

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

**Elementos Infinitos para Tratamento de Problemas
da Viscoelastodinâmica Estacionária pelo Método
dos Elementos Finitos**

Autor: Eng. Renato Marques de Barros
Orientador: Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto

08/96

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR Renato Marques de
Barros E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 01/10/96.

Euclides de Mesquita Neto

ORIENTADOR

B278e

29264/BC

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL**

Elementos Infinitos para Tratamento de Problemas da Viscoelastodinâmica Estacionária pelo Método dos Elementos Finitos

Autor: Eng. Renato Marques de Barros
Orientador: Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto

Curso: Engenharia Mecânica
Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Dissertação de Mestrado apresentada à comissão de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 1996
S.P. - Brasil

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

B278e Barros, Renato Marques de
 Elementos infinitos para tratamento de problemas da
 viscoelastodinâmica estacionária pelo método dos
 elementos finitos / Renato Marques de Barros.--
 Campinas, SP: [s.n.], 1996.

 Orientador: Euclides de Mesquita Neto.
 Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de
 Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

 1. Método dos elementos finitos. 2. Propagação de
 ondas. 3. Viscoelasticidade. 4. Fundações (Engenharia).
 I. Mesquita Neto, Euclides. II. Universidade Estadual de
 Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Elementos Infinitos para Tratamento de Problemas
da Viscoelastodinâmica Estacionária pelo Método
dos Elementos Finitos**

Autor: Eng. Renato Marques de Barros

Orientador: Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto



**Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto, Presidente
DMC - FEM - UNICAMP**



**Prof. Dr. Renato Pavanello
DMC - FEM - UNICAMP**



**Prof. Dr. Philippe Remy Bernard Devloo
FEC - UNICAMP**

Campinas, 01 de outubro de 1996

*À minha Mãe, meu Pai, minha Irmã
e minha Esposa, cujo amor, dedicação e
confiança incessantes tornaram
possível este trabalho*

Agradecimentos

- Ao meu orientador, Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto, pela dedicação, suporte e, acima de tudo, amizade que se manifestaram durante todas as fases deste trabalho: a minha sincera gratidão.

- Aos meus amigos, Carlos Henrique Daros e Prof. Dr. Edivaldo Romanini pela colaboração no desenvolvimento do presente trabalho.

- Ao CNPq, Conselho Nacional de Pesquisa, pelo suporte técnico e financeiro nas fases iniciais deste trabalho

- À FAPESP, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, cujo suporte financeiro e técnico tornou possível a maior parte deste projeto.

- Aos demais amigos, professores e funcionários que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho, o autor expressa o seu mais profundo reconhecimento.

SUMÁRIO

Sumário	i
Lista de figuras	v
Lista de Tabelas	x
Simbologia	xi
CAPÍTULO 1 - Introdução	1
1.1 Aspectos gerais da propagação de ondas.....	1
1.2 Aplicações do fenômeno de onda.....	2
1.3 Plano de trabalho.....	3
1.4 Etapas do presente trabalho.....	5
CAPÍTULO 2 - Uma visão geral sobre elementos infinitos	7
2.1 Introdução	7
2.2 Classificação geral dos elementos finitos.....	10
2.3 Elementos infinitos de decaimento no caso estático.....	11
2.3.1 Escolha das funções de decaimento.....	14
2.3.2 Integração numérica e elementos infinitos de decaimento.....	16
2.3.3 Um exemplo com e_i 's de decaimento exponencial.....	18
2.3.4 Um segundo exemplo com e_i 's de decaimento.....	22

2.4	Casos dinâmicos tratados com e.i's de decaimento.....	25
2.4.1	Integração numérica e e.i's de decaimento dinâmicos.....	27
2.5	Elementos infinitos de mapeamento no caso estático.....	29
2.5.1	O problema da interpolação.....	31
2.5.2	Funções de mapeamento unidimensionais.....	35
2.5.3	Integração numérica e e.i's de mapeamento.....	36
2.5.4	Um exemplo com elementos infinitos de mapeamento.....	38
2.5.5	E.I's de mapeamento em domínios multidimensionais.....	40
2.5.5.1	E. lagrangeanos: decaimento em uma direção.....	41
2.5.5.2	E. lagrangeanos: decaimento em duas ou mais direções.....	42
2.5.5.3	Elementos tipo "serendipity".....	42
2.6	Elementos de mapeamento no caso dinâmico.....	43
2.6.1	Elementos de mapeamento em três dimensões.....	43
2.6.2	Elementos de mapeamento em duas dimensões.....	44
2.6.3	Integração numérica e e.i's de mapeamento dinâmicos.....	46
2.6.3.1	Procedimentos de integração.....	49
CAPÍTULO 3 - Aspectos numéricos dos elementos infinitos.....		51
3.1	Introdução.....	51
3.2	A coluna exponencial semi-infinita.....	52
3.2.1	Matriz de rigidez para um elemento discreto da coluna.....	57
3.2.2	Matriz de rigidez de um elemento infinito da coluna.....	59
3.2.3	Taxa de transmissão de energia na coluna exponencial.....	61
3.3	A coluna linear semi-infinita.....	62
3.3.1	Matrizes de rigidez para a coluna linear.....	64
3.3.2	Confiabilidade dos resultados do modelo linear.....	65
3.4	Aplicação dos e.i's aos modelos do semi-espaço.....	67

3.4.1	El's de decaimento exponencial e coluna exponencial.....	68
3.4.2	El's de decaimento exponencial e coluna linear.....	81
3.4.3	El's de mapeamento e coluna exponencial.....	85
3.4.4	El's de mapeamento e coluna linear.....	86
CAPÍTULO 4 - Princípios da propagação de ondas em meios elásticos		90
4.1	Introdução.....	90
4.2	Princípios da mecânica dos sólidos.....	90
4.3	Equações de movimento em um meio elástico, contínuo e isotrópico.....	95
4.3.1	Ondas de Rayleigh.....	100
4.4	Equações da Viscoelasticidade.....	106
CAPÍTULO 5 - Elementos finitos/infinitos aplicados a problemas da interação dinâmica solo-estrutura (DSSI).....		112
5.1	Introdução.....	112
5.2	Formulação de elementos finitos para a elastodinâmica.....	114
5.3	Introdução de amortecimento no modelo de elementos finitos.....	119
5.4	Aplicações de elementos infinitos ao problema da DSSI.....	120
5.4.1	O elementos de Medina/Penzienl.....	121
5.4.2	O elemento de Pajapakse/Karashudi.....	128
5.4.3	O primeiro elemento de Chuhan/Chongbin.....	135
5.4.4	O segundo elemento de Chuhan/Chongbin.....	138
5.4.5	Aplicação dos elementos padrões aos problemas da DSSI.....	142
5.5	Considerações a respeito do programa DLEARN e etapas seguintes.....	147
CAPÍTULO 6 - Aplicação de elementos infinitos e demais resultados.....		153
6.1	Introdução.....	153

6.2 Análise do elemento infinito de Chongbin.....	156
6.3 Fundações de superfície.....	160
6.4 Fundações de superfície em meios estratificados.....	172
6.5 Fundações engastadas em meios homogêneos.....	186
CAPÍTULO 7 - Conclusões e sugestões para trabalhos futuros.....	189

LISTA DE FIGURAS

Figura	Página
2.1 Funções de forma.....	10
2.2 Função de forma para o segundo nó do elemento infinito.....	12
2.3 Exemplos de situações de decaimento em direções distintas.....	13
2.4 Influência do comprimento nas funções de forma para os elementos infinitos de decaimento exponencial.....	15
2.5 O problema de Interpolação de uma função decrescente.....	31
2.6 Deslocamento da fronteira do elemento infinito.....	34
2.7 Elementos finitos bidimensionais quadráticos.....	41
2.8 Exemplo de mapeamento para um elemento bidimensional.....	41
3.1 Definição da geometria para a coluna representando o semi-espaco elástico.....	52
3.2 Coluna de área variável.....	54
3.3 Elemento de coluna.....	57
3.4 Modelo amortecedor-mola para determinar a influência da coluna.....	60
3.5 Parâmetros obtidos para a coluuna exponencial.....	61
3.6 Coluna Linear.....	63
3.7 Geometria da coluna linear.....	64
3.8 Modo de propagação de ondas em domínios 2D.....	65

3.9	Geometria utilizada da discretização.....	68
3.10	Curvas de resposta em frequência para o modelo da coluna exponencial aproximada com elemento infinito constante.....	70
3.11	Elemento infinito posicionado em $x=0$	71
3.12	Elemento infinito posicionado em $x=10$ e 16 elementos finitos.....	71
3.13	Elemento infinito posicionado em $x=10$ e 64 elementos finitos.....	72
3.14	Elemento infinito posicionado em $x=0$	73
3.15	Elemento infinito posicionado em $x=10$ e 16 elementos finitos.....	74
3.16	Elemento infinito posicionado em $x=10$ e 64 elementos finitos.....	74
3.17	Elemento infinito posicionado em $x=0$	75
3.18	Elemento infinito posicionado em $x=10$ e 16 elementos finitos.....	76
3.19	Elemento infinito posicionado em $x=10$ e 64 elementos finitos.....	76
3.20	Elemento infinito posicionado em $x=0$	78
3.21	Elemento infinito posicionado em $x=10$ e 16 elementos finitos.....	78
3.22	Elemento infinito posicionado em $x=10$ e 64 elementos finitos.....	79
3.23	Elemento infinito posicionado em $x=10$ e 64 elementos finitos.....	79
3.24	Deslocamentos observados em coluna exponencial.....	80
3.25	Comportamento da fase do campo de deslocamentos.....	81
3.26	Elemento infinito posicionado em $x=6.4$ e 64 elementos finitos.....	82
3.27	Elemento infinito posicionado em $x=10$ e 16 elementos finitos.....	83
3.28	Elemento infinito posicionado em $x=6.4$ e 64 elementos finitos.....	84
3.29	Elemento infinito posicionado em $x = x_0 = 1.0$	87
3.30	Elemento infinito posicionado em $x = x_0 = 16.0$ e 16 elementos finitos.....	87
3.31	Elemento infinito posicionado em $x = x_0 = 1.0$	88
3.32	Elemento infinito posicionado em $x = x_0 = 16.0$ e 16 elementos finitos.....	88
3.33	Elemento infinito posicionado em $x = x_0 = 1.0$	89
4.1	Decomposição de uma força segundo a normal à superfície.....	91
4.2	Cubo diferencial em equilíbrio.....	95

4.3	Elemento de mola.....	111
4.4	Elemento de amortecedor.....	111
4.5	Modelo de Kelvin-Voigt.....	111
5.1	Sistema de coordenadas utilizado no desenvolvimento de elementos infinitos.....	122
5.2	Elemento quadrático na direção de propagação.....	138
5.3	Parte real das funções de propagação do elemento de Chuhan/Chongbin.....	142
5.4	Parte imaginária das funções de propagação do elemento de Chuhan/Chongbin.....	142
5.5	Viga plana discretizada por 12 elementos quadráticos tipo serendipity.....	149
5.6	Função de resposta em frequência em viga sob estado plano de tensão discretizada através de 12 elementos quadráticos tipo Serendipity.....	150
5.7	Viga com a mesma discretização anterior com amortecimento histerético a 0.1%.....	150
5.8	Viga com a mesma discretização anterior com amortecimento histerético a 1%.....	151
5.9	Viga discretizada por 24 elementos quadráticos tipo serendipity.....	151
5.10	Viga sem amortecimento discretizada por 24 elementos lagrangeanos.....	151
5.11	Viga discretizada por 12 elementos lagrangeanos e amortecimento histerético a 1%.	152
5.12	Viga discretizada por 12 elementos lagrangeanos e amortecimento histerético a 5%.	152
6.1	Diferentes graus de engastamento para fundações rígidas.....	154
6.2	Deslocamentos e coordenadas possíveis em fundação rígida bi-dimensional.....	155
6.3	Elemento infinito orientado no sentido radial.....	158
6.4	Variação da rigidez estática do elemento em relação à frequência.....	158
6.5	Variação da massa do elemento em relação à frequência.....	159
6.6	Variação do erro de integração em função do número de pontos.....	159
6.7	Exemplo das diferentes camadas de um típico perfil do subsolo.....	161
6.8	Discretização utilizada para o semi-espaço homogêneo.....	162
6.9A	Convergência do modelo em função do parâmetro de decaimento.....	163
6.9B	Convergência do modelo em função do parâmetro de decaimento.....	163
6.10	$Re(C_w)$ para o semi-espaço homogêneo onde $v=0.25$ e $\eta=10\%$	164

6.11	$\text{Im}(C_{vv})$ para o semi-espaço homogêneo onde $\nu=0.25$ e $\eta=10\%$	164
6.12A	Comportamento da função de flexibilidade horizontal (C_{vv}) para o semi-espaço homogêneo onde $\nu=0.25$ e $\eta=10\%$	165
6.12B	Comportamento da função de flexibilidade horizontal (C_{vv}) para o semi-espaço homogêneo onde $\nu=0.25$ e $\eta=10\%$	165
6.13A	Comportamento do termo de acoplamento (C_{hm}). Semi-espaço $\nu=0.25$	166
6.13B	Comportamento do termo de acoplamento (C_{hm}). Semi-espaço $\nu=0.25$	166
6.14A	Comportamento da função de flexibilidade angular (C_{mm}).Semi-espaço $\nu=0.25$	167
6.14B	Comportamento da função de flexibilidade angular (C_{mm}).Semi-espaço $\nu=0.25$	167
6.15A	C_{vv} em função do amortecimento material .Semi-espaço $\nu=0.25$	168
6.15B	C_{vv} em função do amortecimento material .Semi-espaço $\nu=0.25$	168
6.16	Comportamento das partes real e imaginária de um elemento típico.....	169
6.17	Comportamento de C_{vv} para o semi-espaço onde $\nu=0.33$	169
6.18	Comportamento de C_{hh} para o semi-espaço onde $\nu=0.33$	170
6.19	Comportamento de C_{mm} para o semi-espaço $\nu=0.40$	170
6.20	Comportamento de C_{vv} para o semi-espaço $\nu=0.40$	171
6.21	Situações analisadas.....	171
6.22	Discretização da fundação e semi-espaço no problema de camadas.....	172
6.23	$\text{Abs}(C_{vv})$ para camada sobre leito de rochas. $H/B=2$ e $\nu=0.33$	173
6.24	$\text{Im}(C_{hh})$ para camada sobre leito de rochas. $H/B=2$ e $\nu=0.33$	174
6.25	$\text{Abs}(C_{mm})$ para camada sobre leito de rochas. $H/B=2.0$ e $\nu=0.33$	174
6.26	$\text{Abs}(C_{vv})$ e $\text{Abs}(C_{hh})$ para camada sobre leito de rochas. $H/B=5$ e $\nu=0.33$	175
6.27	$\text{Abs}(C_{hh})$ para camada sobre leito de rochas. $H/B=5$ e $\nu=0.33$	175
6.28	$\text{Abs}(C_{hm})$ para camada sobre leito de rochas $H/B=5$ e $\nu=0.33$	176
6.29	$\text{Abs}(C_{mm})$ para camada sobre leito de rochas $H/B=5$ e $\nu=0.33$	176
6.30	$\text{Re}(C_{vv})$ para camada de tamanho relativo $H/B=2.00$ e $\nu=0.25$	177
6.31	$-\text{Im}(C_{vv})$ para camada de tamanho relativo $H/B=2.00$ e $\nu=0.25$	177

6.32	Re(C_{mm}) para camada de tamanho relativo $H/B=2.00$ e $\nu=0.25$	178
6.33	-Im(C_{mm}) para camada de tamanho relativo $H/B=2.00$ e $\nu=0.25$	178
6.34	Re(C_{hh}) para camada de tamanho relativo $H/B=2.00$ e $\nu=0.25$	179
6.35	-Im(C_{hh}) para camada de tamanho relativo $H/B=2.00$ e $\nu=0.25$	179
6.36	Re(C_{vv}) para camada de tamanho relativo $H/B=4.00$ e $\nu=0.25$	180
6.37	-Im(C_{vv}) para camada de tamanho relativo $H/B=4.00$ e $\nu=0.25$	180
6.38	Re(C_{hh}) para camada de tamanho relativo $H/B=4.00$ e $\nu=0.25$	181
6.39	-Im(C_{hh}) para camada de tamanho relativo $H/B=4.00$ e $\nu=0.25$	181
6.40	Re(C_{mm}) para camada de tamanho relativo $H/B=4.00$ e $\nu=0.25$	182
6.41	-Im(C_{mm}) para camada de tamanho relativo $H/B=4.00$ e $\nu=0.25$	182
6.42	Re(C_{vv}) para camada de tamanho relativo $H/B=8.00$ e $\nu=0.25$	183
6.43	-Im(C_{vv}) para camada de tamanho relativo $H/B=8.00$ e $\nu=0.25$	183
6.44	Re(C_{hh}) para camada de tamanho relativo $H/B=8.00$ e $\nu=0.25$	184
6.45	-Im(C_{hh}) para camada de tamanho relativo $H/B=8.00$ e $\nu=0.25$	185
6.46	Modelo de discretização utilizada na obtenção de resultados.....	185
6.47	Função de flexibilidade vertical para a fundação engastada $H/B=2.00$ e semi-espaço onde $\nu=0.33$ e $\eta=5\%$	186
6.48	Abs(C_{vv}) para o semi-espaço $\nu=0.33$ e $\eta=5\%$. Comparação para diversos graus de engastamento.....	186
6.49	Abs(C_{hh}) para o semi-espaço $\nu=0.33$ e $\eta=5\%$. Comparação para diversos graus de engastamento.....	187
6.50	Abs(C_{mm}) para o semi-espaço $\nu=0.33$ e $\eta=5\%$. Comparação para diversos graus de engastamento.....	1877

LISTA DE TABELAS

Tabela	Página
2.1 Comparação dos valores calculados.....	21
2.2 Valores encontrados e exatos.....	24
2.3 Valores encontrados e exatos.....	25
2.4 Funções de Mapeamento para o caso 1D para o elemento normalizado linear.....	35
2.5 Funções de Mapeamento para o caso 1D para o elemento normalizado quadrático.....	36
2.6 Valores encontrados e exatos.....	40
5.1 Decaimento dos diversos tipos de ondas em meios elásticos em função do domínio considerado.....	143
5.2 Valores das frequências naturais para a viga proposta.....	149

SIMBOLOGIA

Letras Latinas:

A	matriz dos coeficientes dos polinômios de interpolação de Lagrange
$A(x)$	área transversal
A_i	área transversal calculada nos nós do elemento
A_0, a_0	área transversal calculada na superfície do semi-espaco, frequência adimensional
a	constante
a_{ij}	i -ésimo coeficiente do j -ésimo polinômio de Lagrange
B	matriz de transformação deslocamento-deformação
B_{ij}	i -ésima componente da matriz de transformação dos deslocamentos do nó j
B	comprimento característico da fundação
$B(\epsilon, \eta)$	função de oscilação
b	constante
C	matriz de amortecimento dinâmico
C_i	i -ésima constante de integração
$C(\epsilon)$	fator de ajuste das funções de forma
c	velocidade de fase ou velocidade de grupo
c_{ni}	velocidade de propagação da n -ésima componente de deslocamento no i -ésimo meio
c^*	velocidade de onda amortecida
c_L	velocidade de onda longitudinal
c_{ijkl}	tensor de quarta ordem da elasticidade
c_l	amortecimento equivalente
D	matriz de propriedades elásticas
d	coordenada de início do elemento unidimensional
E	matriz de coeficientes das funções de propagação
E	módulo de Young

e	número de Neper, base dos logaritmos naturais
e_i	vetor unitário na i -ésima direção
F_i	função de decaimento
f	parâmetro de variação de área transversal
f_i	força nodal
$f(x)$	função genérica
f_i^j	i -ésimo coeficiente da j -ésima componente do campo de deslocamentos
G_{ij}	i -ésima função auxiliar da j -ésima matriz de transformação da deformação
$G(x)$	função, função de Green do espaço completo
g_i	condição de contorno de Neumann na i -ésima parcela do contorno
H_{ij}	i -ésima função auxiliar da j -ésima matriz de transformação da deformação
$H_n(x)$	função de Hankel de n -ésima ordem
H	profundidade do campo próximo
h	comprimento característico do elemento
h_i	condição de contorno de Dirichlet na i -ésima parcela do contorno
$h_n(x)$	função esférica de Hankel de n -ésima ordem
I	matriz identidade
I	integral, unidade imaginária
$\text{Im}(x)$	parte imaginária do argumento
i	unidade imaginária, índice de refração
J_n	n -ésima função de oscilação
$J_n(x)$	função de Bessel do primeiro tipo e n -ésima ordem
K	matriz de rigidez dinâmica, matriz de rigidez estática, matriz de impedância
$K_{ij}(\omega)$	função de impedância
k	número de onda, módulo de dilatação volumétrica
k_i	número de onda da i -ésima componente dos deslocamentos
k_1	rigidez equivalente de mola
L	comprimento característico, comprimento do campo próximo
$M_i(x)$	função multipolar de i -ésima ordem, função de mapeamento do i -ésimo nó
m	grau de decaimento
N_i	função de forma
\tilde{N}_i	função de forma auxiliar
n	grau de decaimento
n	normal positiva
P_i	função de forma de elementos finitos
P_0	carga aplicada

$P_i(\epsilon)$	função de propagação
$P_n(x)$	polinomial de n-ésimo grau
$Q_n(x)$	polinomial de n-ésimo grau
R	coordenada radial
$R_{m,n}$	função multipolar de n-ésimo grau com expoente m
R_i	coordenada de definição de elementos infinitos multidimensionais
$Re(x)$	parte real do argumento
r	raio medido na superfície, direção de propagação, coordenada radial
$S(\omega)$	matriz de rigidez dinâmica
$S_{ij}(\omega)$	matriz de impedância adimensionalizada
$S_1(\omega)$	termo de propagação unidimensional
s	direção predominante de propagação
T	taxa de propagação de energia
t	tempo, espessura da camada
t_r	tamanho relativo de camada
$Tr_n(x)$	n-ésima integral transformada
$U(x, \omega)$	amplitude da solução estacionária
u	coordenada generalizada, variável dependente
$u^t(x, \omega)$	solução transiente
$u^e(x, \omega)$	solução estacionária
u_i	i-ésima coordenada de integração, i-ésima componente do campo de deslocamento
u_{ij}	componentes simétricas do campo de deslocamentos
\bar{u}_{ij}	componentes assimétricas do campo de deslocamentos
$W(x_0, \dots)$	matriz de Wandermonte
w_i	função de ponderação, pesos de integração
$w(x)$	campo de deslocamentos em colunas exponencial e linear
X, Y	coordenadas absolutas
X_i	coordenada nodal, limite de integração
x, y	domínio não normalizado, coordenadas locais
x_i	coordenada de integração

Letras Gregas

α	variável dependente
----------	---------------------

β_n	coeficiente de forma para a n-ésima frequência natural
Δ	determinante, dilatação volumétrica
$\delta \mathbf{u}$	variação virtual do campo de deslocamentos
δ_{ij}	tensor delta de Kröenecker
ε	coordenada normalizada
ε_i	i-ésima coordenada de integração
ε_0	ponto de origem em coordenadas normalizadas
ε_{ij}	elementos do tensor de deformações infinitesimais
ϕ	coordenada angular no sistema esférico, potencial da decomposição de Helmholtz
Γ	contorno
Γ_{gr}	contorno onde existe condição de Newmann
Γ_{hi}	contorno onde existe condição de Dirichlet
γ	peso específico, taxa de abertura da função de forma de Zienkiewicz
$\gamma_{1,2}$	parâmetros de propagação da coluna exponencial
η	coordenada normalizada
η_i	i-ésima coordenada de integração
η_0	ponto de origem em coordenadas normalizadas
φ	coordenada angular no sistema esférico
λ	constante de Lamé
λ	coeficiente de função de forma
$\lambda(t-\tau)$	função de relaxação
μ	constante de Lamé
$\mu(t-\tau)$	função de relaxação
ν	módulo de Poisson
π	3.141592654...
θ	coordenada polar ou cilíndrica, ângulo de abertura da coluna linear
ρ	densidade específica
σ	variável transformada
$\sigma(x)$	tensão normal
σ_{ij}	componente do tensor de tensões
σ_i	tensão normal nodal
τ_{ij}	tensões de cisalhamento
ψ	potencial da decomposição de Helmholtz

$\mathbf{\Omega}$	vetor de rotações infinitesimais
Ω	domínio
$\overline{\Omega}$	domínio aumentado
Ω^e	domínio elementar
Ω^n	domínio normalizado
ω	frequência angular
ω_n	n-ésima frequência natural

RESUMO

BARROS, Renato Marques de, *Elementos Infinitos para Tratamento de Problemas da Viscolastodinâmica pelo método dos Elementos Finitos*, Campinas, São Paulo: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1996, 190 p. Dissertação (Mestrado)

Este trabalho apresenta uma revisão e uma implementação numérica do método dos elementos finitos (MEF) no qual foram incluídos os chamados ‘elementos infinitos’ visando a modelagem da condição de radiação de Sommerfeld ou do amortecimento geométrico em meios contínuos (visco-)elastodinâmicos em regime estacionário e cujos domínios são ilimitados. Após uma revisão geral sobre os tipos de elementos infinitos, o trabalho aborda formulações e implementações de elementos infinitos unidimensionais. Em particular são discutidos os elementos de decaimento exponencial e de mapeamento. Suas propriedades são investigadas através da modelagem da propagação de ondas em colunas ilimitadas de seção transversal variável, cônica e exponencial. Uma análise dos elementos infinitos propostos para tratamento de problemas multidimensionais segue à revisão da teoria da propagação de ondas em meios (visco-)elastodinâmicos. A análise bidimensional contida no trabalho utiliza um elemento de decaimento exponencial. As propriedades deste elemento são discutidas através da simulação da dinâmica de fundações rígidas, superficiais e engastadas, interagindo com solos modelados como semi-espaco, homogêneo e estratificado. Estas análises, de caráter inovador, revelam que o elemento escolhido é capaz de reproduzir acuradamente o comportamento de ondas não refletidas, se propagando ao infinito, ou seja a condição de radiação ou amortecimento geométrico.

Palavras chave

-Elementos Finitos, Elementos Infinitos, Propagação de Ondas, Visco-elastodinâmica, Fundações

ABSTRACT

BARROS, Renato Marques de, *Elementos Infinitos para Tratamento de Problemas da Viscolastodinâmica pelo método dos Elementos Finitos*, Campinas, São Paulo: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1996, 190 p. Dissertação (Mestrado)

The present thesis reports an overview and a numerical implementation of the Finite Element Method (FEM) in which the so called 'infinite elements' are included to model the Sommerfeld's radiation condition or the geometric damping in the stationary response of unbounded (visco-)elastic domains. Initially one dimensional infinite elements are formulated and implemented. The properties of the exponential decay type and the mapping elements are investigated by means of the stationary response of semi-infinite columns of variable cross-section, conical and exponential. In the sequence the main issues of multidimensional (visco-)elastic wave propagation are presented, followed by a revision of the proposed infinite elements for two- and three dimensional analysis. For the two dimensional case a exponential decay type element is formulated and implemented. The properties of the 2D element are discussed on hand of the dynamic analysis of rigid foundations, surface and embedded, interacting with homogeneous and layered half-spaces. This rather innovative analysis reveals that the considered element is able to model accurately the radiation condition on homogeneous and stratified unbounded domains.

Key words

Finite Elements, Infinite Elements, Wave Propagation, Visco-elastodynamic, Foundations

1. Introdução

1.1 Aspectos Gerais da Propagação de Ondas

Os efeitos de um distúrbio localizado em um meio dito contínuo espalham-se ou transmitem-se para outras partes deste meio. Este fato simples forma a base de um amplo campo de estudo conhecido como propagação de ondas. A manifestação deste fenômeno é familiar a qualquer um em ocasiões tais como a transmissão de som pelo ar, o espalhamento de ondas na superfície da água, a transmissão de tremores sísmicos ou a transmissão de ondas de rádio. Estes e muitos outros exemplos podem ser citados para ilustrar a propagação de ondas através de meios gasosos, líquidos e sólidos e ainda através do vácuo.

A propagação de distúrbios nos vários meios mencionados divide muitas características comuns e, assim, o estudo em um campo contribui para o entendimento nos outros. Existem, entretanto, um número suficientemente grande de diferenças que tornam um tratamento unificado impraticável e, assim, exige-se a concentração em um único tópico. A atenção principal deste trabalho será a propagação de ondas em meios sólidos e, portanto, serão considerados apenas distúrbios de origem mecânica ao invés, por exemplo, de eletromagnéticos ou acústicos.

A base física da propagação de um distúrbio em meios materiais reside na interação discreta dos átomos do sólido. Investigações que seguem tais linhas estão, entretanto, mais ligadas a físicos que a engenheiros. Em sólidos e fluidos, o meio apresenta-se como um contínuo de maneira que propriedades como densidade ou constante elástica são consideradas como sendo funções contínuas representando médias de quantidades microscópicas. Entretanto, no estudo de propagação de ondas é útil, em primeiro lugar, considerar um modelo composto de elementos discretos consistindo de uma série de elementos de massa e mola conectados. Se um distúrbio é aplicado a um elemento de massa, ele é transmitido à massa seguinte por meio da mola de conexão. Desta maneira, o distúrbio se

propaga rapidamente para um ponto distante embora qualquer elemento de massa ou mola tenha se movido muito pouco. O efeito dos parâmetros de massa e rigidez sobre a velocidade de propagação é bastante claro em tal modelo: se a rigidez das molas de conexão aumenta e/ou a massa das partículas diminui, espera-se que a velocidade de propagação aumente ao passo que molas mais fracas ou partículas mais pesadas tendem a diminuir a velocidade de propagação [18].

O mesmo processo acontece em modelos contínuos. Os parâmetros de massa e rigidez estão agora distribuídos em termos de densidade e módulo de elasticidade. A interação de um elemento do sistema com o próximo se dá por meio de relações diferenciais e, ao invés do princípio de puxa-empurra do modelo discreto, o distúrbio viaja em um sentido tridimensional onde uma frente de onda estará associada ao espalhamento do distúrbio. No caso de um sólido, dois fatores distintos estarão presentes em um fenômeno de propagação de ondas. No primeiro, o sólido transmite tensões de tração e compressão e o movimento das partículas se dará no mesmo sentido que o de propagação da onda. No segundo, o sólido pode transmitir tensões de cisalhamento e o movimento das partículas se dá em um plano normal ao de propagação.

O estudo de propagação de ondas em sólidos pode ser dividido grosseiramente em três categorias. A primeira é o estudo de ondas elásticas, onde as tensões no material obedecem a lei de Hooke. A segunda envolve o estudo de ondas em sólidos onde a viscosidade representa um papel importante e a terceira é o estudo da propagação de ondas aliada ao fenômeno da plasticidade. Durante este trabalho serão exploradas apenas as primeira e segunda possibilidades.

1.2 Aplicações do fenômeno de onda

As motivações para o corrente alto grau de interesse no estudo do fenômeno de propagação são as muitas aplicações práticas em ciência e indústria. Na área de estruturas, por exemplo, um dos campos é o do estudo de cargas de impacto. Sob carregamentos transientes de moderada intensidade, condições completamente elásticas podem prevalecer através da estrutura e a teoria de ondas elásticas é suficiente para predizer todos os aspectos da resposta. Sob condições mais severas de impacto, uma deformação local permanente, fratura ou falha da estrutura podem ocorrer resultando em uma inadequação da corrente teoria.

O comportamento de materiais estruturais sob condições de carregamento severas o bastante para provocar um permanente dano no elemento estrutural é de grande interesse. Muitas das aplicações nesta área estão nos vários aspectos da teoria militar e espacial mas, entretanto, processos

de conformação especial como forjamento por explosão podem usar similar conhecimento. Outra área de estudo em estruturas envolvendo o fenômeno de ondas é a propagação de trincas ou a interação de campos dinâmicos de tensão com trincas já existentes ou inclusões no material. O conceito de fator de concentração de tensão encontra aplicação nesta área. Problemas neste campo são análogos ao espalhamento e difração que ocorrem em problemas em acústica e eletromagnetismo[18].

Problemas envolvendo ondas em solos tratam de muitos aspectos interessantes a respeito do processo de propagação. Tremores de terra geram ondas que viajam milhares de quilômetros por meios que, na maioria das vezes, são extremamente não homogêneo e o estudo da propagação de tais tremores tem suprido a maior parte do conhecimento que atualmente se tem a respeito da constituição interna da Terra. Ondas em solos, geralmente ocasionadas por explosão, são importantes para a proteção e identificação de estruturas subterrâneas tais como túneis e poços de petróleo, vibrações de máquinas transmitidas pelo solo, interação dinâmica de fundações de máquinas e edifícios residenciais e/ou industriais, segurança sísmica de instalações industriais e demais tópicos da interação dinâmica solo-estrutura.

1.3 O Plano de Trabalho

Uma das grandes limitações do Método dos Elementos Finitos (MEF) é sua dificuldade de reproduzir as condições de contorno associadas à propagação de ondas não refletidas em domínios ilimitados. Como o MEF é, sem dúvida, o método numérico mais utilizado em engenharia é bastante interessante e útil o desenvolvimento de ferramentas computacionais que pudessem contornar esta dificuldade particularmente no campo da (visco-)elastodinâmica. Existem diversos esforços para se criarem “elementos infinitos” que modelem apropriadamente a condição de radiação, também conhecida como condição de radiação de Sommerfeld [40]. Um balanço destes esforços pode ser encontrado no recente livro de Betess [1].

Por outro lado o Método dos Elementos de Contorno (MEC) é capaz de satisfazer a condição de radiação de Sommerfeld de maneira natural e se aplica de maneira ideal para os problemas da (visco-)elastodinâmica de domínios ilimitados [25,35]. Na verdade o MEC também apresenta limitações de caráter prático para o tratamento da dinâmica de domínios ilimitados. A versão mais difundida do MEC aplicado à elastodinâmica é baseada na chamada solução fundamental do operador de Navier para um espaço completo, também conhecida como tensores de Stokes [15]. Para se tratar

um problema qualquer com esta solução fundamental é necessário que se crie e discretize apenas o contorno do domínio sendo considerado.

Para o caso da interação dinâmica de estruturas com o solo, este geralmente é modelado como um semi-espaço homogêneo ou estratificado. Como o próprio nome indica, o semi-espaço representa um típico domínio ilimitado. Ora, a discretização deste tipo de domínio ilimitado claramente não pode ser efetuado na prática.

Uma tentativa para contornar este problema está no truncamento da discretização do contorno a uma certa distância da fonte de energia, tentando minimizar os erros induzidos pela reflexão das ondas de superfície onde o truncamento é feito. Para solos homogêneos e com poucas camadas este esquema é viável [35,29]. Mas na medida em que o solo se torna bastante estratificado e irregular surge a necessidade de se trabalhar com sub-domínios e técnicas de sub-estruturação [29] para o esquema de truncamento se tornar viável.

Duas alternativas tem sido propostas para resolver este impasse. A primeira é formular o MEC a partir das chamadas funções de Green do perfil do solo considerado. Esta abordagem apresenta a vantagem de somente requerer a discretização na interface solo-fundação, mas necessita de uma síntese de funções de Green para cada problema em condições de contorno distintas. Um exemplo de síntese pode ser visto no trabalho de Romanini [30]. Embora o trabalho apresente perspectivas promissoras, ele ainda está confinado a perfis de solos com estratificações horizontais.

A segunda solução que tem sido proposta por alguns autores é a de se incorporar elementos infinitos na abordagem de elementos de contorno, de forma a evitar a necessidade de truncamento dos contornos [8,13,9]. Este esquema, se viabilizado, tornaria o MEC o mais eficiente dos métodos, com capacidade de tratar múltiplos domínios, ou solos fortemente estratificados com qualquer perfil, horizontal, inclinado ou irregular [6].

Assim, o objetivo do presente trabalho é estudar a viabilidade e precisão da implementação dos chamados “elementos infinitos” em códigos de Elementos Finitos para viabilizar a sua aplicação futura em programas de Elementos de Contorno. As aplicações que se pretende tratar estão basicamente relacionadas ao campo da interação de estruturas e fundações.

1.4 Etapas do Presente Trabalho

O estudo completo que se propõe pode ser dividido em duas etapas:

- Revisão bibliográfica dos diversos esquemas de elementos infinitos, visando a escolha de uma alternativa que melhor se adapte aos problemas da elastodinâmica bi-dimensional estacionária. Esta fase compõe-se ainda de um estudo dos elementos infinitos em problemas unidimensionais, com o objetivo de uma melhor familiarização com as diversas ferramentas utilizadas.
- Implementação dos elementos infinitos escolhidos em um código de elementos finitos já existente, DLEARN [19]. Estudos paramétricos visando a determinação da eficiência do elemento para simular a condição de radiação de Sommerfeld para uma faixa ampla de frequências. Aplicação em problemas da interação de estruturas rígidas com solos modelados por um semi-espaço visco-elástico e comparação com resultados obtidos através de um programa de funções de Green [35,38].

O trabalho foi dividido em sete capítulos cujo conteúdo é resumido em seguida:

- **Capítulo I - Introdução**

Neste capítulo são feitas algumas considerações a respeito da motivação do trabalho e da importância do mesmo no campo da interação dinâmica de estruturas com o solo. São apresentadas também algumas aplicações em que o estudo da propagação de ondas em sólidos é de capital importância para o entendimento do problema. Por fim, é apresentado o plano geral do trabalho mostrando a estruturação na qual ele se encontra.

- **Capítulo II - Uma visão geral do método dos elementos infinitos**

No segundo capítulo é feita uma breve revisão bibliográfica dos principais trabalhos, do ponto de vista histórico, que tiveram maior importância para o método. É ainda uma classificação geral dos elementos infinitos, dividindo-os entre elementos de decaimento, elementos de mapeamento e semi-analíticos nos campos da estática e dinâmica estacionária. Os principais métodos de integração numérica utilizados nos capítulos posteriores são detalhados aqui. São apresentados ainda exemplos numéricos da utilização dos elementos na solução de algumas equações numéricas simples para que os conceitos apresentados se tornem claros.

- **Capítulo III - Aspectos numéricos de elementos infinitos em modelos dinâmicos 1**

Neste capítulo os elementos infinitos são aplicados a alguns modelos do semi-espaço elástico para comparação com as soluções analíticas disponíveis.

- **Capítulo IV - Princípios da propagação de ondas em meios elásticos**

O quarto capítulo é basicamente um estudo teórico das principais características da propagação de ondas mecânicas em modelos multi-dimensionais, sejam eles limitados (semi-espaço) ou

não (espaço completo). As equações de movimento de um sólido onde o amortecimento está presente são também apresentadas junto com um capítulo especial referente as equações da visco-elasticidade.

- **Capítulo V - Elementos finitos/infinitos para problemas da interação dinâmica solo-estrutura**

Aqui são detalhados os principais elementos infinitos que estão sendo aplicados ao problema da interação dinâmica solo-estrutura. É dada particular ênfase a uma abordagem crítica dos elementos, enfatizando-se as suas qualidades e deficiências.

- **Capítulo VI - Aplicação de elementos infinitos e demais resultados**

É apresentado um elemento infinito capaz de propagar ondas de cisalhamento, compressão e de superfície. Os resultados obtidos demonstram a sua aplicabilidade, não apenas a problemas de superfície, mas também a problemas de fundações engastadas, independentemente se o meio é homogêneo ou estratificado.

- **Capítulo VII - Conclusões e sugestões para trabalhos futuros**

Finalmente são apresentadas as conclusões finais do trabalho e algumas sugestões para pesquisa futura envolvendo os elementos infinitos apresentados.

2. Uma Visão Geral Sobre Elementos Infinitos

2.1 Introdução:

Embora nenhum domínio físico se estenda realmente até o infinito, algumas vezes, na análise de problemas encontrados na engenharia, é conveniente assumir que tais domínios infinitos existam realmente.

Imagine-se, por exemplo, a difusão de energia térmica em um meio que o circunda, por exemplo a atmosfera: um corpo perde energia para o meio a uma taxa que é, em algumas situações, basicamente dependente da diferença de temperatura entre ele e o meio. Perguntas tais como— qual a distribuição de temperatura no meio em um dado instante — podem ter grande relevância em um dado problema.

Impõe-se que as únicas trocas de energia ocorram entre o corpo e o meio e, conseqüentemente, após um certo intervalo de tempo, o equilíbrio é atingido e o fluxo de energia entre fonte e meio decai a zero. É certo que a uma grande distância da fonte este fluxo de energia por unidade de área é pequeno o que indica que a diferença de temperatura entre dois pontos próximos e ambos afastados da fonte é muito pequena. Se esta diferença de temperatura é medida cada vez mais longe da fonte chega-se a um ponto onde não se pode mais registrar qualquer variação de temperatura o que indica que as porções seguintes do meio não afetam o resultado da análise podendo, então, ser descartadas do modelo.

Introduz-se, assim, um contorno artificial em um domínio que é tão grande que poderia ser considerado como infinito e pergunta-se quais as condições associadas a este contorno. As duas respostas possíveis são:

1. a diferença de temperatura atinge o valor zero ou
2. a variação desta diferença no tempo atinge o valor zero.

Se a temperatura da fonte não varia no tempo, quaisquer condições impostas ao domínio fornecem bons resultados mas se, entretanto, a temperatura da fonte varia no tempo, por exemplo senoidalmente com uma frequência k , e experiência mostra que nenhuma das condições impostas fornece bons resultados. Isto acontece, em parte, porque em sistemas onde existe uma entrada de energia (seja na forma térmica, de movimento, etc) a introdução de um contorno artificial que não simula a saída apropriada de energia do sistema tende a confinar uma parte desta energia dentro do sistema, introduzindo grandes imprecisões nos resultados.

Uma das primeiras tentativas na análise numérica deste tipo de problema, idealizado como ilimitado ou “sem fronteira” é devida a Richardson [37] que utilizou o Método das Diferenças Finitas (MDF) na análise de tensões envolvidas na interação solo-barragem. Na década de 20 a idéia da utilização de funções de Green em conexão a um procedimento numérico foi desenvolvida por Trefftz no contexto da elasticidade e se tornou o que é conhecido hoje como “método integral de contorno” [42].

O Método dos Elementos Finitos (MEF) surgiu como uma poderosa ferramenta para o tratamento da maioria dos problemas encontrados em domínios finitos mas que, por ser inerentemente um método de discretização do domínio do problema, encontrava grande dificuldade em tratar domínios ilimitados.

Não é necessário neste ponto fornecer uma revisão completa do método mas a idéia básica é, talvez, melhor captada no campo da análise estrutural. Como o próprio nome sugere, o domínio do problema é separado em pequenas porções (denominadas elementos) e, em cada elemento, alguma função de interesse (deslocamento, tensão, etc) é aproximada por meio de funções de interpolação que utilizam alguns parâmetros selecionados os quais são geralmente identificados com o valor da grandeza a interpolar nos nós do elemento [46].

Em seguida esta função interpolada é substituída nas relações de equilíbrio e constitutivas. As equações assim obtidas são ponderadas, muito freqüentemente pelas próprias funções de interpolação e são, então, integradas sobre todo o domínio do problema, elemento por elemento.

O Método dos Elementos de Contorno (MEC), desenvolvido nas décadas de 60 e 70 é baseado em formulações integrais (ao invés de diferenciais, como o MEF e o MDF) das teorias do potencial e da elasticidade que surgiram no final do século 19. Os primeiros trabalhos rigorosos em equações integrais foram publicados por Fredholm (1905) e Somigliana (1889), que estabeleceu uma representação integral para a elastoestática [12].

O ponto de partida da formulação direta do MEC está na discretização do contorno do problema e na solução de uma equação integral que é levada a termo interpolando essa solução neste contorno da mesma forma que é feita no domínio pelo MEF. A obtenção desta equação integral onde os parâmetros de interesse necessitam ser calculados apenas no contorno é feita por meio de uma função especial conhecida como solução fundamental, obtida levando-se em conta um domínio ilimitado [4].

Dadas as características desta solução fundamental, certos problemas em que se encontram domínios ilimitados são, assim, melhor tratados pelo MEC que pelo MEF. Entretanto, dada a enorme aceitação do MEF para a resolução de problemas de engenharia, alguns pesquisadores propuseram-se a introduzir no método algumas idéias novas que permitissem a ele manipular, ao menos aproximadamente, estes domínios infinitos.

O primeiro elemento infinito surgiu em 1973, idealizado por Ungless e Anderson [44] e foi chamado um “elemento finito infinito”. Nele admitia-se a priori que a grandeza de interesse (deslocamento) variava segundo o inverso da distância ao local de aplicação da carga. Em 1977, um trabalho devido a Zienkiewicz e Bettess [2] propôs um esquema alternativo bastante interessante que permitia ao MEF o tratamento de domínios ilimitados por meio de funções de interpolação especiais que se estendiam até o infinito na forma de decaimento exponencial. Estas funções de interpolação, incluindo os esquemas especiais de integração requeridos, podiam ser facilmente implementadas nos programas já existentes do MEF. Em 1983, um artigo novamente da autoria de Zienkiewicz e Bettess [3] propôs uma outra solução para o problema na qual o decaimento ao infinito não era obtido pelo modo exponencial mas que envolvia uma técnica especial de mapeamento que permitia o tratamento de domínios ilimitados por meio de funções de mapeamento racionais. Este capítulo tem o objetivo principal de tratar de alguns pontos fundamentais na teoria de elementos infinitos bem como de elucidar os principais pontos da teoria a eles associada.

2.2 Classificação Geral dos Elementos Infinitos

A idéia por trás do Elemento Infinito (EI) de Ungless e Anderson estava em admitir antecipadamente uma variação das funções de forma segundo:

$$N(r) = \frac{1}{1+r} \quad (2.2.1)$$

onde r é a distância ao ponto de aplicação da carga. Este elemento foi testado com sucesso para o problema de uma carga pontual constante no tempo atuando em um semi-espaco elástico. A variação da função de forma pode ser vista com clareza na figura abaixo:

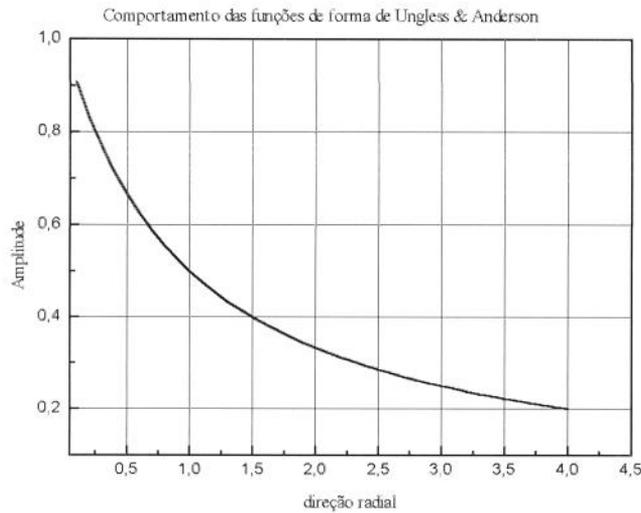


Figura 2.1: funções de forma

Os autores demonstram que bons resultados são obtidos quando o elemento é aplicado ao problema da carga pontual estática em um semi-espaco elástico (Solução Analítica de Boussinesq). Ainda é mencionado no texto que a função de forma assim obtida é suficientemente simples para que todas as manipulações sejam feitas analiticamente.

A formulação posterior devido a Zienkiewicz e Bettess [1] e aplicada a problemas estáticos era bastante diferente: funções de forma especiais eram desenvolvidas pela multiplicação da função de forma padrão de elementos finitos (em coordenadas normalizadas ou não) por uma apropriada função de decaimento. O conjunto, então, se assemelhava a:

$$N_i(\epsilon, \eta) = P_i(\epsilon, \eta) \cdot F_i(\epsilon, \eta) \tag{2.2.2}$$

onde $F_i(\epsilon, \eta)$ são funções de decaimento e $P_i(\epsilon, \eta)$ são funções padrões de elementos finitos.

Posteriormente ao uso destes elementos finitos de “decaimento” surgiu um novo tipo de elemento, também adequado para o tratamento de problemas estáticos, que não fazia uso de funções de decaimento mas que utilizava uma técnica de mapeamento que permitia modelar um dominio inicialmente infinito em um finito e normalizado. Tal elemento foi chamado de elemento infinito de “mapeamento”.

Quase que simultaneamente ao desenvolvimento destes elementos estáticos surgiram variações que permitiam a sua aplicação a problemas dinâmicos como, por exemplo, propagação de ondas [27,36], eletromagnetismo [14] e uma variada gama de problemas. Cada um dos elementos descritos acima será apropriadamente analisado tanto no caso estático quanto no caso dinâmico nos itens que se seguem.

2.3 Elementos Infinitos de Decaimento no Caso Estático

A idéia central por trás dos elementos infinitos de decaimento está na utilização das funções de forma padrão de elementos finitos e de um termo extra que propicia o modelamento da condição de radiação. Sempre que possível este termo de decaimento deve conter elementos da solução fundamental do problema para uma melhor precisão.

Nos capítulos que se seguem tratar-se-á quase exclusivamente de problemas uni e bidimensionais. A generalização para problemas tridimensionais, segundo Bettess [1], não apresenta dificuldades.

Deseja-se, então, associar a um determinado elemento finito um outro, infinito, no qual as funções de forma devem, além de simular a condição de radiação de Sommerfeld¹, possuir as mesmas características dos elementos finitos isoparamétricos²: valor unitário no nó a que se refere e valor nulo em todos os outros nós do elemento.

Se as funções de forma do elemento finito associado são dadas por $P_i(\epsilon, \eta)$ onde ϵ e η são as coordenadas elementares normalizadas e $F_i(\epsilon, \eta)$ são funções de decaimento que simulam (ao menos aproximadamente) a condição de radiação, então as funções de forma do elemento infinito são dadas por:

$$N_i(\epsilon, \eta) = P_i(\epsilon, \eta) \cdot F_i(\epsilon, \eta) \quad (2.3.1)$$

com a condição que o termo de decaimento $F(\epsilon, \eta)$ tenha valor unitário no nó a que refere, ou seja:

$$F_i(\epsilon_i, \eta_i) = 1 \quad (2.3.2)$$

¹Um tratamento da condição de radiação de Sommerfeld é visto com detalhes em [18]

²Para uma discussão a respeito de elementos finitos isoparamétricos, consultar Zienkiewicz [3]

Além disso observa-se que os valores do termo de decaimento nos outros nós do elemento não necessitam ser definidos explicitamente uma vez que a condição de zero das funções $P_i(\epsilon, \eta)$ garante o valor nulo das funções de forma do elemento infinito nestes nós. Esta situação é melhor verificada no gráfico seguinte onde se plota a função de forma referente ao nó 2 de um elemento infinito unidimensional. Observa-se que o elemento finito associado tem domínio no intervalo $[0, 1]$.

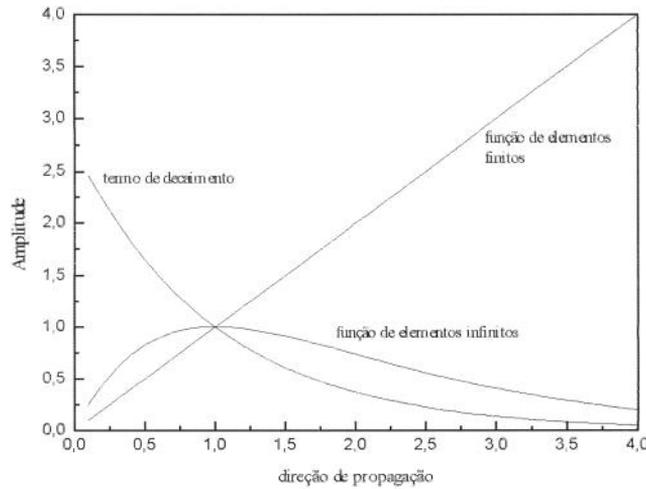


Figura 2.2: função de forma para o segundo nó do elemento infinito

Na maior parte dos problemas o termo de decaimento é uma função apenas de uma variável (casos em que o decaimento ocorre em uma certa direção radial). No entanto situações em que tem-se decaimento em ambas as direções não são de todo incomuns. A figura seguinte tenta exemplificar ambas as situações:

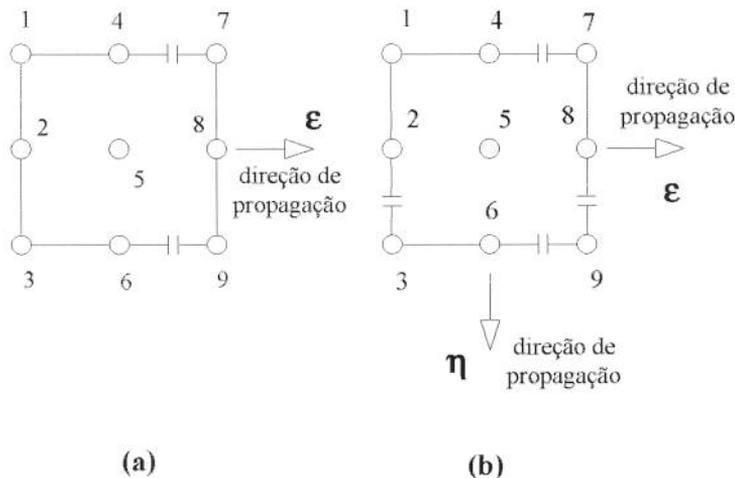


Figura 2.3: Exemplos de situações de decaimento em direções distintas: (a) decaimento em uma direção, (b) decaimento em duas direções

É interessante, agora, investigar o comportamento das derivadas das funções de forma do elemento infinito quando da introdução do termo de decaimento. Para o caso de decaimento em apenas uma direção (supondo sempre a direção preferencial de decaimento como aquela da coordenada ε) tem-se que $F(\varepsilon, \eta) = F(\varepsilon)$ e, conseqüentemente, estas derivadas são:

$$\frac{\partial N_i}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial P_i}{\partial \varepsilon} F_i + \frac{\partial F_i}{\partial \varepsilon} P_i \quad (2.3.4)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial P_i}{\partial \eta} F_i \quad (2.3.5)$$

Para o caso geral de decaimento em ambas as direções tem-se:

$$\frac{\partial N_i}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial P_i}{\partial \varepsilon} F_i + \frac{\partial F_i}{\partial \varepsilon} P_i \quad (2.3.6)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial P_i}{\partial \eta} F_i + \frac{\partial F_i}{\partial \eta} P_i \quad (2.3.7)$$

2.3.1 Escolha das Funções de Decaimento:

Conforme já foi mencionado anteriormente, a escolha de uma função de decaimento apropriada deve levar em conta a solução fundamental (ou função de Green para um contorno ilimitado) para o operador do problema. Uma grande parte dos problemas da física matemática tem soluções fundamentais que decrescem segundo $1/r$ ou $\exp(-r)$ onde r é a coordenada de decaimento.

Sendo assim, uma escolha evidente para as funções de decaimento é admitir $F(\varepsilon)$ com uma variação do tipo exponencial — que dará origem aos elementos infinitos do tipo exponencial — ou com uma variação do tipo $1/p(r)$ onde $p(r)$ é uma polinomial em r — que dará origem aos elementos infinitos de decaimento recíproco.

A função exponencial tem a característica de proporcionar um decaimento a zero mais rápido que qualquer polinomial e, portanto, tem um comportamento dominante sobre qualquer

expressão polinomial para valores do argumento suficientemente grandes além de ser quase tão fácil de manipular algebricamente quanto expressões do tipo polinomial.

Assim, para o decaimento em uma direção, tem-se:

$$F_1(\varepsilon) = \exp\left(\frac{\varepsilon_i - \varepsilon}{L}\right) \quad (2.3.8)$$

e, para decaimento em duas direções:

$$F_1(\varepsilon, \eta) = \exp\left(\frac{\varepsilon_i - \eta_i - \varepsilon - \eta}{L}\right); \quad (2.3.9)$$

O comprimento característico “L” é um fator arbitrário que permite regular a severidade do decrescimento da função de forma. Observa-se que, quando $\varepsilon = \varepsilon_i$ tem-se que $F=1$. O gráfico abaixo permite avaliar a influência do fator L nas funções de forma:

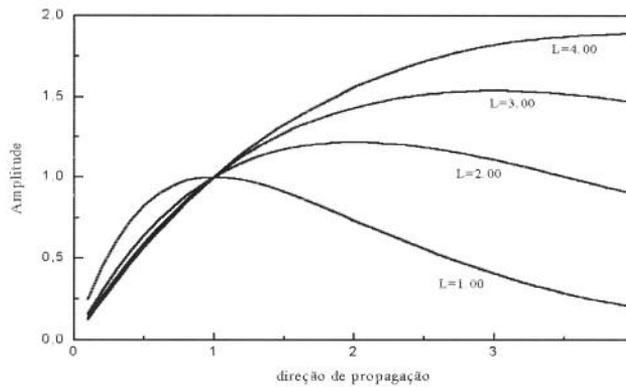


Figura 2.4: Influência do comprimento nas funções de forma para os elementos infinitos de decaimento exponencial.

As funções de decaimento podem, também, ser definidas em domínios não normalizados. Assim, para o caso de decaimento em uma direção, tem-se:

$$F_1(x) = \exp\left(\frac{x_i - x}{L}\right) \quad (2.3.10)$$

onde x_i é a coordenada do nó a que a função se refere.

É também possível encontrar um valor adequado de L se algo a respeito da solução fundamental do operador puder ser encontrado. Entretanto isto pode gerar incompatibilidades na malha de elementos uma vez que o valor de L já não é constante de elemento para elemento.

A utilização de elementos infinitos de decaimento recíproco envolve admitir o termo de decaimento como:

$$F_1(\varepsilon) = \left(\frac{\varepsilon_i - \varepsilon_o}{\varepsilon - \varepsilon_o} \right)^n \quad (2.3.11)$$

onde ε_o é um comprimento de controle utilizado novamente para controlar a severidade do decaimento. Para evitar a ocorrência de uma singularidade dentro do elemento é necessário que o ponto ε_o seja exterior ao elemento. Usualmente, se o decaimento ocorre no sentido positivo de ε , então ε_o deve ser menor que -1 . O termo n é utilizado quando se deseja simular a condição de radiação de Sommerfeld com uma melhor precisão.

