UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

"ESCOAMENTO AO REDOR DE UM CILINDRO NO MEIO POROSO"

Autor: CARLOS UMBERTO DA SILVA LIMA
Orientador: CHANG-YU LIU, Ph.D

Tese de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia de Campinas da UNICAMP como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA.

CAMPINAS - 1983

A meus pais
À minha esposa
À minha filha.

AGRADECIMENTOS

À Universidade Federal do Pará - Centro Tecnológico, Departamento de Mecânica e a Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação.

Ao Professor Chang-Yu Liu, pelo paciente trabalho de orientação.

Ao amigo: Celso Augusto Coelho pelo incentivo.

À todos aqueles que embora não citados contribuiram para a realização deste trabalho, a nossa gratidão.

R E S U M O

O problema do escoamento ao redor do cilindro no meio poroso foi resolvido através da aplicação de Equação de Darcy. Generalizada juntamente com a condição de não-deslizamento na interface parede sólida-meio poroso.

A velocidade do fluxo uniforme no contorno do cilindro é representado por uma série de potencias. Através de uma transformação de similaridade as equações diferenciais parciais são transformadas em um sistema de equações diferenciais ordinárias.

As características de distribuição de velocidade; espessura da camada limite; espessura de deslocamento; espessura de momento; tensão de cisalhamento e o ponto de separação são mostrados para tres meios de diferentes permeabilidades.

A B S T R A C T

By using of general form of Darcy Law with no slip condition at the interface, the problem of the flow trough porous medium has beem solved.

The velocity at the wall over the circunference of the circular cilinder is represented for a power series. The partial diferential equation, througt a similarity transformation is reduced to a sistem of ordinary diferential equation.

The caracteristics of velocity distribuition; boundary layer tickness; displacement tickness; momentum tickness; shearing stress and point of separation are showed for three medium of diferent permeability.

Í N D I C E

pág.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Os fluxos através dos meios porosos, tem importante aplicação em hidrologia, indústria petrolífera, em engenharia da agricultura, e etc.[5]

O primeiro trabalho a esse respeito, foi realizado em 1856, por Darcy, de onde surgiria a clássica "Lei de Darcy", na qual a maioria dos trabalhos sobre meios porosos são baseados.

A "Lei de Darcy", na forma mais original, estabelece que a taxa de fluxo volumétrico de um fluido percorrendo um meio poroso, é proporcional à diferença de pressão entre os pontos de entrada e, saída do fluido, à espessura e à área da seção transversal do leito poroso. Uma constante de proporcionalidade k' é função tanto do fluido, quanto do meio. Esta Lei , foi usada durante alguns anos por diversos pesquisadores, os quais concluíram que a Lei só era válida, para líquidos à baixas diferenças de pressão, enquanto que, para os gases a Lei apresentava bons resultados para médias velocidades.

Para aperfeiçoar a Lei, a constante k' foi substituída por ν/k, onde k representa a permeabilidade do meio e, ν a viscosidade cinemática do fluído. Segundo análise feita por Scheidegger [1], a Lei de Darcy, pode tornar-se diferencial , transformando-se a diferença de pressão em um gradiente de pressão e, tornando infinitesimal a espessura do leito poroso.

Existem no entanto, alguns casos, em que a Lei de Darcy diferencial não é válida. Por exemplo, quando os termos de aceleração não podem ser desprezados, estes termos só podem' ser desprezados quando a velocidade é muito pequena. Um outro caso, em que a Lei de Darcy, não é válida nessa forma é quando' não é satisfeita uma condição de não-deslizamento na interface' das regiões porosa e a parede sólida[2].

Por volta de 1949, Brinkman[3], publicou um trabalho, no qual considerou um meio poroso como uma reunião de partículas esféricas de raio r e, que essas partículas são mantidas em posição por forças externas e, ainda que a presença dessas partículas produziam uma força de arrasto, que deveria ser vencida para que o fluxo ocorresse. Calculando essas duas forças; a primeira dada pela Equação de Navier-Stokes e, a segunda força sendo proporcional a velocidade média do fluxo, à viscosidade do fluido, à densidade das partículas e, do raio dessas ' mesmas partículas. Com a soma dessas duas forças, Brinkman[3] , chegou, a hoje conhecida, "Lei de Darcy Generalizada".

A Lei de Darcy Generalizada, junto com as condições de continuitade de velocidade tangencial e normal na interface, tem sido usada nos últimos anos por diversos pesquisadores para resolver os mais diversos problemas de fluxos através dos meios porosos.

Dev Sarma[4], analisa o problema do fluxo axial, em um cilindro horizontal envolvido por um meio poroso também cilíndrico. O autor, usa a Equação de Navier-Stokes para analisar o fluxo na região de fluido-puro e a Lei de Darcy Generalizada' juntamente com as condições de continuidade de velocidade tangencial e normal na interface, para analisar o fluxo no meio poroso. Na conclusão, o autor mostra que a velocidade em ambos os meios decresce com o aumento do parâmetro de porosidade.

Narasimhacharyuly e Ramarchayulu[5], usam a Lei de Darcy Generalizada, juntamente com a condição de não deslizamento na interface, para analisar o escoamento em uma região porosa existente entre dois cilindros de mesmo eixo. Nesse trabalho, é mostrada a solução exata das equações do movimento, esta solução é também analisada para possíveis casos particulares, tais como: o fluxo de Poiseulle, o fluxo de Covette, fluxo entre duas placas paralelas, etc.

Liu e Ismail [6] usam a Lei de Darcy Generalizada juntamente com as condições de continuidade de velocidade normal e tangencial na interface para resolver o problema de película descendente ao longo da placa porosa com espessura finita. A solução mostra, que a taxa de fluxo volumétrico, é função da espessura da película e do parâmetro de porosidade.

Nas referenciais[7] e [8], são mostrados outros trabalhos que utilizam a Lei de Darcy Generalizada, para analisar alguns tipos de problemas inerentes a meios porosos.

Schlichting[9], apresenta a solução numérica, para o problema de fluxo sobre um cilindro circular horizontal sujeito à uma corrente em meio de fluido-puro. Nesse trabalho o autor usa a Equação de Navier-Stokes para analisar o problema. A velocidade do fluxo potencial e a função da corrente são representadas por séries de potencias.

Este trabalho, utiliza a Lei de Darcy Generalizada, juntamente com a condição de não deslizamento na interface meio poroso-parede sólida, para estudar o escoamento sobre um cilindro circular horizontal localizado em um meio poroso, meio este que está sujeito a um fluxo uniforme. A velocidade U(x) do fluxo é assumido ser representada por uma série de potencias.

A partir da integração da equação da continuidade, introduz-se uma "função de corrente", com a qual os componentes da velocidade estão relacionadas. Então através de uma transformação de semelhança transforma-se então a equação diferencial parcial, em um sistema de equações diferenciais ordinárias. Este sistema, é então resolvido numericamente, simulando-se escoamento através de tres meios de permeabilidades diferentes, o que é possível variando-se um termo adequado do sistema de equações obtido. Os resultados aqui encontrados mostram que a variação da permeabilidade do meio provoca significativas alterações no escoamento.

CAPÍTULO 2

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

A Figura 1 mostra o esquema do problema. Um cilindro circular horizontal impermeável de raio "R", está localizado em um meio poroso, o qual está sujeito a um fluxo uniforme de velocidade U(x). A coordenada x é medida ao longo do contor-

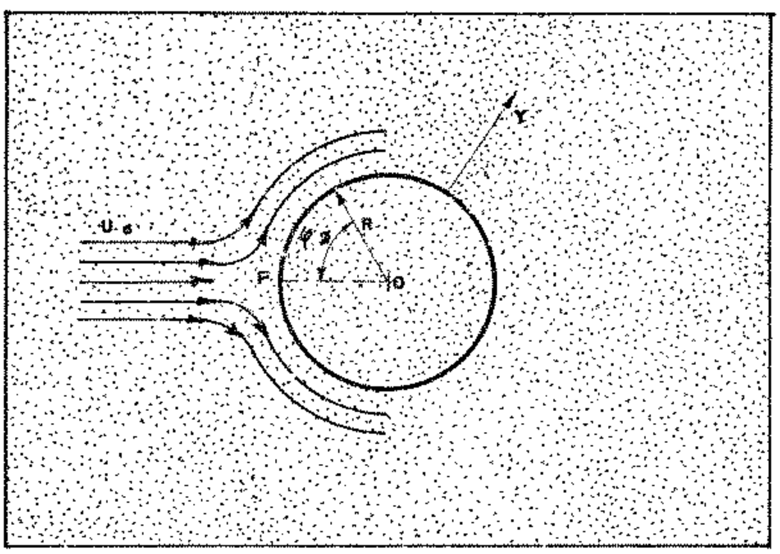

Fig. 1 - O Esquema do Problema

no do corpo e, tem sua origem no ponto de estagnação p ; y é a coordenada normal à superfície do cilindro.

2.1. As equações Governantes.

As equações da camada limite para um escoamento bidimensional de um fluído viscoso, incompreensivel no meio poroso são (1):

Eq. de continuidade

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad (2,1)$$

Eq. de N-S modificada.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - \frac{\nu}{k}u \qquad (2,2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - \frac{\nu}{k}v \qquad (2,3)$$

Onde:

u e v são as componentes da velocidade nas direções x e y respectivamente; ν representa a viscosidade cinemática do fluido; k é a permeabilidade do meio; ρ é a densidade do fluido e P é a pressão.

2.2. Análise das Equações

Vamos estudar a ordem de magnitude de cada termo das equações acima, para isso vamos definir as seguintes variáveis admensionais:

$$\bar{x} = \frac{x}{L} \;;\; \bar{y} = \frac{y}{\delta} \;;\; \bar{P} = \frac{P}{\rho_o U_c{}^2 + p_1} \;;\; \bar{t} = \frac{t}{L/U_o} \;;\; \bar{k} = \frac{k}{K_o} \qquad (2,4)$$

$$\bar{u} = \frac{u}{U_o} \;;\; \bar{v} = \frac{v}{V_o} \;;\; \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_o} \;;\; \bar{\nu} = \frac{\nu}{\nu_o}$$

Onde

ν_o - viscosidade cinemática de referencia

ρ_o - densidade de referencia

k_o - permeabilidade de referencia

δ - espessura da camada limite

U_o- velocidade longitudinal de referencia

V_o- componente da velocidade normal à borda da camada limite

P_1- perda de pressão através do meio poroso

Substituindo agora as novas variáveis nas Equações (2,1) ; (2,2) e (2,3), teremos:

a) Para a Equação (2,1)

$$\left(\frac{U_o}{L}\right) \frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{x}} + \left(\frac{Vo}{\delta} \right) \frac{\partial \overline{v}}{\partial \overline{y}} = 0 \qquad (2,5)$$

onde os dois coeficientes devem ter a mesma ordem de grandeza, ou

$$\frac{Uo}{L} = 0\left(\frac{Vo}{\delta}\right)$$

como: $L >> \delta$

então, devemos ter

$$Uo >> Vo$$

b) substituindo agora essas mesmas variáveis admensionais nas equações :

b.1) Na direção "x", eq. (2,2):

$$\frac{Uo^2}{L} \frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{t}} + \frac{Uo^2}{L} \overline{u} \frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{x}} + \frac{VoUo}{\delta} . \overline{v} \frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{y}} = -\left(1+\frac{P1}{\rho o\ Uo^2}\right) \frac{\partial \overline{P}}{\overline{\rho}\, \partial \overline{x}} + \frac{\nu oUo}{L^2} \overline{\nu} \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial \overline{x}^2} + \frac{\nu oUo}{\delta 2}$$

$$\overline{\nu} \frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{y}^2} - \frac{\nu oUo}{ko} \quad \overline{u} \frac{\overline{\nu}}{\overline{k}} \qquad (2,6)$$

Desprezaremos $\overline{\nu} \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial \overline{x}^2}$ por ser muito menor em relação à $\overline{\nu} \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial \overline{y}^2}$.Substituindo o valor de $\frac{vo}{\delta}$ no terceiro termo da Equação (2,6) e dividindo-a por Uo^2/L, teremos:

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{t}} + \bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}} = -\left(1+\frac{P_1}{\rho o Uo^2}\right)\frac{\partial\bar{P}}{\bar{\rho}\partial\bar{x}} + \left(\frac{vo}{LUo}\right).\frac{L^2}{\delta^2}\,\bar{\nu}\,\frac{\partial^2\bar{u}}{\bar{y}^2} - \left(\frac{vo}{LUo}\right).\frac{L^2}{Ko}\,\bar{u}\,\frac{\bar{\nu}}{\bar{k}}$$

ou

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{t}} + \bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}} = -\left(1+\frac{P_1}{\rho oUo^2}\right)\frac{\partial\bar{P}}{\rho.\partial\bar{x}} + \frac{1}{Re}\frac{L^2}{\delta^2}\,\bar{\nu}\,\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{y}^2} - \frac{1}{Re}\cdot\frac{L^2}{Ko}\,\bar{u}\,\frac{\bar{\nu}}{\bar{k}} \tag{2,7}$$

Caso (1)

Se $\frac{P_1}{\rho oUo^2} >> 1$; $\frac{1}{Re}\left(\frac{L}{\delta}\right)^2 << \frac{1}{Re}\,\frac{L^2}{k}$

e se

$\frac{P_1}{\rho oUo^2}$ tiver a mesma ordem de grandeza de $\frac{1}{Re}\,\frac{L^2}{Ko}$, obteremos a "Equação de Darcy".

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\nu}{k}\,u = 0 \tag{2,8}$$

Caso (2)

Se $\frac{P_1}{\rho oUo^2} << 1$ e $k_o \sim 0\ (\delta^2)$, teremos

como resultado a seguinte equação

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{t}} + \bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar{P}}{\partial\bar{x}} + \bar{\nu}\,\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{y}^2} - \bar{u}\,\frac{\bar{\nu}}{\bar{k}} \tag{2,9}$$

b.2) Na direção "y", equação (2,3)

$$\frac{VoUo}{L}\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{t}} + \bar{u}\,\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}} + \bar{v}\,\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}}\right) = -\left(1 + \frac{P_1}{\rho o Uo^2}\right)\frac{\partial\bar{P}}{\bar{\rho}\partial\bar{y}} + \frac{\nu o Vo}{L^2}\,\bar{\nu}\,\frac{\partial^2\bar{v}}{\bar{x}^2} + \frac{\nu o Vo}{\delta^2}.$$

$$.\bar{\nu}\,\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\bar{y}^2} - \frac{\nu o Vo}{Ko}\,\bar{V}\,\frac{\bar{\nu}}{\bar{k}} \qquad (2,10)$$

O termo $\bar{\nu}\,\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\bar{x}^2}$ pode ser desprezado por ser de ordem de grandeza muito menor que $\bar{\nu}\,\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\bar{y}^2}$, teremos então:

$$\frac{Vo}{Uo}\,\frac{Uo^2}{L}\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{t}} + \bar{u}\,\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}} + \bar{v}\,\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}}\right) = -\left(1 + \frac{P_1}{\rho o Uo^2}\right)\frac{\partial\bar{P}}{\bar{\rho}\partial\bar{y}} + \left(\frac{\nu o}{UoL}\right)\frac{Uo^2}{\delta}\,\bar{\nu}\,\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\bar{y}^2} + \frac{\nu_o}{LVo}\,\frac{L^2}{ko}.\bar{v}\,\frac{\bar{\nu}}{\bar{k}}$$

Os termos $\left(\frac{Vo}{Uo}\,.\,\frac{Uo^2}{L}\right)$ e $\left(\frac{\nu o}{Uo}.\frac{Uo^2}{\delta}\right)$ são muito pequenos.

