

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR Fabiano Bianchini
Batista..... E APROVADA
PELA COMISSÃO JULGADORA EM 27, 07, 2005



UNICAMP

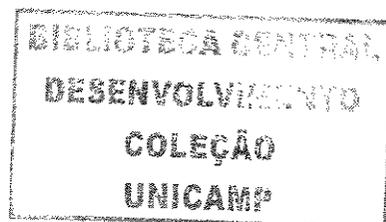
[Handwritten signature]

ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

Identificação de parâmetros elásticos em placas finas de materiais compósitos

Autor: **Fabiano Bianchini Batista**
Orientador: **Prof. Dr. Éder Lima de Albuquerque**
Co-orientador: **Prof. Dr. Milton Dias Júnior**



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

Identificação de parâmetros elásticos em placas finas de materiais compósitos

Autor: Fabiano Bianchini Batista

Orientador: Prof. Dr. Éder Lima de Albuquerque

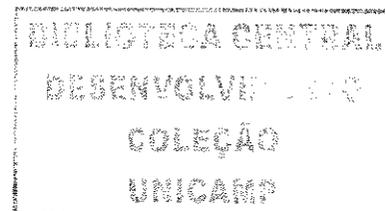
Co-orientador: Prof. Dr. Milton Dias Júnior

Curso: Engenharia Mecânica

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Dissertação de mestrado apresentada à comissão de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2005
S.P. - Brasil



UNIDADE	BC
Nº CHAMADA	+UNICAMP
	888
V	EX
TOMBO BC/	66039
PROC.	16-86-05
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	11,00
DATA	26-10-05
Nº CPD	

BIB ID - 366646

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

B32i Batista, Fabiano Bianchini
 Identificação de parâmetros elásticos em placas finas de materiais compósitos / Fabiano Bianchini Batista. -- Campinas, SP: [s.n.], 2005.

Orientadores: Éder Lima de Albuquerque, Milton Dias Júnior
 Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Métodos dos elementos finitos. 2. Materiais compostos. 3. Análise modal. 4. Mecânica – Vibração. 5. Otimização estrutural. I. Albuquerque, Éder Lima de. II. Dias Júnior, Milton. III. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. IV. Título.

Titulo em Inglês: Identification of elastic parameters on thin plates of composite materials
 Palavras-chave em Inglês: Finite element method, Composite materials, Modal analysis, Vibration mechanics e Structural optimization
 Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico
 Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica
 Banca examinadora: Nilson Tadeu Mascia e Jonas de Carvalho
 Data da defesa: 27/07/2005

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO**

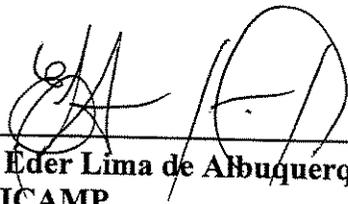
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Identificação de parâmetros elásticos em placas finas de
materiais compósitos**

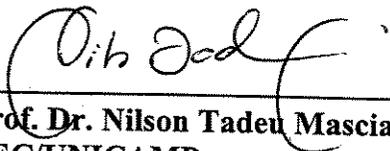
Autor: Fabiano Bianchini Batista

Orientador: Prof. Dr. Éder Lima de Albuquerque

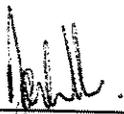
Co-orientador: Prof. Dr. Milton Dias Júnior



**Prof. Dr. Éder Lima de Albuquerque
FEM/UNICAMP**



**Prof. Dr. Nilson Tadeu Mascia
FEC/UNICAMP**



**Prof. Dr. Jonas de Carvalho
USP/SÃO CARLOS**

Campinas, 27 de Julho de 2005.

200523625

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais Joel e Alzira.

“Onde há uma vontade, há um caminho”
provérbio chinês

Agradecimentos

Gostaria de agradecer às pessoas e às instituições que de alguma forma colaboraram para a realização deste trabalho:

- À CAPES pelo apoio financeiro durante todo o desenvolvimento deste trabalho.
- Ao meu orientador, Prof. Dr. Éder Lima de Albuquerque, pelo incentivo, apoio, supervisão e amizade durante o período no qual desenvolvemos este trabalho.
- Ao meu co-orientador, Prof. Dr. Milton Dias Júnior, pelos ensinamentos, apoio e amizade.
- Aos professores e funcionários do Departamento de Projeto Mecânico pela infra-estrutura e ajudas fornecidas durante a realização deste trabalho.
- Aos meus irmãos e amigos que me apoiaram neste trabalho.
- Aos meus pais pela preocupação e pelo apoio moral e financeiro indispensáveis durante toda a realização deste trabalho.

Resumo

BATISTA, F. B. (2005). *Identificação de parâmetros elásticos em placas finas de materiais compósitos*. Campinas, 2005. Dissertação de mestrado - Faculdade de Engenharia Mecânica - Universidade Estadual de Campinas (Unicamp).

Neste trabalho são abordados dois métodos para identificar constantes elásticas em materiais compósitos de aplicações estruturais. São métodos que apresentam características não destrutivas, envolvem testes simples e não requerem grandes esforços computacionais. Podem ser aplicados a materiais anisotrópicos e, conseqüentemente, a materiais isotrópicos e ortotrópicos, o que os tornam ferramentas optativas de grande auxílio ao estudo dos materiais compósitos. No primeiro método, as frequências naturais e os modos próprios adequados, obtidos da análise modal, serão os dados de entrada para a solução de um sistema linear de equações oriundas da equação diferencial que representa a vibração transversal de placas finas anisotrópicas sob a condição de todos os bordos livres. As constantes elásticas desta equação são os parâmetros desconhecidos e estão associadas aos devidos modos próprios de vibrar. A verificação da precisão deste método é feita baseada em simulações numéricas realizadas em um software de Elementos Finitos, Ansys 7.0, e testado experimentalmente em uma placa isotrópica de aço. O segundo método trata-se de um problema de projeto ótimo cuja solução é feita através da combinação do método dos Elementos Finitos e um método de otimização, ambos executados em um único software comercial, Ansys 7.0. A análise modal é requerida para obtenção somente das frequências naturais, que são variáveis utilizadas na função objetivo. A verificação do método é feita em simulações numéricas e testada experimentalmente com a mesma placa isotrópica de aço utilizada no método anterior. Para esta placa de aço, os resultados obtidos através dos dois métodos foram muitos satisfatórios. Entretanto, com relação à placa anisotrópica utilizada, os resultados obtidos pelo segundo método não foram satisfatórios.

Palavras chaves: materiais compósitos, análise modal, vibrações, elementos finitos, projeto ótimo, placas.

Abstract

BATISTA, F. B. (2005). *Identification of elastic parameters on thin plates of composite materials*. Campinas, 2005. Dissertação de mestrado - Faculdade de Engenharia Mecânica - Universidade Estadual de Campinas (Unicamp).

In this work two methods are analyzed to identify elastic constants in composite materials of structural application. They are methods that have nondestructive characteristic, comprised of simple tests and don't require high computational efforts. They can be employed to anisotropic materials as well as isotropic or ortotropic materials, making them useful alternative tools to composite materials studies. In the first method, both natural frequencies and suitable mode shapes are input data for the solution of a linear system that come from differential equation that governs the transverse vibration of a free-free thin plate. Elastic constants of this equation are unknown parameters and are associated with vibration mode shape. Numerical simulations of Finite Element software, Ansys 7.0, and experimental modal analysis indicate the accuracy of this method. The second method refers to an optimum design problem and its solution is obtained by combining both Finite Elements and optimization methods in a single commercial software, Ansys 7.0. The modal analysis is required to obtain only the natural frequencies that are the variables used in the objective function. The second method is verified using numerical simulations and tested experimentally with the same isotropic steel plate used in the first method. Results obtained for this steel plate from both methods were highly satisfactory. In relation to the anisotropic plate, results obtained from the second method weren't satisfactory.

Key words: composite materials, modal analysis, vibrations, finite elements, optimum design, plates.

Sumário

Lista de Figuras	XI
Lista de Tabelas	XIV
1. Introdução	1
1.1. Materiais compósitos.....	1
1.2. Objetivos	7
1.3. Revisão bibliográfica.....	8
1.4. Apresentação do trabalho	13
2. Mecânica dos materiais	15
2.1. Introdução.....	15
2.1.1. Propriedades mecânicas dos materiais	15
2.1.2. Propriedades elásticas dos materiais.....	15
2.1.3. Tensões	16
2.1.4. Deformações.....	21
2.2. Leis Constitutivas.....	24
2.2.1. Introdução.....	24
2.2.2. Homogeneidade.....	27
2.2.3. Simetrias	27
2.2.3.1.Simetria elástica em um plano.....	31
2.2.3.2.Simetria elástica em três planos.....	33
2.2.3.3.Plano de isotropia	33
2.2.3.4.Simetria completa.....	34
2.2.3.5.Outras simetrias	35
2.2.4. Constantes de engenharia	36

2.3. Placas.....	40
2.3.1. Introdução.....	40
2.3.2. Equação diferencial de deslocamento transversal de placas	41
3. Análise modal.....	52
3.1. Introdução.....	52
3.2. Análise modal teórica.....	53
3.3. Análise modal experimental.....	55
3.4. Trabalho experimental.....	57
3.4.1. Materiais e aparelhos.....	57
3.5. Análise modal no Ansys (7.0).....	64
3.6. Materiais compósitos no Ansys (7.0).....	65
3.7. Ensaaios e simulações.....	65
4. Primeiro método	76
4.1. Primeiro método: identificação dos parâmetros elásticos através de frequências naturais, modos próprios e métodos numéricos	76
4.2. Simulações, resultados e discussões.....	86
5. Segundo método.....	103
5.1. Otimização de projetos no Ansys (7.0).....	103
5.1.1. Introdução à otimização.....	103
5.1.2. Introdução ao “Design Optimization”	103
5.1.3. Grupos de projetos possíveis e impossíveis	106
5.1.4. Grupo de melhor projeto.....	107
5.1.5. Métodos de otimização e ferramentas de projeto	107
5.1.6. Métodos de aproximação por subproblema.....	108
5.1.6.1.Métodos de aproximação.....	108
5.1.6.2.Minimizando a aproximação por subproblema	110
5.1.6.3.Convergência.....	113
5.1.7. Método de Otimização de Primeira-Ordem.....	114
5.2. Definição do problema de otimização para a identificação dos parâmetros elásticos.....	114
5.3. Simulações, resultados e discussões.....	116

5.3.1. Primeira simulação	117
5.3.2. Segunda simulação	121
5.3.3. Terceira simulação.....	125
5.3.4. Quarta simulação	129
5.3.5. Quinta simulação	133
5.3.6. Teste na placa de aço experimental	134
6. Conclusões e Trabalhos futuros	138
6.1. Primeiro método	138
6.2. Segundo método	139
6.3. Conclusões finais.....	139
6.4. Trabalhos futuros.....	140
Referências bibliográficas.....	141
Apêndice-A.....	145
A.1 Método Numéricos	145
A.1.1 Método das Diferenças Finitas	145
A.1.2 Integração Numérica.....	151
A.1.3 Interpolação	154
A.1.4 Método dos Resíduos Ponderados	155
Apêndice-B.....	161
B.1 Introdução à otimização.....	161
B.1.1 Projetos de engenharia.....	161
B.1.2 Formulação de projeto de otimização	165
B.1.3 Conceitos de projeto ótimo	168
B.1.4 Métodos numéricos para projeto ótimo	169
B.1.5 Algoritmo geral.....	170

Lista de Figuras

1.1-1	compósito laminado	2
1.1-2	compósito reforçado com fibras contínuas.....	3
1.1-3	compósito reforçado com fibras contínuas entrelaçadas.....	3
1.1-4	compósito reforçado com fibras contínuas picadas.....	3
1.1-5	compósito reforçado com fibras contínuas e picadas.....	3
1.1-6	compósito sanduíche	4
1.1-7	materiais compósitos na indústria aeronáutica.....	5
1.1-8	materiais compósitos na indústria automobilística.....	5
1.1-9	materiais compósitos na indústria esportiva.....	6
1.1-10	corpos de prova para ensaio de tração:1–carregamento longitudinal 2–carregamento transversal.....	6
1.1-11	corpo de prova para ensaio de compressão	7
2.1-1	distribuição de tensões em um ponto material	18
2.1-2	elemento infinitesimal com tensões e forças de campo	20
2.2-1	gráfico tensão x deformação para um material qualquer	26
2.3-1	placa fina	41
2.3-2	elemento de placa sob estado plano de tensão	42
2.3-3	cargas e momentos atuantes no elemento de placa	43
2.3-4	deformação do lado $abcd$ do elemento.....	46
2.3-5	posições inicial e final de um elemento de placa abn_1n_2	47
3.4-1	esquema de montagem experimental para a análise modal.....	58
3.4-2	instalação do shaker.....	59
3.4-3	posicionamento do shaker em relação à placa.....	59
3.4-4	acelerômetro	60
3.4-5	aparelhos utilizados na análise modal	62

3.4-6	transdutor de força e stinger	63
3.7-1	FRF fornecida pelo software STARModal de análise modal experimental.....	67
3.7-2	primeiro modo – modo de torção	68
3.7-3	segundo modo – modo de flexão em y	68
3.7-4	terceiro modo – modo de flexão em x	69
3.7-5	placa de aço utilizada nos ensaios experimentais com seus respectivos nós	69
4.1-1	primeiros modos próprios de vibrar de uma placa ortotrópica.....	80
4.2-1	esquema de utilização dos programas para o primeiro método.....	87
4.2-2	modo de torção da placa de aço com 176 nós sem interpolação	91
4.2-3	derivada segunda em y do modo de torção da placa de aço com 176 nós sem interpolação.....	91
4.2-4	derivada segunda em x do modo de torção da placa de aço com 176 nós sem interpolação.....	91
4.2-5	derivada segunda em xy do modo de torção da placa de aço com 176 nós sem interpolação.....	92
4.2-6	modo de flexão em y da placa de aço com 176 nós sem interpolação	92
4.2-7	derivada segunda em x do modo de flexão em y da placa de aço com 176 nós sem interpolação	92
4.2-8	derivada segunda em y do modo de flexão em y da placa de aço com 176 nós sem interpolação	93
4.2-9	derivada segunda em xy do modo de flexão em y da placa de aço com 176 nós sem interpolação	93
4.2-10	modo de flexão em x da placa de aço com 176 nós sem interpolação	93
4.2-11	derivada segunda em x do modo de flexão em x da placa de aço com 176 nós sem interpolação	94
4.2-12	derivada segunda em y do modo de flexão em x da placa de aço com 176 nós sem interpolação	94
4.2-13	derivada segunda em xy do modo de flexão em x da placa de aço com 176 nós sem interpolação	94
4.2-14	modo de flexão em x com interpolação spline	95
4.2-15	derivada segunda do modo de flexão em x com interpolação spline	95
4.2-16	modo de flexão em x com interpolação cúbica	96
4.2-17	derivada segunda em x do modo de flexão em x com interpolação cúbica.....	96

4.2-18	esquema de utilização dos programas para o primeiro método.....	97
4.2-19	modo de flexão em y da placa experimental do ensaio 2 sem interpolação	99
4.2-20	modo de flexão em x da placa experimental do ensaio 2 sem interpolação	100
4.2-21	modo de torção da placa experimental do ensaio 2 sem interpolação.....	100
4.2-22	modo de flexão em y da placa experimental do ensaio 2 com interpolação cúbica.....	100
4.2-23	modo de flexão em x da placa experimental do ensaio 2 com interpolação cúbica	101
4.2-24	modo de torção da placa experimental do ensaio 2 com interpolação cúbica.....	101
5.3-1	fluxograma das etapas do processo de determinação das constantes elásticas para verificação do segundo método	117
5.3-2	fluxograma das etapas do processo de determinação das constantes elásticas para o segundo método	134
A-1	função contínua qualquer	146
A-2	triângulo de Hammer para a integração direta	153
B-1	modelo para desenvolvimento de um projeto.....	162
B-2	fluxograma de um processo de projeto convencional	163
B-3	fluxograma de um processo de projeto ótimo	164
B-4	classificação dos métodos de otimização	169

Lista de Tabelas

2.2-1	índices de C_{ij} e C_{ijkl}	30
2.2-2	Coefficientes elásticos na relação tensão-deformação para diferentes materiais e sistemas de coordenadas.....	35
3.4-1	placa de aço utilizada na análise modal experimental.....	57
3.7-1	freqüências experimentais e numéricas.....	66
3.7-2	modos próprios com suas respectivas freqüências naturais e fatores de amortecimento	70
3.7-3	variação das freqüências naturais em relação à variação do número de pontos....	70
3.7-4	variação das freqüências em relação à variação do módulo de elasticidade e espessura da placa	72
3.7-5	variação das freqüências em relação a variação das densidades.....	73
3.7-6	variação das freqüências alterando somente a direção das fibras do laminado.....	74
3.7-7	variação das freqüências alterando o tipo de material de apenas uma lâmina do laminado	74
3.7-8	valores das flechas para o mesmo modo de flexão em x em placas com propriedades diferentes.....	75
4.2-1	características geométricas e propriedades das placas utilizadas para a verificação do método	88
4.2-2	resultados para o primeiro método sem interpolação.....	89
4.2-3	resultados para o primeiro método com interpolação spline.....	90
4.2-4	resultados para o primeiro método com interpolação cúbica.....	90
4.2-5	valores obtidos para a placa de aço utilizada nos ensaios experimentais sem interpolação.....	98
4.2-6	valores obtidos para a placa de aço utilizada nos ensaios experimentais com interpolação spline.....	98

4.2-7	valores obtidos para a placa de aço utilizada nos ensaios experimentais com interpolação cúbica.....	99
5.3-1	características da placa 1 utilizada na primeira simulação.....	118
5.3-2	freqüências utilizadas como sendo as freqüências naturais experimentais.....	118
5.3-3	tolerâncias e limites das variáveis de otimização para a primeira etapa; placa...	118
5.3-4	grupos de valores iniciais para as variáveis de projeto	119
5.3-5	resultados obtidos da primeira etapa	119
5.3-6	tolerâncias e limites das variáveis de otimização para a segunda etapa; placa 1	120
5.3-7	resultados obtidos da segunda etapa.....	120
5.3-8	características da placa 1 utilizada na segunda simulação	121
5.3-9	freqüências utilizadas como sendo as freqüências experimentais.....	121
5.3-10	tolerâncias e limites das variáveis de otimização para a primeira etapa; placa 1	122
5.3-11	grupos de valores iniciais para as variáveis de projeto	122
5.3-12	resultados obtidos da primeira etapa	123
5.3-13	reajuste dos limites e tolerâncias	124
5.3-14	grupos de valores iniciais para as variáveis de projeto	124
5.3-15	características da placa 2 utilizada na terceira simulação	125
5.3-16	freqüências utilizadas como sendo as freqüências experimentais.....	126
5.3-17	tolerâncias e limites das variáveis de otimização para a primeira etapa; placa 2	126
5.3-18	grupos de valores iniciais para as variáveis de projeto	127
5.3-19	resultados obtidos da primeira etapa	127
5.3-20	tolerâncias e limites das variáveis de otimização para a segunda etapa; placa 2	128
5.3-21	resultados obtidos da segunda etapa.....	128
5.3-22	características da placa 3 utilizada na quarta simulação	129
5.3-23	freqüências utilizadas como sendo as freqüências experimentais.....	130
5.3-24	tolerâncias e limites das variáveis de otimização para a primeira etapa; placa 3	130
5.3-25	grupos de valores iniciais para as variáveis de projeto	131
5.3-26	resultados obtidos da primeira etapa	131
5.3-27	tolerâncias e limites das variáveis de otimização para a segunda etapa; placa 3	132
5.3-28	grupos de valores iniciais para as variáveis de projeto	132
5.3-29	características da placa de alumínio do artigo de HWANG e CHANG, 2000 ...	133
5.3-30	freqüências experimentais fornecidas pelo artigo de HWANG e CHANG (2000)	133

5.3-31	valores iniciais e resultados obtidos	133
5.3-32	resultados obtidos	134
5.3-33	características da placa	135
5.3-34	freqüências naturais medidas experimentalmente	135
5.3-35	valores dos ajustes iniciais	135
5.3-36	grupos de valores iniciais para as variáveis de projeto	136
5.3-37	resultados obtidos na primeira etapa	136
5.3-38	tolerâncias e limites das variáveis de otimização para a segunda etapa.....	136
5.3-39	resultados obtidos na segunda etapa.....	137

Lista de símbolos principais

Primeiro método

ε_x , ε_y e ε_z : deformação linear ao longo dos eixos x , y e z respectivamente;

γ_{yz} , γ_{xz} e γ_{xy} : deformação de cisalhamento (ou deformação angular) nos planos yz , xz e xy respectivamente.

σ_x , σ_y e σ_z : tensões normais ao longo dos eixos x , y e z , respectivamente;

τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yx} , τ_{yx} , τ_{zx} e τ_{zy} : tensões tangenciais (ou de cisalhamento) ao longo dos planos xy , xz , yx , yz , zx e zy , respectivamente;

C_{ijkl} : coeficientes de rigidez da matriz de constantes elásticas $[C]$;

S_{ijkl} : coeficientes de deformabilidade da matriz compliance $[S]$;

l_{ij} : cossenos diretores;

E_x , E_y e E_z : módulo de elasticidade longitudinal (ou módulo de Young) nas direções x , y e z , respectivamente;

G_{xy} , G_{yz} e G_{xz} : módulo de elasticidade transversal (ou módulo de cisalhamento) para os planos xy , yz e xz , respectivamente;

ν_{xy} , ν_{yz} e ν_{xz} : coeficientes de Poisson para os planos xy , yz e xz , respectivamente;

w : função flecha;

D : rigidez;

ρ : densidade da placa;

ω : frequência natural;

h : espessura da placa;

W : função ponderadora;

φ : função flecha aproximada;

Φ : função amplitude para a função φ ;

Z : função amplitude para a função w .

Segundo método

g_i , h_i e w_i : variáveis de estado

α_i , β_i e γ_i : tolerâncias das variáveis de estado;

F : função objetivo;

f_{num} : frequência natural numérica;

f_{exp} : frequência natural experimental;

ν : coeficiente de Poisson;

E : módulo de elasticidade longitudinal;

G : módulo de cisalhamento

Capítulo 1 – Introdução

1.1 Materiais compósitos

Os materiais de aplicação estrutural, utilizados hoje pela engenharia, podem ser divididos em quatro categorias básicas: metais e suas ligas, cerâmicos, polímeros e compósitos. Estes últimos são obtidos a partir da combinação entre as duas ou três demais categorias em unidade estrutural macroscópica, o que conseqüentemente lhes conferem a presença de fases distintas.

A maior parte dos materiais estruturais macroscopicamente homogêneos é, na verdade, combinações microscópicas de uma ou mais fases diferentes e com propriedades próprias, dispersas em uma matriz de forma a otimizar e globalizar suas propriedades mecânicas.

A resistência e a tenacidade à fratura associada às ligas metálicas e a alguns polímeros de engenharia são obtidas graças à combinação, a nível microscópico, de fases de elevada resistência com fases de maior ductilidade. O aço galvanizado, por exemplo, consiste basicamente de aço comum recoberto por uma camada de zinco, combinando a resistência mecânica do aço com a resistência à corrosão do zinco. Em compósitos, esta combinação é visualizada sob um ponto de vista mais macroscópico. São materiais fisicamente distintos e mecanicamente separáveis em que um dos constituintes se encontra na forma de fibra ou de pequenas placas, partículas, com uma razão de volume entre as fases maior que dez por cento e entre as propriedades, principalmente as de rigidez e resistência mecânica, maior ou igual a cinco (ARGAWAL e BROUTMAN, 1996). São também materiais que se caracterizam por apresentarem mudanças em suas propriedades físicas de acordo com a combinação de seus componentes constituintes. Sendo assim, a dispersão de um material em outro deve ocorrer de forma controlada e seguindo processos de fabricação específicos e adequados para cada necessidade.

De maneira geral, os compósitos apresentam duas partes básicas: matriz e reforço. Sua qualidade está diretamente relacionada, dentre outros fatores, com a interação dessas duas partes. Podem ser divididos em grupos de acordo com a forma das fases imersas na matriz. Assim tem-se:

- *compósitos reforçados com fibras*: são aqueles em que a segunda fase está presente na forma de fibras, podendo ser estas contínuas, entrelaçadas (figura 1.1-3, GIBSON, 1994) ou não (figura 1.1-2, GIBSON, 1994), picadas (figura 1.1-4, GIBSON, 1994) ou ambas, contínuas e picadas. Neste caso, estes compósitos são chamados de *compósitos híbridos* (figura 1.1-5, GIBSON, 1994). Como exemplo de fibras mais usados nestes tipos de compósitos, pode-se citar as fibras de vidro, fibras de grafite e carbono, fibras de Kevlar, fibras de boro, etc. A figura 1.1-1 ilustra um compósito laminado que, em vários casos, são formados por camadas (lâminas) reforçadas por fibras.

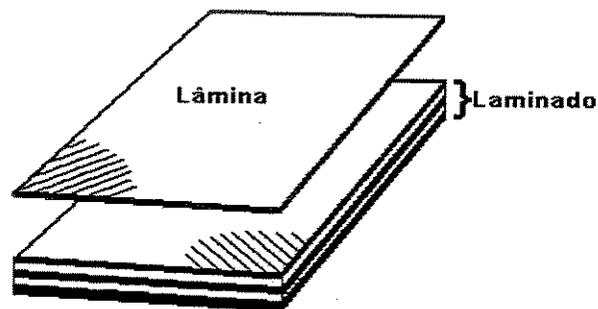


figura 1.1-1: compósito laminado.

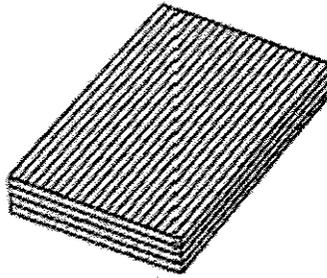


figura 1.1-2: compósito reforçado com fibras contínuas.

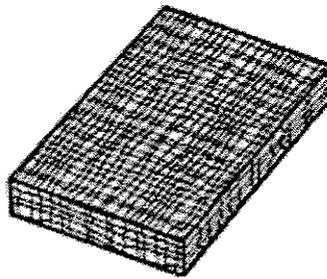


figura 1.1-3: compósito reforçado com fibras contínuas entrelaçadas.

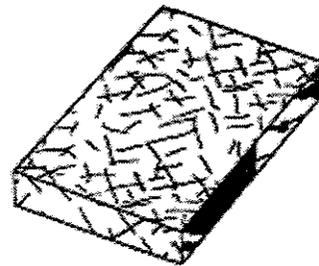


figura 1.1-4: compósito reforçado com fibras contínuas picadas.

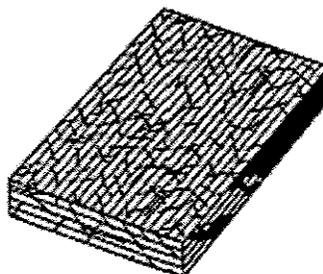


figura 1.1-5: compósito reforçado com fibras contínuas e picadas.

- *compósitos particulados*: são aqueles onde a segunda fase é adicionada à matriz na forma de partículas ou grãos;
- *espumas*: compósitos entre um sólido e um gás, de grande aplicação na área de embalagens;
- *compósitos sanduíche* (figura 1.1-6, GIBSON, 1994): são compósitos em que sua estrutura consiste de uma construção laminada com duas ou mais lâminas formando faces delgadas, também chamadas de pele, com um núcleo na forma de colméia e espesso em relação a espessura das faces. Estas faces podem ser de metal ou de material compósito, e o núcleo, geralmente, é metálico ou de polímero.

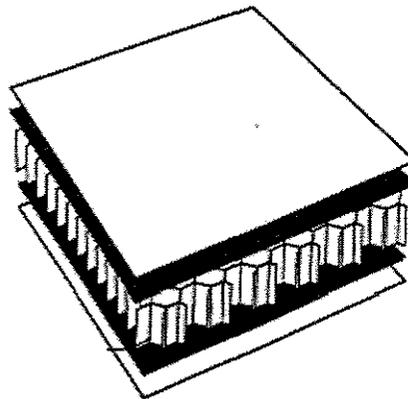


figura 1.1-6: compósito sanduíche.

Atualmente, os compósitos são materiais que estão presentes em vários tipos de indústrias, tais como: automobilística, aeronáutica, de veículos aeroespaciais, indústria eletrônica, de eletrodomésticos, de tubos, de containers, de artigos esportivos, de construção civil, e outras. São geralmente utilizados devido às propriedades desejáveis não obtíveis por outro tipo de material pertencente às outras categorias citadas. Dentre os materiais usados em engenharia, os compósitos apresentam a maior relação de rigidez por densidade, chamada de *rigidez específica*, e maior resistência mecânica por densidade, chamada de *resistência mecânica específica*, que são propriedades que podem contribuir para uma grande redução da massa em componentes de um projeto. Devido à imensa

capacidade de combinações e arranjos das fibras, os engenheiros e projetistas têm à sua disposição materiais para atender um grande número de aplicações, principalmente em projetos que exijam características específicas, tais como: resistência mecânica e dureza elevada, resistência à corrosão e à abrasão, boas propriedades de acabamento, baixa interação com fluidos, elevada resistência térmica, boas propriedades químicas em meios agressivos, baixa fragilidade, ausência de irritabilidade e, toxicidade baixa. Os compósitos são também, na maioria, materiais que apresentam uma grande capacidade de serem moldados em diversas geométricas, característica esta importante para certas áreas da engenharia onde o uso de outros tipos de materiais poderia ser inadequado ou até mesmo impossível. As figuras 1.1-7, 1.1-8 e 1.1-9 abaixo, exemplificam o uso de materiais compósitos nas indústrias aeronáutica, automobilística esportiva e de artigos esportivos, respectivamente.

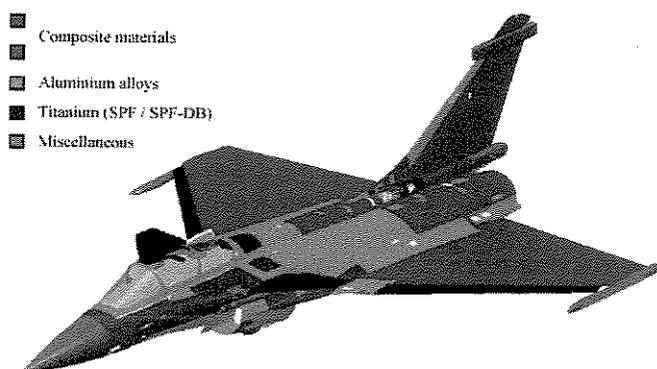


figura 1.1-7: materiais compósitos na indústria aeronáutica

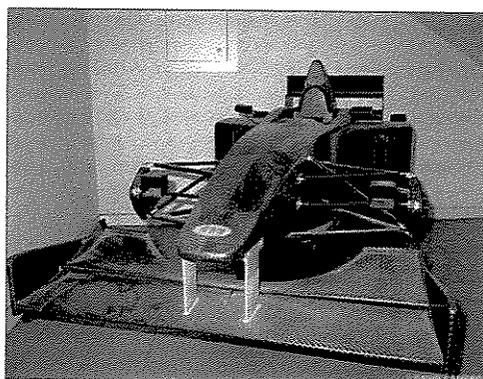


figura 1.1-8: materiais compósitos na indústria automobilística.



figura 1.1-9: materiais compósitos na indústria esportiva.

Os métodos experimentais utilizados para determinar as constantes elásticas, nestes materiais, são os ensaios estáticos e os ensaios dinâmicos. Devido a sua simplicidade, os ensaios estáticos são mais comuns. Entretanto, estes exigem um número considerável de corpos de prova com seqüências de camadas específicas, normalmente $[0]_8$, $[90]_{16}$ e $[\pm 45]_{28}$ (CARLSSON e PIPES, 1997). Este fato representa uma das desvantagens deste método, uma vez que estas seqüências de camadas raramente representam as seqüências do laminado real. Além disso, fatores tais como: efeitos de borda, campos de tensões ou deformações não uniformes e, respostas referentes à regiões localizadas do corpo de prova (algumas vezes devido a falhas na confecção dos mesmos), além de influenciarem os resultados, são fatores difíceis de serem controlados durante a execução dos ensaios, o que torna estes ensaios não tão atrativos. As figuras 1.1-10 e 1.1-11 exemplificam corpos de prova utilizados nos ensaios estáticos de tração de compressão.

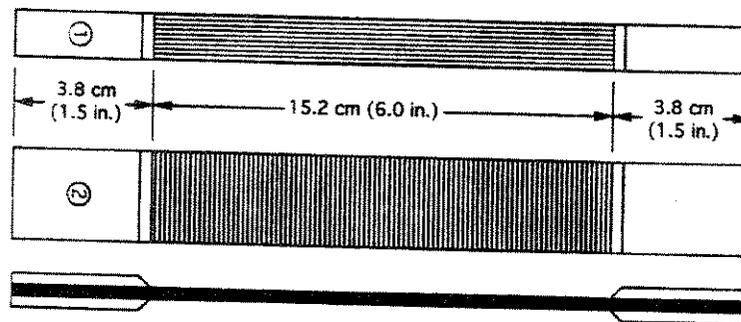


figura 1.1-10: corpos de prova para ensaio de tração: 1 – carregamento longitudinal; 2 – carregamento transversal.

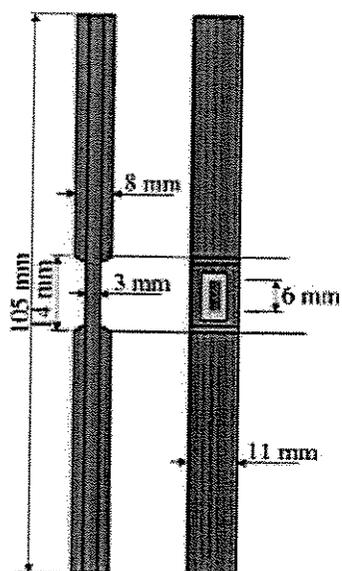


figura 1.1-11: corpo de prova para ensaio de compressão.

Uma abordagem alternativa para se determinar estas constantes elásticas são através dos ensaios dinâmicos. Estes ensaios experimentais combinam análise modal e métodos numéricos. As constantes elásticas são obtidas com um único corpo de prova, com a mesma seqüência de camadas do laminado real. As propriedades elásticas, neste caso, representam valores globais para o laminado, com pouca influência de imperfeições locais. Além disso, estes ensaios são não destrutivos e podem até ser utilizados em controle de qualidade. Os corpos de prova são geralmente placas e quase sempre placas finas (que seguem as hipóteses de Kirchhoff), uma vez que em vigas, a análise modal só é capaz de fornecer duas constantes elásticas.

1.2 Objetivos

Este trabalho tem por objetivo determinar as constantes elásticas de materiais compósitos através de dois métodos que envolvem ensaios experimentais e simulações numéricas. No primeiro método, as frequências naturais e os modos próprios medidos experimentalmente são utilizados como dados de entrada para um programa desenvolvido

no software Matlab 7.0 para a realização dos cálculos que identificam os parâmetros elásticos do material. Neste, são usados os métodos numéricos de Diferenças Finitas, Integração Numérica e Interpolação. Já no segundo método utilizado para o cálculo das constantes elásticas, somente as frequências naturais medidas experimentalmente são dados de entrada para uma rotina desenvolvida em um software comercial baseado no método dos *Elementos Finitos*, que executará todos os cálculos. Trata-se da resolução de um problema de projeto ótimo cuja solução é obtida por otimização. Este trabalho também tem por objetivo:

- verificar a eficácia dos métodos numéricos abordados (Diferenças Finitas, Integração Numérica e Interpolação);
- comparar a precisão dos dois métodos adotados para o cálculo das constantes elásticas;
- verificar a importância na precisão dos dados medidos através da análise modal.

1.3 Revisão bibliográfica

A identificação das propriedades elásticas por meio do comportamento dinâmico de uma estrutura se baseia na relação entre os modos de vibrar e/ou frequências naturais com os parâmetros elásticos. Entretanto, em geral, as soluções analíticas para o comportamento dinâmico de estruturas, especialmente aquelas de materiais compósitos, só são possíveis para casos particulares, o que exige que algum método numérico seja usado no processo de identificação.

Na grande maioria dos trabalhos, os dados medidos experimentalmente são geralmente as primeiras frequências naturais. É feito um modelo numérico para a estrutura e criada uma função objetivo que apresenta um mínimo quando as frequências naturais e numéricas se aproximam. As constantes elásticas são identificadas através de um processo iterativo que busca a minimização da função objetivo. Nestes casos, as técnicas mais usadas

são métodos como Rayleigh-Ritz ou Galerkin, uma vez que a estrutura é quase sempre limitada a uma placa retangular, o que não justifica o emprego de métodos numéricos mais robusto como, por exemplo, o método dos elementos finitos. Este tipo de abordagem tem sido utilizada em muitos trabalhos que analisam as particularidades dos métodos numéricos utilizados na discretização da estrutura e, principalmente, no processo iterativo para se ajustar as constantes elásticas a partir das medidas de vibrações da placa. A aplicação destes procedimentos de identificação de constantes elásticas para estruturas ortotrópicas e anisotrópicas ocorreu com maior intensidade a partir do final dos anos 80 com o trabalho de McINYRE e WOODHOUSE (1988) que apresentaram um processo simples onde todas as quatro constantes elásticas de um laminado ortotrópico podem ser determinadas rapidamente e com relativa precisão utilizando as frequências de ressonância dos modos mais baixos de placas retangulares finas com bordas livres. Também, no mínimo três das quatro constantes de amortecimento podem ser determinadas medindo-se os fatores de amortecimento dos mesmos modos. AYORINDE e GIBSON (1995) apresentaram um método para encontrar as quatro constantes elásticas independentes (módulo de Young transversal e longitudinal, módulo de cisalhamento no plano, e a razão de Poisson principal) em um material ortotrópico utilizando dados da ressonância obtidos por análise modal em uma placa em vibração livre. O uso de três e de seis modos foi comparado com base nos resultados de problemas posteriores e inversos. FREDERIKSEN (1998) investigou uma técnica inversa de identificação de constantes elásticas através das frequências naturais de uma placa analisando parâmetros de incertezas devido a erros experimentais. AYORINDE e YU (1999), em um trabalho mais detalhado, apresentaram um método para encontrar as constantes elásticas de materiais compósitos através de informações da ressonância obtidas da análise modal, onde o material se encontrava sob vibração livre. Estes materiais eram isotrópicos e ortotrópicos. Os modos diagonais são incluídos na representação dos três termos de deformação do método Rayleigh otimizado para as placas de compósitos quadradas isotrópicas ou quase isotrópicas. HWANG e CHANG (2000) desenvolveram um método inverso combinando elementos finitos e projeto ótimo para determinar as constantes elásticas em placas de materiais compósitos. As frequências naturais experimentais são dados de entrada para a solução do problema. As constantes elásticas são primeiramente escolhidas de forma aleatória e as frequências

naturais correspondentes são calculadas através de um software de elementos finitos. Essas frequências naturais calculadas são comparadas com as frequências naturais medidas experimentalmente, no material que se deseja conhecer as propriedades elásticas, através do uso de uma função chamada de função objetivo. Trata-se de um problema de projeto ótimo cuja solução é dada por otimização. As iterações são executadas até que sejam satisfeitas as condições de parada estipuladas anteriormente. O método proposto envolve testes simples, que exigem pouco esforço computacional. Tais testes foram realizados em várias placas com condições de contorno livres e restritas. BASTOS (2001) estudou a identificação de parâmetros elásticos (constantes de engenharia) em placas retangulares ortotrópicas do tipo “colméia” sanduíche. Ele adotou um método não destrutivo para a identificação de tais parâmetros elásticos através de medidas experimentais das frequências naturais de uma placa em vibração livre. O problema de estimação dos parâmetros elásticos é resolvido minimizando-se as diferenças entre as frequências naturais medidas experimentalmente e as frequências calculadas através do método dos mínimos quadrados. O método numérico para o cálculo das frequências naturais foi a formulação de Rayleigh-Ritz. BERTHELOT e ANOULVANT (2001) desenvolveram uma análise extensiva para o problema de determinar as rigidezes de flexão de laminados simétricos e ortotrópicos. Usaram placas retangulares em vibração flexional com diferentes condições de contorno, tais como bordas livres e engastadas. Os métodos de aproximação de Rayleigh e Ritz foram considerados para a avaliação das vibrações flexionais das placas. RIKARDS et al. (2001) desenvolveram um método numérico-experimental para identificar as propriedades elásticas de laminados anisotrópicos a partir de dados obtidos experimentalmente. Propuseram usar o método de projeto experimental e a superfície resposta aproximada para resolver o problema inverso de identificação das constantes elásticas. As aproximações da superfície resposta foram obtidas usando as informações do comportamento de uma estrutura no ponto de referência do projeto experimental. HUANG et al. (2003) desenvolveram um algoritmo de identificação das constantes elásticas, para corpos de materiais ortotrópicos bi-dimensionais, baseado na minimização de uma função objetivo definida como sendo uma soma quadrática das diferenças entre os deslocamentos medidos e os calculados em um modelo de elementos de contorno. Este problema de minimização é resolvido usando o método de Levenberg-Marquardt, onde o cálculo da matriz Jacobiana se

baseia na diferenciação das equações matriciais de elementos de contorno algébricas discretizadas. FIGUEIREDO et al. (2004) identificaram as constantes elásticas em laminados compósitos utilizando-se frequências naturais experimentais e numéricas. As frequências naturais experimentais foram medidas por meio de ensaios de vibração livre em uma placa. O método numérico adotado se baseia na utilização da teoria clássica de placas, nas hipóteses de Kirchoff, e envolve a formulação de Rayleigh-Ritz, que utiliza polinômios ortogonais que satisfazem a condição de bordos livres da placa. As constantes elásticas foram calculadas através de minimização de uma função objetivo onde os parâmetros que a minimizam são as constantes elásticas procuradas. Para a minimização desta função, foi desenvolvido um algoritmo de busca inteligente de “downhill”, onde não necessita de gradientes de primeira e segunda ordem e nem do cálculo dos autovetores. MUTHURAJAN et al. (2004) examinaram a possibilidade de avaliar constantes elásticas de placas finas retangulares especialmente ortotrópicas, através das medidas das frequências naturais de placas em balanço, desenvolvendo uma expressão para essas placas para determinar as frequências naturais. PINTELON (2004) usando técnicas de identificação de sistemas mostraram como o módulo de Young dependente da frequência pode ser calculado precisamente em uma banda larga de frequências através de vibração forçada, longitudinal e flexional, em vigas sob a condição de bordas livres. LAUWAGIE et al. (2004) desenvolveram um método não-destrutivo para estimar as propriedades elásticas no plano para cada camada individual. O método proposto encontra as propriedades do material utilizando as frequências de ressonância de placas vibrando livremente.

