ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR Thiago José da Silva Saccheto E APROVADA
PELA COMISSÃO JULGADORA EM 19/02/2008

ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Estudo dos Parâmetros Influentes na Vida de uma Transmissão Continuamente Variável do Tipo Esfera-Cone submetida a Contato com "Slip/Spin"

Autor: **Thiago José da Silva Saccheto**
Orientador: Franco Giuseppe Dedini

31/08

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

Estudo dos Parâmetros Influentes na Vida de uma Transmissão Continuamente Variável do Tipo Esfera-Cone submetida a Contato com "Slip/Spin"

Autor: **Thiago José da Silva Saccheto**
Orientador: Franco Giuseppe Dedini

Curso: Engenharia Mecânica
Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Dissertação de mestrado acadêmico apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2008
S.P . – Brasil

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

	Saccheto, Thiago José da Silva
Sa14e	Estudo dos parâmetros influentes na vida de uma transmissão continuamente variável do tipo esfera-cone submetida a contato com "Slip/Spin" / Thiago José da Silva Saccheto. --Campinas, SP: [s.n.], 2008.
	Orientador: Franco Giuseppe Dedini.
	Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.
	1. Engenharia automotiva. 2. Metais - Fadiga. 3. Mecânica do contato. 4. Metais - Deformação. I. Dedini, Franco Giuseppe. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Título em Inglês: Study of influential parameters on lifetime of a trackball CVT which is under SLIP/SPIN contact
Palavras-chave em Inglês: CVT, Contact mechanical, Lifetime, Slip, Spin
Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico
Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica
Banca examinadora: Edson Antonio Capello Souza, Paulo Roberto Gardel Kurka
Data da defesa: 19/02/2008
Programa de Pós-Graduação: Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTEMANETO DE PROJETO MECÂNICO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADEMICO

Estudo dos Parâmetros Influentes na Vida de uma Transmissão Continuamente Variável do Tipo Esfera-Cone Submetida a Contato com "Slip/Spin"

Autor : **Thiago José da Silva Saccheto**
Orientador: **Prof. Dr. Franco Giuseppe Dedini**

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:

Prof. Dr. Franco Giuseppe Dedini, Presidente
Universidade Estadual de Campinas – (UNICAMP)

Prof. Dr. Edson Antonio Capello Souza
Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho - (UNESP)

Prof. Dr. Paulo Roberto Gardel Kurka
Universidade Estadual de Campinas – (UNICAMP)

Campinas, 19 de Fevereiro de 2008

Dedicatória:

Dedico este trabalho aos meus pais, Sergio e Marilza, minha irmã Aline, minha namorada e meus amigos.

Agradecimentos

Este trabalho não poderia ser concluído sem a ajuda de diversas pessoas às quais presto minha homenagem:

Aos meus pais pelo incentivo em todos os momentos da minha vida.

Ao meu orientador, pelas oportunidades.

A todos os professores e colegas da FEM, que ajudaram de forma direta e indireta.

Aos meus amigos, em especial para Geraldo, João, Juliano, Leandro,Ludimila e Paulo, pelo apoio e compreensão durante esse período.

Eu poderia falar todas as línguas
que são faladas na terra e no céu,
mas,se não tivesse amor, as minhas palavras seriam
como um gongo ou um barulho de sino
Poderia ter o dom de anunciar mensagens de Deus,
ter todo o conhecimento, entender todos os mistérios
e ter tanta fé que poderia até tirar as montanhas do seu lugar,
mas, se não tivesse amor, não seria nada.
Poderia dar tudo que tenho, até mesmo o meu corpo às chamas,
mas, se não tivesse amor, isso não me adiantaria nada.

(1-CORÍNTIOS, 13, 1-3)

Resumo

SACCHETO, Thiago José da Silva, *Estudo dos Parâmetros Influentes na Vida de uma Transmissão Continuamente Variável do Tipo Esfera-Cone submetida a Contato com "Slip/Spin"*, Campinas,: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2008. 180 p. Dissertação (Mestrado)

Neste trabalho, é apresentado um estudo dos parâmetros que influem na vida de uma CVT do tipo esfera-cone para aplicação em sistemas de tração humana, particularmente bicicletas. Nos primeiros capítulos, é apresentado um histórico sobre as transmissões e seus grupos principais e em seguida um breve resumo descrevendo os tipos de CVTs mais comuns encontrados no mercado, seu princípio de funcionamento e características principais. Após esse capítulo, é introduzida a teoria de contato de Hertz como forma de cálculo do perfil de pressão normal e o algorítmo de Kalker para o cálculo do perfil de pressão tangencial e slip. As equações de lubrificação também são estudadas nesse trabalho, a fim de determinar a espessura de filme lubrificante no contato da CVT. Por fim é apresentada a CVT do tipo esfera-cone Wagner Forti, na qual são discutidos suas características cinemáticas, dinâmicas e geométricas, além da simulação para um conjunto de condições de operação com o intuito de calcular a vida de contato com slip/spin. Finaliza-se o trabalho correlacionando o tempo de vida calculado com as condições de operação.

Palavras Chave

- CVT, Tempo de Vida, Contato, Slip, Spin

Abstract

SACCHETO, Thiago José da Silva, *Study of Influential Parameters on Lifetime of a TrackBall CVT which is under SLIP/SPIN Contact,* Campinas,: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2008. 180 p. Dissertação (Mestrado)

In this work, a study of the parameters that influences the lifetime of a TrackBall CVT for use in systems of human traction, particularly bicycles. First, the mechanical transmissions history is told and mentioned its main groups. Then it presented a brief summary describing the types of CVTs most common in market, their principle of operation and main features. After this chapter, it introduces the theory of Hertz contact as way of calculating the normal pressure profile and, by Kalker algorithm, calculating the tangential profile with slip. The equations of lubrication are also studied in this work in order to determine the thickness of the lubricant film in the contact of CVT. Finally it shows the type of CVT TrackBall Wagner Forti, which is commented on its cinematic, dynamic and geometric features, and the simulation for a range of operating conditions in order to calculate the life of contact with slip/spin. Finally it is the work correlating the life calculated with the conditions of operation.

Key Words

CVT, Lifetime, Contact, Slip, Spin

Índice

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Nomenclatura

Capítulo 3

CLA = média aritmética de uma distribuição de n pontos

RMS = média quadrática de uma distribuição de n pontos

SD = desvio padrão de um distribuição de n pontos

$\boldsymbol{E_n}$ = módulo de elasticidade do corpo n

$\boldsymbol{\upsilon_n}$ = coeficiente de Poisson para o corpo n

$Kn = \dfrac{1-\upsilon_n{}^2}{\pi \cdot E_n}$ = constante elástica para o corpo n

P = força normal total na área de contato

qo = pressão máxima na área de contato

$\boldsymbol{\alpha}$ = deslocamento dos corpos com a aplicação de P

a = semi-eixo paralelo ao eixo coordenado por x

b = semi-eixo paralelo ao eixo coordenado por y

L = largura para o cilindro de contato

Rn = raios principais de curvatura no plano de rotação

Rn' = raios principais de curvatura

σij = tensão genérica normal ao plano i na direção j

τij = tensão de cisalhamento (sempre para i≠j)

$\boldsymbol{\psi}$ = ângulo entre os planos de rotação

n = índice que indica o corpo em contato

A* e *B = constantes da equação de uma elipsóide

[*T*] = matriz de transformação de coordenadas

r = distância de um ponto genérico ao centro de contato

g = constande de transformação entre a e a*

••

Capítulo 4

ρ = densidade do fluido lubrificante

η = viscosidade do fluido lubrificante

g = aceleração da gravidade

t = tempo

δ/δt = operador diferencial com relação ao tempo

u,v,w = velocidades nas respectivas direções *x*,*y*,*z*

h = espessura de filme

p = pressão

P= força normal total na área de contato (força pontual)

R = raio de contato do rolo.

E' = módulo de elasticidade do par rolo superfície.

$\boldsymbol{\eta_o}$, = viscosidade na CNTP (condições normais de temperatura e pressão),ou seja, 25°C e 1 atm

Ω = taxa de aumento de viscosidade do lubrificante com relação a pressão de contato.

W = parâmetro adimensional de carregamento

U = parâmetro adimensional de velocidade

T = parâmetro adimensional de materiais

g(p) = pressão adimensional

H= (h/R) = espessura de filme adimensional

Ct = Coeficiente de Tração

w = taxa de escorregamento ou simplesmente escorregamento (slip/creepage)

kg = unidade de massa

m = unidade de comprimento

s = unidade de tempo

••

Capítulo 5

p(T<t) = probabilidade de 1 falha entre 0 e t

t = tempo até a ocorrência de uma falha

t_0 = tempo no qual **F(t) = 0**

ψ = vida característica e fator de escala

ξ = fator de forma

Z_0 = profundidade de máxima tensão, onde ocorre τ_{max}

τ_{max} = tensão cisalhante máxima

η = número de ciclos

H = tempo de vida L_{10}

E_n = módulo de elasticidade do corpo n

υ_n = coeficiente de Poisson para o corpo n

P = força normal total na área de contato

qo = pressão máxima na área de contato

a = semi-eixo paralelo ao eixo coordenado por x

b = semi-eixo paralelo ao eixo coordenado por y

l = comprimento de pista de rolamento

R = raio da superfície do plano de rotação

τo = τ_{max} = máxima tensão de cisalhamento

Vz = volume total tensionado

u_x, u_y = velocidade nas direções x e y

w_x, w_y = escorregamento nas direções x e y

υ_x, υ_y = “creepage” nas direções x e y

ϕ = rotação no centro da área de contato (rotação da esfera *coeficiente de influencia de spin)

L = parâmetro de flexibilidade

T_x, T_y = as componentes da pressão tangencial devido a força trativa no contato

A = relação de raios R1/R2

•••

Capítulo 6

rt = relação de transmissão

α = ângulo de inclinação dos cones de contato

β = ângulo de inclinação da esfera

η = ângulo de inclinação do dispositivo proporcional

g = constante gravitacional,

ω = rotação do dispositivo (eixo de entrada)

R = raio

n = número de esferas da transmissão (cone)

m = número de esferas no dispositivo de torque

μ = coeficiente equivalente de tração

F_n = força normal

F_t = força tangencial

F^2 = força de aperto

•••

Capítulo 7

m = massa do conjunto ciclista-bicicleta

g = constante gravitacional,

θ = inclinação do plano de percurso

V = velocidade da bicicleta no percurso

Cd = coeficiente de arrasto do veiculo

Af = área frontal do veiculo

$\boldsymbol{\rho}$ = densidade do ar

Definições e Abreviações

TD-CVT : Traction Drive Continuously Variable Transmission (Transmissão Continuamente Variável por Tração)

EHD : Elastohidrodynamic (Elastohidrodinâmico)

EHL : Elastohidrodynamic Lubricant (Lubrificante elastohidrodinâmico)

Slip : Escorregamento

Spin : Rotação ou giro em eixo perpendicular ao eixo de rotação principal.

IVT : Infinitely Variable Transmission (Transmissões infinitamente variáveis)

Overrange : Razão entre as relações de transmissão máximas e mínimas

Capítulo 1

Introdução

A história mostra que ao longo dos anos o relacionamento Homem-Máquina vem se tornando cada vez mais intenso. Por exemplo, a necessidade de se criar meios para transmissão de forças e movimentos exigiu estudo, criatividade, esforço e muitas tentativas. O homem descobriu a alavanca, estudou os efeitos das forças nos corpos e como transmiti-las, obteve conhecimento sobre os materiais e suas propriedades, dentre elas a elasticidade e a resistência.

A humanidade experimentou vários saltos tecnológicos ao longo do tempo, tais como as Revoluções Industriais dos Séculos XVII e XIX e a Revolução Tecnológica do Século XX. Pode-se dizer que uma lista repleta de criações, como os transistores, os computadores, a energia nuclear e aviação, ajudaram a moldar a civilização atual.

Retendo-se apenas ao século XIX, as criações de maior repercussão foram a eletricidade utilizada posteriormente para a iluminação, as transmissões à radio e o automóvel.

De acordo com FERRARI [2002], a iluminação elétrica foi o primeiro grande passo para a desenvolvimento de equipamentos que facilitaram a vida doméstica, comercial e industrial. O rádio proporcionou uma maior agilidade nas transmissões de informações, resultado evidenciado pelo surgimento da televisão nas primeiras décadas do século XX.

Foi entretanto, o automóvel a invenção que marcou o século XX, apresentado pela primeira vez em 13 de julho de 1886 em Mannheim, Alémanha, por Karl Benz. Em pouco mais de um século de historia, o automóvel movido a derivados de petróleo tornou-se um elemento dominante da sociedade mundial. Transformou-se no principal meio de transporte e gerou empregos nas áreas de extração/produção de petróleo e nas empresas montadoras de veículos. Tornou-se também uma das maiores fontes de poluição do ar e consumidor de destilados de petróleo, além de fator aquecimento global.

Os motores elétricos e a vapor possuem curvas de torque comportadas, quase constantes ao longo de sua faixa de operação, além de garantirem um torque positivo em rotação nula. Por outro lado, os motores a combustão fornecem maior potência específica (potência por unidade de peso) comparados aos anteriores, mostrando-se mais compactos e usuais em veículos automotivos (FERRARI [2002]). Isso foi uma das razões pelas quais o motor de combustão interna tornou-se o sistema de propulsão preferido em relação aos motores a vapor e elétricos, apesar da deficiência quanto a falta de potência a baixas rotações.

Para lidar com as desvantagens dos motores a combustão, é necessário um sistema de transmissão de relações variáveis que permita o funcionamento do motor à uma rotação adequada com a velocidade do veículo. A transmissão tem então a finalidade de adaptar a rotação e a potência às condições de carga do veiculo (forças não conservativas).

Uma transmissão é um dispositivo usado para fornecer um conjunto de saídas discretas ou contínuas, dependendo do projeto, das velocidades e torques. Seu objetivo é permitir que a fonte de potência mecânica (motor, rotor, força animal ...etc) permaneça em seu regime de torque otimizado ou melhor rendimento dependendo da estratégia de controle

Em virtude do crescente interesse por parte das indústrias, principalmente a automobilística, e do alto grau de tecnologia envolvido no desenvolvimento de CVTs (materiais, lubrificantes, fabricação, sistemas de controle, inovação ...etc), é de fundamental importância que as pesquisas nesse ramo devem continuar para que essa área seja cada vez mais de domínio público.

Atualmente há uma grande variedade de transmissões CVT que se diferem pela sua geometria, dimensões e princípios de funcionamento. O tipo de aplicação das CVTs também é vasto e vai desde a aplicação em variadores de rotação (CVTs de baixa potência, geralmente cônicos ou por esferas) para equipamentos industriais até veículos de grande porte (CVTs por polia expansivas ou toroidais), tais quais automóveis,utilitários, caminhões.

O segundo capítulo deste trabralho consiste em uma revisão histórica sobre transmissões, listando os tipos mais usuais de transmissões do tipo CVT com uma breve explicação de sua forma de funcionamento e/ou atuadores que as controlam.

Em seqüência, dois capítulos destinam-se, no âmbito das CVTs, a discorrer sobre a teoria de contato muito utilizada nos projetos, os esforços mecânicos aos quais o sistema é submetido, bem como o sistema de lubrificação dos elementos de transmissão.

No quinto capítulo, dá-se maior ênfase à transmissão CVT por tração do tipo esfera-cone, na qual são estudadas características como a geometria de contato, a relação de transmissão e comportamento cinemático.

Nos capítulos sexto e sétimo, apresenta-se respectivamente a metodologia utilizada no trabalho para a simulação da vida de uma CVT e conclui-se com conseqüente análise dos resultados obtidos através dela.

Capítulo 2

Revisão sobre Transmissões

2.1 - Introdução

Um dos primeiros relatos sobre sistemas de transmissão data de um período entre os séculos XIII aC e XII aC supostamente durante o reinado HWANGDI. Trata-se de um sistema de navegação mecânico conhecido como “ji-nan-gu” ou “sz-nan-gu”, usualmente traduzido como "carroça que aponta para o sul". A finalidade desse mecanismo é a de indicar sempre a mesma direção, mesmo após mudanças na sua trajetória. Segundo FERRARI [2002], o "sul" ficava por conta da calibração inicial, e guiava as caravanas comerciais na travessia do deserto de Gobi.

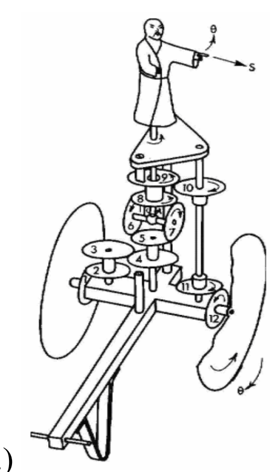
a.)  b.) 

Figura 2.1. – a.) Exemplo de Brinquedo que usa o mesmo princípio, b.) Desenho da Carroça que Aponta para o Sul. (Ref: FERRARI [2002])

Transmissões são máquinas capazes de transmitir energia mecânica, priorizando um maior torque ou velocidade ao elemento movido. Assim, sua função é permitir que a máquina geradora de potência mecânica (motores, compressores, rotores) permaneça em seu regime de torque ou potência adequados a carga imposta, havendo uma adaptação do regime de potência às condições de cargas aplicadas ao sistema.

O avanço tecnológico possibilitou um grande desenvolvimento nas transmissões, que iniciou na década de 1930 com a descoberta de aços de alta resistência mecânica e à fadiga, e foi impulsionado na década de 1960 pelo surgimento de novos e revolucionários lubrificantes sintéticos.

Atualmente, há uma grande gama de modelos comercializados no mundo, principalmente em paises do 1º Mundo, onde a economia e a pesquisa nessas áreas são mais dinâmicas e incentivadas. São também usadas em aplicações militares devido a sua capacidade de transmissão de altas cargas.

Segundo HEILICH [1983], as principais características desejáveis nas transmissões são :

- Produção barata e em massa ;
- Alta eficiência (economia de combustível ou energia);
- Conforto (vibrações e barulhos no limite do mínimo aceitável);
- Pouca necessidade de manutenção ;
- Confiabilidade, garantia e grande vida útil.

As transmissões podem ser classificadas e divididas nos grupos a seguir:

- Transmissões escalonadas ou convencionais de várias relações
- Transmissões epicicloidais
- Transmissões continuamente variáveis

- Transmissões híbridas

2.2 - Tipo de Transmissões Usadas

TRANSMISSÕES ESCALONADAS ou CONVENCIONAIS

Transmissões escalonadas são, sem duvida, as mais populares e usadas atualmente. A figura 2.2 mostra um esquema de transmissão escalonada.

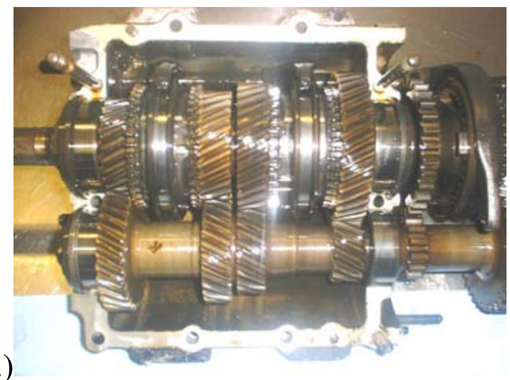
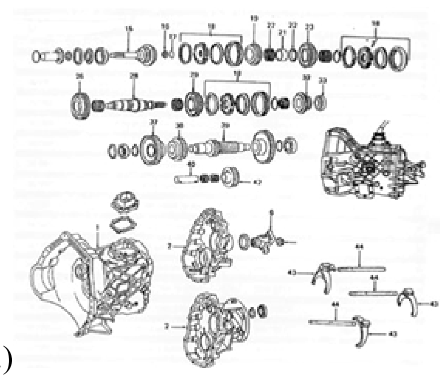
a.)  b.) 

Figura 2.2 – a) Exemplar de Transmissão, b) Desenho de montagem de uma transmissão (Ref: FERRARI [2002])

As relações de transmissão são selecionadas através de um garfo que faz o acoplamento das engrenagens do eixo de saída (coroa) com as do eixo de entrada (pinhão). Uma característica peculiar nesse tipo de equipamento é que a troca da relação de transmissão, popularmente chamado de "engate de marcha ", é feita com o eixo de entrada da transmissão desacoplado do motor por meio da embreagem.

TRANSMISSÕES EPICICLOIDAIS

São constituídas de trens de engrenagens planetárias, montados de tal forma que possa estabelecer uma relação de transmissão entre cada elemento rotativo. Um mecanismo é denominado do tipo “ Planetário” se ele conter um corpo rígido que possa girar sobre seu próprio eixo e ao mesmo tempo sobre outro eixo, imitando o movimento de planetas num sistema solar.

Funciona de tal modo que, ao frear uma ou mais engrenagens, obtém-se uma relação de transmissão diferente da anterior. Esse tipo de transmissão teve inicio no século XVII (usado freqüentemente em máquinas têxteis no século XVIII) e foi muito difundida nas décadas de 1920 e 1930, porém vieram a ser substituídas devido a dificuldade de manutenção, segundo DEDINI [1985].

Segundo KURIHARA & DEDINI [1998], as transmissões planetárias permitem uma ampla gama de aplicações, que vão das caixas de bifurcação de potência, sistemas de múltiplas relações de transmissão e engrenamento permanente, como a caixa Wilson, até sistemas de motorização de alta confiabilidade presentes em ônibus espaciais.

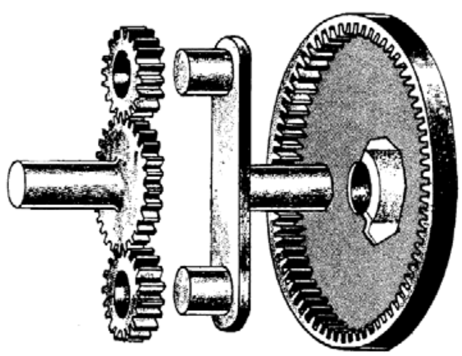
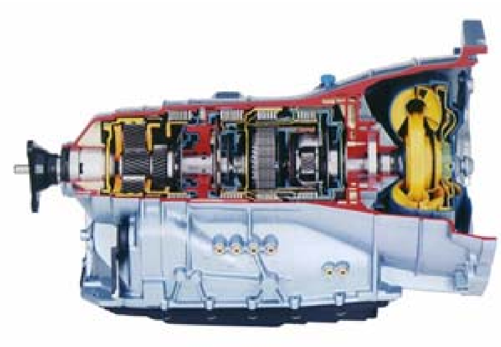
a.)  b.) 

Figura 2.3 –a.) Planetário, b.) Transmissão ou Trem de Engrenagens Planetárias (Ref:)

Algumas das suas principais características são :

- Possibilidade de não utilizar embreagem, a mudança de relação de transmissão é feita somente freando um ou mais elementos ;

- Pré seleção de velocidades e torque ;

- Mudanças de relação silenciosas devido ao contato constante das engrenagens ;

- Esforços normais distribuídos de forma a poupar eixos e mancais.

TRANSMISSÕES CONTINUAMENTE VARIÁVEIS

Conhecidas como CVTs, do inglês "*Continously Variable Transmission"*, as transmissões continuamente variáveis foram utilizadas nos primórdios da indústria automobilística, depois descartadas, e agora voltam ao mercado ocupando uma pequena fatia, porém crescente (DEDINI [1985]). A CVT (ou IVT dependendo do modelo) é uma transmissão por tração caracterizada pela utilização de materiais de alto coeficiente de atrito nos contatos e alta resistência, geralmente um metal ou aço especial. Estes trabalham em meio viscoso (lubrificação específica) com pequenos escorregamentos, tendo assim alta capacidade de transmissão de energia.

O princípio básico é o mesmo para qualquer modelo de CVT, a mudança na geometria de seus pontos de contatos permite que haja uma variação da relação de transmissão (ASHLEY [1994]).

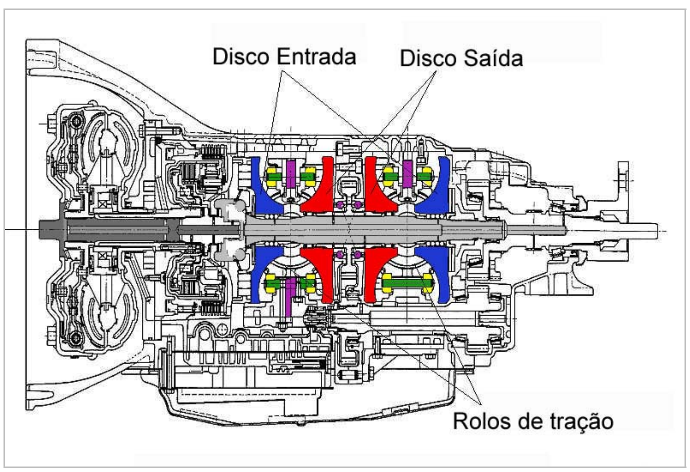


Figura 2.4 – CVT do tipo toroidal em relação 1:1

(Ref:Ashley,Steven [1991])

Existe uma vasto número de vantagens na utilização de CVTs, o que torna cada vez mais freqüentes os veículos adeptos a este tipo de sistema. Dentre elas, tem-se:

- Suavidade na mudança de relação de transmissão - a não utilização de desacoplamentos para a realização da troca de relação de transmissão (popularmente chamada de marcha) permite que a curva de relação de transmissão versus o tempo e parâmetros de geometria sejam suaves e contínuos, contribuindo para menores esforços em seus componentes ;

- O maior benefício na economia de combustível - a verdadeira economia de consumo de combustível de um veículo ou de qualquer máquina requer mudanças de relação de transmissão suaves e que continuamente conduzam o motor a uma operação otimizada e eficiente;

- Minimizar os requisitos dos motores - Considerando que os motores trabalham tipicamente com cargas, pode–se conduzir a uma operação com níveis de carga mais elevados do que com uma transmissão comum. Isso possibilita que os veículos possuam um motor menos potente para realizar o mesmo trabalho ;

- Facilidade para desenvolvimento de controle - Devido ao simples entendimento da funcionalidade e do seu comportamento dinâmico e cinemático característicos, fica fácil estabelecer sistemas de controles para essas transmissões ;

- Conforto ao dirigir um veículo – a utilização da CVT minimiza os índices de ruído e vibração dos conjuntos e estruturas do automóvel.

Uma outra vantagem das CVTs em relação às outras transmissões é a sua eficiência de transmissão, ou seja, a menor perda de potência em baixos e médios torques. A eficiência depende muito do modelo de CVT, seus parâmetros, características geométricas e de materiais usados assim como a lubrificação (ver figura 2.6).

Segundo DEDINI [1985], o conceito de CVT existe a mais de um século, desde o início do desenvolvimento do automóvel quando BENZ, em 1886, utilizou um sistema de transmissão continuamente variável em seu automóvel. Esse sistema era simples, pois dotava de duas rodas, uma fixa e outra móvel, com eixos de rotação perpendiculares entre si. A posição de uma roda em relação a outra fixa determinava a relação de transmissão (FERRARI, [2002]).

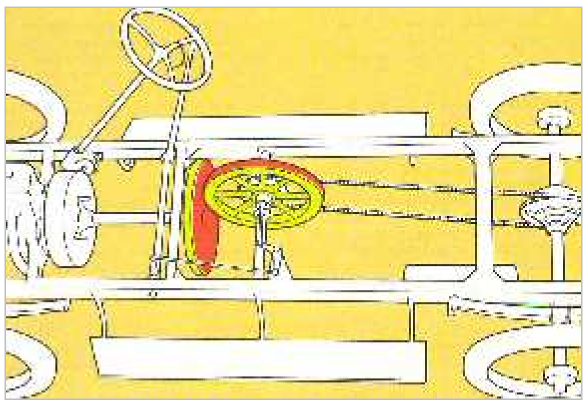


Figura 2.5 – CVT usada por Benz

(Ref: www.histomobile.com)

Notou-se, ao longo do tempo, que o escalonamento por meio de uma série de engrenagens era menos eficiente que uma relação de transmissão com mudança contínua conforme figura 2.6. A única desvantagem, até então, era o custo elevado e a falta de incentivo para a produção em massa.

Atualmente, há diversos tipos de CVTs, mas os mais populares são aplicados em automóveis e com sistemas de controle mais aprimorados, como o CVT por correia e polia. Um outro tipo muito utilizado na industria automotiva, principalmente em automóveis japoneses, é a CVT toroidal que transfere potência por meio de uma superfície lisa e curvada de metal liso com alguns elementos toroidais e/ou cônicos.

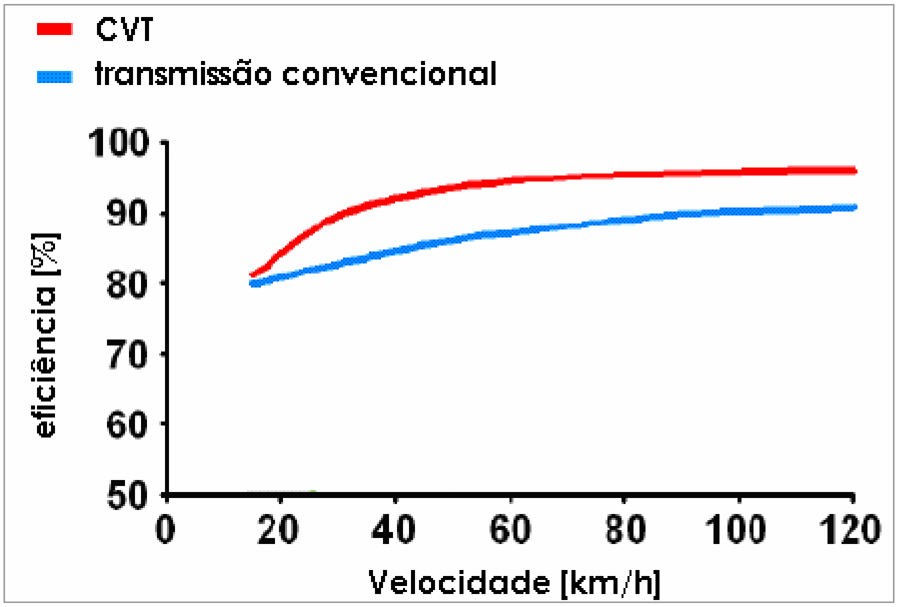


Figura 2.6 – Gráfico de eficiência entre transmissões

(Ref: adaptado de www.barloworld-cvt.com)

2.3 - Modelos Básicos de CVT

<u>CVT DE DISCOS BEIER</u>

Desenvolvida em 1920 e comercializada a partir de 1922 na Inglaterra pela empresa REEVES PULLEY C.O. Esta CVT de disco BEIER foi posteriormente relançada na década de 50, conforme a figura 2.7.

Segundo DEDINI [1985], essa transmissão é constituída de um eixo central contendo de 6 a 20 discos e três eixos paralelos de distância variável. As versões mais modernas permitem a transmissão de 5 a 200 HP (3.8 a 150 KW), mas com baixo torque. Sua eficiência média é em torno de 88%.

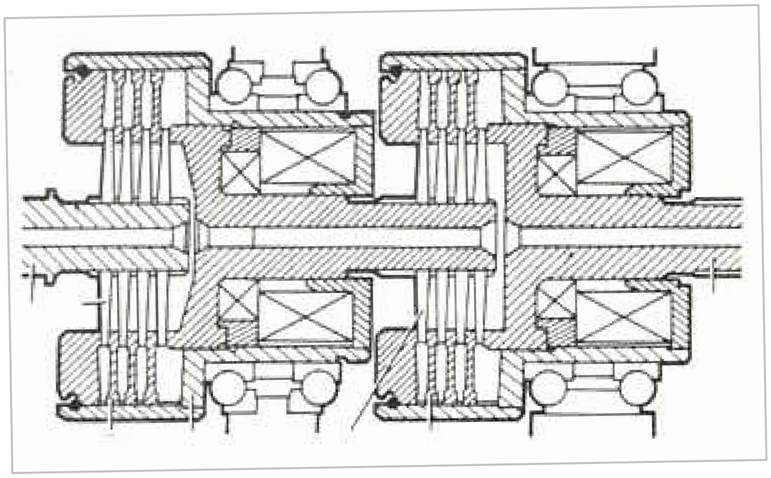


Figura 2.7 – CVT BEIER (Ref: www.histomobile.com)

CVT DE DISCOS E ROLOS INTERMEDIARIOS (FU)

Lançado em 1936 pela UNICUM na França, conhecido também como F.U., ela utilizava discos paralelos em eixos não coaxiais e um rolo de eixo inclinável, como pode-se observar na figura 2.8. Alterando-se a geometria, e os raios efetivos, há uma mudança de relação de transmissão. De acordo com DEDINI [1985], os primeiros modelos transmitiam uma potência de até 4 HP (3.8 KW) e permitiam somente reduções 2:1 à 8:1, mas em 1965 foi lançada uma nova versão com 8 rolos (2 a 2 paralelos e 2 a 2 transversais) junto a um planetário, de modo que sua potência aumentasse para 130 HP (98 KW) com eficiência de até 90%.

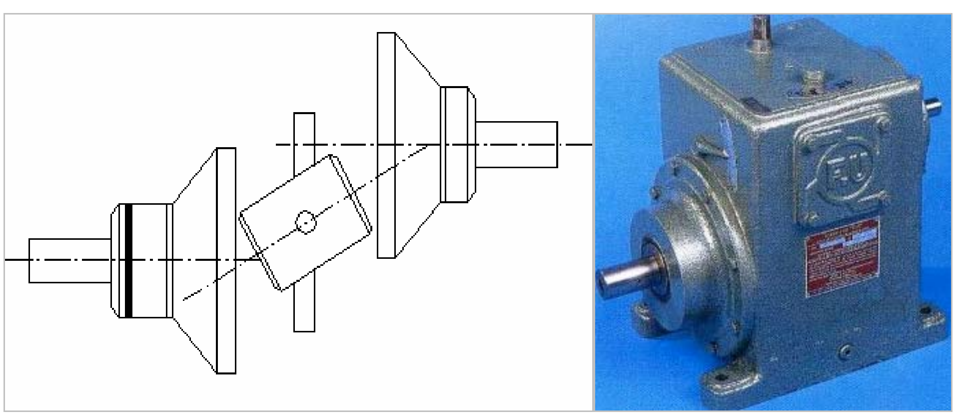


Figura 2.8 – CVT de Discos e Rolos UNICUM

(Ref: www.unicum.fr)

CVT PLANETÁRIO COM DISCOS BEIER

Produzido pela TSUBAKI nas décadas de 60, permite a transmissão de até 30 HP (22,7 KW) com eficiência media de 85% e torque máximo de 34 N.m .

Na sua montagem são utilizados de três a cinco planetas em forma de discos presos por um anel externo e um disco solar bipartido conforme figura 2.9. A relação de transmissão é ajustada aumentando ou diminuindo a carga nas molas-prato e assim diminuindo o distanciamento dos segmentos e afastamento dos planetas.

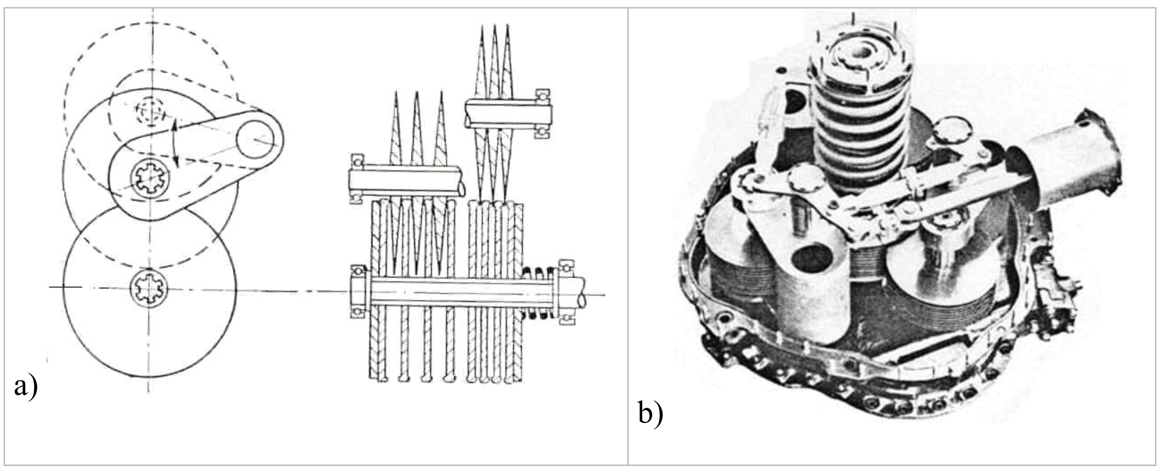


Figura 2.9 – CVT planetária BEIER a) Desenho, b) Protótipo

(Ref: www.histomobile.com)

CVT TRANSMATIC OU POLIAS E CORREIAS

Criada por Hubert Van Doorne em 1958 na Holanda e fabricada a partir de 1975 pela empresa holandesa D.A.F (Doorne Aanhangwagen Fabriek). D.A.F. foi uma empresa fundada em Born, Holanda, pelos irmãos Hubert e Wim Van Doorne. O seu princípio de funcionamento baseia-se em: uma correia (ou anel em algumas aplicações) trabalhando entre duas polias expansíveis, a tracionante (entrada de potência) e a tracionada (saída de potência), cujos diâmetros efetivos (pontos de contato) variam inversa e continuamente (figura 2.10).

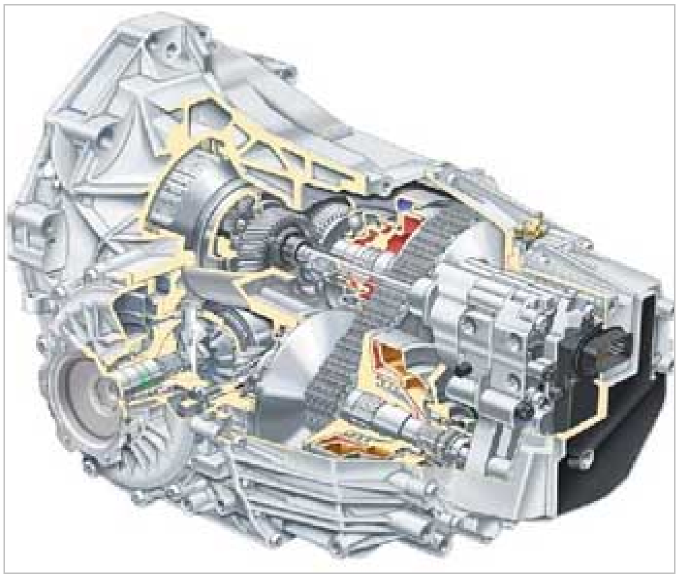


Figura 2.10 – CVT do tipo Polias e Correia

(Ref: SWRI Technical Divisions)

Dentre inúmeros modelos desenvolvidos, a correia pode ser de borracha ou de aço especial, isso vai depender das condições de uso (esforços, desgaste, lubrificação etc) ao qual a transmissão será submetida. No caso de correias de aço, estas são compostas por vários elementos ("links") de contato ligados entre si e em uma correia lisa conforme figura 2.11.

Segundo FORTI [2003] em sua tese, Van Doorne afirma que a correia não poderia ser usada como peça de tração em aplicações de alto torque. Sendo assim, ele projetou uma correia para ser usada como dispositivo de compressão. O número de "links" de aço, que pode variar de 300 a 500 dependendo do comprimento da correia, são colocados em linha entre as bordas tangente das polias motora e movida. Quando um "link" deixa a polia motora, ele alinha-se com outro que acabou de deixar a polia, formando uma barra de aço reta que aplica torque na polia movida. Uma vez que o "link" alcança a polia movida, a força é transmitida, e esta então curva-se conforme figura 2.10.

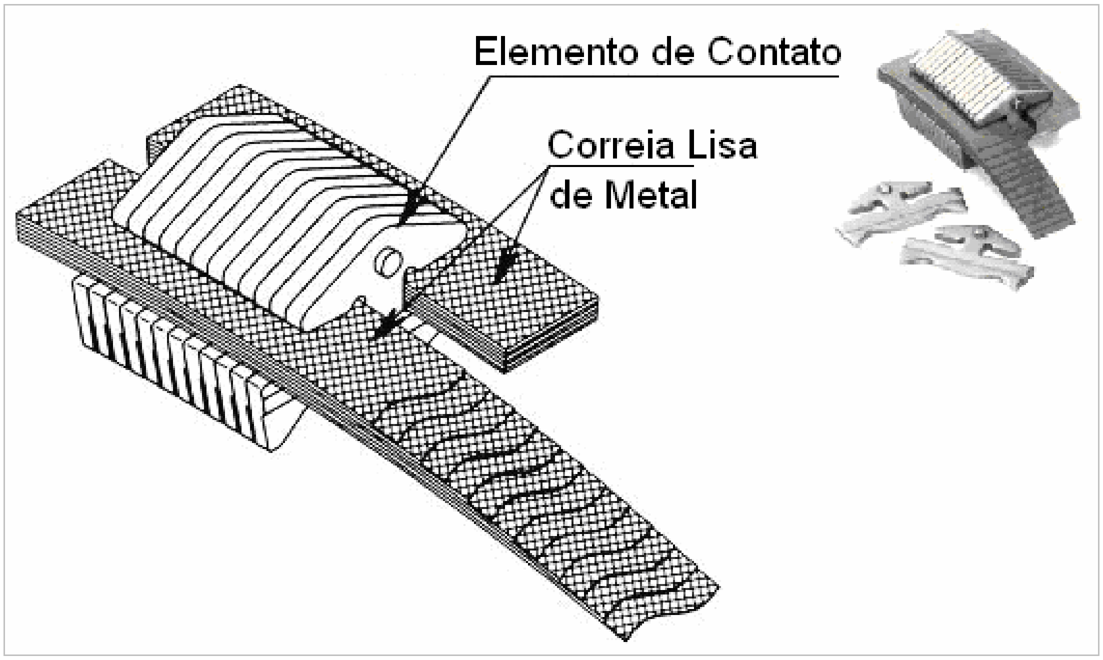


Figura 2.11 – Elemento de contato (“link”) da correia da CVT

(Ref:FORTI [2003])

Segundo FERRARI [2002], a eficiência dessa transmissão beira os 92% e pode transmitir 250 HP (186 KW) usualmente em veículos de passeio, mas em casos especiais como carros esportivos, suportam cerca de 640 HP(480kW).

CVT-CONES E ANEL DESLOCANTE

Foi produzida pela SHIMPO no Japão e comercializada no Brasil desde 1943, denominada RINGCONE RC. Através do deslocamento dos cones no sentido transversal do anel rígido, obtém-se diversas relações de transmissão. Tem capacidade de transmissão de 3 HP (2.3 KW), com uma eficiência média de 90 % (ver figura 2.12).

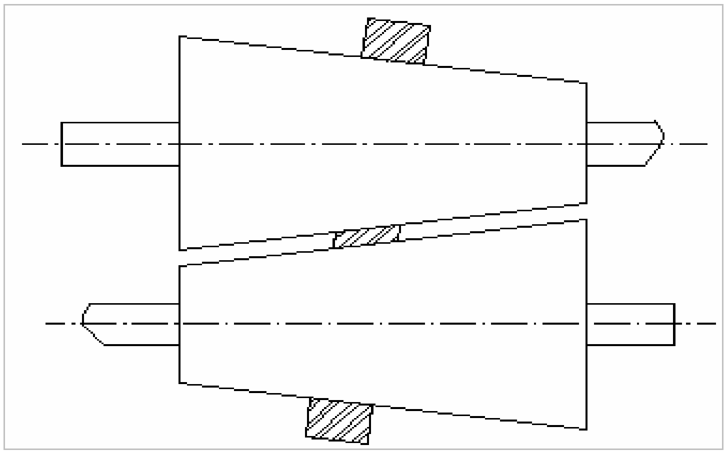


Figura 2.12 – Esquema da CVT RINGCONE

(Ref: SACCHETO [2003])

E 1980, a RINGCONE lançou no mercado uma variante desse CVT conforme a figura 2.13, mantendo o mesmo princípio de funcionamento, porém em uma disposição planetária. Essa CVT é muito usada em sistemas para automação industrial e em equipamentos de baixa potência.

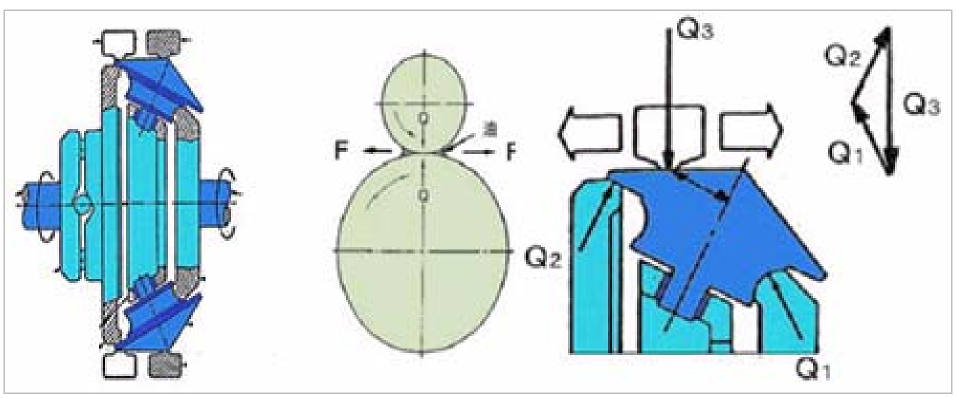


Figura 2.13 – Variante da CVT RINGCONE

(Ref: www.ringcone.ind.br)

CVT-NUTATING TRACTION DRIVE

Foi produzida pela empresa Vadetec, e seu princípio de funcionamento é baseado na nutação, ou seja, oscilação do eixo do cone em torno da posição média de sua órbita (vide figura

2.14). Os cones são concêntricos, invertidos e unidos na parte mais larga. Se estes são posicionados de forma a haver um cone na horizontal, isto promovera a nutação. A rotação de saída é a soma entre as rotações de nutação e dos cones de entrada e saída.

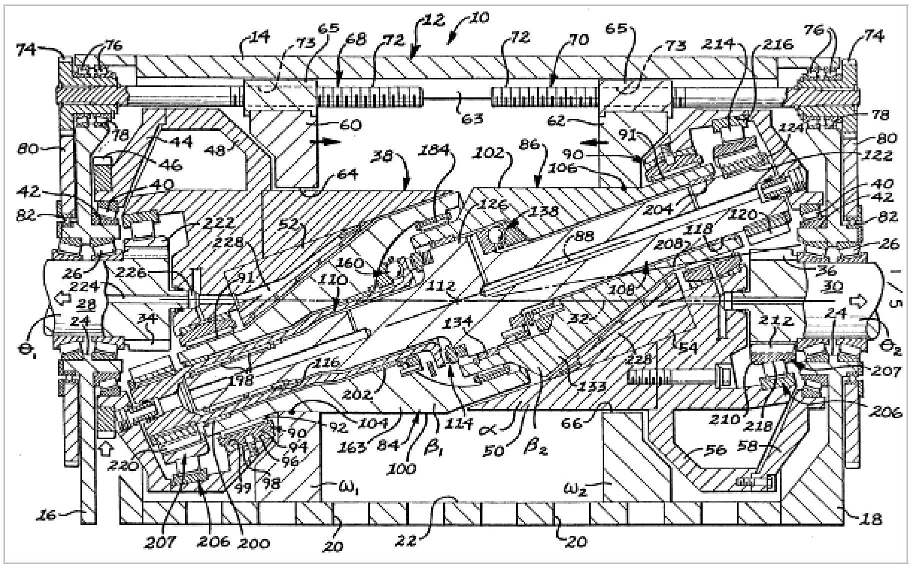


Figura 2.14 – CVT Nutation Drive

(Ref:www.freepatentsonline.com)

Segundo DEDINI [1985], ela é capaz de transmitir potência de até 300 HP (230 KW) e um torque máximo de 340 N.m com eficiência de 96%.