Se tivermos

$$\frac{P_1}{\rho o\ Uo^2} \ll 1.$$

$\frac{\nu o}{L.Vo}\,\frac{L^2}{ko}$ tem a mesma ordem de grandeza do termo $\frac{P_1}{PoUo^2}$.

teremos portanto

$$\frac{\partial\bar{P}}{\partial\bar{y}} = 0 \qquad (2,11)$$

teremos portanto as equações de Navier-Stokes modificada reduzindo-se à:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\,\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u\,\frac{\nu}{k} \qquad (2,12)$$

equação esta que é conhecida como a "Lei de Darcy Generalizada". Para o escoamento permanente teremos as seguintes equações governantes:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad (2,1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u \frac{\nu}{k} \qquad (2,13)$$

quando $y = \infty$ teremos $u = U(x)$

e portanto

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Teremos então

$$U \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\nu}{k} U$$

ou

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\nu}{k} U$$

que substituido na Equação (2,13) nos dá:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\nu}{k} U - \frac{\nu}{k} u + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

ou

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\nu}{k}(U - u) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (2,14)$$

2,3) As condições de contorno

2.3.1) Junto à parede são nulos os componentes u e v da velocidade, ou

$$y = 0 \implies u = v = 0 \qquad (2,15)$$

2.3.3) A distribuição da velocidade ao redor de cilindro de raio R produzida por uma corrente irrotacional de velocidade ' Uo paralela ao eixo x, segundo a teoria do fluxo potencial é:

$$U(x) = 2\,U_o \operatorname{sen}(\tfrac{x}{R})$$

onde U_o é a velocidade não perturbada

ou

$$y = \infty \implies u = U_{(x)} = 2\,U_o \operatorname{sen}\,(\tfrac{x}{R}) \qquad (2,16)$$

Representamos a velocidade do fluxo pelo seguinte desenvolvimento em série:

$$U(x) = u_1 x + u_3 x^3 + u_5 x^5 + u_7 x^7 + u_9 x^9 + \ldots \qquad (2,17)$$

onde x é a distância ao ponto de estagnação, medido ao longo do contorno do corpo e, os coeficientes u_i dependem somente da forma geométrica do corpo e supõem-se conhecidos.

Observamos a condição de contorno (2,16) segundo a qual o fluxo potencial é regido por $U(x) = 2\,U_o \operatorname{sen}(\frac{x}{R})$. teremos então o desenvolvimento em série de $\operatorname{sen}(\frac{x}{R})$, ou seja:

$$U(x) = 2U_o\left[\frac{x}{R} - \frac{1}{3!}\left(\frac{x}{R}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{x}{R}\right)^5 - \frac{1}{7!}\left(\frac{x}{R}\right)^7 + \frac{1}{9!}\left(\frac{x}{R}\right)^9 \ldots\right] \qquad (2,18)$$

Comparando agora as equações (2,17)e (2,18) teremos

$$u_1 = 2\,\frac{U_o}{R} \quad ; \quad u_3 = -\frac{2}{3!}\,\frac{U_o}{R^3} \quad ; \quad u_5 = \frac{2}{5!}\,\frac{U_o}{R^5} \quad ; \quad u_7 = -\frac{2}{7!}\,\frac{U_o}{R^7} \tag{2,19}$$

Podemos agora calcular o termo $U\,\frac{\partial U}{\partial x}$ da Equação de quantidade de movimento

$$U\frac{\partial U}{\partial x} = u_1^{\,2}x + 4\,u_1u_3x^3 + (6\,u_1u_5 + 3\,u_3^{\,2})\,x^5 + (8\,u_1u_7 + 8\,u_3u_5)\,x^7 + $$
$$+ 10(u_1u_9 + u_3u_7 + \tfrac{1}{2}\,u_5^{\,2})\,x^9 + \ldots \tag{2,20}$$

A Equação da continuidade é integrada introduzindo-se uma função de corrente $\Psi(x,y)$. Chega-se a uma forma conveniente para a função de corrente e com ela se encontram as componentes da velocidade. Em analogia com (2,18) e (2,20) se ensaia para $\Psi\,(x,y)$ um desenvolvimento em série de potencia, com coeficientes dependentes de y, segundo Schlichting [9] , a forma conveniente para a função de corrente é:

$$\Psi = \left(\frac{\nu}{u_1}\right)^{1/2}\Big[u_1x\,f_1(\eta) + 4u_3x^3\,f_3(\eta) + 6\,u_5x^5\,f_5(\eta) + 8\,u_7x^7\,f_7(\eta) + 10u_9x^9$$
$$f_9(\eta) + \ldots\Big] \tag{2,21}$$

onde "f" é a função adimensional de velocidade e "η" é uma variável convencional de similaridade e é definida como:

$$\eta = y\sqrt{\frac{u_1}{\nu}} \tag{2,22}$$

As componentes da velocidade estão relacionados com a função de corrente através de

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

e $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ (2,23)

$$v = - \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

Consequentemente as componentes da velocidade e, suas derivadas podem ser expressas em termos de $f(\eta)$. Logo

$$u = u_1 x f_1' + 4\, u_3 x^3 f_3' + 6\, u_5 x^5 f_5' + 8\, u_7 x^7 f_7' + 10\, u_9 x^9 f_9' + \ldots \tag{2,24}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_1 f_1' + 12\, u_3 x^2 f_3' + 30\, u_5 x^4 f_5' + 56\, u_7 x^6 f_7' + 90\, u_9 x^8 f_9' + \ldots \tag{2,25}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial y} = \sqrt{\frac{u_1}{\nu}}\left[u_1 x f_1'' + 4\, u_3 x^3 f_3'' + 6\, u_5 x^5 f_5'' + 8\, u_7 x^7 f_7'' + 10\, u_9 x^9 f_9'' + \ldots\right] \tag{2,26}$$

Onde as linhas designam derivação em relação a η.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sqrt{\frac{u_1}{\nu}}\left[u_1 x f_1''' + 4\, u_3 x^3 f_3''' + 6\, u_5 x^5 f_5''' + 8\, u_7 x^7 f_7''' + 10\, u_9 x^9 f_9''' + \ldots\right] \tag{2,27}$$

De modo análogo, teremos

$$v = -\sqrt{\frac{u_1}{\nu}}\left[u_1 f_1 + 12\, u_3 x^2 f_3 + 30\, u_5 x^4 f_5 + 56\, u_7 x^6 f_7 + 90\, u_9 x^8 f_9 + \ldots\right] \tag{2,28}$$

Passemos agora ao cálculo dos outros membros da Equação (2,3).

O termo $\qquad (U - u)$

$$(U-u) = [u_1x + u_3x^3 + u_5x^5 + u_7x^7 + u_9x^9 + \ldots] - [u_1xf_1' +$$

$$4\ u_3x^3f_3' + 6\ u_5x^5f_5' + 8\ u_7x^7f_7' + 10\ u_9x^9f_9' + \ldots]$$

$$= xu_1(1-f_1') + u_3x^3(1-4f_3') + u_5x^5(1 - 6f_3') + u_7x^7(1 - 8f_7') +$$

$$+ u_9x^9(1 - 10f_9') + \ldots \qquad (2,29)$$

Os termos $u\,\frac{\partial u}{\partial x}$ e $v\,\frac{\partial u}{\partial y}$

$$[u_1xf_1' + 4\ u_3x^3f_3' + 6\ u_5x^5f_5' + 8\ u_7x^7f_7' + 10\ u_9x^9f_9' + \ldots] \cdot$$

$$\cdot [u_1f_1' + 12\ u_3x^2f_3 + 30\ u_5x^4f_5' + 56\ u_7x^6f_7' + 90\ u_9x^8f_9' + \ldots]$$

$$u\,\frac{\partial u}{\partial x} = u_1^2(f_1')^2x + (16\ u_1u_3f_1'f_3')x^3 + (36\ u_1u_5f_1'f_5' + 48\ u_3^2(f_3')^2x^5 +$$

$$+(64\ u_1u_7f_1'f_7' + 192\ u_3u_5f_3'f_5')\ x^7 + (100\ u_1u_9f_1'f_9' +$$

$$+320\ u_3u_7f_3'f_7' + 180\ u_5^2\ (f_5')^2x^9 + \ldots \qquad (2,30)$$

o termo $v\,\frac{\partial u}{\partial y}$ será:

$$\left[-\ \surd\ \frac{\nu}{u_1}\,(u_1 j_1 + 12\ u_3 x^2 f_3 + 30\ u_5 x^4 f_5 + 56\ u_7 x^6 f_7 + 90\ u_9 x^8 f_9 + \ldots)\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\surd\ \ \frac{u_1}{\nu}\,(u_1 x f_1'' + 4\ u_3 x^3 f_3'' + 6\ u_5 x^5 f_5'' + 8\ u_7 x^7 f_7'' + 10\ u_9 x^9 f_9'' + \ldots)\right]$$

$$v\frac{\partial u}{\partial y} = -\left[4_1^2 f_1 f_1'' x + (4\ u_1 u_3 f_1 f_3'' + 12\ u_1 u_3 f_3 f_1'' x^3 + (6\ u_1 u_5 f_1 f_5'' + 43\ u_3^2 f_3 f_3'' +\right.$$

$$+ 30\ u_1 u_5 f_5 f_1'')x^5 + (8\ u_1 u_7 f_1 f_7'' + 72\ u_3 u_5 f_3 f_5'' + 120\ u_3 u_5 f_5 f_3'' + 56\ u_1 u_7 f_7 f_1'')x^7 +$$

$$+(10\ u_1 u_9 f_1 f_9'' + 96\ u_3 u_7 f_3 f_7'' + 180\ u_5^2 f_5 f_5'' + 224\ u_3 u_7 f_7 f_3'' + 90\ u_1 u_9 f_9 f_1'')\,.$$

$$\left. x^9 + \ldots\right] \qquad (2.31)$$

substituindo agora (2,20);(2,27);(2,29);(2,30) e (2,31) na Eq. (2,14) agrupando os termos de mesma potencia de x, e igualando os termos correspodentes dos dois membros, teremos como resultado o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias para as funções f_1 ; f_3 ; ...

Para os termos de potencia de x, qual à unidade, teremos:

$$u_1^2((f_1')^2 - f_1 f_1'') = u_1^2 + u_1\,\frac{\nu}{K}\,(1 - f_1') + 4_1^2 f_1'''$$

dividindo esta equação por u_1^2 teremos.

$$(f_1')^2 - f_1 f_1'' = 1 + f_1''' + \frac{\nu}{Ku_1}\,(1 - f_1') \qquad (2,32)$$

Para os termos de potencia de x igual a tres, teremos após os devidos arranjos:

$$4f_1'f_3' - f_1f_3'' - 3f_3f_1'' = 1 + f_3''' + \frac{\nu}{Ku_1}\left(\frac{1}{4} - f_3'\right) \qquad (2,33)$$

Para os termos de potencia de x igual a cinco teremos a seguinte equação

$$6f_1'f_5' - f_1f_5'' - 5f_5f_1'' + 8\,\frac{u_3^2}{u_1u_5}\left((f_3')^2 - f_3f_3''\right) = 1 + f_5''' + \frac{u_3^2}{2_1u_1u_5} + \frac{\nu}{Ku_1}\left(\frac{1}{6} - f_5'\right) \qquad (2,34)$$

Para x^7 teremos a seguinte equação:

$$8f_1'f_7 - f_1f_7'' - 7f_7f_1'' + \frac{3}{2}\,\frac{u_3u_5}{u_1u_7}\left(16f_3'f_5' - 6f_3f_5'' - 10f_5f_3''\right) - \frac{u_3u_5}{u_1u_7} = 1 + f_7''' + \frac{\nu}{Ku_1}\left(\frac{1}{8} - f_7'\right) \qquad (2,35)$$

e finalmente para os termos x^9 teremos:

$$10f_1'f_9' - 9f_9f_1'' - f_1f_9'' + \frac{16}{5}\,\frac{u_3u_7}{u_1u_9}\left(10f_3'f_7' - 3f_3f_7'' - 7f_7f_3''\right) + 18\,\frac{u_5^2}{u_1u_9}\left((f_5')^2 + f_5f_5''\right) - \frac{u_3u_7}{u_1u_9} - \frac{1}{2}\,\frac{u_5^2}{u_1u_9} = 1 + f_9''' + \frac{\nu}{Ku_1}\left(\frac{1}{10} - f_9'\right) \qquad (2,36)$$

As condições de contorno para as Equações (2,32) a (2,36) são decorrentes das condições de contorno (2,15) e (2,16), teremos portanto:

$$\eta = 0 \qquad f_1 = f_1' = 0 \qquad f_3 = f_3' = 0$$

$$f_5 = f_5' = 0 \qquad f_7' = f_7' = 0$$

$$f_9 = f_9' = 0$$

$$\eta = \infty \qquad f_1' = 1 \qquad f_3' = \frac{1}{4}$$

$$f_5' = \frac{1}{6} \qquad f_7' = \frac{1}{8}$$

$$f_9' = \frac{1}{10}$$

Os valores das constantes $\frac{u_1 u_7}{u_1 u_9}$, $\frac{u_5^2}{u_1 u_9}$, etc, que aparecem nas equações acima são facilmente calculadas através das relações (2,19).

CAPÍTULO 3

TRATAMENTO NUMÉRICO

3.1 - O sistema de Equações obtido

As equações diferenciais obtidas no capítulo anterior constituem um sistema de equações diferenciais ordinárias. Estas equações são todas de terceira ordem e (2,37) dá para cada uma delas tres condições de contorno. Apenas a primeira, isto é, a que se refere a f_1 é não linear, todas as demais são lineares.

Devido à impossibilidade de se obter uma solução analítica, as equações (2,32) à (2,36) foram resolvidas numericamente, juntamente com as condições (2,37). Como a equação (3,32) se refere unicamente à f_1, ela pode ser resolvida primeiramente e seus valores são usados posteriormente como constantes para resolver a equação (2,33) e assim sucessivamente até que a última equação, ou seja, a equação (2,36) esteja resolvida.

