

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

Teoria Wavelet Aplicada à Análise de Vibrações

Autor : Francisco José Vicente de Moraes

Orientador: Hans Ingo Weber

03/96

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL
DA TESE DEFENDIDA POR Francisco José
Vicente de Moraes E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 14/03/96
L IL
ORIENTADOR

9618451

UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	UNICAMP
V.	E.
F. MBO BC/	29025
PROC.	667196
C	☐
D	☒
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	05/11/96
N.º CPD	

CM.00094587-9

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

M791a

Moraes, Francisco José Vicente de

Teoria wavelet aplicada à análise de vibrações /
Francisco José Vicente de Moraes.--Campinas, SP: [s.n.],
1996.

Orientador: Hans Ingo Weber.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Processamento de sinais- Técnicas digitais.
2. Vibração. 3. Transitórios (Dinâmica). 4. Análise funcional. I. Weber, Hans Ingo. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica.
- III. Título.

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO**

Teoria Wavelet Aplicada à Análise de Vibrações

Autor : Francisco José Vicente de Moraes

Orientador: Hans Ingo Weber

Curso: Engenharia Mecânica

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Dissertação de Mestrado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 1996

S.P. - Brasil

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

Dissertação de Mestrado

Teoria Wavelet Aplicada à Análise de Vibrações

Autor : Francisco José Vicente de Moraes

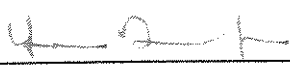
Orientador: Hans Ingo Weber



Prof. Dr. Hans Ingo Weber, Presidente
Universidade Estadual de Campinas - FEM



Prof. Dr. Paulo Roberto Gardel Kurka
Universidade Estadual de Campinas - FEM



Prof. Dr. Yaro Burian Jr.
Universidade Estadual de Campinas - FEE

Campinas, 14 de março de 1996

Dedicatória:

Dedico este trabalho a todos os bons professores que me guiaram até este cume. Aos da família, aos da escola, aos do esporte, aos do colégio técnico, aos da universidade, aos da iniciação científica, aos do mestrado, aos dos livros e a todos os bons professores da vida.

Agradecimentos

É impossível deixar de agradecer a todos que estiveram comigo nestes dois anos. Ou seriam mais?

Agradeço especialmente a ajuda e ao incentivo dos exemplares colegas Alessandro Teixeira Neto, Denise Aparecida Villela, Eduardo Nardinelli, Everton Nogueira Lima, Fernando Castro Pinto, Flávio de Campos Bannwart, Ilmar Ferreira Santos, José Antunes, Kirsti Laapio, Marco Antonio Furlan, Marco Lúcio Bittencourt, Mauro Jorge Atalla, Max Dutra, Robinson Antonio Zampronio, Rosângelo Wilterson Aparecido Ferreira.

*Às minhas primeiras ondas,
Surfando.*

Sumário

1 Introdução	1
2 Sinais Estacionários e Análise de Fourier	5
3 Sinais Não Estacionários e Decomposição Atômica	12
3.1 Análise tempo-frequência	13
3.2 Análise tempo-escala	22
4 Construindo Wavelets Ortonormais	33
4.1 Equações de dilatação	33
4.2 Wavelets de dilatação	37
4.3 Propriedades dos construtores	38
4.4 Consequências das propriedades ortogonais	40
5 Algoritmo da Transformada Wavelet Ortonormal Discreta	42
5.1 Transformada wavelet circular	42
5.2 Algoritmo de Mallat	45
5.3 Software utilizado	52
6 Aplicações e Resultados	53
6.1 Um primeiro exemplo	54
6.2 Aceleração de rotores	65
6.3 Outras referências	80
6.4 Comentários finais	82
7 Bibliografia	84

Resumo

Moraes, Francisco José Vicente de, *Teoria Wavelet Aplicada à Análise de Vibrações*, Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1996. 87 p. Tese (Mestrado)

O conhecimento do comportamento dinâmico de equipamentos é importante, seja para o desenvolvimento e otimização de projetos ou para o monitoramento e diagnóstico de falhas de operação. Técnicas de processamento para extrair dos complicados sinais de vibrações mecânicas as informações pertinentes a cada análise têm sido investigadas.

A análise de Fourier é capaz de revelar o conteúdo frequencial dos sinais. Porém, tal técnica é limitada à análise de sinais estacionários, já que os resultados obtidos são médias dentro do período amostrado, não distinguindo o instante de tempo em que um determinado evento ocorreu. Atualmente, cresce o interesse por sinais não estacionários, complexos em sua estrutura mas muito ricos em informações.

A teoria wavelet, capaz de fornecer informações locais de um sinal, é o objeto do presente estudo. A técnica consiste na decomposição do sinal em ondículas (wavelets) que, além de estarem relacionadas a um conteúdo frequencial, possuem um caráter localizado na linha do tempo. Assim, partindo da análise de Fourier, introduzimos os conceitos dessa nova técnica, bem como alguns exemplos práticos de aplicação.

