ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR ALEX PEREIRA
DO PRADO E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 30 / 08 / 2002.
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

# Investigação Teórica e Experimental de uma Alavanca de Transmissão Mecânica Considerando Efeitos Não-Lineares

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

Autor: **Alex Pereira do Prado**

Orientador: **Prof. Dr. Janito Vaqueiro Ferreira**

Co-Orientador: **Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa**

XX-2002

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

# Investigação Teórica e Experimental de uma Alavanca de Transmissão Mecânica Considerando Efeitos Não-Lineares

Autor: **Alex Pereira do Prado**
Orientador: **Prof. Dr. Janito Vaqueiro Ferreira**
Co-Orientador: **Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa**

Curso: Engenharia Mecânica
Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Dissertação de mestrado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2002
S.P. - Brasil

UNIDADE BE
Nº CHAMADA T/UNICAMP
P882i
V EX
TOMBO BC/ 53206
PROC. 124/03
C D X
PREÇO R$11,00
DATA 17/04/03
Nº CPD

CM00182165-0

BIB ID 287883

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

P882i

Prado, Alex Pereira do
Investigação teórica e experimental de uma alavanca de transmissão mecânica considerando efeitos não-lineares / Alex Pereira do Prado.--Campinas, SP: [s.n.], 2002.

Orientadores: Janito Vaqueiro Ferreira e Alberto Luiz Serpa.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Mecânica não-linear. 2. Choque (Mecânica). 3. Testes de vibração. 4. Modelos mecânicos. I. Ferreira, Janito Vaqueiro. II. Serpa, Alberto Luiz. III. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. IV. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

# Investigação Teórica e Experimental de uma Alavanca de Transmissão Mecânica Considerando Efeitos Não-Lineares

Autor: **Alex Pereira do Prado**
Orientador: **Prof. Dr. Janito Vaqueiro Ferreira**
Co-Orientador: **Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa**

Janito Vaqueiro Ferreira
**Prof. Dr. Janito Vaqueiro Ferreira, Presidente**
DMC/FEM/UNICAMP

Pablo Siqueira
**Prof. Dr. Pablo Siqueira Meirelles**
DMC/FEM/UNICAMP

Maria Lúcia M. Duarte
**Profa. Dra. Maria Lúcia Machado Duarte**
DEMEC/UFMG

Campinas, 30 de Agosto de 2002.

M00a/382

# Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus avós José e Dirce.

*Não é tão importante ser sério. É importante ser sério nas coisas importantes.*

R. M. Hutchins

# Agradecimentos

Gostaria de agradecer às pessoas e instituições que colaboraram para o sucesso deste trabalho:

À CAPES pelo apoio financeiro para o desenvolvimento deste trabalho. Ao CENAPAD pela acolhida e enriquecimento profissional que me proporcionou. Ao Departamento de Mecânica Computacional da Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas por ter me recebido e dado condições para meu aperfeiçoamento profissional e elaboração desta dissertação de mestrado. Ao Departamento de Projeto Mecânico (FEM - UNICAMP) e ao Centro de Tecnologia da UNICAMP por terem cedido equipamentos imprescindíveis à realização da etapa experimental desta dissertação. À Divisão de Transmissões da EATON Ltda pela confecção da bancada de testes.

Agradeço a todos os colegas, professores e funcionários do DMC que de uma maneira ou outra tornaram possível a conclusão desta etapa de minha vida.

Agora, menos formal e mais emocional, agradeço as pessoas que estiveram mais próximas a mim no mestrado, e algumas também ao longo de minha vida:

Agradeço meus revisores e consultores, Pedro e Luiz, que após longas rinhas com a língua portuguesa, me auxiliaram a gerar o texto deste trabalho. Agradeço também aos meus consultores da área experimental, Belisário e Khaled, que me auxiliaram nos laboratórios do DMC com suas experiências. Ao prof. Éder pelos seus sóbrios conselhos e suporte ao Latex. Ao Paulo (coleguinha), por ter uma grande influência no meu trabalho, uma vez que seu

pioneirismo com o meu estimado orientador prof. Janito, nos levou a escrever esta dissertação.

Deixo registrado aqui meus agradecimentos ao meu orientador prof. Janito, um autêntico "ninja"da engenharia, que manteve-se sempre acessível e disposto a me auxiliar. Ao meu co-orientador prof. Serpa por sua ajuda nos trabalhos desenvolvidos.

Não poderia deixar de lembrar também do grande apoio que recebi de minha família, tanto o financeiro e o mais importante de todos, o apoio emocional. Agradeço aos meus pais José e Miriam, pelo amor e educação que me deram. Meu irmão Alan, por ser meu grande amigo. Minha namorada Darcília, por seu amor e carinho. Meus avós José e Dirce, por sempre torcerem por mim. Aos meus tios Otávio e Tamar, que sempre me ajudaram.

Agradeço a Deus pela minha vida e das pessoas a quem amo.

# Resumo

Prado, Alex Pereira do, *Investigação Teórica e Experimental de uma Alavanca de Transmissão Mecânica Considerando Efeitos Não-Lineares* . Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2002, 117 p. Dissertação (Mestrado).

Este trabalho apresenta uma investigação numérica e experimental de uma alavanca de transmissão mecânica considerando a presença de não-linearidades na estrutura. Na investigação experimental foram obtidas as curvas de resposta em freqüência não-lineares de primeira ordem da alavanca. As curvas experimentais foram obtidas com controle da amplitude da componente harmônica fundamental do sinal da força de excitação, usando a técnica de varredura em freqüência e o método de continuação *arc-length*. O programa de controle experimental foi validado primeiramente com simulações numéricas de modelos simplificados da alavanca de transmissão que consideravam efeitos não-lineares de atrito e folga. Os efeitos não-lineares, modelados por juntas, foram quantificados por funções descritivas que as linearizavam para definir funções de transferência que relacionaram as componentes fundamentais da entrada e da saída. Para que estes modelos simplificados se aproximassem cada vez mais do sistema físico, vários parâmetros do modelo foram determinados experimentalmente, inclusive os parâmetros do modelo de atrito empregado. Com os modelos simplificados da alavanca foram também obtidas as curvas simuladas de resposta em freqüência não-lineares de primeira ordem. Essas investigações mostraram a complexidade de modelar uma estrutura com características não-lineares e a necessidade de modelos mais completos. Já a investigação experimental demonstrou a potencialidade da aplicação do método de continuação *arc-length* no controle experimental aplicado à obtenção de curvas de resposta em freqüência não-lineares.

*Palavras-chaves:* Alavanca de Transmissão, Não-Linearidade, Resposta em Freqüência, Modelagem, Vibro-Impacto.

# Abstract

Prado, Alex Pereira do, *Theoretical and Experimental Investigation of a Mechanical Transmission Gearshift Lever Considering Nonlinear Effects* . Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2002, 117 p. Dissertação (Mestrado).

This work presents a numeric and experimental investigation of a gearshift lever of mechanical transmission considering the presence of nonlinearity in the structure. In the experimental investigation the first order nonlinear frequency response curves of the lever were obtained . The experimental curves were obtained by controlling the fundamental harmonic amplitude component of the excitation force signal, using the frequency sweeping technique and the arc-length continuation method. The program of experimental control was firstly validated with numeric simulations of simplified models of the gearshift lever, which considered nonlinear effects of friction and gap. The nonlinear effects, modeled by joints, were quantified by describing functions which linearized the joints to define transfer functions that related the fundamental components of the input and output. To make these simplified models more closely to the physical system, several parameters of the model were experimentally determined, including the parameters of the friction model adopted. With the simplified models of the lever the simulated curves of first order nonlinear frequency response were also obtained. These investigations showed the complexity of modeling a structure with nonlinear characteristics and the need of more complete models. The experimental investigation demonstrated the potentiality of the arc-length continuation method applied in the experimental control to obtain nonlinear frequency response curves.

*Key words:*

Gearshift Lever, Nonlinearity, Frequency Response, Modeling, Rattle.

# Sumário


**1 Introdução** 1

1.1 Objetivos e Estrutura do Trabalho . . . . . 3

**2 Revisão Bibliográfica e Fundamentação Teórica** 5

2.1 Modelagem de Estruturas Não-Lineares . . . . . 5

2.2 Modelos de Junta . . . . . 8

2.2.1 Juntas Lineares . . . . . 10

2.2.2 Juntas Não-Lineares . . . . . 11

2.3 Análise no Domínio da Freqüência . . . . . 16

2.3.1 Análise Harmônica Fundamental . . . . . 17

2.4 Funções Descritivas . . . . . 19

2.5 Método *Arc-Length* . . . . . 21

2.5.1 Teoria Básica de Solução . . . . . 22

2.5.2 Procedimento Preditor . . . . . 24

2.5.3 Procedimento Corretor . . . . . 26

2.5.4 Comprimento Automático do Raio . . . . . 30

2.5.5 Estimativa Inicial do Comprimento do Raio . . . . . 30

2.5.6 Resolvendo o Fator de Carregamento Complexo . . . . . 31

2.6 Equação de Impedância . . . . . 31

2.7 Resposta em Freqüência de Estruturas Não-Lineares . . . . . 32

2.8 Resposta em Freqüência de Primeira Ordem . . . . . 33

2.9 Resposta em Freqüência Não-Linear Usando o *Arc-Length* . . . . . 33

**3 Considerações Experimentais** **35**

3.1 Descrição da Bancada . . . . . 35

3.2 Técnicas de Excitação . . . . . 37

3.2.1 Excitação Senoidal . . . . . 37

3.2.2 Excitação por Impacto . . . . . 39

3.2.3 Discussão de Diferentes Técnicas de Excitação . . . . . 40

3.3 Considerações Práticas de Medidas das Propriedades das Respostas em Freqüência de Estruturas Não-lineares . . . . . 41

3.4 Determinação dos Parâmetros do Modelo de Atrito . . . . . 43

3.4.1 Modelo da Haste da Alavanca . . . . . 44

3.4.2 Montagem Experimental para Determinação dos Parâmetros do Modelo de Atrito . . . . . 45

3.4.3 Caracterização Experimental e Ajuste do Modelo de Atrito . . . . . 49

3.5 Determinação da Rigidez das Vigas Paralelas da Bancada . . . . . 58

3.6 Medidas de FRFs das Vigas Paralelas da Bancada e da Haste da Alavanca . 59

3.6.1 Montagem Experimental . . . . . 59

3.6.2 Medida de FRF para as Vigas Paralelas . . . . . 61

3.6.3 FRFs para a Haste da Alavanca . . . . . 62

3.7 Montagem Experimental e Medidas de Respostas em Freqüência Não-Lineares da Bancada . . . . . 64

3.7.1 Montagem Experimental . . . . . 64

3.7.2 Medidas de Respostas em Freqüência Não-Lineares da Bancada . . . 67

**4 Simulações Numéricas** **69**

4.1 Modelo de Um Grau de Liberdade - Folga . . . . . 70

4.2 Modelo de Um Grau de Liberdade - Rigidez Cúbica . . . . . 72

4.3 Modelos Simplificados da Alavanca de Transmissão Mecânica . . . . . 75

4.3.1 Modelo de Dois Graus de Liberdade - Haste Reta . . . . . 75

4.3.2 Modelo de Dois Graus de Liberdade - Alavanca Completa . . . . . 78

4.3.3 Modelo de Três Graus de Liberdade - Alavanca Completa . . . . . 81

**5 Discussões e Conclusões** 85

5.1 Propostas para Trabalhos Futuros . . . . . 88

**A Método de Newton Raphson** 89

# Lista de Figuras


2.1 Característica da rigidez linear . . . . . 10
2.2 Característica do amortecimento viscoso linear . . . . . 11
2.3 Característica da rigidez cúbica . . . . . 12
2.4 Característica da rigidez anti-simétrica linear por partes . . . . . 12
2.5 Característica da rigidez descentrada linear por partes com pré-carregamento 13
2.6 Característica de um elemento bilinear . . . . . 14
2.7 Macro e Microdeslizamento de Ren . . . . . 15
2.8 Microdeslizamento de Ren . . . . . 15
2.9 Fenômeno de *snap-back* e *snap-through* . . . . . 22
2.10 Trajetória da solução e curva de restrição . . . . . 24
2.11 Ilustração do preditor tangencial *foward-Euler* . . . . . 25

3.1 Conjunto da alavanca de transmissão mecânica . . . . . 35
3.2 Bancada e parafusos de fixação da torre da alavanca de transmissão . . . . . 36
3.3 Haste com rótula - componente da alavanca de transmissão mecânica . . . . 37
3.4 Modelo da haste da alavanca de transmissão considerando os efeitos de atrito 44
3.5 Haste reta com rótula . . . . . 46
3.6 Montagem experimental para medida da histerese . . . . . 47
3.7 Posicionamento dos sensores . . . . . 48
3.8 Visão geral da montagem experimental . . . . . 48
3.9 Controles experimentais . . . . . 50
3.10 Controle do canal da força = 4.1 $N$ . . . . . 51
3.11 Modelo ajustado - controle de força = 4.1 $N$ . . . . . 52

3.12 Parâmetros ajustados - $4,1\,N$ . . . . . 53
3.13 Parâmetros ajustados - $1,8 \times 10^{-4}\,m$ . . . . . 53
3.14 $K$ - controle da força . . . . . 54
3.15 $C_T$ - controle da força . . . . . 54
3.16 $K$ - controle do deslocamento . . . . . 54
3.17 $C_T$ - controle do deslocamento . . . . . 54
3.18 Ajuste de $K$ e $C_T - 2,0\,N$ . . . . . 56
3.19 Ajuste de $K$ e $C_T - 3,1\,N$ . . . . . 56
3.20 Ajuste de $K$ e $C_T - 4,1\,N$ . . . . . 57
3.21 Ajuste de $a$ e $b$ - $1,8 \times 10^{-4}\,m$ . . . . . 57
3.22 Montagem experimental para determinação da rigidez das vigas paralelas da bancada . . . . . 58
3.23 Rigidez estimada das vigas paralelas da bancada . . . . . 59
3.24 Montagem experimental para obtenção da FRF das vigas paralelas . . . . . 60
3.25 Montagem experimental para obtenção das FRFs da haste reta da alavanca 60
3.26 FRF das vigas paralelas da bancada . . . . . 61
3.27 Pontos para obtenção das FRFs da haste reta da alavanca . . . . . 62
3.28 FRFs da haste reta da alavanca de transmissão mecânica . . . . . 63
3.29 Montagem experimental para medidas das RFs não-lineares da bancada . . 64
3.30 Bancada instrumentada . . . . . 66
3.31 Alavanca de transmissão montada na bancada instrumentada . . . . . 66
3.32 Resposta em Freqüência da bancada - amplitude dB e fase . . . . . 68
3.33 Resposta em Freqüência da bancada - amplitude linear . . . . . 68

4.1 Modelo de um grau de liberdade - folga . . . . . 70
4.2 RFs do modelo de 1 gdl - folga . . . . . 71
4.3 RFs do modelo de 1 gdl - folga - representação em três dimensões . . . . . 72
4.4 Modelo de um grau de liberdade - rigidez cúbica . . . . . 73
4.5 RFs do modelo de 1 gdl - rigidez cúbica . . . . . 74
4.6 RFs do modelo de 1 gdl - rigidez cúbica - representação em três dimensões . 74

4.7 Modelo da alavanca de transmissão mecânica com a haste reta . . . . . 76
4.8 RFs do modelo da alavanca de transmissão mecânica com a haste reta . . . . 77
4.9 RFs do modelo da alavanca de transmissão mecânica com a haste reta - representação em três dimensões . . . . . 78
4.10 Modelo da alavanca de transmissão mecânica - 2 gdls . . . . . 79
4.11 RFs do modelo da alavanca de transmissão mecânica - 2 graus de liberdade . 80
4.12 Modelo da alavanca de transmissão mecânica - 3 gdls . . . . . 82
4.13 RFs do modelo da alavanca de transmissão mecânica - 3 graus de liberdade . 84
4.14 Detalhe das RFs do modelo da alavanca de transmissão mecânica - 3 graus de liberdade . . . . . 84

A.1 Interpretação geométrica do método de Newton-Raphson . . . . . 91

# Lista de Tabelas


3.1 Parâmetros da equação (3.1) . . . . . 45
3.2 Itens enumerados na montagem experimental . . . . . 47
3.3 Equipamentos utilizados para obtenção das FRFs . . . . . 59
3.4 Itens enumerados na montagem experimental . . . . . 65

4.1 Parâmetros do modelo de 1 gdl - folga . . . . . 71
4.2 Parâmetros do modelo de 1 gdl - rigidez cúbica . . . . . 73
4.3 Parâmetros do modelo - haste reta . . . . . 77
4.4 Parâmetros do modelo da alavanca de 2 gdls . . . . . 80
4.5 Parâmetros do modelo da alavanca - 3 gdls . . . . . 83

# Nomenclatura

## Letras Latinas

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a$ | - | equação de restrição (*arc-length*) | |
| $a$ | - | máximo deslocamento elástico (função descritiva) | |
| $b$ | - | diferença entre microdeslizamento e elementos bilineares | |
| $C, c$ | - | amortecimento viscoso | $[Ns/m]$ |
| $[C]$ | - | matriz de amortecimento viscoso | $[Ns/m]$ |
| $df$ | - | função descritiva | |
| $[D]$ | - | matriz de amortecimento estrutural | |
| $F, f$ | - | força | $[N]$ |
| $\{f\}$ | - | vetor de força de excitação externa | $[N]$ |
| $\boldsymbol{f}$ | - | força interna não-linear | $[N]$ |
| $\mathbf{f}_i$ | - | vetor de força interno | |
| $\mathbf{f}_e$ | - | vetor de força externo | |
| $\{\boldsymbol{f}\}$ | - | vetor de força não-linear | $[N]$ |
| $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ | - | função harmônica complexa não-linear | |
| $g$ | - | aceleração da gravidade | $[m/s^2]$ |
| $H$ | - | resposta em freqüência | |
| $i$ | - | número imaginário | |
| $I$ | - | momento de inércia | $[kgm^2]$ |
| $K, k$ | - | rigidez | $[N/m]$ |
| $[K]$ | - | matriz de rigidez | $[N/m]$ |
| $K_t$ | - | matriz tangente | |
| $l$ | - | raio | |
| $M, m$ | - | massa | $[kg]$ |
| $[M]$ | - | matriz de massa | $[kg]$ |
| $\mathbf{p}$ | - | vetor de deslocamento | |
| $P$ | - | peso | $[N]$ |
| $r$ | - | raio | $[m]$ |
| $t$ | - | tempo | $[s]$ |
| $x$ | - | deslocamento | $[m]$ |
| $\{x\}$ | - | vetor de deslocamento | $[m]$ |
| $\dot{x}$ | - | velocidade | $[m/s]$ |
| $\{\dot{x}\}$ | - | vetor de velocidade | $[m/s]$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\ddot{x}$ | - | aceleração | $[m/s^2]$ |
| $\{\ddot{x}\}$ | - | vetor de aceleração | $[m/s^2]$ |
| $\{X\}$ | - | amplitude em deslocamento complexo | $[m]$ |
| $y$ | - | inter-coordenada relativa de resposta em deslocamento | $[m]$ |
| $\{Y\}$ | - | amplitude em deslocamento complexo da inter-coordenada relativa | $[m]$ |
| $[Z]$ | - | impedância | |

## Letras Gregas

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\beta$ | - | coeficiente de rigidez | |
| $\delta$ | - | iterativo | |
| $\Delta$ | - | incremento | |
| $[\Theta]$ | - | matriz de funções descritivas | |
| $\theta$ | - | deslocamento angular | $[rad]$ |
| $\dot{\theta}$ | - | velocidade angular | $[rad/s]$ |
| $\ddot{\theta}$ | - | aceleração angular | $[rad/s^2]$ |
| $\lambda$ | - | fator de carregamento | |
| $\nu$ | - | função descritiva | |
| $\tau$ | - | $\omega t$ | $[rad]$ |
| $\phi$ | - | fase do deslocamento complexo | $[rad]$ |
| $\psi$ | - | fase da inter-coordenada relativa em deslocamento complexo | $[rad]$ |
| $\psi$ | - | parâmetro de escala (*arc-length*) | |
| $\Psi$ | - | resíduo | |
| $\omega$ | - | freqüência | $[rad/s]$ |

## Superescritos

| | | |
|---|---|---|
| $k$ | - | iteração |
| $m$ | - | ordem harmônica |
| $t$ | - | transposto |
| $\sim$ | - | variável aproximada |
| $-$ | - | magnitude de uma variável complexa |

## Subscritos

$a$ - atrito ou alavanca
$b$ - base ou barra
$c$ - cúbico
$cg$ - centro de gravidade
$e$ - externo
$f$ - folga
$h$ - histerese
$j$ - coordenada geral
$i, k$ - coordenada de excitação
$kl$ - inter-coordenada
$j, l$ - coordenada de resposta
$r$ - rótula
$T, t$ - tangente

## Abreviações

FRF - função de resposta em freqüência ($H$ linear)
gdl - grau de liberdade
INCA$^{++}$ - Intelligent Nonlinear Coupling Analysis software
RF - resposta em freqüência ($H$ não-linear)

# Capítulo 1

# Introdução

O fenômeno de vibro-impacto em transmissões manuais constitui um problema para os fabricantes de veículos no que diz respeito ao ruído, vibração e confiabilidade dos sistemas (Gaillard e Singh, 2000). Nos últimos anos, um dos desafios da indústria é alcançar uma qualidade acústica cada vez maior em seus automóveis. Fenômenos de vibração em baixa freqüência, tais como vibro-impacto (*rattle*) de marcha lenta e vibro-impacto de transmissão, vêm sendo estudados na tentativa de se minimizar ruídos indesejáveis, uma vez que o nível de ruído é um dos parâmetros de avaliação da qualidade de um automóvel (Wang, 1997). O sistema de transmissão de potência de um automóvel é altamente não-linear e a dinâmica do vibro-impacto de seus componentes é afetada por vários parâmetros de projeto, incluindo o *backlash*, folgas, freqüência de engrenamento, rigidez e amortecimento da embreagem, carregamento e inércia da transmissão (Wang, 1997) o que dificulta a análise destes sistemas. Um dos fenômenos de vibro-impacto identificados no sistema de transmissão de potência de um veículo é o chamado *rattle* de alavanca de transmissão mecânica, que surge devido a existência de folgas entre o sistema de acoplamento da alavanca e o sistema de controle da transmissão, causando ruído no interior da cabine do veículo.

O problema de vibro-impacto é um problema da dinâmica não-linear. Para classificar os problemas mecânicos em lineares e não-lineares, deve-se observar que a maioria dos problemas na mecânica exibe um certo grau de não-linearidade, mas uma boa linearização geralmente é bastante satisfatória para representar o comportamento dinâmico da estrutura na maioria dos casos. Porém, quando o grau de não-linearidade é muito alto, tratamentos lineares não

conduzem a resultados satisfatórios. O modo de se caracterizar um sistema como linear ou não-linear pode ser baseado na presença ou na ausência da característica de superposição. Um sistema mostra a característica de superposição quando dobrando-se a força de entrada tem-se como resultado o dobro da resposta de vibração e quando a adição das respostas devido a duas contribuições independentes resulta na mesma resposta da aplicação das duas contribuições superpostas. Formas simplificadas do princípio da superposição para caracterização de um sistema são baseadas na presença de características de homogeneidade e características de correlação. Um sistema exibe a característica de homogeneidade quando dobrando-se a força de entrada tem-se o dobro da resposta de vibração. Um sistema mostra a característica de correlação quando toda a energia de entrada na estrutura for completamente correlacionada com a saída. Embora estas formas simplificadas forneçam alguma indicação de não-linearidades, elas são condições necessárias mas não suficientes para verificar a linearidade de um sistema. A linearidade só pode ser determinada completamente usando o princípio completo de superposição. Por outro lado, as formas simplificadas são muito facilmente aplicadas e normalmente usadas como uma primeira análise para não-linearidades. Se a característica de superposição não estiver presente, o sistema é considerado não-linear. Então, quando o sistema for classificado como não-linear, técnicas não-lineares devem estar disponíveis para permitir a inclusão dos fenômenos não-lineares na descrição dinâmica do modelo e para a solução das equações não-lineares do movimento.

A primeira técnica para solução de equações diferenciais não-lineares foi a solução analítica de equações diferenciais (Hayashi, 1964). Embora isto possa dar uma solução exata para casos simples, a maioria dos sistemas não-lineares são complexos, tornando impossível a obtenção de uma solução analítica de forma fechada. Os métodos mais importantes disponíveis para encontrar soluções analíticas aproximadas são: (i) o método da perturbação, (ii) o método da repetição, (iii) método da média e (iv) o método do balanço harmônico (Hayashi, 1964).

A aplicação destes métodos tornou-se possível com a invenção de computadores de alta velocidade, trazendo uma inovação na história da dinâmica não-linear. Os computadores encorajaram o desenvolvimento de soluções numéricas aproximadas para problemas analíticos até então intratáveis e também permitiram a experimentação de soluções analíticas que de

certo modo eram impraticáveis (Yu et al., 1996).

Um dos primeiros métodos numéricos aproximados aplicados para resolver problemas não-lineares foi a integração numérica passo a passo da equação diferencial no domínio do tempo (Dokainish e Subbaraj, 1989a; Dokainish e Subbaraj, 1989b; Stylianou e Tabarrok, 1994). Embora este método geralmente forneça resultados precisos, o procedimento é normalmente extremamente demorado. Para superar este problema, foram desenvolvidos métodos aproximados no domínio da freqüência (Jezequel et al., 1990; Watanabe e Sato, 1988), como por exemplo o balanço harmônico (Hayashi, 1964).

## 1.1 Objetivos e Estrutura do Trabalho

O propósito deste trabalho é investigar numérica e experimentalmente uma alavanca de transmissão mecânica, tendo como foco a obtenção de suas curvas de resposta em freqüência não-lineares. Dado esse objetivo central, outras metas secundárias foram estabelecidas, sendo elas:

- implementação de um algoritmo de controle experimental para obtenção de curvas de resposta em freqüência;
- modelagem de sistemas não-lineares simples;
- implementação de um algoritmo para obtenção de curvas de resposta em freqüência de modelos dinâmicos não-lineares;
- obtenção experimental de parâmetros utilizados nos modelos simplificados da alavanca de transmissão.

O presente trabalho está dividido em cinco capítulos.

O capítulo 1 traz uma introdução e uma visão global do tema abordado. Também mostra os objetivos e a estrutura do trabalho, comentando superficialmente o conteúdo de cada capítulo.

O capítulo 2 contém a revisão bibliográfica da teoria empregada no desenvolvimento da dissertação. Na seção 2.5 é apresentado o método de continuação *arc-length* que foi empregado na obtenção das respostas em freqüência teóricas e experimentais.

No capítulo 3, encontram-se os materiais, métodos e resultados das investigações experimentais da alavanca de transmissão. Dentre os experimentos apresentados está o da obtenção das RFs da alavanca de transmissão, que empregou o método *arc-length* no controle da amplitude da componente harmônica fundamental do sinal da força de excitação.

Já no capítulo 4 estão as simulações numéricas da alavanca de transmissão e de outros sistemas dinâmicos não-lineares. Os modelos dinâmicos da alavanca de transmissão apresentados neste capítulo são simples e com poucos graus de liberdade, entretanto consideram efeitos não-lineares de atrito e folga.

Finalmente no capítulo 5 são apresentadas as discussões e conclusões desta dissertação apresentando uma análise concisa das investigações numéricas e experimentais feitas nos capítulos 3 e 4. Neste último capítulo estão também algumas propostas para trabalhos futuros.

# Capítulo 2

# Revisão Bibliográfica e Fundamentação Teórica

## 2.1 Modelagem de Estruturas Não-Lineares

Para muitas aplicações de engenharia são exigidos modelos matemáticos precisos para predizer efeitos devido a modificações estruturais ou para correção de altos níveis de amplitudes de vibração indesejados. Um modelo matemático preciso, para a alavanca de transmissão mecânica ou para qualquer outra estrutura, só pode ser alcançado escolhendo as suposições corretas sobre o modelo e selecionando a técnica mais adequada para sua resolução. Então, o primeiro passo é verificar a presença de características não-lineares, de forma que uma classificação em modelo linear ou não-linear possa ser determinada. Uma escolha deve ser feita entre um modelo analítico ou um modelo discretizado. O último passo é a aplicação da análise correspondente, linear ou não-linear, baseada na escolha anterior.

Uma escolha melhor do modelo não-linear pode ser obtida estudando toda a informação disponível sobre a não-linearidade em particular. Normalmente, a fonte de uma não-linearidade e sua classificação dá uma compreensão básica da não-linearidade envolvida. A fonte de não-linearidade pode ser devida a muitos mecanismos diferentes. Por exemplo, o amortecimento medido quase sempre é não-linear, embora normalmente seja aproximado como linear. Isto pode ser visto em um gráfico de força versus velocidade (Ewins e Sidhu, 1982). Podem também ser encontradas não-linearidades de rigidez em molas (Watanabe e Sato, 1988). As condições de contorno podem introduzir não-linearidades em sistemas lineares. Um exemplo é uma viga engastada-livre (Murakami e Sato, 1990) onde a junção induz efeitos não-lineares.

foram necessários testes dinâmicos experimentais, uma vez que esse tipo de não-linearidade estrutural não pode ser predito apenas por informações geométricas.

## 2.2 Modelos de Junta

A modelagem precisa para predição do comportamento dinâmico de sistemas mecânicos é uma ferramenta essencial na fase de projeto. Durante estas fases, uma estrutura física para testes práticos geralmente não está disponível e um modelo analítico que represente a estrutura é usado em seu lugar.

Podem ser usadas muitas aproximações para obter um modelo. No campo da análise de vibração estrutural, o método dos elementos finitos tornou-se a aproximação mais popular para estudar o fenômeno. Embora em princípio qualquer estrutura possa ser modelada pelo método dos elementos finitos, para certos problemas surgem muitas dificuldades. Muitas estruturas mecânicas complexas são compostas de várias subestruturas conectadas por tipos diferentes de mecanismos de união, e às vezes o comportamento dinâmico predito não é representativo devido a dificuldades em modelar as conexões que separam as subestruturas, (Ewins e Imregun, 1986). O mecanismo de união, normalmente chamado de junta, é definido como qualquer conexão entre duas partes distintas de uma estrutura e as superfícies de contato de uma junta são chamadas de interface. Estas juntas têm uma considerável influência no comportamento dinâmico das estruturas montadas, sendo assim importante estabelecer um modelo matemático preciso para elas. Embora os modelos das subestruturas possam ser obtidos por suas matrizes de massa, rigidez e amortecimento derivadas dos dados de projeto, os modelos das propriedades das juntas normalmente constituem um problema maior na análise de vibração, causando discrepâncias entre as predições numéricas e os resultados experimentais. Para superar este problema, foram desenvolvidas técnicas híbridas que utilizam dados analíticos e experimentais para produzir modelos mais seguros e precisos. Embora estas técnicas possam ser aplicadas diretamente para obter um modelo global que representa a estrutura física em um intervalo de freqüências (Nobari, 1992; Tsai e Chou, 1988), podem ser obtidos modelos mais precisos e gerais se as juntas forem modeladas e então incorporadas aos modelos das subestruturas para produzir um modelo da estrutura montada (Ren, 1992).

