

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À REDAÇÃO FINAL
TESE DEFENDIDA POR MARCO ADOLPH
_____ E APROVADA PELO
COMISSÃO JULGADORA EM 27/02/2002
Cosimo
ORIENTADOR

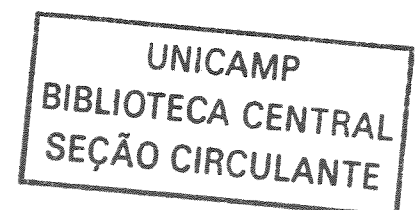
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

**Soluções Transientes de Problemas Visco-
Elastodinâmicos em Meios Ilimitados Através da
Transformada de Fourier Rápida – FFT**

Autor : **Marco Adolph**
Orientador: **Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto**

02/02

200307144



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL**

**Soluções Transientes de Problemas Visco-
Elastodinâmicos em Meios Ilimitados Através da
Transformada de Fourier Rápida – FFT**

Autor : **Marco Adolph**

Orientador: **Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto**

Curso: Engenharia Mecânica.

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos

Dissertação de mestrado apresentada à comissão de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2002
S.P. - Brasil

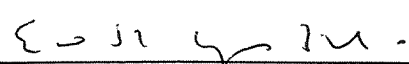
**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

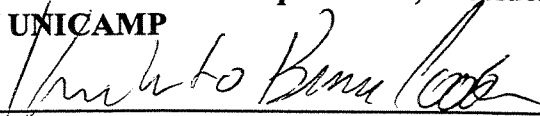
**Soluções Transientes de Problemas Visco-
Elastodinâmicos em Meios Ilimitados Através da
Transformada de Fourier Rápida – FFT**

Autor : **Marco Adolph**

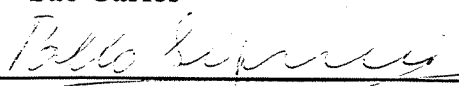
Orientador: **Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto**



**Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto, Presidente
FEM / UNICAMP**



**Prof. Dr. Humberto Breves Coda
EESC / USP - São Carlos**



**Prof. Dr. Pablo Siqueira Meirelles
FEM / UNICAMP**

Campinas, 27 de fevereiro de 2002.

CHAMADA T/UNICAMP
Ad 72s

EX

DMBO BC/ 52581

ROC. 6-124703

C ☐ D ☒

REÇO 14.11.05

ATA 13/03/03

CPD

CM00180697-1

B ID 284900

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

Ad72s Adolph, Marco

Soluções transientes de problemas visco-elastodinâmicos em meios ilimitados através da Transformada de Fourier Rápida - FFT / Marco Adolph.--Campinas, SP: [s.n.], 2002.

Orientador: Euclides de Mesquita Neto.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Métodos de elementos de contorno. 2. Green, Funções de. 3. Viscoelasticidade. 4. Fourier, Transformações de. 5. Interação solo-estrutura. 6. Vibração. 7. Máquinas – Fundações. I. Mesquita Neto, Euclides. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Dedicatória:

Dedico este trabalho a minha mãe, Helga, e a meu amor, Sandra.

Agradecimentos:

Esse trabalho não teria sido possível sem a colaboração e incentivo de muitos. A todas as pessoas que me apoiaram, presto a minha homenagem:

Ao Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto pela oportunidade, pela orientação, pelas conversas e ensinamentos.

Aos Prof. Dr. Dmitri Vlassov e Prof. Msc. Heraldo Cambraia por terem despertado em mim o interesse pela ciência e pesquisa.

À Sandra, essa pessoa tão especial, por se manter ao meu lado em todos os instantes, incentivando, alegrando, ajudando e me fazendo rir, mesmo nos momentos de desespero.

À Helga, minha mãe, pelo apoio em todos os momentos.

À Silvia, minha irmã, que sempre me incentivou.

À Vera e Vitor, pela amizade.

Aos professores do DMC pelos quais tenho grande apreço.

Aos amigos da UNICAMP, Willian, Eder, Alex, Ronaldo, Zilda, Noritomi, Luiz Sanches, Foltran, Khaled, Carlos e Clecios.

Ao Carlos Magno, grande amigo e médico.

À Maria Rosa e Mário Gneri, pela hospedagem e pela amizade.

Aos amigos da graduação na UFPR pela amizade e apoio.

A todos os funcionários da FEM pela estrutura e colaboração.

A CAPES pela bolsa e a FAPESP pela estrutura laboratorial.

O egoísmo não reinará mais nas ciências quando todos se associarem para estudar. Em vez de mandar aos acadêmicos envelopes lacrados, todos se empenharão em publicar suas menores observações, por pouco que sejam novas, e acrescentarão: “Não sei o resto”.

Évariste Galois (1811-1832), matemático francês

Resumo

Adolph, Marco, *Soluções Transientes de Problemas Visco-Elastodinâmicos em Meios Ilimitados através da Transformada de Fourier Rápida – FFT*, Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2002. 171 p. Dissertação de Mestrado.

Neste trabalho, foi desenvolvida uma metodologia para obtenção de Funções de Green e Influência para os problemas visco-elastodinâmicos transientes. A técnica é baseada no uso das transformadas numéricas de Fourier sobre as funções de Green e Influência obtidas numericamente na solução do problema estacionário. O tratamento do sinal em frequência, necessário para as transformadas numéricas de Fourier, é apresentado. Foram analisados os efeitos dos modelos de amortecimento sobre a resposta transiente. Os modelos estudados foram o amortecimento histerético constante, o modelo de Kelvin-Voigt e um modelo de “rampa”. São apresentadas as formulações para o estudo de fundações rígidas de superfície com o uso das funções de Influência estacionárias e das transientes. Para a formulação em frequência, foi desenvolvida a técnica para obtenção da resposta transiente de maneira semelhante àquela adotada nas funções de Green. Nessa formulação, foram estudados efeitos de não causalidade provocados pelo modelo de amortecimento. A formulação de fundações rígidas no tempo, utilizando a integral de convolução para superposição de efeitos, permitirá, posteriormente, a inclusão dos efeitos de contato.

Palavras-Chave

Problemas Visco-elastodinâmicos, Análise Transiente, Funções de Green, Funções de Influência, Interação Solo-Estrutura, Fundações rígidas de Superfície, Transformadas de Fourier.

Abstract

Adolph, Marco, *Transiente Solutions of Viscoelastodynamic Problems in Unbounded Domains by Fast Fourier Transform – FFT*, Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2002. 171 p. Dissertação de Mestrado.

This dissertation describes a methodology based on the Fast Fourier Transform – FFT to synthesize transient Green and Influence functions for unbounded viscoelastic domains. The FFT algorithm is applied to Green or Influence functions that has been previously obtained in the frequency domain. The techniques used to treat the functions in the frequency domain are presented. The effect of three distinct damping models on the transient response has been studied. The constant hysteretic damping model, as well as the Kelvin-Voigt and a ramp-like model are included in the analysis. This work also presents two strategies to obtains the transient response of rigid surface foundations interacting with viscoelastic soils, modeled as half-spaces. The first strategy is the direct transformation of the rigid foundation frequency response into transient responses via the FFT algorithm. The second strategy is based on the superposition of transient stress-boundary value problems, which together with equilibrium and kinematic compatibility equations, leads to the rigid foundation response. This second strategy allows, in principle, the non-linear, transient contact problem between soil and foundation interface to be addressed.

Keywords

Transient viscoelastodynamic problems, Transient Green's functions, Dynamics of unbounded domains, Dynamic Soil-structure Interaction Problems, FFT Algorithm

Sumário

Lista de Figuras	xi
Lista de Tabelas	xv
Nomenclatura	xvi
1. Introdução	01
1.1 Apresentação	01
1.2 Revisão Bibliográfica	03
1.3 Objetivos e Organização do Trabalho	10
2. Funções de Green e Influência Estacionárias	13
2.1 Definição do Problema Visco-elastodinâmico	13
2.2 Funções de Green e Influência – Propagação em Meio Visco-elástico	18
3. Elementos da FFT e IFFT, Sistema Lineares	23
3.1 Introdução	23
3.2 Análise de Fourier, Série e Transformadas	23
3.3 Transformada Discreta de Fourier	27
3.4 Transformada de Sinais Periódico	29
3.5 Transformada Rápida de Fourier – FFT	31
3.6 Resposta de Sistemas Lineares	33
3.7 Solução Clássica para Resposta de Sistemas Lineares	34
3.8 Método da Resposta em Frequência	35
3.9 Método da Resposta ao Impulso	36

3.10 Relação Entre a Resposta ao Impulso e a Resposta em Frequência	37
3.11 Resposta do Sistema Linear a uma Excitação Arbitrária	39
3.12 Resultados Numéricos	40
4. Síntese de Funções de Green e Influência Transientes	51
4.1 Introdução	51
4.2 Ajuste da Resposta Estacionária – Funções de Green	51
4.3 Resultados Numéricos – Funções de Green	66
4.4 Ajuste da Resposta Estacionária – Funções de Influência	82
4.5 Resultados Numéricos – Funções de Influência	88
5. Resposta Transiente de Fundações Rígidas de Superfície	97
5.1 Introdução	97
5.2 Superposição das Funções de Influência em Frequência e no Tempo	97
5.3 Formulação de Fundação Rígida 2D em Frequência	100
5.3.1 Normalização da resposta da fundação rígida em frequência sem massa	106
5.3.2 Síntese Numérica para Resposta Transiente de Fundação Modelada em Frequência	110
5.3.3 Resumo dos procedimentos necessários para obtenção da resposta transiente	118
5.3.4 Resultados Numéricos para Fundação Rígida sem Massa Modelada em Frequência	120
5.3.5 Inserção dos efeitos de inércia – consideração de massa da fundação	130
5.3.6 Resultados numéricos – Fundação com Massa	139
5.4 Formulação de Fundação Rígida 2D no Tempo	141
5.4.1 Resultados Numéricos para Fundação Rígida 2D no Tempo	147
6. Conclusões e Trabalhos Futuros	159
7. Referências Bibliográficas	161

Lista de Figuras

Figura 2.1 Modelos de amortecimento adotados nos problemas da dissertação	14
Figura 2.2 Carregamento normal e tangencial na superfície do semi-espço	19
Figura 3.1 Componentes reais e imaginários da transformada de Fourier de um sinal periódico	31
Figura 3.2 Exemplo de como altas frequências podem encobrir os termos de baixa frequência	33
Figura 3.3 Sistema massa-mola amortecedor	40
Figura 3.4 Função de resposta ao impulso obtida através da IFFT resposta em frequência	42
Figura 3.5 Influência do número de pontos em frequência na resposta ao impulso	42
Figura 3.6 Convergência devido aumento do número de pontos	43
Figura 3.7 Efeito na resposta ao impulso devido ao aumento da frequência final	43
Figura 3.8 Detalhe do Efeito nas resposta ao impulso devido ao aumento da frequência final	44
Figura 3.9 Pulso aplicado ao sistema	45
Figura 3.10 Função de resposta em frequência, amplitude para sistema de um grau de liberdade	45
Figura 3.11 Função de resposta em frequência, ângulo de fase, para sistema de um grau de liberdade	46
Figura 3.12 Resposta do sistema em frequência, amplitude, quando submetido ao pulso	46
Figura 3.13 Resposta do sistema em frequência, ângulo de fase, quando submetido ao pulso	47
Figura 3.14 Resposta transiente do sistema excitado pelo pulso de 50s	47
Figura 3.15 Função de resposta ao impulso	48
Figura 3.16 Resposta do sistema a excitação obtida através de convolução	49
Figura 4.1 Problema estudado com o uso das funções de Green	52
Figura 4.2 Função de Green estacionária $G_{zw}(A_0)$ para vários amortecimentos	54
Figura 4.3 Função de Green estacionária $G_{xu}(A_0)$ para vários amortecimentos	54

Figura 4.4 Função de Green estacionária $G_{zu}(A_o)$ para vários amortecimentos	55
Figura 4.5 Erro gerado pela interpolação spline na função de Green $E_{zw}(A_o)$	56
Figura 4.6 Erro gerado pela interpolação spline na função de Green $E_{zu}(A_o)$	56
Figura 4.7 Erro gerado pela interpolação spline na função de Green $E_{xu}(A_o)$	57
Figura 4.8 Função de Green $E_{xu}(t)$ em função da frequência máxima calculada	58
Figura 4.8 Detalhe da função de Green $E_{xu}(t)$ em função da frequência máxima calculada	58
Figura 4.10 Componente real da função de Green $E_{zw}(A_o)$, $\eta=0.01$	59
Figura 4.11 Componente imaginária da função de Green $E_{zw}(A_o)$, $\eta=0.01$	59
Figura 4.12 Função filtro aplicável sobre a resposta em frequência	61
Figura 4.13 Influência da frequência de início da filtragem sobre a resposta transiente	61
Figura 4.14 – Detalhe da influência da frequência de início da filtragem sobre a resposta transiente	62
Figura 4.15 Influência do fator de amortecimento do filtro sobre a resposta transiente	62
Figura 4.16 Detalhe influência do fator de amortecimento do filtro sobre a resposta transiente	63
Figura 4.17 Influência da inserção de zeros sobre a resposta $W_z(t)$	64
Figura 4.18 Detalhe da influência da inserção de zeros sobre a resposta $W_z(t)$	64
Figura 4.19 Efeito do nível DC sobre a resposta transiente	66
Figura 4.20 Excitação transiente aplicada sobre o solo	68
Figura 4.21 Resposta transiente vertical devido a degrau unitário vertical	69
Figura 4.22 Detalhe da resposta transiente vertical devido a degrau unitário vertical	69
Figura 4.23 Resposta transiente horizontal devido a degrau unitário vertical	70
Figura 4.24 Detalhe da resposta transiente horizontal devido a degrau unitário vertical	70
Figura 4.25 Resposta transiente horizontal devido a degrau unitário horizontal	71
Figura 4.26 Detalhe da resposta transiente horizontal devido a degrau unitário horizontal	71
Figura 4.27 Problema para comparação com Richter	73
Figura 4.28 Resposta de deslocamento vertical transiente no ponto 1, devido a delta de Dirac	73
Figura 4.29 Resposta de deslocamento horizontal transiente no ponto 1, devido a delta de Dirac	74
Figura 4.30 Resposta de deslocamento vertical transiente no ponto 2, devido a delta de Dirac	74
Figura 4.31 Resposta de deslocamento horizontal transiente no ponto 2, devido a delta de Dirac	75
Figura 4.32 Resposta de deslocamento vertical transiente no ponto 3, devido a delta de Dirac	75
Figura 4.33 Resposta ao longo de um plano, $t=0.37966$ s	77

Figura 4.34 Resposta ao longo de z com $x=0$, $t=0.37966 s$	77
Figura 4.35 Resposta ao longo de um plano, $t=0.76316 s$	78
Figura 4.36 – Resposta ao longo de z com $x=0$, $t=0.76316 s$	78
Figura 4.37 Resposta $E_{zw}(t)$ obtida por convolução e FFT para $\eta=0.01$	80
Figura 4.38 Resposta $E_{zw}(t)$ obtida por convolução e FFT para $\eta=0.2$	80
Figura 4.39 Resposta $E_{zw}(t)$ obtida por convolução para vários coeficientes de amortecimento	81
Figura 4.40 Erros entre a resposta obtida por convolução e transformada de Fourier em função	81
Figura 4.41 Problema estudado com auxílio das funções de Influência	82
Figura 4.42 Função de influência estacionária $E_{zw}(Ao)$	83
Figura 4.43 Função de influência estacionária $E_{zu}(Ao)$	83
Figura 4.44 Função de influência estacionária $E_{xu}(Ao)$	84
Figura 4.45 Erros de interpolação $E_{wz}(Ao)$	85
Figura 4.46 Erros de interpolação $E_{wu}(Ao)$	85
Figura 4.47 Erros de interpolação $E_{xu}(Ao)$	86
Figura 4.48 Efeito dos zeros na função de Influência $E_{wz}(t)$	87
Figura 4.49 Detalhe do efeito dos zeros na função de Influência $E_{wz}(t)$	87
Figura 4.50 Modelos de amortecimento adotados nas funções de Influência	89
Figura 4.51 Função de influência transiente $E_{wz}(t)$ amortecimento constante	91
Figura 4.52 Função de influência transiente $E_{wz}(t)$ amortecimento de Kelvin-Voigt	91
Figura 4.53 Função de influência transiente $E_{wz}(t)$ amortecimento em rampa	92
Figura 4.54 Função de influência transiente $E_{wz}(t)$ vários modelos de amortecimento, $\eta=0.2$	92
Figura 4.55 Função de influência transiente $E_{zu}(t)$ amortecimento constante	93
Figura 4.56 Função de influência transiente $E_{zu}(t)$ amortecimento de Kelvin-Voigt	93
Figura 4.57 Função de influência transiente $E_{zu}(t)$ amortecimento em rampa	94
Figura 4.58 Função de influência transiente $E_{zu}(t)$ vários modelos de amortecimento, $\eta=0.2$	94
Figura 4.59 Função de influência transiente $E_{xu}(t)$ amortecimento constante	95
Figura 4.60 Função de influência transiente $E_{xu}(t)$ amortecimento de Kelvin-Voigt	95
Figura 4.61 Função de influência transiente $E_{xu}(t)$ amortecimento em rampa	96
Figura 4.62 Função de influência transiente $E_{xu}(t)$ vários modelos de amortecimento, $\eta=0.2$	96
Figura 5.1 Distribuição de carga ao longo da superfície do solo	98

Figura 5.2 Fundação rígida de superfície	100
Figura 5.3 Condições de compatibilidade cinemática	103
Figura 5.4 Componentes reais e imaginária de N_{wz} para $\nu=1/3$ e $\eta=0.01$	111
Figura 5.5 Esquema de interpolação para função de flexibilidade $N_{wz}(A_o)$	111
Figura 5.6 Erro da interpolação spline para a função de flexibilidade N_{wz} para as baixas	112
Figura 5.7 Parte real da função interpolada N_{wz}	113
Figura 5.8 Parte imaginária da função N_{wz} interpolada, com $A_{o_{calc}} = 40$ e valores distintos de $A_{o_{zeros}}$	113
Figura 5.9 Resposta vertical transiente da fundação $W_z(t)$ excitada pelo Delta de Dirac	115
Figura 5.10 Detalhe da resposta vertical transiente da fundação $W_z(t)$ excitada pelo Delta	116
Figura 5.11 Resposta transiente $W_z(t)$ para fundação excitada por um Delta de Dirac e valores distintos de A_{of}	116
Figura 5.12 Detalhe da resposta transiente $W_z(t)$ para fundação excitada por um Delta de Dirac e valores distintos de A_{of}	117
Figura 5.13 Efeito do valor da resposta estacionária estática $N_{wz}(A_o=0)$ sobre a resposta transiente $W_z(t)$	117
Figura 5.14 Fluxograma de operações para gerar a resposta transiente de fundações	119
Figura 5.15 Fundação rígida de superfície analisada	121
Figura 5.16 Modelos de amortecimento	121
Figura 5.17 Excitação retangular, impulso	123
Figura 5.18 Resposta vertical devido à excitação impulsiva retangular, modelo de amortecimento constante	124
Figura 5.19 Resposta vertical devido à excitação impulsiva retangular, modelo de amortecimento Kelvin-Voigt	124
Figura 5.20 Resposta vertical devido à excitação impulsiva retangular, modelo de amortecimento rampa	125
Figura 5.21 Resposta vertical devido à excitação impulsiva retangular, efeitos do modelo de amortecimento	125
Figura 5.22 Efeitos dos modelos de amortecimento sobre a não causalidade da resposta	126
Figura 5.23 Efeitos do coeficiente de amortecimento sobre a não causalidade da resposta	126
Figura 5.24 Resposta estacionária para amortecimento constante $\eta=0.05$	128

Figura 5.25 Resposta transiente devido excitação harmônica com $A_o=0.5$	128
Figura 5.26 Resposta transiente devido excitação harmônica com $A_o=1.0$	129
Figura 5.27 Resposta transiente devido excitação harmônica com $A_o=1.5$	129
Figura 5.28 Resposta transiente devido excitação harmônica com $A_o=1.5$, efeito do coeficiente de amortecimento	130
Figura 5.29 Diagrama de corpo livre da fundação com massa	131
Figura 5.30 Resposta estacionária para fundação com massa	140
Figura 5.31 Resposta transiente para fundação com massa excitada por carga impulsiva	140
Figura 5.32 Funções Heaviside para descrever as forças de reação	142
Figura 5.33 Fundação estudada pela formulação no tempo	148
Figura 5.34 Funções de Influência $G_{wz}(t)$ para a fundação discretizada em 4 partes	150
Figura 5.35 Comparação entre resposta do PVCT e PVCF	151
Figura 5.36 Resposta vertical da fundação obtida pela formulação transiente	151
Figura 5.37 Resposta vertical da fundação obtida pela formulação transiente	152
Figura 5.38 Fundação com 4 elementos, amortecimento histerético constante	154
Figura 5.39 Fundação com 4 elementos, amortecimento Kelvin-Voigh	154
Figura 5.40 Fundação com 4 elementos, amortecimento do tipo rampa	155
Figura 5.41 Fundação com 4 elementos, efeito do modelos de amortecimento adotado	155
Figura 5.42 – Efeito do número de elementos	156
Figura 5.43 – Fundação com 6 elementos, amortecimento histerético constante	156
Figura 5.44 – Fundação com 6 elementos, amortecimento de Kelvin-Voigh	157
Figura 5.45 – Fundação com 6 elementos, amortecimento do tipo rampa	157
Figura 5.46 – Fundação com 4 elementos, excitação harmônica	158

Tabelas

Tabela 4.1 Tempos despendidos pela convolução numérica	79
Tabela 4.2 Equações que regem os modelos de amortecimento	88
Tabela 4.3 Modelos de amortecimento e coeficientes	89
Tabela 5.1 Equações que regem os modelos de amortecimento	121
Tabela 5.2 Modelos de amortecimento e coeficientes	122

Nomenclatura

Letras latinas

Ao - frequência adimensionalizada

i - variável complexa

C_1 - velocidade de propagação da onda de pressão

C_2 - velocidade de propagação da onda de cisalhamento

C_{ijkl} - matriz constitutiva do material

CC - matriz de compatibilidade cinemática

$Conv$ - vetor com dados de convolução

$G_{zw}(Ao)$, $G_{zu}(Ao)$, $G_{xu}(Ao)$ - funções de Green

EQ - matriz de equilíbrio de forças

f - forças de corpo

F_{ray} - função de frequência de Rayleigh

G - módulo de cisalhamento, matriz das funções de Influência

$G_{ijkl}(t)$ - módulo de relaxação visco-elástica dependente do tempo

$E_{zw}(Ao)$, $E_{zu}(Ao)$, $E_{xu}(Ao)$ - funções de influência

H_{wz} , H_{uz} , H_{wx} - funções de flexibilidade

$H(t)$ - função de resposta ao impulso, função Heaviside

$H(\omega)$ - função de resposta em frequência

m - massa

T_a - período de amostragem

u - deslocamento

W_p , U_p deslocamentos, $p=x,z$

Letras Gregas

α_1, α_2 - números de onda

σ - tensões

ρ - densidade de massa

ε_{kl} - tensor de deformações

μ, λ - constantes de Lamé

μ - módulo de cisalhamento

δ_{ij} - delta de Kronecker

$\delta(t)$ - delta de Dirac

ω - frequência

η - coeficiente de amortecimento

Superescritos

* - define variáveis complexas

Subscritos

f - na fundação

ref - ponto de referência

s - solo

Capítulo 1

Introdução

1.1 Apresentação

A análise da dinâmica em domínios ilimitados está relacionada a muitos problemas da engenharia. A propagação de ondas no solo está freqüentemente associada à modelagem dinâmica de meios ilimitados. Os processos industriais e o tráfego geram ondas que se propagam através do solo para as áreas próximas. A carga das máquinas é transmitida para o solo através de suas fundações. A energia que se propaga pelo solo provoca oscilações que podem interferir no funcionamento de diversos equipamentos. Em muitos casos é necessário isolar laboratórios de medição e setores que efetuam processos de alta precisão. Para reduzir a amplitude das oscilações e energia transmitida para o solo devem ser construídas fundações adequadas. Nos casos em que as fundações não são suficientes, podem ser utilizadas barreiras e trincheiras, que irão dificultar a radiação de energia. Na engenharia civil, o estudo de fundações prediais visa, em alguns países, à garantia de resistência no caso de abalos sísmicos, mas também a fenômenos relacionados ao vento e eventualmente explosões nas proximidades.

O fundo dos oceanos também pode ser modelado adequadamente por meios ilimitados. Diversos projetos de extração *offshore* de petróleo, implicam na instalação de equipamentos, sujeitos a carregamentos dinâmicos, no fundo do mar. Este tipo de equipamento não deve apresentar falhas, sendo necessária, portanto, uma análise das condições de operação, o mais próxima da realidade, durante a fase de projeto e desenvolvimento.

A crescente complexidade dos problemas envolvidos no projeto de fundações, não permite mais que sejam utilizadas somente as técnicas empíricas estabelecidas até meados do século

vinte. O aumento dos recursos computacionais, ao longo dos últimos trinta anos, ampliou as possibilidades do uso de técnicas numéricas como auxílio no projeto e análise de problemas de interação solo-estrutura. Um dos requisitos para o modelamento correto dos problemas dinâmicos de interação solo-estrutura é a descrição apropriada da condição de radiação de Sommerfeld, ou amortecimento geométrico que garante que a energia originada na fonte se propaga e se afasta sem reflexão. Os problemas de interação solo-estrutura costumam envolver domínios ilimitados. Diversas formulações foram apresentadas nesse sentido, como, por exemplo, os métodos de discretização de domínio, Método dos Elementos Finitos (MEF), e o método das diferenças finitas (MDF), sem obter resultados adequados, devido às limitações das formulações e a necessidade de uma malha em domínio limitado. O método dos elementos de contorno (MEC) tem se sobressaído nesse sentido, pois, em sua formulação, é possível considerar os efeitos de amortecimento geométrico.

O método dos elementos de contorno (MEC) requer, para sua formulação, o uso de um estado auxiliar: as chamadas soluções fundamentais ou funções de Green. Diversos trabalhos têm sido realizados para gerar esses estados para os mais diversos meios, incluindo os efeitos de visco-elasticidade, anisotropia, poroelasticidade. Entretanto, a maior parte dessas formulações é realizada no domínio da frequência em função de dificuldades matemáticas para sintetizar as respostas transientes. Os poucos trabalhos apresentados para funções de Green transientes adotam modelos muito simples para o meio infinito, excluindo propriedades comuns, como visco-elasticidade e anisotropia.

Ao longo desta dissertação, será discutida a metodologia para gerar numericamente respostas transientes de fundações rígidas de superfície a partir das formulações estacionárias já obtidas ao longo dos últimos anos e a síntese numérica de funções de Green e Influência transientes para meios visco-elásticos isotrópicos. A técnica baseia-se no uso das transformadas discretas de Fourier.

Serão analisados os meios visco-elásticos sujeitos a de cargas concentradas, distribuídas e ainda as fundações rígidas de superfície nos problemas descritos através do estado plano de tensões.

1.2 Revisão Bibliográfica

A análise dinâmica de estruturas bi e tridimensionais, considerando a distribuição contínua de massa, é de difícil proposição; isto é especialmente verdadeiro em problemas que envolvem meios infinitos ou semi-infinitos. As técnicas analíticas são aplicáveis a poucos problemas específicos. Isto abre espaço para os métodos numéricos. A correta modelagem dos problemas de interação solo-estrutura deve respeitar a condição de Sommerfeld, que representa o amortecimento geométrico do meio tratado. Usualmente os meios representando o solo são descritos como semi-infinitos visco-elásticos (Gazetas, 1983). Os métodos de discretização de domínio, como o método de elementos finitos (MEF) e o método das diferenças finitas (MDF) apresentam dificuldades para tratar os meios infinitos, porque a dimensão finita das malhas é um fator limitador (Luco e Hadjain, 1995). O MDF não é muito utilizado devido às dificuldades para modelar geometrias complexas. As malhas truncadas e limitadas do MEF e MDF não levam em conta o amortecimento geométrico. O aumento do coeficiente de amortecimento interno ou do material de um meio ilimitado não é capaz de compensar o amortecimento geométrico nos modelos de MEF e MDF (Mesquita et al., 1993). Existem algumas alternativas para inserir os efeitos de amortecimento geométrico no FEM. Uma das possibilidades é o uso dos chamados elementos infinitos (Bettes, 1977, Barros, 1996), outra seria o mapeamento de Dirichlet-to-Neumann (DtN) (Givoli, 1992, Zavala, 1999).

A despeito das diversas tentativas para modelar os problemas dinâmicos de meios infinitos com o uso do MEF, hoje é aceito que o método mais adequado, para esses problemas, é o método dos elementos de contorno (MEC). Os Elementos de Contorno (EC) emergiram como fortes candidatos à solução numérica de problemas dinâmicos complicados, por permitirem a redução de dimensão do problema e garantirem a satisfação das condições de amortecimento das ondas no infinito (Beskos, 1987, Beskos, 1997).

A formulação de elementos de contorno, na qual apenas o contorno do domínio necessita de discretização, requer o uso de um estado auxiliar com a mesmas características, isto é, o mesmo operador diferencial do problema estudado. Esses estados auxiliares são conhecidos por funções de Green (Kane, 1994). Foram realizados diversos estudos com o objetivo de sintetizar, analítica ou numericamente, essas funções auxiliares estacionárias para domínios anisotrópicos

(Wang e Rajapakse, 1991, Wang e Achembach, 1995, Saez, 1997, Almeida Barros, 1997), para os poroelásticos (Rajapakse e Sentjuntichai, 1993) e até para meios piezo-elétricos (Daros, 1999).

Soluções, para meios visco-elásticos transientes através do MEC, requerem funções de Green formuladas para meios visco-elásticos transientes, com o mesmo modelo de amortecimento do problema original. Não existe, atualmente, uma função de Green transiente para meios visco-elásticos (Beskos, 1987, Beskos, 1997).

Conseqüentemente, modelar e analisar meios visco-elásticos, em problemas transientes, é um tópico ainda sem solução.

Na última década, algumas funções de Green visco-elásticas foram desenvolvidas e sintetizadas numericamente para o regime estacionário e para os semi-espacos homogêneos isotrópicos 2D e 3D (Romanini, 1995, Mesquita Neto e Pontes Jr., 1992, Capello Sousa, Almeida Barros e Mesquita Neto, 2000), para os problemas multicamadas isotrópicos 2D e 3D (Mesquita Neto e Barros, 1999, Barros, 2001) e para os anisotrópicos (Almeida Barros e Mesquita Neto, 1999, Barros, 2001).

Esses estados visco-elásticos auxiliares, no domínio da frequência, foram sintetizados numericamente. As transformadas integrais de Fourier e Hankel são os recursos matemáticos para as soluções obtidas. Esses estados são funções de Green (cargas concentradas) e de Influência (carga distribuída). Esses estados auxiliares desenvolvidos podem ser incorporados às versões direta e indireta do MEC (DMEC, IMEC) para analisar as respostas estacionárias de fundações rígidas de superfície, engastadas e enterradas, interagindo com os perfis de solo apresentados (Romanini, 1995, Barros, 1997, Almeida Barros e Mesquita Neto, 2001, Almeida Barros e Mesquita Neto, 1999).

A formulação dos problemas de interação solo-estrutura, no regime estacionário, está mais fundamentada e estabelecida que a variante no domínio do tempo. As pesquisas, para obtenção das respostas transientes, estão ainda limitadas a problemas simples, embora seja reconhecido que a formulação transiente seja mais atrativa por permitir soluções não lineares.

As soluções transientes podem ser obtidas através dos seguintes procedimentos: 1-determinação da solução harmônica seguida pela reconstituição da resposta transiente, utilizando

síntese de Fourier, o objetivo desta dissertação; 2- solução do problema no domínio transformado de Laplace, seguido de uma transformação inversa para obter a resposta no domínio do tempo; 3- formulação no domínio do tempo e solução em conjunto com esquema de integração direta no tempo, adequando também a problemas não – lineares.

Alguns dos primeiros trabalhos a tratar da solução de problemas elastodinâmicos transientes bidimensionais foram de Cruse, 1968, e de Cruse e Rizzo, 1968. Em ambos trabalhos, o problema, para cargas transientes aplicadas sobre o semi-espaco elástico, foi formulado no domínio transformado de Laplace, utilizando o MEC. Os resultados, no domínio do tempo, foram obtidos, empregando a técnica de inversão numérica de Papoulis, 1957. Manolis e Beskos, 1981, trabalharam na extensão desse trabalho, ainda para problemas em meio elástico, estudando o efeito da concentração de tensão dinâmica em uma cavidade plana, aplicaram para a transformação de domínio o algoritmo de Durbin, 1974. Sousa, 1999, em sua tese de doutoramento, realizou alguns estudos para obtenção da resposta transiente de fundações rígidas de superfície com o uso da transformada discreta de Fourier a partir das respostas estacionárias. Os problemas estudados já consideravam a visco-elasticidade do semi-espaco.

Formulações diretas bidimensionais no tempo, sem uso de transformações de domínio, foram apresentadas inicialmente por Mansur, 1983 e Antes, 1985. Para a obtenção das respostas transientes, essas formulações utilizam um algoritmo passo a passo no tempo. O trabalho pioneiro desses pesquisadores sofria de alguns problemas na formulação, como constatado por Israil e Banerjee, 1990. Inicialmente a complexidade matemática resultante do tratamento das funções Heaviside nos núcleos das funções, simplificações nas variáveis espaciais, considerando-as como constantes e modelagem da geometria do contorno, usando segmentos de linhas retas, além de inadequado tratamento nas laterais e cantos do contorno.

Em 1986, Spyrakos e Beskos apresentaram as respostas transientes para fundações rígidas de superfície e engastadas para carregamento dinâmico transiente e ondas sísmicas, incidindo na fundação. A formulação dos problemas foi feita diretamente no domínio do tempo, e o meio modelado foi considerado isotrópico e elástico. Posteriormente foi realizada uma verificação por Spyrakos e Antes, 1986, avaliando as respostas dinâmicas transientes de uma fundação rígida de superfície. Nessa verificação mostraram que o método da reciprocidade de Spyrakos e Beskos demandava um maior custo computacional quando comparado ao método dos resíduos

ponderados. A formulação apresentada por Spyrakos e Antes é uma evolução da formulação apresentada por Antes em 1985.

Manolis e Ahmad (1988) desenvolveram um método para o estudo do movimento de superfícies livres de semi-espacos submetidos a explosões no subterrâneo. Podiam ser aplicados carregamentos de qualquer tipo, e a geometria podia ser complexa. No mesmo ano, Ahmad e Banerjee (1988) implementaram a formulação do MEC direto para análise no domínio do tempo de sólidos tridimensionais, utilizando a solução fundamental de Stokes, dependente do tempo e espaço, e o teorema de reciprocidade dinâmica de Graffi para derivar as equações integrais do contorno no domínio do tempo.

Israil e Banerjee (1990a-b), utilizando o método da reciprocidade, apresentaram algumas simplificações na formulação do MEC no domínio do tempo, associado ao uso de elementos quadráticos isoparamétricos, que permitiam maior precisão e generalidade a solução. Também utilizaram um conjunto de funções de interpolação para variável temporal, lineares no deslocamento e constantes para a tensão.

Estorff et al. (1990) fizeram um estudo dos erros associados aos três diferentes métodos a seguir: MEC no domínio da frequência; MEC no domínio do tempo e um método com o acoplamento do MEC com o MEF. Os três métodos foram comparados, utilizando problemas de carga dinâmica atuando sobre o semi-espaço. Através dos exemplos apresentados, foi possível notar que as soluções obtidas pelos três métodos eram muito próximas.

Guan e Novak (1992) apresentaram funções de Green para problemas elásticos 2D e 3D transientes. Na formulação apresentada, o solo era submetido a uma excitação no tempo descrito por uma função Heaviside, iniciando no instante $t=0$. Para os problemas em 2D gerou a resposta à carga concentrada, utilizando inicialmente uma carga distribuída ao longo de uma linha infinita, e reduzindo o problema ao estado plano de tensões. Posteriormente estendeu sua formulação de modo que essa carga não seria necessariamente infinita. Apresentou as funções de Green e influência para o problema de 3D. Todas as formulações apresentadas consideraram o meio isotrópico e elástico.

Wang e Takemiya (1992) apresentaram EC analíticos no domínio do tempo para análises de propagação de ondas em duas dimensões, aplicaram a formulação proposta ao problema de fundação de superfície rígida e sem massa sujeita a carregamento externo, obtendo bons resultados.

Rizos e Karabalis (1994) desenvolveram uma formulação de MEC direto no domínio do tempo para análise de problemas em três dimensões, utilizando as soluções de Stokes para espaços infinitos.

Coda e Venturini (1995a-b) apresentaram melhoras na solução do problema elastodinâmico transiente, com o objetivo de minimizar o efeito das singularidades nas soluções fundamentais. Implementaram uma solução fundamental no tempo modificada, de modo a melhorar a estabilidade do algoritmo numérico.

Wang et al. (1996) utilizaram funções quadráticas para solução no tempo. Neste procedimento, são adotadas uma variação temporal quadrática para os núcleos de deslocamento e uma constante no núcleo de tensões. A variação no campo espacial é assumida como sendo quadrática. Estenderam esta formulação Wang et al. (1997), utilizando funções de interpolação quadráticas e lineares, para variação temporal dos deslocamentos e tensões, respectivamente.

Ao se utilizar o MEC para modelar o solo e obter respostas transientes, usualmente, assume-se que o meio é homogêneo, isotrópico e linearmente elástico. Infelizmente esta formulação não corresponde às características dos solos em geral, que apresentam não homogeneidade, anisotropia, dissipação de energia, porosidade, etc. A visco-elasticidade linear pode ser facilmente agregada, quando se trabalha no domínio da frequência, com o uso do princípio da correspondência. Seguindo esta linha, uma aproximação para considerar a visco – elasticidade é a substituição das constantes das equações constitutivas (Lamé) por constantes complexas, que permitem a modelagem do amortecimento histerético, independente da frequência, ou modelos dependentes da frequência, como o caso do amortecimento viscoso. No domínio do tempo, as constantes das equações constitutivas (Lamé) são escritas em função do tempo, enquanto quaisquer produtos são substituídos por integrais de convolução.

Gaul et al. (1988) utilizaram o MEC no domínio da frequência para problemas de interação solo-estrutura, tomando em conta a visco-elasticidade e estratificação. Descreveu a visco-elasticidade através de métodos tradicionais e também através de derivadas fracionais. Os resultados para ondas de superfície foram comparados com dados experimentais obtidos por interferometria. Equações constitutivas visco-elásticas generalizadas, no domínio da frequência, foram implementadas por Gaul e Plenge (1989) e Gaul et al. (1991).

Ainda no domínio da frequência, Rajapakse (1989) analisou o problema dinâmico de placas elásticas sobre um semi-espaço isotrópico e visco-elástico. A assumiu que o contato entre o meios era suave, baseando sua análise nos princípios variacionais da elastodinâmica.

Gaul et al. (1992), implementaram equações para comportamento visco-elástico no domínio do tempo. Utilizando o princípio da correspondência, converteram as soluções fundamentais elásticas de Stokes.

Gaul et al. (1992) apresentaram uma nova formulação no domínio do tempo. A solução fundamental de Stokes foi convertida em uma solução visco-elástica através do princípio da correspondência. Gaul et al. (1992) obtiveram a solução fundamental analiticamente através da transformada inversa de Laplace, assim sintetizaram a solução fundamental visco-elástica para o modelo de Maxwell, não tendo sido obtida, ainda, uma solução visco-elástica geral. Gaul e seus colaboradores desenvolveram algumas metodologias para sintetizar respostas transientes visco-elásticas utilizando o MEC. Existem três estratégias principais para obter essas respostas (Gaul, L., Schanz, M., 1999). A primeira é obtida por meio da transformação das equações transientes para o domínio de Laplace, com subsequente substituição das equações constitutivas elásticas, pelas suas correspondentes visco-elásticas através do princípio da correspondência. O problema é resolvido no domínio de Laplace e a solução transiente é obtida pela inversão numérica de Laplace.

Uma segunda estratégia o MEC é formulado no domínio do tempo no qual cada para cada passo de tempo os parâmetros constitutivos visco-elásticos são determinados através do princípio da correspondência e uma inversão numérica das equações constitutivas dada pela transformada de Laplace (Gaul, L., Schanz, M., 1997). A terceira metodologia de solução usa um conceito chamado “quadrature convolution method” e foi aplicado por Schanz e Gaul para resolver

problemas transientes visco-elásticos em meios ilimitados e limitados (Gaul, L., Schanz, M., 1999, Schanz, M., Antes, H. 1997a, Schanz, M., Antes, H. 1997b, Schanz, M. 1999). Gaul e seus colaboradores também desenvolveram a abordagem por derivadas fracionais para descrever as equações constitutivas visco-elásticas no domínio de Laplace. Esta abordagem permite um melhor ajuste, com um menor número de parâmetros, dos módulos visco-elásticos de armazenamento e perda (Gaul, L., Schanz, M., 1997).

Xie et al. (1989) desenvolveram uma formulação para o MEC em problemas da visco-elastodinâmica, utilizando equações constitutivas com operadores fracionais. Analisaram a resposta transiente de uma coluna visco-elástica e compararam os resultados com experimento laboratorial.

As fundações rígidas de superfície para estado plano de tensão sobre meio visco-elástico foram tratadas por Mesquita e Romanini (1992), no domínio da frequência e utilizando constantes das equações constitutivas (Lamé) complexas para incorporar o amortecimento do meio.

Estudos para resposta à excitação sísmica de cascas cilíndricas imersas enterradas em solo visco-elástico e estratificado foram realizados por Luco e Barros (94). O modelo foi tratado tridimensionalmente. A formulação utilizada foi desenvolvida no domínio da frequência.

Levando em conta resultados experimentais que mostravam que os modelos até então utilizados não correspondiam à realidade em uma grande faixa de frequências, Dineva et al. (1991) estudaram o problema da propagação de ondas e meios estratificados não elásticos através do MEC. Utilizaram, objetivando maior fidelidade com a realidade, o modelo de Maxwell – Gourevich para descrever os processos físicos do solo.

O estudo de fundações engastadas, enterradas, traz dificuldades analíticas e aumenta a necessidade de recursos computacionais para obtenção de resultados, o que limitava as análises a problemas de geometria simples. Betti e Abdel – Ghaffar (1994) estudaram o problema para fundações engastadas de geometria arbitrária em meios visco-elásticos no domínio da frequência em três dimensões, utilizando o *substructure deletion method*.

O estudo de fundações rígidas, para estado plano de tensão, de seção transversal semi-circular, enterradas em meio visco-elástico estratificado, submetidas a forças externas harmônicas e ainda a ondas P, SV, SH, foi realizado por Barros e Luco (1995).

Tratando da isotropia transversal, podem ser citados os trabalhos de Seale et al. (1989), estudo de cargas pontuais em meios transversalmente anisotrópicos e estratificados; Kausel e Seale (1990), estudo de meios estratificados transversalmente anisotrópicos submetidos a carregamentos dinâmicos; Rajapakse e Wang (1991, 1993), obtiveram soluções para os deslocamentos e tensões devido a cargas aplicadas no interior de um semi-espaço, posteriormente obtendo as respostas para cargas axialmente simétricas. A seguir, Wang e Rajapakse (1991) aplicaram estas soluções na análise de fundações rígidas embutidas no meio transversalmente isotrópico, empregando a formulação indireta do MEC. Wang e Rajapakse (1992) apresentaram funções de Green axisimétricas elásticas para semi-espaços isotrópicos.

Com exceção dos trabalhos de Manolis e Beskos, 1981, e Capello Sousa, 1999, todos os trabalhos, tratando de problemas transientes, apresentaram a formulação diretamente no domínio do tempo. Essa opção, adotada pela maior parte dos pesquisadores, vislumbra o tratamento futuro de problemas não lineares. Infelizmente os avanços, no sentido de gerar modelos mais realistas de solo, não foram possíveis. Os fatores que mais limitam o desenvolvimento de formulações transientes, são a complexidade matemática, principalmente a integração de funções singulares, e indisponibilidade de funções de Green e soluções fundamentais transientes para os problemas mais complexos.

1.3 Objetivos e organização do trabalho

Este trabalho tem como objetivo principal a síntese de funções de Green e Influência transientes a partir das soluções estacionárias, assim como o estudo das fundações rígidas de superfície submetidas à excitação transiente. Nesse trabalho, os procedimentos são limitados ao estudo de meios visco-elásticos isotrópicos.

No capítulo 2, é apresentada a resolução do problema de valor de contorno de tensão estacionário regido pelas equações de Navier, a partir da qual é possível obter as funções de Green para o meio visco-elástico isotrópico. São descritas as metodologias para inserção do

amortecimento a partir das constantes de Lamé e os modelos lineares de amortecimento são estudados nos capítulos seguintes. É apresentada uma rápida discussão sobre o efeito do modelo de amortecimento nas respostas do sistema, uma vez que modelos inadequados podem gerar não causalidade nas respostas transientes.

No capítulo 3, é feita uma revisão dos conceitos envolvidos nas séries de Fourier; são deduzidas as integrais de Fourier e as transformadas discretas. Uma revisão de sistemas lineares é apresentada, na qual serão estudadas as funções de resposta em frequência e resposta ao impulso, além da relação entre elas e da resposta do sistema a excitações arbitrárias. Os diversos procedimentos apresentados são elucidados com auxílio de exemplos numéricos realizados com um sistema massa-mola amortecido.

Ao longo do capítulo 4, são apresentadas as metodologias que envolvem a obtenção numérica de funções de Green e Influência. São apresentados os resultados para vários amortecimentos e excitações. Os resultados para funções de Green são comparados àqueles apresentados por Guan e Novak (1992).

No capítulo 5, são estudadas as fundações rígidas e apresentadas duas formulações que permitem a obtenção da resposta transiente. Inicialmente a fundação é modelada no domínio da frequência com e sem efeitos de inércia: a resposta transiente é obtida com a transformação da função de resposta em frequência. Os resultados são validados por comparação com os apresentados por Spyrakos e Beskos (1986) e Spyrakos e Antes (1986). Em seguida, é apresentada uma formulação no domínio do tempo, na qual são utilizadas as funções de Influência sintetizadas numericamente no capítulo 4. Essa formulação transiente deve permitir a introdução, no futuro, do contato entre fundação e solo.

No capítulo 6, é apresentada a conclusão e serão propostos trabalhos futuros.

Capítulo 2

Funções de Green e Influência Estacionárias

2.1 Definição do Problema Visco-elastodinâmico

O método dos elementos de contorno (MEC) requer, para sua solução, o uso de um estado auxiliar: as chamadas soluções fundamentais, que são funções de Green para problemas generalizados, desenvolvidas para espaços infinitos ou semi infinitos. É possível aplicar o método de elementos de contorno com o uso tanto das soluções fundamentais, quanto das funções de Green que representam meios específicos. A vantagem do uso de funções de Green é embutir, em sua formulação, as condições de contorno, como a existência de uma superfície livre, a presença de um leito rígido, ou ainda multicamadas. Essa consideração das condições de contorno, já na formulação da função de Green, elimina a necessidade de discretizar a superfície, sendo necessária somente a discretização dos elementos que compõem a estrutura analisada. Quando se aplica o método de elementos de contorno com uso das soluções fundamentais, que não levam em conta condições de contorno específicas, requer-se a discretização das superfícies do problema, além da discretização da estrutura que será analisada. Deve-se salientar que os custos, para desenvolver funções de Green para problemas específicos, são relativamente elevados.

Os esforços, no desenvolvimento de funções de Green, são recompensados pela maior precisão nos resultados e tempos computacionais necessários para lidar com os problemas para os quais foram formuladas (Richter, 1997). As funções de Green costumam considerar cargas concentradas; no caso das cargas distribuídas são chamadas de funções de Influência.

Nos problemas dinâmicos de interação solo-estrutura (DSSI, *dynamic soil-structure interaction*), o solo costuma ser modelado com um semi-espaço elástico (Gazetas, 1983). Essa

consideração possibilita a geração de funções de Green e Influência que considerem a superfície livre e suas condições de contorno. Ao se considerar o semi-espço como sendo elástico, não é obtida uma representação real do solo, que tem a capacidade de dissipar a energia das ondas que por ele se propagam. As características de amortecimento dependem do tipo de solo analisado (Haupt, 1986). Trabalhos precedentes (Mesquita Neto, 1989) geraram funções de Influência estacionárias para meios visco-elásticos, de modo que fosse possível introduzir qualquer modelo de amortecimento material linear, além de permitir a inclusão de coeficientes de amortecimento obtidos experimentalmente. Modelos de amortecimento e as relações para fatores de dissipação medidos podem ser obtidos na literatura, podendo ser citados o livro de Kolsky, 1963 e o trabalho de Gaul, 1987.

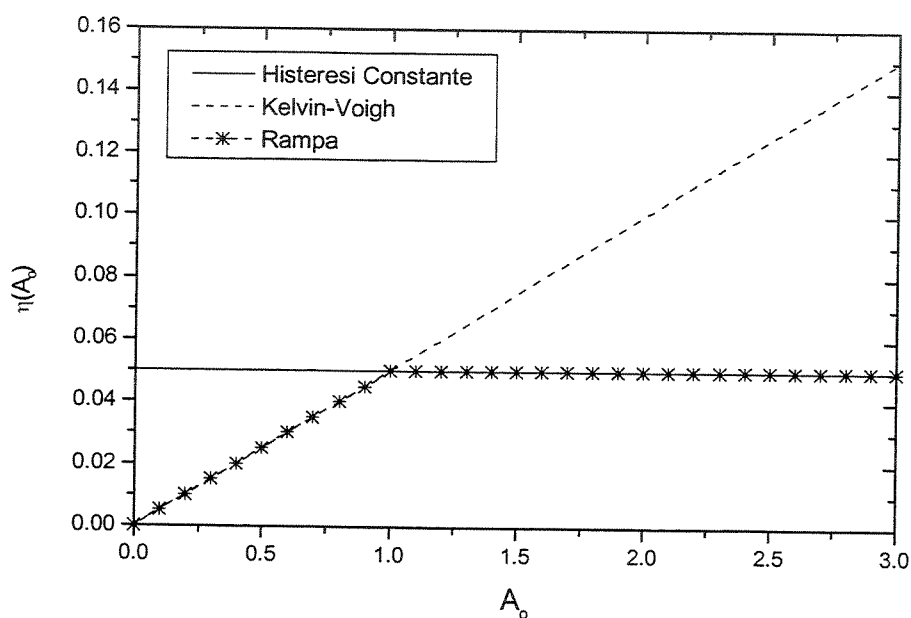


Figura 2.1 – Modelos de amortecimento adotados nos problemas da dissertação.

A obtenção dos fatores de amortecimento em função da frequência através de experimentos foge ao escopo deste trabalho. Portanto, serão analisados, nesta dissertação, três modelos de amortecimento além da variação dos coeficientes sobre as respostas obtidas para as funções de Green, Influência e fundações rígidas de superfície. Serão aplicados os modelos de amortecimento histerético constante, de Kelvin-Voigt e um modelo de rampa que combina os dois anteriores. Os modelos de amortecimento, em função da frequência, são ilustrados na figura 2.1. O modelo de Kelvin-Voigt varia linearmente com a frequência, o que gera um grande

amortecimento nas altas frequências (Findley et al., 1989). Não causalidades foram relacionadas ao modelo com coeficiente de dissipação constante ao longo da frequência, quando geradas as respostas transientes (Crandall, 1970). Scanlan, 1970, mencionou que a natureza é causal e modelos realistas de amortecimento geram respostas causais.

Os problemas tratados, neste trabalho, lidam com meios visco-elásticos homogêneos e contínuos. Para a análise de fundações rígidas de superfície no capítulo 5, é aplicado o princípio da superposição das funções de Influência. Detalhes dessas formulações podem ser encontrados nos trabalhos de Banerjee, 1981, Christensen, 1982.

A partir das equações da teoria da elasticidade linear, podem ser obtidas as relações que definem o problema de valor de contorno em tensão visco-elástico linear, que nada mais é que uma generalização do problema elástico. Para isto, são incluídas propriedades do meio, as quais representam a dissipação de energia causada pelo amortecimento material do meio tratado. Nas formulações estacionárias, isso pode ser feito com aplicação do princípio da correspondência (Findley et al., 1989), no qual são substituídas as equações constitutivas elásticas por equações constitutivas visco-elásticas. O problema visco-elastodinâmico é definido pelas equações de equilíbrio dinâmico, condições de contorno e condições iniciais do problema. A equação para equilíbrio de tensões é dada por,

$$\sigma_{ij,j} + f_i = \rho u_{i,t} \text{ em } \Omega \times [0,T], \quad (2.1)$$

as condições de contorno são dadas por,

$$u_i = q_i \text{ em } \Gamma_{qi} \times [0,T], \quad (2.2)$$

$$t_i = \sigma_{ij} \cdot n_j = h_j \text{ em } \Gamma_{hi} \times [0,T], \quad (2.3)$$

as condições iniciais são dadas como sendo,

$$u_i = u_{oi}, \quad (2.4)$$

$$u_{i,t} = \dot{u}_{oi}, \quad (2.5)$$

sendo,

- σ_{ij} o tensor de tensões;
- f_i as forças de corpo por unidade de volume;
- n_j o vetor normal ao contorno Γ ;
- q_i, h_i os deslocamentos e trações especificadas ao longo do contorno;
- ρ a densidade de massa do meio;
- $u_{i,t}$ a aceleração, ou derivada segunda dos deslocamentos em relação ao tempo e
- $u_{oi}, \dot{u}_{oi}$ as condições iniciais de deslocamento e velocidade, em $t=0$.

Uma vez definido o problema elastodinâmico, resta apenas definir a equação constitutiva elástica,

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} , \quad (2.6)$$

na qual:

- C_{ijkl} representa o tensor constitutivo elástica do material e
- ε_{kl} é o tensor de deformações.

Com exceção da equação (2.6) que relaciona tensão e deformação, todas as outras relações podem ser definidas para o problema visco-elástico. A equação constitutiva, para tratar o meio visco-elástico, pode ser definida por,

$$\sigma_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t G_{ijkl}(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon_{kl}(\tau)}{\partial \tau} d\tau , \quad (2.7)$$

sendo $G_{ijkl}(t-\sigma)$ a definição do módulo de relaxação visco-elástica dependente do tempo, caracterizando o problema visco-elástico.

A relação constitutiva pode ser redefinida de outra forma (Cristensen, 1982),

$$\sigma_{ij}(t) = \delta_{ij} \int_{-\infty}^t \lambda(t-\sigma) \frac{\partial \varepsilon_{kk}(\sigma)}{\partial \sigma} d\sigma + 2 \int_{-\infty}^t \mu(t-\sigma) \frac{\partial \varepsilon_{ijk}(\sigma)}{\partial \sigma} d\sigma, \quad (2.8)$$

na qual $\lambda(t-\tau)$ e $\mu(t-\tau)$ são as funções de relaxação e δ_{ij} é o delta de Kronecker.

Para obter a equação de equilíbrio dinâmico em função do vetor de deslocamentos u_i , deve-se recorrer à teoria da elasticidade linear. Assim é possível definir a relação deformação-deslocamento,

$$2\varepsilon_{ij}(\tau) = u_{i,j}(\tau) - u_{j,i}(\tau). \quad (2.9)$$

Substituindo a relação constitutiva definida na equação (2.8) e a relação deformação-deslocamento da equação (2.9) na equação de equilíbrio do problema visco-elástico (2.1), obtém-se a definição do problema de equilíbrio dinâmico do meio visco-elástico em função dos deslocamentos,

$$\int_{-\infty}^t \mu(t-\tau) \frac{\partial u_{i,jj}(\tau)}{\partial \tau} d\tau + \int_{-\infty}^t [\lambda(t-\tau) + \mu(t-\tau)] \frac{\partial u_{k,ki}(\tau)}{\partial \tau} d\tau + f_i = \rho u_{i,tt}. \quad (2.10)$$

A equação apresentada em (2.10) representa o problema visco-elástico transiente. Na formulação das funções de Green e Influência, uma série de complicações matemáticas dificultam as tentativas de obter as funções transientes. Nesses casos, recorre-se à formulação do problema em regime estacionário, o que pode ser observado nos trabalhos de Mesquita Neto (1989), Almeida Barros (1997), Barros (2001).

Na formulação estacionária, é assumido que as forças de corpo e as condições de contorno são harmônicas no tempo, isto é,

$$f_i(x,t) = \bar{f}_i \cdot \exp(i\omega t). \quad (2.11)$$

Em sistemas lineares, a resposta tende a possuir o mesmo comportamento das excitações as quais é submetido. Portanto, uma excitação harmônica, no tempo, corresponderá a uma resposta também harmônica (Newland, 1993). Assim sendo, uma resposta, que tecnicamente é dada no tempo, pode ser observada através da variação da frequência da excitação, ou seja, é obtida uma

função de resposta em frequência (FRF) do sistema. A aplicação de uma carga harmônica gera, portanto, as respostas de comportamento estacionário do sistema, na forma:

$$u_i(x, t) = \bar{u}_i \cdot \exp(i\omega t). \quad (2.12)$$

Para efetuar a transição do problema transiente para o estacionário, aplica-se a transformada de Fourier. Utilizando a transformada de Fourier sobre a equação de equilíbrio (2.10), obtém-se a equação de equilíbrio dinâmico em regime estacionário, que possui a forma:

$$\mu^*(i\omega)\bar{u}_{i,jj} + [\lambda^*(i\omega) + \mu^*(i\omega)]\bar{u}_{k,ki} + \bar{f}_i = -\rho\omega^2\bar{u}_i, \quad (2.13)$$

sendo as funções de relaxação complexas, definidas como:

$$\mu^*(i\omega) = \mu(1 + i\eta_\mu(\omega)); \quad (2.14)$$

$$\lambda^*(i\omega) = \lambda(1 + i\eta_\lambda(\omega)); \quad (2.15)$$

sendo:

- λ e μ são as constantes de Lamé definidas na teoria da elasticidade;
- $\eta_\lambda(\omega)$ e $\eta_\mu(\omega)$ são os coeficientes de amortecimento do meio, dependentes da frequência.

É possível estabelecer um princípio de correspondência para aproximar a descrição do mecanismo de amortecimento material em um sólido elástico (Findley, 1989). A aplicação deste princípio consiste na substituição das constantes de Lamé elásticas λ e μ por constantes complexas no domínio da frequência, como ficou demonstrado nas equações (2.14) e (2.15). A componente real dessas equações fornece as informações do comportamento elástico do sistema, e a componente imaginária, a dissipação da energia devida ao amortecimento do meio.

2.2 Funções de Green e Influência – Propagação em Meio Visco-elástico

Funções de Green podem ser obtidas como soluções para o problemas de valor de contorno em tensão. A seguir, será apresentada a solução obtida por Mesquita Neto (1989) para o semi-

espaço visco-elástico com carga distribuída harmônica aplicada sobre a superfície livre, como na figura 2.2.

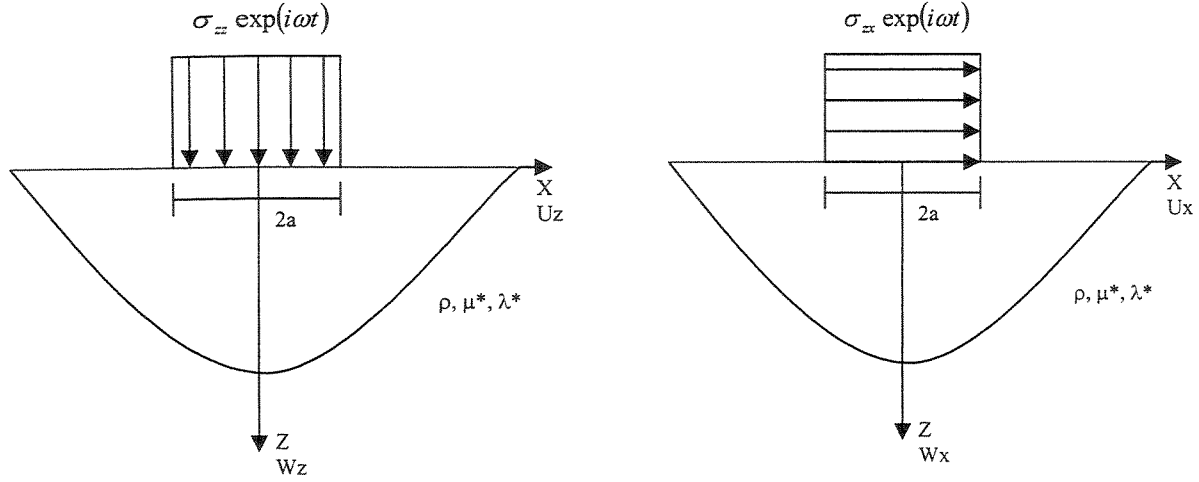


Figura 2.2 – Carregamento normal e tangencial na superfície do semi-espaço.

