natalina, pelo incondicional apoio.

Ao Professor Éder, pela orientação, pelo apoio e principalmente pela amizade.

Ao Professor Paulo Sollero, por seu sempre presente incentivo, desde longa data.

A todos os Professores dos departamentos de Projeto Mecânico e Mecânica Computacional que contribuíram para a minha formação e para a realização deste trabalho.

Aos colegas e amigos pelo tempo que passamos juntos a dividir nossas dúvidas e soluções, em especial à Adriana e ao Jairo.

Às empresas Cérebro e Mixing, nas pessoas dos engenheiros Edimilson e António Carlos pelo tempo disponibilizado e pelas idéias e esclarecimentos.

“(...) Nunca paramos de investigar.
Nunca nos satisfazemos com o que sabemos.
Mal encontramos resposta para uma pergunta, formulamos logo outra.
É esse o maior truque da nossa espécie para continuar a sobreviver.”
Desmond Morris

Resumo

TORSANI, Fernando Luiz, *Implementação do Cálculo das Tensões em Placas Laminadas de Materiais Compósitos usando o Método dos Elementos de Contorno*, Campinas, Universidade Estadual de Campinas, 2007. 106 p. Dissertação de Mestrado.

O presente trabalho tem por objetivo o cálculo de tensões em pontos no interior do domínio de placas finas anisotrópicas usando o método dos elementos de contorno. As equações integrais de contorno para deslocamentos e rotações em placas anisotrópicas são apresentadas. as derivadas de segunda ordem da equação integral de deslocamento são desenvolvidas. A partir destas equações, são calculadas as deformações e, em seguida, as tensões. Por fim são desenvolvidos procedimentos para o cálculo de critérios de falha para materiais anisotrópicos, analisando a falha em cada uma das lâminas. Exemplos são apresentados usando as rotinas desenvolvidas, cujos resultados são comparados com soluções encontradas na literatura. Os resultados obtidos pelas análises numéricas apresentam boa concordância com os resultados da literatura indicando a sua aplicabilidade em problemas reais de engenharia.

Palavras-chave

Placas, Materiais Compósitos, Laminados, Método dos Elementos de Contorno, Tensão, Critérios de Falha.

Abstract

TORSANI, Fernando Luiz, *Implementation the Computation of Stresses in Composite Laminate Plates using the Boundary Element Method*, Campinas, State University of Campinas, 2007. 106 p. Master Degree Dissertation.

The objective of the present work is the calculation of stresses in domain internal points of anisotropic thin plates using the boundary element method. Boundary integral equations for displacements and rotations in anisotropic plates are presented. Second order derivatives of the integral equation of displacement are developed. From these equations, strains and stresses are calculated. Finally procedures for the calculation of failure criteria for anisotropic materials are developed, analyzing the failure in each laminae of the laminate. Examples are presented using the developed routines, whose results are compared with solutions found in literature. Results for the numerical analysis present good agreement with results from the literature, indicating its applicability in real engineering problems.

Keywords

Plates, Composite Materials, Laminate, Boundary Element Method, Stress, Failure Criteria.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Lista de Símbolos

Letras gregas

α = Ângulo.

ε = Deformação normal.

ϕ = Ângulo.

Γ = Contorno.

γ = Deformação cisalhante.

μ = Raiz da equação característica.

ν = Razão de Poisson.

Ω = Domínio.

θ = Ângulo.

ρ = Distância.

σ = Tensão normal.

τ = Tensão cisalhante.

Letras arábicas

A = Matriz de rigidez extensional.

$\mathbf{a}$ = Matriz.

$\mathbf{B}$ = Matriz de rigidez de acoplamento.

C, G, H, K = Constantes.

$\mathbf{D}$ = Matriz de rigidez de flexão.

$\mathbf{D}'$ = Inversa da matriz $\mathbf{D}$.

d_i = Parte real da raiz.

E = Módulo de elasticidade.

e_1 = Parte imaginária.

g = Força elementar.

M, m = Momento.

N = Função de interpolação.

$\mathbf{n}$ = Vetor normal ao contorno.

Q = Ponto campo.

$\mathbf{Q}$ = Matriz de rigidez.

$\overline{\mathbf{Q}}$ = Inversa da matriz $\mathbf{Q}$.

q = Força distribuída.

R_i = Função.

r_i, s_i, q_i, p_i = Constantes.

S_i = Função.

$\mathbf{T}$ = Matriz de transformação.

t = Espessura da placa.

u, v = Deslocamento.

V = Condições de contorno.

w = Deslocamento transversal.

X = Tensão admissível na direção x.

Y = Tensão admissível na direção y.

S = Tensão cisalhante admissível.

x, y, z = Eixos principais.

z = Distância transversal do plano médio à um ponto.

Subscritos

Γ = Contorno.

Ω = Domínio.

1, 2, 3 = Direções principais.

c = Compressão, elemento contínuo.

d = Elemento descontínuo.

L = Direção longitudinal às fibras.

n = Direção normal.

ns = Direção tangencial.

T = Direção transversal às fibras.

t = Tração.

x, y, z = Direções principais do sistema de coordenadas.

Sobrescritos

1, 2, 3 = Nós do elemento.

$*$ = Soluções fundamentais.

Capítulo 1

Introdução

O presente trabalho trata de três assuntos: as placas, os materiais compósitos e o método dos elementos de contorno. A seguir são apresentadas as razões para a escolha desses três assuntos como objeto de estudo, bem como um pouco de sua história.

As placas são elementos estruturais bidimensionais, assim como as chapas e as cascas. São planas como as chapas, porém sujeitas a cargas perpendiculares ao seu plano médio enquanto as chapas estão sujeitas somente a cargas paralelas ao seu plano médio. As cascas também suportam essas mesmas cargas perpendiculares ao plano médio, porém apresentam curvatura, o que lhes dá uma grande vantagem estrutural.

As placas tem sido usadas desde muito tempo pelos humanos e há muito mais tempo pela natureza para resolver de forma simples alguns problemas técnicos. As asas de uma borboleta podem ser simplificadas como placas, planas e sujeitas à pressão do ar durante o seu movimento alternante.

Muitos problemas encontrados em nossa história foram resolvidos com o uso de placas: barragens de rios, silos para grãos, telhados, reservatórios retangulares para fluidos, vasos de pressão, lajes, etc.

A composição de diferentes materiais visando alcançar propriedades físicas, mecânicas ou químicas não atendidas pelos componentes isoladamente é uma técnica conhecida desde antes do entendimento das próprias propriedades. Este material, obtido a partir desta composição, é chamado de material compósito. Como citado por Paiva (2005) vários povos antigos, cuja história foi registrada na bíblia, como os hebreus, egípcios e assírios, misturavam palha de materiais fibrosos ao barro para a obtenção de tijolos com maior resistência mecânica. Outra técnica antiga de construção utiliza uma malha de bambu ou madeira recoberta e preenchida com barro (Figura 1). Enquanto a malha, muitas vezes em camadas alternadamente na horizontal e vertical, é responsável pela resistência das paredes, o barro mantém a integridade da estrutura e tem a função de vedação. Esta técnica é até hoje utilizada não somente para a construção de moradias simples, mas também para construções de maior porte, com vários pisos.

Artifício semelhante é largamente utilizado nas construções de concreto onde a malha substituiu o bambu pelo aço e o barro foi substituído pelo concreto. Atualmente existem também estudos para a utilização de fibras metálicas misturadas ao concreto melhorando a sua resistência a fratura.

Além disso, muitos materiais compostos existentes na natureza são utilizados com sucesso pela humanidade, como a madeira, cuja direção dos veios apresenta uma resistência à tração muito superior à direção transversal às suas fibras. A madeira foi inclusive o principal material usado para construção de habitações, móveis e até máquinas durante boa parte da nossa história. Procurando melhorar ainda mais a suas propriedades, a madeira é cortada em lâminas, que são coladas alternando-se a direção das fibras. Desta forma são obtidas placas de madeira laminada ou compensada com propriedades mais homogêneas e melhores. A madeira também é picada e prensada com uma resina ou cola, obtendo-se o aglomerado ou o MDF, largamente utilizado na indústria moveleira.

Com o início da utilização dos polímeros para construção mecânica, a mistura de materiais na forma de fibras ou partículas às resinas para melhora de suas propriedades intensificou-se, sendo hoje prática comum na indústria. Aos termoplásticos, como o polietileno, são misturadas fibras de vidro picada e talco para a obtenção de uma melhor resistência à tração bem como uma maior rigidez. Resinas termofixas como o epóxi são moldadas em lâminas junto com fibras de vidro longas, boro, fibras de carbono e outras para a obtenção de materiais de alta performance.

As fibras de vidro laminadas com resinas termofixas tem sido usadas para a fabricação dos mais variados produtos, desde tanques e vasos de pressão, até carrocerias de automóveis, como o Corvette, o Puma e o Aurora. Além de dar origem a um material com boa resistência mecânica e de fácil manipulação, tem um custo altamente competitivo e grande flexibilidade de design, permitindo virtualmente a construção de qualquer peça que seja imaginada. Esta última qualidade torna-o altamente competitivo em um mundo que valoriza cada dia mais as formas arredondadas, orgânicas e sensuais.

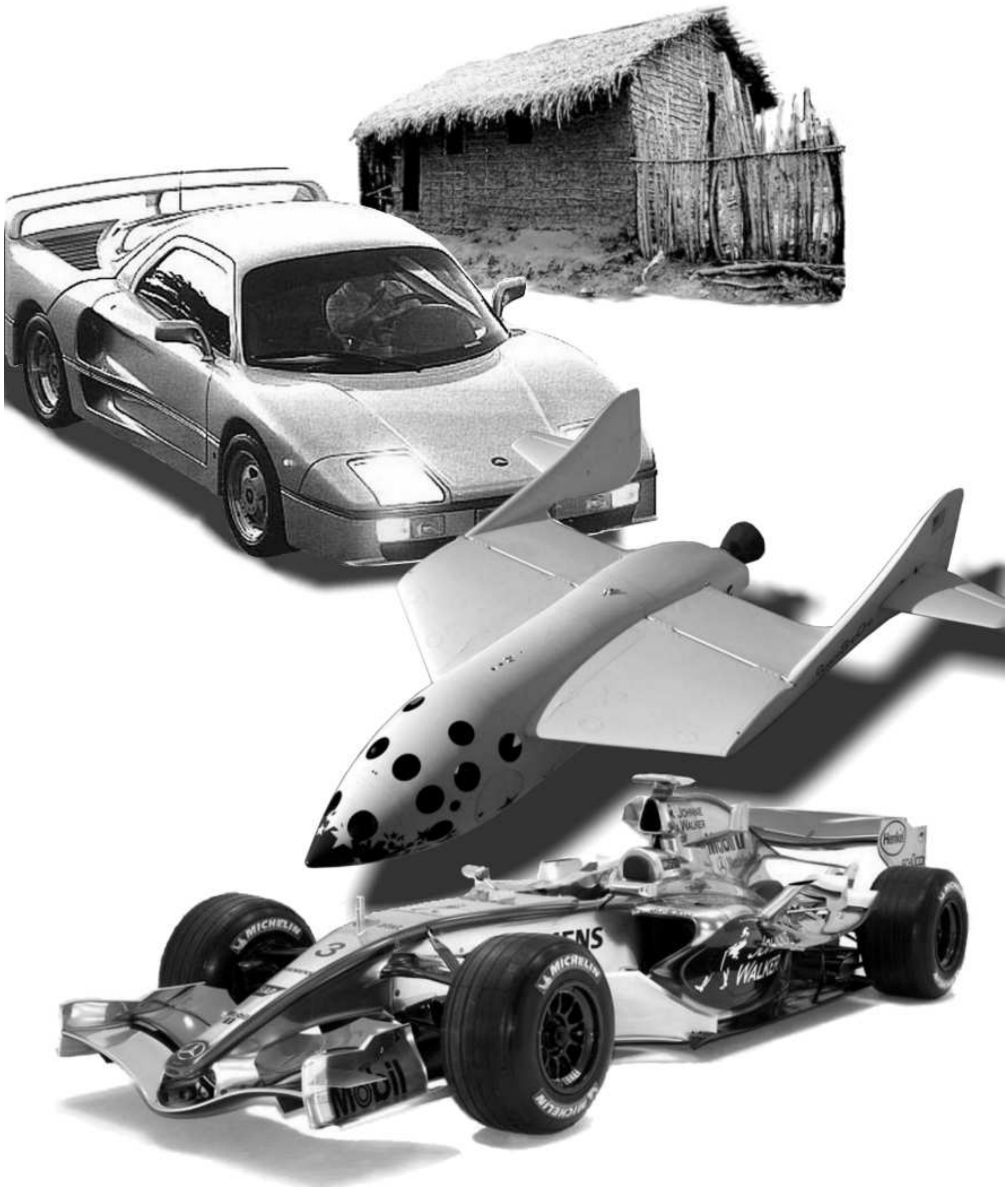

Figura 1: Alguns exemplos do uso de materiais compósitos.

Da mesma forma, a fibra de carbono e o kevlar oferecem flexibilidade de design e facilidade para a fabricação, além do baixo peso, porém o seu custo é ainda proibitivo para a maioria das aplicações, sendo reservados para aplicações de alta performance como naves espaciais e carros de corrida (Figura 1).

Na Figura 1 são mostrados a partir do topo: casa de pau-a-pique, com paredes em barro e bambu, protótipo nacional Aurora 122-C, com carroceria em fibra de vidro, space ship one, com estrutura laminada em fibra de carbono e McLaren 2006 com chassi, elementos de suspensão e carroceria, entre outros elementos, em fibra de carbono.

O uso intensivo de estruturas de material compósito em projetos de engenharia tem requerido procedimentos numéricos precisos e confiáveis para o tratamento de problemas estruturais em material anisotrópico. Como a anisotropia aumenta o número de constantes elásticas do material, a análise de estruturas em laminados compósitos torna-se mais difícil. Particularmente, na formulação de elementos de contorno, um grande número de variáveis implica em uma grande dificuldade na derivação das soluções fundamentais. Este aspecto fica evidente na literatura. Nota-se que o número de referências nas quais o método dos elementos de contorno é aplicado para estruturas anisotrópicas é significativamente menor do que aqueles que tratam de materiais isotrópicos. Contudo, nos últimos dez anos, importantes avanços nas técnicas de elementos de contorno aplicados a materiais anisotrópicos foram publicados. Por exemplo, problemas de elasticidade plana foram analisados por Sollero e Aliabadi (1993), Sollero e Aliabadi (1995), Deb (1996), Albuquerque, Sollero e Aliabadi (2002), Albuquerque, Sollero e Fedelinski (2003a), Albuquerque, Sollero e Fedelinski (2003b), Albuquerque, Sollero e Aliabadi (2004), problemas de elasticidade fora do plano por Zhang (2000), problemas tri-dimensionais por Kogl e Gaul (2000b), Kogl e Gaul (2000a), Kogl e Gaul (2003) e placas de Kirchhoff por Albuquerque et al. (2006).

As formulações de elementos de contorno têm sido aplicadas a problemas de flexão em placas anisotrópicas, considerando a teoria de Kirchhoff, bem como teorias de placas deformáveis ao cisalhamento. Shi e Bezine (1988) apresentam uma análise por elementos de contorno de problemas de flexão em placa usando a solução fundamental proposta por Wu e Altiero (1981) baseadas nos pressupostos de flexão da placa de Kirchhoff. Rajamohan e Raamachandran (1999) propõem uma formulação na qual as singularidades são evitadas por pontos fontes colocados fora do domínio. Paiva, Sollero e Albuquerque (2003) apresentaram um tratamento analítico para integrais singulares e hipersingulares da formulação proposta por Shi e Bezine (1988). Placas deformáveis por cisalhamento tem sido analisadas usando o método dos elementos de contorno por Wang e Schweizerhof (1996), Wang e Schweizerhof (1997) com a solução fundamental proposta por Wang e Schweizerhof (1995).

No método dos elementos de contorno para flexão de placas, as integrais de domínio dificultam a formulação devido a presença de forças distribuídas no domínio. Com o objetivo de resolver estas integrais, o esquema de integração por células pode dar resultados precisos, como demonstrado por Shi e Bezine (1988) para problemas de flexão em placas anisotrópicas. Contudo, a discretização do domínio em células reduz uma das principais vantagens do método dos elementos de contorno que é a discretização somente do contorno. Uma alternativa para este procedimento foi apresentada por Rajamohan e Raamachandran (1999) que propuseram o uso de soluções particulares para aproximar a discretização do domínio. Entretanto, o uso de soluções particulares requer a busca de uma função aplicável que satisfaça a equação governante (RAJAMOHAN; RAAMACHANDRAN, 1999). Dependendo do quão complexa seja a equação governante, esta função pode ser difícil de ser encontrada.

Neste trabalho, integrais de domínio que admitem carga distribuída são transformadas em integrais de contorno por transformação exata usando o método da integração radial. Este método foi inicialmente apresentado por Venturini (1988) para problemas de flexão em placas isotrópicas. Recentemente, Gao (2002) estendeu o método para problemas de elasticidade isotrópica tridimensional e Albuquerque et al. (2006) para placa de Kirchhoff anisotrópica. Dois casos de carregamento foram considerados: forças uniformemente distribuídas e forças hidrostaticamente distribuídas. Como mostrado por Gao (2002), este método pode ser aplicado para transformar qualquer integral de domínio em integral de contorno. O recurso mais interessante do método é sua simplicidade, já que somente a variável radial é integrada. Para integrais de domínio que incluem variáveis desconhecidas, o procedimento proposto pode ser aplicado usando a função de base radial como no método da dupla reciprocidade sugerido por Gao (2002).

Os trabalhos citados têm como foco o cálculo da deflexão de placas anisotrópicas. Estes resultados, embora importantes, não são suficientes para a análise e dimensionamento de estruturas reais, limitando sua aplicação prática. Assim, o principal objetivo deste trabalho é a implementação de ferramentas computacionais que forneçam os dados suficientes para a análise e para o dimensionamento de placas construídas de material anisotrópico, em especial as placas em material compósito laminado.

Com este objetivo são complementadas e desenvolvidas as integrais de contorno necessárias para o cálculo das deformações nos pontos internos de cada placa do laminado, além de implementadas as rotinas para o cálculo das tensões nesses mesmos pontos.

Visando ainda fornecer uma ferramenta de maior aplicabilidade, foram implementadas as rotinas para a análise da falha do laminado utilizando o critério de falha de Tsai-Wu. Desta forma, a ferramenta implementada pretende oferecer ao projetista não somente valores de tensão, mas também uma estimativa do coeficiente de segurança da placa ou indicar os pontos críticos, mais suscetíveis a falha.

Capítulo 2

Materiais Compósitos

2.1 Materiais anisotrópicos

Os materiais anisotrópicos apresentam duas facetas interessantes e antagônicas. Se por um lado o grande número de variáveis e constantes elásticas necessárias para descrever o seu comportamento tornam sua análise extremamente trabalhosa e complexa, por outro essas mesmas variáveis oferecem ao projetista uma gama enorme de opções para a otimização do elemento projetado. As propriedades mecânicas podem ser maximizadas em determinadas direções, justamente àquelas que estarão sujeitas a maiores solicitações, sem um aumento significativo de peso. De forma intrínseca praticamente todo material tem um certo grau de anisotropia, ou seja, apresentam alguma diferença entre as suas propriedades nas diferentes direções. Essa anisotropia pode, em muitos casos, ser ignorada por não ser relevante para uma determinada aplicação. O exemplo mais importante desse comportamento é o aço laminado, no qual é notada uma resistência à tração ligeiramente maior na direção de laminação. Na maioria das aplicações essa diferença não é importante, porém em outras ela pode ser determinante. O exemplo mais conhecido de material anisotrópico é, sem dúvida, a madeira com seus veios, cuja direção determina a sua maior resistência.

2.1.1 Material compósito laminado

Os materiais compósitos são aqueles constituídos por duas ou mais fases bem definidas, geralmente com propriedades mecânicas bastante distintas. As duas fases sempre presentes são a matriz e o reforço. A matriz é um material homogêneo que tem a finalidade de aglutinar as fibras ou partículas do material de reforço. O material de reforço tem a função de aumentar a resistência mecânica do elemento. Pode estar na forma de fibras curtas, fibras longas ou de partículas. As fibras curtas e particulados são largamente utilizados como reforço em materiais termoplásticos injetados. Nestes materiais são acrescentados principalmente fibras de vidro picadas e talco industrial para aumentar a rigidez e a resistência mecânica dos componentes injetados. Nestes casos busca-se geralmente um comportamento isotrópico e o controle da direção preferencial das fibras é quase nulo. As fibras longas, por sua vez, são usadas com matrizes de resinas termofixas como o poliéster e epóxi. Permitem um maior controle das propriedades mecânicas anisotrópicas pelo direcionamento das fibras e sua proporção na composição do material.

2.1.2 Propriedades da lâmina unidirecional

Segundo Holmes e Just (1983) as propriedades elásticas de uma lâmina de material compósito reforçado com fibras longas unidirecionais (Figura 2) podem ser avaliadas a partir de uma visão macroscópica, considerando esta lâmina como um material homogêneo. Assim, qualquer propriedade elástica (C) desta lâmina pode ser expressa como:

$$C = C(E_f, \nu_f, V_f, E_m, \nu_m, V_m) \tag{2.1}$$

onde os subscritos f e m referem-se respectivamente à fibra e à matriz. E é o módulo de elasticidade, ν é a razão de Poisson e V é a proporção em volume de cada componente da lâmina compósita.

As propriedades elásticas necessárias para a determinação do comportamento da lâmina, e posteriormente do laminado, são:

- O módulo de elasticidade longitudinal (na direção das fibras) (E_L).
- O módulo de elasticidade transversal (ortogonal às fibras) (E_T).
- O módulo de cisalhamento (G_{LT}).
- A razão de Poisson (ν_{LT}).

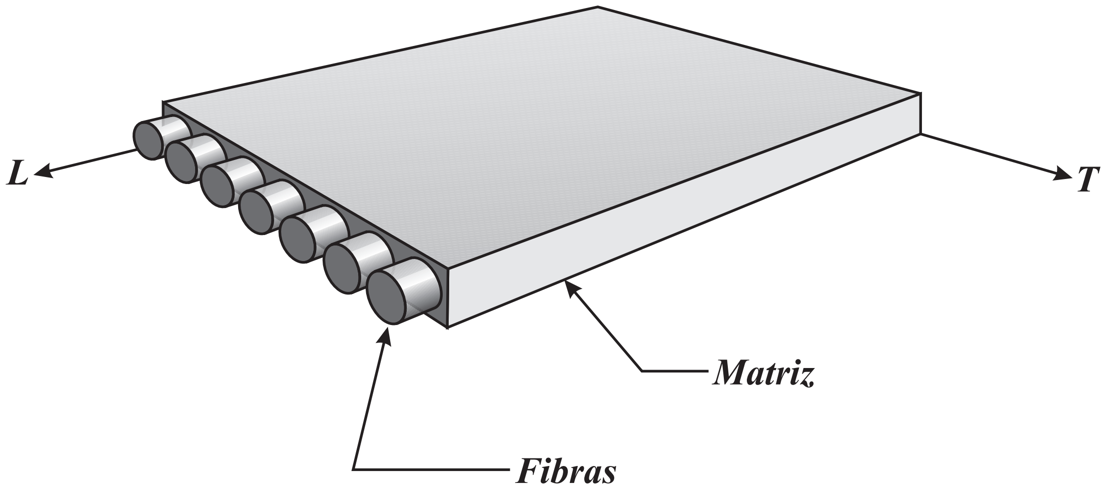

Figura 2: Lâmina compósita reforçada com fibras longas unidirecionais

- A razão de Poisson (ν_{TL}).

Os subscritos L e T referem-s respectivamente às direções longitudinal e transversal à direção das fibras.

Holmes e Just (1983) apresentam as relações entre as propriedades dos componentes da lâmina, fibra e matriz, e as propriedades da lâmina válidas para placas reforçadas unidirecionalmente, dadas por:

$$E_L = (E_f - E_m) V_f + E_m \tag{2.2}$$

$$\nu_{LT} = (\nu_f - \nu_m) V_f + \nu_m \tag{2.3}$$

$$E_T = \frac{E_f E_m}{E_m V_f + E_f (1 - V_f)} \tag{2.4}$$

$$\nu_{TL} = \nu_{LT} \frac{E_T}{E_L} \tag{2.5}$$

$$G_{LT} = \frac{G_f G_m}{G_m V_f + G_f (1 - V_f)} \tag{2.6}$$

onde $G_f = \frac{E_f}{2\left(1+\nu_f\right)}$ e $G_m = \frac{E_m}{2(1+\nu_m)}$, sendo que o subíndice f se refere às propriedades da fibra e m às propriedades da matriz.

Ainda segundo Holmes e Just (1983), estes resultados teóricos são consistentes com resultados experimentais, desconsiderando os efeitos do tempo de ensaio e da temperatura.

2.1.3 Equação constitutiva do laminado

Como apresentado por Agarwal e Broutman (1990), as tensões em cada lâmina podem ser calculadas a partir das deformações como segue:

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} \tag{2.7}$$

onde a matriz $\left[\overline{Q}\right]$ é dada por:

$$\left[\overline{Q}\right] = [T]^{-1} [Q] [T] . \tag{2.8}$$

A matriz de transformação $[T]$ é dada por:

$$[T] = \left[\begin{array}{ccc} cos^2\theta & sin^2\theta & 2sin\theta cos\theta \\ sin^2\theta & cos^2\theta & -2sin\theta cos\theta \\ -sin\theta cos\theta & sin\theta cos\theta & cos^2\theta - sin^2\theta \end{array} \right] \tag{2.9}$$

e a matriz de rigidez $[Q]$ é dada, em termos das constates de engenharia, por:

$$[Q] = \left[\begin{array}{ccc} \frac{E_L}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & \frac{\nu_{LT}E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & 0 \\ \frac{\nu_{LT}E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & \frac{E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{LT} \end{array} \right] \tag{2.10}$$

As tensões nas direções longitudinal e transversal do reforço com fibras podem ser calculadas por:

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \tau_{LT} \end{array} \right\} = [T] \left\{ \begin{array}{c} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{array} \right\} \tag{2.11}$$

Com estas tensões calculadas em cada ponto de cada lâmina, podem ser aplicados critérios de falha para a avaliação da resistência da placa.