Palavras Chave

- Processamento de Sinais, Vibração, Transitórios (Dinâmica), Análise Funcional

Abstract

Moraes, Francisco José Vicente de, *Teoria Wavelet Aplicada à Análise de Vibrações*, Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1996. 87 p. Tese (Mestrado)

The knowledge of the dynamic behaviour of machinery is important to develop modern design and condition monitoring. Thus, it is necessary to adequate appropriate processing methods in order to extract the desired informations from the complicated time domain mechanical vibration signals.

The Fourier analysis has been extensively used to extract the frequency content from the signals. However, such technique is suitable only for stationary signals, since the given results correspond to average values on the sample period and do not discern the time location of discrete events. Nowadays, there has been a special interest on non-stationary signals, which have a complex structure but are very rich in informations about the real nature of the system.

The wavelet theory, which is able to give local properties of a signal, is the subject of this workpiece. The technique consists on decomposing the given signal on small waves (wavelets), which are localised in both time and frequency domains. In the light of Fourier analysis, we introduce the bases of wavelet theory and some practical insights.

Key Words

- Signal Processing, Vibration, Transients (Dynamics), Functional Analysis

Lista de Figuras

3.01	Janelas Gaussianas para vários α , $k = 0$	14
3.02	Wavelet de Gabor; $\alpha = 1$, $k = 0$, $w = 2\pi \text{ rad} / s$	16
3.03	Representação de dois átomos no plano tempo-frequência	18
3.04	Características da wavelet de Malvar	21
3.05	Wavelet de Malvar	21
3.06	Sistema de Haar; escalas $j = -2$ a 2 no intervalo $(0, 3)$	24
3.07	Análise e síntese através de filtros quadráticos em espelho	29
3.08	Análise Multiresolução	31
4.01	Primeiras sete iterações na construção da função de escala	35
4.02	Função de escala após 7 iterações	36
4.03	Função wavelet básica após 7 iterações	37
5.01	Algoritmo inverso da transformada wavelet ortonormal discreta	50
5.02	Algoritmo da transformada wavelet ortonormal discreta	51
6.01	Domínio do tempo. (A) Sem falha (B) Com falha	56
6.02	Domínio da frequência. (A) Sem falha (B) Com falha	57
6.03	Domínio wavelet. (A) Sem falha (B) Com falha	58
6.04	Mapa de quadrados médios. (A) Sem falha (B) Com falha	59
6.05	Filtragem. (A) Domínio Wavelet (B) Domínio do tempo	60
6.06	Recuperação da falha. (A) Original (B) Recuperada	61
6.07	Análise wavelet com 4 construtores. (A) Mapa de quadrados médios (B) Recuperação da falha	62
6.08	Análise wavelet com 8 construtores. (A) Mapa de quadrados médios (B) Recuperação da falha	63
6.09	Análise wavelet com 20 construtores. (A) Mapa de quadrados médios (B) Recuperação da falha	64

6.10	Ensaio de aceleração (vertical).	
	(A) Domínio do tempo (B) Mapa de quadrados médios	68
6.11	Ensaio de aceleração (horizontal).	
	(A) Domínio do tempo (B) Mapa de quadrados médios	69
6.12	Análise de Fourier sob janela deslizante.	
	Cascata 3-D para ensaio de aceleração (vertical)	70
6.13	Análise de Fourier sob janela deslizante.	
	Diagrama de contorno para ensaio de aceleração (vertical)	71
6.14	Análise de Fourier sob janela deslizante.	
	Cascata 3-D para ensaio de aceleração (horizontal)	72
6.15	Análise de Fourier sob janela deslizante.	
	Diagrama de contorno para ensaio de aceleração (horizontal)	73
6.16	Ensaio de desaceleração (vertical).	
	(A) Domínio do tempo (B) Mapa de quadrados médios	74
6.17	Ensaio de desaceleração (horizontal).	
	(A) Domínio do tempo (B) Mapa de quadrados médios	75
6.18	Análise de Fourier sob janela deslizante.	
	Cascata 3-D para ensaio de desaceleração (vertical)	76
6.19	Análise de Fourier sob janela deslizante.	
	Diagrama de contorno para ensaio de desaceleração (vertical)	77
6.20	Análise de Fourier sob janela deslizante.	
	Cascata 3-D para ensaio de desaceleração (horizontal)	78
6.21	Análise de Fourier sob janela deslizante.	
	Diagrama de contorno para ensaio de desaceleração (horizontal)	79

Nomenclatura

Letras latinas

a	Dilatação na transformada wavelet integral	
a_0, a_r	Coeficientes wavelet	
a_h, b_h	Coeficientes de Fourier	
a_b	Início da b -ésima função janela de Malvar	[s]
b	Translação na transformada wavelet integral	
B	Número de janelas quadradas no período de amostragem	
c	Parâmetro da wavelet de Morlet	
c_h	Coeficientes de Fourier (representação complexa)	
$c_{j,k}$	Coeficientes wavelet	
c_k	Construtores	
$c_{\phi,k}$	Coeficientes wavelet das escalas negativas	
$C_0(t), C_w(t)$	Funções base da DCT	
$(C_b f)(w)$	Transformada coseno discreta da função $f(t)$	
d_h	Sequência bi-infinita com energia finita	
D	Operador de decimação	
E	Operador de extensão	
f^i	Componentes da sequência f_n	
f_n	Sequência no domínio do tempo discreto	