Considerando a excitação harmônica, é obtida a resposta em deslocamento também na forma harmônica,

$$u_i(x, t) = \bar{u}_i \cdot \exp(i\omega t),$$

neste caso, como foi mostrado anteriormente, a equação de equilíbrio para o problema dinâmico estacionário, ou equação de Navier é dada por,

$$\mu^*(i\omega) \bar{u}_{i,jj} + [\lambda^*(i\omega) + \mu^*(i\omega)] \bar{u}_{k,ki} + \bar{f}_i = -\rho \omega^2 \bar{u}_i.$$

As condições de contorno são definidas para carga vertical,

$$\bar{\sigma}_{zz}(x, z = 0) = \begin{cases} -\bar{\sigma}_{zz}; & |x| \leq a \\ 0; & |x| > a \end{cases}; \quad (2.18)$$

e para carga horizontal,

$$\bar{\sigma}_{zx}(x, z = 0) = \begin{cases} -\bar{\sigma}_{zx}; & |x| \leq a \\ 0; & |x| > a \end{cases}. \quad (2.19)$$

Deve ser levada em conta ainda a condição de amortecimento geométrico ou de Sommerfeld, ou seja, não existe energia retornando em direção à fonte. As etapas para solução do problema são claramente apresentadas nos trabalhos de Mesquita Neto (1989) e Romanini (1995). Em problemas de propagação de ondas no solo, é comum representar as propriedades do meio em função das velocidades de propagação das ondas de pressão (dilatação) C_p e das ondas de cisalhamento C_s . Essas velocidades são função das propriedades do meio, e no caso do meio visco-elástico são dadas por:

$$C_1^{*2} = \frac{\lambda^* + 2\mu^*}{\rho}; \quad (2.20)$$

$$C_2^{*2} = \frac{\mu^*}{\rho}. \quad (2.21)$$

Além das velocidades, são definidos os números complexos de onda, dadas por:

$$k_1^{*2} = \frac{\omega^2}{C_1^{*2}}; \quad (2.22)$$

$$k_2^{*2} = \frac{\omega^2}{C_2^{*2}}. \quad (2.23)$$

Com a utilização das constantes definidas acima, são obtidas as funções de flexibilidade para o problema tratado. As funções de flexibilidade para o carregamento vertical são dadas por:

$$\bar{H}_{wz}(\beta) = \frac{\alpha_1(\beta^2 - \alpha_2^2)}{\mu^* F_{ray}(\beta)}; \quad (2.24)$$

$$\bar{H}_{uz}(\beta) = \frac{i\beta[(\beta^2 + \alpha_2^2) - 2\alpha_1\alpha_2]}{\mu^* F_{ray}(\beta)}; \quad (2.25)$$

e para o carregamento horizontal, tem-se:

$$\bar{H}_{wx}(\beta) = \frac{\alpha_{21}(\beta^2 - \alpha_2^2)}{\mu^* F_{ray}(\beta)}; \quad (2.26)$$

$$\bar{H}_{vx}(\beta) = -\frac{i\beta[(\beta^2 + \alpha_2^2) - 2\alpha_1\alpha_2]}{\mu^* F_{ray}(\beta)}; \quad (2.27)$$

sendo os números de onda α_1 e α_2 dados por:

$$\alpha_1 = \sqrt{\beta^2 - k_1^{*2}}; \quad (2.28)$$

$$\alpha_2 = \sqrt{\beta^2 - k_2^{*2}}; \quad (2.29)$$

F_{ray} é a função de frequência de Rayleigh, e é dada por:

$$F_{ray}(\beta) = \left[2\beta^2 - k_2^{*2}\right]^2 - 4\beta^2\alpha_1\alpha_2. \quad (2.30)$$

As soluções finais que fornecem os deslocamentos vertical e horizontal estacionários para os carregamentos vertical e horizontal aplicados na superfície do semi-espaco visco-elástico, são respectivamente,

$$\bar{W}_p(x) = \frac{\bar{\sigma}_{zp}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{H}_{wp}(\beta) \text{sen}(\beta a)}{\beta} \exp(i\beta x) d\beta; \quad (2.31)$$

$$\bar{U}_p(x) = \frac{\bar{\sigma}_{zp}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{H}_{up}(\beta) \text{sen}(\beta a)}{\beta} \exp(i\beta x) d\beta; \quad (2.32)$$

com $p=x,z$.

O estudo de fundações rígidas de superfície assentadas sobre o semi-espaco visco-elástico foi apresentado por Mesquita Neto (1989). Em seu trabalho, foram sintetizadas as funções de influência estacionárias 2D (equações (2.31) e (2.32)) e 3D, considerando a excitação aplicada sobre a superfície livre. A extensão da formulação para a análise de fundações enterradas foi apresentada por Romanini (1995) que sintetizou funções de influência 2D, considerando a excitação no interior do semi-espaco. Essa nova formulação possibilitou a consideração de estratificação horizontal.

As formulações anteriores ainda não representam a grande maioria dos solos. Um novo passo no sentido de obter maior realismo na representação das propriedades do solo foi dado por Almeida Barros (1997). Em sua tese de doutoramento, formulou as funções de Green (carga concentrada) e influência (carga distribuída), para as cargas aplicadas tanto na superfície do semi-espaço, quanto no interior, assim como a formulação dessas funções para o interior do espaço completo, considerando o meio com anisotropia. As formulações adotaram o estado plano de tensões e regime estacionário. Essas funções foram empregadas na análise de fundações rígidas de superfície, engastadas e enterradas. Barros (2001) apresentou formulações para o estudo de meios estratificados multicamadas e solo apoiado em leito rígido.

O domínio das formulações estacionárias representando mais realisticamente o solo, bem como dos métodos numéricos para sua obtenção, permitem uma grande gama de simulações. Infelizmente permanecem limitadas a excitações harmônicas.

Ao longo dos capítulos seguintes, será apresentada uma metodologia para geração de respostas transientes devido a cargas arbitrárias, como pulsos, degraus, etc.

Capítulo 3

Elementos da FFT e IFFT, Sistemas Lineares

3.1 Introdução

Neste capítulo, são apresentadas a série de Fourier, as deduções para obtenção do par de transformadas de Fourier, as transformadas discretas e a transformada rápida de Fourier.

Posteriormente, faz-se uma rápida introdução aos sistemas lineares, à resposta em frequência, à resposta ao impulso, e metodologias para obtenção de respostas às excitações arbitrárias com uso das transformadas de Fourier ou por intermédio da integral de convolução. O exemplo numérico é aplicado em um sistema massa-mola amortecido, no qual são analisados os efeitos de frequência de amostragem e da quantidade de pontos de discretização no sinal transitório.

3.2 Análise de Fourier, Série e Transformadas

É possível descrever um sinal periódico no tempo, $x(t)$, com período T , através de uma série trigonométrica, conhecida como série de Fourier, que possui a forma:

$$x(t) = a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi t}{T} + a_2 \cos \frac{4\pi t}{T} + \dots + b_1 \sin \frac{2\pi t}{T} + b_2 \sin \frac{4\pi t}{T} + \dots,$$

que pode ser escrita na forma compacta como:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2k\pi t}{T} + b_k \sin \frac{2k\pi t}{T} \right), \quad (3.1)$$

sendo as constantes de Fourier, a_0 , a_k e b_k , definidas pelas integrais:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt, \\ a_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos \frac{2k\pi t}{T} dt, \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin \frac{2k\pi t}{T} dt, \end{aligned} \quad (3.2)$$

com $k \geq 1$.

As integrais são definidas sobre o período T ; as constantes, na forma das equações (3.2), são apresentadas em Newland (1993), já Bendat e Piersol (1980) apresentam a integral definida de 0 a T . Não existe diferença nos resultados das duas apresentações, sendo meramente uma questão de notação matemática.

O termo a_0 é a média do sinal ao longo do período de análise. A série de Fourier apresenta convergência em grande parte das aplicações de engenharia. No caso de funções descontínuas, a série fornece o valor médio de $x(t)$ na descontinuidade.

Assumindo que o valor médio de $x(t)$ seja nulo, então de acordo com a primeira integral das equações em (3.2), $a_0=0$. Já os valores de a_k e b_k são geralmente diferentes de zero.

Para cada valor a_k e b_k existe uma frequência, dada por:

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{T} \rightarrow \omega_N = \frac{2\pi N}{T} = \frac{2\pi}{\Delta t} \rightarrow \Delta t = \frac{2\pi}{\omega_n}, \quad (3.3)$$

que é a frequência da *késima* harmônica. O passo entre duas harmônicas é dado por

$$\Delta \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \frac{2}{T} = \frac{\Delta \omega}{\pi}. \quad (3.4)$$

Analisando a equação (3.4), nota-se que, para grandes períodos, são obtidos pequenos passos em frequência. No limite, quando o período T tende a infinito, o passo tende a zero, e os coeficientes da série estarão muito próximos. A partir desta consideração, a série deixa de representar um sinal periódico, e não é mais possível a análise na forma discreta. Entretanto, é possível obter uma forma integral. Substituindo as equações integrais dos coeficientes da série apresentadas na equação (3.2) na equação (3.1), que define a série, e assumindo que o valor médio de $x(t)$ seja nulo, ou seja $a_0=0$, obtém-se:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{2}{T} \int_{T/2}^{T/2} x(t) \cos \frac{2\pi kt}{T} dt \right\} \cos \frac{2\pi kt}{T} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{2}{T} \int_{T/2}^{T/2} x(t) \sin \frac{2\pi kt}{T} dt \right\} \sin \frac{2\pi kt}{T}. \quad (3.5)$$

Considerando a equação (3.3) e ainda a equação (3.4), reescrita de modo a obter $2/T$, e substituindo na equação (3.5), $x(t)$ pode ser escrito como:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\Delta\omega}{\pi} \int_{T/2}^{T/2} x(t) \cos \omega_k t dt \right\} \cos \omega_k t + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\Delta\omega}{\pi} \int_{T/2}^{T/2} x(t) \sin \omega_k t dt \right\} \sin \omega_k t,$$

quando se faz o limite $T \rightarrow \infty$, $\Delta\omega \rightarrow d\omega$, a somatória passa para a forma integral com limites $\omega = 0$ e $\omega = \infty$, de modo que

$$x(t) = \int_{\omega=0}^{\infty} \frac{d\omega}{\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos \omega t dt \right\} \cos \omega t + \int_{\omega=0}^{\infty} \frac{d\omega}{\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin \omega t dt \right\} \sin \omega t,$$

definindo ainda,

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos \omega t dt \\ B(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin \omega t dt, \end{aligned} \quad (3.6)$$

chega-se finalmente à transformada de Fourier de $x(t)$,

$$x(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \cos \omega t dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) \sin \omega t dt. \quad (3.7)$$

É possível escrever a equação (3.7) na forma complexa, definindo $X(\omega)$ como:

$$X(\omega) = A(\omega) + iB(\omega), \quad (3.8)$$

e com o uso da fórmula de Euler:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad (3.9)$$

considerando ainda que $A(\omega)$ é uma função par de ω e que $B(\omega)$ é uma função ímpar de ω , uma vez que, com alteração do sinal de ω em ambas funções, $A(\omega)$ mantém o mesmo resultado, enquanto $B(\omega)$ muda de sinal. É possível mostrar que $A(\omega)\cos\omega t$ e $B(\omega)\sin\omega t$ são funções pares.

Considerando as propriedades de $A(\omega)$ e $B(\omega)$, e sabendo que $\sin\omega t$ é ímpar, e conseqüentemente o produto $A(\omega)\sin\omega t$ é ímpar, é permitida a consideração a seguir:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \sin \omega t d\omega &= 0 \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) \cos \omega t d\omega &= 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Reescrevendo a integral da equação (3.7) com os limites alterados e, conseqüentemente, inserindo o divisor dois para manter a resposta inalterada, obtém-se:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \cos \omega t dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) \sin \omega t dt. \quad (3.11)$$

A idéia de freqüências negativas é meramente um artifício matemático que auxilia na eliminação do fator de multiplicação dois. Somando as equações (3.10) e (3.11), sem alterar o valor final de $x(t)$, chega-se em:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \cos \omega t dt + \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) \sin \omega t dt + i \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \sin \omega t dt - i \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) \cos \omega t dt \right\}.$$

Agrupando os termos, tem-se:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{A(\omega) - iB(\omega)\} \{\cos \omega t - i \sin \omega t\} d\omega,$$

considerando as equações (3.7) e (3.8), determina-se a transformada complexa de Fourier de $X(\omega)$, também chamada de *transformada inversa de Fourier*,

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (3.12)$$

Para obter a transformada de Fourier de $x(t)$, basta considerar as equações de (3.6) substituídas na equação (3.8),

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) (\cos \omega t - i \sin \omega t) dt$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (3.13)$$

Não existe unanimidade quanto à posição do termo $1/2\pi$; muitos o adotam na transformada de $X(\omega)$, outros preferem mantê-lo na transformada de $x(t)$, e existem aqueles que preferem manter o termo $(1/2\pi)^{-1/2}$ em ambas as transformadas (Newland, 1994). Bendat e Peirsol (1980) definem a forma deduzida aqui como a mais usual para sinais periódicos. Para sinais aleatórios, é mais comum a forma com $1/2\pi$ na transformada de Fourier (Newland, 1994).

A análise de Fourier clássica apresenta as condições que $x(t)$ deve respeitar para que a formulação integral seja verdadeira, e exista $X(\omega)$. Nas aplicações comuns em engenharia, é necessário que,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty. \quad (3.14)$$

3.3 Transformada Discreta de Fourier

Na prática, a obtenção de sinais de período infinito, tanto em frequência quanto no tempo, não é possível. Para análise da grande maioria dos sinais, é utilizada uma parte discreta ao longo de um período T , ou um espectro em frequência.

Sabendo que a série de Fourier pode ser escrita na forma:

$$x(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2k\pi t}{T} + b_k \sin \frac{2k\pi t}{T} \right), \quad (3.15)$$

e sendo as constantes de Fourier obtidas pelas integrais:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \\ a_k &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos \frac{2k\pi t}{T} dt \\ b_k &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin \frac{2k\pi t}{T} dt \end{aligned} \quad (3.16)$$

Substituindo as equações (3.16) em (3.15), obtém-se:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos \frac{2\pi kt}{T} dt \right\} \cos \frac{2\pi kt}{T} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin \frac{2\pi kt}{T} dt \right\} \sin \frac{2\pi kt}{T}$$

e considerando que

$$\begin{aligned} A_k(\omega) &= \int_0^T x(t) \cos \frac{2\pi kt}{T} dt \\ B_k(\omega) &= \int_0^T x(t) \sin \frac{2\pi kt}{T} dt \end{aligned}$$

para definir a transformada discreta de Fourier, parte-se de

$$\begin{aligned} X_k &= A_k - iB_k = \\ X_k &= \int_0^T \left\{ x(t) \cos \frac{2\pi kt}{T} - x(t)i \sin \frac{2\pi kt}{T} \right\} dt \\ X_k &= \int_0^T x(t) e^{\frac{-i2\pi kt}{T}} dt \end{aligned}$$

Assumindo ainda que exista uma série discreta $\{x_r\}$, $r = 1, 2, 3 \dots N$, sendo $t = r\Delta t$, e $\Delta t = T/N$, a integral pode ser reescrita, aproximadamente, como sendo um somatório

$$X_k = \sum_{r=1}^N x_r e^{\frac{-i2\pi kt}{T}} \Delta t$$

$$X_k = \Delta t \sum_{r=1}^N x_r e^{\frac{-i2\pi kr}{N}}$$

obtendo, finalmente, a forma discreta da transformada de Fourier,

$$X_k = \frac{T}{N} \sum_{r=1}^N x_r e^{\frac{-i2\pi kr}{N}}. \quad (3.17)$$

A transformada discreta inversa de Fourier é dada pelo somatório,

$$x_r = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^N X_k e^{i2\pi kr/N}. \quad (3.18)$$

3.4 Transformada de Sinais Periódicos

O par de transformadas, apresentado nas equações (3.12) e (3.13), é válido quando

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty;$$

entretanto, não é possível fazer medições para $-\infty \leq t \leq \infty$, sejam experimentais ou através do uso de métodos numéricos. É possível eliminar esta restrição, utilizando funções genéricas.

Assumindo que uma função periódica, $x(t)$ pode ser escrita por meio de uma série de Fourier, dada pela equação (3.15), e simplificada ao se considerar apenas a $késima$ harmônica:

$$x(t) = 2 \left(a_k \cos \frac{2k\pi t}{T} + b_k \sin \frac{2k\pi t}{T} \right). \quad (3.19)$$

A transformada de Fourier desta $x(t)$ é dada por

$$X(\omega) = (a_k - ib_k) \delta \left(\omega - \frac{2\pi k}{T} \right) + (a_k + ib_k) \delta \left(\omega + \frac{2\pi k}{T} \right), \quad (3.20)$$

sendo $\delta(\omega)$ o delta de Dirac.

As partes real e imaginária da transformada de Fourier da onda harmônica (3.19) podem, desse modo, ser representadas por um par de funções delta como as da equação (3.20). Com a extensão para as demais harmônicas, poderá ser observado que uma função periódica, $x(t)$, pode ser representada por uma série de funções delta de Dirac, como apresentado na figura 3.1.

É possível demonstrar esse resultado matematicamente, estendendo a equação (3.20) a todas as harmônicas através de um somatório. Para isso, devem ser utilizadas ainda as definições,

$$X_k = a_k - ib_k \quad \text{e} \quad (3.21)$$

$$X_{-k} = X_k^* = a_k + ib_k, \quad (3.22)$$

de modo que a equação (3.20) pode ser generalizada para:

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right). \quad (3.23)$$

É possível agora constatar que a transformada discreta de Fourier (DFT) de uma série discreta no tempo $\{x_r\}$, $r = 1, 2, 3, \dots, N$, resulta em um conjunto de coeficientes complexos:

$$X_k = a_k - ib_k.$$

Nos casos em que $\{x_r\}$ representa um ciclo de uma função periódica, $x(t)$, os termos de $\{X_k\}$ são uma aproximação dos coeficientes de uma expansão em série de Fourier de $x(t)$. Garantindo que $x(t)$ seja uma função contínua, a aproximação dos termos pode ser cada vez mais refinada pela redução dos passos no tempo.

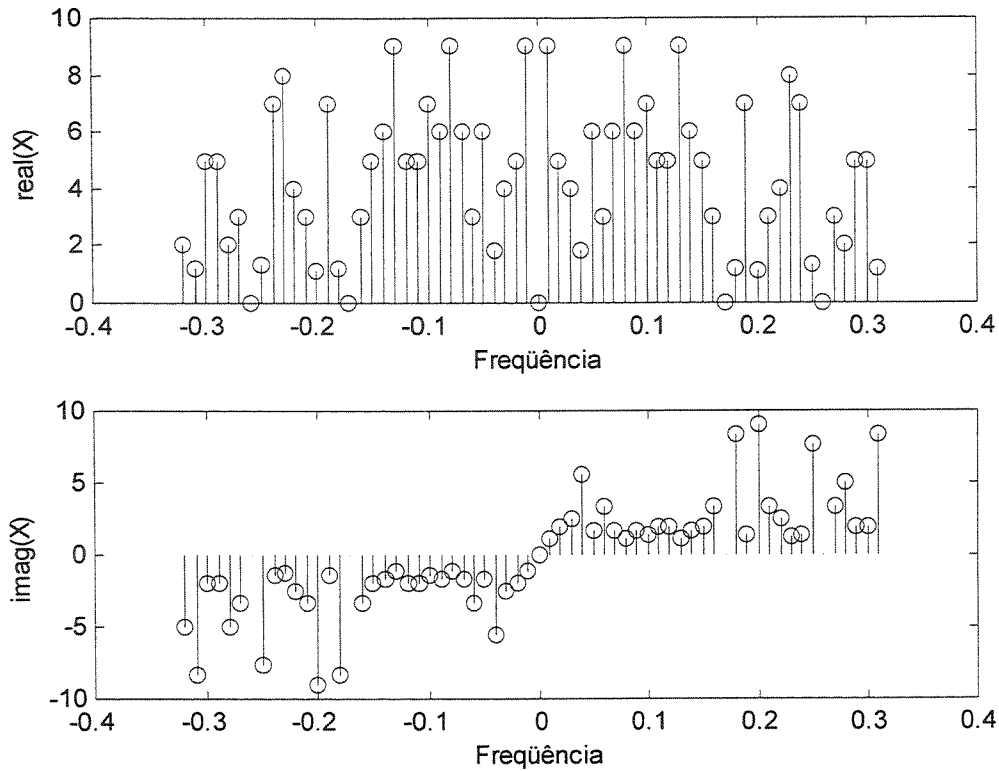


Figura 3.1 – Componentes reais e imaginários da transformada de Fourier de um sinal periódico.

3.5 Transformada Rápida de Fourier – FFT

Ao aplicar diretamente a transformada discreta de Fourier apresentada na equação (3.17),

$$X_k = \frac{T}{N} \sum_{r=1}^N x_r e^{\frac{-i2\pi kr}{N}},$$

são necessárias N multiplicações complexas para cada valor de X_k , ou seja, N^2 multiplicações complexas no total. Para o caso de $N=1024$, seriam necessárias 148.576 multiplicações complexas, o que tornaria proibitiva a aplicação da transformada discreta de Fourier (DFT).

A transformada rápida de Fourier (FFT) é um meio de baixo custo computacional para realizar a DFT. O algoritmo da FFT foi trazido de volta à luz, publicado por Cooley e Tukey em 1965, uma vez que já havia sido estudado anteriormente [Hanning, 1987]. Foi uma das maiores descobertas em métodos computacionais na segunda metade do século XX e permitiu que fossem realizadas muitas análises até então impossíveis devido aos altos custos computacionais da

transformada discreta aplicada diretamente. Com o uso da FFT, o número de operações de multiplicação complexa é reduzido para $N \log_2 N$, ou seja, para o problema com $N=1.024$, são necessárias apenas 10.240 multiplicações complexas. O algoritmo original de Cooley-Tukey necessita de que o número de termos seja $N=2^m$, com m inteiro, por isso é conhecido como algoritmo de base dois. Algoritmos mais avançados já permitem o uso de uma quantidade qualquer de termos. O algoritmo de Cooley-Tukey e os demais são largamente discutidos na literatura, vide Newland (1993), Bergland (1969), Antoniou (1979), entre outros.

Os principais problemas que podem ocorrer, na utilização da FFT, não são falhas específicas do algoritmo e sim consequências da transformada discreta de Fourier. Os problemas mais comuns no uso da DFT costumam ser “*aliasing*”, “*leakage*” [Bergland, 1969]. Esses fenômenos são mais comuns nas análises, partindo de um sinal transiente para um sinal em frequência.

O “*aliasing*” ocorre quando termos de alta frequência encobrem os termos de baixa frequência. Isso pode ser observado quando termos de alta e baixa frequência possuem pontos em comum, como na figura 3.2. Esse fenômeno pode ser eliminado ao garantir que se esteja trabalhando abaixo da frequência de Nyquist, que é dada como sendo a metade da frequência de amostragem. No caso dos problemas tratados neste trabalho, os resultados em frequência obtidos e transformados com o uso da FFT possuem, como frequência máxima, a frequência de Nyquist. Respostas em frequência acima dessa faixa não precisam ser calculadas.

O problema de “*leakage*” é inerente à transformada de Fourier de qualquer conjunto finito de dados da resposta transiente. Um sinal no tempo tem apenas uma parte selecionada com período, T , para ser transformada para o domínio da frequência, desconsiderando o que ocorreu antes e após o período selecionado; isso é equivalente a aplicar um filtro retangular. Um *coseno* no tempo, possui, como transformada contínua, apenas um valor em frequência (delta de Dirac). Entretanto, ao aplicar uma janela, e não escolher apropriadamente a dimensão da janela, ou seja, não representar corretamente um período do coseno, ocorrerá o *leakage*, distorcendo o sinal em frequência, com a introdução de uma série de picos espúrios (novos deltas de Dirac) em torno do ponto principal. O *leakage* pode ser minimizado com o uso de janelas mais elaboradas que a retangular, mais suaves no início e no final, como por exemplo, janelas de Hanning, Hamming, Kaiser [Hamming, 1987].

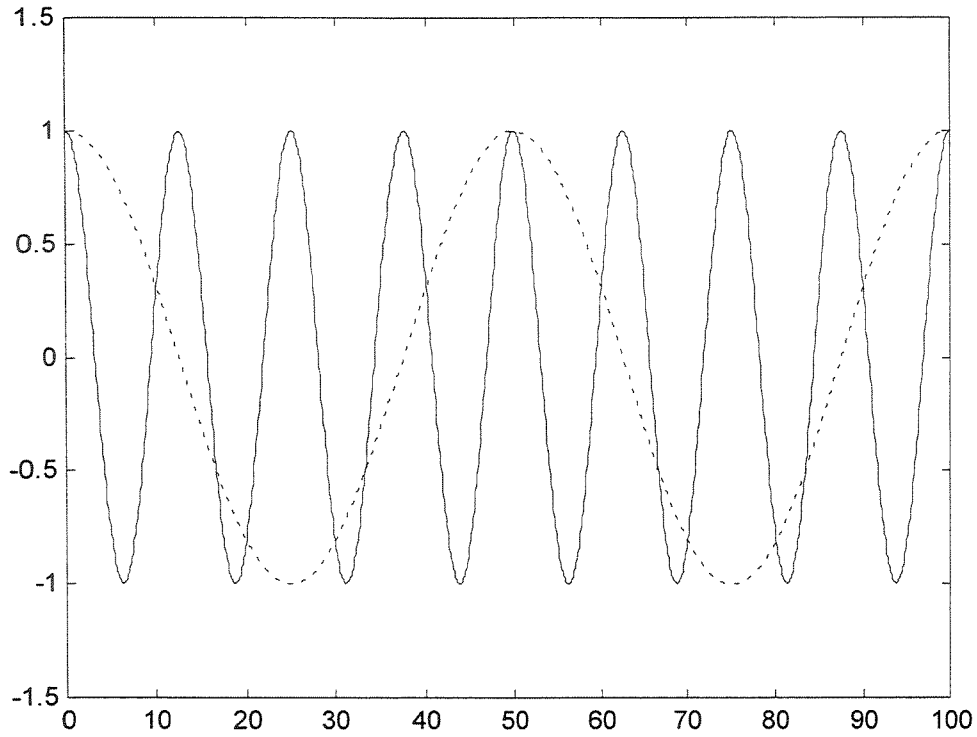


Figura 3.2 – Exemplo de como baixas frequências podem encobrir os termos de alta frequência.

3.6 Resposta de Sistemas Lineares

Existem várias maneiras de definir as características de resposta de um sistema qualquer, que pode ser uma máquina, um edifício, uma fundação ou, ainda, um circuito elétrico. Qualquer que seja o sistema, é assumido que existe um conjunto de entradas, também chamadas de excitações $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$,... $x_n(t)$ e um conjunto de saídas, ou respostas $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$,... $y_n(t)$. As entradas e saídas podem ser forças, pressões, deslocamentos, velocidades, acelerações, tensões e correntes elétricas, ou, ainda, a combinação dessas. Considerando sistemas lineares, para os quais cada resposta pode ser relacionada às excitações por uma equação diferencial linear na forma

$$\begin{aligned}
 a_n \frac{d^n y_1}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y_1}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy_1}{dt} + a_0 y_1 = & b_r \frac{d^r x_1}{dt^r} + b_{r-1} \frac{d^{r-1} x_1}{dt^{r-1}} + \dots + b_1 \frac{dx_1}{dt} + b_0 x_1 + \\
 + c_s \frac{d^s x_2}{dt^s} + c_{s-1} \frac{d^{s-1} x_2}{dt^{s-1}} + \dots + c_1 \frac{dx_2}{dt} + c_0 x_2, & \dots,
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

se a equação é linear, então, considerando que $y_1'(t)$ como a resposta às excitações $x_1'(t)$, $x_2'(t)$, $x_3'(t)$,... e a $y_1''(t)$ a resposta às excitações $x_1''(t)$, $x_2''(t)$, $x_3''(t)$,... então a resposta às excitações combinadas $x_1'(t) + x_1''(t)$, $x_2'(t) + x_2''(t)$, $x_3'(t) + x_3''(t)$,... deve ser $y_1'(t) + y_1''(t)$. Assim, o princípio da superposição linear é aplicável. Os coeficientes a , b , c , ... embora possam ser funções do tempo, mas inicialmente será considerado que são constantes, ou seja, o sistema em vibração não tem variações de comportamento ou características ao longo do tempo. O princípio da superposição linear é de grande importância, uma vez que permite sejam analisadas as respostas a cada excitação individualmente. No caso de sistemas com pequenos deslocamentos em relação a posição de equilíbrio estático, pode ser feita a consideração de linearidade.

3.7 Solução Clássica para Resposta de Sistemas Lineares

Se as equações de movimento para um sistema linear de parâmetros constantes podem ser determinadas, então é possível escrever uma equação diferencial linear que relacione a entrada $x(t)$ com a resposta $y(t)$ na forma:

$$a_n \frac{d^n y_1}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y_1}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy_1}{dt} + a_0 y_1 = b_r \frac{d^r x_1}{dt^r} + b_{r-1} \frac{d^{r-1} x_1}{dt^{r-1}} + \dots + b_1 \frac{dx_1}{dt} + b_0 x_1. \quad (3.25)$$

Para uma excitação $x(t)$ e condições iniciais especificadas, essa equação pode ser resolvida por métodos clássicos a fim de obter a resposta $y(t)$. Essa solução, no entanto, pode ser dificultada por duas razões principais. A primeira razão é a dificuldade na obtenção da equação (3.25) de maneira direta, pois os dados podem ser inadequados ou as constantes a e b podem não estar facilmente disponíveis por meio de experimentos simples ou formulações matemáticas fechadas. Além disso mesmo que a equação seja conhecida, para obter a resposta $y(t)$ é necessário conhecer $x(t)$ em todo o período de estudo, o que no caso de vibrações aleatórias, por exemplo, não seria possível (Newland, 1993). No caso de um modelo analítico, é possível que a equação não possa ser resolvida no domínio do tempo, como no caso de muitas das soluções fundamentais de elementos de contorno que possuem forma íntegro-diferencial. Nesses casos, em que não se consegue obter a solução da equação (3.25), é necessária a utilização de outras alternativas.

3.8 Método da Resposta em Frequência

Uma das alternativas viáveis para descrever e determinar as características de um sistema dinâmico linear é obter sua resposta a uma excitação harmônica. Assume-se que, para um sistema não excitado, não existe resposta, o sistema estará dormente. Essa metodologia não pode ser empregada em sistemas que possuam oscilações auto-excitadas: a isso se dá o nome de sistemas instáveis. Considerando-se uma excitação harmônica de amplitude constante com uma frequência determinada:

$$x(t) = x_0 \sin \omega t, \quad (3.26)$$

de acordo com a equação (3.25), a resposta estacionária também seria dada por uma onda harmônica de amplitude constante, mesma frequência ω e um ângulo de diferença de fase ϕ , de modo que:

$$y(t) = y_0 \sin(\omega t - \phi). \quad (3.27)$$

As características de transmissão (resposta em frequência) do sistema, definidas pelo ângulo de fase ϕ e pela razão entre as amplitudes da entrada e saída podem ser determinadas para a frequência ω . Variando ω de zero a infinito, é possível determinar completamente as características dinâmicas do sistema.

É comum, no estudo de vibrações, utilizar números complexos para agrupar as informações de ângulo de fase e razão de amplitudes. A resultante é chamada de função de resposta em frequência $H(\omega)$, que é dada por:

$$H(\omega) = A(\omega) - iB(\omega), \quad (3.28)$$

sendo:

$$|H(\omega)| = \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{y_0}{x_0}, \quad (3.29)$$

e é possível determinar o ângulo de fase pela relação:

$$\frac{\text{Parte_imaginária}}{\text{Parte_real}} = \frac{B}{A} = \tan \phi. \quad (3.30)$$

Lembrando que:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta ,$$

pode-se rescrever a excitação $x(t)$, definida em (3.26), usando notação exponencial complexa, de forma que:

$$x(t) = x_0 \sin \omega t = x_0 \operatorname{Im}(e^{i\omega t}), \quad (3.31)$$

com resposta correspondente:

$$y(t) = x_0 \operatorname{Im}\{H(\omega)e^{i\omega t}\}. \quad (3.32)$$

Consequentemente para uma excitação

$$x(t) = x_0 e^{i\omega t}, \quad (3.33)$$

aplicada a um sistema linear provoca uma resposta do tipo:

$$y(t) = H(\omega)x_0 e^{i\omega t}. \quad (3.34)$$

3.9 Método da Resposta ao Impulso

A função $H(\omega)$ define a resposta estacionária de um sistema submetido a uma excitação harmônica; a medição da resposta para diversos valores de ω define completamente as características dinâmicas do sistema (Newland, 1993). Uma metodologia alternativa, para obter o comportamento do sistema, é a medição da resposta transiente provocada por uma perturbação. Através da medição da resposta transiente do sistema até o retorno ao equilíbrio estático, permite determinar as características dinâmicas do sistema.

Considerando uma excitação de duração muito pequena, teoricamente nula, descrita com auxílio do delta de Dirac:

$$x(t) = I\delta(t), \quad (3.35)$$

sendo I um parâmetro constante com dimensões $[(x)(\text{tempo})]$. Caso $x(t)$ represente uma força, descreve o impacto de um martelo, ou impulso de magnitude dada por:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt = I \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = I, \quad (3.36)$$

sendo a unidade de I [força]x[tempo].

Não é necessário que $x(t)$ represente uma força, pode representar qualquer tipo de excitação, mantendo parâmetros adequados. A excitação é chamada de impulso unitário se I for unitário. Respondendo a esta excitação, o sistema repentinamente sai de seu estado de repouso e gradualmente retorna ao equilíbrio com a passagem do tempo. A resposta a um impulso aplicado em $t = 0$, é chamada de função de resposta ao impulso, $h(t)$.

3.10 Relação Entre a Resposta ao Impulso e a Resposta em Frequência

Assumindo que, tanto a função resposta em frequência, quanto a função de resposta ao impulso são capazes de fornecer as características dinâmicas de um sistema linear, deve ser possível obter uma a partir da outra. Isso é feito através da transformada de Fourier que permite a transição da resposta ao impulso para a resposta em frequência e vice-versa.

Para sistemas estáveis, que estão em repouso antes de sofrerem a excitação e retornam ao repouso após a aplicação de impulso (delta de Dirac), sabe-se que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < \infty, \quad (3.37)$$

sendo, portanto, possível aplicar a transformada de Fourier na excitação impulsiva $x(t)=\delta(t)$ e na resposta transiente $y(t)=h(t)$, obtendo:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-i\omega t} dt, \quad (3.38)$$

e

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\omega t} dt. \quad (3.39)$$

Expandindo a equação (3.38), obtém-se:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cos \omega t dt - i \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \sin \omega t dt = 1. \quad (3.40)$$

Sabendo que um sistema linear submetido a uma excitação estacionária de frequência ω , tem como resposta uma saída estacionária harmônica com mesma frequência, é razoável assumir que uma entrada $X(\omega)d\omega$, na faixa ω até $\omega+d\omega$, terá correspondência na saída $Y(\omega)d\omega$ na mesma faixa. Submetendo o sistema a uma excitação $x(t)$ como a definida a seguir:

$$x(t) = X(\omega)d\omega e^{i\omega t}, \quad (3.41)$$

é obtida como resposta, a saída harmônica:

$$y(t) = Y(\omega)d\omega e^{i\omega t}. \quad (3.42)$$

Com auxílio das equações (3.33) e (3.34), a resposta do sistema pode ser escrita como:

$$y(t) = H(\omega)X(\omega)d\omega e^{i\omega t},$$

que, comparada com a equação (3.42), leva a:

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega). \quad (3.43)$$

Aplicando os resultados das equações (3.39) e (3.40) em (3.43), chega-se a:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\omega t} dt = H(\omega) \cdot 1 \rightarrow H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\omega t} dt, \quad (3.44)$$

que apresenta a relação entre a resposta estacionária do sistema e a sua resposta ao impulso. A transformada inversa $h(t)$ permite a obtenção da resposta ao impulso a partir da resposta estacionária:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)e^{i\omega t} d\omega. \quad (3.45)$$

3.11 Resposta do Sistema Linear a uma Excitação Arbitrária

A resposta do sistema a uma excitação arbitrária pode ser obtida pela relação $Y(\omega)=H(\omega)X(\omega)$. A implementação numérica desse procedimento é muito simples, bastando utilizar os procedimentos de DFT e IDFT. A excitação pode ser definida no domínio do tempo e transformada para frequência, sendo multiplicada pela função de resposta em frequência, o que gera a resposta estacionária do sistema àquela excitação. Para obtenção da resposta transiente basta, aplicar a transformada inversa.

Analiticamente a obtenção de $y(t)$, conhecendo um $x(t)$ e a resposta em frequência, pode ser obtida por:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \right\} e^{i\omega t} d\omega. \quad (3.46)$$

Resolver a integral em ω , pode ser extremamente difícil em alguns casos, de modo que é necessária uma outra abordagem.

Uma maneira alternativa é a aplicação da resposta ao impulso, $h(t)$. Para um impulso aplicado em $t=0$, a resposta do sistema em um instante t , é dada por $h(t)$, então $h(t-\tau)$ é a resposta em um instante t , devida a um impulso em um instante τ , isto é, após uma variação de tempo $t-\tau$. Para uma função $c(t)$ de forma arbitrária, composta por uma série de impulsos, na qual o impulso aplicado entre τ e $\tau + d\tau$, possui magnitude $c(\tau)d\tau$, a resposta em um instante t qualquer, a essa excitação, é a fração $c(\tau)d\tau/1$ da resposta a um impulso unitário em $t=\tau$, que é dada por $h(t-\tau)$. A contribuição, na resposta total no tempo t , é dada por $h(t-\tau)c(\tau)d\tau$. Aplicando o conceito de superposição dos sistemas lineares, é possível obter a resposta $y(t)$ em t , devido às respostas a cada impulso individual desde $t=-\infty$. Para tanto, aplica-se a integração de $x(\tau)d\tau$ de $-\infty$ até t , de modo que a resposta $x(t)$ é dada por:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t h(t-\tau)c(\tau)d\tau, \quad (3.47)$$

que é a integral de convolução de $h(t)$ e $c(t)$, que, no domínio da frequência, é uma multiplicação.

3.12 Resultados Numéricos

Para analisar as equações obtidas para a transformada discreta de Fourier, foi estudado um sistema de um grau de liberdade, do tipo massa – mola – amortecedor, apresentado na figura 3.3, regido pela equação diferencial

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t). \quad (3.48)$$

A equação analítica, para determinar a resposta em frequência deste sistema, é dada por

$$H(\omega) = \frac{1}{k - \omega^2 m + i\omega c}, \quad (3.49)$$

sendo k a rigidez do sistema, m a massa, e c o coeficiente de amortecimento. Nas análises realizadas a seguir, k e m foram considerados como sendo unitários, e $c=0,2Ns/m$. Em uma primeira análise, foi obtida a função de resposta ao impulso com o auxílio do algoritmo de transformada rápida inversa de Fourier (IFFT). Os resultados podem ser observados na figura 3.4, foi utilizada uma frequência de amostragem $\omega_f = 32,044$ rad/s, 512 termos e um delta, $\Delta\omega=0,0628$ rad/s. A função de resposta ao impulso obtida possui um tempo de amostragem de 100 s, com $\Delta t = 0,09765625$ s.

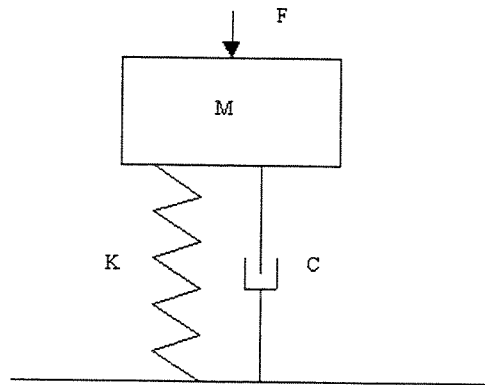


Figura 3.3 – Sistema massa-mola-amortecedor.

Nas sessões anteriores, foram apresentadas as relações entre tempo e frequência, novamente apresentadas aqui:

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{T} \rightarrow \omega_N = \frac{2\pi N}{T} = \frac{2\pi}{\Delta t} \rightarrow \Delta t = \frac{2\pi}{\omega_n}$$

e

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\Delta\omega},$$

nota-se, por meio dessas equações, que é possível uma melhoria na resolução no tempo com o aumento da frequência final, além de ser possível aumentar o tempo de amostragem através de uma redução do passo em frequência. Para verificação dessas possibilidades foram realizadas duas análises. Inicialmente, para verificar o efeito da redução de $\Delta\omega$, fixou-se a frequência máxima de 128,68 rad/s. O número de termos em frequência variou com $N=2^n$, $n=9, 10, 11$ e 12 , obtendo, assim, os seguintes valores para tempos de amostragem: $t_a= 25$ s, 50 s, 100 s, 200 s. O valor de Δt permaneceu constante em todas as análises, pois não houve mudança na frequência final. Os resultados são apresentados na figura 3.5. Nota-se inexistir mudança no comportamento para os tempos iniciais, havendo apenas um aumento do tempo de amostragem devido à redução do passo em frequência. O número de termos influi também na convergência da resposta, como pode ser observado na figura 3.6.

Em uma segunda análise, $\Delta\omega$ foi mantido constante, e aumentou-se número de termos (quantidade de pontos em frequência), com a introdução de zeros, aumentando assim a frequência final ω_f , e reduzindo o passo no tempo Δt , o que possibilita obter uma resposta mais suave. Os resultados para essa análise, adotando $\Delta\omega=0,126$, e utilizando $N=2^n$, para $n = 9,10,11,12$, podem ser observados nas figuras 3.7 e 3.8. A resposta ao longo do tempo não é alterada; ocorre uma suavização da resposta através da introdução de novos termos, devido à redução no Δt , que é consequência do aumento da frequência final do sinal que sofre transformada inversa Fourier. A resposta de função em frequência, em todos os casos, foi calculada para os primeiros 512 termos; os demais foram preenchidos com zeros.

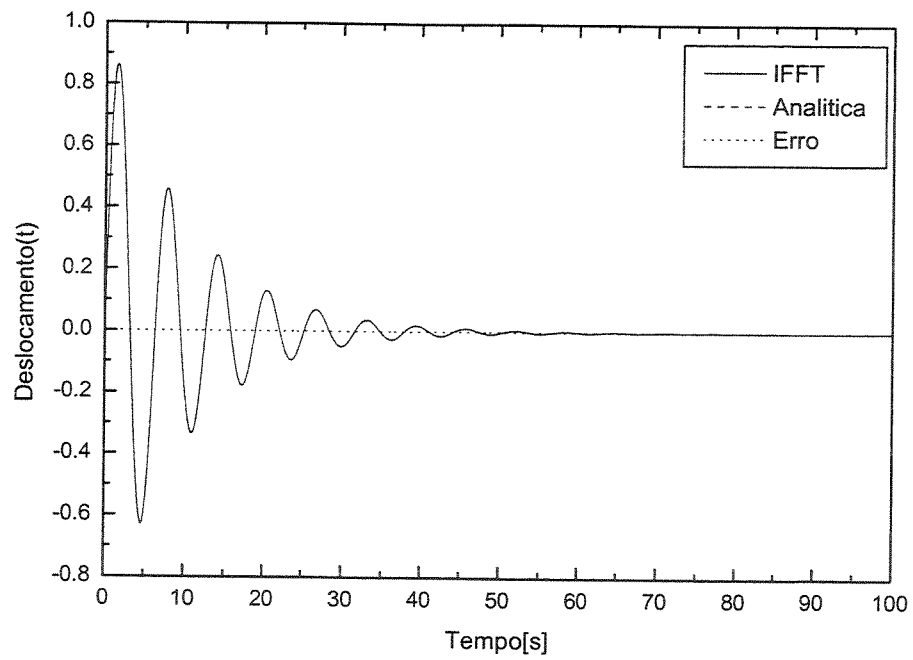


Figura 3.4 - Função de resposta ao impulso obtida através da IFFT resposta em frequência

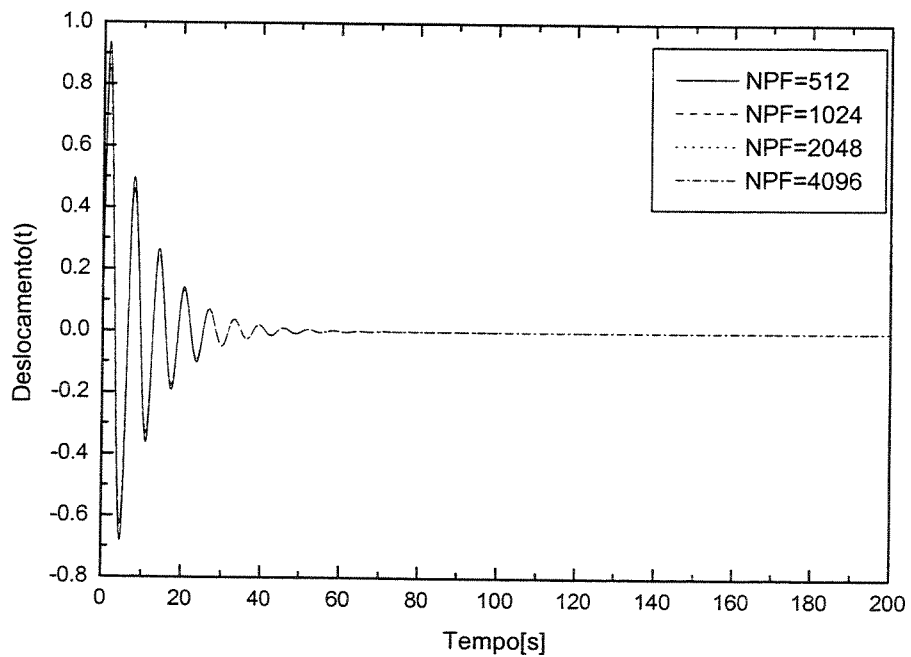


Figura 3.5 – Influência do número de pontos em frequência na resposta ao impulso.

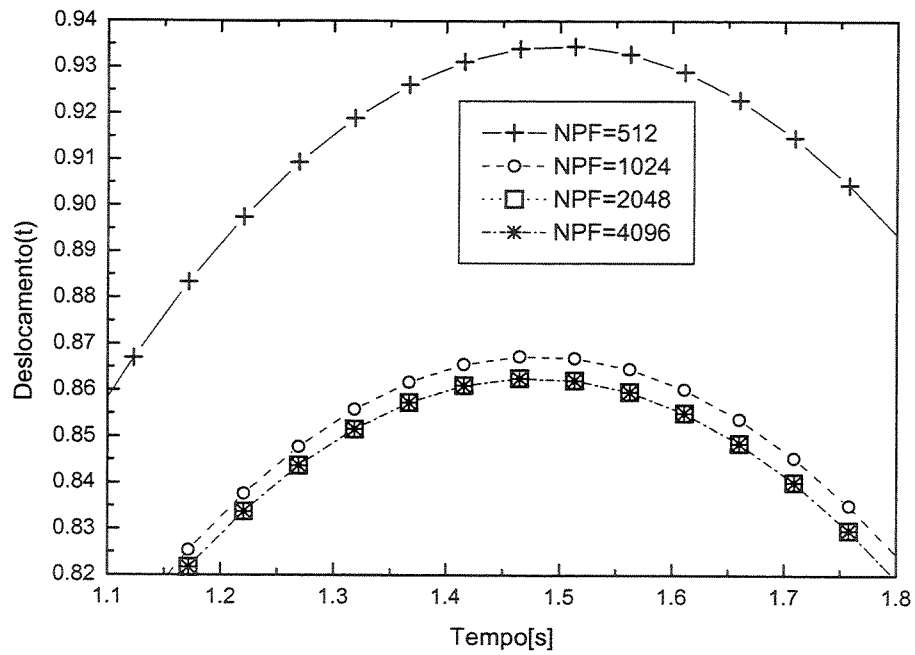


Figura 3.6 – Convergência devido aumento do número de pontos.

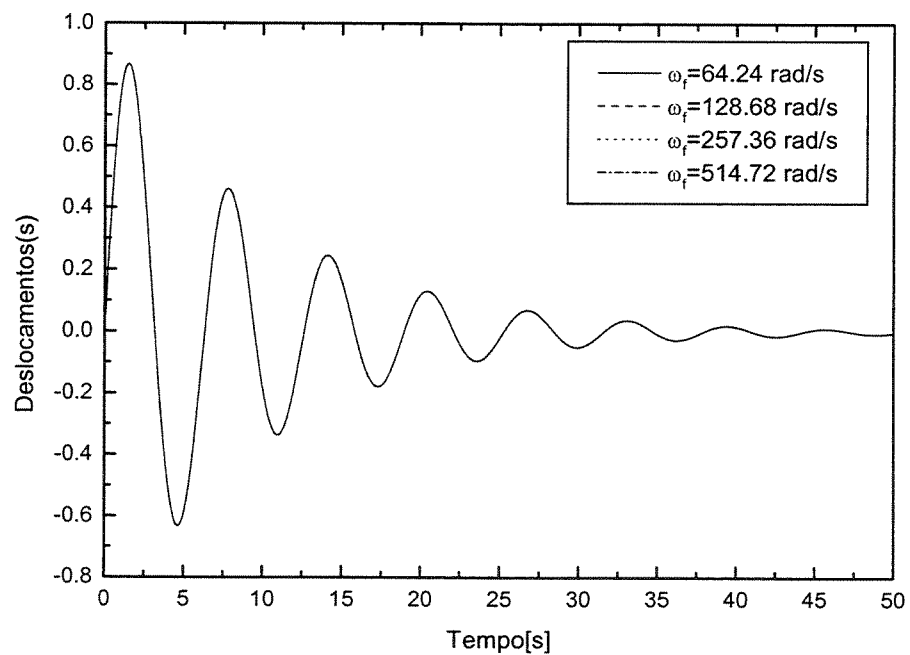


Figura 3.7 – Efeito nas resposta ao impulso devido ao aumento da frequência final.

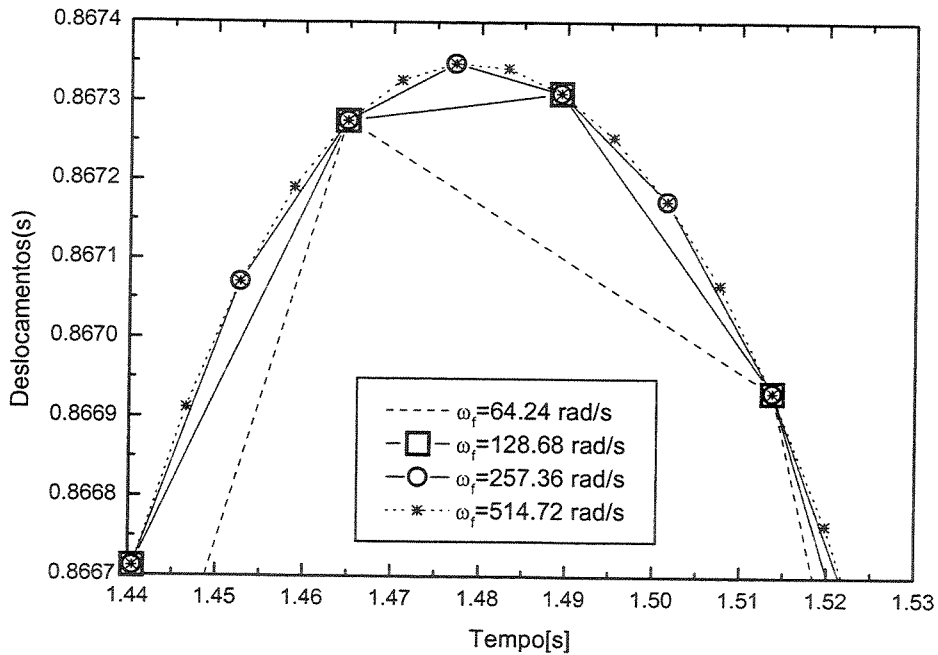


Figura 3.8 – Detalhe do efeito nas respostas ao impulso devido ao aumento da frequência final.

Como foi discutido nas seções referentes à resposta de sistemas lineares, é possível obter a o comportamento desses a partir das funções de resposta em frequência e da resposta ao impulso. A seguir, serão apresentadas algumas análises para demonstrar cada uma dessas técnicas.

Inicialmente o resultados serão obtidos apenas com o uso da transformada de Fourier, para o sistema com tempo de amostragem, $t=1024s$, submetido à excitação por um pulso com duração de 50 s, apresentado na figura 3.9, e o $\Delta t=0,25$.

O pulso modelado no domínio do tempo será transformado para o domínio da frequência com auxílio da transformada discreta de Fourier; o espectro resultante é multiplicado pela função de resposta em frequência do sistema massa mola, da qual é apresentado o módulo na figura 3.10 e o ângulo de fase na figura 3.11. A resultante em frequência, obtida pela relação $Y(\omega)=H(\omega)X(\omega)$, pode ser observada nas figuras 3.12 e 3.13, módulo e ângulo de fase respectivamente. A resposta transiente para essa excitação é obtida pela transformada discreta inversa de $Y(\omega)$, figura 3.14. Os resultados são muito próximos àqueles obtidos analiticamente. Nota-se a tendência do sistema mecânico de vibrar em torno da posição de equilíbrio estático

após a aplicação da carga, e quando esta cessa, vibrar em torno da posição de repouso até que as oscilações sejam amortecidas completamente.

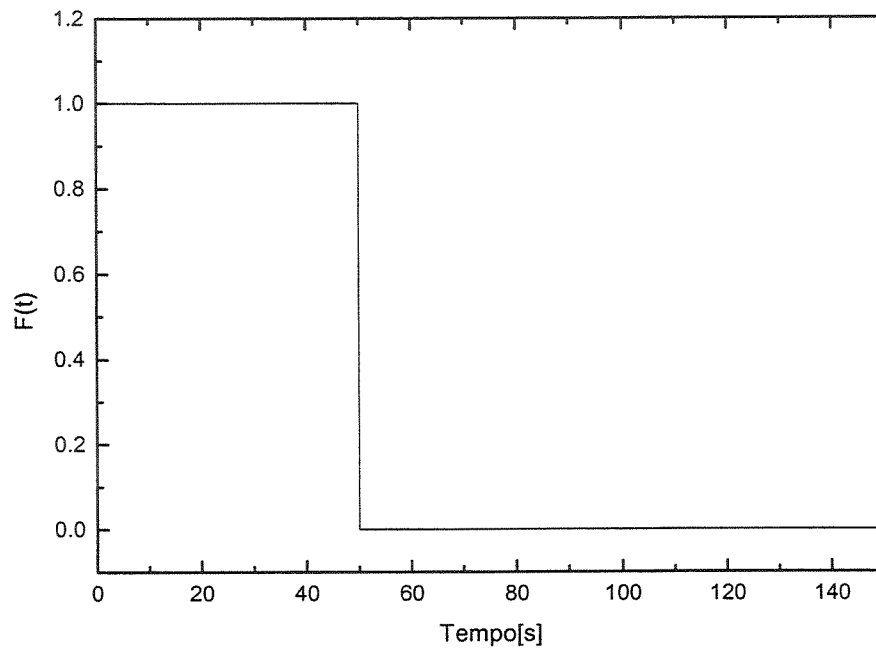


Figura 3.9 – Pulso aplicado ao sistema.

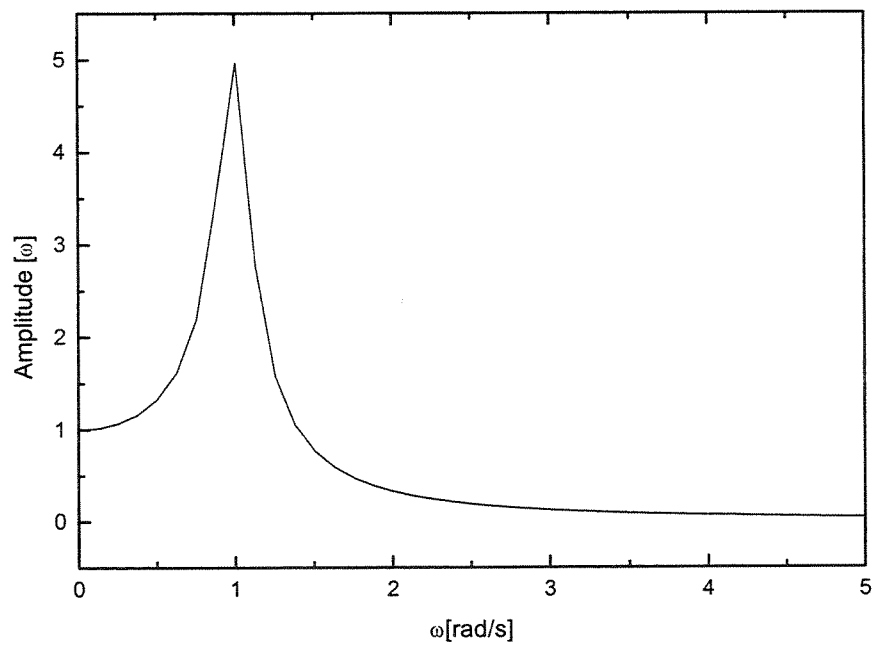


Figura 3.10 – Função de resposta em frequência, amplitude, para sistema de um grau de liberdade.

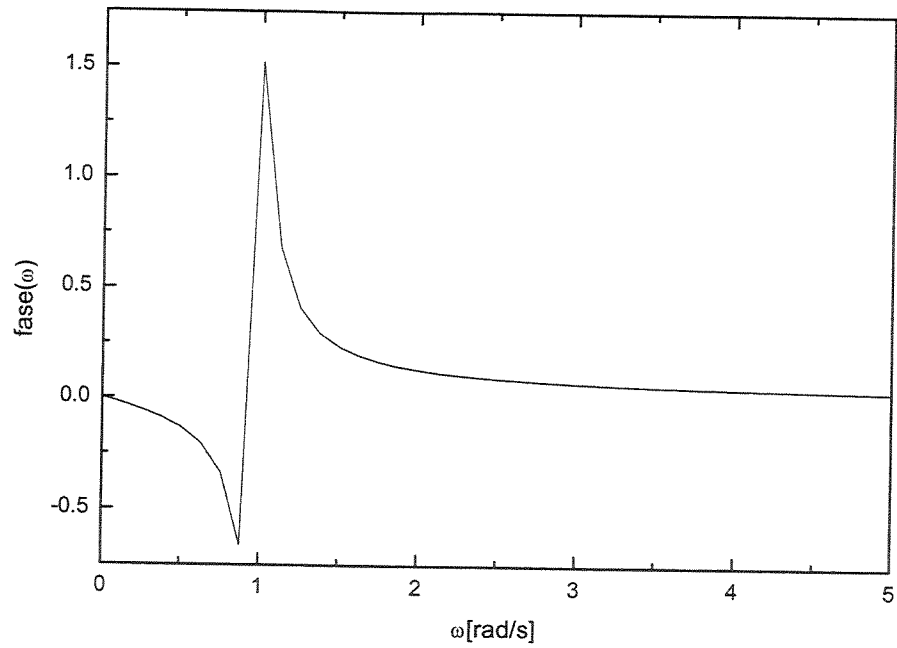


Figura 3.11 – Função de resposta em frequência, ângulo de fase, para sistema de um grau de liberdade.

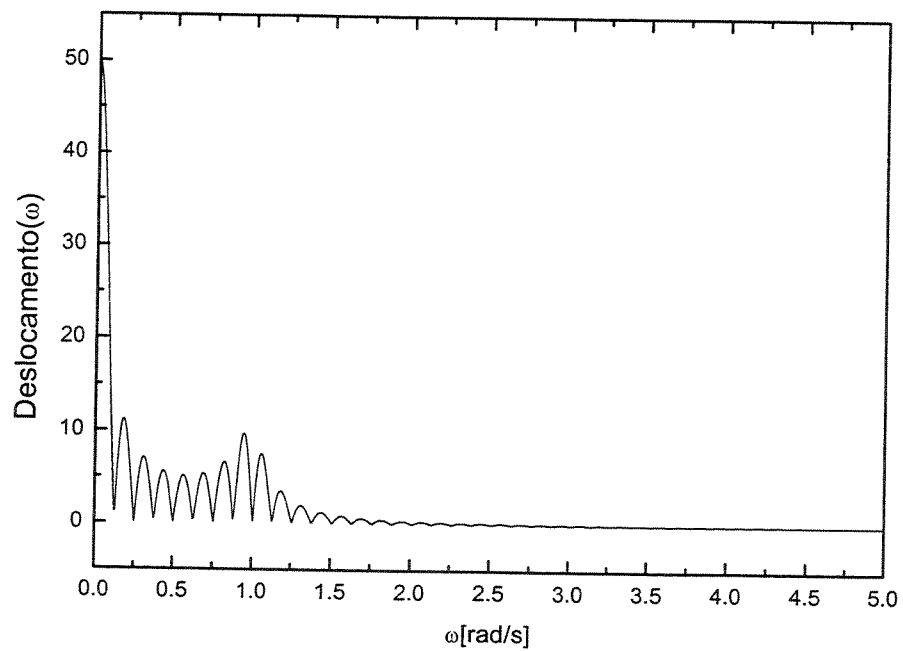


Figura 3.12 – Resposta do sistema em frequência, amplitude, quando submetido ao pulso.