Uma vez definidas as propriedades elásticas de cada lâmina, a equação constitutiva da placa laminada é escrita por Agarwal e Broutman (1990) como:

$$\left\{ \begin{array}{c} N \\ M \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} A & B \\ B & D \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \epsilon \\ k \end{array} \right\} \tag{2.12}$$

onde as matrizes A, B e D são, respectivamente, chamadas de matriz de rigidez extensional, matriz de rigidez de acoplamento e matriz de rigidez de flexão e são dadas por Agarwal e Broutman (1990) como:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \left(\overline{Q}_{ij}\right)_k (h_k - h_{k-1}) \tag{2.13}$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\overline{Q}_{ij}\right)_k \left(h_k^2 - h_{k-1}^2\right) \tag{2.14}$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} \left(\overline{Q}_{ij}\right)_k \left(h_k^3 - h_{k-1}^3\right) \tag{2.15}$$

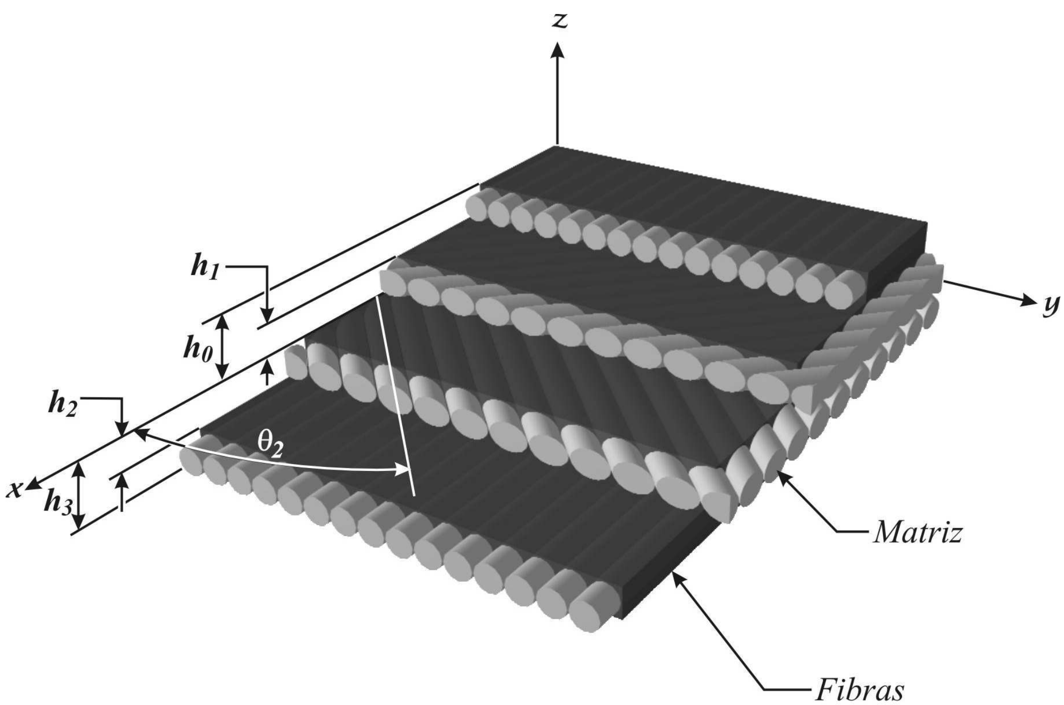

Figura 3: Compósito laminado com quatro lâminas

A matriz de rigidez extensional relaciona as forças resultantes à deformação no plano médio, e a matriz de rigidez de flexão relaciona os momentos resultantes à curvatura da placa. A matriz de rigidez de acoplamento implica em acoplamento entre a flexão e a extensão de uma placa laminada. Isto é, forças normais e cisalhantes agindo no plano médio da placa resultam em deformações não somente no plano mas também torção e flexão que podem produzir a curvatura da placa.

2.2 Critérios de falha

Em engenharia e, mais precisamente no projeto de máquinas e estruturas, o conhecimento do comportamento dos materiais utilizados é fundamental. É esse conhecimento que determinará se um material é adequado ao projeto ou não, se suportará as solicitações a ele impostas e por quanto tempo suportará.

Em geral, o comportamento de um material é observado e medido experimentalmente, através de testes como o de tração, onde amostras padronizadas, os corpos de prova, são submetidas a esforços uni-axiais de tração para o levantamento de suas propriedades mecânicas: módulos de elasticidade, tensões de escoamento, limite de ruptura e razão de Poisson, dentre outras.

A partir dessas propriedades obtidas dos testes com os corpos de prova, são aplicadas as teorias ou critérios de falha para relacioná-las ao comportamento real de peças de geometria complexa sujeitas a carregamentos compostos.

Para os materiais de comportamento isotrópico, ou considerados como tal, alguns critérios são bem conhecidos e largamente utilizados. Já para os materiais compósitos reforçados com fibra, cujo desenvolvimento é mais recente e apresentam um comportamento anisotrópico, os critérios de falha são mais complexos, envolvendo um número maior de variáveis.

Abaixo analisaremos um pouco do comportamento destes materiais e de alguns critérios de falha para eles desenvolvidos.

2.2.1 Critérios de falha para materiais compósitos

Devido à sua constituição, um material compósito laminado unidirecional, reforçado com fibra, pode falhar de diversas formas, segundo Agarwal e Broutman (1990):

- Por trincas na matriz (Figura 4), normalmente decorrente de tensões transversais à direção das fibras, quando a solicitação da matriz é maior.

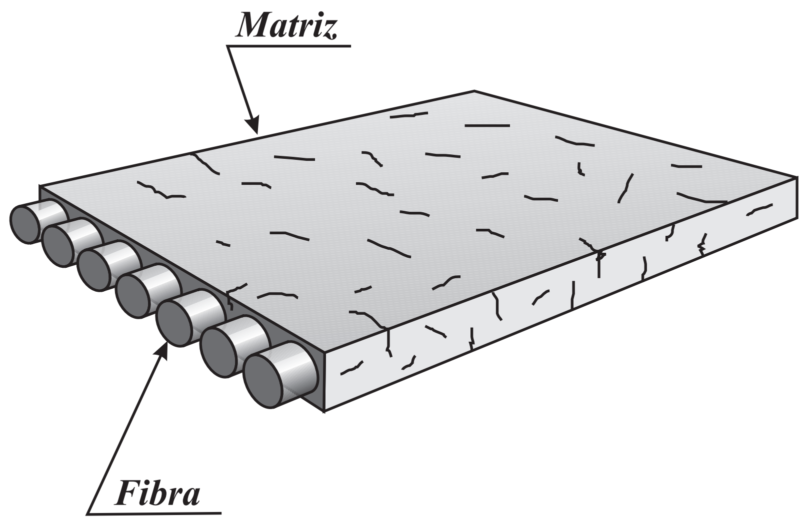

Figura 4: Falha por trincas na matriz

- Por descolamento interfacial (Figura 5), ou seja, um deslocamento relativo entre a fibra e a matriz, resultante do colapso da interface entre ambas. Uma vez rompida a ligação entre fibra e matriz, a carga não é mais transferida entre esses dois componentes, reduzindo drasticamente a resistência do compósito.

- Pela delaminação (Figura 6), ou seja, a separação entre as lâminas que formam um laminado. É resultado em geral de tensões na direção normal às lâminas.

- Pelo descolamento e ruptura das fibras (Figura 7), que é normalmente decorrente da tensão aplicada na direção das fibras, situação em que as fibras são as responsáveis pela resistência do compósito.

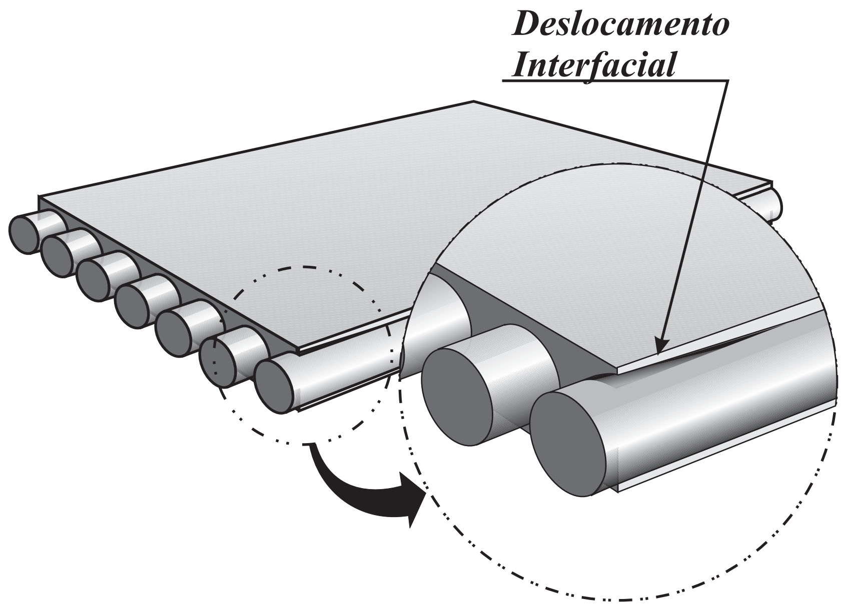

Figura 5: Falha por deslocamento interfacial

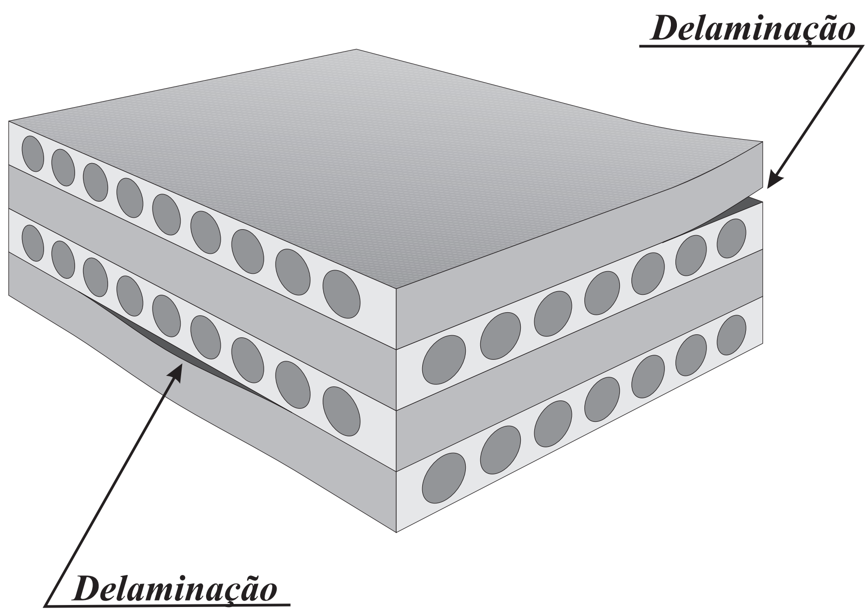

Figura 6: Falha por delaminação

2.2.2 Critérios da máxima tensão e máxima deformação

Este critério parte da mesma base usada para materiais isotrópicos: a falha ocorre quando as tensões máximas na direção das fibras ou transversalmente às fibras excede a respectiva resistência de tração ou compressão de corpos de prova com as fibras ao longo do

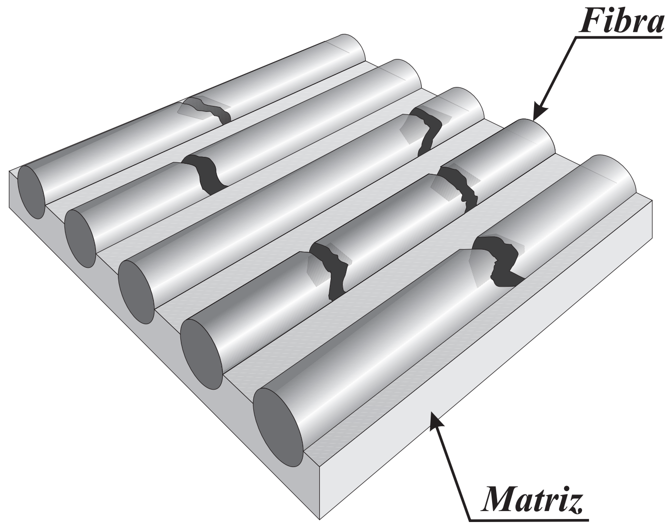

Figura 7: Falha por quebra das fibras

eixo ou transversalmente a ele.

Os limites de falha para o critério da máxima tensão são dados por (VINSON; SIERKOWSKI, 1987):

$\sigma_L < X_t$ e $\sigma_T < Y_t$ para σ_L e $\sigma_T > 0$

$|\sigma_L| > X_c$ e $|\sigma_T| > Y_c$ para σ_L e $\sigma_T < 0$

onde X e Y representam as tensões últimas ao longo e transversalmente à direção das fibras, respectivamente, e os subscritos c e t referem-se, respectivamente, a compressão e tração.

É importante salientar que neste caso σ_L e σ_T são as tensões ao longo das fibras e transversalmente a elas e não as tensões principais como no caso isotrópico.

Adicionalmente a uma trinca iniciada por tensões normais, as camadas de compósito reforçados com fibras também são vulneráveis a falhas causadas por tensões de cisalhamento. O critério da máxima tensão para cisalhamento é expresso por:

$$|\tau_{LT}| < S \tag{2.16}$$

onde S é a resistência última ao cisalhamento plano de um corpo de prova sob cisalhamento puro e τ_{LT} é a tensão de cisalhamento na direção principal do material (não a máxima tensão de cisalhamento). De forma similar, no critério da máxima deformação a falha ocorre quando uma das condições abaixo não é atendida (VINSON; SIERKOWSKI, 1987):

$\varepsilon_L < \varepsilon_L^t = \frac{X_t}{E_L}$ e $\varepsilon_T < \varepsilon_T^t = \frac{Y_t}{E_T}$ para ε_L e $\varepsilon_T > 0$

$\varepsilon_L > -\varepsilon_L^c = -\frac{X_c}{E_L}$ e $\varepsilon_T > -\varepsilon_T^c = -\frac{Y_c}{E_T}$ para ε_L e $\varepsilon_T < 0$

$|\gamma_{LT}| < \gamma_{LT}^s = \frac{S}{G_{LT}}$

A Figura (8) apresenta os limites de resistência em tração em função do ângulo das fibras para um laminado unidirecional de fibras de boro em matriz de resina epóxi.

Para ângulos pequenos a resistência das fibras controla a falha. Entre aproximadamente 3° e 42° a falha é controlada pelo cisalhamento. Acima de 42° a falha passa a ser controlada pela resistência da matriz. A área hachureada em cinza representa a faixa em que o material não falha.

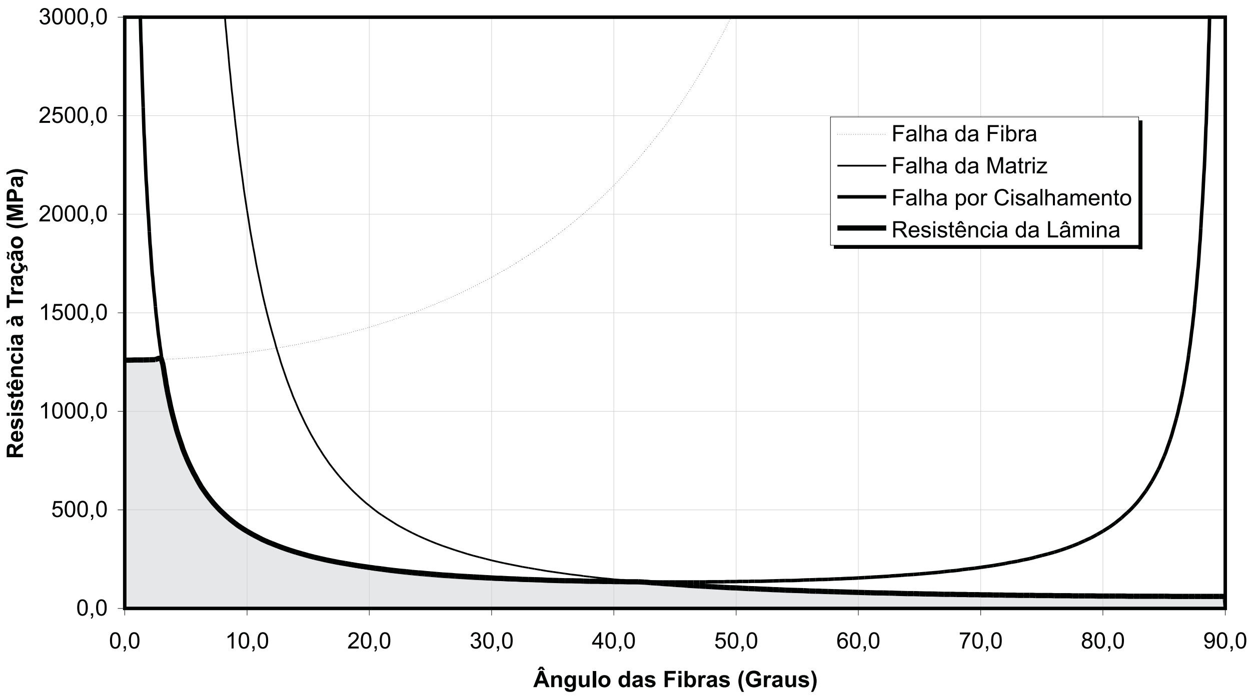

Figura 8: Limite de resistência do laminado unidirecional

Por serem simples, estes critérios (máxima tensão e máxima deformação) não levam em consideração as interações entre as diferentes componentes de tensão no mecanismo de falha. Observações experimentais mostraram que essas interações podem afetar a falha do material. Critérios de falha quadráticos, similares ao de Von Mises, podem levar em conta essas interações entre as tensões.

Alguns dos mais utilizados critérios quadráticos desenvolvidos são os critérios de Tsai-Hill e Tsai-Wu apresentados a seguir.

2.2.3 Critério de Tsai-Hill

Hill (1950) propôs um critério de escoamento para materiais ortotrópicos da forma geral:

$$\begin{aligned} (G+H)\,\sigma_L^2 + (F+H)\,\sigma_T^2 + (F+G)\,\sigma_Z^2 & \\ -2H\sigma_L\sigma_T - 2G\sigma_L\sigma_z - 2F\sigma_T\sigma_Z + 2L\tau_{TZ}^2 + 2M\tau_{LZ}^2 + 2N\tau_{LT}^2 &= 0 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Este critério pode ser usado como um critério de escoamento, resistência mecânica ou falha, pois estabelece um limite teórico para o comportamento elástico de um material. Desta forma as constantes G, H, F, L, M e N, as quais estão relacionadas à resistência ao escoamento em diferentes direções, também podem representar valores de resistência. O critério de Hill representa uma extensão do critério de escoamento de Von Mises.

Tsai (1968) aplicou este critério ao caso dos compósitos laminados, relacionando as constantes de Hill com os valores de resistência X, Y e S das lâminas. Observa-se que quando atuam somente tensões de cisalhamento, a falha ocorre quando τ_{LT} atinge um valor S. Da equação (2.18) tem-se:

$$2N = \frac{1}{S^2} \tag{2.18}$$

Similarmente, para situações onde só atuam tensões $\sigma_L = X$, $\sigma_T = Y$ e $\sigma_Z = Z$ (individualmente), tem-se:

$$\begin{aligned} (G+H) &= \frac{1}{X^2} \\ (F+H) &= \frac{1}{Y^2} \end{aligned} \tag{2.19}$$

$$(F+G)=\frac{1}{Z^2} \tag{2.20}$$

respectivamente.

Para o caso dos laminados, tem-se uma condição de tensão plana, ou seja: $\sigma_Z = \tau_{LZ} = \tau_{TZ} = 0$ e especificamente para um laminado ortotrópico: $Y = Z$. O critério de Hill aplicado a um compósito laminado ortotrópico pode ser escrito como:

$$\frac{\sigma_L^2}{X^2}-\frac{\sigma_L\sigma_T}{X^2}+\frac{\sigma_T^2}{Y^2}+\frac{\tau_{LT}^2}{S^2}=1 \tag{2.21}$$

o qual é conhecido como critério de Falha de Tsai-Hill com referencial nos eixos principais do laminado. Valores apropriados de X e Y devem ser utilizados dependendo do sinal das tensões, ou seja, tração ou compressão.

2.2.4 Critério de Tsai-Wu

Com o critério de falha de Tsai-Wu, procura-se uma melhor correlação com os dados experimentais através do incremento do número de termos na equação de aproximação (melhor ajuste da curva aos dados experimentais). Tsai e Wu (1971) propuseram uma nova expressão para o critério de falha, a qual tem uma abordagem tensorial para a representação das tensões:

$$F_1\sigma_1+F_2\sigma_2+F_6\sigma_6+F_{11}\sigma_1^2+F_{22}\sigma_2^2+F_{66}\sigma_6^2+2F_{12}\sigma_1\sigma_2=1 \tag{2.22}$$

A expressão (2.22) representa a superfície de falha num espaço hexa-dimensional de tensão. As constantes são determinadas a partir da análise dos estados de tensão atuando independentemente. Por exemplo, para o caso de tensão somente na direção das fibras, com resistência à compressão e à tração dadas respectivamente por X_c e X_t tem-se:

$$F_1X_T=F_{11}X_T^2=1 \tag{2.23}$$

$$F_1 X_c = F_{11} X_c^2 = 1$$

A solução do sistema de equações acima resulta em:

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{X_T} + \frac{1}{X_c} \\ F_{11} &= -\frac{1}{X_T X_c} \end{aligned} \tag{2.24}$$

Similarmente, considerando tensões na direção transversal às fibras chegamos a:

$$\begin{aligned} F_2 &= \frac{1}{Y_T} + \frac{1}{Y_c} \\ F_{11} &= -\frac{1}{Y_T Y_c} \end{aligned} \tag{2.25}$$

Considerando testes de cisalhamento puro com sinais positivo e negativo, onde os corpos de prova falham a níveis de tensão de $\sigma_{LT} = \pm S$ e aplicando um raciocínio similar aos anteriores chegamos a:

$$\begin{aligned} F_6 &= 0 \\ F_{66} &= \frac{1}{S^2} \end{aligned} \tag{2.26}$$

Considerando resistências iguais a tensão e a compressão em cada direção tem-se finalmente o critério de falha (simplificado):

$$\frac{\sigma_1^2}{X^2} + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 + \frac{\sigma_2^2}{Y^2} + \frac{\tau_{12}^2}{S^2} = 1 \tag{2.27}$$

O qual é muito parecido com o critério de falha de Tsai-Hill, exceto pelo termo F_{12}.

Este termo deve ser calculado utilizando um ensaio de tensão biaxial fazendo $\sigma_L = \sigma_T = \sigma$ e todas as outras tensões iguais a zero. Utilizando a equação (2.22) tem-se:

$$(F_1 + F_2)\,\sigma + (F_{11} + F_{22} + 2F_{12})\,\sigma^2 = 1 \qquad (2.28)$$

Resolvendo para F_{12} :

$$F_{12} = \frac{1}{2\sigma^2}\left[-\left(\frac{1}{X_t} + \frac{1}{X_c} + \frac{1}{Y_t} + \frac{1}{Y_c}\right)\sigma + \left(\frac{1}{X_t X_c} + \frac{1}{Y_t Y_c}\right)\sigma^2\right] \qquad (2.29)$$

Assim, o valor de F_{12} depende dos valores de resistência e do valor da tensão de falha biaxial s. Observa-se que o critério de Tsai-Wu é mais geral que o critério de Tsai-Hill, já que o critério de Wu relaciona mais propriedades mecânicas. O critério de Tsai-Wu apresenta as seguintes características:

- Uma capacidade superior em comparação ao critério de Tsai-Hill para ajuste de curvas de dados experimentais.
- O termo F_{12} só pode ser determinado através de testes biaxiais, os quais são custosos e apresentam dificuldade para sua realização.
- A formulação tensorial do critério permite sua fácil interpretação gráfica.
- Devido à dificuldade e custos para obter os valores de F_{12} além do fato que este parâmetro representa uma pequena influencia nos resultados finais, o termo F_{12} pode ser igualado a zero.
- Assumindo $F_{12} = -\frac{1}{2X_t^2}$ o critério de Tsai-Wu se reduz ao critério de Tsai-Hill.
- Assumindo $F_{12} = -\frac{1}{2X_t X_c}$ o critério de Tsai-Wu se reduz ao critério de Hoffman, dado por:

$$\frac{\sigma_1^2}{X^2} - \frac{\sigma_1\sigma_2}{X^2} + \frac{\sigma_2^2}{Y^2} + \frac{\tau_{12}^2}{S^2} = 1 \qquad (2.30)$$

2.3 Considerações sobre os critérios de falha

Observando os dados apresentados concluí-se facilmente que a falha em materiais compósitos é mais complexa que em materiais isotrópicos, pois envolve a análise de um número maior de variáveis. Assim, os critérios tradicionalmente utilizados no projeto de máquinas e estruturas em materiais com comportamento isotrópico podem não ser adequados, podendo inclusive levar o projetista a erros catastróficos, caso utilizadas equivocadamente.

A utilização de critérios mais complexos leva a resultados mais precisos, porém a um custo maior. Os critérios de máxima tensão e máxima deformação exigem a análise de três condições distintas de falha para a determinação do limite real. Esse inconveniente é eliminado com o desenvolvimento de critérios quadráticos como os de Tsai-Hill e Tsai-Wu. Enquanto o primeiro (Tsai-Hill) é mais simples de ser utilizado o segundo (Tsai-Wu) apresenta uma melhor precisão dos resultados. Todos estes critérios porém exigem um número maior de testes do material compósito (laminado unidirecional) do que aqueles exigidos para a determinação das características de um material isotrópico.

Capítulo 3

Teoria da Flexão em Placas Anisotrópicas Finas

Uma placa é um elemento estrutural definido por duas superfícies planas e paralelas (Figura 9) onde as cargas são transversalmente aplicadas. A distância entre estas duas superfícies define a espessura da placa, a qual é pequena quando comparada com as outras dimensões da placa.

Considerando as propriedades do material, uma placa pode ser anisotrópica, com diferentes propriedades em diferentes direções, ou isotrópica, com propriedades iguais em todas as direções. Dependendo de sua espessura, uma placa pode ser considerada fina ou espessa. Neste trabalho será desenvolvida a formulação para placas finas anisotrópicas.

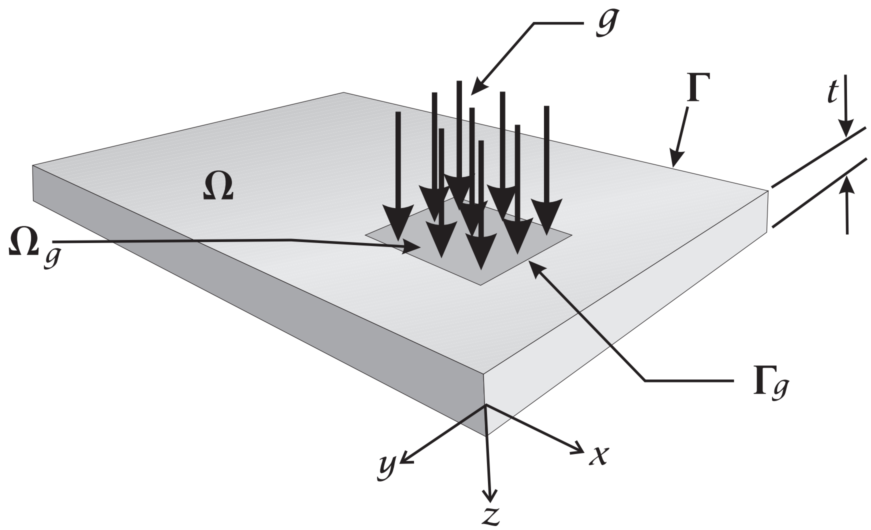

Figura 9: Placa Fina.