f_{2n}	Sequência subamostrada no domínio do tempo discreto	
$f(t)$	Função no domínio do tempo	
$f(\tau)$	Função no domínio do tempo padronizado	
$f^\phi(t)$	Contribuição das escalas negativas para a amostra do sinal	
$f^{(j)}(t)$	Contribuição da escala j para a amostra do sinal	
$f^{(j,k)}(t)$	Contribuição da wavelet $\psi_{j,k}(t)$ para a amostra do sinal	
$F(w)$	Função no domínio da frequência	
F_0, F_1	Filtros quadráticos em espelho	
$F_0(\theta)$	Função de resposta ao impulso unitário do filtro F_0	
$F_1(\theta)$	Função de resposta ao impulso unitário do filtro F_1	
F_h	Função discreta no domínio da frequência	
$g^\alpha(t)$	Função janela gaussiana	
$g_h(t)$	Componente da h -ésima harmônica	
$(G_k^\alpha f)(w)$	Transformada de Gabor da função $f(t)$	
$G_{k,w}^\alpha(t)$	Função wavelet de Gabor	
$h_j(t)$	Detalhes correspondentes à escala j	
H_j	Subespaço dos detalhes correspondentes à escala j	
I	Matriz identidade	
I	Operador identidade	
$I_{H_{j,k}}$	Suporte da wavelet de Haar	
$j(t)$	Função janela de localização	
$J_{k,w}(t)$	Família de funções hamônicas janeladas	
$j_b(t)$	Função janela quadrada	
k	Localização temporal de uma janela	[s]
l_b	Duração da janela de Malvar	

$\ell^2(\mathbf{Z})$	Espaço das sequências com energia finita	
$\ell^2(2\mathbf{Z})$	Espaço das sequências subamostradas com energia finita	
L_t	Raio de janelamento no domínio do tempo	[s]
L_w	Raio de janelamento no domínio da frequência	[Hz]
$L^2(0, T)$	Espaço das funções T -periódicas com quadrado integrável	
$L^2(0, 2\pi)$	Espaço das funções 2π -periódicas com quadrado integrável	
$L^2(\mathbf{R})$	Espaço das funções mensuráveis com energia finita	
$m_b(t)$	Função janela de Malvar	
$M_{b,w}(t)$	Função wavelet de Malvar	
M_i, G_i	Matrizes operadoras	
$\mathbf{N}$	Conjunto dos números naturais	
n	Índice de um ponto discreto no tempo	
N	Número de pontos de uma amostra discreta	
P_i, Q_i	Matrizes operadoras	
$Q(t)$	Wavelet básica de Morlet	
$\mathbf{R}$	Conjunto dos números reais	
r	Índice wavelet	
R	Número de construtores nas wavelets de Daubechies	
$S_w(t)$	Funções base da DST	
$(S_b f)(w)$	Transformada seno discreta da função $f(t)$	
t	Tempo	[s]
t_m	Centro de janelamento no domínio do tempo	[s]
T	Período	[s]
T_0, T_1	Operadores totais	
T_0^*, T_1^*	Operadores totais adjuntos	
$v_j(t)$	Tendência correspondente à escala j	
V_j	Subespaço da tendência correspondente à escala j	

w	Frequência	[Hz]
w_a	Frequência de amostragem	[Hz]
w_h	Frequência da h -ésima harmônica	[Hz]
w_m	Centro de janelamento no domínio da frequência	[Hz]
$W(t)$	Função harmônica básica	
W_h	Família de funções harmônicas	
$(W_\psi f)(b,a)$	Transformada wavelet integral da função $f(t)$	
x	Variável auxiliar	
X	Sequência em $\ell^2(\mathbb{Z})$	
X_0, X_1	Sequências filtradas em $\ell^2(\mathbb{Z})$	
X, Y, Z	Subespaços sequenciais	
Y	Sequência em $\ell^2(2\mathbb{Z})$	
Y_0, Y_1	Sequências filtradas em $\ell^2(2\mathbb{Z})$	
Z	Sequência em Z	
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros	

Letras gregas

α	Parâmetro que define a largura de uma janela gaussiana	
α_b	Duração do ataque da b -ésima função janela de Malvar	[s]
β	Fator de normalização	
$\delta_{x,y}$	Delta de Kronecker	
$(\Delta_j f)(t)$	Blocos diádicos de Littlewood e Paley	
Δt	intervalo entre pontos de uma amostra discreta	[s]
Δw	Intervalo entre as harmônicas	[Hz]
$\psi(t)$	Função wavelet básica	
$\psi_{j,k}(t)$	Função wavelet	

$\psi_H(t)$	Função wavelet básica de Haar	
$\psi_{H,j,k}(t)$	Função wavelet de Haar	
$\Psi(w)$	Transformada de Fourier integral de $\psi(t)$	
$\phi(t)$	Função de escala	
$\phi_0(t)$	Função caixa unitária	
$\phi_i(t)$	Função de escala após i iterações	
σ	Tempo	[s]
θ	Frequência	[rad / s]
τ	Tempo padronizado	

