UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

Modelagem Dinâmica do Eixo de Acionamento da Bomba Injetora Distribuidora BOSCH Tipo VE - Teoria e Experimento

Autor : Alessandro Teixeira Neto

Orientador: Ilmar Ferreira Santos

08/96

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA TESE DEFENDIDA POR ALESSANDRO TEIXEIRA NETO E APROVADA PELA COMISSÃO JULGADORA EM 22 / 08 / 96.

Ilmar Ferreira Santos
ORIENTADOR

Prof. ILMAR FERREIRA SANTOS
Matric. 21768-9
FEM - UNICAMP

T235m
28856/BC

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

Modelagem Dinâmica do Eixo de Acionamento da Bomba Injetora Distribuidora BOSCH Tipo VE - Teoria e Experimento

Autor : Alessandro Teixeira Neto

Orientador: Ilmar Ferreira Santos

Curso: Engenharia Mecânica.

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico.

Dissertação de Mestrado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânida, como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 1996

S.P. - Brasil

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

UNIDADE BC
N.º CHAMADA:
T/UNICAMP
T235m
V.
EX.
TOMBO 28856
PROC. 667/96
C D X
PREÇO R$ 11,00
DATA 29/10/96
N.º CPD

CM-00094777-4

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

T235m

Teixeira Neto, Alessandro
Modelagem dinâmica do eixo de acionamento da bomba injetora distribuidora Bosch tipo VE: teoria e experimento / Alessandro Teixeira Neto.--Campinas, SP: [s.n.], 1996.

Orientador: Ilmar Ferreira Santos.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Método dos elementos finitos. 2. Diferenças finitas. 3. Rotores - Dinâmica. 4. Modelos matemáticos. I. Santos, Ilmar Ferreira. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

Dissertação de Mestrado

Modelagem Dinâmica do Eixo de Acionamento da Bomba Injetora Distribuidora BOSCH Tipo VE - Teoria e Experimento

Autor : Alessandro Teixeira Neto

Orientador: Ilmar Ferreira Santos

Ilmar Ferreira Santos
Prof. Dr. Ilmar Ferreira Santos, Presidente
Universidade Estadual de Campinas

Prof. Dr.Hans Ingo Weber
Universidade Estadual de Campinas

Petrônio Noronha de Souza
Prof. Dr. Petrônio Noronha de Souza
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais

Campinas, 22 de agosto de 1996

Dedicatória

Para Dilson, Nancí, Érico e Ana.

Agradecimentos

Para a realização deste trabalho contei com o apoio de diversas pessoas / instituições às quais presto a minha homenagem:

Ao CNpQ e à Robert Bosch Ltda.

Ao meu orientador.

A todos os meus amigos da UNICAMP e da BOSCH, em especial Flávio Bannwart, Francisco Moraes e Luís Galli.

RESUMO

TEIXEIRA NETO, Alessandro, *Modelagem dinâmica do eixo de acionamento da bomba injetora distribuidora Bosch tipo VE – teoria e experimento*, Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1996. 132p. Tese (Mestrado)

A determinação das curvas características de torque de acionamento e cálculo dos esforços máximos exercidos sobre os mancais hidrodinâmicos são etapas inprescindíveis não só no projeto da bomba injetora mas também no estudo de cada uma de suas aplicações em motores de combustão Diesel. O objetivo deste trabalho é o estudo da viabilidade da modelagem matemática do eixo de acionamento da bomba injetora. Assim, definida uma aplicação da bomba injetora e seus parâmetros operacionais (rotação do motor e níveis de pressão internos da bomba), um modelo matemático é desenvolvido com o intuito de óbter-se o comportamento dinâmico do eixo de acionamento da mesma. O Método dos Elementos Finitos é empregado para a modelagem do eixo de acionamento representando-o por um rotor flexível. Os esforços que agem sobre o eixo devido a cada um dos mecanismos que estão vinculados ao mesmo (engrenagem de acionamento, mancais hidrodinâmicos, bomba de palhetas, engrenagem do regulador e came) são estudados extensivamente de forma que o modelo reproduza fielmente os carregamentos dinâmicos efetivos da bomba injetora. Um modelo matemático para os esforços do came, em função do tempo, é desenvolvido a partir do perfil do came e de uma função obtida experimentalmente para a pressão do cilíndro distribuidor. Modelos linearizados são empregados na caracterização dos esforços dos mancais hidrodinâmicos. Entretanto, no apêndice do trabalho é desenvolvido um modelo matemático, empregando-se o Método dos Elementos Finitos, para a distribuição da pressão na superfície do mancal hidrodinâmico. As etapas de cálculo para

a determinação do problema não-linear da configuração de equilíbrio do sistema rotor / mancal são descritas. Os resultados do modelo matemático são comparados àqueles obtidos nos ensaios experimentais ratificando a viabilidade de simulação, via computador, como metodologia alternativa para o comportamento dinâmico do eixo de acionamento da bomba injetora.

Palavras Chave

– método dos elementos finitos, diferenças finitas, rotores - dinâmica, modelos matemáticos

ABSTRACT

TEIXEIRA NETO, Alessandro, *Modelagem dinâmica do eixo de acionamento da bomba injetora distribuidora Bosch tipo VE - teoria e experimento*, Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1996. 132p. Tese (Mestrado)

The establishment of the driving torque characteristic curves and the computation of the maximum strains exerted over the journal bearings are fundamental stages to a fuel injection pump design and also to any application study of it in Diesel combustion engines. The objective of this work is the feasibility study of a fuel injection pump driving shaft mathematical modelling. So, once defined a fuel injection pump application and its operating parameters (engine rotation and pressure levels inside the pump), a mathematical model is developed with the purpose of geting its driving shaft dynamic behavior. The finite element method is applied to the driving shaft modelling representing it as a flexible shaft. The strains that act over the shaft due to each one of the mechanisms that are attached to it (driving gear, journal bearings, rotary vane pump, guide gear and cam) are extensively studied in a way that the model reproduces the fuel injection pump actual dynamic loads. A mathematical model of the cam strains are developed employing the cam shape and an experimental function that describes the piston pressure. Linearized models are employed to establish the journal bearings strains. A mathematical model employing the finite element method is developed in the appendix to describe the pressure distribution over the journal bearing surface. The computation stages to solve the nonlinear problem of the shaft / journal bearing balance configuration are described. The results of the mathematical model are compared to those obtained experimentaly ratifying its feasibility as an alternative methodology to the fuel injection pump driving

shaft behavior study.

Key Words

– finite element method, finite difference method, dynamics, mathematical modelling

SIMBOLOGIA

Letras Latinas

a comprimento da trajetória de contato (aproximação) $[m]$

b comprimento da trajetória de contato (afastamento) $[m]$

c amortecimento $[N\,s/m]$

d número de dentes de uma engrenagem

e excentricidade do eixo da bomba de palhetas $[m]$

f perfil do came em função de ϕ $[m]$

g aceleração da gravidade $[m/s^2]$

h folga radial rotor / mancal $[m]$

i profundidade da bomba de palhetas $[m]$

j número complexo

k rigidez $[N/m]$

l comprimento de um elemento $[m]$

m massa $[Kg]$

n número de graus de liberdade

o velocidade $[m/s]$

p pressão $[Pa]$

q grau de liberdade

r direção de um sistema referencial cilíndrico secundário

s posição em um elemento $[m]$

t tempo $[s]$

u translação na direção X $[m]$

v translação na direção Y $[m]$

x direção de um sistema referencial secundário

w translação na direção Z $[m]$

y direção de um sistema referencial secundário

z direção de um sistema referencial secundário

A área $[m^2]$

C constante

D diâmetro $[m]$

E módulo de elasticidade $[Pa]$

F força $[N]$

G módulo de elasticidade transversal $[Pa]$

H altura de elevação $[m]$

I momento de inércia de área na direção transversal $[m^4]$

I_D momento de inércia de massa na direção transversal $[Kg\,m^2]$

I_P momento de inércia polar de massa $[Kg\,m^2]$

J momento de inércia polar de área $[m^4]$

L largura do mancal $[m]$

M momento $[N\,m]$

O fluxo do fluido morto $[m^3/s]$

P ponto primitivo de um par de engrenagens

Q carregamento genérico $[N]$ ou $[N\,m]$

R raio de uma circunferência $[m]$

S número de Sommerfeld

T energia cinética $[J]$

U energia potêncial $[J]$

V volume $[m^3]$

X direção do sistema referencial inercial

W carregamento máximo de um mancal hidrodinâmico $[N]$

Y direção do sistema referencial inercial

Z direção do sistema referencial inercial

$[E]$ matriz de estado

$[G]$ matriz de amortecimento + giroscópica

$[I]$ matriz identidade

$[K]$ matriz de rigidez

$[M]$ matriz de massa

$[N]$ matriz de acoplamento das velocidades

$[T]$ matriz de transformação de coordenadas

$\{q\}$ vetor coluna dos graus de liberdade

$\{Q\}$ vetor coluna dos carregamentos

Letras Gregas

α ângulo de pressão de uma engrenagem [graus]

β rotação na direção Y [rad]

γ perturbação da rotação na direção X [rad]

η_h rendimento hidráulico

η_m rendimento mecânico

η_v rendimento volumétrico

θ direção de um sistema referencial cilíndrico secundário

λ autovalor

μ viscosidade absoluta $[N\,s/m^2]$

ν coeficiente de atrito

ρ densidade $[Kg/m^3]$

σ massa distribuída $[Kg/m]$

ϕ rotação na direção X [rad]

φ ângulo arbitrário [graus]

ψ ângulo de hélice de uma engrenagem [graus]

ω velocidade angular [rad/s]

Γ rotação na direção Z [rad]

Δ variação de um paramêtro

Θ função de forma para as rotações β e Γ

Φ função de forma para a rotação γ

Ψ função de forma para as translações v e w

Ω velocidade angular do eixo de acionamento [rad/s]

Superescritos

a referente à engrenagem de acionamento

b referente à bomba de palhetas

c referente ao came

d referente ao elemento de disco

e referente ao elemento de eixo

h referente ao mancal hidrodinâmico

r referente à engrenagem do regulador

$\star$ valor adimensional

$-$ valor médio

. derivada primeira de uma função com relação ao tempo t

.. derivada segunda de uma função com relação ao tempo t

$'$ derivada primeira de uma função com relação à posição s

$''$ derivada segunda de uma função com relação à posição s

Subscritos

at atrito

b referente ao diâmetro de base da engrenagem

i numeração genérica

m referente à engrenagem movida

t referente ao diâmetro de topo da engrenagem

B base de um sistema referencial secundário

I base do sistema referencial inercial

R rotação

T translação

0 valor inicial

Abreviaturas

exp experimental

ext extensômetro

max máximo

min mínimo

sc superfície de controle

vc volume de controle

Conteúdo

1 Introdução **2**

2 Príncipio de Funcionamento da Bomba Injetora e Descrição dos Ensaios Experimentais **7**

2.1 Introdução 7

2.2 Príncipio de Funcionamento da Bomba 8

2.3 Descrição dos Ensaios Experimentais 11

3 Modelagem Matemática **14**

3.1 Introdução 14

3.2 Modelagem de Rotores Flexíveis pelo Método dos Elementos Finitos 16

3.3 Modelagem dos Esforços da Bomba de Palhetas (Qualitativa) . . 36

3.4 Modelagem dos Esforços da Engrenagem do Eixo do Regulador (Qualitativa) 44

3.5 Modelagem dos Esforços do Came 54

3.6 Modelagem dos Esforços da Engrenagem de Acionamento 68

3.7 Modelos Linearizados para as Rigidezes e Amortecimentos dos Mancais Hidrodinâmicos 74

3.8 Cálculo dos Autovalores 82

3.9 Resolução do Sistema de Equações Linearizadas (MDF) 83

4 Resultados Teórico-Experimentais **86**

4.1 Autovalores 87

4.2 Deslocamentos 88

4.3 Carregamentos 92

4.4 Torque de Acionamento – Teoria e Experimento 100

5 Conclusões e Perspectivas Futuras **104**

Bibliografia **107**

A Modelagem de Mancais Hidrodinâmicos pelo Método dos Elementos Finitos **111**

A.1 **Introdução** 114

A.2 **Geometria do Problema** 115

A.3 **Formulação Variacional** 117

A.4 **Método de Newton-Raphson** 127

A.5 **Exemplo de Aplicação** 130

Lista de Figuras

1.1 Bomba Injetora Distribuidora BOSCH Tipo VE. 4

2.1 Grupos Construtivos da Bomba Injetora Distribuidora. 9

2.2 Transmissão do Movimento através da Cruzeta. 10

2.3 Extensômetros para a Medição dos Esforços de Torsão. 12

2.4 Ponte para a Medição dos Esforços de Torsão. 12

2.5 Extensômetros para a Medição dos Esforços de Flexão. 13

2.6 Pontes para a Medição dos Esforços de Flexão. 13

3.1 Sistema Referenciais e Velocidades Angulares de um Rotor. 17

3.2 Elemento de Eixo Genérico. 22

3.3 Funções de Forma para a Flexão do Elemento de Eixo. 23

3.4 Funções de Forma para a Torção do Elemento de Eixo. 26

3.5 Discretização do Eixo de Acionamento. 33

3.6 Partes de uma Bomba de Palhetas. 36

3.7 Princípio de Funcionamento de uma Bomba de Palhetas. 37

3.8 Geometria e Sistemas Referenciais da Bomba de Palhetas. 38

3.9 Ângulo entre os Sistemas Referenciais Inercial/Bomba de Palhetas. 43

3.10 Terminologia do Par de Engrenagens. 45

3.11 Geometria da Evolvente. 47

3.12 Sistemas Referenciais da Engrenagem e do Dente Genérico i. 48

3.13 Linha de Contato. 49

3.14 Modelagem dos Esforços que Agem sobre o Eixo. 51

3.15 Relação entre os Sistemas Referenciais Inercial/Engrenagem do Regulador. 53

3.16 Esquema do Came. 55

3.17 Função $f(\phi)$. 56

3.18 Posição u do Came e Ângulo φ^c de Contato. 58

3.19 Esforços de Contato Rolete/Came. 60

3.20 Disposição Física dos Roletes e Representação dos Esforços. 61

3.21 Função $f(\phi)$. 64

3.22 Função $\frac{df(\phi)}{d\phi}$ 64

3.23 Função $\frac{d^2 f(\phi)}{d\phi^2}$ 65

3.24 Função $p(\phi)$ - 2600 rpm. 66

3.25 Função $p(\phi)$ - 2000 rpm. 67

3.26 Função $p(\phi)$ - 1500 rpm. 67

3.27 Relações Geométricas dos Dentes Helicoidais. 70

3.28 Modelagem dos Esforços Sobre o Eixo. 71

3.29 Ângulo Entre os Sistemas Referenciais Eixo/Engrenagem de Acionamento. 72

3.30 Ângulo Entre os Sistemas Referenciais Eixo/Mancal Hidrodinâmico Nó 2. . 79

3.31 Ângulo Entre os Sistemas Referenciais Eixo/Mancal Hidrodinâmico Nó 3. . 80

4.1 Momento na Direção X Devido ao Came [Nm]. 94

4.2 Forças Direção Z × Direção Y Devido ao Mancal Nó 2 [N] - 2600 rpm. . . 95

4.3 Forças Direção Z × Direção Y Devido ao Mancal Nó 2 [N] - 2000 rpm. . . 96

4.4 Forças Direção Z × Direção Y Devido ao Mancal Nó 2 [N] - 1500 rpm. . . 96

4.5 Forças Direção Z × Direção Y Devido ao Mancal Nó 3 [N] - 2600 rpm. . . 98

4.6 Forças Direção Z × Direção Y Devido ao Mancal Nó 3 [N] - 2000 rpm. . . 98

4.7 Forças Direção Z × Direção Y Devido ao Mancal Nó 3 [N] - 1500 rpm. . . 99

4.8 Torques de Acionamento Teoria e Experimento [Nm] – 2600 rpm. 101

4.9 Torques de Acionamento Teoria e Experimento [Nm] – 2000 rpm. 102

4.10 Torques de Acionamento Teoria e Experimento [Nm] – 1500 rpm. 103

A.1 Geometria do Sistema Rotor / Mancal. 115

A.2 Geometria de um Meio Contínuo. 119

A.3 Elemento Finito Bilinear Quadrilateral de 4 Nós. 121

A.4 Sistema Rotor / Mancal. 130

A.5 Discretização do Mancal Hidrodinâmico. 131

A.6 Distribuição das Pressões na Superfície do Mancal. 132

Lista de Tabelas

3.1 Pontos da Função $f(\phi)$. 63

3.2 Pontos da Função $p(\phi)$ - 2600 rpm. 65

3.3 Pontos da Função $p(\phi)$ - 2000 rpm. 66

3.4 Pontos da Função $p(\phi)$ - 1500 rpm. 68

4.1 Autovalores do Modelo 88

4.2 Deslocamentos v_{max}/v_{min} [μm] 89

4.3 Deslocamentos w_{max}/w_{min} [μm] 90

4.4 Rotações β_{max}/β_{min} [10^{-4}rad] 90

4.5 Rotações $\Gamma_{max}/\Gamma_{min}$ [10^{-4}rad] 91

4.6 Rotações $\gamma_{max}/\gamma_{min}$ [10^{-3}rad] 92

4.7 Carregamentos do Nó 4 - Esforços da Bomba de Palhetas 93

4.8 Carregamentos do Nó 5 - Esforços da Engrenagem do Regulador 93

4.9 Carregamentos do Nó 6 - Esforços do Came 94

4.10 Carregamentos do Nó 2 - Esforços do Primeiro Mancal Hidrodinâmico . . . 97

4.11 Carregamentos do Nó 1 - Esforços da Engrenagem de Acionamento 99

4.12 Torque de Acionamento - Comparações Teoria / Experimento 103

Capítulo 1

Introdução

A bomba injetora é um dispositivo mecânico que tem como função o fornecimento de combustível para os diversos cilindros do motor de combustão Diesel. Sua característica principal é a distribuição do combustível para cada um dos cilindros de forma a satisfazer uma condição ótima de combustão.

A determinação das curvas características de torque de acionamento e cálculo dos esforços máximos exercidos sobre os mancais hidrodinâmicos são etapas imprescindíveis não só no projeto da bomba distribuidora mas também no estudo de cada uma de suas aplicações em motores de combustão Diesel. Assim, cada vez que é proposta a aplicação de uma bomba injetora num motor de combustão Diesel, são realizados ensaios mecânicos que visam a obtenção destes parâmetros.

Tendo em vista a complexidade e o tempo gasto pela empresa com estes ensaios mecânicos, e ainda os recentes avanços tecnológicos na área de informática, surgiu o interesse do desenvolvimento de um *software* que simule, via computador, o comportamento

dinâmico do eixo de acionamento da bomba injetora, possibilitando estimar os esforços a cada aplicação ou alteração de projeto.

O objetivo deste trabalho é o estudo da viabilidade da modelagem matemática do eixo de acionamento da bomba injetora. Assim, definida uma aplicação da bomba injetora e seus parâmetros operacionais (rotação do motor, fluxo Diesel e níveis de pressão internos da bomba), um modelo matemático é desenvolvido com o intuito de obter o comportamento dinâmico do eixo de acionamento da mesma. Estes resultados foram comparados àqueles obtidos nos ensaios experimentais, possibilitando conclusões sobre a viabilidade de simulação, via computador, do comportamento dinâmico efetivo do eixo de acionamento da bomba injetora.

A bomba injetora é acionada pelo motor Diesel através de uma engrenagem helicoidal. Contrariamente ao que ocorre nas bombas em linha, na bomba injetora tipo VE existe somente um cilindro e um só pistão. Seu desenho esquemático é mostrado na figura 1.1.

O eixo de acionamento (elemento 1) da bomba injetora está instalado na carcaça da bomba através de dois mancais hidrodinâmicos (elementos 2 e 3). Atrás do eixo de acionamento encontra-se o suporte de roletes (elemento 4). Através do came de comando (elemento 5), que se apóia nos roletes, é gerado um movimento de elevação, que é transmitido ao pistão distribuidor (elemento 6). O eixo de acionamento ainda é responsável pela rotação do pistão distribuidor, possibilitando a distribuição do combustível às diversas saídas da bomba (elemento 7).

Entende-se por comportamento dinâmico da bomba a análise dos deslocamentos (ou rotações) e das forças (ou momentos) referentes aos graus de liberdade do modelo em função do tempo. Esta análise é feita sempre durante um ciclo de operação da bomba

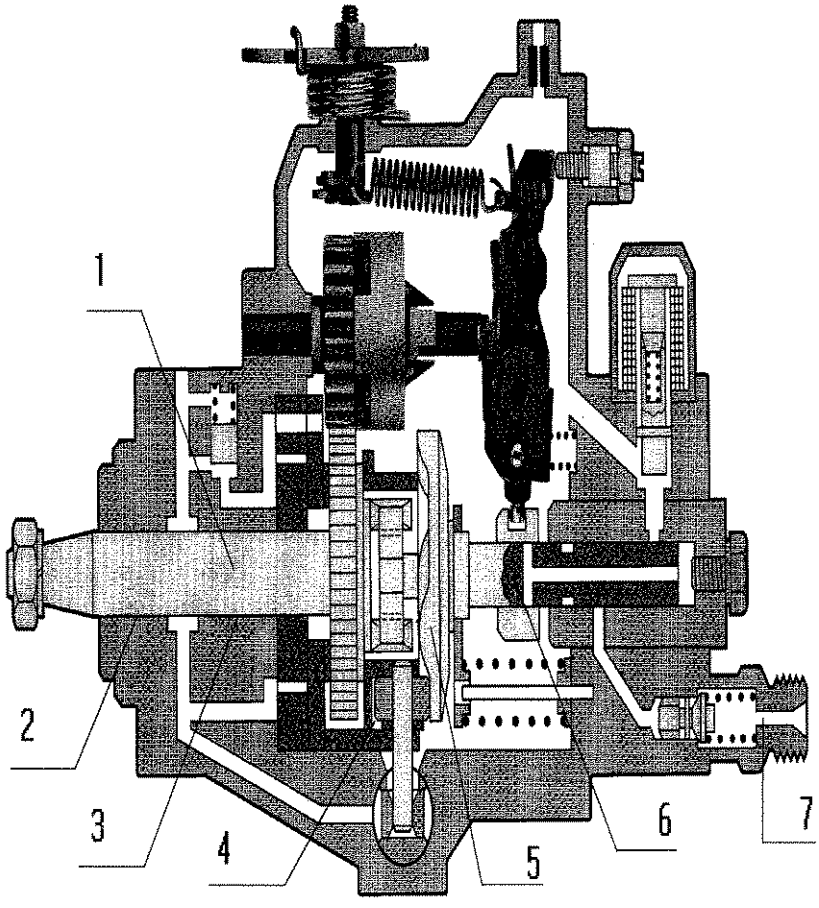

Figura 1.1: Bomba Injetora Distribuidora BOSCH Tipo VE.

injetora. O Método dos Elementos Finitos é empregado para a modelagem do eixo de acionamento representando-o por um rotor flexível.

Os esforços que agem sobre o eixo, devido à cada um dos mecanismos que estão vinculados ao mesmo (engrenagem de dentes helicoidais, mancais hidrodinâmicos, bomba de palhetas, engrenagem de dentes retos e came), são estudados extensivamente, de forma que o modelo matemático reproduza fielmente os carregamentos dinâmicos da bomba injetora.

A distribuição da pressão num mancal hidrodinâmico está relacionada à velocidade de rotação do eixo de acionamento e, também, ao posicionamento do eixo de acionamento com relação ao mancal. Isto torna o problema não-linear uma vez que os esforços e o posicionamento do eixo de acionamento passam a estar relacionados de forma direta.

Modelos linearizados para os carregamentos devidos aos mancais hidrodinâmicos são empregados nas análises dinâmicas. Além disso, um modelo matemático para a distribuição da pressão na superfície do mancal hidrodinâmico é desenvolvido empregando-se o Método dos Elementos Finitos. As etapas para a solução do problema não-linear, empregando-se o Método de Newton-Rapson de forma a satisfazer as equações de equilíbrio das forças e dos momentos do eixo de acionamento, são indicadas no trabalho. (Análises dinâmicas considerando-se os carregamentos não-lineares dos mancais hidrodinâmicos não são realizadas devido ao tempo necessário para o processamento de dados, o que as torna inaceitaveis do ponto de vista prático).

O computador empregado no trabalho é o IBM PS/ValuePoint 486 de frequência 66 MHz. Para a implementação das rotinas computacionais, o *software* MATLAB é adotado, devido às facilidades de manipulações algébricas (principalmente operações com matrizes) e relacionadas à interface gráfica. Apenas a rotina para a solução do sistema linear de equações (integração no tempo) é desenvolvida empregando-se o *software* PASCAL 6.0, visando uma melhor performance no que diz respeito ao tempo para o processamento dos dados. São realizadas análises dinâmicas para três diferentes condições operacionais da bomba injetora que fornecem material para a discussão dos resultados.

O trabalho é apresentado em cinco capítulos e um apêndice. O Capítulo 2 apresenta o princípio de funcionamento da bomba injetora, onde são descritas as funções de cada um dos grupos construtivos da mesma. O eixo de acionamento, objeto de estudo deste trabalho, recebe atenção especial. Este capítulo ainda trata da descrição dos ensaios

experimentais realizados para a determinação das curvas características de torque de acionamento e cálculo dos esforços máximos exercidos sobre os mancais hidrodinâmicos.

No Capítulo 3 são desenvolvidos os modelos matemáticos de rotores flexíveis e dos esforços devidos à cada um dos mecanismos que estão vinculados ao eixo de acionamento. A apresentação do capítulo está disposta na sequência das etapas de trabalho para a realização das análises dinâmicas. Os dados geométricos e condições operacionais da bomba injetora, necessárias às simulações, estão descritas neste capítulo.

O Capítulo 4 apresenta os resultados das análises dinâmicas do eixo de acionamento. A variação dos resultados para as diferentes condições operacionais é discutida. Os resultados do modelo matemático são comparados àqueles obtidos através dos ensaios experimentais.

No Capítulo 5 são apresentadas as conclusões sobre a viabilidade de simulação, via computador, do comportamento dinâmico efetivo do eixo de acionamento da bomba injetora. Sugestões para o aprofundamento dos estudos, visando a melhoria dos resultados, são descritas neste capítulo.

O apêndice do trabalho apresenta o desenvolvimento de um modelo matemático para a distribuição da pressão na superfície do mancal hidrodinâmico empregando-se o Método dos Elementos Finitos. As etapas para a solução do problema não-linear, empregando-se o Método de Newton-Raphson de forma a satisfazer as equações de equilíbrio das forças e dos momentos do eixo de acionamento, são descritas no mesmo.

Capítulo 2

Príncipio de Funcionamento da Bomba Injetora e Descrição dos Ensaios Experimentais

2.1 Introdução

A primeira parte deste capítulo apresenta o princípio de funcionamento da Bomba Injetora Distribuidora BOSCH Tipo VE. São descritas as funções de cada um dos grupos construtivos da bomba. O eixo de acionamento, objeto de estudo deste trabalho, recebe atenção especial.

A segunda parte deste capítulo trata da descrição dos ensaios experimentais realizados pela BOSCH para a determinação das curvas características de torque de acionamento e cálculo dos esforços máximos exercidos sobre os mancais hidrodinâmicos.

2.2 Príncipio de Funcionamento da Bomba

A bomba injetora é um dispositivo mecânico que tem como função o fornecimento de combustível para os diversos cilindros do motor de combustão Diesel. Sua característica principal é a distribuição do combustível para cada um dos cilindros de forma a satisfazer uma condição ótima de combustão.

A bomba injetora é acionada pelo motor Diesel através de uma engrenagem helicoidal. A rotação da bomba é a metade da rotação do girabrequim do motor, ou seja, a bomba injetora é acionada com a rotação do eixo do comando de válvulas.

Contrariamente ao que ocorre nas bombas em linha, na bomba injetora tipo VE existe somente um cilindro e um só pistão. O combustível debitado pelo pistão da bomba é distribuido para os diversos cilindros do motor através das saídas da bomba.

A bomba injetora distribuidora apresenta alguns grupos construtivos integrados. À figura 2.1 ilustra os grupos construtivos da bomba injetora. São estes: bomba alimentadora de palhetas (grupo 1), bomba de alta pressão com distribuidor (grupo 2), regulador mecânico de rotações (grupo 3), dispositivo de parada do motor (grupo 4) e avanço hidráulico da injeção (grupo 5). A figura 2.1 apresenta, ainda, os elementos da bomba injetora.

O eixo de acionamento (elemento 1) da bomba injetora está instalado na carcaça da bomba através de dois mancais hidrodinâmicos (elementos 2 e 3). No eixo de acionamento está montada a bomba alimentadora de palhetas (elemento 4). A bomba alimentadora de palhetas é responsável pela aspiração do combustível para o interior da bomba.

Atrás do eixo de acionamento e fixo à carcaça da bomba encontra-se o suporte de

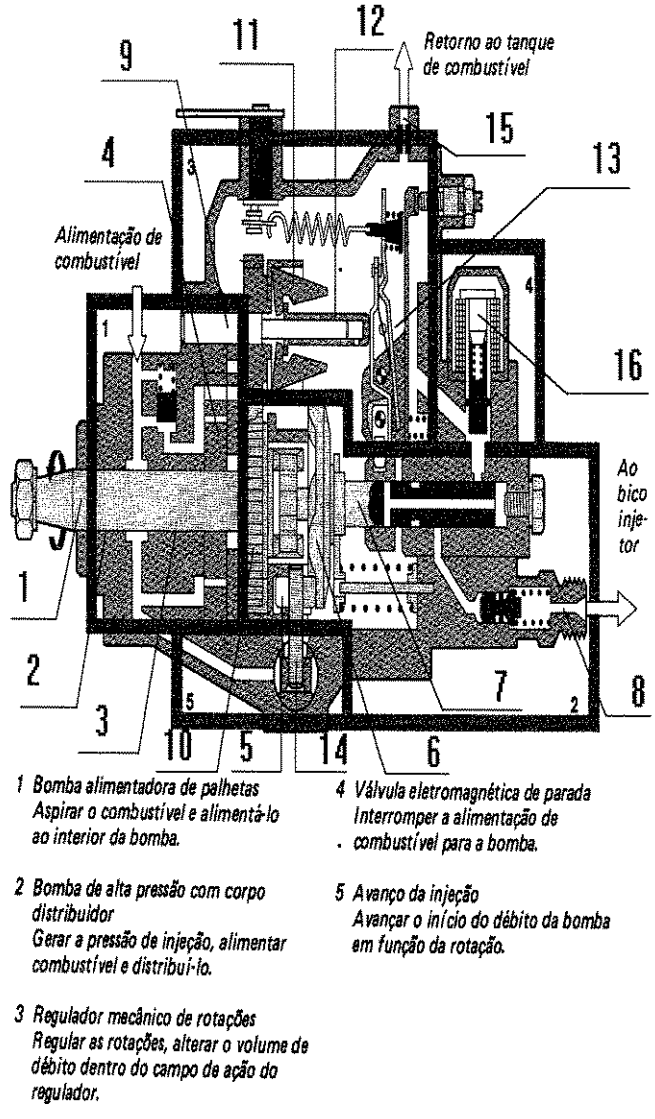

Figura 2.1: Grupos Construtivos da Bomba Injetora Distribuidora.

roletes (elemento 5). Através do came de comando (elemento 6), que se apóia nos roletes, é gerado um movimento de elevação que é transmitido ao pistão distribuidor (elemento 7). O eixo de acionamento é responsável pela rotação do pistão distribuidor, possibilitando a distribuição do combustível às diversas saídas da bomba (elemento 8).