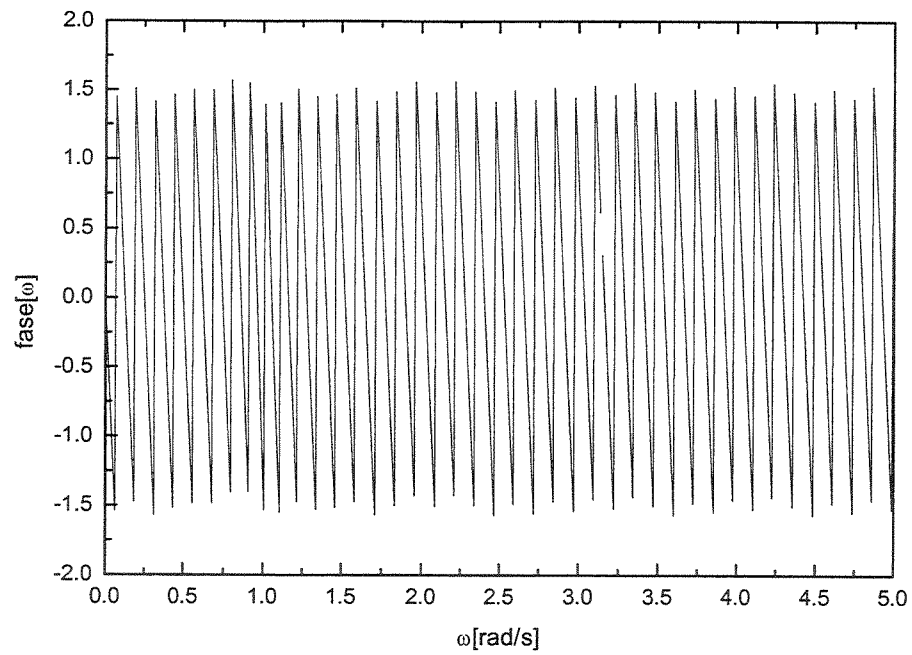


Figura 3.13 – Resposta do sistema em frequência, ângulo de fase, quando submetido ao pulso.

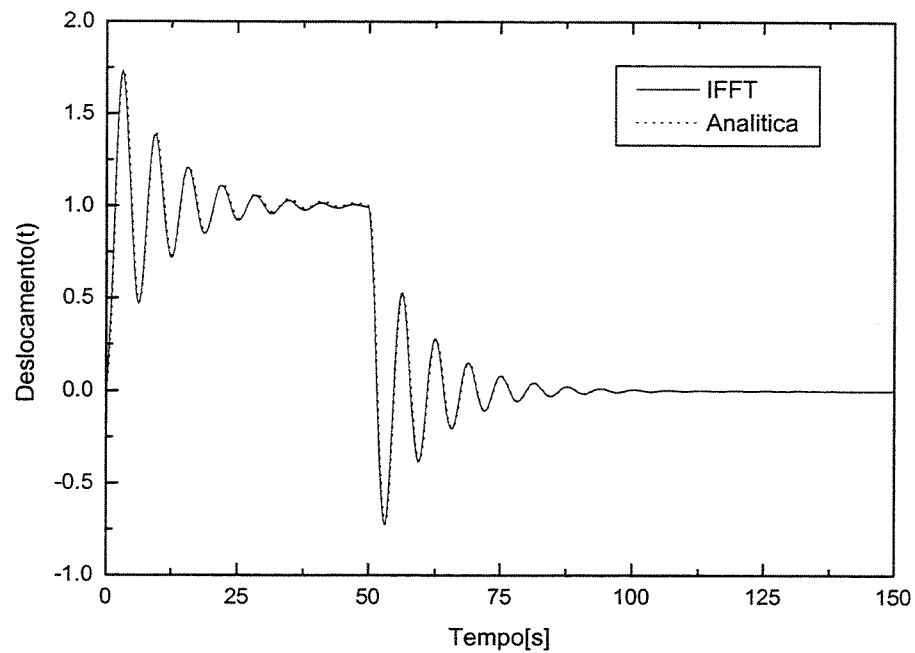


Figura 3.14 – Resposta transiente do sistema excitado pelo pulso de 50s.

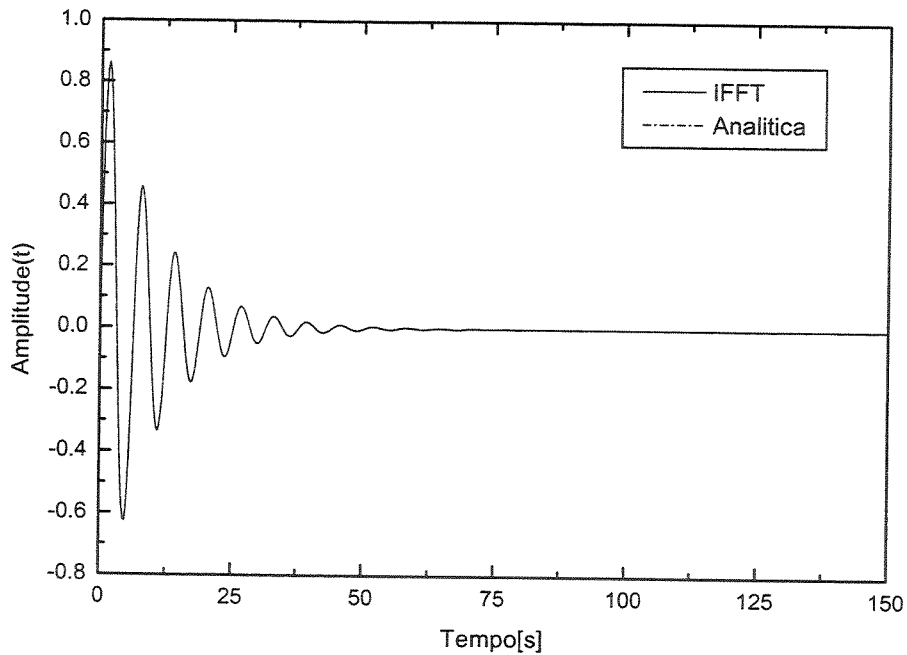


Figura 3.15 – Função de resposta ao impulso

A outra alternativa viável, para obter a resposta transiente, é a utilização da integral de convolução. Para analisar esta possibilidade, será estudado o mesmo sistema do problema anterior. No entanto, ao invés de utilizar a transformada de Fourier em $P(t)$ para obter $Y(\omega)$, será realizada a transformada inversa de $H(\omega)$, para que seja possível convoluir a função de resposta ao impulso $h(t)$ com $P(t)$.

A função de resposta ao impulso pode ser interpretada como sendo a resposta a um impulso de duração muito curta, teoricamente nula. Matematicamente esse impulso é representado pela função delta de Dirac, $\delta(t)$, dependente do tempo. Essa função não é avaliada numericamente, mas pode ser aproximada por uma função pulso retangular, com tempo de aplicação bastante reduzido.

Foi apresentada no capítulo 3 a relação entre a função de resposta ao impulso e a função de resposta em frequência, e não é necessário gerar um pulso de pequenas dimensões, apenas aplicar a transformada inversa de Fourier sobre a função de resposta em frequência. A resposta ao impulso do sistema anterior é apresentada na figura 3.15, para os 4096 termos adotados. Percebe-se que existe uma boa convergência dos resultados. A resposta para a integral de convolução,

adotando os mesmos parâmetros de excitação do problema anterior, é mostrada na figura 3.16. A comparação com resposta analítica, e àquela obtida anteriormente com o uso das transformadas de Fourier, mostra que a convergência da resposta pela convolução é aceitável, estando muito próxima daquela obtida com o uso do produto em frequência. O ponto negativo apresentado pela convolução é seu alto custo computacional.

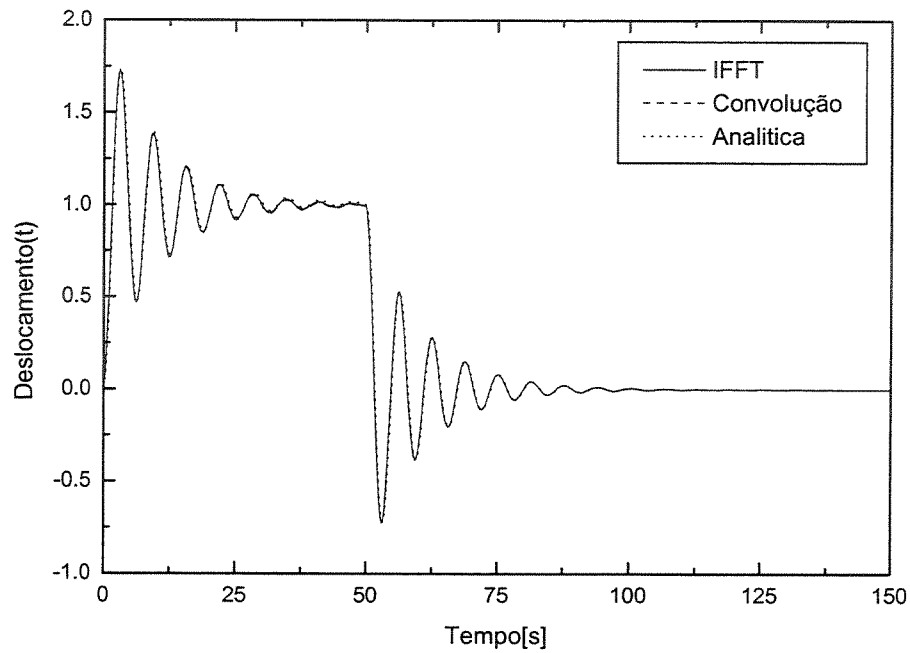


Figura 3.16 - Resposta do sistema a excitação obtida através de convolução.

Capítulo 4

Síntese de Funções de Green e Influência Transientes

4.1 Introdução

Ao longo deste capítulo, são apresentadas as técnicas e procedimentos adotados para síntese de funções de Green e Influência transientes a partir das funções estacionárias. Inicialmente serão apresentados os resultados para funções de Green, com as quais poderão ser analisados os efeitos da variação dos diversos parâmetros da transformada de Fourier, na função de resposta ao impulso e a resposta a um degrau unitário. Para validação da metodologia de obtenção da função de Green transiente, é realizada uma comparação com os resultados apresentados por Guan e Novak (1992) e os resultados apresentados por Richter (1997). Em seguida, a metodologia é estendida para as funções de influência estacionária, obtendo, assim, a função de influência transiente. As funções de influência são muito importantes para a formulação das fundações rígidas que serão estudadas no capítulo 5. Para análise das funções de Green, foi adotado o modelo de amortecimento histerético constante. Nas análises das funções de influência, são adotados três modelos de amortecimento e é verificada a influência desses modelos sobre as respostas ao delta de Dirac.

4.2 Ajuste da Resposta Estacionária – Funções de Green

Como foi visto no capítulo 2, as funções de Green e influência são respostas para problemas específicos, sendo necessárias funções especiais para cada tipo de meio tratado. O estudo da síntese de respostas transientes será iniciado pelas funções de Green para o semi-espaço isotrópico visco-elástico. Inicialmente será analisado o problema apresentado na figura 4.1. Serão calculados os deslocamentos: vertical devido à excitação normal à superfície G_{zw} ;

horizontal devido à carga vertical G_{zu} , e deslocamento horizontal provocado pela carga tangencial G_{xu} . Para este meio, não foram encontradas formulações transientes na literatura; as poucas soluções transientes apresentadas são as desenvolvidas para meios elásticos. Os resultados, em frequência, para funções de Green aqui apresentados foram obtidos a partir do programa *WINGREEN 2.1* desenvolvido com base no trabalho de Almeida Barros (1997).

As respostas transientes são obtidas por intermédio das transformadas de Fourier. Como foi discutido no capítulo dois, grandes períodos de análise T_{max} , estão relacionados a pequenos passos em frequência $\Delta\omega$, conforme a equação (3.3):

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\omega_n},$$

assim como pequenos passos no tempo Δt , são vinculados a grandes frequências de amostragem ω_{max} , relação dada pela equação (3.4):

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

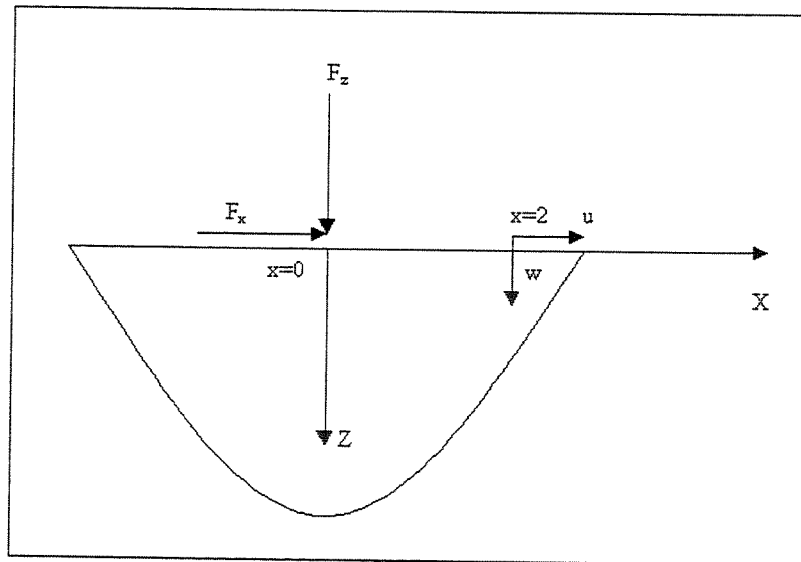


Figura 4.1 – Problema estudado com o uso das funções de Green.

Nas análises que serão apresentadas, é utilizada a frequência adimensional,

$$Ao = \frac{\omega \cdot r}{c_s}, \quad (4.1)$$

sendo ω a frequência em rad/s, r a distância entre o ponto de aplicação da excitação e o ponto em que é medida a resposta, e c_s a velocidade da onda cisalhante no meio contínuo elástico, sendo dada por:

$$c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad (4.2)$$

na qual, μ é o módulo de cisalhamento do meio e ρ a densidade de massa.

Na figura 4.2, é apresentada a resposta vertical estacionária devido à carga normal $G_{zw}(Ao)$, em meios com diferentes coeficientes de amortecimento histerético constante. Essas respostas foram medidas na superfície livre em $x=2$, e a excitação aplicada na origem, $x=0$, o meio possui os seguintes parâmetros: módulo de cisalhamento, $G = 1 \text{ N/m}^2$, densidade de massa $\rho=1 \text{ kg/m}^3$. A determinação dessas respostas apresenta alto custo computacional, e, como pode ser observado para frequência muito elevadas, ocorre falha no processo de integração, em torno de $Ao=400$ para os menores amortecimentos, e para $\eta=0.2$ os erros ocorrem em frequência mais baixa $Ao=150$, sendo mais nítidos. A resposta horizontal provocada pela excitação vertical $G_{zu}(Ao)$ é apresentada na figura 4.3; as limitações do processo de integração ocorrem em faixas de frequência semelhantes às do deslocamento vertical; o mesmo podendo ser observado para o deslocamento horizontal devido à carga normal $G_{xu}(Ao)$, na figura 4.4.

As limitações do processo de integração, tanto no que se refere à qualidade da resposta, quanto ao tempo computacional despendido, mostram a necessidade de alternativas para geração da resposta em frequência a baixo custo e que não influam significativamente na resposta. As altas frequências são uma necessidade da transformada de Fourier para obter um sinal transiente satisfatório. A física do problema está limitada a baixas frequências, principalmente em problemas de interação solo estrutura (Gazetas, 1983). Como alternativas para obter respostas a custos mais baixos, são propostas a interpolação de valores, reduzindo $\Delta\omega$, e a inclusão de zeros na resposta em frequência, aumentando ω_{max} .

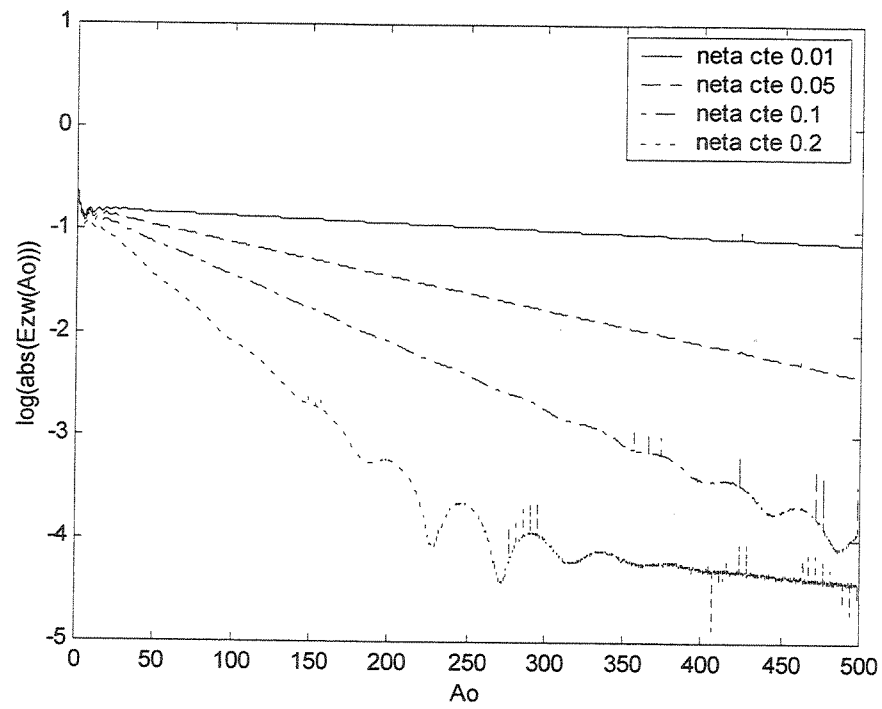


Figura 4.2 – Função de Green estacionária $G_{zw}(Ao)$ para vários amortecimentos.

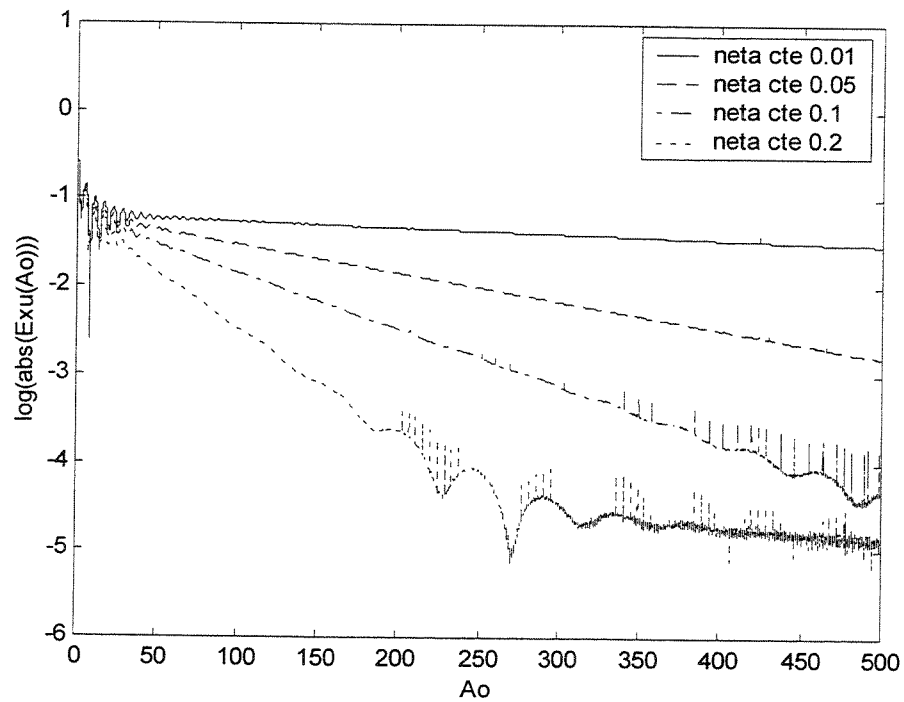


Figura 4.3 – Função de Green estacionária $G_{xu}(Ao)$ para vários amortecimentos.

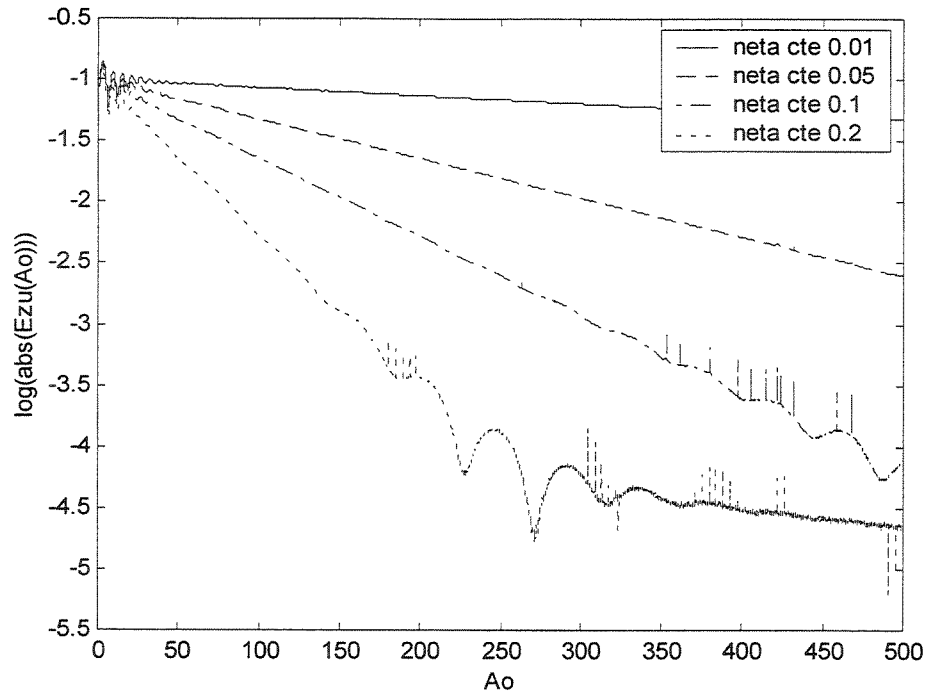


Figura 4.4 – Função de Green estacionária $G_{zu}(Ao)$ para vários amortecimentos.

Os efeitos da interpolação, com uso da spline cúbica, podem ser visualizados nas figuras 4.5, 4.6, 4.7, nas quais são apresentados os resultados para G_{zw} , G_{zu} , G_{xu} respectivamente. Para análise da interpolação, foram utilizadas as respostas das funções de Green calculadas para $\Delta Ao = 0,05$, com coeficiente de amortecimento histerético constante $\eta = 0,1$. Foi interpolado um termo entre cada existente, obtendo assim um novo passo em frequência $\Delta Ao = 0,025$. Os maiores erros estão nas primeiras frequências, no caso de G_{zw} , G_{xu} chegando a 2%. No entanto, para as frequências seguintes, o erro é muito próximo a zero. No caso da função G_{zu} , o erro é mais ou menos constante ao longo da frequência, oscilando em torno de 0,01%. Para reduzir ainda mais esses erros, é preciso calcular a resposta da função de Green com passos de frequências menores, para iniciar a inserção de novos termos com o uso da interpolação spline cúbica. O erro, na interpolação spline nos primeiros termos, pode ser contornado com o cálculo dos termos pela função de Green.

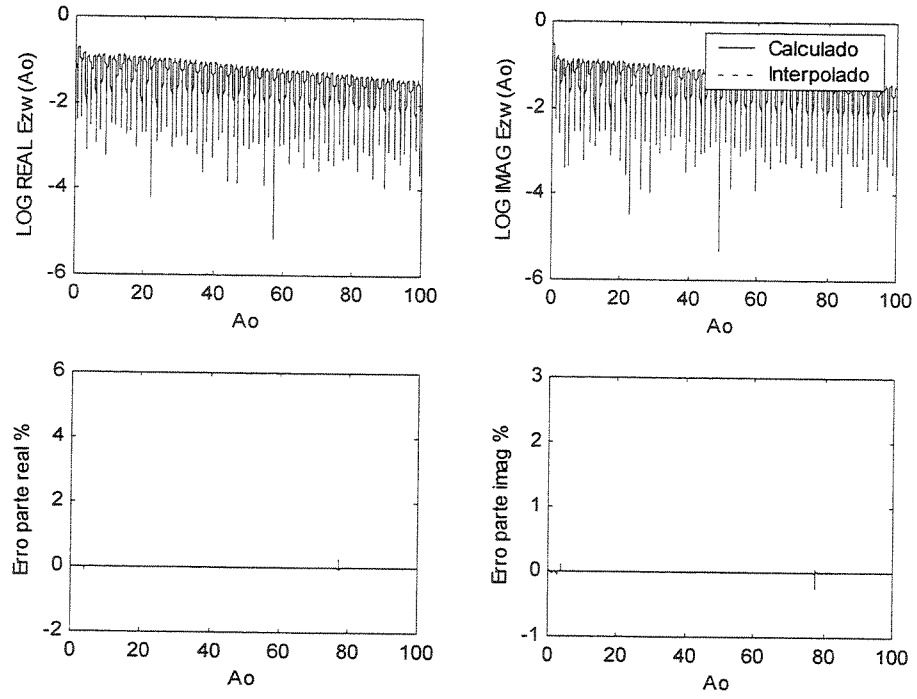


Figura 4.5 – Erro gerado pela interpolação spline na função de Green $G_{zw}(A_o)$.

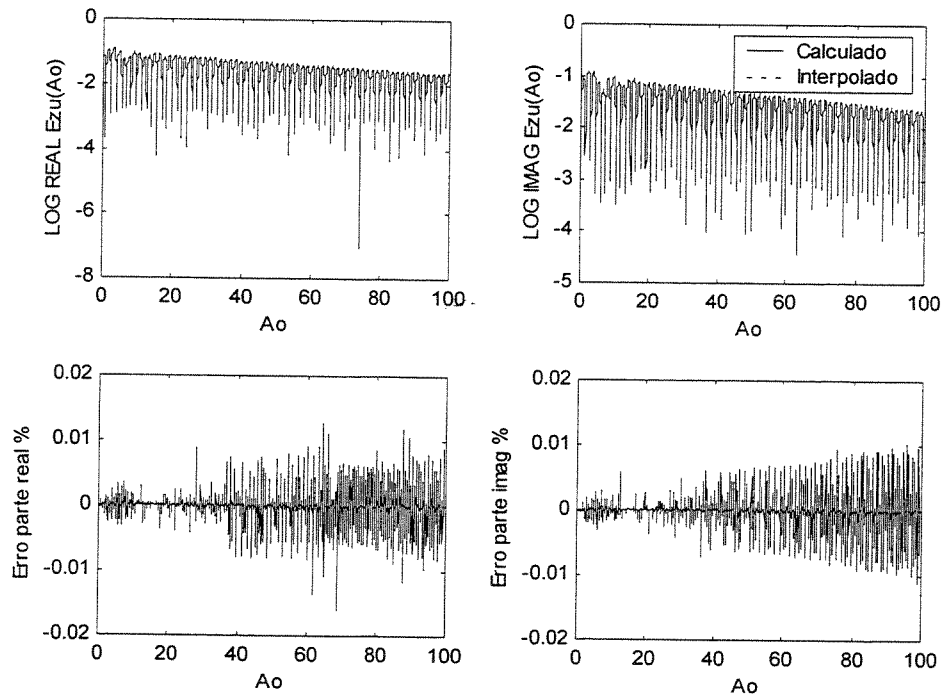


Figura 4.6 – Erro gerado pela interpolação spline na função de Green $G_{zu}(A_o)$.

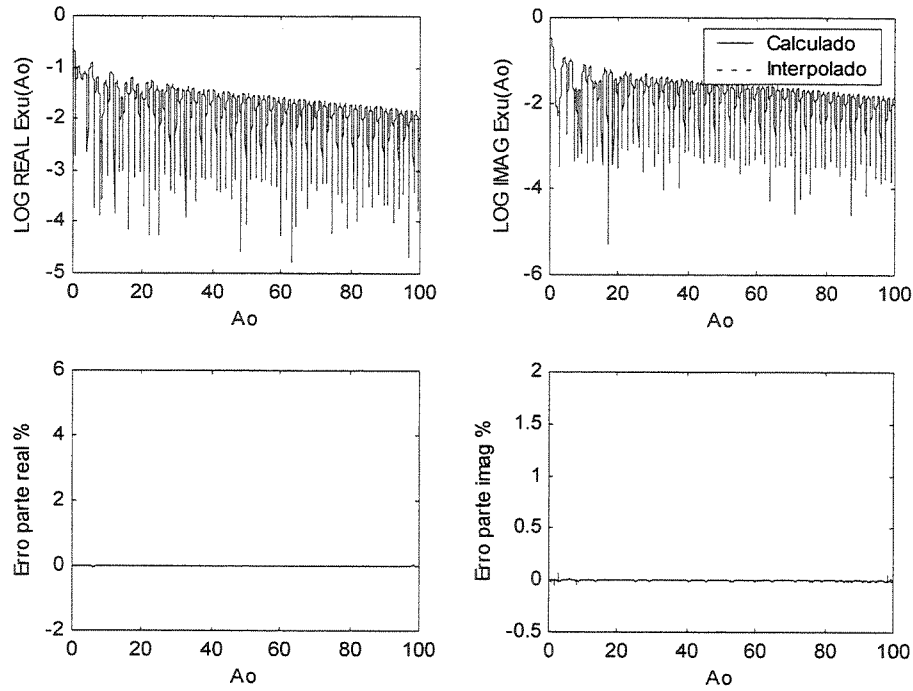


Figura 4.7 – Erro gerado pela interpolação spline na função de Green $G_{xu}(A_o)$.

Os efeitos físicos da interação solo-estrutura, nas quais as funções de Green e Influência serão futuramente empregadas, são observados nas baixas frequências. Entretanto, é necessário o uso de grandes faixas de frequência para que a resposta transiente seja refinada. Isso ocorre porque as transformadas representam sinais periódicos, e, como foi visto no capítulo três, a resposta, em frequência, possui os coeficientes da série de Fourier. Assim, quanto mais longo o espectro, mais próxima a resposta é da real. Para avaliar esse efeito é analisada a função de Green estacionária para o meio com $\eta=0,01$, é medida a resposta vertical do solo em $x=2$, para um pulso de excitação normal a superfície, aplicado na origem, com amplitude unitária e 5 s de duração. A faixa de frequência para a qual os termos são calculados pelas funções de Green, é variada. A frequência final $Ao_{final}=819,2$ é mantida com o auxílio da inclusão de zeros na resposta. Os pontos de corte foram: $Ao_{corte}=100, 200, 300, 400, 500$. Os resultados são apresentados nas figuras 4.8 e 4.9. Para o sinal com menos termos calculados, $Ao_{corte}=100$, a resposta possui grandes oscilações em torno da resposta obtida com $Ao_{corte}=500$, essas oscilações possuem a frequência na qual ocorreu o corte. Apesar das oscilações, a forma geral da resposta é a mesma, assim se constata que realmente as informações sobre a dinâmica do problema estão nas baixas frequências. Efeito semelhante ocorre nas funções G_{zu} e G_{xu} . Esses resultados mostram que

poderia ser viável introduzir uma transição para o zero, criando mais termos no sinal e, conseqüentemente, suavizar a resposta. Infelizmente no caso das funções de Green e influência, essa transição com uso de uma extrapolação é complicado, uma vez que as respostas oscilam em torno de zero, conforme pode ser observado nas figuras 4.10 e 4.11, que apresentam, respectivamente, as componentes real e imaginária da função de Green para o meio estudado.

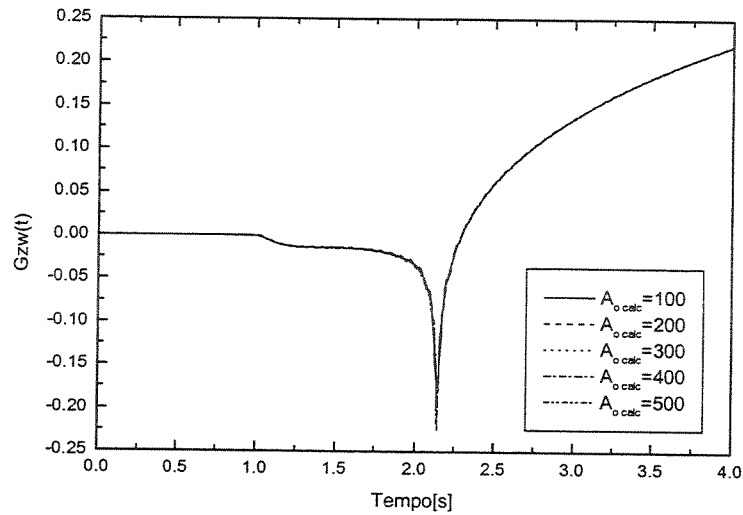


Figura 4.8 – Função de Green $G_{xu}(t)$ em função da frequência máxima calculada.

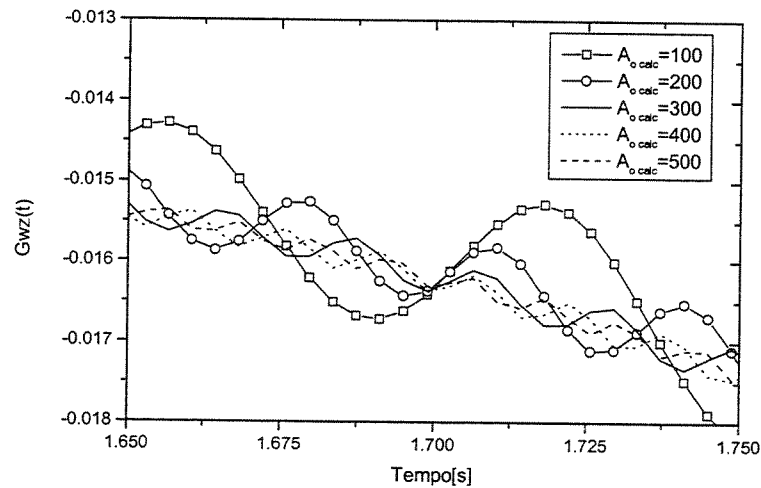


Figura 4.9 – Detalhe da função de Green $G_{xu}(t)$ em função da frequência máxima calculada.

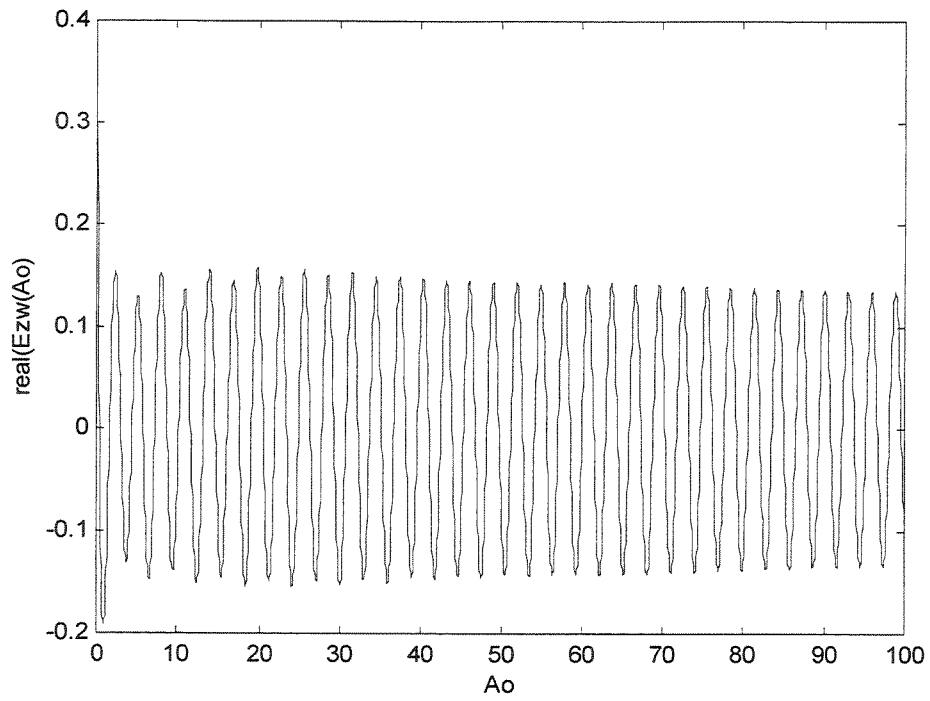


Figura 4.10 – Componente real da função de Green $G_{zw}(A_o)$, $\eta=0.01$.

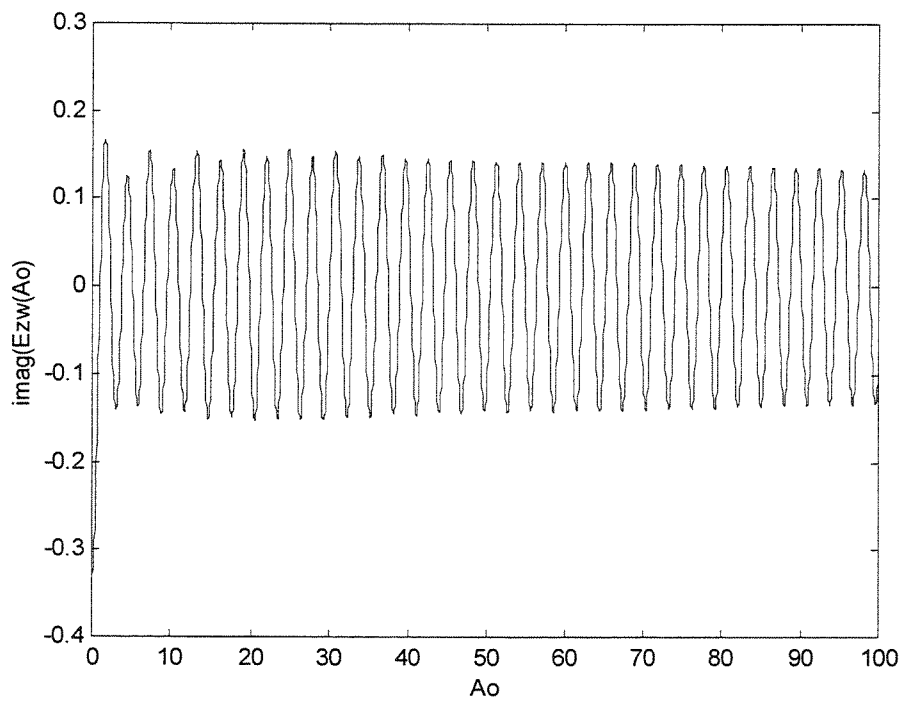


Figura 4.11 – Componente imaginária da função de Green $G_{zw}(A_o)$, $\eta=0.01$.

Apesar da dificuldade de criar a transição para zero com uso da interpolação spline cúbica, é possível suavizar a resposta com o uso de um filtro nas altas frequências, forçando uma transição significativa para zero, principalmente nos problemas com baixos valores de amortecimento, em que o decaimento da resposta, em frequência, é muito lento. O filtro é regido pela equação:

$$F_{filtro}(Ao) = e^{(-\lambda \cdot (Ao - Ao_{filtro}))}, \quad (4.1)$$

sendo,

- λ o fator de decaimento do filtro;
- Ao_{filtro} a frequência na qual se inicia a filtragem do sinal.

O efeito do aumento do fator de decaimento do filtro λ , sobre o comportamento do filtro pode ser visualizado na figura 4.12. Este tipo de filtro é conhecido na literatura por filtro de Butterfield. O efeito sobre a resposta, variando a frequência de início da filtragem e utilizando um fator de decaimento $\lambda=0.2$, é apresentada nas figuras 4.13 e 4.14. O problema analisado é para o mesmo meio do caso anterior, entretanto é apresentada a resposta ao impulso, ou delta de Dirac. Como pode ser observado na figura 4.13, não ocorrem mudanças significativas no comportamento geral da função. Entretanto, observando a figura 4.14 que apresenta o detalhe da resposta para um pequeno intervalo de tempo, nota-se que o uso do filtro pode ter efeitos não desejados, como a piora da resposta, o que pode ser observado quando o filtro se inicia em $Ao_{filtro}=50$ e 100 . Nestes casos, o filtro elimina componentes de frequência importantes para a resposta transiente. É possível constatar que o filtro introduz um aumento do amortecimento na resposta com conseqüente redução dos picos da resposta. Para o filtro iniciando em $Ao_{filtro}=200$, ocorre uma redução da amplitude das oscilações. Na análise seguinte, foi fixada a frequência de início do filtro $Ao_{filtro}=300$, variando o fator de decaimento do filtro $\lambda= 0.005, 0.01, 0.05, 0.1$ e 0.2 . As respostas podem ser visualizadas nas figuras 4.15 e 4.16. Nesse caso o aumento do fator de decaimento do filtro permitiu a obtenção de respostas mais suaves, vide figura 4.16, sem alteração do comportamento geral da função, figura 4.15.

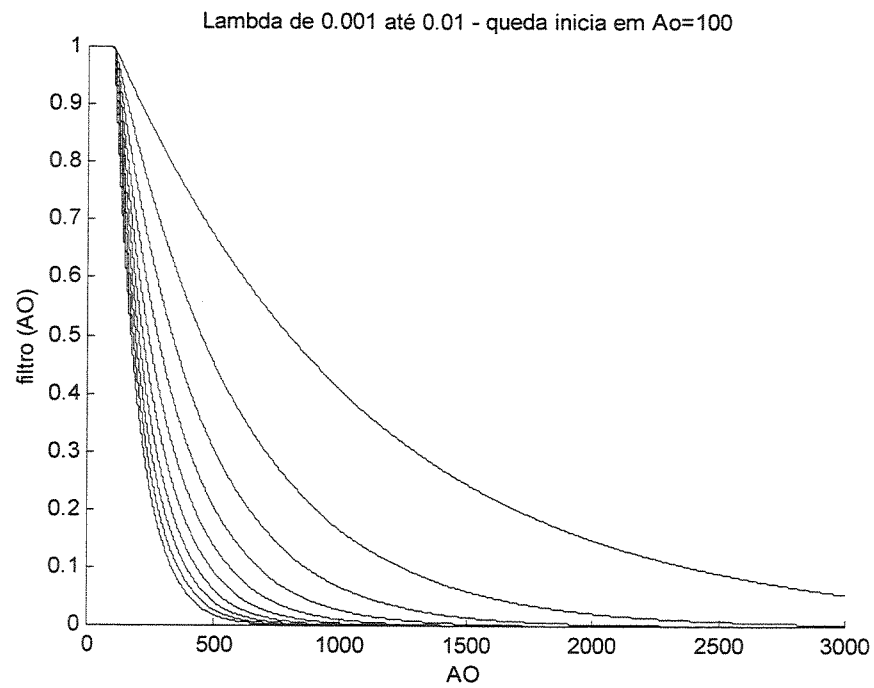


Figura 4.12 – Função filtro aplicável sobre a resposta em frequência.

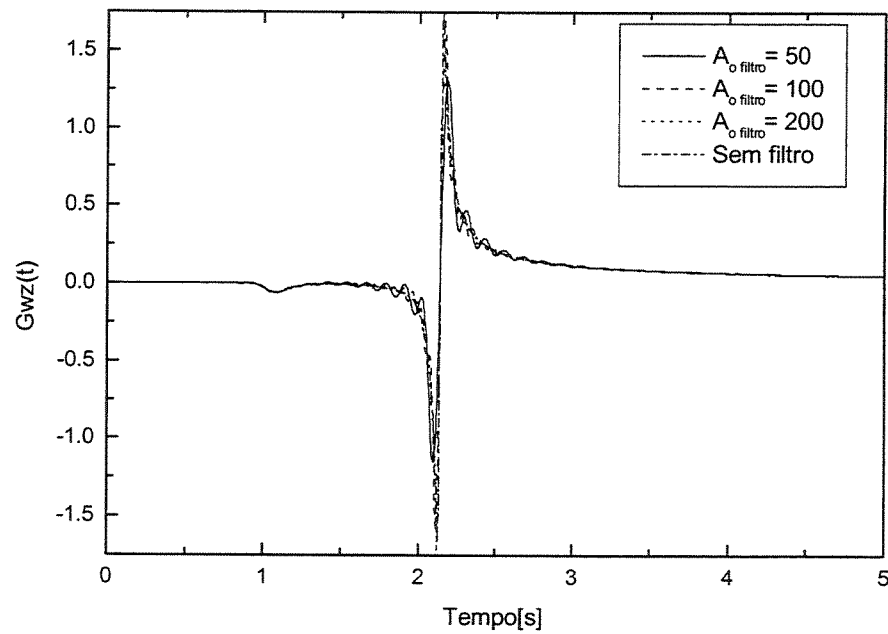


Figura 4.13 – Influência da frequência de início da filtragem sobre a resposta transiente.

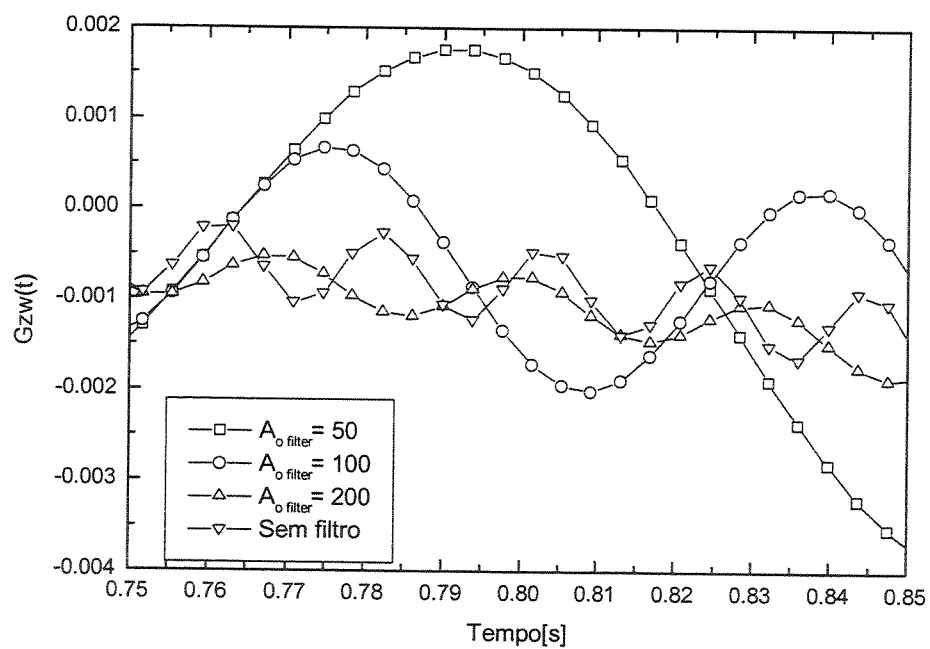


Figura 4.14 – Detalhe da influência da frequência de início da filtragem sobre a resposta transiente.

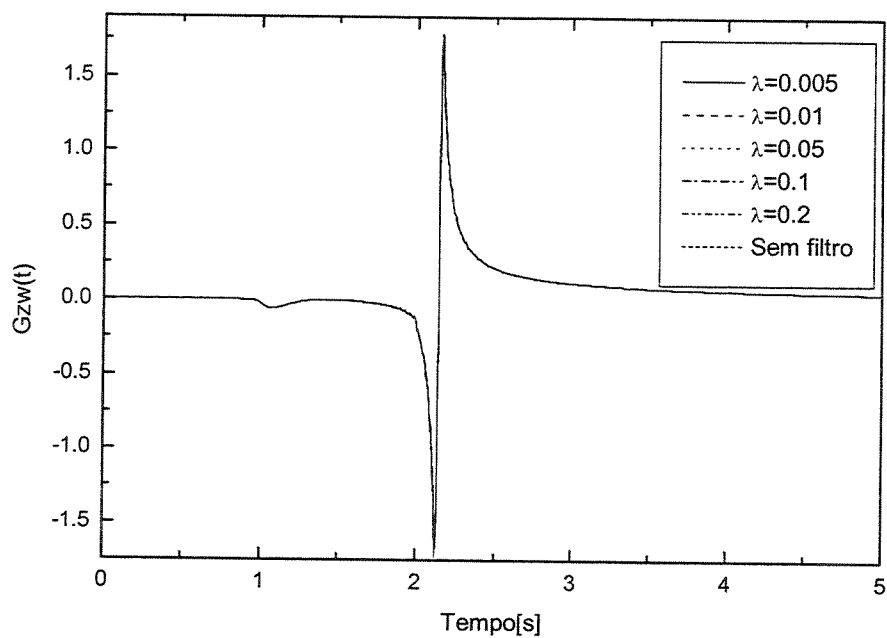


Figura 4.15 – Influência do fator de amortecimento do filtro sobre a resposta transiente.

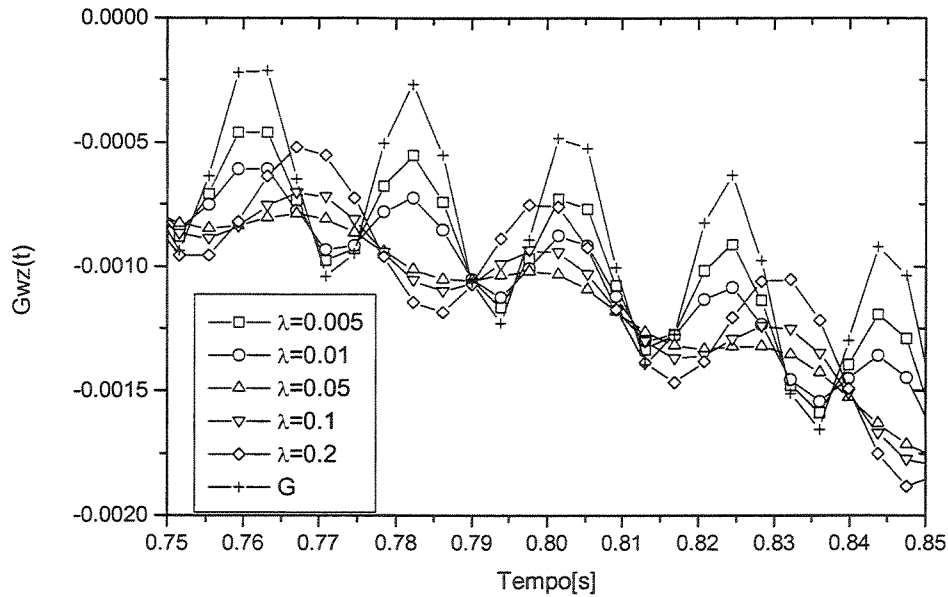


Figura 4.16 – Detalhe influência do fator de amortecimento do filtro sobre a resposta transiente.

A redução do passo de tempo está relacionada a um aumento da frequência máxima de análise. A inserção de zeros, na resposta estacionária a partir da última componente calculada pelas funções de Green, deve contribuir apenas com uma suavização do sinal, provocada pela redução do passo de tempo. Para estas análises, a frequência máxima calculada foi $Ao_{calc}=300$, e foram inseridos zeros até que fosse atingida a frequência máxima de $Ao_{max}=409,55; 819,15; 1638,35; 3276,75$ com o uso de, respectivamente, 8192, 16384, 32768, 65536 termos em frequência, com passo $\Delta Ao=0.05$. Não foi utilizado o filtro para transição. Foi adotado o coeficiente de amortecimento $\eta=0,05$. Esse resultado pode ser observado nas figuras 4.17 e 4.18, que fornecem a resposta impulsiva, que é a resposta à excitação de um delta de Dirac, aplicado em $t=0$. Nota-se, pela figura 4.17, que não ocorre nenhuma mudança significativa no comportamento geral da função transiente. Entretanto, observando uma janela ampliada (figura 4.18), é nítida a suavização que ocorre, a redução no passo de tempo, e um pequeno deslocamento da resposta. A introdução de zeros permite a obtenção de respostas com pequenos passos de tempo sem aumento significativo do custo computacional.

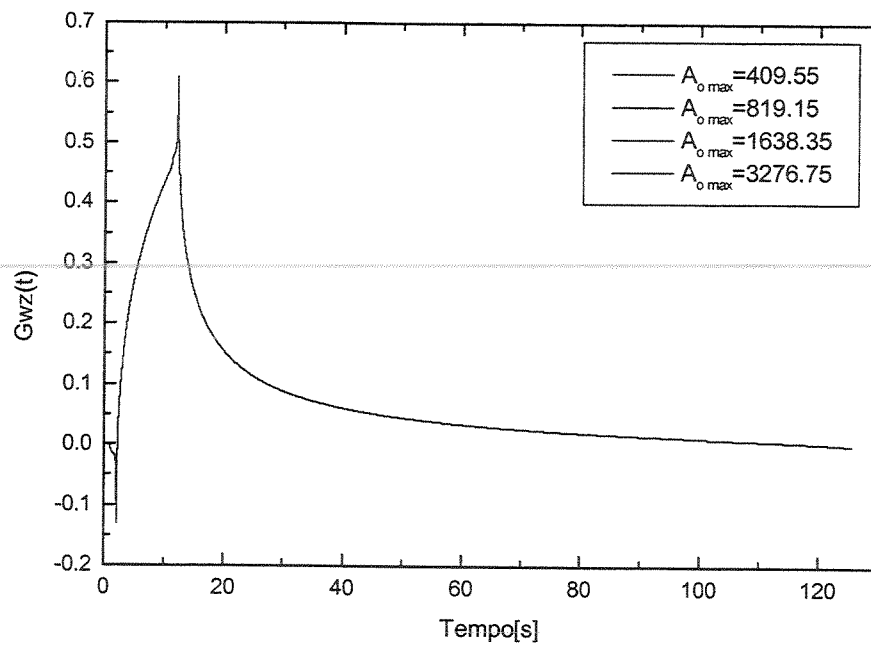


Figura 4.17 – Influência da inserção de zeros sobre a resposta $W_z(t)$.

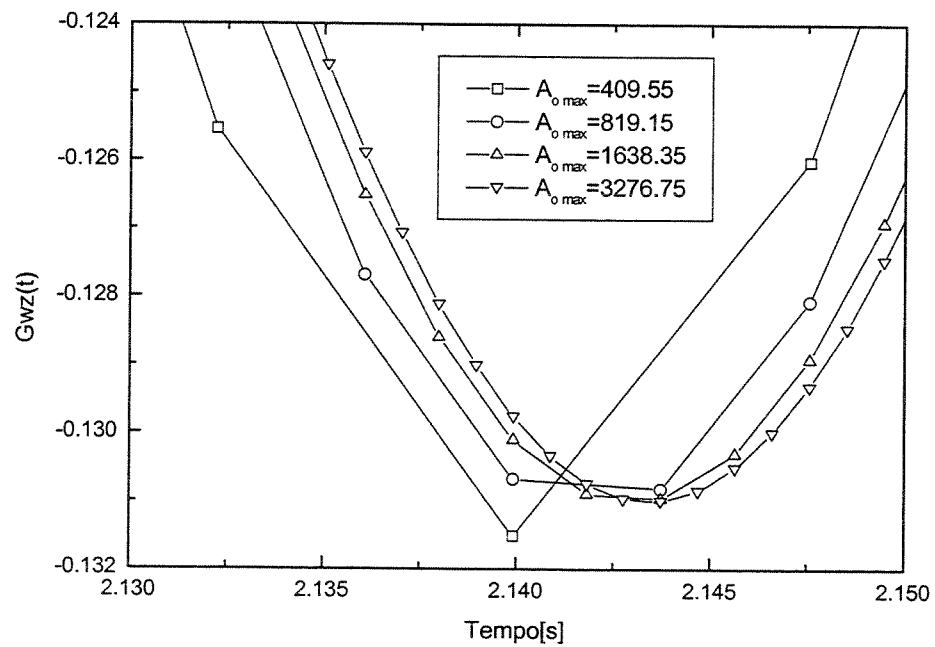


Figura 4.18 – Detalhe da influência da inserção de zeros sobre a resposta $W_z(t)$.

As funções de Green e as de influência apresentam uma singularidade quando a frequência tende ao valor estático $Ao=0$, que corresponde a um movimento de corpo rígido do semi-espaco 2D (Luco e Westmann, 1972). No caso da transformada de Fourier adotando sinais discretos, é necessário um valor definido para a função de Green na frequência estática. Na FFT, a resposta na frequência inicial contribui com um movimento de corpo rígido na resposta transiente, é conhecido por nível DC (Newland, 1993). Com a análise da resposta vertical para excitação vertical, utilizando valores estáticos $G_{zw}(Ao=0)=2^n$ ($n=0,1,2,...10$), que foram artificialmente inseridos na resposta em frequência, é possível avaliar o efeito do nível DC sobre a resposta transiente. A resposta vertical transiente para valores crescentes de $G_{zw}(Ao=0)$ pode ser observada na figura 4.19. As respostas são idênticas a menos de uma constante que provoca o deslocamento de corpo rígido. É, então, possível eliminar a resposta de corpo rígido da resposta final, definindo que:

$$G_{zw}(t) = G_{zwFFT}(t) - G_{zwFFT}(t_{max}). \quad (4.2)$$

Na equação (4.2), $G_{zw}(t)$ é a resposta sem o efeito de corpo rígido, induzido pela singularidade em frequência. O termo $G_{zwFFT}(t)$ é a resposta vertical transiente obtida pelo processo de FFT para um valor estático de $G_{wz}(Ao=0)$, e a resposta $G_{wzFFT}(t_{max})$ representa o deslocamento de corpo rígido a ser subtraído.

Após estas considerações, é possível obter as respostas transientes para funções de Green estacionárias modeladas para qualquer tipo de meio, incluindo os da anisotropia, das multicamadas, poroelasticidade, leito rígido e piezoeletricidade. A metodologia, para gerar as respostas transientes das funções de Green, pode ser aplicada também sobre as funções de Influência, obtendo-se resultados semelhantes.

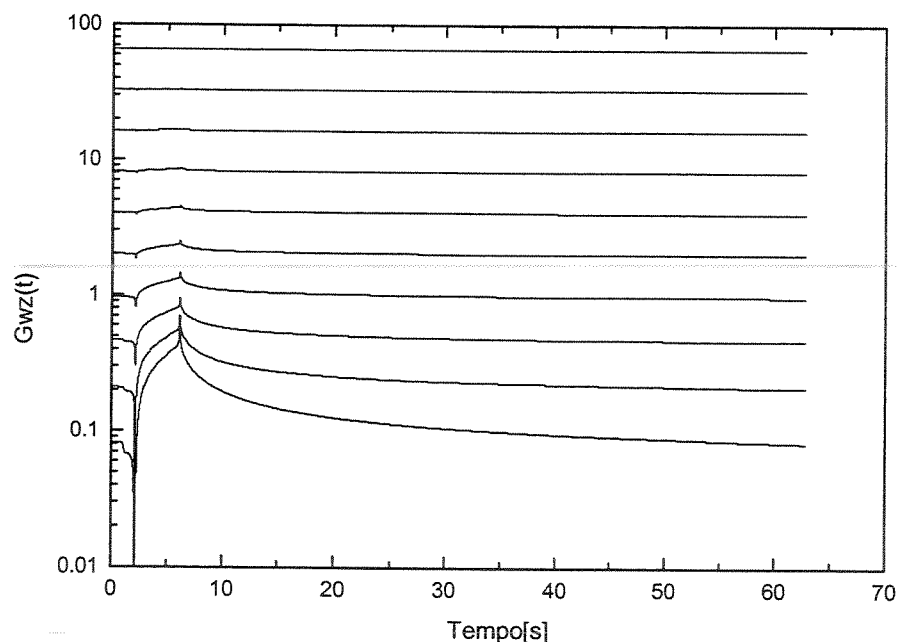


Figura 4.19 – Efeito do nível DC sobre a resposta transiente

4.3 Resultados Numéricos – Funções de Green

Para análise e comparação com resultados obtidos por formulações transientes, são apresentados os resultados para o meio isotrópico, visco-elástico. Foi adotado o modelo de amortecimento histerético constante e feita uma análise do efeito do coeficiente de amortecimento sobre a resposta transiente. Inicialmente os resultados são comparados aos obtidos por Guan e Novak (1992) para o meio elástico, em seguida será apresentada uma comparação com os resultados obtidos por Richter (1997). Não foram encontradas, na literatura, formulações transientes para meios visco-elásticos. Como discutido no capítulo três, é possível obter a resposta de um sistema linear a uma excitação arbitrária por duas maneiras. A maneira que apresenta menor custo computacional é o produto em frequência da função da resposta em frequência (FRF) pela excitação em frequência, com posterior uso da transformada inversa de Fourier. A segunda maneira, de maior custo computacional, consiste na convolução no tempo da excitação com a função de resposta ao impulso, obtida pela transformada inversa de Fourier da FRF. Os dois procedimentos foram analisados.