A teoria de flexão em placas finas anisotrópicas está baseada nos seguintes pressupostos:

1. Seções retas, que no seu estado não deformado são normais à superfície média, continuam retas e normais à superfície média deformada depois do carregamento.

2. A tensão normal σ_z na seção transversal paralela ao plano médio é nula.

3.1 Relações básicas para placas anisotrópicas

Considere um elemento da placa seguindo os pressupostos já definidos. A Figura 10 mostra este elemento com um estado de tensões agindo nele e uma força distribuída aplicada em sua superfície. Integrando as componentes de tensão ao longo da espessura da placa podemos definir os momentos e forças (Figura 11):

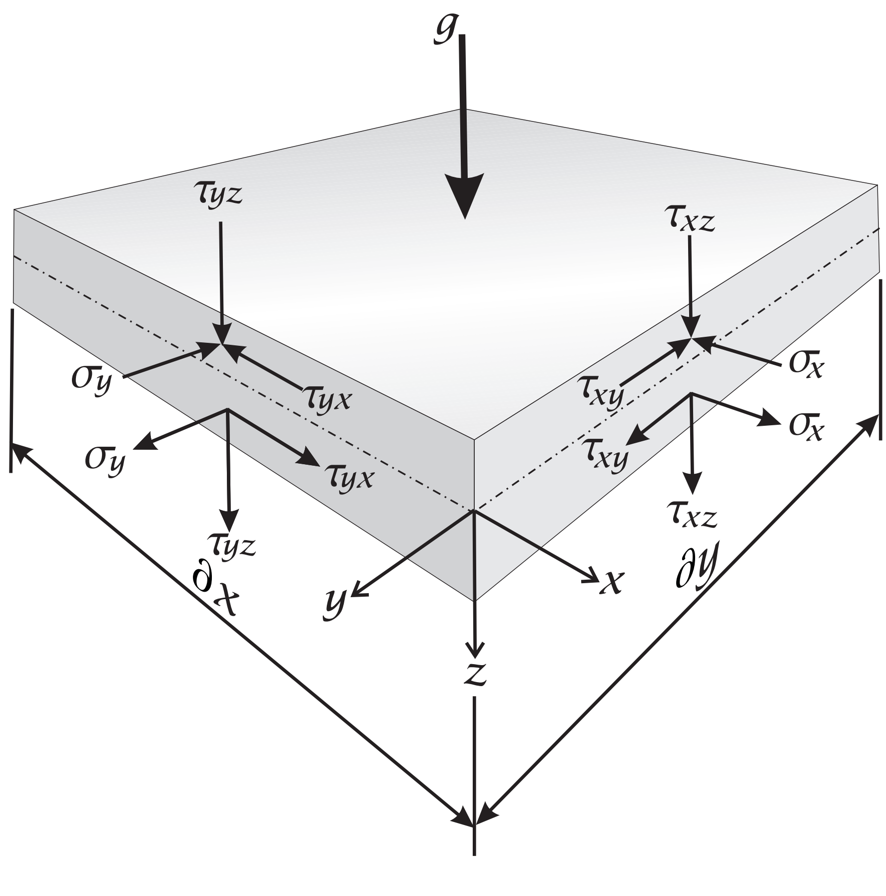

Figura 10: Tensões em um Elemento de Placa

$$m_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz, \tag{3.1}$$

$$m_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z dz, \tag{3.2}$$

$$m_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z dz, \tag{3.3}$$

$$m_{yx} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yx} z dz, \tag{3.4}$$

$$q_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} dz, \tag{3.5}$$

e

$$q_y = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} dz. \tag{3.6}$$

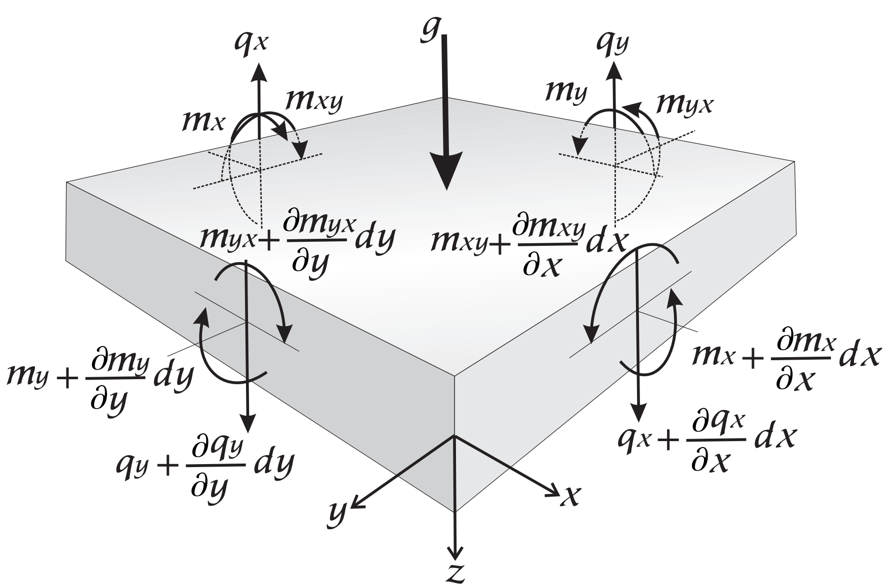

Figura 11: Forças e Momentos em um Elemento da Placa

Do equilíbrio de forças e momentos, podemos escrever:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + g = 0, \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} - q_x = 0, \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} - q_y = 0. \tag{3.9}$$

Resolvendo as equações (3.8) e (3.9) para q_x e q_y, respectivamente, substituindo a equação (3.7) e considerando a simetria de momentos ($m_{xy} = m_{yx}$), temos:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -g. \tag{3.10}$$

Considere as posições inicial e final de um elemento da placa dado por $abcd$ paralelo ao plano médio com lados ab e ad paralelos aos eixos x e y, respectivamente, a uma distância z do plano médio (Figura 12).

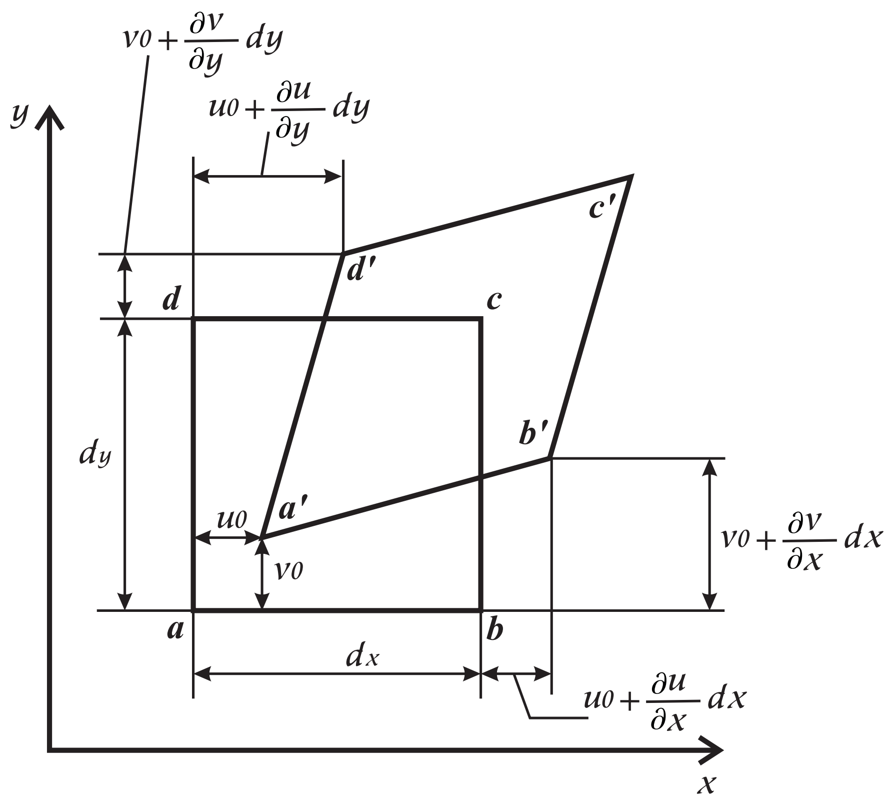

Figura 12: Deformação em um Elemento da Placa.

Assumindo que, durante a flexão da placa, os pontos a, b, c e d, movem-se para a', b', c' e d', chamando as componentes de deslocamento u_0 e v_0 do ponto a nas direções x e y (Figura 12), respectivamente, o deslocamento do ponto b na direção x é dado por:

$$b'_x - b_x = u_o + \frac{\partial u}{\partial x} dx. \tag{3.11}$$

Então, o incremento do comprimento dx na direção x é dado por:

$$\Delta dx = \frac{\partial u}{\partial x} dx, \tag{3.12}$$

e a deformação na direção x é dada por:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}. \tag{3.13}$$

Da mesma forma, podemos escrever:

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \tag{3.14}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{3.15}$$

A Figura 13 mostra as posições inicial e final de uma seção da placa, paralela ao plano xz, que contém os pontos a, b, n_1 e n_2. A rotação do elemento an_1, inicialmente na posição vertical, é igual a $\frac{\partial w}{\partial x}$ (Figura 13). Então, o deslocamento do ponto na direção x, a uma distância z da superfície média pode ser escrita como:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}. \tag{3.16}$$

Seguindo um procedimento similar, o deslocamento de um ponto na direção y é dado por:

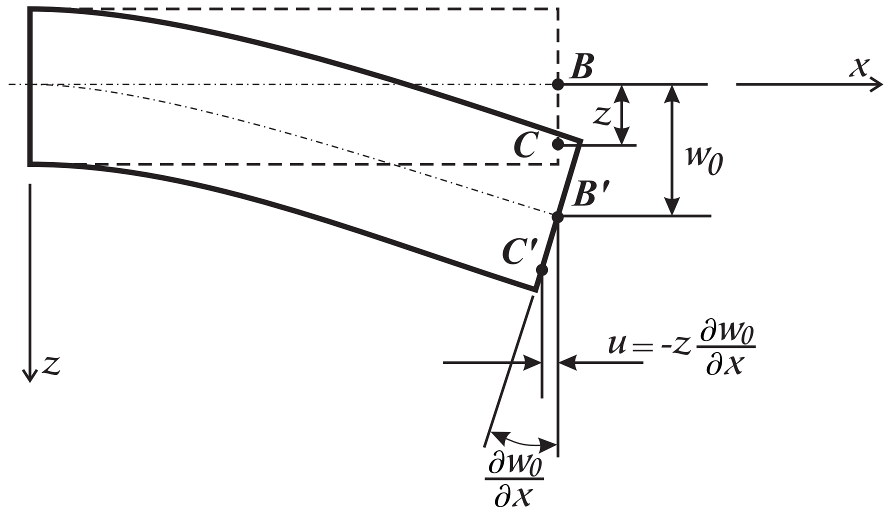

Figura 13: Posições Inicial e Final de um Elemento de Placa.

$$v = -z\frac{\partial w}{\partial y}. \tag{3.17}$$

Substituindo as equações (3.16) e (3.17) nas equações (3.13), (3.14) e (3.15) podemos escrever:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ \varepsilon_y &= -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ \gamma_{xy} &= -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

As equações constitutivas para materiais anisotrópicos são dadas por Lekhnitskii (1968):

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{16}\tau_{xy}, \\ \varepsilon_y &= a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{26}\tau_{xy}, \\ \gamma_{xy} &= a_{16}\sigma_x + a_{26}\sigma_y + a_{66}\tau_{xy}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Substituindo as equações (3.18) nas equações (3.19) obtemos:

$$
\begin{aligned}
\sigma_x &= -z\left(B_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2B_{16}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right), \\
\sigma_y &= -z\left(B_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2B_{26}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right), \\
\tau_{xy} &= -z\left(B_{16}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{26}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2B_{66}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right),
\end{aligned} \tag{3.20}
$$

onde B_{ij} são constantes dadas por:

$$
\begin{aligned}
B_{11} &= \frac{1}{\Delta}\left(a_{22}a_{66} - a_{26}^2\right), & B_{22} &= \frac{1}{\Delta}\left(a_{11}a_{66} - a_{16}^2\right), \\
B_{12} &= \frac{1}{\Delta}\left(a_{16}a_{26} - a_{12}a_{66}\right), & B_{66} &= \frac{1}{\Delta}\left(a_{11}a_{22} - a_{12}^2\right), \\
B_{16} &= \frac{1}{\Delta}\left(a_{12}a_{26} - a_{22}a_{16}\right), & B_{26} &= \frac{1}{\Delta}\left(a_{12}a_{16} - a_{11}a_{26}\right),
\end{aligned} \tag{3.21}
$$

e

$$
\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{vmatrix}. \tag{3.22}
$$

Substituindo as equações (3.20) nas equações (3.1), (3.2) e (3.3) e integrando, temos:

$$
\begin{aligned}
m_x &= -\left(D_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{16}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right), \\
m_y &= -\left(D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{26}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right), \\
m_{xy} &= -\left(D_{16}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{26}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{66}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right),
\end{aligned} \tag{3.23}
$$

onde

$$D_{ij} = B_{ij}\frac{t^3}{12}. \tag{3.24}$$

Substituindo as equações (3.23) nas equações (3.8) e (3.9), podemos escrever:

$$\begin{aligned} q_x &= -\left[D_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 3D_{16}\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + (D_{12} + 2D_{66})\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + D_{26}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right], \\ q_y &= -\left[D_{16}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (D_{12} + 2D_{66})\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + 3D_{26}\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + D_{22}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right]. \end{aligned} \tag{3.25}$$

A equação (3.10) pode então ser reescrita usando as equações (3.23) como:

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16}\frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26}\frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = g. \tag{3.26}$$

A equação (3.26) pode ser integrada no plano característico complexo

$$\begin{aligned} z &= x + \mu y \\ \mu &= d + ie \end{aligned} \tag{3.27}$$

onde d e e são as partes real e imaginária de μ, respectivamente. Usando a equação (3.28) e considerando a forças de corpo nulas, a equação (3.26) pode ser escrita como:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial z^4}\left[D_{11}\mu^4 + 4D_{16}\mu^3 + 2(D_{12} + 2D_{66})\mu^2 + 4D_{26}\mu + D_{22}\right] = 0. \tag{3.28}$$

A solução geral para w na equação (3.26) depende das raízes μ_1, μ_2, $\bar{\mu}_1$ e $\bar{\mu}_2$ da equação característica dada por:

$$D_{22}\mu^4 + 4D_{26}\mu^3 + 2(D_{12} + 2D_{66})\mu^2 + 4D_{16}\mu + D_{11} = 0. \tag{3.29}$$

Cuja validade é condição para a existência de soluções não triviais da equação (3.28).

As raízes desta equação, como mostrado por Lekhnitskii (1968), são sempre complexas para materiais homogêneos. As raízes complexas $\mu_1 = d_1 + e_1 i$ e $\mu_2 = d_2 + e_2 i$ são conhecidas como parâmetros complexos de deflexão. Em geral, estas raízes são diferentes números complexos.

Uma expressão geral para a deflexão tem a forma:

1. no caso de parâmetros complexos diferentes ($\mu_1 \neq \mu_2$):

$$w = w_o + 2\mathrm{Re}[w_1(z_1) + w_2(z_2)]. \tag{3.30}$$

2. no caso de parâmetros complexos iguais ($\mu_1 = \mu_2$):

$$w = w_o + 2\mathrm{Re}[w_1(z_1) + \bar{z}_1 w_2(z_1)]. \tag{3.31}$$

onde w_0 é uma solução particular da equação (3.26) que depende da força distribuída q nas superfícies da placa, $w_1(z_1)$ e $w_2(z_2)$ são funções analíticas arbitrárias de variáveis complexas $z_1 = x + \mu_1 y$ e $z_2 = x + \mu_2 y$.

Baseada nas equações (3.23) e (3.25), podem ser obtidas expressões gerais para forças e momentos como (para o caso $\mu_1 \neq \mu_2$):

$$\begin{aligned}
m_x &= m_x^o - 2\mathrm{Re}[p_1 w''(z_1) + p_2 w''(z_2)], \\
m_y &= m_y^o - 2\mathrm{Re}[q_1 w''(z_1) + q_2 w''(z_2)], \\
m_{xy} &= m_{xy}^o - 2\mathrm{Re}[r_1 w''(z_1) + r_2 w''(z_2)],
\end{aligned}$$

$$q_x = q_x^o - 2\mathrm{Re}[\mu_1 s_1 w'''(z_1) + \mu_2 s_2 w'''(z_2)],$$

$$q_y = q_y^o - 2\mathrm{Re}[s_1 w'''(z_1) + s_2 w'''(z_2)]. \tag{3.32}$$

onde m_x^0, m_y^0, m_{xy}^0, q_x^0 e q_y^0 são momentos e forças cisalhantes correspondentes a função w_0 calculada pelas equações (3.23) e (3.25). As outras constantes são dadas por:

$$p_1 = D_{11} + D_{12}\mu_1^2 + 2D_{16}\mu_1, \qquad p_2 = D_{11} + D_{12}\mu_2^2 + 2D_{16}\mu_2,$$

$$q_1 = D_{12} + D_{22}\mu_1^2 + 2D_{26}\mu_1, \qquad q_2 = D_{12} + D_{22}\mu_2^2 + 2D_{26}\mu_2,$$

$$r_1 = D_{16} + D_{26}\mu_1^2 + 2D_{66}\mu_1, \qquad p_2 = D_{16} + D_{26}\mu_2^2 + 2D_{66}\mu_2,$$

$$s_1 = \frac{D_{11}}{\mu_1} + 3D_{16} + D_{12} + D_{66}\mu_1 + D_{26}\mu_1^2, \tag{3.33}$$

$$s_2 = \frac{D_{11}}{\mu_2} + 3D_{16} + D_{12} + D_{66}\mu_2 + D_{26}\mu_2^2,$$

$$s_1 - r_1 = \frac{p_1}{\mu_1}, \qquad s_2 - r_2 = \frac{p_2}{\mu_2},$$

$$s_1 + r_1 = -q_1\mu_1, \qquad s_2 + r_2 = -q_2\mu_2.$$

Expressões similares podem ser obtidas para o caso isotrópico onde $\mu_1 = \mu_2$. Contudo estas expressões não serão apresentadas neste trabalho e os exemplos isotrópicos serão aproximados por materiais quasi-isotrópicos.

3.2 Cálculo da resistência à flexão em uma direção arbitrária

Considerando que as constantes de rigidez à flexão de uma placa em um sistema de coordenadas x, y, z são dadas por $D_{ij}(i, j = 1, 2, 6)$ e em um sistema de coordenadas x', y', z' rotacionado α com respeito ao primeiro sistema de coordenadas, são dados por $D'_{ij}(i, j = 1, 2, 6)$, as equações relacionando estas constantes, como mostrado por Lekhnitskii (1968), são dadas por:

$$D'_{11} = D_{11}\cos^4\phi + 2(D_{12} + 2D_{66})\sin^2\phi\cos^2\phi + D_{22}\sin^4\phi +$$

$$2(D_{16}\cos^2\phi + D_{26}\sin^2\phi)\sin 2\phi, \tag{3.34}$$

$$D'_{22} = D_{11}\sin^4\phi + 2(D_{12} + 2D_{66})\sin^2\phi\cos^2\phi + D_{22}\cos^4\phi +$$

$$2(D_{16}\sin^2\phi + D_{26}\cos^2\phi)\sin 2\phi, \tag{3.35}$$

$$D'_{12} = D_{12} + [D_{11} + D_{22} - 2(D_{12} + 2D_{66})]\sin^2\phi\cos^2\phi +$$

$$(D_{26} - D_{16})\cos 2\phi\sin 2\phi, \tag{3.36}$$

$$D'_{66} = D_{66} + [D_{11} + D_{22} - 2(D_{12} + 2D_{66})]\sin^2\phi\cos^2\phi +$$

$$(D_{26} - D_{16})\cos 2\phi\sin 2\phi, \tag{3.37}$$

$$D'_{16} = \frac{1}{2}[D_{22}\sin^2\phi - D_{11}\cos^2\phi + (D_{12} + 2D_{66})\cos 2\phi]\sin 2\phi +$$

$$D_{16}\cos^2\phi(\cos^2\phi - 3\sin^2\phi) + D_{26}\sin^2\phi(3\cos^2\phi - \sin^2\phi), \tag{3.38}$$

$$D'_{26} = \frac{1}{2}[D_{22}\cos^2\phi - D_{11}\sin^2\phi + (D_{12} + 2D_{66})\cos 2\phi]\sin 2\phi +$$

$$D_{16}\sin^2\phi(\cos^2\phi - 3\sin^2\phi) + D_{26}\cos^2\phi(3\cos^2\phi - \sin^2\phi). \tag{3.39}$$

As componentes de tensão σ_n e τ_{ns}, tensões normal e cisalhante, respectivamente, estão relacionadas com as tensões σ_x, σ_y e τ_{xy} por:

$$\sigma_n = \sigma_x\cos^2\alpha + \sigma_y\sin^2\alpha + 2\tau_{xy}\sin\alpha\cos\alpha, \tag{3.40}$$

$$\tau_{ns} = (\sigma_y - \sigma_x)\sin\alpha\cos\alpha + \tau_{xy}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha). \tag{3.41}$$

As componentes de momento, inicialmente escritas considerando os eixos x e y, podem agora ser reescritas em um sistema de coordenadas genérico n, s (PAIVA, 1987). Os momentos de flexão referentes às direções n e s são dados por:

$$m_n = m_x\cos^2\alpha + m_y\sin^2\alpha + 2m_{xy}\sin\alpha\cos\alpha, \tag{3.42}$$

$$m_{ns} = (m_y - m_x)\sin\alpha\cos\alpha + m_{xy}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha). \tag{3.43}$$

Similarmente, q_n, a força cisalhante no eixo n, pode ser escrita como:

$$q_n ds = q_x ds\cos\alpha + q_y ds\sin\alpha, \tag{3.44}$$

ou

$$q_n = q_x\cos\alpha + q_y\sin\alpha. \tag{3.45}$$

Com o objetivo de resolver a equação diferencial da placa dada por (3.26), é necessário a imposição das condições de contorno para o deslocamento w e sua derivada $\frac{\partial w}{\partial n}$. Kirchhoff (1850) mostrou que as condições de contorno da força cisalhante q_n e momento volvente m_{ns} podem ser escritas como uma única condição dada por:

$$V_n = q_n + \frac{\partial m_{ns}}{\partial s}. \tag{3.46}$$

Como apresentado em Timoshenko e Woinowski-Krieger (1959), a flexão de uma placa não é alterada se as forças horizontais que resultam no binário volvente $m_{ns}d_s$ agindo em um elemento de comprimento d_s de uma aresta são substituídas por duas forças verticais de magnitude m_{ns} e separadas por uma distância d_s. De tal forma que essa substituição não altera a magnitude dos momentos volventes e produz somente mudanças locais na distribuição de tensões na aresta da placa, deixando a distribuição de tensões no restante da placa inalterada.

A outra condição de carregamento no contorno é o momento m_n.

