

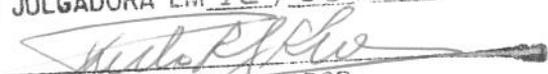
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FCULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

Identificação Paramétrica Multi-Canal de Sistemas Mecânicos no Domínio do Tempo

Autor : Amaurí Ernesto Gomes

Orientador : Paulo Roberto Gardel Kurka

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL
DA TESE DEFENDIDA POR AMAURÍ
ERNESTO GOMES E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 12/09/96.


ORIENTADOR

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO**

Identificação Paramétrica Multi-Canal de Sistemas Mecânicos no Domínio do Tempo

Autor : Amaurí Ernesto Gomes

Orientador : Paulo Roberto Gardel Kurka

Curso : Engenharia Mecânica

Área de Concentração : Mecânica dos Sólidos

Dissertação de mestrado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 1996

S. P.



UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	UNICAMP
	G585i
V.	0 Ex.
TC:MBO BC	29463
PROC.	281/97
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	17/01/97
N.º CPD	

CM-00 0989 17-5

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

G585i Gomes, Amauri Ernesto
Identificação paramétrica multi-canal de sistemas mecânicos no domínio do tempo / Amauri Ernesto Gomes. – Campinas, SP: [s.n.], 1996.

Orientador : Paulo Roberto Gardel Kurka.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Análise modal. 2. Vibração. 3. Processamento de sinais. I. Kurka, Paulo Roberto Gardel. II Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FCULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Identificação Paramétrica Multi-Canal de
Sistemas Mecânicos no Domínio do Tempo**

Autor : Amaurí Ernesto Gomes

Orientador : Paulo Roberto Gardel Kurka



**Prof. Dr. Paulo Roberto Gardel Kurka, Presidente
DPM/FEM/UNICAMP**



**Prof. Dr. José João de Espíndola
Universidade Federal de Santa Catarina**



**Prof. Dr. Robson Pederiva
DPM/FEM/UNICAMP**

Campinas, 12 de agosto de 1996

*A meus pais e para
Arlete .*

AGRADECIMENTOS

- Ao Prof. Dr. Paulo Roberto Gardel Kurka orientador deste trabalho, pela sugestão do tema, incentivo, amizade e orientação que sempre recebi durante sua realização.
- À CAPES, Coordenadoria de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pela bolsa de estudos concedida para a realização deste trabalho.
- Aos professores da Faculdade de Engenharia Mecânica que contribuíram para o enriquecimento de meus conhecimentos e qualificação profissional.
- A IOCHPE MAXION S. A. - Divisão de Motores e especialmente aos engenheiros Roberto Pierotti Ferreira e Carlos G. Quinholi que tornaram possível a realização dos testes experimentais do tubo de sucção de óleo.
- Aos técnicos do Laboratório de Projeto Mecânico (DPM - FEM) e ao Prof. Dr. Milton Dias Jr. pelo apoio e serviços prestados na realização da parte experimental.
- Ao amigo Cleudimar de Araujo pelo suporte oferecido na implementação dos algoritmos computacionais, em C⁺⁺, da conversão de dados do analisador de sinais SD380.
- A todos que, direta ou indiretamente contribuíram para a conclusão deste trabalho.

Resumo

Gomes, Amauri Ernesto, *Identificação Paramétrica Multi-Canal de Sistemas Mecânicos no Domínio do Tempo*, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1996, 114 p., Tese (Mestrado).

A análise do comportamento dinâmico de sistemas estruturais é indispensável para o desenvolvimento e otimização de projetos. O presente trabalho traz como contribuição a este campo, um método de identificação de parâmetros modais no domínio do tempo. O algoritmo de identificação calcula as características modais do sistema, ou seja, as frequências naturais, os fatores de amortecimento e as constantes modais. A metodologia implementada processa sinais referentes a uma excitação e múltiplas referências (SIMO) no domínio do tempo. Diferentes técnicas numéricas e de processamento de sinais foram implementadas e desenvolvidas para os algoritmos de identificação.

Em uma etapa subsequente o algoritmo é utilizado num ensaio de identificação experimental de um tubo de sucção de óleo de um motor Diesel.

Palavras Chave

Análise Modal, Vibração, Processamento de Sinais.

Abstract

Gomes, Amaurí Ernesto, *Identificação Paramétrica Multi-Canal de Sistemas Mecânicos no Domínio do Tempo*, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1996, 114 p., Tese (Mestrado).

The analysis of the dynamical behaviour of structures is an indispensable for the design engineer. The present work brings as a contribution to this field, a time domain modal parameters identification procedure. The identification algorithm estimates the system's modal characteristics, that is, natural frequencies and damping as well as mode shapes. The methodology uses single-input multi-output dynamical information in the time domain. Different signal processing and numerical techniques have been employed and developed within the identification algorithm.

The algorithm is applied in the experimental identification of an oil suction pipe of a Diesel engine.

key Words

Modal Analysis, Vibration, Signal Processing.

Sumário

1 Introdução

1.1	Objetivos e Aplicação do Trabalho	1
1.2	Introdução à Técnica de Identificação de Sistemas	2
1.3	Revisão Bibliográfica	6
1.4	Estrutura dos Capítulos	9

2 Fundamentos da Análise Modal de Sistemas Dinâmicos Lineares

2.1	Introdução	11
2.2	Modelo Matemático Discreto de um Sistema Mecânico	12
2.3	Matriz Função de Transferência	13
2.3.1	Resposta ao Impulso Unitário	14
2.3.2	Relação dos Parâmetros Modais com a função de Transferência	16
2.4	Transformada Z e a função de Transferência	20
2.4.1	Função de Transferência de um Modelo Discreto	20
2.5	Aspectos do Problema de Identificação	23

3 Identificação Paramétrica Multi-Canal no domínio do Tempo

3.1	Método da Polireferência no Domínio do Tempo	26
3.2	Método ERA (Eigensystem Realization Algorithm)	31
3.2.1	Identificação ERA na Direção Regressiva	34
3.3	Método Multivariate ARMA	35
3.3.1	Modelo ARMA de um Sistema	36

3.3.2	Estimativa da Matriz G	40
3.3.3	Determinação da Ordem da Estrutura	42
3.4	Aspectos da Deconvolução	43
3.4.1	Deconvolução Discreta	44
3.4.2	Deconvolução MIMO	48
3.5	Identificação da Ordem de um Sistema Dinâmico	50
3.6	Aspectos da Sobre-determinação da Ordem do Modelo	51
3.7	Método de Identificação Proposto	53
4	Metodologia de Implementação do ERABACK	
4.1	Descrição do Método de Identificação ERABACK	56
4.1.1	Determinação da Ordem do Sistema	56
4.1.2	Obtenção dos Autovalores do Sistema	59
4.2	Implementação Numérica do ERABACK	60
5	Investigação Experimental	
5.1	Descrição do Protótipo	67
5.2	Aquisição e Processamento dos Sinais	70
6	Análise dos Resultados	
6.1	Simulações Numéricas	75
6.1.1	Comparação dos Resultados	77
6.2	Resultados Experimentais	88
6.2.1	Método dos Elementos Finitos	88
6.2.2	Análise no Domínio da Frequência	90
6.2.2.1	Análise da Estrutura do Suporte	91
6.2.2.2	Análise Livre-Livre do Tubo de Sucção	92
6.2.2.3	Análise do Tubo de Sucção Fixo ao Suporte	93
6.2.2.4	Determinação do Modo de Vibrar	94
6.2.3	Comparação dos Resultados Experimentais	96

7	Conclusões e Sugestões	
7.1	Conclusões Gerais	104
7.2	Sugestões para Futuros Desenvolvimentos	105
8	Referências Bibliográficas	106

Lista de Figuras

1.1	Representação esquemática do processo de identificação	5
5.1a	Montagem do protótipo ensaiado	68
5.1b	Montagem do protótipo ensaiado	68
5.2	Dimensões do protótipo	69
5.3	Martelo de impacto	70
5.4	Resposta no tempo com excitação impulsiva	71
5.5	Resposta em frequência com excitação impulsiva	71
5.6	Detalhe da fixação do acelerômetro	72
5.7	Sistema de aquisição e processamento de sinais	72
6.1	Pólos do sistema (1º exemplo numérico)	77
6.2	Pólos identificados pelo método proposto	77
6.3	Correlação entre os pólos do sistema e os pólos identificados	77
6.4	Correlação entre o primeiro modo de vibrar	78
6.5	Correlação entre o segundo modo de vibrar	78
6.6	Correlação entre o terceiro modo de vibrar	78
6.7	Correlação entre o quarto modo de vibrar	78
6.8	Correlação entre o quinto modo de vibrar	78
6.9	Correlação entre o sexto modo de vibrar	78
6.10	Correlação entre o sétimo modo de vibrar	79
6.11	Correlação entre as frequências do sistema e identificadas	79
6.12	Pólos do sistema e pólos identificados (2º exemplo numérico)	80
6.13	Correlação entre o primeiro modo de vibrar	81
6.14	Correlação entre o segundo modo de vibrar	81
6.15	Correlação entre o terceiro modo de vibrar	81

6.16	Correlação entre o quarto modo de vibrar	81
6.17	Correlação entre o quinto modo de vibrar	82
6.18	Correlação entre o sexto modo de vibrar	82
6.19	Correlação entre o sétimo modo de vibrar	82
6.20	Correlação entre o oitavo modo de vibrar	82
6.21	Correlação entre as frequências do sistema e identificadas	82
6.22	Pólos do sistema e pólos identificados (3º exemplo numérico)	83
6.23	Correlação entre o primeiro modo de vibrar	83
6.24	Correlação entre o segundo modo de vibrar	83
6.25	Correlação entre o terceiro modo de vibrar	84
6.26	Correlação entre o quarto modo de vibrar	84
6.27	Correlação entre o quinto modo de vibrar	84
6.28	Correlação entre o sexto modo de vibrar	84
6.29	Correlação entre o sétimo modo de vibrar	84
6.30	Correlação entre o oitavo modo de vibrar	84
6.31	Correlação entre as frequências do sistema e identificadas	85
6.32	Pólos do sistema e pólos identificados (4º exemplo numérico)	86
6.33	Correlação entre o primeiro modo de vibrar	87
6.34	Correlação entre o segundo modo de vibrar	87
6.35	Correlação entre o terceiro modo de vibrar	87
6.36	Correlação entre o quarto modo de vibrar	87
6.37	Correlação entre o quinto modo de vibrar	87
6.38	Correlação entre o sexto modo de vibrar	87
6.39	Correlação entre o sétimo modo de vibrar	88
6.40	Correlação entre o oitavo modo de vibrar	88
6.41	Correlação entre as frequências do sistema e identificadas	88
6.42	Discretização espacial da estrutura analisada	89
6.43	Discretização espacial dos pontos de excitação e resposta do protótipo	90
6.44	Estrutura do suporte	91
6.45	Perspectiva do primeiro modo de vibrar identificado pelo método proposto	97

6.46	Perspectiva do primeiro modo de vibrar obtido experimentalmente	97
6.47	Perspectiva do primeiro modo de vibrar obtido pelo método dos elementos finitos	97
6.48	Perspectiva do segundo modo de vibrar identificado pelo método proposto	98
6.49	Perspectiva do segundo modo de vibrar obtido experimentalmente	98
6.50	Perspectiva do segundo modo de vibrar obtido pelo método dos elementos finitos	98
6.51	Perspectiva do terceiro modo de vibrar identificado pelo método proposto	99
6.52	Perspectiva do terceiro modo de vibrar obtido experimentalmente	99
6.53	Perspectiva do quarto modo de vibrar identificado pelo método proposto	100
6.54	Perspectiva do quarto modo de vibrar obtido experimentalmente	100
6.55	Perspectiva do quinto modo de vibrar identificado pelo método proposto	101
6.56	Perspectiva do quinto modo de vibrar obtido experimentalmente	101
6.57	Perspectiva do sexto modo de vibrar identificado pelo método proposto	102
6.58	Perspectiva do sexto modo de vibrar obtido experimentalmente	102
6.59	Perspectiva do sétimo modo de vibrar identificado pelo método proposto	103
6.60	Perspectiva do sétimo modo de vibrar obtido experimentalmente	103

Lista de Tabelas

6.1	Frequências naturais do suporte	92
6.2	Frequências naturais livre-livre do tubo de sucção	93
6.3	Frequências naturais do tubo de sucção fixo ao suporte	94
6.4	Comparação entre as frequências naturais identificadas com outros métodos	96

Nomenclatura

Letras Latinas

A, B, D	Matrizes das equações de estado para o caso discreto
$\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$	Matrizes das equações de estado para o caso contínuo
C	Matriz simétrica de amortecimento
f	Vetor de resposta $n \times 1$
F	Matriz Toeplitz triangular inferior do problema de deconvolução
F_j	Matriz Toeplitz triangular inferior correspondente a excitação na coordenada j
g	Vetor de excitação nas variáveis de estado
G	Matriz do sistema dinâmico
h	Vetor de amostras da função resposta ao impulso unitário
$h(t)$	Matriz resposta ao impulso unitário
$h_{ij}(t)$	Elemento genérico da matriz resposta ao impulso unitário
H	Matriz Hankel do modelo AR na direção inversa
\tilde{H}	Matriz Hankel com dados perturbados com ruído
$H(K)$	Matrizes Hankel-bloco utilizadas nos modelos MIMO para $K = 0, 1$
$H(s)$	Matriz função de transferência
$H(0)^+$	Pseudo inversa de $H(0)$
$H_{ij}(s)$	Elemento genérico da matriz função de transferência
$H_{ij}(z)$	Função de transferência pontual no plano z
I	Matriz identidade
K	Matriz simétrica de rigidez
$k(H)$	Número de condição da matriz H

L	Número de coordenadas de excitação
\mathbf{L}	Matriz de observabilidade
\mathbf{M}	Matriz simétrica de massa
\mathbf{O}	Matriz nula de ordem $n \times n$
\mathbf{p}	Parâmetros ajustados iterativamente
$P_{2N}(z)$	Polinômio Característico do Autoproblema
\mathbf{r}_i	Vetor genérico da matriz modal \mathbf{W}
r_{kil}	Elemento genérico do vetor \mathbf{r}_i
\mathbf{S}	Matriz dos modelos MIMO progressivos
\mathbf{S}_b	Matriz dos modelos MIMO na direção inversa
\mathbf{T}	Matriz de amostras das funções resposta ao impulso unitário
\mathbf{T}_i	Submatriz da matriz \mathbf{T}
\mathbf{u}	Vetor de excitação $n \times 1$
$\hat{\mathbf{u}}$	Vetor resposta estimado pelo modelo
\mathbf{U}	Matriz dos deslocamentos do sistema
\mathbf{v}	Vetor solução do sistema
v_r	Elemento genérico do vetor \mathbf{v}
\mathbf{x}	Vetor de estado
\mathbf{x}_o	Vetor de condições iniciais nas variáveis de estado
$\mathbf{Y}_j(k)$	Vetor de amostras das L respostas ao impulso do sistema dinâmico no instante $t = k\Delta t$ para uma excitação na coordenada j
z_r	Pólos do sistema no plano complexo z
Z	Transformada Z
\mathbf{W}	Representação da matriz modal de estado normalizada

Letras Gregas

α	Constante de proporcionalidade
β_i	Vetor transmodal de resposta na coordenada i
δ	Delta de Dirac
$\delta\mathbf{h}$	Varição do vetor resposta ao impulso

$\delta \mathbf{u}$	Varição do vetor resposta do sistema
ε	Função erro
$\varepsilon(k)$	Ruído associado ao vetor de deslocamentos da equação de estado
Φ	Matriz de autovetores
ϕ_r	Autovetores do sistema mecânico
Λ	Matriz diagonal dos autovalores λ_r
λ_r	Autovalores do sistema mecânico
ρ_{rij}	Resíduo modal da função de transferência no plano z
σ_r	Valores singulares da matriz Hankel
ω_r	Frequências naturais
$\Omega\xi$	Argumento matricial do polinômio de coeficientes matriciais
ξ_r	Fator de amortecimento modal
Ψ	Matriz de autovetores da matriz de estado
$\bar{\Psi}$	Matriz de autovetores não normalizados nas variáveis de estado
ψ_r	Autovetor da matriz de estado

Símbolos

$\mathcal{L}[\bullet]$	Operador transformada de Laplace
$\mathcal{F}[\bullet]$	Operador transformada de Fourier
$\ \bullet\ $	Norma Euclidiana ou norma espectral

Siglas

ARMA	Autoregressive and Moving Average
DFRIU	Subrotina de Cálculo das Estimativas das Funções Resposta ao Impulso Unitário
ERA	Eigensystem Realization Algorithm
ERABACK	Eigensystem Realization Algorithm Backward

FFT	Fast Fourier Transform
FRF	Função Resposta em Frequência
FRIU	Função Resposta ao Impulso Unitário
IFFT	Inverse Fast Fourier Transform
IOPS	Subrotina de Identificação da Ordem e dos Pólos do sistema
MA	Media Móvel
MFRF	Matriz Função Resposta em Frequência
MFRIU	Matriz Função Resposta ao Impulso Unitário
MIMO	Multi-Input Multi-Output
MIMOG	Programa Principal
MODAL	Subrotina para a Determinação dos Autovetores
SISO	Single-Input Single-Output
TSVD	Truncated Singular Value Decomposition

Capítulo 1

Introdução

1.1 Objetivos e Aplicação do Trabalho

Os objetivos principais deste trabalho são o desenvolvimento de técnicas de identificação paramétrica multi-canal no domínio do tempo e a implementação numérica de um algoritmo, escrito na linguagem Matlab plataforma 4.2 c1, para identificação de sistemas dinâmicos que, discretizados espacialmente, sejam caracterizados como modelos matemáticos invariantes no tempo.

Este projeto de pesquisa encontra, também, interesse de aplicação junto ao Departamento de Engenharia Avançada e Ensaios Dinâmicos da **IOCHPE MAXION S. A.**, Divisão de Motores, visando uma contribuição ulterior para se avaliar criteriosamente o comportamento oscilatório estrutural de componentes de motores diesel.

Com este propósito, serão realizados ensaios experimentais e os sinais dinâmicos adquiridos serão processados pelo programa de identificação modal no domínio do tempo, que fornecerá importantes subsídios, tais como, as estimativas para os autovalores, ou seja, os fatores de amortecimento e frequências naturais amortecidas e para os autovetores, que são os modos de vibrar do sistema. Estas informações permitem relacionar e comparar os resultados com os obtidos através do Método dos Elementos Finitos, fornecidos pelo programa **MSC NASTRAN**. Este procedimento contribuirá para assegurar a integridade estrutural do sistema analisado, quanto às vibrações presentes nas diversas condições de utilização da estrutura.

A estrutura mecânica que será submetida a esta análise é um protótipo de **Tubo de Sucção de Óleo 5035/SC94** utilizado no motor diesel Perkins **T4236**, quatro cilindros, 73CV quatro litros e injeção direta.

1.2 Introdução à Técnica de Identificação de Sistemas

Um sistema, de um modo geral, pode ser caracterizado, matematicamente, como sendo um **operador** que relaciona um sinal de entrada, a excitação $f(t)$, a um sinal de saída $u[f(t)]$, que representa a resposta do sistema. Os sistemas podem ser considerados como *lineares* e *não lineares* dependendo das propriedades obtidas através da relação entre os sinais de *saída* e *entrada*. Para os *sistemas lineares* prevalecem dois princípios que fundamentam e simplificam sobremaneira sua análise e que estão relacionados com os sinais de saída e entrada da seguinte forma:

- **princípio da superposição**

$$u \left[\sum_{i=1}^n f_i(t) \right] = \sum_{i=1}^n u[f_i(t)] = u[f_1(t)] + \Lambda + u[f_j(t)] + \Lambda + u[f_n(t)]$$

- **princípio da proporcionalidade (homogeneidade)**

$$u \left[\alpha f_j(t) \right] = \alpha u \left[f_j(t) \right] \quad , \quad \alpha \in \mathbf{R}$$

Estes princípios **não** se aplicam à *sistemas não lineares*, principalmente o princípio da superposição, o que dificulta significativamente a abordagem teórica e a aplicação de métodos para a análise destes sistemas.

O processo de análise de um sistema mecânico inicia com a modelagem. Após a definição do modelo teórico, ou analítico, formula-se o modelo matemático. Este modelo é formado por um conjunto de equações diferenciais lineares que descrevem as propriedades

dinâmicas do sistema que correspondem às características de resposta obtidas a partir da relação dos sinais de saída e entrada adquiridos experimentalmente Natke [64] e Craig [23].

A modelagem do fenômeno da vibração estrutural em sistema mecânico, quando consideradas as forças que nele atuam, invariavelmente nos conduz às seguintes componentes :

- *forças de excitação* → fontes que estabelecem o processo vibratório,
- *forças de restauração* → resultam da distribuição espacial da rigidez da estrutura,
- *forças de amortecimento* → responsáveis pela dissipação de energia mecânica,
- *forças de inércia* → resultam da ação das três componentes anteriores.

O desenvolvimento dos fundamentos teóricos deste trabalho considera que os sistemas sob estudo são discretizados espacialmente, resultando em modelos matemáticos lineares e invariantes no tempo com parâmetros discretos.

A identificação de um sistema pode reduzir-se à determinação experimental dos parâmetros modais que regem o comportamento dinâmico do mesmo, seja ele linear ou não-linear, a partir dos sinais de excitação e resposta obtidos experimentalmente . Este procedimento é possível quando se dispõe de informações prévias das propriedades espaciais da estrutura Eykhoff [29].

No universo mecânico existem inúmeras aplicações nas quais a análise do fenômeno de vibração estrutural é indispensável ao projeto, sob pena de inviabilizá-lo ou até mesmo provocar o colapso de estruturas. Como exemplo pode-se mencionar os problemas de ruído em motores e máquinas de componentes girantes, o deslocamento excessivo de estruturas excitadas próximo à suas frequências críticas, desgaste exagerado por fadiga estrutural, o conforto acústico de ambientes, o fenômeno de “flutter” que ocorre na asa de avião bem como uma infinidade de outras importantes aplicações de análise de vibração estrutural.

O fenômeno da vibração estrutural é intrínseco aos sistemas e depende da assinatura dinâmica dos mesmos, ou seja, da distribuição espacial do amortecimento, massa e rigidez na estrutura. A identificação direta destas propriedades, conforme será mostrado no

capítulo 2, apresenta dificuldades inerentes, o que conduz ao interesse primordial deste trabalho em obter estimativas de parâmetros modais, isto é, dos fatores de amortecimento, frequências naturais amortecidas e dos modos de vibrar da estrutura, pois estes parâmetros representam as características dinâmicas do sistema estrutural. A identificação das propriedades modais de um sistema dinâmico e a validação de modelos teóricos são os principais atributos da análise Modal Experimental Natke [64] e Ransey [72].

Um aspecto relevante, que também se pode verificar, é que os métodos e técnicas utilizadas na Análise Modal Experimental *não* determinam diretamente os parâmetros existentes nas equações espaço-temporais que constituem o modelo espacial do sistema.

A identificação experimental das características modais de um sistema dinâmico pode ser realizada diretamente a partir dos sinais adquiridos, ou após o processamento dos mesmos. No segundo caso, os sinais são processados na forma de funções de resposta em frequência FRFs ou de suas funções de resposta ao impulso FRIs equivalentes, estimadas pela transformada inversa de Fourier. As técnicas utilizadas na obtenção das estimativas dos parâmetros do sistema, sem considerar a forma dos sinais, processados ou não, se dividem em duas grandes classes quanto ao número de sinais dinâmicos adquiridos: a identificação **SISO** (Single Input - Single Output) onde apenas dois sinais são analisados de cada vez, e identificação **MIMO** (Multi-Input - Multi-Output) onde múltiplos sinais de excitação e resposta do sistema são considerados simultaneamente. Estes métodos estão intrinsecamente associados à dimensão espacial do modelo dinâmico que representa o sistema físico em estudo.

As técnicas de identificação, por sua vez, dividem-se ainda em duas outras categorias, quanto ao número de modos identificados em cada análise: identificação modo a modo, onde cada modo de vibrar é identificado separadamente e identificação multi-modos onde vários modos de vibrar são simultaneamente identificados.

Os sinais de entrada, aplicados externamente ao sistema, e os sinais de saída adquiridos experimentalmente, normalmente possuem ruídos que consistem em outra classe de sinais que podem ser diretamente medidos ou ainda observados somente na saída através de seus efeitos. A presença de ruído, nos sinais de entrada e saída dificulta consideravelmente o processo de identificação de parâmetros de um sistema.

O diagrama da Figura 1.1 representa esquematicamente o processo de obtenção das estimativas dos parâmetros modais para um determinado sistema. Para simplificar esta representação considerem-se os sinais contínuos no tempo. Na literatura encontram-se exemplos em que este processo de identificação é utilizado, como em Unbehauen e Rao [77]. Normalmente, na análise modal experimental, a aquisição dos sinais e o processamento dos mesmos são realizados numericamente de forma discreta.

Na figura abaixo f representa o sinal de excitação aplicado ao sistema, u o sinal de resposta do sistema dinâmico na presença de ruído externo r e \hat{u} é o sinal de resposta estimado, fornecido pelo modelo do sistema quando submetido à mesma excitação f . Deve-se destacar ainda que a presença de ruídos externos nos sinais de entrada e saída do sistema conduzem à imprecisões nos modelos matemáticos escolhidos. Com o propósito de solucionar este problema os parâmetros do modelo p são ajustados iterativamente, através de um algoritmo, fazendo-se a função erro $\mathcal{E} = \|u - \hat{u}\|$ tender a zero.

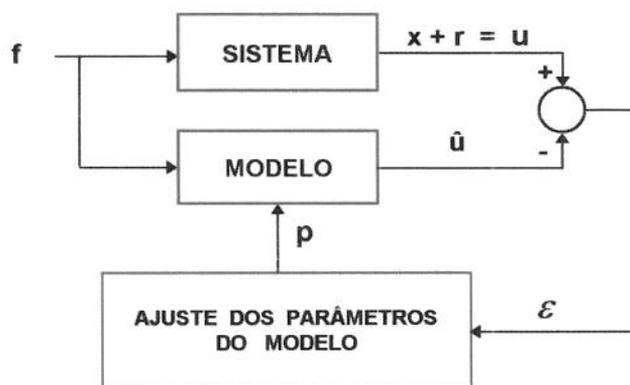


Figura 1.1 - Representação esquemática do processo de identificação

Este procedimento permite afirmar que o modelo matemático considerado representa os aspectos essenciais do sistema estrutural, tais como as propriedades físicas e também as mesmas características de resposta da estrutura sob estudo.

1.3 Revisão Bibliográfica

A descrição do estado da arte da análise modal experimental é uma tarefa difícil. Nas últimas décadas, um amplo e variado conjunto de técnicas de identificação vem sendo aplicado ao estudo dos fenômenos vibratórios estruturais na engenharia mecânica. A grande maioria destas técnicas, diferentes na apresentação, porém matematicamente equivalentes não nos conduz à solução definitiva do problema de identificação de parâmetros e há divergências acerca das melhores técnicas a serem utilizadas. Contudo, existe uma fronteira bem definida no que se refere ao domínio no qual estas técnicas são realizadas, ou seja, no domínio do tempo ou no domínio da frequência.

As técnicas de análise modal no domínio do tempo utilizam diretamente os sinais de excitação e resposta para o cálculo dos parâmetros modais. Estas técnicas, porém, são objeto de recentes pesquisas especializadas e suas aplicações restritas a poucas áreas práticas.

Outras áreas do conhecimento científico, entretanto, possuem familiaridade com as técnicas de análise no domínio do tempo. Os economistas Yule [85] e Walker [82] nas décadas de 20 e 30 utilizaram estas técnicas na previsão de dados econômicos através de séries temporais. Em 1938 Wold [84] propôs um teorema provando que todos os processos estocásticos estacionários podem ser representados por um modelo linear de Média Móvel (**MA**). Este teorema, mais tarde, fundamentou a metodologia desenvolvida por Box e Jenkins [12] utilizando uma classe de modelos mistos, Autoregressivo de Média Móvel (**ARMA**). Desde algumas décadas, as séries estocásticas no domínio do tempo são ferramentas tradicionais à área de estatística. Pode-se citar ainda, como referências em previsões econômicas, os trabalhos de Makridakis e Wheelwright [60], [61] e [62] e de Chatfield [18].

Na engenharia elétrica, também é muito comum a utilização de séries discretas no domínio do tempo, na forma de filtros digitais para processamento, Peled e Liu [67], Oppenheim e Schaffer [67], e controle digital de sinais, Franklin e Powell [30] e McDonough e Huggins [57].

O estudo do fenômeno vibratório recebeu um grande avanço tecnológico com o advento dos computadores analógicos aliados às técnicas de análise por varredura de frequência entre as décadas de 40 e 50. A partir de 1947, considera-se como documentação relevante, o trabalho de Kennedy e Panku [47] conhecido como método de ajuste do círculo modal. Na década de 70 houve a integração das técnicas de modelagem discreta de sistemas dinâmicos aos procedimentos experimentais de análise de vibrações até então conhecidos.

Com os avanços ocorridos na eletrônica digital, em 1973 Cole [20] desenvolveu uma técnica no domínio do tempo a qual chamou de “*randomec*“. Em 1976 e 1977 Ibrahim e Mikulcik [40], [41] utilizaram métodos no domínio do tempo que despertaram o interesse dos analistas nesta área.

O trabalho de Brown em 1979 [15], no domínio do tempo também merece destaque por haver popularizado o método dos mínimos quadrados para exponenciais complexas (Least Squares Complex Exponential Method).

Em 1982 Vold [81] desenvolveu um algoritmo de frequências múltiplas (Polyreference) em ambos os domínios, do tempo e da frequência.

Outras publicações, tais como Brown [16] em 1982 e Ewins [27], [28] em 1984 apresentaram uma visão dos testes modais no domínio do tempo e no domínio da frequência. O algoritmo **ERA** (Eigensystem Realization Algorithm) desenvolvido por Juang e Pappa [44] foi aplicado primeiramente no domínio do tempo e posteriormente desenvolvido para o domínio da frequência.

Estes trabalhos constituem, basicamente, o primeiro grupo de técnicas aplicadas à análise modal experimental no domínio do tempo. Deve-se destacar que a grande maioria dos métodos de identificação nesta área é baseada no método de aproximações exponenciais de **Prony** [71] cuja base teórica foi formulada no final do século XVIII, mais precisamente no ano de 1795.

Num segundo grupo pode-se mencionar os algoritmos de predição linear **ARMA** (Autoregressive and Moving Average) até então aplicados à área de engenharia elétrica e automação, atualmente transferidos com sucesso à análise do fenômeno de vibrações estruturais.

No período de 1973 a 1993 destacam-se os trabalhos que utilizam a técnica **SISO** dos seguintes autores: Evans [26], Makhoul [59], Tufs e Kumaresan [76], Kumaresan [48], Rao [73], Hollkamp e Batill [38], Cooper [22] e outros. No período de 1987 a 1983 utilizando a técnica **MIMO** os autores Cho e outros [19], Mickleborough e Pi [63], Zhang e Hayma [85], Piombo e outros [69] e recentemente os trabalhos de Kurka [50], [51], [52] e Kurka e Bazán [53] e [54].

O universo dos métodos numéricos que se enquadram na categoria “*do domínio do tempo*” é bastante amplo e diversificado. A utilização destas técnicas na identificação paramétrica aplicadas à análise modal experimental de estruturas mecânicas visa solucionar os problemas intrínsecos a análise experimental.

As estruturas físicas reais possuem infinitos graus de liberdade, ou seja, um número infinito de coordenadas independentes entre si, mas dependentes do tempo são necessárias para a descrição de seus movimentos. Para descrever numericamente o comportamento dinâmico de um sistema físico qualquer, utiliza-se na prática um número finito de coordenadas geométricas. Os graus de liberdade, por sua vez, representam o número de coordenadas independentes necessárias para a descrição completa do movimento do sistema. Esta análise restringe-se também às limitações dos equipamentos de aquisição dos sinais dinâmicos que são capazes de monitorar o movimento do sistema apenas para uma restrita faixa de frequências. A limitação geométrica do número de graus de liberdade do sistema passa a ser contornada com a utilização de um grande número de coordenadas atribuídas ao seu modelo matemático. O limite dinâmico dos sinais medidos faz com que o número de coordenadas independentes do modelo seja reduzido drasticamente, a despeito de sua refinada representação geométrica. Desta forma, a principal dificuldade encontrada na análise modal experimental é a *determinação correta da ordem do sistema*.

A maioria das técnicas de identificação de parâmetros modais considera uma ordem sobredeterminada de coordenadas independentes para o sistema em estudo. Este procedimento introduz modos computacionais, sem significado físico, que não pertencem ao sistema e portanto devem ser separados numa etapa posterior do processo de identificação.

1.4 Estrutura dos Capítulos

Este trabalho apresenta a abordagem dos seguintes tópicos no conteúdo dos capítulos subsequentes:

Capítulo 2 : Estabelece as relações matemáticas básicas da análise modal utilizadas para descrever o modelo matemático considerado na representação dos sistemas sob estudo. É dada ênfase à alguns conceitos, tais como, a obtenção da matriz função de transferência, a definição da função resposta ao impulso unitário de sistemas lineares no domínio do tempo e a relação entre os parâmetros modais e a função de transferência.

Capítulo 3 : Apresenta os principais métodos de identificação de parâmetros modais *multi-canal* no domínio do tempo. Em particular, é mostrado o desenvolvimento teórico do método ERABACK. São abordadas algumas considerações sobre as dificuldades de implementação destes métodos:

- determinação da ordem correta do sistema.
- obtenção da função resposta ao impulso unitário através da deconvolução discreta a partir dos sinais de excitação e resposta.
- deconvolução MIMO para estimar a matriz função resposta ao impulso unitário.
- conceitos de álgebra linear computacional, como por exemplo o teorema da decomposição em valores singulares e o método da eliminação de Gauss com pivotamento completo.

Capítulo 4 : Descreve o método de identificação de parâmetros modais proposto. Apresenta as várias etapas do processo de implementação numérica do método e a estrutura do programa ERABACK.

Capítulo 5 : Descreve o ensaio experimental realizado neste trabalho a partir do qual os dados experimentais foram submetidos ao algoritmo de identificação modal com o objetivo de verificar a eficiência do método proposto.

Capítulo 6 : Apresenta os resultados do processamento dos dados experimentais pelo algoritmo proposto, que correspondem às características de resposta do tubo de sucção de óleo. Neste capítulo, são considerados outros procedimentos com a finalidade de se analisar e comparar os resultados obtidos.

Capítulo 7 : Este capítulo apresenta algumas conclusões sobre a metodologia utilizada, com base nos resultados simulados e experimentais, bem como sugestões para futuros desenvolvimentos.

Referências Bibliográficas

Apêndice : O apêndice apresenta um artigo publicado, no **DINAME - 95**, *Gauss Factorization for Least Squares Solutions in Over - Determinated Dynamical System Identification*.

Capítulo 2

Fundamentos da Análise Modal de Sistemas Dinâmicos Lineares

2.1 Introdução

Este capítulo apresenta a teoria de vibrações mecânicas aplicada à sistemas dinâmicos lineares com vários graus de liberdade. As relações fundamentais da análise modal necessárias ao desenvolvimento deste trabalho, também, estão descritas neste capítulo.