A formulação apresentada por Guan e Novak (1992) considera que a excitação aplicada varia no tempo com a função Heaviside,

$$H(t) = \begin{cases} 1, t > 0 \\ 0, t \leq 0 \end{cases}$$

ou seja, o sistema é submetido a um degrau unitário iniciando no instante $t=0$. O uso dessa excitação gera uma função de Green específica para essa excitação. Entretanto, é possível obter a resposta a excitações arbitrárias com o uso da integral de Duhamel. Os resultados apresentados, utilizando a formulação transiente, foram para períodos de tempo relativamente curtos. Com o objetivo de comparar a resposta da metodologia apresentada neste trabalho, a carga aplicada sobre o meio é uma função degrau iniciando em $t=0$, e com duração de 10 s. Este procedimento é necessário, pois os algoritmos para transformada de Fourier são aplicáveis em sinais periódicos; portanto, é preciso fornecer um sinal transiente que, no período de análise, apresente o comportamento de um degrau. Caso se forneça a função Heaviside a partir de $t=0$, isso é interpretado com uma função constante desde $-\infty$, que, no domínio de Fourier, é representada por apenas um ponto na origem. Na figura 4.20, pode ser visualizado o pulso aplicado sobre o sistema. As respostas apresentadas são medidas na superfície em $x=2$ e as cargas concentradas tangencial e normal são aplicadas na origem do sistema de coordenadas. O meio tratado possui densidade de massa $\rho=1 \text{ kg/m}^3$, módulo de cisalhamento $G=1 \text{ N/m}^2$ e coeficiente de Poisson $\nu=1/3$. Os coeficientes de amortecimento adotados foram $\eta=0,01; 0,05; 0,1; 0,2$.

Inicialmente serão analisados os resultados transientes obtidos a partir da transformada inversa de Fourier do produto em frequência das FRFs pela excitação. As respostas estacionárias foram geradas para um passo de frequência $\Delta A_o=0,05$ e frequência máxima calculada $A_{o_{calculada}}=500$. Foram utilizados 16384 termos em frequência com a inclusão de zeros, de modo que a frequência final $A_{o_{max}} = 819,1$. Considerando as propriedades do meio e os parâmetros em frequência utilizados, obtém-se um período de amostragem $T_a = 125,65 \text{ s}$, e um passo de tempo $\Delta t=0,0038$. As respostas para deslocamento vertical W_z e horizontal U_z devido à carga normal obtidas são apresentadas nas figuras 4.21, 4.23 respectivamente. A resposta horizontal devido à carga normal U_x pode ser observada na figura 4.25. Os resultados obtidos são próximos daqueles apresentados por Guan e Novak. Entretanto, os resultados obtidos a partir das funções de Green

estacionárias apresentam amplitudes maiores de deslocamento. Os índices P , C , R representam, respectivamente, as ondas de compressão, cisalhamento e Rayleigh. A onda de pressão, por ter maior velocidade, atinge o ponto $x=2$, antes das demais, provocando o deslocamento inicial em $t=1\text{ s}$. A onda cisalhante começa a contribuir com o deslocamento em aproximadamente $t=2\text{ s}$. A última onda a atingir o ponto é a onda de Rayleigh; este tipo de onda possui menor velocidade e é uma onda de superfície, contém mais energia que as demais (Graff, 1975), o que explica a maior contribuição no deslocamento final. Através das figuras 4.22, 4.24, 4.25, que apresentam detalhes das respostas de deslocamento, constata-se que, para maiores amortecimentos, as respostas são mais suaves e ocorre uma redução das amplitudes-pico, o que é coerente com a física. No entanto, essa suavização e amortecimento dos picos são acompanhados de não causalidade e, o sistema tende a responder antes da chegada da onda P , por exemplo. Este fenômeno é causado por um modelo inadequado de amortecimento, com o amortecimento histerético constante, gerando não causalidade, que pode ser minimizada ou eliminada com o uso de modelos de amortecimento mais próximos a realidade (Crandall, 1970).

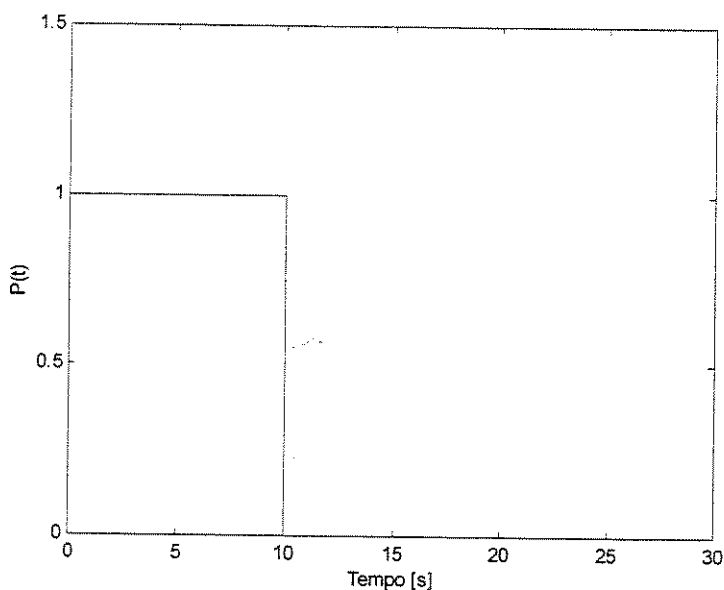


Figura 4.20 – Excitação transiente aplicada sobre o solo.

Para a função de resposta cruzada, carga normal e resposta horizontal, U_z , o problema com excitação contínua e constante (Heaviside), tende ao valor da resposta estática, obtida do problema de Boussinesq, os resultados obtidos a partir da função de Green estacionária $G_{zu}(A_0)$ convergem para o ponto de equilíbrio estático. A solução do problema estático pode ser encontrada nos livros de Saada (1974) e Hahn(1985).

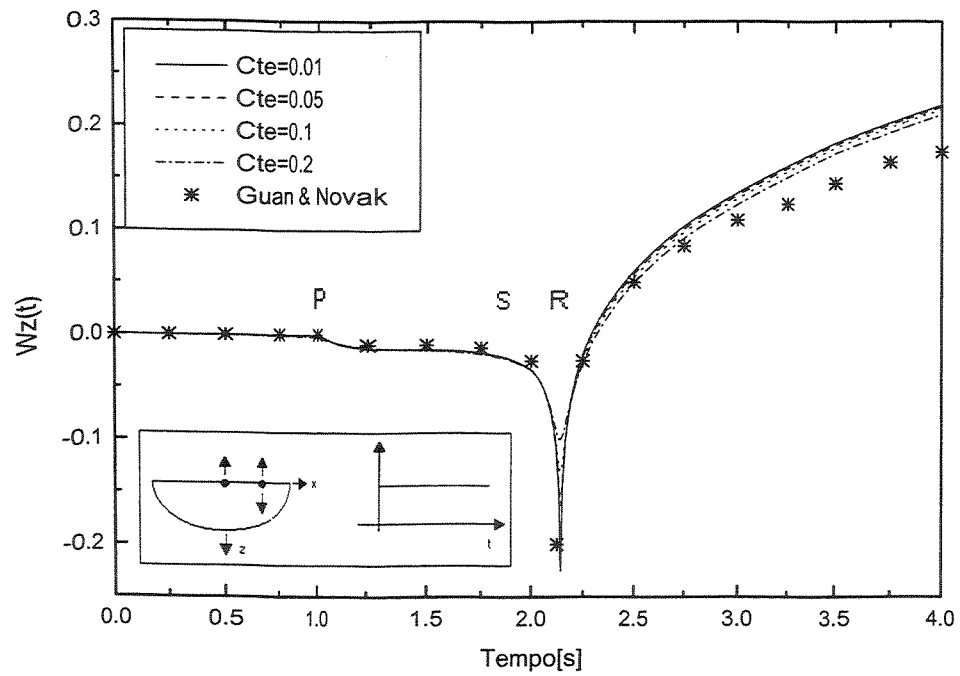


Figura 4.21 – Resposta transiente vertical devido a degrau unitário vertical.

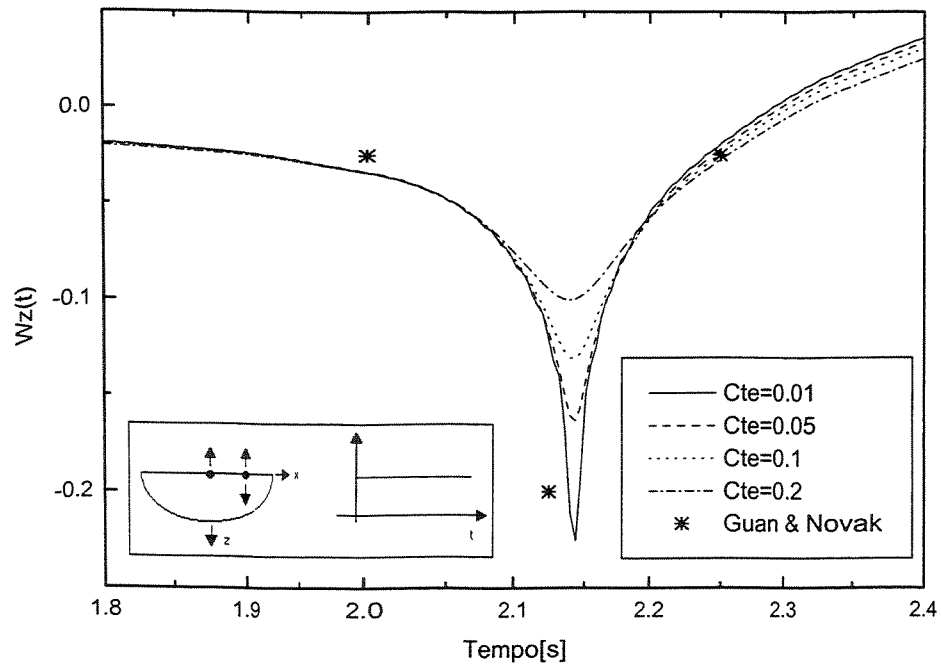


Figura 4.22 – Detalhe da resposta transiente vertical devido a degrau unitário vertical.

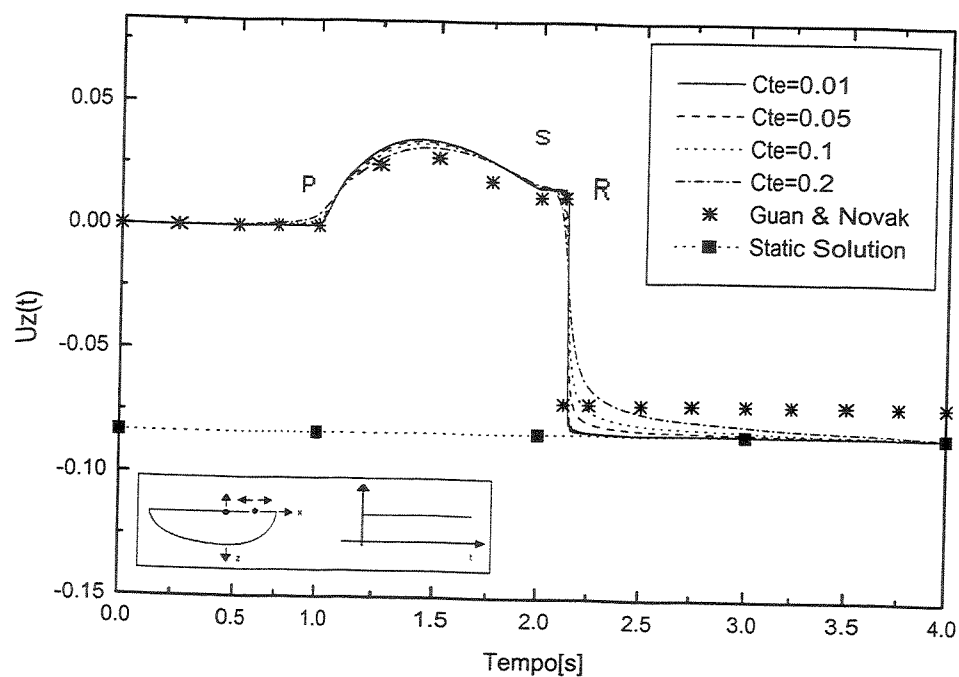


Figura 4.23 – Resposta transiente horizontal devido a degrau unitário vertical.

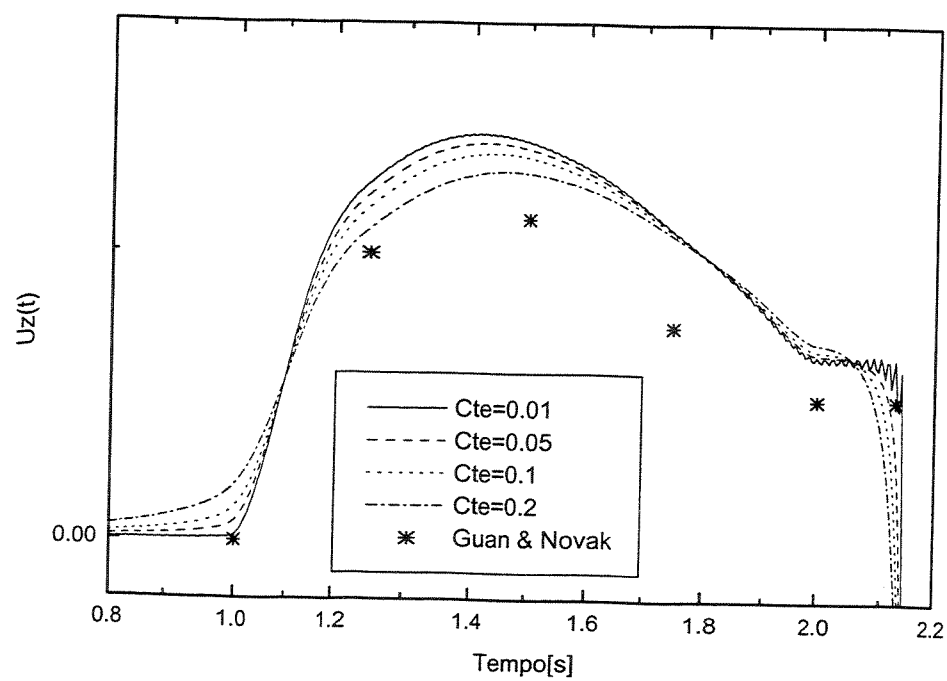


Figura 4.24 – Detalhe da resposta transiente horizontal devido a degrau unitário vertical.

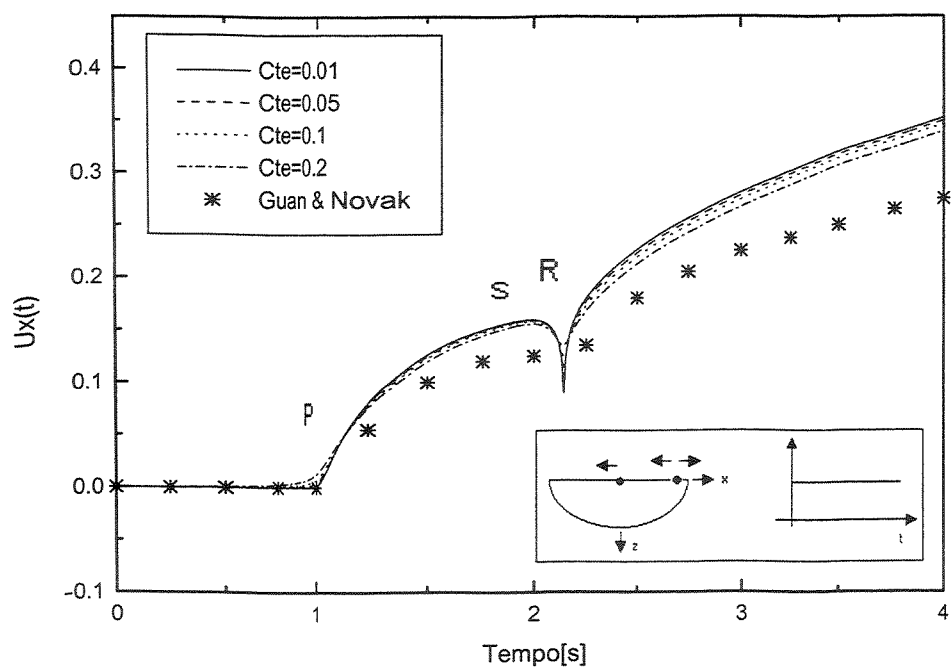


Figura 4.25 – Resposta transiente horizontal devido a degrau unitário horizontal.

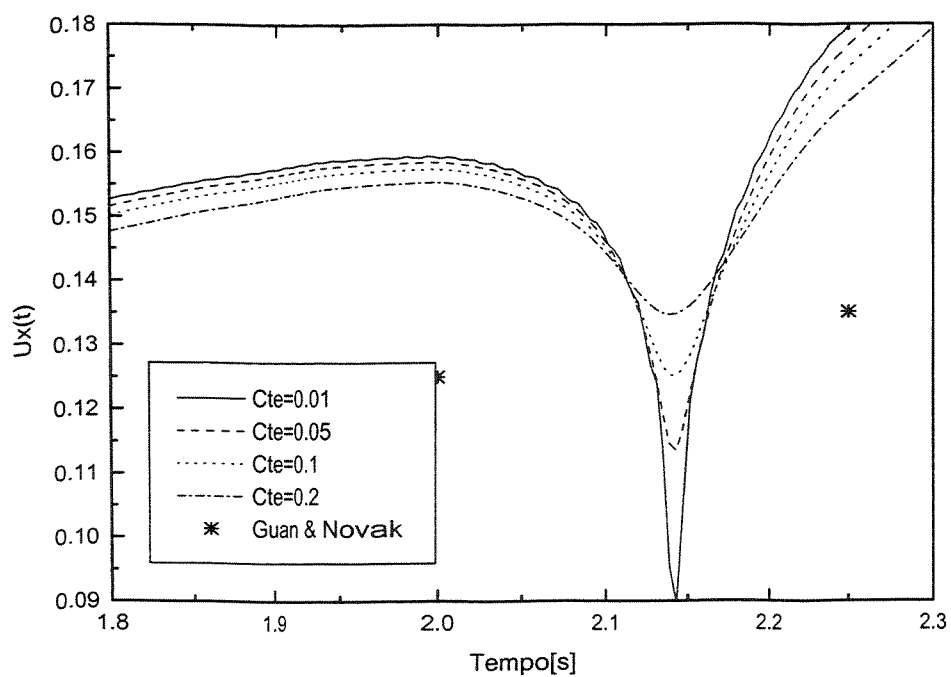


Figura 4.26 – Detalhe da resposta transiente horizontal devido a degrau unitário horizontal.

Em uma segunda análise os resultados são comparados aos apresentados por Richter (1997). Em seu trabalho Richter obteve funções de Green transientes para meios elásticos e isotrópicos. O problema estudado é apresentado na figura 4.27. Um impulso, delta de Dirac, é aplicado na origem do sistema e a resposta é medida em três pontos: ponto 1: $x=1$ e $z=tg(30^\circ)$, ponto 2: $x=1$ e $z=tg(60^\circ)$, ponto 3: $x=0$ e $z=1$. As propriedades do semi-espço são dadas por densidade de massa $\rho=1kg/m^3$, coeficiente de Poisson $\nu=1/4$ e $G=1N/m^2$. O modelo de amortecimento adotado é o histerético constante com coeficientes $\eta=0.005, 0.01, 0.05, 0.1$ e 0.2 . A resposta estacionária usada para gerar a resposta transiente, com uso da transformada inversa de Fourier, foi calculada para um passo $\Delta A_o=0.1$, com uma frequência máxima calculada $A_{o_{calc}}=1000$. A frequência máxima foi obtida com a inclusão de zeros até $A_{o_{max}}=1638.3$, um total de 16384 termos foi utilizado. A resposta transiente correspondente tem um período $T_{max}=62.83s$ e um passo de tempo $\Delta t=0.0019s$. Não foi utilizado filtro.

As figuras 4.28 e 4.29 apresentam, respectivamente, as respostas de deslocamento vertical e horizontal no ponto 1, devido a um delta de Dirac vertical aplicado na origem. As variações abruptas de deslocamento indicam a chegada das ondas de compressão, cisalhamento e Rayleigh. O aumento do coeficiente de amortecimento implica em menores picos de amplitude, e como pode ser observado nas figuras 4.28 e 4.29, para grandes amortecimentos, os picos podem ser eliminados.

Os resultados para o ponto 2 são dados nas figuras 4.30 e 4.31, deslocamentos vertical e horizontal devido ao delta de Dirac aplicado na origem. Neste ponto são observados somente as singularidades causadas pelos ondas de pressão e cisalhamento, as ondas de Rayleigh desaparecem na profundidade. Para maiores coeficientes de amortecimento os deslocamentos apresentam comportamento mais suave e as amplitudes dos picos decaem.

A figura 4.32 mostra os resultados de deslocamento vertical no ponto 3, devido ao delta de Dirac aplicado na origem. Os resultados são próximos àqueles apresentados por Richter (1997) para o meio elástico.

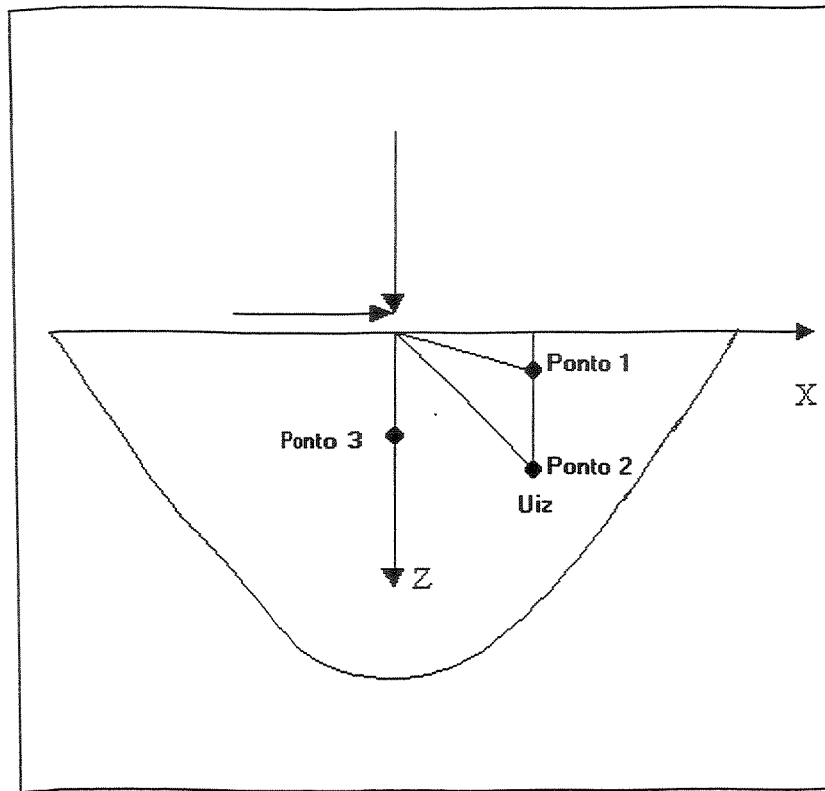


Figura 4.27 – Problema para comparação com Richter.

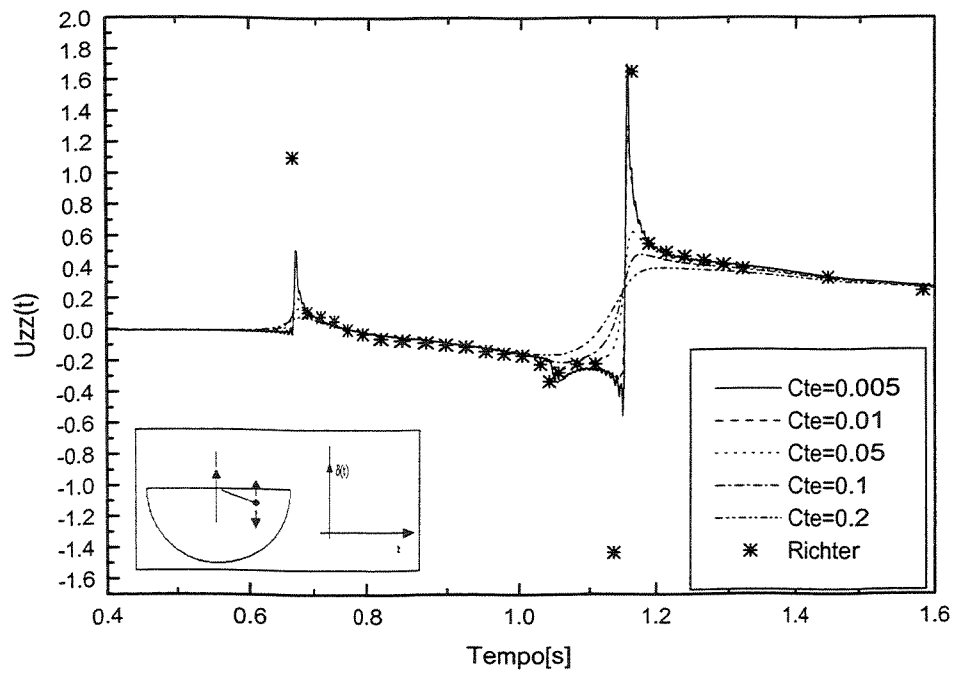


Figura 4.28 – Resposta de deslocamento vertical transiente no ponto 1, devido a delta de Dirac.

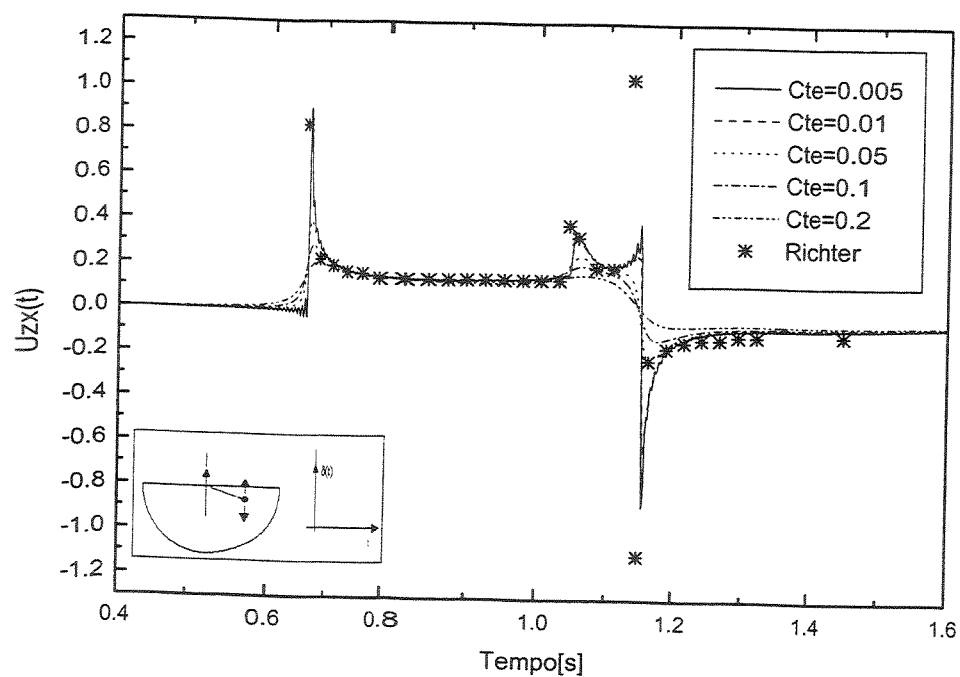


Figura 4.29 — Resposta de deslocamento horizontal transiente no ponto 1, devido a delta de Dirac.

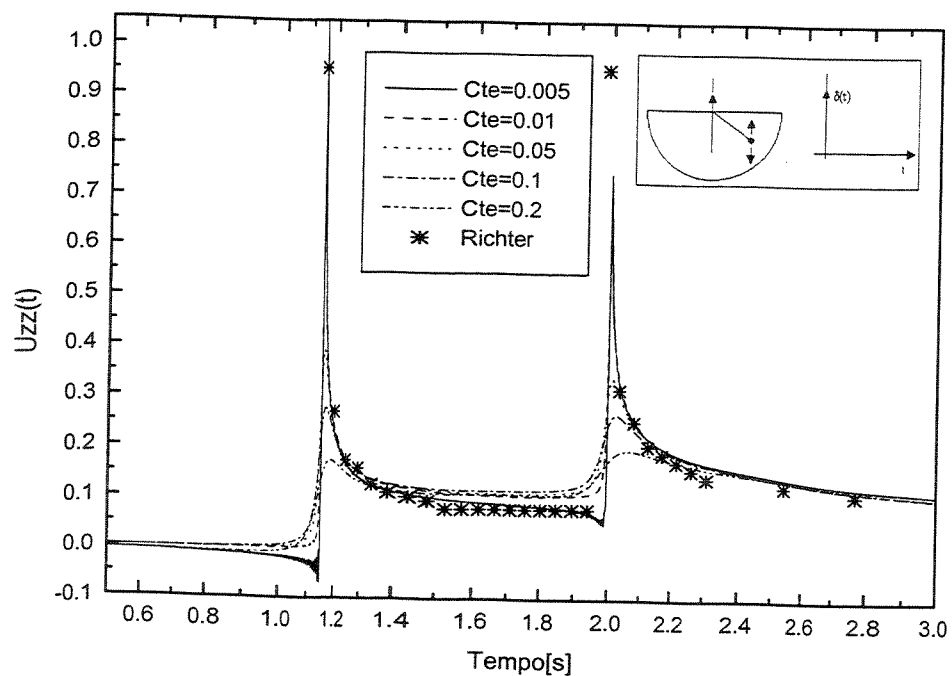


Figura 4.30 — Resposta de deslocamento vertical transiente no ponto 2, devido a delta de Dirac.

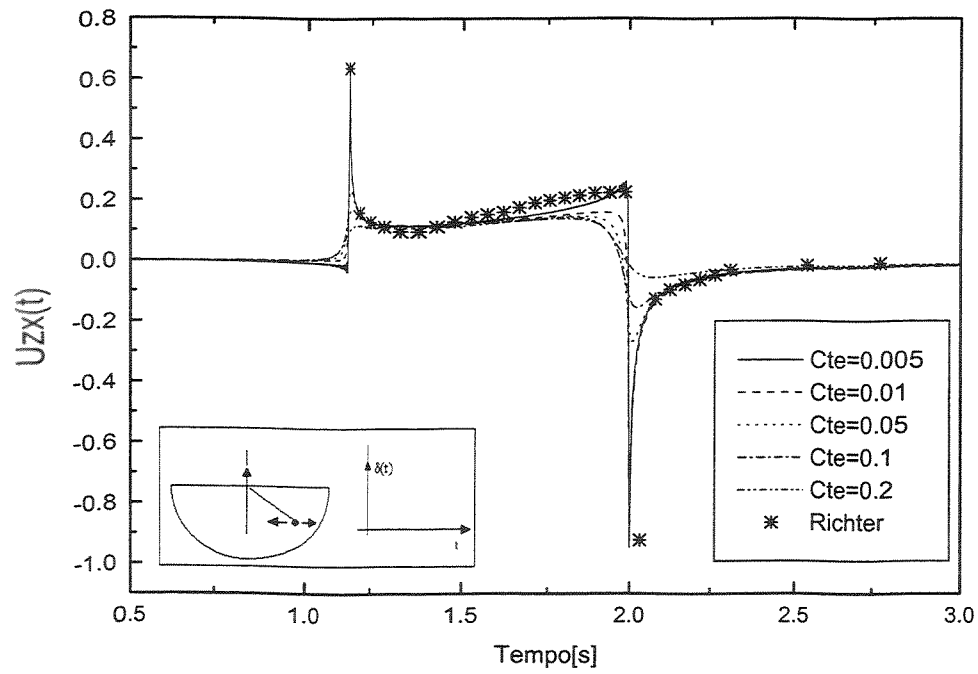


Figura 4.31 – Resposta de deslocamento horizontal transiente no ponto 2, devido a delta de Dirac.

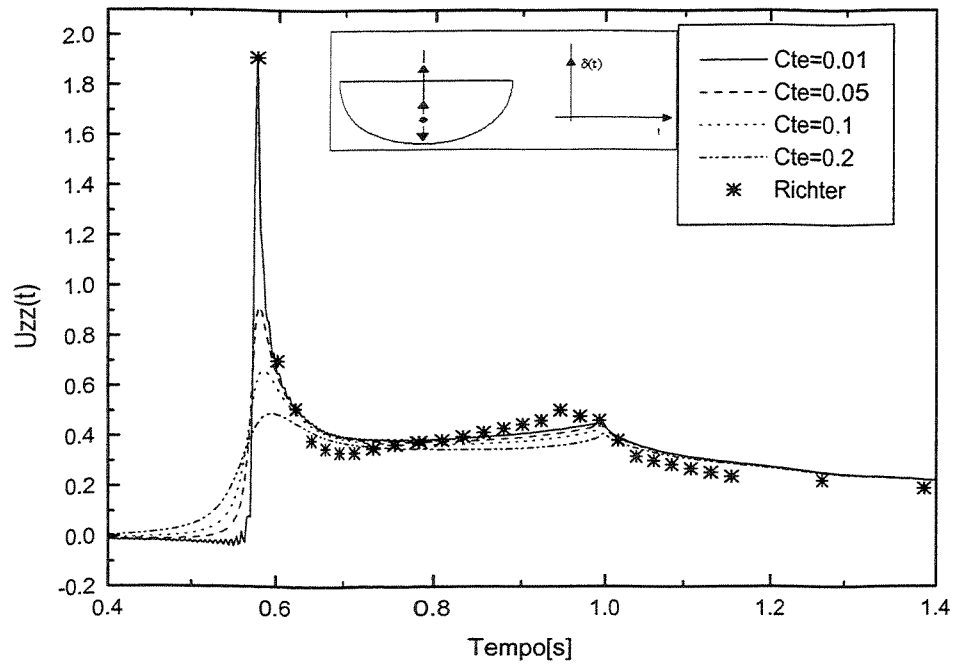


Figura 4.32 – Resposta de deslocamento vertical transiente no ponto 3, devido a delta de Dirac.

Nas figuras 4.33 e 4.35 são apresentadas as respostas de deslocamento vertical, para diferentes instantes de tempo, ao longo de um plano definido por $-2 < x < 2$, $0 < z < -2$. A excitação é dada por uma carga concentrada aplicada na origem do sistema. As propriedades do semi-espaço são dadas por, densidade de massa $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$, coeficiente de Poisson $\nu = 1/4$ e $G = 1 \text{ N/m}^2$. O modelo de amortecimento adotado é o histerético constante com coeficiente $\eta = 0.05$. A resposta estacionária usada para gerar a resposta transiente, com uso da transformada inversa de Fourier, foi calculada para um passo $\Delta A_0 = 0.1$, com uma frequência máxima calculada $A_{0_{calc}} = 500$. A frequência máxima foi obtida com a inclusão de zeros até $A_{0_{max}} = 819.1$, um total de 8192 termos foi utilizado. Não foi utilizado filtro.

Na figura 4.33 é apresentado o resultado para $t = 0.37966 \text{ s}$. Na figura 4.34 são apresentados os resultados ao longo da linha z , com $x = 0$, comparados aos resultados obtidos por Richter. É possível perceber a frente de onda em $z = 0.7$. As diferenças de amplitudes são consequência do amortecimento, o trabalho de Richter é para meios elásticos.

Resultado semelhante é apresentado para o instante $t = 0.76316 \text{ s}$, nas figuras 4.35 e 4.36. Nesse instante pode ser observada a separação entre as duas frentes de onda.

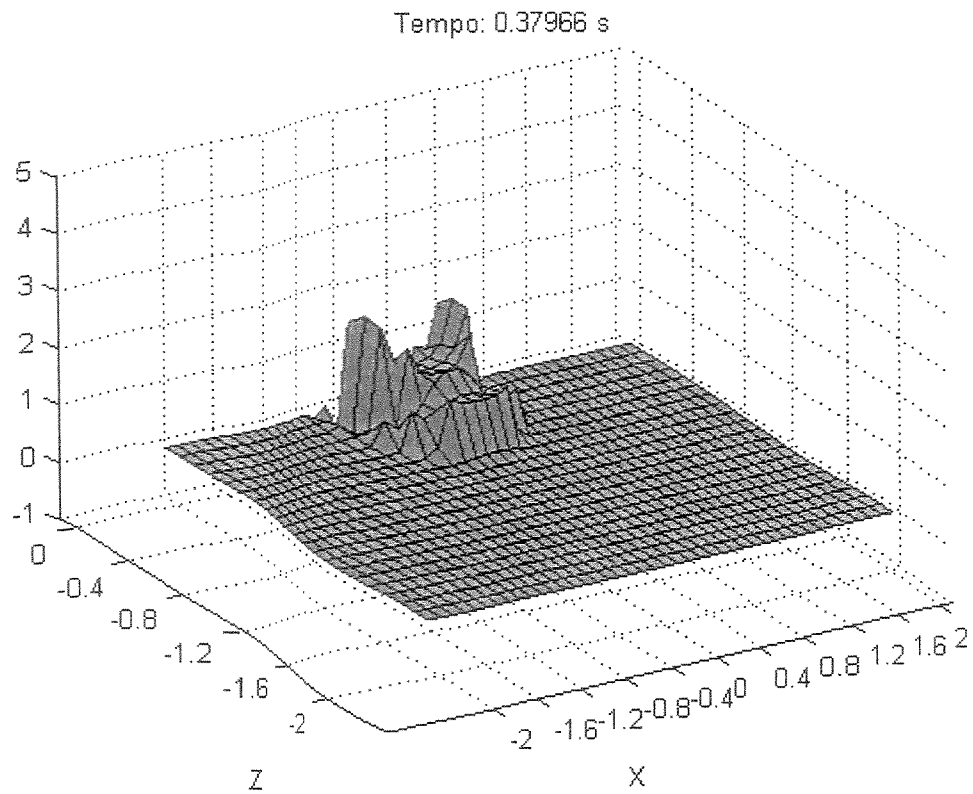


Figura 4.33 – Resposta ao longo de um plano, $t=0.37966$ s

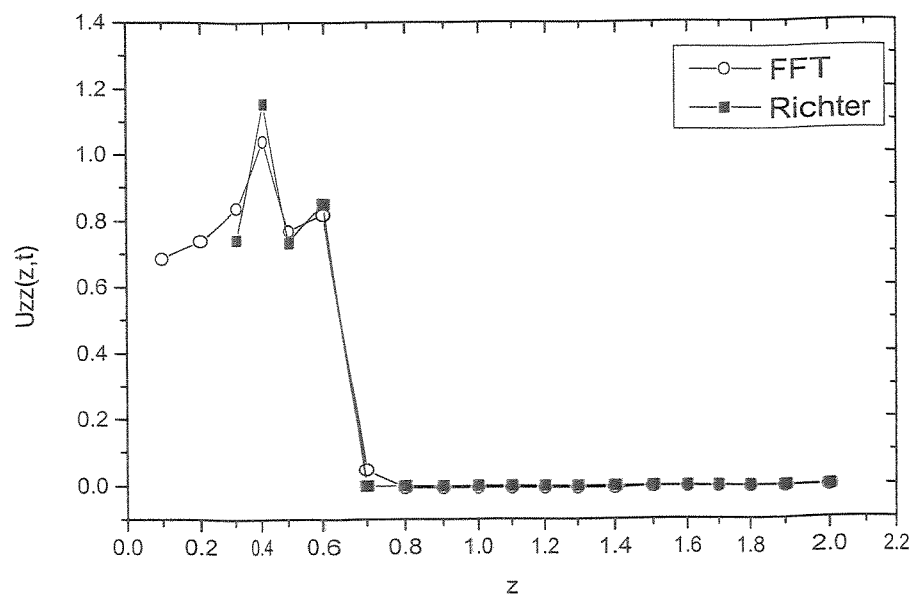


Figura 4.34 – Resposta ao longo de z com $x=0$, $t=0.37966$ s

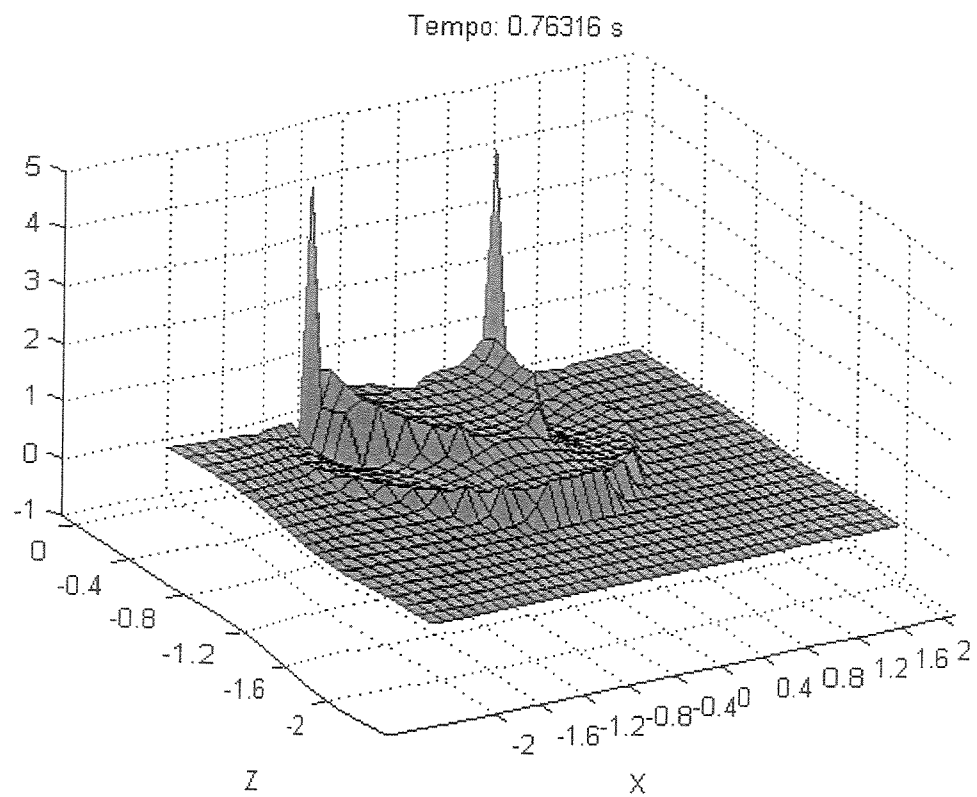


Figura 4.35 – Resposta ao longo de um plano, $t=0.76316$ s

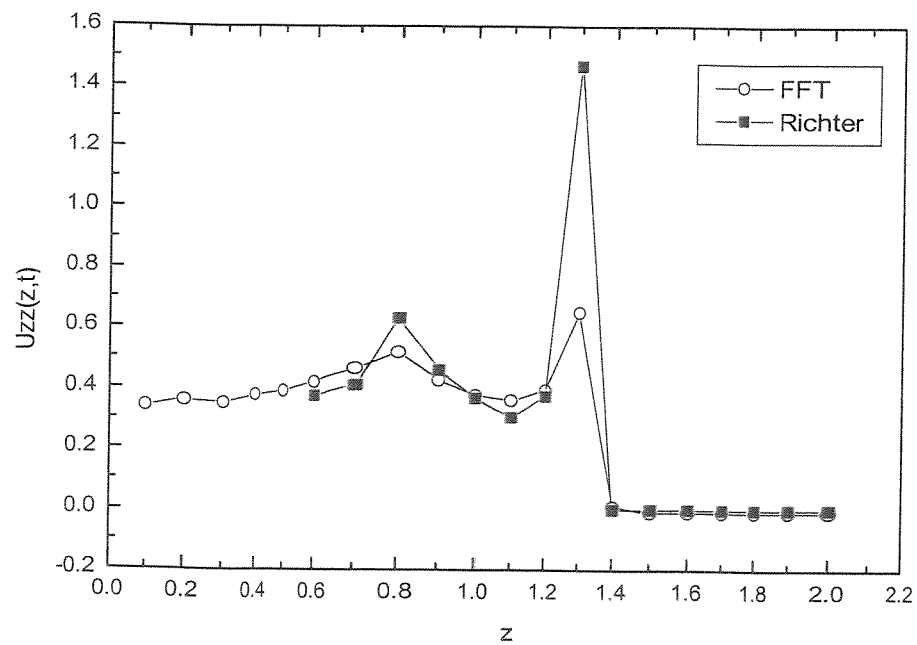


Figura 4.36 – Resposta ao longo de z com $x=0$, $t=0.76316$ s

Os resultados anteriores foram obtidos com o uso das funções de Green estacionárias multiplicadas pela excitação em frequência e posterior transformada inversa. A seguir, são apresentados os resultados obtidos com a convolução no tempo da função de resposta ao impulso pela excitação transiente. A função de Green transiente de resposta ao impulso é obtida pela transformada de Fourier da função de Green estacionária de acordo com a equação (3.44). Nas figuras 4.37 e 4.38, são apresentadas as respostas obtidas por convolução comparadas àquelas obtidas com as transformadas de Fourier para os amortecimentos $\eta=0.01$ e 0.2 . Nota-se que a metodologia também consegue respostas coerentes com a física do problema. Entretanto, a resposta por convolução não é exatamente igual à obtida pela transformada de Fourier, apresentando amplitudes maiores após o período no qual é aplicada a excitação. As respostas, para o problema resolvido com a aplicação da convolução para os vários coeficientes de amortecimento histerético constante, são apresentadas na figura 4.39. A diferença entre as respostas obtidas com o uso da convolução no tempo e através do produto em frequência é influenciada pelo coeficiente de amortecimento utilizado. Na figura 4.40 é apresentado o erro, calculado como sendo a diferença entre as respostas por convolução e transformadas de Fourier. Para maiores amortecimentos, a diferença na fase em que é amortecida a resposta é mais acentuada.

O maior empecilho para o uso da convolução está no custo computacional que ela gera. Na tabela 4.1, são apresentados os tempos dispendidos pelo “software matlab” para realizar as convoluções, nas situações apresentadas. Utilizando a metodologia do produto em frequência os tempos para análise completa foram inferiores a um segundo.

Tabela 4.1
Tempos dispendidos pela convolução numérica.

Número de passos no tempo	Tempo utilizado para convolução
8192	17 s
16384	57 s
32768	9 min 17 s
65536	32 min 44 s

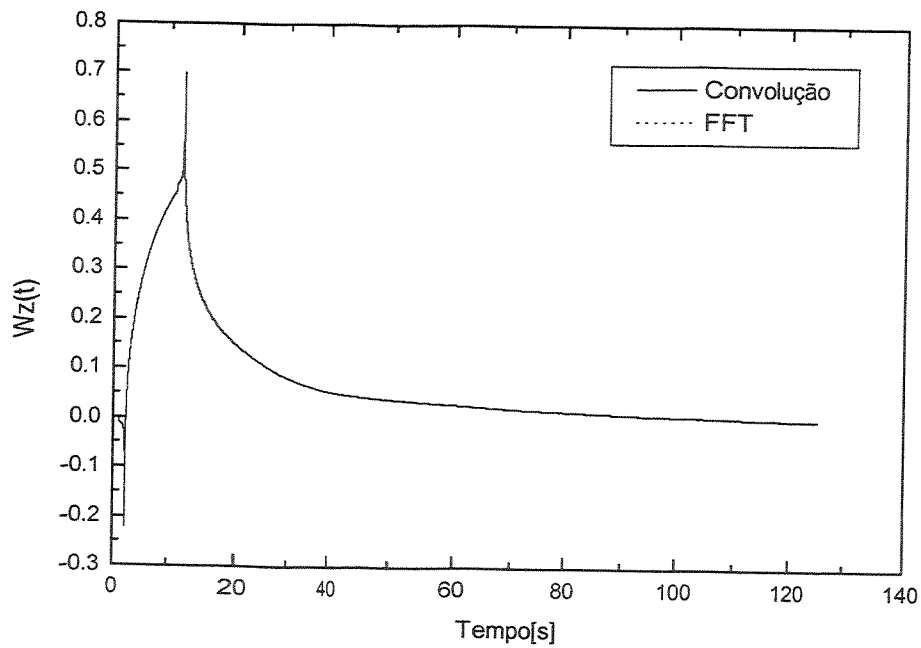


Figura 4.37 – Resposta $E_{zw}(t)$ obtida por convolução e FFT para $\eta=0.01$

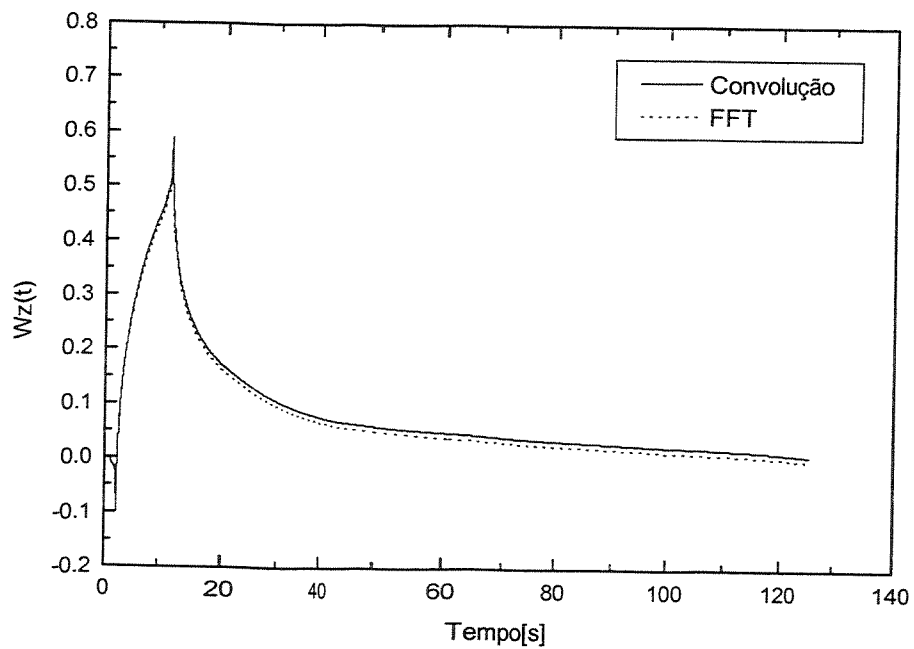


Figura 4.38 – Resposta $E_{zw}(t)$ obtida por convolução e FFT para $\eta=0.2$

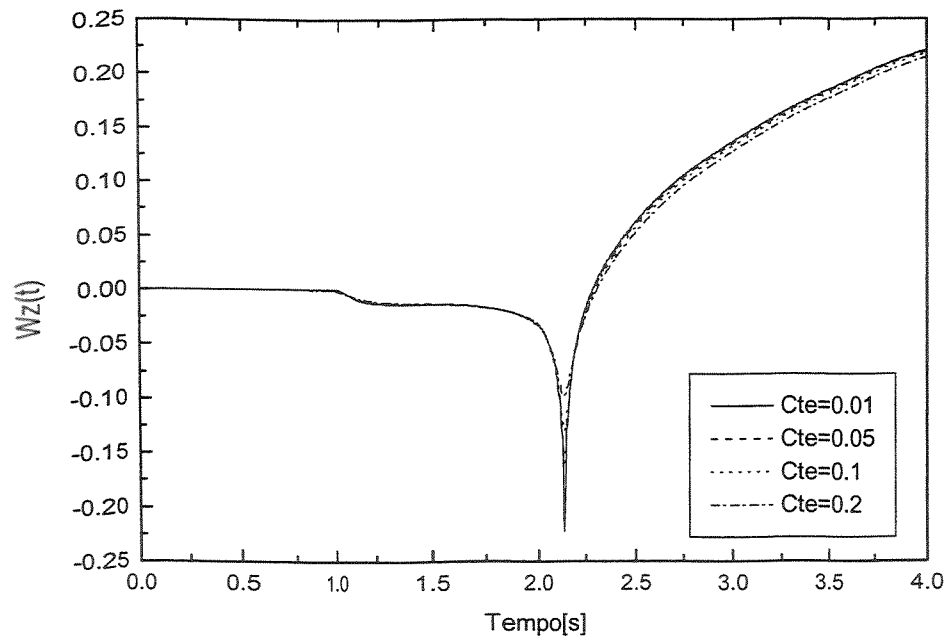


Figura 4.39 – Resposta $E_{zw}(t)$ obtida por convolução para vários coeficientes de amortecimento.

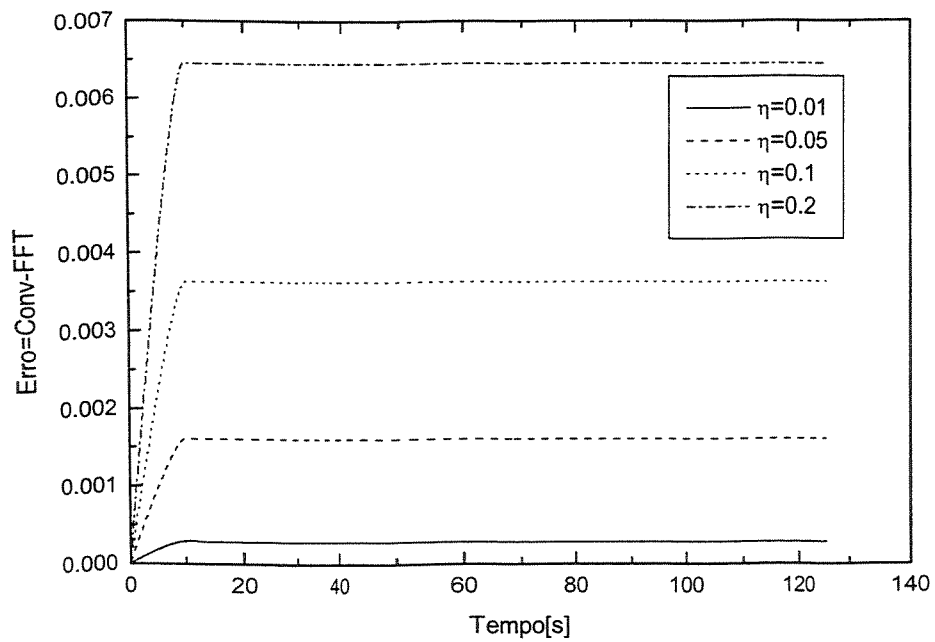


Figura 4.40 – Erros entre a resposta obtida por convolução e transformada de Fourier em função da variação do amortecimento.

4.4 Ajuste da Resposta Estacionária – Funções de Influência

Na figura 4.41, é apresentado o problema que é resolvido com uso das funções de Influência. Pode-se dizer que as funções de Influência são funções de Green para problemas de carga distribuída. Na figura 4.42, pode ser visualizada a resposta vertical estacionária da função de influência do sistema submetido à excitação vertical $E_{zw}(Ao)$, variando o coeficiente de amortecimento histerético constante. A determinação dessas respostas apresenta alto custo computacional, e, em altas frequências, o processo de integração numérica apresenta limitações. Para o amortecimento $\eta=0,1$, é possível notar que, nas frequências a partir de $Ao=400$, surgem oscilações que divergem do comportamento de decaimento monotônico das funções; nesse ponto a amplitude da resposta está em torno de 10^{-10} . As funções de Influência decaem mais rapidamente quando comparadas às funções de Green $G_{zw}(Ao)$ (figura 4.2), quando comparadas as respostas obtidas pela função de influência, o que pode ser constatado na figura 4.42. Para os menores amortecimentos, os erros podem ocorrer em frequências elevadas, em torno de $Ao=400$. Em ambas as figuras, é apresentado o deslocamento vertical devido à excitação normal à superfície (Green G_{zw} , Influência E_{zw}), medidos no ponto $x=2$, sendo que a carga é aplicada na origem (função de Green), e, no caso da carga distribuída (função de influência), a carga é aplicada no intervalo $-0.5 < x < 0.5$. As respostas, para deslocamento horizontal devido à excitação concentrada tangencial a superfície (E_{xu}), são apresentadas na figura 4.43, e o deslocamento vertical, devido a essa carga (E_{xw}), pode ser visualizado na figura 4.44.

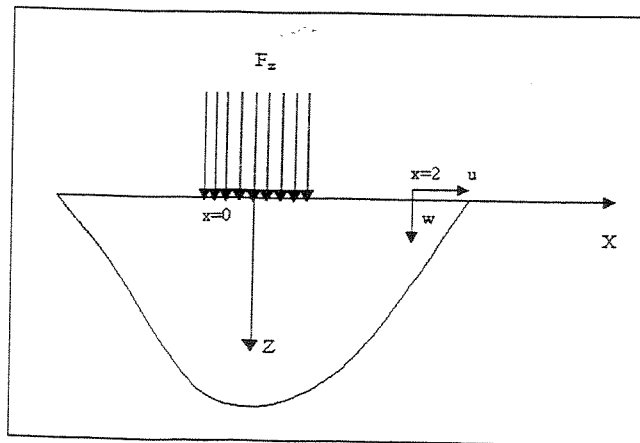


Figura 4.41 – Problema estudado com auxílio das funções de Influência.

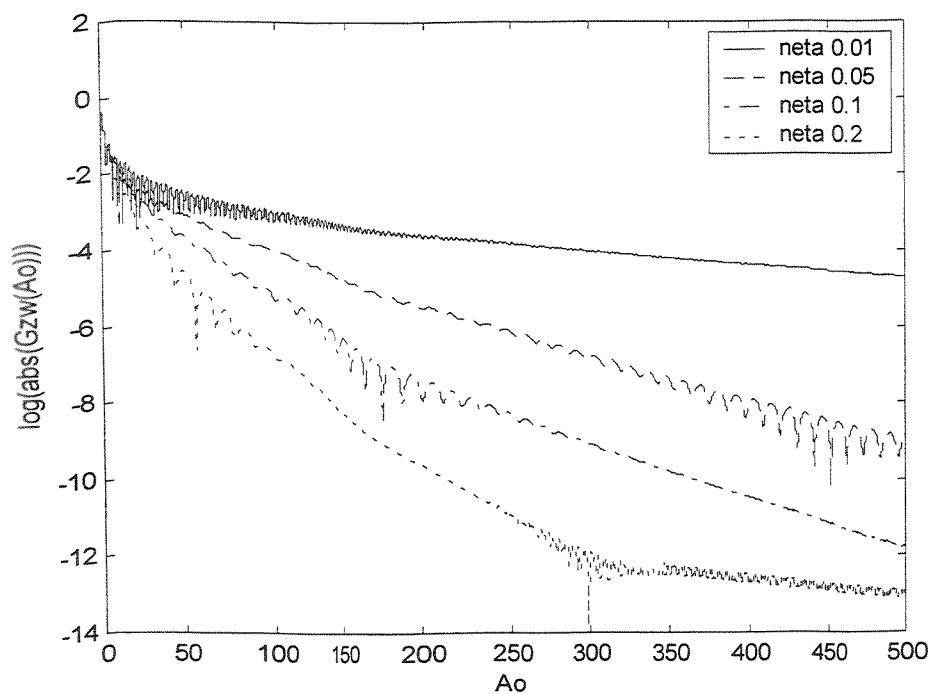


Figura 4.42 – Função de influência estacionária $E_{zw}(Ao)$.

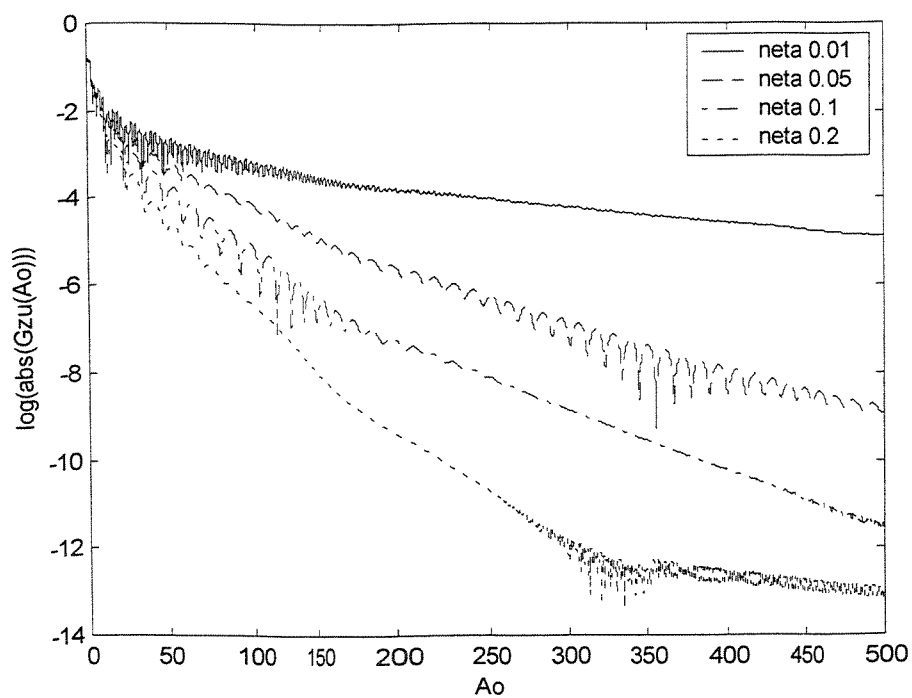


Figura 4.43 – Função de influência estacionária $E_{zu}(Ao)$.