O entendimento da natureza e configuração de uma junta podem conduzir a um modelo satisfatório. O modo mais efetivo de se modelar uma junta consiste em primeiramente estudar suas características dinâmicas. Isto pode ser feito através da busca da relação entre a força aplicada e a resposta obtida. O segundo passo é o desenvolvimento de um modelo matemático geral e preciso do comportamento da junta. Este é o maior desafio, visto que uma equação explícita geral é de difícil obtenção e o modelo resultante desenvolvido pode ser dependente do tipo de excitação, intervalo de freqüência e amplitudes da resposta. A análise da relação de força-resposta pode conduzir a uma equação explícita para uma situação prática de força-vibração. O último passo é ter os parâmetros do modelo proposto identificados. Para casos simples isto pode ser obtido por um ajuste das curvas da relação força versus resposta experimental.

A relação força-resposta usada para caracterizar a junta pode ser linear ou não-linear. Quando for não-linear, o primeiro problema de avaliar o comportamento de vibração é escolher uma força de excitação apropriada que permita caracterizar e identificar a junta não-linear facilmente. Entre os métodos de excitação atualmente usados em estudos de vibração, o método de excitação senoidal é fortemente indicado para investigação de não-linearidades por causa de suas características e precisão (Storer e Tomlinson, 1993).

Muitos tipos de junta freqüentemente encontrados já foram estudados e identificados (Ahmadian et al., 1996; Gaul et al., 1994; Lin, 1991; Lin, 1988; Tomlinson e Lam, 1984). Eles são uma referência útil para investigações posteriores de aplicações práticas.

### 2.2.1 Juntas Lineares

Juntas lineares teóricas são juntas que obedecem o princípio da superposição previamente descrito. Por outro lado, é fato conhecido que todas as juntas físicas exibem um certo grau de não-linearidade. Para propósitos práticos, são consideradas como juntas lineares aquelas em que o grau de não-linearidade é pequeno o bastante para ser insignificante na faixa de resposta de interesse. Para este grupo, um modelo equivalente linearizado normalmente representa bem seu comportamento dinâmico. Uma característica de uma junta linear típica é que quando esta estiver excitada em uma freqüência, só responde na mesma freqüência, não havendo nenhuma transferência de energia no domínio da freqüência.

#### Rigidez Linear

Um elemento de contato, modelado como uma mola de rigidez constante ($K = cte$) e massa desprezível, onde a força aplicada é proporcional ao deslocamento pode ser descrito como:

$$f = Kx \tag{2.3}$$

como mostra a figura 2.1.

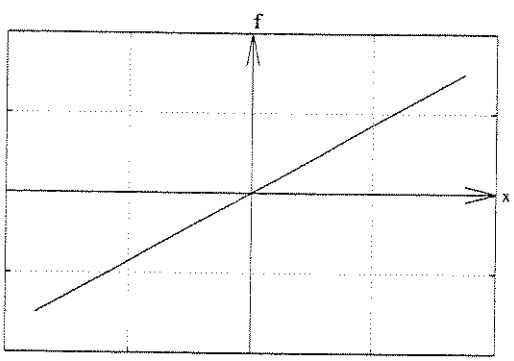



Figura 2.1: Característica da rigidez linear

#### Amortecimento Viscoso

Um elemento de contato, modelado como um amortecedor de massa desprezível, onde a força aplicada no amortecedor é proporcional a sua velocidade relativa, pode ser descrito

como:

$$f = C\dot{x} \tag{2.4}$$

como mostra a figura 2.2, onde $C$ é o amortecimento viscoso.

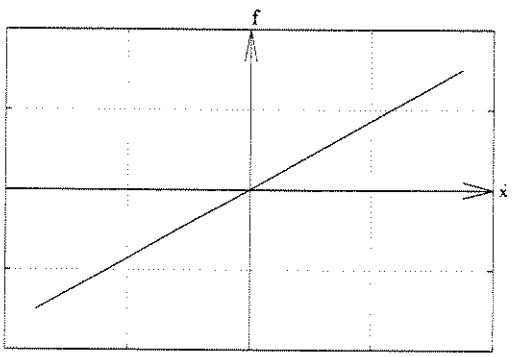



Figura 2.2: Característica do amortecimento viscoso linear

### 2.2.2 Juntas Não-Lineares

Juntas não-lineares são juntas onde o efeito das não-linearidades na faixa de resposta de interesse é significativo e tem que ser levado em conta no modelo matemático. Estas juntas não-lineares normalmente são encontradas em juntas projetadas para fácil montagem e desmontagem de subestruturas. O seu comportamento dinâmico é freqüentemente difícil de predizer e é sensível a muitos parâmetros. A característica mais pronunciada de uma junta não-linear típica é sua transferência de energia no domínio da freqüência. Quando a junta estiver excitada com uma freqüência, responde em muitas freqüências, resultando em uma distorção harmônica da resposta.

#### Rigidez Cúbica

Uma mola de massa desprezível na qual a força aplicada é proporcional ao cubo de sua deformação, pode ser descrita como:

$$f = Kx^3 \tag{2.5}$$

como mostra a figura 2.3.

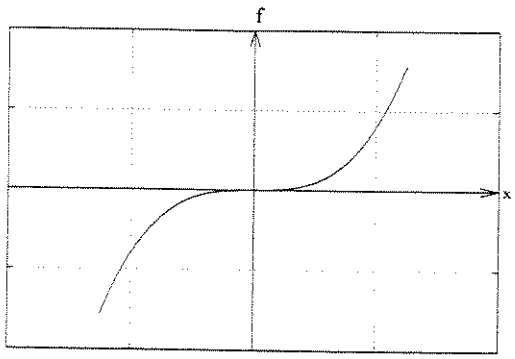



Figura 2.3: Característica da rigidez cúbica

### Rigidez Anti-Simétrica Linear por Partes

Um elemento confinado em um alojamento com uma folga $2x_{crítico}$, pode ter sua relação entre a força e a resposta escrita como:

$$f = \begin{cases} K(x - x_{crítico}) & x \geq x_{crítico} \\ 0 & |x| < x_{crítico} \\ K(x + x_{crítico}) & x \leq -x_{crítico} \end{cases} \tag{2.6}$$

como mostra a figura 2.4.

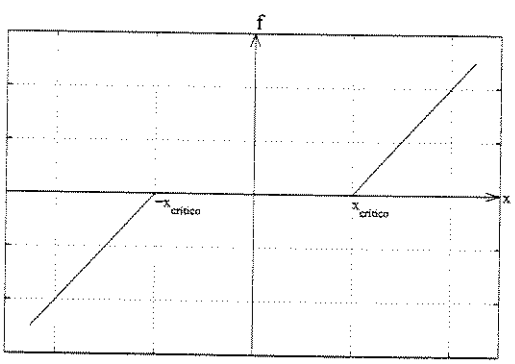



Figura 2.4: Característica da rigidez anti-simétrica linear por partes

### Rigidez Descentrada Linear por Partes com Pré-Carregamento

Um elemento confinado em um alojamento com uma folga $x_{crítico}$ e com um pré-carregamento $f_0$ pode ter sua relação entre a força e a resposta escrita como:

$$f = \begin{cases} f_0 + K(x_{crítico} + x) & x > x_{crítico} \quad e \quad x < 0 \\ f_0 & x \leq x_{crítico} \quad e \quad x < 0 \\ f_0 + Kx & x > 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

como mostra a figura 2.5.

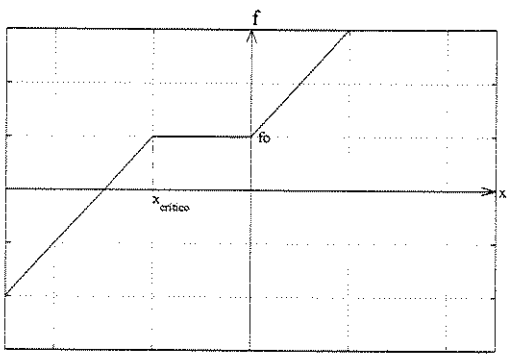



Figura 2.5: Característica da rigidez descentrada linear por partes com pré-carregamento

### Modelo de Macro e Microdeslizamento de Ren

O modelo de microdeslizamento de Ren (Ren, 1992) é um modelo de atrito que usa uma área pequena da interface como o elemento básico em vez de usar um elemento para cada aspereza. Cada área é modelada por um elemento bilinear. Uma rigidez de área $h$ é definida como uma proporção da rigidez inicial total com que a área contribui. A rigidez de área total $h$ é a unidade. Definindo a rigidez de área, o problema é transformado de um modelo de junta no domínio do deslocamento de $x[0, \infty]$ para domínio $h[0, 1]$, onde $x_i = x(h_i)$. Todos os elementos bilineares têm a mesma rigidez $k_i$ mas não a mesma deformação elástica máxima $x_i$. A relação entre força e deslocamento pode ser escrita como:

$$F = \begin{cases} Kx & x < a \\ -\frac{K(x-a+x(b-\ln x+\ln a))}{b} & a \leq x < ae^b \\ \frac{Ka(e^b-1)}{b} & x \geq ae^b \end{cases} \tag{2.8}$$

onde $a$ representa o máximo deslocamento elástico, e $b$ representa a diferença entre microdeslizamento e elementos bilineares.

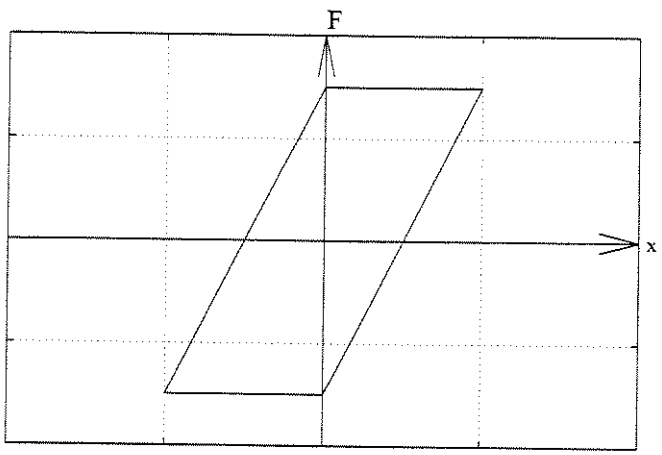



Figura 2.6: Característica de um elemento bilinear

Quando o elemento está sujeito a uma carga cíclica, dependendo dos valores escolhidos para $a$ e $b$, podem ser formados ciclos de histerese diferentes. Quando $b$ estiver perto de zero, o ciclo de histerese formado será igual ao elemento bilinear mostrado na figura 2.6.

Quando $b$ começa a aumentar, os ciclos de histerese tem uma mistura de macro e microdeslizamento como mostrado na figura 2.7. Os ciclos da histerese podem apresentar microdeslizamento predominante como mostrado na figura 2.8.

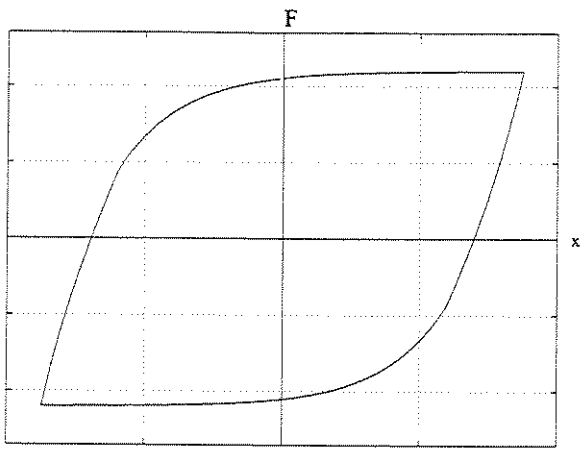



Figura 2.7: Macro e Microdeslizamento de Ren

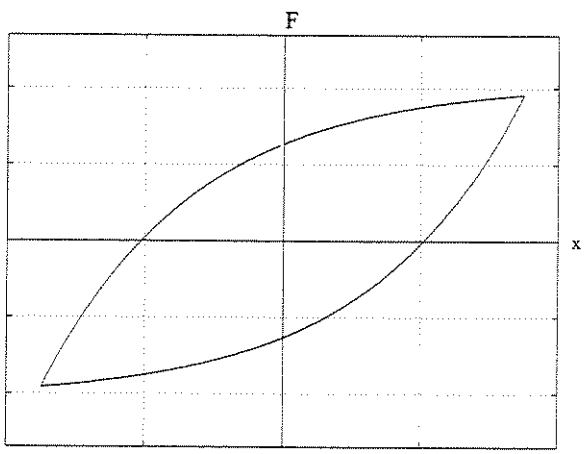



Figura 2.8: Microdeslizamento de Ren

## 2.3 Análise no Domínio da Freqüência

A resposta dinâmica estacionária de uma estrutura não-linear de vários graus de liberdade é normalmente determinada por integração numérica das equações de movimento (Dokainish e Subbaraj, 1989a; Dokainish e Subbaraj, 1989b). Embora uma precisão muito alta possa ser obtida através da análise de integração no tempo ("time-marching") , a eficiência computacional pode ser afetada. Geralmente, o tempo requerido depende do nível de precisão apontado e também das características da estrutura como amortecimento, alta freqüência natural de interesse e o tamanho do modelo teórico (Ferreira, 1998). O nível de precisão é relacionado ao passo de tempo usado na integração. Para um alto nível de precisão, deve ser usado uma pequena fração do período que corresponde à freqüência natural mais alta de interesse. O amortecimento tem influência na resposta transiente da estrutura. Os baixos níveis de amortecimento em algumas estruturas dinâmicas significam respostas transientes longas. O tamanho do modelo tem influência direta no tempo gasto para integração. Por conseguinte, respostas transientes longas combinadas com passos de tempo pequenos e números grandes de graus de liberdade resultam em um procedimento computational muito caro para análise de resposta estacionária. Então, como alternativa, foi dada atenção especial aos métodos aproximados no domínio da freqüência para determinar a resposta estacionária de estruturas, particularmente para excitação externa periódica na qual não há a necessidade da análise do movimento transitório. Estes métodos de linearização aproximados usam técnicas que convertem as equações diferenciais não-lineares de movimento em equações algébricas não-lineares. Estas técnicas são conhecidas como "balanço harmônico"na engenharia mecânica (Hayashi, 1964) e como "função descritiva"na engenharia elétrica e controle (Gibson, 1963; Sijak, 1969). O conceito de linearização nestas técnicas diferem da chamada "verdadeira"linearização em suas suposições básicas. Os verdadeiros métodos de linearização só são aplicados para pequenas oscilações, impondo restrições na amplitude de vibração. Por outro lado, com os métodos de linearização aproximados não há nenhuma restrição na amplitude de vibração, permitindo a análise de vibração de sistemas com níveis altos de resposta. Além disso, uma verdadeira linearização do modelo segue a teoria linear da superposição e os métodos aproximados de linearização exibem a dependência da resposta com a entrada que é a característica básica

de sistemas não-lineares. Contudo, os métodos de linearização aproximados têm algumas limitações. Uma limitação importante é relacionada às hipóteses assumidas para a excitação. Assim, uma vez que a excitação possua a forma senoidal, o método só pode ser aplicado para se obter uma solução periódica de uma equação diferencial não-linear.

### 2.3.1 Análise Harmônica Fundamental

A equação diferencial matricial de movimento para uma estrutura não-linear sujeita a uma excitação externa que tem uma força localizada não-linear interna , $\boldsymbol{f}$, pode ser escrita como

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + i[D]\{x\} + [K]\{x\} + \{\boldsymbol{f}\} = \{f\} \tag{2.9}$$

onde $[M]$ é a matriz de massa, $[C]$ é a matriz de amortecimento viscoso, $[D]$ é a matriz de amortecimento estrutural e $[K]$ é a matriz de rigidez do sistema.

Assumindo a excitação externa como uma excitação senoidal, então $\{f(t)\}$ pode ser escrita como:

$$\{f(t)\} = \{F\}e^{i\omega t} = \{F\}e^{i\tau} \tag{2.10}$$

A solução estacionária pode ser representada por uma série de Fourier como:

$$\{x(t)\} = \sum_{m=0}^{\infty}\{x^m\} = \sum_{m=0}^{\infty}\{X^m\}e^{im\omega t} = \sum_{m=0}^{\infty}\{X^m\}e^{im\tau} \tag{2.11}$$

onde o subscrito $m$ indica a $m_{ésima}$ ordem harmônica, $x^m$ é a $m_{ésima}$ ordem da resposta em deslocamento e $X^m$ é a amplitude da resposta em deslocamento complexo da $m_{ésima}$ harmônica.

Quando os termos das harmônicas mais altas da resposta tiverem amplitudes relativamente pequenas para a componente fundamental, a resposta é dominada pelo componente fundamental da série de Fourier para $x(t)$. Assim, a resposta $\{x(t)\}$ pode ser escrita como:

$$\{x\} \approx \{x^1\} = \{X^1\}e^{i\tau} \tag{2.12}$$

A resposta $x$ a uma coordenada geral $j$ pode ser escrita como:

$$x_j \approx x_j^1 = X_j^1 e^{i\tau} \tag{2.13}$$

onde $X_j^1$ é a resposta em deslocamento complexo.

A resposta em deslocamento complexo $X_j$ pode ser escrita em forma de vetor em função de uma amplitude e fase:

$$X_j^1 = \bar{X}_j^1 e^{i\phi_j^1} \tag{2.14}$$

onde $\bar{X}$ é a amplitude e $\phi$ é o ângulo de fase.

Similarmente, a inter-coordenada relativa de resposta em deslocamento $y$ entre as coordenadas $k$ e $l$ podem ser representadas como:

$$y_{kl} = x_k - x_l \approx y_{kl}^1 = Y_{kl}^1 e^{i\tau} \tag{2.15}$$

onde:

$$\begin{aligned} Y_{kl}^1 &= X_k^1 - X_l^1, \ (k \neq l) \\ Y_{kl}^1 &= \bar{Y}_{kl}^1 e^{i\psi_{kl}^1} \end{aligned} \tag{2.16}$$

A solução assumida $y_{kl}$ na equação (2.15) é inserida então na função não-linear $\boldsymbol{f}_{kl}(y_{kl})$, resultando em uma força não-linear $\boldsymbol{f}_{kl}(y_{kl}^1)$ que também pode ser expandida por uma série de Fourier e pode ser expressa na forma complexa como:

$$\boldsymbol{f}_{kl}(y_{kl}^1) = \sum_{m=0}^{\infty} (\boldsymbol{f}_{kl})^m = \sum_{m=0}^{\infty} \boldsymbol{\mathcal{F}}_{kl}^m e^{im\tau} \tag{2.17}$$

onde:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{F}}_{kl}^m &= \bar{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_{kl}^m e^{i\varphi^m} \\ \boldsymbol{\mathcal{F}}_{kl}^0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \boldsymbol{f}(y_{kl}^1) d\tau \\ \boldsymbol{\mathcal{F}}_{kl}^m &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \boldsymbol{f}(y_{kl}^1) e^{-im\tau} d\tau \ , \ (m \geq 1) \end{aligned} \tag{2.18}$$

Assumindo agora que a força não-linear $f_{kl}(y^1_{kl})$ também é dominada por seu termo fundamental, então a força não-linear aproximada pode ser escrita como:

$$f_{kl}(y^1_{kl}) \approx \tilde{f}^1_{kl}(y^1_{kl}) = \mathcal{F}^1_{kl} e^{i\tau} = A^1_{kl} sin(\tau) + B^1_{kl} cos(\tau) \tag{2.19}$$

onde:

$$\begin{aligned} A^1_{kl} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_{kl}(y^1_{kl}) sin\tau d\tau \\ B^1_{kl} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_{kl}(y^1_{kl}) cos\tau d\tau \end{aligned}$$

Os componentes $\mathcal{F}^1_{kl}$ da força não-linear aproximada $\tilde{f}^1_{kl}(\tilde{y}^1_{kl})$ podem ser escritos como

$$\mathcal{F}^1_{kl} = \nu^1_{kl} Y^1_{kl} \tag{2.20}$$

onde $\nu$ é a função descritiva expressa como

$$\nu^1_{kl} = \frac{\mathcal{F}^1_{kl}}{Y^1_{kl}} \tag{2.21}$$

A equação (2.20) pode ser expressa em termos das coordenadas gerais, $\{X\}$, como:

$$\begin{Bmatrix} \mathcal{F}^1_k \\ \mathcal{F}^1_l \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu^1_{kl} & -\nu^1_{kl} \\ -\nu^1_{kl} & \nu^1_{kl} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X^1_k \\ X^1_l \end{Bmatrix} \tag{2.22}$$

A equação (2.22) pode ser escrita em uma forma mais concisa como:

$$\begin{Bmatrix} \mathcal{F}^1_k \\ \mathcal{F}^1_l \end{Bmatrix} = [\Theta]^1_{kl} \begin{Bmatrix} X^1_k \\ X^1_l \end{Bmatrix} \tag{2.23}$$

## 2.4 Funções Descritivas

Na análise de sistemas não-lineares, o método da função descritiva é freqüentemente usado quando a resposta do sistema exibe oscilações periódicas próximas a de uma senóide.

O método da função descritiva possui a característica de linearização através da definição de uma função de transferência que relaciona as componentes fundamentais da entrada e a da saída da não-linearidade. Para apresentar o conceito do método da função descritiva,

considere um sistema de um grau de liberdade com uma não-linearidade que restabelece a força de excitação por uma excitação senoidal escrita como:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx + \boldsymbol{\mathcal{F}}(x, \dot{x}) = Asen(wt) \tag{2.24}$$

onde $M$ é a massa, $C$ é o amortecimento viscoso e $K$ é a rigidez.

Para resolver o problema proposto pelo método da função descritiva é necessário assumir que a variável $x$ que aparece na função não-linear $\boldsymbol{\mathcal{F}}(x, \dot{x})$ seja suficientemente próxima a uma oscilação senoidal expressa como:

$$x \approx X^1 sen(wt + \phi) = X^1 sen(\tau) \tag{2.25}$$

onde $X^1$ é uma amplitude de resposta complexa, $\omega$ é a freqüência de excitação e $\phi$ ângulo de fase.

Se a variável $x$ na função não-linear $\boldsymbol{\mathcal{F}}(x, \dot{x})$ tem a forma senoidal assumida na equação (2.25), a função não-linear $\boldsymbol{\mathcal{F}}(x, \dot{x})$ é complexa e também é uma função periódica no tempo. Definindo a função descritiva $\nu$ agora como a representação da rigidez complexa linear equivalente da força não-linear $\boldsymbol{\mathcal{F}}(x, \dot{x})$ para a resposta harmônica $X^1$, os coeficientes da função descritiva $\nu(x, \dot{x})$ podem ser obtidos através de uma expansão da função não-linear $\boldsymbol{\mathcal{F}}(x, \dot{x})$ por uma série de Fourier como:

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}(x, \dot{x}) \approx \tilde{\boldsymbol{\mathcal{F}}}(x, \dot{x}) = (\nu(x, \dot{x}))x = N_1 x + jN_2 x + \ldots \tag{2.26}$$

onde os coeficientes correspondentes da função descritiva são:

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{1}{\pi X}\int_0^{2\pi} \boldsymbol{\mathcal{F}}(X^1 sen\tau, wX^1 cos\tau) sen\tau d\tau \\
N_2 &= \frac{1}{\pi X}\int_0^{2\pi} \boldsymbol{\mathcal{F}}(X^1 sen\tau, wX^1 cos\tau) cos\tau d\tau \\
N_3 &= \frac{1}{\pi X}\int_0^{2\pi} \boldsymbol{\mathcal{F}}(X^1 sen\tau, wX^1 cos\tau) sen2\tau d\tau \\
N_4 &= \frac{1}{\pi X}\int_0^{2\pi} \boldsymbol{\mathcal{F}}(X^1 sen\tau, wX^1 cos\tau) cos2\tau d\tau \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Assumindo agora que força não-linear $\mathcal{F}(x, \dot{x})$ também é dominada por seu termo fundamental, então esta pode ser simplificada por seu primeiro componente harmônico, $\mathcal{F}^1(x, \dot{x})$, como:

$$\mathcal{F}(x, \dot{x}) \approx \tilde{\mathcal{F}}^1(x, \dot{x}) = (\nu(x, \dot{x}))x = N_1 x + jN_2 x \tag{2.28}$$

e a função descritiva de primeira ordem pode ser escrita como:

$$\nu^1(x, \dot{x}) = N_1 + jN_2 \tag{2.29}$$

Portanto, se o tipo de não-linearidade em $\mathcal{F}(x, \dot{x})$ for conhecido, sua função descritiva pode ser calculada através das equações (2.27) e (2.29).

## 2.5 Método *Arc-Length*

Nos últimos anos, muitas técnicas numéricas iterativas foram desenvolvidas para resolver problemas estruturais não-lineares. Alguns destes métodos são capazes de traçar caminhos complexos no espaço carregamento/deslocamento. Um dos mais populares procedimentos é o método *arc-length* de Crisfield, que possui a capacidade de ultrapassar pontos de inflexão sem a necessidade de determiná-los. Há uma grande similaridade entre curvas não-lineares de carregamento/deslocamento obtidas com o método *arc-length* com curvas de resposta em freqüência de sistemas não-lineares. Ambas as curvas apresentam o fenômeno de *snap-back* e *snap-through*, figura 2.9 (Crisfield, 1997).

Neste trabalho o método *arc-length* foi utilizado em simulações numéricas e no controle experimental de sistemas mecânicos. Nas simulações o método foi usado para resolver sistemas de equações não-lineares e nos experimentos foi empregado no controle da amplitude da componente fundamental do canal de controle, tendo como resultados as respostas em freqüência não-lineares numéricas e experimentais que serão apresentados nos capítulos 3 e 4.

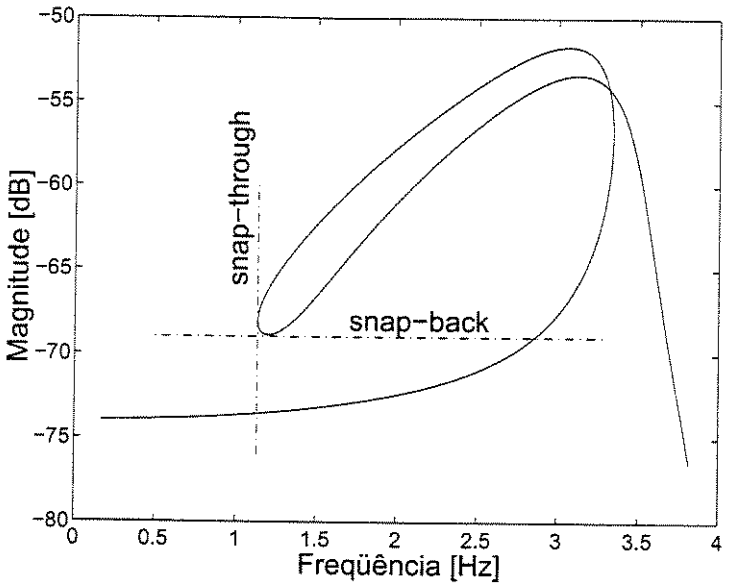



Figura 2.9: Fenômeno de *snap-back* e *snap-through*

### 2.5.1 Teoria Básica de Solução

Uma equação de equilíbrio residual geral que governa muitos problemas não-lineares pode ser escrita como

$$\Psi(\mathbf{p}, \lambda \mathbf{f}_e) = \mathbf{f}_i(\mathbf{p}) - \lambda \mathbf{f}_e \tag{2.30}$$

na qual, em uma análise estrutural, $\mathbf{p}$ é o "vetor de deslocamento", $\mathbf{f}_i$ é o "vetor de força interno"que é função do deslocamento $\mathbf{p}$, o escalar $\lambda$ é um "parâmetro de nível de carga"e $\mathbf{f}_e$ é o "vetor de carregamento externo fixo"(Ferreira e Serpa, 2002).

A equação anterior pode ser resolvida por muitos procedimentos incrementais (Newton-Raphson (ver Anexo A), Newton-Raphson modificado, Quasi-Newton, etc) nos quais o carregamento e/ou deslocamento controlado pode ser aplicado, porém estes métodos não são apropriados na solução de problemas para os quais os caminhos da resposta sejam complexos como o traçado da figura 2.9, por exemplo. Estes métodos se aplicados na obtenção de uma curva como da figura 2.9 apresentariam os fenômenos de *snap-back* ou *snap-through* não conseguindo levantar o traçado completo da solução na região onde para uma dada freqüência

existe mais de uma solução possível. Tais situações surgem tipicamente em problemas de instabilidade estrutural, nos quais técnicas de continuação são empregadas, sendo que o método *arc-length* parece ser o mais utilizado.

O método *arc-length* é descrito dentro da categoria de métodos de continuação e é aplicado para se obter o traçado de uma solução. Basicamente, o método *arc-length* considera primeiro o fator de carregamento $\lambda$, como uma variável na equação residual (2.30). Então, uma nova equação de restrição é acrescentada a equação de equilíbrio residual (2.30) definindo o próximo ponto da solução em uma intersecção entre as curvas da solução e da equação de restrição. Finalmente o sistema não-linear estendido é então resolvido usando técnicas iterativas convencionais para obter o ponto de equilíbrio.

Para resolver diretamente $n+1$ variáveis do sistema estendido, $n$ do deslocamento $\mathbf{p}$ mais uma variável do fator de carregamento, usando os métodos iterativos, primeiro é necessário linearizar a equação residual, com $\mathbf{p}$ e $\lambda$ sendo variáveis desconhecidas, junto com a restrição relevante do método *arc-length* pelas séries de Taylor.

A equação de restrição como uma equação de restrição esférica proposta por (Crisfield, 1997) no formato geral é do tipo:

$$a(\Delta\mathbf{p}, \Delta\lambda) = (\Delta\mathbf{p}^t\Delta\mathbf{p} + \Delta\lambda^2\psi^2\mathbf{f}_e^t\mathbf{f}_e) - \Delta l^2 = 0 \tag{2.31}$$

onde $\Delta l$ é o raio fixo da intersecção desejada, o vetor $\Delta\mathbf{p}$ e o escalar $\Delta\lambda$ são o deslocamento incremental e o fator de carregamento, e o escalar $\psi$ é um parâmetro de escala, sendo $\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p} - \mathbf{p_0}$ e $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ com $(\mathbf{p_0}, \lambda_0)$ correspondendo ao último ponto conhecido convergido.