Superescritos

α	Referente à largura de uma janela gaussiana
----------	---

Subscritos

b	Referente à b -ésima janela de localização
h	Referente à h -ésima harmônica
i	Referente à i -ésima iteração
j	Referente à escala j
k	Referente ao deslocamento temporal k
n	Referente ao n -ésimo instante de tempo discreto
r	Referente à r -ésima wavelet
w	Referente à frequência w
x,y	Índices auxiliares

Siglas

DCT	Transformada coseno discreta
DFT	Transformada de Fourier discreta
DST	Transformada seno discreta

DWT	Transformada wavelet ortonormal discreta
FFT	Transformada rápida de Fourier
IDFT	Transformada de Fourier discreta inversa
IFT	Transformada de Fourier integral
IIFT	Transformada de Fourier integral inversa
IIWT	Transformada wavelet integral inversa
IWT	Transformada wavelet integral

Capítulo 1

Introdução

Para satisfazer as exigências de mercado (qualidade e custo), as indústrias se valem cada vez mais de equipamentos complexos, em projeto e manutenção, garantindo a produtividade. De todos os fatores produtivos envolvidos, resulta um compromisso de confiabilidade que determina o tipo de atenção a ser dado a cada máquina.

Neste contexto, se destacam os programas de manutenção preditiva, especialmente os que utilizam como parâmetro de análise os sinais de vibrações mecânicas do equipamento, através de monitoramento contínuo ou amostrado. Assim, a fim de se obter um diagnóstico precoce, busca-se técnicas capazes de identificar variações sutis no comportamento dinâmico de uma máquina.

Tem-se na análise funcional uma poderosa ferramenta matemática que, impondo algumas condições genéricas às funções (sinais), faz valer regras de transformação (análise). Ou seja, se nossos sinais satisfazem as condições impostas pela análise, podem ser transformados por regras matemáticas que revelam diferentes propriedades do sinal, como se observássemos uma escultura de diferentes ângulos. Partimos, então, à classificação e análise de nossos sinais.

No Capítulo 2 desta dissertação é introduzido o espaço funcional $L^2(0,T)$, formado pelas funções T -periódicas com energia finita em $[0,T)$. Temos que toda função $f(t) \in L^2(0,T)$ é passível de uma representação em série de Fourier ou, em outras palavras, pode ser representada como uma soma de componentes harmônicas ortogonais, geradas a partir de uma única função $W(t) = e^{i(2\pi t/T)}$, revelando assim o seu conteúdo espectral. São então revisados os conceitos de transformada de Fourier integral (IFT) e transformada de Fourier discreta (DFT).

Destaca-se que a análise de Fourier se mostra inadequada ao processamento de sinais não estacionários, já que o conteúdo espectral obtido por tal análise corresponde à média dentro do intervalo amostrado, não distinguindo o instante em que um determinado evento ocorreu. Na prática, temos que os defeitos em um equipamento se tornam mais aparentes quando este varia as suas condições operacionais, resultando em sinais bastante complexos mas ricos em informações sobre a saúde da máquina. Em outras palavras, um defeito sob solicitação estacionária tende a causar efeitos também estacionários, dificultando a sua identificação. Já em mudanças de regime, geralmente se comportam de maneira descontínua e não linear. Sendo assim, se fazem necessárias técnicas adequadas para uma análise consistente desses sinais.

Neste sentido, é introduzido no Capítulo 3 o espaço funcional $L^2(\mathbb{R})$, cujas funções diferem das anteriores por possuírem uma localização na linha do tempo (possuem começo e fim). Essa nova classe de funções é associada aos componentes de um sinal não estacionário, cada um com suas características, início, período de atuação e fim. Surgem então duas possibilidades de análise para esses sinais, sejam estas:

- Análise tempo-frequência: o sinal é dividido em intervalos na linha do tempo e o seu conteúdo espectral é avaliado em cada um desses segmentos.

- **Análise tempo-escala:** o sinal é primeiramente filtrado em bandas de frequência (escalas) e, então, é analisada em cada uma dessas escalas a variação de energia em função do tempo.

Esses dois raciocínios pertencem a uma classe mais geral de algoritmos chamada decomposição atômica. Entendemos decomposição atômica como a extração dos constituintes mais simples (wavelets) de uma complicada mistura (sinal), sendo que cada tipo de sinal possui como características próprias o tipo de átomo e o tipo de arranjo que o constitui. O objetivo da teoria é encontrar as wavelets ótimas de um dado sinal e os correspondentes algoritmos de codificação e análise.

Na análise de sinais vibratórios, é importante que essas wavelets possuam características harmônicas e, ao mesmo tempo, possuam uma localização temporal variável a fim de se analisar precisamente fenômenos simultâneos de altas e baixas frequências. Além disso, por simplicidade, é interessante que o conjunto de wavelets utilizado em uma análise seja gerado a partir de uma única função e constitua uma base ortonormal do espaço funcional $L^2(\mathbb{R})$. Em destaque, estão as wavelets ortonormais de Daubechies. O Capítulo 4 apresenta um método de construção dessas wavelets, o qual é diretamente utilizado no algoritmo de análise multi-resolução.