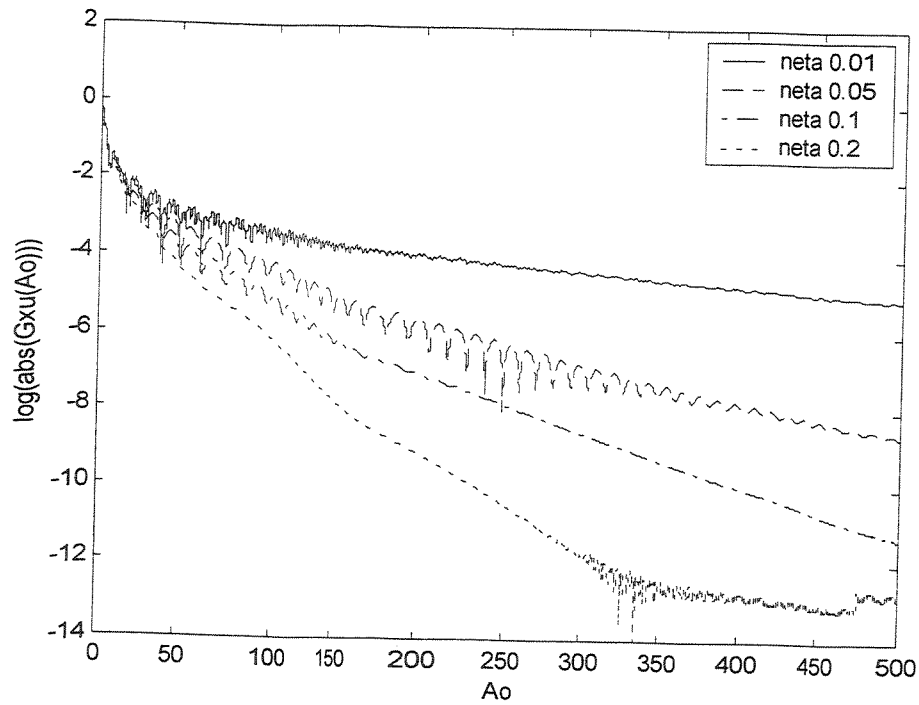


Figura 4.44 – Função de influência estacionária $E_{xu}(A_o)$.

Os efeitos da interpolação spline são semelhantes àqueles observados para as funções de Green, sendo necessária a análise do passo mínimo em frequência a partir do qual os erros de interpolação sejam aceitáveis. A interpolação, como foi discutido para as funções de Green, permite a redução do passo de frequência e conseqüente aumento do período de análise. Os resultados para interpolação podem ser observados nas figuras 4.45, 4.46, 4.47 para as respostas $E_{wz}(A_o)$, $E_{zu}(A_o)$, $E_{xu}(A_o)$ respectivamente. A interpolação foi realizada com um passo em frequência calculado pelas funções de Influência estacionárias $\Delta A_o = 0,1$ para $\Delta A_o = 0,05$, para o solo com módulo de cisalhamento $G = 1N/m^2$, densidade de massa $\rho = 1kg/m^3$ e Poisson $\nu = 1/3$, o amortecimento foi constante com coeficiente $\eta = 0,05$. A análise dos erros introduzidos mostram que, a partir do passo de tempo $\Delta A_o = 0,1$, é possível obter bons resultados, não alterando a resposta em frequência, nem introduzindo erros significativos, o que permite a obtenção de respostas para grandes períodos de tempo.

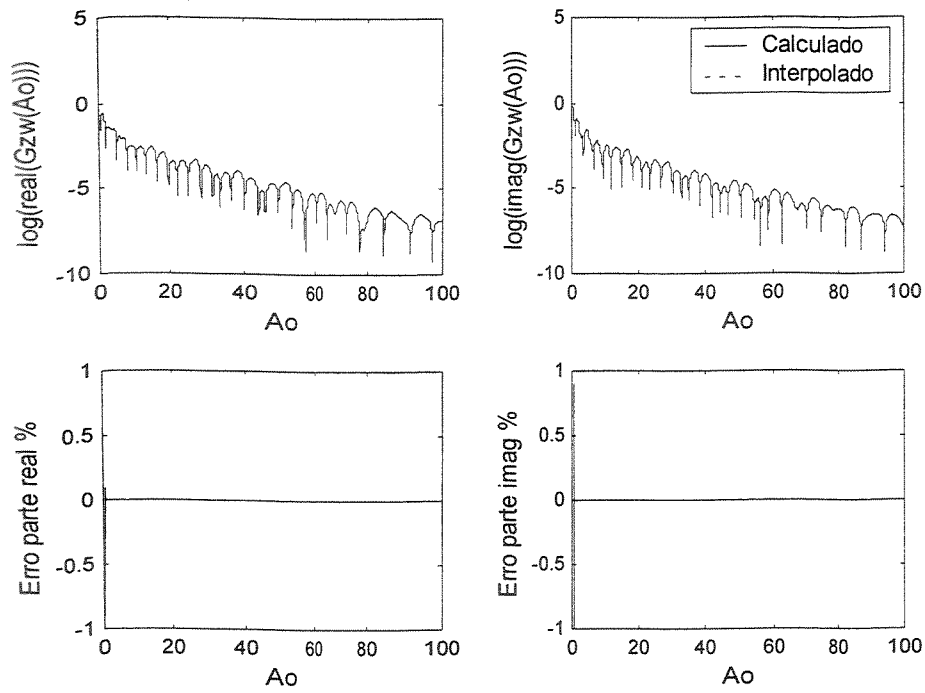


Figura 4.45 – Erros de interpolação $E_{wz}(A_o)$.

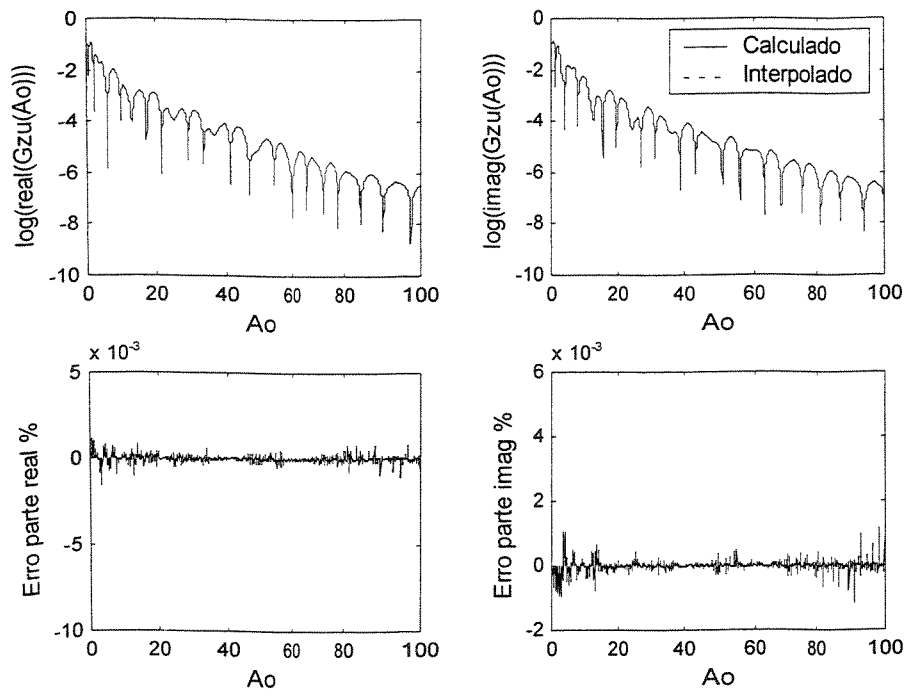


Figura 4.46 – Erros de interpolação $E_{wu}(A_o)$.

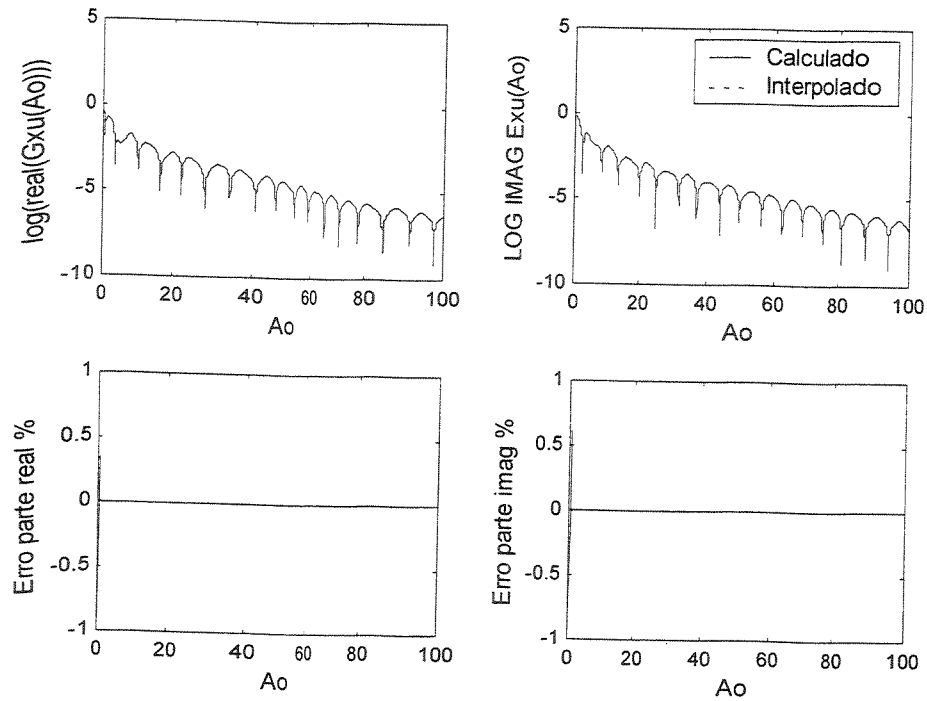


Figura 4.47 – Erros de interpolação $E_{xu}(A_o)$.

De modo semelhante às funções de Green, a obtenção de respostas transientes com pequenos passos de tempo, é alcançada com o aumento da frequência máxima de análise. A inserção de zeros na resposta estacionária a partir da última componente calculada pelas funções de Influência deve contribuir apenas com uma suavização do sinal, provocada pela redução do passo de tempo. Para estas análises, a frequência máxima calculada foi $Ao_{calc} = 300$, e foram inseridos zeros até que fosse atingida a frequência máxima de $Ao_{max} = 409.65, 819.15, 1638.35, 3276.75$ com o uso de, respectivamente, 8192, 16384, 32768, 65536 termos em frequência, com passo $\Delta Ao = 0.05$. Não foi utilizado o filtro para transição. Foi adotado o coeficiente de amortecimento $\eta = 0.05$. Esse resultado pode ser observado nas figuras 4.48 e 4.49, que fornecem a resposta vertical a uma excitação vertical impulsiva unitária, ou um delta de Dirac, aplicado em $t=0$. Nota-se pela figura 4.48 que não ocorre nenhuma mudança significativa no comportamento geral da função transiente. Entretanto, observando uma janela ampliada (figura 4.49), é nítida a suavização que ocorre com a redução no passo de tempo. Não é observado o deslocamento da resposta encontrado nas funções de Green. A introdução de zeros permite a obtenção de respostas com pequenos passos de tempo sem aumento significativo do custo computacional.

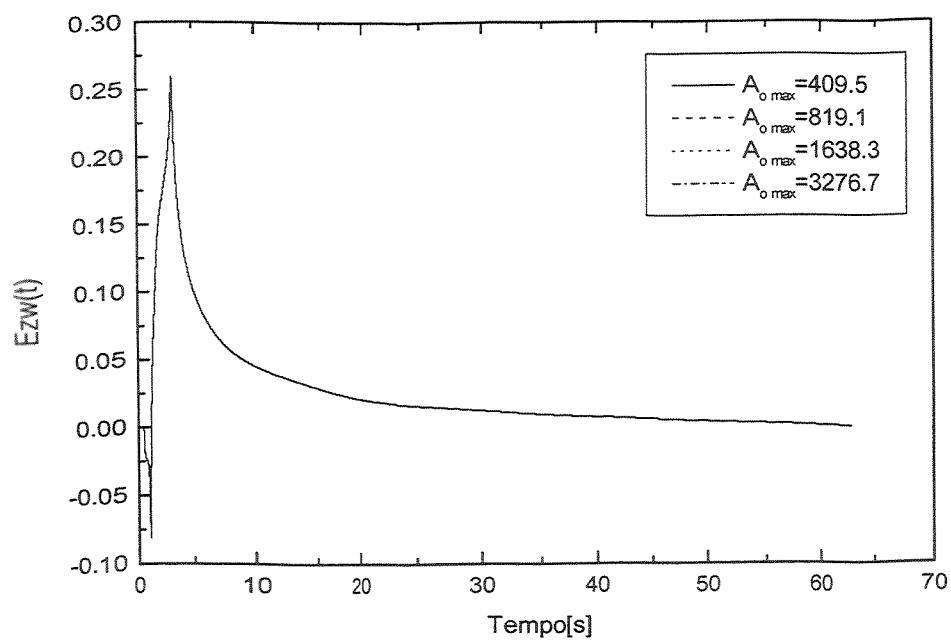


Figura 4.48 – Efeito dos zeros na função de Influência $E_{wz}(t)$.

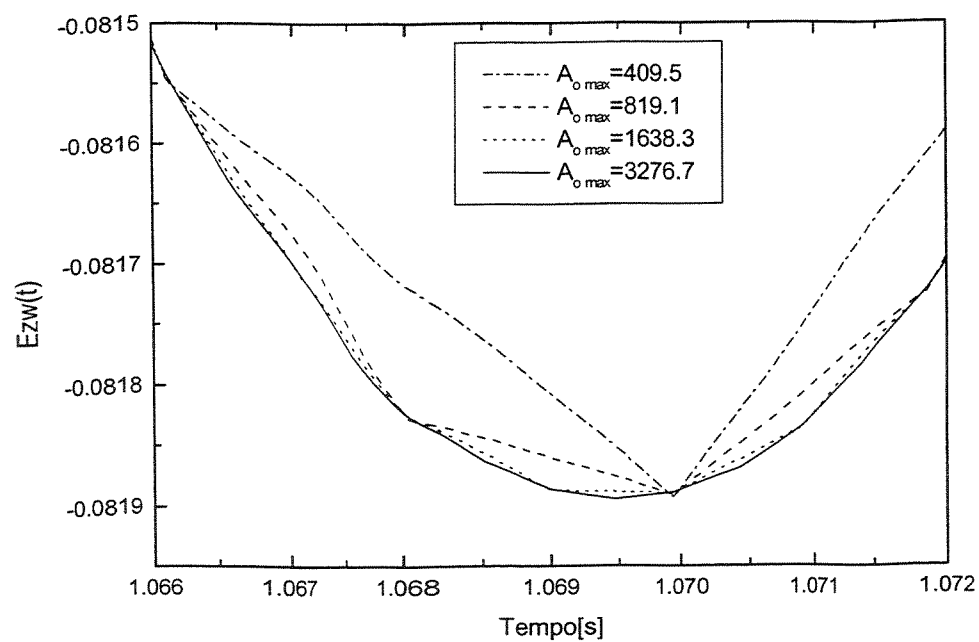


Figura 4.49 – Detalhe do efeito dos zeros na função de Influência $E_{wz}(t)$.

As funções de Influência para o problema bidimensional apresentam a mesma não singularidade para a frequência estacionária encontrada nas funções de Green. Para as funções de influência, o nível DC tem o mesmo efeito observado anteriormente nas funções de Green, sendo, portanto, válido o uso da equação (4.2).

4.5 Resultados Numéricos – Funções de Influência

As funções de influência transiente são utilizadas para modelar as fundações rígidas de superfície no capítulo cinco. Aqui são apresentados os resultados obtidos para o ponto $x=2$ localizado na superfície livre so semi-espço. A excitação é distribuída no intervalo $-0.5 < x < 0.5$. O módulo de cisalhamento do solo é $G=1N/m^2$; a densidade de massa $\rho=1\text{ kg}/m^3$ e Poisson $\nu=1/3$. Foram analisados três modelos de amortecimento: o amortecimento histerético constante, o modelo de Kelvin-Voigt e um amortecimento do tipo rampa. Não foram encontradas, na literatura, respostas transientes para funções de Influência visco-elásticas. Portanto, não foi possível uma comparação com resultados de outros pesquisadores.

Nas análises a seguir, foi utilizada a frequência máxima $Ao_{max}=819,2$, e um passo em frequência $\Delta Ao=0,1$. As funções de Influência estacionárias foram calculadas até $Ao_{calc}=500$, sendo os resultados abaixo de 10^{-10} eliminados com uso do filtro, pois a partir desses valores os erros de integração são mais significativos.

Os modelos de amortecimento podem ser visualizados na figura 4.50; as equações que regem esses modelos estão apresentadas na tabela 4.2. Foram variados os coeficientes de amortecimento nos três modelos; os parâmetros podem ser obtidos na tabela 4.3.

Tabela 4.2: Equações que regem os modelos de amortecimento

Modelo de amortecimento	Equação
1) Histerético constante	$\eta(Ao)=\eta$ (constante)
2) Kelvin-Voigt	$\eta(Ao)=Ao\eta$
3) “rampa”	$\eta(Ao)=Ao\eta, \quad (0 < Ao < 1)$ $\eta(Ao)=\eta, \quad (Ao > 1)$

Tabela 4.3: Modelos de amortecimento e coeficientes

<i>Modelo</i>	Coeficientes de amortecimento			
Constante	0.01	0.05	0.1	0.2
Kelvin				
Rampa				

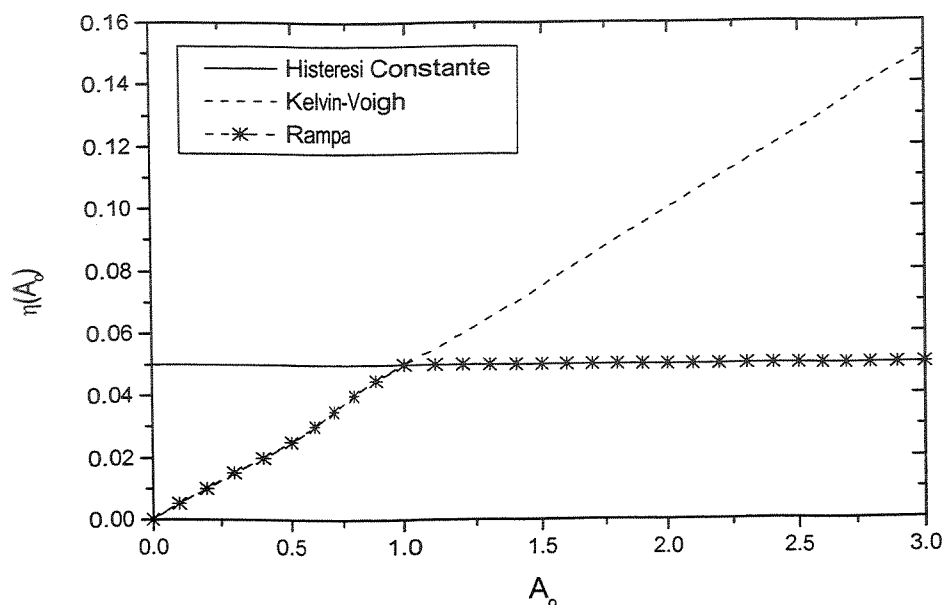


Figura 4.50 – Modelos de amortecimento adotados nas funções de Influência.

Serão apresentadas as respostas a um delta de Dirac aplicado em $t=0$, que fornece a função de resposta ao impulso, com a qual pela integral de convolução podem ser obtidas as respostas a excitações arbitrárias. Nas figuras 4.51, 4.52 e 4.53, são apresentadas as respostas transientes de deslocamento vertical para excitação vertical, para os modelos de amortecimento constante, Kelvin-Voigt, rampa. O aumento do coeficiente reduz significativamente as amplitudes dos picos, sendo a forma da resposta também mais suave nestes casos. O amortecimento do tipo rampa fornece respostas muito próximas àquelas obtidas pelo modelo de amortecimento histerético constante. Na figura 4.54, são comparadas as respostas para um coeficiente de amortecimento constante $\eta=0.2$ com alteração do modelo de amortecimento. A resposta do modelo de Kelvin-Voigt elimina as variações abruptas e reduz drasticamente a amplitude de deslocamento. A informação para as mudanças abruptas está contida nos termos de alta frequência. Assim sendo, a mudança observada no comportamento da resposta pode ser explicada pelo fato de a resposta estacionária em altas frequências ser fortemente amortecida no modelo de

Kelvin-Voigt. Nos solos visco-elásticos, o aumento do coeficiente de amortecimento provoca um aumento nas velocidades de propagação das ondas (Haupt, 1986), o que pode explicar a antecipação das respostas no modelo de Kelvin-Voigt, quando comparadas às do modelo de amortecimento constante e rampa. É possível constatar nas figuras 4.51, 4.52, 4.53 que as respostas, para maiores coeficientes de amortecimento, tendem a retornar mais lentamente para a posição de repouso ou equilíbrio.

As respostas de deslocamento horizontal, induzido pela excitação normal à superfície, são apresentadas nas figuras 4.55, 4.56, 4.57 para os modelos de amortecimento constante, de Kelvin-Voigt e rampa respectivamente. Na figura 4.54, pode ser observado o efeito do aumento do coeficiente de amortecimento constante, ocorrendo uma redução dos picos, também são eliminadas algumas etapas de equilíbrio, como o trecho no intervalo $1s < t < 1,3s$. Na figura 4.56, esta fase é praticamente eliminada, ocorrendo uma transição suave entre os picos superiores e inferiores. A comparação entre os modelos pode ser vista na figura 4.58; neste caso foi adotado o coeficiente de amortecimento $\eta=0,2$. As respostas para o modelo de rampa e o histerético constante são muito próximas, não provocando mudança significativa na amplitude dos picos. Entretanto, após 3.2 s as respostas começam a divergir, para o amortecimento constante a resposta decai mais lentamente para o equilíbrio.

O deslocamento horizontal, devido ao carregamento tangencial à superfície, aplicado na forma de um delta de Dirac em $t=0$, para os modelos de amortecimento constante, de Kelvin-Voigt e rampa, é apresentado nas figuras 4.59, 4.60 e 4.61 respectivamente. Nas figuras 4.59 e 4.62, constata-se que o aumento do amortecimento tende a eliminar os picos que ocorrem em $t=1s$ e $t=3,2s$, este efeito é mais acentuado com o modelo de Kelvin-Voigt, figura 4.60. A eliminação dos picos, nos casos de maior coeficiente de amortecimento e ainda no modelo de Kelvin-Voigt, é consistente; o decaimento rápido das componentes de alta frequência contribui para a eliminação das transições abruptas na resposta transiente. Comparando os modelos de amortecimento para um mesmo coeficiente, é constatado que a resposta transiente $E_{xu}(t)$ é semelhante à $E_{zu}(t)$ no que se refere aos amortecimentos em rampa e constante, ambas possuem amplitudes semelhantes e divergem uma da outra no momento em que o sistema retorna ao equilíbrio.

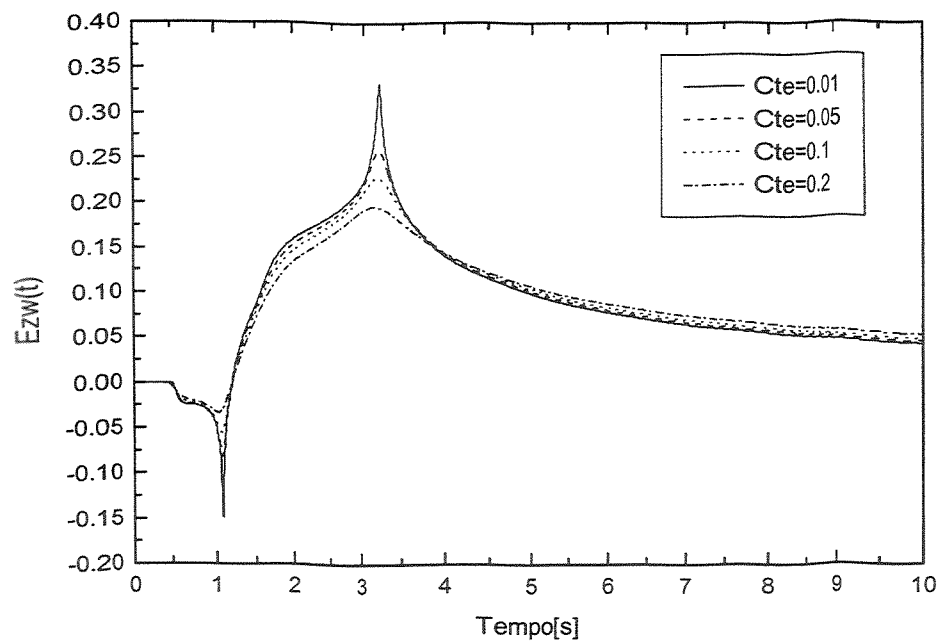


Figura 4.51 – Função de influência transiente $E_{wz}(t)$ amortecimento constante.

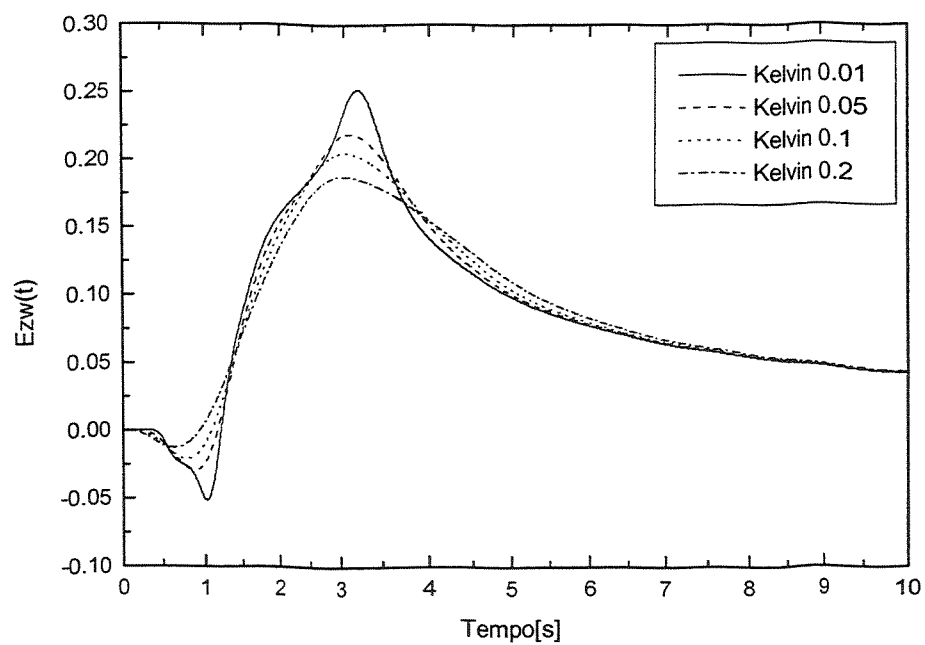


Figura 4.52 – Função de influência transiente $E_{wz}(t)$ amortecimento de Kelvin-Voigt.

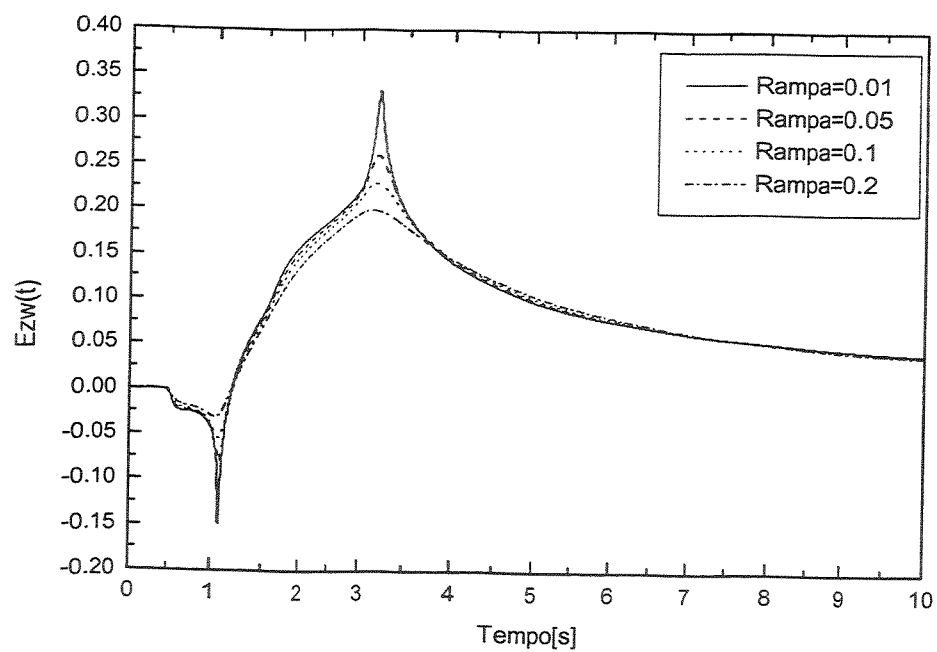


Figura 4.53 – Função de influência transiente $E_{wz}(t)$ amortecimento em rampa.

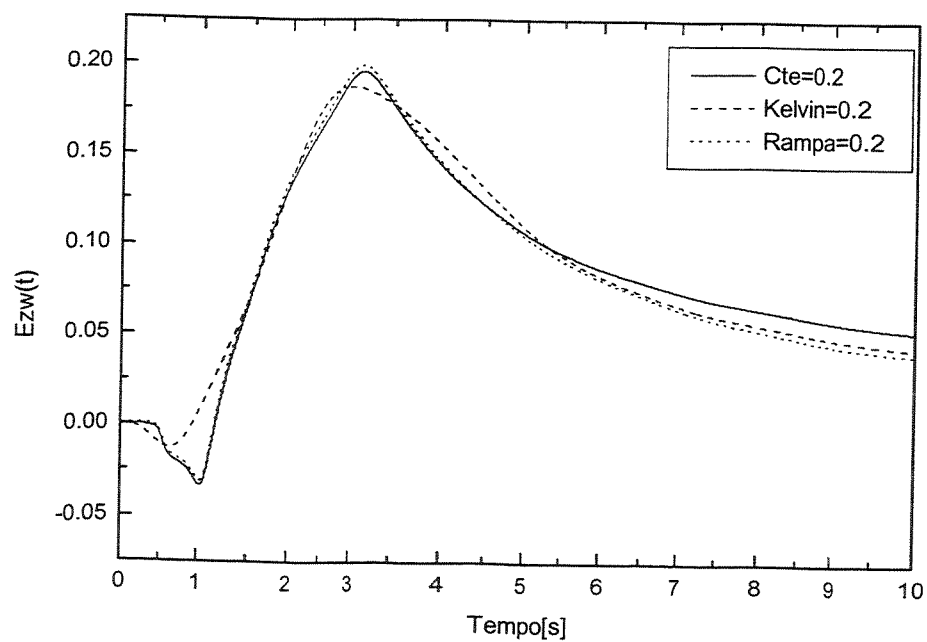


Figura 4.54 – Função de influência transiente $E_{wz}(t)$ vários modelos de amortecimento, $\eta=0,2$.

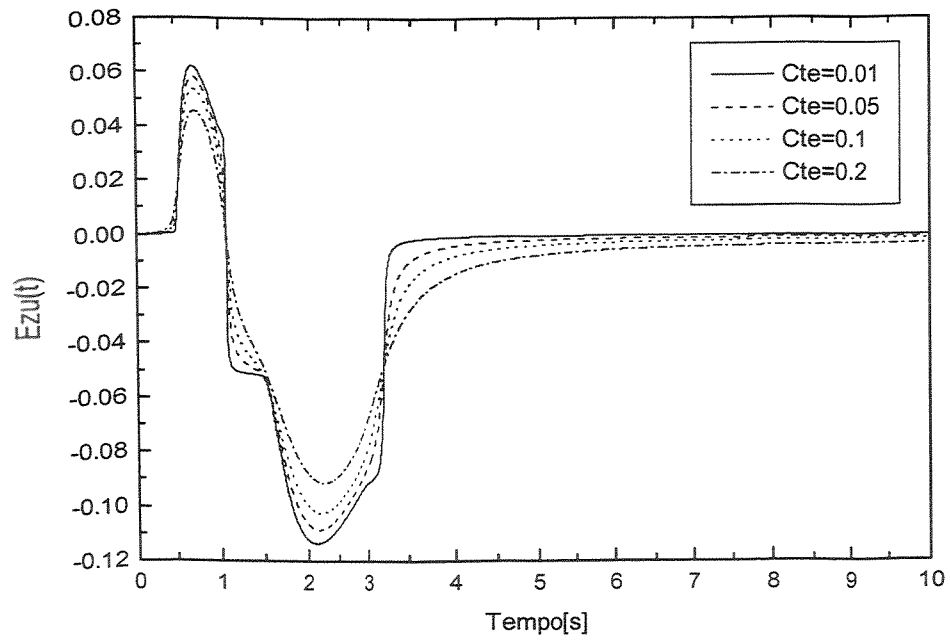


Figura 4.55 – Função de influência transiente $E_{zu}(t)$ amortecimento constante.

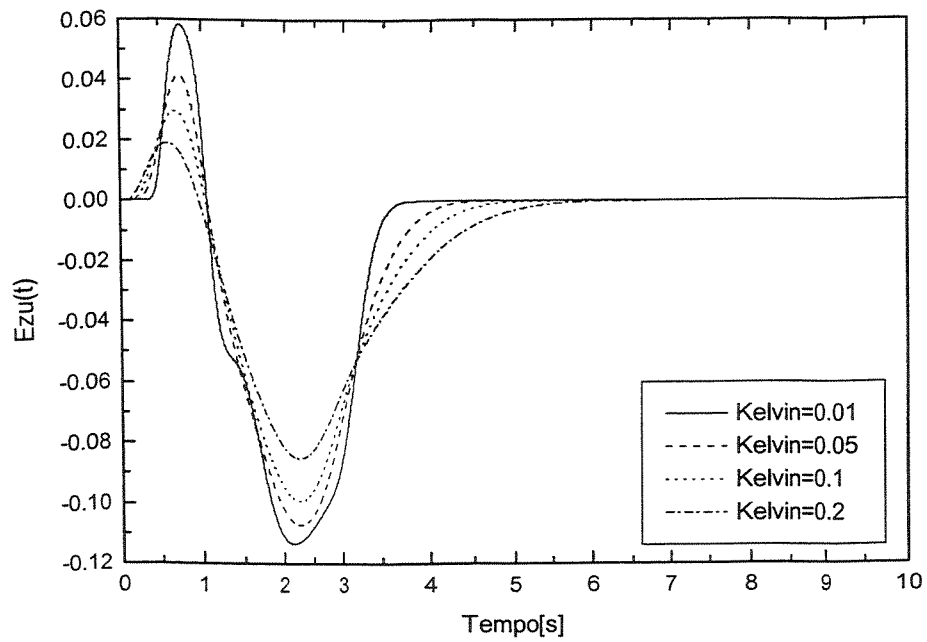


Figura 4.56 – Função de influência transiente $E_{zu}(t)$ amortecimento de Kelvin-Voigt.

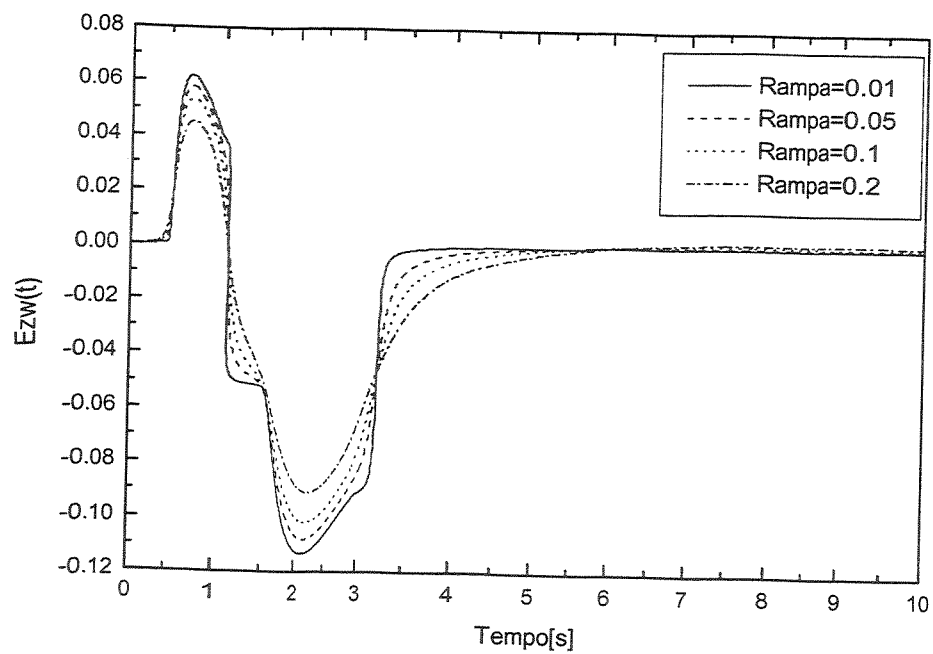


Figura 4.57 – Função de influência transiente $E_{zu}(t)$ amortecimento em rampa.

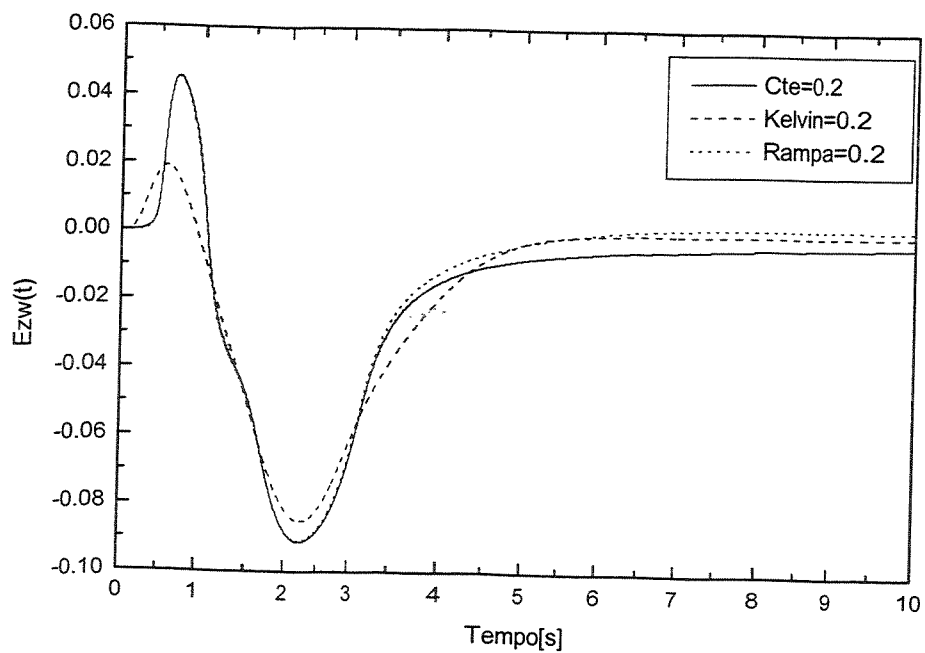


Figura 4.58 – Função de influência transiente $E_{zu}(t)$ vários modelos de amortecimento, $\eta=0.2$

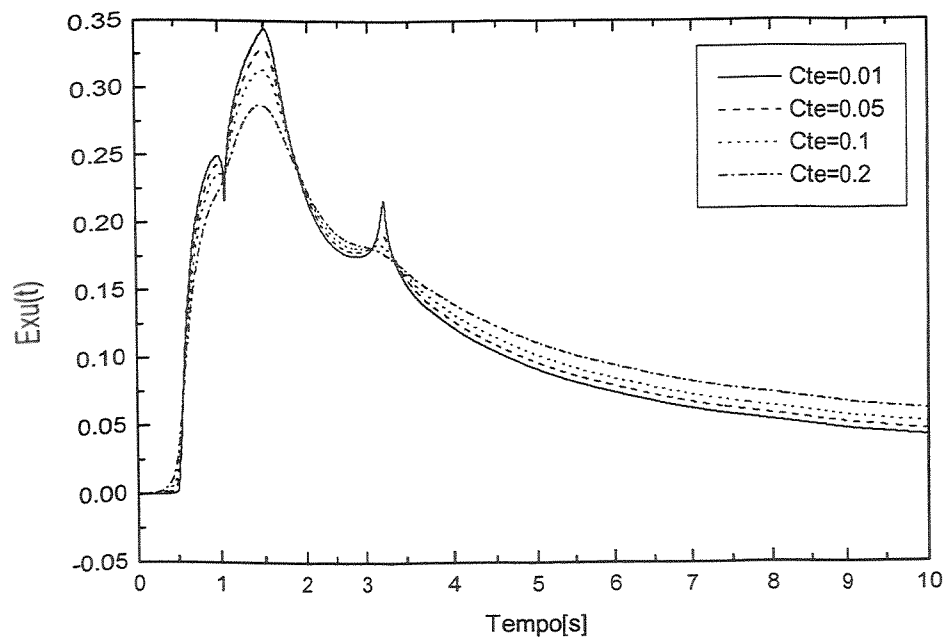


Figura 4.59 – Função de influência transiente $E_{xu}(t)$ amortecimento constante.

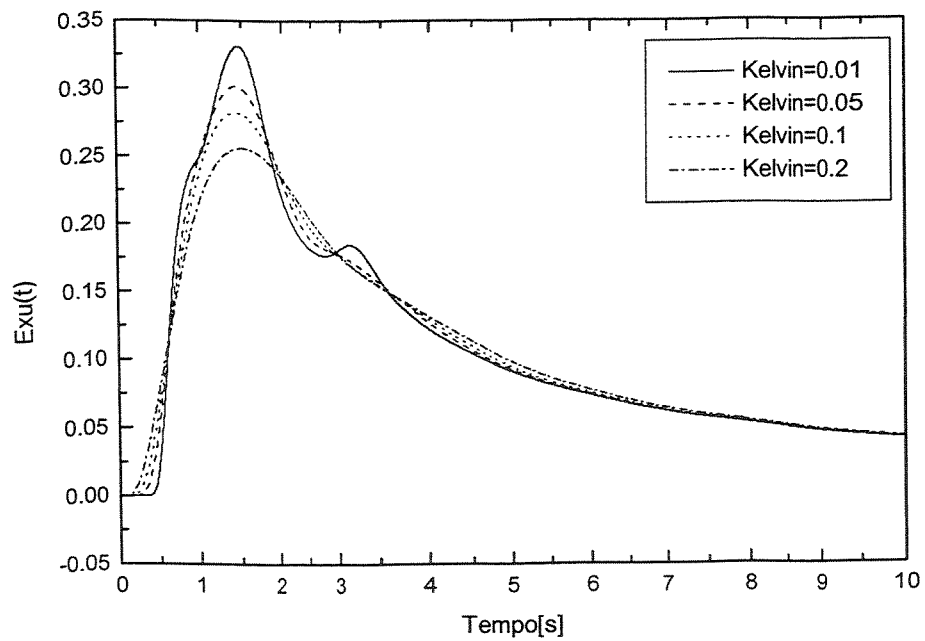


Figura 4.60 – Função de influência transiente $E_{xu}(t)$ amortecimento de Kelvin-Voigt.

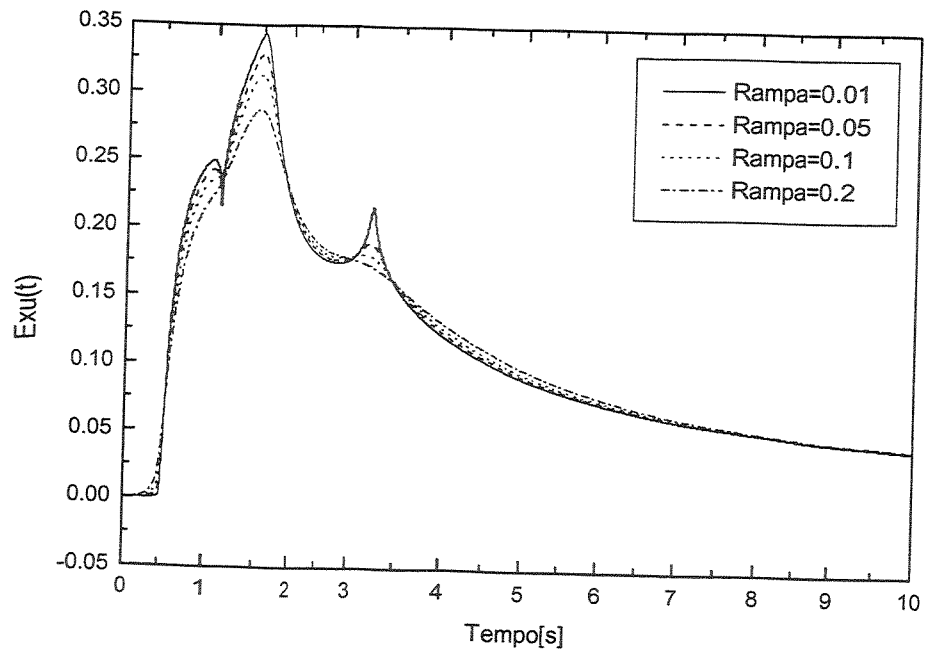


Figura 4.61 – Função de influência transiente $E_{xu}(t)$ amortecimento em rampa.

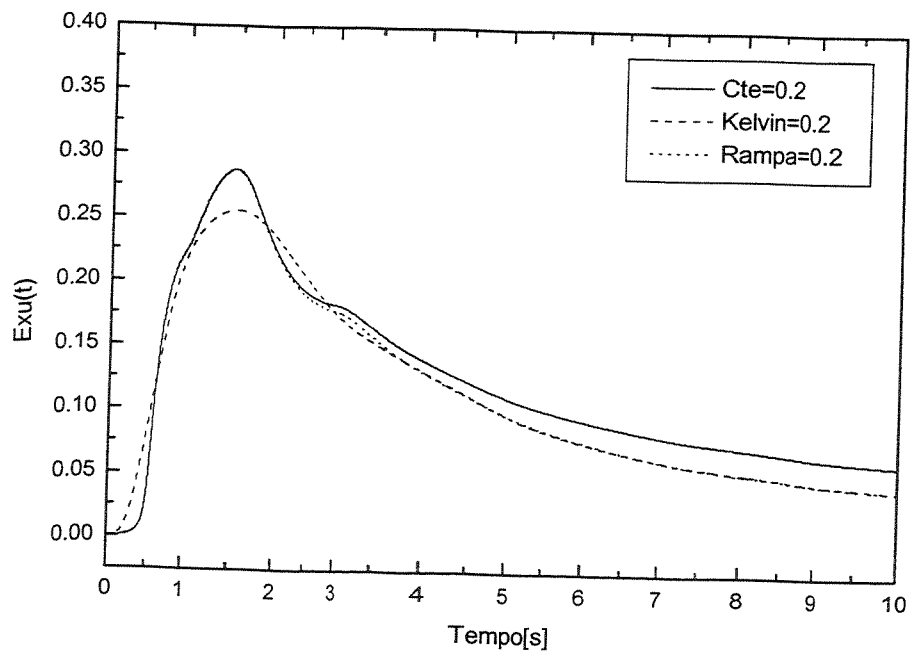


Figura 4.62 – Função de influência transiente $E_{xu}(t)$ vários modelos de amortecimento, $\eta=0.2$

Capítulo 5

Resposta Transiente de Fundações Rígidas de Superfície

5.1 Introdução

Neste capítulo, são estudadas alternativas para obtenção de respostas transientes de fundações rígidas. A primeira metodologia parte das respostas para fundações modeladas com o uso de funções de influência estacionárias, aplicando a transformada inversa de Fourier sobre as funções de flexibilidade normalizadas da fundação. A segunda metodologia utiliza as funções de influência transientes, sintetizadas numericamente, obtidas pelas técnicas apresentadas no capítulo 4, modelando a fundação no domínio do tempo, o que permitirá, futuramente, a consideração dos problemas de contato entre o solo e a fundação.

Neste trabalho, são estudadas apenas as fundações rígidas de superfície; entretanto, as técnicas estudadas podem ser estendidas para fundações engastadas, enterradas e modelos de solo mais complexos.

5.2 Superposição das Funções de Influência em Frequência e no Tempo

Na análise de fundações rígidas, é necessário considerar a superposição dos deslocamentos ou tensões devido às excitações nos diversos segmentos discretizados da interface entre a estrutura da fundação e superfície do solo. Inicialmente não será considerada a existência de uma fundação; assume-se uma distribuição de excitações ao longo da superfície, como apresentado na figura 5.1. Para obter a resposta, no ponto x_I' , tanto para deslocamentos, quanto para tensões, é necessário considerar os efeitos das excitações aplicadas nos demais pontos.

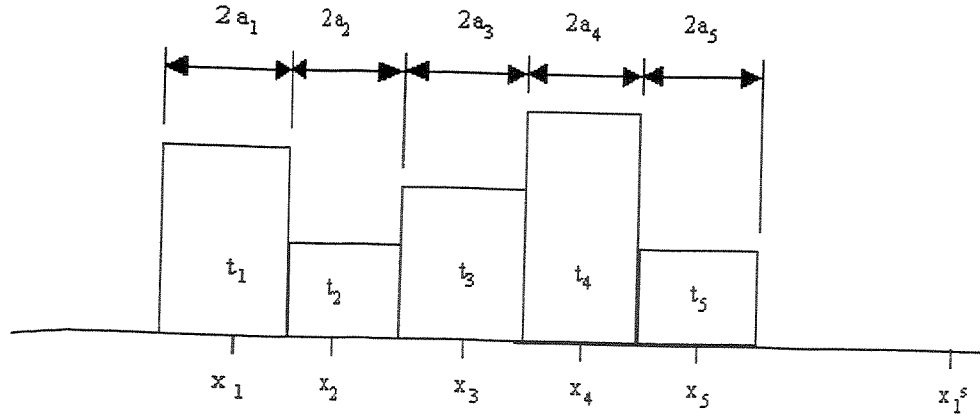


Figura 5.1. Distribuição de carga ao longo da superfície do solo.

A superposição pode ser feita com a função de resposta em frequência, como descrito nos trabalhos de Mesquita (1989), Almeida Barros (1997), Sousa (1999), ou utilizando a função de resposta ao impulso.

Para obter a superposição em frequência, basta aplicar as funções de Green ou influência sucessivamente para cada uma das excitações,

$$W_s(x_1^s) = f_{c1} G_{cs}(x_1^s - x_1, \omega_1, a_1) + f_{c2} G_{cs}(x_1^s - x_2, \omega_2, a_2) + \dots + f_{c5} G_{cs}(x_1^s - x_5, \omega_5, a_5), \quad (5.1)$$

de maneira genérica para n pontos de excitação, a superposição em frequência pode ser escrita por um somatório,

$$W_s(x_1^s) = \sum_{j=1}^n f_{cj} G_{cs}(x_1^s - x_j, \omega_j, a_j), \quad (5.2)$$

sendo,

- W_s é o deslocamento na direção s ,
- G_{cs} função de Influência ou Green para o domínio estudado,
- f_{cj} a amplitude da excitação em determinado ponto da superfície, c indica a direção da excitação,

- a para o caso de função de influência, é a metade da superfície sobre a qual é aplicada f_j ,
- ω é a frequência da excitação,
- x_1' é a coordenada do ponto no qual é obtida a resposta da superposição,
- x_j são as coordenadas nas quais é aplicada a excitação.

No caso da superposição com o objetivo de modelar a fundação rígida, as frequências de excitação devem ser as mesmas em cada um dos pontos, obtendo, assim, a resposta superposta para cada frequência, de modo que é possível obter a função de resposta em frequência para a fundação.

A superposição, no tempo, segue a mesma linha do processo adotado em frequência; porém, ao contrário do caso anterior, no qual não existe necessidade de conhecer as respostas para as frequências anteriores àquela que está sendo analisada, é preciso conhecer as respostas dos instantes de tempo anteriores, devido à integral de convolução. Assumindo que o comportamento da excitação, f_{ej} , ao longo do tempo é conhecido, assim como a função de resposta ao impulso, $G_{cs}(t)$, é possível obter a resposta para uma das excitações pela integral de convolução,

$$W_s(x_1', t) = \int_0^t G_{cs}(x_1' - x_j, t - \sigma) f_{ej}(\sigma) d\sigma. \quad (5.3)$$

A resposta para o conjunto de excitações é dada pelo somatório:

$$W_s(x_1', t) = \sum_{j=1}^n \int_0^t G_{cs}(x_1' - x_j, t - \sigma) t_{ej}(\sigma) d\sigma. \quad (5.4)$$

No caso deste trabalho, a função de resposta ao impulso, $G_{cs}(t)$, é obtida numericamente com auxílio da transformada discreta inversa de Fourier, como discutido ao longo do capítulo 4, pois a formulação das funções de Green e Influência existentes para meios visco-elásticos foram formuladas no domínio da frequência. A integral de convolução é realizada por métodos numéricos. É possível obter a superposição tanto em frequência, quanto no tempo.

As vantagens e desvantagens de cada uma das abordagens serão discutidas mais adiante.

5.3 Formulação de Fundação Rígida 2D em Frequência

Para uma fundação rígida de superfície, em duas dimensões, inicialmente sem massa, apresentada na figura 5.2, discretizada em n partes de mesma dimensão característica a , submetida às forças verticais, F_z , horizontais, F_x , e ao momento, M_y , é possível obter um sistema matricial que permita obter as reações, f_j , e os deslocamentos, u_o , v_o , ϕ_o , de um ponto de referência da fundação. Essa matriz é construída com o auxílio das equações de equilíbrio, das condições de compatibilidade cinemática e da superposição dos efeitos das funções de influência.

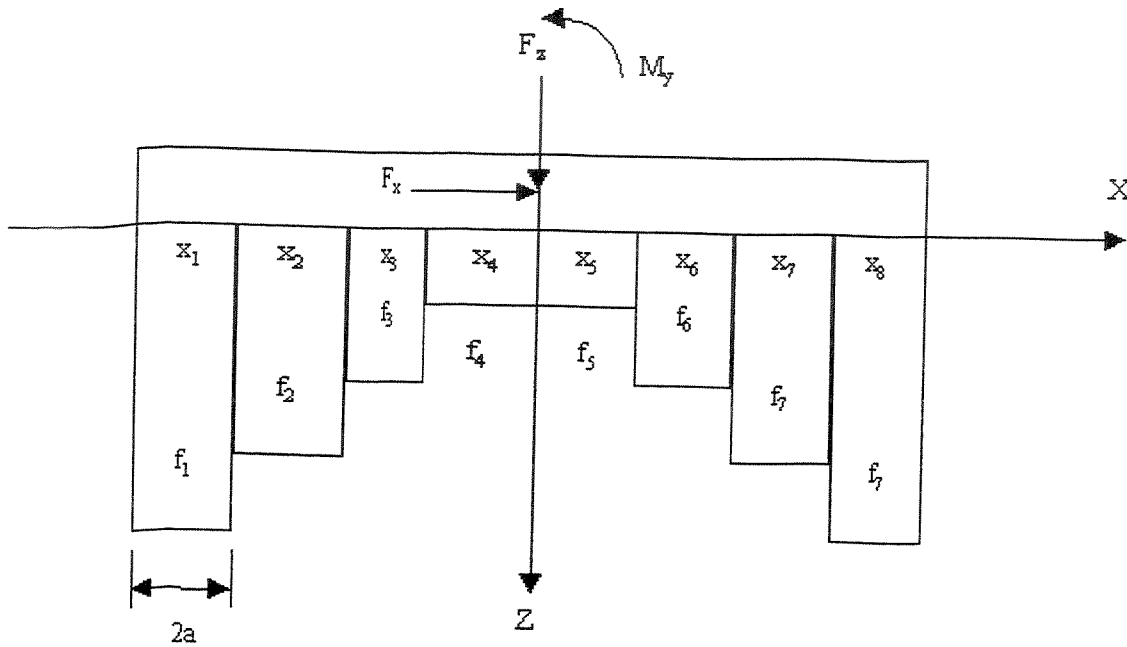


Figura 5.2 Fundação rígida de superfície.

Inicialmente será apresentada a formulação com uso das respostas estacionárias; posteriormente será discutida a montagem com o uso das funções de resposta ao impulso.

Como foi estudado no capítulo 2 e 4, existem funções de influência relacionando deslocamentos vertical, $W_z(x, \omega)$, e horizontal, $U_z(x, \omega)$, com a excitação normal F_z , além dos deslocamentos $W_x(x, \omega)$ e $U_x(x, \omega)$, com a excitação tangencial F_x , explicitados a seguir:

$$\overline{W}_z(x, \omega) = \frac{1}{\pi\mu} \overline{G}_{wz}(x, \omega) \overline{F}_z(x, \omega); \quad (5.5)$$

$$\overline{W}_x(x, \omega) = \frac{1}{\pi\mu} \overline{G}_{wx}(x, \omega) \overline{F}_x(x, \omega); \quad (5.6)$$

$$\overline{U}_z(x, \omega) = \frac{1}{\pi\mu} \overline{G}_{uz}(x, \omega) \overline{F}_z(x, \omega); \quad (5.7)$$

$$\overline{U}_x(x, \omega) = \frac{1}{\pi\mu} \overline{G}_{ux}(x, \omega) \overline{F}_x(x, \omega); \quad (5.8)$$

com o uso das equações (5.5) a (5.8), é possível obter os deslocamentos totais, em um ponto específico, devido às cargas normal e tangencial,

$$\overline{W}_f(x) = \frac{1}{\pi\mu} \overline{G}_{wz}(x, \omega) \overline{F}_z(x, \omega) + \frac{1}{\pi\mu} \overline{G}_{wx}(x, \omega) \overline{F}_x(x, \omega); \quad (5.9)$$

$$\overline{U}_f(x) = \frac{1}{\pi\mu} \overline{G}_{uz}(x, \omega) \overline{F}_z(x, \omega) + \frac{1}{\pi\mu} \overline{G}_{ux}(x, \omega) \overline{F}_x(x, \omega). \quad (5.10)$$

Assumindo um campo de tensões constante ao longo de cada seção da discretização da interface, e aplicando a equação (5.2) para avaliar o efeito de cada uma das tensões, F_j , sobre o ponto x_i , chega-se ao deslocamento total no i -ésimo ponto, devido às excitações ao longo da fundação,

$$\overline{W}_f(x_i) = \sum_{j=1}^n \left[\frac{1}{\pi\mu} \overline{G}_{wz}(x_i, x_j, \omega) \overline{F}_z(x_j, \omega) + \frac{1}{\pi\mu} \overline{G}_{wx}(x_i, x_j, \omega) \overline{F}_x(x_j, \omega) \right]; \quad (5.11)$$

$$\overline{U}_f(x_i) = \sum_{j=1}^n \left[\frac{1}{\pi\mu} \overline{G}_{uz}(x_i, x_j, \omega) \overline{F}_z(x_j, \omega) + \frac{1}{\pi\mu} \overline{G}_{ux}(x_i, x_j, \omega) \overline{F}_x(x_j, \omega) \right]. \quad (5.12)$$

O uso das relações (5.11) e (5.12) sobre todos os pontos nodais da fundação gera um sistema matricial da forma:

$$\begin{Bmatrix} W_f(x_1, \omega) \\ \vdots \\ W_f(x_n, \omega) \\ U_f(x_1, \omega) \\ \vdots \\ U_f(x_n, \omega) \end{Bmatrix} = \frac{1}{\pi\mu} \begin{bmatrix} G_{wz}(x_1, x_1, \omega) & \cdots & G_{wz}(x_1, x_n, \omega) & G_{wx}(x_1, x_1, \omega) & \cdots & G_{wx}(x_1, x_n, \omega) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{wz}(x_n, x_1, \omega) & \cdots & G_{wz}(x_n, x_n, \omega) & G_{wx}(x_n, x_1, \omega) & \cdots & G_{wx}(x_n, x_n, \omega) \\ G_{uz}(x_1, x_1, \omega) & \cdots & G_{uz}(x_1, x_n, \omega) & G_{ux}(x_1, x_1, \omega) & \cdots & G_{ux}(x_1, x_n, \omega) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{uz}(x_n, x_1, \omega) & \cdots & G_{uz}(x_n, x_n, \omega) & G_{ux}(x_n, x_1, \omega) & \cdots & G_{ux}(x_n, x_n, \omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_z(x_1, \omega) \\ \vdots \\ F_z(x_n, \omega) \\ F_x(x_1, \omega) \\ \vdots \\ F_x(x_n, \omega) \end{Bmatrix}; \quad (5.13)$$

que de forma compacta é dado por:

$$\{u_f\} = [G]\{F_f\}, \quad (5.14)$$

sendo,

- $\{u_f\}$ o vetor deslocamento que possui a informação de deslocamento de cada ponto da fundação;
- $[G]_{2N \times 2N}$ a função de influência que relaciona a excitação com o deslocamento;
- $\{F_f\}$ o vetor com as tensões ao longo de cada elemento da fundação.

A matriz $[G]$, matriz de flexibilidade dinâmica da fundação, associa o deslocamento no i -ésimo elemento com a tensão provocada no j -ésimo elemento, é de grande aplicação prática nos problemas de interação solo-estrutura. As aplicações, para essa solução, são apresentadas por Mesquita *et al*, 1995.