O sistema estendido que considera simultaneamente a equação de equilíbrio (2.30) e a equação de restrição (2.31) pode ser reescrito como

$$\left\{ \begin{array}{c} \Psi(\mathbf{p}, \mathbf{f}_e) \\ a(\Delta\mathbf{p}, \Delta\lambda) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{f}_i(\mathbf{p}) - \lambda\mathbf{f_e} \\ (\Delta\mathbf{p}^t\Delta\mathbf{p} + \Delta\lambda^2\psi^2\mathbf{f}_e^t\mathbf{f}_e) - \Delta l^2 \end{array} \right\} = \{0\} \tag{2.32}$$

Para uma posição conhecida ao longo do traçado da solução, é possível visualizar a equação (2.32) geometricamente para um sistema de um grau de liberdade. A figura 2.10 mostra a intersecção de ambas as curvas relacionadas com equação (2.32), indicando as próximas

soluções possíveis. A equação (2.32) representa um sistema não-linear de $n+1$ incógnitas as quais podem ser resolvidas por procedimentos iterativos incrementais convencionais para

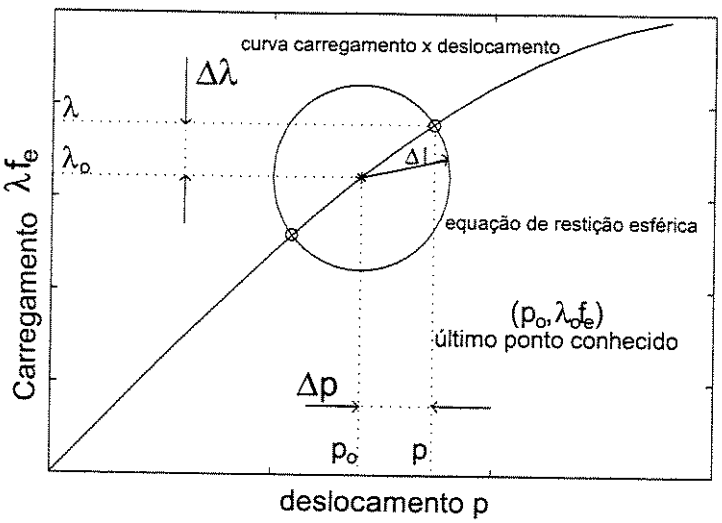



Figura 2.10: Trajetória da solução e curva de restrição

obter o ponto da solução ao longo da trajetória. Estes métodos normalmente requerem valores iniciais satisfatórios para o procedimento iterativo convergir para os pontos corretos da solução. Assim, o procedimento que obtém o próximo ponto de equilíbrio $(\mathbf{p}, \lambda \mathbf{f}_e)$ normalmente consiste em duas fases, a fase de predição e a fase de correção. Os procedimentos preditores são aplicados para estimar a primeira solução e para determinar a direção a ser seguida. Os procedimentos iterativos corretores são usados para computar uma seqüência de convergência de estimativas para obter a solução convergida.

Depois de convergido à solução, o caminho da solução pode ser traçado em termos de um conjunto de pontos passo a passo.

### 2.5.2 Procedimento Preditor

Esta fase é responsável em determinar um ponto de partida satisfatório para a próxima fase de correção. Isto é necessário porque em princípio, não há nenhuma regra para a direção na qual o procedimento de continuação deveria caminhar. A direção a ser seguida é determinada pelo ponto obtido por procedimentos de predição conhecidos como o preditor

tangencial *forward-Euler* (Crisfield, 1997). O preditor tangencial *forward-Euler* é baseado apenas no último ponto da solução, e é determinado por

$$\Delta \mathbf{p}^{(0)} = {K_t^{(0)}}^{-1} \Delta \mathbf{f}_e^{(0)} = \Delta\lambda^{(0)} K_t^{-1} \mathbf{f}_e \tag{2.33}$$

onde $K_t$ é a matriz tangente e $\Delta \mathbf{f}_e^{(0)}$ é o carregamento incremental, ambos relacionados ao ponto $(\mathbf{p}^{(0)}, \lambda^{(0)})$ como ilustrado na figura 2.11.

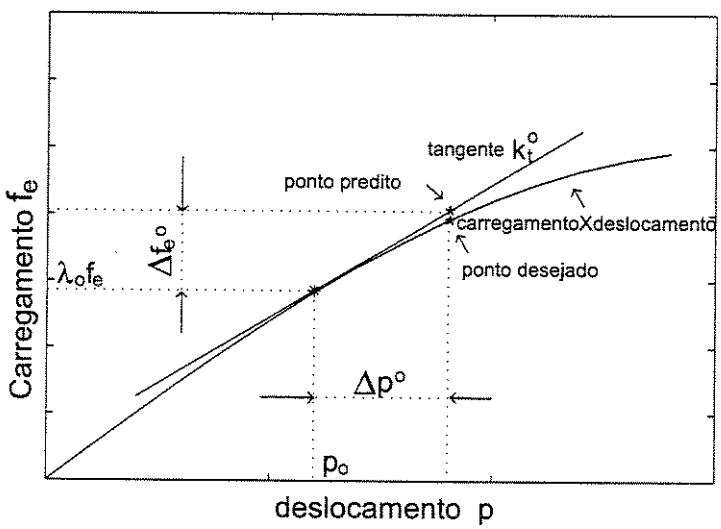



Figura 2.11: Ilustração do preditor tangencial *foward-Euler*

Substituindo a equação de predição (2.33) na equação de restrição (2.31) tem-se

$$\Delta\lambda^{(0)} = \pm \frac{\Delta l}{\sqrt{(K_t^{-1}\mathbf{f}_e)^t (K_t^{-1}\mathbf{f}_e) + \psi^2 \mathbf{f}_e^t \mathbf{f}_e)}} \tag{2.34}$$

Da equação (2.34) é possível ver que por causa do sinal de mais ou menos, duas soluções estão disponíveis. Se o sinal não for escolhido corretamente, a direção de procura para o próximo ponto está incorreta e o corretor pode convergir a um ponto indesejado, voltando atrás para a solução previamente computada.

Existem muitos critérios propostos na literatura para determinar o sinal da equação (2.34)(Bathe e Dvorkin, 1983; Powell e Simons, 1981; Crisfield, 1997; Papadrakakis, 1993; Bergan et al., 1978; Feng et al., 1995), mas a experiência prática de muitas pesquisas sugere que os critérios que usam o sinal do determinante da rigidez tangente, $|K_t|$, para determinar

o sinal do incremento do carregamento inicial $\Delta\lambda$, i.e. $sign|K_t| = sign\ \Delta\lambda$, trabalha muito bem na maioria dos casos (Clarke e Hancock, 1990; Crisfield, 1997; Wagner e Wriggers, 1988; Feng et al., 1995), embora também foram relatados alguns casos mal sucedidos (Bellini e Chulya, 1987; Allgower e Georg, 1980).

Como resultado da fase de predição, $\mathbf{p}^{(k)}$ e $\lambda^{(k)}$ são obtidos de acordo com as seguintes equações:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^{(k)} &= \mathbf{p}^{(0)} + \mathbf{\Delta p}^{(0)}, \\ \lambda^{(k)} &= \lambda^{(0)} + \Delta\lambda^{(0)}, \end{aligned} \tag{2.35}$$

onde $\mathbf{p}^{(0)}$ é a solução do último ponto de equilíbrio e $\lambda^{(0)}$ é inicializado com o valor 1 (um), correspondendo ao carregamento completo.

### 2.5.3 Procedimento Corretor

Na fase de correção, um procedimento numérico é aplicado para achar a solução do sistema estendido de equações (2.32), com a suposição inicial $(\mathbf{p}^{(k)}, \lambda^{(k)}\mathbf{f}_e)$ determinado na fase de predição. Como na equação (2.30), muitos métodos podem ser usados para resolver a equação (2.32), tais como o método Newton-Raphson, Newton-Raphson modificado ou Quasi-Newton. Para aplicar estes métodos na equação (2.32), é conveniente linearizar a equação estendida ou ambas as equações (2.30) e (2.31), aplicando as séries de Taylor (Crisfield, 1997), levando a,

$$\begin{aligned} \mathbf{\Psi} &= \mathbf{\Psi}_0 + \frac{\partial \mathbf{\Psi}}{\partial \mathbf{p}}\delta\mathbf{p} + \frac{\partial \mathbf{\Psi}}{\partial \lambda}\delta\lambda \\ &= \mathbf{\Psi}_0 + K_t\delta\mathbf{p} - \mathbf{q}\delta\lambda = 0, \end{aligned} \tag{2.36}$$

$$\begin{aligned} a &= a_0 + \frac{\partial a}{\partial \mathbf{p}}\delta\mathbf{p} + \frac{\partial a}{\partial \lambda}\delta\lambda \\ &= a_0 + 2\Delta\mathbf{p}^t\delta\mathbf{p} + 2\Delta\lambda\ \delta\lambda\ \psi^2\mathbf{f}_e^t\mathbf{f}_e = 0, \end{aligned} \tag{2.37}$$

onde

$$\mathbf{K}_t = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{p}}, \tag{2.38}$$

$$\mathbf{q} = \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda}, \tag{2.39}$$

$$\frac{\partial a}{\partial \mathbf{p}} = 2\Delta \mathbf{p}^t \frac{\partial \Delta \mathbf{p}}{\partial \mathbf{p}} = 2\Delta \mathbf{p}^t \delta \mathbf{p}, \tag{2.40}$$

$$\frac{\partial a}{\partial \lambda} = 2\Delta\lambda\delta\lambda\psi^2 \mathbf{f}_e^t \mathbf{f}_e \frac{\partial \Delta\lambda}{\partial \lambda} = 2\Delta\lambda\delta\lambda\psi^2 \mathbf{f}_e^t \mathbf{f}_e. \tag{2.41}$$

No caso particular da equação (2.36), o valor de $\mathbf{q}$ é calculado a partir da equação (2.30) e obtém-se que $\mathbf{q} = \mathbf{f}_e$.

Finalmente, combinando a equação (2.36) e a equação (2.37) para resolver $\delta\mathbf{p}$ e $\delta\lambda$, o sistema não-linear estendido pode ser escrito como

$$\begin{pmatrix} \delta\mathbf{p} \\ \delta\lambda \end{pmatrix} = -\begin{bmatrix} K_t & -\mathbf{q} \\ 2\boldsymbol{\Delta}\mathbf{p}^t & 2\Delta\lambda\,\psi^2 \mathbf{f}_e^t \mathbf{f}_e \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ a_0 \end{pmatrix} \tag{2.42}$$

A equação (2.42) pode ser resolvida usando técnicas iterativas convencionais para obter a solução do ponto de equilíbrio, $(\delta\mathbf{p}, \delta\lambda)$. O procedimento resultante é conhecido como método consistente. Porém, a matriz de rigidez expandida dentro dos colchetes na equação (2.42) não é simétrica nem em banda. Este problema pode ser superado adotando o esquema não consistente onde o sistema original expandido pode ser resolvido a cada iteração, e a equação (2.42) é substituída pelas seguintes equações,

$$\begin{bmatrix} K_t^{(k)} & -\mathbf{q} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta\mathbf{p}^{(k+1)} \\ \delta\lambda^{(k+1)} \end{pmatrix} = -\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{p}^{(k)}, \lambda^{(k)}) = -\boldsymbol{\Psi}^{(k)}, \tag{2.43}$$

$$\boldsymbol{\Delta}\mathbf{p}^{(k+1)^t} \boldsymbol{\Delta}\mathbf{p}^{(k+1)} + \Delta\lambda^{(k+1)^2} \psi^2 \mathbf{f}_e^t \mathbf{f}_e = \Delta l^2, \tag{2.44}$$

onde $K_t^{(k)} = K_t(\mathbf{p}^{(k)})$.

A solução da equação (2.43) e equação(2.44) converge para a mesma solução de equilíbrio $(\delta\mathbf{p}, \delta\lambda)$ da equação (2.42). A diferença entre o método consistente e o método não consistente é que no método consistente ambas equações, a equação de equilíbrio (2.30) e a equação de restrição (2.31) são linearizadas de uma maneira consistente com procedimentos iterativos, então a equação de restrição não é satisfeita ao longo do processo de iteração até que a

solução seja alcançada, enquanto o método não consistente força a equação de restrição a ser satisfeita a cada iteração, uma vez que a equação de restrição não é linearizada.

O processo para resolver a equação através do método não-consistente começa na equação (2.43) onde o vetor de deslocamento iterativo, $\delta\mathbf{p}^{(k+1)}$, pode ser obtido como

$$\delta\mathbf{p}^{(k)} = -{K_t^{(k)}}^{-1}\mathbf{\Psi}^{(k)} + \delta\lambda^{(k)}{K_t^{(k)}}^{-1}\mathbf{q} \tag{2.45}$$

A equação (2.45) pode ser reescrita como

$$\delta\mathbf{p}^{(k)} = \delta\bar{\mathbf{p}}^{(k)} + \delta\lambda^{(k)}\delta\mathbf{p}_t^{(k)}, \tag{2.46}$$

onde $\delta\bar{\mathbf{p}}^{(k)}$ é o vetor de deslocamento iterativo que seria o resultado de um algoritmo convencional de carregamento controlado (Newton-Raphson, Newton-Raphson modificado etc) a um valor $\delta\lambda^{(k)}$ fixo de carga, i.e.,

$$\delta\bar{\mathbf{p}}^{(k)} = {K_t^{(k)}}^{-1}\mathbf{\Psi}^{(k)}, \tag{2.47}$$

e $\delta\mathbf{p}_t^{(k)}$ é o vetor de deslocamento que também corresponde à carga fixa $\mathbf{f}_e$ conhecido como solução tangencial

$$\delta\mathbf{p}_t^{(k)} = {K_t^{(k)}}^{-1}\mathbf{q}. \tag{2.48}$$

Tendo determinado a expressão para o vetor de deslocamento iterativo, $\delta\mathbf{p}^{(k)}$, onde $\delta\lambda^{(k)}$, ainda é desconhecido, é possível escrever o novo deslocamento incremental $\Delta\mathbf{p}^{(k+1)}$ como

$$\Delta\mathbf{p}^{(k+1)} = \Delta\mathbf{p}^{(k)} + \delta\mathbf{p}^{(k)}. \tag{2.49}$$

A substituição da equação (2.46) na equação (2.49) leva a,

$$\Delta\mathbf{p}^{(k+1)} = \Delta\mathbf{p}^{(k)} + \delta\bar{\mathbf{p}}^{(k)} + \delta\lambda^{(k)}\delta\mathbf{p}_t^{(k)}, \tag{2.50}$$

na qual $\delta\lambda^{(k)}$ é a única incógnita.

O fator de carregamento incremental pode ser escrito similarmente como

$$\Delta\lambda^{(k+1)} = \Delta\lambda^{(k)} + \delta\lambda^{(k)}. \tag{2.51}$$

A substituição da equação (2.50) na equação de restrição (2.31) conduz a equação quadrática escalar

$$a\delta\lambda^{(k)^2} + b\delta\lambda^{(k)} + c = 0, \tag{2.52}$$

onde

$$\begin{aligned} a &= \delta\mathbf{p}_t^{(k)^t}\delta\mathbf{p}_t^{(k)} + \psi^2\mathbf{f}_e^t\mathbf{f}_e \\ b &= 2\delta\mathbf{p}_t^{(k)^t}(\Delta\mathbf{p}^{(k)} + \delta\bar{\mathbf{p}}^{(k)}) + 2\Delta\lambda^{(k)}\psi^2\mathbf{f}_e^t\mathbf{f}_e \\ c &= (\Delta\mathbf{p}^{(k)} + \delta\bar{\mathbf{p}}^{(k)})^t(\Delta\mathbf{p}^{(k)} + \delta\bar{\mathbf{p}}^{(k)}) - \Delta l^2 + \Delta\lambda^{(k)^2}\psi^2\mathbf{f}_e^t\mathbf{f}_e. \end{aligned}$$

O fator de carregamento $\delta\lambda^{(k)}$ pode ser determinado pela escolha da raiz apropriada na equação quadrática (2.52). A raiz correta normalmente é escolhida computando ambas as soluções,

$$\Delta\mathbf{p}_1^{(k+1)} = \Delta\mathbf{p}^{(k)} + \delta\bar{\mathbf{p}}^{(k)} + \delta\lambda_1^{(k)}\delta\mathbf{p}_t^{(k)}, \tag{2.53}$$

$$\Delta\mathbf{p}_2^{(k+1)} = \Delta\mathbf{p}^{(k)} + \delta\bar{\mathbf{p}}^{(k)} + \delta\lambda_2^{(k)}\delta\mathbf{p}_t^{(k)}, \tag{2.54}$$

e escolhendo a solução que tem o menor ângulo entre $\Delta\mathbf{p}_{1,2}^{(k+1)}$ e $\Delta\mathbf{p}^{(k)}$, i.e., o máximo cosseno do ângulo dado pela equação

$$cos\theta = \frac{\Delta\mathbf{p}_{1,2}^{(k+1)}\Delta\mathbf{p}^{(k)}}{\Delta l^2}. \tag{2.55}$$

Experiências numéricas revelaram que alguns critérios extras devem ser utilizados para se alcançar uma boa confiabilidade (Ferreira e Serpa, 2002). É necessário conferir se o sinal da raiz escolhida pelo primeiro critério do ângulo mínimo, $\delta\lambda_i^{(k+1)}$ tem o mesmo sinal do determinante da rigidez tangente, $|K_t|$. Se não, deve-se escolher a outra raiz, $\delta\lambda_j^{(k+1)}$ $j \neq i$.

Tendo alcançado o fator de carregamento iterativo $\delta\lambda^{(k)}$, o deslocamento iterativo, $\delta\mathbf{p}^{(k)}$, deve ser computado através de equação (2.46). Então o deslocamento incremental é computado através de equação (2.49) e o fator de carregamento incremental pela equação (2.51).

Quando o deslocamento incremental, equação (2.49), e o fator de carregamento incremental, equação (2.51), são acrescentados ao deslocamento e ao nível de carregamento do ponto convergido anterior, $(\mathbf{p}^{(k)}, \lambda^{(k)}\mathbf{f}_e)$, conduz ao ponto $(\mathbf{p}^{(k+1)}, \lambda^{(k+1)}\mathbf{f}_e)$. Repetindo este procedimento e usando critérios de convergência para parar o processo, alcança-se o próximo ponto convergido que está localizado na intersecção da equação de restrição com o traçado da equação de equilíbrio.

### 2.5.4 Comprimento Automático do Raio

O tamanho do raio usado no método *arc-length* é um ponto crucial para se alcançar um método robusto. Uma vez que o preditor foi obtido e a direção é determinada, deseja-se que só uma solução permaneça naquela direção. Se o raio for muito grande, é possível que exista mais de uma solução ao longo do caminho, o que significa que a equação de restrição cruzou com outras porções do traçado da solução. Por outro lado se o raio escolhido for muito pequeno, o custo computacional para obtenção do caminho da solução é muito caro. Uma técnica simples foi proposta por (Crisfield, 1997), onde o raio incremental é determinado pela seguinte equação

$$\Delta l^{(k+1)} = \Delta l^{(k)} \left( \frac{I_d}{I^{(k)}} \right) \tag{2.56}$$

na qual $\Delta l^{(k+1)}$ e $\Delta l^{(k)}$ são os raios incrementais nas iterações $k+1$ e $k$, $I_d$ é o número de iterações desejadas e $I^{(k)}$ é o número de iterações requeridas na iteração $(k)$.

O controle do raio, conduz à pequenos incrementos quando a resposta for não-linear e incrementos maiores quando a resposta for linear. Embora este controle tenha trabalhado muito bem para os testes realizados, (Ferreira e Serpa, 2002; Martins, 2002), existem ainda certas deficiências no controle de problemas com mudanças súbitas na trajetória da solução (Riks, 1984; Bellini e Chulya, 1987).

### 2.5.5 Estimativa Inicial do Comprimento do Raio

A necessidade de calcular o raio inicial $\Delta l$ vem do fato que o usuário normalmente tem uma pequena idéia da magnitude apropriada a ser escolhida. Então um método deve ser

aplicado para estimar um raio inicial compatível com o carregamento aplicado. Um valor inicial satisfatório pode ser obtido pela especificação de um incremento de carregamento $\Delta\lambda$, e pelo cálculo do passo de Newton $\delta p$ de um ponto inicial conhecido $(\mathbf{p}^{(0)}, \lambda^{(0)}\mathbf{f}_e)$ como mostrado a seguir

$$\delta\mathbf{p} = [K_t^{(0)}]^{-1}\Psi(\mathbf{p}^{(0)}, \lambda^{(0)} + \boldsymbol{\Delta}\lambda). \tag{2.57}$$

Finalmente o comprimento do raio inicial pode ser calculado por

$$\Delta l = \sqrt{\delta\mathbf{p}^t\delta\mathbf{p}}. \tag{2.58}$$

A estimativa do incremento do carregamento inicial $\Delta\lambda$ pode ser feita pela avaliação das características físicas do problema (Ferreira e Serpa, 2002).

### 2.5.6 Resolvendo o Fator de Carregamento Complexo

O incremento do fator de carregamento calculado na equação (2.52) pode produzir raízes reais ou complexas. Quando as raízes forem complexas, significa que a equação de restrição do *arc-length* falhou na determinação do próximo incremento do fator de carregamento sobre a restrição. Para prevenir este tipo de falha, (Murray, 1994; Ferreira e Serpa, 2002) propuseram um fator de relaxamento para minimizar o problema. Experiências mostraram que aplicando este método de relaxamento para muitos graus de liberdade minimiza-se a falha mas o problema ainda persiste. A estratégia adotada por (Crisfield, 1997) de reduzir o raio e reiniciar o processo à partir do último ponto convergido trabalhou muito bem para todos os casos testados por (Ferreira e Serpa, 2002).

## 2.6 Equação de Impedância

Depois de descrever a força de excitação, a força não-linear e a resposta pelos seus respectivos componentes harmônicos fundamentais, é possível reescrever a equação (2.9) no domínio da freqüência como

$$[M]\{-\omega^2 X^1\} + [C]\{i\omega X^1\} + i[D]\{X^1\} + [K]\{X^1\} + \{\mathcal{F}_{kl}^1\} = \{F\}. \tag{2.59}$$



UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

A equação (2.59) pode ser escrita na forma de impedância como

$$[Z(\omega, X^1)]\{X^1\} = \{F\} \tag{2.60}$$

onde:

$$[Z(\omega, X^1)] = [[K] - [M]\omega^2 + i\omega[C] + i[D] + [\Theta(X^1)]^1] \tag{2.61}$$

e

$$\{\mathcal{F}_{kl}^1\} = [\Theta]_{kl}^1 \{X_{kl}^1\}, \tag{2.62}$$

como mostrado na equação (2.23).

## 2.7 Resposta em Freqüência de Estruturas Não-Lineares

A análise no domínio da freqüência de estruturas não-lineares é caracterizada por um conjunto de respostas em freqüência (RFs) que pode ser definido como quantidades dependentes da freqüência calculadas a partir da relação entre a resposta e a força de excitação harmônica. Para estruturas não-lineares, a resposta em freqüência exibe duas diferenças principais quando comparada à definição para um sistema linear. A primeira diferença é que a resposta total de um sistema não-linear no domínio do tempo é representada no domínio da freqüência por uma seqüência de funções de resposta em freqüência ao invés de apenas uma função como no caso linear. Quanto mais fortes as não-linearidades, mais funções de resposta em freqüência serão necessárias para melhor representar a resposta total. Por outro lado, para uma ampla classe de não-linearidades a maior parte dos efeitos dominantes está contida nas chamadas respostas em freqüência de primeira, segunda e terceira ordem e estas são freqüentemente suficientes para caracterizar o sistema precisamente (Sanliturk et al., 1997; Vinh e Liu, 1989). A segunda diferença é que cada resposta em freqüência é função de múltiplas variáveis, mesmo para um sistema sujeito a uma única excitação e resposta. Esta característica aumenta a dificuldade da análise de estruturas não-lineares.

## 2.8 Resposta em Freqüência de Primeira Ordem

Conceitualmente, as respostas em freqüência (RF) de primeira ordem são uma extensão das funções de resposta em freqüência (FRF) de estruturas lineares para estruturas não-lineares. No caso de uma excitação senoidal pura, a resposta em freqüência de primeira ordem de uma estrutura não-linear é definida como a relação espectral da resposta $x_i$ e da força $f_j$ à freqüência de excitação, $\omega$, escrita como:

$$H_{ij}^{11}(\omega, F_j^1) = \frac{X_i^1(\omega, F_j^1)}{F_j^1(\omega)} \tag{2.63}$$

Neste caso, apenas o componente da freqüência fundamental da resposta $x$ composta de $r$ harmônicas é usado e todas as sub-harmônicas, super-harmônicas e combinações de ambas são ignoradas.

## 2.9 Resposta em Freqüência Não-Linear Usando o *Arc-Length*

Para aplicar o método *arc-length* na obtenção da resposta em freqüência não-linear é necessário escolher a variável a ser controlada. Neste caso, a variável a ser controlada é a freqüência. Então, a freqüência $\omega$ será substituída por $\lambda\omega$ na equação (2.60) que conduz a uma equação escrita na forma residual como

$$\Psi(X^1, \lambda\omega) = [Z(X^1, \lambda\omega)]\{X^1\} - \{F\} \tag{2.64}$$

onde:

$$[Z(X^1, \lambda\omega)] = [[K] - [M]\lambda^2\omega^2 + i\lambda\omega[C] + i[D] + [\Theta(X^1)]^1] \tag{2.65}$$

Com o resíduo determinado em função do deslocamento e as variáveis de freqüência especificadas, $(X^1, \lambda\omega)$, é possível aplicar o método *arc-length* descrito na seção 2.5.

# Capítulo 3

# Considerações Experimentais

## 3.1 Descrição da Bancada

A estrutura estudada neste trabalho é uma alavanca de transmissão mecânica (figura 3.1) montada em uma bancada (figura 3.2) que simula uma montagem com folga. As não-linearidades localizadas investigadas são não-linearidades estruturais causadas por atrito e por folga.

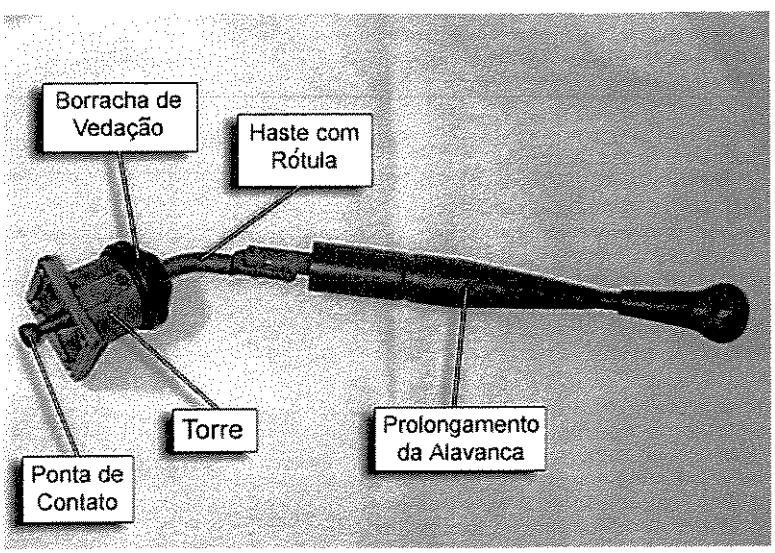



Figura 3.1: Conjunto da alavanca de transmissão mecânica

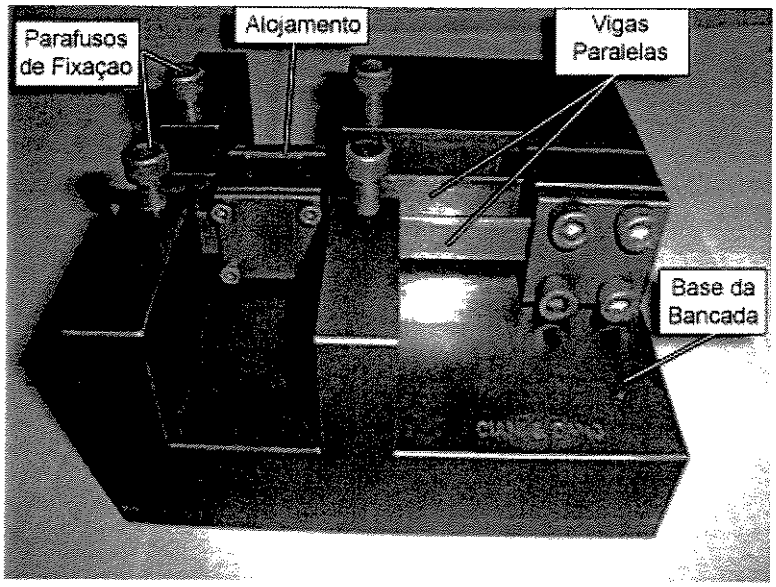



Figura 3.2: Bancada e parafusos de fixação da torre da alavanca de transmissão

A bancada é composta por um alojamento montado em vigas paralelas que simula uma folga de montagem e rigidez de contato. As vigas paralelas estão engastadas na base da bancada e vibram solidariamente unidas pelo alojamento. A torre da alavanca de câmbio é fixada na bancada por quatro parafusos e a ponta de contato da alavanca fica dentro do alojamento onde será simulada a folga. Para simplificar os modelos numéricos, optou-se por retirar as borrachas de vedação da torre da alavanca, considerando apenas os efeitos da folga com rigidez de contato e do atrito da rótula da alavanca em sua torre.

A figura 3.3 mostra a haste com rótula que é montada dentro da torre da alavanca de transmissão mecânica. Nesta figura pode ser visto a rótula, onde ocorre o atrito com a torre da alavanca, a ponta de contato e dois furos passantes onde são fixados os parafusos que unem a haste ao prolongamento da alavanca. Na figura 3.1 tem-se a montagem do conjunto da alavanca de transmissão mecânica, com a haste com rótula e o prolongamento da alavanca montadas na torre com as borrachas de vedação.