Por exemplo, em alguns problemas bidimensionais, o valor da função de Green quando se considera uma grande distância da origem decai aproximadamente conforme $\frac{1}{\sqrt{r}}$ e, sendo assim, um melhor resultado é obtido na utilização de elementos infinitos quando se seleciona $n = \frac{1}{2}$ na função de decaimento. Para o caso de decaimento em duas direções, o termo de decaimento toma a forma:

$$F_1(\varepsilon) = \left(\frac{\varepsilon_i - \varepsilon_o}{\varepsilon - \varepsilon_o} \right)^m \left(\frac{\eta_i - \eta_o}{\eta - \eta_o} \right)^n \quad (2.3.12)$$

e neste caso as duas constantes n e m podem ser escolhidas de forma independente.

São raros na literatura disponível casos em que os elementos infinitos de decaimento recíproco são utilizados. Isso ocorre, talvez, porque esquemas de integração numérica apropriados ainda não estão disponíveis.

2.3.2 Integração Numérica e Elementos Infinitos de Decaimento

É possível integrar analiticamente as matrizes de elementos infinitos desde que a geometria dos elementos seja mantida simples, o que significa que o elemento deve ser retangular ou

possivelmente setorial. Entretanto, regras de integração numérica para o intervalo $[0, \infty]$ estão amplamente divulgadas na literatura técnica e são quase tão fáceis de aplicar quanto aquelas para intervalos finitos. A integração numérica será discutida em um contexto mais amplo porque, além de ser mais geral, propicia o uso de técnicas isoparamétricas.

O uso de fórmulas de integração baseadas no método de Gauss-Laguerre é especialmente indicado para o tratamento das matrizes que surgem quando utiliza-se EI's do tipo exponencial. Estas fórmulas avaliam integrais do tipo

$$\int_0^{\infty} f(x) \exp(-x) dx . \quad (2.3.13)$$

Os pesos e coordenadas de integração proporcionam a solução numérica exata da integral desde que $f(x)$ seja uma polinomial e seja arbitrado um número suficiente de pontos ³.

Em se tratando de métodos de integração numérica, a maior contribuição no campo de elementos infinitos de decaimento está no trabalho de Pissanetsky, que usou um método de integração baseado na ortogonalidade de polinômios de Legendre para o caso de integrandos não oscilantes [34].

Imagina-se que se deseja encontrar o valor da seguinte integral:

$$I = \int_0^{\infty} g(u) du . \quad (2.3.14)$$

Inicialmente considera-se a fórmula padrão para integração utilizando o esquema de Gauss-Legendre:

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^m f(x_i) w_i \quad (2.3.15)$$

onde m é o número de pontos considerados e x_i e w_i são as coordenadas e pesos usuais.

Aplicando a seguinte transformação pode-se relacionar o domínio de integração da integral acima com o intervalo $[0, \infty]$:

$$x = \frac{u - a}{u + a} \Rightarrow u = a \frac{1 + x}{1 - x} \quad (2.3.16)$$

³O processo de integração numérica de Gauss-Laguerre é geralmente inferior no que se refere a eficiência e segurança dos resultados obtidos em relação ao método desenvolvido por Pissanetsky [13]

e conseqüentemente a integral original em $g(u)$ pode ser escrita como:

$$\int_0^{\infty} g(u) du = \int_{-1}^1 \frac{2a}{(1-x)^2} g\left(a \frac{1+x}{1-x}\right) dx \quad (2.3.17)$$

Comparando com a fórmula da quadratura gaussiana obtém-se os pesos e coordenadas para uma quadratura no intervalo $[0, \infty]$:

$$\int_0^{\infty} g(u) du \approx \sum_{i=1}^m p_i g(u_i) \quad (2.3.18)$$

onde

$$p_i = \frac{2aw_i}{(1-x_i)^2} \quad \text{e} \quad u_i = a \frac{1+x_i}{1-x_i} \quad (2.3.19)$$

Pissanetsky chamou o esquema acima de fórmula de integração multipolar uma vez que ela é exata sempre que $g(u)$ for uma combinação de multipolos da forma:

$$MP = \frac{1}{(u+a)^k} \quad (2.3.20)$$

onde $k=2,3,\dots,2m+1$.

O uso do esquema acima fornece resultados muito bons quando comparado ao método de Gauss-Laguerre e ao dos polinômios associados de Laguerre [34]. Entretanto, o uso de esquemas de integração próprios para integrandos oscilantes será deixado para a ocasião em que os elementos infinitos forem aplicados a casos dinâmicos.

2.3.3 Um Exemplo com EI's de Decaimento Exponencial

Este exemplo foi elaborado com o propósito de recapitular alguns tópicos do MEF e, ao mesmo tempo, deixar claro o que foi exposto até aqui a respeito dos elementos infinitos de decaimento. Considere a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - 4u = 0 \quad (2.3.21)$$

com as condições

$$u(0) = 1 \text{ e } \frac{du}{dx}(0) = -2 \quad (2.3.22)$$

Procedimentos padrão para a solução desta equação levam à solução exata:

$$u(x) = e^{-2x} \quad (2.3.23)$$

e propõe-se resolver utilizando-se dois elementos finitos lineares localizados em $[0,0.5]$ e $[0.5,1]$ e um elemento infinito de decaimento exponencial linear localizado em $[2,3,\infty]$.

Como se sabe a priori que a solução desta equação é não-oscilante, o uso de elementos do tipo estático é indicado. Inicia-se então com a formulação clássica de resíduos ponderados para a equação acima:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - 4u = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{\Omega} \frac{du}{dx} \frac{dw_i}{dx} + 4uw_i \, dx = w_i \frac{du}{dx} \Big|_{x=X_i}^{x=X_{i+1}} \quad (2.3.24)$$

onde w_i é um conjunto de funções de ponderação

Aplicando o procedimento padrão de elementos finitos e identificando as funções de ponderação com o próprio conjunto das funções de interpolação (método de Bubnov-Galerkin):

$$u(x) = \sum N_i u_i \text{ e } w_j(x) = \sum N_j \delta u_j \quad (2.3.25)$$

onde u_i são os valores da função-incógnita nos nós dos elementos e δu_j é um conjunto arbitrário de variações virtuais da função-incógnita, chega-se a expressão para o sistema discretizado:

$$\left(\int_{\Omega} \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} + 4N_i N_j \, dx \, u_i \right) \delta u_j = \left(N_j \frac{du}{dx} \Big|_{x=X_i}^{x=X_{i+1}} \right) \delta u_j \quad (2.3.26)$$

Como δu_j é escolhido arbitrariamente, a solução da equação acima acontece quando:

$$\int_{\Omega} \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} + 4N_i N_j dx u_i = N_j \frac{du}{dx} \Big|_{x=X_i}^{x=X_{i+1}} \quad (2.3.27)$$

A equação acima, na verdade, é um sistema matricial do tipo $[A]\{x\} = \{b\}$ onde a matriz $[A]$ é chamada de matriz de rigidez e o termo $\{b\}$ de vetor carregamento. A matriz $[A]$ será agora avaliada utilizando o processo comum de elementos finitos.

Inicialmente trata-se da questão do mapeamento. Deve-se relacionar o domínio $\Omega = [x_i, x_{i+1}]$ com o domínio dito normalizado $\Omega^n = [-1, +1]$. Isto é feito levando-se em conta o conceito de elementos isoparamétricos ou seja, o mesmo conjunto de funções usadas para interpolar a variável de interesse é usado para transformar o domínio original no normalizado. Assim:

$$x(\epsilon) = \sum_{i=1}^m N_i(\epsilon) x_i \Rightarrow \frac{dx}{d\epsilon} = \sum_{i=1}^m \frac{dN_i}{d\epsilon} x_i \quad (2.3.28)$$

onde x_i são as coordenadas dos nós do modelo.

As funções de forma podem facilmente ser encontradas em [46]. Assim:

$$N_1 = \frac{1-\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad N_2 = \frac{1+\epsilon}{2} \quad (2.3.29)$$

Consequentemente:

$$x(\epsilon) = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} + \frac{\epsilon}{2} h \Rightarrow \frac{dx}{d\epsilon} = \frac{h}{2} \quad (2.3.30)$$

A matriz de rigidez por elementos finitos utilizando-se coordenadas normalizadas resulta em:

$$[A]^{EF} = \int_{-1}^{+1} \left[\frac{dN_i}{d\epsilon} \frac{dN_j}{d\epsilon} \left(\frac{d\epsilon}{dx} \right)^2 + N_i N_j \right] \frac{dx}{d\epsilon} d\epsilon \quad (2.3.31)$$

Substituindo as expressões para as funções de forma e integrando, tem-se:

$$[A]^{EF} = \begin{bmatrix} -\frac{8}{3}h + \frac{1+4h^2}{h} & -\frac{1}{h} + \frac{2}{3}h \\ -\frac{1}{h} + \frac{2}{3}h & \frac{1}{h} + \frac{4}{3}h \end{bmatrix} \quad (2.3.32)$$

Para a parte do domínio referente ao elemento infinito admite-se as funções de forma no domínio não normalizado. Assim:

$$[A]^{EI} = \int_1^{\infty} \left[\frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} + N_i N_j \right] dx \quad (2.3.33)$$

onde as funções de forma são, agora, dadas por:

$$N_1 = (2-x)e^{1-x} \quad e \quad N_2 = (x-1)e^{2-x} \quad (2.3.34)$$

Integrando analiticamente chega-se a :

$$[A]^{EI} = \begin{bmatrix} \frac{9}{4} & \frac{-e}{2} \\ \frac{-e}{2} & \frac{5e^2}{4} \end{bmatrix} \quad (2.3.35)$$

e, em seguida, agrupando-se ambas as matrizes de elementos finitos (lembrando-se que $h=1/2$) e a matriz do EI, chega-se a expressão para o sistema discretizado:

$$\begin{bmatrix} \frac{8}{3} & \frac{-5}{3} & 0 & 0 \\ \frac{-5}{3} & \frac{16}{3} & \frac{-5}{3} & 0 \\ 0 & \frac{-5}{3} & \frac{59}{12} & \frac{-e}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-e}{2} & \frac{5e^2}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ 0 \\ 0 \\ d_4 \end{Bmatrix} \quad (2.3.36)$$

Introduzindo-se as condições de contorno para $x_1=1$ e $d_1=-2$ obtém-se:

Nó	Coordenada	Valor Calculado	Valor Exato	Erro Relativo
1	0.00	-	1.00	-
2	0.50	0.35714	0.36787	2.916%
3	1.00	0.12563	0.13533	7.167%
4	2.00	0.03942	0.04978	20.811%

Tabela 2.1: Comparação dos valores calculados

É interessante notar que o erro relativo cresce exponencialmente conforme o nó considerado se afasta da origem. A qualidade da aproximação obtida neste exemplo deve-se, em parte, ao fato da solução do problema incorporar termos de caráter exponencial. O próximo exemplo ilustra as dificuldades que este tipo de elemento encontra quando a solução não mais decai do modo esperado.

Não é necessário, na maior parte dos problemas tratados por elementos infinitos, definir as funções de forma referentes aos nós no infinito. Isto ocorre porque admiti-se que o valor da função de interesse tende assintoticamente a zero a medida que o seu argumento se aproxima do infinito

Pode ocorrer para uma pequena classe de problemas, entretanto, que o valor da função a analisar não decaia a zero mas sim a um valor definido. Neste caso procede-se a uma simples troca de variáveis e volta-se ao valor zero no infinito. As grandezas são, então, referenciadas a este valor de base.

2.3.4 Um Segundo Exemplo com EI's de Decaimento

Neste exemplo procura-se investigar como os EI's de decaimento exponencial se comportam quando a solução procurada não decai de modo exponencial mas sim conforme alguma função racional. Imagine-se a seguinte equação:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - 2 \frac{u}{x^2} = 0 \quad (2.3.38)$$

com as condições:

$$\frac{du}{dx}(0.8) = -1.5625 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = 0 \quad (2.3.39)$$

Resolvendo analiticamente a equação acima, encontra-se $u(x) = 1/x$ e deseja-se obter uma solução aproximada utilizando-se dois elementos finitos posicionados em $[0.8, 0.9]$ e $[0.9, 1]$ e um EI exponencial quadrático posicionado em $[1, 2, 3, \infty]$. A equação, utilizando-se o método dos resíduos ponderados, é dada por:

$$\int_{\Omega} \frac{du}{dx} \frac{dw_i}{dx} + \frac{2}{x^2} u w_i dx = w_i \frac{du}{dx} \Big|_{x=x_i}^{x \rightarrow \infty} \quad (2.3.40)$$

onde $x_i=1$. As condições de contorno para o problema acima são:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx}(0.8) &= -1.5625 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} u &= 0 \end{aligned} \quad (2.3.41)$$

O problema será resolvido utilizando-se apenas coordenadas globais. Para a parte finita do problema (discretizada por meio de EF's) tem-se as seguintes funções de forma:

$$\text{elemento 1: } \begin{cases} N_1^1 = 9 - 10x \\ N_2^1 = 10x - 8 \end{cases} \quad \text{elemento 2: } \begin{cases} N_1^2 = 10 - 10x \\ N_2^2 = 10x - 9 \end{cases} \quad (2.3.42)$$

e, para o elemento infinito, as funções de forma são dadas por:

$$N_1^i = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{5x}{2} + 3 \right) \text{Exp}[1 - x] \quad (2.3.43.a)$$

$$N_2^i = (-x^2 + 4x - 3) \text{Exp}[2 - x] \quad (2.3.43.b)$$

$$N_3^i = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{3x}{2} + 1 \right) \text{Exp}[3 - x] \quad (2.3.43.c)$$

Admitindo-se a forma convencional de interpolação para $u(x)$ em termos das funções de forma e expressando w_i em termos de variações virtuais de $u(x)$ tem-se:

$$\left(\int_{\Omega} \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} + \frac{2}{x^2} N_i N_j dx \right) u_i = N_j \frac{du}{dx} \Big|_{x=x_i}^{x \rightarrow \infty} \quad (2.3.44)$$

A matriz de rigidez elementar é dada pela expressão abaixo:

$$K_{lm}^e = \int_{\Omega^e} \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} + \frac{2}{x^2} N_i N_j dx \quad (2.3.45)$$

onde, para $e=1$, $\Omega^e=[0.8,0.9]$ e, para $e=2$, $\Omega^e=[0.9,1]$. As integrais, para os elementos resultam:

$$K_{lm}^1 = \begin{bmatrix} 10.0981 & -9.9538 \\ -9.9538 & 10.0872 \end{bmatrix} \quad e \quad K_{lm}^2 = \begin{bmatrix} 10.6646 & -10.2424 \\ -10.2424 & 10.0981 \end{bmatrix} \quad (2.3.46)$$

$$K_{lm}^i = \begin{bmatrix} 1.71481 & -1.93774 & 0.77922 \\ -1.93774 & 6.6383 & -4.19728 \\ 0.77922 & -4.19728 & 4.05194 \end{bmatrix} \quad (2.3.47)$$

Resolvendo-se o sistema linear obtido pela superposição das matrizes elementares, obtém-se os bons resultados abaixo.

Nó	Coordenada	Valor Calculado	Valor Exato	Erro Relativo
1	0.80	1.17129	1.250	6.297%
2	0.90	1.03125	1.111	3.136%
3	1.00	0.95115	1.000	4.885%
4	2.00	0.46948	0.500	6.104%
5	3.00	0.31850	0.333	4.354%

Tabela 2.2: Valores encontrados e exatos

Em seguida deseja-se resolver o mesmo problema utilizando-se um EI de decaimento recíproco de grau quadrático posicionado nas mesmas coordenadas que o elemento anterior. As funções de forma para este elemento são:

$$N_1^i = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{5x}{2} + 3 \right) \left(\frac{1}{x^2} \right) \quad (2.3.48.a)$$

$$N_2^i = (-x^2 + 4x - 3) \left(\frac{4}{x^2} \right) \quad (2.3.48.b)$$

$$N_3^I = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{3x}{2} + 1 \right) \left(\frac{9}{x^2} \right) \quad (2.3.48.c)$$

onde escolheu-se a constante de decaimento como $n=2$.

A comparação entre as funções de decaimento recíproco e as de decaimento exponencial é interessante. Quando integrada, a matriz de rigidez para este elemento resulta:

$$K_{lm}^I = \begin{bmatrix} \frac{41}{20} & \frac{-16}{5} & \frac{33}{20} \\ \frac{-16}{5} & \frac{64}{5} & \frac{-48}{5} \\ \frac{33}{20} & \frac{-48}{5} & \frac{189}{20} \end{bmatrix} \quad (2.3.49)$$

O sistema global obtido por superposição difere um pouco do anterior e, quando resolvido, fornece:

Nó	Coordenada	Valor Calculado	Valor Exato	Erro Relativo
1	0.80	1.17536	1.250	5.971%
2	0.90	1.06532	1.111	4.120%
3	1.00	0.95550	1.000	4.450%
4	2.00	0.47775	0.500	4.450%
5	3.00	0.31850	0.333	4.440%

Tabela 2.3: valores encontrados e exatos

o que é algo melhor que o elemento exponencial. Interessante notar que o erro relativo se estabiliza para os nós do elemento infinito.

2.4 Casos Dinâmicos e EI's de Decaimento

Nesta seção inicia-se o tratamento de problemas dinâmicos através de EI's. Os problemas tratados serão basicamente do tipo uni e bidimensionais e a generalização para três dimensões é, segundo Bettles [1], levada a termo sem dificuldades.

Ainda que nenhum exemplo seja dado explicitamente no que se segue, o desenvolvimento da teoria é mais simples pois utiliza-se o que foi explicado no sub-capítulo anterior.

Deixa-se claro, desde o início, que ainda não foi reportado pela literatura nenhum caso de EI aplicado a problemas verdadeiramente transientes [1]. Os maiores avanços estão concentrados principalmente na aplicação de EI's a casos periódicos esperando-se que os transientes possam ser obtidos via análise de Fourier.

O primeiro EI de decaimento periódico foi desenvolvido por Bettess/Zienkiewicz [3] em 1980, imediatamente após o primeiro EI aplicado para casos estáticos e visava a solução de problemas exteriores governados pela equação de Helmholtz:

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \quad (2.4.1)$$

tais como difração e refração de onda.

Em problemas estáticos é necessário que as funções de forma representem (ao menos aproximadamente) o padrão de decaimento da função que se quer aproximar. Usualmente este é do tipo exponencial (com argumento real) ou $1/r$, por exemplo.

Entretanto, em problemas periódicos, o comportamento a simular é o fenômeno ondulatório de uma perturbação que viaja em direção ao infinito e decai gradualmente (por exemplo uma função do tipo seno ou cosseno amortecidos). Este fenômeno pode ser representado por uma função de forma com as seguintes características:

- Uma função de forma de elementos finitos
- Uma função de decaimento semelhante a usada nos casos estáticos.
- Uma função oscilatória para simular o comportamento de onda.

Ou seja, por funções de forma dadas por:

$$N_i(\epsilon, \eta) = P_i(\epsilon, \eta) F_i(\epsilon) \exp(i k s) \quad (2.4.2)$$

onde se assume que o decaimento ocorra na coordenada diretamente relacionada com ϵ , ou seja, F_i é apenas função desta coordenada. As derivadas das funções de forma resultam:

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_i}{\partial \epsilon} &= \frac{\partial P_i}{\partial \epsilon} F_i \exp(iks) + P_i \frac{\partial F_i}{\partial \epsilon} \exp(iks) + ik P_i F_i \frac{\partial s}{\partial \epsilon} \exp(iks) \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} &= \frac{\partial P_i}{\partial \eta} F_i \exp(iks)\end{aligned}\tag{2.4.3}$$

onde supõe-se que “s” seja a coordenada de decaimento (usualmente radial). Esta é diretamente relacionada com ϵ pela seguinte definição:

$$\frac{\partial s}{\partial \epsilon} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \epsilon}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \epsilon}\right)^2}.\tag{2.4.4}$$

A coordenada s , que tem a mesma métrica que o sistema original deve ser introduzida porque o número de onda é uma propriedade fundamental do problema tratado e se refere ao sistema não normalizado.

2.4.1 Integração Numérica e EI's de Decaimento Dinâmicos

Pelo que foi exposto anteriormente, o processo de geração de funções de forma para o caso dinâmico é muito próximo daquele utilizado para o caso estático. Infelizmente os esquemas tradicionais de integração numérica são muito difíceis de serem aplicados para este caso em virtude da componente de onda no integrando.

Um esquema de integração alternativo foi desenvolvido para o caso de EI's de decaimento periódicos. Este esquema está diretamente relacionado com o valor numérico da integral:

$$I = \int_0^{\infty} f(x) \exp[x(-a + ib)] dx\tag{2.4.5}$$

Evidentemente o limite inferior da integral pode ser um valor diferente de zero mas isto pode ser facilmente acomodado por uma mudança apropriada de variáveis. A constante “a” depende sobretudo da taxa de decaimento escolhida e o valor de “b” depende usualmente do número de onda e, portanto, da frequência do sistema. Problemas com múltiplos números de onda serão tratados adiante.

Deseja-se, portanto, obter uma fórmula do tipo:

$$\int_0^{\infty} f(x) \exp[x(-a + ib)] dx = \sum_{j=1}^n w_j f(x = x_j) \quad (2.4.6)$$

onde “n” é o número de pontos de integração escolhidos, $\{w_j\}$ e $\{x_j\}$ são, respectivamente, pesos e coordenadas de integração. As coordenadas de integração são escolhidas de tal maneira a evitar valores nulos tanto na parte real quanto na imaginária de $\exp(i\omega t)$. Assim:

$$x_j = \frac{(2j+1)\pi}{4b} \quad (2.4.7)$$

Quanto aos pesos de integração, imagine-se inicialmente a expansão de $f(x)$ em termos de polinômios de Lagrange:

$$f(x) \approx f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + \dots + f(x_n)L_n(x), \quad (2.4.8)$$

que pode ser colocado na forma:

$$f(x) \approx \left\{ \begin{matrix} f(x) & f(x) & \dots & f(x) \end{matrix} \right\} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ x^{n-1} \end{matrix} \right\} \quad (2.4.9)$$

onde os coeficientes a_{ij} são obtidos resolvendo-se o sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4.10)$$

onde “T” indica o transposto da matriz. Assim:

$$\int_0^{\infty} f(x) \exp[x(-a + ib)] dx \approx \int_0^{\infty} \{f\}^T [A] \{x\} \exp[x(-a + ib)] dx \quad (2.4.11)$$

e, como $\{f\}$ e $[A]$ são, a princípio, termos constantes, tem-se:

$$\int_0^{\infty} f(x) \exp[x(-a + ib)] dx \approx \{f\}^T [A] \int_0^{\infty} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ x^{n-1} \end{Bmatrix} \exp[x(-a + ib)] dx \quad (2.4.12)$$

No entanto sabe-se que:

$$\int_0^{\infty} x^m \exp[x(-a + ib)] dx = \left(\frac{a + ib}{a^2 + b^2} \right)^{m+1} m! \quad (2.4.13)$$

e, em consequência, o conjunto de pesos de integração é dado por:

$$\{w_j\} = [A]\{X\} = [A] \begin{Bmatrix} \left(\frac{a + ib}{a^2 + b^2} \right) \\ 2 \left(\frac{a + ib}{a^2 + b^2} \right)^2 \\ \vdots \\ n! \left(\frac{a + ib}{a^2 + b^2} \right)^n \end{Bmatrix} \quad (2.4.14)$$

Ressalta-se que este esquema de integração fornece resultados exatos sempre que, dados $2n+1$ pontos de integração, $f(x)$ for uma polinomial de grau n pois, neste caso, $f(x)$ é exatamente representada pelo conjunto de polinômios de Lagrange.

Entretanto, para um número sucessivamente maior de pontos de integração, o sistema (2.4.10) se torna mal condicionado principalmente na região de baixa frequência (casos em que $b \ll a$), o que resulta em imprecisões no caso do uso de elementos de grau progressivamente mais elevado. Este ponto será discutido oportunamente nos capítulos seguintes.

2.5 Elementos de Mapeamento no Caso Estático

Um grande número de problemas comuns à física matemática e à engenharia tem, associados a seus operadores, funções de Green cujo comportamento básico é o decaimento na forma

$\frac{1}{R}$ onde R é uma direção radial e L é uma função característica do problema (que pode, inclusive, ser racional).

Por exemplo, considere a equação de Laplace em três dimensões:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0 \quad (2.5.1)$$

tem, como função de Green:

$$G(r) = \frac{L}{r} \quad (2.5.2)$$

onde L é um comprimento característico do problema. Além disso, conforme verificou-se nos exemplos anteriores, a melhor precisão conseguida pelos EI's de decaimento exponencial está naquela classe de problemas governados por um decaimento também do tipo exponencial.

A técnica de mapeamento³ é uma ferramenta amplamente usada tanto no MEF como no MEC, razão pela qual ela será extensivamente analisada para este tipo de elemento.

A sua idéia básica consiste em relacionar um domínio inicial, infinito, a um outro, normalizado e finito por meio de uma expansão em termos de funções racionais.

Uma forma de mapeamento, sugerida por Zienkiewicz [1], é o relacionamento dos dois domínios por meio da expressão:

$$x(\epsilon) = \tilde{N}_0(\epsilon) x_0 + \tilde{N}_2(\epsilon) x_2 \quad (2.5.3)$$

onde

$$\tilde{N}_0(\epsilon) = \frac{-\epsilon}{1-\epsilon} \quad \text{e} \quad \tilde{N}_2(\epsilon) = 1 + \frac{\epsilon}{1-\epsilon} \quad (2.5.4)$$

O ponto x_1 , onde tem início o elemento, corresponde a $\epsilon = -1$ e é possível defini-lo como qualquer ponto no intervalo entre x_0 e x_2 . Isto é possível expressando-se x_1 por meio de uma grandeza auxiliar, γ , variando de 0 a 1:

³ Por mapeamento entenda-se relacionar um domínio inicial complexo a outro, de forma mais simples.

$$x_1 = \gamma x_2 + (1 - \gamma) x_0. \quad (2.5.4)$$

Por conseguinte admite-se, em se tratando de elementos de mapeamento, que o nó intermediário x_1 reside a meio caminho entre x_0 e x_2 , o que resulta diretamente em $\gamma=1/2$. Para o mapeamento anterior, tem-se:

$$x(\epsilon) = (2x_1 - x_2)\tilde{N}_0(\epsilon) + x_2\tilde{N}_2(\epsilon) \quad (2.5.5)$$

Um outra implicação importante desta condição nos casos dinâmicos é que, para o elemento infinito de mapeamento, as suas dimensões podem tornar-se bastante grandes.

Por exemplo, nos casos em que deseja-se um grande número de elementos finitos entre os pontos x_0 e x_1 , o ponto x_2 pode afastar-se muito da origem do elemento resultando, algumas vezes, em mal condicionamento das matrizes envolvidas.

2.5.1 O Problema da Interpolação

A técnica de mapeamento por meio de funções racionais é extensivamente utilizada da teoria de EI's, razão pela qual ela será agora detalhada. Inicia-se com uma formulação geral e, em seguida, particulariza-se para o caso de elementos infinitos.

Imagine-se inicialmente que se deseja interpolar função que se comporta segundo:

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} \quad (2.5.6)$$

onde $f(x) \rightarrow \infty$ sempre que $x \rightarrow \infty$. Além disso impõe-se que $f(x)$ seja inversível e que o limite da função $f(x)$ tenda ao infinito a medida em que x tenda a b .

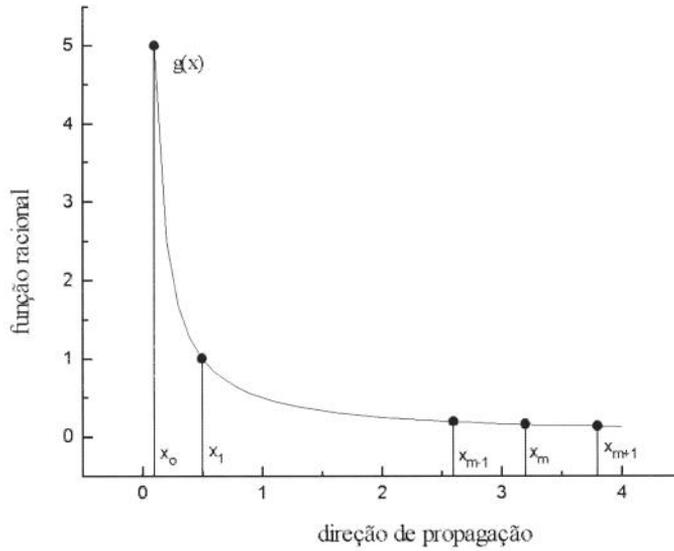


Figura 2.5: Interpolação de uma função decrescente

Suponha-se que se deseja o valor de $f(x)$ em $n+m+1$ pontos igualmente espaçados $\{x_i, i=0, 1, \dots, n+m\}$ dentro do intervalo $[a, b]$, de maneira que $x_{i+1} - x_i = h$.

Dessa forma desenha-se o seguinte esquema de interpolação: encontrar uma dada função racional $R_{n,m}(x)$ definida por

$$R_{n,m}(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \quad \text{com } (n \geq 0, m \geq 1) \quad (2.5.7)$$

e onde $P_n(x)$ e $Q_m(x)$ sejam polinomiais de graus n e m e que, por definição:

$$R_{n,m}(x_i) = f(x_i) \quad (2.5.8)$$

Sem perda de generalidade, pode-se escolher $m=1$ e assim:

$$R_{n,1}(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n}{b_0 + x} \quad (2.5.9)$$

e, em seguida, levando-se em conta (2.5.8) e (2.5.9), o sistema abaixo é obtido:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_n x_i^n = f(x_i) & (x_i + b) \\ & i = 0, 1, 2, \dots, n \\ b_0 + x_i = 0 & i = n+1 \end{cases} \quad (2.5.10)$$

de onde se encontra:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_n x_i^n = f(x_i) & (x_i - x_{n+1}) \\ & i = 0, 1, 2, \dots, n \\ b_0 = x_{n+1} & i = n+1 \end{cases} \quad (2.5.11)$$

Os coeficientes a_i 's podem agora ser obtidos quando o restante do sistema for resolvido. A matriz dos coeficientes deste sistema é não-nula visto ser uma matriz clássica de Vandermonde:

$$W(x_0, x_1, \dots, x_n) = \prod_{0 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j) \quad (2.5.12)$$

e, conseqüentemente, o problema de interpolação tem solução única. As funções de interpolação $R_{n,1}(x)$ podem ser representadas como:

$$R_{n,1}(x) = \sum_{j=1}^n f(x_j) M_j(x) \quad (2.5.13)$$

As funções $M_j(x)$ são funções racionais e escolhidas de tal maneira que:

$$M_j(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases} \quad (2.5.14)$$

ou seja:

$$M_j(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \dots (x - x_n)(x_j - x_{n+1})}{(x - x_{n+1})(x_j - x_0)(x_j - x_1) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_n)} \quad (2.5.15)$$

e obtém-se uma expressão geral de interpolação para este caso.

Deseja-se, agora, introduzir o uso das coordenadas normalizadas abaixo:

$$\varepsilon(x) = \frac{2x - (x_{n+1} + x_0)}{x_{n+1} - x_0} \Rightarrow x(\varepsilon) = \frac{x_{n+1} + x_0 - (x_{n+1} - x_0) \varepsilon}{2} \quad (2.5.16)$$

e, levando-se em conta que:

$$\varepsilon_1 = \frac{2x_1 - (x_{n+1} + x_0)}{x_{n+1} - x_0} \quad \text{e} \quad \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_i}{\varepsilon_j - \varepsilon_i} \quad (2.5.17)$$

pode-se obter a seguinte expressão para $M_j(\varepsilon)$:

$$M_j(\varepsilon) = \frac{(1 - \varepsilon_j)(\varepsilon_0 - \varepsilon)(\varepsilon_1 - \varepsilon) \dots (\varepsilon_{j-1} - \varepsilon)(\varepsilon_{j+1} - \varepsilon) \dots (\varepsilon_n - \varepsilon)}{(1 - \varepsilon)(\varepsilon_0 - \varepsilon_j)(\varepsilon_1 - \varepsilon_j) \dots (\varepsilon_{j-1} - \varepsilon_j)(\varepsilon_{j+1} - \varepsilon_j) \dots (\varepsilon_n - \varepsilon_j)} \quad (2.5.18)$$

Assim, para $n=0$, tem-se:

$$M_0(\varepsilon) = \frac{2}{1 - \varepsilon} \quad (2.5.19)$$

e, para $n=1$:

$$M_1(\varepsilon) = \frac{-2}{1 - \varepsilon} \quad \text{e} \quad M_2(\varepsilon) = \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \quad (2.5.20)$$

Retornando, agora, à função original $f(x)$ e lembrando-se do fato anterior que $f(x) \rightarrow \infty$ sempre que $x \rightarrow \infty$ pode-se aplicar os resultados anteriores para substituir $f(x)$ por sua função interpoladora $R_{n,1}(x)$. Uma vez que $f(x)$ é inversível pode-se obter $x(f)$ e, dessa forma, obtêm-se funções para a descrição geométrica do EI.

Pode-se, desta forma, interpolar a função de interesse dentro do elemento por meio de funções de forma padrão e realizar a descrição geométrica do elemento por meio da técnica descrita acima. Por exemplo, considere, o elemento infinito abaixo:

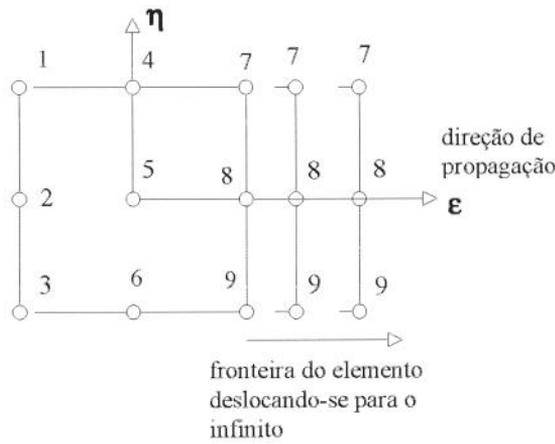


Figura 2.6: deslocamento da fronteira do elemento infinito

Nele, os nós (1...9) estão dispostos no domínio normalizado $\epsilon \times \eta$ e a função de interesse pode ser interpolada dentro do elemento por meio das funções de forma normais de elementos finitos:

$$u(\epsilon, \eta) = \sum_{i=1}^9 P_i(\epsilon, \eta) u_i \quad (2.5.21)$$

mas, para a descrição geométrica do elemento na coordenada de decaimento (ϵ) utiliza-se as funções $M(\epsilon)$ descritas acima. Tem-se, então, para a geometria do elemento:

$$\begin{aligned} x(\epsilon, \eta) &= \sum_{i=1}^6 N_i(\eta) M_i(\epsilon) x_i \\ y(\epsilon, \eta) &= \sum_{i=1}^6 N_i(\eta) M_i(\epsilon) y_i \end{aligned} \quad (2.5.22)$$

onde o conjunto $N_i(\epsilon)$ é composto de funções de forma padrões de EF.

Necessita-se apenas de 6 funções uma vez que as funções de mapeamento para os nós que se estendem ao infinito não necessitam ser calculadas (como pode-se ver no exemplo seguinte) para os casos em que a função-resposta tem um decaimento até zero no infinito.

Estas funções são, também, difíceis de definir e manipular. Os EI's de mapeamento para o caso multidimensional serão analisados em outra seção.

Pelo que foi exposto verifica-se que, em se tratando de EI's de mapeamento, a única diferença em relação ao cálculo padrão com EF's está na nova definição das funções de mapeamento o que, em outras palavras, quer dizer que o determinante Jacobiano⁴ deve ser calculado de modo diferente daquele usual em EF's.

2.5.2 Funções de Mapeamento Unidimensionais

Esta seção tem a função de apenas resumir o que foi exposto na anterior. Para o caso unidimensional, pode-se utilizar a expressão seguinte para relacionar o domínio infinito com aquele normalizado.

Assim, para um EI unidimensional que possui 'n' nós no sistema normalizado é necessário definir 'n-1' funções de mapeamento do tipo $M_i(\epsilon)$ uma vez que a função referente ao último nó não é necessária. Portanto:

$$x(\epsilon) = \sum_{i=1}^{n-1} M_i(\epsilon) x_i \quad (2.5.23)$$

As funções $M_i(\epsilon)$ podem, então, ser tabeladas em função dos nós do elemento infinito. Por comparação são apresentadas também as funções de forma do elemento infinito correspondente. Observa-se que as funções de mapeamento para os nós no infinito não são definidas.

Nó	ϵ_i	$P_i(\epsilon)$	$P_{i,\epsilon}$	$M_i(\epsilon)$	$M_{i,\epsilon}$
1	-1	$\frac{1-\epsilon}{2}$	-1/2	$\frac{2}{(1-\epsilon)}$	$\frac{2}{(1-\epsilon)^2}$
2	1	$\frac{1+\epsilon}{2}$	1/2	não definida	não definida

Tabela 2.4: Mapeamento para o caso 1D para o elemento normalizado linear

⁴O determinante Jacobiano associa as derivadas de uma função em um sistema de coordenadas com as derivadas da mesma função em outro sistema. Para uma descrição detalhada da aplicação do determinante no MEF, consultar Zienkiewicz [46].

Nó	ϵ_i	$P_i(\epsilon)$	$P_{i,\epsilon}$	$M_i(\epsilon)$	$M_{i,\epsilon}$
1	-1	$\frac{\epsilon}{2}(\epsilon - 1)$	$\epsilon - \frac{1}{2}$	$\frac{-2\epsilon}{(1 - \epsilon)}$	$\frac{-2}{(1 - \epsilon)^2}$
2	0	$(1 + \epsilon)(1 - \epsilon)$	-2ϵ	$\frac{2\epsilon}{(1 - \epsilon)}$	$\frac{2}{(1 - \epsilon)^2}$
3	1	$\frac{\epsilon}{2}(\epsilon + 1)$	$\epsilon + \frac{1}{2}$	não definida	não definida

Tabela 2.5: Mapeamento para o caso 1D para o elemento normalizado quadrático

2.5.3 Integração Numérica e E.I.'s de Mapeamento:

A utilização de EI's de mapeamento está relacionada à integração numérica de singularidades. Seja o problema de valor de contorno abaixo:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{2}{x^2} u = 0 \quad (2.5.54)$$

com as condições de contorno associadas:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{du}{dx}(1) = -2 \quad (2.5.25)$$

Multiplicando a equação pela função de ponderação $w(x)$ e em seguida integrando por partes chega-se a dita formulação fraca do problema de valor de contorno:

$$\int_{\Omega} \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} + \frac{2}{x^2} w u \, dx = w \frac{du}{dx} \Big|_{x=x_i}^{x=x_f} \quad (2.5.26)$$

Aplicando-se o método de Galerkin e a forma de interpolação utilizada nos exemplos anteriores chega-se a:

$$\left(\int_{\Omega} \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} + \frac{2}{x^2} N_i N_j \, dx \right) u_i = N_j \frac{du}{dx} \Big|_{x=x_i}^{x=x_f} \quad (2.5.27)$$

Imagina-se que se deseja obter a matriz de rigidez para um EI de mapeamento quadrático posicionado nos pontos $[x_1, x_2, \infty]$. A técnica de mapeamento consiste em admitir que entre x e ϵ (variável de mapeamento) existe uma relação do tipo:

$$x(\epsilon) = \sum_{i=1}^2 M_i(\epsilon) x_i \quad (2.5.28)$$

onde as funções $M_i(\epsilon)$ são dadas na tabela 2.1. Assim:

$$x(\epsilon) = \frac{-2\epsilon}{1-\epsilon} x_1 + \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} x_2 \quad (2.5.29)$$

ou seja:

$$-\frac{dx}{d\epsilon} = \frac{2h}{(1-\epsilon)^2} \Rightarrow \frac{d\epsilon}{dx} = \frac{(1-\epsilon)^2}{2h} \quad (2.5.30)$$

onde h é o comprimento do intervalo $[x_1, x_2]$. A matriz de rigidez do EI pode ser escrita em termos da coordenada normalizada como:

$$K_{lm} = \int_{-1}^1 \frac{dN_i}{d\epsilon} \frac{dN_j}{d\epsilon} \left(\frac{d\epsilon}{dx} \right)^2 + \frac{2}{x^2} N_i N_j \frac{dx}{d\epsilon} d\epsilon \quad (2.5.31)$$

Para se ilustrar a natureza da integral acima considera-se apenas o termo K_{11} da matriz do elemento, onde a função de forma é dada por:

$$N_1(\epsilon) = \frac{\epsilon}{2}(\epsilon - 1) \quad (2.5.32)$$

ou seja:

$$K_{11}(\epsilon) = \int_{-1}^1 \left(\epsilon - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{\epsilon^2 \left(\epsilon - \frac{1}{2} \right)^2 h}{[x_2(1+\epsilon) - 2\epsilon x_1]} dx \quad (2.5.33)$$

Isto indica que nenhuma singularidade é encontrada em $\epsilon = 1$ e a integral tem, assim, um valor finito. Para o caso em que $x_1=1$ e $x_2=2$ tem-se:

$$K_{11}(\epsilon) = \int_{-1}^1 \frac{1 - 4\epsilon + 5\epsilon^2 - 2\epsilon^3 + \epsilon^4}{4} d\epsilon = \frac{43}{30}. \quad (2.5.34)$$

Sugere-se, portanto, que para problemas onde a função de Green tem um comportamento do tipo $1/r$, nenhuma singularidade é encontrada na formulação fraca e, conseqüentemente, os pesos e coordenadas normais de Gauss-Legendre podem ser utilizados.

Para problemas onde o decaimento da função de Green tem decaimento do tipo $1/r^2$, novos tipos de EI's de mapeamento podem ser criados para evitar a singularidade, por exemplo, a introdução de funções de mapeamento que se comportam segundo:

$$M(\epsilon) = \frac{f(\epsilon)}{(1-\epsilon)^2} \quad (2.5.35)$$

onde $f(\epsilon)$ é uma função característica.

Ainda que nenhum resultado deste tipo tenha sido reportado na literatura, o procedimento, segundo Bettess [2], permanece válido.

2.5.4 Um Exemplo com Elementos Infinitos de Mapeamento:

Este exemplo tem a função de deixar claros os principais pontos relacionados aos elementos infinitos de mapeamento. Considere o seguinte problema de valor de contorno:

$$\frac{d^2u}{dx^2} - u = -\frac{2}{\exp(u)} \quad (2.5.36)$$

com as condições de contorno:

$$\frac{du}{dx}(1) = -1.36788 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = 0 \quad (2.5.37)$$

Métodos analíticos de resolução fornecem:

$$u(x) = \frac{x + e + 1}{\exp(x)} \quad (2.5.38)$$

onde “e” é a base dos logaritmos naturais.

Deseja-se, portanto, tentar uma solução aproximada para o problema utilizando o que foi exposto anteriormente com um EI de mapeamento quadrático posicionado em $[1,2,\infty]$. A formulação fraca para o problema acima é:

$$\int_{\Omega} \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} + wu \, dx = w \frac{du}{dx} \Big|_{x=x_i}^{x=x_f} + \int_{\Omega} w \frac{2}{\exp(x)} \, dx. \quad (2.5.39)$$

Aplicando o método de Galerkin chega-se ao seguinte sistema matricial:

$$\left(\int_{\Omega} \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} + N_i N_j \, dx \right) u_i = N_j \frac{du}{dx} \Big|_{x=x_i}^{x=x_f} + \int_{\Omega} N_j \frac{2}{\exp(x)} \, dx \quad (2.5.40)$$

e introduzindo a coordenada normalizada ϵ , a matriz de rigidez do problema resulta:

$$K_{lm}^i = \int_{-1}^{+1} \frac{dN_i}{d\epsilon} \frac{dN_j}{d\epsilon} \left(\frac{d\epsilon}{dx} \right)^2 + N_i N_j \frac{dx}{d\epsilon} \, d\epsilon \quad (2.5.41)$$

onde:

$$x(\epsilon) = \frac{-2}{(1-\epsilon)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{d\epsilon} = \frac{2}{(1-\epsilon)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\epsilon}{dx} = \frac{(1-\epsilon)^2}{2} \quad (2.5.42)$$

ou seja:

$$K_{lm}^i = \int_{-1}^{+1} \frac{dN_i}{d\epsilon} \frac{dN_j}{d\epsilon} \frac{(1-\epsilon)^2}{2} + 2 \frac{N_i N_j}{(1-\epsilon)^2} \, d\epsilon \quad (2.5.43)$$

As funções de forma são as mesmas do caso finito:

$$\begin{aligned} N_1(\epsilon) &= \frac{\epsilon}{2}(\epsilon - 1) \\ N_2(\epsilon) &= (1 + \epsilon)(1 - \epsilon) \end{aligned} \quad (2.5.44)$$

Após a integração utilizando pesos e coordenadas normais de Gauss, obtém-se o sistema:

$$\begin{bmatrix} \frac{28}{15} & \frac{-12}{15} \\ \frac{-12}{15} & \frac{112}{15} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.74595 \\ 0.249732 \end{Bmatrix} \quad (2.5.45)$$

E resolvendo-se para u_1 e u_2 obtém-se a tabela abaixo.

Nó	coordenada	valor calculado	valor aproximado	erro relativo
1	1.00	1.73588	1.6674	4.10%
2	2.00	0.67389	0.5699	18.24%

Tabela 2.6: Valores encontrados e exatos

Para problemas onde a solução esperada decai com $1/r$ os EI's de mapeamento fornecem, na maior parte dos casos, uma precisão melhor que os EI's de decaimento. Isto ficará evidente no próximo capítulo onde problemas envolvendo casos dinâmicos unidimensionais serão analisados.

2.5.5 EI's de Mapeamento em Domínios Multidimensionais

Em domínios multidimensionais (particularmente em duas dimensões) o caso mais comum encontrado é o de ter-se um elemento que é infinito em apenas uma direção, sendo as outras dimensões finitas. Muito raramente encontra-se elementos que se estendem para o infinito em duas dimensões.

Não obstante, para todos os casos de EI's multidimensionais, a clássica divisão entre elementos lagrangeanos e do tipo "serendipity" ainda é válida. Ambos os casos serão analisados nesta seção com ênfase no caso bidimensional.

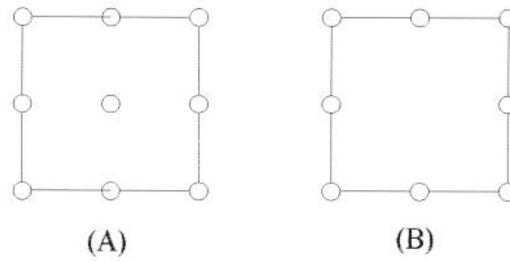


Figura 2.7: Elementos finitos bidimensionais quadráticos:
(a) lagrangeano e (b) serendipity

2.5.5.1 Elementos Lagrangeanos: Decaimento em Uma Direção

Uma vez que a classe de elementos lagrangeanos é a mais simples entre as duas, os elementos infinitos podem ser facilmente estendidos para duas ou três dimensões.

Em problemas bidimensionais as funções de mapeamento para o elemento são obtidas pela multiplicação das funções de mapeamento unidimensionais na coordenada ϵ (que é tomada como sendo a de decaimento) e a função de forma polinomial usual para a direção η . Ou seja:

$$M_{ij}^{2D}(\epsilon, \eta) = M_i^{1D}(\epsilon) P_j^{1D}(\eta) \tag{2.5.46}$$

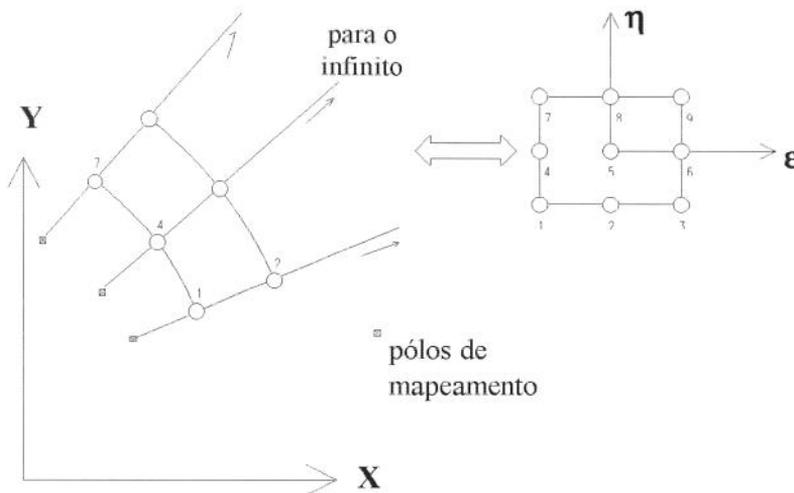


Figura 2.8: Exemplo de mapeamento para um elemento bidimensional

2.5.5.2 Elementos Lagrangeanos: Decaimento em Duas ou Mais Direções

Embora decaimento em ambas as dimensões seja algo raro, as funções de forma para elementos do tipo lagrangeano podem ser facilmente obtidas pela multiplicação cruzada de funções de mapeamento unidimensionais nas coordenadas ϵ e η . Ou seja:

$$M_{ij}^{2D}(\epsilon, \eta) = M_i^{1D}(\epsilon) M_j^{1D}(\eta). \quad (2.5.47)$$

Assim, para um elemento bidimensional de 4 nós, apenas uma função de mapeamento é necessária. Esta é dada por:

$$\begin{aligned} M_{11}^{2D} &= M_1^{1D}(\epsilon) M_1^{1D}(\eta) = \frac{4}{(1-\epsilon)(1-\eta)} \\ \frac{\partial M_{11}^{2D}}{\partial \epsilon} &= \frac{4}{(1-\epsilon)^2(1-\eta)} \\ \frac{\partial M_{11}^{2D}}{\partial \eta} &= \frac{4}{(1-\epsilon)(1-\eta)^2} \end{aligned} \quad (2.5.48)$$

2.5.5.3 Elementos Tipo “Serendipity”

A maior vantagem no uso de elementos do tipo “serendipity” está em se conseguir aproximadamente a mesma precisão daquela obtida com os elementos lagrangeanos sem, entretanto, incluir os nós internos do elemento [46].

No entanto, apesar da sua maior simplicidade geométrica, as funções de forma e de mapeamento destes elementos são mais complicadas do que aquelas dos elementos do tipo lagrangeano.

Um procedimento formalizado para a obtenção destas funções de forma pode ser visto com clareza em Hugues [19] ao passo que as funções de mapeamento para elementos bidimensional e tridimensional quadrático podem ser vistos em Bettess [1].

2.6 Elementos de Mapeamento no Caso Dinâmico

A maior diferença entre os elementos de decaimento e os de mapeamento, como se viu, reside no desacoplamento, no caso de elementos tipo mapeamento, entre as funções de forma que interpolam a solução procurada dentro do elemento e as funções de mapeamento que fazem a ligação entre o domínio (normalizado) em que a solução é interpolada e o domínio original.

Assim, no caso dinâmico, as funções de mapeamento são as mesmas que as do caso estático e as funções de interpolação dentro do elemento devem se encarregar de incorporar o caráter ondulatório ao modelo, ou seja:

$$N(\epsilon, \eta) = P(\epsilon, \eta) \exp(iks) \quad (2.6.1)$$

onde $P(\epsilon, \eta)$ é a função de interpolação padrão de elementos finitos e $\exp(iks)$ é a parcela oscilatória. A função da variável “s” é a mesma dos elementos do tipo decaimento.

2.6.1 Elementos de Mapeamento em Três Dimensões

Conforme se disse anteriormente, uma grande parte dos problemas em três dimensões tem soluções que se comportam aproximadamente como $f(r) = 1/r$ e, assim, o mapeamento anteriormente descrito se comporta muito bem [47]. Assim, as funções de forma anteriormente descritas são dadas por (para decaimento em uma direção):

$$x(\epsilon) = \sum M_i(\epsilon) x_i = \frac{A(\epsilon)}{1 - \epsilon} \quad (2.6.2)$$

$$N(\epsilon, \eta) = P(\epsilon, \eta) \exp\left(\frac{ik A(\epsilon)}{1 - \epsilon}\right)$$

Além disso, um importante ponto que deve ser ressaltado é que deve haver continuidade entre as funções de forma de elementos finitos e infinitos. Ou seja, o valor absoluto das funções de forma deve ser igual ao valor absoluto daquela no caso estático e com ângulo de fase igual a zero na interface (definida por $\epsilon = -1$). Assim:

$$N(-1, \eta) = P(-1, \eta) \exp\left(\frac{ik A(\epsilon)}{2}\right) \quad (2.6.3)$$

Assim, para garantir a continuidade, um fator $C(\epsilon)$ deve ser introduzido na função de forma:

$$C(\epsilon) = \exp\left(\frac{-ik A(\epsilon)}{2}\right) \quad (2.6.4)$$

de tal maneira que as funções e suas derivadas se tornam:

$$N(\epsilon, \eta) = P(\epsilon, \eta)C(\epsilon) \exp\left(\frac{ik A(\epsilon)}{1-\epsilon}\right) = P(\epsilon, \eta) \exp\left(\frac{ik A(\epsilon)}{1-\epsilon}\right) \exp\left(\frac{-ik A(\epsilon)}{2}\right) \quad (2.6.5A)$$

$$\frac{\partial N(\epsilon, \eta)}{\partial \epsilon} = C(\epsilon) \exp\left(\frac{ik A(\epsilon)}{1-\epsilon}\right) \left[\frac{\partial P(\epsilon, \eta)}{\partial \epsilon} + \frac{P(\epsilon, \eta)ikA(\epsilon)}{(1-\epsilon)^2} \right] \quad (2.6.5B)$$

$$\frac{\partial N(\epsilon, \eta)}{\partial \epsilon} = C(\epsilon) \exp\left(\frac{ik A(\epsilon)}{1-\epsilon}\right) \frac{\partial P(\epsilon, \eta)}{\partial \epsilon} \quad (2.6.5C)$$

Evidentemente, a introdução desta constante de continuidade torna as expressões das funções de forma e suas derivadas um pouco mais complicadas mas esta introdução é amplamente justificada por uma maior precisão nos resultados obtidos [1].

2.6.2 Elementos de Mapeamento em Duas Dimensões

Em problemas bidimensionais para domínios exteriores, a solução fundamental para o operador de Helmholtz pode ser descrita como sendo uma combinação de funções de Hankel de ordem zero e funções trigonométricas.

Assim, para pontos distantes do local de excitação, tal solução se comporta aproximadamente como $\cos(kr) + i \sin(kr)$ com magnitude decrescente que decai segundo $r^{1/2}$.

Portanto, para esta classe de problemas bidimensionais, as funções de forma são descritas como anteriormente e previamente multiplicadas por um termo que reflete o comportamento decrescente em magnitude:

$$N(\varepsilon, \eta) = P(\varepsilon, \eta) r^{1/2} \exp(ikr) = P(\varepsilon, \eta) \left(\frac{ik A(\varepsilon)}{1-\varepsilon} \right)^{1/2} \exp\left(\frac{ik A(\varepsilon)}{1-\varepsilon} \right) \quad (2.6.7)$$

Além disso, da mesma forma que no caso tridimensional, deve-se garantir a continuidade entre os elementos finitos e infinitos. A introdução de uma constante, $C(\varepsilon)$, é responsável por este requisito:

$$N(-1, \eta) = C(\varepsilon) P(-1, \eta) \left(\frac{A(\varepsilon)}{2} \right)^{1/2} \exp\left(\frac{ik A(\varepsilon)}{2} \right) \quad (2.6.8)$$

onde:

$$C(\varepsilon) = \left(\frac{2}{A(\varepsilon)} \right)^{1/2} \exp\left(\frac{-ik A(\varepsilon)}{2} \right) \quad (2.6.9)$$

e a função de forma e suas derivadas se tornam:

$$N(\varepsilon, \eta) = P(\varepsilon, \eta) \left(\frac{2A}{A(1-\varepsilon)} \right)^{1/2} \exp\left(\frac{-ikA}{2} \right) \exp\left(\frac{ikA}{1-\varepsilon} \right) \quad (2.6.10A)$$

$$\frac{\partial N(\varepsilon, \eta)}{\partial \varepsilon} = C(\varepsilon) \exp\left(\frac{ikA}{1-\varepsilon} \right) \left[\frac{\partial P}{\partial \varepsilon} + \frac{P}{2} + \pi i A k \frac{1}{(1-\varepsilon)^2} \right] \left(\frac{A}{1-\varepsilon} \right)^{1/2} \quad (2.6.10B)$$

$$\frac{\partial N(\varepsilon, \eta)}{\partial \eta} = C(\varepsilon) \frac{\partial P}{\partial \eta} \left(\frac{A}{1-\varepsilon} \right)^{1/2} \exp\left(\frac{ikA}{1-\varepsilon} \right) \quad (2.6.10C)$$

Para outros problemas cujo comportamento distante não pode mais ser aproximado por esta regra de decrescimento, outras funções de forma “semi-analíticas” podem ser construídas facilmente. Por exemplo, o trabalho de Kumar [22] sugere uma forma de decaimento do tipo $1/r^{1/2}$ para ser incorporado nas funções de forma acima.