No algoritmo de análise multi-resolução, os detalhes e a tendência de um sinal são extraídos a cada escala, através de filtros definidos pelas funções wavelet. A tendência será amostrada na próxima escala, onde será novamente dividida em detalhes e tendência, seguindo adiante até as escalas mais gosseiras. Assim, podemos analisar um sinal pelos detalhes em cada escala e por uma última tendência, representando o nível médio do sinal. A implementação discreta desse algoritmo, chamada transformada wavelet ortonormal discreta (DWT) é descrita no Capítulo 5.

No Capítulo 6 é apresentado um exemplo simulado, onde perturbações transitórias não detectáveis pela análise de Fourier são reveladas e isoladas pela análise wavelet. É feita também uma análise de sinais medidos experimentalmente, provenientes do movimento vibratório de um rotor em

aceleração e desaceleração. Nesse último exemplo, a análise wavelet foi capaz de detectar um comportamento vibratório localizado, que foi posteriormente analisado pela transformada de Fourier sob janela deslizante. Ainda nesse capítulo, são comentados alguns trabalhos atuais com aplicações práticas da teoria wavelet e, também, é apresentado um cenário para futuros desenvolvimentos.

Capítulo 2

Sinais Estacionários e Análise de Fourier

Seja $L^2(0,T)$ a coleção de todas as funções mensuráveis $f(t)$ ¹ definidas no intervalo $[0, T)$ e que respeitem a seguinte inequação:

$$\int_0^T |f(t)|^2 dt < \infty . \quad (2.01)$$

Na realidade, este espaço funcional é composto pelas funções (sinais) com energia finita no intervalo de amostragem T , o que não limita a nossa análise já que todos os sinais de nosso interesse pertencem a esta classe. Além disso, assumiremos sempre que tais funções em $L^2(0,T)$ se estendem periodicamente pela linha real $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, isto é:

$$f(t) = f(t - T) , \text{ para todo } t \in \mathbb{R}. \quad (2.02)$$

Através da simples padronização na escala de tempo do período de amostragem T :

$$f(\tau) = f\left(2\pi \frac{t}{T}\right) , \quad (2.03)$$

¹ Não é intenção deste trabalho apresentar um formalismo matemático complexo sobre teoria de Lebesgue e análise funcional, embora sejam bastante úteis alguns conceitos básicos. Assim, é suficiente no momento assumir que a função $f(t)$ é contínua por partes e, se necessário, maiores informações são encontradas em [02], [11], [20], [21] e [34].

podemos, neste caso, associar o espaço funcional $L^2(0,T)$ ao espaço $L^2(0,2\pi)$, usualmente conhecido como o espaço de funções 2π -periódicas com quadrado integrável e, sendo assim, qualquer função $f(t) \in L^2(0,T)$ possui uma representação contínua em série de Fourier na Forma:

$$f(t) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} c_h e^{i(2\pi ht/T)} , \quad h \in \mathbf{Z}, \quad (2.04)$$

onde as constantes c_h , chamadas coeficientes de Fourier, são definidas por:

$$c_h = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i(2\pi ht/T)} dt , \quad h \in \mathbf{Z}. \quad (2.05)$$

A convergência da série (2.04) é definida em $L^2(0,T)$ por:

$$\lim_{x,y \rightarrow \infty} \int_0^T \left| f(t) - \sum_{h=-x}^y c_h e^{i(2\pi ht/T)} \right|^2 dt = 0 . \quad (2.06)$$

Cada coeficiente c_h corresponde à contribuição da h -ésima harmônica. Sendo o tempo medido em segundos, temos a frequência da h -ésima harmônica em Hertz:

$$w_h = \frac{h}{T} , \quad (2.07)$$

e o intervalo entre as harmônicas no eixo da frequência é dado por:

$$\Delta w = \frac{1}{T} . \quad (2.08)$$

Assim, no limite quando $T \rightarrow \infty$, o espaçamento Δw se tornará tão pequeno que o sinal $f(t)$ (período infinito) não mais poderá ser representado por componentes discretas de frequência. Surge, então, a Transformada de Fourier Integral (IFT), definida por:

$$F(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i(2\pi wt)} dt , \quad w \in \mathbf{R}, \quad (2.09)$$

sendo a frequência w medida em Hertz. Temos também a transformada de Fourier integral inversa (IIFT), definida por:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(w) e^{i(2\pi wt)} dw . \quad (2.10)$$

Vale comentar que o conceito de frequência negativa advém da representação complexa do operador de Fourier.

Nossa análise está voltada a sinais processados digitalmente, isto é, compostos de valores discretos igualmente espaçados de Δt , correspondendo portanto a uma frequência de amostragem $w_a = 1/\Delta t$. Sendo assim, o sinal $f(t)$ é representado pela série discreta f_n para $n = 0, 1, 2, \dots, (N-1)$, onde $t = n \Delta t$ e $\Delta t = T/N$. Nesse caso, substituímos a integral em (2.05) pela somatória abaixo:

$$F_h = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-i(2\pi hn/N)} , \text{ para } h = 0, 1, 2, \dots, (N-1) , \quad (2.11)$$

e obtemos, assim, a chamada Transformada de Fourier Discreta (DFT). Embora (2.11) não forneça suficiente informação para se obter a função contínua original, sua importância está na capacidade de recuperação exata dos valores discretos da série f_n , através de sua fórmula inversa (IDFT), apresentada a seguir:

$$f_n = \sum_{h=0}^{N-1} F_h e^{i(2\pi hn/N)} , \text{ para } n = 0, 1, 2, \dots, (N-1) . \quad (2.12)$$

Ressaltamos que, embora apresentada através de propriedades das séries contínuas de Fourier, a DFT possui propriedades exatas e não propriedades aproximadas baseadas nos correspondentes resultados contínuos [30].