Inicialmente descreve-se o modelo matemático considerado para representar as características físicas e o comportamento dinâmico de um sistema estrutural. Em seguida, introduz-se o conceito de função de transferência, que estabelece a relação entre os sinais de entrada e saída do sistema. Os sinais de excitação e resposta são caracterizados como determinísticos e portanto admitem a transformada de Laplace para o caso contínuo e a transformada Z para a versão discreta. Os problemas de identificação de parâmetros, relacionados aos sistemas mecânicos, são apresentados de maneira formal, bem como as relações existentes entre as propriedades modais de um sistema linear e os parâmetros utilizados nas equações dinâmicas de movimento.

2.2 Modelo Matemático Discreto de um Sistema Mecânico

Os sistemas físicos em geral são estruturas contínuas que podem ser convenientemente representadas por sistemas discretizados espacialmente através de uma equação diferencial matricial linear de segunda ordem a n variáveis. Os coeficientes de influência de massa, rigidez e amortecimento desta equação são considerados invariantes no tempo.

Todos os sistemas físicos apresentam características de amortecimento. Os modelos de amortecimento viscoso e histerético, também conhecido como amortecimento estrutural, são os mais utilizados para descrever este mecanismo. O estudo da resposta de sistemas amortecidos requer, além do conhecimento do modelo modal adotado, o conhecimento da distribuição espacial do amortecimento na estrutura. Quanto à distribuição, o amortecimento pode ser classificado como proporcional e não proporcional.

O modelo de amortecimento viscoso não proporcional, considerado neste trabalho, representa adequadamente o mecanismo do fenômeno físico que ocorre quando um sistema estrutural é excitado. Este modelo também é apropriado para descrever analiticamente os movimentos de resposta livre e de resposta ao impulso unitário de um sistema dinâmico.

Os sinais de excitação e resposta que constituem a base dos algoritmos de identificação de parâmetros no domínio do tempo são considerados, neste trabalho, para sistemas *causais*.

Um sistema de n graus de liberdade com amortecimento viscoso não proporcional pode ser representado através da equação diferencial matricial:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (2.1)$$

onde \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} são respectivamente as matrizes de massa, amortecimento e rigidez, reais simétricas e de ordem $n \times n$. As funções vetoriais, \mathbf{u} e \mathbf{f} dependentes do tempo, de

ordem $n \times l$ correspondem aos deslocamentos e excitações externas associadas a cada uma das coordenadas geométricas preestabelecidas na discretização espacial do sistema. A equação (2.1) do modelo paramétrico linear invariante no tempo representará os sistemas dinâmicos a serem analisados neste trabalho.

2.3 Matriz Função de Transferência e Matriz FRF

A representação analítica dos sinais dinâmicos de resposta livre ou do impulso unitário de um sistema vibrante é fundamental para o processo de identificação de parâmetros no domínio do tempo.

Aplicando-se a transformada de Laplace à equação (2.1), considerando-se nulas as condições iniciais e que os coeficientes de influência \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} sejam invariantes no tempo, tem-se:

$$[\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K}] \mathbf{U}(s) = \mathbf{F}(s) \quad (2.2)$$

onde $\mathbf{U}(s) = \mathcal{L}[\mathbf{u}(t)]$, $\mathbf{F}(s) = \mathcal{L}[\mathbf{f}(t)]$ e o símbolo $\mathcal{L}[\bullet]$ é utilizado para indicar o operador da transformada de Laplace, no plano complexo s .

O vetor deslocamento transformado $\mathbf{U}(s)$ pode ser expresso em função do vetor de força transformado $\mathbf{F}(s)$ a partir da equação (2.2):

$$\mathbf{U}(s) = [\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K}]^{-1} \mathbf{F}(s) \quad (2.3)$$

Define-se a matriz função de transferência do sistema (2.1), como sendo a matriz $\mathbf{H}(s)$ $n \times n$, que relaciona o vetor $\mathbf{U}(s)$ com o vetor $\mathbf{F}(s)$ da seguinte forma:

$$\mathbf{U}(s) = \mathbf{H}(s) \mathbf{F}(s) \quad (2.4)$$

A partir das equações (2.3) e (2.4) pode-se escrever que:

$$\mathbf{H}(s) = [\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K}]^{-1} \quad (2.5)$$

A matriz função de transferência $\mathbf{H}(s)$ contém as informações dinâmicas do sistema descrito pela equação (2.1) e portanto é fundamental na identificação das propriedades do sistema em análise.

A diferença entre as formulações que conduzem à matriz função de transferência e à matriz função resposta em frequência **MFRF** reside na restrição feita ao domínio do parâmetro complexo s considerado. A matriz função de resposta em frequência **MFRF** corresponde ao caso particular de $\mathbf{H}(s)$ onde considera-se somente o eixo imaginário do plano complexo, isto é, $s = j\omega$ como domínio da variável de Laplace (ver Ewins [27]). Na formulação que conduz à matriz função de transferência o domínio da variável de Laplace contém também a parcela correspondente a parte real σ , ou seja, $s = \sigma + j\omega$.

2.3.1 Resposta ao Impulso Unitário

A matriz resposta ao impulso unitário **MFRIU** $\mathbf{h}(t)$, no domínio do tempo, pode ser obtida aplicando-se a transformada inversa de Laplace à equação (2.5):

$$\mathbf{h}(t) = \mathcal{E}^{-1} [\mathbf{H}(s)]. \quad (2.6)$$

Aplicando-se a transformada inversa de Laplace e o produto de convolução à equação (2.4) (ver Kailath [46]) pode-se estabelecer a relação entre os sinais de excitação e resposta, no domínio do tempo:

$$\mathbf{u}(t) = \int_0^t \mathbf{h}(t - \tau) \mathbf{f}(\tau) d\tau \quad (2.7)$$

A matriz função transferência, também pode ser obtida através da formulação por variáveis de estado. A equação diferencial matricial de segunda ordem a n equações (2.1) é transformada em um conjunto de $2n$ equações de primeira ordem. Para isto, define-se a equação trivial adicional de n equações escritas da seguinte forma :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (2.8)$$

e as notações :

$$\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_0 = \begin{bmatrix} -\mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{u}} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

obtem-se o sistema de ordem $2n$:

$$\mathbf{B}_0 \dot{\mathbf{x}} - \mathbf{Q}_0 \mathbf{x} = \mathbf{g} \quad (2.9)$$

Da última relação, assumindo a existência de \mathbf{M}^{-1} , pode-se expressar as equações de estado para o sistema dinâmico por (ver Inman [43]) :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{g} \end{cases} \quad (2.10)$$

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{x} \end{cases} \quad (2.11)$$

onde

$$\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{Q}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{B}_0^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M}^{-1} \\ \mathbf{M}^{-1} & -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

sendo que $\mathbf{0}$ é a matriz nula e \mathbf{I} a matriz identidade ambas de dimensão $n \times n$. A matriz de observação $\tilde{\mathbf{C}}$, é definida como $\tilde{\mathbf{C}} = [\mathbf{I} \ \mathbf{0}]$, $\tilde{\mathbf{A}}$ e \mathbf{x} representam respectivamente a matriz e o vetor de estado e $\tilde{\mathbf{B}}$ é a matriz de distribuição.

As equações (2.10) e (2.11) descrevem um sistema de equações lineares de primeira ordem, equivalente ao sistema de equações (2.1), todavia a última representação é mais simples de ser analisada, e a solução deste sistema pode ser escrita da seguinte forma :

$$\mathbf{x}(t) = e^{\tilde{\mathbf{A}}t} \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\tilde{\mathbf{A}}(t-\tau)} \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{g}(\tau) d\tau, \quad t \geq 0 \quad (2.13)$$

onde \mathbf{x}_0 é o vetor de condições iniciais nas variáveis de estado.

Considerando o sistema de equações lineares (2.10) e (2.11) causal, com condições iniciais nulas, aplicando-se, à estas equações, a transformada de Laplace e comparando-se com a equação (2.4) tem-se que :

$$\mathbf{H}(s) = \tilde{\mathbf{C}} [s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}]^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{D}, \quad (2.14)$$

onde $\mathbf{D} = [\mathbf{I} \ \mathbf{O}]^T$ onde T indica a operação de transposição.

A matriz resposta ao impulso unitário pode ser obtida aplicando-se a transformada inversa de Laplace à equação (2.14) (ver Inman [43], Juang [45] e Kailath [46]) :

$$\mathbf{h}(t) = \tilde{\mathbf{C}} e^{\tilde{\mathbf{A}}t} \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{D}. \quad (2.15)$$

2.3.2 Relação dos Parâmetros Modais com a função de Transferência

Para se obter o modelo modal do sistema representado pela equação (2.1) deve-se inicialmente resolver o autoproblema associado a equação (2.9):

$$\lambda \mathbf{B}_0 \boldsymbol{\psi} - \mathbf{Q}_0 \boldsymbol{\psi} = \mathbf{0} \quad (2.16)$$

A solução deste autoproblema, quando as matrizes \mathbf{B}_0 e \mathbf{Q}_0 são reais, simétricas e o modelo de amortecimento considerado é o viscoso e não proporcional, admite $2n$ autovalores e autovetores que se apresentam em pares complexos conjugados. Pode-se demonstrar que o autovetor ψ_r do autoproblema associado a equação (2.16), relaciona-se com o autovalor correspondente λ_r e o vetor ϕ_r da seguinte forma:

$$\psi_r = \begin{bmatrix} \phi_r \\ \lambda_r \phi_r \end{bmatrix}_{2n \times 1}, \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (2.17)$$

onde λ_r e ϕ_r são soluções do autoproblema associado a (2.1):

$$\left[\mathbf{M} \lambda_r^2 + \mathbf{C} \lambda_r + \mathbf{K} \right] \phi_r = 0 \quad (2.18)$$

Os autovetores ϕ_r descrevem os modos de vibrar do sistema em estudo. A partir dos autovalores λ_r , determinam-se as frequências naturais ω_r e os fatores de amortecimento ξ_r . Definem-se ainda o amortecimento modal σ_r e frequência natural amortecida ω_{rd} como as partes real e imaginária do autovalor $\lambda_r = -\sigma_r + j\omega_{rd}$ com $\sigma_r > 0$, então:

$$\omega_r = \sqrt{[Re(\lambda_r)]^2 + [Im(\lambda_r)]^2}, \quad \xi_r = \frac{Re(-\lambda_r)}{\omega_r} \quad (2.19)$$

A matriz de autovetores Ψ da representação de estado pode ser expressa a partir da equação (2.17) como:

$$\Psi = \begin{bmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \dots & \psi_n & \psi_1^* & \psi_2^* & \dots & \psi_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & \Phi^* \\ \Phi \Lambda & \Phi^* \Lambda^* \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

onde * indica o conjugado complexo, $\Phi = [\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_n]$ e $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ é

a matriz diagonal dos autovalores. A matriz Ψ diagonaliza as matrizes \mathbf{B}_0 e \mathbf{Q}_0 , portanto, adota-se uma normalização para os autovetores de tal forma que:

$$\Psi^T \mathbf{B}_0 \Psi = \mathbf{I} \quad \text{e} \quad \Psi^T \mathbf{Q}_0 \Psi = \tilde{\Lambda} \quad (2.21)$$

onde a matriz $\tilde{\Lambda}$ é definida por:

$$\tilde{\Lambda} = \begin{bmatrix} \Lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda^* \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Utilizando a transformação de coordenadas $\mathbf{x}(t) = \Psi \eta(t)$, e pré-multiplicando-se a equação de movimento na forma de estado (2.9) por Ψ^T onde Ψ é a matriz modal, tem-se que :

$$\Psi^T \mathbf{B}_0 \Psi \dot{\eta}(t) = \Psi^T \mathbf{Q}_0 \Psi \eta(t) + \Psi^T \mathbf{g} \quad (2.23)$$

Considerando as propriedades de normalização em relação as matrizes \mathbf{B}_0 e \mathbf{Q}_0 , na equação (2.21), obtém-se a equação de movimento, diagonalizada, na forma de estado:

$$\mathbf{I} \dot{\eta}(t) = \tilde{\Lambda} \eta(t) + \Psi^T \mathbf{g} \quad (2.24)$$

Aplicando-se a transformada de Laplace à equação (2.24) e utilizando a equação (2.11) pode-se escrever:

$$\mathbf{U}(s) = \tilde{\mathbf{C}} \Psi [s\mathbf{I} - \tilde{\Lambda}]^{-1} \Psi^T \mathbf{D} \mathbf{F}(s), \quad (2.25)$$

onde a matriz função de transferência em função do parâmetro de Laplace s é dada por:

$$\mathbf{H}(s) = \tilde{\mathbf{C}} \Psi [s\mathbf{I} - \tilde{\Lambda}]^{-1} \Psi^T \mathbf{D}. \quad (2.26)$$

A partir da última equação segue imediatamente que:

$$\mathbf{H}(s) = \sum_{r=1}^n \left[\frac{\phi_r \phi_r^T}{s - \lambda_r} + \frac{\phi_r^* \phi_r^{*T}}{s - \lambda_r^*} \right]. \quad (2.27)$$

Assumindo-se um vetor de excitação agindo somente na coordenada geométrica j , isto é, $f_k = 0 \quad \forall k \neq j$, obtém-se a partir da equação (2.4) a resposta adquirida no ponto i :

$$u_i(s) = H_{ij}(s) f_k(s) \quad (2.28)$$

onde,

$$H_{ij}(s) = \sum_{r=1}^n \left[\frac{r_{rij}}{s - \lambda_r} + \frac{r_{rij}^*}{s - \lambda_r^*} \right], \quad (2.29)$$

é a equação de um elemento genérico da matriz função de transferência relativo a uma excitação aplicada no ponto j e a resposta do sistema medida no ponto i . O termo $r_{rij} = \phi_{ri} \phi_{rj}$, é chamado de resíduo modal complexo e ϕ_{ri} é i -ésimo elemento do autovetor ϕ_r . O autovalor λ_r , também é denominado de pólo complexo do sistema, analogamente a teoria de controle.

Aplicando-se a transformada inversa de Laplace às equações (2.27) e (2.29) obtém-se as mesmas relações no domínio do tempo para a matriz resposta ao impulso que pode ser expressa na base modal como:

$$\mathbf{h}(t) = \sum_{r=1}^n \left[\phi_r \phi_r^T e^{\lambda_r t} + \phi_r^* \phi_r^{*T} e^{\lambda_r^* t} \right] \quad (2.30)$$

e para um elemento genérico de $\mathbf{h}(t)$ tem-se que:

$$h_{ij}(t) = \sum_{r=1}^n \left[r_{rij} e^{\lambda_r t} + r_{rij}^* e^{\lambda_r^* t} \right]. \quad (2.31)$$

2.4 Transformada Z e a Função de Transferência

O processo de identificação experimental é baseado em representações discretas do sinal no tempo, uma vez que os sinais de excitação e resposta são adquiridos, armazenados e tratados numericamente na forma digital. Assim sendo, é conveniente realizar a análise utilizando-se um modelo discretizado no tempo. Nestes casos a transformada Z possui uma importância fundamental, semelhante à transformada de Laplace aplicada à modelos contínuos no tempo, McGuillen e Cooper [58]. Desta forma, é importante representar o sistema físico de interesse através de um modelo discreto. Este modelo discreto, que possui as mesmas propriedades dinâmicas que governam o comportamento do sistema sob estudo, pode ser obtido a partir da discretização das equações (2.10) e (2.11):

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \Gamma \mathbf{g}(k) & (2.32) \\ \mathbf{u}(k) = \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{x}(k) & (2.33) \end{cases}$$

onde $\mathbf{A} = e^{\tilde{\mathbf{A}}\Delta t}$, $\Gamma = \int_0^{\Delta t} e^{\tilde{\mathbf{A}}\tau} d\tau$, $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{B}}$ e $\tilde{\mathbf{C}}$ definidas em (2.10) e (2.11). Como geralmente a aquisição de dados experimentais é obtida de forma digital, em intervalos de tempo Δt igualmente espaçados, o índice k é usado para indicar o número de amostras dos sinais dinâmicos do sistema, ou seja, $\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(k\Delta t)$, $\mathbf{g}(k) = \mathbf{g}(k\Delta t)$, etc. ..., sendo Δt o intervalo de amostragem constante.

2.4.1 Função de Transferência de um Modelo Discreto

A função de transferência de um sistema discreto é definida de maneira análoga ao modelo contínuo. Considerando-se um sistema causal com condições iniciais nulas e aplicando-se a transformada Z às equações (2.32) e (2.33) obtém-se, no domínio complexo z , a relação entre os sinais de excitação e resposta do sistema. Deste modo,

pode-se escrever :

$$\hat{\mathbf{u}}(z) = \tilde{\mathbf{C}} [z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \Gamma \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{D} \hat{\mathbf{f}}(z), \quad (2.34)$$

onde $\hat{\mathbf{u}}(z)$ e $\hat{\mathbf{f}}(z)$ são as transformadas dos vetores $\{\mathbf{u}(k)\}$ e $\{\mathbf{f}(k)\}$ respectivamente, \mathbf{D} conforme definida em (2.14) e Γ é a integral mostrada em (2.33).

Defini-se a matriz função de transferência de um sistema discreto no tempo, como sendo a matriz $\mathbf{H}(z)$, que relaciona os vetores $\hat{\mathbf{u}}(z)$ e $\hat{\mathbf{f}}(z)$ através da equação :

$$\hat{\mathbf{u}}(z) = \mathbf{H}(z) \hat{\mathbf{f}}(z) \quad (2.35)$$

A partir das equações (2.34) e (2.35) observa-se que :

$$\mathbf{H}(z) = \tilde{\mathbf{C}} [z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \Gamma \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{D} \quad (2.36)$$

A matriz função transferência $\mathbf{H}(z)$ pode ser escrita em função dos parâmetros modais. Segundo Mickleborough e Pi [63] pode-se provar que :

$$\Gamma = \int_0^{\Delta t} e^{\tilde{\mathbf{A}}\tau} d\tau = \tilde{\mathbf{A}}^{-1} [e^{\tilde{\mathbf{A}}\Delta t} - \mathbf{I}] = \Psi \tilde{\Lambda}^{-1} [e^{\tilde{\Lambda}\Delta t} - \mathbf{I}] \Psi^{-1} \quad (2.37)$$

pois a matriz modal Ψ diagonaliza a matriz de estado. Prova-se ainda, conforme a referência anterior, que :

$$[z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} = \Psi [z\mathbf{I} - \tilde{\Lambda}]^{-1} \Psi^{-1} \quad (2.38)$$

Substituindo as equações (2.37) e (2.38) em (2.36) tem-se :

$$\mathbf{H}(z) = \tilde{\mathbf{C}} \Psi [z\mathbf{I} - \tilde{\Lambda}]^{-1} [\tilde{\Lambda}^{-1} (e^{\tilde{\Lambda}\Delta t} - \mathbf{I})] \Psi^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{D} \quad (2.39)$$

Como a normalização dos autovetores é arbitrária, a equação anterior pode ser simplificada, considerando-se que:

$$\Psi^T \mathbf{Q}_0 \Psi = \mathbf{I} \quad e \quad \Psi^T \mathbf{B}_0 \Psi = \tilde{\Lambda}^{-1} \quad (2.40)$$

seja a normalização adotada, a equação (2.39) pode ser reescrita do seguinte modo:

$$\mathbf{H}(z) = \tilde{\mathbf{C}} \Psi \left[\mathbf{I} - z^{-1} e^{\tilde{\Lambda} \Delta t} \right]^{-1} \left[e^{\tilde{\Lambda} \Delta t} - \mathbf{I} \right] \Psi^T \mathbf{D}, \quad (2.41)$$

A partir desta análise pode-se escrever que:

$$\mathbf{H}(z) = \sum_{r=1}^n \left[\frac{v_r \Phi_r \Phi_r^T}{1 - z^{-1} e^{\lambda_r \Delta t}} + \frac{v_r^* \Phi_r^* \Phi_r^{*T}}{1 - z^{-1} e^{\lambda_r^* \Delta t}} \right], \quad (2.42)$$

onde $v_r = (e^{\lambda_r \Delta t} - 1)$. A equação de um elemento genérico da matriz função de transferência que estabelece a relação entre o sinal de excitação no ponto j e o sinal de resposta no ponto i , na forma discreta, é dada por:

$$H_{ij}(z) = \sum_{r=1}^n \left[\frac{\rho_{rij}}{1 - z^{-1} e^{\lambda_r \Delta t}} + \frac{\rho_{rij}^*}{1 - z^{-1} e^{\lambda_r^* \Delta t}} \right], \quad (2.43)$$

onde ρ_{rij} é denominado resíduo modal da função de transferência no plano z . O resíduos se relacionam com os elementos dos autovetores normalizados ϕ_r através da expressão: $\rho_{rij} = v_r \phi_{ri} \phi_{rj}$.

2.5 Aspectos do Problema de Identificação

No capítulo 1 mencionou-se que o interesse primordial da Análise Modal Experimental é a determinação das estimativas dos parâmetros modais a partir dos dados de excitação e resposta do sistema. As técnicas utilizadas neste contexto, em geral, não resolvem completamente o problema de identificação estrutural. A determinação dos coeficientes matriciais \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} presentes nas equações espaço - temporais, que descrevem o comportamento dinâmico do sistema é realizada numa etapa posterior. O problema da determinação destas matrizes é complexo e possui infinitas soluções. Este fato se verifica porque nas aplicações práticas se utiliza um número limitado de graus de liberdade para representar o sistema físico e ainda os dados do conteúdo de frequências são truncados. Em contrapartida, a determinação das estimativas dos parâmetros modais apresenta sempre informação única.

A identificação estrutural pertence à classe dos *Problemas Inversos* a qual é definida por Berman [9] como o processo de determinação de modelos matemáticos a partir das informações de entrada e saída do sistema em análise.

As aplicações práticas no campo da engenharia permitem ao analista obter várias informações relevantes sobre o sistema em estudo. Portanto o problema de identificação fica reduzido ao problema de estimação de parâmetros. Por sua vez, a estimação de parâmetros é definida por Eykhoff [29] como a determinação experimental das características que regem a dinâmica do comportamento de um sistema, linear ou não linear, quando a estrutura em análise é conhecida. Neste trabalho apresentam-se técnicas que permitem, basicamente, determinar as estimativas das propriedades modais de estruturas.

Capítulo 3

Identificação Paramétrica Multi-Canal no Domínio do Tempo

Introdução

Os métodos de identificação de parâmetros modais multi-canal se propõem realizar a identificação simultânea de vários modos de vibrar de um sistema, a partir do processamento dos sinais de entrada e saída de um sistema.

As técnicas **MIMO** (Multi-Input Multi-Output) apresentam uma tendência crescente de utilização, quando comparadas às técnicas do tipo **SISO** (Single-Input Single-Output), devido às seguintes considerações (ver Allemang [3]):

- Os métodos de identificação **SISO** não fornecem diretamente os modos de vibrar, isto é, os autovetores do sistema, mas sim uma combinação dos elementos de sua matriz modal, através da obtenção das constantes modais. O modelo modal completo é determinado em uma etapa posterior ao cálculo das constantes modais. A determinação do modelo modal supõe ainda que a estrutura possui características globais que permanecem inalteradas ao longo do tempo de realização das diferentes medições necessárias ao método. As técnicas do tipo **MIMO** são capazes de fornecer uma estimativa da matriz modal do sistema a partir dos dados de entrada e saída adquiridas com a realização de um único experimento.

- Os métodos de identificação **SISO** fornecem resultados pouco precisos para o caso de sistemas que apresentam modos de vibrar com forte acoplamento modal, isto é, sistemas cujas frequências naturais estão muito próximas umas das outras, ou nos casos de estruturas com elevado grau de amortecimento, ou ambos [27]. Este problema também se verifica para estruturas com amortecimento extremamente pequeno.

- Aquisição de múltipla e coincidente dos sinais dinâmicos nas técnicas multi-canal proporcionam informações redundantes que permitem estimar de maneira mais precisa os parâmetros modais de sistemas com as propriedades descritas acima.

- A aplicação de múltiplas forças de excitação, ao longo da estrutura, permite que a distribuição de energia ocorra de maneira mais uniforme proporcionando, conseqüentemente, um melhor nível sinal/ruído nas respostas medidas.

- Avanços significativos no desenvolvimento de hardware dos computadores e sistemas de aquisição de dados permitem que as plataformas de trabalho atualmente disponíveis possuam maior confiabilidade, capacidade e custos acessíveis. Estes avanços, associados aos emergentes desenvolvimentos de Software, apropriados para a estimação de parâmetros modais, permitem que se reduza significativamente o tempo total de aquisição e análise.

As considerações acima contribuíram de modo significativo para que houvesse, principalmente nos últimos anos, uma grande produção de técnicas multi-canal no domínio do tempo. Pode-se destacar os trabalhos desenvolvidos nas universidades de Cincinnati (U.S.A.), Católica de Leuven (Bélgica), bem como outras inúmeras referências podem ser encontradas em Allemang [3], Juang e Pappa [44], Inman [43], Roemer [74] e Zhang [86].

As técnicas de identificação multi-canal apresentam, entretanto, as mesmas dificuldades inerentes à implementação dos métodos no domínio do tempo. São elas, em particular, a identificação correta da ordem do sistema e a determinação precisa dos parâmetros modais estimados na presença de dados contaminados por ruídos. Estas dificuldades devem-se à grande sensibilidade destas técnicas à presença de ruídos externos nos sinais de entrada e saída do sistema.

A seguir, são apresentadas algumas técnicas de identificação multi-canal, no domínio do tempo, bem como procedimentos que visam contornar as dificuldades mencionadas.

3.1 Método da Polireferência no Domínio do Tempo

A técnica da Polireferência desenvolvida por H. Vold, em 1982, explora o fato de que os parâmetros modais são características intrínsecas e globais de sistemas dinâmicos, isto é, independem das coordenadas de referência. Com base nesta propriedade, o método da Polireferência no Domínio do Tempo processa os sinais da *resposta impulsiva* de um sistema adquiridos em diferentes coordenadas de excitação, com o objetivo de identificar os seus parâmetros modais. Quando se considera somente uma coordenada de referência na estimativa das propriedades modais de um sistema, o método da Polireferência no Domínio do Tempo fica reduzido ao método das Exponenciais Complexas por mínimos quadrados, Brown e outros [15].

Conforme os princípios básicos da teoria da análise modal, a excitação de um sistema dinâmico em uma única coordenada de referência, é condição suficiente para a obtenção de seus parâmetros modais. Na análise modal experimental, isto, porém, nem sempre se verifica, pois o ponto de referência adotado pode estar *muito próximo* a uma linha modal da estrutura cujo modo de vibrar é escopo essencial da análise. Com o objetivo de evitar esta possibilidade, o método da Polireferência no Domínio do Tempo analisa, simultaneamente, os sinais experimentais referentes às respostas coincidentes do sistema quando à ele se aplica vários impulsos de *Dirac*.

A identificação das propriedades dinâmicas de um sistema através da técnica da Polireferência no Domínio do Tempo, pode também considerar a função vetorial \mathbf{u} dos deslocamentos livres relativos aos graus de liberdade deste sistema dinâmico, medidos simultaneamente, a partir das condições iniciais, Bazán [6]. As respostas de um sistema dinâmico em L graus de liberdade, com N modos na faixa de frequência de interesse, a uma excitação impulsiva no grau de liberdade i , podem ser escritas na forma vetorial da seguinte maneira:

$$\mathbf{h}_i(t) = \begin{bmatrix} \Phi & \Phi^* \end{bmatrix} e^{\tilde{\Lambda} t} \begin{bmatrix} \beta_i & \beta_i^* \end{bmatrix}^T \quad (3.1)$$

onde o vetor de resposta impulsiva multireferência pode ser escrito como :

$$\mathbf{h}_i(t) = \begin{bmatrix} h_{i1}(t) \\ h_{i2}(t) \\ \vdots \\ h_{iL}(t) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

A matriz e o vetor modal reduzido do sistema, a serem determinados, são dados por :

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_N \end{bmatrix} \quad \text{onde} \quad \phi_k = \begin{bmatrix} \phi_{k1} \\ \phi_{k2} \\ \vdots \\ \phi_{kL} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

O vetor transmodal β_i , de resposta devido a excitação na coordenada i , é escrito da seguinte forma :

$$\beta_i = \begin{bmatrix} \phi_{1i} \\ \phi_{2i} \\ \vdots \\ \phi_{Li} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

O símbolo (*), utilizado na equação (3.1), representa o complexo conjugado.

A equação (3.1) pode ser escrita rearranjando-se os elementos da matriz modal Φ e do vetor β_i de tal forma que os elementos da primeira linha da nova matriz \mathbf{W} sejam unitários. Desta forma podemos expressar o vetor resposta ao impulso $\mathbf{h}_i(t)$ da seguinte forma :

$$\mathbf{h}_i(t) = \mathbf{W} e^{\tilde{\Lambda}t} \mathbf{r}_i \quad (3.5)$$

onde

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \frac{\phi_{12}}{\phi_{11}} & \frac{\phi_{22}}{\phi_{21}} & \dots & \frac{\phi_{N2}}{\phi_{N1}} & \frac{\phi_{12}^*}{\phi_{11}^*} & \dots & \frac{\phi_{N2}^*}{\phi_{N1}^*} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\phi_{1L}}{\phi_{11}} & \frac{\phi_{2L}}{\phi_{21}} & \dots & \frac{\phi_{NL}}{\phi_{N1}} & \frac{\phi_{1L}^*}{\phi_{11}^*} & \dots & \frac{\phi_{NL}^*}{\phi_{N1}^*} \\ \frac{\phi_{12}}{\phi_{11}} & \frac{\phi_{22}}{\phi_{21}} & \dots & \frac{\phi_{N2}}{\phi_{N1}} & \frac{\phi_{12}^*}{\phi_{11}^*} & \dots & \frac{\phi_{N2}^*}{\phi_{N1}^*} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

e

$$\mathbf{r}_i = \begin{bmatrix} r_{1i1} & r_{2i1} & \dots & r_{Ni1} & r_{1i1}^* & r_{2i1}^* & \dots & r_{Ni1}^* \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

sendo que \mathbf{W} é a nova representação da matriz de participação modal não normalizada e \mathbf{r}_i é o vetor residual da resposta na coordenada i . A normalização da primeira linha da matriz \mathbf{W} é arbitrária, e pode ser aplicada à qualquer outra linha sem perda de generalidade. A modificação do vetor β_i , devido a normalização da matriz \mathbf{W} , é responsável pelo aspecto final do vetor transmodal \mathbf{r}_i .

A equação (3.1) pode ser representada por amostras num instante de tempo genérico $t = k\Delta t$ de acordo com a seguinte expressão:

$$\mathbf{h}_i(k) = \mathbf{W} \mathbf{Z}^k \mathbf{r}_i \quad (3.8)$$

onde

$$\mathbf{h}_i(k) = \mathbf{h}_i(k\Delta t) \quad (3.9)$$

e

$$\mathbf{Z} = e^{\tilde{\Lambda}\Delta t} \quad (3.10)$$

Considerando-se o vetor $\mathbf{h}_i(k)$ para um conjunto de M amostras igualmente espaçadas no tempo, isto é, $k = 0, 1, \dots, M - 1$ e também um outro conjunto de vetores resposta obtidos em m pontos de observação, ou seja, $i = 1, 2, \dots, m$, pode-se escrever o

seguinte sistema de equações matriciais:

$$\mathbf{B} \mathbf{T} = \mathbf{R} \quad (3.11)$$

onde a matriz \mathbf{R} possui dimensão de $L \times m(M-p)$ e p representa o dobro da ordem modal do sistema sob estudo, e

$$\mathbf{R} = - \left[\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \cdots \mathbf{R}_i \cdots \mathbf{R}_m \right] \quad (3.12)$$

sendo que:

$$\mathbf{R}_i = - \left[\mathbf{h}_i(p) \quad \mathbf{h}_i(p+1) \quad \mathbf{h}_i(p+1) \cdots \mathbf{h}_i(M-1) \right] \quad (3.13)$$

$L \times m(M-p)$

e

$$\mathbf{T} = - \left[\mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2 \cdots \mathbf{T}_i \cdots \mathbf{T}_m \right]_{pL \times m(M-p)} \quad (3.14)$$

com

$$\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_i(p-1) & \mathbf{h}_i(p) & \cdots & \mathbf{h}_i(M-2) \\ \mathbf{h}_i(p-2) & \mathbf{h}_i(p-1) & \cdots & \mathbf{h}_i(M-3) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{h}_i(0) & \mathbf{h}_i(1) & \cdots & \mathbf{h}_i(M-p-1) \end{bmatrix}_{pL \times (M-p)} \quad (3.15)$$

A matriz \mathbf{B} possui a seguinte estrutura:

$$\mathbf{B} = \left[\mathbf{a}(1) \quad \mathbf{a}(2) \quad \cdots \quad \mathbf{a}(i) \quad \cdots \quad \mathbf{a}(p) \right]_{L \times pL} \quad (3.16)$$

onde os coeficientes $\mathbf{a}(i)$ são matrizes do polinômio característico.

A solução do sistema matricial de equações (3.11) pode ser obtida para a matriz de incógnitas \mathbf{B} através da equação normal (Pi e Mickleborough [69]):

$$\mathbf{B} \mathbf{T} \mathbf{T}^T = \mathbf{R} \mathbf{T}^T \quad (3.17)$$

que apresenta uma solução de mínimos quadrados (ver Allemang e Brown [3]).

Esta solução representa o início do processo de identificação quando se utiliza o método da Polireferência. O modelo de identificação neste processo pressupõe uma ordem modal igual a $p/2$ para o sistema dinâmico considerado. Caso a ordem do sistema seja igual a N , com $N < p$, a matriz solução \mathbf{B} da equação (3.11), será a solução de norma mínima.

A partir da obtenção das submatrizes $\mathbf{a}(i)$ da matriz \mathbf{B} , constrói-se um polinômio de coeficientes matriciais cujo argumento matricial é $\Omega\xi$:

$$\Omega\xi^p + \mathbf{a}(1)\Omega\xi^{p-1} + \mathbf{a}(2)\Omega\xi^{p-2} + \dots + \mathbf{a}(p)\Omega\xi^0 = \mathbf{0} \quad (3.18)$$

e cujas raízes conduzem a matriz modal \mathbf{W} dos autovetores não normalizados e a matriz \mathbf{Z} que contém informações sobre os autovalores, ou seja, pólos do sistema dinâmico.

O cálculo das raízes do polinômio de coeficientes matriciais (3.18) pode ser implementado através do processo de obtenção dos autovalores e autovetores da matriz companheira do problema polinomial de coeficientes matriciais.

Os vetores dos resíduos do modelo dinâmico podem ser obtidos através da construção do seguinte sistema de equações matriciais:

$$\mathbf{H} = \mathbf{V}\mathbf{A} \quad (3.19)$$

onde \mathbf{H} é a matriz de ordem $ML \times m$.

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1(0) & \mathbf{h}_2(0) & \dots & \mathbf{h}_m(0) \\ \mathbf{h}_1(1) & \mathbf{h}_2(1) & \dots & \mathbf{h}_m(1) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mathbf{h}_1(M-1) & \mathbf{h}_2(M-1) & \dots & \mathbf{h}_m(M-1) \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

e \mathbf{V} de ordem $ML \times 2N$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}\mathbf{Z}^0 \\ \mathbf{W}\mathbf{Z}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{W}\mathbf{Z}^{(M-1)} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

e \mathbf{A} é a matriz dos vetores residuais cuja ordem é $2N \times m$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \cdots & \mathbf{r}_m \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

A solução do sistema matricial (3.19) é de mínimos quadrados obtida através das equações normais :

$$\mathbf{H}^T \mathbf{H} = \mathbf{H}^T \mathbf{V} \mathbf{A} \quad (3.23)$$

A matriz de resíduos \mathbf{A} associada à informação da matriz modal não normalizada \mathbf{W} , conduz aos elementos dos autovetores do sistema dinâmico em estudo.