3.2 - O método utilizado

Foi utilizado o método de Runge-Kutta [10], que é um método numérico, prático em computação para a solução de sistemas de equações diferenciais ordinárias. Quando a equação diferencial for de ordem "n", torna-se necessário transformá-la em um sistema de "n" equações de primeira ordem, através de um simples processo de abaixamento de ordem. Por exemplo, seja a equação:

$$(f_1')^2 - f_1 f_1'' = 1 + f_1''' + \frac{\nu}{u_1 k}(1 - f_1') \qquad (2,32)$$

Por uma questão de comodidade faremos $\frac{\nu}{u_1 k} = c$.

Para transformar a equação diferencial ordinária de terceira ordem (2,32) num sistema de tres equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, adotamos o seguinte procedimento:

Denomina-se uma função, por exemplo, w, como sendo igual à primeira derivada da função f_1 da equação (2,32). Assim, a primeira derivada da função w será igual a segunda derivada da função f_1 de equação (2,32), e assim sucessivamente.

Então, tem-se

$$w = f_1' \tag{3,1}$$

$$w' = f_1'' \tag{3,2}$$

$$w'' = f_1''' \tag{3,3}$$

Substituindo-se as equações (3,1); (3,2) e (3,3) na equação (2,32) obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} & w'' + f_1 w' - w(w + c) + c + 1 = 0 \\ & w = f_1' \end{aligned} \tag{3,4}$$

Procedendo de forma idêntica para o sistema de equações diferencial ordenárias (3,4), ou seja, fazendo

$$z = w' \tag{3,5}$$

$$z = w'' \tag{3,6}$$

Dessa forma, temos

$$\begin{aligned} & z' + f_1 z - w(w + c) + c + 1 = 0 \\ & w = f_1' \\ & z = w' \end{aligned} \tag{3,7}$$

que é um sistema de equação diferenciais ordinárias de primeira ordem.

Com as condições de contorno (2,37), para f_1, isto é,

$$\eta = 0 \qquad f_1 = f_1' = 0$$

Obetemos

$$f_1(0) = 0$$
$$w(0) = 0 \qquad (3.8)$$
$$z(0) = A$$

onde "A" é a terceira condição de contorno a ser encontrada.

3.3 - O programa utilizado e as modificações feitas

Foi utilizado um programa de computador (Apendice) da biblioteca do IMEC de Campinas. Este programa sofreu algumas alterações a fim de atender as peculiaridades deste trabalho. Por exemplo, o método de Runge-Kutta exige tres condições de contorno para a resolução do sistema de equações diferenciais ordinárias (3,7). Devemos pois encontrar o valor de "A" das condições de contorno (3,8). Isso pode ser feito dando-se para A, não um valor, mas um intervalo de valores e um incremento para o cálculo. De todos os resultados encontrados, será escolhido aquele que melhor satisfizer a terceira condição de contorno (2,37) para f_1', ou seja:

$$\eta = \infty \qquad f_1' = 1$$

Portanto enquanto a variável "η" cresce será observado aqui o valor de w, este deve tender a unidade. Se w não tende à 1 em nenhum dos valores de A, então deve-se tentar outro intervalo de valores. O procedimento é idêntico para todas as equações subsequentes.

3.4 - Os resultados obtidos

Como já foi dito anteriormente, o sistema de equações diferenciais ordinárias de 3ª ordem (3,32) à (3,36) foi resolvido numericamente e os resultados são apresentados através das tabelas (1) a (5). Nessas tabelas são apresentados os valores da primeira derivada das funções f_1 a f_9 para os tres valores do parâmetro de permeabilidade $c = \frac{\nu}{\bar{u}_1 k}$. Esses valores serão utilizados posteriormente para o cálculo das características do escoamento, tais como: Distribuição de velocidade; Espessura da camada limite; Espessura de deslocamento e Espessura de momento. São mostrados ainda nas tabelas (1) a (5) os valores das segundas derivadas das funções f_1 à f_9 para $\eta = 0$. Esses valores serão utilizados para o cálculo da tensão de cisalhamento na parede e ainda o cálculo da localização do ponto de separação. Nas figuras (2) a (5) são ainda representados graficamente, as primeiras derivadas das funções f_1 ; f_3 ; f_5 e f_7 para os tres valores do parâmetro de permeabilidade $\bar{c}$. Através desses gráficos pode-se observar claramente que o aumento do parâmetro de permeabilidade $c = \frac{\nu}{u_1 k}$ faz com que a f_i' alcance a sua assíntota mais rapidamente.

TABELA 1 - Valores da primeira derivada da fução f_1 da Equação (2,21)

VALORES DE f_1'			
η	c=0,01	c=1,0	c=5,0
0	0,0000	0,0000	0,0000
0,2	0,2272	0,2792	0,4056
0,4	0,4153	0,4912	0,6539
0,6	0,5673	0,6485	0,8027
0,8	0,6869	0,7626	0,8899
1,0	0,7787	0,8432	0,9399
1,2	0,8474	0,8990	0,9679
1,4	0,8973	0,9365	0,9833
1,6	0,9327	0,9610	0,9915
1,8	0,9571	0,9767	0,9958
2,0	0,9734	0,9865	0,9979
2,2	0,9840	0,9923	0,9990
2,4	0,9906	0,9958	0,9995
2,6	0,9947	0,9977	0,9998
2,8	0,9970	0,9988	0,9999
3,0	0,9984	0,9994	0,9999
3,2	0,9992	0,9997	0,9999
3,4	0,9996	0,9998	1,0000
3,6	0,9998	0,9999	1,0000
3,8	0,9999	0,9999	1,0000
4,0	0,9999	1,0000	1,0000
VALORES DE f_1''			
η	c=0,01	c=1,0	c=5,0
0	1,2366	1,5853	2,5506

TABELA 2 - Valores da primeira derivada da função f_3 da Equação (2,21)

VALORES DE f_3'			
η	c=0,01	c=1,0	c=5,0
0	0,0000	0,0000	0,0000
0,2	0,1373	0,1302	0,1336
0,4	0,2320	0,2125	0,2043
0,6	0,2848	0,2577	0,2390
0,8	0,3123	0,2803	0,2537
1,0	0,3223	0,2882	0,2582
1,2	0,3208	0,2874	0,2580
1,4	0,3127	0,2872	0,2563
1,6	0,3016	0,2755	0,2544
1,8	0,2902	0,2690	0,2529
2,0	0,2798	0,2634	0,2517
2,2	0,2712	0,2590	0,2510
2,4	0,2645	0,2558	0,2505
2,6	0,2597	0,2536	0,2502
2,8	0,2563	0,2521	0,2502
3,0	0,2542	0,2512	0,2501
3,2	0,2529	0,2507	0,2500
3,4	0,2522	0,2503	0,2500
3,6	0,2520	0,2501	0,2459
3,8	0,2520	0,2500	0,2499
4,0	0,2519	0,2500	0,2498
VALORES DE f_3''			
η	c=0,01	c=1,0	c=5,0
0	0,7876	0,7724	0,8698

TABELA 3 - Valores da primeira derivada da função f_5 da Equação (2,21)

VALORES DE F_5'			
η	c=0,01	c=1,0	c=5,0
0	0	0	0
0,2	0,1542	0,1233	0,1016
0,4	0,2167	0,1883	0,1733
0,6	0,2147	0,1866	0,1766
0,8	0,1776	0,1434	0,1516
1,0	0,1295	0,1356	0,1333
1,2	0,0867	0,1099	0,1199
1,4	0,0575	0,0823	0,1083
1,6	0,0443	0,0786	0,0999
1,8	0,0452	0,0801	0,1016
2,0	0,0562	0,0916	0,1099
2,2	0,0733	0,1053	0,1198
2,4	0,0924	0,1179	0,1335
2,6	0,1110	0,1316	0,1434
2,8	0,1268	0,1418	0,1563
3,0	0,1397	0,1499	0,1589
3,2	0,1492	0,1716	0,1633
3,4	0,1791	0,1633	0,1686
3,6	0,1601	0,1449	0,1683
3,8	0,1659	0,1661	0,1676
4,0	0,1688	0,1673	0,1669
VALORES DE F_5''			
η	c=0,01	c=1,0	c=5,0
0	1,0320	0,7071	0,5582

TABELA 4 - Valores da primeira derivada da função f_7 da equação (2,21)

VALORES DE F_7'			
η	c =0,01	c=1,0	c=5,0
0	0,0	0,0	0,0
0,2	0,2546	0,1562	0,1187
0,4	0,2799	0,2062	0,1625
0,6	0,1977	0,1625	0,1375
0,8	0,1595	0,1437	0,1312
1,0	0,1828	0,1565	0,1406
1,2	0,2791	0,2250	0,1875
1,4	0,4215	0,3062	0,2437
1,6	0,5673	0,3937	0,3156
1,8	0,6828	0,3806	0,3875
2,0	0,7495	0,5625	0,3437
2,2	0,7179	0,5437	0,4312
2,4	0,7180	0,5375	0,4187
2,6	0,5824	0,5687	0,3750
2,8	0,5506	0,4312	0,3125
3,0	0,4553	0,3375	0,2562
3,2	0,3664	0,2625	0,2033
3,4	0,2925	0,1937	0,1625
3,6	0,2364	0,1562	0,1375
3,8	0,1945	0,1375	0,1281
4,0	0,1463	0,1364	0,1265
VALORES DE f_7''			
η	c =0,01	c=1,0	c=5,0
0	2,0368	1,8614	1,7923

TABELA 5 - Valores da primeira derivada da função f_9 da Equação (2,21)

VALORES DE f_9'			
η	c=0,01	c=1,0	c=5,0
0	0,0	0,00	0,00
0,2	1,1470	0,7746	0,6120
0,4	1,8362	1,2994	1,0582
0,6	2,7607	1,8492	1,5417
0,8	4,2630	2,8487	2,1058
1,0	6,2185	4,0482	2,7252
1,2	8,2455	5,1978	3,3752
1,4	9,9245	6,1474	4,0134
1,6	10,9568	6,6222	4,4412
1,8	11,1921	6,7221	4,5005
2,0	10,6839	6,3723	4,2254
2,2	9,5821	5,4976	3,7320
2,4	8,1174	4,5980	3,1015
2,6	6,5219	3,7484	2,5245
2,8	4,9862	2,9237	2,0193
3,0	3,6226	2,1490	1,5635
3,2	2,5207	1,5443	0,5985
3,4	1,6807	0,9995	0,6815
3,6	1,0812	0,6247	0,3959
3,8	0,6850	0,2998	0,1835
4,0	0,1885	0,1481	0,1349
VALORES DE f_9''			
η	c=0,01	c=1,0	c=5,0
0	0,2801	0,2194	0,1834

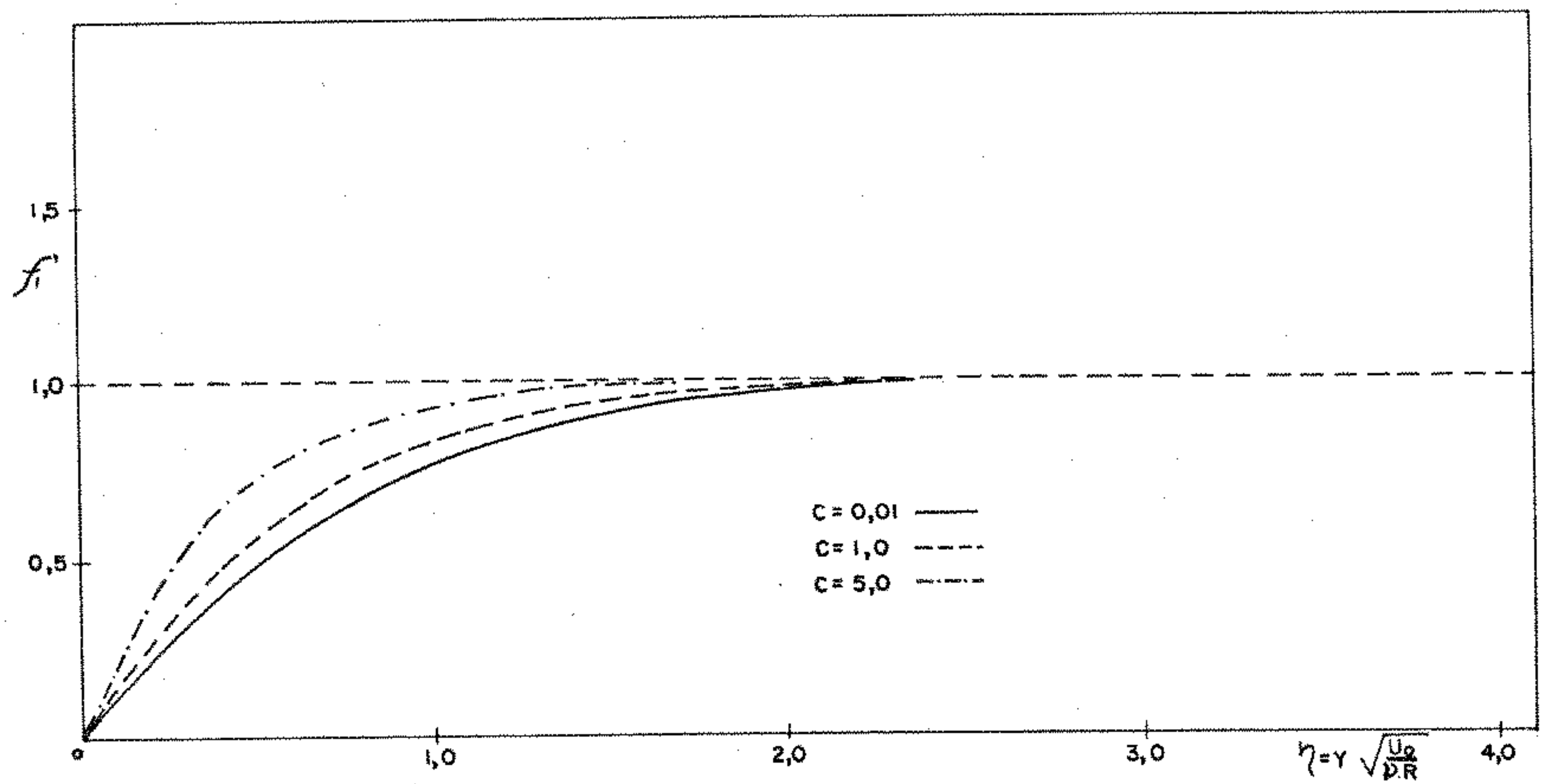

Fig. 2 - A função f_1' da equação(2,21)

