

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR Adolfo Gomes
Marto E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 28/02/02
Pablo Siqueira
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

**Modelagem e avaliação experimental do desempenho
de motores acionados por ondas propagantes**

Autor: **Adolfo Gomes Marto**

Orientador: **Pablo Siqueira Meirelles**

17714030020



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL**

Modelagem e avaliação experimental do desempenho de motores acionados por ondas propagantes

Autor: Adolfo Gomes Marto

Orientador: Pablo Siqueira Meirelles

Curso: Engenharia Mecânica

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Tese de doutorado apresentada à comissão de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Campinas, Fevereiro de 2002

S.P. - Brasil

1ª CHAMADA T/UNICAMP	
M367m	
EX	
OMBO BCI	52577
ROC.	12-124/03
C	☐
D	☒
REÇO	R\$ 11,00
ATA	13/03/03
2ª CPD	

3M00180729--1

18 10 234864

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

M367m Marto, Adolfo Gomes
 Modelagem e avaliação experimental do desempenho
 de motores acionados por ondas propagantes / Adolfo
 Gomes Marto. --Campinas, SP: [s.n.], 2002.

 Orientador: Pablo Siqueira Meirelles.
 Tese (doutorado) - Universidade Estadual de
 Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

 1. Motores elétricos – Projetos e construção. 2.
 Equipamento ultra-sônico. I. Meirelles, Pablo Siqueira.
 II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de
 Engenharia Mecânica. III. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

TESE DE DOUTORADO

**Modelagem e avaliação experimental do desempenho de
motores acionados por ondas propagantes**

Autor: Adolfo Gomes Marto

Orientador: Pablo Siqueira Meirelles

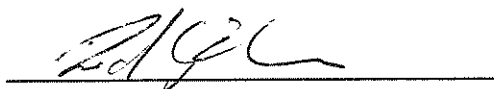
Prof. Dr. Pablo Siqueira Meirelles, Presidente
DMC/FEM/Unicamp



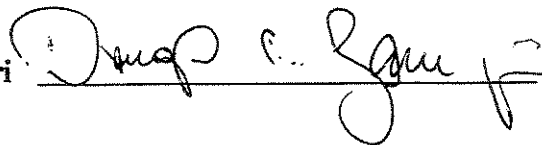
Prof. Dr. Emílio Carlos Nelli Silva
Mecatrônica-EPUSP/SP



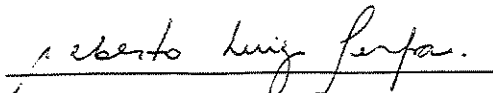
Prof. Dr. Ricardo Ibrahim Cury
Mecatrônica-EPUSP/SP



Prof. Dr. Douglas Eduardo Zampieri
DMC/FEM/Unicamp



Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa
DMC/FEM/Unicamp



Campinas, 28 de Fevereiro de 2002.

Dedicatória

Dedico este trabalho a quem de fato alterou a rotina de minha vida, ao meu filho Heitor

Agradecimentos

Este trabalho teve a colaboração de muitos colegas. Gostaria de agradecer a todos. Em especial quero agradecer ao prof. Dr Nazem que trouxe o tema, em que me envolvi intensamente, ainda quando fazia mestrado. Ao prof. Dr. Pablo que se dispôs a discutir os temas mais relevantes engrandecendo em muito este trabalho. Gostaria também de agradecer ao prof. Hagedorn que me acolheu no Instituto de Mecânica da Universidade Técnica de Darmstadt para que eu pudesse fazer as medições necessárias.

Ao pensar na colaboração humana de cada um dos colegas que se envolveram com a experiência, quero agradecer o apoio técnico ao superar cada uma das etapas do trabalho. Agradeço também o apoio moral que todos prestaram a mim, quando às vezes as dificuldades pareciam sem importância.

Gostaria de agradecer também ao apoio financeiro dado pelo CNPq e Capes para o custeio de minha manutenção, tanto em Campinas quanto em Darmstadt. Outra contribuição financeira substancial foi o investimento feito pela FAPESP na construção do protótipo didático utilizado durante os experimentos no Brasil.

Agradeço a toda minha família que sempre me incentivou nas minhas investidas no mundo da pesquisa.

Resumo

MARTO, Adolfo Gomes, Modelagem e avaliação experimental do desempenho de motores acionados por ondas propagantes: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2002. 144p. Tese de Doutorado.

Motores ultra-sônicos possuem características que os tornam promissores para algumas aplicações. Trata-se de um tipo de motor relativamente novo se comparado com os motores eletromagnéticos convencionais. Ainda há muito para se investigar e aprimorar nestes motores.

Este trabalho estuda o funcionamento de um motor ultra-sônico por ondas propagantes. É discutido como a energia de vibração mecânica é transformada em energia motriz. É apresentado também um modelo numérico que representa o comportamento do motor por ondas propagantes. Para tanto a cinemática dos componentes foi representada num sistema de coordenadas solidária à onda propagante, facilitando a análise do contato mecânico. Os componentes mais importantes foram representados por um modelo de placa de Kirchhoff. A equação de movimento foi derivada em formalismo Lagrangiano e a resolução do problema de contato associado foi obtida utilizando o método de elementos finitos para casos não lineares.

A fim de verificar os fenômenos envolvidos no funcionamento deste tipo de atuador, foi contruído um motor por ondas propagantes, operando numa faixa de frequência sônica. Uma bancada de teste foi construída para avaliar o desempenho deste motor e observar como os parâmetros de operação influenciavam no seu funcionamento.

Um motor ultra-sônico comercial, com características de funcionamento bem conhecidas, foi investigado no *Institut für Mechanik* na *Technische Universität Darmstadt* com o intuito de observar a representatividade do modelo para avaliar o desempenho deste motor.

Palavras-chaves: Motor ultra-sônico, ondas propagantes, cerâmica piezoelétrica, contato mecânico.

Abstract

MARTO, Adolfo Gomes, *Modelling and experimental performance evaluation of ultrasonic motors*: Ph. D. Thesis, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2002. 144p.

The ultrasonic motors have characteristics that make them become promising for some applications. These motors are relatively new when they are compared with the electromagnetic motors. There are a lot of things to investigate and to improve in this kind of motors.

This work presents how the travelling wave ultrasonic motors work. It discusses how the mechanical vibration energy is transformed in driven energy. This work intends to show the numerical representation of ultrasonic motor behavior.

The kinematics of components were represented by a coordinate system which is fixed on the travelling wave. This procedure facilitates the analysis of the contact mechanic. The most important components, stator and rotor, were represented by plate theory. These components were modelled using the Kirchhoff plate theory. The equation of motion was derived using Lagrangian formulations. In order to solve the non-linearities due to the associated contact problem, the finite element method was used.

A sonic travelling wave motor was made as a didactic prototype in order to verify the influence of operational parameters in the motor behavior. In order to verify the model representability, a commercial ultrasonic motor was investigated on the *Institut für Mechanik* in *Technische Universität Darmstadt*, in Germany.

Keywords ultrasonic motor, travelling wave, piezoelectric ceramic, contact mechanic.

Sumário

Resumo	xi
Abstract	xiii
Sumário	xvii
Lista de Figuras	xxi
Lista de Tabelas	xxiii
Lista de Símbolos	xxx
1 Introdução	1
1.1 Motivação	2
1.2 Objetivos	3
1.3 Revisão Bibliográfica	3
1.4 Metodologia	8
2 Princípio de funcionamento	11
2.1 Onda Propagante	12
2.2 Polarização da cerâmica piezoelétrica	15
2.3 Deslocamentos Elípticos	18
2.4 Sistema de Referência	19
2.5 Modelagem do motor	20

2.5.1	Cinemática do estator e do rotor	21
2.5.2	Cinemática da superfície de contato	22
3	Dinâmica de um motor ultra-sônico por ondas propagantes	25
3.1	Energias do Motor	26
3.1.1	Energia Cinética	26
3.1.2	Energia Potencial de deformação	27
3.1.3	Interações eletromecânicas	29
3.1.4	Energia potencial da camada de contato	34
3.1.5	Interface de contato	35
3.2	Equação de movimento	38
4	Funções de forma de aproximação	41
4.1	Espaço isoparamético	41
4.2	Funções de forma para elementos de placa retangulares	42
4.2.1	Representação dos deslocamentos no espaço isoparamétrico	45
4.3	Funções de forma para elementos de placa periféricos	46
4.3.1	Obtenção da função de forma para cada nó	52
4.4	Funções de Forma Elétricas	53
4.5	Aproximação das integrais por quadratura de Gauss	53
5	Análise numérica	55
5.1	Algoritmo	56
5.1.1	Parâmetros de operação	56
5.1.2	Propriedades Físicas	58
5.1.3	Geração de malha	58
5.1.4	Cálculo dos Autovalores e autovetores	60
5.1.5	Cálculo das Forças Piezoelétricas	60
5.1.6	Cálculo da distribuição das Forças Normais	61
5.1.7	Cálculo da distribuição das Forças Tangenciais	64
5.2	Resultados Numéricos	64

5.2.1	Verificação do elemento de placa	64
5.2.2	Verificação do elemento de placa periférico	66
5.2.3	Curva característica torque por velocidade	67
6	Análise Experimental	71
6.1	Motor por ondas propagantes sônico didático	71
6.2	Motor por ondas propagantes ultra-sônico comercial	81
6.2.1	Resposta em frequência	84
6.2.2	Torque por velocidade característica	85
7	Comparação entre os resultados numéricos e experimentais	91
8	Conclusão e sugestões para trabalhos futuros	93
A	Piezoelasticidade	95
A.1	Princípio	95
A.2	Polarização	97
A.3	Modelo linear	98
A.4	Manipulação de cerâmicas piezoelétricas	100
A.4.1	Corte da Cerâmica	100
A.4.2	Colagem da Cerâmica	101
A.4.3	Colagem dos Eletrodos	102
B	Motor ultra-sônico comercial	103
C	Instrumentos mais importantes	105
C.1	Bancada de ensaios para motores ultra-sônicos	105
D	Quadratura de Gauss	109
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	111

Lista de Figuras

1.1	Primeiras propostas para o funcionamento de um motor ultra-sônico	4
1.2	Motores propostos por Sashida	5
2.1	Motor ultra-sônico	12
2.2	Polarização de setores cerâmicos	16
2.3	Polarização de duas cerâmicas para motores ultra-sônicos	17
2.4	Polarização de uma cerâmica piezoelétrica para motores ultra-sônicos	17
2.5	Sistemas de coordenadas de referências	19
2.6	Esquema de montagem	20
2.7	Deslocamentos nas superfícies de contato	23
2.8	Superfícies de contato	24
3.1	Vista parcial do estator com a cerâmica colada	32
3.2	Modelagem da camada de contato	34
3.3	Aproximação da distribuição de forças normais	36
4.1	Mapeamento da transformação de coordenadas	42
4.2	Triângulo de Pascal	43
4.3	Esquema da malha com elementos de periféricos	46
4.4	Termos de polinômios interpoladores da família <i>serendipity</i>	47
4.5	Inclinações de uma placa devido ao deslocamento transversal	49
4.6	Elemento retangular de Lagrange	50
5.1	Fluxograma de Etapas numéricas	57
5.2	Estator equivalente	59
5.3	Rotor equivalente	60
5.4	Modo (2,0) com 2 nós a mais nos elementos periféricos	67

5.5	Curva <i>torque</i> $\times$ <i>velocidade angular</i> característica obtida numericamente	69
6.1	Principais dimensões do estator	72
6.2	Modo de vibrar do estator	74
6.3	Trapézios de cerâmica piezoelétrica, (atuador e sensor)	75
6.4	Configuração de colagem dos trapézios de cerâmica piezoelétrica	75
6.5	Principais dimensões do rotor	76
6.6	Bancada de ensaio do motor por ondas propagantes didático	76
6.7	Freio passivo	77
6.8	Encoder óptico	78
6.9	Representação esquemática circuito elétrico para o <i>encoder</i> óptico	78
6.10	Torquímetro por barra flexível	79
6.11	Disposição dos instrumentos de medição para o motor didático	80
6.12	Variação da velocidade angular do motor	82
6.13	Variação da potência de saída do motor	83
6.14	Disposição dos instrumentos de medição para motores ultra-sônicos	84
6.15	Comportamento de um motor ultra-sônico por ondas propagante sem torque aplicado	86
6.16	Desempenho de um motor ultra-sônico por ondas propagante para a frequência de operação de 40,4 kHz	87
6.17	Desempenho de um motor ultra-sônico por ondas propagante para a frequência de operação de 41,4 kHz	88
6.18	Desempenho de um motor ultra-sônico por ondas propagante para a frequência de operação de 42,3 kHz	89
A.1	Deslocamento elétrico em cristais piezoelétricos de titanato de bário $BaTiO_3$.	96
A.2	Polarização piezoelétrica de uma estrutura policristalina	96
A.3	Estrutura básica do cristal PZT	97
A.4	Condutores elétricos para motor por ondas propagantes	102
B.1	Motor ultra-sônico Shinsei USR60	103

C.1 Bancada para medir o desempenho de motores ultra-sônicos	106
C.2 Célula de carga	107

Lista de Tabelas

2.1	Superposição modal	14
5.1	Parâmetros de Operação	58
5.2	Força axial pré-aplicada P_{axial}	58
5.3	Velocidades do rotor V_R	58
5.4	Propriedades físicas dos componentes	59
5.5	Propriedades da placa circular	65
5.6	Constantes λ_{ij}^2 para determinação das frequências naturais de uma placa	65
5.7	Comparação das frequências naturais extraídas numericamente	66
5.8	Frequências naturais de uma placa modelada com elementos periféricos	66
5.9	Distribuição de elementos de placa	67
6.1	Principais características do estator didático	73
6.2	Principais frequências naturais do estator	73
6.3	Frequências naturais do motor didático obtidas por varredura	81
B.1	Características físicas do motor ultra-sônico USR fabricado pela Shinsei	104
D.1	Coordenadas e respectivos pesos para quadratura de Gauss extraídos de Dhatt & Touzot (1984)	110

Lista de Símbolos

Símbolos Gregos

$\Delta(.)$	Diferença entre dois valores
$\epsilon_r, \epsilon_\theta$	Deformação radial e angular respectivamente
ϵ^S	Permissividade elétrica à tensão constante
η	Variável isoparamétrica
η_e	Parcela de amortecimento estrutural
$\gamma_{r\theta}$	Deformação por cisalhamento no plano $r\theta$
Γ	Matriz jacobiana de transformação inversa
λ	Seção circular correspondente a um comprimento de onda
μ_e, μ_d	Coefficientes de atrito: estático e dinâmico respectivamente
$\nabla(.)$	Operador Gradiente
$\nabla^2(.)$	Operador harmônico de Laplace
$\nabla^4(.)$	Operador bi-harmônico
ν	Coefficiente de dilatação volumétrica de Poisson
Φ_r, Φ_s	Função de forma de aproximação
Φ_e, Φ_A, Φ_B	Função de forma de aproximação elétrica
π	Número pi=3.1415926
ρ	Densidade de massa absoluta

ω	Frequência angular de vibração
Ω	Frequência operação
$\tau_{aplicado}$	Torque aplicado
ξ	Variável isoparamétrica
$\partial(.)$	Derivada parcial
θ	Ângulo de referência

Símbolos Latinos

a	Eixo principal de uma elipse
a_{ij}	Constantes dos polinômios de aproximação
b	Eixo principal de uma elipse
$\mathbf{B}_{mec}$	Operador diferencial estrutural aplicado às funções de forma de aproximação
$\mathbf{B}_{el}$	Função de aproximação elétrica
c	Velocidade de propagação da luz no vácuo
$\mathbf{C}$	Matriz que contém as relações constitutivas de um material isotrópico
$\mathbf{Cc}$	Condição de contorno
$\mathbf{C}^E$	Matriz que contém as relações constitutivas de um material piezoelétrico a um campo constante
d_{cr}	Deslocamento axial de corpo rígido do rotor
D	Rigidez à flexão de um material
$\mathbf{D}$	Vetor de deslocamentos elétricos
$\vec{e}_r \ \vec{e}_\theta \ \vec{e}_z$	vetores unitários ortonormais
E, E_o	Módulo de rigidez de Young
E_c	Módulo de rigidez de Young da camada de contato
$\mathbf{E}$	Vetor de campo elétrico

f	Frequência natural de vibração
$\mathbf{F}$	Vetor de forças generalizadas
$\mathbf{F}_{Pzt}$	Vetor de forças piezoelétricas
$\mathbf{F}_N$	Força normal à superfície de contato
gap	Função vão, determina a distância entre pontos do estator e do rotor
h	Espessura de uma placa qualquer
h_d	Distância da superfície neutra do estator à superfície de contato
h_r	Distância da superfície neutra do rotor à superfície de contato
h_o	Distância da superfície neutra do estator à superfície à cerâmica piezoelétrica
h_{Pzt}	Espessura da cerâmica piezoelétrica
H	Entalpia
$\mathbf{I}_g$	Matriz com os termos de inércia
$\mathbf{I}_{12 \times 12}$	Matriz com todas as condições de contorno de um elemento isoparamétrico
$\mathbf{J}$	Matriz Jacobiana
$\mathbf{K}_s, \mathbf{K}_r$	Matriz de rigidez à flexão do estator e rotor respectivamente
$\mathbf{K}_{em}$	Matriz de rigidez eletromecânica da cerâmica piezoelétrica
$\mathbf{K}_{Pzt}$	Matriz de rigidez à flexão da cerâmica piezoelétrica
K_{p+}	Rigidez equivalente ativa
L	Função lagrangiana
L_m, L_n	Polinômio interpolador de Lagrange
$\mathcal{L}$	Operador diferencial estrutural
m	Número de onda
$\mathbf{M}$	Matriz de massa nodal equivalente
M_T	Momento devido à forças tangenciais
$\mathcal{N}$	Distribuição dos esforços normais ao longo da superfície de contato
N	Função de forma de aproximação
p	Número inteiro qualquer
$\mathcal{P}$	Distribuição dos esforços transversais ao longo da superfície de contato

$\mathcal{P}_{axial}$	Força axial pré-aplicada
p_n	Função penalizadora
P_{C_i}	Coordenada do ponto em contato da superfície do estator P_{C_i}
P_{C_j}	Coordenada do ponto em contato da superfície do rotor P_{C_j}
$\mathbf{P}_m$	Matriz de coeficientes
$\mathbf{P}_n$	Matriz de coeficientes
q	Número inteiro qualquer
$\mathbf{q}, \mathbf{q}_{ds}$	Vetor de coordenadas generalizadas
$\dot{\mathbf{q}}$	Vetor de velocidades generalizadas
$\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_r$	Vetor de coordenadas generalizadas do estator e rotor respectivamente
r	Raio
Res	Resíduo de forças
$\mathbf{S}, \mathbf{S}_c$	Tensor de deformações
t	Variável tempo
T	Período de um ciclo qualquer
T	Energia cinética
$\mathbf{T}$	Tensor de tensões
$(.)^T$	Matriz ou vetor transposto
$\mathcal{T}_{apl}$	Torque aplicado pelo motor ultra-sônico
u, u_s, u_r, u_c	Deslocamentos na direção radial
$\mathbf{u}$	Vetor de deslocamento
$\mathbf{u}_s$	Vetor de deslocamento do estator
$\mathbf{u}_r$	Vetor de deslocamento do rotor
$\dot{\mathbf{u}}$	Vetor de velocidades
U	Energia potencial
U_s, U_R	Energia potencial de deformação elástica do estator, do rotor
U_{dc}	Energia potencial de deformação elástica da camada de contato
U_c	Energia potencial do contato mecânico entre rotor e estator

U_{Pzt}	Energia potencial devido à piezoeletricidade
v	Deslocamentos angulares
v, v_A, v_B	Potenciais elétricos aplicados aos grupos de cerâmica piezoelétricas
V_{ol}	Volume do elemento
V_w	Velocidade angular da onda propagante
V_R	Velocidade angular do rotor
V_{rel}	Velocidade angular relativa
w_s, w_r, w_c	Deslocamentos transversais
w_o	Deslocamentos transversais da superfície neutra de uma placa
w_A, w_B	Deslocamentos transversais da superfície neutra de modos de vibrar de uma placa circular
z	Coordenada transversal

Capítulo 1

Introdução

De acordo com Sashida & Kenjo (1993), motores ultra-sônicos são um tipo de atuador que utiliza vibrações mecânicas acima da frequência audível para funcionar. Alguns motores funcionam com campos acústicos como é o caso de motores ultra-sônicos sem contato encontrado em Ueha (2000). Porém os motores que usam a força de atrito para transformar a energia mecânica de vibrações em energia motriz são os mais empregados.

Formas diferentes de vibrações podem ser combinadas na concepção de um motor ultra-sônico. Uma forma muito utilizada é a propagação de ondas em um meio sólido. Os motores que empregam este princípio são conhecidos como motores ultra-sônicos por ondas propagantes, ou em inglês *Travelling Wave Ultrasonic Motors*. Estes motores tem como principais características:

- São capazes de produzir alto torque a baixa velocidade, possuindo pouca massa comparado com um motor eletromagnético convencional;
- Não necessitam de mecanismos adicionais, como redutores de velocidade e freio para controle de posição, uma vez que são acionados por forças de atrito e possuem baixa velocidade;
- Pelo mesmo motivo possuem uma boa característica de partida e frenagem. Também possuem pouca massa inercial;
- São pouco influenciados por campos magnéticos externos, pois geralmente são motores piezoelétricos, com característica capacitiva;

- São motores compactos e de simples manufatura;
- Além destas características, são silenciosos, pois como já dito trabalham numa frequência acima da audível.

Devido a estas características estes motores estão sendo propostos como substitutos de motores eletromagnéticos convencionais em aplicações, por exemplo, na mecatrônica.

A aplicação comercial mais conhecida é a sua utilização no mecanismos de autofocagem de objetivas para máquinas fotográficas, como as apresentadas em Canon(1996).

1.1 Motivação

Apesar de ser um tema novo no Brasil, motores ultra-sônicos já estão sendo estudados por décadas em países como Japão, Alemanha e Estados Unidos, como discorre Wallaschek (1995). Os primeiros projetos de concepção eram empíricos e se baseavam em circuitos eletrônicos equivalentes para determinar o comportamento do motor, como os encontrados em Sashida & Kenjo (1993). Os primeiros modelos numéricos para representar o funcionamento do motor se baseavam no método de elementos finitos, porém tratado com elementos tridimensionais e com uma malha bastante refinada, como proposto por Maeno *et al.* (1992). Isto tomava bastante tempo, além de ser dispendioso. Modelos analíticos começaram a ser propostos para descrever o comportamento do motor, como por exemplo o modelo proposto por Hagood & MacFarland (1995). Para tanto, os autores usavam simplificações para facilitar a solução, como a utilização de modelo de placas e de um modelo de viga.

Desta forma, este trabalho procura estudar as características de motores ultra-sônicos por ondas propagantes por meio do método de elementos finitos. Para tanto, foi construído um protótipo didático, operando numa faixa de frequência sônica, no laboratório de Vibroacústica do Departamento de Mecânica Computacional da Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, DMC-FEM-Unicamp. Procurou-se, com este protótipo, verificar experimentalmente algumas características de funcionamento do motor, como por exemplo a influência da força axial pré-aplicada ao motor em seu funcionamento. Um modelo por elementos finitos simplificado é, então, proposto para representar o funcionamento do motor sob determinadas condições de operação. Com o intuito de verificar

a representatividade do modelo, o comportamento de um motor ultra-sônico comercial foi estudado experimentalmente. O motor utilizado foi o modelo USR60 fabricado pela empresa Shinsei Kogyo Corporation, que possui características conhecidas. Este motor foi ensaiado sob as condições de operação que o modelo se propõe a representar, em uma bancada de teste desenvolvida pelo *Institut für Mechanik* em *Technische Universität Darmstadt* para avaliar o comportamento de motores ultra-sônicos.

1.2 Objetivos

O objetivo deste trabalho é representar numericamente o desempenho de um motor ultra-sônico pela curva característica *torque* $\times$ *velocidade* sob determinadas condições de operação. Procura-se avaliar a influência da força axial pré-aplicada ao motor em seu funcionamento. Também se procura criar uma metodologia para facilitar a concepção de novos motores.

1.3 Revisão Bibliográfica

O princípio básico de funcionamento de motores ultra-sônicos é discutido em detalhes por Ueha *et al.* (1993). Motores ultra-sônicos são compostos por dois corpos em contato. Um dos corpos possui uma oscilação mecânica de pequena amplitude, porém com alta frequência, de forma que os pontos da sua superfície de contato desenvolvam uma trajetória elíptica. O outro corpo pressionado contra o primeiro é impulsionado por forças de atrito. O corpo que possui a oscilação mecânica é denominado estator e o corpo impulsionado é chamado de rotor.

Formas de vibrar podem ser combinadas para gerar movimento oscilatório com trajetória elíptica na superfície de contato. Marto (1997) apresenta algumas delas.

Segundo Wallaschek (1995), apesar de o princípio básico de funcionamento ter sido proposto há mais de 50 anos, foi necessário a descoberta de materiais capazes de excitar o estator e uma eletrônica de potência para gerar sinais elétricos com frequências apropriadas e amplitudes suficientes para intensificar as pesquisas de motores ultra-sônicos. Mesmo assim as primeiras publicações tiveram impacto na história de motores ultra-sônicos. Entre elas encontra-se o trabalho de Barth (1973) que propõe um rotor impulsionado por duas hastes

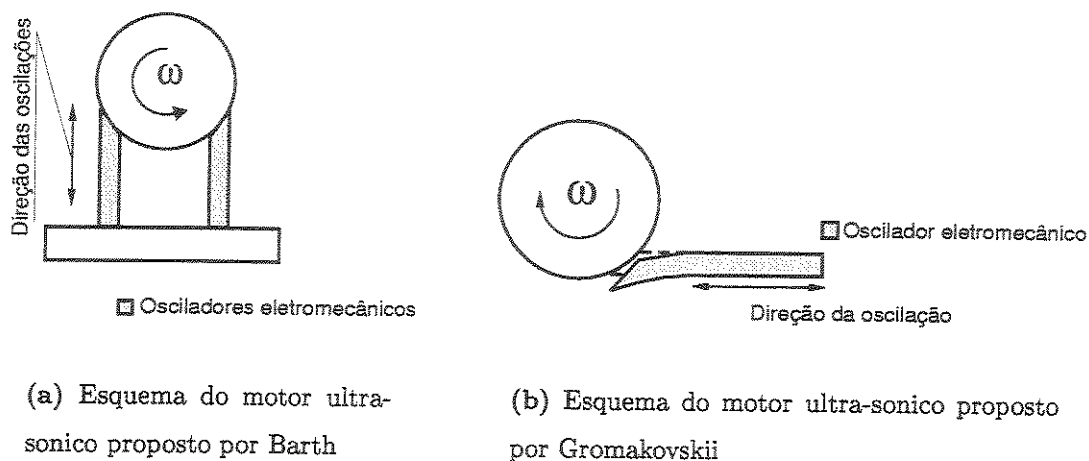


Figura 1.1: Primeiras propostas para o funcionamento de um motor ultra-sônico

como ilustrado na Fig. 1.1(a) e também o de Gromakovskii (1978) que propôs a utilização de um oscilador que pudesse ter deslocamentos em duas direções, ilustrado na Fig. 1.1(b)

Um grande impulso foi dado pela concepção do motor ultra-sônico por ondas propagantes desenvolvido por Sashida (1982). Em 1980 Sashida dispõe inúmeros elementos vibrantes a um pequeno ângulo da normal do plano transversal do rotor, como ilustrado na Fig. 1.2(a). Devido aos elementos estarem dispostos a um ângulo quase reto em relação ao plano do rotor, o motor teve um desgaste excessivo. Para resolver o problema, Sashida substituiu os elementos vibrantes por apenas um, como mostra a Fig. 1.2(b). Neste elemento, ondas propagantes produziram harmonicamente deslocamentos elípticos na superfície de contato. Com este princípio a empresa Shinsei Kogyo construiu o primeiro motor ultra-sônico industrializado. Sashida & Kenjo (1993) apresentam em detalhes a concepção deste tipo de motor.

Vários tipos de motores vêm sendo propostos. Exemplos de tipos de motores ultra-sônicos e aplicações podem ser encontrados em Ueha *et al.* (1993) e Marto (1997). Algumas destas propostas são bem sucedidas como por exemplo Takemura *et al.* (2002). A concepção destes motores ainda, muitas vezes, se baseia em métodos experimentais para determinar as dimensões e parâmetros de operação. Tratam-se de etapas demoradas e dispendiosas compostas por procedimentos de tentativas de acertos. Representar o funcionamento de motores ultra-sônicos por métodos numéricos ou mesmo analíticos, tem sido alvo de pesquisas na

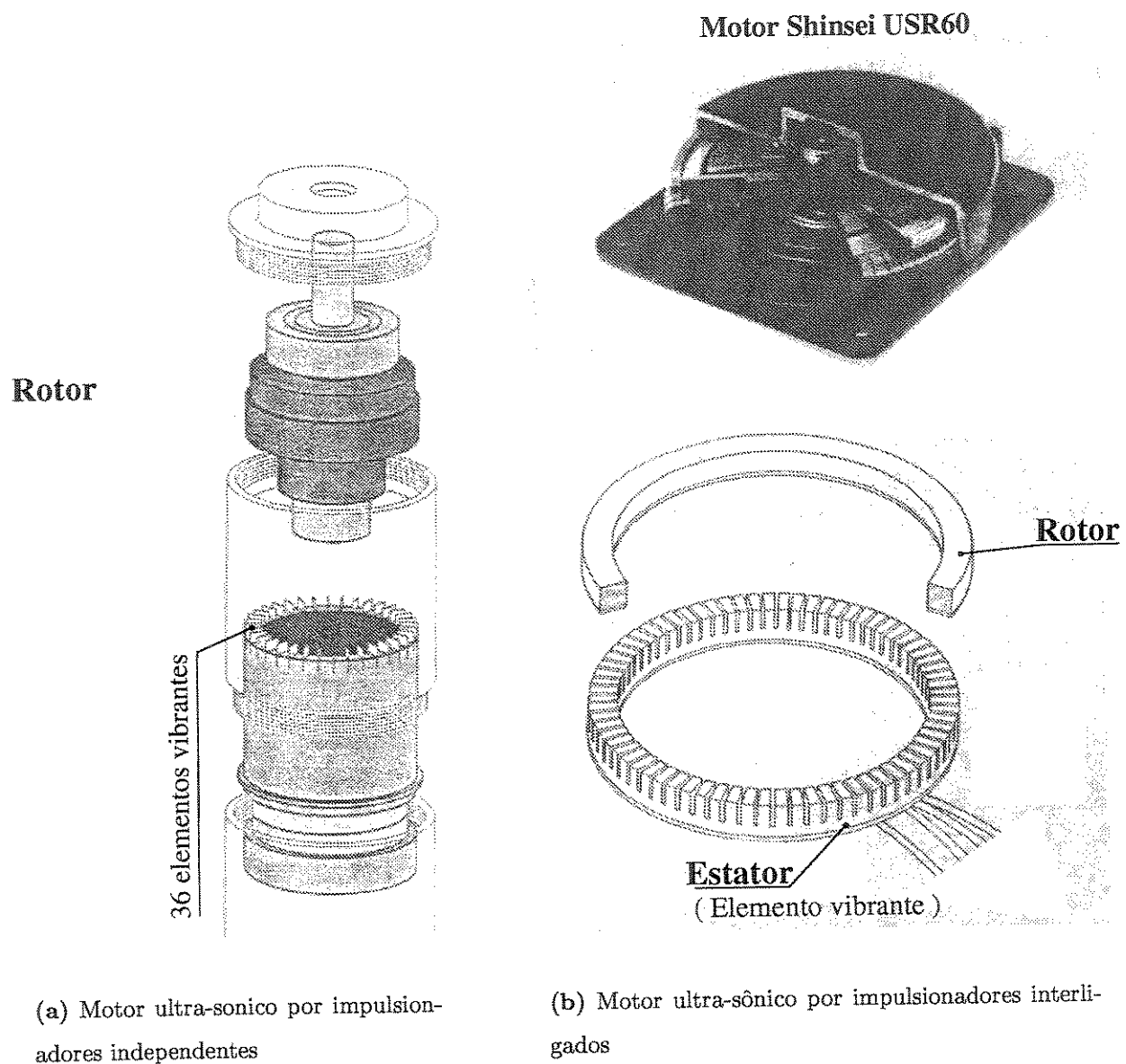


Figura 1.2: Motores propostos por Sashida

procura de ferramentas mais eficientes no projeto de novos motores, como discorre Sattel & Hagedorn (1999).

Um modelo numérico foi proposto por Maeno *et al.* (1992) para representar o comportamento de um motor ultrasônico por ondas propagantes do tipo anular empregado no mecanismo auto-focante de objetivas Canon, utilizando elementos finitos. Os autores consideraram o fenômeno de escorregamento e agarramento, *Stick-Slip* em inglês, e resolveram o problema de contato por um programa aplicativo comercial com uma malha bem refinada de elementos tridimensionais. O coeficiente de atrito utilizado pelo modelo foi ajustado para que os resultados representassem dados experimentais. Maeno & Bogoy (1992) atribuem a diferença observada à camada hidrodinâmica formada entre o estator e o rotor devido ao deslocamento de ar entre os dentes em oscilação a alta frequência.