Capítulo 4

O Método dos Elementos de Contorno para Flexão em Placas Anisotrópicas

Usando o teorema de Betti, podemos relacionar dois estados de tensão-deformação de um material linear como:

$$\int_\Omega \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} d\Omega = \int_\Omega \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega. \tag{4.1}$$

Escrevendo o lado direito da equação (4.1) na notação de von Karman, temos:

$$\int_\Omega \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = \int_\Omega \left(\sigma_x \varepsilon_x^* + \sigma_y \varepsilon_y^* + \sigma_z \varepsilon_z^* + \tau_{xy} \gamma_{xy}^* + \tau_{xz} \gamma_{xz}^* + \tau_{yz} \gamma_{yz}^* \right) d\Omega. \tag{4.2}$$

Desconsiderando as tensões normais à superfície média da placa, a equação (4.2) é escrita como:

$$\int_\Omega \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = \int_\Omega \left(\sigma_x \varepsilon_x^* + \sigma_y \varepsilon_y^* + \tau_{xy} \gamma_{xy}^* \right) d\Omega. \tag{4.3}$$

Substituindo as equações (3.18) e (3.19) na equação (4.3), podemos escrever o primeiro termo da integral no lado direito da equação (4.3) como:

$$\int_\Omega \sigma_x \varepsilon_x^* d\Omega = \int_\Omega \left[\int_z \left(B_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \left(z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dz \right] d\Omega. \tag{4.4}$$

Integrando (4.4) ao longo da espessura da placa, temos:

$$\int_\Omega \sigma_x \varepsilon_x^* d\Omega = \int_\Omega \left(D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} d\Omega = - \int_\Omega m_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} d\Omega. \tag{4.5}$$

Para obter as equações do método dos elementos de contorno, é necessário transformar as integrais de domínio em integrais de contorno. Considere duas funções $f(x)$ e $g(x)$. A derivada de seu produto pode ser escrita como:

$$\frac{\partial}{\partial x}[f(x)g(x)] = \frac{\partial f(x)}{\partial x} g(x) + \frac{\partial g(x)}{\partial x} f(x). \tag{4.6}$$

Usando a propriedade de derivação (4.6) na equação (4.5), podemos escrever:

$$\int_\Omega \sigma_x \varepsilon_x^* d\Omega = - \int_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(m_x \frac{\partial w^*}{\partial x} \right) - \frac{\partial w^*}{\partial x} \frac{\partial m_x}{\partial x} \right] d\Omega. \tag{4.7}$$

Usando o teorema de Green, a equação (4.7) pode ser escrita como:

$$\int_\Omega \sigma_x \varepsilon_x^* d\Omega = - \int_\Gamma m_x \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos\alpha d\Gamma + \int_\Omega \frac{\partial w^*}{\partial x} \frac{\partial m_x}{\partial x} d\Omega. \tag{4.8}$$

Aplicando a propriedade de derivação (4.6) no segundo termo do lado direito da equação (4.8), temos:

$$\int_\Omega \sigma_x \varepsilon_x^* d\Omega = - \int_\Gamma m_x \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos\alpha d\Gamma + \int_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(w^* \frac{\partial m_x}{\partial x} \right) - w^* \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} \right] d\Omega. \tag{4.9}$$

Depois, usando o teorema de Green, podemos escrever:

$$\int_\Omega \sigma_x \varepsilon_x^* d\Omega = \int_\Gamma \left(-m_x \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos\alpha + w^* \frac{\partial m_x}{\partial x} \cos\alpha \right) d\Gamma - \int_\Omega w^* \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} d\Omega. \tag{4.10}$$

Seguindo um procedimento similar, podemos mostrar que:

$$\int_\Omega \sigma_y \varepsilon_y^* d\Omega = \int_\Gamma \left(-m_y \frac{\partial w^*}{\partial y} \sin\alpha + w^* \frac{\partial m_y}{\partial y} \sin\alpha \right) d\Gamma - \int_\Omega w^* \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} d\Omega, \tag{4.11}$$

e

$$\int_\Omega \tau_{xy} \gamma_{xy}^* d\Omega = \int_\Gamma \left(-m_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial y} \cos\alpha - m_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial x} \sin\alpha + w^* \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \sin\alpha + \right.$$

$$\left. w^* \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \cos\alpha \right) d\Gamma - \int_\Omega 2w^* \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} d\Omega. \tag{4.12}$$

Assim, a equação (4.3) é escrita como:

$$\int_\Omega \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = - \int_\Gamma \left(m_x \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos\alpha + m_y \frac{\partial w^*}{\partial y} \sin\alpha + m_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial y} \cos\alpha + \right.$$

$$\left. m_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial x} \sin\alpha \right) d\Gamma + \int_\Gamma w^* \left[\left(\cos\alpha \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \right) \left(\sin\alpha \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \right) \right] d\Gamma -$$

$$\int_\Omega w^* \left(\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} \right) d\Omega. \tag{4.13}$$

Substituindo as equações (3.8) e (3.9) e usando a equação (3.45), a equação (4.13) pode ser escrita como:

$$\int_\Omega \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = - \int_\Gamma \left(m_x \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos\alpha + m_y \frac{\partial w^*}{\partial y} \sin\alpha + m_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial y} \cos\alpha + \right.$$

$$\left. m_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial x} \sin\alpha \right) d\Gamma + \int_\Gamma w^* q_n d\Gamma + \int_\Omega g w^* d\Omega. \tag{4.14}$$

Da relação entre dois sistemas de coordenadas (x, y) e (n, s) temos:

$$\frac{\partial w^*}{\partial x} = \frac{\partial w^*}{\partial n}\cos\alpha - \frac{\partial w^*}{\partial s}\sin\alpha,$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial y} = \frac{\partial w^*}{\partial n}\sin\alpha + \frac{\partial w^*}{\partial s}\cos\alpha. \tag{4.15}$$

Substituindo as equações (4.15) na equação (4.14) temos:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \sigma_{ij}\varepsilon^*_{ij}d\Omega = -\int_\Gamma \Bigg[& m_x\cos\alpha\left(\frac{\partial w^*}{\partial n}\cos\alpha - \frac{\partial w^*}{\partial s}\sin\alpha\right) + \\ & m_y\sin\alpha\left(\frac{\partial w^*}{\partial n}\sin\alpha + \frac{\partial w^*}{\partial s}\cos\alpha\right) + m_{xy}\cos\alpha\left(\frac{\partial w^*}{\partial n}\sin\alpha + \frac{\partial w^*}{\partial s}\cos\alpha\right) + \\ & m_{xy}\sin\alpha\left(\frac{\partial w^*}{\partial n}\cos\alpha - \frac{\partial w^*}{\partial s}\sin\alpha\right)\Bigg] d\Gamma + \int_\Gamma w^* q_n d\Gamma + \int_\Omega g w^* d\Omega.\end{aligned} \tag{4.16}$$

Depois de algumas manipulações algébricas, a equação (4.16) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \sigma_{ij}\varepsilon^*_{ij}d\Omega = -\int_\Gamma \Bigg\{ & \frac{\partial w^*}{\partial n}\left(m_x\cos^2\alpha + m_y\sin^2\alpha + 2m_{xy}\sin\alpha\cos\alpha\right) + \\ & \frac{\partial w^*}{\partial s}\left[m_{xy}\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) + (m_y - m_x)\sin\alpha\cos\alpha\right]\Bigg\} d\Gamma + \\ & \int_\Gamma w^* q_n d\Gamma + \int_\Omega g w^* d\Omega.\end{aligned} \tag{4.17}$$

Substituindo as equações (3.42) e (3.43) na equação (4.17) temos:

$$\int_\Omega \sigma_{ij}\varepsilon^*_{ij}d\Omega = -\int_\Gamma \left(m_n\frac{\partial w^*}{\partial n} + m_{ns}\frac{\partial w^*}{\partial s} - q_n w^*\right) d\Gamma + \int_\Omega g w^* d\Omega. \tag{4.18}$$

Calculando o segundo termo da primeira integral do lado direito da equação (4.18), temos:

$$\int_\Gamma m_{ns}\frac{\partial w^*}{\partial s}d\Gamma = m_{ns}w^*\Big|_{\Gamma_1}^{\Gamma_2} - \int_\Gamma \frac{\partial m_{ns}}{\partial s}w^*d\Gamma, \tag{4.19}$$

onde Γ_1 e Γ_2 são as coordenadas dos extremos do contorno onde a integração está sendo realizada.

No caso de um contorno fechado sem canto, isto é, a função que descreve a curva de contorno e suas derivadas são contínuas, o primeiro termo do lado direito da equação (4.19) desaparece. No caso onde há cantos, a equação (4.19) pode ser escrita como:

$$\int_\Gamma m_{ns}\frac{\partial w^*}{\partial s}d\Gamma = -\sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}w^*_{c_i} - \int_\Gamma \frac{\partial m_{ns}}{\partial s}w^*d\Gamma, \tag{4.20}$$

onde

$$R_{c_i} = m^+_{ns_i} - m^-_{ns_i}, \tag{4.21}$$

e os termos w_{c_i}, $m^+_{ns_i}$, $m^-_{ns_i}$ são, respectivamente, os valores de deslocamentos e momentos depois e antes do canto i da placa, N_c é o número total de cantos no contorno (PAIVA, 1987). Fator que diferencia as teorias de placas finas e placas espessas.

Das equações (4.18) e (4.20), podemos escrever:

$$\int_\Omega \sigma_{ij}\varepsilon^*_{ij}d\Omega = \int_\Gamma \left(q_n w^* - m_n\frac{\partial w^*}{\partial n} + \frac{\partial m_{ns}}{\partial s}w^*\right)d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}w^*_{c_i} + \int_\Omega g w^* d\Omega. \tag{4.22}$$

Das equações (4.22) e (3.46), temos:

$$\int_\Omega \sigma_{ij}\varepsilon^*_{ij}d\Omega = \int_\Gamma \left(V_n w^* - m_n\frac{\partial w^*}{\partial n}\right)d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}w^*_{c_i} + \int_\Omega g w^* d\Omega. \tag{4.23}$$

Seguindo um procedimento similar àquele usado para obtermos a equação (4.23), o lado esquerdo da equação (4.1) pode ser escrito como:

$$\int_{\Omega}\sigma^*_{ij}\varepsilon_{ij}d\Omega=\int_{\Gamma}\left(V^*_n w-m_n\frac{\partial w^*}{\partial n}\right)d\Gamma+\sum_{i=1}^{N_c}R^*_{c_i}w_{c_i}+\int_{\Omega}g^*wd\Omega. \tag{4.24}$$

Substituindo as equações (4.23) e (4.24) na equação (4.1), podemos escrever:

$$\int_{\Gamma}\left(V_n w^*-m_n\frac{\partial w^*}{\partial n}\right)d\Gamma+\sum_{i=1}^{N_c}R_{c_i}w^*_{c_i}+\int_{\Omega}gw^*d\Omega=$$

$$\int_{\Gamma}\left(V^*_n w-m^*_n\frac{\partial w}{\partial n}\right)d\Gamma+\sum_{i=1}^{N_c}R^*_{c_i}w_{c_i}+\int_{\Omega}g^*wd\Omega. \tag{4.25}$$

A equação (4.25) relaciona dois estados de um material elástico. Para aplicar esta equação para resolver problemas de flexão, precisamos considerar um dos estados como conhecido e o outro como o estado que queremos analisar. Para obter a equação integral de contorno, o estado conhecido é ajustado para que a integral de domínio dada por:

$$\int_{\Omega}g^*wd\Omega \tag{4.26}$$

desapareça. Usando as propriedades da função delta de Dirac $\delta(P,q)$, de forma que $g^* = \delta(P,q)$, a integral (4.26) é escrita como:

$$\int_{\Omega}\delta(P,Q)w(P)d\Omega(P)=w(Q), \tag{4.27}$$

onde Q é o ponto onde a carga é aplicada, conhecido como ponto fonte, e P é o ponto onde a deflexão é observada, conhecido como ponto campo.

O estado correspondente a um material linear sob carregamento de uma função delta de Dirac é conhecido como um estado fundamental e as variáveis da equação (4.25) relacionadas a este estado (w^*,V^*_n e m^*_n) são conhecidas como soluções fundamentais, as quais são calculadas analiticamente a partir da equação diferencial (3.26).

Considerando o estado ”*”como o estado fundamental, a equação (4.25) pode ser escrita como:

$$Kw(Q) + \int_\Gamma \left[V_n^*(Q,P)w(P) - m_n^*(Q,P)\frac{\partial w(P)}{\partial n} \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}^*(Q,P)w_{c_i}(P) -$$

$$\int_\Gamma \left[V_n(P)w^*(Q,P) - m_n(P)\frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}(P)w_{c_i}^*(Q,P) +$$

$$\int_\Omega g(P)w^*(Q,P)d\Omega. \tag{4.28}$$

A constante K é introduzida para se considerar que a função delta de Dirac pode ser aplicada no domínio, no contorno ou fora do domínio. Se a função delta de Dirac é aplicada em um ponto onde o contorno é suave, então $K = 1/2$.

As variáveis da equação (4.28) são deslocamentos $w(P)$, rotações $\frac{\partial w(P)}{\partial n}$, momentos $m_n(P)$, e forças $V_n(P)$. Para uma dada condição de contorno, algumas destas variáveis são conhecidas e outras desconhecidas. Para termos um número de equações igual ao número de variáveis desconhecidas, é necessário escrever a equação integral correspondente a derivada do deslocamento $w(q)$ em relação ao sistema de coordenadas cartesiano fixo no ponto de origem, isto é, o ponto onde o delta de Dirac do estado fundamental é aplicado. As direções dos eixos deste sistema de coordenadas são coincidentes com as direções normal e a tangente ao contorno no ponto de origem.

Para um caso particular onde o ponto fonte é localizado em um ponto onde o contorno é suave, a equação de contorno correspondente à derivada do deslocamento é dada por (PAIVA, 1987):

$$\frac{1}{2}\frac{\partial w(Q)}{\partial n_1} + \int_\Gamma \left[\frac{\partial V^*}{\partial n_1}(Q,P)w(P) - \frac{\partial m_n^*}{\partial n_1}(Q,P)\frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) +$$

$$\sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial R_{c_i}^*}{\partial n_1}(Q,P)w_{c_i}(P) = \int_\Gamma \left\{ V_n(P)\frac{\partial w^*}{\partial n_1}(Q,P) - m_n(P)\frac{\partial}{\partial n_1}\left[\frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \right] \right\} d\Gamma(P) +$$

$$\sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}(P)\frac{\partial w_{c_i}^*}{\partial n_1}(Q,P) + \int_\Omega g(P)\frac{\partial w^*}{\partial n_1}(Q,P)d\Omega. \tag{4.29}$$

É importante dizer que é possível usar apenas a equação (4.28) em uma formulação de elementos de contorno usando como pontos fonte os nós do contorno e um número igual de pontos externo ao domínio do problema.

4.1 Soluções fundamentais para problemas de flexão em materiais anisotrópicos

A solução fundamental do deslocamento transversal de placas fletidas é calculado fazendo o termo não-homogêneo da equação diferencial (3.26) igual a uma força concentrada dada por uma função delta de Dirac $\delta(Q,P)$, isto é:

$$\Delta\Delta w^*(Q,P) = \delta(Q,P), \tag{4.30}$$

onde $\Delta\Delta(.)$ é o operador diferencial:

$$\Delta\Delta(.) = \frac{D_{11}}{D_{22}}\frac{\partial^4(.)}{\partial x^4} + 4\frac{D_{16}}{D_{22}}\frac{\partial^4(.)}{\partial^3\partial y} + \frac{2(D_{12}+2D_{66})}{D_{22}}\frac{\partial^4(.)}{\partial x^2\partial y^2} + 4\frac{D_{26}}{D_{22}}\frac{\partial^4(.)}{\partial x\partial y^3} + \frac{\partial^4(.)}{\partial y^4}. \tag{4.31}$$

Como mostrado por Shi e Bezine (1988), a solução fundamental do deslocamento transversal é dada por:

$$w^*(\rho,\theta) = \frac{1}{8\pi}\left\{C_1R_1(\rho,\theta) + C_2R_2(\rho,\theta) + C_3\left[S_1(\rho,\theta) - S_2(\rho,\theta)\right]\right\}, \tag{4.32}$$

onde

$$\rho = [(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2]^{1/2}, \tag{4.33}$$

x e y são as coordenadas do ponto campo P, x_0 e y_0 são as coordenadas do ponto fonte Q,

$$\theta = \arctan \frac{y - y_o}{x - x_o}, \tag{4.34}$$

$$C_1 = \frac{(d_1 - d_2)^2 - (e_1^2 - e_2^2)}{GHe_1}, \tag{4.35}$$

$$C_2 = \frac{(d_1 - d_2)^2 + (e_1^2 - e_2^2)}{GHe_2}, \tag{4.36}$$

$$C_3 = \frac{4(d_1 - d_2)}{GH}, \tag{4.37}$$

$$G = (d_1 - d_2)^2 + (e_1 + e_2)^2, \tag{4.38}$$

$$H = (d_1 - d_2)^2 + (e_1 - e_2)^2, \tag{4.39}$$

d_i e e_i são respectivamente as partes real e imaginária das raízes μ_i da equação característica (3.29).

$$\begin{aligned} R_i &= \rho^2 \left[(\cos\theta + d_i \sin\theta)^2 - e_i^2 \sin^2\theta \right] \times \\ &\quad \left\{ \log \left[\frac{\rho^2}{a^2} \left((\cos\theta + d_i \sin\theta)^2 + e_i^2 \sin^2\theta \right) \right] - 3 \right\} - \\ &\quad 4\rho^2 e_i \sin\theta \,(\cos\theta + d_i \sin\theta) \arctan \frac{e_i \sin\theta}{\cos\theta + d_i \sin\theta}, \end{aligned} \tag{4.40}$$

e

$$S_i = \rho^2 e_i \sin\theta \,(\cos\theta + d_i \sin\theta) \times$$

$$\left\{\log\left[\frac{\rho^2}{a^2}\left((\cos\theta + d_i\sin\theta)^2 + e_i^2\sin^2\theta\right)\right] - 3\right\} +$$

$$\rho^2\left[(\cos\theta + d_i\sin\theta)^2 - e_i^2\sin^2\theta\right]\arctan\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta + d_i\sin\theta}. \tag{4.41}$$

O índice repetido i nos termos de R_i e S_i não implicam em soma. O coeficiente a é uma constante arbitrária tomada como $a = 1$.

As outras soluções fundamentais são dadas por:

$$m_n^* = -\left(f_1\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} + f_2\frac{\partial^2 w^*}{\partial x\partial y} + f_3\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2}\right), \tag{4.42}$$

$$R_{c_i}^* = -\left(g_1\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} + g_2\frac{\partial^2 w^*}{\partial x\partial y} + g_3\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2}\right), \tag{4.43}$$

$$\begin{aligned} V_n^* = & -\left(h_1\frac{\partial^3 w^*}{\partial x^3} + h_2\frac{\partial^3 w^*}{\partial x^2\partial y} + h_3\frac{\partial^3 w^*}{\partial x\partial y^2} + h_4\frac{\partial^3 w^*}{\partial y^3}\right) - \\ & \frac{1}{\bar{R}}\left(h_5\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} + h_6\frac{\partial^2 w^*}{\partial x\partial y} + h_7\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2}\right). \end{aligned} \tag{4.44}$$

onde $\bar{R}$ é o raio de curvatura em um ponto suave do contorno Γ. As demais constantes são definidas como:

$$f_1 = D_{11}n_x^2 + 2D_{16}n_xn_y + D_{12}n_y^2, \tag{4.45}$$

$$f_2 = 2(D_{16}n_x^2 + 2D_{66}n_xn_y + D_{26}n_y^2), \tag{4.46}$$

$$f_3 = D_{12}n_x^2 + 2D_{26}n_xn_y + D_{22}n_y^2, \tag{4.47}$$

$$g_1 = (D_{12} - D_{11})\cos\beta\sin\beta + D_{16}(\cos^2\beta - \sin^2\beta), \tag{4.48}$$

$$g_2 = 2(D_{26} - D_{16})\cos\beta\sin\beta + 2D_{66}(\cos^2\beta - \sin^2\beta), \tag{4.49}$$

$$g_3 = (D_{22} - D_{12})\cos\beta\sin\beta + D_{26}(\cos^2\beta - \sin^2\beta), \tag{4.50}$$

$$h_1 = D_{11}n_x(1 + n_y^2) + 2D_{16}n_y^3 - D_{12}n_x n_y^2, \tag{4.51}$$

$$h_2 = 4D_{16}n_x + D_{12}n_y(1 + n_x^2) + 4D_{66}n_y^3 - D_{11}n_x^2 n_y - 2D_{26}n_x n_y^2, \tag{4.52}$$

$$h_3 = 4D_{26}n_y + D_{12}n_x(1 + n_y^2) + 4D_{66}n_x^3 - D_{22}n_x n_y^2 - 2D_{16}n_x^2 n_y, \tag{4.53}$$

$$h_4 = D_{22}n_y(1 + n_x^2) + 2D_{26}n_x^3 - D_{12}n_x^2 n_y, \tag{4.54}$$

$$h_5 = (D_{12} - D_{11})\cos 2\beta - 4D_{16}\sin 2\beta, \tag{4.55}$$

$$h_6 = 2(D_{26} - D_{16})\cos 2\beta - 4D_{66}\sin 2\beta, \tag{4.56}$$

$$h_7 = (D_{22} - D_{12})\cos 2\beta - 4D_{26}\sin 2\beta, \tag{4.57}$$

e β é o ângulo entre o sistema de coordenadas global xy e um sistema de coordenadas ns o qual tem seus eixos paralelos aos vetores n e s, normal e tangente, respectivamente, ao contorno no ponto Q. As derivadas da solução fundamental do deslocamento transversal podem ser expressas pela combinação linear das derivadas das funções R_i e S_i. Por exemplo:

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} = \frac{1}{8\pi}\left[C_1\frac{\partial^2 R_1}{\partial y^2} + C_2\frac{\partial^2 R_2}{\partial y^2} + C_3\left(\frac{\partial^2 S_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 S_2}{\partial y^2}\right)\right]. \tag{4.58}$$

As derivadas de R_i e S_i são dadas por:

$$\frac{\partial R_i}{\partial x} = 2r\left(\cos\theta + d_i\sin\theta\right)\left\{\log\left[\frac{r^2}{a^2}\left(\left(\cos\theta + d_i\sin\theta\right)^2 + e_i^2\sin^2\theta\right)\right] - 2\right\} -$$

$$4re_i \sin\theta \arctan \frac{e_i \sin\theta}{\cos\theta + d_i \sin\theta}, \tag{4.59}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_i}{\partial y} &= 2r\left[d_i\left(\cos\theta + d_i\sin\theta\right) - e_i^2\sin\theta\right] \times \\
&\left\{\log\left[\frac{r^2}{a^2}\left(\left(\cos\theta + d_i\sin\theta\right)^2 + e_i^2\sin^2\theta\right)\right] - 2\right\} - \\
&4re_i\left(\cos\theta + 2d_i\sin\theta\right)\arctan\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta + d_i\sin\theta},
\end{aligned} \tag{4.60}$$

$$\frac{\partial^2 R_i}{\partial x^2} = 2\log\left\{\frac{r^2}{a^2}\left[\left(\cos\theta + d_i\sin\theta\right)^2 + e_i^2\sin^2\theta\right]\right\} \tag{4.61}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 R_i}{\partial x \partial y} &= 2d_i\log\left\{\frac{r^2}{a^2}\left[\left(\cos\theta + d_i\sin\theta\right)^2 + e_i^2\sin^2\theta\right]\right\} - \\
&4e_i\arctan\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta + d_i\sin\theta},
\end{aligned} \tag{4.62}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 R_i}{\partial y^2} &= 2\left(d_i^2 - e_i^2\right)\log\left\{\frac{r^2}{a^2}\left[\left(\cos\theta + d_i\sin\theta\right)^2 + e_i^2\sin^2\theta\right]\right\} - \\
&8d_ie_i\arctan\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta + d_i\sin\theta},
\end{aligned} \tag{4.63}$$

$$\frac{\partial^3 R_i}{\partial x^3} = \frac{4\left(\cos\theta + d_i\sin\theta\right)}{r\left[\left(\cos\theta + d_i\sin\theta\right)^2 + e_i^2\sin^2\theta\right]}, \tag{4.64}$$

$$\frac{\partial^3 R_i}{\partial x^2 \partial y} = \frac{4\left[d_i\left(\cos\theta + d_i\sin\theta\right) + e_i^2\sin\theta\right]}{r\left[\left(\cos\theta + d_i\sin\theta\right)^2 + e_i^2\sin^2\theta\right]}, \tag{4.65}$$

$$\frac{\partial^3 R_i}{\partial x \partial y^2} = \frac{4\left[\left(d_i^2 - e_i^2\right)\cos\theta + \left(d_i^2 + e_i^2\right)d_i\sin\theta\right]}{r\left[\left(\cos\theta + d_i\sin\theta\right)^2 + e_i^2\sin^2\theta\right]}, \tag{4.66}$$

$$\frac{\partial^3 R_i}{\partial y^3} = \frac{4\left[d_i\left(d_i^2 - 3e_i^2\right)\cos\theta + \left(d_i^4 - e_i^4\right)\sin\theta\right]}{r\left[\left(\cos\theta + d_i\sin\theta\right)^2 + e_i^2\sin^2\theta\right]}, \tag{4.67}$$

$$\frac{\partial^4 R_i}{\partial x^4} = -\frac{4\left[\left(\cos\theta + d_i\sin\theta\right)^2 - e_i^2\sin^2\theta\right]}{r^2\left[\left(\cos\theta + d_i\sin\theta\right)^2 + e_i^2\sin^2\theta\right]^2}, \tag{4.68}$$

$$\frac{\partial^4 R_i}{\partial x^3 \partial y} = -\frac{4}{r^2}\left\{\frac{d_i}{(\cos\theta + d_i\sin\theta)^2 + e_i^2\sin^2\theta} + \frac{2e_i^2\sin\theta\cos\theta}{\left[(\cos\theta + d_i\sin\theta)^2 + e_i^2\sin^2\theta\right]^2}\right\}, \tag{4.69}$$

$$\frac{\partial^4 R_i}{\partial x^2 \partial y^2} = -\frac{4}{r^2}\left\{\frac{(d_i^2 + e_i^2)}{\left((\cos\theta + d_i\sin\theta)^2 + e_i^2\sin^2\theta\right)} - \frac{2e_i^2\cos^2\theta}{\left[(\cos\theta + d_i\sin\theta)^2 + e_i^2\sin^2\theta\right]^2}\right\}, \tag{4.70}$$

$$\frac{\partial^4 R_i}{\partial x \partial y^3} = -\frac{4}{r^2}\left\{\frac{d_i(d_i^2 + e_i^2)}{\left((\cos\theta + d_i\sin\theta)^2 + e_i^2\sin^2\theta\right)} - \frac{2e_i^2\cos\theta\left(2d_i\cos\theta + (d_i^2 + e_i^2)\sin\theta\right)}{\left[(\cos\theta + d_i\sin\theta)^2 + e_i^2\sin^2\theta\right]^2}\right\}, \tag{4.71}$$

$$\frac{\partial^4 R_i}{\partial y^4} = -\frac{4}{r^2}\left\{\frac{(d_i^4 - e_i^4)}{(\cos\theta + d_i\sin\theta)^2 + e_i^2\sin^2\theta} - \frac{2e_i^2\cos\theta\left[(3d_i^2 - e_i^2)\cos\theta + 2d_i(d_i^2 + e_i^2)\sin\theta\right]}{\left[(\cos\theta + d_i\sin\theta)^2 + e_i^2\sin^2\theta\right]^2}\right\}, \tag{4.72}$$

$$\frac{\partial S_i}{\partial x} = re_i\sin\theta\left\{\log\left[\frac{r^2}{a^2}\left((\cos\theta + d_i\sin\theta)^2 + e_i^2\sin^2\theta\right)\right] - 2\right\} + 2r(\cos\theta + d_i\sin\theta)\arctan\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta + d_i\sin\theta}, \tag{4.73}$$

$$\frac{\partial S_i}{\partial y} = re_i(\cos\theta + 2d_i\sin\theta)\left\{\log\left[\frac{r^2}{a^2}\left((\cos\theta + d_i\sin\theta)^2 + e_i^2\sin^2\theta\right)\right] - 2\right\} + 2r\left[d_i(\cos\theta + d_i\sin\theta) - e_i^2\sin\theta\right]\arctan\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta + d_i\sin\theta}, \tag{4.74}$$

$$\frac{\partial^2 S_i}{\partial x^2} = 2\arctan\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta + d_i\sin\theta}, \tag{4.75}$$

$$\frac{\partial^2 S_i}{\partial x \partial y} = e_i\log\left\{\frac{r^2}{a^2}\left[(\cos\theta + d_i\sin\theta)^2 + e_i^2\sin^2\theta\right]\right\} +$$

$$2d_i \arctan \frac{e_i \sin\theta}{\cos\theta + d_i \sin\theta}, \tag{4.76}$$

$$\frac{\partial^2 S_i}{\partial y^2} = 2d_i e_i \log\left\{\frac{r^2}{a^2}\left[(\cos\theta + d_i\sin\theta)^2 + e_i^2 \sin^2\theta\right]\right\} +$$

$$2\left(d_i^2 - e_i^2\right) \arctan \frac{e_i \sin\theta}{\cos\theta + d_i \sin\theta}, \tag{4.77}$$

$$\frac{\partial^3 S_i}{\partial x^3} = -\frac{2e_i \sin\theta}{r\left[(\cos\theta + d_i\sin\theta)^2 + e_i^2\sin^2\theta\right]}, \tag{4.78}$$

$$\frac{\partial^3 S_i}{\partial x^2 \partial y} = \frac{2e_i \cos\theta}{r\left[(\cos\theta + d_i\sin\theta)^2 + e_i^2\sin^2\theta\right]}, \tag{4.79}$$

$$\frac{\partial^3 S_i}{\partial x \partial y^2} = \frac{2e_i\left[2d_i(\cos\theta + d_i\sin\theta) - (d_i^2 - e_i^2)\sin\theta\right)}{r\left[(\cos\theta + d_i\sin\theta)^2 + e_i^2\sin^2\theta\right]}, \tag{4.80}$$

$$\frac{\partial^3 S_i}{\partial y^3} = \frac{2e_i\left[(3d_i^2 - e_i^2)\cos\theta + 2d_i(d_i^2 + e_i^2)\sin\theta\right]}{r\left((\cos\theta + d_i\sin\theta)^2 + e_i^2\sin^2\theta\right]}, \tag{4.81}$$

$$\frac{\partial^4 S_i}{\partial x^4} = \frac{4e_i\sin\theta(\cos\theta + d_i\sin\theta)}{r^2\left[(\cos\theta + d_i\sin\theta)^2 + e_i^2\sin^2\theta\right]^2}, \tag{4.82}$$

$$\frac{\partial^4 S_i}{\partial x^3 \partial y} = \frac{2e_i}{r^2}\left\{\frac{1}{(\cos\theta + d_i\sin\theta)^2 + e_i^2\sin^2\theta} - \right.$$

$$\left.\frac{2\cos\theta(\cos\theta + d_i\sin\theta)}{\left[(\cos\theta + d_i\sin\theta)^2 + e_i^2\sin^2\theta\right]^2}\right\}, \tag{4.83}$$

$$\frac{\partial^4 S_i}{\partial x^2 \partial y^2} = -\frac{4e_i\cos\theta\left[d_i(\cos\theta + d_i\sin\theta) + e_i^2\sin\theta\right]}{r^2\left[(\cos\theta + d_i\sin\theta)^2 + e_i^2\sin^2\theta\right]^2}, \tag{4.84}$$

$$\frac{\partial^4 S_i}{\partial x \partial y^3} = -\frac{2e_i}{r^2}\left\{\frac{(d_i^2 + e_i^2)}{(\cos\theta + d_i\sin\theta)^2 + e_i^2\sin^2\theta} + \right.$$

$$\left.\frac{2(d_i^2 + e_i^2)\cos\theta(\cos\theta + d_i\sin\theta) - 4e_i^2\cos^2\theta}{\left[(\cos\theta + d_i\sin\theta)^2 + e_i^2\sin^2\theta\right]^2}\right\}, \tag{4.85}$$

$$\frac{\partial^4 S_i}{\partial y^4} = -\frac{4e_i}{r^2}\left\{\frac{d_i(d_i^2 + e_i^2)}{(\cos\theta + d_i\sin\theta)^2 + e_i^2\sin^2\theta} + \right.$$

$$\left.\frac{\cos\theta\left[d_i\left(d_i^2-3e_i^2\right)\cos\theta+\left(d_i^4-e_i^4\right)\sin\theta\right]}{\left[\left(\cos\theta+d_i\sin\theta\right)^2+e_i^2\sin^2\theta\right]^2}\right\}. \tag{4.86}$$

Como pode ser visto, as derivadas de R_i e S_i apresentam singularidades fracas (log$r$), singularidades fortes ($1/r$), e hipersingularidades ($1/r^2$) que precisarão de uma atenção especial durante sua integração.