2.6.3 Integração Numérica e EI's de Mapeamento Dinâmicos

Para ilustrar o caráter das singularidades que aparecem nas matrizes de EI's de mapeamento dinâmicos estes serão aplicados à solução numérica da equação de Helmholtz em um domínio bidimensional:

$$\nabla^2 u(x, y) + k^2 u(x, y) = f(x, y) \quad (2.6.11)$$

Para este caso a matriz de rigidez é dada por:

$$K_{lm}^e = \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_l}{\partial \epsilon} \frac{\partial N_m}{\partial \epsilon} + \frac{\partial N_l}{\partial \eta} \frac{\partial N_m}{\partial \eta} + k^2 N_l N_m \, d\Omega^e \quad (2.6.12)$$

e lembrando-se que as derivadas das funções de forma para o caso bidimensional podem ser expressas por:

$$\frac{\partial N(\epsilon, \eta)}{\partial \epsilon} = C(\epsilon) \exp\left(\frac{ikA}{1-\epsilon}\right) \left[\frac{\partial P}{\partial \epsilon} + \frac{P}{2(1-\epsilon)^2} + P ikA \frac{1}{(1-\epsilon)^2} \right] \left(\frac{A}{1-\epsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.6.13A)$$

$$\frac{\partial N(\epsilon, \eta)}{\partial \eta} = C(\epsilon) \frac{\partial P}{\partial \eta} \left(\frac{A}{1-\epsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{ikA}{1-\epsilon}\right) \quad (2.6.13B)$$

a expressão para a matriz de rigidez em coordenadas normalizadas (já introduzindo o mapeamento) é dada por uma expressão do tipo:

$$K_{lm}^e = \sum_{j=1}^n \iint_{-1}^{+1} \frac{P_j(\epsilon, \eta)}{(1-\epsilon)^2} \exp\left(\frac{2ikA}{1-\epsilon}\right) d\epsilon \, d\eta \quad (2.6.14)$$

Resta, portanto, desenvolver uma regra de integração tipo quadratura gaussiana, com pesos e coordenadas especiais, que sejam adequados a integrações do tipo:

$$I = \int_{-1}^{+1} \frac{\epsilon^n}{(1-\epsilon)^2} \exp\left(\frac{iB}{1-\epsilon}\right) d\epsilon \quad (2.6.15)$$

A seguinte mudança de variável $\sigma = B/(1-\epsilon)$ transforma a integral acima em:

$$I = \int_{B/2}^{\infty} \frac{1}{B} \left(1 - \frac{B}{\sigma}\right)^n \exp(i\sigma) d\sigma \quad (2.6.16)$$

que inclui um termo do tipo:

$$\int_{B/2}^{\infty} \exp(i\sigma) d\sigma \quad (2.6.17)$$

O resultado da integral acima não pode ser obtido visto que o valor do integrando é um valor indeterminado a medida que σ se aproxima do infinito. Entretanto um caso similar ocorre em um problema unidimensional análogo anteriormente discutido por Medina [26] .

Ele assume uma função de decaimento infinito de forma $\exp(-\gamma + ikd)$ onde γ é um parâmetro de decaimento, “d” é a coordenada do elemento e “k” é o número de onda. No trabalho de Medina, que também será objeto de estudo, considera-se a matriz de rigidez de uma coluna semi-infinita de área transversal constante, dada por:

$$K_{lm} = \int_{x_0}^{\infty} \left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)^2 EA dx \quad (2.6.18)$$

de onde se obtém um termo de rigidez infinita dado por:

$$K = \frac{kEA}{2} \left(i + \frac{\gamma}{kd}\right) \left[1 + \frac{1}{\left(1 - \frac{i\gamma}{kd}\right)^2}\right] \quad (2.6.19)$$

A medida em que o parâmetro de decaimento γ tende a zero, o valor deste termo de rigidez tende a $ikEA$ que, para o problema por ele considerado, fornece a resposta exata.

Neste problema foi assumido (embora implicitamente) que a medida que γ tende a zero o valor da função de forma dado por $\exp(-\gamma + ikd)$ tende a zero no infinito. Embora as razões desta escolha não sejam óbvias, ela proporciona a resposta exata ao problema.

É provável, entretanto, que o mesmo valor limite pode ser imposto a problemas de ordem bi e tridimensionais mas esta é uma hipótese de trabalho que deveria, a princípio, ser analisada com mais cuidado.

Mostra-se, em seguida, que tal escolha fornece a resposta exata ao amortecimento (geométrico) de ondas esféricas embora o caso tridimensional tenha uma solução fundamental mais simples que o correspondente em duas dimensões.

O funcional correspondente à equação de Helmholtz para um problema com geometria esférica é dado por:

$$F = 2\pi \int_{R_1}^{\infty} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 - k^2 u^2 \right] r^2 dr \quad (2.6.20)$$

e se deseja obter a matriz de rigidez utilizando-se apenas uma função de forma dada por:

$$N = \frac{\exp[-\gamma r + ikr]}{r} \quad (2.6.21)$$

A substituição desta função na equação que define o funcional fornece, para o termo de rigidez infinita,

$$K_1^i = 2\pi \left[-ik + \frac{1}{R_1} \right] \exp(-2ikR_1) \quad (2.6.22)$$

quando escolhe-se, à medida em que γ tende a zero, o comportamento assintótico de $\exp(\gamma + ikd)$. Bettess [1] mostra que este termo reproduz exatamente a condição de radiação esperada devido à simetria esférica do problema.

Assim, para a determinação dos pesos de integração, o valor da integral original é dado por:

$$\int_{\frac{B}{2}}^{\infty} \exp(i\sigma) d\sigma = i \exp\left(\frac{iB}{2}\right) \quad (2.6.23)$$

2.6.3.1 Procedimento de Integração

Considere-se que se deseja obter algum tipo de regra de integração para a integral (2.6.16). A integração por partes daquela equação fornece:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \frac{\varepsilon^n}{(1-\varepsilon)^2} \exp\left(\frac{iB}{1-\varepsilon}\right) d\varepsilon &= \sum_{k=0}^n \frac{n!(-1)^k B^{k-1}}{(n-k)! k!} \int_{\frac{B}{2}}^{\infty} \sigma^{-k} \exp(i\sigma) d\sigma \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{n!(-1)^k B^{k-1}}{(n-k)! k!} \text{Tr}(k, \frac{B}{2}) \end{aligned} \quad (2.6.24)$$

onde:

$$\text{Tr}(k, \frac{B}{2}) = \int_{\frac{B}{2}}^{\infty} \sigma^{-k} \exp(i\sigma) d\sigma \quad (2.6.25.a)$$

$$k = 0 \Rightarrow \text{Tr}(0, \frac{B}{2}) = i \exp\left(\frac{iB}{2}\right) \quad (2.6.25.b)$$

$$k = 1 \Rightarrow \text{Tr}(1, \frac{B}{2}) = \int_{\frac{B}{2}}^{\infty} \frac{\exp(i\sigma)}{\sigma} d\sigma \quad (2.6.25.c)$$

$$k > 1 \Rightarrow \text{Tr}(k, \frac{B}{2}) = \frac{\exp(i \frac{B}{2})}{(k-1)!} \sum_{j=1}^{k-1} \left(\frac{i^{k-j-1} (j-1)!}{(\frac{B}{2})^j} + \frac{i^{k-1}}{(k-1)!} \int_{\frac{B}{2}}^{\infty} \frac{\exp(i\sigma)}{\sigma} d\sigma \right) \quad (2.6.25.d)$$

E deseja-se formalizar o processo de integração pela escolha de pesos e coordenadas apropriadas. Isto é resumido nos pontos que se seguem:

- Escolhe-se “n” pontos de integração no intervalo [-1,1). O número de pontos de integração é, geralmente escolhido de forma a ser uma unidade maior que a máxima potência de ϵ que aparece no integrando. Em princípio pode-se utilizar as coordenadas tabeladas do método de Gauss-Legendre.
- Determina-se os coeficientes dos polinômios de Lagrange que interpolam a função $P(\epsilon)$ na equação (2.4.10) utilizando-se o método descrito em [34].
- Para cada ponto de integração, o peso correspondente é dado por:

$$w_j = \sum_{i=1}^n \int_{-1}^{+1} a_{ij} \frac{\epsilon^{i-1}}{(1-\epsilon)^2} \exp\left(\frac{2ikA}{1-\epsilon}\right) d\epsilon \quad (2.6.26)$$

onde a integral é levada a termo utilizando-se as equações (2.6.24) e (2.6.25).

- A integral da equação (2.6.16) é, então, computada diretamente de:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{P(\epsilon)}{(1-\epsilon)^2} \exp\left(\frac{2ikA}{1-\epsilon}\right) d\epsilon \approx \begin{Bmatrix} P(\epsilon_1) \\ P(\epsilon_2) \\ \vdots \\ P(\epsilon_n) \end{Bmatrix}^T \int_{-1}^{+1} \frac{[A]\{\epsilon\}}{(1-\epsilon)^2} \exp\left(\frac{2ikA}{1-\epsilon}\right) d\epsilon = \sum \sum w_j a_k \epsilon_j^{k-1} \quad (2.6.27)$$

Além disso, o conjunto de pesos e coordenadas especiais podem ser calculados no início do programa de elementos finitos e permanecem válidos até que se altere o número de onda independentemente sobre qual EI está-se integrando.

A maior limitação deste método está, novamente, na região de baixa frequência quando os coeficientes dos polinômios de Lagrange se tornam imprecisos devido à falta de condicionamento na matriz definida na equação [1].

3. Aspectos Numéricos de Elementos Infinitos em Modelos Dinâmicos Unidimensionais

3.1 Introdução

Neste capítulo se inicia a avaliação numérica dos elementos infinitos aplicados a sistemas dinâmicos. Embora alguns exemplos tenham sido apresentados no capítulo anterior, estes eram exclusivamente modelos estáticos nos quais os procedimentos para integração numérica eram bem conhecidos e para os quais, inclusive, podiam ser obtidos resultados analíticos nos casos mais simples. Nos exemplos que se seguem os métodos de integração descritos nas seções (2.4.1) e (2.6.3) serão utilizados para a obtenção das matrizes de rigidez dinâmicas.

Muitos problemas estruturais podem ser aproximadamente representados por sistemas unidimensionais ou, pelo menos, com um reduzido número de graus de liberdade. Assim, antes de derivar as equações de movimento para problemas bi e tridimensionais é apropriado investigar casos unidimensionais usando a teoria simplificada da resistência dos materiais. Aspectos qualitativos importantes, podem desta forma, ser estabelecidos e analisados usando modelos simplificados.

Os fenômenos associados à propagação de ondas em meios (visco)-elásticos são de fundamental importância no estudo da interação dinâmica solo-estrutura. Assim, uma série de modelos simples para a obtenção das funções de influência do solo estão disponíveis e serão analisados.

Nos itens seguintes serão estudados basicamente dois modelos distintos para a obtenção das funções de resposta em frequência (FRF's) para o semi-espaco elástico: o modelo exponencial e o modelo linear. Inicialmente obtém-se a equação dinâmica para o fenômeno de propagação de onda em uma coluna semi-infinita de área transversal variável submetida a um carregamento concentrado e que varia senoidalmente. Em seguida procede-se a uma análise semi-

analítica dos fenômenos envolvidos com a propagação de energia nestes modelos baseada na análise matricial de estruturas visando obter bases para uma comparação segura com os resultados obtidos.

Finalmente, os resultados obtidos utilizando elementos finitos e EI's dinâmicos dos dois tipos descritos no capítulo anterior e com vários graus de interpolação são comparados com os resultados analíticos.

3.2 A Coluna Exponencial Semi-Infinita

Inicialmente considera-se o semi-espaço mostrado abaixo. A origem do eixo "x" é colocada na superfície deste semi-espaço e o eixo é admitido como apontando para baixo. Conforme foi mencionado anteriormente, propriedades de amortecimento são ignoradas e o movimento vertical na superfície é denotado por w_c .

Para determinar a resposta $w(x)$ a uma certa distância da superfície, uma coluna prismática representando uma parcela do semi-espaço é examinada. Uma base rígida, suposta de massa desprezível, é colocada na superfície da coluna.

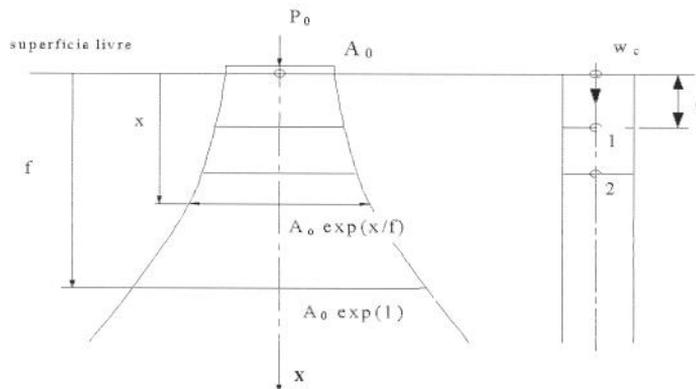


Figura 3.1: Definição da geometria para a coluna representando o semi-espaço elástico

Para examinar qualitativamente a distribuição de deslocamentos ao longo do eixo central devido a aplicação da carga concentrada P_0 , pode-se modelar o semi-espaço como uma coluna semi-infinita de área variável. A forma conforme esta variação da área é levada em conta dá origem a diversos modelos. Graff [1] cita expressões como:

- linear:
$$A(x) = \frac{A_0}{f} x \quad (3.2.1)$$

- cônico:
$$A(x) = \frac{A_0}{f^2} x^2 \quad (3.2.2)$$

- exponencial:
$$A(x) = A_0 \exp\left(\frac{x}{f}\right) \quad (3.2.3)$$

- catenoidal:
$$A(x) = A_0 \cosh^2\left(\frac{x}{f}\right) \quad (3.2.4)$$

Nesta seção será examinado o modelo que surge quando admite-se uma variação exponencial da área transversal com relação a x na forma dada pela equação (3.2.3). Observa-se que, para cada um dos modelos expostos acima, o significado de “ f ” é distinto. No modelo exponencial, ele é definido como sendo a distância para a qual a área transversal é $A_0 \exp(1)$.

Os dois parâmetros (A_0 e f) controlam a forma da coluna: A_0 controla a abertura inicial e o termo f é responsável por uma maior ou menor taxa de abertura. Observa-se que no limite, quanto $f \rightarrow \infty$, a coluna exponencial se reduz à constante.

Assim, para problemas onde as propriedades do semi-espaco elástico variam conforme a distância no eixo vertical, este pode ser modelado como sendo constituído de camadas horizontais, de rigidez e densidade diferentes, assim a coluna pode ser seccionada em diversos elementos de espessura e propriedades variáveis.

A análise de cada um destes elementos pode ser feita seguindo o método tradicional da análise matricial de estruturas ou via elementos finitos. Em primeiro lugar será derivada a matriz de rigidez dinâmica (envolvendo efeitos tanto de massa como rigidez estática) seguindo o método dos deslocamentos virtuais. Resultados para uma coluna finita são apresentados comparando ambos os métodos de solução.

Para a determinação da equação do movimento para a coluna com área variando exponencialmente considera-se a figura seguinte onde o equilíbrio no elemento diferencial de espessura dx é analisado. A expansão em termos de série de Taylor para a área e o campo de tensões é utilizada.

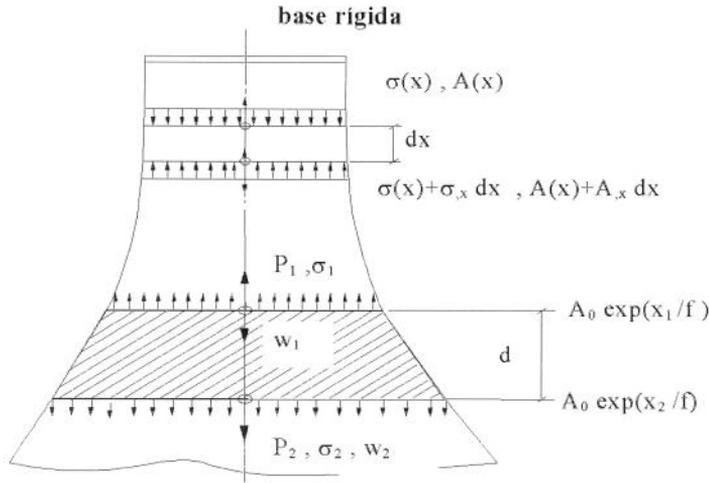


Figura 3.2: Coluna de área variável

Onde “A” é a área transversal, “ σ ” é a amplitude do campo de tensões resultante, “w” é a amplitude do campo de deslocamento e “ ρ ” é a densidade por comprimento do material da coluna. Uma vez que supõe-se a excitação variando harmonicamente, é natural admitir-se que as quantidades desconhecidas variam segundo $\exp(i\omega t)$ e, portanto, apenas a amplitude das grandezas necessita ser levada em conta. Assim, o equilíbrio dinâmico no elemento de comprimento infinitesimal “dz” fornece:

$$\sum F_x = 0 \quad (3.2.5)$$

desde que se incluam ao lado direito da equação as forças de inércia resultantes, ou seja:

$$-\sigma A + \left(\sigma + \frac{d\sigma}{dx} dx \right) \left(A + \frac{dA}{dx} dx \right) + \omega^2 \rho p A \left(A + \frac{1}{2} \frac{dA}{dx} dx \right) = 0. \quad (3.2.6)$$

Onde estas forças de inércia são tomadas no centro do elemento e as tensões e áreas nos extremos. Simplificando a equação (3.2.6) e desprezando-se termos de segunda ordem tem-se:

$$A(x) \frac{d\sigma}{dx} + \sigma(x) \frac{dA}{dx} + \omega^2 \rho p A(x) = 0 \quad (3.2.7)$$

A equação acima é válida seja qual for o tipo de material da coluna. Introduzindo a relação constitutiva para materiais elásticos e lineares (Lei de Hooke) :

$$\sigma(x) = E\varepsilon(x) = E \frac{dw}{dx} \quad (3.2.8)$$

e substituindo na equação (3.2.7) tem-se a relação dinâmica que governa os deslocamentos ao longo de uma coluna semi-infinita com área variável:

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \frac{dw}{dx} + \frac{\omega^2}{c_1^2} w(x) = 0 \quad (3.2.9)$$

onde a velocidade de onda longitudinal, c_1 , é definida como:

$$c_1^2 = \frac{E}{\rho} \quad (3.2.10)$$

Introduzindo agora a expressão que define a variação da área transversal em relação à distância no eixo vertical:

$$A(x) = A_0 \exp\left(\frac{x}{f}\right) \Rightarrow \frac{dA}{dx} = \frac{A_0}{f} \exp\left(\frac{x}{f}\right) \quad (3.2.11)$$

a equação (3.2.9) é transformada em:

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{1}{f} \frac{dw}{dx} + \frac{a_0^2}{f^2} w = 0 \quad (3.2.12)$$

onde a frequência adimensional, a_0 , é definida por:

$$a_0 = \frac{\omega f}{c_1} \quad (3.2.13)$$

Perceber-se-á que a forma (3.2.12) não é a mais indicada para o tratamento do problema via MEF uma vez que o termo contendo a derivada primeira introduz uma não simetria na matriz de rigidez. Evidentemente a equação (3.2.9) pode ser colocada na forma alternativa:

$$\frac{1}{A} \frac{d}{dx} \left(A \frac{dw}{dx} \right) + \frac{\omega^2}{c_1^2} w(x) = 0 \quad (3.2.14)$$

que é a mais apropriada para este tipo de tratamento.

Observa-se que, quando $f \rightarrow \infty$, a expressão (3.2.12) se reduz àquela da propagação de onda unidimensional:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c_1^2} w = 0 \quad (3.2.15)$$

A solução geral da equação (3.2.12) é dada por:

$$w(x) = C_1 \exp(i\gamma_1 x) + C_2 \exp(i\gamma_2 x) \quad (3.2.16)$$

onde:

$$\gamma_1 = \frac{i}{2f} + \frac{i}{2f} \sqrt{1 - 4a_0^2} \quad (3.2.17.a)$$

$$\gamma_2 = \frac{i}{2f} - \frac{i}{2f} \sqrt{1 - 4a_0^2} \quad (3.2.17.b)$$

e “i” é a unidade imaginária. Uma vez que não se considera inicialmente nenhum tipo de amortecimento, as constantes c_1 e a_0 são números reais¹. Assim, analisando tanto γ_1 como γ_2 vê-se que, para $a_0 \leq 0.5$ não existe propagação de onda ao longo do eixo x e o movimento diminui exponencialmente com a profundidade. Para frequências adimensionais maiores que 0.5, a equação (3.2.16) toma a forma:

$$w(x) = C_1 \exp\left(-\frac{x}{2f}\right) \exp\left(-\frac{i\omega x}{c}\right) + C_2 \exp\left(-\frac{x}{2f}\right) \exp\left(+\frac{i\omega x}{c}\right) \quad (3.2.18)$$

onde o termo “c”, velocidade de onda, é dado por:

$$c = \frac{2a_0 c_1}{\sqrt{4a_0^2 - 1}} \quad (3.2.19)$$

O primeiro termo da equação (3.2.18) representa um distúrbio que se propaga na direção positiva do eixo x e com uma diminuição exponencial de amplitude. O outro termo representa

¹As maneiras como introduzir amortecimento em modelos como o que está sendo analisado serão discutidas oportunamente.

um distúrbio que também decai exponencialmente com a profundidade mas que viaja no sentido oposto.

A velocidade de fase c é um fator que depende tanto de a_0 (características geométricas e do meio) e da frequência de excitação ω . Isto significa que uma onda harmônica de frequência ω_d somente se propagará na coluna a uma determinada velocidade C_d .

Considere-se agora um distúrbio que é formado pela superposição de diversos harmônicos e que se propaga em um dado sentido. Como cada harmônico tem uma velocidade de propagação diferente dos outros a forma do distúrbio se distorce conforme ele avança e o movimento é chamado de dispersivo.

No limite, quando $\omega \rightarrow \infty$, então c diminui e converge para c_l e, conseqüentemente, distúrbios formados por harmônicos de frequência mais alta estão menos sujeitos a distorção que os de frequência mais baixa. A frequência especial, abaixo da qual não existe propagação de onda, é chamada de frequência de corte e ocorre unicamente para $a_0=0.5$.

3.2.1 Matriz de Impedância de um Elemento Discreto da Coluna

A matriz de rigidez dinâmica de um elemento da coluna representa uma camada do semi-espaco onde as propriedades são admitidas constantes. Um sistema de coordenadas local (y) é posicionado no elemento hachurado da figura 3.3 e tem origem na interface superior (ponto 1). Logo $x = y + x_1$ e o conjunto é mostrado a seguir.

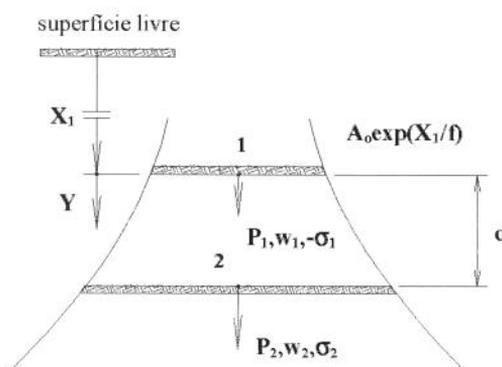


Figura 3.3: Elemento de Coluna

O procedimento para a determinação da matriz de rigidez dinâmica consiste em selecionar adequadamente os coeficientes C_1 e C_2 de tal maneira a satisfazer as condições de contorno na interface dos nós 1 e 2 (onde $y = 0$ e $y = d$). Assim, o deslocamento e tensão no nó 1 pode ser dado por:

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ \sigma_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ iE\gamma_1 & iE\gamma_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} \quad (3.2.20)$$

Expressando analogamente para o nó 2 e eliminando o vetor C_i obtém-se uma matriz de transferência relacionando o estado do nó 2 ao nó 1:

$$\begin{Bmatrix} w_2 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1} \begin{bmatrix} \gamma_2 e^{i\gamma_1 d} - \gamma_1 e^{i\gamma_2 d} & i/E [e^{i\gamma_1 d} - e^{i\gamma_2 d}] \\ iE\gamma_1\gamma_2 [e^{i\gamma_1 d} - e^{i\gamma_2 d}] & \gamma_2 e^{i\gamma_2 d} - \gamma_1 e^{i\gamma_1 d} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \sigma_1 \end{Bmatrix} \quad (3.2.21)$$

que pode ser rearranjada para:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix} = \frac{iE}{e^{i\gamma_1 d} - e^{i\gamma_2 d}} \begin{bmatrix} \gamma_2 e^{i\gamma_1 d} - \gamma_1 e^{i\gamma_2 d} & \gamma_1 - \gamma_2 \\ (\gamma_2 - \gamma_1) e^{i(\gamma_1 + \gamma_2)d} & \gamma_2 e^{i\gamma_1 d} - \gamma_1 e^{i\gamma_2 d} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} \quad (3.2.22)$$

Finalmente, expressando as forças nos nós 1 e 2 em função da tensão:

$$P_1 = -\sigma_1 A_0 \exp\left(\frac{x_1}{f}\right) \quad (3.2.23.a)$$

$$P_2 = \sigma_2 A_0 \exp\left(\frac{x_1 + d}{f}\right) \quad (3.2.23.b)$$

e, como P_1 e σ_1 tem sinais opostos, um sinal negativo é introduzido na equação (3.2.23.a). Assim:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA_0 \exp\left(\frac{x_1}{f}\right)}{f} \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{21} \\ \bar{S}_{12} & \bar{S}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} = [S] \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} \quad (3.2.24)$$

Os termos \bar{S}_{ij} representam o que Wolf [2] chama de matriz de rigidez dinâmica adimensionalizada. Assim:

$$\bar{S}_{11} = if \frac{\gamma_1 \exp(i\gamma_2 d) - \gamma_2 \exp(i\gamma_1 d)}{\exp(i\gamma_1 d) - \exp(i\gamma_2 d)} \quad (3.2.25.a)$$

$$\bar{S}_{12} = \bar{S}_{21} = if \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\exp(i\gamma_1 d) - \exp(i\gamma_2 d)} \quad (3.2.25.b)$$

$$\bar{S}_{22} = if \exp\left(\frac{d}{f}\right) \frac{\gamma_1 \exp(i\gamma_1 d) - \gamma_2 \exp(i\gamma_2 d)}{\exp(i\gamma_1 d) - \exp(i\gamma_2 d)} \quad (3.2.25.c)$$

3.2.2 Matriz de Rigidez para um Elemento Infinito da Coluna

Embora a coluna descrita na seção anterior possa ser modelada por meio dos elementos desenvolvidos, tal discretização não permite que a condição de radiação de Sommerfeld seja satisfeita e, portanto, não pode ser utilizada para modelar apropriadamente o semi-espaço. Assim, um elemento representativo da parte da coluna que se prolonga ao infinito é necessário para que análises realísticas sejam feitas. Para entender o comportamento da equação a medida que o domínio se prolonga até o infinito, a equação (3.2.18) é reproduzida abaixo:

$$w(x) = C_1 \exp\left(-\frac{x}{2f}\right) \exp\left(-\frac{i\omega x}{c}\right) + C_2 \exp\left(-\frac{x}{2f}\right) \exp\left(+\frac{i\omega x}{c}\right) \quad (3.2.26)$$

Esta solução não é identicamente igual a zero, embora tenda a zero no infinito e representa duas ondas distintas se propagando em direções opostas [1]. Admitindo-se que a coluna é semi-infinita, nenhuma onda provém do infinito e, conseqüentemente, a equação acima somente reproduz esta situação se o termo C_2 é escolhido como sendo igual a zero e, portanto:

$$w(x) = C_1 \exp\left(-\frac{x}{2f}\right) \exp\left(-\frac{i\omega x}{c}\right) \quad (3.2.27)$$

Assim, aplicando um deslocamento no topo da coluna, nenhuma onda proveniente do infinito resulta. Selecionando $C_2 = 0$ na equação (3.2.26) tem-se:

$$w(0) = w_1 \quad (3.2.28.a)$$

$$\sigma_1 = iEC_1\gamma_1 \quad (3.2.28.b)$$

Eliminando C_1 de ambas as equações e introduzindo na equação (3.2.23.a) obtém-se a expressão relacionando a força atuando na interface com o deslocamento:

$$P_1 = -iEA_0 \exp\left(\frac{x_1}{f}\right)\gamma_1 w_1 \quad (3.2.29)$$

ou usando o mesmo fator anterior para adimensionalizar o resultado:

$$P_1 = \frac{EA_0}{f} \exp\left(\frac{x_1}{f}\right)\bar{S}_1 w_1 \quad (3.2.30)$$

onde

$$\bar{S}_1 = -i\gamma_1 f = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - 4a_0^2}\right) \quad (3.2.31)$$

Para o caso estático, $a_0 = 0$ e $\bar{S}_1 = 1$. O fator usado para adimensionalizar \bar{S}_1 é, portanto, a rigidez estática da coluna infinita. Para $0 < a_0 \leq 0.5$, um fator real aparece e, para $a_0 > 0.5$, o coeficiente adimensionalizado torna-se complexo. Assim, \bar{S}_1 é separado nas suas partes real e imaginária:

$$\bar{S}_1 = k_1 + ia_0 c_1 \quad (3.2.32)$$

onde o termo k_1 representa um coeficiente de mola e c_1 um termo de amortecimento. Pode-se representar a coluna, então, por uma associação amortecedor-mola apoiados sobre uma base rígida:

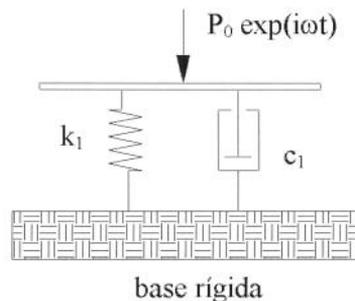


Figura 3.4: Modelo amortecedor-mola

O comportamento de cada uma das grandezas acima em relação à variação de a_0 pode

ser visto no gráfico seguinte:

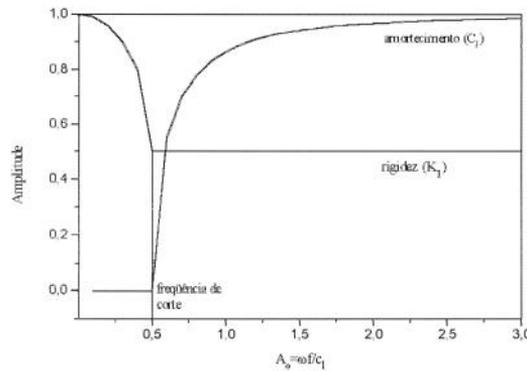


Figura 3.5: Parâmetros obtidos para a coluna exponencial

3.2.2 Taxa de Transmissão de Energia na Coluna Exponencial

O coeficiente de amortecimento c_1 da coluna está presente apesar de nenhum tipo de amortecimento material ter sido incluído. Ele aparece devido simplesmente à variação de área da coluna independente dela ser exponencial, linear, etc e, por isso, ele é chamado de amortecimento geométrico.

Além disso, este coeficiente é uma medida da transmissão de energia através da coluna e é calculada como sendo o produto da parte real da força atuante no ponto considerado e da parte real da velocidade de deslocamento ponderado sobre um período $2\pi/\omega$. Assim, admitindo novamente que todas as grandezas variam segundo $\exp(i\omega t)$, tem-se:

$$T = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \text{Re}[P_1 \exp(i\omega t)] \text{Re}\left[\frac{dw_1}{dt} \exp(i\omega t)\right] dt \quad (3.2.33)$$

Analisando os dois fatores acima tem-se:

$$\text{Re}[P_1 \exp(i\omega t)] = \text{Re}(P_1) \cos(\omega t) - \text{Im}(P_1) \text{sen}(\omega t) \quad (3.2.34.a)$$

$$\text{Re}\left[\frac{dw_1}{dt} \exp(i\omega t)\right] = \text{Re}\left(\frac{dw_1}{dt}\right) \cos(\omega t) - \text{Im}\left(\frac{dw_1}{dt}\right) \text{sen}(\omega t) \quad (3.2.34.b)$$

e substituindo os fatores na fórmula (3.2.33) e integrando com respeito ao tempo resulta:

$$T = \frac{1}{2} \left[\operatorname{Re}(P_1) \operatorname{Re} \left(\frac{dw_1}{dt} \right) + \operatorname{Im}(P_1) \operatorname{Im} \left(\frac{dw_1}{dt} \right) \right] \quad (3.2.35)$$

Além disso, se as grandezas são harmônicas, então:

$$\frac{dw_1}{dt} = i\omega w_1 = -\omega \operatorname{Im}(w_1) + i\omega \operatorname{Re}(w_1) \quad (3.2.36)$$

Até este ponto não se levou em conta a forma da coluna, de maneira que as expressões anteriores são válidas seja qual for esta variação. Utilizando as expressões (3.2.34) chega-se a:

$$P_1 = \frac{EA_0}{f} \exp\left(\frac{x_1}{f}\right) \left\{ k_1 + ia_0c_1 \right\} [\operatorname{Re}(w_1) + i \operatorname{Im}(w_1)]$$

Substituindo ambas as expressões em (3.2.35) tem-se, para a taxa de transmissão:

$$T = \frac{\omega EA_0}{2f} \exp\left(\frac{x_1}{f}\right) a_0c_1 [\operatorname{Re}^2(w_1) + \operatorname{Im}^2(w_1)]^{\frac{1}{2}} = \frac{\omega EA_0}{2f} \exp\left(\frac{x_1}{f}\right) a_0c_1 |w_1|^2 \quad (3.2.36)$$

e, como era de se esperar, o termo k_1 não influi na maneira como a energia é transmitida. Em outras palavras, apenas a parcela da equação (3.2.32) referente ao termo de amortecimento influi na taxa de transmissão. Portanto, para frequências abaixo daquela de corte, nenhuma energia é transmitida.

3.3 A Coluna Linear Semi-Infinita

Uma outra maneira, mais realista, de modelar o semi-espaço é por meio da coluna linear. Embora utilizando a classificação de Graff [1] esta seja uma coluna essencialmente cônica, o termo linear é usado porque admite-se uma variação linear do raio da seção transversal com a profundidade.

Uma vez que este modelo não apresenta frequência de corte (como será demonstrado), os resultados obtidos com simulações utilizando este modelo são mais próximos das soluções completas que o anterior [3]. A geometria do problema é visualizada na figura seguinte.

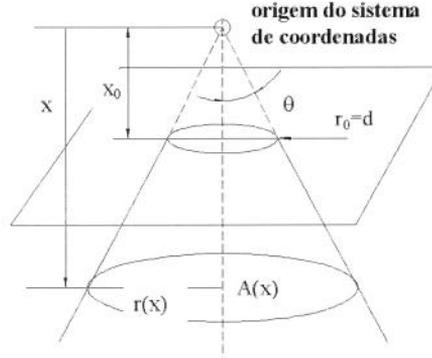


Figura 3.6: Coluna linear

Dessa forma, uma descrição apropriada para a área seria:

$$A(x) = \pi r^2(x) = \pi x^2 \tan^2 \theta \quad (3.3.1)$$

a qual é válida sempre que $x \geq x_0$. Reproduzindo aqui a equação (3.2.9):

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \frac{dw}{dx} + \frac{\omega^2}{c_1^2} w(x) = 0 \quad (3.3.2)$$

tem-se a equação diferencial para os deslocamentos em uma coluna cônica semi-infinita:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dw}{dx} + \frac{\omega^2}{c_1^2} w(x) = 0 \quad (3.3.3)$$

Cuja solução é dada por:

$$w(x) = \frac{C_1}{x} \exp(-i\omega t) + \frac{C_2}{x} \exp(+i\omega t) \quad (3.3.4)$$

Da mesma forma que no caso da coluna exponencial, pode-se determinar uma matriz de impedância para um elemento finito da coluna onde as propriedades são constantes, taxa de energia, etc.

3.3.1 Matrizes de Impedância para a Coluna Linear

Utilizando o mesmo processo descrito na seção 3.2 pode-se determinar as matrizes de rigidez finita e infinita para a coluna linear.

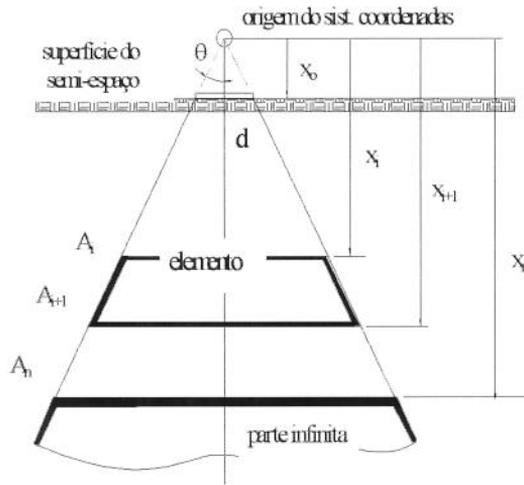


Figura 3.7: Geometria da coluna linear

Os resultados para um elemento da coluna entre os pontos x_i e x_{i+1} são os seguintes:

$$\begin{Bmatrix} P_i \\ P_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{kEA_i}{\tan(kd)} + \frac{EA_i}{x_i} & -\frac{x_{i+1}kEA_i}{x_i \sin(kd)} \\ -\frac{x_{i+1}kEA_i}{x_i \sin(kd)} & \frac{kEA_i x_{i+1}^2}{\tan(kd)x_i^2} - \frac{x_{i+1}EA_i}{x_i^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ w_{i+1} \end{Bmatrix} \quad (3.3.5)$$

e, para a parte infinita da coluna:

$$P_n = \frac{EA_n}{x_n} (1 + ikx_n) w_n \quad (3.3.6)$$

onde o número de onda, “k”, é definido como:

$$k = \frac{\omega}{c_l} \quad (3.3.7)$$

Da mesma forma que para a coluna exponencial, pode-se definir uma expressão para a taxa de propagação de energia através da coluna. No entanto, esta expressão não é necessária uma vez que pode-se utilizar a expressão (3.2.35) para um cálculo numérico direto. Isto tem a vantagem de ser mais facilmente implementado nos códigos de elementos finitos.

3.3.2 Confiabilidade dos Resultados do Modelo Linear

Modelos simplificados para o semi-espço são utilizados principalmente a fim de se evitar formulações rigorosas da elastodinâmica que podem se tornar muito dispendiosas do ponto de vista computacional. Segundo Wolf [2], as principais restrições quanto ao seu uso podem ser resumidas em:

- a teoria associada a eles é baseada em formulações simplificadas da resistência dos materiais ao invés da teoria rigorosa da elasticidade
- grandes porções do semi-espço são negligenciadas pelos modelos de cones
- pela sua própria forma, eles não podem representar a influência de ondas de Rayleigh².

O artigo de Wolf e Meek [5] analisa cada um dos pontos acima descritos tanto para o caso estático quanto para o dinâmico e mostra que estas restrições tem menor importância quando comparadas às qualidades do modelo de cone.

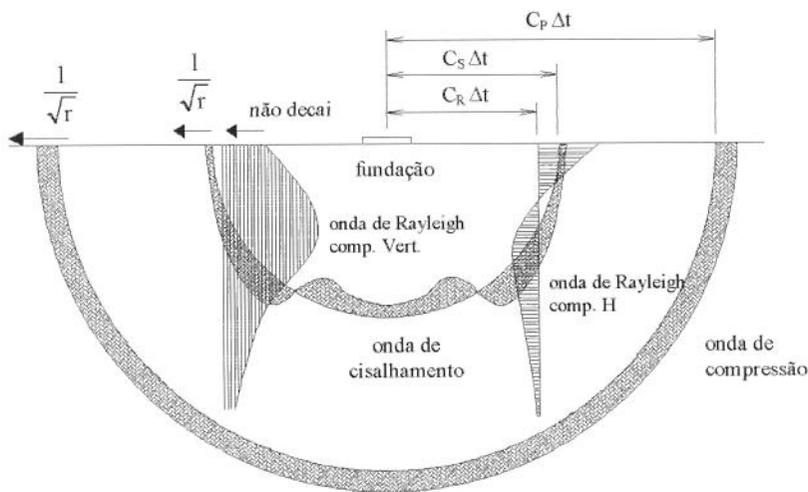


Figura 3.8: Modo de propagação e decaimento em domínios 2D

²A teoria associada à propagação de ondas em domínios multidimensionais será resumida no próximo capítulo

A figura anterior ilustra os principais tipos de onda que atuam em domínios bi-dimensionais. As distâncias marcadas correspondem ao espaço percorrido pelos distúrbios após um certo instante Δt no qual se inicia a excitação através da fundação. A grandeza 'r' corresponde à distância radial

Inicialmente mostra-se que a solução para o problema da carga concentrada atuando na superfície do semi-espaço elástico deve se comportar segundo $1/r$ tanto para o caso estático (solução analítica de Boussinesq) quanto para o dinâmico.

Neste caso mostra-se que as ondas de corpo (ondas de compressão e de cisalhamento) estão contidas em uma semi-esfera cujo raio aumenta progressivamente e portanto, se a lei de decaimento acima é verdadeira, a condição de radiação de Sommerfeld é obedecida mesmo para o caso em que a frequência tende a zero.

Para o caso de materiais compressíveis ($\nu \leq 1/3$) mostra-se que a hipótese de que seções planas permanecem planas é aproximadamente verdadeira o que indica que as hipóteses da resistência dos materiais são válidas.

Ainda segundo Wolf, o fato do modelo desprezar largas porções do semi-espaço não é um fator determinante pois, para o caso de materiais compressíveis, a solução não aproximada para o semi-espaço mostra que a região negligenciada pelo modelo é fracamente deformada sendo que 90% da deformação se concentra na parte interior do cone.

As ondas de Rayleigh são, aparentemente, a única classe de perturbações que o modelo de cone não pode reproduzir pelo fato destas serem ondas de superfície que decaem muito rapidamente a medida que se afastam da superfície. Além disso, segundo Miller e Pursey [6], cerca de 67% da energia transmitida ao solo na forma de deslocamento estático se dá na forma de ondas de superfície.

Entretanto, o artigo acima mostra que a influência destas ondas decai rapidamente a medida que se aumenta a frequência de excitação se tornando desprezível a altas frequências o que indica a aplicabilidade do modelo no caso dinâmico nesta região. De fato percebe-se que as curvas obtidas para estes modelos tendem para os resultados do semi-espaço à medida em que se aumenta a frequência.

3.4 Aplicação dos E.I.'s aos Modelos do Semi-Espaço

Nesta seção serão apresentados os resultados obtidos da aplicação numérica da teoria descrita no capítulo anterior aos modelos unidimensionais simplificados do semi-espaco elástico na forma de curvas de resposta em frequência.

Um método rudimentar de se obter tais curvas é o de se variar o parâmetro k (número de onda) para uma faixa ampla de frequências e observar-se a resposta (deslocamento) no topo da coluna para um carregamento de amplitude unitária. No entanto, uma vez que as matrizes de massa e rigidez não são constantes (como ocorre no MEF), esta é, aparentemente, a única maneira de obter tais curvas.

Uma vez que a equação (3.2.9) não tem a forma apropriada para uma análise via elementos finitos, opta-se por iniciar-se a análise pela equação (3.2.14) que é reproduzida em seguida:

$$\frac{1}{A} \frac{d}{dx} \left(A \frac{dw}{dx} \right) + \frac{\omega^2}{c_1^2} w(x) = 0 \quad (3.4.1)$$

ou seja:

$$\frac{d}{dx} \left(A \frac{dw}{dx} \right) + \frac{\omega^2}{c_1^2} A w(x) = 0 \quad (3.4.2)$$

Multiplicando a equação pela função ponderadora $t(x)$ e integrando sobre todo o domínio tem-se:

$$\int_{x_1}^{x_2} t(x) \left(\frac{d}{dx} \left(A \frac{dw}{dx} \right) + \frac{\omega^2}{c_1^2} A w(x) \right) dx = 0 \quad (3.4.3)$$

que pode ser escrita como:

$$\int_{x_1}^{x_2} t(x) \frac{d}{dx} \left(A \frac{dw}{dx} \right) dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\omega^2}{c_1^2} A t(x) w(x) dx = 0 \quad (3.4.4)$$

Para o caso da coluna exponencial tem-se $x_i = 0$ e $x_f = \infty$. Para a coluna linear, devido a origem do sistema de coordenadas posicionar-se acima do semi-espaço, tem-se $x_i = x_0$ e $x_f = \infty$. A integração por partes no primeiro termo da equação acima fornece:

$$\int_{x_i}^{x_f} A(x) \left(\frac{dt}{dx} \frac{dw}{dx} - k^2 tw \right) dx = A(x) t \frac{dw}{dx} \Big|_{x=x_i}^{x=x_f} \quad (3.4.5)$$

que é a equação utilizada pelo método dos elementos finitos.

3.4.1 E.I.'s de Decaimento e Coluna Exponencial

A aplicação desta classe de elementos infinitos ao modelo da coluna exponencial fornece bons resultados para as FRF's uma vez que a solução esperada possui, também, um comportamento exponencial decrescente. Em todos os exemplos utilizados foi adotado um sistema de coordenadas local ao elemento infinito sem a utilização de coordenadas normalizadas.

A principal vantagem desta abordagem está em se evitar a troca de variáveis necessária para adequar o domínio de integração de $[-1, \infty]$ para $[0, \infty]$. Por outro lado, isto implica em maiores dificuldades para se obter as funções de forma de elementos finitos correspondentes aos nós em $0, d, 2d, 3d$, etc, onde d é a distância entre os nós.

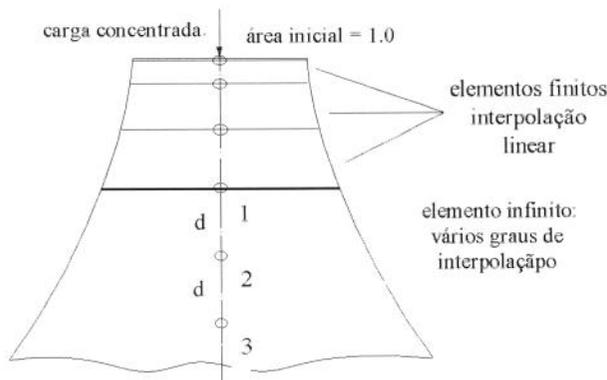


Figura 3.9: Geometria utilizada na discretização

A utilização de um número variável de elementos finitos no intervalo entre a superfície do semi-espaço e o início do elemento finito é feita obedecendo-se a uma interpolação do tipo linear.

Estes elementos finitos devem ser responsáveis pela aproximação da solução no intervalo acima mencionado. As funções de forma para este caso são:

$$N_1(\epsilon) = \frac{\epsilon - 1}{2} \quad \text{e} \quad N_2(\epsilon) = \frac{\epsilon + 1}{2} \quad (3.4.6)$$

em coordenadas normalizadas. Aplicando-se estas funções na equação (3.3.12) obtém-se a matriz de rigidez por elementos finitos. Apenas para comparação, o primeiro termo desta matriz é:

$$K(1,1) = A_0 \exp\left(\frac{x_0}{f}\right) f \frac{\exp\left(\frac{d}{f}\right) (1 - 2f^2 k^2) + 2f^2 k^2 + 2fdk^2 + d^2 k^2 - 1}{d^2} \quad (3.4.7)$$

e a expressão para definir a área transversal da coluna em termos da coordenada local é dada por:

$$A(x) = A_0 \exp\left(\frac{x_0 + x}{f}\right) \quad (3.4.8)$$

onde “x” é a coordenada local e x_0 a distância entre o início do elemento e a superfície do semi-espaço.

elementos constantes

A utilização de elementos constantes fornece bons resultados para as curvas de resposta em frequência nas regiões não muito próximas da frequência de corte. Isto ocorre porque nesta região existe uma singularidade na curva teórica que não pode ser prevista utilizando-se elementos infinitos. A introdução de pequenas quantidades de amortecimento no modelo transforma esta singularidade em um pico pronunciado que é, por sua vez, melhor aproximado. A função de forma constante para o elemento infinito é:

$$N = \exp\left(-\frac{x}{d} + ikx\right) \quad (3.4.9)$$

e, introduzindo tal função na equação (3.4.5) e integrando analiticamente no intervalo $[0, \infty]$ resulta, para o termo de rigidez:

$$K_{inf} = A_0 \exp\left(\frac{x_0}{f}\right) f \frac{(2ikd + 2d^2 k^2 - 1)(d - 2f - 2ikdf)}{d^3 - 4d^2 f + 4df^2 + 4d^3 f^2 k^2} \quad (3.4.10)$$

onde “i” é a unidade imaginária. A comparação deste termo com o da equação (3.2.30) é ilustrada na figura seguinte para o caso onde $A_0 = f = d = 1$ e $x_0 = 0$ (elemento colocado na superfície do semi-espaço e nenhum elemento finito). As curvas referem-se à parte real e imaginária.

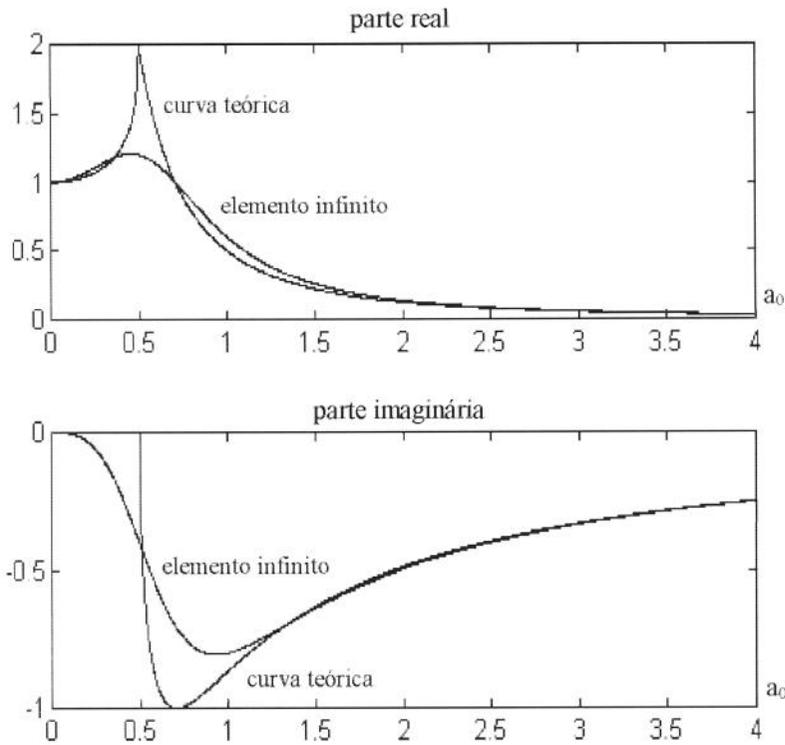


Figura 3.10: Curvas de resposta em frequência para o modelo da coluna exponencial aproximada com elemento infinito constante

elemento linear

A introdução de funções de forma lineares permite uma melhor aproximação para o modelo na região da frequência de corte em relação à aproximação com o elemento constante. Entretanto, em virtude da dificuldade de se integrar analiticamente a matriz de rigidez por EI 's, decidiu-se utilizar o procedimento descrito no item (2.4.1) para integração numérica. As funções de forma para o elemento infinito são:

$$N_1 = \left(1 - \frac{x}{d}\right) \exp\left(-\frac{x}{d} + ikx\right) \quad (3.4.11.a)$$

$$N_2 = \frac{x}{d} \exp\left(1 - \frac{x}{d} + ikx\right) \quad (3.4.11.b)$$

e as curvas obtidas para a função de resposta em frequência são ilustradas abaixo para 0, 16 e 64 elementos. A distância entre os nós destes elementos foi admitida como sendo também igual a “d”.

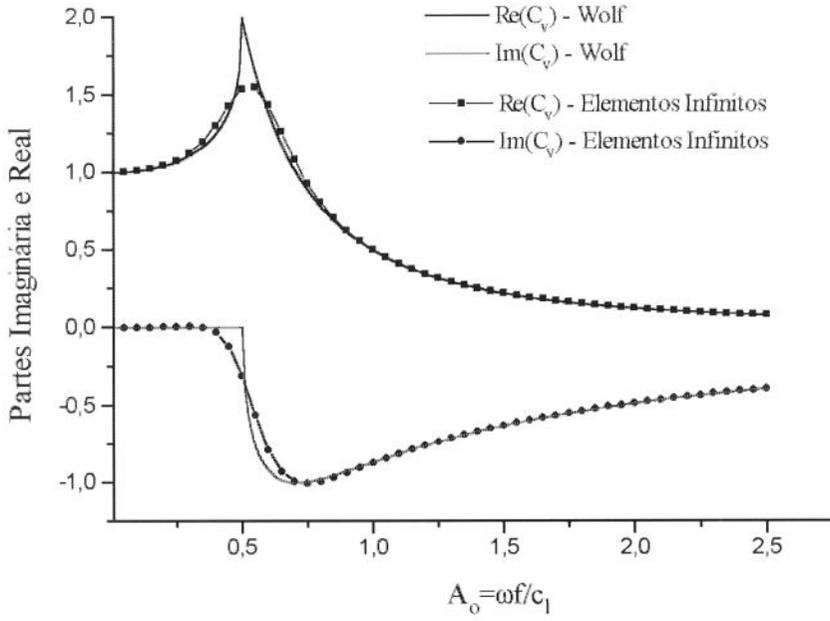


Figura 3.11: Elemento infinito posicionado em $x=0$

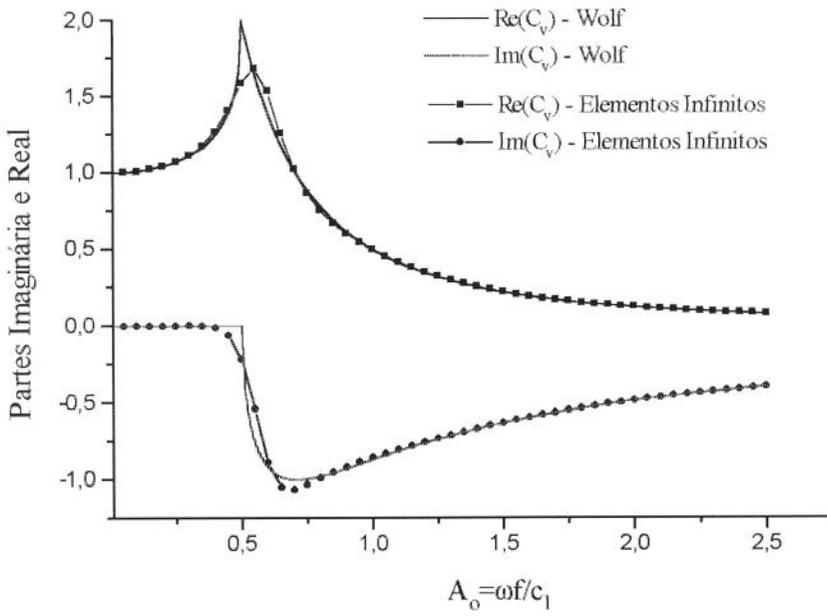


Figura 3.12: Elemento infinito em $x=10$ e 16 elementos finitos

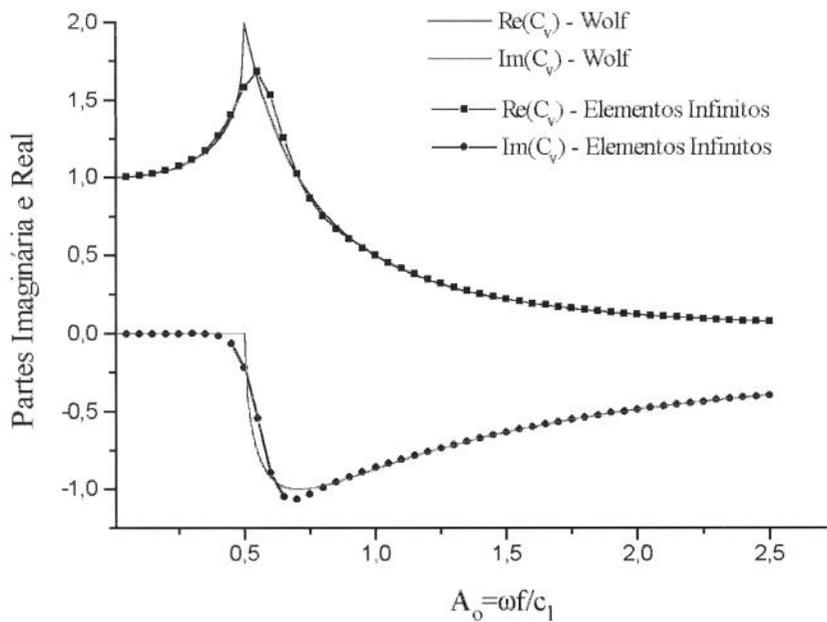


Figura 3.13: Elemento infinito em $x=10$ e 64 elementos finitos

Como pode-se perceber pela comparação das três curvas, a introdução de elementos finitos no modelo não contribui para o resultado final da aproximação. Isto se deve ao fato da matriz de rigidez elementar por EI's introduzir um termo complexo na matriz global que é, por sua vez, formada de elementos reais.

elemento quadrático

O elemento quadrático apresenta uma sensível melhora na aproximação em relação aos anteriores principalmente na região da frequência de corte. Para situações em que amortecimento histerético está presente, este tipo de elemento deve fornecer resultados bem próximos da solução exata nesta região.

Utilizou-se novamente o procedimento de integração numérica, desta vez com um número maior de pontos de integração. Observa-se que um aumento exagerado do número de pontos de integração não contribui para a precisão dos resultados e, ao contrário, provoca um mal condicionamento quando da obtenção dos coeficientes dos polinômios de Lagrange reduzindo a precisão na região de baixas frequências.

As funções de forma correspondentes a interpolação nos nós em 0, d e 2d são:

$$N_1 = \left[1 - \frac{3x}{2d} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{d} \right)^2 \right] \exp \left(-\frac{x}{d} + ikx \right) \quad (3.4.12.a)$$

$$N_2 = \left[2 \frac{x}{d} - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{d} \right)^2 \right] \exp \left(1 - \frac{x}{d} + ikx \right) \quad (3.4.12.b)$$

$$N_3 = -\frac{1}{2} \left[\frac{x}{d} + \left(\frac{x}{d} \right)^2 \right] \exp \left(2 - \frac{x}{d} + ikx \right) \quad (3.4.12.c)$$

A introdução de um fator real interno ao argumento da função exponencial é necessária para garantir que a função de forma (complexa) tenha ângulo de fase igual a zero no nó a que ela se refere. Além disso nota-se, novamente, que a introdução de elementos finitos não contribui para uma melhor interpolação dos resultados.