Hagedorn & Wallaschek (1992) propõem um modelo analítico para representar o comportamento dinâmico do estator utilizando a teoria de placas. Hagedorn & Wallaschek (1993) por meio do método de diferenças finitas comparam a influência da inclusão da inércia de rotação na determinação das frequências dos modos de vibrar. Foram empregadas a teoria de placas de Mindlin-Reissner e a teoria de placas de Kirchhoff. Os autores concluem que os modos de operação, geralmente baixos, são bem representados pela teoria de placas de Kirchhoff, que não emprega os termos de inércia de rotação.

Cummings (1994) fez uma abordagem analítica dos fenômenos envolvidos, como contato mecânico e a interação piezoelétrica. O autor buscou representar analiticamente o desempenho de um motor de 0.664[in] de diâmetro utilizando para isso menos tempo computacional.

Krome & Wallaschek (1995) desenvolvem um modelo por elementos finitos para descrever o comportamento do estator com a interação piezoelétrica. O modelo também emprega elementos tridimensionais, tornando as matrizes estruturais muito complexas.

Outro modelo de funcionamento do motor é proposto por Hagoog & MacFarland (1995). Neste modelo, os autores desacoplam as equações diferenciais, tanto do estator quanto do rotor, e propõem uma solução modal, simplificando substancialmente o conjunto de equações. O rotor foi representado por um corpo indeformável e os esforços tangenciais foram determinados pela lei de atrito seco de Coulomb. Os esforços tangenciais foram assumidos como provenientes de escorregamento puro.

Um modelo analítico para descrever o contato entre rotor e estator é desenvolvido por Cao & Wallaschek (1995). O rotor também é considerado como indeformável, porém uma camada de contato colada ao rotor é modelada como um conjunto de elementos viscoelásticos e todo o sistema de coordenadas é tratado no referencial fixo na onda propagante. Desta forma os autores conseguem estimar a distribuição dos esforços tangenciais ao longo da superfície de contato, levando em consideração o fenômeno de escorregamento e agarramento. Schmidt & Hagedorn (1996) apresentam na mesma linha de raciocínio, uma proposta, onde a camada de contato é representada por um material tipo *Kelvin – Voith*, sendo a componente viscoelástica proporcional ao módulo de elasticidade de *Young*.

Um modelo de funcionamento no qual se inclui a influência das dimensões da cerâmica piezoelétrica é apresentado por Hagedorn (1997). Hagedorn *et al.* (1998) incorporam a flexibilidade do rotor no mesmo modelo. O rotor é modelado por uma viga e a condição de contato entre a camada de contato e o estator é representada por um escorregamento puro, não havendo regiões de agarramento.

Flynn (1997) desenvolve um micromotor piezoelétrico de ondas propagantes. O estator foi construído pelo próprio material piezoelétrico. A curva de desempenho *torque* $\times$ *velocidade* foi comparada com modelo de Coulomb para atrito seco, modelo de Hertz para determinação da camada de contato e modelos viscoelásticos de contato.

Uma revisão sobre o contato em motores ultra-sônicos é feita por Wallaschek (1998). Nesta publicação o autor descreve o estado da arte e quais as linhas de pesquisas existentes no estudo do comportamento da superfície de contato em motores ultra-sônicos.

Satell & Hagedorn (2000) desenvolvem um modelo analítico de funcionamento do motor levando em consideração o fenômeno de Stick-Slip. Os autores empregam formulações por elementos finitos para representar os elementos de contato. A equação de movimento é obtida por um conjunto de equações de potenciais virtuais.

Berg *et al.* (1998) apresentam uma bancada desenvolvida pelo *Institut für Mechanik* na *Technische Universität Darmstadt* de ensaios de motores ultra-sônicos para comparar os resultados simulados com dados experimentais.

Este trabalho pretende representar o funcionamento de motores por ondas propagantes pela curva característica *torque* $\times$ *velocidade*. Diferente de outros autores como Hagedorn

et.al. (1998) e Hagood & MacFarland (1995), entre outros, que utilizam modelo de placas para representar o comportamento dinâmico do estator e modelo de viga para representar o comportamento do rotor, procura-se representar neste trabalho o comportamento dos dois corpos por meio da teoria de placas. Como os corpos, tanto o rotor quanto o estator, possuem o formato de um disco fino, a utilização da teoria de placas de Kirchhoff é suficiente para representar o comportamento de ambos. Assim, o interesse deste trabalho é utilizar os método de elementos finitos baseados na teoria de placas finas de Kirchhoff para obter o comportamento dinâmico de rotor e estator submetidos a uma força de contato pré aplicada e determinar a curva característica *torque* $\times$ *velocidade* deste conjunto. A fim de verificar a representatividade do modelo utilizado, a curva característica *torque* $\times$ *velocidade* de um motor com desempenho conhecido foi obtida experimentalmente para diferentes valores de forças axiais pré-definidas, no laboratório de ensaios de motores ultra-sônicos do *Institut für Mechanik* da *Technische Universität Darmstadt*.

1.4 Metodologia

Inicialmente foram pesquisados os princípios básicos de funcionamento de motores ultra-sônicos por ondas propagantes. Um protótipo didático foi desenvolvido e construído para verificar a influência das condições de operação no funcionamento de um motor por estes princípios. Apesar das limitações construtivas foi possível a realização deste protótipo em laboratório. Toda a elaboração do motor e as alternativas utilizadas são discutidas na seção 6.1.

O funcionamento do motor é representado num sistema de coordenadas fixo na onda propagante. Assim o equacionamento dinâmico do motor é facilitado. A cinemática do estator e do rotor bem como da camada de contato é descrita neste sistema de referência de coordenadas. Toda a cinemática do motor foi desenvolvida para aplicação do método de elementos finitos, que se baseia em funções polinomiais de aproximação do vetor de coordenadas generalizadas. As funções de forma utilizadas para representar a dinâmica do motor ultra-sônico por ondas propagantes são elaboradas a partir de funções de forma encontradas na literatura de métodos de elementos finitos para representar elementos de placa de Kirchhoff, como em Cook *et al.* (1989). A equação de movimento é obtida em formalismo Lagrangiano,

que relaciona os estados de energia presentes no motor.

Com isso a dinâmica global do motor é representada por um sistema de equações, onde as variáveis independentes são os deslocamentos do rotor e do estator, sujeitos a contato entre si. Trata-se de sistema de equações diferenciais não-lineares cuja solução neste trabalho é desenvolvida pelo método iterativo de Newton-Raphson.

Busca-se, então, representar numericamente o funcionamento do motor por uma sequência de rotinas. O objetivo maior é obter a curva característica *torque* $\times$ *velocidade*. Para tanto, são determinados os parâmetros do projeto, no caso de um motor ultra-sônico por ondas propagantes USR60, cujas dimensões podem ser encontradas em Sashida & Kenjo. A especificação deste motor é apresentada no apêndice B. Também, são determinados os parâmetros de operação: força axial $\mathcal{P}_{axial}$, velocidade do rotor no referencial inercial V_R e a frequência de operação, para se extrair o torque aplicado pelo motor $\mathcal{T}_{aplicado}$. As velocidades do rotor variam num intervalo pré-determinado.

A curva característica *torque* $\times$ *velocidade* é levantada experimentalmente em uma bancada especialmente desenvolvida para tal em Darmstadt. Os resultados numéricos e experimentais são confrontados na intenção de validar a metodologia como uma ferramenta facilitadora para ante-projetos de outros motores ultra-sônicos por ondas propagantes.

Capítulo 2

Princípio de funcionamento

Um motor ultra-sônico por ondas propagantes típico pode ser visto na Fig. 2.1(a). O estator é engastado ao suporte do motor pelo diâmetro interno. Uma cerâmica polarizada é colada à uma das faces do estator. A outra face do estator é composta por dentes. O rotor é pressionado contra o estator por uma mola prato. A superfície de contato do rotor é revestida por uma camada de polifluoretileno PTFE, *teflon*.

A cerâmica piezoelétrica quando submetida à tensão elétrica, se deforma. Assim, ao ser submetida a uma tensão variável no tempo, o estator colado a ela responde mecanicamente na forma de vibração transversal. A composição adequada de duas ondas estacionárias geram uma onda propagante: uma onda em flexão que se propaga em torno do estator, como ilustrado na Fig. 2.1(b). Por isso o nome: motor ultra-sônico por ondas propagantes. O comportamento eletromecânico da cerâmica piezoelétrica é descrito em detalhes no apêndice A.

A seção a seguir apresentará como as ondas propagantes são obtidas a partir da excitação de dois modos estacionários de vibrar. A cerâmica piezoelétrica precisa de uma polarização especial para excitar as ondas propagantes em torno do estator. Esta polarização será discutida na seção 2.2. A seção 2.3 aborda como surgem os deslocamentos elípticos na superfície de contato.

Apresentado o princípio básico de funcionamento, procura-se na seção 2.4 adotar um sistema de coordenadas apropriado para facilitar a análise dinâmica do motor. Desta forma, a modelagem cinemática do funcionamento do motor será proposta na seção 2.5 utilizando

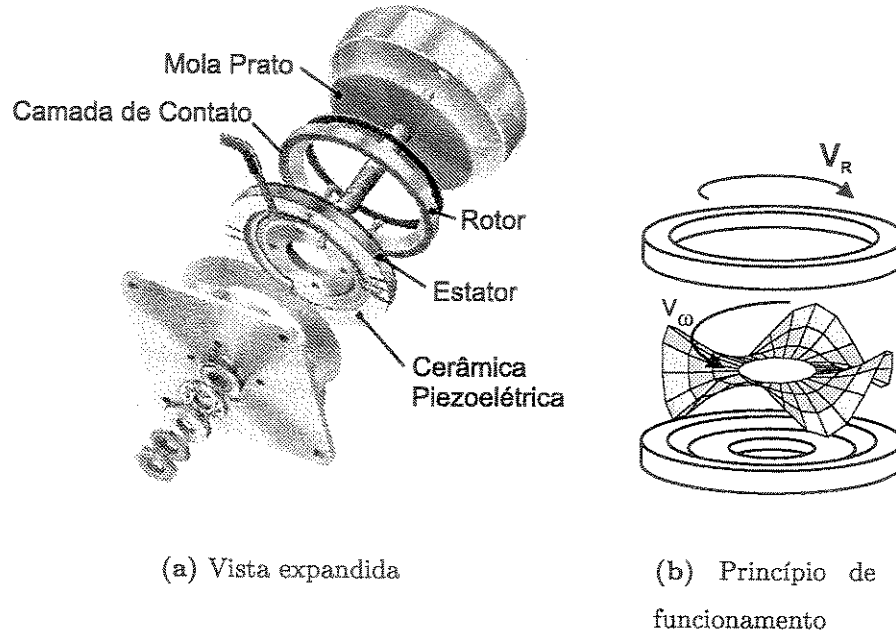


Figura 2.1: Motor ultra-sônico

este sistema de coordenadas.

2.1 Onda Propagante

O estator é fino o suficiente para que a teoria de placas de Kirchhoff possa ser aplicada para descrever os deslocamentos transversais da superfície neutra, como mostrado por Hagedorn & Wallaschek (1992). A superfície neutra do estator possui tensões normais nulas.

A equação diferencial Eq. (2.1) descreve os deslocamentos transversais w_o da superfície neutra de uma placa circular. Esta equação é discutida em detalhes por Meirovitch (1980), entre outros.

$$D\nabla^4 w_o(r, \theta, t) + \rho h \frac{\partial^2 w_o(r, \theta, t)}{\partial t^2} = f(r, \theta, t) . \quad (2.1)$$

Nesta equação, D representa a rigidez à flexão da placa (o estator) sendo expressa por

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} , \quad (2.2)$$

onde E e ν são o módulo de Young e o Coeficiente de Poisson, respectivamente, e h a espessura da placa. O operador $\nabla^4(\cdot)$, bi-harmônico de Laplace, pode ser escrito em coordenadas

polares como

$$\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 . \quad (2.3)$$

Para se obter os maiores deslocamentos na superfície neutra do estator w_o , os motores ultra-sônicos por ondas propagantes são excitados por uma frequência próxima de uma das frequências de ressonância do estator. Desta forma é importante conhecer a solução da equação diferencial homogênea, $f(r, \theta, t) = 0$, como a obtida por Hagedorn & Wallaschek (1992). Utilizando o método de separação de variáveis, os modos de vibrar da placa podem ser expressos de forma simplificada como:

$$\begin{aligned} w_A(r, \theta, t) &= R(r) \cos(m\theta) \cos(\omega t) \\ w_B(r, \theta, t) &= R(r) \sin(m\theta) \cos(\omega t) \end{aligned} \quad \text{onde} \quad m = 2\pi/\lambda , \quad (2.4)$$

sendo $R(r)$ uma função de Bessel modificada, m o número de ondas, λ segmento angular correspondente a uma onda e ω a frequência angular natural do modo.

Das soluções apresentadas na Eq. (2.4), pode-se observar que a placa possui dois modos distintos de vibrar para uma mesma frequência. São os chamados modos degenerados. É possível superpor estes dois modos de vibrar com uma diferença de fase em relação ao tempo de excitação, de forma que surja uma onda propagante. Os modos ortogonais degenerados de vibrar são modos estacionários w_A e w_B , porém podem ser decompostos em duas ondas propagantes como em Meirovitch (1980) :

$$\begin{aligned} w_A(r, \theta, t) &= \frac{1}{2}R(r) \cos(m\theta + \omega t) + \frac{1}{2}R(r) \cos(m\theta - \omega t) , \\ w_B(r, \theta, t) &= \frac{1}{2}R(r) \sin(m\theta + \omega t) + \frac{1}{2}R(r) \sin(m\theta - \omega t) . \end{aligned} \quad (2.5)$$

Considerando-se que um dos modos de vibrar possui uma forma semelhante a de seu degenerado, diferenciando-se apenas por uma diferença de fase espacial $\Delta\theta$, os dois modos degenerados podem ser escritos por

$$\begin{aligned} w_A(r, \theta, t) &= \frac{1}{2}R(r) \cos(m\theta + \omega t) + \frac{1}{2}R(r) \cos(m\theta - \omega t) , \\ w_B(r, \theta, t) &= \frac{1}{2}R(r) \cos(m\theta + m\Delta\theta + \omega t) + \frac{1}{2}R(r) \cos(m\theta + m\Delta\theta - \omega t) . \end{aligned} \quad (2.6)$$

Tabela 2.1: Superposição modal

Natureza de p	Natureza de q	Forma de vibrar	Característica da onda
Par	Par	$R(r) [\cos(m\theta + \omega t) + \cos(m\theta - \omega t)]$	onda estacionária
Ímpar	Par	$R(r) [\cos(m\theta - \omega t)]$	onda propagante progressiva
Par	Ímpar	$R(r) [\cos(m\theta + \omega t)]$	onda propagante regressiva
Ímpar	Ímpar	0	onda nula

Assim se estes modos forem excitados com uma diferença de fase em relação ao tempo Δt tem-se

$$\begin{aligned}
 w_A(r, \theta, t) &= \frac{1}{2} R(r) \cos(m\theta + \omega t) + \frac{1}{2} R(r) \cos(m\theta - \omega t) , \\
 w_B(r, \theta, t) &= \frac{1}{2} R(r) \cos(m\theta + m\Delta\theta + \omega t + \omega\Delta t) + \frac{1}{2} R(r) \cos(m\theta + m\Delta\theta - \omega t - \omega\Delta t) ,
 \end{aligned}
 \tag{2.7}$$

e pode-se chegar a uma relação entre as diferenças de fase no tempo e no espaço:

$$\left| \begin{array}{l} m\Delta\theta + \omega\Delta t = p\pi \\ m\Delta\theta - \omega\Delta t = q\pi \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \Delta\theta = \frac{(p+q)\pi}{2m} \\ \Delta t = \frac{(p-q)\pi}{2\omega} \end{array} \right. .
 \tag{2.8}$$

Na tabela 2.1 são apresentadas as características das ondas geradas no estator pela superposição de duas ondas degeneradas, para diferentes valores inteiros de p e q . Resolvendo a Eq. (2.8) para valores convenientes de p e q obtém-se, também, qual deve ser a diferença de fase em relação ao tempo e ao espaço para excitar os dois modos de vibrar de forma que surja uma onda propagante em torno do estator:

- Diferença de fase em relação ao período da onda T ,

$$\Delta t = \frac{(p-q)\pi}{2\omega} ,
 \tag{2.9}$$

mas ω pode ser representado em função da frequência f ou mesmo do período T :

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} .
 \tag{2.10}$$

Assim a diferença de fase em relação ao período da onda é

$$\Delta t = \frac{(p-q)}{4} T .
 \tag{2.11}$$

- Diferença de fase em relação ao segmento circular correspondente a um comprimento de onda λ a ser excitada,

$$\Delta\theta = \frac{(p+q)\pi}{2m} . \quad (2.12)$$

Mas m é o número de onda, função do comprimento circular de onda λ e definido por

$$m = \frac{2\pi}{\lambda} . \quad (2.13)$$

Logo a diferença de fase em relação à posição em que os dois modos degenerados devem ser excitados é

$$\Delta\theta = \frac{(p+q)}{4}\lambda . \quad (2.14)$$

Assim, para $p = 2$ e $q = 1$, por exemplo, os dois modos devem ser excitados com diferença de fase em relação ao período da onda T :

$$\Delta t = \frac{1}{4}T , \quad (2.15)$$

e como um modo dos modos estacionários deve ser excitado da mesma forma de que seu degenerado, apenas deslocado em relação a este de

$$\Delta\theta = \frac{3}{4}\lambda = -\frac{1}{4}\lambda . \quad (2.16)$$

pode-se observar que para inverter o sentido da propagação da onda basta inverter a diferença de fase em relação ao período T , ou seja:

$$\Delta t = -\frac{1}{4}T . \quad (2.17)$$

A seção a seguir apresenta como deve estar configurada a polarização das cerâmicas piezoelétricas e como devem ser excitadas para que seja possível obter uma onda propagante.

2.2 Polarização da cerâmica piezoelétrica

A cerâmica piezoelétrica precisa de uma polarização especial para excitar ondas propagantes em torno do estator, como mencionado anteriormente. A cerâmica pode ser polarizada por setores, como está apresentado no apêndice A. O comportamento de uma cerâmica

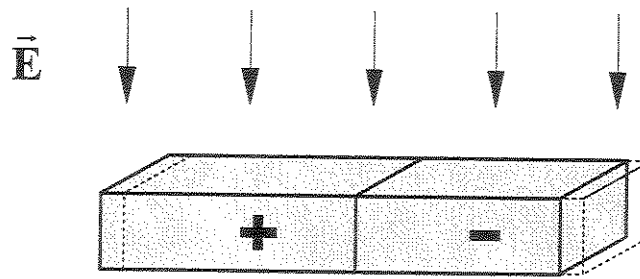


Figura 2.2: Polarização de setores cerâmicos

piezoelétrica polarizada por setores é ilustrado na Fig. 2.2. Enquanto um setor de polarização se contrai (ou se expande) quando a cerâmica piezoelétrica é submetida à uma energia elétrica, o setor que tem polarização contrária tem o comportamento inverso.

Assim, uma polarização ideal para excitar um determinado modo deve ter para cada onda a ser formada dois setores de polarização inversos adjacentes, sendo que cada setor corresponde a meia onda a ser formada.

Duas alternativas de configuração da polarização da cerâmica piezoelétrica são, normalmente, utilizadas para excitar dois modos ortogonais degenerados, como descrito com maiores detalhes em Marto (1997) :

- Por meio de duas cerâmicas piezoelétricas.

Duas cerâmicas polarizadas para excitar um determinado modo de vibrar são coladas ao estator de forma que a localização de uma cerâmica seja deslocada de $\lambda/4$ da outra cerâmica como mostra a Fig. 2.3. Os eletrodos das cerâmicas recebem dois sinais elétricos defasados de $\pi/2$ (Um sinal na forma de uma senóide e outro na forma de co-senóide).

- Utilização de uma cerâmica piezoelétrica.

Sabendo-se que o material do estator é metálico e pouco amortecido, é possível excitar os dois modos degenerados apenas com uma cerâmica. Para tanto dois grupos distintos de polarização são afastados entre si de $\lambda/4$, como mostra a Fig. 2.4. Dois eletrodos conectados aos respectivos grupos de polarização recebem dois sinais distintos: um na forma de senóide e outro na forma de co-senóide.

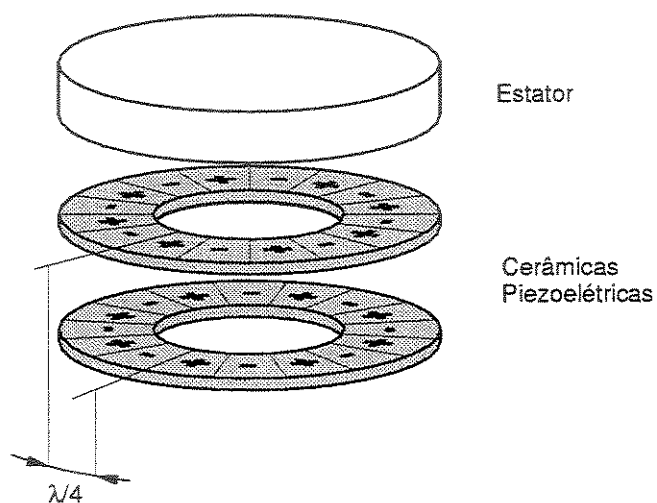


Figura 2.3: Polarização de duas cerâmicas para motores ultra-sônicos

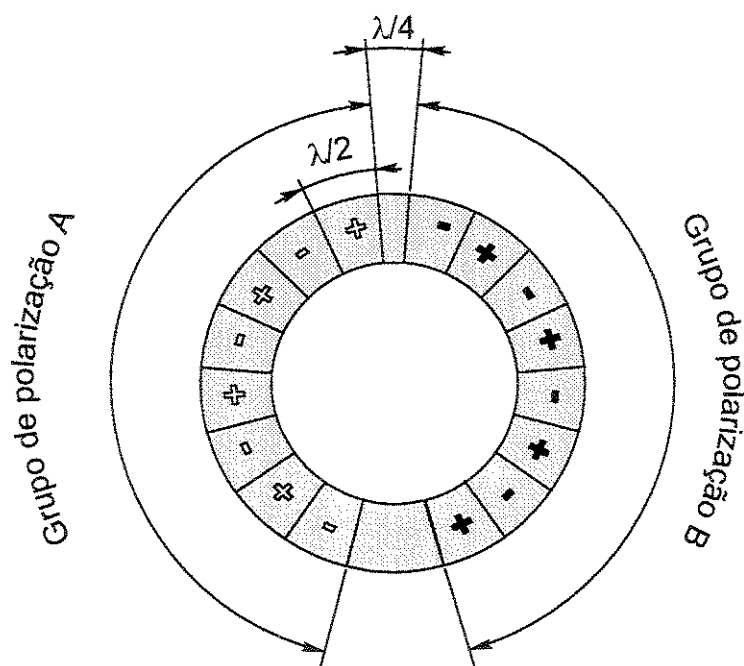


Figura 2.4: Polarização de uma cerâmica piezoelétrica para motores ultra-sônicos

2.3 Deslocamentos Elípticos

A superfície neutra do estator possui apenas deslocamentos transversais w_o . Deslocamentos fora desta superfície possuem outras componentes: tangencial e radial. Os deslocamentos transversais das superfícies de contato distantes h_d da superfície neutra, nos dentes do estator, podem ser determinados em função dos deslocamentos transversais da superfície neutra pela teoria de placas de Kirchhoff. Adotando o sistema de coordenadas cilíndricas $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$, ilustrado na Fig. 2.5, estes deslocamentos podem ser expressos como:

$$\vec{u} = -h_d \frac{\partial w_o}{\partial r} \vec{e}_r - h_d \frac{1}{r} \frac{\partial w_o}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + w_o \vec{e}_z \quad . \quad (2.18)$$

A tabela 2.1 apresenta os deslocamentos transversais da superfície neutra w_o quando ondas propagantes percorrem o estator.

Considerando-se os deslocamentos transversais no estator sujeito a uma onda progressiva, as inclinações em relação ao raio r e ao ângulo θ podem ser expressas por

$$-h_d \frac{\partial w_o}{\partial r} \vec{e}_r \approx 0 \quad , \quad (2.19)$$

$$-h_d \frac{\partial w_o}{\partial \theta} \vec{e}_\theta = h_d m R(r) \sin(\omega t - m\theta) \quad .$$

Sendo o deslocamento transversal de um ponto na superfície de contato aproximadamente

$$w(r, \theta, h_d) \approx w_o \quad , \quad (2.20)$$

a trajetória para cada ponto na superfície de contato pode ser determinada por

$$\left[-h_d \frac{1}{r} \frac{\partial w_o}{\partial \theta} \right]^2 + [w_o + h_d]^2 = \left[-\frac{h_d}{r} R(r) m \sin(\omega t - m\theta) \right]^2 + [R(r) \cos(\omega t - m\theta)]^2 = 1 \quad . \quad (2.21)$$

A trajetória é, então, elíptica, cujos eixos principais são respectivamente

$$a = \frac{h_d m}{r} R(r) \quad \text{e} \quad b = R(r) \quad . \quad (2.22)$$

A velocidade dos pontos na superfície de contato é dada por

$$\dot{\vec{u}} = \frac{d\vec{u}}{dt} \quad . \quad (2.23)$$

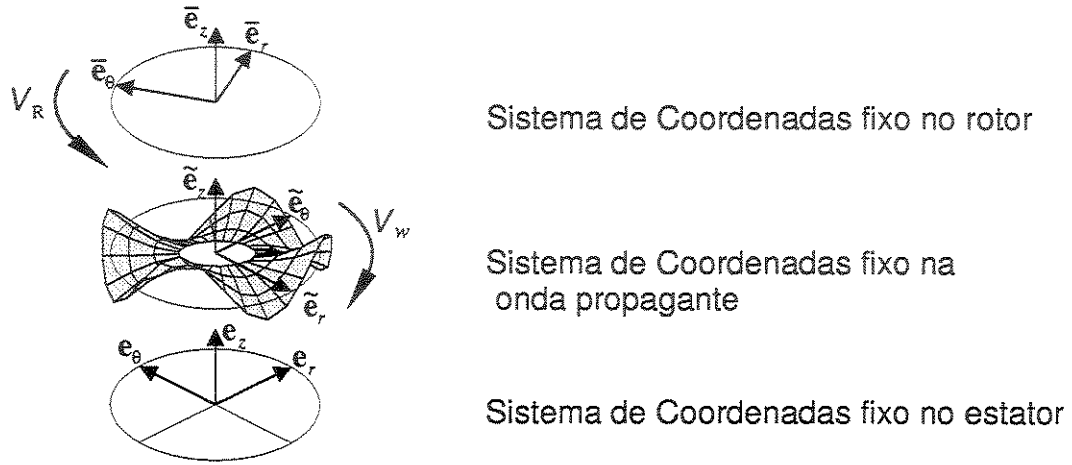


Figura 2.5: Sistemas de coordenadas de referências

O rotor se move sobre a crista da onda. A velocidade dos dentes na crista da onda é máxima. Se não houver escorregamento entre o rotor e o estator, o rotor se move com a mesma velocidade máxima V_R dos dentes,

$$V_R = -\omega \frac{h_d m R(r)}{r^2} . \quad (2.24)$$

Pode-se observar que o rotor é impulsionado em direção contrária a direção da onda propagante. Outra característica é, como mostrado por Hagedorn (1997), que o motor ultrassônico possui baixa velocidade de operação, desejada para a maioria das aplicações de ajuste fino de posicionamento.

2.4 Sistema de Referência

Os deslocamentos ocorridos no motor, tanto no rotor quanto no estator, podem ser descritos em vários sistemas de coordenadas. A análise dos deslocamentos na superfície de contato é bastante facilitada se toda a cinemática do motor for descrita no referencial da onda propagante, como apresentado em Cao & Wallaschek (1995) .

A Fig. 2.5 esquematiza os seguintes sistemas de referências usados neste trabalho: sistema inercial (e_r, e_θ, e_z) fixo ao estator, sistema móvel de referência fixo no rotor ($\bar{e}_r, \bar{e}_\theta, \bar{e}_z$) com a velocidade angular do rotor V_R , e um sistema móvel de referência fixo na onda propagante ($\tilde{e}_r, \tilde{e}_\theta, \tilde{e}_z$) com a velocidade angular da onda propagante V_w .

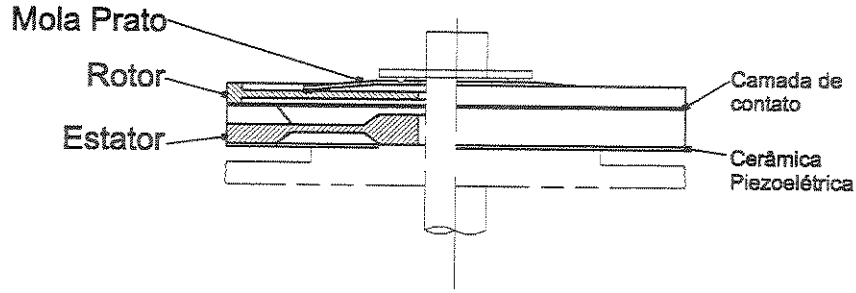


Figura 2.6: Esquema de montagem

Estes sistemas de coordenadas de referência se relacionam da seguinte forma

$$\tilde{\theta}_s = \theta_s - V_w t \quad , \quad (2.25)$$

$$\tilde{\theta}_r = \bar{\theta}_r + (V_w - V_R) t \quad . \quad (2.26)$$

A velocidade angular V_w é determinada pela velocidade angular da onda em torno do estator determinada por

$$V_w = \omega / m \quad . \quad (2.27)$$

sendo m o número de ondas definido anteriormente pela Eq. (2.4).

A velocidade angular do rotor V_R é assumida como constante.

Para que se distinga o sistema de coordenadas em que determinado conjunto de variáveis estão sendo tratadas, será adotada a representação utilizada por Sattel (2001):

- $(\bar{\cdot})$: sistema de coordenadas fixo ao rotor;
- $(\tilde{\cdot})$: sistema de coordenadas fixo à onda propagante;
- $(\cdot)$: sistema de coordenadas em um referencial inercial fixo.

2.5 Modelagem do motor

O motor é composto por um estator e um rotor em contato entre si, como apresentado anteriormente. A forma geométrica de ambos se assemelha a um disco, como pode ser visto esquematicamente na Fig. 2.6. A cinemática destes corpos também pode ser descrita

pelos mesmos princípios. O estator é engastado pelo diâmetro interno e o rotor possui um movimento de corpo rígido, porém apoiado pela mola prato e pela superfície de contato com o estator. Em ambos os componentes pode-se utilizar a teoria de placas de Kirchhoff para descrever os deslocamentos em qualquer ponto. A discretização dos corpos pode ser feita pelo método de Rayleigh Ritz apresentado por exemplo em Meirovitch (1980). A cinemática da camada de contato pode ser modelada de forma independente como propõe Wriggers (1995).

2.5.1 Cinemática do estator e do rotor

Estator

Os deslocamentos de qualquer ponto do estator podem ser expressos pelo vetor $\mathbf{u}_s$:

$$\mathbf{u}_s(r, \theta, z, t) = \left\{ u_s(r, \theta, z, t) \quad v_s(r, \theta, z, t) \quad w_s(r, \theta, z, t) \right\}^T. \quad (2.28)$$

Estes deslocamentos podem ser determinados apenas em função dos deslocamentos da superfície neutra. A superfície neutra possui tensões nulas. Assumindo pequenos deslocamentos e pequenas deformações, e utilizando a teoria de placas de Kirchhoff, os deslocamentos podem ser expressos por:

$$\mathbf{u}_s(r, \theta, z, t) = \begin{Bmatrix} u_s(r, \theta, z, t) \\ v_s(r, \theta, z, t) \\ w_s(r, \theta, z, t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{s0}(r, \theta, z, t) - z \frac{\partial w_{s0}}{\partial r}(r, \theta, z, t) \\ v_{s0}(r, \theta, z, t) - z \frac{1}{r} \frac{\partial w_{s0}}{\partial \theta}(r, \theta, z, t) \\ w_{s0}(r, \theta, z, t) \end{Bmatrix}. \quad (2.29)$$

Utilizando o método de Rayleigh-Ritz para discretizar a placa, os deslocamentos são definidos em termos de funções de forma Φ_s e coordenadas generalizadas $\mathbf{q}_s$, como apresentado por Hagedorn (1997)

$$\mathbf{u}_{s0}(r, \theta, t) = \begin{Bmatrix} u_{s0}(r, \theta, t) \\ v_{s0}(r, \theta, t) \\ w_{s0}(r, \theta, t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{u_{s1}}(r, \theta) & \dots & \Phi_{u_{sN}}(r, \theta) \\ \Phi_{v_{s1}}(r, \theta) & \dots & \Phi_{v_{sN}}(r, \theta) \\ \Phi_{w_{s1}}(r, \theta) & \dots & \Phi_{w_{sN}}(r, \theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{s1}(t) \\ \vdots \\ q_{sN}(t) \end{Bmatrix}, \quad (2.30)$$

e representados matricialmente apenas por

$$\mathbf{u}_s = \Phi_s \mathbf{q}_s. \quad (2.31)$$

As funções de forma dependem apenas das coordenadas dos pontos da superfície neutra e o vetor de coordenadas generalizadas depende do tempo. A aproximação feita pelos modos assumidos utilizada por Speziari (1997) pode ser empregada como função de forma, porém como será utilizada uma abordagem pelo método de elementos finitos para resolver o problema de não linearidade envolvendo o contato, as funções de forma empregadas são as mesmas utilizadas por elementos finitos em problemas de placas: funções isoparamétricas quadrilaterais. Estas funções serão discutidas em detalhe na seção 4.3.