Uma abordagem alternativa, que identifica as constantes elásticas sem o uso de um processo iterativo, foi proposta por GRÉDIAC e PARIS (1996). Eles usaram um método direto para determinar seis constantes elásticas independentes de placas finas de materiais anisotrópicos utilizando-se as frequências naturais e os modos próprios das placas. As constantes de rigidez desconhecidas eram a solução de um sistema linear onde as equações foram obtidas com um ajuste de funções ponderadoras à diferentes modos de vibrar. Mais tarde, GRÉDIAC et al. (1998) desenvolveram um método experimental para o cálculo dos modos e das frequências naturais baseado em excitação acústica, por meio de alto-falantes, e medida dos deslocamentos utilizando-se sensores ópticos. Os resultados experimentais

foram inseridos como dados de entrada no procedimento proposto no trabalho anterior (GRÉDIAC e PARIS, 1996). As constantes de rigidez desconhecidas foram determinadas diretamente sem nenhum cálculo iterativo.

Alguns trabalhos também trataram da identificação de constantes elásticas porém a partir de resultados de ensaios estáticos. Embora estes tipos de propostas sejam similares às que envolvem carregamento dinâmico, a maior dificuldade está na obtenção dos parâmetros elásticos que fortemente influenciam na torção da placa. No caso dinâmico, os modos de torção aparecem quando se tem todas as bordas livres, que é uma condição facilmente realizável e experimentalmente. No caso estático, pode-se usar a condição engastada livre, porém é mais difícil de se garantir um engastamento efetivo no ensaio experimental. WANG e KAM (2000) apresentaram um método de minimização para a caracterização do material de placas de compósitos laminados utilizando os resultados de testes estáticos. As respostas mecânicas, como deslocamentos e deformações, foram medidas através de ensaios estáticos realizados em placas e também através do método dos elementos finitos. Uma função erro pode então ser estabelecida para calcular as diferenças entre as duas respostas, experimental e teórica, das placas de compósitos laminadas analisadas. A identificação das constantes é formulada como um problema de minimização restrito em que as constantes elásticas são determinadas fazendo-se a função erro um mínimo global.

A influência da seqüência de empilhamento nas freqüências naturais e nos fatores de amortecimento modal foi analisada por TITA (1999), em que montou um banco de ensaios com amostras a base de epóxi e fibras de vidro considerando diferentes seqüências de empilhamento das lâminas para a realização de análise modal. Tais experimentos também foram utilizados para validar os resultados do modelo teórico proveniente de uma análise numérica realizada pelo método dos elementos finitos. Seu trabalho propôs também um ciclo de desenvolvimento de projeto para estes componentes integrando procedimentos de simulações numéricas e experimentais e visando a otimização do projeto do componente com maior rapidez, confiabilidade e menor custo.

Um resumo de várias técnicas de identificação de constantes elásticas a partir de análise modal foi apresentado por GIBSON (2000) que mostrou que a análise modal tanto em um único modo como em vários modos de vibrar pode ser usada para determinar módulos elásticos e fatores de amortecimento de compósitos e seus constituintes sob várias condições ambientais. Com a técnica de excitação impulsiva, ele demonstra que além de ser uma forma rápida e precisa para a caracterização das propriedades intrínsecas do material, também pode ser usada para controle de qualidade e inspeção.

No presente trabalho são abordados dois métodos de identificação de constantes elásticas. Um primeiro método é apresentado baseado nos trabalhos de GRÉDIAC e PARIS (1996) no qual a identificação é feita de maneira direta, sem o uso de processos iterativos. E, um segundo método é analisado baseado no método proposto por HWANG e CHANG (2000), que combina o método dos elementos finitos e técnicas de projeto ótimo para determinar as constantes elásticas em placas de materiais compósitos. A análise modal experimental é realizada utilizando-se procedimentos padrões, conforme os propostos por ERWINS (1984).

1.4 Apresentação do trabalho

Este trabalho foi dividido em seis capítulos onde são apresentadas revisões literárias e toda metodologia de identificação dos parâmetros elásticos dos dois métodos abordados. Visando uma melhor compreensão por parte do leitor, os capítulos foram organizados da seguinte maneira:

- *Capítulo 2:* neste capítulo é feita uma revisão literária da mecânica dos materiais, onde é apresentado vários conceitos básicos cujo objetivo é o de mostrar a dedução da equação diferencial que governa a vibração transversal de uma placa fina anisotrópica, não amortecida e sob a condição de bordos livres. Esta equação é a equação utilizada no primeiro método abordado neste trabalho.

- *Capítulo 3*: neste capítulo foi descrito alguns conceitos básicos sobre análise modal e os experimentos realizados neste trabalho. São apresentados todos os aparelhos e materiais utilizados na análise modal experimental.
- *Capítulo 4*: aqui é descrito o primeiro método abordado para a identificação dos parâmetros elásticos. São apresentados os resultados e as discussões das simulações numéricas e dos testes experimentais executados para verificar a precisão deste método.
- *Capítulo 5*: neste é descrito o segundo método para determinar as constantes elásticas juntamente com uma revisão sobre o método de otimização utilizado no Ansys 7.0. É definido o problema de projeto ótimo a ser resolvido por otimização de acordo com as possibilidades e restrições oferecidas pelo software. São mostrados também os resultados e discussões para as simulações e testes realizados.
- *Capítulo 6*: este é o capítulo das conclusões sobre os métodos abordados. Também são apresentadas propostas para trabalhos futuros.

Além destes capítulos, o trabalho possui também dois apêndices, *A* e *B*, onde é feita uma revisão literária sobre o Método dos Resíduos Ponderados, Integração Numérica e Interpolação Numérica utilizados no primeiro método e, uma revisão sobre conceitos básicos de otimização de projetos para a compreensão do segundo método.

Capítulo 2 - Mecânica dos materiais

2.1 Introdução

A mecânica dos materiais é um ramo da mecânica aplicada que lida com o comportamento dos corpos deformáveis sujeitos a diversos tipos de carregamento. Seu principal objetivo é determinar as tensões, as deformações e os deslocamentos em estruturas e seus componentes quando submetidas à ação de cargas (GERE, 2003). Para o cálculo dessas deformações e tensões utilizam-se as propriedades físicas dos materiais, várias leis teóricas e conceitos técnicos. Assim, a solução dos problemas na mecânica dos sólidos torna-se vinculados a princípios fundamentais da mecânica (conservação de massa, conservação de momento, conservação de energia, leis de irreversibilidade e termodinâmica) e a leis (ou equações) constitutivas do material que modelam o seu comportamento.

2.1.1 Propriedades mecânicas dos materiais

As *propriedades mecânicas* compreendem as respostas dos materiais às influências de agentes mecânicos externos, manifestadas pela capacidade dos corpos em desenvolverem deformações reversíveis e irreversíveis, e de resistirem à fratura.

2.1.2 Propriedades elásticas dos materiais

As *propriedades elásticas* ou também conhecidas como “*constantes elásticas*” são características importantes da resistência dos materiais, e são características inerentes de cada material. O comportamento de um material qualquer submetido às influências de agentes mecânicos externos, tais como forças, está diretamente relacionado com estas

propriedades. São elas: *módulo de elasticidade longitudinal*, também conhecido como *módulo de Young*; *módulo de elasticidade transversal* ou *módulo de cisalhamento* e *coeficiente de Poisson* ou *razão de Poisson*. Essas propriedades são consideradas como sendo as principais, mas existem outras, como pode ser visto no item 2.2.4 deste trabalho.

De maneira geral, a teoria da elasticidade pode ser dividida em quatro categorias principais (LAMATTINA, 1997): relações cinemáticas, equações de equilíbrio, condições de contorno e, relações constitutivas. As três primeiras categorias são independentes e, portanto, aplicáveis a qualquer material. Porém, as relações constitutivas são dependentes do material.

2.1.3 Tensões

Um membro ou um corpo quando submetido à ação de forças terá seu comportamento dependente das *Leis Fundamentais da Mecânica Newtoniana*. Estas tratam do equilíbrio de forças e das *características mecânicas do material*, que são por sua vez, características obtidas através de ensaios em corpos de prova. Essas forças podem ser *externas* e *internas*. Define-se como forças externas àquelas forças aplicadas diretamente ao corpo, como reações dos suportes e outras, e o peso próprio. Já as forças internas são àquelas decorrentes das forças externas e aparecem nas seções internas dos corpos. Sendo assim, para que um corpo esteja em *equilíbrio* é necessário que qualquer parte dele também esteja, ou seja, as forças externas, que estão atuando em um lado de um corte arbitrário, devem ser compensadas pelas forças internas. O equilíbrio pode ser *estático* ou *dinâmico*, podendo este último ser reduzido também a um equilíbrio estático, ou seja, para qualquer corpo, pode-se imaginar como estando instantaneamente em estado de equilíbrio estático (Princípio de d'Alembert).

Considerando-se um *sistema dextrógiro de eixos cartesianos*, cujas coordenadas cartesianas são representadas por x , y e z , pode-se considerar o equilíbrio estático para um corpo sólido como sendo:

$$\sum F_{x,y,z} = 0, \quad (2.1-1)$$

que representa o somatório de forças atuantes nas direções x , y e z . Essas forças podem ser cortantes (ou de cisalhamento) ou forças axiais, de tração ou compressão. E, a expressão:

$$\sum M_{x,y,z} = 0, \quad (2.1-2)$$

representa o somatório dos momentos em x , y e z causados pelas forças externas. Podem ser momento fletor ou momento torsor. Estas equações de momento (força x braço) podem ser utilizadas diretamente aos corpos deformáveis admitindo-se suas dimensões originais quando estas deformações forem desprezíveis comparadas às dimensões totais da estrutura.

Em geral, as forças internas que atuam em áreas infinitesimais de um corte têm magnitudes e direções variadas. Essas forças são de natureza vetorial e mantêm o equilíbrio com as forças externas aplicadas. Na mecânica dos sólidos é particularmente significativo definir a intensidade dessas forças como sendo a resistência à deformação nas várias partes do corte. A *tensão* pode ser definida como sendo a força normal dividida pela área em que esta força está sendo aplicada ou, em outras palavras, são as componentes da intensidade da força por unidade de área. Partindo-se desse conceito, para uma seção do corpo, tem-se:

$$\tau_{xx} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A}; \quad (2.1-3)$$

$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A}; \quad (2.1-4)$$

$$\tau_{xz} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A}, \quad (2.1-5)$$

sendo A a área da seção transversal do corpo onde a força está sendo aplicada.

Pode-se representar as tensões como τ_{ij} , onde o primeiro subscrito i refere-se à direção perpendicular ao plano da área, ou seja, refere-se à direção externa da face em que a componente de tensão age, e o segundo subscrito j se refere à direção da tensão. Quando

$i = j$, a tensão é chamada de *tensão normal*, que por sua vez, pode ser de tração ou de compressão. Costuma-se dizer que neste caso, para um sistema cartesiano, $\tau_{xx} = \sigma_x$, $\tau_{yy} = \sigma_y$ e $\tau_{zz} = \sigma_z$. Quando $i \neq j$, as tensões são chamadas de *tensões tangenciais*. Estas tensões sempre ocorrem aos pares, e para que o corpo esteja em equilíbrio, $\tau_{ij} = \tau_{ji}$. Para um elemento cúbico de dimensões infinitesimais, dx , dy e dz , como mostrado na figura 2.1-1, também chamado de *ponto material*, tem-se:

- Tensões normais: σ_x , σ_y e σ_z ;
- Tensões tangenciais, ou de cisalhamento: τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yx} , τ_{yx} , τ_{zx} e τ_{zy} .

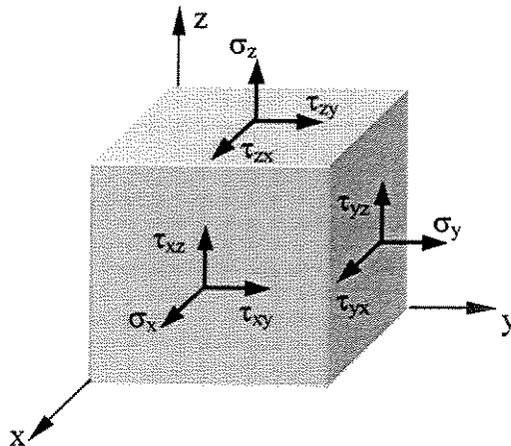


figura 2.1-1: distribuição de tensões em um ponto material.

Sendo assim, existem nove componentes de tensão. As tensões constituem um tensor de segunda ordem pois necessitam de dois índices para identificar seu elemento ou componente. O tensor de tensões será:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}. \quad (2.1-6)$$

As componentes de tensão em um corpo contínuo que está em equilíbrio devem satisfazer as equações de equilíbrio, como foi dito anteriormente. Para o sistema cartesiano tem-se:

$$\sum F_x = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0; \quad (2.1-7)$$

$$\sum F_y = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0; \quad (2.1-8)$$

$$\sum F_z = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0, \quad (2.1-9)$$

sendo X , Y e Z as forças que atuam no corpo por unidade de volume nas direções x , y e z , respectivamente, podendo ser forças inerciais ou de campo, tais como as provocadas pelo peso próprio ou efeito magnético. A figura 2.1-2 (POPOV, 1978) mostra estas forças X e Y para o plano xy . O equilíbrio dos momentos é assegurado por $\tau_{ij} = \tau_{ji}$.

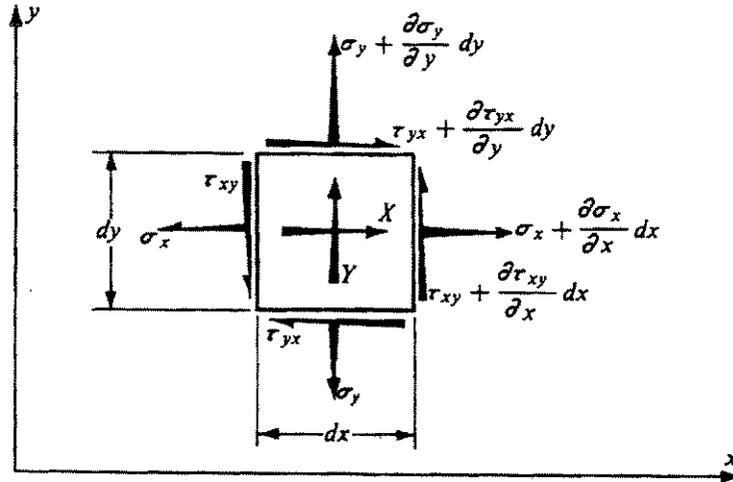


figura 2.1-2: elemento infinitesimal com tensões e forças de campo.

Quando este sistema convencional de eixos não fornece informações significativas sobre a tensão em um ponto, torna-se necessário transformar as tensões de um conjunto de eixos para outro. Em alguns casos, as tensões são analisadas em planos inclinados. Assim, conhecendo-se as componentes de tensões nos planos normais aos eixos das coordenadas é possível determinar a tensão em qualquer plano inclinado com normal n que passa através de um plano dado. Assim:

$$T_{xn} = \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y) + \tau_{xz} \cos(n, z); \quad (2.1-10)$$

$$T_{yn} = \tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y) + \tau_{yz} \cos(n, z); \quad (2.1-11)$$

$$T_{zn} = \tau_{xz} \cos(n, x) + \tau_{yz} \cos(n, y) + \sigma_z \cos(n, z), \quad (2.1-12)$$

sendo T_{xn} , T_{yn} e T_{zn} as componentes do vetor referentes às coordenadas do plano inclinado. Após determiná-las, pode-se encontrar facilmente por projeções, as componentes normal e tangencial da tensão em um plano com normal n . As tensões normais de valores máximos e mínimos são chamadas de *tensões normais principais*, e as direções em que atuam essas tensões são chamadas de *direções principais*.

2.1.4 Deformações

Diz-se que um corpo se *deforma* quando há *mudança de temperatura* ou quando há uma *carga externa* atuando sobre o mesmo. As deformações geralmente variam de um ponto para outro. Quando a posição relativa de dois pontos quaisquer em um sólido é alterada, este sólido é considerado deformado. O estado de deformação de um ponto em um corpo contínuo é caracterizado por seis componentes de deformação, onde três referem-se à mudança de volume, designados por ε e seus respectivos subscritos, e três referem-se à mudança de forma, designados por γ com dois subscritos. Sendo assim, para o sistema cartesiano considerado, tem-se:

- $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ e ε_z : *deformação linear* ao longo dos eixos x, y e z respectivamente;
- γ_{yz}, γ_{zx} e γ_{xy} : *deformação de cisalhamento*, ou *deformação angular* nos planos yz, xz e xy respectivamente.

As componentes de deformação podem ser expressas em termos de deslocamentos. Considerando-se u como sendo o deslocamento na direção x , v o deslocamento na direção y , e w o deslocamento na direção z , quando não existirem limitações para estender as deformações, então as relações entre $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}, u, v$ e w podem ser dadas, de acordo com as relações cinemáticas (AMBARTSUMYAN, 197), como:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]; \quad (2.1-13)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]; \quad (2.1-14)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right]; \quad (2.1-15)$$

$$\sin \gamma_{yz} = \frac{\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z}}{(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z)}; \quad (2.1-16)$$

$$\sin \gamma_{xz} = \frac{\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z}}{(1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_z)}; \quad (2.1-17)$$

$$\sin \gamma_{xy} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}}{(1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)}. \quad (2.1-18)$$

Para o caso de pequenas deformações, as derivadas ao quadrado dos deslocamentos são pequenas comparadas com a unidade e estas fórmulas podem ser simplificadas para:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad (2.1-19)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad (2.1-20)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad (2.1-21)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \quad (2.1-22)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}; \quad (2.1-23)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2.1-24)$$

Estas equações (2.1-19) a (2.1-24) acima são as equações usadas pela engenharia na maioria dos casos onde se admite pequenas deformações, e são verdadeiras para qualquer corpo contínuo, tanto elástico como inelástico. Elas são suficientes para resolver problemas de equilíbrio estático, dinâmico e de estabilidade de um corpo elástico.

Da mesma forma que foi anteriormente para um tensor de tensão, representando um tensor de deformação como ε_{ij} , a chamada *deformação normal* ocorre quando $i = j$, e descreve a extensão ou contração por unidade de comprimento ao longo da direção correspondente. A *deformação por cisalhamento* ocorre quando $i \neq j$ e descreve a distorção associada com as linhas que eram originalmente paralelas aos eixos ortogonais. As deformações lineares e de cisalhamentos exprimem o tensor de deformação, que é análogo ao tensor de tensões. Entretanto, as relações para deformações angulares devem ser modificadas a fim de se ter um tensor (uma entidade que deve obedecer a certas leis de transformação). Fisicamente, então, a definição para deformação angular como mudança no ângulo γ não é aceitável quando essa deformação angular for componente de um tensor. Pode-se definir, da mesma forma que para as tensões, o *tensor de deformações* como sendo:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}. \quad (2.1-25)$$

Tensor de deformação (ε_{ij}) e deformação (γ_{ij}) para engenharia são conceitos diferentes. No caso de deformação normal, em que $i = j$, tem-se que $\varepsilon_{ij} = \gamma_{ij}$, mas para a deformação de cisalhamento tem-se que $\varepsilon_{ij} = \gamma_{ij}/2$. O tensor acima também pode ser representado como:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{yx}/2 & \varepsilon_y & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{zx}/2 & \gamma_{zy}/2 & \varepsilon_z \end{pmatrix}. \quad (2.1-26)$$

A deformação de cisalhamento em engenharia γ_{ij} descreve que a distorção total muda no ângulo entre as linhas que eram originalmente paralelas às direções dos eixos i e j , mas o tensor de deformação de cisalhamento ε_{ij} descreve a soma da rotação das linhas.

2.2 Leis Constitutivas

2.2.1 Introdução

A resposta mecânica interna de um sólido a uma ação externa pode ser expressa em termos de tensões e deformações. Para relacionar as componentes de tensão com as componentes de deformação, torna-se necessário o uso de um modelo que represente as propriedades elásticas do corpo. Em geral, na relação entre tensão-deformação em um ponto de um material elástico, cada componente de tensão está relacionada com cada componente de deformação com a seguinte expressão geral:

$$\sigma_{ij} = f_{ij}(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}, \varepsilon_{32}, \varepsilon_{33}), \quad (2.2-1)$$

sendo f_{ij} uma função que pode ser linear ou não.

Uma vez cessada a ação ou causa geradora de tensões e deformações, um sólido é dito *elástico* se retornar à sua situação inicial sem guardar deformações residuais. A esta propriedade dá-se o nome de *elasticidade*. Os *materiais elásticos* (ou *sólidos elásticos*) podem ter um comportamento linear ou não. Os que apresentarem uma relação essencialmente linear entre tensão e deformação são chamados de *linearmente elásticos* e aqueles que apresentarem um comportamento não-linear, são chamados de *materiais não-linearmente elásticos*.

Para um material elástico linear cujas relações entre tensão e deformação são lineares para cada ponto, excluindo os efeitos de condições ambientais, essas relações podem ser dadas por equações da forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{21} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1112} & C_{1132} & C_{1113} & C_{1121} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2212} & C_{2232} & C_{2213} & C_{2221} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3312} & C_{3332} & C_{3313} & C_{3321} \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ C_{2111} & C_{2122} & C_{2133} & C_{2123} & C_{2131} & C_{2112} & C_{2132} & C_{2113} & C_{2121} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{32} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} \end{Bmatrix}, \quad (2.2-2)$$

sendo $[C]$ uma matriz (9 x 9) de *constantes elásticas*, e seus componentes (C_{ijkl}) são chamados de *coeficientes de rigidez*. Esta matriz contém, no caso mais geral, um total de 81 componentes. Esta expressão (2.2-2) também pode ser representada de forma mais simplificada, em notação indicial, como:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}, \quad (2.2-3)$$

sendo os dois primeiros subscritos (ij) dos termos da matriz $[C]$ correspondentes aos subscritos (ij) dos termos de tensão ou deformação. Os índices i , j , k e l variam de 1 a 3. O tensor C_{ijkl} relaciona cada um dos nove componentes do tensor de deformação a cada um dos nove componentes do tensor de tensão.

Esta equação (2.2-3) acima, representa a *Lei de Hooke generalizada* e está baseada no *princípio da superposição*, em que a tensão e a deformação resultante em um sistema sujeito à ação de diversas forças é igual à soma algébrica de seus efeitos quando aplicados separadamente. Esse princípio será verdadeiro se cada deformação (ϵ_{ij}) for *diretamente e linearmente* relacionada com a tensão (σ_{ij}), e se as deformações (ϵ_{ij}) decorrentes de uma

componente de tensão (σ_{ij}) não causarem grandes efeitos anormais sobre outra tensão. Portanto, essas relações são válidas somente para materiais que sofrerem deformações elásticas, como mostra o gráfico da figura 2.2-1.

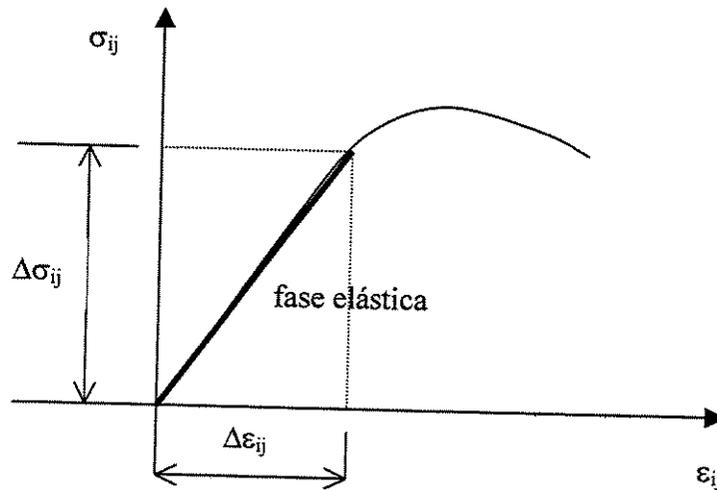


figura 2.2-1: gráfico tensão x deformação para um material qualquer.

É comum também, representar a expressão (2.2-3) como:

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl}, \quad (2.2-4)$$

ou também:

$$\{\varepsilon\} = [S]\{\sigma\}, \quad (2.2-5)$$

onde a matriz $[S]$ é chamada de *matriz compliance* (que é igual à $[C]^{-1}$) e seus coeficientes (S_{ijkl}) são conhecidos como *coeficientes de deformabilidade*.

Na prática, não se costuma trabalhar com as equações (2.2-3) e (2.2-4) desta forma, uma vez ser possível simplificá-las através das condições de simetria. Estas equações estão em sua forma mais geral, sem nenhuma simetria.

2.2.2 Homogeneidade

Todos materiais reais possuem alguma forma de simetria. Estas relações, apresentadas até agora, são somente válidas para um ponto do material. Define-se um material como sendo *homogêneo* quando a constituição física do material se mantém constante ao longo de todo seu volume. Como consequência, as suas características, propriedades elásticas, se mantêm constantes em todos os pontos do corpo, ou seja, são idênticas em todas as direções paralelas passando através de qualquer um de seus pontos (LEKHNITSKII, 1968). Não quer dizer que tais propriedades em um determinado ponto sejam as mesmas em todas as direções.

No caso de um compósito, por exemplo, sob um ponto de vista mais microscópico, a tensão, a deformação e o módulo de elasticidade mudam de um ponto para outro. Nestes, o módulo de elasticidade da matriz é diferente do reforço. Por isso, em compósitos é mais conveniente se fazer uma análise mais macroscópica usando médias para os valores de tensão e deformação, que são relacionados por módulos efetivos de um material homogêneo equivalente.

2.2.3 Simetrias

Uma vez que o tensor de tensão pode ser definido como sendo:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad (2.2-6)$$

para materiais onde a relação *tensão x deformação* é linear, a densidade de energia de deformação U deve ser uma função quadrática da deformação que, no caso mais geral, pode ser caracterizada pela seguinte série polinomial (MASCIA, 1999):

$$U = C_0 + \alpha_{ij} \varepsilon_{ij} + \beta_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}, \quad (2.2-7)$$

sendo os termos C_0 e β_{ijkl} constantes. Considerando que a energia de deformação é nula para um estado livre de deformação, ou seja, $U = 0$ para $\varepsilon_{ij} = 0$, é possível arbitrar à essa constante C_0 um valor igual a zero. O tensor de tensão, segundo o qual a equação (2.2-6) é dada, será:

$$\sigma_{ij} = \alpha_{ij} + (\beta_{ijkl} + \beta_{klij})\varepsilon_{kl}. \quad (2.2-8)$$

Assumindo que o estado livre de tensões corresponde a um estado livre de deformações ($\alpha_{ij} = 0$) e fazendo:

$$C_{ijkl} = \beta_{ijkl} + \beta_{klij}, \quad (2.2-9)$$

pode-se escrever:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (2.2-10)$$

Com base nesta expressão (2.2-10) percebe-se que as tensões tangenciais provocam deformações tangenciais e normais. Assim:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}} = C_{ijkl}, \quad (2.2-11)$$

e:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = C_{klij}. \quad (2.2-12)$$

Nota-se que, as expressões acima (2.2-10) e (2.2-11) estão de acordo com as derivadas relativas à expressão (2.2-8). Dessa forma, o tensor C_{ijkl} é simétrico em relação aos pares de índices (i, j) e (k, l) , ou seja:

$$C_{(ij) (kl)} = C_{(kl) (ij)}. \quad (2.2-13)$$

Lembrando-se que os tensores de tensão e deformação devem ser simétricos (devido ao equilíbrio do sistema), e utilizando-se da expressão (2.2-10), para a simetria do tensor σ_{ij} , tem-se:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} = \sigma_{ji} = C_{jikl} \varepsilon_{kl}, \quad (2.2-14)$$

e daí:

$$C_{ijkl} = C_{jikl}. \quad (2.2-15)$$

E, para a simetria do tensor ε_{ij} , tem-se:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} = C_{ijlk} \varepsilon_{lk}; \quad (2.2-16)$$

e então:

$$C_{ijkl} = C_{ijlk}. \quad (2.2-17)$$

Com estas simetrias, tem-se: quando $C_{ijkl} = C_{jikl}$, o número de constantes elásticas será reduzido de 81 para 54 e; quando $C_{ijkl} = C_{ijlk}$, o número de constantes elásticas será reduzido de 54 para 36.

A existência de uma função densidade de energia que satisfaça a equação (2.2-6) garante que o material não viole as leis da termodinâmica (não gere energia em um ciclo de carregamento e descarregamento) e ao mesmo tempo exige que o tensor (C_{ijkl}) apresente simetria da forma (2.2-13). Portanto, quando $C_{(ij) (kl)} = C_{(kl) (ij)}$, o número de constantes

agora será reduzido de 36 para 21 sendo que 18 são independentes. Os materiais que apresentam este número de constantes elásticas são chamados de *materiais anisotrópicos*.

Ao invés de escrever a expressão (2.2-10) com os índices das constantes sob a forma C_{ijkl} , ($i, j = 1, \dots, 3$), pode-se fazer simplificações de forma a representá-los como C_{ij} , ($i, j = 1, 2, \dots, 6$), como mostra a tabela 2.2-1 abaixo.

Tabela 2.2-1: índices de C_{ij} e C_{ijkl} .

Índices de C_{ij}	Índices de C_{ijkl}
1	11
2	22
3	33
4	12
5	23
6	13

Sendo assim, considerando as simetrias, a equação (2.2-2) pode ser expressa como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix}. \quad (2.2-18)$$

O tensor C_{ijkl} também pode ser escrito em um novo sistema de coordenadas de tal forma que, através de uma matriz de transformação, se encontra as constantes (C'_{mnop}) do novo sistema de coordenadas. Com isso (ALBUQUERQUE, 2001):

$$C'_{mnop} = l_{mi} l_{nj} l_{ok} l_{pl} C_{ijkl}, \quad (2.2-19)$$

ou, se utilizar a matriz compliance:

$$S'_{mnop} = l_{mi}l_{nj}l_{ok}l_{pl}S_{ijkl}, \quad (2.2-20)$$

sendo l_{ij} os cossenos diretores.

2.2.3.1 Simetria elástica em um plano

Considerando um sistema de eixos cartesianos x , y e z , e assumindo que um plano pode ser passado através de vários pontos de um corpo, este plano será de simetria elástica quando duas direções quaisquer que são simétricas com respeito a este plano são equivalentes em todos os aspectos no que concerne às propriedades de elasticidade. Em um corpo homogêneo, todos esses planos passando por diferentes pontos são paralelos. A direção normal a este plano recebe o nome de *direção principal de elasticidade*. Considerando-se esta direção principal como sendo a direção da coordenada z , os cossenos diretores, l_{ij} , em uma rotação de eixos coordenados em um sentido anti-horário é dado por:

$$l_{ij} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta & 0 \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.2-21)$$

Os valores das constantes elásticas devem permanecer constantes em qualquer direção após uma rotação do sistema de coordenadas de 180° em torno de qualquer um dos três eixos mutuamente perpendiculares. Considerando uma rotação de 180° em torno de z , tem-se:

$$l_{ij} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.2-22)$$

Desta forma:

$$C'_{ijkl} = l_{im} l_{jn} l_{ko} l_{lp} C_{mnop} = C_{ijkl}, \quad (2.2-23)$$

e assim:

$$\begin{aligned} C_{1123} &= -C_{1123} \\ C_{1113} &= -C_{1113} \\ C_{2223} &= -C_{2223} \\ C_{2213} &= -C_{2213} \\ C_{3323} &= -C_{3323} \\ C_{3313} &= -C_{3313} \\ C_{1223} &= -C_{1223} \\ C_{1213} &= -C_{1213} \end{aligned} \quad (2.2-24)$$

Estas igualdades são possíveis se, e somente se, seus valores forem nulos, ou seja:

$$C_{1123} = C_{1113} = C_{2223} = C_{2213} = C_{3323} = C_{3313} = C_{1223} = C_{1213} = 0, \quad (2.2-25)$$

e dessa forma, o número de constantes diferentes cai para 13, sendo que 11 são independentes devido ao fato que, das duas últimas linhas deste tensor pode-se tirar condições de dependência entre C_{2323} , C_{3131} e C_{2331} . As propriedades elásticas serão diferentes em duas outras direções que não z' e z . Assim, aplicando a Lei de Hooke, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{54} & C_{55} & 0 \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix}. \quad (2.2-26)$$

2.2.3.2 Simetria elástica em três planos

Quando três planos, mutuamente perpendiculares, de simetria elástica passam por vários pontos de um corpo homogêneo, as equações da Lei de Hooke Generalizada para o sistema de coordenadas x, y e z , (sendo esses eixos normais aos planos de simetria e considerando o mesmo procedimento do item anterior) será:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix}. \quad (2.2-27)$$

O número de constantes elásticas independentes agora será 9. Os eixos x, y e z , neste caso, são chamados de *direções principais* do material, e as constantes elásticas para estas direções são chamadas de *constantes elásticas principais*. Um corpo que apresenta estas características é chamado de *anisotrópico ortogonal* ou simplesmente de *ortotrópico*. Constituem, portanto, um caso especial de anisotropia em que as propriedades em uma direção particular são as mesmas ao longo do material, e as propriedades em outras direções perpendiculares a esta direção particular são as mesmas (mas diferentes das primeiras propriedades), ou seja, as propriedades são diferentes nas direções longitudinal, radial e transversal.

2.2.3.3 Plano de isotropia

Quando através de vários pontos de um corpo passa um plano em que todas as direções são equivalentes com relação às propriedades elásticas, ou seja, um plano em que estas propriedades não variam com a direção, o mesmo recebe o nome de *plano de isotropia*. Este plano é, por sua vez, um plano de simetria elástica. Supondo novamente o sistema de coordenadas x, y e z com o eixo z normal ao plano considerado, e impondo uma

rotação de um ângulo qualquer (θ) em torno deste eixo, percebe-se que o tensor de constantes elásticas não será modificado. Fazendo-se então a transformação dos tensores através da matriz transformação (2.2-21) para um ângulo (θ), percebe-se também que as condições de simetria transversalmente isotrópicas podem ser facilmente obtidas a partir de um material ortotrópico. Assim, a Lei de Hooke é escrita como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} = C_{11} & C_{23} = C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} = C_{31} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} = C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} = C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix}. \quad (2.2-28)$$

O número de constantes elásticas independentes neste caso cai de 9 para 5. Os materiais com estas características são chamados de *transversalmente isotrópicos*.

2.2.3.4 Simetria completa

Quando um corpo apresenta as mesmas propriedades em todas as direções, este recebe o nome de *isotrópico*. Todos os planos são planos de simetria elástica e todas as direções são direções principais. Nestes tipos de materiais, quando muda-se o sistema de coordenadas para um outro, ou seja, passa de x, y e z para x', y' e z' , os valores de suas constantes elásticas não mudam. Para estes materiais agora, existem 12 constantes elásticas não nulas, mas apenas duas são independentes, e com isto a equação para a Lei de Hooke pode ser bastante simplificada. Para este caso:

$$\begin{aligned} C_{12} &= C_{21} = C_{13} = C_{31} = C_{23} = C_{32} \\ C_{11} &= C_{22} = C_{33} \\ C_{44} &= C_{55} = C_{66} \end{aligned} \quad (2.2-29)$$

E para a Lei de Hooke:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & (C_{11} - C_{12})/2 & 0 & 0 \\ & SIM & & & (C_{11} - C_{12})/2 & 0 \\ & & & & & (C_{11} - C_{12})/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix}. \quad (2.2-30)$$

2.2.3.5 Outras simetrias

De acordo com GIBSON (1994) o número de constantes elásticas pode, de forma geral, variar dependendo do tipo de material e de acordo com o número de dimensões analisadas, como pode ser visto na tabela 2.2-2 abaixo (GIBSON, 1994).

Tabela 2.2-2: Coeficientes elásticos na relação tensão-deformação para diferentes materiais e sistemas de coordenadas.

Material e sistema de coordenadas	Número de coeficientes diferente de zero	Número de coeficientes independentes
Caso tri-dimensional		
anisotrópico	36	18
Geralmente ortoprópico (coordenadas não-principais)	36	9
Especialmente ortotrópico (coordenadas principais)	12	9
Especialmente ortotrópico (transversalmente isotrópico)	12	5
Isotrópico	12	2
Caso bi-dimensional		
Anisotrópico	9	6
Geralmente ortoprópico (coordenadas não-principais)	9	4
Especialmente ortotrópico (coordenadas principais)	5	4
Ortotrópico balanceado ou simétrico quadrado (coordenadas principais)	5	3
Isotrópico	5	2

2.2.4 Constantes de engenharia

Quando um material é caracterizado experimentalmente, as então chamadas “*constantes de engenharia*” são usualmente determinadas ao invés de C_{ij} ou de S_{ij} . E são estas também grandemente utilizadas em análises e projetos por serem facilmente definidas e interpretadas em termos de simples estado de tensão ou de deformação. São elas:

- *módulo de elasticidade* ou *módulo de Young* (E): é medido pela razão entre a tensão normal e a deformação linear dentro do limite elástico, onde a deformação é totalmente reversível e proporcional à tensão. Em um sistema de coordenadas cartesiano x, y e z , pode-se ter E_x, E_y e E_z , que são os módulos dessas respectivas direções x, y e z ;
- *módulo de cisalhamento* ou *módulo de elasticidade transversal* ou ainda *módulo de Coulomb* (G): é uma constante de proporcionalidade cujas dimensões são as mesmas de (E). Pela Lei de Hooke em cisalhamento tem-se que $\tau = G\gamma$. Em um sistema de coordenadas cartesiano x, y e z , pode-se ter G_{xy}, G_{yz} e G_{xz} , que são os módulos para os planos xy, yz e xz , respectivamente;
- *coeficiente de Poisson* ou *razão de Poisson* (ν): é a relação entre deformação linear lateral que surge na direção perpendicular ao carregamento axial no corpo, com a deformação linear na direção do carregamento axial. Em um sistema de coordenadas cartesiano, x, y e z , pode-se ter ν_{xy}, ν_{yz} e ν_{xz} , que são os coeficientes para os planos xy, yz e xz respectivamente.

Considerando então estas constantes, para a inversa da equação (2.2-30) de um material isotrópico, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ & & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1/G & 0 & 0 \\ & & & & 1/G & 0 \\ & & & & & 1/G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}, \quad (2.2-31)$$

e, da mesma forma, para a inversa da equação (2.2-27) tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_x & -\nu_{yx}/E_y & -\nu_{zx}/E_z & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{xy}/E_x & 1/E_y & -\nu_{zy}/E_z & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{xz}/E_x & -\nu_{yz}/E_y & 1/E_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{yz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{zx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}. \quad (2.2-32)$$

Devido à simetria para materiais elásticos, de acordo com Green, tem-se:

$$\begin{aligned} E_x \nu_{yx} &= E_y \nu_{xy} \\ E_y \nu_{zy} &= E_z \nu_{yz} \\ E_z \nu_{xz} &= E_x \nu_{zx} \end{aligned} \quad (2.2-33)$$

A inversa da equação (2.2-28) torna-se:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu'/E' & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu'/E' & 0 & 0 & 0 \\ -\nu'/E' & -\nu'/E' & 1/E' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}, \quad (2.2-34)$$

sendo E o módulo de elasticidade do plano de isotropia; E' é o módulo de elasticidade perpendicular ao plano de isotropia; $G = \frac{E}{2(1-\nu)}$ é módulo de elasticidade transversal ao plano de isotropia; G' é o módulo de elasticidade transversal para qualquer plano normal ao plano de simetria; ν é a razão de Poisson para um carregamento aplicado ao plano de simetria e; ν' é a razão de Poisson que caracteriza a deformação normal do plano de simetria na direção perpendicular a o carregamento quando o carregamento é aplicado na direção normal ao plano de simetria. Geralmente as cinco constantes independentes são: E , E' , ν , ν' , e G' sendo G .