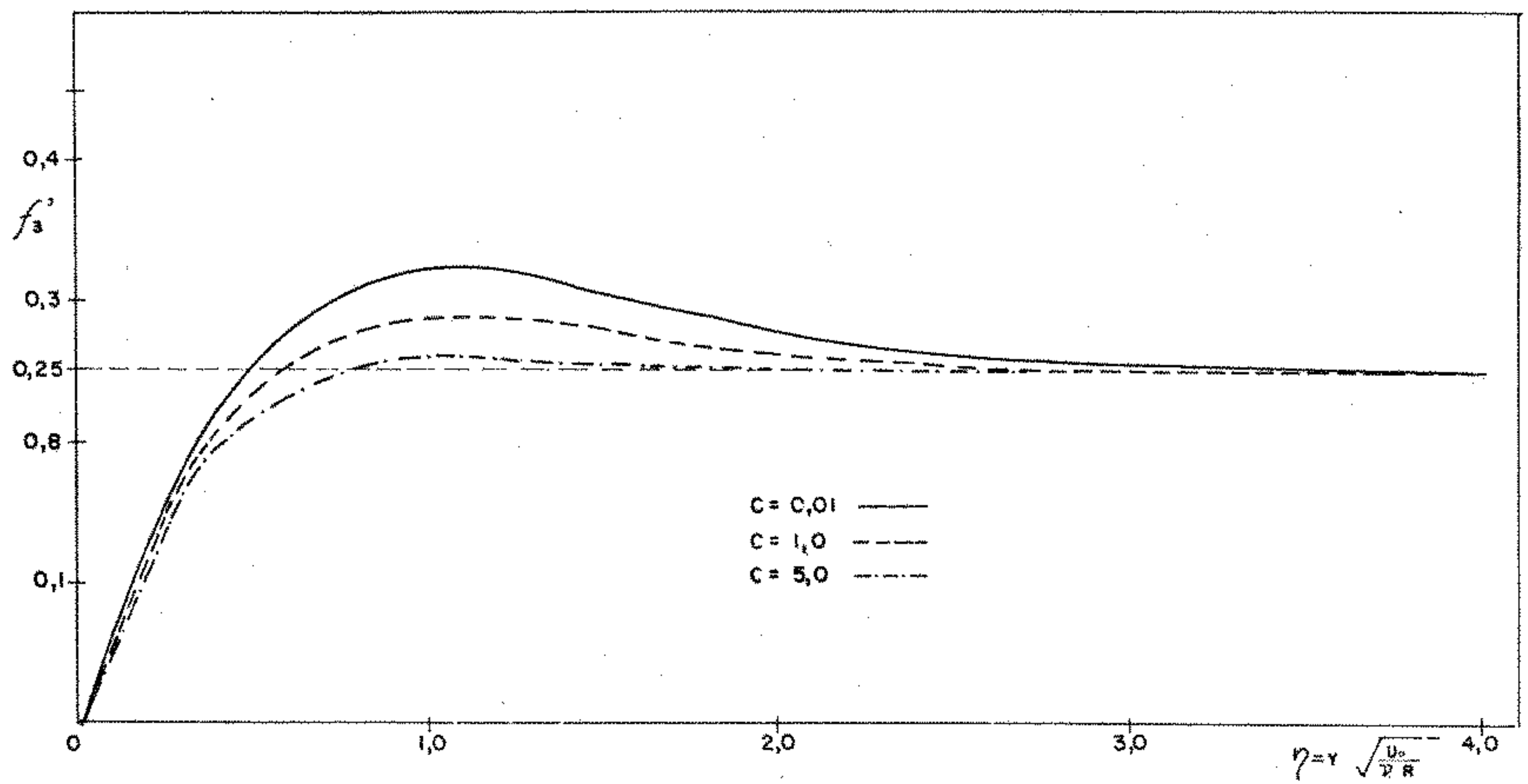

Fig. 3 - A função f_3' da equação (2,21)

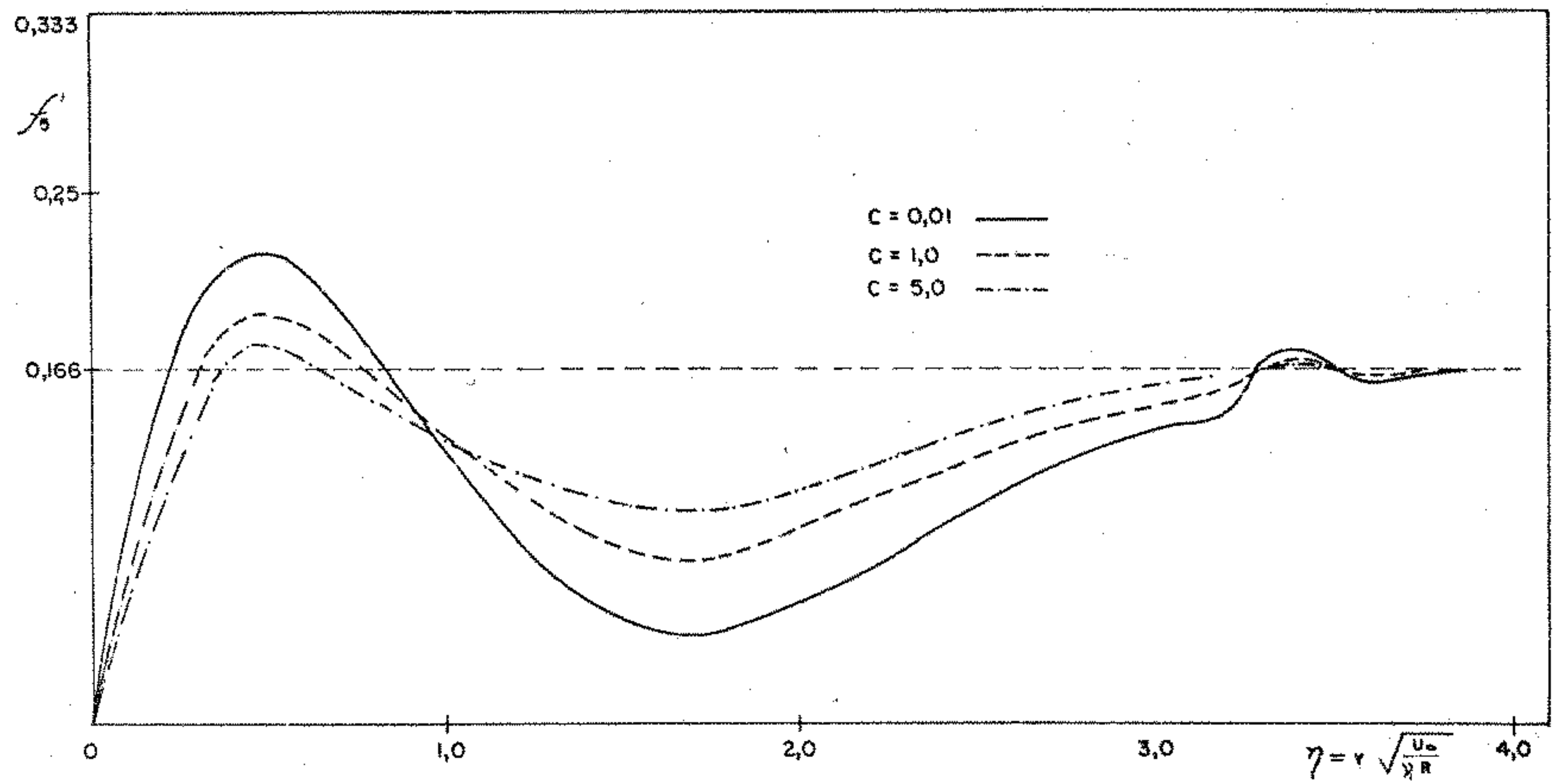

Fig. 4 - A função f_5' da equação (2,21)

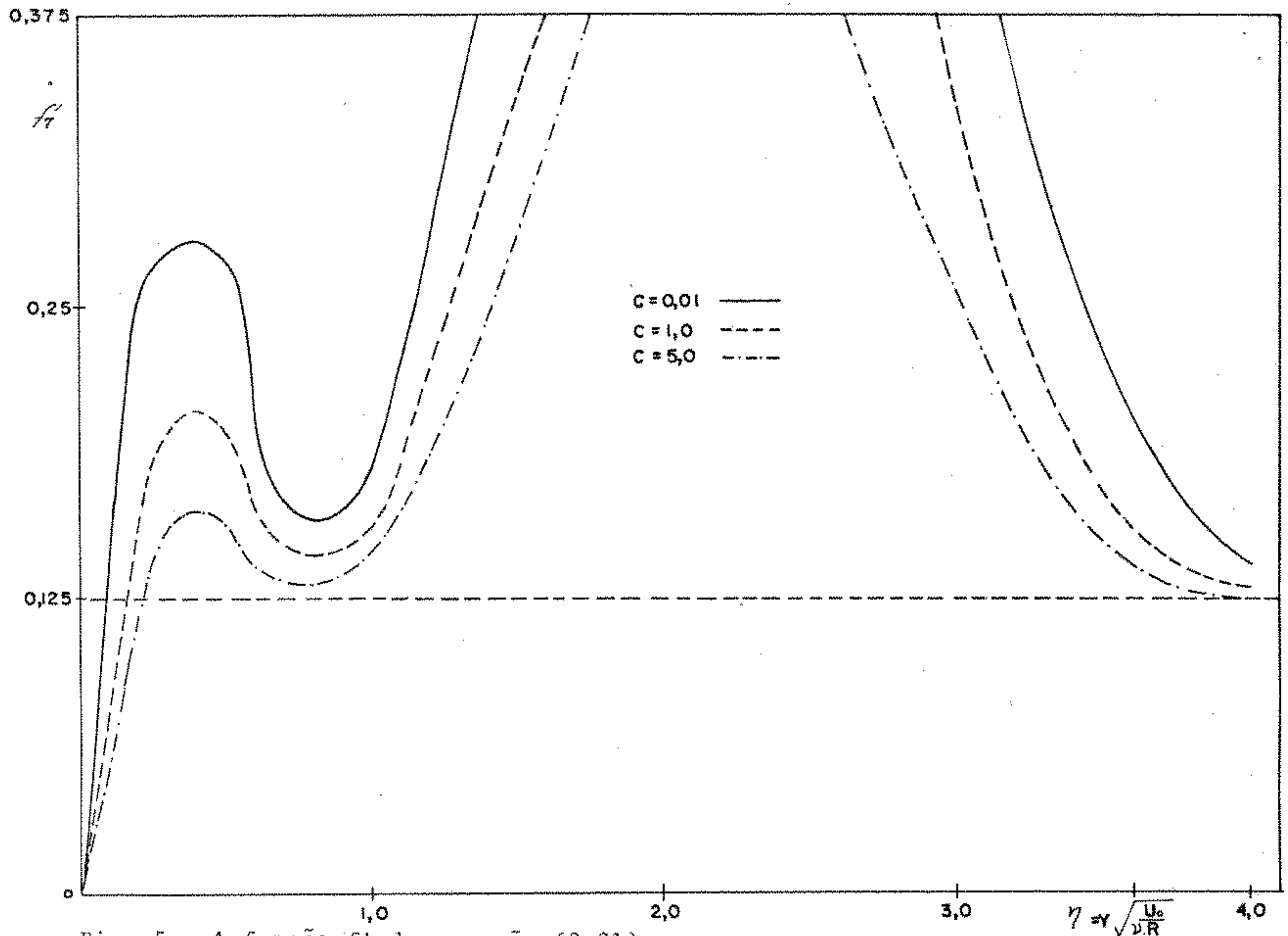

Fig. 5 - A função f'_7 da equação (2,21)

CAPÍTULO 4

DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

4.1 - PERFIS DE VELOCIDADE

Podemos plotar os perfis de velocidade em termos da nova variável admensional de similaridade η, usando a seguinte relação.

$$\frac{u}{Uo} = \frac{u}{U(x)} \cdot \frac{U(x)}{Uo} \qquad (4,1.1)$$

onde $\frac{u}{Uo}$ é dado pela equação (2,24). A equação (2,16) nos fornece o valor de $\frac{U(x)}{Uo}$, teremos então:

$$\frac{u}{U(x)} = \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{x}{R}}\left\{ \frac{x}{R} f_1' - \frac{4}{3!}\left(\frac{x}{R}\right)^3 f_3' + \frac{6}{5!}\left(\frac{x}{R}\right)^5 f_5' - \frac{8}{7!}\left(\frac{x}{R}\right)^7 f_7' + \frac{10}{9}\left(\frac{x}{R}\right)^9 f_9' \ldots\right\} \qquad (4.1.2)$$

Usando a equação (4.1.2) acima e os valores das tabelas (1) a (5) plotamos os gráficos de "η" versus $\frac{u}{U(x)}$ para vários ângulos $\phi = \frac{x}{R}$ ao longo do contorno do cilindro. Os perfis de velocidades são apresentados desde zero grau até o ponto de separação qua varia de acordo com a permeabilidade "k" do meio. As figuras (6) ; (7) e (8) apresentam a distribuição de velocidade para tres meios com diferentes permeabilidades "k", o que é caracterizado pelos tres diferentes valores que toma a constante "c". Note- se que quanto menor o valor de "c" mais permeável será o meio. Para "c" igual a zero evidentemente teremos um meio de fluido puro.