Rotor

Ao se utilizar a teoria de placas para determinar a cinemática do rotor, tem que se considerar os deslocamentos de corpo rígido do mesmo: deslocamento axial devido à força de contato d_{cr} e deslocamento angular α_{cr} devido à rotação do rotor. Desta forma, os deslocamentos do rotor podem ser expressos por

$$\mathbf{u}_r(r, \theta, t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ \alpha_{cr} \\ d_{cr} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{u}_r(\bar{r}, \bar{\theta}, t) \\ \bar{v}_r(\bar{r}, \bar{\theta}, t) \\ \bar{w}_r(\bar{r}, \bar{\theta}, t) \end{Bmatrix}. \quad (2.32)$$

Aplicando-se a teoria de placas de maneira análoga a utilizada pelo estator tem-se

$$\mathbf{u}_r(r, \theta, t) = \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_{\bar{u}1_r}(\bar{r}, \bar{\theta}) & \dots & \bar{\Phi}_{\bar{u}N_r}(\bar{r}, \bar{\theta}) & 0 & 0 \\ \bar{\Phi}_{\bar{v}1_r}(\bar{r}, \bar{\theta}) & \dots & \bar{\Phi}_{\bar{v}N_r}(\bar{r}, \bar{\theta}) & 1 & 0 \\ \bar{\Phi}_{-1_r}(\bar{r}, \bar{\theta}) & \dots & \bar{\Phi}_{-N_r}(\bar{r}, \bar{\theta}) & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{q}_{r1}(t) \\ \vdots \\ \bar{q}_{rN} \\ \alpha_{cr}r \\ d_{cr} \end{Bmatrix}. \quad (2.33)$$

Na forma matricial a equação anterior pode ser escrita:

$$\mathbf{u}_r(r, \theta, z, t) = \bar{\Phi} \bar{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}_r, \quad (2.34)$$

sendo $\mathbf{C}_r$ o vetor de deslocamento de corpo rígido.

2.5.2 Cinemática da superfície de contato

A presença da camada de contato colada ao rotor, apesar de ocupar um volume ínfimo em relação ao resto do motor, é fundamental na cinemática do motor. A camada de contato

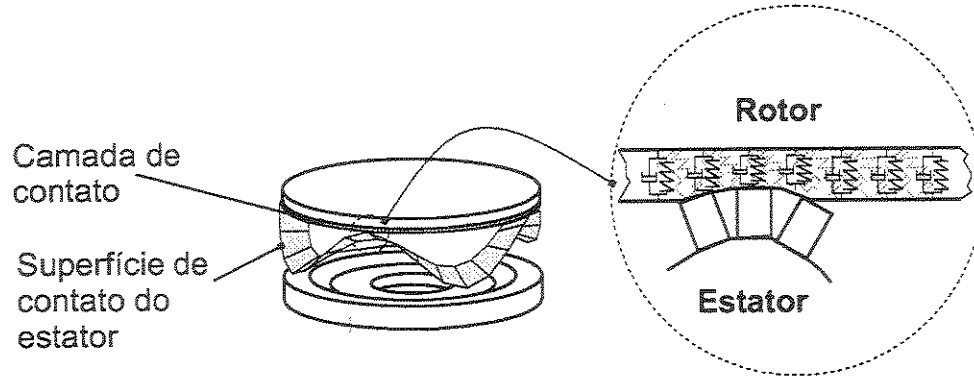


Figura 2.7: Deslocamentos nas superfícies de contato

ocupa toda a superfície de contato do rotor, como pode ser visto na Fig. 2.7.

A região de contato se localiza no diâmetro externo do motor. A largura desta região é bem menor que o diâmetro do motor. Desta forma, a superfície de contato pode ser considerada como uma linha circunferencial. Para se distinguir as variáveis que se referem à superfície de contato, será adotada, a partir desta seção, a notação $(\cdot)$ usada por Sattel & Hagedorn .

A superfície de contato é composta por pontos do rotor e pontos do estator. Os pontos do estator referem-se à superfície de contato dos dentes (metálico). Os pontos do rotor referem-se à superfície da camada de contato. Como o material da camada de contato possui uma dureza bem menor que a dureza do material dos dentes, os deslocamentos dos pontos na superfície de contato nos dentes é determinada em função da cinemática da superfície neutra estator. Assim, os deslocamentos dos pontos da superfície de contato do estator $\mathbf{u}_{ce}$ podem ser expressos por

$$\mathbf{u}_{ce} = \begin{Bmatrix} -h_d \frac{\partial \tilde{w}_{s0}}{\partial \tilde{r}} \\ -h_d \frac{1}{2\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{w}_{s0}}{\partial \theta} \\ \tilde{w}_{s0} \end{Bmatrix}. \quad (2.35)$$

sendo h_d a distância da superfície de contato à superfície neutra do estator. Estes deslocamentos são ilustrados na Fig. 2.8(a)

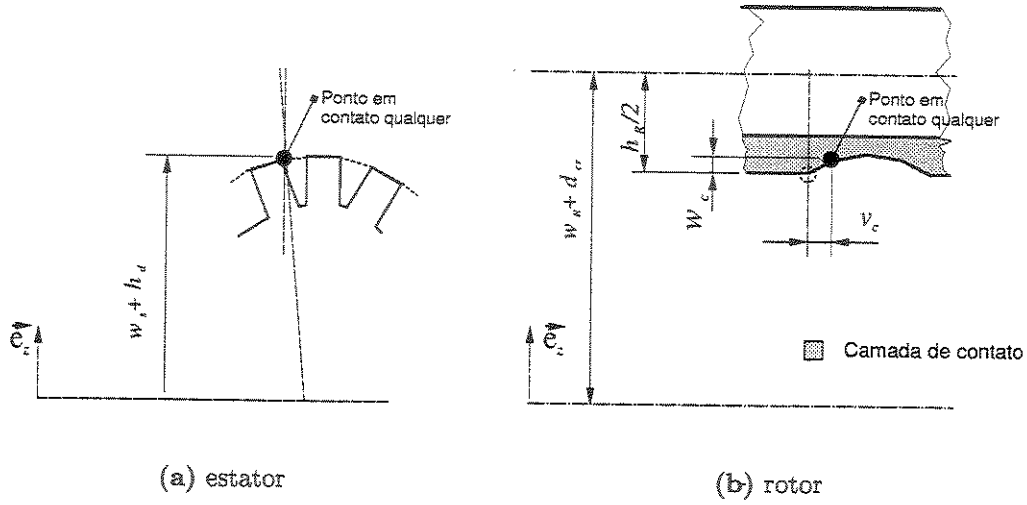


Figura 2.8: Superfícies de contato

Os deslocamentos dos pontos da superfície de contato no rotor são uma composição do deslocamentos (radiais $\hat{u}_c$, circunferenciais $\hat{v}_c$ e transversais $\hat{w}_c$) de pontos na camada de contato que ocorrem em relação à cinemática da superfície neutra do rotor, como expresse na Eq. (2.36).

$$\mathbf{u}_c = \begin{Bmatrix} -\frac{h_r}{2} \frac{\partial \bar{w}_{r0}}{\partial \bar{r}} + \hat{u}_c \\ -\frac{h_r}{2\bar{r}} \frac{\partial \bar{w}_{r0}}{\partial \theta} + \hat{v}_c \\ \bar{w}_{r0} + \hat{w}_c \end{Bmatrix}. \quad (2.36)$$

sendo h_r a distância que separa a superfície de contato do rotor da superfície neutra do rotor, $\bar{w}_{r0}$ deslocamentos da superfície neutra ocorridos no referencial do rotor. Os deslocamentos ocorridos na camada de contato, radiais tangenciais e transversais, são representados por $\hat{u}_c$, $\hat{v}_c$ e $\hat{w}_c$, também no referencial do rotor. Os deslocamentos ocorridos na camada de contato são representados esquematicamente na Fig. 2.8.

Os deslocamentos w_{r0} e suas derivadas são extraídos diretamente do vetor de deslocamentos $\mathbf{u}_r$ do rotor discretizado na Eq. (2.34).

Capítulo 3

Dinâmica de um motor ultra-sônico por ondas propagantes

O funcionamento do motor ultra-sônico envolve interações dinâmicas: mecânicas, elétricas, e térmicas. O objetivo deste capítulo é apresentar a dinâmica de um motor por ondas propagantes em função da equação de movimento, desprezando-se as interações térmicas. Utilizando-se o formalismo Lagrangiano pode-se escrever a equação de movimento do motor ultra-sônico como em Hagedorn *et al.* (1998) :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{F}} \quad . \quad (3.1)$$

sendo que a função de Lagrange L relaciona as formas de energia cinética T e potencial U do sistema mecânico. Distinguindo as variáveis que se referem ao estator, ao rotor e à camada de contato, tem-se a função Lagrangiana escrita da mesma forma que em Sattel & Hagedorn (2001a)

$$L = (T_s + T_r + T_c) - (U_s + U_r + U_c) \quad . \quad (3.2)$$

O vetor de coordenadas generalizadas $\mathbf{q}$ e o vetor de forças generalizadas $\mathbf{F}$ representam as variáveis independentes, ou graus de liberdade, e esforços sofridos por estes graus de liberdade, como forças e momentos. Na próxima seção não será feita distinção entre as variáveis independentes, do estator ou do rotor. Estas serão apenas representadas por $\mathbf{q}$.

3.1 Energias do Motor

A energia cinética do motor depende da inércia dos corpos envolvidos, bem como de seus movimentos (translacionais e rotacionais). A energia potencial elástica, por sua vez, depende das deformações ocorridas nas várias partes envolvidas. A interação eletromecânica ocorrida na cerâmica piezoelétrica transforma a energia elétrica fornecida ao motor em energia de deformação e trabalho realizado pelo motor. Outras formas de energias externas a que o motor está submetido, provém do torque externo aplicado ao eixo, bem como da força axial de pré-carga aplicada sobre o rotor. Nas subseções seguintes será abordado, detalhadamente, como se obter cada uma das formas de energia agindo sobre o motor.

3.1.1 Energia Cinética

A energia cinética é por definição descrita por

$$T = \frac{1}{2} \int_{Vol} \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{I} \dot{\mathbf{u}} dVol \quad , \quad (3.3)$$

onde $d\mathbf{I}$ é a matriz que contém o elemento diferencial de inércias de translação e de rotação do corpo. No caso particular de placas esta matriz pode ser escrita como

$$d\mathbf{I} = \rho \begin{bmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^3}{12} \end{bmatrix} \quad , \quad \text{sendo } h \text{ a espessura da placa considerada} \quad (3.4)$$

As velocidades do estator e do rotor podem ser calculadas das Eqs. (2.31) e Eqs. (2.34). Nessas equações, escritas no referencial da onda propagante, as funções de forma dependem do tempo, mas implicitamente. Perto da ressonância a onda propagante é quase harmônica e periódica. Assim, no referencial da onda, o vetor de coordenadas generalizadas se comporta como estático. Desta forma, o vetor de velocidades generalizadas nesse referencial relativo é nulo, $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$, e o vetor velocidade $\dot{\mathbf{u}}$ pode ser expresso por

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\Phi} \tilde{\mathbf{q}} + \Phi \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \dot{\Phi} \tilde{\mathbf{q}} \quad . \quad (3.5)$$

onde Φ é a matriz das funções de forma definido nas Eqs. (2.30) e Eq. (2.33) Portanto, a energia cinética no referencial da onda propagante, tanto do estator quanto do rotor, pode

ser escrita como

$$T = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \left[\int_{Vol} \dot{\tilde{\Phi}}^T d\mathbf{I} \dot{\tilde{\Phi}} dVol \right] \mathbf{q} , \quad (3.6)$$

sendo a matriz $\dot{\tilde{\Phi}}$ expressa por

$$\dot{\tilde{\Phi}} = \frac{V_{rel}}{r} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \theta} , \quad (3.7)$$

e V_{rel} é a velocidade angular relativa entre dois referenciais de coordenadas:

- Estator e onda propagante

$$V_{rel} = V_w - 0 \quad e \quad v_w = \frac{\omega}{m} . \quad (3.8)$$

- Rotor e onda propagante

$$V_{rel} = V_w - V_R . \quad (3.9)$$

A matriz que resulta da integral expressa na Eq. (3.6) é chamada como matriz de inércia do estator $\mathbf{I}g_S$ ou do rotor $\mathbf{I}g_R$. Elas são determinadas da mesma forma.

3.1.2 Energia Potencial de deformação

A energia potencial de deformação elástica é energia de deformação a ser restituída pelo sistema mecânico. A energia armazenada por tensões internas $\mathbf{T}$ e deformações $\mathbf{S}$ é expressa por definição como

$$U_d = \frac{1}{2} \int_{Vol} \mathbf{T}^T \mathbf{S} dVol . \quad (3.10)$$

Para o estado plano de tensão, utilizando as hipóteses da teoria de placas de Kirchhoff e considerando pequenas deformações e pequenos deslocamentos, o tensor de deformações $\tilde{\mathbf{S}}$ do corpo pode ser expresso em coordenadas cilíndricas por

$$\tilde{\mathbf{S}} = \begin{Bmatrix} \tilde{S}_1 \\ \tilde{S}_2 \\ \tilde{S}_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{\epsilon}_r \\ \tilde{\epsilon}_\theta \\ \tilde{\gamma}_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} \\ \frac{\tilde{u}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} - \frac{\tilde{v}}{r} \end{Bmatrix} . \quad (3.11)$$

sendo ϵ_r e ϵ_θ deformações em relação ao raio e em relação ao ângulo e, também, $\gamma_{r\theta}$ deformações por cisalhamento em relação a estes ângulos

Substituindo as equações de deslocamentos Eq. (2.29) ou Eq. (2.32) tem-se

$$\begin{Bmatrix} \tilde{S}_1 \\ \tilde{S}_2 \\ \tilde{S}_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{u}_o}{\partial \tilde{r}} & 0 & -\tilde{z} \frac{\partial^2 \tilde{w}_o}{\partial \tilde{r}^2} \\ \frac{1}{\tilde{r}} \tilde{u}_o & \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{v}_o}{\partial \theta} & -\frac{\tilde{z}}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{w}_o}{\partial \tilde{r}} - \frac{\tilde{z}}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2 \tilde{w}_o}{\partial \theta^2} \\ \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{u}_o}{\partial \theta} & \frac{\partial \tilde{v}_o}{\partial \tilde{r}} - \frac{\tilde{v}_o}{\tilde{r}} & -\frac{2\tilde{z}}{\tilde{r}} \frac{\partial^2 \tilde{w}_o}{\partial \tilde{r} \partial \theta} + \frac{2\tilde{z}}{\tilde{r}^2} \frac{\partial \tilde{w}_o}{\partial \theta} \end{bmatrix} . \quad (3.12)$$

Identificando o operador diferencial $\mathcal{L}$ como

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} & 0 & -\tilde{z} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{r}^2} \\ \frac{1}{\tilde{r}} & \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \theta} & -\frac{\tilde{z}}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} - \frac{\tilde{z}}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\ \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} - \frac{1}{\tilde{r}} & -\frac{2\tilde{z}}{\tilde{r}} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{r} \partial \theta} + \frac{2\tilde{z}}{\tilde{r}^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{bmatrix} , \quad (3.13)$$

a deformação pode ser rescrita em função do vetor de coordenadas generalizadas $\mathbf{q}$ e as funções de forma Φ a ele associadas:

$$\tilde{\mathbf{S}} = \mathcal{L} \tilde{\mathbf{u}} = \mathcal{L} \tilde{\Phi} \tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{B}}_{mec} \tilde{\mathbf{q}} , \quad (3.14)$$

sendo que $\tilde{\mathbf{B}}_{mec}$ representa o operador diferencial aplicado às funções de forma no referencial móvel.

As tensões internas ocorridas nos corpos (rotor e estator), expressas em coordenadas cilíndricas, são

$$\tilde{\mathbf{T}} = \begin{Bmatrix} \tilde{T}_1 \\ \tilde{T}_2 \\ \tilde{T}_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix} . \quad (3.15)$$

Estas tensões se relacionam com as deformações dos corpos através de equações constitutivas. Representando matricialmente estas relações para um material isotrópico, como são

os materiais de ambos componentes, tem-se.

$$\begin{Bmatrix} \tilde{T}_1 \\ \tilde{T}_2 \\ \tilde{T}_6 \end{Bmatrix} = \mathbf{C} \begin{Bmatrix} \tilde{S}_1 \\ \tilde{S}_2 \\ \tilde{S}_6 \end{Bmatrix}, \quad (3.16)$$

onde a matriz que representa as relações constitutivas $\mathbf{C}$, para este caso, é expressa por

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{12} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Desta forma, a energia potencial de deformação do estator expressa na Eq. (3.10) pode ser rescrita por

$$U_d = \frac{1}{2} \int_{Vol} \tilde{\mathbf{T}} : \tilde{\mathbf{S}} d_{Vol} = \frac{1}{2} \int_{Vol} \tilde{\mathbf{S}}^T \mathbf{C} \tilde{\mathbf{S}} d_{Vol} = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}^T \left[\int_{Vol} \tilde{\mathbf{B}}_{mec}^T \mathbf{C} \tilde{\mathbf{B}}_{mec} d_{Vol} \right] \tilde{\mathbf{q}}, \quad (3.18)$$

sendo que a integral volumétrica da equação anterior é conhecida como a matriz de rigidez à flexão do corpo, e a partir desta seção será expressa por

- para o estator: $\mathbf{K}_R$;
- para o rotor: $\mathbf{K}_S$.

3.1.3 Interações eletromecânicas

A cerâmica piezoelétrica se deforma quando um potencial elétrico é aplicado entre seus eletrodos, como mostrado na Fig. 2.2. Também, produz uma carga elétrica quando é forçada a se deformar. O fenômeno da piezoeletricidade bem como as equações que descrevem a dinâmica eletromecânica são mostradas em detalhes no apêndice A. Nesta seção, o objetivo é determinar a interação da cerâmica piezoelétrica com o estator apenas em função do vetor de coordenadas generalizadas $\mathbf{q}$, bem como da voltagem aplicada $\mathbf{v}$. Esta interação produz forças internas conservativas e não conservativas no estator. As forças internas conservativas são provenientes da rigidez mecânica e da impedância eletromecânica da cerâmica. As forças não conservativas são provenientes das energias acrescidas ou dissipadas ao sistema eletromecânico. Incorporando esta troca de energia na equação de Lagrange, pode-se obter a

contribuição da cerâmica piezoelétrica no funcionamento do motor. Hagedorn (1997) incorpora esta parcela de energia de forma a satisfazer as equações de Maxwell que descrevem o comportamento eletromagnético da cerâmica piezoelétrica. Estas equações são apresentadas com maiores detalhes no apêndice A.

Seguindo o mesmo desenvolvimento de Hagedorn (1997), considera-se que:

- a frequência de operação corresponde a um modo com um número de onda pequeno, em relação às dimensões do motor, isto é, a frequência de operação é de um modo baixo;
- O comprimento de onda mecânica de operação é muito menor que o comprimento de uma onda eletromagnética com a mesma frequência de propagação,

Com estas considerações é possível negligenciar a interação eletromagnética, tratando o campo elétrico $\mathbf{E}$ como quase-estático. Assim, para satisfazer as equações de Maxwell, são necessárias apenas aquelas que dependem do campo de deslocamento elétrico $\mathbf{D}$ e do campo elétrico $\mathbf{E}$ escritas a seguir:

$$\text{Div}(\mathbf{D}) = 0 \quad , \quad (3.19)$$

$$\text{rot}(\mathbf{E}) = 0 \quad . \quad (3.20)$$

A espessura da cerâmica piezoelétrica é fina em relação às demais dimensões, fina o suficiente para considerar o campo elétrico $\mathbf{E}$ e o campo de deslocamentos elétricos $\mathbf{D}$ como unidirecionais

$$\mathbf{E} = \{ 0 \quad 0 \quad E_3 \}^T \quad , \quad (3.21)$$

$$\mathbf{D} = \{ 0 \quad 0 \quad D_3 \}^T \quad . \quad (3.22)$$

Tomando-se as equações constitutivas de materiais piezoelétrico, que relacionam respectivamente o campo de deslocamento elétrico $\mathbf{D}$ e as tensões internas $\mathbf{T}$ com o campo elétrico $\mathbf{E}$, e as deformações ocorridas $\mathbf{S}$, encontradas por exemplo em Tiersten (1969) entre outros.

$$\begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{D}} \\ \tilde{\mathbf{T}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon^S & \mathbf{e} \\ -\mathbf{e}^T & \mathbf{C}^E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{E}} \\ \tilde{\mathbf{S}} \end{Bmatrix} , \quad (3.23)$$

onde C^E são as constante elásticas da cerâmica quando submetida a um campo elétrico constante, e é o fator de acoplamento piezoelétrico e ϵ^S a permissilidade elétrica a uma tensão constante.

Utilizando-se as simplificações até aqui apresentadas, a interação piezoelétrica pode ser representada por

$$\begin{Bmatrix} \tilde{D}_3 \\ \tilde{T}_1 \\ \tilde{T}_2 \\ \tilde{T}_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_3^S & e_{31} & e_{31} & 0 \\ -e_{31} & c_{11}^E & c_{12}^E & 0 \\ -e_{31} & c_{12}^E & c_{11}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{66}^E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{E}_3 \\ \tilde{S}_1 \\ \tilde{S}_2 \\ \tilde{S}_6 \end{Bmatrix}. \quad (3.24)$$

O campo elétrico $\mathbf{E}$, definido como o gradiente do potencial elétrico ϕ :

$$\mathbf{E} = \nabla \phi, \quad (3.25)$$

satisfaz naturalmente a equação 3.20. A equação 3.19 por sua vez é simplificada para

$$\frac{\partial \tilde{D}_3}{\partial z} = 0. \quad (3.26)$$

Todavia, para satisfazer a equação anterior, o campo elétrico $\mathbf{E}$ apresentado na Eq. (3.24) varia linearmente em função da espessura da cerâmica piezoelétrica, como mostra Hagedorn (1997) :

$$\tilde{E}_3 = \tilde{E}_0 + \alpha_E \tilde{z}. \quad (3.27)$$

Na seção 2.2 foi visto sobre a polarização necessária para que a cerâmica piezoelétrica excite dois modos ortogonais e gere ondas propagantes ao redor do estator. A representação da polarização pode ser simplificada por uma configuração de polaridades de potenciais elétricos (positivos e negativos) agindo sobre uma cerâmica piezoelétrica homogeneamente polarizada produzindo o mesmo efeito, como proposto por Hagedorn *et al.* (1998) . Os dois grupos de polarização apresentados na Fig. 2.4 podem ser representados por duas funções de forma elétrica, Φ_A e Φ_B , que associam a polaridade dos potenciais elétricos, v_A e v_B , equivalentes aplicados aos setores circulares de cada grupo de polarização. Detalhes da construção destas funções de forma elétrica são apresentados na seção 4.4. Estas são construídas em função da

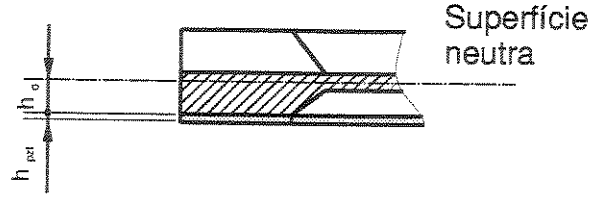


Figura 3.1: Vista parcial do estator com a cerâmica colada

discretização do estator apresentada na seção 2.30.

Dois potenciais elétricos são aplicados independentemente em cada grupo de polarização. O produto da matriz apresentado na Eq. (3.28) de potenciais elétricos com as matrizes de polaridades fornece a informação de potenciais elétricos a que cada grau de liberdade do estator está sujeito.

$$\Phi_e \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \Phi_A & 0 \\ 0 & \Phi_B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_A \\ v_B \end{Bmatrix}. \quad (3.28)$$

Os potenciais elétricos, v_A e v_B , aplicados a cada grupo de eletrodos são, agora, conhecidos. São potenciais com a mesma amplitude em [Volts] cuja polaridade oscila com a frequência de operação do motor, Ω . Possuem uma defasagem entre si de $\frac{1}{4}$ do período em relação ao tempo de excitação. O potencial elétrico de referência para os dois grupos é o potencial elétrico do próprio substrato, o estator, que tem potencial nulo.

Conhecidos estes potenciais elétricos, a espessura da cerâmica colada ao estator, h_{pzt} , e a distância que a cerâmica fica da superfície neutra, h_o , ilustradas na Fig. 3.1, tem-se o campo elétrico constante que age sobre a cerâmica piezoelétrica, como em Hagedorn *et al.* (1998) :

$$\tilde{E}_0 = \frac{\tilde{\Phi}_e \mathbf{v}}{h_{pzt}} + \frac{1}{2} \alpha_E (2h_o + h_{pzt}). \quad (3.29)$$

Portanto das Eq. (3.24) e Eq. (3.26) e a condição de potencial nulo em h_o da superfície neutra, o campo elétrico agindo sobre a cerâmica piezoelétrica pode ser determinado por

$$E_3 = -\frac{\tilde{\Phi}_e \mathbf{v}}{h_p} + \frac{1}{2} \alpha_E (2h_o + h_p + 2z) \nabla(\tilde{\mathbf{q}}), \quad (3.30)$$

a aplicação do operador Laplaciano no vetor de coordenadas generalizadas, $\nabla(\tilde{\mathbf{q}})$, pode ser interpretado como o operador laplaciano aplicado às funções de formas dos elementos, da

mesma forma que o operador de deformação. Desta forma, pode-se representar o campo elétrico simplesmente na forma matricial:

$$E_3 = \tilde{\mathbf{B}}_{el} \tilde{\mathbf{v}} + \tilde{\mathbf{B}}_{em} \tilde{\mathbf{q}}_s, \quad (3.31)$$

sendo

$$\tilde{\mathbf{B}}_{el} = -\frac{1}{h_p} \Phi_{el} \quad \text{e} \quad \tilde{\mathbf{B}}_{em} = +\frac{1}{2} \alpha_E (2h_0 + h_p + 2z) \Delta(\Phi_s) \tilde{\mathbf{q}}. \quad (3.32)$$

A energia potencial de deformação U_{pzt} devido a interação piezoelétrica pode ser calculada

$$U_{pzt} = \frac{1}{2} \int_{Vol_{Pzt}} \tilde{\mathbf{T}}^T \tilde{\mathbf{S}}_{pzt} dVol_{Pzt}. \quad (3.33)$$

A deformação ocorrida na cerâmica $\mathbf{S}_{pzt}$ é calculada pela teoria de placas de Kirchhoff e os deslocamentos da superfície neutra do estator.

$$\mathbf{S}_{pzt} = \mathbf{B}_{mec} \tilde{\mathbf{S}} \quad (3.34)$$

As tensões mecânicas desenvolvidas são calculadas pelas propriedades constitutivas da cerâmica piezoelétrica apresentadas na Eq. (3.24) no referencial da onda propagante. Substituindo-se as deformações obtidas na Eq. (3.34) e o campo elétrico $\mathbf{E}$ calculado na Eq. (3.31), obtém-se a energia potencial de deformação U_{pzt} da cerâmica piezoelétrica:

$$\begin{aligned} U_{PZT} = & [\tilde{\mathbf{v}}^T \int_{Vol_{Pzt}} \tilde{\mathbf{B}}_{el}^T \mathbf{e} \dot{\tilde{\mathbf{B}}}_{mec} dVol_{Pzt} + \tilde{\mathbf{q}}^T \int_{Vol_{Pzt}} \tilde{\mathbf{B}}_{em}^T \mathbf{e} \dot{\tilde{\mathbf{B}}}_{mec} dVol_{Pzt} \\ & + \tilde{\mathbf{q}}^T \int_{Vol_{Pzt}} \tilde{\mathbf{B}}_{mec}^T \mathbf{C} \dot{\tilde{\mathbf{B}}}_{mec} dVol_{Pzt}] \tilde{\mathbf{q}}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

As integrais volumétricas aqui apresentadas representam a partir desta seção:

- $[\mathbf{F}_{pzt}] = \left[\tilde{\mathbf{v}} \int_{Vol_{Pzt}} \tilde{\mathbf{B}}_{el}^T \mathbf{e} \dot{\tilde{\mathbf{B}}}_{mec} dVol_{Pzt} \right]$ Força piezoelétrica,
- $[\mathbf{K}_{em}] = \left[\int_{Vol_{Pzt}} \tilde{\mathbf{B}}_{em}^T \mathbf{e} \dot{\tilde{\mathbf{B}}}_{mec} dVol_{Pzt} \right]$ Impedância eletromecânica,
- $[\mathbf{K}_{pzt}] = \left[\int_{Vol_{Pzt}} \tilde{\mathbf{B}}_{mec}^T \mathbf{C} \dot{\tilde{\mathbf{B}}}_{mec} dVol_{Pzt} \right]$ Rigidez mecânica da cerâmica piezoelétrica.

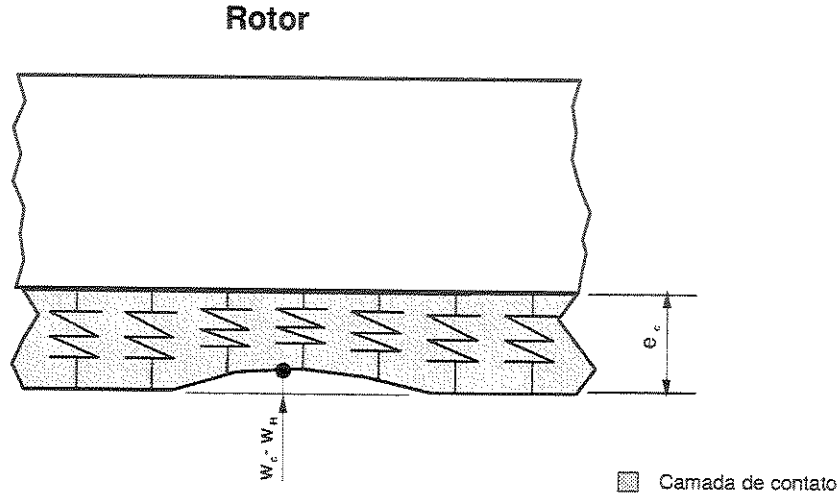


Figura 3.2: Modelagem da camada de contato

3.1.4 Energia potencial da camada de contato

A camada de contato deforma-se quando o estator entra em contato com o rotor. A dureza do material do estator é muito maior que a dureza do material da camada de contato do rotor, como mencionado anteriormente. Por esta razão, o estator é denominado de dominante, *Master*, e a camada de contato como passiva, *Slave*, da mesma forma que em Maeno *et al.* (1992a).

Desprezando os efeitos viscoelásticos apresentados em Cao & Wallaschek (1995), a camada de contato é considerada como um material perfeitamente elástico. Como a espessura da camada de contato e_c é muito fina em relação ao diâmetro externo, onde ocorrem o contato, as deformações tangenciais podem ser desprezadas, assumindo que o material da camada de contato seja um material que resista idealmente às tensões tangenciais. Sabendo-se que a amplitude das ondas propagantes está na faixa micrométrica, bem menor que a espessura da camada de contato que é milimétrica, as deformações da camada são assumidas como lineares. Assim, a camada de contato é modelada como um conjunto de molas em paralelo apresentado na Fig. 3.2 usando uma formulação elástica encontrada em Johnson (1985). A energia potencial de deformação da camada de contato, assim, pode ser determinada em função das tensões normais $\bar{T}_c$ e deformações normais $\bar{S}_c$ ocorridas na camada durante o contato de volume Vol_c . Conhecendo, das propriedades elásticas do material da camada de contato, a

relação constitutiva unidirecional, que relaciona a tensão normal com a deformação normal, representada pelo módulo de elasticidade de Young E_c , a energia potencial de deformação da camada de contato é expressa da seguinte forma:

$$U_c = \int_{Vol_c} \tilde{\mathbf{T}}_c : \tilde{\mathbf{S}}_c dVol_c = \int_{Vol_c} \tilde{\mathbf{S}}_c^T E_c \tilde{\mathbf{S}}_c dVol_c. \quad (3.36)$$

onde as deformações normais da camada de contato $\tilde{S}_c$ são

$$\tilde{\mathbf{S}}_c = \left\{ \tilde{S}_c \right\} = \left\{ \tilde{\epsilon}_z \right\} = \left\{ \frac{\partial \tilde{u}_c}{\partial \tilde{z}} \right\}. \quad (3.37)$$

Como é assumido que as deformações normais ocorridas na camada de contato são lineares, as deformações normais podem ser determinadas em função dos deslocamentos transversais ocorridos na camada de contato w_c e no rotor w_R . Diretamente da Fig. 3.2:

$$\tilde{S}_c = \frac{(w_c - w_R)}{e_c}. \quad (3.38)$$

A integral da Eq. (3.36) leva à:

$$U_{dc} = \frac{1}{2} K_c (w_c - w_R)^2 \quad (3.39)$$

sendo que K_c representa a rigidez da camada de contato e é expressa por

$$K_c = \frac{E_c A_c}{e_c} \quad (3.40)$$

onde A_c é a área da camada de contato que o elemento está submetido e e_c a espessura da camada de contato. A área de contato é determinada fazendo o produto da aresta externa do elemento pela largura de contato, já que os elementos em contato são de dimensões idênticas a área de contato.