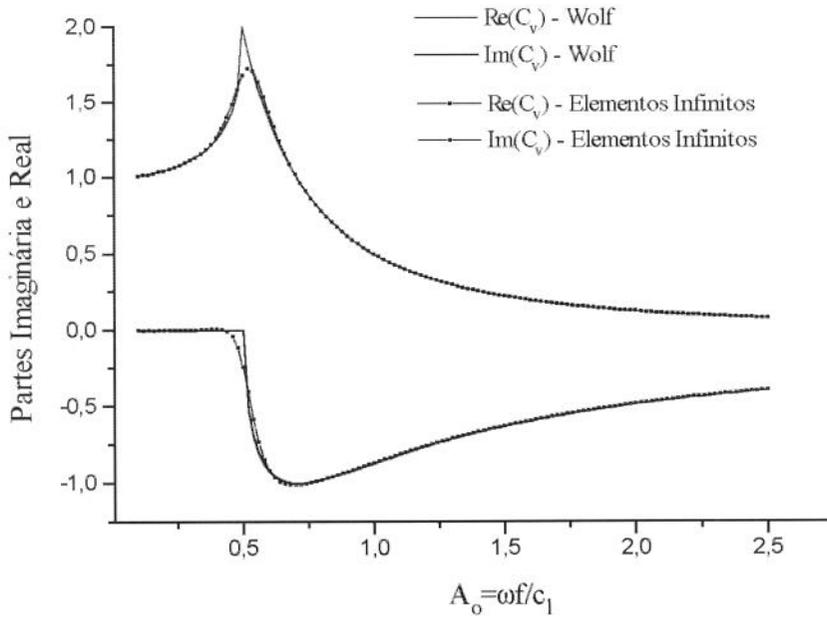


Figura 3.14: Elemento infinito posicionado em $x=0$

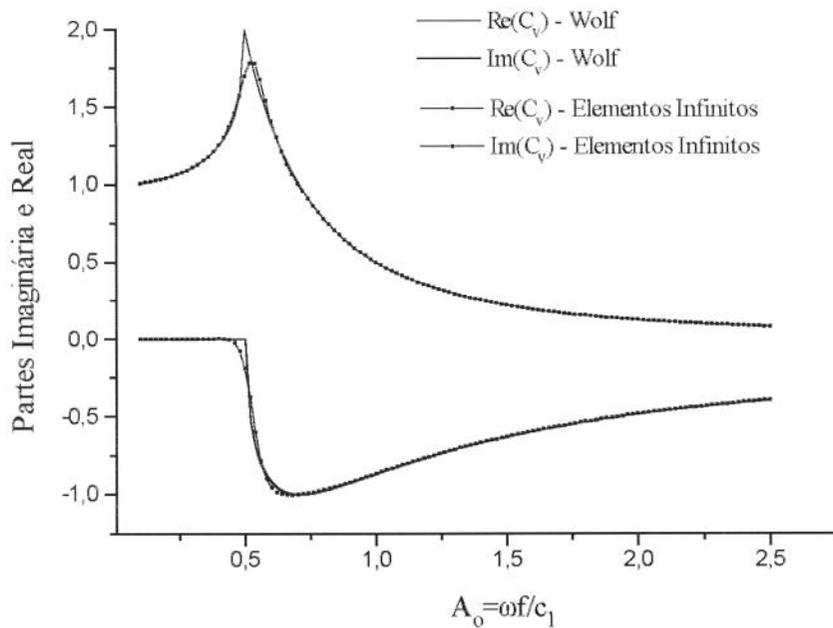


Figura 3.15: Elemento infinito em $x=10$ e 16 elementos finitos

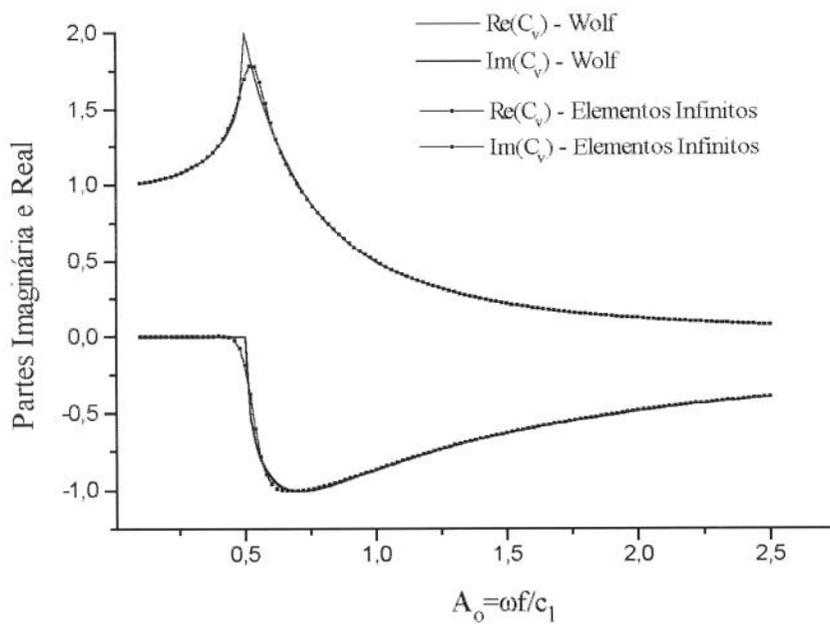


Figura 3.16: Elemento infinito em $x=10$ e 64 elementos finitos

elemento cúbico

O elemento cúbico é um prolongamento das qualidades do elemento quadrático. A precisão alcançada sobretudo na região da frequência de corte é muito boa. Entretanto, devido ao

maior grau dos polinômios envolvidos, o algoritmo de integração numérica necessita de um maior número de pontos de integração, o que envolve imprecisões na região de baixa frequência.

Deve ser notado, entretanto, que esta aparente dificuldade do método pode ser compensada pela introdução de um algoritmo de obtenção dos coeficientes dos polinômios de Lagrange que não necessite da inversão da matriz definida em (2.4.10). As funções de forma para o elemento são:

$$N_1 = \left[1 - \frac{11x}{6d} + \left(\frac{x}{d}\right)^2 - \frac{1}{6}\left(\frac{x}{d}\right)^3 \right] \exp\left(-\frac{x}{d} + ikx\right) \quad (3.4.13.a)$$

$$N_2 = \left[3\frac{x}{d} - \frac{5}{2}\left(\frac{x}{d}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{d}\right)^3 \right] \exp\left(1 - \frac{x}{d} + ikx\right) \quad (3.4.13.b)$$

$$N_3 = \left[-\frac{3x}{2d} + 2\left(\frac{x}{d}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{d}\right)^3 \right] \exp\left(2 - \frac{x}{d} + ikx\right) \quad (3.4.13.c)$$

$$N_4 = \left[\frac{1x}{6d} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{d}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{x}{d}\right)^3 \right] \exp\left(3 - \frac{x}{d} + ikx\right) \quad (3.4.13.d)$$

Novamente observa-se que os elementos finitos colocados na região próxima ao ponto de aplicação não interferem no grau de precisão alcançada.

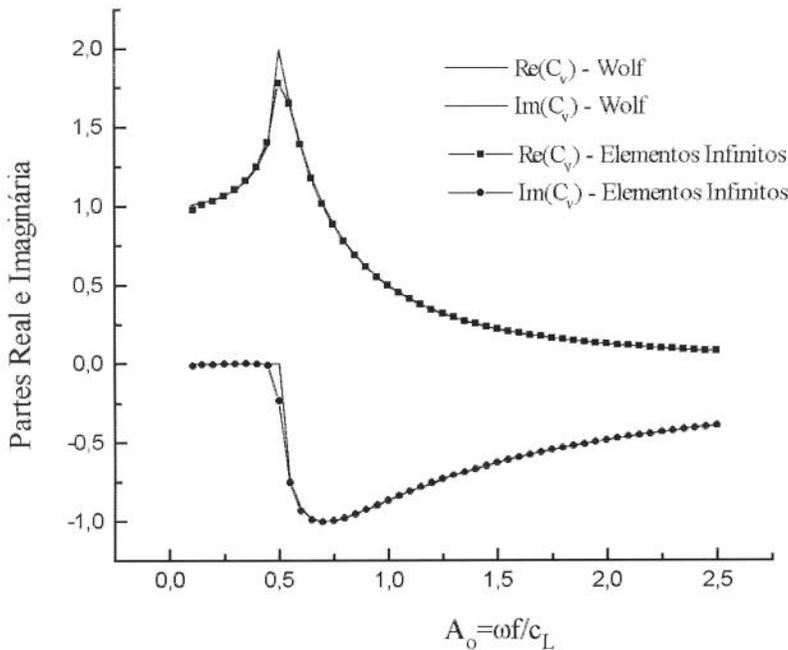


Figura 3.17: Elemento infinito posicionado em $x=0$

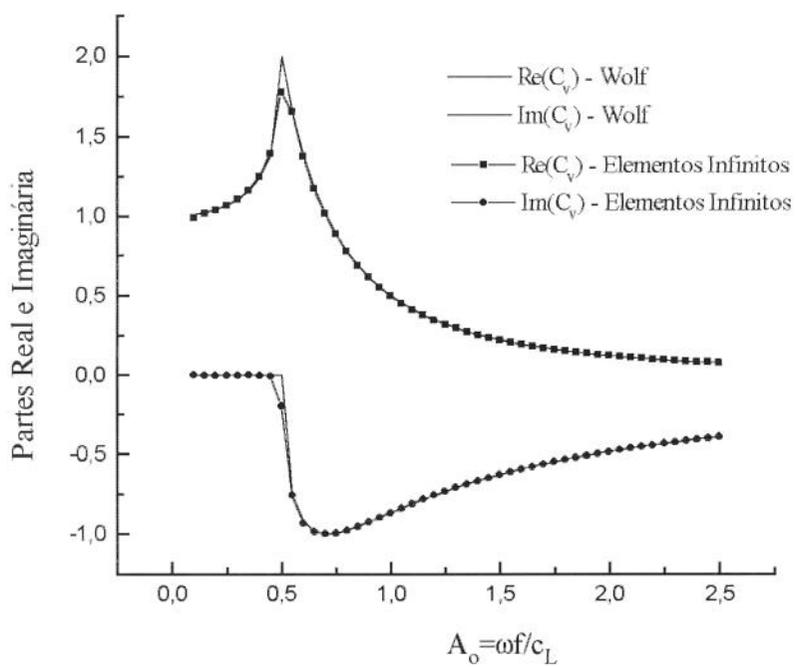


Figura 3.18: Elemento infinito em $x=10$ e 16 elementos finitos

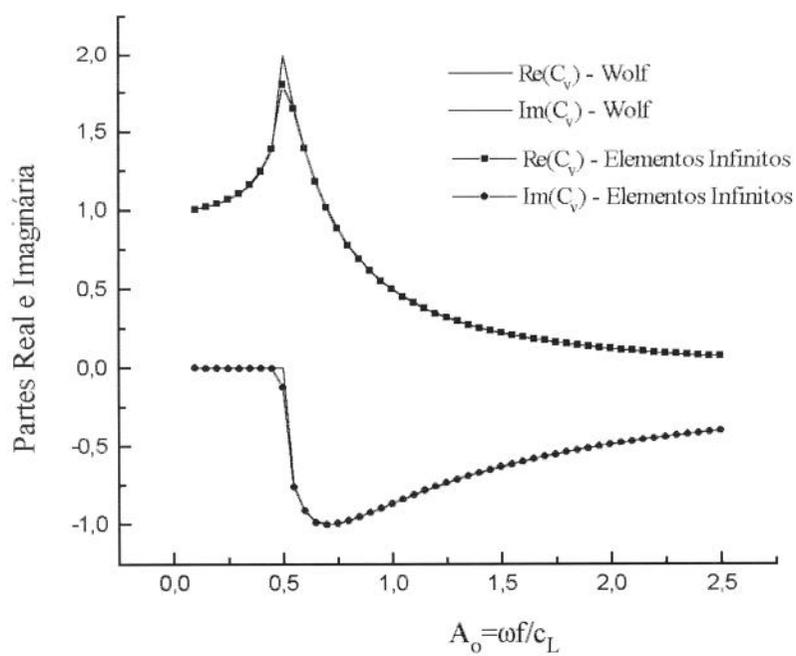


Figura 3.19: Elemento infinito em $x=10$ e 64 elementos finitos.

elemento quártico e energia transmitida pela coluna

A taxa de energia transmitida pelo coluna mostra muito bem o comportamento do termo de amortecimento geométrico. Para este caso escolheu-se $f = 0.5$, de maneira que a frequência de corte agora é $\omega_c = 1.0$.

O elemento quártico foi desenvolvido para mostrar o grau de convergência da interpolação por elemento infinito. Isto significa que, se o aumento sucessivo do grau dos polinômios das funções de forma pudesse ser aumentado indefinidamente, a precisão alcançada seria cada vez melhor, excetuando-se problemas de precisão numérica. Na prática, entretanto, a situação não é tão simples.

Os problemas numéricos na região de baixa frequência não permitem uma boa precisão nesta região e o tempo de CPU é progressivamente mais elevado à medida em que se eleva o grau de interpolação. Assim, o elemento em questão fornece os melhores resultados para a interpolação da solução na região da frequência de corte porém ele pode ser encarado como muito dispendioso do ponto de vista computacional.

Novamente empregou-se um número variável de elementos finitos na região próxima ao ponto de aplicação da carga correspondente a 0, 16 e 64 elementos. As funções de forma para este elemento são:

$$N_1 = \left[1 - \frac{25x}{12d} + \frac{35}{24} \left(\frac{x}{d} \right)^2 - \frac{5}{12} \left(\frac{x}{d} \right)^3 + \frac{1}{24} \left(\frac{x}{d} \right)^4 \right] \exp \left(-\frac{x}{d} + ikx \right) \quad (3.4.14.a)$$

$$N_2 = \left[5 \frac{x}{d} - \frac{13}{3} \left(\frac{x}{d} \right)^2 + \frac{3}{2} \left(\frac{x}{d} \right)^3 - \frac{1}{6} \left(\frac{x}{d} \right)^4 \right] \exp \left(1 - \frac{x}{d} + ikx \right) \quad (3.4.14.b)$$

$$N_3 = \left[-3 \frac{x}{d} + \frac{19}{4} \left(\frac{x}{d} \right)^2 - 2 \left(\frac{x}{d} \right)^3 + \frac{1}{4} \left(\frac{x}{d} \right)^4 \right] \exp \left(2 - \frac{x}{d} + ikx \right) \quad (3.4.14.c)$$

$$N_4 = \left[\frac{4x}{3d} - \frac{7}{3} \left(\frac{x}{d} \right)^2 + \frac{7}{6} \left(\frac{x}{d} \right)^3 - \frac{1}{6} \left(\frac{x}{d} \right)^4 \right] \exp \left(3 - \frac{x}{d} + ikx \right) \quad (3.4.14.d)$$

$$N_5 = \left[-\frac{1x}{4d} + \frac{11}{24} \left(\frac{x}{d} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{x}{d} \right)^3 + \frac{1}{24} \left(\frac{x}{d} \right)^4 \right] \exp \left(2 - \frac{x}{d} + ikx \right) \quad (3.4.14.e)$$

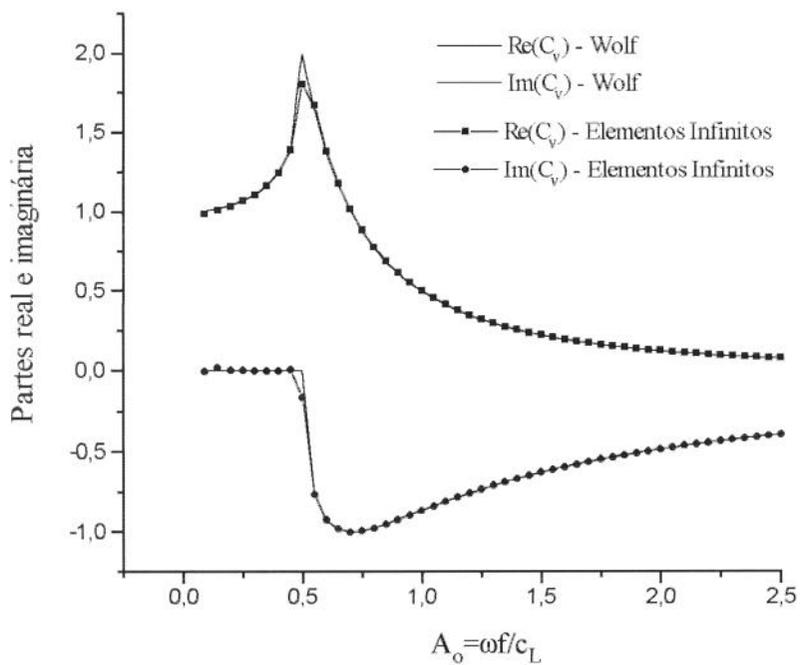


Figura 3.20: Elemento infinito posicionado em $x=0.0$

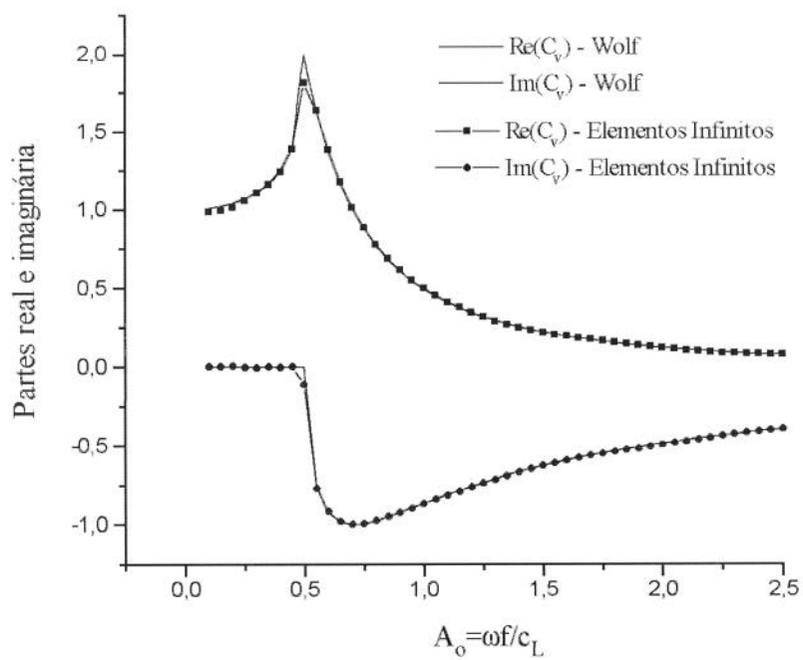


Figura 3.21: Elemento infinito em $x=10.00$ e 16 elementos finitos

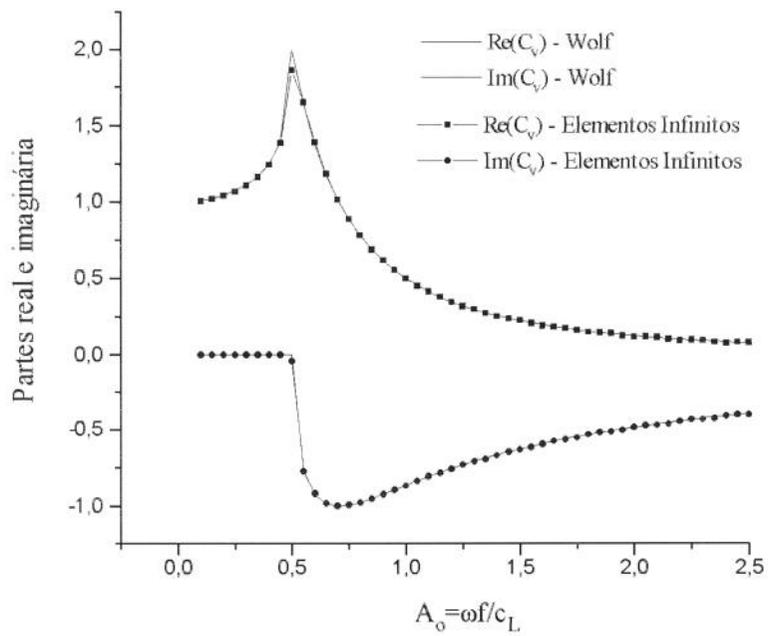


Figura 3.22: Elemento infinito posicionado em $x=10.00$ e 64 elementos finitos.

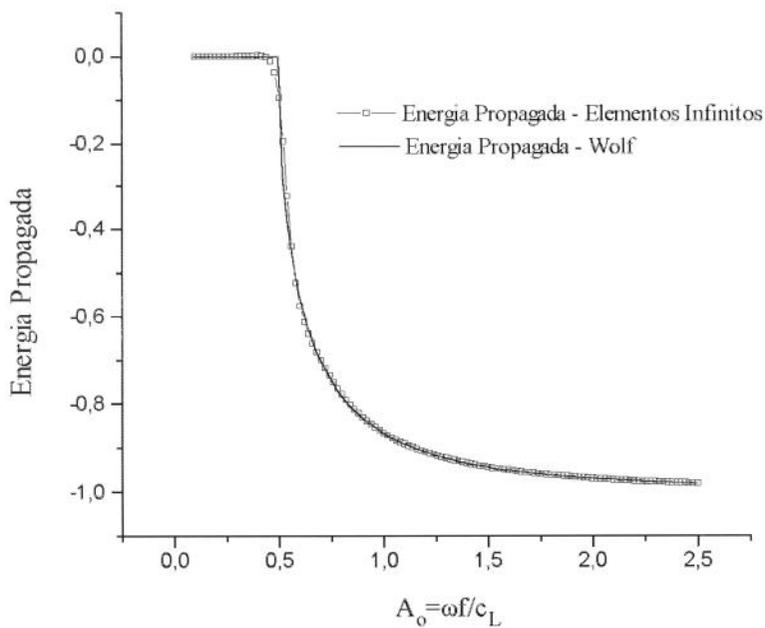


Figura 3.23: energia propagada: elemento infinito em $x=10.00$ e 64 elementos finitos.

A energia propagada pelo elemento é plotada na figura anterior. Observa-se que na região entre $\omega=0.0$ e a frequência de corte não existe propagação de energia uma vez que a diferença de fase entre os deslocamentos ao longo da coluna é igual a zero.

campos de deslocamentos na coluna exponencial

Uma observação interessante que pode ser feita em relação à modelagem da parte finita da coluna por meio de elementos finitos é a capacidade destes em modelar de maneira acurada os campos de deslocamento da coluna.

Estes campos de deslocamento foram obtidos com o elemento infinito cúbico descrito acima para um comprimento da parte finita de $L=10$. Avaliou-se também a influência da discretização na obtenção destes campos de deslocamento. O gráfico abaixo refere-se aos deslocamentos correspondentes a $a_0=2.00$:

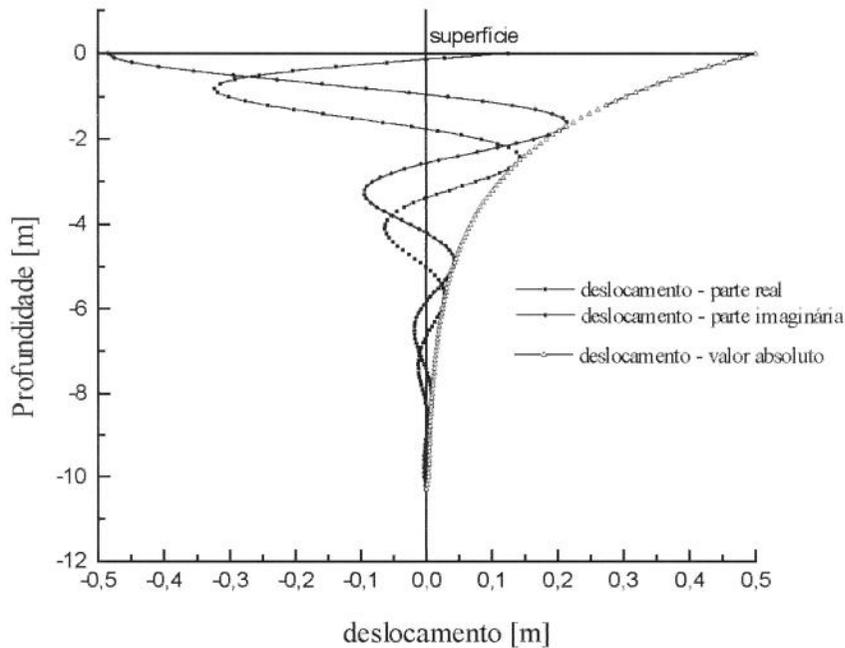


Figura 3.24: deslocamentos observados na coluna esponencial para $a_0=2.00$. Discretização por 100 elementos finitos

A figura seguinte ilustra o comportamento da fase da resposta em frequência ao longo do comprimento da coluna para $a_0 = 2.00$. Para ilustrar o verdadeiro decaimento do perfil de deslocamentos é plotada, por comparação a curva $f(x) = \frac{1}{2} \exp\left(\frac{x}{2}\right)$. Os resultados mostram que o elemento aproxima de maneira acurada o comportamento da fase da solução.

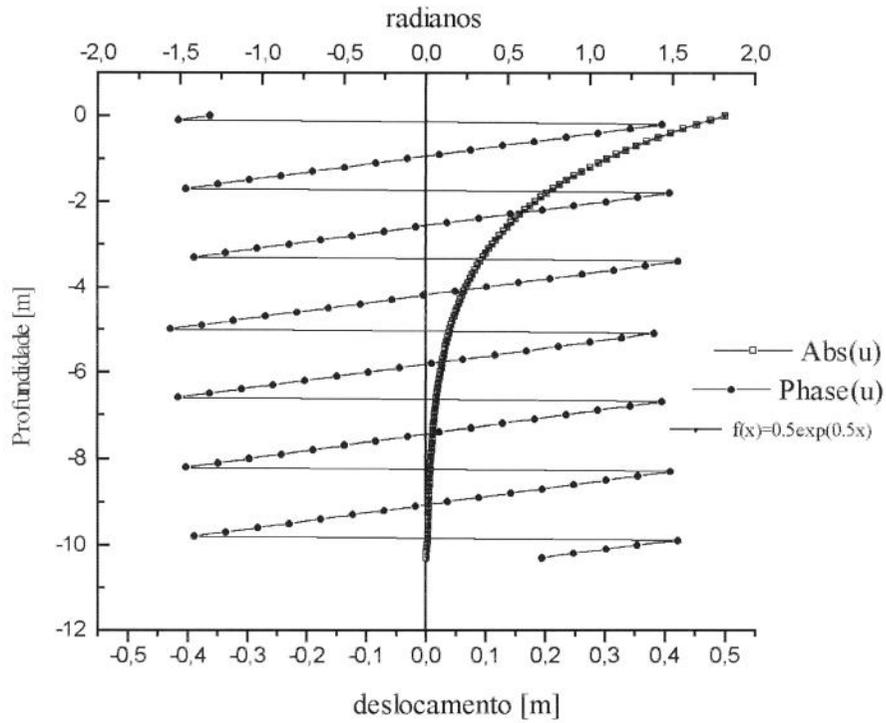


Figura 3.25: Comportamento da fase do campo de deslocamentos para $a_0=2.00$. Discretização por 100 elementos finitos

Uma característica importante do elemento infinito utilizado é que o mesmo reproduz o campo de deslocamentos da mesma maneira que os elementos finitos.

3.4.2 E.I.'s de Decaimento Exponencial e Coluna Linear

A utilização de elementos do tipo exponencial para aproximar a solução da coluna linear fornece resultados apenas satisfatórios. Isto se deve principalmente ao fato da solução da equação para a coluna linear obedecer uma regra de decaimento diferente daquela fornecida pelo elemento exponencial. Assim, verifica-se que o aumento da ordem dos polinômios das funções de forma não traz grandes aumentos na precisão dos resultados, como será verificado a seguir. A expressão que se utiliza para definir a área em função da coordenada vertical é dada por:

$$A(x) = \pi \tan^2(\theta)(x + x_0)^2 \quad (3.4.15)$$

para o sistema de coordenadas colocado na superfície do semi-espaco ou

$$A(x) = \pi \tan^2(\theta) x^2 \quad (3.4.16)$$

para a situação onde a origem das coordenadas coincide com o vértice da coluna. Uma vez que já se demonstrou que o número de elementos finitos não é uma fator determinante para o aumento de precisão optou-se pela escolha de um número fixo de elementos igual a 64. Os gráficos são plotados para a coluna onde $\theta = 0.2$ rad e $x_0 = 1$.

elemento constante

O elemento exponencial constante fornece resultados tão bons quanto o de qualquer outro grau de interpolação para o problema da coluna linear. Isto se deve ao fato desta classe de elemento não aproximar de maneira conveniente a solução do problema para um domínio semi-infinito.

Para o elemento constante foi plotado um único gráfico com 64 elementos finitos colocados na coluna . Os resultados mostram as deficiências deste tipo de elemento na situação acima exposta. Ainda assim, os resultados são considerados bons. A função de forma correspondente é a mesma da equação (3.4.9) com a mudança apenas na forma de se adimensionalizar a parte real do argumento da função exponencial.

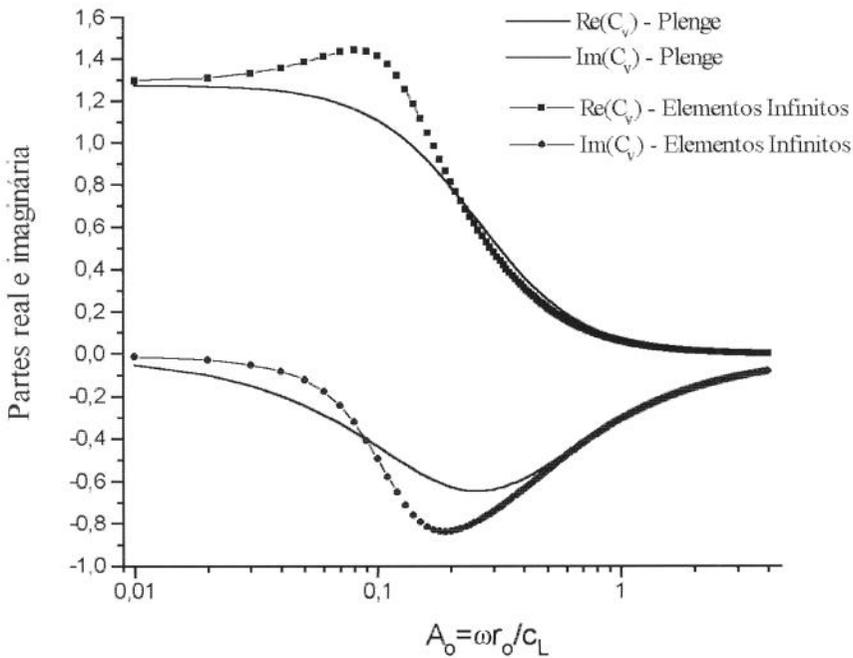


Figura 3.26: Elemento infinito posicionado em $x=6.4$ e 64 elementos finitos

elemento linear

A introdução do elemento exponencial linear na coluna fornece uma aproximação razoável em todo o espectro de frequência. Na verdade, elementos infinitos do tipo exponencial não fornecem resultados tão bons em situações de sistemas de primeira ordem ou correlatos, como é o caso da coluna linear. As funções de forma para este elemento são as mesmas da equação (3.4.11)

$$N_1 = \left(1 - \frac{x}{d}\right) \exp\left(-\frac{x}{d} + ikx\right) \quad (3.4.11.a)$$

$$N_2 = \frac{x}{d} \exp\left(1 - \frac{x}{d} + ikx\right) \quad (3.4.11.b)$$

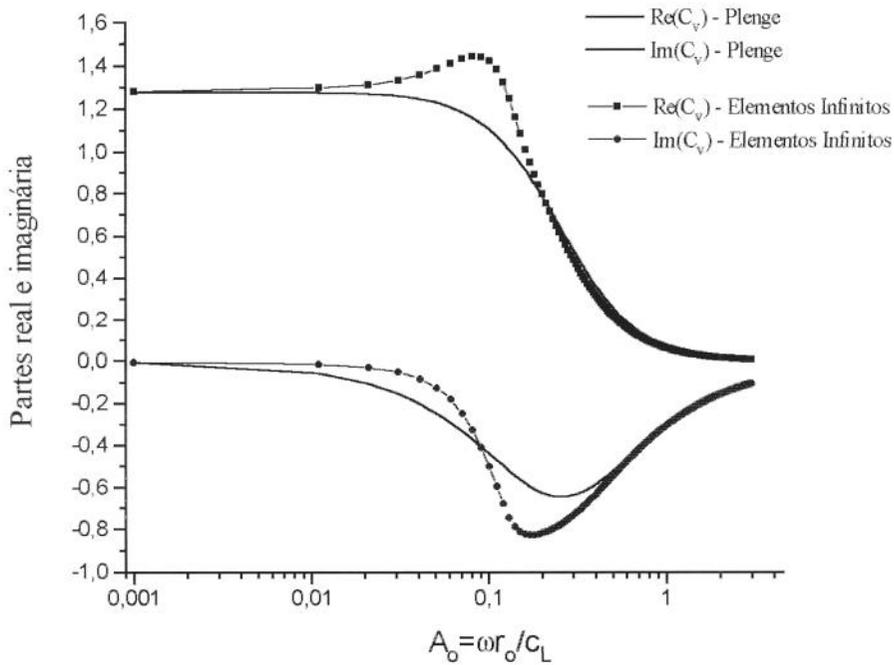


Figura 3.27: Elemento infinito em $\kappa=10.00$ e 16 elementos finitos

elemento quadrático

O elemento quadrático não aumenta significativamente o nível de precisão encontrado na interpolação da solução pelos mesmos motivos descritos acima. O gráfico abaixo mostra que os elementos de decaimento exponencial aparentemente não convergem para a solução procurada seja qual for o grau da interpolação utilizada. As funções de forma para este elemento são:

$$N_1 = \left[1 - \frac{3x}{2d} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{d} \right)^2 \right] \exp \left(-\frac{x}{d} + ikx \right) \quad (3.4.12.a)$$

$$N_2 = \left[2 \frac{x}{d} - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{d} \right)^2 \right] \exp \left(1 - \frac{x}{d} + ikx \right) \quad (3.4.12.b)$$

$$N_3 = -\frac{1}{2} \left[\frac{x}{d} + \left(\frac{x}{d} \right)^2 \right] \exp \left(2 - \frac{x}{d} + ikx \right) \quad (3.4.12.c)$$

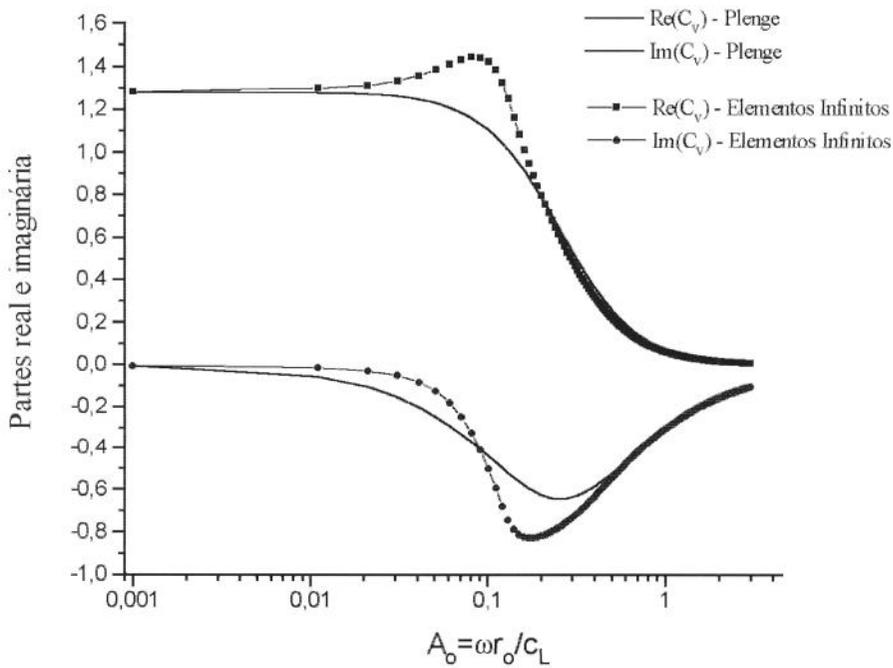


Figura 3.28: Elemento infinito posicionado em $x=6.4$ e 64 elementos finitos

3.4.3 E.I.'s de Mapeamento e Coluna Exponencial

Considera-se nesta seção a impossibilidade de se aplicar os elementos infinitos de mapeamento ao problema da coluna exponencial. Considera-se em primeiro lugar o elemento de mapeamento linear onde tem-se um nó posicionado em $\varepsilon = -1$ que corresponde a $x = x_0$ e outro nó

em $\varepsilon = +1$ que corresponde a $x \rightarrow \infty$. A expressão que define o mapeamento é a mesma da equação (2.5.19):

$$x(\varepsilon) = \frac{2x_0}{1-\varepsilon} \quad (3.4.17)$$

e a equação que define a matriz de rigidez do elemento infinito é:

$$K_{lm}^i = \int_{x_0}^{\infty} A \left(\frac{dN_l}{dx} \frac{dN_m}{dx} - k^2 N_l N_m \right) dx \quad (3.4.18)$$

E utilizando a regra comum para derivação em cadeia:

$$\frac{dN}{dx} = \frac{dN}{d\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dx} \quad (3.4.19)$$

obtém-se, a matriz de rigidez em coordenadas normalizadas:

$$K_{lm}^i = \int_{-1}^{+1} A_0 \exp\left(\frac{2x_0}{f(1-\varepsilon)}\right) \left[\frac{dN_l}{d\varepsilon} \frac{dN_m}{d\varepsilon} \left(\frac{d\varepsilon}{dx}\right)^2 - k^2 N_l N_m \right] \frac{dx}{d\varepsilon} d\varepsilon \quad (3.4.20)$$

Uma vez que não se necessita da função de forma correspondente ao nó no infinito, a matriz acima se reduz a apenas um termo (correspondente a função de forma N_1). Assim, introduzindo os termos restantes na equação anterior tem-se uma expressão aparentemente simples para o termo de rigidez:

$$N_1(\varepsilon) = \frac{1-\varepsilon}{2} \exp\left(\frac{2x_0}{1-\varepsilon} ik\right) \quad (3.4.21.a)$$

$$\frac{dN_1}{d\varepsilon} = \frac{\varepsilon - 1 + 2ikx_0}{2(1-\varepsilon)} \exp\left(\frac{2x_0}{1-\varepsilon} ik\right) \quad (3.4.21.b)$$

$$K_{11}^i = \int_{-1}^{+1} A_0 \exp\left(\frac{2x_0}{1-\varepsilon} \frac{1}{f}\right) \exp\left(\frac{4ikx_0}{1-\varepsilon}\right) \frac{1-2\varepsilon+\varepsilon^2-4ikx_0-8k^2x_0^2}{8x_0} dx \quad (3.4.22)$$

A análise da equação acima mostra que o integrando é uma função oscilante de amplitude crescente devido ao termo exponencial de argumento real maior que zero. Isto significa que a integral é divergente e não pode ser integrada nem mesmo numericamente.

A razão disso é que introduziu-se na integral um termo exponencial (responsável pela variação de área) cuja taxa de crescimento não pode ser anulado pelos elementos de mapeamento que tem um crescimento polinomial. Este é um exemplo extremo que mostra que os elementos infinitos de mapeamento não podem ser utilizados em domínios cuja taxa de crescimento é maior que a polinomial.

3.4.4 E.I.'s de Mapeamento e Coluna Linear

Diferentemente do caso da coluna exponencial, os elementos de mapeamento aplicam-se muito bem para casos de integrandos que variam polinomialmente, como é o caso da coluna linear.

Os resultados analíticos obtidos com elementos de mapeamento pela integração direta das matrizes de rigidez são mais difíceis de serem obtidos que seus pares com elementos de decaimento exponencial. Isto acontece porque nos elementos de mapeamento existe em algumas situações uma singularidade na coordenada $\varepsilon = 1$ que deve ser levada em conta no procedimento numérico.

A técnica de integração adotada é, portanto, aquela descrita na seção (2.5.3). Os resultados mostram que, mesmo com o elemento linear, resultados muito bons são obtidos.

elemento linear

O elemento linear implementado para a coluna de área linear fornece resultados considerados satisfatórios para a interpolação da solução.

Isto ocorre porque a função de forma do elemento carrega parte do comportamento decrescente da solução¹. Uma vez que o número de elementos finitos colocados não influi para o caso do semi-espaço homogêneo, os gráficos referem-se a situações com nenhum e apenas 16 elementos finitos. A solução em ambos os casos é idêntica, uma vez que o elemento de grau mais simples já converge diretamente para a solução procurada.

¹ amplitude com decaimento segundo uma função racional

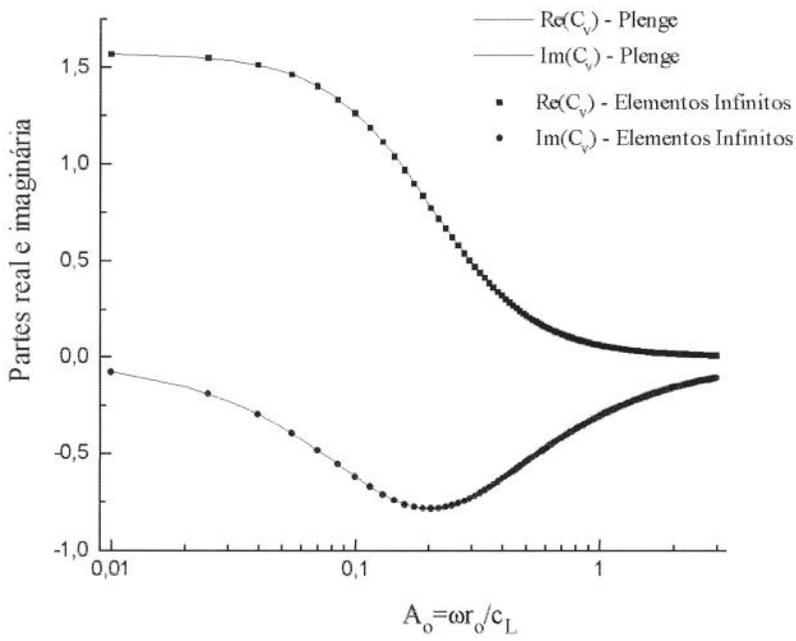


Figura 3.29: Elemento infinito em $x = x_0 = 1.0$

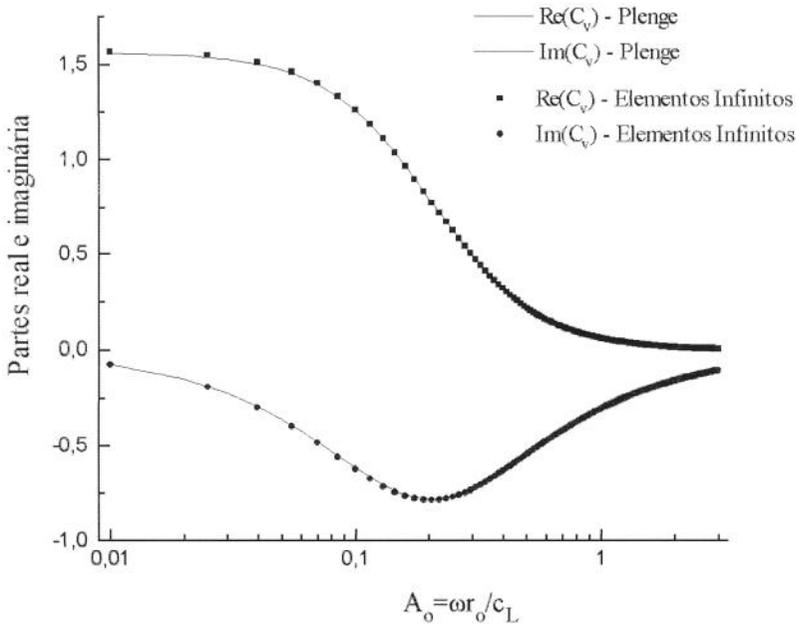


Figura 3.30: Elemento infinito em $x = x_0 = 16.0$ e 16 elementos finitos

elemento quadrático

Os resultados com este elemento mostram que grau quadrático não influi na precisão encontrada pelo método. Foram verificados casos para 0 e 16 elementos.

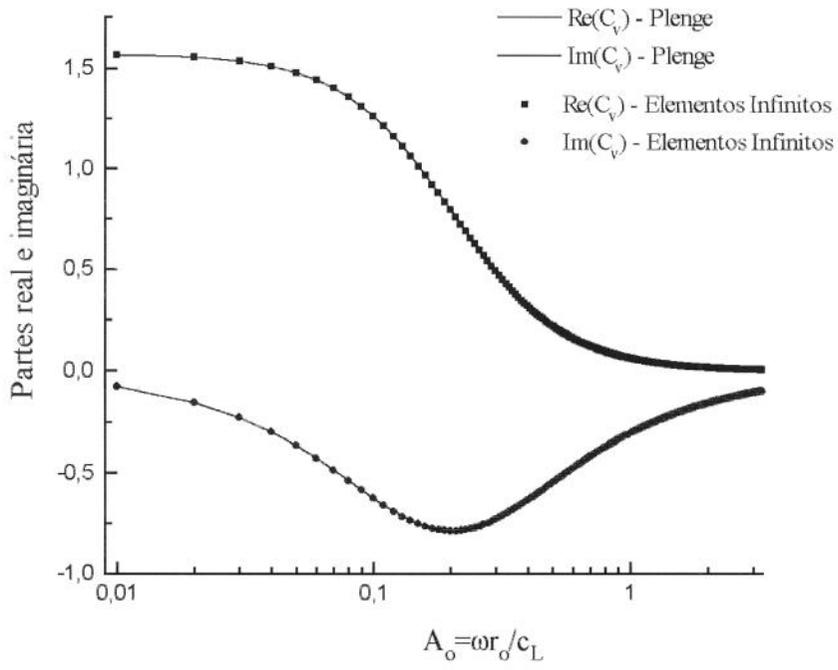


Figura 3.31: Elemento infinito em $x = x_0 = 1.0$

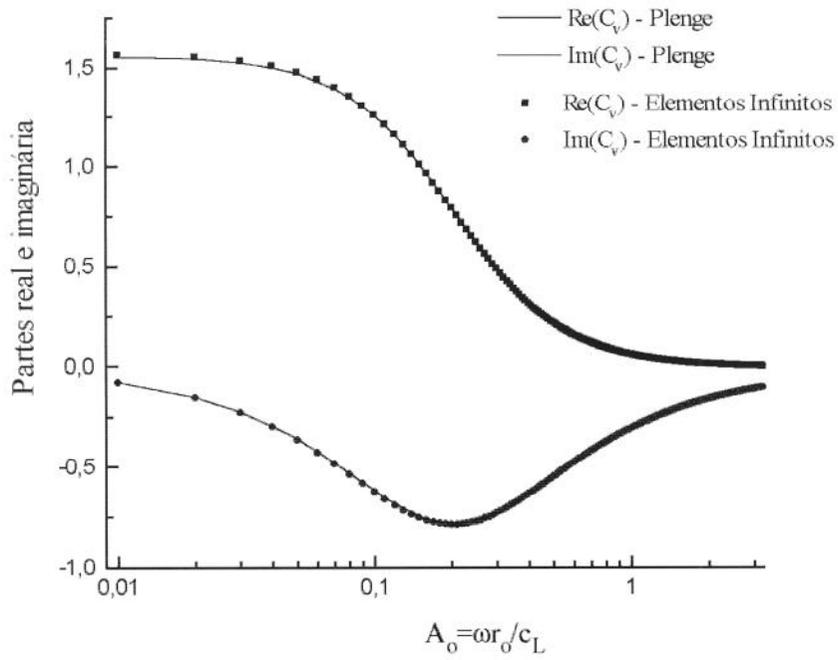


Figura 3.32: Elemento infinito em $x = x_0 = 16.0$
e 16 elementos finitos

energia transmitida pela coluna

A energia transmitida pela coluna indica a quantidade de amortecimento presente no modelo. Para o caso da coluna linear, a não existência de uma frequência de corte indica que a energia é transmitida mesmo a baixas frequências, o que é previsto também pelo modelo.

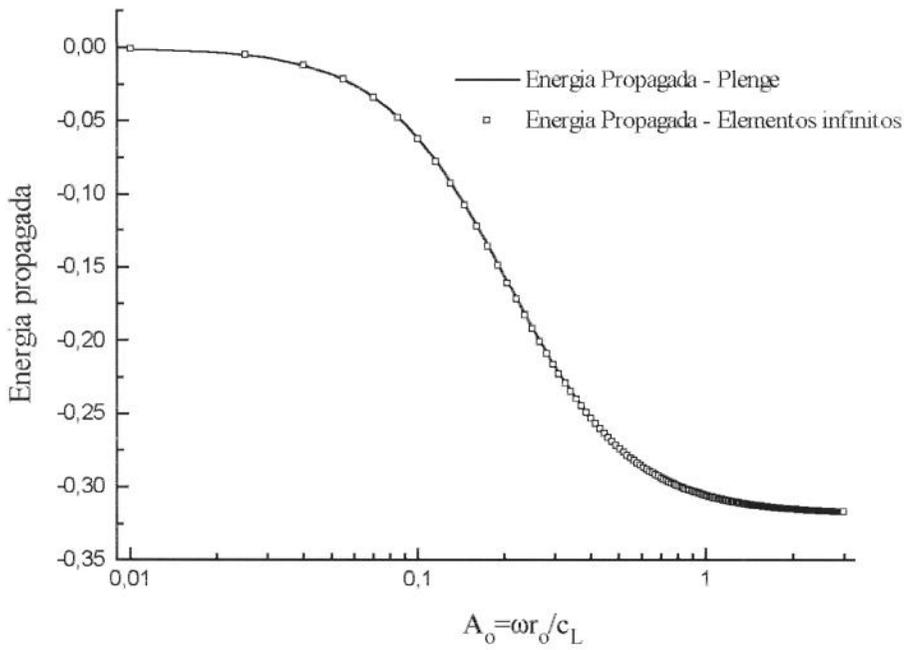


Figura 3.33: elemento infinito posicionado em $x = x_0 = 16,0$ e 16 elementos finitos

4. Princípios da propagação de ondas em meios elásticos

4.1 Introdução

Neste capítulo serão derivadas as equações de movimento para um meio elástico e isotrópico, em termos dos deslocamentos das partículas, das quais o meio é composto e será verificado que, para o caso de sólidos infinitos, estas equações correspondem a dois tipos básicos de ondas que se propagam pelo interior do sólido [18]. Será mostrado ainda que o movimento das partículas na onda de cisalhamento ocorre no plano perpendicular à direção de propagação, enquanto no caso de ondas de dilatação o movimento ocorre em uma direção paralela à direção de propagação da onda. As ondas de dilatação e de compressão são ainda designadas por ondas de corpo

Se o sólido é tratado como um meio infinito, apenas estes dois tipos básicos de onda podem se propagar. Porém, quando o sólido é limitado por uma superfície livre ou quando existe uma interface delimitando zonas de diferentes propriedades elásticas outros tipos de ondas também estão presentes. Estas ondas são chamadas respectivamente de ondas de Rayleigh e ondas de Love. Será mostrado que o perfil característico destas ondas obedece um padrão de propagação cilíndrico, com centro no local de perturbação.

4.2 Princípios da mecânica dos sólidos

A tensão em um elemento de superfície em um corpo sólido não atua, geralmente, segundo uma direção normal à superfície, mas tem componentes que atuam também no plano tangencial.

Definição de Tensão

Em geral, as forças internas atuantes em regiões infinitesimais em uma dada seção de um membro estrutural são de várias magnitudes e direções. Estas forças, como se sabe, são de caráter vetorial e, como resultado da sua interação mútua, mantêm com as forças externas aplicadas um conjunto em equilíbrio. Em mecânica dos sólidos, a correta determinação da magnitude e distribuição destes esforços internos é de particular interesse no projeto mecânico [43]. Considerando uma determinada região infinitesimal como mostrado na figura seguinte, é vantajoso dividir a resultante das forças atuantes segundo as suas componentes e segundo as direções definidas pela normal à seção considerada e suas perpendiculares. Como um exemplo, as componentes de um vetor força ΔP atuando em uma região ΔA são mostrados. Nesta configuração particular, a normal à seção considerada é paralela ao sistema de coordenadas externas definido pelos eixos Ox , Oy e Oz .

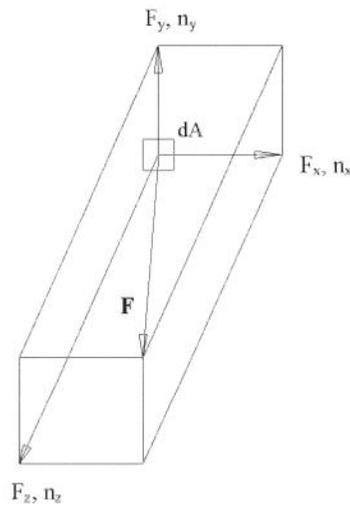


Figura 4.1: Decomposição de uma força segundo a normal à superfície

Uma vez que as componentes da intensidade de uma força por unidade de área (isto é, *tensão*) são verdadeiras somente quando se considera um caráter pontual, a definição matemática de tensão é:

$$\tau_{xx} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P_x}{\Delta A} \quad (4.2.1A)$$

$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P_y}{\Delta A} \quad (4.2.1B)$$

$$\tau_{xz} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P_z}{\Delta A} \quad (4.2.1C)$$

onde, em todos os casos acima, o primeiro índice de τ indica que se está considerando o plano cuja normal é paralela ao eixo X.

A intensidade da força perpendicular a esta seção considerada é chamada de tensão normal em um dado ponto. Em mecânica dos sólidos é costume se referir a esta tensão como aquela tensão de tração ou de compressão dependendo do sentido em que ela atua. De maneira geral, tensão de tração tende a separar duas regiões próximas e tensão de compressão tende a aproximá-las.

Se, em adição ao plano definido pela seção anterior forem considerados os outros dois planos perpendiculares ao primeiro e com normais definidas pelos eixos Oy e Oz, pode-se definir outros dois conjuntos de tensões nos quais o primeiro índice da tensão agora é y ou z dependendo do plano considerado. Assim, o *tensor de tensões* é definido como o conjunto de quaisquer três conjuntos de tensões atuantes em planos mutuamente perpendiculares e separados de uma distância infinitesimal. Observa-se que, uma vez que os planos são geralmente definidos de maneira que suas direções normais coincidam com os eixos externos, as componentes do tensor variam conforme a orientação do sistema de coordenadas escolhido. Tem-se então, utilizando a notação indicial [43]:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \quad (4.2.2)$$

e considerando o cubo infinitesimal formado pelo conjunto dos três planos ortogonais mostra-se que, por considerações de equilíbrio, o tensor acima deve ser simétrico [43] e, assim:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (4.2.3)$$

Os termos fora da diagonal principal do tensor de tensão são chamados de tensões de cisalhamento. Este nome é dado uma vez que estas tensões tendem a deformar o cubo infinitesimal, separando-o do corpo por distorção. De maneira similar é demonstrado em textos de elasticidade [43] que o *tensor de deformações infinitesimais* é dado por:

$$\epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (4.2.4)$$

onde as deformações infinitesimais ϵ_{ij} estão relacionadas com os deslocamentos por meio de [43,21,19]:

$$\epsilon_{ij} = \frac{u_{i,j} + u_{j,i}}{2} \quad (4.2.5)$$

onde u_x , u_y e u_z são os deslocamentos de um dado ponto no interior do sólido e vírgula representa a derivada parcial em relação a derivada indicada.