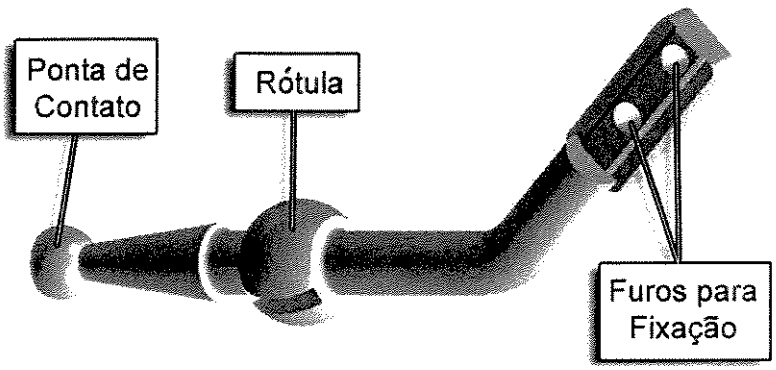



Figura 3.3: Haste com rótula - componente da alavanca de transmissão mecânica

## 3.2 Técnicas de Excitação

Técnicas apropriadas de excitação devem ser escolhidas com o objetivo de estudar os sistemas não-lineares. Existem três métodos de excitação muito usados na análise de vibrações: periódico, aleatório e transiente.

### 3.2.1 Excitação Senoidal

A excitação senoidal é uma das técnicas de excitação periódica mais comumente aplicada para obtenção de funções de resposta em freqüência devido a sua precisão. A função de resposta em freqüência é obtida através de uma excitação harmônica estacionária. Para cada freqüência, a força aplicada é uma onda senoidal de amplitude constante. Quando a resposta alcança a condição de regime permanente são feitas as análises espectrais da excitação e da resposta. Para estruturas lineares, quando a excitação é uma senóide, a resposta também é uma senóide com a mesma freqüência da excitação mas com diferentes fase e magnitude. Assim, para o caso linear, apenas uma componente do espectro de freqüência é extraída a cada ponto de freqüência. Porém, para sistemas não-lineares, mesmo quando a excitação é um seno puro, a resposta é composta de um número de componentes em freqüência, tais como harmônicas e freqüências de intermodulação. Neste caso, a primeira e as mais altas funções de resposta em freqüência podem ser calculadas usando a idealização matemática da série

de Volterra ou medindo aproximadamente a resposta em freqüência (RF) definida de muitas maneiras diferentes. Esta última opção, se definida corretamente, pode conter informações úteis sobre as características do sistema.

A grande vantagem de uma excitação senoidal está relacionada com sua natureza de selecionar uma freqüência. Neste caso, o nível da força de excitação pode ser precisamente controlado, uma característica que se torna muito importante para um levantamento bem sucedido de funções de resposta em freqüência de estruturas não-lineares (Storer e Tomlinson, 1993) devido ao fato que a excitação harmônica revela as distorções das RFs nas regiões de ressonância para diferentes níveis de força. A excitação harmônica também revela as respostas sub-harmônicas e super-harmônicas que são manifestações claras de comportamento não-linear. Além disso, as medidas podem ser concentradas onde elas são requeridas, tendo incrementos diferentes de freqüência em diferentes faixas de freqüência. Por exemplo, próximo das ressonâncias e anti-ressonâncias as RFs exibem mudanças rápidas, onde um pequeno incremento de freqüência é recomendado. Por outro lado, longe das regiões de ressonância e anti-ressonância, a variação é muito lenta e um incremento maior em freqüência pode ser usado. Além disso, a relação sinal-ruído é geralmente boa uma vez que a energia está concentrada em uma freqüência, e as respostas na mesma freqüência, nas harmônicas e intermodulações podem ser calculadas pela média por um processo de integração.

Podem ser usadas duas condições diferentes para se obter a resposta em freqüência de sistemas não-lineares. A primeira é manter a amplitude da força constante para toda faixa de freqüência de excitação. Esta técnica permite observar a distorção da resposta em freqüência tais como o fenômeno de "salto" quando o nível de entrada é incrementado. A segunda consiste em manter a amplitude da resposta constante para toda faixa de freqüência de excitação. Nesta condição, a resposta em freqüência obtida tem a aparência de uma função de resposta em freqüência de um sistema linear. Isto permite a aplicação de técnicas padrões de análise modal para obtenção de algumas características linearizadas do sistema.

A principal desvantagem da técnica de excitação senoidal é que o tempo gasto para obter uma resposta em freqüência típica é maior que o requerido pelas outras técnicas geralmente usadas. Isto está relacionado ao fato que a excitação é feita freqüência por freqüência e, a

cada freqüência, um intervalo de tempo é imposto ao processo de modo a permitir que o sistema alcance a resposta permanente antes de começar a aquisição. Entretanto, às vezes a medida correta da resposta em freqüência é mais importante que o tempo gasto durante o procedimento. Normalmente, quando o objetivo é melhorar o modelo analítico usando a correlação dos dados analíticos com os dados experimentais, quanto mais precisa a RF obtida experimentalmente, melhor é o modelo analítico derivado.

### 3.2.2 Excitação por Impacto

A excitação por impacto é uma técnica de excitação muito popular e conveniente para estruturas mecânicas. Esta popularidade é devida principalmente à simplicidade do método de excitação que o faz muito adaptável para uma gama extensa de condições experimentais. A excitação por impacto pode ser produzida usando um martelo instrumentado com um transdutor de força no qual uma ponta de impacto é montada. Quando a estrutura for excitada pelo martelo, é transferida energia à estrutura em um período muito curto de tempo. O processo de medida das funções de resposta em freqüência começa com a aquisição dos sinais da força e da resposta devido ao impacto. As aquisições no domínio do tempo são convertidas ao domínio da freqüência aplicando a transformada de Fourier. Por causa das restrições impostas pela análise de Fourier, podem ocorrer problemas de vazamento ("leakage") no sinal de resposta. Se a resposta não tender para próximo de zero no final do intervalo de aquisição, um "janelamento"exponencial pode ser aplicado para reduzir o vazamento ("leakage") . Então a resposta em freqüência é obtida dividindo o espectro da resposta pelo espectro da excitação.

A forma do sinal da força depende do tipo de ponta do martelo, da massa do martelo e das características dinâmicas da estrutura investigada. Como a largura da banda de freqüência do espectro da força é determinado pela duração do impulso, estas características determinarão a freqüência superior de corte do sinal de excitação. Uma alta rigidez da ponta do martelo e da estrutura causam um pulso estreito e alargam a extensão da faixa de freqüência. Um aumento de massa no martelo alarga o pulso da força baixando a freqüência de corte e aumentando o nível de força de excitação. As vantagens do teste de impacto estão relacionadas com o pouco tempo gasto para obter a resposta em freqüência devido à necessidade de serem

calculadas apenas poucas médias e pela facilidade de se aplicar este teste em campo. Porém, a desvantagem de excitação por impacto vem do fato que a largura da banda de excitação tem um controle limitado, baixa energia de excitação e uma baixa relação sinal-ruído.

Infelizmente uma força de impacto raramente pode ser usada em estruturas não-lineares por causa da inconstância na duração da excitação e na força dos impactos e do baixo nível RMS do sinal produzido devido à breve duração da excitação. Isto significa que o nível de energia aplicado pode ser de difícil controle e os níveis dos mais altos picos podem extenuar o sistema e intensificar sua resposta não-linear. Além disso, o baixo valor RMS pode levar a relações sinal-ruído pobres do sinal medido. Porém, este tipo de excitação já foi aplicado para identificar não-linearidades simples e localizadas (Frachebourg, 1991) e também já foi usado para medir RFs de segunda ordem de estruturas não-lineares usando-se um martelo elétrico de impacto especial (Chouychai e Vinh, 1986; Chouychai e Vinh, 1987).

### 3.2.3 Discussão de Diferentes Técnicas de Excitação

Como mencionado anteriormente, existem várias técnicas de excitação disponíveis para testes de vibração em estruturas, entre elas três tipos principais de excitação dos quais duas foram apresentadas. Cada um destes métodos tem suas vantagens e desvantagens, e a escolha da técnica adequada fica mais importante quando se trata da análise de estruturas não-lineares.

Para estruturas lineares, como todos os tipos de excitação deveriam resultar na mesma RF, a escolha da excitação, entre outras coisas, está relacionada com a aplicação do teste, tempo disponível para a análise e qualidade requerida dos dados. Para estruturas não-lineares, é importante perceber que estas estruturas respondem de modo diferente a diferentes tipos de excitação. Então a escolha da excitação é dependente da análise requerida da estrutura. Se a preocupação principal for primeiro entender e diagnosticar características de vibração estruturais, então a excitação por impacto pode ser considerada. Por causa de suas características de simplicidade e adaptação, o teste de impacto provê um modo simples e rápido de entender como uma determinada estrutura se comporta dinamicamente. Quando o modelamento dinâmico de estruturas não-lineares for o interesse principal, a preocupação primária

será extrair um modelo linear do sistema que se comporte dinamicamente o mais semelhante possível ao sistema não-linear. A excitação aleatória pode ser uma técnica eficiente neste caso por causa de suas características de considerar os efeitos das não-linearidades como um erro sistemático de resposta. Então a função de resposta em freqüência obtida dará uma "melhor"aproximação linear ao sistema. Por outro lado, se a preocupação principal é investigar as não-linearidades, como a espacial, modal ou como o modelo de resposta de uma estrutura não-linear mudará para diferentes níveis de vibração, a técnica de excitação senoidal é o procedimento mais apropriado por causa do controle do nível de força de excitação que esta técnica possibilita.

## 3.3 Considerações Práticas de Medidas das Propriedades das Respostas em Freqüência de Estruturas Não-lineares

No caso onde respostas em freqüência de estruturas não-lineares para diferentes níveis de resposta de vibração serão medidas, a excitação senoidal é fortemente recomendada. Porém, a escolha da excitação é só o primeiro passo para obtenção da função de resposta em freqüência. Ainda existem vários problemas práticos que precisam ser considerados cuidadosamente para se alcançar uma medida bem sucedida de resposta em freqüência.

A maioria das medidas das Respostas em Freqüência que usam excitação senoidal exige um gerador de função para gerar um sinal senoidal, um excitador eletromagnético para excitar a estrutura de teste, um amplificador de potência para aplicar o sinal senoidal do gerador de função no excitador, uma haste flexível para transmitir a força de excitação à estrutura, um transdutor de força para medir a força de excitação e acelerômetros para medir as respostas estruturais. Os sinais de excitação e resposta são adquiridos e então processados por um analisador espectral digital que executa os cálculos das RFs. Teoricamente, a aquisição da RF usando o sistema de medida descrito deveria ser direto. Porém, na prática, assegurar medidas de boa qualidade de respostas em freqüência estruturais requer a consideração por inteiro de muitos outros aspectos do sistema de medida. Muitos tipos de erros, que podem afetar a precisão das medidas, estão relacionados com os transdutores, condicionadores de

sinais, condições de contorno, excitadores eletromagnéticos, amplificadores de potência e hastes flexíveis. A escolha do sistema de medida adequado é uma parte importante do planejamento. Após a obtenção de algumas RFs da estrutura de teste, é uma boa prática conferir se existem erros comumente relacionados à instalação dos instrumentos, local de excitação, instalação do excitador e medidas das respostas (Ewins, 1984).

A conexão entre o excitador e a estrutura através da haste flexível pode ser uma fonte de erros. Idealmente a haste deveria ter uma alta rigidez na direção axial e ser muito flexível nas direções transversais. Em situações práticas, isto pode ser difícil de alcançar e a haste geralmente apresentará alguma rigidez em suas direções transversais, introduzindo formas secundárias de excitações não desejadas tais como momentos e forças em outras direções que agirão no transdutor de força e na estrutura. Isto causará erros nas RFs medidas. Vários estudos relacionados com o modelo analítico deste problema (Han, 1995; Hieber, 1988) como também algumas soluções (Anderson, 1990; Brillhart et al., 1993; Lee e Chou, 1993) podem ser encontradas. Este problema normalmente pode ser minimizado por um dimensionamento apropriado da haste flexível (Anderson, 1990; Hieber, 1988).

A interação entre o excitador eletromagnético e a estrutura pode ser outra fonte de erro. Erros atribuídos à impedância entre o excitador eletromagnético e a estrutura podem ser eliminados ou significativamente reduzidos estudando a interação entre o excitador e a estrutura (McConnell e Varoto, 1994; Olsen, 1986; Rao, 1987), e decidindo então por uma escolha apropriada do excitador. Em resumo, o excitador deveria ser escolhido tal que a massa e as características de rigidez fossem desprezíveis com respeito à massa generalizada e às características de rigidez da estrutura de teste.

Outro problema relacionado ao excitador eletromagnético é que a força aplicada para um sistema próximo da ressonância pode variar consideravelmente. Teoricamente, quando uma tensão senoidal é aplicada no excitador por um amplificador, o excitador deveria gerar uma força harmônica semelhante à tensão no transdutor de força. Isto é devido ao fato que embora o campo magnético do excitador seja não-linear, é assumido que ele é linear para pequenas amplitudes de vibração da armadura. Porém, na prática, quando a estrutura de teste entra em ressonância os deslocamentos tornam-se relativamente grandes e a aplicação

de força do excitador na estrutura tende a ficar muito pequena. Na condição de ressonância o movimento da armadura no campo magnético é não-linear e com isto harmônicas mais altas estarão presentes na força de excitação (Tomlinson, 1979). Deve ser dada ênfase que se a estrutura de teste é teoricamente linear a função de resposta em freqüência é independente da variação do espectro de força de excitação. De qualquer maneira, resultados experimentais confiáveis podem ser obtidos aplicando técnicas de filtragem para as harmônicas não desejadas (Ewins, 1984). Muitos instrumentos comerciais incluem esta característica. Por outro lado, se a estrutura for não-linear, este problema é acentuado por causa da interação do excitador com a estrutura e outras harmônicas podem ser predominantes na força de excitação devido à resposta não-linear da estrutura. Então a RF medida com esta força poderá apresentar problemas quando usada em procedimentos analíticos (Tomlinson, 1987). Realmente, todo o trabalho teórico relativo à resposta harmônica forçada de sistemas não-lineares assume uma excitação harmônica simples com um nível de força constante como sendo a força de excitação. Conseqüentemente a força externa deveria ser ajustada para assegurar uma força constante de excitação harmônica pura. Isto requer um algoritmo não-linear de controle de força robusto.

## 3.4 Determinação dos Parâmetros do Modelo de Atrito

Para investigação do comportamento dinâmico da alavanca de transmissão mecânica foi desenvolvido um modelo que considera os efeitos não-lineares de atrito e folga. Tanto o modelo de atrito quanto o modelo de folga utilizados neste trabalho são modelos que usam o método da função descritiva que lineariza as não-linearidades para definir uma função de transferência que relaciona as componentes fundamentais da entrada e da saída.

O modelo de atrito utilizado foi o modelo de macro e microdeslizamento de Ren apresentado na subseção 2.2.2. Para poder aplicar o modelo de atrito no modelo dinâmico da alavanca de transmissão mecânica, é necessário conhecer alguns parâmetros que definem a forma da histerese descrita pelo modelo de Ren. Estes parâmetros são:

- $K \Rightarrow$ coeficiente de rigidez da junta de atrito;

- $a \Rightarrow$ coeficiente do máximo deslocamento elástico;
- $b \Rightarrow$ coeficiente da diferença entre o microdeslizamento e elementos bilineares.

Para estimar os coeficientes do modelo de atrito foram feitas medidas experimentais na alavanca de câmbio. Com base nos dados experimentais, através de técnicas de otimização de parâmetros e da utilização de um modelo dinâmico simplificado da estrutura estudada, chegou-se aos valores estimados dos coeficientes do modelo de atrito de maneira indireta.

### 3.4.1 Modelo da Haste da Alavanca

O modelo simplificado utilizado para representar a estrutura estudada é descrito pela equação (3.1) e pode ser visto esquematicamente na figura 3.4.

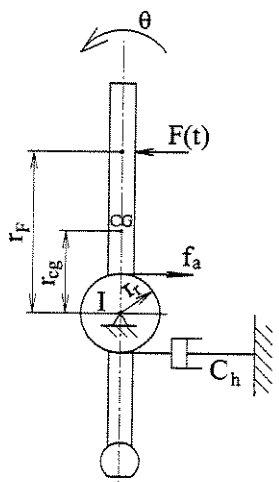



Figura 3.4: Modelo da haste da alavanca de transmissão considerando os efeitos de atrito

$$I\ddot{\theta} + C_T\dot{\theta} + f_a r_r - P r_{cg}\theta = F(t) r_F \tag{3.1}$$

onde:

$$C_T = C_h r_r^2 \tag{3.2}$$

Na tabela 3.1 são apresentados os parâmetros usados na equação (3.1). A força de atrito $f_a$ representada pelo modelo de Ren e o coeficiente de amortecimento viscoso $C_T$ são os

Tabela 3.1: Parâmetros da equação (3.1)

| | | |
|---|---|---|
| $F(t)$ | $\Rightarrow$ | $[N]$ força de excitação externa; |
| $r_f$ | $\Rightarrow$ | $0,0175[m]$ raio de aplicação da força em relação à rótula; |
| $P$ | $\Rightarrow$ | $5,2[N]$ peso da haste da alavanca; |
| $C_T$ | $\Rightarrow$ | $[Nms/rad]$ amortecimento viscoso torcional; |
| $f_a$ | $\Rightarrow$ | $[N]$ força de atrito; |
| $r_{cg}$ | $\Rightarrow$ | $0,030[m]$ raio do centro de gravidade da haste em relação à rótula; |
| $I$ | $\Rightarrow$ | $2,5 \times 10^{-3}[kgm^2]$ momento de inércia da alavanca em relação à rótula. |

parâmetros a serem determinados. A força $F(t)$ é uma força de excitação periódica conhecida experimentalmente, assim como os sinais da aceleração $\ddot{\theta}$, da velocidade $\dot{\theta}$ e do deslocamento angular $\theta$.

### 3.4.2 Montagem Experimental para Determinação dos Parâmetros do Modelo de Atrito

Nesta montagem experimental para determinação dos parâmetros do modelo da força de atrito, foi usada uma haste de alavanca de transmissão mecânica ligeiramente diferente da apresentada na seção 3.1. A haste utilizada (figura 3.5) faz uso da mesma torre da haste da seção 3.1, tento as mesmas dimensões de rótula. O uso desta haste reta facilitou a montagem experimental e a obtenção das características do modelo de atrito, que são as mesmas para ambas as hastes.

A figura 3.6 representa esquematicamente a montagem experimental utilizada. Nesta configuração, o computador PC (2) controla o experimento através de uma placa GPIB que está conectada ao BERAN 402 (3), que é um analisador espectral com gerador de sinal. Nos canais do BERAN estão ligados os cabos que vem dos condicionadores de sinal (5) e (6) dos sensores, no caso, do acelerômetro (14), do transdutor de força (10) e do sensor de deslocamento (13). O BERAN também gera o sinal de excitação que é enviado ao amplificador de sinal (7) do excitador eletromagnético (8). Um osciloscópio digital (4) foi usado para observar os sinais provenientes dos sensores e do gerador de sinal. O transdutor de força (10)

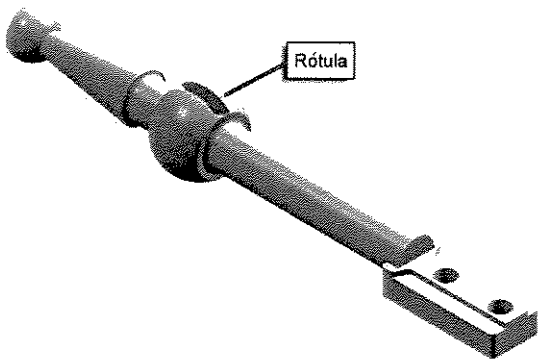



Figura 3.5: Haste reta com rótula

e o acelerômetro (14) foram fixados na haste ou alavanca reta (12) e o sensor de deslocamento (13) está montado em um suporte que o faz ficar posicionado como indicado na figura do esquema de montagem experimental. Este detalhe da montagem pode ser observado na figura 3.7. A haste flexível (11) transmite o sinal de excitação do excitador (8) ao transdutor de força e este para a estrutura.

O computador (2) utiliza o programa INCA$^{++}$ (ver seção 3.7) para fazer o controle do experimento. O programa INCA$^{++}$ no computador (2) controla qualquer canal num nível de sinal desejado. Quando o valor de controle do canal monitorado esta dentro dos limites estabelecidos no programa e a freqüência de excitação atinge valores inteiros, o computador (2) envia um sinal para que o analisador espectral AE100 (1) efetue a aquisição no domínio do tempo dos sinais dos sensores (10), (13) e (14). Este ciclo continua até que o programa faça a varredura em freqüência especificada ou pare automaticamente por algum critério de segurança previsto no INCA$^{++}$ com o propósito de preservar os equipamentos envolvidos no ensaio. A tabela 3.2 relaciona todos os itens numerados na montagem experimental e a figura 3.8 apresenta uma visão geral da montagem experimental.

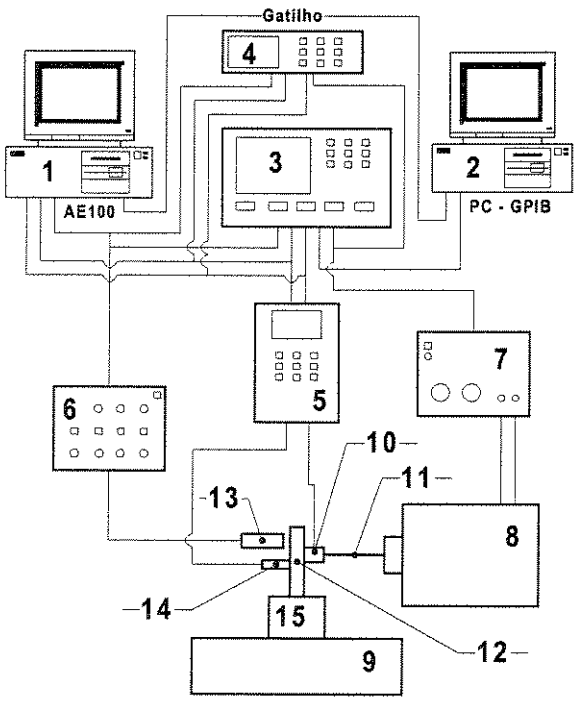



Figura 3.6: Montagem experimental para medida da histerese

Tabela 3.2: Itens enumerados na montagem experimental

| | | |
|---|---|---|
| **1** | $\Rightarrow$ | Analisador espectral AE100 |
| **2** | $\Rightarrow$ | Computador PC com placa GPIB |
| **3** | $\Rightarrow$ | BERAN 402 - Frequency Response Analyser |
| **4** | $\Rightarrow$ | Osciloscópio digital HP54501A-100MHz |
| **5** | $\Rightarrow$ | Condicionador de sinal Kistler type 5134 |
| **6** | $\Rightarrow$ | Condicionador de sinal do sensor de deslocamento |
| **7** | $\Rightarrow$ | Amplificador de potência Brüel&Kjaer type 2706 |
| **8** | $\Rightarrow$ | Excitador eletromagnético Brüel&Kjaer type 4809 |
| **9** | $\Rightarrow$ | Base da bancada |
| **10** | $\Rightarrow$ | Transdutor de força PCB mod. 208A02 s.n. 10494 sens. 12,284$[mV/N]$ |
| **11** | $\Rightarrow$ | Haste flexível (*stinger*) - $\phi 1,20[mm] \times 65[mm]$ em aço |
| **12** | $\Rightarrow$ | Haste reta com rótula |
| **13** | $\Rightarrow$ | Sensor de deslocamento sens. $5,0[V/mm]$ |
| **14** | $\Rightarrow$ | Acelerômetro PCB mod. 353B68 s.n. 16034 sens. 108,9$[mV/g]$ |
| **15** | $\Rightarrow$ | Torre da alavanca de transmissão mecânica |

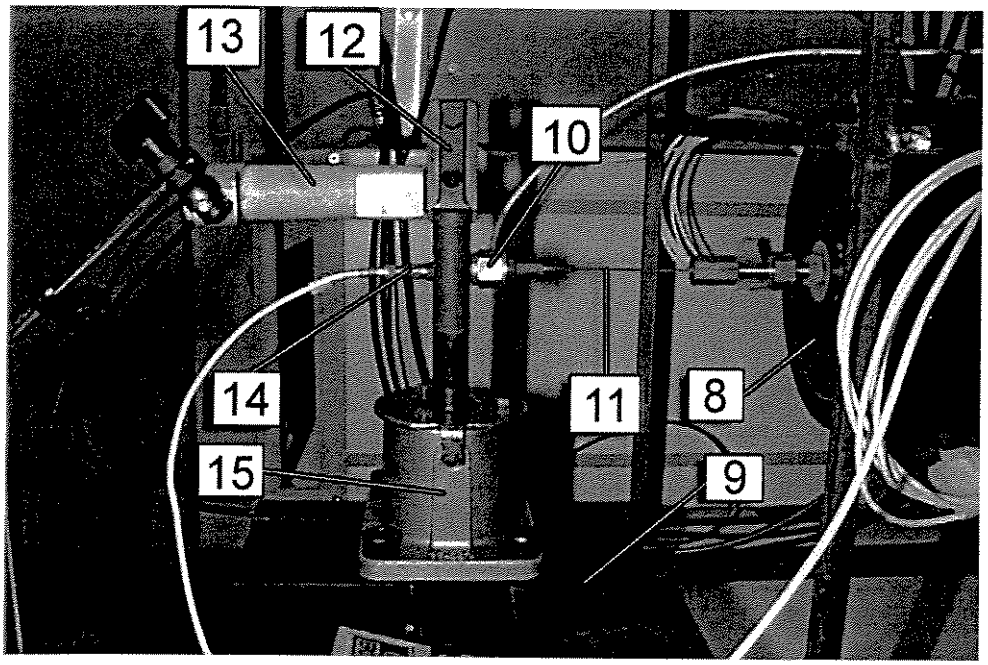



Figura 3.7: Posicionamento dos sensores

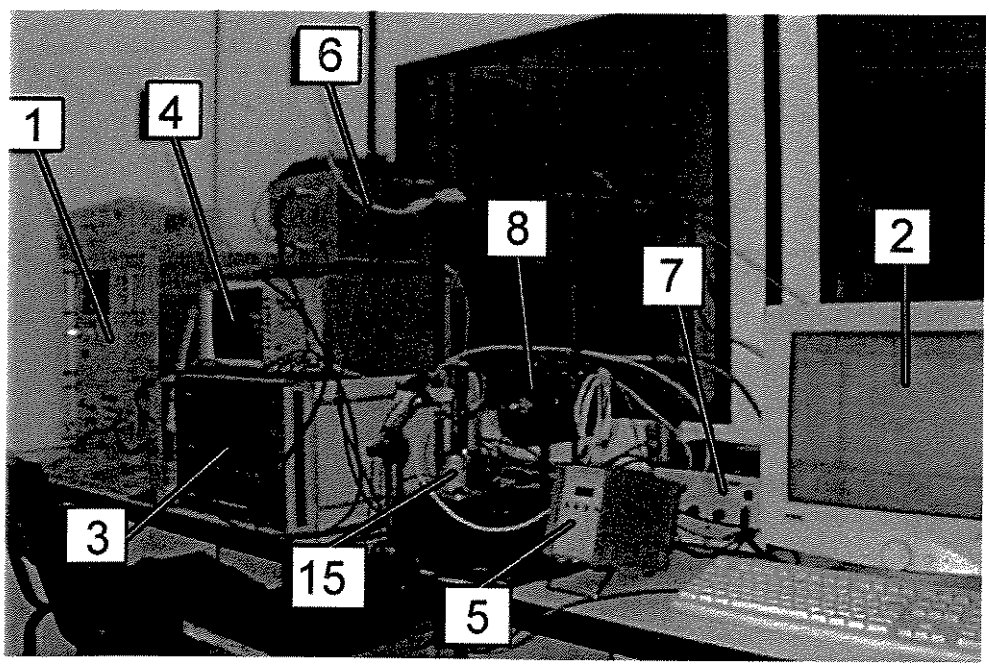



Figura 3.8: Visão geral da montagem experimental

### 3.4.3 Caracterização Experimental e Ajuste do Modelo de Atrito

Uma vez adotado o modelo que representa a haste da alavanca de transmissão mecânica, descrito pela equação (3.4), foi necessário fazer um levantamento experimental das características dinâmicas da estrutura real. Os dados experimentais obtidos nos experimentos são sinais no domínio do tempo dos canais do acelerômetro, do transdutor de força e do sensor de deslocamento, como mostram os exemplos da figura 3.10.

Na obtenção dos sinais, foram executados experimentos que controlavam o canal da força e experimentos que controlavam o canal do deslocamento. Os canais relativos a força e ao deslocamento foram controlados para facilitar a investigação dos resultados, uma vez que o modelo de atrito de Ren (Ren, 1992) fornece uma função de transferência que relaciona deslocamento com força de atrito. Ao todo, para investigação deste modelo e levantamento de seus parâmetros, foram feitas 3000 aquisições de sinais semelhantes aos apresentados na figura 3.10. Cada aquisição é uma medição com 512 pontos discretos no tempo em dois ciclos (dois períodos) dos sinais dos sensores de aceleração, de deslocamento e de força. Os sinais destes três canais foram adquiridos simultaneamente pelo analisador espectral AE100 toda vez que o computador que controlava o experimento enviava um sinal de "gatilho". As aquisições podem ser divididas em dois controles de canais, o controle do canal da força e do deslocamento. Para cada canal controlado foram feitas aquisições para três níveis ou valores de controle diferentes, e finalmente para cada valor de controle foram feitas 10 aquisições numa faixa de freqüência de $70\,Hz$ a $120\,Hz$ com incremento de $1\,Hz$.

A figura 3.9 representa o conjunto controle de medidas efetuados. O canal da força foi controlado em valores de zero-a-pico de $2,0\,N$; $3,1\,N$ e $4,1\,N$ e o canal relativo ao deslocamento em $0,8 \times 10^{-4}\,m$; $1,3 \times 10^{-4}\,m$ e $1,8 \times 10^{-4}\,m$.

Dos experimentos tem-se a aceleração $\ddot{\theta}$, o deslocamento $\theta$, a força $F(t)$ e através de integração numérica do sinal da aceleração tem-se a velocidade $\dot{\theta}$.

Uma vez feito o levantamento dos dados experimentais, é possível ajustar o modelo. Para fazer o ajuste foi utilizado o método dos mínimos quadrados (*lsqnonlin*) do *toolbox* de otimização (versão 2.1) do programa MATLAB R12.