A técnica da polireferência, em resumo, realiza a identificação de parâmetros de um sistema dinâmico com base nas medidas da função resposta ao impulso unitário da estrutura relativos à todos pontos excitados. A aplicação deste método segue, em linhas gerais, o procedimento de Prony para a determinação dos parâmetros modais que descrevem o comportamento dinâmico de um sistema, Stroud [75].

3.2 Método ERA (Eigensystem Realization Algorithm)

Na atualidade, o método **ERA** é uma das técnicas de identificação modal mais relevantes . Contudo, sua performance depende do nível de ruído presente nos sinais de excitação e resposta, bem como da determinação correta da ordem do sistema, Roemer [74]. Este método de identificação pode ser classificado como um método global de identificação, Juang e Pappa [44] e Juang [45].

Assim como no método da Polireferência, esta técnica baseia-se em m conjuntos de amostras no tempo das funções resposta ao impulso unitário de uma estrutura dinâmica, medidos simultaneamente em L pontos de resposta. Cada um dos m conjuntos de amostras das funções resposta ao impulso corresponde a uma referência, isto é, um ponto diferente de aplicação da força. No método **ERA** a resposta ao impulso unitário (ou a matriz função de

resposta ao impulso unitário) é formulada com base na descrição do sistema nas suas variáveis de estado, isto é, considerando-se a resposta impulsiva do sistema e sua respectiva derivada da seguinte forma :

$$\mathbf{Y}_j(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_j(k) \\ \dot{\mathbf{h}}_j(k) \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

onde $\mathbf{Y}_j(k)$ é o vetor de estado de amostras das L respostas ao impulso do sistema dinâmico no instante $t = k\Delta t$ para uma excitação no ponto de referência j . Na implementação prática do algoritmo, substitui-se as amostras $\dot{\mathbf{h}}_j(k)$ por amostras deslocadas no tempo, ou seja, por $\dot{\mathbf{h}}_j(k) = \mathbf{h}_j(k + \Delta t)$ (ver Ibrahim [39], [41] e [42]). Este procedimento altera a forma dos autovetores que agora são escritos como $\boldsymbol{\psi}_r = [\phi_r \quad \lambda_r \phi_r]^T$.

O procedimento para a implantação do método **ERA** envolve, inicialmente, a construção das matrizes Hankel - Bloco $\mathbf{H}(k)$, $k = 0, 1, 2 \dots$ de dimensão $2Lq \times (p' - q)m$:

$$\mathbf{H}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}(k) & \mathbf{Y}(k+1) & \cdots & \mathbf{Y}(k+p'-q-1) \\ \mathbf{Y}(k+1) & \mathbf{Y}(k+2) & \cdots & \mathbf{Y}(k+p'-q) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{Y}(k+q-1) & \mathbf{Y}(k+q) & \cdots & \mathbf{Y}(k+p'-2) \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

onde p' é o número total de amostras igualmente espaçadas no tempo, das respostas impulsivas do sistema dinâmico e $2Lq$ é a ordem modal de estado considerado. Esta ordem engloba a dimensão correta do sistema, $2N$ bem como graus de liberdade adicionais que, posteriormente, são detectados e separados dos parâmetros pertencentes ao sistema. A matriz dos vetores resposta $\mathbf{Y}(k)$, nas m referências distintas do sistema, possui a seguinte estrutura :

$$\mathbf{Y}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1(k) & \mathbf{Y}_2(k) & \cdots & \mathbf{Y}_j(k) & \cdots & \mathbf{Y}_m(k) \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

As matrizes Hankel - Bloco (3.25), estão relacionadas através da matriz de

estado \mathbf{S} do sistema, (ver Ibrahim e Mkulcik [39]), da seguinte forma :

$$\mathbf{H}(1) = \mathbf{S}\mathbf{H}(0) \quad (3.27)$$

A matriz \mathbf{S} contém as informações que regem o comportamento dinâmico do sistema, ou seja, os pólos λ_k são extraídos de seus autovalores z_k , e os modos de vibrar correspondem às primeiras L componentes de seus autovetores. A obtenção da matriz \mathbf{S} deve ser feita de maneira numericamente estável, pois a ordem modal considerada no modelo de identificação adotado, pode ser maior do que a ordem modal verdadeira do sistema sob estudo. Desta forma, é usual obter a matriz \mathbf{S} da seguinte maneira :

$$\mathbf{S} = \mathbf{H}(1) \mathbf{H}(0)^+ \quad (3.28)$$

onde $\mathbf{H}(0)^+$ é a *pseudo inversa* de $\mathbf{H}(0)$.

Neste caso emprega-se algum critério de separação dos autovalores de \mathbf{S} associados aos pólos pertencentes ao sistema. O cálculo dos autovetores de estado, normalizados e reduzidos ψ_r , do sistema dinâmico, é feito a partir da equação :

$$[\mathbf{S}_r - \mathbf{Z}_r \mathbf{I}] \psi_r = \mathbf{0} \quad (3.29)$$

onde

$$\mathbf{S}_r = \mathbf{H}_r(1) \mathbf{H}_r(0)^T \left[\mathbf{H}_r(0) \mathbf{H}_r(0)^T \right]^{-1} \quad (3.30)$$

e as matrizes Hankel - Bloco $\mathbf{H}_r(k)$ para $K=0,1$ possuem a seguinte estrutura :

$$\mathbf{H}_r(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}(k) & \mathbf{Y}(k+1) & \cdots & \mathbf{Y}(k+p' - \frac{N}{L} - 1) \\ \mathbf{Y}(k+1) & \mathbf{Y}(k+2) & \cdots & \mathbf{Y}(k+p' - \frac{N}{L}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \mathbf{Y}(k + \frac{N}{L} - 1) & \mathbf{Y}(k + \frac{N}{L}) & \cdots & \mathbf{Y}(k+p' - 2) \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

É importante lembrar que as matrizes que formam a última linha de $\mathbf{H}_r(k)$ possuem um número de linhas igual ou menor que L , de tal forma a ajustar a dimensão desejada das matrizes reduzidas.

Os autovetores de \mathbf{S}_r são os autovetores reduzidos do sistema em suas coordenadas de estado.

Observações

- No caso ideal, quando se trabalha com os sinais de excitação e resposta sem ruídos, a matriz \mathbf{S} possui exatamente $2N$ autovalores diferentes de zero que se localizam dentro do círculo unitário no plano complexo, Roemer e Mook [74].

- O método de identificação **ERA** (Eigensystem Realization Algorithm) tal como formulado na presente secção realiza uma regressão dos sinais dinâmicos na mesma direção de sua progressão no tempo. Esta característica pode ser confirmada pela equação matricial (3.26) e o método pode ser classificado como um método progressivo de identificação de parâmetros (ver Inman [43], Juang e Pappa [44] e Juang [45]).

3.2.1 Identificação ERA na Direção Regressiva

A técnica **ERA** apresentada nesta seção, na direção progressiva, apresenta o problema da identificação dos modos verdadeiros do sistema e dos modos computacionais introduzidos no sistema através da sobredeterminação da ordem. Este problema ocorre quando se realiza a identificação de parâmetros de uma estrutura real, onde não se conhece *a priori* a sua ordem. Com o objetivo de solucionar esta dificuldade, recorre-se ao método **ERA** na direção regressiva.

A diferença entre estas abordagens reside no fato de que os autovalores do modelo regressivo se localizam no exterior do círculo unitário do plano complexo Z , ao

contrário do que ocorre com os métodos progressivos, (Holkamp e Batill [38]). A vantagem de se utilizar esta técnica, mesmo quando a ordem do sistema em análise for sobredeterminada é a tendência dos pólos computacionais se localizarem em torno e dentro do círculo unitário constituindo assim um critério geométrico de separação dos pólos verdadeiros do sistema dinâmico.

Os detalhes de implementação da técnica de identificação **ERA** na direção regressiva são apresentados no capítulo 4.

3.3 Método Multivariate **ARMA**

Este método de identificação de parâmetros modais no domínio do tempo é classificado como um método geral de identificação de sistemas lineares. A estrutura vibrante é representada por um modelo de múltiplas variáveis, autoregressivo de médias móveis (**ARMA**). Esta técnica apresenta duas características que a diferenciam dos demais métodos de identificação que utilizam o algoritmo de Prony. A primeira característica vantajosa é que não há necessidade da obtenção das estimativas das funções resposta ao impulso unitário. A segunda é que o sistema linear sob estudo não necessita estar inicialmente em repouso. Esta é uma condição essencial à estimativa da função resposta ao impulso unitário de um sistema dinâmico através da deconvolução, conforme será apresentado. Quando se utilizam os sinais de múltiplas excitações e respostas de um sistema, pode-se identificar com boa precisão as suas características dinâmicas incluindo-se os modos de vibrar fortemente acoplados e modos pseudo-repetidos.

O método de múltiplas variáveis **ARMA** pode também ser reduzido ao método dos mínimos quadrados da exponencial complexa desenvolvido por Brown e outros. [15], que utiliza as funções resposta ao impulso como os dados de resposta no domínio do tempo. O método de Ibrahim e Miculcik no domínio do tempo (**ITD**) [39] e [41], também é uma derivação do multivariate **ARMA**, bem como o método da Polireferência, descrito no item 3.3 deste capítulo. O método do modelo matemático apresentado por Gersch e outros [32] e Gersch e Luo [33], que utiliza um ruído branco como excitação e trata as respostas randômicas como as séries temporais do processo pode também ser considerado como uma particularização do método multivariate **ARMA**.

A relação entre os auto-parâmetros da estrutura e os coeficientes matriciais do modelo **ARMA** constitui a base deste método de identificação.

3.3.1 Modelo **ARMA** de um Sistema

A vibração forçada de um sistema dinâmico linear com n graus de liberdade obedece a formulação desenvolvida no Capítulo 2.

Na análise modal experimental de um sistema físico, assume-se que somente os primeiros r deslocamentos da equação de estado são adquiridos e que o vetor de estado $\mathbf{x}(k)$ está associado a um vetor ruído $\boldsymbol{\varepsilon}(k)$. A equação vetorial dos deslocamentos $\mathbf{y}(k)$, $r \times 1$ pode ser escrita como:

$$\mathbf{y}(k) = \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{x}(k) + \boldsymbol{\varepsilon}(k) \quad (3.32)$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}(k)$, $r \times 1$ é o ruído branco presente no sinal, independente do vetor de estado $\mathbf{x}(k)$. Os sinais $\mathbf{x}(k)$ e $\boldsymbol{\varepsilon}(k)$ não são mensuráveis separadamente e

$$\tilde{\mathbf{C}} = [\mathbf{I} \quad \mathbf{0}] \quad (3.33)$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade $r \times r$ e $\mathbf{0}$ é a matriz nula $r \times (2n - r)$.

Assumindo que a estrutura vibrante seja completamente observável, onde a matriz de observabilidade \mathbf{L} , singular, é escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}} \\ \tilde{\mathbf{C}}(e^{\tilde{\mathbf{A}}t}) \\ \tilde{\mathbf{C}}(e^{\tilde{\mathbf{A}}t})^2 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{C}}(e^{\tilde{\mathbf{A}}t})^{s-1} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

e $s = 2n/2$ é um inteiro.

A identificação dos parâmetros modais do sistema dinâmico é obtida através da relação entre os sinais de excitação resposta adquiridos e também da matriz de transição de estado $e^{\tilde{\mathbf{A}}t}$. Como a aquisição dos dados experimentais é feita em instantes discretos no tempo, onde os intervalos de amostragem Δt são constantes, $t_{k+1} - t_k = \Delta t = T$ e $t_0 = 0$, então $\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(t_k) = \mathbf{x}(kT)$.

Aplicando-se esta descrição na equação (2.13), pode-se escrever:

$$\mathbf{x}(k+i) = (e^{\tilde{\mathbf{A}}T})^i \mathbf{x}(k) + \sum_{j=0}^{i-1} (e^{\tilde{\mathbf{A}}T})^{i-1-j} \Delta \mathbf{f}(k+j) \quad (3.35)$$

onde

$$e^{\tilde{\mathbf{A}}T} = \text{cte} \quad \text{e} \quad \Delta = \Delta(\tau) = \int_{kT}^{(k+1)T} e^{\tilde{\mathbf{A}}(T-\tau)} \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{g}(\tau) d\tau = \text{cte}$$

Por conveniência assume-se que os sinais adquiridos estão livres de ruído. A partir das equações (3.32) e (3.35), tem-se que:

$$\mathbf{y}(k+i) = \tilde{\mathbf{C}}(e^{\tilde{\mathbf{A}}T})^i \mathbf{x}(k) + \sum_{j=0}^{i-1} \tilde{\mathbf{C}}(e^{\tilde{\mathbf{A}}T})^{i-1-j} \Delta \mathbf{f}(k+j) \quad (3.36)$$

considerando que

$$\underline{\mathbf{y}}(s) = \begin{Bmatrix} \mathbf{y}(k+1) \\ \mathbf{y}(k+2) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(k+s) \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{\mathbf{f}}(s) = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}(k+1) \\ \vdots \\ \mathbf{f}(k+s-1) \\ \mathbf{f}(k+s) \end{Bmatrix}$$

$\underline{\mathbf{y}}(s)$ pode ser expresso como

$$\underline{\mathbf{y}}(s) = \mathbf{L} e^{\tilde{\mathbf{A}}T} \mathbf{x}(k) + \mathbf{H} \underline{\mathbf{f}}(s-1) \quad (3.37)$$

e conseqüentemente

$$\underline{\mathbf{y}}(s+1) = \mathbf{L}(e^{\tilde{\mathbf{A}}^T})^2 \mathbf{x}(k) + \mathbf{L}(e^{\tilde{\mathbf{A}}^T}) \Delta \mathbf{f}(k) + \mathbf{H} \underline{\mathbf{f}}(s) \quad (3.38)$$

onde \mathbf{H} é uma matriz $sr \times sr$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}}\Delta & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{C}}(e^{\tilde{\mathbf{A}}^T})\Delta & \tilde{\mathbf{C}}\Delta & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{C}}(e^{\tilde{\mathbf{A}}^T})^{s-1}\Delta & \tilde{\mathbf{C}}(e^{\tilde{\mathbf{A}}^T})^{s-2}\Delta & \cdots & \tilde{\mathbf{C}}\Delta \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

A relação entre $\underline{\mathbf{y}}(s+1)$ e $\underline{\mathbf{y}}(s)$ é dada por:

$$\underline{\mathbf{y}}(s+1) = \mathbf{G} \left[\underline{\mathbf{y}}(s) - \mathbf{H} \underline{\mathbf{f}}(s-1) \right] + \mathbf{L}(e^{\tilde{\mathbf{A}}^T}) \Delta \mathbf{f}(k) + \mathbf{H} \underline{\mathbf{f}}(s) \quad (3.40)$$

onde \mathbf{G} é definido como $\mathbf{G} = \mathbf{L}(e^{\tilde{\mathbf{A}}^T})\mathbf{L}^{-1}$ e, portanto, pode ser reescrita como:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{I} \\ \mathbf{G}_s & \mathbf{G}_{s-1} & \cdots & \mathbf{G}_1 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Após algumas manipulações algébricas pode-se verificar que a equação (3.40) pode ser reescrita na forma:

$$\underline{\mathbf{y}}(s+1) = \mathbf{G} \underline{\mathbf{y}}(s) + \mathbf{R} \underline{\mathbf{f}}(s) \quad (3.42)$$

onde

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_s & \mathbf{R}_{s-1} & \cdots & \mathbf{R}_1 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

e

$$\mathbf{R}_1 = \tilde{\mathbf{C}}\Delta \quad , \quad \mathbf{R}_i = \tilde{\mathbf{C}}(e^{\tilde{\mathbf{A}}T})^{i-1}\Delta - \sum_{j=1}^{i-1} \mathbf{G}_j \tilde{\mathbf{C}}(e^{\tilde{\mathbf{A}}T})^{i-j-1}\Delta$$

para $i = 2, 3, \dots, s$.

Considerando $(N + s + 1)$ amostras no tempo, as matrizes \mathbf{Y}_N , \mathbf{Y}_{N+1} e \mathbf{F}_N possuem a seguinte forma:

$$\mathbf{Y}_N = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(k+1) & \mathbf{y}(k+2) & \cdots & \mathbf{y}(k+N) \\ \mathbf{y}(k+2) & \mathbf{y}(k+3) & \cdots & \mathbf{y}(k+N+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{y}(k+s) & \mathbf{y}(k+s+1) & \cdots & \mathbf{y}(k+N+s) \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

e

$$\mathbf{F}_N = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(k+1) & \mathbf{f}(k+2) & \cdots & \mathbf{f}(k+N) \\ \mathbf{f}(k+2) & \mathbf{f}(k+3) & \cdots & \mathbf{f}(k+N+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{f}(k+s) & \mathbf{f}(k+s+1) & \cdots & \mathbf{f}(k+N+s) \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

Considerando todos os valores da excitação e resposta adquiridos para as amostras no tempo $t = k + 1, k + 2, k + N + s + 1$ tem-se a seguinte equação matricial:

$$\mathbf{Y}_{N+1} = \mathbf{G}\mathbf{Y}_N + \mathbf{R}\mathbf{F}_N \quad (3.46)$$

Duas formas para a determinação dos parâmetros modais podem ser desenvolvidas. A primeira pode ser obtida diretamente da equação anterior (3.46). O segundo método pode ser desenvolvido a partir de um modelo autoregressivo de médias

móveis de um sistema dinâmico considerando a presença de ruído $\underline{\mathbf{w}}(s)$ na equação (3.42):

$$\underline{\mathbf{y}}(s+1) = \mathbf{G}\underline{\mathbf{y}}(s) + \mathbf{R}\underline{\mathbf{f}}(s) + \underline{\mathbf{w}}(s) \quad (3.47)$$

Expandindo (3.47) e considerando ainda somente a última linha desta expansão, tem-se que:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(k+s+1) = & \mathbf{G}_s \mathbf{y}(k+1) + \dots + \mathbf{G}_1 \mathbf{y}(k+s) + \\ & + \mathbf{R}_s \mathbf{f}(k+1) + \dots + \mathbf{R}_1 \mathbf{f}(k+s) + \\ & + \mathbf{w}(k+s) \quad , \quad k = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (3.48)$$

A equação (3.46), quando se considera a presença de ruído, pode ser reescrita como:

$$\mathbf{Y}_{N+1} = \mathbf{G}\mathbf{Y}_N + \mathbf{R}\mathbf{F}_N + \mathbf{W}_N \quad (3.49)$$

De maneira análoga ao procedimento anterior, a expansão da última linha da equação anterior (3.49), será dada por:

$$\left[\mathbf{y}(k+s+1) \quad \mathbf{y}(k+s+2) \quad \dots \quad \mathbf{y}(k+N+s-1) \right] = \left[\mathbf{G}_s \dots \mathbf{G}_1 \right] \mathbf{Y}_N + \left[\mathbf{R}_s \dots \mathbf{R}_1 \right] \mathbf{F}_N + \mathbf{W}_N \quad (3.50)$$

A equação (3.50) pode ser utilizada para a determinação dos parâmetros modais do sistema dinâmico em estudo.

3.3.2 Estimativa da Matriz \mathbf{G}

A estimativa da matriz \mathbf{G} , que possui as informações dinâmicas do sistema, isto é, os autovalores e autovetores, utilizando os sinais de excitação e resposta adquiridos experimentalmente, pode ser obtida através de alguns métodos numéricos. O método dos mínimos quadrados será utilizado para desenvolver dois algoritmos de estimação da matriz \mathbf{G} . O primeiro algoritmo será desenvolvido a partir do modelo autoregressivo de médias móveis.

Assumindo que os sinais de excitação e resposta são gravados a partir de $t = T$, isto é, $k = 1$, tem-se de (3.50):

$$\mathbf{Y} = \Theta \hat{\mathbf{Y}} + \mathbf{W}_N \quad (3.51)$$

onde

$$\mathbf{Y} = \left\{ \mathbf{y}(s+1) \quad \mathbf{y}(s+2) \quad \cdots \quad \mathbf{y}(s+N) \right\} \quad (3.52)$$

$$\hat{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(1) & \mathbf{y}(2) & \cdots & \mathbf{y}(N) \\ \mathbf{y}(2) & \mathbf{y}(3) & \cdots & \mathbf{y}(N+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{y}(s) & \mathbf{y}(s+1) & \cdots & \mathbf{y}(N+s-1) \\ \mathbf{f}(1) & \mathbf{f}(2) & \cdots & \mathbf{f}(N) \\ \mathbf{f}(2) & \mathbf{f}(3) & \cdots & \mathbf{f}(N+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{f}(s) & \mathbf{f}(s+1) & \cdots & \mathbf{f}(N+s-1) \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

e a matriz

$$\Theta = \left[\mathbf{G}_s \quad \mathbf{G}_{s-1} \quad \cdots \quad \mathbf{G}_1 \quad \mathbf{R}_s \quad \mathbf{R}_{s-1} \quad \cdots \quad \mathbf{R}_1 \right] \quad (3.54)$$

O cálculo da matriz Θ através dos mínimos quadrados é dado formalmente por :

$$\bar{\Theta}_{Ls} = \mathbf{Y} \hat{\mathbf{Y}}^T \left[\hat{\mathbf{Y}} \hat{\mathbf{Y}}^T \right]^{-1} \quad (3.55)$$

O segundo algoritmo pode ser obtido diretamente a partir da equação (3.49) a qual é reescrita na seguinte forma :

$$\mathbf{Y} = \Theta \hat{\mathbf{Y}} + \mathbf{W} \quad (3.56)$$

na qual

$$\Theta = \left[\mathbf{G} \quad \mathbf{R} \right] \quad (3.57)$$

e $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_N$ como definido na equação (3.44) com $k = 1$, $\hat{\mathbf{Y}}$ conforme mostrado na equação (3.53) e $\mathbf{W} = \mathbf{W}_N$ com N indicando o número de amostras no tempo. Portanto a

estimativa da matriz Θ pelo método dos mínimos quadrados é obtida através da equação (3.55). Neste caso, a matriz \mathbf{G} é estimada diretamente.

Em resumo, este método apresenta os seguintes passos para a determinação dos parâmetros modais:

- Aquisição dos sinais de excitação e resposta a partir dos quais montam-se as matrizes \mathbf{Y} e $\hat{\mathbf{Y}}$.
- Estimativa da matriz \mathbf{G} de acordo com a equação (3.55) quando o segundo algoritmo proposto for utilizado. Se o primeiro método for utilizado a estimativa da matriz \mathbf{G} é obtida de acordo com a equação (3.41).
- Cálculo dos autovalores e autovetores a partir da matriz \mathbf{G} .
- Cálculo das frequências naturais amortecidas, fatores de amortecimento e os modos de vibrar do sistema analisado.

3.3.3 Determinação da Ordem da Estrutura

A ordem modal do sistema estrutural dinâmico geralmente é desconhecida nas aplicações práticas. O primeiro passo do processo de identificação é determinar a ordem do sistema em análise. Se a estrutura possui n graus de liberdade, então a matriz $\mathbf{Y}^T \mathbf{Y}$ será positivo definida para $k = 1, 2, \dots, n$ e será singular para $k > n$, onde k representa a ordem da matriz $\mathbf{Y}^T \mathbf{Y}$ e n a ordem exata da estrutura sob teste. Entretanto, é comum, em situações práticas, usar-se um número maior de dados amostrados do que os pontos medidos. Neste caso, a determinação da ordem exata do sistema pode ser obtida através da pseudo-inversa de $\mathbf{Y}^T \mathbf{Y}$. O posto da matriz $\mathbf{Y}^T \mathbf{Y}$ será n e corresponde à ordem identificada do sistema para uma tolerância ε considerada. Desta forma serão obtidos os n autovalores e os correspondentes autovetores reduzidos ao sistema, como descrito no item 3.1.2.

3.4 Aspectos da Deconvolução

Os métodos de identificação de parâmetros modais no domínio do tempo, apresentados nas seções anteriores deste capítulo, utilizam sinais processados na forma de funções resposta ao impulso unitário (**FRIU**), que relacionam o deslocamento do ponto de coordenada i e a excitação no ponto de coordenada j . Esta representação é obtida, usualmente, através da Transformada Inversa de Fourier da função resposta em frequência do sistema dinâmico. A relação básica utilizada neste procedimento é dada por:

$$H_{ij}(\omega) = \frac{U_i(\omega)}{F_j(\omega)} \quad (3.58)$$

onde $H_{ij}(\omega)$ representa a função resposta em frequência e $U_i(\omega)$ e $F_j(\omega)$ correspondem às transformadas de Fourier dos sinais de resposta e excitação, respectivamente. A relação entre a função resposta em frequência e a função resposta ao impulso unitário, é obtida através da Transformada de Fourier, isto é:

$$H_{ij}(\omega) = \mathcal{F}[h_{ij}(t)] \quad (3.59)$$

onde $\mathcal{F}[h_{ij}(t)]$ corresponde à Transformada de Fourier da função $h_{ij}(t)$ com condições iniciais nulas e $\mathcal{F}[h_{ij}(t)] = \int_0^{\infty} e^{-j2\pi t} [h_{ij}(t)] dt$, portanto, pode-se escrever que:

$$h_{ij}(t) = \mathcal{F}^{-1} [H_{ij}(t)] = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{U_i(\omega)}{F_j(\omega)} \right] \quad (3.60)$$

Na análise modal experimental a função resposta em frequência é obtida de forma aproximada através de um número finito de amostras no tempo dos sinais dinâmicos de um sistema físico. A qualidade dos resultados das estimativas de tais funções é afetada por erros provenientes do truncamento e discretização dos sinais no tempo, *Allemang* [3]. As

estimativas das funções resposta ao impulso unitário obtidas pela Transformada Inversa de Fourier estão, portanto, diretamente vinculadas à estas restrições. Entretanto, os métodos associados à Transformada Inversa de Fourier (IFFT) continuam sendo normalmente utilizados na determinação das estimativas das FRIU. A popularidade destas técnicas deve-se principalmente a sua simplicidade, a evolução dos equipamentos de aquisição e as técnicas de processamento de sinais. Um exemplo típico destes desenvolvimentos são as técnicas associadas a Transformada Rápida de Fourier (FFT) Cooley e Tukey [21], na sua versão discreta.

A seguir apresenta-se outro procedimento para estimar as funções resposta ao impulso unitário no domínio do tempo. A partir da relação entre os sinais de excitação na coordenada geométrica j e de resposta na coordenada i de um sistema físico pode-se escrever uma relação equivalente a (3.58) no domínio do tempo, ou seja :

$$u_i(t) = h_{ij}(t) * f_j(t) = \int_0^t h_{ij}(\tau) f_j(t-\tau) d\tau \quad (3.61)$$

A determinação das estimativas da função resposta ao impulso unitário no domínio do tempo a partir dos dados de entrada e saída se reduz a solução da equação integral (3.61). A solução *discreta* desta equação integral de convolução apresenta problemas de instabilidade numérica consideráveis quando aplicada à análise modal. A natureza destas dificuldades são apresentadas a seguir.

3.4.1 Deconvolução Discreta

A solução da integral de convolução (3.61), caracteriza-se como um *Problema Mal Posto (Mal Condicionados)* (ver Baumeister [5]), pois é extremamente sensível a pequenas perturbações nos sinais de resposta e/ou excitação do sistema dinâmico, que por sua vez, provocam grandes variações na solução do problema. As técnicas usuais de discretização para a solução de sistemas que apresentam esta característica mostram-se, invariavelmente, ineficientes e conduzem a sistemas severamente mal condicionados.

A *Teoria de Regularização* oferece subsídio apropriado para abordar, com eficácia, os problemas mal postos (ver Baumeister [5] e Hansen, [36]). Este subsídio é conhecido como o *Crítério de Picard*.

A solução inversa da integral de convolução (3.61), pode ser expressa em termos da série infinita dada por :

$$h_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle U_k(t), u_i(t) \rangle}{\sigma_k} \mathbf{V}_k(t) \quad (3.62)$$

onde $\{ U_k(t), \mathbf{V}_k(t), \sigma_k \}$ é a família singular associada à equação (3.62) e \langle , \rangle é a notação que corresponde ao produto interno. O critério de Picard estabelece uma *condição necessária* para que $h_{ij}(t)$ seja solução inversa (ou deconvolução) de (3.61), isto é :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\langle U_k(t), u_i(t) \rangle|^2}{\sigma_k^2} < +\infty \quad (3.63)$$

Esta condição permite concluir que à partir de um determinado valor de k , os coeficientes $|\langle U_k(t), u_i(t) \rangle|$ devem decrescer mais rapidamente que os valores singulares σ_k para garantir a convergência da série (3.63). A natureza de mal posicionamento do operador de deconvolução do problema implica em que $\sigma_k \rightarrow 0$ para um valor suficientemente grande de k . Se um ruído externo $\mathbf{r}(t)$ estiver presente no lado direito da equação (3.61), isto é $\tilde{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{u}(t) + \mathbf{r}(t)$, os coeficientes da equação (3.62) apresentarão um erro $\frac{|\langle U_k(t), u_i(t) \rangle|}{\sigma_k}$ na direção de \mathbf{V}_k e a condição (3.63) não será satisfeita. Este problema pode ser resolvido através de uma solução estável aproximada de $h_{ij}(t)$ truncando-se a série (3.62) em um número finito de termos, evitando a influência dos coeficientes que conduzem a uma distorção, devido à presença do ruído $\mathbf{r}(t)$. O número de termos utilizados na aproximação $h_{ij}(t)$ é inversamente proporcional ao nível de ruído presente no sinal $\mathbf{u}(t)$. O truncamento da série (3.62) deve obedecer um critério geométrico

com base na observação do valor k a partir do qual os valores do numerador começam a aumentar consistentemente em relação ao valor de σ_k . Esta abordagem teórica apresenta a metodologia que será utilizada na versão discreta do problema de deconvolução.

A equação integral (3.61) pode ser discretizada considerando-se as amostras no tempo dos sinais de excitação $f_j(t)$, resposta $u_i(t)$ e Δt o intervalo de amostragem constante. A solução inversa desta equação, discretizada no tempo, consiste em resolver o sistema linear de equações simultâneas:

$$\mathbf{F} \mathbf{h} = \mathbf{u} \quad (3.64)$$

onde \mathbf{F} é a matriz Toeplitz Triangular Inferior,

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_1 & 0 & \cdots & 0 \\ f_2 & f_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_m & f_{m-1} & \cdots & f_1 \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

$\mathbf{h}^T = [h_1 \ h_1 \ \cdots \ h_m]$ é o vetor da função resposta ao impulso unitário,

$\mathbf{u}^T = \frac{1}{\Delta t} [u_1 \ u_1 \ \cdots \ u_m]$ é o vetor resposta dos deslocamentos, e m representa o número

de amostras igualmente espaçadas no tempo, como definido no capítulo anterior. A matriz

\mathbf{F} é extremamente mal condicionada, isto é, o número de condição $K(\mathbf{F})$, definido como

$K(\mathbf{F}) = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}}$, desta matriz é muito elevado. Desta maneira, pequenas perturbações $\delta \mathbf{u}$

no vetor resposta podem provocar variações significativas $\delta \mathbf{h}$ no vetor função resposta ao impulso. A relação abaixo (ver Golub [31]), esclarece este fato:

$$\frac{\|\delta \mathbf{h}\|}{\|\mathbf{h}\|} \leq K(\mathbf{F}) \leq \frac{\|\delta \mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|} \quad (3.66)$$

Este problema pode ser resolvido através de técnicas numéricas apropriadas. A primeira é a *Técnica de Regularização da Decomposição em Valores Singulares Truncada*,

onde aplica-se a decomposição em valores singulares à matriz \mathbf{F} , então :

$$\mathbf{F} = \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{V}^T \quad (3.67)$$

e a solução do sistema de equações (3.64) é dada por :

$$\mathbf{h} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{\sigma_k} (\bar{\mathbf{u}}_k^T \mathbf{u}) \bar{\mathbf{v}}_k \quad (3.68)$$

As matrizes $\mathbf{U} = [\bar{\mathbf{u}}_1 \quad \bar{\mathbf{u}}_2 \quad \dots \quad \bar{\mathbf{u}}_m]$ e $\mathbf{V} = [\bar{\mathbf{v}}_1 \quad \bar{\mathbf{v}}_2 \quad \dots \quad \bar{\mathbf{v}}_m]$ são ortogonais e a matriz \mathbf{D} dos valores singulares σ_k é diagonal. Novamente é importante lembrar que os valores pequenos de σ_k são responsáveis pela instabilidade da solução, especialmente para sinais amostrados na presença de ruídos externos. O método de regularização **TSVD**, consiste em truncar a série do problema de deconvolução discreta da equação (3.68) em M termos. Considerando \mathbf{h}^M a solução aproximada da equação anterior e $\tilde{\mathbf{u}}$ o vetor dos deslocamentos na presença de ruído externo $\delta \mathbf{u}$, pode-se observar que $\|\mathbf{h}^k\|$ é uma função crescente de k e o resíduo $\|\mathbf{r}^k\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{F} \mathbf{h}^k\|$ é decrescente, Hansen [36]. Portanto, pode-se concluir que para um valor grande de k , o resíduo $\|\mathbf{r}^k\|$ é pequeno e a solução \mathbf{h}^k é instável, ao passo que para um valor de k pequeno, \mathbf{h}^k é estável, porém, o resíduo \mathbf{r}^k assume um valor elevado. Desta forma, deve-se analisar os valores de $\|\mathbf{r}^k\|$ e $\|\mathbf{h}^k\|$ com a finalidade de se obter uma solução aproximada de \mathbf{h} suficientemente precisa, evitando-se as instabilidades. A escolha do parâmetro de regularização M , é, portanto, fundamental para que a técnica **TSVD** forneça uma solução aproximada de \mathbf{h} suficientemente precisa. A seguir apresentam-se os passos do procedimento de implementação da técnica **TSVD** de forma resumida :

- 1 - Cálculo dos termos do numerador e denominador dos coeficientes da deconvolução discreta (3.68), isto é, $|\bar{\mathbf{u}}_k^T \mathbf{u}|$ e σ_k respectivamente.

- 2 - Determinação da linha de regressão linear L para os coeficientes da expansão da deconvolução $|\bar{\mathbf{u}}_k^T \mathbf{u}|$ em função dos diferentes valores de k , Hansen [36].
Graficar as curvas L e S dos valores singulares σ_k em função de k .
- 3 - O valor de M pode ser determinado a partir da observação do ponto onde as curvas L e S se interceptam até o primeiro ponto onde o valor de $|\bar{\mathbf{u}}_k^T \mathbf{u}|$ ultrapassa a curva S .

A análise teórica da natureza das dificuldades presentes na solução discreta da equação integral (3.61) e também uma técnica de solução para este problema, através da Regularização Truncada, utilizando a Decomposição em Valores Singulares **TSVD**, pode ser vista em Kurka e Bazán [7].

O segundo método que pode ser utilizado para resolver o sistema simultâneo de equações lineares mal posto (3.63), é a técnica da eliminação de Gauss com pivotamento total. A aplicação deste método, descrito no apêndice A (paper do Diname 95), conduz a solução de mínimos quadrados ou norma mínima $\bar{\mathbf{h}}$, que representa uma aproximação para a função resposta ao impulso unitário do sistema sob estudo.