Forma generalizada da Lei de Hooke

É observado experimentalmente que muitos dos materiais tratados em engenharia apresentam deformações que são proporcionais ao carregamento aplicado, uma vez que tal carregamento não exceda um determinado valor conhecido como limite elástico linear. Esta lei experimental é colocada matematicamente como: "cada uma das seis componentes do tensor de tensões é, em qualquer ponto, uma função linear das seis componentes do tensor de deformações". Esta lei, conhecida como lei generalizada de Hooke pode, então, ser escrita como [21]:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= c_{11}\epsilon_{xx} + c_{12}\epsilon_{yy} + c_{13}\epsilon_{zz} + c_{14}\epsilon_{yz} + c_{15}\epsilon_{zx} + c_{16}\epsilon_{xy} \\ \sigma_y &= c_{21}\epsilon_{xx} + c_{22}\epsilon_{yy} + c_{23}\epsilon_{zz} + c_{24}\epsilon_{yz} + c_{25}\epsilon_{zx} + c_{26}\epsilon_{xy} \\ \sigma_z &= c_{31}\epsilon_{xx} + c_{32}\epsilon_{yy} + c_{33}\epsilon_{zz} + c_{34}\epsilon_{yz} + c_{35}\epsilon_{zx} + c_{36}\epsilon_{xy} \\ \tau_{yz} &= c_{41}\epsilon_{xx} + c_{42}\epsilon_{yy} + c_{43}\epsilon_{zz} + c_{44}\epsilon_{yz} + c_{45}\epsilon_{zx} + c_{46}\epsilon_{xy} \\ \tau_{zx} &= c_{51}\epsilon_{xx} + c_{52}\epsilon_{yy} + c_{53}\epsilon_{zz} + c_{54}\epsilon_{yz} + c_{55}\epsilon_{zx} + c_{56}\epsilon_{xy} \\ \tau_{xy} &= c_{61}\epsilon_{xx} + c_{62}\epsilon_{yy} + c_{63}\epsilon_{zz} + c_{64}\epsilon_{yz} + c_{65}\epsilon_{zx} + c_{66}\epsilon_{xy} \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

onde os coeficientes c_{ij} 's são conhecidos como coeficientes elásticos do material. Pode ser mostrado [43] que a condição para a qual a energia elástica ser uma função univalente da deformação elástica é a simetria da matriz c_{ij} . Ou seja:

$$c_{ij} = c_{ji} \quad (4.2.7)$$

A relação acima reduz o número de coeficientes independentes de 36 para 21. Quando o material possui planos ou eixos de simetria, certas relações entre os coeficientes são estabelecidas e o

número de constantes envolvidas é consequentemente reduzido. Portanto, se devem ser utilizados os valores dos coeficientes para um sólido isotrópico restam apenas duas constantes independentes a ser determinadas. Tais constantes são denotadas por λ e μ e chamadas de constantes de Lamé. Então:

$$c_{12} = c_{13} = c_{21} = c_{23} = c_{31} = c_{32} = \lambda \quad (4.2.8A)$$

$$c_{44} = c_{55} = c_{66} = \mu \quad (4.2.8B)$$

$$c_{11} = c_{22} = c_{33} = \lambda + 2\mu \quad (4.2.8C)$$

e os outros 19 coeficientes tornam-se zero. As equações (4.2.6) podem, então, ser escritas como:

$$\sigma_x = \lambda\Delta + 2\mu\varepsilon_{xx} \quad (4.2.9A)$$

$$\sigma_y = \lambda\Delta + 2\mu\varepsilon_{yy} \quad (4.2.9B)$$

$$\sigma_z = \lambda\Delta + 2\mu\varepsilon_{zz} \quad (4.2.9C)$$

$$\tau_{xy} = \mu\varepsilon_{xy} \quad (4.2.9D)$$

$$\tau_{xz} = \mu\varepsilon_{xz} \quad (4.2.9E)$$

$$\tau_{yz} = \mu\varepsilon_{yz} \quad (4.2.9F)$$

onde $\Delta = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$, esta última representando a variação volumétrica de um cubo unitário e é chamada de dilatação volumétrica. As duas constantes elásticas acima são chamadas de constantes de Lamé e definem completamente o comportamento elástico de um sólido isotrópico. Por costume, entretanto, quatro constantes elásticas são normalmente utilizadas: o módulo de Young, E , o módulo de Poisson, ν , o módulo de rigidez transversal, G e a dilatação volumétrica, k . A relação entre o módulo de Young e as constantes de Lamé é dada por [43]:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad (4.2.10)$$

enquanto que a taxa de Poisson é a relação entre a deformação longitudinal e a contração (ou dilatação) no plano transversal. Portanto:

$$v = -\frac{\epsilon_{yy}}{\epsilon_{xx}} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (4.2.11)$$

e, de maneira similar, o módulo de dilatação volumétrica, k , é definida como a razão entre o carregamento aplicado e a variação em volume quando o sólido é submetido à uma pressão hidrostática uniforme. Assim:

$$k = \frac{P}{\Delta} = \lambda + \frac{2\mu}{3} \quad (4.2.12)$$

As várias relações acima mostram que, uma vez definidos o valor de quaisquer duas das constantes elásticas, por exemplo módulo de Young e módulo de Poisson ou módulo de elasticidade transversal e módulo de estaca, o comportamento elástico do material está definido [21].

4.3 Equações de movimento em um meio elástico contínuo e isotrópico

Com o propósito de se obter as equações de movimento para um meio elástico, considera-se a variação de tensão através de um cubo diferencial de lados dx , dy e dz . Como pode ser visto, seis forças independentes atuam de forma paralela a cada um dos eixos.

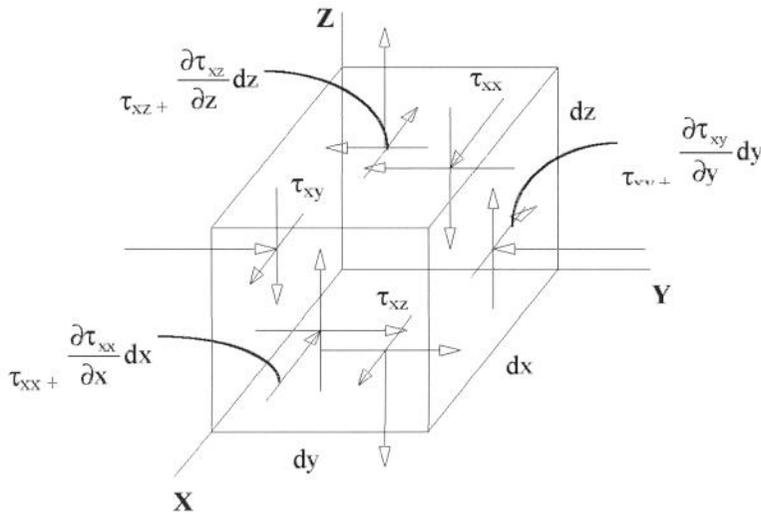


Figura 4.2: cubo diferencial em equilíbrio

Se se considera a força resultante atuando na direção x , tem-se:

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy dz - \sigma_x dy dz + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{xy} dx dz + \\ & + \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{xz} dx dy = (\rho dx dy dz) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

onde $\bar{u} = (\dot{u}_x, \dot{u}_y, \dot{u}_z)$. Na fórmula acima ρ é a densidade. Simplificando a equação acima e considerando-se o equilíbrio nas outras direções, tem-se:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \quad (4.3.2A)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \quad (4.3.2B)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \quad (4.3.2C)$$

ou, em notação indicial:

$$\sigma_{ij,j} + f_i = \rho \ddot{u}_i \quad (4.3.3)$$

Uma vez que estas equações foram desenvolvidas sem qualquer consideração a respeito da forma como o material do meio se comporta, elas serão válidas seja qual for este comportamento. Especializando, todavia, as equações acima para o caso de um sólido linear e isotrópico tem-se, introduzindo as equações (4.2.9), as equações do movimento em termos das deformações infinitesimais ϵ_{ij} [21]:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\lambda \Delta + 2\mu \epsilon_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y} (\mu \epsilon_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z} (\mu \epsilon_{xz}) = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \quad (4.3.4A)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\mu \epsilon_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} (\lambda \Delta + 2\mu \epsilon_{yy}) + \frac{\partial}{\partial z} (\mu \epsilon_{yz}) = \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \quad (4.4.4B)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\mu \epsilon_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y} (\mu \epsilon_{zy}) + \frac{\partial}{\partial z} (\lambda \Delta + 2\mu \epsilon_{zz}) = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \quad (4.3.4C)$$

Finalmente, considerando a definição das deformações infinitesimais, dada pela equação (4.2.1), tem-se:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u_x = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \quad (4.3.5A)$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial y} + \mu \nabla^2 u_y = \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \quad (4.3.5B)$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial z} + \mu \nabla^2 u_z = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \quad (4.3.5C)$$

e, finalmente, estas são as equações de movimento para um sólido linear elástico e isotrópico no qual estão ausentes forças de corpo. Será mostrado que elas correspondem a dois tipos de ondas que se propagam pelo sólido. Assim, diferenciando ambos os lados da equação (4.3.5A) em relação a x , e fazendo o mesmo com as equações (4.3.5B) e (4.3.5C) com relação a y e z e somando as três equações resultantes, tem-se:

$$(\lambda + 2\mu) \nabla^2 \Delta = \rho \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} \quad (4.3.6)$$

A equação de onda acima mostra [21,43] que a onda de dilatação Δ se propaga pelo meio com velocidade característica dada por:

$$c = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (4.3.7)$$

e se, por outro lado, elimina-se Δ pela diferenciação da equação (4.3.5B) em relação a z , diferenciando-se a equação (4.3.5C) em relação a y e subtraindo-se uma da outra obtém-se:

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) = \mu \nabla^2 \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \quad (4.3.8)$$

ou considerando-se

$$2\omega_x = \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \quad (4.3.9)$$

a equação (4.3.8) pode ser escrita como:

$$\rho \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial t^2} = \mu \nabla^2 \omega_x \quad (4.3.10)$$

onde ω_x é a rotação do elemento diferencial ao redor do eixo Ox .

Equações similares podem ser obtidas para ω_y e ω_z . Para todas estas equações de onda na qual um distúrbio de ordem distorcional se propaga tem-se a seguinte velocidade de onda:

$$c = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (4.3.11)$$

As três equações resultantes deste procedimento podem ser reunidas sob a mesma equação, agora na forma vetorial:

$$\rho \frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} = \mu \nabla^2 \Omega \quad (4.3.12)$$

onde $\Omega = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$. Vê-se então que no interior de um sólido elástico podem se propagar ondas de diferentes velocidades. Ondas que não envolvem distorção se propagam segundo a velocidade dada pela equação (4.3.7) enquanto ondas de distorção se propagam segundo $c = \sqrt{\mu / \rho}$. Estritamente falando, estes dois tipos de ondas poderiam ser chamados de onda irrotacional e equivoluminal mas, uma vez que estes nomes são por demais complexos, serão utilizados os termos ondas de dilatação e ondas de cisalhamento respectivamente.

A transformação das três equações de equilíbrio acopladas (4.3.5) em duas equações diferenciais desacopladas, respectivamente escalar e vetorial é conhecida como decomposição de Helmholtz de um campo vetorial [12]. Uma vez que a equação (4.3.5) está escrita em termos de três componentes de deslocamentos, u_i e a decomposição (4.3.6) e (4.3.12) apresenta quatro componentes (três componentes do campo vetorial e uma componente escalar), é necessária uma equação adicional que possibilite tal decomposição. Pode-se mostrar [12] que a condição:

$$\nabla \cdot \Omega = 0 \quad (4.3.13)$$

é suficiente para garantir a unicidade da decomposição.

Integração da equação de Onda

As equações (4.3.5), estão colocadas na seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \alpha \quad (4.3.14)$$

e quando a deformação é função de apenas uma coordenada (x_i) a equação acima torna-se:

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_i^2} \quad (4.3.15)$$

e cuja solução geral é dada por [18]:

$$\alpha = f(x_i - ct) + g(x_i + ct) \quad (4.3.16)$$

onde f e g são funções arbitrárias dependendo das condições iniciais do problema. Como se sabe, f corresponde a um distúrbio propagando-se no sentido positivo do eixo Ox_i e g representa um distúrbio que se propaga na direção negativa do eixo Ox_i . Para cada onda pode ser visto que, em um dado instante t_1 , α é uma função apenas de x_i , isto é, a deformação tem uma dada forma através do meio. Um instante de tempo depois, seja t_2 , a onda se propagará de uma distância $c(t_2 - t_1)$ **mantendo a sua forma inalterada**.

Se um dado distúrbio se propaga a partir de um dado ponto, a deformação dependerá apenas do valor de r , o vetor que mede a distância do ponto considerado à origem do distúrbio. Uma vez que $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, tem-se:

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} = \frac{x^2}{r^2} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left(\frac{r^2 - x^2}{r^2} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial r} \quad (4.3.17)$$

com equações similares para $\partial^2 \alpha / \partial y^2$ e $\partial^2 \alpha / \partial z^2$. Assim a equação (4.3.15) torna-se:

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 (r\alpha)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 (r\alpha)}{\partial r^2} \quad (4.3.18)$$

ou seja, a forma acima é a mesma equação (4.3.16) na variável $r\alpha$ e tem solução do tipo:

$$r\alpha = f(r - ct) + g(r + ct) \quad (4.3.18)$$

onde f representa agora uma onda esférica que diverge do ponto de propagação, enquanto g representa uma onda esférica que converge para o ponto de propagação. A amplitude, em ambos os casos, é inversamente proporcional à distância r .

4.3.1 Ondas de Rayleigh

Em um sólido isotrópico infinito, dois e apenas dois tipos de ondas elásticas podem se propagar. Estas são ondas de dilatação e ondas de cisalhamento. Onde existe uma superfície livre delimitando o sólido, entretanto, ondas adicionais podem também ocorrer. Estas ondas, que são similares a ondas que se propagam na superfície de um líquido foram primeiramente investigadas por Lord Rayleigh (1887) que mostrou que seus efeitos decaem rapidamente com a profundidade e que sua velocidade de propagação é menor que os dois tipos de onda anteriores.

Considera-se a propagação de uma onda plana através de um meio elástico limitado por um contorno plano e tenta-se encontrar a solução para a equação do movimento, dada pelas equações (4.3.4), que corresponde a um distúrbio que se propaga de maneira confinada às vizinhanças da superfície livre e que satisfaz a condição de que o contorno, por definição, é um local livre de tensões. Por simplicidade toma-se o contorno como sendo o plano xy com a direção normal positiva (representando o eixo Oz) apontando para o interior do sólido e toma-se uma onda plana que se propaga segundo a direção positiva do eixo Ox . Uma vez que os deslocamentos serão, então, independentes de y , pode-se definir duas funções de potencial, ϕ e ψ [43,12] tais que:

$$u_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad \text{e} \quad u_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4.3.19)$$

Considerando-se agora a equação (4.2.5), a dilatação Δ será dada por:

$$\Delta = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \nabla^2 \phi \quad (4.3.20)$$

enquanto que a rotação ao redor do eixo Oy , ω_y , é dada por:

$$2\omega_y = \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} = \nabla^2 \psi \quad (4.3.21)$$

Estas equações mostram que ϕ é associada à propagação de ondas de dilatação, enquanto que ψ é associada à ondas de cisalhamento. A introdução destas funções de potencial pode, então, separar os efeitos de dilatação e distorção no meio elástico. Pode-se notar que as equações de movimento (4.3.5) podem ser escritas de forma vetorial e em função do dilatacional Δ :

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla \Delta + \mu \nabla^2 \vec{u} \quad (4.3.22)$$

e se os deslocamento podem ser expressos de forma independente de y a primeira e a terceira destas equações resulta, após a introdução de (4.3.19) como:

$$\rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) + \rho \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \phi) + \mu \frac{\partial}{\partial z} (\nabla^2 \psi) \quad (4.3.23)$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) - \rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial z} (\nabla^2 \phi) - \mu \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \psi) \quad (4.3.24)$$

e pode ser verificado que estas duas equações são satisfeitas se [43,12,21]:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \nabla^2 \phi = c_1^2 \nabla^2 \phi \quad (4.3.25)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \psi = c_2^2 \nabla^2 \psi \quad (4.3.26)$$

Agora, considerando-se uma onda senoidal de frequência $p/2\pi$ que se propaga na direção positiva do eixo Ox com velocidade c e comprimento de onda $2\pi/f$ e de tal maneira que $c = p/f$ pode-se tentar as seguintes soluções para as equações acima:

$$\phi = F(z) \exp[i(pt - fx)] \quad (4.3.27)$$

$$\psi = G(z) \exp[i(pt - fx)] \quad (4.3.28)$$

onde i é a unidade imaginária e $F(z)$ e $G(z)$ são funções que determinam com a qual a amplitude de ϕ e ψ varia de acordo com z . Substituindo a expressão de ϕ da equação (4.3.27) na equação (4.3.25), obtém-se:

$$-\frac{p^2}{c_1^2} F(z) = -f^2 F(z) + \frac{d^2 F}{dz^2} \quad (4.3.29)$$

e simplificando-se, esta equação pode ser escrita como:

$$\frac{d^2 F}{dz^2} - (f^2 - h^2) F(z) = 0 \quad (4.3.40)$$

onde $h = p/c_1$. A solução geral da equação acima é dada como:

$$F(z) = A_1 \exp(-qz) + A_2 \exp(+qz) \quad (4.3.41)$$

onde $q^2 = f^2 - h^2$. Aplicando a condição de radiação:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} - ikrf \right) = 0 \quad (4.3.42)$$

verifica-se que a equação (4.3.41) somente cumpre (4.3.42) se A_2 for escolhido como sendo igual a zero. De maneira similar, substituindo-se a expressão de ψ da equação (4.3.28) na equação (4.3.26), chega-se a uma expressão correspondente para $G(z)$:

$$-k^2 G(z) = -f^2 G(z) + \frac{d^2 G}{dz^2} \quad (4.3.42)$$

onde $k = p/c_2$. A solução desta equação é dada por:

$$G(z) = B_1 \exp(-sz) \quad (4.3.43)$$

para $s^2 = f^2 - k^2$. Assim, as expressões para as funções de potencial podem ser escritas como:

$$\phi = A_1 \exp[-qz + i(pt - fx)] \quad (4.3.44)$$

$$\psi = B_1 \exp[-sz + i(pt - fx)] \quad (4.3.45)$$

Inserire-se, então, as expressões dos potenciais nas condições de contorno, ou seja que σ_{zz} , σ_{zy} e σ_{zx} devem se anular em $z=0$. Uma vez que

$$\sigma_{zz} = \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (4.3.46)$$

e inserindo-se as funções de potencial, tem-se:

$$\sigma_{zz} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - 2\mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \quad (4.3.47)$$

Substituindo-se as equações (4.3.44) e (4.3.45), a fórmula acima é avaliada em $z=0$, resultando:

$$A_1 [(\lambda + 2\mu)q^2 - \lambda f^2] - 2B_1 \mu i s f = 0 \quad (4.3.48)$$

enquanto que, para σ_{zx} , tem-se:

$$\sigma_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \quad (4.3.49)$$

e em termos das funções de potencial, esta expressão pode ser dada por:

$$\sigma_{zx} = \mu \left(2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) \quad (4.3.50)$$

A substituição das equações (4.3.44) e (4.3.45) na equação acima e a avaliação em $z=0$ resulta:

$$2iqfA_1 + (s^2 + f^2)B_1 = 0 \quad (4.3.51)$$

e eliminando-se A_1 e B_1 das equações (4.3.48) e (4.3.51) uma nova equação em termos das diversas constantes é encontrada:

$$4\mu q s f^2 = [(\lambda + 2\mu)q^2 - \lambda f^2](s^2 + f^2) \quad (4.3.52)$$

Elevando-se ambos os lados da equação acima ao quadrado e substituindo-se as expressões apropriadas para q e s resulta:

$$16\mu^2(f^2 - h^2)(f^2 - k^2)f^4 = [-(\lambda + 2\mu)h^2 + 2\mu f^2]^2(2f^2 - k^2)^2 \quad (4.3.53)$$

Dividindo-se a equação por $\mu^2 f^8$ e substituindo-se as definições de h e k após simplificar-se o resultado final chega-se a:

$$k_1^6 - 8k_1^4 + (24 - 16\alpha_1^2)k_1^2 + 16(\alpha_1^2 - 1) = 0 \quad (4.3.54)$$

onde $k_1 = k/f$ e $\alpha_1 = h/k$. A constante α_1 pode ser dada em função do módulo de Poisson por:

$$\alpha_1 = \frac{1 - 2\nu}{2 - 2\nu} \quad (4.3.55)$$

A forma (4.3.54) é uma equação cúbica em k_1^2 e pode ser resolvida numericamente sempre que o módulo de Poisson para o meio for especificado. Agora, considerando-se que

$$k_1 = \frac{k}{f} = \frac{p}{fc_2} \quad (4.3.56)$$

fica claro que k_1 é a razão entre a velocidade da onda de superfície e da onda de distorção. A velocidade de propagação de onda é, então, independente da frequência de excitação $p/2\pi$ e depende somente das propriedades elásticas do meio. O movimento das ondas de superfície é, então, não-dispersivo e **a forma original da onda se mantém** à medida em que esta se propaga.

A análise do posicionamento das raízes da equação de Rayleigh permite concluir [21] que, para $\nu > 0.263$, a solução da equação fornece duas raízes complexas e uma raiz real. Entretanto,

nenhuma raiz complexa é aceitável na presente situação uma vez que isto implicaria para as funções de potencial:

$$\phi, \psi \approx \exp[-az - bt + i(\epsilon x + dz - ct)]$$

o que indica uma atenuação em relação ao tempo como, por exemplo, se amortecimento estivesse presente, o que não é o caso. Para $v < 0.263$ a solução resulta em três raízes reais. Porém duas destas raízes resultarão em valores imaginários para q/f e s/f e que não correspondem ao tipo de onda anteriormente postulado. Foi demonstrado¹ que para todos os meios elásticos onde $0 < v < 0.5$ existe apenas uma raiz da equação de Rayleigh que satisfaz o tipo de onda anteriormente proposto.

A taxa de decaimento da amplitude de onda sob o eixo Oz depende dos valores dos fatores de atenuação q e s e são, em última análise, funções do módulo de Poisson do meio de propagação. Tem-se, portanto:

$$\frac{q^2}{f^2} = 1 - \alpha_1^2 k_1^2 \quad (4.3.57)$$

$$\frac{s^2}{f^2} = 1 - k_1^2 \quad (4.3.58)$$

e das equações (4.3.44) e (4.3.45) tem-se:

$$u_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} = -(A_1 i f e^{-qz} + B_1 s e^{-sz}) \exp[i(pt - fx)] \quad (4.3.59)$$

$$u_z = \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} = -(A_1 q e^{-qz} + B_1 i f e^{-sz}) \exp[i(pt - fx)] \quad (4.3.60)$$

O que mostra o perfil de deslocamentos característico deste tipo de onda. Os deslocamentos propagam-se segundo um padrão cilíndrico que decrescem à medida em que se aprofundam no interior do sólido. Além disso, as expressões acima mostram que, para o caso bi-dimensional sem amortecimento, estas ondas **não sofrem decaimento na direção x**.

¹ Viktorov, I. A. *Rayleigh and Lamb waves: physical theory and applications*. Plenum Press, New York (1967)

Graff [18] demonstra que, para o caso tri-dimensional, as ondas de Rayleigh sofrem um decaimento na direção principal de propagação segundo $\frac{1}{\sqrt{R}}$.

4.4 Equações da viscoelasticidade

A descrição do comportamento de materiais viscoelásticos é mais complexa que a de sólidos perfeitamente elásticos e fluidos newtonianos. Em um sólido elástico, a tensão é determinada pela deformação do material relativo a um dado sistema de coordenadas. Assim, em cada ponto do sólido, a tensão no tempo atual é uma grandeza que só depende do valor atual da deformação.

Em um fluido clássico (chamado também de newtoniano), a tensão em um tempo t_0 é determinada pelos gradientes dos campos de velocidade e densidade calculados no tempo t_0 . Materiais de natureza viscoelástica se comportam, por sua vez, de maneira diferente e de tal forma que pode-se situá-los entre os sólidos e os fluidos clássicos; entretanto as tensões em tais materiais *não* são determinadas apenas pelo estado atual de deformação e movimento mas, também, pelas deformações e movimentos passados.

O fato dos materiais viscoelásticos apresentarem características de memória faz com que as equações viscoelásticas apresentem um aspecto diferente das equações da elasticidade descritas no capítulo anterior. Desse modo, para um material viscoelástico, isotrópico e linear, o tensor de deformação infinitesimal é definido [19] como:

$$\epsilon_{ij}(\tau) = \frac{1}{2} [u_{i,j}(\tau) + u_{j,i}(\tau)] \quad (4.4.1)$$

para $-\infty < \tau \leq t$ onde τ indica a variável tempo e t o tempo atual.

Considerando o tensor tensão σ_{ij} , as equações constitutivas para um sólido viscoelástico e isotrópico são dadas por [11,15,38]:

$$\sigma_{ij}(x, \tau) = \delta_{ij} \int_{-\infty}^t \lambda(t-\tau) \frac{\partial \epsilon_{kk}}{\partial \tau} d\tau + \int_{-\infty}^t 2\mu(t-\tau) \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial \tau} d\tau \quad (4.4.2)$$

com $\lambda(t - \tau)$ e $\mu(t - \tau)$ sendo funções de relaxação e o índice repetido indicando soma. Sabe-se que uma dada equação diferencial parcial ou equação integral que descreve o modelo matemático de um problema físico está bem colocada em termos matemáticos se esta estiver acompanhada de condições de contorno e condições iniciais suficientes para a solução. Entretanto, quando trabalha-se com domínios transformados, como é o caso do domínio de Fourier, não se considera as condições iniciais do problema. Isto é melhor detalhado no exemplo que segue.

Considera-se um problema viscoelástico para o caso especial onde as forças de corpo e as condições de contorno sejam harmônicas no tempo com frequência angular ω , isto é,

$$f(x, t) = \bar{F}(x, \omega) \exp(i\omega t) \quad (4.4.3)$$

além disso, a solução de tal problema pode ser colocada na forma [11,15]:

$$u(x, t) = u^l(x, t) + u^e(x, t) \quad (4.4.4)$$

onde $u^l(x, t)$ é a parte transiente da solução e $u^e(x, t)$, dado por

$$u^e(x, t) = \bar{U}(x, \omega) \exp(i\omega t) \quad (4.4.5)$$

representa as oscilações do estado estacionário do problema. Supõe-se ainda que $\bar{U}(x, \omega)$ e $\bar{F}(x, \omega)$ sejam integráveis para (x, ω) em \mathbf{R}^n ou \mathbf{C}^n .

A parte $\bar{U}(x, \omega)$ é determinada de modo a satisfazer as condições de contorno do problema sob uma dada distribuição de forças de corpo. Já a parte transiente é colocada como a solução homogênea do problema, sob condições de contorno também homogêneas, mas satisfazendo as condições iniciais [15]:

$$u^l(x, 0) = u(x, 0) - \bar{U}(x, \omega) \quad (4.4.6)$$

$$\frac{\partial u^l(x, 0)}{\partial \tau} = v(x, 0) - i\omega \bar{U}(x, \omega) \quad (4.4.7)$$

em que $u(x, 0)$ e $v(x, 0)$ representam funções que dependem apenas da posição. Assim, percebe-se que os valores iniciais atuam apenas na parte transiente da solução [11, 15, 21].

Uma vez que em qualquer sistema físico existe sempre amortecimento em maior ou menor grau, é razoável supor-se que a parte transiente da solução tenda assintoticamente a zero após um certo intervalo de tempo. Dessa forma pode-se considerar apenas a solução do problema em seu estado estacionário, reformulando-o de modo que o instante de observação do movimento seja suficiente distante dos estágios iniciais da perturbação. Além disso a variável tempo é eliminada da equação diferencial que governa o problema.

O problema de valor inicial e de contorno é, portanto, reduzido a um problema de valor de contorno somente. O significado matemático para esta representação, isto é, $\bar{U}(x, \omega)$, é dado pela integral de todas as frequências possíveis ou, como é chamada, transformada de Fourier:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{U}(x, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega \quad (4.4.8)$$

Assim, retornando à análise das equações da elasticidade, se a deformação é uma função harmônica no tempo, ou seja:

$$\epsilon_{ij}(x, \tau) = \epsilon_{ij}(x) \exp(i\omega \tau) \quad (4.4.9)$$

tem-se:

$$\frac{\partial \epsilon_{ij}(x, \tau)}{\partial \tau} = i\omega \epsilon_{ij}(x) \exp(i\omega \tau) \quad (4.4.10)$$

e considerando as equações acima, a expressão (4.4.2) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(x, t) = i\omega \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(\eta) \exp(-i\omega\eta) d\eta \right] \epsilon_{kk}(x) \delta_{ij} \exp(i\omega t) + \\ + i\omega \left[\int_{-\infty}^{+\infty} 2\mu(\eta) \exp(-i\omega\eta) d\eta \right] \epsilon_{ij}(x) \exp(i\omega t) \end{aligned} \quad (4.4.11)$$

Pela propriedade das funções de relaxação em que $\lambda(t)=\mu(t)=0$ para $t < 0$, pode-se escrever a equação acima na forma [11,38]:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(x, t) = i\omega \left[\int_0^{+\infty} \lambda(\eta) \exp(-i\omega\eta) d\eta \right] \epsilon_{kk}(x) \delta_{ij} \exp(i\omega t) + \\ + i\omega \left[\int_0^{+\infty} 2\mu(\eta) \exp(-i\omega\eta) d\eta \right] \epsilon_{ij}(x) \exp(i\omega t) \end{aligned} \quad (4.4.12)$$

ou, de maneira simplificada:

$$\sigma_{ij}(x, t) = \left[\lambda^*(\omega) \epsilon_{kk}(x) \delta_{ij} + 2\mu^*(\omega) \epsilon_{ij}(x) \right] \exp(i\omega t) \quad (4.4.13)$$

em que $\lambda^*(\omega)$ e $\mu^*(\omega)$ são funções de valores complexos. As integrais na equação (4.4.12) indicam a transformada de Fourier de $\lambda^*(\omega)$ e $\mu^*(\omega)$, ou seja:

$$\lambda^*(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(\eta) \exp(-i\omega\eta) d\eta \quad (4.4.14)$$

$$\mu^*(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\eta) \exp(-i\omega\eta) d\eta \quad (4.4.15)$$

Em particular, assumindo o tensor de tensão σ_{ij} também harmônico na variável t segue-se que:

$$\sigma_{ij}(x, t) = \left[\lambda^*(\omega) \epsilon_{kk}(x) \delta_{ij} + 2\mu^*(\omega) \epsilon_{ij}(x) \right] \quad (4.4.16)$$

e pode-se notar que a equação acima é a mesma equação constitutiva para problemas elásticos lineares sendo a única diferença residente no fato que, agora, as constantes de Lamé são funções complexas e dependendo do modelo de amortecimento escolhido, dependentes da frequência.

A equação (4.4.13) pode ser escrita em termos de deslocamentos. Para isto considera-se o balanço da quantidade de movimento linear no caso dinâmico em elasticidade [18], dado por:

$$\sigma_{ij,j}(t) + F_i(t) = \rho \frac{\partial^2 U_i(t)}{\partial t^2} \quad (5.2.17)$$

em que $F_i(t)$ são as forças de corpo, ρ é a densidade de massa e U_i o campo de deslocamento.

Combinando-se as equações acima obtém-se as **equações de movimento em viscoelasticidade** [15] como:

$$\int_{-\infty}^t \mu(t-\tau) \frac{\partial U_{i,jj}}{\partial \tau} d\tau + \int_{-\infty}^t [\lambda(t-\tau) + \mu(t-\tau)] \frac{\partial U_{k,ki}}{\partial \tau} d\tau + F_i = \rho \frac{\partial^2 U_i(t)}{\partial t^2} \quad (4.4.18)$$

Na equação acima, admitindo-se as forças de corpo por unidade de volume nulas, ou seja, $F_i = 0$, e novamente considerando-se os deslocamentos harmônicos no tempo, pode-se escrever a equação acima na forma [38,15]:

$$\mu^*(\omega) \bar{U}_{i,jj} + [\lambda^*(\omega) + \mu^*(\omega)] \bar{U}_{k,ki} = -\omega^2 \rho \bar{U}_i \quad (4.4.19)$$

em que as constantes de Lamé complexas podem ainda ser dadas por:

$$\mu^*(\omega) = \mu [1 + i\eta_\mu(\omega)] \quad (4.4.20A)$$

$$\lambda^*(\omega) = \lambda [1 + i\eta_\lambda(\omega)] \quad (4.4.20B)$$

em que os coeficientes η_μ e η_λ caracterizam o amortecimento do sistema.

Na maioria dos problemas de interação dinâmica solo-estrutura (DSSI), o comportamento das constantes físicas dos materiais envolvidos situa-se entre o dos materiais elásticos e o dos viscoelásticos, daí a necessidade de modelos para descrever tal comportamento complexo. Tais modelos são geralmente dados em termos de duas unidades básicas: o elemento elástico e o elemento de amortecimento.

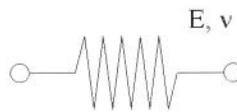


Figura 4.3: Elemento de mola

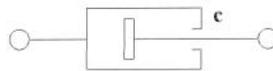


Figura 4.4: Elemento de amortecimento

A aplicação de uma tração σ em cada elemento ocasiona uma deformação ϵ que corresponde a um acréscimo na distância entre os extremos de cada elemento no estágio carregado. Assim, para o elemento elástico tem-se $\sigma = k\epsilon$ e, para o elemento de amortecimento $\sigma = c\epsilon'$. A combinação dos elementos de amortecimento e elástico em paralelo é conhecida como modelo de Kelvin-Voigt [15,21]:

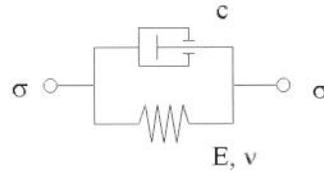


Figura 4.5: Modelo de Kelvin-Voigt

Neste modelo, a deformação ϵ é a mesma na mola e no amortecedor. Sejam σ_m a tensão na mola e σ_a a tensão no amortecedor. O equilíbrio do conjunto fornece que $\sigma = \sigma_m + \sigma_a$ e, portanto:

$$\sigma = k\epsilon + c\epsilon' \quad (4.4.21)$$

Considerando a tensão harmônica no tempo, de frequência ω , pode-se escrever a relação anterior como

$$\bar{\sigma} \exp(i\omega t) = (k\bar{\epsilon} + i\omega c\bar{\epsilon}) \exp(i\omega t) \quad (4.4.22)$$

$$\bar{\sigma} = (k + i\omega c)\bar{\epsilon} \quad (4.4.23)$$

ou seja:

$$\bar{\sigma} = k(1 + i\omega f)\bar{\epsilon} \quad (4.4.24)$$

em que $f = c/k$ é o coeficiente de amortecimento. Uma comparação entre as equações (4.4.24) e $\sigma = k\epsilon$ sugere que a transição entre o comportamento elástico e o viscoelástico no domínio da frequência se dá pela simples troca de k por $k^* = k(1 + i\omega f)$. Esta representação de amortecimento indica que a dissipação de energia é dependente da frequência de excitação ω .

Por esta razão, sugere-se o **modelo de histerese constante**, no qual o valor de k é complexo, porém independente da frequência e, assim:

$$k^* = k(1 + ig) \quad (4.4.25)$$

Baseando-se nestas observações pode-se estabelecer um princípio de equivalência para aproximar o mecanismo de amortecimento material em um sólido viscoelástico. Este princípio faz com que as constantes elásticas comumente utilizadas, λ e μ , sejam substituídas no domínio da frequência por suas contrapartes complexas:

$$\mu^* = \mu(1 + i\eta_\mu) \quad (4.4.26A)$$

$$\lambda^* = \lambda(1 + i\eta_\lambda) \quad (4.4.26B)$$

onde os termos η_μ e η_λ são denominados coeficientes constantes de amortecimento e usualmente são tomados iguais.

O amortecimento na forma $\mu^* = \mu(1 + i\eta_\mu)$ é chamado de histerético. As constantes viscoelásticas podem, ainda, ser descritas em termos das constantes comumente utilizadas em engenharia: módulo de Young, E , e módulo de elasticidade transversal, G [15,21] :

$$\mu^* = G^* \quad (4.4.27A)$$

$$\lambda^* = \frac{G^*}{3G^* - E^*} (E^* - 2G^*) \quad (4.4.27B)$$

5. Elementos finitos/infinitos para problemas da interação dinâmica solo-estrutura (DSSI)

5.1 Introdução

Neste capítulo são descritas as principais estratégias para o modelamento dos problemas da DSSI por uma combinação de elementos finitos/infinitos. É fornecida a formulação básica do método dos elementos finitos aplicado às equações da elasticidade. São mencionadas, também, diferentes alternativas para a introdução de amortecimento no modelo elástico desenvolvido. Em seguida são analisados os diferentes tipos de elementos infinitos propostos com aplicação aos problemas da DSSI e são analisadas as suas virtudes e deficiências.

Descreve-se também o programa DLEARN, um código de elementos finitos para análise linear estática e dinâmica. Além disso são revistos alguns tópicos a respeito da teoria de elementos finitos em elasticidade bi-dimensional. Apesar do campo de aplicações do programa ser relativamente restrito, muitos procedimentos sofisticados são empregados, os quais podem ser utilizados em versões posteriores mais avançadas. As principais características do programa são:

- código de programação estruturada que facilita a leitura do código e o seu aprimoramento
- o dicionário de apontadores de memória é impresso a cada execução facilitando informações a respeito da alocação dinâmica de memória
- capacidades simples para geração de modelos em uma e duas dimensões
- carregamentos complexos (no tempo) podem ser sintetizados pela combinação de múltiplos vetores de carregamento e a utilização de funções de forma no tempo
- facilidade para inclusão de novos tipos de elementos

No entanto o programa ainda se ressentia da falta de um bom esquema de visualização de resultados e modelos, defeitos que podem ser corrigidos com a adição de um bloco pós-processador. Porém, devido à facilidade com que são introduzidos elementos no código original, o programa é bem propício para servir de base a um código de elementos finitos. Além disso, para o modelamento do campo de deslocamentos na região próxima à fonte, são utilizados elementos finitos geralmente quadráticos [1,2,10] e, portanto, um código que possa lidar simultaneamente com vários tipos de elementos é bastante desejável.

5.2 Formulação do MEF para a elastodinâmica utilizando o método de Galerkin

Geralmente, a formulação de elementos finitos para os problemas da mecânica dos sólidos é resolvida em termos de princípios de trabalho virtual e conservação de energia [33,45]. Entretanto, por causa da sua generalidade, o método de Galerkin será utilizado aqui para obter-se as expressões para a matriz de rigidez, de massa e o vetor carregamento do problema da elastodinâmica.

Formulações a respeito dos vários tipos de amortecimento foram descritas na seção anterior de tal maneira que a inclusão no modelo de elementos finitos/infinitos é razoavelmente simples.

Sejam σ_{ij} as componentes (cartesianas, geralmente) do tensor de tensões. O termo u_i representa o vetor de deslocamentos e f_i representa o vetor de forças de corpo. O tensor de deformações, ϵ_{ij} , é definido pela equação (5.2.1):

$$\epsilon_{ij} \equiv \frac{u_{i,j} + u_{j,i}}{2} \quad (5.2.1)$$

O tensor de tensões é definido em termos do tensor de deformações através da lei de Hooke generalizada (lei constitutiva):

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (5.2.2)$$

onde o termo c_{ijkl} é a de matriz de propriedades materiais. Para um material homogêneo, isotrópico e linear, os 81 elementos desta matriz resultam em termos de λ e μ , constantes de Lamé. Além disso, c_{ijkl} é simétrica e positiva-definida.

A equação de equilíbrio da elastodinâmica foi definida no capítulo anterior como:

$$\sigma_{ij,j} + f_i = \rho u_{i,tt} \quad (5.2.3)$$

onde ρ denota a densidade do meio. Além disso, o problema em questão, admite que o domínio, Ω , seja circundado *completamente* pelo contorno Γ onde podem estar definidos dois tipos de condições:

- condições de contorno naturais ou de Dirichlet: são aquelas onde se define o valor das forças (trações) atuando no contorno. De maneira geral esta condição pode ser dado por:

$$\sigma_{ij}n_j = h_i \quad \text{em } \Gamma_{hi} \quad (5.2.4)$$

em que n_j define a normal a Γ_{hi} no ponto considerado.

- condições de contorno essenciais ou de Neumann: são aquelas onde se define o valor dos deslocamento impostos ao contorno. Tem-se, portanto:

$$u_i = g_i \quad \text{em } \Gamma_{gi} \quad (5.2.5)$$

Para propósitos de unicidade da solução procurada, admite-se ainda que o contorno Γ permita a seguinte decomposição:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \Gamma_{hi} \cup \Gamma_{gi} \\ \emptyset &= \Gamma_{hi} \cap \Gamma_{gi} \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

onde \emptyset denota o conjunto vazio.

O problema de valor de contorno da elastodinâmica estacionária é definido, então, como sendo o seguinte [19]:

“Dados $f_i : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$, $h_i : \Gamma_{hi} \rightarrow \mathbf{R}$, $g_i : \Gamma_{gi} \rightarrow \mathbf{R}$, encontrar o campo de deslocamentos $u_i : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbf{R}$ que satisfaz simultaneamente as condições de contorno e a equação de equilíbrio da elastodinâmica:

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} + f_i = \rho u_{i,tt} & \text{em } \Omega \\ u_i = g_i & \text{em } \Gamma_{gi} \\ \sigma_{ij} n_j = h_i & \text{em } \Gamma_{hi} \end{cases} \quad (5.2.7)$$

onde $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$.

Conforme foi descrito no capítulo anterior, não são necessárias condições iniciais pois supõe-se que a solução do problema acima é a estacionária. Se esta fosse uma formulação no domínio do tempo, tais condições iniciais deveriam estar presentes.

A formulação de elementos finitos para o problema acima é levada a termo utilizando-se o método dos resíduos ponderados com a formulação de Galerkin. Multiplica-se a equação acima pelo conjunto de funções ponderadoras w_i e integra-se sobre todo o domínio do problema:

$$\int_{\Omega} w_i \sigma_{ij,j} d\Omega + \int_{\Omega} w_i f_i d\Omega = \int_{\Omega} w_i \rho u_{i,tt} d\Omega \quad (5.2.8)$$

Aplicando a versão multidimensional do teorema de Green à primeira das integrais acima tem-se:

$$\int_{\Omega} w_i \sigma_{ij,j} d\Omega = - \int_{\Omega} w_{i,j} \sigma_{ij} d\Omega + \int_{\Gamma} w_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma \quad (5.2.9)$$

e, uma vez que coexistem duas condições de contorno diferentes em Γ_{hi} e Γ_{gi} , divide-se o contorno da última integral da equação (5.2.8) segundo as duas parcelas distintas:

$$\int_{\Omega} w_i \sigma_{ij,j} d\Omega = - \int_{\Omega} w_{i,j} \sigma_{ij} d\Omega + \int_{\Gamma_{hi}} w_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma + \int_{\Gamma_{gi}} w_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma \quad (5.2.10)$$

e admitindo-se w_i identicamente nulo em Γ_{gi} , a **formulação fraca** do problema de valor de contorno resulta:

$$\int_{\Omega} w_i f_i d\Omega + \int_{\Gamma_{hi}} w_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma = \int_{\Omega} w_i \rho u_{i,tt} d\Omega + \int_{\Omega} w_{i,j} \sigma_{ij} d\Omega \quad (5.2.11)$$

Aplicando-se a equação constitutiva (5.2.2) obtém-se a equação acima na forma de deslocamentos:

$$\int_{\Omega} w_i f_i \, d\Omega + \int_{\Gamma_{\text{bu}}} w_i h_i \, d\Gamma = \int_{\Omega} w_i \rho u_{i,tt} \, d\Omega + \int_{\Omega} w_{i,j} c_{ijkl} u_{k,l} \, d\Omega \quad (5.2.12)$$

e pode-se mostrar que, para o caso de materiais isotrópicos, o termo c_{ijkl} pode ser escrito em termos das constantes de Lamé [43] por meio de:

$$c_{ijkl}(x) = \mu(x) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \lambda(x) \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (5.2.13)$$

onde δ_{ij} é o tensor delta de Kröenecker. Portanto, não é difícil observar que a última integral da equação (5.2.12) pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega} w_{i,j} c_{ijkl} u_{k,l} \, d\Omega = \int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{w})^T \mathbf{D} \varepsilon(\mathbf{u}) \, d\Omega \quad (5.2.14)$$

onde os vetores $\varepsilon(\mathbf{w})$ e $\varepsilon(\mathbf{u})$ são dados, para o caso bidimensional, por:

$$\varepsilon(\mathbf{u}) = \begin{Bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,2} \\ u_{1,2} + u_{2,1} \end{Bmatrix} \quad \varepsilon(\mathbf{w}) = \begin{Bmatrix} w_{1,1} \\ w_{2,2} \\ w_{1,2} + w_{2,1} \end{Bmatrix} \quad (5.2.15)$$

Admite-se agora que w_i e u_i permitem uma aproximação (global) da forma padrão de elementos finitos:

$$\begin{aligned} u_i &= \sum N_A u_{Ai} e_i \\ w_i &= \sum N_A w_{Ai} e_i \end{aligned} \quad \text{sem soma no índice } i. \quad (5.2.16)$$

Aplicando-se as expressões acima às definições dos vetores $\varepsilon(\mathbf{w})$ e $\varepsilon(\mathbf{u})$, não é difícil mostrar-se que:

$$\varepsilon(N_A e_i) = [B_A] e_i \quad (5.2.17)$$

onde $[B_A]$, para os casos bi e tridimensional, é dada respectivamente por:

$$[B_A] = \begin{bmatrix} N_{A,1} & 0 \\ 0 & N_{A,2} \\ N_{A,2} & N_{A,1} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [B_A] = \begin{bmatrix} N_{A,1} & 0 & 0 \\ 0 & N_{A,2} & 0 \\ 0 & 0 & N_{A,3} \\ 0 & N_{A,3} & N_{A,2} \\ N_{A,3} & 0 & N_{A,1} \\ N_{A,2} & N_{A,1} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.2.18)$$

Admitindo-se que o domínio agora é fracionado em pequenos elementos de maneira que $\Omega = \sum \Omega^e$, a integral da equação (5.2.13) pode ser escrita por meio da superposição de várias integrais do tipo:

$$\int_{\Omega} w_{i,j} c_{ijkl} u_{k,l} d\Omega = \int_{\Omega} \epsilon(w)^T D \epsilon(u) d\Omega = \sum_{\Omega^e} e_i \int_{\Omega^e} [B]^T [D] [B] d\Omega^e e_j u_A \quad (5.2.19)$$

onde:

$$[B] = [B_A \quad B_B \quad \dots \quad B_N] \quad (5.2.20)$$

sendo A...N os nós do elemento. De maneira semelhante pode-se estender o raciocínio acima para as outras integrais, resultando:

$$\int_{\Omega} w_i \rho u_{i,t} d\Omega = \sum_{\Omega^e} \int_{\Omega^e} N_A \rho N_B d\Omega^e \ddot{u}_A \quad (5.2.21)$$

assim, de maneira geral, a discretização da equação (5.2.12) à maneira comum de elementos finitos leva à uma equação do tipo:

$$[M] \ddot{x}_i + [K] x_i = F_i \quad (5.2.22)$$

onde a matriz de massa, $[M]$, é dada pela superposição de matrizes elementares do tipo:

$$\begin{aligned}
 [M] &= \sum_{e=1}^{nel} [m^e] \\
 [m^e] &= \delta_{ij} \int_{\Omega^e} N_A \rho N_B d\Omega^e
 \end{aligned}
 \tag{5.2.23}$$

e a matriz de rigidez, $[K]$, é dada por:

$$\begin{aligned}
 [K] &= \sum_{e=1}^{nel} [k^e] \\
 [k^e] &= \mathbf{e}_i^T \int_{\Omega^e} [B_A]^T [D] [B_B] d\Omega^e \mathbf{e}_j
 \end{aligned}
 \tag{5.2.24}$$

O vetor de carregamento é, por sua vez, bem mais complexo que as matrizes acima. Ele é dado por:

$$\begin{aligned}
 F(t) &= F_{nodal}(t) + \sum_{n=1}^{nel} f_1(t) \\
 f_1(t) &= \int_{\Omega^e} N_A f d\Omega^e + \int_{\Gamma_{hi}} N_A h d\Omega^e - \sum_{i=1}^{neq} (k_{ai}^e g_i^e + m_{ai}^e \ddot{g}_i^e)
 \end{aligned}
 \tag{5.2.25}$$

Uma vez que a formulação acima é genérica, a existência da parcela do vetor de carregamento devido a uma aceleração \ddot{g}_i^e em alguns nós do modelo deve ser levada em conta.

5.3 Introdução de amortecimento nos modelos do MEF

Uma vez que o correto modelamento do amortecimento presente é de fundamental importância para a análise dinâmica, este tópico será revisto em mais detalhes, dando-se especial atenção para o domínio da frequência.

Uma das maneiras mais simples de introduzir-se amortecimento no modelo de elementos finitos é por meio do chamado modelo de amortecimento proporcional [19,46.43]. Este modelo admite que o amortecimento presente no sistema é independente da frequência de excitação e depende tanto da massa quanto da rigidez do sistema. Seguindo este modelo, a matriz de amortecimento do sistema é dada por:

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (5.3.1)$$

onde α e β são dois parâmetros a serem determinados experimentalmente. A equação de movimento para o sistema é, então, levemente modificada:

$$[M] \ddot{x}_i + [C] \dot{x}_i + [K] x_i = F_i \quad (5.3.2)$$

enquanto o vetor de forças deve incluir um termo extra devido ao amortecimento introduzido:

$$f_i(t) = \int_{\Omega^e} N_A f d\Omega^e + \int_{\Gamma_{hi}} N_A h d\Omega^e - \sum_{i=1}^{neq} \left[k_{ai}^e g_i^e + (\alpha m_{ai}^e + \beta k_{ai}^e) \dot{g}_i^e + m_{ai}^e \ddot{g}_i^e \right] \quad (5.3.3A)$$

$$F(t) = F_{nodal}(t) + \sum_{n=1}^{nel} f_n(t) \quad (5.3.3.B)$$

Este modelo de amortecimento é extremamente simples de ser incorporado a um código de elementos finitos.

5.4 Aplicação de elementos infinitos ao problema da DSSI

Seguindo a linha anteriormente descrita, será apresentada agora uma revisão a respeito dos principais tipos de elementos infinitos aplicados no problema da DSSI.

Ressalta-se desde o início que os melhores resultados encontrados são os fornecidos pelos elementos "semi-analíticos", onde a solução analítica do problema de propagação de ondas no semi-espaco é utilizada para o desenvolvimento de funções de forma especiais.

As maiores contribuições para estes elementos "semi-analíticos" vem do trabalho de Medina/Penzien [27] e de Rajapakse/Karashudi [36], elementos que serão revistos no que se segue. Em seguida investiga-se a possibilidade da utilização dos elementos ditos "padrões" para a simulação de problemas típicos da DSSI.

5.4.1 O elemento de Medina/Penzien

O elemento de Medina/Penzien parte da suposição básica que um determinado elemento, capaz de transmitir acuradamente os três tipos de ondas presentes em um semi-espaço homogêneo, deveria produzir bons resultados na modelagem da interação dinâmica fundação/solo.

O ponto inicial para o desenvolvimento deste elemento é a constatação de que as ondas de corpo (distorcional e dilatacional) e as ondas de Rayleigh propagam-se segundo perfis diferentes. As primeiras se propagam segundo perfil esférico ao passo que as ondas de Rayleigh são melhor descritas em um sistema de coordenadas cilíndricas no caso tridimensional.

Portanto, se o deslocamento de um dado ponto é devido simultaneamente aos três tipos de onda acima, então deve-se escolher um sistema de coordenadas vantajoso em que este movimento possa ser descrito.

Além disso, baseando-se em um sistema de coordenadas cilíndricas, os deslocamentos em um ponto do domínio segundo as direções (r, θ, z) é dado por uma expansão em termos de séries de Fourier, segundo:

$$u_r(r, \theta, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{rn}(r, z, t) \cos n\theta + \sum_{n=0}^{\infty} \bar{u}_{rn}(r, z, t) \sin n\theta \quad (5.4.1A)$$

$$u_\theta(r, \theta, z, t) = -\sum_{n=0}^{\infty} u_{\theta n}(r, z, t) \sin n\theta + \sum_{n=0}^{\infty} \bar{u}_{\theta n}(r, z, t) \cos n\theta \quad (5.4.1B)$$

$$u_z(r, \theta, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{zn}(r, z, t) \cos n\theta + \sum_{n=0}^{\infty} \bar{u}_{zn}(r, z, t) \sin n\theta \quad (5.4.1C)$$

onde u_{rn} , $u_{\theta n}$ e u_{zn} indicam as componentes simétricas do deslocamento e \bar{u}_{rn} , $\bar{u}_{\theta n}$ e \bar{u}_{zn} indicam as componentes anti-simétricas. A maior vantagem na decomposição segundo harmônicos do ângulo θ é a redução do problema tri-dimensional original para um problema bi-dimensional.

Assim, uma discretização de elementos finitos de um contínuo resulta em elementos de forma toroidal com respeito ao eixo z . Ressalta-se que as forças aplicadas segundo os eixos (r, θ, z) devem, evidentemente, seguir o mesmo processo de decomposição. Os elementos descritos são, portanto, aplicáveis a problemas tridimensionais e axi-simétricos.

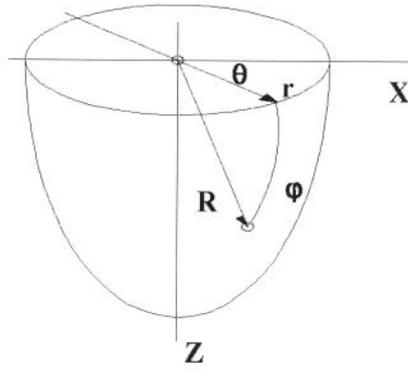


Figura 5.1: Sistema de coordenadas utilizado no desenvolvimento de elementos infinitos

Sem perda de generalidade, as componentes anti-simétricas nas equações acima podem ser anuladas e a formulação correspondente em termos de componentes anti-simétricas pode ser obtida apenas substituindo-se $\cos(n\theta)$ por $\sin(n\theta)$ e $-\sin(n\theta)$ por $\cos(n\theta)$.

A equação de movimento para cada harmônico n é dada pela equação (5.2.26):

$$[M]_n \ddot{x}_n + [C]_n \dot{x}_n + [K]_n x_n = F_n \quad (5.4.2)$$

onde, em coordenadas cilíndricas, as matrizes de massa, rigidez e amortecimento são dadas por:

$$[M]_n = \sum_{e=1}^{nel} [M]_n^e \quad (5.4.3)$$

$$[M]_n^e = \int_{\Omega^e} \rho [N]_n^T [N]_n r dr dz d\theta$$

$$[C]_n = \sum_{e=1}^{nel} [C]_n^e \quad (5.4.4)$$

$$[C]_n^e = \int_{\Omega^e} c [N]_n^T [N]_n r dr dz d\theta$$

$$[K]_n = \sum_{e=1}^{nel} [K]_n^e \quad (5.4.5)$$

$$[K]_n^e = \int_{\Omega^e} \rho [B]_n^T [D] [B]_n r dr dz d\theta$$

onde nel indica o número total de elementos. A transformada de Fourier da equação (5.2.26) resulta em:

$$\{-\omega^2 [M]_n + i\omega[C]_n + [K]_n\}x_n(\omega) = F_n(\omega) \quad (5.4.6)$$

e, após a resolução do sistema para um número suficientemente grande de freqüências ω_n , a transformação para o domínio do tempo pode ser feita utilizando-se a costumeira fórmula de inversão:

$$x_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x_n(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (5.4.7)$$

Uma vez que tem-se por objetivo o desenvolvimento de elementos infinitos que simulam o verdadeiro decaimento das ondas de corpo (compressão e cisalhamento) e de interface (Rayleigh e Love) a verdadeira natureza destas perturbações será agora investigada. Sezawa [39] realizou uma detalhada pesquisa a respeito de ondas de superfície e seus resultados para o campo de deslocamentos, correspondente ao n -ésimo harmônico do ângulo θ , são dados por:

$$u_{rn}^f(r, z, \omega) = -A_n \frac{k_r}{k_p^2} \left(e^{-p|z|} - \frac{2ps}{k_r^2 + s^2} e^{-s|z|} \right) \frac{\partial H_n^{(2)}(k_r r)}{\partial(k_r r)} \quad (5.4.8)$$

$$u_{\theta n}^f(r, z, \omega) = nA_n \frac{k_r}{k_p^2} \left(e^{-p|z|} - \frac{2ps}{k_r^2 + s^2} e^{-s|z|} \right) \frac{H_n^{(2)}(k_r r)}{k_r r} \quad (5.4.9)$$

$$u_{\theta n}^f(r, z, \omega) = A_n \frac{p}{k_p^2} \left(e^{-p|z|} - \frac{2ps}{k_r^2 + s^2} e^{-s|z|} \right) H_n^{(2)}(k_r r) \quad (5.4.10)$$

onde $H_n^{(2)}$ é uma função de Hankel do segundo tipo e ordem n e A_n é uma constante de integração.

Para as ondas de cisalhamento e compressão, o campo de deslocamentos é dado em termos de coordenadas cilíndricas por:

$$u_R^b(R) = B_1 h_1^{(1)}(k_p R) + B_2 h_1^{(2)}(k_p R) \quad (5.4.13)$$

$$u_\theta^b(R) = B_3 h_0^{(1)}(k_s R) + B_4 h_0^{(2)}(k_s R) \quad (5.4.14)$$

$$u_{\phi}^b(\mathbf{R}) = B_5 h_0^{(1)}(k_s R) + B_6 h_0^{(2)}(k_s R) \quad (5.4.15)$$

onde $h_m^{1,2}$ são funções esféricas de Hankel de ordem m e $B_1 \dots B_6$ são constantes de integração. O valor de R agora é dado por:

$$R = \sqrt{z^2 + r^2} \quad (5.4.16)$$

Uma vez que o comportamento assintótico destas funções é dado respectivamente por:

$$h_m^{(1)}(x) \rightarrow \frac{1}{x} e^{i\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}m\right)} + O(|x|^{-2}) \quad (5.4.17)$$

$$h_m^{(2)}(x) \rightarrow \frac{1}{x} e^{-i\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}m\right)} + O(|x|^{-2}) \quad (5.4.18)$$

percebe-se que $h_m^{(1)}$ é responsável pelas ondas que se aproximam da fonte (provenientes do infinito) e $h_m^{(2)}$ responde pelas ondas emitidas pela fonte.

Uma vez que, em problemas desta natureza, não são consideradas ondas provenientes do infinito, deve-se selecionar as constantes de integração de maneira a conseguir-se este efeito. Impondo $B_1 = B_3 = B_5 = 0$, renomeando as constantes e rearranjando as equações (5.4.13) a (5.4.15), tem-se:

$$u_R^b(\mathbf{R}) = B_1 h_1^{(2)}(k_p R) \quad (5.4.19)$$

$$u_{\theta}^b(\mathbf{R}) = B_2 h_0^{(2)}(k_s R) \quad (5.4.20)$$

$$u_{\phi}^b(\mathbf{R}) = B_3 h_0^{(2)}(k_s R) \quad (5.4.21)$$

Uma vez que os campos de deslocamentos acima são dados em sistemas de coordenadas diferentes, é natural converter-se o problema para um referencial comum. Transferindo as equações acima para o sistema de coordenadas cilíndrico, tem-se:

$$u_r^b(r, z) = B_1 \frac{r}{\sqrt{r^2 + z^2}} h_1^{(2)}(k_p R) + B_3 \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} h_0^{(2)}(k_s R) \quad (5.4.22)$$

$$u_{\theta}^b(\mathbf{R}) = B_1 h_0^{(2)}(k_s \mathbf{R}) \quad (5.4.23)$$

$$u_z^b(\mathbf{R}) = B_1 \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} h_1^{(2)}(k_p \mathbf{R}) - B_3 \frac{r}{\sqrt{r^2 + z^2}} h_0^{(2)}(k_s \mathbf{R}) \quad (5.4.24)$$

Estes campos de deslocamentos mostrados serão a base sobre a qual funções de forma de elementos infinitos serão construídas. Observa-se que estas expressões mostram que componentes distintas do campo de deslocamento tem formas também distintas e que decaem de maneira distinta.