Considerando agora o caso mais de geral de anisotropia total (LEKHNITSKII, 1963), para a matriz compliance, tem-se:

$$\begin{aligned}
 S_{11} &= 1/E_x \\
 S_{12} &= \nu_{xy}/E_x = -\nu_{yx}/E_y \\
 S_{13} &= -\nu_{zx}/E_x = -\nu_{xz}/E_z \\
 S_{14} &= \eta_{yz,x}/E_x = \eta_{x,yz}/G_{yz} \\
 S_{15} &= \eta_{zy,x}/E_x = \eta_{x,zy}/G_{yz} \\
 S_{16} &= \eta_{xy,x}/E_x \\
 S_{22} &= 1/E_y \\
 S_{23} &= \nu_{zy}/E_y = -\nu_{yz}/E_z \\
 S_{24} &= \eta_{yz,x}/E_y = \eta_{yz,z}/G_{yz} \\
 S_{25} &= \eta_{zx,y}/E_y = \eta_{y,zx}/G_{xz} \\
 S_{26} &= \eta_{xy,y}/E_y = \eta_{y,xy}/G_{xy} \\
 S_{33} &= 1/E_z \\
 S_{34} &= \eta_{yz,z}/E_z = \eta_{z,yz}/G_{yz} \\
 S_{35} &= \eta_{zx,x}/E_z = \eta_{z,zx}/G_{xz}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{36} &= \eta_{xy,z} / E_z = \eta_{z,xy} / G_{xy} \\
S_{44} &= 1 / G_{yz} \\
S_{45} &= \zeta_{zy,yz} / G_{yz} = \zeta_{yz,zx} / G_{xz} \\
S_{46} &= \zeta_{xy,yz} / G_{yz} = \zeta_{yz,xy} / G_{xy} \cdot \\
S_{55} &= 1 / G_{xz} \\
S_{56} &= \zeta_{xy,zx} / G_{xz} = \zeta_{zx,xy} / G_{xy} \\
S_{66} &= 1 / G_{xy}
\end{aligned} \tag{2.2-35}$$

Para escrever em notação indicial associa-se os eixos x , y e z aos números 1, 2 e 3, respectivamente, nas constantes de engenharia. Assim, $x = 1$, $y = 2$ e $z = 3$.

Logo, para a equação (2.2-35) acima tem-se: E_i ($i = 1, 2, 3$) são os módulos de elasticidade longitudinais; G_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) são os módulos de elasticidade transversais para os planos definidos por (i, j) ($i, j = 1, 2, 3$); ν_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) são os coeficientes de Poisson; $\eta_{ij,k}$ ($i, j, k = 1, 2, 3$) são os coeficientes de influência mútua de primeira espécie que caracterizam extensões nas direções dos eixos principais produzidas por tensões tangenciais agindo nos planos principais; $\eta_{i,jk}$ ($i, j, k = 1, 2, 3$) são os coeficientes de influência mútua de segunda espécie que expressam deformações tangenciais nos planos principais causadas pelas tensões normais atuantes nos planos principais; $\zeta_{ij,kl}$ ($i, j, k, l = 1, 2, 3$) são os coeficientes de “Chentsov” que caracterizam as deformações tangenciais em planos paralelos aos planos principais de elasticidade causadas por tensões tangenciais que atuam em outros planos paralelos aos planos principais de elasticidade.

2.3 Placas

2.3.1 Introdução

As *placas* são elementos estruturais com superfícies limites planas e simétricas em relação a um plano médio, com a dimensão normal a esse plano pequena em comparação com as outras e submetidos a cargas externas perpendiculares ao plano médio (GIBSON, 1994). A dimensão normal ao plano médio, compreendida entre as superfícies, é a espessura da placa. Se as superfícies limites forem planos paralelos tem-se uma placa de espessura constante; caso contrário, terá-se uma placa de espessura variável.

As placas podem ser classificadas dependendo da relação entre a sua espessura e a sua menor dimensão em planta em: *espessas*, *delgadas* (ou *finas*) e *muito delgadas*.

- Placas espessas: são aquelas em que a relação entre a espessura e a menor dimensão é maior que 1/5;
- Placas delgadas ou finas: são aquelas em que a relação entre a espessura e a menor dimensão é menor que 1/5 e sujeita a pequenas deflexões, menores que a espessura;
- Placas muito delgadas: a relação entre a espessura e a menor dimensão é muito pequena e, devido a esta pouca espessura, apresentam os momentos fletores provocados pelas cargas pequenos em relação aos esforços de membrana, podendo ser desprezados.

2.3.2 Equação diferencial de deslocamento transversal de placas

A teoria aproximada para deslocamento transversal de placas finas é baseado nas seguintes considerações (hipóteses de Kirchoff):

- Os deslocamentos são pequenas, de modo que a curvatura em qualquer direção pode ser dada pela segunda derivada do deslocamento vertical na direção considerada;
- As seções planas da placa não deformada, que são perpendiculares com a superfície média, permanecem planas e perpendiculares à superfície média com a placa deformada;
- A placa está sob equilíbrio elástico, é homogênea e apresenta espessura constante;
- A placa está submetida à flexão simples.

A figura 2.3-1 representa uma placa fina qualquer com o sistema de coordenadas x , y e z :

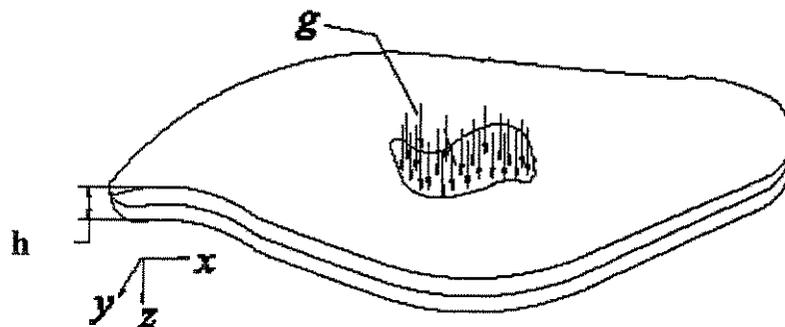


figura 2.3-1: placa fina.

sendo g a carga distribuída no plano da superfície normal em relação ao plano médio (se mantêm normal mesmo com a placa fletida) e h é a espessura. O plano x - y é o plano médio da placa não deformada. Para esta teoria, considere-se que a tensão normal (σ_z), perpendicular ao plano médio, é pequena quando comparada com as tensões perpendiculares às seções transversais, como σ_x , σ_y e τ_{xy} . Assim, considerando somente um elemento infinitesimal da placa, como mostra a figura 2.3-2:

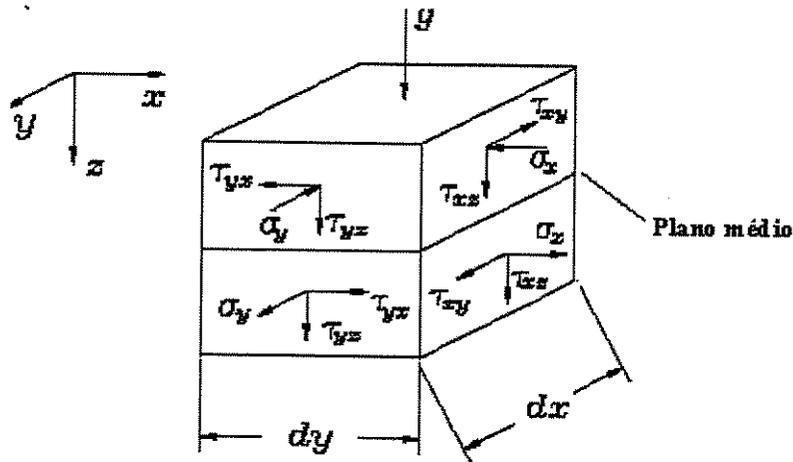


figura 2.3-2: elemento de placa sob estado plano de tensão.

e integrando-se as componentes de tensão ao longo da espessura, pode-se definir:

$$m_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz ; \quad (2.3-1)$$

$$m_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz ; \quad (2.3-2)$$

$$m_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz ; \quad (2.3-3)$$

$$m_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} z dz ; \quad (2.3-4)$$

$$q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz ; \quad (2.3-5)$$

$$q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz; \quad (2.3-6)$$

sendo:

m_x : momento fletor uniformemente distribuído, aplicado nos bordos do lado da placa perpendicular ao eixo x , que produz curvaturas opostas nos planos $(z-x)$ e $(z-y)$;

m_y : momento fletor uniformemente distribuído, aplicado nos bordos do lado da placa perpendicular ao eixo y , que produz curvaturas opostas nos planos $(z-y)$ e $(z-x)$;

m_{xy} : momento uniformemente distribuído, atuante em paralelo ao eixo x e que causa flexão em y ;

m_{yx} : momento uniformemente distribuído, atuante em paralelo ao eixo y e que causa flexão em x ;

q_x : carga uniformemente distribuída, normal ao plano médio $(x-y)$ atuantes no plano $(x-z)$;

q_y : carga uniformemente distribuída, normal ao plano médio $(x-y)$ atuantes no plano $(y-z)$.

Estes momentos e cargas são mostrados na figura 2.3-3.

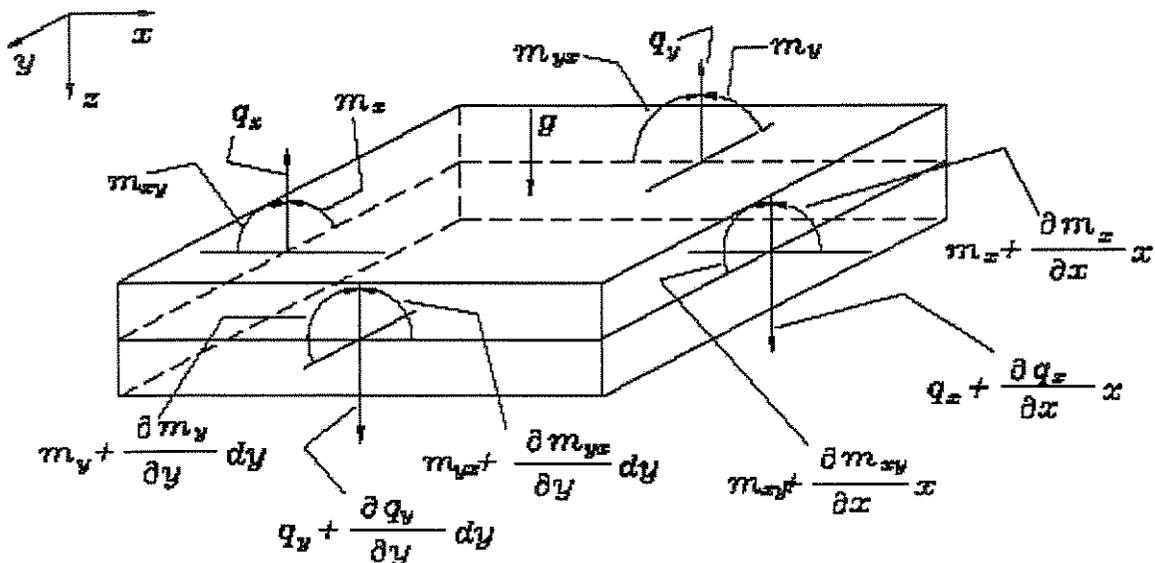


figura 2.3-3: cargas e momentos atuantes no elemento de placa.

Em muitos casos, é necessário calcular os momentos e as forças resultantes em outro sistema de eixos normal e tangencial a o contorno da placa como ocorre quando a placa não é retangular. As três tensões resultantes em um contorno arbitrário com normal n são dadas por:

$$m_n = m_x \cos^2(n, y) + m_y \cos^2(n, x) + 2m_{xy} \cos(n, x) \cos(n, y); \quad (2.3-7)$$

$$m_{nn} = (m_y - m_x) \cos(n, x) \cos(n, y) + m_{xy} [\cos^2(n, x) - \cos^2(n, y)]; \quad (2.3-8)$$

$$q_n = q_x \cos(n, x) + q_y \cos(n, y), \quad (2.3-9)$$

sendo $\cos(n, x)$ e $\cos(n, y)$ os cossenos dos ângulos entre os eixos n e x e, n e y , respectivamente.

Para que haja o equilíbrio de forças em z , pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \sum F_z = 0 &\Rightarrow -q_x dy + \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) dy - q_y dx + \left(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \right) dx + g dx dy = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\partial q_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial q_y}{\partial y} dx dy + q dx dy = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + g = 0. \end{aligned} \quad (2.3-10)$$

Da mesma forma, para que haja equilíbrio dos momentos em relação ao eixo x :

$$\begin{aligned}
\sum M_x = 0 &\Rightarrow q_y dx \frac{dy}{2} + \left(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \right) dx \frac{dy}{2} - m_{xy} dy + \left(m_{xy} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} dx \right) dy + \\
&+ m_y dx - \left(m_y + \frac{\partial m_y}{\partial y} dy \right) dx = 0 \Rightarrow q_y dx dy + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} dx dy - \frac{\partial m_y}{\partial y} dx dy = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} - q_x = 0. \tag{2.3-11}
\end{aligned}$$

E também, para que haja equilíbrio dos momentos em relação ao eixo y :

$$\begin{aligned}
\sum M_y = 0 &\Rightarrow -q_x dy \frac{dx}{2} - \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) dy \frac{dx}{2} + m_{xy} dx - \left(m_{xy} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} dy \right) dx - \\
&- m_x dy + \left(m_x + \frac{\partial m_x}{\partial x} dx \right) dy = 0 \Rightarrow -q_x dx dy - \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} dx dy + \frac{\partial m_x}{\partial x} dx dy = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} - q_y = 0. \tag{2.3-12}
\end{aligned}$$

Isolando-se os termos q_x e q_y das equações (2.3-11) e (2.3-12), respectivamente, e substituindo-se na equação (2.3-10), e também, considerando-se a simetria dos momentos $m_{xy} = m_{yx}$, tem-se:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -g. \tag{2.3-13}$$

A figura 2.3-4 abaixo mostra a posição inicial e final de um elemento dado por $abcd$ paralelo ao plano médio e com lados ab e ad paralelos aos eixos x e y , respectivamente, e distanciados de z do plano médio.

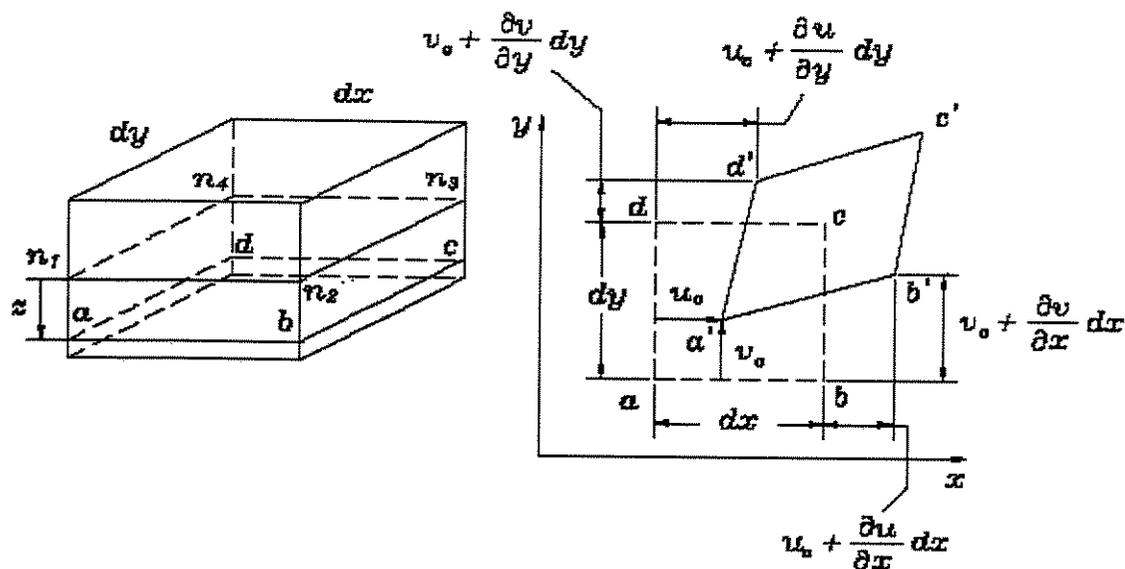


figura 2.3-4: deformação do lado $abcd$ do elemento.

Supondo que durante o estado deformado os pontos a , b , c e d movem-se para a' , b' , c' e d' , respectivamente, e que u_0 é o deslocamento do ponto a na direção x , e v_0 é o deslocamento do ponto a na direção y . Sendo assim, o deslocamento de um ponto b na direção de x pode ser dado por:

$$b'_x - b_x = u_0 + \frac{\partial u}{\partial x} dx. \quad (2.3-14)$$

O incremento no comprimento dx na direção x é dado por:

$$\Delta dx = \frac{\partial u}{\partial x} dx, \quad (2.3-15)$$

e a deformação na direção x é dada por:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (2.3-16)$$

Fazendo-se de maneira similar para a direção y e para o plano $(x-y)$, obtêm-se:

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad (2.3-17)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2.3-18)$$

A figura 2.3-5 abaixo, mostra as posições iniciais e finais de uma seção plana, paralela ao plano $x-y$, que contém os pontos a , b , n_1 e n_2 . A rotação do elemento an_1 , inicialmente localizada na posição vertical, é igual à $(\partial w/\partial x)$.

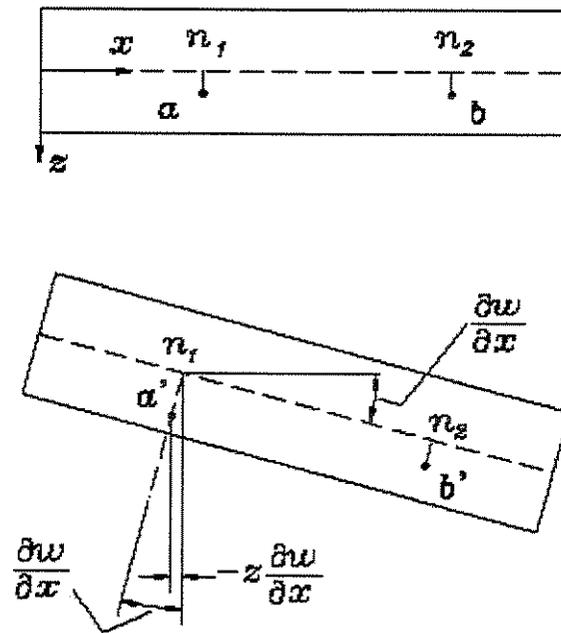


figura 2.3-5: posições inicial e final de um elemento de placa abn_1n_2 .

Então, o deslocamento de um ponto na direção x com uma distância z da superfície média pode ser escrito como:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (2.3-19)$$

em que w representa o deslocamento na direção z e é função de x e y , ou seja, $w = f(x, y)$.

Da mesma forma, o deslocamento de um ponto na direção y distante z da superfície média é dado por:

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (2.3-20)$$

Substituindo as expressões (2.3-19) e (2.3-20) nas (2.3-16), (2.3-17) e (2.3-18) tem-se:

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad (2.3-21)$$

$$\varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad (2.3-22)$$

$$\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (2.3-23)$$

Para um estado plano de tensão, onde os termos da equação (2.2-18) $\sigma_{33} = \tau_{12} = \tau_{23} = 0$, esta equação (2.2-18) pode ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{26} \\ S_{16} & S_{26} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (2.3-24)$$

Substituindo as equações (2.3-21), (2.3-22) e (2.3-23) nesta equação (2.3-24) tem-se:

$$\sigma_x = -z \left(B_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right); \quad (2.3-25)$$

$$\sigma_y = -z \left(B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right); \quad (2.3-26)$$

$$\tau_{xy} = -z \left(B_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2B_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right); \quad (2.3-27)$$

sendo os termos B_{ij} constantes dada por:

$$\begin{aligned} B_{11} &= \frac{1}{\Delta} (S_{22}S_{66} - S_{26}^2) \\ B_{22} &= \frac{1}{\Delta} (S_{11}S_{66} - S_{16}^2) \\ B_{12} &= \frac{1}{\Delta} (S_{16}S_{26} - S_{12}S_{66}) \\ B_{66} &= \frac{1}{\Delta} (S_{11}S_{22} - S_{12}^2) \\ B_{16} &= \frac{1}{\Delta} (S_{12}S_{26} - S_{22}S_{16}) \\ B_{26} &= \frac{1}{\Delta} (S_{12}S_{16} - S_{11}S_{26}) \end{aligned}; \quad (2.3-28)$$

e

$$\Delta = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{26} \\ S_{16} & S_{26} & S_{66} \end{vmatrix}. \quad (2.3-29)$$

Substituindo as equações (2.3-25), (2.3-26) e (2.3-27) nas equações (2.3-21), (2.3-22) e (2.3-23) e integrando, tem-se:

$$m_x = -\left(D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right); \quad (2.3-30)$$

$$m_y = -\left(D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right); \quad (2.3-31)$$

$$m_{xy} = -\left(D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right); \quad (2.3-32)$$

sendo:

$$D_{ij} = B_{ij} \frac{t^3}{12}. \quad (2.3-33)$$

Substituindo estas equações (2.3-30), (2.3-31) e (2.3-32) em (2.3-11) e (2.3-12), obtêm-se:

$$q_x = \left[D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 3D_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + D_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right]; \quad (2.3-34)$$

$$q_y = \left[D_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + 3D_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + D_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right]. \quad (2.3-35)$$

Desta forma, a equação (2.3-13) pode ser escrita como:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = g. \quad (2.3-36)$$

Esta equação é a chamada equação diferencial de deslocamento transversal para placas finas anisotrópicas.

O problema de tensão e deformação em placas anisotrópicas torna-se mais complicado quando as cargas mudam com o tempo. A equação de movimento para uma placa anisotrópica é similar a equação de equilíbrio dada pela equação (2.3-36), considerando o termo de força distribuída g como sendo a força de inércia $\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$. E assim, esta equação (2.3-36) torna-se:

$$Z = D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; (2.3-37)$$

sendo:

$w = f(x, y, t)$: função flecha, que representa o deslocamento vertical dos pontos da placa em um dado instante t ;

ρ : densidade da placa;

h : espessura da placa.

Esta equação (2.3-37) é válida para materiais com anisotropia plana. Por não possuírem termos que acoplem o movimento de flexão com o de extensão, a mesma não pode ser aplicada a materiais que possuem acoplamento das deformações transversais ao plano do laminado com as deformações paralelas ao plano, como acontece, por exemplo, quando se tem laminados não simétricos.

Capítulo 3 – Análise Modal

3.1 Introdução

A análise modal é uma ferramenta utilizada para modelar de forma confiável o comportamento dinâmico de estruturas (MAIA, 1997). Em geral, suas aplicações têm por objetivos:

- a identificação e validação dos fenômenos vibratórios;
- a validação, correção e avaliação de modelos dinâmicos analíticos;
- o desenvolvimento de modelos dinâmicos baseados em modelos experimentais;
- a integração de partes de estruturas;
- as possibilidades de modificações estruturais e detecção de defeitos;
- a integração de modelos entre áreas da dinâmica, como acústica, fadiga etc, e;
- o estabelecimento de critérios e especificações para projetos, testes, qualificações e certificados,

o que faz da análise modal uma ferramenta forte e confiável de análise de vibração na engenharia moderna e promove um conhecimento das características da estrutura quando está operando sob certas condições e critérios de performance. Assim, possibilita o melhoramento de projetos em relação a seu comportamento dinâmico e a solução de problemas de dinâmica estrutural.

3.2 Análise modal teórica

Esta parte da análise modal fornece todo conhecimento básico necessário para a compreensão dos fenômenos vibratórios e as várias formas possíveis de se determinar as propriedades modais. As características dinâmicas de uma estrutura vibratória são manifestadas principalmente pelas frequências naturais e modos próprios, e podem ser obtidas através de vários modelos matemáticos da estrutura. Dessa forma, a análise modal teórica utiliza uma rotina dividida em três fases, nas quais, uma típica análise de vibração progride:

- *Descrição da estrutura* \Rightarrow representa o chamado *Modelo Espacial*;
- *Modos de vibrar* \Rightarrow representa o *Modelo Modal*;
- *Níveis de resposta* \Rightarrow representa o *Modelo Resposta*.

A análise inicia-se com uma descrição das características físicas do sistema, usualmente em termos de suas propriedades de massa, rigidez e amortecimento, representadas pelas matrizes de massa $[M]$, de rigidez $[K]$ e de amortecimento $[C]$ (ou $[D]$). Este modelo se refere ao chamado “*Modelo Espacial*” (EWINS, 1984). A análise modal analítica deste modelo espacial conduz a uma descrição do comportamento da estrutura através de seus modos de vibrar, ou seja, a solução deste modelo sempre descreve as várias formas em que a estrutura é capaz de vibrar naturalmente. Sem qualquer excitação externa, estes modos são chamados de *modos normais* ou *naturais*. Esta fase de análise dos modos representa o “*Modelo Modal*”. Este modelo trata-se, portanto, da solução de um problema de *auto-valor* e *auto-vetor*, que fornecerá as propriedades modais (frequências naturais, valores de amortecimentos modais e vetores dos modos próprios) que estão contidas nas matrizes $[\lambda_r^2]$ e $[\Phi]$ chamadas de matrizes de auto-valores e auto-vetores, respectivamente. O terceiro estágio analisa exatamente como a estrutura vibra sob uma condição de excitação e, especialmente, em que amplitudes. Esta etapa não depende somente das propriedades

inerentes da estrutura, mas também da natureza e magnitude da excitação imposta. A este modelo dá-se o nome de “*Modelo Resposta*”, onde ocorre, portanto, um ajuste de funções respostas em frequência (chamadas de FRFs) definidas para um grupo de frequências que se deseja analisar.

Partindo-se da equação de movimento que representa o sistema e considerando o mesmo excitado por uma força harmônica, torna-se possível descrever a solução completa deste sistema através de uma matriz, chamada de *matriz função resposta em frequência* $[H(\omega)]$, onde cada um de seus elementos $H_{jk}(\omega)$ é por si só uma FRF que representa a resposta harmônica em uma coordenada (x_j) do ponto j devido à excitação (f_k) aplicada no ponto k , podendo ser $j = k$. Portanto, pode-se representar o elemento $H_{jk}(\omega)$ como:

$$H_{jk}(\omega) = \frac{x_j}{f_k} = \sum_{r=1}^N \frac{(\phi_{jr})(\phi_{kr})}{\lambda_r^2 - \omega^2}; \quad (3.2-1)$$

sendo: r o modo; λ_r são os auto-valores do modo r que contêm informações das frequências naturais e dos fatores de amortecimento; ϕ_{jr} é o j -enésimo elemento do auto-vetor $\{\phi\}_r$ do modo r que representa o deslocamento relativo do ponto durante o modo de vibrar r ; N é o número de graus-de-liberdade do sistema; ω é uma frequência qualquer e; x_j e f_k , são vetores $N \times 1$ das amplitudes complexas independentes do tempo.

As propriedades dinâmicas de um sistema podem ser expressas em termos de qualquer característica de resposta conveniente. Usualmente, a vibração é determinada em termos de movimento e a sua correspondente FRF pode ser representada em termos de *deslocamento, velocidade e aceleração*, de forma que $[H(\omega)]$ possa ser:

$$\alpha(\omega) = \frac{\text{deslocamento}}{\text{força}} = \text{receptância};$$

$$Y(\omega) = \frac{\text{velocidade}}{\text{força}} = \text{mobilidade};$$

$$A(\omega) = \frac{\text{aceleração}}{\text{força}} = \text{acelerância};$$

$$\frac{\text{força}}{\text{deslocamento}} = \text{rigidez dinâmica};$$

$$\frac{\text{força}}{\text{velocidade}} = \text{impedância mecânica};$$

$$\frac{\text{força}}{\text{aceleração}} = \text{massa aparente}.$$

3.3 Análise modal experimental

A análise modal experimental segue uma rotina de análise inversa da teórica. Nesta, inicia-se pelo “*Modelo Resposta*” para chegar ao “*Modelo Estrutural*”, tendo-se como fase intermediária o “*Modelo Modal*”. Em outras palavras, a partir das FRFs obtidas da estrutura, determina-se as propriedades modais através de algum método de análise modal para só então ajustar o modelo em estudo. De maneira geral, ela tem por objetivos (MAIA, 1997):

- obter as frequências naturais e os modos próprios da estrutura;
- obter informações sobre os fatores de amortecimento;
- correlacionar resultados medidos através da estrutura real com modelos numéricos, como por exemplo, “Elementos Finitos”;

- obter um modelo dinâmico que possibilite ser usado em modificações estruturais quando necessárias, ou;
- obter um modelo dinâmico adequado para fornecer informações para um modelo numérico (de Elementos Finitos, por exemplo) da estrutura, de forma que este modelo teórico seja uma representação melhor das características dinâmicas desta estrutura real quando comparada com o modelo anterior.

Quando se trata de testes experimentais, uma série de detalhes e cuidados práticos devem ser tomados para que se tenha informações confiáveis e com o mínimo de erros.

Os aparelhos que compõem uma análise modal podem pertencer à basicamente três grupos (MAIA, 1997):

- *mecanismos de excitação*: são os dispositivos necessários para excitar a estrutura, como por exemplo, shakers, martelos e som;
- *mecanismos de sensibilidade*: são os dispositivos encarregados de medir a entrada e saída de dados no sistema, ou seja, medem a excitação e respostas. Podem estar ou não em contato com a estrutura. São exemplos destes dispositivos, os acelerômetros, os transdutores de força e o laser.
- *mecanismos de aquisição e processamento*: são os aparelhos que medem os sinais devolvidos pelos dispositivos de sensibilidade e averiguam as magnitudes e fases das forças de excitação e respostas. Para estes aparelhos, pode-se citar os analisadores e os geradores de sinais. Atualmente, os mais comuns são os analisadores baseados no algoritmo “*Transformada Rápida de Fourier*” que já fornecem diretamente as FRFs.

3.4 Trabalho experimental

O trabalho experimental teve por objetivo, através da Análise modal, determinar as frequências naturais e os modos próprios que foram utilizados na identificação dos parâmetros elásticos de uma placa de aço. Estas informações foram utilizadas como dados de entrada para os métodos abordados neste trabalho, que são apresentados nos capítulos 4 e 5.

A placa foi posicionada de forma a tentar reproduzir as condições de contornos com todos os bordos livres. Foram realizados três testes sendo que nos dois primeiros a placa foi suspensa por dois fios de nylon presos ao teto, e no terceiro a dois fios elásticos (“tripa de mico”), também presos ao teto. Os fios foram presos à placa nas posições próximas às extremidades laterais.

3.4.1 Materiais e aparelhos

A figura 3.4-1 abaixo representa um esquema ilustrativo dos aparelhos utilizados na análise modal experimental deste trabalho, que foi realizada em uma placa de aço com as características mostradas na tabela 3.4-1.

Tabela 3.4-1: placa de aço utilizada na análise modal experimental.

Dimensões (mm)	450 x 350 x 2,1
Densidade (Kg/mm ³)	8,2539x10 ⁻⁶

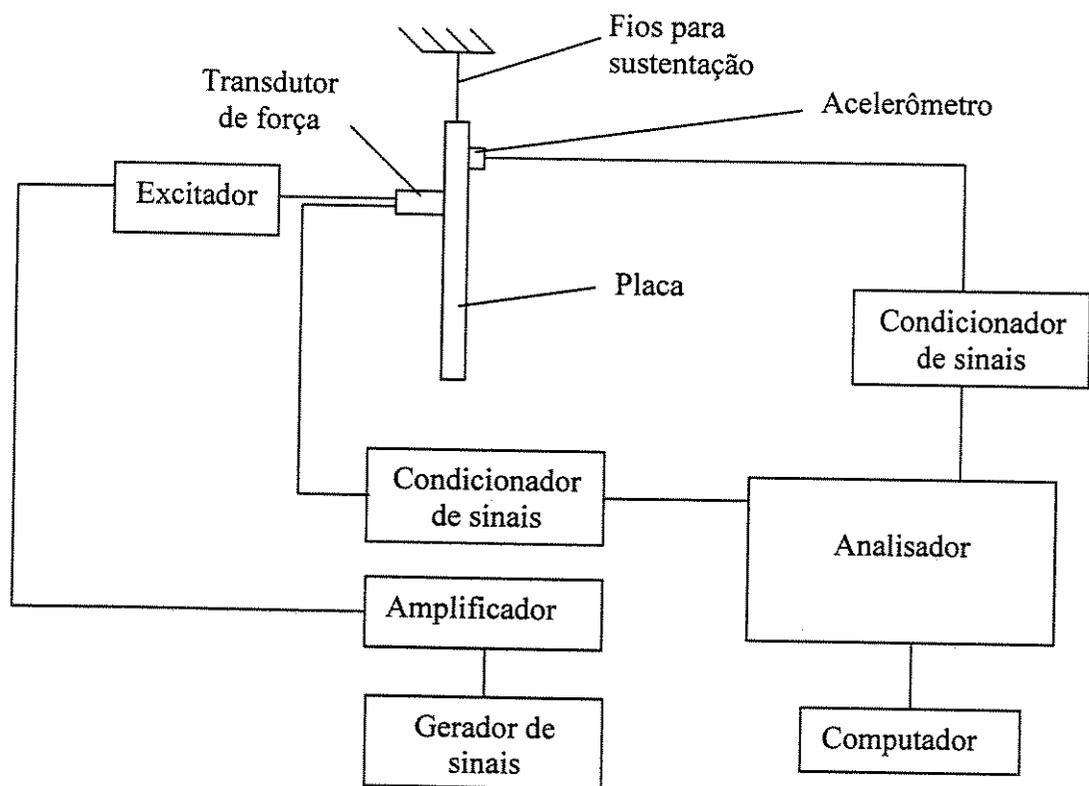


figura 3.4-1: esquema de montagem experimental para a análise modal.

Excitação externa

A placa foi excitada em um único ponto por um vibrador eletro-mecânico ou shaker (Brüel & Kjaer DK-2850 Naerum). O mesmo foi suspenso por uma “girafa” e posicionado adequadamente na direção de excitação da placa, de forma a ficar perpendicular à mesma. As figura 3.4-2 e 3.4-3 ilustram o shaker e sua instalação.

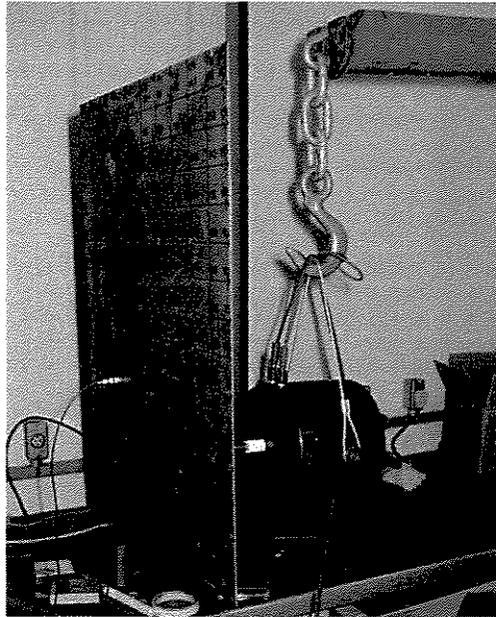


figura 3.4-2: instalação do shaker.

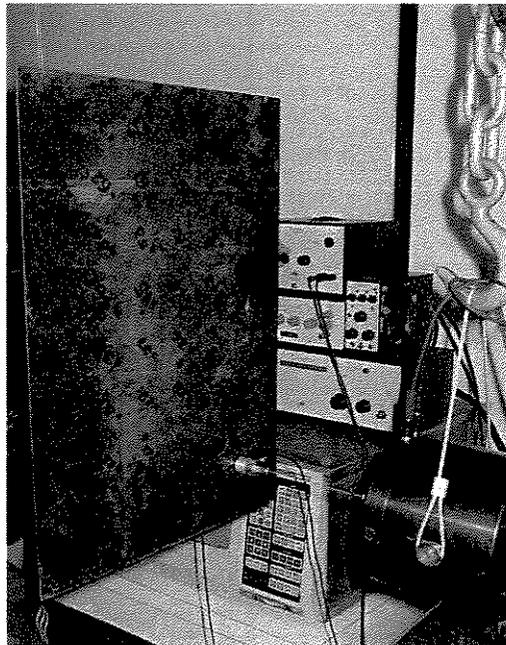


figura 3.4-3: posicionamento do shaker em relação à placa.

Resposta à excitação externa

A resposta do sistema foi medida através de um acelerômetro (ENDEVCO, modelo 226C, S/N C289, capacitância 353 pf) cuja massa (aproximadamente 2 gramas) é desprezível comparada à massa da placa de aço (aproximadamente 2730 gramas). Em materiais leves, como em muitos compósitos por exemplo, é recomendado medir esta resposta sem que haja contato com a estrutura. Isso porque a massa do acelerômetro pode influenciar nas respostas, devendo-se então ser incorporada ao modelo numérico, o que significa adicionar a energia cinética do acelerômetro à energia cinética da placa, sendo o acelerômetro considerado uma massa pontual. Este procedimento pode aumentar a possibilidade de se ter erros e conseqüentemente alterar os verdadeiros resultados. Então, uma forma de medir esta resposta, para estruturas muito leves, seria através de microfones, ou métodos ópticos, ou ainda, fazer uma estrutura maior de forma que a massa do acelerômetro seja desprezível em relação à massa da estrutura. A figura 3.4-4 mostra o acelerômetro utilizado e sua instalação.

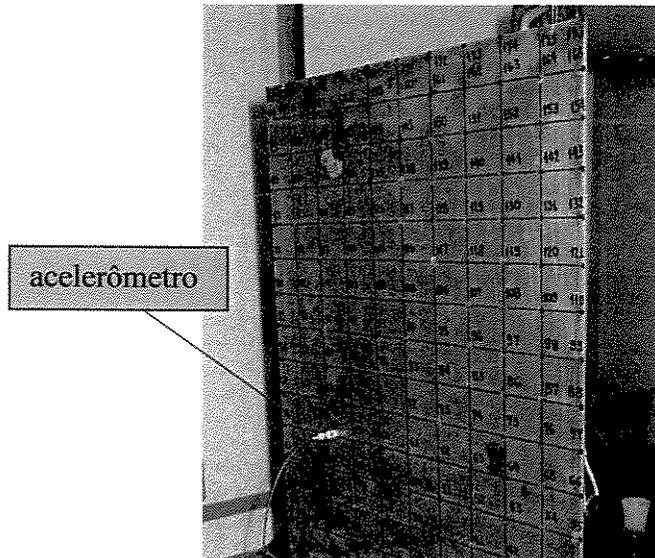


figura 3.4-4: acelerômetro.

Como pode ser visto nesta figura 3.4-4, o acelerômetro foi posicionado, em todos os nós definidos, de forma a medir os deslocamentos da placa na direção transversal (direção normal à superfície que contém os elementos).

Condicionadores de sinais

Os sinais de saída da fonte de excitação externa devem ser amplificados e convertidos em tensão elétrica antes de serem enviados ao analisador de sinais. Foram utilizados dois condicionadores (Brüel & Kjaer, tipo 2626), um para o acelerômetro e outro para o transdutor de força acoplado ao shaker. Ambos condicionadores foram ligados ao analisador. A figura 3.4-5 mostra os condicionadores utilizados.

Analisador de sinal

O analisador é um aparelho utilizado para receber os sinais enviados pelos condicionadores para então tratá-los e armazená-los. A análise destes sinais pode ser feita no domínio do tempo ou no domínio da frequência. Neste trabalho utilizou-se no domínio da frequência pela facilidade de se trabalhar com as FRFs. Foi utilizado um analisador SD380 da Scientific-Atlanta. A figura 3.4-5 mostra este analisador utilizado.

Software de análise modal

O software utilizado para extrair os parâmetros modais foi o STARModel da SMS, instalado em um computador PC. Este software possibilita o processo de transferência dos dados entre o analisador e o computador e, permite ao usuário definir os modos, através das funções respostas, e definir o método de análise modal em seu banco de dados. Assim, o programa fornece ao usuário as frequências naturais, os modos próprios e as estimativas do amortecimento da estrutura.

Gerador de sinal

Este aparelho é o encarregado em transmitir o sinal de excitação ao qual o excitador irá executar na estrutura. Neste trabalho foi utilizado um gerador de sinais aleatórios (1381, 2Hz-50KHz, General Radio Company) que são sinais cujas amplitudes são constantes para

todas as frequências dentro de uma faixa pré-definida pelo usuário. Este gerador é mostrado na figura 3.4-5 abaixo.

Amplificador

Este aparelho é encarregado de amplificar os sinais que são enviados pelo gerador de sinais e que vão para o excitador. Portanto, representam uma interface entre o gerador de sinais e o excitador. Neste trabalho foi utilizado o amplificador da Brüel & Kjaer, tipo 2712. A figura 3.4-5 mostra este amplificador.