4.2 Transformação das integrais de domínio em integrais de contorno para flexão em placas anisotrópicas

Como pôde ser visto nas equações (4.28) e (4.29), há integrais de domínio na formulação devido a carga distribuída no domínio. Estas integrais podem ser calculadas no domínio por integração direta na área Ω_g (veja Figura 9). Contudo, a formulação dos elementos de contorno perde seu principal atrativo que é a discretização somente no contorno. Neste trabalho, as integrais de domínio oriundas das cargas distribuídas são transformadas em integrais de contorno por uma transformação exata.

Considere a placa da Figura 9, sob o carregamento g, aplicado em uma área Ω_g. Assumindo que o carregamento g tem uma distribuição linear $(Ax + By + C)$ na área Ω_g, a integral de domínio pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega_g} g w^* d\Omega = \int_{\Omega_g} (Ax + By + C) w^* \rho d\rho d\theta \tag{4.87}$$

ou

$$\int_{\Omega_g} g w^* d\Omega = \int_{\theta}\int_0^r (Ax + By + C) w^* \rho d\rho d\theta, \tag{4.88}$$

onde r é o valor de ρ em um ponto do contorno Γ_g.

Definindo F^* como a seguinte integral:

$$F^* = \int_0^r (Ax + By + C) w^* \rho d\rho, \tag{4.89}$$

podemos escrever:

$$\int_{\Omega_g} gw^* d\Omega = \int_{\theta} F^* d\theta. \tag{4.90}$$

Considerando um ângulo infinitesimal $d\theta$ (Figura 14), a relação entre o comprimento do arco $rd\theta$ e o comprimento infinitesimal do contorno $d\Gamma$, pode ser escrito como:

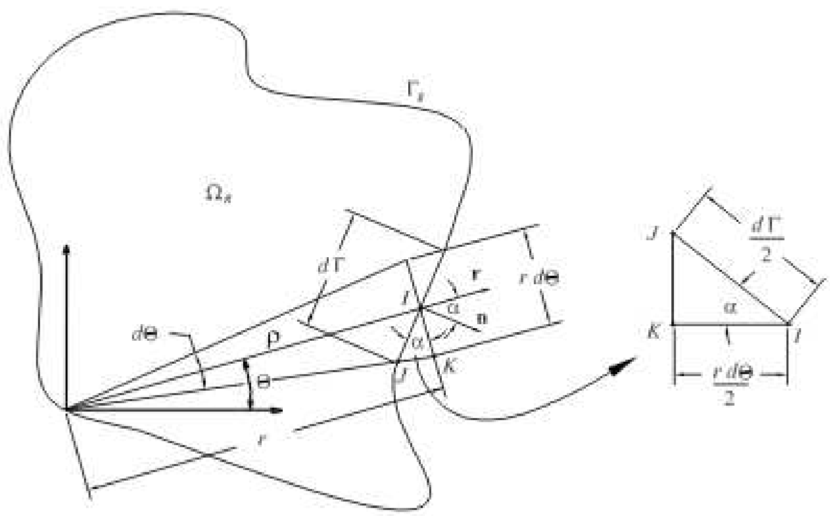

Figura 14: Transformação da integral de domínio em integral de contorno.

$$\cos\alpha = \frac{r\frac{d\theta}{2}}{\frac{d\Gamma}{2}}, \tag{4.91}$$

ou

$$d\theta = \frac{\cos\alpha}{r} d\Gamma. \tag{4.92}$$

Usando as propriedades do produto interno dos vetores unitários $\mathbf{n}$ e $\mathbf{r}$, indicados na Figura 14, podemos escrever:

$$d\theta = \frac{\mathbf{n}.\mathbf{r}}{r} d\Gamma. \tag{4.93}$$

Finalmente, substituindo a equação (4.93) na equação (4.90), a integral de domínio da equação (4.28) pode ser escrita como uma integral de contorno dada por:

$$\int_{\Omega_g} gw^* d\Omega = \int_{\Gamma_g} \frac{F^*}{r} \mathbf{n}.\mathbf{r} d\Gamma. \tag{4.94}$$

Sabendo que

$$x = \rho \cos\theta \tag{4.95}$$

e

$$y = \rho \sin\theta, \tag{4.96}$$

a integral F^* pode ser escrita como:

$$F^* = \int_0^r \frac{1}{8\pi} (A\rho\cos\theta + B\rho\sin\theta + C) \left[C_1 R_1 + C_2 R_2 + C_3 \left(S_1 - S_2\right)\right] \rho d\rho, \tag{4.97}$$

onde C_1, C_2 e C_3 são dados pelas equações (4.35), (4.36) e (4.37), respectivamente. A equação (4.97) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} F^* \quad &= \quad \frac{1}{8\pi} \left\{ (A\cos\theta + B\sin\theta) \int_0^r \rho^2 \left[C_1 R_1 + C_2 R_2 + C_3 \left(S_1 - S_2\right)\right] d\rho + \right. \\ &\left. C \int_0^r \rho \left[C_1 R_1 + C_2 R_2 + C_3 \left(S_1 - S_2\right)\right] d\rho \right\}. \end{aligned} \tag{4.98}$$

Seguindo um procedimento similar para obter a equação (4.98), o termo de domínio da equação (4.29) pode ser escrito como:

$$\int_{\Omega_g} g \frac{\partial w^*}{\partial n_1} d\Omega = \int_\theta G^* d\theta, \tag{4.99}$$

onde

$$G^* = \int_0^r (Ax + By + C)\frac{\partial w^*}{\partial n_1}\rho d\rho \tag{4.100}$$

ou

$$G^* = \frac{1}{8\pi}\left\{(A\cos\theta + B\sin\theta)\int_0^r \rho^2\left[C_1\frac{\partial R_1}{\partial n_1} + C_2\frac{\partial R_2}{\partial n_1} + \right.\right.$$
$$\left.\left. C_3\left(\frac{\partial S_1}{\partial n_1} - \frac{\partial S_2}{\partial n_1}\right)\right]d\rho + C\int_0^r \rho\left[C_1\frac{\partial R_1}{\partial n_1} + C_2\frac{\partial R_2}{\partial n_1} + C_3\left(\frac{\partial S_1}{\partial n_1} - \frac{\partial S_2}{\partial n_1}\right)\right]d\rho\right\}. \tag{4.101}$$

Como pode ser visto, as equações (4.98) e (4.101) não são dependentes de θ. Por integração analítica, podemos obter:

$$\begin{aligned}\int_0^r R_i\rho d\rho &= \frac{r^4}{16}\left\{-16e_i\arctan\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta + d_i\sin\theta}\sin\theta\left(\cos\theta + d_i\sin\theta\right) - \right. \\ &\left[-7 + 2\log\frac{r^2\left(e_i^2\sin^2\theta + (\cos\theta + d_i\sin\theta)^2\right)}{a^2}\right]\times \\ &\left.\left[-1 - d_i^2 + e_i^2 + \left(-1 + d_i^2 - e_i^2\right)\cos 2\theta - 2d_i\sin 2\theta\right]\right\},\end{aligned} \tag{4.102}$$

$$\begin{aligned}\int_0^r S_i\rho d\rho &= \frac{r^4}{16}\left\{2e_i\left[-7 + 2\log\frac{r^2\left(e_i^2\sin^2\theta + (\cos\theta + d_i\sin\theta)^2\right)}{a^2}\right]\times\right. \\ &\sin\theta\left(\cos\theta + d_i\sin\theta\right) + 2\arctan\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta + d_i\sin\theta}\times \\ &\left.\left[1 + d_i^2 - e_i^2 + \left(1 - d_i^2 + e_i^2\right)\cos 2\theta + 2d_i\sin 2\theta\right]\right\},\end{aligned} \tag{4.103}$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^r R_i \rho^2 d\rho \;\; = \;\; & \frac{r^5}{50} \left\{ -40 e_i \arctan \frac{e_i \sin\theta}{\cos\theta + d_i \sin\theta} \sin\theta \left(\cos\theta + d_i \sin\theta\right) - \right. \\
& \left[-17 + 5 \log \frac{r^2 \left(e_i^2 \sin^2\theta + \left(\cos\theta + d_i \sin\theta\right)^2 \right)}{a^2} \right] \times \\
& \left. \left[-1 - d_i^2 + e_i^2 + \left(-1 + d_i^2 - e_i^2 \right) \cos 2\theta - 2 d_i \sin 2\theta \right] \right\}, \qquad (4.104)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^r S_i \rho^2 d\rho \;\; = \;\; & \frac{r^5}{50} \left\{ 2 e_i \left[-17 + 5 \log \frac{r^2 \left(e_i^2 \sin^2\theta + \left(\cos\theta + d_i \sin\theta\right)^2 \right)}{a^2} \right] \times \right. \\
& \sin\theta \left(\cos\theta + d_i \sin\theta\right) + 5 \arctan \frac{e_i \sin\theta}{\cos\theta + d_i \sin\theta} \times \\
& \left. \left[1 + d_i^2 - e_i^2 + \left(1 - d_i^2 + e_i^2 \right) \cos 2\theta + 2 d_i \sin 2\theta \right] \right\}, \qquad (4.105)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^r \frac{\partial R_i}{\partial x} \rho d\rho \;\; = \;\; & \frac{2r^3}{9} \left\{ -6 e_i \arctan \frac{e_i \sin\theta}{\cos\theta + d_i \sin\theta} \sin\theta + \right. \\
& \left. \left[-8 + 3 \log \frac{r^2 \left(e_i^2 \sin^2\theta + \left(\cos\theta + d_i \sin\theta\right)^2 \right)}{a^2} \right] \left(\cos\theta + d_i \sin\theta\right) \right\}, \qquad (4.106)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^r \frac{\partial R_i}{\partial y} \rho d\rho \;\; = \;\; & \frac{2r^3}{9} \left\{ -6 e_i \arctan \frac{e_i \sin\theta}{\cos\theta + d_i \sin\theta} \left(\cos\theta + 2 d_i \sin\theta\right) + \right. \\
& \left. \left[-8 + 3 \log \frac{r^2 \left(e_i^2 \sin^2\theta + \left(\cos\theta + d_i \sin\theta\right)^2 \right)}{a^2} \right] \left[d_i \cos\theta + \left(d_i^2 - e_i^2 \right) \sin\theta \right] \right\}, \\
& \qquad (4.107)
\end{aligned}
$$

$$\int_0^r \frac{\partial S_i}{\partial x}\rho d\rho = \frac{r^3}{9}\left\{e_i\left[-8+3\log\frac{r^2\left(e_i^2\sin^2\theta+(\cos\theta+d_i\sin\theta)^2\right)}{a^2}\right]\sin\theta+\right.$$

$$\left. 6\arctan\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta+d_i\sin\theta}\left(\cos\theta+d_i\sin\theta\right)\right\}, \tag{4.108}$$

$$\int_0^r \frac{\partial S_i}{\partial y}\rho d\rho = \frac{r^3}{9}\left\{e_i\left[-8+3\log\frac{r^2\left(e_i^2\sin^2\theta+(\cos\theta+d_i\sin\theta)^2\right)}{a^2}\right]\times\right.$$

$$\left.(\cos\theta+2d_i\sin\theta)-6\arctan\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta+d_i\sin\theta}\left[d_i\cos\theta+\left(d_i^2-e_i^2\right)\sin\theta\right]\right\}, \tag{4.109}$$

$$\int_0^r \frac{\partial R_i}{\partial x}\rho^2 d\rho = \frac{r^4}{4}\left\{-4e_i\arctan\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta+d_i\sin\theta}\sin\theta+\right.$$

$$\left.\left[-5+2\log\frac{r^2\left(e_i^2\sin^2\theta+(\cos\theta+d_i\sin\theta)^2\right)}{a^2}\right](\cos\theta+d_i\sin\theta)\right\}, \tag{4.110}$$

$$\int_0^r \frac{\partial R_i}{\partial y}\rho^2 d\rho = \frac{r^4}{4}\left\{-4e_i\arctan\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta+d_i\sin\theta}(\cos\theta+2d_i\sin\theta)+\right.$$

$$\left.\left[-5+2\log\frac{r^2\left(e_i^2\sin^2\theta+(\cos\theta+d_i\sin\theta)^2\right)}{a^2}\right]\left[d_i\cos\theta+\left(d_i^2-e_i^2\right)\sin\theta\right]\right\}, \tag{4.111}$$

$$\int_0^r \frac{\partial S_i}{\partial x}\rho^2 d\rho = \frac{r^4}{8}\left\{e_i\left[-5+2\log\frac{r^2\left(e_i^2\sin^2\theta+(\cos\theta+d_i\sin\theta)^2\right)}{a^2}\right]\sin\theta+\right.$$

$$4 \arctan \frac{e_i \sin\theta}{\cos\theta + d_i \sin\theta} \left(\cos\theta + d_i \sin\theta\right) \Bigg\}, \tag{4.112}$$

$$\int_0^r \frac{\partial S_i}{\partial y} \rho^2 d\rho = \frac{r^4}{8} \left\{ e_i \left[-5 + 2\log \frac{r^2 \left(e_i^2 \sin^2\theta + (\cos\theta + d_i \sin\theta)^2 \right)}{a^2} \right] \right.$$
$$\left. (\cos\theta + 2d_i \sin\theta) + 4 \arctan \frac{e_i \sin\theta}{\cos\theta + d_i \sin\theta} \left[d_i \cos\theta + \left(d_i^2 - e_i^2 \right) \sin\theta \right] \right\}. \tag{4.113}$$

Embora neste trabalho as cargas de domínio são consideradas como uniformemente distribuídas ou linearmente distribuídas, o procedimento apresentado nesta seção pode ser estendido para outras cargas de ordem superior.

4.3 Elementos Quadráticos

Como enfatizado por Kane (1994), o passo fundamental para o desenvolvimento do método dos elementos de contorno é o abandono da aspiração por uma solução exata do problema. Este requisito é substituído por outra estratégia: encontrar uma solução aproximada de alta qualidade em um número finito de pontos no contorno do problema, os nós. Assim, visando aumentar a convergência dos resultados para a formulação apresentada aqui, foram implementados os elementos quadráticos, os quais são os mais simples capazes de representar qualquer contorno curvo. Como a formulação tem integrais com integrandos singulares, estas integrais precisam ser calculadas no sentido de Cauchy, no caso de singularidades fortes, ou no sentido de Hadamard, no caso de hipersingularidades. A integração no sentido de Hadamard requer a continuidade de Holder nos nós. Devido a esse fato, os elementos descontínuos são fortemente indicados. Neste trabalho são usados os elementos quadráticos descontínuos para representar os elementos físicos e os elementos quadráticos contínuos para representar os elementos geométricos.

Nos elementos quadráticos os deslocamentos e forças podem ser representados como:

$$\left\{ \begin{array}{c} w \\ \frac{\partial w}{\partial n} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} N_d^{(1)} & 0 & N_d^{(2)} & 0 & N_d^{(3)} & 0 \\ 0 & N_d^{(1)} & 0 & N_d^{(2)} & 0 & N_d^{(3)} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} w^{(1)} \\ \frac{\partial w}{\partial n}^{(1)} \\ w^{(2)} \\ \frac{\partial w}{\partial n}^{(2)} \\ w^{(3)} \\ \frac{\partial w}{\partial n}^{(3)} \end{array} \right\} \tag{4.114}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} V_n \\ m_n \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} N_d^{(1)} & 0 & N_d^{(2)} & 0 & N_d^{(3)} & 0 \\ 0 & N_d^{(1)} & 0 & N_d^{(2)} & 0 & N_d^{(3)} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} V_n^{(1)} \\ m_n^{(1)} \\ V_n^{(2)} \\ m_n^{(2)} \\ V_n^{(3)} \\ m_n^{(3)} \end{array} \right\} \tag{4.115}$$

Nos elementos quadráticos descontínuos os nós são colocados em $\xi = -2/3$, $\xi = 0$ e $\xi = +2/3$, como mostrado na Figura 15. A equação de interpolação quadrática para a geometria mostrada pode ser derivada pela determinação dos coeficientes da expressão quadrática:

Assim:

$$N_d = A\xi^2 + B\xi + C \tag{4.116}$$

Substituindo os valores de ξ correspondentes aos nós na equação (4.116), temos:

$$\left\{ \begin{array}{c} N_d^{(1)} \\ N_d^{(2)} \\ N_d^{(3)} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} 4/9 & -2/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4/9 & +2/3 & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \right\} \tag{4.117}$$

Resolvendo o sistema linear (4.117) chegamos às funções de interpolação ou funções de forma para estes elementos dadas por:

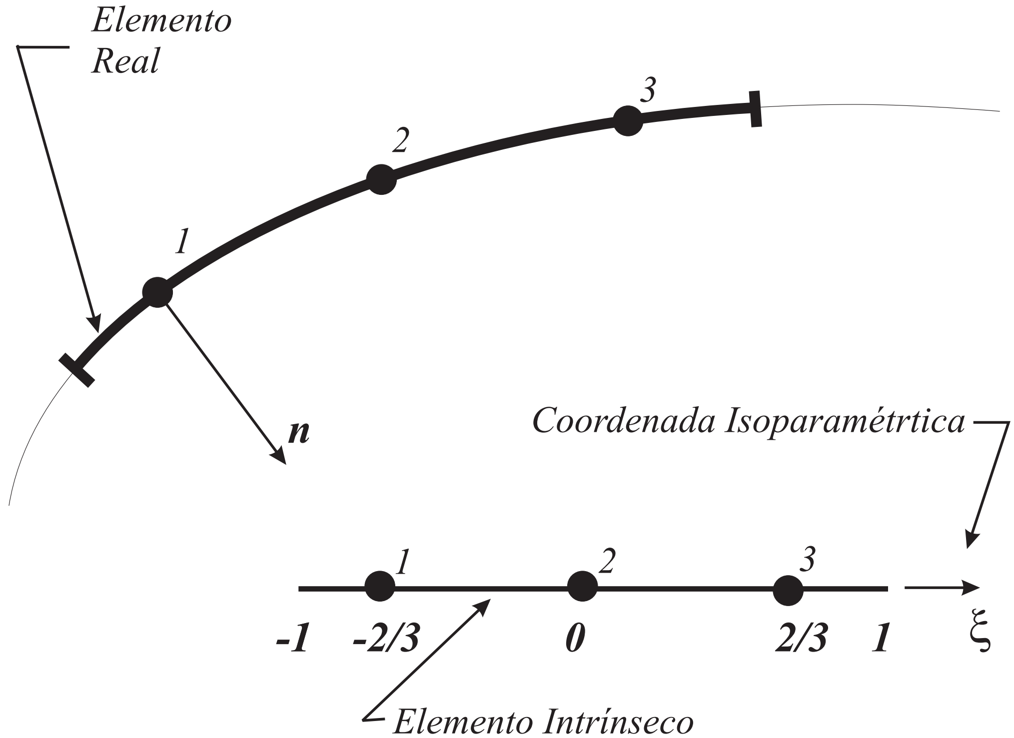

Figura 15: Elemento quadrático descontínuo.

$$N_d^{(1)} = \xi\left(\frac{9}{8}\xi - \frac{3}{4}\right); \tag{4.118}$$

$$N_d^{(2)} = \left(1 - \frac{3}{2}\xi\right)\left(1 + \frac{3}{2}\xi\right); \tag{4.119}$$

$$N_d^{(3)} = \xi\left(\frac{9}{8}\xi + \frac{3}{4}\right). \tag{4.120}$$

onde ξ é a coordenada adimensional ao longo do elemento (Figura 15).

A geometria do elemento também pode ser considerada como quadrática e é representada por coordenadas nodais na forma:

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} N_c^{(1)} & 0 & N_c^{(2)} & 0 & N_c^{(3)} & 0 \\ 0 & N_c^{(1)} & 0 & N_c^{(2)} & 0 & N_c^{(3)} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} x_1^{(1)} \\ x_1^{(2)} \\ x_1^{(3)} \\ x_2^{(1)} \\ x_2^{(2)} \\ x_2^{(3)} \end{array} \right\} \tag{4.121}$$

porém utilizando as funções de interpolação para elementos quadráticos contínuos dadas por:

$$N_c^{(1)} = \frac{1}{2}\xi\left(\xi - 1\right); \tag{4.122}$$

$$N_c^{(2)} = \left(1 - \xi^2\right); \tag{4.123}$$

$$N_c^{(3)} = \frac{1}{2}\xi\left(\xi + 1\right). \tag{4.124}$$

4.4 Equação matricial

Com o objetivo de calcular as variáveis de contorno desconhecidas, o contorno Γ é discretizado em N_e elementos curvos e as variáveis de contorno w, $\partial w/\partial n$, m_n e V_n são assumidas com uma variação quadrática ao longo de cada elemento. Tomando um nó d como o ponto fonte, as equações (4.28) e (4.29) podem ser escritas na forma matricial como:

$$\frac{1}{2}\left\{ \begin{array}{c} w^{(d)} \\ \\ \frac{\partial w}{\partial n_1}^{(d)} \end{array} \right\} + \sum_{i=1}^{N_e} \left(\left[\begin{array}{cccccc} h_{11}^{(i,d)} & h_{12}^{(i,d)} & h_{13}^{(i,d)} & h_{14}^{(i,d)} & h_{15}^{(i,d)} & h_{16}^{(i,d)} \\ h_{21}^{(i,d)} & h_{22}^{(i,d)} & h_{23}^{(i,d)} & h_{24}^{(i,d)} & h_{25}^{(i,d)} & h_{26}^{(i,d)} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} w^{(i,1)} \\ \frac{\partial w}{\partial n}^{(i,1)} \\ w^{(i,2)} \\ \frac{\partial w}{\partial n}^{(i,2)} \\ w^{(i,3)} \\ \frac{\partial w}{\partial n}^{(i,3)} \end{array} \right\} \right) =$$

$$
\sum_{i=1}^{N_e}\left(\left[\begin{array}{cccccc} g_{11}^{(i,d)} & g_{12}^{(i,d)} & g_{13}^{(i,d)} & g_{14}^{(i,d)} & g_{15}^{(i,d)} & g_{16}^{(i,d)} \\ g_{21}^{(i,d)} & g_{22}^{(i,d)} & g_{23}^{(i,d)} & g_{24}^{(i,d)} & g_{25}^{(i,d)} & g_{26}^{(i,d)} \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} V_n^{(i,1)} \\ m_n^{(i,1)} \\ V_n^{(i,2)} \\ m_n^{(i,2)} \\ V_n^{(i,3)} \\ m_n^{(i,3)} \end{array}\right\}\right)+
$$

$$
\sum_{i=1}^{N_c}\left(\left\{\begin{array}{c} R_1^{(i,d)} \\ R_2^{(i,d)} \end{array}\right\} w_c^{(i)}\right)+\sum_{i=1}^{N_c}\left(\left\{\begin{array}{c} c_1^{(i,d)} \\ c_2^{(i,d)} \end{array}\right\} R_c^{(i)}\right)+\left\{\begin{array}{c} P_1^{(d)} \\ P_2^{(d)} \end{array}\right\} \tag{4.125}
$$

Os termos da equação (4.125) são integrais dadas por:

$$
h_{11}^{(i,d)}=\int_{\Gamma_i} N^{(1)} V_n^* d\Gamma, \qquad h_{12}^{(i,d)}=-\int_{\Gamma_i} N^{(1)} m_n^* d\Gamma, \tag{4.126}
$$

$$
h_{13}^{(i,d)}=\int_{\Gamma_i} N^{(2)} V_n^* d\Gamma, \qquad h_{14}^{(i,d)}=-\int_{\Gamma_i} N^{(2)} m_n^* d\Gamma, \tag{4.127}
$$

$$
h_{15}^{(i,d)}=\int_{\Gamma_i} N^{(3)} V_n^* d\Gamma, \qquad h_{16}^{(i,d)}=-\int_{\Gamma_i} N^{(3)} m_n^* d\Gamma, \tag{4.128}
$$

$$
h_{21}^{(i,d)}=\int_{\Gamma_i} N^{(1)} \frac{\partial V_n^*}{\partial n_1} d\Gamma, \qquad h_{22}^{(i,d)}=-\int_{\Gamma_i} N^{(1)} \frac{\partial m_n^*}{\partial n_1} d\Gamma, \tag{4.129}
$$

$$
h_{23}^{(i,d)}=\int_{\Gamma_i} N^{(2)} \frac{\partial V_n^*}{\partial n_1} d\Gamma, \qquad h_{24}^{(i,d)}=-\int_{\Gamma_i} N^{(2)} \frac{\partial m_n^*}{\partial n_1} d\Gamma, \tag{4.130}
$$

$$
h_{25}^{(i,d)}=\int_{\Gamma_i} N^{(3)} \frac{\partial V_n^*}{\partial n_1} d\Gamma, \qquad h_{26}^{(i,d)}=-\int_{\Gamma_i} N^{(3)} \frac{\partial m_n^*}{\partial n_1} d\Gamma, \tag{4.131}
$$

$$
g_{11}^{(i,d)}=\int_{\Gamma_i} N^{(1)} w^* d\Gamma, \qquad g_{12}^{(i,d)}=-\int_{\Gamma_i} N^{(1)} \frac{\partial w^*}{\partial n} d\Gamma, \tag{4.132}
$$

$$
g_{13}^{(i,d)}=\int_{\Gamma_i} N^{(2)} w^* d\Gamma, \qquad g_{14}^{(i,d)}=-\int_{\Gamma_i} N^{(2)} \frac{\partial w^*}{\partial n} d\Gamma, \tag{4.133}
$$

$$
g_{15}^{(i,d)}=\int_{\Gamma_i} N^{(3)} w^* d\Gamma, \qquad g_{16}^{(i,d)}=-\int_{\Gamma_i} N^{(3)} \frac{\partial w^*}{\partial n} d\Gamma, \tag{4.134}
$$

$$g_{21}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N^{(1)} \frac{\partial w^*}{\partial n_1} d\Gamma, \qquad g_{22}^{(i,d)} = -\int_{\Gamma_i} N^{(1)} \frac{\partial}{\partial n_1} \frac{\partial m_n^*}{\partial n} d\Gamma, \tag{4.135}$$

$$g_{23}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N^{(2)} \frac{\partial w^*}{\partial n_1} d\Gamma, \qquad g_{24}^{(i,d)} = -\int_{\Gamma_i} N^{(2)} \frac{\partial}{\partial n_1} \frac{\partial m_n^*}{\partial n} d\Gamma, \tag{4.136}$$

$$g_{25}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N^{(3)} \frac{\partial w^*}{\partial n_1} d\Gamma, \qquad g_{26}^{(i,d)} = -\int_{\Gamma_i} N^{(3)} \frac{\partial}{\partial n_1} \frac{\partial m_n^*}{\partial n} d\Gamma, \tag{4.137}$$

$$c_1^{(i,d)} = w_{ci}^*, \qquad c_2^{(i,d)} = \frac{\partial w_{ci}^*}{\partial n_1}, \tag{4.138}$$

$$R_1^{(i,d)} = R_{ci}^*, \qquad R_2^{(i,d)} = \frac{\partial R_{ci}^*}{\partial n_1}, \tag{4.139}$$

$$P_1^{(d)} = \int_{\Omega} g w^* d\Omega, \qquad P_2^{(d)} = \int_{\Omega} g \frac{\partial w}{\partial n_1} d\Omega. \tag{4.140}$$

sendo o contorno Γ dado por:

$$\Gamma = \sum_{e=1}^{N_e} \Gamma_e \tag{4.141}$$

onde N_e é o número de elementos.