3.1.5 Interface de contato

O contato, propriamente, ocorre entre a camada de contato e os dentes do estator. Esforços normais $\mathcal{N}$ e tangenciais $\mathcal{T}$ são distribuídos ao longo da região de contato. Assumindo que a distribuição dos esforços tangenciais $\mathcal{T}$ não influencia a distribuição dos esforços normais como sugere Johnson (1985), os esforços normais $\mathcal{N}$ podem ser determinados de forma independente como apresentado a seguir.

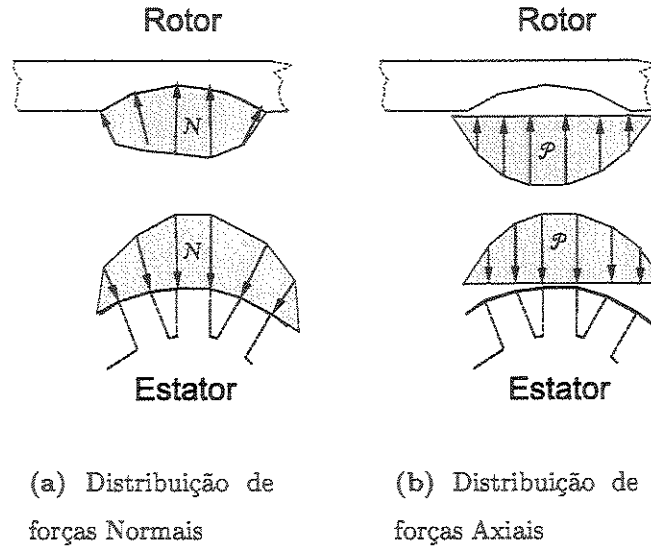


Figura 3.3: Aproximação da distribuição de forças normais

Esforços Normais

A distribuição de esforços normais $\mathcal{N}$ pode ser determinada pela deformação da camada de contato. Como o modelo assume pequenos deslocamentos e pequenas deformações é razoável assumir que a distribuição dos esforços normais podem ser representados por esforços axiais $\mathcal{P}$ agindo na mesma superfície, como ilustrado na Fig. 3.3.

Considerando que um corpo não deve penetrar em outro, uma função que determina a distância entre pontos da superfície de contato do estator e do rotor denominada *Gap* (vão em inglês) pode determinar se ocorreu ou não penetração. Esta função expressa na Eq. (3.41) é determinada pela comparação entre os deslocamentos ocorridos na superfície de contato no rotor e no estator ilustrados na Fig. 2.8. Quando a distância calculada for negativa, $gap \leq 0$, a função sinaliza que houve penetração do estator sobre o rotor. Ou seja houve contato entre rotor e estator.

$$gap = (d_{cr} + w_r - h_r + w_c) - (w_s + h_d) \quad (3.41)$$

onde d_{cr} é o deslocamento axial de corpo rígido do rotor, distância que separa a superfície neutra do rotor da superfície neutra do estator; w_s são os deslocamentos transversais do estator; w_r são os deslocamentos transversais do rotor; w_c são os deslocamentos transversais da camada de contato; h_d é a distância da superfície de contato no dente do estator à superfície

neutra do estator; h_r é a distância da superfície de contato do rotor à superfície neutra do rotor.

Deslocamentos transversais, tanto no rotor quanto no estator, ocorrem evitando que haja penetração de um corpo sobre o outro. A energia de deformação pode ser representada pela energia armazenada por uma mola com rigidez equivalente a associação da rigidez do estator, do rotor e da camada de contato em série, para que os corpos se desloquem em direção contrária à da penetração. Desta forma, a energia de contato pode ser expressa por

$$U_c = \frac{1}{2} K p_+ (gap)^2 \quad (3.42)$$

sendo $K p_+$ a rigidez equivalente ativa para determinado grau de liberdade que possua o valor da função gap negativo.

Esta energia pode ser interpretada como uma penalização da equação de Lagrange apresentada anteriormente toda vez que um grau de liberdade tiver uma restrição de contato. Ao derivar a equação de Lagrange para se obter a equação de movimento,

$$F_c = \frac{\partial U_c}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial U_c}{\partial \mathbf{q}_s} + \frac{\partial U_c}{\partial \mathbf{q}_r} \quad (3.43)$$

os esforços de contato podem ser expresso por

$$\mathbf{F}_c = \begin{bmatrix} +K p_+ & -K p_+ \\ -K p_+ & +K p_+ \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_c \\ w_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} +gap K p_+ \\ -gap K p_+ \end{Bmatrix} \quad (3.44)$$

Desta forma, procura-se encontrar, através de um processo iterativo, uma solução em que os dois corpos em contato estão em equilíbrio de forças, quando é pré-aplicada uma força axial $\mathcal{P}_{total}$ ao rotor, obtido pela equação de movimento derivada da equação de Lagrange. Este método iterativo será discutido em detalhes no capítulo 5, que apresenta os métodos numéricos.

A solução obtida fornece, além da região de contato, a contribuição que a camada de contato impõe à rigidez de flexão dos corpos (rotor e estator), bem como, os esforços transversais $\mathcal{P}$ para que haja este equilíbrio.

Esforços Tangenciais

Considerando que a resistência ao cisalhamento da camada de contato seja infinita, a teoria de atrito seco de Coulomb, apresentada na Eq. (3.45), é válida para determinar a força

tangencial agindo na superfície de contato, segundo Sattel & Hagedorn (2001).

$$\begin{aligned} F_T &= -\frac{V_{rel}}{|V_{rel}|} \mu_d F_N && \text{quando há escorregamento} \\ F_T &\leq -\frac{V_{rel}}{|V_{rel}|} \mu_e F_N && \text{quando não há escorregamento,} \end{aligned} \quad (3.45)$$

sendo μ_d o coeficiente de atrito dinâmico entre dois corpos e μ_e o coeficiente de atrito estático; e F_N é a força normal à superfície de contato. Como já dito anteriormente, a distribuição de esforços normais $\mathcal{N}$ é aproximada pela distribuição de esforços axiais $\mathcal{P}$ ao longo da superfície de contato. Os esforços tangenciais por sua vez ocorrem fora da superfície neutra, na superfície de contato. Desta forma, estes esforços são considerados na equação de movimento como distribuição de momentos devido às forças tangenciais $M_{\mathcal{T}}$ ao longo da superfície neutra:

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{T}} &= h_d F_T && \text{para o estator,} \\ M_{\mathcal{T}} &= -h_r F_T && \text{para o rotor.} \end{aligned} \quad (3.46)$$

Da mesma forma que a distribuição de forças normais, o equilíbrio de forças tangenciais no rotor fornece informações sobre o torque aplicado $\tau_{aplicado}$ pelo motor.

$$\tau_{aplicado} = \sum M_{\mathcal{T}} \quad (3.47)$$

3.2 Equação de movimento

Como já visto no início deste capítulo, a equação de movimento do motor ultra-sônico por ondas propagantes pode ser derivada da equação de Lagrange Eq. (3.1). Sendo a energia potencial do estator expressa na Eq. (3.48) composta pela energia de deformação do estator U_{ds} , a energia proveniente da interação com o elemento piezoelétrico U_{pzt} e com o contato com o rotor U_c .

$$U_s = U_{ds} + U_{pzt} + U_c. \quad (3.48)$$

A energia potencial do rotor U_r por sua vez é composta pela deformação do rotor U_{dr} , da camada de contato U_{dc} e devido ao contato com o estator U_c :

$$U_r = U_{dr} + U_{dc} + U_c. \quad (3.49)$$

As energias cinéticas do rotor e do estator, ambas expressas pela Eq. (3.3), estão no referencial da onda propagante. Dependem do tempo, mas implicitamente. A escolha da utilização do sistema de coordenadas fixo ao referencial da onda propagante se dá, pois neste referencial o vetor de velocidades generalizadas $\dot{\mathbf{q}}$ é nulo e conseqüentemente $\ddot{\mathbf{q}}$ é nulo também.

A parcela não conservativa de energia potencial está incluída na equação de Lagrange na forma de potência (dissipada ou adicionada) ao sistema mecânico.

Derivando a equação de Lagrange expressa para as características dinâmicas do motor no referencial da onda propagante, como já discutido tem-se a equação de movimento em função apenas dos vetores de coordenadas generalizadas do estator e do rotor, $\mathbf{q}_s$ e $\mathbf{q}_r$, representando os graus de liberdade do modelo discretizado, bem como dos potenciais elétricos aplicados v_A e v_B

$$[\mathbf{K}_s + \mathbf{I}_{\mathbf{g}_s} + \mathbf{K}_{pzt} + \mathbf{K}_{em}] \ddot{\mathbf{q}}_s = \mathbf{F}_{pzt} + \mathbf{F}_c,$$

$$[\mathbf{K}_r + \mathbf{I}_{\mathbf{g}_r}] \ddot{\mathbf{q}}_r - \mathbf{K}_c \ddot{\mathbf{q}}_c = \mathcal{P}_{total} + \tau_{aplicado} - \mathbf{F}_c,$$

(3.50)

$$\mathbf{K}_c \ddot{\mathbf{q}}_c - \mathbf{K}_c \ddot{\mathbf{q}}_r = \mathbf{F}_c$$

$$\mathbf{F}_c = \mathbf{F}_{\mathcal{N}} + \mathbf{F}_{\mathcal{T}}.$$

Capítulo 4

Funções de forma de aproximação

As funções de forma utilizadas para representar os elementos de placa, tanto no estator quanto no rotor, são conhecidas do método de elementos finitos, e podem ser encontradas em Cook *et al.* (1989) e Dahttt & Touzot (1984) . Essas funções são representadas num espaço isoparamétrico. Desta forma, previamente será discutido na próxima seção a transformação de coordenadas de um espaço geométrico cilíndrico para um espaço quadrilateral isoparamétrico.

4.1 Espaço isoparamético

Um elemento particular de uma placa circular é representado na Fig. 4.1 por $ijkl$. Este elemento pode ter suas coordenadas cartesianas mapeadas por um conjunto de coordenadas isoparamétricas como segue

$$\xi = \frac{r - r_a}{a} \quad , \quad \eta = \frac{\theta - \theta_b}{b} \quad , \quad (4.1)$$

sendo que o raio médio r_a e o ângulo médio θ_b são expressos por

$$r_a = \frac{r_i + r_j}{2} \quad , \quad \theta_b = \frac{\theta_j + \theta_k}{2} \quad , \quad (4.2)$$

e as dimensões do elemento podem se expressas em função de a e b como

$$a = \frac{r_j - r_i}{2} \quad , \quad b = \frac{\theta_k - \theta_j}{2} \quad . \quad (4.3)$$

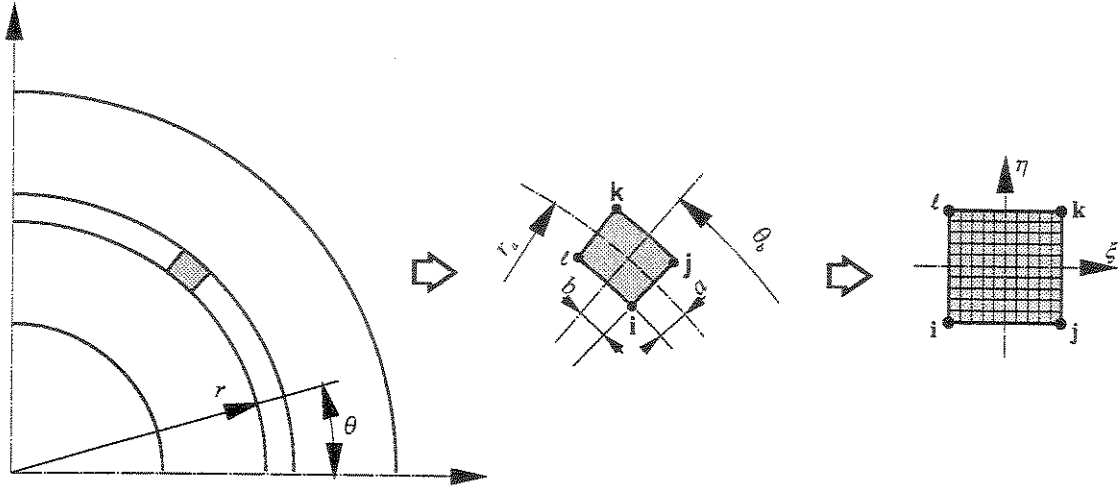


Figura 4.1: Mapeamento da transformação de coordenadas

Da mesma forma o mapeamento de coordenadas isoparamétricas para o espaço de coordenadas cartesianas pode ser representado por

$$r = \xi a + r_a \quad , \quad \theta = \eta b + \theta_b \quad . \quad (4.4)$$

Ao fazer estas transformações e manter as propriedades diferenciais é necessário conhecer as matrizes Jacobianas da transformação, $\mathbf{J}$, e as matrizes Jacobianas da transformação inversa, $\mathbf{\Gamma}$:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial r}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \xi} & \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \quad , \quad (4.5)$$

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial r} & \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \eta}{\partial r} & \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix} \quad . \quad (4.6)$$

4.2 Funções de forma para elementos de placa retangulares

Os deslocamentos de um elemento de placa quadrilateral podem ser aproximados por funções polinomiais bi-dimensionais, como discutido por exemplo em Cook *et al.* (1989). Ao se usar esta aproximação polinomial, as integrais podem ser calculadas pela quadratura de Gauss apresentada na seção 4.5 e encontrado em Dhatt & Touzot (1984) entre outros na

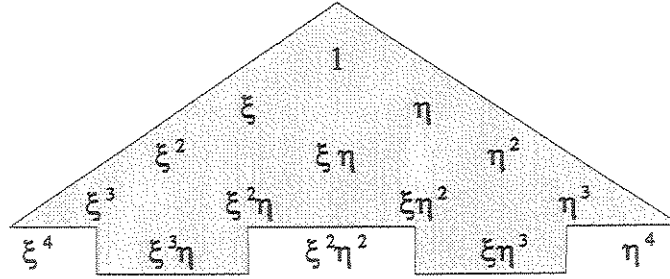


Figura 4.2: Triângulo de Pascal

literatura de métodos computacionais.

As polinomiais devem satisfazer todas as condições de contorno do elemento $ijkl$. Sendo que as funções de forma são ortogonais entre si. O elemento isoparamétrico quadrilateral de quatro nós possui condições de contornos nos pontos:

$$[(\xi, \eta)] := [(-1, -1); (+1, -1); (+1, +1); (-1, +1)] \quad . \quad (4.7)$$

Cada ponto possui três condições de contorno Cc para representar os deslocamentos transversais e suas inclinações:

$$Cc_1 = N(\xi, \eta) \quad ; \quad Cc_2 = \frac{\partial N(\xi, \eta)}{\partial \xi} \quad ; \quad Cc_3 = \frac{\partial N(\xi, \eta)}{\partial \eta} \quad . \quad (4.8)$$

Apenas uma função apresenta um valor não nulo, unitário, para uma dada condição de contorno, sendo nulos os demais valores de outras funções para mesma condição de contorno.

Buscando, então, as funções de forma polinomiais que satisfaçam estas condições no triângulo de Pascal encontrado em Cook *et al.* (1989), entre outros, e ilustrado na Fig. 4.2, encontra-se um conjunto de 12 funções de forma expressas como segue:

$$N_i(\xi, \eta) = a_{i1} + a_{i2}\xi + a_{i3}\eta + a_{i4}\xi^2 + a_{i5}\xi\eta + a_{i6}\eta^2 + a_{i7}\xi^3 + \dots \quad , \quad (4.9)$$

$$a_{i8}\xi^2\eta + a_{i9}\xi\eta^2 + a_{i10}\eta^3 + a_{i11}\xi^3\eta + a_{i12}\xi\eta^3$$

$$\frac{\partial N(\xi, \eta)}{\partial \xi} = a_{i2} + 2a_{i4}\xi + a_{i5}\eta + 3a_{i7}\xi^2 + 2a_{i8}\xi\eta + a_{i9}\eta^2 + 3a_{i11}\xi^2\eta + a_{i12}\eta^3 \quad , \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial N(\xi, \eta)}{\partial \eta} = a_{i3} + a_{i5}\xi + 2a_{i6}\eta^2 + a_{i8}\xi^2 + 2a_{i9}\xi\eta + 3a_{i10}\eta^2 + a_{i11}\eta^3 + a_{i12}\xi\eta^2 \quad ; \quad (4.11)$$

com as suas $a_{i1} \dots a_{i12}$ constantes a serem determinadas substituindo-se os valores das coordenadas isoparamétricas (ξ, η) apresentados na Eq. (4.7), formando a matriz N_i

$$N_i = \begin{bmatrix} +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 \\ 0 & +1 & 0 & -2 & -1 & 0 & +3 & +2 & +1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & -1 & -2 & 0 & +1 & +2 & +3 & -1 & -3 \\ +1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & +1 & 0 & +2 & -1 & 0 & +3 & -2 & +1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & +1 & -2 & 0 & +1 & -2 & +3 & +1 & +3 \\ +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ 0 & +1 & 0 & +2 & +1 & 0 & +3 & +2 & +1 & 0 & +3 & +1 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & +1 & +2 & 0 & +1 & +2 & +3 & +1 & +3 \\ +1 & -1 & +1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & -1 \\ 0 & +1 & 0 & -2 & +1 & 0 & +3 & -2 & +1 & 0 & +3 & +1 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & -1 & +2 & 0 & +1 & -2 & +3 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

de forma que seu produto com a matriz das constantes satisfaça todas as condições de contorno agora representadas pela matriz identidade $I_{12 \times 12}$:

$$N_i \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,12} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{12,1} & \dots & a_{12,12} \end{bmatrix} = I_{12 \times 12} \quad . \quad (4.13)$$

Assim as constantes são facilmente calculadas por

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,12} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{12,1} & \dots & a_{12,12} \end{bmatrix} = N_i^{-1} I_{12 \times 12} \quad . \quad (4.14)$$

Obtida a matriz que determina as constantes para cada função de forma, as funções de aproximação podem ser escritas como:

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{1}{4} - \frac{3}{8}\xi - \frac{3}{8}\eta + \frac{1}{2}\xi\eta + \frac{1}{8}\xi^3 + \frac{1}{8}\eta^3 - \frac{1}{8}\xi^3\eta - \frac{1}{8}\xi\eta^3 \\
N_2 &= \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi - \frac{1}{8}\eta - \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi\eta + \frac{1}{8}\xi^3 + \frac{1}{8}\xi^2\eta - \frac{1}{8}\xi^3\eta \\
N_3 &= \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi - \frac{1}{8}\eta + \frac{1}{8}\xi\eta - \frac{1}{8}\eta^2 + \frac{1}{8}\xi\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^3 - \frac{1}{8}\xi\eta^3 \\
N_4 &= \frac{1}{4} + \frac{3}{8}\xi - \frac{3}{8}\eta - \frac{1}{2}\xi\eta - \frac{1}{8}\xi^3 + \frac{1}{8}\eta^3 + \frac{1}{8}\xi^3\eta + \frac{1}{8}\xi\eta^3 \\
N_5 &= -\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi + \frac{1}{8}\eta + \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi\eta + \frac{1}{8}\xi^3 - \frac{1}{8}\xi^2\eta - \frac{1}{8}\xi^3\eta \\
N_6 &= \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\xi - \frac{1}{8}\eta - \frac{1}{8}\xi\eta - \frac{1}{8}\eta^2 - \frac{1}{8}\xi\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^3 + \frac{1}{8}\xi\eta^3 \\
N_7 &= \frac{1}{4} + \frac{3}{8}\xi + \frac{3}{8}\eta + \frac{1}{2}\xi\eta - \frac{1}{8}\xi^3 - \frac{1}{8}\eta^3 - \frac{1}{8}\xi^3\eta - \frac{1}{8}\xi\eta^3 \\
N_8 &= -\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi - \frac{1}{8}\eta + \frac{1}{8}\xi^2 - \frac{1}{8}\xi\eta + \frac{1}{8}\xi^3 + \frac{1}{8}\xi^2\eta + \frac{1}{8}\xi^3\eta \\
N_9 &= -\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi - \frac{1}{8}\eta - \frac{1}{8}\xi\eta + \frac{1}{8}\eta^2 + \frac{1}{8}\xi\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^3 + \frac{1}{8}\xi\eta^3 \\
N_{10} &= \frac{1}{4} - \frac{3}{8}\xi + \frac{3}{8}\eta - \frac{1}{2}\xi\eta + \frac{1}{8}\xi^3 - \frac{1}{8}\eta^3 + \frac{1}{8}\xi^3\eta + \frac{1}{8}\xi\eta^3 \\
N_{11} &= \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi + \frac{1}{8}\eta - \frac{1}{8}\xi^2 - \frac{1}{8}\xi\eta + \frac{1}{8}\xi^3 - \frac{1}{8}\xi^2\eta + \frac{1}{8}\xi^3\eta \\
N_{12} &= -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\xi - \frac{1}{8}\eta + \frac{1}{8}\xi\eta + \frac{1}{8}\eta^2 - \frac{1}{8}\xi\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^3 - \frac{1}{8}\xi\eta^3
\end{aligned} \tag{4.15}$$

4.2.1 Representação dos deslocamentos no espaço isoparamétrico

Os deslocamentos transversais de um elemento de placa em coordenadas polares podem ser aproximados por uma função admissível no espaço isoparamétrico. Portanto, o vetor de deslocamentos de cada elemento pode ser expresso por

$$\mathbf{w}(\xi, \eta) \approx \mathbf{w}(r, \theta) = \left\{ w_i \quad \frac{\partial w_i}{\partial r} \quad \frac{\partial w_i}{\partial \theta} \quad \dots \quad w_l \quad \frac{\partial w_l}{\partial r} \quad \frac{\partial w_l}{\partial \theta} \right\}_{1 \times 12}^T. \tag{4.16}$$

Usando a inversa da matriz jacobiana, as derivadas parciais são escritas como

$$\frac{\partial \mathbf{w}(r, \theta)}{\partial r} = \Gamma_{11} \frac{\partial \mathbf{N}(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \Gamma_{21} \frac{\partial \mathbf{N}(\xi, \eta)}{\partial \eta}, \tag{4.17}$$

$$\frac{\partial \mathbf{w}(r, \theta)}{\partial \theta} = \Gamma_{12} \frac{\partial \mathbf{N}(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \Gamma_{22} \frac{\partial \mathbf{N}(\xi, \eta)}{\partial \eta}, \tag{4.18}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{w}(r, \theta)}{\partial r^2} = \Gamma_{11}^2 \frac{\partial^2 \mathbf{N}(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + 2\Gamma_{11}\Gamma_{21} \frac{\partial^2 \mathbf{N}(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} + \Gamma_{21}^2 \frac{\partial^2 \mathbf{N}(\xi, \eta)}{\partial \eta^2}, \tag{4.19}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{w}(r, \theta)}{\partial \theta^2} = \Gamma_{12}^2 \frac{\partial^2 \mathbf{N}(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + 2\Gamma_{12}\Gamma_{22} \frac{\partial^2 \mathbf{N}(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} + \Gamma_{22}^2 \frac{\partial^2 \mathbf{N}(\xi, \eta)}{\partial \eta^2}, \tag{4.20}$$

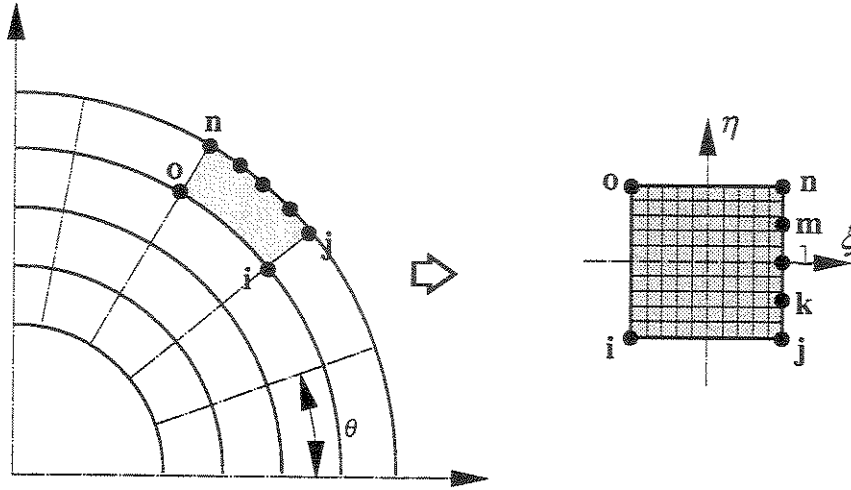


Figura 4.3: Esquema da malha com elementos de periféricos

$$\frac{\partial^2 \mathbf{w}(r, \theta)}{\partial r \partial \theta} = \Gamma_{11} \Gamma_{12} \frac{\partial^2 \mathbf{N}(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + (\Gamma_{11} \Gamma_{22} + \Gamma_{21} \Gamma_{12}) \frac{\partial^2 \mathbf{N}(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} + \Gamma_{21} \Gamma_{12} \frac{\partial^2 \mathbf{N}(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} \quad (4.21)$$

4.3 Funções de forma para elementos de placa periféricos

O contato representado por uma linha circunferencial precisa ter um refinamento acurado para avaliar os deslocamentos ocorridos na região de contato. Porém, tanto o estator como o rotor são bem representados por poucos elementos. O acréscimo de elementos nestes corpos só sobrecarregaria a solução do problema para uma mesma resposta. Para que os elementos do estator e do rotor sejam concatenados com os elementos de contato, pode-se utilizar um elemento especial, cuja face correspondente a do contato possua mais graus de liberdade que as demais, como mostrado na Fig. 4.3

Ball (1970) apresenta um procedimento para determinar as funções de forma em função da quantidade de pontos que existem por face de cada elemento. O autor se baseia em funções de interpolação de um elemento retangular *serendipity*. Esta função é um caso particular do polinômio interpolador bidimensional de Lagrange L_k , que pode ser escrito pelos termos ilustrados na Fig. 4.4.

Empregando a mesma idéia, busca-se encontrar uma função de forma que represente os deslocamentos transversais e rotações ocorridas no elemento apenas pela quantidade de pontos em cada uma de suas faces.

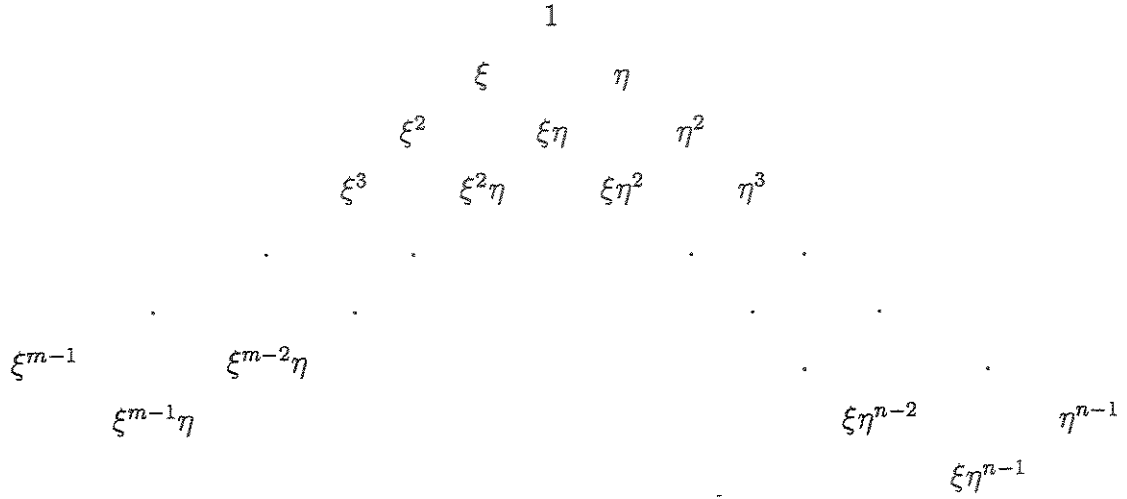


Figura 4.4: Termos de polinômios interpoladores da família *serendipity*

Toma-se por início uma função polinomial de uma variável obtida do polinômio interpolador de Lagrange escrita da seguinte forma

$$g(\xi) = \sum_{k=1}^{2m} L_k(\xi) f(\xi_k) \quad . \quad (4.22)$$

onde $L_k(\xi)$ é um polinômio de ordem $2m - 1$ que representa os fatores de forma para os m pontos de uma determinada face. Este polinômio pode ser expresso por

$$\prod_{k=1}^m \frac{\xi - \xi_i}{\xi_k - \xi_i} \quad \text{com } k \neq i \quad . \quad (4.23)$$

Tal polinômio e sua derivada podem ser escritos como

$$L_k(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \cdots + a_{2m-1}\xi^{2m-1} \quad , \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial L_k(\xi)}{\partial \xi} = a_1 + a_2\xi + a_3\xi^2 + \cdots + (2m-1)a_{2m-1}\xi^{2m-2} \quad . \quad (4.25)$$

Escrevendo as equações anteriores para cada valor de k tem-se

$$\begin{aligned} L_1(\xi) &= a_0^1 + a_1^1\xi + a_2^1\xi^2 + \cdots + a_{2m-1}^1\xi^{2m-1} \quad , \\ \frac{\partial L_1(\xi)}{\partial \xi} &= a_1^1 + a_2^1\xi + a_3^1\xi^2 + \cdots + (2m-1)a_{2m-1}^1\xi^{2m-2} \quad , \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ L_m(\xi) &= a_0^m + a_1^m\xi + a_2^m\xi^2 + \cdots + a_{2m-1}^m\xi^{2m-1} \quad , \\ \frac{\partial L_m(\xi)}{\partial \xi} &= a_1^m + a_2^m\xi + a_3^m\xi^2 + \cdots + (2m-1)a_{2m-1}^m\xi^{2m-2} \quad . \end{aligned} \quad (4.26)$$

Ou matricialmente

$$\begin{Bmatrix} L_1(\xi) \\ \frac{\partial L_1(\xi)}{\partial \xi} \\ \vdots \\ L_m(\xi) \\ \frac{\partial L_m(\xi)}{\partial \xi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0^1 & a_1^1 & \dots & a_{2m-2}^1 & a_{2m-1}^1 \\ a_0^1 & a_2^1 & \dots & (2m-1)a_{2m-1}^1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_0^m & a_1^m & \dots & a_{2m-2}^m & a_{2m-1}^m \\ a_1^m & a_2^m & \dots & (2m-1)a_{2m-1}^m & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \xi \\ \vdots \\ \xi^{(2m-1)} \end{Bmatrix}. \quad (4.27)$$

De forma genérica

$$[L_m(\xi)] = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \dots & \xi^{2m-1} \end{bmatrix} [\mathbf{P}_m], \quad (4.28)$$

sendo $[\mathbf{P}_m]$ a matriz transposta dos coeficientes da Eq. (4.27).