O critério de Nyquist estabelece que, para séries discretas amostradas em intervalos constantes Δt , a frequência máxima passível de análise é $1/(2\Delta t)$. Esta é chamada frequência de Nyquist e, se analisamos um sinal que contenha componentes de frequências superiores a este limite, ocorre o

chamado erro de Aliasing. Em outras palavras, a frequência de amostragem $1/(2\Delta t)$ deve ser grande o suficiente para cobrir toda a banda de frequências do sinal contínuo original. Na prática, é feita uma pré-filtragem do sinal através de um filtro analógico do tipo “passa-baixa”, com banda limitada em pelo menos $1/(2\Delta t)$.

Além disso, quando operamos a DFT, estamos efetivamente calculando os coeficientes de Fourier de uma função periódica cuja amostra $f(t)$, $0 \leq t < T$, representa um único ciclo. Na maioria dos casos, são desconhecidas informações sobre a periodicidade do sinal e, sendo assim, se uma amostra genérica é estendida periodicamente à linha real, são induzidas descontinuidades nos pontos de conexão (xT , $x \in \mathbf{Z}$). Como efeito, ocorre o chamado erro de Leakage.

Esta questão nos leva à aplicação de um janelamento com decaimento exponencial nos extremos do intervalo de amostragem, aproximando o sinal a uma condição de periodicidade virtual quando estendido à linha real. Imaginando a linha real do tempo, este janelamento nada mais é do que uma localização da série de Fourier no intervalo amostrado. Dentre as janelas mais utilizadas estão a de Hanning, a de Hamming e a Flat-top. Essas não serão tratadas especificamente mas, no capítulo seguinte, serão tratados os conceitos básicos das janelas de localização temporal.

A DFT é extensivamente utilizada em grande variedade de aplicações em processamento de sinais e, portanto, é de grande interesse a implementação de um algoritmo eficiente para o cálculo da transformada (2.11) e de sua inversa (2.12). É fato que, para o cálculo da DFT ou IDFT de uma amostra com N pontos, é necessária a ordem de N^2 operações matemáticas (multiplicações e adições). Este número pode ser reduzido consideravelmente através do algoritmo da Transformada Rápida de Fourier (FFT), baseado no simples princípio de que uma DFT com N pontos pode ser computada através de duas DFTs com $N/2$ pontos, ou quatro DFTs com $N/4$ pontos, e assim por diante. Dessa forma, através da FFT, o número de

operações necessárias para a transformação (direta ou inversa) é reduzido à ordem de $N \log N$ [22].

Destacamos, agora, três características da representação em série de Fourier. Primeiro, a função $f(t)$ é decomposta em uma soma de infinitas componentes $g_h(t) = c_h e^{i(2\pi ht/T)}$, $h \in \mathbb{Z}$, mutuamente ortogonais, onde ortogonalidade significa que:

$$\langle g_h, g_x \rangle = 0 \quad \text{para todo } h \neq x, \quad h, x \in \mathbb{Z}, \quad (2.13)$$

sendo o produto interno acima definido em $L^2(0, T)$ por:

$$\langle g_h, g_x \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T g_h(t) \overline{g_x(t)} dt \quad \text{para } h, x \in \mathbb{Z}, \quad (2.14)$$

A barra superior denota o complexo conjugado da função. A equação (2.13) é explicada pelo simples, mas importante, fato de que a família das funções

$$W_h(t) = e^{i(2\pi ht/T)}, \quad h \in \mathbb{Z}, \quad (2.15)$$

é uma base ortonormal de $L^2(0, T)$. Uma família de funções constitui uma base ortonormal de $L^2(0, T)$ se suas funções formam um sistema linearmente independente normalizado e denso em $L^2(0, T)$, ou seja, no caso de $W_h(t) \in L^2(0, T)$:

$$\langle W_h, W_x \rangle = \delta_{h,x}, \quad h, x \in \mathbb{Z}, \quad (2.16)$$

onde $\delta_{h,x}$ é o delta de Kronecker e, também, toda função $f(t) \in L^2(0, T)$ pode ser descrita pela série abaixo:

$$f(t) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} c_h \cdot W_h(t). \quad (2.17)$$

Sendo definida também, para o espaço funcional $L^2(0, T)$, a sua norma:

$$\|f\|_2 = \langle f, f \rangle^{1/2}, \quad (2.18)$$

é fácil verificar de (2.16) que:

$$\|W_h\|_2 = 1 . \quad (2.19)$$

A segunda característica importante da representação em série de Fourier é o fato da base ortogonal $W_h(t)$ ser gerada por dilatações de uma única função

$$W(t) = e^{i(2\pi t/T)} , \quad (2.20)$$

ou seja:

$$W_h(t) = W(ht) , \quad h \in \mathbf{Z} . \quad (2.21)$$

Em notação funcional, o operador de Fourier para a função $f(t) \in L^2(0,T)$ é descrito por:

$$F(w_h) = \langle f, W_h \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \overline{W_h(t)} dt , \quad h \in \mathbf{Z} , \quad (2.22)$$

e a recuperação da amostra por:

$$f(t) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \langle f, W_h \rangle W_h(t) . \quad (2.23)$$