CVT NUVINCI

A transmissão NuVinci foi desenvolvido por Fallbrook Technologies Inc. Ela é uma transmissão prática, leve e muito utilizada para tração humana e motores de baixas potências. Sua eficiência varia entre 75% a 92% e pode transmitir até 100 HP.

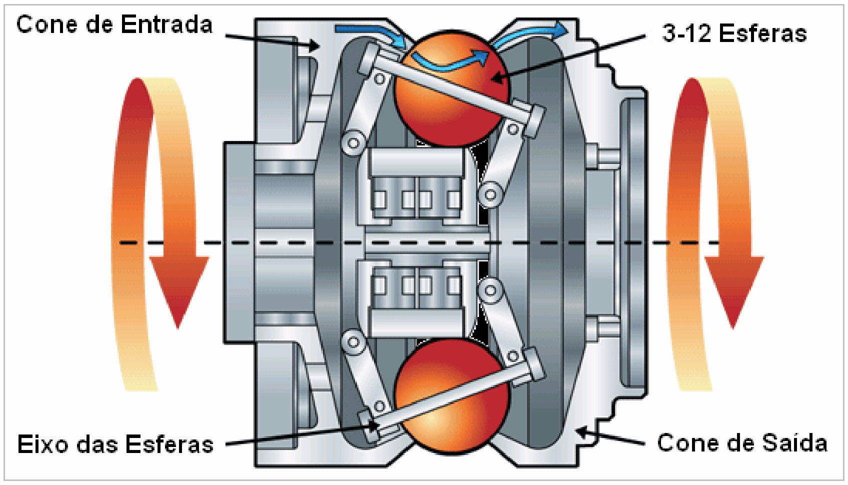


Figura 2.15 – CVT do tipo NUVINCI

(Ref: www.fallbrooktech.com/)

Quando comparado às tradicionais transmissões continuamente variável (CVTs), a NuVinci é menos complexa pois possui poucos componentes e o modo de funcionamento é simples. A mudança de relação de transmissão se da pela inclinação do eixo de rotação das esferas com relação aos cones conforme figura 2.15.

CVT-TOROIDAL E SEMI-TOROIDAL

Segundo DEDINI [1985], a transmissão CRTD (Continue Roller Toroidal Drive) foi desenvolvida em 1960 pela TRACOR INC. Com 4 cones e 4 toróides, permitia a transmissão de até 86 HP (66 KW) em regime permanente ou 180 HP (140 KW) por curtos períodos. Muito usado na automobilística, melhorou performance na aceleração de veículos em cerca de 40 %.

As figuras 2.16 e 2.17 mostram uma foto e uma diagrama de fluxo de potência da Extroid CVT que equipa veículos da Nissan.

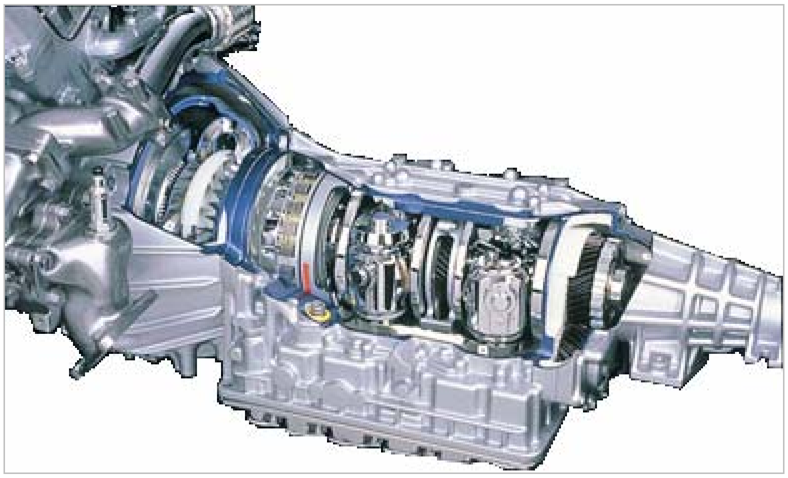


Figura 2.16 – CVT do tipo Toroidal

(Ref: YAMAGUCHI [2000])

A mudança do ângulo dos cones em relação ao seu apoio muda também os raios efetivos de entrada e saída simultaneamente, assim ajustando a relação de transmissão. A eficiência varia entre 92% a 98%.

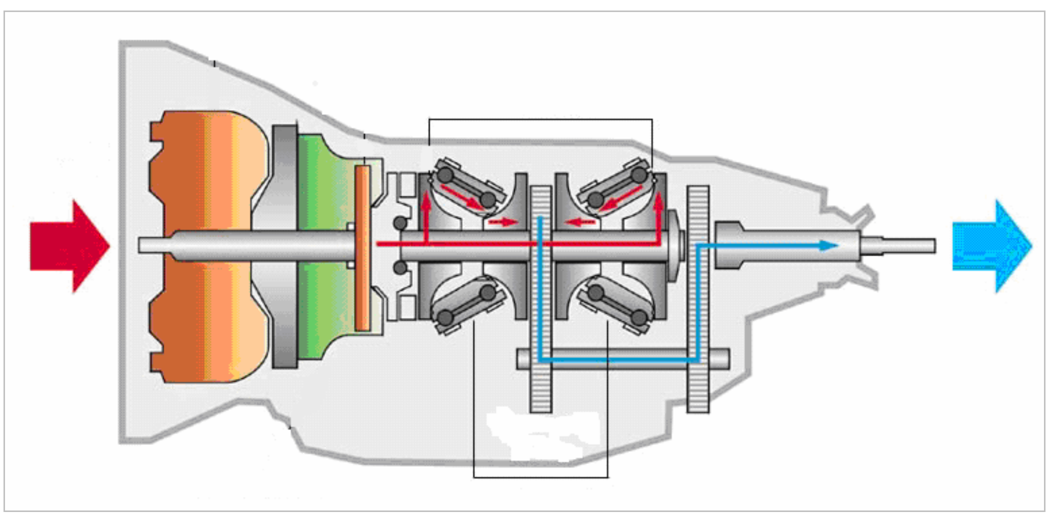


Figura 2.17 – Fluxo de Potência na CVT Toroidal

(Ref: YAMAGUCHI [2000])

CVT CONE-ESFERAS ou TRACK-BALL

Pequena, capaz de transmitir até 15 HP (11,5 KW), tem a relação de transmissão variando de 1:3 à 3:1 com eficiência entre 70% e 92% (ver figuras 2.18 e 2.19). A mudança da relação de transmissão se dá através do ângulo entre o eixo de rotação das esferas e dos eixos principais, sendo assim, a rotação vetorial das esferas.

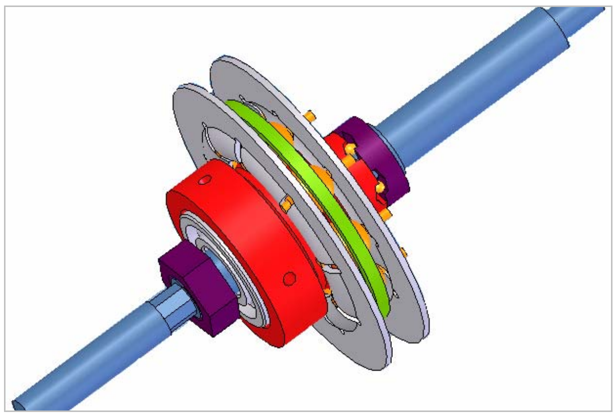


Figura 2.18 – Desenho CAD de CVT TrakBall

(Ref: SACCHETO [2007])

Assim como a CVT da shimpo, a trackball é muito utilizada em automação de pequenos equipamentos industriais (furadeiras, ventiladores, etc) ou em veículos de baixa potência/torque.

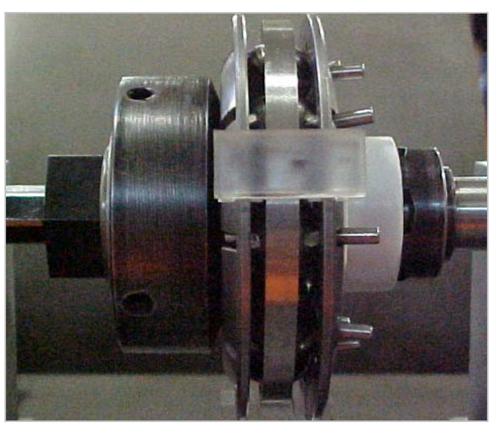


Figura 2.19 – Foto de Protótipo

(Ref:FORTI [2003])

O número de modelos e formas construtivas mostradas anteriormente é apenas uma amostra do que existe na realidade. A diversidade de modelos é grande e é possível acessar suas informações através de paginas eletrônicas em sites como o “www.freepatentsonline.com” ou bibliográfica da área (ver Bibliografia).

Há de se concordar também com DEDINI [1985] ao afirmar em seu trabalho que apesar da imensa variedade de modelos disponíveis, não se tem uma plena aceitação do mercado às transmissões CVT, por parte de empresas do terceiro mundo e do publico alvo, devido aos custos de manufatura e manutenção e a uma certa desconfiança da capacidade destas transmissões de desempenharem seu papel com eficiência, já que o número de estudos e referencias nessa área ainda é pequeno.

Segundo FORTI [2003], muitas CVTs têm sido propostas nesses últimos anos, mas poucas tem recebido a atenção necessária para que possam ingressar no mercado. Boa parte desse desinteresse ainda esbarra nos custos elevados de manufatura e de uma descrença sobre sua robustez, dificultando sua difusão.

Um fator adicional que tem contribuído para impulsionar o desenvolvimento das CVTs è a questão ambiental. Segundo Kluger [2002], devido às legislações cada vez mais rígidas com relação à emissão de gases poluentes e também economia de combustível nos paises desenvolvidos, as industrias automobilísticas tem como um dos maiores desafios atualmente, reduzir o consumo. Uma das formas de se fazer isso é a aplicação de CVTs como forma de transmissão de forças mais eficiente. Como elas realizam trocas de forma suave, è evidente que o motor trabalhará na sua curva de consumo de combustível ótimo a maior parte do tempo

Capítulo 3

TEORIA DE CONTATO ENTRE CORPOS

3.1 – Introdução

No estudo das transmissões por tração o ponto crítico está sem dúvida no contato entre os diversos elementos de transmissão. Assim, o conhecimento das características e da forma da distribuição de pressão na região de contato é imprescindível para a compreensão do mecanismo da transmissão.

Na região de contato das transmissões por tração assim como nos rolamentos, o fenômeno que costumeiramente origina as falhas é conhecido como fadiga de rolamento ou fadiga superficial. É caracterizado pela formação de covas ("pits") e/ou descamação ("spalls") na região superficial deformada ciclicamente pelas tensões de contato nos elementos de transmissão em movimento.

Sabe-se que em estados de rolamentos puro, sem escorregamento, existe a formação de uma região danificada, após certo número de ciclos, a uma certa profundidade e paralela à superfície. Já, quando há rolamento com escorregamento, existe a formação de "conchas" que se iniciando próximas à superfície propagam-se para o interior do corpo. O estudo das distribuições de pressão e tensão nas regiões de contato nos permitem compreender e avaliar estes fenômenos.

De HERTZ [1881] até hoje, muitos pesquisadores se dedicaram ao estudo das condições de contato em corpos elástico. Dentre eles, LUNDBERG [1939], que desenvolveu uma teoria geral para corpos semi-infinitos elásticos, onde utilizava três funções potenciais, correspondentes as três componentes da tensão, aplicada ao longo dos três eixos coordenados com origem localizada no centro do contato. MINDLIN [1949], e SMITH [1950] e posteriormente LIU [1953], ampliaram esta teoria generalizando-a para qualquer corpo, e incluíram, neste estudo, o efeito da aplicação de uma força tangencial à força normal no contato.

BREWE [1977] e HAMROCK [1977] apresentam uma solução numérica simplificada para condições de contato elíptico que seria posteriormente ampliada e utilizada por COY [1981], na determinação da vida de uma transmissão por tração. Também ROHN [1981] descreveu um processo bastante simplificado para o mesmo caso geral e mesma aplicação.

KALKER [1982] desenvolveu o algoritmo FASTSIM, baseado na Teoria de Hertz, diversas vezes utilizado e muito reconhecido na comunidade cientifica como sendo de bom equilíbrio entre precisão e rapidez. Em 1984 KALKER formulou a teoria completa para tratamento de contato generalizado.

São apresentadas, a seguir, as formas mais utilizadas no estudo simplificado das condições de contato entre dois corpos elásticos e as formas úteis ao estudo das transmissões por tração.

3.2 - Natureza das Superfícies dos Metais

No campo da tribologia é geralmente necessário ampliar a simples interpretação de superfície como sendo apenas um plano geométrico separando dois corpos determinado por um domínio. Segundo MOORE [1975], uma superfície deve ser reconhecida como uma camada a partir da qual um sólido cresce organizadamente e tem propriedades físicas.

A superfície de um material basicamente é dividida em camadas ou zonas que apresentam microestrutura amorta No topo dessas zonas, a primeira camada, é chamada de camada “Bielby” e é produzida através da interação de duas superfícies em contado e posteriormente a deposição de material e junção desse material pressionado na forma de uma camada. Esta camada é geralmente contaminada por produtos químicos decorrentes de reações com atmosferas e com contato com outras superfícies.

A segunda camada frequentemente encontrada em superfícies é a camada de óxido em metais que é praticamente intrínseca e de certa forma (dependendo-se do metal e também do óxido quanto a suas densidades e tipo de microestruturas) vantajosa em alguns casos. Esta camada é importante pois, em particular, tem propriedades físicas que são fundamentais para o estudo da fricção (coeficiente de tração), desgaste e também lubrificação.

A terceira camada é composta por material de microestrutura mais dura que a de material base, ainda por cima encruado devido aos esforços e ao acumulo de inclusões e defeitos na rede cristalina desses planos.A figura 3.1 mostra como são dispostas as camadas de material ao longo de uma superfície de material qualquer.

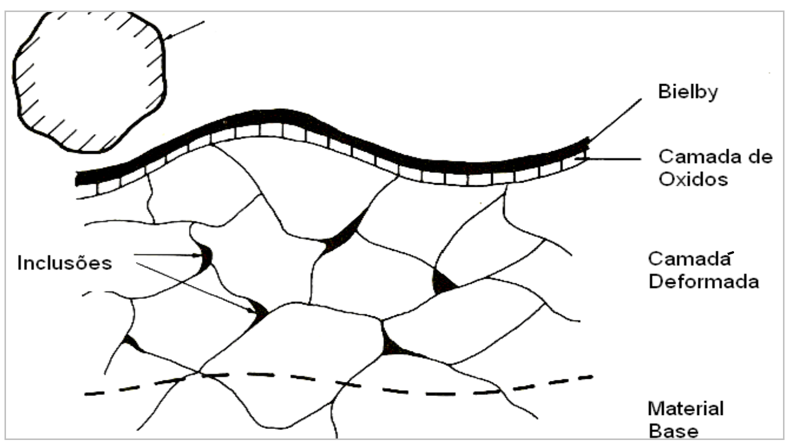


Figura 3.1 – Superfície como uma divisão por camadas

(Ref: MOORE [1975])

A textura geométrica das superfícies é controlada pelas características dos processos de fabricação pela qual é submetida. Um exame detalhado dessas superfícies, mesmo depois de um processo de acabamento, mostra que existe rugosidade permanente em uma escala microscópica. A rugosidade é formada por flutuações na topologia dessas superfícies, pequena ondulações (micro-rugosidade) contendo picos e vales de amplitudes e espaçamentos variados se comparadas a escala molecular.

A adição desses dois tipos de rugosidade forma a rugosidade final, essa distribuição de picos e vales (rugosidade) sobre a superfície pode ser tanto direcional quanto homogênea em todas as direções, dependendo de como é o processo de fabricação. Caso essas forem usualmente submetidas a torneamento, fresamento e plainamento, exibirão uma orientação de distribuição de rugosidade definida. Outrora submetidas a eletroerosão e lapidação, serão caracterizadas por uma isotropia em todas as direções ao longo do plano médio.

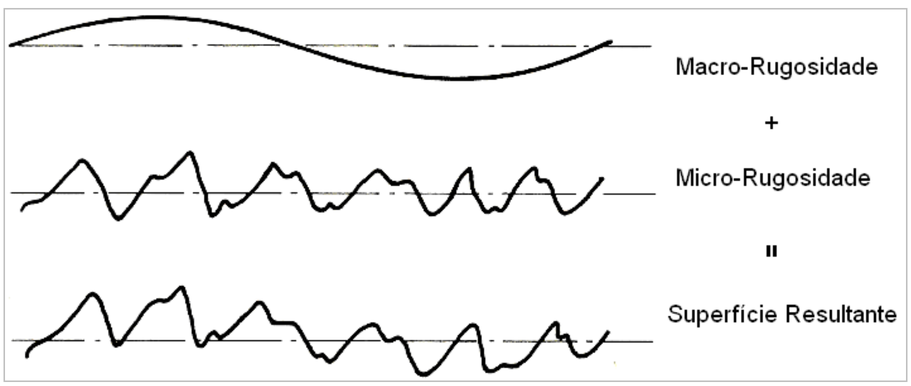


Figura 3.2 – Natureza microscópica de superfícies, rugosidade

(Ref: MOORE [1975])

De acordo com essa descrição, mesmo que resumida, fica claro que mesmo uma superfície, aparente lisa, pode ser tão complexa e difícil de analisar quanto a própria superfície da terra, obviamente, com diferenças em ordem de escala.

A avaliação quantitativa da topografia dessas superfícies é de vital importância para a resolução de uma variedade ampla de problema no que diz respeito a tribologia. Fenômenos tribológicos como fricção e desgaste dependem principalmente da natureza da área de contato entre as superfícies que são dependentes das distribuições, tamanhos e formatos da rugosidade.

Na engenharia, a escolha de certas superfícies é influenciada pelas características e comportamentos físicos que se deseja ter (quanto a funcionalidade). Sendo assim, dois importantes conceitos são necessários, são eles o CLA ("Center Line Average") ou simplesmente rugosidade média, e também RMS ("Root Mean Square") . O CLA determina a média aritmética dos valores de pico e vales encontrados durante o mapeamento vertical durante o percurso e o RMS é a média quadrática da mesma (SD é desvio padrão de CLA).

$$C.L.A = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} | Z_i | \tag{3.1}$$

$$R.M.S = \left[\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (Z_i)^2 \right]^{1/2} \tag{3.2}$$

$$S.D. = \left[\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (Z_i - CLA)^2 \right]^{1/2} \tag{3.3}$$

onde n é o número de pontos da amostra cuja medida topológica é Z_i. É possível visualizar esse conceito através da figura 3.3 e 3.4.

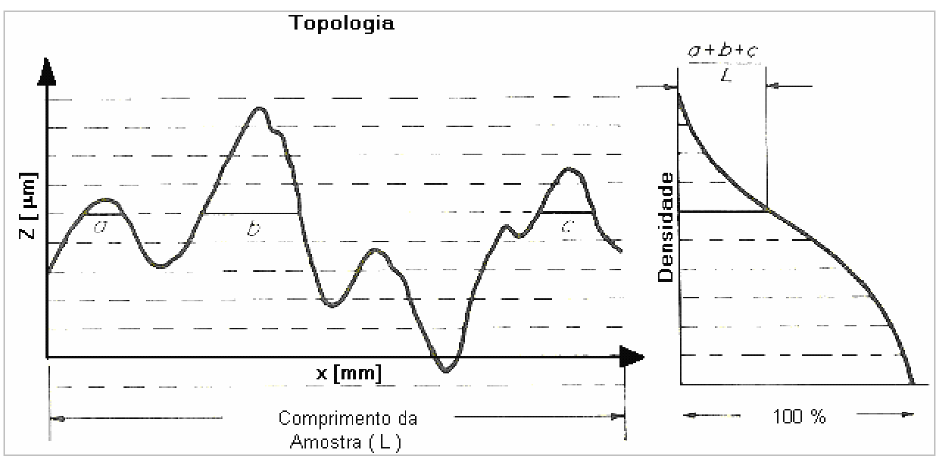


Figura 3.3 - Perfil de distribuição de secção em superfícies

(Ref: MOORE [1975])

Esses parâmetros podem ser vistos como sendo apenas dimensões relativas a direção vertical (topologia), porém não resguardam nenhuma informação sobre inclinações pontuais, formatos e tamanho como rugosidade ou aproximadamente a freqüência com que ocorrem. Ou seja, é possível que diversas superfícies totalmente diferentes quanto ao seu arranjo topográfico obterem mesmos valores de CLA e RMS como é possível observar na figura 3.4.

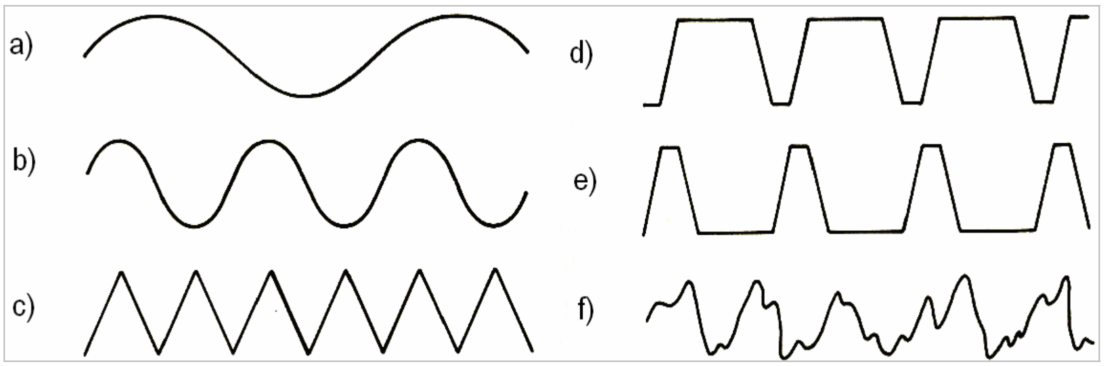


Figura 3.4- Superfícies com mesmo RMS e CLA

(Ref: MOORE [1975])

Do ponto de vista estatístico, a superfície pode ser descrita em termos de uma função de distribuição, exatamente a taxa com que a área avança ao longo do perfil, esta proposta é influenciada pelo desvio padrão. Função conhecida comumente como Gaussiana e muito utilizada se considerações são tomadas como por exemplo a superfície for excessivamente irregular (aleatória), o que é em quase totalidade dos casos práticos segundo MOORE [1975].

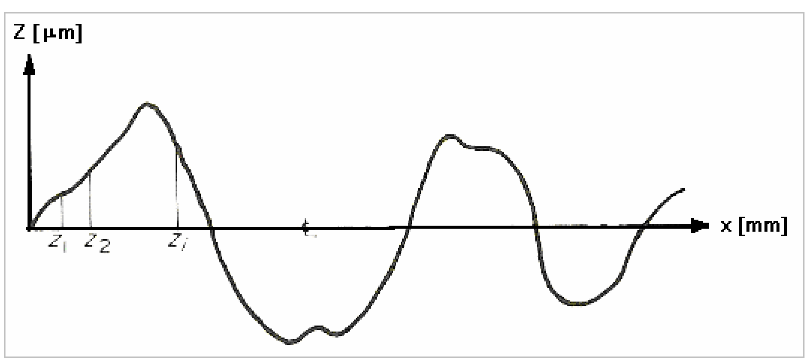


Figura 3.5 – Superfície irregular (aleatória)

(Ref: MOORE,[1975])

A distribuição gaussiana é expressa por MOORE [1975] na equação 3.4 e pode ser observada na figura 3.6.

$$\psi_{(z)} = \frac{1}{\sigma(2\pi)^{1/2}} \cdot e^{-(z-m)^2/2\sigma^2} \tag{3.4}$$

onde m = CLA ou media aritmética e σ = SD ou desvio padrão de m

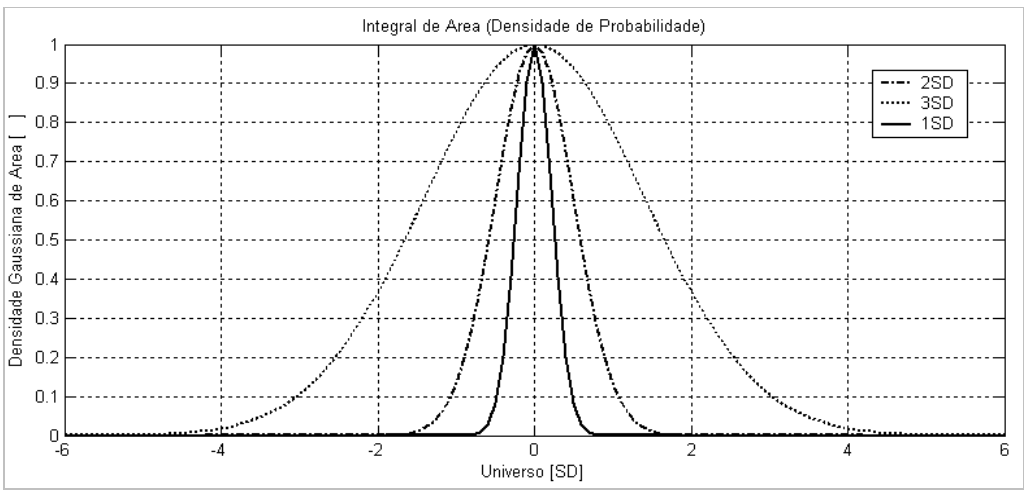


Figura 3.6 – Função de Distribuição Gaussiana

(Ref: adaptado de MOORE [1975])

Segundo MOORE, a área da secção pode ser então calculada pela integração dessa função. A forma da distribuição gaussiana necessita de um espaçamento que vai desde –∞ até ∞ o que não se encontra em superfícies na prática, sendo assim a distribuição é truncada em -3σ a +3σ, representando precisão de 99.99 %.

3.3 - A região de contato e perfil de pressão

Para a determinação das pressões no contato faz-se também necessária a determinação da forma e dimensões da região de contato. A forma da região de contato depende basicamente da forma dos elementos em contato, das características físicas dos mesmos e da condição dinâmica do contato. Normalmente pode-se tomar de modo simplificado como determinante da forma da região de contato para corpos elásticos apenas a geometria dos mesmos.

Exemplificando, observa-se na figura 3.7 que duas esferas em contato ou uma esfera e um plano em contato geram uma superfície deformada de forma circular (caso particular da forma elíptica). A rigor, esta superfície deformada teria uma forma de ovóide para determinadas condições, porém, a circularidade mesmo assim seria muito grande, de modo que, normalmente se toma a forma como sendo um circulo perfeito. Em outro caso, dois cilindros em contato ou um cilindro e um plano geram uma superfície com a forma de um retângulo. Também neste caso, a forma real seria influenciada pela dimensão finita nos extremos, onde uma certa curvatura surgiria nos cantos da superfície de contato, porém, normalmente é o retângulo perfeito a forma adotada. O caso mais geral é o que se obtém pelo contato de dois corpos genéricos onde a região deformada assume uma forma elíptica conforme figuras 3.7 e 3.8.

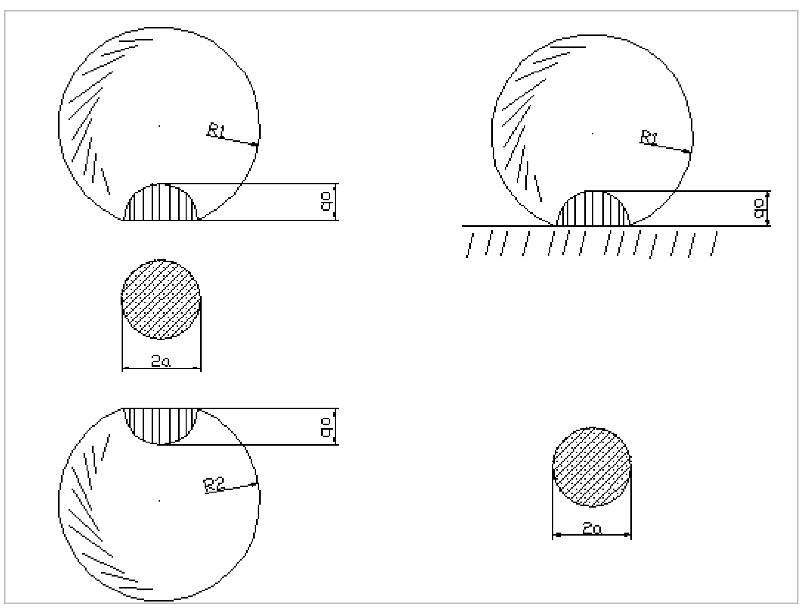


Figura 3.7 – Contato elástico entre duas esferas e esfera-plano

(Ref: DEDINI, [1985])

O contato circular ou elíptico é mais conhecido como contato pontual, já o contato retangular (entre corpos longos de perfil circular) é conhecido como contato linear.

As dimensões das áreas de contato são definidas pelas dimensões dos semi-eixos da região deformada. Para sua representação utiliza-se as letras minúsculas a e b, sendo a utilizada para a dimensão paralela ao eixo principal de rotação dos elementos como se pode ver na figura 3.8. Demais características serão definidas para cada uma das situações mostradas a seguir.

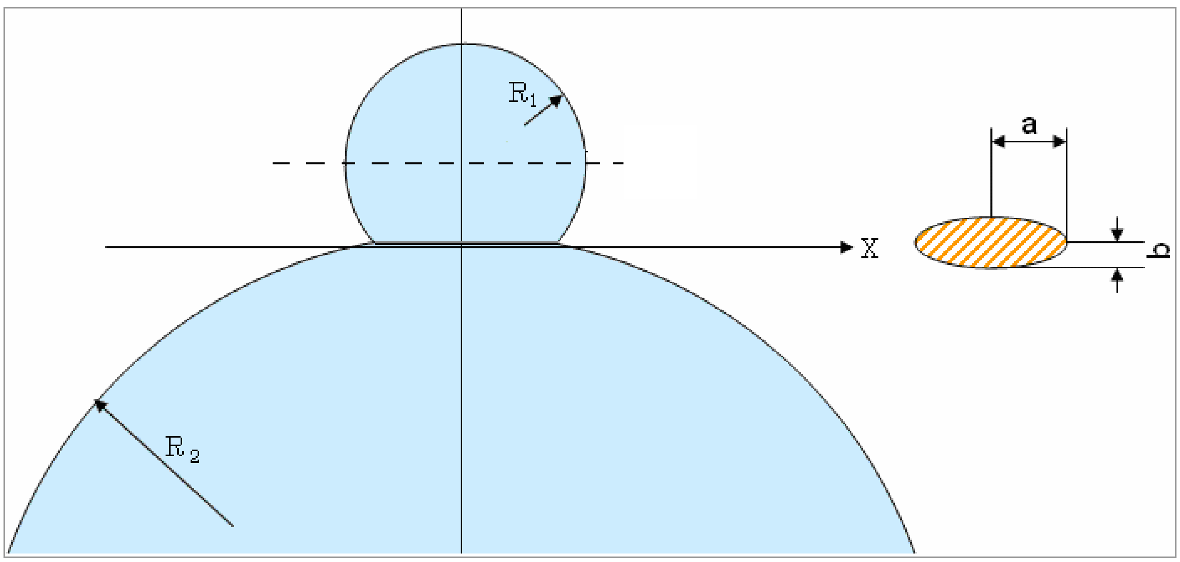


Figura 3.8 – Forma geral de contato

(Ref: DEDINI [1985])

A teoria desenvolvida inicialmente por HERTZ [1881] (para corpos elásticos sem atrito) pode ser resumidamente apresentada através de seus resultados para o contato entre duas esferas, esfera e plano, dois cilindros e cilindro e plano. A distribuição de pressão é considerada elíptica para o caso geral.

Hertz considera inicialmente um ponto M sobre uma esfera de raio R_1 a uma distância r do eixo Z como mostrado na figura 3.9.

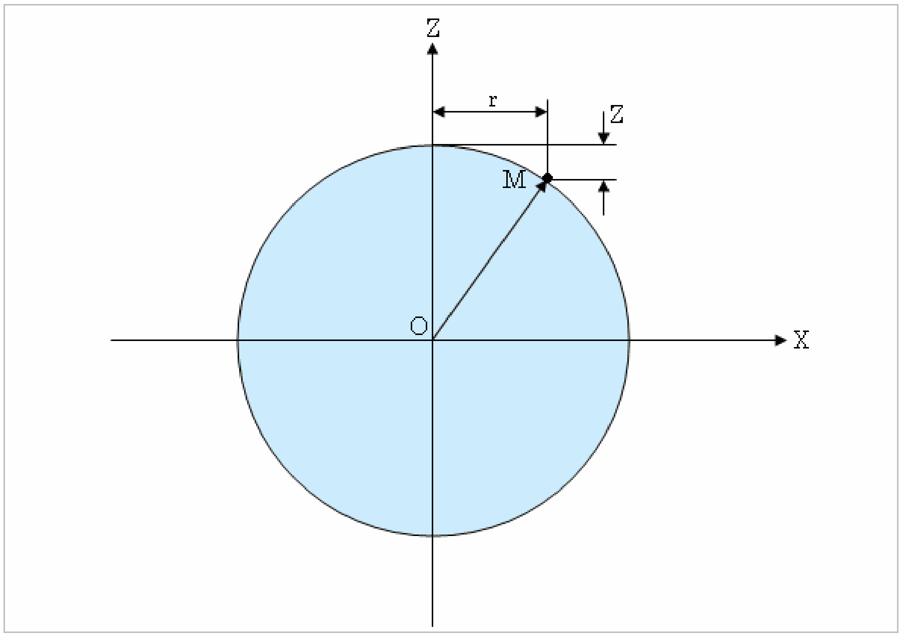


Figura 3.9 – Posição de um ponto M qualquer em uma esfera de raio R1

(Ref: DEDINI [1985])

De acordo com a figura 3.9, é possível obter geometricamente a seguinte expressão:

$$R_1^{\;2} = r^2 + (R_1 - Z)^2 \qquad (3.5)$$

onde Z é a distância na direção do eixo *Z* entre os pontos *M* e *O*. Desenvolvendo a equação chega-se a:

$$r^2 = 2R_1 Z + Z^2 \qquad (3.6)$$

Dessa forma, ao considerar duas esferas de raios *R1* e *R2* em contato e dois pontos, respectivamente, *M* e *N* em sua superfície, a uma distância *r* do eixo Z, como mostrado na figura 3.10.

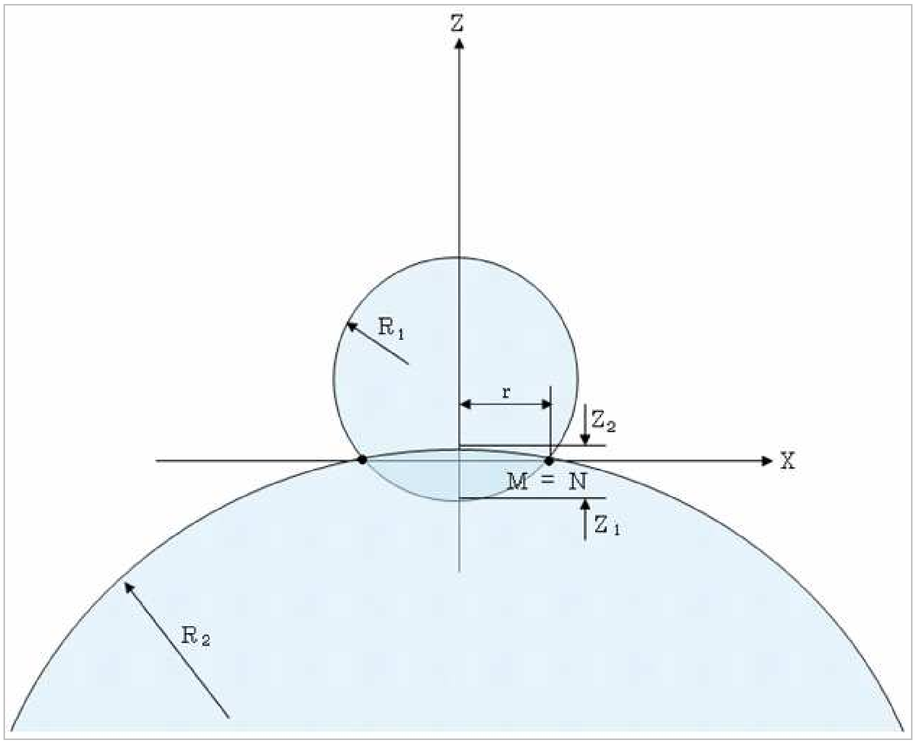


Figura 3.10 – Distância entre pontos M e N em duas esferas

(Ref; DEDINI [1985])

$$Z_1 = \frac{r^2}{2R_1} \quad \text{e} \quad Z_2 = \frac{r^2}{2R_2} \tag{3.7}$$

A distância entre M e N é então dada por

$$Z_1 + Z_2 = r^2 \cdot \left(\frac{1}{2R_1} + \frac{1}{2R_2} \right) = \frac{r^2 (R_1 + R_2)}{2R_1 R_2} \tag{3.8}$$

Se as esferas forem comprimidas pela força P ao longo da direção normal, existirá uma deformação local na vizinhança do ponto de contato, gerando uma área circular, que vem a ser a superfície de contato. Com a deformação os pontos *M* e *N* sofrem um deslocamento na direção Z, respectivamente w_1 e w_2, e os centros das esferas se aproximam de uma distância α. Assim a distância entre os pontos *M* e *N* terá redução de α-(w_1+w_2). Se, finalmente, os pontos *M* e *N* forem abrangidos pela área de contato (M=N) chega-se a concluir que:

$$Z_1 + Z_2 - \alpha + (w_1 + w_2) = 0 \tag{3.9}$$

ou

$$\alpha - (w1 + w_2) = r^2 \cdot \left(\frac{1}{2R_1} + \frac{1}{2R_2} \right) = \frac{r^2 (R_1 + R_2)}{2R_1 R_2} \tag{3.10}$$

Adicionando-se um fator $\beta = (R_1+R_2)/2R_1R_2$ então a equação se torna:

$$\alpha - (w1 + w_2) = \beta \cdot r^2 \tag{3.11}$$

$$w1 + w_2 = \beta \cdot r^2 + \alpha \tag{3.12}$$

Da teoria da elasticidade, para um sólido de revolução submetido a um estado de tensão axissimétrico o deslocamento de um ponto superficial, análogo aos pontos *M* e *N* aqui considerados pode ser dado por.

$$w = \frac{(1-\upsilon^2)}{\pi E} \iint q(s,\varphi) \cdot ds \cdot d\varphi \tag{3.13}$$

Integrando-se a equação 3.13 na área de contato (ver figura 3.11), tem-se:

$$K_1 = \frac{1-\upsilon_1^{\ 2}}{\pi \cdot E_1} \tag{3.14}$$

$$K_2 = \frac{1-\upsilon_2^{\ 2}}{\pi \cdot E_2} \qquad (3.15)$$

$$(K_1 + K_2)\iint q \cdot ds \cdot d\varphi = \alpha - \beta r^2 \qquad (3.16)$$

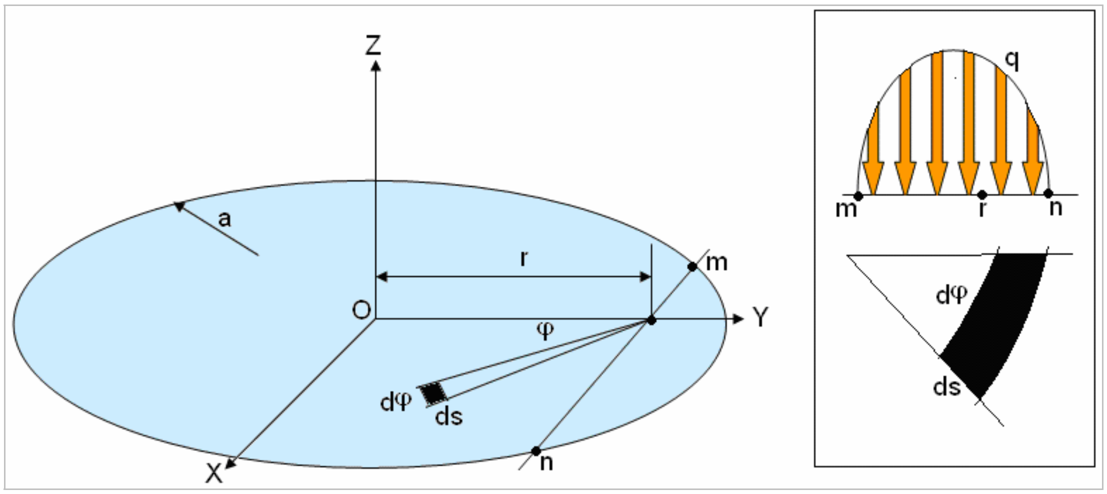


Figura 3.11 – Posição do elemento integrador na área de contato e a distribuição de pressão q ao longo da corda m-n (Ref: DEDINI [1985])

Para satisfazer esta equação utiliza-se para q uma distribuição hemisférica sobre a área de contato. Se qo é a pressão máxima no centro da área de contato então, pode-se definir:

$$q_o = k.a \qquad (3.17)$$

onde a é o raio da área de contato e k o fator de escala para a distribuição de pressão na mesma área. Assim

$$\int q \cdot dS = k \cdot A \qquad (3.18)$$

onde $A=0.5\pi R^2$ é a área do círculo mostrado na figura 3.11.

Dessa forma, obtém-se para R^2:

$$R^2 = a^2 - r^2 sen^2 \varphi \tag{3.19}$$

Substituindo essa expressão em (3.16), verifica-se que:

$$(K_1 + K_2)\frac{\pi . q_o}{a}\iint (a^2 - r^2 sen^2 \varphi) \cdot ds \cdot d\varphi = \alpha - \beta r^2 \tag{3.20}$$

Resolvendo-se a integral chega-se a:

$$(K_1 + K_2)\frac{\pi^2 . q_o}{4a}(2a^2 - r^2) = \alpha - \beta r^2 \tag{3.21}$$

Sendo assim, os parâmetros α e β podem ser encontrados. Para que essa equação seja válida para qualquer *r*, é necessário que os valores das derivadas de cada lado da equação sejam iguais para todo r. Com isso, α e o raio *a* da superfície de contato são solucionados.

$$\alpha = (K_1 + K_2)\frac{\pi^2 . q_o . a}{2} \tag{3.22}$$

$$a = (K_1 + K_2)\frac{\pi^2 . q_o}{4\beta} \tag{3.23}$$

O valor de q_0 pode ser obtido através do volume da distribuição de pressão multiplicado pelo fator de escala e igualdade à força *P* de compressão, ou seja :

$$P = q_0 \cdot \frac{Vol}{2} = \left(\cdot \frac{q_0}{2} \right)\frac{4}{3}\pi . a^3 = \frac{q_o}{a}\frac{2}{3}\pi . a^3 \tag{3.24}$$

$$q_o = \frac{3}{2}\frac{P}{\pi.a^2} \tag{3.25}$$

Nota-se que a pressão máxima é uma vez e meia superior à pressão média existente na área de contato.

Isolando as variáveis a e α pela substituição na equação (3.22) e (3.23) tem-se:

$$a = \left(\frac{3}{4}\pi\frac{P.(K_1 + K_2).R_1.R_2}{R_1 + R_2}\right)^{1/3} \tag{3.26}$$

$$\alpha = \left(\frac{9}{16}\pi^2\frac{P^2.(K_1 + K_2)^2(R_1 + R_2)}{R_1.R_2}\right)^{1/3} \tag{3.27}$$

Se ambas as esferas possuírem as mesmas propriedades elásticas e $\upsilon_1 = \upsilon_2 = 0.3$, tem-se:

$$a = 1{,}109.\left(\frac{P.R_1.R_2}{E.(R_1 + R_2)}\right)^{1/3} \tag{3.28}$$

$$\alpha = 1{,}23.\left(\frac{P^2.(R_1 + R_2)}{E^2.R_1.R_2}\right)^{1/3} \tag{3.29}$$

$$q_o = 0{,}388.P^{1/3}.\left(\frac{E.(R_1 + R_2)}{R_1.R_2}\right)^{2/3} \tag{3.30}$$

Para uma esfera e um plano basta levar um dos raios a ∞, e chega-se a:

$$\frac{1}{R_1} = 0 \tag{3.31}$$

$$a = 1{,}109.\left(\frac{P.R_2}{E}\right)^{1/3} \tag{3.32}$$

$$\alpha = 1{,}23.\left(\frac{P^2.R_2}{E^2}\right)^{1/3} \tag{3.33}$$

$$q_o = 0{,}388.P^{1/3}.\left(\frac{E}{R_2}\right)^{2/3} \tag{3.34}$$

A máxima tensão envolvida é a compressão σ_2, numericamente igual a *qo*, que atua no centro da superfície de contato. Porém, a tensão de cisalhamento máxima está situada sobre o eixo Z a uma profundidade aproximadamente igual $0{,}47.a$. Neste ponto atinge valores próximos a $0{,}31.qo$ sendo a principal responsável pela fadiga sub-superficial de materiais como o aço.

O tratamento para o estudo de contato entre dois corpos elásticos de formato qualquer é semelhante ao caso anterior, mas a superfície próxima ao ponto de contato é considerada a superfície de um parabolóide elíptico, mostrado na figura 3.12, sendo somente válida para pequenos r_s. A equação da distância *Z* de um ponto *M* genérico é dada por:

$$Z = \frac{c}{a'^2} \cdot x^2 + \frac{c}{b'^2} \cdot y^2 \tag{3.35}$$

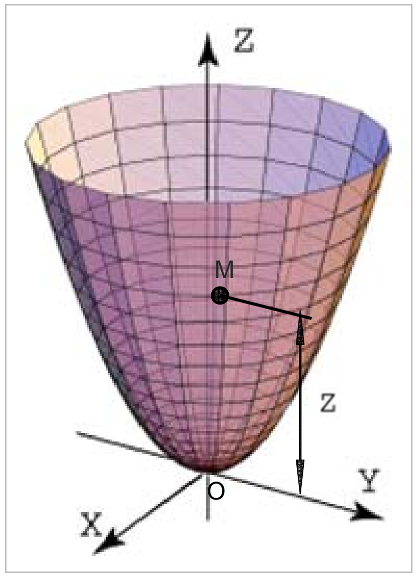


Figura 3.12 – Forma de um parabolóide elíptico

Assim a distância entre dois pontos *M* e *N,* semelhante a análise feita para o contato entre duas esferas, pode ser dada por

$$Z_1 + Z_2 = Ax^2 + By^2 \tag{3.36}$$

Segundo DEDINI [1985], Hertz afirma existirem para *A* e *B* duas expressões dependentes das grandezas das curvaturas principais das superfícies em contato e dos ângulos que as mesmas fazem entre si:

$$A + B = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R'_2}\right) \tag{3.37}$$

$$A - B = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R'_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R'_2}\right)^2 + 2.\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R'_1}\right).\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R'_2}\right)\cos^2\theta\right)^{1/2} \tag{3.38}$$

Seguindo o mesmo raciocínio aplicado aos caso de um contato entre duas esferas, chega-se a:

$$(K_1 + K_2)\iint \frac{q}{r'} \cdot dA = \alpha - Ax^2 - By^2 \tag{3.39}$$

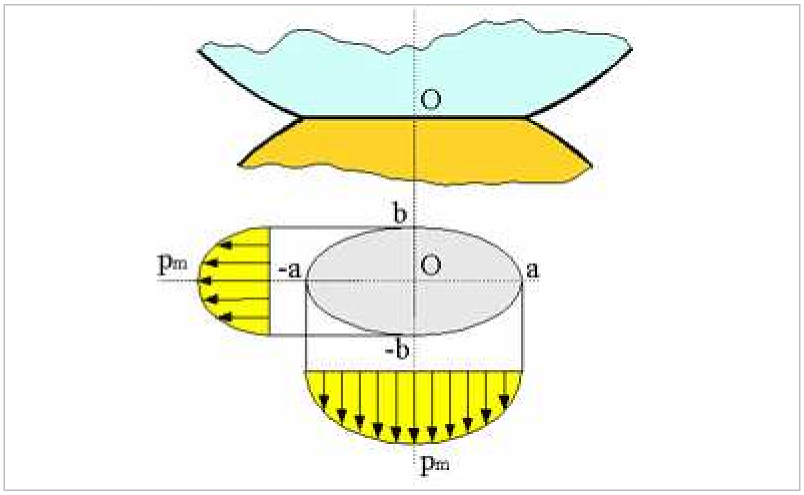


Figura 3.13 – Distribuição de Pressão (Semi-Elipsóide)

(Ref: fr.wikibooks.org)

Hertz [1881] mostrou que uma distribuição de *q(x,y)* que resolve essa equação pode ser tornada como sendo da forma de um semi-elipsóide construído sobre a superfície da área de contato mostrado na figura 3.13.