Sendo assim, é razoável supor-se que devam existir diferentes funções de forma de elementos infinitos para cada componente do campo de deslocamentos. Em consequência, para um determinado elemento infinito e , são dadas as seguintes relações de interpolação:

$$u_r^e(r, z) = \sum_{i=1}^{n_{nos}} N_{ri}^e u_{ri}^e \quad (5.4.25A)$$

$$u_{\theta}^e(r, z) = \sum_{i=1}^{n_{nos}} N_{\theta i}^e u_{\theta i}^e \quad (5.4.25B)$$

$$u_z^e(r, z) = \sum_{i=1}^{n_{nos}} N_{zi}^e u_{zi}^e \quad (5.4.25C)$$

onde as relações são dadas em coordenadas cilíndricas. Nas relações seguintes o superescrito e será eliminado. Uma vez que, dentro do elemento cada componente do deslocamento deve conter uma parcela referente a cada tipo de onda anteriormente descrito, a função de forma referente à componente genérica ξ é dada por:

$$\{N_{\xi}(r, z)\} = \{f_{\xi}(r, z, k_r, k_s, k_p)\}^T [F_{\xi}]^{-1} \quad (5.4.26)$$

onde $[F_{\xi}]$ contém os valores nodais de $\{f_{\xi}\}$ e que, por sua vez, contém as várias componentes de onda que estão sendo transmitidas.

Assim, por exemplo, para a componente radial do deslocamento, u_r , tem-se que o campo de deslocamentos resultante é uma soma de ondas de Rayleigh, ondas compressoriais e de cisalhamento e, portanto:

$$\begin{aligned}
u_r(r, z, k_r, k_s, k_p) = & -A_n \frac{k_r}{k_p^2} \left(e^{-p|z|} - \frac{2ps}{k_r^2 + s^2} e^{-s|z|} \right) \frac{\partial H_n^{(2)}(k_r r)}{\partial(k_r r)} + \\
& + B_1 \frac{r}{\sqrt{r^2 + z^2}} h_1^{(2)}(k_p R) + B_3 \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} h_0^{(2)}(k_s R)
\end{aligned} \tag{5.4.27}$$

Uma vez que para cada componente do campo de deslocamentos são necessárias três constantes para determinar completamente o problema, um elemento infinito de três nós é necessário. Em particular, identificando a equação acima com a equação (5.4.25A), as componentes de onda correspondentes ao deslocamento radial podem ser facilmente obtidas. Entretanto, notando que o comportamento assintótico das funções $H_n^{(2)}(x)$ e $h_n^{(2)}(x)$ é dado por:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_n^{(2)}(x) \rightarrow \frac{1}{x} e^{-i\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{n}{2}\pi\right)} + O\left(x^{-2}\right) \tag{5.4.28}$$

$$h_n^{(2)}(x) \rightarrow \frac{1}{x} e^{-i\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{n}{2}\pi\right)} + O\left(x^{-2}\right) \tag{5.4.29}$$

é conveniente notar, principalmente para fins de integração numérica, que o termo $e^{-i(\pi/4 + n\pi/2)}$ pode ser incorporado nas constantes arbitrárias que, de agora em diante serão representadas por letras minúsculas. Assim é suficiente aproximar $H_n^{(2)}(x)$ e $h_n^{(2)}(x)$ por $e^{-(1+i)x}$ e, portanto, a equação (5.4.27) resulta, para o deslocamento na direção radial:

$$\begin{aligned}
u_r(r, z, k_r, k_s, k_p) = & a_u^R \left(e^{-p|z|} - \frac{2ps}{k_r^2 + s^2} e^{-s|z|} \right) e^{-(1+i)k_r r} + a_u^S \frac{r}{\sqrt{r^2 + z^2}} e^{-(1+i)k_s \sqrt{r^2 + z^2}} + \\
& + a_u^P \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} e^{-(1+i)k_p \sqrt{r^2 + z^2}}
\end{aligned} \tag{5.4.20}$$

de onde as diversas componentes correspondentes a cada tipo de onda podem ser identificadas.

Pode-se realizar o mesmo procedimento para as outras componentes do deslocamento. Assim pode-se construir-se a matriz de coeficientes [F] para cada componente em particular:

$$[F]_u = \begin{bmatrix} f_u^R(r_1, z_1, k_R) & f_u^S(r_1, z_1, k_S) & f_u^P(r_1, z_1, k_P) \\ f_u^R(r_2, z_2, k_R) & f_u^S(r_2, z_2, k_S) & f_u^P(r_2, z_2, k_P) \\ f_u^R(r_3, z_3, k_R) & f_u^S(r_3, z_3, k_S) & f_u^P(r_3, z_3, k_P) \end{bmatrix} \quad (5.4.31A)$$

$$[F]_\theta = \begin{bmatrix} f_\theta^R(r_1, z_1, k_R) & f_\theta^S(r_1, z_1, k_S) & f_\theta^P(r_1, z_1, k_P) \\ f_\theta^R(r_2, z_2, k_R) & f_\theta^S(r_2, z_2, k_S) & f_\theta^P(r_2, z_2, k_P) \\ f_\theta^R(r_3, z_3, k_R) & f_\theta^S(r_3, z_3, k_S) & f_\theta^P(r_3, z_3, k_P) \end{bmatrix} \quad (5.4.31B)$$

$$[F]_z = \begin{bmatrix} f_z^R(r_1, z_1, k_R) & f_z^S(r_1, z_1, k_S) & f_z^P(r_1, z_1, k_P) \\ f_z^R(r_2, z_2, k_R) & f_z^S(r_2, z_2, k_S) & f_z^P(r_2, z_2, k_P) \\ f_z^R(r_3, z_3, k_R) & f_z^S(r_3, z_3, k_S) & f_z^P(r_3, z_3, k_P) \end{bmatrix} \quad (5.4.31C)$$

e, desta forma, as funções de forma para o elemento infinito de três nós podem ser encontradas.

As integrais aparecendo na equação de movimento (5.4.2) devem ser obtidas diretamente por métodos numéricos, dada a sua complexidade. As fórmulas de Gauss Laguerre são geralmente adequadas quando lidando com domínios infinitos. Uma segunda hipótese seria a opção pelo método de integração descrito na seção (2.4.1), onde se trabalha com elementos infinitos de decaimento.

Medina [27] aplicou este elemento para a determinação das funções de influência para uma fundação semi-circular engastada no solo e obteve resultados considerados satisfatórios. O erro calculado oscila entre 2.8% (parte imaginária, influência vertical) até 8.5% (parte real, influência do momento).

Os resultados obtidos serão futuramente reproduzidos e ampliados para o caso de fundações de superfície para as quais dispõe-se de soluções teóricas ou por acoplamento elementos finitos/elementos de contorno.

A ampliação das capacidades deste elemento, utilizando-se a formulação para elasticidade 3D ou em casos de tensão/deformação plana é muito importante. Para tanto, considera-se o mesmo comportamento das funções de forma porém as matrizes de rigidez, massa e amortecimento elementares são multiplicadas por matrizes de mudanças de coordenadas apropriadas para o sistema retangular.

5.4.2 O elemento de Rajapakse/Karasudhi

Rajapakse [36] mostrou que, ao invés de um elemento infinito com três nós, bastariam dois nós para, teoricamente, propagar de maneira eficiente as ondas de corpo (compressão e cisalhamento) e ondas de Rayleigh. Mostra-se também que o esquema de integração numérica proposto por Medina era por demais custoso, de maneira que um novo procedimento (semi-analítico) para obtenção das matrizes de rigidez e massa foi desenvolvido.

Inicialmente considera-se as vibrações torcionais em um semi-espaço elástico. Como se sabe [1], uma excitação puramente torcional provoca, no semi-espaço, apenas ondas de cisalhamento, de maneira que as outras componentes de onda em cada componente do deslocamento não necessitam ser consideradas. É considerado um semi-espaço elástico sujeito a um momento dinâmico distribuído sobre uma área circular A_0 . Assumindo uma excitação na forma $T \exp(i\omega t)$, pode ser mostrado que a única componente do deslocamento que não se anula é aquela dada (em coordenadas cilíndricas) por:

$$\exp(i\omega t)u_\theta(r, z, \omega) = \frac{\exp(i\omega t)}{G} \int_0^\infty \frac{J_1(\xi r)J_2(\xi z)}{\sqrt{\xi^2 - k_s^2}} \exp(-z\sqrt{\xi^2 - k_s^2}) d\xi \quad (5.4.32)$$

onde G é o módulo de elasticidade transversal, k_s é o número de onda de cisalhamento e J_1 e J_2 são funções de Bessel do primeiro e segundo tipo respectivamente.

Adotando um contorno de integração adequado no plano complexo (dada a característica da singularidade da integral) pode-se verificar que o valor principal de Cauchy da integral acima e que corresponde ao comportamento do campo distante ("far field") é dado por:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ \exp(i\omega t)u_\theta(R, \phi; \omega) \right\} = \frac{ik_s^2}{R} \exp[i(\omega t - k_s R)] \sin(\phi) + O(R^{-2}) \quad (5.5.33)$$

o que mostra que, para o problema de vibrações torcionais no semi-espaço, a forma do decaimento das perturbações obedece um padrão do tipo R^{-1} . Entretanto, para o presente elemento, é proposto uma forma de decaimento exponencial para que as integrais que aparecem nas matrizes de massa e rigidez possam ser avaliadas por meios analíticos¹.

¹ A necessidade de convergência das matrizes de rigidez e massa aparentemente impõe esta necessidade. Porém o ganho em precisão obtido ao se adotar a verdadeira lei de decaimento compensaria o tempo computacional gasto.

Assim, para o caso do carregamento (simétrico) torcional do semi-espaco que poderia ser representado segundo o que foi discutido na equação (5.3.1), por um único harmônico do ângulo θ , a função de interpolação dos deslocamentos $N_j^{\theta 0}$, correspondente ao nó j , poderia ser escrita em termos de coordenadas locais (ϵ, η) por:

$$N_j^{\theta 0} = \exp(-b_0 \epsilon) L_j(\eta) \quad (5.4.34)$$

onde a transformação de coordenadas para ϵ é dada por:

$$R = R_0 + \epsilon \quad (5.4.35)$$

Os deslocamentos na coordenada ϕ são dados pela maneira usual:

$$\phi = \sum_{j=1}^{n_{\text{nos}}} L_j(\eta) \phi_j \quad (5.4.36)$$

onde n_{nos} é o número de nós do elemento e $L_j(\eta)$ é a função de interpolação de Lagrange para o nó j .

Observa-se, finalmente, que ao se avaliar as integrais de massa e rigidez que ocorrem na formulação da elementos finitos, as seguintes expressões devem ser avaliadas analiticamente:

$$\int_0^{\infty} \exp(-2b_0 \epsilon) d\epsilon = \frac{1}{2b_0} \quad (5.4.37)$$

$$\int_0^{\infty} \exp(-2b_0 \epsilon) R d\epsilon = \frac{R_0}{2b_0} + \frac{1}{4b_0^2} \quad (5.4.38)$$

$$\int_0^{\infty} \exp(-2b_0 \epsilon) R^2 d\epsilon = \frac{R_0^2}{2b_0} + \frac{R_0}{2b_0^2} + \frac{1}{4b_0^3} \quad (5.4.39)$$

ao passo que as integrais aparecendo na direção η podem ser avaliadas numericamente utilizando a quadratura gaussiana convencional. A principal vantagem deste método está em reduzir drasticamente o tempo de processamento das integrais envolvida. O esquema de integração do elemento anterior requer entre 10 e 100 pontos para uma precisão satisfatória, dependendo dos números de onda envolvidos. Para o presente elemento, são necessários apenas 3 pontos utilizando-se a quadratura convencional.

Por último serão analisadas as vibrações gerais do semi-espço. Inicialmente, ao invés da transformação dos deslocamentos das ondas de corpo para o sistema de coordenadas cilíndricas, as componentes das ondas de Rayleigh é que são transformadas para o sistema esférico. Tem-se, portanto:

$$u_{rn}^f(R, \phi) = -A_n \alpha_n \left\{ e^{-pR \cos \phi} - \lambda_1^{-sR \cos \phi} \right\} e^{-[(1+i)k_r R \sin \phi]} \quad (5.4.40)$$

$$u_{\theta n}^f(R, \phi) = n \gamma_n \left\{ e^{-pR \cos \phi} - \lambda_1^{-sR \cos \phi} \right\} e^{-[(1+i)k_r R \sin \phi]} \quad (5.4.41)$$

$$u_{zn}^f(R, \phi) = -A_n \beta_n \left\{ e^{-pR \cos \phi} - \lambda_2^{-sR \cos \phi} \right\} e^{-[(1+i)k_r R \sin \phi]} \quad (5.4.42)$$

Ao passo que as componentes dos deslocamentos para as ondas de corpo são dadas pelas equações (5.3.22), (5.3.23) e (5.3.24). As constantes são dadas por:

$$\alpha_n = \left(\frac{k_r}{2k_p^2} \right) \left\{ e^{i\pi[1/4+(n-1)/2]} - e^{i\pi[1/4+(n+1)/2]} \right\} \quad (5.4.43)$$

$$\gamma_n = \left(\frac{k_r}{k_p^2} \right) e^{i\pi(1/4+n/2)} \quad (5.4.44)$$

$$\beta_n = \left(\frac{p}{k_p^2} \right) e^{i\pi(1/4+n/2)} \quad (5.4.45)$$

$$\lambda_1 = \frac{2ps}{k_r^2 + s^2} \quad (5.4.46)$$

$$\lambda_2 = \frac{2k_r^2}{k_r^2 + s^2} \quad (5.4.47)$$

e onde A_n , B_1 , B_2 e B_3 são constantes arbitrárias. Enquanto que os verdadeiros decaimentos das funções $H_n^{(2)}(x)$ e $h_n^{(2)}(x)$ obedecem regras segundo $x^{-1/2}$ e x^{-1} respectivamente, é proposto aqui representar estas funções de Bessel e de Hankel por:

$$H_n^{(2)}(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp \left[i\pi \left(\frac{n}{2} + \frac{1}{4} \right) - (1+i)x \right] \quad (5.4.48)$$

$$h_n^{(2)}(x) \rightarrow \exp\left[i\pi\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right) - (1+i)x\right] \quad (5.4.49)$$

Após a transformação da componente das ondas de superfície do sistema cilíndrico para o esférico tem-se:

$$\begin{Bmatrix} u_{rn}^f \\ u_{\theta n}^f \\ u_{zn}^f \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} u_{Rn}^f \\ u_{\theta n}^f \\ u_{\phi n}^f \end{Bmatrix} \quad (5.4.50)$$

e uma vez que cada componente do deslocamento (segundo as direções radial e angular) deve conter em si parcelas das ondas de corpo e ondas de Rayleigh simultaneamente, deve-se considerar:

$$u_{Rn} = u_{Rn}^f + u_R^b \quad (5.4.51A)$$

$$u_{\theta n} = u_{\theta n}^f + u_{\theta}^b \quad (5.4.51B)$$

$$u_{\phi n} = u_{\phi n}^f + u_{\phi}^b \quad (5.4.51C)$$

A substituição das componentes de onda de corpo e de Rayleigh nas equações acima mostra que cada componente distinta dos deslocamentos nas direções R, θ e ϕ tem apenas duas constantes arbitrárias.

Considerando, então, um elemento infinito de *apenas dois nós* é possível expressar estas constantes arbitrárias em termos dos deslocamentos em coordenadas esféricas dos nós deste elemento. A transformação de coordenadas é a mesma daquela usada no problema da excitação torcional do semi-espaço, ou seja, dada pelas equações (5.3.22), (5.3.23) e (5.3.24).

Considerando o n -ésimo harmônico do deslocamento na direção radial (R), pode-se obter a seguinte relação entre os deslocamentos nos nós 1 e 2 do elemento e as constantes arbitrárias para esta componente do deslocamento:

$$\begin{Bmatrix} u_{Rn}^1 \\ u_{Rn}^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (J_R)_{11} & (J_R)_{12} \\ (J_R)_{21} & (J_R)_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{Rn}^e \\ A_R^e \end{Bmatrix} \quad (5.4.52)$$

onde u_{Rn}^1 e u_{Rn}^2 são os deslocamentos nodais na direção radial e A_{Rn}^e e A_R^e são constantes arbitrárias associadas ao comportamento assintótico desta particular componente do deslocamento. A inversão da equação acima fornece:

$$\begin{Bmatrix} A_{Rn}^e \\ A_R^e \end{Bmatrix} = \frac{1}{\Delta_R^e} \begin{bmatrix} (J_R)_{22} & -(J_R)_{12} \\ -(J_R)_{21} & (J_R)_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{Rn}^1 \\ u_{Rn}^2 \end{Bmatrix} \quad (5.4.53)$$

onde o determinante Δ_R^e é dado por:

$$\Delta_R^e = (J_r)_{11}(J_r)_{22} - (J_r)_{12}(J_r)_{21} \quad (5.4.54)$$

e os valores dos J_r^s são dados por:

$$(J_R)_{11} = e^{-(1+i)k_r R_0 \sin \phi_1} \left\{ (\beta_n \cos \phi_1 - \alpha_n \sin \phi_1) e^{-pR_0 \cos \phi_1} + (\alpha_n \lambda_1 \sin \phi_1 - \beta_n \lambda_2 \cos \phi_1) e^{-SR_0 \cos \phi_1} \right\} \quad (5.4.55)$$

$$(J_R)_{12} = (J_R)_{21} = e^{-(1+i)k_p R_0} \quad (5.4.56)$$

$$(J_R)_{22} = e^{-(1+i)k_r R_0 \sin \phi_2} \left\{ (\beta_n \cos \phi_2 - \alpha_n \sin \phi_2) e^{-pR_0 \cos \phi_2} + (\alpha_n \lambda_1 \sin \phi_2 - \beta_n \lambda_2 \cos \phi_2) e^{-SR_0 \cos \phi_2} \right\} \quad (5.4.57)$$

Observa-se que, para um particular elemento, os diversos J_r^s reduzem-se a constantes a serem calculadas.

Substituindo na equação (5.4.51) os valores do campo de deslocamentos na coordena radial, o deslocamento u_{Rn} em um ponto no interior do elemento pode ser expresso em termos dos valores nodais u_{Rn}^1 e u_{Rn}^2 de acordo com:

$$u_{Rn} = \sum_{j=1}^2 N_j^{Rn}(\phi, R) u_{Rn}^j \quad (5.4.58)$$

onde

$$N_j^{Rn} = \sum_{k=1}^3 A_{kj}(\phi) \exp(-a_k R) \quad (5.4.59)$$

A comparação da expressão acima com cada parcela dos diversos tipos de onda presentes nesta componente particular permite identificar os valores das incógnitas A_{kj} e a_k por meio de:

$$A_{11}(\phi) = \left[\frac{(J_R)_{22}}{\Delta_R^e} \right] (\beta_n \cos \phi - \alpha_n \sin \phi) \quad (5.4.60)$$

$$A_{21}(\phi) = \left[\frac{(J_R)_{22}}{\Delta_R^e} \right] (\alpha_n \lambda_1 \sin \phi - \beta_n \lambda_2 \cos \phi) \quad (5.4.61)$$

$$A_{31}(\phi) = -\frac{(J_R)_{21}}{\Delta_R^e} \quad (5.4.62)$$

$$A_{12}(\phi) = \left[-\frac{(J_R)_{12}}{\Delta_R^e} \right] (\beta_n \cos \phi - \alpha_n \sin \phi) \quad (5.4.63)$$

$$A_{22}(\phi) = \left[-\frac{(J_R)_{12}}{\Delta_R^e} \right] (\alpha_n \lambda_1 \sin \phi - \beta_n \lambda_2 \cos \phi) \quad (5.4.64)$$

$$A_{32}(\phi) = \frac{(J_R)_{11}}{\Delta_R^e} \quad (5.4.65)$$

Os valores dos coeficientes a_k 's são dados por:

$$a_1 = p \cos \phi + k_r \sin \phi + ik_r \sin \phi \quad (5.4.66)$$

$$a_2 = s \cos \phi + k_r \sin \phi + ik_r \sin \phi \quad (5.4.67)$$

$$a_3 = k_r + ik_p \quad (5.4.68)$$

e de maneira similar para as outras componentes do deslocamento tem-se:

$$u_{\theta n} = \sum_{j=1}^2 N_j^{\theta n}(\phi, R) u_{\theta n}^j \quad (5.4.69)$$

$$u_{\phi n} = \sum_{j=1}^2 N_j^{\phi n}(\phi, R) u_{\phi n}^j \quad (5.4.70)$$

onde as funções de forma são dadas por:

$$N_j^{\phi n} = \sum_{k=1}^3 B_{kj}(\phi) \exp(-b_k R) \quad (5.4.71)$$

$$N_j^{\theta n} = \sum_{k=1}^3 C_{kj}(\phi) \exp(-c_k R) \quad (5.4.72)$$

Onde os termos B_{kj} 's e C_{kj} 's são dados explicitamente em [12] para o caso geral de vibrações do semi-espaco elástico. Avaliando-se as integrais que ocorrem nas matrizes de massa e rigidez, as seguintes integrais são avaliadas analiticamente:

$$\int_{R_0}^{\infty} e^{-g_{kl} R} dR = \frac{e^{-g_{kl} R_0}}{g_{kl}} \quad (5.4.73)$$

$$\int_{R_0}^{\infty} e^{-g_{kl} R} R dR = e^{-g_{kl} R_0} \left[\frac{R_0}{g_{kl}} + \frac{1}{(g_{kl})^2} \right] \quad (5.4.74)$$

$$\int_{R_0}^{\infty} e^{-g_{kl} R} R^2 dR = e^{-g_{kl} R_0} \left[\frac{R_0^2}{g_{kl}} + \frac{2R_0}{g_{kl}^2} + \frac{2}{g_{kl}^3} \right] \quad (5.4.75)$$

onde as integrais remanescentes na direção η podem ser calculadas numericamente utilizando-se a quadratura gaussiana convencional.

Uma das vantagens do presente esquema de integração é que os elementos assim desenvolvidos são extremamente bem comportados na zona de baixa frequência dado o processo analítico das integrais impróprias. Os autores mostram que os resultados obtidos com este elemento são satisfatórios para a obtenção das funções de influência do semi-espaco elástico no caso de fundações rasas.

Deve ser notado que o modelamento do semi-espaco na região próxima à fundação é realizado utilizando-se elementos de ordem quadrática (serendipity e lagrangeanos). Isto ocorre para uma melhor modelagem dos gradientes dos campos de tensão que são maiores nestas regiões.

5.4.3 O primeiro elemento de Chuham/Zhongbin [10]

A principal característica deste tipo de elemento é que ele é desenvolvido tomando-se por base o estado plano de tensão e não o caso geral de vibrações do semi-espaco como nos elementos anteriores. A principal vantagem disto é que pode-se aplicá-lo diretamente aos problemas bi-dimensionais sem a necessidade de alterações. Além disso utiliza-se um esquema de funções de forma que é mais próximo das linhas gerais desenvolvidas no segundo capítulo.

Conforme já foi verificado, na construção de funções de forma para elementos infinitos, devem ser levados em conta tanto o decaimento da amplitude como para modificações no ângulo de fase. Assim, uma vez que nenhum tratamento teórico é feito a priori para determinar a forma "analítica", algumas funções de forma complexas para a interpolação devem ser consideradas.

Inicialmente procede-se a transformação de coordenadas entre os domínios natural e o domínio normalizado. Para tanto são consideradas as seguintes transformações isoparamétricas entre coordenadas:

$$x(\varepsilon, \eta) = \sum_{j=1}^5 N_j^* x_j \quad (5.4.76)$$

$$y(\varepsilon, \eta) = \sum_{j=1}^5 N_j^* y_j \quad (5.4.77)$$

onde as funções de mapeamento N_j^* são dadas por:

$$\begin{aligned} N_1^* &= \frac{1}{2}(\varepsilon - 1)(\eta - 1) \\ N_2^* &= 0 \\ N_3^* &= -\frac{1}{2}(\varepsilon - 1)(\eta + 1) \\ N_4^* &= \frac{1}{2}\varepsilon(\eta + 1) \\ N_5^* &= -\frac{1}{2}\varepsilon(\eta - 1) \end{aligned} \quad (5.4.78)$$

A maneira conforme os deslocamentos nas direções ε e η são interpoladas segue as linhas gerais discutidas no capítulo 2 com pequenas modificações. Tem-se, portanto:

$$u_\epsilon = \sum_{k=1}^3 N_k(\epsilon, \eta) u_{\epsilon k} \quad (5.4.79)$$

$$u_\eta = \sum_{k=1}^3 N_k(\epsilon, \eta) u_{\eta k} \quad (5.4.80)$$

As funções de interpolação são dadas por:

$$N_1(\epsilon, \eta) = P(\epsilon) \frac{\eta(\eta-1)}{2} \quad (5.4.81A)$$

$$N_2(\epsilon, \eta) = -P(\epsilon)(\eta-1)(\eta+1) \quad (5.4.81B)$$

$$N_3(\epsilon, \eta) = P(\epsilon) \frac{\eta(\eta+1)}{2} \quad (5.4.81C)$$

em que $P(\epsilon)$ é a função de decaimento. Baseado no que foi discutido no capítulo 2, a função de decaimento pode ser dada por:

$$P(\epsilon) = \exp[-(\alpha + i\beta)\epsilon] \quad (5.4.82)$$

onde α e β são o parâmetro de decaimento e o número de onda nominal nas coordenadas locais respectivamente. O termo $\exp(-\alpha\epsilon)$ representa a atenuação no decaimento devido ao fenômeno de propagação de onda ter natureza eminentemente dispersiva. O fator $\exp(-i\beta\epsilon)$ expressa as modificações no ângulo de fase. Este elemento exige, em particular, que o eixo ϵ seja escolhido de maneira a coincidir de maneira mais ou menos exata com a direção principal de propagação. A função de decaimento em termos de coordenadas normalizadas pode ainda ser dada como:

$$P(\epsilon) = \exp\left[-\left(\alpha + i \frac{\omega}{Lc}\right)\epsilon\right] \quad (5.4.83)$$

onde ω é a frequência de excitação, c é a velocidade de propagação das ondas no meio e L é o comprimento do elemento relativo à direção de propagação. Na prática L é dado por:

$$L = \sqrt{[x(\epsilon_s) - x(\epsilon_1)]^2 + [y(\epsilon_s) - y(\epsilon_1)]^2} \quad (5.4.84)$$

Para o caso em que o semi-espaco é considerado um meio viscoelástico, a velocidade de propagação de onda c deve ser substituída pelo valor complexo c^* de acordo com o modelo viscoelástico em uso (linear, Maxwell, etc.). Para o caso do modelo de histerese constante tem-se:

$$c^* = \sqrt{1 + i\eta} c \approx (1 + \frac{1}{2}\eta)c \quad (5.4.85)$$

e, portanto,

$$\alpha + i \frac{\omega}{Lc^*} \approx \left(\alpha + \frac{1}{2} \eta \frac{\omega}{Lc} \right) + i \frac{\omega}{Lc} \quad (5.4.86)$$

A integração das matrizes de massa, rigidez e amortecimento que aparecem na equação de movimento (5.3.6) é levada a termo utilizando-se o mesmo processo descrito na seção (2.4.1). Bons resultados são encontrados pelos autores principalmente no caso de fundações em semi-espacos viscoelásticos.

A principal crítica que pode-se fazer a respeito deste elemento é que, por ser uma extensão de um modelo unidimensional, ele não se adapta bem às complicações que o fenômeno de propagação de onda em domínios multi-dimensionais possui. Além disso, por estarem presentes vários tipos de ondas simultaneamente, deveriam ser levadas em conta as várias velocidades de propagação correspondentes na formulação uma vez que a energia irradiada no semi-espaco por uma fonte pontual na superfície (problema de Boussinesq dinâmico) distribui-se pelos diversos tipos de onda segundo [11]:

1. ondas de Rayleigh	67%
2. ondas de cisalhamento	25%
3. ondas de compressão	8%

No entanto, as ondas de Rayleigh, por serem fenômenos de superfície, decaem em amplitude rapidamente com a profundidade o que indica que, mesmo para fundações rasas, uma variação da velocidade média de onda através do modelo devem ocorrer. Os autores não deixam claro, todavia, como esta variação pode ser levada em conta pelo modelo.

5.4.4 Uma proposta para um elemento bidimensional baseado no elemento de Chongbin [13]

Embora este elemento tenha sido originalmente proposto para problemas tri-dimensionais, a sua adaptação para casos bi-dimensionais não encontra sérias dificuldades. Considerando inicialmente o elemento mostrado na figura abaixo,

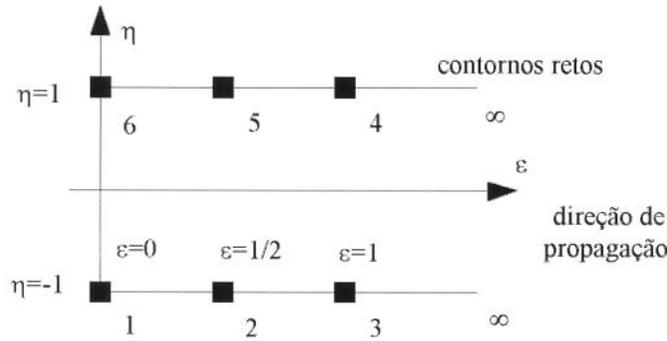


Figura 5.2: Elemento quadrático na direção de propagação

uma vez que os contornos do elemento são retos, as funções de forma referentes aos nós intermediários (2 e 5) não necessitam ser incluídas como funções de mapeamento. As funções correspondentes aos nós 1,3,4 e 6 são:

$$M_1 = \frac{1}{2}(1 - \epsilon)(1 - \eta) \quad (5.4.87A)$$

$$M_3 = \frac{1}{2}\epsilon(1 - \eta) \quad (5.4.87B)$$

$$M_4 = \frac{1}{2}\epsilon(1 + \eta) \quad (5.4.87C)$$

$$M_6 = \frac{1}{2}(1 - \epsilon)(1 + \eta) \quad (5.4.87D)$$

No entanto, o campo de deslocamentos dentro do elemento é expresso da maneira usual, ou seja:

$$u(\epsilon, \eta) = \sum_{i=1}^{nen} N_i(\epsilon, \eta)u_i \quad (5.4.88A)$$

$$v(\epsilon, \eta) = \sum_{i=1}^{nen} N_i(\epsilon, \eta)v_i \quad (5.4.88B)$$

enquanto que as função de forma são dadas genericamente por:

$$N_i(\epsilon, \eta) = P_i(\epsilon)Q_i(\eta) \quad (5.4.89)$$

onde $P_i(\epsilon)$ é uma função de propagação que contém simultaneamente todos os números de onda envolvidos e $Q_i(\eta)$ é uma função de interpolação padrão de elementos finitos. Portanto:

$$\begin{aligned} N_i(\epsilon, \eta) &= \frac{1}{2} P_i(\epsilon) (1 - \eta) && \text{para } i = 1, 2, 3 \\ N_i(\epsilon, \eta) &= \frac{1}{2} P_i(\epsilon) (1 + \eta) && \text{para } i = 4, 5, 6 \end{aligned} \quad (5.4.90)$$

As funções de propagação são determinadas investigando-se a propagação de ondas harmônicas no semi-espaço. Uma vez que a solução analítica para este problema pode ser expressa em termos de funções de Bessel e de Hankel [15] de acordo com as equações (5.4.19, 20 e 21). Assim, admitindo as mesmas aproximações utilizadas no caso do elemento de Rajapakse [9] as funções de propagação podem ser dadas por:

$$P(\epsilon) = c_1 \exp[(-a_1 + ik_1)\epsilon] + c_2 \exp[(-a_2 + ik_2)\epsilon] + c_3 \exp[(-a_3 + ik_3)\epsilon] \quad (5.4.91)$$

onde admite-se que as ondas podem se propagar com diferentes taxas de decaimento. Segundo Chuhan [13] o resultado final das matrizes elementares parece não ser afetado por diferentes taxas de decaimento e, portanto, pode-se admitir $a_1 = a_2 = a_3 = a$ e a equação acima simplifica-se para:

$$P(\epsilon) = \exp(-a\epsilon) (c_1 e^{+ik_1\epsilon} + c_2 e^{+ik_2\epsilon} + c_3 e^{+ik_3\epsilon}) \quad (5.4.92)$$

onde k_1 , k_2 e k_3 são os números de onda das ondas de compressão, cisalhamento e de Rayleigh respectivamente. As constantes c_i ($i=1,2,3$) são utilizadas para compatibilizar o campo de deslocamento do elemento infinito com o *near field* da fundação.

Com o propósito de determinar estas constantes iguala-se o campo de deslocamentos na direção ϵ em qualquer lado do elemento com aquele expresso pela equação (5.4.89). Por exemplo, tomando o lado com os nós 1, 2 e 3 tem-se:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -e^{\frac{1}{2}(-a+ik_1)} & -e^{\frac{1}{2}(-a+ik_2)} & -e^{\frac{1}{2}(-a+ik_3)} \\ e^{-a+ik_1} & e^{-a+ik_2} & e^{-a+ik_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = [C] \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} \quad (5.4.93)$$

e invertendo a relação acima, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = [E] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (5.4.94)$$

onde [E] é a inversa da matriz [C]. Se as equações referentes às outras faces são consideradas simultaneamente, as funções de propagação referentes a cada lado do elemento podem ser dadas por:

$$P_i(\varepsilon) = E_{11} e^{(-a+lk_1)\varepsilon} + E_{21} e^{(-a+lk_2)\varepsilon} + E_{31} e^{(-a+lk_3)\varepsilon} \quad \text{para } i = 1,6 \quad (5.4.95A)$$

$$P_i(\varepsilon) = E_{12} e^{(-a+lk_1)\varepsilon} + E_{22} e^{(-a+lk_2)\varepsilon} + E_{32} e^{(-a+lk_3)\varepsilon} \quad \text{para } i = 2,5 \quad (5.4.95B)$$

$$P_i(\varepsilon) = E_{13} e^{(-a+lk_1)\varepsilon} + E_{23} e^{(-a+lk_2)\varepsilon} + E_{33} e^{(-a+lk_3)\varepsilon} \quad \text{para } i = 3,4 \quad (5.4.95C)$$

onde os valores dos coeficientes E_{ij} são dados por:

$$\begin{aligned} E_{11} &= \frac{1}{\Delta} e^{\frac{1}{2}(-3a+lk_2+lk_3)} \left(e^{\frac{1}{2}k_3} - e^{\frac{1}{2}k_2} \right) \\ E_{21} &= \frac{1}{\Delta} e^{\frac{1}{2}(-3a+lk_1+lk_3)} \left(e^{\frac{1}{2}k_1} - e^{\frac{1}{2}k_3} \right) \\ E_{31} &= \frac{1}{\Delta} e^{\frac{1}{2}(-3a+lk_1+lk_2)} \left(e^{\frac{1}{2}k_2} - e^{\frac{1}{2}k_1} \right) \end{aligned} \quad (5.4.96A)$$

$$\begin{aligned} E_{12} &= \frac{1}{\Delta} e^{-a} \left(e^{-lk_2} - e^{-lk_3} \right) \\ E_{22} &= \frac{1}{\Delta} e^{-a} \left(e^{-lk_3} - e^{-lk_1} \right) \\ E_{32} &= \frac{1}{\Delta} e^{-a} \left(e^{-lk_1} - e^{-lk_2} \right) \end{aligned} \quad (5.4.96B)$$

$$\begin{aligned} E_{13} &= \frac{1}{\Delta} e^{-\frac{a}{2}} \left(e^{\frac{1}{2}k_3} - e^{\frac{1}{2}k_2} \right) \\ E_{23} &= \frac{1}{\Delta} e^{-\frac{a}{2}} \left(e^{\frac{1}{2}k_2} - e^{\frac{1}{2}k_1} \right) \\ E_{33} &= \frac{1}{\Delta} e^{-\frac{a}{2}} \left(e^{\frac{1}{2}k_1} - e^{\frac{1}{2}k_3} \right) \end{aligned} \quad (5.4.96C)$$

onde Δ é o determinante da matriz [C], dado por:

$$\Delta = e^{-\frac{3}{2}a} \left[e^{\frac{1}{2}(k_2+k_3)} \left(e^{\frac{1}{2}k_3} - e^{\frac{1}{2}k_2} \right) + e^{\frac{1}{2}(k_1+k_2)} \left(e^{\frac{1}{2}k_2} - e^{\frac{1}{2}k_1} \right) + e^{\frac{1}{2}(k_1+k_3)} \left(e^{\frac{1}{2}k_1} - e^{\frac{1}{2}k_3} \right) \right] \quad (5.4.97)$$

Pode-se notar que uma condição suficiente para a existência da inversa da matriz [C] é que k_1 , k_2 e k_3 tenham sempre valores distintos, o que pode ser facilmente verificado em problemas de propagação de ondas. Além do mais a seguinte relação:

$$P_1(\epsilon_j) = \delta_{ij} \quad (5.4.98)$$

é sempre satisfeita pelas funções de propagação.

Uma vez as funções de propagação determinadas a única incógnita restante é a determinação da correta taxa de decaimento que se aproxime dos valores teóricos. Este é um problema complicado onde se deseja aproximar uma função racional por meio de uma exponencial decrescente no intervalo $[R_0, \infty]$. A maioria dos autores fornece valores empíricos para os coeficientes de decaimento o que não é satisfatório para a implementação geral do método. Além disso, outro problema desta abordagem é a aproximação das ondas de Rayleigh em domínios bi-dimensionais que, conforme se viu no capítulo 4, não decaem absolutamente.

Admitindo-se, entretanto, que em realidade todo sistema físico possui algum grau de amortecimento, as ondas de Rayleigh decaem (mesmo que de maneira bastante lenta) em domínios bi-dimensionais. Assim, com o propósito de assegurar a convergência do processo de integração é lícito introduzir uma taxa de decaimento para as ondas de Rayleigh em tais domínios.

Os gráficos 5.1 e 5.2 fornecem os valores das funções de propagação correspondentes a $v_1 = 3000$ m/s, $v_2 = 1500$ m/s e $v_3 = 1398$ m/s com uma frequência de excitação de 30 rad/s.

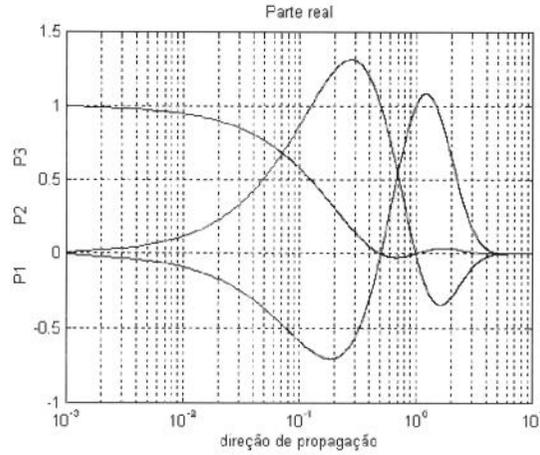


Figura. 5.3: Parte real das funções de propagação correspondentes ao elemento de Chuhan/Chongbin

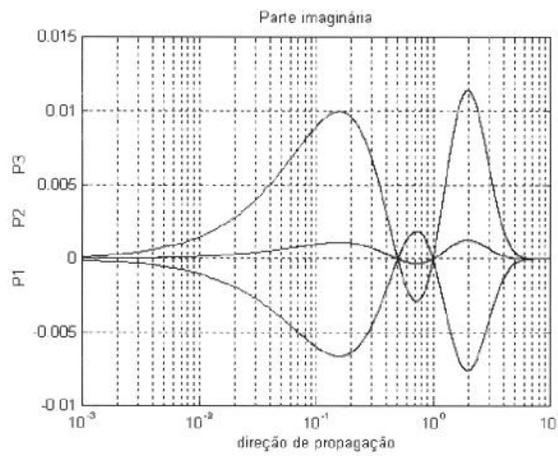


Figura 5.4: Parte imaginária das funções de propagação do elemento de Chuhan/Chongbin ¹

Verifica-se [13] que os resultados obtidos com a aplicação destes elementos são bastante satisfatórios embora tais resultados sejam aplicados ao problema tri-dimensional. A sua aplicação a situações bi-dimensionais será descrita no capítulo seguinte.

5.4.5 Aplicação dos elementos padrões aos problemas da DSSI

Uma possível crítica ao esquema de elementos introduzido por Bettess [1] é a dificuldade destes elementos em similar situações com múltiplos números de onda. Entretanto, uma pequena modificação no esquema original pode levar a resultados bastante satisfatórios [14] na simulação de problemas da DSSI.

¹ O gráfico logarítmico fornece o comportamento das funções na região próxima à interface com o *near field*

Considere-se, inicialmente, a utilização de elementos de decaimento. Estes elementos, como já se viu, não são os mais indicados do ponto de vista da propagação de ondas em meios semi-infinitos pois o decaimento destas ondas se dá segundo a tabela abaixo:

Ω	Tipo de Onda	Lei típica de decaimento
3D	Compressão/Cisalhamento	$1/r$
	Rayleigh	$1/\sqrt{r}$
2D	Compressão/Cisalhamento	$1/\sqrt{r}$
	Rayleigh	não decai

Tabela 5.1 Decaimento dos diversos tipos de ondas em meios elásticos em função do tipo de domínio considerado

A função de interpolação para o caso em que apenas um tipo de onda está presente é dada segundo a equação (2.4.2):

$$N_i(\epsilon, \eta) = P_i(\epsilon, \eta) F_i(\epsilon) \exp(i k s) \quad (5.4.99)$$

onde o termo de decaimento obedece, normalmente, uma lei do tipo exponencial.

A utilização de funções racionais para o termo de decaimento é bloqueada pela ausência de esquemas de integração numérica suficientemente versáteis. Um método que merece destaque é o de Liaw/Kamel que envolve um esquema de integração não-jacobiana que utiliza um mapeamento para a integração numérica [15]

A dificuldade da utilização deste tipo de função está no fato de que apenas um número de onda k está presente. No entanto, considerando uma nova função dada por:

$$N_i^*(\epsilon, \eta) = \sum_{j=1}^{nw} \lambda_j P_j(\epsilon, \eta) F_j(\epsilon) \exp(Ik_j s) \quad (5.4.100)$$

onde nw é o número de ondas presentes e I é a unidade imaginária. Além disso, o requisito

$$\sum_{i=1}^{nw} \lambda_i = 1 \quad (5.4.101)$$

garante o valor unitário da função $N(\epsilon, \eta)$ sendo que a mesma é dada agora pela superposição das funções de interpolação referentes a cada harmônico. Este esquema de superposição permite ainda a introdução de componentes com taxas de decaimento diferentes como é o caso de ondas de compressão e Rayleigh em domínios tri-dimensionais. A determinação dos coeficientes λ 's, no entanto, é uma questão ainda empírica e que, a princípio, deve ser baseada no modo como a energia se distribui pelos diversos tipos de onda.

Para o caso dos elementos de mapeamento a modificação também é bastante simples. Substitui-se a função de interpolação dada pela equação (2.6.1) por uma soma que segue os mesmos princípios acima:

$$N_i(\epsilon, \eta) = P_i(\epsilon, \eta) \exp(iks) \rightarrow N_i(\epsilon, \eta) = \sum_{j=1}^{nw} \lambda_j P_i(\epsilon, \eta) \exp(ik_j s) \quad (5.4.102)$$

a coordenada s , conforme já foi dito, tem a mesma métrica do espaço original não normalizado porém aponta para a direção de propagação e é dada por:

$$s(\epsilon) = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{nen} M_i(\epsilon) x_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{nen} M_i(\epsilon) y_i \right)^2} \quad (5.4.103)$$

onde $M_i(\epsilon)$ é uma função de interpolação unidimensional que segue os mesmos requisitos que as funções de forma de elementos finitos. Para o caso em que os nós do elemento estão igualmente espaçados, a coordenada s é **independente de ϵ** , o que simplifica muito a integração das matrizes de massa e rigidez elementares como será visto adiante. E, portanto:

$$s(\epsilon) = \frac{ds}{d\epsilon} (\epsilon - \epsilon_i) \quad (5.4.104)$$

De maneira geral², no caso de elementos infinitos para problemas da DSSI tem-se funções de forma diferentes para cada componente do deslocamento. Assim, se o conjunto de funções de forma for dado por meio de expressões como (5.4.99) tem-se, para as derivadas:

$$F_i(\epsilon) = \exp[-\alpha(\epsilon - \epsilon_i)] \Rightarrow \frac{dF_i}{d\epsilon} = -\alpha \exp[-\alpha(\epsilon - \epsilon_i)] \quad (5.4.105)$$

² Estas considerações de aplicam inclusive para o caso dos elementos semi-teóricos

$$\frac{\partial N_i}{\partial \epsilon} = \sum_{j=1}^{nw} \lambda_j \left[\frac{\partial P_i}{\partial \epsilon} - P_i \left(\alpha_j - k_j I \frac{ds}{d\epsilon} \right) \right] \exp \left[\epsilon_i \left(\alpha_j - k_j I \frac{ds}{d\epsilon} \right) \right] \exp \left[\epsilon \left(-\alpha + k_j I \frac{ds}{d\epsilon} \right) \right] \quad (5.4.106)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \sum_{j=1}^{nw} \lambda_j \frac{\partial P_i}{\partial \eta} \exp \left[\epsilon_i \left(\alpha_j - k_j I \frac{ds}{d\epsilon} \right) \right] \exp \left[\epsilon \left(-\alpha_j + k_j I \frac{ds}{d\epsilon} \right) \right] \quad (5.4.107)$$

ou, de maneira simplificada:

$$\frac{\partial N_i}{\partial \epsilon} = \sum_{j=1}^{nw} G_{ij} \lambda_j \exp \left[\epsilon \left(-\alpha_j + k_j I \frac{ds}{d\epsilon} \right) \right] \quad (5.4.108A)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \sum_{j=1}^{nw} H_{ij} \lambda_j \exp \left[\epsilon \left(-\alpha_j + k_j I \frac{ds}{d\epsilon} \right) \right] \quad (5.4.108B)$$

onde:

$$G_{ij} = \left[\frac{\partial P_i}{\partial \epsilon} - P_i \left(\alpha_j - k_j I \frac{ds}{d\epsilon} \right) \right] \exp \left[\epsilon_i \left(\alpha_j - k_j I \frac{ds}{d\epsilon} \right) \right] \quad (5.4.109A)$$

$$H_{ij} = \frac{\partial P_i}{\partial \eta} \exp \left[\epsilon_i \left(\alpha_j - k_j I \frac{ds}{d\epsilon} \right) \right] \quad (5.4.109B)$$

Desta maneira, as matrizes de transformação de deformação/deslocamento dadas pela equação (5.2.18) podem ser decompostas segundo os seus diversos harmônicos como:

$$[B]_i = \sum_{j=1}^{nw} [B]_{ij} \lambda_j \exp \left[\epsilon \left(-\alpha_j + k_j I \frac{ds}{d\epsilon} \right) \right] \quad (5.4.110)$$

onde, para o caso 2D, tem-se:

$$[B]_{ij} = \begin{bmatrix} H_{ij} & 0 \\ 0 & G_{ij} \\ G_{ij} & H_{ij} \end{bmatrix} \quad (5.4.111)$$

Expandindo para o caso em que três componentes de onda (k_1 , k_2 e k_3) estão simultaneamente presentes tem-se:

$$\begin{aligned}
 [B]_i = [B]_{i1} \lambda_1 \exp\left[\varepsilon\left(-\alpha_1 + k_1 I \frac{ds}{d\varepsilon}\right)\right] + [B]_{i2} \lambda_2 \exp\left[\varepsilon\left(-\alpha_2 + k_2 I \frac{ds}{d\varepsilon}\right)\right] + \\
 + [B]_{i3} \lambda_3 \exp\left[\varepsilon\left(-\alpha_3 + k_3 I \frac{ds}{d\varepsilon}\right)\right]
 \end{aligned}
 \tag{5.4.112}$$

ou, omitindo propositalmente os termos exponenciais:

$$[B]_i = [B]_{i1} + [B]_{i2} + [B]_{i3}
 \tag{5.4.113}$$

e a matriz de rigidez elementar, segundo a equação (5.2.24), é dada por:

$$\begin{aligned}
 [K] &= \sum_{e=1}^{nel} [k^e] \\
 [k^e]_{ab} &= \int_{\Omega^e} \left([B]_{a1} + [B]_{a2} + [B]_{a3} \right)^T [D] \left([B]_{b1} + [B]_{b2} + [B]_{b3} \right) d\Omega^e
 \end{aligned}
 \tag{5.4.114}$$

ou, incluindo novamente os termos exponenciais:

$$[k]^e = \sum_{a=1}^{nen} \sum_{b=1}^{nen} \sum_{i=1}^{nw} \sum_{j=1}^{nw} \int_{\Omega^e} [B]_{ai}^T [D] [B]_{bj} \exp\left\{ \left[-(\alpha_i + \alpha_j) + I \frac{ds}{d\varepsilon} (k_i + k_j) \right] \varepsilon \right\} d\Omega^e
 \tag{5.4.115}$$

onde nen é o número de nós do elemento e nw é o número de componentes de onda que o elemento é capaz de transmitir. O esquema seguinte pode ser utilizado inclusive para o caso de elementos de mapeamento necessitando, apenas a modificação dos núcleos H_{ij} e G_{ij} . Para o caso bi-dimensional tem-se:

$$H_{ij} = \frac{\partial P_i}{\partial \varepsilon} + I \frac{ds}{d\varepsilon} k_j P_i(\varepsilon, \eta)
 \tag{5.4.116}$$

$$G_{ij} = \frac{\partial P_i}{\partial \eta}
 \tag{5.4.117}$$

A aplicação desta metodologia para os elementos semi-analíticos envolve modificações semelhantes.

5.5 Considerações sobre o programa DLEARN e implementação de um elemento bi-quadrático

O esquema básico do programa DLEARN constitui-se de um grupo de subrotinas básicas, necessárias para a construção dos diversos elementos, um *solver* bastante eficiente para sistemas lineares a coeficientes reais e um grupo de subrotinas próprias de cada elemento introduzido. Inicialmente o programa dispõe apenas de um elemento de treliça bi e tridimensional e um quadrilátero plano para problemas de elasticidade no domínio do tempo e estáticos.

A principal característica do programa é que é usado o armazenamento vetorial para todas as variáveis do programa. Estas são armazenadas em um único bloco *common* por meio de apontamento vetorial. O programa fornece, ao término de cada execução, uma relação da posição de cada variável no bloco comum de variáveis.

Além disso, o sistema linear resultante é resolvido utilizando-se também o armazenamento vetorial na forma conhecida como *skyline*. Nesta forma, apenas os termos não nulos acima da diagonal principal são armazenados no bloco comum. A economia de memória que se obtém com esta estratégia permite um maior número de incógnitas com as quais o programa pode lidar simultaneamente.

As subrotinas principais nas quais o fluxo do programa é desviado para as subrotinas dos elementos são a subrotina *Dlearn* e *Driver*. Na subrotina *Dlearn* são lidos os dados a respeito das coordenadas de cada nó e as respectivas condições de contorno. São lidos também a incidência dos elementos nos diversos nós o que permitirá a montagem das diversas matrizes elementares nas matrizes globais de massa e rigidez.

Na subrotina *Driver* ocorre o cálculo das diversas matrizes elementares e o *assemblage* destas matrizes na matriz global correspondente. Na prática, entretanto apenas a matriz de rigidez dinâmica é calculada. Esta é dada por [3,4]:

$$[S(\omega)] = \left\{ -\omega^2 [M]_n + i\omega[C]_n + [K]_n \right\} \quad (5.5.1)$$

e observa-se que esta matriz pode ser calculada sem a necessidade da montagem das matrizes globais de massa e rigidez:

$$[S(\omega)]_n = \sum_{e=1}^{nel} [S(\omega)]_n^e \quad (5.5.2)$$

onde as matrizes elementares são dadas diretamente pela soma das matrizes de massa, rigidez e amortecimento:

$$[S(\omega)]_n^e = \left\{ -\omega^2 [M]_n^e + i\omega [C]_n^e + [K]_n^e \right\} \quad (5.5.3)$$

o que reduz bastante o espaço de memória necessário. Os resultados são fornecidos também pela subrotina *Driver* por meio de arquivos de dados.

Os resultados gerais (tensão, deformação e deslocamento) são fornecidos no arquivo *output.dat* enquanto que os dados a respeito da FRF de saída (considerando-se um determinado ponto de medição) são fornecidos no arquivo *outfreq.dat* no formato ASCII.

Para comprovar a eficiência do programa de elementos finitos descrito acima, foram implementados diversos tipos de elementos no código original considerando-se o domínio da frequência. Foi analisada uma viga em estado plano de tensão com as seguintes características:

- | | |
|----------------------------|-------------------------------|
| 1. módulo de Elasticidade: | $E = 10.000 \text{ N/cm}^2$ |
| 2. módulo de Poisson: | $\nu = 0.3$ |
| 3. densidade: | $\rho = 0.10 \text{ Kg/cm}^2$ |
| 4. comprimento: | $L = 100 \text{ cm}$ |
| 5. altura: | $h = 10 \text{ cm}$ |

Conforme pode-se verificar, as dimensões da viga aproximam-se dos requisitos fundamentais da teoria de flexão elástica da Resistência dos Materiais que fornece, para as frequências naturais de ressonância da viga a seguinte expressão [7]:

$$\omega_n = \beta_n^2 \sqrt{\frac{EI}{\gamma}} \quad (5.5.4)$$

onde γ é o peso por unidade de comprimento e I é o momento de inercial de área relativo ao eixo de rotação da viga. O coeficiente β é tabelado em função do comprimento da via e das condições de contorno do problema. Para a viga sob consideração, as primeiras freqüências naturais são tabelas abaixo:

Freqüência	Valor (rad/s)
1	0.22
2	1.51
3	3.62
4	7.01
5	12.22

Tabela 5.2: Valores das freqüências naturais para a viga proposta

A figura seguinte mostra a viga discretizada em 12 elementos quadráticos tipo Serendipity (8 nós). As curvas mostradas indicam o deslocamento na direção y (direção de aplicação da força) e na direção x , eixo da viga e que corresponde à curva inferior. A distribuição dos picos pelo espectro mostram uma boa concordância entre o método e a teoria da Resistência dos Materiais para a viga de proporção $L/H=10$. O ponto de excitação e o de resposta coincidem com a extremidade livre da viga

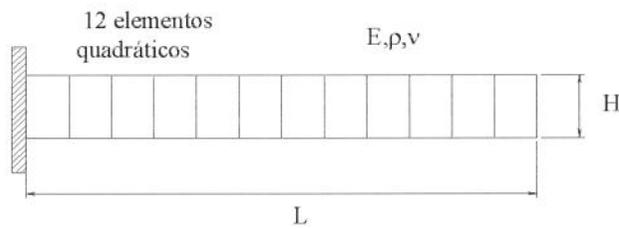


Figura 5.5: Viga discretizada por 12 elementos

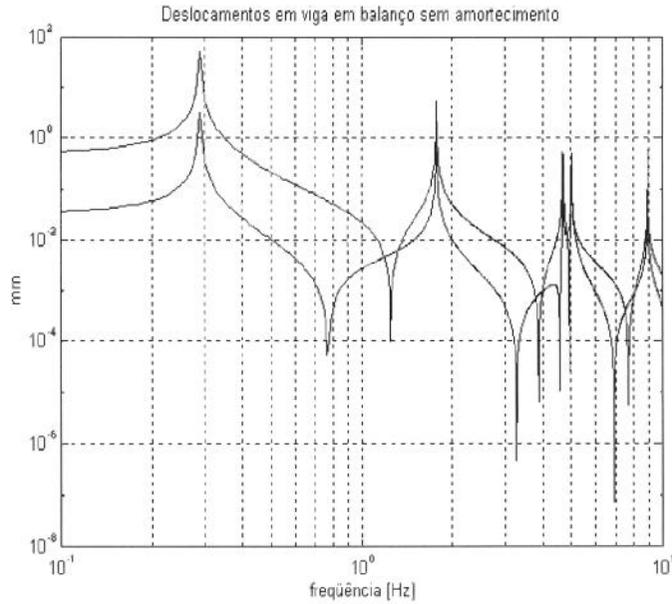


Figura 5.6: FRF em viga sob estado plano de tensão discretizada por 12 elementos quadráticos tipo Serendipity

A figura 5.7 foi obtida com a mesma discretização porém introduziu-se amortecimento histerético correspondente à 0.1%. A distribuição dos picos mostra que o amortecimento não influi significativamente nas frequências naturais. A figura 5.8 mostra o caso onde o amortecimento corresponde a 1 %. Neste caso a atenuação nos picos é mais visível. A figura 5.9 e a figura 5.10 mostram viga discretizada por 24 elementos tipo serendipity com amortecimento proporcional. Os parâmetros de viscosidade de massa e rigidez correspondem à 1 % e 0.1 %.

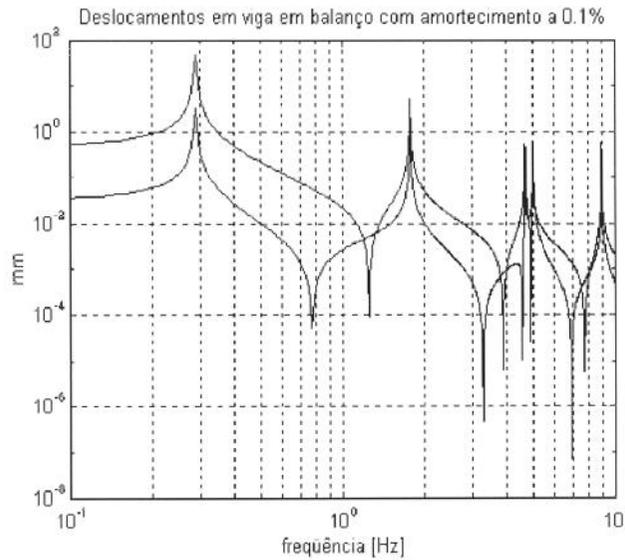


Figura 5.7: Viga com a mesma discretização anterior com amortecimento histerético a 0.1% .