A interação entre o solo e a estrutura da fundação é obtida com o uso das condições de compatibilidade cinemática e do equilíbrio de forças atuando no solo e na fundação. Na figura 5.2, observamos que a interface entre o solo e fundação foi discretizada em diversas partes. Os pontos sobre o eixo X indicam os pontos nodais, comuns ao solo e à estrutura, e possuem coordenadas x_i e z_i . Adota-se, como ponto de referência da fundação, o ponto central, com coordenadas x_f e z_f . Neste ponto, são aplicadas as forças externas e medidas as respostas de deslocamento da fundação.

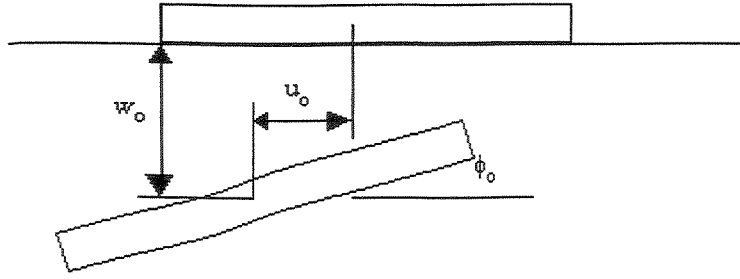


Figura 5.3 Condições de compatibilidade cinemática.

Por se tratar de uma fundação rígida, não ocorre deformação da fundação, apenas um deslocamento de corpo rígido que pode estar acompanhado de rotação; consequentemente os nós devem permanecer alinhados, como pode ser observado na figura 5.3. As condições de compatibilidade cinemática são definidas:

$$\begin{aligned} u_{z_i} &= u_v + \phi_y (x_i - x_f) \\ u_{x_i} &= u_h - \phi_y (z_i - z_f) \end{aligned} \quad (5.15)$$

sendo:

- u_v , u_h , as amplitudes dos deslocamentos vertical e horizontal, no ponto de referência da fundação;
- u_{zi} , u_{xi} , as amplitudes dos deslocamentos vertical e horizontal, nos i -ésimos pontos da fundação, coincidindo com os pontos nodais da discretização;
- ϕ_y a amplitude do ângulo de rotação;
- ω a frequência da excitação;
- x_i , z_i as coordenadas dos pontos de discretização da fundação, os pontos nodais;
- x_f , z_f as coordenadas do ponto de referência da fundação.

Aplicando as condições de compatibilidade cinemática em cada um dos pontos nodais, pode ser escrito um sistema matricial na forma geral,

$$\begin{Bmatrix} u_{zi} \\ \vdots \\ u_{zn} \\ u_{xi} \\ \vdots \\ u_{xn} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & (x_i - x_f)/a \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & (x_n - x_f)/a \\ 0 & 1 & -(z_i - z_f)/a \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & -(z_n - z_f)/a \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_v \\ u_h \\ \phi_y a \end{Bmatrix} \quad (5.16)$$

sendo n o número de pontos utilizados para discretizar a fundação. Na forma compacta, o sistema de (5.16) é dada por:

$$\{u_f\} = [CC]\{u_{ref}\}, \quad (5.17)$$

sendo $[CC]_{2N \times 3}$ a matriz de compatibilidade cinemática.

Da condição de equilíbrio de forças, sabe-se que:

$$F_v = \sum_{i=1}^n F_{z_i}; \quad (5.18)$$

$$F_h = \sum_{i=1}^n F_{x_i}; \quad (5.19)$$

$$M_y = \sum_{i=1}^n F_{z_i} (x_i - x_f) - F_{x_i} (z_i - z_f); \quad (5.20)$$

sendo, F_{z_i} e F_{x_i} as forças vertical e horizontal, respectivamente, aplicadas sobre cada ponto i da fundação, e M_y o momento em torno do eixo y .

Aplicando as relações (5.18) a (5.20), considerando os n pontos da fundação, é obtido um sistema matricial de equilíbrio de forças atuantes sobre a fundação, que possui a forma geral:

$$\begin{Bmatrix} F_v \\ F_h \\ M_y/a \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 \\ (x_i - x_f)/a & \dots & (x_n - x_f)/a & -(z_i - z_f)/a & \dots & -(z_n - z_f)/a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{z_i} \\ \vdots \\ F_{z_n} \\ F_{x_i} \\ \vdots \\ F_{x_n} \end{Bmatrix}; \quad (5.21)$$

que de forma compacta é dado por:

$$\{F_{ext}\} = [EQ]\{F_f\}, \quad (5.22)$$

sendo que $[EQ]_{3 \times 2N}$ é a matriz de equilíbrio de forças da fundação.

Para gerar um sistema que represente o problema de interação solo-estrutura, devemos agrupar os sistemas matriciais apresentados em (5.14), (5.17) e (5.22). Relacionando as equações que resultam em deslocamento dos pontos nodais, ou seja, as de compatibilidade cinemática (5.15) e as que fornecem o deslocamento em função da excitação aplicada (5.11) e (5.12), obtém-se dessa maneira:

$$\overline{W}_f(x_i) = \sum_{j=1}^n \left[\frac{1}{\pi\mu} \overline{G}_{wz}(x_i, x_j, \omega) \overline{F}_z(x_j, \omega) + \frac{1}{\pi\mu} \overline{G}_{wx}(x_i, x_j, \omega) \overline{F}_x(x_j, \omega) \right] = u_v + (x_i - x_f)/a\phi_y a; \quad (5.23)$$

$$\overline{U}_f(x_i) = \sum_{j=1}^n \left[\frac{1}{\pi\mu} \overline{G}_{uz}(x_i, x_j, \omega) \overline{F}_z(x_j, \omega) + \frac{1}{\pi\mu} \overline{G}_{ux}(x_i, x_j, \omega) \overline{F}_x(x_j, \omega) \right] = u_h - (z_i - z_f)/a\phi_y a; \quad (5.24)$$

que resulta,

$$\sum_{j=1}^n \left[\frac{1}{\pi\mu} \overline{G}_{wz}(x_i, x_j, \omega) \overline{F}_z(x_j, \omega) + \frac{1}{\pi\mu} \overline{G}_{wx}(x_i, x_j, \omega) \overline{F}_x(x_j, \omega) \right] - u_v - (x_i - x_f)/a\phi_y a = 0; \quad (5.25)$$

$$\sum_{j=1}^n \left[\frac{1}{\pi\mu} \overline{G}_{uz}(x_i, x_j, \omega) \overline{F}_z(x_j, \omega) + \frac{1}{\pi\mu} \overline{G}_{ux}(x_i, x_j, \omega) \overline{F}_x(x_j, \omega) \right] - u_h + (z_i - z_f)/a\phi_y a = 0. \quad (5.26)$$

As relações (5.25) e (5.26) podem ser escritas de forma matricial,

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\pi\mu} \overline{G}_{wz}(x_i, x_j) & \frac{1}{\pi\mu} \overline{G}_{wx}(x_i, x_j) & -1 & 0 & -(x_i - x_f)/a \\ \frac{1}{\pi\mu} \overline{G}_{uz}(x_i, x_j) & \frac{1}{\pi\mu} \overline{G}_{ux}(x_i, x_j) & 0 & -1 & (z_i - z_f)/a \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \overline{F}_z(x_j) \\ \overline{F}_x(x_j) \\ u_v \\ u_h \\ \phi_y a \end{Bmatrix} = \{0\}. \quad (5.27)$$

Para que o sistema da fundação tenha solução, é necessário inserir as condições de equilíbrio de forças definidas em (5.21), de modo que o sistema passa a ser:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\pi\mu} \overline{G_{wz}}(x_i, x_j) & \frac{1}{\pi\mu} \overline{G_{wx}}(x_i, x_j) & -1 & 0 & -(x_i - x_f)/a \\ \frac{1}{\pi\mu} \overline{G_{uz}}(x_i, x_j) & \frac{1}{\pi\mu} \overline{G_{ux}}(x_i, x_j) & 0 & -1 & (z_i - z_f)/a \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (x_i - x_f)/a & -(z_i - z_f)/a & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \overline{F_z}(x_j) \\ \overline{F_x}(x_j) \\ \overline{u_v} \\ \overline{u_h} \\ \overline{\phi_y} a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_v \\ F_h \\ M_y/a \end{Bmatrix} \quad (5.28)$$

O sistema matricial da fundação rígida pode, ainda, ser apresentado na forma compacta,

$$\begin{bmatrix} G & CC \\ EQ & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_f \\ u_{ref} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_{ext} \end{Bmatrix}, \quad (5.29)$$

na qual:

- u_{ref} é o vetor com os deslocamentos no ponto de referência da fundação, ou seja, os graus de liberdade da fundação rígida;
- F_{ext} é o vetor com cargas externas aplicadas, isto é, sobre o corpo rígido que define a fundação;
- F_f é o vetor com as forças reativas em cada um dos trechos da fundação, ou seja, as forças que atuam na interface solo-estrutura;
- CC é a matriz de compatibilidade cinemática;
- EQ é a matriz de equilíbrio de forças;
- G é a matriz com as funções de flexibilidade da fundação.

O sistema definido em (5.29) é $2N+3$ por $2N+3$.

5.3.1 Normalização da resposta da fundação rígida em frequência sem massa

É possível obter um sistema normalizado, independente do sistema de unidades, gerando, assim, respostas adimensionais para a fundação rígida. Inicialmente, as forças externas devem ser aplicadas isoladamente, isto é, se o carregamento normal $F_v \neq 0$, o carregamento tangencial e o

momento atuante são nulos, $F_h = 0$ e $M_y = 0$. Aplicando este procedimento, considerando apenas a excitação normal e dividindo as equações (5.25) e (5.26) pela amplitude da carga vertical F_z , obtém-se:

$$\sum_{j=1}^n \left[\frac{1}{\pi\mu} \overline{G_{wz}}(x_i, x_j, \omega) \frac{\overline{F_z}(x_j, \omega)}{F_z} + \frac{1}{\pi\mu} \overline{G_{wx}}(x_i, x_j, \omega) \frac{\overline{F_x}(x_j, \omega)}{F_z} \right] - \frac{1}{F_z} u_v - \frac{1}{F_z} (x_i - x_f) / a \phi_y a = 0; \quad (5.30)$$

$$\sum_{j=1}^n \left[\frac{1}{\pi\mu} \overline{G_{uz}}(x_i, x_j, \omega) \frac{\overline{F_z}(x_j, \omega)}{F_z} + \frac{1}{\pi\mu} \overline{G_{ux}}(x_i, x_j, \omega) \frac{\overline{F_x}(x_j, \omega)}{F_z} \right] - \frac{1}{F_z} u_h + \frac{1}{F_z} (z_i - z_f) / a \phi_y a = 0. \quad (5.31)$$

Definindo as tensões normalizadas por,

$$\overline{k_{zzj}} = \frac{\overline{\sigma_{zj}}}{\overline{\sigma_z}} = \frac{\overline{F_z}(x_j)}{F_z} \frac{a}{a_j}; \quad (5.32)$$

$$\overline{k_{xxj}} = \frac{\overline{\sigma_{xj}}}{\overline{\sigma_x}} = \frac{\overline{F_x}(x_j)}{F_x} \frac{a}{a_j}; \quad (5.33)$$

sendo, a_j a largura das seções utilizadas para discretizar a fundação, e $d_j = a_j/a$. Considerando essas definições nas equações (5.30) e (5.31) e multiplicando todos os termos por $\pi\mu$, de modo que sejam obtidas as relações:

$$\sum_{j=1}^n \left[\overline{k_{zzj}} d_j \overline{G_{wz}}(x_i, x_j, \omega) + \overline{k_{xxj}} d_j \overline{G_{wx}}(x_i, x_j, \omega) \right] - \frac{\pi\mu}{F_z} u_v - \frac{\pi\mu}{F_z} (x_i - x_f) / a \phi_y a = 0; \quad (5.34)$$

$$\sum_{j=1}^n \left[\overline{k_{zzj}} d_j \overline{G_{uz}}(x_i, x_j, \omega) + \overline{k_{xxj}} d_j \overline{G_{ux}}(x_i, x_j, \omega) \right] - \frac{\pi\mu}{F_z} u_h + \frac{\pi\mu}{F_z} (z_i - z_f) / a \phi_y a = 0. \quad (5.35)$$

As amplitudes também podem ser normalizadas com auxílio do fator $\pi\mu/F_z$, assim os deslocamentos verticais, horizontais e a rotação passam a ser,

$$\overline{u_{vN}} = \frac{\overline{u_v} \pi\mu}{F_z}; \quad (5.36)$$

$$\bar{u}_{hN} = \frac{\bar{u}_h \pi \mu}{\bar{F}_z}; \quad (5.37)$$

$$\bar{\phi}_{yN} a = \frac{\bar{\phi}_y a \pi \mu}{\bar{F}_z}. \quad (5.38)$$

Substituindo os deslocamentos normalizados nas equações (5.34) e (5.35), simplificando as relações obtidas, é possível mostrar que

$$\sum_{j=1}^n [\bar{k}_{zzj} d_j \bar{G}_{wz}(x_i, x_j, \omega) + \bar{k}_{xxj} d_j \bar{G}_{wx}(x_i, x_j, \omega)] - u_{vN} - (x_i - x_f)/a \phi_{yN} a = 0; \quad (5.39)$$

$$\sum_{j=1}^n [\bar{k}_{zzj} d_j \bar{G}_{uz}(x_i, x_j, \omega) + \bar{k}_{xxj} d_j \bar{G}_{ux}(x_i, x_j, \omega)] - u_{hN} + (z_i - z_f)/a \phi_{yN} a = 0. \quad (5.40)$$

Essas equações podem ser escritas matricialmente, e o sistema final para fundação rígida passa a ser,

$$\begin{bmatrix} d_j \bar{G}_{wz}(x_i, x_j) & d_j \bar{G}_{wx}(x_i, x_j) & -1 & 0 & -(x_i - x_f)/a \\ d_j \bar{G}_{uz}(x_i, x_j) & d_j \bar{G}_{ux}(x_i, x_j) & 0 & -1 & (z_i - z_f)/a \\ 1d_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1d_j & 0 & 0 & 0 \\ d_j (x_i - x_f)/a & -d_j (z_i - z_f)/a & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{k}_{zzj} \\ \bar{k}_{xxj} \\ u_{vN} \\ u_{hN} \\ \phi_{yN} a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (5.41)$$

O sistema pode ser apresentado na forma compacta,

$$\begin{bmatrix} G_N & CC \\ EQ & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{k}_N \\ u_{refN} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_{extN} \end{Bmatrix}, \quad (5.42)$$

na qual

- u_{refN} é o vetor com os deslocamentos normalizados no ponto de referência da fundação, ou seja, os graus de liberdade da fundação rígida;
- F_{ext} é o vetor com cargas externas aplicadas, isto é, sobre o corpo rígido que define a fundação; podendo ser $\{1 \ 0 \ 0\}$ para força vertical, $\{0 \ 1 \ 0\}$ para horizontal e $\{0 \ 0 \ 1\}$

para momento normalizado. Aplicando individualmente cada um desses vetores sobre o sistema (5.42), são obtidas as respostas da fundação rígida normalizada.

- k_n é o vetor normalizado com as forças reativas em cada um dos trechos da fundação, ou seja, as forças que atuam na interface solo-estrutura;
- CC é a matriz de compatibilidade cinemática;
- EQ é a matriz de equilíbrio de forças;
- G é a matriz com as funções de flexibilidade da fundação.

Após considerar todas as excitações individualmente, é obtida a matriz de flexibilidade do sistema, relacionando as forças externas com os deslocamentos, que possui a forma

$$\begin{Bmatrix} W_z \\ U_x \\ \phi_y a \end{Bmatrix} = \frac{1}{\pi\mu} \begin{bmatrix} N_{wz} & N_{uz} & N_{\phi z} \\ N_{wx} & N_{ux} & N_{\phi x} \\ N_{wy} & N_{uy} & N_{\phi y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_z \\ F_x \\ F_y / a \end{Bmatrix} \quad (5.43)$$

Para o caso das fundações 2D, é apresentada uma discussão no trabalho de Mesquita Neto (1989), que mostra que, para uma fundação com contato suavizado, os termos da matriz de flexibilidade, que relacionam a força vertical com deslocamento horizontal e rotação, são nulos, assim como os que relacionam a excitação horizontal e o momento com o deslocamento vertical, ou seja, $N_{wx} = N_{wy} = N_{uz} = N_{\phi z} = 0$, de modo que,

$$\begin{Bmatrix} W_z \\ U_x \\ \phi_y a \end{Bmatrix} = \frac{1}{\pi\mu} \begin{bmatrix} N_{wz} & 0 & 0 \\ 0 & N_{ux} & N_{\phi x} \\ 0 & N_{uy} & N_{\phi y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_z \\ F_x \\ F_y / a \end{Bmatrix}, \quad (5.44)$$

é possível mostrar que $N_{\phi x} = N_{uy}$, ou seja, aplicando uma força tangencial é provocada uma rotação na fundação, do mesmo modo que ocorre um deslocamento em x quando é aplicada um momento.

5.3.2 Síntese Numérica para Resposta Transiente de Fundação Modelada em Frequência

A resposta transiente para a fundação rígida pode ser obtida com o auxílio da transformada inversa de Fourier, como apresentando por Adolph et al. (2001) para a função de flexibilidade $N_{wz}(\omega)$. Ao longo dessa sessão, são apresentadas técnicas e metodologias necessárias para que seja possível obter a resposta transiente da fundação rígida modelada em frequência.

A determinação numérica das funções de flexibilidade para fundação rígida apresenta alto custo computacional. Por outro lado, a física, os fatores críticos, dos problemas de interação solo-estrutura está na faixa $0 < A\omega < 10$ (Gazetas, 1983), $A\omega$ é a frequência adimensional dada por $A\omega = \omega A/c_s$, onde c_s é a velocidade de propagação da onda cisalhante no meio elástico. Para a função de flexibilidade $N_{wz}(A\omega)$, que relaciona carga normal com deslocamento vertical, é esperado um decaimento assintótico monotônico em função da frequência $A\omega$. A figura 5.4 apresenta as componentes real e imaginária de $N_{wz}(A\omega)$, para solo com coeficiente de Poisson $\nu=1/3$ e coeficiente de amortecimento histerético constante $\eta=0,01$. Verifica-se, pela figura 5.4, que o processo de integração numérica falha na parte real para $A\omega > 16$, e $A\omega > 30$ na componente imaginária. É necessário salientar que as altas frequências não são importantes do ponto de vista da resposta dinâmica, mas uma necessidade matemática para tornar possível a transformada inversa de Fourier. As respostas estacionárias, obtidas a partir dos trabalhos de Mesquita Neto (1989), Almeida Barros (1997), podem ser estendidas a faixas de frequências elevadas se comparado com os trabalhos encontrados na literatura, mostrando a capacidade dos processos de integração.

Neste trabalho, é apresentada uma metodologia alternativa para obter respostas precisas para pequenos passos em frequência $\Delta\omega$ e grandes frequências de amostragem ω_{max} . Nas baixas frequências, é utilizada a interpolação spline cúbica. Nas frequências mais altas, onde o processo de integração falha (vide figura 5.4), a função será extrapolada. Esses serão os procedimentos discutidos a seguir. A figura 5.5 apresenta, esquematicamente, as faixas de ajuste para a função de flexibilidade N_{wz} .

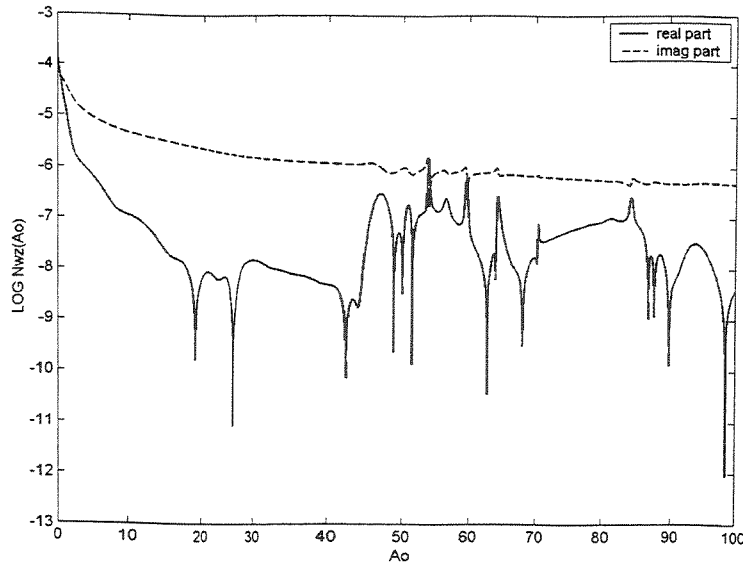


Figura 5.4 – Componentes reais e imaginária de N_{wz} para $\nu=1/3$ e $\eta=0,01$.

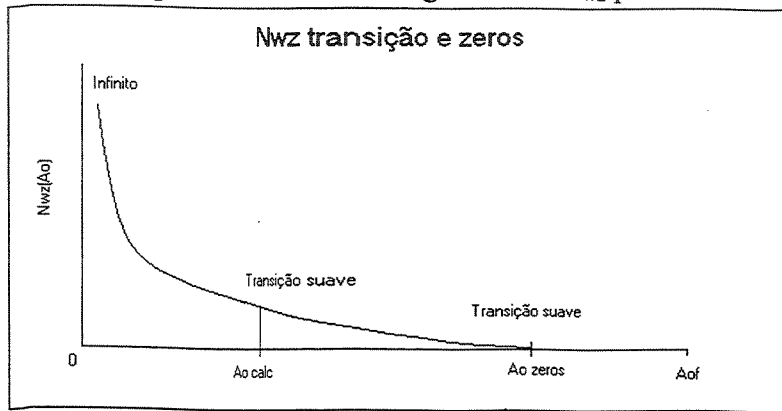


Figura 5.5 – Esquema de interpolação para função de flexibilidade $N_{wz}(Ao)$.

Na faixa $0 < Ao < Ao_{calc}$ apresentada na figura 5.5, a função de flexibilidade é determinada numericamente para um passo em frequência $\Delta Ao = 0,05$. Entre esses valores é ajustada uma interpolação spline cúbica. Isso permite que N_{wz} seja determinada com um passo ΔAo arbitrário, tão pequeno quanto se deseja a custos computacionais muito baixos. A figura 5.6 apresenta os resultados obtidos por interpolação para N_{wz} para o valor arbitrário $\Delta Ao = 0,025$, obtido a partir do passo original de $\Delta Ao = 0,05$. Os resultados tanto para parte imaginária quanto para a parte real apresentam boa concordância.

Como pode ser observado na figura 5.4, o processo de integração numérica para as partes real e imaginária falha a frequência relativamente elevadas. Para a parte real o comportamento de decaimento monotônico é relativamente rápido, mas o método falha para frequências $Ao > 16$. Por

outro lado o comportamento monotônico da parte imaginária é interrompido para frequências $Ao > 30$. Estes são os limites de frequência, Ao_{calc} usados para determinar os valores de N_{wz} por integração numérica. Acima destes valores de frequência, a função de flexibilidade N_{wz} pode, também, ser obtida por interpolação spline. É assumido que para uma frequência Ao_{zero} a função desaparece, $N_{wz} = 0$ (como mostra a figura 5.5). Assim, entre $Ao_{calc} < Ao < Ao_{zeros}$ a função é interpolada por spline cúbica. A spline cúbica é capaz de fornecer uma transição suave entre Ao_{calc} e Ao_{zeros} . A faixa entre $Ao_{zeros} < Ao < Ao_{final}$ é preenchida com zeros.

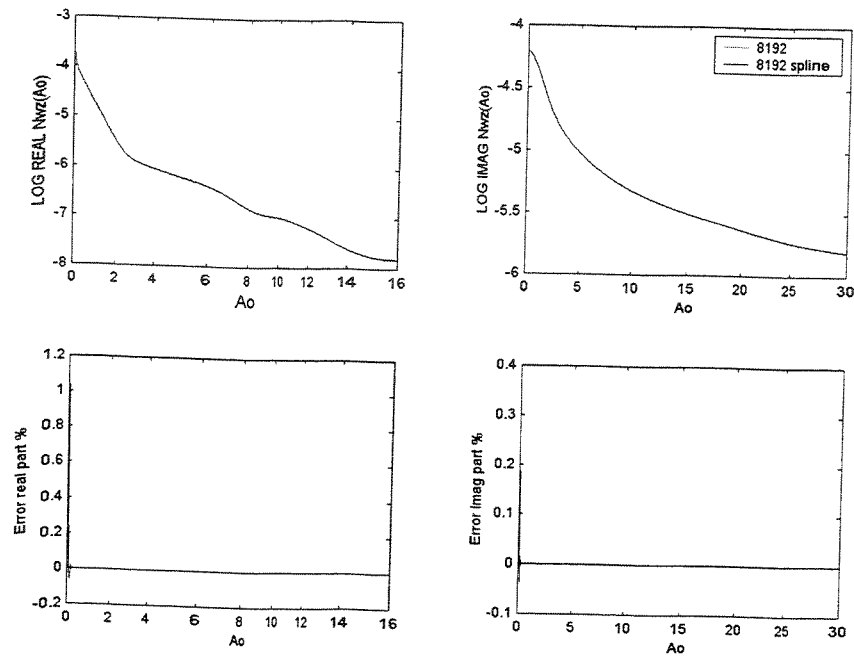


Figura 5.6 Erro da interpolação spline para a função de flexibilidade N_{wz} para as baixas frequências.

A influência dos parâmetros Ao_{calc} e Ao_{final} sobre a resposta transiente é investigada a seguir. As figuras 5.7 e 5.8 apresentam o ajuste das partes reais e imaginária da função N_{wz} . Essas funções serão submetidas à transformada inversa de Fourier, com uso do algoritmo da FFT, obtendo assim a resposta no domínio do tempo. Para a parte real a interpolação, que fornece a transição, foi realizada utilizando $Ao_{calc} = 16$ e $Ao_{zeros} = 55$. Já para a parte imaginária, figura 5.8, a faixa de para interpolação variou entre $40 < Ao_{zeros} < 130$. O parâmetro Ao_{zeros} variando de $Ao_{zero} = 40$ a $Ao_{zeros} = 130$ é fornecido na legenda da figura 5.8.

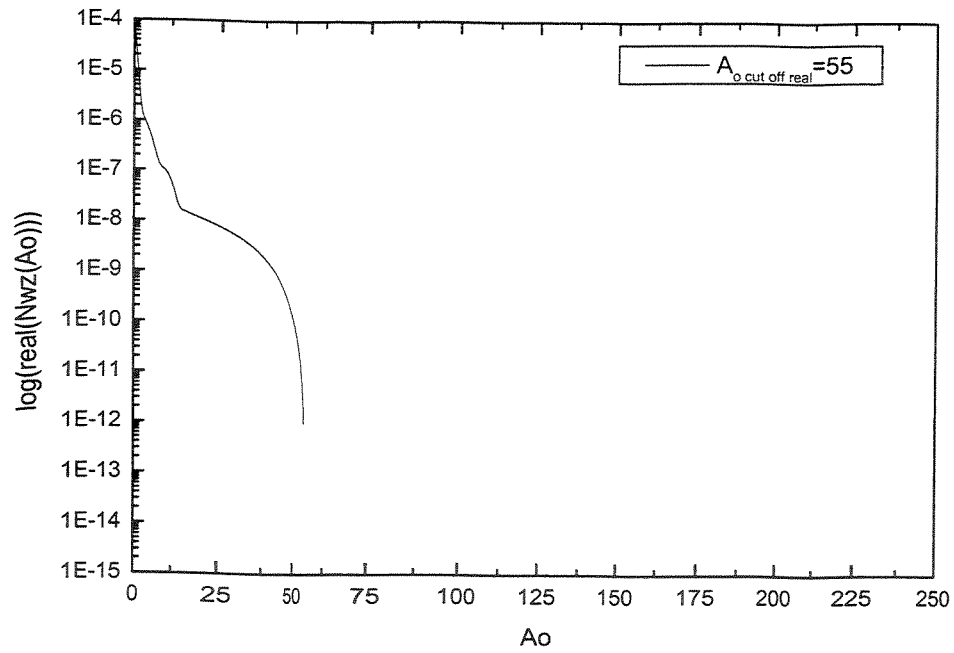


Figura 5.7 Parte real da função interpolada N_{wz} .

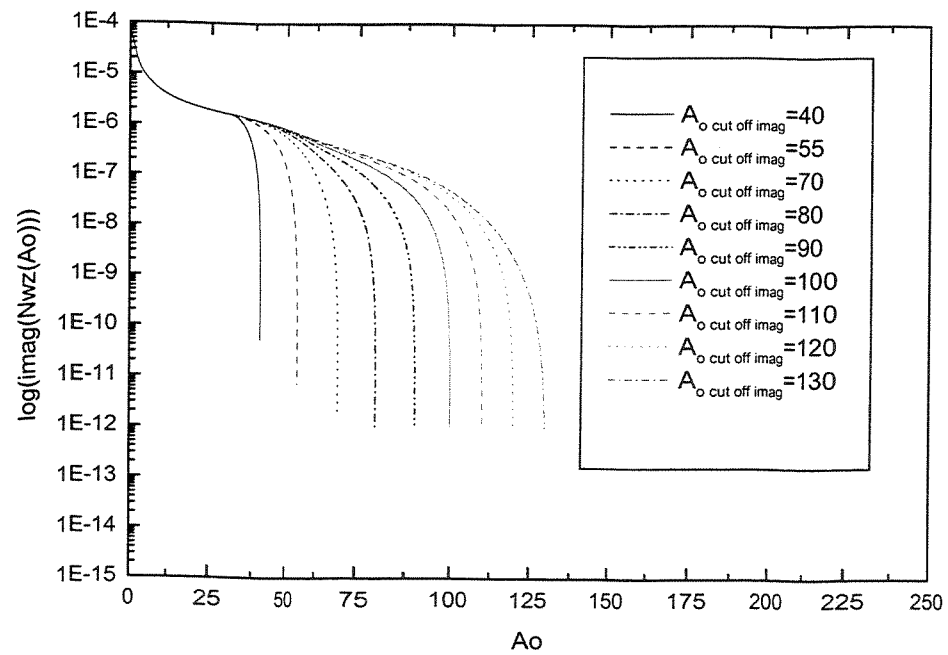


Figura 5.8 Parte imaginária da função N_{wz} interpolada, com $A_{o\text{calc}} = 40$ e valores distintos de $A_{o\text{zeros}}$.

O efeito do parâmetro Ao_{zeros} sobre a resposta transiente da fundação rígida é investigado agora. A figura 5.9 apresenta a resposta de uma fundação rígida de superfície submetida a um delta de Dirac $F_z(t)=\delta(t)$, aplicado no instante $t=0$. Os parâmetros assumidos foram: $\nu=1/3$, $\eta=0,01$, $A=2,5ft$. Pode ser observado que o efeito da frequência de transição Ao_{zeros} não parece ser tão significativa. A Figura 5.10 fornece o mesmo resultado, porém a escala de tempo é aumentada significativamente. É possível notar que ocorre uma convergência com o aumento da frequência de transição Ao_{zeros} . Uma vez que é atingida a convergência com respeito a Ao_{zeros} a interpolação entre Ao_{calc} e Ao_{zeros} está finalizada.

A etapa seguinte é a investigação da influência da faixa de frequência $Ao_{zeros} < Ao < Ao_{final}$, na qual é assumido que a resposta desaparece, $N_{wz}=0$. Teoricamente essas frequências estão relacionadas apenas a passos de tempo Δt menores na resposta transiente $W_z(t)$. A figura 5.11 mostra o efeito do valor de Ao_{final} sobre a resposta transiente $W_z(t)$, quando a fundação é submetida ao delta de Dirac. Os resultados apresentados nas figuras 5.11 e 5.12 são para os valores de Ao_{final} : 54,2; 102,4; 204,8; 409,6 e 816,2, que correspondem, respectivamente, a 2048, 4096, 8192, 16384 e 32768 pontos em frequência. A figura 5.12 apresenta os resultados para os passos iniciais de tempo. Pode ser observado que o efeito da adição de zeros, nas altas faixas de frequência da função de flexibilidade $N_{wz}(Ao)$, está ligado apenas a menores passos de tempo. Esta figura também mostra a precisão que pode ser obtida na resposta transiente com o uso dessa metodologia.

Já é bem conhecido que as funções de flexibilidade para fundações rígidas 2D apresenta singularidade quando a frequência tende ao valor estático, $Ao \Rightarrow 0$. Isso corresponde a um movimento de corpo rígido do semi-espço 2D (Luco e Westmann, 1972). Para aplicar a transformada inversa de Fourier numericamente, é necessário um valor definido para a função de flexibilidade na frequência $Ao=0$, $N_{wz}(Ao)$. Da teoria da FFT, é sabido que esse valor estático contribui com um movimento de corpo rígido, ou o que é chamado de nível “DC” (Newland, 1993). Foi realizada uma investigação para avaliar o efeito da função de flexibilidade “estática” sobre a resposta transiente. Para avaliar esse efeito, foram gerados valores estáticos $N_{wz}(Ao=0)=2^n$ ($n=0,1,2,...,10$), que foram inseridos na parte real da função N_{wz} dada na figura 5.7. A figura 5.12 mostra a resposta transiente determinada para valores crescentes de $N_{wz}(Ao=0)$. Esta análise revela que a influência do valor “estático” ou “nível DC” é restrita ao movimento de

corpo rígido, isto é, adiciona unicamente um valor constante a resposta. É, então, possível eliminar a resposta de corpo rígido da resposta final, definindo que:

$$W_z(t) = W_{zFFT}(t) - W_{zFFT}(t_{\max}). \quad (5.45)$$

Na equação (5.41), $W_z(t)$ é a resposta sem o efeito de corpo rígido, induzido pela singularidade em frequência. O termo $W_{zFFT}(t)$ é a resposta vertical transiente obtida pelo processo de FFT para um valor estático de $N_{wz}(A_0=0)$, e a resposta $W_{zFFT}(t_{\max})$ representa o deslocamento de corpo rígido a ser subtraído.

Após essas investigações numéricas terem sido concluídas, passa a ser possível gerar a resposta transiente para grandes períodos de tempo ou pequenos passos de tempo, sem a influência de movimentos de corpo rígido estacionários 2D.

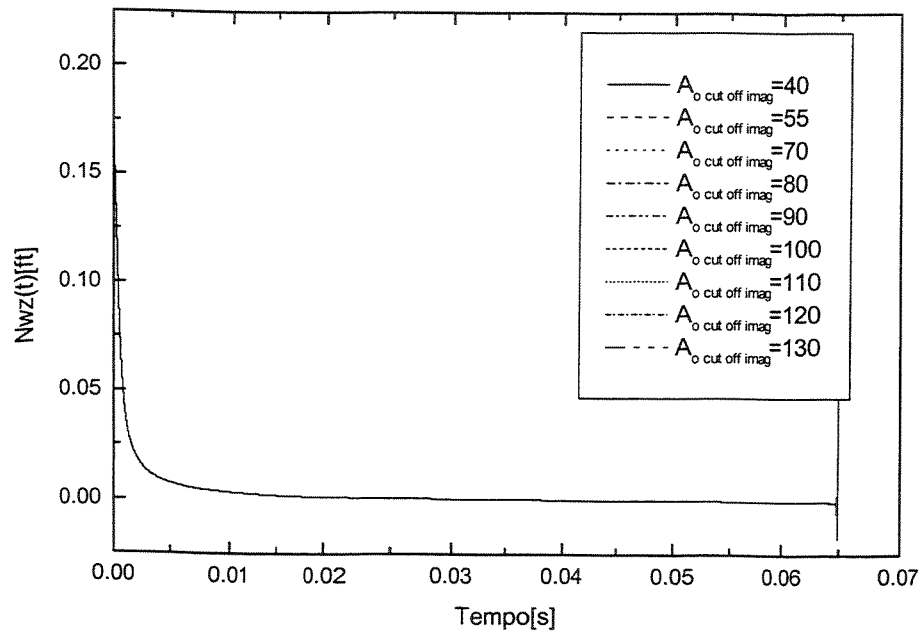


Figura 5.9 – Resposta vertical transiente da fundação $W_z(t)$ excitada pelo Delta de Dirac.

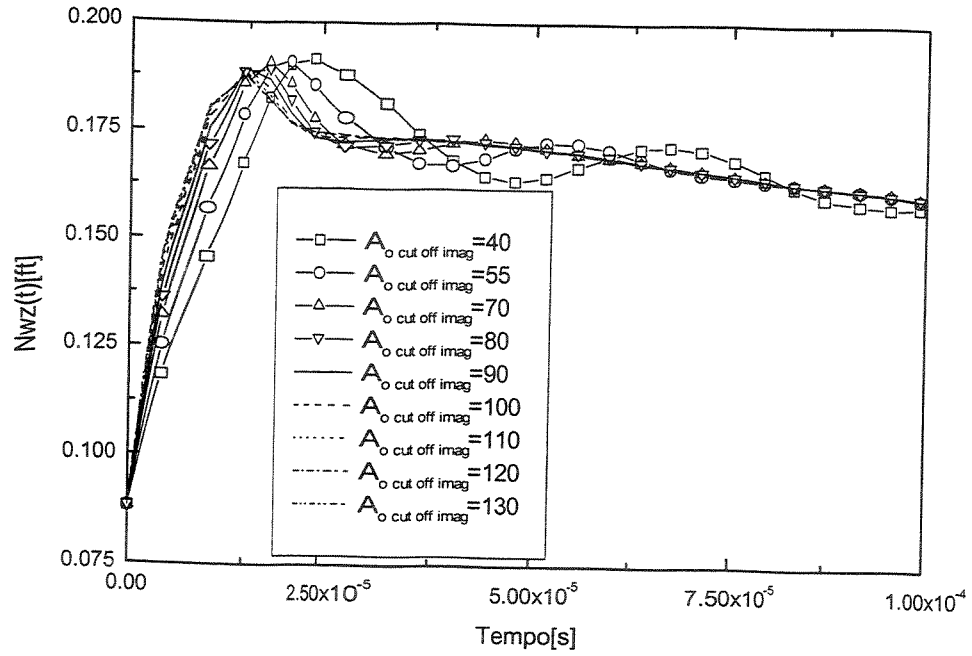


Figura 5.10 – Detalhe da resposta vertical transiente da fundação $W_z(t)$ excitada pelo Delta de Dirac, em função da frequência de transição $A_{o_{zeros}}$.

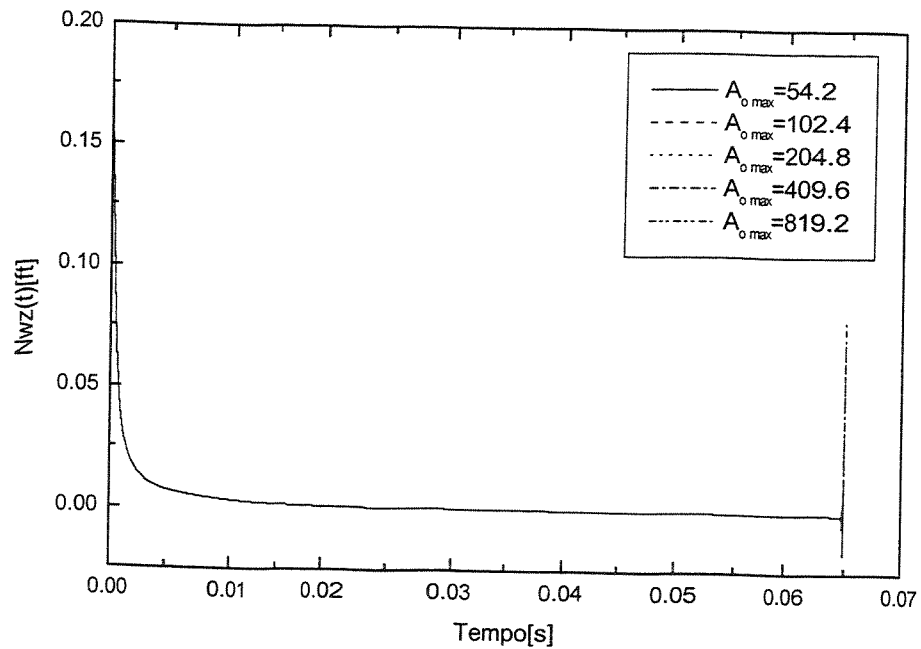


Figura 5.11 – Resposta transiente $W_z(t)$ para fundação excitada por um Delta de Dirac e valores distintos de A_{of} .

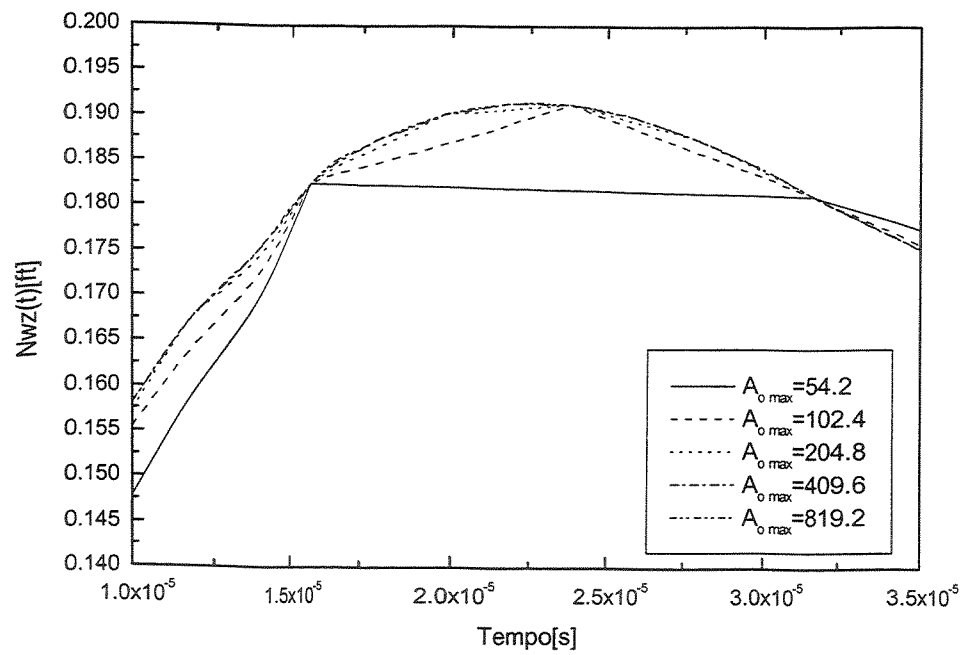


Figura 5.12 – Detalhe da resposta transiente $W_z(t)$ para fundação excitada por um Delta de Dirac e valores distintos de A_{0f} .

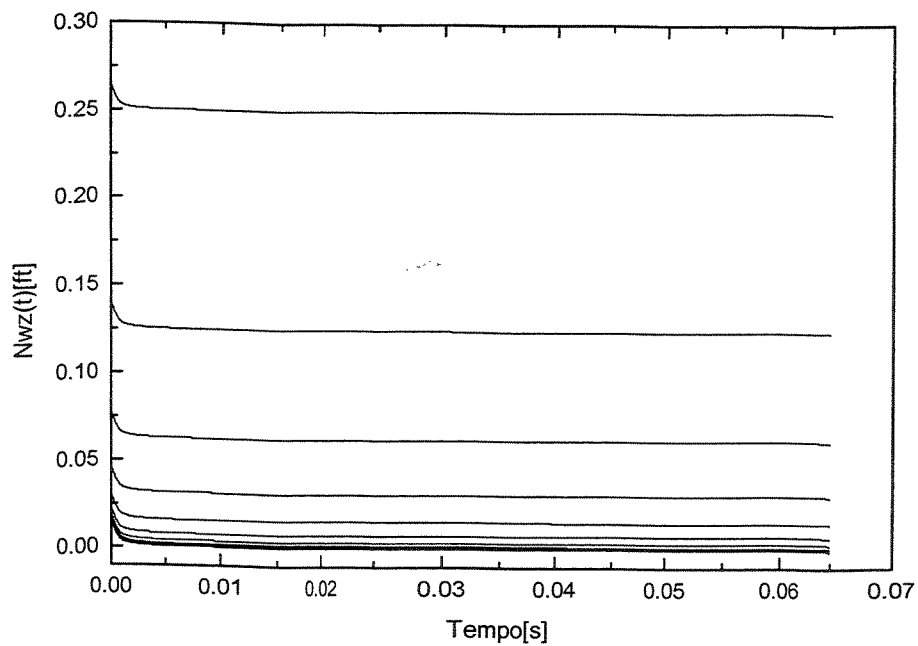


Figura 5.13 – Efeito do valor da resposta estacionária estática $N_{wz}(A_0=0)$ sobre a resposta transiente $W_z(t)$.

5.3.3 Resumo dos procedimentos necessários para obtenção da resposta transiente

Na sessão anterior, foram apresentadas as investigações realizadas para a obtenção de respostas transientes de fundações rígidas de superfície. O caso estudado foi a resposta vertical da fundação devido a uma excitação normal à superfície. Entretanto, esses procedimentos podem ser facilmente estendidos às outras respostas. É possível obter as respostas para excitação tangencial e, ainda, para fundação submetida a um momento, ou a combinação dessas excitações. Os procedimentos são idênticos àqueles demonstrados anteriormente.

Na figura 5.14, é apresentado o fluxograma de procedimentos e etapas de processamento para obtenção da resposta transiente de uma fundação, podendo esta ser de qualquer tipo. Inicialmente é calculada a resposta estacionária com passo e limites de frequência arbitrários. Nesta etapa, os modelos de amortecimento e o valor são impostos. Após concluídos os cálculos, as componentes real e imaginária da função de resposta em frequência são visualizadas, permitindo a definição do ponto de corte, a partir do qual a integração numérica falha. Nos casos em que se deseja aumentar o período de análise, é necessária a interpolação spline. Deve ser feito um estudo do erro que a spline causa para o passo em frequência imposto inicialmente, caso esse erro extrapole o permitido, é preciso recalcular a resposta em frequência para os valores interpolados, reduzindo o passo em frequência no processo de integração numérica. Quando a diferença entre o valor interpolado e o calculado for satisfatório, é possível partir para etapa seguinte.

Uma vez concluída a etapa inicial, que é a análise da resposta estacionária, é preciso impor a faixa de transição $\Delta\omega_{zers}$. Cria-se um vetor de carga, e caso se opte por aplicar o processo para obter a resposta a carga arbitrária em frequência, é necessário aplicar a FFT à excitação, realizar o produto pela função de resposta em frequência, seguida pela transformada inversa. A análise da resposta transiente definirá se a faixa de transição foi adequada. Caso não tenha sido, essa deverá ser redefinida.

Nos casos em que é necessária ou desejada a resposta pela integral de convolução, a análise para definição do ponto de transição pode ser sobre a função de resposta ao impulso, obtida pela IFFT da função de resposta em frequência, procedimento este que é mais recomendado, devido ao alto custo computacional da convolução no tempo.

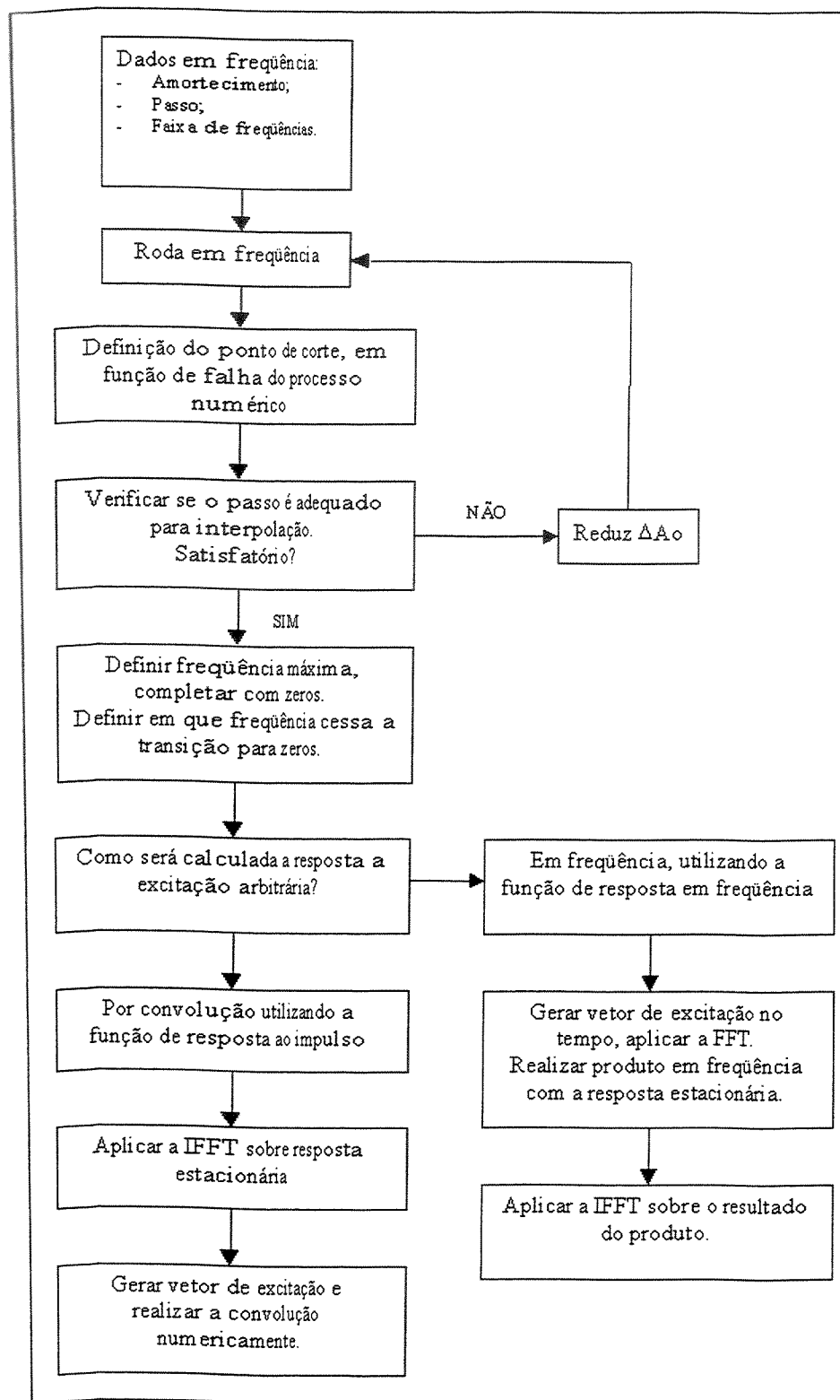


Figura 5.14 – Fluxograma de procedimentos para obtenção de respostas transientes de fundações rígidas a partir da função de resposta em frequência.

5.3.4 Resultados Numéricos para Fundação Rígida sem Massa Modelada em Frequência

Nesta sessão, a metodologia descrita ao longo do capítulo será aplicada com o objetivo de validá-la, e, ainda, determinar a influência dos modelos de amortecimento sobre a resposta transiente. Serão apresentados os resultados para deslocamento vertical de uma fundação rígida de superfície, submetida a excitação normal ao plano da fundação.

Todas as análises foram realizadas considerando uma fundação rígida de superfície, como na figura 5.15, com comprimento $2A=5ft$, repousando sobre o solo com os seguintes parâmetros: módulo de elasticidade $E=2,58984 \times 10^9 \text{ lb/ft}^2$ ($1,24 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$), densidade de massa $\rho=10,386\text{lb/sec}^2$ ($5362,45\text{kg/m}^3$) e coeficiente de Poisson $\nu=1/3$. Essas propriedades para solo e modelo de fundação foram utilizados por Spyrakos e Antes (1986) e Spyrakos e Beskos (1986), para demonstrar a formulação de elementos de contorno no domínio no tempo que desenvolveram (T-BEM). A interface entre a fundação e o solo foi discretizada em 16 elementos. A frequência final foi fixada em $Ao_{final}=204,8$, e foram utilizados 8192 termos em frequência, de modo que o passo foi $\Delta Ao=0,025$. O valor da integral foi calculado para $Ao_{zeros}=100$, considerando a transição. A resposta transiente é obtida para $T_{max}=0,0649s$, com passo de tempo $\Delta t=3,9624 \times 10^{-6}s$.

Foram investigados três modelos distintos de amortecimento, chamados de modelo de amortecimento histerético constante, modelo de Kelvin-Voigt e um modelo de amortecimento em rampa. A dependência da frequência dos modelos de amortecimento $\eta(Ao)$ analisados pode ser visualizada na figura 5.16. As equações que regem os modelos de amortecimento são apresentadas na tabela 5.1.

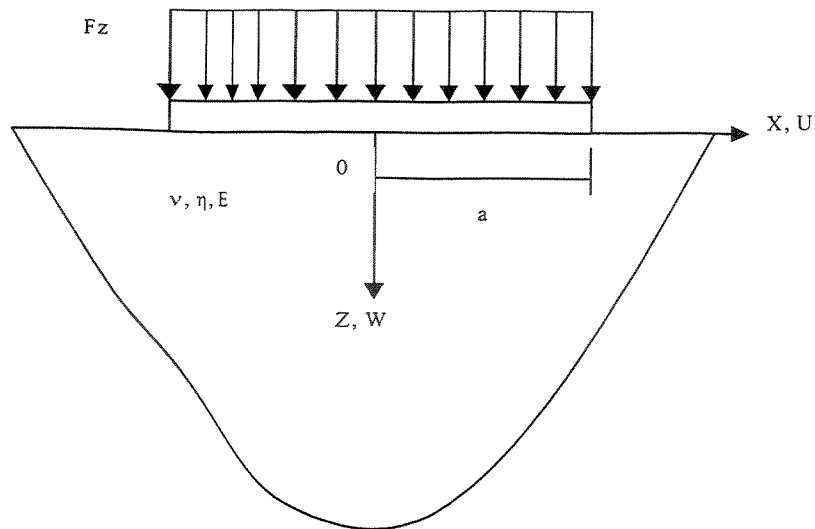


Figura 5.15 – Fundação rígida de superfície analisada.

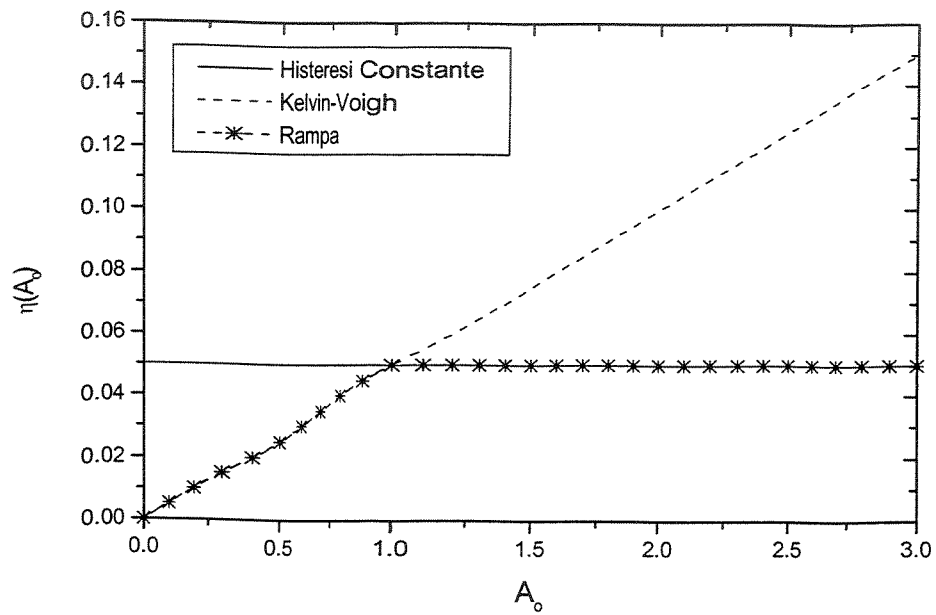


Figura 5.16 – Modelos de amortecimento.

Tabela 5.1: Equações que regem os modelos de amortecimento

Modelo de amortecimento	Equação
1) Histerético constante	$\eta(A_0) = \eta$ (constante)
2) Kelvin-Voigt	$\eta(A_0) = A_0 \eta$
3) "rampa"	$\eta(A_0) = A_0 \eta, \quad (0 < A_0 < 1)$ $\eta(A_0) = \eta, \quad (A_0 > 1)$

Para cada modelo, houve uma investigação para vários valores dos coeficientes de amortecimento. A tabela 5.2 apresenta os valores investigados.

Tabela 5.2: Modelos de amortecimento e coeficientes

<i>Modelo</i>	<i>Coefficientes de amortecimento</i>					
Constante	0.001	0.005	0.01	0.05	0.1	0.2
Kelvin						
Rampa						

As figuras 5.18 a 5.21 apresentam a resposta vertical transiente da fundação, devido à excitação normal em forma de degrau apresentado na figura 5.17, para os diversos modelos e coeficientes de amortecimento. O pulso possui duração de 16×10^{-6} s e amplitude $F_z = 180 \text{ klb/ft}$. Para validação, os resultados foram comparados com os divulgados por Spyrakos e Antes (1986) e Spyrakos e Beskos (1986), usando o método de elementos de contorno direto formulado no tempo (T-DBEM). Pode ser observado que os valores dos coeficientes de amortecimento influenciam na amplitude da resposta nos instantes iniciais de tempo. Na figura 5.18, a resposta é para o amortecimento histerético constante, com coeficientes variando de $\eta = 0,01$ a $\eta = 0,2$. É possível constatar que o aumento do coeficiente de amortecimento implica um decréscimo da amplitude dos picos na resposta. Os resultados são muito próximos àqueles da solução de Spyrakos e Antes (1986) formulados para o solo elástico ideal. Os resultados reportados por Spyrakos e Beskos (1986) apresentam algumas divergências nos instantes iniciais de tempo.

A figura 5.19 apresenta os resultados para o modelo de amortecimento de Kelvin-Voigt. Neste caso, o aumento do coeficiente de amortecimento implica picos menores de resposta, além de uma suavização desta. Este resultado é consistente. Os elevados valores de amortecimento, nas altas frequências, amortecem os termos da resposta estacionária relativos a elas e que são responsáveis pelas mudanças bruscas da resposta transiente.

A resposta para o modelo de amortecimento do tipo rampa pode ser analisada na figura 5.20. Como esperado, ela apresenta o mesmo comportamento não suave da resposta para o amortecimento histerético constante, uma vez que ambas as respostas possuem os mesmos termos de alta frequência. Entretanto, é notável que a redução na amplitude dos picos é menos acentuada que nos outros modelos de amortecimento. A resposta transiente da fundação para os

três modelos de amortecimento, considerando um coeficiente de amortecimento $\eta=0,05$, aparece na figura 5.21.

A FFT fornece a resposta como sendo um sinal periódico (Newland, 1993). Desta maneira, o valor da resposta para o maior tempo T_{max} é conectada à resposta do instante inicial $t=0$. Isso significa que em T_{mas} podem estar as informações sobre a causalidade obtida na resposta transiente. A figura 5.22 apresenta a influência do modelo de amortecimento sobre o comportamento causal da fundação para um coeficiente de amortecimento $\eta=0,05$. Como esperado, o modelo de amortecimento histerético constante apresentou a maior não causalidade.

O modelo de Kelvin-Voigt apresenta um comportamento causal, exceto para os últimos instantes de tempo.

A figura 5.23 permite visualizar o comportamento não causal para o modelo de amortecimento histerético constante para valores distintos de coeficiente de amortecimento η . O caráter não causal da resposta aumenta à medida que o coeficiente de amortecimento é aumentado. Os resultados apresentados indicam que a metodologia pode ser utilizada para analisar a relação entre os modelos de amortecimento e a causalidade.