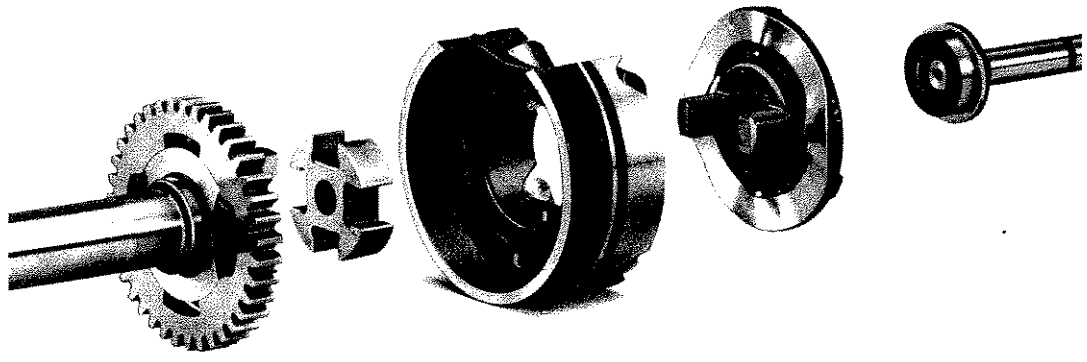

Figura 2.2: Transmissão do Movimento através da Cruzeta.

A transmissão do movimento rotativo do eixo de acionamento para o sistema formado pelo pistão distribuidor mais o came de comando dá-se através de uma cruzeta, como mostrado na figura 2.2. É interessante observar que esta construção permite que o eixo de acionamento não apresente movimento axial. Este movimento é portanto gerado pela rotação do came de comando em relação aos roletes, que permanecem fixos à carcaça.

O acionamento do eixo do regulador (elemento 9) é feito pelo eixo de acionamento através de uma engrenagem (elemento 10). O grupo regulador está equipado com pesos centrífugos (elemento 11) e com a bucha do regulador (elemento 12). O conjunto de alavancas (elemento 13), composto de alavanca de correção, alavanca de partida e alavanca de tensão, está instalado na carcaça, podendo ser movimentado. Este movimento influencia a posição da bucha reguladora da bomba. A posição da bucha reguladora determina a quantidade de combustível para a injeção nos diversos cilindros do motor.

No lado inferior da bomba distribuidora, montado transversalmente ao eixo de acionamento, está o dispositivo de avanço de injeção (elemento 14). Sua função é influenciada

pela pressão interna da bomba, que é determinada pela bomba alimentadora de palhetas e pela válvula reguladora de pressão (elemento 15). Com o aumento da rotação do motor, a pressão interna da bomba torna-se mais elevada. Neste caso, o dispositivo para o avanço da injeção provoca uma pequena rotação do suporte de roletes de forma que a injeção do óleo Diesel seja ligeiramente antecipada.

O dispositivo de parada do motor é composto de uma válvula eletromagnética (elemento 16). Sua função é interromper a alimentação de combustível, para a bomba injetora, quando é desejada a parada do motor.

2.3 Descrição dos Ensaios Experimentais

Os ensaios experimentais tem como objetivo a obtenção da curva característica do torque de acionamento e o cálculo do esforço máximo que age sobre o primeiro mancal hidrodinâmico, considerados críticos pela BOSCH. Para tanto, emprega-se um eixo de acionamento com extensômetros adaptados. O eixo de acionamento com os extensômetros é montado na bomba injetora e o sinal é transmitido, através de um anel coletor em 4 pistas, para o conjunto amplificador mais osciloscópio.

São empregados quatro extensômetros para a medição dos esforços de torsão. Dois à dois, eles são montados com 90 graus entre si e com 45 graus em relação à direção axial, como mostrado na figura 2.3. Os pares de extensômetros encontram-se em posições opostas na direção do diâmetro do eixo. A figura 2.4 mostra a ligação dos extensômetros em uma ponte de Wheatstone de forma a eliminar a influência dos esforços devidos à flexão.

São empregados quatro extensômetros para a medição dos esforços de flexão. Todos

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

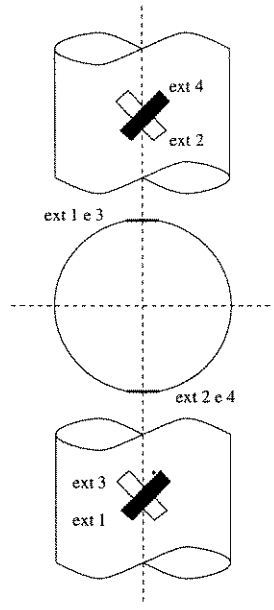

Figura 2.3: Extensômetros para a Medição dos Esforços de Torsão.

são montados na direção axial e igualmente espaçados no perímetro do eixo, como mostra a figura 2.5. Os pares de extensômetros opostos na direção do diâmetro do eixo são ligados em duas meias pontes, como mostrado na figura 2.6. Entrando com os sinais de cada uma das meias pontes numa direção de um osciloscópio é possível avaliar os esforços mesmo

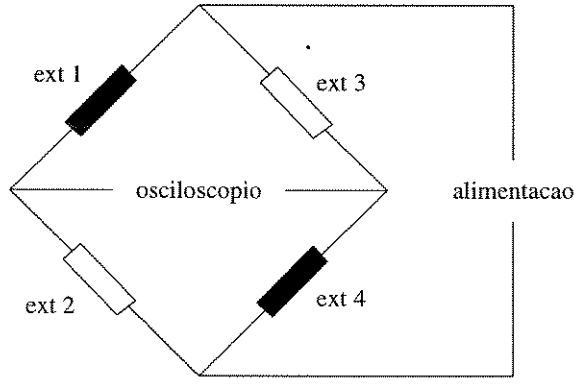

Figura 2.4: Ponte para a Medição dos Esforços de Torsão.

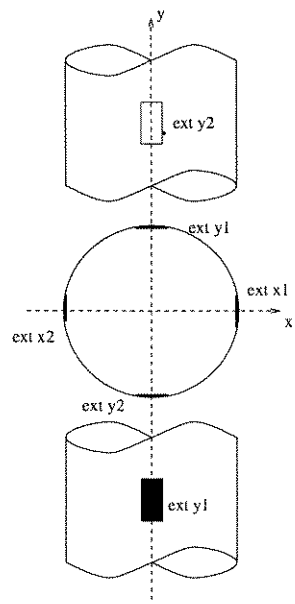

Figura 2.5: Extensômetros para a Medição dos Esforços de Flexão.

quando o eixo está em movimento. Todavia, esta montagem de extensômetros tem sua leitura ligeiramente influenciada pelos esforços de torsão. Uma correção é efetuada pela BOSCH com o intuito de calcular os esforços efetivos de flexão (carregamentos do primeiro mancal hidrodinâmico).

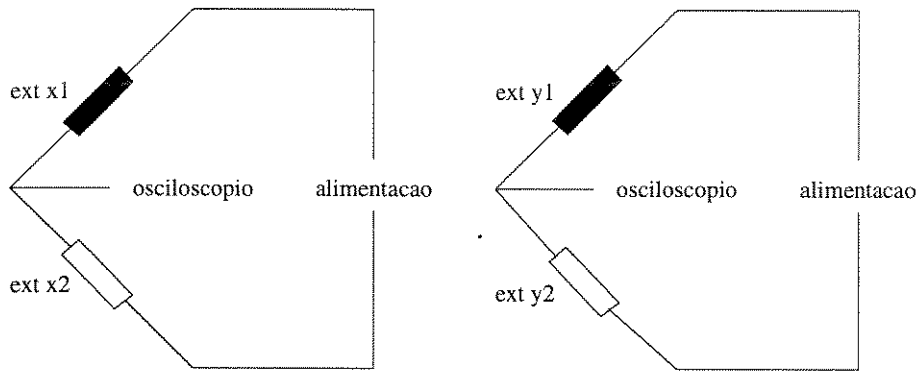

Figura 2.6: Pontes para a Medição dos Esforços de Flexão.

Capítulo 3

Modelagem Matemática

3.1 Introdução

Neste capítulo são desenvolvidos os modelos matemáticos de rotores flexíveis e dos esforços devidos à cada um dos mecanismos que estão vinculados ao eixo de acionamento. A apresentação do capítulo está disposta na sequência das etapas de trabalho para a realização das análises dinâmicas.

O estudo do comportamento dinâmico do eixo de acionamento é realizado para três condições operacionais distintas: funcionamento a 2600 rotações por minuto, funcionamento a 2000 rotações por minuto e funcionamento a 1500 rotações por minuto. Os dados geométricos e condições operacionais da bomba são apresentados após o desenvolvimento teórico de cada um dos modelos.

O conhecimento dos esforços da bomba de palhetas depende da avaliação experimental dos rendimentos hidráulico, mecânico e volumétrico da mesma. Como estes rendimen-

tos estão relacionados à geometria da bomba, um modelo matemático que os considerasse seria muito dispendioso do ponto de vista das análises, uma vez que a alteração de um dado geométrico implicaria na reavaliação experimental dos rendimentos. Para contornar este problema é desenvolvido um modelo matemático que procura estimar os esforços da bomba de palhetas apenas a partir das condições operacionais e dos dados geométricos.

A avaliação efetiva dos esforços atuantes num par de engrenagens deve considerar o efeito de contato dos dentes durante o engrenamento, como será visto mais adiante no capítulo. Entretanto, esta consideração implica na solução de um problema não-linear que aumentaria excessivamente o tempo de processamento dos dados. Por isto adota-se um modelo simplificado que considera o contato apenas no ponto primitivo P e não representa as pequenas variações periódicas das forças em torno deste ponto.

Os modelos para os esforços da bomba de palhetas e da engrenagem do eixo do regulador são designados qualitativos devido às simplificações que lhes cabem. Como será visto no capítulo seguinte, a ordem de grandeza do esforço torsional devido ao came é aproximadamente vinte vezes superior àquelas dos esforços da bomba de palhetas e da engrenagem do eixo do regulador, sendo o esforço devido ao came o grande responsável pelo comportamento dinâmico do eixo de acionamento.

Os mancais hidrodinâmicos são responsáveis pela sustentação do eixo de acionamento. A distribuição da pressão num mancal hidrodinâmico está relacionada à velocidade de rotação do eixo de acionamento e, também, ao posicionamento do eixo de acionamento com relação ao mancal. Isto torna o problema não-linear uma vez que os esforços e o posicionamento do eixo de acionamento passam a estar relacionados de forma direta.

Modelos linearizados para os carregamentos devidos aos mancais hidrodinâmicos são empregados nas análises dinâmicas visando uma melhor performance no que diz respeito

ao tempo para o processamento dos dados. Todavia, no anexo do trabalho é desenvolvido um modelo matemático para a distribuição da pressão na superfície do mancal hidrodinâmico empregando-se o Método dos Elementos Finitos. As etapas para a solução do problema não-linear, empregando-se o Método de Newton-Rapson de forma a satisfazer as equações de equilíbrio das forças e dos momentos do eixo de acionamento, são descritas no anexo.

3.2 Modelagem de Rotores Flexíveis pelo Método dos Elementos Finitos

Os rotores flexíveis são representados por dois tipos de elementos: os elementos de disco e os elementos de eixo. Os elementos de disco representam os mecanismos dispostos no rotor, como engrenagens e bomba de palhetas, e são desenvolvidos a partir da equação da energia cinética de um disco genérico. O eixo do rotor é representado por elementos de eixo. Os elementos de eixo são construídos a partir das equações das energias cinética e potencial de um eixo genérico.

As referências bibliográficas para a modelagem de rotores flexíveis (discos e eixos) são Nelson e McVaugh (1976), Gasch (1973), Firoozian e Stanway (1989) e Santos e Scalabrin (1995).

As matrizes de transformação de coordenadas são montadas com a finalidade de descreverem as rotações do modelo na base B_3 solidária ao rotor. A figura 3.1 ilustra os sistemas referenciais e as velocidades angulares de um rotor.

A equação 3.1 apresenta a velocidade angular Γ do rotor na direção Z e a representação do vetor posição $\vec{s}$ na base B_1.

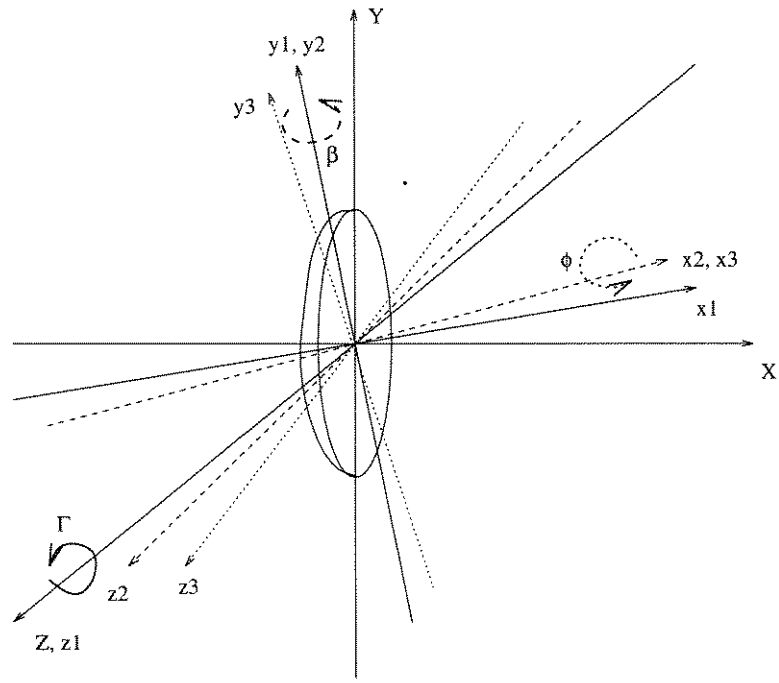

Figura 3.1: Sistema Referenciais e Velocidades Angulares de um Rotor.

$$ {}_I\dot{\vec{\Gamma}} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \dot{\Gamma} \end{array} \right\} \qquad {}_{B_1}\vec{s} = [T_\Gamma]\ {}_I\vec{s} \tag{3.1} $$

A matriz de transformação de coordenadas $[T_\Gamma]$ é dada pela equação 3.2.

$$ [T_\Gamma] = \left[\begin{array}{ccc} \cos\Gamma & \sin\Gamma & 0 \\ -\sin\Gamma & \cos\Gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \tag{3.2} $$

A equação 3.3 apresenta a velocidade angular β do rotor na direção y_1 e a repre-

sentação do vetor posição $\vec{s}$ na base B_2.

$$ {}_{B_1}\dot{\vec{\beta}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\beta} \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad {}_{B_2}\vec{s} = [T_\beta]\ {}_{B_1}\vec{s} \tag{3.3} $$

A matriz de transformação de coordenadas $[T_\beta]$ é dada pela equação 3.4.

$$ [T_\beta] = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \tag{3.4} $$

A equação 3.5 apresenta a velocidade angular ϕ do rotor na direção x_2 e a representação do vetor posição $\vec{s}$ na base B_3.

$$ {}_{B_2}\dot{\vec{\phi}} = \begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad {}_{B_3}\vec{s} = [T_\phi]\ {}_{B_2}\vec{s} \tag{3.5} $$

A matriz de transformação de coordenadas $[T_\phi]$ é dada pela equação 3.6.

$$ [T_\phi] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \tag{3.6} $$

A velocidade angular absoluta do rotor $\vec{\omega}$ pode ser descrita na base B_3 solidária ao rotor empregando-se as matrizes de transformação de coordenadas como é mostrado na equação 3.7.

$$ {}_{B_3}\vec{\omega} = [T_\phi][T_\beta][T_\Gamma]\ {}_I\dot{\vec{\Gamma}} + [T_\phi][T_\beta]\ {}_{B_1}\dot{\vec{\beta}} + [T_\phi]\ {}_{B_2}\dot{\vec{\phi}} \tag{3.7} $$

Ou seja:

$$ {}_{B_3}\vec{\omega} = \begin{Bmatrix} -\sin\beta \\ \sin\phi\cos\beta \\ \cos\phi\cos\beta \end{Bmatrix}\dot{\Gamma} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \cos\phi \\ -\sin\phi \end{Bmatrix}\dot{\beta} + \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}\dot{\phi} \tag{3.8} $$

A velocidade linear absoluta do rotor $\vec{o}$, descrita na base inercial, é apresentada na equação 3.9.

$$ {}_I\vec{o} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{Bmatrix} \tag{3.9} $$

A fim de considerar-se a deformação torsional do eixo, pode-se compor a velocidade angular ${}_{B_2}\dot{\phi}$ a partir da velocidade angular de spin do rotor ${}_{B_2}\Omega$ e da perturbação ${}_{B_2}\dot{\gamma}$ da velocidade angular na direção x_2. Esta composição é mostrada na equação 3.10.

$$ {}_{B_2}\dot{\phi} = {}_{B_2}\Omega + {}_{B_2}\dot{\gamma} \tag{3.10} $$

A equação 3.11 apresenta a energia cinética de um disco genérico escrita a partir das velocidades angulares e lineares absolutas.

$$T_D = \frac{1}{2}\,{}_I\vec{o}^T \begin{bmatrix} m_D & 0 \\ 0 & m_D \end{bmatrix} {}_I\vec{o} + \frac{1}{2}\,{}_{B_3}\vec{\omega}^T \begin{bmatrix} I_P & 0 & 0 \\ 0 & I_D & 0 \\ 0 & 0 & I_D \end{bmatrix} {}_{B_3}\vec{\omega} \tag{3.11}$$

A energia cinética do disco pode ser reescrita como é mostrado na equação 3.12.

$$T_D = \frac{1}{2}[m_D(\dot{v}^2 + \dot{w}^2) + I_P(\sin^2\beta\,\dot{\Gamma}^2 - 2\sin\beta\,\dot{\Gamma}\dot{\phi} + \dot{\phi}^2) + I_D(\cos^2\beta\,\dot{\Gamma}^2 + \dot{\beta}^2)] \tag{3.12}$$

O elemento finito de disco é definido por um sistema matricial que apresenta as equações de movimento para um disco genérico em função dos graus de liberdade do sistema. Uma vez definida a energia de um disco genérico, as equações de movimento são obtidas aplicando-se o Método de Lagrange, representado pela equação 3.13.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot{q}_i}\right) - \frac{dT}{dq_i} + \frac{dU}{dq_i} = F_{q_i} \tag{3.13}$$

As coordenadas generalizadas q_i $(i = 1..n)$ representam os graus de liberdade do sistema e fornecem as respectivas equações de movimento. Para o disco em questão tem-se 5 graus de liberdade.

Coordenada $q_1 = v$:

$$m_D\ddot{v} = F_Y \tag{3.14}$$

Coordenada $q_2 = w$:

$$m_D \ddot{w} = F_Z \tag{3.15}$$

Coordenada $q_3 = \beta$:

$$I_D(\ddot{\beta} + \sin\beta\,\cos\beta\,\dot{\Gamma}^2) + I_P(\cos\beta\,\dot{\Gamma}\dot{\phi} - \sin\beta\,\cos\beta\,\dot{\Gamma}^2 = M_Y \tag{3.16}$$

Coordenada $q_4 = \Gamma$:

$$\begin{aligned} &I_D(\cos^2\beta\,\ddot{\Gamma} - 2\sin\beta\,\cos\beta\,\dot{\beta}\dot{\Gamma}) + I_P(\sin^2\beta\,\ddot{\Gamma} + \\ &+2\sin\beta\,\cos\beta\,\dot{\beta}\dot{\Gamma} - \cos\beta\,\dot{\beta}\dot{\phi} - \sin\beta\ddot{\phi}) = M_Z \end{aligned} \tag{3.17}$$

Coordenada $q_5 = \gamma$:

$$I_P(\ddot{\gamma} - \cos\beta\,\dot{\beta}\dot{\Gamma} - \sin\beta\,\ddot{\Gamma}) = M_X \tag{3.18}$$

Linearizando as equações 3.14, 3.15, 3.16, 3.17 e 3.18 tem-se o sistema matricial do elemento finito de disco rotativo 3.19.

$$\begin{bmatrix} m_D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_P \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{v} \\ \ddot{w} \\ \ddot{\beta} \\ \ddot{\Gamma} \\ \ddot{\gamma} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_P\Omega & 0 \\ 0 & 0 & -I_P\Omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{v} \\ \dot{w} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\Gamma} \\ \dot{\gamma} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_Y \\ F_Z \\ M_Y \\ M_Z \\ M_X \end{Bmatrix} \tag{3.19}$$

O sistema matricial do elemento de disco pode ser escrito simplificadamente, como mostrado na equação 3.20

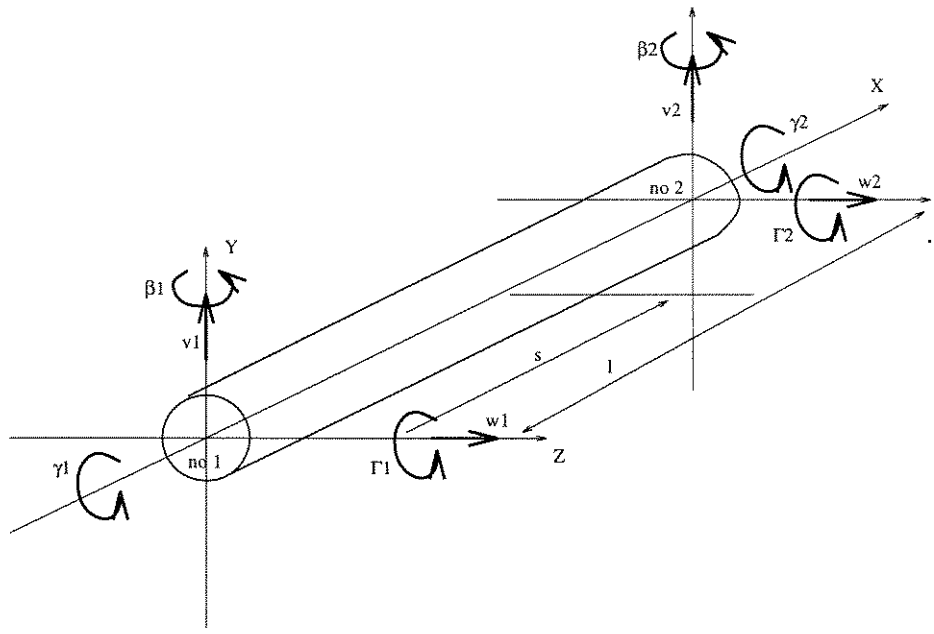

Figura 3.2: Elemento de Eixo Genérico.

$$[M^d]\{\ddot{q}_d\} + [G^d]\{\dot{q}_d\} = \{Q^d\} \tag{3.20}$$

A figura 3.2 ilustra um elemento de eixo genérico. Em um elemento de eixo as coordenadas $(v, w, \beta, \Gamma, \gamma)$ que descrevem o sistema passam a ser não só função do tempo, mas também da posição s, entre 0 e l, que determina a secção analisada ao longo do elemento.

Para descrever-se o deslocamento dos pontos no interior do elemento é conveniente introduzir-se funções de forma locais. Estas funções de forma são obtidas da solução da equação diferencial de um eixo com secção transversal constante, para as condições em que uma das coordenadas sofre um deslocamento unitário enquanto as outras são mantidas nulas. Obtém-se quatro casos diferentes que representam quatro funções de

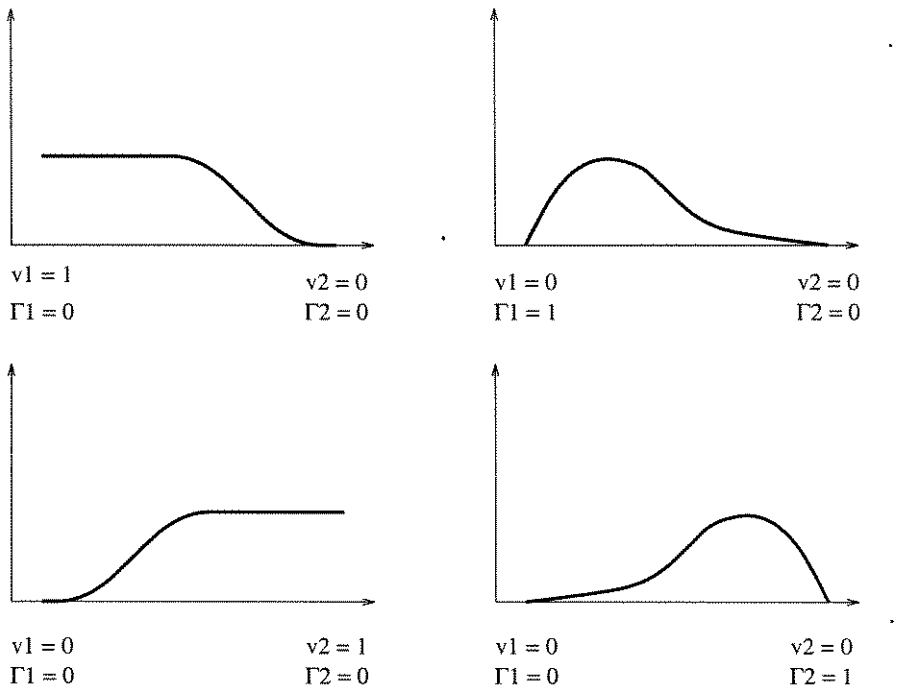

Figura 3.3: Funções de Forma para a Flexão do Elemento de Eixo.

forma distintas, como mostrado na figura 3.3.

As rotações (β, Γ) estão relacionadas às translações (v, w) como é mostrado na equação 3.21.

$$\beta = -\frac{\partial w}{\partial s} \qquad \Gamma = \frac{\partial v}{\partial s} \tag{3.21}$$

Como existem quatro condições de contorno, as funções de forma para a translação $\Psi_i(s)$ são calculadas a partir da equação 3.22 enquanto aquelas para a rotação $\Theta_i(s)$ são calculadas a partir da equação 3.23, onde $i = 1..4$.

$$\Psi_i(s) = C_{1_i} + C_{2_i}s + C_{3_i}s^2 + C_{4_i}s^3 \tag{3.22}$$

$$\Theta_i(s) = \frac{d\Psi(s)}{ds} = C_{2_i} + 2C_{3_i}s + 3C_{4_i}s^2 \tag{3.23}$$

Resolvendo têm-se:

$$\Psi_1(s) = 1 - \frac{3}{l^2}s^2 + \frac{2}{l^3}s^3 \qquad \Theta_1(s) = -\frac{6}{l^2}s + \frac{6}{l^3}s^2 \tag{3.24}$$

$$\Psi_2(s) = s - \frac{2}{l}s^2 + \frac{1}{l^2}s^3 \qquad \Theta_2(s) = 1 - \frac{4}{l}s + \frac{3}{l^2}s^2 \tag{3.25}$$

$$\Psi_3(s) = \frac{3}{l^2}s^2 - \frac{2}{l^3}s^3 \qquad \Theta_3(s) = \frac{6}{l^2}s - \frac{6}{l^3}s^2 \tag{3.26}$$

$$\Psi_4(s) = -\frac{1}{l}s^2 + \frac{1}{l^2}s^3 \qquad \Theta_4(s) = -\frac{2}{l}s + \frac{3}{l^2}s^2 \tag{3.27}$$

Os deslocamentos e as rotações dos pontos no interior do elemento podem ser descritos pela combinação linear das funções de forma. A equação 3.28 relaciona os deslocamentos $v(s,t)$ e $w(s,t)$ aos graus de liberdade $q(t)$ do elemento de eixo genérico.

$$\left\{ \begin{array}{c} v(s,t) \\ w(s,t) \end{array} \right\} = [\Psi(s)]\{q(t)\} \tag{3.28}$$

A matriz $[\Psi(s)]$ das funções de forma para as translações é apresentada na equação 3.29.

$$[\Psi(s)] = \begin{bmatrix} \Psi_1(s) & 0 & 0 & \Psi_2(s) & 0 & \Psi_3(s) & 0 & 0 & \Psi_4(s) & 0 \\ 0 & \Psi_1(s) & -\Psi_2(s) & 0 & 0 & 0 & \Psi_3(s) & -\Psi_4(s) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

A equação 3.30 relaciona as rotações $\beta(s,t)$ e $\Gamma(s,t)$ aos graus de liberdade $q(t)$ do elemento de eixo genérico.

$$\begin{Bmatrix} \beta(s,t) \\ \Gamma(s,t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta_\beta(s) \\ \Theta_\Gamma(s) \end{bmatrix} \{q(t)\} = [\Theta(s)]\{q(t)\} \quad (3.30)$$

A matriz $[\Theta(s)]$ das funções de forma para as rotações é apresentada na equação 3.31.

$$[\Theta(s)] = \begin{bmatrix} 0 & -\Theta_1(s) & \Theta_2(s) & 0 & 0 & 0 & -\Theta_3(s) & \Theta_4(s) & 0 & 0 \\ \Theta_1(s) & 0 & 0 & \Theta_2(s) & 0 & \Theta_3(s) & 0 & 0 & \Theta_4(s) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Para descrever-se a rotação γ dos pontos no interior do elemento é conveniente introduzir-se um novo conjunto de funções de forma. Estas funções de forma são obtidas da solução da equação diferencial de um eixo com secção transversal constante, para as condições em que uma das coordenadas sofre um deslocamento unitário enquanto a outra é mantida nula. Obtém-se dois casos diferentes que representam duas funções de forma distintas, como mostrado na figura 3.4.

Como existem duas condições de contorno, as funções de forma para a rotação $\Phi_i(s)$ são calculadas a partir da equação 3.32, onde $i = 1..2$.