A figura (6) representa a distribuição de velocidade para o meio mais permeável dos meios representados. Note-se que os

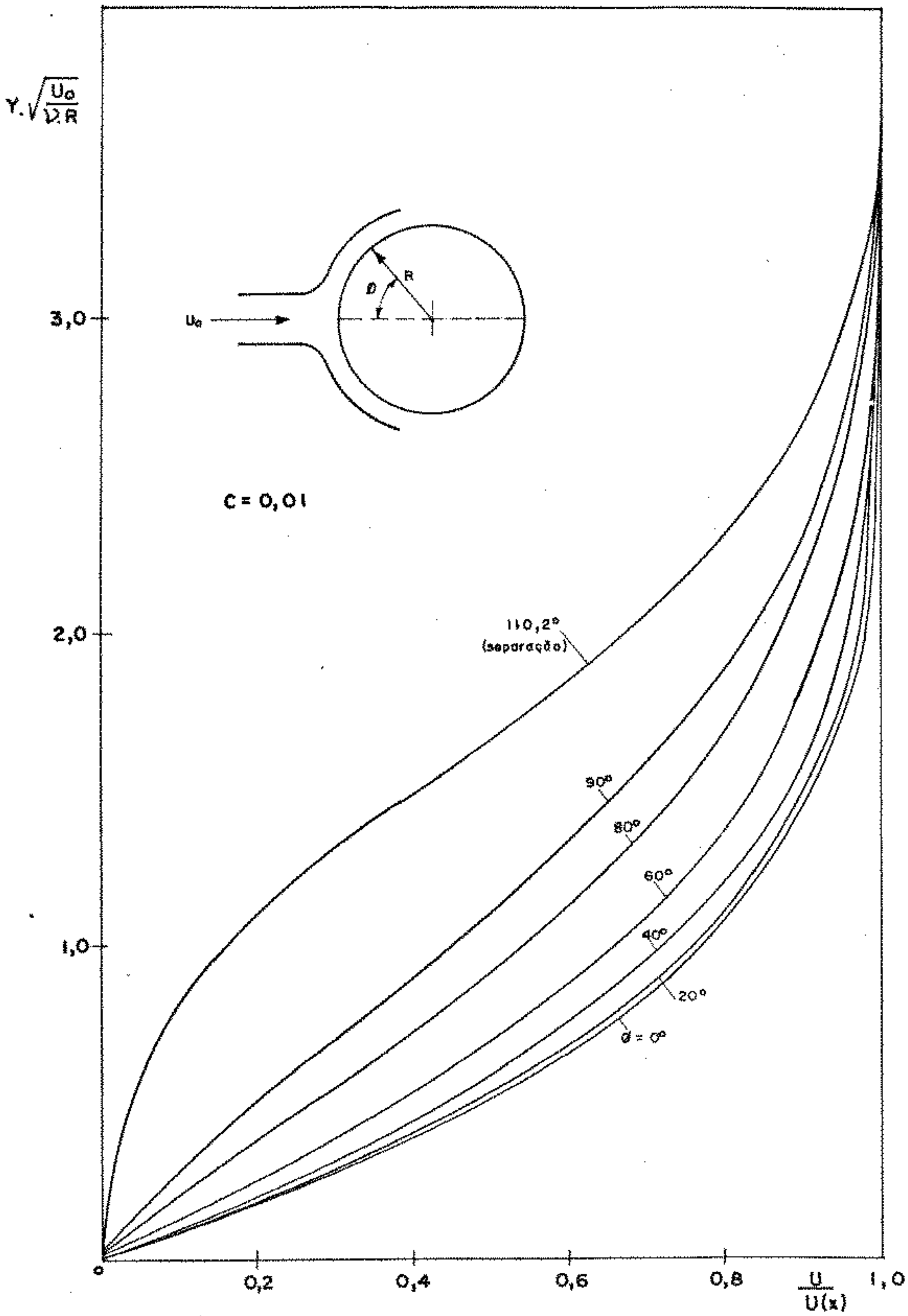

Fig. 6 - Distribuição de velocidade dentro da cama da limite sobre um cilindro circular horizontal.
ϕ = Angulo medido a partir do Ponto de Estagnação.

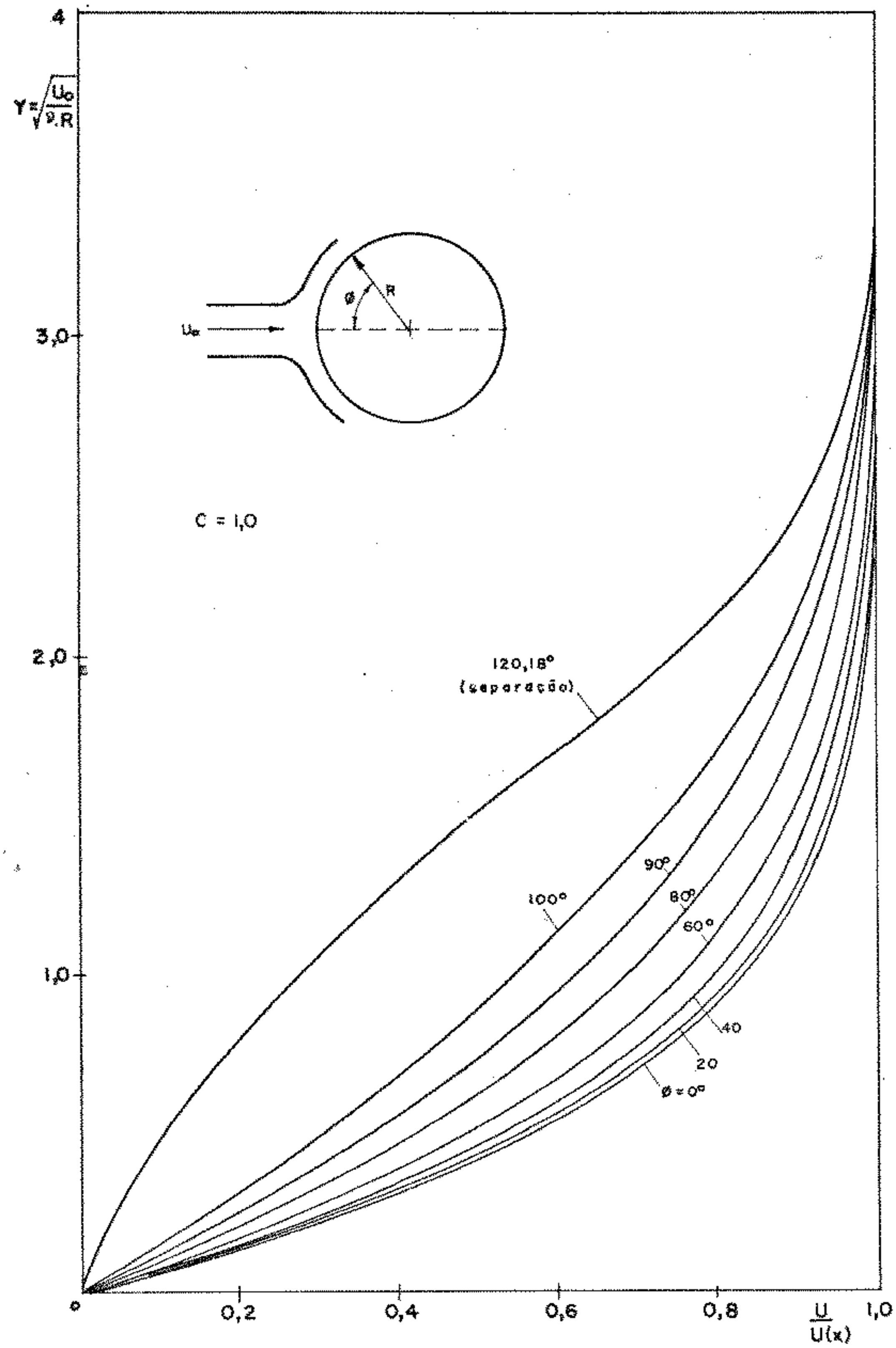

Fig. 7 - Distribuição de velocidade dentro da camada limite sobre um cilindro circular horizontal.
ϕ = Angulo medido a partir do Ponto de Estagnaçao.

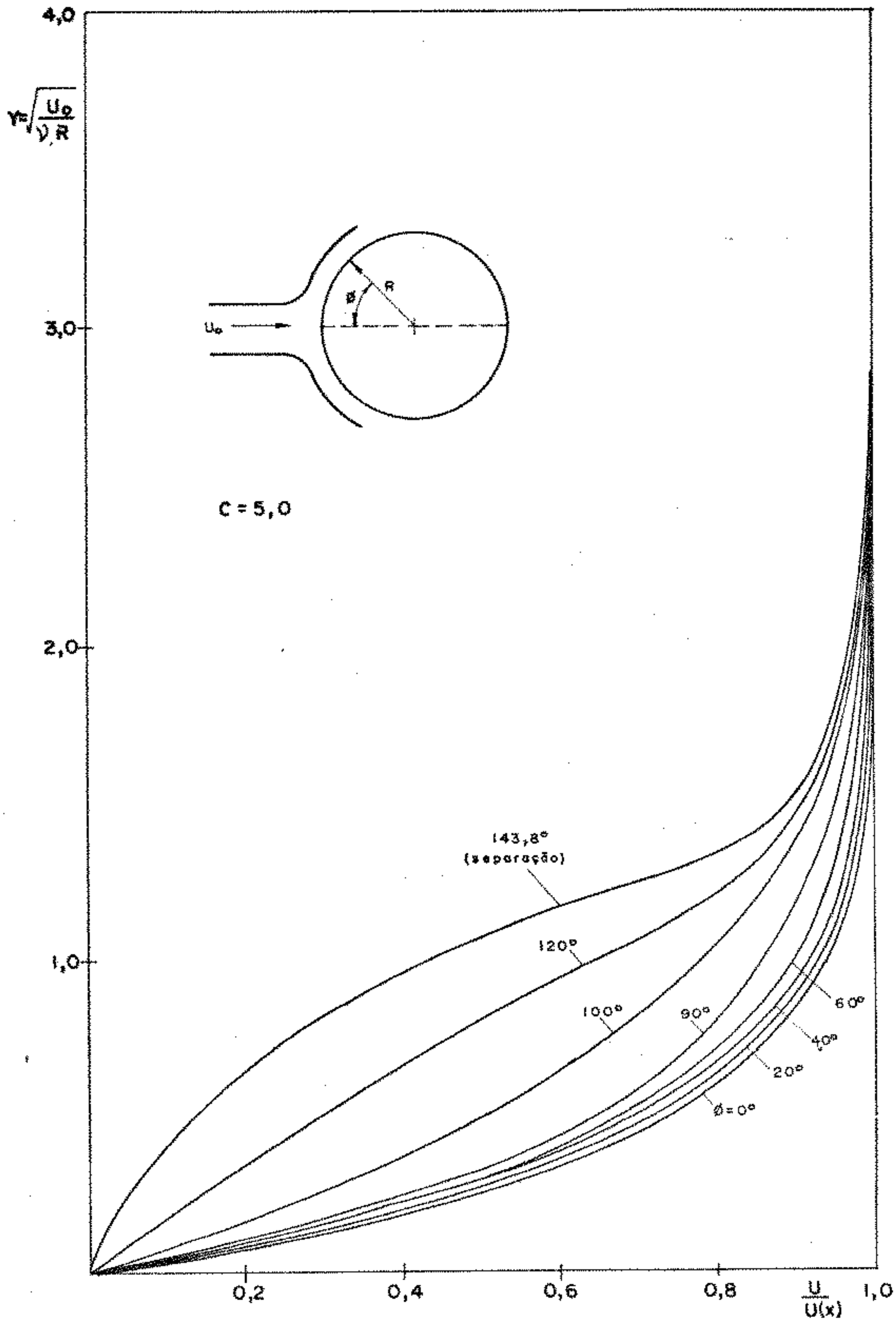

Fig. 8 - Distribuição de velocidade dentro da cama da limite sobre um cilindro circular horizontal.
ϕ = Angulo medido a partir do Ponto de Estagnaçao.

perfis apresentam concavidade voltada para cima para todos os ângulos até aproximadamente 90^{o}. Após os 90^{o} verifica-se uma clara tendência de inversão da concavidade do perfil e o aparecimento de um ponto de inflexão. Isso indica claramente que logo após os 90^{o} o fluxo passa a ser retardado continuando dessa forma até a separação.

Nas figuras (7) e (8) que representam meios cujas permeabilidades são cada vez menores, nota-se um aumento de concavidade dos perfis de velocidade, isso é bem evidenciado principalmente na figura (8). A tendência de inversão da concavidade ocorre em pontos cada vez mais distantes de 90^{o}. Nota-se portanto uma clara diminuição da viariação da velocidade próximo ao contorno do corpo com a diminuição da permeabilidade do meio.

4.2 - Espessura da Camada Limite

É praticamente impossível indicar com precisão a espessura da camada limite, já que a transformação da velocidade na dita camada para a velocidade externa se dá assintoticamente. Isto no entanto é de pouca importância porque a velocidade na camada limite tende a um valor que é muito próximo à velocidade externa já a uma pequena distância do contorno do corpo. Costuma-se entretanto, definir a espessura da camada limite como a distância, do contorno do corpo, onde a velocidade difere de 1 por cento da velocidade externa. Com base nessa definição podemos encontrar a espessura de camada limite aproveitando os valores calculados através da equação (4,1.2) a qual foi utilizada para tra çar os perfis de velocidade. Para isso tomemos, dos valores calculados, apenas o primeiro valor encontrado igual a 0,99 para cada ângulo calculado e chamemos "δ" para o "y" correspondente a esse valor. Assim, podemos plotar um gráfico de δ: espessura da camada limite, em função do ângulo ϕ.

A figura (9) apresenta o gráfico da espessura da camada limite, obtido para tres diferentes valores da permeabilidade. A linha contínua representa a espessura da camada limite do meio mais permeável enquanto a linha de traços e pontos representa a espessura da camada limite para o meio menos permeável. Nota-se portanto claramente que a variação da permeabilidade do meio traduz-se também numa variação da espessura da camada limite. A diminuição da permeabilidade do meio provoca uma diminuição da espessura da camada limite tornando-a também mais longa. Isso ocorre porque, conforme observamos os perfis de velocidade anteriormente, a diminuição da permeabilidade do meio provoca uma diminuição da variação da velocidade, isso ocorre tanto ao longo do contorno do cilindro como ao longo da ordenada "y". A diminuição da variação da velocidade ao longo do contorno do cilindro faz com que a camada limite se torne mais longa porque a perda de energia cinética na parte frontal do cilindro é menor, restando portanto ainda alguma energia para que o fluido possa atravessar parte da "costa" do cilindro sem que a separação ocorra. Essa mesma diminuição de variação de velocidade provoca uma diminuição da espessura da camada limite porque com a diminuição da variação da velocidade a componente "u" da velocidade atinge maiores valores mais rapidamente.

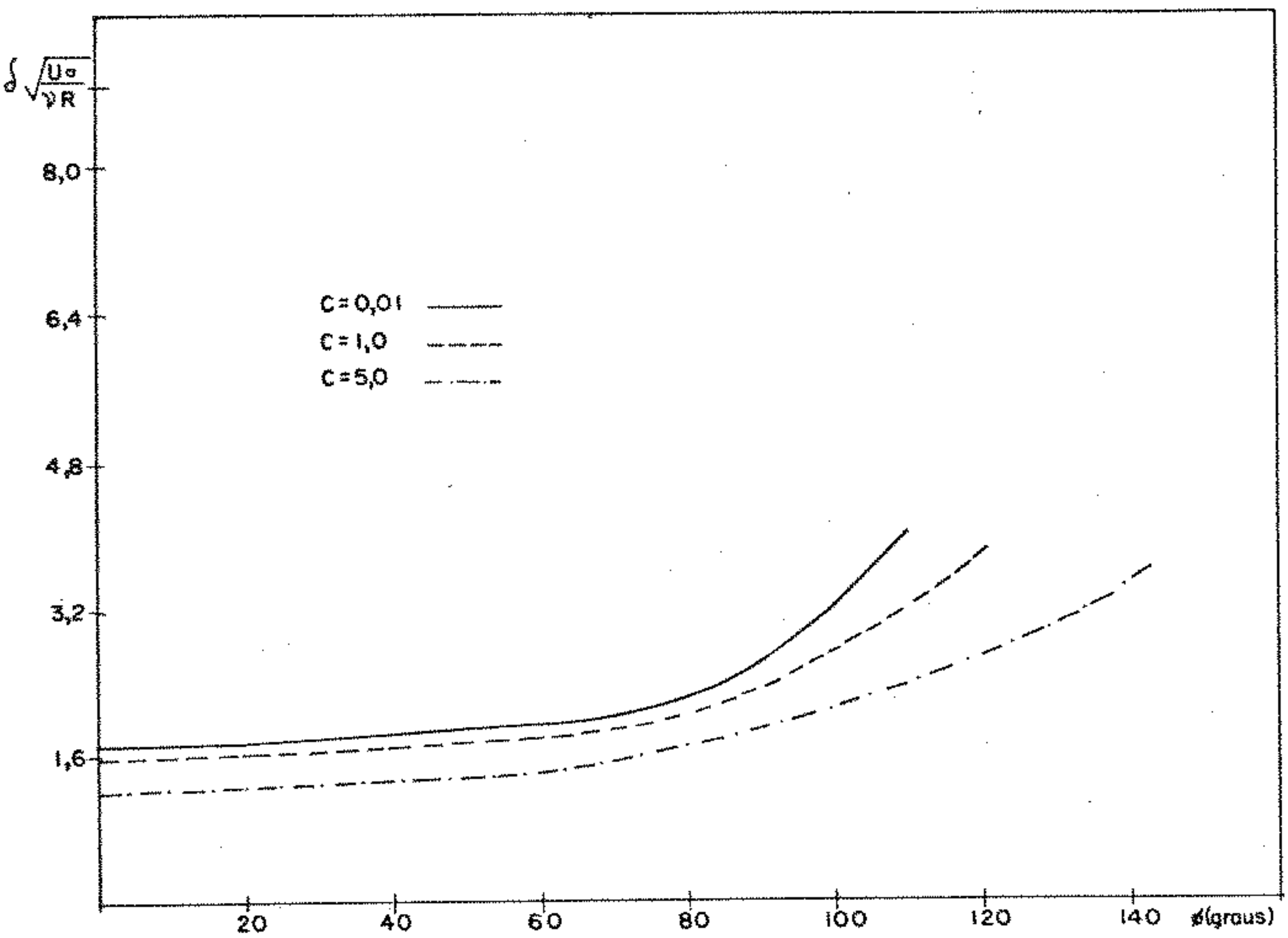

Fig. 9 - Espessura da camada limite.