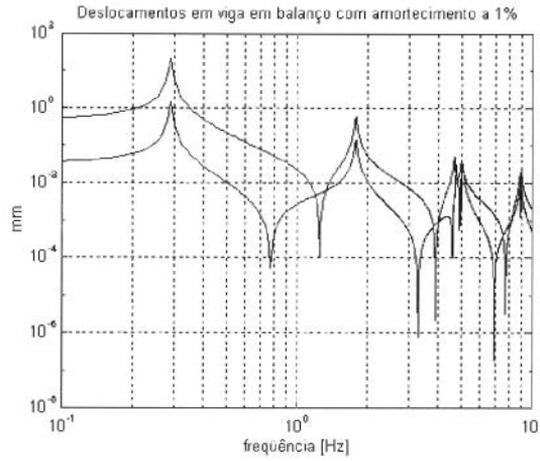


Figura 5.8: Viga com a mesma discretização anterior com amortecimento histerético a 1 % .

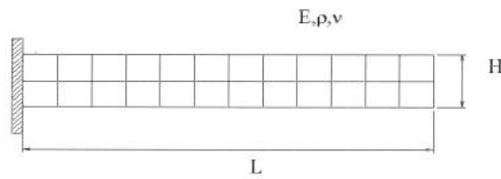


Figura 5.9: Viga discretizada por 24 elementos quadráticos tipo serendipity

A figura 5.10 mostra a mesma viga discretizada por 24 elementos quadráticos tipo lagrangeanos. Os resultados obtidos são idênticos aos conseguidos com elementos tipo serendipity. Neste caso nenhum amortecimento foi introduzido.

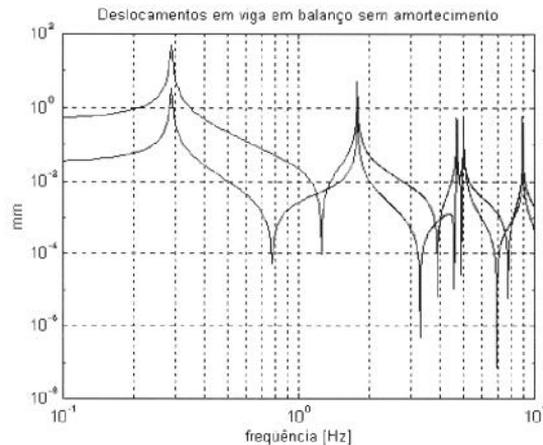


Figura 5.10: Viga sem amortecimento discretizada por 24 elementos lagrangeanos

A figura 5.11 corresponde a mesma viga discretizada por 12 elementos tipo lagrangeanos. Neste caso o coeficiente de amortecimento histerético corresponde à 0.1%. A queda das

curvas na região da ressonância é a mesma experimentada pelos elementos tipo serendipity. A figura 5.12 mostra os resultados com o coeficiente de amortecimento a 5 %.

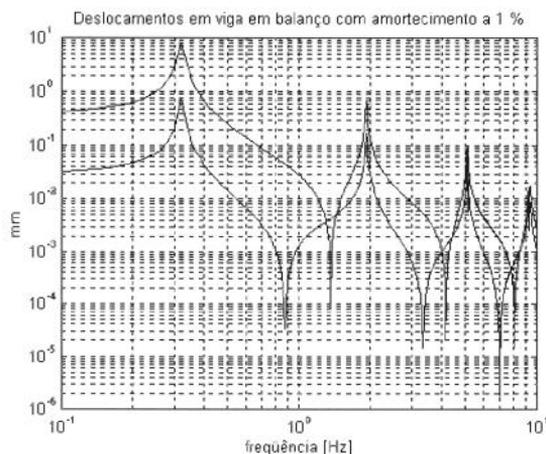


Figura 5.11: Viga discretizada por 12 elementos lagrangeanos e amortecimento histerético a 1%

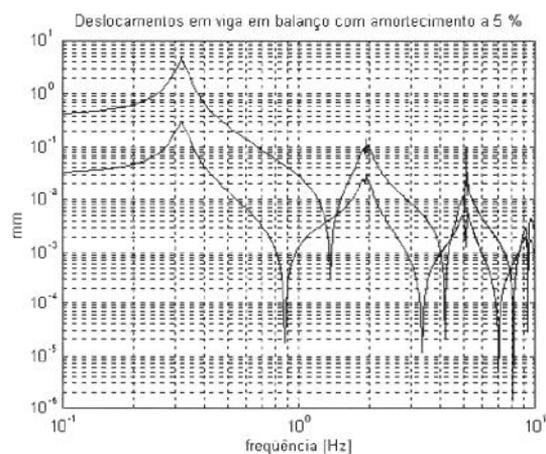


Figura 5.12: Viga discretizada por 12 elementos lagrangeanos e amortecimento histerético a 5 %

Os resultados a serem obtidos com os elementos infinitos descritos neste capítulo permitirão avaliar quais estratégias são mais adequadas para o tratamento de problemas da DSSI.

6. Aplicação de elementos infinitos e demais resultados

6.1 Introdução

Neste capítulo discutir-se-á a implementação computacional dos elementos infinitos descritos no item 5.4.4 em problemas da dinâmica de fundações. O principal aspecto abordado é a obtenção das funções de resposta em frequência para o semi-espaço homogêneo e suas variantes: fundação engastada e meio em camadas. Inicialmente procede-se a uma revisão dos conceitos utilizados na interação solo-estrutura, descreve-se os modelos utilizados e, por fim, apresenta-se os resultados obtidos com a implementação.

Além da implementação computacional discute-se ainda a possibilidade de incorporação dos resultados obtidos com o semi-espaço homogêneo à análise modal de estruturas em interação com o solo. Os resultados obtidos demonstram a importância de ter em consideração os efeitos dispersivos do solo nos resultados modais.

O estudo da interação dinâmica estrutura-fundação-solo é voltado sobretudo a estruturas apoiadas sob solos flexíveis sob a ação de forças dinâmicas diretamente aplicadas na estrutura ou transmitidas através do solo. Os efeitos desta interação são, na maior parte das análises, estudados segundo um comportamento elástico linearizado tanto da estrutura como do solo. Uma das consequências desta linearização é que o conjunto solo-estrutura pode ser analisado segundo diferentes técnicas de sub-estruturação¹ [45] no domínio da frequência.

O objetivo básico no projeto de fundações de máquinas é a limitação do movimento do sistema a amplitudes que não interferirão com a operação satisfatória do equipamento. Assim, um

¹ Os métodos de sub-estruturação permitem o estudo separado do comportamento dinâmico da estrutura em primeiro lugar. Em seguida o comportamento dinâmico do solo é adicionado.

ingrediente importante para uma análise de fundação bem sucedida é a determinação acurada da rigidez dinâmica da fundação, também conhecida como impedância dinâmica [17].

Em muitos problemas onde os efeitos de interação com o solo são importantes (fundações de máquinas, instalações hidro-elétricas, etc) as fundações são massivas e podem, em primeira análise, ser consideradas rígidas. Deve ser observado, entretanto, que esta aproximação não necessita ser tomada nos modelos de elementos finitos/infinitos uma vez que a rigidez da fundação pode ser tão grande quanto se desejar variando-se apenas o módulo de Young do modelo considerado.

Considerando o caso mais simples, em que as fundações são rígidas, podem ocorrer três casos distintos:

- A. fundações de superfície: nas quais a zona de contato com o solo restringe-se a parte inferior da fundação
- B. fundações semi-engastadas: nas quais o contato fundação-solo se dá totalmente na parte inferior e parcialmente nos lados da fundação
- C. fundações engastadas: nas quais o contato ocorre completamente nas faces inferior e laterais da fundação.

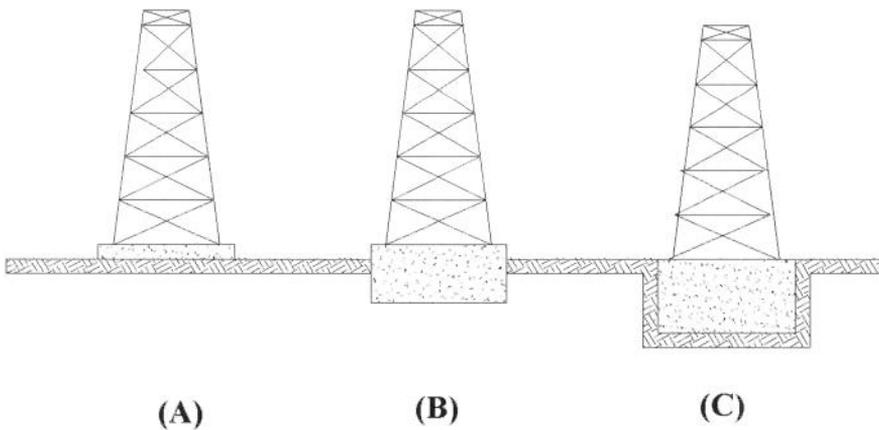


Figura 6.1 diferentes formas de engastamentos para fundações rígidas

Nos casos onde a fundação é rígida e de superfície, seu movimento pode ser descrito por meio de três graus de liberdade, correspondendo às coordenadas vertical, horizontal e de rotação. No caso de modelos tridimensionais, o vetor de deslocamentos da fundação tem seis componentes (dois rotacionais, três translações e um movimento de torção).

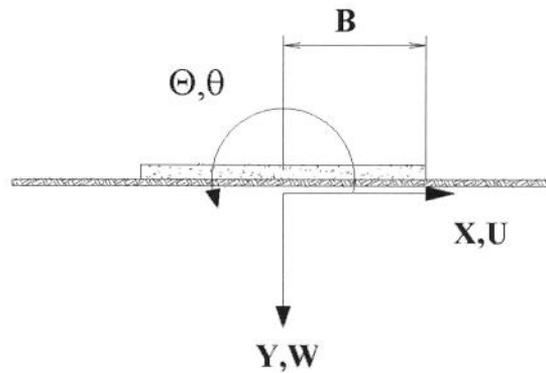


Figura 6.2: deslocamentos e coordenadas possíveis em fundação rígida bi-dimensional

Assim, para uma excitação harmônica com frequência ω , define-se uma matriz de rigidez dinâmica, K_{ij} , que relaciona o vetor de forças e momentos aplicados na fundação com os deslocamentos e rotações resultantes quando a fundação é assumida sem massa:

$$\{F\} = [K]\{U\} \quad (6.1.1)$$

Os termos da matriz K_{ij} são funções da frequência ω e cada termo representa a força ou momento resultante na coordenada i quando um deslocamento ou rotação harmônica e unitária é aplicada na coordenada j . Em outras palavras, K_{ij} é a matriz de rigidez ou impedância do solo para uma dada configuração da fundação.

Além disso, estas forças e momentos resultantes estão, geralmente, fora de fase umas com as outras mesmo quando nenhum amortecimento de natureza material é introduzido no modelo, razão pela qual opta-se pela notação complexa. Os termos da matriz de impedância são escritos como:

$$K_{ab}(\omega) = \text{Re}(K_{ab}) + i \cdot \text{Im}(K_{ab}) \quad (6.1.2)$$

sendo que a parte real da impedância relaciona-se com a rigidez e inércia do solo e a parte imaginária se deve às propriedades de amortecimento (material ou geométrico) da propagação de ondas pelo sistema. Deve ser notado que a maior parcela de amortecimento no semi-espaco homogêneo se dá devido ao amortecimento geométrico e que demais efeitos dispersivos tem um papel secundário [17]. Este amortecimento geométrico é altamente dependente da frequência, conforme ficou demonstrado no item 3.4 e, portanto, os termos da matriz de rigidez são frequentemente apresentados [12,27] segundo:

$$K_{ab} = K_{ab}^e (k_{ab} + ia_0 c_{ab}) \quad (6.1.3)$$

onde K_{ij}^e representa o valor estático da impedância e os termos k_{ij} e c_{ij} são coeficientes dependentes da frequência. O termo a_0 representa a frequência adimensionalizada.

Quando existe amortecimento material (comumente histerético), a expressão acima é arranjada na tentativa de isolar ambos os efeitos:

$$K_{ab} = K_{ab}^e (k_{ab} + ia_0 c_{ab})(1 + 2i\beta) = K_{ab}^e (k_{ab} + ia_0 c_{ab})(1 + i\eta) \quad (6.1.4)$$

onde β é uma taxa de amortecimento. Os coeficientes k_{ij} e c_{ij} ainda dependem do amortecimento material mas, para valores normalmente encontrados de β , esta dependência é pequena [12].

Uma outra maneira comumente encontrada de analisar os efeitos dinâmicos da fundação é através da inversa da matriz de rigidez, conhecida como matriz de flexibilidade dinâmica, C_{ij} . Seguindo a notação complexa, os termos de flexibilidade podem ser apresentados como:

$$C_{ab}(\omega) = \text{Re}(C_{ab}) + i \text{Im}(C_{ab}) \quad (6.1.5)$$

Será dada preferência à apresentação de resultados através da matriz de flexibilidade uma vez que um grande número de autores apresenta seus resultados segundo esta forma.

6.2 Análise do elemento infinito de Chongbin

A seção 5.4.4 descreve um elemento infinito capaz de propagar ondas de cisalhamento, compressão e de Rayleigh onde admite-se um conjunto de funções de forma dado por:

$$N_i(\epsilon, \eta) = P_i(\epsilon) c_{ij} \exp[-\epsilon(\alpha_j + i\beta_j)] \quad (6.2.1)$$

onde $P_i(\epsilon)$ é a função de interpolação definida no intervalo $\epsilon \in [0,1]$, c_{ij} é a matriz de coeficientes de decaimento e α e β são, respectivamente o decaimento admitido da componente de onda j e o seu número de onda.

No entanto, tal elemento negligencia o fato que o número de onda e a taxa de decaimento não são propriedades do domínio normalizado $\Omega^N = \{(\epsilon, \eta) \mid \epsilon \in [0, \infty[, \eta \in [-1, 1]\}$ mas se referem ao domínio elementar original. Assim, descontinuidades no perfil de deslocamentos podem ocorrer no caso de elementos adjacentes.

O elemento implementado faz uma correção deste problema nos casos em que o domínio original do elemento é diferente do normalizado. Assume-se a existência de uma coordenada adicional $R(\epsilon)$ que corresponde aproximadamente à direção de propagação do elemento no sistema de coordenadas não normalizado. Se o elemento está orientado segundo uma direção radial, então o vetor R coincide com a coordenada radial do problema e, assim,

$$R_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}. \quad (6.2.2)$$

Se o ângulo formado pelas arestas do elemento for pequeno em relação ao seu comprimento e os nós intermediários estiverem posicionados nos pontos médios das arestas, então o vetor R pode ser dado aproximadamente por:

$$R(\epsilon) = \frac{R_1 + R_6}{2} + \left(\frac{R_3 + R_4}{2} - \frac{R_1 + R_6}{2} \right) \epsilon \quad (6.2.3)$$

e, assim, as constantes de decaimento e propagação do elemento i segundo a componente de onda j , (α_{ij} e β_{ij} respectivamente) são definidas em termos das constantes globais por meio de:

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \alpha_{Gj} \frac{dR}{d\epsilon} \\ \beta_{ij} &= \beta_{Gj} \frac{dR}{d\epsilon} \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

onde a derivada de R em relação a ϵ é dada simplesmente por:

$$\frac{dR}{d\epsilon} = \frac{\Delta R_1 + \Delta R_2}{2} \quad (6.2.5)$$

onde ΔR_1 é o comprimento da aresta superior e ΔR_2 o comprimento da aresta inferior. A figura abaixo ilustra a situação onde o elemento está orientado totalmente no sentido radial e, neste caso, $\Delta R_1 = \Delta R_2$.

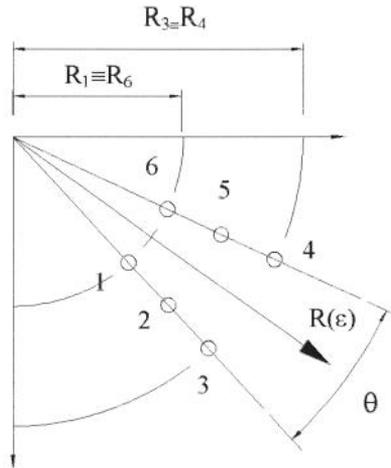


Figura 6.3: elemento infinito orientado no sentido radial

Utilizando-se o processo de integração descrito em 2.4.1 é possível obter-se de maneira bastante eficiente as matrizes de rigidez e massa para este tipo de elemento.

O gráfico 6.2.1 ilustra o comportamento de um componente típico da matriz de rigidez de um elemento posicionado radialmente onde $\Delta R_1=\Delta R_2= 2.00$ e $\theta=5^\circ$. O meio é admitido perfeitamente elástico onde $E=5.6 \times 10^2 \text{ N/m}^2$, $\nu=0.40$ e $\rho=2.00 \text{ kg/m}^3$. Foram utilizados 10 pontos de integração no total, sendo 2 pontos na direção η (Gaussiana) e 5 pontos na direção de propagação. As curvas referem-se a constantes de decaimento globais de 1.0, 0.10 e 0.01 .

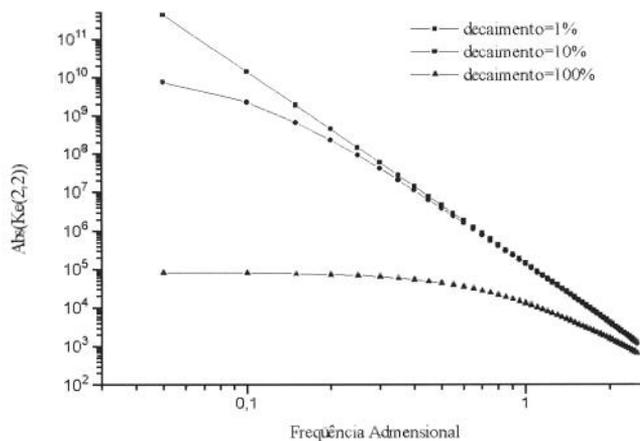


Figura 6.4: Variação da rigidez estática do elemento em relação à frequência

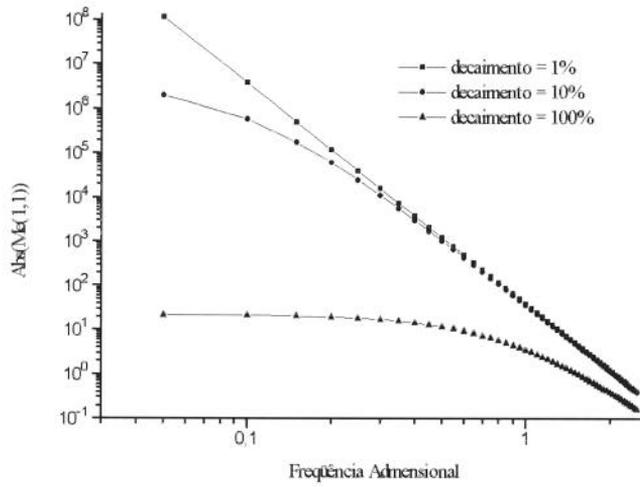


Figura 6.5: Variação da massa do elemento com a frequência

A curva seguinte ilustra a influência do número de pontos de integração na precisão obtida pelo método de integração. Deve ser notado que o método já incorpora a variação em ϵ das funções de forma e, portanto não são necessários mais que um ponto no caso de domínios regulares (quadriláteros). Entretanto, pontos de integração adicionais devem ser incluídos sempre que o domínio de integração não for regular (onde o determinante jacobiano não é constante).

A curva referente ao erro de cinco pontos é mostrada parcialmente uma vez que os valores encontrados foram menores que a precisão de máquina utilizada (precisão simples).

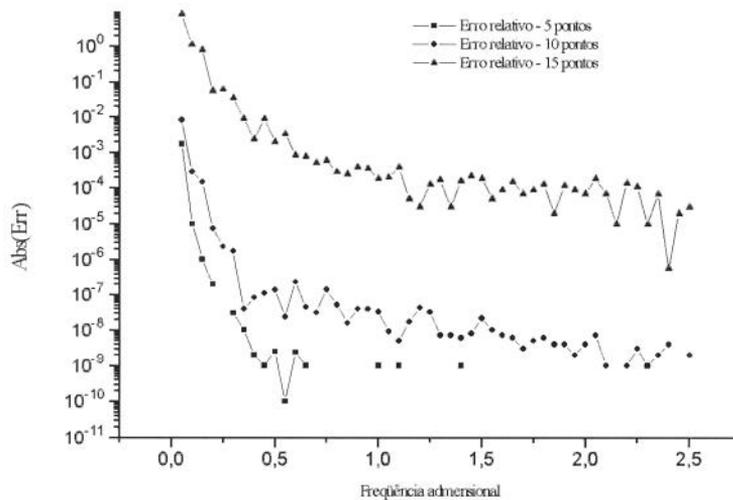


Figura 6.6: Variação do erro de integração em função do número de pontos

Conforme já foi verificado anteriormente, o erro de integração cresce de maneira significativa à medida que a frequência se aproxima de zero e conforme se aumenta o número de pontos de integração.

Para este elemento são conseguidos resultados satisfatórios com apenas 2 pontos de integração na direção de propagação enquanto que o elemento descrito por Medina/Penzien [27] necessita da ordem de 25 pontos utilizando-se um processo derivado de Gauss-Laguerre.

6.3 Fundações de superfície

Os diversos tipos de elementos infinitos tratados nos capítulos anteriores são particularmente úteis na obtenção da matriz de rigidez dinâmica de fundações de superfície bi-dimensionais, sejam elas admitidas rígidas ou flexíveis. O número total de incógnitas é sensivelmente menor do que no caso tridimensional e a discretização e tratamento dos dados é, conseqüentemente, mais simples.

Existem duas abordagens distintas para este problema: quando a excitação provém do solo (como, por exemplo, no caso de terremotos e explosões subterrâneas) e se deseja determinar as tensões e movimentos resultantes na estrutura ou fundação. A outra aplicação ocorre quando a excitação é fornecida pela própria estrutura.

Embora ambas as situações possam ocorrer, a principal atenção será voltada para o segundo caso. Uma abordagem completa envolvendo a primeira situação pode ser obtida em Wolf [45] segundo diferentes técnicas de sub-estruturação.

Testes e observações mostram que as propriedades mecânicas do solo, a topografia da superfície e o perfil geológico do subsolo tem uma grande importância no comportamento dinâmico das estruturas e fundações — os quais tornam os resultados obtidos pelo modelo do semi-espaço homogêneo suficientes apenas para uma primeira aproximação. Assim, a complexidade das situações encontradas na prática fez dos métodos numéricos as ferramentas mais adequadas para o tratamento de tais problemas. A figura seguinte mostra um perfil típico em camadas para um problema dinâmico de interação solo-estrutura.

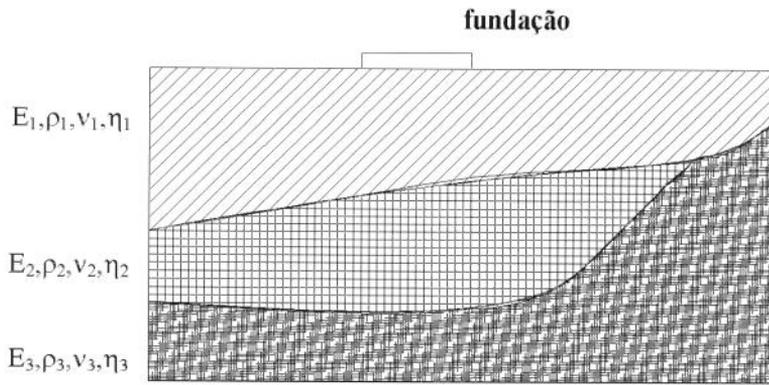


Figura 6.7: Exemplo das diferentes camadas de um típico perfil do subsolo.

Para o caso de uma fundação rígida bi-dimensional, existem três graus de liberdade possíveis correspondendo aos deslocamentos de corpo rígido. Estes são:

1. translação no eixo z - vertical
2. translação no eixo x - horizontal
3. rotação no eixo y - angular

e, portanto, a equação (6.1) pode ser representada segundo:

$$\begin{Bmatrix} F_V \\ F_H \\ M/B \end{Bmatrix} = \pi G \begin{Bmatrix} C_{vv} & C_{vh} & C_{vm} \\ C_{hv} & C_{hh} & C_{hm} \\ C_{mv} & C_{mh} & C_{mm} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ W \\ \theta B \end{Bmatrix} \quad (6.3.1)$$

onde F_V , F_H e M são as componentes da força e momento aplicados no centro da fundação segundo os eixos vertical, horizontal e angular. O termo de adimensionalização πG é usado pela maioria dos autores, onde G é o módulo de elasticidade transversal. Os coeficientes C_{ij} são chamados de coeficientes de influência e são determinados um a um tomando-se uma força ou momento unitário na direção i e verificando-se os três deslocamentos correspondentes. Bycroft [5] e Gazetas [17] mostram que a matriz dos coeficientes de influência é simétrica e que, quando da aplicação de uma carga vertical central, não ocorrem deslocamentos da fundação segundo os demais eixos ortogonais.

São apresentadas, em seguida, as quatro funções de flexibilidade de uma fundação rígida e de superfície sobre um semi-espaco homogêneo visco-elástico e que correspondem aos coeficientes C_{vv} , C_{hh} , C_{mm} e C_{hm} . O estudo envolve a comparação com as soluções teóricas dadas por Luco/Westmann [24] e com o método de funções de Green descrito por Wolf [45] e Romanini [38,31].

Deve ser notado que as curvas de Luco/Westmann correspondem ao caso elástico e que Romanini utiliza amortecimento histerético.

A figura seguinte ilustra o significado das várias grandezas utilizadas. A distância L corresponde comprimento do campo próximo e, segundo Chongbin [10] e Chung-Bang [41] deve ser, no mínimo, três vezes o comprimento característico da fundação para os casos de semi-espaço homogêneo. A distância H será admitida igual ao comprimento do campo próximo.

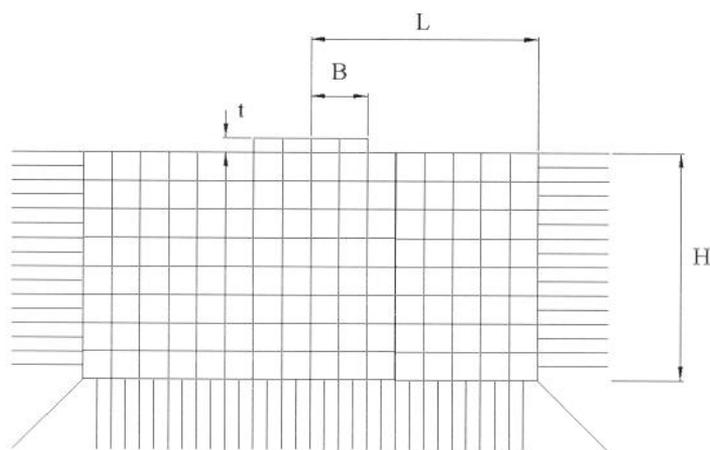


Figura 6.8: Discretização utilizada para o semi-espaço homogêneo

A altura da fundação (indicada por t) é teoricamente irrelevante sempre que a fundação for considerada rígida. Entretanto, em situações práticas, a rigidez da fundação pode ser seriamente comprometida quando a relação t/B for muito pequena uma vez que isso introduz os modos próprios da fundação nas funções de flexibilidade. Para todos os efeitos, portanto, admitir-se-á que a altura da fundação é pelo menos a metade do comprimento característico da mesma.

Utilizou-se elementos lagrangeanos quadráticos para a discretização do campo próximo e da fundação (já testados no capítulo anterior). A discretização usada foi de quatro elementos para a fundação e de 16×8 elementos para o campo próximo. Tem-se, portanto, 1418 graus de liberdade.

Inicialmente verifica-se a convergência do método em função dos vários parâmetros de decaimento possíveis. O gráfico abaixo corresponde à função de flexibilidade vertical para o semi-espaço onde $E=2.5 \times 10^4 \text{ N/m}^2$, $\nu=0.25$ e $\rho=3.00 \text{ ton/m}^3$. O amortecimento material (histerético) utilizado no modelo de elementos finitos/infinitos e no de funções de Green é de $\eta=10\%$.

Os parâmetros de decaimento referentes a cada componente de onda foram admitidos iguais. Além disso todos os elementos infinitos possuem as mesmas propriedades. Não foram feitas tentativas para modelar o decaimento das ondas de superfície em relação à vertical através do parâmetro

de decaimento correspondente. Os resultados mostram que, mesmo com a presença de ondas de Rayleigh propagando-se na vertical, a precisão alcançada é muito boa.

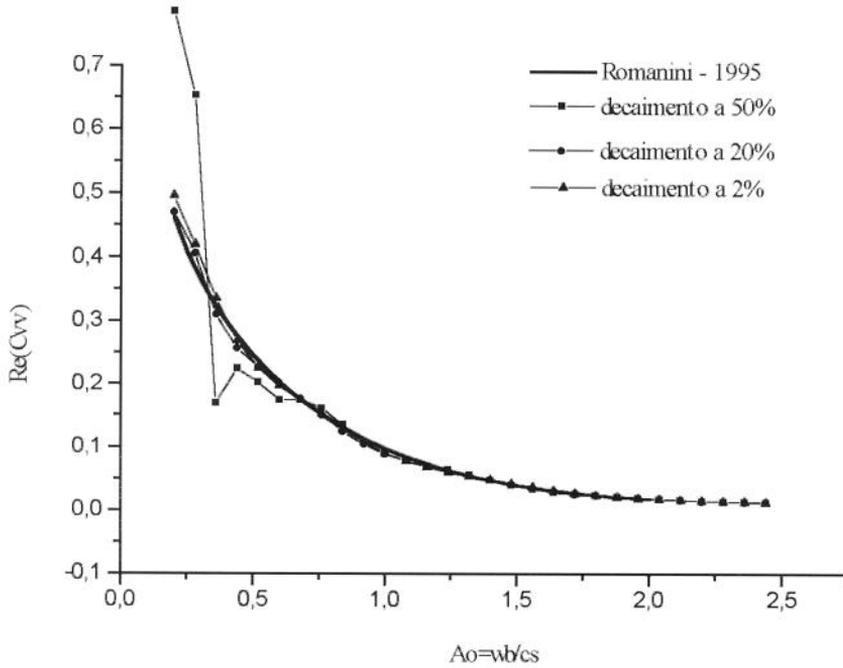


Figura 6.9A: Convergência do modelo em função do parâmetro de decaimento

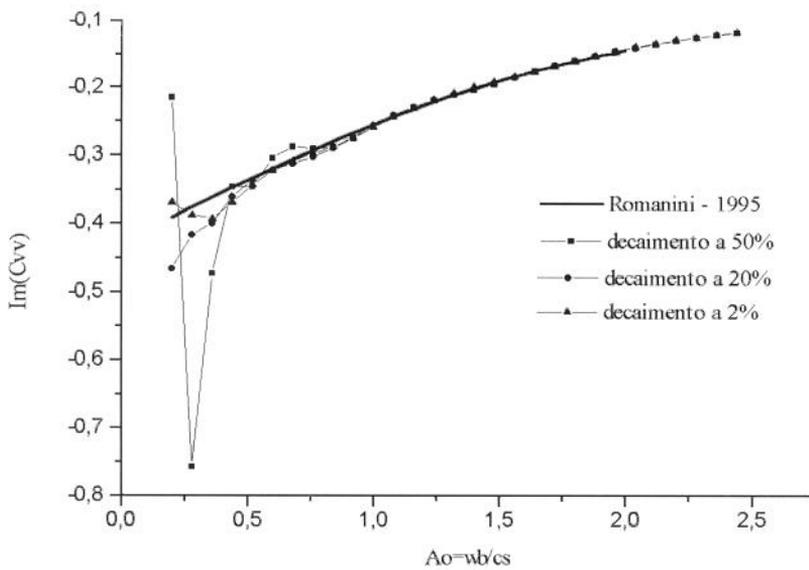


Figura 6.9B: Convergência do modelo em função do parâmetro de decaimento

Inicialmente verifica-se a validade dos resultados obtidos pelo modelo de elementos finitos/infinitos para o caso de um coeficiente de Poisson de 0,25. Os resultados mostram que o modelo

de elementos finitos/infinitos é tão eficiente em aproximar as curvas teóricas quanto o método de Green. As curvas para o semi-espaço foram obtidas considerando-se os parâmetro de decaimento de 0.20 para as ondas de corpo e 0.01 para a onda de Rayleigh.

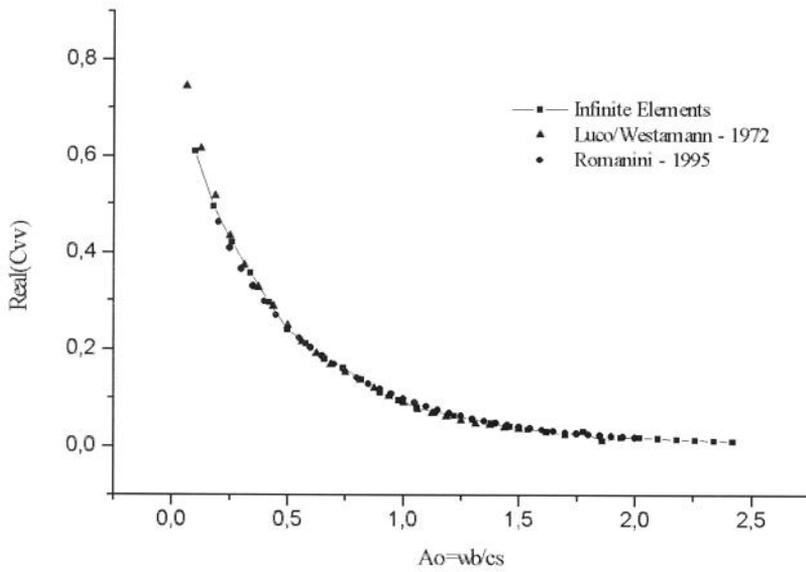


Figura 6.10: $Re(C_{vv})$ para o semi-espaço homogêneo onde $\nu=0.25$ e $\eta=10\%$.

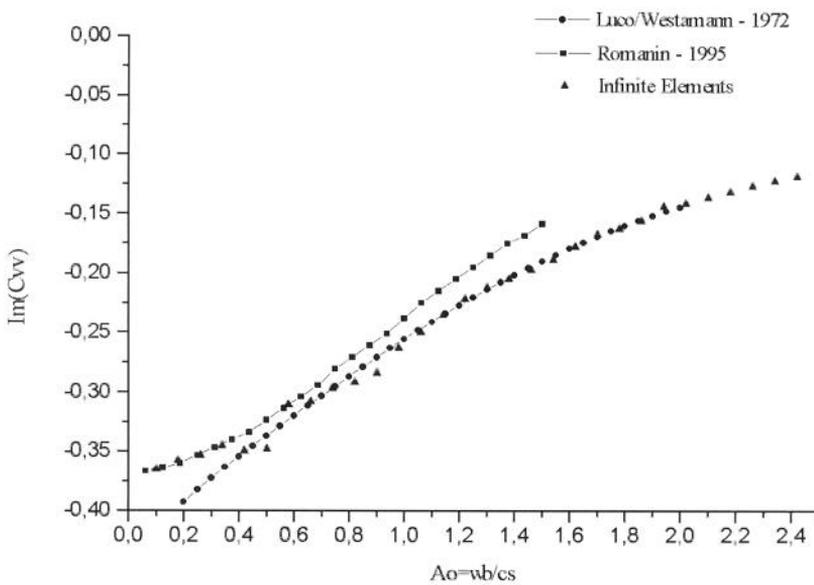


Figura 6.11: Comportamento $Im(C_{vv})$ para o semi-espaço homogêneo onde $\nu=0.25$ e $\eta=10\%$

As figuras seguintes analisam o comportamento da função de flexibilidade horizontal. Os resultados mostram que a inclusão de amortecimento no modelo tem pouca influência nas funções lineares (C_{vv} e C_{hh})

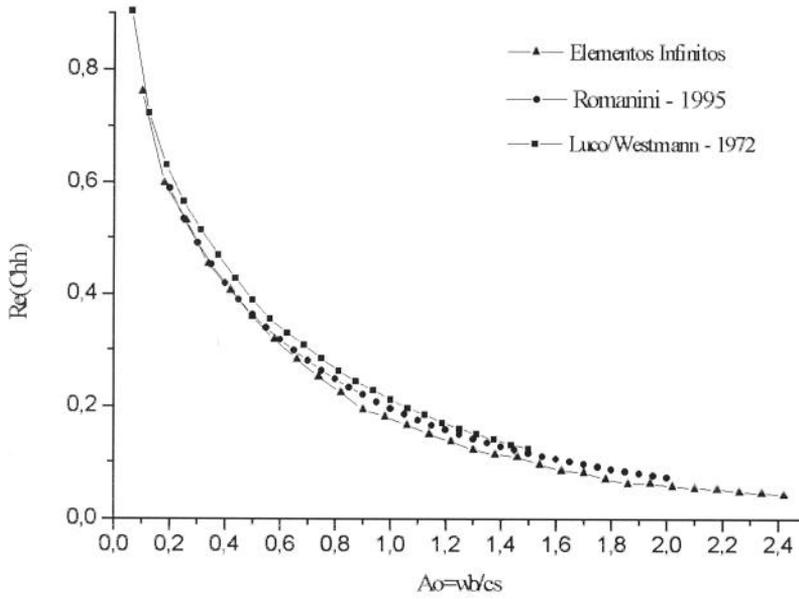


Figura 6.12A: Comportamento da função de flexibilidade horizontal (C_{vv}) para o semi-espaço homogêneo onde $\nu=0.25$ e $\eta=10\%$

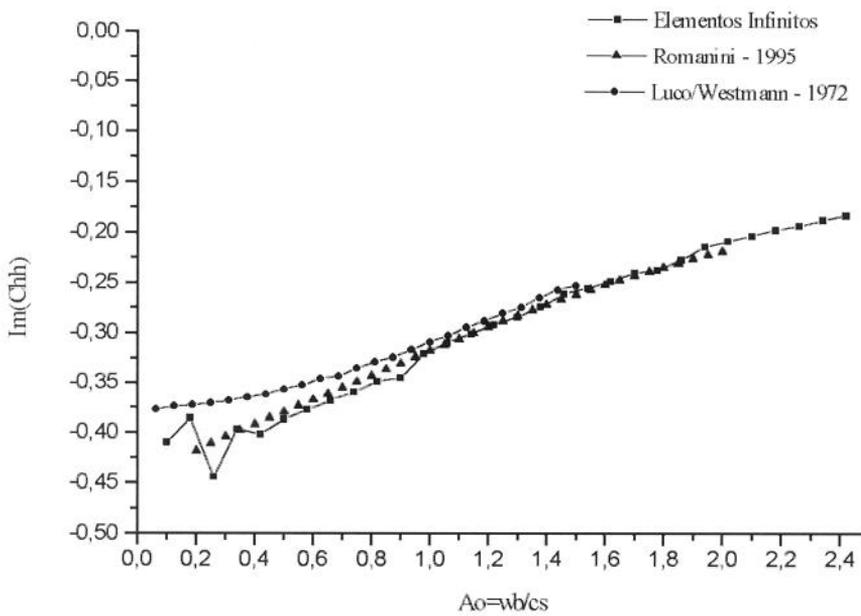


Figura 6.12B: Comportamento da função de flexibilidade horizontal (C_{vv}) para o semi-espaço homogêneo onde $\nu=0.25$ e $\eta=10\%$

A instabilidade na região de baixa frequência é característica deste tipo de elemento. Deve ser notado que uma busca mais detalhada dos parâmetros de decaimento mais apropriados para o problema pode minimizar este tipo de comportamento.

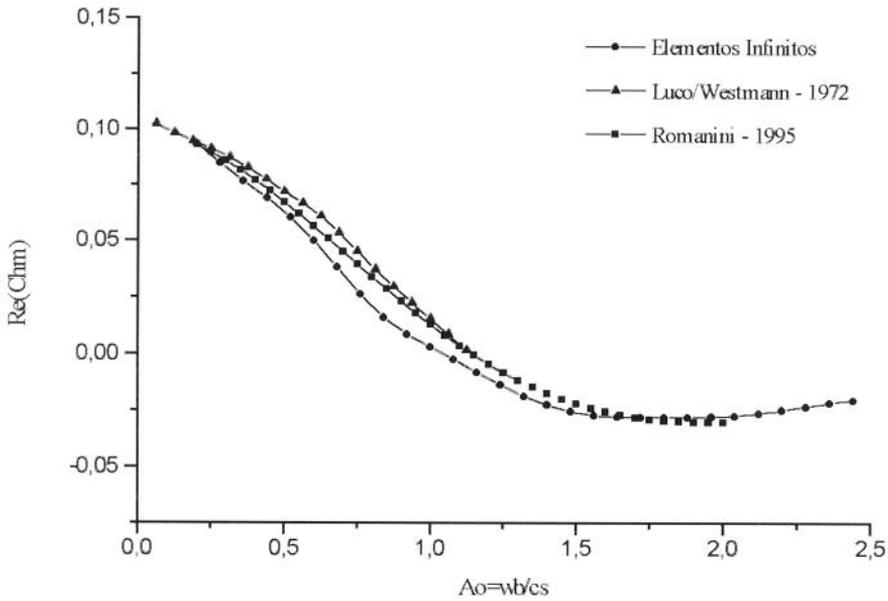


Figura 6.13A: Comportamento do termo de acoplamento - $Re(C_{hm})$. Semi-espaço $\nu=0.25$.

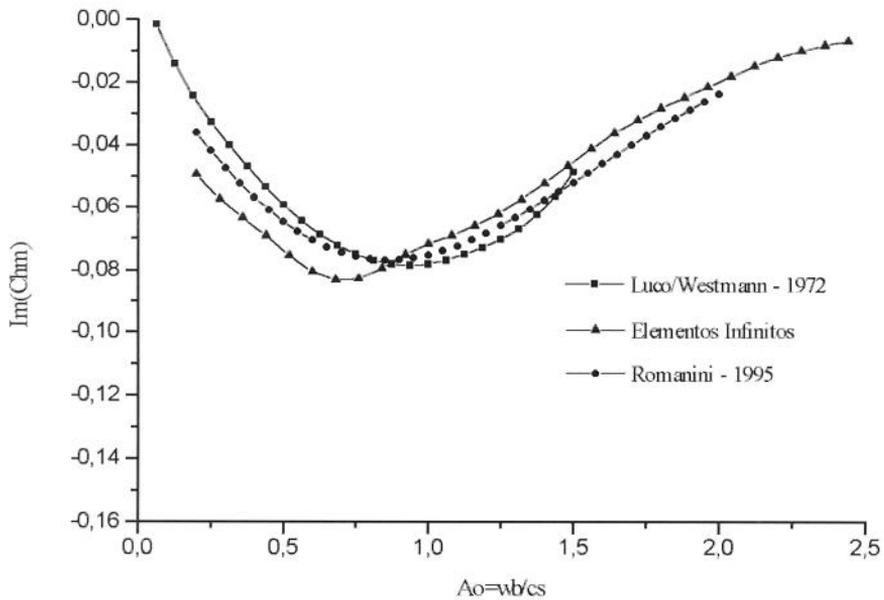


Figura 6.13B: Comportamento de $Im(C_{hm})$ para o semi-espaço $\nu=0.25$.

As curvas para as funções angulares (C_{hm} e C_{mm}) são mais sensíveis à presença de amortecimento, como se percebe pela grande diferença entre os modelos amortecido (Romanini e Elementos infinitos) e elástico (Luco/Westmann).

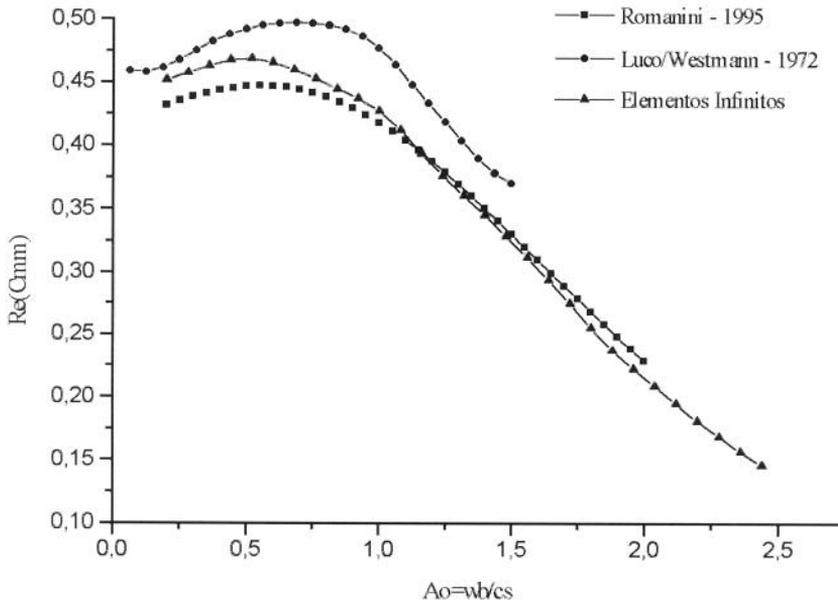


Figura 6.14A: Comportamento da função de flexibilidade angular - $Re(C_{mm})$ - para o semi-espaco $\nu=0.25$

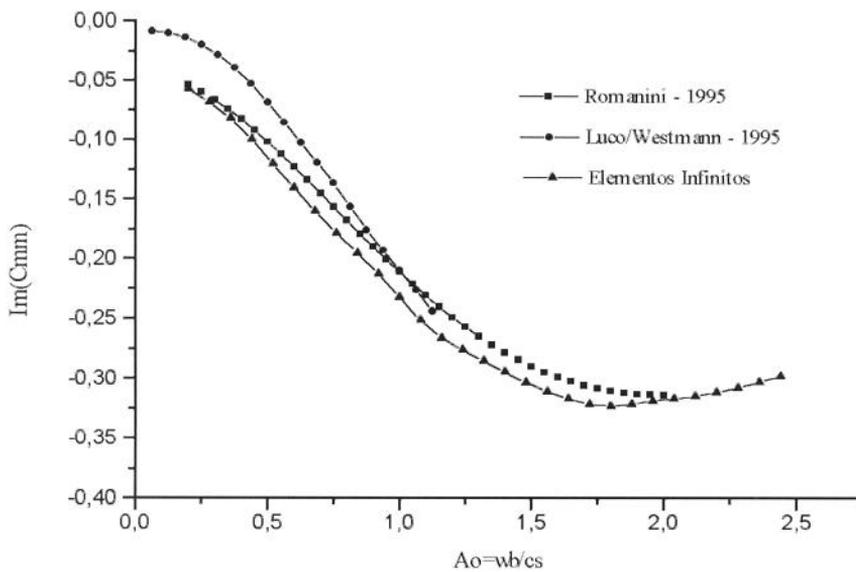


Figura 6.14B: Comportamento da função de flexibilidade angular - $Im(C_{mm})$ - para o semi-espaco $\nu=0.25$

Os resultados obtidos comprovam a boa precisão do método na solução de problemas de fundações de superfície. Esta diferença leva a um sensível desbalanceamento do sistema linear de equações necessitando de um método de solução mais robusto que o empregado (Crout com armazenamento linear). A figura seguinte ilustra a influência do fator de amortecimento nas partes real e imaginária das funções de flexibilidade.

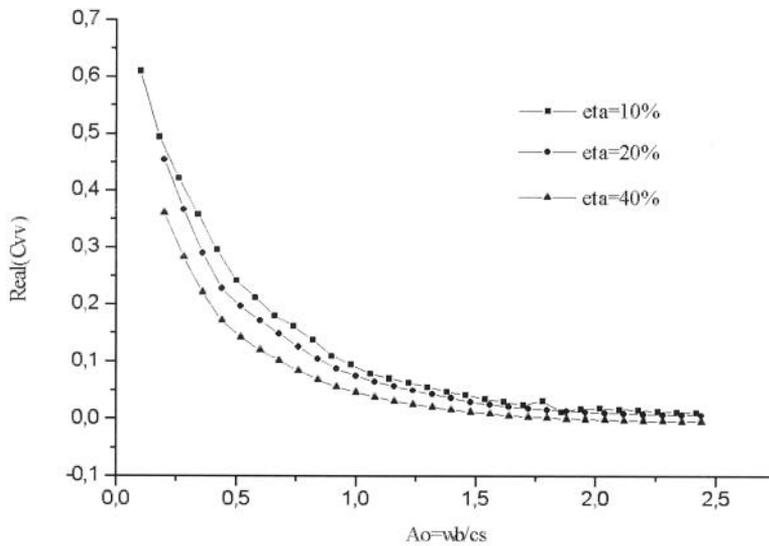


Figura 6.15A: $Re(C_{vv})$ em função do amortecimento material .Semi-espaço $\nu=0.25$

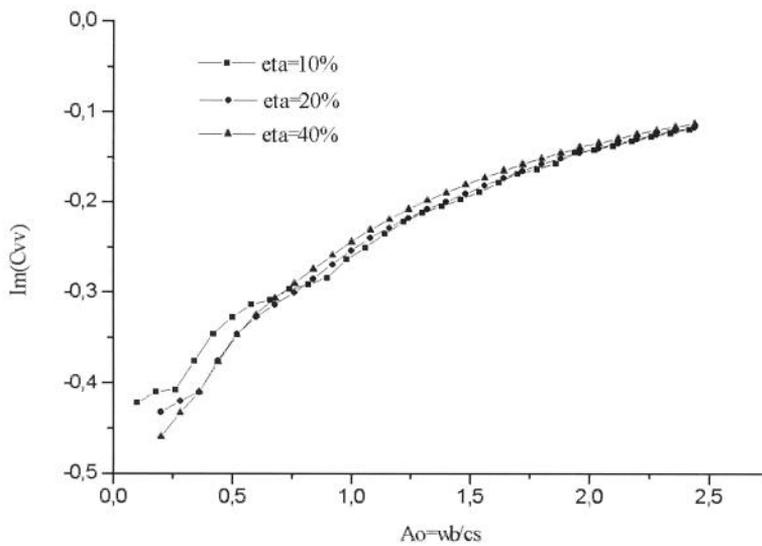


Figura 6.15B: $Im(C_{vv})$ em função do amortecimento material . Semi-espaço $\nu=0.25$

De acordo com os resultados obtidos verifica-se que a maior parte do amortecimento no modelamento do semi-espaço é de caráter geométrico enquanto que o amortecimento material tem caráter secundário. Esta conclusão também pode ser obtida através das matrizes dos elementos infinitos pois nas mesmas a parcela imaginária tem a mesma ordem de grandeza que a parte real.

O gráfico seguinte ilustra o comportamento típico dos termos de rigidez dinâmica de um elemento infinito típico quando são adicionadas as partes estática e inercial. Para este caso tem-se $E=5.0 \times 10^6 \text{ N/m}^2$, $\nu=0.40$, $\rho=2.00 \text{ ton/m}^3$ e $\eta=0$. O decaimento da parte imaginária é, para este elemento em particular, menor que o da parte real.

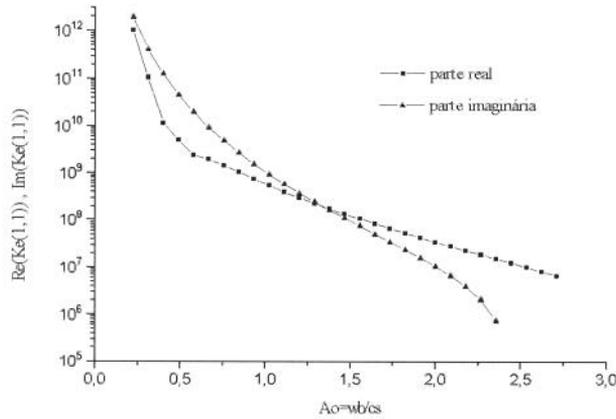


Figura 6.16: Comportamento das partes real e imaginária de um elemento típico

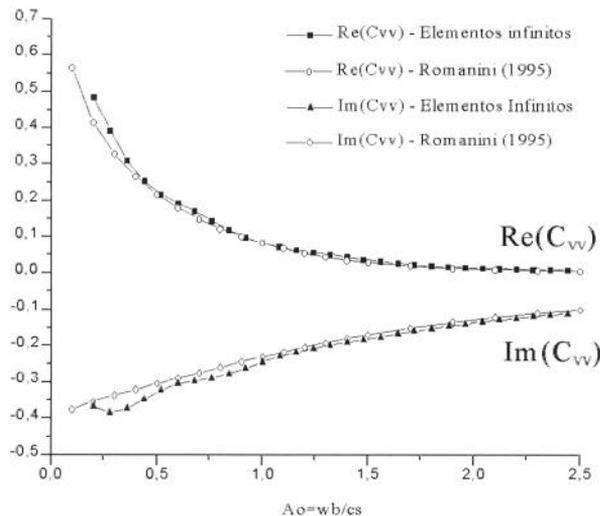


Figura 6.17: C_{vv} para o semi-espaço onde $\nu=0.33$ e $\eta=10\%$

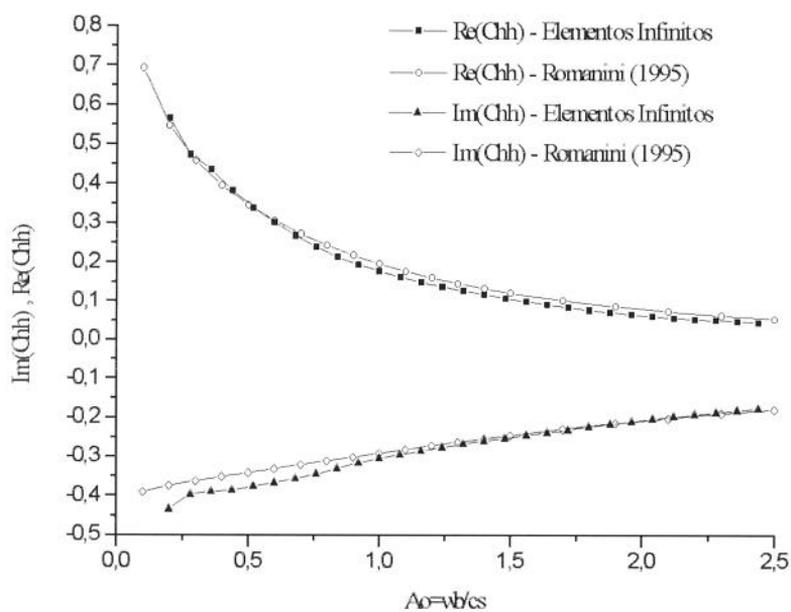


Figura 6.18: C_{hh} para o semi-espaço onde $v=0.33$ e $\eta=10\%$

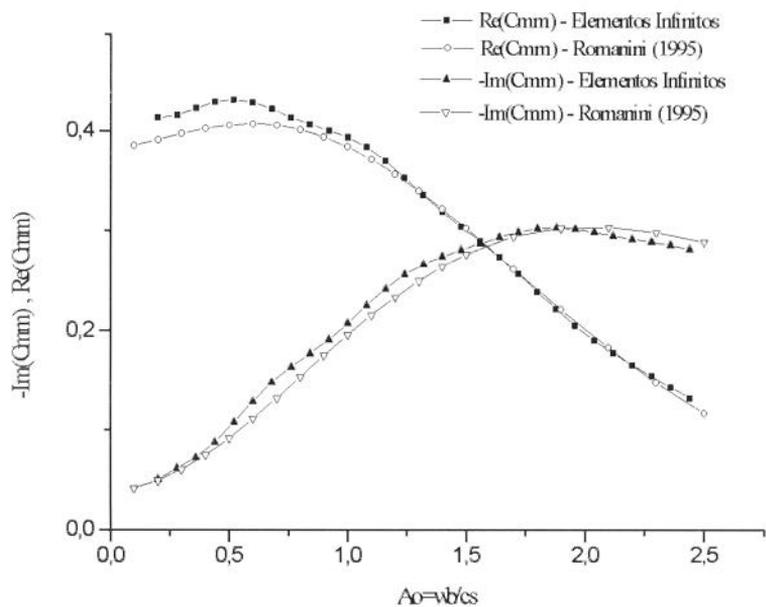


Figura 6.19: Comportamento de C_{mm} para o semi-espaço $v=0.40$

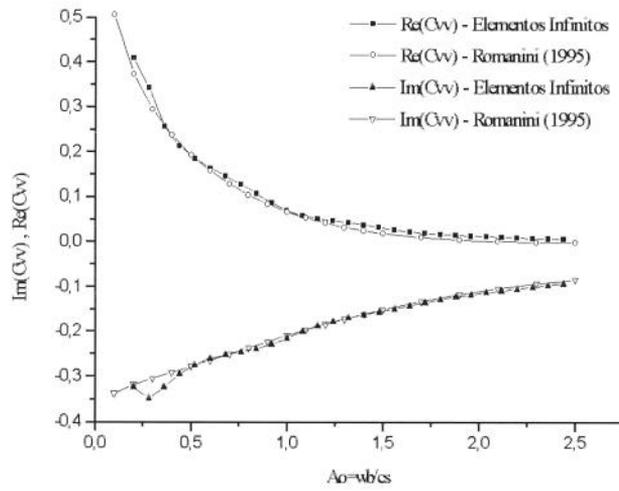


Figura 6.20: Comportamento de C_{vv} para o semi-espaço $\nu=0.40$

6.4 Fundações de superfície em meios estratificados

Uma vez tendo sido comprovada a boa performance do método em problemas de superfície, este foi aplicado ao problema bem conhecido dos meios em camadas horizontais. Foram analisadas duas classes de problemas: camada visco-elástica sobre semi-espaço e camada visco-elástica sobre leito de rochas. A figura seguinte ilustra as duas situações.