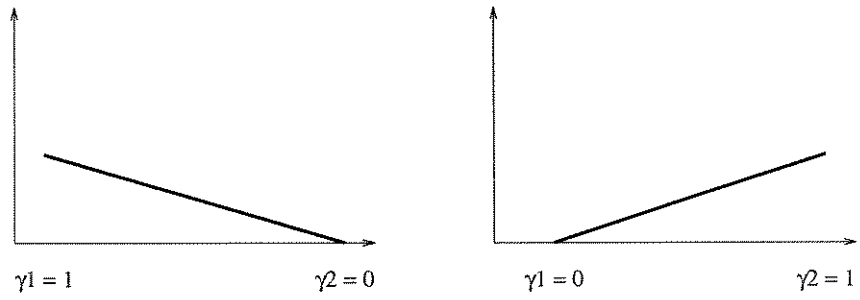

Figura 3.4: Funções de Forma para a Torção do Elemento de Eixo.

$$\Phi_i(s) = C_{1_i} + C_{2_i} s \tag{3.32}$$

Resolvendo tem-se:

$$\Omega_1(s) = 1 - \frac{s}{l} \qquad \Omega_2(s) = \frac{s}{l} \tag{3.33}$$

A equação 3.34 relaciona a rotação $\gamma(s,t)$ aos graus de liberdade $q(t)$ do elemento de eixo genérico.

$$\gamma(s,t) = [\Phi(s)]\{q(t)\} \tag{3.34}$$

A matriz $[\Phi(s)]$ das funções de forma para a rotação é apresentada na equação 3.35.

$$[\Phi(s)] = [\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \Phi_1(s) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \Phi_2(s)\ ] \tag{3.35}$$

Uma vez definidos os deslocamentos e as rotações dos pontos interiores ao elemento de eixo genérico, pode-se escrever a equação 3.36 da energia cinética e a equação 3.37 da energia potêncial para um disco diferencial localizado na posição s. É interessante observar-se que na equação 3.36 I_P e I_D são momentos de inércia de massa distribuída.

$$\begin{aligned} dT = \; & \tfrac{1}{2}\left\{ \begin{array}{c} \dot{v} \\ \dot{w} \end{array} \right\}^T \left[\begin{array}{cc} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \dot{v} \\ \dot{w} \end{array} \right\} ds + \tfrac{1}{2}\left\{ \begin{array}{c} \dot{\beta} \\ \dot{\Gamma} \end{array} \right\}^T \left[\begin{array}{cc} I_D & 0 \\ 0 & I_D \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \dot{\beta} \\ \dot{\Gamma} \end{array} \right\} ds + \\ & + \tfrac{1}{2} I_P \dot{\phi}^2 ds - I_P \beta \dot{\Gamma} \dot{\phi} ds \end{aligned} \tag{3.36}$$

$$dU = \frac{1}{2}\left\{ \begin{array}{c} v" \\ w" \end{array} \right\}^T \left[\begin{array}{cc} EI & 0 \\ 0 & EI \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} v" \\ w" \end{array} \right\} ds + \frac{GJ}{2}\gamma'^2 ds \tag{3.37}$$

Aplicando-se as matrizes das funções de forma nas equações 3.36 e 3.37 chega-se, respectivamente, às equações 3.38 e 3.39.

$$\begin{aligned} dT = \; & \tfrac{1}{2}\sigma \{\dot{q}_e\}^T [\Psi(s)]^T [\Psi(s)] \{\dot{q}_e\} ds + \tfrac{1}{2} I_D \{\dot{q}_e\}^T [\Theta(s)]^T [\Theta(s)] \{\dot{q}_e\} ds \\ & - I_P \Omega \{\dot{q}_e\}^T [\Theta_\Gamma(s)]^T [\Theta_\beta(s)] \{\dot{q}_e\} ds + \tfrac{1}{2} I_P \Omega^2 ds + I_P \Omega [\Phi(s)] \{\dot{q}_e\} ds \\ & + \tfrac{1}{2} I_P \{\dot{q}_e\}^T [\Phi(s)]^T [\Phi(s)] \{\dot{q}_e\} ds \end{aligned} \tag{3.38}$$

$$dU = \frac{1}{2} EI \{q_e\}^T [\Psi"(s)]^T [\Psi"(s)] \{q_e\} ds + \frac{1}{2} GJ \{q_e\}^T [\Omega'(s)]^T [\Omega'(s)] \{q_e\} ds \tag{3.39}$$

A fim de obter-se a energia total do elemento de eixo genérico integram-se os termos das equações 3.38 e 3.39 ao longo do comprimento l do mesmo. Isto resulta nas seguintes matrizes:

$$[M_T^e] = \int_0^l \sigma[\Psi(s)]^T[\Psi(s)]ds \tag{3.40}$$

$$[M_{R1}^e] = \int_0^l I_D[\Theta(s)]^T[\Theta(s)]ds \tag{3.41}$$

$$[N^e] = \int_0^l I_P[\Theta_\Gamma(s)]^T[\Theta_\beta(s)]ds \tag{3.42}$$

$$[K_T^e] = \int_0^l EI[\Psi"(s)]^T[\Psi"(s)]ds \tag{3.43}$$

$$[K_R^e] = \int_0^l GJ[\Phi'(s)]^T[\Phi'(s)]ds \tag{3.44}$$

$$[M_{R2}^e] = \int_0^l I_P[\Phi(s)]^T[\Phi(s)]ds \tag{3.45}$$

O elemento finito de eixo é definido por um sistema matricial que apresenta as equações de movimento para um eixo genérico em função dos graus de liberdade do sistema. Uma vez definida a energia de um eixo genérico, as equações de movimento 3.46 são obtidas aplicando-se o Método de Lagrange.

$$([M_T^e] + [M_{R1}^e] + [M_{R2}^e])\{\ddot{q}_e\} - \Omega([N^e] - [N^e]^T)\{\dot{q}_e\} + ([K_T^e] + [K_R^e])\{q_e\} = \{Q^e\} \quad (3.46)$$

O sistema matricial do elemento de eixo pode ser escrito simplificadamente, como mostrado na equação 3.47, a partir das definições descritas pelas equações 3.48, 3.49 e 3.50.

$$[M^e]\{\ddot{q}_e\} - \Omega[G^e]\{\dot{q}_e\} + [K^e]\{q_e\} = \{Q^e\} \quad (3.47)$$

$$[M^e] = [M_T^e] + [M_{R1}^e] + [M_{R2}^e] \quad (3.48)$$

$$[G^e] = [N^e] - [N^e]^T \quad (3.49)$$

$$[K^e] = [K_T^e] + [K_R^e] \quad (3.50)$$

As demais matrizes são apresentadas a seguir.

$$[M_T^e] = \frac{\sigma l}{420}\begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & 22l & 0 & 54 & 0 & 0 & -13l & 0 \\ 0 & 156 & -22l & 0 & 0 & 0 & 54 & 13l & 0 & 0 \\ 0 & -22l & 4l^2 & 0 & 0 & 0 & -13l & -3l^2 & 0 & 0 \\ 22l & 0 & 0 & 4l^2 & 0 & 13l & 0 & 0 & -3l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 54 & 0 & 0 & 13l & 0 & 156 & 0 & 0 & -22l & 0 \\ 0 & 54 & -13l & 0 & 0 & 0 & 156 & 22l & 0 & 0 \\ 0 & 13l & -3l^2 & 0 & 0 & 0 & 22l & 4l^2 & 0 & 0 \\ -13l & 0 & 0 & -3l^2 & 0 & -22l & 0 & 0 & 4l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.51}$$

$$[M_{R1}^e] = \frac{\sigma r^2}{120l}\begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & 3l & 0 & -36 & 0 & 0 & 3l & 0 \\ 0 & 36 & -3l & 0 & 0 & 0 & -36 & -3l & 0 & 0 \\ 0 & -3l & 4l^2 & 0 & 0 & 0 & 3l & -l^2 & 0 & 0 \\ 3l & 0 & 0 & 4l^2 & 0 & -3l & 0 & 0 & -l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -36 & 0 & 0 & -3l & 0 & 36 & 0 & 0 & -3l & 0 \\ 0 & -36 & 3l & 0 & 0 & 0 & 36 & 3l & 0 & 0 \\ 0 & -3l & -l^2 & 0 & 0 & 0 & 3l & 4l^2 & 0 & 0 \\ 3l & 0 & 0 & -l^2 & 0 & -3l & 0 & 0 & 4l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.52}$$

$$[M^e_{R2}] = \frac{\sigma r^2 l}{6}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.53}$$

$$[G^e] = \frac{2\sigma r^2}{120l}\begin{bmatrix} 0 & -36 & 3l & 0 & 0 & 0 & 36 & 3l & 0 & 0 \\ 36 & 0 & 0 & 3l & 0 & -36 & 0 & 0 & 3l & 0 \\ -3l & 0 & 0 & -4l^2 & 0 & 3l & 0 & 0 & l^2 & 0 \\ 0 & -3l & 4l^2 & 0 & 0 & 0 & 3l & -l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & -3l & 0 & 0 & 0 & -36 & -3l & 0 & 0 \\ -36 & 0 & 0 & -3l & 0 & 36 & 0 & 0 & -3l & 0 \\ -3l & 0 & 0 & l^2 & 0 & 3l & 0 & 0 & -4l^2 & 0 \\ 0 & -3l & -l^2 & 0 & 0 & 0 & 3l & 4l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.54}$$

$$[K_T^e] = \frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 6l & 0 & -12 & 0 & 0 & 6l & 0 \\ 0 & 12 & -6l & 0 & 0 & 0 & -12 & -6l & 0 & 0 \\ 0 & -6l & 4l^2 & 0 & 0 & 0 & 6l & 2l^2 & 0 & 0 \\ 6l & 0 & 0 & 4l^2 & 0 & -6l & 0 & 0 & 2l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 0 & 0 & -6l & 0 & 12 & 0 & 0 & -6l & 0 \\ 0 & -12 & 6l & 0 & 0 & 0 & 12 & 6l & 0 & 0 \\ 0 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 & 0 & 6l & 4l^2 & 0 & 0 \\ 6l & 0 & 0 & 2l^2 & 0 & -6l & 0 & 0 & 4l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.55}$$

$$[K_R^e] = \frac{GJ}{l}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.56}$$

Uma vez definidos os sistemas matriciais para os elementos genéricos de disco e de eixo, pode-se representar matematicamente o movimento de um conjunto rotor + eixo flexível a partir de tais elementos. A figura 3.5 apresenta a discretização do eixo de acionamento da bomba injetora distribuidora BOSCH tipo VE. O modelo discretizado do

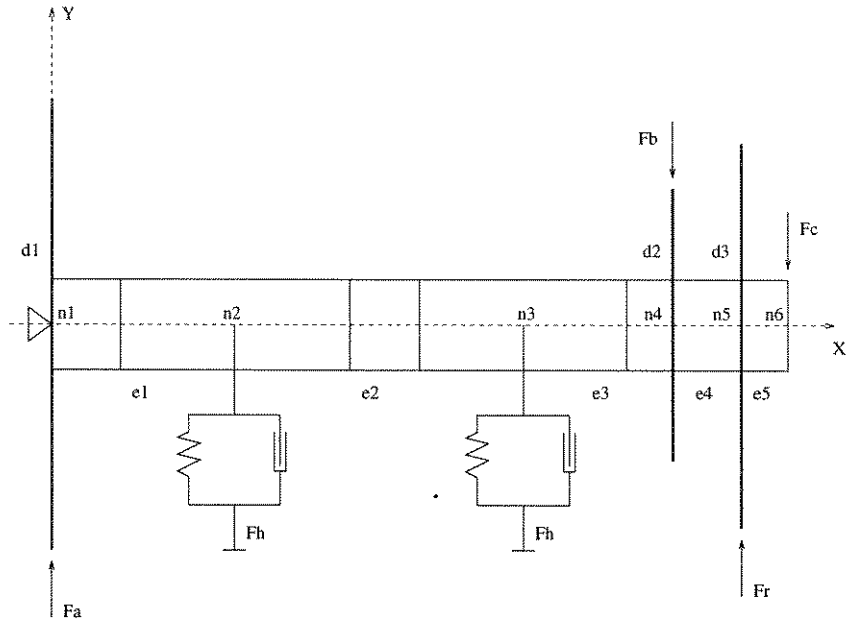

Figura 3.5: Discretização do Eixo de Acionamento.

eixo apresenta seis nós, representados na figura pela letra n. Os nós n_i associam os graus de liberdade v_i, w_i, β_i, Γ_i e γ_i às posições do modelo e servem de conexão aos elementos que os definem. Os carregamentos, representados na figura pela letra F, possuem componentes em cada uma das direções definidas pelos graus de liberdade. A indicação dos carregamentos F têm como unico objetivo associar os esforços dos mecanismos aos respectivos nos de aplicação.

A engrenagem de acionamento d_1 é representada por um elemento de disco associado ao nó n_1 do modelo. O carregamento responsável pelo acionamento do eixo é indicado por F^a. As propriedades da engrenagem de acionamento são representadas pelas equações 3.57.

$$m = 1.9 \text{ Kg} \qquad I_P = 8.2 \times 10^{-3} \text{ Kg m}^2 \qquad I_D = 4.1 \times 10^{-3} \text{ Kg m}^2 \tag{3.57}$$

A bomba de palhetas d_2 é representada por um elemento de disco associado ao nó n_4 do modelo. O carregamento devido à bomba de palhetas é indicado por F^b. As propriedades da bomba de palhetas são representadas pelas equações 3.58.

$$m = 0.11 \text{ Kg} \qquad I_P = 3.3 \times 10^{-5} \text{ Kg m}^2 \qquad I_D = 1.7 \times 10^{-5} \text{ Kg m}^2 \tag{3.58}$$

A engrenagem do regulador d_3 é representada por um elemento de disco associado ao nó n_5 do modelo. O carregamento devido à engrenagem do regulador é indicado por F^r. As propriedades da engrenagem do regulador são representadas pelas equações 3.59.

$$m = 0.080 \text{ Kg} \qquad I_P = 4.4 \times 10^{-5} \text{ Kg m}^2 \qquad I_D = 2.2 \times 10^{-5} \text{ Kg m}^2 \tag{3.59}$$

O modelo discretizado do eixo de acionamento apresenta ainda cinco elementos de eixo indicados pela letra e. Os carregamentos dos mancais hidrodinamicos são indicados por F^h e aplicados aos nós n_2 e n_3. O carregamento devido ao came, associado ao nó n_6, é indicado por F^c. As propriedades comuns a todos os elementos de eixo são representadas pelas equações 3.60.

$$\rho = 7850 \text{ Kg/m}^3 \qquad E = 210 \text{ GPa} \qquad G = 84 \text{ GPa} \qquad D = 20 \text{ mm} \tag{3.60}$$

Entretanto os elementos de eixo apresentam diferentes comprimentos, representados pelas equações 3.61 e 3.62.

$$l_1 = 30.5 \text{ mm} \qquad l_2 = 33 \text{ mm} \qquad l_3 = 17 \text{ mm} \tag{3.61}$$

$$l_4 = 15 \text{ mm} \qquad l_5 = 15 \text{ mm} \tag{3.62}$$

A velocidade angular do eixo de acionamento Ω também é um dado de entrada para a montagem dos sistemas matriciais dos elementos de disco e de eixo. Por isto, os modelos são específicos para cada condição operacional. Os valores Ω_i para as três condições operacionais investigadas neste trabalho, tanto teoricamente como experimentalmente, são apresentados nas equações 3.63, ou seja, $\Omega_1 = 2600$ rpm, $\Omega_2 = 2000$ rpm e $\Omega_3 = 1500$ rpm.

$$\Omega_1 = 270 \text{ rad/s} \qquad \Omega_2 = 210 \text{ rad/s} \qquad \Omega_3 = 155 \text{ rad/s} \tag{3.63}$$

O modelo global do eixo de acionamento é representado pela equação 3.64. Para a montagem do modelo global consideram-se, inicialmente, matrizes $[M]$, $[G]$ e $[K]$ nulas de dimensão $n \times n$. As matrizes de cada um dos elementos são, então, somadas às matrizes globais em suas respectivas posições.

$$[\mathrm{M}]\{\ddot{q}\} + [\mathrm{G}]\{\dot{q}\} + [\mathrm{K}]\{q\} = \{Q\} \tag{3.64}$$

Os modelos matemáticos dos carregamentos são geralmente aplicados às suas posições respectivas do vetor $\{Q\}$. Porém, os carregamentos dos mancais hidrodinâmicos e os esforços de acionamento constituem exceções. Os procedimentos para a aplicação destes carregamentos são apresentados mais adiante no trabalho, onde estes modelos específicos são estudados.

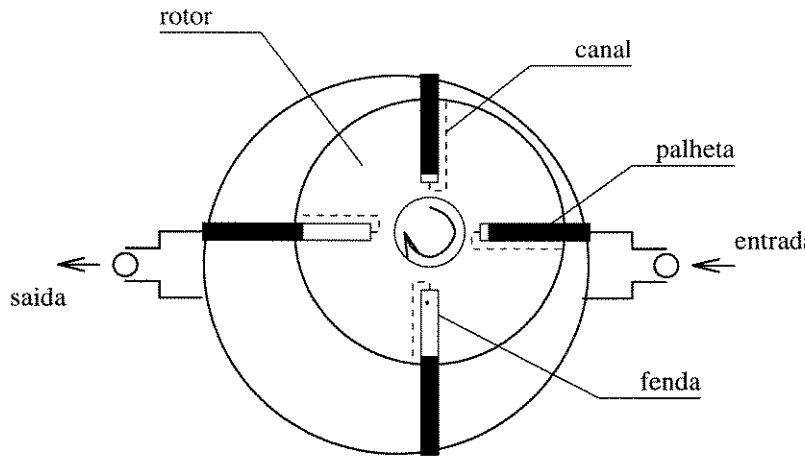

Figura 3.6: Partes de uma Bomba de Palhetas.

3.3 Modelagem dos Esforços da Bomba de Palhetas (Qualitativa)

A bomba de palhetas é uma bomba rotativa, ou seja, uma bomba de deslocamento positivo com movimento circular. Sua operação é baseada no príncipio do aumento do tamanho da cavidade para formar um vácuo, permitindo que o espaço seja preenchido pelo fluido, e então forçando o fluido sobre pressão para fora da bomba pela diminuição do volume. A figura 3.6 apresenta as partes de uma bomba de palhetas.

As palhetas móveis encaixam-se em fendas no rotor. A frente das fendas e na direção da rotação, um canal admite o líquido sendo bombeado pelas palhetas, movendo-as para fora e mantendo a pressão que varia diretamente com a pressão que a bomba está operando a frente. Os canais servem também para quebrar o vácuo no lado da admissão. O ciclo de operação e a ação alternada da força centrífuga e da pressão hidráulica mantém as palhetas sempre em contato com a carcaça, como é mostrado na figura 3.7.

Johnson e Johnson (1991) e Mochizuki (1993) desenvolveram bombas de palhetas para aplicações específicas. Singh (1991) estudou o problema de cavitação nas bombas de

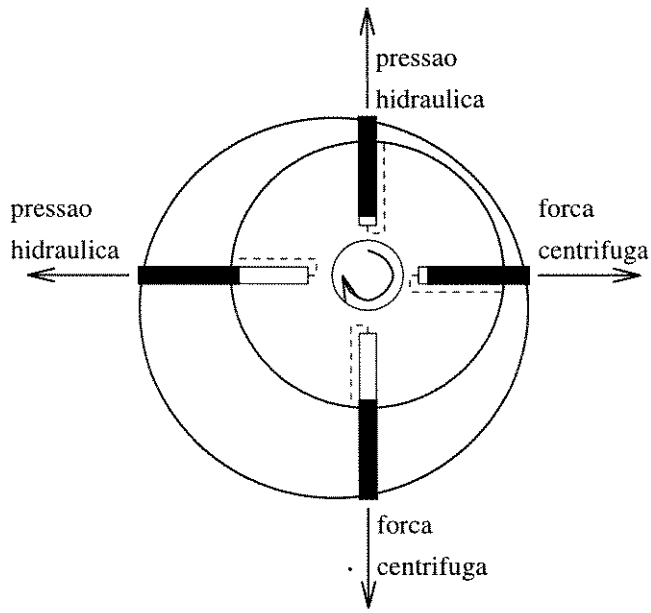

Figura 3.7: Princípio de Funcionamento de uma Bomba de Palhetas.

palhetas para altas velocidades de operação. Dubbel (1979), Macintyre (1983), Karassik et al (1976) e Norrie (1963) definem a bomba de palhetas como uma bomba rotativa, e no que diz respeito aos esforços para o acionamento da mesma, empregam o modelo clássico de hidráulica, baseado nos rendimentos volumétrico, mecânico e hidráulico da bomba. A figura 3.8 apresenta a geometria e os sistemas referenciais da bomba de palhetas.

Para uma bomba é valida a relação expressa pela equação 3.65 entre o torque M^b aplicado sobre a bomba, a sua vazão $\dot{V}$ e a altura de elevação H.

$$M^b\Omega = \rho g\dot{V}H \tag{3.65}$$

A altura de elevação é dada pela equação 3.66.

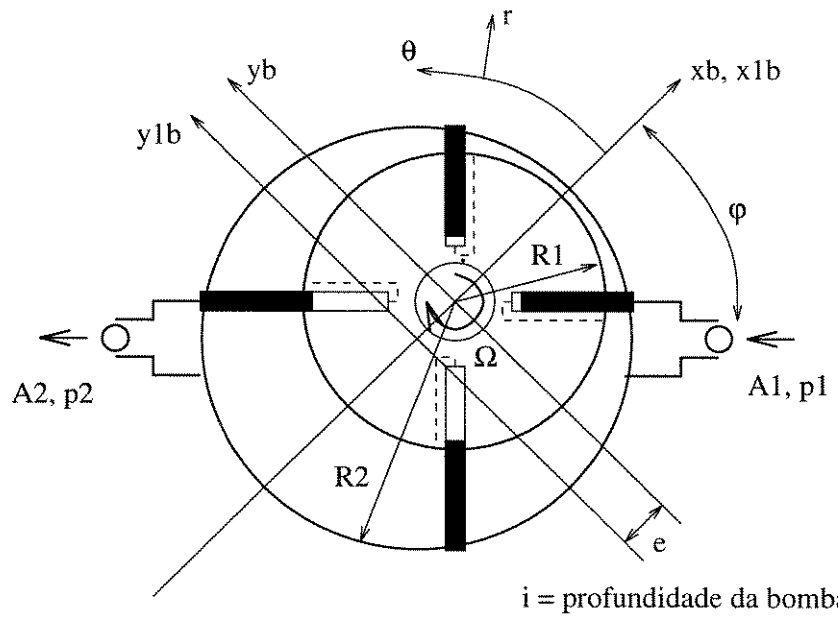

Figura 3.8: Geometria e Sistemas Referenciais da Bomba de Palhetas.

$$H = \frac{p_2 - p_1}{\rho g} + \frac{o_2^2 - o_1^2}{2g} + \Delta y^b \tag{3.66}$$

Considerando-se que a entrada e a saída da bomba de palhetas estão no mesmo nível e que as velocidades o_1 e o_2 são iguais, pode-se desprezar os dois últimos termos, como é mostrado na equação 3.67.

$$H = \frac{p_2 - p_1}{\rho g} \tag{3.67}$$

A vazão $\dot{V}$ é dada pela equação 3.68, onde O é o fluxo do "fluido morto" que fica preso na bomba durante a operação.

$$\dot{V} = (R_2 - R_1)i\Omega\frac{R_2 + R_1}{2} - O \tag{3.68}$$

O fluxo do fluido morto O é obtido através da equação 3.69, onde C_1 e C_2 são constantes que devem ser obtidas experimentalmente.

$$O = \frac{C_1(p_2 - p_1)}{\mu^{C_2}} \tag{3.69}$$

Assim, o torque M^b pode ser calculado a partir da equação 3.70.

$$M^b = \frac{p_2 - p_1}{\Omega}\left[\frac{(R_2^2 - R_1^2)i\Omega}{2} - \frac{C_1(p_2 - p_1)}{\mu^{C_2}}\right] \tag{3.70}$$

Finalmente, o torque exercido sobre o eixo deve considerar os rendimentos da bomba de palhetas, como é mostrado na equação 3.71.

$$M_X^b = -\frac{M^b}{\eta_v\eta_m\eta_h} \tag{3.71}$$

Como estes rendimentos e o fluxo do fluido morto estão relacionados à geometria da bomba de palhetas, um modelo matemático que os considerasse seria dispendioso do ponto de vista das análises, uma vez que a alteração de um dado geométrico implicaria na reavaliação experimental destes parâmetros. Isto vai exatamente na direção contrária ao objetivo do trabalho, que é a substituição dos testes experimentais por programas computacionais capazes de representar o comportamento dinâmico da bomba. Para contornar

éste problema é desenvolvido um modelo matemático que procura estimar os esforços da bomba de palhetas apenas a partir das condições operacionais e dos dados geométricos.

A teoria de mecânica dos fluidos, empregada no desenvolvimento matemático, baseia-se em Fox e McDonald (1988). Partindo de Stewart (1986), que apresenta claramente o príncipio de funcionamento da bomba de palhetas, foram levantadas as hipóteses iniciais para o modelo:

1) Área A_1 = Área $A_2 = A$.

2) A pressão é constante na direção radial r e varia linearmente na direção angular θ entre os níveis de pressão de admissão e expulsão do fluido (respectivamente p_1 e p_2).

Considera-se como sendo o volume de controle todo o espaço interno da bomba ocupado pelo fluido. A equação 3.72 representa a conservação da massa.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} \rho \, dV + \int_{sc} \rho \vec{o}.d\vec{A} = 0 \tag{3.72}$$

A integral $\frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} \rho \, dV$ é nula pois o volume de controle não varia com o tempo. Assim a conservação da massa pode ser reescrita como é mostrado em 3.73.

$$\int_{sc} \rho \vec{o}.d\vec{A} = -\dot{V}_1 + \dot{V}_2 = 0 \tag{3.73}$$

Da hipótese (1) conclui-se que as velocidades de admissão e expulsão do fluido são idênticas. Logo, não haverá esforço sobre o eixo devido a entrada e a saída de fluido da bomba, uma vez que as mesmas estão alinhadas. A equação 3.74 ilustra esta conclusão.

$$\int_{sc} \vec{o}\rho\vec{o}.d\vec{A} = 0 \tag{3.74}$$

A rotação do volume de controle provoca um torque $M^b_{z_1}$ sobre o eixo, apresentado na equação 3.75.

$$M^b_{z_1} = -\int_{vc} \vec{s} \times [\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{s})]\rho \, dV \approx -\frac{\rho\pi\Omega^2 i}{4}(R_2^2 - R_1^2)(R_1 + R_2)^2 \tag{3.75}$$

Os demais esforços sobre o eixo surgem devido a manutenção dos níveis de pressão na operação da bomba. Assumindo-se a hipótese (2) pode-se escrever a distribuição de pressões $p(\theta)$ como mostrado em 3.76.

$$p(\theta) = p_1 + \frac{(p_2 - p_1)}{\pi}|\theta - (\pi - \varphi)| \tag{3.76}$$

Onde:

$$|\theta - (\pi - \varphi)| = \begin{cases} \pi - \beta - \varphi & , 0 \leq \theta \leq \pi - \varphi \\ \theta - \pi + \varphi & , \pi - \varphi \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \tag{3.77}$$

Assim, os esforços sobre o eixo no sistema referencial $x^b_1 - y^b_1$ são descritos pelas equações 3.78 e 3.79.

$$F_{x_1}^b = -R_2 i \int_0^{2\pi} p(\theta) \cos\theta \, d\theta \tag{3.78}$$

$$F_{y_1}^b = -R_2 i \int_0^{2\pi} p(\theta) \sin\theta \, d\theta \tag{3.79}$$

Desenvolvendo-se as integrais para $F_{x_1}^b$ e para $F_{y_1}^b$ chega-se às relações apresentadas nas equações 3.80 e 3.81.

$$F_{x_1}^b = -\frac{2R_2 i}{\pi}(p_2 - p_1)(1 + \cos\varphi) \tag{3.80}$$

$$F_{y_1}^b = \frac{2R_2 i}{\pi}(p_2 - p_1)(\varphi + \sin\varphi) \tag{3.81}$$

Reescrevendo-se estes esforços no sistema referencial $x^b - y^b$ chega-se às equações 3.82, 3.83 e 3.84.

$$F_x^b = -\frac{2R_2 i}{\pi}(p_2 - p_1)(1 + \cos\varphi) \tag{3.82}$$

$$F_y^b = \frac{2R_2 i}{\pi}(p_2 - p_1)(\varphi + \sin\varphi) \tag{3.83}$$

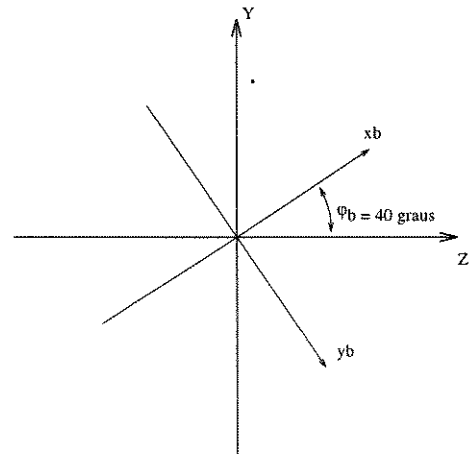

Figura 3.9: Ângulo entre os Sistemas Referenciais Inercial/Bomba de Palhetas.

$$M_z^b = -\frac{\rho\pi\Omega^2 i}{4}(R_2^2 - R_1^2)(R_1 + R_2)\dot{^2} - \frac{2R_2 e\, i}{\pi}(p_2 - p_1)(\varphi + \sin\varphi) \tag{3.84}$$

O ângulo entre o sistema referencial $x^b - y^b$ da bomba de palhetas e o sistema referencial inercial é dado por: $\varphi^b = 40°$, como mostrado na figura 3.9.

As equações 3.85, 3.86 e 3.87 representam a transformação de coordenadas dos ésforços da bomba de palhetas para o sistema referencial inercial $X - Y - Z$.

$$F_Y^b = F_x^b \sin\varphi^b - F_y^b \cos\varphi^b \tag{3.85}$$

$$F_Z^b = F_x^b \cos\varphi^b + F_y^b \sin\varphi^b \tag{3.86}$$

$$M_X^b = M_z^b \tag{3.87}$$

As propriedades da bomba de palhetas são apresentadas nas equações 3.88 e 3.89.

$$R_1 = 22.5 \text{ mm} \qquad R_2 = 24 \text{ mm} \qquad e = 2 \text{ mm} \tag{3.88}$$

$$i = 11 \text{ mm} \qquad \varphi = 66° \qquad \rho = 840 \text{ Kg/m}^3 \tag{3.89}$$

E a diferença de pressões é aproximada pela equação de reta 3.90.

$$\Delta p = p_2 - p_1 = 10^5[1 + (1/27)\Omega] \text{ N/m}^2 \tag{3.90}$$

Finalmente, este modelo para o carregamento devido à bomba de palhetas é aplicado aos graus de liberdade referentes ao nó 4 do vetor $\{Q\}$.

3.4 Modelagem dos Esforços da Engrenagem do Eixo do Regulador (Qualitativa)

As engrenagens de dentes retos são usadas para transmitir o movimento rotativo entre eixos paralelos; usualmente tem a forma cilíndrica, e os dentes são retos e paralelos ao eixo de rotação. Dubbel (1979), Shigley (1970) e Dudley (1962) estudaram extensivamente as engrenagens no que diz respeito à geometria, princípio de funcionamento, projeto, materiais e transmissão de potência. Krstich (1994) desenvolveu um modelo simples para os torques atuantes em trens de engrenagens.