4.3 - Espessura de Deslocamento

Uma medida fisicamente significativa da espessura da camada limite é a "espessura de deslocamento". A espessura de deslocamento é a distância que o fluxo externo é deslocado como consequência da diminuição de velocidade na camada limite. A diminuição do fluxo volumétrico devido à influência do atrito é

$$\int_{y=0}^{\infty} (U(x) - u)dy$$

de onde resulta para δ_1 a equação de definição

$$U(x)\ \delta_1 = \int_{y=0}^{\infty} (U(x) - u)dy$$

ou

$$\delta_1 = \int_{y=0}^{\infty} (1 - \frac{u}{U(x)})\ dy \qquad (4.3.1)$$

Sabemos que

$$\eta = \frac{y}{R} \sqrt{\frac{2UoR}{\nu}} \qquad (2,22)$$

então

$$dy = d\eta \sqrt{\frac{\nu . R}{2U_o}} \qquad (2,22.a)$$

O valor de $u/U(x)$ é dado pela equação (4.1.2), que substituido ' juntamente com a equação (4,22.a) na equação (4.3.1) nos fornece

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{\nu\ R}{2U_o}} \int_{\eta=0}^{\infty} \Big[1 - \{ \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{x}{R}} f_1' - \frac{4}{3!}\Big[\frac{x}{R}\Big]^3 f_3' + \frac{6}{5!}\Big[\frac{x}{R}\Big]^5 f_5' - \frac{8}{7!}\Big[\frac{x}{R}\Big]^7 f_7' + \frac{10}{9!}\Big[\frac{x}{R}\Big]^9 .$$

$$.f_9' \ldots)\Big]\ d\eta \qquad (4.3.2)$$

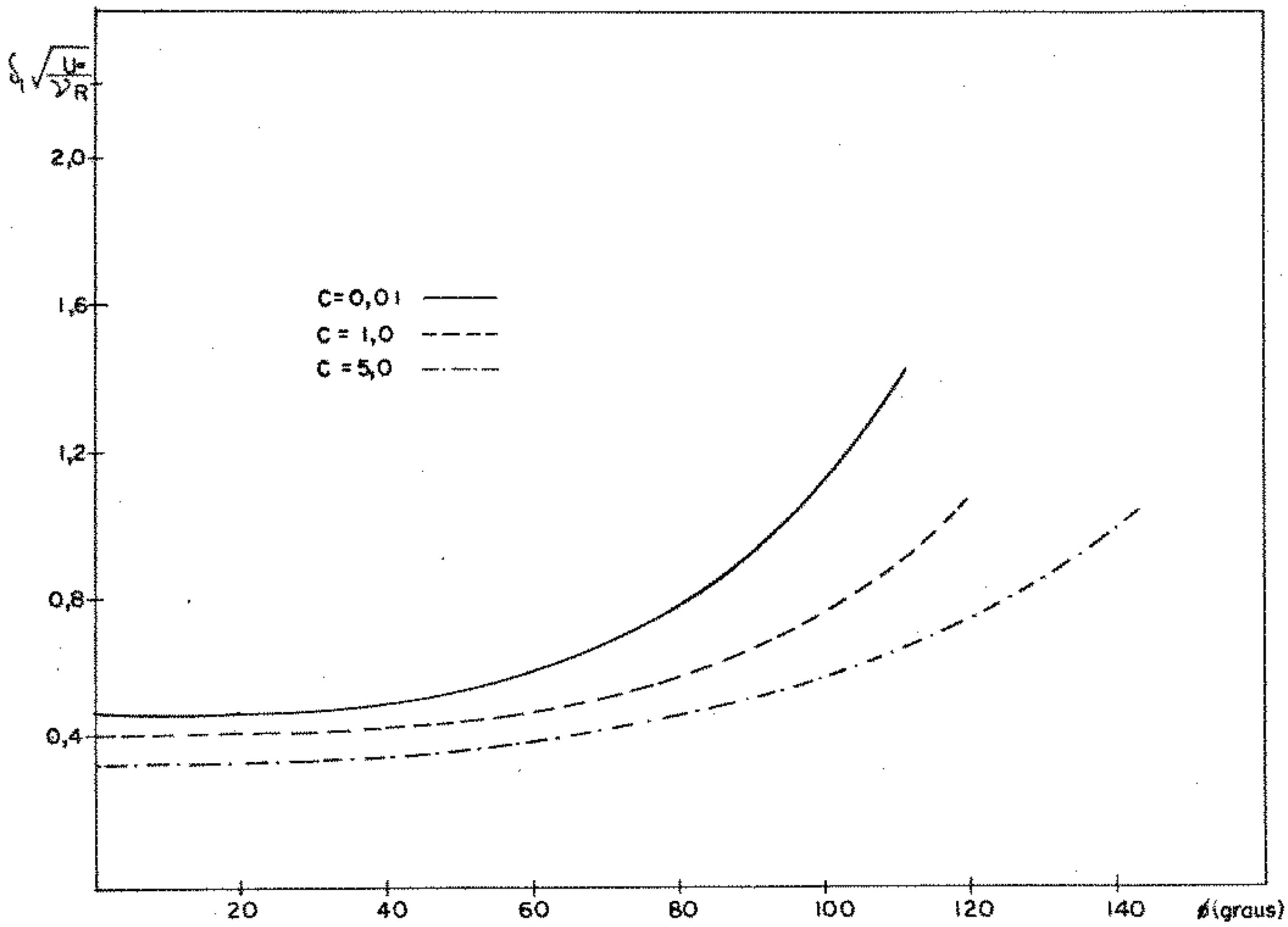

Fig. 10 - Espessura de Deslocamento.

Devido a dificuldade da resolução analítica, a equação (4.3.2) foi resolvida numericamente substituindo-se, para um ângulo $\phi = \frac{x}{R}$, os valores dos f_1' os quais eram tomados da tabelas (1) a (5) em função da variável admensional "η". A área formada sob a curva resultante representa portanto o valor de "δ_1" para esse ângulo. Repetindo-se o procedimento para vários ângulos obteve-se os valores de "δ_1" para todo o contorno do cilindro enquanto esta camada se mantém. A figura (10) mostra a variação da espessura de deslocamento "δ_1" em função do ângulo ϕ, para tres meios com distintas permeabilidades. Como se poderia esperar, a espessura de deslocamento possui um comportamento semelhante ao da camada limite, ou seja, tornando-se menos espessa e mais longa com a diminuição da permeabilidade do meio.

4.4 - Espessura de Momento

A perda de momento na camada limite, como consequência do atrito, que se propaga na camada limite, comparado com o correspondente fluxo uniforme, é $\rho \int_{y=0}^{\infty} u(U(x) - u)dy$, consequentemente a perda de momento pode ser definida por

$$\rho U^2(x)\delta_2 = \rho \int_{y=0}^{\infty} u(U(x) - u)dy$$

ou

$$\delta_2 = \int_{y=0}^{\infty} \frac{u}{U(x)} \left(1 - \frac{u}{U(x)}\right) dy \qquad (4.4.1)$$

com o

$$dy = d\eta \sqrt{\frac{\nu R}{2U_o}} \; ; \qquad (2,22.a)$$

e

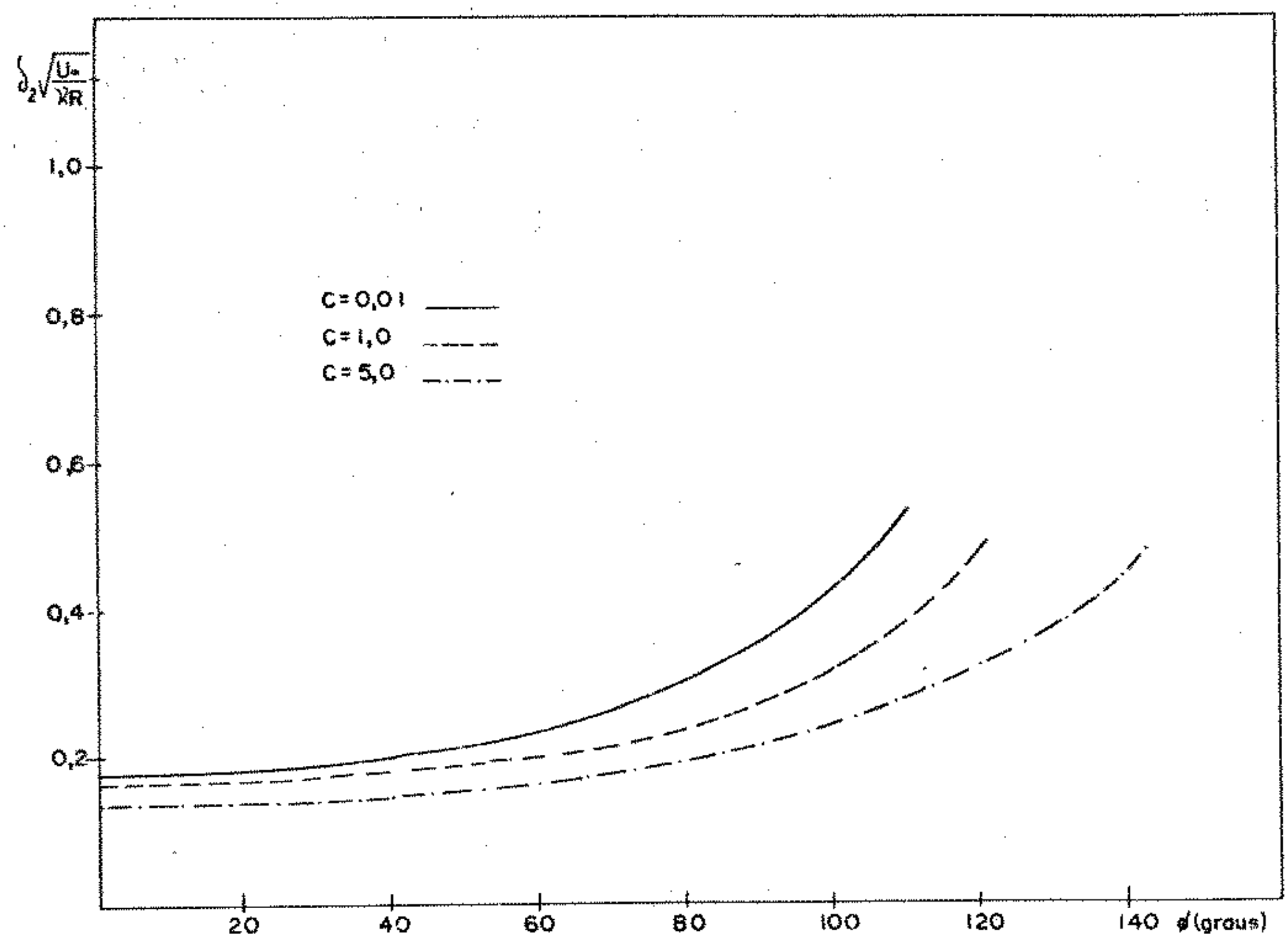

Fig. 11 - Espessura de Momento.

$$\frac{u}{U(x)} = \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{x}{R}} \{ \frac{x}{R} f_1' - \frac{4}{3!}(\frac{x}{R})^3 f_3' + \frac{6}{5!}(\frac{x}{R})^5 f_5' - \frac{8}{7!}(\frac{x}{R})^7 f_7' + \frac{10}{9!}(\frac{x}{R})^9 f_9' ... \} \quad (4.1.2)$$

teremos

$$\delta_2 = \sqrt{\frac{R}{2U_o}} \int_{\eta=0}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{x}{R}} \{ \frac{x}{R} f_1' - \frac{4}{3!}(\frac{x}{R})^3 + \frac{6}{5!}(\frac{x}{R})^5 f_5' ... \}] . [1 - \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{x}{R}} \{ \frac{x}{R} f_1' -$$

$$- \frac{4}{3!}(\frac{x}{R})^3 f_3' + \frac{6}{5!}(\frac{x}{R})^5 f_5' ... \}] d\eta \quad (4.4.2)$$

Esta equação foi também resolvida numericamente e de forma semelhante à resolução dada a δ_1, os resultados são mostrados' na figura (11) para tres diferentes valores da permeabilidade "k" do meio.

4.5 - Tensão de cisalhamento e ponto de separação

A tensão de cisalhamento local é dado por

$$\sigma_p = \mu(\frac{\partial u}{\partial y})_o \quad (4.5.1)$$

onde μ é a viscosidade absoluta do fluido e o subscrito 0 (zero) indica o valor na parede, isto é, para $y = 0$.