Vemos, então, que o operador de Fourier projeta a função $f(t)$ em funções harmônicas ortonormais de diferentes frequências, ou seja, procura-se a semelhança da função dada com essas funções teste, através do produto interno (produto escalar) em cada frequência. Obtém-se, então, uma amplitude relativa a cada uma das frequências que, pelos limites de integração em (2.22), são médias dentro do período amostrado, não distinguindo o instante de tempo em que um determinado evento ocorreu [04]. Isso demonstra que a análise de Fourier não é capaz de descrever adequadamente sinais não estacionários.

Um exemplo clássico é a análise de Fourier da resposta de um mesmo sistema linear ao impulso unitário e a um ruído branco estacionário. Sendo

estas respostas normalizadas ao mesmo valor quadrático médio, apresentam a mesma densidade espectral [30].

A terceira e última característica pode ser apresentada através do chamado teorema de Parseval que, em função das propriedades ortonormais descritas acima, determina:

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} |c_h|^2 . \quad (2.24)$$

Este teorema estabelece que o valor quadrático médio de uma função periódica é igual à soma dos quadrados de todos os seus coeficientes de Fourier. Agora, seja também o espaço $\ell^2(\mathbf{Z})$ composto pelas sequências bi-infinitas $\{c_h\}$, $h \in \mathbf{Z}$, de modo que $\{c_h\} \in \ell^2(\mathbf{Z})$ se, e somente se:

$$\sum_{h=-\infty}^{+\infty} |c_h|^2 < \infty . \quad (2.25)$$

Para este espaço sequencial, são definidos o produto interno:

$$\langle c_h, d_h \rangle = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} c_h \overline{d_h} , \quad (2.26)$$

e a norma:

$$\|c_h\|_2 = \langle c_h, c_h \rangle^{1/2} . \quad (2.27)$$

Então, o operador de Fourier mapeia o espaço funcional $L^2(0,T)$ em $\ell^2(\mathbf{Z})$ de forma linear e, de (2.24), sabemos que esta transformação é isométrica, já que os produtos internos são preservados. Em outras palavras, a energia de um sinal é diretamente proporcional ao seu conteúdo espectral e, sendo assim, sua distribuição pode ser avaliada também no domínio da frequência.

Capítulo 3

Sinais Não Estacionários e Decomposição Atômica

Consideremos agora o espaço $L^2(\mathbb{R})$, formado por funções mensuráveis $f(t)$ definidas na linha real e com energia finita, ou seja,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt < \infty . \quad (3.01)$$

Claramente, os espaços funcionais $L^2(0,T)$ e $L^2(\mathbb{R})$ são distintos, mesmo quando o primeiro é estendido periodicamente à linha real. Destacamos que toda função pertencente a $L^2(\mathbb{R})$ deve decair a zero em $\pm\infty$, ou seja, deve possuir um começo e um fim. Assim, podemos associar esta classe de funções aos componentes de um sinal não estacionário, cada um com suas características (timbre, frequência e intensidade)¹, início, período de atuação e fim.

Dessa forma, estão excluídas do espaço funcional $L^2(\mathbb{R})$ as ondas seno e cosseno utilizadas na análise de Fourier. Agora, se procuramos “ondas” que construam o espaço $L^2(\mathbb{R})$, estas devem decair a zero em $\pm\infty$ e, por motivos práticos, o decaimento deve ser rápido² [10]. Além disso, como na análise de

¹ A frequência é determinada pelo número de ciclos por unidade de tempo de cada componente de vibração, a intensidade está relacionada ao nível de energia do sinal e timbre é o resultado da particular combinação das diversas componentes presentes no sinal.

² O decaimento rápido introduz localidade à análise [36].

Fourier, estas ondículas (wavelets) devem ser geradas a partir de uma única função e, também para uma melhor eficiência computacional, a família destas wavelets deve constituir uma base ortonormal para o espaço $L^2(\mathbb{R})$. Surgem então duas possibilidades de análise para esses sinais, sejam estas: análise tempo-frequência e análise tempo-escala.

Na análise tempo-frequência, o sinal é dividido em intervalos na linha do tempo e o seu conteúdo espectral é avaliado em cada um desses segmentos. Já na análise tempo-escala, o sinal é primeiramente filtrado em bandas de frequência (escalas) e, então, é analisada em cada uma dessas escalas a variação de energia em função do tempo.

3.1 Análise tempo-frequência

Gabor, frente às limitações práticas da transformada de Fourier, teve a idéia de dividir o sinal através de funções janela $j(t - k)$, onde o parâmetro $k \in \mathbb{R}$ é usado para transladar a janela a fim de cobrir todo o domínio do tempo. Seja uma função $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ (sinal analógico com energia finita) e sua Transformada de Fourier Integral (informação espectral do sinal) dada por:

$$F(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i(2\pi wt)} dt . \quad (3.02)$$

Sabe-se que a fórmula acima não é capaz de representar sozinha informações locais do sinal $f(t)$. Buscando uma boa janela de localização temporal, Gabor obteve a forma ótima que, segundo o Princípio da Incerteza de Heisenberg, é obtida por qualquer função gaussiana, descrita por:

$$g^\alpha(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\frac{t^2}{4\alpha}} , \quad (3.03)$$

onde $\alpha > 0 \in \mathbb{R}$ é fixo (Fig. 3.01). Trataremos mais adiante no texto a questão da localização ótima.