3.4.2 Deconvolução MIMO

Os métodos de identificação de parâmetros modais que processam simultaneamente dados relativos à várias funções de resposta ao impulso unitário requerem, em primeira instância, o cálculo das estimativas destas funções.

Considerando-se um sistema simultâneo causal, com condições iniciais nulas pode-se escrever a relação entre os sinais de excitação e resposta no domínio de Laplace, através da equação (2.4) $\mathbf{U}(s) = \mathbf{H}(s) \mathbf{F}(s)$, ou seja :

$$\begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \\ \vdots \\ u_i(s) \\ \vdots \\ u_n(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) & \cdots & H_{1i}(s) & \cdots & H_{1n}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) & \cdots & H_{2i}(s) & \cdots & H_{2n}(s) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ H_{i1}(s) & H_{i2}(s) & \cdots & H_{ii}(s) & \cdots & H_{in}(s) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ H_{n1}(s) & H_{n2}(s) & \cdots & H_{ni}(s) & \cdots & H_{nn}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(s) \\ f_2(s) \\ \vdots \\ f_i(s) \\ \vdots \\ f_n(s) \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

Admitindo-se que tenham adquiridas experimentalmente m saídas, e p entradas, o i -ésimo termo do deslocamento deve ser representado, em função das excitações, na seguinte forma:

$$u_i(s) = H_{i1}(s)f_1(s) + H_{i2}(s)f_2(s) + \cdots + H_{ip}(s)f_p(s) \quad (3.70)$$

onde $i = 1, 2, \dots, m$ e $j = 1, 2, \dots, p$.

Esta expressão pode ser escrita no domínio do tempo, através da equação (2.7), obtida no Capítulo 2, da seguinte maneira:

$$u_i(t) = \int_0^t h_{i1}(\tau) f_1(t-\tau) d\tau + \int_0^t h_{i2}(\tau) f_2(t-\tau) d\tau + \cdots + \int_0^t h_{ip}(\tau) f_p(t-\tau) d\tau \quad (3.71)$$

As integrais da equação (3.71), podem ser discretizadas da mesma forma que a equação (3.64). Assim para N amostras, igualmente espaçadas de Δt segundos, dos sinais de excitação e resposta, tem-se que:

$$\bar{u}_i = \sum_{j=1}^p \mathbf{F}_j \bar{h}_{ij} \quad (3.72)$$

onde, as matrizes \mathbf{F}_j são Toeplitz (ver equação (3.65)) e \bar{u}_i , \bar{f}_j e \bar{h}_{ij} são, respectivamente, vetores de ordem $N \times 1$ que possuem N amostras do sinal no tempo da resposta $u_i(t)$, da excitação $f_j(t)$ e das correspondentes funções $h_{ij}(t)$.

A equação (3.72) pode ser reescrita na forma matricial como:

$$\left[\mathbf{F}_1 \quad \mathbf{F}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{F}_j \quad \cdots \quad \mathbf{F}_p \right]_{N \times (pN)} \begin{bmatrix} \bar{h}_{i1} \\ \bar{h}_{i2} \\ \vdots \\ \bar{h}_{ij} \\ \vdots \\ \bar{h}_{ip} \end{bmatrix} = \bar{u}_i_{N \times 1} \quad (3.73)$$

Por conveniência e simplicidade de notação, os elementos \bar{h}_{ij} da matriz função resposta ao impulso unitário, nas equações matriciais, consideram o produto $h_{ij}(t)\Delta t$. O sistema de equações simultâneas, representado pela equação (3.73), possui um número de equações menor do que o número de incógnitas, havendo portanto um número infinito de soluções. Bazán [6] sugere que a solução de norma mínima deste sistema representa uma aproximação do vetor de amostras das funções resposta ao impulso unitário \bar{h}_{ij} . Testes numéricos, entretanto, evidenciam que esta aproximação é obtida de maneira satisfatória somente quando o número de pontos de excitação do sistema é bastante reduzido. Ainda neste caso, necessita-se de um grande número de amostras dos sinais dinâmicos no tempo para que se obtenha resultados com uma precisão razoável.

A determinação das estimativas das funções $h_{ij}(t)$ no domínio no tempo, é conhecida como *Problema de Deconvolução MIMO*.

Para sistemas com várias entradas a solução do problema de deconvolução **MIMO** aproximaria, de forma aceitável, as funções resposta ao impulso unitário se fossem consideradas um número “ *muito grande* ” de amostras dos sinais no tempo, o que inviabiliza a aplicação numérica deste procedimento na obtenção das **FRIU**. Para contornar esta dificuldade propõe-se, neste trabalho, a utilização da técnica **SIMO**.

3.5 Identificação da Ordem de um Sistema Dinâmico

Um problema comum, encontrado na identificação dos parâmetros de uma estrutura, é a determinação correta da ordem do modelo matemático para a estrutura em

estudo. Esta dificuldade surge como consequência da limitação de modelos discretos, utilizados na análise modal experimental, para representar sistemas físicos contínuos. Embora as estruturas mecânicas possuam infinitos graus de liberdade e, conseqüentemente, infinitas frequências de ressonância, coeficientes de amortecimento e modos de vibrar, a modelagem de sistemas físicos e os ensaios experimentais requerem apenas um número finito de *modos* contidos em uma determinada faixa operacional de frequência.

Uma estrutura mecânica com resposta dinâmica limitada em uma banda de frequências, teoricamente pode ser representada por um modelo matemático de ordem n . Na prática, porém, isto não é factível, pois a presença de ruídos externos nos sinais dinâmicos e possíveis não linearidades fazem com que esta representação não seja suficiente. Os ruídos externos presentes nos dados constituem a maior fonte de problemas na determinação correta da ordem do modelo matemático, pois estes dados, quando processados pelos algoritmos, tornam o modelo pouco representativo. Entretanto, vários algoritmos são aplicados com sucesso na determinação das propriedades dinâmicas de sistemas físicos. A seguir será apresentada uma técnica que pode ser aplicada para minimizar os efeitos de ruídos externos presentes nos dados, que serão utilizados pelos algoritmos de identificação, no domínio do tempo, para a identificação das propriedades modais.

3.6 Aspectos da Sobredeterminação da Ordem do Modelo

A sobredeterminação da ordem do modelo matemático é um artifício utilizado para representar um sistema físico discretizado no tempo, com o propósito de identificar as características modais na presença de ruídos externos. Alguns trabalhos utilizam, com sucesso, as vantagens da sobredeterminação da ordem do modelo, como exemplo pode-se citar Braun e Ram [14], Ibrahim [42], Kumaresan [48], Kurka [50], [51] e [52] e outros. Entretanto, este procedimento apresenta alguns modos computacionais quando aplicado à identificação de parâmetros. Estes modos não representam as propriedades físicas do sistema e aparecem devido aos graus de liberdade adicionais fornecidos ao modelo matemático.

A identificação da ordem correta quando o modelo matemático do sistema é sobredeterminado, é obtida através da determinação do posto das matrizes Toeplitz ou

Hankel, descritas anteriormente. A determinação do posto de uma matriz mal condicionada e perturbada não é obtida facilmente (Hansen [37]). Para se estimar o posto destas matrizes com boa acurácia é necessário recorrer a métodos estáveis. Neste sentido, pode-se aplicar o teorema da decomposição em valores singulares para determinar o posto destas matrizes. O posto é determinado pelo número de valores singulares não nulos da matriz do sistema. Na análise prática são considerados nulos os valores singulares menores que uma tolerância ϵ preestabelecida. A distinção entre os valores singulares perturbados que pertencem ao sistema dinâmico e aqueles que correspondem ao ruído, que na verdade são perturbações dos autovalores nulos, será o indicador para a determinação da ordem numérica do sistema. Esta condição é facilmente observável para matrizes Hankel bem condicionadas, ou seja, quando o número de condição da matriz Hankel \mathbf{H} , obtido numericamente, representado por $K(\mathbf{H})$, é aproximadamente igual a 1. Isto, porém, não se verifica quando o número de condição $K(\mathbf{H})$ da matriz Hankel é elevado. Portanto, a análise do condicionamento da matriz Hankel do sistema torna-se indispensável. O condicionamento da matriz Hankel pode ser analisado considerando-se dois modelos sobredeterminados com as seguintes características: $\mathbf{H}_1, p_1 \times q_1$ e $\mathbf{H}_2, p_2 \times q_2$, onde a relação do grau de sobredeterminação entre as matrizes Hankel \mathbf{H}_1 , e \mathbf{H}_2 , é dada por: $p_1 \geq q_1$, $p_2 \geq q_2$ e $q_2 \geq q_1$ com os respectivos valores singulares e $\sigma_r, \sigma'_r, r = 1, 2, \dots, 2n$. O teorema de separação dos valores singulares Bjork [10] afirma que:

$$\sigma'_1 \geq \sigma_1 \geq \sigma'_2 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma'_{2n} \geq \sigma_{2n} \quad (3.74)$$

Demonstra-se também que o maior valor singular de uma matriz Hankel sobredeterminada a q' graus de liberdade é limitado. Esta propriedade permite afirmar que, para valores suficientemente grandes dos graus de sobredeterminação q_1 e q_2 , verifica-se que $\sigma'_1 \approx \sigma_1$, isto significa que elevando-se o grau de sobredeterminação da matriz Hankel, observa-se que o maior valor singular, σ_{max} , cresce pouco em função do aumento do grau de sobredeterminação. A partir da relação (3.74), nota-se que o menor valor singular da matriz Hankel, σ_{min} , possui maior liberdade para crescer do que σ_{max} . Portanto, pode-

se concluir que o número de condição da matriz \mathbf{H}_2 é menor ou igual ao número de condição da matriz \mathbf{H}_1 , ou seja, $K(\mathbf{H}_2) \leq K(\mathbf{H}_1)$, isto significa que deve-se utilizar o máximo grau de sobredeterminação possível para a matriz Hankel do sistema, pois este procedimento melhora o condicionamento desta matriz. Na análise modal experimental, quando os sinais adquiridos são perturbados por ruídos externos, a norma euclidiana da influência destes ruídos na resposta do sistema, em geral não cresce na mesma proporção que σ_{min} , o que favorece a separação entre os valores singulares que pertencem ao sistema físico e os que correspondem ao ruído externo.

O aspecto mais importante desta proposição é que a utilização de modelos com o maior grau de sobredeterminação possível permite, com vantagem, a identificação da ordem do sistema em estudo. Para uma análise mais detalhada desta proposição ver Groen e Moor, [34].

A outra metodologia utilizada na determinação da ordem de sistemas mal condicionados e perturbados, é a eliminação de Gauss aplicada à matrizes Hankel sobredeterminadas, como propõe este trabalho. A descrição desta metodologia é apresentada no apêndice A.

3.7 Método de Identificação Proposto

Neste trabalho é proposto um método de identificação de parâmetros modais multi-canal no domínio do tempo. O algoritmo de identificação **SIMO** (Single Input - Multi Output), foi escolhido em função da deficiência apresentada pela técnica da deconvolução **MIMO** ao realizar as estimativas das funções resposta ao impulso unitário à partir dos sinais de excitação e resposta, adquiridos experimentalmente, na presença de ruídos externos, conforme descrito na seção 3.2.3 deste capítulo.

O algoritmo de identificação proposto utiliza o método **ERABACK** para modelos regressivos simétricos. Este algoritmo utiliza as matrizes Hankel sobredeterminadas das

funções resposta ao impulso unitário e a ordem do sistema sob estudo é determinada aplicando-se o algoritmo da eliminação de Gauss com pivotamento total (ver Apêndice A).

O aspecto mais importante de se trabalhar com modelos autoregressivos na direção inversa é que este procedimento fornece um critério geométrico de separação entre os pólos correspondentes ao sistema físico, os quais se localizam no exterior do círculo unitário, e os pólos computacionais, introduzidos pela sobredeterminação, que por sua vez se localizam em torno e no interior do círculo no plano complexo Z .

As considerações sobre a implementação numérica do método **ERABACK** e as etapas do algoritmo de identificação, na forma de diagramas de blocos, são apresentadas no Capítulo 4.

Capítulo 4

Metodologia de Implementação do ERABACK

O método de identificação de parâmetros modais no domínio do tempo, proposto neste trabalho, é capaz de realizar a identificação multi-canais de um sistema físico em uma determinada faixa operacional de interesse.

O algoritmo de identificação baseia-se nas amostras no domínio do tempo, da matriz função resposta ao impulso unitário obtida a partir dos dados referentes a *uma excitação e múltiplas respostas* provenientes de ensaios experimentais. As estimativas das funções resposta ao impulso unitário são obtidas através da solução do sistema linear de equações simultâneas (3.64), discretizadas no tempo, onde \mathbf{F} é a matriz Toeplitz triangular inferior, cujos elementos são as amostras do vetor de *excitação única*, igualmente espaçadas do intervalo de amostragem Δt . O método utilizado para resolver o sistema de equações lineares (3.64) é a eliminação de Gauss com pivotamento completo proposto no último parágrafo do item 3.2.2 do Capítulo 3.

A implementação do método ERABACK, na direção inversa, envolve a construção das matrizes Hankel $\mathbf{H}(K)$, $K = 0, 1$ simétricas com o maior grau de sobredeterminação possível a partir das amostras disponíveis da função resposta ao impulso unitário do sistema em análise. Estas matrizes Hankel bloco estão relacionadas conforme a equação (3.26), onde a matriz \mathbf{S}_b contém as informações que governam o comportamento dinâmico do sistema

físico. O cálculo dos autovalores e autovetores do sistema, em suas coordenadas de estado, são obtidos através das equações (3.28) e (3.29), respectivamente.

As etapas do algoritmo de identificação e as considerações sobre a implementação numérica do método são apresentadas a seguir na forma de diagramas de blocos.

4.1 Descrição do Método de Identificação ERABACK

O método de identificação proposto pode ser dividido em duas etapas: a primeira consiste na determinação da ordem e dos pólos do sistema dinâmico em análise e a segunda na obtenção dos autovetores correspondentes deste sistema.

4.1.1 Determinação da Ordem do Sistema

Considere-se um sistema dinâmico com N' graus de liberdade, discretizado espacialmente em L coordenadas geométricas, com $L > N'$ e que se dispõem de M amostras igualmente espaçadas no tempo dos sinais de excitação única no grau de liberdade j e L respostas adquiridas simultaneamente, onde $M > 2N'$ e cujo modelo de amortecimento considerado é o modelo viscoso e não proporcional.

A determinação das estimativas das funções resposta ao impulso unitário é obtida a partir do vetor de excitação $\mathbf{f}_j = [f_j(\Delta t) \ f_j(2\Delta t) \ \dots \ f_j(M\Delta t)]$ e da matriz dos deslocamentos medidos nos L graus de liberdade na presença de ruídos externos, ou seja,

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_1(\Delta t) & u_1(2\Delta t) & \dots & u_1(M\Delta t) \\ u_2(\Delta t) & u_2(2\Delta t) & \dots & u_2(M\Delta t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_L(\Delta t) & u_L(2\Delta t) & \dots & u_L(M\Delta t) \end{bmatrix}_{L \times M} \quad (4.1)$$

Como apresentada anteriormente, a solução do sistema de equações lineares (3.64) é obtida calculando-se a matriz inversa de (3.65). Esta matriz é mal condicionada

e de rank (posto) deficiente. Aplicando-se a eliminação de Gauss com pivotamento completo à matriz F^T obtém-se uma matriz triangular superior B' , $M \times M$ de posto numérico l com tolerância ε preestabelecida no programa. Desta forma, verifica-se que a matriz B' é formada por uma sub-matriz B trapezoidal, $l \times M$ de posto l , e por uma sub-matriz triangular inferior nula de ordem $(M-l) \times (M-l)$. A seguir, efetua-se o produto da matriz B pela matriz F definida em (3.65), obtendo-se a matriz C , $l \times M$ isto é, $C = B * F$. Da mesma forma obtém-se a matriz de deslocamentos reduzidos \bar{U} , $l \times L$, através do produto da matriz B pela transposta da matriz U definida em (4.1), isto é, $\bar{U} = B * U^T$. O sistema simultâneo de equações lineares obtido a partir da equação (3.64) pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$C \bar{h}_{ij} = \bar{u}_i \quad , \quad i = 1, 2, \dots, l \quad (4.2)$$

onde a matriz C , $l \times M$ é de posto completo (posto $(C) = l$). Este sistema possui o número de equações menor que o número de incógnitas. O vetor de parâmetros auto-regressivos \bar{h}_{ij} deve ser calculado pelo método dos mínimos quadrados através das equações normais associadas à equação (4.2), ou seja:

$$\bar{h}_{ij} = C^T [C C^T]^{-1} \bar{u}_i \quad (4.3)$$

O cálculo da inversa do produto $C C^T$ é realizado aplicando-se o método da eliminação de Gauss, Kurka e Gomes [55].

Após a obtenção das estimativas das amostras igualmente espaçadas de Δt segundos, das funções respostas ao impulso unitário, constroem-se as matrizes Hankel *quadradas* $H(0)$ e $H(1)$ do sistema em análise, na ordem inversa e possuindo o maior grau de sobre-determinação possível, a partir das amostras disponíveis de \bar{h}_{ij} . Este procedimento, minimiza o efeito da presença de ruídos externos nos sinais provenientes da análise experimental e permite a identificação correta da ordem do sistema dinâmico, conforme descrito no item 3.3.1 do Capítulo 3. Assim tem-se que:

$$\mathbf{H}(1-K) = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{h}}_{ij}(k+q+s-2) & \bar{\mathbf{h}}_{ij}(k+q+s-3) & \cdots & \bar{\mathbf{h}}_{ij}(k+q-1) \\ \bar{\mathbf{h}}_{ij}(k+q+s-3) & \bar{\mathbf{h}}_{ij}(k+q+s) & \cdots & \bar{\mathbf{h}}_{ij}(k+q-2) \\ \bar{\mathbf{h}}_{ij}(k+q+s-4) & \bar{\mathbf{h}}_{ij}(k+q+s-5) & \cdots & \bar{\mathbf{h}}_{ij}(k+q-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{\mathbf{h}}_{ij}(k+s-1) & \bar{\mathbf{h}}_{ij}(k+s-2) & \cdots & \bar{\mathbf{h}}_{ij}(k) \end{bmatrix}_{Lq \times s} \tag{4.4}$$

onde $K = 0, 1$. O índice $i = 1, 2, \dots, L$ e $Lq = S$ de tal forma que é necessário ajustar o número de graus de liberdade considerados ao número de amostras disponíveis l . Deve-se destacar que não é necessário montar a matriz $\mathbf{H}(1)$. Basta montar o vetor \mathbf{R} correspondente à última coluna de $\mathbf{H}(1)$ para se calcular os elementos de \mathbf{S}_b que contém as informações dinâmicas do sistema em estudo, ou seja, resolver o sistema de equações matriciais,

$$\mathbf{S}_b \mathbf{H}(0) = \mathbf{H}(1) \tag{4.5}$$

equivale resolver o seguinte sistema de equações lineares

$$\mathbf{H}(0) \mathbf{S}'_b = \mathbf{H}(1) \tag{4.6}$$

que pelas características das matrizes Hankel $\mathbf{H}(0)$ e $\mathbf{H}(1)$ pode ser reescrito da seguinte forma :

$$\mathbf{H}(0) \mathbf{S}'_b = \mathbf{R} \tag{4.7}$$

Os elementos do vetor solução \mathbf{v} do sistema (4.7), são calculados através da mesma metodologia descrita no item 4.1.1, onde

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{2N} \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

são os coeficientes do polinômio característico do autosistema (4.7). Portanto, para se determinar a ordem e os pólos do sistema dinâmico, calculam-se as raízes de

$$P_{2N}(Z) = -Z^{2N} + v_{2N}Z^{2N-1} + v_{2N-1}Z^{2N-2} + \dots + v_2Z + v_1 \quad (4.9)$$

e verifica-se quais e quantas raízes se localizam fora do círculo unitário no plano complexo z , isto é, $\|Z_r\| > 1$, $r = 1, 2, \dots, 2N$. Os autovalores de \mathbf{S}_b são do tipo $Z_r = e^{\lambda_r \Delta t}$, onde $\lambda_r = +\sigma_r \pm j\omega_{r,d}$ é o r -ésimo pólo do sistema.

O método utilizado para identificar as raízes do polinômio mômico (4.9) é o método de *Laguerre*, William e outros [83].

4.1.2 Obtenção dos Autovetores do Sistema

O cálculo dos autovetores do sistema físico é realizado a partir do sistema de equações lineares de estado

$$\mathbf{H} = \bar{\Psi} \mathbf{Y} \quad (4.10)$$

onde

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{h}}_{ij}(1\Delta t) & \bar{\mathbf{h}}_{ij}(2\Delta t) & \dots & \bar{\mathbf{h}}_{ij}(2n\Delta t) \\ \bar{\mathbf{h}}_{ij}(2\Delta t) & \bar{\mathbf{h}}_{ij}(3\Delta t) & \dots & \bar{\mathbf{h}}_{ij}((2n+1)\Delta t) \end{bmatrix}_{2L \times 2n} \quad (4.11)$$

com $i = 1, 2, \dots, L$, $\bar{\Psi}$, $2L \times 2n$ é a matriz dos autovetores, não normalizados, nas

variáveis de estado do sistema e

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 \Delta t} & e^{2\lambda_1 \Delta t} & \dots & e^{2n\lambda_1 \Delta t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e^{\lambda_n \Delta t} & e^{2\lambda_n \Delta t} & \dots & e^{2n\lambda_n \Delta t} \\ e^{\lambda_1^* \Delta t} & e^{2\lambda_1^* \Delta t} & \dots & e^{2n\lambda_1^* \Delta t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e^{\lambda_n^* \Delta t} & e^{2\lambda_n^* \Delta t} & \dots & e^{2n\lambda_n^* \Delta t} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

As colunas da matriz $\bar{\Psi}$ obtidas através da equação

$$\bar{\Psi} = \mathbf{H} \mathbf{Y}^{-1} \quad (4.13)$$

são proporcionais aos autovetores do sistema dinâmico.

O cálculo de \mathbf{Y}^{-1} é realizado aplicando-se a eliminação de Gauss com pivotamento completo, Kurka e Gomes [55].

4.2 Implementação Numérica do ERABACK

O método de identificação descrito no item anterior foi implementado num microcomputador, na linguagem Pascal. Este método está estruturado em um programa principal *MIMOG* e quatro subrotinas, *INPUT*, *DFRIU*, *IOPS* e *MODAL*. A figura 4.1 apresenta a estrutura do programa *MIMOG*.

A subrotina *INPUT* é responsável pela leitura dos dados de entrada, tais como o vetor de excitação única f_j , a matriz dos deslocamentos \mathbf{U} , medidas nos L graus de liberdade, o número de amostras M consideradas e o intervalo de amostragem Δt , definidos no item 4.1.1. A figura 4.2 mostra o fluxograma do programa principal *MIMOG*. Estes dados são utilizados pela subrotina *DFRIU*, no cálculo das estimativas das funções resposta

ao impulso unitário. A figura 4.3 apresenta o fluxograma da subrotina *DFRIU*.

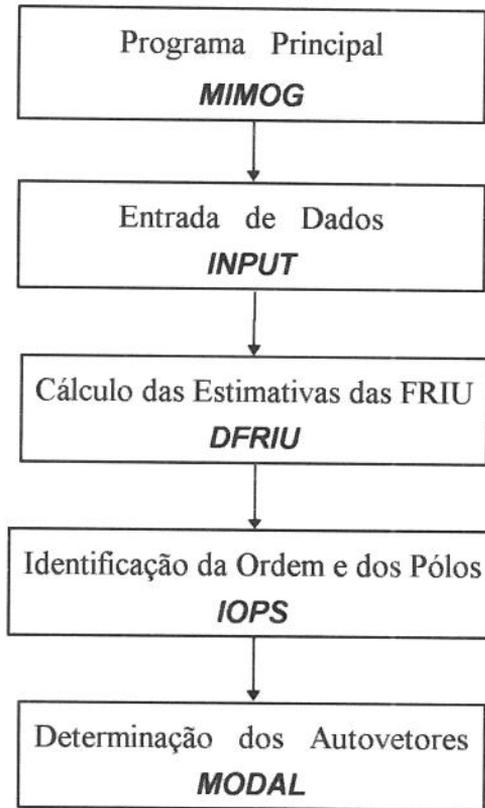
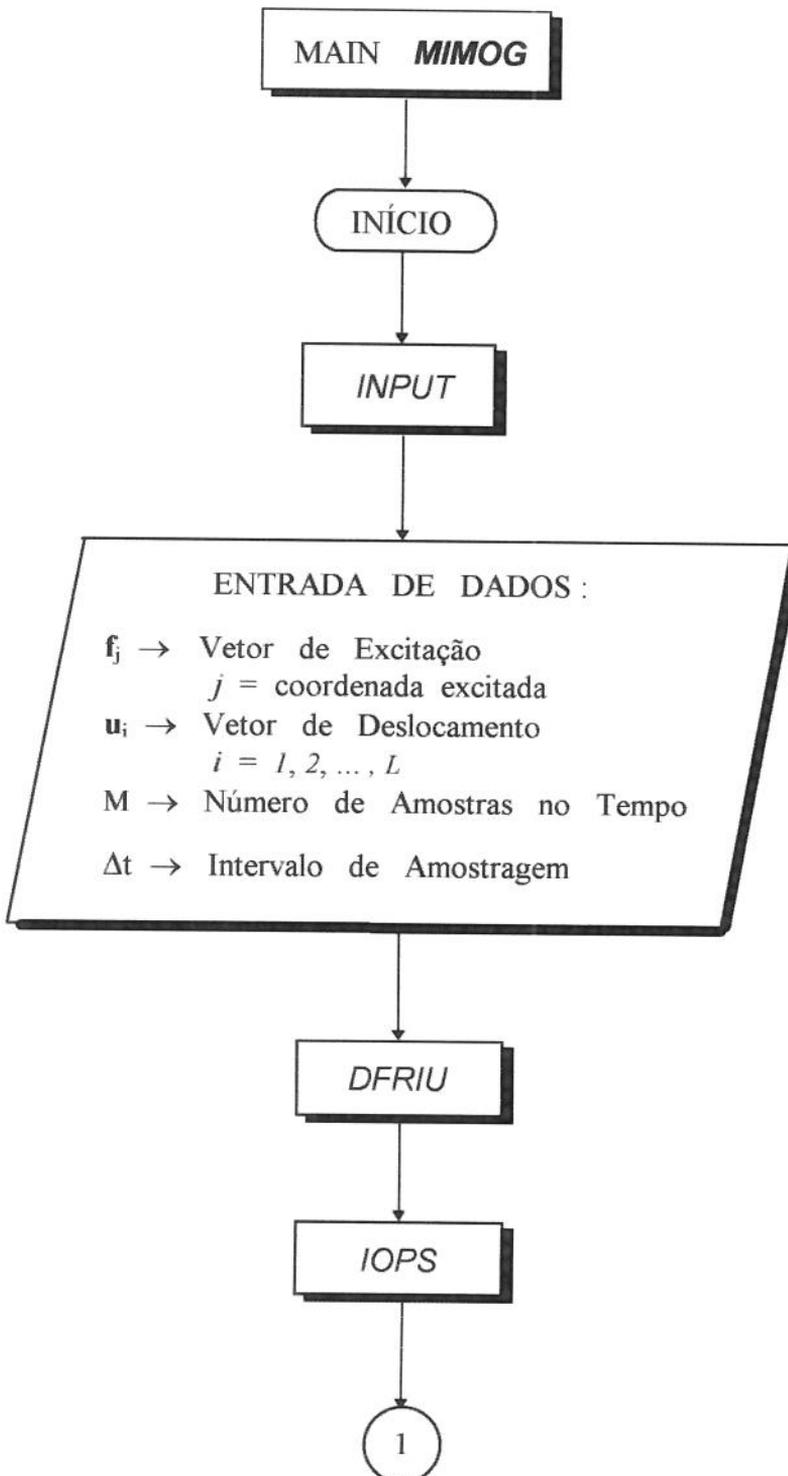


Figura 4.1 - Estrutura do programa *MIMOG*

A subrotina *IOPS* é responsável pela determinação dos pólos do sistema físico e também da ordem modal. Os dados de entrada desta subrotina são as estimativas das funções resposta ao impulso unitário calculadas anteriormente. Outra informação importante que deve ser fornecida à esta subrotina é o valor da tolerância numérica ε que representa o valor de truncamento considerado no algoritmo da eliminação de Gauss com pivotamento total, Kurka e Gomes [55]. Monta-se, à seguir, o sistema de equações (4.7). Os elementos do vetor solução \mathbf{v} deste sistema de equações são os coeficientes do polinômio característico (4.9), cujas raízes, com módulo maior que um, fornecem os pólos e a ordem do sistema em análise. O cálculo destas raízes é realizado através do método de *Laguerre*, William e outros [83]. A figura - 4.4 apresenta o fluxograma da subrotina *IOPS*.

Após a identificação da ordem modal do sistema e considerando-se o sistema de equações lineares (4.10), a subrotina *MODAL* determina os autovetores não normalizados deste sistema nas variáveis de estado. As colunas da matriz dos autovetores são calculadas

através do sistema simultâneo de equações lineares (4.13), utilizando o algoritmo da eliminação de Gauss, Kurka e Gomes [55]. Os vetores modais são armazenados em um arquivo para serem analisados e comparados com os dados experimentais. O fluxograma da subrotina *MODAL* é mostrado na figura - 4.5.



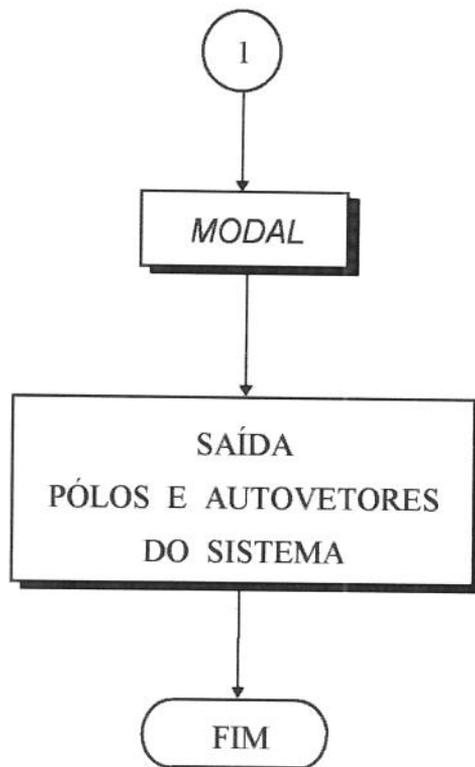
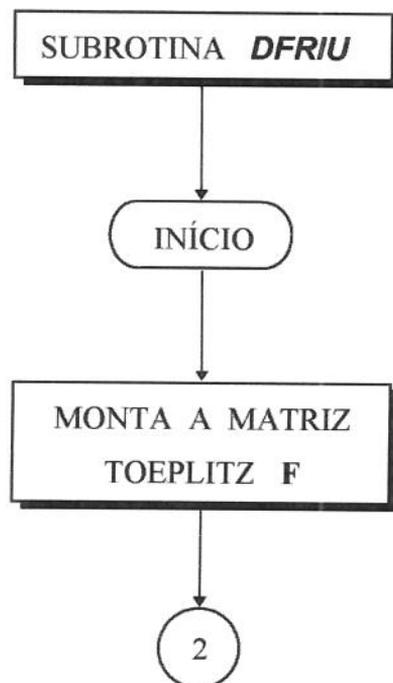


Figura 4.2 - Fluxograma do programa principal *MIMOG*



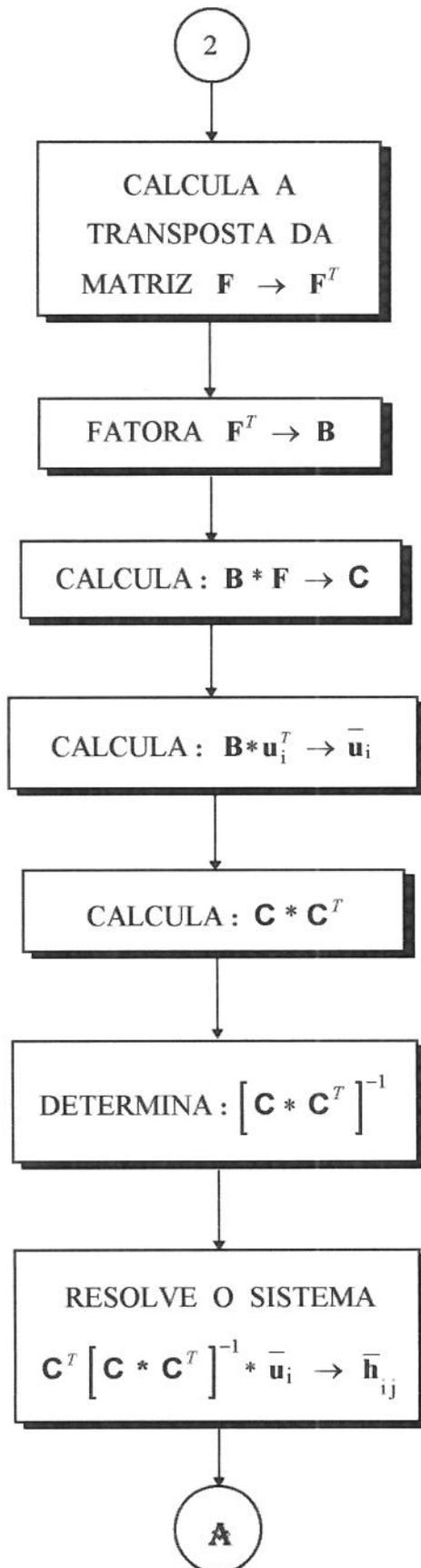


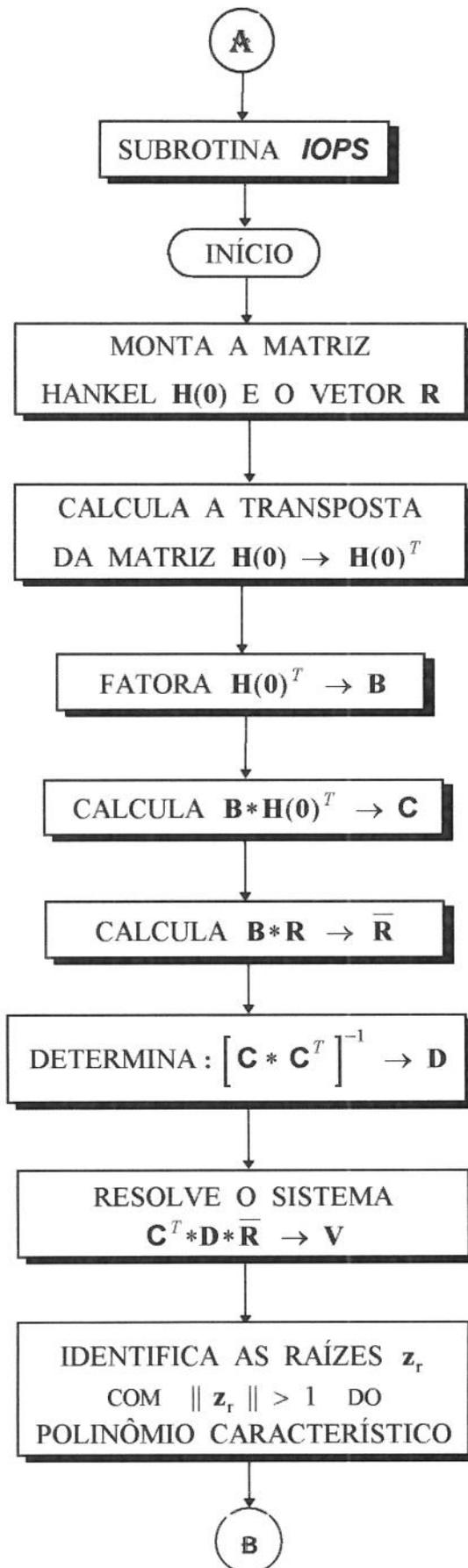
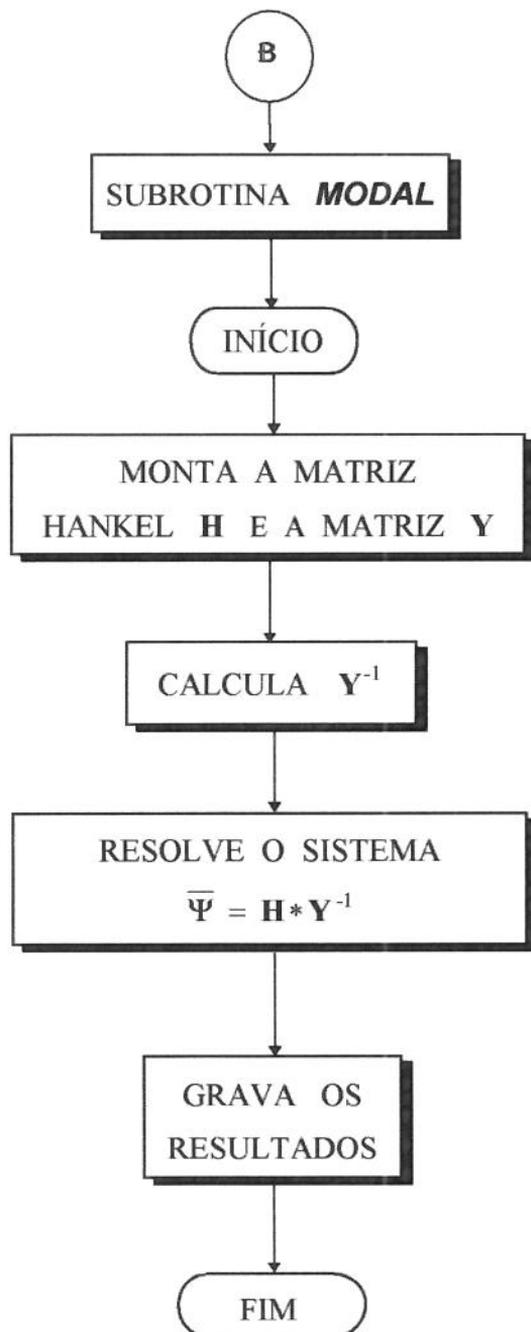
Figura 4.3 - Fluxograma da subrotina *DFRIU*

Figura 4.4 - Fluxograma da subrotina *IOPS*Figura 4.5 - Fluxograma da subrotina *MODAL*

Capítulo 5

Investigação Experimental

Com o propósito de se verificar a eficácia da metodologia de identificação das características modais de uma estrutura dinâmica, descrita na Capítulo 4, foi realizado um ensaio experimental em um tubo de sucção de óleo. A faixa de frequência analisada foi estabelecida em função do espectro de frequências do tubo, isto é, 0 Hz a 2 KHz, e também porque as frequências de excitação hidráulica do tubo em operação estão contidos nesta faixa.