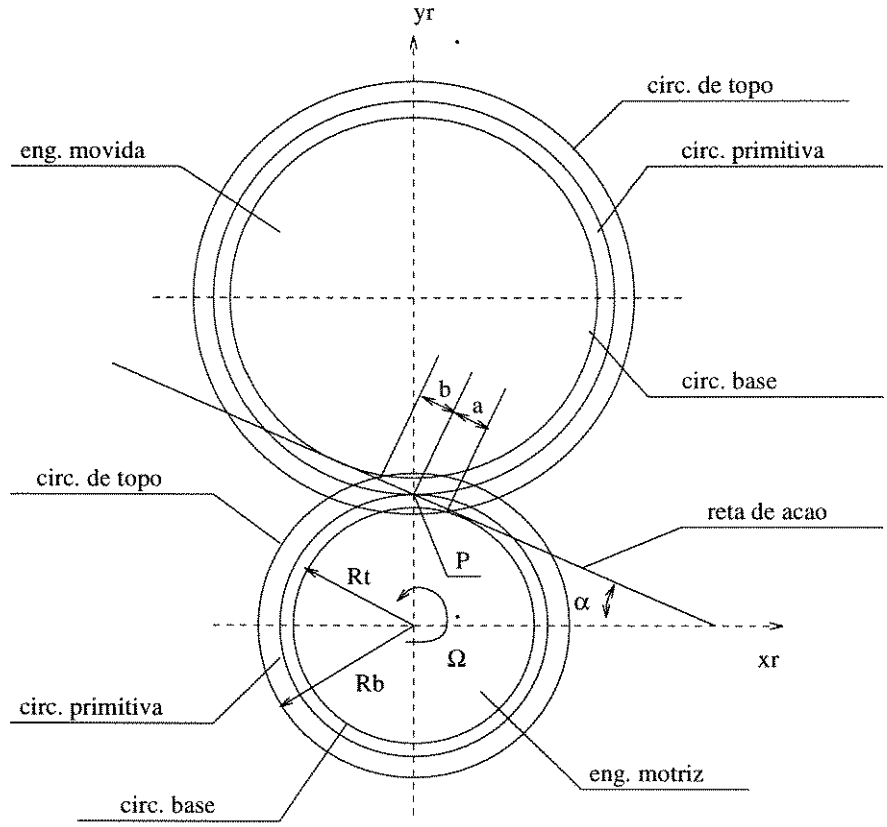

Figura 3.10: Terminologia do Par de Engrenagens.

A figura 3.10 apresenta a terminologia do par de engrenagens. A circunferência primitiva é o círculo teórico no qual baseiam-se todos os cálculos. As circunferências primitivas de um par de engrenagens em contato são tangentes entre si. Uma normal aos perfis dos dentes no ponto de contato intercepta a linha de centros das engrenagens no pólo comum P. O ponto P é chamado de ponto primitivo. Os perfis dos dentes têm a forma de curvas evolventes e, por isso, todos os pontos de contato instantâneos passam pelo ponto primitivo.

A reta que tangencia as circunferências primitivas das engrenagens motriz e conduzida é chamada reta de ação. Esta reta é sempre normal às evolventes no ponto de

contato e passa pelo ponto primitivo. É também chamada de linha de pressão porque coincide com a direção da força resultante entre os dentes, durante o engrenamento. O ângulo de pressão α é o ângulo que a reta de ação faz com a perpendicular à linha de centros, através do ponto primitivo.

É conveniente, neste ponto, observar o engrenamento de um par de dentes desde o instante em que se inicia o contato, até que se afastem. O contato se inicia onde a circunferência de topo da engrenagem movida corta a reta de ação, ou seja, na ponta de dente da roda e no flanco do dente do pinhão. A medida que o dente do pinhão move o da roda, ambos se aproximam do ponto primitivo. O último ponto de contato ocorre na ponta do dente do pinhão e na raiz do dente da roda, e está localizado na intersecção da reta de ação com a circunferência de topo do pinhão.

O comprimento da trajetória de ação ou contato é representado por $a+b$, onde a e b designam os comprimentos das fases de aproximação e de afastamento, respectivamente. Os valores de a e b podem ser obtidos analiticamente através das equações 3.91 e 3.92.

$$a = (R_{t_m}^2 - R_{b_m}^2)^{1/2} - \frac{R\, d_m}{d} \sin\alpha \tag{3.91}$$

$$b = (R_t^2 - R_b^2)^{1/2} - R \sin\alpha \tag{3.92}$$

Na equação 3.91 R_{t_m} raio de topo da engrenagem movida, R_{b_m} raio de base da engrenagem movida, R é o raio primitivo do pinhão, d é o número de dentes do pinhão e d_m é o número de dentes da engrenagem movida. Na equação 3.92, R_t e R_b representam, respectivamente, os raios de topo e de base do pinhão.

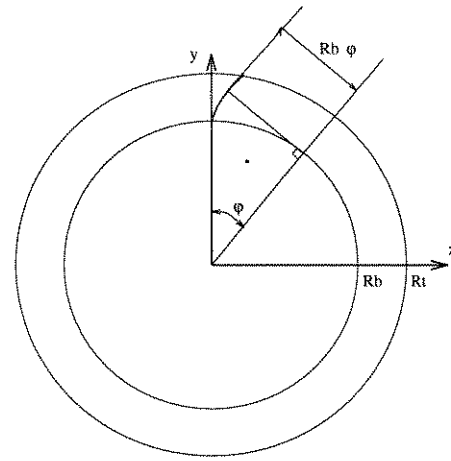

Figura 3.11: Geometria da Evolvente.

A figura 3.11 apresenta a geometria da curva evolvente. Os pontos que definem a curva evolvente são definidos pelas equações 3.93 e 3.94, onde o ângulo φ situa-se no intervalo $0 \leq \varphi \leq \varphi_t$.

$$x = R_b(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi) \tag{3.93}$$

$$y = R_b(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi) \tag{3.94}$$

O ângulo φ_t é dado pela equação 3.95.

$$\varphi_t = \sqrt{\left(\frac{R_t}{R_b}\right)^2 - 1} \tag{3.95}$$

Os pares de pontos (x_i, y_i) $i = 1..d$ que definem as curvas envolventes dos dentes

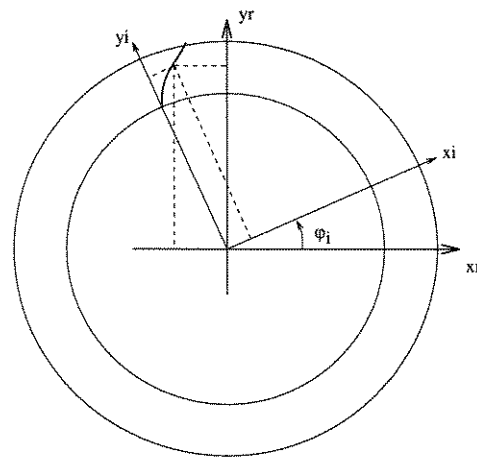

Figura 3.12: Sistemas Referenciais da Engrenagem e do Dente Genérico i.

podem ser representados no sistema referencial $x^r - y^r$ do pinhão a partir dos ângulos φ_i, como mostrado na figura 3.12.

A transformação de coordenadas apresentada na equação 3.96 possibilita esta representação.

$$\left\{ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} \cos\varphi_i & -\sin\varphi_i \\ \sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} x_i \\ y_i \end{array} \right\} \tag{3.96}$$

Os ângulos φ_i $i = 1..d$ dos dentes da engrenagem são dados pela equação 3.97, onde Ω é a velocidade angular do eixo de acionamento e t é o tempo.

$$\varphi_i = \Omega t + \frac{2\pi i}{d} \tag{3.97}$$

As regiões da engrenagem onde existe a possibidade de contato são definidas pelas curvas envolventes de todos os dentes da engrenagem e estão sujeitas à rotação da mesma.

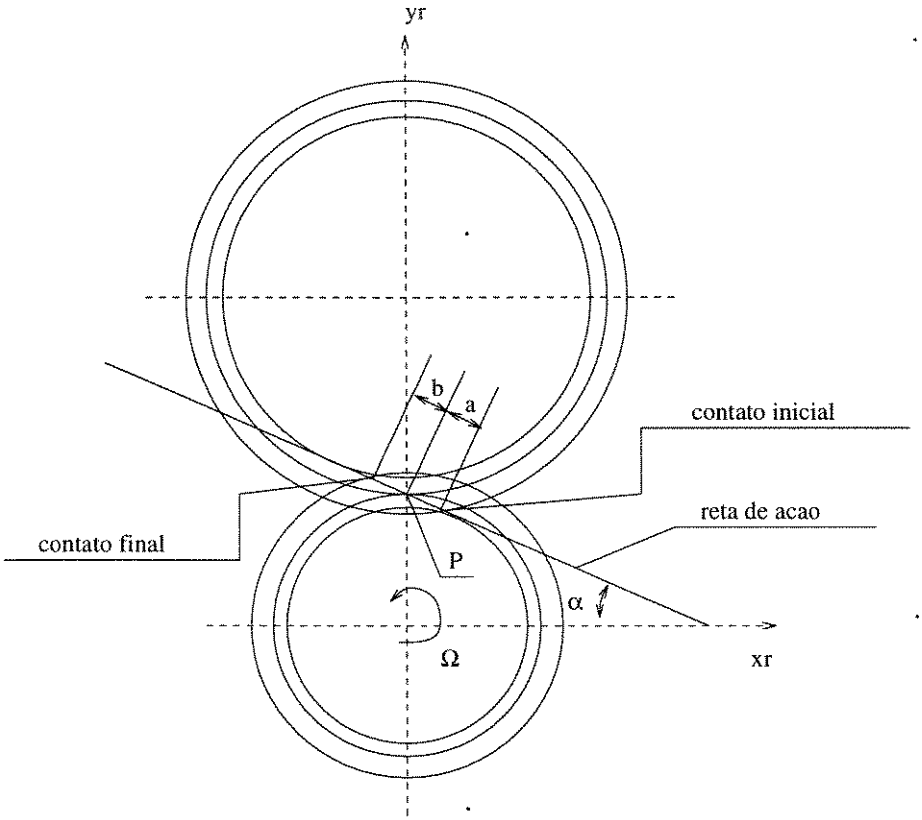

Figura 3.13: Linha de Contato.

Estas regiões são descritas pela equação 3.98, que é obtida a partir da combinação das equações 3.93, 3.94 e 3.96.

$$\left\{ \begin{array}{c} x_i \\ y_i \end{array} \right\} = R_b \left[\begin{array}{cc} \cos\varphi_i & -\sin\varphi_i \\ \sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \sin\varphi - \varphi\cos\varphi \\ \cos\varphi + \varphi\sin\varphi \end{array} \right\} , \; i = 1..d \qquad (3.98)$$

A figura 3.13 ilustra a linha de contato do par de engrernagens.

A linha de contato é o segmento de reta descrito pela equação 3.99, onde os comprimentos das fases de aproximação a e de afastamento b são dados, respectivamente, pelas

equações 3.91 e 3.92.

$$(y - R) = -x \tan \alpha \quad , \quad -b \cos \alpha \leq x \leq a \cos \alpha \tag{3.99}$$

Com o pinhão girando em velocidade angular constante Ω e transmitindo um torque M, também constante, à engrenagem conduzida, tem-se forças de reação nas direções x^r e y^r e um momento torsor na direção z^r agindo sobre o eixo de acionamento.

O número de dentes em contato e as posições de contato dos mesmos são funções do tempo definidas pela intersecção entre as regiões da engrenagem onde há possibilidade de contato 3.98 e a linha de contato 3.99. A direção das forças de contato entre as engrenagens motriz e conduzida é a mesma da linha de contato 3.99. Por estes motivos, as forças nas direções x^r e y^r sofrem pequenas variações periódicas numa frequência dada por $f = \frac{\Omega d}{2\pi}$.

Entretanto, a avaliação do efeito de contato dos dentes durante o engrenamento implica na solução do problema não-linear definido pela intersecção das curvas 3.98 e 3.99 que aumentaria excessivamente o tempo de processamento dos dados. Por isto adota-se um modelo simplificado para os esforços atuantes, baseado em Krstich (1994) e Shigley (1970).

Este modelo simplificado dos esforços que agem sobre o eixo, ilustrado na figura 3.14, pode ser obtido se considerar-se o contato entre as engrenagens motriz e conduzida independente do tempo e apenas no ponto primitivo P. Convém observar que, partindo destas considerações, o modelo não representará as pequenas variações periódicas das forças nas direções x^r e y^r.

As equações 3.100, 3.101 e 3.102 descrevem os carregamentos do eixo de aciona-

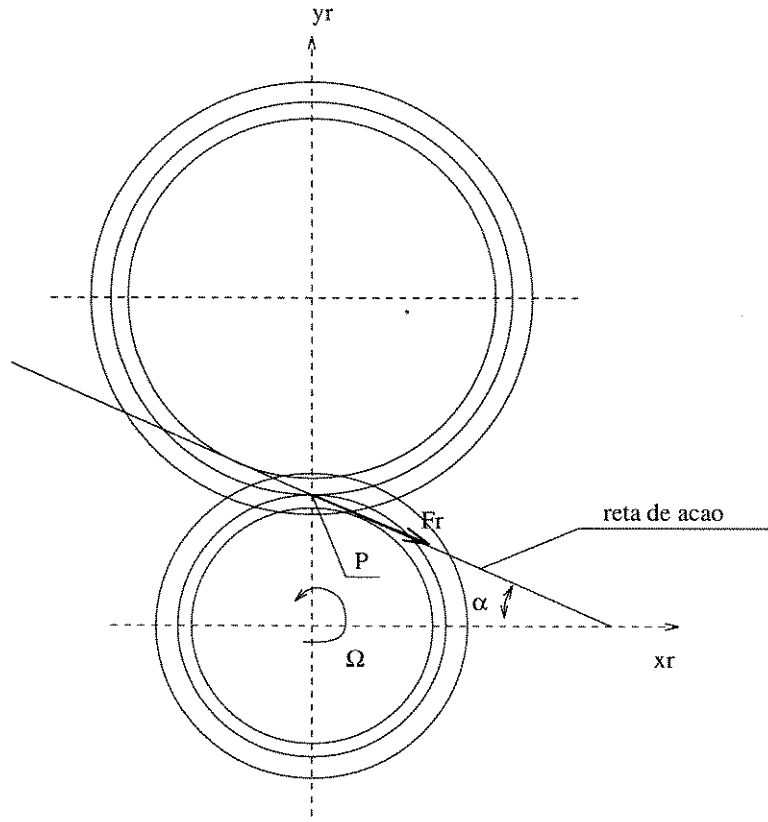

Figura 3.14: Modelagem dos Esforços que Agem sobre o Eixo.

mento, segundo o modelo simplificado, no sistema referencial da engrenagem do regulador $x^r - y^r$.

$$F_x^r = \frac{M}{R} \tag{3.100}$$

$$F_y^r = -\frac{M}{R}\tan\alpha \tag{3.101}$$

$$M_z^r = -M \tag{3.102}$$

O torque M transmitido à engrenagem conduzida é responsável pela rotação do eixo do regulador e pode ser descrito pela equação 3.103.

$$M = \frac{1}{2} I_P \omega_m^2 \tag{3.103}$$

O momento de inércia polar do eixo do regulador I_P é de 4.17×10^{-5} Kg m^2. E a velocidade angular do eixo do regulador é dada pela equação 3.104.

$$\omega_c = \frac{d}{d_m}\Omega = \frac{37}{24}\Omega \tag{3.104}$$

Portanto pode-se reescrever o torque M como mostrado na equação 3.105.

$$M = 4.95 \times 10^{-5}\Omega^2 \text{ Nm} \tag{3.105}$$

A relação entre o sistema referencial $x^r - y^r$ da engrenagem do regulador e o sistema referencial inercial é ilustrado pela figura 3.15.

As equações 3.106, 3.107 e 3.108 representam a transformação de coordenadas dos esforços da engrenagem do regulador para o sistema referencial inercial $X - Y - Z$.

$$F_Y^r = F_y^r \tag{3.106}$$

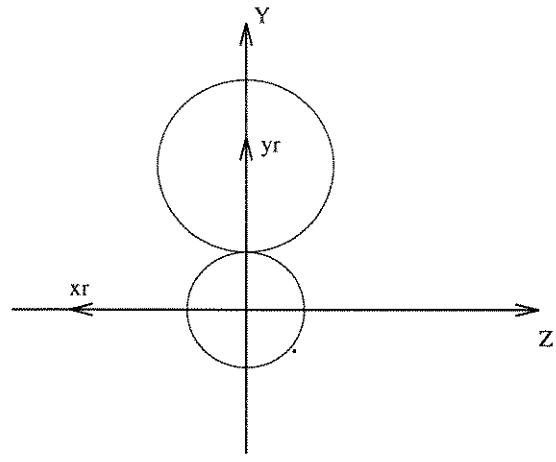

Figura 3.15: Relação entre os Sistemas Referenciais Inercial/Engrenagem do Regulador.

$$F_Z^r = -F_x^r \tag{3.107}$$

$$M_X^r = M_z^r \tag{3.108}$$

Os dados geométricos da engrenagem do regulador são apresentados nas equações 3.109.

$$D = 55.5 \text{ mm} \qquad \alpha = 20° \qquad d = 37 \qquad d_m = 24 \tag{3.109}$$

Finalmente, este modelo para o carregamento devido à engrenagem do regulador é aplicado aos graus de liberdade referentes ao nó 5 do vetor $\{Q\}$.

3.5 Modelagem dos Esforços do Came

Os cames são mecanismos que acoplam movimentos de rotação e de translação. Servem para gerar um movimento rotativo a partir de um movimento de translação, como no caso da rotação do eixo do virabrequim gerada a partir do movimento de translação dos pistões de um motor à combustão, ou vice-versa, como no caso aqui descrito.

As analises de sistemas de cames são geralmente complexas pois exigem a solução de problemas não-lineares. Vários autores trataram do assunto: Dubbel (1979), Shigley (1969) e Shigley (1970) estudaram extensivamente os cames no que diz respeito ao princípio de funcionamento, projeto e transmissão de movimento. Kim et al (1991) estudaram as forças de contato em cames. Saka et al (1992), Sadek e Daadbin (1993) e Cardona et al (1993) desenvolveram modelos matemáticos para mecanismos de cames. E Mills et al (1993) empregaram análises de sensibilidade ao projeto de mecanismos flexíveis de cames. Como os cames apresentam construções bastante variadas, um modelo específico para a determinação dos esforços do came da bomba em estudo é desenvolvido aqui.

A figura 3.16 ilustra o funcionamento do sistema de cames da bomba injetora distribuidora BOSCH tipo VE. O eixo de acionamento (elemento 1) gira com velocidade angular Ω constante e, através da cruzeta (elemento 2), provoca a rotação do sistema formado pelo came e pelo pistão distribuidor (elemento 3) com esta mesma velocidade angular. O suporte de roletes (elemento 4) é fixado à carcaça, de modo que, a rotação do sistema came/pistão resulta no movimento de translação deste mesmo sistema de acordo com o perfil do came (elemento 5). O prato de molas (elemento 6) e a pressão de injeção $p(\phi)$ mantém o came sempre em contato com os roletes. O perfil do came é composto de quatro elevações idênticas que são responsáveis pelas quatro injeções que ocorrem num ciclo de rotação do eixo de acionamento, e o canal do pistão distribuidor (elemento 7)

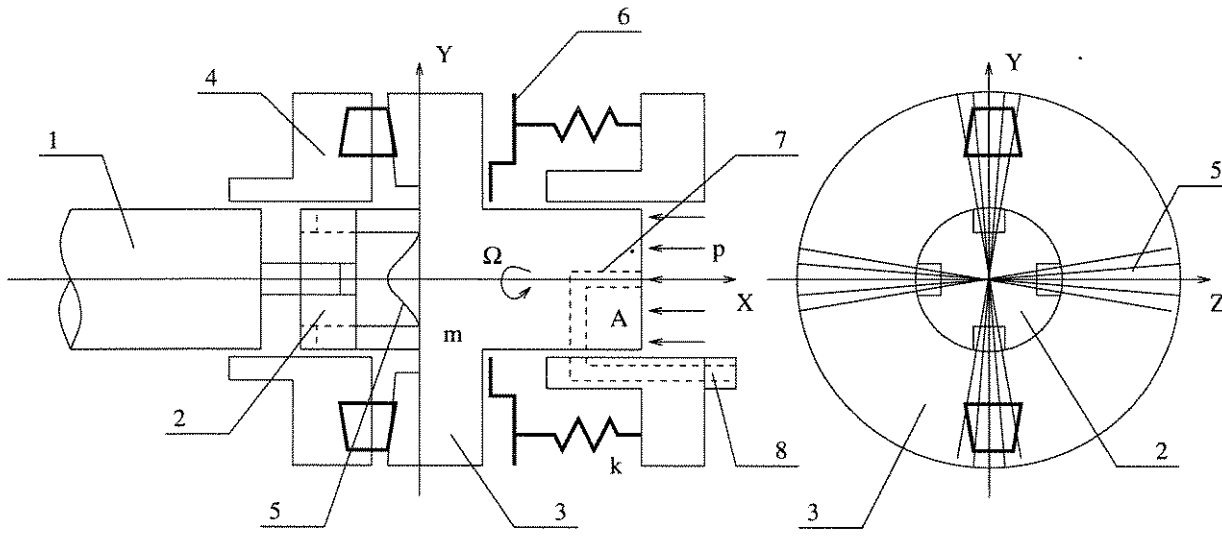

Figura 3.16: Esquema do Came.

direciona o óleo Diesel para as saídas da bomba (elemento 8).

Pode-se definir a função $f(\phi)$ do perfil do came na linha de contato rolete/came, ilustrada pela figura 3.17. Deve-se observar que o ângulo ϕ da rotação do eixo na direção X é dado por $\phi = \Omega t$. Como num ciclo de rotação do eixo de acionamento tem-se quatro injeções idênticas, basta que a função $f(\phi)$ seja definida no intervalo $0 \leq \phi \leq \pi/2$.

Na modelagem dos esforços do came existe a necessidade do equacionamento da derivada segunda da função do perfil do came $\frac{d^2 f(\phi)}{d\phi^2}$. Por isto optou-se pela interpolação, segundo uma função *spline* cúbica, de alguns pontos específicos $f_i(\phi_i)$ tomados sobre o perfil do came. A referência para a geração de funções do tipo *spline* cúbica é Santos (1988).

Uma função *spline* cúbica é uma função polinomial cúbica, por partes, suave até a segunda ordem, ou seja, apresenta tanto a primeira como a segunda derivadas contínuas. A equação 3.110 representa a função $f(\phi)$ do perfil do came interpolada segundo uma

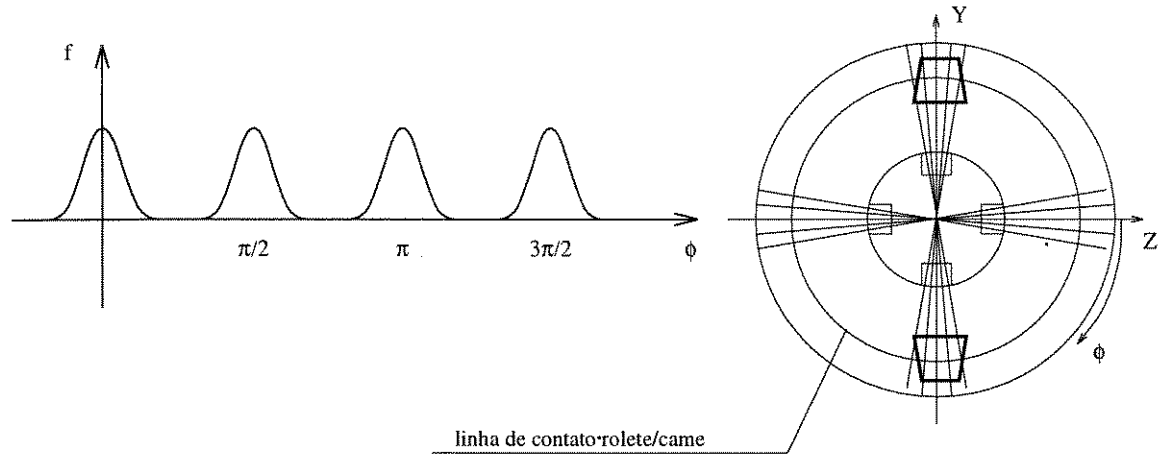

Figura 3.17: Função $f(\phi)$.

função *spline* cúbica a partir de quatorze pontos específicos $f_i = f_i(\phi_i)$, $i = 1..14$ tomados sobre o perfil do came. O domínio da equação é caracterizado por $\phi_i \leq \phi \leq \phi_{i+1}$ e o método de cálculo para a obtenção das constantes C_i será apresentado mais adiante no trabalho. Os tamanhos dos subintervalos entre os ângulos ϕ_{i-1}, ϕ_i e ϕ_{i+1} são apresentados na equação 3.111.

$$f = C_i \frac{(\phi_{i+1} - \phi)^3}{6\Delta\phi_{i+1}} + C_{i+1} \frac{(\phi - \phi_i)^3}{6\Delta\phi_{i+1}} + \left[f_i - C_i \frac{\Delta\phi_{i+1}^2}{6} \right] \frac{\phi_{i+1} - \phi}{\Delta\phi_{i+1}} +$$

$$+ \left[f_{i+1} - C_{i+1} \frac{\Delta\phi_{i+1}^2}{6} \right] \frac{\phi - \phi_i}{\Delta\phi_{i+1}} \tag{3.110}$$

$$\Delta\phi_i = \phi_i - \phi_{i-1} \qquad \Delta\phi_{i+1} = \phi_{i+1} - \phi_i \tag{3.111}$$

As equações 3.112 e 3.113 representam, respectivamente, as derivadas primeira e segunda da função $f(\phi)$ do perfil do came com relação ao ângulo ϕ. Em ambas, o domínio

é caracterizado por $\phi_i \leq \phi \leq \phi_{i+1}$ e valem as demais considerações adotadas para a equação 3.110 de $f(\phi)$.

$$\frac{df(\phi)}{d\phi} = -C_i\frac{(\phi_{i+1}-\phi)^2}{2\Delta\phi_{i+1}} + C_{i+1}\frac{(\phi-\phi_i)^2}{2\Delta\phi_{i+1}} + \frac{f_{i+1}-f_i}{\Delta\phi_{i+1}} + \frac{\Delta\phi_{i+1}}{6}(C_i - C_{i+1}) \quad (3.112)$$

$$\frac{d^2f(\phi)}{d\phi^2} = C_i\frac{\phi_{i+1}-\phi}{\Delta\phi_{i+1}} + C_{i+1}\frac{\phi-\phi_i}{\Delta\phi_{i+1}} \quad (3.113)$$

Valendo-se da definição de função *spline* cúbica (função duas vezes diferenciável), tem-se doze equações lineares da forma 3.114, $i = 2..13$, em função das constantes C_i, $i = 1..14$.

$$\frac{\Delta\phi_i}{6}C_{i-1} + \frac{\Delta\phi_i + \Delta\phi_{i+1}}{3}C_i + \frac{\Delta\phi_{i+1}}{6}C_{i+1} = \frac{f_{i+1}-f_i}{\Delta\phi_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta\phi_i} \quad (3.114)$$

Para a determinação das constantes C_i, $i = 1..14$, empregam-se as equações 3.115 e 3.116, que juntamente com as equações da forma 3.114 constituem um sistema linearmente independente. As equações 3.115 e 3.116 garantem a continuidade das derivadas primeira e segunda da função $f(\phi)$ do perfil do came para os ângulos $\phi_1 = 0$ e $\phi_{14} = \pi/2$.

$$\frac{df(\phi_1 = 0)}{d\phi} = \frac{df(\phi_{14} = \pi/2)}{d\phi} \quad (3.115)$$

$$\frac{d^2f(\phi_1 = 0)}{d\phi^2} = \frac{d^2f(\phi_{14} = \pi/2)}{d\phi^2} \quad (3.116)$$

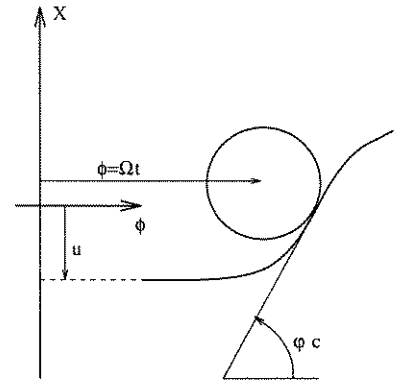

Figura 3.18: Posição u do Came e Ângulo φ^c de Contato.

A posição u^c instantânea do came e o ângulo φ^c de contato rolete/came são representados na figura 3.18. Ambos podem ser definidos a partir da função $f(\phi)$. A posição u^c é apresentada na equação 3.117, enquanto o ângulo φ^c é dado pela equação 3.118. R^c é o raio da circunferência definida pela linha de contato rolete/came.

$$u^c = -f(\phi) \tag{3.117}$$

$$\varphi^c = \arctan\left(\frac{1}{R^c}\frac{df(\phi)}{d\phi}\right) \tag{3.118}$$

A velocidade $\dot{u^c}$ e a aceleração $\ddot{u^c}$ instantâneas de translação do sistema came/pistão são apresentadas, respectivamente, nas equações 3.119 e 3.120.

$$\dot{u^c} = -\frac{df(\phi)}{d\phi}\frac{d\phi}{dt} = -\frac{df(\phi)}{d\phi}(\Omega + \dot{\gamma}) \tag{3.119}$$

$$\ddot{u}^c = \frac{d}{dt}\left(-\frac{df(\phi)}{d\phi}(\Omega + \dot{\gamma})\right) = -\frac{d^2 f(\phi)}{d\phi^2}(\Omega + \dot{\gamma})^2 - \frac{df(\phi)}{d\phi}\ddot{\gamma} \tag{3.120}$$

Considerando-se que γ é a perturbação sobre a rotação Ωt do eixo de acionamento, e que os termos que apresentam Ω são predominantes nos cálculos da velocidade $\dot{u}^c$ e da aceleração $\ddot{u}^c$ instantâneas de translação do sistema came/pistão, pode-se desprezar os demais termos de forma a evitar-se o tratamento de termos não-lineares. Assim, a velocidade $\dot{u}^c$ e a aceleração $\ddot{u}^c$ instantâneas são reescritas, respectivamente, como mostrado nas equações 3.121 e 3.122.

$$\dot{u}^c = -\frac{df(\phi)}{d\phi}\Omega \tag{3.121}$$

$$\ddot{u}^c = -\frac{d^2 f(\phi)}{d\phi^2}\Omega^2 \tag{3.122}$$

A força F_X^c do came apresenta quatro termos distintos como é mostrado na equação 3.123. O primeiro termo, $F_{X_0}^c$, diz respeito à pré-compressão do prato de molas e o segundo, à compressão dinâmica do mesmo que ocorre durante a operação da bomba. A rigidez do prato de molas é indicada por k^c. O terceiro termo está relacionado à força para a translação do sistema came/pistão e a massa do mesmo é representada por m^c. O último termo diz respeito à força causada pela pressão de injeção $p(\phi)$, e A^c é a área da secção do pistão.

$$F_X^c = -F_{X_0}^c - k^c f(\phi) - m^c \Omega^2 \frac{d^2 f(\phi)}{d\phi^2} - A^c p(\phi) \tag{3.123}$$

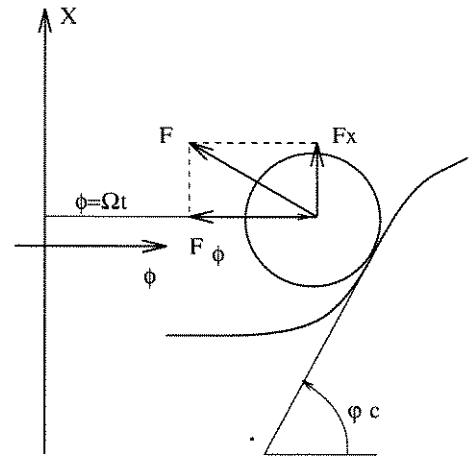

Figura 3.19: Esforços de Contato Rolete/Came.