Para que a interpolação atenda as condições de contorno dos nós do elemento, valor da função e sua derivada, impõe-se a seguinte condição

$$L_k(\xi_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } k = i \\ 0 & \text{se } k \neq i \end{cases}. \quad (4.29)$$

Desta forma, substituindo os valores correspondente a cada ponto, bem como sua derivada, conclui-se que

$$[\mathbf{P}_m] = \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \dots & \xi_1^{2m-1} \\ 0 & 1 & \dots & (2m-2)\xi_1^{2m-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \xi_m & \dots & \xi_m^{2m-1} \\ 0 & 1 & \dots & (2m-2)\xi_m^{2m-2} \end{bmatrix}^{-1}. \quad (4.30)$$

Logo a Eq. (4.22) pode ser escrita de forma matricial, para uma variável, pela equação a seguir

$$g(\xi) = \begin{bmatrix} L_1(\xi) & \frac{\partial L_1(\xi)}{\partial \xi} & \dots & L_m(\xi) & \frac{\partial L_m(\xi)}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \frac{\partial w_1}{\partial \xi} \\ \vdots \\ w_m \\ \frac{\partial w_m}{\partial \xi} \end{Bmatrix}. \quad (4.31)$$

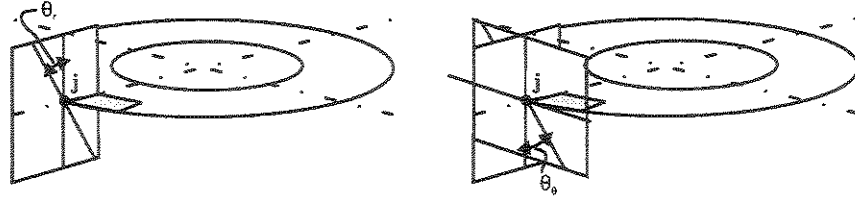


Figura 4.5: Inclinações de uma placa devido ao deslocamento transversal

O elemento de placa é bidimensional. Cada nó possui deslocamentos transversais e duas rotações, como apresentado anteriormente e ilustrado na Fig. 4.5. Para representar o elemento periférico bidimensional, propõe-se que as funções de forma são da família *serendipity* e podem ser obtidas da multiplicação de dois polinômios de Lagrange de variáveis distintas, representando os deslocamentos e inclinações ocorridas em ambas direções. Tal função de forma pode ser escrita por

$$N(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} L_1(\xi) & \frac{\partial L_1(\xi)}{\partial \xi} & \dots & L_m(\xi) & \frac{\partial L_m(\xi)}{\partial \xi} \end{bmatrix} \Phi \begin{bmatrix} L_1(\eta) \\ \frac{\partial L_1(\eta)}{\partial \eta} \\ \vdots \\ L_n(\eta) \\ \frac{\partial L_n(\eta)}{\partial \eta} \end{bmatrix}, \quad (4.32)$$

onde a matriz Φ é expressa por

$$\Phi = \begin{bmatrix} N_{11} & \frac{\partial N_{11}}{\partial \eta} & \dots & N_{1n} & \frac{\partial N_{1n}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_{11}}{\partial \xi} & \frac{\partial^2 N_{11}}{\partial \xi \partial \eta} & & \frac{\partial N_{1n}}{\partial \xi} & \frac{\partial^2 N_{1n}}{\partial \xi \partial \eta} \\ \vdots & & & \vdots & \\ N_{m1} & \frac{\partial N_{m1}}{\partial \eta} & & N_{mn} & \frac{\partial N_{mn}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_{m1}}{\partial \xi} & \frac{\partial^2 N_{m1}}{\partial \xi \partial \eta} & \dots & \frac{\partial N_{mn}}{\partial \xi} & \frac{\partial^2 N_{mn}}{\partial \xi \partial \eta} \end{bmatrix}. \quad (4.33)$$

A função de forma interpoladora expressa na Eq. (4.32) aproxima os deslocamentos ocorridos em um elemento retangular de Lagrange, com graus de liberdade internos ao elemento como ilustrado na Fig. 4.6.

O que se pretende é encontrar uma matriz que represente as condições de contorno apenas dos graus de liberdade na face do elemento. Seguindo ainda o procedimento proposto

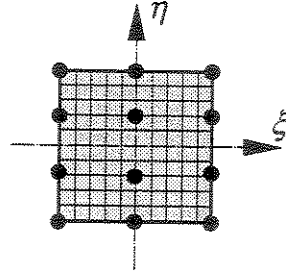


Figura 4.6: Elemento retangular de Lagrange

por Ball (1979) , rescreve-se a Eq. (4.32) como

$$N(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \dots & \xi^{2m} & \xi^{2m-1} \end{bmatrix} [\mathbf{P}_m] \Phi [\mathbf{P}_n]^T \begin{bmatrix} 1 & \eta & \dots & \eta^{2n} & \eta^{2n-1} \end{bmatrix}^T . \quad (4.34)$$

De tal forma que as matrizes $\mathbf{P}_m$ e $\mathbf{P}_n$ são seccionadas como segue

$$[\mathbf{P}_m] = \begin{bmatrix} A_m \\ \text{---} \\ B_m \end{bmatrix} \quad e \quad [\mathbf{P}_n] = \begin{bmatrix} A_n \\ \text{---} \\ B_n \end{bmatrix} , \quad (4.35)$$

sendo que as dimensões das matrizes A_m e A_n são respectivamente $(4 \times 2m)$ e $(4 \times 2n)$, e conseqüentemente as dimensões de B_m e B_n são $(2m - 4 \times 2m)$ e $(2n - 4 \times 2n)$.

Assim, o produto matricial na Eq. (4.34) pode ser escrito como

$$[\mathbf{P}_m] \Phi [\mathbf{P}_n]^T = \begin{bmatrix} A_m \Phi A_n^T & A_m \Phi B_n^T \\ B_m \Phi A_n^T & B_m \Phi B_n^T \end{bmatrix} . \quad (4.36)$$

Uma função de interpolação *serendipity* é uma função de interpolação Lagrangiana sujeita à restrição $B_m \Phi B_n^T = [0]$, e é dependente apenas dos graus de liberdade das faces, como se deseja. Usando estas relações, as matrizes $A_m \Phi A_n^T$, $B_m \Phi A_n^T$ e $A_m \Phi B_n^T$ podem ser expressas somente em função dos graus de liberdade da face.

Toma-se C_m e C_n duas matrizes combinação linear de B_m e B_n respectivamente, de forma a representar os produtos matriciais da Eq. (4.36) por

$$\begin{aligned} [A_m] \Phi [A_n^T] = & [A_m + C_m] \Phi [A_n]^T + [A_m] \Phi [A_n + C_n]^T \\ & - [A_m + C_m] \Phi [A_n + C_n]^T + [C_m] \Phi [C_n^T] , \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$[A_m] \Phi[B_n^T] = [A_m + C_m] \Phi[B_n]^T - [C_m] \Phi[B_n]^T, \quad (4.38)$$

$$[B_m] \Phi[A_n^T] = [B_m] \Phi[A_n + C_n]^T - [B_m] \Phi[C_n]^T. \quad (4.39)$$

A função de forma apresentada pela Eq. (4.32) pode ser rescrita por

$$\begin{aligned} \phi(\xi, \eta) = & [L_4(\xi)] [A_m + C_m] \Phi[P_n]^T [L_n(\eta)]^T \\ & + [L_m(\xi)] [P_m] \Phi[A_n + C_n]^T [L_4(\eta)]^T \\ & - [L_4(\xi)] [A_m + C_m] \Phi[A_n + C_n]^T [L_4(\eta)]^T. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Para que estas funções de forma não envolvam graus de liberdade internos ao elemento as matrizes $[C_m]$ e $[C_n]$ precisam ser determinadas de forma que as matrizes $[A_m + C_m]$ e $[A_n + C_n]$ possuam valores apenas nas duas primeiras e duas últimas colunas satisfazendo as condições de contorno dos vértices das faces consideradas, como em Ball (1989),

$$L_4[A_m + C_m] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.41)$$

Resolvendo o sistema de equações tem-se que

$$[A_m + C_m] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & \dots & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}. \quad (4.42)$$

Assim, as funções de forma representadas apenas pelos graus de liberdade das faces podem ser expressas por

$$\begin{aligned}
 N(\xi, \eta) = & [L_4(\xi)] [P_4] \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \dots & \phi_{1(2n-1)} & \phi_{1(2n)} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \dots & \phi_{2(2n-1)} & \phi_{2(2n)} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \dots & \phi_{3(2n-1)} & \phi_{3(2n-1)} \\ \phi_{41} & \phi_{42} & \dots & \phi_{4(2n-1)} & \phi_{4(2n)} \end{bmatrix} [P_n]^T [L_n(\eta)]^T \\
 & + [L_4(\xi)] [P_4] \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \dots & \phi_{1(2m-1)} & \phi_{1(2m)} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \dots & \phi_{2(2m-1)} & \phi_{2(2m)} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \dots & \phi_{3(2m-1)} & \phi_{3(2m)} \\ \phi_{41} & \phi_{42} & \dots & \phi_{4(2m-1)} & \phi_{4(2n)} \end{bmatrix} [P_m]^T [L_m(\eta)]^T \\
 & - [L_4(\xi)] [P_4] \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{1(2n-1)} & \phi_{1(2n)} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{2(2n-1)} & \phi_{2(2n)} \\ \phi_{(2m-1)1} & \phi_{(2m-1)2} & \phi_{(2m-1)(2n-1)} & \phi_{2m-1(2n)} \\ \phi_{(2m)1} & \phi_{(2m)2} & \phi_{(2m)(2n-1)} & \phi_{2m(2n)} \end{bmatrix} [P_4]^T [L_4(\eta)]^T
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

4.3.1 Obtenção da função de forma para cada nó

Conhecendo-se a quantidade de nós que o elemento possui, a construção das funções de formas correspondentes aos graus de liberdade dos nós é montada seguindo a mesma orientação dos nós de outros elementos quadrilaterais, para que haja conectividade. Por exemplo, o no_i apresentado na Fig. 4.3 é vértice de dois lados do elemento, um em ξ e outro em η . Representando os polinômios $L_n P_n(\xi)$ e $L_n P_n(\eta)$ de tal forma que os polinômios, em ξ e em η , possuam valores unitários apenas no nó i , sendo os demais valores nulos. Identifica-se a posição deste nó na matriz Φ na Eq. (4.33) de tal forma que a matriz possua valor unitário para representar este grau de liberdade sendo os demais nulos. Calcula-se as matrizes $[Am + Cm]$ e $[An + Cn]$, como na Eq. (4.32). Calcula-se, então, a função de forma para estes graus de liberdade.

Este procedimento é feito automaticamente para os demais graus de liberdade que se tenha no elemento.

4.4 Funções de Forma Elétricas

A polarização da cerâmica piezoelétrica pode ser associada à polaridade elétrica, como apresentada na seção 3.1.3. Definindo a polaridade positiva +1 para o setor de polarização que se expande quando o potencial elétrico é positivo e polaridade negativa -1 para o setor de polarização que se contrai para o mesmo potencial elétrico, as funções de forma elétrica representando estas polaridades podem ser extraídas diretamente da configuração geométrica da polarização, como por exemplo a apresentada na Fig. 2.4. A polaridade de um determinado grau de liberdade depende da posição geométrica que se encontra em relação ao grupos de polarização. Assim para cada nó é associado um ângulo θ em relação ao eixo de simetria entre os grupos de polarização. Os intervalos geométricos de polarização são determinados em função da seção circular correspondente ao comprimento de onda. Representando os dois grupos por uma mesma geometria obtém-se as funções de forma elétrica para cada grupo de polarização, como apresentado a seguir

$$\Phi_A = \begin{cases} +1 & \text{se} & (n - \frac{7}{8})\lambda < \theta < (n - \frac{5}{8})\lambda, \\ -1 & \text{se} & (n - \frac{5}{8})\lambda < \theta < (n + \frac{1}{8})\lambda, \\ 0 & \text{se} & \theta < \frac{1}{8}\lambda \quad \text{e} \quad \pi - \frac{3}{8}\lambda < \theta, \end{cases} \quad (4.44)$$

$$\Phi_B = \begin{cases} +1 & \text{se} & \pi + (n - \frac{5}{8})\lambda < \theta < \pi + (n - \frac{1}{8})\lambda, \\ -1 & \text{se} & \pi + (n - \frac{1}{8})\lambda < \theta < \pi + (n + \frac{3}{8})\lambda, \\ 0 & \text{se} & \theta < \pi + \frac{3}{8}\lambda \quad \text{e} \quad 2\pi - \frac{1}{8}\lambda < \theta; \end{cases} \quad (4.45)$$

sendo n inteiro entre 1 e o número de diâmetros nodais N

4.5 Aproximação das integrais por quadratura de Gauss

As integrais da matriz de massa e de rigidez podem ser feitas pela aproximação da quadratura de Gauss, como apresentado por Cook (1989). A integral de uma função em

coordenadas cilíndricas no volume é:

$$I = \int_A f(r, \theta) dA = \int_{r_i}^{r_e} \int_{\theta_i}^{\theta_f} f(r, \theta) r dr d\theta , \quad (4.46)$$

sendo r_i o raio interno e r_e raio externo e θ_i o ângulo inicial θ_f o ângulos final no domínio de integração do elemento.

Da matriz Jacobiana apresentada na seção 4.5 tem-se

$$\frac{\partial r}{\partial \xi} = a \quad \text{e} \quad \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = b . \quad (4.47)$$

Assim pode se escrever o produto $dr d\theta$ como

$$dr d\theta = a \partial \xi b \partial \eta = \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta . \quad (4.48)$$

A integral pode ser generalizada por

$$I = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta) r(\xi, \eta) \partial \xi \partial \eta . \quad (4.49)$$

Tal integral pode ser aproximada pelo somatório

$$I \approx \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M p_i p_j f(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \det(J(\xi_{ij}, \eta_{ij})) . \quad (4.50)$$

sendo p_i e p_j pesos atribuídos à função $f(\xi, \eta)$ em particulares localizações ξ_{ij} e η_{ij} , conhecidas como pontos de Gauss. Os pontos de Gauss, bem como, os respectivos pesos são facilmente encontrados na literatura de cálculos numéricos. A tabela D.1 apresentada no apêndice D, por exemplo , foi extraída de (?)

Capítulo 5

Análise numérica

Toda a modelagem matemática do motor foi apresentada nos capítulos anteriores baseada apenas em parâmetros físicos. A seção a seguir apresenta um método numérico para representar o comportamento dinâmico do motor sob determinadas condições de operação. Procura-se, principalmente, representar a curva característica de funcionamento *torque* $\times$ *velocidade*. O desempenho do motor, representado pela curva característica *torque* $\times$ *velocidade*, pode ser extraído das equações de movimento. Para tanto, os procedimentos de variação de parâmetros utilizados para se obter a curva característica *torque* $\times$ *velocidade* experimentalmente são utilizados para se obter a mesma curva numericamente. Inicialmente fixam-se os parâmetros de operação: a frequência de operação Ω , próxima da frequência de ressonância correspondente ao modo com que se deseja excitar o estator, e a voltagem v aplicada aos grupos cerâmicos. A seguir são fixados os parâmetros de ensaio: a força axial pré-aplicada $\mathcal{P}_{axial}$ e as velocidades do rotor V_R , utilizando os mesmos valores de laboratório. Extrai-se, para cada conjunto de parâmetros de ensaio, o valor de torque correspondente. Altera-se o parâmetro de velocidade angular do rotor V_R para se extrair outro conjunto de parâmetros, representando o motor em outra condição de operação de funcionamento. Assim sucessivamente até serem utilizados todos os parâmetros de velocidade angular V_R utilizados durante o ensaio. Varia-se, então, a intensidade da força axial pré-aplicada $\mathcal{P}_{axial}$ e repete-se os mesmos procedimentos de variação de velocidade angular V_R . Ao final, obtém-se diferentes curvas características obtidas numericamente, representando o funcionamento do motor ultra-sônico submetido a diferentes forças axiais independentes.

O torque é obtido da solução da equação de movimento Eq. (3.50), quando se impõe uma força axial pré-aplicada $\mathcal{P}_{axial}$. A velocidade angular do rotor V_R , constante para cada conjunto de parâmetros de ensaio, é necessária de forma implícita na Eq. (3.5), que representa a cinemática do rotor.

A solução da equação de movimento é feita em duas etapas. A primeira determina a situação de equilíbrio das forças axiais, independentes dos esforços tangenciais como mencionado anteriormente na seção 3.1.5. A segunda determina a solução de equilíbrio de forças tangenciais a partir das leis de atrito de Coulomb apresentadas, também, na seção 3.1.5.

Para calcular a distribuição de forças normais é proposta uma função objetivo que minimiza o resíduo existente na equação de movimento. Esta função é o erro quadrático residual da solução do equilíbrio de forças axiais que deve ser inferior à tolerância, $0,1[N]$, existente, no equilíbrio de movimento para um determinado vetor de coordenadas generalizadas. Para tanto, é utilizado o método de Newton-Raphson, encontrado comumente na literatura de métodos computacionais, por exemplo em Zienkiewicz & Taylor (1984). Este método fornece iterativamente o incremento a ser dado ao vetor de coordenada generalizada para que o erro seja minimizado.

A seguir é apresentado o algoritmo utilizado para se obter a curva característica *torque* $\times$ *velocidade*.

5.1 Algoritmo

As etapas para se obter a curva característica de um motor por ondas propagantes são descritas a seguir. A sequência de procedimentos numéricos é ilustrado inicialmente pelo fluxograma apresentado na Fig. 5.1.

5.1.1 Parâmetros de operação

Nesta etapa são armazenados os parâmetros iniciais de operação: Frequência de operação Ω e voltagem aplicada ao motor v . Estes parâmetros são apresentados na tabela 5.1. Também são armazenados os parâmetros de ensaio, forças axiais $\mathcal{P}_{axial}$ e velocidade angulares do rotor V_R , apresentados nas tabela 5.2 e 5.3 respectivamente

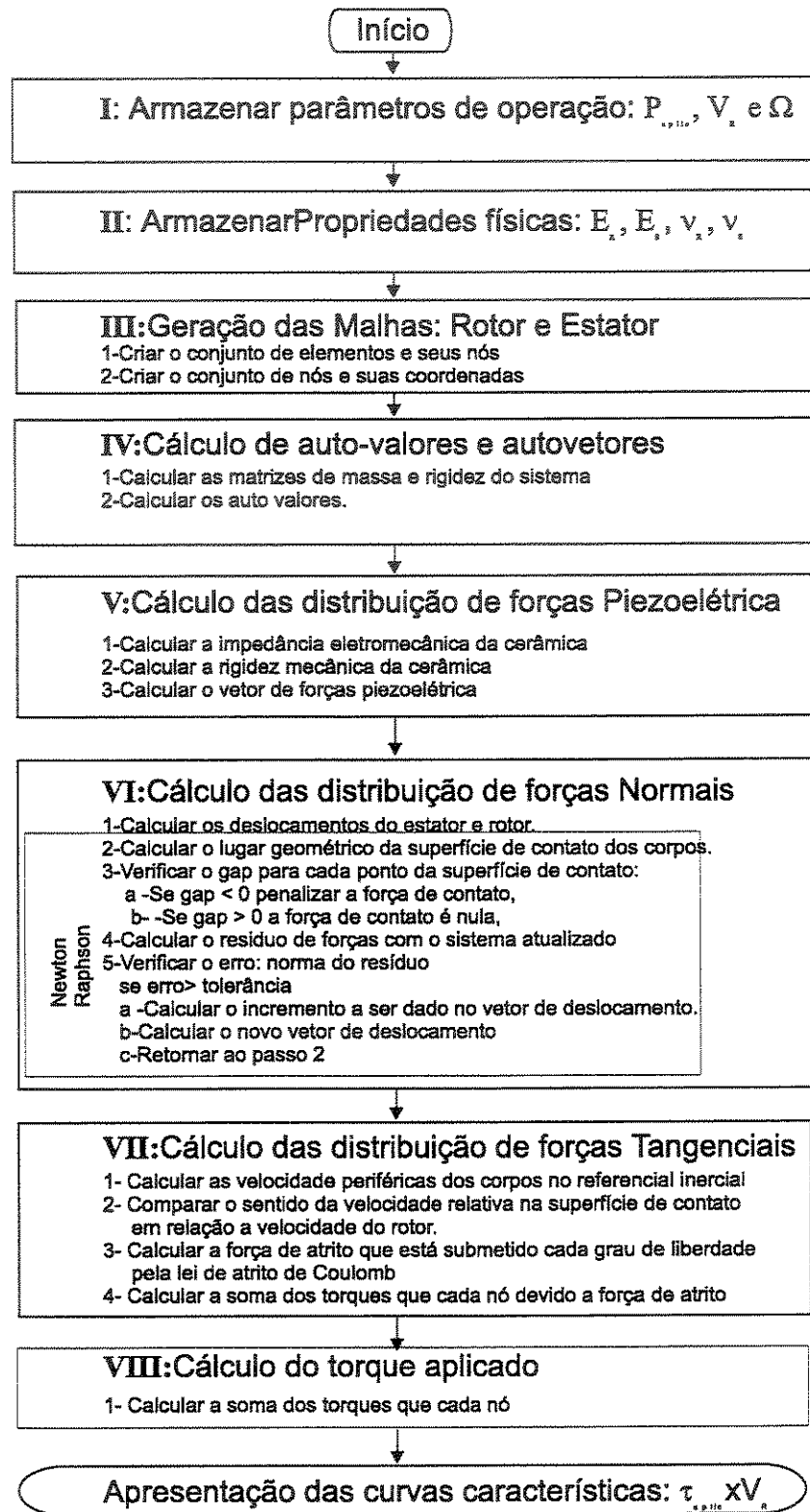


Figura 5.1: Fluxograma de Etapas numéricas

Tabela 5.1: Parâmetros de Operação

Frequência de Operação	kHz	40
Voltagem aplicada aos grupos cerâmicos	v	150

Tabela 5.2: Força axial pré-aplicada P_{axial}

P_{axial}	[N]	100	150	200	250
-------------	-----	-----	-----	-----	-----

5.1.2 Propriedades Físicas

Esta etapa armazena as propriedades físicas a serem utilizadas pelas rotinas posteriores. O estator é de bronze, o rotor de aço e a camada de contato de politetrafluoretileno. O amortecimento considerado é apenas para o estator e o rotor, sendo desprezado os efeitos viscoelásticos da camada de contato apresentados por Cao & Wallaschek (1995). O amortecimento das partes metálicas será considerado apenas histerético, cujo módulo de elasticidade é um número complexo onde a parte complexa descreve η_e o amortecimento da estrutura.

$$E = E_o(1 + \Im\eta_e), \quad (5.1)$$

sendo E_o o módulo de elasticidade de Young e η é a componente de amortecimento, que para materiais metálicos é $\eta = 0,001$, como encontrado em Beards (1983). $\Im$ representa a unidade complexa $\sqrt{-1}$

As propriedades consideradas são apresentadas na tabela 5.4.

5.1.3 Geração de malha

A malha foi criada por um programa desenvolvido em linguagem Matlab. A geometria do estator e do rotor é representada por dois conjuntos: um de elementos e outro de nós constituindo assim a malha de elementos. No conjunto de elementos é fornecida a informação de quantos nós cada elemento é composto. As coordenadas de cada nó são fornecidas no

Tabela 5.3: Velocidades do rotor V_R

V_R	[RPM]	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	120	130
-------	-------	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----	-----	-----

Tabela 5.4: Propriedades físicas dos componentes

Material	Massa específica ρ [k/m^3]	Módulo de Elasticidade E [GPa]	Coefficiente de Poisson γ
Bronze	8800	110	0,3
Aço	7800	210	0,3

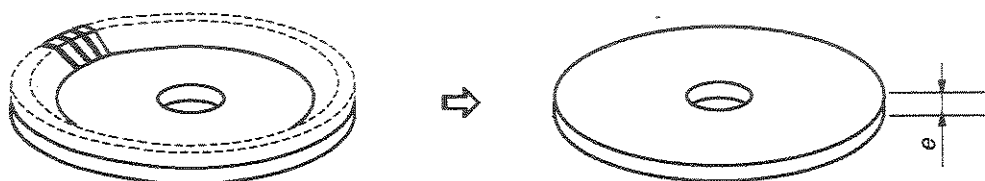


Figura 5.2: Estator equivalente

conjunto de nós. Lembrar que o sistema de coordenadas é cilíndrico e o referencial utilizado é solidário à onda propagante. Os elementos externos a serem utilizados para modelar o estator possuem 5 nós a mais para representar a região de contato. Na possibilidade de o estator não ficar bem representado a malha será refinada para que todos os elementos sejam quadriláteros e de forma que existam 171 nós para representar a região de contato.

O estator possui dentes em uma das faces. Para representar esta geometria por uma placa circular plana com as mesmas propriedades dinâmicas, a densidade ρ do estator é substituída por uma densidade equivalente ρ_{eq} onde as massas dos dentes são incorporadas à placa plana, da mesma forma que (?). O estator é representado por uma placa circular com espessura e e volume Vol como ilustrado na Fig. 5.2, de forma que a massa total do estator, incluindo os dentes, é considerada no cálculo do ρ_{eq} desta placa circular.

O rotor possui uma espessura maior no raio de contato, como mostra a Fig. 5.3. Assim, os elementos periféricos são considerados com espessura $2h_r$ de 4,00 [mm] e os demais elementos com espessura e_r de 1,00 [mm].

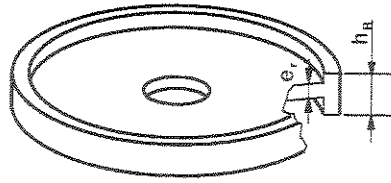


Figura 5.3: Rotor equivalente

5.1.4 Cálculo dos Autovalores e autovetores

Para calcular o problema de autovalores e autovetores, cada elemento tem a coordenada de seus nós transformada para um espaço isoparamétrico. As matrizes de massa M_s , M_r e de rigidez K_s , K_r do estator e do rotor são calculadas, da forma que foi apresentado nas seções 3.1.1 e 3.1.2 respectivamente, em um sistema de equações local de cada elemento e inseridas em um sistema de equações global. Todas as matrizes foram construídas em um espaço isoparamétrico. As formas e suas derivadas, bem como a matriz jacobiana de cada transformação, são calculadas em uma rotina a parte. Também é calculada a matriz de rigidez da camada de contato como em 3.1.4, acoplada à equação de movimento Eq. (3.50).

Uma vez montadas as matrizes em um sistema de equações global, calcula-se os autovalores e autovetores do subsistema correspondente ao estator utilizando a rotina *eig* existente no programa comercial Matlab (1998) utilizando as matrizes K_s e M_s , obtidas como descrito acima. Os autovalores fornecem informações sobre as frequências naturais do estator, e os auto-vetores fornecem informações sobre a forma de vibrar.

5.1.5 Cálculo das Forças Piezoelétricas

As forças piezoelétricas são calculadas em função da voltagem aplicada e do modo de operação em que se deseja que a onda se forme.

Inicialmente as polaridades elétricas a que os graus de liberdade estão sujeitos são calculadas através da função de forma elétrica B_{el} apresentada na seção 3.1.3. Calcula-se o operador de deformações para placas circulares B_{mec} . Com as propriedades constitutivas da cerâmica piezoelétrica calcula-se as matrizes de rigidez eletro-mecânica K_{em} e a rigidez mecânica da cerâmica K_{pzt} , bem como a força piezoelétrica F_{pzt} agindo em cada grau de liberdade.

5.1.6 Cálculo da distribuição das Forças Normais

A distribuição de forças é calculada de forma que não haja penetração de um corpo em outro. Quando um grau de liberdade de um corpo invade o outro, uma força associada à rigidez dos dois corpos age na superfície de contato. Quando há penetração o balanço de energia tem que ser revisto, penalizando a equação de Lagrange. A derivação da equação de Lagrange como é proposto resulta na equação de movimento, agora sujeita ao contato. A força de contato depende do deslocamento transversal ocorrido bem como do *gap* existente. A seguir as etapas deste processo iterativo são apresentadas para calcular a distribuição de forças normais devido a força axial pré-aplicada.

1. Calcular o deslocamento do estator sem contato

$$\mathbf{q}_{s_0} = \mathbf{K}_s^{-1} \mathbf{F}_{pzt} \quad (5.2)$$

2. Considerar o estator deformado sem a ação da força piezoelétrica, representado por um outro vetor de coordenadas generalizadas $\mathbf{q}_{ds}$

$$\mathbf{q}_{ds_i} = \mathbf{q}_{s-i} - \mathbf{q}_{s_0} \quad i = 1, 2, \dots, \quad (5.3)$$

$$\mathbf{K}_s^{-1} \mathbf{q}_{ds_i} = \mathbf{0} \quad . \quad (5.4)$$

3. Montar a equação de movimento 3.50, sendo que agora não há ação da força piezoelétrica, e a posição natural do estator é a que corresponde à deformação q_{s_1} .

$$\mathbf{F}_{pzt} = \mathbf{0} \quad . \quad (5.5)$$

4. Calcular os deslocamentos do estator, do rotor e da camada de contato q_s , q_r e q_c . Lembrando que

$$\mathbf{q}_{ds_i} = \mathbf{q}_{s_i} + \mathbf{q}_{s_0} \quad . \quad (5.6)$$

5. Determinar o lugar geométrico das superfícies de contato.

Para tanto, é considerada a aresta externa de cada um dos elementos periféricos e

calculada a posição transversal do ponto das superfícies de contato referente a cada grau de liberdade de deslocamento transversal da superfície neutra do estator e do rotor, considerando o deslocamento transversal da camada de contato. Por exemplo, para o grau de liberdade "i" na aresta periférica do estator, o ponto de contato Pc_i está distante transversalmente da superfície neutra de

$$Pc_i = w_{s_i} + h_d \quad , \quad (5.7)$$

sendo h_d a distância que separa a superfície de contato da superfície neutra do estator. Da mesma forma, para o grau de liberdade "j" correspondente ao rotor, o ponto de contato Pc_j é uma composição de deslocamentos transversais w_{r_j} do rotor e da camada de contato w_{c_k} e o deslocamento de corpo rígido d_{cr} ocorrido entre a superfície neutra do estator e a superfície neutra do rotor.

$$Pc_j = d_{cr} + w_{r_j} - h_r + w_{c_k} \quad , \quad (5.8)$$

sendo h_r a distância que separa a superfície neutra do rotor da superfície de contato.

6. Calcular o vão, função gap .

$$gap = Pc_j - Pc_i \quad . \quad (5.9)$$

7. Verificar o sinal da função gap

- Se o vão for negativo penalizar tanto as matrizes de rigidez, como o vetor de forças.

$$Fc_+ = Fc_+ - gap \cdot pn \quad . \quad (5.10)$$

- Se for positivo a força de contato não está ativa

$$Fc_+ = 0 \quad . \quad (5.11)$$

8. Calcular o resíduo das forças na equação de Lagrange.

$$Res = \begin{bmatrix} K_s & 0 & 0 \\ 0 & K_r + K_{crr} & -K_{crc} \\ 0 & -K_{crc}^T & K_{ccc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{ds1} \\ q_r \\ q_c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 - Fc_+ \\ 0 \\ Fc_+ \end{bmatrix} \quad , \quad (5.12)$$

sendo K_{crr} , K_{crc} e K_{ccc} matrizes com dimensões apropriadas possuindo valores diferentes de zeros somente nos graus de liberdade correspondentes aos deslocamentos transversais do rotor e da camada de contato. Os valores para estes termos são definidos na Eq. (3.40).

9. Calcular o erro pela norma do resíduo das forças definido na Eq. (5.12).

$$ERRO = |Res| \quad (5.13)$$

10. Se o erro for maior que a tolerância, Tolerância $> 0,1N$

- calcular o incremento a ser dado ao vetor de coordenadas generalizadas,

$$\Delta q = \begin{bmatrix} K_s & 0 & 0 \\ 0 & K_r + K_{crr} & -K_{crc} \\ 0 & -K_{crc}^T & K_{ccc} \end{bmatrix}^{-1} * Res \quad (5.14)$$

- Calcular o novo vetor de coordenadas generalizadas, $q = q + \Delta q$
- voltar para o passo 5.

11. Se o erro for menor que a tolerância,

- Calcular a força axial.

12. Calcular a diferença entre a força axial resultante e a força axial pré-aplicada $\mathcal{P}_{axial}$ assumindo valores dados na tabela 5.2

- Se a diferença for maior que a tolerância
 - Calcular pelo método da bi-seção um novo deslocamento de corpo rígido,
 - Voltar para o passo 1
- Se a diferença for menor que a tolerância
 - Salvar a distribuição de esforços normais

5.1.7 Cálculo da distribuição das Forças Tangenciais

Antes de calcular a distribuição das forças tangenciais, determina-se a velocidade relativa entre os pontos da superfície de contato do rotor e do estator. As velocidades, do estator e do rotor, são calculadas usando Eq. (3.5) apresentada anteriormente.

Sendo a camada de contato muito fina, a região de "agarramento", não deslizamento, entre o rotor e o estator é muito pequena, e pode se considerar que o seu efeito localizado não interfere no balanço global das forças tangenciais. Portanto, a força tangencial é calculada pela teoria de atrito seco de Coulomb apresentada na seção 3.1.5, assumindo deslizamento em todos os pontos em contato. Assim, a distribuição da força tangencial é calculada pelas contribuições que cada ponto em contato colaborou para a existência do torque. A contribuição de esforços tangenciais agindo nos nós na equação de movimento é na forma de momento resultante no eixo do rotor. A força tangencial é facilmente calculada, uma vez que é proporcional a força normal agindo no ponto. Arbitrando um coeficiente de atrito seco μ , valor médio do coeficiente de atrito entre a camada de contato e o estator, calcula-se diretamente o produto na Eq. (3.45), considerando a direção da força de atrito.

O torque aplicado $\tau_{aplicado}$ pelo motor é calculado pela soma das contribuições locais.

5.2 Resultados Numéricos

Foram realizados vários testes para checar a representatividade do modelo. O objetivo desta seção foi o de verificar a consistência de cada uma das considerações apresentadas aqui.