A equação (3.1) foi ajustada para cada medição e o resultado deste ajuste são as estimati-

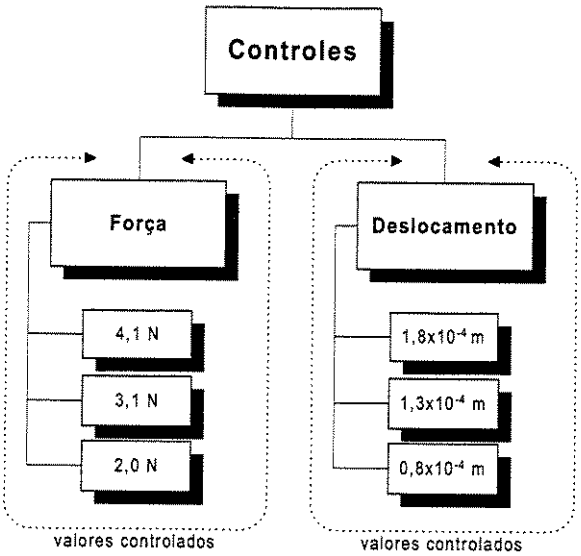


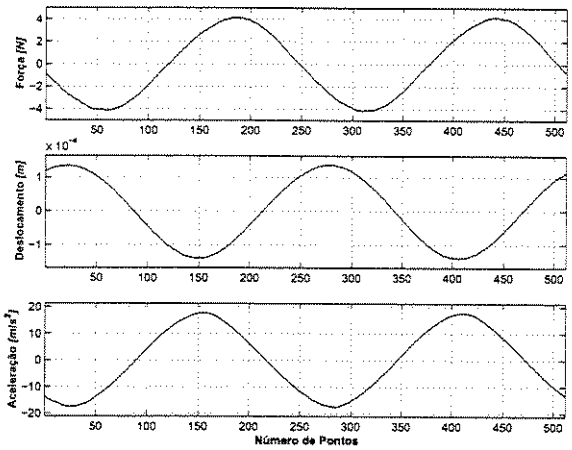

Figura 3.9: Controles experimentais

vas dos coeficientes $a$, $b$ e $K$ da força de atrito $f_a$ representada pelo modelo de Ren (subseção 2.2.2) e do coeficiente de amortecimento viscoso $C_T$. Para cada condição de controle foram feitas 10 tomadas de medidas com o objetivo de fazer uma média de parâmetros ajustados e verificar sua dispersão qualitativamente.

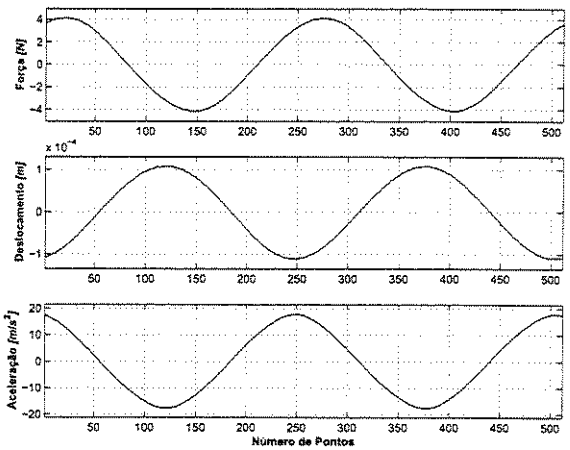
A figura 3.11 mostra exemplos das curvas experimentais e do modelo ajustadas em gráficos de deslocamento $\times$ força. Estas curvas foram calculadas com base nos sinais da figura 3.10 com controle do canal da força em $4,1\,N$ zero-a-pico.

Aplicando o procedimento de ajuste para todo conjunto de dados obtém-se uma tendência de variação dos parâmetros, como apresentados nas figuras 3.12 e 3.13. Estas duas figuras estão na forma de gráfico de barra de erros, que representa o valor médio, máximo e mínimo dos coeficientes $a$, $b$ , $K$ e $C_T$ para cada ajuste de modelo ao longo da faixa de freqüência medida.

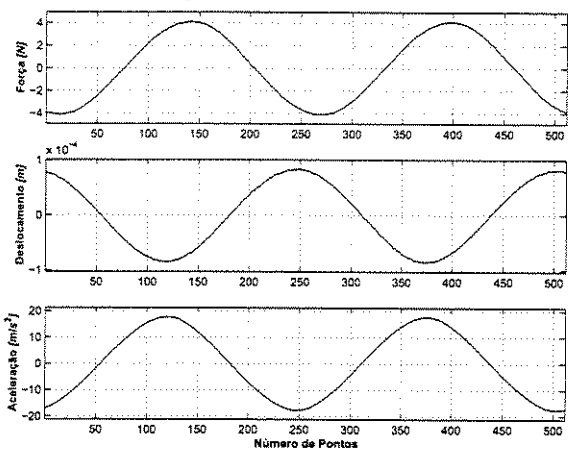
A figura 3.12 mostra os valores ajustados para os experimentos com controle de força em $4,1\,N$ zero-a-pico, onde o valor do coeficiente $a$ pode ser avaliado apenas para freqüências abaixo de $93\,Hz$. A rigidez $K$ e o coeficiente de amortecimento $C_T$ estão caracterizados para toda faixa de freqüência estudada, mas o coeficiente $b$ não foi ajustado com sucesso. Já a figura 3.13 que mostra os valores ajustados dos experimentos com controle de deslocamento



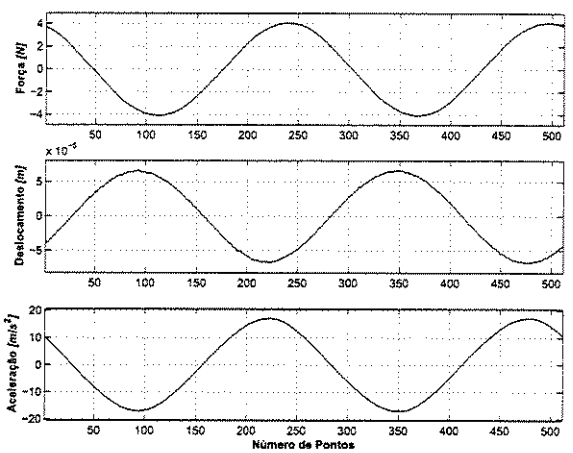

Freqüência de 70 $Hz$



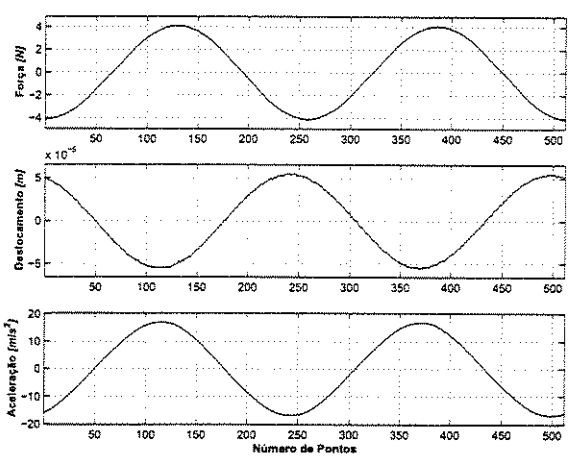

Freqüência de 80 $Hz$



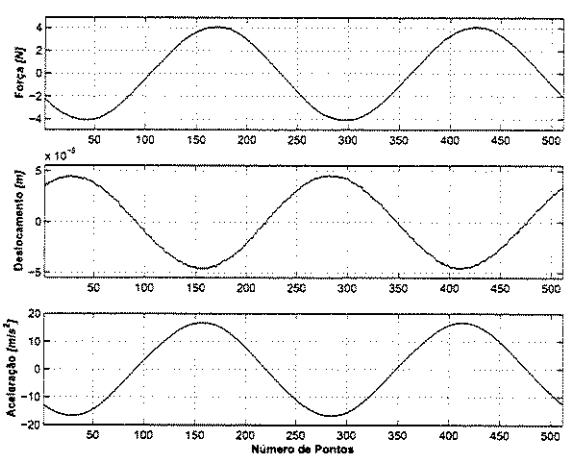

Freqüência de 90 $Hz$




Freqüência de 100 $Hz$

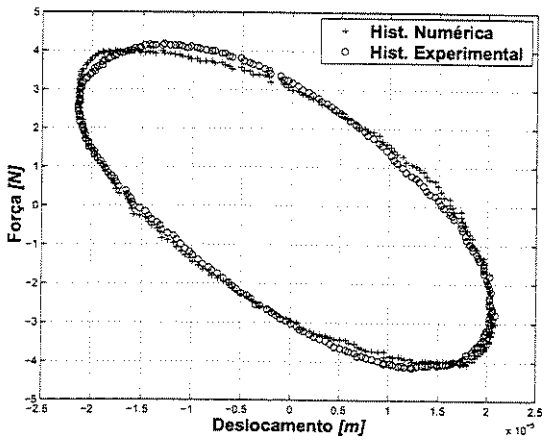



Freqüência de 110 $Hz$

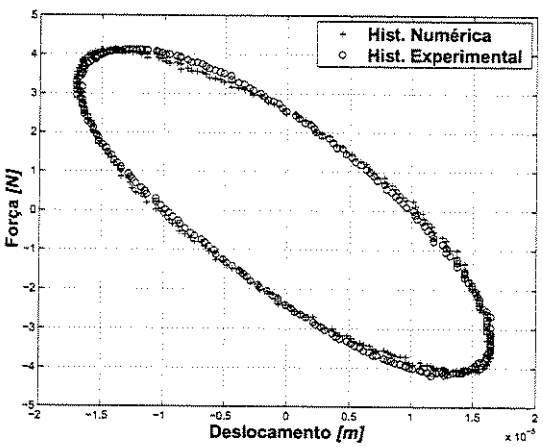



Freqüência de 120 $Hz$

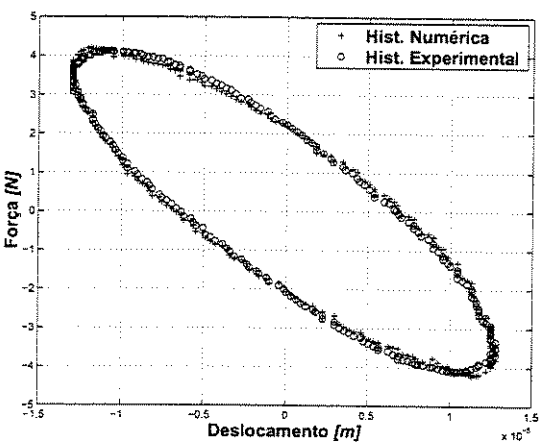
Figura 3.10: Controle do canal da força = 4.1 $N$



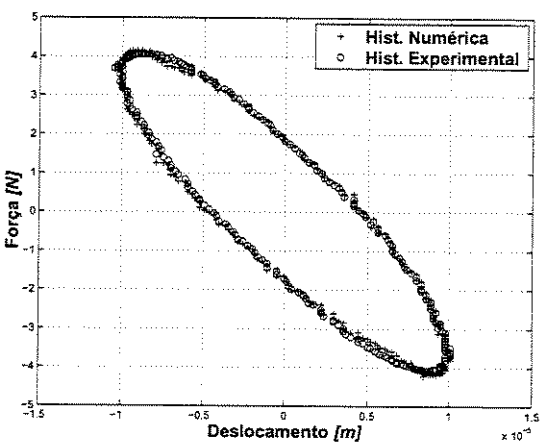

Freqüência de $70\,Hz$



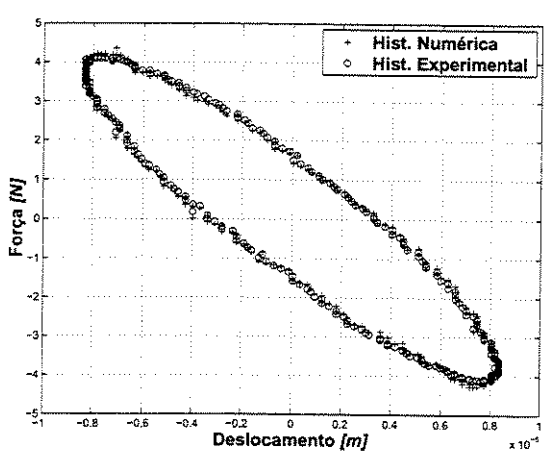

Freqüência de $80\,Hz$



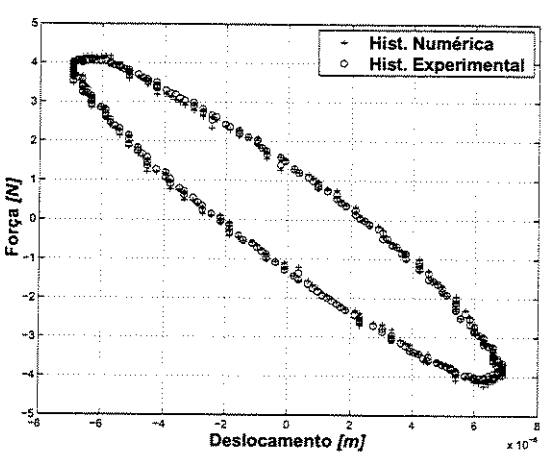

Freqüência de $90\,Hz$




Freqüência de $100\,Hz$




Freqüência de $110\,Hz$




Freqüência de $120\,Hz$

Figura 3.11: Modelo ajustado - controle de força $= 4.1\,N$

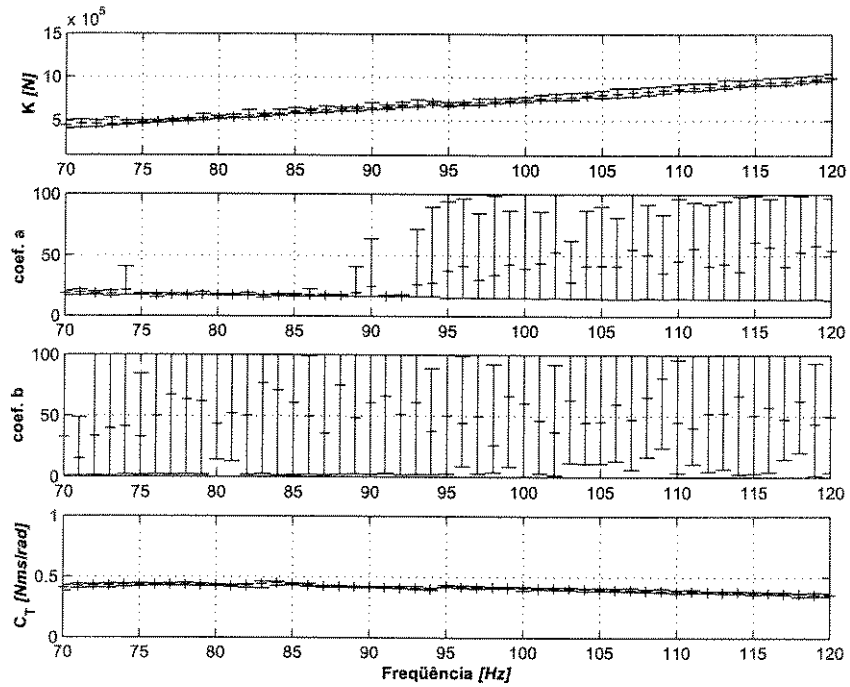



Figura 3.12: Parâmetros ajustados - $4,1\,N$

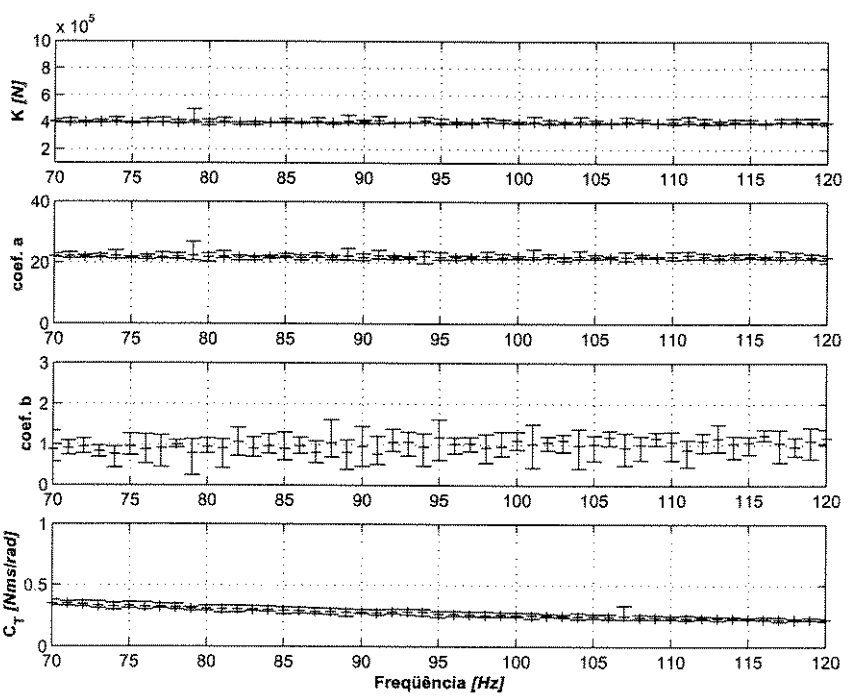



Figura 3.13: Parâmetros ajustados - $1,8 \times 10^{-4}\,m$

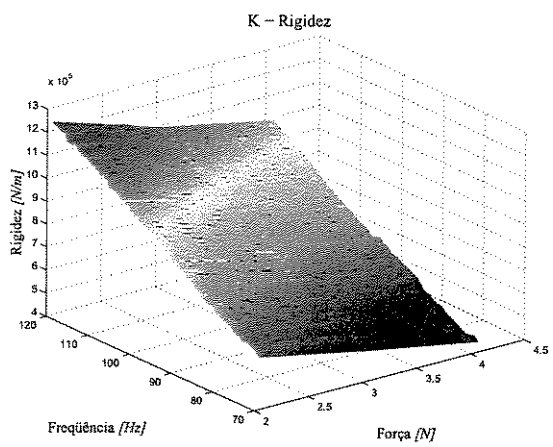



Figura 3.14: $K$ - controle da força

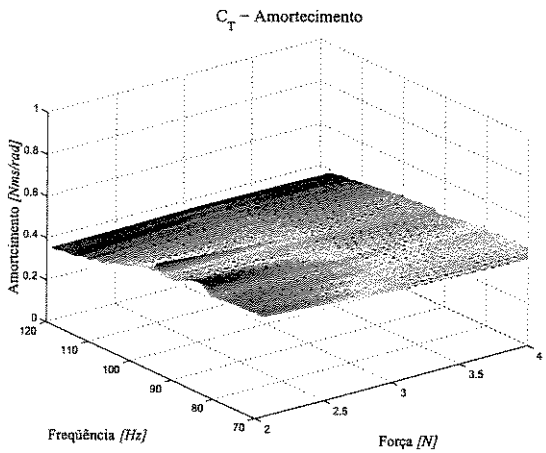



Figura 3.15: $C_T$ - controle da força

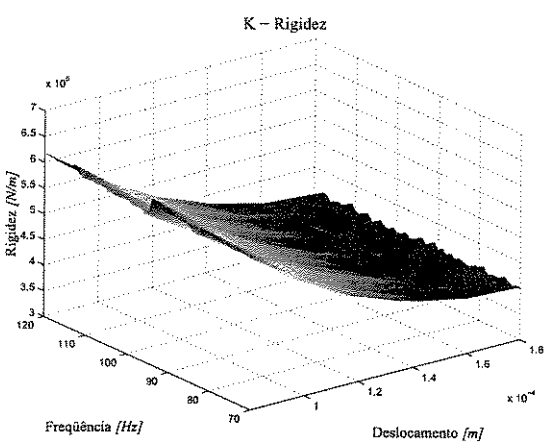



Figura 3.16: $K$ - controle do deslocamento

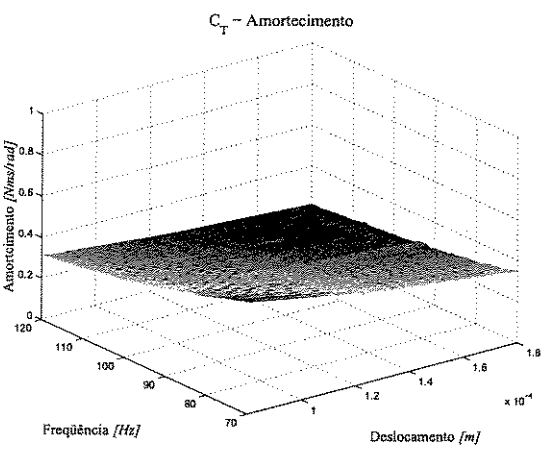



Figura 3.17: $C_T$ - controle do deslocamento

em $1,8 \times 10^{-4}\, m$ zero-a-pico, onde todos os parâmetros ou coeficientes a serem determinados foram bem caracterizados, embora o coeficiente $b$ apresente uma maior dispersão de valores se comparados ao demais.

Dos experimentos realizados, pôde-se observar que quanto maior o deslocamento ou força de controle imposta, menos disperso ficavam os parâmetros ajustados do modelo.

Com os três níveis de controle feitos para cada canal (força e deslocamento), levantou-se o comportamento dos parâmetros ajustados em freqüência $\times$ amplitude de controle (força ou deslocamento) $\times$ parâmetro ajustado, como pode ser visto nas figuras 3.14, 3.15, 3.16 e 3.17.

Desses experimentos o resultado esperado era a obtenção de algum valor ou relação que representasse o comportamento dos coeficientes $a$, $b$ e $K$ do modelo de atrito e um valor para a coeficiente de amortecimento $C_T$, todos presentes na equação (3.1).

Como esperado, o coeficiente de amortecimento viscoso $C_T$ é aproximadamente constante (Ewins, 1984). Das figuras 3.18, 3.19 e 3.20 obtemos seu valor médio ($C_T = 0,42\, Nms/rad$).

Para os coeficientes do máximo deslocamento elástico $a$ e de transição entre macro e microdeslizamento $b$, adotou-se os valores adimensionais: $a = 21,9$ e $b = 1,0$, extraídos da figura 3.21.

Os valores dos coeficientes de rigidez do modelo de atrito adotados neste trabalho são obtidos por funções ajustadas nos gráficos das figuras 3.18, 3.19 e 3.20. As funções ajustadas para representar os coeficientes de rigidez do modelo de atrito empregado nos modelos da alavanca de transmissão mecânica são dadas pelas equações (3.3, 3.4 e 3.5).

$$K(f) = 12699f - 275225 \quad [N/m] \quad para \quad 2,0\, N \tag{3.3}$$

$$K(f) = 11451f - 291333 \quad [N/m] \quad para \quad 3,1\, N \tag{3.4}$$

$$K(f) = 11085f - 354018 \quad [N/m] \quad para \quad 4,1\, N \tag{3.5}$$

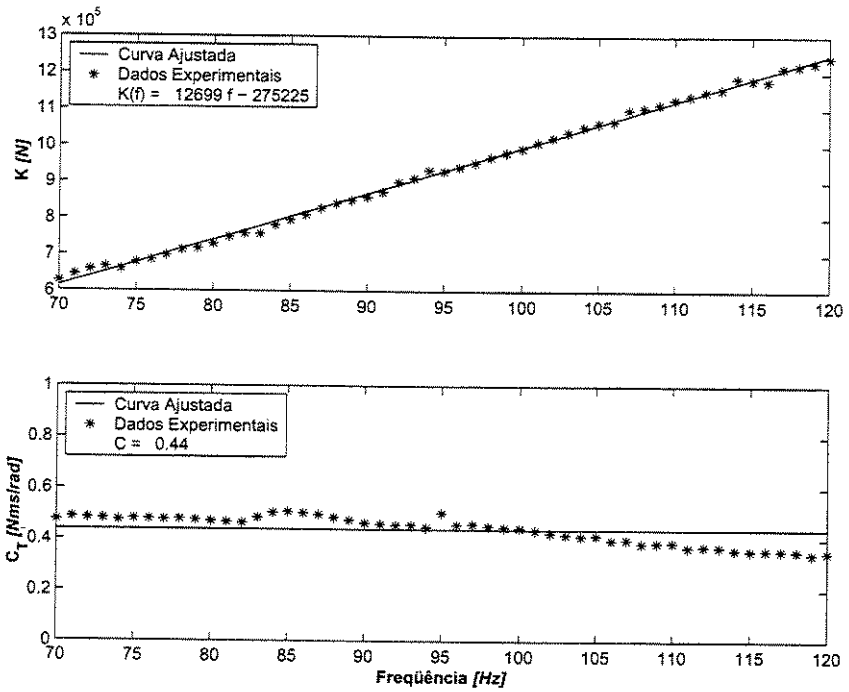



Figura 3.18: Ajuste de $K$ e $C_T - 2,0\,N$

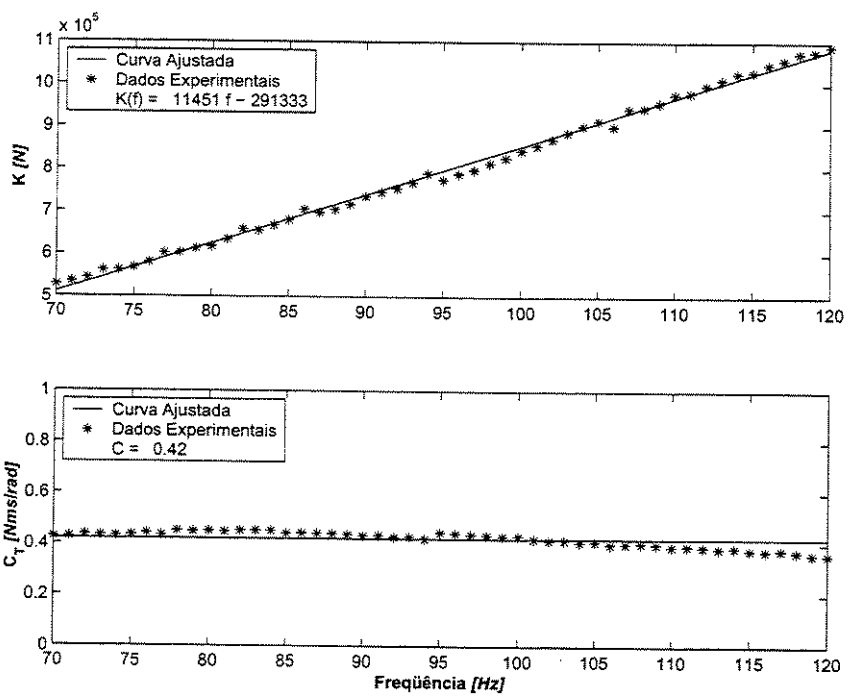



Figura 3.19: Ajuste de $K$ e $C_T - 3,1\,N$

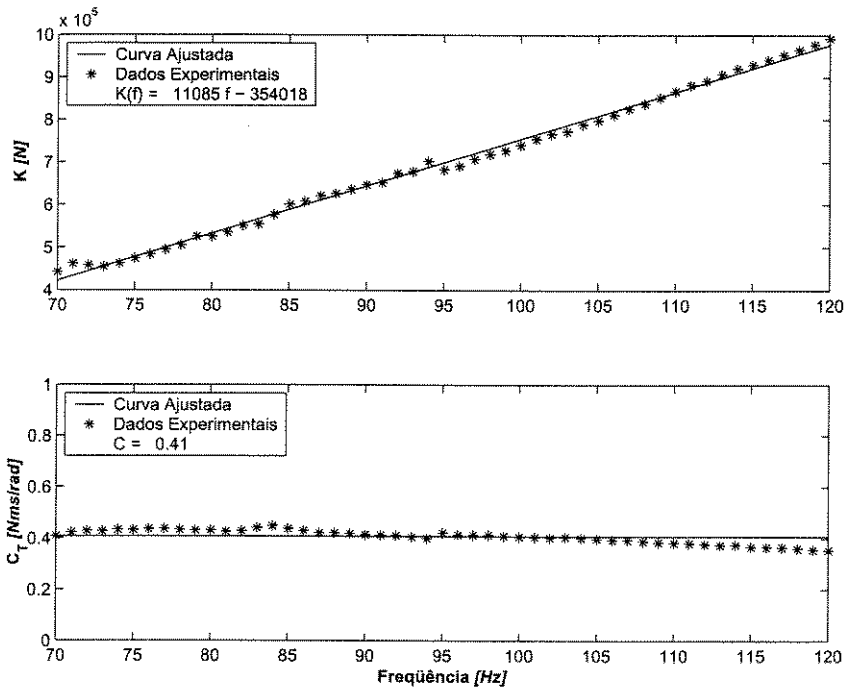



Figura 3.20: Ajuste de $K$ e $C_T - 4,1\,N$

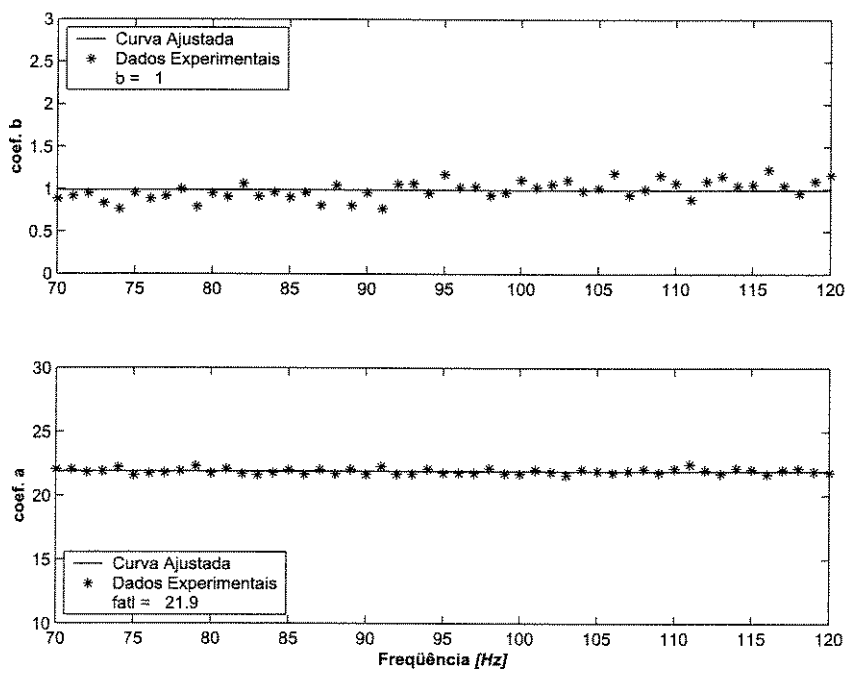



Figura 3.21: Ajuste de $a$ e $b$ - $1,8 \times 10^{-4}\,m$

## 3.5 Determinação da Rigidez das Vigas Paralelas da Bancada

Na determinação da rigidez das vigas paralelas (1) (ver figura 3.22) da bancada , foi montado um experimento simples que usa pesos padrões como carga, montados em um suporte para pesos padrões (2) fixado no alojamento (3). Com a adição de pesos padrões no suporte (2) o relógio comparador (5) com seu apalpador (4) sobre o alojamento (3) registrava os deslocamentos. A figura 3.22 mostra a montagem experimental, com o suporte do relógio comparador (6) montado sobre a base da bancada (7).