Medidas experimentais de pressão $p(\phi)$ são obtidas a partir de um sensor de pressão montado no canal do pistão distribuidor (elemento 7 da figura 3.16). Como num ciclo de rotação do eixo de acionamento tem-se quatro injeções idênticas, basta que a função $p(\phi)$ seja definida no intervalo $0 \leq \phi \leq \pi/2$. Uma vez que não existe a necessidade da representação das derivadas de $p(\phi)$ com relação à ϕ, representa-se a função $p(\phi)$ através da interpolação linear 3.124 de nove medidas experimentais de pressão $p_i = p_i(\phi_i), i = 1..9$, em ângulos distintos. A equação 3.124 é válida no intervalo $\phi_i \leq \phi \leq \phi_{i+1}$.

$$p(\phi) = \frac{p_{i+1} - p_i}{\phi_{i+1} - \phi_i}(\phi - \phi_i) \tag{3.124}$$

A figura 3.19 apresenta a representação dos esforços de contato rolete/came. Como a direção da força de contato F é aquela da normal do plano de contato, pode-se definir F e sua componente na direção ϕ, F_ϕ, a partir da componente F_X^c e da função $f(\phi)$ do perfil do came.

A equação 3.125 relaciona F, F_X^c e o ângulo φ^c de contato rolete/came, sendo que

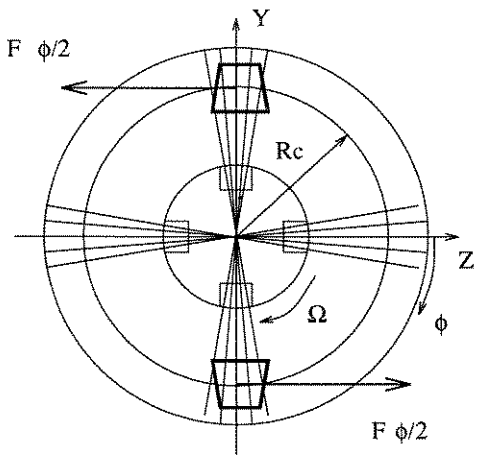

Figura 3.20: Disposição Física dos Roletes e Representação dos Esforços.

este último é dado pela equação 3.118. A equação 3.126 define a componente F_ϕ de F na direção ϕ.

$$F = \frac{F_X^c}{\cos \varphi^c} \tag{3.125}$$

$$F_\phi = F \sin \varphi^c = F_X^c \tan \varphi^c = \frac{F_X^c}{R^c} \frac{df(\phi)}{d\phi} \tag{3.126}$$

A figura 3.20 apresenta a disposição física dos roletes e a representação dos esforços que agem sobre os mesmos no plano $Y - Z$. Observa-se que os esforços F_Y^c, F_Z^c, M_Y^c e M_Z^c do sistema de cames são nulos devido à disposição simétrica dos roletes.

O esforço F_X^c do sistema de cames não atua sobre o eixo de acionamento (elemento 1 da figura 3.16) pois a transmissão do movimento através da cruzeta (elemento 2) evita que a translação do sistema came/pistão (elemento 3) provoque o deslocamento do eixo

na direção X. Este esforço é suportado pela carcaça da bomba injetora, sobre a qual encontra-se fixado o suporte de roletes (elemento 4 da figura 3.16).

Existe um outro esforço, F_{at}, que surge na direção ϕ e diz respeito ao atrito do prato de molas (elemento 6 da figura 3.16) com o sistema came/pistão (elemento 3). Este esforço é dado pela equação 3.127, onde ν^c é o coeficiente de atrito dinâmico entre as partes em contato.

$$F_{at} = \nu^c F_X^c \tag{3.127}$$

Os esforços F_ϕ, expresso pela equação 3.126, e F_{at}, expresso pela equação 3.127, são responsáveis pelo momento torsor M_X^c do sistema de cames que atua sobre o eixo de acionamento. Este esforço é expresso pela equação 3.128. R_p^c é o raio da circunferência de contato do prato de molas com o came e a expressão para F_X^c é apresentada na equação 3.123.

$$M_X^c = F_X^c \left(\frac{df(\phi)}{d\phi} + \nu^c R_p^c \right) \tag{3.128}$$

As propriedades do came são apresentadas nas equações 3.129 e 3.130.

$$F_{X_0}^c = 745 \text{ N} \qquad k^c = 45 \text{ N/mm} \qquad \nu^c = 0.15 \qquad m^c = 0.229 \text{ Kg} \tag{3.129}$$

$$R^c = 31.5 \text{ mm} \qquad R_p^c = 13 \text{ mm} \qquad A^c = 113 \text{ mm}^2 \tag{3.130}$$

Tabela 3.1: Pontos da Função $f(\phi)$.

ϕ [rad]	$f(\phi)$ [mm]
0.000	0.000
0.127	0.000
0.242	0.000
0.380	0.515
0.517	1.932
0.654	2.962
0.785	3.220
0.896	2.962
1.012	2.061
1.128	0.773
1.233	0.000
1.339	0.000
1.455	0.000
1.571	0.000

Os pares (ϕ_i, f_i) empregados para a determinação da função $f(\phi)$ do perfil do came são apresentados na tabela 3.1. A figura 3.21 mostra a evolução da função $f(\phi)$ em 180 graus de rotação do eixo de acionamento, enquanto as figuras 3.22 e 3.23 apresentam, respectivamente, as suas derivadas primeira e segunda com relação à ϕ.

Como neste trabalho são analisadas três diferentes condições operacionais, conjuntos distintos de pares (ϕ_i, p_i) são empregados para a determinação de funções $p(\phi)$ específicas para cada uma destas condições operacionais. Para a velocidade angular do eixo de

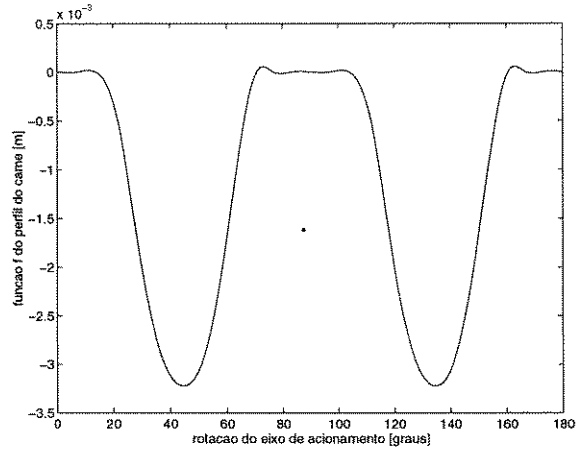

Figura 3.21: Função $f(\phi)$.

acionamento referente à 2600 rpm os pares (ϕ_i, p_i) empregados para a determinação da função $p(\phi)$ da pressão de injeção são apresentados na tabela 3.2. A figura 3.24 mostra a evolução da função $p(\phi)$ em 180 graus de rotação do eixo de acionamento para a velocidade angular do eixo de acionamento referente à 2600 rpm.

Para a velocidade angular do eixo de acionamento referente à 2000 rpm os pares

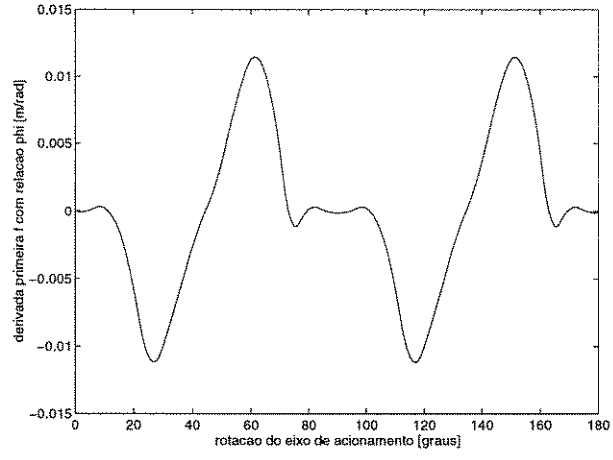

Figura 3.22: Função $\frac{df(\phi)}{d\phi}$.

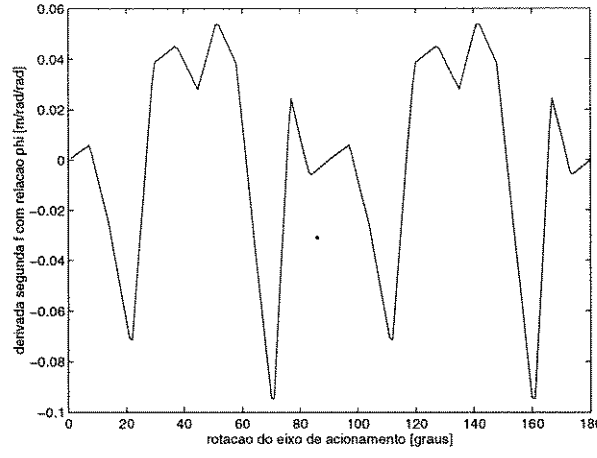

Figura 3.23: Função $\frac{d^2 f(\phi)}{d\phi^2}$.

(ϕ_i, p_i) empregados para a determinação da função $p(\phi)$ da pressão de injeção são apresentados na tabela 3.3. A figura 3.25 mostra a evolução da função $p(\phi)$ em 180 graus

Tabela 3.2: Pontos da Função $p(\phi)$ - 2600 rpm.

ϕ [rad]	$p(\phi)$ [10^7 Pa]
0.000	0.000
0.628	0.000
0.685	1.033
0.735	2.582
0.785	4.337
0.836	4.750
0.886	3.511
0.942	0.000
1.571	0.000

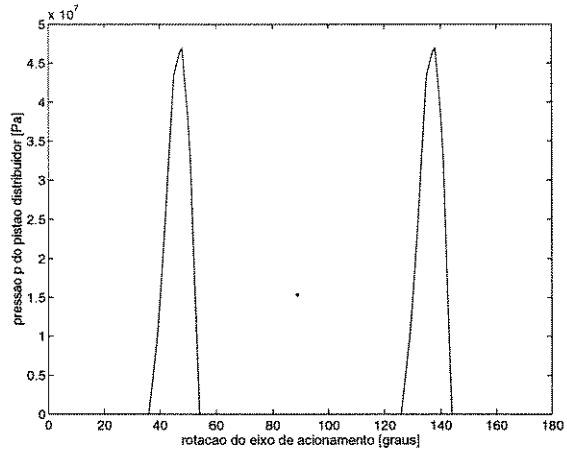

Figura 3.24: Função $p(\phi)$ - 2600 rpm.

de rotação do eixo de acionamento para a velocidade angular do eixo de acionamento referente à 2000 rpm.

Tabela 3.3: Pontos da Função $p(\phi)$ - 2000 rpm.

ϕ [rad]	$p(\phi)$ [10^7 Pa]
0.000	0.000
0.628	0.000
0.681	0.921
0.733	2.150
0.785	3.583
0.838	4.300
0.890	2.764
0.942	0.000
1.571	0.000

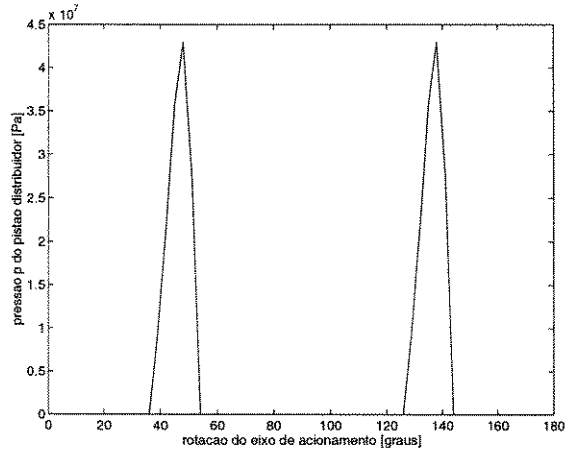

Figura 3.25: Função $p(\phi)$ - 2000 rpm.

Para a velocidade angular do eixo de acionamento referente à 1500 rpm os pares (ϕ_i, p_i) empregados para a determinação da função $p(\phi)$ da pressão de injeção são apresentados na tabela 3.4. A figura 3.26 mostra a evolução da função $p(\phi)$ em 180 graus de rotação do eixo de acionamento para a velocidade angular do eixo de acionamento referente à 1500 rpm.

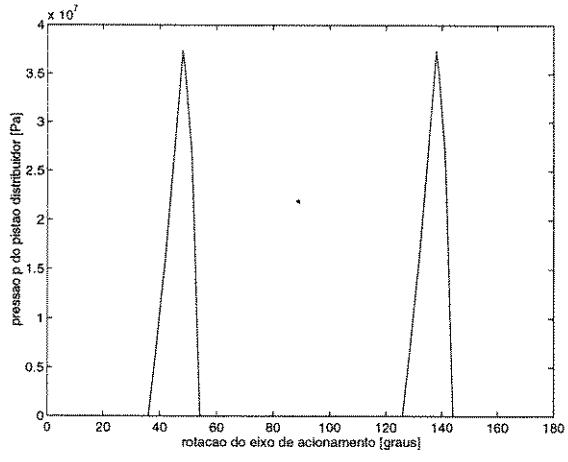

Figura 3.26: Função $p(\phi)$ - 1500 rpm.

Tabela 3.4: Pontos da Função $p(\phi)$ - 1500 rpm.

ϕ [rad]	$p(\phi)$ [10^7 Pa]
0.000	0.000
0.628	0.000
0.681	0.779
0.735	1.656
0.788	2.728
0.841	3.800
0.894	2.631
0.942	0.000
1.571	0.000

Finalmente, este modelo para o carregamento devido ao came é aplicado aos graus de liberdade referentes ao nó 6 do vetor $\{Q\}$.

3.6 Modelagem dos Esforços da Engrenagem de Acionamento

O acionamento da bomba injetora dá-se através de uma engrenagem cilíndrica helicoidal. Dubbel (1979), Shigley (1970) e Dudley (1962) estudaram extensivamente as engrenagens cilíndricas helicoidais no que diz respeito à geometria, princípio de funcionamento, projeto, materiais e transmissão de potência.

Inicialmente, é interessante observar a introdução do estudo referente à Modelagem dos Esforços da Engrenagem do Eixo do Regulador. Todos os conceitos que são lá apresentados, referentes à engrenagem de dentes retos, podem ser aplicados à engrenagem

cilindríca helicoidal.

O formato dos dentes de uma engrenagem helicoidal é uma hélice regrada ou de evolvente. Nas engrenagens cilíndricas de dentes retos, o contato entre os dentes inicia-se por uma reta que tem a extensão de toda a largura dos dentes; o contato inicial nas engrenagens helicoidais é um ponto, que se transforma em uma linha, conforme os dentes prosseguem no engrenamento; esta linha estende-se diagonalmente sobre o flanco do dente. É este engrenamento gradual dos dentes, e a transferência gradual da carga de um dente para outro, que possibilita às engrenagens helicoidais transmitir maiores cargas com altas velocidades periféricas.

A figura 3.27 apresenta as relações geometricas dos dentes helicoidais. O ângulo ψ de hélice é medido sobre o diâmetro primitivo da engrenagem. Devido à inclinação dos dentes, definem-se dois ângulos de pressão: o ângulo de pressão transversal α_t, e o ângulo de pressão normal α_n. Estes ângulos são relacionados pela equação 3.131.

$$\tan \alpha_t \cos \psi = \tan \alpha_n \tag{3.131}$$

A figura 3.28 apresenta os esforços da engrenagem de acionamento no seu sistema referêncial específico $x^a - y^a - z^a$. Observa-se que a inclinação dos dentes é responsável pela transmissão de esforços na direção axial z^a.

A partir do torque M^a de acionamento da engrenagem, pode-se caracterizar os esforços que agem sobre o eixo de acionamento nos diversos graus de liberdade do modelo. Estes esforços são apresentados nas equações 3.132, 3.133, 3.134, 3.135 e 3.136; onde R^a representa o raio da circunferência primitiva da engrenagem de acionamento.

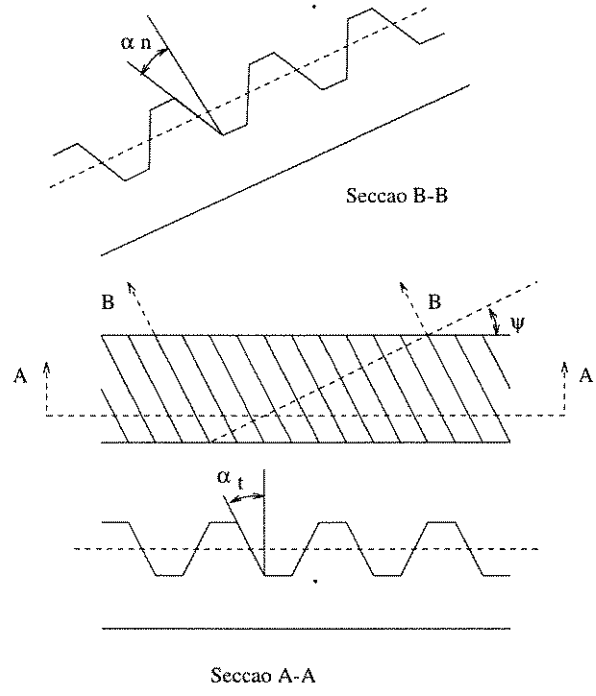

Figura 3.27: Relações Geométricas dos Dentes Helicoidais.

$$F_x^a = \frac{M^a}{R^a} \tag{3.132}$$

$$F_y^a = -\frac{M^a}{R^a} \tan \alpha_t \tag{3.133}$$

$$F_z^a = -\frac{M^a}{R^a} \tan \psi \tag{3.134}$$

$$M_x^a = -M^a \tan \psi \tag{3.135}$$

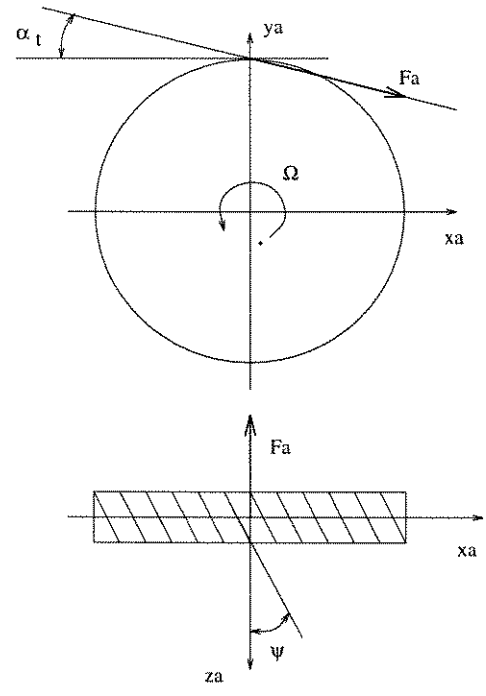

Figura 3.28: Modelagem dos Esforços Sobre o Eixo.

$$M_z^a = -M^a \tag{3.136}$$

As propriedades da engrenagem de acionamento são apresentadas na equação 3.137.

$$R^a = 88 \text{ mm} \qquad \alpha_t = 20° \qquad \psi = 15° \tag{3.137}$$

A figura 3.29 relaciona os sistemas referenciais $x^a - y^a - z^a$ da engrenagem de acionamento e $X - Y - Z$ do eixo de acionamento. O ângulo φ^a entre ambos é de 30 graus. Os esforços da engrenagem, descritos no sistema referencial do eixo de acionamento $X - Y - Z$, são apresentados nas equações 3.138, 3.139, 3.140, 3.141 e 3.142.

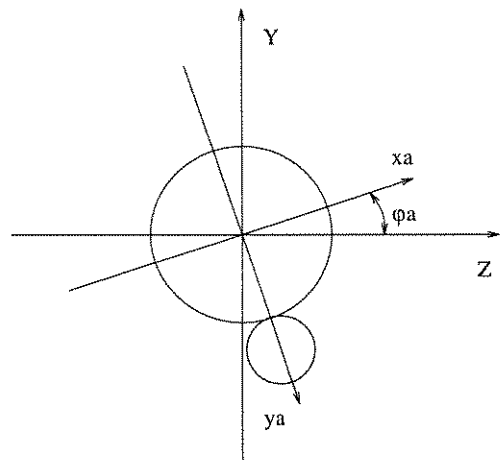

Figura 3.29: Ângulo Entre os Sistemas Referenciais Eixo/Engrenagem de Acionamento.

$$F_Y^a = F_x^a \sin\varphi^a - F_y^a \cos\varphi^a \tag{3.138}$$

$$F_Z^a = F_x^a \cos\varphi^a + F_y^a \sin\varphi^a \tag{3.139}$$

$$M_X^a = M_z^a \tag{3.140}$$

$$M_Y^a = M_x^a \sin\varphi^a \tag{3.141}$$

$$M_Z^a = M_x^a \cos\varphi^a \tag{3.142}$$

É interessante observar que, a princípio, o torque de acionamento M^a da engrenagem helicoidal não é conhecido. Mas o grau de liberdade γ_1, referente à rotação do eixo na direção X, encontra-se travado. Assim os demais γ_i, $i = 2..6$, representam as perturbações nodais sobre a rotação do eixo de acionamento Ωt.

Portanto, a equação de movimento do grau de liberdade γ_1 pode ser descrita pela expressão 3.143, onde $< M_{\gamma_1} >$ representa a linha da matriz $[M]$ referente ao grau de liberdade γ_1, e assim sucessivamente.

$$< M_{\gamma_1} > \{\ddot{q}\} + < G_{\gamma_1} > \{\dot{q}\} + < K_{\gamma_1} > \{q\} = M_X^a \tag{3.143}$$

As equações dos esforços da engrenagem de acionamento 3.138, 3.139, 3.141 e 3.142 podem ser reescritas, respectivamente, em função de M_X^a como mostram as expressões 3.144, 3.145, 3.146 e 3.147.

$$F_Y^a = -\frac{M_X^a}{R^a}(\sin\varphi^a + \tan\alpha_t \cos\varphi^a) \tag{3.144}$$

$$F_Z^a = -\frac{M_X^a}{R^a}(\cos\varphi^a - \tan\alpha_t \sin\varphi^a) \tag{3.145}$$

$$M_Y^a = M_X^a \tan\psi \sin\varphi^a \tag{3.146}$$

$$M_Z^a = M_X^a \tan\psi \cos\varphi^a \tag{3.147}$$

Finalmente, os esforços da engrenagem de acionamento podem ser equacionados como funções de $(\ddot{q}, \dot{q}, q)$ através da expressão 3.143. Estes esforços são aplicados aos graus de liberdade referentes ao nó 1 do eixo de acionamento.

Os esforços de acionamento, entretanto, não são dispostos no vetor $\{Q\}$ das equações de movimento, uma vez que são funções de $(\ddot{q}, \dot{q}, q)$. Os esforços de acionamento são somados, com os sinais trocados, no lado esquerdo da equação de movimento. Sendo assim, estes esforços alteram as matrizes de massa, de amortecimento e de rigidez do eixo de acionamento. Posteriormente os esforços de acionamento da engrenagem helicoidal são recuperados e calculados separadamente.

3.7 Modelos Linearizados para as Rigidezes e Amortecimentos dos Mancais Hidrodinâmicos

Os mancais hidrodinâmicos são responsáveis pela sustentação do eixo de acionamento. A distribuição da pressão num mancal hidrodinâmico está relacionada à velocidade de rotação do eixo de acionamento e, também, ao posicionamento do eixo de acionamento com relação ao mancal. Isto torna o problema não-linear uma vez que os esforços e o posicionamento do eixo de acionamento passam a estar relacionados de forma direta.

Modelos linearizados para os carregamentos devidos aos mancais hidrodinâmicos são empregados nas análises dinâmicas visando uma melhor performance no que diz respeito ao tempo para o processamento dos dados. Todavia, no anexo do trabalho é desenvolvido um modelo matemático para a distribuição da pressão na superfície do mancal hidrodinâmico empregando-se o Método dos Elementos Finitos. As etapas para a solução do problema não-linear, empregando-se o Método de Newton-Raphson de forma a satisfazer as equações de equilíbrio das forças e dos momentos do eixo de acionamento, são descritas

no anexo.

Someya (1989) apresenta tabelas para os coeficientes adimensionais de rigidez e de amortecimento para diversos tipos de mancais hidrodinâmicos. Os coeficientes de rigidez e de amortecimento dependem do tipo, da geometria (L/D) e do número de Sommerfeld do mancal.

Os dados tabelados encontram-se divididos, inicialmente, pelo tipo do mancal hidrodinâmico. Uma vez identificado o tipo, a geometria (L/D) do mancal deve ser observada. L é a largura do mancal em $[m]$ e D o diâmetro do mancal em $[m]$. Assim, chega-se a uma tabela onde são apresentados os coeficientes adimensionais de rigidez e de amortecimento para o mancal hidrodinâmico em função do número de Sommerfeld. O número de Sommerfeld é dado pela equação 3.148, onde μ é a viscosidade absoluta do óleo Diesel em $[\frac{Ns}{m^2}]$, N é a rotação do eixo de acionamento em $[Hz]$, W é o carregamento máximo do mancal hidrodinâmico em $[N]$ e h é a folga radial rotor/mancal em $[m]$.

$$S = \frac{\mu N L D}{W} \left(\frac{D}{2h}\right)^2 \tag{3.148}$$

O eixo de acionamento é suportado por dois mancais hidrodinâmicos cilíndricos dispostos à altura dos nós 2 e 3 do modelo matemático do mesmo. A viscosidade absoluta do óleo Diesel é dada por $\mu = 0.070\,[\frac{Ns}{m^2}]$ à temperatura de 30°C. As propriedades dos mancais hidrodinâmicos são descritas pelas equações 3.149 e 3.150, onde apresentam subscritos 2 ou 3, relacionando a propriedade ao nó em que está disposto o mancal respectivo.

$$L_2 = 25 \text{ mm} \qquad D_2 = 20 \text{ mm} \qquad h_2 = 25\ \mu\text{m} \tag{3.149}$$

$$L_3 = 15 \text{ mm} \qquad D_3 = 20 \text{ mm} \qquad h_3 = 25 \ \mu\text{m} \tag{3.150}$$

As rigidezes e os amortecimentos dos mancais hidrodinâmicos são calculados para cada uma das condições operacionais da bomba injetora, uma vez que são funções da rotação N e do carregamento máximo W do eixo de acionamento. As rotações N referentes às três condições operacionais são apresentadas na equação 3.151.

$$N_1 = 43.33 \text{ Hz} \qquad N_2 = 33.33 \text{ Hz} \qquad N_3 = 25.00 \text{ Hz} \tag{3.151}$$

Os carregamentos estáticos atuantes nos mancais hidrodinâmicos são calculados para as diversas solicitações que ocorrem num ciclo de operação da bomba. Para tanto, emprega-se um modelo matemático do eixo de acionamento que apresenta os graus de liberdade referentes aos deslocamentos v_2, w_2, v_3 e w_3 travados. O vetor $\{q\}$ dos deslocamentos estáticos dos demais graus de liberdade é obtido a partir da equação 3.152.

$$\{q\} = [K]^{-1}\{Q\} \tag{3.152}$$

Uma vez calculado o vetor $\{q\}$, os carregamentos são recuperados empregando-se as equações 3.153, 3.154, 3.155 e 3.156, onde $< K_{v_2} >$ representa a linha da matriz $[K]$ referente ao grau de liberdade v_2, e assim sucessivamente.

$$F_Y^{h_2} =< K_{v_2} > \{q\} \tag{3.153}$$

$$F_Z^{h_2} =< K_{w_2} > \{q\} \tag{3.154}$$

$$F_Y^{h_3} =< K_{v_3} > \{q\} \tag{3.155}$$

$$F_Z^{h_3} =< K_{w_3} > \{q\} \tag{3.156}$$

Os valores W^{h_2} e W^{h_3} dos carregamentos máximos dos mancais hidrodinâmicos são obtidos, respectivamente, a partir da equações 3.157 e 3.158.

$$W^{h_2} = \sqrt{F_Y^{h_2} + F_Z^{h_2}} \tag{3.157}$$

$$W^{h_3} = \sqrt{F_Y^{h_3} + F_Z^{h_3}} \tag{3.158}$$

Estes carregamentos são calculados para cada uma das condições operacionais da bomba injetora, e têm como resultado os valores apresentados nas equações 3.159 e 3.160.

$$W_1^{h_2} = 5357.4 \text{ N} \qquad W_2^{h_2} = 4409.8 \text{ N} \qquad W_3^{h_2} = 3332.1 \text{ N} \tag{3.159}$$

$$W_1^{h_3} = 3719.9 \text{ N} \qquad W_2^{h_3} = 3010.7 \text{ N} \qquad W_3^{h_3} = 2254.7 \text{ N} \tag{3.160}$$

Como os coeficientes adimensionais de rigidez e de amortecimento do mancal hidrodinâmico estão tabelados em função do número S de Sommerfeld, basta que seja feita uma interpolação linear a partir dos dados tabelados para o cálculo dos coeficientes adimensionais. Os coeficientes a serem calculados são os seguintes: $k^{\star}_{xx}$, $k^{\star}_{xy}$, $k^{\star}_{yx}$, $k^{\star}_{yy}$, $c^{\star}_{xx}$, $c^{\star}_{xy}$, $c^{\star}_{yx}$ e $c^{\star}_{yy}$. Assim, para o mancal hidrodinâmico tem-se a rigidez adimensional definida pela equação 3.161 e o amortecimento adimensional dado pela equação 3.162.

$$k^{\star} = \begin{bmatrix} k^{\star}_{xx} & k^{\star}_{xy} \\ k^{\star}_{yx} & k^{\star}_{yy} \end{bmatrix} \tag{3.161}$$

$$c^{\star} = \begin{bmatrix} c^{\star}_{xx} & c^{\star}_{xy} \\ c^{\star}_{yx} & c^{\star}_{yy} \end{bmatrix} \tag{3.162}$$

A próxima etapa diz respeito à obtenção da rigidez e do amortecimento efetivos do mancal a partir dos parâmetros adimensionais. As rigidezes linearizadas para o mancal hidrodinâmico são dadas pela equação 3.163.

$$k^{h} = \frac{W}{h} k^{\star} = \frac{W}{h} \begin{bmatrix} k^{\star}_{xx} & k^{\star}_{xy} \\ k^{\star}_{yx} & k^{\star}_{yy} \end{bmatrix} \tag{3.163}$$

Os amortecimentos linearizadas para o mancal hidrodinâmico são definidos pela equação 3.164.

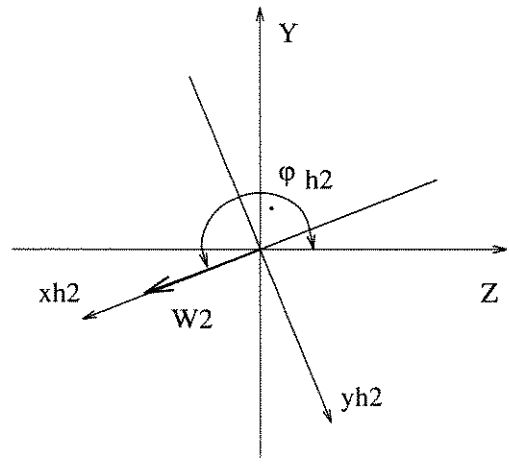

Figura 3.30: Ângulo Entre os Sistemas Referenciais Eixo/Mancal Hidrodinâmico Nó 2.

$$c^h = \frac{W}{\Omega h} c^\star = \frac{W}{\Omega h} \begin{bmatrix} c^\star_{xx} & c^\star_{xy} \\ c^\star_{yx} & c^\star_{yy} \end{bmatrix} \tag{3.164}$$

As direções de atuação dos carregamentos W^{h_2} e W^{h_3} dos mancais hidrodinâmicos, respectivamente, φ^{h_2} e φ^{h_3} são consideradas. Elas definem os ângulos entre os sistemas referenciais $x^h - y^h - z^h$ dos modelos dos mancais com relação ao sistema referencial $X-Y-Z$ do modelo do eixo de acionamento. A figura 3.30 apresenta o ângulo $\varphi^{h_2} = 203°$ entre o sistema referencial $x^{h_2} - y^{h_2} - z^{h_2}$ do mancal hidrodinâmico do nó 2 com relação ao sistema referêncial $X - Y - Z$ do eixo de acionamento.