5.1 Descrição do Protótipo

O protótipo submetido à análise modal experimental foi um Tubo de Sucção, modelo 5035/SC 94 utilizado no motor Perkins T4236, quatro cilindros, 73 CV e injeção direta. A simulação das condições de operação foi realizada fixando-se o tubo de sucção ao subconjunto, formado pela bomba de óleo e mancais, conforme especificado no desenho de montagem. Este conjunto foi rigidamente fixado à uma estrutura metálica de suporte, conforme mostrado nas figuras 5.1a e 5.1b.

Este tipo de fixação foi escolhido com a finalidade de representar o mais próximo possível a estrutura do bloco do motor, onde o conjunto bomba de óleo, tubo de sucção e os mancais estão fixados.

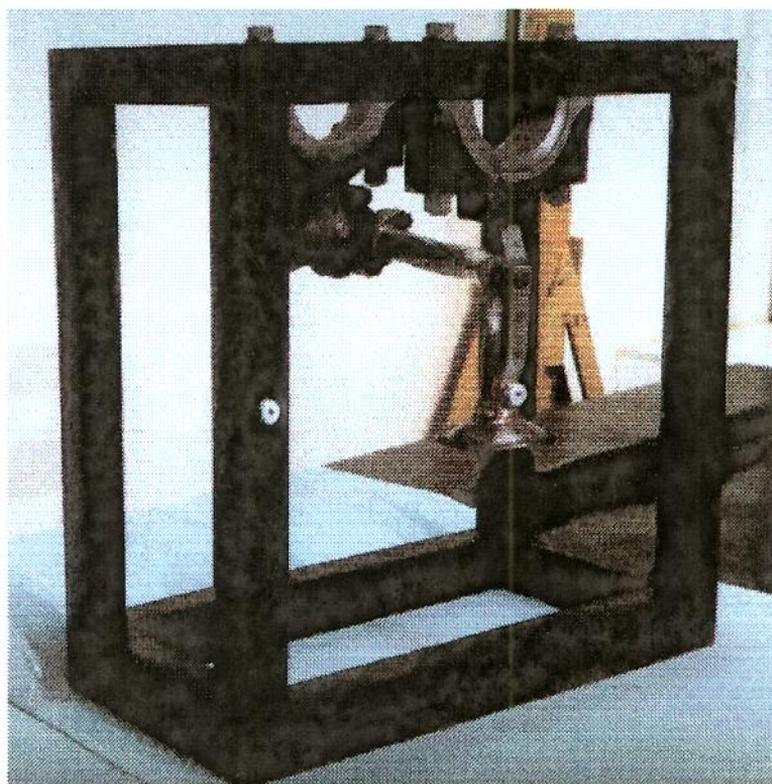


Figura 5.1a - Montagem do protótipo ensaiado

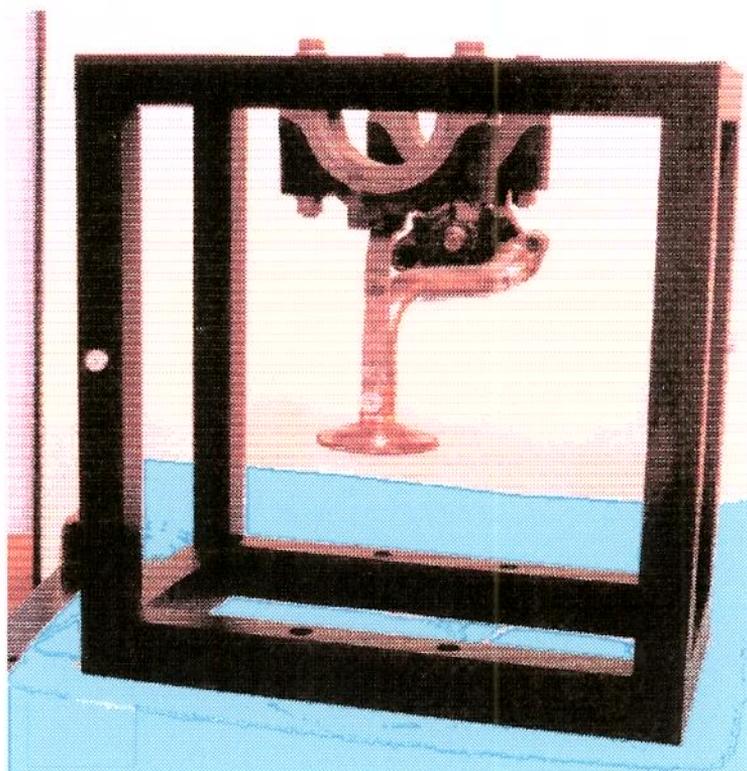


Figura 5.1b - Montagem do protótipo ensaiado

As dimensões e respectivas vistas do tubo de sucção são apresentadas na figura abaixo.

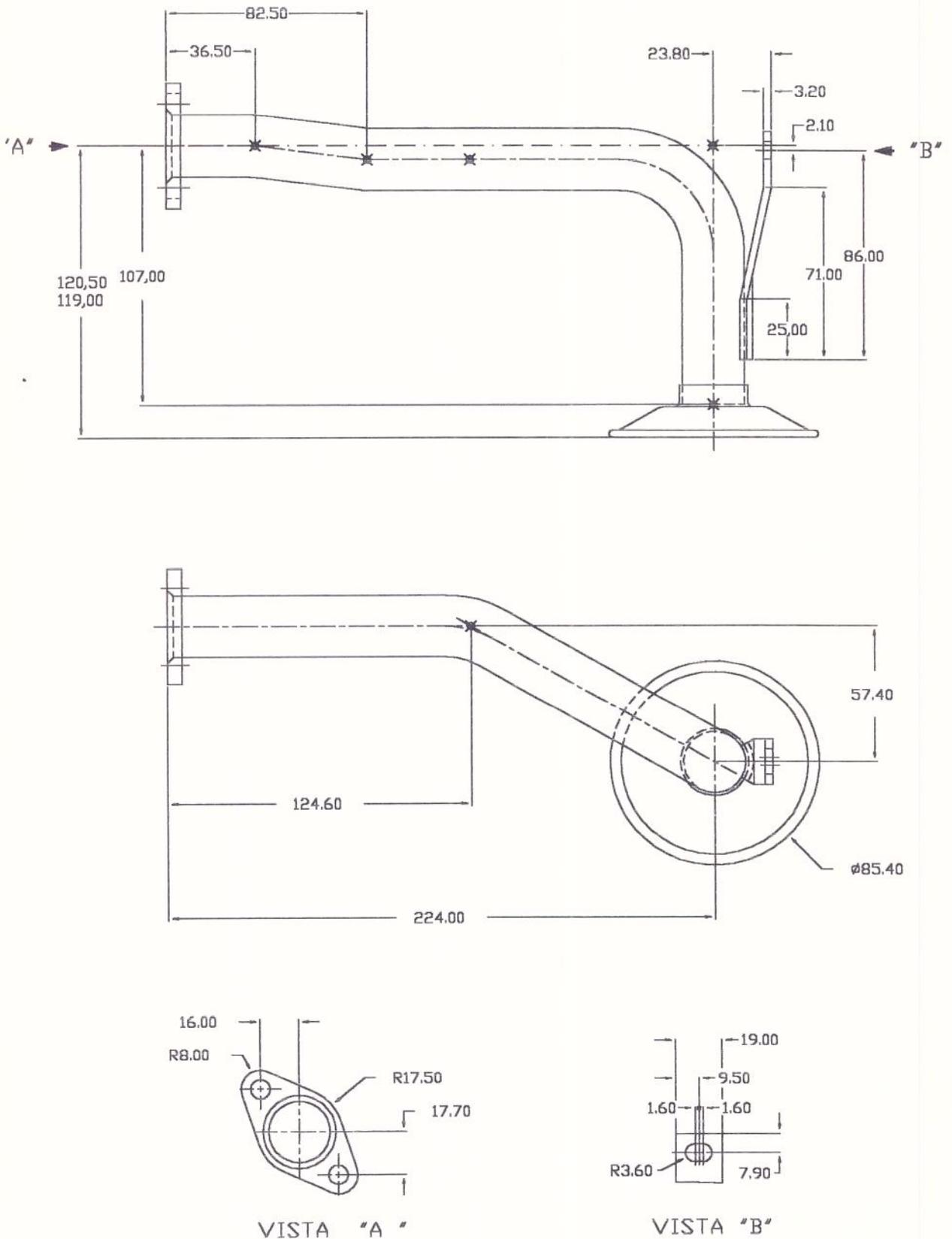


Figura 5.2 - Dimensões do protótipo

O tubo de sucção foi preenchido com óleo e os orifícios de entrada e saída foram vedados a fim de simular o acréscimo de massa que ocorre quando o tubo de sucção está em operação.

Os resultados fornecidos pelo programa de identificação modal, proposto neste trabalho, foram comparados com os dados experimentais de vibração correspondentes às propriedades de resposta do tubo de sucção de óleo, obtidos através da investigação experimental no domínio da frequência e do método dos elementos finitos, software MSC - NASTRAN.

5.2 Aquisição e Processamento dos Sinais

A investigação experimental deve ser realizada considerando-se vários aspectos fundamentais para a determinação precisa da resposta de um sistema. A excitação da estrutura e a transdução dos sinais de excitação e resposta são fatores importantes para o êxito de uma análise experimental. A forma de excitação considerada no ensaio experimental do tubo de sucção de óleo, tanto no domínio do tempo como no domínio da frequência, foi do tipo transiente, transmitido à estrutura por intermédio de um martelo de impacto. O martelo de impacto utilizado na excitação do tubo de sucção de óleo foi o modelo 8202 da Brüel & Kjaer, representado esquematicamente na figura 5.3,

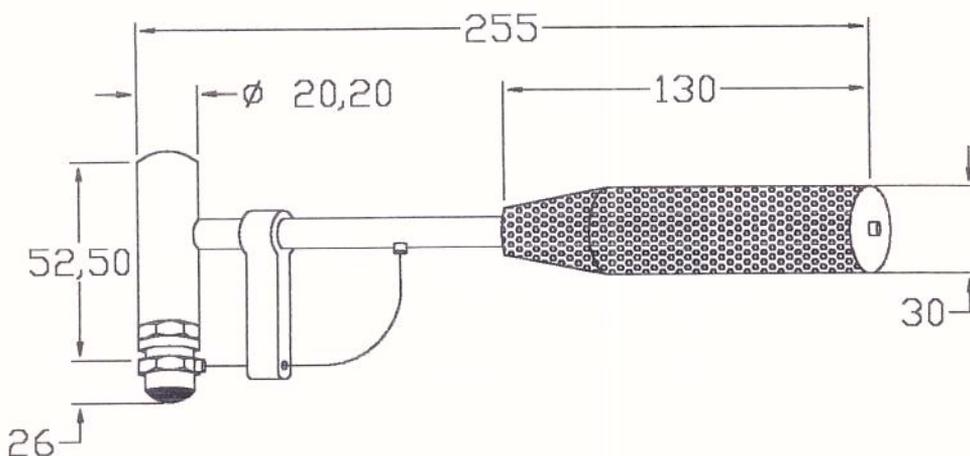


Figura 5.3 - Martelo de impacto

e em sua extremidade foi fixado um transdutor de força para medir os sinais de entrada. Na outra extremidade do transdutor de força, foi utilizada uma ponta de nylon, adequada para o conteúdo de frequência de excitação deste experimento.

Este tipo de excitação, que produz uma entrada impulsiva, é uma forma conveniente e de fácil utilização quando se deseja excitar a estrutura em diversas coordenadas geométricas. Sua maior desvantagem reside no fato de que o conteúdo de frequências de excitação fica limitado às características de massa do martelo e rigidez com o contato no impacto, Braun [13].

Os gráficos de resposta obtidos no domínio do tempo e no domínio da frequência, correspondentes à excitação impulsiva, através de um martelo de impacto, com as características descritas acima, estão mostradas nas figuras 5.4 e 5.5.

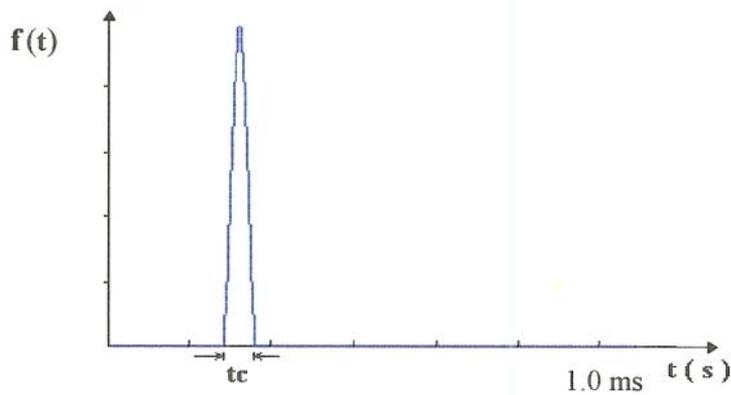


Figura 5.4 - Resposta no tempo com excitação impulsiva

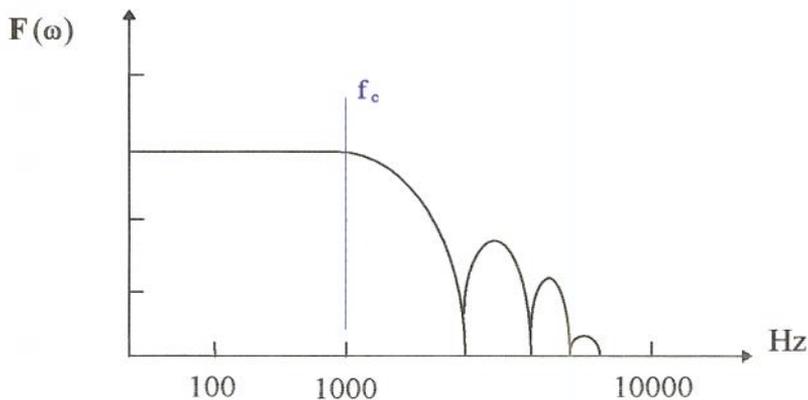


Figura 5.5 - Resposta em frequência com excitação impulsiva

A aquisição dos sinais de excitação e resposta foi feita através de transdutores piezoelétricos . A seleção dos acelerômetros , na análise modal experimental , deve assegurar que estes elementos interfiram o mínimo possível nas características de resposta da estrutura em estudo e que sua performance seja adequada à faixa de interesse preestabelecida para o ensaio , Dally e outros [24] .

A figura 5.6 mostra o detalhe da fixação do acelerômetro no tubo de sucção de óleo utilizada neste experimento.

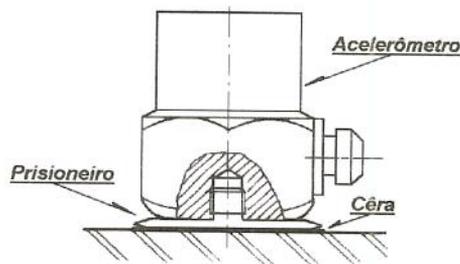


Figura 5.6 - Detalhe da fixação do acelerômetro

Os sinais de excitação e resposta são enviados e processados pelo analisador de espectro, mostrado na figura 5.7, que é capaz de fornecer as características de resposta da

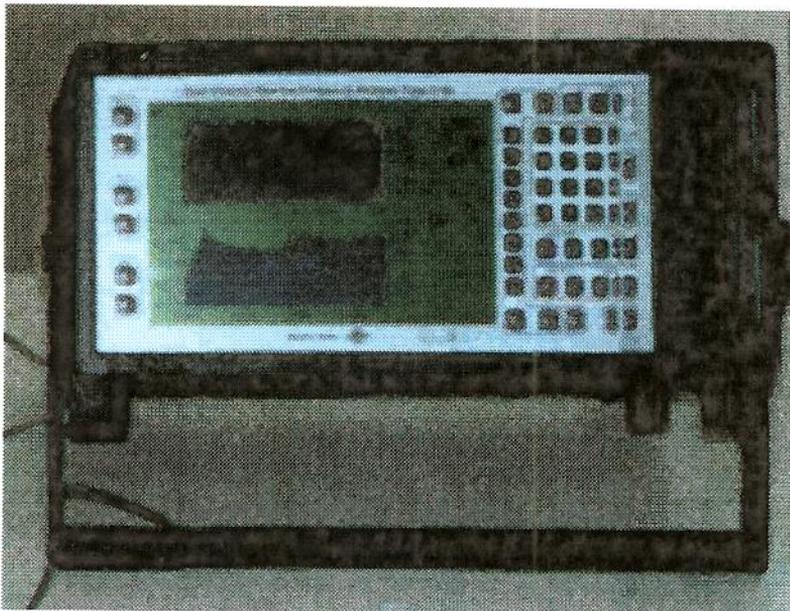


Figura 5.7 - Sistema de aquisição e processamento de sinais

estrutura nos domínios do tempo e da frequência.

Existem dois fenômenos relacionados com o processamento digital de dados que podem prejudicar as respostas adquiridas experimentalmente. O primeiro é o fenômeno de “*leakage*”, que requer que a resposta medida seja submetida à um processo de “*averaging*” para reduzir este efeito. Este procedimento também contribui para reduzir o nível de ruído presente nos dados, bem como as possíveis não linearidades do sistema. O segundo é o fenômeno de “*aliasing*”, cujo efeito é minimizado pelos filtros do analisador de espectro, utilizado neste experimento. Entretanto, se o sistema possuir não linearidades significativas, o processamento digital dos sinais experimentais pode estar sujeito à erros.

Para a análise no domínio da frequência, considerou-se o cálculo da função coerência para cada aquisição, cujo valor deve ser o mais próximo de 1, o que indica a linearidade entre os sinais de excitação e resposta.

A calibração do analisador de espectro foi realizada a partir dos valores de sensibilidade do transdutor de força e do acelerômetro, indicados nas cartas de calibração, fornecidos pela Brüel & Kjaer, 1994. As especificações dos equipamentos utilizados na aquisição e processamento de dados são apresentados a seguir:

i - Analisador de espectro Brüel & Kjaer de dois canais, tipo 2144

ii - Martelo de impacto Brüel & Kjaer tipo 8202

Materiais:

Cabo: titânio, revestido com borracha neoprene

Corpo: aço inox

Cabeça: nylon

Prizilha: alumínio anodizado

Peso do Martelo: 200 g

Peso da Cabeça de Nylon: 3,9 g

Sensibilidade na saída: $0,99 \text{ pC/ms}^{-2}$

iii - Acelerômetro Brüel & Kjaer, tipo 4393

Sensibilidade: 0,315 pC/ms^{-2}

Massa do acelerômetro: 2,20 g

Frequência natural: 55 kHz

iv - Transdutor de força Brüel & Kjaer, tipo 8200

Sensibilidade: 3,84 pC/ms^{-2}

Massa do transdutor: 21 g

Capítulo 6

Análise dos Resultados

Este capítulo apresenta os resultados experimentais de vibração, que correspondem às características dinâmicas de resposta do tubo de sucção de óleo, obtidos com o método **ERABACK**, descrito no Capítulo 4. Inicialmente, o programa **MIMOG** foi testado, considerando-se dados simulados, na ausência e na presença de ruído, obtidos a partir de sistemas discretos hipotéticos, com amortecimento e possuindo vários graus de liberdade. Estas simulações foram realizadas com o propósito de se verificar a eficácia do algoritmo de identificação descrito no Capítulo 4. Em seguida, são considerados os resultados experimentais, do tubo de sucção, obtidos com a utilização de outros procedimentos, tais como o método dos elementos finitos e a análise modal no domínio da frequência, com a finalidade de se comparar estes resultados com os fornecidos pelo programa **MIMOG**. A partir destas considerações, apresentam-se as conclusões sobre a performance do método **ERABACK** e as sugestões para futuros desenvolvimentos no Capítulo 7.

6.1 Simulações Numéricas

O primeiro exemplo considera um sistema de sete graus de liberdade, na ausência de ruído, isto é (Noise Signal Ratio) $NSR = 0$, cujas matrizes dos pólos Λ , e dos autovetores Φ , são apresentadas seguir:

$$\Lambda = 2\pi^* \begin{bmatrix} 0.01 - 1.0i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.02 - 2.0i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.03 - 3.0i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.04 - 4.0i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.05 + 5.0i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.06 - 6.0i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.07 - 7.0i \end{bmatrix}$$

matriz dos pólos

$$\Phi = 10^{-2} * \begin{bmatrix} 2.19 & 1.54 & -11.78 & -5.83 & -0.19 & 0.15 & -0.96 \\ 18.33 & 5.86 & -08.67 & -7.60 & -1.67 & -2.47 & -1.31 \\ 8.92 & 2.92 & 06.94 & 9.91 & -0.11 & 1.83 & 2.16 \\ 15.78 & 2.97 & -15.55 & 4.31 & -0.33 & -1.03 & -0.19 \\ 15.26 & 1.01 & 09.15 & -7.62 & 0.16 & -1.36 & -1.00 \\ 10.24 & 5.55 & 02.44 & 3.90 & -0.26 & 2.03 & 0.06 \\ 4.00 & 2.36 & -13.19 & -9.65 & -0.05 & -0.41 & -0.06 \end{bmatrix} +$$

$$+ 10^{-2} * \begin{bmatrix} -1.84i & -0.18i & +0.87i & -0.42i & -0.05i & -0.05i & -0.06i \\ -1.44i & +0.82i & +0.61i & -0.51i & -0.41i & +0.94i & -0.10i \\ -0.70i & +0.41i & -0.56i & +0.70i & -0.02i & -0.71i & +0.15i \\ -1.26i & +0.42i & +1.11i & +0.34i & -0.08i & +0.39i & -0.02i \\ -1.27i & -0.11i & -0.67i & -0.53i & +0.04i & +0.52i & -0.07i \\ -0.78i & +0.78i & -0.24i & +0.29i & -0.06i & -0.77i & +0.01i \\ -0.30i & +0.33i & +0.95i & -0.70i & -0.01i & +0.15i & -0.01i \end{bmatrix}$$

matriz modal

Este sistema foi gerado considerando-se uma entrada, sete saídas, taxa de amostragem $\Delta t = 0.0562s$ e 63 amostras igualmente espaçadas no tempo. A partir do produto de convolução entre o vetor de excitação e a matriz de resposta ao impulso unitário do sistema hipotético obteve-se a matriz dos deslocamentos do sistema. O processo de identificação de

parâmetros foi feito a partir do vetor de excitação e da matriz dos deslocamentos U , medidos nos graus de liberdade considerados na análise, conforme apresentado no capítulo 4, sendo que a tolerância numérica considerada neste exemplo foi $1.0 \text{ e-}14$.

6.1.1 Comparação dos Resultados

A figura 6.1 apresenta os pólos/ 2π do sistema sob estudo e a figura 6.2 os pólos identificados pelo método proposto. A figura 6.3 mostra os pólos do sistema e os pólos calculados em um único gráfico :

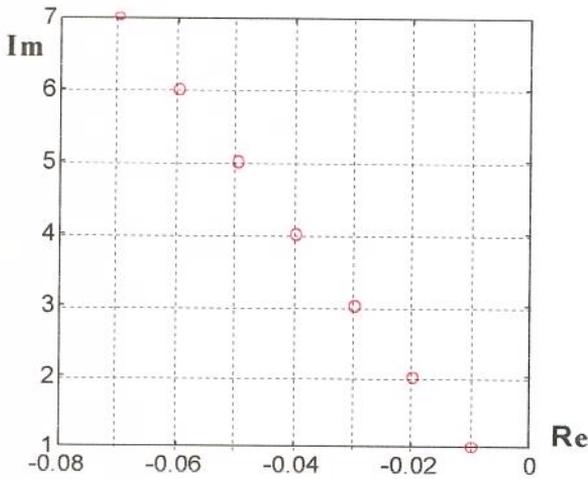


Fig. 6.1 - Pólos do Sistema

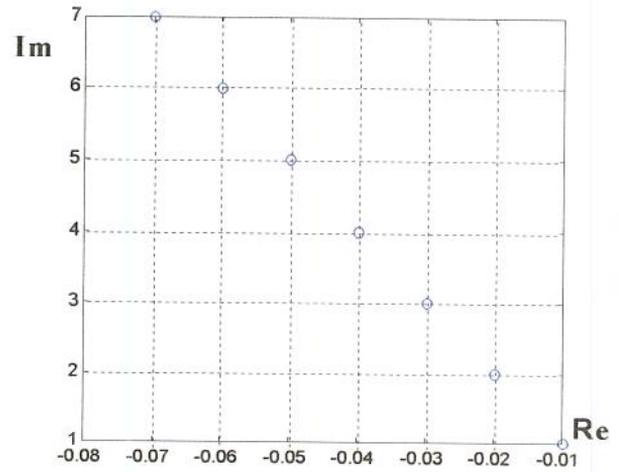


Fig. 6.2 - Pólos Identificados

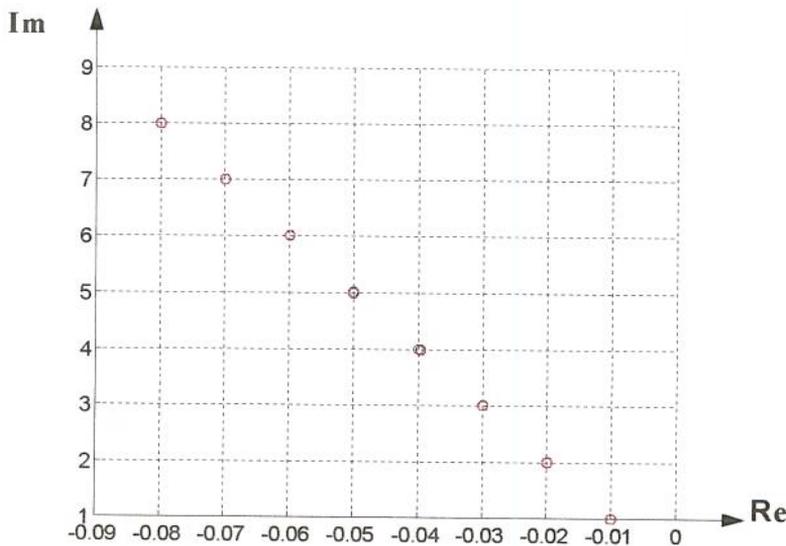


Fig. 6.3 - Correlação entre os Pólos do Sistema e os Pólos Identificados

Os autovetores do sistema e os autovetores calculados pelo programa foram comparados considerando-se a parte real dos mesmos normalizados pelo máximo valor:

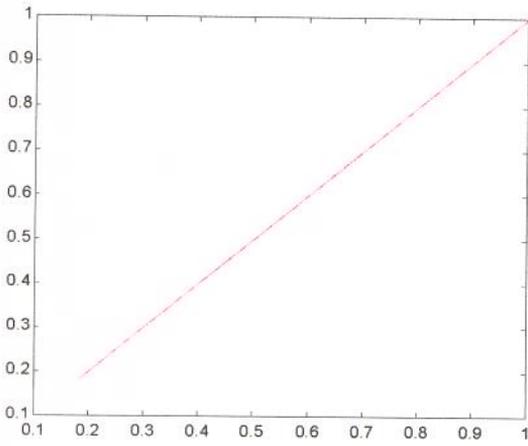


Fig. 6.4 - correlação do primeiro modo

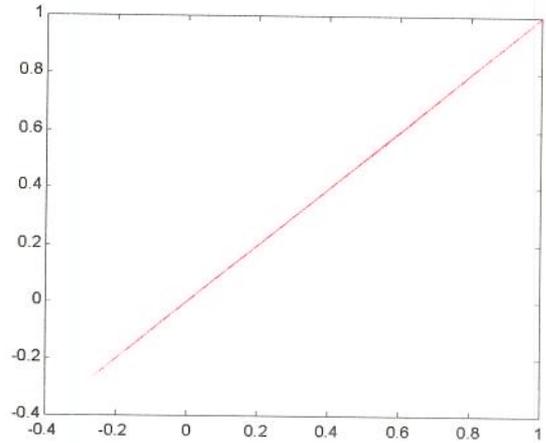


Fig. 6.5 - correlação do segundo modo

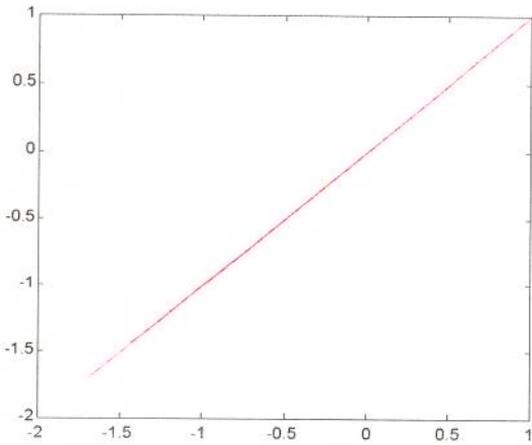


Fig. 6.6 - correlação do terceiro modo

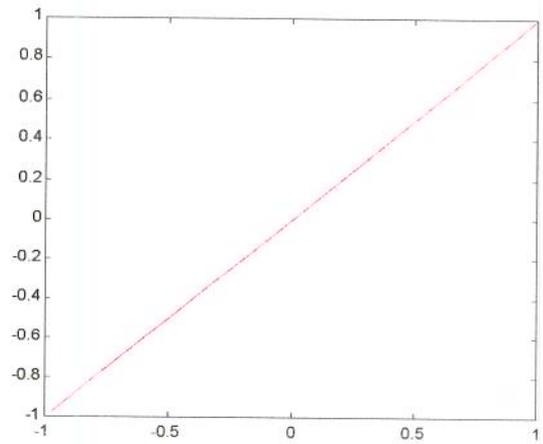


Fig. 6.7 - correlação do quarto modo

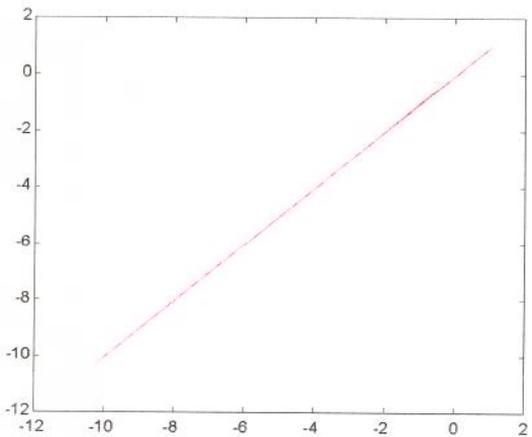


Fig. 6.8 - correlação do quinto modo

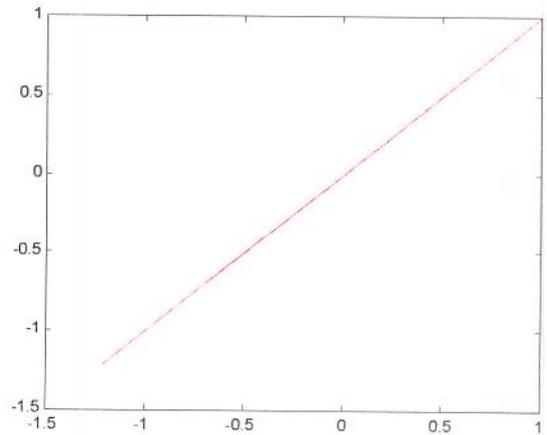


Fig. 6.9 - correlação do sexto modo

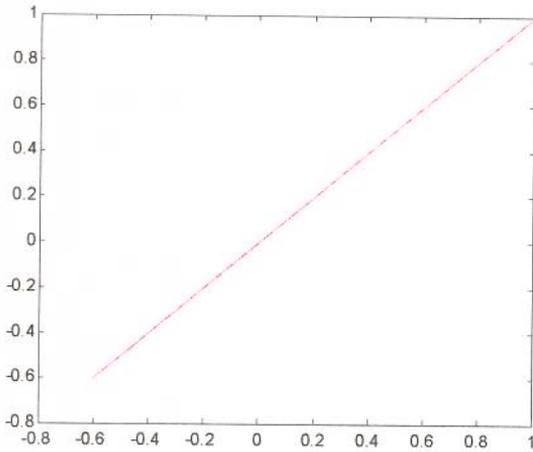


Fig. 6.10 - correlação do sétimo modo

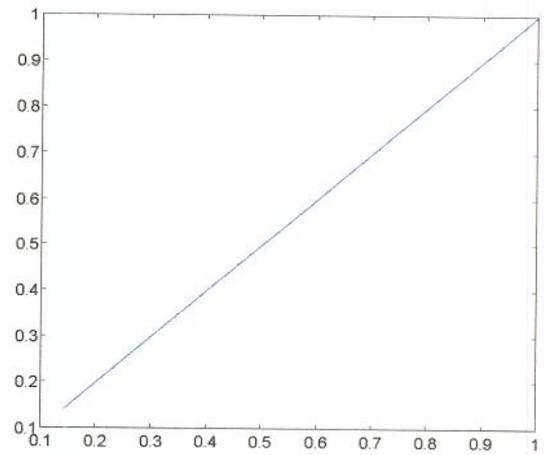


Fig. 6.11 - correlação entre as frequências

O segundo exemplo considera um sistema com oito graus de liberdade, onde os sinais originais são perturbados com ruídos aleatórios, Gaussiano com média zero, de 5%, isto é $NSR = 0,05$. Este sistema foi gerado da mesma forma que o exemplo anterior, ou seja uma entrada, oito saídas, taxa de amostragem $\Delta t = 0.0492 s$. O objetivo deste exemplo é comprovar a evolução que ocorre na identificação dos parâmetros de um sistema, quando se incrementa o número de amostras consideradas na análise cujos sinais do sistema são perturbados por ruídos aleatórios. Inicialmente adotou-se 128 amostras igualmente espaçadas no tempo e a mesma tolerância numérica do exemplo anterior, $1.0 e^{-14}$.