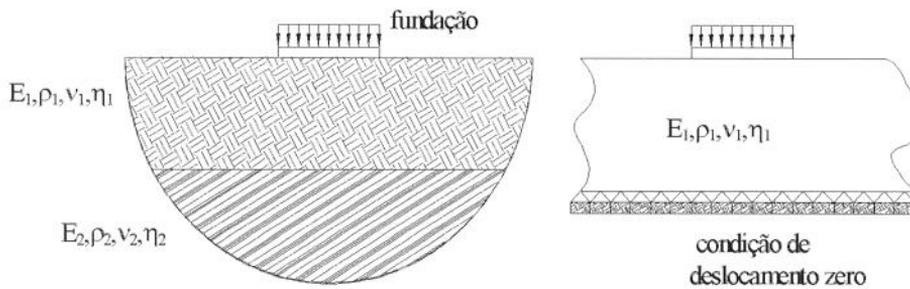


Figura 6.21 Situações analisadas

É evidente que o segundo caso é uma particularização do primeiro, no qual faz-se $E_2 \rightarrow \infty$ ou tão grande quanto se queira. O índice de refração de velocidades das ondas de cisalhamento, dado por:

$$\dot{i} = \frac{c_{s1}}{c_{s2}} \quad (6.4.1)$$

é utilizado para comparar a transmissividade do meio superior com a do semi-espaço. A fundação continua a ser representada como rígida e permanece na superfície. Um esquema da malha utilizada para os resultados é dado na figura seguinte.

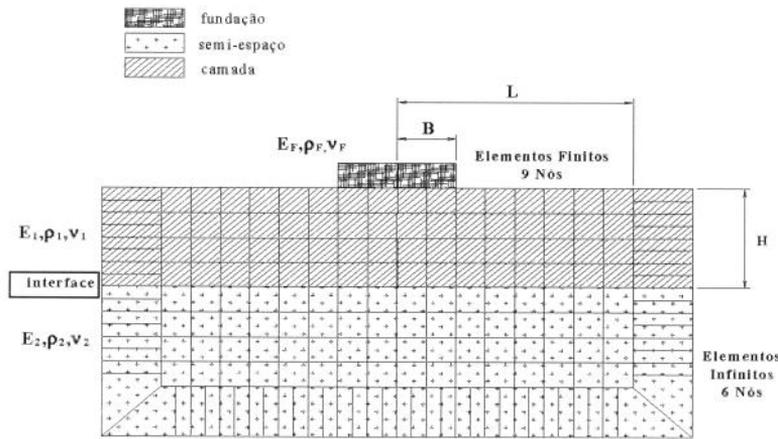


Figura 6.22: Discretização da fundação e semi-espaço no problema de camadas

Na figura anterior, o campo próximo à fundação é discretizado de maneira semelhante àquela do semi-espaço homogêneo. Utilizou-se elementos lagrangeanos de 9 nós no domínio da frequência tanto para a fundação como para o campo próximo. O comprimento mínimo do campo próximo para o caso da fundação sobre meio em camadas foi admitido como sendo de quatro vezes o comprimento característico da fundação. Assim:

$$\frac{L}{B} \geq 4.0 \quad (6.4.2)$$

é utilizado nos resultados abaixo. O tamanho relativo da camada, dado por:

$$t_r = \frac{H}{B} \quad (6.4.3)$$

relaciona o tamanho da camada com o da fundação e mede a influência das ondas refletidas pela interface nas funções de flexibilidade. A medida em que $t_r \rightarrow \infty$ tem-se o caso do semi-espaço homogêneo.

A grande maioria dos autores [17,12,24,38] analisa valores de t_r compreendidos entre 2.0 e 5.0 e valores do índice de refração entre 2.0 e 8.0. A partir deste valor, os resultados são muito próximos daqueles obtidos com a camada sobre leito de rochas.

Os resultados com elementos infinitos foram obtidos tomando-se $\eta_1=\eta_2=10\%$ e $\rho_1=\rho_2=2.00 \text{ ton/m}^3$. O módulo de Poisson é sempre admitido igual para todas as camadas e pode variar conforme indicado. Desta maneira pode-se alterar a relação c_{s1}/c_{s2} apenas pela modificação dos módulos de elasticidade, ou seja:

$$\frac{c_{s1}}{c_{s2}} = \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \quad (6.4.4)$$

Os gráficos comparam a solução obtida com elementos infinitos com as obtidas por Mesquita/Romanini [31] através de funções de Green e Von Estorff [16] através do método dos elementos de contorno. Inicialmente verifica-se o desempenho do método para o caso de uma camada de tamanho relativo $H/B=2.0$ e módulo de Poisson de 0.33 sobre um leito rígido de rochas. A comparação é feita através dos valores absolutos das funções de flexibilidade.

Para a utilização do método das funções de Green empregou-se uma discretização de 32 elementos na interface entre a superfície e a fundação. Os coeficientes de decaimento empregados pelos elementos infinitos foram de 0.20 para as ondas de corpo e 0.001 para as ondas de superfície. O modelamento admite, novamente, a presença de ondas de superfície propagando-se na vertical pois os resultados numéricos não são sensíveis ao decaimento vertical deste tipo particular de onda.

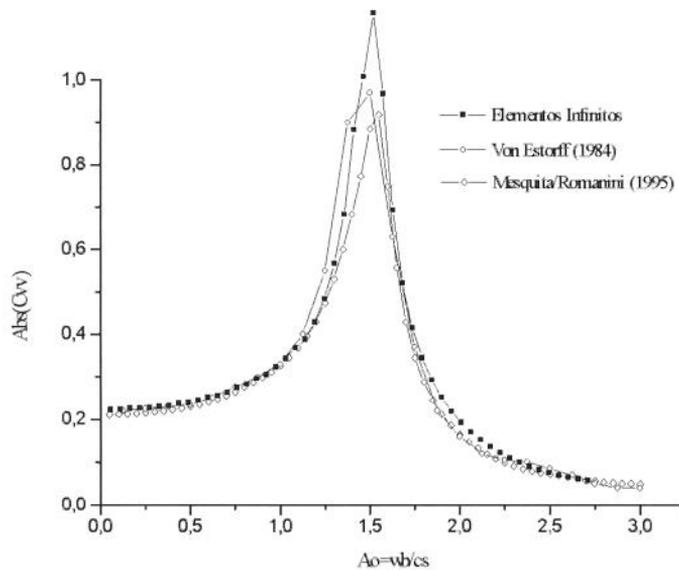


Figura 6.23: Abs(Cvv) para camada sobre leito de rochas. $H/B=2$ e $\nu=0.33$

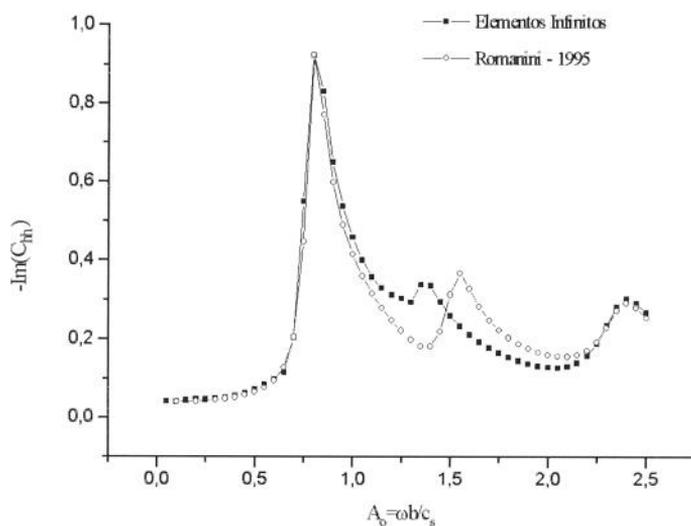


Figura 6.24: $\text{Im}(C_{hh})$ para camada sobre leito de rochas. $H/B=2$ e $\nu=0.33$

A figura acima mostra uma pequena diferença na altura da segunda frequência natural (que não é nítida no gráfico da parte real). Isto pode ser explicado considerando que, dados os mesmos parâmetros de decaimento, o elemento admite que as ondas de cisalhamento e ondas de compressão transmitam aproximadamente as mesmas quantidades de energia. Os resultados para a flexibilidade angular mostram que a precisão alcançada com elementos infinitos é comparável àquela obtida com as funções de Green.

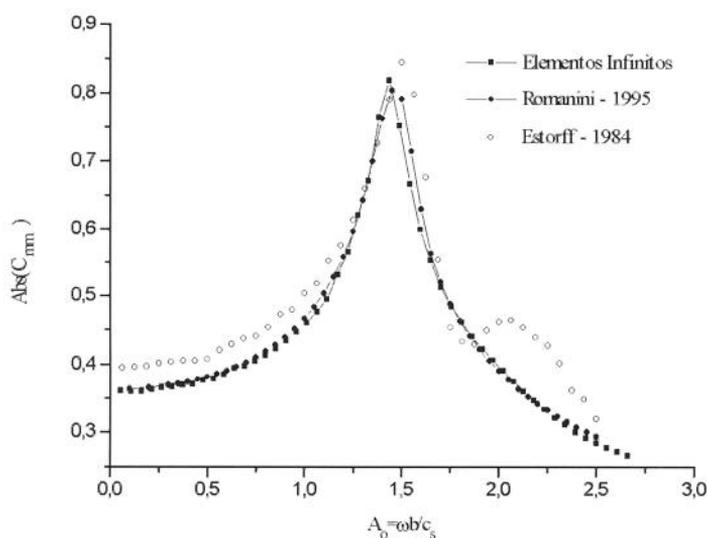


Figura 6.25: $\text{Abs}(C_{mm})$ para camada sobre leito de rochas. $H/B=2.0$ e $\nu=0.33$

Os resultados seguintes referem-se ao caso em que o tamanho relativo da camada é $H/B=5.0$. Uma vez que a parcela da energia refletida pelo contorno em direção à fundação é menor que no caso anterior, são esperadas amplitudes menores para as funções de flexibilidade nas regiões próximas às frequências naturais. A figura seguinte ilustra o comportamento do valor absoluto das funções de flexibilidade vertical e horizontal respectivamente.

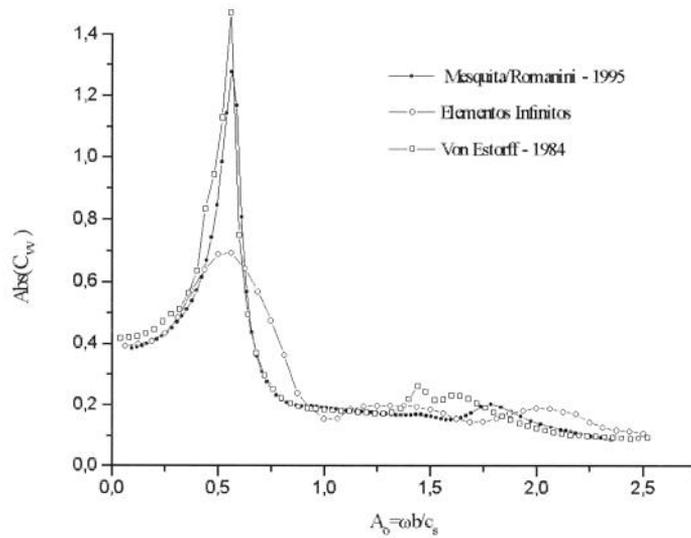


Figura 6.26: $Abs(C_{vv})$ para camada sobre leito de rochas. $H/B=5$ e $\nu=0.33$

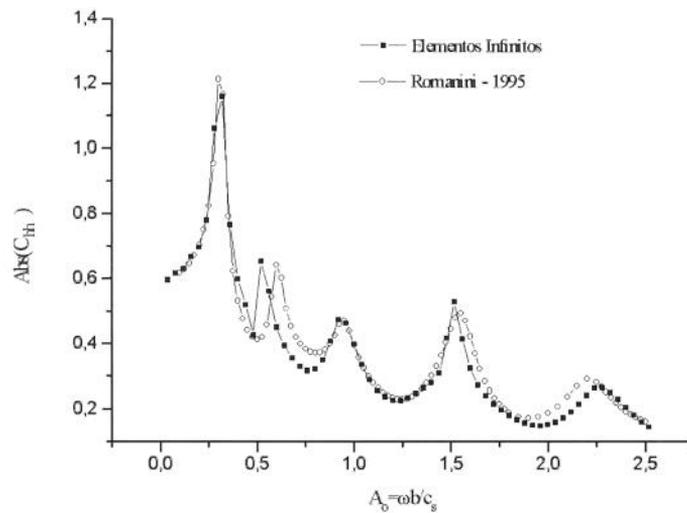


Figura 6.27: $Abs(C_{hh})$ para camada sobre leito de rochas. $H/B=5$ e $\nu=0.33$

Em seguida observa-se o comportamento do termo de acoplamento (não fornecido por Von Estorff) e da função de flexibilidade angular. Deve ser ressaltado que o modelamento de Von Estorff tende a aumentar o grau de amortecimento nas funções de flexibilidade, razão dos picos pouco pronunciados que se observa em seus resultados.

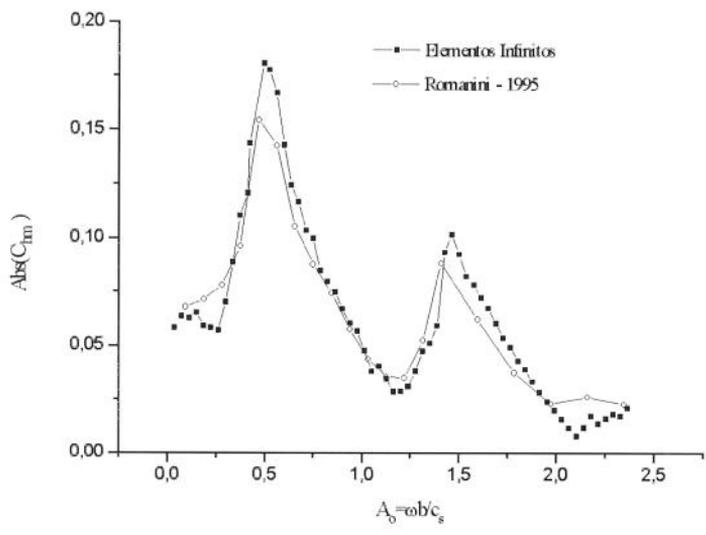


Figura 6.28: $Abs(C_{fm})$ para camada sobre leito de rochas $H/B=5$ e $\nu=0.33$

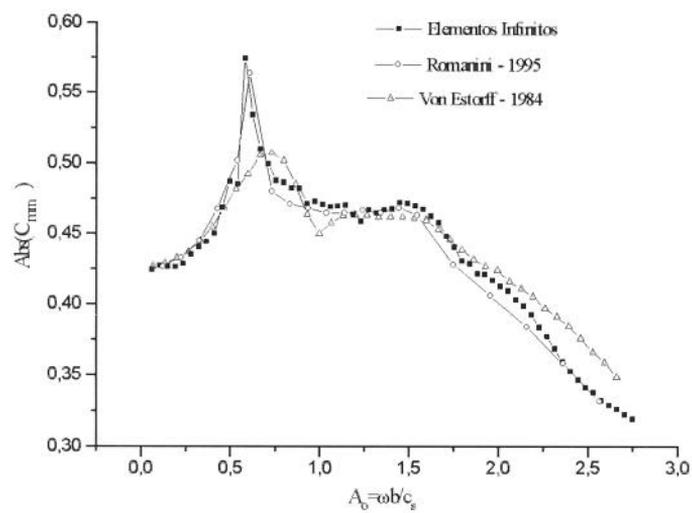


Figura 6.29: $Abs(C_{fm})$ para camada sobre leito de rochas $H/B=5$ e $\nu=0.33$

Em seguida é estudado o comportamento do modelo de elementos infinitos nas situações intermediárias entre o semi-espaço e a camada sobre leito de rochas. São investigadas razões de velocidade entre as camadas de 2.0, 4.0 e 6.0 para tamanhos relativos da camada de 2.0, 4.0 e 8.0 . Os resultados obtidos atestam novamente a boa performance do método.

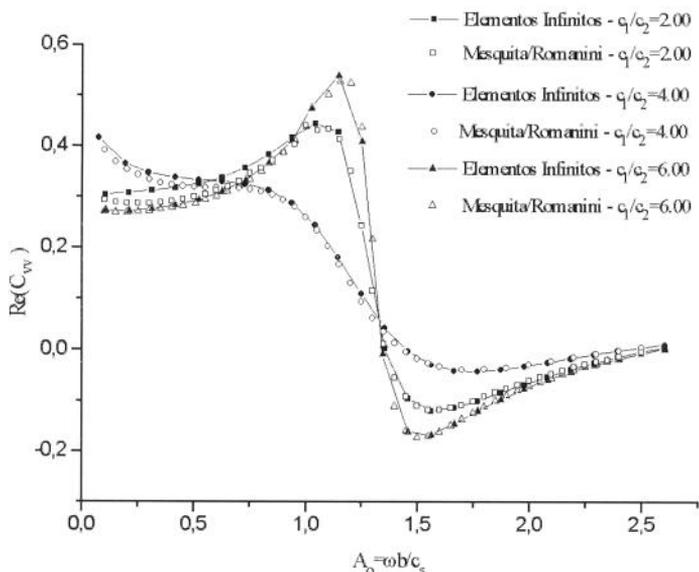


Figura 6.30: $Re(C_{vv})$ para camada de tamanho relativo $H/B=2.00$ e $\nu=0.25$

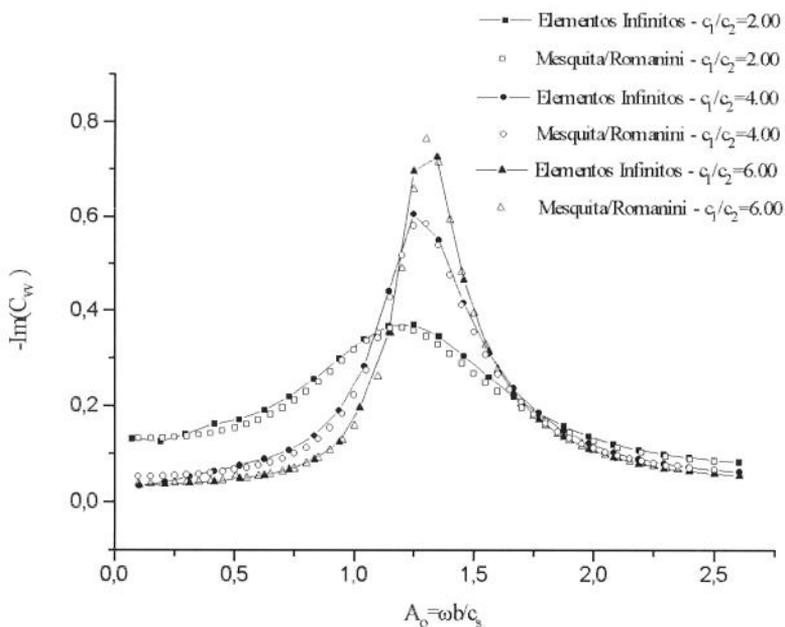


Figura 6.31: $-Im(C_{vv})$ para camada de tamanho relativo $H/B=2.00$ e $\nu=0.25$

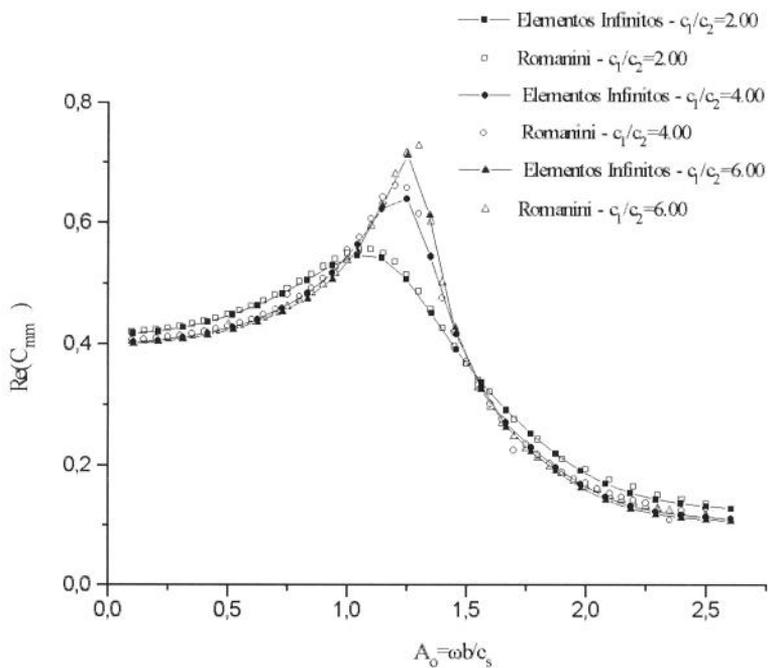


Figura 6.32: $Re(C_{mm})$ para camada de tamanho relativo $H/B=2.00$ e $\nu=0.25$

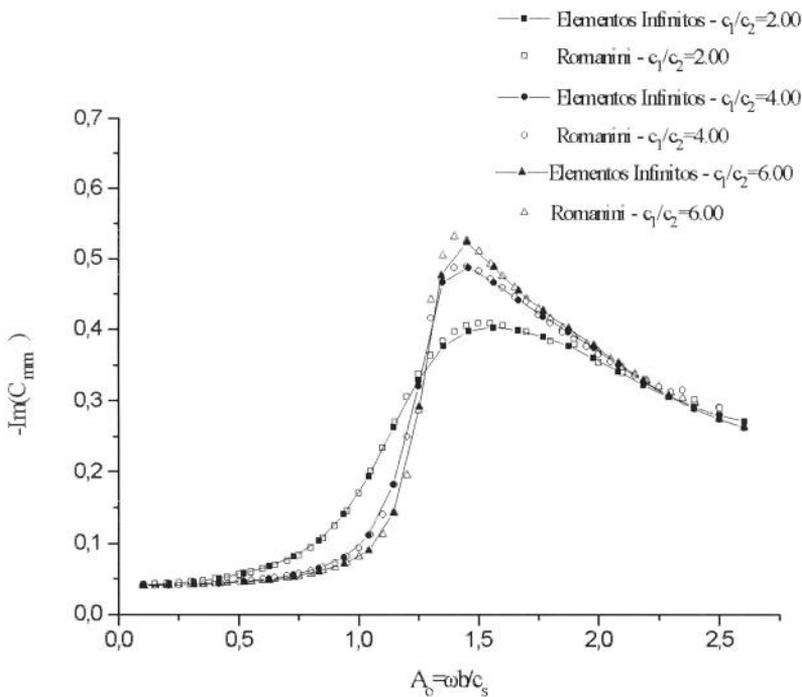


Figura 6.33: $-Im(C_{mm})$ para camada de tamanho relativo $H/B=2.00$ e $\nu=0.25$

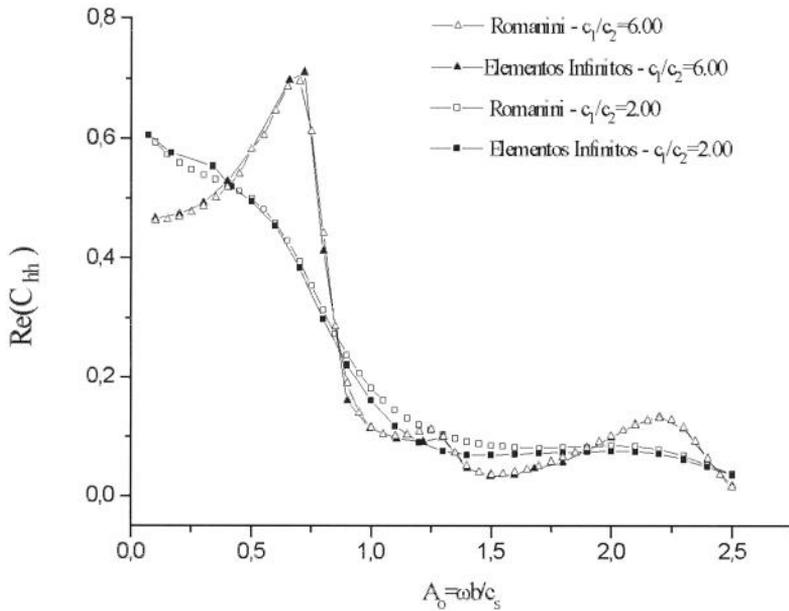


Figura 6.34: $Re(C_{hh})$ para camada de tamanho relativo $H/B=2.00$ e $\nu=0.25$

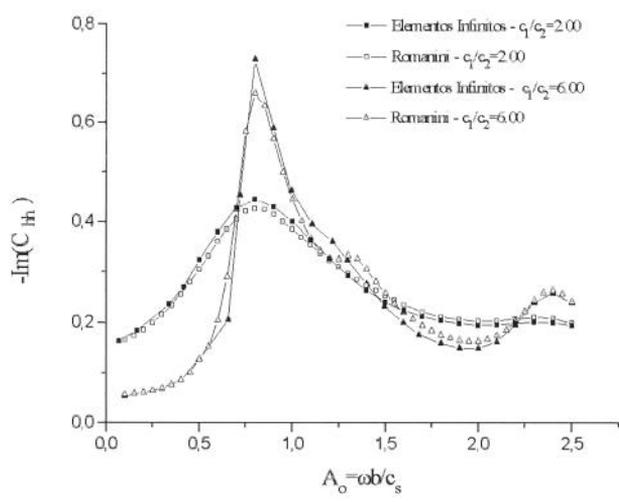


Figura 6.35: $-Im(C_{hh})$ para camada de tamanho relativo $H/B=2.00$ e $\nu=0.25$

Em seguida são apresentados os resultados correspondentes à camada de tamanho relativo $H/B=4.00$. O amortecimento material admitido foi de $\eta=10\%$. Os resultados demonstram que o elemento fornece bons resultados para o campo de frequências considerado. Entretanto, no caso das funções de flexibilidade horizontais, algumas discrepâncias ocorrem nas regiões da frequência natural referente às ondas SV (cisalhamento vertical) e ondas de superfície correspondendo aos segundos e

terceiros picos respectivamente. Os resultados são comparados com os obtidos por Romanini [38]. Deve ser notado, além disso, que a influência da razão de velocidades sobre as funções angulares (C_{mm} e C_{hm}) são pequenas, conforme pode-se ver nos gráficos (6.40) e (6.41).

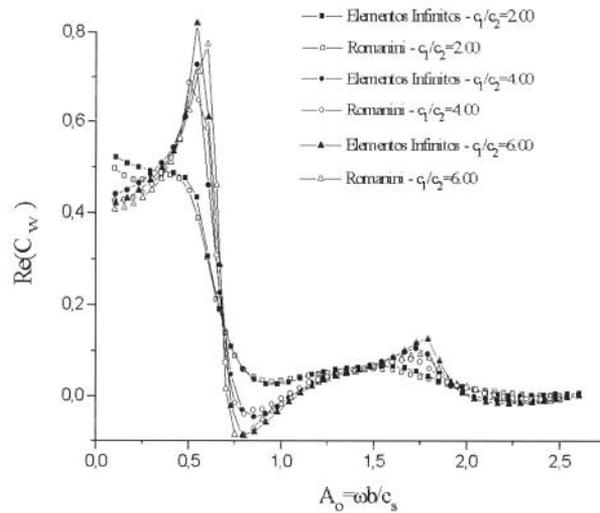


Figura 6.36: $Re(C_{vv})$ para camada de tamanho relativo $H/B=4.00$ e $\nu=0.25$

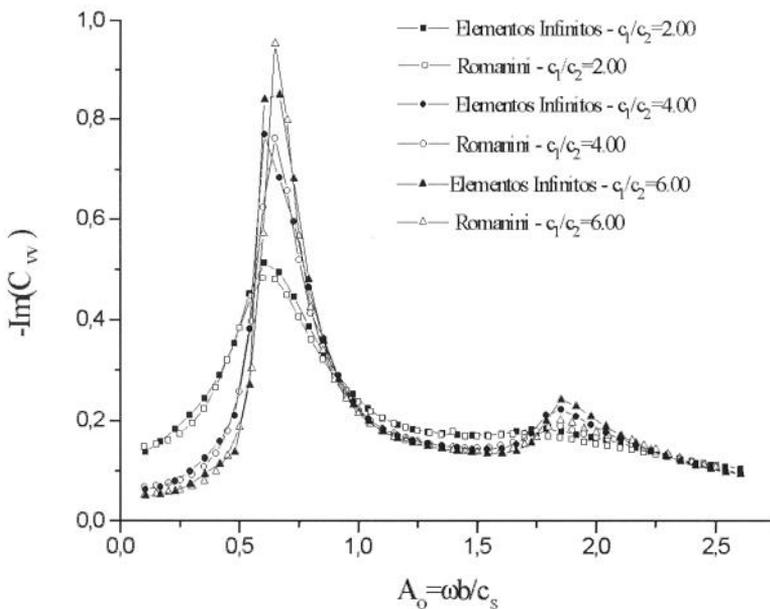


Figura 6.37: $-Im(C_{vv})$ para camada de tamanho relativo $H/B=4.00$ e $\nu=0.25$

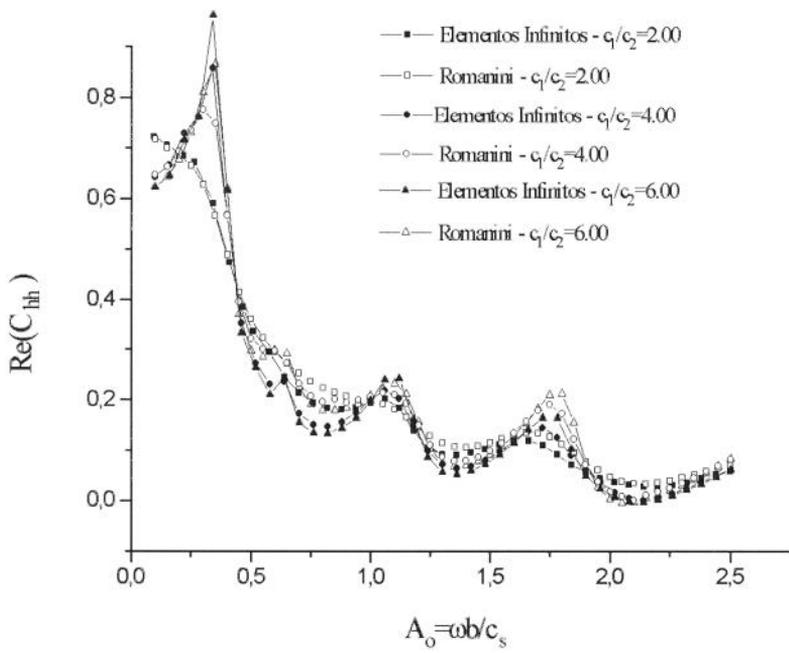


Figura 6.38: $\text{Re}(C_{hh})$ para camada de tamanho relativo $H/B=4.00$ e $\nu=0.25$

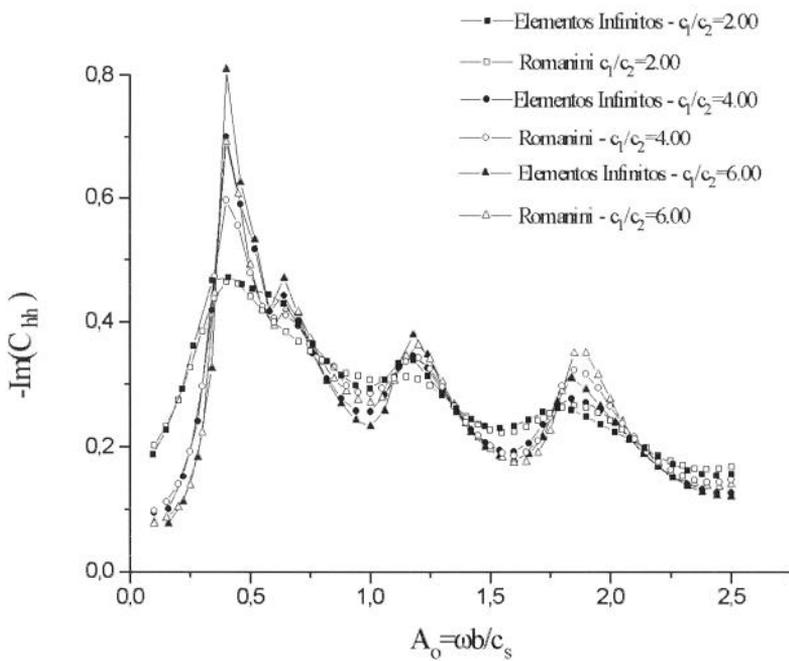


Figura 6.39: $-\text{Im}(C_{hh})$ para camada de tamanho relativo $H/B=4.00$ e $\nu=0.25$

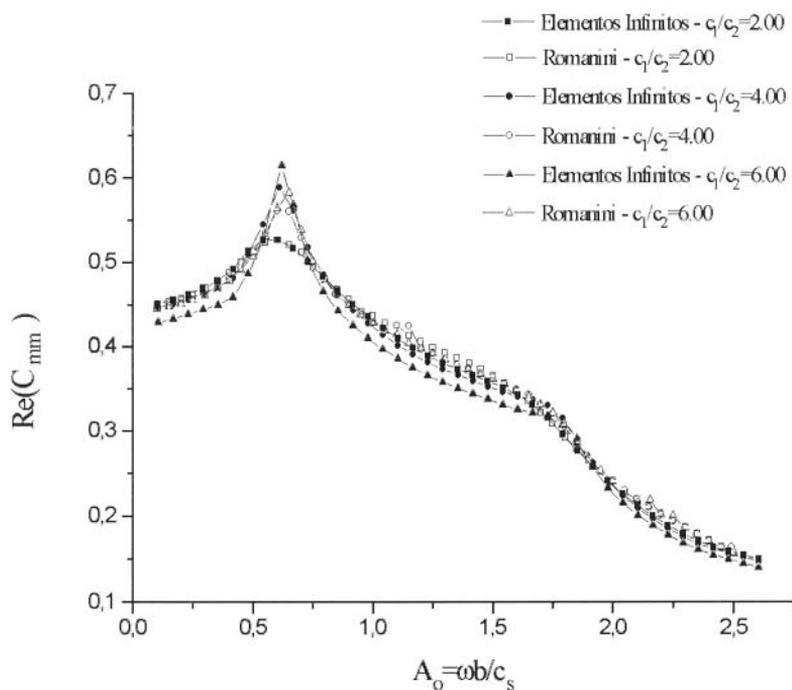


Figura 6.40: $\text{Re}(C_{mm})$ para camada de tamanho relativo $H/B=4.00$ e $\nu=0.25$

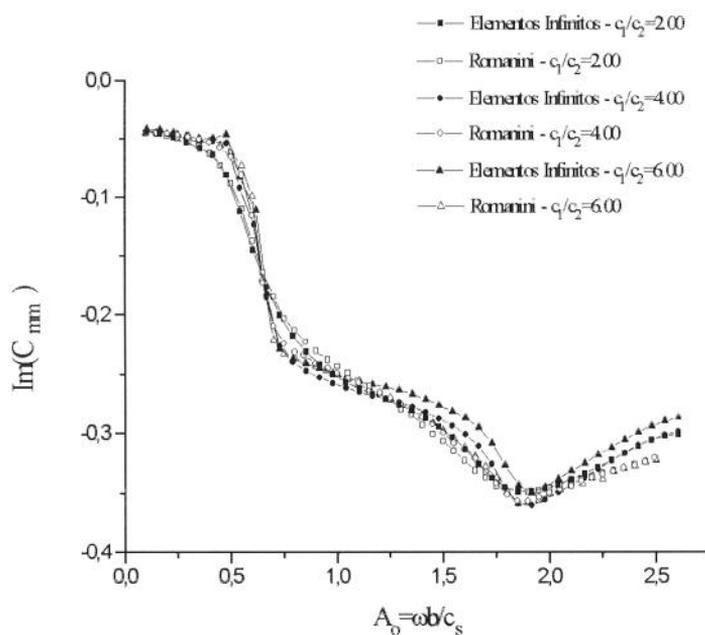


Figura 6.41: $-\text{Im}(C_{mm})$ para camada de tamanho relativo $H/B=4.00$ e $\nu=0.25$

São apresentados, em seguida, alguns resultados representativos da camada de tamanho relativo $H/B=8.00$. O amortecimento material assumido é de $\eta=5\%$. Os resultados, mais uma vez, confirmam a boa performance do método.

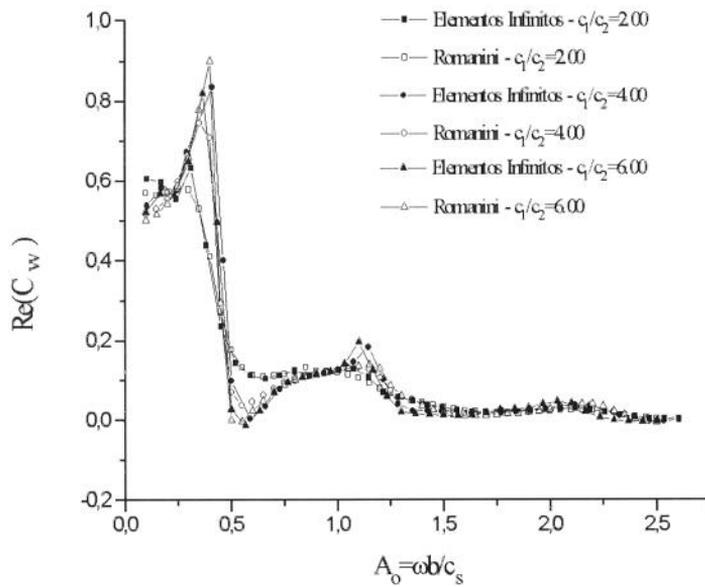


Figura 6.42: $\text{Re}(C_{vv})$ para camada de tamanho relativo $H/B=8.00$ e $\nu=0.25$

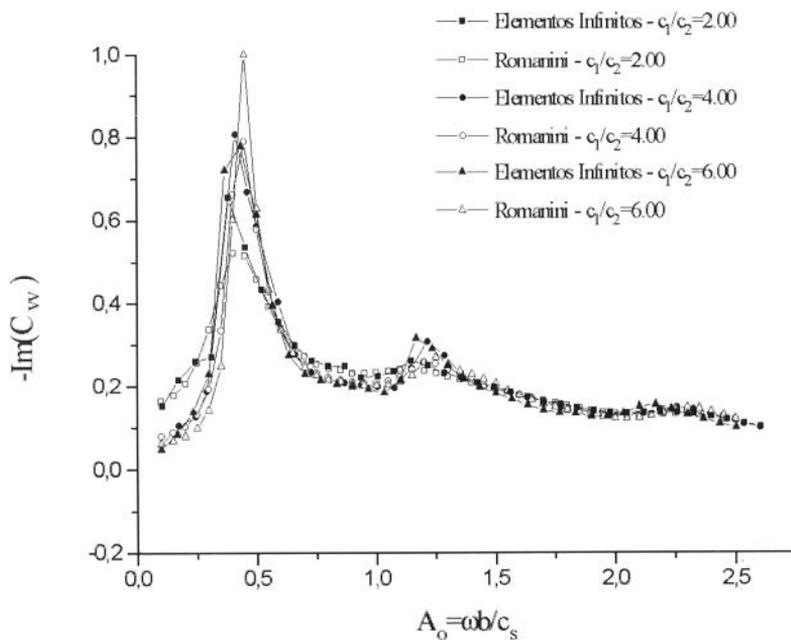


Figura 6.43: $-\text{Im}(C_{vv})$ para camada de tamanho relativo $H/B=8.00$ e $\nu=0.25$

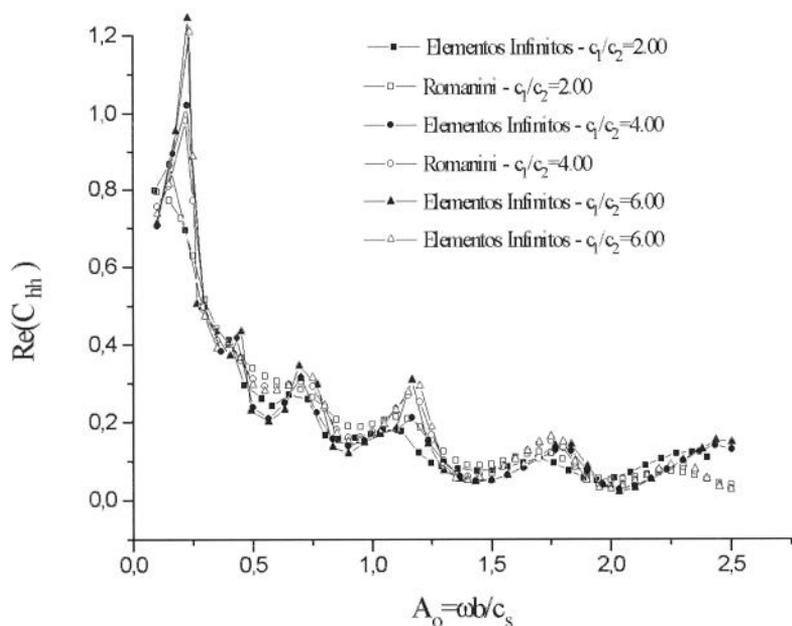


Figura 6.44: $\text{Re}(C_{hh})$ para camada de tamanho relativo $H/B=8.00$ e $\nu=0.25$

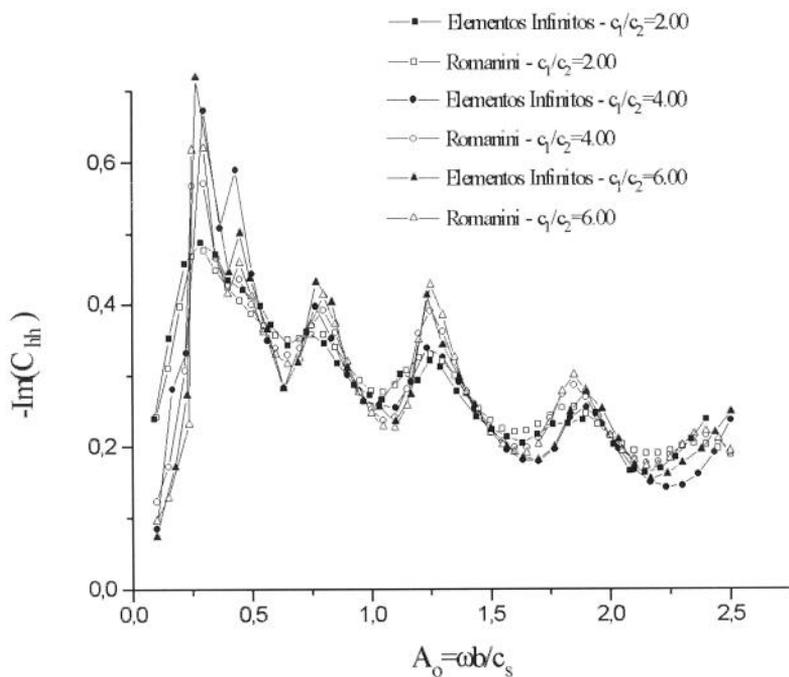


Figura 6.45: $-\text{Im}(C_{hh})$ para camada de tamanho relativo $H/B=8.00$ e $\nu=0.25$

6.5 Fundações engastadas em meios homogêneos

Nesta seção serão analisados os resultados envolvendo fundações engastadas. Os resultados obtidos demonstram uma excelente performance do método inclusive para os casos onde $t_R=2.00$ (fundações profundas), situação não analisada pela maioria dos autores.

O modelo de elementos infinitos utilizado pode ser visto na figura seguinte para o caso $H/B=2.00$. Para a região do semi-espço homogêneo admitiu-se $E=280.00 \text{ N/m}^2$ e $\nu=0.33$. A densidade de meio é admitida como $\rho=5.00 \text{ ton/m}^3$. O amortecimento (histerético) admitido foi de $\eta=5\%$. A fundação (admitida sem massa) é simulada por meio de 16 elementos quadráticos lagrangeanos onde o módulo de elasticidade é de $E=1.0 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$. Isto garante a rigidez necessária na região de frequências considerada. A carga é aplicada na face inferior da fundação (em contato com o solo). A relação H/B é alcançada introduzindo-se progressivamente mais elementos sob a fundação. Este esquema, embora um pouco mais trabalhoso, permite que a distância entre os nós do modelo permaneça sempre constante.

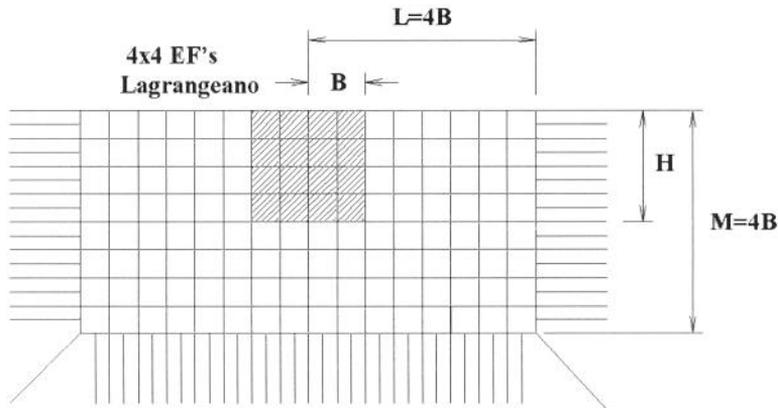


Figura 6.46: Modelo de discretização utilizada na obtenção de resultados

As dimensões do campo-próximo ($L \times M$) em relação à fundação foi admitida de quatro vezes o comprimento característico. Experiências com tamanhos menores mostraram que o tamanho do campo-próximo influi diretamente na qualidade dos resultados obtidos principalmente na região de baixa frequência (comprimento de onda maior). A dimensão vertical é admitida como tendo a mesma discretização da horizontal. Os parâmetros de decaimento para os elementos infinitos foram de 0.20 para as ondas de compressão, 0.10 para as ondas de cisalhamento e 0.01 para as ondas de superfície. Embora as ondas de corpo tenham o mesmo decaimento, é sabido que elas carregam

quantidades de energia diferentes e, assim, esta escolha particular de parâmetros tenta levar isto em conta. Os resultados seguintes referem-se ao caso onde $H/B=2.00$. A comparação é feita com Estorff [16] e, para o caso de excitação vertical, com Israil [20].

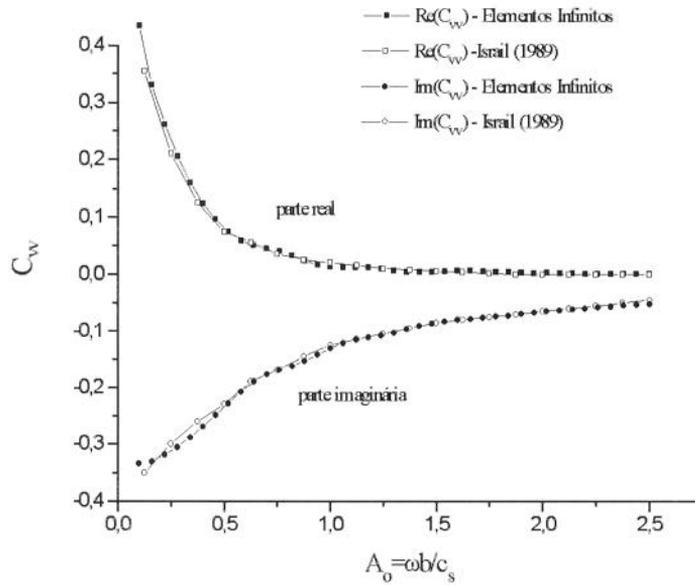


Figura 6.47: Função de flexibilidade vertical para a fundação engastada $H/B=2.00$. Semi-espaço $\nu=0.33$ e $\eta=5\%$.

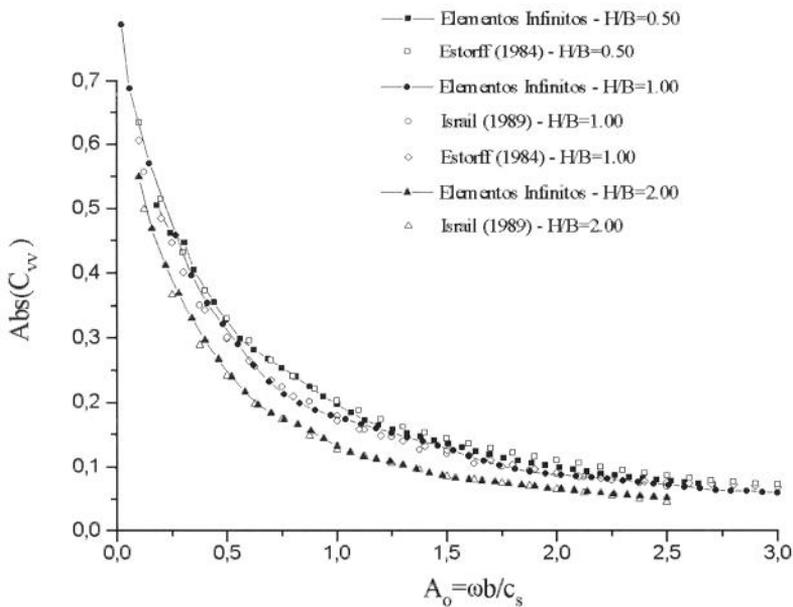


Figura 6.48: $Abs(C_{vv})$ para o semi-espaço $\nu=0.33$ e $\eta=5\%$.

A primeira conclusão observada é que o engastamento na faixa $0.50 \leq H/B \leq 1.00$ não produz mudança significativa no perfil da função de flexibilidade vertical mas que a tendência, à medida que se aumenta o engastamento, é de rebaixar a amplitude das funções tornando o sistema mais rígido.

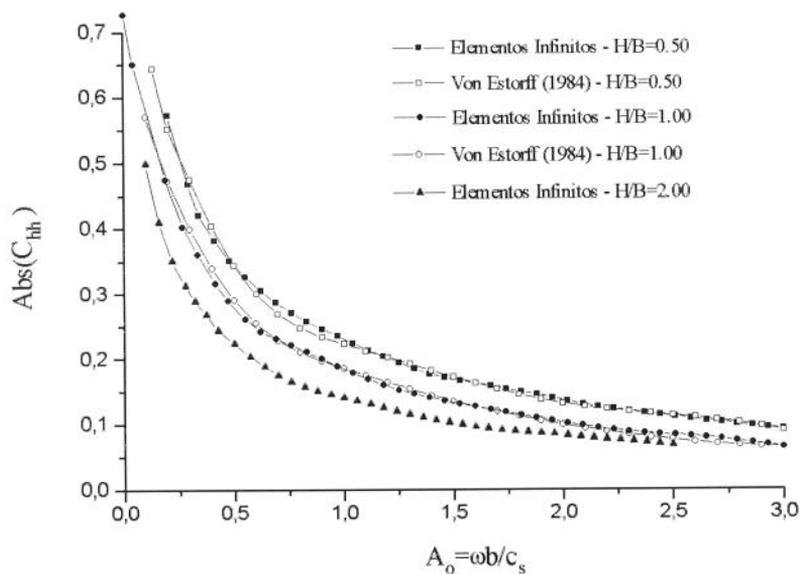


Figura 6.49: $Abs(C_{hh})$ para o semi-espaço $\nu=0.33$ e $\eta=5\%$.
 Comparação para diversos graus de engastamento.

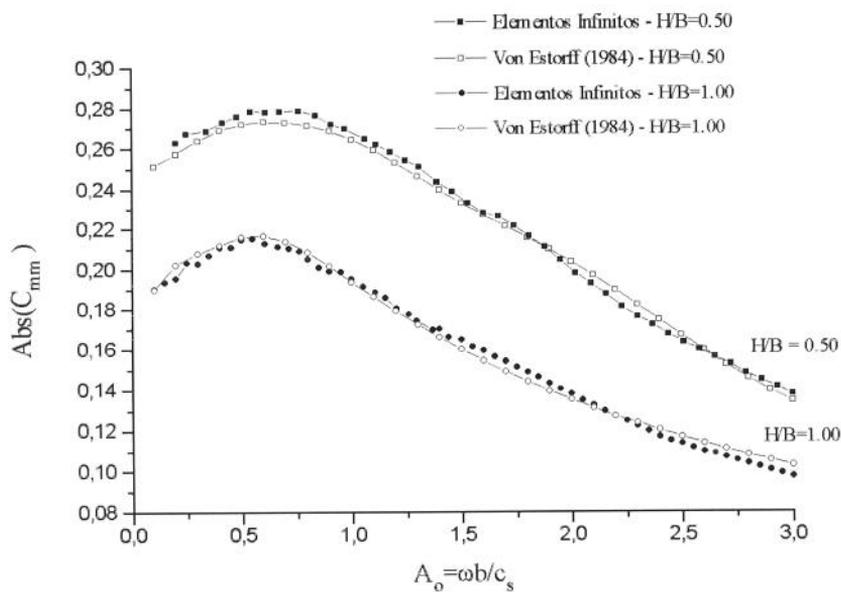


Figura 6.50: $Abs(C_{mm})$ para o semi-espaço $\nu=0.33$ e $\eta=5\%$.

Os resultados acima mostram novamente que as funções angulares (C_{mm} e C_{hh}) são mais sensíveis às modificações geométricas que as funções lineares.

7. Conclusões e sugestões para trabalhos futuros

Neste capítulo o trabalho é finalizado incluindo-se algumas conclusões obtidas durante a sua execução e, por fim, apresenta-se algumas sugestões para a sua continuidade.

Inicialmente verificou-se a validade do método apresentado quando da sua utilização em modelos unidimensionais simples: colunas de seção transversal variável sujeitas à propagação de ondas. Os resultados referentes à esta aplicação são apresentados no terceiro capítulo, onde verificou-se uma boa concordância entre o método e as soluções teóricas disponíveis.

A principal característica dos elementos unidimensionais é que são muito sensíveis ao comportamento assintótico do operador que se deseja aproximar. A introdução dos elementos de mapeamento envolve também uma maior dificuldade dos processos de integração numérica e a convergência das matrizes de massa e rigidez é mais difícil do que no caso de elementos de decaimento. No entanto, os resultados mostram que, uma vez que os critérios de convergência são satisfeitos, elementos com poucos nós são suficientes para aproximar de maneira excelente a solução.

Assim, para problemas unidimensionais pode-se concluir que o desenvolvimento de elementos infinitos para a dinâmica estacionária está diretamente ligado à natureza da solução fundamental do operador com que se trabalha.

Para o caso multidimensional, as conclusões acima não são tão claras, de maneira que elementos de decaimento exponencial são bastante úteis em operadores cuja solução fundamental é do tipo racional. A utilização destes elementos para problemas do semi-espaço visco-elástico resultou em soluções tão próximas do resultado exato quanto os métodos semi-analíticos (Green e funções de influência).

Para a implementação de elementos infinitos multidimensionais foi necessária a utilização de um código de elementos finitos mais elaborado no qual foi implementado um elemento

finito bi-quadrático no domínio da frequência para o modelamento da região próxima à fundação e onde se esperam maiores gradientes dos campos de tensão. Os resultados obtidos com este tipo de elemento na modelagem de vigas sob estado plano de tensão mostram que sua utilização é confiável e que os mesmos fornecem resultados acurados.

Por fim estudou-se os principais tipos de elementos infinitos com aplicação ao problema da interação dinâmica solo-estrutura e concluiu-se que a grande maioria dos elementos da literatura parte do mesmo ponto básico: a substituição de funções de Hankel por funções exponenciais as quais, além de mais facilmente manipuláveis, permitem simular o decaimento esperado das ondas de corpo e superfície. Finalmente propôs-se um elemento para problemas bi-dimensionais baseado em experiências prévias e que foi aplicado para uma variada gama de situações em interação dinâmica. Os resultados obtidos permitem concluir a boa aplicabilidade de tal elemento e a validade do método.

A principal característica da utilização de elementos infinitos é que as funções de resposta em frequência não são mais obtidas pela solução do problema de autovalor/autovetor. Isto ocorre porque os coeficientes das matrizes dinâmicas são altamente dependentes da frequência e, portanto, tornam ineficientes os algoritmos existentes. Além disso, problemas sujeitos à condição de radiação de Sommerfeld não permitem decomposição modal e, portanto inexistem frequências naturais no sentido clássico da teoria da análise modal. Assim, as funções devem ser obtidas ponto a ponto na frequência resultando em maiores tempos de CPU.

Outro ponto a considerar é que o método de integração numérica utilizado mostrou-se um tanto ineficiente na região de baixa frequência devido ao algoritmo de aproximação do integrando por funções polinomiais, o que resultou em uma precisão menor nesta faixa. Em termos gerais, portanto, a tentativa de aplicação do esquema de elementos infinitos proposto mostrou-se válida produzindo bons resultados.

São apresentadas as sugestões do autor para a continuidade do trabalho iniciado:

- Utilização dos elementos infinitos em códigos de elementos de contorno. A metodologia empregada no desenvolvimento destes elementos mostrou-se bastante flexível, possibilitando sua aplicação.
- Utilização de esquemas de integração numérica semelhantes à seção 2.4.1 porém sem a necessidade de inversão da matriz de Vandermonde, resultando em elementos otimizados para a região de baixa frequência.

- Emprego de elementos infinitos de mapeamento para problemas com várias componentes de onda. Este elemento ainda não foi referenciado na literatura devido às grandes dificuldades numéricas na obtenção das matrizes de massa e rigidez.
- Utilização de procedimentos de integração numérica semelhantes ao de Gauss-Legendre porém com a substituição dos polinômios de Lagrange por funções racionais. A integração destas funções poderia ser obtida numericamente ou, por exemplo, utilizando-se o método de Longman. Assim, uma dada função racional poderia ser expressa por meio de:

$$f(x) \approx \sum_{i=1}^n \frac{1}{G(x)} (x - x_i)$$

onde $G(x)$ tem um certo grau 'p' tal que $-1 \leq p \leq 1$.

Estudo de um elemento para as condições de $v \rightarrow 1/2$. Este elemento deveria ter as mesmas características de incompressibilidade dos elementos finitos e poderia ser útil no estudo da mecânica dos fluidos.