A figura 3.23 representa os valores obtidos experimentalmente e o ajuste de curva feito para obtenção do coeficiente angular da reta que representará a rigidez equivalente das vigas paralelas segundo a lei de Hooke. Na abscissa temos os valores dos deslocamentos medidos pelo relógio comparador e nas ordenadas o valor dos pesos padrões.

O valor da rigidez estática encontrada é de aproximadamente $111350\,N/m$.

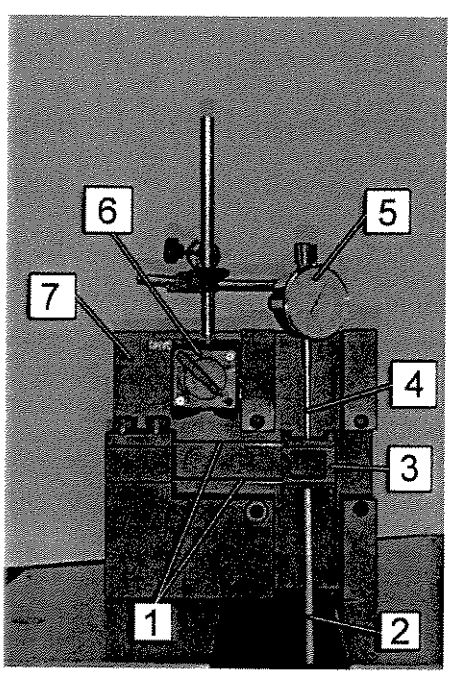



Figura 3.22: Montagem experimental para determinação da rigidez das vigas paralelas da bancada

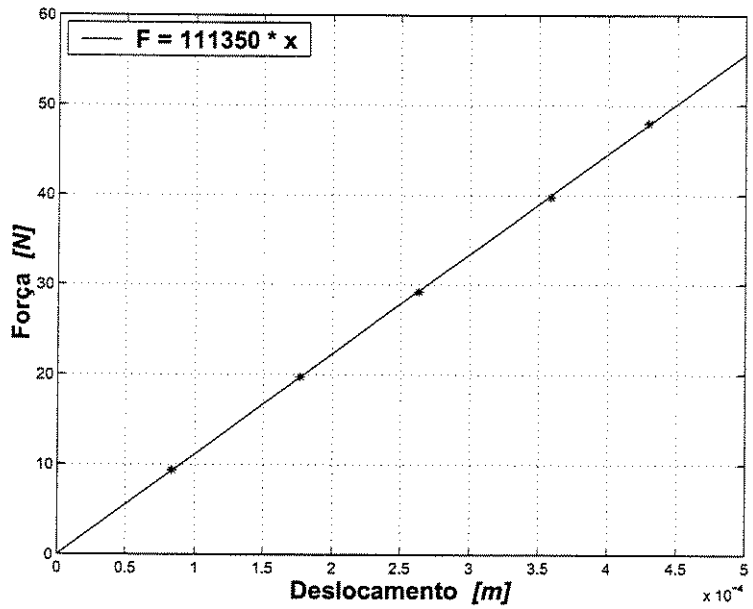



Figura 3.23: Rigidez estimada das vigas paralelas da bancada

## 3.6 Medidas de FRFs das Vigas Paralelas da Bancada e da Haste da Alavanca

### 3.6.1 Montagem Experimental

A montagem experimental para a obtenção das funções de resposta em freqüência (FRFs) das vigas paralelas da bancada (figura 3.24) e da haste reta da alavanca de câmbio (figura 3.25) são semelhantes e fizeram uso do mesmo conjunto de equipamentos.

A relação dos equipamentos utilizados nos experimentos é apresentada na tabela 3.3, que segue a numeração das figuras 3.24 e 3.25 das montagens experimentais.

Tabela 3.3: Equipamentos utilizados para obtenção das FRFs

| | | |
|---|---|---|
| **1** | $\Rightarrow$ | Computador PC |
| **2** | $\Rightarrow$ | Analisador de sinais HP35650 |
| **3** | $\Rightarrow$ | Condicionador de sinais PCB mod. 4825A05 |
| **4** | $\Rightarrow$ | Martelo de excitação por impacto instrumentado |
| **5** | $\Rightarrow$ | Transdutor de força PCB mod. 208A02 s.n. 10494 sens. 12,284$[mV/N]$ |
| **6** | $\Rightarrow$ | Acelerômetro PCB mod. 353B68 s.n. 16034 sens. 108,9$[mV/g]$ |

Na montagem experimental para obtenção da FRF das vigas paralelas da bancada (ver figura 3.24), foi utilizado um computador PC (1) ligado ao analisador de sinais HP (2). O martelo instrumentado (4) através de seu transdutor de força (5) e o acelerômetro (6) enviavam seus sinais para o condicionador de sinais (3), e o condicionador de sinais enviava as informações colhidas para o analisador (2). O acelerômetro (6) foi fixado no alojamento (8) que une as vigas paralelas (7) da base da bancada (9).

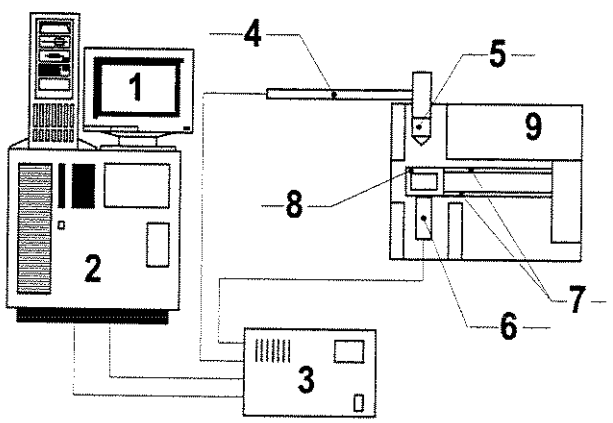



Figura 3.24: Montagem experimental para obtenção da FRF das vigas paralelas

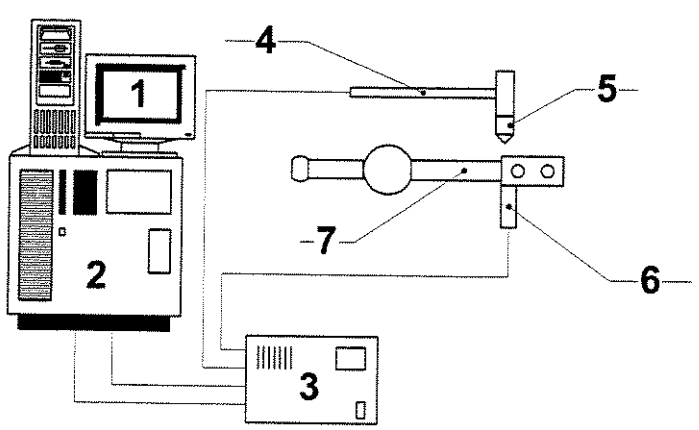



Figura 3.25: Montagem experimental para obtenção das FRFs da haste reta da alavanca

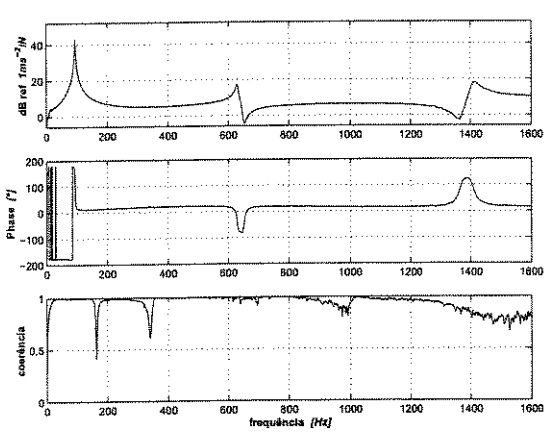
A montagem experimental para obtenção das FRFs da haste reta da alavanca de transmissão mecânica segue o esquema da figura 3.25. O transdutor de força (5) do martelo

instrumentado (4) e o acelerômetro (6) enviavam seus sinais para o condicionador de sinais (3) ligado ao analisador de sinais HP (2). Por fim, o analisador de sinais (2) enviava as informações a um computador PC (1) que manipulava os dados recebidos.

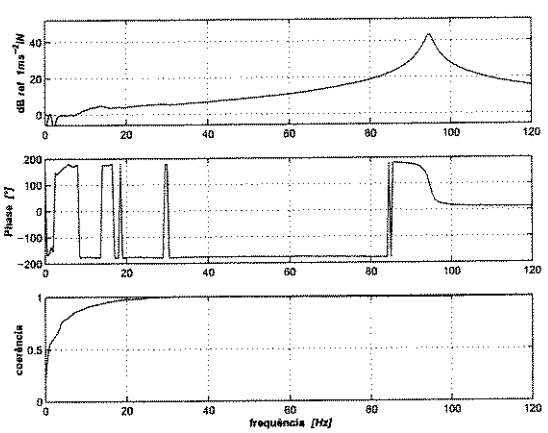
### 3.6.2 Medida de FRF para as Vigas Paralelas

A excitação foi efetuada através de impactos com o martelo (4) no alojamento (8) da base da bancada como indicado na figura 3.24. Para aquisição dos sinais foi utilizado o "janelamento" exponencial para a resposta e retangular para excitação. A FRF das vigas paralelas foi obtida através de uma média de 10 aquisições. O programa utilizado para aquisição foi o programa que acompanha o analisador de sinais da HP.

A figura 3.26 mostra a FRF obtida e sua função de coerência experimental. Um detalhe do primeiro pico da FRF mostra que o valor da primeira ressonância está próximo aos 97 $Hz$. A baixa coerência para faixa de freqüência acima de 600 $Hz$ pode ter sido causada devido ao tipo de ponta utilizada no martelo de excitação (ponta não suficientemente rígida).




FRF e coerência




Detalhe da FRF e coerência

Figura 3.26: FRF das vigas paralelas da bancada

### 3.6.3 FRFs para a Haste da Alavanca

Como na seção 3.6.2, neste experimento foram utilizados os "janelamentos" exponencial (resposta) e retangular (excitação), e as FRFs foram obtidas de 10 médias ou tomadas de medidas cada uma.

As FRFs da estrutura haste reta foram obtidas na condição "livre-livre". A figura 3.27 apresenta os pontos de excitação (1, 2, 3, 4 e 5) e o ponto de medida (4) das FRFs da estrutura de ensaio. Na figura 3.28 são apresentadas as FRFs medidas e suas funções de coerência, de onde se pode notar que a primeira freqüência de ressonância da haste reta está acima dos 1500 $Hz$.

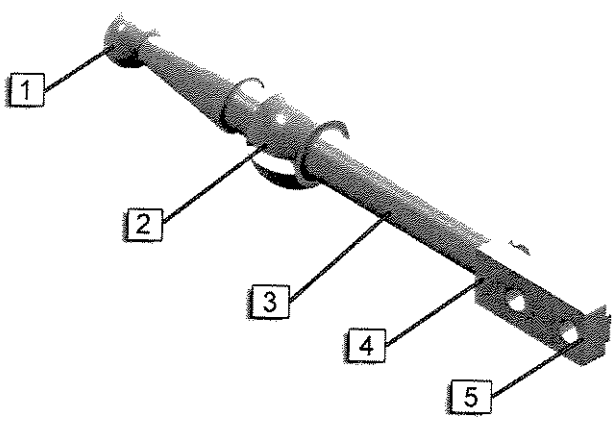
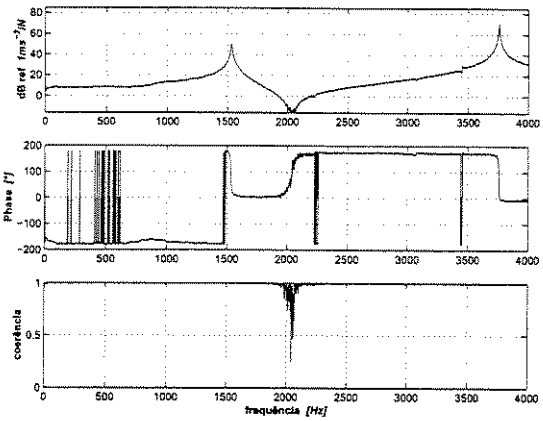
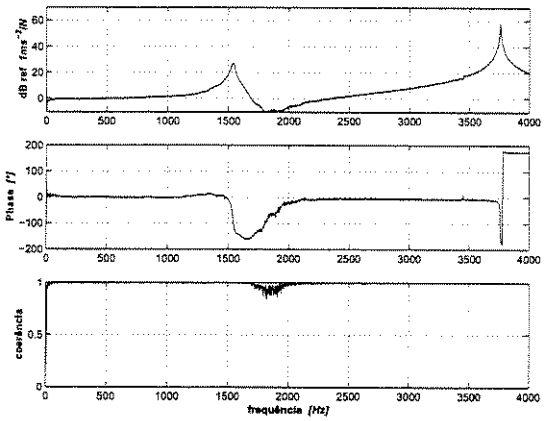


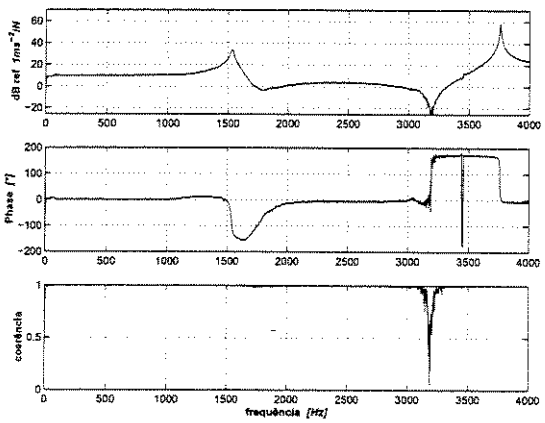

Figura 3.27: Pontos para obtenção das FRFs da haste reta da alavanca



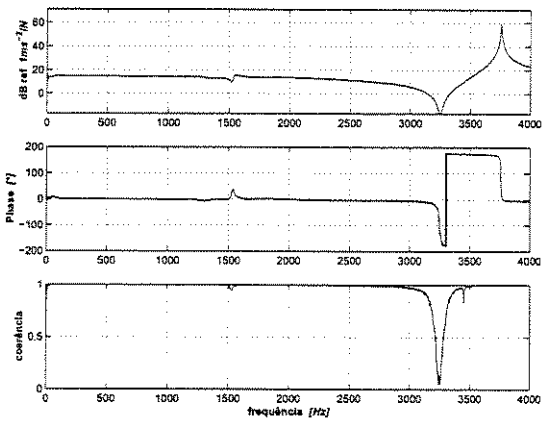

FRF(1,4)



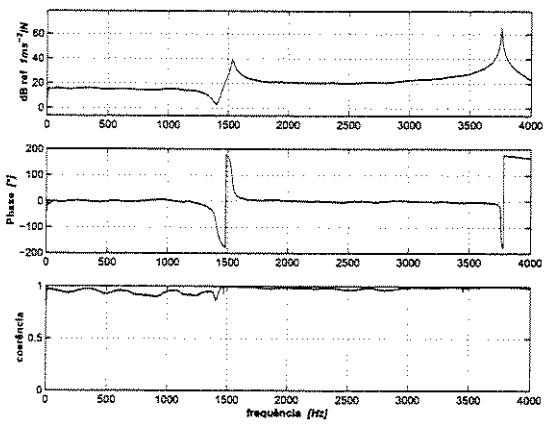

FRF(2,4)




FRF(3,4)




FRF(4,4)




FRF(5,4)

Figura 3.28: FRFs da haste reta da alavanca de transmissão mecânica

## 3.7 Montagem Experimental e Medidas de Respostas em Freqüência Não-Lineares da Bancada

### 3.7.1 Montagem Experimental

Para obtenção das respostas em freqüência da alavanca de transmissão mecânica foi montado um experimento que segue a descrição do esquema de montagem da figura 3.29.

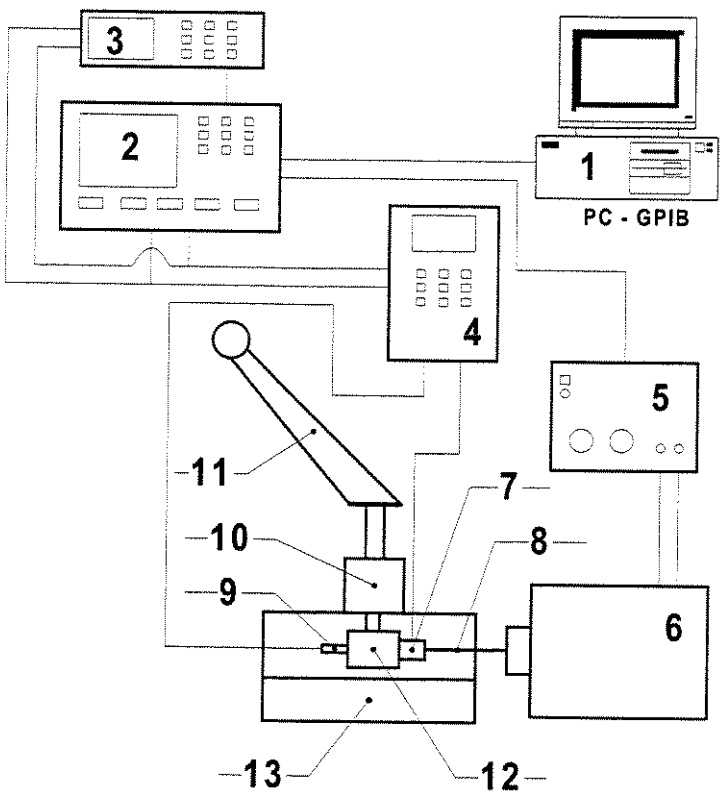



Figura 3.29: Montagem experimental para medidas das RFs não-lineares da bancada

De uma maneira geral, esta montagem experimental (figura 3.29) é composta por um computador PC (1) que controla o experimento através de uma placa GPIB que está ligada ao BERAN 402 (2), que é um equipamento de análise espectral que também possui a função de gerador de sinal. Nos canais do BERAN estão ligados os cabos que vem do condicionador de sinal (4) dos sensores, no caso, do acelerômetro (9) e do transdutor de força (7). O BERAN também gera o sinal de excitação que é enviado ao amplificador de sinal (5) do excitador

eletromagnético (6). Usou-se um osciloscópio digital (3) para observar os sinais provenientes dos sensores e do gerador de sinal. O transdutor de força (7) e o acelerômetro (9) foram fixados no alojamento da bancada (12), como indicado no esquema da figura 3.29. Este detalhe da montagem pode ser observado na figura 3.30. Uma haste flexível ou *stinger* (8) transmite o sinal de excitação do excitador ou *shaker* (6) ao transdutor de força e este para a estrutura. A figura 3.31 mostra a alavanca de transmissão fixada na bancada instrumentada, de acordo com o esquema da figura 3.29. Na tabela 3.4 são relacionados os itens enumerados na figura 3.29.

Tabela 3.4: Itens enumerados na montagem experimental

| | | |
|---|---|---|
| **1** | $\Rightarrow$ | Computador PC com placa GPIB |
| **2** | $\Rightarrow$ | BERAN 402 - Frequency Response Analyser |
| **3** | $\Rightarrow$ | Osciloscópio digital HP54501A-100MHz |
| **4** | $\Rightarrow$ | Condicionador de sinal Kistler type 5134 |
| **5** | $\Rightarrow$ | Amplificador de potência Brüel&Kjaer type 2706 |
| **6** | $\Rightarrow$ | Excitador eletromagnético Brüel&Kjaer type 4809 |
| **7** | $\Rightarrow$ | Transdutor de força PCB mod. 208A02 s.n. 10494 sens. 12,284$[mV/N]$ |
| **8** | $\Rightarrow$ | Haste flexível (*stinger*) - $\phi 1,20[mm] \times 65[mm]$ em aço |
| **9** | $\Rightarrow$ | Acelerômetro PCB mod. 353B68 s.n. 16034 sens. 108,9$[mV/g]$ |
| **10** | $\Rightarrow$ | Torre da alavanca de transmissão mecânica |
| **11** | $\Rightarrow$ | Prolongamento da alavanca de transmissão mecânica |
| **12** | $\Rightarrow$ | Alojamento da bancada |
| **13** | $\Rightarrow$ | Base da bancada |

O computador (1) controla o experimento através de um programa escrito em C++ orientado a objeto denominado INCA$^{++}$ desenvolvido por (Ferreira, 1998). Este programa foi adaptado e ampliado para o uso nesta dissertação com a inclusão de um algoritmo do método *arc-length* estudado por (Martins, 2002) escrito originalmente em linguagem MATLAB. Devido a técnica de programação orientada a objeto e a documentação do programa INCA$^{++}$, com pequenas alterações foi possível incluir o algoritmo do método *arc-length* para usá-lo no controle do experimento. Na configuração experimental apresentada, o computador através de sua placa GPIB monitorava o canal relativo ao transdutor de força no BERAN usando o método *arc-length* para manter a amplitude do sinal da força constante. Com este programa,

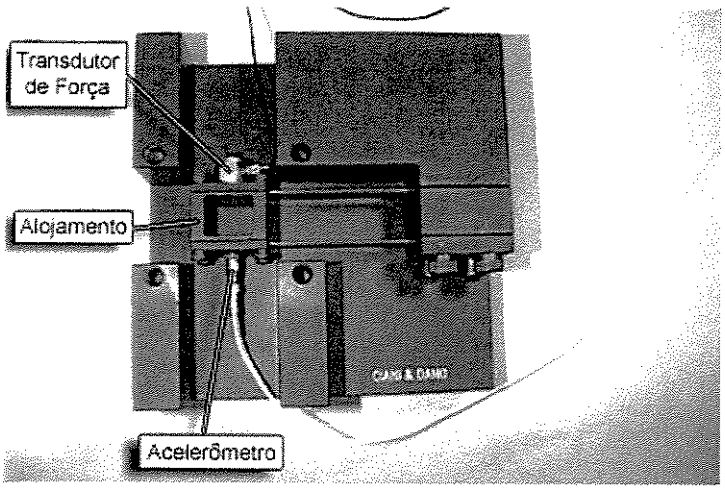



Figura 3.30: Bancada instrumentada

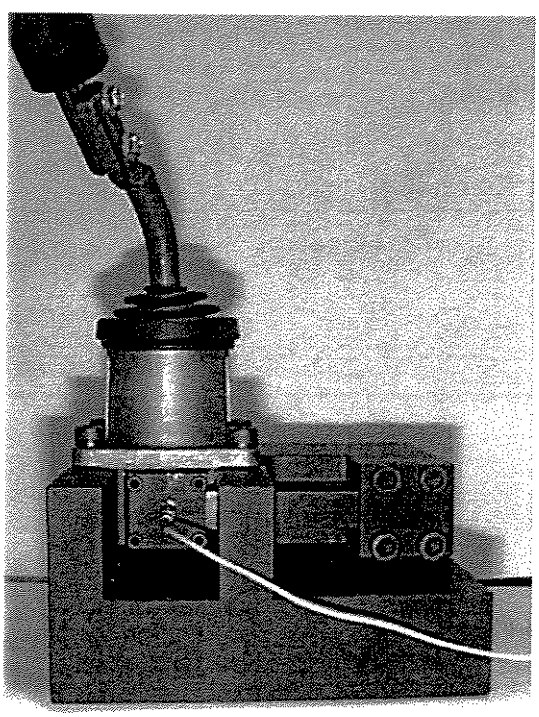


Figura 3.31: Alavanca de transmissão montada na bancada instrumentada

o computador controlava qualquer canal num nível de sinal desejado, neste caso o canal da força, e fazia as alterações necessárias, tanto em freqüência quanto em amplitude do sinal enviado pelo BERAN ao amplificador de potência do excitador eletromagnético, para manter o sinal do canal controlado dentro dos limites especificados para amplitude considerando a margem de erro especificada.

### 3.7.2 Medidas de Respostas em Freqüência Não-Lineares da Bancada

Foram feitos três experimentos controlando-se o canal do transdutor de força em diferentes valores de amplitude na tentativa de observar o efeito das não-linearidades nas curvas de resposta em freqüência da alavanca. O controle da amplitude da componente fundamental do sinal proveniente do transdutor de força para cada medição foi de $2,0\,N$; $3,1\,N$ e $4,1\,N$ zero-a-pico respectivamente.

As figuras 3.32 e 3.33 mostram as curvas de resposta em freqüência não-lineares da alavanca de transmissão obtidas experimentalmente. Os efeitos não-lineares nas curvas, apesar de sutis, podem ser percebidos por um deslocamento relativos entre elas. Este deslocamento se verifica por uma diferença tanto em freqüência quanto em amplitude para valores distintos de controle da excitação.

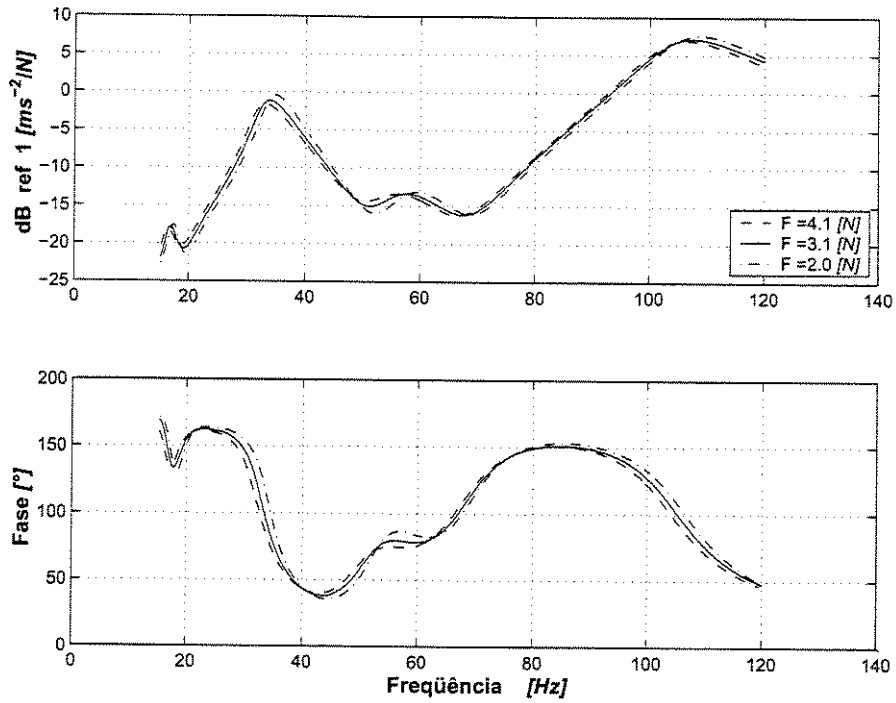



Figura 3.32: Resposta em Freqüência da bancada - amplitude dB e fase

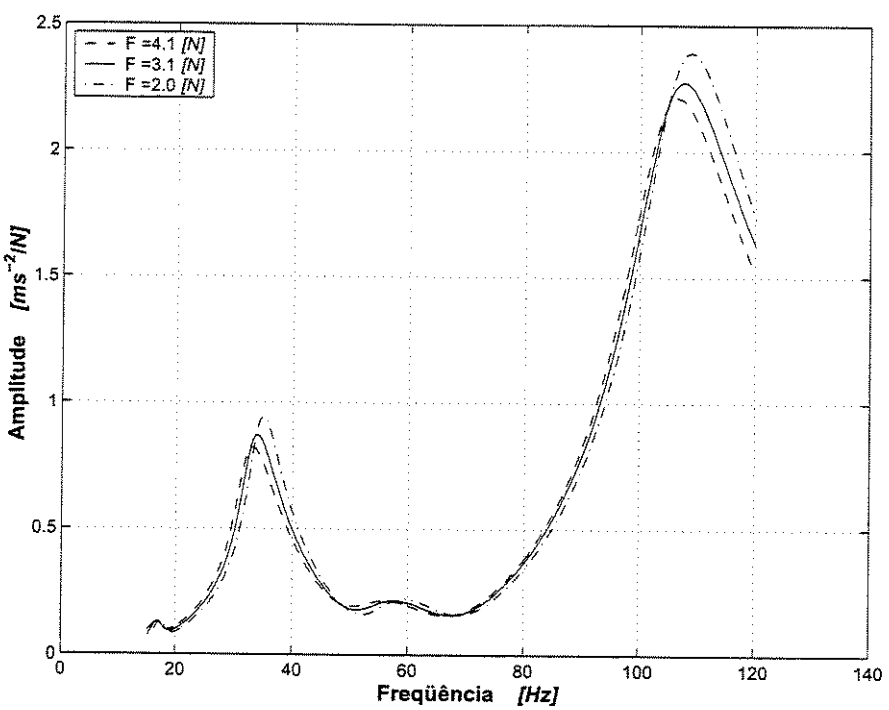



Figura 3.33: Resposta em Freqüência da bancada - amplitude linear

# Capítulo 4

# Simulações Numéricas

Na implementação do método de continuação *arc-length* no programa INCA$^{++}$ foram feitas algumas simulações numéricas. Neste capítulo serão apresentadas cinco simulações, sendo três delas com modelos simplificados da alavanca de transmissão mecânica.

Como comentado na seção 3.7, o programa INCA$^{++}$ foi utilizado no controle dos experimentos que levantaram as curvas de resposta em freqüência (RF) da alavanca de transmissão mecânica. O INCA$^{++}$ foi desenvolvido por (Ferreira, 1998) e adaptado e ampliado para o uso nesta dissertação com a inclusão do algoritmo do método de continuação *arc-length* estudado por (Martins, 2002).

Nas simulações numéricas a impedância mecânica da bancada experimental foi substituída por modelos de impedância que emulavam a presença de uma bancada instrumentada para que o programa INCA$^{++}$ efetuasse o "controle". Em outras palavras, toda vez que o INCA$^{++}$ enviava um comando para leitura dos canais do equipamento de aquisição, o modelo numérico fornecia a resposta de um modelo mecânico simulado. O resultado final dos testes era a curva de resposta em freqüência do modelo dinâmico. Desta forma, com o mesmo algoritmo foi possível fazer simulações numéricas e levantamentos de respostas em freqüência experimentais utilizando o método de continuação *arc-length* implementado no programa INCA$^{++}$.

Nas equações dos modelos apresentados neste capítulo, as não-linearidades são representadas por funções descritivas. As funções descritivas utilizam modelos de juntas para representarem regiões de não-linearidades dos modelos. O modelo da seção 4.1 utiliza um modelo de junta de folga centrada e o modelo de junta empregado na seção 4.2 representa

uma rigidez cúbica. Os modelos simplificados da alavanca de transmissão mecânica da seção 4.3 empregam modelos de juntas de atrito, folga centrada e folga descentrada.