O desenvolvimento das integrais ao longo do elemento na equação (4.125) requer o uso do Jacobiano já que as funções de forma são expressas em termos da coordenada adimensional mas as integrais são resolvidas ao longo do contorno Γ_e. O Jacobiano desta transformação é dado por:

$$J(\xi) = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\xi}\right)^2} = \frac{d\Gamma_e}{d\xi} \tag{4.142}$$

Assim:

$$d\Gamma_e = J(\xi) d\xi \tag{4.143}$$

A equação matricial (4.125) tem duas equações e $6N_e + N_c$ variáveis desconhecidas. Para se obter um sistema linear solucionável, o ponto fonte é colocado sucessivamente em cada nó do contorno ($d = 1, ..., 6N_e$) bem como em cada nó de canto ($d = 6N_e + 1, ..., 6N_e + N_c$). É importante notar que enquanto ambas as equações, (4.28) e (4.29), são usadas para cada nó de contorno (fornecendo as primeiras $6N_e$ equações), somente a equação (4.28) é usada para cada canto (fornecendo outras N_c equações). Então, a seguinte equação matricial é obtida:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}' & \mathbf{R}' \\ \mathbf{H}'' & \mathbf{R}'' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_{bn} \\ \mathbf{w}_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}' & \mathbf{C}' \\ \mathbf{G}'' & \mathbf{C}'' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{V}_{bn} \ \mathbf{V}_c \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_{bn} \\ \mathbf{P}_c \end{Bmatrix} \tag{4.144}$$

onde $\mathbf{w}_{bn}$ contém o deslocamento transversal e a rotação de cada nó de contorno, $\mathbf{V}_{bn}$ contém a força cisalhante e o momento torsor de cada nó de contorno, $\mathbf{P}_{bn}$ contém a integral de domínio para cada nó de contorno, $\mathbf{w}_c$ contém o deslocamento transversal de cada canto, $\mathbf{V}_c$ contém a reação de canto para cada canto, $\mathbf{P}_c$ contém a integral de domínio para cada canto. Os termos $\mathbf{H}'$, $\mathbf{C}'$, $\mathbf{R}'$ e $\mathbf{G}'$ são matrizes que contém os respectivos termos da equação (4.125) escritos para os N_e nós de contorno. Os termos $\mathbf{H}''$, $\mathbf{C}''$, $\mathbf{R}''$ e $\mathbf{G}''$ são matrizes que contém os respectivos primeiros termos lineares da equação (4.125) escrita para os N_c cantos.

A equação (4.144) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{Hw} = \mathbf{GV} + \mathbf{P} \tag{4.145}$$

onde

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}' & \mathbf{R}' \\ \mathbf{H}'' & \mathbf{R}'' \end{bmatrix} \tag{4.146}$$

$$\mathbf{w} = \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_{bn} \\ \mathbf{w}_c \end{Bmatrix} \tag{4.147}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}' & \mathbf{C}' \\ \mathbf{G}'' & \mathbf{C}'' \end{bmatrix} \tag{4.148}$$

$$\mathbf{V} = \begin{Bmatrix} \mathbf{V}_{bn} \\ \mathbf{V}_c \end{Bmatrix} \tag{4.149}$$

$$\mathbf{P} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_{bn} \\ \mathbf{P}_c \end{Bmatrix} \tag{4.150}$$

Aplicando as condições de contorno, a equação (4.144) pode ser rearranjada como:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{4.151}$$

que pode ser resolvida pelo procedimento padrão para sistemas lineares.

4.5 Tensões em Placas Compósitas Laminadas

As lâminas fabricadas em material compósito formado por fibras unidirecionais apresentam um comportamento anisotrópico bem definido, cujas propriedades variam com as direções porém permanecem constantes em cada direção. Assim a resistência na direção longitudinal às fibras será a mesma por toda a lâmina, bem como a resistência na direção perpendicular às fibras e na direção normal à lâmina. Essa característica permite que o fabricante tenha controle sobre as propriedades da lâmina através de poucas variáveis. Quando várias lâminas unidirecionais são unidas para formar um laminado, além do surgimento de outras variáveis, como o número de lâminas e o ângulo das fibras de cada lâmina, observa-se que o comportamento elástico de cada lâmina é distinto das outras.

4.5.1 Tensão e deformação de placas compósitas laminadas

Os laminados são fabricados para agir como um elemento estrutural único. Para atender a essa condição, a união entre duas lâminas do laminado deve ser infinitesimalmente fina e não deformável por cisalhamento para que o deslizamento de umas lâminas sobre outras seja evitado, e para permitir o deslocamento contínuo ao longo da união (AGARWAL; BROUTMAN, 1990). Assim pode-se considerar que as deformações são contínuas ao longo da espessura. Contudo, como cada lâmina é feita de um material, as tensões apresentam descontinuidades ao longo das interfaces do laminado, como mostrado na Figura (16).

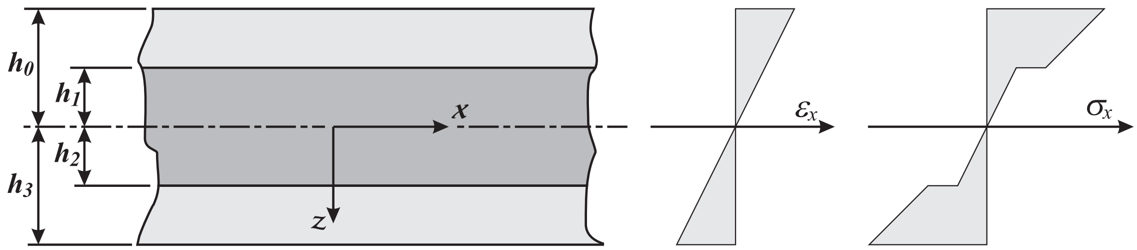

Figura 16: Variação da deformação e da tensão em um laminado hipotético

Nas placas de Kirchhoff, as deformações dadas pelas equações (3.18) dependem da derivada de segunda ordem dos deslocamentos dadas por:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w(Q)}{\partial x^2} &= \int_\Gamma \left[\frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x^2}(Q,P)w(P) - \frac{\partial^2 m_n^*}{\partial x^2}(Q,P)\frac{\partial w(P)}{\partial n}\right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial^2 R_{c_i}^*}{\partial x^2}(Q,P)w_{c_i}(P) - \\
&\int_\Gamma \left[V_n(P)\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2}(Q,P) - m_n(P)\frac{\partial^3 w^*}{\partial n \partial x^2}(Q,P)\right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}(P)\frac{\partial^2 w_{c_i}^*}{\partial x^2}(Q,P) + \\
&\int_\Omega g(P)\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2}(Q,P)d\Omega. \qquad (4.152)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w(Q)}{\partial y^2} &= \int_\Gamma \left[\frac{\partial^2 V_n^*}{\partial y^2}(Q,P)w(P) - \frac{\partial^2 m_n^*}{\partial y^2}(Q,P)\frac{\partial w(P)}{\partial n}\right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial^2 R_{c_i}^*}{\partial y^2}(Q,P)w_{c_i}(P) - \\
&\int_\Gamma \left[V_n(P)\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2}(Q,P) - m_n(P)\frac{\partial^3 w^*}{\partial n \partial y^2}(Q,P)\right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}(P)\frac{\partial^2 w_{c_i}^*}{\partial y^2}(Q,P) + \\
&\int_\Omega g(P)\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2}(Q,P)d\Omega. \qquad (4.153)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w(Q)}{\partial x \partial y} &= \int_\Gamma \left[\frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x \partial y}(Q,P)w(P) - \frac{\partial^2 m_n^*}{\partial x \partial y}(Q,P)\frac{\partial w(P)}{\partial n}\right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial^2 R_{c_i}^*}{\partial x \partial y}(Q,P)w_{c_i}(P) - \\
&\int_\Gamma \left[V_n(P)\frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y}(Q,P) - m_n(P)\frac{\partial^3 w^*}{\partial n \partial x \partial y}(Q,P)\right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}(P)\frac{\partial^2 w_{c_i}^*}{\partial x \partial y}(Q,P) +
\end{aligned}
$$

$$\int_{\Omega} g(P) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y}(Q,P) d\Omega. \tag{4.154}$$

onde as segundas derivadas das soluções fundamentais são dadas por:

$$\frac{\partial^2 w^*(\rho,\theta)}{\partial x^2} = \frac{1}{8\pi} \left\{ C_1 \frac{\partial^2 R_1(\rho,\theta)}{\partial x^2} + C_2 \frac{\partial^2 R_2(\rho,\theta)}{\partial x^2} + C_3 \left[\frac{\partial^2 S_1(\rho,\theta)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 S_2(\rho,\theta)}{\partial x^2} \right] \right\}, \tag{4.155}$$

sendo que C_1, C_2 e C_3 são dados pelas equações (4.35), (4.36) e (4.37), respectivamente; ρ é dado pela equação (4.33) e θ é dado pela equação (4.34).

As outras derivadas da solução fundamental são dadas por:

$$\frac{\partial^2 m_n^*}{\partial x^2} = -\left(f_1 \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^4} + f_2 \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^3 \partial y} + f_3 \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^2 \partial y^2} \right), \tag{4.156}$$

$$\frac{\partial^2 R_{c_i}^*}{\partial x^2} = -\left(g_1 \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^4} + g_2 \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^3 \partial y} + g_3 \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^2 \partial y^2} \right), \tag{4.157}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x^2} &= -\left(h_1 \frac{\partial^5 w^*}{\partial x^5} + h_2 \frac{\partial^5 w^*}{\partial x^4 \partial y} + h_3 \frac{\partial^5 w^*}{\partial x^3 \partial y^2} + h_4 \frac{\partial^5 w^*}{\partial x^2 \partial y^3} \right) - \\ &\quad \frac{1}{\bar{R}} \left(h_5 \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^4} + h_6 \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^3 \partial y} + h_7 \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^2 \partial y^2} \right). \end{aligned} \tag{4.158}$$

As derivadas para y e xy são dadas por procedimentos similares. Todas as derivadas das soluções fundamentais do deslocamento transversal w podem ser expressas pela combinação linear das derivadas de R_i e S_i. Todas as derivadas de R_i e S_i até a 4ª ordem são dadas pelas equações de (4.60) até (4.86). As derivadas de 5ª ordem são dadas por:

$$\frac{\partial^5 R_i}{\partial x^5} = \frac{8(\cos\theta + d_i \sin\theta) \left[\cos^2\theta + \left({d_i}^2 - 3{e_i}^2 \right) \sin^2\theta + d_i \sin 2\theta \right]}{R^3 \left[\cos^2\theta + \left({d_i}^2 + {e_i}^2 \right) \sin^2\theta + d_i \sin 2\theta \right]^3} \tag{4.159}$$

$$\frac{\partial^5 R_i}{\partial x^4 \partial y} = \frac{8}{R^3}\left\{\frac{d_i \cos^3\theta + 3\left({d_i}^2 + {e_i}^2\right)\sin\theta\cos^2\theta}{\left[\cos^2\theta + \left({d_i}^2 + {e_i}^2\right)\sin^2\theta + d_i \sin 2\theta\right]^3} + \right.$$
$$\left. + \frac{3d_i\left({d_i}^2 + {e_i}^2\right)\sin^2\theta\cos\theta + \left({d_i}^4 - {e_i}^4\right)\sin^3\theta}{\left[\cos^2\theta + \left({d_i}^2 + {e_i}^2\right)\sin^2\theta + d_i \sin 2\theta\right]^3}\right\} \tag{4.160}$$

$$\frac{\partial^5 R_i}{\partial x^3 \partial y^2} = \frac{8}{R^3}\left\{\frac{\left({d_i}^2 - {e_i}^2\right)\cos^3\theta + 3d_i\left({d_i}^2 + {e_i}^2\right)\sin\theta\cos^2\theta}{\left[\cos^2\theta + \left({d_i}^2 + {e_i}^2\right)\sin^2\theta + d_i \sin 2\theta\right]^3} + \right.$$
$$\left. + \frac{3\left({d_i}^2 + {e_i}^2\right)^2\sin^2\theta\cos\theta + d_i\left({d_i}^2 + {e_i}^2\right)^2\sin^3\theta}{\left[\cos^2\theta + \left({d_i}^2 + {e_i}^2\right)\sin^2\theta + d_i \sin 2\theta\right]^3}\right\} \tag{4.161}$$

$$\frac{\partial^5 R_i}{\partial x^2 \partial y^3} = \frac{8}{R^3}\left\{\frac{d_i\left({d_i}^2 - 3{e_i}^2\right)\cos^3\theta + 3\left({d_i}^4 - {e_i}^4\right)\sin\theta\cos^2\theta}{\left[\cos^2\theta + \left({d_i}^2 + {e_i}^2\right)\sin^2\theta + d_i \sin 2\theta\right]^3} + \right.$$
$$\left. + \frac{3d_i\left({d_i}^2 + {e_i}^2\right)^2\sin^2\theta\cos\theta + \left({d_i}^2 + {e_i}^2\right)^3\sin^3\theta}{\left[\cos^2\theta + \left({d_i}^2 + {e_i}^2\right)\sin^2\theta + d_i \sin 2\theta\right]^3}\right\} \tag{4.162}$$

$$\frac{\partial^5 R_i}{\partial x \partial y^4} = \frac{8}{R^3}\left\{\frac{\left({d_i}^4 - 6{e_i}^2{d_i}^2 + {e_i}^4\right)\cos^3\theta + 3d_i\left({d_i}^4 - 2{e_i}^2{d_i}^2 - 3{e_i}^4\right)\sin\theta\cos^2\theta}{\left[\cos^2\theta + \left({d_i}^2 + {e_i}^2\right)\sin^2\theta + d_i \sin 2\theta\right]^3} + \right.$$
$$\left. + \frac{3\left({d_i}^2 - {e_i}^2\right)\left({d_i}^2 + {e_i}^2\right)^2\sin^2\theta\cos\theta + d_i\left({d_i}^2 + {e_i}^2\right)^3\sin^3\theta}{\left[\cos^2\theta + \left({d_i}^2 + {e_i}^2\right)\sin^2\theta + d_i \sin 2\theta\right]^3}\right\} \tag{4.163}$$

$$\frac{\partial^5 R_i}{\partial y^5} = \frac{8}{R^3}\left\{\frac{d_i\left({d_i}^4 - 10{e_i}^2{d_i}^2 + 5{e_i}^4\right)\cos^3\theta + 3\left({d_i}^6 - 5{e_i}^2{d_i}^4 - 5{e_i}^4{d_i}^2 + {e_i}^6\right)\sin\theta\cos^2\theta}{\left[\cos^2\theta + \left({d_i}^2 + {e_i}^2\right)\sin^2\theta + d_i \sin 2\theta\right]^3} + \right.$$
$$\left. + \frac{3d_i\left({d_i}^2 - 3{e_i}^2\right)\left({d_i}^2 + {e_i}^2\right)^2\sin^2\theta\cos\theta + \left({d_i}^2 - {e_i}^2\right)\left({d_i}^2 + {e_i}^2\right)^3\sin^3\theta}{\left[\cos^2\theta + \left({d_i}^2 + {e_i}^2\right)\sin^2\theta + d_i \sin 2\theta\right]^3}\right\} \tag{4.164}$$

$$\frac{\partial^5 S_i}{\partial x^5} = \frac{4ei\sin\theta\left[-3\cos^2\theta - 6di\sin\theta\cos\theta + \left(ei^2 - 3di^2\right)\sin^2\theta\right]}{R^3\left[\cos^2\theta + \left(di^2 + ei^2\right)\sin^2\theta + di\sin 2\theta\right]^3} \tag{4.165}$$

$$\frac{\partial^5 S_i}{\partial x^4\partial y} = \frac{4e_i\left[\cos^3\theta - 3\left({d_i}^2 + {e_i}^2\right)\sin^2\theta\cos\theta - 2d_i\left({d_i}^2 + {e_i}^2\right)\sin^3\theta\right]}{R^3\left[\cos^2\theta + \left({d_i}^2 + {e_i}^2\right)\sin^2\theta + d_i\sin 2\theta\right]^3} \tag{4.166}$$

$$\frac{\partial^5 S_i}{\partial x^3\partial y^2} = \frac{4e_i\left[2d_i\cos^3\theta + 3\left({d_i}^2 + {e_i}^2\right)\sin\theta\cos^2\theta - \left({d_i}^2 + {e_i}^2\right)^2\sin^3\theta\right]}{R^3\left[\cos^2\theta + \left({d_i}^2 + {e_i}^2\right)\sin^2\theta + d_i\sin 2\theta\right]^3} \tag{4.167}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^5 S_i}{\partial x^2\partial y^3} &= \frac{4e_i\cos\theta}{R^3}\left\{\frac{\left(3{d_i}^2 - {e_i}^2\right)\cos^2\theta}{\left[\cos^2\theta + \left({d_i}^2 + {e_i}^2\right)\sin^2\theta + d_i\sin 2\theta\right]^3} + \right.\\ &\left. + \frac{3\left({d_i}^2 + {e_i}^2\right)\sin\theta\left[2d_i\cos\theta + \left({d_i}^2 + {e_i}^2\right)\sin\theta\right]}{\left[\cos^2\theta + \left({d_i}^2 + {e_i}^2\right)\sin^2\theta + d_i\sin 2\theta\right]^3}\right\}\end{aligned} \tag{4.168}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^5 S_i}{\partial x\partial y^4} &= \frac{4e_i}{R^3}\left\{\frac{4d_i(d_i - e_i)(d_i + e_i)\cos^3\theta + 3\left(3{d_i}^2 - {e_i}^2\right)\left({d_i}^2 + {e_i}^2\right)\sin\theta\cos^2\theta}{\left[\cos^2\theta + \left({d_i}^2 + {e_i}^2\right)\sin^2\theta + d_i\sin 2\theta\right]^3} + \right.\\ &\left. + \frac{6d_i\left({d_i}^2 + {e_i}^2\right)^2\sin^2\theta\cos\theta + \left({d_i}^2 + {e_i}^2\right)^3\sin^3\theta}{\left[\cos^2\theta + \left({d_i}^2 + {e_i}^2\right)\sin^2\theta + d_i\sin 2\theta\right]^3}\right\}\end{aligned} \tag{4.169}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^5 S_i}{\partial y^5} &= \frac{4e_i}{R^3}\left\{\frac{\left(5{d_i}^4 - 10{e_i}^2{d_i}^2 + ei^4\right)\cos^3\theta + 12d_i\left({d_i}^4 - {e_i}^4\right)\sin\theta\cos^2\theta}{\left[\cos^2\theta + \left({d_i}^2 + {e_i}^2\right)\sin^2\theta + d_i\sin 2\theta\right]^3} - \right.\\ &\left. - \frac{3\left({e_i}^2 - 3{d_i}^2\right)\left({d_i}^2 + {e_i}^2\right)^2\sin^2\theta\cos\theta + 2d_i\left({d_i}^2 + {e_i}^2\right)^3\sin^3\theta}{\left[\cos^2\theta + \left({d_i}^2 + {e_i}^2\right)\sin^2\theta + d_i\sin 2\theta\right]^3}\right\}\end{aligned} \tag{4.170}$$

O último termo da equação (4.152) pode ser transformado de uma integral de domínio para uma integral de contorno, seguindo um processo similar ao procedimento mostrado na seção 4.2. Então:

$$\int_{\Omega_g} g \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} d\Omega = \int_\theta H^* d\theta, \tag{4.171}$$

onde

$$H^* = \int_0^r (Ax + By + C) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} \rho d\rho \tag{4.172}$$

ou

$$\begin{aligned} H^* &= \frac{1}{8\pi} \left\{ (A\cos\theta + B\sin\theta) \int_0^r \rho^2 \left[C_1 \frac{\partial^2 R_1}{\partial x^2} + C_2 \frac{\partial^2 R_2}{\partial x^2} + C_3 \left(\frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 S_2}{\partial x^2} \right) \right] d\rho + \right. \\ & \left. + C \int_0^r \rho \left[C_1 \frac{\partial^2 R_1}{\partial x^2} + C_2 \frac{\partial^2 R_2}{\partial x^2} + C_3 \left(\frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 S_2}{\partial x^2} \right) \right] d\rho \right\} \end{aligned} \tag{4.173}$$

As integrais das segundas derivadas de R_i e S_i que aparecem na equação (4.173), tanto as multiplicadas por ρ quanto por ρ^2, podem ser resolvidas analiticamente e são dadas por:

$$\int_0^r \frac{\partial^2 R_i}{\partial x^2} \rho d\rho = r^2 \left\{ \log \left[\frac{r^2 \left({e_i}^2 \sin\theta^2 + (\cos\theta + d_i \sin\theta)^2 \right)}{a^2} \right] - 1 \right\} \tag{4.174}$$

$$\int_0^r \frac{\partial^2 R_i}{\partial x^2} \rho^2 d\rho = \frac{2}{9} r^3 \left\{ 3\log \left[\frac{r^2 \left({e_i}^2 \sin\theta^2 + (\cos\theta + d_i \sin\theta)^2 \right)}{a^2} \right] - 2 \right\} \tag{4.175}$$

$$\int_0^r \frac{\partial^2 S_i}{\partial x^2} \rho d\rho = r^2 \arctan \left[\frac{e_i \sin\theta}{\cos\theta + d_i \sin\theta} \right] \tag{4.176}$$

$$\int_0^r \frac{\partial^2 S_i}{\partial x^2} \rho^2 d\rho = \frac{2}{3} r^3 \arctan \left[\frac{e_i \sin\theta}{\cos\theta + d_i \sin\theta} \right] \tag{4.177}$$

$$\int_0^r \frac{\partial^2 R_i}{\partial y^2} \rho d\rho = r^2 \left\{ \left({d_i}^2 - {e_i}^2 \right) \left[\log \left(\frac{r^2 \left({e_i}^2 \sin\theta^2 + (\cos\theta + d_i \sin\theta)^2 \right)}{a^2} \right) - 1 \right] - \right.$$

$$-4d_ie_i\tan^{-1}\left[\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta+d_i\sin\theta}\right]\Bigg\} \tag{4.178}$$

$$\begin{aligned}\int_0^r \frac{\partial^2 R_i}{\partial y^2}\rho^2 d\rho &= \frac{2}{9}r^3\left\{\left({d_i}^2-{e_i}^2\right)\left[3\log\left(\frac{r^2\left({e_i}^2\sin\theta^2+(\cos\theta+d_i\sin\theta)^2\right)}{a^2}\right)-2\right]-\right.\\ &\left.-12d_ie_i\tan^{-1}\left[\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta+d_i\sin\theta}\right]\right\}\end{aligned} \tag{4.179}$$

$$\begin{aligned}\int_0^r \frac{\partial^2 S_i}{\partial y^2}\rho d\rho &= r^2\left\{\left({d_i}^2-{e_i}^2\right)\arctan\left[\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta+d_i\sin\theta}\right]+\right.\\ &\left.+d_ie_i\left[\log\left(\frac{r^2\left({e_i}^2\sin\theta^2+(\cos\theta+d_i\sin\theta)^2\right)}{a^2}\right)-1\right]\right\}\end{aligned} \tag{4.180}$$

$$\begin{aligned}\int_0^r \frac{\partial^2 S_i}{\partial y^2}\rho^2 d\rho &= \frac{2}{9}r^3\left\{3\left({d_i}^2-{e_i}^2\right)\arctan\left[\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta+d_i\sin\theta}\right]+\right.\\ &\left.+d_ie_i\left[3\log\left(\frac{r^2\left({e_i}^2\sin\theta^2+(\cos\theta+d_i\sin\theta)^2\right)}{a^2}\right)-2\right]\right\}\end{aligned} \tag{4.181}$$

$$\begin{aligned}\int_0^r \frac{\partial^2 R_i}{\partial x\partial y}\rho d\rho &= r^2\left\{d_i\left[\log\left(\frac{r^2\left({e_i}^2\sin\theta^2+(\cos\theta+d_i\sin\theta)^2\right)}{a^2}\right)-1\right]-\right.\\ &\left.-2e_i\tan^{-1}\left[\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta+d_i\sin\theta}\right]\right\}\end{aligned} \tag{4.182}$$

$$\begin{aligned}\int_0^r \frac{\partial^2 R_i}{\partial x\partial y}\rho^2 d\rho &= \frac{2}{9}r^3\left\{6e_i\tan^{-1}\left[\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta+d_i\sin\theta}\right]+\right.\\ &\left.+d_i\left[2-3\log\left(\frac{r^2\left({e_i}^2\sin\theta^2+(\cos\theta+d_i\sin\theta)^2\right)}{a^2}\right)\right]\right\}\end{aligned} \tag{4.183}$$

$$\begin{aligned}\int_0^r \frac{\partial^2 S_i}{\partial x\partial y}\rho d\rho &= \frac{1}{2}r^2\left\{2d_i\arctan\left[\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta+d_i\sin\theta}\right]+\right.\\ &\left.+e_i\left[\log\left(\frac{r^2\left({e_i}^2\sin\theta^2+(\cos\theta+d_i\sin\theta)^2\right)}{a^2}\right)-1\right]\right\}\end{aligned} \tag{4.184}$$

$$\begin{aligned}\int_0^r \frac{\partial^2 S_i}{\partial x\partial y}\rho^2 d\rho &= \frac{1}{9}r^3\left\{6d_i\arctan\left[\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta+d_i\sin\theta}\right]+\right.\\ &\left.+e_i\left[3\log\left(\frac{r^2\left({e_i}^2\sin\theta^2+(\cos\theta+d_i\sin\theta)^2\right)}{a^2}\right)-2\right]\right\}\end{aligned} \tag{4.185}$$

As tensões são então calculadas usando o procedimento apresentado na seção 2.1.3, pela equação (2.11).