A figura 3.31 ilustra o ângulo $\varphi^{h_3} = 12°$ entre o sistema referencial $x^{h_3} - y^{h_3} - z^{h_3}$ do mancal hidrodinâmico do nó 3 com relação ao sistema referêncial $X - Y - Z$ do eixo de acionamento.

A primeira condição operacional da bomba injetora é aquela referente à rotação do eixo de acionamento à 2600 rpm. O modelo matemático obtido para o carregamento $W_1^{h_2}$

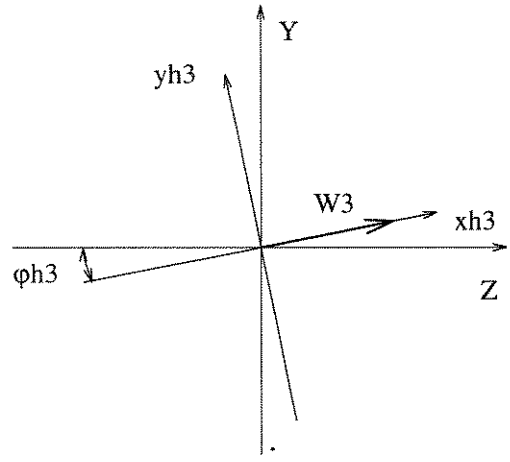

Figura 3.31: Ângulo Entre os Sistemas Referenciais Eixo/Mancal Hidrodinâmico Nó 3.

do mancal hidrodinâmico do nó 2, para a primeira condição operacional da bomba injetora, é apresentado na equação 3.165. O modelo matemático obtido para o carregamento $W_1^{h_3}$ do mancal hidrodinâmico do nó 3, para esta mesma condição operacional, é apresentado na equação 3.166.

$$W_1^{h_2} = -\begin{bmatrix} 12.3 & 6.21 \\ 6.39 & 6.74 \end{bmatrix} \times 10^8 \text{N/m} \begin{Bmatrix} v_2 \\ w_2 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 5.30 & 1.15 \\ 4.14 & 1.63 \end{bmatrix} \times 10^6 \text{Ns/m} \begin{Bmatrix} \dot{v}_2 \\ \dot{w}_2 \end{Bmatrix} \quad (3.165)$$

$$W_1^{h_3} = -\begin{bmatrix} 11.0 & 5.59 \\ 3.45 & 3.90 \end{bmatrix} \times 10^8 \text{N/m} \begin{Bmatrix} v_3 \\ w_3 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 4.41 & 1.00 \\ 2.16 & 0.91 \end{bmatrix} \times 10^6 \text{Ns/m} \begin{Bmatrix} \dot{v}_3 \\ \dot{w}_3 \end{Bmatrix} \quad (3.166)$$

A segunda condição operacional da bomba injetora é aquela referente à rotação do eixo de acionamento à 2000 rpm. O modelo matemático obtido para o carregamento $W_2^{h_2}$ do mancal hidrodinâmico do nó 2, para a segunda condição operacional da bomba injetora, é apresentado na equação 3.167. O modelo matemático obtido para o carregamento $W_2^{h_3}$

do mancal hidrodinâmico do nó 3, para esta mesma condição operacional, é apresentado na equação 3.168.

$$W_2^{h_2} = -\begin{bmatrix} 11.1 & 5.36 \\ 5.86 & 5.67 \end{bmatrix} \times 10^8 \text{N/m} \begin{Bmatrix} v_2 \\ w_2 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 5.78 & 1.22 \\ 4.45 & 1.69 \end{bmatrix} \times 10^6 \text{Ns/m} \begin{Bmatrix} \dot{v}_2 \\ \dot{w}_2 \end{Bmatrix} \quad (3.167)$$

$$W_2^{h_3} = -\begin{bmatrix} 9.41 & 4.66 \\ 2.94 & 3.17 \end{bmatrix} \times 10^8 \text{N/m} \begin{Bmatrix} v_3 \\ w_3 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 4.67 & 1.04 \\ 2.25 & 0.92 \end{bmatrix} \times 10^6 \text{Ns/m} \begin{Bmatrix} \dot{v}_3 \\ \dot{w}_3 \end{Bmatrix} \quad (3.168)$$

A terceira condição operacional da bomba injetora é aquela referente à rotação do eixo de acionamento à 1500 rpm. O modelo matemático obtido para o carregamento $W_3^{h_2}$ do mancal hidrodinâmico do nó 2, para a terceira condição operacional da bomba injetora, é apresentado na equação 3.169. O modelo matemático obtido para o carregamento $W_3^{h_3}$ do mancal hidrodinâmico do nó 3, para esta mesma condição operacional, é apresentado na equação 3.170.

$$W_3^{h_2} = -\begin{bmatrix} 8.42 & 4.07 \\ 4.48 & 4.30 \end{bmatrix} \times 10^8 \text{N/m} \begin{Bmatrix} v_2 \\ w_2 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 5.94 & 1.25 \\ 4.56 & 1.73 \end{bmatrix} \times 10^6 \text{Ns/m} \begin{Bmatrix} \dot{v}_2 \\ \dot{w}_2 \end{Bmatrix} \quad (3.169)$$

$$W_3^{h_3} = -\begin{bmatrix} 7.04 & 3.49 \\ 2.18 & 2.37 \end{bmatrix} \times 10^8 \text{N/m} \begin{Bmatrix} v_3 \\ w_3 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 4.74 & 1.06 \\ 2.27 & 0.93 \end{bmatrix} \times 10^6 \text{Ns/m} \begin{Bmatrix} \dot{v}_3 \\ \dot{w}_3 \end{Bmatrix} \quad (3.170)$$

Comparando-se os modelos dos mancais, para as diferentes condições operacionais, observa-se, com o aumento da rotação, o aumento das rigidezes e a diminuição dos amortecimentos dos mesmos.

Finalmente, os modelos dos esforços dos mancais hidrodinâmicos, para a respectiva condição operacional de análise, são somados, com os sinais trocados, no lado esquerdo da equação de movimento, pois são funções de $(\dot{q}, q)$. Sendo assim, estes esforços alteram as matrizes de massa, de amortecimento e de rigidez do eixo de acionamento. Posteriormente os carregamentos dos mancais hidrodinâmicos são recuperados e calculados separadamente.

3.8 Cálculo dos Autovalores

Para o cálculo dos autovalores λ_i, $i = 1..2n$, do modelo parte-se das equações de movimento linearizadas, descritas na sua forma matricial, como apresentado em 3.171.

$$[M]\{\ddot{q}\} + [G]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{Q\} \tag{3.171}$$

O modelo é, então, representado na forma de estado, conforme a equação 3.172.

$$\begin{Bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -M^{-1}G & -M^{-1}K \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ q \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} M^{-1}Q \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3.172}$$

A matriz $[E]$ de estado é definida pela equação 3.173.

$$[E] = \begin{bmatrix} -M^{-1}G & -M^{-1}K \\ I & 0 \end{bmatrix} \tag{3.173}$$

E os autovalores λ_i são calculados segundo a equação 3.174.

$$\det([E] - \{\lambda\}[I]) = 0 \tag{3.174}$$

Os autovalores λ_i formam n pares de números complexos conjugados, onde n é o número de graus de liberdade do modelo.

3.9 Resolução do Sistema de Equações Linearizadas (MDF)

Para a solução das equações de movimento do modelo do eixo de acionamento, apresentadas em 3.171, no domínio do tempo, emprega-se o Método das Diferenças Finitas. As referências bibliográficas para o Método das Diferenças Finitas (MDF) são os trabalhos de Smith (1985) e Dhatt e Touzot (1985).

As equações de diferenças finitas para $\ddot{q}$ e $\dot{q}$, discretizadas no domínio do tempo, são apresentadas, respectivamente, em 3.175 e 3.176, onde Δt é o incremento de tempo.

$$\ddot{q}_i = \frac{q_{i+1} - 2q_i + q_{i-1}}{\Delta t^2} \qquad \text{erro associado} = \frac{\Delta t^4}{24} q^{(4)} \tag{3.175}$$

$$\dot{q}_i = \frac{q_{i+1} - q_{i-1}}{2\Delta t} \qquad \text{erro associado} = \frac{\Delta t^3}{6} q^{(3)} \tag{3.176}$$

Aplicando-se as equações de diferenças finitas 3.175 e 3.176 ao sistema das equações de movimento do modelo 3.171 tem-se a equação 3.177.

$$[M]\frac{\{q\}_{i+1}-2\{q\}_i+\{q\}_{i-1}}{\Delta t^2}+[G]\frac{\{q\}_{i+1}-\{q\}_{i-1}}{2\Delta t}+[K]\{q\}_i=\{Q\}_i \qquad (3.177)$$

Pode-se reescrever a equação 3.177 como mostrado em 3.178.

$$\{q\}_{i+1}=\left(\frac{[M]}{\Delta t^2}+\frac{[G]}{2\Delta t}\right)^{-1}\left\{\{Q\}_i+\left(\frac{2[M]}{\Delta t^2}-[K]\right)\{q\}_i+\left(\frac{[G]}{2\Delta t}-\frac{[M]}{\Delta t^2}\right)\{q\}_{i-1}\right\} \qquad (3.178)$$

Partindo-se da condição inicial definida em 3.179, a solução do sistema de equações no domínio do tempo é obtida empregando-se a sequência de passos apresentada em 3.180 iterativamente.

$$\{q\}_0=[K]^{-1}\{Q\}_0 \qquad \{\dot{q}\}_0=\{0\} \qquad \{\ddot{q}\}_0=\{0\} \qquad (3.179)$$

$$\begin{cases} \{q\}_{i+1}=\left(\frac{[M]}{\Delta t^2}+\frac{[G]}{2\Delta t}\right)^{-1}\left\{\{Q\}_i+\left(\frac{2[M]}{\Delta t^2}-[K]\right)\{q\}_i+\left(\frac{[G]}{2\Delta t}-\frac{[M]}{\Delta t^2}\right)\{q\}_{i-1}\right\} \\ \{\dot{q}\}_i=\frac{\{q\}_{i+1}-\{q\}_{i-1}}{2\Delta t} \\ \{\ddot{q}\}_i=\frac{\{q\}_{i+1}-2\{q\}_i+\{q\}_{i-1}}{\Delta t^2} \end{cases} \qquad (3.180)$$

Este método permite a avaliação do comportamento dinâmico do modelo num domínio discretizado com passo Δt. Os vetores dos deslocamentos $\{q\}$, das velocidades $\{\dot{q}\}$, das acelerações $\{\ddot{q}\}$ e dos carregamentos $\{Q\}$ são calculados a cada incremento no tempo.

A convergência dos cálculos ao comportamento efetivo do modelo depende da escolha de um incremento de tempo Δt suficientemente pequeno, pois o método apresenta erros

da ordem de $\frac{\Delta t^3}{6}\{q\}^{(3)}$ associados a cada incremento no tempo. Neste trabalho emprega-se um valor de Δt descrito pela equação 3.181. Isto significa que o comportamento dinâmico do modelo $(\ddot{q}, \dot{q}, q, Q)$ é avaliado à cada $0.025°$ de rotação do eixo de acionamento independentemente da condição operacional.

$$\Delta t = \frac{\pi}{180 \times 40\Omega} \tag{3.181}$$

Capítulo 4

Resultados Teórico-Experimentais

Neste capítulo apresentam-se os resultados do comportamento dinâmico do eixo de acionamento. Para a realização dos cálculos, os modelos matemáticos descritos no capítulo anterior são empregados. Os resultados dos modelos são estudados para as três condições operacionais pré-definidas: funcionamento da bomba injetora à 2600 rpm, à 2000 rpm e à 1500 rpm.

A análise dinâmica do eixo de acionamento tem como condição inicial, dada pela equação 3.179, uma configuração próxima daquela que ocorre em regime permanente, mas não exatamente a mesma. Assim, a análise apresenta inicialmente um comportamento transiente que converge para a condição de regime permanente após aproximadamente 90° graus de rotação do eixo de acionamento.

Os resultados da modelagem dinâmica dispostos neste capítulo, dizem respeito ao funcionamento da bomba injetora em regime permanente. Portanto, a etapa inicial da análise, referente ao comportamento transiente do eixo, é desconsiderada.

As curvas características de torque de acionamento M_X^a e os valores dos carregamentos W^{h_2} do mancal hidrodinâmico do nó 2 são obtidos a partir de ensaios mecânicos e servem como parâmetros para as comparações e validação do modelo.

Este capítulo encontra-se dividido em quatro secções, separando os grupos de resultados das análises. Estes são, respectivamente, os autovalores, os deslocamentos, os carregamentos e o torques de acionamento.

4.1 Autovalores

Uma vez montado o sistema de equações linearizadas 3.171 para o conjunto mecânico numa dada condição operacional, os autovalores são calculados a partir da equação 3.174. A tabela dos autovalores do modelo, referente ao funcionamento da bomba injetora nas três condições de funcionamento mencionadas (2600 rpm, 2000 rpm e 1500 rpm), é apresentada na tabela 4.1.

As partes reais dos autovalores estão relacionadas ao amortecimento e são negativas ou nulas o que garante o comportamento estável do modelo. Os pares de autovalores complexos conjugados que apresentam partes reais nulas estão relacionados aos graus de liberdade γ das perturbações nodais sobre a rotação Ωt do eixo de acionamento na direção X (torsão), cujos modelos matemáticos não consideram o amortecimento. Os demais pares de autovalores complexos conjugados estão relacionados aos graus de liberdade v, w, β e Γ nodais de flexão do eixo de acionamento.

As partes inaginárias dos autovalores relacionam-se às frequências de vibração do modelo e representam as velocidades críticas do mesmo. Analisando-se a tabela 4.1 observa-se a abertura das partes imaginárias dos autovalores com o aumento da rotação;

Tabela 4.1: Autovalores do Modelo

Freq.	Mov.	$\Omega = 2600$ rpm	$\Omega = 2000$ rpm	$\Omega = 1500$ rpm
1a	flexão	$-2,93e2 \pm 1,57e2j$	$-2,37e2 \pm 1,28e2j$	$-1,75e2 \pm 9,48e1j$
2a	flexão	$-3,19e2 \pm 1,69e2j$	$-2,54e2 \pm 1,34e2j$	$-1,87e2 \pm 9,90e1j$
3a	flexão	$-5,76e1 \pm 2,62e3j$	$-5,72e1 \pm 2,67e3j$	$-5,70e1 \pm 2,72e3j$
4a	flexão	$-6,04e1 \pm 3,10e3j$	$-5,78e1 \pm 3,05e3j$	$-5,73e1 \pm 3,00e3j$
5a	torsão	$-4,11e-10 \pm 1,37e4j$	$3,13e-10 \pm 1,37e4j$	$5,29e-10 \pm 1,37e4j$
6a	flexão	$-7,29e1 \pm 1,50e4j$	$-6,05e1 \pm 1,50e4j$	$-5,21e1 \pm 1,50e4j$
7a	flexão	$-3,70e2 \pm 1,50e4j$	$-3,70e2 \pm 1,50e4j$	$-3,69e2 \pm 1,50e4j$
8a	flexão	$-8,25e2 \pm 2,12e4j$	$-8,20e2 \pm 2,12e4j$	$-8,15e2 \pm 2,12e4j$
9a	flexão	$-1,11e2 \pm 2,13e4j$	$-9,58e1 \pm 2,13e4j$	$-8,57e1 \pm 2,13e4j$
10a	torsão	$-5,82e-11 \pm 6,76e4j$	$-1,45e-10 \pm 6,76e4j$	$-1,89e-10 \pm 6,76e4j$

conhecido fenômeno da dinâmica de rotores que deve-se ao aumento do efeito giroscópico proporcionalmente à rotação do eixo.

4.2 Deslocamentos

Uma vez montado o sistema de equações linearizadas do modelo 3.171 para uma dada condição operacional, obtem-se as soluções no domínio do tempo empregando-se o Método das Diferenças Finitas. Através da sequência de passos 3.180 são calculados os deslocamentos lineares ou angulares, as velocidades, as acelerações e os carregamentos referentes aos graus de liberdade do modelo. À este conjunto de resultados dá-se o nome de comportamento dinâmico. Nesta secção, os resultados referentes aos deslocamentos são

Tabela 4.2: Deslocamentos v_{max}/v_{min} [μm]

Ω [rpm]	nó 1	nó 2	nó 3	nó 4	nó 5	nó 6
2600	+30.3/-23.8	+1.11/-0.37	-0.68/-1.41	-0.07/-6.70	+0.42/-12.5	+0.46/-13.1
2000	+25.2/-21.4	+1.07/-0.39	-0.66/-1.33	+0.70/-6.42	+1.88/-11.6	+1.99/-12.1
1500	+22.4/-18.3	+1.07/+0.46	-0.75/-1.33	-0.18/-5.31	+0.33/-9.26	+0.39/-9.66

estudados para as três diferentes condições operacionais da bomba injetora. Os demais resultados do comportamento dinâmico do eixo de acionamento são apresentados nas secções seguintes.

Os deslocamentos v nodais, máximos e mínimos, do modelo na direção Y são apresentados na tabela 4.2 para as três condições operacionais analisadas. Observa-se que a maior variação de amplitude dos deslocamentos na direção Y ocorre no nó 1 da engrenagem de acionamento. Os nós 2 e 3 dos mancais hidrodinâmicos são os que apresentam as menores variações de amplitude, devido as forças hidrodinâmicas aplicadas nos respectivos nós. As variações de amplitude Δv_5 e Δv_6 são significativas.

Os deslocamentos w nodais, máximos e mínimos, do modelo na direção Z são apresentados na tabela 4.3 para as três condições operacionais analisadas. Observa-se que a maior variação de amplitude dos deslocamentos na direção Z, similarmente àquela dos deslocamentos na direção Y, ocorre no nó 1 da engrenagem de acionamento. Os nós 2 e 3 dos mancais hidrodinâmicos são os que apresentam as menores variações de amplitude dos deslocamentos; e as variações de amplitude Δw_4, Δw_5 e Δw_6 são significativas.

Comparando-se diretamente os resultados dos deslocamentos do modelo para as

Tabela 4.3: Deslocamentos w_{max}/w_{min} [μm]

Ω [rpm]	nó 1	nó 2	nó 3	nó 4	nó 5	nó 6
2600	+18.1/-19.4	+0.61/-1.43	+1.46/-0.74	+4.69/-4.02	+7.79/-7.58	+8.30/-7.95
2000	+15.3/-14.9	+0.42/-1.38	+1.38/-0.51	+2.51/-1.63	+3.95/-3.39	+4.10/-3.57
1500	+11.6/-12.3	+0.17/-1.35	+1.32/-0.29	+3.05/-1.70	+4.73/-3.27	+4.90/-3.42

diferentes condições operacionais observa-se que as variações de amplitude dos mesmos aumentam com a elevação da velocidade angular Ω do eixo de acionamento.

As rotações (β, Γ) estão relacionadas aos deslocamentos (v, w) como mostra a equação 3.21. As rotações β nodais, máximas e mínimas, do modelo na direção Y são apresentadas na tabela 4.4 para as três condições operacionais analisadas. Observa-se que a maior variação de amplitude das rotações β ocorre no nó 1 da engrenagem de acionamento. O nó 3 do segundo mancal hidrodinâmico apresenta a menor variação de amplitude da rotação β.

As rotações Γ nodais, máximas e mínimas, do modelo na direção Z são apresentadas

Tabela 4.4: Rotações β_{max}/β_{min} [10^{-4}rad]

Ω [rpm]	nó 1	nó 2	nó 3	nó 4	nó 5	nó 6
2600	+9.82/-9.83	+2.64/-3.08	+1.94 -2.15	+2.36/-2.17	+2.46/-2.20	+2.46/-2.20
2000	+7.19/-7.16	+2.35/-2.61	+0.98/-1.10	+1.16/-1.01	+1.20/-1.00	+1.21/-1.00
1500	+5.74/-5.96	+1.74/-1.83	+0.91/-1.17	+1.02/-1.14	+1.04/-1.14	+1.04/-1.14

Tabela 4.5: Rotações $\Gamma_{max}/\Gamma_{min}$ [10^{-4}rad]

Ω [rpm]	nó 1	nó 2	nó 3	nó 4	nó 5	nó 6
2600	+11.7/-14.3	+3.79/-4.47	+0.94/-3.05	+0.39/ -3.82	+0.32/-3.96	+0.32/-3.96
2000	+10.7/-11.4	+3.33/-3.93	+1.07/-2.86	+0.79/-3.42	+0.78/-3.52	+0.78/-3.52
1500	+9.90/-10.4	+2.48/-3.39	+0.60/-2.30	+0.38/-2.61	+0.36/-2.65	+0.36/-2.65

na tabela 4.5 para as três condições operacionais analisadas. Observa-se que a maior variação de amplitude das rotações Γ ocorre no nó 1 da engrenagem de acionamento; e o nó 3 do segundo mancal hidrodinâmico apresenta a menor variação de amplitude da rotação Γ.

As rotações γ nodais, máximas e mínimas, do modelo na direção X são apresentadas na tabela 4.6 para as três condições operacionais analisadas. O nó 1 da engrenagem de acionamento encontra-se travado ($\gamma_1 = 0$ rad) de modo que as demais γ_i nodais, $i = 2..6$, representam a perturbação sobre a rotação Ωt do eixo de acionamento. Observa-se que a maior amplitude de variação das rotações γ ocorre no nó 6 do came. As variações de amplitude $\Delta\gamma$ diminuem gradualmente de acordo com a proximidade do nó observado com relação ao nó 1 da engrenagem de acionamento.

Comparando-se diretamente os resultados das rotações do modelo para as diferentes condições operacionais observa-se que as variações de amplitude das mesmas aumentam com a elevação da velocidade angular Ω do eixo de acionamento.

Tabela 4.6: Rotações $\gamma_{max}/\gamma_{min}$ [10^{-3}rad]

Ω [rpm]	nó 2	nó 3	nó 4	nó 5	nó 6
2600	+0.61/-2.18	+1.27/-4.52	+1.61/-5.75	+1.80/-6.81	+1.80/-6.91
2000	+0.49/-2.01	+1.02/-4.19	+1.29/-5.30	+1.45/-6.23	+1.46/-6.32
1500	+0.30/-1.44	+0.62/-3.01	+0.79/-3.81	+0.89/-4.48	+0.90/-4.54

4.3 Carregamentos

Os mecanismos dispostos no eixo de acionamento são responsáveis pelo carregamento do mesmo. Cada mecanismo é vinculado a um nó do modelo matemático, permitindo que o resultado das análises represente o comportamento dinâmico efetivo do eixo de acionamento.

A bomba de palhetas está vinculada ao nó 4 do modelo matemático. Os carregamentos do eixo de acionamento, devido à bomba de palhetas, para cada uma das condições operacionais estudadas são apresentados na tabela 4.7. Estes carregamentos são caracterizados pelas forças nas direções Y e Z e pelo momento na direção X. Os carregamentos permanecem constantes durante o ciclo de operação do eixo de acionamento, variando apenas com a velocidade angular de rotação do mesmo. Como mostra a tabela 4.7, os carregamentos aumentam com a elevação da velocidade angular do eixo de acionamento.

A engrenagem do regulador está vinculada ao nó 5 do modelo matemático. Os carregamentos do eixo de acionamento, devido à engrenagem do regulador, para cada uma das condições operacionais estudadas são apresentados na tabela 4.8. Estes carregamentos são caracterizados pelas forças nas direções Y e Z e pelo momento na direção X. Os carregamentos permanecem constantes durante o ciclo de operação do eixo de aciona-

Tabela 4.7: Carregamentos do Nó 4 - Esforços da Bomba de Palhetas

Ω	2600 rpm	2000 rpm	1500 rpm
F_Y^b	-310.4 N	-248.0 N	-190.8 N
F_Z^b	-79.06 N	-62.82 N	-47.93 N
M_X^b	-4.537 Nm	-3.475 Nm	-2.570 Nm

mento, variando apenas com a velocidade angular de rotação do mesmo. Como mostra a tabela 4.8, os carregamentos aumentam com a elevação da velocidade angular do eixo de acionamento.

O came está vinculado ao nó 6 do modelo matemático. Os carregamentos do eixo de acionamento, devido ao came, para cada uma das condições operacionais estudadas são apresentados no gráfico 4.1. A curva em linha cheia representa a rotação de 2600 rpm, a curva tracejada representa a rotação de 2000 rpm e a curva em traço-ponto representa a rotação de 1500 rpm. Estes carregamentos são caracterizados pelo momento na direção X. Os carregamentos variam durante o ciclo de operação do eixo de acionamento e também dependem do valor da velocidade angular de rotação do mesmo. A tabela 4.9 apresenta os intervalos de variação dos carregamentos para cada condição operacional. Observa-se

Tabela 4.8: Carregamentos do Nó 5 - Esforços da Engrenagem do Regulador

Ω	2600 rpm	2000 rpm	1500 rpm
F_Y^b	-47.33 N	-28.63 N	-15.60 N
F_Z^b	-130.0 N	-78.66 N	-42.86 N
M_X^b	-3.609 Nm	-2.183 Nm	-1.189 Nm

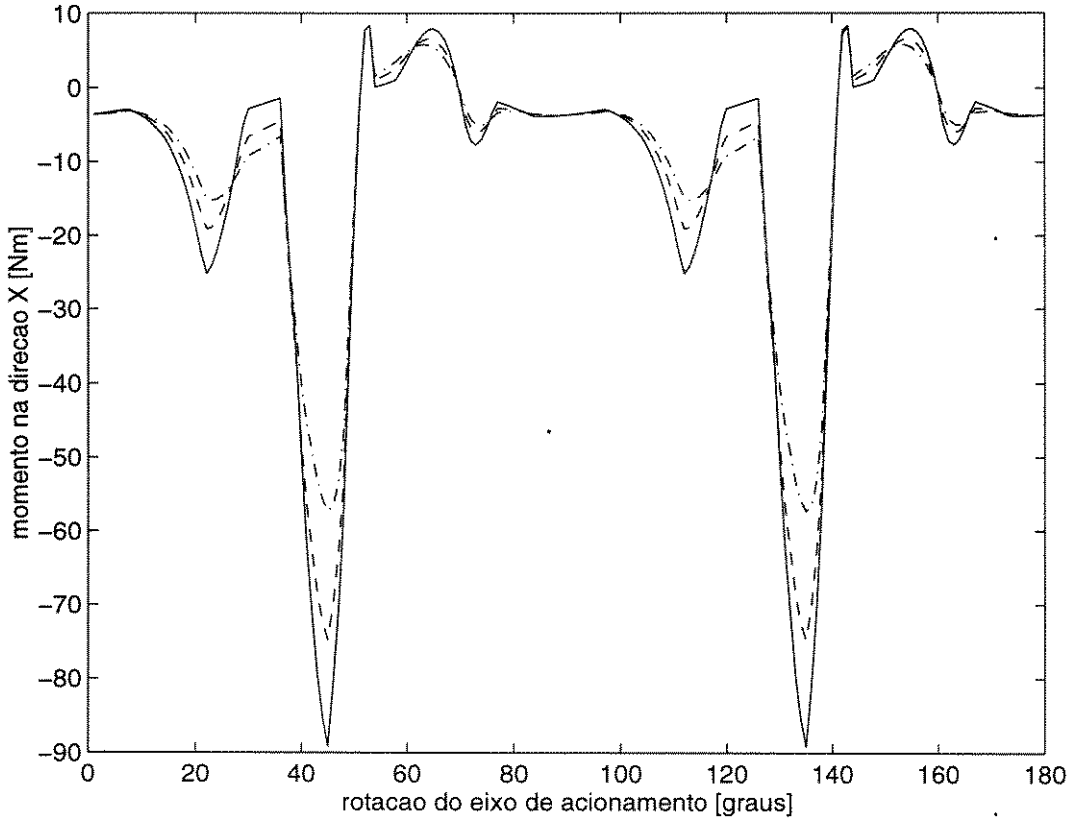

Figura 4.1: Momento na Direção X Devido ao Came [Nm].

que as variações de amplitude dos carregamentos aumentam com a elevação da velocidade angular do eixo de acionamento. Analisando-se o gráfico 4.1 observa-se ainda que os picos dos momentos máximos na direção X do came ocorrem durante a injeção do óleo Diesel.

Tabela 4.9: Carregamentos do Nó 6 - Esforços do Came

Ω	2600 rpm	2000 rpm	1500 rpm
$M^c_{X_{max}}$	+9.203 Nm	+8.259 Nm	+8.747 Nm
$M^c_{X_{min}}$	-89.16 Nm	-74.82 Nm	-57.31 Nm

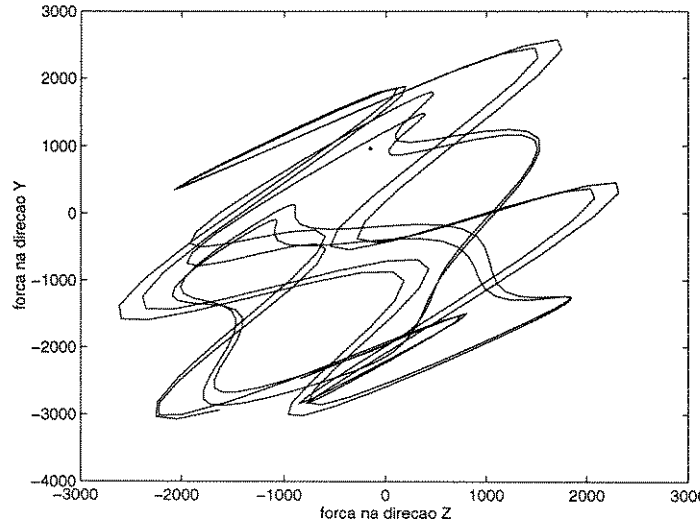

Figura 4.2: Forças Direção Z $\times$ Direção Y Devido ao Mancal Nó 2 [N] - 2600 rpm.

O primeiro mancal hidrodinâmico está vinculado ao nó 2 do modelo matemático. Os carregamentos do eixo de acionamento, devido ao primeiro mancal hidrodinâmico, para cada uma das condições operacionais estudadas são apresentados nos gráficos 4.2, 4.3 e 4.4. Estes carregamentos são caracterizados por forças nas direções Y e Z. Os carregamentos variam durante o ciclo de operação do eixo de acionamento e também dependem do valor da velocidade angular de rotação do mesmo. Observa-se que as amplitudes de variação dos carregamentos aumentam com a elevação da velocidade angular do eixo de acionamento.