5.2.1 Verificação do elemento de placa

Para verificar a consistência do elemento de placa implementado, foi considerada uma placa com dimensões conhecidas, que pudesse ser analisada analiticamente e também por um aplicativo comercial. Foi considerada uma placa de aço com diâmetro externo $2a = 2,0m$ e diâmetro interno $2b = 1,0m$ com espessura de 2mm uniforme em toda a superfície da placa. As propriedades desta placa estão representadas na tabela 5.5. A placa foi tratada sem restrições de movimento, ou livre-livre. A solução do problema de autovalores e autovetores foi calculada por meio do Matlab e comparada com a solução analítica calculada pela expressão

Tabela 5.5: Propriedades da placa circular

Dimensões	[m]
Diâmetro interno	1,00
Diâmetro externo	2,00
Espessura	0,002
Material	Aço
Densidade	7860 [Kg/m3]
Módulo de elasticidade	207,109 [N/m2]
Coefficiente de Poisson	0,3

Tabela 5.6: Constantes λ_{ij}^2 para determinação das frequências naturais de uma placa

Modo	λ_{ij}^2
2,0	4,28
0,1	9,32
3,0	11,4
1,1	17,2
2,1	31,1

da Eq. (5.15) extraída de Blevis (1984)

$$f_{ij} = \frac{\lambda_{ij}^2}{2\pi a^2} \left[\frac{Eh^3}{12\gamma(1-\nu^2)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.15)$$

onde o coeficiente de Poisson ν é 0,3 e γ é o peso por unidade de área. A solução analítica apresentada na tabela 5.7 é obtida substituindo-se os valores de λ_{ij}^2 , respectivos aos modos desejados expressos na tabela 5.6, na Eq. (5.15).

A mesma placa com a mesma estrutura de malha foi submetida a análise pelo programa aplicativo de elementos finitos comercial ANSYS versão 5.4. O resultado destas comparações é apresentado na tabela 5.7. Apesar de possuírem um mesmo formalismo para resolver o problema de auto-valores para placa, existe uma pequena diferença nos valores das frequências naturais obtidas pelo Ansys54 e as obtidas pela função *eig* do Matlab (1998). Esta diferença se deve ao sistema de coordenada que é usado em cada um dos programas para discretizar

Tabela 5.7: Comparação das frequências naturais extraídas numericamente

Matlab		Ansys54		Analítico	
Frequência[Hz]	erro(%)	Frequência [Hz]	erro(%)	Frequência[Hz]	Modo
–	–	–	–	0	–
2,144	1,34	2,146	1,46	2,115	2,0
4,655	1,05	4,7211	2,47	4,067	0,1
5,761	–	5,7428	–	–	–
8,598	1,13	8,838	4,25	8,5024	1,1
10,67	–	10,617	–	–	–
15,52	1,00	16,108	4,78	15,375	2,1
16,79	–	16,698	–	–	–

Tabela 5.8: Frequências naturais de uma placa modelada com elementos periféricos

Modo	0	1	2	Analítico
(2,0)	2,145	2,2869	2,2768	2,115
(0,1)	4,655	4,6553	4,6553	4,067
(3,0)	5,761	5,9819	6,0065	–
(4,0)	8,598	8,7080	8,6916	8,5024

a placa. Enquanto o programa implementado no Matlab utiliza o sistema de coordenadas polares para discretização, o programa Ansys utiliza coordenadas cartesianas. A utilização de coordenadas cartesianas para representar um espaço polar acarreta erros especialmente na matriz de massa, pois não consegue representar o volume adequadamente

5.2.2 Verificação do elemento de placa periférico

Da mesma forma que a seção anterior, a placa com as mesmas dimensões que a anterior é estruturada com uma malha possuindo elementos periféricos cujas faces foram representadas com um nó a mais e com dois nós a mais. As primeiras frequências são comparadas na tabela 5.8. Apesar de ser possível calcular o problema de autovalores e autovetores utilizando o conceito de elementos periféricos, estando os valores dentro do esperado, as formas modais (possuem um acoplamento no nós das arestas) apresentam um comportamento não esperado

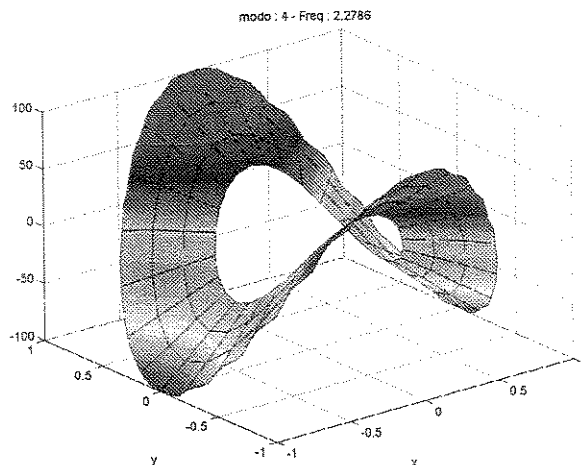


Figura 5.4: Modo (2,0) com 2 nós a mais nos elementos periféricos

Tabela 5.9: Distribuição de elementos de placa

	Elementos	
	Circulares	Radiais
Estator	171	3
Rotor	171	2

como apresentado na Fig. 5.4. Desta forma, é mais prudente refinar a malha calculada na seção 5.1.3 sem considerar os elementos periféricos, porém com a mesma quantidade de pontos no diâmetro externo. Assim, a malha foi refeita de forma que as placas do rotor e estator possuem elementos dispostos como apresentado na tabela 5.9

5.2.3 Curva característica torque por velocidade

Como já visto anteriormente na seção 5.2.1, esta etapa é feita por partes: uma para determinar o esforço axial agindo entre rotor e estator, a outra para determinar a força de atrito. Neste problema foi suposto que o motor opera com escorregamento puro, a camada de contato é considerada de espessura desprezível e rigidez a cisalhamento infinita. O desempenho do motor estimado por este método de representação é apresentado na Fig. 5.5. Pode ser observado que, como esperado, apertos menores possibilitam velocidades mais ele-

vadas, quando operando com torque nulo ou pequeno, mas apertos maiores fornecem torques mais elevados em baixas velocidades de rotação. Também deve ser salientado que este comportamento é dentro de certos limites, pois pressões de contato muito elevadas provocam uma completa acomodação do rotor sobre o estator, envolvendo completamente as ondas propagantes e impedindo o funcionamento do motor.

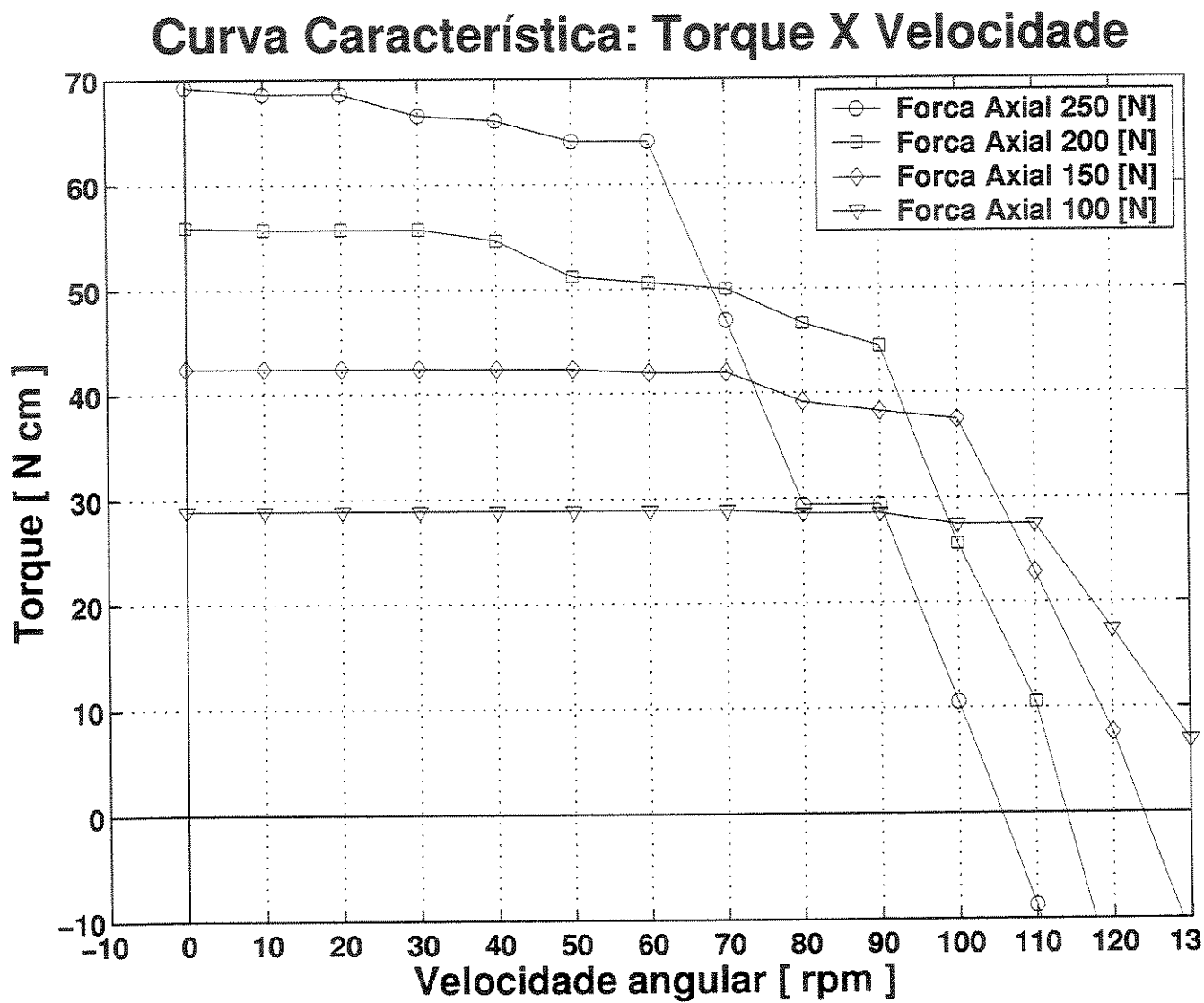


Figura 5.5: Curva torque $\times$ velocidade angular característica obtida numericamente

Capítulo 6

Análise Experimental

Esta seção busca apresentar experimentalmente o comportamento de motores ultrassônicos por ondas propagantes. Um protótipo didático foi desenvolvido e construído no laboratório de vibro-acústica do Departamento de Mecânica Computacional-FEM-Unicamp para aprimorar técnicas construtivas e buscar validar parte a formulação desenvolvida. O desempenho deste motor foi avaliado em uma bancada construída também no laboratório para este fim. Este protótipo é apresentado na seção 6.1.

Para se obter experimentalmente o desempenho de um motor ultra-sônico comercial foi utilizada uma bancada desenvolvida por Berg (1998) na *Technische Universität Darmstadt*, para extrair informações de motores ultra-sônicos industrializados. Os resultados desta etapa são apresentados na seção 6.2.

6.1 Motor por ondas propagantes sônico didático

Fabricação

- Estator

O estator foi construído a partir de dimensões preliminares adaptadas de Hirata (1995). As principais dimensões do estator são apresentadas na Tabela 6.1 e na Fig. 6.1. Para aumentar a amplitude dos deslocamentos no sentido do acionamento do motor, sem contudo aumentar a rigidez do estator, foram confeccionados dentes na superfície de contato, aumentando a distância dos pontos na superfície de contato à linha neutra. Para se chegar às dimensões foi desenvolvido um modelo tridimensional para calcular,

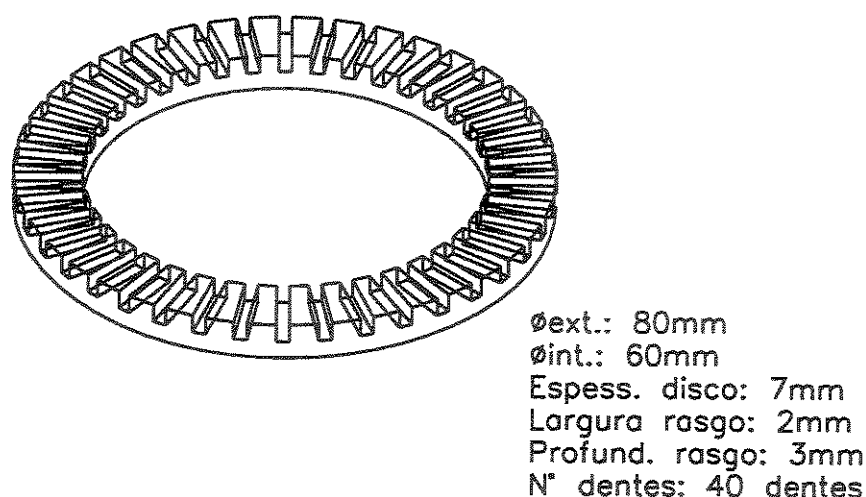


Figura 6.1: Principais dimensões do estator

pelo método de elementos finitos, as frequências naturais do estator a ser fabricado. As dimensões do estator, como por exemplo a altura do dente e a espessura do anel, foram sucessivamente modificadas neste modelo de forma que a frequência natural para o modo esperado possibilitasse o ensaio com os recursos disponíveis no laboratório. O modelo preliminar foi resolvido para a situação livre-livre. A frequência de operação foi estimada tal que ficasse isolada das frequências naturais de outros modos.

Para resolver o problema de auto-valores foi utilizado o programa ANSYS, versão 5.4, utilizando elementos sólidos com oito nós. A Tabela 6.2 apresenta, dentre as 30 primeiras frequências naturais do estator obtidas pelo método de elementos finitos, as frequências que correspondem aos modos de vibrar transversais. O modo destacado foi escolhido para ser o modo de excitação do motor em função da instrumentação disponível para excitar o estator. Esta instrumentação estava no momento limitada a uma frequência de 25,0[kHz]. A Fig. 6.2 apresenta a forma de vibrar deste modo.

Para excitar os modos adotados, com a respectiva diferença de fase angular entre si, setores de cerâmicas piezoelétricas (PZT) foram coladas à face oposta a dos dentes. Os setores de polarização apresentados na Fig. 2.4 foram substituídos por elementos cerâmicos trapezoidais com polarização única, como mostrado na Fig. 6.3. A configu-

Tabela 6.1: Principais características do estator didático

Diâmetro interno	60[mm]
Diâmetro externo	80[mm]
Altura do anel	7[mm]
Número de dente	40 dentes
Altura do dente	3 [mm]
Material Alumínio	
Módulo de Young	$69 \times 10^9 [Nm^{-2}]$
Densidade	$2800 [kgm^{-3}]$
Coefic. de Poisson	0,3

Tabela 6.2: Principais frequências naturais do estator

	Modo	Frequência [Hz]
	7-8	1819,7
	11-12	4970,0
	14-15	9254,1
Modo de operação	20-21	14512
	26-27	20584

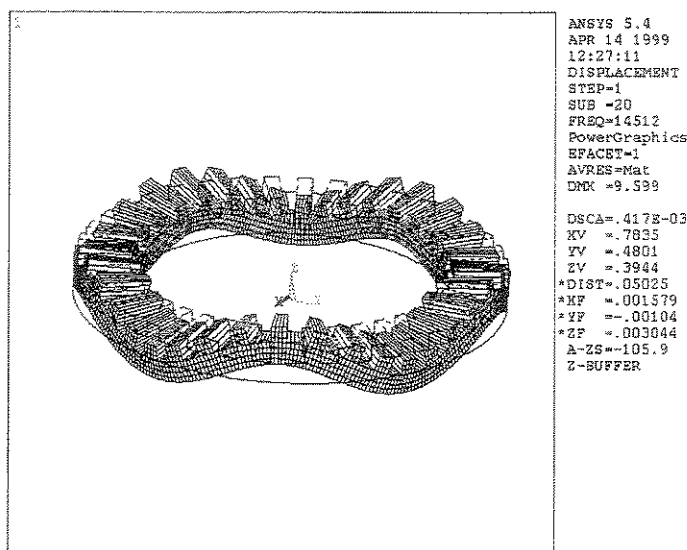


Figura 6.2: Modo de vibrar do estator

ração da polarização foi substituída por setores de trapézios colados adjacentes entre si com a polaridade invertida, como apresentado na Fig. 6.4. Os excessos cerâmicos são posteriormente lixados até as dimensões finais do estator. Todos os procedimentos de manipulação da cerâmica piezoelétrica são detalhados no apêndice A.4.

- Rotor

As dimensões do rotor foram estimadas de tal forma que o rotor fosse centrado por um eixo no suporte do motor pela mesma linha de simetria do estator, por meio de um rolamento. Ao eixo do rotor é permitido o deslizamento axial no rolamento de forma que seja possível variar a força axial. O rotor é pressionado contra o estator por um conjunto solidário: rotor, arruelas, mola e pista interna do rolamento. A deformação da mola controla a intensidade da pressão de contato. As principais dimensões do rotor são apresentadas na Fig. 6.5

- Bancada de teste

Com o intuito de obter o comportamento qualitativo do motor por onda propagantes construído, foi desenvolvida uma bancada de teste, apresentada na Fig. 6.6 composta

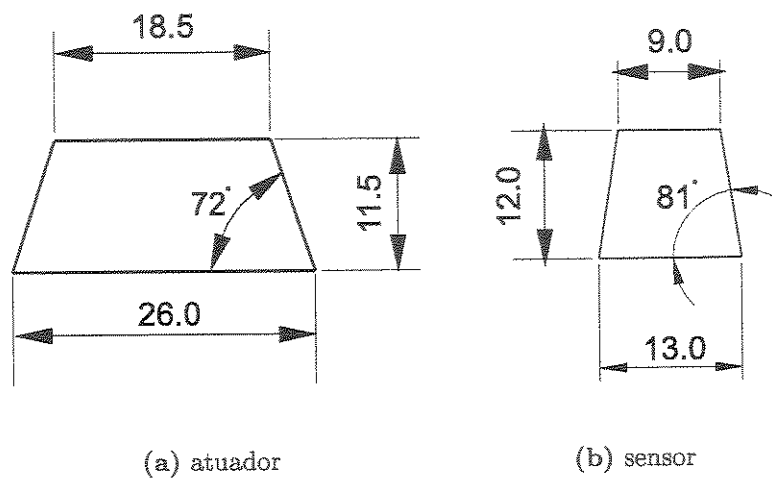


Figura 6.3: Trapézios de cerâmica piezoelétrica, (atuador e sensor)

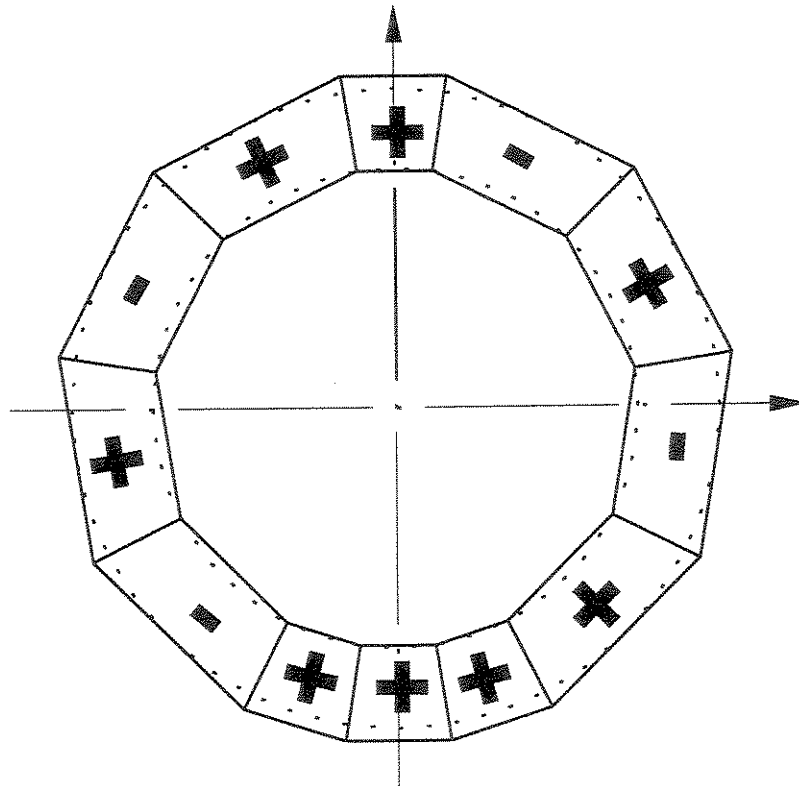


Figura 6.4: Configuração de colagem dos trapézios de cerâmica piezoelétrica

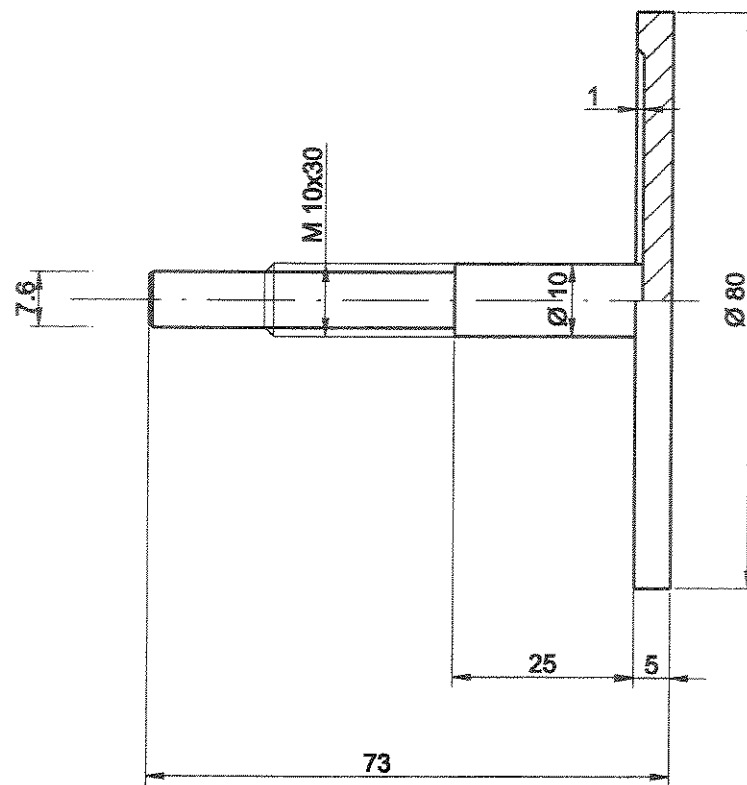
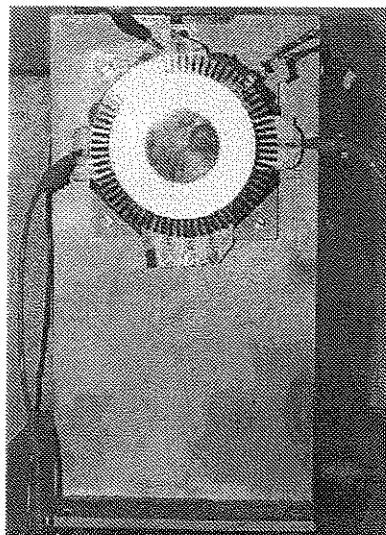
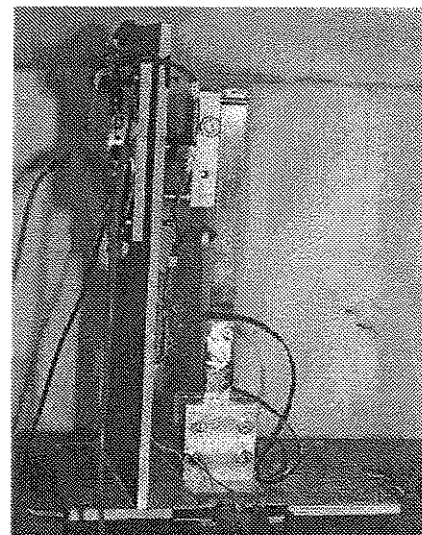


Figura 6.5: Principais dimensões do rotor



(a) Vista frontal



(b) Vista lateral

Figura 6.6: Bancada de ensaio do motor por ondas propagantes didático

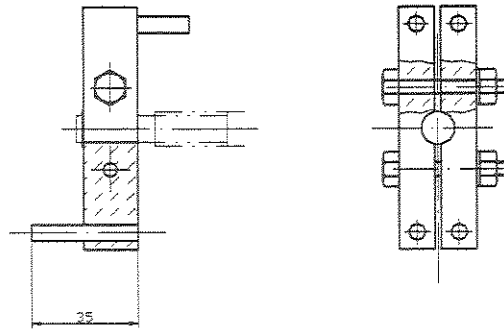


Figura 6.7: Freio passivo

de um torquímetro, um tacômetro digital e um freio passivo. O freio passivo é um dispositivo acoplado ao eixo impondo apenas restrição de atrito, deixando que o motor responda sem controle sobre a velocidade angular a ser medida. Tal dispositivo, ilustrado na Fig. 6.7, foi fabricado com um material auto-lubrificante *teflon*.

A regulação da intensidade de frenagem é controlada apenas pela pressão das duas partes do dispositivo contra o eixo do rotor, que pode ser alterada por meio de aperto de parafusos.

O tacômetro digital é constituído de um *encoder* óptico e um freqüencímetro. O *encoder* óptico é composto de papel celulósico possuindo raias que permitem a passagem de luz e raias que não permitem, como mostrado na Fig. 6.8, colado diretamente ao rotor de forma que as raias fiquem externas a ele e um circuito elétrico apresentado na Fig. 6.9 e composto de um emissor de luz e um receptor fotodiodo. O receptor recebe a luz e reage com um potencial elétrico de 5[V] e quando não recebe a luz reage com um potencial elétrico nulo. Desta forma é possível contar os pulsos num intervalo de tempo, como mostrado na Fig. 6.9(b), e medir a freqüência. Isto foi possível utilizando um freqüencímetro.

O torquímetro extrai diretamente o torque do freio por uma barra flexível instrumentada com extensômetros, como mostrado na Fig. 6.10. Esta barra é engastada em uma extremidade e recebe a força produzida pelo torque do motor pelo apalpador do freio na outra extremidade. A deformação, proporcional à força provocada pelo freio, é transformada em sinal elétrico por meio de extensômetros, podendo ser lido num

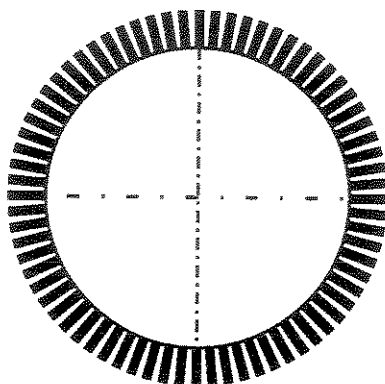
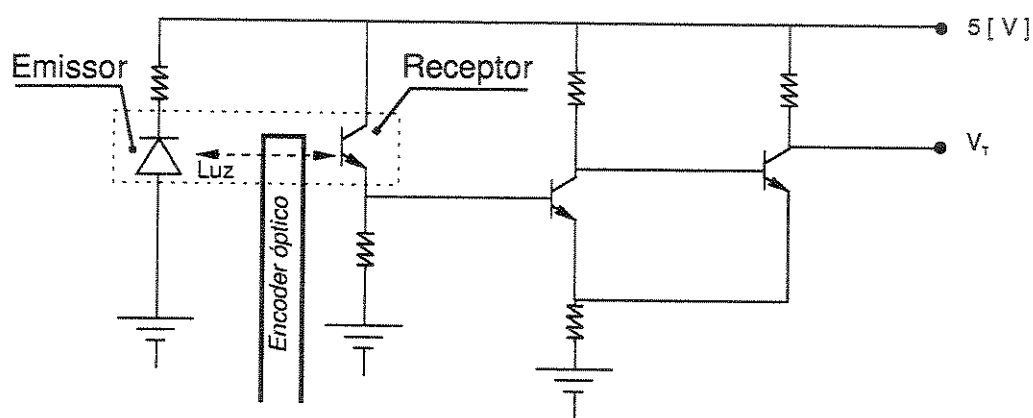
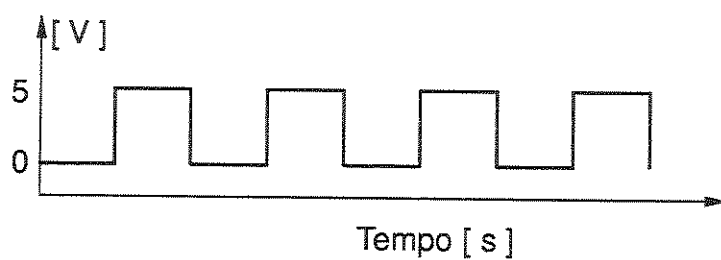


Figura 6.8: Encoder óptico



(a) circuito elétrico

(b) Sinal de resposta do *encoder*Figura 6.9: Representação esquemática circuito elétrico para o *encoder* óptico

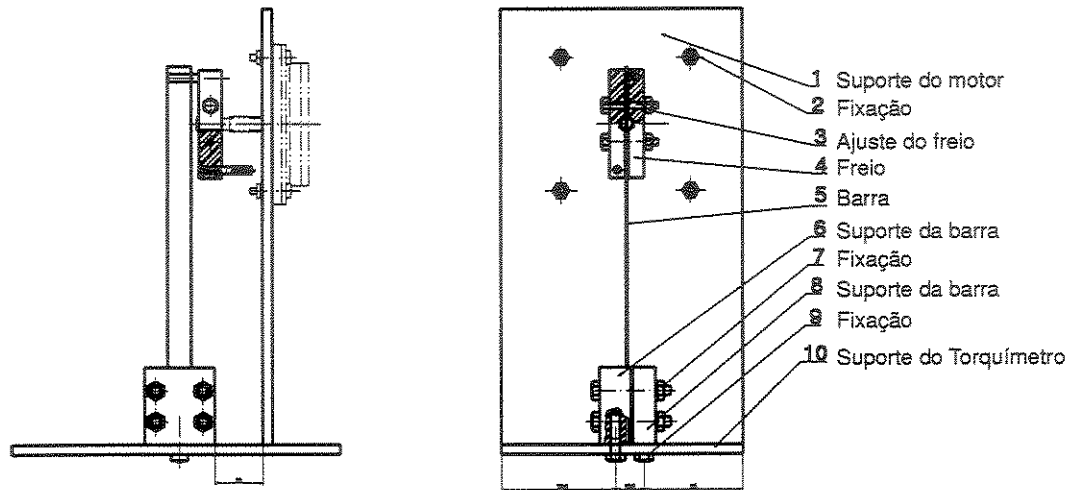


Figura 6.10: Torquímetro por barra flexível

osciloscópio.

- Sinal Elétrico

Para excitar duas ondas defasadas, foi usado um gerador de sinais com duas saídas independentes. Uma das saídas gerando uma onda em forma de seno e outra de cosenoidal. Foi também utilizado um amplificador de sinais para aumentar a potência ou amplitude da onda. Ambos sinais de excitação são regulados com a mesma amplitude de 25V, amplitude limite sem haver distorção do sinal elétrico.

- Montagem final

Um suporte com fixação tanto para o motor quanto para o torquímetro foi desenvolvido. Os equipamentos foram dispostos conforme o diagrama apresentado pela Fig. 6.1

Resposta em frequência

A frequência de interesse é da ordem de $15[kHz]$. O sistema de aquisição de sinais disponível no laboratório tinha um limite de $12[kHz]$ para fazer uma boa amostragem. Este problema foi superado pela análise da amplitude em $[V_{RMS}]$ do sinal recebido de um dos sensores quando foi feita uma varredura em frequência, para identificar as frequências de ressonância. Um dos setores dos atuadores da cerâmica foi utilizado para excitar o estator e

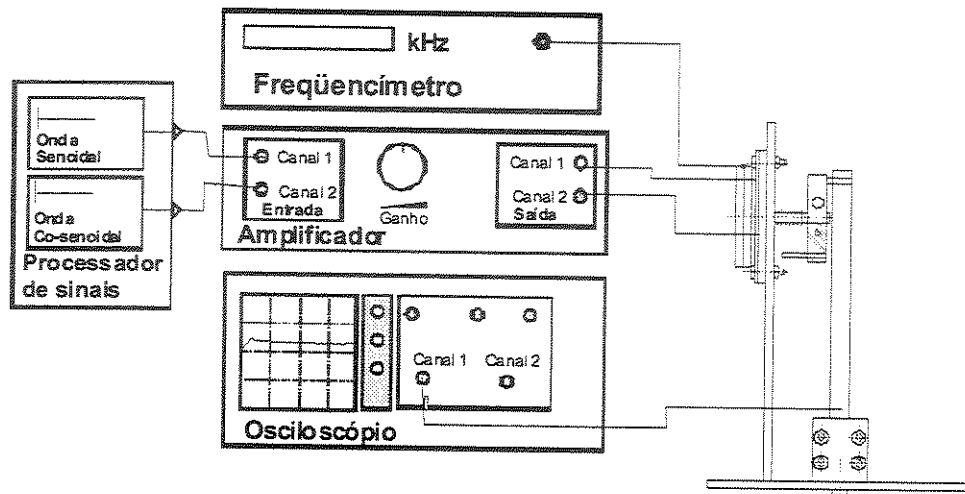


Figura 6.11: Disposição dos instrumentos de medição para o motor didático

um setor dos sensores para medir a resposta em frequência.