A pressão máxima está localizada no centro da área de contato elíptica e pode ser obtida por:

$$P = \iint q(x, y) \cdot dA = \frac{2}{3}\pi.a.b.q_o \tag{3.40}$$

De onde

$$q_o = \frac{3}{2}\frac{P}{\pi.a.b} \tag{3.41}$$

Na qual pode-se notar que a pressão máxima é novamente maior que a pressão média num fator de 50%.

Fazendo-se análise de forma análoga ao caso de um contato entre regiões esféricas, tem-se:

$$a = m.\left(\frac{3}{4}\pi\frac{P.(K_1 + K_2)}{A + B}\right)^{1/3} \qquad (3.42)$$

$$b = n.\left(\frac{3}{4}\pi\frac{P.(K_1 + K_2)^2}{A + B}\right)^{1/3} \qquad (3.43)$$

Para a obtenção dos coeficientes *m* e *n* é utilizado uma tabela em função do ângulo θ definido pela seguinte expressão:

$$\theta = \arccos\left(\frac{B - A}{A + B}\right) \qquad (3.44)$$

Como a função cosseno é cíclica então existe uma quantidade significante de ângulos que satisfazem essa equação. Do mesmo modo para *m* e *n* na qual seus valores estão estabelecido pela tabela 3.1 para alguns valores de θ.

Tabela 3.1 – Valores de m e n em função de θ (Ref: DEDINI [1985])

θ	20º	30º	35º	40º	45º	50º	55º
m	3,778	2,731	2,397	2,136	1,926	1,754	1,611
n	0,408	0,493	0,530	0,567	0,604	0,641	0,678
θ	60º	65º	70º	75º	80º	85º	90º

m	1,486	1,378	1,284	1,202	1,128	1,061	1,000
n	0,717	0,759	0,802	0,846	0,893	0,944	1,000

Neste caso a máxima tensão de cisalhamento atua em uma profundidade Z que depende da relação entre os semi-eixos *a* e *b*. Por exemplo para $b/a = 0,34$, Z vale $0,24.a$ e a tensão de cisalhamento máxima é de $\tau_{xz}=0,32qo$.

Se nas expressões do caso geral, o valor de *a/b* aumentar a ponto de obter elipses cada vez mais alongadas, no extremo $a/b = \infty$ chega-se ao caso de um contato de dois cilindros paralelos onde a região de contato é um retângulo estreito.

Neste caso utiliza-se uma distribuição de carga por unidade de comprimento. Assim em um cilindro de comprimento *L* submetido à uma carga distribuída *P'*,tem-se:

$$q_o = \frac{2.P'}{\pi.b} \tag{3.45}$$

A semi-largura da área de contato é dada por:

$$b = \left(\frac{4.P'.(K_1 + K_2).R_1.R_2}{R_1 + R_2} \right)^{1/2} \tag{3.46}$$

Em caso de contato entre cilindros homogêneos, de mesmo material e $\upsilon = 0,3$, a tensão de cisalhamento máxima vale *0,304qo* e ocorre na profundidade *Z=0,78.b* com carga máxima de:

$$q_o = 0,418.\left(\frac{P'.E.(R_1 + R_2)}{R_1.R_2} \right)^{1/2} \tag{3.47}$$

3.4 - Distribuição de tensão ao longo do contato

Materiais sólidos sujeitos a carregamentos deformam-se de forma elástica ou plástica dependendo da intensidade da carga. A deformação elástica pode ser caracterizada pela simples relação linear entre tensão e deformação, sendo basicamente reversível. A deformação plástica é mais complexa, pois não há uma expressão simples para relacionar tensões e deformações além de haver o fenômeno de histerese nessa região do material. Na maioria das aplicações onde há contato, existem ambas as deformações.

Esses tipos de carregamentos, deduzidos anteriormente, induzem a um comportamento elástico no interior do corpo submetido a esforços. No entanto há deformações plásticas na superfície, no que diz respeito à microtopologia do material, ou seja, entre picos e vales da superfície.

A quantidade de deformação elastoplástica depende exclusivamente do valor da carga aplicada e a quantidade de deformação plástica cresce a medida que a carga cresce. Como foi visto anteriormente, por questões de aproximação e modelagem, considerar-se-á que deformações são induzidas apenas em cilindros, planos e esferas. Segundo HAILING [1975], estas aproximações são válidas por 2 razões :

a) - Muitos contatos de aplicação em engenharia são considerados contatos de corpos definidos por arcos circulares como elementos de rolamentos, rodas e algo que lembre essas geometrias.

b) - Todos os corpos sólidos contém rugosidades que podem ser consideradas muito pequenas se comparadas a sua geometria. Sendo assim, o estudo do contato de um corpo sólido se resume apenas a sua macro geometria onde predominam-se esforços em seu contorno e deformações elásticas ao longo do seu domínio.

HAILING [1975] menciona que na maioria dos casos em que se ocorre esse tipo de problema de contato, o problema pode ser abordado da seguinte maneira: considerando um carregamento simples *P* por unidade de comprimento no plano xz e aplicada no ponto O' definido pelas coordenadas (ε,O) na superfície (y = 0) do semi-infinito corpo. O campo de tensão elástica no plano xy é obtido, tendo-se em vista uma unidade de comprimento em y, através da equação 3.48 que expressa o valor da tensão radial:

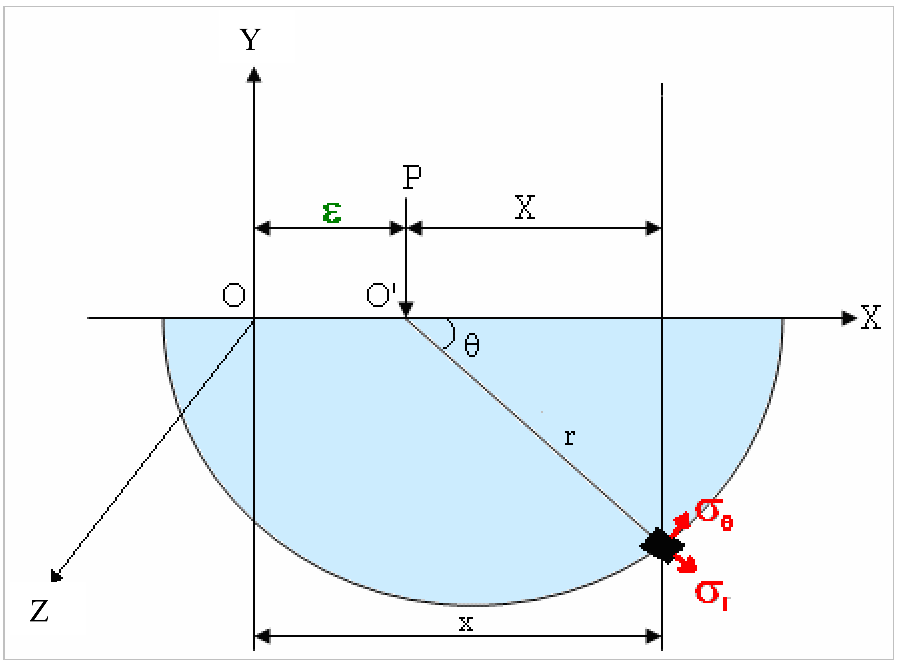


Figura 3.14 – Tensão gerada a partir de um carregamento P

(Ref: HAILING [1975])

A tensão gerada no elemento diferencial é :

$$\sigma_r = -\frac{2.P}{\pi.r}\cos(\theta) \qquad (3.48)$$

Onde as tensões tangencial σ_θ e o cisalhamento $\tau_{r\theta}$ são ambas nulas.

É mais fácil compreender a distribuição de tensão se for considerado um plano principal de tensão que seja o mesmo plano geométrico de tensão.Em coordenadas cartesianas, com relação a O´, segundo HAILING [1975] a tensão é :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = [T] \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} & \tau_{\theta z} \\ \tau_{rz} & \tau_{\theta z} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \cdot [T]^T \tag{3.49}$$

Onde [T] = matriz de transformação vetorial entre coordenadas que para esse caso:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -sen(\theta) & 0 \\ sen(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.50}$$

Como resultado de toda essa operação pode-se deduzir que :

$$\sigma_{xx} = \frac{\sigma_r}{2} \cdot sen^2(\theta) = -\frac{2.P}{\pi.r} \cos(\theta).sen^2(\theta) \tag{3.51}$$

Como a função seno, escrita na forma cartesiana é:

$$sen(\theta) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \tag{3.52}$$

Dessa forma, substituindo a função 3.52 em 3.51, conclui-se que:

$$\sigma_{xx} = \frac{2P}{\pi} \left[\frac{y.x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] \tag{3.53}$$

O mesmo raciocínio pode ser utilizado para as outras tensões:

$$\sigma_{yy} = -\frac{2P}{\pi}\left[\frac{y^3}{(x^2+y^2)^2}\right] \tag{3.54}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{2P}{\pi}\left[\frac{y^2.x}{(x^2+y^2)^2}\right] \tag{3.55}$$

Agora, com relação a origem central O, tem-se que X = x-ε, Y = y e Z = z

$$\sigma_{xx} = -\frac{2P}{\pi}\left[\frac{Y.(X-\varepsilon)^2}{((X-\varepsilon)^2+Y^2)^2}\right] \tag{3.56}$$

$$\sigma_{yy} = -\frac{2P}{\pi}\left[\frac{Y^3}{((X-\varepsilon)^2+Y^2)^2}\right] \tag{3.57}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{2P}{\pi}\left[\frac{Y^2.(X-\varepsilon)}{((X-\varepsilon)^2+Y^2)^2}\right] \tag{3.58}$$

Da mesma forma é calculada a distribuição de tensão para um carregamento, com mesmas características anteriores, respeitando as mesmas condições, porém na direção tangencial à superfície de contato, de intensidade T.

$$\sigma_{xx} = -\frac{2T}{\pi}\left[\frac{Y^2.(X-\varepsilon)}{((X-\varepsilon)^2+Y^2)^2}\right] \tag{3.59}$$

$$\sigma_{yy} = -\frac{2T}{\pi}\left[\frac{Y^3}{((X-\varepsilon)^2+Y^2)^2}\right] \tag{3.60}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{2T}{\pi}\left[\frac{Y.(X-\varepsilon)^2}{((X-\varepsilon)^2+Y^2)^2}\right] \qquad (3.61)$$

É interessante relacionar essas equações, em particular, com problemas de contato entre dois corpos cujas geometrias são definidas por um arco circular. Este problema já foi solucionado por Hertz com utilização da teoria da elasticidade generalizada (TIMOSHENKO [1980]).

Considerando um carregamento, agora distribuído ao longo da superfície do corpo, em que Z = 0 como na figura 3.13 :

$$P = \iint q(x,y)\cdot dA \qquad (3.62)$$

Como o resultado da influência de uma carga isolada *P* (único no contorno definido na figura 3.14) é uma distribuição dada pelas equações 3.56 a 3.58 (ver figura 3.13 e 3.14), conclui-se que para um carregamento definido por uma função $q(X,Y,\varepsilon)$, a distribuição de tensão resultante a soma das respostas de cada pequena parcela (TIMOSHENKO [1980]).

Segundo HAILING, o somatório das respostas de cada carga é a convolução da resposta de cada parcela individual ao longo do domínio:

$$\sigma_{xx} = -\frac{2}{\pi}\int_{-a}^{a} q(X,Y,\varepsilon)\left[\frac{Y.(X-\varepsilon)^2}{((X-\varepsilon)^2+Y^2)^2}\right].d\varepsilon \qquad (3.63)$$

$$\sigma_{yy} = -\frac{2}{\pi}\int_{-a}^{a} q(X,Y,\varepsilon)\left[\frac{Y^3}{((X-\varepsilon)^2+Y^2)^2}\right].d\varepsilon \qquad (3.64)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{2}{\pi}\int_{-a}^{a} q(X,Y,\varepsilon)\left[\frac{Y^2.(X-\varepsilon)}{((X-\varepsilon)^2+Y^2)^2}\right].d\varepsilon \qquad (3.65)$$

Esse raciocínio pode ser usado da mesma forma para um carregamento tangencial a superfície.

Dessa forma, para um contato elíptico genérico, há o seguinte carregamento:

$$q_o = \frac{3.P'}{2\pi.a.b}\cdot\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{1/2} \qquad (3.66)$$

E para um contato elíptico entre cilindro e plano (caso em que a→∞) tem-se:

$$q_o = \frac{2.P'}{\pi.b}\cdot\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)^{1/2} \qquad (3.67)$$

onde b é dado pela equação (3.46) e *qo* é dado pela equação (3.47)

Usando-se as equações 3.63 a 3.65 e transformando as coordenadas para o mesmo sistema cartesiano, pode-se concluir que:

$$\sigma_{xx} = -\frac{2.P'}{\pi.b}\int_{-b}^{b}\left[1-\frac{\varepsilon^2}{b^2}\right]^{1/2}\cdot\left[\frac{Y.(X-\varepsilon)^2}{((X-\varepsilon)^2+Y^2)^2}\right].d\varepsilon \qquad (3.68)$$

$$\sigma_{yy} = -\frac{2.P'}{\pi.b}\int_{-b}^{b}\left[1-\frac{\varepsilon^2}{b^2}\right]^{1/2}\cdot\left[\frac{Y^3}{((X-\varepsilon)^2+Y^2)^2}\right].d\varepsilon \qquad (3.69)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{2.P'}{\pi.b}\int_{-b}^{b}\left[1-\frac{\varepsilon^2}{b^2}\right]^{1/2}\cdot\left[\frac{Y^2.(X-\varepsilon)}{((X-\varepsilon)^2+Y^2)^2}\right].d\varepsilon \qquad (3.70)$$

Novamente, na condição de máxima tensão de cisalhamento, a expressão da tensão de cisalhamento máxima é dada pelo maior raio do circulo de Mohr:

$$\tau_0 = \left[\left(\frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau^2{}_{xy}\right]^{1/2} \qquad (3.71)$$

A tensão de cisalhamento máxima é mostrada na figura 3.15, no caso de contato linear entre cilindro-plano, e nota-se que o seu valor atinge o maior nível (*0,304.qo* como mencionado anteriormente) em uma distância de *0,67.b* abaixo da área de contato ocorre efetivamente.

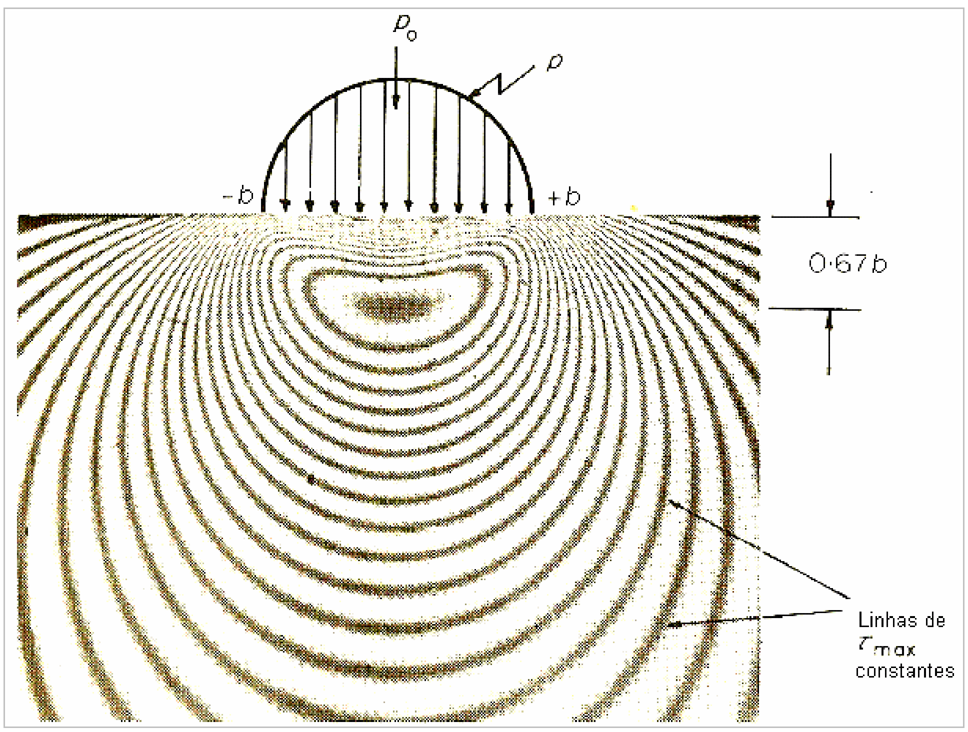


Figura 3.15 – Gráfico do gradiente de tensão gerado no corpo

(Ref: MOORE [1975])

Capítulo 4

LUBRIFICAÇÃO ELASTOHIDRODINÂMICA

4.1 - Introdução

A lubrificação elastohidrodinâmica pode ser descrita brevemente como o estudo do escoamento de um fluido lubrificante na qual ocorrem deformações elásticas nas superfícies que o contornam.

Segundo MOORE, os dois efeitos mais significantes que ocorrem em uma lubrificação elastohidrodinâmica, e não são encontrado em teoria clássica de lubrificação, são a influência de altas pressões no comportamento do fluido (principalmente a viscosidade) e a deformação local de corpos elásticos.

As equações que governam o estado de lubrificação de contatos, bem como determinam o perfil de pressão em filmes de lubrificação são chamadas de equações de Reynolds [1886], que foi o primeiro a estudar e deduzi-las, abrindo-se as portas para análises hidrodinâmicas anos mais tarde.

Sabendo-se que as dimensões dos elementos em contato são bem maiores que a espessura de filme do lubrificante, esta observação justifica a aproximação dessas superfícies curvas para planas sem distorcer a resposta do comportamento do filme lubrificante (DOWSON [1977]).

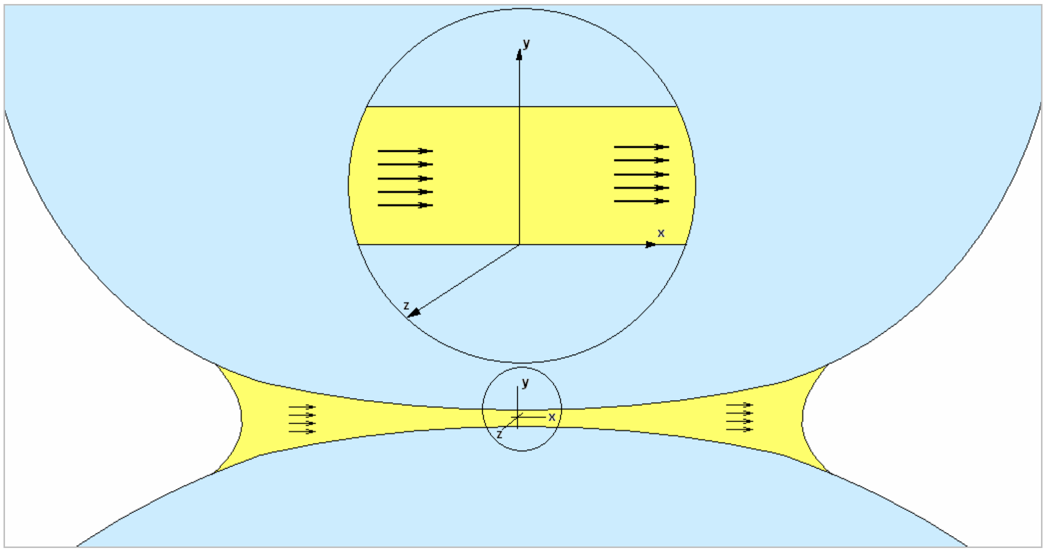


Figura 4.1 – Sistema de coordenada (aproximação da superfície para uma reta) (Ref: MOORE [1975])

Segundo DOWSON, a equação de Reynolds é deduzida a partir da aplicação das equações básicas do momento de fluidos e também a equação da continuidade. A equação completa do movimento, considerando-se o fluido Newtoniano (apesar do comportamento de fluidos especiais para lubrificação elastohidrodinâmica serem, em grande parte, não-Newtonianos, afirma DOWSON & HIGGINSON), pode ser escrita da seguinte maneira em coordenadas cartesianas.

$$\rho \frac{du}{dt} = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{2}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \cdot \eta \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{2}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \cdot \eta \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \eta \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \tag{4.1}$$

$$\rho \frac{dv}{dt} = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{2}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \cdot \eta \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{2}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \cdot \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \eta \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \cdot \eta \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) \tag{4.2}$$

$$\rho \frac{dw}{dt} = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{2}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \cdot \eta \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{2}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \cdot \eta \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \cdot \eta \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \eta \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \tag{4.3}$$

Os termos da esquerda representam os efeitos de forças de inércia e os da direita representam as forças viscosas, forças gravitacionais e de pressão ao longo de um elemento infinitesimal de fluido.

DOWSON introduz a equação da continuidade que representa a conservação da massa no volume de controle, também na forma infinitesimal.

$$\frac{d\rho}{dt}+\frac{d(\rho u)}{dx}+\frac{d(\rho v)}{dy}+\frac{d(\rho w)}{dz}=0 \tag{4.5}$$

Para a representação de filmes lubrificantes, a inércia e as forças gravitacionais podem ser desprezadas se comparadas às forças de pressão e viscosas envolvias. Sendo assim a equação do movimento implica apenas no equilíbrio de forças viscosas e de pressão agindo no volume de controle (regime estacionário). Simplificando-as, tem-se.

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\cdot\eta\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\frac{2}{3}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\cdot\eta\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\cdot\eta\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\cdot\eta\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right) \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\cdot\eta\left(\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{2}{3}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\cdot\eta\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\cdot\eta\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\cdot\eta\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right) \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\cdot\eta\left(\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{2}{3}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\cdot\eta\left(\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\cdot\eta\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\cdot\eta\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right) \tag{4.8}$$

A espessura de filme é definida como sendo a distância entre as superfícies que cercam o fluido lubrificante. Atentando-se à espessura em relação as dimensões do contato, as derivadas das componentes de velocidades u e w com respeito a y são bem maiores do que os gradientes de velocidades se comparados a outros gradientes. No entanto, supondo b o comprimento de contato e h a espessura do filme (ver figura 3.13 e 4.2), o gradiente de pressão pode ser demonstrado como na ordem de (h/b) vezes o gradiente de pressão ao longo do filme, desde que $h \ll l \ll R$, a variação de pressão ao longo do filme é normalmente insignificante. De acordo com DOWSON, essas premissas permitem reduzir essas equações de modo a simplificá-las de tal forma que elas se tornem (simplificação conforme figura 4.2).

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \cdot \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \cdot \eta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \tag{4.11}$$

Com essas condições impostas nas equações 4.9, 4.10 e 4.11, as equações de equilíbrio podem ser diretamente definidas pelo balanço de forças na superfície do elemento de fluido. Entanto é necessário ressaltar que isso é válido somente para fluidos viscosos newtonianos e incompressíveis (segundo MOORE). Caso contrário uma equação de estado deveria ser acrescentada.

Integrando-se as equações 4.09, 4,10 e 4.11 diretamente com respeito a y, chega-se a:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{A(x,z)}{\eta} \tag{4.12}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{y}{\eta} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{B(x,z)}{\eta} \tag{4.13}$$

Expressões gerais para as componentes de velocidades são obtidas quando essas equações são integradas novamente com respeito a y, resultando num perfil mostrado na figura 4.2.

$$u = \frac{\partial p}{\partial x}\int \frac{y}{\eta}dy + A(x,z)\int \frac{dy}{\eta} + C(x,z) \qquad (4.14)$$

$$w = \frac{\partial p}{\partial z}\int \frac{y}{\eta}dy + B(x,z)\int \frac{dy}{\eta} + D(x,z) \qquad (4.15)$$

Nesse estágio será assumido que a viscosidade é função somente de x e z ou simplesmente uma constante, essas equações levam em conta as propriedades do fluido bem como a variação delas ao longo do domínio. Com relação ao contorno, há condições para que as equações sejam válidas, ou seja, para esse caso :

$y=0$, $u = u_1$, $w = w_1$
$y=h$, $u = u_2$, $w = w_2$

Sendo assim, de acordo com essas considerações, a viscosidade não é dependente de y e portanto a equação anterior é simplificada da seguinte forma:.

$$u = \left(1 - \frac{y}{h}\right)u_1 + \frac{y}{h}u_2 - \frac{y(h-y)}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x} \qquad (4.16)$$

$$w = \left(1 - \frac{y}{h}\right)w_1 + \frac{y}{h}w_2 - \frac{y(h-y)}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial z} \qquad (4.17)$$

A equação de Reynolds é formada pela introdução dessas expressões na equação da continuidade (equação 4.5) e integrando com respeito a y, chega-se a equação de Reynolds para o caso em que o regime é permanente. Segundo MOORE, substituindo-se as equações 4.16 e 4.17 em 4.5:

$$\int_0^h \frac{d(\rho u)}{dx} dy + \int_0^h \frac{d(\rho w)}{dz} dy + [\rho.v]_0^h = 0 \qquad (4.18)$$

Esta equação pode ser expandida de outra forma de acordo com o resultado geral da integração por partes, resultando em:

$$\frac{d}{dx}\int_0^h \rho.u.dy + \frac{d}{dz}\int_0^h \rho.w.dy - \rho.u_2.\frac{dh}{dx} - \rho.w_2.\frac{dh}{dz} + [\rho.v]_0^h = 0 \qquad (4.19)$$

Segundo DOWSON, a densidade não varia demasiadamente ao longo do filme, e quando isso também é aceitável, basta apenas substituir a velocidade pelos seus valores em 4.07 e integrá-los dentro de seus respectivos limites. Assim sendo, a equação geral de Reynolds é definida:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho h^3}{12\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho h^3}{12\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho h(u_1 + u_2)}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho h(w_1 + w_2)}{2}\right) - \rho u_2 \frac{\partial h}{\partial x} - \rho w_2 \frac{\partial h}{\partial z} + -\rho(v_1 - v_2) \qquad (4.20)$$

Essa é a equação geral de Reynolds, contudo, a especificação de uma condição de contorno para as velocidades u, v, e w é necessária. Para uma superfície plana não há dificuldades em estabelecê-las. Foi demonstrado anteriormente que as condições de contorno são:

$y=0$, $u=u_1$, $w_1=0$, $v_1=0$

$y=h$, $u=u_2$, $w_2=0$, $v_2=u_2.(\delta h/\delta x)$

Onde h é a espessura do filme de fluido, u1 e u2 são as velocidades na direção x em cada plano respectivamente, segundo a figura 4.2.

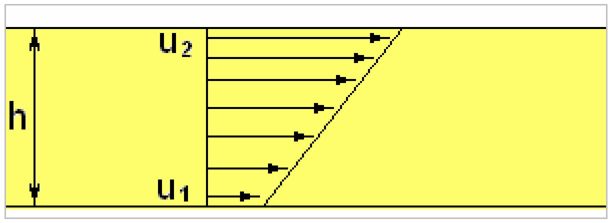


Figura 4.2– Escoamento na lubrificação EHD

Com isso, a equação de Reynolds se resume a :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho h^3}{12\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho h^3}{12\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(\rho.u.h) \qquad (4.21)$$

O problema é calcular a distribuição de pressão no contato e ao mesmo tempo os efeitos que essa pressão tem nas propriedades do fluido e também na geometria de contato. A solução provém também da forma do filme de lubrificante e em particular do mínimo espaçamento entre os sólidos em contato.

DOWSON faz algumas suposições, a fim de tornar esse problema um pouco mais fácil de resolver:

1) Os deslocamentos são calculados para uma condição de contato cilindrico-plano semi-infinito (2D).

2) Vazamentos laterais são desprezados, isto pode ser justificado pela proporção de dimensões da região de pressão, onde a largura é muito maior que o comprimento do contato, ou pelo fato da espessura do filme de lubrificante ser menor que deslocamentos ao longo da região. Sendo assim, qualquer local fechado ou fendas na borda da lubrificação tem pouca influência (dp/dz).

3) As condições de contorno para pressão são : p=0 para a entrada e em uma grande distância da zona de pico de pressão, tem-se p= (dp/dx)=0.

4) Lubrificante é praticamente INCOMPRESSÍVEL.

5) Efeitos térmicos são desprezados, isso garante que propriedades não sejam afetadas com a variação da temperatura. (Considerando-se trabalho em ambiente climatizado). Desconsiderando expansão térmica e aumento térmico de pressão.

A equação 4.21 é resumida a:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\right) = 12.u \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \tag{4.22}$$

Na qual

$$\eta = \eta(p) \tag{4.23}$$

$$h = h_0 + \frac{x^2}{2R} + \Delta \tag{4.24}$$

onde Δ é o deslocamento combinado dos dois sólidos e pode ser calculado através de :

$$\Delta = \delta_1 + \delta_2 = -K' \int_{\varepsilon 1}^{\varepsilon 2} p(\varepsilon)\ln(x-\varepsilon)d\varepsilon \tag{4.25}$$

$$K' = (K_1 + K_2) = \left[\frac{1-\upsilon^2{}_1}{\pi E_1} + \frac{1-\upsilon^2{}_2}{\pi E_2}\right] \tag{4.26}$$

A variação de viscosidade com a pressão (supondo que a viscosidade seja apenas função da pressão, sendo independente da temperatura) é representada, de acordo com DOWSON, com razoável precisão, por uma função exponencial do tipo:

$$\eta = \eta(p) = \eta_0 . \exp(\Omega p) \tag{4.27}$$

Porém é conveniente a transformação da variável pressão (p) para uma pressão adimensional (g) para que a equação de Reynolds não se torne altamente não linear. Portanto a pressão adimensional pode ser estabelecida de tal forma:

$$g = \frac{1}{\Omega}\left[1 - \exp(-\Omega p)\right] \tag{4.28}$$

$$\frac{dg}{dx} = \exp(-\Omega p)\frac{dp}{dx} \tag{4.29}$$

E *"g"* pode ser substituída na equação (4.22), como pressão adimensional num fluido com viscosidade constante η_0. A equação se tornará :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{\eta_0}\frac{\partial g}{\partial x}\right) = 12 . u \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \tag{4.30}$$

Essas equações (4.29 e 4.30) constituem um problema, denominado por DOWSON, como padrão isotérmico. De acordo com ele, uma solução analítica fechada ainda não foi encontrada e portanto usa-se recursos numérico para sua resolução. No entanto, mesmo um procedimento numérico é difícil pelo fato do problema ser iterativo, ou seja, o perfil de pressão gerado resulta na deformação da superfície que altera a espessura do filme e esta por fim acaba alterando novamente o perfil de pressão. DOWSON descreve em sua publicação que há uma convergência no processo iterativo, porém faz-se necessário aplicar algumas condições especiais tais como considerar a velocidade de deslocamento baixa e carregamentos altos.

Um dos primeiros resultados significantes para carregamentos práticos foi obtido por GRUBIN [1949] usando uma simplificação sutil que será demonstrada a seguir.

4.2 - Análise dimensional e Solução numérica

A solução da equação depende da geometria de contato, distribuição de pressão, velocidade e características físicas do fluido lubrificante. Um dos mais importantes feitos práticos (segundo DOWSON) para a solução desse problema é a obtenção da espessura mínima de filme de lubrificante, feita por GRUBIN [1949].

As sete variáveis independentes tem dimensões (L = unidade de comprimento, M = unidade de tempo e T = unidade de tempo) descritas na tabela 4.1 :

Tabela 4.1 – Dimensões de Variáveis (Ref: DOWSON [1977])

H (espessura)	R (raio)	E' (rigidez)	η_o (viscosidade)	Ω (taxa de viscosidade)	P (carga)	u (velocidade)
L	L	M / L T^2	M / L T	L T^2 / kg	M / T^2	L / T

A espessura de filme "h" é governada finalmente por três razões adimensionais que são funções das variáveis descritas na tabela 4.1. Dessa forma, relacionando-se essas variáveis entre si através do procedimento de GRUBIN [1949], que consistia em criar grupos adimensionais entre essas variáveis através da multiplicação dos termos entre si, chega-se a formar novos parâmetros como os descritos nas equações 4.31, 4.32, 4.33 e 4.34.

$$\frac{h}{R} = f\left(\frac{P}{E'R}, \frac{\eta_0 u}{E'R}, \alpha E'\right) \tag{4.31}$$

Essas razões foram denotadas apenas por H,W,U e T, que são respectivamente a espessura de filme adimensional, parâmetro de carregamento, parâmetro de velocidade e parâmetro de Materiais. A saber:

PARÂMETRO DE CARREGAMENTO

$$W = \frac{P}{E'R} \qquad (4.32)$$

Segundo DOWSON [1977], este parâmetro pode variar entre $3x10^{-4}$, corresponde a uma pressão Hertziana equivalente a 15 GPa em aços, e $3x10^{-5}$ correspondente a aproximadamente 0,45 GPa (30 tons/in^2) em aços.

PARÂMETRO DE VELOCIDADE

$$U = \frac{\eta_0 u}{E'R} \qquad (4.33)$$

A mais influente variável, sendo assim, com alta escala de variação (5 ordens de grandeza) que variam em torno de : 10^{-8} a 10^{-13},de acordo com DOWSON [1977].

PARÂMETRO DE MATERIAIS

$$T = \alpha E' \qquad (4.34)$$

Como os valores de rigidez dos materiais não variam muito e também o valor da taxa de variação da viscosidade é constante, esse parâmetro não varia muito e portanto não exerce muita influência em contato metal-metal.

Segundo DOWSON [1977], Grubin examinou com detalhes muitos aspectos da lubrificação EHD. Somente uma parcela desse problema foi analisada sendo necessárias todas as suposições já comentadas anteriormente e assim uma formulação para a espessura de filme foi concebida. Para tal, foi assumido que a deformação das superfícies de contatos seria a mesma no caso de um contato seco (ou seja, desprovido de lubrificação, com distribuição Hertziana).

O deslocamento Hertziano fora da zona de contato é formulado por DOWSON como:

$$H - H_0 = \frac{h - h_0}{R} = \frac{4W}{\pi}\left[X(X^2 - 1)^{1/2} - \ln(X + [X^2 - 1]^{1/2})\right] \qquad (4.35)$$

onde X = x/b e W é o parâmetro de carregamento. Em termos de pressão adimensional, a forma integral da equação de Reynolds é:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 12.\eta_0.u \cdot \left[\frac{h - h_0}{h^3}\right] \qquad (4.36)$$

Escrevendo de forma adimensional, G = g/E'R, e lembrando do capítulo 3 que para um contato do tipo plano-cilíndrico tem-se $h/R = 4(W/2\pi)^{1/2}$, a equação é transformada de maneira adimensional.

$$\frac{\partial G}{\partial X} = 48\left(\frac{W}{2\pi}\right)^{1/2} \cdot U \cdot \left[\frac{H - H_0}{H^3}\right] \qquad (4.37)$$

A pressão reduzida desenvolvida fora da região de contato Hertziano seria :

$$G = 48\left(\frac{W}{2\pi}\right)^{1/2} \cdot U \cdot \int_{-1}^{1}\left[\frac{H - H_0}{H^3}\right]dX \qquad (4.38)$$

Para essa equação integral, GRUBIN convalidou esses valores de forma numérica para um intervalo de valores de H_0 e desenvolveu uma expressão que interpola muito bem esses resultados.

$$Integral \quad de \quad Grubin = \left(\frac{\pi}{2W}\right)^2 \times 0{,}0986\left(\frac{\pi H_0}{2W}\right)^{-11/8} \qquad (4.39)$$

Dessa maneira chega-se a uma expressão:

$$G = 48\left(\frac{W}{2\pi}\right)^{1/2} \cdot U \cdot \left(\frac{\pi}{2W}\right)^{2} \times 0{,}0986\left(\frac{\pi H_0}{2W}\right)^{-11/8} \qquad (4.40)$$

GRUBIN argumentou que a pressão adimensional deveria alcançar significante valor na região de máxima pressão Hertziana, ou seja X=Y=0, cujo valores práticos seriam tão altos que exp(-αp) <<1 devido a alta pressão no contato, resultando em G = 1/α . Substituindo esse resultado na expressão 4.40 chega-se a expressão que fornece o valor da espessura mínima do filme de lubrificante.

$$H_0 = \frac{1{,}95(TU)^{8/11}}{W^{1/11}} \qquad \text{(EQ. De GRUBIN)} \qquad (4.41)$$

Há claro, valores de espessuras que se aproximam muito da realidade, porém são válidas apenas para lubrificação elastohidrodinâmica. No caso em que a lubrificação é hidrodinâmica a espessura já não é uma variável livre já que depende do perfil dos elementos rolantes.

4.3 - Formulação Prática para Espessura de Filme

A integração numérica das equações de Reynolds se faz necessária quando o objetivo do trabalho é avaliar a evolução do gradiente de pressão ao longo do contato, picos de pressões e espessura de filme lubrificante. Situações em que não é necessário tantos detalhes, é preferível trabalhar com a espessura mínima de filme, que já foi desenvolvido por GRUBIN em 1961 e referenciado por DOWSON e HIGGINSON em 1977, a qual o filme lubrificante mínimo está dentro do intervalo determinado pela equação (4.22).

Logo na figura 4.3, Higginson [1977] apresenta a distribuição de pressão e do filme de lubrificante com a variação dos parâmetros de carregamento, velocidade e materiais.

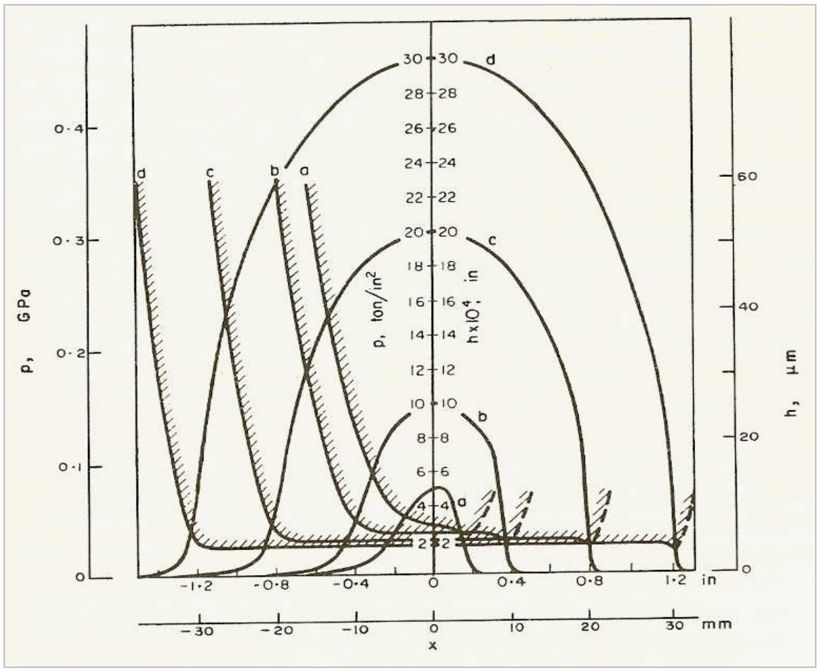


Figura 4.3 - Distribuição de pressão e filmes lubrificantes

(Ref: DOWSON [1977])

a-) Distribuição de Pressão e Filme para viscosidade independente de pressão e cilindros rígidos.

b-) Mesmo gráfico, para viscosidade como função de pressão e cilindros rígidos.

c-) Distribuição de Pressão e Filme para viscosidade independente de pressão e cilindros elásticos.

d-) Mesmo gráfico, para viscosidade como função de pressão e cilindros elásticos.

Comparando-se a figura 4.3 com a figura 3.13, a aproximação da distribuição de pressão elastohidrodinâmica para forma de distribuição de pressão Hertziana é adequada. Além disso é possível notar que a variação da espessura dentro da região de contato é muito pequena a ponto de ser desprezível macroscopicamente (ou seja, a espessura de filme lubrificante é praticamente constante dentro do contato).

DOWSON & HIGGINSON concluem que a influencia de U (parâmetro de velocidade) é preponderante sobre os demais parâmetros, seguido por W (parâmetro de carga) e T (parâmetro de materiais) que é praticamente constante. Com o aumento da carga, a distribuição pode ser assumida como sendo a distribuição semi-elíptica de Hertz.

equação de Grubin $$H_{\min} = \frac{1{,}95(TU)^{8/11}}{W^{1/11}} \tag{4.42}$$

equação de Dowson $$H_{\min} = \frac{1{,}6T^{0{,}6}U^{0{,}7}}{W^{0{,}13}} \tag{4.43}$$

equação de Martin $$H_{\min} = 4{,}9\frac{U}{W} \tag{4.44}$$

As expressões propostas por GRUBIN e DOWSON apresentam uma variação em torno de 20% no valor da espessura mínima de filme lubrificante para cilindros elásticos e viscosidade do fluido dependente da pressão segundo a equação 4.27. Na forma dimensional, as equações descritas anteriormente podem ser convertidas novamente:

$$h_{\min} = 4{,}9\frac{\eta_0 uR}{w} \quad [m] \tag{4.45}$$

A equação de DOWSON e HIGGINSON fica então na forma :

$$h_{\min} = 1{,}6\alpha^{0{,}6}(\eta_0 u)^{0{,}7}(E')^{0{,}03}R^{0{,}43}w^{-1{,}13} \quad [m] \tag{4.46}$$

A figura 4.4 mostra a espessura de filme ao longo de um contato elíptico. A espessura mínima de filme lubrificante não leva em conta o fenômeno de “sparkle” (depressão no final do contato devido a retomada de pressão).

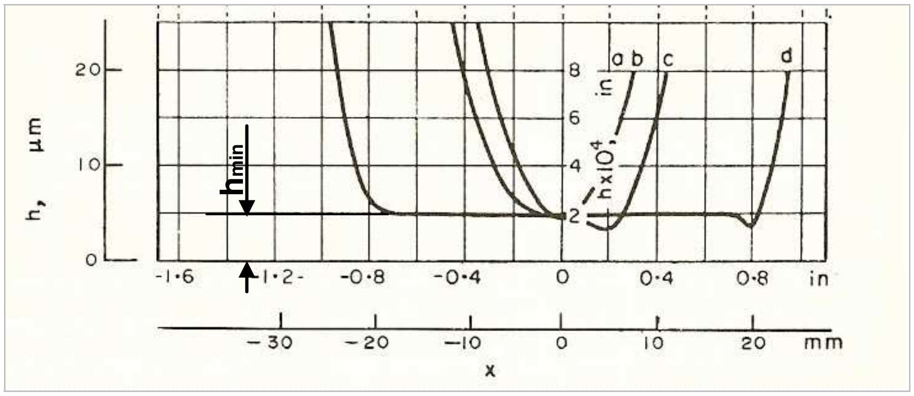


Figura 4.4 – Exemplo de Espessura Minima de Filme (x =0)

(Ref: DOWSON [1977])

Para casos onde o efeito da variação da viscosidade tem influência nitidamente superior ao da deformação elástica dos corpos, é válida a equação de BLOK (referenciada em DOWSON [1977]), dada por:

$$h_{\min} = 1{,}66.\alpha^{2/3}(\eta_0 u)^{2/3} R^{1/3} \quad [m] \tag{4.47}$$

Para a obtenção da espessura mínima de filme lubrificante em contatos elípticos utiliza-se, com maior freqüência, a equação apresentada por COY [1971]. Ela leva em conta a curvatura de ambas superfícies em contato e é dada por:

$$h_{\min} = 2{,}04\left(1+\frac{2}{3}\frac{R_1}{R_2}\right)^{-0,74} (\eta_0 \alpha.u)^{0,74}\left(\frac{E'}{P}\right)^{0,074} R_1^{\;0,407} \quad [m] \tag{4.48}$$

Para determinação da espessura mínima de filme lubrificante em transmissões por tração (como CVTs por exemplo), rolamentos ou componentes em contato, utiliza-se frequentemente a equação 4.32 ou 4.33 para contatos pseudo-lineares e a equação 4.36 para contatos pseudo-pontuais ou elípticos. Os fatores mais influentes na espessura de filme lubrificante são a geometria de contato, viscosidade, velocidades e pressões.

4.4 - Coeficiente de Tração

Como o entendimento do mecanismo físico da transmissão de movimento em contatos lubrificados é bastante complexo e envolve inúmeros fatores, procurou-se, a partir de 1970 estabelecer uma condição comparativa para as características desses mesmos contatos. Associado ao contato submetido à lubrificação EHD, surge o termo TRAÇÃO e sua medida é derivada de características intrínsecas ao próprio contato. A tração envolve inúmeros efeitos acoplados, como o atrito de rolamento, o atrito de escorregamento, a resistência ao cisalhamento do filme lubrificante e os efeitos de pressão e temperatura.

Para medida da tração utiliza-se o coeficiente de tração, dado pela razão entre a força tangencial transmitida e a força normal aplicada em cada contato. Este coeficiente é determinado para condições específicas de temperatura, velocidade, pressão e escorregamento. Com sua utilização, geometrias distintas podem ser comparadas, óleos especificados e a existência da lubrificação EHD estabelecida.

As funções dos lubrificantes EHD são transmitir potência e impedir que haja atrito metal-metal evitando problemas como nucleação de trincas superficiais ou fundição, em outras palavras, aumenta a vida útil dos elementos constituintes da transmissão. Alguns lubrificantes tem maior capacidade de transmitir potência, impedindo que os elementos rolantes escorreguem,.

Comparativamente, lubrificantes elastohidrodinâmicos (EHL) têm coeficientes de tração maiores que de outros óleos convencionais. A região onde os dois elementos de metal entram em contato (região de maior pressão), o óleo EHL passa a ser momentaneamente um sólido, esse processo é também chamado de pseudo-polimerização (ver equação 4.27).