As figuras 4.2, 4.3 e 4.4 representam o carregamento do primeiro mancal hidrodinâmico durante 180° de rotação do eixo de acionamento, ou seja, duas das quatro injeções que compõem o ciclo de operação da bomba injetora. Observa-se a repetibilidade do comportamento das curvas a cada injeção. O formato bastante irregular das curvas deve-se ao fato de que os mancais hidrodinâmicos são os responsáveis pela sustentação do eixo de acionamento nas direções Y e Z. Assim, todos os esforços dos demais mecanismos que atuam sobre o eixo de acionamento contribuem para os carregamentos dos mancais

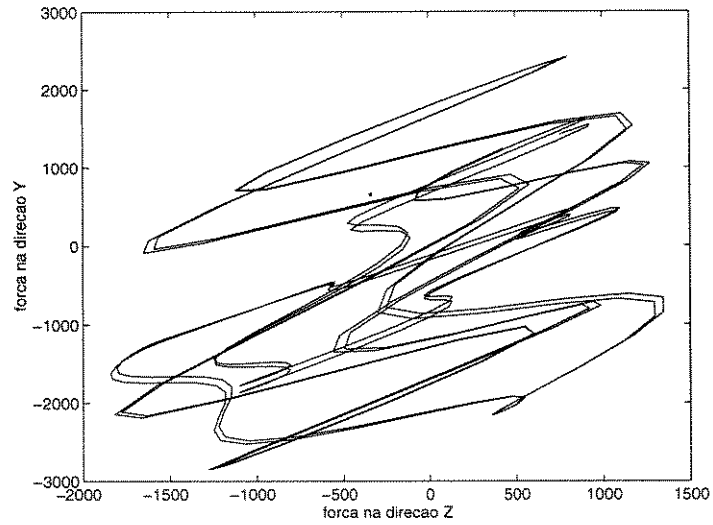

Figura 4.3: Forças Direção Z × Direção Y Devido ao Mancal Nó 2 [N] - 2000 rpm.

hidrodinâmicos. Mesmo o esforço do came, representado pelo momento na direção X, contribui para os carregamentos dos mancais, pois a engrenagem de acionamento aplica esforços de flexão (direções Y e Z) sobre o eixo juntamente com o momento na direção

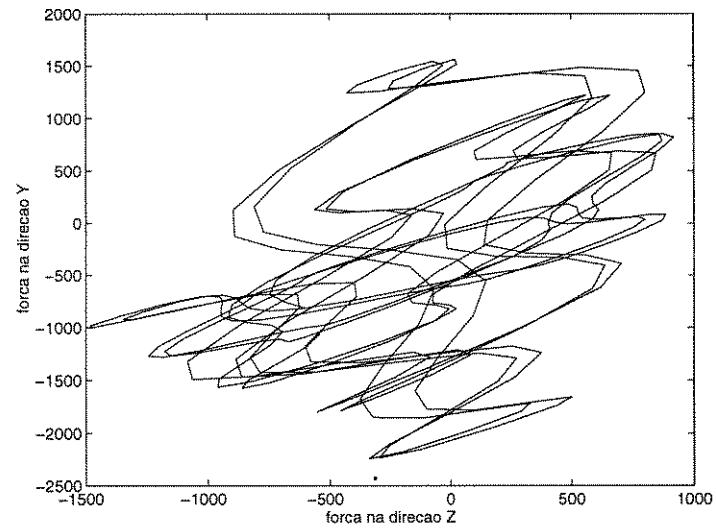

Figura 4.4: Forças Direção Z × Direção Y Devido ao Mancal Nó 2 [N] - 1500 rpm.

Tabela 4.10: Carregamentos do Nó 2 - Esforços do Primeiro Mancal Hidrodinâmico

Ω	2600 rpm	2000 rpm	1500 rpm
W^{h_2}	3782 N	3125 N	2272 N
$W^{h_2}_{exp}$	3738 N	3637 N	3049 N
erro	+1.2 %	-14.1 %	-25.5 %

X necessário para o funcionamento da bomba injetora.

Curvas semelhantes àquelas apresentadas nos gráficos 4.2, 4.3 e 4.4 foram obtidas experimentalmente pela BOSCH e apresentadas no Relatório de Desenvolvimento (1993), n. E246214, para o carregamento do primeiro mancal hidrodinâmico. A tabela 4.10 apresenta o carregamento W^{h_2} máximo do primeiro mancal hidrodinâmico para cada condição operacional. Os valores $W^{h_2}_{exp}$ dos carregamentos máximos obtidos através dos ensaios experimentais também são apresentados. Observa-se uma melhor condordância dos resultados teóricos e experimentais para a rotação do eixo de acionamento referente a operação da bomba injetora à 2600 rpm. O erro máximo dos carregamentos do primeiro mancal hidrodinâmico, -25.5 %, é aceitável para a modelagem de sistemas dinâmicos com este grau de complexidade.

O segundo mancal hidrodinâmico está vinculado ao nó 3 do modelo matemático. Os carregamentos do eixo de acionamento, devido ao segundo mancal hidrodinâmico, para cada uma das condições operacionais estudadas são apresentados nos gráficos 4.5, 4.6 e 4.7. Estes carregamentos são caracterizados por forças nas direções Y e Z. Os carregamentos variam durante o ciclo de operação do eixo de acionamento e também dependem da velocidade angular de rotação do mesmo. Observa-se que as variações de amplitude dos carregamentos aumentam com a elevação da velocidade angular do eixo

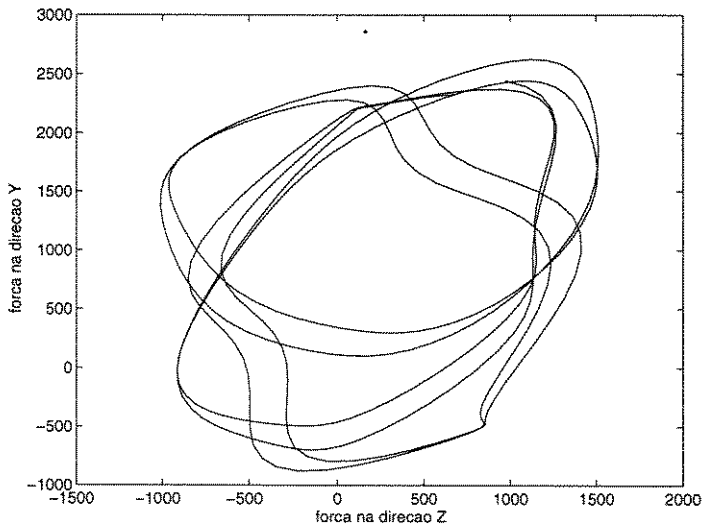

Figura 4.5: Forças Direção Z $\times$ Direção Y. Devido ao Mancal Nó 3 [N] - 2600 rpm.

de acionamento. As considerações feitas sobre a repetibilidade e o formato das curvas de carregamento do primeiro mancal também aplicam-se às figuras 4.5, 4.6 e 4.7 do segundo mancal hidrodinâmico.

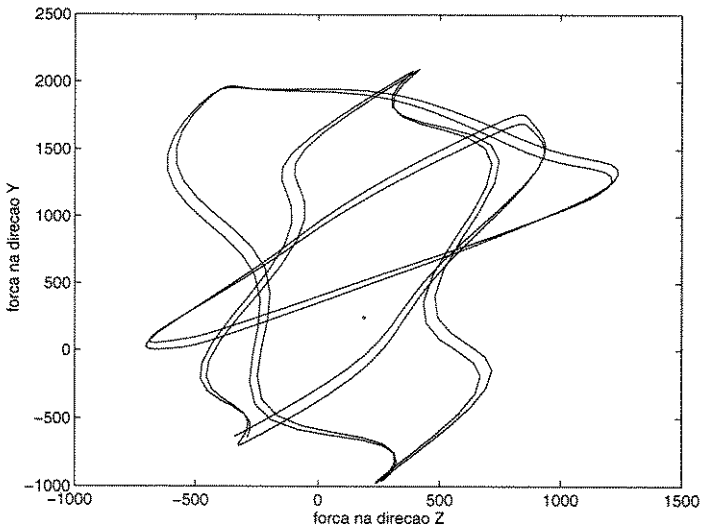

Figura 4.6: Forças Direção Z $\times$ Direção Y Devido ao Mancal Nó 3 [N] - 2000 rpm.

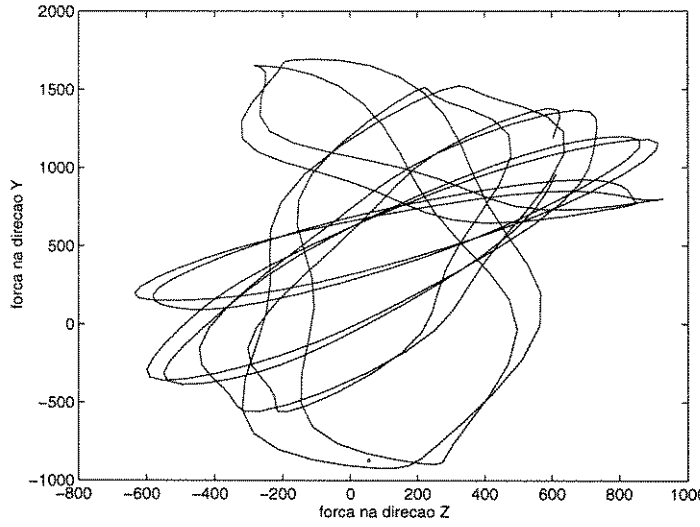

Figura 4.7: Forças Direção Z $\times$ Direção Y Devido ao Mancal Nó 3 [N] - 1500 rpm.

A engrenagem de acionamento está vinculada ao nó 1 do modelo matemático. Os carregamentos do eixo de acionamento, devido à engrenagem de acionamento, para cada uma das condições operacionais estudadas são apresentados na tabela 4.11. Estes carregamentos são caracterizados pelas forças nas direções Y e Z e pelos momentos nas direções X, Y e Z. Os carregamentos variam durante o ciclo de operação do eixo de acionamento

Tabela 4.11: Carregamentos do Nó 1 - Esforços da Engrenagem de Acionamento

Ω	2600 rpm	2000 rpm	1500 rpm
$F^a_{Y_{max/min}}$	+876.2/-235.4 N	+802.1/-187.2 N	+573.7/-121.0 N
$F^a_{Z_{max/min}}$	+739.7/-193.8 N	+673.1/-152.9 N	+480.0/-97.83 N
$M^a_{Y_{max/min}}$	+3.321/-12.58 Nm	+2.570/-11.44 Nm	+1.737/-8.282 Nm
$M^a_{Z_{max/min}}$	+6.284/-21.88 Nm	+5.409/-20.30 Nm	+3.274/-14.59 Nm
$M^a_{X_{max/min}}$	+94.33/-26.87 Nm	+87.19/-21.57 Nm	+62.71/-13.16 Nm

e também dependem da velocidade angular de rotação do mesmo. Observa-se que as variações de amplitude dos carregamentos aumentam com a elevação da velocidade angular do eixo de acionamento.

4.4 Torque de Acionamento – Teoria e Experimento

Os resultados teórico-experimentais referentes ao torque de acionamento da bomba injetora merecem uma secção deste capítulo devido a sua importância no contexto deste trabalho. Ressalta-se mais uma vez que o objetivo deste trabalho é o estudo da viabilidade da modelagem matemática do comportamento dinâmico do eixo de acionamento, sendo que o resultado de maior interesse obtido a partir da modelagem é exatamente o torque de acionamento da bomba injetora.

Os gráficos 4.8, 4.9 e 4.10 apresentam as curvas teóricas e experimentais obtidas para o torque M_X^a de acionamento em cada uma das condições operacionais estudadas. Nenhum modelo de dissipação de energia foi introduzido no modelo matemático, pensando-se do ponto de vista dos movimentos torsionais do eixo. Uma vez que não existe amortecimento dos graus de liberdade γ da rotação na direção X do eixo de acionamento, logo após a injeção do Diesel (e a obtenção dos picos máximos para o torque de acionamento) observa-se um comportamento transiente. Isto pode ser visto claramente nas curvas teóricas das figuras 4.8, 4.9 e 4.10, representadas por linhas contínuas. Destaca-se aqui que o modelo desenvolvido reproduz com fidelidade o comportamento do torque de acionamento da bomba injetora em função de uma dada pressão de trabalho e velocidade angular de rotação do eixo de acionamento, ou seja, em função de uma dada aplicação.

A tabela 4.12 compara os torques de acionamento M_X^a teóricos e experimentais para as diferentes condições operacionais estudadas. Os intervalos de variação dos torques são

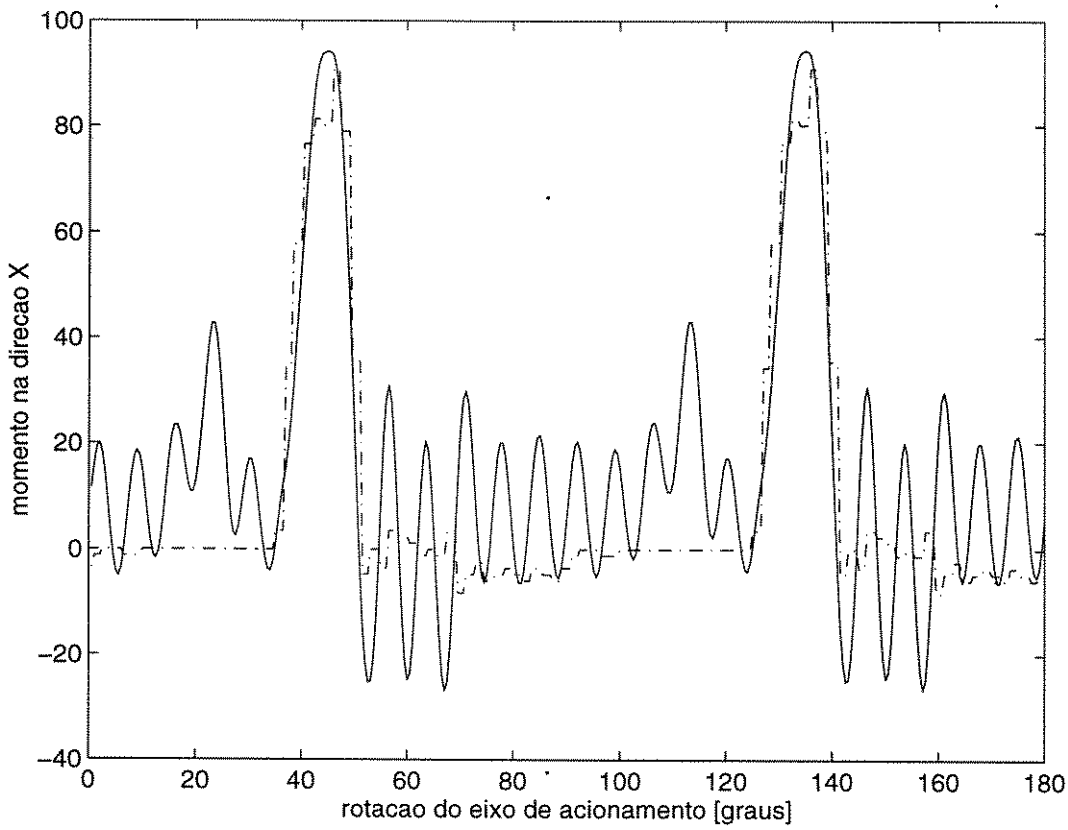

Figura 4.8: Torques de Acionamento Teoria e Experimento [Nm] - 2600 rpm.

apresentados, permitindo a avaliação das amplitudes de variação ΔM_X^a teórica e experimental. Os erros entre os resultados teóricos e os experimentais também são avaliados. O erro máximo do torque de acionamento, +22.4 %, ocorre para o funcionamento da bomba injetora com velocidade angular referente à 2600 rpm.

Pensando-se na complexidade dos vários componentes acoplados ao eixo de acionamento e nas hipóteses teóricas simplificadoras adotadas para descrever-se matematicamente o comportamento dinâmico da bomba injetora, ressalta-se que o erro máximo de +22.4 % é pequeno do ponto de vista de engenharia. Com estes resultados teórico-experimentais apresentados conclui-se que os objetivos do trabalho foram atingidos de

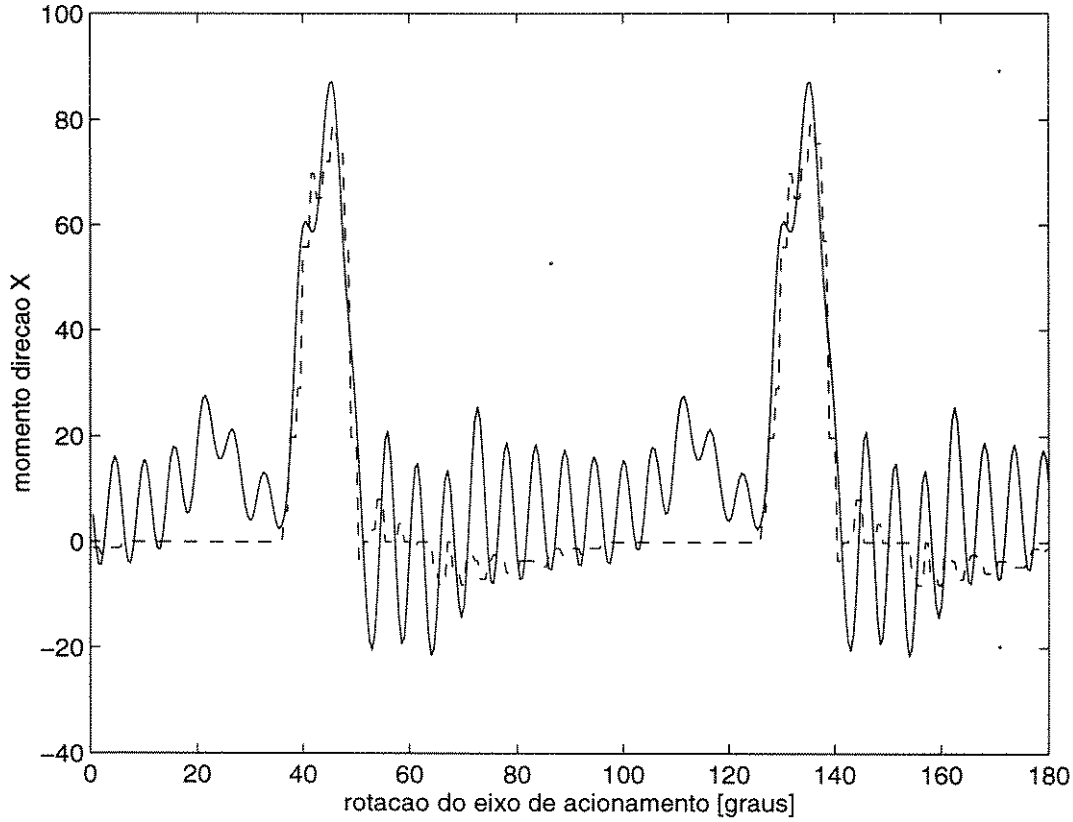

Figura 4.9: Torques de Acionamento Teoria e Experimento [Nm] - 2000 rpm.

forma satisfatória, ou seja, os resultados obtidos vêm ratificar a modelagem matemática do eixo de acionamento como opção para o estudo do comportamento do eixo de acionamento da bomba injetora distribuidora BOSCH tipo VE.

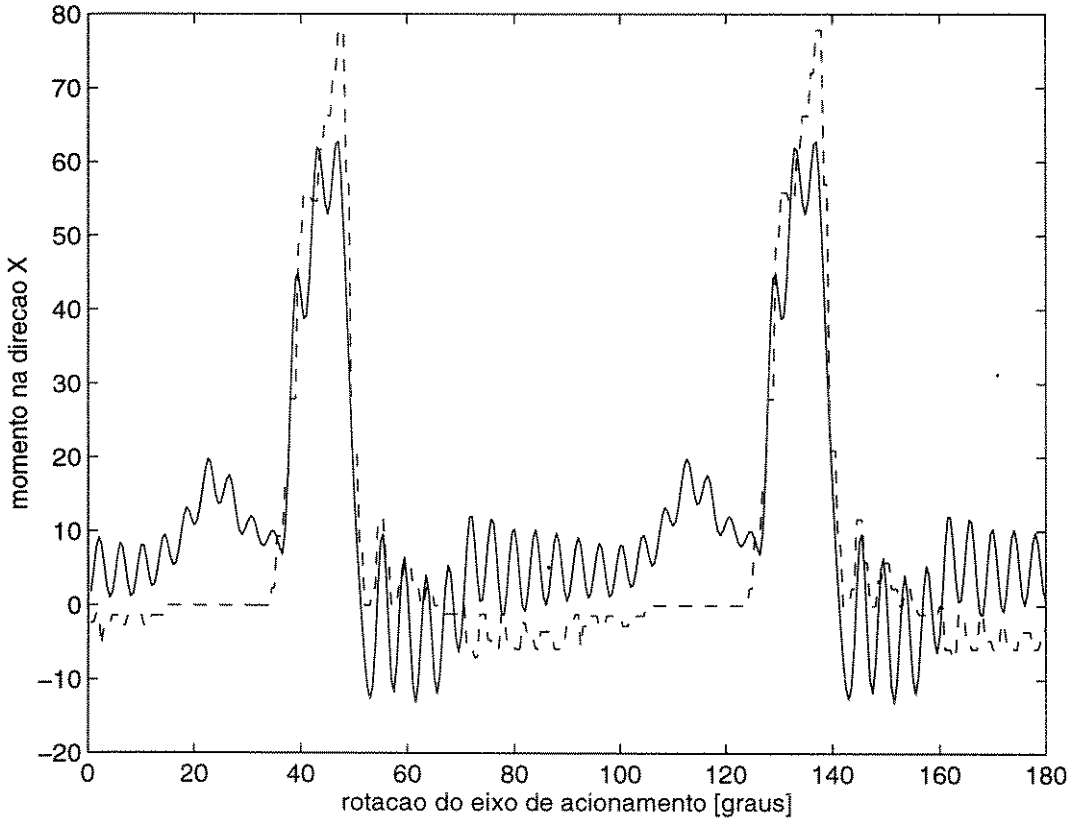

Figura 4.10: Torques de Acionamento Teoria e Experimento [Nm] – 1500 rpm.

Tabela 4.12: Torque de Acionamento - Comparações Teoria / Experimento

Ω	2600 rpm	2000 rpm	1500 rpm
$M^a_{X_{max/min}}$	+94.33/-26.87 Nm	+87.19/-21.57 Nm	+62.71/-13.16 Nm
$M^{a_{exp}}_{max/min}$	+90.00/-9.00 Nm	+80.00/-11.00 Nm	+78.00/-8.00 Nm
ΔM^a_X	121.20 Nm	108.76 Nm	75.87 Nm
$\Delta M^{a_{exp}}_X$	99.00 Nm	91.00 Nm	86.00 Nm
erro	+22.4 %	+19.5 %	-11.8 %

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas Futuras

Neste trabalho modelou-se eixo de acionamento da bomba injetora como um rotor flexível empregando-se o Método dos Elementos Finitos. Os esforços que agem sobre o eixo, devido à cada um dos mecanismos que estão acoplados ao mesmo (engrenagem de acionamento, mancais hidrodinâmicos, bomba de palhetas, engrenagem do regulador e came), foram estudados extensivamente, de forma que o modelo matemático reproduzisse fielmente os carregamentos dinâmicos da bomba injetora.

A abordagem empregada para a caracterização do comportamento dos mecanismos é aquela da busca de um equilíbrio entre os requisitos de performance, praticidade dos cálculos e qualidade dos resultados obtidos. Evitou-se, na medida do possível, empregar resultados de ensaios experimentais como dados de entrada para as análises. É oriunda desta preocupação o desenvolvimento de um modelo qualitativo para a bomba de palhetas. Entretanto, seria impossível desenvolver um modelo para os esforços do came, que garantisse a qualidade dos resultados obtidos, sem o conhecimento anterior da pressão interna do pistão distribuidor, obtida experimentalmente. Por isso fala-se em busca de

equilíbrio de requisitos.

No estudo de um sistema mecânico complexo, como é o caso da bomba injetora, depara-se inevitavelmente com não-linearidades. A solução de sistemas não-lineares no domínio do tempo é computacionalmente onerosa pelo fato dos métodos serem iterativos. Inicialmente tentou-se considerar os carregamentos não-lineares dos mancais hidrodinâmicos, segundo o modelo apresentado no anexo. Entretanto esta consideração mostrou-se inviável. Empregou-se, então, um modelo linearizado para a aplicação dos esforços dos mancais hidrodinâmicos, com o intuito de melhorar o desempenho no que diz respeito ao tempo de processamento das análises. Nesta mesma linha têm-se os problemas de contato entre dentes de engrenagens e da perturbação sobre a rotação do eixo de acionamento à altura do came. As linearizações dos modelos foram feitas de forma a minimizar os desvios causados pelas mesmas entre os resultados obtidos e os fênomenos físicos efetivos; e existe a preocupação em conhecer as implicações destas simplificações.

Foram relizadas análises em três condições operacionais distintas, referentes ao funcionamento da bomba injetora à 2600 rpm, 2000 rpm e 1500 rpm. O torque de acionamento e o carregamento do primeiro mancal hidrodinâmico, obtidos através dos ensaios mecânicos experimentais, serviram de parâmetros para as comparações. Observa-se claramente que a solicitação do eixo de acionamento é maior para as altas rotações. Os resultados teóricos obtidos apresentam boa concordância numérica com as medições experimentais, considerando-se as simplificações adotadas e o grau de complexidade do sistema mecânico em estudo.

Estas observações vem ratificar a viabilidade da modelagem matemática como opção para o estudo do comportamento do eixo de acionamento da bomba injetora distribuidora BOSCH tipo VE. Como perspectivas futuras para a melhoria do trabalho pode-se citar a modelagem precisa dos esforços da bomba de palhetas, a consideração dos carregamentos

não-lineares dos mancais hidrodinâmicos, a inclusão do efeito da perturbação da rotação do eixo de acionamento sobre os esforços do came, a modelagem dos esforços de contato dos dentes de engrenagens e a consideração do amortecimento torsional.

Bibliografia

[1] ALLAIRE, P. E., KOCUR, J. A., NICHOLAS, J. C., A Pressure-Parameter Method for Finite-Element Solution of Reynolds' Equation, p.150-158, ASLE Transactions, 1984.

[2] BAUER, G., Ölhydraulik, Stuttgart, B. G. Teubner Studienskripten, 1988.

[3] BITTENCOURT, M. L., Introdução ao Método dos Elementos Finitos Aplicado à Análise Estrutural, Campinas, 1992.

[4] CARDONA, ALBERTO, GERADIN, MICHEL, Kinematic and Dynamic Analysis of Mechanisms with Cams, Santa Fé, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v.103, n.1-2, p.115-134, 1993.

[5] CONNOR, J. J., BREBBIA, C. A., Finite Element Techniques for Fluid Flow, London, Butterworth & Co (Publishers) Ltd, 1976.

[6] DHATT, G., TOUZOT, G., The Finite Element Method Displayed, John Wiley & Sons, 1985.

[7] DUBBEL, Manual da Construção de Máquinas, São Paulo, Hemus Editora Ltda, 1979.

[8] DUDLEY, D. W., Gear Handbook, McGraw-Hill Book Company, 1962.

[9] FIROOZIAN, R., STANWAY, R., Design and Application of a Finite Element Package for Modelling Turbomachinery Vibrations, Liverpool, Journal of Sound and Vibration, p.115-137, 1989.

[10] FOX, R. W., McDONALD, A. T., Introdução à Mecânica dos Fluidos, Rio de Janeiro, Editora Guanabara S. A., 1988.

[11] GALLAGHER, ODEN, TAYLOR, ZIENKIEWICS, Finite Elements in Fluids, v.1 e v.3, John Wiley & Sons, 1978.

[12] GASCH, G., Vibration of Large Turbo-Rotors in Fluidfilm Bearings on Elastic Foundation, Journal of Sound and Vibration, v.47, n.1, p.53-73, 1973.

[13] HUGHES, T. J. R., The Finite Element Method, Englewood Cliffs, Prentice-Hall Inc., 1987.

[14] JOHNSON, H., JOHNSON, J., 250 bar Vane Pump, Milwaukee, SAE Technical Paper Series, 911801, 1991.

[15] KARASSIK, KRUTZSCH, FRASER, MESSINA, Pump Handbook, McGraw-Hill Book Company, 1976.

[16] KIM, W. J., JEON, H. S., PARK, Y. S., Contact Force Prediction and Experimental Verification on an OHC Finger-Follower-Type Cam-Valve System, Seoul, Experimental Mechanics, v.31, n.2, p.150-156, 1991.

[17] KRSTICH, A. M., Derivation of General Formulas of Torques, Moments and Train Values for Standard N-Gear Train by Means of Moment of Force, Long Beach, International Journal of Vehicle Design, v.15, n.1-2, p.45-57, 1994.

[18] MACINTYRE, A. J., Máquinas Motrizes Hidráulicas, Rio de Janeiro, Editora Guanabara Dois S. A., 1983.

[19] MATTHIES, H. J., Einführung in die Ölhydraulik, Stuttgart, B. G. Teubner Studienbücher, 1991.

[20] MILLS, J. K., NOTASH, L., FENTON, R. G., Optimal Design and Sensitivity Analysis of Flexible Cam Mechanisms, Toronto, Mechanism & Machine Theory, v.28, n.4, p.563-581, 1993.

[21] MEIROVITCH, L., Computational Methods in Structural Dynamics, Rockville, Sijthoff & Noordhoff, 1980.

[22] MOCHIZUKI, T., Development of the Variable Displacement Vane Pump for the Automotive Power Steering System, Detroit, SAE Technical Paper Series, 930261, 1993.

[23] NELSON, H. D., McVAUGH, J. M., The Dynamics of Rotor-Bearing Systems Using Finite Elements, Journal of Engineering for Industry, Trans. ASME, v.5, p.593-600, 1976.

[24] NORRIE, D. H., An Introduction to Incompressible Flow Machines, London, Edward Arnold (Publishers) Ltd., 1963.

[25] RUSSO, F. H., SANTOS, I. F., Estudos Teóricos sobre Mancais Segmentados com Filme de Óleo Ativo, Relatório de Iniciação Científica FAPESP, Campinas, 1994.

[26] SADEK, K. S. H., DAADBIN, A., Modeling of a Torsion-Bar Cam Mechanism, New Castle-Upon-Tyne, Mechanism & Machine Theory, v.28, n.5, p.631-640, 1993.

[27] SAKA, ZIYA, YILMAZ, YUEKSEL, Torsional Vibrations of Camshafts, Konya, Mechanism & Machine Theory, v.27, n.3, p.225-233, 1992.

[28] SANTOS, I. F., SCALABRIN, A., Controle de Rotores Flexíveis Via Mancais Segmentados Ativos, COBEM-CIDIM, 1995.

[29] SANTOS, Ilmar Ferreira. Modelos Matemáticos Reduzidos para Sistemas Mecânicos Contínuos. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Unicamp, 1988. Tese (Mestrado).

[30] SHAMES, I. H., Introdução à Mecânica dos Sólidos, Rio de Janeiro, Prentice-Hall do Brasil, 1983.

[31] SHIGLEY, J. E., Cinemática dos Mecanismos, São Paulo, Editora Edgard Blücher Ltda., 1970.

[32] SHIGLEY, J. E., Dinâmica das Máquinas, São Paulo, Editora Edgard Blücher Ltda., 1969.

[33] SINGH, T., Design of Vane Pump Suction Porting to Reduce Cavitation at High Operation Speeds, Nashville, SAE Technical Paper Series, 911937, 1991.