Três situações diferentes foram utilizadas para estimar a frequência de trabalho real. A primeira situação é a livre-livre. O estator é sustentado verticalmente por um fio de nylon. A situação seguinte é com o estator apoiado horizontalmente por uma espuma, sem o rotor. Finalmente, o estator, apoiado pela espuma, está em contato com o rotor na face superior. A Tabela 6.3 apresenta as frequências naturais experimentais obtidas nas 3 situações mencionadas. Observa-se que foi possível obter a forma modal excitando-se o estator com uma frequência próxima a estimada pelo projeto apresentada na Tabela 6.3. A influência do rotor contra o estator indica um enrigecimento do sistema mecânico devido ao contato elevando a frequência de ressonância. É interessante lembrar que a frequência de ressonância sofrerá alterações em função da pressão de contato entre estator e rotor. Portanto, o desempenho ótimo será obtido somente se a frequência de operação for adequada para cada condição de pré-carregamento.

Desempenho do motor didático

O desempenho do protótipo didático foi avaliado qualitativamente de forma sistemática. Os seguintes parâmetros foram variados na respectiva ordem ao longo do experimento: frequência de operação Ω , força pré-aplicada axial $\mathcal{P}_{axial}$ e intensidade de frenagem. O com-

Tabela 6.3: Frequências naturais do motor didático obtidas por varredura

Livre livre Frequência [Hz]	Sem rotor Frequência [Hz]	Com rotor Frequência [Hz]
1811	—	1668
4940	4956	4806
4967	—	—
6679	6677	7974
9179	9149	—
10300	10220	10280
14330	14360	15100
17100	17000	17710

portamento é ilustrado pelos gráficos apresentados nas Fig. 6.12 e Fig. 6.13. A Fig. 6.12 apresenta a influência da pressão de aperto sobre a frequência de operação Ω . Para se obter a velocidade máxima de operação, quando se acresce a pressão entre o rotor e estator, é necessário elevar a frequência de operação Ω , indicando um enrigecimento do sistema mecânico em função do aperto dado entre rotor e estator. Da mesma forma, a potência máxima de saída, quando se acresce a pressão entre o rotor e estator, é obtida com uma frequência de operação Ω maior como ilustrado na Fig. 6.13. Nesta figura é possível observar que existe uma combinação ótima de pré carregamento axial e frequência de operação, para se obter a máxima potência disponível no eixo.

6.2 Motor por ondas propagantes ultra-sônico comercial

A influência da força axial aplicada a um motor comercial foi investigado experimentalmente através de uma bancada desenvolvida por Berg (1998), na Technische Universität Darmstadt. Uma breve descrição desta bancada é apresentada no apêndice C.1. Basicamente esta bancada impõe as condições de funcionamento do motor: Torque externo aplicado τ , Força axial aplicada $\mathcal{P}_{axial}$ e a velocidade do rotor V_R .

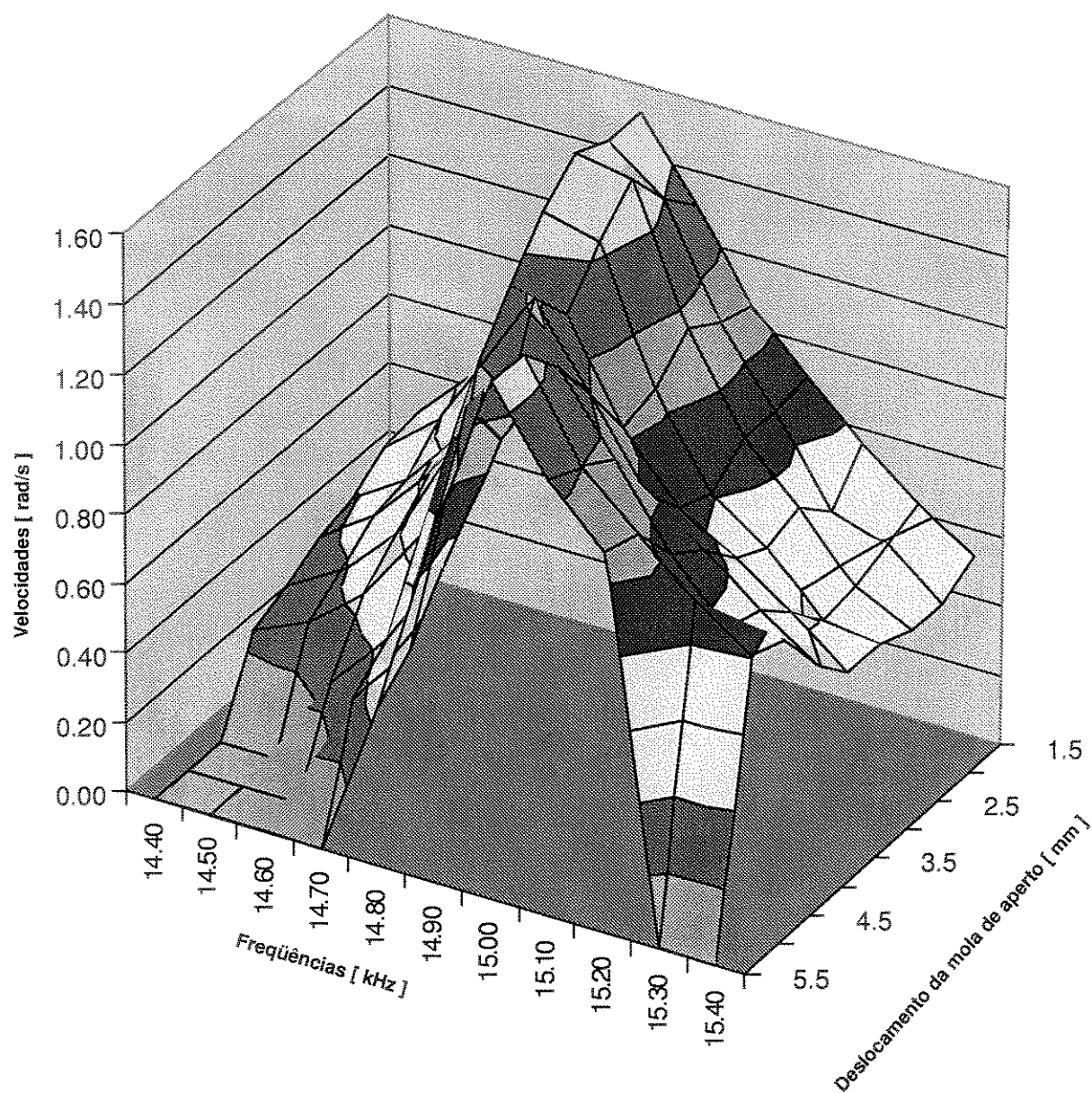


Figura 6.12: Variação da velocidade angular do motor

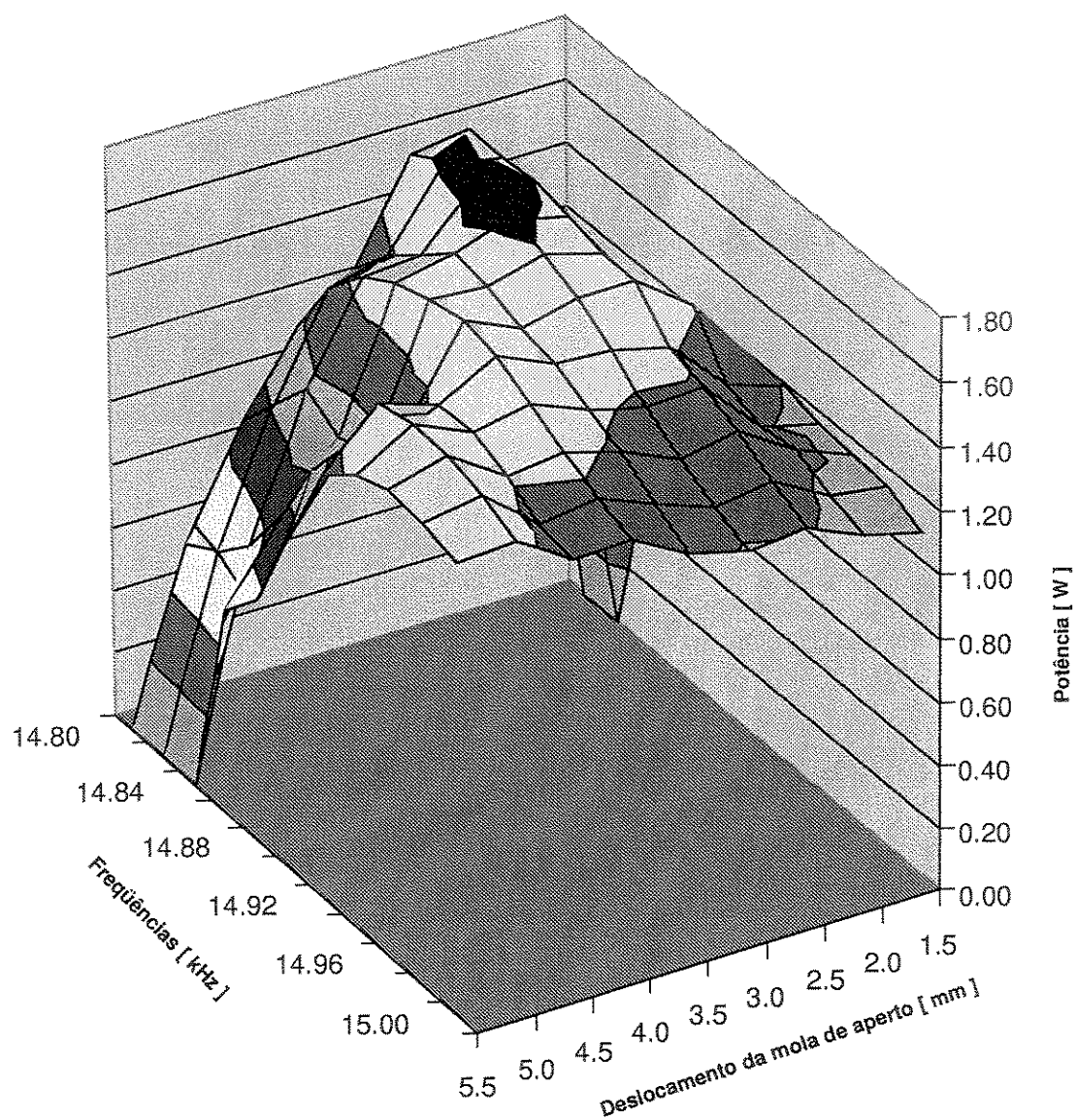


Figura 6.13: Variação da potência de saída do motor

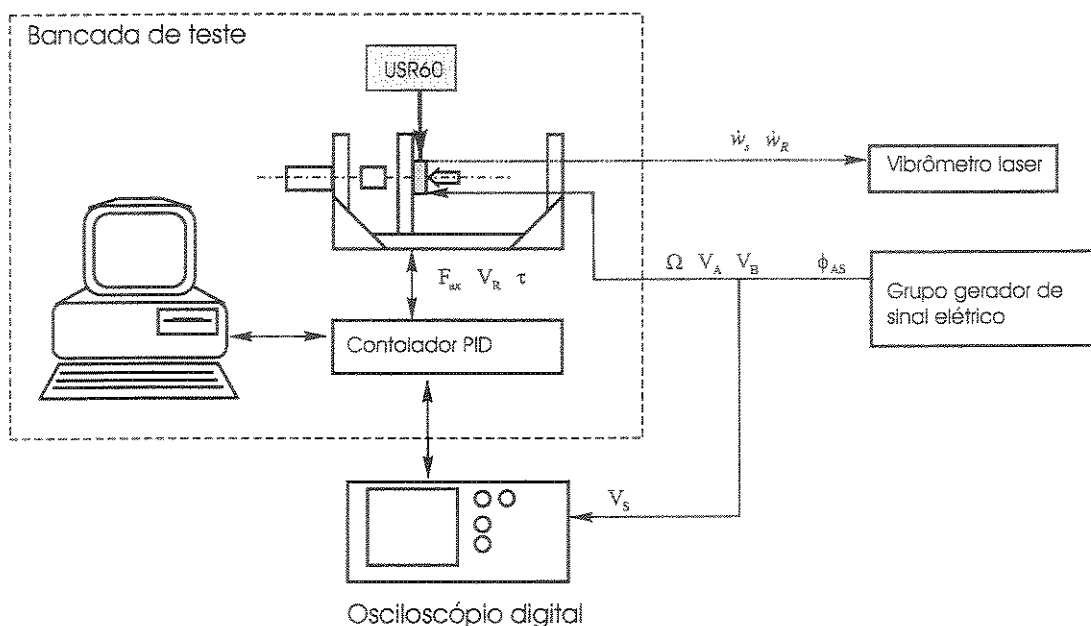


Figura 6.14: Disposição dos instrumentos de medição para motores ultra-sônicos

O motor comercial investigado foi o motor USR60 fabricado pela Shinsei Corporation modelo A1513. A experiência foi dividida em duas partes: Resposta em frequência e avaliação da curva característica *torque por velocidade*. A disposição dos equipamentos de medição é apresentada pela Fig. 6.14. As medições foram extraídas sistematicamente para quatro diferentes valores de força axial: 100[N], 150[N], 200[N] e 250[N].

6.2.1 Resposta em frequência

A resposta dinâmica do motor foi analisada através do analisador de ganho e fase da Hewlett Packard modelo 4491A. A frequência de operação do motor é em torno de 40[kHz]. Uma varredura em frequência de 38[kHz] a 47[kHz] foi feita para as quatro forças distintas. O potencial elétrico especificado pelo fabricante para o funcionamento do motor é de 120[V_{rms}], porém como a varredura em frequências cruza uma das ressonâncias do motor, a cerâmica poderia ser danificada devido ao deslocamentos em flexão do estator. Como o interesse é observar o comportamento do motor para diferentes forças axiais foi utilizado uma excitação de uma voltagem menor e suficiente para que o motor funcionasse, 53 [V_{rms}]. Este procedi-

mento permitiu avaliar a influência da força axial na resposta em frequência ilustrada pela Fig. 6.15.

A resposta em frequência do motor se mostrou não linear. O modelo proposto leva em consideração a não linearidade, porém na obtenção dos resultados não foi levada em consideração o deslocamento da frequência ótima de operação devido à presença de não linearidade. Esta não linearidade diminui quando a pressão de contato é maior, pois o sistema estator e rotor tende a ficar solidário (uma peça só), porém nesta situação o motor não opera.

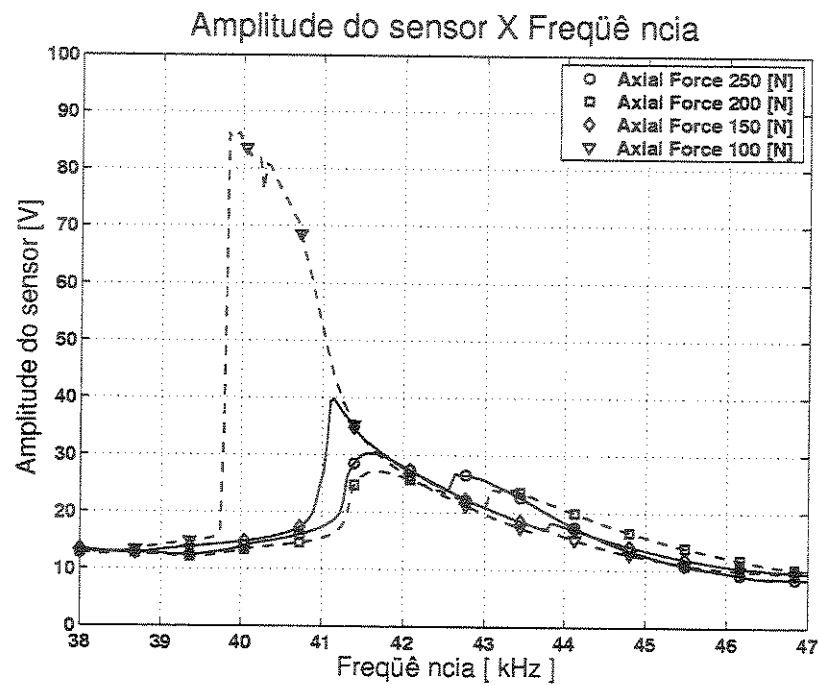
6.2.2 Torque por velocidade característica

A influência da força axial aplicada ao motor sobre seu desempenho é analisada neste trabalho através de uma curva característica tomada para cada força axial aplicada.

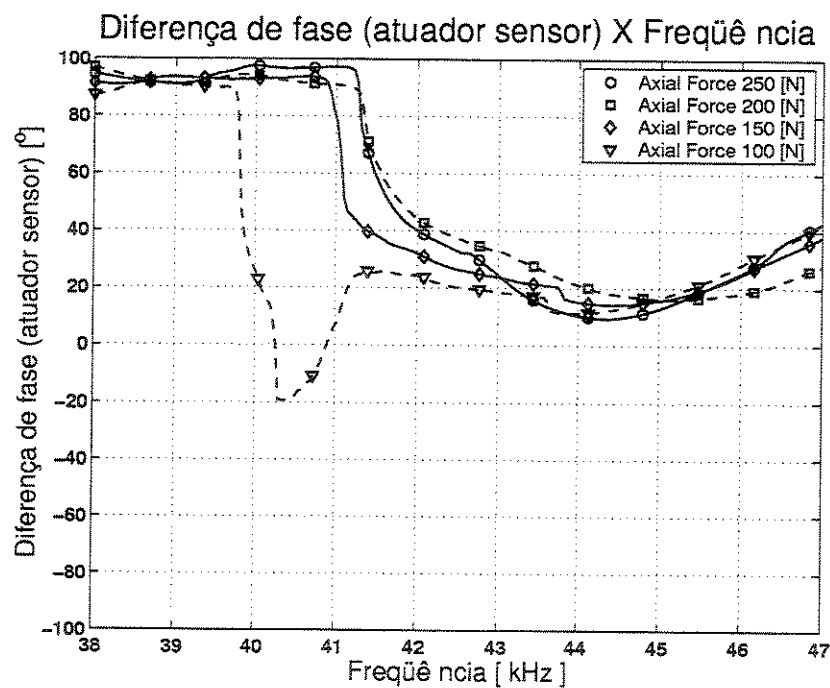
Para garantir que o único parâmetro de avaliação fosse a força axial, a fonte controladora do motor foi substituída por um conjunto: gerador de sinais, modificador de fase e dois amplificadores idênticos.

A frequência de operação do motor é próxima a de ressonância, mas o fabricante utiliza uma frequência ligeiramente superior para garantir a integridade da cerâmica enquanto o motor estiver em operação. Apesar de o fabricante utilizar 120 $[V_{rms}]$ para excitar as cerâmicas, nesta etapa da experiência o motor foi alimentado por um potencial elétrico de 106 $[V_{rms}]$ para garantir sinais senoidais conhecidos sem distorção, devido a limitações dos instrumentos utilizados para gerar o sinal.

As curvas características ilustradas pelas Fig. 6.16, Fig. 6.17 e Fig. 6.18 foram extraídas para diferentes frequências de operação.



(a) Resposta em frequência



(b) Diferença de fase

Figura 6.15: Comportamento de um motor ultra-sônico por ondas propagante sem torque aplicado

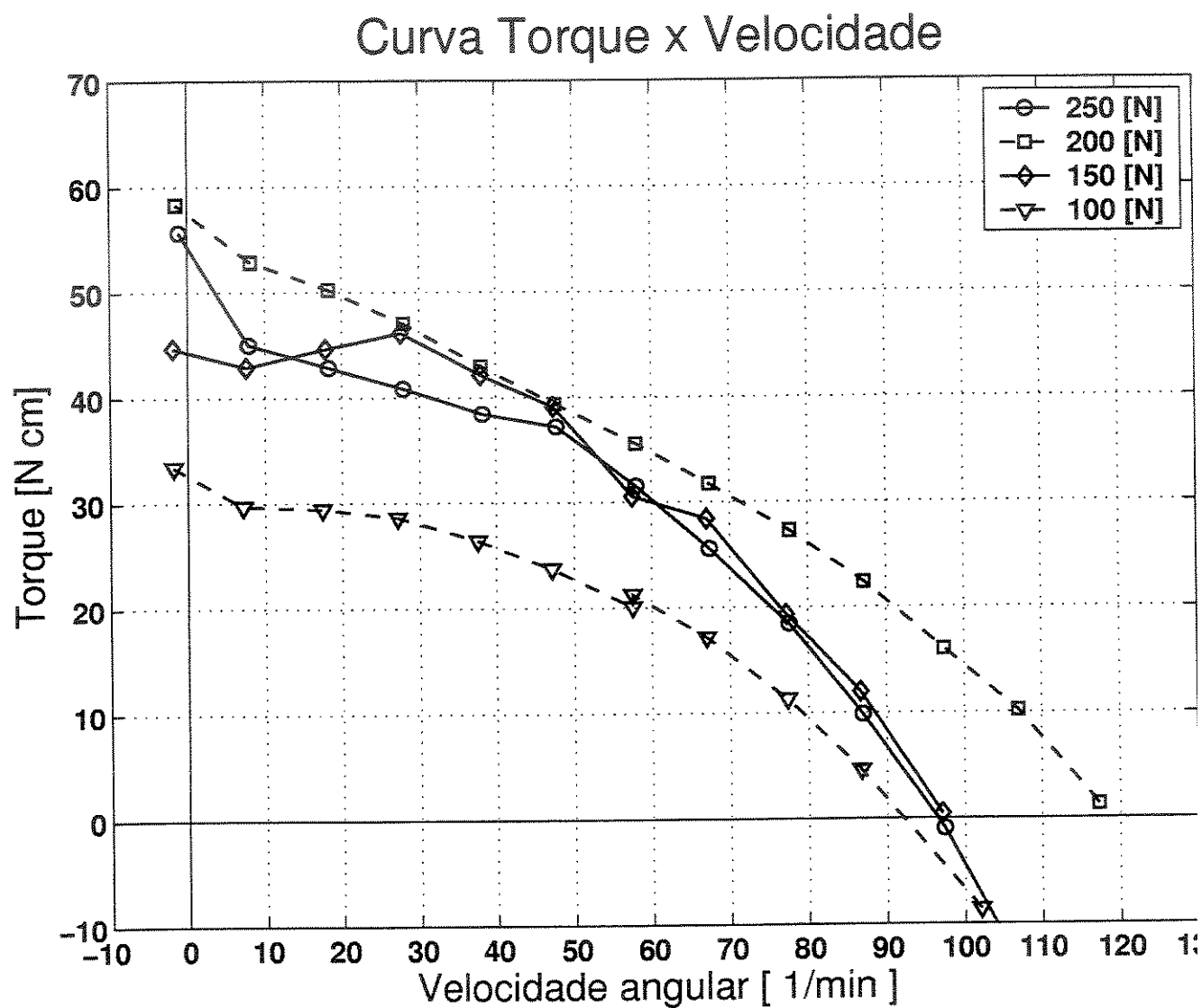


Figura 6.16: Desempenho de um motor ultra-sônico por ondas propagante para a frequência de operação de 40,4 kHz

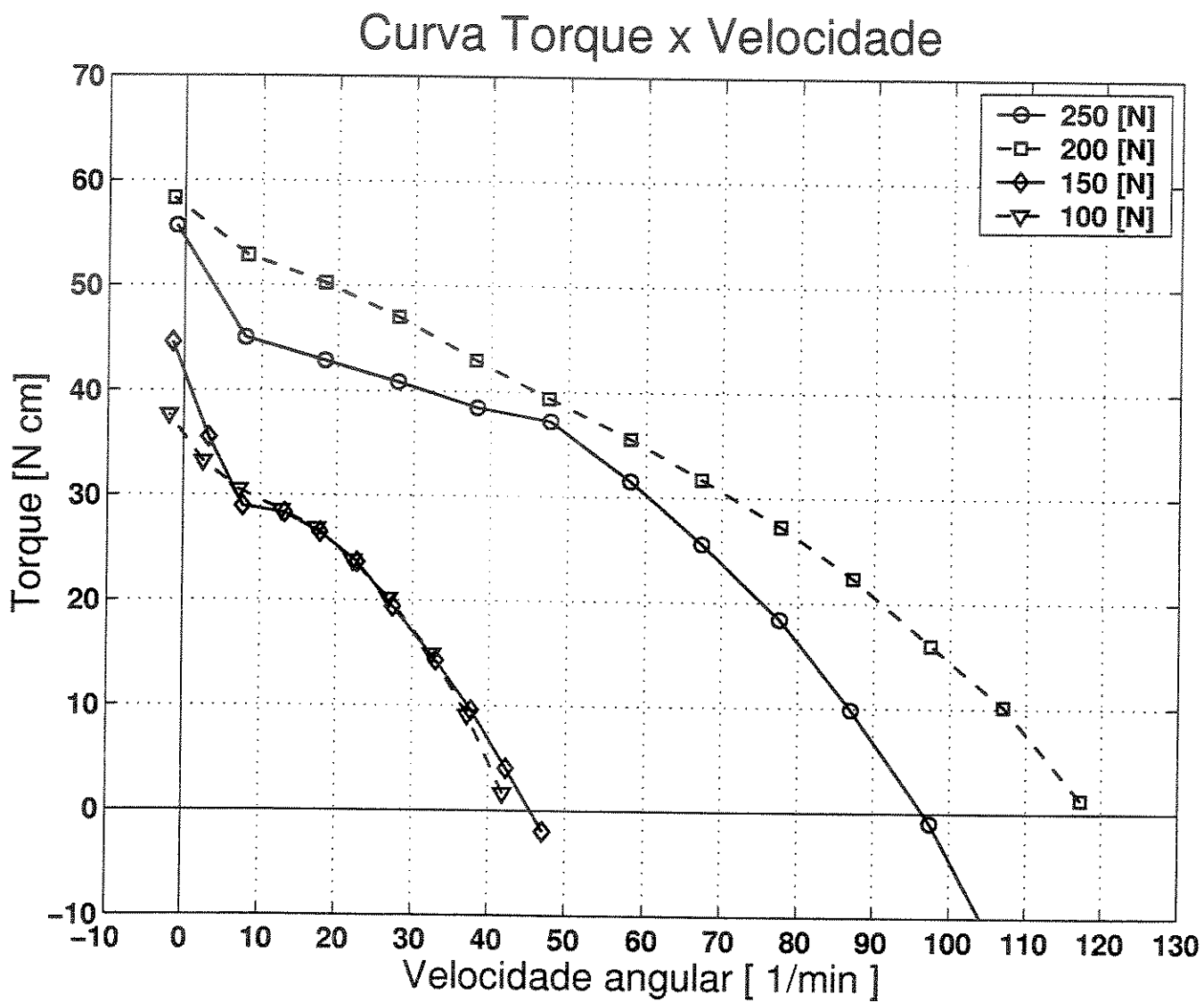


Figura 6.17: Desempenho de um motor ultra-sônico por ondas propagante para a frequência de operação de 41,4 kHz

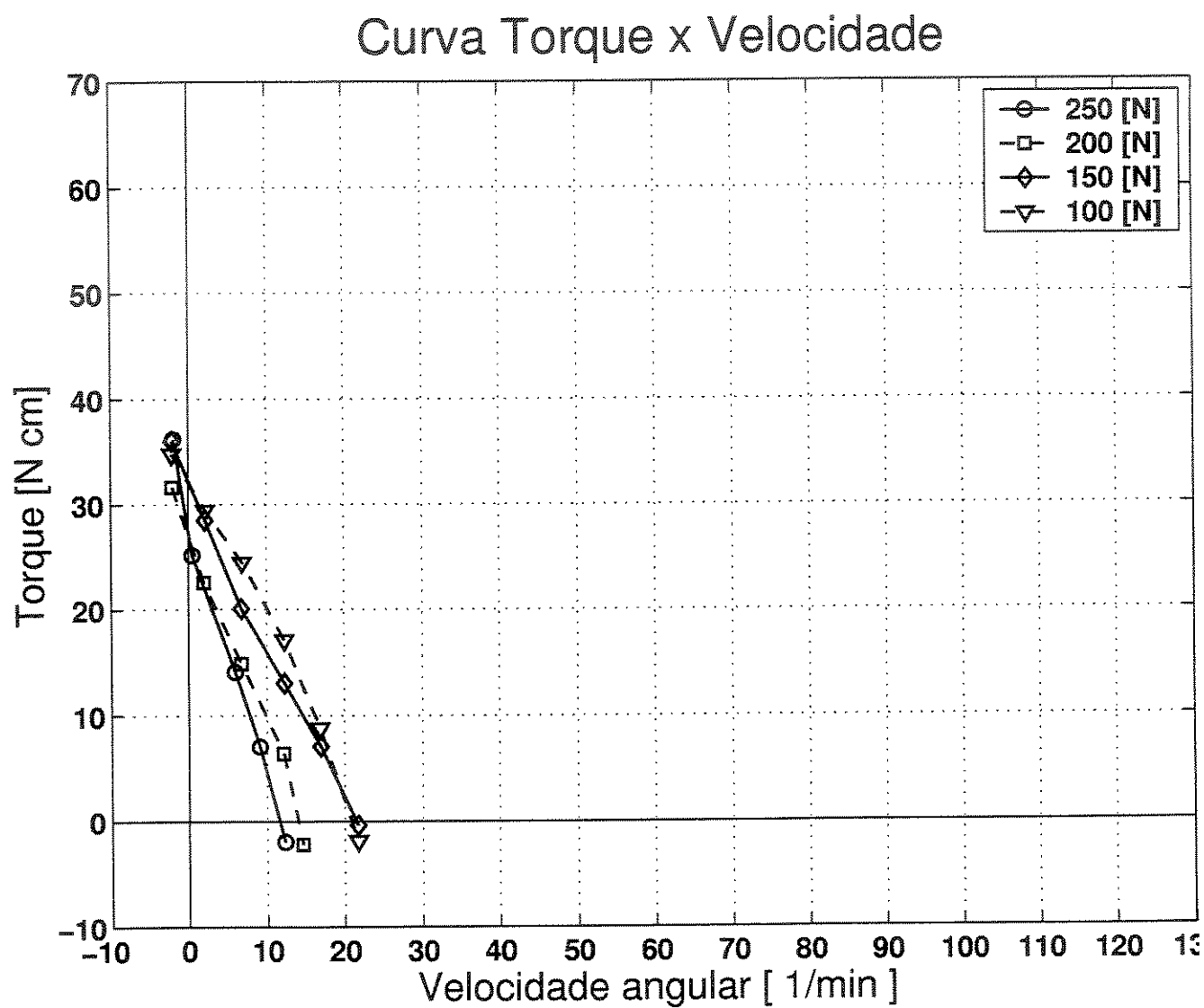


Figura 6.18: Desempenho de um motor ultra-sônico por ondas propagante para a frequência de operação de 42,3 kHz

Capítulo 7

Comparação entre os resultados numéricos e experimentais

As curvas *torque* $\times$ *Velocidade* característica obtidas numericamente possuem um comportamento similar ao da curva obtida experimentalmente. A interpolação entre as velocidades depende da quantidade de nós periféricos. Assim, mesmo que se aumentasse o número de velocidades simuladas numericamente no modelo, a curva apresentaria uma forma discretizada por degraus.

As diferenças entre as curvas podem estar relacionadas a parâmetros desprezados no modelo, como por exemplo a viscoelasticidade da camada de contato e o fenômeno de *stick-slip* ou a própria determinação do coeficiente de atrito, a serem investigadas. Porém, provavelmente a maior fonte de erro decorre da não correção no modelo numérico da frequência de ressonância, que é alterada pela condição de contato. O efeito deste deslocamento de frequência pode ser avaliado observando as curvas das Fig. 6.15. É possível observar que para uma mesma frequência de operação, cada condição de aperto coloca o motor em uma condição diferente da curva de resposta em frequência, devido à não-linearidade introduzida pelo contato. Para levar em conta este fator seria necessário acrescentar mais um *looping* ao programa, aumentando o custo de processamento.

Mesmo sem considerar esta correção, é possível concluir que o procedimento proposto para modelagem fornece informações bastante precisas do comportamento a ser esperado do motor, ainda na fase de projeto.

As curvas experimentais obtidas para o motor *Shinsei* não mostraram que apertos menores permitem atingir velocidades de rotação mais elevadas, como previsto pelas simulações realizadas com o modelo matemático. Porém, os resultados experimentais obtidos com o motor didático na bancada desenvolvida no DMC/FEM/UNICAMP mostram claramente esta característica, como pode ser observado nas Fig. 6.12. E analisando conjuntamente as Fig. 6.12 e Fig. 6.13 é fácil concluir que o torque atingido com apertos menores é, também, menor.