A relação $(\frac{\partial u}{\partial y})$ é obtido da equação (2.26), teremos então

$$\sigma_p = \mu(\frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y})_o$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \eta} \times \frac{\partial \eta}{\partial y} = \sqrt{\frac{u_1}{\nu}} \{ u_1 x f_1'' + 4u_3 x^3 f_3'' + 6\, u_5 x^5 f_5'' + 8\, u_7 x^7 f_7'' + 10\, u_9 x^9 f_9'' + \ldots \}$$

(2,26)

Substituindo na equação (2,26) acima os valores dos u_i pelos seus respectivos valores dados através das relações (2,19), teremos após substituir a equação (2,26) na equação (4.5.2) e feitos os devidos arranjos a seguinte equação para a tensão de cisalhamento admensional.

$$\frac{\sigma_p}{\frac{1}{2}.\rho.U_o^2} \sqrt{\frac{2\ UoR}{\nu}} = 8\{ \frac{x}{R} f_1''(0) - \frac{4}{3!}(\frac{x}{R})^3 f_3''(0) + \frac{6}{5!}(\frac{x}{R})^5 f_5''(0) -$$

$$- \frac{8}{7!}(\frac{x}{R})^7 f_7''(0) + \frac{10}{9!}(\frac{x}{R})^9 f_9''(0) \ \ldots \} \qquad (4.5.3)$$

A figura (12) apresenta a variação da tensão de cisalhamento ao longo do contorno do cilindro. Os valores dos coeficientes f_i'' são tomados das tabelas (1) a (5). O gráfico mostra a variação da tensão de cisalhamento para tres diferentes valores da permeabilidade "k", a influência da variação dessa permeabilidade é notável. A diminuição da permeabilidade provoca um substancial aumento da tensão de cisalhamento, este crescimento é tão mais rápido e alcança cada vez maiores valores à medida que se diminui à permeabilidade do meio. Note-se ainda que o valor máximo da tensão de cisalhamento ocorre em um ponto cada vez mais distante do ponto de estagnação a medida que a permeabilidade do meio diminui. A tensão de cisalhamento cresce ao longo do contorno do corpo enquanto o fluxo se mantém acelerado e diminui assim que o fluxo torna-se retardado.

O f da camada limite está intimamen
te ligada à são na camada limite [9]. A teo
ria do fluxo e a distribuição de pressão ao
longo do con o possui duas fases distintas: a
parte fronta ro mostra uma distribuição de
pressão decr arte posterior do cilindro (90^o
-180^o) apres o de pressão crescente. Isto de-
ve-se ao fat ontal do cilindro o fluxo é ace-
lerado enqua or este é retardado. Para o caso
dos fluidos o da pressão ao redor do cilin-
dro depende De qualquer maneira a teoria do
fluido perfe lizadas experimentalmente apre-
sentam uma b arte anterior do cilindro, o que
não ocorre n de a teoria e a prática apresen-
tam uma lige

A s licada pelo fato de que as parti
culas fluida ao atravessarem a parte anterior
do cilindro, atrito, sofrem uma acentuada
perda de ene uela que lhes resta é insuficien
te para atra rior do cilindro e sendo esta
uma região d as partículas não conseguem pe-
netrar nessa arrastadas pela distribuição de
pressão de c osição do ponto de separação po-
de ser encon ndição de que a tensão de cisa-
lhamento dev al. Tomemos portanto novamente a
equação (4.5 r os valores das tabelas (1) a
(5) e iguala encontrado. Teremos portanto:

para c

$$6{,}982\left(\frac{x}{R}\right) - \quad - 0{,}0189\left(\frac{x}{R}\right)^7 + 0{,}000039\left(\frac{x}{R}\right)^9 = 0$$

fazendo $\left(\frac{x}{R}\right)^2$

$$6{,}982 - 2{,}72 \quad _\delta \quad 0{,}0189\, x_\delta^3 + 0{,}000039\, x_\delta^4 = 0$$

Resolvendo o polinômio acima, encontramos

$X_\delta = 3{,}6992$; o que corresponde a um ponto de separação localizado em:

$$\frac{x}{R} = \phi = 110{,}2^o$$

Analogamente, teremos para os outros dois valores do parâmetro de permeabilidade c = 1,0 e c = 5,0, os pontos de descolamento situados ã 120,18° a 143,8° respectivamente. Esses pontos estão também representados nas figuras (5) ; (6) e (7) que representam as distribuições de velocidade para os meios de diferentes permeabilidades.

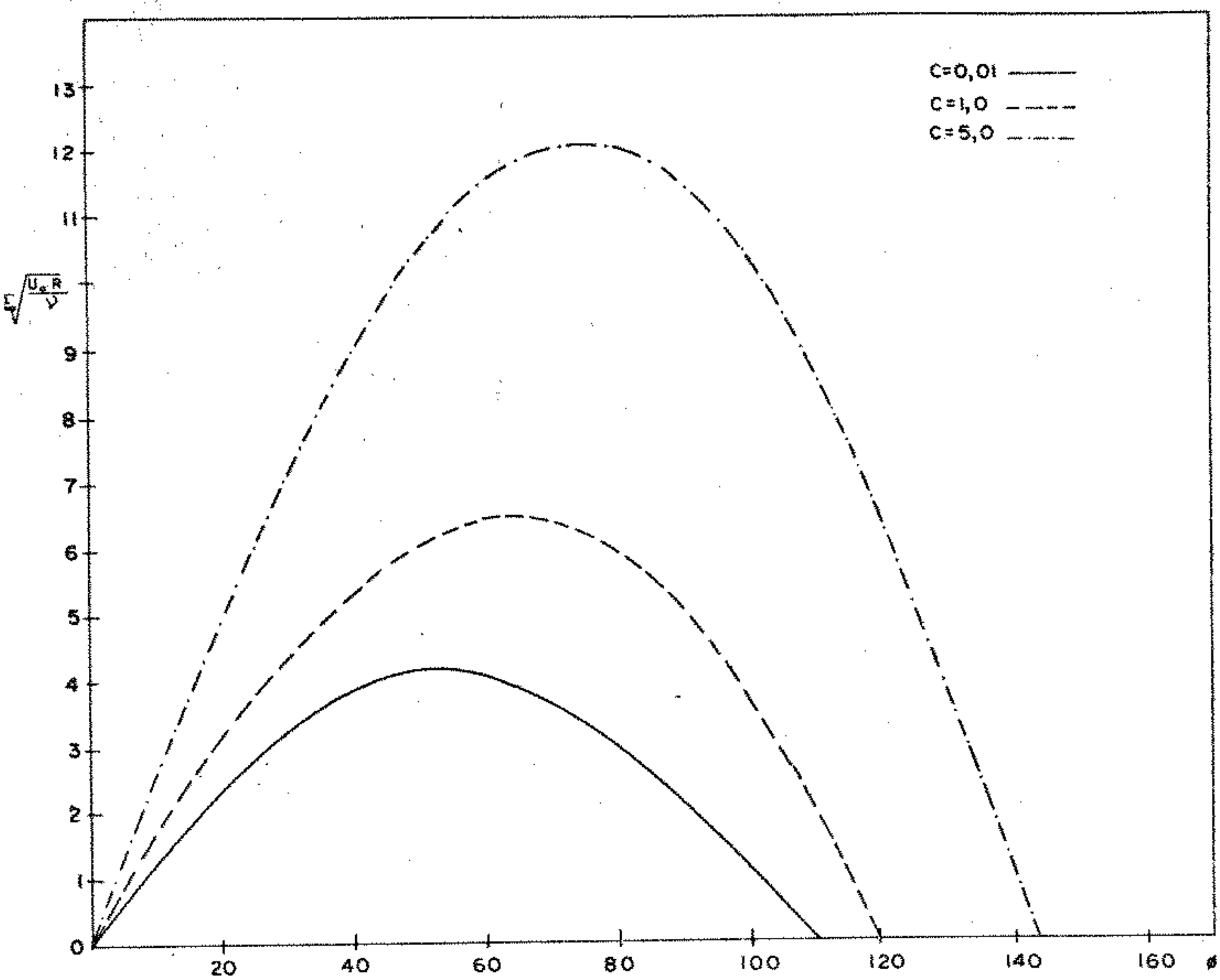

Fig. 12 - Tensão de cisalhamento ao longo do contorno do cilindro.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES

Este estudo apresenta a influência da variação da permeabilidade do meio no escoamento sobre um cilindro no meio poroso.

A solução foi obtida através da Lei de Darcy Generalizada e da Equação de continuidade, transformadas em um sistema de equações diferenciais ordinárias através de uma transformação de similaridade e resolvido numericamente.

São apresentadas resultados em forma de gráficos para a velocidade na direção do escoamento, para a espessura da camada limite, espessura de deslocamento, espessura de momento, tensão de cisalhamento e ponto de separação.

Dos resultados obtidos verificou-se que a variação de permeabilidade de meio provoca substanciais alterações nas características do escoamento. Notou-se que a diminuição da permeabilidade do meio provoca: a) Um ligeiro aumento da velocidade longitudinal próximo ao contorno do corpo, entretanto a variação dessa velocidade é bem pequena; b) A camada limite tornou-se mais delgada e mais longa, o mesmo acontecendo com as espessuras de deslocamento e momento; c) A tensão de cisalhamento alcança maiores valores; d) O ponto de separação ocorre a uma distância cada vez maior do ponto de estagnação anterior do cilindro.

NOMENCLATURA

$c = \frac{\nu}{u_1 k}$ parâmetro de permeabilidade

f - função admensional de velocidade

k - permeabilidade do meio poroso

k' - cte

L - comprimento de referência

P - Pressão

P_1 - perda de pressão através do meio poroso

p - ponto de estagnação

R - raio

R_e - número de Reynolds

t - tempo

$U(x)$ - velocidade do fluxo fora da camada limite

U_o - velocidade longitudinal de referência

u_i - constante

u - velocidade longitudinal dentro da camada limite

V - velocidade normal de referência

v - velocidade transversal dentro da camada limite

x - distância longitudinal à parede

y - distância normal à parede

LETRAS GREGAS

δ - espessura da camada limite

δ_1 - espessura de deslocamento

δ_2 - espessura de momento

$\eta = y\sqrt{\frac{u_1}{\nu}}$ variável admensional

μ - viscosidade absoluta

ν - viscosidade cinemática

$\phi = \frac{x}{R}$ - ângulo

ρ - densidade

σ - tensão de cisalhamento

ψ - função de corrente

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

(1) - SCHEIDERGGER, A. E. The fhysics of flow trough Porous Media, University of Toronto Press, Third edition, 1974

(2) - CHAWLA, S. S. and SINGH, S., Oscilatory Flow Past a Porous Bed. ACTA Mechanica 34, 205 - 213 (1979)

(3) - BRINKMAN, H.C., Drag Theories of Permeability, in: The Physics of Flow Trough Porous Media (Scheidegger, A.E.), p. 145. University of Toronto Press. 1974

(4) - DEV SARMA, B.K., Flow in Horizontal Circular Cylinder Bounded by a Porous Medium. ACTA Mechanica 34, 251-255 (1979)

(5) - NARASIMHACHARYULU, V. and RAMACHARYULU, N. P., Steady Flow Through a porous region contained between two cylinders. Journal of Indian Institute of Science. 60, Nº 2, 37-42 (february, 1978)

(6) - ISMAIL, K. A. R. and LIU, C. Y., Falling Film Along a vertical Porous Wall. DEM-FEC-UNICAMP

(7) - NARASIMHACHARYULY, V. and RAMACHARYULU, N. P., Steady Flow in a region between two slowly rotating sphers. Journal of Indian Institute of Science. 60, 247-252 (february, 1978)

(8) - YAMAMOTO, K. and YOSHIDA, Z., Flow through a Porous Wall with Convective Acceleration. Journal of the Physical

Society of Japan, vol. 37, Nº 3, 774-779 (september , 1974)

(9) - SCHLICHTING, H., Boundary Layer Theory, McGraw-Hill, sixth edition, 1968

(10)- KOPCHENOVA, N. V. and MORON, I.A., Computational Mathemáti cs, Mir Publishers, Moscou, 1975