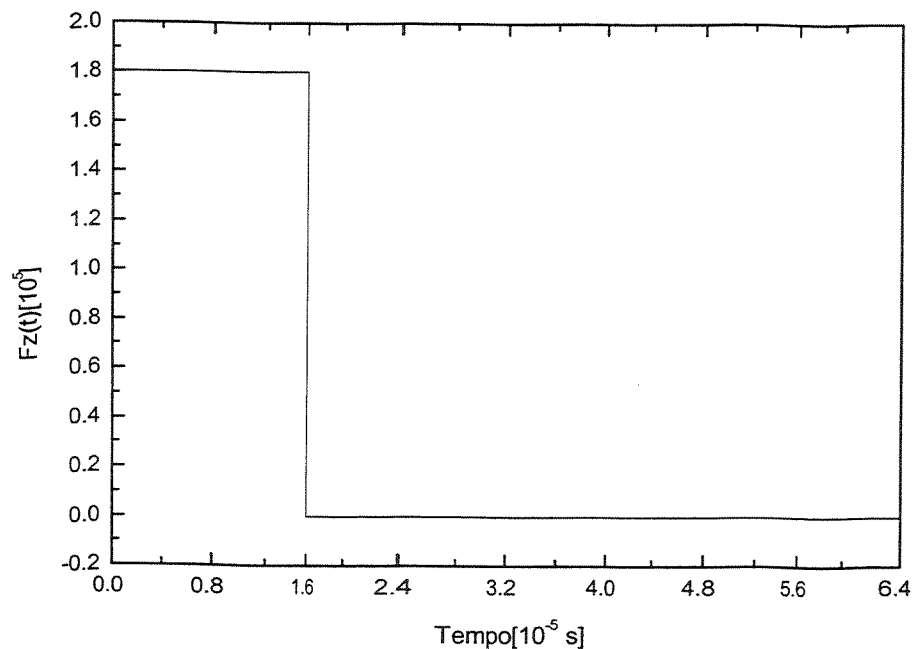


Figura 5.17 – Excitação retangular, impulso

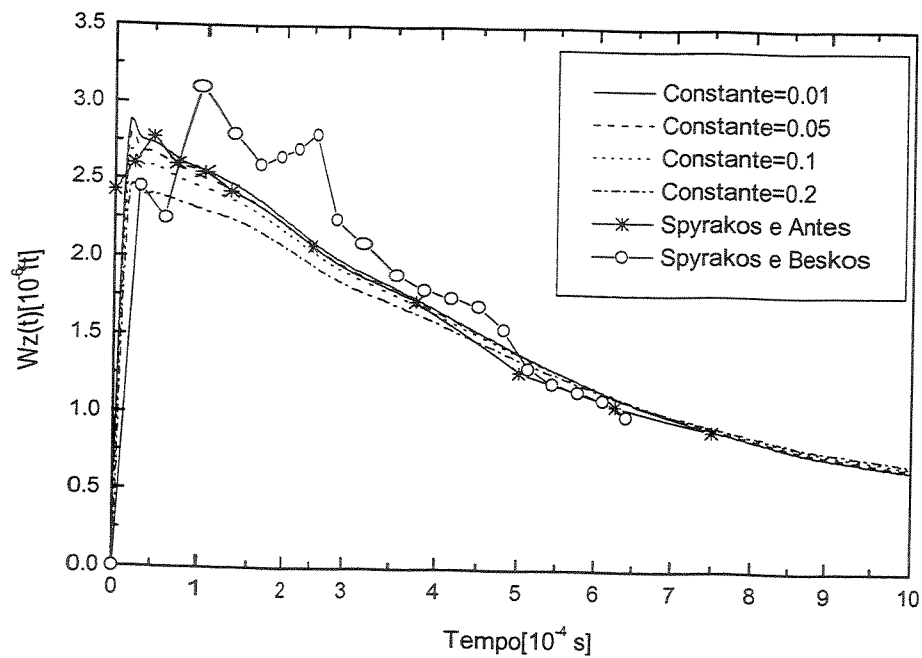


Figura 5.18 – Resposta vertical devido à excitação impulsiva retangular, modelo de amortecimento constante.

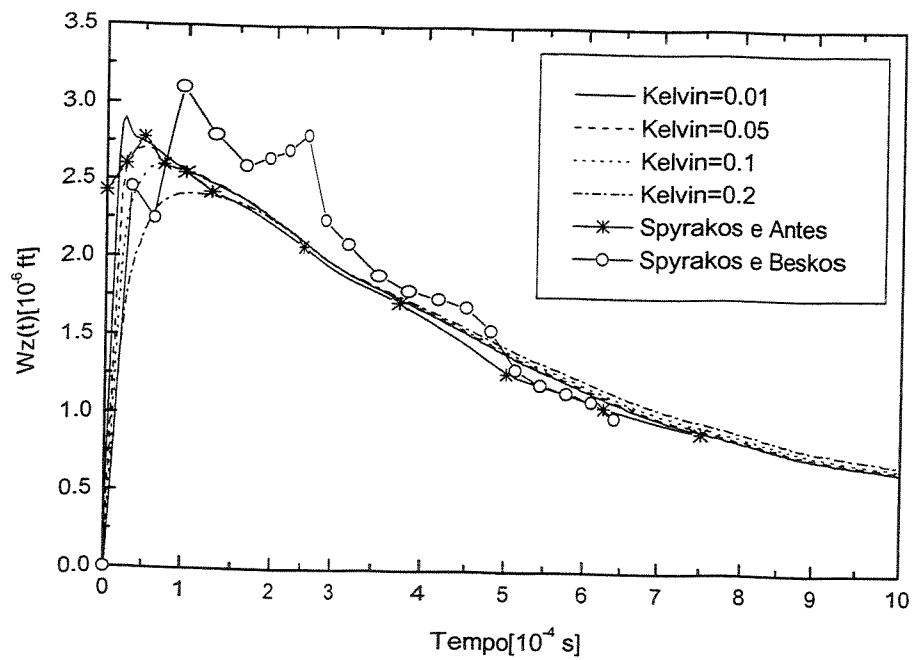


Figura 5.19 – Resposta vertical devido à excitação impulsiva retangular, modelo de amortecimento Kelvin-Voigt.

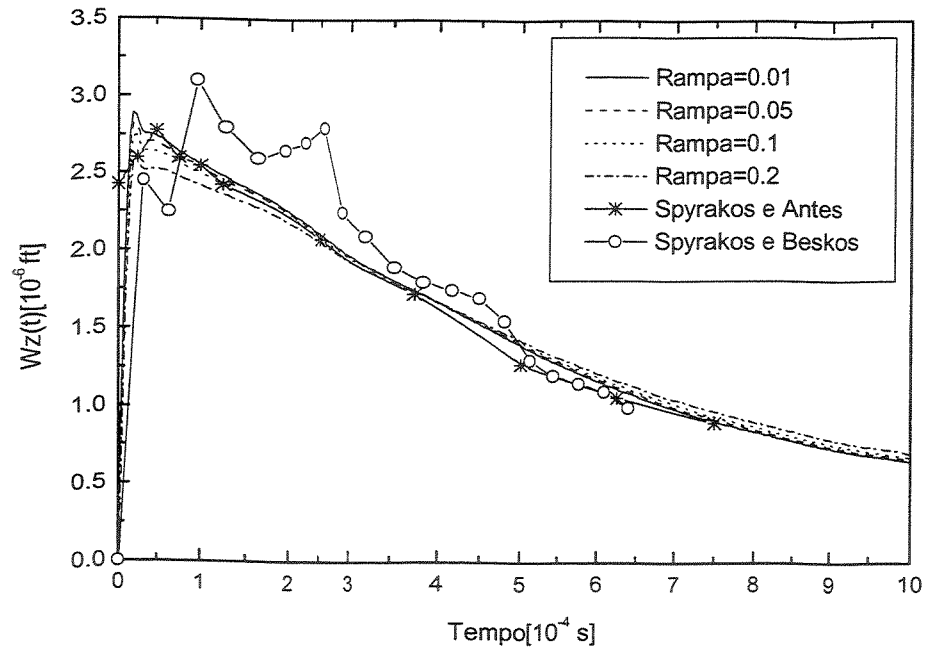


Figura 5.20 – Resposta vertical devido à excitação impulsiva retangular, modelo de amortecimento rampa.

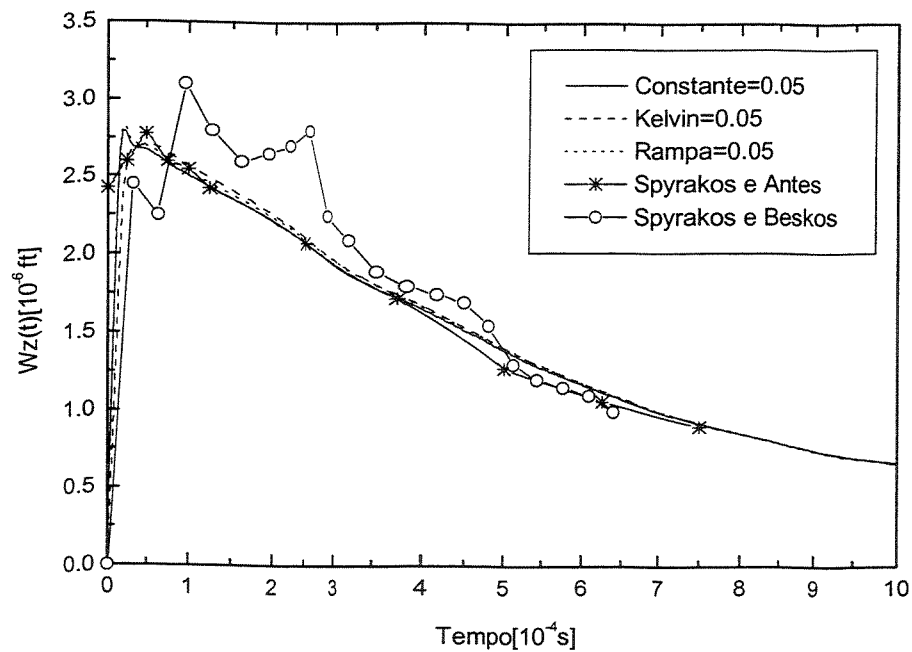


Figura 5.21 – Resposta vertical devido à excitação impulsiva retangular, efeitos do modelo de amortecimento.

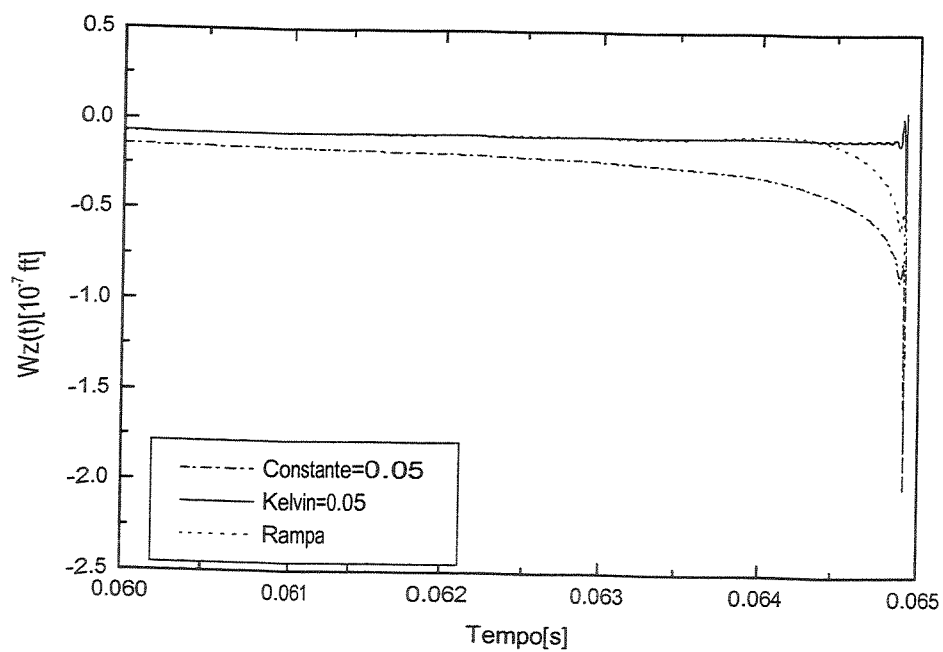


Figura 5.22 – Efeitos dos modelos de amortecimento sobre a não causalidade da resposta.

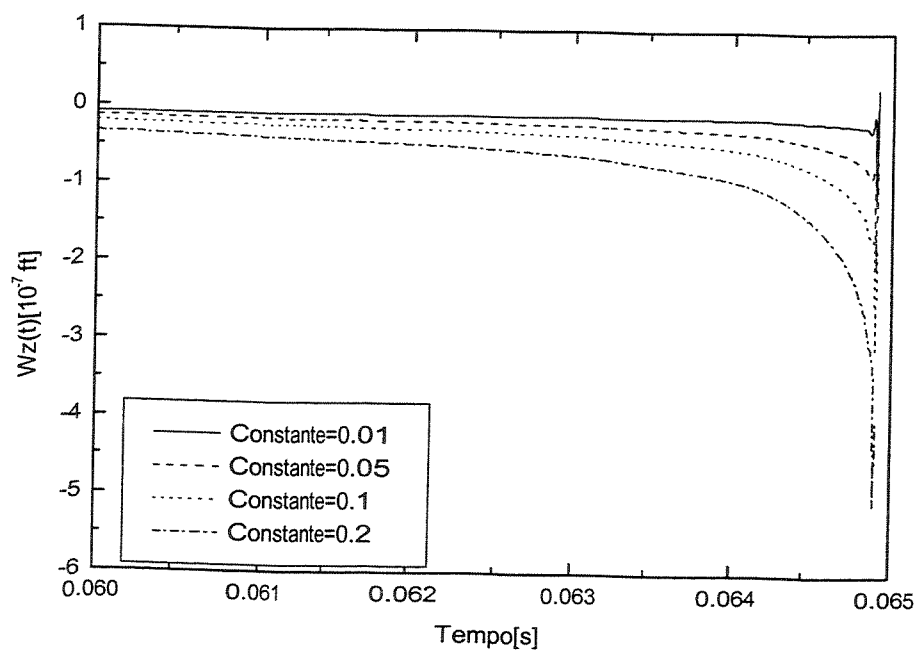


Figura 5.23 – Efeitos do coeficiente de amortecimento sobre a não causalidade da resposta.

Os próximos exemplos são para a fundação submetida a uma excitação harmônica de amplitude $F_z=180klb/ft$, aplicada repentinamente no instante $t=0$. Foram consideradas três frequências distintas para a excitação: $Ao=0,5$, $Ao=1,0$ e $Ao=1,5$. A figura 5.24 fornece a amplitude estacionária do valor absoluto de $W_z(Ao)$. Para $Ao=0,5$, o valor do deslocamento vertical é $W_z(Ao=0,5)=7,2 \times 10^{-5} ft$. Analogamente, $W_z(Ao=1,0)=4,8 \times 10^{-5} ft$ e $W_z(Ao=1,5)=3,4 \times 10^{-5} ft$. As figuras 5.25 a 5.27 apresentam o comportamento transiente para a carga harmônica aplicada repentinamente, nas três frequências mencionadas.

As três figuras mostram que, após a parte transiente da resposta ter sido amortecida, a amplitude restante é exatamente a amplitude da resposta estacionária. A análise desses resultados mostra que a metodologia descrita neste trabalho é eficaz e flexível o suficiente para preencher a transição entre o comportamento transiente e estacionário. Dessa maneira a metodologia é capaz de fornecer respostas transientes estáveis para grandes períodos. Os resultados apresentados nessas figuras são validados por comparação com os apresentados por Spyrakos e Antes (1986) e Spyrakos e Beskos (1986).

Na figura 5.28, é apresentado o detalhe da resposta transiente para a excitação harmônica, variando o coeficiente de amortecimento η . Foi considerado o modelo de amortecimento histerético constante. A resposta reflete o comportamento esperado, isto é, com aumento do coeficiente de amortecimento, a amplitude da resposta decai e o comprimento de onda cresce sensivelmente.

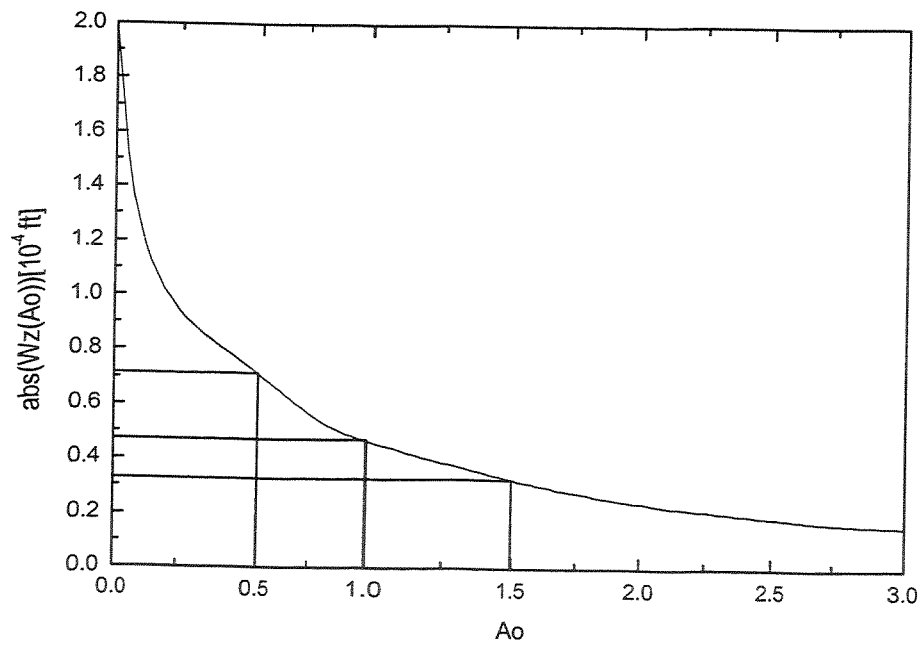


Figura 5.24 – Resposta estacionária para amortecimento constante $\eta=0.05$.

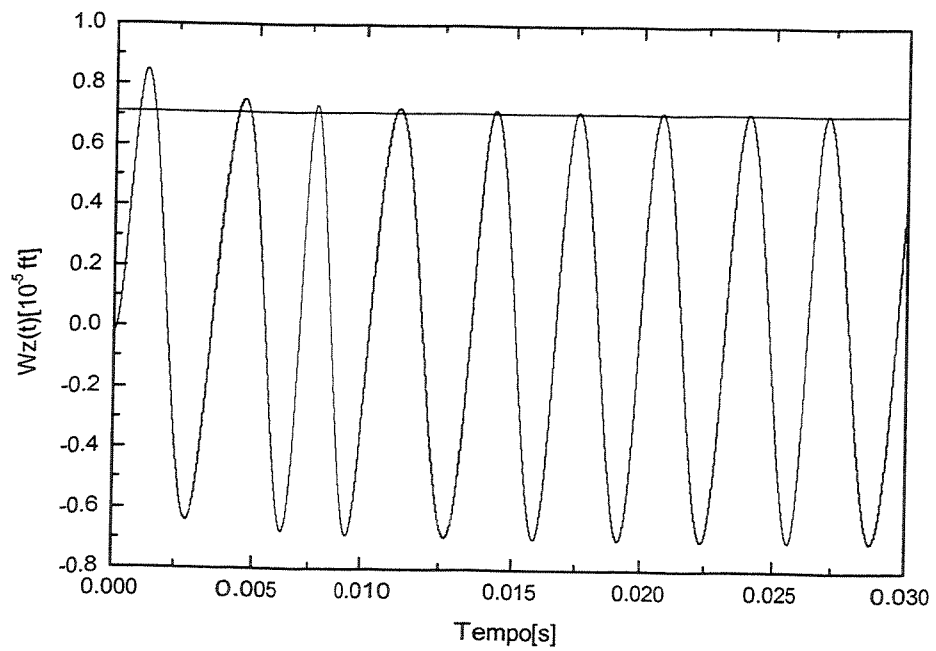


Figura 5.25 – Resposta transiente devido à excitação harmônica com $A_o=0.5$.

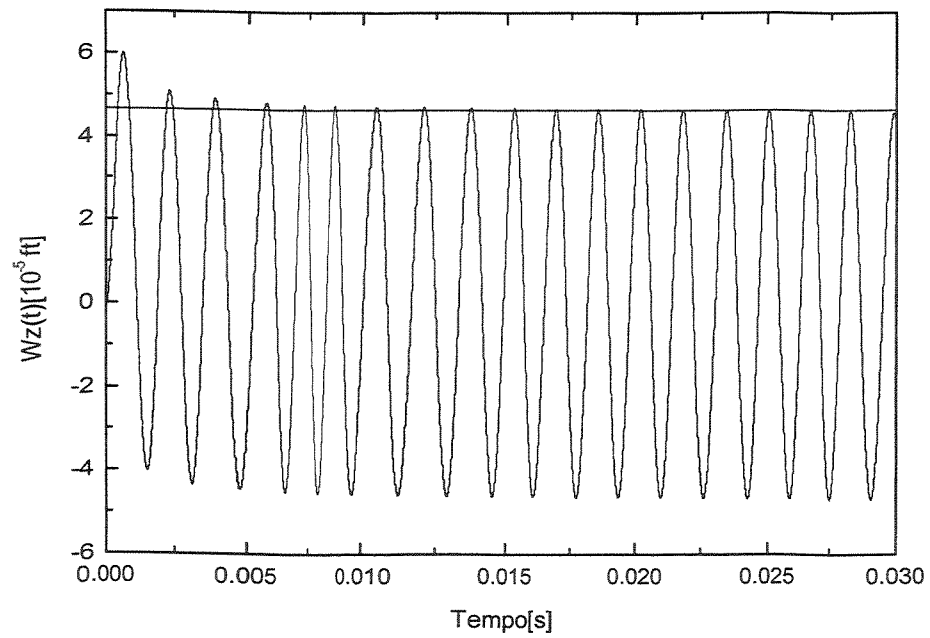


Figura 5.26 – Resposta transiente devido à excitação harmônica com $A_0=1.0$.

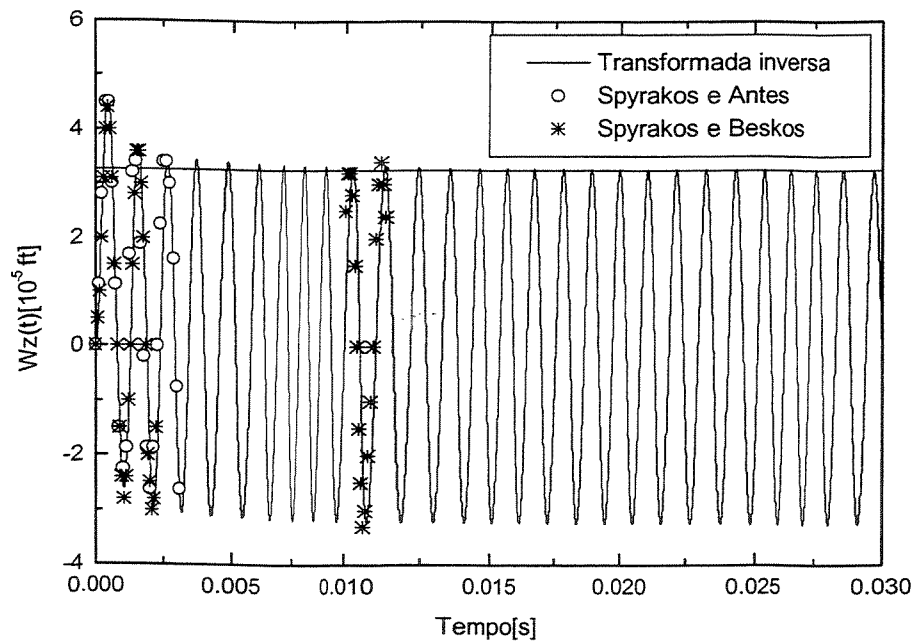


Figura 5.27 – Resposta transiente devido à excitação harmônica com $A_0=1.5$.

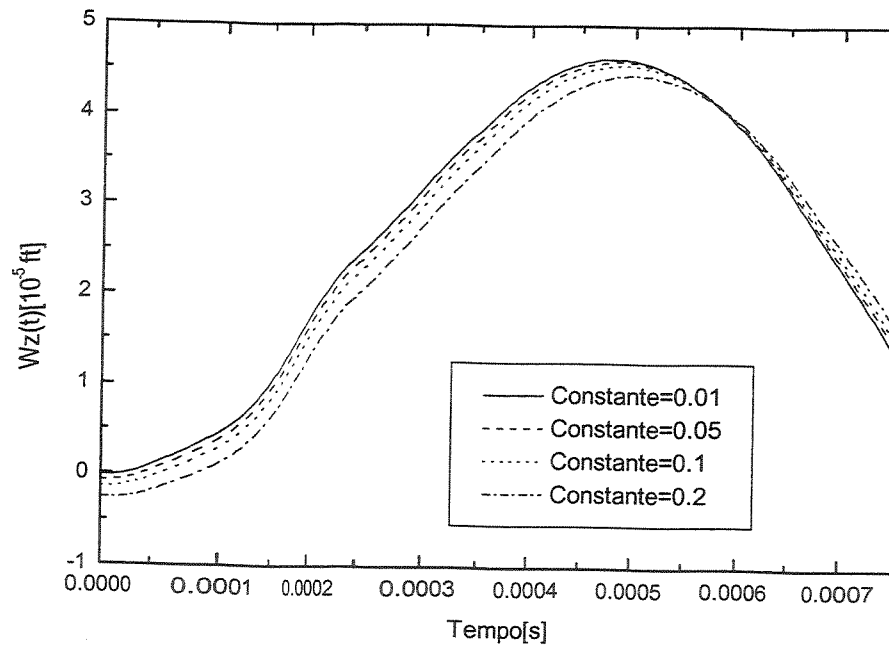


Figura 5.28 – Resposta transiente devido à excitação harmônica com $A_0=1.5$, efeito do coeficiente de amortecimento.

5.3.5 Inserção dos efeitos de inércia – consideração de massa da fundação

As equações diferenciais que governam os efeitos de inércia na resposta transiente da fundação com massa podem ser incorporadas facilmente nas respostas estacionárias dadas pela equação (5.41) (Mesquita Neto, 1989, Sousa, 1999).

Na figura 5.29, é apresentado o diagrama de corpo livre para uma fundação na qual é considerada a massa.

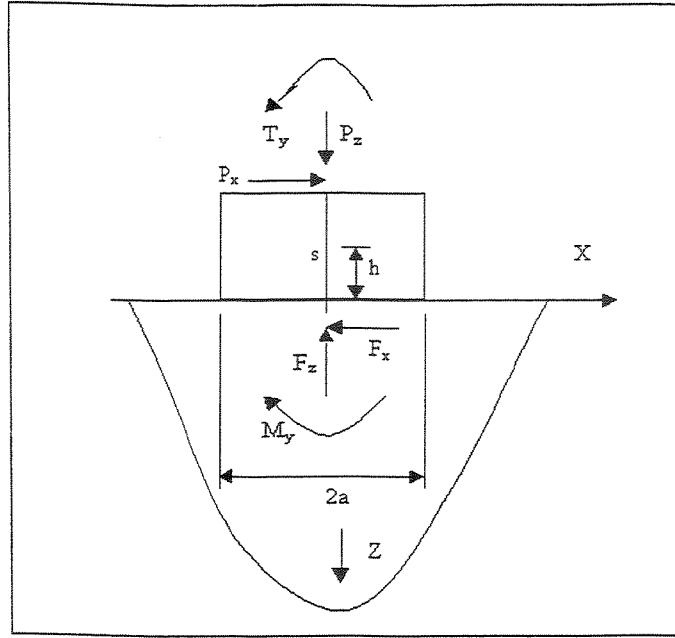


Figura 5.29 – Diagrama de corpo livre da fundação com massa.

As equações para equilíbrio de forças desse sistema são obtidas pela aplicação da segunda lei de Newton,

$$\begin{aligned}\sum F_z &= m_f a_z; \\ \sum F_x &= m_f a_x; \\ \sum M_y &= J_{yy} \ddot{\phi}_y;\end{aligned}\tag{5.46}$$

sendo m_f a massa da fundação e J_{yy} o momento polar de inércia.

A fundação é carregada sobre o ponto s pelas forças externas P_x , P_z e T_y . O ponto s define o centro de massa do corpo rígido, sobre o qual são medidos os deslocamentos, velocidades e acelerações. Definindo as acelerações em cada uma das direções como sendo,

$$\begin{aligned}a_z &= \ddot{u}_v + h \dot{\phi}_y^2; \\ a_x &= \ddot{u}_h - h \ddot{\phi}_y; \\ a_y &= 0.\end{aligned}\tag{5.47}$$

Desprezando os termos de segunda ordem da aceleração de modo a linearizar as relações, elimina-se o termo $\dot{\phi}_y^2$. Impondo-se as solicitações externas ao sistema, reecre-se (5.46) como,

$$\begin{aligned}
P_z - F_z &= m_f \ddot{u}_v; \\
P_x - F_x &= m_f \ddot{u}_h - m_f h \ddot{\phi}_y; \\
T_y - M_y &= J_{yy}^s \ddot{\phi}_y;
\end{aligned} \tag{5.48}$$

que na forma matricial possui a forma a seguir:

$$\begin{bmatrix} m_f & 0 & 0 \\ 0 & m_f & -hm_f \\ 0 & 0 & J_{yy}^s \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{u}_v \\ \ddot{u}_h \\ \ddot{\phi}_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_z \\ P_x \\ T_y \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & h & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} F_z \\ F_x \\ M_y \end{Bmatrix} \tag{5.49}$$

O sistema matricial de (5.49), formulado no domínio do tempo, representa o equilíbrio de forças para a fundação rígida com massa, quando submetida a carregamentos externos. Esta relação juntamente com o sistema apresentado em (5.29), que descrevia o estudo da interação dinâmica de fundações rígidas com o solo, com uso das funções de influência, permitirá a solução das fundações com massa. Inicialmente é necessário transformar o sistema de (5.49) para o domínio da frequência, obtendo,

$$\omega^2 \cdot \begin{bmatrix} m_f & 0 & 0 \\ 0 & m_f & -hm_f \\ 0 & 0 & J_{yy}^s \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \overline{u}_v \\ \overline{u}_h \\ \overline{\phi}_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overline{P}_z \\ \overline{P}_x \\ \overline{T}_y \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & h & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \overline{F}_z \\ \overline{F}_x \\ \overline{M}_y \end{Bmatrix} \tag{5.50}$$

multiplicando e dividindo a última linha por a , que é a semilargura da fundação, o sistema passa a ser escrito como,

$$\omega^2 \cdot \begin{bmatrix} m_f & 0 & 0 \\ 0 & m_f & -hm_f \\ 0 & 0 & J_{yy}^s / a^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \overline{u}_v \\ \overline{u}_h \\ \overline{\phi}_y a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overline{P}_z \\ \overline{P}_x \\ \overline{T}_y / a \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & h & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \overline{F}_z \\ \overline{F}_x \\ \overline{M}_y / a \end{Bmatrix} \tag{5.51}$$

que, na forma compacta, é representado por,

$$\omega^2 [M] \{\overline{u}_{ref}\} = \{\overline{P}_t\} - [Q] \{\overline{F}_t\} \tag{5.52}$$

sendo $[M]$ a matriz de massa equivalente do sistema, e $\{\bar{P}_t\}$ vetor com os dados de carregamento externo.

A matriz Q é dada por:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & h & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.53)$$

Agora é possível inserir os efeitos da inércia na formulação apresentada para a fundação sem massa., que é representada pelo sistema (5.29),

$$\begin{bmatrix} \bar{G} & CC \\ EQ & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{F}_f \\ \bar{u}_{ref} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{F}_t \end{Bmatrix},$$

que pode ser dividido em dois subsistemas,

$$[\bar{G}]\{\bar{F}_f\} + [CC]\{\bar{u}_{ref}\} = \{0\} \quad (5.54A)$$

$$[EQ]\{\bar{F}_f\} = \{\bar{F}_t\}. \quad (5.54B)$$

Substituindo (5.54B) em (5.52),

$$[Q][EQ]\{\bar{F}_f\} + \omega^2 [M]\{\bar{u}_{ref}\} = \{\bar{P}_t\}, \quad (5.55)$$

introduzindo (5.55) no lugar da segunda equação do sistema de (5.54),

$$[\bar{G}]\{\bar{F}_f\} + [CC]\{\bar{u}_{ref}\} = \{0\}$$

$$[Q][EQ]\{\bar{F}_f\} + \omega^2 [M]\{\bar{u}_{ref}\} = \{\bar{P}_t\}$$

na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} \bar{G} & CC \\ Q \cdot EQ & \omega^2 M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{F}_f \\ \bar{u}_{ref} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{P}_t \end{Bmatrix}, \quad (5.56)$$

sendo:

- G a matriz com as funções de influência;
- CC a matriz de compatibilidade cinemática;
- F_f o vetor com as forças na interface solo-fundação;
- Q a matriz a matriz definida em (5.53);
- EQ a matriz de equilíbrio de forças;
- ω a frequência de excitação em rad/s;
- M a matriz de inércia equivalente da fundação;
- u_i os deslocamentos vertical, horizontal e rotação da fundação no ponto de referência;
- P_i o vetor de carregamento ao qual é submetida a fundação.

O passo seguinte é normalizar a resposta da fundação rígida com massa. A partir do sistema apresentado em (5.51), é possível escrever três relações de equilíbrio, uma para cada grau de liberdade:

$$\begin{cases} \omega^2 m_f \bar{u}_v = \bar{P}_z - \bar{F}_z \\ \omega^2 m_f \bar{u}_h - \omega^2 m_f h \phi_y a = \bar{P}_x - \bar{F}_x \\ \omega^2 \frac{J_{yy}^s}{a^2} \phi_y a = \frac{\bar{T}_y}{a} - h \bar{F}_x - \frac{\bar{M}_y}{a} \end{cases} \quad (5.57)$$

Para fundação rígida sem massa, os deslocamentos foram normalizados pelas equações (5.36) a (5.38), assim para deslocamento vertical, horizontal e rotação da fundação, tem-se, respectivamente:

$$\begin{cases} \bar{u}_{vN} = \frac{\bar{u}_v \pi \mu}{\bar{P}_t} \\ \bar{u}_{hN} = \frac{\bar{u}_h \pi \mu}{\bar{P}_t} \\ \bar{\phi}_{yN} a = \frac{\bar{\phi}_y a \pi \mu}{\bar{P}_t} \end{cases} \quad (5.58)$$

Após isolar o deslocamento não normalizado das equações (5.58) para substituir em (5.57), e alguma álgebra, chega-se a:

$$\frac{\omega^2 m_f}{\pi \mu} \bar{u}_{vN} = \frac{\bar{P}_z}{\bar{P}_t} - \frac{\bar{F}_z}{\bar{P}_t}; \quad (5.59)$$

$$\frac{\omega^2 m_f}{\pi \mu} \bar{u}_{hN} - \frac{\omega^2 m_f}{\pi \mu} h \bar{\phi}_{yN} a = \frac{\bar{P}_x}{\bar{P}_t} - \frac{\bar{F}_x}{\bar{P}_t}; \quad (5.60)$$

$$\frac{\omega^2 m_f}{\pi \mu} \frac{J_{yy}^s}{a^2} \bar{\phi}_{yN} a = \frac{\bar{T}_y}{\bar{P}_t} - \frac{h \bar{F}_x}{\bar{P}_t} - \frac{\bar{M}_y}{\bar{P}_t}. \quad (5.61)$$

Recorrendo à dinâmica clássica, pode-se definir o raio de giração, em função do momento de inércia de massa e da massa,

$$r_{yy}^2 = \frac{J_{yy}^s}{m_f}. \quad (5.62)$$

Com o auxílio do raio de giração, a equação (5.61) pode ser reescrita, eliminando o momento de inércia,

$$\frac{\omega^2 m_f}{\pi \mu} \left(\frac{r_{yy}}{a} \right)^2 \bar{\phi}_{yN} a = \frac{\bar{T}_y}{\bar{P}_t} - \frac{h \bar{F}_x}{\bar{P}_t} - \frac{\bar{M}_y}{\bar{P}_t}. \quad (5.63)$$

Definindo um fator que relaciona a massa da fundação m_f , com a massa do solo m_s , com o objetivo de simplificar as relações anteriores, a massa do solo será definida como sendo a massa

equivalente à contida em um semicírculo abaixo da fundação, com raio a . Assim o fator que relaciona as massas do sistema é,

$$B = \frac{m_f}{m_s} = \frac{m_f}{\pi \rho a^2}. \quad (5.64)$$

Considerando ainda que a velocidade de propagação da onda cisalhante é dada por,

$$C_s^2 = \frac{\mu}{\rho}. \quad (5.65)$$

Com o uso das considerações acima, é possível reescrever os termos que envolvem a frequência,

$$\frac{\omega^2 m_f}{\pi \mu} = \omega^2 a^2 \frac{1}{C_s^2} \frac{1}{m_s} m_f = A_o B.$$

Finalmente, reescrevendo as equações (5.59) a (5.61)

$$A_o B \bar{u}_{vN} = \frac{\bar{P}_z}{\bar{P}_t} - \frac{\bar{F}_z}{\bar{P}_t}; \quad (5.66)$$

$$A_o B \bar{u}_{hN} - A_o B h \phi_{yN} a = \frac{\bar{P}_x}{\bar{P}_t} - \frac{\bar{F}_x}{\bar{P}_t}; \quad (5.67)$$

$$A_o B \frac{J_{yy}^s}{a^2} \phi_{yN} a = \frac{\bar{T}_y}{\bar{P}_t} - \frac{h \bar{F}_x}{\bar{P}_t} - \frac{\bar{M}_y}{\bar{P}_t}; \quad (5.68)$$

e agrupando na forma matricial, obtém-se o sistema de equilíbrio normalizado,

$$A_o B \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -h \\ 0 & 0 & r_{yy}^2/a^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \overline{u_{vN}} \\ \overline{u_{hN}} \\ \overline{\phi_{yN} a} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overline{P_z}/\overline{P_t} \\ \overline{P_x}/\overline{P_t} \\ \overline{T_y}/\overline{a}/\overline{P_t} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & h & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \overline{F_z}/\overline{P_t} \\ \overline{F_x}/\overline{P_t} \\ \overline{M_y}/\overline{a}/\overline{P_t} \end{Bmatrix}, \quad (5.69)$$

que na forma é representado por:

$$A_o B[M] \{\overline{u_{refN}}\} = \{\overline{P_{tN}}\} - [Q] \{\overline{F_{tN}}\} \quad (5.70).$$

Esta relação de equilíbrio normalizada pode ser inserida na equação (5.42), que descrevia a fundação rígida normalizada sem massa. Após algumas considerações, é possível escrever o sistema normalizado para fundação rígida com efeitos de inércia,

$$\begin{bmatrix} \overline{G_n} & CC \\ Q \cdot EQ & A_o BM \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{k_N} \\ \overline{u_{refN}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \overline{P_{tN}} \end{Bmatrix}, \quad (5.71)$$

sendo:

- G_n a matriz com as funções de influência;
- CC a matriz de compatibilidade cinemática;
- k_n o vetor normalizado com as tensões na interface solo-fundação;
- Q a matriz definida em (5.53);
- EQ a matriz de equilíbrio de forças;
- $A_o B$ a frequência adimensional multiplicada pelo fator de massa;
- M a matriz de inércia equivalente da fundação;
- u_{refN} os graus de liberdade normalizados no ponto de referência;
- P_t o vetor de carregamento externo normalizado.

É possível obter a resposta de uma fundação com massa, a partir dos resultados obtidos pela matriz de flexibilidade da fundação rígida sem massa (Mesquita Neto, 1989). Considerando o sistema apresentado em (5.43),

$$\begin{Bmatrix} W_z \\ U_x \\ \phi_y a \end{Bmatrix} = \frac{1}{\pi\mu} \begin{bmatrix} N_{wz} & N_{uz} & N_{\phi z} \\ N_{wx} & N_{ux} & N_{\phi x} \\ N_{wy} & N_{uy} & N_{\phi y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_z \\ F_x \\ F_y / a \end{Bmatrix}.$$

Considerando o equilíbrio de forças na direção vertical,

$$\bar{P}_z - \bar{F}_z = -\omega^2 m_f \bar{W}_z \quad (5.72)$$

Assumindo que exista apenas a excitação vertical, do sistema (5.43) conclui-se que

$$\bar{F}_z = \bar{W}_z \frac{\pi\mu}{N_{wz}}. \quad (5.73)$$

Substituindo (5.73) em (5.72),

$$\bar{P}_z - \bar{W}_z \frac{\pi\mu}{N_{wz}} = -\omega^2 m_f \bar{W}_z,$$

isolando a carga externa,

$$\bar{P}_z = -\omega^2 m_f \bar{W}_z + \bar{W}_z \frac{\pi\mu}{N_{wz}} = \bar{W}_z \left[\frac{\pi\mu}{N_{wz}} - \omega^2 m_f \right]. \quad (5.74)$$

Considerando a normalização do deslocamento,

$$\bar{W}_{zN} = \frac{\bar{W}_z \pi\mu}{P_z}; \quad (5.75)$$

é possível escrever a relação (5.74) normalizada,

$$1 = \overline{W}_{zN} \left[\frac{1}{N_{wz}} - \frac{\omega^2 m_f}{\pi \mu} \right] = \overline{W}_{zN} \left[\frac{1}{N_{wz}} - A_0^2 B \right] \Rightarrow \overline{W}_{zN} = \frac{1}{\frac{1}{N_{wz}} - A_0^2 B} . \quad (5.76)$$

Com a equação (5.76) é calculada a resposta para uma fundação com massa, utilizando a função de flexibilidade calculada para fundação sem inércia.

O raciocínio adotado para obter o deslocamento vertical, devido a carga normal para a fundação com massa, usando a função de flexibilidade para o sistema sem massa, pode ser estendido para as demais excitações.

5.3.6 Resultados numéricos – Fundação com Massa

Para análise dos efeitos da inércia sobre a resposta transiente da fundação rígida, adotou-se a mesma fundação analisada na seção 5.3.4. Para parâmetro B, que relaciona a massa da fundação com uma massa equivalente de solo, foram adotados os seguintes valores: 1, 5, 20, 50. Não foram alteradas as características do solo, e foi adotado o modelo de amortecimento histerético constante com coeficiente 0.05. A resposta estacionária é apresentada na figura 5.30. Pode ser observado que os efeitos da inércia são mais significativos a partir de B=5. Com o aumento da massa da fundação, o sistema apresenta um comportamento ressonante. Os picos de ressonância crescem, enquanto a frequência de ressonância decresce com aumento de B.

A resposta transiente, para a fundação com inércia excitada pelo pulso apresentado na figura 5.17, pode ser vista na figura 5.31. Para maiores fundações de maior massa, a amplitude final decai e os picos são atingidos em tempos mais longos. Grandes fatores de inércia tendem a retardar o movimento de corpo rígido com respeito ao tempo. Para valores altos de B, B=20 ou B=50, o efeito da inércia é muito pronunciado, e algumas oscilações fortemente amortecidas aparecem em torno da resposta estática.

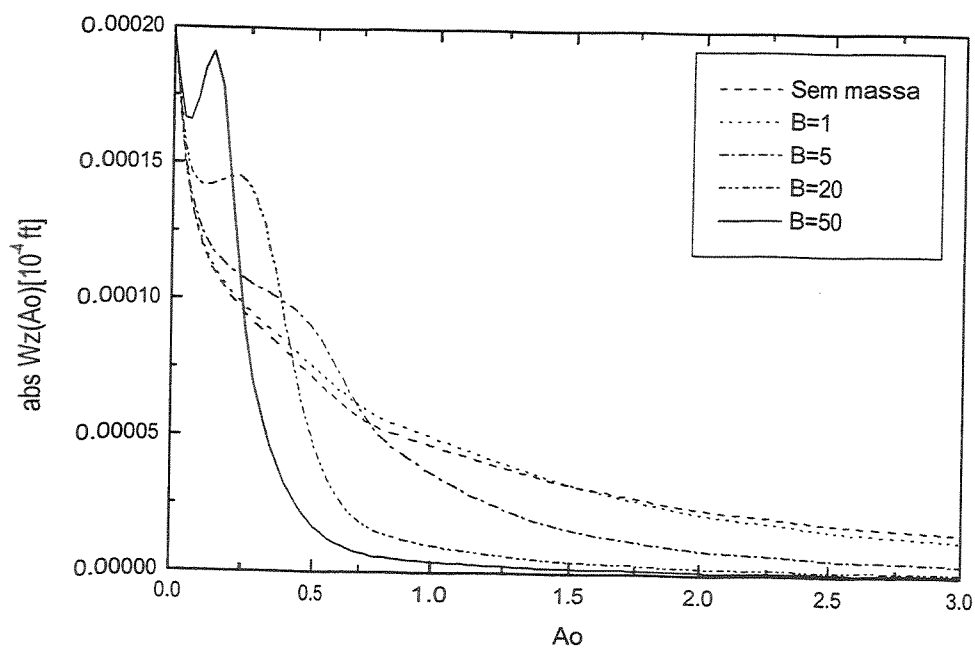


Figura 5.30 – Resposta estacionária para fundação com massa.

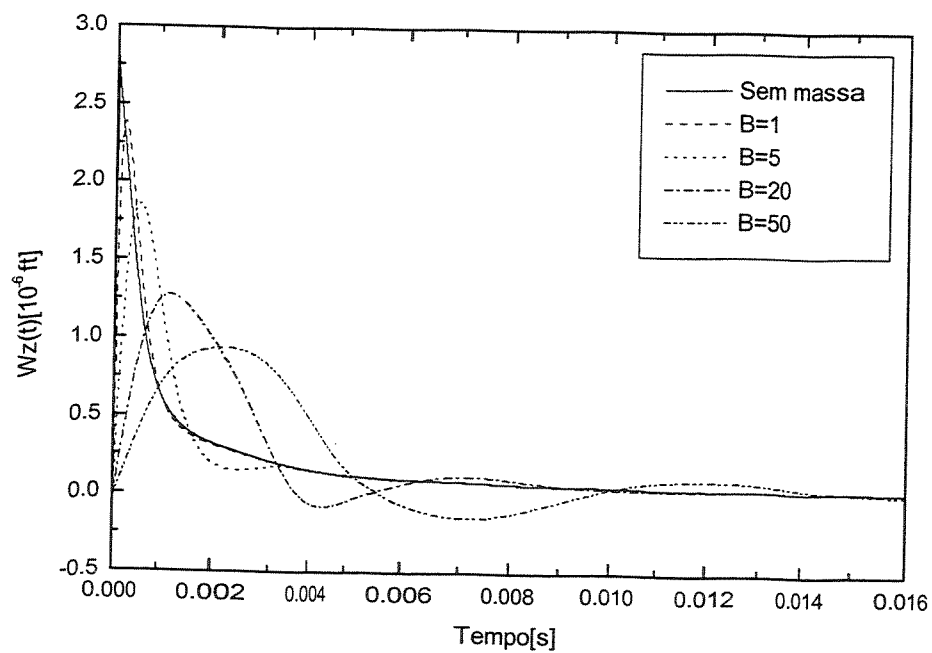


Figura 5.31 – Resposta transiente para fundação com massa excitada por carga impulsiva.

5.4 Formulação de Fundação Rígida 2D no Tempo

A montagem dos sistemas para fundação rígida na frequência é mais simples que no tempo. Para cada frequência, é construído o sistema, ou seja, a solução é independente das frequências anteriores. No entanto, não é possível a análise de problemas não lineares em frequência. Essa deficiência pode ser suprimida pela modelagem no tempo. Uma das possibilidades de estudo de não linearidades é a simulação de contato entre a fundação e o solo, o que poderia ocasionar o escorregamento, caso fosse superada a força de atrito. A grande vantagem da metodologia proposta é que as funções de influência não precisam ser modeladas no tempo, bastando a resposta transiente obtida pela transformada de Fourier.

A maior complicação em modelar o sistema da fundação rígida no tempo está na convolução, enquanto que, na frequência seria possível montar a matriz $[E(\omega)]$ e incluí-la facilmente no sistema global com as condições de compatibilidade cinemática e as equações de equilíbrio, existindo, no tempo, uma dependência das respostas anteriores.

Partindo das equações de superposição dadas em (5.4), apresentadas novamente a seguir:

$$W_s(x'_1, t) = \sum_{j=1}^n \int_0^t E_{cs}(x'_1 - x_j, t - \sigma) f_{cj}(\sigma) d\sigma. \quad (5.4)$$

Quando se deseja fazer a superposição para obter o deslocamento $W_s(t)$, não existe qualquer dificuldade em realizar a integral, que, para dados discretos, passa a ser um somatório. No entanto, na montagem dos sistemas para a fundação rígida, F_c é uma incógnita, são as tensões na interface entre o solo e a fundação. $W_s(t)$ é conhecido, uma vez que é imposto pelas condições de compatibilidade, com as quais os resultados da superposição são igualados. O principal objetivo dessa sessão é mostrar como é possível separar as componentes da superposição em um sistema de matrizes.

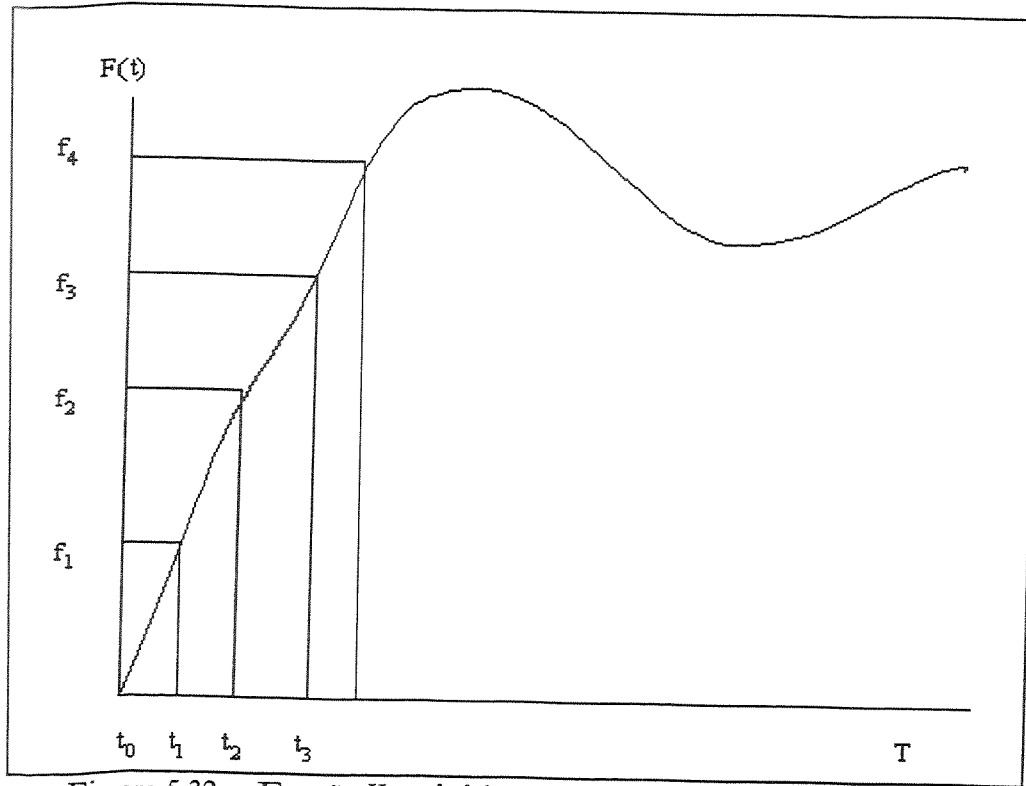


Figura 5.32 – Funções Heaviside para descrever as forças de reação.

Considerando inicialmente apenas uma função de influência, ou seja, não é realizada uma superposição. $E_{cs}(t)$ é obtida de maneira discreta, pelo uso da transformada de Fourier, consequentemente, $W_s(t)$ e $F_c(t)$ devem ser discretos, apresentando mesmo passo de tempo. Assumindo que $F_c(t)$ possa ser descrita por uma série de degraus (figura 5.31), então podemos descrever $F_c(t)$ como sendo um somatório de funções Heaviside, $H(t-t_i)$, se $t > t_i$ $H=1$, se $t < t_i$ $H=0$.

Então $F_c(t)$ é dado por:

$$F(t) = f_1[H(t-t_0) - H(t-t_1)] + f_2[H(t-t_1) - H(t-t_2)] + \dots + f_n[H(t-t_{n-1}) - H(t-t_n)]. \quad (5.77)$$

Aplicando a integral de convolução com a $F(t)$,

$$W(t) = \int_{t_0}^t [E(t-\sigma)] \{f_1[H(\sigma-t_0) - H(\sigma-t_1)] + \dots + f_n[H(\sigma-t_{n-1}) - H(\sigma-t_n)]\} d\sigma$$

integrando até t_1 para calcular $W(t_1)$:

$$W(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} [E(t_1 - \sigma)] \{f_1[H(\sigma - t_0) - H(\sigma - t_1)] + f_2[H(\sigma - t_1) - H(\sigma - t_2)] + f_3[H(\sigma - t_2) - H(\sigma - t_3)] + \dots\} d\sigma,$$

a integral da soma é igual à soma das integrais,

$$\begin{aligned} W(t_1) &= \int_{t_0}^{t_1} [E(t_1 - \sigma)] \{f_1[H(\sigma - t_0) - H(\sigma - t_1)]\} d\sigma + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} [E(t_1 - \sigma)] \{f_2[H(\sigma - t_1) - H(\sigma - t_2)]\} d\sigma + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} [E(t_1 - \sigma)] \{f_3[H(\sigma - t_2) - H(\sigma - t_3)]\} d\sigma + \dots \end{aligned}$$

analisando a segunda e terceira integrais, no intervalo $t_0 < \sigma < t_1$, a função Heaviside $[H(\sigma - t_1) - H(\sigma - t_2)]$ é nula, o mesmo raciocínio valendo para a terceira e todas as subseqüentes. Assim o deslocamento no instante t_1 é dado por

$$W(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} [E(t_1 - \sigma)] \{f_1[H(\sigma - t_0) - H(\sigma - t_1)]\} d\sigma,$$

neste intervalo, $[H(\sigma - t_0) - H(\sigma - t_1)] = 1$, de modo que,

$$W(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} [E(t_1 - \sigma)] \{f_1\} d\sigma,$$

sendo f_1 uma constante, pode ser retirado da integral, como $t_1 - t_1 = t_0$ e $t_1 - t_0 = t_1$, o valor de $W(t_1)$ é dado finalmente por:

$$W(t_1) = f_1 \int_{t_0}^{t_1} [E(\sigma)] d\sigma = f_1 G(t_1) \Delta t. \quad (5.78)$$

Para o instante $t = t_2$, calculado assim $W(t_2)$

$$W(t_2) = \int_{t_0}^{t_2} [E(t_2 - \sigma)] \{f_1[H(\sigma - t_0) - H(\sigma - t_1)] + f_2[H(\sigma - t_1) - H(\sigma - t_2)] + f_3[H(\sigma - t_2) - H(\sigma - t_3)] + \dots\} d\sigma,$$

neste intervalo, $[H(\sigma-t_2)-H(\sigma-t_3)]=0$, conseqüentemente, e separando em duas integrais com os limites diferentes,

$$W(t_2) = \int_{t_0}^{t_1} [E(t_2 - \sigma)] \{f_1[H(\sigma - t_0) - H(\sigma - t_1)] + f_2[H(\sigma - t_1) - H(\sigma - t_2)]\} d\sigma + \\ + \int_{t_1}^{t_2} [E(t_2 - \sigma)] \{f_1[H(\sigma - t_0) - H(\sigma - t_1)] + f_2[H(\sigma - t_1) - H(\sigma - t_2)]\} d\sigma$$

Analisando cada integral separadamente, na primeira integral de t_0 a t_1 , o termo que multiplica f_2 é nulo. Já na segunda integral, o termo que multiplica f_1 desaparece, assim sendo,

$$W(t_2) = \int_{t_0}^{t_1} [E(t_2 - \sigma)] \{f_1[H(\sigma - t_0) - H(\sigma - t_1)]\} d\sigma + \int_{t_1}^{t_2} [E(t_2 - \sigma)] \{f_2[H(\sigma - t_1) - H(\sigma - t_2)]\} d\sigma,$$

nos intervalos de integração nos quais existem as funções Heaviside, elas possuem valor unitário, deste modo,

$$W(t_2) = f_1 \int_{t_0}^{t_1} [E(t_2 - \sigma)] d\sigma + f_2 \int_{t_1}^{t_2} [E(t_2 - \sigma)] d\sigma, \text{ os limites da integral podem ser rescritos, de}$$

maneira que a integral só tenha o termo σ ,

$$W(t_2) = f_1 \int_{t_1}^{t_2} [E(\sigma)] d\sigma + f_2 \int_{t_0}^{t_1} [E(\sigma)] d\sigma,$$

estas integrais resultam,

$$W(t_2) = f_1[E(t_2)]\Delta t + f_2[E(t_1)]\Delta t. \quad (5.79)$$

Analogamente para $W(t_3)$ é obtida a seguinte equação:

$$W(t_2) = f_1[E(t_3)]\Delta t + f_2[E(t_2)]\Delta t + f_3[E(t_1)]\Delta t. \quad (5.80)$$

Para simular o efeito da superposição, tomam-se em consideração três funções de influência, $G_{11}(t)$, $G_{12}(t)$, $G_{13}(t)$, que relacionam os deslocamentos $W_1(t)$, $W_2(t)$, $W_3(t)$ com as

excitações $F_1(t)$, $F_2(t)$, $F_3(t)$. Aplicando a superposição para obter os deslocamentos no instante t_1 , com auxílio de (5.78),

$$\begin{aligned} W_1(t_1) &= F_1(t_1)E_{11}(t_1)\Delta t + F_2(t_1)E_{12}(t_1)\Delta t + F_3(t_1)E_{13}(t_1)\Delta t \\ W_2(t_1) &= F_1(t_1)E_{21}(t_1)\Delta t + F_2(t_1)E_{22}(t_1)\Delta t + F_3(t_1)E_{23}(t_1)\Delta t \\ W_3(t_1) &= F_1(t_1)E_{31}(t_1)\Delta t + F_2(t_1)E_{32}(t_1)\Delta t + F_3(t_1)E_{33}(t_1)\Delta t \end{aligned}$$

este sistema pode ser escrito na forma matricial,

$$\frac{1}{\Delta t} \begin{Bmatrix} W_1(t_1) \\ W_2(t_1) \\ W_3(t_1) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11}(t_1) & E_{12}(t_1) & E_{13}(t_1) \\ E_{21}(t_1) & E_{22}(t_1) & E_{23}(t_1) \\ E_{31}(t_1) & E_{32}(t_1) & E_{33}(t_1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1(t_1) \\ F_2(t_1) \\ F_3(t_1) \end{Bmatrix}.$$

Para o instante t_2 , o sistema passa ter a forma:

$$\frac{1}{\Delta t} \begin{Bmatrix} W_1(t_2) \\ W_2(t_2) \\ W_3(t_2) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11}(t_1) & E_{12}(t_1) & E_{13}(t_1) \\ E_{21}(t_1) & E_{22}(t_1) & E_{23}(t_1) \\ E_{31}(t_1) & E_{32}(t_1) & E_{33}(t_1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1(t_2) \\ F_2(t_2) \\ F_3(t_2) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} E_{11}(t_2) & E_{12}(t_2) & E_{13}(t_2) \\ E_{21}(t_2) & E_{22}(t_2) & E_{23}(t_2) \\ E_{31}(t_2) & E_{32}(t_2) & E_{33}(t_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1(t_1) \\ F_2(t_1) \\ F_3(t_1) \end{Bmatrix}$$

E no instante t_3 ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \begin{Bmatrix} W_1(t_3) \\ W_2(t_3) \\ W_3(t_3) \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} E_{11}(t_1) & E_{12}(t_1) & E_{13}(t_1) \\ E_{21}(t_1) & E_{22}(t_1) & E_{23}(t_1) \\ E_{31}(t_1) & E_{32}(t_1) & E_{33}(t_1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1(t_3) \\ F_2(t_3) \\ F_3(t_3) \end{Bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} E_{11}(t_2) & E_{12}(t_2) & E_{13}(t_2) \\ E_{21}(t_2) & E_{22}(t_2) & E_{23}(t_2) \\ E_{31}(t_2) & E_{32}(t_2) & E_{33}(t_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1(t_2) \\ F_2(t_2) \\ F_3(t_2) \end{Bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} E_{11}(t_3) & E_{12}(t_3) & E_{13}(t_3) \\ E_{21}(t_3) & E_{22}(t_3) & E_{23}(t_3) \\ E_{31}(t_3) & E_{32}(t_3) & E_{33}(t_3) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1(t_1) \\ F_2(t_1) \\ F_3(t_1) \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Genericamente, para t_n ,

$$\frac{1}{\Delta t} \{W(t_n)\} = [E(t_1)]\{F(t_n)\} + \sum_{i=2}^n [E(t_i)]\{F(t_{n-i+1})\}. \quad (5.81)$$

Nota-se que o vetor $\{F\}$ incógnita, ou seja, para t_n está sempre multiplicado pela matriz $[E(t_1)]$, todas as forças para os instantes anteriores são calculadas nos passos anteriores, de modo que o termo do somatório resulta em um vetor com constantes, que deve ser calculado para cada passo de tempo. É importante frisar que as funções de influência relacionam as excitações horizontais e verticais com os deslocamentos verticais e horizontais, assim sendo:

$$\frac{1}{\Delta t} \{\overline{W}_z(t_n)\} = [\overline{E}_{wz}(t_1)]\{\overline{F}_z(t_n)\} + \sum_{i=2}^n [\overline{E}_{wz}(t_i)]\{\overline{F}_z(t_{n-i+1})\}; \quad (5.82)$$

$$\frac{1}{\Delta t} \{\overline{W}_x(t_n)\} = [\overline{E}_{wx}(t_1)]\{\overline{F}_x(t_n)\} + \sum_{i=2}^n [\overline{E}_{wx}(t_i)]\{\overline{F}_x(t_{n-i+1})\}; \quad (5.83)$$

$$\frac{1}{\Delta t} \{\overline{U}_z(t_n)\} = [\overline{E}_{uz}(t_1)]\{\overline{F}_z(t_n)\} + \sum_{i=2}^n [\overline{E}_{uz}(t_i)]\{\overline{F}_z(t_{n-i+1})\}; \quad (5.84)$$

$$\frac{1}{\Delta t} \{\overline{U}_x(t_n)\} = [\overline{E}_{ux}(t_1)]\{\overline{F}_x(t_n)\} + \sum_{i=2}^n [\overline{E}_{ux}(t_i)]\{\overline{F}_x(t_{n-i+1})\}. \quad (5.85)$$

Os deslocamentos totais em cada direção são obtidos pela equações a seguir:

$$\frac{1}{\Delta t} \{\overline{W}_{Total}(t_n)\} = [\overline{E}_{wz}(t_1)]\{\overline{F}_z(t_n)\} + \sum_{i=2}^n [\overline{E}_{wz}(t_i)]\{\overline{F}_z(t_{n-i+1})\} + [\overline{E}_{wx}(t_1)]\{\overline{F}_x(t_n)\} + \sum_{i=2}^n [\overline{E}_{wx}(t_i)]\{\overline{F}_x(t_{n-i+1})\} \quad (5.86)$$

$$\frac{1}{\Delta t} \{\overline{U}_{Total}(t_n)\} = [\overline{E}_{uz}(t_1)]\{\overline{F}_z(t_n)\} + \sum_{i=2}^n [\overline{E}_{uz}(t_i)]\{\overline{F}_z(t_{n-i+1})\} + [\overline{E}_{ux}(t_1)]\{\overline{F}_x(t_n)\} + \sum_{i=2}^n [\overline{E}_{ux}(t_i)]\{\overline{F}_x(t_{n-i+1})\}. \quad (5.87)$$

O somatório gera um vetor, $\{CONV(t_n)\}$. Considerando a influência dos demais elementos sobre o elemento no qual é calculado o deslocamento, é introduzido mais um somatório nas equações anteriores. Pode-se montar um sistema como o apresentado para as funções estacionárias (como em 5.14). Neste caso, o sistema na forma compacta possui a forma:

$$\{u_f(t_n)\} = \Delta t [E(t_1)]\{F_f(t_n)\} + \Delta t \{CONV(t_n)\}. \quad (5.88)$$

Para montagem da fundação rígida sem massa, devem ser consideradas as condições de compatibilidade cinemática (5.17),

$$\{u_f(t_n)\} = [CC]\{u_{ref}(t_n)\}. \quad (5.89)$$

Igualando (5.89) a (5.88), inicia-se a montagem do sistema para fundação rígida,

$$\left[\begin{matrix} E(t_1) & -\frac{[CC]}{\Delta t} \end{matrix} \right] \begin{Bmatrix} F_f(t_n) \\ u_{ref}(t_n) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -CONV(t_n) \\ F_{ext}(t_n) \end{Bmatrix}. \quad (5.90)$$

Considerando as equações de equilíbrio, o sistema passa a ser completo e com solução,

$$\left[\begin{matrix} E(t_1) & -CC/\Delta t \\ EQ & 0 \end{matrix} \right] \begin{Bmatrix} F_f(t_n) \\ u_{ref}(t_n) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -CONV(t_n) \\ F_{ext}(t_n) \end{Bmatrix}, \quad (5.91)$$

sendo,

- $[E(t_1)]$ a matriz com os valores das funções de influência no instante inicial;
- $[EQ]$ a matriz de equilíbrio de forças do sistema;
- $[CC]$ a matriz de compatibilidade cinemática da fundação;
- Δt o passo no tempo;
- $F_f(t_n)$ o vetor das tensões na interface solo fundação no instante t_n ;
- $u_{ref}(t_n)$ o vetor com os deslocamentos dos graus de liberdade no ponto de referência da fundação no instante t_n ;
- $F_{ext}(t_n)$ vetor de excitação aplicada sobre a fundação;
- $CONV(t_n) = \sum_{i=2}^n [E(t_i)]\{F(t_{n-i+1})\}$, calculado para cada função de influência e excitação correspondente.