As matrizes dos pólos Λ , e dos autovetores Φ , deste sistema são apresentadas seguir :

$$\Lambda = 2\pi^* \begin{bmatrix} 0.01 - 1.0i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.02 - 2.0i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.03 - 3.0i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.04 - 4.0i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.05 - 5.0i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.06 - 6.0i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.07 - 7.0i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.08 - 8.0i \end{bmatrix}$$

matriz dos pólos do sistema

$$\Phi = 10^{-2} * \begin{bmatrix} -2.10 & 15.22 & 2.49 & 7.40 & 1.93 & 0.11 & 0.03 & 0.00 \\ 0.52 & -3.36 & 0.05 & 2.44 & -1.85 & -0.50 & -0.02 & 0.00 \\ -2.66 & -11.33 & -2.00 & 1.25 & -0.35 & -0.61 & 0.00 & 0.00 \\ 2.70 & -11.46 & 0.17 & 7.88 & 0.00 & 0.59 & 0.00 & 0.00 \\ -3.16 & -3.08 & -1.35 & -0.95 & 1.99 & -0.61 & -0.02i & 0.00 \\ -10.72 & -25.00 & 0.44 & 1.25 & 1.30 & -0.50 & -0.02 & 0.00 \\ 1.58 & -33.17 & 0.29 & 2.16 & 0.63 & 0.24 & 0.00 & 0.00 \\ 3.11 & -28.80 & 3.21 & 2.97 & 1.12 & -0.01 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix} +$$

$$+ 10^{-2} * \begin{bmatrix} +0.03i & +0.35i & -0.02i & -0.29i & +0.48i & -0.11i & +0.05i & -0.00i \\ -0.01i & -0.07i & -0.00i & -0.10i & -1.41i & +0.53i & -0.03i & +0.00i \\ +0.03i & -0.28i & +0.01i & -0.05i & -0.26i & +0.64i & +0.00i & +0.00i \\ -0.04i & -0.22i & +0.00i & -0.32i & -0.01i & -0.62i & -0.01i & -0.00i \\ +0.04i & -0.08i & +0.01i & +0.05i & +1.53i & +0.64i & -0.12i & +0.00i \\ +0.14i & -0.61i & -0.01i & -0.05i & +1.00i & +0.52i & -0.03i & +0.00i \\ -0.03i & -0.71i & -0.00i & -0.09i & +0.48i & -0.25i & +0.00i & +0.00i \\ -0.05i & -0.59i & -0.03i & -0.12i & +0.85i & +0.01i & -0.00i & -0.00i \end{bmatrix}$$

matriz modal do sistema

A figura 6.12 mostra os pólos do sistema e os pólos calculados pelo programa divididos pela constante 2π

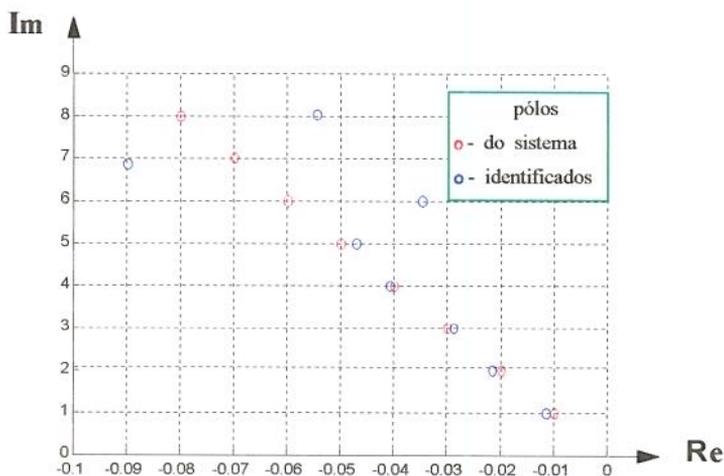


figura 6.12 - pólos do sistema e pólos identificados

A figura 6.12 mostra que embora as frequências do sistema sob estudo, isto é o valor correspondente a parte imaginária de cada pólo, são identificadas com boa precisão, o mesmo não ocorre para alguns valores que correspondem aos amortecimentos calculados.

Os autovetores do sistema sob estudo e os autovetores calculados pelo programa foram comparados considerando-se o modulo multiplicado pelo cosseno do ângulo de fase:

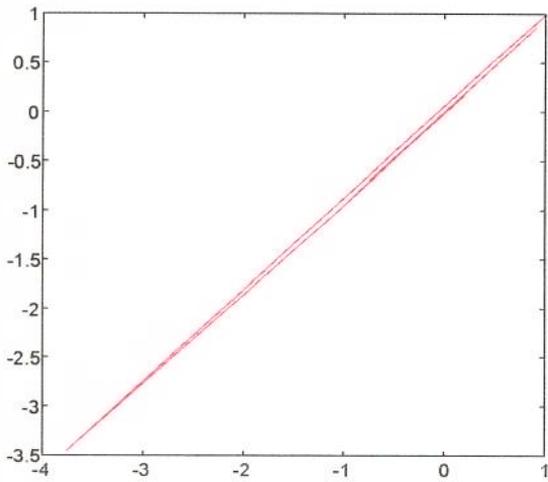


Fig. 6.13 - correlação do primeiro modo

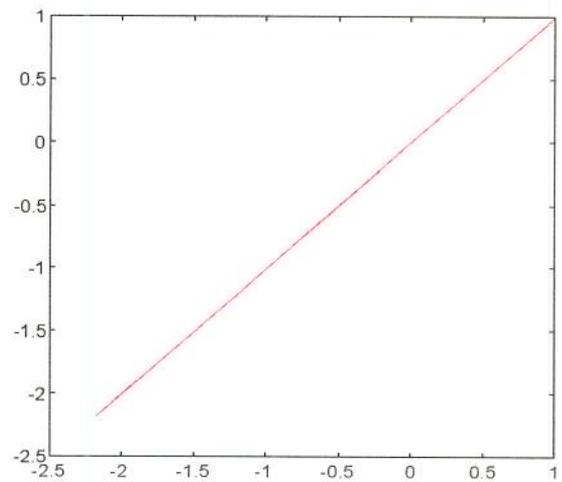


Fig. 6.14 - correlação do segundo modo

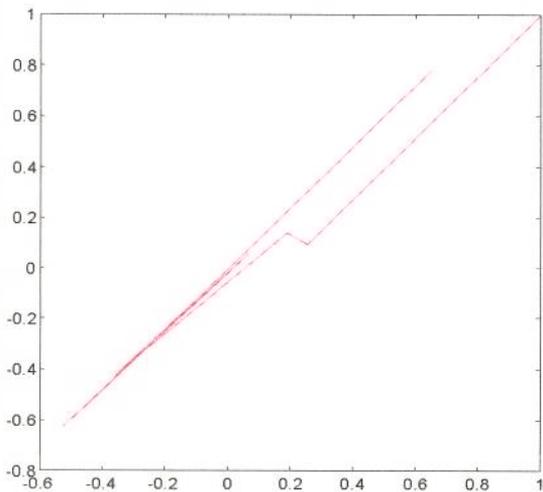


Fig. 6.15 - correlação do terceiro modo

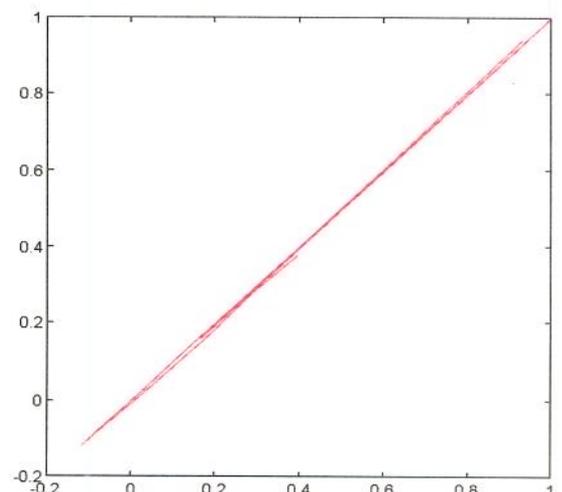


Fig. 6.16 - correlação do quarto modo

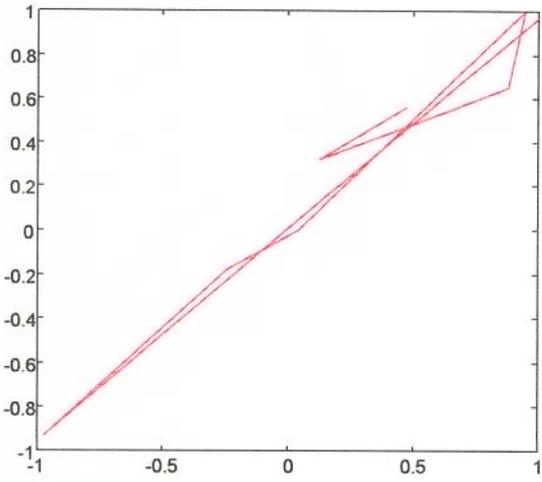


Fig. 6.17 - correlação do quinto modo

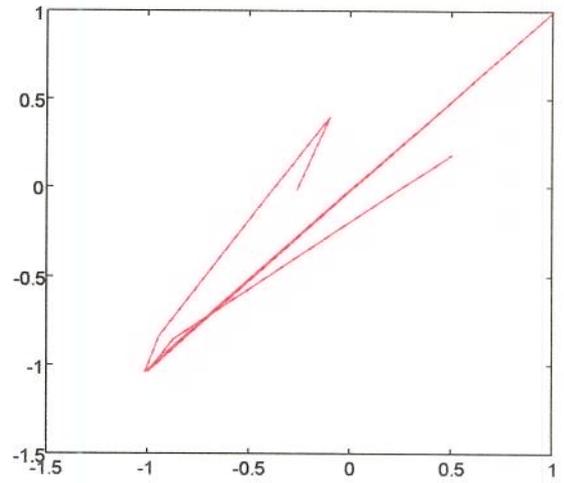


Fig. 6.18 - correlação do sexto modo

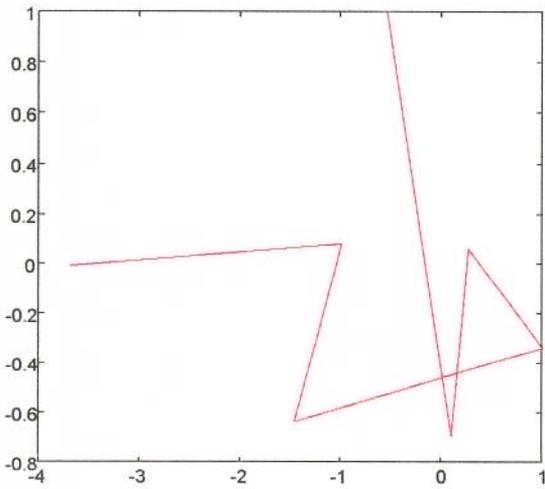


Fig. 6.19 - correlação do sétimo modo

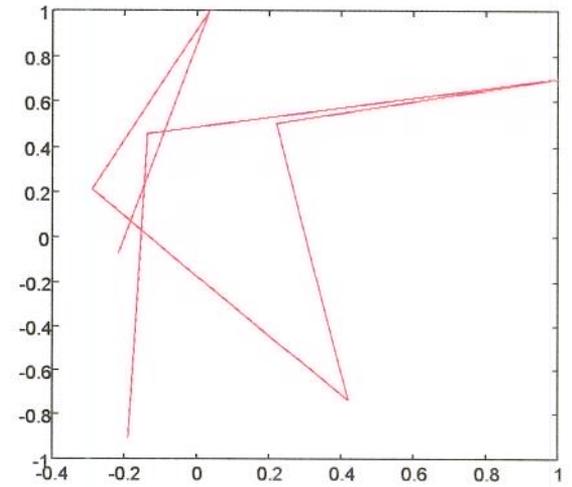


Fig. 6.20 - correlação do oitavo modo

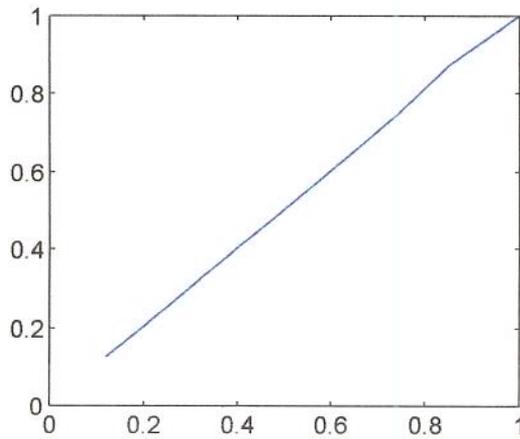


Fig. 6.21 - correlação entre as frequências

As figuras abaixo correspondem aos resultados obtidos na identificação dos parâmetros do mesmo sistema do exemplo anterior, porém, considerando-se para o cálculo 256 amostras igualmente espaçadas no tempo.

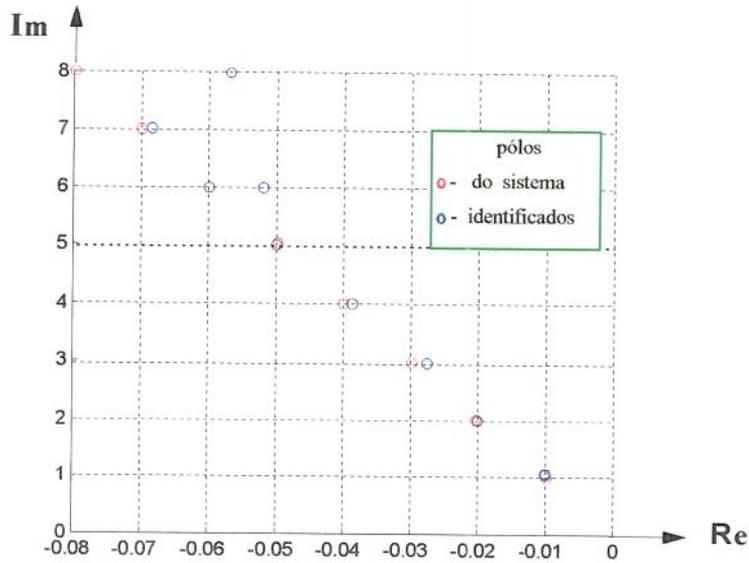


figura 6.22 - pólos do sistema e pólos identificados

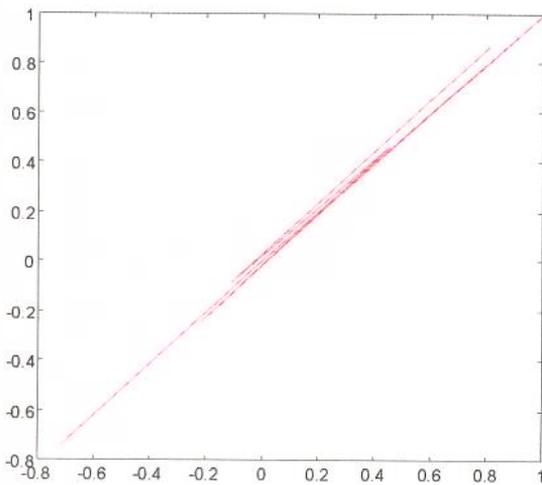


Fig. 6.23 - correlação do primeiro modo

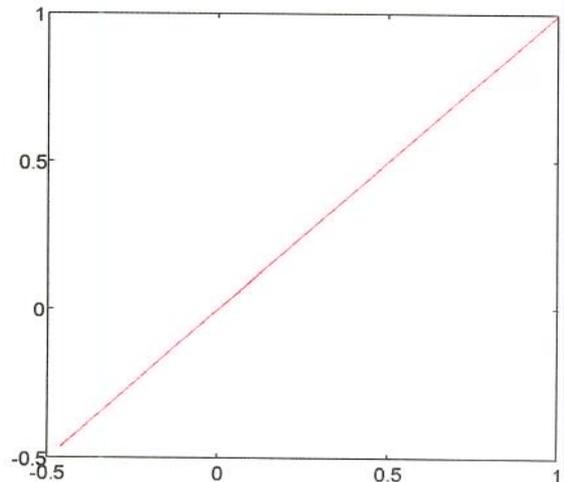


Fig. 6.24 - correlação do segundo modo

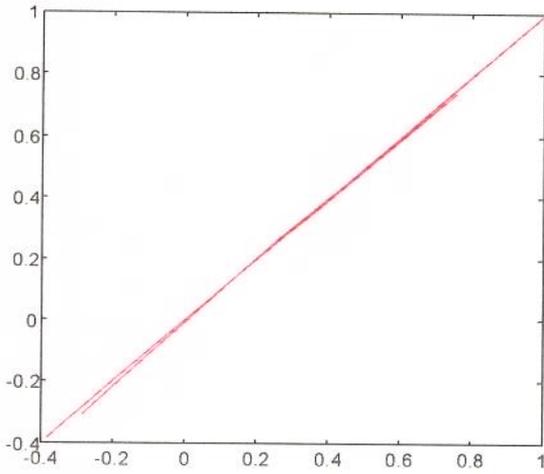


Fig. 6.25 - correlação do terceiro modo

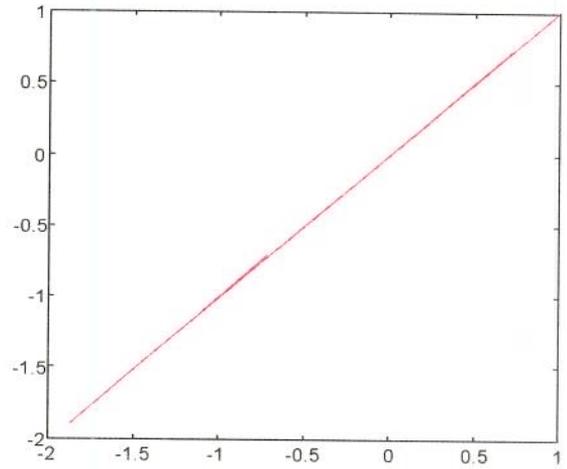


Fig. 6.26 - correlação do quarto modo

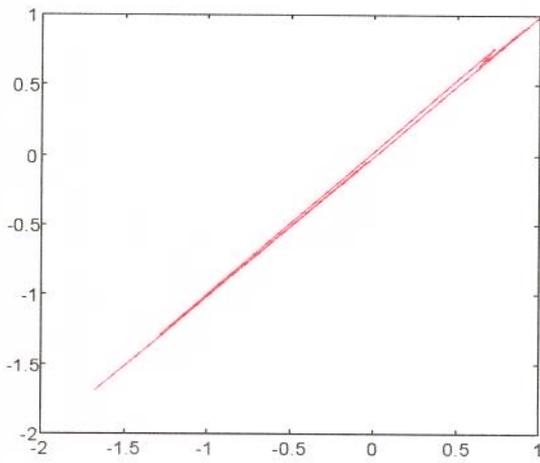


Fig. 6.27 - correlação do quinto modo

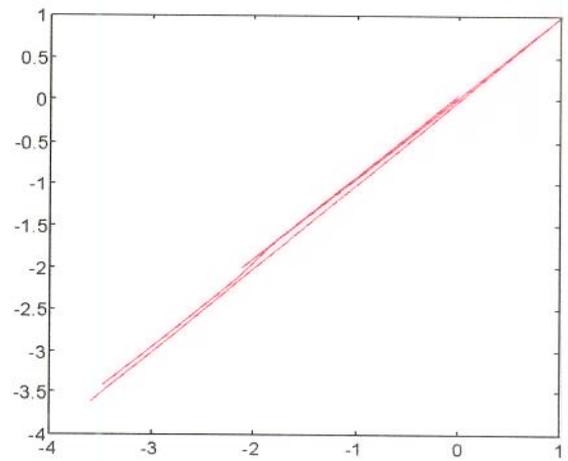


Fig. 6.28 - correlação do sexto modo

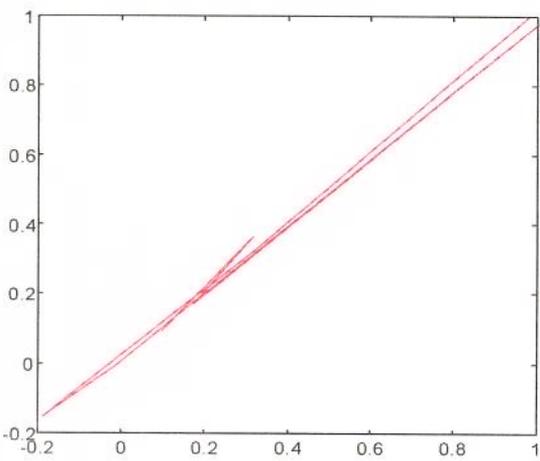


Fig. 6.29 - correlação do sétimo modo

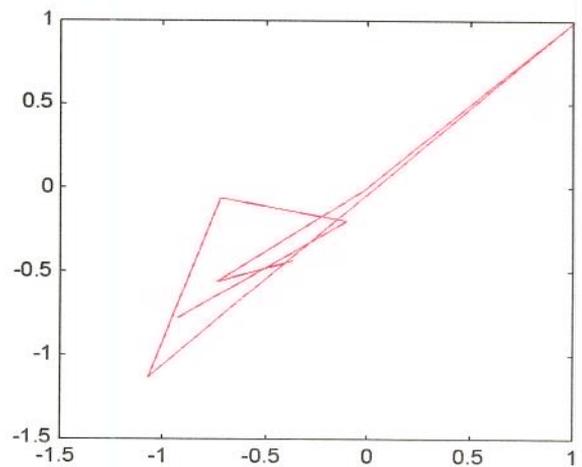


Fig. 6.30 - correlação do oitavo modo

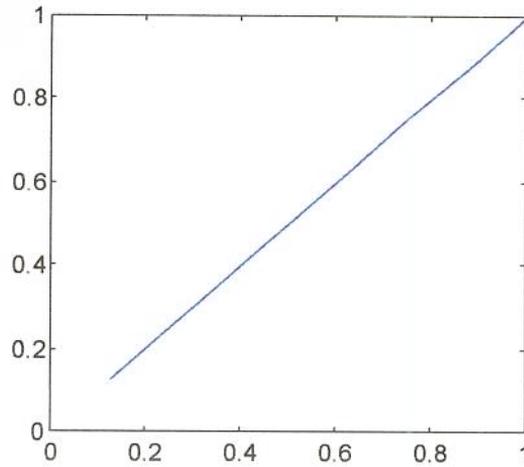


Fig. 6.31 - correlação entre as frequências

Pode-se observar claramente que, quando se consideram 256 amostras para a determinação dos parâmetros do sistema hipotético, os resultados obtidos apresentam uma evolução considerável, conforme pode ser verificado pelos gráficos acima.

A seguir apresenta-se um sistema numérico onde os sinais originais são perturbados com ruídos aleatórios de 8 %, isto é $NSR = 0,08$. Este exemplo considera um sistema com oito graus de liberdade, uma entrada, oito saídas, taxa de amostragem $\Delta t = 0.0492 s$, 512 amostras no tempo, e a mesma tolerância numérica dos exemplos anteriores, 1.0 e -14 . O objetivo deste exemplo é mostrar a performance do método na identificação dos parâmetros de sistemas com características análogas.

As matrizes dos pólos Λ , e dos autovetores Φ , deste sistema são apresentadas seguir :

$$\Lambda = 2\pi^* \begin{bmatrix} 0.01 - 1.0i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.02 - 2.0i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.03 - 3.0i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.04 - 4.0i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.05 - 5.0i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.06 - 6.0i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.07 - 7.0i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.08 - 8.0i \end{bmatrix}$$

Matriz dos pólos do sistema

$$\Phi = 10^{-2} * \begin{bmatrix} -80.72 & 28.41 & 108.73 & 26.54 & -107.48 & -4.52 & -3.09 & -5.34 \\ -89.21 & 175.11 & -6.47 & -27.40 & -23.77 & -44.38 & -12.59 & 1.36 \\ 243.91 & 189.63 & 113.50 & 3.01 & -144.17 & 20.37 & 10.21 & -0.65 \\ -101.47 & -134.99 & 42.97 & -32.41 & -3.52 & 56.90 & 15.23 & 1.75 \\ 54.15 & 85.13 & 109.25 & -15.21 & 13.71 & 44.32 & -21.72 & 5.16 \\ -243.89 & -52.39 & -32.09 & 27.34 & 43.38 & -13.49 & 26.43 & 7.92 \\ -287.57 & 145.47 & -94.93 & 12.50 & 143.91 & 42.36 & 83.70 & -4.35 \\ 228.70 & -123.96 & 87.54 & 4.93 & 43.25 & -20.88 & 37.97 & -3.34 \end{bmatrix} +$$

$$+ 10^{-2} * \begin{bmatrix} -8.92i & -4.72i & -97.16i & 57.24i & -3.31i & -0.19i & 0.03i & 0.16i \\ -9.96i & -28.31i & 5.36i & -59.18i & -0.69i & -1.75i & -0.24i & 0.04i \\ 26.85i & -29.86i & -101.56i & 6.10i & -4.38i & 0.76i & 0.21i & 0.02i \\ -11.03i & 21.30i & -39.97i & -70.26i & -0.09i & 2.19i & 0.29i & -0.05i \\ 5.98i & -13.61i & -98.00i & -33.20i & 0.41i & 1.67i & -0.50i & -0.15i \\ -26.99i & 7.96i & 28.89i & 59.44i & 1.29i & -0.43i & 0.47i & -0.23i \\ -31.97i & -23.85i & 84.86i & 27.47i & 4.44i & 1.80i & 1.69i & 0.12i \\ 25.39i & 20.36i & -78.13i & 9.96i & 1.43i & -0.78i & 0.79i & 0.09i \end{bmatrix}$$

matriz modal do sistema

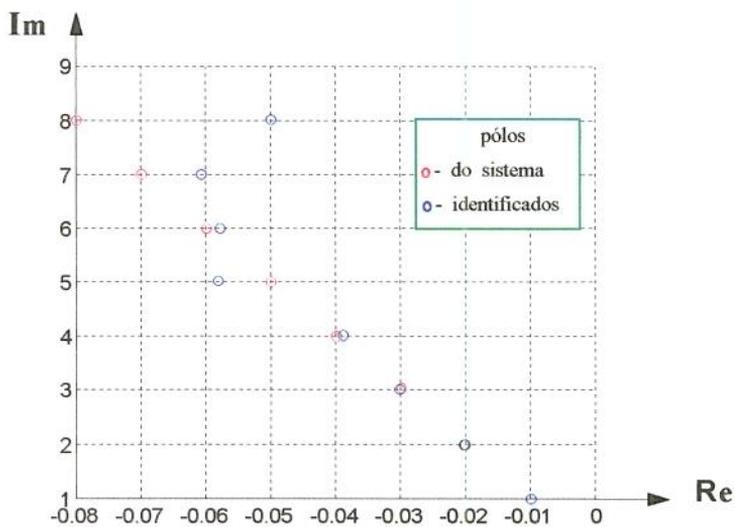


figura 6.32 - pólos do sistema e pólos identificados

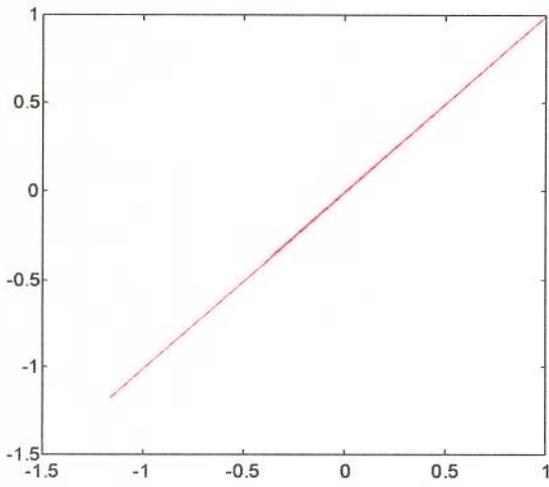


Fig. 6.33 – correlação do primeiro modo

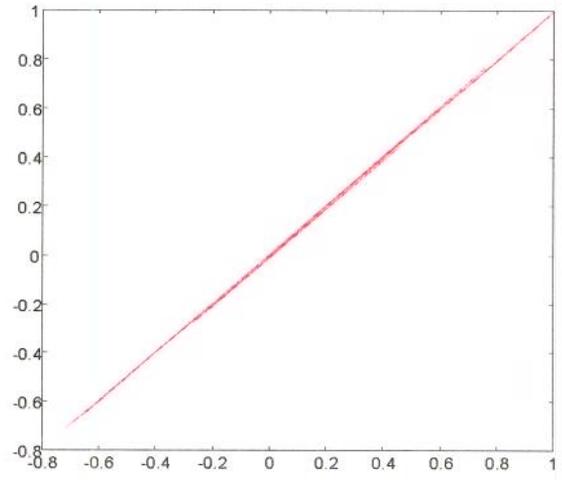


Fig. 6.34 – correlação do segundo modo

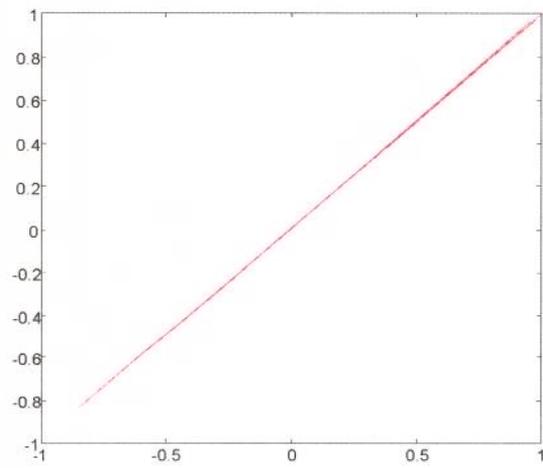


Fig. 6.35 – correlação do terceiro modo

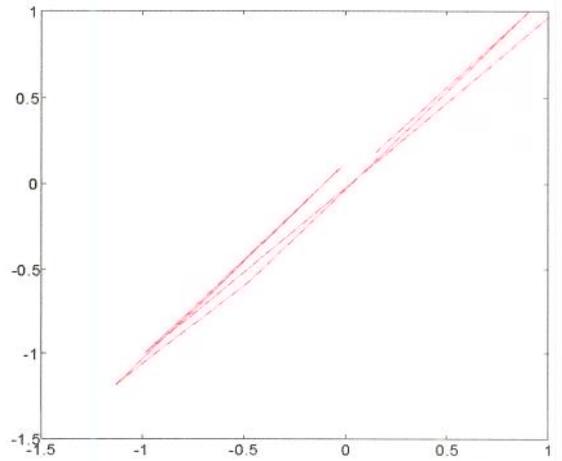


Fig. 6.36 – correlação do quarto modo

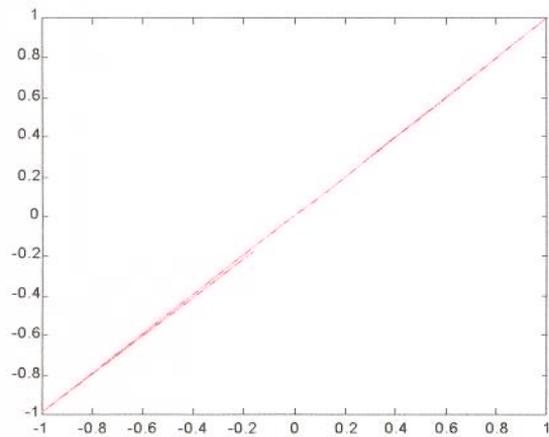


Fig. 6.37 – correlação do quinto modo

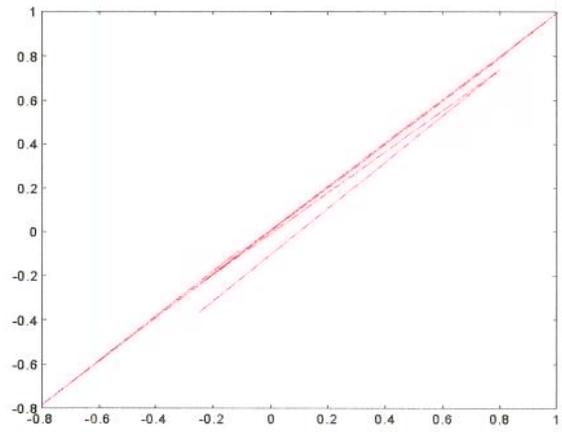


Fig. 6.38 – correlação do sexto modo

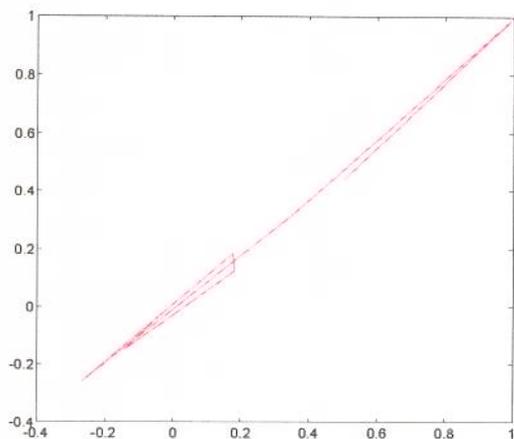


Fig. 6.39 – correlação do sétimo modo

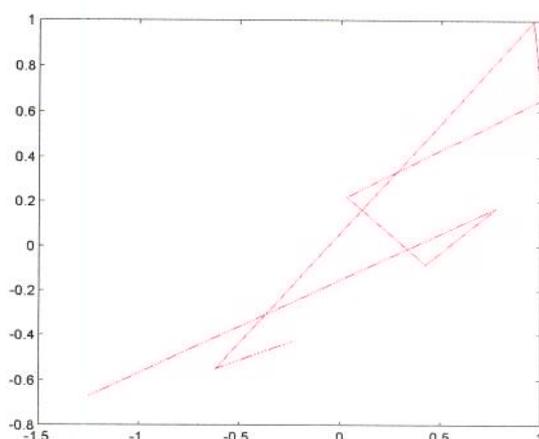


Fig. 6.40 – correlação do oitavo modo

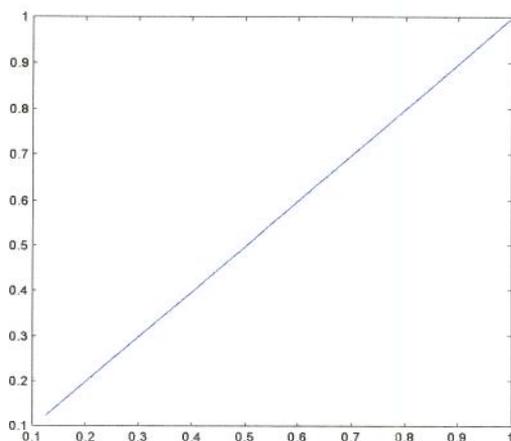


Fig. 6.41 – correlação entre as frequências

Os resultados destas simulações numéricas comprovam a eficácia do método proposto na identificação dos parâmetros de sistemas cujos sinais são perturbados com pequenas taxas de ruído. Para estes sistemas, o método de identificação regressivo ERABACK possui a característica de separar corretamente os pólos do sistema e os computacionais. Deve-se destacar que o método de identificação proposto é extremamente sensível a percentagem de ruído presente nos sinais, como pode ser verificado no exemplo anterior.