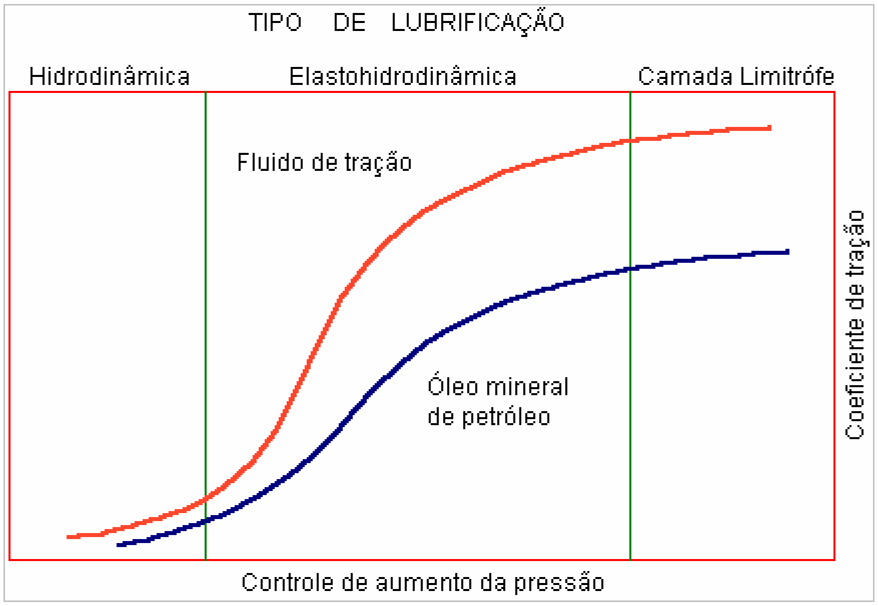


Figura 4.5 – Relação entre o Coeficiente de Tração e lubrificação

(Ref: ADAMS [2002])

O coeficiente de tração dos EHLs varia entre 0,09 e 0,12, cerca de 50% a 100% mais eficiente que os outros lubrificantes. Atualmente, para CVTs, utiliza-se frequentemente óleos da família Santotrac-Santolube por possuírem as seguintes características:

Tabela 4.2 - Características Físicas do Lubrificante SANTOTRAC 50
(Ref: www.santotrac.com)

Aparência:	Líquido amarelo
Pressão de Vapor:	12 mm Hg (à 177º C)
Ponto de Ebulição:	310º C (à 760 mm Hg)
Ponto de Congelamento:	-37º C (à 760 mm Hg)
Densidade:	0.90 g / cm³ (à 25º C)
Viscosidade:	5120 centistokes (à –18º C)
Coeficiente de Tração:	0.095

Do ponto de vista molecular e estrutural, a camada de EHL pode cisalhar se exposta à grandes forças, durante o cisalhamento as moléculas podem ser quebradas em outras de cadeia menor. Por exemplo, de um óleo de cadeia de 30 carbonos para uma cadeia de 20. Do mesmo modo, essas cadeias podem sofrer fusão (pseudo-polimerização) ou alteração de sua forma em temperaturas extremamente baixas, o que os tornam pouco versáteis (Segundo STEVEN).

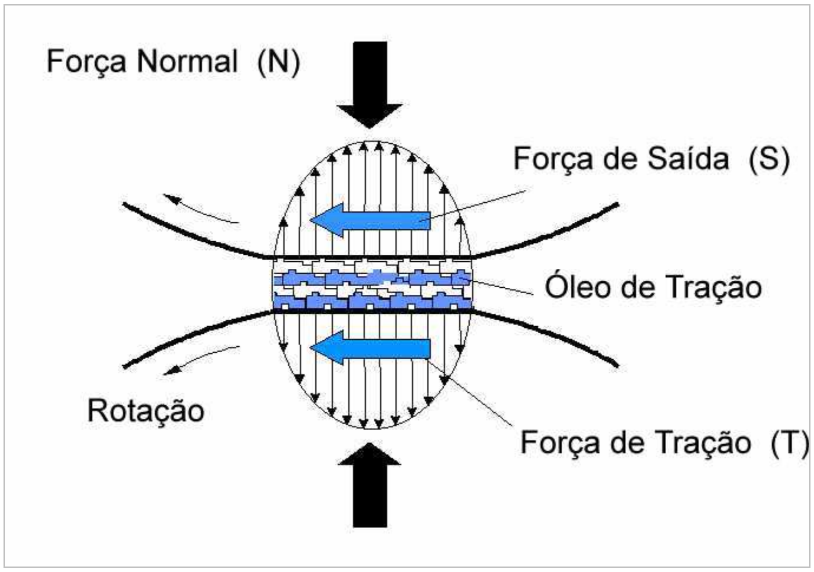


Figura 4.6 – Fenômeno de pseudopolimerização do lubrificante

(Ref: adaptado de STEVEN 1994)

A obtenção deste parâmetro é feita através de ensaios de lubrificantes em máquinas como, por exemplo, a máquina de rolos paralelos. No entanto existem teorias baseadas na equação de Reynolds que permitam estimar qual o valor desse coeficiente.

Segundo DOWSON, a partir da equação de lubrificação de Reynolds, o coeficiente de tração entre um cilindro e um plano infinito é definido como:

$$C_t = \frac{F}{N} = \frac{\int t(x)dx}{\int q(x)dx} = \frac{\int_{-b}^{b} \frac{h}{\eta_0} \frac{dg}{dx}.dx + u(e)\eta_0 \int_{-b}^{b} \frac{1}{h} dx}{\int_{-b}^{b} q(x).dx} \tag{4.49}$$

Onde t(x) e q(x) são respectivamente as pressões de contato tangencial e normal, h é a espessura de filme, *e* o escorregamento e η_0 a viscosidade

HAILING apresentou a Fórmula de Misharin que aproximava o cálculo do coeficiente de tração, baseado em um vasto número de experimentos. A formula pode ser resumida a:

$$C_t = \frac{0{,}325 \times 10^6}{\left[\frac{\eta_0}{\rho_0} \left((1-e)^2 - 1 \right) u^2 \right]^{1/4}} \tag{4.50}$$

onde *e* é o escorregamento, ou seja $e=(u_2-u_1)/u_1$

No entanto, esta fórmula não é válida para valores de escorregamento muito pequenos pois quando $e \to 0$, $C_t \to \infty$. Consequentemente HAILING sugere que esta formulação deve ser aplicada para contatos entre aços com altos escorregamentos lubrificação hidrodinâmica com óleo mineral nas seguintes condições.

$$0{,}2 \leq \frac{e}{2-e} \leq 0{,}65$$

$$q_0 \geq 0{,}25.GPa$$

HAILING também sugere que, para pequenos escorregamentos, o coeficiente de tração se comporta de acordo com a equação 4.51.

$$C_t = \mathrm{C} \frac{e^{(0.5+C)}}{e^{(1-C)} - C} \tag{4.51}$$

A figura 4.7 apresenta a forma típica assumida pelos dados de algumas séries de experimentos para o mesmo tipo de lubrificante, para um escorregamento oscilando entre 0 e 0,2.

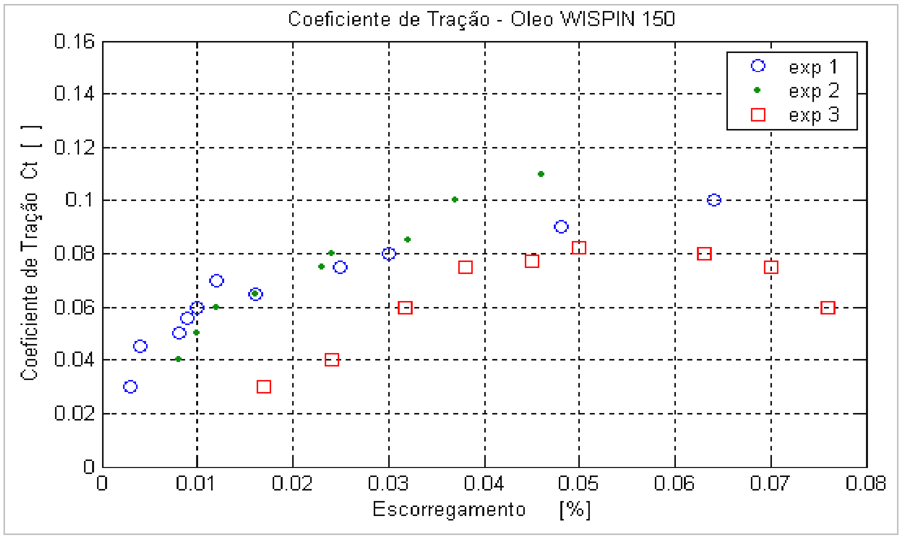


Figura 4.7 –Coeficiente de Tração versus escorregamento *e*.

(Ref: FORTI [2003])

A forma típica da curva do coeficientes de tração (definida pela equação 4.51) em relação ao escorregamento é mostrada na figura 4.9.

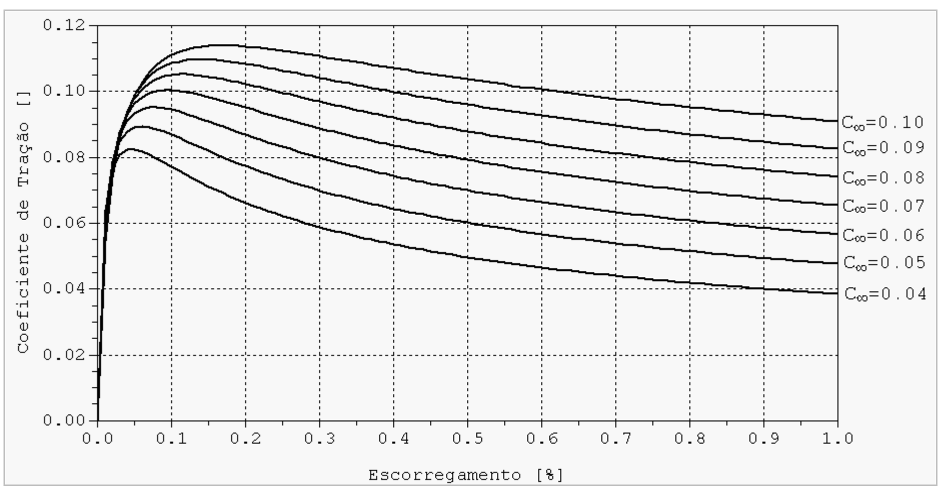


Figura 4.9 – Coeficiente de tração para baixos escorregamentos (e<1%)

(Ref: HAILING [1975])

Por comparação podem-se observar na tabela 4.3os valores de alguns coeficientes de tração obtidos pela bibliografia:

Tabela 4.3 - Características Físicas de Lubrificantes (Ref: FORTI [2003])

LUBRIFICANTE	Coeficiente de Tração
Óleo ester-silicatos	0,045
Parafinicos	0,050
Fluidos Transmissões automáticas	0,055
MIL H-5606 óleo hidráulico	0,060
Óleo naftenico	0,058-0,065
Óleo estero naftenico	0,066
Silicones	0,075
SANTROTAC 30	0,084
SANTOTRAC 40, 50 ,70	0,100

Capítulo 5

EQUAÇÕES DE VIDA EM CONTATO HERTZIANO

5.1 – Introdução

Uma máquina ou equipamento é normalmente projetado de forma a satisfazer condições específicas de resistência e operação. Porém, durante o processo de fabricação desta máquina ou equipamento existe a probabilidade de que alguns fatores se afastem de algum modo das características básicas apropriadas. Deste modo, a homogeneidade dos materiais, o acabamento superficial, o tratamento térmico ou químico, e as dimensões de cada elemento dessa máquina podem sofrer uma dispersão em torno de valores considerados como médios, originando máquinas com uma certa probabilidade de se afastar do ideal. Esta probabilidade pode ser expressa em termos matemáticos e disposta de modo a caracterizar certa forma de distribuição estatística, para a resistência física de um dado lote de máquinas em dado momento.

As condições de operação e a severidade destas sofrem o mesmo tipo de dispersão e também podem ser representadas através de uma distribuição estatística.

Para as mesmas condições de operação, com o passar do tempo e do número de ciclos operados, é de se esperar que haja uma diminuição na capacidade das máquinas de resistir aos esforços originais. A causa pode ser o desgaste por atrito, abrasão, ataques químicos, fadiga dos materiais, e vários outros fatores.

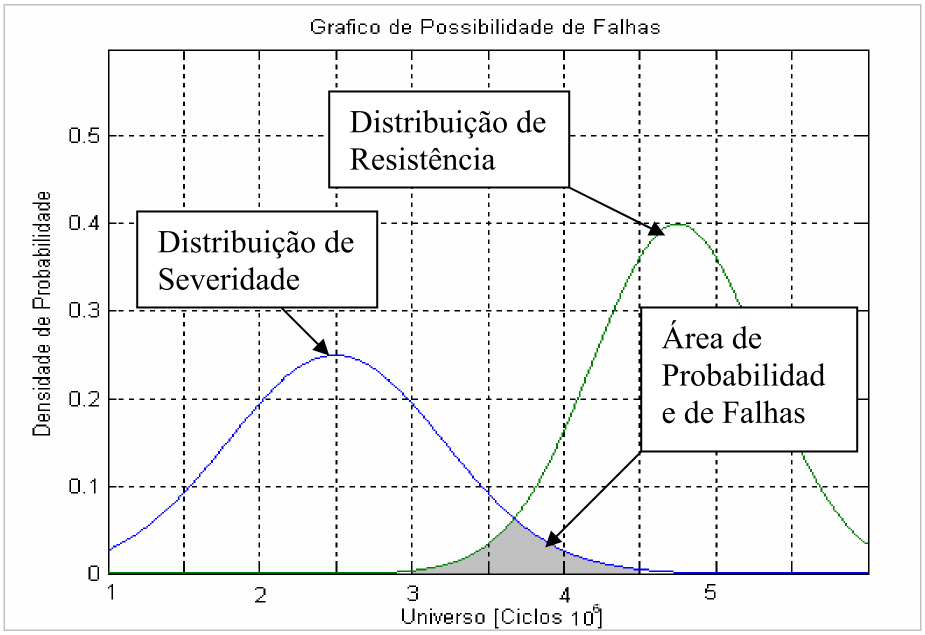


Figura 5.1 – Probabilidade de Falhas de um certo grupo de máquinas

(Ref: DEDINI [1985])

Deste modo, a distribuição de resistência que originalmente não tinha nenhuma área comum com a distribuição das condições de carga (figura anterior) passa com o tempo a se aproximar da segunda distribuição pois a resistência media cai com o tempo as figuras se interferem e a probabilidade de falhas cresce com o tempo.

A falha pode então se manifestar como uma parada total das operações de uma máquina, uma parada temporária, parcial ou uma alteração das condições de funcionamento. Alguns desses estados característicos de máquinas são análogos à morte, perda da função ou simplesmente uma doença em caso de sistemas vivo.

Para organismos vivos, é confiável que este viva um certo tempo estimado com alguma probabilidade de acerto, se este viver em um padrão especificado. Isto é, segundo DEDINI [1985], a confiabilidade de um sistema mecânico é definida como:

“ A confiabilidade de uma máquina é a probabilidade de que ela funcione sem falhas por um certo período de tempo sob condições precisas de funcionamento” (Duccamp)

É bastante comum a utilização dos termos L50 e L10 como sendo o tempo de vida para 50% de probabilidade de falha e tempo de vida para 10% de falha, respectivamente. Estes termos são normalmente usados nas ciências mecânicas.

Neste trabalho (assim como na prática), a distribuição L10 será considerada como preponderante e a ocorrência de falhas será notadamente relacionada com a progressão de fadiga subsuperficial, originado pela tensão de cisalhamento cíclica da camada subsuperficial, nas regiões de contato dos elementos de transmissão.

5.2 - Modelo de Confiabilidade

A probabilidade para que uma falha apareça entre *t* e *t+dt* é igual a *f(t)dt* onde *f(t)* é a densidade de probabilidade de falha.

A probabilidade que uma falha apareça entre t_1 e t_2 é dada pela expressão:

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt \qquad (5.1)$$

Como p(T<t) é a probabilidade de 1 falha entre 0 e t, onde T é o tempo de vida do elemento. Tem-se:

$$p(T < t) = \int_{0}^{t} f(t)dt = F(t) \qquad (5.2)$$

onde *F(t)* é chamada função de partição ou função de probabilidade de falha.

Como a falha acontece durante a vida de uma máquina, a probabilidade de que ela aconteça até um tempo infinito é dada por:

$$p[0,\infty] = 1 = F[\infty] \tag{5.3}$$

Por definição, a confiabilidade R(t) designa a probabilidade de que a duração da vida T seja superior ao tempo t. Isto pode ser escrito da seguinte forma:

$$R(t) + F(t) = 1 \tag{5.4}$$

$$R(t) = 1 - \int_0^t f(t)dt = \int_t^\infty f(t)dt \tag{5.5}$$

$$dR(t) = -f(t)dt \tag{5.6}$$

A probabilidade condicional Pc(t) de que haja uma falha entre *t* e *t*+*dt* é, por definição:

$$Pc(t) = \frac{f(t)dt}{R(t)} \tag{5.7}$$

A taxa de avaria instantânea λ(t) no tempo t é definida como:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} \tag{5.8}$$

Substituindo a expressão 5.3 em 5.1 chega-se a:

$$\lambda(t) = -\frac{1}{R(t)}\frac{dR}{dt} \tag{5.9}$$

Integrando-se a equação 5.9 obtém-se:

$$\int \lambda(t)dt = -\int \frac{dR}{R(t)} \tag{5.10}$$

$$\int \lambda(t)dt = -\ln(R(t)) \tag{5.11}$$

$$R(t) = \exp(-\int \lambda(t)dt) \tag{5.12}$$

Dessa forma, ao ter conhecimento da taxa de avaria instantânea λ, é possível obter uma interessante formulação para a confiabilidade R(t). Atualmente existem diversos modelos de λ, cada um é adequado a um tipo de avaria ou equipamento. De acordo com LOWENTHAL [1977], para vida de contato de rolamento, é usado a distribuição de WEIBULL.

5.3 - Influência das condições de contato na vida de elementos rolantes

Segundo LOEWENTHAL [1977], LundBerg e Palmgreen publicaram um dos seus mais importantes trabalhos no qual se tratava da "Capacidade Dinâmica de Mancais de Rolamentos". Nele, apresentam pela primeira vez a teoria para a falha destes mancais e os resultados de testes para milhares de rolamentos de esferas e rolos.

Essa teoria se baseia no principal mecanismo responsável por falhas de fadiga que é a fadiga superficial ou de rolamento. Esse tipo de falha é característica de elementos que rolam ou se deslocam um sobre o outro, com ou sem atrito, submetidos a uma certa força normal no contato. Rolamentos, engrenagens, rodas de fricção, elementos de tração são exemplos de sistemas mecânicos onde a fadiga superficial é importante.

O deslocamento de um corpo sobre o outro provoca, sob a superfície de contato, o deslocamento do estado de tensão. Isto faz com que determinado ponto interior ao corpo seja submetido a continuas alterações de sentido na tensão de cisalhamento, resultando em um estado de tensão dinâmico de forma alternada simétrica. Na figura 5.2, pode-se observar melhor um esquema de um rolete sobre uma pista plana em três posições subseqüentes.

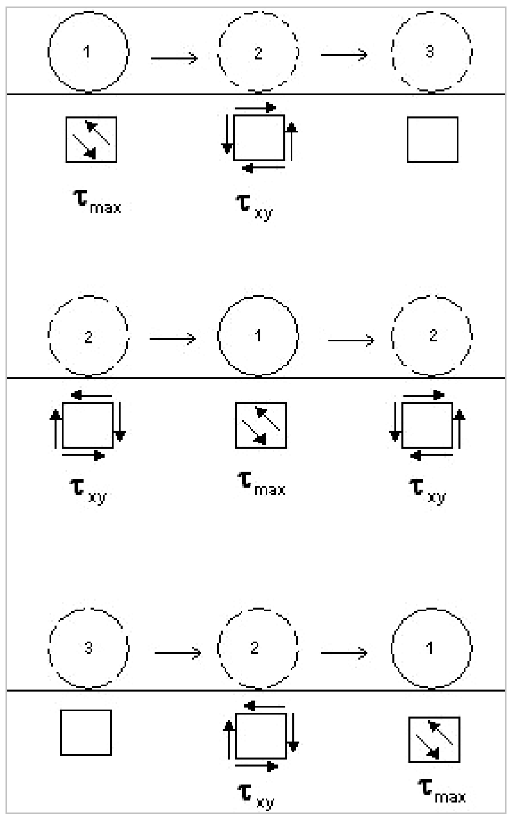


Figura 5.2 – Tensões de cisalhamento alternadas simétricas

(Ref: FORTI [2003])

Na posição 1 há um ponto no interior do material, a uma certa profundidade, que sofre uma tensão de cisalhamento e essa tensão é máxima devido a esse ponto estar exatamente sob a carga aplicada. Na posição 2 o mesmo ponto interior a uma mesma profundidade é submetida a tensão de cisalhamento de sentidos opostos. Essa tensão é alternada simétrica e origina uma processo de fadiga na camada superficial à posição da tensão máxima. Com a passagem dos ciclos, isso acarreta na nucleação de trincas e porventura seu crescimento tendendo a uma fissura até uma determinada profundidade. Na posição 3, o nível de tensão é muito baixo em relação as tensões de contato.

Com a passagem dos ciclos, a fadiga do material acaba por culminar na nucleação de uma trinca ou fissura em uma determinada profundidade do material Ao longo do tempo, essas trincas se deslocam e alcançam a superfície, subtraindo uma porção do material do componente.

Como já mencionado anteriormente, em condições de contato sem atrito, quando a trinca se desenvolve paralelamente a superfície do corpo, ocorre o defeito conhecido como "Spalling".

Forças tangenciais influem muito na geometria das trincas. Nesse caso, as tensões de cisalhamento se aproximam da superfície e o ângulo da tensão de cisalhamento máximo, resultado das forças normais e tangenciais, é alterado de tal modo que as trincas se deslocam para o interior do corpo. A esse efeito é dado o nome de "Pitting".

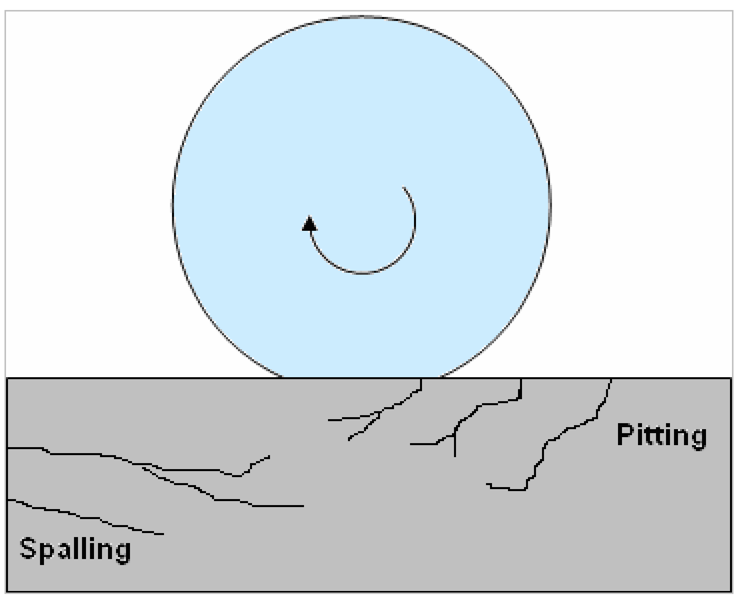


Figura 5.3 – Progressão de trinca superficial

(Ref:adaptado deDEDINI [1985])

Segundo LOEWENTHAL & COY [1976], a probabilidade destas trincas aparecerem prematuramente depende da densidade de defeitos e possíveis pontos de nucleação existentes no material. Dentro desse contexto, é introduzido o conceito de volume total tensionado que é o volume da região sub-superficial onde ocorre a tensão de cisalhamento máxima

Com o aumento do volume total tensionado (teoria de Lundberg & Pamlgreen) no contato, aumenta o número de possíveis focos de nucleação de defeitos. Conclui-se então que a probabilidade de vida para corpos sujeitos à fadiga era inversamente proporcional ao volume total tensionado (Vz) por ocasião de rolamento. Da mesma maneira a probabilidade de vida seria inversamente proporcional à magnitude das tensões geradas.

LOEWENTHAL & COY [1976] afirma que a profundidade (Zo) em que ocorrem as tensões de cisalhamento máximas age de modo diverso: Quanto maior a profundidade, mais longe ficam as tensões máximas internas dos defeitos superficiais, reduzindo o grau de severidade da condição imposta. Sendo assim a probabilidade de vida é diretamente proporcional à profundidade (Zo).

De acordo com a teoria de Lundberg & Palmgreen.

$$\ln\left(\frac{1}{1-F(t)}\right) \propto \frac{\tau_0{}^c \eta^e V_z}{Z_0{}^h} \qquad (5.13)$$

onde Zo é a profundidade de máxima tensão, τ_0 é a tensão cisalhante máxima, V_z é o volume tensionado e η é o número de ciclos

$$h = 2\ {}^{1}\!/_{3} \qquad c = 10\ {}^{1}\!/_{3} \qquad e = {}^{10}\!/_{9} \qquad p/\quad contato \quad eliptico \qquad (5.14)$$

$$h = 2\ {}^{1}\!/_{3} \qquad c = 10\ {}^{1}\!/_{3} \qquad e = {}^{3}\!/_{2} \qquad p/\quad contato \quad linear \qquad (5.15)$$

Pode-se comparar as equações 5.11 e 5.13. Calculando-se o valor de η para F(η) = 0.1, chega-se a expressão que define a vida sob contato de rolamento:

$$H_{10} = \left(\frac{K.Z_0{}^h}{\tau_0{}^c V_z} \right)^{1/e} \tag{5.16}$$

De acordo com DEDINI [1985], a constante de proporcionalidade K foi somente determinada em 1975 por COY após um longo processo estatístico e experimental. Seu valor é assumido como sendo

$$K = 1{,}428 .10^{95} \tag{5.17}$$

A vida em contato, obtida em milhões de ciclos, pode ser convertida em horas por meio da seguinte expressão:

$$H = \frac{\eta}{c_r .\omega} \cdot \frac{10^6}{60} \tag{5.18}$$

onde c_r é o número de ciclos por rotação e ω é a rotação em rpm

Segundo LOWENTHAL [1977] a vida de um sistema completo, composto por vários elementos é obtida pela associação das vidas de todos os componentes, ou seja:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{H}{H_i} = 1 \tag{5.19}$$

onde L é a vida de um sistema e L_i é a vida de cada elemento individual

Se todos os contatos forem elípticos ou se todos forem lineares a expressão pode ser simplificada

$$H = \left(\sum_{i=1}^{n} H_i^{\;-e} \right)^{-1/e} \qquad (5.20)$$

onde L é a vida do sistema inteiro em horas

LOEWENTHAL & COY [1976], em seu trabalho sobre vida de transmissões por tração, variaram parâmetros como torque e tamanho dos componentes da transmissão e assim fizeram algumas afirmações quanto a esses fatores.

A primeira é a afirmação de que a vida é inversamente proporcional ao cubo do torque transmitido. Isso está intrinsecamente relacionado também com a relação de transmissão, ou seja, para uma relação de transmissão que não esteja em 1:1, já significa que a vida é reduzida.

$$H \propto (T_{in})^{-3} \qquad (5.21)$$

A vida também varia com o tamanho ou escala de proporção de contato, ou seja, para um aumento de 10% no tamanho dos elementos de transmissões, a vida equivalente será mais que duplicada.

$$H \propto (tamanho)^{8,4} \qquad (5.22)$$

Outro influente parâmetro é citado por DEDINI [1985] e relaciona a vida à espessura de filme lubrificante nas condições elastohidrodinâmica de contato. Essa expressão foi desenvolvida por Monsanto mas não tem confirmação experimental além das próprias experiência de Monsanto.

$$H \propto (c_t)^3 \tag{5.23}$$

Ou seja, a vida é proporcional ao cubo da razão dos coeficientes de tração.

Em recentes anos, melhorias em rolamentos e análises, materiais, processos de fabricação e técnicas tem em geral aumentado a expectativa de vida de contato em rolamentos para dada aplicação. Além dessas influências há ainda alguns fatores de ajuste para vida que são introduzidos a equação de Lundberg-Palmgreen provendo uma melhor estimativa. Muitos desses fatores são aplicáveis às transmissões por tração do tipo CVT. Esses fatores são (1) fatores de material, (2) fatores de processo e (3) fatores de lubrificação.

5.4 - Análise e desenvolvimento da equação de vida para contato hertziano

Um modelo simplificado de análise de vida por fadiga para contatos em transmissões por tração é usado. Para um elemento rolante de aço, o número de ciclos de tensões antes de ocorrer a falha é dado pela equação 5.16 que é uma forma modificada da teoria de Lundberg Palmgreen para a predição da vida nos contatos por fadiga, e é aplicável a engrenagens, rolamentos, e outros elementos como sendo a máxima tensão cisalhante cíclica ortogonal, que ocorre a uma profundidade Zo como uma medida relativa da distância que a trinca deve percorrer ate atingir a superfície e causar falha.

O volume total tensionado, formulado por Lundberg e Palmgreen e normalmente utilizado por COY em seus cálculos pode ser expresso como:

$$Vz = aZ_0 l = 2\pi RaZ_0 \tag{5.24}$$

Retornando a equação 5.10 e substituindo os valores chega-se (considerando contato elíptico e=10/9):

$$H = \left(\frac{1{,}428.10^{95}.Z_0^{\ 7/3}}{\tau_0^{\ 31/3} V_z} \right)^{9/10} \tag{5.25}$$

É interessante trabalhar com parâmetros adimensionais definidos da seguinte maneira:

$$\tau_0 = \left(\frac{\tau_0}{\sigma_0} \right) \sigma_0 = \left(\frac{\tau_0}{q_0} \right) q_0 \tag{5.26}$$

$$Z_0 = \left(\frac{Z_0}{b} \right) b = \left(\frac{Z_0}{a} \right) a \tag{5.27}$$

$$a^* = \frac{a}{g} \rightarrow a = a^*.g \tag{5.28}$$

$$b^* = \frac{b}{g} \rightarrow b = b^*.g \tag{5.29}$$

Sendo $g = \left(\frac{3P}{\rho} \left(\frac{1 - \nu 2}{E} \right) \right)^{1/3}$ e $\rho = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

Fazendo-se todas as substituições na equação 5.16 tem-se:

$$H = \left(\frac{1{,}428.10^{95}.\left(\frac{Z_0}{b} \right)^{7/3}.(b^*)^{38/3}.(g)^{38/3}.(a^*)^{31/3}.(g)^{31/3}}{2\pi R.\left(\frac{\tau_0}{q_0} \right)^{31/3}.\left(\frac{3}{2\pi} \right)^{31/3}.\left(\frac{Z_0}{b} \right).P^{31/3}.(b^*)g(a^*)g} \right)^{9/10} \tag{5.30}$$

Como, em contato pseudo-pontual elíptico, $q_0 = \frac{3}{2}\frac{P}{\pi.a.b}$ chega-se à segunda forma da expressão:

$$H = \left(\frac{K_1.\left(\frac{Z_0}{b}\right)^{4/3}.(b^*)^{35/3}.(a^*)^{28/3}.(g)^{21}}{R.\left(\frac{\tau_0}{q_0}\right)^{31/3}.\left(\frac{Z_0}{b}\right).P^{31/3}} \right)^{0,9} \tag{5.31}$$

onde $K_1 = 2{,}32.10^{19}$

Introduzindo os grupos adimensionais vistos anteriormente.

$$K_2 = \left(\frac{Z_0}{b}\right)^{4/3}.\left(\frac{\tau_0}{q_0}\right)^{-31/3}.(b^*)^{35/3}.(a^*)^{28/3} \tag{5.32}$$

Sabendo-se que $g = 2{,}363.10^{-4}P^{1/3}\rho^{-1/3}$ chega-se finalmente a:

$$H = (K_1 K_2)^{0.9}(P)^{-3}(\rho)^{-6.3}R^{-0.9} \tag{5.33}$$

Para o contato linear, a dedução segue o mesmo padrão da dedução da equação 5.31, claro que com algumas diferenças relativas à geometria de contato e às condições de carregamento.

$$V_z = \frac{3}{4}f.2.\pi.R.Z_0 \tag{5.34}$$

onde *f* é o comprimento dos rolos

Substituindo-se essa expressão na equação 5.16 chega-se a:

$$H = K_5 f^{21/9} P^{-3} R_A^{29/9} \left(1 + \frac{R_A}{R_B}\right)^{-35/9} \qquad (5.35)$$

onde $K_5 = 4{,}21.10^{25}$ e é um número adimensional assim como K_1

Estas equações permitem calcular a vida L10 para contato elíptico e linear. A maioria dos problemas de contato em uma transmissão pode ser simplificado por uma combinação desses dois tipos de contato.Os valores de K1 e K5 foram obtidos experimentalmente e o tempo de vida depende, em suma, de vários fatores como geometria de contado, tamanho dos componentes, eixo de rotação, rotação, cargas impostas e o tipo de material.

5.5 - Mecânica do "Slip-Spin"

Considerando dois corpos sujeitos a um carregamento normal e um tangencial subseqüentemente transmitido por tração através da zona de contato. Naturalmente pode-se assumir um carregamento do tipo Hertziano nessa zona e que essa distribuição de pressão normal não seja afetada pela presença de forças tangenciais.

Segundo KALKER [1982], no caso em que o escorregamento total ("Slip" do inglês) ocorre em toda a região de contato, a força de tração T total da superfície será $C_t.P$ onde C_t é o coeficiente de tração para aquele nível de escorregamento e em algum ponto da região de contato o cisalhamento superficial τ_{xy} será dado por $C_t.q_0$.

Este caso é extremo, porém para casos intermediários (com escorregamentos parciais, ou "Slip"), KALKER [1982] desenvolveu um algoritmo chamado FASTSIM para calcular o *"slip"* na área de contato hertziana. Esse estudo foi feito inicialmente com rodas e trilhos ferroviários mas sofreu alguns aperfeiçoamentos ao longo dos anos.

Se for considerada a esfera da figura 5.3 em um movimento de rolamento em um plano, o movimento desse rolo (ou esfera) é caracterizada pela sua velocidade de rolamento *V* que é, a grosso modo, a velocidade de translação de corpo rígido. O *"creepage"* ($\upsilon_x;\upsilon_y$) caracteriza a taxa de deformação do material, dependente da velocidade de rotação e do desalinhamento do rolo (ou esfera). O *"spin"* é relacionado com a conicidade do plano de contato e do eixo de rotação do(s) elemento(s) rolante(s).

Segundo o modelo simplificado de Kalker, na área de contato, *"Slip"* e tração estão ligados pela lei de Coulomb.

$$|T| \leq Ct \cdot P \tag{5.36}$$

$$|w| \neq 0 \Rightarrow \vec{T} = -Ct \cdot P \cdot \frac{\vec{w}}{|w|} \tag{5.37}$$

onde "*P*" é a pressão normal ao contato, "*Ct*" é o coeficiente de tração entre as duas superfícies e *w* é o vetor de escorregamento("Slip").

No caso de rolamento em regime permanente (sem alteração em nenhuma dessas características mencionadas anteriormente), o *"slip"* vai depender somente do deslocamento diferencial *u*, a qual é a diferença entre o deslocamento dos elementos de contato. Esses elementos são considerados como diferenciais e tendem a ser tão pequenos quanto se queira, porém é válida essa aproximação somente dentro da área de contato, fora dela, a equação a seguir não é mais válido.

$$u = u_1 - u_2 = (u_x; u_y) \tag{5.38}$$

$$w = (w_x, w_y) \tag{5.39}$$

e

$$\frac{w_x}{V} = \upsilon_x - \phi \cdot y - \frac{\partial u_x}{\partial x} \tag{5.40}$$

$$\frac{w_y}{V} = \upsilon_y - \phi \cdot x - \frac{\partial u_y}{\partial x} \tag{5.41}$$

onde *u* é o deslocamento do elemento diferencial, *w* é o *"slip"*, *υ* é o *"creepage"* e *V* é a velocidade de rolamento, esta equação é válida somente para a área de contato $[x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1]$

Uma terceira relação é necessária, sendo assim a conexão entre a tração e o deslocamento, dentro da teoria linear simplificada desenvolvida por Kalker, tem-se :

$$u_x = L_x \cdot T_x \tag{5.42}$$

$$u_y = L_y \cdot T_y \tag{5.43}$$

onde L_x e L_y são os parâmetro de flexibilidades nas direções x e y, Tx e Ty as componentes da pressão tangencial devido a força trativa no contato

Porém, se o material for considerado isotrópico, então L_x=L_y=L_3. Substituindo-os no conjunto de equações 5.40 e 5.41, verifica-se então:

$$\frac{w_x}{VL_3} = \frac{\upsilon_x}{L_1} - \frac{\phi \cdot y}{L_3} - \frac{\partial T_x}{\partial x} \tag{5.44}$$

$$\frac{w_y}{VL_3} = \frac{\upsilon_y}{L_2} + \frac{\phi \cdot x}{L_3} - \frac{\partial T_y}{\partial x} \tag{5.45}$$

onde T_x e T_y são a deformação do elemento de área de contato

Os valores de elasticidade linear L_1,L_2 e L_3 são determinados de tal forma que a equação linear exata 5.23 seja satisfeita. A teoria linear é obtida se o conjunto de equações é resolvido para $w_x = w_y = 0$ e $(T_x, T_y) = (0,0)$ definidos nos contornos da área de contato. Através da integração das equações 5.44 e 5.45, a tração dentro da área de contorno é estabelecida como:

$$T_x(x,y) = \left(\frac{\upsilon_x}{L_1} - \frac{\phi \cdot y}{L_3}\right) \cdot \left(x - \sqrt{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}\right) \tag{5.46}$$

$$T_y(x,y) = \left(\frac{\upsilon_x}{L_1}\right) \cdot \left(x - \sqrt{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}\right) + \frac{\phi \cdot y}{2.L_3}\left(x^2 + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) \tag{5.47}$$

Kalker integrou essa solução simplificada linear na área de contato e comparou essa solução com a solução exata (5.44 e 5.45), assim chega-se a :

$$\int T_x(x,y).dx.dy = -\frac{8a^2 b \upsilon_x}{3L_1} = -C_{11}.\upsilon_x.a.b.G \tag{5.48}$$

$$\int T_y(x,y).dx.dy = -\frac{8a^2 b \upsilon_y}{3L_2} - \frac{\pi.a^3.b.\phi}{4L_3} = -C_{22}.\upsilon_y.a.b.G - C_{23}.\left(\sqrt{a.b}\right)^3.G.\phi \tag{5.49}$$

onde a, b são as dimensões da área de contato, G é a rigidez do material, υ_x e υ_y são os coeficientes de *"creepage"* e C_{11}, C_{22}, C_{23} são as constantes da solução exata.

Segundo Kalker, L_3 não é dependente da variável *"spin"* e difere muito dos valores de $L2$ e $L1$, que entre eles não há uma diferença muito grande.Esses valores são calculados através das constantes C_{11}, C_{22} e C_{23} (da solução da solução exata) e é mostrado na tabela 5.1.

Tabela 5.1 – Constantes L_1, L_2, L_3 e C_{11},C_{22} e C_{23} (Ref: KALKER [1982])

b/a	L_1G/a	C_{11}	L_2G/a	C_{22}	L_3G/a	C_{23}
0,1	0,23	11,60	0,21	12,70	0,17	14,61
0,3	0,42	6,35	0,42	6,35	0,33	4,35

1	0,62	4,10	0,73	3,65	0,53	1,48
3,33	0,78	3,42	0,97	2,75	0,60	0,72
10	0,81	3,30	1,06	2,52	0,53	0,47

A solução numérica para este problema consiste em discretizar a área de contato em diversas pequenas área. A cada pequena área é aplicada a equação em diferenças finitas, mas obedecendo uma outra condição, a Lei de Coulomb. Desse modo tem-se:

Se $T(i,j) \leq Ct \cdot P(i,j) \therefore$ (dentro da Lei do Coulomb)

$$T(i,j) = \sqrt{T_x(i,j)^2 + T_y(i,j)^2} \tag{5.50}$$

$$w_x = w_y = 0 \tag{5.51}$$

Caso contrário tem-se $T(i,j) \geq Ct \cdot P(i,j) \therefore$ (violação da Lei de Coulomb)

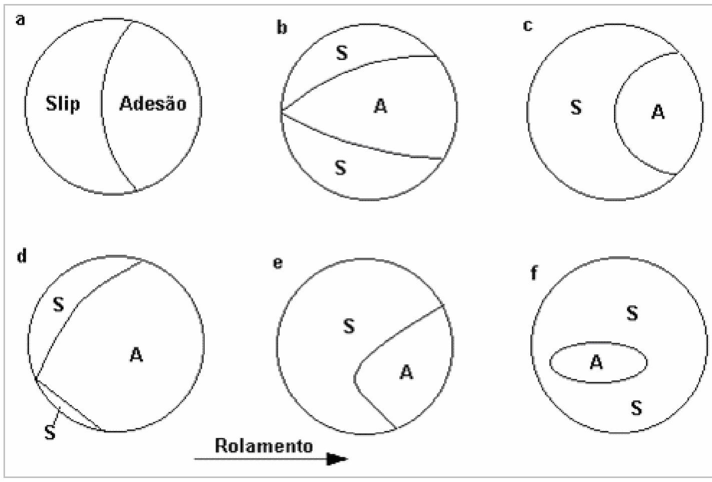
$$T(i,j) = Ct \cdot P(i,j) \tag{5.52}$$

$$\frac{w_x(i,j)}{VL_3} = \frac{\upsilon_x}{L_1} - \frac{\phi \cdot y(i,j)}{L_3} - \frac{T_x(i,j) - T_x(i-1,j)}{x(i,j) - x(i-1,j)} \tag{5.53}$$

$$\frac{w_y(i,j)}{VL_3} = \frac{\upsilon_y}{L_2} + \frac{\phi \cdot x(i,j)}{L_3} - \frac{T_y(i,j) - T_y(i-1,j)}{x(i,j) - x(i-1,j)} \tag{5.54}$$

onde $T(i,j) = (T_x(i,j)^2 + T_x(i,j)^2)^{½}$ representa a pressão tangencial, i e j representam índices de cada elementos nas suas respectivas coordenadas x e y.

O resultado dessa equação mostra o estado do contato com relação a estas variáveis. De acordo com a figura 5.4, existem 6 patamares básicos:



Tipo	Descrição
a)	Creepage Puro
b)	Spin Puro
c)	Creepage Lateral com Spin
d)	Creepage Longitudinal com Spin
e)	Caso geral de Spin
f)	Grande Spin

Figura 5.4 – Exemplo de Casos de Slip na área de contato

(Ref: FORTI [2003])

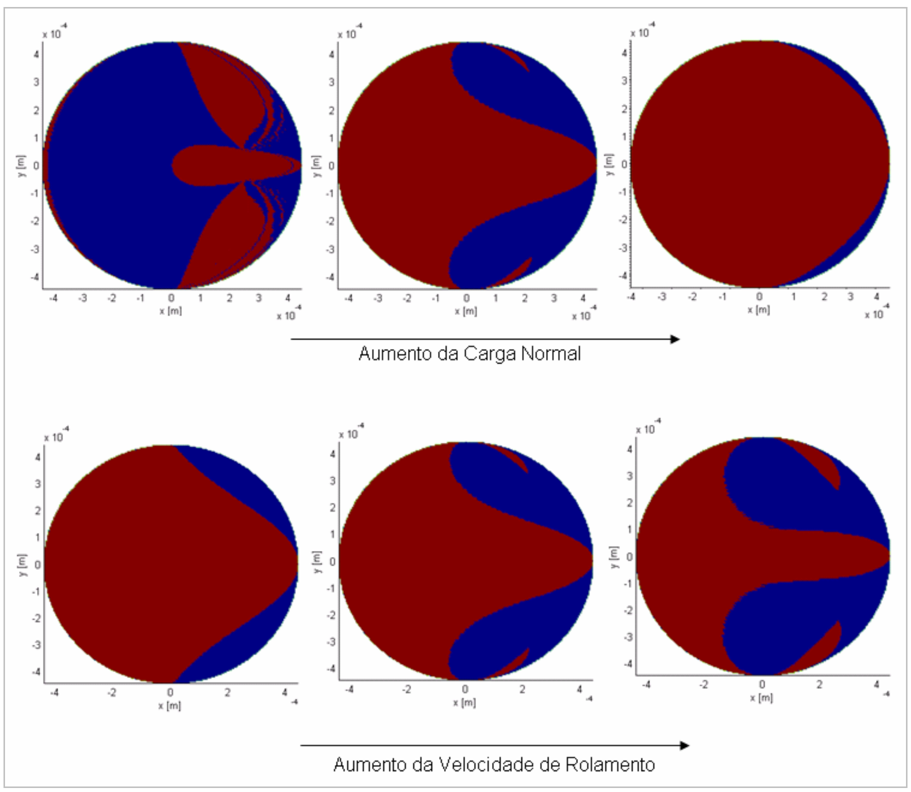


Figura 5.5 – Simulação da área de contato variando-se carga e velocidade

Enquanto o “Slip” é dependente não somente da geometria de contato mas também da carga que está sendo aplicada e do coeficiente de tração que está sendo submetido o contato, o “spin” depende exclusivamente da geometria de contato. Ele ocorre geralmente quando os elementos de rolamento possuem eixos de rotação não paralelos. Esta característica está inevitavelmente presente em todas as CVTs por tração que mudam de configuração para variar a velocidade.

A geometria da CVT esfera-cone é mostrada na figura 6.2, a velocidade angular dos elementos rolantes 1 e 2 (respectivamente cone e esfera) são dadas por ω_1 e ω_2. As velocidades angulares perpendiculares ao plano tangencial no contato tangencial são dadas por $\omega_1 sen(\alpha)$ *e* $\omega_2 sen(\beta\text{-}\alpha)$ respectivamente nos elementos rolantes 1 e 2, sendo α o ângulo entre o eixo de rotação e o plano de contato tangencial, e β o ângulo entre os dois eixos de rotação. O “spin” é a diferença de velocidade angular relativa perpendicular à área de contato, e pode ser expressa da seguinte forma:

$$\phi = \omega_1 sen(\alpha) - \omega_2 sen(\beta - \alpha) \qquad (5.55)$$

Como a relação de velocidades é:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = (1 + w) \cdot \frac{R_2}{R_1} \approx \frac{R_2}{R_1} = A \qquad (5.56)$$

onde w é o escorregamento total (“creepage”)e $A = R_1/R_2$ é a relação dos raios no contato entre cone (R_1) e esferas (R_2).

Sendo assim, a equação (5.55) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\psi = sen(\alpha) - A.sen(\beta - \alpha) \qquad (5.57)$$

onde $\psi = \phi / \omega_1$ chamado de coeficiente de influência de spin.

O coeficiente de influência de "spin" é a razão entre o movimento de "spin" e a velocidade angular de entrada. Por essa razão descrever as relações cinemáticas entre os dois elementos rolantes é necessária. Em geral R_1, R_2, α e β variam permitindo a mudança de velocidades angulares dos elementos rolantes e consequentemente ψ também muda. Para o caso de rolamento puro, que é uma condição na qual a perda de potência é a mínima possível em transmissões por tração, o fator de spin $\psi = min\ (\psi)$, *portanto* uma relação de transmissão o mais próxima da relação 1:1 (ver capítulo 7).

As figuras 5.6, 5.7 e 5.8 apresentam a influência da geometria no fator de spin. Pode-se observar que quanto maior o valor da variável A, mantendo-se α constante, maior é o fator de spin. Da mesma forma, quanto maior o A, maior a inclinação da elipse que relaciona β (ângulo de inclinação das esferas da CVT) e α (ângulo de inclinação dos cones da CVT).