A P E N D I C E

```
C       PARTE A

        PROGRAM EDLGO
C       ============

C       DEFINICAO DAS VARIAVEIS

        COMMON /CONST/ XCTES(12)
        COMMON /CTR/ NEQ,CTE
        REAL*8 X(0/4),Y(0/4),Z(0/4),W(0/4),H,CTE,LINF,LISUP,Y2BOM
       1,INCR,FATOR,BOM
        REAL*8 NOME,DEV,NOMANT
        INTEGER N,L,J,I,B(10),NEW,NEQOUT,MODO,IOUT
        LOGICAL GERA

C       PARTE B

C       INICIALIZACAO DOS PARAMETROS DE CADA EQUACAO, BEM COMO ABERTU-
C       RA DE ARQUIVOS.

10      MODO='O'
        TYPE 20
20      FORMAT(10X'*UNIDADE DE SAIDA  #>> '$)
        READ(5,30)DEV
30      FORMAT(A10)
        IF(DEV.EQ.'TTY'.OR.DEV.EQ.'DSK'.OR.DEV.EQ.'LPT')  GO TO 50
        TYPE 40,DEV
40      FORMAT(//10X'['A3'] UNIDADE NAO DISPONIVEL, PROVAVELMENTE DIGIT
       1ADA ERRADA.'/10X'ATENCAO, ESCREVA:'/10X'"TTY" PARA SAIDA NO TER
       2MINAL.'/10X'"DSK" PARA CRIACAO DE ARQUIVO P/ ARMAZENAR DADOS.'/
       310X'"LPT" PARA SAIDA DIRETA NA IMPRESSORA.'///)
        GO TO 10
50      IF(DEV.NE.'DSK')  GO TO 160
60      TYPE 70
70      FORMAT(10X,'*FINALIDADE DO ARQUIVO (INPUT/OUTPUT) #>> '$)
        READ(5,80)MODO
80      FORMAT(A1)
        IF(MODO.EQ.'I'.OR.MODO.EQ.'O')  GO TO 100
        TYPE 90,MODO
90      FORMAT(//10X,'COMANDO ['A1'] INVALIDO. ATENCAO, ESCREVA:'/10X
       1 '"OUTPUT" OU "O" PARA QUE O ARQUIVO SEJA DE SAIDA.'/10X
       2 '"INPUT " OU "I" PARA QUE O ARQUIVO SEJA DE ENTRADA'/25X' PARA
       3 UMA PROXIMA EQUACAO.'///)
        GO TO 60
100     TYPE  110
110     FORMAT(10X,'*ARQUIVO DE SAIDA?  #>> ',$)
        READ(5,30)NOME
        DECODE(10,120,NOME)B
120     FORMAT(10A1)
        DO 130 I=2,7
        IF(B(I).EQ.'.')  GO TO 140
130     CONTINUE
140     DO 150 L=I,10
150     B(L)=' '
        B(7)='.' ; B(8)='S' ; B(9)='O'  ; B(10)='L'
        ENCODE(10,120,NOME)B
160     OPEN(UNIT=20,DEVICE=DEV,FILE=NOME)
170     TYPE 180
180     FORMAT(10X,'*NUMERO DA EQUACAO DIFERENCIAL #>> '$)
```

```
      READ(5,190)NEQ
190   FORMAT(I)
      IF(NEQ.GT.0.AND.NEQ.LE.5)  GO TO 210
      TYPE 200,NEQ
200   FORMAT(//10X'A EQUACAO DE NUMERO 'I1' NAO ESTA'' IMPLEMENTADA.'/
     110X'ESTAO IMPLEMENTADAS AS EQUACOES DE 1 A 5.'/10X'REESCREVA O
     2 NUMERO DA EQUACAO CORRETA'///)
      GO TO 170
210   NEQOUT=NEQ*2-1
      IF(NEQ.EQ.1)GO TO 230
      TYPE 220
220   FORMAT(10X,'*ARQUIVO ANTERIOR  #>> '$)
      READ(5,30)NOMANT
      OPEN(UNIT=21,DEVICE='DSK',FILE=NOMANT)
230   TYPE 240
240   FORMAT(10X,'*VALOR DA CONSTANTE  #>> '$)
      READ(5,250)CTE
250   FORMAT(D)
260   TYPE 270,NEQOUT
270   FORMAT(10X,'*PARAMETRO ALEATORIO.  F'I1''''''(0)= '$)
      READ(5,250,ERR=280)H(0)
      GO TO 450

C     PARTE C

C     GERADOR AUTOMATICO

280   READ(5,290)B(1)
290   FORMAT(A5)
      IF(B(1).EQ.'GERE')GO TO 310
      TYPE 300,B(1)
300   FORMAT(10X'('A5') COMANDO INVALIDO.'/10X'ATENCAO, ESCREVA O VALO
     1R DO PARAMETRO ALEATORIO OU '/10X'A PALAVRA "GERE" QUE LIGARA''
     2O GERADOR AUTOMATICO.'///)
      GO TO 260
310   GERA=.TRUE.
      IF(NEQ.EQ.1)FATOR=1.D0
      IF(NEQ.EQ.2)FATOR=0.25D0
      IF(NEQ.EQ.3)FATOR=0.1666666666666666D0
      IF(NEQ.EQ.4)FATOR=0.125D0
      IF(NEQ.EQ.5)FATOR=0.1D0
      TYPE 320
320   FORMAT(/10X26('*')/10X'*** GERADOR AUTOMATICO ***'/10X'***'5X
     1'RASTREADOR' 5X'***'/10X26('*'))
330   TYPE 340
340   FORMAT(/10X'*INTERVALO DE RASTREAMENTO'//11X'LIMITE INFERIOR #>>
     1' $)
      READ(5,250)LINF
      TYPE 350
350   FORMAT(11X'LIMITE SUPERIOR #>> '$)
      READ(5,250)LISUP
      IF(LINF.GT.LISUP)GO TO 370
      TYPE 360,LINF,LISUP
360   FORMAT(//10X'LIMITE INFERIOR MAIOR OU IGUAL AO LIMITE SUPERIOR '
     1//13X'LINF= 'F11.6,5X'LISUP= 'F11.6//10X'REESCREVA OS VALO
     2RES CORRETOS'///)
      GO TO 330
370   TYPE 380
380   FORMAT(10X'*INCREMENTO INICIAL #>> '$)
```

```
      READ(5,250)INCR
      IF(INCR.GE.1.D-9)TYPE 390
390   FORMAT(10X29('*')/10X'*** RASTREAMENTO INICIADO ***'/10X'***'6X
     1'A G U A R D E     ***'/10X29('*')//)
      IF(INCR.GE.1.D-9)GO TO 420
      TYPE 400,INCR
400   FORMAT(//10X'INCREMENTO "'D7.1'" INVALIDO. POSSIBILIDADE DE LOOP
     1ING.'/10X'INTERVALO PARA O INCREMENTO 10,1D-9].'/10X'REESCREVA
     2 O VALOR CORRETO'///)
      GO TO 370
410   LINF=LINF+INCR
      IF(LINF.LE.LISUP)GO TO 420
      IF(INCR.LT.1.D-9)GO TO 430
      LISUP=BOM+INCR
      LINF=BOM-INCR
      INCR=INCR/1.001
      BOM=LINF
420   W(0)=LINF
      GO TO 450
430   WRITE(20,440)MEQOUT,BOM
440   FORMAT(10X'*** RASTREAMENTO COMPLETADO ***'//10X'*** MELHOR VALO
     1R ENCONTRADO PARA F'I1''''''(0)= 'D17.10//)
      GERA=.FALSE.
      W(0)=BOM

C     PARTE D

450   X(0)=0.D0 ; Y(0)=0.D0 ; Z(0)=0.D0
      H=0.01
      N=501
      IOUT=20

C     PARTE E

      L=1
      IF(.NOT.GERA.AND.MODO.EQ.'O')WRITE(20,460)CTE,H,MEQOUT,MEQOUT,
     1MEQOUT
460   FORMAT(//30X'CONSTANTE :  'F4.2/9X'VALOR INTERNO DO INCREMENTO(
     1H) :   'D7.1//' ETA'11X'F'I1,20X'F'I1''''18X'F'I1''''''/' ==='
     23(7X20('=')))
      IF(.NOT.GERA.AND.MODO.EQ.'O')WRITE(20,470)X(0),Y(0),Z(0),W(0)
470   FORMAT(1XF3.1,3(2XD20.14))
      IF(.NOT.GERA.AND.MODO.EQ.'I')WRITE(20,480)Y(0),Z(0),W(0)
480   FORMAT(1D)
      DO 490 I=0,2
      IF(NEQ.NE.1)READ(21,480)(XCTES(J),J=1,(NEQ+(NEQ*2- 1)))
      CALL  RGKTIV(X(I),Y(I),Z(I),W(I),Y(I+1),Z(I+1),W(I+1),H)
      X(I+1)=X(I)+H
      IF(.NOT.GERA.AND.MODO.EQ.'O'.EQ.0.AND.I.EQ.IOUT)WRITE(20,470)X(I+
     11),Y(I+1),Z(I+1),W(I+1)
      IF(IOUT.EQ.I)IOUT=IOUT+20
      IF(.NOT.GERA.AND.MODO.EQ.'I')WRITE(20,480)Y(I+1),Z(I+1),W(I+1),
     1W(I+1)
490   CONTINUE
      X(4)=X(3)+H
      N=N-4
      DO  510 I=1,N
      IF(NEQ.NE.1)READ(21,480)(XCTES(J),J=1,(NEQ+(NEQ*2- 1)))
      CALL MILRIC(X,Y,Z,W,H)
      IF(.NOT.GERA.AND.MODO.EQ.'O'.AND.I.EQ.IOUT)WRITE(20,470)X(4),Y(4),
```

```
      1Z(4),W(4)
      IF(.NOT.GERA.AND.MODO.EQ.'I')WRITE(20,400)Y(4),Z(4),W(4)

      IF(I.EQ.100.AND.DABS(FATOR-Z(4)).LT.DABS(FATOR-Y2BOM))BOM=LINF
      IF(I.EQ.400.AND.LINF.EQ.BOM)Y2BOM=Z(4)

D     IF(GERA.AND.I.EQ.400)TYPE 9999,LISUP,LINF,INCR,BOM,Y2BOM,Z(4),
D    1FATOR
D9999 FORMAT(//' ***>> SAIDA DO PREDITOR CORRETOR'//'  LIMITE SUPERIOR
D    1:'F15.10/'  LIMITE INFERIOR:'F15.10/'  INCREMENTO'5X':'F15.10/
D    2'  VALOR DE BOM  :'F15.10/'  VALOR DE Y2BOM :'F15.10/'  VALOR
D    3 DE Z(4)  :'F15.10/'  VALOR DE FATOR :'F15.10)
      IF(IOUT.EQ.I)IOUT=IOUT+20
      DO  500 J=0,3
      X(J)=X(J+1)  ;  Y(J)=Y(J+1) ; Z(J)=Z(J+1)
500   CONTINUE
510   X(4)=X(4)+H
      IF(GERA)GO TO 410

C     PARTE F

C     ROTINAS DE SAIDA DO PROGRAMA (FIM DE EXECUCAO)

      TYPE 520
520   FORMAT(//10X'*** EXECUCAO COMPLETADA'///10X'*ROTINA DE SAIDA #>>
     1 '$)
530   READ(5,290)R(1)
      IF(R(1).EQ.'RA')GO TO 10
      IF(R(1).EQ.'RP')GO TO 260
      IF(R(1).EQ.'EX')GO TO 550
      TYPE 540,R(1)
540   FORMAT(//10X'*** 'A5' ***COMANDO INVALIDO'/10X'*ATENCAO, ESCREVA
     1:' /11X'"RP" PARA REPETIR MUDANDO APENAS O PARAMETRO ALEATORIO'
     1 /11X'"RA" PARA REPETIR A EXECUCAO DESDE O INICIO'/11X'"EX" PAR
     3A TERMINAR A EXECUCAO'///10X'* ROTINA DE SAIDA #>> '$)
      GO TO 530
550   IF(DEV.EQ.'DSK')TYPE 560,NOME
560   FORMAT(/10X'*** ARQUIVO DE SAIDA  :  'A10//)
      CLOSE(UNIT=20)
      STOP 'EXECUCAO CONCLUIDA POR MEIOS NORMAIS'
      END
      SUBROUTINE RGKTIV(X0,Y0,Z0,W0,Y1,Z1,W1,H)
C     ==========================================

      REAL*8 X0,Y0,Z0,W0,Y1,Z1,W1,K11,K12,K13,K21,K22,K23,K31,K32,K33
     1,K41,K42,K43,H

      K11=G(X0,Y0,Z0,W0)
      K12=G2(X0,Y0,Z0,W0)
      K13=F(X0,Y0,Z0,W0)
      K21=G(X0+H/2.D00,Y0+H*K11/2.D0,Z0+H*K12/2.D0,W0+H*K13/2.D0)
      K22=G2(X0+H/2.D00,Y0+H*K11/2.D0,Z0+H*K12/2.D0,W0+H*K13/2.D0)
      K23=F(X0+H/2.D00,Y0+H*K11/2.D0,Z0+H*K12/2.D0,W0+H*K13/2.D0)
      K31=G(X0+H/2.D00,Y0+H*K21/2.D0,Z0+H*K22/2.D0,W0+H*K23/2.D0)
      K32=G2(X0+H/2.D00,Y0+H*K21/2.D0,Z0+H*K22/2.D0,W0+H*K23/2.D0)
      K33=F(X0+H/2.D00,Y0+H*K21/2.D0,Z0+H*K22/2.D0,W0+H*K23/2.D0)
      K41=G(X0+H,Y0+H*K31/2.D0,Z0+H*K32/2.D0,W0+H*K33/2.D0)
      K42=G2(X0+H,Y0+H*K31/2.D0,Z0+H*K32/2.D0,W0+H*K33/2.D0)
      K43=F(X0+H,Y0+H*K31/2.D0,Z0+H*K32/2.D0,W0+H*K33/2.D0)
```

```
      Y1=Y0+H/6.D0*(K11+2.D0*K21+2.D0*K31+K41)
      Z1=Z0+(H/6.D0)*(K12+2.D0*K22+2.D0*K32+K42)
      W1=W0+(H/6.D0)*(K13+2.D0*K23+2.D0*K33+K43)

      RETURN
      END
      SUBROUTINE MILRIC(X,Y,Z,W,H)
C     ==========================

      REAL*8 X(0/4),Y(0/4),Z(0/4),W(0/4),H

      INTEGER M

      M=3

C     PARIE  A

      Y(M+1)=Y(M-3)+4.D0/3.D0*H*(2.D0*G(X(M-2),Y(M-2),Z(M-2),W(M-2))-
     1 G(X(M-1),Y(M-1),Z(M-1),W(M-1))+2.D0*G(X(M),Y(M),Z(M),W(M)))

      Z(M+1)=Z(M-3)+4.D0/3.D0*H*(2.D0*G2(X(M-2),Y(M-2),Z(M-2),W(M-2))-
     1 G2(X(M-1),Y(M-1),Z(M-1),W(M-1))+2.D0*G2(X(M),Y(M),Z(M),W(M)))

      W(M+1)=W(M-3)+4.D0/3.D0*H*(2.D0*F(X(M-2),Y(M-2),Z(M-2),W(M-2))-
     1 F(X(M-1),Y(M-1),Z(M-1),W(M-1))+2.D0*F(X(M),Y(M),Z(M),W(M)))


C     PARIE  B

      Y(M+1)=Y(M-1)+H/3.D0*(G(X(M-1),Y(M-1),Z(M-1),W(M-1))+4.D0*G(X(M)
     1 ,Y(M), Z(M),W(M))+G(X(M+1),Y(M+1),Z(M+1),W(M+1)))

      Z(M+1)=Z(M-1)+H/3.D0*(G2(X(M-1),Y(M-1),Z(M-1),W(M-1))+4.D0*
     1 G2(X(M),Y(M),Z(M),W(M))+G2(X(M+1),Y(M+1),Z(M+1),W(M+1)))

      W(M+1)=W(M-1)+H/3.D0*(F(X(M-1),Y(M-1),Z(M-1),W(M-1))+4.D0*F(X(M)
     1 ,Y(M), Z(M),W(M))+F(X(M+1),Y(M+1),Z(M+1),W(M+1)))

      RETURN
      END
      REAL*8 FUNCTION F(X,Y,Z,W)
C     ========================

      COMMON /CONST/ XCTES(12)
      COMMON /CTR/ NEQ,CTE

      REAL*8 X,Y,Z,W,CTE

      IF(NEQ.EQ.1)F=-Y*W+Z*(Z+CTE)-1-CTE

      IF(NEQ.EQ.2)F=4*XCTES(2)*Z-XCTES(1)*W-3*Y*XCTES(3) -CTE*(.25-Z)-1

      IF(NEQ.EQ.3)F=6*XCTES(2)*Z-XCTES(1)*W-5*Y*XCTES(3) - 1-CTE*
     1(.06666667-Z)-26.666667*(XCTES(5)**2-XCTES(4)* XCTES(6)+.0625)

      IF(NEQ.EQ.4)F=8*XCTES(2)*Z-XCTES(1)*W+7*Y*XCTES(3) -1-CTE*(.125-
     1Z)-13.5*(16*XCTES(5)*XCTES(8)-6*XCTES(4)*XCTES(9)-10*XCTES(7)*
     2XCTES(6)+1.5)
```

```
      IF(NEQ.EQ.5)F=10*XCTES(2)*Z-9*Y*XCTES(3)-1-CTE*(0.1 -Z)-12.*1.6*
     1(20.*XCTES(5)*XCTES(11)-6*XCTES(4)*XCTES(12)-14*XCTES(10)*
     2XCTES(6)+.525)-453.6*(XCTES(6)**2 +XCTES(7)* XCTES(9)-.02777778)

      RETURN
      END
      REAL*8FUNCTION G(X,Y,Z,W)
C     ========================

      REAL*8 X,Y,Z,W

      G=Z

      RETURN
      END
      REAL*8 FUNCTION G2(X,Y,Z,W)
C     ==========================

      REAL*8 X,Y,Z,W

      G2=W

      RETURN
      END
```