Na obtenção da resposta em freqüência dos modelos, os valores das funções descritivas *df* são calculados toda vez que o método numérico usado para resolver o sistema de equações do modelo precisa quantificar o resíduo, que nada mais é do que a diferença entre o sistema de equações do modelo escrito no domínio da freqüência em forma de impedância e a força que se deseja controlar. A maneira de escrever o sistema na forma de impedância pode ser visto na seção 2.6. Na seção 2.9 foi descrito como pode ser obtida a expressão do resíduo para aplicação do método *arc-length* na solução de um sistema de equações e obtenção da curva de resposta em freqüência não-linear.

As funções descritivas *df* podem ser calculadas através das equações (2.27) e (2.29). A seção 2.4 descreve o processo de cálculo dos valores das funções descritivas baseadas no conhecimento do tipo de não-linearidade.

## 4.1 Modelo de Um Grau de Liberdade - Folga

A equação (4.1) representa o modelo massa-mola-amortecedor com folga de um grau de liberdade da figura 4.1. Na tabela 4.1 são apresentados os parâmetros usados nas simulações numéricas do modelo.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + (k + df_f)x = F(t) \tag{4.1}$$

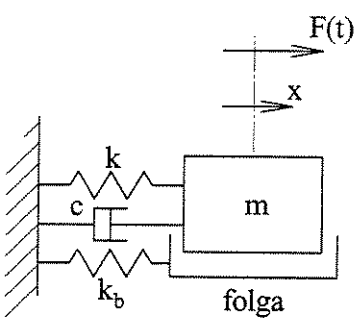



Figura 4.1: Modelo de um grau de liberdade - folga

Tabela 4.1: Parâmetros do modelo de 1 gdl - folga

| | | |
|---|---|---|
| $m$ | $\Rightarrow$ | $0{,}3 \quad [kg]$ |
| $k$ | $\Rightarrow$ | $9,96 \cdot 10^3 \quad [N/m]$ |
| $c$ | $\Rightarrow$ | $k \cdot 0,0001 \quad [Ns/m]$ |
| $df_f$ | $\Rightarrow$ | Função descritiva da folga - Rigidez anti-simétrica linear por partes |
| $x_{crit}$ | $\Rightarrow$ | $3,0 \quad [mm]$ |
| $k_b$ | $\Rightarrow$ | $111350 \quad [N/m]$ |
| $\|F(t)\|$ | $\Rightarrow$ | $0,1;\ 1,0;\ 5,0 \quad [N]$ |

O modelo de junta usado para representar a folga é o modelo de rigidez anti-simétrica linear por partes apresentado na subseção (2.2.2).

Nas figuras 4.2 e 4.3 são mostradas as curvas de resposta em freqüência do modelo de um grau de liberdade com folga para valores de excitação senoidal zero-a-pico de $0,1\,N$; $1,0\,N$ e $5,0\,N$. Pode ser visto na figura 4.2 o efeito não-linear causado pelo modelo de junta usado

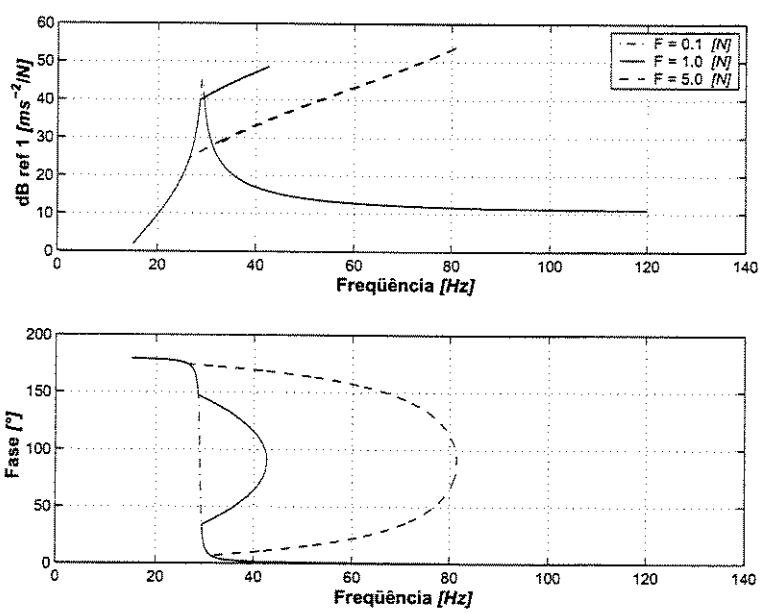



Figura 4.2: RFs do modelo de 1 gdl - folga

para representar a folga centrada, na qual o pico da RF inclina-se para a direita indicando um aumento de rigidez. A rigidez do sistema aumenta quando a amplitude do movimento da massa $m$ torna-se maior do que a folga (figura 4.1), causando o contato entre a massa $m$ e

a parede do alojamento. Quanto maior a amplitude da força de excitação, mais acentuados são os efeitos não-lineares nas RFs.

O gráfico da figura 4.3 é uma representação em três dimensões da inertância do modelo de um grau de liberdade com folga, tendo como eixos a freqüência, amplitude real e a amplitude imaginária. Neste gráfico pode-se visualizar os diferentes traçados das RFs para forças de excitação distintas.

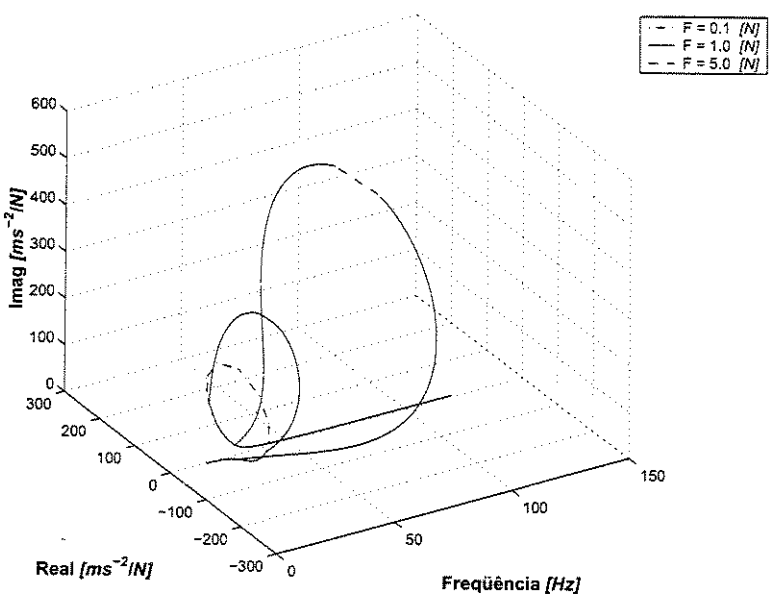



Figura 4.3: RFs do modelo de 1 gdl - folga - representação em três dimensões

## 4.2 Modelo de Um Grau de Liberdade - Rigidez Cúbica

A equação (4.2) representa o modelo massa-mola-amortecedor com rigidez cúbica de um grau de liberdade da figura 4.4. Na tabela 4.2 são apresentados os parâmetros usados nas simulações numéricas do modelo.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + (k_b + df_c)x = F(t) \tag{4.2}$$

O modelo de junta usado para representar a mola cúbica é o modelo de rigidez cúbica apresentado na subseção (2.2.2).

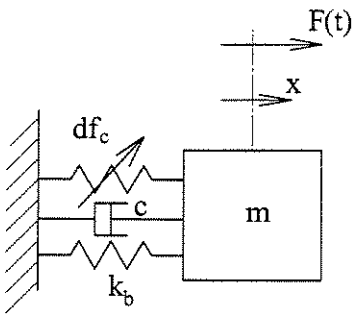



Figura 4.4: Modelo de um grau de liberdade - rigidez cúbica

Tabela 4.2: Parâmetros do modelo de 1 gdl - rigidez cúbica

| | | |
|---|---|---|
| $m$ | $\Rightarrow$ | $0{,}3 \quad [kg]$ |
| $k_b$ | $\Rightarrow$ | $111350 \quad [N/m]$ |
| $c$ | $\Rightarrow$ | $k_b \cdot 0{,}00001 \quad [Ns/m]$ |
| $df_c$ | $\Rightarrow$ | Função descritiva da mola cúbica - Rigidez cúbica |
| $\beta$ | $\Rightarrow$ | $-1 \cdot 10^{10} \quad [N/m]$ |
| $\|F(t)\|$ | $\Rightarrow$ | $0{,}75;\ 1{,}00;\ 1{,}25 \quad [N]$ |

A função descritiva do modelo de junta de rigidez cúbica pode ser obtida analiticamente através da solução das equações (2.27) e (2.29) da seção 2.4 aplicando o modelo da rigidez cúbica apresentado na subseção 2.2.2. A função descritiva analítica da rigidez cúbica $df_c$ é dada pela equação (4.3) (Ferreira, 1998), onde $X$ é o módulo do deslocamento do modelo devido a excitação harmônica e $\beta$ é um coeficiente de rigidez.

$$df_c = \frac{3}{4}\beta X^2 \tag{4.3}$$

Nas figuras 4.5 e 4.6 são mostradas as curvas de resposta em freqüência do modelo de um grau de liberdade com rigidez cúbica para valores de excitação senoidal zero-a-pico de $0{,}75\,N$; $1{,}00\,N$ e $1{,}25\,N$.

O efeito não-linear causado pela rigidez cúbica pode ser observado na figura 4.5, na qual o pico da RF inclina-se para a esquerda indicando uma redução na rigidez do sistema com o aumento da amplitude da resposta. A rigidez do sistema diminui com a amplitude do movimento da massa $m$ porque o modelo de rigidez cúbica adotado na simulação utiliza

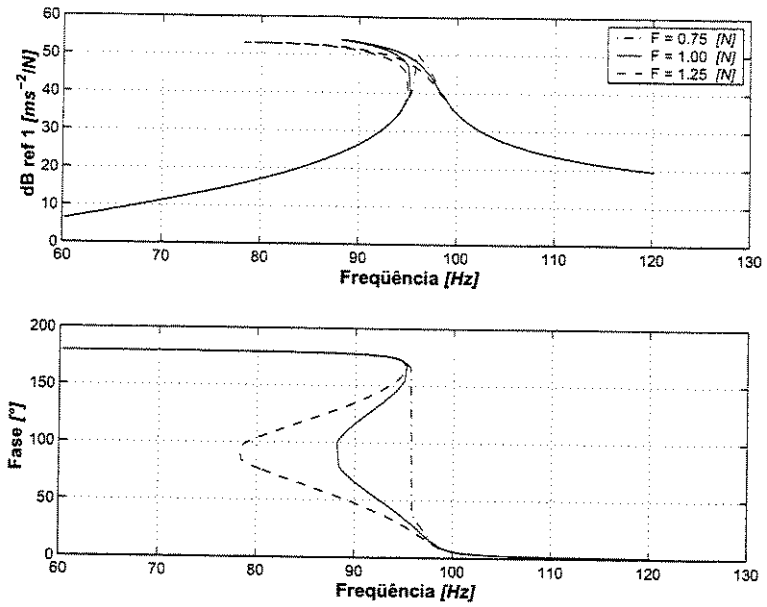



Figura 4.5: RFs do modelo de 1 gdl - rigidez cúbica

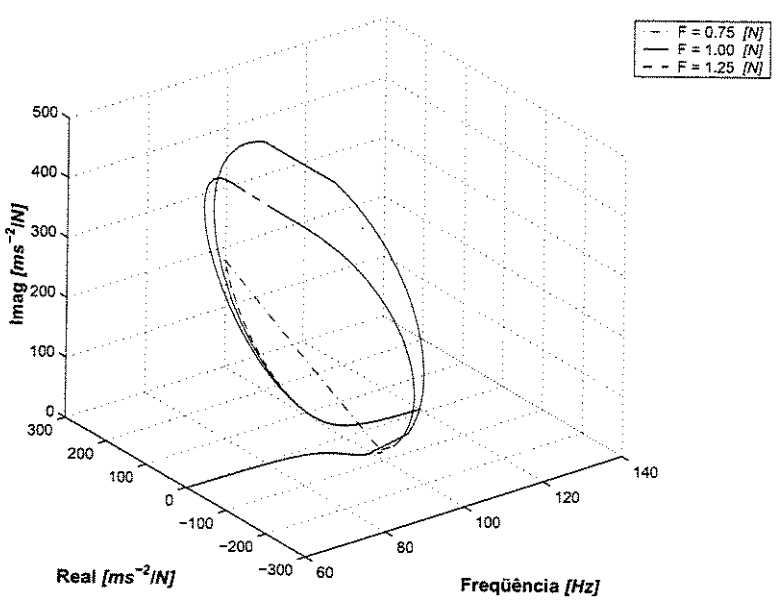



Figura 4.6: RFs do modelo de 1 gdl - rigidez cúbica - representação em três dimensões

o coeficiente $\beta$ negativo na função descritiva $df_c$(equação (4.3)), ou seja, quanto maior a amplitude do movimento, menor a rigidez do sistema (figura 4.4). Quanto maior a amplitude da força de excitação, mais acentuados são os efeitos não-lineares nas RFs.

O gráfico da figura 4.6 é uma representação em três dimensões da inertância do modelo de um grau de liberdade com folga, tendo como eixos a freqüência, amplitude real e a amplitude imaginária. Neste gráfico pode-se visualizar os diferentes traçados das RFs para forças de excitação distintas.

## 4.3 Modelos Simplificados da Alavanca de Transmissão Mecânica

Foram desenvolvidos três modelos simplificados para obtenção de uma estimativa da resposta em freqüência da alavanca de transmissão mecânica. As equações dos modelos simplificados da alavanca de transmissão mecânica apresentam dois termos relativos as funções descritivas: $df_f$ que é o termo que representa a função descritiva da folga e $df_h$ relativo a função descritiva do atrito ou histerese.

O modelo de atrito usado nos três modelos da alavanca de transmissão é descrito pela equação (2.8) que pode ser representada pelas figuras 2.6, 2.7 ou 2.8, assumindo qualquer umas das formas dependendo apenas da escolha dos parâmetros $a$, $b$ e $K$ descritos na subseção 2.2.2. Os valores dos parâmetros $a$, $b$ e $K$ foram determinados experimentalmente, como apresentado na seção 3.4.

### 4.3.1 Modelo de Dois Graus de Liberdade - Haste Reta

O modelo de dois graus de liberdade (gdls) da alavanca de transmissão mecânica com haste reta representado pela figura 4.7 é descrito pelo sistemas de equações (4.4). Na equação (4.4) os efeitos não-lineares de atrito e folga estão representados pelas funções descritivas $df_h$ e $df_f$ respectivamente.

O modelo de junta usado para representar a folga é o modelo de rigidez anti-simétrica linear por partes apresentado na subseção 2.2.2. O modelo de atrito empregado neste modelo da alavanca de transmissão e nos outros dois que seguem é o modelo de macro e microdesliza-

mento de Ren apresentado na subseção 2.2.2.

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & m_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_h & 0 \\ 0 & c_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{x} \end{Bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} df_f r_f^2 + df_h r_r^2 - m_a g r_{cg} & -df_h r_r \\ -df_h r_r & k_b + df_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F(t) \end{Bmatrix} \tag{4.4}$$

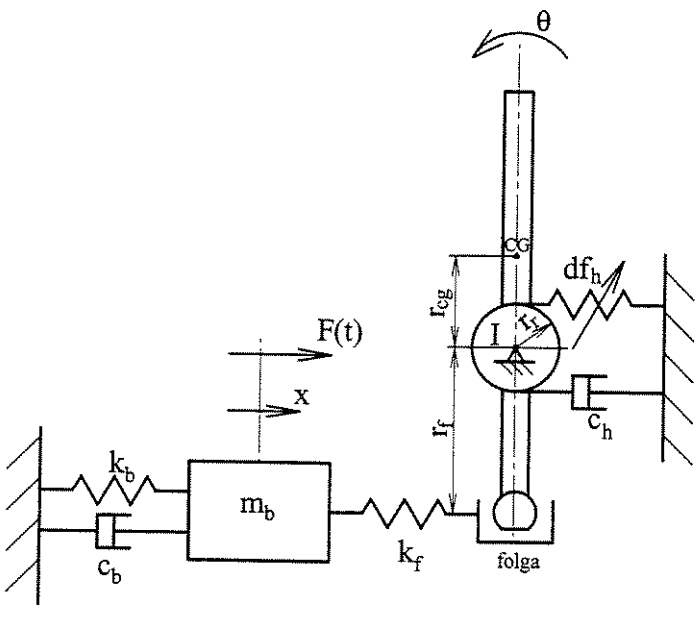



Figura 4.7: Modelo da alavanca de transmissão mecânica com a haste reta

A tabela 4.3 apresenta os valores dos parâmetros usados na obtenção das curvas de resposta em freqüência (RF) do modelo da figura 4.7. Nas figuras 4.8 e 4.9 são mostradas as respostas em freqüência do modelo para valores de excitação senoidal zero-a-pico de $0,2\,N$; $1,0\,N$ e $2,0\,N$. Embora seja um modelo de dois graus de liberdade, o segundo pico da RF encontra-se num valor elevado de freqüência se comparado ao primeiro pico, estando fora da faixa de freqüência de interesse. Pode-se observar na figura 4.8 o efeito não-linear causado

Tabela 4.3: Parâmetros do modelo - haste reta

| | | |
|---|---|---|
| $I$ | $\Rightarrow$ | $2,25 \cdot 10^{-3}$ $[kgm^2]$ |
| $m_a$ | $\Rightarrow$ | $0,53$ $[kg]$ - massa da alavanca |
| $g$ | $\Rightarrow$ | $9,81$ $[m/s^2]$ |
| $r_{cg}$ | $\Rightarrow$ | $30$ $[mm]$ |
| $r_r$ | $\Rightarrow$ | $17,5$ $[mm]$ |
| $r_f$ | $\Rightarrow$ | $78$ $[mm]$ |
| $m_b$ | $\Rightarrow$ | $0,3$ $[kg]$ |
| $k_b$ | $\Rightarrow$ | $111350$ $[N/m]$ |
| $k_f$ | $\Rightarrow$ | $2,1 \cdot 10^9$ $[N/m]$ |
| $c_b$ | $\Rightarrow$ | $k_b \cdot 0,0015$ $[Ns/m]$ |
| $c_h$ | $\Rightarrow$ | $0,42$ $[Nms/rad]$ |
| $df_f$ | $\Rightarrow$ | Função Descritiva da folga - Rigidez anti-simétrica linear por partes |
| $folga$ | $\Rightarrow$ | $0,5$ $[mm]$ |
| $df_h$ | $\Rightarrow$ | Função descritiva do atrito - Modelo de Ren |
| $\|F(t)\|$ | $\Rightarrow$ | $0,2;\ 1,0;\ 2,0$ $[N]$ |

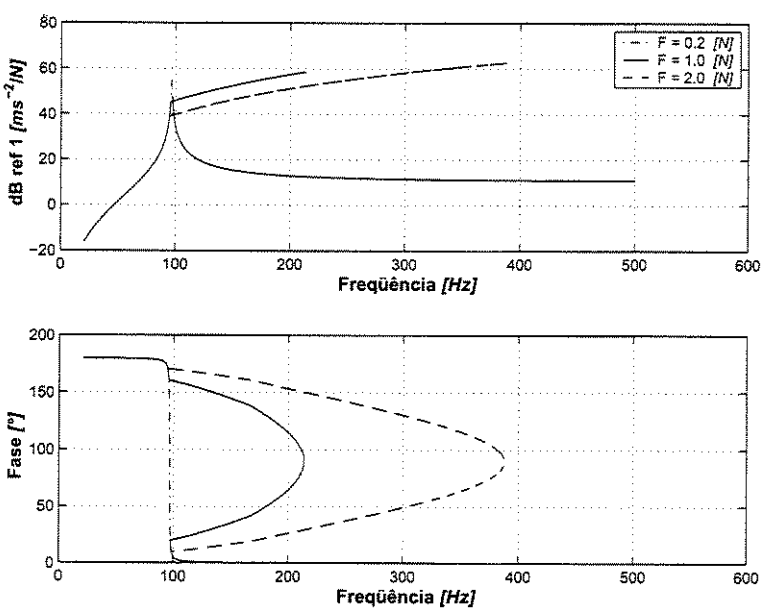



Figura 4.8: RFs do modelo da alavanca de transmissão mecânica com a haste reta

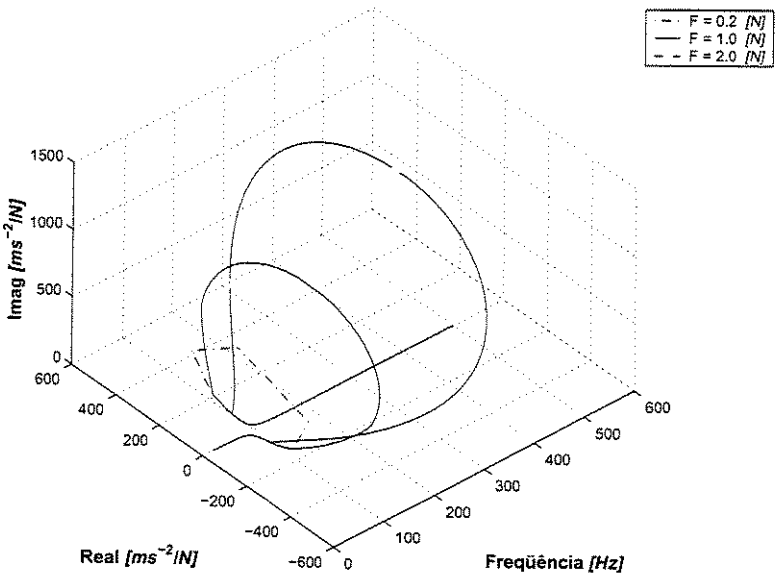



Figura 4.9: RFs do modelo da alavanca de transmissão mecânica com a haste reta - representação em três dimensões

pelo modelo de junta usado para representar a folga centrada, na qual o pico da RF inclina-se para a direita indicando um aumento de rigidez. A rigidez do sistema aumenta quando a amplitude do movimento da massa $m_b$ torna-se maior do que a folga (figura 4.7), causando o contato entre a ponta da alavanca e a parede do alojamento de rigidez $k_f$. Quanto maior a amplitude da força de excitação, mais acentuados são os efeitos não-lineares nas RFs. O modelo de atrito usado neste modelo simplificado da alavanca de transmissão tem como principal influência o aumento do amortecimento da estrutura.

O gráfico da figura 4.9 é uma representação em três dimensões da inertância do modelo da alavanca de transmissão com haste reta, tendo como eixos a freqüência, amplitude real e a amplitude. Neste gráfico pode-se visualizar os diferentes traçados das RFs para forças de excitação distintas.

### 4.3.2 Modelo de Dois Graus de Liberdade - Alavanca Completa

O sistema de equações (4.5) representa o modelo de dois graus de liberdade da alavanca de transmissão mecânica da figura 4.10. Na tabela 4.4 são apresentados os parâmetros usados nas simulações numéricas do modelo.

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & m_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_h & 0 \\ 0 & c_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{x} \end{Bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} df_f r_f^2 + df_h r_r^2 - m_a g \cos(\beta) r_{cg} & -df_h r_r \\ -df_h r_r & k_b + df_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F(t) \end{Bmatrix} \tag{4.5}$$

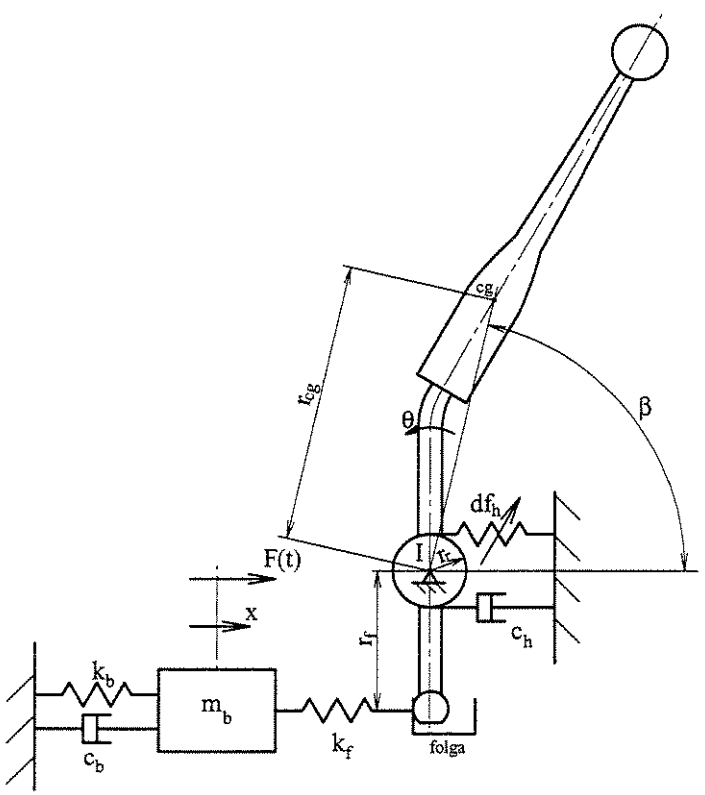



Figura 4.10: Modelo da alavanca de transmissão mecânica - 2 gdls

O modelo de junta usado para representar a folga é o modelo de rigidez descentrada linear por partes com pré-carregamento apresentado na subseção 2.2.2.

A figura 4.11 mostra as curvas de resposta em freqüência do modelo de dois graus de liberdade da alavanca de transmissão mecânica para valores de excitação senoidal zero-a-pico de $2,0\,N$; $3,1\,N$ e $4,1\,N$. Como no modelo anterior, o segundo pico da RF encontra-se num

Tabela 4.4: Parâmetros do modelo da alavanca de 2 gdls

| | | |
|---|---|---|
| $I$ | $\Rightarrow$ | $7,0 \cdot 10^{-2}$ $[kgm^2]$ |
| $m_a$ | $\Rightarrow$ | $1,3$ $[kg]$ - massa da alavanca |
| $g$ | $\Rightarrow$ | $9,81$ $[m/s^2]$ |
| $r_{cg}$ | $\Rightarrow$ | $175$ $[mm]$ |
| $r_r$ | $\Rightarrow$ | $17,5$ $[mm]$ |
| $r_f$ | $\Rightarrow$ | $78$ $[mm]$ |
| $m_b$ | $\Rightarrow$ | $0,3$ $[kg]$ |
| $k_b$ | $\Rightarrow$ | $111350$ $[N/m]$ |
| $k_f$ | $\Rightarrow$ | $2,1 \cdot 10^{10}$ $[N/m]$ |
| $c_b$ | $\Rightarrow$ | $k_b \cdot 0,0015$ $[Ns/m]$ |
| $c_h$ | $\Rightarrow$ | $0,42$ $[Nms/rad]$ |
| $df_f$ | $\Rightarrow$ | Função Descritiva da folga - Rigidez descentrada linear por partes |
| $folga$ | $\Rightarrow$ | $1$ $[mm]$ |
| $\beta$ | $\Rightarrow$ | $77°$ |
| $df_h$ | $\Rightarrow$ | Função Descritiva do Atrito - Modelo de Ren |
| $\|F(t)\|$ | $\Rightarrow$ | $2,0;\ 3,1;\ 4,1$ $[N]$ |

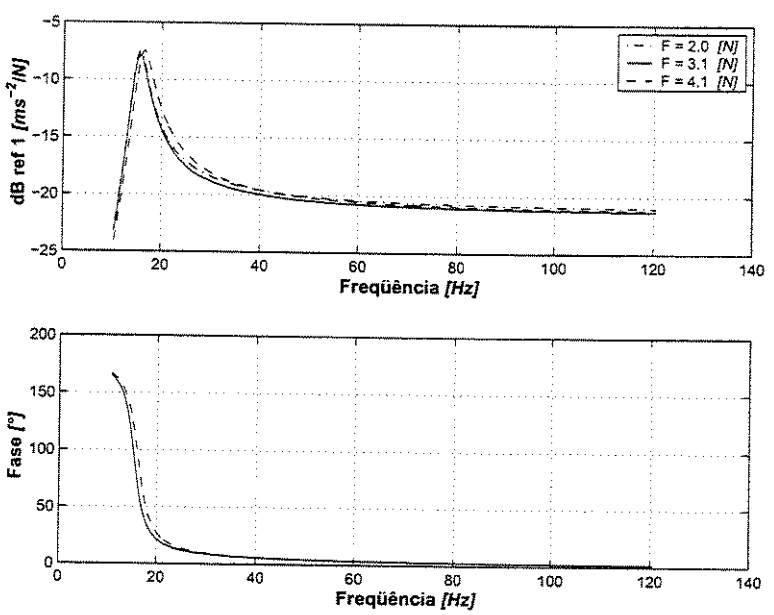



Figura 4.11: RFs do modelo da alavanca de transmissão mecânica - 2 graus de liberdade

valor elevado de freqüência se comparado ao primeiro pico, estando fora da faixa de freqüência de interesse. Neste modelo representado pela figura 4.10 o efeito não-linear observado na curva de resposta em freqüência (RF) da figura 4.11 é de um deslocamento entre as curvas para diferentes amplitudes da força de excitação. Este efeito é causado em grande parte pelo modelo de atrito. Ao contrário do observado na subseção 4.3.1 o modelo de folga empregado nesta configuração da alavanca não causou grande influência nas RFs com as amplitudes das forças de excitação das simulações.

### 4.3.3 Modelo de Três Graus de Liberdade - Alavanca Completa

O sistema de equações (4.6) representa o modelo de três graus de liberdade da alavanca de transmissão mecânica da figura 4.12. Na tabela 4.5 são apresentados os parâmetros usados nas simulações numéricas do modelo. Este modelo de três graus de liberdade da alavanca de transmissão mecânica é na realidade uma tentativa de se melhorar o modelo anterior de dois graus de liberdade.

$$\begin{bmatrix} m_b & 0 & 0 \\ 0 & I_1 + m_2 L^2 & m_2 r_{cg2} L \cos(\beta_1 - \beta_2) \\ 0 & m_2 r_{cg2} L \cos(\beta_1 - \beta_2) & I_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_b & 0 & 0 \\ 0 & c_h + c_t & -c_t \\ 0 & -c_t & c_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{Bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} df_f + k_b & -df_f r_f & 0 \\ -df_f r_f & df_f r_f^2 + df_h r_r^2 + k_t + g \sin(\beta_1)(m_1 r_{cg1} + m_2 L) & -k_t \\ 0 & -k_t & k_t + m_2 g \sin(\beta_2) r_{cg2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{Bmatrix} F(t) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.6)$$

O modelo de junta usado para representar a folga é o mesmo do modelo anterior, a rigidez descentrada linear por partes com pré-carregamento apresentado na subseção 2.2.2.