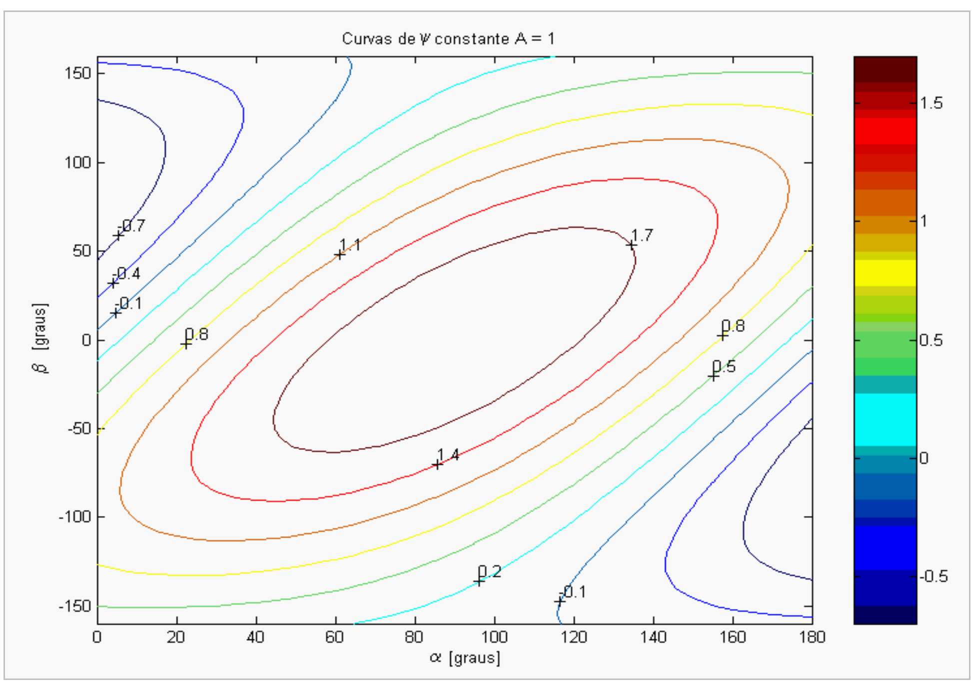


Figura 5.6 – Curvas de ψ constante para A = 1

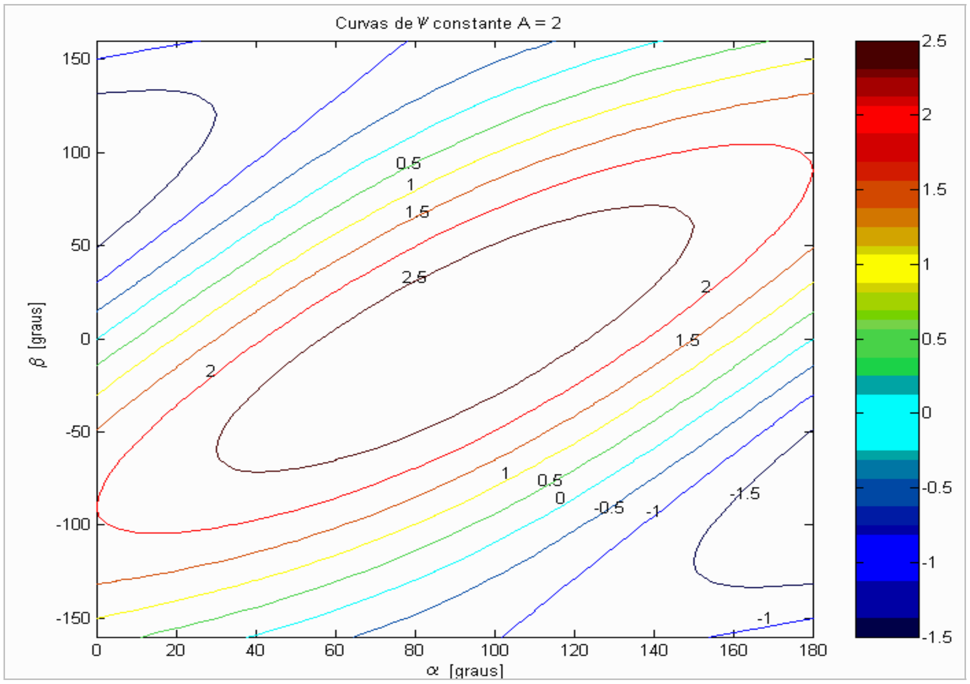


Figura 5.7 – Curvas de ψ constante para A = 2

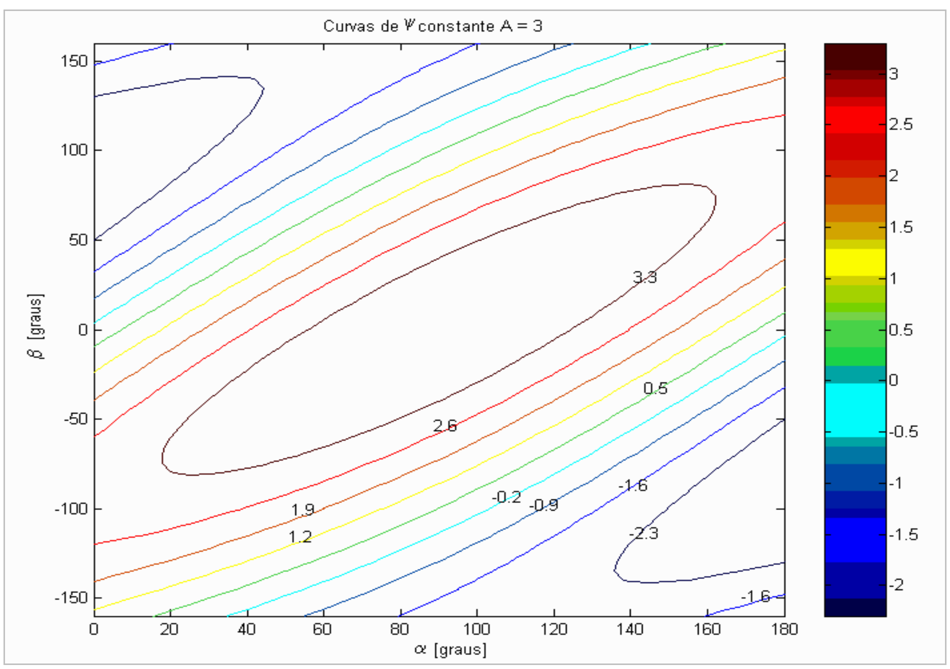


Figura 5.8 – Curvas de ψ constante para A = 3

Nas CVTs do tipo esfera-cone, o ângulo do cone α é constante para uma dada configuração. Por esse motivo a curva $\psi = f(A,\beta)$ (α constante) é mais representativa. No caso da CVT de FORTI, segundo a sua geometria com angulo $\alpha = 30^o$, a região de operação da transmissão depende de β variando entre -30^o e 30^o e A variando entre 1.5 e 3.5, conforme a figura 5.9.

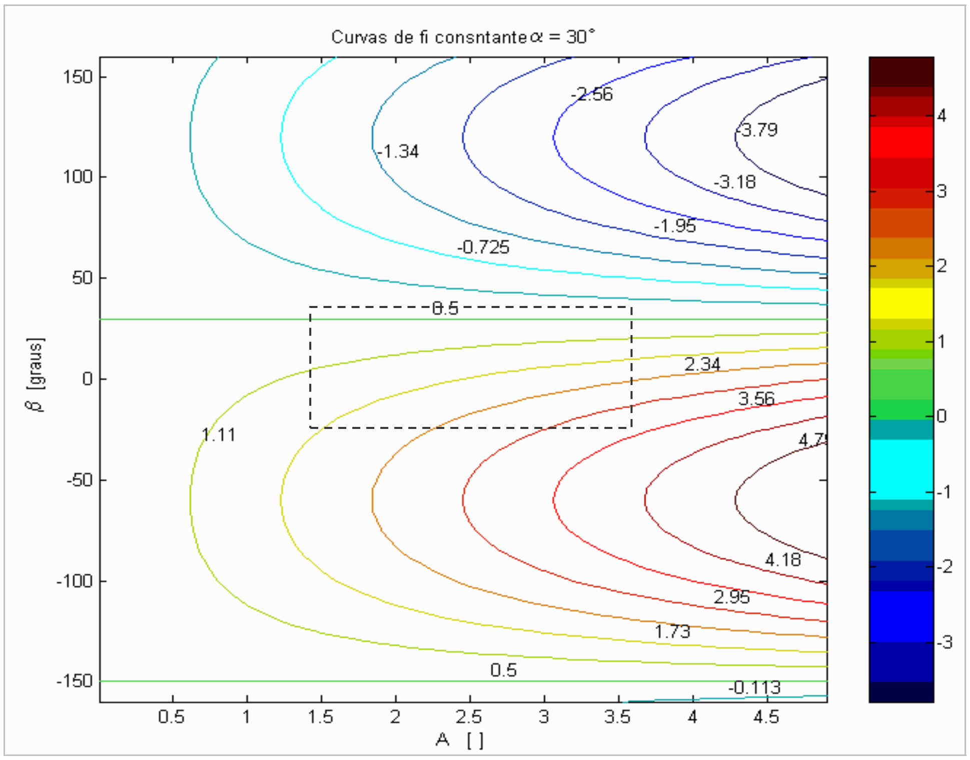


Figura 5.9 – Curvas de ψ constante para α = 30º

À medida que a relação de transmissão aumenta, para um mesmo valor de α (ângulo de conicidade da CVT), A também aumenta uma vez que o diâmetro da esfera é constante. Assim é evidente que quanto mais perto β for de α, menor é o fator de spin.

Seria ideal que o fator de spin fosse nulo, porém esse valor indica que há rolamento puro, ou seja, sem ângulos de inclinação entre elementos de contato e consequentemente relação de transmissão 1:1

Capítulo 6

APRESENTAÇÃO DA TRANSMISSÃO CVT ESFERA-CONE

6.1 - Introdução

As CVTs por tração diferenciam-se basicamente pela forma dos elementos rolantes em contato. Optou-se pela análise de uma TD-CVT tipo esfera cone basicamente em função das suas formas geométrica serem relativamente simples e pelo fato de haver dados de projeto da mesma.

Esse capítulo apresenta o princípio de funcionamento e analisa as características construtivas da CVT em questão. Discorre-se também sobre as equações cinemáticas e o diagrama de corpo livre do sistema alem da formulação das forças normais e tangenciais..

6.2 - Princípio de funcionamento de uma CVT esfera-cone

A Figura 6.1 mostra três configurações possíveis da CVT proposta, diferenciando-se apenas pela inclinação do eixo de rotação da esfera, e, consequentemente, pela variação dos raios relativos nos pontos de contato esfera cone (linhas tracejadas perpendiculares ao eixo de rotação da esfera). A configuração da Figura 6.1(a) representa ampliação de movimento, ou seja, a velocidade no cone de saída é maior do que no cone de entrada, uma vez que, o raio relativo da esfera no contato com o cone de entrada é maior do que com o cone de saída. Em contra partida, na configuração da Figura 6.1(c) a velocidade no cone de saída é menor do que no cone de entrada, representando assim, uma redução de movimento. Já na Figura 6.1(b) há uma relação de transmissão 1:1.

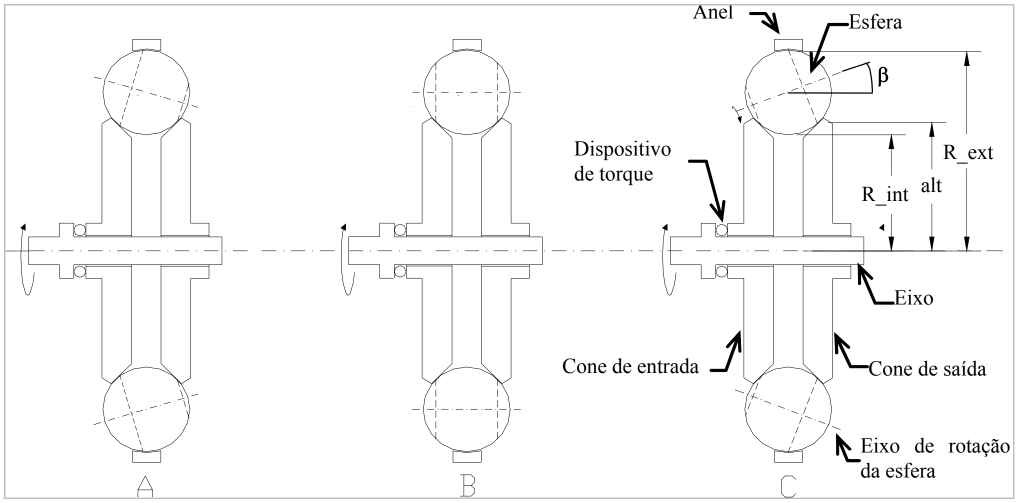


Figura 6.1 – CVT Wagner Forti, (A) ampliação, (B) relação 1:1 e (C) redução

(Ref: FORTI [2003])

6.3 - Variação da Relação de Transmissão através das esferas

A Figura 6.2(a) apresenta uma esfera da transmissão, sendo C e D pontos de contato da esfera com os cones de entrada e saída respectivamente, Figura 6.2(b).

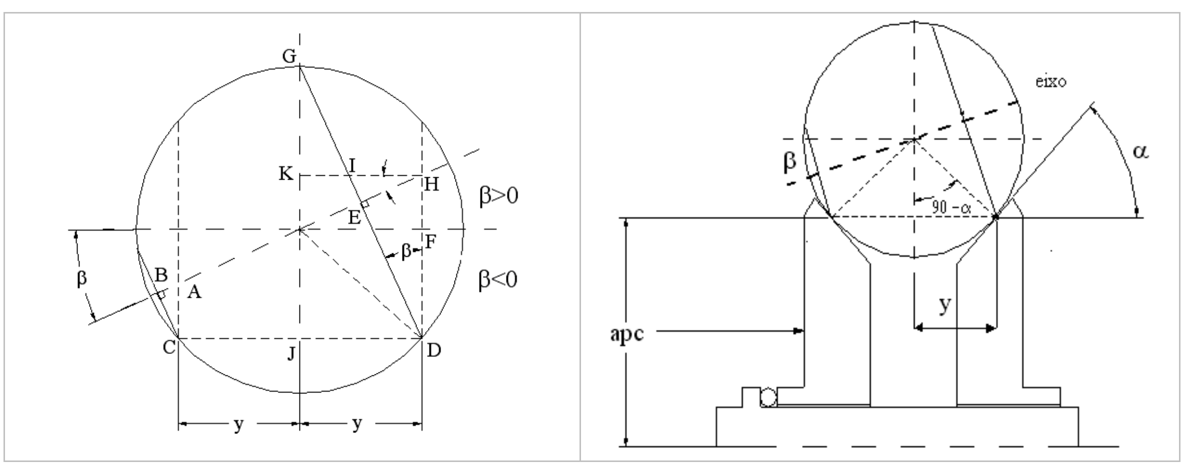


Figura 6.2 – Relação de Transmissão através da inclinação do eixo da esfera

(Ref: FORTI [2003])

A relação de transmissão rt é dada por:

$$rt = \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}} \tag{6.1}$$

sendo: $\begin{cases} \overline{BC} = \left[\overline{FD} - y\tan(\beta)\right]\cos(\beta) \\ \overline{DE} = \left[\overline{FD} + y\tan(\beta)\right]\cos(\beta) \end{cases}$ $\quad e \quad \overline{FD} = \sqrt{\left(\overline{OD}\right)^2 - y^2}$ = constante = c1

Sabendo-se que $\overline{\mathrm{OD}}$ (raio da esfera), e y são constantes, numa dada montagem, o valor de rt é função apenas de β.

$$rt = \frac{c1 - (y\tan(\beta))}{c1 + (y\tan(\beta))} \tag{6.2}$$

Portanto:

rt > 1 $\overline{BC} > \overline{DE} \quad e \quad \beta < 0$ redução do movimento

rt = 1 $\overline{BC} = \overline{DE} \quad e \quad \beta = 0$ entrada = saída

rt < 1 $\overline{BC} < \overline{DE} \quad e \quad \beta > 0$ ampliação do movimento

Fazendo-se o caminho inverso ao da Equação 6.2, pode-se fazer β em função de rt,

$$\tan(\beta) = \frac{c1\,[1 - rt]}{y\,[rt + 1]} \tag{6.3}$$

Por meio das Equações 6.2 e 6.3, nota-se que a distância *y* está diretamente ligada a faixa de variação da relação de transmissão. Para uma transmissão, a faixa de relação de transmissão variando de 1:2 ~2:1 (0.5 ~ 2), defini-se o fator *overrange* como sendo a divisão dos extremos da faixa da relação de transmissão. Assim sendo, para a faixa de 1:2 ~ 2:1 o *overrange* tem valor 4.

$$\overline{DE} = 2\,\overline{BC} \tag{6.4}$$

Substituindo 6.4 na equação 6.2 tem-se:

$$c1 + y\ \tan(\beta) = 2\ (c1 - y\ \tan(\beta)) \tag{6.5}$$

$$-c1 + 3y\tan(\beta) = 0 \tag{6.6}$$

Lembrando-se que $c1 = \sqrt{\left(\overline{OD}\right)^2 - y^2} = \sqrt{r^2 - y^2}$

$$3y\tan(\beta) = \sqrt{r^2 - y^2} \tag{6.7}$$

$$y = \sqrt{\frac{r^2}{9\ \tan(\beta)^2 + 1}} \tag{6.8}$$

De modo similar pode-se encontrar os valores de *y* para *overrange* de 6.25 (1:2,5 ~2,5:1):

$$y = \sqrt{\frac{2.25\ r^2}{12.25\ \tan(\beta)^2 + 2.25}} \tag{6.9}$$

e, para *overrange* de 9 (1:3 ~ 3:1) o valor de *y* correspondente será:

$$y = \sqrt{\frac{r^2}{4\ \tan(\beta)^2 + 1}} \tag{6.10}$$

A Figura 6.3 mostra a relação entre α, β e o fator *overrange*. No caso da CVT tomada como objeto de estudo, os valores projetados são β = 60 e *overrange* = 4, consequentemente α = 30.

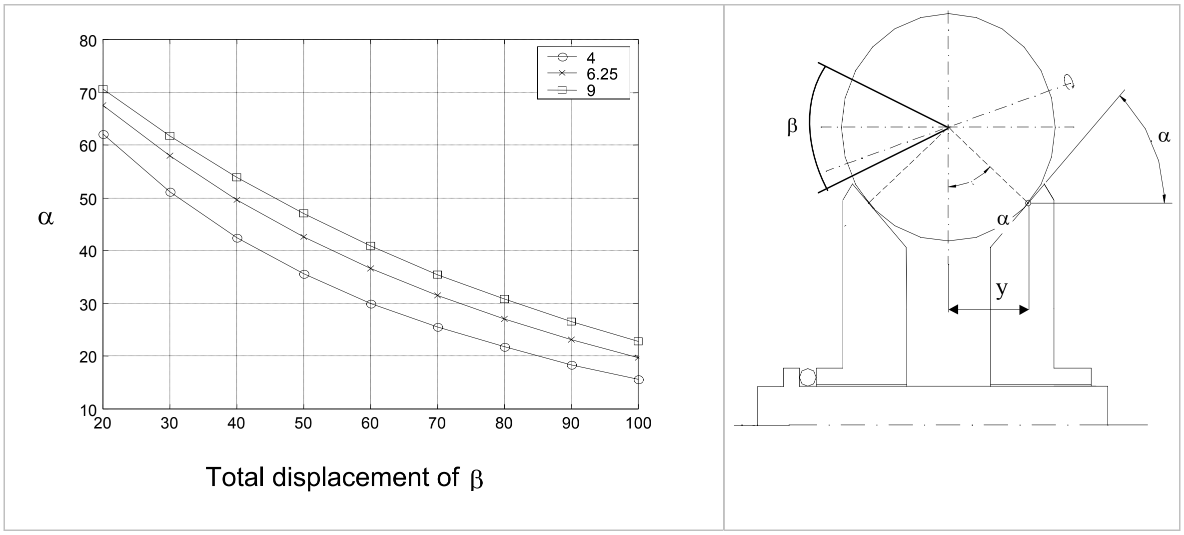


Figura 6.3 – Relação entre as variáveis α, β e a faixa da relação de transmissão.

(Ref: FORTI,WAGNER [2003])

6.4 - CVT esfera-cone de FORTI

A Figura 6.4 mostra uma CVT em perspectiva, projetada por FORTI [2003] especialmente para o uso em veículos de tração humana. Algumas partes como os componentes 2, 6 e 10, respectivamente dispositivo proporcional, disco de ajuste da relação de transmissão e esferas, são mostrados nas figuras 6.4 e 6.5 e têm a função de aplicar carga normal, selecionar a relação de transmissão e transferir potência, respectivamente.

Apesar da forma geométrica ser relativamente simples, o projeto geométrico da CVT envolve uma quantidade razoável de variáveis intimamente relacionadas.

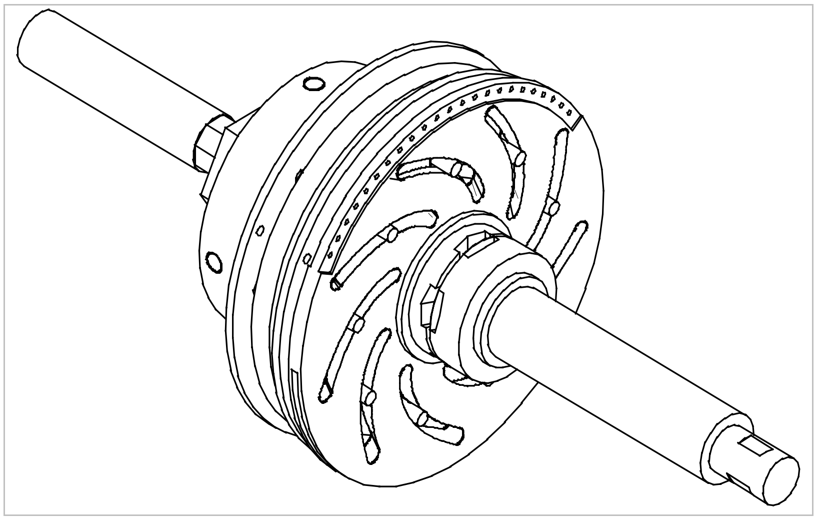
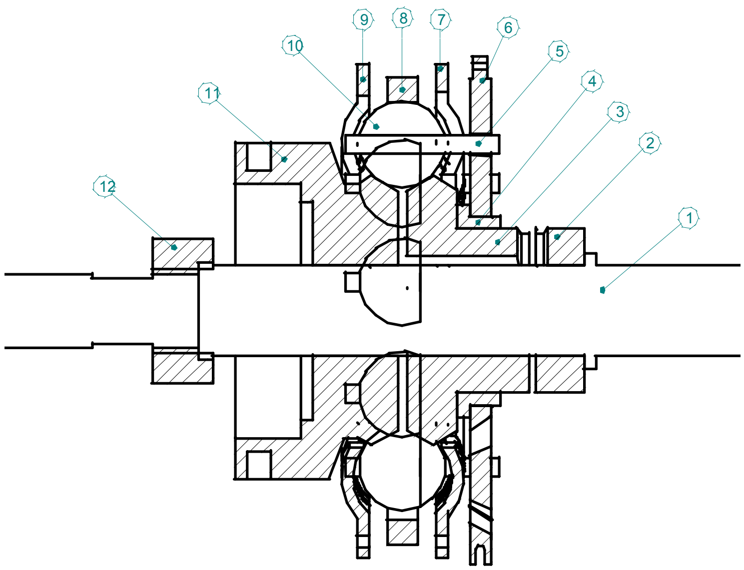


Figura 6.4 – Vista em 3D da TD-CVT de FORTI

(Ref: FORTI [2003])



1. Eixo Principal
2. Dispositivo Proporcional
3. Cone da Direita
4. Bucha
5. Eixo de Rotação da Esfera
6. Disco de Ajuste da RT
7. Disco de Alinhamento da Direita
8. Anel
9. Disco de Alinhamento da Esquerda
10. Esfera
11. Cone da Esquerda
12. Porca de Aperto

Figura 6.5 – Detalhe dos elementos da TD-CVT

(Ref: FORTI [2003])

6.5 - Força Normal no Contato e o Dispositivo Proporcional

Para um funcionamento correto da CVT por tração, é necessário a aplicação de uma força normal ao contato suficiente para o tração ser capaz de arrastar o corpo.

A força normal no contato entre os elementos rolantes deve ser suficiente para transmitir o torque aplicado, sem que ocorra escorregamentos excessivos. Produzindo uma pressão no contato suficiente para que o fenômeno da lubrificação elastohidrodinâmica possa ocorrer (Pressão>1.1 GPa segundo DOWSON).

Isso pode ser alcançado através do uso de um dispositivo proporcional localizado entre o eixo de entrada e o cone de saída da transmissão. O dispositivo proporcional tem por objetivo aumentar a força normal no contato, diminuindo o escorregamento entre as esferas e os cones, facilitando assim a transmissão de potência. A figura 6.6 ilustra bem o caso entre as forças aplicadas no contato esfera-cone e o dispositivo proporcional composto por um conjunto de guias inclinadas contendo pequenas esferas.

É graças ao ângulo η do dispositivo proporcional que a força no contato, Fn, pode ser transmitida. Segundo FORTI [2003], o valor de η deve ser tal que a tangente seja maior que 1/8.

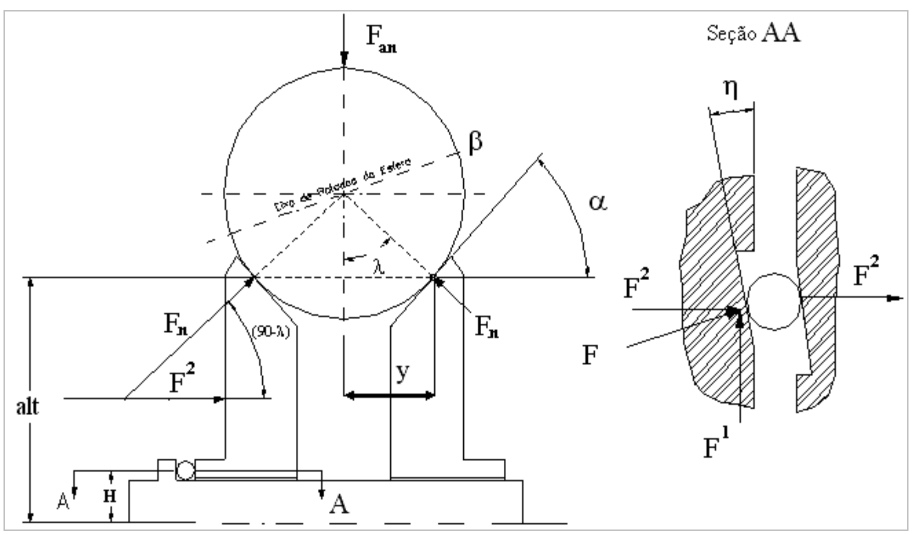


Figura 6.6 – Diagrama de Corpo Livre dos Componentes da CVT

(Ref: FORTI,WAGNER [2003])

Para o cálculo das forças envolvidas, deve-se fornecer o valor de torque que deverá ser transmitido. O torque em regime permanente é uma relação entre a potência e a rotação. Como o torque é transmitido ao eixo através de uma força aplicada tangencialmente ao cone, pode-se dizer que o torque no eixo é :

$$F_{eixo} = \frac{Pot}{\omega . R_{eixo}} \tag{6.11}$$

Da mesma forma, no cone tem-se:

$$F_t = \frac{Pot}{\omega . R_{cone} . n} \tag{6.12}$$

É possível estabelecer uma relação entre as forças tangenciais e as normais (coeficiente equivalente de tração):

$$\mu = \frac{F_t}{F_n} \tag{6.13}$$

Substituindo 6.13 em 6.12 :

$$F_n = \frac{Pot}{\omega . R_{cone} . n . \mu} \tag{6.14}$$

F_n é a força normal necessária em cada esfera para transmitir a potência fornecida.Quanto maior o número de esferas na transmissão, menor será a força tangencial necessária em cada esfera para transmitir essa potência. Portanto, menor a força normal no contato e consequentemente maior a vida em conjunto. Contudo, deve-se confirmar se F_n é suficiente para atingir o efeito de lubrificação elastohidrodinâmica.

Através da figura 6.6, verifica-se que as forças componentes na direção axial da força normal no contato esfera cone deve ser igual a componente na direção axial da força no dispositivo proporcional, ou seja, (ação e reação):

$$F_n.n = F_2.m.sen(\alpha) \tag{6.15}$$

Seguindo o raciocínio semelhante ao descrito anteriormente, a somatória das forças tangenciais no dispositivo proporcional está relacionado ao torque.

$$F_2.m = \frac{Pot}{\omega.R_{eixo}.\tan(\eta)} \tag{6.16}$$

O número de esferas do dispositivo de torque e também do sistema de tração podem ser calculados com as equações 6.14 e 6.15, entretanto deve-se atentar para os valores de tensão gerados com essa componente de força (ver capítulo 3).

$$F_n = \frac{Pot.sen(\alpha)}{\omega.R_{eixo}.\tan(\eta).n} \tag{6.17}$$

$$F_{an} = 2.F_n.\cos(\alpha) \tag{6.18}$$

Segundo FORTI, para garantir que não haja escorregamento durante a operação da CVT, a força normal calculada na equação 6.13 deve ser maior ou igual a força normal calculada na equação 6.16. Caso essas forças se igualém, chega-se a um coeficiente de tração equivalente mínimo (ou limite mínimo de coeficiente de tração):

$$\mu_{\min} = \frac{\tan(\eta)}{sen(\alpha)}.\left(\frac{R_{eixo}}{R_{cont}}\right) \tag{6.19}$$

Novamente, para o caso de não haver escorregamento, essa equação deve contemplar a seguinte condição: $\mu_{min} < Ct_{max}$ (Lei de Coulomb), onde Ct é o coeficiente de tração proporcionado pelo óleo lubrificante no contato.

Na CVT em questão, o μ_{min} é de aproximadamente 0.08813 (segundo projeto de FORTI [2003]). Qualquer óleo lubrificante que trabalhe com coeficiente de tração muito próximo ou abaixo desse valor corre o risco de operar com escorregamento ("Slip" e "Spin").

Pode-se consultar, em detalhes, a geometria da CVT FORTI em desenhos de projeto disponíveis no apêndice de FORTI [2003]. Para este estudo, é necessário somente as variáveis geométricas principais, que estão disponíveis na tabela 6.1.

Tabela 6.1 – Características Geométricas da CVT FORTI

Propriedade [unidade]	–
Conicidade α [graus]	30
Inclinação de Esferas β [graus]	[-30,30]
Diametro menor do Cone [mm]	42 mm
Diametro da esfera [mm]	14
Raio do eixo (disp. proporcional) [mm]	12
Ângulo do disp. proporcional η [graus]	10
Quantidade de Cones []	2
Quantidade de Esferas []	9
Quantidade de disp. Proporcionais []	5

Capítulo 7
SIMULAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

7.1 - Introdução

Como já visto anteriormente, a intenção do trabalho é analisar os parâmetros influentes na vida de uma transmissão e dessa forma estabelecer relações entre esses parâmetros, qual deles é predominante na determinação da vida de uma CVT segundo uma condição de operação.

Para tal é necessário o uso de softwares matemáticos que possam dar suportes necessários às necessidades como a resolução das equações de Reynolds e também as integrais de convolução que permitem estabelecer o nível de tensão por todo o contato.

Sendo assim, uma rotina de cálculo foi desenvolvida e implementada em ambiente MATLAB®. Este programa tem a finalidade de calcular os esforços solicitantes através das equações 6.11 à 6.18 do capítulo 6 (onde foi abordada a apresentação da CVT).

Após essa etapa do processamento, a análise tribológica é iniciada, primeiramente com o desenvolvimento do perfil de pressão normais (localizadas nas equações 3.66 à 3.70) que são criados com o acionamento da CVT mediante a aplicação de Torque no eixo e portanto no dispositivo proporcional. Após esse desenvolvimento, as equações de Reynolds são aplicadas para determinação da espessura mínima do filme de óleo (equações 4.31 à 4.34, com destaque para equação 4.35, donde é atribuído a solução numérica para o escoamento), bem como as condições de "slip" e "spin" que acabam alterando o funcionamento do sistema.

Com as condições de velocidade (velocidade de rolamento), carregamento normal, geometria (fator de "Spin" e μ_{min}) e características do óleo (C_t), é possível estabelecer a quantidade de "Slip" que ocorre dentro da área de contato e também o perfil de pressão tangencial entre as esferas e os cones.

Com todas essas variáveis definidas, é possível calcular o perfil a distribuição de tensão e verificar a vida da CVT através das equações de vida de Lundberg & Palmgreen (equações 5.16 a 5.20 e 5.24 a 5.31). É possível se fazer uma comparação entre os pontos de operação da CVT (condições de uso) e discorrer sobre como a vida da CVT é influenciada pelos parâmetros que caracterizam esse ponto de operação, qual ponto tem maior "Spin" ou como o coeficiente de tração do óleo influencia o "Slip". O processo de cálculo segue de acordo com o diagrama da figura 7.1.

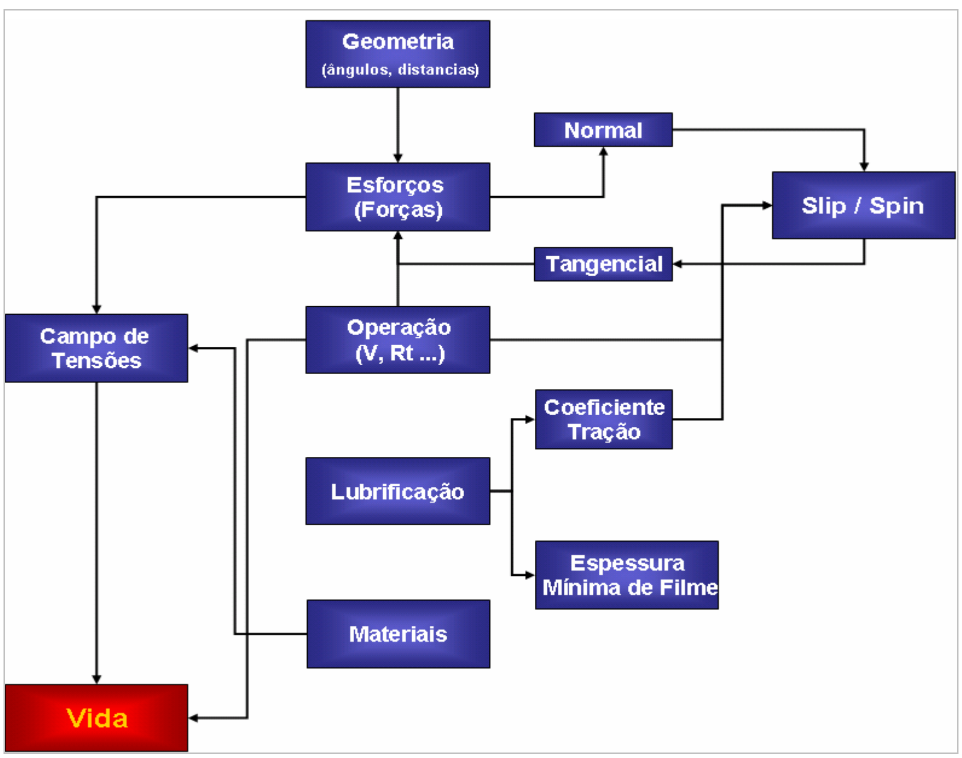


Fig. 7.1 – Fluxograma de procedimento do Algoritmo

O procedimento de cálculo é apenas uma etapa do processo da análise da CVT e segue de acordo com os procedimentos e formulações discutidos nos capítulos 3 com a análise da distribuição de pressão Hertziana, 4 com o cálculo da espessura de filme lubrificante, 5 com a formulação do estado de contato proposta por Kalker e cálculo de vida de Lundberg Palmgreen e finalmente capítulo 6 com do diagrama de corpo livre da CVT.

O procedimento tem início com a entrada de dados da geometria da CVT (por exemple, ângulo de conicidade α, ângulo de inclinação das esferas β, ângulo do dispositivo proporcional η, número de esferas etc). Com os parâmetros de geometria definidos, é possível analisar a cinemática da CVT com relação as condições de operação.

As condições de operação também definidos (parâmetros como potência transmitida, rotação, relação de transmissão) servem como base para calcular os esforços normais e, juntamente com as condições de contato, esforços tangenciais.

Com as condições de contato, dependentes das condições de geometria (μ_{max}), das condições de carregamento (forças normais e tangenciais) e também das condições de lubrificação (coeficiente de tração do fluido lubrificante), é possível calcular o filme de óleo lubrificante, as condições de contato ("slip" e "creepage") na área de contato e um perfil de pressão tangencial.

Com essas variáveis (dependentes dos parâmetros citados acima) calculadas e juntamente com as propriedades dos materiais em contato (em particular, esferas e cones), é levantado o estado de tensões das esferas e dos cones. A tensão de cisalhamento máxima é calculada a partir do estado de tensões.

Como mencionado no capítulo 5, a tensão máxima de cisalhamento é cíclica e alternada simétrica, sendo assim, as equações de Lundberg Palmgreen são usadas para estimar a vida em fadiga (vida em contato L_{10}).

Os dados são coletados e arquivados. Logo após um novo procedimento de cálculo é iniciado, porém com outras condições de funcionamento, geometria, lubrificação e etc.

7.2 – Das condições e resultados

O princípio de funcionamento da CVT foi explanado no capítulo 6. De acordo com o capítulo 6, esse tipo de transmissão, desenvolvida por FORTI [2003], foi projetada para tração humana, específicamente para bicicletas. Os esforços que a CVT deve suportar dependem das forças que estão sendo transmitidas e da geometria da transmissão. A geometria é dada e segue de acordo com o desenho de projeto contida no apêndice do trabalho de FORTI [2003] (vide também figuras 6.1, 6.2, 6.5 e 6.6).

Para a análise, considera-se um caso simples, onde um ciclista percorre uma trajetória retilínea. Segundo FORTI [2003], durante a percurso, o ciclista sofre basicamente a ação de várias forças externas como o peso, resistência ao rolamento (RR) e atrito aerodinâmico. Dessa forma, para manter a bicicleta a uma velocidade constante, o ciclista deve desenvolver uma potência dada pela equação 7.1.

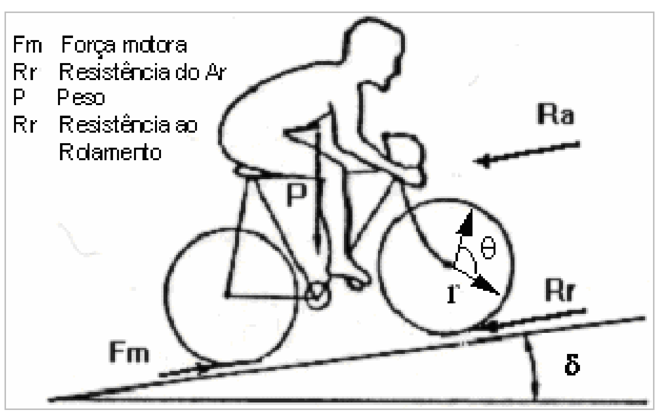


Figura 7.2 – Forças atuantes em um ciclista

(Ref: FORTI [2003])

$$Pot = m.g.sen(\theta).V + m.g.f_o.\cos(\theta).V + \frac{1}{2}\rho.C_d.A_f.V^3 \qquad (7.1)$$

Um ciclista comum (não atleta, porém saudável) possui um coeficiente de arrasto entre 0.75 e 0.9 (dependendo da estatura, largura etc). Considerando-se que sua massa seja de 75 kg, a potência que ele deve desenvolver, em um percurso plano sem inclinação, para cada velocidade é descrita pela figura 7.3.

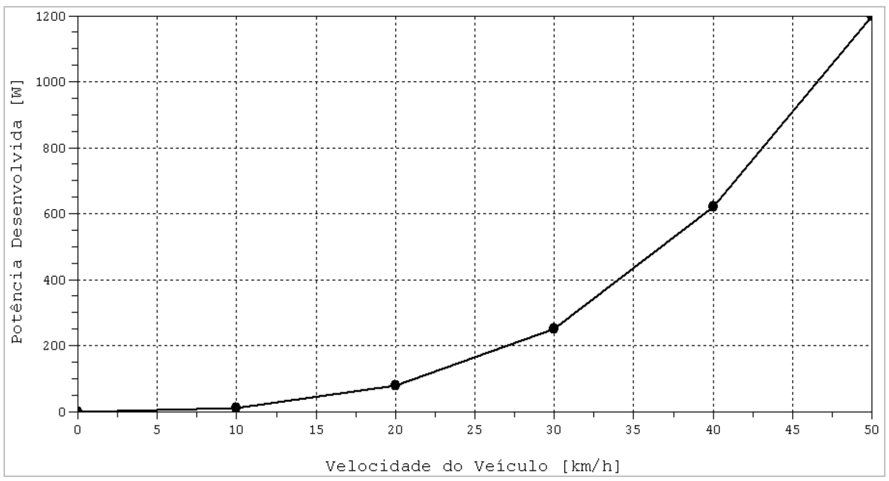


Figura 7.3 – Potência desenvolvida por ciclista

FORTI [2003] relata em seu trabalho que há uma freqüência de pedalar ótima dada pela tabela 7.1.

Tabela 7.1 – Frequencia de Pedalar Ótima (Ref FORTI [2003])

Potência [W]	Frequencia Ótima [rpm]
122.6	48.3
163.4	54.2
196.1	58.0
204.2	59.0
245.1	61.3

De acordo com esses dados, toma-se como referência a rotação padrão de 60 rpm. Dessa forma é possível calcular o torque para qualquer potência transmitida pela CVT. Com o torque é possível estimar as forças de contato normais e tangenciais (ver capítulo 6).

Para a análise, foi feito um conjunto de simulação em condições de operação diferentes, segundo a tabela 7.2.

Tabela 7.2 – Dados de saída do programa, caracterização da CVT

Potência	Relação de Transmissão Simulada				
50W	Rt 0,5	Rt 0,75	Rt 1,0	Rt 1,50	Rt 2,0
100W	Rt 0,5	Rt 0,75	Rt 1,0	Rt 1,50	Rt 2,0
150W	Rt 0,5	Rt 0,75	Rt 1,0	Rt 1,50	Rt 2,0
200W	Rt 0,5	Rt 0,75	Rt 1,0	Rt 1,50	Rt 2,0

Em cada condição, são calculados as forças de contato, normais e tangenciais, perfis de pressão normal e tangencial, tensões e deformações nos componentes, espessura mínima de filme lubrificante, fatores de spin, slip e por fim a Vida.

7.3 – Influência do Carregamento

Observando-se as figuras 6.1 e 6.6, pode-se afirmar que a CVT há uma simetria muito mais que geométrica. De acordo com essas figuras, tendo-se em vista que a força normal é aplicada em ambos os lados da esfera e pelo fato da esfera não apresentar restrições de movimento apenas em seu eixo de rotação, conclui-se que a força de aperto em ambos os pontos de contato tem a mesma magnitude. A força normal então é calculada pelo equilíbrio de forças (ver figura 6.6).

A força normal não depende da relação de transmissão, ela é sempre constante em qualquer relação e é somente alterada se a força de aperto é alterada. Dessa forma, a força normal se torna dependente da geometria de aperto e do torque transmitido (que depende da potência e da rotação nestes casos).

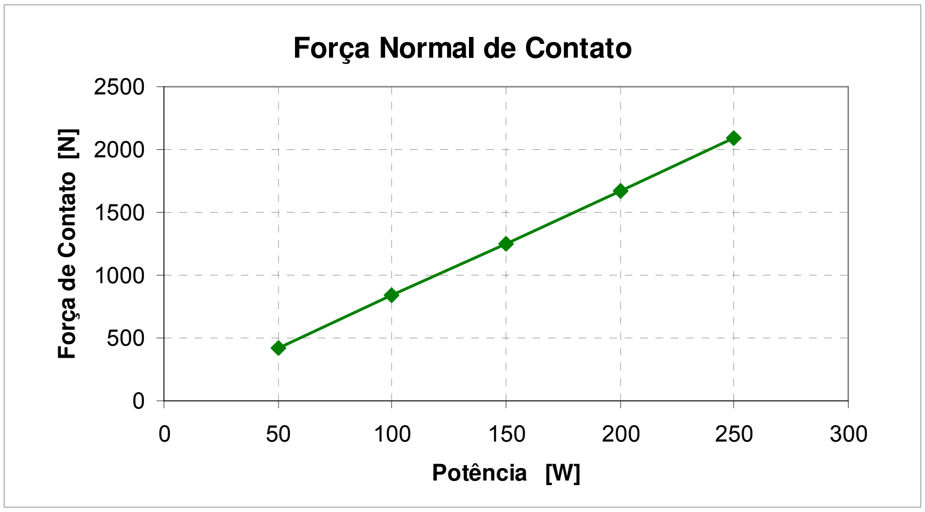


Figura 7.4 – Força Normal de Contato em função da Potência

A força normal de contato é dependente da força de aperto que é proveniente do dispositivo proporcional, de acordo com sua a geometria. Para o caso da CVT por esfera cone de Forti, a força de aperto segue de acordo com a figura 7.5.

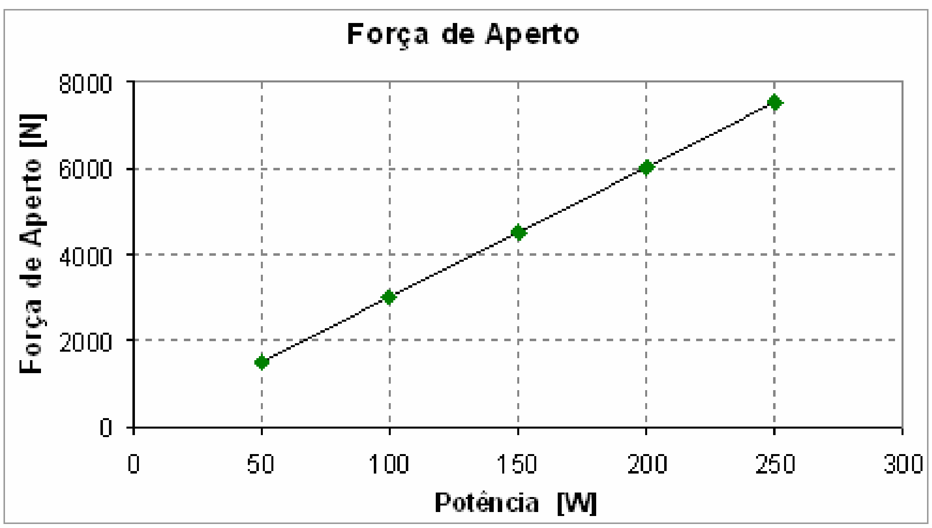


Figura 7.5 – Força de aperto em função da Potência

A força de contato tangencial, esta já depende da relação de transmissão (e conseqüentemente da geometria da mesma). Mantendo-se fixa a relação de transmissão, a força tangente tem um perfil semelhante a força de contato normal. Isso se deve a ela estar relacionada através da equação 6.17.

Pode-se observar, através da figura 7.6, a força tangencial no cone de entrada para cada relação de transmissão e também para cada intervalo de potência. A força tangencial no cone de saída, devido a simetria da relação, é a força tangencial no cone de entrada dividida pela relação de transmissão. Isto é, a força tangencial do cone de saída na relação de transmissão 1:2 tem a mesma magnitude da força tangencial do cone de entrada na relação de transmissão 2:1.