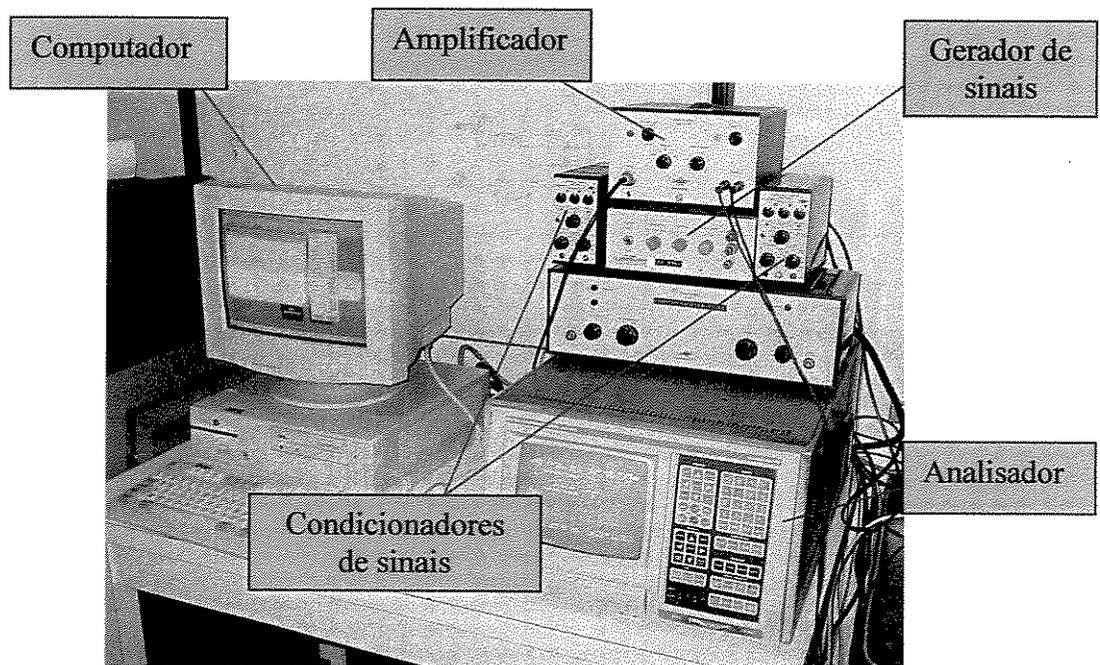


figura 3.4-5: aparelhos utilizados na análise modal.

Transdutor de força

São dispositivos utilizados para medir a força de entrada no sistema que é aplicada à estrutura. Neste trabalho, ele foi fixado à estrutura (base) em uma extremidade e conectada ao stinger na outra extremidade. Sua massa também é importante para que não interfira na resposta do sistema. Neste trabalho foi utilizado um transdutor da Brüel & Kjaer, tipo 2713. A figura 3.4-6 mostra o transdutor e sua fixação à placa.

Stinger:

É o material que faz a conexão entre o shaker e o transdutor de força fixo à estrutura em teste, ou entre o transdutor de força fixado ao shaker com a estrutura. Neste trabalho, o transdutor de força foi fixado à placa testada e o stinger foi fixado entre o shaker e o transdutor.

O stinger deve ter algumas características para que não afete os sinais de força e não introduza erros nas medições. Deve ser rígido na direção axial (neste caso, perpendicular à placa), que é a direção de excitação, e ser relativamente flexível para os movimentos laterais e rotacionais. Neste trabalho, foi utilizado um stinger de latão de 104,5 mm de comprimento e 1,5 mm de diâmetro. A figura 3.4-6 mostra o stinger e sua instalação.

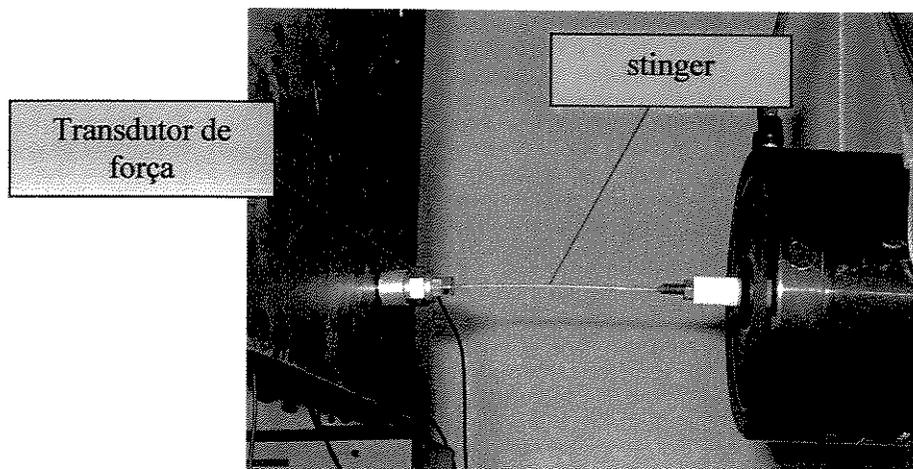


figura 3.4-6: transdutor de força e stinger.

Cabos:

Os cabos fazem as conexões entre os aparelhos e dispositivos. Também são importantes na Análise Modal. Sua correta especificação e estado de conservação são indispensáveis para a precisão dos resultados.

3.5 Análise modal no Ansys (7.0)

No software comercial Ansys, a análise modal é utilizada para determinar as características de vibração (frequências naturais e modos próprios) de uma estrutura ou de um componente de máquina enquanto se está projetando. Neste software, trata-se de uma análise linear, onde quaisquer não-linearidades, como uma plasticidade, são ignoradas mesmo se elas forem definidas. Pode-se escolher vários métodos de extração dos modos: “*Block Lanczos*”, “*subspace*”, “*PowerDynamics*”, “*reduced*”, “*unsymmetric*”, “*damped*” e “*QR damped*”. Nestes dois últimos métodos é possível incluir o amortecimento na estrutura.

O procedimento para uma análise modal consiste de quatro passos principais:

1. construir o modelo;
2. aplicar cargas e obter a solução;
3. expandir os modos (escrevê-los para o arquivo de resultados);
4. rever os resultados.

A equação básica a ser resolvida em uma típica análise modal não amortecida é o problema de autovalor clássico, dado por:

$$[K]\{\varphi_i\} = \omega_i^2[M]\{\varphi_i\}, \quad (3.5 - 1)$$

onde $[K]$ é a matriz de rigidez; $[M]$ é a matriz de massa; $\{\varphi_i\}$ é o vetor dos modos próprios; Ω_i é frequência natural do modo i (ω_i é o autovalor).

3.6 Materiais compósitos no Ansys (7.0)

O Ansys (7.0) dispõe de modelos para materiais compósitos com elementos especializados chamados “layered elements”. Estes materiais são um tanto quanto mais difíceis de se modelar do que um material isotrópico, como o aço ou o ferro. Deve-se tomar cuidado especial na definição das propriedades e orientações das várias camadas (cada camada pode ter propriedade ortotrópica). Os elementos oferecidos pelo Ansys para modelar estes materiais são: SHELL63, SHELL99, SHELL91, SHELL181, SOLID46, SOLID65, SOLID95, SOLID191, BEAM188 e BEAM189.

A característica mais importante de um material compósito é a configuração do laminado. Cada camada pode ser feita de um material ortotrópico diferente e ter suas direções principais orientadas diferentemente. Para os compósitos laminados, as direções das fibras determinam a orientação da camada. Estas direções, juntamente com as propriedades do material e espessura, devem ser definidas para cada lâmina.

3.7 Ensaios e simulações

A tabela 3.7-1 abaixo compara os valores das seis primeiras frequências naturais, obtidas da análise modal experimental, com os valores das seis primeiras frequências correspondentes obtidos da análise modal numérica (Elementos Finitos) realizada no software Ansys (7.0). Foi utilizada uma placa de aço 450 x 350 x 2,1 mm com 80 nós (elementos com 50 x 50 mm) em um primeiro ensaio, de densidade $8,2539 \times 10^{-6}$ kg/mm³, sob a condição livre-livre. As constantes elásticas que eram dados de entrada no Ansys foram:

módulo de elasticidade longitudinal $E = 210000$ MPa e coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. Foi utilizado também elemento “SHELL63” com 4 nós. Essas propriedades elásticas são baseadas em uma média geral para aços e foram utilizadas somente para verificar se as frequências medidas com os seus respectivos modos estavam coerentes com os valores obtidos numericamente. Portanto, devido a esses valores médios das propriedades elásticas, era de se esperar a existência de erros entre os valores destas frequências, independente dos erros provenientes do próprio ensaio experimental. Foi utilizada uma malha também com 80 nós no Ansys.

Tabela 3.7-1: frequências experimentais e numéricas.

Frequências obtidas experimentalmente (Hz)	Frequências calculadas numericamente (Hz)	Erro %
42,46	43,651	2,72
55,87	53,686	4,06
95,90	93,140	2,96
103,97	104,68	0,67
124,61	125,01	0,31
160,37	156,13	2,71

De acordo com a tabela 3.7-1 é possível perceber que as propriedades elásticas utilizadas como dados de entrada no Ansys são próximas das propriedades do aço testado, ou seja, o módulo de elasticidade (E) está em torno de 210000 MPa e o coeficiente de Poisson (ν) está em torno de 0,30. Há de se considerar também, o fato de existir erros experimentais oriundos de medições e de vários outros fatores de uma Análise Modal experimental.

As frequências naturais experimentais podem ser encontradas com apenas uma função resposta em frequência (FRF), ou seja, medindo-se apenas um ponto. Quando se usa um número maior de pontos está contribuindo para o aumento da precisão destes valores devido a média que é feita através de todas as FRFs. No caso, em que foram utilizados 80 nós em um primeiro ensaio e 176 nos outros dois, uma boa precisão é garantida para esses

valores. A figura 3.7-1 mostra uma FRF obtida do ensaio experimental com a excitação no nó 24 e resposta medida no nó 1 (como pode ser visto na figura 3.7-5), ambos na direção normal ao plano da placa. E as figuras 3.7-2 a 3.7-4 mostram três modos (torção, flexão em x e, flexão em y) fornecidos pelo software STARModal e que foram utilizados no primeiro método abordado neste trabalho. A tabela 3.7-2 mostra as frequências obtidas e os amortecimentos estimados para estes três modos específicos, também fornecidos pelo STARModal.

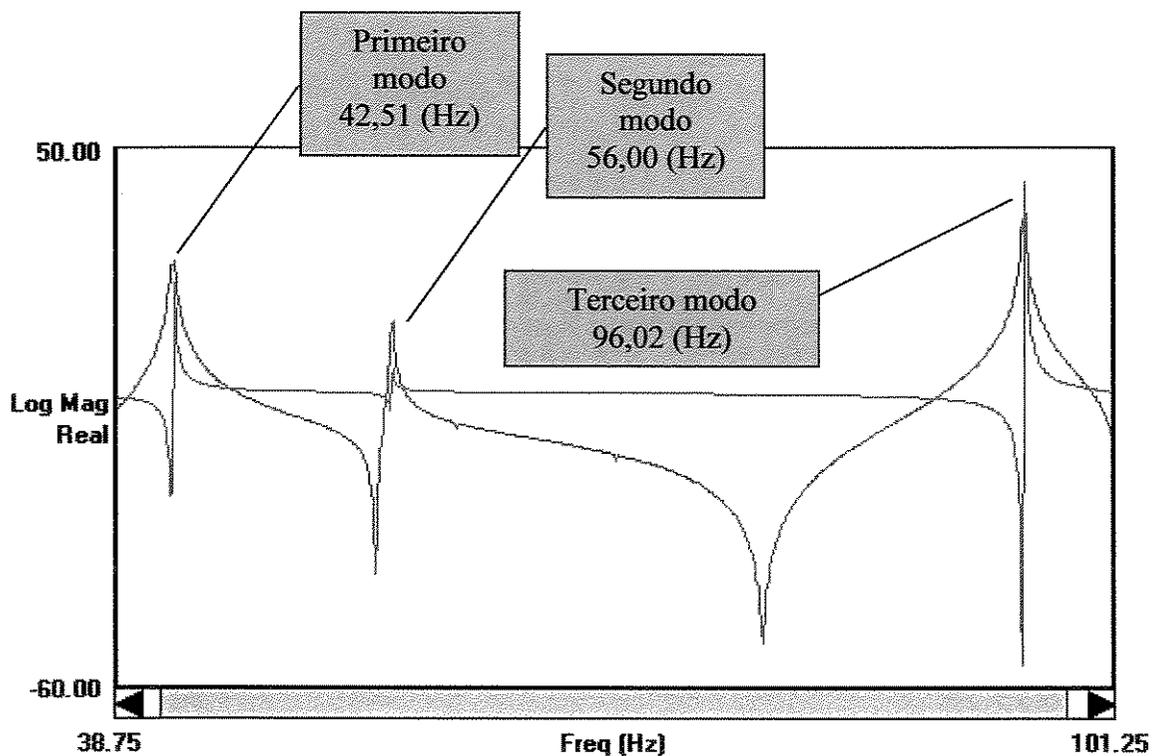


figura 3.7-1: FRF fornecida pela software STARModal de análise modal experimental.

Nesta figura 3.7-1, o gráfico em vermelho está em escala logaritma e o azul está em escala real.

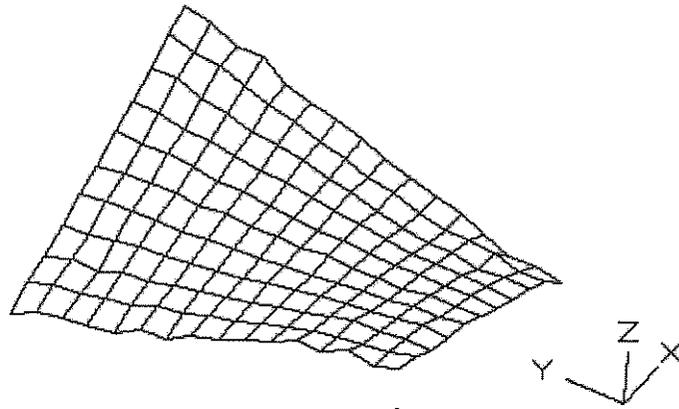


figura 3.7-2: primeiro modo – modo de torção

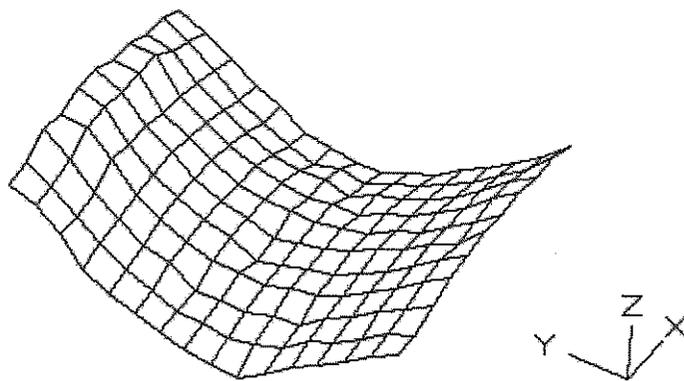


figura 3.7-3: segundo modo – modo de flexão em y

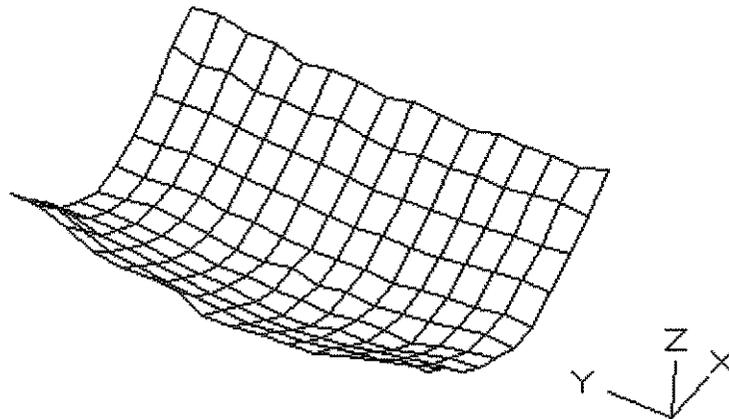


figura 3.7-4: terceiro modo – modo de flexão em x

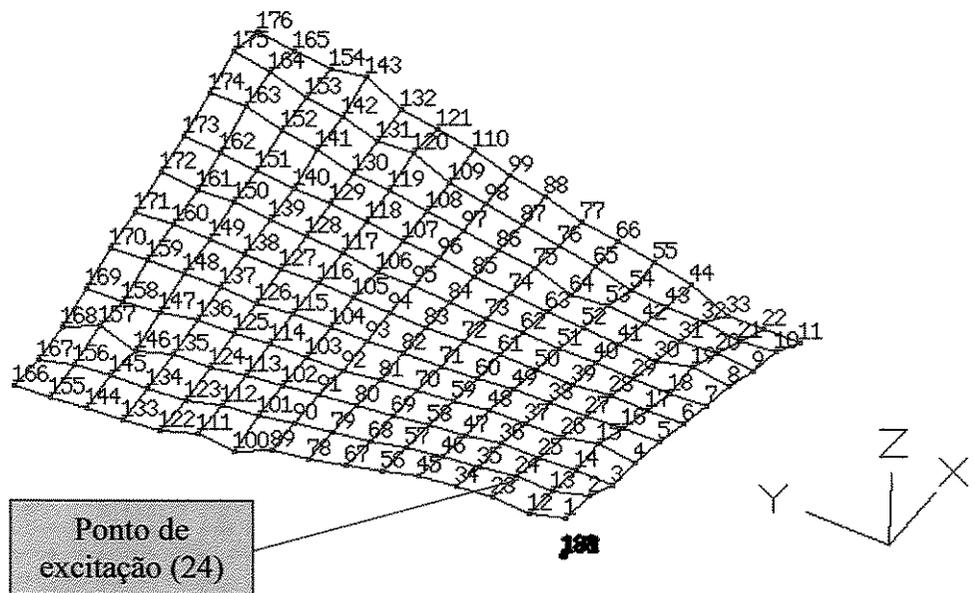


figura 3.7-5: placa de aço utilizada nos ensaios experimentais com seus respectivos nós.

Tabela 3.7-2: modos próprios com suas respectivas frequências naturais e fatores de amortecimento.

Modos	Frequências naturais (Hz)	Amortecimento (Hz)	Amortecimento (%)
Torção	42,51	0,04914	0,11560
Flexão em y	56,00	0,05107	0,09119
Flexão em x	96,02	0,04667	0,04860

Para as frequências naturais numéricas, calculadas através de Elementos Finitos, quanto maior o número de pontos (nós) utilizados maior será a precisão dos cálculos devido às características deste método. Esse fato é verificado somente até um certo número de nós, onde a partir deste, o aumento não acarretará mudanças significativas e somente servirão para aumentar os esforços computacionais. A tabela 3.7-3 abaixo, mostra a variação dos valores das frequências naturais calculadas por Elementos Finitos no Ansys de acordo com o número de nós na malha. Foram mantidos o mesmo tipo de elemento e os valores das constantes elásticas, das dimensões geométricas e da densidade do material da placa utilizada para fornecer os valores da tabela 3.7-1.

Tabela 3.7-3: variação das frequências naturais em relação à variação do número de nós.

Frequências numéricas para malha com 36 nós (Hz)	Frequências numéricas para malha com 80 nós (Hz)	Frequências numéricas para malha com 176 nós (Hz)	Frequências numéricas para malha com 1116 nós (Hz)	Frequências numéricas para malha com 6461 nós (Hz)
43,751	43,651	43,592	43,542	43,534
53,874	53,686	53,643	53,629	53,620
93,007	93,140	93,112	93,026	93,024
105,18	104,68	104,36	104,06	104,02
125,94	125,01	124,62	124,38	124,32
157,67	156,13	155,90	155,92	155,85

A fim de verificar a veracidade dos resultados medidos experimentalmente, os valores de entrada no software (Ansys) devem ser coerentes com os valores utilizados no ensaio, ou seja, as características da estrutura real devem ser as mesmas da estrutura definida como entrada no programa. Qualquer valor não condizente com o real implicará em resultados errôneos e imprecisos. Para o segundo método abordado neste trabalho (apresentado no capítulo 5), em que requer somente as frequências naturais, os fatores dimensões do corpo e densidade podem ser muito significantes. As tabelas 3.7-4 e 3.7-5 mostram a influência destes parâmetros nos valores das frequências naturais. Na tabela 3.7-4 foi feita uma mudança na espessura e no módulo de elasticidade utilizados como dados de entrada no Ansys. A densidade, a largura, o comprimento e o valor do coeficiente de Poisson que deram origem aos valores da tabela 3.7-1 foram mantidos os mesmos. Foi verificado as seis primeiras frequências naturais para uma malha de 176 nós. Por esta tabela 3.7-4 pode-se perceber que as frequências são mais sensíveis a variações de valores quando há mudanças em sua espessura do que em seu módulo de elasticidade (E). Com o aumento da espessura há um aumento do volume e conseqüentemente de massa e de rigidez.

Ou, de outra forma, para comprovar essa influência da massa, foi alterado diretamente o valor da densidade. A tabela 3.7-5 abaixo mostra a variação das frequências naturais com esta variação da densidade do material. Foram mantidos as propriedades elásticas ($E = 210000$ MPa e $\nu = 0.30$) e as dimensões geométricas da placa (450 x 350 x 2,1 mm). Foi utilizado também uma malha de 176 nós.

Tabela 3.7-4: variação das frequências em relação à variação do módulo de elasticidade e espessura da placa.

<i>E</i> = 190000 (MPa)		
Frequências para uma placa com espessura de 1,9 (mm)	Frequências para uma placa com espessura de 2,0 (mm)	Frequências para uma placa com espessura de 2,3 (mm)
37,516	39,490	45,414
46,165	48,595	55,884
80,132	84,350	97,002
89,811	94,538	108,72
107,25	112,89	129,83
134,17	141,23	162,41
<i>E</i> = 200000 (MPa)		
Frequências para uma placa com espessura de 1,9 (mm)	Frequências para uma placa com espessura de 2,0 (mm)	Frequências para uma placa com espessura de 2,3 (mm)
38,490	40,516	46,594
47,364	49,857	57,336
82,214	86,541	99,522
92,144	96,994	111,54
110,03	115,83	133,20
137,65	144,90	166,63
<i>E</i> = 210000 (MPa)		
Frequências para uma placa com espessura de 1,9 (mm)	Frequências para uma placa com espessura de 2,0 (mm)	Frequências para uma placa com espessura de 2,3 (mm)
39,441	41,517	47,744
48,534	51,088	58,752
84,244	88,678	101,98
94,420	99,389	114,30
112,75	118,69	136,49
141,05	148,47	170,75

Tabela 3.7-5: variação das freqüências em relação a variação das densidades.

Freqüências para a placa com densidade de 7,8e-6 (Kg/mm ³)	Freqüências para a placa com densidade de 8,2539e-6 (Kg/mm ³)	Freqüências para a placa com densidade de 9,0 e-6 (Kg/mm ³)
44,843	43,592	41,747
55,182	53,643	51,371
95,783	93,112	89,169
107,35	104,36	99,939
128,20	124,62	119,34
160,37	155,90	149,30

Estas variações são válidas para qualquer tipo de material, tanto nos isotrópicos, ortotrópicos e anisotrópicos.

Quando se trabalha com materiais laminados, como ocorre em muitos compósitos, as direções das fibras também definem as características do laminado, como por exemplo, a rigidez, as freqüências naturais, os modos próprios, os autovetores e as propriedades elásticas do laminado. A cada combinação surge um novo material, isotrópico, ortotrópico ou anisotrópico, mesmo se os materiais da matriz e do reforço continuarem os mesmos. E logicamente, além das direções das fibras, as propriedades elásticas de cada lâmina também influenciam nestas características. Estes fatos podem ser verificados no Ansys e foram mostrados nas tabelas 3.7-6 e 3.7-7 através dos valores das seis primeiras freqüências naturais. Foram utilizados dois laminados de compósitos de fibra de carbono e matriz epóxi, com as seguintes propriedades para cada lâmina (GRÉDIAC, 1996): $E_1 = 120000$ Mpa, $E_2 = 10000$ MPa, $G_{12} = 4900$ MPa, $\nu = 0,30$ e densidade $1,510e-6$ kg/mm³. As dimensões geométricas (450 x 350 x 2,1 mm) são as mesmas para ambos e somente as direções das fibras e as propriedades de uma lâmina do laminado foram modificadas. No laminado 2 da tabela 3.7-7, para a camada 8 (última camada) foi considerado $E_1 = 110000$ MPa, $E_2 = 15000$ Mpa, $G_{12} = 6000$ MPa, $\nu = 0,30$ e densidade $1,6e-6$ kg/mm³. Foi utilizado o elemento do Ansys "SHELL99" com 8 nós, e foi considerado também laminados com 8 camadas.

Tabelas 3.7-6: variação das frequências alterando somente a direção das fibras do laminado.

Frequências (Hz) do Laminado 1 carbono/epóxi [0] ₈ - [unidirecional]	Frequências (Hz) do Laminado 2 Carbono/epóxi [0,90] _{2s}
25,497	25,849
45,345	75,422
68,784	91,765
95,250	106,40
107,61	118,27
125,66	168,24

Tabelas 3.7-7: variação das frequências alterando o tipo de material de apenas uma lâmina do laminado.

Frequências do Laminado 1 carbono/epóxi [0] ₈ -[unidirecional]	Frequências do Laminado 2 carbono/epóxi [unidirecional] mais um material desconhecido [unidirecional]
25,497	26,206
45,345	48,157
68,784	71,718
95,250	93,800
107,61	107,09
125,66	133,42

Um modo próprio de um determinado material com o mesmo modo próprio de um outro material apresentam autovetores com valores diferentes. Por exemplo, um modo de torção de um material qualquer é diferente do modo de torção de um outro material em termos de deslocamentos dos pontos na direção em que se está medindo. Esse fato pode ser verificado pela tabela 3.7-8 abaixo, em que foram utilizados dois materiais diferentes e verificado o mesmo modo de flexão. Foram utilizadas duas placas com as mesmas dimensões geométricas: uma placa isotrópica com o módulo de elasticidade (E) igual a

210000 MPa, ν igual a 0,3 e densidade $7,8e-6 \text{ Kg/mm}^3$; e uma placa ortotrópica com módulo de elasticidade na direção 1 (E_1) igual a 120000 MPa, módulo de elasticidade na direção 2 (E_2) igual a 10000 MPa, módulo de cisalhamento no plano (1-2) igual a 4900 MPa, coeficiente de Poisson no plano (1-2) igual a 0,3 e densidade $1,510e-6 \text{ Kg/mm}^3$. Para ambas teve-se uma malha com 176 nós e dimensões 450 x 350 x 2,1 mm. A tabela 3.7-8 mostra os valores das flechas (em mm) para alguns pontos aleatórios para um mesmo modo de flexão calculados no Ansys com elemento "SHELL63".

Tabela 3.7-8: flechas para o mesmo modo de flexão em x em placas com propriedades diferentes.

nós	Flechas da placa isotrópica (mm)	Flechas da placa ortotrópica (mm)	Diferença (mm)
1	31,910	78,800	46,890
25	38,465	87,542	49,077
40	7,374	19,901	12,527
56	30,212	66,441	36,229
61	14,323	32,813	18,49
75	5,702	12,723	7,021
93	-12,097	-27,031	14,934
101	-16,056	-35,353	19,297
150	-0,179	0,345	0,524
176	23,099	54,822	31,723

Capítulo 4 – Primeiro Método

4.1 Primeiro Método: identificação dos parâmetros elásticos através de frequências naturais e métodos numéricos.

Partindo-se da equação diferencial parcial que governa a vibração transversal de uma placa fina anisotrópica sob pequenas deslocamentos em z como foi deduzida anteriormente no capítulo 2, tem-se:

$$T = D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (4.1-1)$$

Pelo Método dos Resíduos Ponderados (Apêndice-A) sabe-se que:

$$\langle R, W_i \rangle = \int R(x, y, z) W_i(x, y, z) dS = 0. \quad (4.1-2)$$

sendo $R(x, y, z)$ o resíduo e $W_i(x, y, z)$ a função ponderadora.

Aproximando a função exata $w(x, y, t)$ da equação (4.1-1) por uma função aproximada $\varphi(x, y, t)$, de forma que:

$$w(x, y, t) \cong \varphi(x, y, t), \quad (4.1-3)$$

e aplicando o método dos Resíduos Ponderados, pode-se identificar o resíduo como:

$$R(x, y, z) = L_{2m}(\varphi(x, y, z)) - f(x, y, z), \quad (4.1-4)$$

sendo L_{2m} o operador diferencial de ordem $2m$.

Para a equação (4.1-1), portanto, este resíduo será:

$$\begin{aligned} R(x, y, t) &= D_{11} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + D_{16} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} + \rho h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \\ &= T + \rho h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (4.1-5)$$

Como pode ser visto, o resíduo neste caso de placa fina é função de x e y e, por se tratar de vibração, é também função do tempo t . Substituindo este resíduo (4.1-5) na expressão (4.1-2), tem-se:

$$\int_S \left[T + \rho h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right] W_i dS = 0, \quad (4.1-6)$$

ou:

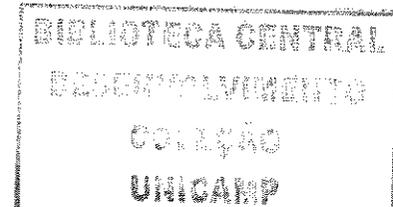
$$\int_S [T] W_i dS = - \int_S \left(\rho h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) W_i dS = - \rho h \int_S \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} W_i dS. \quad (4.1-7)$$

A função ponderadora W_i é uma função arbitrária desde que seja contínua no domínio S da placa. Suas derivadas também devem ser contínuas até a segunda ordem. A equação (4.1-6) está em sua forma forte. Através do teorema de Green, dado pela relação (4.1-8) abaixo, pode-se transformar a equação para sua forma fraca. Assim:

$$- \int_S \nabla^2 G \cdot W dS = \int_S \nabla W \cdot \nabla G \cdot dS - \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n} \cdot W \cdot d\Gamma, \quad (4.1-8)$$

sendo que: G é a função que se deseja abaixar o grau; W é a função ponderadora; Γ é o domínio do contorno da placa; n é um vetor unitário em um dado ponto e; S é o domínio do problema.

Desta forma, aplicando-se este teorema para a equação (4.1-7), tem-se:



$$\begin{aligned}
& - \oint M_n \frac{\partial W_i}{\partial n} dS + \oint \left[Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial S} \right] W_i dS + \int_S \left[D_{11} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2} + \right. \\
& D_{12} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2} \right) + 4D_{66} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 W_i}{\partial x \partial y} + 2D_{16} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W_i}{\partial x \partial y} \right) + \\
& \left. + 2D_{26} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 W_i}{\partial x \partial y} \right) \right] dS = -\rho h \int_S \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} W_i dS. \quad (4.1-9)
\end{aligned}$$

Restringindo-se as condições de bordas livres, as condições de contorno são:

$$M_n = 0 \text{ e } Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial S} = 0, \quad (4.1-10)$$

ou seja, as integrais de contorno desaparecem.

Como as rigidezes são valores constantes, pode-se escrever a equação (4.1-9) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
& D_{11} \int_S \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2} dS + D_{22} \int_S \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2} dS + D_{12} \int_S \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2} \right) dS + \\
& + 4D_{66} \int_S \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 W_i}{\partial x \partial y} dS + 2D_{16} \int_S \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W_i}{\partial x \partial y} \right) dS + \\
& + 2D_{26} \int_S \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 W_i}{\partial x \partial y} \right) dS = -\rho h \int_S \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} W_i dS. \quad (4.1-11)
\end{aligned}$$

A equação (4.1-11) é interpretada geralmente em termos de trabalho virtual por associar W_i a um deslocamento transversal virtual (deslocamento em z no sistema adotado neste trabalho). A integral do lado esquerdo é o trabalho virtual interno e a do lado direito é o trabalho virtual causado pelas forças inerciais.

Considerando a placa vibrando em um de seus modos naturais e fazendo uma separação de variáveis, aproximando $\varphi(x, y, t)$ pelo produto da amplitude $\Phi(x, y)$ e $\text{sen}(\omega t)$, para cada modo próprio j , tem-se:

$$\varphi_j(x, y, t) = \Phi^{(j)}(x, y)\text{sen}(\omega_j t), \quad (4.1-12)$$

sendo ω_j referente à frequência natural associada ao modo j .

Conseqüentemente:

$$\frac{\partial^2 \varphi_j(x, y, t)}{\partial t^2} = -\omega_j^2 \varphi_j(x, y, t). \quad (4.1-13)$$

E para a função exata:

$$w_j(x, y, t) = Z^{(j)}(x, y)\text{sen}(\omega_j t). \quad (4.1-14)$$

Substituindo as expressões (4.1-12) e (4.1-13) na equação (4.1-11), obtêm-se:

$$\begin{aligned} D_{11} \int_S \frac{\partial^2 \Phi^{(j)}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2} dS + D_{22} \int_S \frac{\partial^2 \Phi^{(j)}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2} dS + D_{12} \int_S \left(\frac{\partial^2 \Phi^{(j)}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi^{(j)}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2} \right) dS + \\ + 4D_{66} \int_S \frac{\partial^2 \Phi^{(j)}}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 W_i}{\partial x \partial y} dS + 2D_{16} \int_S \left(\frac{\partial^2 \Phi^{(j)}}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi^{(j)}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W_i}{\partial x \partial y} \right) dS + \\ + 2D_{26} \int_S \left(\frac{\partial^2 \Phi^{(j)}}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi^{(j)}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 W_i}{\partial x \partial y} \right) dS = -\rho h \omega_j^2 \int_S \Phi^{(j)} W_i dS. \quad (4.1-15) \end{aligned}$$

Desta equação (4.1-15), os termos procurados são as seis rigidezes D_{ij} e, portanto, sua solução depende agora de encontrar a função ponderadora $W_i(x, y)$ e a função amplitude na ressonância $\Phi^{(j)}(x, y)$ juntamente com sua respectiva frequência natural ω_j . A densidade ρ e a espessura h podem ser facilmente medidas.

Pelas deduções feitas até a agora é de se notar que teoricamente esta equação (4.1-15) é válida para qualquer modo próprio e para qualquer função ponderadora, desde que estas sejam contínuas e que suas derivadas de segunda ordem também sejam contínuas. Sendo assim, torna-se possível montar um sistema de equações lineares em que as rigidezes são os termos desconhecidos. Como é seis o número destas rigidezes desconhecidas, são necessárias seis equações independentes para a solução deste sistema. Mas, dependendo da função ponderadora $W_i(x, y)$ associada à função $\Phi^{(i)}(x, y)$, alguns ou mesmo todos os coeficientes de rigidez D_{ij} da equação podem ser anulados por razões de simetria. Por exemplo, se a função ponderadora for uma função somente de x , ou somente de y , anulará três dos seis coeficientes desta equação (4.1-15). Considerando uma placa ortotrópica qualquer, cujos modos são mostrados pela figura (4.1-1) abaixo e se para o quarto ou segundo modo for associado uma função ponderadora simétrica do tipo $W_i(x, y) = W_i(y)$, ou se para o quinto modo for associado uma função ponderadora simétrica do tipo $W_i(x, y) = W_i(x)$, então os coeficientes D_{ij} se anularão. Tais escolhas deveriam, portanto, ser evitadas.

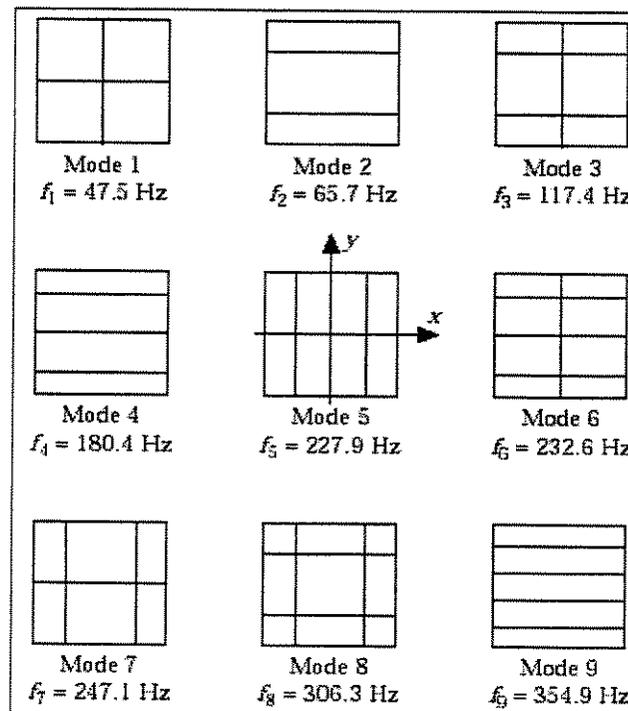


figura 4.1-1: primeiros modos próprios de vibrar de uma placa ortotrópica.

A função $\varphi(x, y, t)$ não é conhecida, mas através da análise modal pode-se obter os valores das amplitudes $Z^{(j)}(x, y)$ da função exata $w(x, y, t)$ em pontos requeridos. E estes valores serão restrições para a função aproximada $\varphi(x, y, t)$, de forma que, para um modo qualquer (j), $\Phi^{(j)}(x, y) = Z^{(j)}(x, y)$ no ponto (x, y) medido. Partindo-se deste princípio, através do método numérico de *Diferenças Finitas*, utilizando-se a *Série de Taylor*, pode-se determinar as derivadas parciais de segunda ordem de $\Phi^{(j)}(x, y)$ da equação (4.1-15) criando-se uma malha na placa com o número de pontos (nós) desejados e igualmente espaçados nas direções x e y , e utilizando-se seus valores medidos através da análise modal. Os elementos da malha podem ser assim, elementos retangulares ou quadrados. Essas derivadas são:

$$\frac{\partial^2 \Phi^{(j)}(x, y)}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \Phi^{(j)}(x, y)}{\partial y^2} \text{ e } \frac{\partial^2 \Phi^{(j)}(x, y)}{\partial x \partial y}, \quad (4.1-16)$$

Devido às características deste método numérico, quanto maior o número de pontos medidos, maior será sua precisão. Assim, quanto mais refinada for a malha para a placa, mais preciso serão os valores de suas derivadas e, conseqüentemente, de suas integrais.

A escolha dos modos é de fundamental importância neste método. Ao observar o modo de torção nota-se que ele é um modo que depende fortemente das constantes D_{66} , D_{16} e D_{26} . Já os modos de flexão ao longo da direção 1 e 2, são fortemente dependentes das constantes D_{11} , D_{12} e D_{16} e D_{22} , D_{12} e D_{26} , respectivamente. Portanto, estes três modos são dependentes das seis rigidezes procuradas. E estes modos também, geralmente, representam os modos de frequências mais baixas e com curvas mais suaves, ideais para o método da diferenças finitas. Os modos mais altos podem apresentar muita variação de sinal, e sendo assim, para uma correta identificação da função $w(x, y, t)$ seria necessário uma malha bem mais refinada. Então, para este presente método de identificação das constantes elásticas, os três modos (torção, flexão em x e flexão em y) ou os modos que mais se aproximam a estes serão sempre adotados para qualquer material.

Como já foi mencionado, qualquer função ponderadora poderia ser utilizada, mas três em particular são relevantes. Estas podem ser interpretadas como deslocamentos virtuais com

$$1. W_1(x,y) = x^2$$

As três derivadas parciais são:

$$\frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} = 2, \quad (4.1-18)$$

$$\frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 W_1}{\partial x \partial y} = 0, \quad (4.1-19)$$

e, portanto, substituindo-se estas equações (4.1-18) e (4.1-19) na equação (4.1-15), tem-se:

$$D_{11}K_{xx}^{(j)} + D_{12}K_{yy}^{(j)} + 2D_{16}K_{xy}^{(j)} = -\frac{\rho h}{2} \omega_i^2 \int_S \Phi^{(j)} x^2 dS. \quad (4.1-20)$$

sendo:

$$K_{xx}^{(j)} = \int_S \frac{\partial^2 \Phi^{(j)}(x,y)}{\partial x^2} dS; \quad (4.1-21)$$

$$K_{yy}^{(j)} = \int_S \frac{\partial^2 \Phi^{(j)}(x,y)}{\partial y^2} dS; \quad (4.1-22)$$

$$K_{xy}^{(j)} = \int_S \frac{\partial^2 \Phi^{(j)}(x,y)}{\partial x \partial y} dS, \quad (4.1-23)$$

Estas integrais podem agora ser calculadas pelo método da *Integração Numérica*, uma vez conhecidos os valores das derivadas nos pontos calculados pelo método das diferenças finitas.

$$2. W_2(x,y) = y^2$$

Para esta equação as três derivadas parciais são:

$$\frac{\partial^2 W_2}{\partial y^2} = 2; \quad (4.1-24)$$

$$\frac{\partial^2 W_2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 W_2}{\partial x \partial y} = 0, \quad (4.1-25)$$

e, portanto, substituindo-se estas equações (4.1-24) e (4.1-25) na equação (4.1-15), tem-se:

$$D_{12}K_{xx}^{(j)} + D_{22}K_{yy}^{(j)} + 2D_{26}K_{xy}^{(j)} = -\frac{\rho h}{2}\omega_i^2 \int_S \Phi^{(j)} y^2 dS. \quad (4.1-26)$$

3. $W_3(x, y) = xy$

Para esta equação as três derivadas parciais são:

$$\frac{\partial^2 W_3}{\partial x \partial y} = 1; \quad (4.1-27)$$

$$\frac{\partial^2 W_3}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 W_3}{\partial y^2} = 0, \quad (4.1-28)$$

e, portanto, substituindo-se estas equações (4.1-27) e (4.1-28) na equação (4.1-15), tem-se:

$$D_{16}K_{xx}^{(j)} + D_{26}K_{yy}^{(j)} + 2D_{66}K_{xy}^{(j)} = -\frac{\rho h}{2}\omega_i^2 \int_S \Phi^{(j)} xy dS. \quad (4.1-29)$$

Como as curvaturas das funções ponderadoras são constantes, as integrais em (4.1-15) são geralmente determinadas com maior exatidão, ao contrário de quando se utilizam funções ponderadoras onde as curvaturas mudam de sinais no domínio da placa. Usa-se estas três equações com três diferentes modos para determinar os parâmetros desconhecidos. São necessários no mínimo dois modos para resolver este sistema, tendo-se neste caso, seis equações e seis incógnitas. Mas corre-se o risco dos modos (auto-vetores) não dependerem fortemente de todas as constantes procuradas, o que pode levar a um sistema de equações mal condicionado. Já

o contrário, utilizando um número maior de modos, aumenta-se o erro numérico devido à variação das curvas da função exigindo-se assim uma malha mais refinada, com um número maior de nós.