O coeficiente de atrito foi ajustado para se obter a curva característica *torque* $\times$ *Velocidade* similar àquela tomada experimentalmente, seguindo o procedimento de Maeno & Bodgi (1992), já que a bancada utilizada para o ensaio do motor ultra-sônico não estava preparada para determinar o coeficiente de atrito. O coeficiente de atrito utilizado foi de

$$\mu = \mu_e = \mu_d = 0,25 \quad (7.1)$$

Capítulo 8

Conclusão e sugestões para trabalhos futuros

Este trabalho abre a discussão sobre a representação do funcionamento do motor ultrassônico por ondas propagantes utilizando o modelo de placas para ambos componentes em contato, estator e rotor. A solução deste problema possibilitou estimar os valores dos parâmetros de operação obtidos experimentalmente. Todavia, alguns fenômenos que podem afetar as condições de funcionamento ainda não puderam ser modeladas, como por exemplo o fenômeno *Stick Slip*.

A solução pelo método de elementos finitos aplicado ao sistema não-linear não convergiu para algumas situações. As matrizes, após algumas iterações, tornavam-se mal-condicionadas. Talvez o uso de outras funções de forma para os elementos periféricos possam melhorar a acuracidade e robustez do modelo. É possível, também, experimentar outros métodos iterativos para a solução do problema de contato, tirando proveito das características particulares do caso (em especial as condições de simetria) e sem utilizar penalização. É provável que seja possível alcançar significativa economia de tempo, sem perda de precisão.

O número de graus de liberdade é muito grande, pois o rotor e o estator são tratados utilizando elementos de placa com um refinamento denso no interior inclusive, quando seria suficiente este refinamento apenas nos elementos periféricos. Soma-se a isto, a necessidade de incluir graus de liberdade na região de contato. Isto torna o processo iterativo de resolução do problema de contato demasiadamente demorado. Esta é mais uma razão para a utilização de simetria da onda, que tem um comportamento periódico.

Os resultados obtidos em Darmstadt indicam a necessidade de um estudo mais aprofun-

dado na busca de soluções para a definição da força axial ótima e da frequência de operação ótima para este tipo de motor.

A construção do protótipo possibilitou o desenvolvimento de técnicas próprias de manipulação piezoelétrica. Foi possível com este protótipo verificar a influência da força axial pré aplicada sobre o desempenho do motor.

Parece interessante estudar as aplicações destes motores em ambientes inóspitos ao homem, como por exemplo a sua utilização em equipamentos de exploração espaciais.

Apêndice A

Piezoelasticidade

A.1 Princípio

O fenômeno da piezoelasticidade ocorre numa certa classe de cristais anisotrópicos quando estão sujeitos a uma deformação, como apresenta Su (1998). O fenômeno se deve a um desequilíbrio elétrico molecular ocorrido quando o cristal se deforma, como ilustrado na Fig. A.1. Há, então, um deslocamento de cargas elétricas no cristal para recompor o equilíbrio. Quando esta estrutura é submetida a um campo elétrico, ocorre o efeito contrário, ela se deforma. Da mesma forma, ocorre um desequilíbrio elétrico na molécula cristalina de modo que o cristal se deforma para recompor este equilíbrio elétrico.

A primeira publicação deste fenômeno cristalográfico foi feita por Curier (1880). O efeito piezoelétrico em estruturas policristalinas foi descoberto por Cady (1946). Os cientistas descobriram que embora alguns materiais policristalinos inicialmente não apresentavam propriedades piezoelétricas macroscópicas passavam a tê-las após serem submetidos a um campo elétrico E . Os cristais destas estruturas apresentando propriedades piezoelétricas com polaridades elétricas aleatórias como ilustra a Fig. A.2 não perturbavam o sistema global, pois o efeito de um cristal anula o efeito do outro na média. Após estes cristais serem submetidos a um campo elétrico forte passam a ter propriedades piezoelétricas porque tem suas polaridades orientadas na direção do campo elétrico. Este processo de orientação elétrica é conhecido como polarização.

Uma particular família de estrutura policristalinas com estas propriedades é a estrutu-

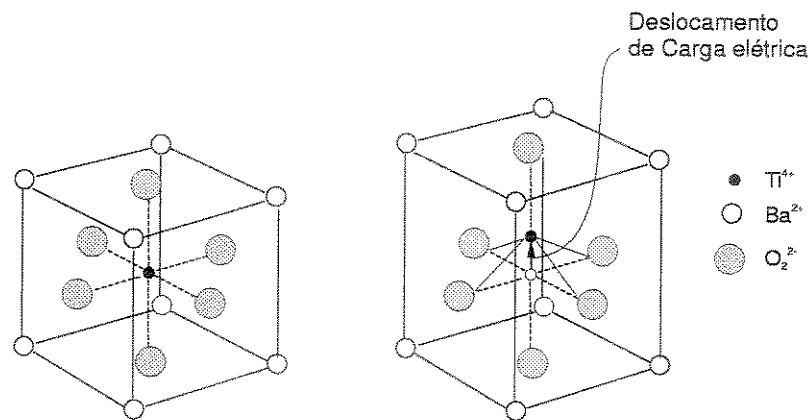


Figura A.1: Deslocamento elétrico em cristais piezoelétricos de titanato de bário BaTiO_3

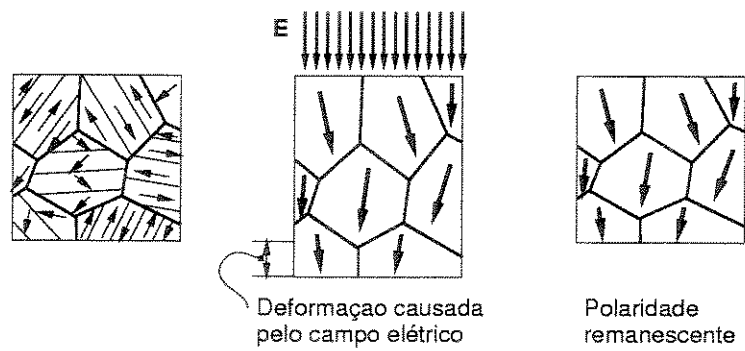


Figura A.2: Polarização piezoelétrica de uma estrutura policristalina

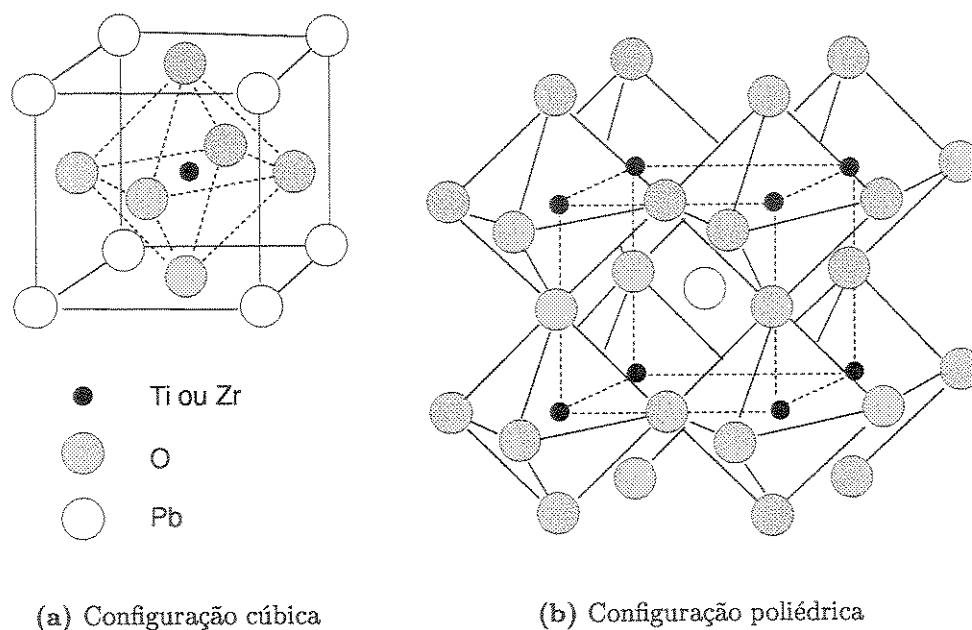


Figura A.3: Estrutura básica do cristal PZT

ra perovskita, como o Titanato de Bário TiBaO_3 , esquematizado na Fig. A.1. Uma solução sólida composta por duas destas estruturas cristalinas, Titanato de Chumbo TiPbO_3 e Zirconato de Chumbo ZrPbO_3 , quando estão a uma particular composição Ti/Zr de 52/48, apresentam uma estrutura policristalina como esquematizado na Fig. A.2. Esta particular configuração permite campos de polarizações em mais de 14 orientações diferentes. Isto faz que esta estrutura possua uma excepcional qualidade de polarização. Esta estrutura é conhecida como cerâmica piezoelétrica. Su (1998) apresenta um dos processos de obtenção desta cerâmica. A seguir será discutido o processo de polarização utilizado para que a cerâmica possua algumas características dinâmicas desejadas.

A.2 Polarização

Polarização é um processo pelo qual um material piezoelétrico é submetido a um campo elétrico superior a um campo elétrico coercivo. O campo elétrico coercivo é o limite no qual a aplicação de campo elétrico não altera as propriedades em função do histórico do material. Ou seja quando um material piezoelétrico for submetido a um campo elétrico inferior a este, não sofre nenhuma alteração após a retirada do campo elétrico.

Alguns materiais possuem um comportamento histerético, como é o caso das cerâmicas piezoelétricas. Estes materiais são conhecidos como materiais ferroelétricos. Estes materiais apresentam uma polarização remanescente proporcional à voltagem aplicada para conseguir um campo elétrico acima do coersivo.

A polarização máxima é atingida quando o campo elétrico aplicado for maior que o campo elétrico máximo. Acima deste campo elétrico, a estrutura piezoelétrica não sofre mais alteração alguma.

Um material piezoelétrico possui propriedades capacitivas, sua permissividade ϵ_o é muito pequena, o que o torna um material pouco condutor. Assim é possível polarizar apenas uma região de estruturas policristalinas. Ou melhor é possível setorizar a polarização.

Um exemplo de setorização é o apresentado por Sashida (1993) na preparação da cerâmica piezoelétrica para ser colada ao estator. O eletrodo de uma das faces é seccionado pela configuração de polarização desejada. A cada um dos setores de polarização é aplicado um campo elétrico entre 4 a 5[kVmm⁻¹], sendo que para a polaridade negativa o campo elétrico, também tem sua polaridade invertida.

A.3 Modelo linear

As equações da teoria clássica da eletrodinâmica são conhecidas como as equações de Maxwell

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}, \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}, \quad (\text{A.2})$$

sendo $\mathbf{D}$ o vetor de deslocamento elétrico, $\mathbf{E}$ o vetor de intensidade de campo elétrico, $\mathbf{P}$ o vetor de polarização dielétrica, $\mathbf{M}$ o de magnetização, $\mathbf{B}$ o vetor de fluxo magnético e $\mathbf{H}$ a entalpia.

Na piezoeletricidade, segundo Tiersten (1969), o material pode ser considerado apenas polarizável, não magnetizável $\mathbf{M} = 0$, como uma boa aproximação. O campo elétrico pode ser considerado como quasiestático quando

$$\frac{\omega}{c} \ll |k_i|, \quad (\text{A.3})$$

sendo que c corresponde a velocidade da luz e k_i o número de onda.

Nesta condição as equações de Maxwell Eq. (4.43) podem ser resumidas à

$$\text{rot}(\mathbf{E}) = \mathbf{0} \quad , \quad (\text{A.4})$$

$$\text{div}(\mathbf{D}) = 0 \quad . \quad (\text{A.5})$$

Definindo entalpia H a grandeza que relaciona as forma de energia como

$$H = U - E_i D_i \quad i = 1, 2, 3 \quad ; \quad (\text{A.6})$$

e diferenciando-se em relação ao tempo tem-se

$$\dot{H} = \dot{U} - \dot{E}_i D_i - E_i \dot{D}_i \quad , \quad (\text{A.7})$$

sendo a variação da energia interna $\dot{U}$ determinada pela primeira lei da termodinâmica para meios piezoelétricos como

$$\dot{U} = T_{ij} \dot{S}_{ij} + E_i \dot{D}_i \quad , \quad (\text{A.8})$$

onde T_{ij} é tensão interna. A Eq. (A.7) pode ser escrita por

$$\dot{H} = T_{ij} \dot{S}_{ij} - D_i \dot{E}_i \quad . \quad (\text{A.9})$$

A Eq. (A.7) também pode ser escrita por

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial S_{ij}} \dot{S}_{ij} + \frac{\partial H}{\partial E_{ij}} \dot{E}_{ij} \quad , \quad (\text{A.10})$$

sendo Eq. (A.9) e Eq. (A.10) idênticas, obtém-se $\mathbf{T}$ e $\mathbf{D}$:

$$T_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial H}{\partial S_{ij}} + \frac{\partial H}{\partial S_{ji}} \right) \quad , \quad (\text{A.11})$$

$$D_i = - \frac{\partial H}{\partial E_i} \quad . \quad (\text{A.12})$$

Como se está interessado nos termos lineares, a forma quadrática da entalpia pode ser escrita como

$$H = \frac{1}{2} c_{ijkl}^E S_{ij} S_{kl} - e_{ijk} E_i S_{jk} - \frac{1}{2} \epsilon_{ij}^S E_i E_j \quad . \quad (\text{A.13})$$

Das Eqs. (A.12) e Eq. (A.13) pode-se obter as relações constitutivas lineares para materiais piezoelétricos:

$$T_{ij} = c_{ijkl}S_{kl} - e_{kij}E_k \quad , \quad (A.14)$$

$$D_i = e_{ikl}S_{kl} - \epsilon_{ik}E_k \quad . \quad (A.15)$$

A.4 Manipulação de cerâmicas piezoelétricas

A cerâmica piezoelétrica é muito fina. Por ser cerâmica, é muito frágil quando submetida a um momento fletor concentrado. São materiais que possuem certas propriedades desejadas. Porém, se não houver uma manipulação adequada algumas destas propriedades podem não ser alcançadas ou mesmo perdidas. Algumas técnicas utilizadas neste trabalho foram aprimoradas das apresentadas por Lima (1999) .

A.4.1 Corte da Cerâmica

- Colocar a cerâmica piezoelétrica em uma superfície rígida, lisa e isolante, como o vidro por exemplo. Separar a cerâmica na superfície com um filme de fluido volátil como o álcool.
- Esperar o fluido evaporar até que a cerâmica piezoelétrica seja aderida pela superfície de apoio.
- Marcar com caneta de ponta porosa, uma das faces para identificar posteriormente a polaridade.
- Traçar a geometria dos setores piezoelétricos.
- Cortar primeiramente o filme de eletrodo para não haver curto circuito entre as faces metálicas.
- Cortar, então, a cerâmica piezoelétrica com um objeto cortante bem afiado.
- Até o momento a cerâmica deverá permanecer ascentada na superfície, devendo se soltar após o corte. Este procedimento protege a cerâmica contra eventuais carregamentos concentrados que poderiam quebrar a cerâmica.

- Os setores piezoelétricos cortados são, então, fixos por duas superfícies lisas e isoladas para o acabamento final com o lixamento.

A.4.2 Colagem da Cerâmica

A colagem de cerâmicas piezoelétricas em estruturas metálicas precisa de uma cola que suporte esforços de cisalhamento. Lima (1999) e Friend (1998) apresentam estudos sobre os diversos tipos de cola a serem usados. Neste trabalho foi adotada uma cola a base de epóxi com o tempo de cura de 24[h]. A seguir são apresentados os procedimentos empregados para colagem dos setores piezoelétricos com configuração apresentada na Fig. 6.4 no estator:

- Obter graficamente a configuração geométrica da polarização.
- Fixar a configuração em uma superfície rígida e lisa.
- Cobrir a configuração com papel celulósico transparente, para que a cola não se fixe na superfície rígida.
- Colar fitas dupla faces nos papéis celulósicos no lugar geométrico dos setores piezoelétricos.
- Fixar uma das faces dos setores piezoelétricos à fita dupla face, tomando cuidado de que a polaridade de cada setor piezoelétrico corresponda a polaridade indicada pela configuração.
- Lixar com uma lixa fina e limpar com desengordurante a superfície a ser colada.
- Preparar a cola e espalhar ao longo da superfície do estator e dos setores piezoelétricos
- Assentar com cuidado o estator no mesmo eixo de simetria da configuração.
- Pressionar o estator com um peso superior a dois quilos.
- Esperar pelo processo de cura da cola, superior a 24[h].
- Após a colagem retirar o papel celulósico bem como a fita dupla face colada ao estator.
- Lixar as partes excedentes da configuração trapezoidal.

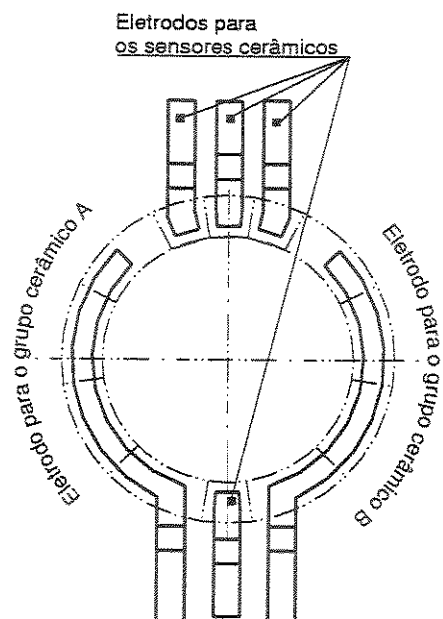


Figura A.4: Condutores elétricos para motor por ondas propagantes

A.4.3 Colagem dos Eletrodos

Alguns fabricantes de materiais piezoelétricos, como a Piezosystem, fornecem instruções de soldagem dos eletrodos aos condutores elétricos. Uma alternativa, também, é a utilização de fitas adesivas condutivas como a fabricada pela empresa 3M (2002). Optou-se por um processo de solda a frio, ou melhor colagem dos terminais do eletrodo aos condutores com uma cola a base de epóxi com resíduos de prata fabricada pela empresa RS Components (2002).

Os condutores elétricos foram manufaturados em alumínio fino, com uma configuração apresentada na Fig. A.4. Esta configuração é apropriada para conduzir a energia elétrica aos setores piezoelétricos.

Apêndice B

Motor ultra-sônico comercial

A especificação do motor USR60 fabricado pela empresa Shinsei (2002) visto na Fig. B.1 é apresentada na tabela a seguir

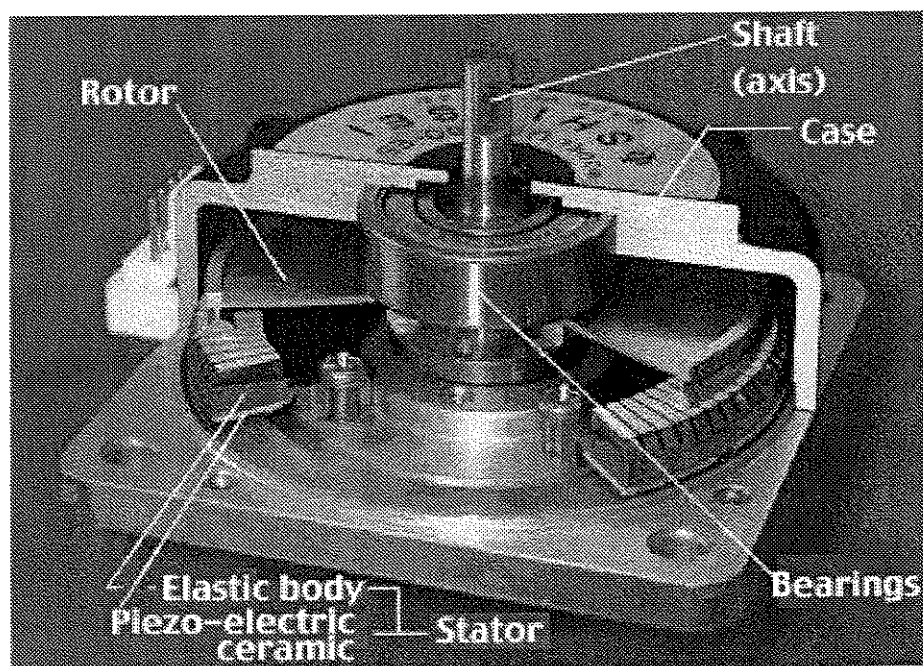


Figura B.1: Motor ultra-sônico Shinsei USR60

Tabela B.1: Características físicas do motor ultra-sônico USR fabricado pela Shinsei

frequência de operação	40 kHz
Voltagem de operação	120 Vrms
torque	0,5 Nm
potência de saída	5,0 W
Velocidade angular	100 rpm
Torque máximo	1 Nm
Tempo de Partida	1 ms
direção de operação	Horário e antihorário
tempo de vida útil	1000 h
peso	230 gr

Apêndice C

Instrumentos mais importantes

C.1 Bancada de ensaios para motores ultra-sônicos

A bancada de teste de motores ultra-sônicos foi desenvolvida por Berg (1998) no *Institut für Mechanik* da *Technische Universität Darmstadt* para verificação dos modelos de funcionamento dos motores, como por exemplo de Schmidt (1999) e de Sattel (1999), e também verificar as condições de funcionamento do motor ultra-sônico com estator cilíndrico PI PM-328 desenvolvido pela empresa PI Ceramics. Detalhes sobre este motor e sobre a construção da bancada de ensaios podem ser encontrados na tese de doutorado de Berg (2001). Uma breve descrição dos componentes será dado nesta seção.

A bancada é constituída de componentes ativos de controle e componentes passivos:

Componentes ativos:

- Controle de Velocidade,
- Controle de Torque aplicado,
- Controle de Força axial.

Componentes passivos

- Sensor de Velocidade,
- Sensor de Torque aplicado,
- Sensor de Força axial.

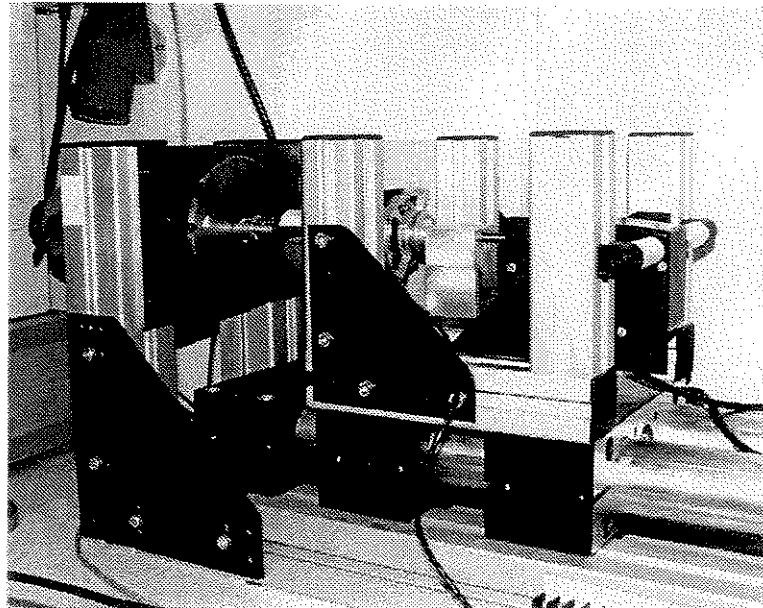


Figura C.1: Bancada para medir o desempenho de motores ultra-sônicos

A bancada pode ser vista na Fig. C.1.

Os controles ativos são executados através de uma placa conversora "AD-DA" de sinais. A placa ME-300 fabricada pela empresa Meinhauss e dois programas em linguagem Visual Basic, gerenciam a intensidade fornecida a um motor de corrente contínua e a um motor com movimento linear de saída. O motor de corrente contínua com a corrente controlada, simula um freio que garantem as características desejadas de operação do motor para o ensaio: velocidade constante ou torque resistivo constante. Da mesma forma, o motor com movimentação linear impõe a força axial pré-aplicada desejada ao estator.

Os sinais de velocidade angular, torque e força axial são monitorados pelos componentes passivos. A velocidade é monitorada por um encoder proporcional acoplado diretamente ao motor de corrente contínua, que fornece o valor da velocidade instantaneamente à placa conversora. O torque é medido por um torquímetro MWA-WO10 fabricado pela empresa Holger Clasen para torques de até 15 [Nm]. A força axial foi medida por uma célula de carga ilustrada na Fig. C.2 desenvolvida pelo laboratório. Os sinais recebidos pela placa ME-300 são processados pelo programa respectivo de controle e retorna o sinal de controle para os motores.

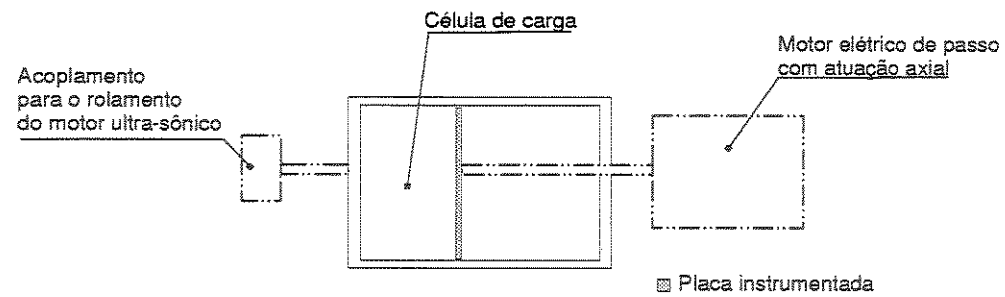


Figura C.2: Célula de carga

Dois programas foram desenvolvidos por Berg para controlar os motores: um controlando o torque para que a velocidade permanecesse constante e outro controlando a velocidade para que o torque permanecesse constante.

Apêndice D

Quadratura de Gauss

Tabela D.1: Coordenadas e respectivos pesos para quadratura de Gauss extraídos de Dhatt & Touzot (1984)

Núm. de pontos	Coordenada	Peso	Ordem do polinômio
2	$\pm 3^{-\frac{1}{2}}$	1	3
3	0,0	$\frac{8}{9}$	5
	$\pm 0,77459667$	$\frac{5}{9}$	
4	$\pm 0,33998104$	0,65214515	7
	$\pm 0,86113631$	0,34785485	
5	0,0	0,56888889	9
	$\pm 0,53846931$	0,47862867	
	$\pm 0,90617985$	0,23692689	
6	$\pm 0,23861918$	0,46791393	11
	$\pm 0,66120939$	0,36076157	
	$\pm 0,93246951$	0,17132449	
7	0,0	0,41795918	13
	$\pm 0,40584515$	0,38183005	
	$\pm 0,74153119$	0,27970539	
	$\pm 0,94910791$	0,12948497	
8	$\pm 0,18343464$	0,36268378	15
	$\pm 0,52553241$	0,31370665	
	$\pm 0,79666648$	0,22238103	
	$\pm 0,96028986$	0,10122854	
10	$\pm 0,14887434$	0,29552422	19
	$\pm 0,43339539$	0,26926672	
	$\pm 0,67940957$	0,21908636	
	$\pm 0,86506337$	0,14945135	
	$\pm 0,97390653$	0,06667134	

Referências Bibliográficas

- 3M (2002). Xyz-axis electrically conductive tape. <http://www.3m.com/us/mfg industrial/adhesives/pdf/70070937001.pdf>.
- Ball, A. A. (1980). The interpolation function of a general serendipity rectangular element. *Computational Engineering*, pages 773–778.
- Barth, H. V. (1973). Ultrasonic driven motor. *IBM Technical Disclosure Bulletin*, (16):2263.
- Beards, C. F. (1983). *Structural Vibration modeling analysis and damping of vibration structures*. Ellis Horwood, London.
- Berg, M., Sattel, T., and Hagedorn, P. (1998). Comparison of experimental and simulation data of ultrasonic motor. In *6th Intern. Conf on New actuators*, Bremen, Germany.
- Bleviss, R. D. (1984). *Formulas for natural frequency and mode shape*. Krieger Publishing Company, Florida.
- Cady, W. G. (1946). *Piezoelectricity*. McGraw-Hill, New York.
- Canon (1996). *Lens WorkII*. Canon Inc., Japan.
- Cao, X. and Wallaschek, J. (1992). Estimation of the tangential stress in the stator/rotor contact of traveling wave motor using viscoelastic foundation. In *International Conference Contact Mechanics*.
- Cook, R. D., Malkus, D. S., and Plescha, M. E. (1989). *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, Madison.

Cummings, J. (1994). Analysis of the performance and contact behavior of the piezoelectric traveling wave motor. Master's thesis, University of Missouri-Rolla, Missouri.

Curie, J. and Curie, P. (1880). Developpement par compression de l'electricite polaire dans les cristaux hemiedres a faces inclinees. *Bulletin de la Societe Mineralogique de France*, (3):90–93.

Dhatt, G. and Touzot, G. (1984). *The Finite Element Method Displayed*. John Wiley & Sons, New York.

Flynn, A. (1997). *Piezoelectric Ultrasonic Micromotors*. PhD thesis, MIT Artificial Intelligence Laboratory, Cambridge.

Gromakovskii (1978). On possibility of using a piezoelectric motor for direct actuation of the drive shaft of a video tape recorder. *Tekhnika Kino i Televideniya*, (5):33–43.

Hagedorn, P. (1997). Mathematical model for piezoelectric motors: An example of mechatronic modelling. In *COBEM 97 Proc. Of the XIV Brazilian Congress of Mechanical Engineering*, Bauru.

Hagedorn, P., Sattel, T., Speziari, D., and Schmidt, J. (1998). The importance of rotor flexibility in ultrasonic traveling wave motors. *Journal of Smart Material and Structures*, pages 352–368.

Hagedorn, P. and Wallaschek, J. (1992). Travelling wave ultrasonic motors, part i: Working principle and mathematical modelling of the stator. *Journal of Sound and Vibration*, 155:31–46.

Hagedorn, P. and Wallaschek, J. (1993). Travelling wave ultrasonic motors, part ii: A numerical method for the flexural vibrations of the stator. *Journal of Sound and Vibration*, 168:115–122.

Hagood, N. and McFarland, A. (1995). Modeling of a piezoelectric rotary ultrasonic motor. *IEEE trans. Ultrason., Ferroelec, Freq. Control.*, 42(2):210–224.

- Hirata, H. and Ueha, S. (1995). Design of a travelling wave type ultrasonic motor. *IEEE trans. Ultrason., Ferroelec, Freq. Control.*, 42(2):225–231.
- Johnson, K. L. (1985). *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Krome, J. and Wallaschek, J. (1995). Finite-element models for the piezoelectric actuation in ultrasonic traveling wave motors. In *Int. Conf. on Adaptative Structures*, pages 461–469, Florida.
- Maeno, T. and Boggy, D. (1992). Effect of the hidrodynamic bearing on rotor/stator contact in a ring-type ultrasonic motor. *IEEE trans. Ultrason., Ferroelec, Freq. Control.*, 39(6):675–682.
- Maeno, T., Tsukimoto, T., and Miyake, A. (1992). Finite-element analysis of the rotor stator contact in a ring type ultrasonic motor. *IEEE trans. Ultrason., Ferroelec, Freq. Control.*, 39(6):668–674.
- Marto, A. G. (1997). Motores ultra-sônicos: princípios de funcionamento e características. Master's thesis, Unesp-Guaratinguetá, Guaratinguetá.
- Meirovitch, L. (1980). *Computational Methods in Structural Dynamics*. Sijthoff & Noordhoff.
- RS (2002). Silver loaded epoxy adhesive. <http://hk.rs-c.dk/index.jsp>.
- Sashida, T. and Kenjo, T. (1993). *An Introduction to Ultrasonic Motors*. Oxford Science Publications, Oxford.
- Sattel, T. and Hagedorn, P. (1999). A note in non-intermitent contact problems of a special class of ultrasonic motors. In *Design Engineering Technical Conferences*, Las Vegas.
- Sattel, T. and Hagedorn, P. (2001). The contact problem in ultrasonic traveling wave motors, part i: Modeling. *Journal of Applied Mechanics*. pre-print.
- Schmidt, J. and Hagedorn, P. (1996). A note on the contact problem in an ultrasoinc travelling wave motor. *Int. Jour. Non Linear Mechanics*, 31(6):915–924.

- Speziari, D. (1997). Development and experimental confirmation of a model with flexible rotor for rotary ultrasonic motor. Master's thesis, Darmstadt University of Technology, Department of Applied Mechanic.
- Su, B. (1998). *Novel fabrication processing for improved lead zirconate titanate (PZT) ferroelectric ceramic materials*. Ph.d, Birmingham:University of Birmingham, School of Metallurgy and Materials, Faculty of Engineering.
- Takemura, K., Kojima, N., and Maeno, T. (2002). Development of a bar shaped ultrasonic motor for multi degrees of freedom motion. <http://www.maeno.mech.keio.ac.jp/English/takemura - Movic98.pdf>.
- Tiersten, H. F. (1969). *Linear Piezoelectric Plate Vibrations*. Plenum Press, New York, 1 edition.
- Ueha, S., Tomikawa, Y., Kurosawa, M., and Nakamura, N. (1993). *Ultrasonic motors, Theory and Applications*. Oxford Science Publications, Oxford.
- Wallaschek, J. (1995). Piezoelectric motors. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 6:71–83.
- Wallaschek, J. (1997). Contact mechanics of piezoelectric ultrasonic motors. *Smart Structures and Materials*, Vol. 7:369–381.
- Wriggers, P. (1995). Finite element algorithms for contact problems. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 2(4):1–49.