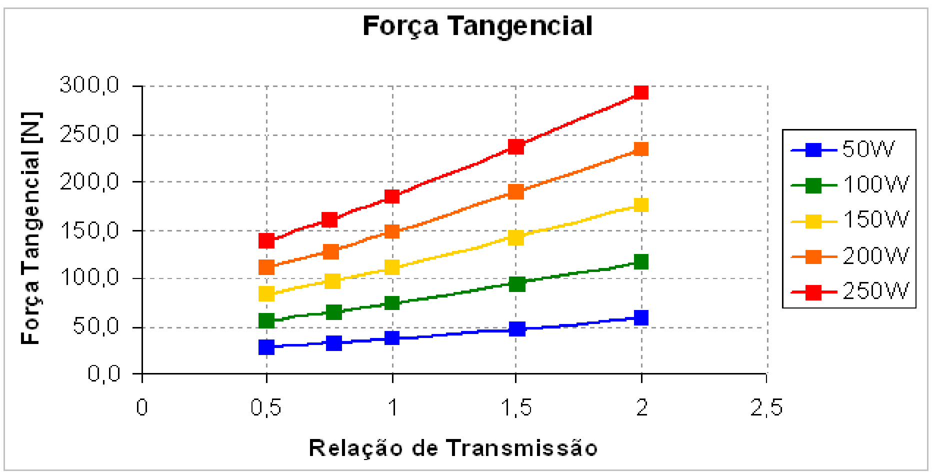


Figura 7.6 – Força Tangencial em função da Potência (cone de entrada)

O contato das esferas com o cone é elíptico, de acordo com a equação 3.66, dessa forma, calcula-se o perfil de pressão para cada condição de operação (tabela 7.2). Devido à grande quantidade de gráficos, somente algumas condições são mostradas neste capítulo. Outras condições são reportados nos anexos (vide Anexos).

Para a relação de transmissão 1:1 transmitindo uma potência de 150 W, pode-se visualizar o perfil de pressão normal na figura 7.7.

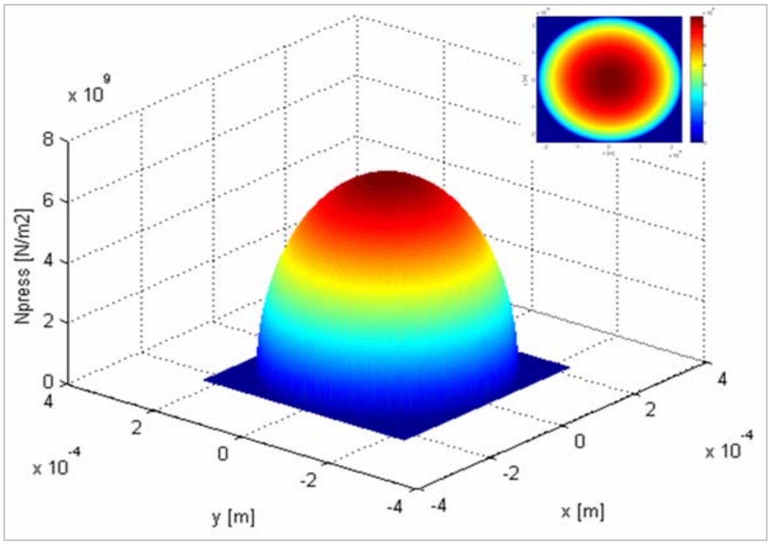


Figura 7.7 – Perfil de Pressão Normal (rel 1:1 & 150 W)

Como foi comentado anteriormente, como a força normal não depende da inclinação da esfera mas somente do ângulo de conicidade e do dispositivo proporcional, presume-se que esse perfil, assim como tantos outros, será o mesmo para qualquer outra relação de transmissão (mantendo-se a potência transmitida constante). Para a potência de 50 W, o perfil de pressão normal é:

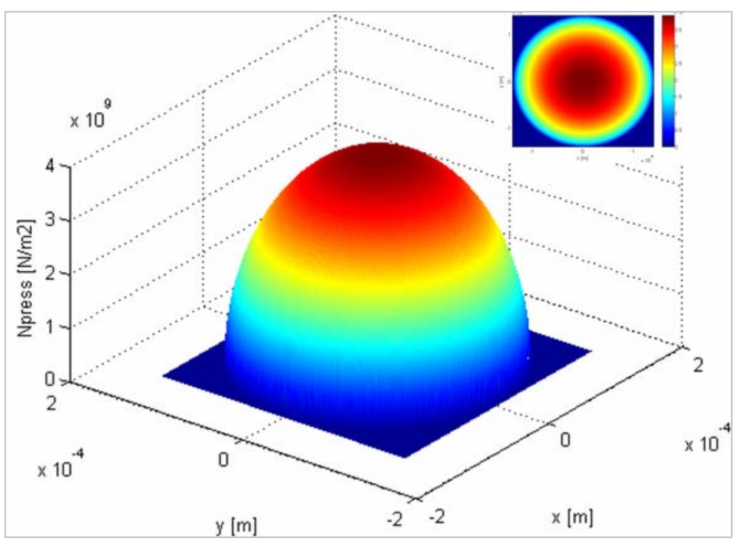


Figura 7.8 – Perfil de Pressão Normal (rel 1:1 & 50 W)

O perfil de pressão tangencial depende tanto da geometria de contato (inclinação da esfera, ângulo de conicidade) quanto das forças envolvidas (que é resultado da potência a ser transmitida). Segundo o fluxograma da figura 7.1, o perfil tangencial depende de parâmetros como velocidades e também das características do óleo lubrificante. Para essa etapa da análise, o coeficiente de tração será adotado como o coeficiente equivalente mínimo de tração, ou seja, $C_t = \mu_{min}$.

A explicação para a adoção de $C_t = \mu_{min}$ é simples. Caso $C_t << \mu_{min}$, haverá slip em toda a área de contato e o perfil de pressão tangencial será C_t P, caso $C_t >> \mu_{min}$, não haverá slip em nenhum parte da área de contato. Dessa forma, para visualizar a influência das forças de contato e também o slip, um valor próximo do μ_{min} é melhor.

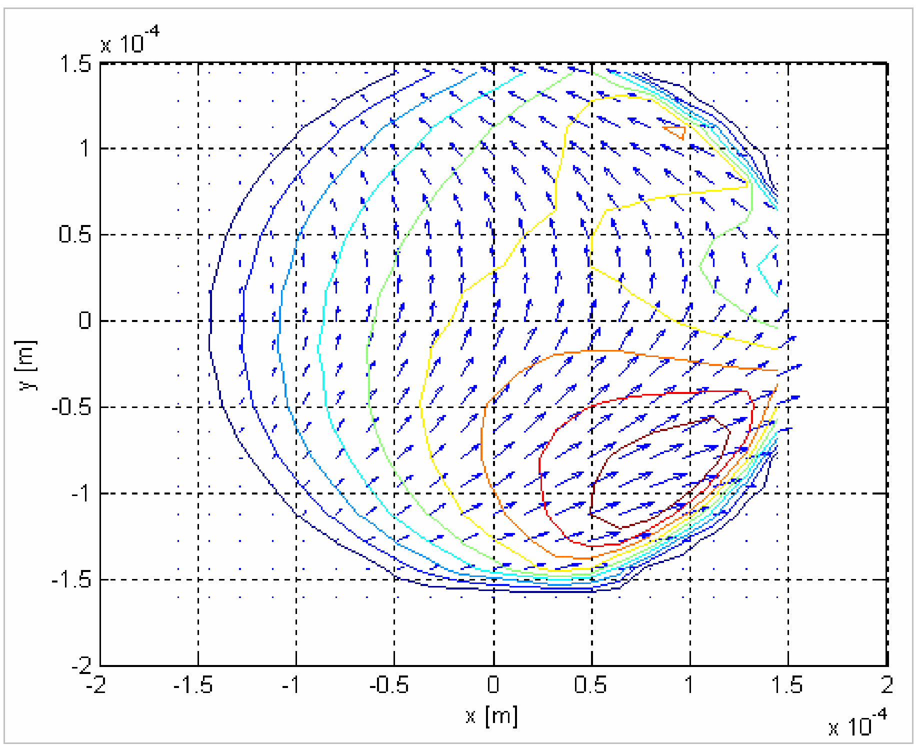


Figura 7.9 – Direção da pressão de contato tangencial (rel 1:1 & 50 W)

Pode-se observar nas figuras 7.9 e 7.10 que há um pico maior localizado na extremidade direita do contato (canto inferior direito da figura 7.9). Isso se dá devido ao Spin, pois na relação de transmissão 1:1, a esfera não está em contato de rolamento puro com os cones. Como a conicidade é de 30º e a inclinação da esfera é nula, há um fator de spin ψ(30º,0º) que não é nulo (ver figura 5.9).

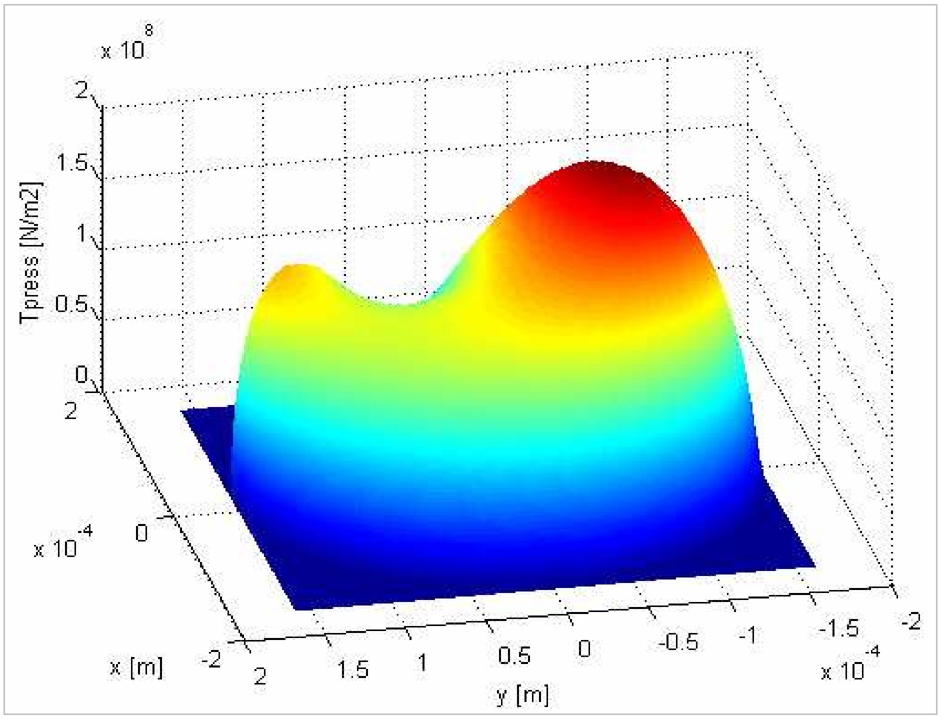


Figura 7.10 – Magnitude da pressão de contato tangencial (rel 1:1 & 50 W)

A distribuição de tensão nos componentes é calculada segundo a teoria apresentada no capítulo 3. Para cada condição tem-se 5 distribuições de tensão, 3 em cada esfera (devido ao contato com o cone e contato com o batente) e 1 em cada cone. Isso se repete 9 vezes pois a CVT contém 9 esferas entorno dos cones.

A tensão depende do carregamento normal, calculado adotando-se um perfil hertziano, e do carregamento tangencial, calculado através do algoritmo de KALKER [1982]. Devido a simetria da CVT, assim como as forças, as tensão se alternam entre os cones e a relação de transmissão, isso é, as forças e tensões no cone de entrada na relação 1:2 são as mesmas no cone de saída na relação 2:1. Essa lógica funciona também para cada lado do contato na esfera. Na figura 7.11 é possível visualizar a distribuição de tensão para 150 W.

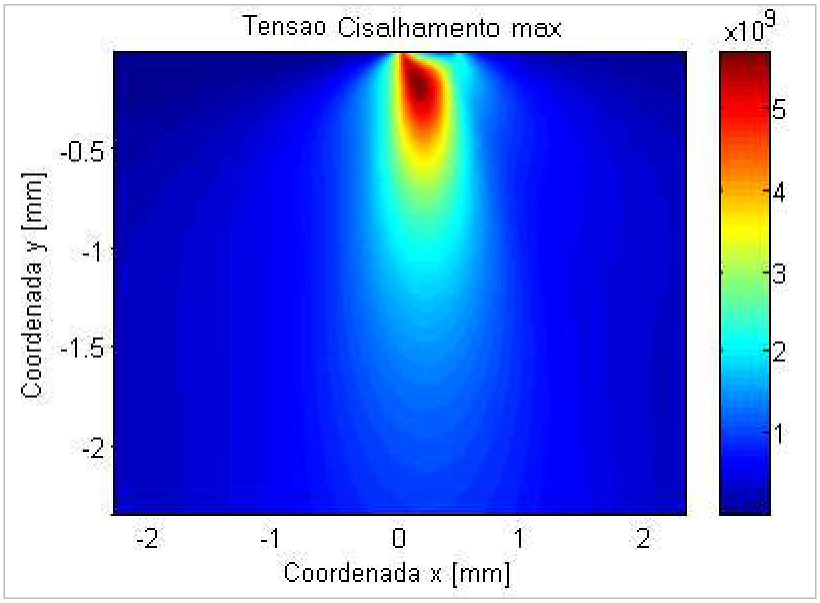


Figura 7.11 – Tensão de cisalhamento máxima (rel 1:1 & 150 W)

Sabendo-se da distribuição e também da tensão de cisalhamento máximo, é possível calcular a vida da transmissão de acordo com as equações 5.16 a 5.10 e 5.24 a 5.31.

Como a vida da transmissão depende muito das tensões e geometria dos componentes da transmissão, com o aumento da potência, logo aumentam-se as forças normais, tangenciais e porventura cai o tempo de vida da transmissão. Observando-se a figura 7.12, a vida da transmissão decresce com o aumento da carga (rever equação 5.21).

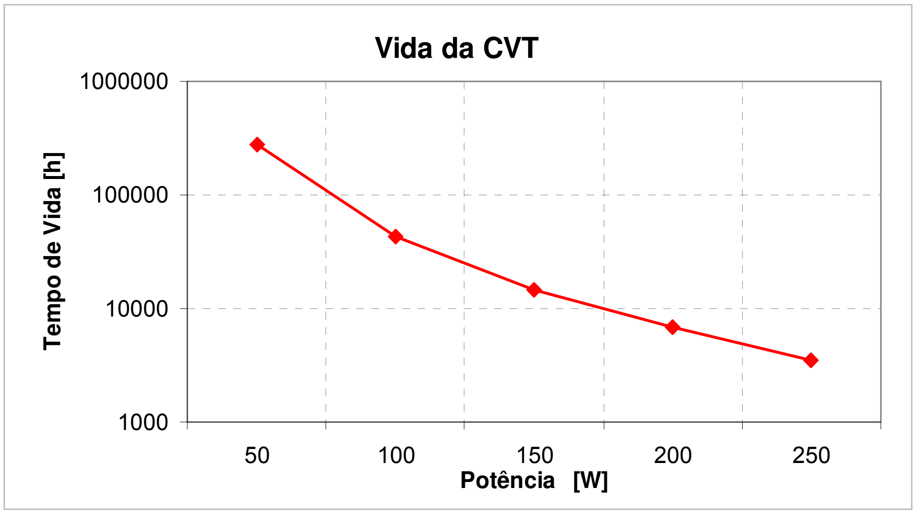


Figura 7.12 – Vida da CVT Wagner Forti (rel 1:1)

De acordo com as figuras 7.4, 7.6 e 7.12, conclui-se que com o aumento do torque transmitido, ou seja, das forças de contato (normais e tangenciais), o tempo de vida da transmissão decresce. O modo como a vida decresce em função da carga se assemelha ao modo que LOEWENTHAL havia afirmado em 1976.

Para aumentar o tempo de vida da CVT, mantendo-se os níveis de carga, é necessário que se faça mudanças na geometria, tamanho dos componentes, tipo de lubrificação, aumento do número de esferas e etc. A quantidade de soluções ou aprimoramentos não se esgota e varia muito com a utilização da transmissão.

7.4 – Influência da relação de transmissão

A mudança de relação de transmissão, como foi mencionado, não tem efeito sobre a carga normal aplicada ao contato. No entanto ela define a intensidade do torque em cada cone e a força tangencial no contato.

Para uma potência fixa, o tempo de vida da transmissão é maior nas relações de transmissão próximas a 1:1. Isso ocorre devido a intensidade das forças tangenciais serem moderadas nessa região, isto é, na relação de transmissão de redução 1:2 ocorre uma força muito intensa no cone de saída e uma força muito fraca no cone de entrada e vice-versa (vide figura 7.6).

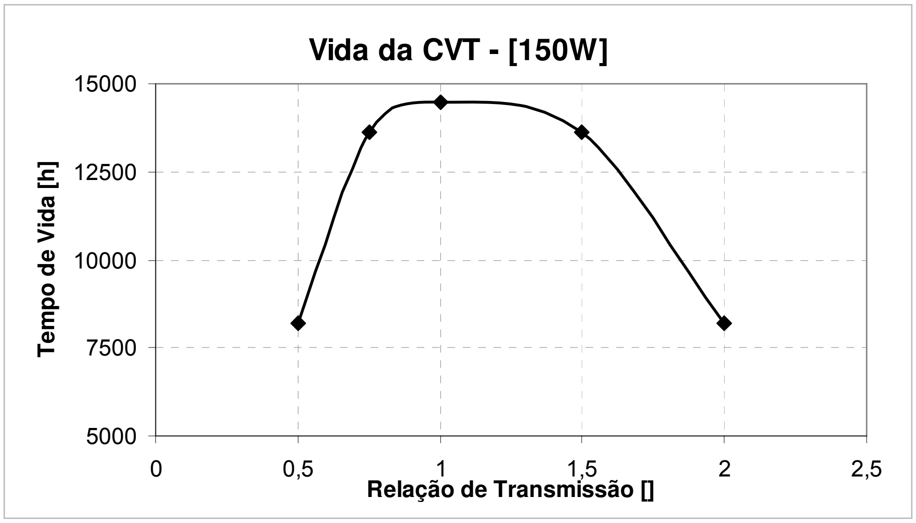


Figura 7.13 – Vida da CVT em função da relação de transmissão (150 W)

Como a força normal é muito superior a força tangencial no contato, é de se prever que o tempo de vida da CVT seja menos sensível à relação de transmissão.

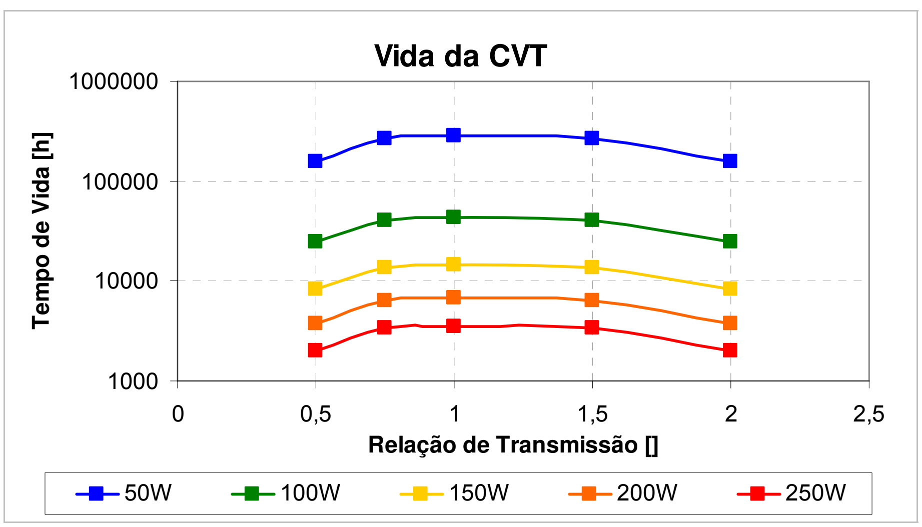


Figura 7.14 – Vida em função da potência e relação de transmissão

Como foi dito, é possível ver na figura 7.14 que a potência (variável que defini força normal no contato) influi muito mais significativamente no cálculo do tempo de vida que a relação de transmissão (variável que defini torque e portanto força tangencial no contato).

7.5 – Influência do "Overrange"

O "overrange" é a razão entre as relações de transmissões extremas (ver definição no capítulo 6 e equação 6.2), ou seja, a max/min. A transmissão CVT FORTI foi projetada com "overrange" de 4 (porém, a alteração desse parâmetro pode influenciar o tempo de vida da CVT).

Caso seja possível aumentar o "overrange" da transmissão, mas supondo que os componentes tenham mesmas dimensões (exceto as dimensões necessárias para a caracterização do "overrange", como ângulo de conicidade e de inclinação das esferas). Com "overrange" de 6.25 (1:2.5 a 2.5:1) e também de 9 (1:3 a 3:1), o tempo de vida da CVT pode ser determinada pela figura 7.15.

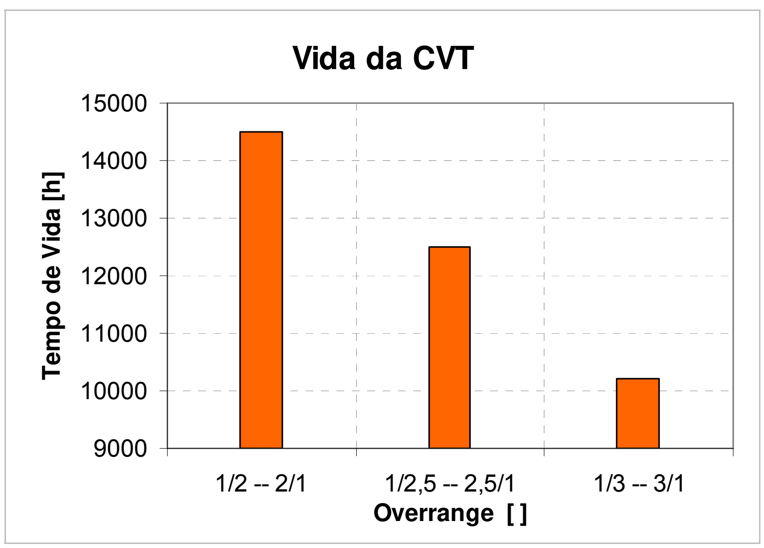


Figura 7.15 – Vida da CVT em horas para POT 150W (rt 1:1)

Verifica-se, pela figura 7.15, que a vida decresce com a ampliação do "overrange". Para que esse parâmetro mude, é necessário que algumas geometrias sejam alteradas, preferivelmente o ângulo de conicidade (α) e a permanência optativa do ângulo de inclinação das esferas (β) como constante. Com a alteração desse ângulo, as intensidade da força de aperto e da força normal (que é componente da força de aperto, vide equação 6.15) aumenta e conseqüentemente os níveis de tensões.

Segundo FORTI, WAGNER [2003], por motivos construtivos, é mais fácil manter constante a inclinação das esferas e alterar a conicidade dos rolos da CVT do que o contrario.

O ângulo de conicidade (α) não somente altera a vida da transmissão como também muda as condições do contato da esfera com o cone. Na tabela 7.3, está disponível o fator de spin calculado para cada "overrange" (de acordo com a equação 5.56).

Tabela 7.3 – Geometria dos cones e " spins "

$2\beta_{max}$	α	Spin (ψ)	"overrange"
60º	30º	2.42	1/2 – 2,1
60º	37º	2.51	1/2.5 – 2.5/1
60º	41º	2.61	1/3 – 3/1

Um "overrange" amplo é prejudicado não somente por forças de contato mais intensas mas também pela aumento do nível de "spin" e "slip" na área de contato.

Observa-se, na figura 7.16, que a área de contato onde ocorre escorregamento (marcado dor cor azul) é maior com o aumento do "overrange". Mesmo que a forças de contato sejam maiores, o efeito do "spin" e do "slip" é mais visível.

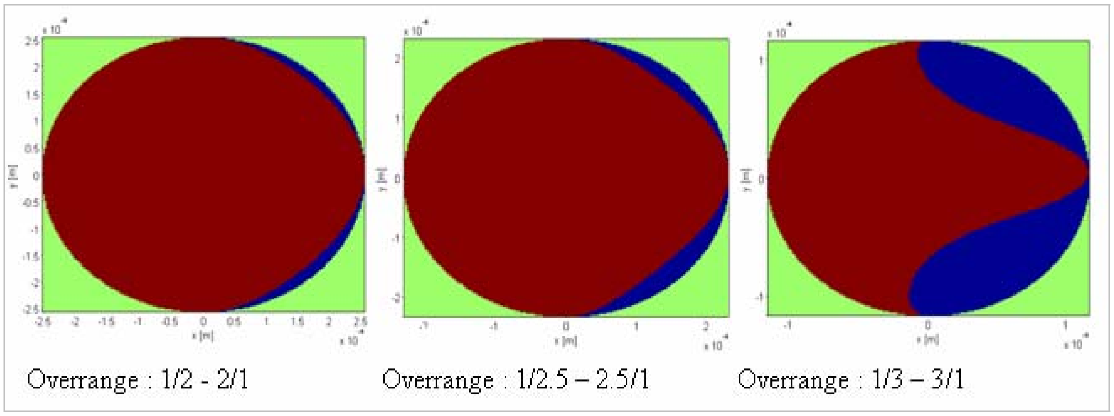


Figura 7.16 – Contato com relação ao "overrange" ("Slip" em azul)

Com o aumento do slip e com o spin, o perfil de pressão é alterado de forma que as regiões onde o escorregamento ocorre, tem-se a pressão muito próxima do limite de escorregamento (C_t.P).

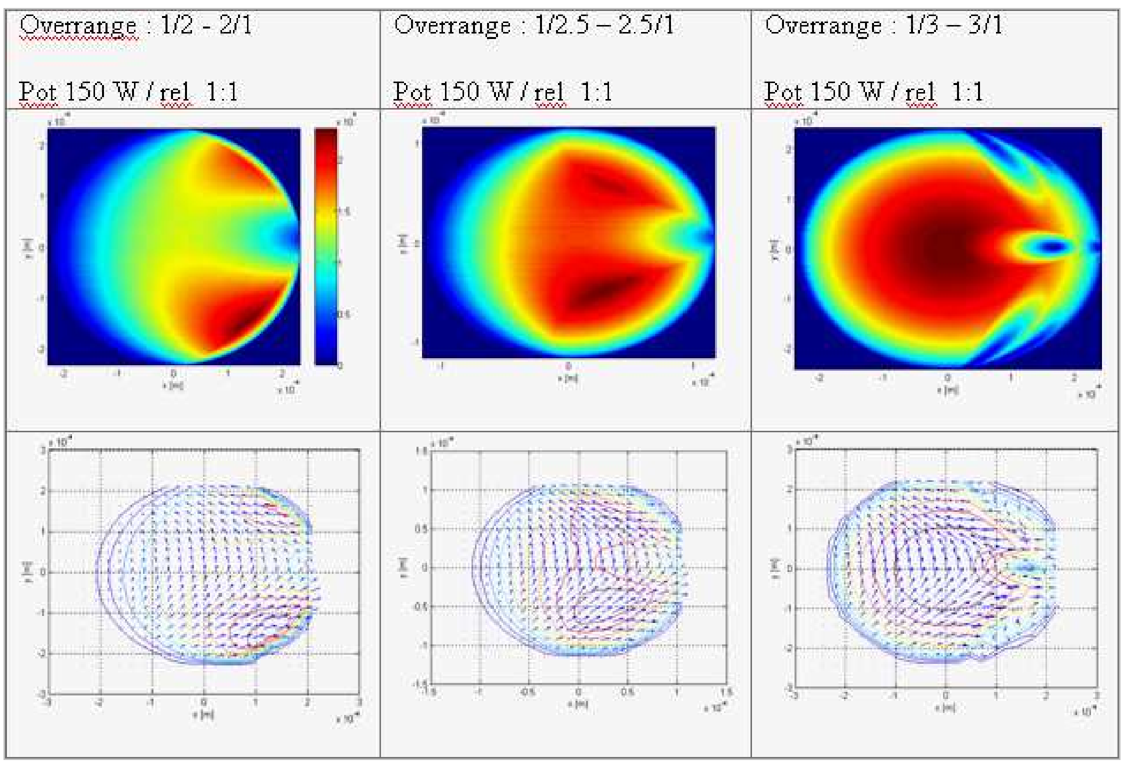


Figura 7.17 – Distribuição de pressão tangencial em função do "overrange" (150W)

7.6 – Influência da dimensão dos cones

Dimensões como diâmetro dos cones (raio de contato) e diâmetro de esfera são parâmetros também influentes na vida da CVT pois essas dimensões definem o estado de tensão desses elementos. Para grandes dimensões, tem-se um gradiente de tensões mais suave e com menor intensidade. Para dimensões pequenas tem-se o contrario.

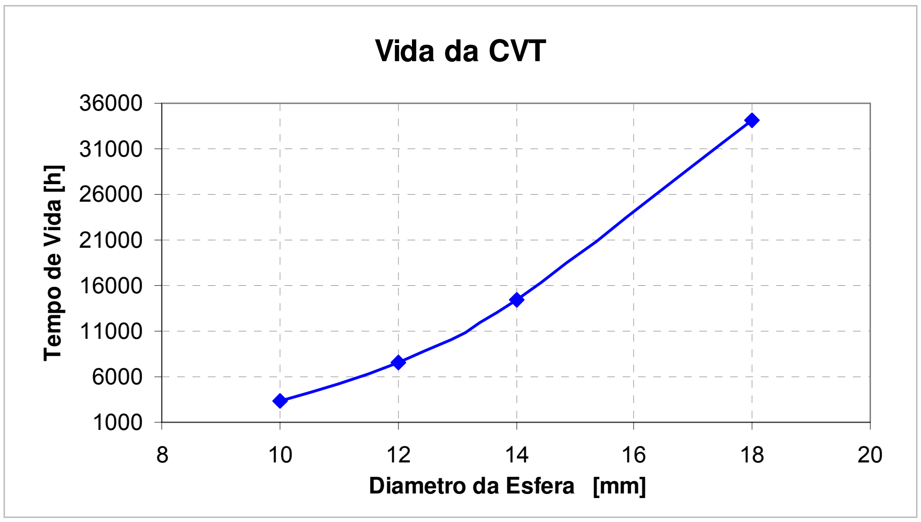


Figura 7.18 – Vida da CVT em função do diâmetro das esferas (150W)

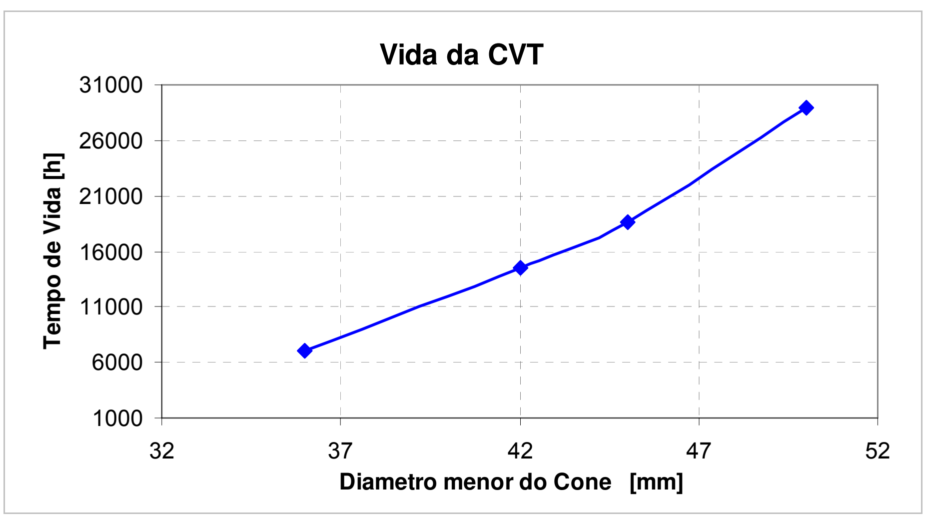


Figura 7.19 – Vida da CVT em função do diâmetro do cone (150W)

De acordo com as figuras 7.18 e 7.19, a vida da CVT é mais sensível à mudanças no diâmetro das esferas. Esses, então, são os componentes mais críticos da CVT. O uso de esferas de diâmetro menor pode ser compensado com o aumento no número de esferas da CVT. Em outras palavras, o fato da redução do diâmetro das esferas aumentar o gradiente de tensão no contato é compensado pelo aumento do número de esferas, diminuindo a intensidade da força normal.

O diâmetro do cone (refere-se ao diâmetro menor do cone) também influencia, porém comparado ao diâmetro das esferas, esse parâmetro torna-se secundário.

A capacidade de transmissão de potência pode ser dimensionado através desses parâmetros, relacionado também com os ângulos de conicidade e inclinação das esferas. Um maior diâmetro de contato dos cones ou um número maior de esferas, representam uma capacidade de transmissão de carga maior (para uma mesma previsão de vida).

7.7 – Influência do coeficiente de tração

O coeficiente de tração é importante na vida da CVT. Com o uso de óleos lubrificantes mais eficientes, caracterizados por um coeficiente de tração maior, é possível trabalhar com forças normais (no contato) menos intensas para transmitir os mesmos níveis de torque para cada relação de transmissão.

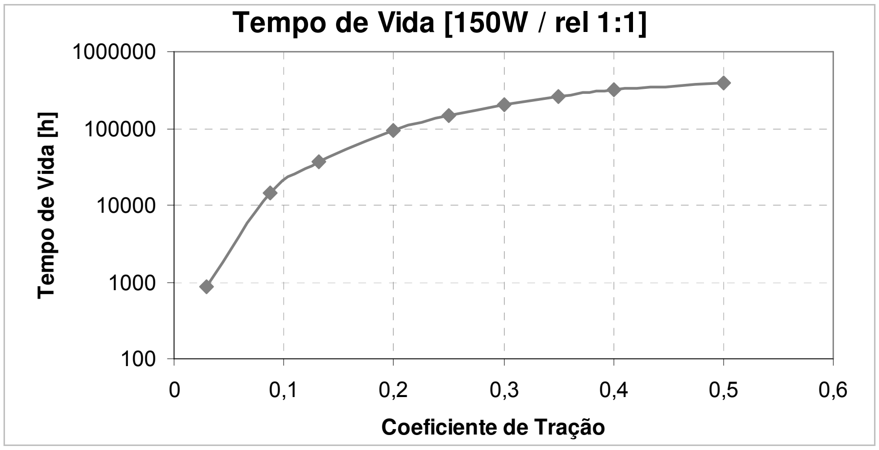


Figura 7.20 – Vida da CVT em horas variando Coeficiente de Tração

O aumento do coeficiente de tração altera também a área de contato, tornando-se menos sensível ao "Slip". Como visto na seção 6.3 e nas equações 5.50 a 5.54. O aumento do coeficiente de tração reduz o "Slip" no contato (vide figura 7.20).

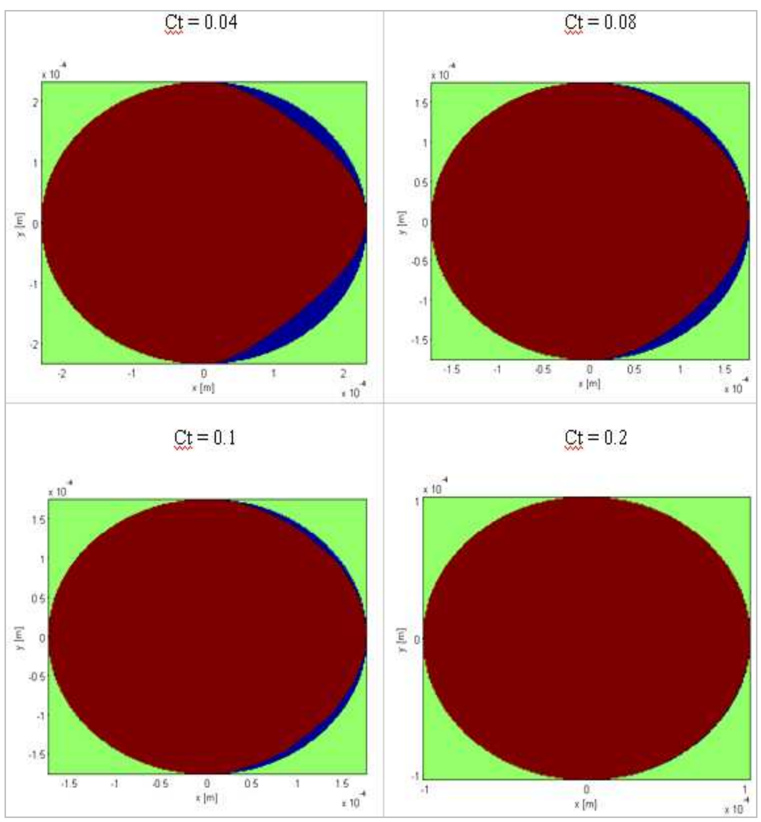


Figura 7.21 – Contato em função do coeficiente de tração (50 W)

7.8 – Espessura de filme lubrificante

A lubrificação é um assunto muito importante quando se trata de componentes por tração, pois além de servirem como interface de tração tem outra função que é de proteger os componentes evitando que danos possam ocorrem.

A espessura de filme de óleo é o parâmetro que determina a lubrificação e é dependente da velocidade do escoamento e, portanto da rotação da interface cone-esfera, do carregamento e também da viscosidade. No modelo adotou-se o óleo para transmissão SAE 75W cujas propriedades estão levantadas na tabela 7.4. Para simplificar os cálculos, considera-se o óleo como incompressível.

Tabela 7.4 – Caracterização de Óleos SAE série W

Grau de Viscosidade SAE	Temp Máx (ºC) para viscosidade de 150000 cp	Viscosidade (cSt) a 100ºC
70 W	-55	4,2
75 W	-40	4,1
80 W	-26	7,0
85 W	-12	11,0

Adotando-se uma temperatura de trabalho de 100ºC que é uma temperatura razoável tendo-se em vista que há outras formas de dissipação de energia que acabam por aquecer a caixa da transmissão.

O gráfico da espessura de filme é mostrado na figura 7.22. Da mesma forma é interessante observar que novamente o fato da transmissão ser simétrica faz com que esses valores de espessura sejam repetidos do cone de entrada para o de saída com a mudança de relação para a sua complementar e vice-versa.

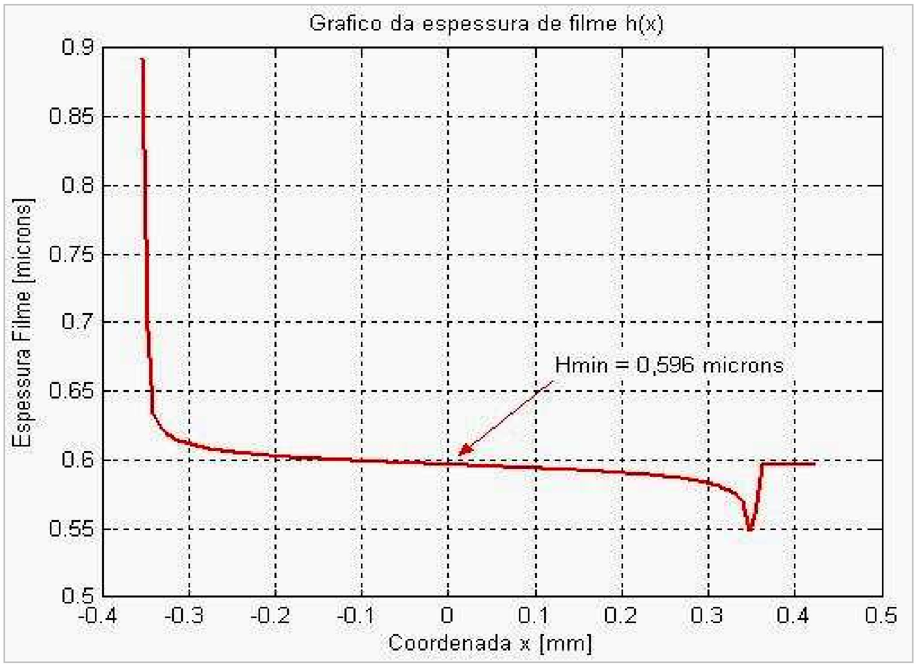


Figura 7.22 – Espessura de filme simulado numéricamente (250W)

A espessura mínima de filme lubrificante aumenta com o aumento da velocidade (vazão volumétrica de óleo) e também com a redução da pressão exercida no contato pseudo-elíptico, ou seja, com a força normal exercida entre as esferas e os cones. Portanto, a espessura de filme diminui com o aumento da potência a ser transmitida.

A figura 7.23 mostra como evolui a espessura mínima de filme lubrificante (definida no capítulo 4) em função da potência transmitida pela transmissão.

A espessura de filme não é um parâmetro independente, que influi diretamente na vida da transmissão. Assim como a vida, a espessura de filme é uma conseqüência dos parâmetros de operação da CVT. Dessa maneira, é muito difícil estabelecer uma relação de causa e efeito entre espessura de filme e tempo de vida.

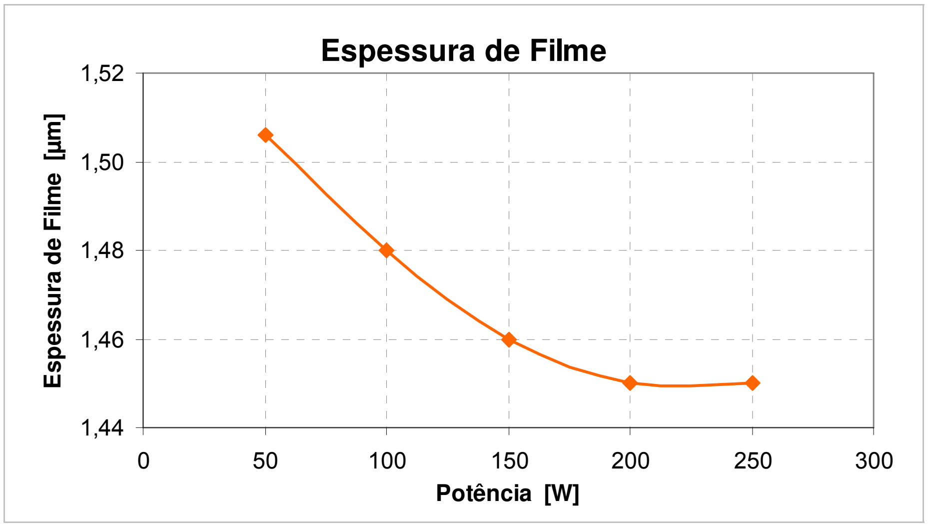


Figura 7.23 – Espessura de filme em função da potência

Como a vida decresce com o aumento de carga e a espessura mínima de filme lubrificante também, chega-se a concluir que o aumento da espessura de filme o aumento da vida estão correlacionados.

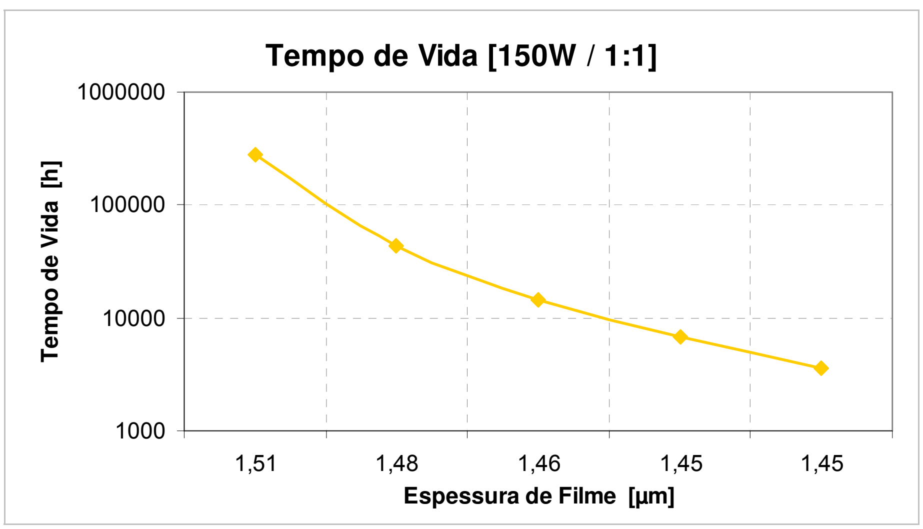


Figura 7.24 –Vida e espessura de filme estão correlacionados (rel 1:1)

7.9 – Observações e considerações finais

Pode-se observar que a relação de transmissão 1:1 é a condição em que a vida da transmissão é maior. É importante frisar que quanto mais usada a transmissão na sua região de melhor previsão de vida, ou seja, relação de transmissão 1:1, maior o tempo de vida acumulado no período de uso

Pode-se observar que o overrange também é uma fator que influi nas condições de uma transmissão CVT do tipo esfera-cone. Nota-se que um overrange grande tem uma vida menor em virtude dos maiores esforços, e que o spin cresce deliberadamente, a ponto que isso possa comprometer a sua eficiência. Sendo assim, ao projetar uma CVT, é necessário optar por uma geometria otimizada, que pondere "overrange" e vida.

A ângulo de conicidade (α), o raio da esfera e a sua inclinação (β) são determinantes nas condições de spin e juntamente com as condições de contato, determinam o "slip". O ponto de menor slip/spin é o contato mais próximo do rolamento ($\beta = \alpha$), porém é impossível alcançar essa condição para este tipo de CVT devido a sua geometria.

Os esforços na transmissão são muito elevados, as tensões são da ordem de GPA e a espessura de filme na ordem de μm. O método de Downson para a lubrificação e também o de Palmgreen para a determinação da vida L10 são satisfatórios.

Capítulo 8

CONCLUSÃO

Foi introduzido, nos capítulos anteriores, a teoria de contato de Hertz que serviu como base para as demais teorias usadas como o equacionamento do contato com "slip" do Kalker. A lubrificação também teve sua importância e o equacionamento da espessura mínima de filme lubrificante foi importante para relacionar a lubrificação com a vida.

A CVT por esferas e cones de FORTI, alvo desta pesquisa, foi apresentada no capítulo 6. Neste capítulo, foi mostrada a geometria dessa transmissão bem como discutido o princípio de seu funcionamento. Juntamente, no capítulo anterior, foi introduzido o método de Kalker para o cálculo do "slip" em contato elíptico.

A vida da transmissão depende de vários parâmetros como tensões, profundidade onde ocorrem as máximas tensões de cisalhamento e volume tensionado. Estes parâmetros por fim são dependentes das forças envolvidas no sistema, o tipo de geometria (relação de transmissão, "overrange" etc), tipo de tração proporcionado pelo óleo lubrificante (coeficiente de tração) e da dimensão dos componentes da transmissão

Este trabalho consiste em aplicar os métodos dissertados nos capítulos anteriores, calcular a vida L10 de uma CVT do tipo esfera cone e observar qual a influência de cada parâmetro citado anteriormente (a saber, carregamentos, geometria, tração e dimensão dos componentes). É importante frisar que o tempo de vida calculado aqui leva em consideração apenas a falha por fadiga de origem sub-superficial que é o principal meio de falha em TD-CVTs. Sendo assim, foram descartados outros tipos de avaria como desgaste, impacto, corrosão e efeitos térmicos (e outros parâmetros influentes como acabamento superficial, liga do material, espessura de cementação, tipo de controle de relação de transmissão e outras características reológicas do óleo lubrificante).

Constata-se que o tempo de vida da CVT FORTI cresce inversamente proporcional às forças envolvidas, assim como citado por COY & LOEWENTHAL [1976]. Isto é, quanto maiores as cargas envolvidas como força de aperto, força normal e força tangencial (todas dependentes do torque), menor será a vida da transmissão. No caso dessa transmissão,a vida é muito sensível a esse parâmetro.

A relação de transmissão é um parâmetro que também influi no tempo de vida da CVT, porém de forma menos sensível que as cargas envolvida. Observa-se que o tempo de vida é maior na condição de relação de transmissão 1:1 e isso se deve ao fato dessa relação fornecer as menores forças tangenciais e portanto menores tensões.