Matricialmente, as três equações acima envolvendo o modo (j) podem ser escritas como:

$$\begin{bmatrix} K_{xx}^{(j)} & 0 & K_{yy}^{(j)} & 0 & 2K_{xy}^{(j)} & 0 \\ 0 & K_{yy}^{(j)} & K_{xx}^{(j)} & 0 & 0 & 2K_{xy}^{(j)} \\ 0 & 0 & 0 & 2K_{xy}^{(j)} & K_{xx}^{(j)} & K_{yy}^{(j)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_{11} \\ D_{22} \\ D_{12} \\ D_{66} \\ D_{16} \\ D_{26} \end{Bmatrix} = -\frac{\rho h}{2} \omega_j^2 \begin{Bmatrix} \int_S \Phi^{(j)} x^2 dS \\ \int_S \Phi^{(j)} y^2 dS \\ \int_S \Phi^{(j)} xy dS \end{Bmatrix}. \quad (4.1-30)$$

Os coeficientes de rigidez na equação (4.1-29) podem ser interpretados em termos de curvaturas médias para o modo próprio (j). Na prática, p modos são considerados no desenvolvimento do seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{xx}^{(j)} & 0 & K_{yy}^{(j)} & 0 & K_{xy}^{(j)} & 0 \\ 0 & K_{yy}^{(j)} & K_{xx}^{(j)} & 0 & 0 & K_{xy}^{(j)} \\ 0 & 0 & 0 & K_{xy}^{(j)} & K_{xx}^{(j)} & K_{yy}^{(j)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{xx}^{(k)} & 0 & K_{yy}^{(k)} & 0 & K_{xy}^{(k)} & 0 \\ 0 & K_{yy}^{(k)} & K_{xx}^{(k)} & 0 & 0 & K_{xy}^{(k)} \\ 0 & 0 & 0 & K_{xy}^{(k)} & K_{xx}^{(k)} & K_{yy}^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_{11} \\ D_{22} \\ D_{12} \\ D_{66} \\ D_{16} \\ D_{26} \end{Bmatrix} = -\frac{\rho h}{2} \begin{Bmatrix} \dots \\ \omega_j^2 \int_S \Phi^{(j)} \cdot x^2 \cdot dS \\ \omega_j^2 \int_S \Phi^{(j)} \cdot y^2 \cdot dS \\ \omega_j^2 \int_S \Phi^{(j)} \cdot xy \cdot dS \\ \dots \\ \omega_k^2 \int_S \Phi^{(k)} \cdot x^2 \cdot dS \\ \omega_k^2 \int_S \Phi^{(k)} \cdot y^2 \cdot dS \\ \omega_k^2 \int_S \Phi^{(k)} \cdot xy \cdot dS \\ \dots \end{Bmatrix}, \quad (4.1-31)$$

que é um sistema do tipo:

$$AD = B, \quad (4.1-32)$$

sendo A uma matriz $3p \times 6$; D é uma matriz 6×1 e B é uma matriz $3p \times 1$. O sistema pode ser resolvido usando-se o método dos mínimos quadrados por haver um número maior equações do que variáveis para obter finalmente:

$$D = (A^T A)^{-1} (A^T B). \quad (4.1-33)$$

A susceptibilidade do método está diretamente relacionada com o grau de independência das equações no sistema (4.1-32). Este pode ser obtido usando-se um ajuste adequado dos modos.

Uma escolha relevante dos modos usados no programa de identificação é de grande importância. A observação das linhas nodais da placa vibrando permite conhecer qual a rigidez está fortemente envolvida em cada modo, como pode ser visto na figura 4.1-1. Geralmente, os modos mais baixos promoverão erros mais baixos por apresentarem um número menor de picos e vales, o que favorece uma melhor aproximação das derivadas e integrais numéricas.

4.2 Simulações, resultados e discussões

Para verificar a precisão do primeiro método de identificação dos coeficientes de rigidez abordado por este trabalho será usado o software Ansys 7.0. Como o método tem por objetivo identificar tais propriedades de um material desconhecido, ele parte do princípio que tal material seja a priori anisotrópico, cuja solução é obtida de uma equação diferencial para placas finas anisotrópicas. Portanto, espera-se que para um material que não seja anisotrópico, haverá repetição de alguma constante elástica e a anulação de outras, definindo-se assim uma isotropia ou ortotropia. No Ansys, para a verificação do presente método, foram considerados três materiais, sendo um isotrópico (aço), um ortotrópico (compósito carbono/epóxi) e um anisotrópico (compósito carbono/epóxi), cujas propriedades elásticas são dadas na tabela 4.2-1 (GRÉDIAC, 1996). Com estes dados, através da análise modal numérica, baseada em elementos finitos, obteve-se os valores requeridos (as frequências naturais e os autovetores de seus respectivos modos próprios) para os três modos específicos; um de torção e dois de flexão (ou os que mais se aproximam destes modos). Esses valores por sua vez foram os dados de entrada para

um programa desenvolvido no software Matlab 7.0 onde foram executados todos os cálculos necessários (diferenças finitas, integração numérica, interpolação e mínimos quadrados) para a obtenção da solução da equação diferencial e conseqüentemente dos valores das rigidezes procuradas. De posse destes valores torna-se possível a comparação entre as propriedades que foram utilizadas como dados de entrada no Ansys com as obtidas com a aplicação do método. O fluxograma representado pela figura 4.2-1 mostra a relação de utilização dos programas para a verificação deste primeiro método.

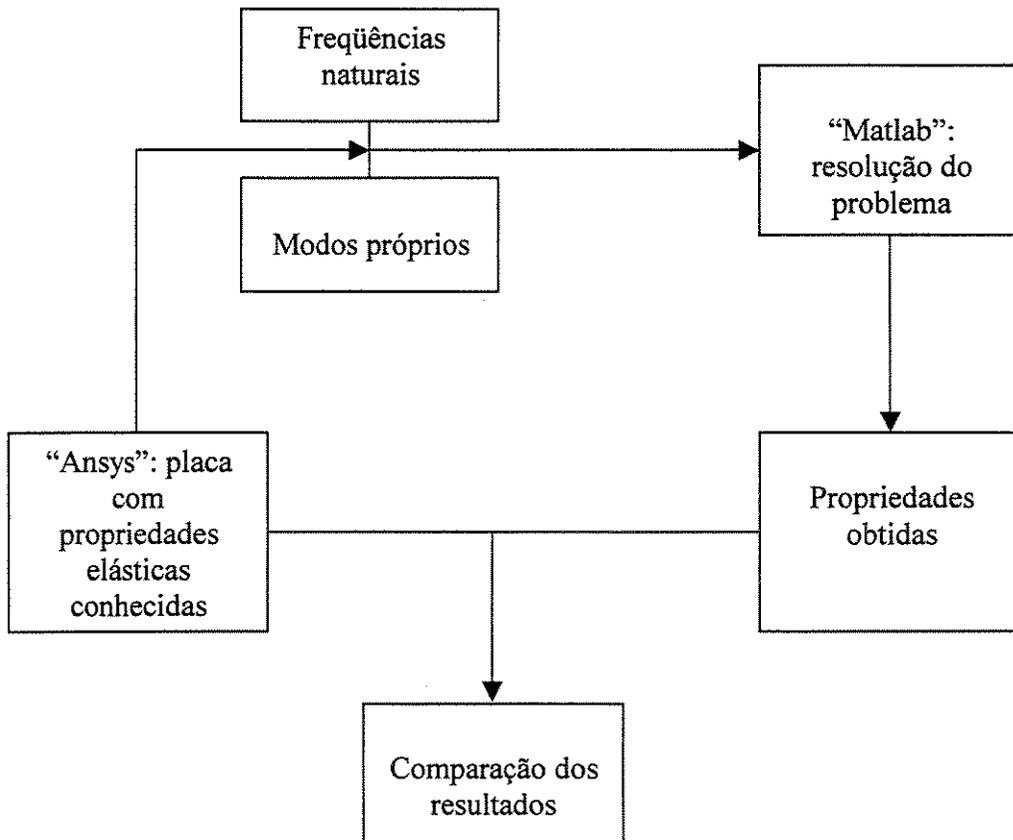


figura 4.2-1: esquema de utilização dos programas para o primeiro método

Tabela 4.2-1: características geométricas e propriedades das placas utilizadas para a verificação do método.

Características	Placa 1: isotrópica Aço	Placa 2: ototrópica Carbono/epóxi [0]_s	Placa 3: anisotrópica Carbono/epóxi [0,45,90,135]_s
D_{11} (Nmm)	178119,9	93381,7	64363,9
D_{22} (Nmm)	178119,9	7717,5	24155,8
D_{12} (Nmm)	53405,1	2546,8	8875,1
D_{66} (Nmm)	62434,6	3781,6	10032,7
D_{16} (Nmm)	0,0	0,0	6019,6
D_{26} (Nmm)	0,0	0,0	6019,6
E_1 de cada lâmina (MPa)	210000	120000	120000
E_2 de cada lâmina (MPa)	210000	10000	10000
G_{12} de cada lâmina (MPa)	80800	4900	4900
Coefficiente de Poisson de cada lâmina	0,3	0,3	0,3
Largura (mm)	350	350	350
Comprimento (mm)	450	450	450
Espessura do laminado (mm)	2,1	2,1	2,1
Densidade (Kg/mm ³)	7,8	1,510	1,510

Para a placa 1 foi utilizado no Ansys o elemento “SHELL63” com 4 nós por elemento e para as placas 2 e 3 foi utilizado o elemento “SHELL99” com 8 nós onde as propriedades elásticas e as direções para cada lâmina podem ser definidas separadamente. Para este caso, há a necessidade de se aumentar um ponto em cada elemento na posição central para que seja possível utilizar o método das diferenças finitas. O valor das variáveis neste novo nó foi obtida por interpolação usando as funções de forma dos elementos finitos utilizados.

Considerando-se uma malha com 80 nós (elementos com dimensões 50 x 50 mm) e 176 nós (elementos com dimensões 35 x 30 mm com 4 nós) para a placa 1, como foi feito nos ensaios experimentais, e 501 nós (mais 150 nós que foram criados no Matlab para estes elementos) para as placas 2 e 3 (elementos com dimensões 35 x 30 com 8 nós), obteve-se os valores das constantes elásticas mostradas na tabela 4.2-2, respectivamente.

Tabela 4.2-2: resultados para o primeiro método sem interpolação.

Propriedades elásticas	Placa 1 80 nós	Erro (%)	Placa 1 176 nós	Erro (%)	Placa 2	Erro (%)	Placa 3	Erro (%)
D_{11} (Nmm)	229872	29,05	181178,8	1,72	95593,2	2,37	65762,3	2,17
D_{22} (Nmm)	218179,8	22,49	171566,7	3,68	7817,5	1,3	24257,4	0,42
D_{12} (Nmm)	743603	39,23	51811,8	2,98	2444,1	4,03	8860,1	0,17
D_{66} (Nmm)	63403,9	1,55	62528,9	0,15	3768,3	0,35	10034,2	0,015
D_{16} (Nmm)	118,5	--	0,1	--	-0,2	--	6058,1	0,64
D_{26} (Nmm)	-370,0	--	4,0	--	0,1	--	5971,4	0,80

Utilizando-se essa mesma quantidade de nós para obter os parâmetros modais (frequências naturais e modos) mas fazendo-se agora uma interpolação spline e uma cúbica no Matlab para aumentar 5 vezes o número de nós em cada direção, obteve-se os valores das constantes elásticas mostradas nas tabelas 4.2-3. e 4.2-4.

Tabela 4.2-3: resultados para o primeiro método com interpolação spline.

Propriedades elásticas	Placa 1	Erro (%)	Placa 2	Erro (%)	Placa 3	Erro (%)
D_{11} (Nmm)	179695,1	0,88	93406,9	0,027	64281,8	0,10
D_{22} (Nmm)	180550,5	1,36	7782,5	0,84	24143,6	0,05
D_{12} (Nmm)	54493,0	2,03	2339,8	8,10	8682,2	2,17
D_{66} (Nmm)	62376,0	0,09	3750,2	0,83	10008,4	0,24
D_{16} (Nmm)	-0.0000	--	0,0	--	5977,7	0,70
D_{26} (Nmm)	0.0004	--	0,0	--	5974,1	0,70

Tabela 4.2-4: resultados para o primeiro método com interpolação cúbica.

Propriedades elásticas	Placa 1	Erro (%)	Placa 2	Erro (%)	Placa 3	Erro (%)
D_{11} (Nmm)	177112,0	0,56	93287,3	0,1	64192,0	0,26
D_{22} (Nmm)	174326,8	2,12	7749,5	0,4	24040,1	0,48
D_{12} (Nmm)	52040,9	2,55	2326,8	8,63	8640,2	2,65
D_{66} (Nmm)	62371,9	0,10	3750,1	0,83	10005,0	0,27
D_{16} (Nmm)	-0,1	--	0,0	--	5967,5	0,86
D_{26} (Nmm)	0,3	--	0,0	--	5953,9	0,10

É possível verificar, através das tabelas 4.2-3 e 4.2-4 acima, que com a interpolação houve uma melhora na precisão dos resultados. As figuras 4.2-2 a 4.2-13 mostram os três modos e suas derivadas segunda da placa 1 com 176 nós, e as figuras 4.2-14 a 4.2-17 mostram o modo de flexão em x interpolado e sua derivada em x interpolada com interpolação spline e cúbica para ilustrar a diferença entre as duas interpolações.

Os valores de D_{12} apresentaram os maiores erros, como pode ser visto nas tabelas 4.2-3 e 4.2-4. Este fato pode ser justificado por estar este parâmetro relacionado com o efeito Poisson. Uma das razões principais é certamente a pequena contribuição desta rigidez em todos os modos.

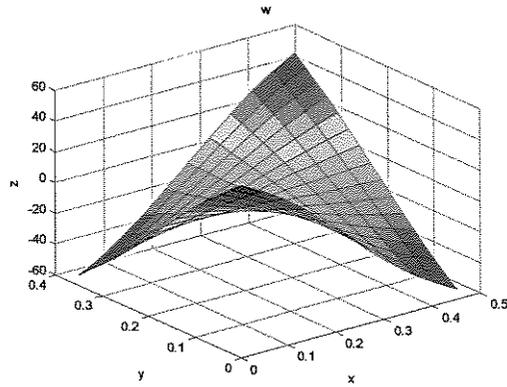


figura 4.2-2: modo de torção da placa de aço com 176 nós sem interpolação.

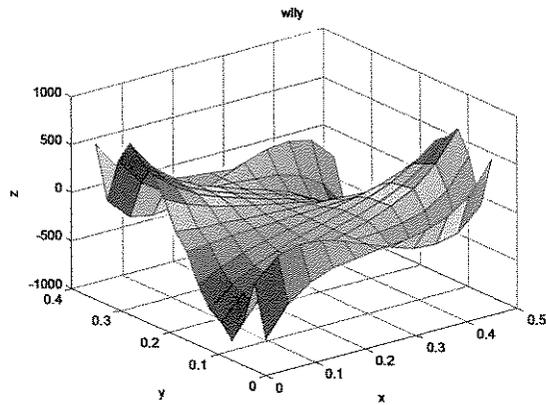


figura 4.2-3: derivada segunda em y do modo de torção da placa de aço com 176 nós sem interpolação.

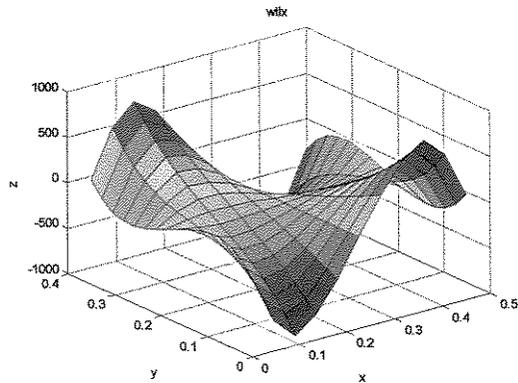


figura 4.2-4: derivada segunda em x do modo de torção da placa de aço com 176 nós sem interpolação.

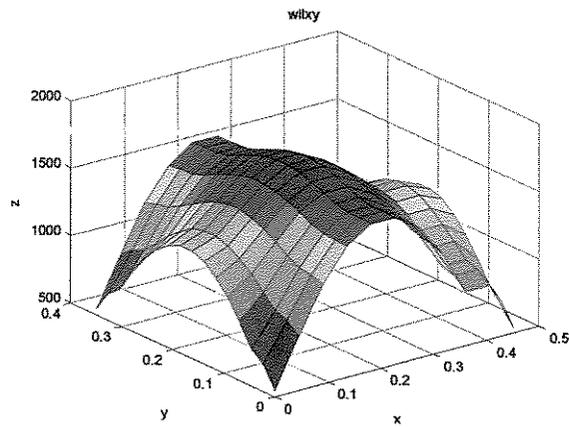


figura 4.2-5: derivada segunda em xy do modo de torção da placa de aço com 176 nós sem interpolação.

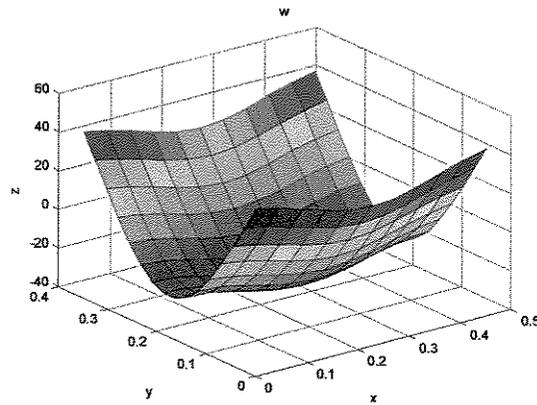


figura 4.2-6: modo de flexão em y da placa de aço com 176 nós sem interpolação.

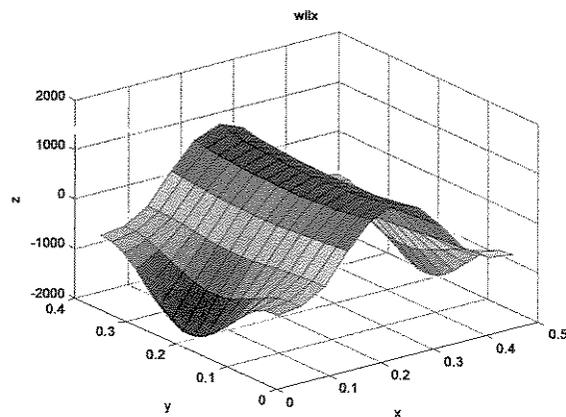


figura 4.2-7: derivada segunda em x do modo de flexão em y da placa de aço com 176 nós sem interpolação.

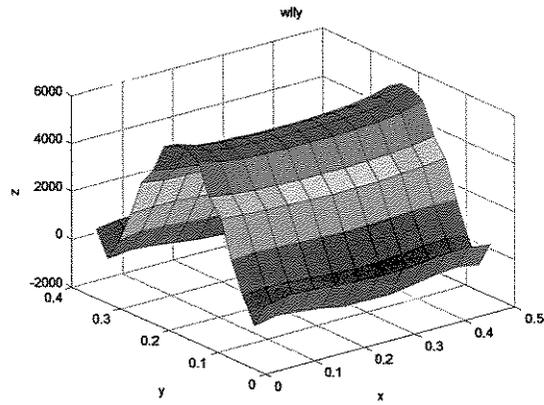


figura 4.2-8: derivada segunda em y do modo de flexão em y da placa de aço com 176 nós sem interpolação.

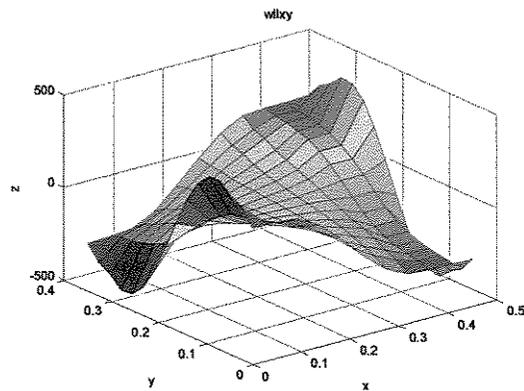


figura 4.2-9: derivada segunda em xy do modo de flexão em y da placa de aço com 176 nós sem interpolação.

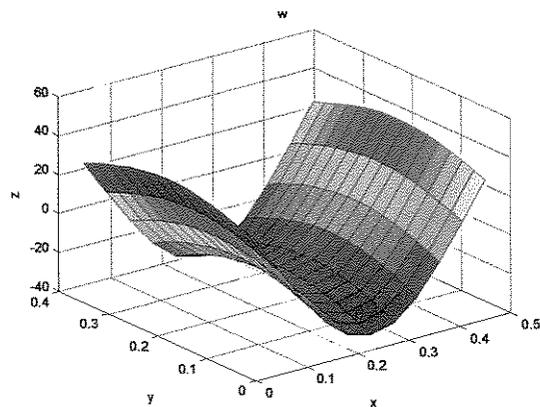


figura 4.2-10: modo de flexão em x da placa de aço com 176 nós sem interpolação.

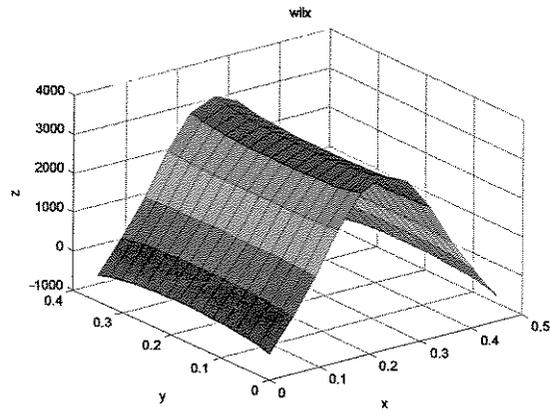


figura 4.2-11: derivada segunda em x do modo de flexão em x da placa de aço com 176 nós sem interpolação.

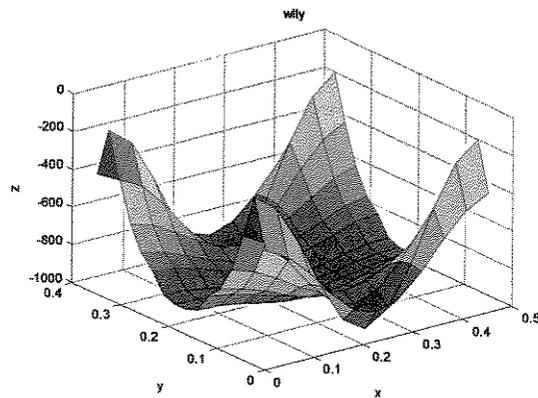


figura 4.2-12: derivada segunda em y do modo de flexão em x da placa de aço com 176 nós sem interpolação.

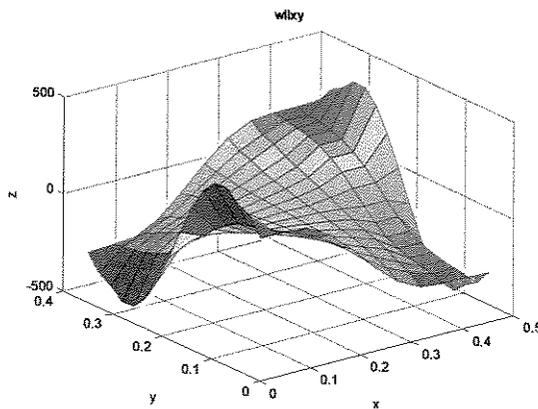


figura 4.2-13: derivada segunda em xy do modo de flexão em x da placa de aço com 176 nós sem interpolação.

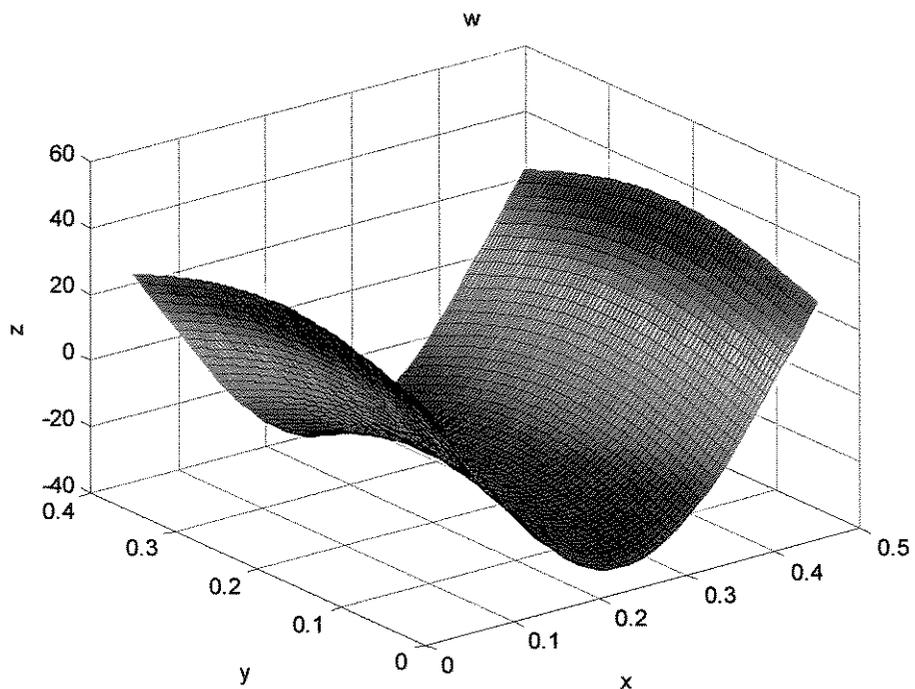


figura 4.2-14: modo de flexão em x com interpolação spline.

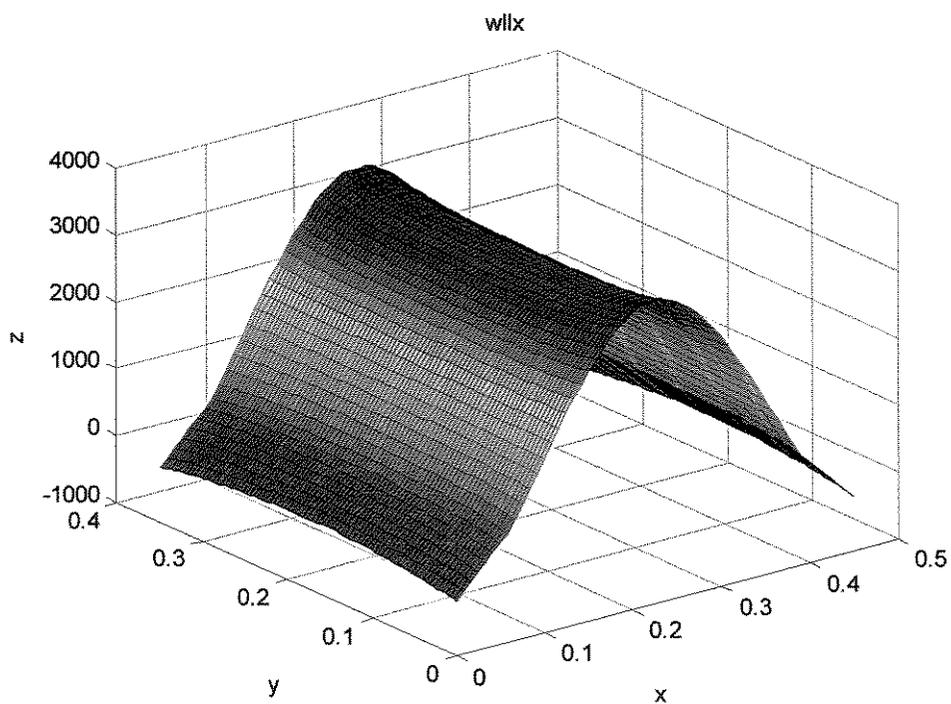


figura 4.2-15: derivada segunda do modo de flexão em x com interpolação spline.

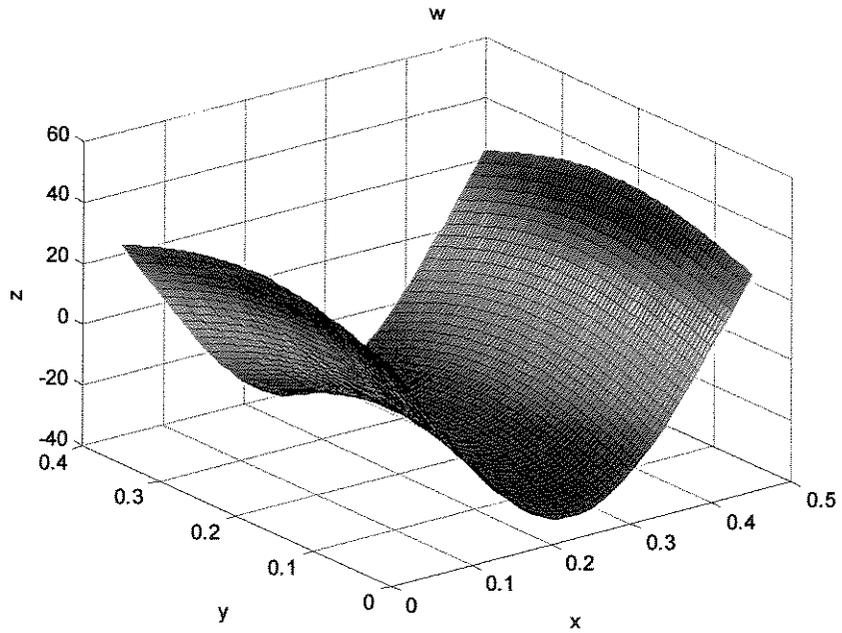


figura 4.2-16: modo de flexão em x com interpolação cúbica.

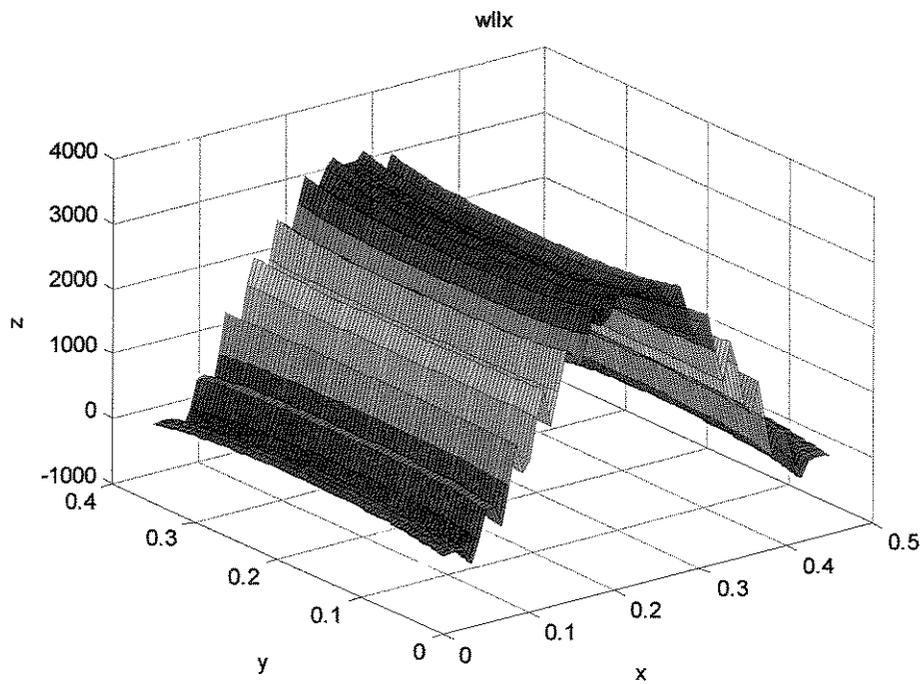


figura 4.2-17: derivada segunda em x do modo de flexão em x com interpolação cúbica.

Através destas figuras 4.2-15 e 4.2-17 pode-se perceber que com a interpolação spline as curvas das derivadas apresentaram ser melhores que as curvas com a interpolação cúbica. Isso ocorre pois a interpolação cúbica não garante a continuidade da derivada segunda da função em todos os pontos. Estas interpolações são eficientes somente nos casos em que os modos apresentam curvaturas suaves, sem muita variação de sinal. Caso o contrário, seria necessário um número muito maior de pontos (nós), com os valores da função conhecidos, o que tornaria a análise modal experimental muito trabalhosa. Como os modos utilizados pelo método apresentam essa característica de suavidade, a interpolação melhorou a precisão do método.

Com os valores apresentados pelas tabelas 4.2-2, 4.2-3 e 4.2-4 pode-se perceber que o método é eficaz. Experimentalmente, o método foi testado para uma placa de aço, isotrópica, cujos valores das frequências naturais e dos modos próprios foram determinados através da análise modal experimental. O fluxograma representado pela figura 4.2-18 mostra a relação de utilização dos programas para a verificação deste primeiro método a partir de dados experimentais.

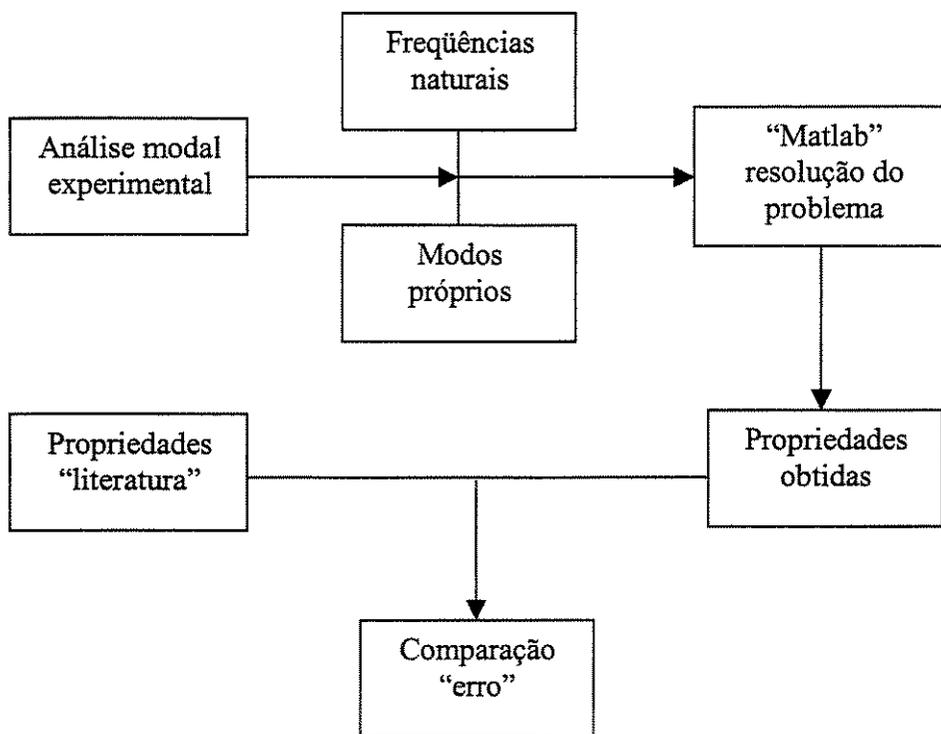


figura 4.2-18: esquema de utilização dos programas para o primeiro método.

Todos os aparelhos utilizados já foram mencionados no capítulo 3. A tabela 4.2-5 abaixo mostra os resultados obtidos para dois dos três ensaios descritos, sem interpolação, e as tabelas 4.2-6 e 4.2-7 mostra os resultados obtidos com interpolação spline e cúbica respectivamente.

Tabela 4.2-5: valores obtidos para a placa de aço utilizada nos ensaios experimentais sem interpolação.

Propriedades elásticas	Ensaio 1 80 nós	Erro (%)	Ensaio 2 176 nós	Erro (%)
D_{11} (Nmm)	505361,8	138,72	147941,2	16,94
D_{22} (Nmm)	181982,2	2,16	132462,4	25,63
D_{12} (Nmm)	238023,1	345,69	30761,1	42,40
D_{66} (Nmm)	58292,7	6,63	66407,8	6,36
D_{16} (Nmm)	38270,8	--	-13428	--
D_{26} (Nmm)	-6719,7	--	-4493	--

Tabela 4.2-6: valores obtidos para a placa de aço utilizada nos ensaios experimentais com interpolação spline.

Propriedades elásticas	Ensaio 1	Erro (%)	Ensaio 2	Erro (%)
D_{11} (Nmm)	467078,9	162,22	249149,4	39,87
D_{22} (Nmm)	155578,6	12,65	140192	21,29
D_{12} (Nmm)	220833,3	313,5	41248,1	22,76
D_{66} (Nmm)	63723,2	2,06	72116,1	15,5
D_{16} (Nmm)	62189,7	--	-39623,9	--
D_{26} (Nmm)	-1332,4	--	-14505,6	--

Tabela 4.2-7: valores obtidos para a placa de aço utilizada nos ensaios experimentais com interpolação cúbica.

Propriedades elásticas	Ensaio 1	Erro (%)	Ensaio 2	Erro (%)
D_{11} (N·mm)	354688,6	99,129	187205,8	5,10
D_{22} (N·mm)	141596,6	20,50	155065,9	12,94
D_{12} (N·mm)	202085,0	278,4	35443,3	33,63
D_{66} (N·mm)	57374,9	8,10	65396,6	4,74
D_{16} (N·mm)	24083,2	--	-17936,6	--
D_{26} (N·mm)	-88,1	--	-7563,6	--

Pelas tabelas 4.2-6 e 4.2-7 pode-se perceber que mesmo com a interpolação não houve, em geral, melhoras nos valores obtidos. Isso ocorreu devido aos erros experimentais surgidos nas medições dos pontos (nós).

As figuras 4.2-19 a 4.2-24 mostram os modos obtidos experimentalmente sem interpolação e com interpolação cúbica para a placa utilizando-se 176 nós.

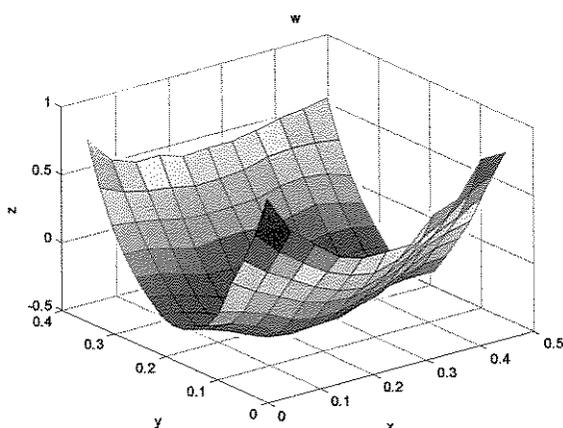


figura 4.2-19: modo de flexão em y da placa experimental do ensaio 2 sem interpolação.

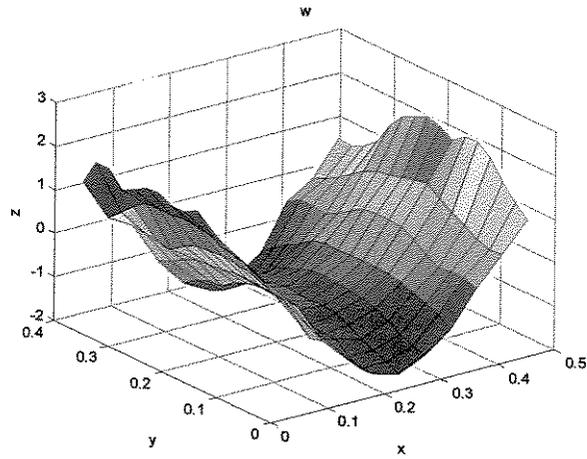


figura 4.2-20: modo de flexão em x da placa experimental do ensaio 2 sem interpolação.

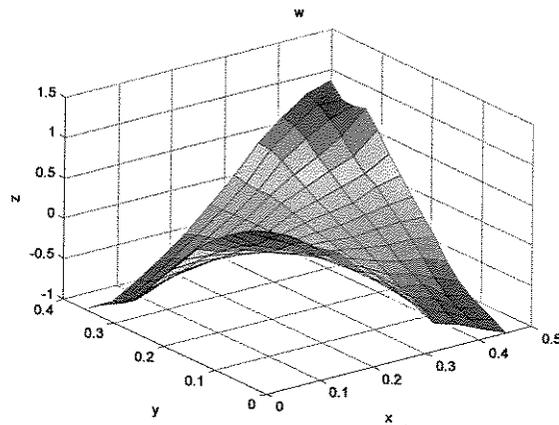


figura 4.2-21: modo de torção da placa experimental do ensaio 2 sem interpolação.