6.2 Resultados Experimentais

6.2.1 Método dos Elementos Finitos

O método dos elementos finitos foi utilizado na análise do tubo de sucção de óleo

com o objetivo de fornecer subsídios adicionais, tais como as frequências naturais e os modos de vibrar, os quais foram comparados com os resultados obtidos na análise experimental no domínio da frequência e no domínio do tempo através do método proposto.

A determinação das propriedades modais do tubo de sucção de óleo foram realizadas através dos softwares **MSC - NASTRAN**, usado na solução do modelo e do **I-DEAS** utilizado nas etapas de pré e pós processamento.

O modelo do tubo de sucção de óleo foi discretizado espacialmente com as seguintes características :

- 1025 elementos do tipo casca
- 1076 nós
- 6456 graus de liberdade

Restringiu-se todos os graus de liberdade dos nós nas regiões de fixação da flange do tubo de sucção com a bomba de óleo e da haste do suporte com o mancal. A figura 6.42 mostra a discretização espacial do modelo do tubo de sucção de óleo considerada na análise.

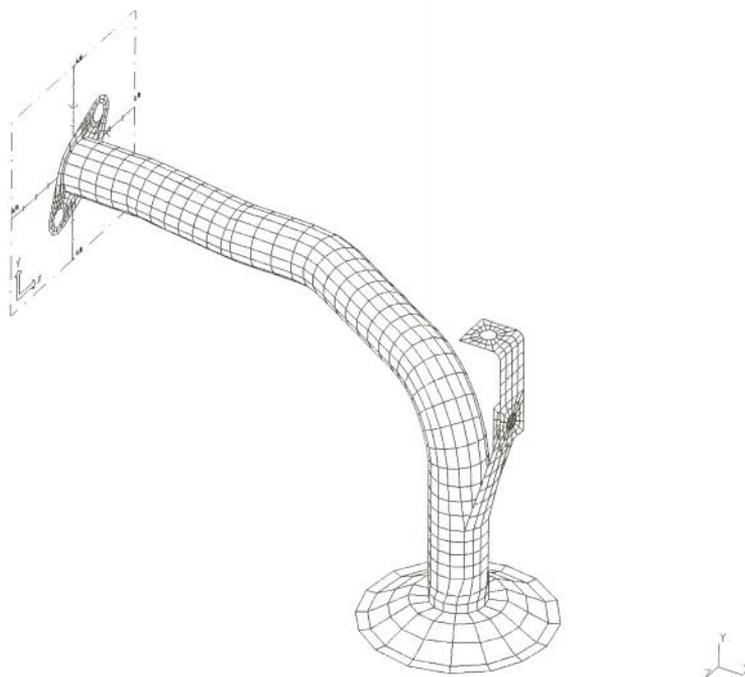


Figura 6.42 – Discretização espacial da estrutura analisada

Deve-se ressaltar que as frequências naturais amortecidas e os modos de vibrar considerados nesta análise correspondem aos modos de *viga* da estrutura sob estudo. Os modos de *casca* foram desconsiderados, pois não fazem parte do escopo desta análise.

Os resultados obtidos pelo método dos elementos finitos foram comparados com os resultados provenientes das investigações experimentais realizadas no domínio da frequência e no domínio do tempo através do método proposto.

6.2.2 Análise no Domínio da Frequência

Inicialmente o protótipo foi discretizado espacialmente conforme indicado na figura 6.43, para se realizar as medições e a representação esquemática do movimento dinâmico desta estrutura.

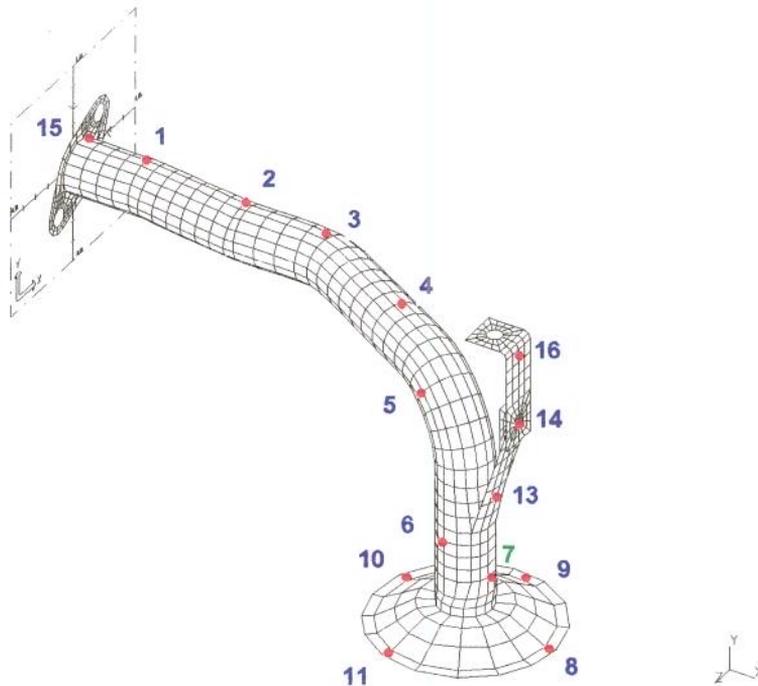


Fig. 6.43 – Discretização espacial dos pontos de excitação e resposta do protótipo

O tubo de sucção de óleo foi representado por uma linha única correspondente a sua linha de centro. Desta forma as medições realizadas nas diferentes direções ao longo do

perímetro de uma seção transversal, são consideradas como medições realizadas no centro desta seção. Esta representação também foi adotada para a análise no domínio do tempo.

As diversas funções resposta em frequência de transferência foram determinadas fixando-se o acelerômetro no ponto 7 na direção x , variando-se apenas a posição das coordenadas do ponto de aplicação da excitação. A seleção do ponto 7x para posicionar o acelerômetro deveu-se à facilidade de fixação deste elemento à base da haste de fixação do tubo de sucção no mancal.

A seleção da faixa de análise foi estabelecida conforme os critérios mencionados anteriormente no Capítulo 5.

6.2.2.1 Análise da Estrutura de Suporte

Preliminarmente foi realizado o teste da estrutura do suporte do conjunto, com o objetivo de se verificar as suas frequências naturais.

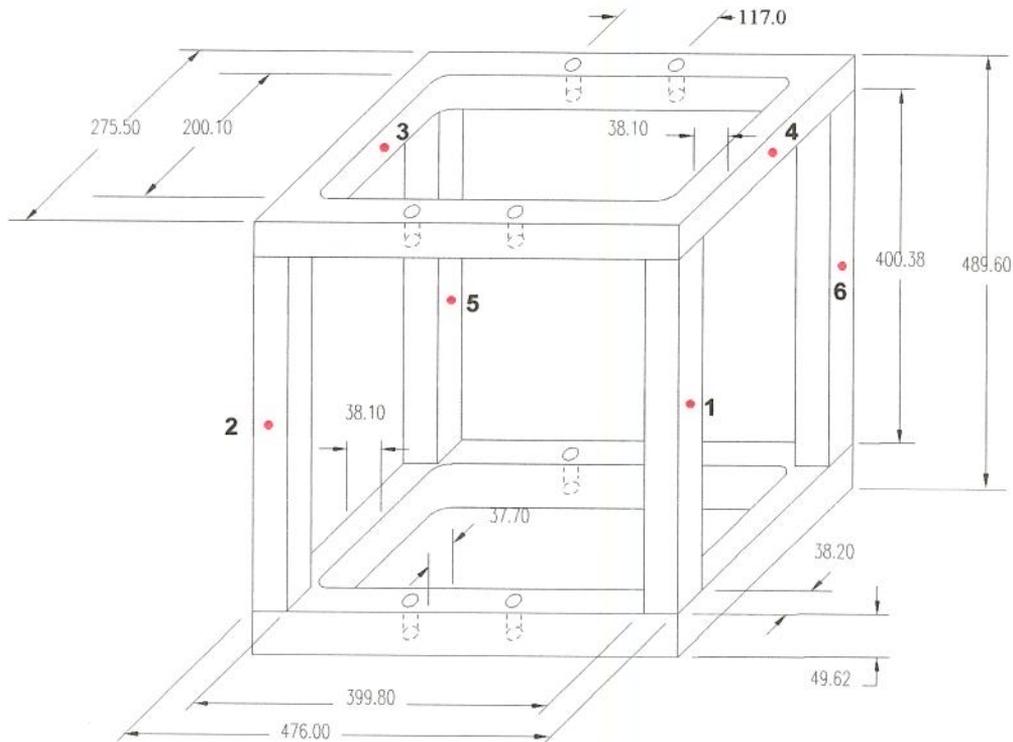


Figura 6.44 – Estrutura do suporte

A estrutura foi colocada sobre uma mesa inercial, onde foram determinadas as funções de transferência entre os pontos 1-2, 1-3, 1-4, 1-5 e 1-6 indicados na figura 6.44. Os resultados desta investigação experimental indicam que as seguintes frequências naturais pertencem ao suporte :

	Frequências em Hz
ω_{1S}	92,5
ω_{2S}	217,5
ω_{3S}	365,0
ω_{4S}	487,5
ω_{5S}	637,5
ω_{6S}	890,0
ω_{7S}	1.845,0

Tabela 6.1 – Frequências naturais do suporte

Estas frequências são consideradas apenas como indicativos dos possíveis efeitos registrados no tubo de sucção de óleo em função das vibrações da estrutura do suporte.

6.2.2.2 Análise Livre - Livre do Tubo de Sucção

O tubo de sucção foi fixado ao suporte através de tiras flexíveis de nylon e foram realizados vários testes de excitação e resposta com o propósito de verificar suas frequências naturais de vibração. As tiras flexíveis de nylon simulam a condição de vibração livre, uma vez que a rigidez destas tiras é extremamente menor que a rigidez do tubo de sucção.

Os resultados deste ensaio experimental forneceu os seguintes valores, indicados na tabela 6.2,

	Frequência em Hz
ω_{1TL}	155,0
ω_{2TL}	320,0
ω_{3TL}	725,0
ω_{4TL}	1.150,0
ω_{5TL}	1.270,0
ω_{6TL}	1.500,0
ω_{7TL}	1.780,0

Tabela 6.2 – Frequências naturais livre–livre do tubo de sucção

que apresentam resposta em frequência de maior amplitude e constitui um indicativo para a realização das análises dos modos de vibração.

6.2.2.3 Análise do Tubo de Sucção Fixo ao Suporte

O tubo de sucção foi excitado 8 vezes em todas as direções em cada um dos 21 pontos indicados na figura 6.4, tendo-se mantido fixo no ponto 7 e na direção x o transdutor de aceleração. Para cada ponto e direção considerados, foram adquiridas 2.048 amostras no tempo. Em seguida realizou-se uma *média espectral* no domínio da frequência das 8 aquisições obtidas no ensaio com a finalidade de minimizar o efeito do ruído nos sinais adquiridos.

As frequências naturais amortecidas, obtidas a partir do ensaio experimental, que apresentam maior amplitude de resposta e também presentes na maioria das respostas

adquiridas são mostradas na tabela 6.3.

	Frequência em Hz
ω_{1T}	150
ω_{2T}	170
ω_{3T}	305
ω_{4T}	425
ω_{5T}	530
ω_{6T}	690
ω_{7T}	1.160

Tabela 6.3 – Frequências naturais do tubo de sucção fixo ao suporte

A partir dos resultados apresentados nas tabelas 6.2 e 6.3 verificou-se que os valores das frequências naturais, obtidas através destas duas abordagens experimentais, são muito próximos. Em função desta característica decidiu-se realizar a análise dos modos de vibração apenas para as frequências da Tabela 6.3.

Para cada função resposta em frequência foi analisada a função coerência, que indicou sempre uma excelente qualidade dos sinais medidos.

6.2.2.4 Determinação dos Modos de Vibrar

Os modos de vibrar do tubo de sucção de óleo foram estimados através dos valores de amplitude e fase de suas respectivas funções de transferência.

Para cada frequência natural de vibração foram considerados os valores de amplitude e fase da função de transferência dos diversos pontos e direções de aplicação da

excitação. Os valores do ângulo de fase adotados foram calculados imediatamente após a ressonância e estabilizados em 0 ou 180 graus. Os ângulos de fase, após a ressonância, que não possuíam nitidamente estes valores foram aproximados, conforme o caso, para 0 ou 180 graus. Este procedimento foi adotado com o objetivo de aproximar os modos de vibração dos modos reais, permitindo desta forma, a sua representação espacial de maneira convencional.

As amplitudes da função de transferência para cada modo de vibrar foram escalonadas pelo inverso do quadrado das respectivas frequências de ressonância. Este procedimento foi adotado, pois os sinais de movimento provenientes do sistema referem-se à *aceleração*, que naturalmente amplifica a magnitude da função de transferência em cada frequência natural, ou seja, tomando-se a expressão da função resposta ao impulso unitário (2.31) e derivando-a duas vezes em relação ao tempo, tem-se que:

$$a(t) = \frac{d^2}{dt^2} [h_{ij}(t)] = \sum_{r=1}^n \left(\lambda_r^2 r_{ij} e^{\lambda_r t} + \lambda_r^{*2} r_{ij}^* e^{\lambda_r^* t} \right) \quad (6.1)$$

Aplicando-se a transformada de Fourier à expressão (6.1) obtém-se a expressão para a inércia no domínio da frequência:

$$A(\omega) = \sum_{r=1}^n \left[\frac{\lambda_r^2 r_{ij}}{s - \lambda_r} + \frac{\lambda_r^{*2} r_{ij}^*}{s - \lambda_r^*} \right] \quad (6.2)$$

A equação (6.2) sugere que os resíduos calculados a partir dos dados experimentais de inércia devem ser divididos por λ_r^2 para cada modo identificado. Esta normalização conduz aos valores exatos dos resíduos das FRF de receptância do sistema sob estudo.

As amplitudes do movimento de vibração das coordenadas geométricas da estrutura consideradas para cada modo de vibrar foram traçadas utilizando-se o software **AutoCad**. Os modos de vibrar do tubo de sucção de óleo, associados a cada frequência sob estudo, são apresentados através uma vista em perspectiva dos mesmos.

6.2.3 Comparação dos Resultados Experimentais

A tabela abaixo apresenta a comparação dos pólos identificados pelo método proposto com os resultados das frequências naturais amortecidas do protótipo fornecidas pelos outros métodos,

Frequência (Hz)	Elementos Finitos	Experimental dom. freq.	ERABACK MIMO
ω_{1T}	148,65	150,00	2,03 + 150,58i
ω_{2T}	164,87	170,00	2,69 + 169,86i
ω_{3T}	264,86	305,00	0,98 + 308,38i
ω_{4T}	---	425,00	2,61 + 425,26i
ω_{5T}	---	530,00	5,26 + 527,67i
ω_{6T}	651,84	690,00	8,55 + 690,06i
ω_{7T}	---	1.160,00	6,13 + 1.159,3i

Tabela 6.4 – Comparação das frequências naturais identificadas com outros métodos

A seguir observa-se uma vista em perspectiva para cada modo de vibrar do tubo de sucção de óleo comparando-se os resultados obtidos pelos procedimentos descritos anteriormente.

Analisando-se os modos de vibrar, obtidos experimentalmente, verificou-se que para um determinado nível de excitação do tubo de sucção de óleo o modo de vibrar correspondente à frequência de 170 Hz é o que apresenta as maiores amplitudes de vibração e se constitui no modo dinâmico mais flexível da estrutura. O segunda maior amplitude de vibração natural da estrutura corresponde à frequência de 150 Hz. As figuras 6.45 a 6.50 mostram as geometrias deformada e não deformada correspondentes ao primeiro e segundo modos de vibrar, respectivamente.

modo associado à frequência de 150.0 Hz

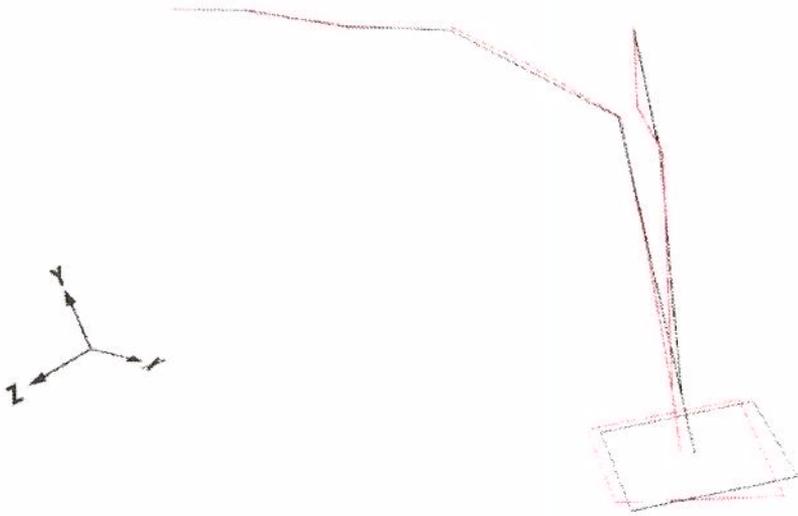


Figura 6.45 - perspectiva do primeiro modo identificado pelo método proposto

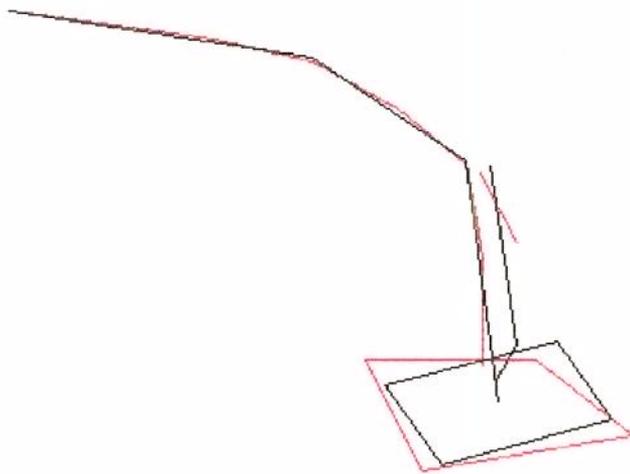


Figura 6.46 - perspectiva do primeiro modo obtido experimentalmente

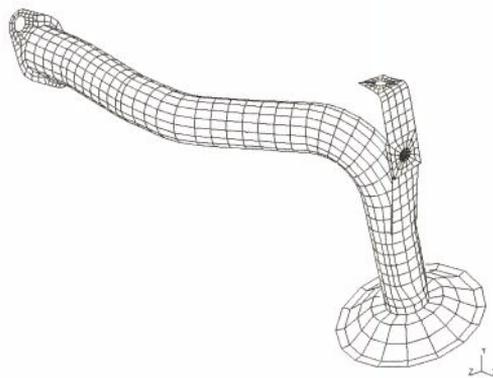


Figura 6.47 - perspectiva do primeiro modo obtido pelo método dos Elementos Finitos

modo associado à frequência de 170.0 Hz

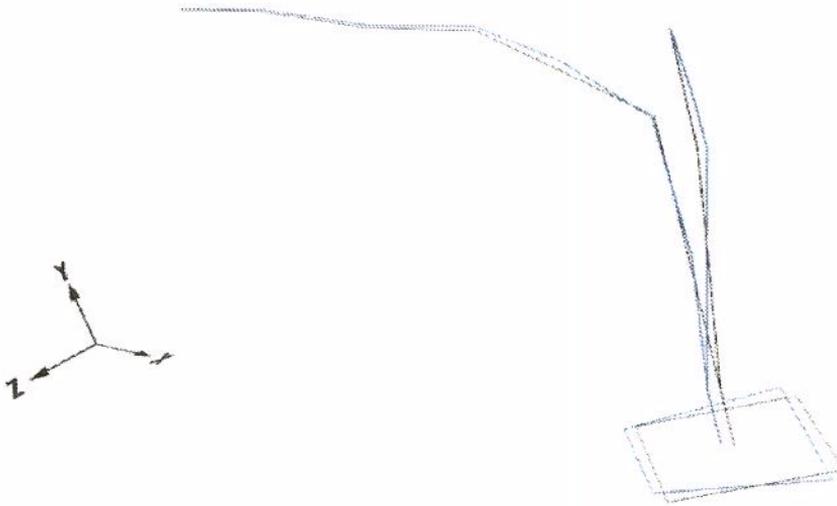


Figura 6.48 - perspectiva do segundo modo identificado pelo método proposto

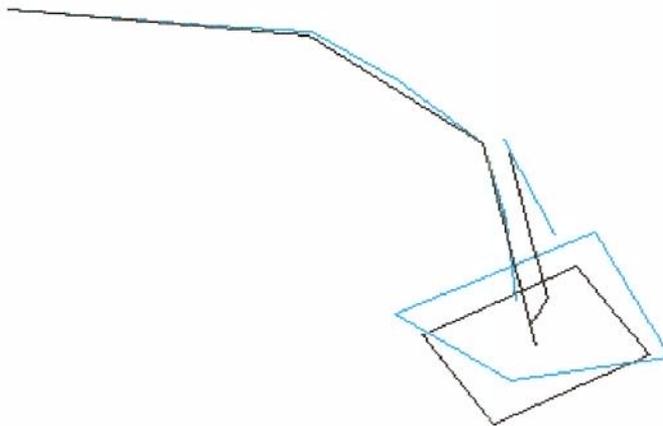


Figura 6.49 - perspectiva do segundo modo obtido experimentalmente

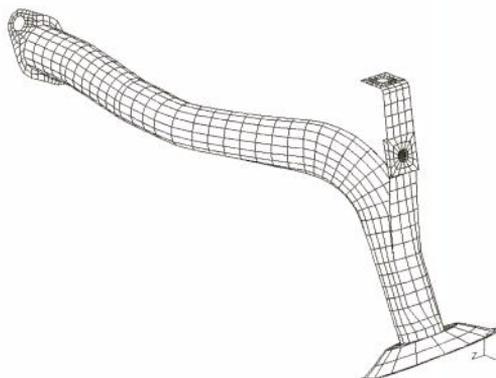


Figura 6.50 - perspectiva do segundo modo obtido pelo método dos Elementos Finitos

O tubo de sucção possui ainda um aumento em sua flexibilidade dinâmica, embora de magnitude inferior à dos outros dois modos, em torno da frequência de 305 Hz. Por esta razão optou-se comparar somente os resultados obtidos para os dois primeiros modos entre os métodos abordados.

Pode-se concluir também que a maioria dos modos naturais de vibração do tubo de sucção de óleo são globais, isto é, apresentaram significativa influência das junções com a bomba de óleo e da haste com o mancal.