O “overrange” é um parâmetro associado à geometria da transmissão, quanto maior o “overrange”, maiores as forças envolvidas, maior o fator de spin e menor o tempo de vida da transmissão.

A dimensão ou tamanho dos componentes principais da transmissão (cones e esferas) também influi na determinação do tempo de vida da CVT de maneira diretamente proporcional. Quanto maiores esses parâmetros, maior será a vida da transmissão, sendo o diâmetro da esfera muito mais influente que o diâmetro do cone (refere-se ao diâmetro menor do cone). Isso se deve ao fato do maior tamanho dos componentes proporcionar um gradiente de tensão mais suave e de intensidade menor.

O número de esferas também é influente porém não foi alvo desse trabalho. Mas presume-se que uma quantidade maior de esferas proporciona uma vida mais longa a transmissão, já que a força de aperto, forças normais e tangenciais são menores (ver equações 6.12, 6.14 e 6.16).

A espessura mínima de fluido lubrificante é um fator tão conseqüente das condições de operação da transmissão quanto o tempo de vida da mesma. Porém é possível fazer uma comparação do quão um está para o outro. Verifica-se que uma espessura de filme lubrificante maior está associado a um tempo de vida mais longo, porém não se sabe até onde essa relação é válida já que os efeitos de lubrificação são muito não lineares.

O ângulo de conicidade (α), o raio da esfera e a sua inclinação (β) são determinam as condições de "spin" na transmissão e influem muito nas condições de contato. O ponto de mínimo spin (ou spin zero) é o rolamento puro ($\beta = \alpha$), no entanto essa geometria é impossível construtivamente.

O projeto de uma TD-CVT requer um conhecimento amplo e de vários tópicos inter-relacionados. Como pode-se ver, mudanças em um parâmetro influenciam vários outros. Por esse motivo, no projeto de uma TD-CVT deve-se conhecer perfeitamente a sua aplicação e assim, melhor projetá-lo.

Este trabalho pretende apenas ser uma introdução ao estudo das transmissões por tração, de modo que, a bibliografia apresentada sirva como referência para quem quer aprofundar-se no assunto.

A CVT por esfera-cone é um dispositivo fascinante e há muitos outros parâmetros que possam influenciar no seu tempo de vida. Dessa forma, existe uma infinidade de trabalhos que possam ser realizados nessa área de pesquisa como por exemplo a otimização da geometria da CVT para se obter maior vida, maior eficiência e maior capacidade de transmissão. Uma outra linha de pesquisa que tem sido explorada é a aplicação de controle a CVT de forma a otimizar o uso da CVT (condições de operação e conseqüentemente a vida).

Dessa forma é de grande importância que haja incentivos nessa linha de pesquisa.

Referências Bibliográficas

Adams, Tom ´´ Elastohydrodynamic Lubricants for CVTs ``. *Automotive Engineering International*, July 2002, p.43-47, 2002.

ASME Committee on Failures of Sliding Bodies. ´´ Failures of Rolling Element Bearings ``. A*SME International*, Vol 05, p.416-453.

Albuquerque, Alfredo A. ´´ Caracterização da Resposta Dinâmica de uma CVT por Polias Expansivas `` , Universidade Estadual de Campinas – Faculdade de Engenharia Mecânica, 2003, Tese de Mestrado

Bartlett H. and Whalley R. ´´ Power Transmission System Modelling ``. *Institute of Mechanical Engineering*, Vol 212, p.497-512, 1998.

Coy, John J. and Loewenthal, Stuart H. ´´ Fatigue Life Analysis for Traction Drives with Application to a Toroidal Type Geometry ``. *Nasa Technical Note,* TN D-8362, p.1-31, 1976.

Coy, John J. and Zaretsky, Erwin H. ´´ Life Analysis of Restored and refurbished bearing ``. *Nasa Technical Note,* TN D-8486, p.1-16, 1977.

D. Dowson and G.R. Higginson ´´ Elastohidrodynamic Lubrication ``. *SI Edition,* 1º ed., Vol 23, Pergamon Press, 1977, ISBN 0-08-021302-2 (Flexicover)

Dedini, Franco Giuseppe ´´ Projeto e Otimização de uma Transmissão Planetária por Rolos de Tração `` , Universidade Estadual de Campinas – Faculdade de Engenharia Mecânica, 1985, Tese de Mestrado

Ferrari, Ricardo A. ´´ Desenvolvimento de Ferramenta Computacional para Cálculo de Desempenho de Veículos `` , Universidade Estadual de Campinas – Faculdade de Engenharia Mecânica, 2002, Trabalho de Conclusão de Curso

Forti, Antonio W. and Dedini, Franco G. ´´ The Influence of Spin and Lifetime in Design of Traction Drive Continuously Variable Transmissions ``. *X International Mobility Thechnology Conference and Exhibit,* November 19-22, SAE PAPER 2001-01-3841.

Forti, Antonio Wagner ´´ Estudo Teórico Experimental de Parâmetros de Projeto de uma Transmissão Continuamente Variável por Tração Esfera-Cone `` , Universidade Estadual de Campinas – Faculdade de Engenharia Mecânica, 2003, Tese de Doutorado

Heilich, Frederick W. ´´ Traction Drives, Selection and Application ``. *SI Edition*, 1º ed, Marcel Dekker Inc., 1983, ISBN 0-8247-7018-8

Kalker, J. J. ´´ Variational and Non-Variational Theory of Frictionless Adhesive Contact Between Elastic Bodies ``. *Wear* , Vol 119, p.63-76, 1987.

Kalker, J. J.. ´´ Mathematical Models of Friction for Contact Problems in Elasticity ``. *Wear,* vol 113, p.61-77, 1986.

Kalker, J. J.. ´´ The Computation of Three Dimensional Rolling Contact with Dry Friction ``. *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* vol 14, p.1293-1307, 1979.

Kalker, J. J.. ´´ A Fast Algorithm for the Simplified Theory of Rolling Contact ``. *Vehicle System Dynamics*, March 1982, p.1-13, 1982.

Kluger, Michael A. ´´ Drivetrains: Challenging the Design Philosophy ``. *Automotive Engineering International*, July 2002, p.25-31, 2002.

KURIHARA, R & DEDINI, F. G (1998) “ Desenvolvimento de um Programa para apoio ao Projeto e Dimensionamento de Trens Planetários”. VII Congresso e Exposição Internacionais da Tecnologia da Mobilidade. Catálogo SAE TECHNICAL 982910 Paper Séries P/São Paulo/Brasil

Lima, Daniel C. A. ´´ Transmissão Continuamente Variável para Automóveis Urbanos `` , Universidade de São Paulo – Escola Politécnica, 2003, Trabalho de Conclusão de Curso

Micklem, J. D. and Longmore, D. K. ´´ Belt Torque Loss in a Steel V-Belt Continuously Variable Transmissions ``. *Institute of Mechanical Engineering*, Vol 208, p.91-98, 1994.

Moore, Desmond. F. ´´ Principles and Applications of Tribology ``. *SI Edition,* 1º ed., Vol 14, Pergamon Press, 1975, ISBN 0-08-017902-9

Nick, Iain James. ´´ CV and IV Transmission ``. *Design Engineering*, September 1996, p.35-39, 1996.

Norton, Robert L. ´´ Machine Design ``. *SI Edition*, 2º ed., Prentice Hall Inc, 2000, SBN 0-13-017706-7 (hardcover)

Perry, F.G. de B. ´´ The Perbury Transmission ``. *ASME Publication,* Paper Nº 80GT22, p.1-6, 1980.

Saccheto, Thiago J. S. and Dedini, Franco G. ´´ Study of Influential Parameters on Lifetime of a Trackball CVT which is under SLIP/SPIN Contact ``. *DINCON – 6º Brazilian Conference on Dynamics, Control and Their Applications ,* May 21-25, 2007

Steven, Ashley. ´´ Continuous Variable Transmissions ``. *Mechanical Engineering*, March 1991, p.64-67, 1991.

Steven, Ashley. ´´ Is CVT the car transmission of the future ? ``. *Mechanical Engineering*, November 1994, p.64-68, 1994.

Stubbs, P. W. R.´´ The Development of a Perbury Traction Transmission for Motor Car Applications ``. *ASME Publication,* Paper Nº 80CZ59, p.1-12, 1980.

Tanaka, Hirohisa and Machida Hisashi. ´´ Half-Toroidal Drive Continuously Variable Power Transmission for Automobiles ``. *JSM International Jounal* Série C, Vol 38, p.4-16, 1995.

Tanaka, H. and Masatoshi, E. ´´ Power Transmission of a HALF-TOROIDAL Traction Drive Continuously Variable Transmission ``. *JSME International Jounal*, Vol 38, p.778-782, 1995.

Timoshenko. S. P. ´´ Teoria da Elasticidade ``. *BR traduzido*, 3º ed., Guanabara Dois S.A., 1980, ISBN

Ulrich, Karl T. and Eppinger, Steven D. ´´ Product Design and Development ``. *SI Edition*, 2º ed., MacGraw-Hill Inc 2004, ISBN 0-07-247146-8

Winer, W. O. and Bair. S.. ´´ Friction/Traction measurements with continuously variable slide roll ratio and slide slip various lambda ratios ``. *Paper X(iii)*, Vol 50, p.296-301, 1980.

Yamaguchi, Jack. ´´ Nissan´s Extroid CVT ``. *Automotive Engineering International*, February 2000, p.157-165, 2000.

Yaple, F John. ´´ Metal-to-Metal traction drives now have a new lease on life ``. *Product Engineering*, October 1971, p.157-165, 1971.

www.wipo.int/portal/index.html.en (12/05/2007)

www.histomobile.com/dvd_histomobile/histomo/tech/107-1.asp (15/04/2007)

www.unicum.fr/index.php?page=variateurs&type=galet (22/09/2007)

http://www.swri.org/4org/orghome.htm (12/05/2007)

www.freepatentsonline.com/6731881.html (20/10/2007)

www.fallbrooktech.com/nuvinci.asp (03/08/2007)

www.santotrac.com/index.html.en (30/07/2007)

www.barloworld-cvt.com/video/view/trans_vid.asp (30/07/2007)

Anexo

Dados de Simulação da CVT

O fator de spin, comentado no capítulo 5, é um fator que influi no contato da transmissão. O cálculo dele é definido na equação 5.57.

Tabela A.1 – Fator de Spin na caracterização da CVT

Relação de Transmissão		1 : 2	1 : 1	2 : 1
Cone de Entrada	Spin (ψ)	0,5	2,42	3,38
Cone de Saída	Spin (ψ)	3,38	2,42	0,5
TOTAL	Spin (ψ)	3,88	4,84	3,88

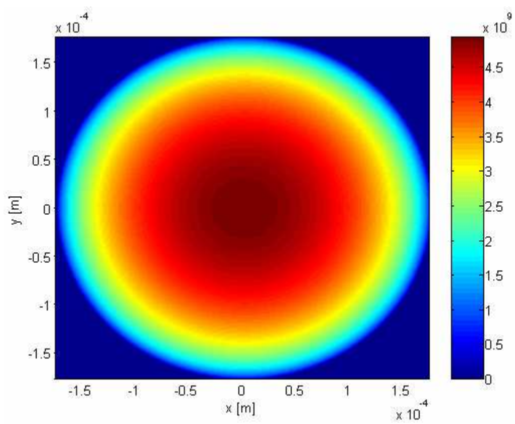
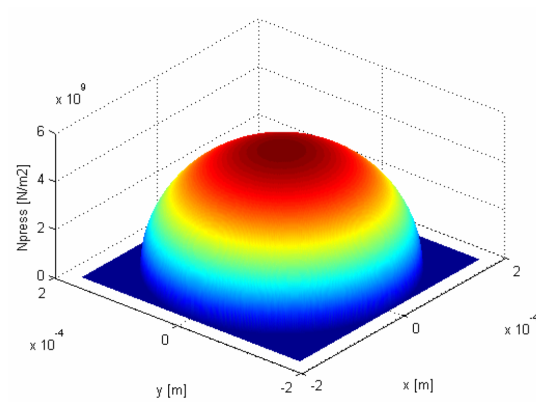
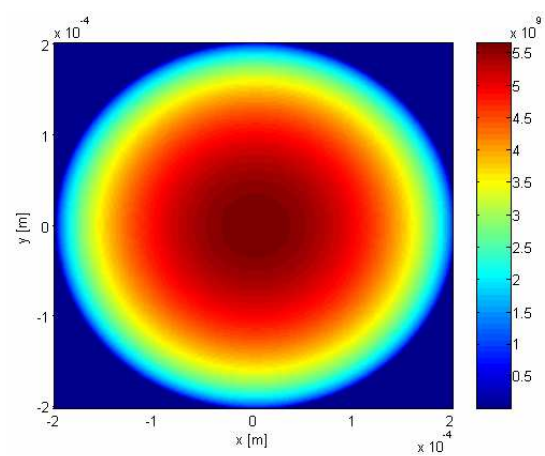
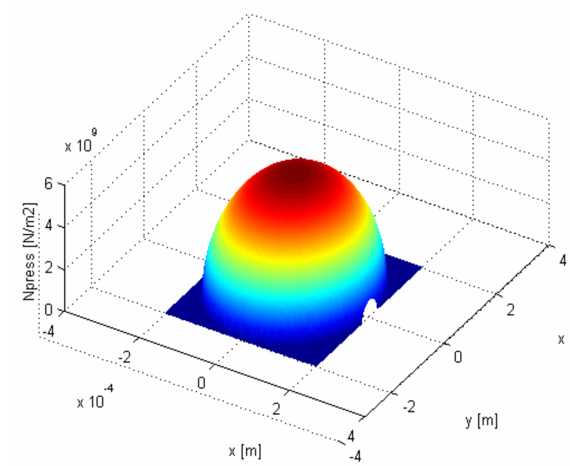
O carregamento depende exclusivamente das cargas envolvidas, com os dados mencionados anteriormente, é possível construir o perfil de pressão que a esfera pressiona o cone e vice-versa. O carregamento normal, de acordo com o capítulo passado, é dependente da geometria da CVT e também das condições de trabalho.

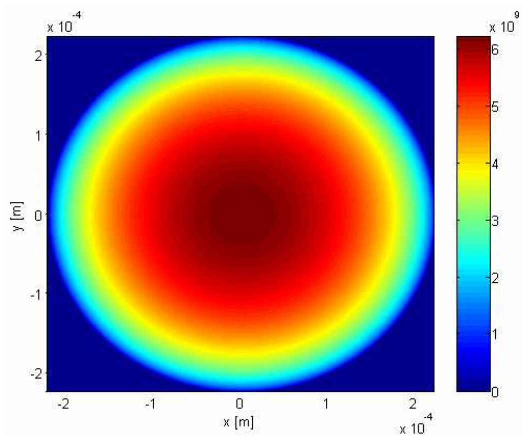
É importante relembrar que, como a CVT é simétrica, as condições no cone de saída são as mesmas para o cone de entrada na relação de transmissão oposta. Ou seja, as condições de carga, pressões, tensões no cone de saída na relação de transmissão 1:2 é a mesma para o cone de entrada na relação 2:1 e assim por diante para outras relações.

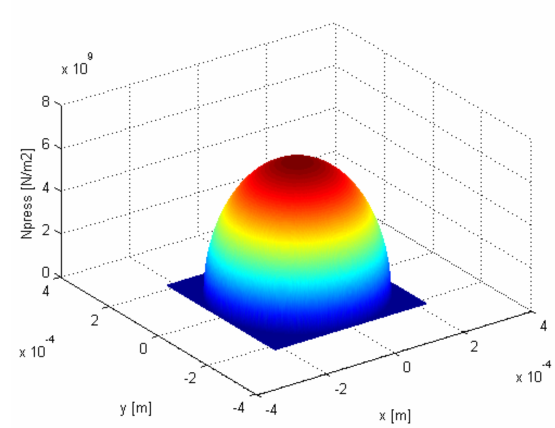
Devido a isso, todos os cálculos são feitos 1 vez e para o cone de entrada e são multiplicados para o cone de saída.

De acordo com a tabela 7.2 tem-se os seguintes resultados:

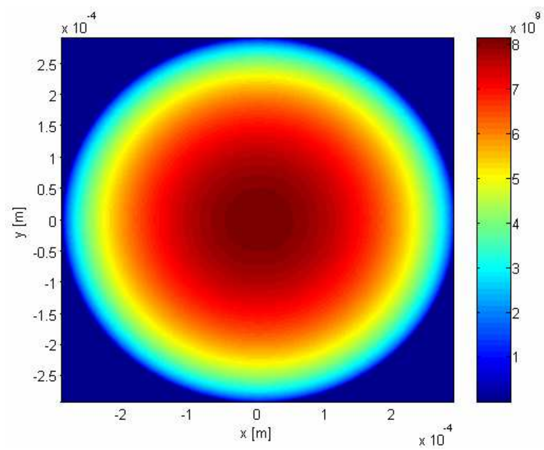
Tabela A.2 – Pressão Normal de Contato [N/m²] na condição de 50W

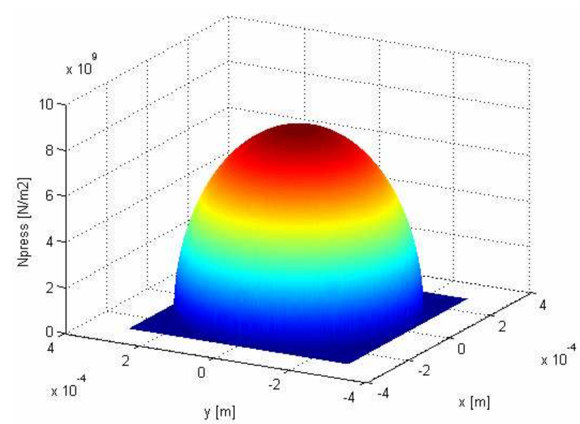
Pot 50W, Fn =420 N/contato	
	
Pot 100W, Fn =835 N/contato	
	
Pot 150W, Fn =1250 N/contato	



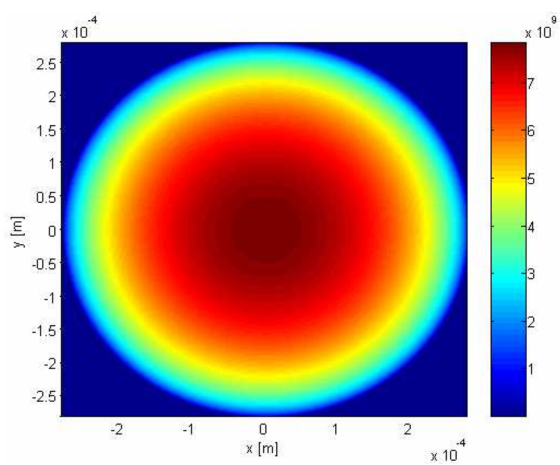


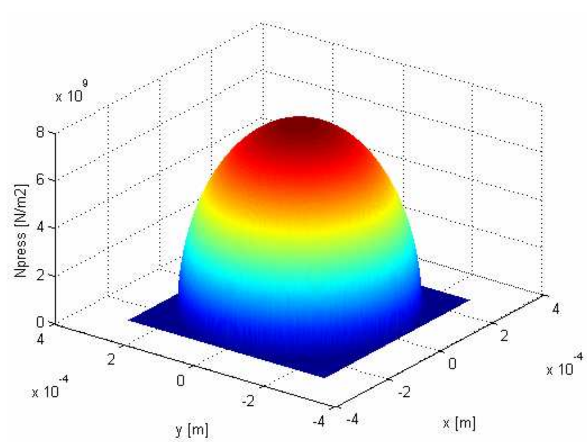
Pot 200W, Fn =1670 N/contato





Pot 250W, Fn =2090 N/contato

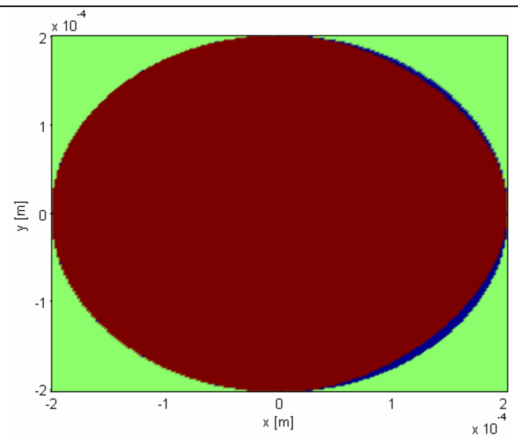
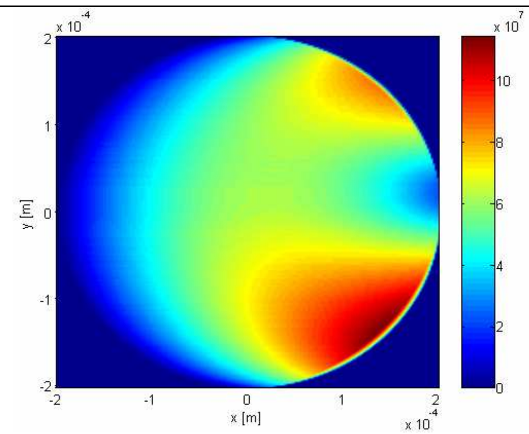
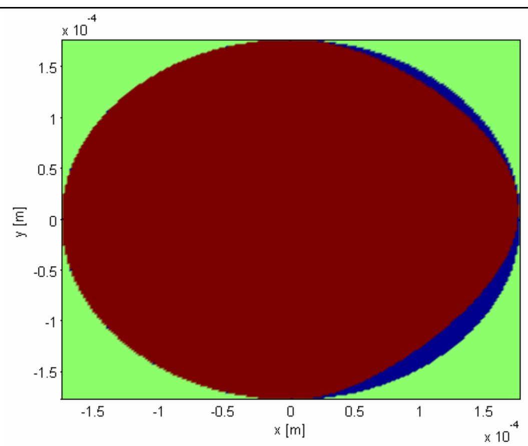
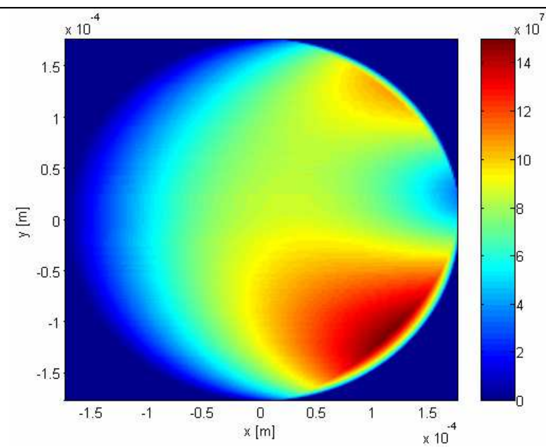


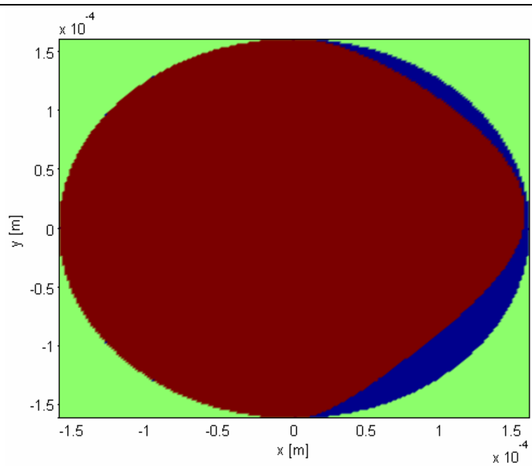
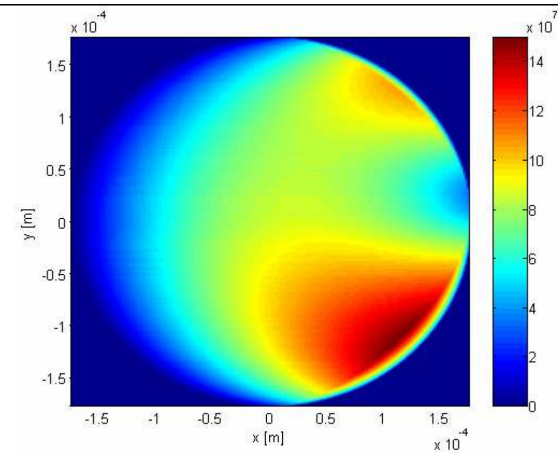


O contato das esferas com o cone é elíptico, porém não é toda essa área onde ocorre o "stick" ou aderência (termo técnico traduzido). Uma pequena fatia na região extrema apresenta uma porção com "slip" ou escorregamento (termo técnico traduzido) devido às condições de cargas "spin" devido a geometria de contato, taxa de "creeping" (deformação axial do material no ponto de contato).

Nas figuras a seguir, a região de contato é contrastada. A cor azul descreve as regiões que sofrem "slip" enquanto a cor vermelha descreve a condição de "stick".

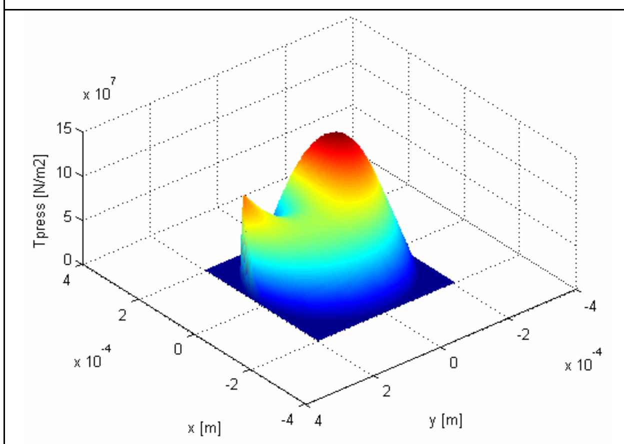
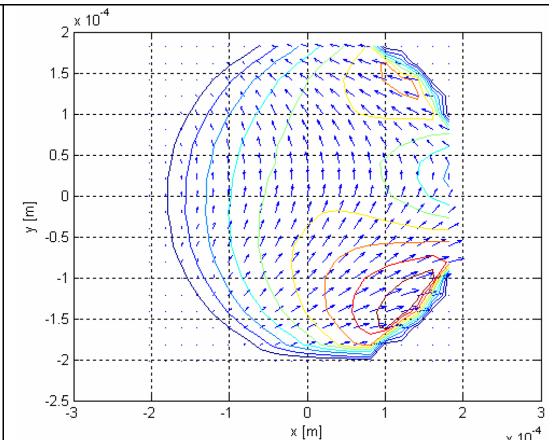
Tabela A.3 –Contato Pressão Tangencial na condição de 50W

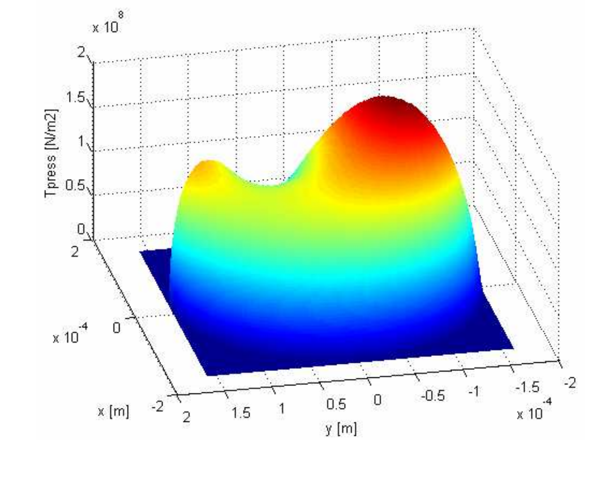
Pot 50W, Rt = 0.5, Ft = 27,6 N/contato	
	
Pot 50W, Rt = 1, Ft =36,8 N/contato	
	

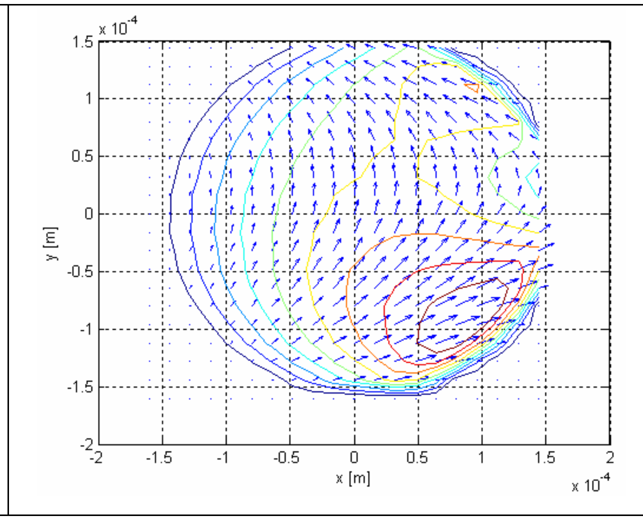
Pot 50W, Rt = 2, Fn = 58,3 N/contato	
	

O perfil da pressão não é simétrico devido ao fator de spin.

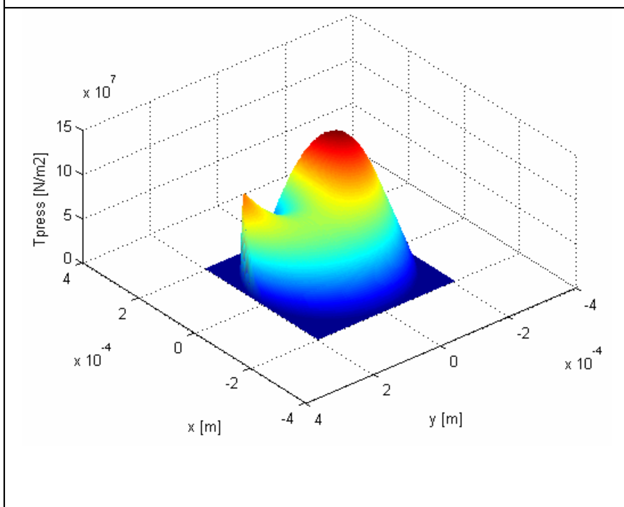
Tabela A4 –Pressão Tangencial na condição de 50W

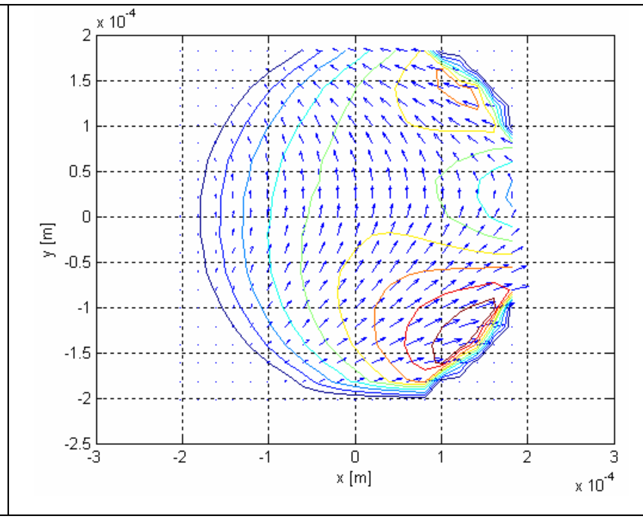
Pot 50W, Rt = 0.5, Ft =27,6 N/contato	
	
Pot 50W, Rt = 1, Ft =36,8 N/contato	





Pot 50W, Rt = 2, Ft =58,3 N/contato





Para cada condição de trabalho existe um campo de tensão ao longo do corte longitudinal das esferas. Na figura a seguir é mostrada a condição de relação de transmissão 1:1, apresentando os níveis de tensão altos.

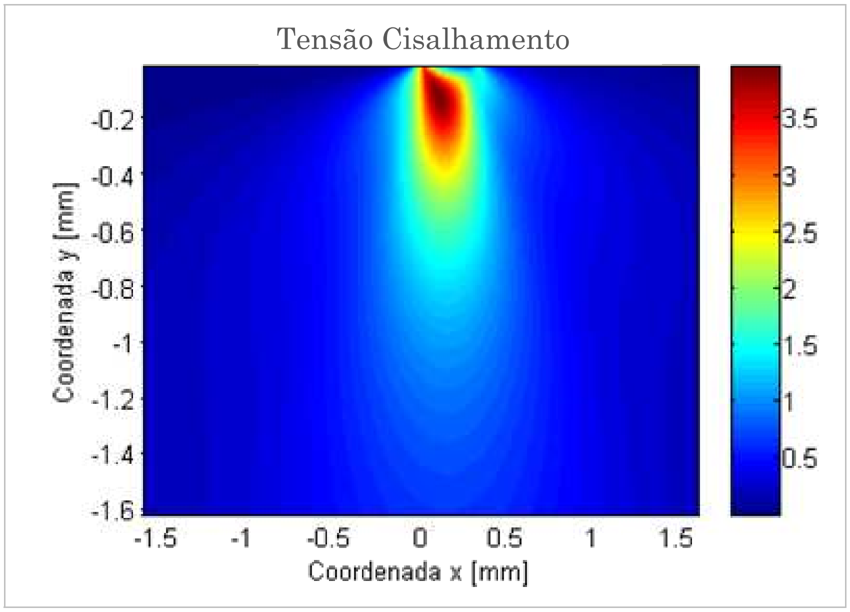
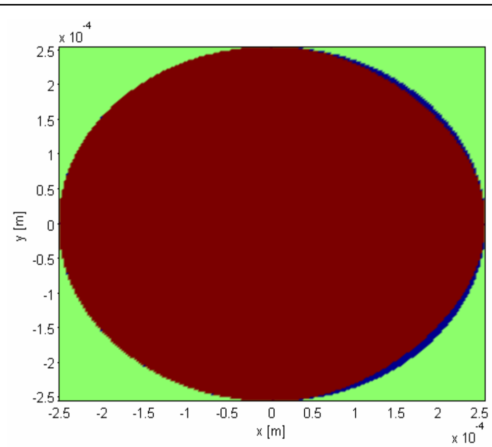
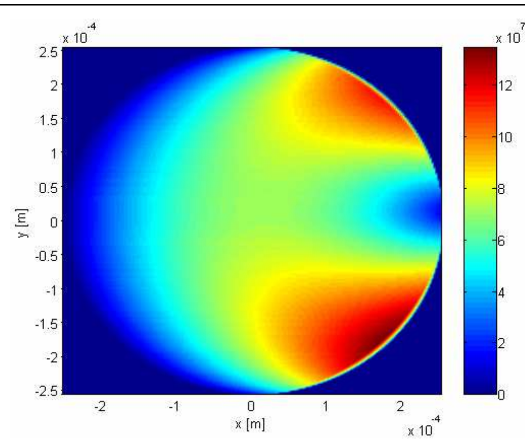


Figura A1 – Estado de Tensões [GPa] (rt 1:1 no cone de entrada)

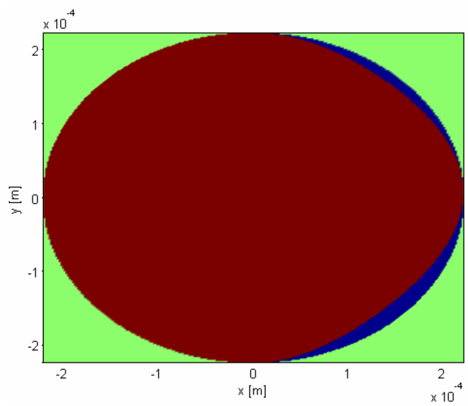
A vida da CVT é calculada para cada condição e, como pode-se observar, é maior nas relações de transmissões mais próximas da 1:1 (vide figura 7.13). Isso acontece devido as forças (tangenciais e principalmente normais) serem menores nessa condição de operação da CVT.

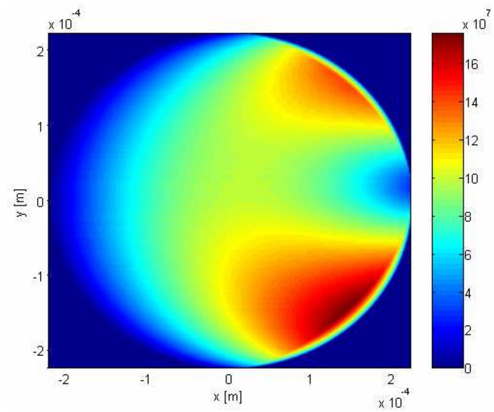
Para o caso em que a potência é 100W, mantendo-se as demais características constantes, tem-se:

Tabela A5–Contato e Pressão Tangencial na condição de 100W

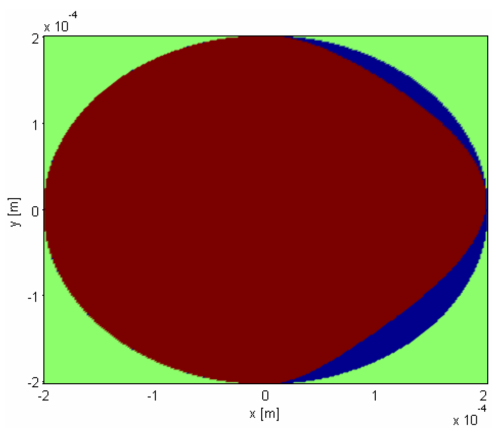
Pot 100W, Rt = 0.5, Ft =55,3 N/contato	
	

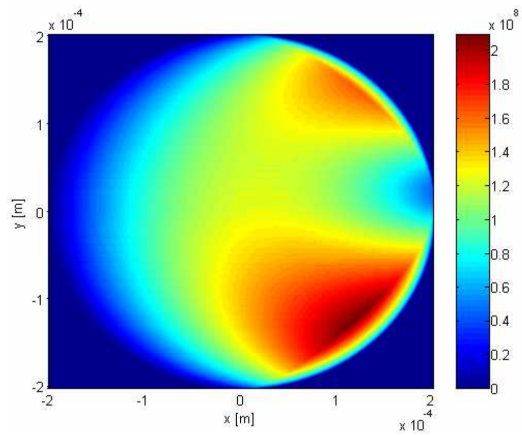
Pot 100W, Rt = 1, Ft =74,7 N/contato





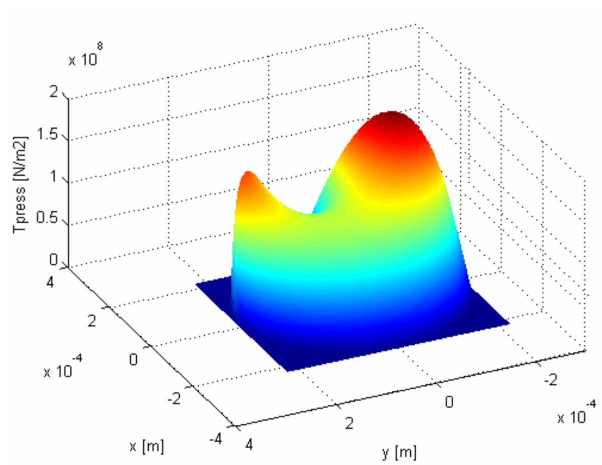
Pot 100W, Rt = 1, Ft =116,7 N/contato

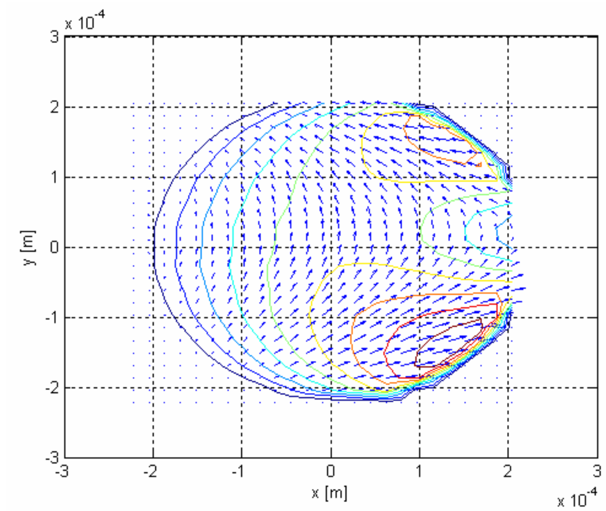


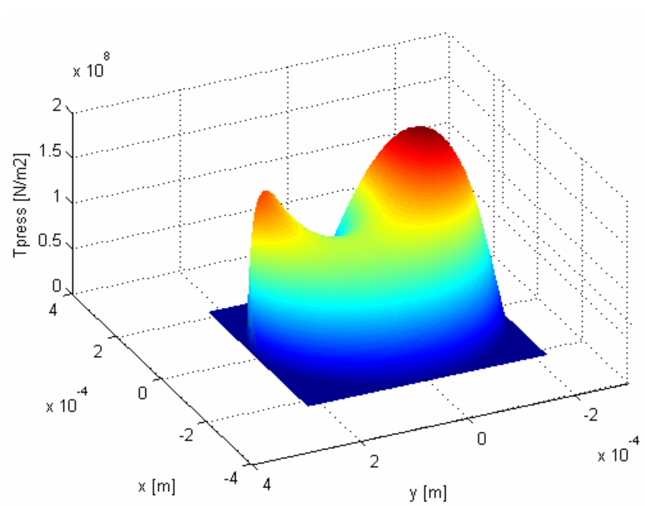


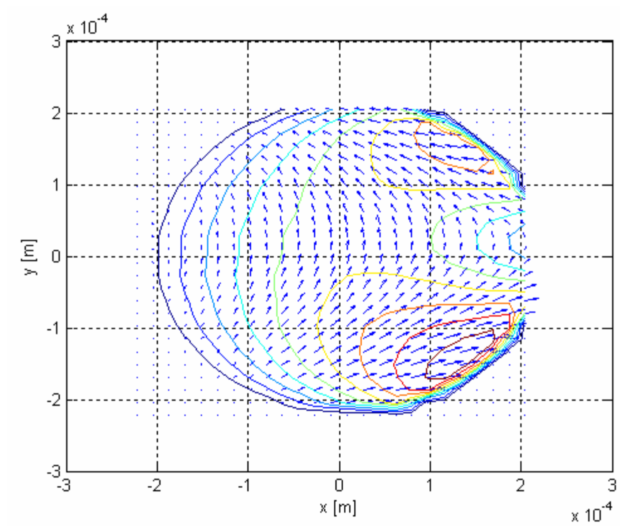
O perfil da pressão tangencial e seu campo vetorial também é calculado para seu nível de escorregamento (slip e spin).

Tabela A6 - Pressão Tangencial na condição de 100W

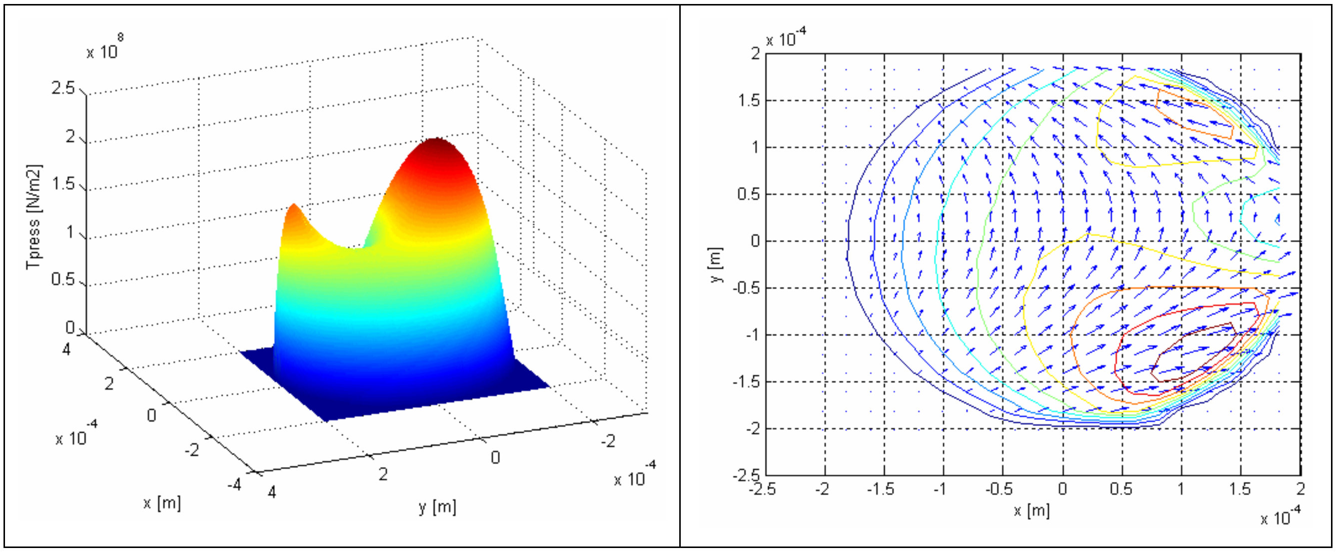
<table>
<tr><td colspan="2">Pot 100W, Rt = 0.5, Fn =55,3 N/contato</td></tr>
<tr><td>


</td><td>


</td></tr>
<tr><td colspan="2">Pot 100W, Rt = 1, Fn =74,7 N/contato</td></tr>
<tr><td>


</td><td>


</td></tr>
<tr><td colspan="2">Pot 100W, Rt = 2, Fn =116,7 N/contato</td></tr>
</table>



A tensão obtida por essas forças é definida pela figura A2:

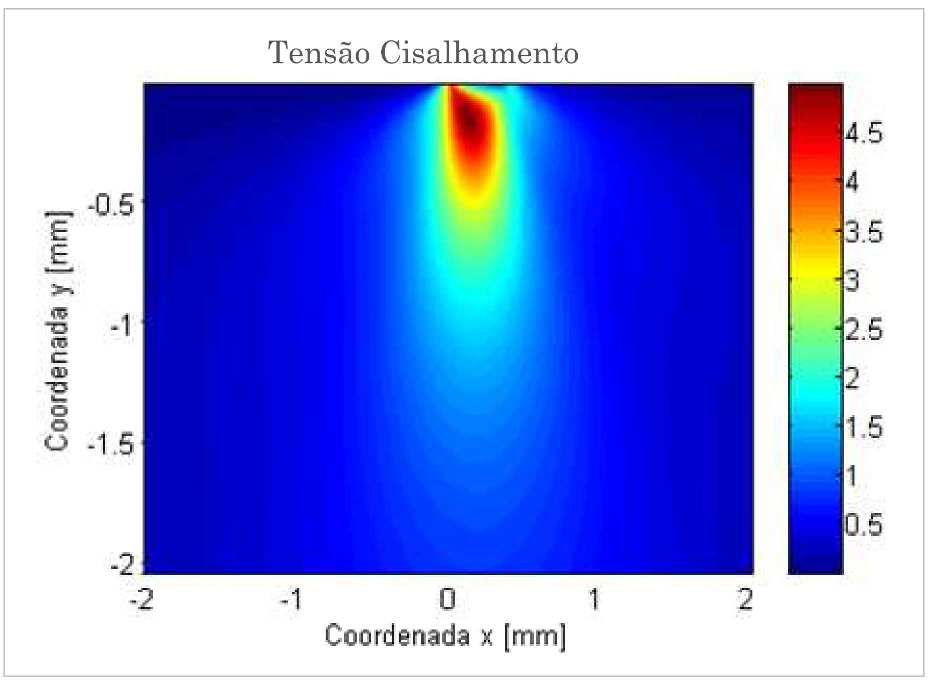


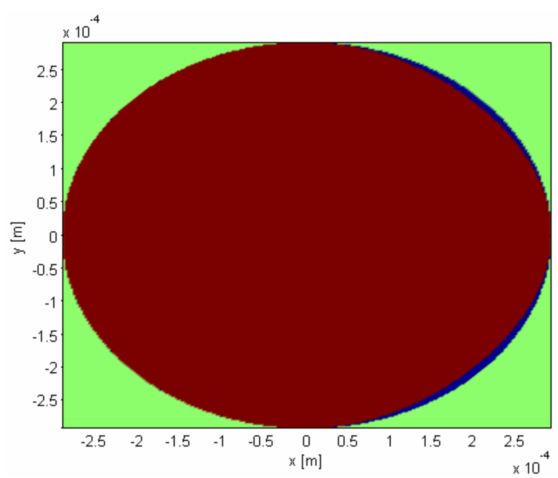
Figura A2 – Estado de Tensões [GPa] (rt 1:1 no cone de entrada, 100W)

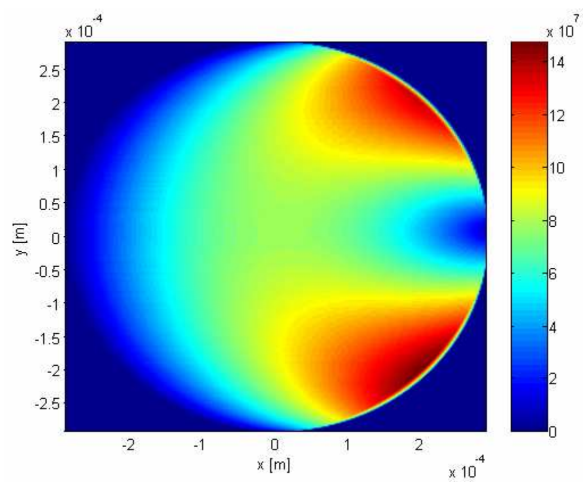
Nota-se que as tensões na condição de 100W é maior que na condição de 50W (ver figuras A1 e A2). Isso é devido ao carregamento normal e carregamento tangencial ser maior para essa condição.