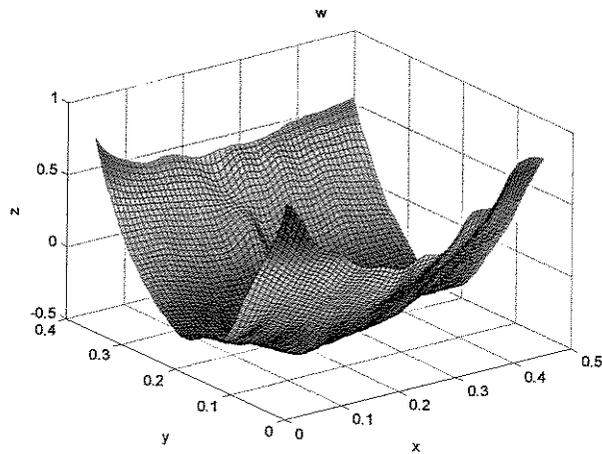


figura 4.2-22: modo de flexão em y da placa experimental do ensaio 2 com interpolação cúbica.

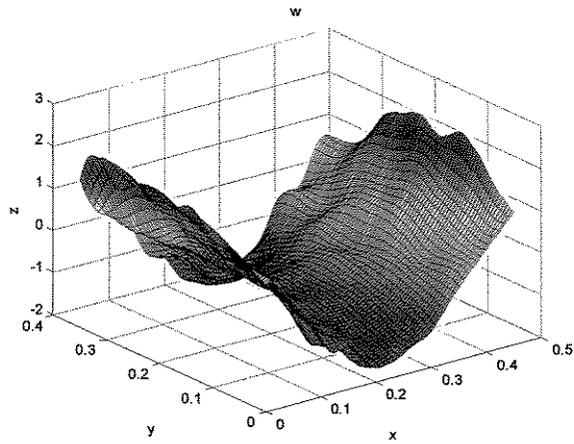


figura 4.2-23: modo de flexão em x da placa experimental do ensaio 2 com interpolação cúbica.

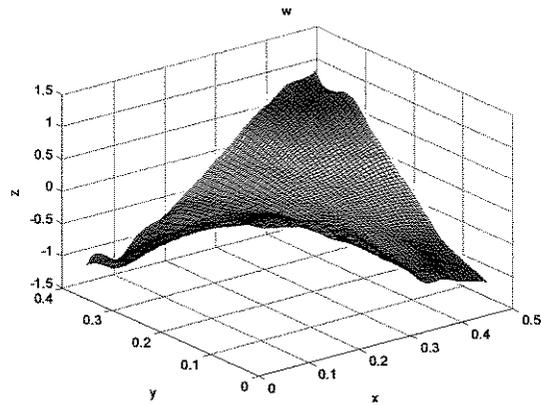


figura 4.2-24: modo de torção da placa experimental do ensaio 2 com interpolação cúbica.

De acordo com os valores obtidos, pode-se perceber que este método abordado para identificação das constantes elásticas é um método eficiente e preciso, desde que os valores requeridos como dados de entrada sejam também muito precisos. Esta precisão está relacionada diretamente com a análise modal, o que exige que a mesma seja muito bem executada, utilizando-se aparelhos e procedimentos adequados. Os aparelhos utilizados na análise modal neste trabalho não são adequados para obter a precisão requerida neste método. Somente mostrou adequado para obter as frequências naturais. Para materiais compósitos leves, esses erros poderiam ser ainda maiores. Também, para materiais em que o amortecimento é alto e há uma defasagem entre

os auto-vetores de um determinado modo, este método também pode apresentar erros. O amortecimento faz com que na ressonância, os pontos não atinjam os valores máximos e mínimos simultaneamente. E daí o fato de haver uma defasagem entre eles. O amortecimento também não é considerado no modelo matemático utilizado neste método.

As dimensões da placa (que são largura, comprimento e espessura) e dos elementos da malha, e a densidade do material utilizadas para a determinação das constantes elásticas por este primeiro método devem ser precisamente medidas, pois seus valores influenciam diretamente nos valores das constantes calculadas. Isso porquê o Método da Diferenças Finitas e Integração Numérica requer os valores pontuais da função que está sendo aproximada (neste trabalho é a função flecha) e o distanciamento destes pontos entre si, que são dados pelas dimensões, largura e comprimento, dos elementos da malha. Portanto, as medidas dos pontos na análise modal devem ser cuidadosamente realizadas em suas posições pré-definidas, que representam os nós da malha na placa. A densidade do material e a espessura da placa são valores aplicados diretamente na equação diferencial (4.1-15) e, portanto, influenciam também diretamente no problema.

Uma das dificuldades deste primeiro método é encontrar os três modos específicos (torção e dois de flexão) através da análise modal experimental, já que para cada material há uma ordem própria para que estes modos surjam, que por sua vez, está relacionado com a facilidade ou não de vibrarem em tais modos dependendo da frequência, como foi visto no capítulo 3. Portanto, a princípio, trata-se de um trabalho de identificação dos modos requeridos, utilizando-se um número maior de frequências nas FRFs para a análise. Como foi visto também no capítulo 3, o fato dos mesmos modos em materiais diferentes apresentarem auto-vetores diferentes, não é possível usar para este método os auto-vetores de modos calculados numericamente com frequências naturais calculadas experimentalmente (correspondentes a estes modos). Ou, em outras palavras, utilizar um modo de torção e os dois modos de flexão de um material qualquer, calculado numericamente, e as frequências naturais para o modo de torção e os de flexão calculados experimentalmente, na placa real. Esse fato pouparia o trabalho de se ter que medir vários pontos experimentais e, também, facilitaria a utilização de uma malha mais refinada.

Capítulo 5 – Segundo método

5.1 Otimização de projeto no Ansys 7.0

5.1.1 Introdução à otimização

No Ansys (7.0) existem, fundamentalmente, dois tipos diferentes de otimização. O primeiro, refere-se ao “*Design Optimization*”, que trabalha inteiramente com uma linguagem própria chamada “*Ansys Parametric Design Language*” (APDL) e está contido em seu próprio módulo (/OPT). Este tipo de otimização permite o controle do usuário na definição das funções e dos parâmetros (função minimizadora, gradientes e projetos de experimentos) na linguagem APDL que serão minimizados e restritos pelos métodos de otimização. O outro tipo de otimização é a “*Topological Optimization*”, que é uma forma própria de otimização. Ela é, algumas vezes, conhecida também como “*Layout Optimization*” na literatura. O objetivo desta forma de otimização é encontrar o melhor uso do material do corpo, tal que, um critério objetivo (como rigidez global, frequência natural, etc) leve a um valor máximo ou mínimo, sujeito à restrições dadas (como por exemplo, redução de volume). A função distribuição de material em todo o corpo serve como parâmetro de otimização, e o usuário precisa definir o problema estrutural (propriedades do material, modelo do elemento finito, cargas, etc) e a função objetivo (a função que será minimizada ou maximizada). As variáveis de estado devem ser selecionadas por um critério pré-definido. O “*Topological Optimization*” não faz parte do módulo “*Design Optimization*” mas está agregado às estruturas padrões do Ansys: pré-processamento, solução e pós-processamento. Não requer linguagem APDL e, portanto, não requer a definição explícita dos parâmetros de otimização, como as variáveis independentes a serem otimizadas.

5.1.2 Introdução ao “*Design Optimization*”

Este módulo do Ansys (7.0) é uma parte integral do programa que pode ser empregada para se determinar o projeto ótimo. Este projeto ótimo é, por sua vez, o melhor projeto em

relação a um critério predefinido. Em muitas situações, a minimização de uma única função pode não ser o objetivo principal, tendo também que atender a algumas restrições estabelecidas para o projeto como, por exemplo, limites de tensões, geometria, deslocamento, fluxo de calor etc. O Apêndice-B apresenta os conceitos básicos de otimização bem como a nomenclatura utilizada neste capítulo.

Enquanto se trabalha em busca de um projeto ótimo, as rotinas de otimização do Ansys (7.0) empregam três tipos de variáveis que caracterizam o processo de projeto: *variáveis de projeto*, *variáveis de estado* e *função objetivo*. Estas variáveis, conhecidas como variáveis de otimização, são representadas por parâmetros escalares na linguagem APDL e representam um passo essencial para a qualidade do processo. As variáveis de projeto são variáveis independentes do problema e podem ser representadas por um vetor:

$$\{x\} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \Lambda \quad x_n]. \quad (5.1-1)$$

Estas variáveis estão sujeitas a restrições em que se define um limite máximo e mínimo de forma que:

$$\underline{x}_i \leq x_i \leq \overline{x}_i; \quad (i = 1, 2, \Lambda, n); \quad (5.1-2)$$

sendo n o número de variáveis de projeto.

As restrições das variáveis de projeto referem-se freqüentemente ao tamanho das restrições e definem o que se chama comumente como *espaço de projeto factível (ou aceitável)*. A função a ser minimizada é:

$$f = f(\{x\}), \quad (5.1-3)$$

que é uma função das variáveis de projeto. Esta função está sujeita a:

$$g_i(\{x\}) \leq \bar{g}_i; \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m_1), \quad (5.1-4)$$

$$\underline{h}_i \leq h_i(\{x\}); \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m_2), \quad (5.1-5)$$

$$\underline{w}_i \leq w_i(\{x\}) \leq \bar{w}_i; \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m_3), \quad (5.1-6)$$

em que:

f : é a função objetivo, dependente das variáveis de projeto;

g_i , h_i e w_i : são variáveis de estado. A barra subscrita representa o menor limite e a barra sobrescrita representa o maior limite;

$m_1 + m_2 + m_3$: número de variáveis de estado restritas com valores limites.

As variáveis de estado são variáveis dependentes e variam com o vetor $\{x\}$ de variáveis de projeto. As equações acima definem o problema de minimização restrito, no qual o objetivo é a minimização da função objetivo f sob as restrições impostas.

No Ansys, para as variáveis de projeto, deve-se definir uma tolerância maior que zero com a mesma unidade desta variável. Podem ser utilizadas no máximo 60 variáveis de projeto. Já para as variáveis de estado, pode-se definir ou um limite máximo e mínimo, ou apenas um limite e, também, deve-se definir uma tolerância maior que zero com a mesma unidade desta variável. O Ansys permite o uso de até 100 variáveis de estado. Com relação à função objetivo, em um problema no “design optimization” pode-se definir apenas uma desta variável. E assim como ocorre com as outras duas variáveis, deve-se definir uma tolerância com a mesma unidade desta variável.

5.1.3 Grupos de projetos factíveis e infactíveis

As configurações do projeto, que satisfazem todas as restrições, são referidas como *projetos factíveis* (ou *aceitáveis*, ou ainda, *possíveis*). Já as configurações em que há violação de uma ou mais restrições são os *projetos infactíveis* (ou *não aceitáveis*, ou ainda, *impossíveis*). Para se definir um espaço de projeto possível, uma tolerância deve ser adicionada em cada um dos limites (no maior limite e no menor limite) das variáveis de projeto. Então, se $\{x\}^*$ é um dado grupo de variáveis de projeto ótimo de um passo qualquer, tem-se:

$$\{x\}^* = (x_1^* \quad x_2^* \quad x_3^* \quad \dots \quad x_n^*), \quad (5.1-7)$$

e este projeto pode ser considerado factível somente se:

$$g_i^* = g_i(\{x\}^*) \leq \bar{g}_i + \alpha_i; \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m_1), \quad (5.1-8)$$

$$\underline{h}_i - \beta_i \leq h_i^* = h_i(\{x\}^*); \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m_2), \quad (5.1-9)$$

$$\underline{w}_i - \gamma_i \leq w_i^* = w_i(\{x\}^*) \leq \bar{w}_i + \gamma_i; \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m_3), \quad (5.1-10)$$

sendo α_i , β_i e γ_i : as tolerâncias.

E, para as variáveis de projeto ótimo, tem-se:

$$\underline{x}_i \leq x_i^* \leq \bar{x}_i; \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5.1-11)$$

desde que nenhuma tolerância seja adicionada às restrições das variáveis de projeto.

5.1.4 Grupo de melhor projeto

Os grupos de projeto são gerados por métodos ou ferramentas de otimização através de processos iterativos, e o projeto ótimo é, então, determinado, e o seu valor armazenado. O melhor grupo de variáveis de projeto, que representa o projeto ótimo, é determinado sob uma das seguintes condições:

- se existem um ou mais grupos factíveis, o melhor projeto será aquele factível em que o valor da função objetivo é menor, ou em outras palavras, será o projeto que mais precisamente concorda com os objetivos matemáticos representados pelas expressões (5.1-3) a (5.1-6);
- se todos os grupos são projetos infactíveis, o melhor projeto será aquele que mais se aproxima de um projeto factível, independente do valor da função objetivo.

5.1.5 Métodos de otimização e ferramentas de projeto

O procedimento de otimização do Ansys oferece dois métodos e algumas ferramentas que, em várias formas, tentam se enquadrar na formulação matemática geral acima, representada pelas expressões (5.1-3) a (5.1-6). Os métodos de otimização (*Método de aproximação por subproblema* e *Método de otimização de Primeira-Ordem*) transformam o problema restrito em um irrestrito que será eventualmente minimizado. Já as ferramentas de projeto, ao contrário, não executam minimização diretamente, mas oferecem meios alternativos para se compreender o espaço de projeto e o comportamento das variáveis dependentes. As ferramentas oferecidas pelo Ansys são: “*Single – Loop*”, “*Randon*”, “*Sweep*”, “*Factorial*” e “*Gradiente*”.

Dependendo do problema, o Ansys permite ao usuário implementar um algoritmo de otimização externo, onde seus algoritmos já existentes são ignorados.

5.1.6 Método de aproximação por subproblema

Este método de otimização pôde ser descrito como um método de ordem-zero, avançado, em que requer somente os valores das variáveis dependentes (função objetivo e variáveis de estado) e não de suas derivadas. Essas variáveis dependentes são aproximadas por meio de ajustes de mínimos quadrados e o problema de minimização restrito é convertido em um problema de minimização irrestrito através do uso de funções penalidades. Portanto, esses dois conceitos (uso de aproximações para a função objetivo e para as variáveis de estado, e a conversão de um problema restrito para um problema irrestrito) representam um papel primordial neste método. A minimização é então executada em toda iteração sobre a função penalidade, aproximada (chamada de subproblema), até que a convergência ou algum critério de parada seja encontrado. Cada iteração neste método representa um loop completo de análise por elementos finitos.

Como este método depende das aproximações para a função objetivo e de cada variável de estado, uma certa quantidade de informações preliminares é requerida. Estas informações, por sua vez, podem ser definidas diretamente pelo usuário com o uso das ferramentas de otimização. Caso isso não ocorra, o método gerará, por si só, grupos de projetos ótimos.

5.1.6.1 Métodos de aproximações

O primeiro passo na minimização do problema restrito é representar cada variável dependente por uma aproximação. Para a notação “ $\hat{}$ ” representando esta aproximação, tem-se:

$$\hat{f}(\{x\}) = f(\{x\}) + erro; \quad (5.1-12)$$

$$\hat{g}(\{x\}) = g(\{x\}) + erro; \quad (5.1-13)$$

$$\hat{h}(\{x\}) = h(\{x\}) + erro; \quad (5.1-14)$$

$$\hat{w}(\{x\}) = w(\{x\}) + erro. \quad (5.1-15)$$

A forma mais complexa que a aproximação pode assumir é uma representação completamente quadrática com termos cruzados. Usando o exemplo da função objetivo, tem-se:

$$\hat{f} = a_0 + \sum_i^n a_i x_i + \sum_i^n \sum_j^n b_{ij} x_i x_j. \quad (5.1-16)$$

A forma corrente de ajuste varia de iteração para iteração e é determinada geralmente pelo programa (mas permite algum controle do usuário). Uma técnica de mínimos quadrados ponderada é usada para determinar os coeficientes a_i e b_{ij} da equação (5.1-16) anterior. Por exemplo, a norma erro por mínimos quadrados ponderados para a função objetivo tem a forma:

$$E^2 = \sum_{j=1}^{nd} \varphi^{(j)} (f^{(j)} - \hat{f}^{(j)})^2, \quad (5.1-17)$$

sendo:

$\varphi^{(j)}$: o peso associado à iteração j ;

nd : número corrente de iterações de projetos.

Similarmente, as normas E^2 são formadas para cada variável de estado. Os coeficientes da equação erro são determinados minimizando E^2 com relação aos coeficientes. Os pesos usados são calculados em uma das seguintes formas:

- baseado nos valores da função objetivo, onde os passos de projeto com baixos valores para a função objetivo tem peso alto;
- baseado nos valores da função objetivo, onde os passos de projeto são mais próximos para o peso alto de admissão do projeto;

- baseado na possibilidade, onde os passos factíveis tem peso alto e os passos infactíveis tem peso baixo;
- baseado em uma combinação dos três pesos descritos acima;
- todos os pesos são unitários para todos os j .

Um certo número de iterações (passos) do projeto deve existir de maneira a formar as aproximações; caso contrário, passos de projetos aleatórios serão gerados até que o número requerido seja obtido. Ou seja:

$$nd < n + 2; \quad (5.1-18)$$

$$nd \geq n + 2, \quad (5.1-19)$$

sendo:

nd : número de passos de projeto;

n : número de variáveis de projeto.

Enquanto mais passos são gerados, os termos incluídos na equação (5.1-16) de \hat{f} aumentam.

5.1.6.2 Minimizando a aproximação por Subproblema

Com as aproximações das funções, o problema de minimização representado pelas equações (5.1-3) a (5.1-6) pode ser reescrito como:

- minimizar a função

$$\hat{f} = \hat{f}(\{x\}), \quad (5.1-20)$$

- sujeito a:

$$\underline{x}_i \leq x_i^* \leq \bar{x}_i; \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (5.1-21)$$

$$\hat{g}_i^* = \hat{g}_i(\{x\}^*) \leq \bar{g}_i + \alpha_i; \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m_1), \quad (5.1-22)$$

$$\underline{h}_i - \beta_i \leq \hat{h}_i^* = \hat{h}_i(\{x\}^*); \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m_2), \quad (5.1-23)$$

$$\underline{w}_i - \gamma_i \leq \hat{w}_i^* = \hat{w}_i(\{x\}^*) \leq \bar{w}_i + \gamma_i; \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m_3). \quad (5.1-24)$$

O próximo passo é a conversão destas equações (5.1-20) a (5.1-24) de um problema restrito para um problema irrestrito. Portanto, por meio das funções de penalidade, tem-se:

$$F(\{x\}, p_K) = \hat{f} + f_0 p_K \left(\sum_{i=1}^n X(x_i) + \sum_{i=1}^{m_1} G(\hat{g}_i) + \sum_{i=1}^{m_2} H(\hat{h}_i) + \sum_{i=1}^{m_3} W(\hat{w}_i) \right), \quad (5.1-25)$$

sendo X a função penalidade usada para impor as restrições das variáveis de projeto; G , H e W são as funções de penalidade para as restrições das variáveis de estado. O valor de referência da função objetivo, f_0 , é introduzido de forma a encontrar unidades consistentes. A função objetivo irrestrita, $F(\{x\}, p_K)$, também conhecida como *superfície resposta*, varia com as variáveis de projeto e com a quantidade p_K , que é um parâmetro da superfície resposta. Uma técnica de minimização irrestrita seqüencial, SUMT (ANSYS 7.0 USER'S MANUAL), é usada para resolver a equação (5.1-25) para cada iteração. O subscrito K reflete o uso de sub-iterações executadas durante a solução do subproblema, segundo o qual, o parâmetro superfície resposta é

aumentado em valores ($p_1 < p_2 < p_3 \dots$) para encontrar a precisão dos resultados convergidos e garantir que as restrições estejam na região factível.

Todas as funções penalidade utilizadas são do tipo *interior estendido*. Por exemplo, perto do limite mais alto, a função de penalidade da variável de projeto é formada como:

$$X(x_i) = \begin{cases} c_1 + c_2 / (\bar{x} - x_i) & \text{se } x_i < \bar{x} - \varepsilon(\bar{x} - \underline{x}) \\ c_3 + c_4 / (x_i - \bar{x}_i) & \text{se } x_i \geq \bar{x} - \varepsilon(\bar{x} - \underline{x}) \end{cases}, (i = 1, 2, \dots, n), \quad (5.1-26)$$

sendo:

c_1, c_2, c_3 e c_4 : constantes que são calculadas internamente;

ε : número positivo muito pequeno.

Um procedimento similar é feito para as variáveis de estado.

A técnica SUMT é um algoritmo empregado para buscar a função objetivo irrestrita mínima representada por $\tilde{F}^{(j)}$ para a iteração (ou passo) j , onde:

$$\{x\}^{(j)} \rightarrow \{\tilde{x}\}^{(j)} \text{ como } F^{(j)} \rightarrow \tilde{F}^{(j)}, \quad (5.1-27)$$

sendo $\{\tilde{x}\}^{(j)}$ o vetor de variáveis de projeto correspondente a $\tilde{F}^{(j)}$.

O passo final executado para cada iteração de projeto é determinar o vetor de variáveis de projeto, $\{x\}^{(j+1)}$, a ser utilizado em uma próxima iteração, $(j+1)$. Este vetor $\{x\}^{(j+1)}$ é determinado como:

$$\{x\}^{(j+1)} = \{x\}^{(b)} + C(\{\tilde{x}\}^{(j)} - \{x\}^{(b)}), \quad (5.1-28)$$

sendo $\{x\}^{(b)}$ um vetor de constantes do passo do melhor projeto, e C é uma constante que varia entre (0.0) e (1.0) escolhida internamente pelo software e é baseado no número de soluções infactíveis.

5.1.6.3 Convergência

As iterações das aproximações por subproblemas continuam até que a convergência seja encontrada ou até que algum critério de parada seja alcançado. A convergência é assumida quando, ou a iteração atual $\{x\}^{(j)}$, ou a anterior $\{x\}^{(j-1)}$, ou a melhor $\{x\}^{(b)}$, seja um projeto factível, e uma das seguintes condições seja satisfeita:

$$|f^{(j)} - f^{(j-1)}| \leq \tau; \quad (5.1-29)$$

$$|f^{(j)} - f^{(b)}| \leq \tau; \quad (5.1-30)$$

$$|x^{(j)} - x^{(j-1)}| \leq \rho_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n); \quad (5.1-31)$$

$$|x^{(j)} - x^{(b)}| \leq \rho_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (5.1-32)$$

sendo τ e ρ_i as tolerâncias da função objetivo e das variáveis de estado, respectivamente.

Se as condições representadas por estas equações (5.1-29) a (5.1-32) não forem satisfeitas, então o término das iterações pode ocorrer se uma das duas condições (5.1-33) ou (5.1-34) abaixo forem encontradas:

$$ns = Ns, \quad (5.1-33)$$

$$ns_i = Ns_i, \quad (5.1-34)$$

sendo: ns , número de iterações do subproblema; Ns , número máximo de iterações; ns_i , número de passos seqüenciais impossíveis; Ns_i , número máximo de passos seqüenciais impossíveis.

5.1.7 Método de otimização de Primeira-Ordem

Este método de otimização calcula e faz uso de derivadas. A formulação do problema restrito, expressada anteriormente, é transformada em um problema irrestrito através de funções penalidades. As derivadas são formadas para a função objetivo e para as funções de penalidade das variáveis de estado, levando a uma direção de busca no espaço de projeto. Várias buscas de direção conjugada e de melhor passo descendente são executadas durante cada iteração, até que a convergência seja encontrada. Cada iteração é composta de sub-iterações, que incluem cálculos dos gradientes (derivadas) e de direções de busca, ou em outras palavras, uma iteração de otimização de projeto de Primeira-Ordem executa vários loops de análise. Ao contrário do método de subproblemas, a representação do modelo de elementos finitos atual é minimizada e não aproximada. É um método que exige mais esforços computacionais, porém é mais preciso que o método de subproblemas.

5.2 Definição do problema de otimização para a identificação dos parâmetros elásticos

De acordo com a definição de projeto ótimo apresentada no Apêndice-B, o processo de determinação das constantes elásticas para placas finas através deste presente método pode ser formulado. Trata-se de um método de aproximação alternativo e rápido, não destrutivo, em que as constantes elásticas, que são as variáveis desconhecidas, são determinadas inversamente. É baseado no método numérico de Elementos Finitos combinado a um método de otimização em que requer frequências naturais experimentais e numéricas do corpo/estrutura em análise.

Dado o problema de projeto ótimo representado de forma geral como:

- Minimizar uma função $F = f(x)$,

- Sujeito a:
$$\begin{cases} g_i(x) \leq \bar{g}_i, & i = 1, 2, 3, \dots, m_1 \\ \underline{h}_i \leq h_i(x), & i = 1, 2, 3, \dots, m_2 \\ \underline{w}_i \leq w_i \leq \bar{w}_i, & i = 1, 2, 3, \dots, m_3 \end{cases}$$

a formulação do problema para este presente trabalho pode ser feita identificando-se as variáveis de otimização. Sendo assim, a *função objetivo* a ser minimizada é definida como:

$$F = \sum_{i=1}^n \left(\frac{f_{num}^{(i)} - f_{exp}^{(i)}}{f_{exp}^{(i)}} \right)^2, \quad (5.2-1)$$

sendo $f_{num}^{(i)}$ a frequência natural do modo (i) calculada numericamente pelo software comercial de Elementos Finitos e $f_{exp}^{(i)}$ é a frequência natural do mesmo modo (i) medida experimentalmente. Esta função está elevada ao quadrado para que seja sempre positiva. As *variáveis de estado* são definidas como sendo as frequências naturais numéricas que são, por sua vez, variáveis implícitas das variáveis de projeto. As *variáveis de projeto* são as constantes elásticas que se deseja encontrar. Seu número depende do tipo de material (como pode ser visto na tabela 2.2-2). Este método requer, portanto, um chute inicial para tais constantes para que o processo iterativo tenha início. A cada loop o programa testa automaticamente novas variáveis de projeto, de acordo com as restrições impostas inicialmente, e calcula as novas frequências naturais. Com estes valores é feito a comparação com as frequências experimentais através da função objetivo no próprio programa. Este processo é então contínuo até que a convergência ou algum critério de parada seja satisfeito.

Como o problema de otimização será executado em um software comercial, as definições das variáveis e demais exigências devem ser realizadas de acordo com as recomendações do próprio programa. Neste trabalho foi utilizado o software Ansys (7.0) onde todas as variáveis de otimização com suas respectivas tolerâncias juntamente com as demais variáveis devem ser escritas de forma parametrizada em uma linguagem própria deste programa, chamada de APDL.

Dos métodos e ferramentas de otimização oferecidos por este programa e de acordo com o problema a ser resolvido aqui, o Método de Aproximação por Subproblemas será o adotado.

5.3 Simulações, resultados e discussões

Inicialmente, para verificar a eficiência deste segundo método de identificação de parâmetros elásticos abordado neste trabalho, foi utilizado somente o software Ansys, sem nenhum dado experimental. Os valores das constantes elásticas das placas utilizadas como valores de referência serviram para calcular as frequências naturais numéricas. Essas frequências obtidas foram consideradas como sendo as frequências experimentais que foram utilizadas na função objetivo. Cinco grupos de valores iniciais foram utilizados para cada placa em uma primeira etapa, onde as tolerâncias das variáveis de otimização e os limites das variáveis de projeto e de estado eram maiores. Os cinco grupos tinham valores que iam desde muito menores até muito maiores dos valores de referência. Dos resultados deste primeiro estágio foi feita uma média e a partir desta foi feito um melhoramento (“aperto”) nas tolerâncias e nos limites das variáveis de otimização para serem então utilizados em uma segunda etapa. Nesta, os valores obtidos na média do primeiro estágio foram utilizados como sendo os novos dados de entrada. Com os novos resultados foi então calculado o erro em relação aos valores de referência.

A figura 5.3-1 mostra o fluxograma das etapas do processo de determinação das constantes elásticas para o segundo método.

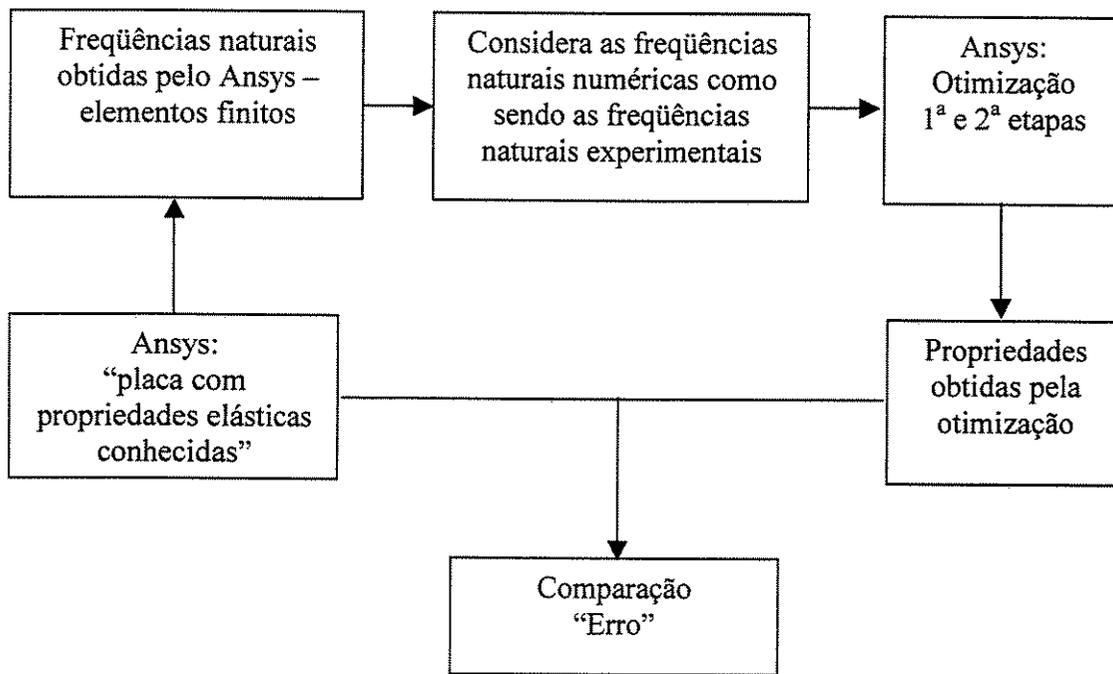


figura 5.3-1: fluxograma das etapas do processo de determinação das constantes elásticas para verificação do segundo método

5.3.1 Primeira simulação

Para uma primeira simulação foi utilizada uma placa isotrópica, de aço, cujas características são dadas na tabela 5.3-1 abaixo, que são as mesmas utilizadas no primeiro método abordado neste trabalho.

Tabela 5.3-1: características da placa 1 utilizada na primeira simulação.

Características da placa 1	
E (MPa)	210000
ν	0,3
Dimensões (mm)	450 x 350 x 2,1
Densidade (Kg/mm ³)	$7,861 \times 10^{-6}$

Para esta placa foi utilizado o elemento “SHELL93” do Ansys e uma malha com elementos de 30 x 35 mm. Como pode ser visto na tabela 5.3-1, foram utilizados somente duas constantes elásticas, ou seja, somente duas variáveis de projeto. A tabela 5.3-2 abaixo mostra as frequências naturais calculadas numericamente a partir dos valores da tabela 5.3-1 e que foram consideradas como sendo as frequências naturais.

Tabela 5.3-2: frequências utilizadas como sendo as frequências naturais experimentais.

Frequências (Hz)	44,463	54,935	95,309	106,22	127,03	159,63
-------------------------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

A tabela 5.3-3 abaixo mostra os valores das tolerâncias utilizados na primeira etapa do processo de identificação das constantes elásticas.

Tabela 5.3-3: tolerâncias e limites das variáveis de otimização para a primeira etapa; placa 1.

Tolerâncias e limites das variáveis de otimização para a placa 1 na primeira etapa	
Tolerância para a variável de projeto (E) MPa	100
Tolerância para a variável de projeto (ν)	0,1
Tolerância para as variáveis de estado (f_{num}) Hz	1
Tolerância para a função objetivo	0,01
Limite máximo para a variável de projeto (E) MPa	250000
Limite mínimo para a variável de projeto (E) MPa	150000
Limite máximo para a variável de projeto (ν)	0,4
Limite mínimo para a variável de projeto (ν)	0,2
Limite máximo para as variáveis de estado (f_{num}) Hz	$1,05(f_{num})$
Limite mínimo para as variáveis de estado (f_{num}) Hz	$0,95(f_{num})$

A tabela 5.3-4 mostra os cinco grupos de valores iniciais utilizados para iniciar o processo iterativo de identificação das constantes elásticas.

Tabela 5.3-4: grupos de valores iniciais para as variáveis de projeto.

Constantes elásticas	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5
<i>E</i> (MPa)	500	50000	150000	250000	500000
ν	0,2	0,35	0,4	0,35	0,2

A tabela 5.3-5 mostra os resultados obtidos no processo de otimização para os valores iniciais apresentados na tabela 5.3-4.

Tabela 5.3-5: resultados obtidos da primeira etapa.

Constantes elásticas	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5	Média
<i>E</i> (MPa)	208870	208810	208870	208800	216220	210314
ν	0,323	0,323	0,323	0,293	0,288	0,31

Com o valor da média dos cinco grupos foi feito um “aperto” nos limites e tolerâncias. A tabela 5.3-6 abaixo mostra estes novos valores.

Tabela 5.3-6: tolerâncias e limites das variáveis de otimização para a segunda etapa; placa 1.

Tolerâncias e limites das variáveis de otimização para a placa 1 na segunda etapa	
Tolerância para a variável de projeto (E) MPa	30
Tolerância para a variável de projeto (ν)	0,01
Tolerância para as variáveis de estado (f_{num}) Hz	0,5
Tolerância para a função objetivo	0,001
Limite máximo para a variável de projeto (E) MPa	220000
Limite mínimo para a variável de projeto (E) MPa	205000
Limite máximo para a variável de projeto (ν)	0,34
Limite mínimo para a variável de projeto (ν)	0,28
Limite máximo para as variáveis de estado (f_{num}) Hz	$1,02(f_{num})$
Limite mínimo para as variáveis de estado (f_{num}) Hz	$0,98(f_{num})$

Utilizando os valores obtidos pela média, mostrado na tabela 5.3-5 e considerando os dados da tabela 5.3-6, obteve-se os valores aproximados das constantes procuradas. Na tabela 5.3-7 abaixo estes valores são apresentados.

Tabela 5.3-7: resultados obtidos da segunda etapa.

Constantes elásticas	Média da primeira etapa	Valor encontrado	Erro %
E (MPa)	210314	209826	0,08
ν	0,31	0,308	2,6

De acordo com os dados obtidos pela tabela 5.3-7 acima, pode-se notar que o método de identificação das constantes através de otimização quando foi aplicado a um material isotrópico utilizando-se de apenas duas constantes elásticas como sendo os dados de entrada apresentou um resultado muito satisfatório.

5.3.2 Segunda simulação

Nesta segunda simulação foi utilizada a mesma placa da simulação anterior, só que ao invés de utilizar somente duas constantes elásticas como variáveis de projeto, foram utilizadas quatro. A tabela (2.8) mostra as características desta placa.

Tabela 5.3-8: características da placa 1 utilizada na segunda simulação.

Características da placa 1	
E_1 (MPa)	210000
E_2 (MPa)	210000
G_{12} (MPa)	80800
ν_{12}	0,3
Dimensões (mm)	450 x 350 x 2,1
Densidade (Kg/mm ³)	$7,861 \times 10^{-6}$

Para esta placa as frequências obtidas são mostradas na tabela 5.3-9 abaixo.

Tabela 5.3-9: frequências utilizadas como sendo as frequências experimentais.

Frequências (Hz)	44,989	55,575	96,419	107,48	128,52	161,49
------------------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

E as tolerâncias e limites para a primeira etapa são apresentadas na tabela 5.3-10.

Tabela 5.3-10: tolerâncias e limites das variáveis de otimização para a primeira etapa; placa 1.

Tolerâncias e limites das variáveis de otimização para a placa 1 na primeira etapa	
Tolerância para a variável de projeto (E_1) MPa	100
Tolerância para a variável de projeto (E_2) MPa	100
Tolerância para a variável de projeto (G_{12}) MPa	100
Tolerância para a variável de projeto (ν_{12})	0,1
Tolerância para as variáveis de estado (f_{num}) Hz	1
Tolerância para a função objetivo	0,01
Limite máximo para a variável de projeto (E_1) MPa	250000
Limite mínimo para a variável de projeto (E_1) MPa	150000
Limite máximo para a variável de projeto (E_2) MPa	250000
Limite mínimo para a variável de projeto (E_2) MPa	150000
Limite máximo para a variável de projeto (G_{12}) MPa	100000
Limite mínimo para a variável de projeto (G_{12}) MPa	50000
Limite máximo para a variável de projeto (ν_{12})	0,4
Limite mínimo para a variável de projeto (ν_{12})	0,2
Limite máximo para as variáveis de estado (f_{num}) Hz	$1,05(f_{num})$
Limite mínimo para as variáveis de estado (f_{num}) Hz	$0,95(f_{num})$

Os grupos de valores iniciais para as constantes elásticas são mostrados na tabela 5.3-11 abaixo.

Tabela 5.3-11: grupos de valores iniciais para as variáveis de projeto.

Constantes elásticas	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5
E_1 (MPa)	500	50000	150000	250000	500000
E_2 (MPa)	400	40000	190000	230000	600000
G_{12} (MPa)	100	6000	81000	90000	250000
ν_{12}	0,2	0,35	0,4	0,35	0,2

Para estes valores, os resultados para a primeira etapa são mostrados na tabela 5.3-12 abaixo.

Tabela 5.3-12: resultados obtidos da primeira etapa.

Constantes elásticas	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5	Média
E_1 (MPa)	217720	217700	220660	199430	217640	214630
E_2 (MPa)	205930	205950	214720	204470	205975	207409
G_{12} (MPa)	89438	89438	89455	78113	89443	87177,4
ν_{12}	0,341	0,341	0,221	0,219	0,341	0,2926

Da mesma forma que foi feito para a primeira simulação, houve aqui um reajuste dos limites de variação e tolerâncias de acordo com a média dos valores calculadas na tabela 5.3-12 anterior para serem reutilizados na segunda etapa. A tabela 5.3-13 mostra esses novos valores.

Tabela 5.3-13: reajuste dos limites e tolerâncias.

Tolerâncias e limites das variáveis de otimização para a placa 1 na primeira etapa	
Tolerância para a variável de projeto (E_1) MPa	30
Tolerância para a variável de projeto (E_2) MPa	30
Tolerância para a variável de projeto (G_{12}) MPa	30
Tolerância para a variável de projeto (ν_{12})	0,01
Tolerância para as variáveis de estado (f_{num}) Hz	0,5
Tolerância para a função objetivo	0,001
Limite máximo para a variável de projeto (E_1) MPa	220000
Limite mínimo para a variável de projeto (E_1) MPa	2050000
Limite máximo para a variável de projeto (E_2) MPa	220000
Limite mínimo para a variável de projeto (E_2) MPa	205000
Limite máximo para a variável de projeto (G_{12}) MPa	75000
Limite mínimo para a variável de projeto (G_{12}) MPa	90000
Limite máximo para a variável de projeto (ν_{12})	0,34
Limite mínimo para a variável de projeto (ν_{12})	0,28
Limite máximo para as variáveis de estado (f_{num}) Hz	$1,02(f_{num})$
Limite mínimo para as variáveis de estado (f_{num}) Hz	$0,98(f_{num})$

E, os valores obtidos são mostrados na tabela 5.3-14.

Tabela 5.3-14: grupos de valores iniciais para as variáveis de projeto.

Constantes elásticas	Média da primeira etapa	Valor encontrado	Erro %
E_1 (MPa)	214630	215430	2,5
E_2 (MPa)	207409	206050	1,88
G_{12} (MPa)	87177,4	80213	0,73
ν_{12}	0,2926	0,286	4,66

Comparando os valores calculados da tabela 5.3-7 com os valores da tabela 5.3-14, pode-se concluir que embora para a primeira simulação os erros tenham sido menores, para a segunda simulação em que foram utilizados quatro constantes, também apresentou resultados satisfatórios. Sabendo-se que se trata de um material isotrópico, os módulos de elasticidade E_1 e E_2 devem ser iguais, e portanto, fazendo-se uma média entre esses dois valores obtidos (tabela 5.3-14) encontra-se 210740 MPa, o que significa um erro de 0,35 % comparado ao valor de referência.

5.3.3 Terceira simulação

Para uma terceira simulação com o objetivo ainda de verificar a precisão deste método de otimização, foi utilizado uma segunda placa. Esta placa é um compósito laminado que apresenta as características mostradas na tabela 5.3-15 abaixo. É a mesma placa 2 ortotrópica de carbono epóxi e $[0]_8$ utilizada no Primeiro Método de determinação das constantes elásticas apresentada neste trabalho (capítulo 4).

Tabela 5.3-15: características da placa 2 utilizada na terceira simulação.

Características de cada lâmina da placa 2 $[0]_8$	
E_1 (MPa)	120000
E_2 (MPa)	10000
G_{12} (MPa)	4900
ν_{12}	0,3
Dimensões (mm)	450 x 350 x 2,1
Densidade (Kg/mm^3)	$1,510 \times 10^{-6}$

Foi utilizado no Ansys (7.0) o elemento “SHELL99”, que é um elemento próprio para se trabalhar com laminados. Este elemento, no entanto, permite encontrar utilizando este método de otimização, somente os valores das variáveis de projeto (constantes elásticas) de cada lâmina requerida. A malha foi mantida a mesma, com elemento de dimensões 35 x 30 mm, porém este elemento possui 8 nós.