Capítulo 5

Resultados

São apresentados a seguir alguns resultados obtidos com as rotinas implementadas. Esses resultados são comparados com resultados clássicos e presentes na literatura de forma a validar a implementação.

Foram encontradas equações analíticas para o cálculo do deslocamento máximo e momentos máximos para alguns casos de carregamento em placas isotrópicas, porém, mesmo as tensões máximas nessas placas são resultados raros e, para placas anisotrópicas, praticamente inexistentes.

Assim, foram estudados alguns casos de placas isotrópicas aproximadas pela simulação de placas quase-isotrópicas.

5.1 Viga Engastada-Livre

O caso da viga engastada-livre foi utilizado como uma primeira verificação dos resultados obtidos pelo programa. Apesar de tratar-se basicamente de um caso de carregamento unidimensional, pôde-se constatar que tanto os deslocamentos como as tensões em diferentes pontos da placa concordam com os resultados analíticos.

Para esta simulação algumas considerações foram feitas, de forma a aproximar a simplicidade do modelo analítico:

- A razão de Poisson foi definida como zero, buscando eliminar a influência da largura da placa nos resultados.

- Os pontos internos analisados foram colocados no eixo longitudinal central da placa.

O deslocamento w, a uma determinada distância do engaste, foi calculado por:

$$w = \frac{q}{24EI}\left(6L^2x^2 - 4Lx^3 + x^4\right) \tag{5.1}$$

E a tensão na direção x σ_x nesse ponto por:

$$\sigma_x = \frac{M_b t}{2I} \tag{5.2}$$

onde M_b é dado por:

$$M_b = \frac{-qL^2}{2} + qLx - \frac{-qx^2}{2} \tag{5.3}$$

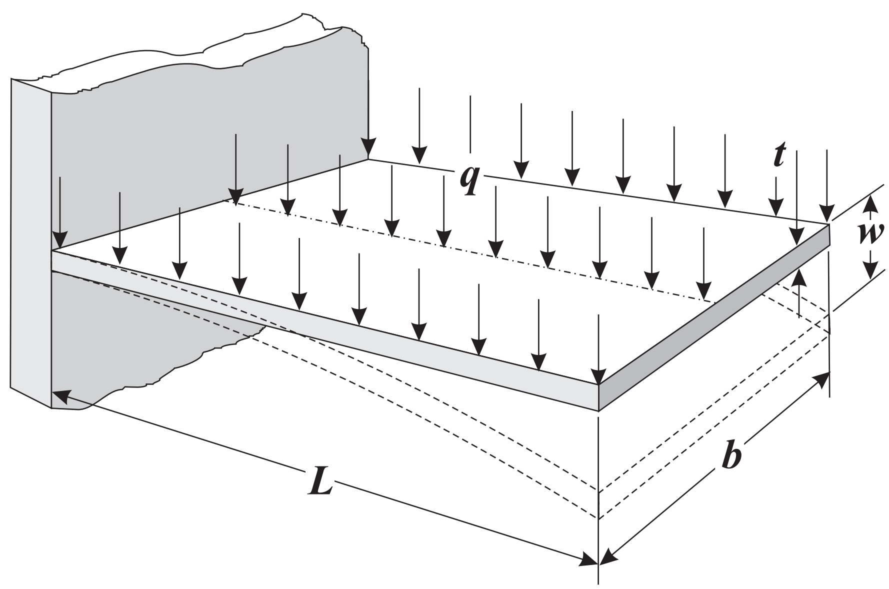

Figura 17: Viga engastada-livre sob força uniformemente distribuída.

Usando os valores de $L = 1$, $b = 1$, $t = 0.01$, $E = 1$ e $q = -2.25 \times 10^{-7}$ nas equações (5.1), (5.2) e (5.3), conforme mostrado na Figura 17, foram obtidos os seguintes resultados apresentados na tabela 1:

Distância do Engaste	$w_{analitico}$ [$\times 100$]	$w_{numerico}$ [$\times 100$]	$erro$ [%]	$\sigma_{x_{analitico}}$ [$\times 100$]	$\sigma_{x_{numerico}}$ [$\times 100$]	$erro$ [%]
0.05	0.16	0.16	0.000	-0.61	-0.61	0.00
0.10	0.63	0.63	0.000	-0.51	-0.51	0.00
0.20	2.36	2.36	0.000	-0.43	-0.43	0.00
0.30	4.95	4.95	0.000	-0.33	-0.33	0.00
0.40	8.21	8.20	0.000	-0.24	-0.24	0.00
0.50	11.95	11.94	0.120	-0.17	-0.17	0.00
0.60	16.04	16.02	0.080	-0.11	-0.11	0.00
0.70	20.34	20.32	0.001	-0.06	-0.06	0.00
0.80	24.77	24.74	0.001	-0.03	-0.03	0.00
0.90	29.25	29.22	0.001	-0.01	-0.01	0.00
0.95	31.50	31.47	0.001	-0.00	-0.00	0.00

Tabela 1: Deformações e Tensões na Viga em Balanço.

Na simulação numérica foram usados, além dos valores acima, $E_L = 1$, $E_T = 1.0001$ e $G_{LT} = \frac{E_L}{2(1+\nu)} = 0.5$, aplicados em como uma lâmina unidirecional quasi-isotrópica.

Os resultados mostram uma boa concordância entre os resultados, tanto para os valores do deslocamento quanto para os valores da tensão. O erro máximo observado para o deslocamento foi de 0.095% enquanto que os valores das tensões se ajustaram perfeitamente.

5.2 Placas sob diversas condições de carregamento e apoio

Os exemplos seguintes, apresentados por Timoshenko e Woinowski-Krieger (1959), representam placas quadradas sob diversas condições de carregamento e apoio. Na maior parte dos casos somente são calculados os momentos M_x e M_y no ponto central das placas. Para todos os casos foram utilizadas as propriedades aproximadas de um aço estrutural comum, o ASTM A-285-C, e as simulações numéricas foram realizadas considerando um material quasi-isotrópico com as seguintes propriedades: $E_L = 210 \times 10^9$, $E_T = 210.1 \times 10^9$, $\nu = 0.3$ e $G_{LT} = \frac{E_L}{2(1+\nu)} = 80.77 \times 10^9$.

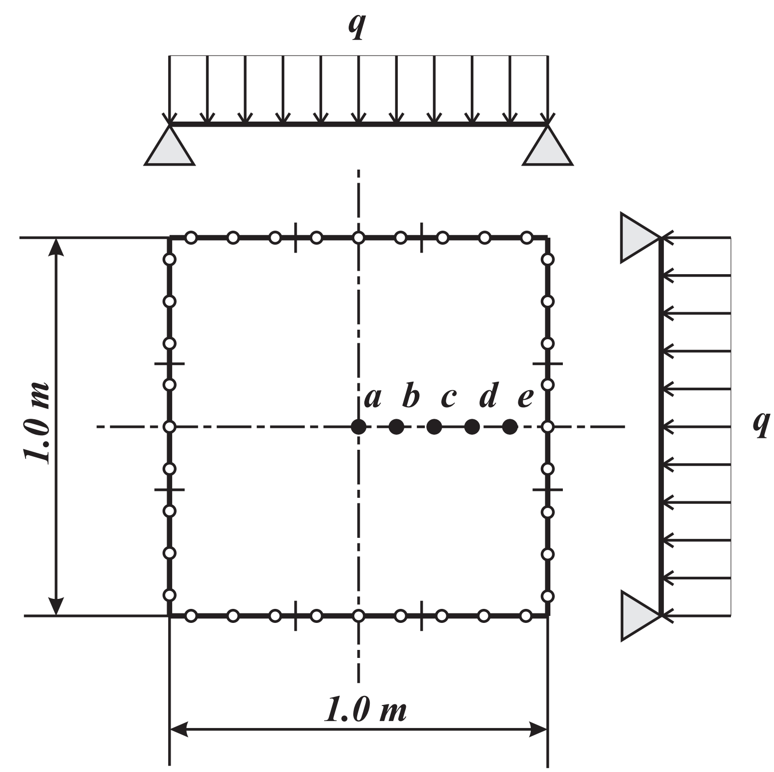

Figura 18: Placa quadrada simplemente apoiada nos quatro lados sob carga uniformemente distribuída.

5.2.1 Placa quadrada simplesmente apoiada nos quatro lados sob carga uniformemente distribuída

Somente para este caso Timoshenko e Woinowski-Krieger (1959) apresentam as soluções para cinco pontos a partir do ponto central, quais sejam: $0.5a$, $0.4a$, $0.3a$, $0.2a$ e $0.1a$, que nas tabelas estão representados pela letras de "a"a "e", respectivamente.

Neste caso foram realizadas simulações variando-se o número de elementos por lado para a verificação da convergência.

Tabela 2: Placa quadrada simplesmente apoiada nos quatro lados sob carga uniformemente distribuída (1 elemento por lado).

Nó interno	$\left[\frac{M_x \times 100}{qa^2}\right]$ analítico	$\left[\frac{M_x \times 100}{qa^2}\right]$ numérico	Erro [%]	$\left[\frac{M_y \times 100}{qa^2}\right]$ analítico	$\left[\frac{M_y \times 100}{qa^2}\right]$ numérico	Erro [%]
a	4.79	4.98	3.92	4.79	4.98	4.01
b	4.59	4.77	3.84	4.66	4.86	4.40
c	4.00	4.13	3.32	4.24	4.47	5.45
d	3.03	3.06	1.02	3.43	3.68	7.38
e	1.68	1.03	38.62	2.09	2.07	0.97

Tabela 3: Placa quadrada simplesmente apoiada nos quatro lados sob carga uniformemente distribuída (3 elementos por lado).

Nó interno	$\left[\frac{M_x \times 100}{qa^2}\right]$ analítico	$\left[\frac{M_x \times 100}{qa^2}\right]$ numérico	Erro [%]	$\left[\frac{M_y \times 100}{qa^2}\right]$ analítico	$\left[\frac{M_y \times 100}{qa^2}\right]$ numérico	Erro [%]
a	4.79	4.81	0.48	4.79	4.82	0.53
b	4.59	4.61	0.53	4.66	4.69	0.57
c	4.00	4.02	0.50	4.24	4.27	0.67
d	3.03	3.04	0.23	3.43	3.47	1.02
e	1.68	1.68	0.12	2.09	2.11	1.17

Tabela 4: Placa quadrada simplesmente apoiada nos quatro lados sob carga uniformemente distribuída (5 elementos por lado).

Nó interno	$\left[\frac{M_x \times 100}{qa^2}\right]$ analítico	$\left[\frac{M_x \times 100}{qa^2}\right]$ numérico	Erro [%]	$\left[\frac{M_y \times 100}{qa^2}\right]$ analítico	$\left[\frac{M_y \times 100}{qa^2}\right]$ numérico	Erro [%]
a	4.79	4.80	0.15	4.79	4.80	0.19
b	4.59	4.60	0.21	4.66	4.67	0.19
c	4.00	4.01	0.21	4.24	4.25	0.20
d	3.03	3.03	0.04	3.43	3.44	0.42
e	1.68	1.68	0.28	2.09	2.10	0.46

Tabela 5: Placa quadrada simplesmente apoiada nos quatro lados sob carga uniformemente distribuída (7 elementos por lado).

Nó interno	$\left[\frac{M_x \times 100}{qa^2}\right]$ analítico	$\left[\frac{M_x \times 100}{qa^2}\right]$ numérico	Erro [%]	$\left[\frac{M_y \times 100}{qa^2}\right]$ analítico	$\left[\frac{M_y \times 100}{qa^2}\right]$ numérico	Erro [%]
a	4.79	4.79	0.06	4.79	4.80	0.10
b	4.59	4.60	0.12	4.66	4.66	0.09
c	4.00	4.01	0.14	4.24	4.24	0.07
d	3.03	3.03	0.01	3.43	3.44	0.26
e	1.68	1.68	0.26	2.09	2.10	0.28

5.2.2 Placa quadrada apoiada em dois lados opostos e com os outros lados engastados sob carga uniformemente distribuída

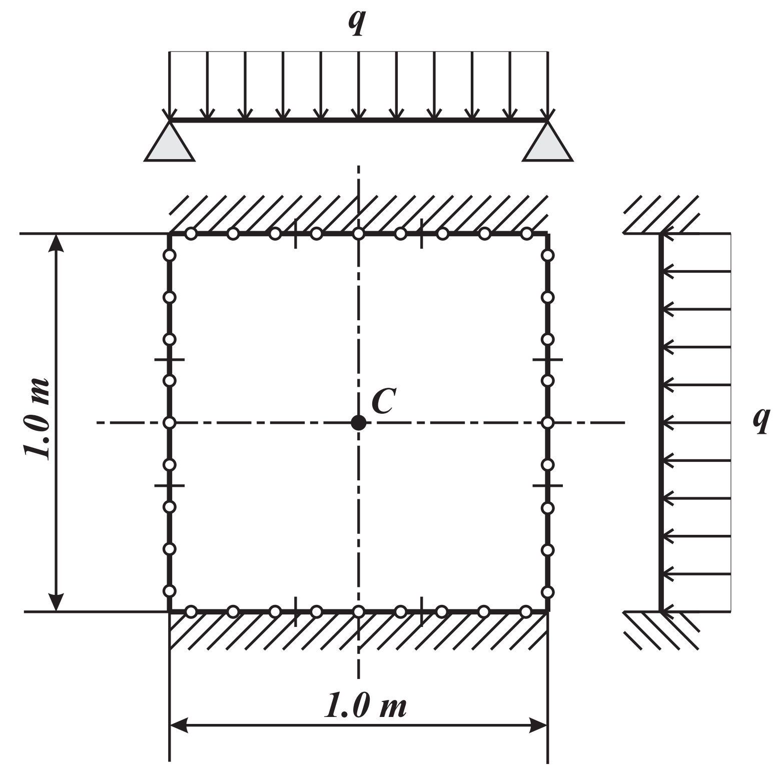

Figura 19: Placa quadrada apoiada em dois lados opostos e com os outros lados engastados sob carga uniformemente distribuída.

Tabela 6: Placa quadrada apoiada em dois lados opostos e com os outros lados engastados sob carga uniformemente distribuída.

Nó interno	$\left[\frac{M_x \times 100}{qa^2}\right]$ analítico	$\left[\frac{M_x \times 100}{qa^2}\right]$ numérico	Erro [%]	$\left[\frac{M_y \times 100}{qa^2}\right]$ analítico	$\left[\frac{M_y \times 100}{qa^2}\right]$ numérico	Erro [%]
C	2.44	2.44	0.05	3.32	3.33	0.24

5.2.3 Placa quadrada apoiada em dois lados opostos e com os outros lados engastados sob carga hidrostática

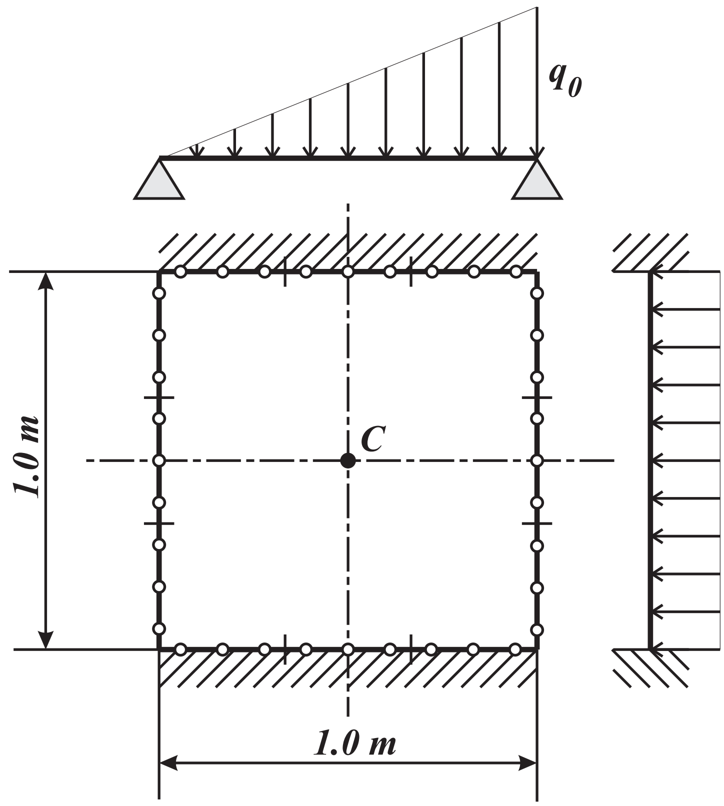

Figura 20: Placa quadrada apoiada em dois lados opostos e com os outros lados engastados sob carga uniformemente hidrostática.

Tabela 7: Placa quadrada apoiada em dois lados opostos e com os outros lados engastados sob carga uniformemente hidrostática.

Nó interno	$\left[\frac{M_x \times 100}{qa^2}\right]$ analítico	$\left[\frac{M_x \times 100}{qa^2}\right]$ numérico	Erro [%]	$\left[\frac{M_y \times 100}{qa^2}\right]$ analítico	$\left[\frac{M_y \times 100}{qa^2}\right]$ numérico	Erro [%]
C	1.30	1.22	6.20	1.70	1.66	2.12

5.2.4 Placa quadrada apoiada em três lados opostos e com um lado engastado sob carga uniformemente distribuída

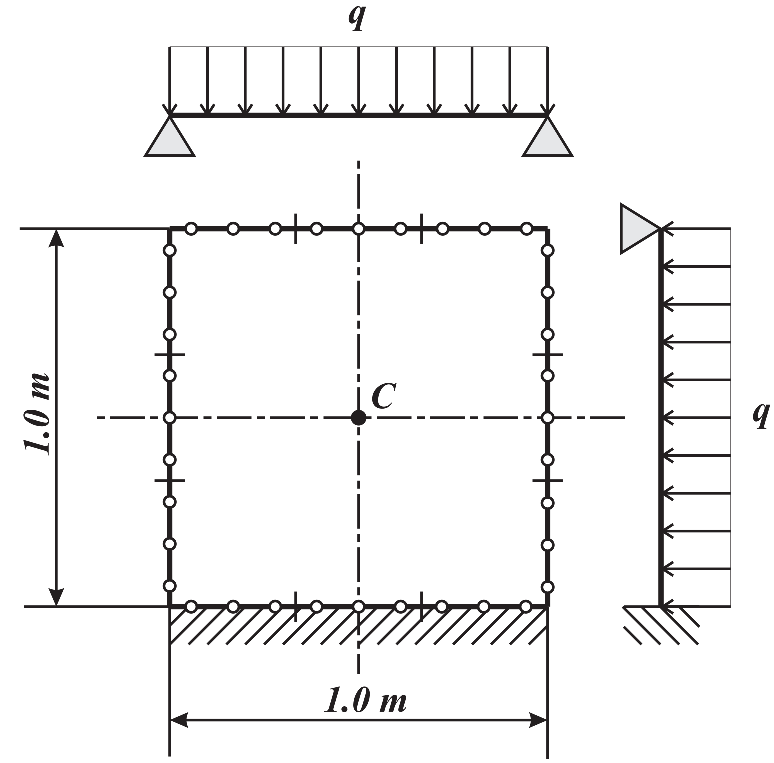

Figura 21: Placa quadrada apoiada em três lados opostos e com um lado engastado sob carga uniformemente distribuída.

Tabela 8: Placa quadrada apoiada em três lados opostos e com um lado engastado sob carga uniformemente distribuída.

Nó interno	$\left[\frac{M_x \times 100}{qa^2}\right]$ analítico	$\left[\frac{M_x \times 100}{qa^2}\right]$ numérico	Erro [%]	$\left[\frac{M_y \times 100}{qa^2}\right]$ analítico	$\left[\frac{M_y \times 100}{qa^2}\right]$ numérico	Erro [%]
C	3.40	3.39	0.36	3.90	3.92	0.59

5.2.5 Placa quadrada apoiada em três lados opostos e com um lado engastado sob carga hidrostática

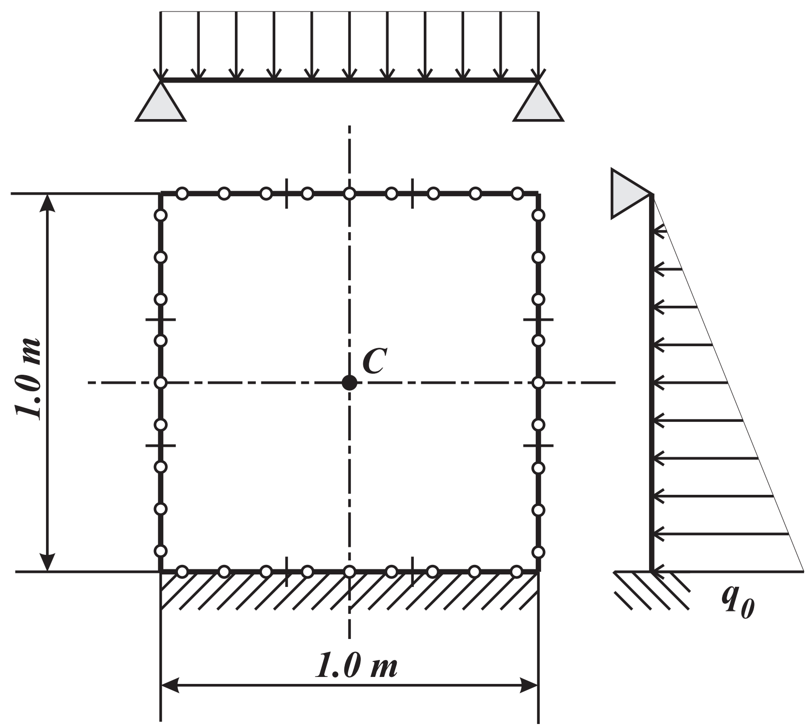

Figura 22: Placa quadrada apoiada em três lados opostos e com um lado engastado sob carga hidrostática.

Tabela 9: Placa quadrada apoiada em três lados opostos e com um lado engastado sob carga hidrostática.

Nó interno	$\left[\frac{M_x \times 100}{qa^2}\right]$ analítico	$\left[\frac{M_x \times 100}{qa^2}\right]$ numérico	Erro [%]	$\left[\frac{M_y \times 100}{qa^2}\right]$ analítico	$\left[\frac{M_y \times 100}{qa^2}\right]$ numérico	Erro [%]
C	1.60	1.69	5.87	1.90	1.96	3.24

5.2.6 Placa quadrada engastada nos quatro lados sob carga uniformemente distribuída

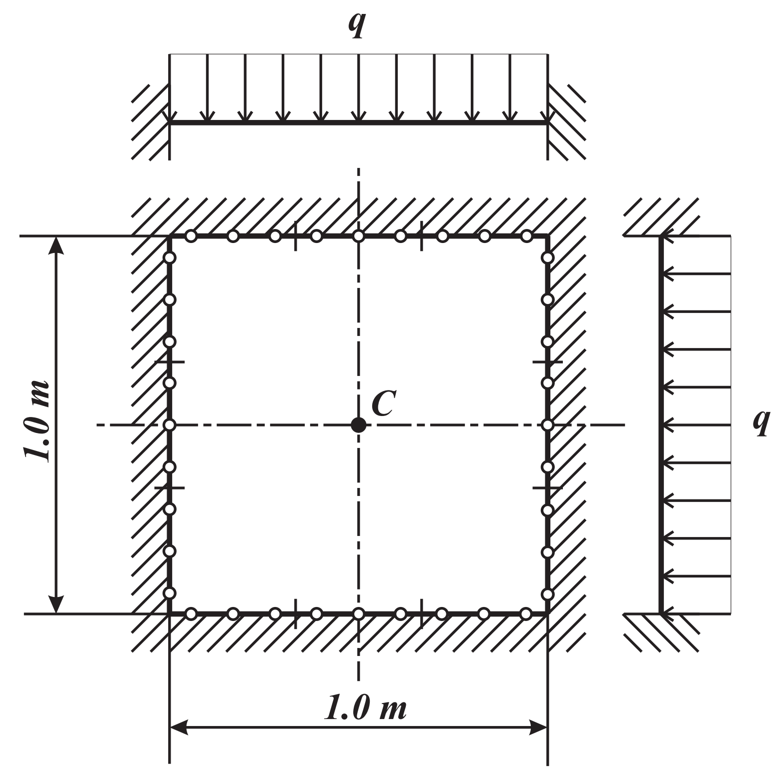

Figura 23: Placa quadrada engastada nos quatro lados sob carga uniformemente distribuída.

Este caso pode ser usado como modelo para um fundo plano de tanque de armazenamento de fluido ou grãos apoiado em vigas de enrijecimento. Cada vão livre entre vigas pode ser considerado como uma placa engastada nos quatro lados. A coluna de fluido produz uma caraga uniforme e distribuída sobre toda a superfície da placa.