5.4.1 Resultados Numéricos para Fundação Rígida 2D no Tempo

Para analisar numericamente as fundações rígidas de superfície, com auxílio das funções de influência transientes, é estudada a estrutura apresentada na figura 5.33 Os parâmetros adotados

para o meio infinito são dados por: módulo de cisalhamento, $\mu=1 \text{ N}^2/\text{m}$; coeficiente de Poisson, $\nu=1/3$; densidade de massa, $\rho=1\text{kg}/\text{m}^3$. É considerado o modelo de amortecimento histerético constante com coeficiente $\eta=0,01$.

O sistema da fundação foi simplificado, são consideradas só as funções de influência que relacionam deslocamento vertical com a excitação normal a superfície. Com essa consideração é possível aplicar somente a excitação vertical. Entretanto, como demonstrado em trabalhos anteriores (Mesquita Neto, 1989), as cargas verticais produzem apenas deslocamento vertical, além de não haver contribuição neste deslocamento provocada por outras excitações, como a tangencial e o momento. Essa simplificação permite uma redução sensível dos custos computacionais, quando é tratado o problema em que só existe a excitação normal a superfície da fundação.

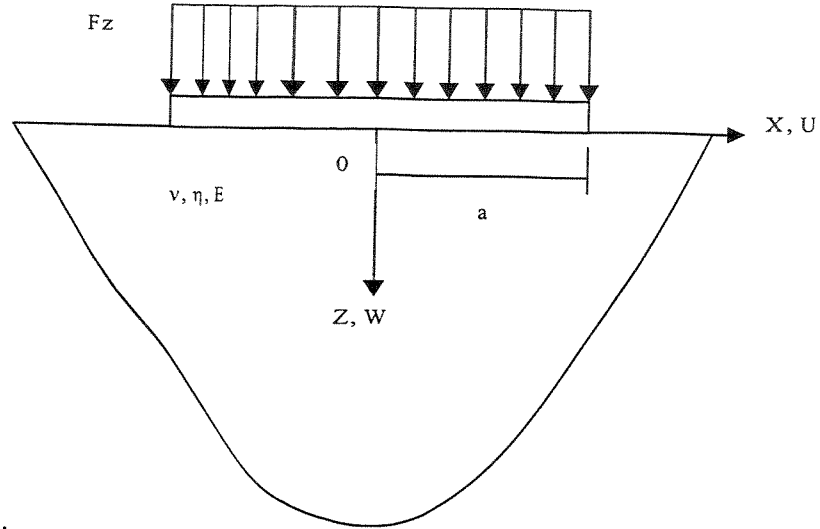


Figura 5.33 – Fundação estudada pela formulação no tempo.

Para a fundação discretizada com quatro termos o sistema apresentado em (5.91) passa a ser dado por:

$$\begin{bmatrix} E_{wz11}(t_1) & E_{wz12}(t_1) & E_{wz13}(t_1) & E_{wz14}(t_1) & -1/\Delta t \\ E_{wz21}(t_1) & E_{wz22}(t_1) & E_{wz23}(t_1) & E_{wz24}(t_1) & -1/\Delta t \\ E_{wz31}(t_1) & E_{wz32}(t_1) & E_{wz33}(t_1) & E_{wz34}(t_1) & -1/\Delta t \\ E_{wz41}(t_1) & E_{wz42}(t_1) & E_{wz43}(t_1) & E_{wz44}(t_1) & -1/\Delta t \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{v1}(t_n) \\ F_{v2}(t_n) \\ F_{v3}(t_n) \\ F_{v4}(t_n) \\ w_{ref}(t_n) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} CONV_1(t_n) \\ CONV_2(t_n) \\ CONV_3(t_n) \\ CONV_4(t_n) \\ F_z(t_n) \end{Bmatrix}, \quad (5.60)$$

que pode ser escrito matricialmente na forma:

$$\begin{bmatrix} E_{wz}(t_1) & -1/\Delta t \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_v(t_n) \\ w(t_n) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -CONV(t_n) \\ F_z(t_n) \end{Bmatrix}.$$

Discretizando a fundação em partes iguais, é possível reduzir o tempo necessário para gerar as funções de influência, pois é necessário calcular apenas os termos da primeira linha. Os demais termos são obtidos por rotação das componentes da primeira linha e simetria da matriz. Na figura 5.34 são apresentadas as funções de influência para os diversos pontos da fundação. Assume-se que é aplicada excitação no primeiro ponto, e são calculadas as funções de influência nos pontos 1, 2, 3 e 4. Quando a excitação é aplicada sobre o ponto 1, a amplitude da resposta no ponto 1 é superior as demais, além não possuir atraso no tempo de resposta. Para gerar as funções de influência, foi adotada uma frequência máxima de dados calculados $\omega_{calc}=400$ rad/s, um passo em frequência de $\Delta\omega=0,1$ e uma frequência final $\omega_{max}=819,2$ rad/s, obtida com auxílio da inclusão de zeros.

Para a fundação discretizada com apenas 1 termo (PVCF), espera-se que a resposta seja a mesma da resolução do problema de valor de contorno em tensão (PVCT), isto é, da convolução da função de influência com a excitação. O resultado para essa análise é apresentado na figura 5.35, as respostas são idênticas e o erro é nulo.

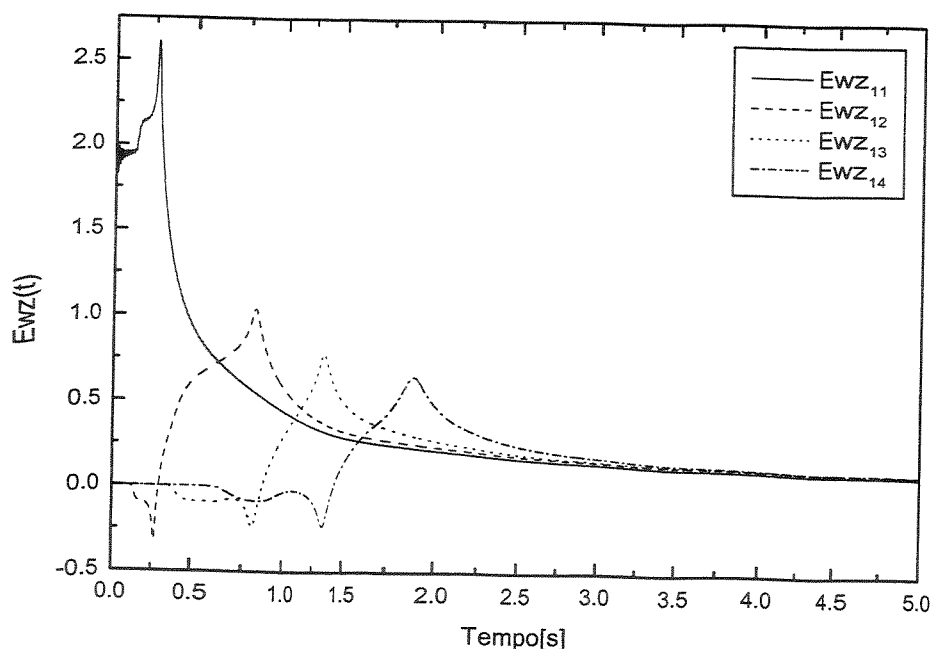


Figura 5.34 – Funções de Influência $E_{wz}(t)$ para a fundação discretizada em 4 partes.

Na figura 5.36 são apresentados os resultados para a fundação discretizada em 1, 2, 4 e 8 partes, a fundação foi submetida a um degrau iniciando em $t=0$ e cessando após 1s. Com o objetivo de validar o resultado é apresentada também a resposta para fundação modelada em frequência, como descrito na sessão 5.3. Pode-se perceber que existe uma boa convergência, para os passos de tempo iniciais, com aumento do número de partes. Entretanto, para 4 e 8 partes surgem oscilações, e o processo diverge. O efeito é muito mais evidente para a fundação discretizada em 8 partes. Na figura 5.37 são apresentados os deslocamentos verticais para tempos maiores com a fundação discretizada em 1, 2 e 4 componentes. É possível com a formulação no tempo obter respostas para períodos relativamente longos. São necessárias mais investigações para determinar as causas das oscilações observadas na resposta transiente para a fundação discretizada em 8 partes.

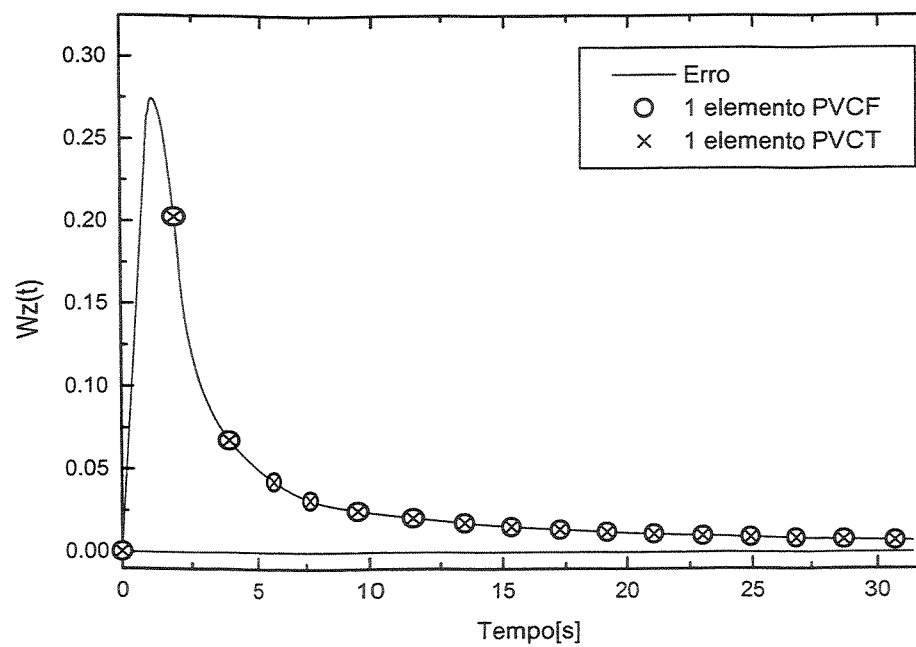


Figura 5.35 – Comparação entre resposta do PVCT e PVCF.

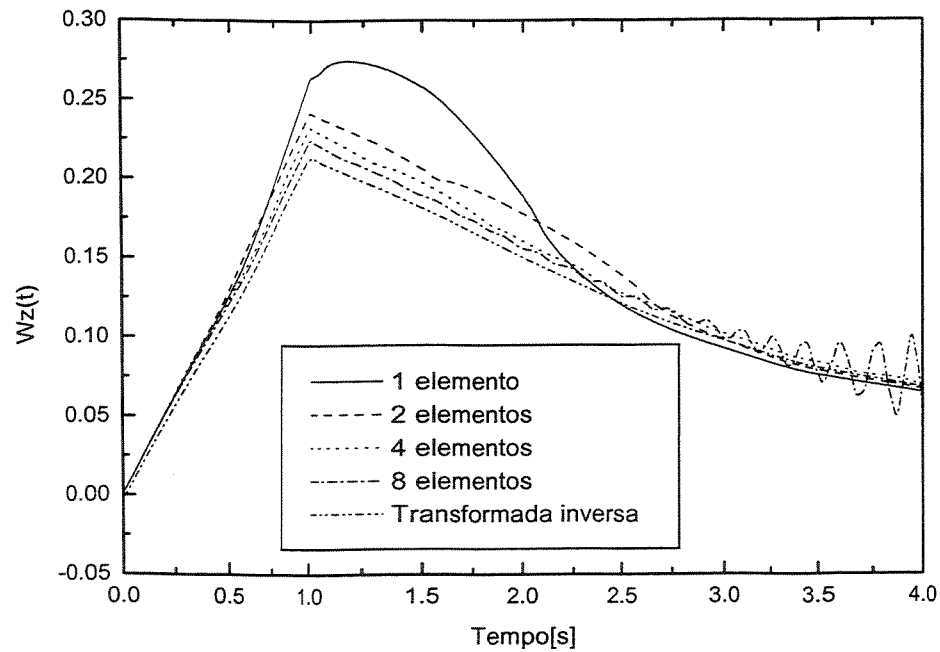


Figura 5.36 – Resposta vertical da fundação obtida pela formulação transiente.

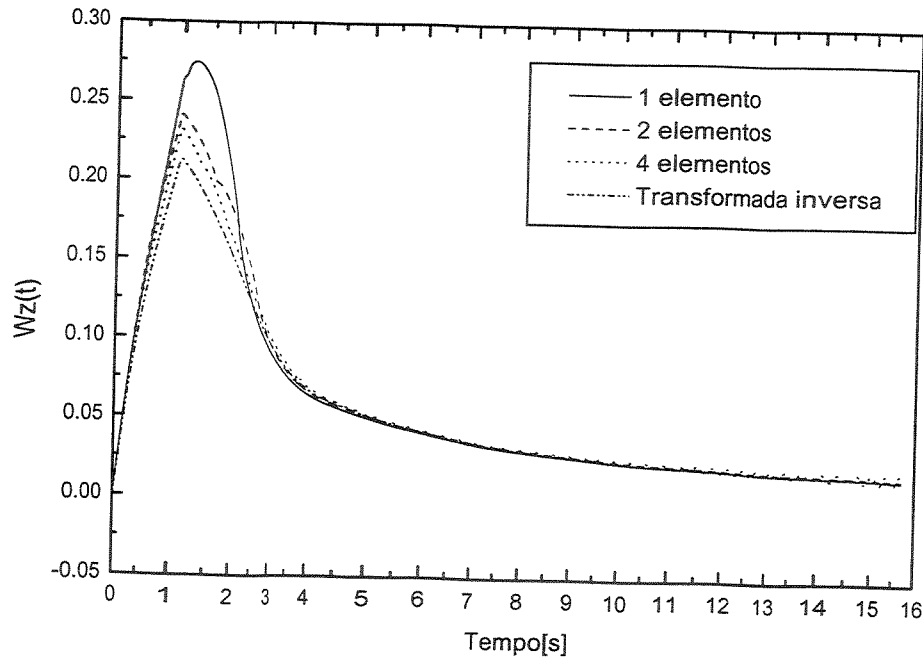


Figura 5.37 – Resposta vertical da fundação obtida pela formulação transiente.

Para validação da metodologia foi analisada a fundação rígida de superfície simulada por Spyrakos e Antes (1986) e Spyrakos e Beskos (1986). Este problema foi analisado na seção 5.3.4 (Resultados Numéricos para Fundação Rígida sem Massa Modelada em Frequência).

A interface entre o solo e a fundação foi discretizada em 4 e 6 elementos. Para determinação das funções de influência necessárias para a superposição, foi adotada uma frequência máxima $Ao_f = 819.2$, e utilizados 8192 termos em frequência, sendo obtido um passo em frequência $\Delta Ao = 0.1$. As funções estacionárias foram calculadas até $Ao_{zeros} = 500$. A Consequentemente foram obtidas respostas transientes para essas funções de influência para um p $T_{max} = 0.0162s$, com passo de tempo $\Delta t = 9.9059 \cdot 10^{-7}s$. A superposição dessas funções foi realizada para o período $T = 0.001s$.

Os resultados para a fundação discretizada em quatro elementos é apresentada nas figuras 5.38, 5.39, 5.40, respectivamente para o modelos de amortecimento histerético constante, o modelo de Kelvin-Voigt e o modelo de rampa. Uma comparação para analisar a influência do modelo de amortecimento pode ser feita através da figura 5.41, na qual são apresentados os três modelos de amortecimento para o coeficiente de amortecimento $\eta = 0.05$. Através dessas figuras

podem ser observadas oscilações, não encontradas nos resultados das fundações modeladas em frequência, entretanto os resultados são muito próximos aqueles obtidos por Spyrakos e Antes e Spyrakos e Beskos. Na figura 4.39, para o modelo de amortecimento de Kelvin-Voigt nota-se a instabilidade para o coeficiente de amortecimento $\eta=0.1$.

Na figura 5.42 é apresentado o resultado para o amortecimento histerético constante, $\eta=0.05$, porém utilizando quatro e seis elementos. Para maiores períodos de tempo, com seis elementos é observada uma maior instabilidade da resposta.

Resultados para fundação discretizada em seis elementos, submetida ao pulso, são apresentados nas figuras 5.43, 5.44, 5.45, para o amortecimento constante, de Kelvin-Voigt e rampa, respectivamente. As respostas são próximas aquelas obtidas nos outros trabalhos, as oscilações também são mais nítidas e significativas, levando a divergência da resposta. Como foi comentado anteriormente são necessárias mais investigações para determinar as causas e soluções para esse problema. Acredita-se que o problema esteja relacionado ao condicionamento da matrizes que compõem o sistema no qual são determinados os deslocamentos e reações ao longo da fundação. Deve-se salientar que o tempo computacional aumenta sensivelmente com o refinamento da discretização, isso se deve principalmente ao maior número de convoluções realizadas para montagem do sistema.

As resposta da fundação a outros tipos de excitação foi simulada. Para isto a fundação foi discretizada em 4 elementos e submetida a uma excitação harmônica do tipo seno, com frequência $A_0=1.5$, como na seção 5.3.4. A resposta é muito próxima daquelas obtidas por Spyrakos e Antes e Spyrakos e Beskos, apresentando comportamento muito melhor do que as respostas obtidas para o pulso.

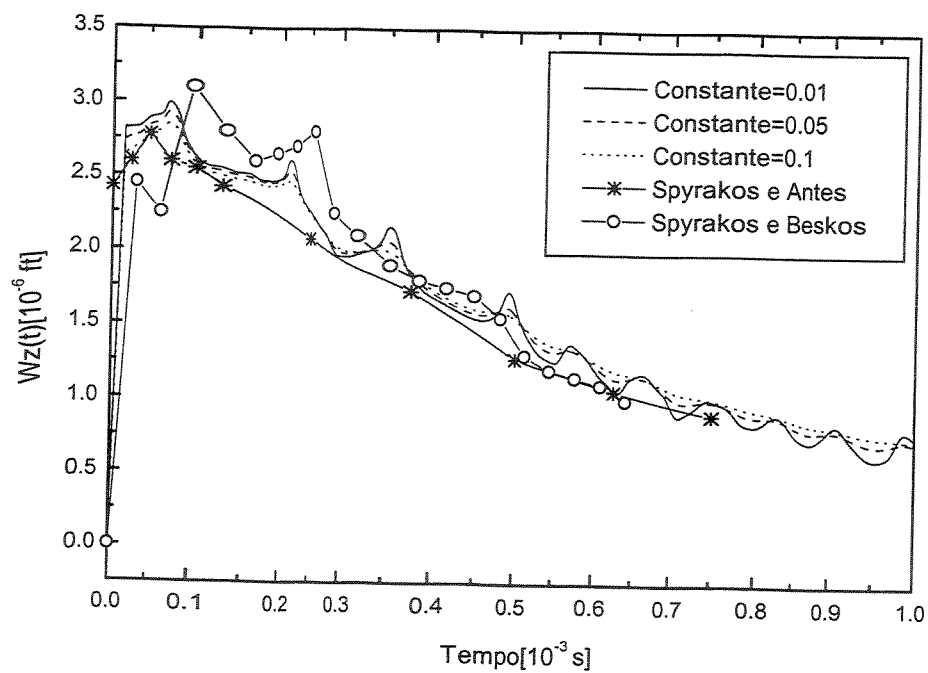


Figura 5.38 – Fundação com 4 elementos, amortecimento histerético constante.

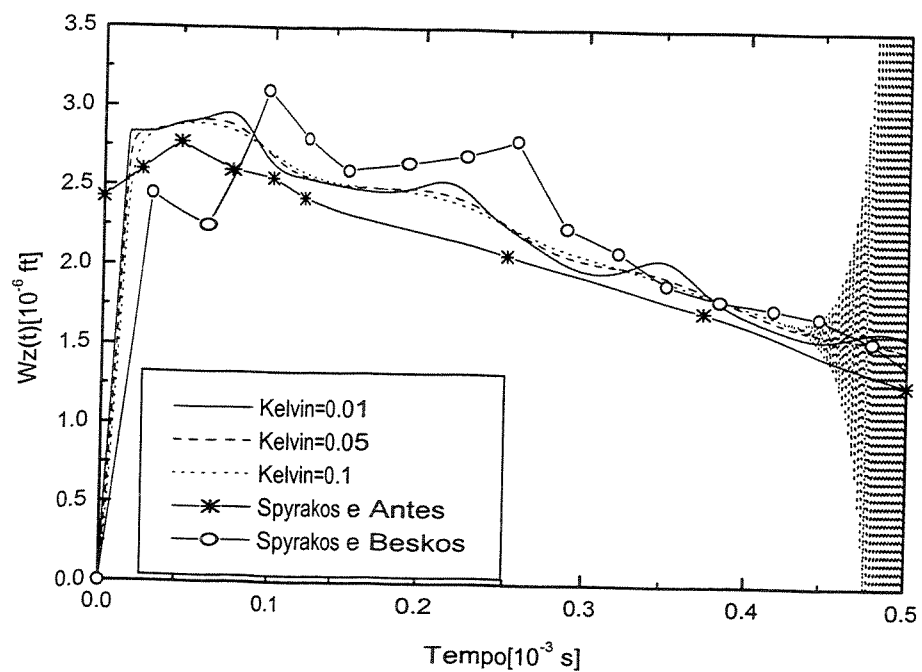


Figura 5.39 – Fundação com 4 elementos, amortecimento Kelvin-Voigt.

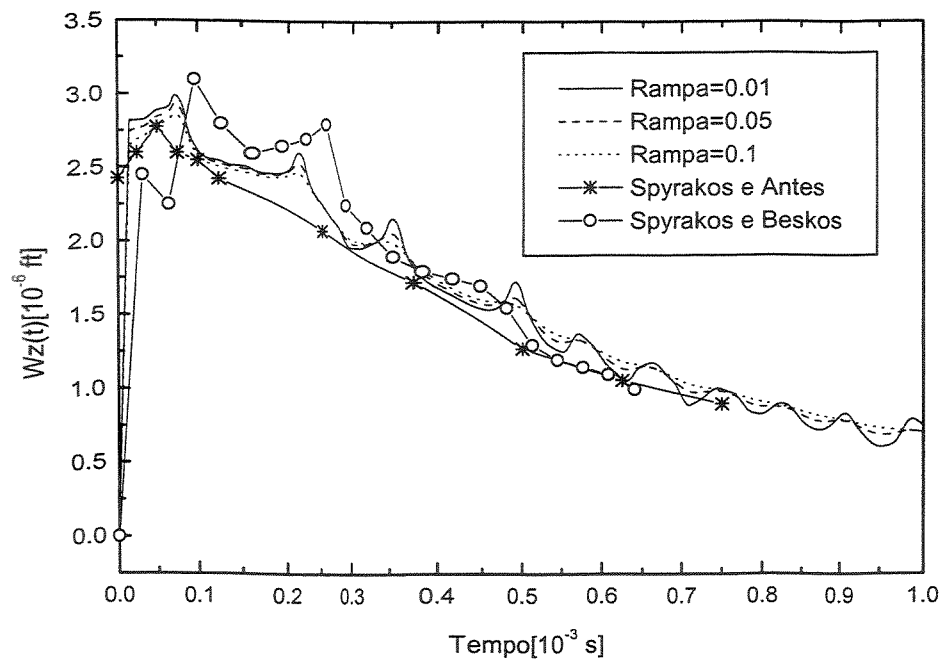


Figura 5.40 – Fundação com 4 elementos, amortecimento do tipo rampa.

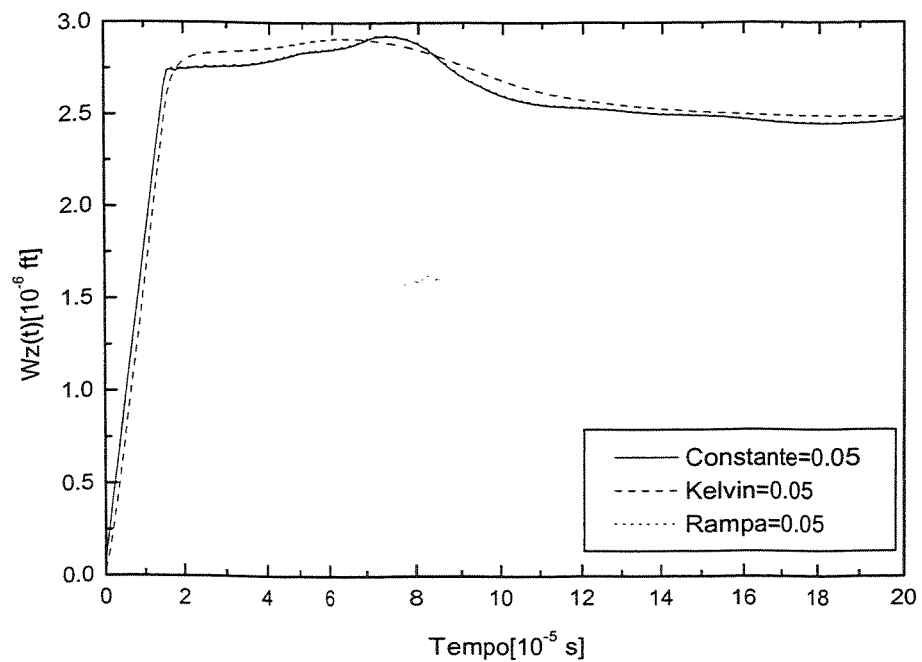


Figura 5.41 – Fundação com 4 elementos, efeito do modelos de amortecimento adotado, $\eta=0.05$.

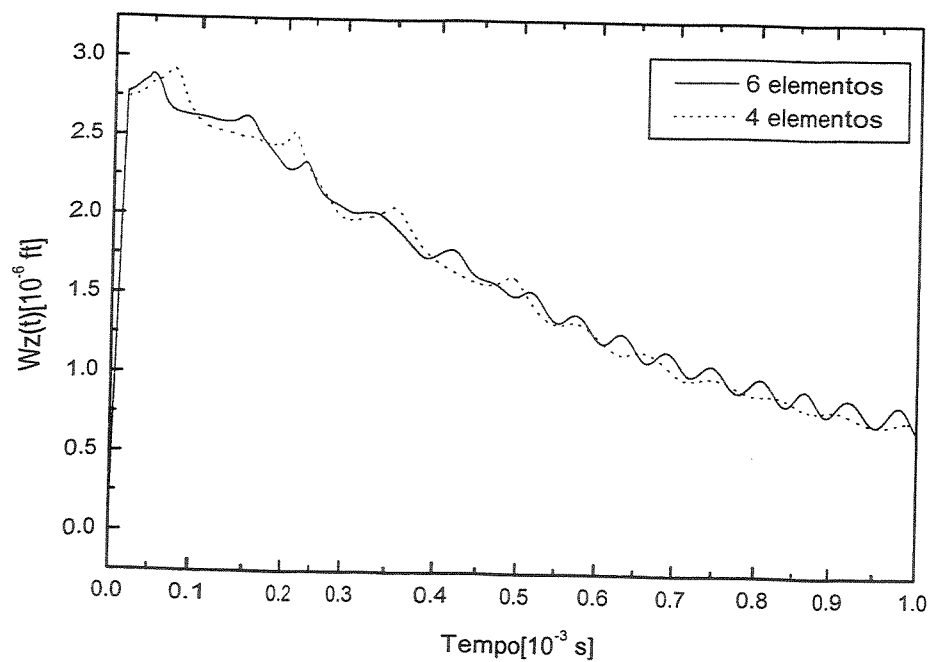


Figura 5.42 – Efeito do número de elementos.

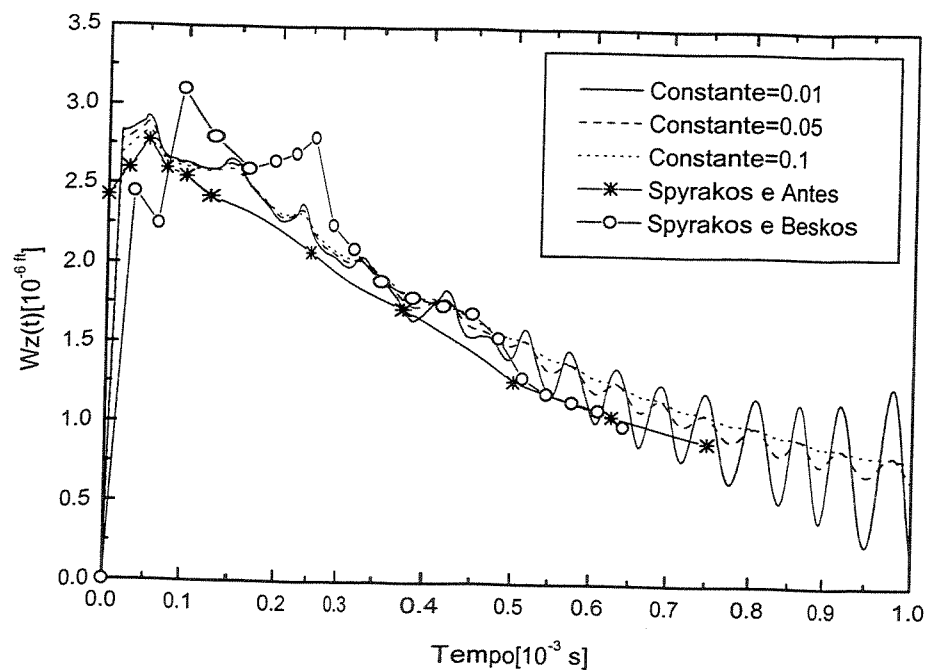


Figura 5.43 – Fundação com 6 elementos, amortecimento histerético constante.

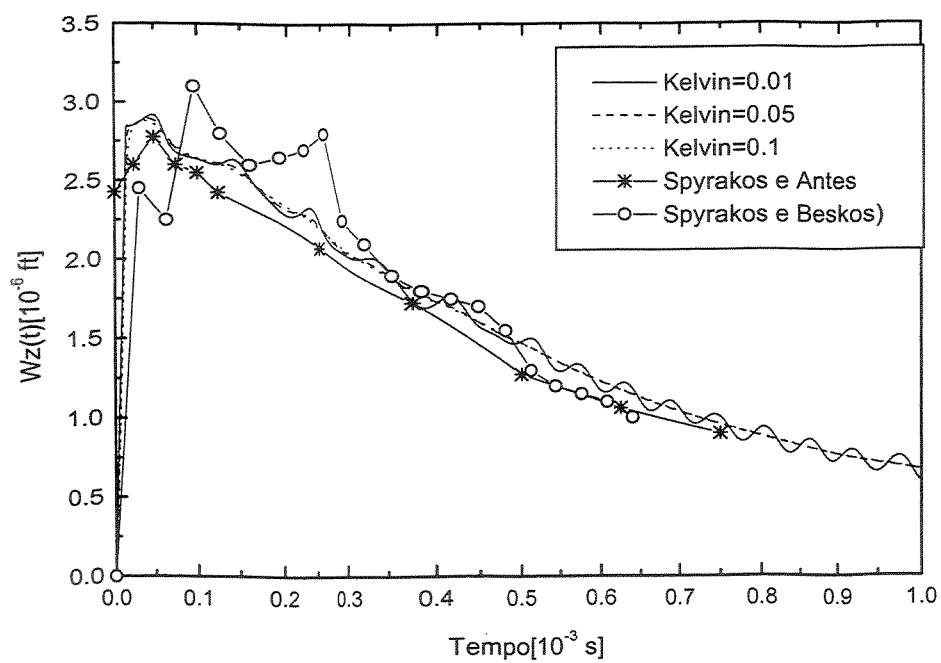


Figura 5.44 – Fundação com 6 elementos, amortecimento de Kelvin-Voigt.

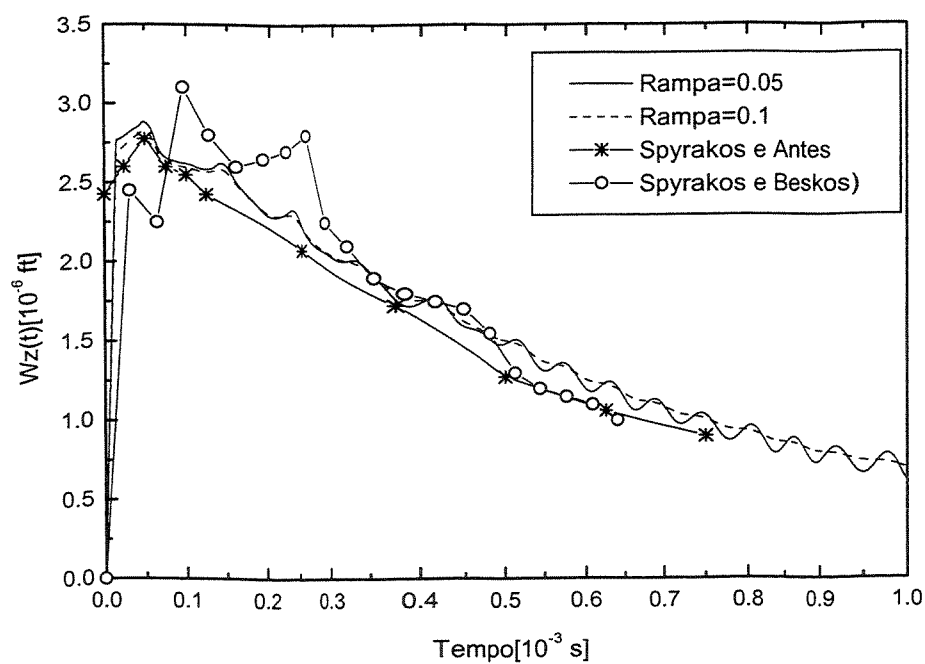


Figura 5.45 – Fundação com 6 elementos, amortecimento do tipo rampa.

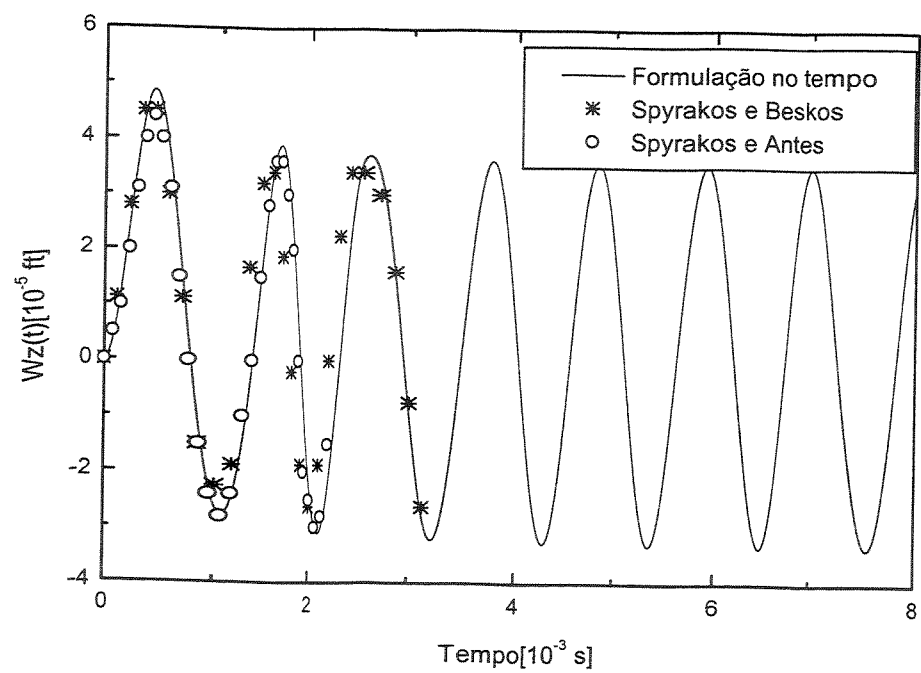


Figura 5.46 — Fundação com 4 elementos, excitação harmônica.

Capítulo 6

Conclusões e Trabalhos Futuros

Neste trabalho, foram apresentadas as técnicas para obtenção de funções de Green e Influência 2D transientes a partir das funções estacionárias. A metodologia foi estendida para a análise de deslocamentos de fundações rígidas de superfície. A técnica, para obtenção das respostas e funções transientes, consiste basicamente na aplicação das transformadas de Fourier, com uso do algoritmo da transformada rápida de Fourier (FFT). A partir da observação das respostas e funções estacionárias, foram desenvolvidas algumas técnicas para adequá-las ao processo de transformação de domínio. As técnicas empregadas foram o uso de interpolação spline cúbica, filtro em altas frequências, transição para zeros com o uso de interpolação spline e a introdução de zeros na resposta estacionária.

As funções de Green obtidas foram comparadas aos resultados apresentados por Guan e Novak (1992), sendo obtida boa concordância. Foi analisado somente o modelo de amortecimento histerético constante. No caso das funções de influência, devido à ausência na literatura técnica de respostas transientes, não foi possível a comparação com resultados de outros pesquisadores. No entanto, os resultados apresentaram coerência e respeito à dinâmica do problema de propagação de ondas no solo. As respostas apresentadas para as funções de Influência consistem da função de resposta ao impulso, ou seja, do sistema submetido a um delta de Dirac. Foram analisados três modelos de amortecimento: o histerético constante, o de Kelvin-Voigt e um modelo de rampa. Os resultados obtidos foram analisados e comparados entre si.

As funções de Influência foram aplicadas aos problemas de interação solo-estrutura, no estudo de fundações rígidas de superfície. Inicialmente foi apresentada a formulação em

freqüência, na qual os sistemas que regem a física das fundações rígidas, são montados com uso das funções de Influência estacionárias. O sistema é remontado para cada freqüência. Foi possível com isso gerar a função de resposta em freqüência da fundação, a partir da qual, com uso da FFT, foram obtidas as respostas transientes. Para análise numérica, foi estudado o deslocamento vertical da fundação submetida à excitação também vertical. Foram observados problemas de não causalidade, que, após estudos com os modelos de amortecimento, puderam ser eliminados. Esses estudos deixaram clara a influência dos modelos de amortecimento no comportamento físico das fundações; modelos inadequados geram respostas não causais. Foram estudados os modelos de amortecimento histerético constante, de Kelvin-Voigt e rampa. O amortecimento de Kelvin-Voigt foi o que apresentou menor não causalidade. Os resultados obtidos foram validados com os apresentados por Spyrakos e Antes (1986) e Spyrakos e Beskos (1986).

A formulação dos sistemas para a análise de fundações foi também realizada no domínio transiente, com o uso das funções de influência sintetizadas com a transformada de Fourier. Essa formulação permite que os modelos de contato sejam inseridos futuramente. A principal dificuldade na formulação no tempo foi a superposição no tempo, que é regida pela integral de convolução. A obtenção das respostas transientes das fundações rígidas, com o uso desta segunda formulação, apresenta um custo computacional mais elevado quando comparado à formulação em freqüência.

Para trabalhos futuros, propõe-se o uso da técnica apresentada para as demais funções de Green e Influência existentes. Assim será possível a análise de meios anisotrópicos, estratificados, poroelásticos e sobre leito rígido.

Uma vez que a técnica é bem dominada, é possível realizar o estudo da interação do solo com estruturas mais complexas, como fundações engastadas e enterradas. Também pode ser proposto o acoplamento no tempo com elementos finitos, modelando estruturas complexas apoiadas sobre o semi-espço. O alto custo computacional necessário, para gerar as respostas estacionárias, demonstra a necessidade de estudos em sistemas de processamento paralelo.

A metodologia pode também ser empregada em outras áreas que não a propagação de ondas no solo, como, por exemplo, os problemas de propagação de trincas, que possuem formulação estacionária.

Referências Bibliográficas

- Adolph, M., Mesquita Neto, E. Romanini, E. A Methodology to Determine the Transient Response of Structures Interacting with Visco-Elastic Soils Using the FFT Algorithm. Proceedings 22nd CILAMCE 22°. Congresso Íbero-Latino-Americano de Métodos Computacionais em Engenharia, Campinas, 2001, (CD-ROM).
- Ahmad, S. Banerjee, P. K. Time – domain Transient Elastodynamic Analysis of 3-D Solids by BEM. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 26, p. 1709-1728, 1988.
- Ahmad, S. Banerjee, P. K. Time – domain Transient Elastodynamic Analysis of 3-D Solids by BEM. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 26, p. 1709-1728, 1988.
- Almeida Barros, P. L. Elastodinâmica de Meios Transversalmente Isotrópicos: Funções de Green e o Método dos Elementos de Contorno na Análise de Interação Solo-Estrutura. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1997. Tese (Doutorado).
- Almeida Barros, P. L., Mesquita Neto, E. A Non-Singular version of the Indirect Boundary Element Method Applied to the Stationary Response of Elastic Domains. Proceedings 13th ASCE Engineering Mechanics Conference, John Hopkins University, Baltimore, Maryland, USA, 6pp (Proc. em CD-ROM), 1999.

- Almeida Barros, P. L., Mesquita Neto, E. Elastodynamics Green's Functions for Orthotropic Plane Strain Continua with Inclined Axis of Symmetry. *International Journal for Solids and Structures*, v. 36, p. 4767-4788, 1999.
- Almeida Barros, P. L., Mesquita Neto, E. On the Dynamic Interaction and Cross-Interaction of 2D Rigid Structures with Orthotropic Elastic Media Possessing General Principal Axes Orientation, submetido a *Meccanica*.
- Antes, H. A Boundary Element Procedure for Transient Wave Propagation in Two-dimensional Isotropic Elastic Media. *Finite Elements in Analysis and Design*, v.1, p.313-322, 1985.
- Antoniou, A. *Digital Filters: Analysis and Design*. McGraw Hill, 1979.
- Barros, F. C. P. , Luco, J. E. Dynamic Response of a Two-Dimensional Semi-Circular Foundation Embedded in a Layered Viscoelastic Half-Space. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, v. 14, p. 45-57, 1995.
- Barros, R. M. Elementos Infinitos para o Tratamento de Problemas da Visco-elastodinâmica Estacionária em Domínios Ilimitados pelo Método dos Elementos Finitos. Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade de Campinas, Brasil, 1996 Dissertação de Mestrado.
- Barros, R. M. Funções de Green e de Influência para Meios Visco-Elásticos Transversalmente Isotrópicos no Domínio da Frequência. Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade de Campinas, Brasil, 2001. Tese de Doutorado.
- Bendat, J. S., Piersol, A. G. *Engineering Applications of Correlation and Spectral Analysis*. John Wiley & Sons, 1980.
- Bergland, G. D. A guided tour of the Fast Fourier Transform. *IEEE Spectrum*, p.41-52, Julho 1969.

- Beskos, D. E. **Boundary Element Methods in Dynamic Analysis.** Applied Mechanics Review, v. 40, n. 1, p.1-23, 1987.
- Beskos, D. E. **Boundary Element Methods in Dynamic Analysis: Part II (1986-1996).** Applied Mechanics Review, v. 50, n. 3, p. 149-197, 1997.
- Bettes, P. **Infinite Elements.** International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 11, p. 53-64, 1997.
- Betti, R. ,Abdel-Ghaffar, A. M. **Analysis of Embedded Foundations by Substructure-Deletion Method.** Journal of Engineering Mechanics, v. 120, n. 6, p. 1283-1303, 1994.
- Capello Sousa, E. A. **Métodos dos Elementos Finitos e Elementos de Contorno Aplicados a Problemas Visco-elastodinâmicos Transientes: Pré-requisitos para o Acoplamento.** Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1999. Tese (Doutorado).
- Capello Sousa, E. A. , Almeida Barros, P. L., Mesquita Neto, E. **FFT based Transient Response of 2D Rigid Foundations Interacting with Transversaly Isotropic Soils.** Proceedings 14th ASCE Engineering Mechanics Conference. University of Texas, Austin, USA, p. 6 (Proceedings em CD-ROM).
- Christensen, R. M. **Theory of Viscoelasticity.** New York, Academic Press, 1982.
- Coda, H. B. , Venturini, W. S. **Non-singular Time-stepping BEM for Transient Elastodynamic Analysis.** Engineering Analysis with Boundary Elements, v. 15, p. 11-18, 1995a.
- Coda. H. B. , Venturini, W. S. **Three-imensional Transient BEM Analysis.** Computers & Structures, v. 56, n. 5, p. 751-768, 1995b.

- Crandall, S. H. The Role of Damping in Vibration Theory. Journal of Sound and Vibration, v. 11, p 3-18, 1970.
- Cruse, T. A. A Direct Formulation and Numerical Solution of the General Transient Elastodynamic Problem II. Journal of Mathematical Analysis and Applications, v.22, p. 341-355, 1968.
- Cruse, T. A., Rizzo, F. J. A Direct Formulation and Numerical Solution of the General Elastodynamic Problem I. Journal of Mathematical Analysis and Applications, v.22, p. 244-259, 1968.
- Daros, C., Wave Propagation in Unbounded Piezoelectric Media of Transversely Isotropic Symmetry. Institut for Applied Mechanics, Technical University Braunschweig (Brunswick), Alemanha, 1999. Tese de Doutorado.
- Dineva, P. , Hadjиков, L. , Rangelow, Ts. On the Solution of the Problem of Seismic Waves Propagation in a Multilayered Nonelastic Region by the BEM. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, v. 10, n. 6, p. 323-329, 1991.
- Durbin, F. Numerical Inversion of Laplace Transform: an Efficient Improvement to Dubner and Abate's Method. The Computer Journal, v.17, n.4, p. 371-376, 1974.
- Estorff, O. , Pais, A. L. , Kausel, E. Some Observations on Time Domain and Frequency Domains Boundary Elements. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 29, p. 785-800, 1990.
- Findley, W. N., Lai, J. S., Onaran, K. Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials With an Introduction to Linear Viscoelasticity, Dover, New York, 1989.
- Gaul, L. Dämpfung von Schwingungen bei Maschinen und Bauwerken. Baugrund und Fundamentdämpfung. VDI-Berichte 627, p. 201-230.

- Gaul, L. , Klein, P. , Plenge, M. Dynamic Boundary Element Analysis of Foundation Slabs on Layered Soil. In: Boundary Elements X, vol 4: Geomechanics, Wave Propagation and Vibrations, Brebia, C. A. (ed). Berlin: Springer-Verlag, p. 29-44, 1988.
- Gaul, L. , Klein, P. , Plenge, M. Simulation of Wave Propagation in Irregular Soil Domains by BEM and Associated Small Scale Experiments. Engineering Analysis with Boundary Elements, v. 8, n. 4, p. 200-205, 1991.
- Gaul, L. , Plenge, M. Progress in 3D BE Calculations and Optoelectronic Measurements of Soil-Structure Interaction. In: Advances in Boundary Elements, vol. 3, Brebia, C. A. , Connor, J. J. (eds). Springer Verlag, Berlin, 1989.
- Gaul, L., Schanz, M. Boundary Element Calculation of Transient Response of Viscoelastic Solids Based on Inverse Transformation. Meccanica, v. 32, p. 171-178, 1997.
- Gaul, L., Schanz, M. A comparative study of three boundary element approaches to calculate the transient response of viscoelastic solids with unbounded domains. Computational Mechanics, v.179, p. 111-123, 1999.
- Gaul, L. , Schanz, M. , Fiedler, C. Viscoelastic Formulations of BEM in Time and Frequency Domain. Engineering Analysis with Boundary Elements, v. 10, p. 137-141, 1992.
- Gazetas, G. Analysis of Machine Foundation Vibrations: State of the Art. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, v. 2, p. 2-42, 1983.
- Givoli, D. Numerical Methods for Problems in Infinite Domains, Elsevier, Holanda, 1992.
- Graff, K. F. Wave Motion in Elastic Solids. New York, Dover, 1991.

- Guan, F., Novak, M. Transient Response of an Elastic Homogeneous Halfspace to Suddenly Applied Rectangular Loading. Geotechnical Research Centre Report GEOT-10-92, junho de 1992.
- Hahn, H. G. Elastizitätstheorie, Grundlagen der linearen Theorie und Anwendungen auf eindimensionale, ebene und räumliche Probleme. Stuttgart, Teubner, 1985.
- Hamming, R. W. Numerical Methos for Scientists and Engineers. Segunda edição. New York, Dover, 1987.
- Haupt, W. Bodendynamik Grundlagen und Anwendung. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1986.
- Israil, A. S. M. , Banerjee, P. K. Advanced Time Domain Formulation of BEM for Two Dimensional Transient Elastodynamics. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 29, p. 1421-1440, 1990.
- Israil, A. S. M. , Banerjee, P. K. Two Dimensional Transient Wave Propagation Problens by Time Domain BEM. International Journal Solids Structures, v. 26, n. 8, p. 851-864, 1990.
- Kane, J. H. Boundary Element Analysis in Engineering Continuum Mechanics. Prentice Hall, 1994.
- Kausel, E. , Seale, S. H. Dynamic and Satic Impendances of Cross–Anisotropic Halfspaces. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, v. 9, n. 4, p. 172-178, 1990.
- Kolsky, H. Stress Waves in Solids. Dover, New York, 1963.
- Luco, J. E. , Barros, F. C. P. Seismic Response of a Cylindrical Shell Embedded in a Layared Viscoelastic Half–Space. I: Formulation. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, v. 23, p. 553-567, 1994.

- Luco, S. E., Hadjain, A. H. The Dynamic Modeling of the Half Plane by Finite Elements. Nuclear Engineering and Design, v. 31, p. 184-194, 1974.
- Luco, S. E., Westmann, A. M. Dynamic Response of Rigid Footing Bonded to an Elastic Half Space. Trans. ASME, Journal of Applied Mechanics, v. 39, p. 527-537, 1972.
- Manolis, G. D. , Ahmad, S. Ground Motions Resulting from a Pressurized Buried Cavity. Wave Motion, v. 10, p. 465-478, 1988.
- Manolis, G. D., Beskos, D. E. Dynamic Stress Concentration Studies by Boundary Integrals and Laplace Transform. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v.17, p. 573-599, 1981.
- Mansur, W. J., A Time Stepping Technique to Solve Wave Propagation Problems Using the Boundary Element Method. University of Southampton, 1983. Ph. D. Thesis.
- Mesquita Neto, E. Zur Dynamischen Wechselwirkung von Fundamenten auf dem Viskoelastischen Halbraum. Hannover, 1989. Tese de Doutorado.
- Mesquita Neto, E., Barros, R. M. Funções de Green Dinâmicas para Solos Transversalmente Isotrópicos e Multi-Estratificados. Proceedings XX CILAMCE, XX Congresso Íbero-Latino-Americano de Métodos Computacionais em Engenharia, São Paulo, 1999, (CD-ROM).
- Mesquita Neto, E., Pontes, B. R. Complete Compliance Matrices for the Dynamics Foundation-Soil-Foundation Interaction: A Critical Review of the BEM Potentialities. Proceedings of the 14th BEM (International Conference on Boundary Element Methods), p. 193-205, Sevilha, Espanha, 1992.

- Mesquita Neto, E. Sousa, E. C., Pontes, B. R. Boundary or Finite Elements to Model the Behaviour of Dynamical Systems and Foundation Structures Interacting with the Soil? Proceedings PACAM III, 3rd Pan American Congress of Applied Mechanics, p 101-104, São Paulo, Brasil, 1993.
- Mesquita, E. , Pontes, B. R. Complete Compliance Matrices for the Dynamic Foundation–Soil–Foundation Interaction: a Critical Review of the BEM Potentialities. In: Boundary Elements XIV, vol. 2 Stress Analysis and Computational Aspects, Brebia, C. A. , Dominguez, J. , Paris, F. (eds), Elsevier Science Publishers, Londres, p. 193-205, 1992.
- Mesquita, E. , Pontes, B. R. , Sousa, E. A. C. Coupling of Finite Element and Boundary Element Procedures for Steady State Elastodynamics – Part II: Numerical Results – Validations and Applications. Journal of the Brazilian Society Mechanical Engineering, v. XVI, n. 2, p. 159-176, 1994.
- Mesquita, E. , Romanini, E. Green Function Versus Direct Boundary Element Scheme to Model the Dynamic Interaction of Foundations resting on a Viscoelastic Layer over BedRock. In: Boundary Elements XIV, vol. 2 Stress Analysis and Computational Aspects, Brebia, C. A., Dominguez, J. , Paris, F. (eds), Elsevier Science Publishers, Londres, p. 107-121, 1992.
- Mesquita, E., Romanini, E., Pontes, B. R. A boundary Element Implementation of Substructure Deletion Method. 17th BEM (17 Boundary Element International Conference), p.375-386, 1995.
- Newland, D. E. An Introduction to Random Vibrations, Spectral and Wavelet Analysis, Longman, 3^a. edição, 1993.
- Papoulis, A. A. New Method of Inversion of the Laplace Transform. Quarterly Applied Mathematics, v.14, p.405-414, 1957.

- Rajapakse, R. K. N. D. Dynamic Response of Elastic Plates on Viscoelastic Half Space. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 115, n. 9, p. 1867-1881, 1989.
- Rajapakse, R. K. N. D., Sentjuntichai, T. Fundamental Solutions for Poroelastic Half Space with Compressible Constituents. *Journal of Applied Mechanics*, v. 60, p. 847-856, 1993.
- Rajapakse, R. K. N. D. , Wang, Y. Elastodynamic Green's Functions of Orthotropic Half Plane. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 117, n. 3, p. 588-604, 1991.
- Rajapakse, R. K. N. D. , Wang, Y. Green's Functions for Transversely Isotropic Elastic Half Space. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 119, n. 9, p. 1724-1746, 1993.
- Richter, C. A Green's Function Time-Domain BEM of Elastodynamics. *Computational Mechanics Publications*, Southampton, UK, 1997.
- Rizos, D. C. , Karabalis, D. L. An Advanced Direct Domain BEM formulation for General 3-D Elastodynamic Problems. *Computational Mechanics*, v. 15, p. 249-269, 1994.
- Romanini, E. Síntese de Funções de Influência e Green para o Tratamento da Interação Dinâmica Solo-Estrutura através de Equações Integrais de Contorno. Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade de Campinas, Brasil, 1995. Tese de Doutorado.
- Saada, A. S. Elasticity Theory and Applications. Pergamon Press, New York, 1974.
- Saez, A. P. Análisis Numérico de Problemas Elastodinámicos en Materiales Transversalmente Isótropos. Sevilla, Espanha, 1997. Tese de Doutorado.
- Scanlan, R. H. Linear Damping Models and Causality in Vibrations. *Journal of Sound and Vibration*, v. 13, p. 499-509, 1970.
- Schanz, M. A Boundary Element Formulation in Time Domain for Viscoelastic Solids. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, v. 15, p. 799-809, 1999.

- Schanz, M. **Wave Propagation in Viscoelastic and Poroelastic Continua: A Boundary Element Approach.** Lecture Notes in Applied Mechanics.. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2001.
- Schanz, M., Antes, H. **Application of “Operational Quadrature Methods” in Time Domain Boundary Element Methods.** *Meccanica*, v. 32, n. 3, p. 179-186, 1997*
- Schanz, M., Antes, H. **A New Visco- and Elastodynamic Time Domain Boundary Element Formulation.** *Computational Mechanics*, v. 20, n. 5, p. 452-459, 1997b.
- Seale, S. H. , Kausel, E. **Point Loads in Cross-Anisotropic Layered Halfspaces.** *Journal of Engineering Mechanics*, v. 115, n. 3, p. 509-524, 1989.
- Spyrakos, C. C. , Beskos, D. E. **Dynamic Response of Rigid Strip-Foundation by a Time Domain Boundary Element Method.** *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 23, p. 1547-1565, 1986.
- Spyrakos, C. C., Antes, H. **Time Domain Boundary Element Method Approaches in Elastodynamics: A Comparative Study.** *Computers & Structures*, v. 24, n. 4, p. 529-535, 1986.
- Wang , Y. , Rajapakse, R. K. N. D. **Axisymmetric Elastodynamic Green’s Functions of a Layered Transversely Isotropic Half Space.** In: *Boundary Elements XIV*, vol. 2 *Stress Analysis and Computational Aspects*, Brebbia, C. A. , Dominguez, J. , Paris, F. (eds), Elsevier Science Publishers, Londres, 1992. P. 135-149.
- Wang, C. , Takemiya, H. **Analytical Elements of Time Domain BEM for Two Dimensional Scalar Wave Problems.** *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 33, p. 1737-1754, 1992.

- Wang, C. C. , Wang, H. C. , Liou, G. S. Quadratic Time Domain BEM Formulation for Elastodynamic Transient Analysis. *International Journal Solids Structures*, v. 34, n. 1, p. 129-151, 1997.
- Wang, C. C. , Wang, H. C. , Liou, G. S. Two-dimensional Elastodynamic Transient Analysis by QL Time Domain BEM Formulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 39, p. 951-985, 1996.
- Wang, C. Y., Achenbach, J. D. Three Dimensional Time-Harmonic Elastodynamic Green's Functions for Anisotropic Solids. *Proceedings Royal Soc. London A*, v. 449, p. 441-458, 1995.
- Wang, C. Y., Rajapakse, R. K. N. D. Dynamics of Rigid Strip Foundations Embedded in Orthotropic Elastic Soils. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 20, p. 927-947, 1991.
- Xie, K. , Royster, L. , Ciskowski, R. D. A Boundary Element Method Formulation for Fractional Operator Modeled Viscoelastodynamic Structures. In: *Advances in Boundary Elements*, vol. 3, Brebia, C. A. , Connor, J. J. (eds). Springer Verlag, Berlin, 1989, p. 55-64.
- Zavala, P. A. G. Análise Vibro-Acústica Utilizando o Método de Elementos Finitos com Mapeamento Dirichlet-to-Neumann (DtN). Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade de Campinas, Brasil, 1999. Dissertação de Mestrado.