Repetindo o mesmo procedimento utilizado nas simulações anteriores, as frequências encontradas para esta placa específica são dadas na tabela 5.3-16 abaixo.

Tabela 5.3-16: frequências utilizadas como sendo as frequências experimentais.

Frequências (Hz)	25,497	45,348	68,779	95,247	107,61	125,73
------------------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

Para esta placa foram definidas as tolerâncias e limites de variação inicial. Estes são mostrados na tabela 5.3-17 abaixo.

Tabela 5.3-17: tolerâncias e limites das variáveis de otimização para a primeira etapa; placa 2.

Tolerâncias e limites das variáveis de otimização para a placa 1 na primeira etapa	
Tolerância para a variável de projeto (E_1) MPa	100
Tolerância para a variável de projeto (E_2) MPa	100
Tolerância para a variável de projeto (G_{12}) MPa	50
Tolerância para a variável de projeto (v_{12})	0,1
Tolerância para as variáveis de estado (f_{num}) Hz	1
Tolerância para a função objetivo	0,01
Limite máximo para a variável de projeto (E_1) MPa	200000
Limite mínimo para a variável de projeto (E_1) MPa	80000
Limite máximo para a variável de projeto (E_2) MPa	100000
Limite mínimo para a variável de projeto (E_2) MPa	1000
Limite máximo para a variável de projeto (G_{12}) MPa	10000
Limite mínimo para a variável de projeto (G_{12}) MPa	1000
Limite máximo para a variável de projeto (v_{12})	0,4
Limite mínimo para a variável de projeto (v_{12})	0,2
Limite máximo para as variáveis de estado (f_{num}) Hz	$1,05(f_{num})$
Limite mínimo para as variáveis de estado (f_{num}) Hz	$0,95(f_{num})$

E os cinco grupos de valores iniciais são dados na tabela 5.3-18.

Tabela 5.3-18: grupos de valores iniciais para as variáveis de projeto.

Constantes elásticas	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5
E_1 (MPa)	500	50000	150000	250000	500000
E_2 (MPa)	400	40000	19000	23000	600000
G_{12} (MPa)	100	6000	8000	9000	250000
ν_{12}	0,2	0,35	0,4	0,35	0,2

Os valores obtidos são mostrados na tabela 5.3-19.

Tabela 5.3-19: resultados obtidos da primeira etapa.

Constantes elásticas	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5	Média
E_1 (MPa)	174220	159950	131050	124440	131118	128869,33
E_2 (MPa)	7321,4	8942	10650	9604,5	9376,9	9877,13
G_{12} (MPa)	4393,1	4392,4	4558,1	4565,8	4646	4589,96
ν_{12}	0,261	0,229	0,348	0,256	0,223	0,2756

Os grupos 1 e 2 da tabela 5.3-19 não apresentaram nenhum projeto factível, e portanto, a média feita para o ajuste das tolerâncias e limites para a segunda etapa foi feita em relação aos grupos 3, 4 e 5, que foram projetos factíveis. A tabela 5.3-20 mostra os novos valores para estes limites e tolerâncias.

Tabela 5.3-20: tolerâncias e limites das variáveis de otimização para a segunda etapa; placa 2.

Tolerâncias e limites das variáveis de otimização para a placa 1 na primeira etapa	
Tolerância para a variável de projeto (E_1) MPa	30
Tolerância para a variável de projeto (E_2) MPa	30
Tolerância para a variável de projeto (G_{12}) MPa	10
Tolerância para a variável de projeto (ν_{12})	0,01
Tolerância para as variáveis de estado (f_{num}) Hz	0,5
Tolerância para a função objetivo	0,001
Limite máximo para a variável de projeto (E_1) MPa	125000
Limite mínimo para a variável de projeto (E_1) MPa	115000
Limite máximo para a variável de projeto (E_2) MPa	13000
Limite mínimo para a variável de projeto (E_2) MPa	9000
Limite máximo para a variável de projeto (G_{12}) MPa	5500
Limite mínimo para a variável de projeto (G_{12}) MPa	3500
Limite máximo para a variável de projeto (ν_{12})	0,33
Limite mínimo para a variável de projeto (ν_{12})	0,25
Limite máximo para as variáveis de estado (f_{num}) Hz	$1,02(f_{num})$
Limite mínimo para as variáveis de estado (f_{num}) Hz	$0,98(f_{num})$

Na tabela 5.3-21 estão os valores obtidos para os cinco grupos. Assim como nos casos anteriores, foram utilizados como dados iniciais os valores da média mostrado na tabela 5.3-19.

Tabela 5.3-21: resultados obtidos da segunda etapa.

Constantes elásticas	Média da primeira etapa	Valor encontrado	Erro %
E_1 (MPa)	128869,33	121180	0,98
E_2 (MPa)	9877,13	9775,24	2,0
G_{12} (MPa)	4589,96	5093	3,9
ν_{12}	0,2756	0,32	6,66

De acordo com os dados obtidos na tabela 5.3-21, percebe-se que este método também apresentou resultados muito satisfatórios. Somente o erro do coeficiente de Poisson foi maior.

O elemento que foi utilizado no Ansys, "SHELL99", requer que o usuário entre com as propriedades, direção das fibras e espessura para cada camada. Os valores obtidos anteriormente são referentes a cada lâmina. Portanto, na prática, a qualidade do método neste caso específico, requer os valores das frequências naturais (medidos precisamente), o número de camadas do laminado, a orientação das fibras e, a espessura e o tipo de material de cada camada. O número de variáveis de projeto e conseqüentemente de constantes elásticas, está relacionado diretamente com os tipos de materiais utilizados em cada camada. O cálculo destas variáveis é feito utilizando as frequências naturais do laminado.

5.3.4 Quarta simulação

Nesta simulação foi utilizada a mesma placa 3 do primeiro método (capítulo 4) anterior. Esta placa possui o mesmo número de camadas da placa 2, porém a orientação das fibras é diferente, o que a torna um laminado anisotrópico. O material também continua o mesmo, carbono/epóxi. As características desta placa são dadas na tabela 5.3-22.

Tabela 5.3-22: características da placa 3 utilizada na quarta simulação.

Características de cada lâmina da placa 3 [0,45,90,135] _s	
E_1 (MPa)	120000
E_2 (MPa)	10000
G_{12} (MPa)	4900
ν_{12}	0,3
Dimensões (mm)	450 x 350 x 2,1
Densidade (Kg/mm ³)	1,510x10 ⁻⁶

As frequências naturais para estes dados são mostradas na tabela 5.3-23.

Tabela 5.3-23: frequências utilizadas como sendo as frequências experimentais.

Frequências (Hz)	36,970	72,575	86,026	96,333	120,98	179,78
------------------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

As tolerâncias e limites iniciais são dados na tabela 5.3-24.

Tabela 5.3-24: tolerâncias e limites das variáveis de otimização para a primeira etapa; placa 3.

Tolerâncias e limites das variáveis de otimização para a placa 3 na primeira etapa	
Tolerância para a variável de projeto (E_1) MPa	100
Tolerância para a variável de projeto (E_2) MPa	100
Tolerância para a variável de projeto (G_{12}) MPa	50
Tolerância para a variável de projeto (v_{12})	0,1
Tolerância para as variáveis de estado (f_{num}) Hz	1
Tolerância para a função objetivo	0,01
Limite máximo para a variável de projeto (E_1) MPa	200000
Limite mínimo para a variável de projeto (E_1) MPa	80000
Limite máximo para a variável de projeto (E_2) MPa	100000
Limite mínimo para a variável de projeto (E_2) MPa	1000
Limite máximo para a variável de projeto (G_{12}) MPa	10000
Limite mínimo para a variável de projeto (G_{12}) MPa	1000
Limite máximo para a variável de projeto (v_{12})	0,4
Limite mínimo para a variável de projeto (v_{12})	0,2
Limite máximo para as variáveis de estado (f_{num}) Hz	$1,05(f_{num})$
Limite mínimo para as variáveis de estado (f_{num}) Hz	$0,95(f_{num})$

Os cinco grupos iniciais são dados na tabela 5.3-25.

Tabela 5.3-25: grupos de valores iniciais para as variáveis de projeto.

Constantes elásticas	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5
E_1 (MPa)	500	50000	150000	250000	500000
E_2 (MPa)	400	40000	19000	23000	600000
G_{12} (MPa)	100	6000	8000	9000	250000
ν_{12}	0,2	0,35	0,4	0,35	0,2

Os valores obtidos são mostrados na tabela 5.3-26.

Tabela 5.3-26: resultados obtidos da primeira etapa.

Constantes elásticas	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5	Média
E_1 (MPa)	143100	141480	142090	131340	134424	138486,8
E_2 (MPa)	1327,6	2924,8	2922,1	2398,9	2703,3	2455,34
G_{12} (MPa)	4931,7	4640,7	4649,9	5464,5	4985,6	4934,48
ν_{12}	0,3685	0,222	0,233	0,318	0,291	0,286

Utilizando-se a média desses valores da tabela 5.3-26, os ajustes nas tolerâncias e nos limites que foram feitos são mostrados na tabela 5.3-27.

Tabela 5.3-27: tolerâncias e limites das variáveis de otimização para a segunda etapa; placa 3.

Tolerâncias e limites das variáveis de otimização para a placa 3 na primeira etapa	
Tolerância para a variável de projeto (E_1) [MPa]	30
Tolerância para a variável de projeto (E_2) [MPa]	30
Tolerância para a variável de projeto (G_{12}) [MPa]	10
Tolerância para a variável de projeto (ν_{12})	0,01
Tolerância para as variáveis de estado (f_{num}) [Hz]	0.1
Tolerância para a função objetivo	0,001
Limite máximo para a variável de projeto (E_1) MPa	140000
Limite mínimo para a variável de projeto (E_1) MPa	115000
Limite máximo para a variável de projeto (E_2) MPa	2000
Limite mínimo para a variável de projeto (E_2) MPa	12000
Limite máximo para a variável de projeto (G_{12}) MPa	5300
Limite mínimo para a variável de projeto (G_{12}) MPa	4000
Limite máximo para a variável de projeto (ν_{12})	0,33
Limite mínimo para a variável de projeto (ν_{12})	0,26
Limite máximo para as variáveis de estado (f_{num}) Hz	$1,02(f_{num})$
Limite mínimo para as variáveis de estado (f_{num}) Hz	$0,98(f_{num})$

Os resultados são dados na tabela 5.3-28.

Tabela 5.3-28: grupos de valores iniciais para as variáveis de projeto.

Constantes elásticas	Média da primeira etapa	Valor encontrado	Erro %
E_1 (MPa)	138486,8	127510	6,26
E_2 (MPa)	2455,34	7061,26	29,38
G_{12} (MPa)	4934,48	5193,22	5,9
ν_{12}	0,286	0,30	0,0

5.3.5 Quinta simulação

Nesta simulação foram utilizados os valores de uma placa de alumínio fornecidos pela artigo de HWANG e CHANG, 2000. A tabela 5.3-29 mostra as características desta placa.

Tabela 5.3-29: características da placa de alumínio do artigo de HWANG e CHANG, 2000.

Características da placa de alumínio	
E_1 (MPa)	72400
E_2 (MPa)	72400
G_{12} (MPa)	28000
ν_{12}	0,33
Dimensões (mm)	254 x 254 x 3,16
Densidade (Kg/mm ³)	2,77x10 ⁻⁶

As frequências experimentais são dadas na tabela 5.3-30 e também foram retiradas do artigo.

Tabela 5.3-30: frequências experimentais fornecidas pelo artigo de HWANG e CHANG, 2000.

frequências experimentais (Hz)	156.7	232.5	300.4	411.7	411.7	744.9
--------------------------------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

A tabela 5.3-31 mostra os cinco grupos iniciais com os mesmos valores utilizados pelo artigo e os resultados obtidos.

Tabela 5.3-31: valores iniciais e resultados obtidos para a primeira etapa.

Valores iniciais					
E_1 (MPa)	960	25000	65000	85000	960000
E_2 (MPa)	900	24000	55000	81000	900000
G_{12} (MPa)	650	3000	21000	30000	650000
ν_{12}	0,35	0,20	0,30	0,32	0,35
Resultados					
E_1 (MPa)	77322	70423	78816	78988	78510
E_2 (MPa)	70774	75680	72289	70537	70064
G_{12} (MPa)	27104	26989	25904	24304	26302
ν_{12}	0,358	0,337	0,356	0,362	0,37

A tabela 5.3-32 abaixo mostra o resultado encontrado.

Tabela 5.3-32: resultados obtidos.

	Média dos resultados	Valores de referência	Erro (%)
E_1 (MPa)	76811,8	72400	6,09
E_2 (MPa)	71868,8	72400	0,73
G_{12} (MPa)	26120,6	28000	6,7
ν_{12}	0,356	0.33	7,8

5.3.6 Teste na placa de aço experimental

Para verificar este segundo método, foi utilizada a mesma placa de aço experimental. A figura 5.3-2 mostra o fluxograma das etapas do processo de determinação das constantes elásticas utilizando-se agora dados experimentais e numéricos.

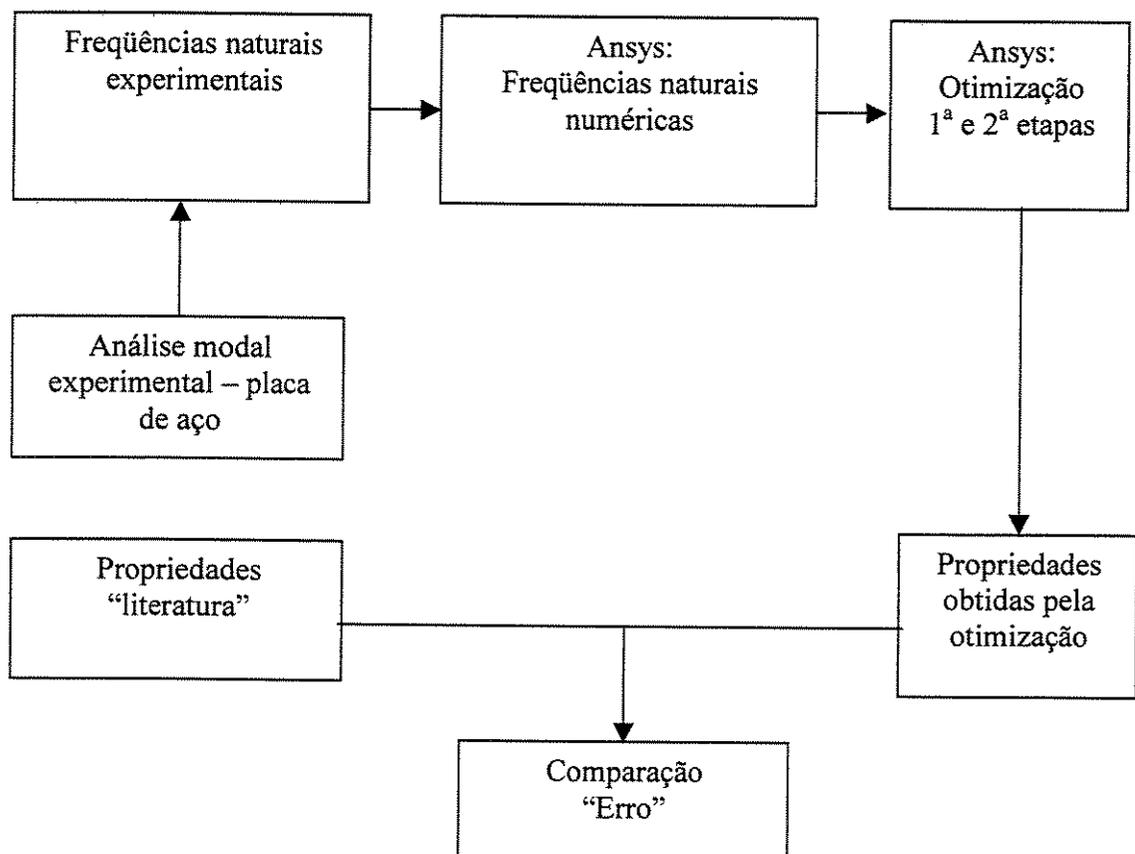


figura 5.3-2: fluxograma das etapas do processo de determinação das constantes elásticas para o segundo método

Nas tabelas 5.3-33 e 5.3-34 são fornecidos os dados medidos experimentalmente.

Tabela 5.3-33: características da placa.

Dimensões (mm)	450 x 350 x 2,1
Densidade (Kg/mm ³)	8,2539x10 ⁻⁶

Tabela 5.3-34: frequências naturais medidas experimentalmente.

Frequências (Hz)	44.463	54.935	95.309	106.22	127.03	159.63
---------------------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

A tabela 5.3-35 mostra as tolerâncias e os limites de variação inicial utilizados para as variáveis de otimização.

Tabela 5.3-35: valores dos ajustes iniciais.

Tolerâncias e limites das variáveis de otimização para a placa de aço na primeira etapa	
Tolerância para a variável de projeto (E) MPa	100
Tolerância para a variável de projeto (v)	0,1
Tolerância para as variáveis de estado (f_{num}) Hz	1
Tolerância para a função objetivo	0,01
Limite máximo para a variável de projeto (E) MPa	250000
Limite mínimo para a variável de projeto (E) MPa	150000
Limite máximo para a variável de projeto (v)	0,4
Limite mínimo para a variável de projeto (v)	0,2
Limite máximo para as variáveis de estado (f_{num}) Hz	1,05(f_{num})
Limite mínimo para as variáveis de estado (f_{num}) Hz	0,95(f_{num})

Tabela 5.3-36: grupos de valores iniciais para as variáveis de projeto.

Constantes elásticas	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5
E (MPa)	500	50000	150000	250000	500000
ν	0,2	0,35	0,4	0,35	0,2

A tabela 5.3-37 mostra os resultados obtidos da primeira etapa e os valores das médias para os devidos ajustes de tolerâncias para a segunda etapa.

Tabela 5.3-37: resultados obtidos na primeira etapa.

Constantes elásticas	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5	Média
E (MPa)	199350	199750	199370	199370	199490	199466
ν	0,303	0,303	0,303	0,294	0,303	0,301

Na tabela 5.3-38 são mostrados os ajustes feitos para as tolerâncias e limites para serem utilizados na segunda etapa.

Tabela 5.3-38: tolerâncias e limites das variáveis de otimização para a segunda etapa.

Tolerâncias e limites das variáveis de otimização para a placa de aço na segunda etapa	
Tolerância para a variável de projeto (E) MPa	30
Tolerância para a variável de projeto (ν)	0,01
Tolerância para as variáveis de estado (f_{num}) Hz	0,1
Tolerância para a função objetivo	0,001
Limite máximo para a variável de projeto (E) MPa	215000
Limite mínimo para a variável de projeto (E) MPa	195000
Limite máximo para a variável de projeto (ν)	0,32
Limite mínimo para a variável de projeto (ν)	0,28
Limite máximo para as variáveis de estado (f_{num}) Hz	$1,01(f_{num})$
Limite mínimo para as variáveis de estado (f_{num}) Hz	$0,99(f_{num})$

Na tabela 5.4-7 abaixo são dados os valores obtidos utilizando-se os dados das tabelas 5.4-5 e 5.4-6. Foi feito também um refinamento da malha, passando os elementos de 30 x 35 mm para 5 x 5 mm.

Tabela 5.3-39: resultados obtidos na segunda etapa.

Constantes elásticas	Média da primeira etapa	Valor obtido	Erro %
E (MPa)	199466	214750	2,26
ν	0,301	0,31	3,33

Com os valores obtidos nas simulações e nos testes realizados, pode-se perceber que uma das desvantagens deste método está no ajuste do limite de variação e nas tolerâncias das variáveis de otimização e, assim como no primeiro método abordado neste trabalho, este também exige dados experimentais precisos. Mas, pelo contrário, apresentou ser um método muito prático, que exige muito pouco esforço computacional e que funciona muito bem para materiais isotrópicos e ortotrópicos nos casos específicos apresentados neste trabalho.

Capítulo 6 – Conclusões e Trabalhos futuros

6.1 Primeiro Método

De acordo com os dados obtidos nos ensaios e testes que foram realizados neste trabalho, pode-se perceber que o primeiro método a bordado mostrou ser uma técnica de identificação de parâmetros elásticos relativamente simples, direta, que não exige processos iterativos e nem grandes esforços computacionais. Devido à equação diferencial utilizada, este método torna-se aplicável a qualquer material, isotrópico, ortotrópico e anisotrópico, desde que o mesmo esteja na forma de placa fina e sob as hipóteses de Kirchhoff. Ele permite uma grande aplicabilidade prática a um baixo custo, visto que não requer testes destrutivos e, portanto, não há perda de material. As informações experimentais requeridas são provenientes do próprio material da placa, sendo uma grande vantagem quando se compara aos testes estáticos utilizados para determinação das constantes elásticas. Os modos utilizados para a solução da equação diferencial geralmente são os modos de baixa frequência, e isto pode favorecer a identificação dos mesmos através da análise modal experimental. Porém, é um método que requer grande precisão nas medições experimentais, tais como espessura e massa da placa, frequências naturais e auto-vetores. Devido aos métodos numéricos utilizados por esta técnica (Diferenças Finitas, Integração Numérica e Interpolação), ela exige também um número considerável de nós na malha, o que significa ter um grande número de pontos a serem medidos e, conseqüentemente, pode tornar o método muito trabalhoso experimentalmente. Além disso, em materiais muito leves, como a maior parte dos compósitos, a análise modal exige maiores cuidados e técnicas especiais devido à influência de fatores externos. Neste trabalho, mesmo utilizando uma placa de aço, pelos resultados obtidos, pode-se perceber que os aparelhos utilizados não conseguem fornecer as informações necessárias e com a precisão exigida pelo método. Uma outra desvantagem deste método está relacionada com a influência do amortecimento. Este fator não é considerado no modelo numérico e, portanto, em materiais com amortecimento alto, os resultados podem apresentar erros maiores. Isso porque o amortecimento faz com que os

auto-vetores fiquem defasados entre si, não atingindo os valores máximos e mínimos simultaneamente.

6.2 Segundo Método

O segundo método abordado neste trabalho também é um método não destrutivo e que requer experimentalmente somente os valores das frequências naturais. É um método fácil de ser aplicado (modelado) e relativamente rápido (depende do número de nós da malha e do número de variáveis de projeto). Uma de suas grandes vantagens é o fato de poder ser executado em softwares comerciais de modelagem estrutural que possuam internamente algoritmos de otimização. Porém, é um método muito sensível aos parâmetros de otimização, como definir o tipo e o número das variáveis de otimização utilizadas juntamente com suas tolerâncias e limites de variação. Sendo assim, devido ao grande número de variáveis de projeto, é um método difícil de ser aplicado em materiais anisotrópicos. Ele depende de limitações do software como: número de variáveis, valores de tolerâncias e limites de variação e, tipos de elementos disponíveis para trabalhar com anisotropia. E também, requer valores muito precisos das frequências naturais experimentais utilizadas, das dimensões e da densidade da placa em estudo. Estes são os dados de entrada no software e, portanto, valores não condizentes com o real podem fornecer resultados completamente diferentes dos verdadeiros. Pelos resultados obtidos, nos casos específicos utilizados neste trabalho para verificar sua precisão, este método apresentou resultados satisfatórios para os materiais isotrópicos e ortotrópicos testados.

6.3 Conclusões finais

Como pôde ser visto, os dois métodos abordados neste trabalho apresentam suas respectivas vantagens e desvantagens. O primeiro método, embora seja um método mais trabalhoso experimentalmente, pode ser considerado mais aplicável, já que não exige chutes iniciais por não se tratar de um método iterativo. Porém é um método restrito a placas finas. Já o segundo método pode ser aplicado a outras geometrias, não somente em

placas, porém é um método que exige vários ajustes, principalmente quando se trata de uma anisotropia tri-dimensional. E também, por ser executado em um único software, seus parâmetros ficam restritos às opções oferecidas por ele.

6.4 Trabalhos Futuros

Como sugestão para trabalhos futuros pode-se citar:

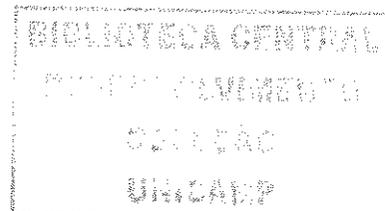
- Inclusão do amortecimento estrutural na modelagem numérica juntamente com a elaboração de procedimentos experimentais de estimativa de seus valores.
- Extensão dos métodos para estruturas de forma variadas, que não sejam necessariamente placas.
- Análise mais detalhada da sensibilidade dos métodos com relação as variações dos dados de entrada.
- Para o segundo método, análise mais detalhada dos limites de variação e tolerância das variáveis de otimização.
- Abordar outras técnicas de análise modal experimental, particularmente as apropriadas para estruturas de baixa densidade. Por exemplo, as técnicas de excitação e medida de resposta sem contato (excitação por meios acústicos, medida por meios ópticos ou laser).

Referências bibliográficas

- ALBUQUERQUE, E. L. (2001). Análise de Problemas Dinâmicos em Materiais Anisotrópicos Usando o Método dos Elementos de Contorno. Tese de Doutorado, Unicamp, Campinas.
- AMBARTSUMYAN, S. A. (1970). Theory of anisotropic plates. *Technomic Publishing Co., Inc.*
- ANSYS (7.0) USER'S MANUAL.
- ARGAWAL, B. D. e BROUTMAN, L. J. (1990). Analysis and Performance of Fiber Composites. *John Wiley & Sons, Inc, New York.*
- ARORA, J. S. (2004). Introduction to Optimum Design. *Elsevier*, 2nd edition, Amsterdam.
- AYORINDE, E. O. e GIBSON, R. F. (1995). Improved method for in-situ elastic constants of isotropic and orthotropic composite materials using plate modal data with trimodal and hexamodal Rayleigh formulations. *Journal of Vibration and Acoustics*, 117: 180-6.
- AYORINDE, E.O. e YU, L. (1999). On the use of diagonal modes in the elastic identification of thin plates. *Journal of Vibration and Acoustics*, 121: 33-40.
- BASTOS, S. F. (2001). Uma abordagem numérico-experimental para a identificação de parâmetros elásticos em placas sanduíche. Dissertação mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.
- BERTHELOT, J. M. e ANOULVANT, F. (2001). Measuring the bending stiffnesses of orthotropic and symmetric laminates from flexural vibration. *Journal of Composite materials*, 36 (04).
- CARLSSON, L. A e PIPES, R. B. (2002). Experimental characterization of advanced composite materials. *Technomic Publishing Co, Inc*, 3rd edition.
- ERWINS, D. J. (1984). Modal testing: theory and practice. *John Wiley and Sons*, New York.

- FERNANDES, G. B. (1974). Introdução à teoria das placas elásticas. Notas de aula, Departamento de Construção Civil, Faculdade de Engenharia de Limeira, Unicamp, Limeira.
- FIGUEIREDO, F. C; SANÁBIO, L. M. e ROCHINHA, F. A. (2004). Identificação de constantes elásticas em laminados de compósitos. *VI Simpósio Mineiro de Mecânica Computacional*, Universidade Federal de Itajubá.
- FREDERIKSEN, PER S. (1998). Parameter Uncertainty and Design of optimal experiments for estimation of Elastic Constants. *International Journal of Solids Structures*. Vol. 35, No. 12, 1241-1260, PII: 50020-7683 (97) 00101-7.
- GERE, J. M. (2003). Mecânica dos materiais. *Pioneira Thomson Learning*, São Paulo.
- GIBSON, R. F (1994). Principles of composite material mechanics. *McGraw-Hill Inc*, New York.
- GIBSON, R.F. (2000). Modal vibration response measurements for characterization of composite materials and structures. *Composites Science and Technology*, 60: 2769-2780.
- GRÉDIAC, M. e PARIS, P. A. (1996). Direct identification of elastic constants of anisotropic plates by modal analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 195 (3): 401-415.
- GRÉDIAC, M.; FOURNIER, N.; PARIS, P. A. e SURREL, Y. (1998). "Direct identification of elastic constants of anisotropic plates by modal analysis: experimental results". *Journal of sound and Vibration*, 210 (5), 643-659.
- HUANG, L.; SUN, X.; LIU, Y. e CEN, Z.(2003). Parameter identification for two-dimension orthotropic material bodies by the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements* xx (2003) xxx-xxx.
- HWANG, S. e CHANG, C. (2000). Determination of elastic constants of materials by vibration testing. *Composite Structures*, 49: 183-190.
- LAMATTINA, B. (1997). Complex variable methods for anisotropic plate bending problems. *UMI Company*, MI 48103, Ann Arbor.
- LAUWAGIE, T.; SOL, H.; HEYLEN, W. e ROBBEN, G. (2004). Determination of in-plane elastic properties of the different layer of laminated plates by means of vibration testing and model updating. *Journal of Sound and Vibration*, 274: 529-546.

- LEKHNITSKII, S. G. (1963). Theory of elasticity of an anisotropic elastic body. *Holden-Day*, San Francisco.
- LEKHNITSKII, S. G.; TSAI, S. W. e CHERON, T. (1968). Anisotropic plates. *Gordon and Breach Science Publish, Inc*, 2nd edition, New York.
- MAIA, S. e SILVA, J. M. M. (1997). Theoretical and Experimental Modal Analysis. *John Wiley & Sons, Inc*, New York.
- MASCIA, N. T. (1999). Princípios de Anisotropia. Notas de aula do curso de IC 638, Departamento de Construção Civil, Faculdade de Engenharia Civil, Unicamp, Campinas.
- McINYRE, M. E. e WOODHOUSE, J. (1988). On Measuring the elastic and damping constants of orthotropic sheet materials. *Acta metal*, 36 (6): 1397-1416.
- MEIROVITCH, L. (1986). Elements of Vibration Analysis. *McGraw-Hill Book Company*, 2nd edition, New York.
- MUTHURAJAN, K. G.; SANKARANARAYANASAMY, K.; TIWARI, S. B. e NAGESWARA RAO, B. (2004). Determination of elastic constants from measured natural frequencies of specially orthotropic cantilever plates. *Institute of Materials Minerals and Mining*, MST/5990.
- PINTELON, R.; GUILLAUME, P.; VANLANDUIT, S.; DE BELDER, K. e ROLAIN, Y. (2004). Identification of Young's modulus from broadband modal analysis experiments". *Mechanical Systems and Signal Processing*, 18, 699-726.
- POPOV, E. P. (1978). "Introdução à mecânica dos sólidos. *Editores Edgard Blücher Ltda*, São Paulo.
- RIKARDS, R.; CHATE, A. e GAILIS, G. (2001). Identification of elastic properties of laminates based on experiment design. *International Journal of Solids and Structures*, 38: 5097-5115.
- RUGGIERO, M. A. G. e LOPES, V. L. R. (1996). Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais. *Person Education do Brasil*, 2^a edição, São Paulo.
- TITA, V. (1999). Análise dinâmica e experimental de vigas fabricadas a partir de materiais compósitos poliméricos reforçados. Dissertação de mestrado, Universidade de São Paulo, São Carlos.



- ZIENKIEWICZ, O. C. (1977). The Finite Element Method. McGraw-Hill Publish Company Ltd, London.
- WANG, W. e KAM, T. Y. (2000). Material characterization of laminated composite plates via static testing. Composite Structures, 50: 347-352.

Apêndice - A

A.1 - Métodos Numéricos

Vários problemas de engenharia são governados por equações diferenciais (ordinárias ou parciais) válidas em uma certa região (ou domínio) onde as soluções requerem que condições de contorno sejam satisfeitas. Geralmente, estas soluções não são possíveis analiticamente, tendo-se que recorrer aos métodos numéricos.

A.1.1 – Método das Diferenças Finitas

O método das diferenças finitas é um método numérico que pode ser usado para obter soluções aproximadas para equações diferenciais, substituindo-se estas por expressões aproximadas das diferenças em termos de variáveis diferenciais (RUGGIERO e LOPES, 1996). Desta forma, as equações diferenciais podem ser escritas em qualquer ponto em termos dos valores das variáveis no ponto considerado e nos pontos adjacentes. Conseqüentemente, escrevendo as equações diferenciais desta maneira, em um número finito de pontos, e introduzindo as condições de contorno e suas equações, a equação diferencial de uma solução contínua pode ser substituída por um sistema simultâneo de equações lineares. A solução destas equações fornece os valores das variáveis nos pontos selecionados.

As expressões de diferenças finitas podem ser encontradas através de valores da função na direção positiva, negativa (dependendo da orientação do sistema referencial adotado) ou ainda, em ambas, do ponto analisado. Estes termos são denominados como diferenças à direita, à esquerda e central, respectivamente. A diferença central é mais precisa, já que utiliza ao mesmo tempo valores dos pontos à direita e à esquerda.

Se a série de Taylor for utilizada, as expressões das diferenças finitas podem ser encontradas com maior rigor, e a ordem das aproximações poderá ser estabelecida. Supondo uma função contínua, unidimensional, como mostrado na figura A-1 abaixo, o

valor de qualquer função contínua nos pontos $(x + h)$ e $(x - h)$ pode ser escrito em termos dos valores da função e em termos das suas derivadas em relação aos pontos (x) de acordo com a série de Taylor, como:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \dots, \quad (\text{A - 1})$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) - \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \dots, \quad (\text{A - 2})$$

sendo h a distância entre os pontos.

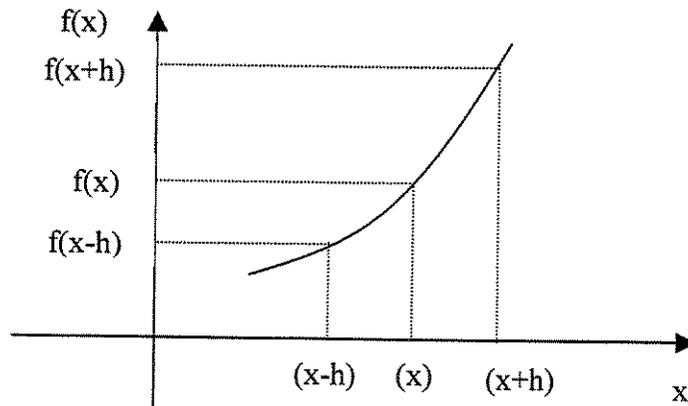


figura A - 1: função contínua qualquer, unidimensional

Usando-se a segunda equação (A - 2) da primeira (A - 1) e reorganizando os termos, tem-se:

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{1}{2h} [f(x+h) - f(x-h)] - \frac{h^2}{6} f'''(x) + \dots, \quad (\text{A - 3})$$

$$f''(x) = \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{1}{h^2} [f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)] - \frac{h^2}{12} f^{IV}(x) + \dots. \quad (\text{A - 4})$$

Os termos $(\frac{h^2}{6}f'''(x)+\dots)$ e $(\frac{h^2}{12}f^{IV}(x)+\dots)$ são os erros, e podem ser quantificados. Neste caso, o erro é de ordem h^2 . Estas expressões são exatas para funções de baixa ordem (quadráticas ou menor para a primeira derivada, e cúbica ou menor para a segunda derivada).

Para se obter a expressão da diferença central para as derivadas de maior ordem, os valores em outros pontos terão que ser utilizados. Usando a série de Taylor para os pontos $(x \pm h)$ e $(x \pm 2h)$ tem-se:

$$f(x+2h) = f(x) + 2hf'(x) + \frac{(2h)^2}{2!}f''(x) + \frac{(2h)^3}{3!}f'''(x) + \frac{(2h)^4}{4!}f^{IV}(x) + \dots \quad (\text{A - 5})$$

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f^{IV}(x) + \dots \quad (\text{A - 6})$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f^{IV}(x) + \dots \quad (\text{A - 7})$$

$$f(x-2h) = f(x) - 2hf'(x) + \frac{(2h)^2}{2!}f''(x) - \frac{(2h)^3}{3!}f'''(x) + \frac{(2h)^4}{4!}f^{IV}(x) + \dots \quad (\text{A - 8})$$

Estas expressões, (A - 5), (A - 6), (A - 7) e (A - 8), podem ser tão precisas quanto necessário, simplesmente incluindo um número maior de pontos analisados e eliminando parcelas indesejáveis da série de erros. Com essas quatro expressões é possível calcular até a derivada de quarta ordem. A ordem de precisão está relacionada com a ordem do erro.

Para determinar as derivadas de primeira e segunda ordem pela diferença central com uma ordem de precisão h^4 , utiliza-se as equações da série de Taylor acima até a derivada de quarta ordem e procede-se da seguinte forma:

1. multiplica-se a expressão (A - 5) por uma constante a :

$$f(x+2h)a = f(x)a + 2ahf'(x) + a\frac{(2h)^2}{2!}f''(x) + a\frac{(2h)^3}{3!}f'''(x) + a\frac{(2h)^4}{4!}f^{IV}(x); \quad (\text{A - 9})$$

2. multiplica-se a expressão (A - 6) por uma constante b :

$$f(x+h)b = f(x)b + bhf'(x) + b\frac{h^2}{2!}f''(x) + b\frac{h^3}{3!}f'''(x) + b\frac{h^4}{4!}f^{IV}(x); \quad (\text{A - 10})$$

3. multiplica-se a expressão (A - 7) por uma constante c :

$$f(x-h)c = f(x)c - chf'(x) + c\frac{h^2}{2!}f''(x) - c\frac{h^3}{3!}f'''(x) + c\frac{h^4}{4!}f^{IV}(x); \quad (\text{A - 11})$$

4. multiplica-se a expressão (A - 8) por uma constante d :

$$f(x-2h)d = f(x)d - 2dhf'(x) + d\frac{(2h)^2}{2!}f''(x) - d\frac{(2h)^3}{3!}f'''(x) + d\frac{(2h)^4}{4!}f^{IV}(x); \quad (\text{A - 12})$$

5. soma-se as equações (A - 9), (A - 10), (A - 11) e (A - 12), e reorganiza-se os termos da equação resultante do somatório de forma que as funções e derivadas fiquem em evidência:

$$\begin{aligned} af(x+2h) + bf(x+h) + cf(x-h) + df(x-2h) &= (a+b+c+d)f(x) + (2a+b-c-2d)hf'(x) + \\ &+ \left(2a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c + 2d\right)h^2f''(x) + \left(\frac{4}{3}a + \frac{1}{6}b - \frac{1}{6}c - \frac{4}{3}d\right)h^3f'''(x) + \\ &+ \left(\frac{2}{3}a + \frac{1}{24}b - \frac{1}{24}c - \frac{2}{3}d\right)h^4f^{IV}(x). \end{aligned} \quad (\text{A - 13})$$

6. Para determinar a derivada primeira, o seguinte sistema de equações deve ser satisfeito:

$$(2a + b - c - 2d) = 1; \quad (\text{A - 14})$$

$$\left(2a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c + 2d\right) = 0; \quad (\text{A - 15})$$

$$\left(\frac{4}{3}a + \frac{1}{6}b - \frac{1}{6}c - \frac{4}{3}d\right) = 0; \quad (\text{A - 16})$$

$$\left(\frac{2}{3}a + \frac{1}{24}b - \frac{1}{24}c - \frac{2}{3}d\right) = 0. \quad (\text{A - 17})$$

Resolvendo o sistema com quatro equações e quatro variáveis desconhecidas encontra-se os valores de a , b , c e d . Substituindo-se então na equação (A - 13), tem-se:

$$f'(x) = \frac{1}{12h} [f(x-2h) - 8f(x-h) + 8f(x+h) - f(x+2h)]. \quad (\text{A - 18})$$

7. para determinar a derivada segunda, o seguinte sistema de equações deve ser satisfeito:

$$(2a + b - c - 2d) = 0; \quad (\text{A - 19})$$

$$\left(2a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c + 2d\right) = 1; \quad (\text{A - 20})$$

$$\left(\frac{4}{3}a + \frac{1}{6}b - \frac{1}{6}c - \frac{4}{3}d\right) = 0; \quad (\text{A - 21})$$

$$\left(\frac{2}{3}a + \frac{1}{24}b - \frac{1}{24}c - \frac{2}{3}d\right) = 0. \quad (\text{A - 22})$$

Resolvendo o sistema com quatro equações e quatro variáveis desconhecidas encontra-se os novos valores de a , b , c e d . Substituindo-se então na equação (A - 13), tem-se:

$$f''(x) = \frac{1}{12h^2} [-f(x-2h) + 16f(x-h) - 30f(x) + 16f(x+h) - f(x+2h)]. \quad (\text{A - 23})$$

Em muitas situações não é possível utilizar a diferença central e então deve-se utilizar as diferenças à direita ou à esquerda. Este fato ocorre com muita frequência em problemas de engenharia em que se deve calcular os valores aproximados das derivadas para os contornos, como ocorre neste trabalho, onde, para os contornos da placa não é possível utilizar diferença central. Assim, da mesma forma que foi feito para encontrar as derivadas de primeira e segunda ordem na diferença central faz-se para as diferenças a direita e esquerda, mudando-se somente os pontos utilizados. Para a diferença a direita com ordem de precisão também h^4 utiliza-se os pontos $f(x+h)$, $f(x+2h)$, $f(x+3h)$ e $f(x+4h)$ e obtêm-se:

$$f''(x) = \frac{1}{h^2} \left(\frac{35}{12} f(x) - \frac{26}{3} f(x+h) + \frac{19}{2} f(x+2h) - \frac{14}{3} f(x+3h) + \frac{11}{12} f(x+4h) \right). \quad (\text{A - 24})$$

E para a diferença a esquerda utiliza-se os pontos $f(x-h)$, $f(x-2h)$, $f(x-3h)$ e $f(x-4h)$ e obtêm-se:

$$f''(x) = \frac{1}{h^2} \left(\frac{35}{12} f(x) - \frac{26}{3} f(x-h) + \frac{19}{2} f(x-2h) - \frac{14}{3} f(x-3h) + \frac{11}{12} f(x-4h) \right). \quad (\text{A - 25})$$

Como pode ser visto, as expressões de ordem superior para diferenças finitas à direita e à esquerda podem ser encontradas, porém é sabido que para se conseguir a mesma ordem de precisão, os operadores serão sempre mais espalhados do ponto analisado do que

os usados na expressão da diferença central. Assim, a diferença central é sempre preferível, exceto quando existem problemas de vizinhança.