modo associado à frequência de 305.0 Hz

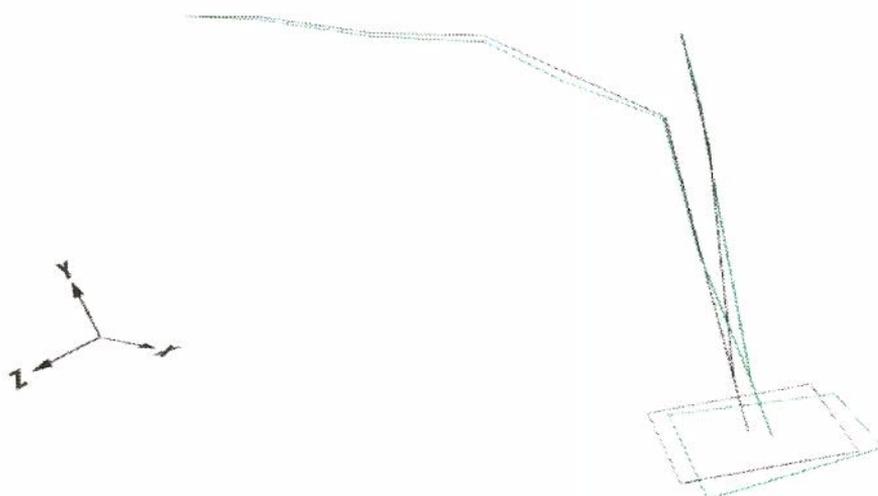


Figura 6.51 - perspectiva do terceiro modo identificado pelo método proposto

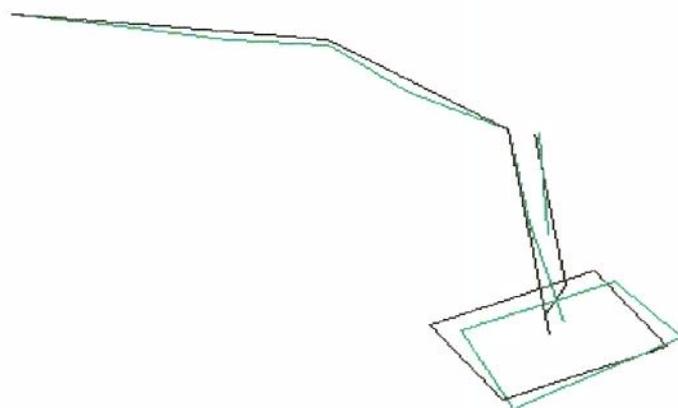


Figura 6.52 - perspectiva do terceiro modo obtido experimentalmente

modo associado à frequência de 425.0 Hz

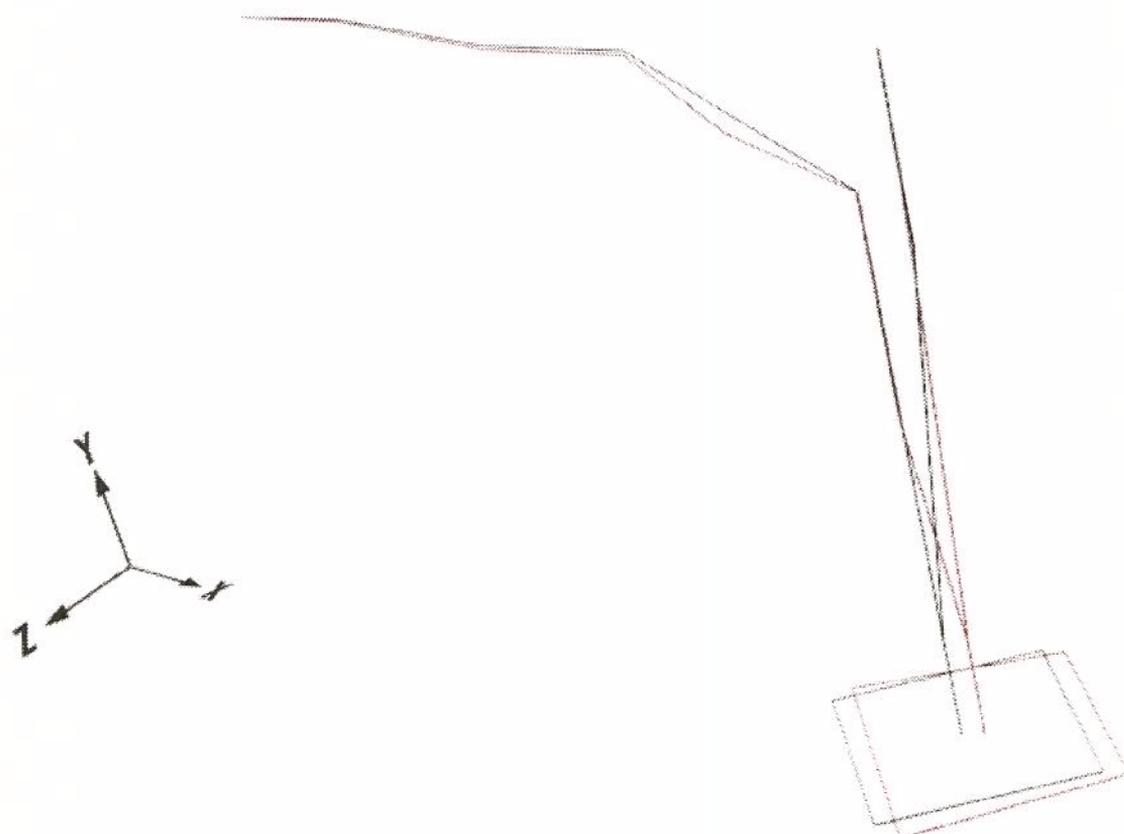


Figura 6.53 - perspectiva do quarto modo identificado pelo método proposto

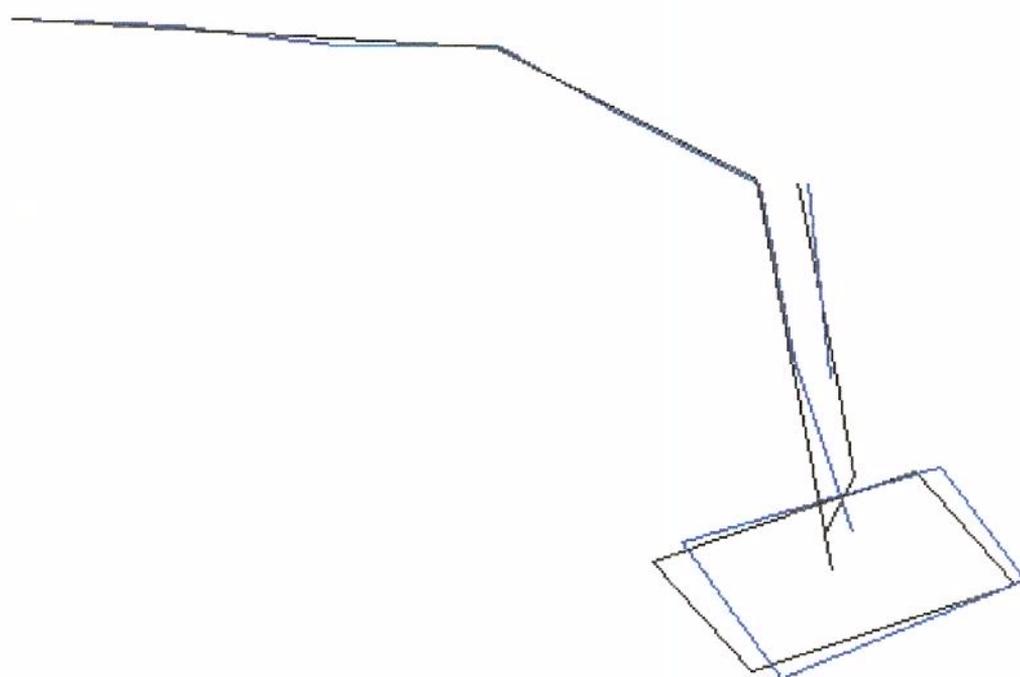


Figura 6.54 - perspectiva do quarto modo obtido experimentalmente

modo associado à frequência de 530.0 Hz

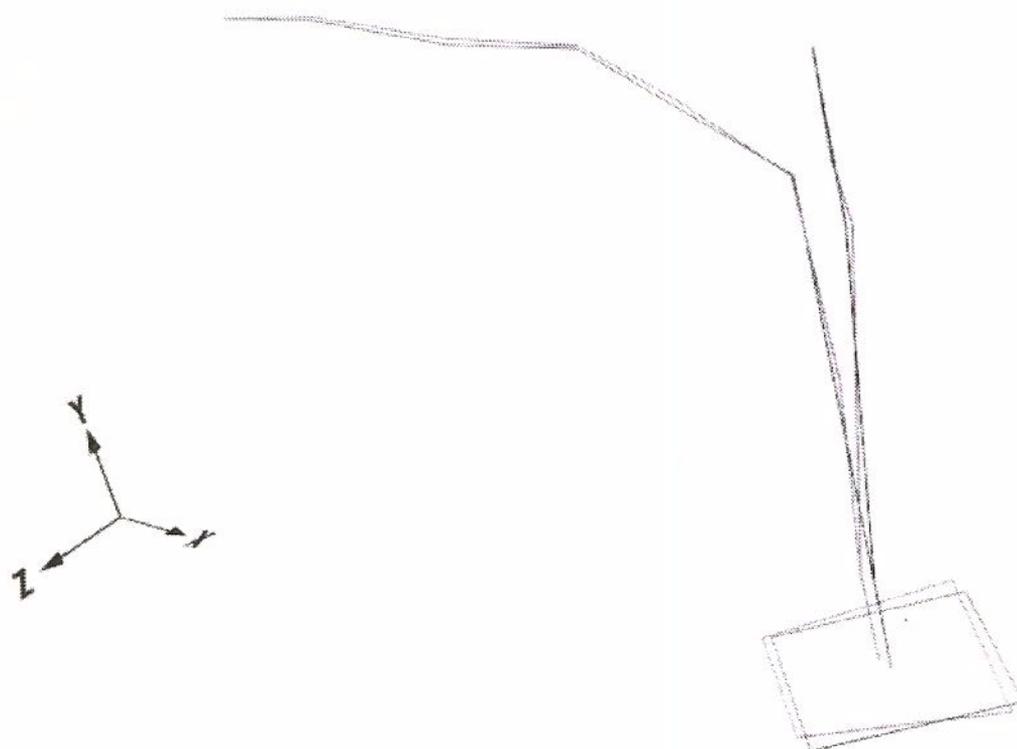


Figura 6.55 - perspectiva do quinto modo identificado pelo método proposto

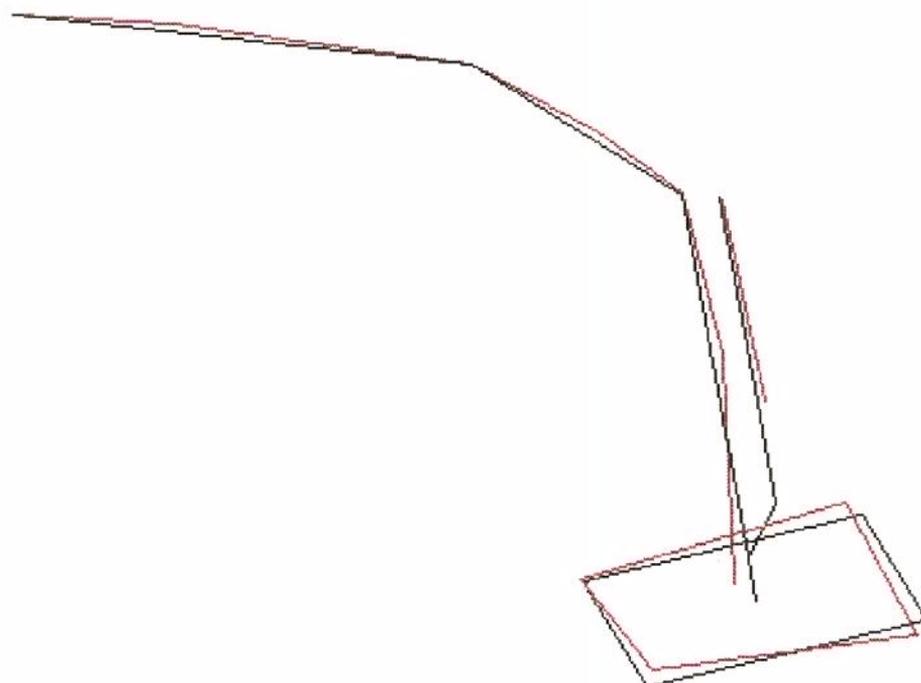


Figura 6.56 - perspectiva do quinto modo obtido experimentalmente

modo associado à frequência de 690.0 Hz

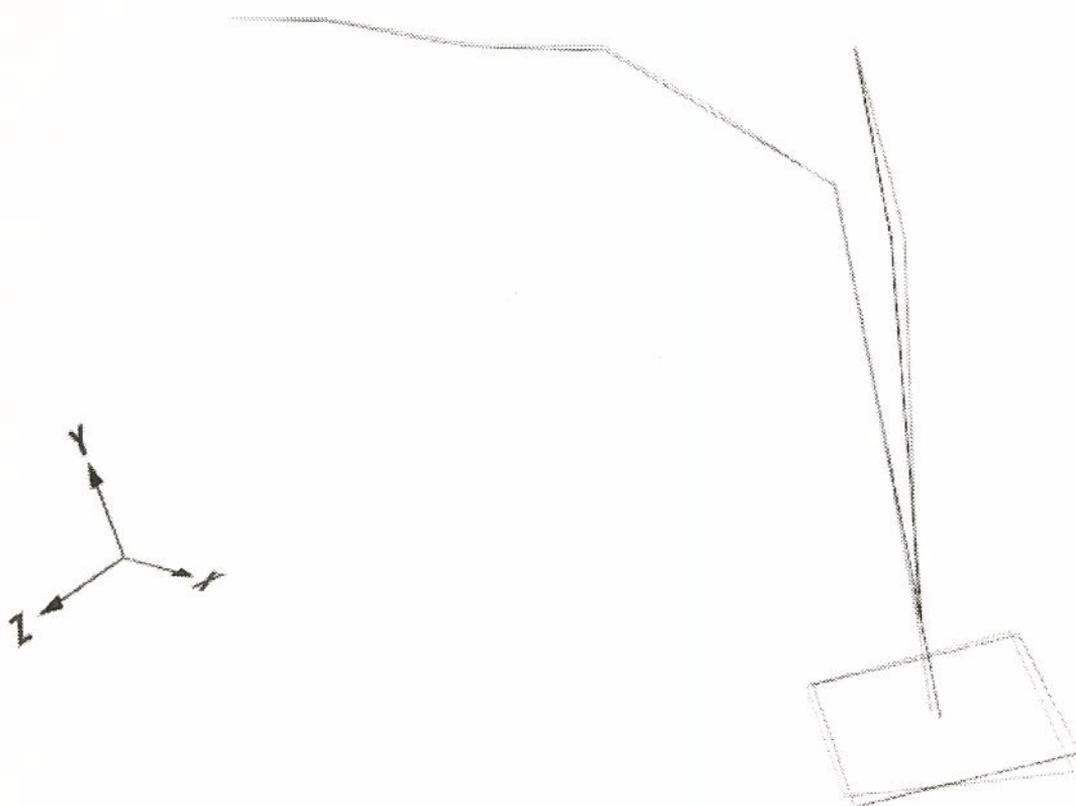


Figura 6.57 - perspectiva do sexto modo identificado pelo método proposto

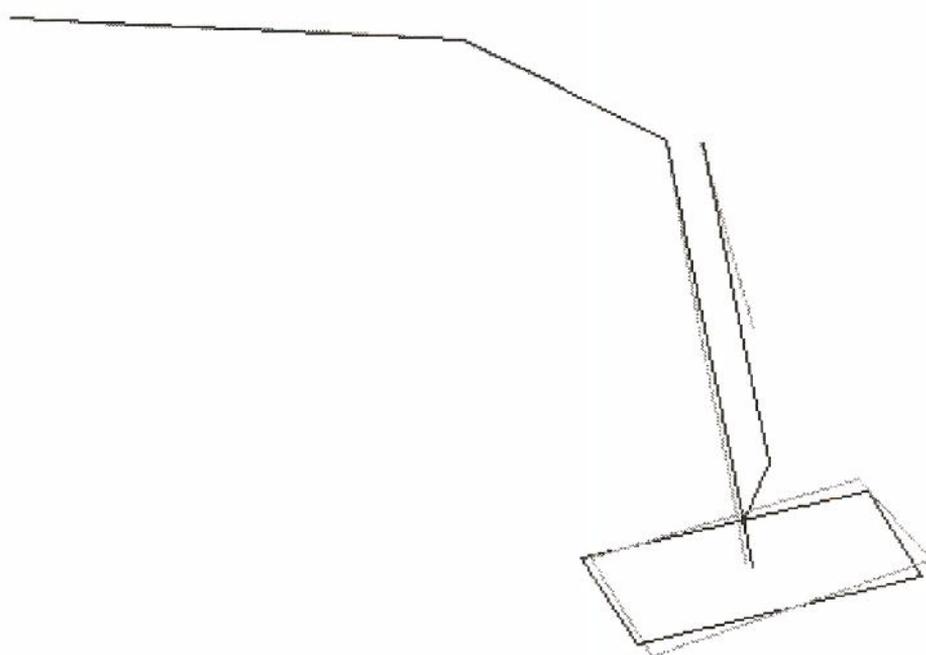


Figura 6.58 - perspectiva do sexto modo obtido experimentalmente

modo associado à frequência de 1160.0 Hz

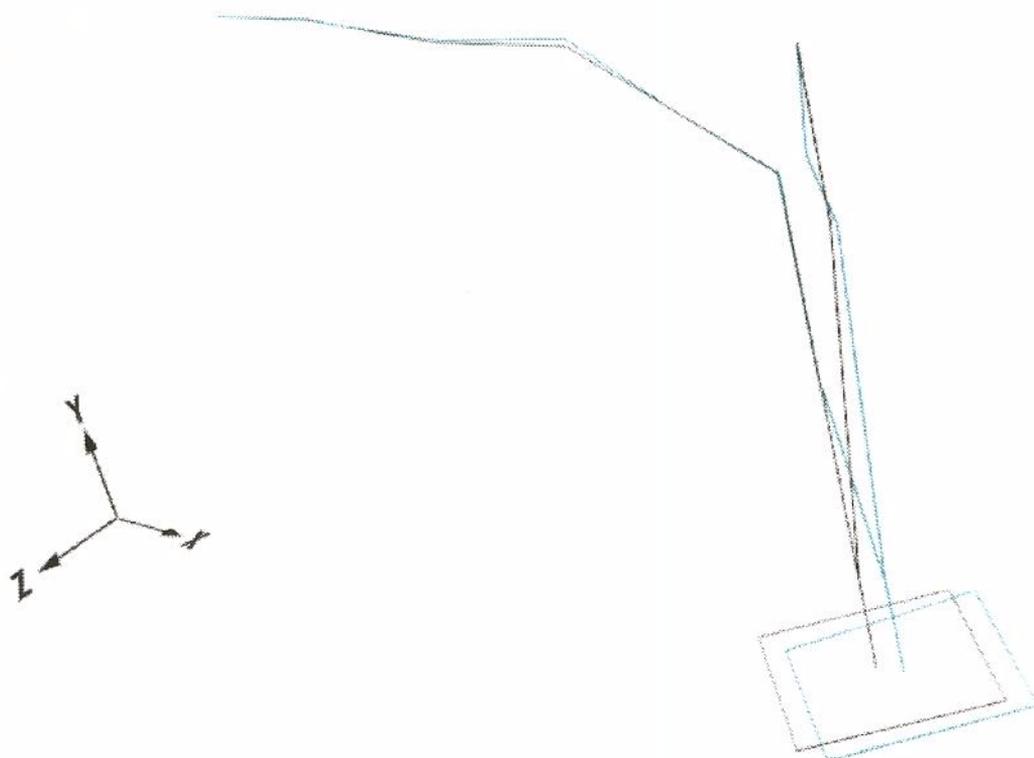


Figura 6.59 - perspectiva do sétimo modo identificado pelo método proposto

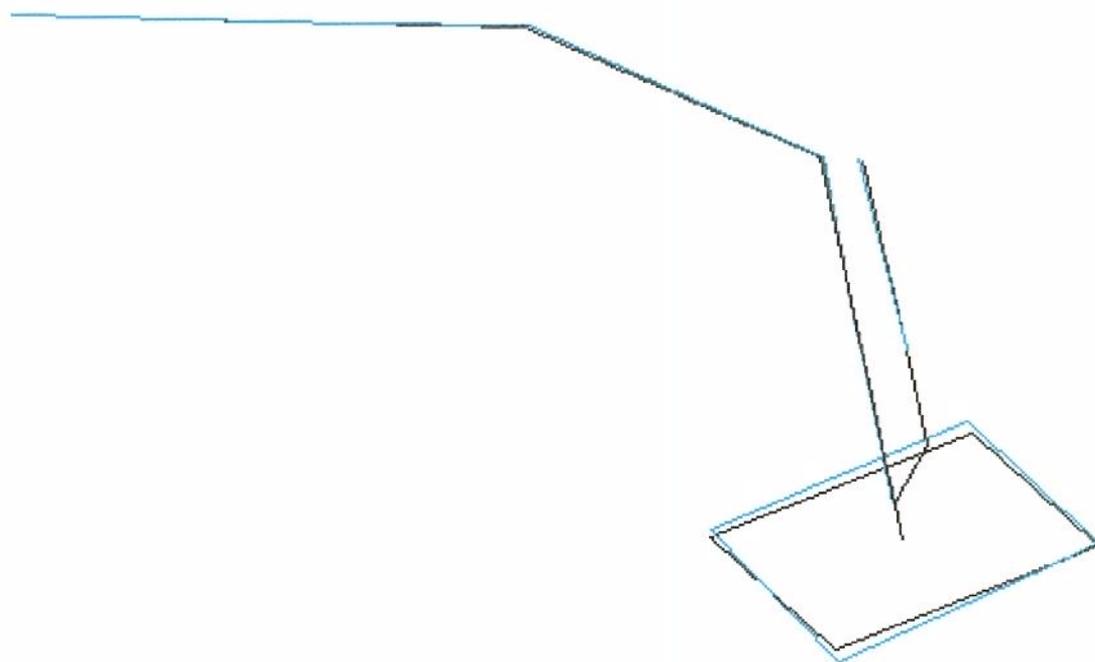


Figura 6.60 - perspectiva do sétimo modo obtido experimentalmente

Capítulo 7

7.1 Conclusões Gerais

A partir dos resultados obtidos com a aplicação do método de identificação de parâmetros modais proposto pode-se concluir que o algoritmo apresentou resultados satisfatórios. Nas simulações numéricas, procurou-se analisar sistemas com características semelhantes aos sistemas físicos reais, cujos sinais originais foram perturbados com diversos níveis de ruídos aleatórios. Os resultados do processo de identificação, para todos estes sistemas, foram consistentes e comprovam a eficiência e a boa performance do algoritmo quando aplicado a sistemas cujos sinais de excitação e resposta possuem baixos níveis de ruído.

Conforme os resultados apresentados para a identificação do tubo de sucção, o programa MIMOG também se mostrou eficiente. A partir das tabelas de resultados parciais e da tabela 6.4 é possível concluir que estes são consistentes e demonstram o bom desempenho do método. O algoritmo implementado mostrou-se capaz de fornecer resultados de análise comparáveis aos obtidos através dos ensaios experimentais.

Os resultados provenientes dos ensaios experimentais mostram a influência das junções com a bomba de óleo e da haste com o mancal do suporte nas frequências naturais amortecidas e nos modos de vibrar. Esta influência pode ser verificada através das tabelas 6.2 e 6.3 e também das figuras 6.45 a 6.60.

Foram realizados outros ensaios experimentais com um excitador eletromagnético cujos resultados (não apresentados aqui) comprovam de forma precisa os resultados obtidos nos ensaios experimentais nos domínios da frequência e do tempo.

7.2 Sugestões para Futuros Desenvolvimentos

As características dos conceitos introduzidos no desenvolvimento deste trabalho permitem sugerir algumas idéias e sugestões que são registradas a seguir para futuros desenvolvimentos.

i - Os resultados apresentados demonstram a importância de se calcular as aproximações da pseudo inversa das matrizes Hankel, da melhor maneira possível. Neste trabalho utilizou-se o método da fatorização de Gauss com pivotamento completo para obter estas aproximações. Sugere-se calcular tais aproximações através de outras técnicas de fatorização de matrizes tal como QR (Bjork [10] e Golub [32]).

ii - O método implementado neste trabalho processa sinais referentes a uma excitação e múltiplas respostas (SIMO). Sugere-se transformá-lo num método global de identificação de maneira que se possa aplicá-lo na utilização de técnicas de identificação MIMO.

iii - Desenvolvimento de uma interface entre o sistema de aquisição de dados e programa de identificação modal, de tal forma que a transferência dos dados seja automática para a etapa de processamento.

iv - Desenvolvimento de rotinas gráficas, no ambiente windows, para plotar a geometria deformada e não deformada correspondentes aos modos de vibrar da estrutura sob estudo, bem como permitir analisar todos os parâmetros envolvidos na análise com maior portabilidade.

Referências Bibliográficas

- [1] ALLEMANG, R. J. *et al.*, *Multiple Input Estimation of Frequency Response Function*, ASME Paper 83 - DET, 1983.
- [2] ALLEMANG, R. J. *et al.*, *Dual Input Estimation of Frequency Response Functions for Experimental Modal Analysis of Automotive Structures*, SAE Paper 820193
- [3] ALLEMANG, R. J. e BROWN, D. L., *Experimental Analysis and Dynamic Component Synthesis, v. III, Modal Parameter Estimation*, Final Report, Nov. - Jan., 1987.
- [4] ANSYS USER'S MANUAL, *Guide to the Ansys User's Manual*, ver. 5.0, Swanson Analysis Systems, Inc., February 15, 1.994.
- [5] BAUMEISTER J., *Stable Solution of Inverse Problems*, Edited by Ger. Fischer, Braunschweig, 1989.
- [6] BAZÁN, F. S. V., *Desenvolvimento de Ferramentas de Identificação Paramétrica de Sistemas Mecânicos no Domínio do Tempo*, Campinas, 1993, Tese (Doutorado) - Faculdade de Engenharia Mecânica, UNICAMP.
- [7] BAZÁN, F. S. V. e KURKA P. R. G., *TSVD and Inverse Problem of Parameters Identification in Mechanical Structures in the Time Domain*, DINAME 93, Santo Amaro da Imperatriz, Santa Catarina, Brazil, 1993.
- [8] BENDAT, J. S. e PIERSOL, A. G., *Engineering Applications of Correlation and Spectral Analysis*, John Wiley & Sons, 1980.

- [9] BERMAN, A. , *System Identification of Structural Dynamic Models Theoretical and Practical Bounds*, AIAA SDM Conference, Paper 84-0929, pp 123-128, 1984.
- [10] BJORK, A., *Least Squares Problems*, Handbook of Numerical Analysis, v. 1: Solutions of Equations in R^n , Edited by P. G. Ciarlet and J. L. Lions Elsevier - North Holland, 1987.
- [11] BLARICUM, M. L. e MITRA, R., *Problems and Solutions Associated with Prony's Method for Processing Transient Data*, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, v. 26, n.1, 1978.
- [12] BOX, G. E. P. e JENKINS, G. M., *Time Series Analysis Forecasting and Control*, Horden-Day Inc., San Francisco, 1971.
- [13] BRAUN, S., *Mechanical Signature Analysis , Theory and Applications*, Academic Press Inc., London, 1986.
- [14] BRAUN, S. e RAM, Y., *Time and Frequency Identification Methods in Over-Determined Systems*, Mechanical Systems and Signal Processing, v. 1, n. 3, pp 245 - 257, 1987.
- [15] BROWN, D. L. *et al.*, *Parameter Estimation Techniques for Modal Analysis*, S.A.E. paper 790221, v. 88, pp 828 - 846, 1979.
- [16] BROWN, D. L., *Modal Analysis - Past, Present and Future*, Proceedings of IMAC I pt. 1, pp ix - xiii, 1982.
- [17] CAWLEY, P., *The Reduction of Bias Error in Transfer Functions Estimates Using FFT Based Analysers*, Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, v.106, n. 1, pp 29 - 5, 1984.
- [18] CHATFIELD, C., *The Analysis of Time Series, Theory and Practice*, Chapman and Hall, London, 1975.
- [19] CHO, D. M. *at al.*, *A New Time Domain Multiply Input Modal Analysis Method*, Journal of Engineering for Industry, v. 109, pp 377 - 384, November, 1987.

- [20] COLE, H. A. JR., *On-Line Failure Detection and Damping Measurement of Aerospace Structures by Random Decrement Signatures*, NASA CR-2205, mars, 1973.
- [21] COOLEY, J. W. e TUKEY, J. W., *An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series*, Mathematics of Computation, v. 19, n. 90, pp 297 - 301, April, 1965.
- [22] COOPER, J. E., *The use of Backward Models for Structural Parameter Identification*, Mechanical Systems and Signal Processing, v. 6, n. 3, pp 217 - 228, 1992.
- [23] CRAIG JR., R. R., *Structural Dynamics. An Introduction to Computers Methods*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1985.
- [24] DALLY, J. W. *et al.*, *Instrumentation for Engineering Measurements*, John Wiley & Sons, 1984.
- [25] DEBLAUWE, F. *et al.*, *The Polyreference Time Domain Technique*, Proceedings of IMAC, v. II, pp 832 - 845, 1987.
- [26] EVANS, A. G. e FISCHER, R., *Optimal Least Squares Time-Domain Synthesis of Recursive Digital Filters*, IEEE Trans Audio Electroacoustic, v. AU - 21, pp 61 - 65, Feb., 1973.
- [27] EWINS, D. J., *Modal Testing : Theory and Practice*, John Wiley & Sons Inc., London, 1984.
- [28] EWINS, D. J., *Use and Abuses of Modal Testing*, Proceedings of IMAC III, v. 1, parte 1, pp xiii - xvii, 1985.
- [29] EYKHOFF, P., *System Identification, Parameter and State Estimation*, John Wiley & Sons, London, 1974.
- [30] FRANKLIN, G. F. e POWELL, J.D., *Digital Control of Dynamic Systems*, Addison-Wesley Publishing Company, 1980.
- [31] GOLUB, G. H. e VAN LOAN, C. F., *Matrix Computations*, John Hopkins Press, 1989.

- [32] GUERSCH, W. *et al.*, *Maximum Likelihood Estimation of Structural Parameters from Random Vibration Data*, Journal Sound Vibration v.31, n. 3, pp 295 - 308, 1973.
- [33] GUERSCH, W. e LUO, S., *Discret Time Series Synthesis of Randomly Excited Structural System Responses*, Journal Acoustic Soc. Am., v. 51, n.1, pp 402 - 408, 1972.
- [34] GROEN, P. e MOOR, B. , *The Fit of Sum of Exponentials to Noisy Data*, Journal of Computational and Applied Mathematics, v. 20, pp 175 - 187, 1987, Elsevier Science Publishers B. V. (North Holland).
- [35] GROETSH, C. W., *The of Tikhonov Regularization for The Fredholm Equations of the First Kind*, Pitman Publishing, Boston, 1984.
- [36] HANSEN, P. C., *The Truncated SVD Method as a Regularization*, BIT v. 27, pp 534 - 535, 1987.
- [37] HANSEN, P. C., *Numerical Tools for Analysis and Solution of Fredholm Integral Equations of the First Kind*, Inverse Problems, v. 8, 1992, Printed in the UK.
- [38] HOLLKAMP, J. J. e BATILL, S. M., *Automated Parameter Identification and Order Reduction for Discrete Time Series*, AIAA Journal, .v. 29, n. 1, pp 96 - 103, 1991.
- [39] IBRAHIM, S. R. e MIKULCIK, E. C., *A Time Domain Modal Vibration Test Technique*, The Shock and Vibration Bulletin, v. 43, pp 21 - 37, 1973.
- [40] IBRAHIM, S. R. e MIKULCIK, E. C., *The Experimental Determination of Vibration Parameter from Time Responses*, The Shock and Vibration Bulletin, v. 46, pp 187 - 195, 1976.
- [41] IBRAHIM, S. R. e MIKULCIK, E. C., *A Method for the Direct Identification of Vibration Parameters from the Free Response*, The Shock and Vibration Bulletin, v. 47, n. 4, pp 183 - 198, 1977.
- [42] IBRAHIM, S. R., *Double Least Squares Approach for use in Structural Modal Identification*, AIAA Journal, v. 24, n. 3, pp 499 - 503, 1986.

- [43] INMAN, D. J., *Vibration with Control Measurements and Stability*, Prentice Hall, Englewood Cliffs NJ, 1989.
- [44] JUANG, J. J. e PAPPA, R., *An Eigensystem Realization Algorithm for Modal Parameter Identification and Model Reduction*, Journal of Guidance Control and Dynamics, v. 8, n. 5, pp 620-627, sep-oct, 1985.
- [45] JUANG, J. J., *Mathematical Correlation of Modal Parameter Identification Methods Via Systems Realization Theory*, Journal of Modal analysis, pp 1 - 8, Jan., 1987.
- [46] KAILATH, T., *Linear Systems*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs NJ, 1980.
- [47] KENNEDY, C. C. e PANCU, C. D., *Use of Vectors in Vibrations Measurement and Analysis*, Journal of Aeronautical Sciences, v. 14, n. 11, pp 603 - 625, 1947.
- [48] KUMARESAN, R., *On the Zeros of the Linear Prediction Error Filter for Deterministic Signals*, IEEE Trans. Acoust. Speech and Signal Processing ASSP, v. 31, pp 217 - 220, 1984.
- [49] KURKA, P. R. G. e COWLEY, A., *Modal Parameters Investigation from the Time Impulse Response of Complex Dynamic Systems*, Mechanical Systems and Signal Processing, v. 2, n. 1, pp 49 - 58, 1988.
- [50] KURKA, P. R. G., *Investigation of Dynamic Identification Techniques and their Applications*, 1989, England, PhD Thesis, University of Manchester Institute of Science and Technology, Investigation of Dynamic Identification Techniques and their Applications.
- [51] KURKA, P. R. G., *Modal Parameter Identification in the Time Domain From a Random Force*, Mechanical Systems and Signal Processing, v. 4, n. 5, pp 393 - 404, 1990.
- [52] KURKA, P. R. G., *An Algorithm for Model Order Determination in Mechanical Systems*, Proceedings of the IX International Modal Analysis Conference 1991.

- [53] KURKA, P. R. G. e BAZÁN, F. S. V., *Regularization Techniques in the Time Domain Modal Parameter Identification*, 17h International Seminar on Modal Analysis Catholic University of Leuven, Belgium, pp 221 - 225, sep., 1992.
- [54] KURKA, P. R. G. e BAZÁN, F. S. V., *A Prony-Moments Method for Parameter Identification in Overdetermined Systems*, Mechanical Systems and Signal Processing, v. 8, n. 2, pp 145 - 158, 1994.
- [55] KURKA, P. R. G. e GOMES, A. E. , *Gauss Factorization for Least Squares Solution in Over-Determined Dynamical System identification*, VI Symposium on Dynamic Problems of Mechanics - DINAME 95, outubro, 1995.
- [56] MARPLE JR., S. L., *Digital Spectral Analysis with Applications*, Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice Hall Inc., 1987.
- [57] McDONOUGH e HUGGINS, W. H., *Best Least Squares Representation of Signals for Exponentials*, IEEE Trans. Automatic Control, v. AC-13, pp 408 - 412, august, 1968.
- [58] MCGUILLEM, C. D. e COOPER, G. R., *Continuous and Discrete Signal and System Analysis*, Saunders College Publishing, a division of Holt, Rinehart and Winston Inc., 1991.
- [59] MAKHOUL, J., *Linear Prediction - a Tutorial Review*, Proceedings of the IEEE, v. 63, n. 4, 1975, pp 213 - 223.
- [60] MAKRIDAKIS, S. e WHEELWRIGHT, S. C., *Forecasting for Management*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1976.
- [61] MAKRIDAKIS, S. e WHEELWRIGHT, S. C., *Interactive Forecasting Univariate and Multivariate Methods*, Horden-Day Inc., San Francisco, 1978.
- [62] MAKRIDAKIS, S. e WHEELWRIGHT, S. C., *Forecasting Methods and Applications*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1978.
- [63] MICKLEBOROUGH, N. C. e PI, Y. L., *Modal Parameter Identification using Z-Transforms*, Int. Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 28, pp 2307-2321, 1992.

- [64] NATKE, H. G., *The Future of Structural System Analysis*, Proceedings of the 17th International Seminar on Modal Analysis Conference, Part I., Sept., 1992. Katholieke Uneversiteit Leuven, Belgium.
- [65] NEWLAND, D. E., *Mechanical Vibration Analysis and Computation*, Longman Scientific & Technical, 1989.
- [66] NOBEL, B. e DANIEL, J. W., *Applied Linear Algebra*, 3rd Edition Prentice Hall Inc., 1988.
- [67] OPPENHEIM, A. e SCHAFFER, R. W., *Digital Signal Processing*, Prentice Hall Inc., 1964.
- [68] PELED, A. e LIU, B., *Digital Signal Processing-Theory, Design and Implementation*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1976.
- [69] PI, Y. L. e MICKLEBOROUGH, N. C., *Modal Identification of Vibrating Structure in the Time Domain*, Computers & Structures, v. 32, n. 5, pp 1105 - 1115, 1989.
- [70] PIOMBO, B. *at al.*, *New Approach for Large Structures Identification*, 17th International Seminar on Modal Analysis Catholic University of Leuven, Belgium, pp 721-732, sep., 1992.
- [71] PRONY, R., *Essai Experimental et Analytique sur les Lois de la Dilatabilité des Fluides Elastiques et sur Celles de la Force Expansive de la Vapeur de l'Alcool, a Différents Températures*, Journal de l'Ecole Polytechnique, Paris vol. 1 cahier. 2, An. III, pp 24-76, 1795.
- [72] RAMSEY, K. A., *Experimental Modal Analysis, Structural Modifications and FEM Analysis on a Desk-top Computer*, Sound and Vibration, v. 17, n. 2, pp 19-27, 1983.
- [73] RAO, B. D., *Perturbation Analysis of an SVD-Based Linear Prediction Method for Estimating the Frequencies of Multiple Sinusoids*, IEEE Trans. Acoust. Speech and Signal Processing ASSP v. 36, n. 7, pp 1026 - 1035, 1988.

- [74] ROEMER, M. J. e MOOK, D. J., *Mass, Stiffness, and Damping Matrix Identification: An Integrated Approach*, *Transactions of the ASME, Journal of Vibrations of Acoustics*, v. 114, July, 1992.
- [75] STROUD, R. C., *Excitation, Measurement and Analysis Methods for Modal Testing*. *Sound and Vibration*, v. 21, n. 8, pp 12 - 27, 1987.
- [76] TUFTS, D. W. e KUMARESAN, R., *Estimating the Parameters of Exponentially Damped Sinusoids*, *IEEE Trans. Acoust. Speech and Signal Processing ASSP* v. 30, pp 833 - 840, 1981.
- [77] UNBEHAUEN, H. e RAO, G.P., *Identification of Continuous Systems*. North-Holland Systems and Control Series, Elsevier Publishers, v. 10, Amsterdam, 1987.
- [78] VAROTO, P. S., *Análise Modal no Domínio da Frequência : um Método Multi-Modo*, São Carlos, 1991, Tese (Mestrado) - EESC, Universidade de São Paulo.
- [79] VEEN, A. J. VAN DER e SWINDLEHURST, A. L. , *Subspace-Based Signal Analysis Using Singular Value Decomposition*, *Proceedings of the IEEE*, v. 81 n.9, pp 1277 - 1309, September, 1993.
- [80] VEIGA PESSOA, R. M., *Comparação entre Métodos Numéricos para Obtenção da Inversa Generalizada de Moore Penrose de uma Matriz*, Campinas, 1986, Tese (Mestrado) - IMMECC, UNICAMP.
- [81] VOLD, H. *et al.*, *A Multi-Input Modal Estimation Algorithm for Minicomputers*, SAE Paper 820194, v. 10, pp 815 - 821, 1982.
- [82] WALKER, G., *On periodicity in Series of Related Terms*, *Proc. Royal Soc. London*, series A, v. 131, pp 518 - 532, 1931
- [83] WILLIAM, H. P. *et al.*, *Numerical Recipes in C, The Art of Scientific Computing*, Second Edition, Cambridge University Press, 1994.
- [84] WOLD, H., *A Study in the Analysis of Stationary Time Series*, Upsalla : Almqvist and Wiksel, 1972.

- [85] YULE, G. U., *On the Method of Investigating Periodicities in Disturbed Series, with Special Reference to Wolfers's Sunspot Numbers*, Philosophical Trans. Royal Soc. London, series A, v. 226, pp 267 - 298, 1972.
- [86] ZHANG, N. e HAYAMA, S., *Identification of Structural System Parameters from Time Domain Data*, JSME, International, Series III, v. 34, n. 1, 1991.

GAUSS FACTORIZATION FOR LEAST SQUARES SOLUTIONS IN OVER-DETERMINATED DYNAMICAL SYSTEM IDENTIFICATION

Paulo R. G. Kurka e Amaurí E. Gomes - FEM/UNICAMP

Abstract : The paper presents the extension of a Gauss elimination process for finding a least squares solution of linear system of simultaneous equations whose coefficients matrix rank deficient. Such a solution is sought in dynamic system signature analysis where the identification model is know to be of an over - determined nature . the scheme can also be employed to the conditioning of solution of systems of simultaneous linear equations of an ill posed nature.

1 Introduction

The singular value decomposition scheme (SVD) can be successfully employed for computing the least squares solution of a linear system of simulations equations whose coefficients matrix is rank-deficient [3,4]. It can also be used in a truncated version to condition the solution of linear systems of equations of an ill conditioned nature [2,6,7]. Another possible application of the SVD technique is the estimation of the order of over - determined dynamic identification models [2,4].

The SVD technique however is a costly and time consuming operation since it consists of finding two complete sets of eigenvectors for two different symmetric coefficients matrices [8]. A Gauss Elimination based process is proposed here in order to solve in a more direct and simple numerical way, problems that are otherwise solved via SVD approach.

Section 2 of the work presents the basic formulation of the method for computing the last squares solution of a generic $N \times N$ system of linear equations whose coefficients matrix is rank - deficient.

2 Basic formulation of the method

An $N \times N$ systems of simultaneous equations

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{r} \quad (1)$$

is know to have no solution when both \mathbf{A} is of rank $L < M$ and \mathbf{r} is a vector with components in the null space of \mathbf{A} . In this case, a least squares solution $\hat{\mathbf{x}}$ can be sought for equation (1) in such a way that $\| \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{r} \|$ is minimum ($\| \bullet \|$ is the two - norm notation). Minimization of the two - norm expression $\| \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{r} \|$ leads to the condition which must be satisfied, involving \mathbf{A} , $\hat{\mathbf{x}}$ and \mathbf{r} :

$$\mathbf{A}^t \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^t \mathbf{r}, \quad (2)$$

and since \mathbf{A} is rank deficient, it not possible to compute the least squares solution $\hat{\mathbf{x}}$ by means

factorizing process is associated to the determination of the true system's order in a over-determined identification model.

Applying the factorization operator to both sides of equation (2) results in equation (3) where

$$\mathbf{B}' = \mathbf{T} \mathbf{A}' \mathbf{A} \quad (7)$$

$$\mathbf{y}' = \mathbf{T} \mathbf{A}' \mathbf{r} \quad (8)$$

and \mathbf{x} is the same as $\hat{\mathbf{x}}$, except that its elements have changed position during the total pivoting process. Matrix \mathbf{B}' and vector \mathbf{y}' have in common the fact that the elements below its L -th rows are all zeros (or practically zero, for the case where the numerical rank of \mathbf{A} is L). In this case, equation (3) can be written as a linear system with $N - L$ equations and N unknowns, through the $\mathbf{B}_{(N-L \times N)}$ matrix and $\mathbf{y}_{N-L \times 1}$ vector:

$$\mathbf{B} \mathbf{x}' = \mathbf{y}, \quad (9)$$

where matrix \mathbf{B} and vector \mathbf{y} have the same elements of \mathbf{B}' and \mathbf{y}' , up to their k -th row with $k = (N - L)$.

There is an infinite number of vector $\hat{\mathbf{x}}$ that satisfy equation (9). The minimum norm solution vector $\bar{\mathbf{x}}$ that satisfy equation (9) however, can be calculated as:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{B}' \mathbf{z}, \quad (10)$$

where

$$\mathbf{z} = (\mathbf{B} \mathbf{B}')^{-1} \mathbf{y}. \quad (11)$$

The inverse term $(\mathbf{B} \mathbf{B}')$ of equation (11) can be calculated in a numerically stable way since it is now guaranteed that the numerical rank of \mathbf{B} is of its same row order: $N - L$. The same echelon factorization procedure can be employed to solve equation (11), presented here in an inverse way:

$$\mathbf{B} \mathbf{B}' \mathbf{z} = \mathbf{y}. \quad (12)$$

In this case, after the factorization of matrix $\mathbf{B} \mathbf{B}'$ into an upper triangular form and the corresponding modification of vector \mathbf{y} , auxiliary solution vector \mathbf{z} can be computed via a back-substitution operation.

3 References

- [1] Baumeister, J. 1989 - Stable Solution of Inverse Problems, Edited by Ger Fischer, Braunschweig.
- [2] Bazán, F. S. V. 1993 - Desenvolvimento de Ferramentas de Identificação Paramétrica de Sistemas Mecânicos no Domínio do Tempo, PhD Thesis, UNICAMP.

- [3] Bjork, A. 1987 - Least Square Problems, handbook of Numerical Analysis, Vol. 1 Solution of Equations in R^N , Edited by Ciarlet, P. G. and Elsivier, J. L. Lions / North Holland.
- [4] Golub, G. H. e Van Loan, C. F. 1989 - Matrix Computation, John Hopkins Press.
- [5] Groetsh, C. W. 1984 - The Theory of Tikhonov Regularizaton, for the Fredholm Integral Equations of the First Kind, Pitman Publishing, Boston.
- [6] Hansen, P. C. 1987 - The Truncated SVD Method as a Regularization, BIT (27) 534 - 535.
- [7] Hansen, P. C. 1982 - Numerical Tools and Analysis and Solution for Fredholm Integral Equations of the First Kind, Inverse Problems v. 8 pp. 849 - 872, UK.
- [8] Veiga Pessoa, R. M. 1986 - Comparação Entre Métodos Numéricos para Obtenção da Inversa Generalizada de Moore Penrose de uma Matriz, Tese de Mestrado IMECC UNICAMP.