Tabela 10: Placa quadrada engastada nos quatro lados sob carga uniformemente distribuída.

Nó interno	$\left[\frac{M_x \times 100}{qa^2}\right]$ analítico	$\left[\frac{M_x \times 100}{qa^2}\right]$ numérico	Erro [%]	$\left[\frac{M_y \times 100}{qa^2}\right]$ analítico	$\left[\frac{M_y \times 100}{qa^2}\right]$ numérico	Erro [%]
C	2.31	2.29	0.86	2.31	2.29	0.82

5.2.7 Placa quadrada engastada nos quatro lados sob carga hidrostática

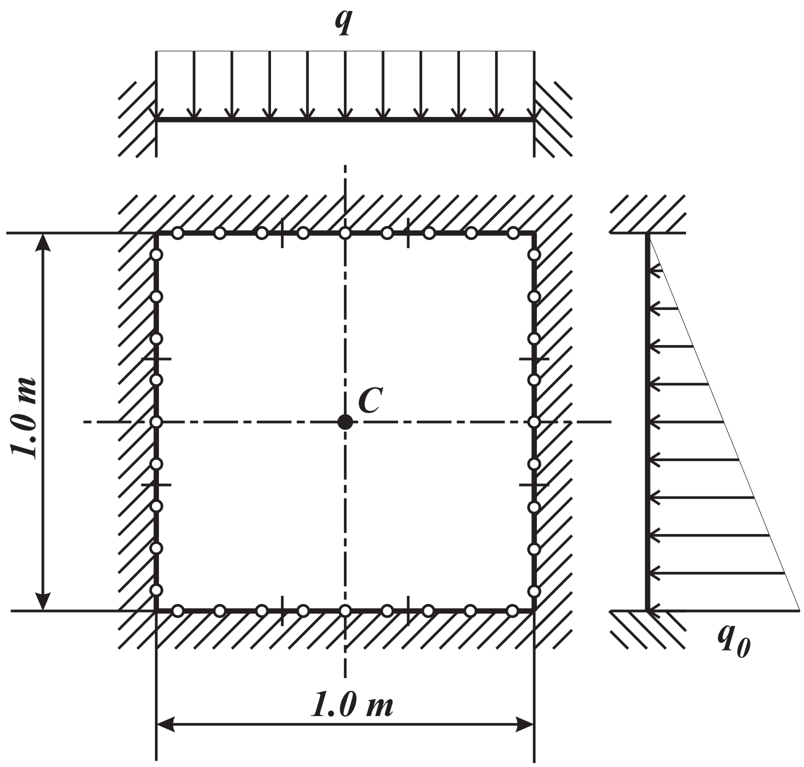

Figura 24: Placa quadrada engastada nos quatro lados sob carga hidrostática.

Este caso pode ser usado como modelo para as paredes laterais enrijecidas de silos ou tanques retangulares para fluidos ou grãos. As placas de fechamento estarão sujeitas à carga hidrostática e, devido à simetria, podem ser consideradas como engastadas nos quatro lados.

Tabela 11: Placa quadrada engastada nos quatro lados sob carga hidrostática.

Nó interno	$\left[\frac{M_x \times 100}{qa^2}\right]$ analítico	$\left[\frac{M_x \times 100}{qa^2}\right]$ numérico	Erro [%]	$\left[\frac{M_y \times 100}{qa^2}\right]$ analítico	$\left[\frac{M_y \times 100}{qa^2}\right]$ numérico	Erro [%]
C	1.15	1.15	0.43	1.15	1.15	0.39

5.2.8 Placa quadrada engastada em três lados e um lado livre sob carga uniformemente distribuída

Neste caso excepcionalmente Timoshenko e Woinowski-Krieger (1959) utiliza $\nu = 1/6$.

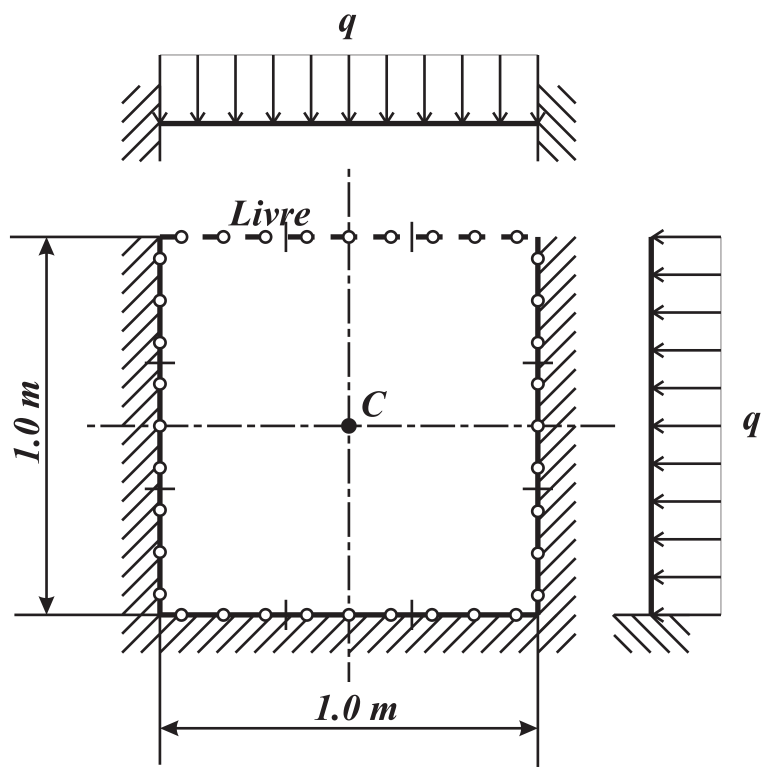

Figura 25: Placa quadrada engastada em três lados e com um lado livre sob carga uniformemente distribuída.

Tabela 12: Placa quadrada engastada em três lados e com um lado livre sob carga uniformemente distribuída.

Nó interno	$\left[\frac{M_x \times 100}{qa^2}\right]$ analítico	$\left[\frac{M_x \times 100}{qa^2}\right]$ numérico	Erro [%]	$\left[\frac{M_y \times 100}{qa^2}\right]$ analítico	$\left[\frac{M_y \times 100}{qa^2}\right]$ numérico	Erro [%]
C	1.38	1.34	3.11	3.17	3.04	3.96

5.2.9 Placa quadrada engastada em três lados e um lado livre sob carga hidrostática

Neste caso excepcionalmente Timoshenko e Woinowski-Krieger (1959) utiliza $\nu = 1/6$.

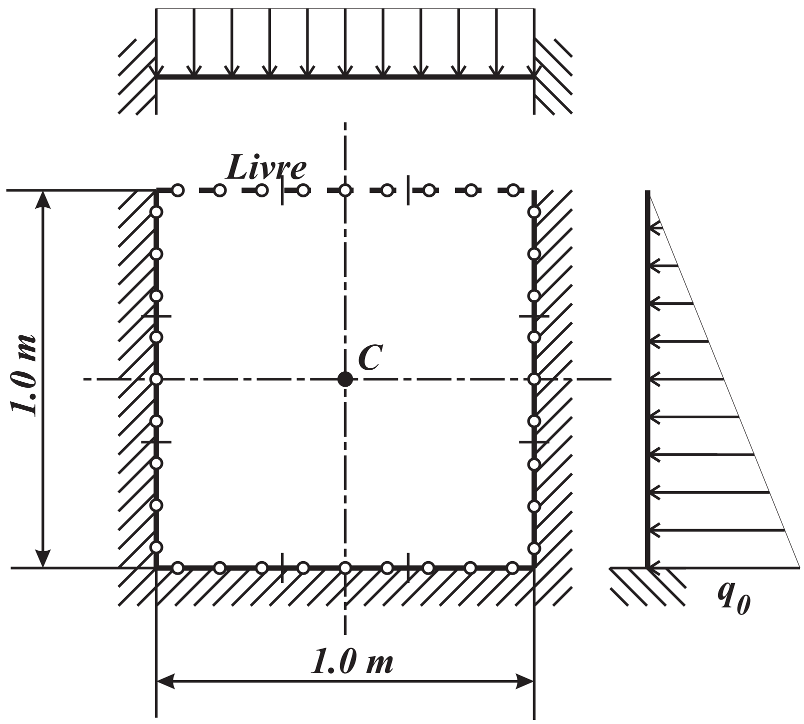

Figura 26: Placa quadrada engastada em três lados e com um lado livre sob carga hidrostática.

Este caso pode ser usado como modelo para as paredes laterais de barragens ou silos sem enrijecimento para fluidos ou grãos.

Tabela 13: Placa quadrada engastada em três lados e com um lado livre sob carga hidrostática.

Nó interno	$\left[\frac{M_x \times 100}{qa^2}\right]$ analítico	$\left[\frac{M_x \times 100}{qa^2}\right]$ numérico	Erro [%]	$\left[\frac{M_y \times 100}{qa^2}\right]$ analítico	$\left[\frac{M_y \times 100}{qa^2}\right]$ numérico	Erro [%]
C	1.35	1.31	3.20	0.94	0.90	4.36

Conforme mostraram os resultados, as tensões e os momentos apresentam boa concordância com os resultados analíticos, considerando as aproximações adotadas para a utilização do modelo anisotrópico nos casos isotrópicos, apresentadas no início deste capítulo, e os valores de comparação apresentados por Timoshenko e Woinowski-Krieger (1959), cuja precisão é, em geral, baixa. A exceção se deve aos casos de carregamento hidrostático, nos quais foi observado um erro, em geral, maior do que para o carregamento uniforme, porém aceitável.

A formulação apresenta uma boa taxa de convergência, conforme observado nas tabelas (2), (3), (4) e (5).

5.2.10 Laminado simétrico de material compósito com bordas apoiadas sob carga uniformemente distribuída

Para validar os procedimentos implementados uma laminado simétrico com nove camadas, com seqüência de empilhamento $[+\theta/-\theta/+\theta/-\theta/+\theta/-\theta/+\theta/-\theta/+\theta]$ com $0 \leq \theta \leq 45^o$ foi escolhido. É aplicada uma força $q = -2.50$ MPa uniformemente distribuída. A placa é quadrada com lado $a = 1$ m. Todos os lados são simplesmente apoiados e todas as camadas tem a mesma espessura. A espessura total do laminado é igual a $h = 0.01$ m e as propriedades do material são: $E_L = 207$ GPa, $E_T = 5.2$ GPa, $G_{LT} = 3.1$ GPa, e $\nu_{LT}= 0.25$.

A malha usada foi de 12 elementos quadráticos descontínuos de tamanhos iguais (3 por aresta).

As Figuras 27 e 28 mostram, respectivamente, o efeito da variação de θ no deslocamento e na tensão de flexão resultantes no centro da placa. Eles são comparados com resultados de elementos finitos obtidos por Lakshminarayana e Murthy (1984). É importante salientar que a formulação de elementos finitos considera o efeito da deformação por cisalhamento. Como pode ser visto, em ambos os casos a concordância entre os elementos de contorno em placa fina e os elementos finitos em placa deformável por cisalhamento é boa.

A Figura 29 mostra a distribuição de tensão (σ_x) ao longo da espessura da placa. Pode-se ver que a tensão é descontínua nas interfaces das lâminas e varia linearmente ao longo de cada lâmina.

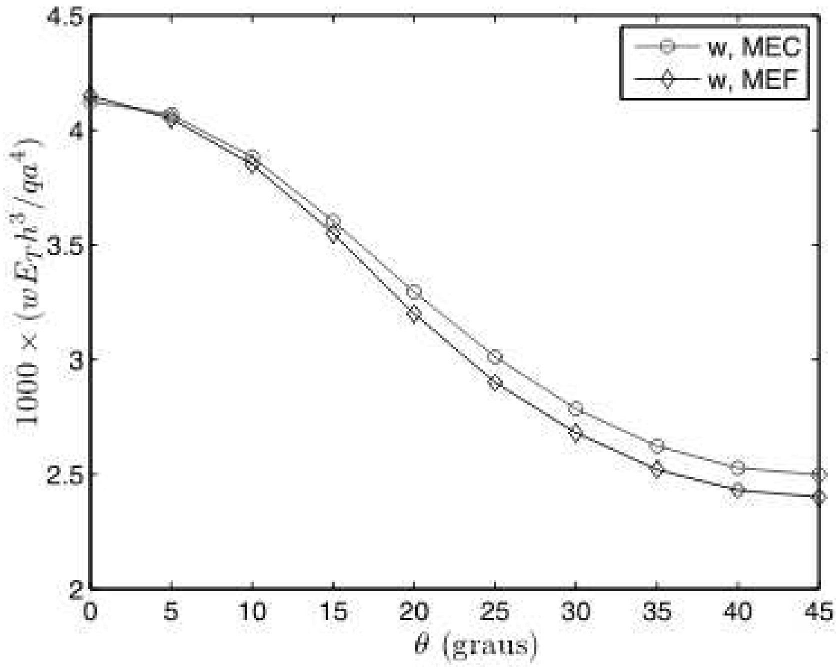

Figura 27: Efeito da variação da orientação das fibras (θ) na resposta do deslocamento transversal no centro da placa (MEF = método dos elementos finitos, MEC = método dos elementos de contorno).

5.2.11 Análise de falhas em um laminado simétrico de materiais compósitos com bordas apoiadas sob carga uniformemente distribuída

Considere que o material compósito laminado analisado na seção 5.2.10, com $\theta = 45^o$, tenha as seguintes propriedades de falha: $X_t = 1500$ MPa, $Y_t = 40$ MPa, $X_c = 1500$ MPa, $Y_c = 246$ MPa e $S = 68$ MPa. Uma vez que as tensões variam de lâmina para lâmina, cada lâmina apresentará um diferente índice de falha. A tabela 14 mostra a tensão na direção das fibras σ_L, a tensão na direção transversal às fibras $sigma_T$, a tensão de cisalhamento no sistema LT τ_{LT}, e o índice de falha para cada uma das lâminas no ponto central da placa segundo o critério de Tsai-Wu, obtido a partir da equação (2.27), dado por:

$$F_{TW} = \frac{\sigma_1^2}{X^2} + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 + \frac{\sigma_2^2}{Y^2} + \frac{\tau_{12}^2}{S^2}. \quad (5.4)$$

As tensões são sempre calculadas na posição mais crítica de cada lâmina, ou seja, a que apresenta a maior distância absoluta do plano médio (maior valor absoluto de z). No caso da

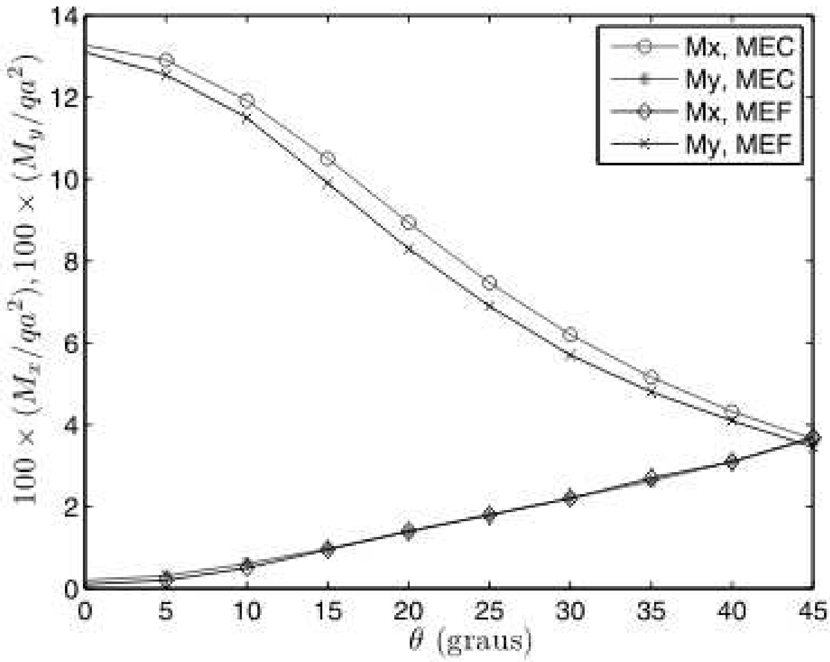

Figura 28: Efeito da variação da orientação das fibras (θ) na resposta dos momentos no centro da placa (MEF = método dos elementos finitos, MEC = método dos elementos de contorno).

lâmina central (lâmina 5), as tensões são calculadas tanto no ponto acima quanto no ponto abaixo do plano médio.

Como pode ser visto na tabela , a lâmina inferior, que encontra-se sob tensão de tração, falha, segundo o critério de Tsai-Wu para esta dada configuração de estrutura, material e carga. A mesma análise pode ser feita usando-se outros critérios de falha como, por exemplo, o Tsai-Hill.

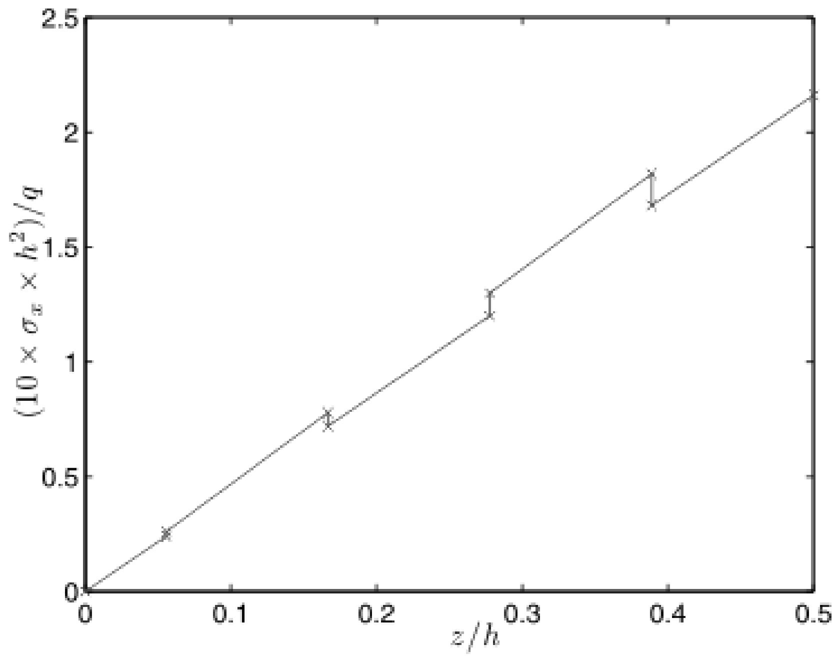

Figura 29: Distribuição de tensão (σ_x) ao longo da espessura para $\theta = 45^o$ no ponto central da placa laminada de materiais compósitos.

Tabela 14: Tensões no sistema de referência da lâmina (LT) e índice de critério de falha de Tsai-Wu para o ponto central da placa.

Lâmina	z (mm)	σ_L (MPa)	σ_T (MPa)	τ_{LT} (MPa)	F_{TW}
1	-5.00	1045.5	34.7	0.1	1.09
2	-3.89	883.3	25.7	0.0	0.80
3	-2.78	580.8	19.3	0.0	0.52
4	-1.67	378.6	11.0	0.0	0.28
5	-0.56	116.2	3.86	0.0	0.09
5	0.56	-116.2	-3.86	0.0	-0.08
6	1.67	-378.6	-11.0	0.0	-0.18
7	2.78	-580.8	-19.3	0.0	-0.29
8	3.89	-883.3	-25.4	0.0	-0.28
9	5.00	-1045.5	-34.7	-0.1	-0.36

Capítulo 6

Conclusão

O objetivo deste trabalho, que era o cálculo de tensões em placas anisotrópicas, especialmente em placas compósitas laminadas, foi parcialmente alcançado considerando que o cálculo foi implementado apenas nos pontos internos.

Foram desenvolvidas equações integrais de contorno para o cálculo das tensões nos pontos internos. As derivadas das soluções fundamentais, presentes nestas equações integrais, foram todas obtidas analiticamente e são apresentadas neste trabalho. Todas as integrais foram feitas numericamente, utilizando a integração de Gauss-Legendre.

As tensões foram calculadas nos pontos internos de placas de qualquer geometria, em cada lâmina de um laminado simétrico. Foi ainda implementada a análise de falha pelo critério de Tsai-Wu considerando a falha da primeira lâmina em cada ponto.

Os resultados foram comparados com resultados disponíveis na literatura e apresentaram boa concordância.

6.1 Trabalhos Futuros

Dando continuidade ao trabalho, pretende-se procurar soluções para o cálculo das tensões nos pontos do contorno. Estas porém exigem o tratamento de singularidades de alta ordem, presentes nas segundas derivadas do deslocamento. Uma alternativa ao tratamento dessas singularidades de alta ordem é o uso de derivadas das funções de forma para o cálculo das segundas derivadas dos deslocamentos transversais. Este procedimento, embora menos preciso que o uso de equações integrais de contorno, é uma opção que pode ser implementada mais facilmente.

Referências

AGARWAL, B. D.; BROUTMAN, L. J. *Analysis and performance of fiber composites*. 2nd.. ed. New York: John Wiley & Sons Inc, 1990.

ALBUQUERQUE, E. L.; SOLLERO, P.; ALIABADI, M. H. The boundary element method applied to time dependent problems in anisotropic materials. *International Journal of Solids and Structures*, v. 39, p. 1405–1422, 2002.

ALBUQUERQUE, E. L.; SOLLERO, P.; ALIABADI, M. H. Dual boundary element method for anisotropic dynamic fracture mechanics. *International Journal for Numerical Method in Engineering*, v. 59, p. 1187–1205, 2004.

ALBUQUERQUE, E. L.; SOLLERO, P.; FEDELINSKI, P. Dual reciprocity boundary element method in laplace domain applied to anisotropic dynamic crack problems. *Computers and Structures*, v. 81, p. 1703–1713, 2003.

ALBUQUERQUE, E. L.; SOLLERO, P.; FEDELINSKI, P. Free vibration analysis of anisotropic material structures using the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 27, p. 977–985, 2003.

ALBUQUERQUE, E. L. et al. Boundary element analysis of anisotropic kirchhoff plates. *International Journal of Solids and Structures*, v. 43, p. 4029–4046, 2006.

DEB, A. Boundary elements analysis of anisotropic bodies under thermo mechanical body force loadings. *Composite Structures*, v. 58, p. 715–726, 1996.

GAO, X. The radial integration method for evaluation of domain integrals with boundary only discretization. *Eng. Analysis with Boundary Elements*, v. 26, p. 905–916, 2002.

HILL, R. *The mathematical theory of plasticity*. London: Oxford University Press, 1950.

HOLMES, M.; JUST, D. J. *GRP in structural engineering*. London: Applied Science Publishers, 1983.

KANE, J. H. *Boundary element analysis*. New Jersey: Prentice Hall, 1994.

KIRCHHOFF, G. Über das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheibe. *J. Crelle*, v. 40, p. 51–88, 1850. Em alemão.

KOGL, M.; GAUL, L. A 3-d doundary element method for dynamic analysis of anisotropic elastic solids. *CMES-Comp. Model. in Eng. and Scie.*, v. 1, p. 27–43, 2000.

KOGL, M.; GAUL, L. A boundary element method for transient piezoeletric analysis. *Eng. Anal. with Boundary Elements*, v. 24, p. 591–598, 2000.

KOGL, M.; GAUL, L. Free vibration analysis of anisotropic solids with the boundary element method. *Eng. Anal. with Boundary Elements*, v. 27, p. 107–114, 2003.

LAKSHMINARAYANA, H. V.; MURTHY, S. S. A shear-flexible triangular finite element model for laminated composite plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 20, p. 591–623, 1984.

LEKHNITSKII, S. G. *Anisotropic plates*. New York: Gordon and Breach, 1968.

PAIVA, J. B. *Formulação do método dos elementos de contorno para flexão de placas e suas aplicações em engenharia de estruturas*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo,Escola de Engenharia de São Carlos, 1987.

PAIVA, W. P. *Análise de problemas estáticos e dinâmicos em placas anisotrópicas usando o método dos elementos de contorno*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, 2005.

PAIVA, W. P.; SOLLERO, P.; ALBUQUERQUE, E. L. Treatment of hypersingularities in boundary element anisotropic plate bending problems. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 1, p. 49–73, 2003.

RAJAMOHAN, C.; RAAMACHANDRAN, J. Bending of anisotropic plates by charge simulation method. *Advances in Eng. Software*, v. 30, p. 369–373, 1999.

SHI, G.; BEZINE, G. A general boundary integral formulation for the anisotropic plate bending problems. *J. Composite Materials*, v. 22, p. 694–716, 1988.

SOLLERO, P.; ALIABADI, M. H. Fracture mechanics analysis of anisotropic plates by the boundary element method. *Int. J. of Fracture*, v. 64, p. 269–284, 1993.

SOLLERO, P.; ALIABADI, M. H. Anisotropic analysis of composite laminates using the dual boundary elements methods. *Composite Structures*, v. 31, p. 229–234, 1995.

TIMOSHENKO, S.; WOINOWSKI-KRIEGER, S. *Theory of plates and shells*. 2nd.. ed. New York: McGraw-Hill, 1959.

TSAI, S. W. Strength theories of filamentary structures. In: SCHWARTZ, R.; SCHWARTZ, H. S. (Ed.). *Fundamental aspects of fiber reinforced plastic composites*. New York: Wyle Interscience, 1968. p. 3–11. Dayton, Ohio, 24-26 May 1966.

TSAI, S. W.; WU, E. M. A general theory of strength test for anisotropic materials. *Journal of Composite Materials*, Jan, p. 246–256, 1971.

VENTURINI, W. S. *Um estudo sobre o método dos elementos de contorno e das aplicações em problemas de engenharia*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, Faculdade de Engenharia de São Carlos, 1988. Tese de Livre Docência.

VINSON, J. R.; SIERKOWSKI, R. L. *The behavior of structures composed of composite materials*. 1a. ed. Boston: Martinus Nijnoff Publishers, 1987.

WANG, J.; SCHWEIZERHOF, K. The fundamental solution of moderately thick laminated anisotropic shallow shells. *Int. J. Eng. Sci.*, v. 33, p. 995–1004, 1995.

WANG, J.; SCHWEIZERHOF, K. Study on free vibration of moderately thick orthotropic laminated shallow shells by boundary-domain elements. *Applied Mathmatical Modelling*, v. 20, p. 579–584, 1996.

WANG, J.; SCHWEIZERHOF, K. Free vibration of laminated anisotropic shallow shells including transverse shear deformation by the boundary-domain element method. *Computers and Structures*, v. 62, p. 151–156, 1997.

WU, B. C.; ALTIERO, N. J. A new numerical method for the analysis of anisotropic thin plate bending problems. *Computer Meth. in Appl. Mechanics and Engineering*, v. 25, p. 343–353, 1981.

ZHANG, C. Transiente elastodynamic antiplane crack analysis of anitropic solids. *Int. J. of Solids and Structures*, v. 37, p. 6107–6130, 2000.