Vários problemas de análise estrutural são definidos por equações que, por sua vez, são funções de uma ou mais variáveis e assim as derivadas parciais são envolvidas. Estas equações podem ser expressas em forma de diferenças finitas e as mesmas considerações utilizadas para funções de uma variável podem ser aplicadas. Assim, tendo-se as derivadas de primeira ordem em uma direção, calcula-se facilmente a derivada $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$ com a mesma ordem de precisão da seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right), \quad (\text{A - 26})$$

e

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \right). \quad (\text{A - 27})$$

A.1.2 - Integração numérica

Sabe-se que se $f(x)$ for uma função contínua em $[a, b]$, então esta função tem uma primitiva neste intervalo, ou seja, existe $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$ (RUGGIERO e LOPES, 1996). Assim:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad (\text{A - 28})$$

no entanto pode não ser fácil expressar esta função primitiva por meio de combinações finitas de funções elementares. Existe o caso em que o valor de $f(x)$ é conhecido apenas em alguns pontos, em um intervalo $[a, b]$. Como não se conhece a expressão analítica de

$f(x)$, não tem condições de calcular a integral $\int_a^b f(x)dx$. Uma forma de se obter uma aproximação de $f(x)$ num intervalo $[a, b]$, como nos casos acima, é através dos métodos numéricos de integração numérica.

A idéia básica da integração numérica é a substituição da função $f(x)$ por um polinômio que aproxime razoavelmente no intervalo $[a, b]$. Assim o problema fica resolvido pela integração de polinômios, o que é trivial de se fazer. Com este raciocínio, pode-se deduzir fórmulas para aproximar $\int_a^b f(x)dx$. Estas fórmulas podem ter a expressão geral dada por:

$$\int_a^b f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + \dots + A_n f(x_n), \quad (\text{A} - 29)$$

onde $x_i \in [a, b], i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Neste trabalho, a integração numérica ao longo de um elemento triangular foi feita utilizando-se as fórmulas de Hammer para integração direta em um triângulo. Segundo estas fórmulas, a integral de uma função $f(\xi, \eta)$ ao longo do triângulo mostrado na figura A-2 é aproximado por (ZIENKIEWICZ, 1977):

$$\int_0^1 \int_0^{1-\xi} f(\xi, \eta) d\eta d\xi = \sum_{i=1}^r w_i f(\xi_i, \eta_i), \quad (\text{A} - 30)$$

sendo w_i os pesos de Hammer e (ξ_i, η_i) as coordenadas dos pontos de Hammer.

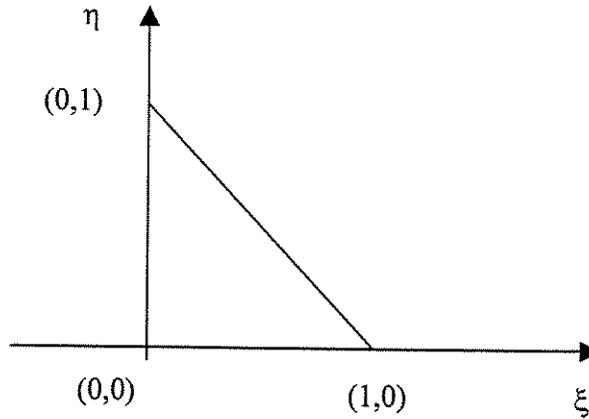


figura A - 2: triângulo de Hammer para integração direta

Estas fórmulas integram exatamente polinômios de ordem m :

$$f(\xi, \eta) = a_0 + b_0 + a_1\xi + b_1\eta + \dots + a_i\xi^i + b_j\eta^j, \quad (\text{A - 31})$$

No caso deste trabalho, foi admitido que a função a ser integrada tinha variação linear ao longo do triângulo, sendo:

$$f(\xi, \eta) = a_0 + b_0 + a_1\xi + b_1\eta. \quad (\text{A - 32})$$

Neste caso, a fórmula de Hammer é exata com um ponto de integração. E assim, tem-se:

$$\xi = \eta = \frac{1}{3}, \quad (\text{A - 33})$$

e peso

$$w = \frac{1}{2}. \quad (\text{A - 34})$$

E assim:

$$\int_0^1 \int_0^{1-\xi} f(\xi, \eta) d\eta d\xi = \frac{1}{2} f\left(\xi = \frac{1}{3}, \eta = \frac{1}{3}\right). \quad (\text{A} - 35)$$

A.1.3 - Interpolação

Interpolar uma função $f(x)$ consiste em aproximar essa função por uma outra função $g(x)$ escolhida entre uma classe de funções definida *a priori* e que satisfaça algumas propriedades. A função $g(x)$ é então usada em substituição à função $f(x)$. A necessidade de se efetuar esta substituição surge em várias situações, como por exemplo:

- quando são conhecidos somente os valores numéricos da função para um conjunto de pontos e é necessário calcular o valor da função em um ponto não tabelado;
- quando a função em estudo tem uma expressão tal que, operações como a diferenciação e a integração são difíceis (ou mesmo impossíveis) de serem realizadas.

Considerando $(n + 1)$ pontos distintos: x_0, x_1, \dots, x_n , chamados *nós da interpolação*, e os valores de $f(x)$ nesses pontos: $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$, a forma de interpolação de $f(x)$ consiste em se obter uma determinada função $g(x)$ tal que:

$$\begin{cases} g(x_0) = f(x_0) \\ g(x_1) = f(x_1) \\ \vdots \\ g(x_n) = f(x_n) \end{cases}, \quad (\text{A} - 36)$$

onde a função $g(x)$ pode ser escolhida entre as funções polinomiais, funções racionais, funções trigonométricas, etc.

A.1.4 - Método dos Resíduos Ponderados

O Método dos Resíduos Ponderados é um método aplicável aos problemas de Mecânica do Contínuo governado por equações diferenciais parciais, como é o caso deste trabalho. Esta metodologia permite construir uma forma integral para a equação diferencial no domínio do problema.

Problema de valor de contorno

Dado um operador diferencial $L_{2m}(\)$ válido para um domínio S e outro operador $B_i(\)$ válido para o contorno C de S , o problema consta de determinar uma função $\varphi(x, y, z)$ que satisfaça as equações dadas por:

$$\begin{cases} L_{2m}(\varphi(x, y, z)) = f(x, y, z), & \text{em } S \\ B_i(\varphi(x, y, z)) = g_i(x, y, z), & \text{em } C' \end{cases} \quad (\text{A - 37})$$

sendo o operador $B_i(\)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) de ordem $(2m-1)$, e as funções $f(x, y, z)$ e $g_i(x, y, z)$ são conhecidas em S e C , respectivamente. Assim, define-se as seguintes condições de contorno:

- *condições de contorno essenciais:* são aquelas que envolvem as derivadas de ordem 0 até $(m-1)$;
- *condições de contorno naturais:* são aquelas que envolvem derivadas de ordem m até $(2m-1)$ no máximo.

Uma função $\varphi(x, y, z)$ é dita *Admissível* (ou teste) para o problema se ela satisfizer todas as condições de diferenciabilidade relacionadas com o operador $L_{2m}(\)$ e se $\varphi(x, y, z)$ satisfizer identicamente as condições de contorno $B_i(\varphi(x, y, z)) = g_i(x, y, z)$ no contorno C . Se $\varphi(x, y, z)$ satisfizer todas as condições de diferenciabilidade/continuidade relacionadas

com o operador $L_{2m}(\)$ e se todas as condições de contorno são satisfeitas, a formulação para o Método dos Resíduos Ponderados é chamada de *Forte*. Se $\varphi(x, y, z)$ tiver condições de diferenciabilidade/continuidade relaxadas em relação ao operador $L_{2m}(\)$ e se $\varphi(x, y, z)$ satisfizer aproximadamente as condições de contornos naturais, a formulação é dita ser *Fraca*, e neste caso, observa-se que as condições de contorno essenciais devem ser satisfeitas identicamente.

Uma seqüência de funções admissíveis $\{\varphi_1 \ \varphi_2 \ \dots \ \varphi_M\}$ linearmente independentes em D é dita completa se para um problema:

$$\begin{cases} L_{2m}(u(x, y, z)) = f(x, y, z), & \text{em } S \\ B_i(u(x, y, z)) = g_i(x, y, z), & \text{em } C \end{cases} \quad (\text{A - 38})$$

sendo $(i = 1, 2, \dots, m)$ e $u(x, y, z)$ a solução exata, vale a seguinte relação:

$$\int_S \left[u(x, y, z) - \sum_1^M \alpha_i \varphi(x, y, z) \right]^2 dS \leq \beta, \quad (\text{A - 39})$$

para um β pequeno, desde que M seja um valor suficientemente grande.

Para este problema (A - 39), supondo uma função admissível $\varphi(x, y, z)$, definem-se como *funções resíduo* $R(x, y, z)$ e $R_c(x, y, z)$ as funções:

$$R(x, y, z) = L_{2m}(\varphi(x, y, z)) - f(x, y, z), \quad (\text{A - 40})$$

no domínio S e,

$$R_c(x, y, z) = \sum_{i=1}^m (B_i(\varphi(x, y, z)) - g_i(x, y, z)), \quad (\text{A - 41})$$

no domínio C . Se a formulação for Forte, $R_c(x, y, z) = 0$ em C . Se a função $\varphi(x, y, z)$ é solução exata, então $R(x, y, z) = 0$ em S . A função resíduo surge pelo fato de $\varphi(x, y, z)$ ser uma função aproximada.

O termo *Resíduo Ponderado* é definido como sendo o produto interno:

$$\langle R, W_i \rangle = \int_S R(x, y, z) W_i(x, y, z) dS, \quad (\text{A - 42})$$

sendo $W_i(x, y, z)$ uma *função ponderada* que precisa respeitar os requisitos de continuidade em S . Portanto, para um conjunto de funções ponderadoras:

$$\{W_1(x), W_2(x), W_3(x), \dots, W_n(x)\}, \quad (\text{A - 43})$$

linearmente independentes, sendo $W_i(x)$ quadraticamente integrável em S . Através de cada função ponderadora pode-se montar uma equação integral para o Resíduo Ponderado no domínio e no contorno.

Solução por Resíduos Ponderados

O objetivo é encontrar uma função $\varphi(x, y, z)$ que satisfaça as equações acima, de forma que $f(x, y, z)$ e $g_i(x, y, z)$ sejam conhecidas, e $\varphi(x, y, z)$ seja a solução aproximada.

Assim:

$$u(x, y, z) \cong \varphi(x, y, z), \quad (\text{A - 44})$$

Para uma seqüência de funções admissíveis:

$$\{\varphi_1(x, y, z), \varphi_2(x, y, z), \varphi_3(x, y, z), \dots, \varphi_n(x, y, z)\}, \quad (\text{A - 45})$$

as seguintes restrições devem ser respeitadas:

1. $\varphi_j(x, y, z)$, ($j = 1, 2, \dots, n$), devem ser contínuas e diferenciáveis até a ordem $2m$. As derivadas de ordem $2m$ devem ser contínuas por partes no mínimo;
2. $\varphi_0(x, y, z)$ deve satisfazer todas as condições de contorno $B_i(\varphi_j(x, y, z)) = g_i(x, y, z)$ para ($i = 1, 2, \dots, m$) em C ;
3. $\varphi_j(x, y, z)$ deve satisfazer todas as condições de contorno homogêneas associadas $B_i(\varphi_j(x, y, z)) = 0$ com ($i = 1, 2, \dots, m$) e ($j = 1, 2, \dots, n$).

Por construção, uma função admissível $\varphi(x, y, z)$ pode ser expressa como:

$$\varphi(x, y, z) = \varphi_0(x, y, z) + \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j(x, y, z). \quad (\text{A - 46})$$

sendo α_j uma constante.

Substituindo esta expressão (A - 46) nas expressões (A - 40) e (A - 41) tem-se:

$$R(x, y, z) = L_{2m} \left(\varphi_0(x, y, z) + \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j(x, y, z) \right) - f(x, y, z), \quad (\text{A - 47})$$

$$R_c(x, y, z) = \sum_{i=1}^m \left(B_i \left(\varphi_0(x, y, z) + \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j(x, y, z) \right) - g_i(x, y, z) \right). \quad (\text{A - 48})$$

Se o operador do contorno $B_i(\)$ for linear (como geralmente ocorre), então a equação (A - 48) pode ser escrita como:

$$R_c(x, y, z) = \sum_{i=1}^m \left(B_i(\varphi_0(x, y, z)) + \sum_{i=1}^m \left[B_i \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j(x, y, z) \right) - g_i(x, y, z) \right] \right), \quad (\text{A - 49})$$

que conduz a:

$$R_c(x, y, z) = \left\{ \sum_{i=1}^m (B_i(\varphi_0(x, y, z)) - g_i(x, y, z)) \right\} + \sum_{i=1}^m B_i \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j(x, y, z) \right) = 0, \quad (\text{A - 50})$$

sendo:

$$\sum_{i=1}^m (B_i(\varphi_0(x, y, z)) - g_i(x, y, z)) = 0; \quad (\text{A - 51})$$

$$\sum_{i=1}^m B_i \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j(x, y, z) \right) = 0. \quad (\text{A - 52})$$

As igualdades (A - 51) e (A - 52) acima são verdadeiras pois $\varphi_0(x, y, z)$ satisfaz as condições de contorno e $\varphi_j(x, y, z)$ satisfaz as condições de contorno homogêneas associadas.

Método de Galerkin

O método de Galerkin é um dos mais utilizados no contexto de aproximações. Dado um problema, como foi mencionado anteriormente pelas equações (A - 38) e considera-se a função admissível (A - 46) e a função resíduo (A - 47). Pelo método de Galerkin, adota-se:

$$W_i(x, y, z) = \varphi_i(x, y, z), \quad (\text{A - 53})$$

ou seja, as funções ponderadoras são as funções admissíveis, o que implica em especificar o processo como sendo:

$$\langle R(x, y, z), W_i(x, y, z) \rangle = \langle R(x, y, z), \varphi_i(x, y, z) \rangle. \quad (\text{A} - 54)$$

Apêndice – B

B.1 - Introdução à otimização

B.1.1 - Projetos de engenharia

De maneira geral, pode-se dizer que a engenharia consiste de um grande número de atividades que incluem análises, projetos, fabricação, pesquisas, vendas e desenvolvimento de sistemas. O projeto de sistemas complexos requer o processamento de informações e envolve um grande número de cálculos que podem ser executados com relativa rapidez nos computadores modernos. Com essa ferramenta de grande auxílio à engenharia, torna-se possível o melhoramento de projetos e o desenvolvimento de softwares cada vez mais robustos. A otimização é usada então para encontrar ferramentas que auxiliam esta área da engenharia, voltada a projetos, cujo objetivo é o de encontrar um *projeto ótimo*, ou seja, o projeto que envolve menor custo respeitando todas as restrições do problema. Portanto, um problema de projeto pode ser formulado como um problema de otimização, onde teorias de otimização, métodos numéricos e softwares e hardwares modernos podem ser usados como ferramentas para melhoramento destes projetos.

Muitas possibilidades e fatores devem ser considerados durante a fase de formulação do problema, como a economia por exemplo. Ao mesmo tempo, dependendo de sua complexidade, devem ser divididos em problemas menores, chamados de subproblemas, que serão tratados individualmente como problemas de projeto ótimo. Assim, projeto é um processo iterativo, onde há a análise de várias tentativas, uma após outra, até se chegar a um projeto dito *aceitável* (*possível* ou *factível*), ou também, a um *melhor projeto* (melhor solução dentre as várias possíveis). Essas tentativas são baseadas na experiência, intuição e em análises matemáticas. Um projeto completo envolve a cooperação entre várias áreas da engenharia. O conceito de “melhor” projeto pode ter diferentes conotações para diferentes sistemas, que em geral, implica em menores custos, eficiência, segurança e durabilidade. O fluxograma abaixo (ARORA, 2004), representado pela figura B - 1, mostra um modelo para o desenvolvimento de um projeto.

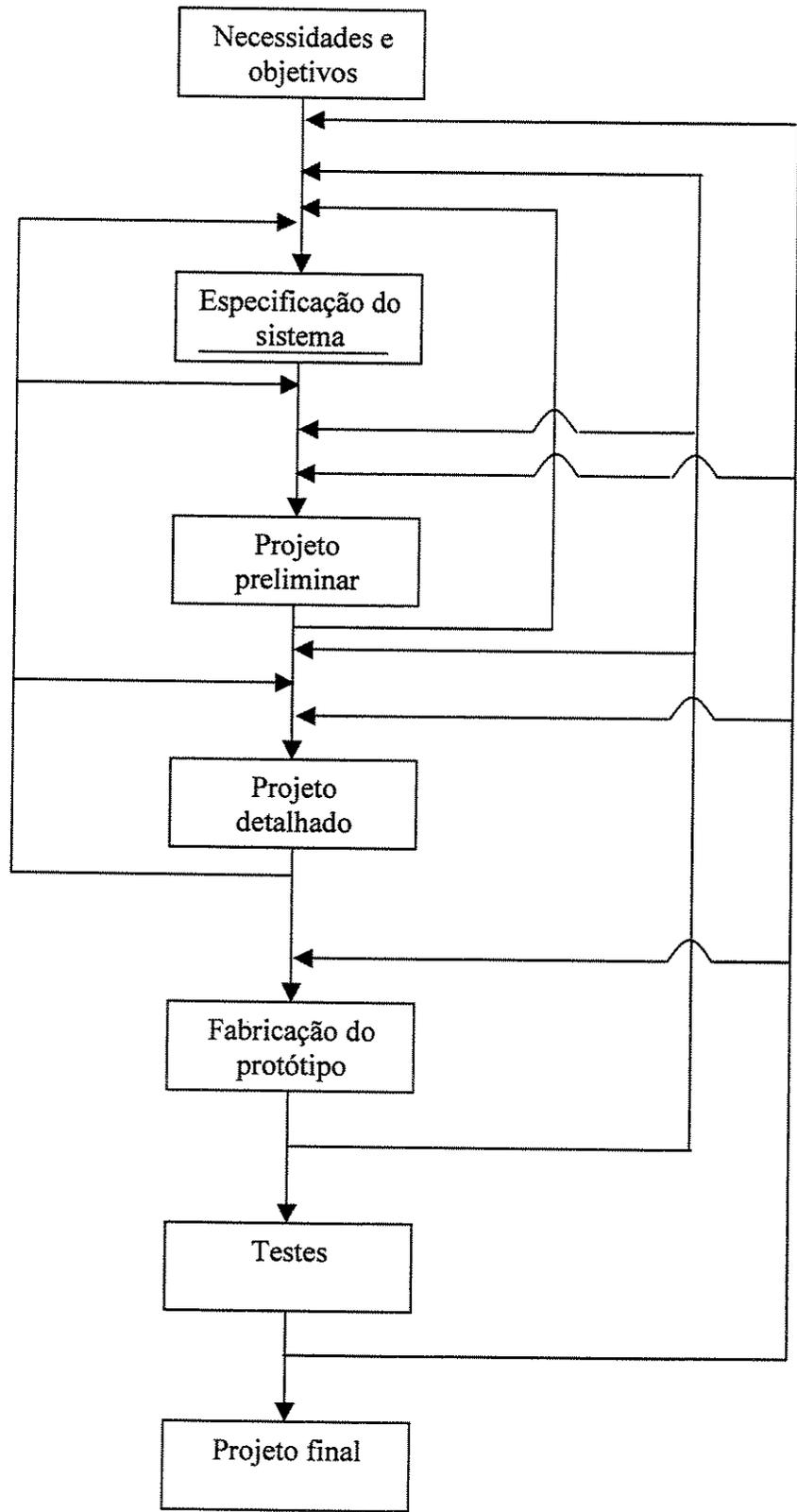


figura B - 1: modelo para desenvolvimento de um projeto

Um ponto importante é que os conceitos e métodos de otimização podem ser úteis em vários estágios do projeto, que uma vez associados a softwares adequados, podem ser capazes de analisar várias possibilidades de projetos rapidamente. Estas técnicas podem ser úteis durante as fases preliminares e de detalhamento do projeto assim como na fabricação e testes. Através dos fluxogramas (ARORA, 2004) mostrados pelas figuras B - 2 e B - 3, pode-se comparar um processo de projeto convencional com um processo de projeto ótimo.

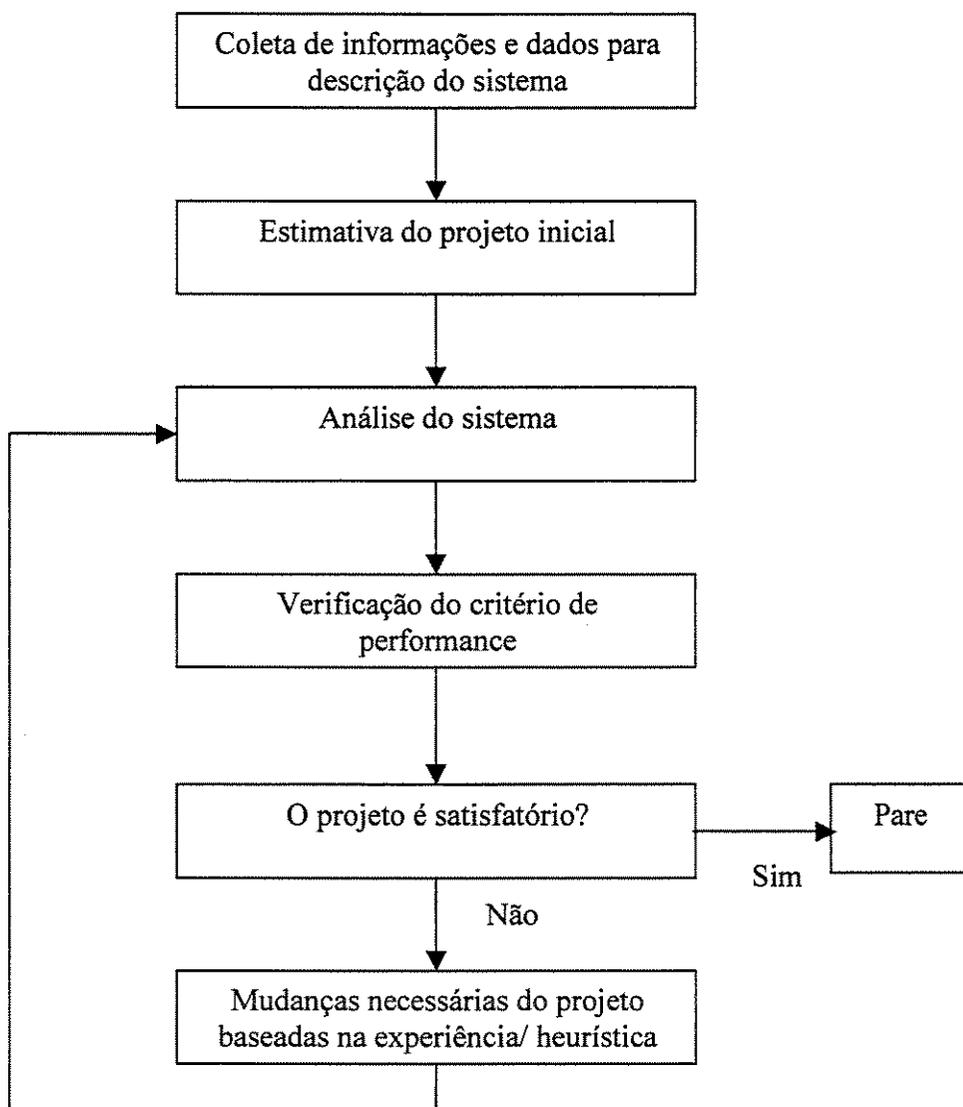


figura B - 2: fluxograma de um processo de projeto convencional

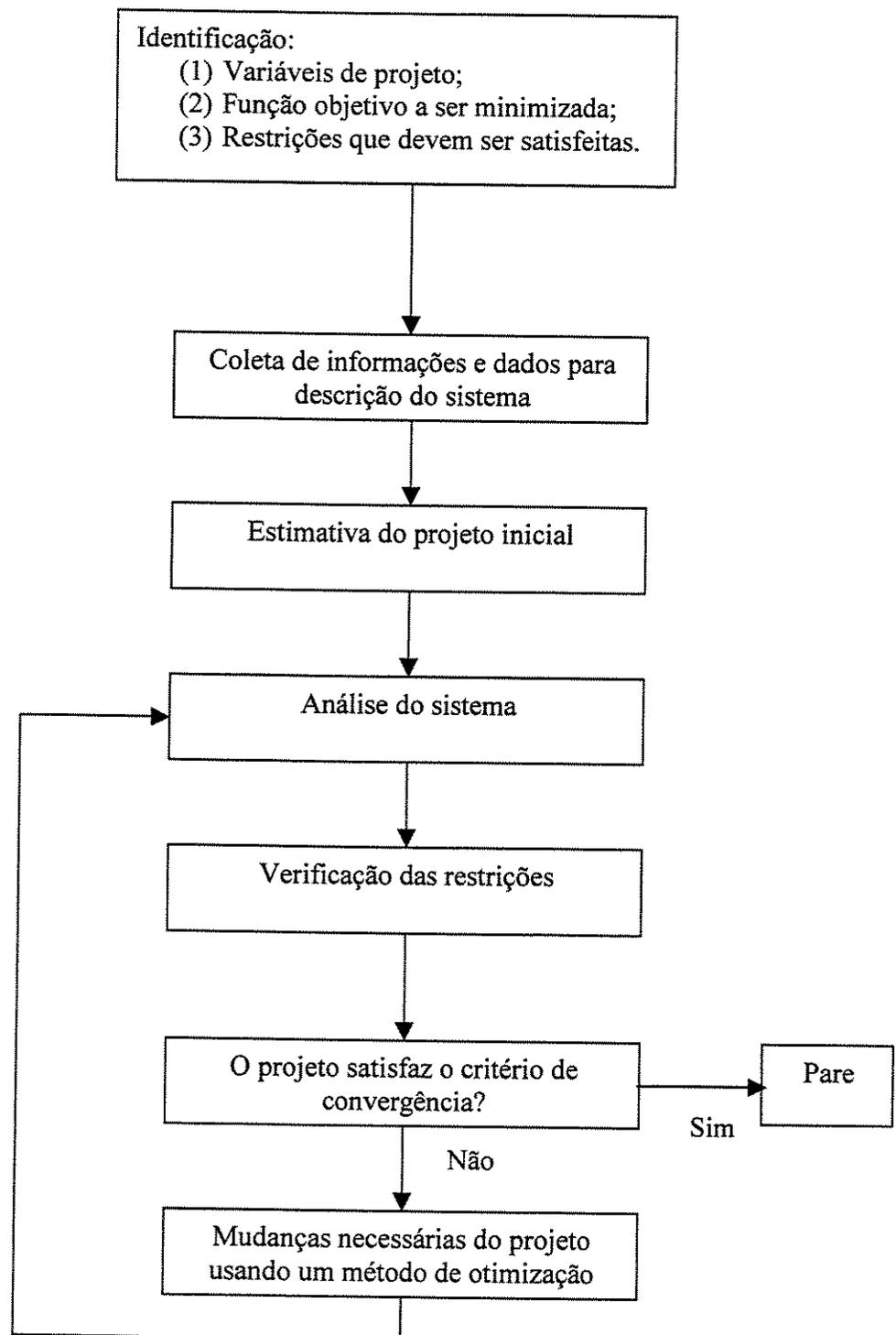


figura B - 3: fluxograma de um processo de projeto ótimo

B.1.2 - Formulação do projeto de otimização

A solução de um problema de otimização é grandemente dependente de sua formulação, o que significa dizer que, uma boa solução ou uma solução correta depende de como o problema é formulado. Essa formulação, geralmente, é composta de cinco estágios (ARORA, 2004):

- *Primeiro estágio*: descrição do problema/ projeto. Neste estágio são descritos todos os objetivos e requerimentos a serem encontrados;
- *Segundo estágio*: coleta de dados e informações. Aqui, são identificados as ferramentas e procedimentos de análises que estão envolvidas com a definição das equações para as variáveis do problema;
- *Terceiro estágio*: identificação e definição das variáveis de projeto. Neste estágio do processo de formulação, são identificadas as variáveis independentes que serão as *variáveis de projeto*. Essa etapa é de fundamental importância, pois desta escolha pode-se encontrar ou não a solução procurada;
- *Quarto estágio*: definição de um critério para ser otimizado. Este estágio é onde se define o critério que compara os projetos testados entre si, para que seja possível se chegar ao projeto ótimo procurado. Esse critério deve ser uma função escalar e deve ser também, função das variáveis de projeto. Essa função é chamada de *função objetivo* onde, dependendo do problema, pode ser maximizada ou minimizada. Quando for minimizada, é comum chamá-la como *função custo*.
- *Quinto estágio*: identificação das restrições. Esse passo é realizado em problemas onde há restrições, os chamados *problemas de otimização restritos*. Essas restrições limitam as variações das variáveis de projeto e funções do problema, e definem critérios de parada (quando são violadas). De maneira geral, elas podem ser lineares, não lineares, implícitas, explícitas, de igualdade, e de desigualdade.

Para descrever conceito e métodos de otimização, torna-se necessário representar a formulação do problema de projeto ótimo de forma matemática. Este modelo matemático é definido como a minimização de uma função objetivo e, ao mesmo tempo, respeitando as restrições do problema. Dessa forma, definiu-se um modelo padrão de otimização da seguinte maneira:

- Encontrar um vetor ($n \times 1$):

$$\{x\} = \{x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n\}, \quad (\text{B - 1})$$

que representa as variáveis de projeto (ou seja, as variáveis independentes) do problema, que minimiza uma função:

$$f(\{x\}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (\text{B - 2})$$

chamada de função objetivo ou função custo, sujeita à:

$$h_j(\{x\}) = h_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0; (j = 1, 2, \dots, p), \quad (\text{B - 3})$$

que são as restrições de igualdade, e:

$$g_i(\{x\}) = g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0; (i = 1, 2, \dots, m), \quad (\text{B - 4})$$

que são as restrições de desigualdade. E também:

$$x_i \geq 0, \quad (\text{B - 5})$$

ou:

$$x_{il} \leq x_i \leq x_{iu}, \quad (\text{B - 6})$$

onde x_{il} é o valor mais baixo de x_i e x_{iu} é o valor mais alto de x_i , que definem o intervalo (ou os limites) para as variáveis de projeto.

Deste modelo, pode-se observar que (ARORA, 2004):

- as funções $f(\{x\})$, $h_j(\{x\})$ e $g_i(\{x\})$ devem ser explicitamente ou implicitamente dependentes de algumas das variáveis de projeto. Então, são válidas somente para problemas de projeto. Funções que não dependerem de nenhuma variável, não tem relação com o problema e podem ser seguramente ignoradas;
- o número de restrições de igualdade independentes, deve ser menor ou igual ao número de variáveis de projeto, ou seja, $p \leq n$. Quando $p > n$, tem-se um sistema super-determinado de equações, e neste caso, ou existem algumas restrições de igualdade redundantes (linearmente dependentes de outras restrições) ou inconsistentes. No primeiro caso, restrições redundantes, podem ser retiradas. Se $p < n$, a solução do projeto ótimo para o problema é possível. Se $p = n$, nenhuma otimização do sistema é necessário pois as soluções das restrições de igualdade são somente candidatas para o projeto ótimo;
- todas as restrições de desigualdade são geralmente padronizadas como " ≤ 0 ". O número total de restrições ativas (as que satisfazem a igualdade) para o projeto ótimo, é usualmente menor ou igual ao número de variáveis de projeto;
- alguns problemas podem não ter restrições, e como já foi dito anteriormente, são os chamados problemas de otimização irrestrito;
- se todas as funções $f(\{x\})$, $h_j(\{x\})$ e $g_i(\{x\})$ forem lineares, o problema é dito ser um problema de programação linear;
- se a função custo for multiplicada por uma constante positiva, o projeto ótimo não muda, somente o valor da função muda. Também, qualquer constante pode ser adicionada à função custo sem afetar o projeto ótimo. Similarmente, as restrições de desigualdade podem ser multiplicadas por uma constante positiva sem afetar a região possível (aceitável) e conseqüentemente a solução ótima.

Um “*grupo possível*” ou “*grupo factível*” para um problema de projeto é uma coleção de todos os projetos possíveis. O termo “grupo restrito” e “espaço de projeto possível” também são usados para representar o grupo possível de projetos. Se S for o grupo possível, matematicamente este grupo é uma coleção de pontos do projeto que satisfaz todas as restrições, ou seja:

$$S = \left\{ \{x\} / h_j(\{x\}) = 0, \quad j = 1, \dots, p; \quad g_i(\{x\}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \right\}. \quad (\text{B - 7})$$

O grupo de projetos possíveis é, algumas vezes, referido como a “*região possível*” ou “*região factível*”, especialmente em problemas de otimização. Geralmente, essa região diminui com o aumento de restrições e aumenta com a diminuição das mesmas.

As restrições de desigualdade são ditas *ativas* para um ponto $\{x\}^*$ do projeto, se ela satisfaz a igualdade $g_j(\{x\}^*) = 0$. Para um projeto possível, uma restrição de desigualdade pode ser ativa ou não. Porém, todas as restrições de igualdade são ativas para todos os projetos possíveis. Uma restrição de desigualdade é dita estritamente *inativa* para um ponto $\{x\}^*$ do projeto, se ela satisfaz estritamente a desigualdade $g_j(\{x\}^*) < 0$. Se a restrição for $g_j(\{x\}^*) > 0$ será uma restrição *violada*. Uma restrição de igualdade $h_i(\{x\}^*) = 0$ é violada para o ponto do projeto $\{x\}^*$, se ela for $h_i(\{x\}^*) \neq 0$. Portanto, uma restrição de igualdade ou será ativa ou violada para um ponto $\{x\}^*$.

B.1.3 - Conceitos de projeto ótimo

Os métodos de otimização são divididos em duas categorias (ARORA, 2004), como pode ser vista pelo fluxograma, mostrado pela figura B-4.

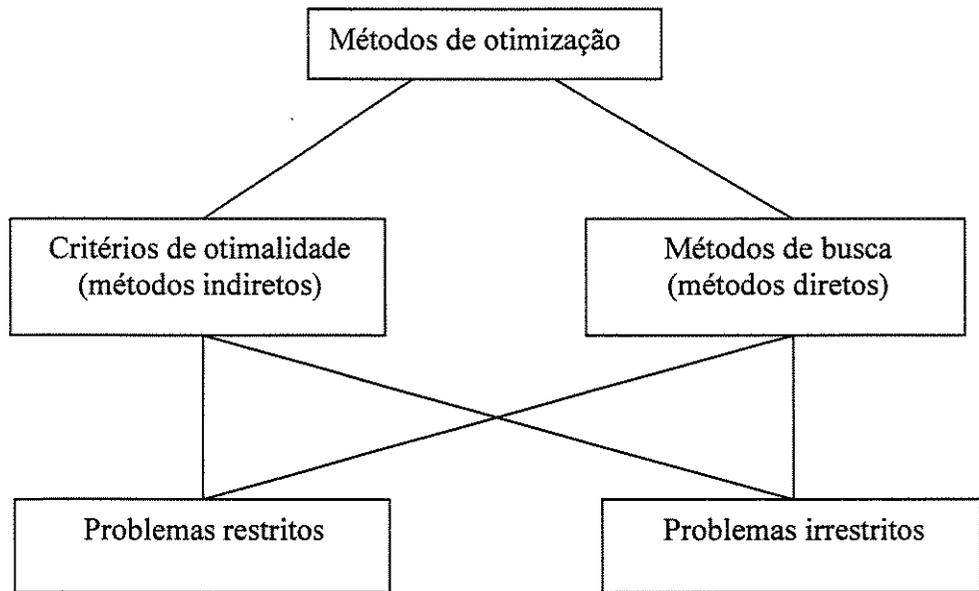


figura B - 4: classificação dos métodos de otimização

Os critérios de otimalidade são as condições que uma função deve satisfazer para seu ponto mínimo. As técnicas de minimização que procuram soluções para as condições de otimalidade são os métodos *indiretos*. As *técnicas de busca*, ditas *técnicas diretas*, são baseadas em uma filosofia diferente. Nestas, inicia-se com uma estimativa do projeto ótimo para o problema, que geralmente não satisfaz os critérios de otimalidade, e é então iterativamente melhorado até que esses critérios sejam satisfeitos. Portanto, nesta aproximação, busca-se os pontos ótimos para o espaço de projeto.

B.1.4 - Métodos numéricos para projeto ótimo

Um problema de otimização é dito não linear quando alguma ou todas as funções do problema, função objetivo e/ou funções de restrição, são não lineares. Os métodos numéricos para estes tipos de problemas são necessários pois os métodos analíticos usados para solucionar alguns desses problemas não são adequados. Existem duas razões básicas que justificam esse fato (ARORA, 2004):

- quando o número de variáveis de projeto e restrições são grandes tendo-se então várias equações para resolver, que na maioria dos casos são não lineares;
- quando as funções, objetivo e/ou restrições, são funções implícitas das variáveis de projeto, onde as formas das funções explícitas das variáveis independentes não são conhecidas.

Vários métodos numéricos têm sido desenvolvidos, alguns melhores do que outros, para solucionar problemas não-lineares. Em tais aproximações, estima-se um projeto inicial e faz um melhoramento do mesmo até que as condições de otimalidade sejam satisfeitas.

B.1.5 - Algoritmo geral

Muitos métodos de solução numérica são descritos pela seguinte prescrição iterativa:

$$\text{Vetor: } \{x\}^{(k+1)} = \{x\}^{(k)} + \Delta\{x\}^{(k)}; (k = 1, 2, \dots)$$

Componentes: $x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \Delta x_i^{(k)}; (k = 1, 2, \dots)$ e $(i = 1, 2, \dots, n)$, onde k é o número de iterações e i é o número de variáveis de projeto (independentes).

Trata-se de um esquema iterativo que é contínuo até que as condições de otimalidade sejam satisfeitas, ou uma solução obtida. Essa fórmula iterativa pode ser aplicada tanto para problemas restrito como para problemas irrestritos. Para os problemas restritos, as restrições devem também ser consideradas enquanto se calcula as mudanças $\Delta\{x\}^{(k)}$. Existem vários métodos para calcular o valor de $\Delta\{x\}^{(k)}$ para os problemas restritos e irrestritos. Essa mudança $\Delta\{x\}^{(k)}$ pode ser decomposta em duas partes: $\Delta\{x\}^{(k)} = \alpha_k \{d\}^{(k)}$, onde $\{d\}^{(k)}$ é o vetor de direção de busca no espaço do projeto, e α_k é um escalar positivo que representa o *tamanho do passo* (ou *comprimento do passo*) naquela direção. Assim, o processo para determinar $\Delta\{x\}^{(k)}$ envolve dois subproblemas separados: um para encontrar a direção $\{d\}$ e, um para determinar o comprimento do passo (escalar ao longo da direção

$\{d\}$). Várias combinações de procedimentos podem ser usados para desenvolver diferentes algoritmos de otimização.

Em síntese, a idéia básica dos métodos numéricos para problemas de otimização não-lineares é iniciar com uma estimativa razoável para o projeto ótimo. O processo é contínuo até que, ou as condições de otimalidade, ou outros critérios de parada sejam encontrados. Este processo iterativo representa uma busca organizada através do espaço do projeto para os pontos que representam um mínimo local. Assim, os procedimentos são freqüentemente chamados de *técnicas de busca* ou *métodos diretos*.

O processo iterativo pode ser resumido pelo seguinte algoritmo geral, válido para problemas restritos e irrestritos:

- *Primeiro passo*: estimar $\{x\}^{(0)}$; para $k = 0$;
- *Segundo passo*: computar uma direção de busca $\{d\}^{(k)}$ no espaço do projeto. Este cálculo geralmente requer um valor da função objetivo e de seu gradiente para problemas irrestritos, e em adição, funções de restrição e seus gradientes para os problemas restritos;
- *Terceiro passo*: verificar a convergência. Se converge, então termina o processo. Caso contrário, continua;
- *Quarto passo*: calcular o comprimento do passo α_k (positivo) na direção de descida $\{d\}^{(k)}$;
- *Quinto passo*: atualizar o projeto; passa para a próxima iteração $k = k + 1$ e volta para o segundo passo; $\{x\}^{(k+1)} = \{x\}^{(k)} + \Delta\{x\}^{(k)} = \{x\}^{(k)} + \alpha_k \{d\}^{(k)}$.