A figura 4.13 mostra as curvas de resposta em freqüência do modelo de três graus de liberdade da alavanca de transmissão mecânica para valores de excitação senoidal zero-a-pico de $2,0\,N$; $3,1\,N$ e $4,1\,N$. A figura 4.14 mostra um detalhe das RFs do modelo na faixa entre

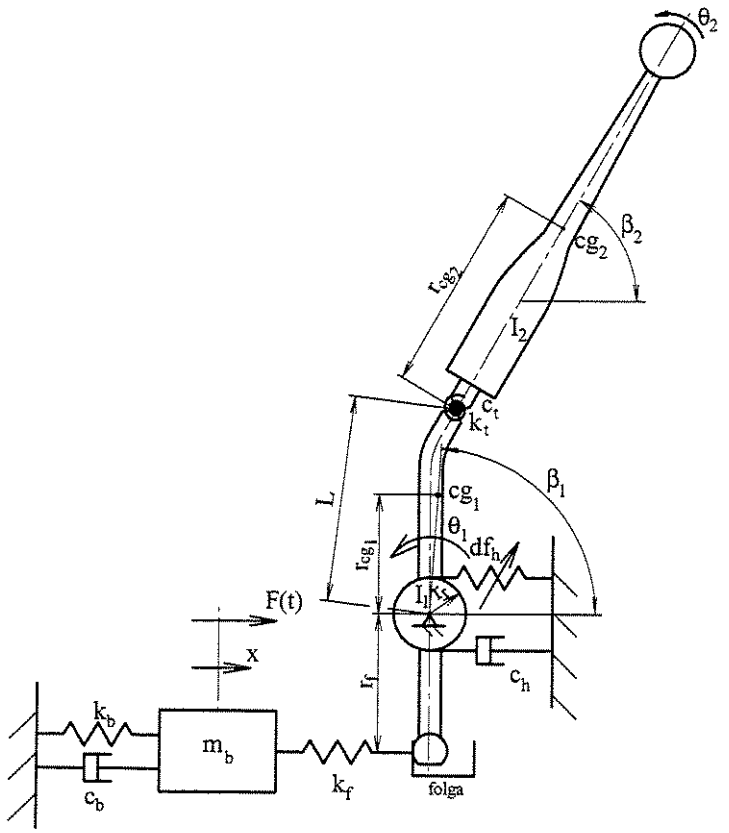



Figura 4.12: Modelo da alavanca de transmissão mecânica - 3 gdls

$100\,Hz$ e $130\,Hz$.

Neste modelo de três graus de liberdade, o terceiro pico da RF encontra-se num valor elevado de freqüência fora da faixa de freqüência de interesse. O efeito não-linear observado na curva de resposta em freqüência (RF) da figura 4.13 é de um deslocamento das curvas entre si para diferentes amplitudes da força de excitação, o que pode ser visualizado na figura 4.14. Este efeito é causado em grande parte pelo modelo de atrito, sendo que o modelo de folga empregado nesta configuração da alavanca não causou grande influência nas RFs para as amplitudes da força de excitação da simulação.

Tabela 4.5: Parâmetros do modelo da alavanca - 3 gdls

| | | |
|---|---|---|
| $I_1$ | $\Rightarrow$ | $2,60 \cdot 10^{-3}$ $[kgm^2]$ |
| $I_2$ | $\Rightarrow$ | $2,93 \cdot 10^{-2}$ $[kgm^2]$ |
| $m_1$ | $\Rightarrow$ | $0,520$ $[kg]$ - massa da haste da alavanca |
| $m_2$ | $\Rightarrow$ | $0,777$ $[kg]$ - massa do prolongamento da alavanca |
| $g$ | $\Rightarrow$ | $9,81$ $[m/s^2]$ |
| $r_{cg1}$ | $\Rightarrow$ | $30$ $[mm]$ |
| $r_{cg2}$ | $\Rightarrow$ | $150$ $[mm]$ |
| $r_r$ | $\Rightarrow$ | $17,5$ $[mm]$ |
| $r_f$ | $\Rightarrow$ | $78$ $[mm]$ |
| $m_b$ | $\Rightarrow$ | $0,3$ $[kg]$ |
| $k_b$ | $\Rightarrow$ | $111350$ $[N/m]$ |
| $k_f$ | $\Rightarrow$ | $2,1 \cdot 10^9$ $[N/m]$ |
| $c_b$ | $\Rightarrow$ | $k_b \cdot 0,0015$ $[Ns/m]$ |
| $c_h$ | $\Rightarrow$ | $0,42$ $[Nms/rad]$ |
| $k_t$ | $\Rightarrow$ | $1,8 \cdot 10^3$ $[N/m]$ |
| $c_t$ | $\Rightarrow$ | $k_t \cdot 0.0001$ $[Nms/rad]$ |
| $df_f$ | $\Rightarrow$ | Função Descritiva da folga - Rigidez descentrada linear por partes |
| $folga$ | $\Rightarrow$ | $5$ $[mm]$ |
| $\beta_1$ | $\Rightarrow$ | $77°$ |
| $\beta_2$ | $\Rightarrow$ | $45°$ |
| $df_h$ | $\Rightarrow$ | Função Descritiva do Atrito - Modelo de Ren |
| $L$ | $\Rightarrow$ | $120$ $[mm]$ |
| $\|F(t)\|$ | $\Rightarrow$ | $2,0;\ 3,1;\ 4,1$ $[N]$ |

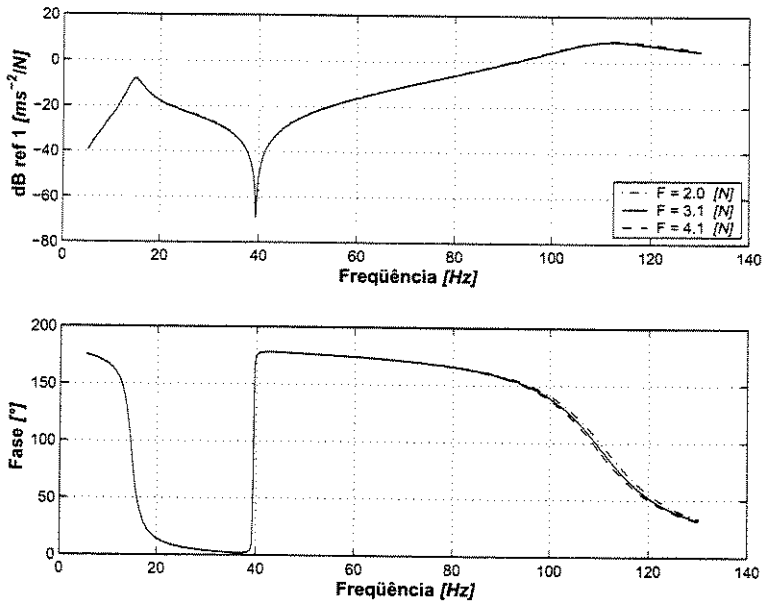



Figura 4.13: RFs do modelo da alavanca de transmissão mecânica - 3 graus de liberdade

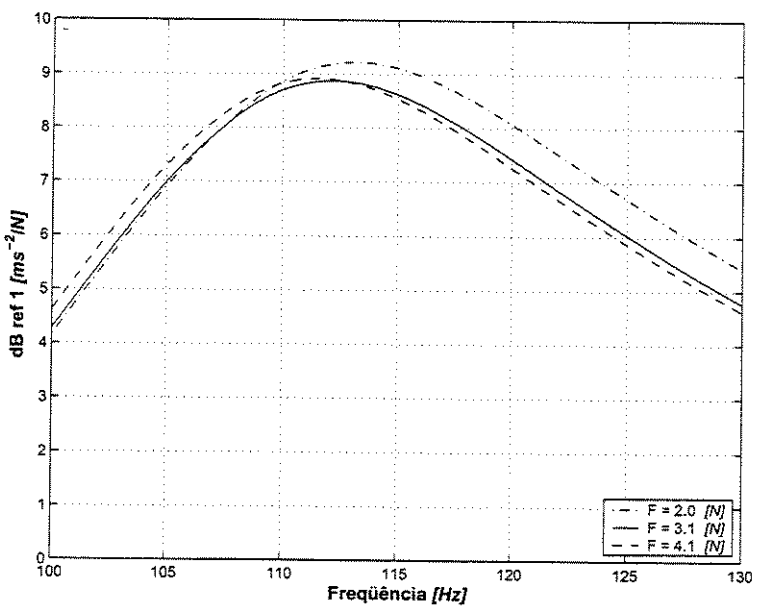



Figura 4.14: Detalhe das RFs do modelo da alavanca de transmissão mecânica - 3 graus de liberdade

# Capítulo 5

# Discussões e Conclusões

Este trabalho apresentou uma investigação teórica e experimental de uma alavanca de transmissão mecânica.

As curvas de resposta em freqüência (RFs) experimentais da alavanca de transmissão obtidas com o método de continuação *arc-length* implementado no programa INCA$^{++}$ são de boa qualidade, como pode ser verificado nas figuras da seção 3.7.

As simulações numéricas do capítulo 4 mostram os possíveis efeitos ou distorções que diferentes tipos de não-linearidades podem causar nas curvas de resposta em freqüência de sistemas mecânicos.

As simulações numéricas mais simples, de sistemas de apenas um grau de liberdade e um modelo de junta não-linear, foram usadas como testes para o programa de controle experimental INCA$^{++}$. Os efeitos esperados nas curvas devido a cada tipo de não-linearidade concordam com os encontrados na literatura (Martins, 2002; Ferreira e Serpa, 2002).

Para simular a resposta em freqüência da alavanca de transmissão mecânica, mesmo sendo os modelos adotados simplificados, foram necessários alguns experimentos para determinação de seus parâmetros.

Alguns desses parâmetros, tais como a rigidez das vigas paralelas da bancada (seção 3.5) e a sua FRF (seção 3.6) foram relativamente fáceis de serem obtidos em comparação com os parâmetros do modelo de atrito (seção 3.4), que necessitou de vários experimentos, de algoritmo para controle de variáveis experimentais (força, deslocamento) e de ajuste de modelo, o que demandou tempo em experimentação e um considerável tempo computacional na

análise dos dados colhidos. Com isso ficou evidente que a obtenção de parâmetros adequados para modelos não-lineares pode resultar em grande esforço e tornar-se um obstáculo razoável dentre as etapas da modelagem não-linear.

Feitos todos os levantamentos e ajustes das propriedades ou parâmetros presentes nos modelos numéricos, aplicou-se o método *arc-length* para obtenção das respostas em freqüência não-lineares dos modelos simplificados da alavanca de transmissão.

O modelo da alavanca com haste reta apresentado na subseção 4.3.1 foi um exemplo onde o cálculo das respostas em freqüência simuladas demandaram um esforço computacional razoável, pois o raio da restrição esférica empregado assumia valores muito pequenos quando o traçado da solução começava a ser alterado devido aos efeitos não-lineares próximos da freqüência de $97\,Hz$ como pode ser observado na figura 4.8. O raio da restrição diminuía para que o método *arc-length* seguisse a trajetória correta da solução do sistema sem que a restrição interceptasse outras soluções mais adiante no traçado. Os caminhos distintos encontrados podem ser vistos pela fase da resposta ou pelo gráfico tridimensional da resposta em freqüência da figura 4.9. É importante observar que para este caso numérico houve necessidade de se trabalhar com grande precisão nos cálculos. Isso indica que o levantamento da resposta em freqüência experimental fica comprometido devido à dificuldade de se obter o nível mínimo de precisão exigido. As tentativas de obtenção de uma curva experimental de RF da alavanca com haste reta não foram bem sucedidas. Os pontos críticos desse experimento surgiam quando o alojamento estava na eminência de tocar a ponta de contato da alavanca. Lembrando que o método *arc-length* (seção 2.5) usa derivada para determinar o caminho a ser traçado, no caso experimental uma pequena variação, um incremento no módulo da componente fundamental da excitação $\Delta|F|$ e um incremento em freqüência $\Delta f$, a derivada experimental tornava-se muito imprecisa neste momento e o algoritmo não convergia mais. Observando novamente o gráfico da figura 4.8 pode-se notar a mudança brusca de direção próximo aos $97\,Hz$, sendo este o ponto da solução que o alojamento começa a se chocar com a ponta de contato da alavanca de transmissão. Quanto mais rígido o contato entre a ponta da alavanca e o alojamento, mais brusca é a mudança de direção da RF. Na bancada estudada as superfícies em contato envolvidas são de aço, e por isso o modelo de junta empregado no

modelo numérico considerou uma rigidez muito alta, que idealmente deveria ficar próxima do módulo de elasticidade do material. Nas medidas experimentais, com muita dificuldade o método *arc-length* às vezes conseguia ultrapassar esse ponto "crítico"e prosseguir no traçado da RF experimental por mais algumas iterações.

Por outro lado, deve-se notar que para a alavanca de transmissão com haste curva e prolongamento, ou seja, a alavanca completa, as medidas experimentais (figuras 3.32 e 3.33) foram de ótima qualidade e não apresentaram dificuldade alguma de serem feitas. Isto pode ser explicado pelas próprias RFs experimentais que são suaves e não apresentam mudanças bruscas em seus traçados. As curvas são suaves porque os choques quando ocorriam eram apenas de um lado do alojamento e com baixa intensidade. Estes choques só aconteciam quando a força de excitação vencia o peso e a inércia do conjunto da alavanca. Apesar dos modelos da alavanca completos não possuírem a complexidade necessária para representar adequadamente a alavanca de transmissão, eles conseguiram prever que a curva seria bem suave, que não apresentariam grandes mudanças para diferentes forças de excitação (figuras 4.11, 4.13 e 4.14), e além disso, a primeira freqüência dos modelos parecem concordar com o resultado experimental (figura 3.32).

Todos os modelos simplificados da alavanca de transmissão apresentados neste trabalho foram modelados dinamicamente como modelos de corpos rígidos. Isso pode ser considerado uma boa aproximação quando se refere ao modelo da alavanca com haste reta, pois a primeira freqüência natural da haste medida experimentalmente é de cerca de $1500\,Hz$, como pode ser visto na figura 3.28, e as simulações do modelo com haste reta foram feitas numa faixa de $15\,Hz$ a $500\,Hz$ (figura 4.8). No caso da alavanca completa, ou seja, para os outros dois modelos a aproximação de corpo rígido não é adequada. Outra aproximação que pode ter prejudicado o desempenho dos modelos simplificados é que o prolongamento da alavanca de transmissão mecânica é na realidade composto por vários materiais os quais não foram levados em consideração na modelagem. Entre esses materiais estão um núcleo de aço revestido de borracha recoberta por alumínio. Este "recheio" de borracha pode ter causado uma influência considerável na dinâmica do problema.

A investigação da alavanca de transmissão mostrou as dificuldades de modelagem de

estruturas não-lineares reais da engenharia, tanto na obtenção dos parâmetros usados no modelo adotado, quanto na solução de sistemas de equações diferenciais não-lineares. O método *arc-length* apresentou-se como um método eficiente na obtenção de RFs de modelos mecânicos não-lineares. Foi mostrado que é possível aplicar o método de continuação *arc-length* na obtenção de RFs de estruturas não-lineares experimentalmente, usando este método no controle do experimento.

## 5.1 Propostas para Trabalhos Futuros

Nas investigações feitas na alavanca de transmissão mecânica surgiram dificuldades que apontam para problemas que necessitam de mais atenção.

Dentre os próximos passos, encontram-se a elaboração de modelos mais completos que considerem a geometria tridimensional da alavanca de transmissão, que tenham discretizações mais adequadas e que considerem os efeitos não-lineares de materiais como a borracha presente na estrutura.

Outra proposta é o estudo da obtenção da derivada da função resíduo experimental de maneira mais representativa para que o método *arc-length* tenha êxito no caso cujo valor da derivada requeira maior precisão.

No que diz respeito ao método de continuação *arc-length*, percebeu-se que tanto em simulações numéricas quanto em aplicações experimentais, a escolha apropriada das raízes da equação de restrição é um fator importante para que as curvas de resposta em freqüência sejam levantadas. Se a escolha dessa raíz não for adequada, o método em algum momento, tal como em um ponto crítico da RF, pode retornar pelo mesmo caminho que já havia sido traçado. Então fica a questão de quais são os critérios de escolha de raízes que devem ser adotados para que o método *arc-length* torne-se mais robusto.

# Anexo A

# Método de Newton Raphson

O método de Newton-Raphson é um caso particular do método das aproximações sucessivas (Humes et al., 1984). A idéia do método é construir uma função $\phi(x)$ para a qual exista um intervalo contendo a raiz $|\phi'(x)| < 1$.

Esta construção é feita impondo $\phi'(\bar{x}) = 0$. Como $\phi'(x)$ deve ser uma função contínua, existe sempre uma vizinhança $I$ de $\bar{x}$ onde é satisfeita a segunda hipótese do teorema 1.

*Teorema 1* - Seja $\bar{x}$ uma raiz de uma função $f$, isolada num intervalo $I = [a, b]$ e seja $\phi$ uma função tal que $\bar{x} = \phi(\bar{x})$. Se

1. $\phi$ e $\phi'$ são funções contínuas em $I$;

2. $k = \max_{x \in I} |\phi'(x)| < 1$;

3. $x_0 \in I$ e $x_{n+1} = \phi(x_n) \in I$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$

A forma mais geral de $x = \phi(x)$ equivalente a $f(x) = 0$ é dada por

$$x = x + A(x)f(x) = \phi(x) \tag{A.1}$$

onde $A(x)$ é uma função contínua qualquer, tal que $A(\bar{x}) \neq 0$. Escolhendo $A(x)$ de forma a ter $\phi'(\bar{x}) = 0$, tem-se

$$\phi'(x) = 1 + A(x)f'(x) + A'(x)f(x)$$

Calculando no ponto $\bar{x}$ obtém-se:

$$\phi'(\bar{x}) = 1 + A(\bar{x})f'(\bar{x})$$

Supondo que $f'(\bar{x}) \neq 0$, querendo que $\phi'(\bar{x}) = 0$ deve-se ter

$$A(\bar{x}) = -\frac{1}{f'(\bar{x})}$$

Uma escolha satisfatória para $A(x)$ será portanto:

$$A(x) = -\frac{1}{f'(x)}$$

Da equação (A.1) obtém-se:

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Assim, o processo iterativo de Newton-Raphson é definido como:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{A.2}$$

Como o intervalo $I$ é determinado através da condição $|\phi'(x)| < 1$, para todo $x \in I$, em vez de determinar este intervalo, por razões de dificuldade de cálculo, escolhe-se uma aproximação inicial $x_0$ suficientemente próxima da raiz. Aplicando a relação (A.2) para o $x_0$ escolhido, se a seqüência obtida aparentemente não estiver convergindo, abandona-se o processo e recomeça-se escolhendo outro valor inicial.

Da figura A.1 observa-se que

$$\tan\alpha = f'(x_n) = \frac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}}$$

de onde

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

O ponto $x_{n+1}$ é obtido traçando-se a tangente à função $f$ no ponto $(x_n, f(x_n))$. A intersecção da reta tangente com o eixo das abscissas fornece a nova aproximação $x_{n+1}$.

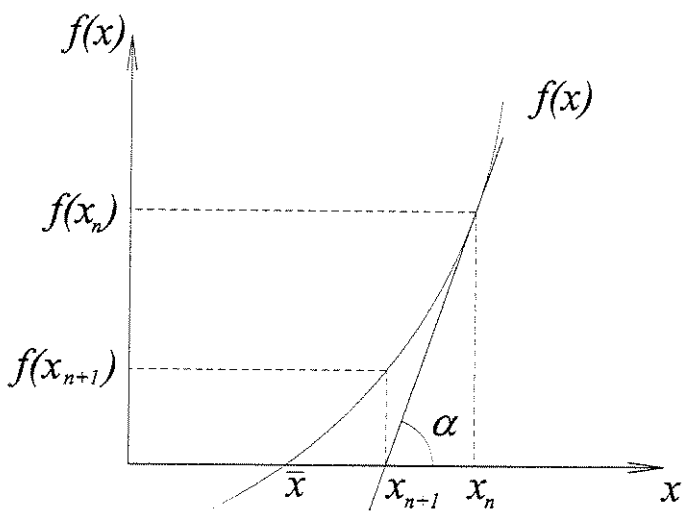



Figura A.1: Interpretação geométrica do método de Newton-Raphson

# Referências


Ahmadian, H., Mottershead, J. E., and Friswell, M. I. (1996). Joint modelling for finite element model updating. In *14th IMAC*, pages 591–596.

Allgower, E. L. and Georg, K. (1980). Simplicial and continuation methods for approximating fixed points and solutions to systems of equations. *SIAM*, (22):28–85.

Anderson, I. (1990). Avoiding stinger rod resonance on small structures. In *8th IMAC*, pages 673–678.

Bathe, K. J. and Dvorkin, E. N. (1983). On the automatic solution of nonlinear finite element equations. *Computer and Structures*, (17):871–879.

Bellini, P. X. and Chulya, A. (1987). An improved automatic incremental algorithm for efficient solution of nonlinear finite element equations. *Computer and Structures*, (26):99–110.

Bergan, P. G., Horrigmoe, G., Krakeland, B., and Soreide, T. H. (1978). Solution techniques for nonlinear finite element problems. *International Journal of Numerical Methods for Engineering*, (12):1677–1696.

Bohlen, S. and Gaul, L. (1987). Vibration of structures coupled by nonlinear transfer behaviour of joints: A combined computacional and experimental approach. In *5th IMAC*, pages 86–91.

Boivin, N. and Pierre, C. (1995). Nonlinear modal analysis of structural systems featuring internal resonances. *Journal of Sound and Vibration*, 782(2):336–341.

Brillhart, D., Hunt, D., and Pierre, M. (1993). Advantages of excitation using plastic stinger rods. In *11th IMAC*, pages 1217–1220.

Burdekin, M., Back, N., and Cowley, A. (1978). Experimental study of normal and shear characteristics of machined surfaces in contact. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 20(20):129–132.

Chouychai, T. and Vinh, T. (1986). Analysis of non linear structure by programmed impact testing and higher order transfer function. In *4th IMAC*, pages 743–747. London.

Chouychai, T. and Vinh, T. (1987). Impact testing of non-linear structures. In *5th IMAC*, pages 1384–1399. London.

Clarke, M. and Hancock, G. (1990). A study of incremental-iterative strategies for nonlinear analysis. *International Journal of Numerical Methods for Engineering*, (29):1365–1391.

Crisfield, M. A. (1997). *Nonlinear finite Element Analysis of Solids and Structures*, volume 1,2. John Wiley and Sons.

Dokainish, M. A. and Subbaraj, K. (1989a). A survey of direct time-integration methods in computacional structural dynamics: I, explicit methods. *International Journal of Computers and Structures*, 32:1371–1386.

Dokainish, M. A. and Subbaraj, K. (1989b). A survey of direct time-integration methods in computacional structural dynamics: Ii, implicit methods. *International Journal of Computers and Structures*, 32:1387–1401.

Ewins, D. (1984). *Modal Testing: Theory and Practice.* Research Studies Press.

Ewins, D. J. and Imregun, M. (1986). State-of-the-art assessment of structural dynamic response analysis methods (dynas). *Shock and Vibration Bulletin*, 56:59–90.

Ewins, D. J. and Sidhu, J. (1982). Modal testing and the linearity of structures. *Mechanique Materiaux Electricite*, (389-390-391):297–302.

Feng, Y. T., D.Perić, and Owen, D. R. (1995). Determination of travel directions in path-following methods. *Mathematical Computational Modelling*, (21):43–59.

Ferreira, J. V. (1998). *Dynamic Response Analysis of Structures with Nonlinear Components*. PhD thesis, Imperial College of Science, Technology and Medicine.

Ferreira, J. V. and Serpa, A. L. (2002). Application of the arc-length method in nonlinear frequency response. In *20th IMAC*, pages 1349–1355.

Frachebourg, A. (1991). Identification of nonlinearities: application of the volterra-model to discrete mdof systems; possibilities and limitts. In *9th IMAC*, pages 1029–1035.

Gaillard, C. and Singh, R. (2000). Dynamic analysis of automotive clutch dampers. *Applied Acoustics*, (60):399–424.

Gaul, L., Nckenhorst, U., Willner, K., and Lenz, J. (1994). Nonlinear vibration damping of structures with bolted joint. In *12th IMAC*, pages 875–881.

Gibson, J. E. (1963). *Nonlinear Automatic Control*. MacGraw-Hill.

Han, S. (1995). Analysis on natural frequency distortion due to the attachment of shaker. In *13th IMAC*, pages 1715–1721.

Haslinger, K. H. (1995). Experimental characterization of sliding and impact friction coefficients between steam generator tubes and avb supports. *Journal of Sound and Vibration*, 181(5):851–871.

Hayashi, C. (1964). *Non-Linear Oscillations in Physical Systems*. Mc Graw-Hill.

Hieber, G. (1988). Non-toxic stingers. In *6th IMAC*, pages 1371–1379.

Humes, A. F. P. C., Melo, I. S. H., Yoshida, L. K., and Martins, W. T. (1984). *Noções de Cálculo Numérico*. MacGraw-Hill.

Jezequel, L., Setio, H. D., and Setio, S. (1990). Non-linear modal synthesis in frequency domain. In *8th IMAC*, pages 1278–1283.

Kramer, E. (1993). *Dynamics of Rotors and Foundations.* Springer-Verlag.

Lee, J. and Chou, Y. (1993). The effects of stingers on modal testing. In *11th IMAC*, pages 293–299.

Lin, R. (1991). *Identification of the dynamic characteristics of nonlinear structures.* PhD thesis, Imperial College of Science, Technology and Medicine.

Lin, R. M. (1988). Non-linear coupling analysis based on a describing function. Master's thesis, Department of Mechanical Engineering, Imperial College, London.

Martins, P. A. O. (2002). Relatório interno do departamento. Technical report, UNICAMP, Departamento de Mecânica Computacional.

McConnell, K. and Varoto, P. (1994). An fe study of the exciter-structure interaction in vibrating testing. In *12th IMAC*, pages 1720–1727.

Mentel, T. J. (1967). Joints interface layer damping. *ASME Journal of Engineering for Industry*, pages 797–805.

Murakami, K. and Sato, H. (1990). Vibration characteristics of a beam with support accompanying clearance. *ASME Journal of Vibrations and Acoustics*, 112:508–514.

Murray, Z. Z. D. W. (1994). An incremental solution technique for unstatable equilibrium paths of shell structures. *Computer and Structures*, 55:339–348.

Nobari, A. S. (1992). *Identification of the dynamic characteristics of structural joints.* PhD thesis, Department of Mechanical Engineering, Imperial College, Exhibition Road, London, SW7 3DU.

Olsen, N. (1986). Using and understanding electrodynamic shakers in modal applications. In *4th IMAC*, pages 1160–1167.

Papadrakakis, M. (1993). *Solving Large-Scale Problems in Mechanics.* John Wiley and Sons.

Powell, G. and Simons, J. (1981). Inproved iterative strategy for nonlinear structures. *International Journal of Numerical Methods for Engineering*, (17):1455–1467.

Rao, D. (1987). Electrodynamic interaction between a resonating structure and an exciter. In *5th IMAC*, pages 1142–1150.

Ren, Y. (1992). *The analysis and identification of friction joint parameters in the dynamic response of structures.* PhD thesis, Department of Mechanical Engineering, Imperial College, Exhibition Road, London, SW7 3DU.

Ren, Y. S., Yang, J. M., Zhao, Z. L., and Wang, Y. H. (1994). Nonlinear vibration analysis of beams with dry friction joint. In *12th IMAC*, pages 1720–1727.

Rice, H. J. and Xu, K. Q. (1996). Linear path identification of general nonlinear systems. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 10(1):55–63.

Riks, E. (1984). Some computational aspects of the stability analysis of nonlinear structures. *Computational Methods of Applied Mechanical Engineering*, (47):219–259.

Sanliturk, K. Y., Imregum, M., and Ewins, D. J. (1997). Harmonic balance vibration analysis of turbine blades with friction dampers. *ASME Journal of Vibrations and Acoustics*, 119:96–103.

Schmidt, R. (1994). Updating nonlinear components. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 8(6):679–690.

Sijak, D. D. (1969). *Nonlinear Systems: A Parameter Analysis and Design.* John Wiley and Sons.

Storer, D. M. and Tomlinson, G. R. (1993). Recent developments in the measurement and interpretation of higher order transfer functions from nonlinear structures. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 7(2):173–189.

Stylianou, M. and Tabarrok, B. (1994). Finite element analysis of an axially moving beam, part i:time integration. *Journal of Sound and Vibration*, 4(178):443–453.

Tomlinson, G. (1987). A simple theoretical and experimental study of the force characteristics from eletrodynamic exciters on linear and nonlinear systems. In *5th IMAC*, pages 1479–1486.

Tomlinson, G. R. (1979). Force distortion in resonance testing of structures with electrodynamic vibration exciters. *Journal of Sound and Vibration*, 63(3):337–350.

Tomlinson, G. R. and Lam, J. (1984). Frequency response characteristics of structures with single and multiple clearance-type non-linearity. *Journal of Sound and Vibration*, 96(1):111–125.

Tsai, J. S. and Chou, Y. F. (1988). The identification of dynamic characteristics of a single bolt joint. *Journal of Sound and Vibration*, 3(125):487–502.

Vinh, T. and Liu, H. (1989). Extension of modal analysis to nonlinear systems (possibility, mathematical models, limitation). In *7th IMAC*, pages 1379–1385.

Wagner, W. and Wriggers, P. (1988). A simple method for the calculation of postcritical branches. *Engineering Computations*, (5):103–109.

Wang, J. H. and Chen, W. K. (1992). Investigation of the vibration of a blade with friction damper by hbm. In *The American Society of Mechanical Engineers*. 92-GT-8,accepted at ASME September/92.

Wang, Y. (1997). Modeling and analysis of automotive transmission rattle. *Society of Automotive Engineers*, pages 1457–1462.

Watanabe, K. and Sato, H. (1988). Development of non-linear building block approach. *ASME Journal of Vibrations, Stress, and Reliability in Design*, 110:36–41.

Yu, Z., Xu, Y. L., and Ko, J. M. (1996). Nonlinear behaviour of cables with moved end-supports. In *14th IMAC*, pages 1041–1047.

Zavodney, L. D. (1987). Can the modal analyst afford to be ignorant of nonlinear vibration phenomena? In *5th IMAC*, pages 154–159.