[34] SMITH, G. D., Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods, Oxford, Oxford University Press, 1985.

[35] SOMEYA, T., Journal-Bearing Databook, Heidelberg, Springer-Verlag Berlin, 1989.

[36] STEWART, H. L., Pumps, New York, Macmillan Publishing Company, 1986.

Apêndice A

Modelagem de Mancais Hidrodinâmicos pelo Método dos Elementos Finitos

SIMBOLOGIA

Letras Latinas

d diâmetro do rotor $[m]$

f_A força de corpo

g equação não-linear

h folga radial rotor / mancal $[m]$

l cosseno diretor associado à direção x

m cosseno diretor associado à direção z

n número total de elementos finitos para a discretização do mancal

$\vec{n}$ vetor normal ao elemento diferencial de contorno dS

p pressão $[Pa]$

q grau de liberdade

t tempo $[s]$

v translação na direção Y $[m]$

x direção do sistema referencial secundário

w translação na direção Z $[m]$

y direção do sistema referencial secundário

z direção do sistema referencial secundário

A área $[m^2]$

D diâmetro do mancal $[m]$

F força $[N]$

G sistema de equações não-lineares

H espessura média do filme de óleo $[m]$

L comprimento do mancal hidrodinâmico $[m]$

M número de graus de liberdade

N função de forma

Q vetor coluna dos M graus de liberdade

R função resíduo

S contorno $[m]$

U velocidade linear na superfície do rotor $[m/s]$

X direção do sistema referencial inercial

Y direção do sistema referencial inercial

Z direção do sistema referencial inercial

$\mathcal{L}$ operador diferencial

$\{f\}$ vetor integral da força de corpo

$[J]$ matriz jacobiana

$[K]$ matriz integral do operador diferencial

Letras Gregas

δ variação de uma função

ϵ precisão desejada para um valor q específico

η direção do sistema referencial do elemento finito

θ ângulo associado ao sistema referencial secundário $x - y - z$

μ viscosidade absoluta $[N\,s/m^2]$

ξ direção do sistema referencial do elemento finito

ψ função de ponderação

Ω velocidade angular do rotor $[\mathrm{rad}/s]$

Superescritos

e referente ao elemento finito

m referente ao mancal hidrodinâmico

r referente ao rotor

Subscritos

i índice genérico

j índice genérico

k índice genérico

Outros

$< \cdot >$ vetor linha

$\{\cdot\}$ vetor coluna

A.1 Introdução

Os mancais hidrodinâmicos são responsáveis pela sustentação do eixo de acionamento. A distribuição da pressão num mancal hidrodinâmico está relacionada à velocidade de rotação do eixo de acionamento e, também, ao posicionamento do eixo de acionamento com relação ao mancal. Isto torna o problema não-linear uma vez que os esforços e o posicionamento do eixo de acionamento passam a estar relacionados de forma direta. Modelos linearizados para os carregamentos devidos aos mancais hidrodinâmicos são empregados nas análises dinâmicas visando uma melhor performance no que diz respeito ao tempo para o processamento dos dados. Todavia, é desenvolvido aqui um modelo matemático para a distribuição da pressão na superfície do mancal hidrodinâmico empregando-se o Método dos Elementos Finitos. As etapas para a solução do problema não-linear, empregando-se o Método de Newton-Rapson de forma a satisfazer as equações de equilíbrio das forças e dos momentos do eixo de acionamento, são descritas neste anexo.

Allaire et al (1984), Gallagher et al (1978), Connor e Brebbia (1976) e Hughes (1987) desenvolveram modelos para a solução de problemas, descritos pela equação de Navier-Stokes, empregando-se o Método dos Elementos Finitos. Nestes problemas a geometria e a distribuição da pressão são conhecidas e deseja-se calcular o perfil de velocidades.

Matthies (1991), Bauer (1988) e Russo e Santos (1994) apresentam a Equação de

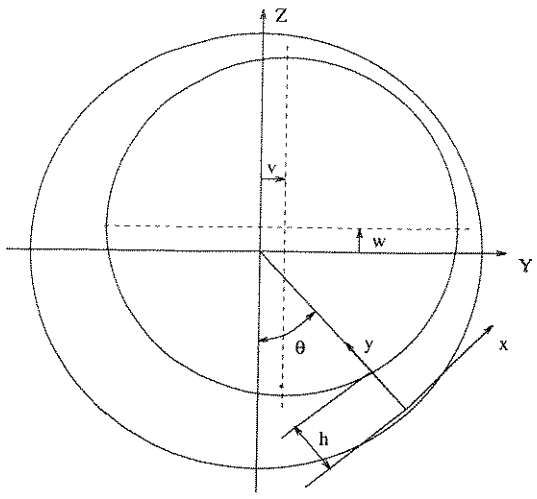

Figura A.1: Geometria do Sistema Rotor / Mancal.

Reynolds, que tem a sua origem na equação de Navier-Stokes, para o cálculo da distribuição da pressão num mancal hidrodinâmico. No caso da equação de Reynolds a geometria e o perfil de velocidades do mancal hidrodinâmico são caracterizados pelo problema e deseja-se calcular a distribuição da pressão na superfície do mancal hidrodinâmico. A aplicação do Método dos Elementos Finitos ao problema foi baseada em Dhatt e Touzot (1985) e Bittencourt (1992).

A.2 Geometria do Problema

A figura A.1 ilustra a espessura do filme de óleo, definida pela folga radial rotor / mancal h, quando o rotor encontra-se deslocado do centro geométrico do mancal de (v, w). O eixo x do sistema referencial secundário define o contorno da superfície do mancal, enquanto o eixo y do mesmo sistema referencial é perpendicular à superfície do mancal para um ângulo θ qualquer.

A espessura média do filme de óleo H é definida pela equação A.1, onde D é o diâmetro do mancal e d é o diâmetro do rotor.

$$H = \frac{D - d}{2} \tag{A.1}$$

Uma posição x definida no contorno da superfície do mancal pode ser caracterizada empregando-se a relação A.2.

$$x = \frac{D\theta}{2} \tag{A.2}$$

As componentes da folga radial rotor / mancal h_Y na direção Y do sistema referencial inercial e h_Z na direção Z do sistema referencial inercial são descritas, respectivamente, pelas equações A.3 e A.4.

$$h_Y = \frac{D}{2}\sin\theta - \left(v + \frac{d}{2}\sin\theta\right) = H\sin\theta - v \tag{A.3}$$

$$h_Z = -\frac{D}{2}\cos\theta - \left(w - \frac{d}{2}\cos\theta\right) = -H\cos\theta - w \tag{A.4}$$

A folga radial rotor / mancal h, definida na direção y do sistema referencial secundário, é obtida a partir das relações A.3 e A.4 e apresentada na equação A.5.

$$h(v, w, \theta) = [H^2 + v^2 + w^2 + 2H(w\cos\theta - v\sin\theta)]^{1/2} \tag{A.5}$$

A derivada parcial da folga radial rotor / mancal com relação à x, $\partial h/\partial x$, é descrita pela equação A.6.

$$\frac{\partial h}{\partial x}(v, w, \theta) = -\frac{2H}{D}(w \sin\theta + v \cos\theta)h(v, w, \theta)^{-1} \tag{A.6}$$

A.3 Formulação Variacional

A equação de Reynolds é uma equação diferencial parcial obtida a partir da equação de Navier-Stokes e possibilita o tratamento do escoamento do fluido num mancal hidrodinâmico. Uma forma simplificada da equação de Reynolds é apresentada na expressão A.7 e relaciona a pressão p à espessura h do filme de óleo.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{h^3}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z}\right) = 6U\frac{\partial h}{\partial x} + 12\frac{\partial h}{\partial t} \tag{A.7}$$

Na equação A.7 μ é a viscosidade absoluta e ρ é a densidade do fluido. A direção z do sistema referencial secundário é aquela que define o comprimento do mancal hidrodinâmico e U é a velocidade linear na superfície do rotor, dada pela expressão A.8.

$$U = \frac{d}{2}\Omega \tag{A.8}$$

Define-se o operador diferencial $\mathcal{L}$, apresentado na equação A.9, e a força de corpo f_A, apresentada na equação A.10.

$$\mathcal{L} = \frac{h^3}{\mu}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + \frac{3h^2}{\dot{\mu}}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{A.9}$$

$$f_A = -6U\frac{\partial h}{\partial x} - 12\frac{\partial h}{\partial t} \tag{A.10}$$

A equação de Reynolds A.7 pode ser reescrita a partir da aplicação do operador diferencial sobre a pressão p, $\mathcal{L}(p)$, e da força de corpo f_A como é mostrado na expressão A.11.

$$\mathcal{L}(p) + f_A = 0 \tag{A.11}$$

A equação A.12 define a função $R(p)$ do resíduo da pressão p. Observa-se que quando a pressão p satisfaz a equação de Reynolds a função resíduo tem como resultado $R(p) = 0$.

$$R(p) = \mathcal{L}(p) + f_A \tag{A.12}$$

Aplica-se o Método dos Resíduos Ponderados. Este método consiste em buscar funções p que satisfaçam a equação integral apresentada na equação A.13 para um conjunto qualquer de funções de ponderação ψ.

$$\int_A < \psi > \{R(p)\}\, dA = \int_A < \psi > \{\mathcal{L}(p) + f_A\}\, dA = 0 \tag{A.13}$$

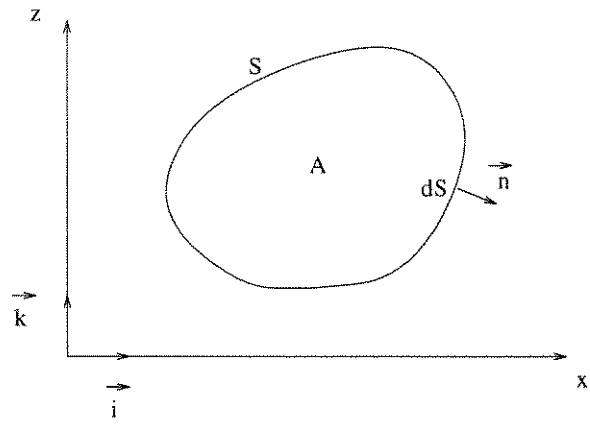

Figura A.2: Geometria de um Meio Contínuo.

A figura A.2 define o meio contínuo A, seu contorno S e o vetor normal $\vec{n}$ sobre um elemento diferencial de contorno dS. Os cossenos diretores l e m são definidos a partir da equação A.14.

$$l = \vec{n}.\vec{i} \qquad m = \vec{n}.\vec{k} \tag{A.14}$$

As equações A.15 e A.16 definem transformações integrais por partes associadas às funções de pressão p e às funções de ponderação ψ.

$$\int_A \psi \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\, dx\, dz = -\int_A \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial x}\, dx\, dz + \oint_S \psi \frac{\partial p}{\partial x} l\, dS \tag{A.15}$$

$$\int_A \psi \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\, dx\, dz = -\int_A \frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial p}{\partial z}\, dx\, dz + \oint_S \psi \frac{\partial p}{\partial z} m\, dS \tag{A.16}$$

Para a busca de soluções p que satisfaçam a equação A.13 é interessante que a mesma

seja descrita em sua formulação integral fraca. A formulação integral fraca da equação A.13 é aquela onde todas as derivadas com relação à p são de primeira ordem. O termo integral da equação A.13 que apresenta derivadas de segunda ordem com relação à p é definido pela expressão A.17.

$$\int_A \psi \frac{h^3}{\mu} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) dx\, dz \tag{A.17}$$

Empregando-se as transformações integrais por parte A.15 e A.16 reescreve-se o termo integral A.17 como mostrado em A.18.

$$- \int_A \frac{h^3}{\mu} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \psi \frac{3h^2}{\mu} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial z} \right) dx\, dz + \oint_S \psi \frac{h^3}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} l + \frac{\partial p}{\partial z} m \right) dS \tag{A.18}$$

Substituindo-se o termo integral A.17 da equação A.13 por sua transformação A.18 chega-se à formulação integral fraca do problema A.19.

$$- \int_A \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial z} \right) dx\, dz + \oint_S \psi \left(\frac{\partial p}{\partial x} l + \frac{\partial p}{\partial z} m \right) dS = \int_A \psi \frac{6\mu}{h^3} \left(U \frac{\partial h}{\partial x} + 2 \frac{\partial h}{\partial t} \right) dx\, dz \tag{A.19}$$

Segundo o Método de Galerkin consideram-se as funções de ponderação ψ idênticas às bases funcionais de p. Representa-se então ψ pela variação de pressão δp como mostra a equação A.20.

$$\psi = \delta p \tag{A.20}$$

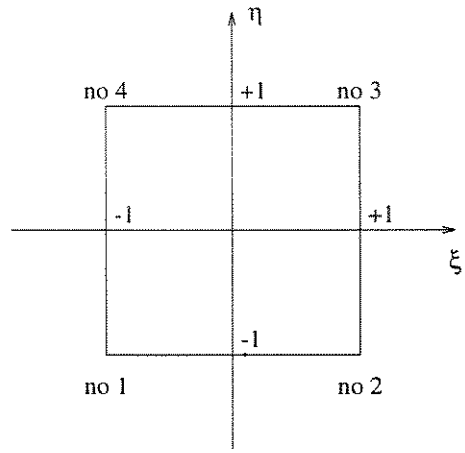

Figura A.3: Elemento Finito Bilinear Quadrilateral de 4 Nós.

A figura A.3 representa um elemento finito bilinear quadrilateral de quatro nós em seu sistema referencial específico $\xi - \eta$. Observa-se que o domínio do elemento é definido por $-1 \leq \xi \leq +1$ e $-1 \leq \eta \leq +1$. As funções de forma deste elemento finito são apresentadas nas equações A.21, A.22, A.23 e A.24.

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(-\xi + 1)(-\eta + 1) \tag{A.21}$$

$$N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(\xi + 1)(-\eta + 1) \tag{A.22}$$

$$N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(\xi + 1)(\eta + 1) \tag{A.23}$$

$$N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(-\xi + 1)(\eta + 1) \tag{A.24}$$

Empregando-se as funções de forma do elemento finito aproxima-se sua geometria (x, z), a função de interesse p e a variação δp em todo o domínio do elemento a partir dos valores nodais $(x, z, p, \delta p)_i$, $i = 1..4$. As equações A.25, A.26, A.27 e A.28 definem as respectivas aproximações. Observa-se que estas relações definem uma aproximação do tipo isoparamétrica uma vez que a geometria (x, z) e a função de interesse p são aproximadas empregando-se o mesmo conjunto de funções de forma.

$$x =< N_1\ N_2\ N_3\ N_4 > \left\{ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \right\} \tag{A.25}$$

$$z =< N_1\ N_2\ N_3\ N_4 > \left\{ \begin{array}{c} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{array} \right\} \tag{A.26}$$

$$p =< N_1\ N_2\ N_3\ N_4 > \left\{ \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{array} \right\} \tag{A.27}$$

$$\delta p =< N_1\ N_2\ N_3\ N_4 > \left\{ \begin{array}{c} \delta p_1 \\ \delta p_2 \\ \delta p_3 \\ \delta p_4 \end{array} \right\} \tag{A.28}$$

As derivadas das funções de forma $< N >=< N_1\ N_2\ N_3\ N_4 >$ com relação á (ξ, η) estão associadas àquelas com relação à (x, z) segundo a equação A.29.

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial < N >}{\partial \xi} \\ \frac{\partial < N >}{\partial \eta} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial < N >}{\partial x} \\ \frac{\partial < N >}{\partial z} \end{array} \right\} \tag{A.29}$$

Define-se a matriz jacobiana $[J]$ como mostra a expressão A.30.

$$[J] = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{array} \right] \tag{A.30}$$

Empregando-se a matriz jacobiana $[J]$ determinam-se as transformações A.31 e A.32 que associam o sistema referencial $x - z$ do mancal hidrodinâmico ao sistema referencial $\xi - \eta$ do elemento finito.

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial < N >}{\partial x} \\ \frac{\partial < N >}{\partial z} \end{array} \right\} = \frac{1}{\det([J])} \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial z}{\partial \eta} & -\frac{\partial x}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial < N >}{\partial \xi} \\ \frac{\partial < N >}{\partial \eta} \end{array} \right\} \tag{A.31}$$

$$dx\, dz = \det([J])\, d\xi\, d\eta \tag{A.32}$$

A equação A.19 que caracteriza o problema pode ser reescrita em função das matrizes $[K_1^e]$ e $[K_2^e]$ e do vetor $\{f^e\}$, como mostra a expressão A.33. As matrizes $[K_1^e]$ e $[K_2^e]$ e o vetor $\{f^e\}$ são apresentados, respectivamente, nas equações A.34, A.35 e A.36.

$$< \delta p > ([K_2^e] - [K_1^e])\{p\} =< \delta p > \{f^e\} \tag{A.33}$$

$$[K_1^e] = \int_A \left(\frac{\partial \{N\}}{\partial x} \frac{\partial < N >}{\partial x} + \frac{\partial \{N\}}{\partial z} \frac{\partial < N >}{\partial z} \right) dx\, dz \tag{A.34}$$

$$[K_2^e] = \oint_S \{N\} \left(\frac{\partial < N >}{\partial x} l + \frac{\partial < N >}{\partial z} m \right) dS \tag{A.35}$$

$$\{f^e\} = \int_A \{N\} \frac{6\mu}{h^3} \left(U \frac{\partial h}{\partial x} + 2 \frac{\partial h}{\partial t} \right) dx\, dz \tag{A.36}$$

Observa-se que a busca de soluções p para problema independe da variação de pressão δp. O Método dos Resíduos Ponderados exige que as soluções p satisfaçam um conjunto qualquer de funções de ponderação ψ. Esta condição é satisfeita uma vez que assume-se, de acordo com o Método de Galerkin, a relação A.20. O problema, descrito pela equação A.33, pode ser reescrito como mostrado em A.37.

$$([K_2^e] - [K_1^e])\{p\} = \{f^e\} \tag{A.37}$$

Empregando-se as relações A.31 e A.32 nas equações A.34, A.35 e A.36 têm-se o problema A.37 totalmente descrito no sistema referencial $\xi - \eta$ do elemento finito. Neste sistema referencial as matrizes $[K_1^e]$ e $[K_2^e]$ e o vetor $\{f\}^e$ são dados, respectivamente, pelas equações A.38, A.39 e A.40.

$$\begin{aligned}[K_1^e] = \; & \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\det([J])}\left[\left(\frac{\partial\{N\}}{\partial\xi}\frac{\partial z}{\partial\eta} - \frac{\partial\{N\}}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)\left(\frac{\partial<N>}{\partial\xi}\frac{\partial z}{\partial\eta}\right.\right. \\ & \left. - \frac{\partial<N>}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\eta}\right) + \left(\frac{\partial\{N\}}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi} - \frac{\partial\{N\}}{\partial\xi}\frac{\partial z}{\partial\xi}\right)\left(\frac{\partial<N>}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi}\right. \\ & \left.\left. - \frac{\partial<N>}{\partial\xi}\frac{\partial z}{\partial\xi}\right)\right] d\xi\, d\eta \end{aligned} \tag{A.38}$$

$$\begin{aligned}[K_2^e] = \; & -\int_{-1}^{1}\{N\}\frac{\partial<N>}{\partial\eta}\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}^2 + \frac{\partial z}{\partial\xi}^2\right)^{1/2}|_{\eta=-1}d\xi \\ & +\int_{-1}^{1}\{N\}\frac{\partial<N>}{\partial\xi}\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}^2 + \frac{\partial z}{\partial\eta}^2\right)^{1/2}|_{\xi=1}d\eta \\ & -\int_{1}^{-1}\{N\}\frac{\partial<N>}{\partial\eta}\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}^2 + \frac{\partial z}{\partial\xi}^2\right)^{1/2}|_{\eta=1}d\xi \\ & +\int_{1}^{-1}\{N\}\frac{\partial<N>}{\partial\xi}\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}^2 + \frac{\partial z}{\partial\eta}^2\right)^{1/2}|_{\xi=-1}d\eta \end{aligned} \tag{A.39}$$

$$\{f^e\} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\{N\}\frac{6\mu}{h^3}\left(U\frac{\partial h}{\partial x} + 2\frac{\partial h}{\partial t}\right)\det([J])\, d\xi\, d\eta \tag{A.40}$$

Uma vez definido o sistema matricial para o elemento finito genérico do mancal hidrodinâmico, pode-se representar matematicamente a distribuição da pressão na superfície do mesmo. Para tanto, define-se os sistemas matriciais dos elementos, $e = 1..n$, onde n é o número total de elementos finitos empregados na discretização do mancal hidrodinâmico. O sistema matricial global A.41 é montado a partir da sobreposição dos sistemas matriciais elementares em suas respectivas posições com relação à p.

$$([K_2] - [K_1])\{p\} = \{f\} \tag{A.41}$$

A condição de contorno aplicada sobre a pressão p é definida pela equação A.42, onde L é o comprimento do mancal hidrodinâmico.

$$p(x = \forall, z = 0) = 0 \qquad p(x = \forall, z = L) = 0 \tag{A.42}$$

A distribuição de pressões p, solução do sistema matricial global A.41, é obtida a partir da equação A.43.

$$\{p\} = ([K_2] - [K_1])^{-1}\{f\} \tag{A.43}$$

A força F^e num elemento genérico de mancal é descrita pela equação A.44.

$$F^e = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} < N > \{p\} \det([J])\, d\xi\, d\eta \tag{A.44}$$

Pode-se decompor a força F^e no intuito de caracterizar-se suas componentes nas direções Y e Z do sistema referencial inercial do eixo de acionamento. As forças F_Y^e e F_Z^e são definidas, respectivamente, pelas equações A.45 e A.46. O ângulo θ^e, específico do elemento, é obtido a partir de suas coordenadas nodais x, segundo a equação A.47.

$$F_Y^e = -\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} < N > \det([J])\, d\xi\, d\eta\, \{p\}\, \sin\theta^e \tag{A.45}$$

$$F_Z^e = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} < N > \det([J])\, d\xi\, d\eta\, \{p\}\, \cos\theta^e \tag{A.46}$$

$$\theta^e = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{2D} \tag{A.47}$$

Finalmente, as forças hidrodinâmicas que agem sobre o eixo de acionamento são obtidas a partir do somatório dos esforços de todos os elementos finitos, como mostra a equação A.48.

$$F_Y^m = \sum_{e=1}^{n} F_Y^e \qquad F_Z^m = \sum_{e=1}^{n} F_Z^e \tag{A.48}$$

A.4 Método de Newton-Raphson

Os esforços e o posicionamento do eixo de acionamento com relação ao mancal hidrodinâmico estão relacionados de forma direta. Geralmente o carregamento sobre o eixo é conhecido, mas a força de sustentação do mesmo, devida ao mancal hidrodinâmico, depende do posicionamento do rotor com relação ao mancal. Têm-se um problema não-linear. Para a solução do mesmo, emprega-se o Método de Newton-Raphson..

O sistema de equações não-lineares a ser resolvido é dado pela expressão A.49. Observa-se que o número de equações g não-lineares que definem o problema deve ser igual à M, o número de graus de liberdade q.

$$\begin{cases} g_1(q_1, q_2, \ldots, q_M) &= 0 \\ g_2(q_1, q_2, \ldots, q_M) &= 0 \\ \vdots &= \vdots \\ g_M(q_1, q_2, \ldots, q_M) &= 0 \end{cases} \tag{A.49}$$

A expressão A.49 pode ser reescrita em sua forma matricial A.50.

$$G(Q) = 0 \qquad Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_M\}^T \tag{A.50}$$

O Método de Newton-Raphson consiste em transformar o sistema de equações não-lineares A.50 em um sistema de equações lineares equivalentes, obtido a partir de sua expansão em Série de Taylor, apresentada na expressão A.51.

$$g_i(Q + \delta Q) = g_i(Q) + \sum_{j=1}^{M} \frac{\partial g_i(Q)}{\partial q_j} \delta q_j \qquad i = 1..M \tag{A.51}$$

A expressão A.51 é discretizada com relação às soluções iterativas Q_k, como mostra o sistema de equações A.52.

$$g_i(Q_{k+1}) = g_i(Q_k) + \sum_{j=1}^{M} \frac{\partial g_i(Q)}{\partial q_j} [q_{k+1} - q_k]_j \qquad i = 1..M \tag{A.52}$$

Aplicando-se a relação A.50 à solução iterativa Q_{k+1} chega-se à expressão A.53.

$$g_i(Q_{k+1}) = 0 \qquad i = 1..M \tag{A.53}$$

A relação A.54 é desenvolvida empregando-se as expressões A.52 e A.53.

$$\sum_{j=1}^{M} \frac{\partial g_i(Q)}{\partial q_j} [q_{k+1} - q_k]_j = -g_i(Q_k) \qquad i = 1..M \tag{A.54}$$

A expressão A.55 é desenvolvida a partir da relação A.54, isolando-se o termo Q_{k+1}. O termo $G'(Q)$ da expressão A.55 é dado pela matriz A.56.

$$Q_{k+1} = Q_k - \frac{G(Q_k)}{G'(Q_k)} \tag{A.55}$$

$$G'(Q) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial q_1} & \frac{\partial g_1}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial q_M} \\ \frac{\partial g_2}{\partial q_1} & \frac{\partial g_2}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial q_M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_M}{\partial q_1} & \frac{\partial g_M}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial g_M}{\partial q_M} \end{bmatrix} \tag{A.56}$$

A expressão A.55 é a função de iteração para a obtenção das soluções iterativas Q_{k+1} de um sistema não-linear segundo o Método de Newton-Raphson. A solução iterativa Q_{k+1} é considerada a solução do problema A.49 se o sistema de inequações A.57 for satisfeito. Os valores ϵ_j são previamente definidos e caracterizam a precisão desejada para cada um dos graus de liberdade q_j, $j = 1..M$.

$$|q_{k+1} - q_k|_j \leq \epsilon_j \quad j = 1..M \tag{A.57}$$

A utilização do Método de Newton-Raphson permite uma convergência rápida, diminuindo a quantidade de cálculos a serem efetuados, e consequentemente o tempo de determinação do ponto de operação ou de equilíbrio do sistema. No entanto, a velocidade de convergência para a resposta e a convergência propriamente dita, dependem fortemente do chute inicial dado para $Q_0 = \{q_1, q_2, \ldots, q_M\}_0^T$.

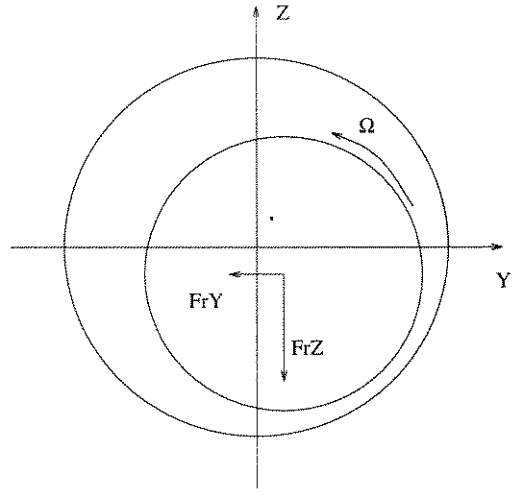

Figura A.4: Sistema Rotor / Mancal.

A.5 Exemplo de Aplicação

A figura A.4 apresenta um sistema rotor / mancal. O diâmetro D do mancal é 100 mm e o comprimento L do mesmo é 55 mm. A espessura H média do filme de óleo Diesel entre o rotor e o mancal é de 100 μm. O óleo Diesel encontra-se à temperatura de 30°C e, nesta condição, têm-se $\mu = 0.070$ Ns/m^2.

O rotor gira à $\Omega = 100$ Hz, o que representa uma velocidade U linear na superfície do mesmo de 31.4 m/s, e está sujeito a um carregamento estático F^r de -12630 N na direção Y e -65060 N na direção Z. Deseja-se conhecer a posição de equilíbrio do rotor com relação ao mancal para esta condição operacional.

O problema não-linear pode ser descrito segundo o sistema A.58, onde os graus de liberdade são os deslocamentos v e w do rotor.

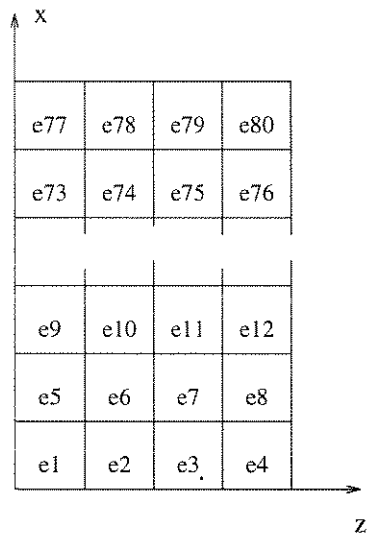

Figura A.5: Discretização do Mancal Hidrodinâmico.

$$\begin{cases} g_1(v,w) = F_Y^m(v,w) + F_Y^r = F_Y^m(v,w) - 12630 = 0 \\ g_2(v,w) = F_Z^m(v,w) + F_Z^r = F_Z^m(v,w) - 65060 = 0 \end{cases} \tag{A.58}$$

A superfície do mancal hidrodinâmico é discretizada em elementos finitos empregando-se o sistema referencial secundário $x - y - z$, como mostra a figura A.5. São definidas quatro colunas de elementos na direção z do comprimento do mancal e vinte linhas de elementos na direção x do perímetro do mesmo. Têm-se, então, 80 elementos finitos vinculados à 105 nós representando a geometria do mancal hidrodinâmico.

Para a aplicação do Método de Newton-Raphson o chute inicial dos deslocamentos v e w é apresentado na expressão A.59. A precisão ϵ desejada para os deslocamentos em ambas as direções é de 0.5 μm.

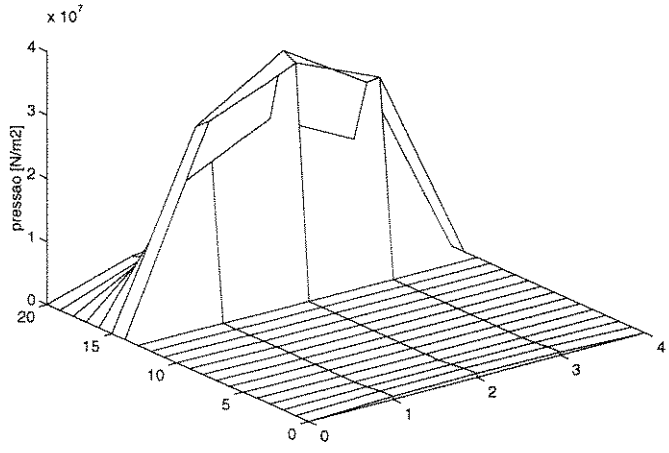

Figura A.6: Distribuição das Pressões na Superfície do Mancal.

$$Q_0 = \left\{ \begin{array}{c} v_0 \\ w_0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 43\mu\text{m} \\ -56\mu\text{m} \end{array} \right\} \tag{A.59}$$

Efetuando-se os cálculos, o método converge para a configuração de equilíbrio A.60 após quatro iterações. A figura A.6 apresenta a distribuição das pressões na superfície do mancal para a posição de equilíbrio do rotor com relação ao mancal hidrodinâmico.

$$Q_4 = \left\{ \begin{array}{c} v_4 \\ w_4 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 40\mu\text{m} \\ -60\mu\text{m} \end{array} \right\} \tag{A.60}$$