Para uma potência de 150W em uma bicicleta, as forças tangenciais envolvidas giram em torno de 80 N e 170 N e as normais em torno de 1200 N em cada ponto de contato ("contact spot"). Nesse caso, pode-se prever que a vida da transmissão seja menor que nos casos anteriores.

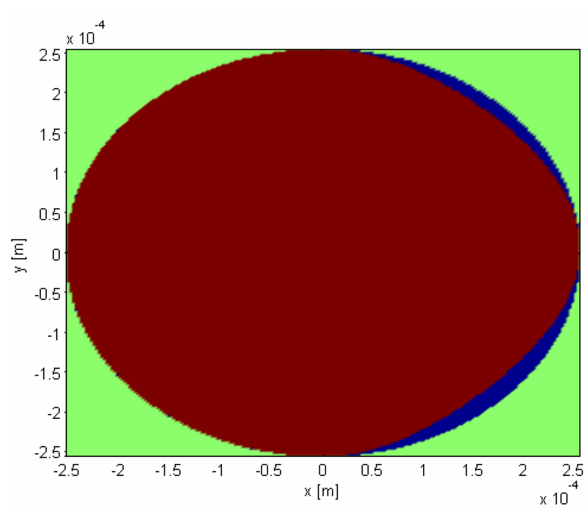
Tabela A7–Contato e Pressão Tangencial na condição de 150W

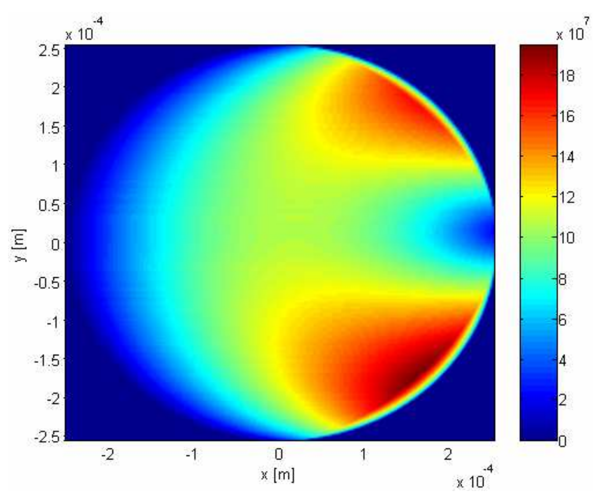
Pot 150W, Rt = 0.5, Ft =83 N/contato

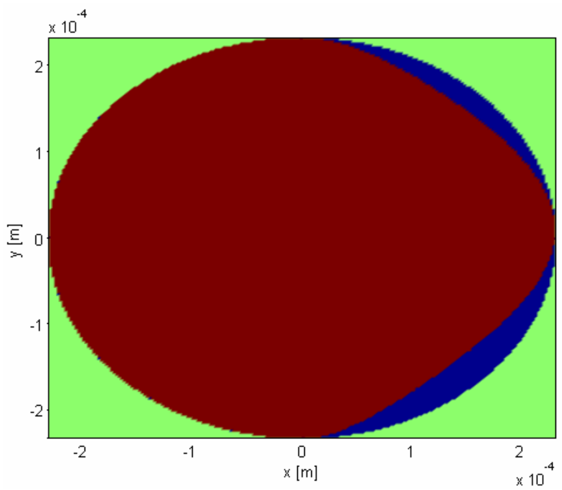
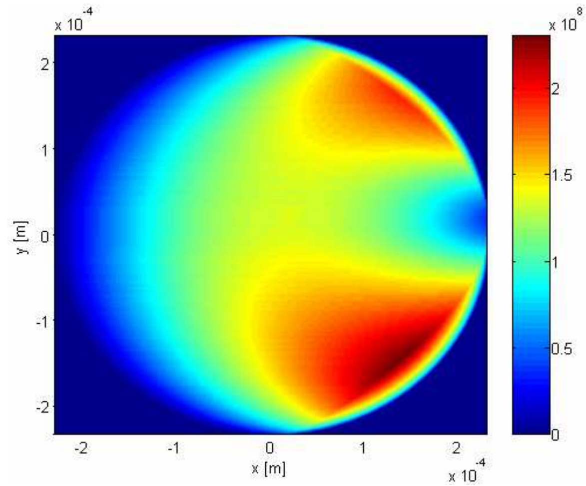




Pot 150W, Rt = 1, Ft = 110 N/contato

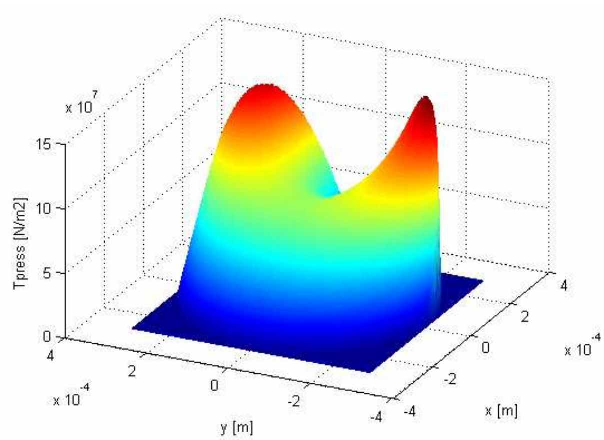
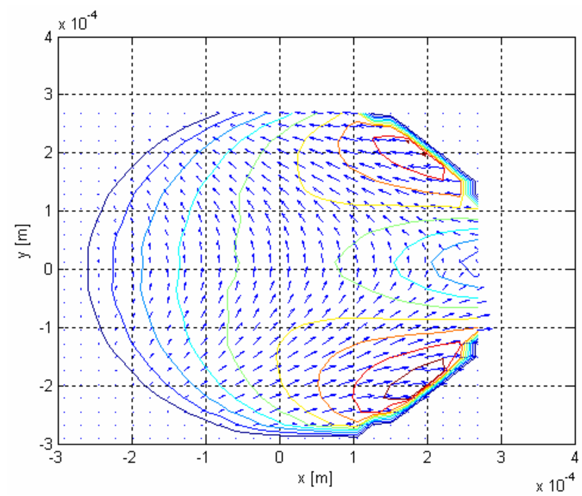


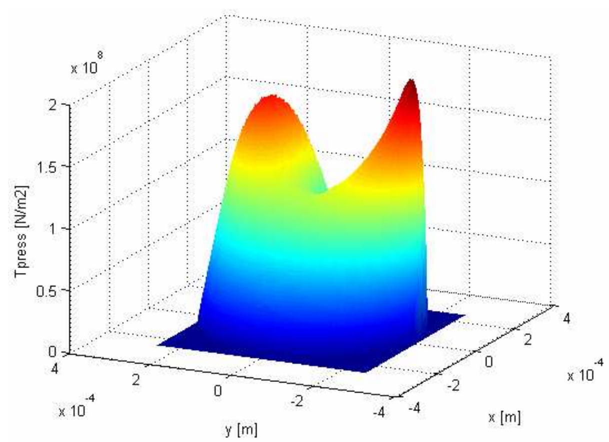
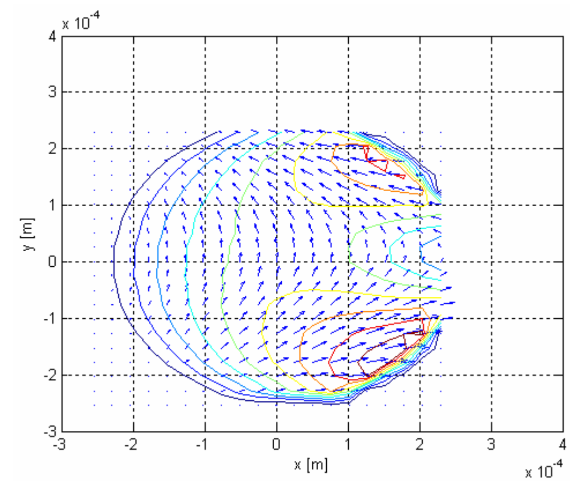
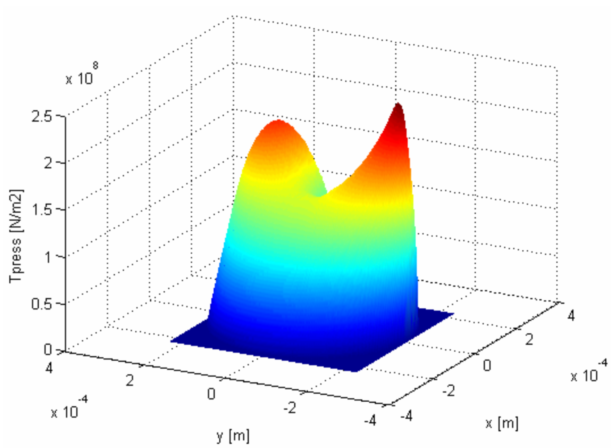
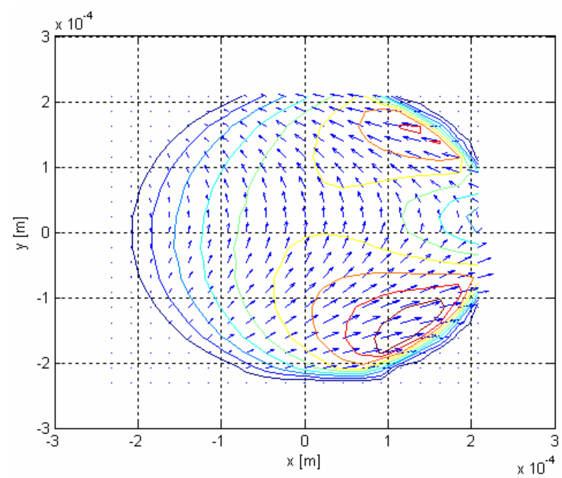


Pot 150W, Rt = 2, Ft =175 N/contato	
	

O perfil da pressão tangencial sofre uma pequena alteração, primeiramente na sua magnitude e também o pico do lado esquerdo, que nos gráficos anteriores era menor e agora tem um tamanho considerável comparado ao pico de máxima intensidade. intensidade.

Tabela A8– Pressão Tangencial na condição de 150W

Pot 150W, Rt = 0.5, Ft =83 N/contato	
	

<table>
<tr><td colspan="2">Pot 150W, Rt = 0.75, Ft =110 N/contato</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Pot 150W, Rt = 1, Fn =175 N/contato</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

A tensão gerada por estas forças é maio que nas condições anteriores, afinal de conta, a força normal é muito maior e ela tem a maior parcela na geração de tensão

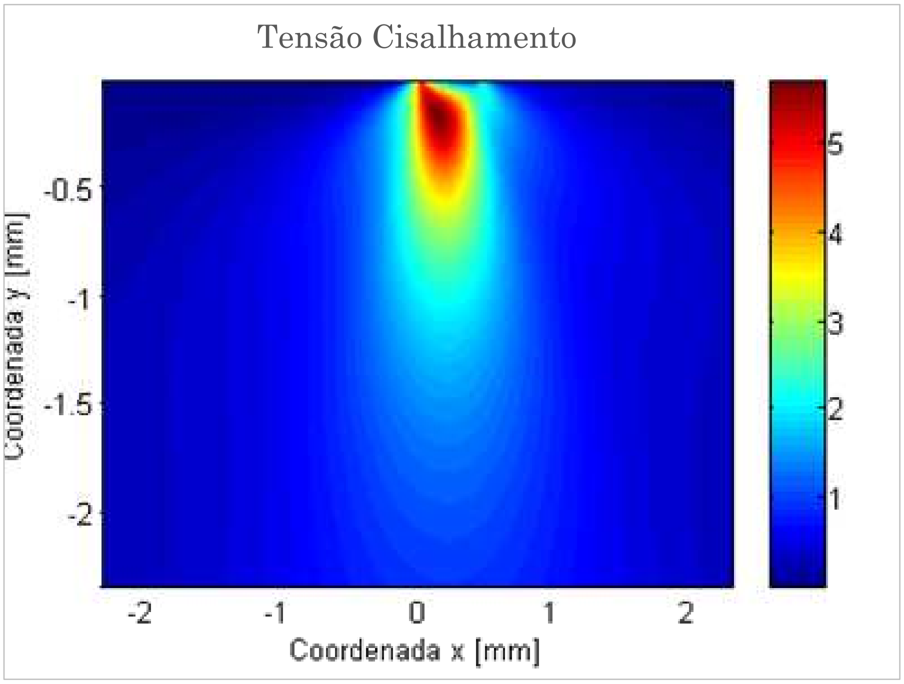


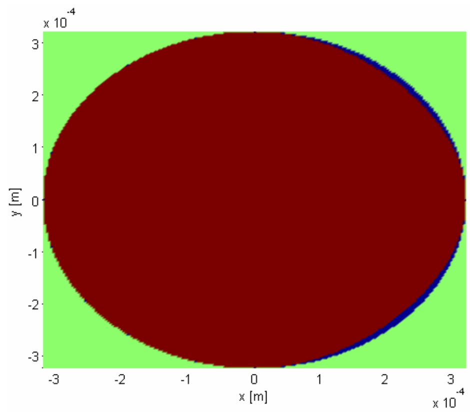
Figura A3 – Estado de Tensões [GPa] (rt 1:1 no cone de entrada, 150W)

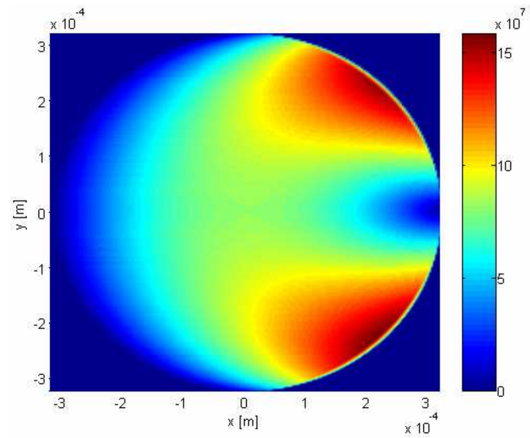
Aumentando-se a potência de 150W para 200W, as forças envolvidas também aumentam devido ao aumento do torque a ser transmitido e também da força de aperto. Neste caso, a força tangencial gira em torno de 110N a 235N e a força normal em torno de 1670N em cada ponto de contato

Nas tabela A9, a região de contato é contrastada. A cor azul descreve as regiões que sofrem "slip" enquanto a cor vermelha descreve a condição de "stick".

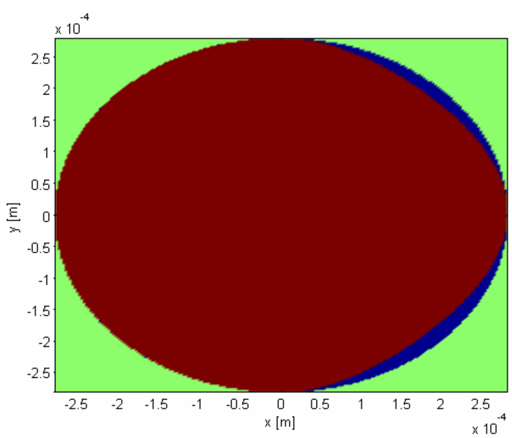
Tabela A9–Contato e Pressão Tangencial na condição de 200W

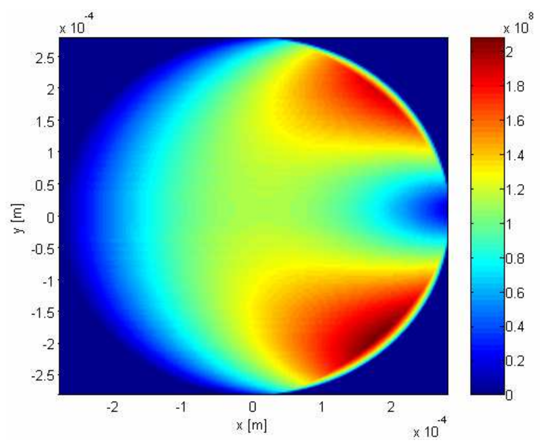
Pot 200W, Rt = 0.5, Ft =110 N/contato



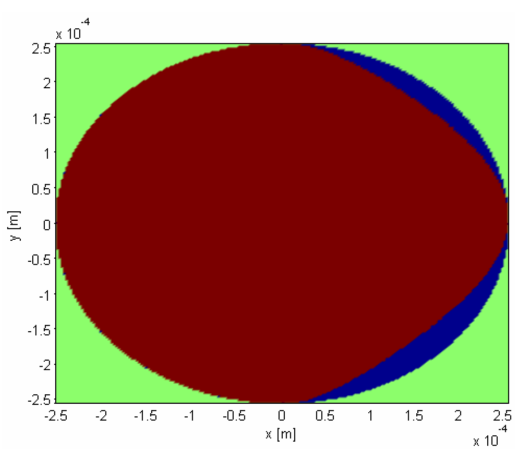


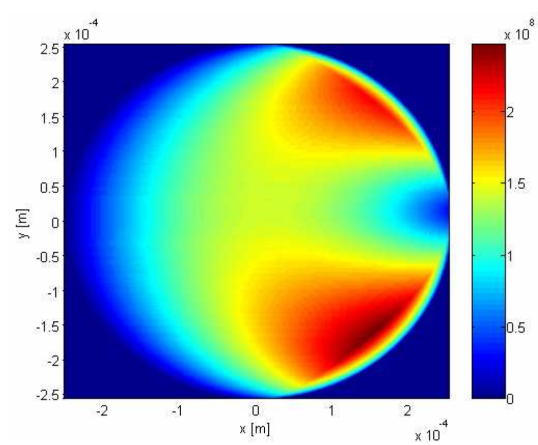
Pot 200W, Rt = 1, Ft =147 N/contato





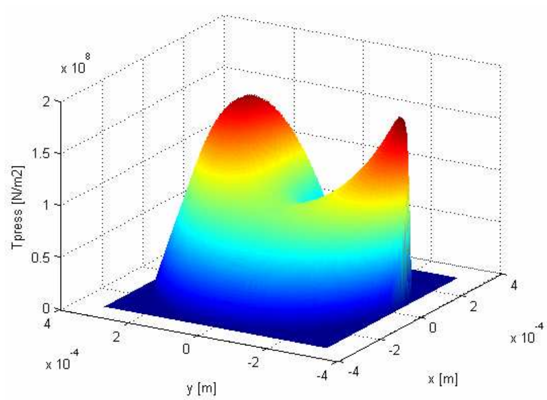
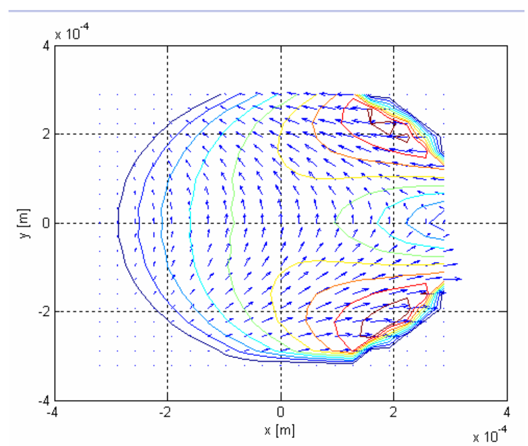
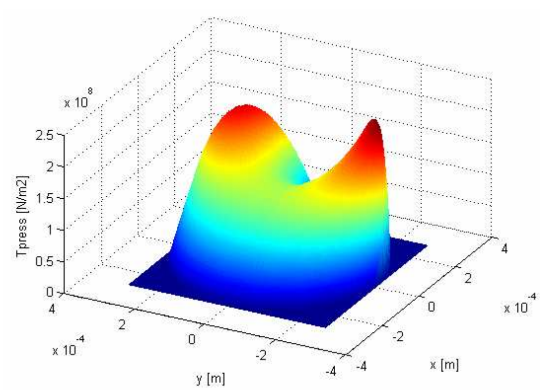
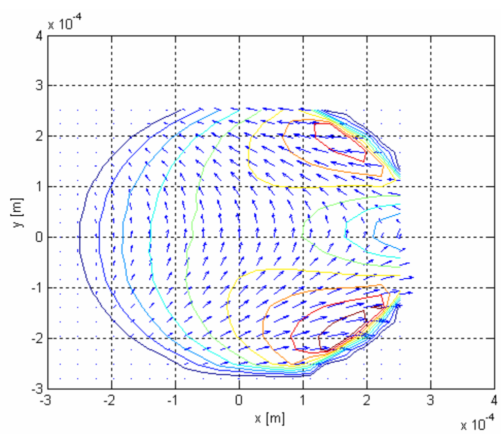
Pot 200W, Rt = 2, Ft =235 N/contato

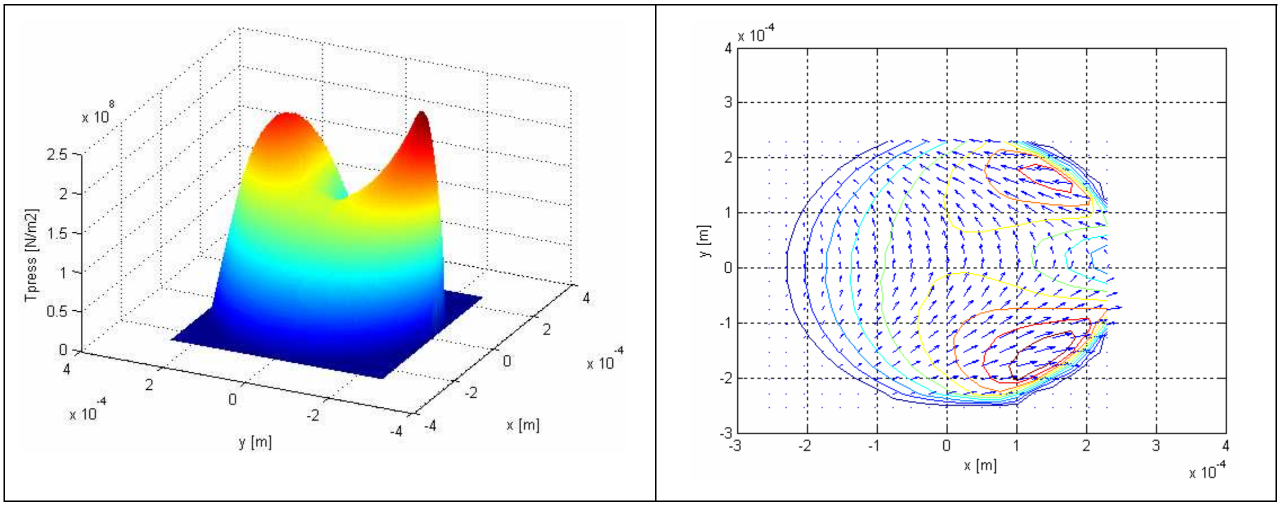




O perfil da pressão tangencial não é muito alterado com relação a sua forma, ainda continua com os dois picos de pressão. Esses picos de pressão são devido a região em que está ocorrendo o escorregamento (região em azul na tabela A9)

Tabela A10– Pressão Tangencial na condição de 200W

<table>
<tr><td colspan="2">Pot 200 W, Rt = 0.5, Ft =110 N/contato</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Pot 200W, Rt = 1, Fn =147 N/contato</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Pot 200W, Rt = 2, Fn =235 N/contato</td></tr>
</table>



As tensões no cone de entrada possuem intensidade maior em 200W que nas outras condições. O escorregamento continua muito parecido de caso para caso porque a força normal cresce na mesma proporção que a força tangencial.

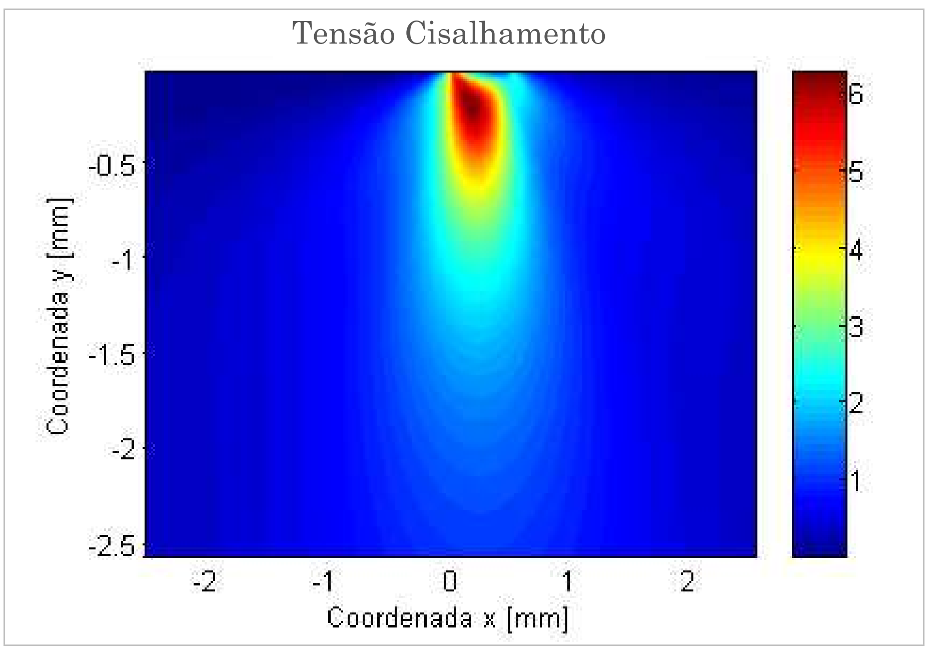
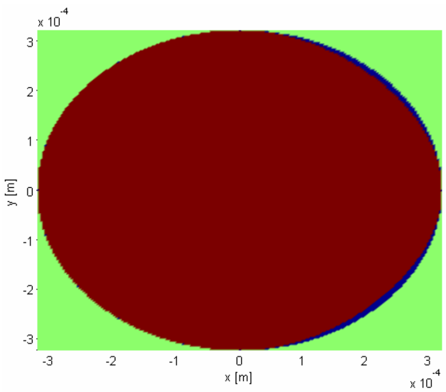
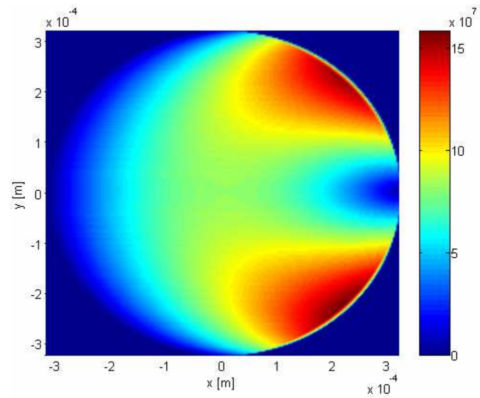
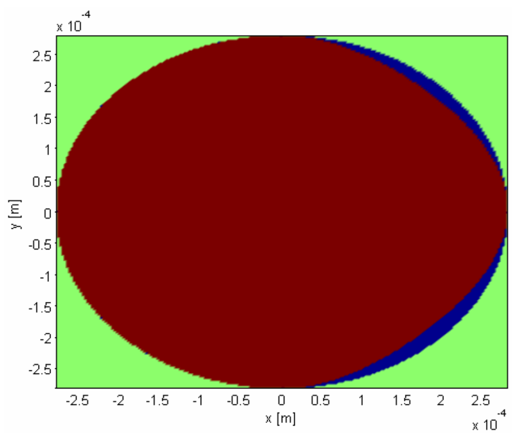
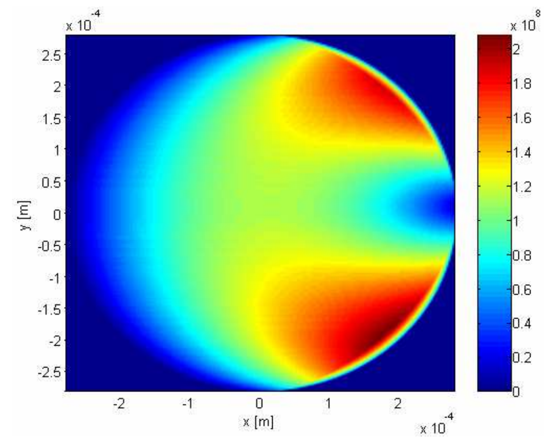
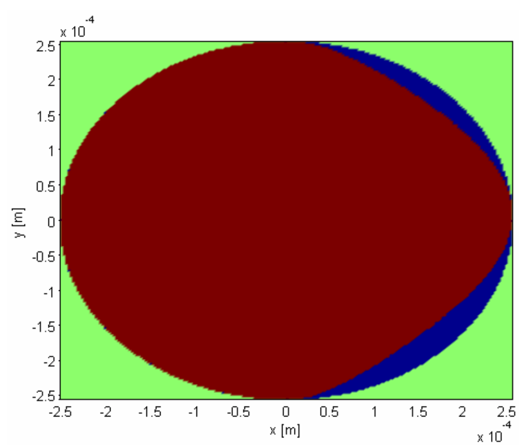
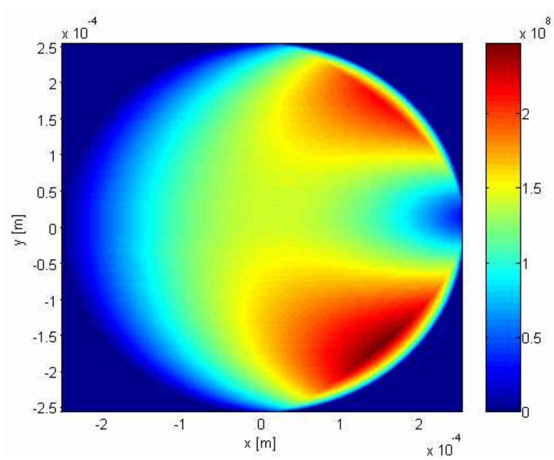


Figura A4 – Estado de Tensões [GPa] (rt 1:1 no cone de entrada, 200W)

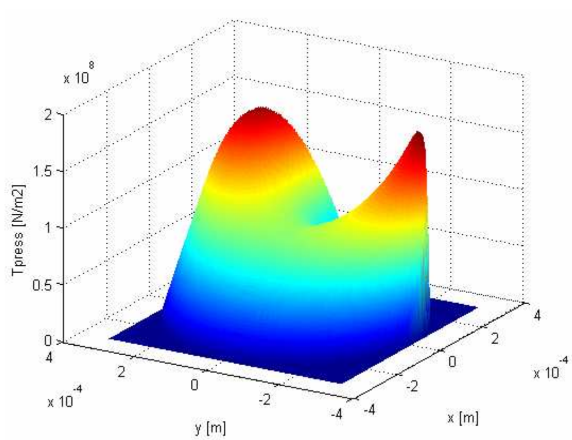
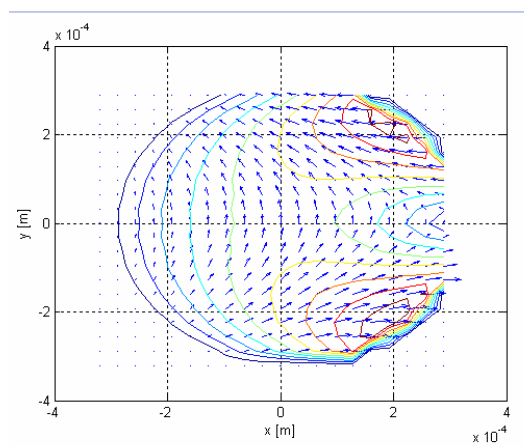
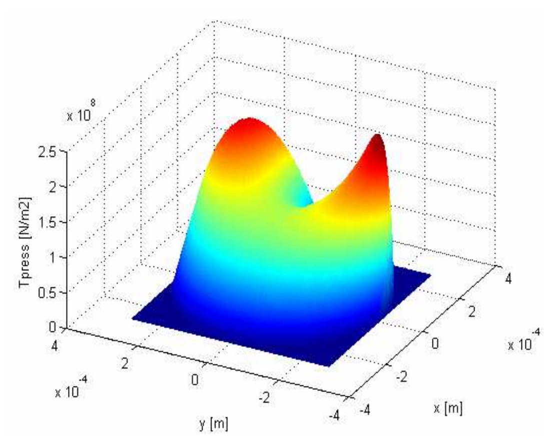
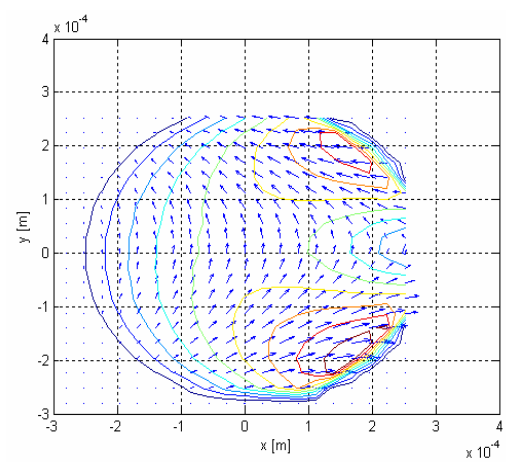
Para a condição em que a CVT transmite 250W, tem-se os seguintes resultados:

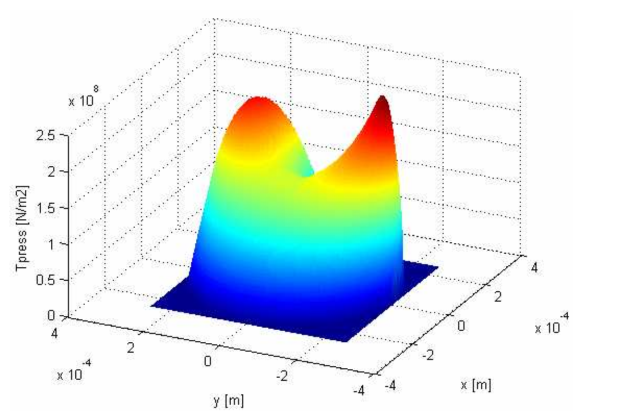
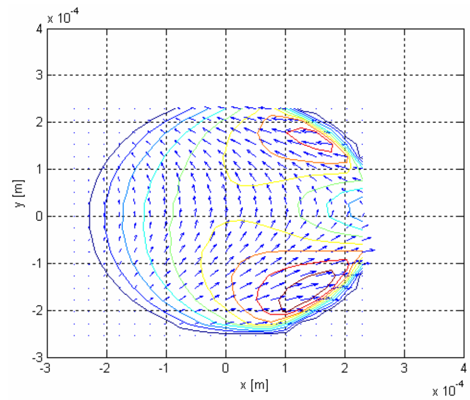
Tabela A11–Contato e Pressão Tangencial na condição de 250W

<table>
<tr><td colspan="2">Pot 250W, Rt = 0.5, Ft =138 N/contato</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Pot 250W, Rt = 1, Ft =184 N/contato</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Pot 250W, Rt = 1, Ft =291 N/contato</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

O perfil da pressão tangencial não é muito alterado, com exceção de sua intensidade, assim como foi dito anteriormente. Isso se deve somente pelo aumento da força sem mudança em nenhuma variável da CVT como ângulo de conicidade. Dessa forma, chega-se ao resultado da tabela A12.

Tabela A12– Pressão Tangencial na condição de 250W

<table>
<tr><td colspan="2">Pot 250 W, Rt = 0.5, Ft =138 N/contato</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Pot 250W, Rt = 1, Ft =184 N/contato</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Pot 250W, Rt = 2, Ft =291 N/contato	
	

A tensão de cisalhamento máxima é definido pela figura A5.

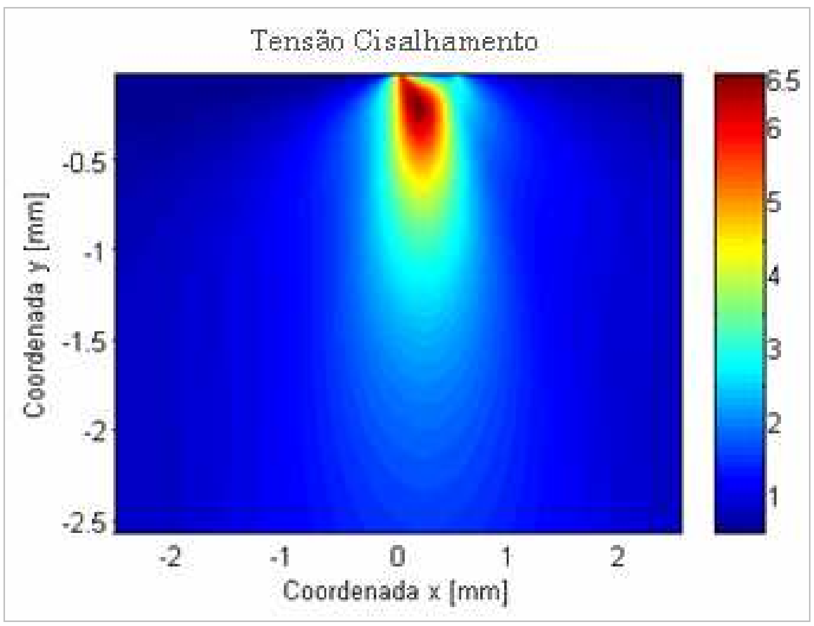


Figura A5 – Estado de Tensões [GPa] (rt 1:1 no cone de entrada, 250W)

Apêndice

Relações cinemáticas e dinâmicas

Segundo o equacionamento proposto por FORTI [2003], levando-se em conta somente os discos e as esferas da CVT e desprezando-se os eixo primário, pode-se encontrar uma relação de velocidades entres os corpos a seguir (2,3 e 4) em função do corpo 1. Para essa transmissão, não levando-se em conta o escorregamento entre esses corpos.

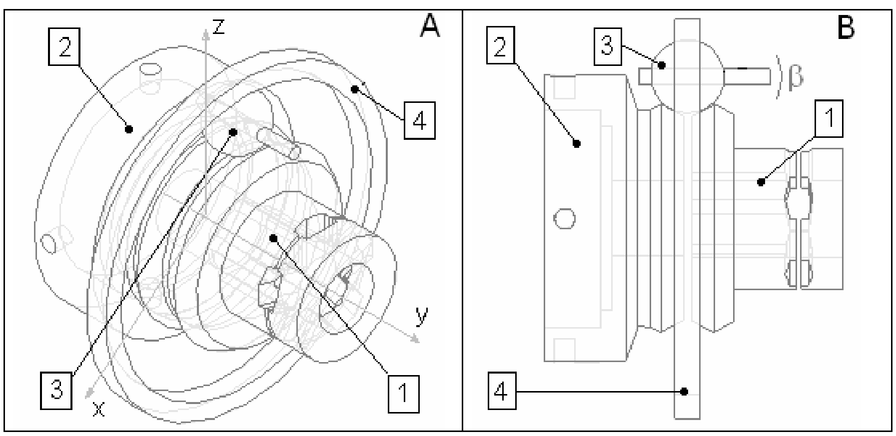


Figura P.1 – Disposição dos Elementos Equacionados

Relação entre as velocidades dos corpos 1 e 3.

$$R_1\dot{\theta}_{1y} = R_{3e}\dot{\theta}_{3y} \rightarrow \boxed{\dot{\theta}_{3y} = \frac{R_1\dot{\theta}_{1y}}{R_{3e}}} \tag{P-1}$$

Relação entre as velocidades dos corpos 1 e 2.

$$R_{3s}\dot{\theta}_{3y} = R_2\dot{\theta}_{2y} \rightarrow \dot{\theta}_{2y} = \frac{R_{3s}\dot{\theta}_{3y}}{R_2} \tag{P-2}$$

substituindo a Equação A1.1 em A1.2

$$\dot{\theta}_{2y} = \frac{R_{3s}}{R_2}\frac{R_1}{R_{3e}}\dot{\theta}_{1y} \tag{P-3}$$

sendo: $R_1 = R_2$

$$\dot{\theta}_{2y} = \frac{R_{3s}}{R_{3e}}\dot{\theta}_{1y} \rightarrow \boxed{\dot{\theta}_{2y} = rt\,\dot{\theta}_{1y}} \tag{P-4}$$

Relações entre os corpos 1 e 4.

$$R_{3a}\dot{\theta}_{4y} = R_{3e}\dot{\theta}_{3y} \rightarrow \dot{\theta}_{4y} = \frac{R_{3e}\dot{\theta}_{3y}}{R_{3a}} \tag{P-5}$$

$$\dot{\theta}_{4y} = \frac{R_{3e}}{R_{3a}}\frac{R_1}{R_{3e}}\dot{\theta}_{1y} \rightarrow \boxed{\dot{\theta}_{4y} = \frac{R_1}{R_{3a}}\dot{\theta}_{1y}} \tag{P-6}$$

Equações Dinâmicas

As equações diferenciais que descrevem o movimento de um sistema dinâmico com *n* graus de liberdade pode ser escrito na forma das equações de Lagrange como:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\right) = 0 \qquad k = 1,2,\dots n \tag{P1-7}$$

Para o caso em que há *p* forças *F*, agindo no sistema a equação toma a forma:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\right) = Q_k \qquad k = 1,2,\dots n \tag{P-8}$$

sendo:

$$Q_k = \sum_{j=1}^{p} F_j \frac{\partial s_j}{\partial q_k} \qquad k = 1,2,\dots n \tag{P-9}$$

$$s_j = s_j(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \tag{P-10}$$

Sendo, V=0, portanto $L = T - V = T$. Logo a Energia Cinética do Sistema é:

$$T = \frac{I_{1y}\dot{\theta}_{1y}^2}{2} + \frac{I_{2y}\dot{\theta}_{2y}^2}{2} + \frac{I_{3y}\dot{\theta}_{3y}^2}{2} + \frac{I_{4y}\dot{\theta}_{4y}^2}{2} + \frac{I_{3x}\dot{\theta}_{3x}^2}{2} \qquad \text{(P-11)}$$

Substituindo as Equações A1.2, A1.9 em A1.11, tem-se

$$T = \frac{\dot{\theta}_{1y}^2}{2}\left[I_{1y} + (rt)^2 I_{2y} + \left(\frac{R_1}{R_{3e}}\right)^2 I_{3y} + \left(\frac{R_1}{R_{3a}}\right)^2 I_{4y} \right] + \frac{I_{3x}\dot{\theta}_{3x}^2}{2} \qquad \text{(P-12)}$$

sendo:

$$rt = \left[\frac{\sqrt{R_E - Y^2} - Y\tan(\theta_{3x})}{\sqrt{R_E - Y^2} + Y\tan(\theta_{3x})}\right] \qquad \text{(P-13)}$$

sendo:

$\sqrt{R_3 - Y^2}$ = constante (determinada em projeto) = c1

R_1 = constante (determinada em projeto)

$R_{3e} = c1 - Y\tan(\theta_{3x})$

$R_{3a} = R_E \cos(\theta_{3x})$

e refinando esta forma, tem-se:

$$T = \frac{\dot{\theta}_{1y}^2}{2}\left[I_{1y} + \left(\frac{c1 - Y\tan(\theta_{3x})}{c1 + Y\tan(\theta_{3x})}\right)^2 I_{2y} + \left(\frac{R_1}{c1 - Y\tan(\theta_{3x})}\right)^2 I_{3y} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{R_1 \sec(\theta_{3x})}{R_E}\right)^2 I_{4y} \right] + \frac{I_{3x}\dot{\theta}_{3x}^2}{2} \qquad \text{(P-14)}$$

Para a coordenada generalizada θ_{1y} tem-se:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{1y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{1y}} = Q_{1y} \qquad \text{(P-15)}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{1y}}\right)=\ddot{\theta}_{1y}\left[I_{1y}+\left(\frac{c1-Y\tan(\theta_{3x})}{c1+Y\tan(\theta_{3x})}\right)^2 I_{2y}+\left(\frac{R_1}{c1-Y\tan(\theta_{3x})}\right)^2 I_{3y}+\left(\frac{R_1\sec(\theta_{3x})}{R_E}\right)^2 I_{4y}\right]$$

(P-16)

sendo

$$Q_{1y}=Tor_{1y}-C$$

$$\boxed{\ddot{\theta}_{1y}\left[I_{1y}+\left(\frac{c1-Y\tan(\theta_{3x})}{c1+Y\tan(\theta_{3x})}\right)^2 I_{2y}+\left(\frac{R_1}{c1-Y\tan(\theta_{3x})}\right)^2 I_{3y}+\left(\frac{R_1\sec(\theta_{3x})}{R_E}\right)^2 I_{4y}\right]=Tor_{1y}-C}$$

(P-17)

Replicando esse procedimento para a coordenada generalizada θ_{3x} tem-se:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_{3x}}=\frac{\dot{\theta}_{1y}}{2}\left[\frac{2\ I_{4y}\ R_1^2\ Sec(\theta_{3x})^2\ Tan(\theta_{3x})^2}{R_2^2}+\frac{2\ I_{3y}\ R_1^2\ Y\ Sec(\theta_{3x})^2}{[c1-Y\ Tan(\theta_{3x})]^3}-\right.$$
$$\left.\frac{2\ I_{2y}\ Y\ Sec(\theta_{3x})^2[c1-Y\ Tan(\theta_{3x})]^2}{[c1+Y\ Tan(\theta_{3x})]^3}-\frac{2\ I_{2y}\ Y\ Sec(\theta_{3x})^2[c1-Y\ Tan(\theta_{3x})]}{[c1+Y\ Tan(\theta_{3x})]^3}\right]$$

(P-18)

$$\boxed{\begin{aligned}I_{3x}\ddot{\theta}_{3x}-\frac{\dot{\theta}_{1y}}{2}\Bigg[&\frac{2\ I_{4y}\ R_1^2\ Sec(\theta_{3x})^2\ Tan(\theta_{3x})^2}{R_2^2}+\frac{2\ I_{3y}\ R_1^2\ Y\ Sec(\theta_{3x})^2}{[c1-Y\ Tan(\theta_{3x})]^3}-\\&\frac{2\ I_{2y}\ Y\ Sec(\theta_{3x})^2[c1-Y\ Tan(\theta_{3x})]^2}{[c1+Y\ Tan(\theta_{3x})]^3}-\\&+\frac{2\ I_{2y}\ Y\ Sec(\theta_{3x})^2[c1-Y\ Tan(\theta_{3x})]^2}{[c1+Y\ Tan(\theta_{3x})]^3}\Bigg]=Tor_{3x}\end{aligned}}$$

(P-19)

Considerando os elementos da CVT com sendo corpos rígidos, as Equações P-16 e P-19 governam o sistema dinâmico.