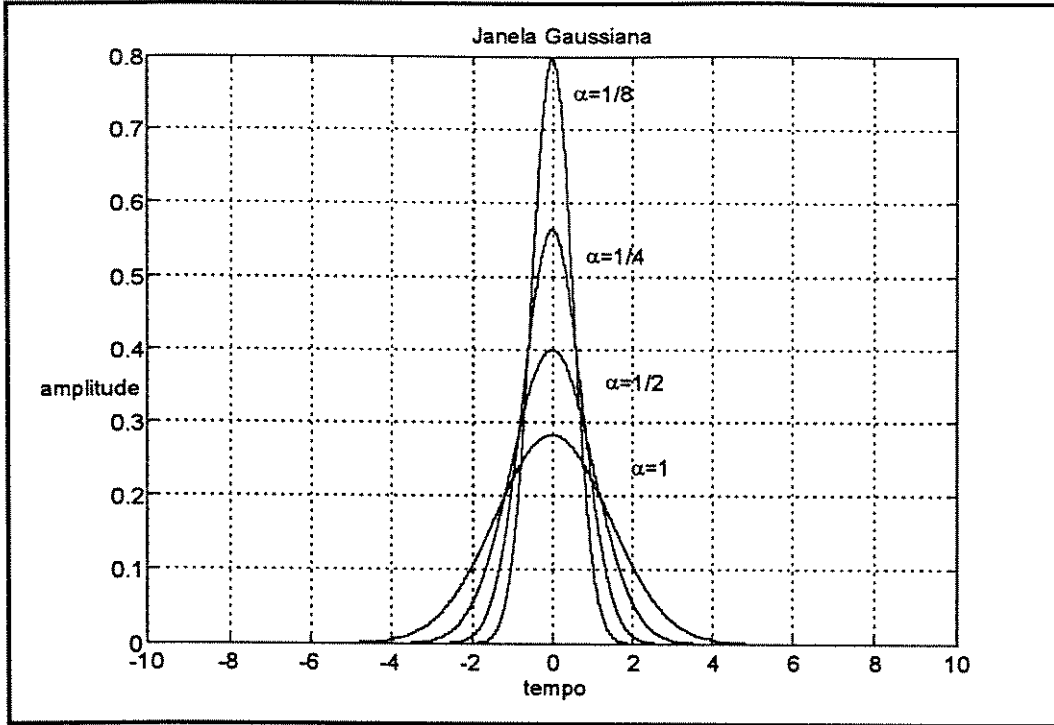


Fig. 3.01: Janelas Gaussianas para vários α , $k=0$

Temos, então, a definição da transformada de Gabor³ da função $f(t)$ descrita acima.

$$(G_k^\alpha f)(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{e^{-i(2\pi wt)} f(t)\} g^\alpha(t-k) dt . \quad (3.04)$$

Dessa forma, $(G_k^\alpha f)(w)$ localiza a transformada de Fourier integral de $f(t)$ em torno de $t=k$, sendo a largura da janela determinada pela constante positiva α . Além disso, como

$$\int_{-\infty}^{\infty} g^\alpha(t-k) dk = \int_{-\infty}^{\infty} g^\alpha(t) dt = 1 , \quad (3.05)$$

temos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (G_k^\alpha f)(w) dk = F(w) , \quad w \in \mathbf{R}; \quad (3.06)$$

³ A aqui chamada transformada de Gabor é, de fato, um caso particular (ótima localização tempo-frequência) da transformada de Fourier de curta duração ou transformada de Fourier sob janela deslizando.

ou seja, o conjunto $\{G_k^\alpha f : k \in \mathbf{R}\}$, de transformadas de Gabor ao longo do tempo, recupera a Transformada de Fourier Integral $F(w)$ exatamente, fornecendo informação espectral local. Assim, a transformada de Gabor inversa é definida por:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ e^{i(2\pi wt)} (G_k^\alpha f)(w) \right\} g^\alpha(t-k) dw dk . \quad (3.07)$$

A seguir, apresentamos a transformada de Gabor em notação funcional. Seja:

$$G_{k,w}^\alpha(t) = e^{i(2\pi wt)} g^\alpha(t-k) , \quad (3.08)$$

temos:

$$(G_k^\alpha f)(w) = \langle f, G_{k,w}^\alpha \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{G_{k,w}^\alpha(t)} dt . \quad (3.09)$$

Novamente, a barra superior denota o complexo conjugado da função. Podemos então, ao invés de considerar $(G_k^\alpha f)(w)$ como a localização da transformada de Fourier do sinal $f(t)$, interpretar a transformada de Gabor como a decomposição do sinal em funções $G_{k,w}^\alpha(t)$ (Fig. 3.02). Cada função $G_{k,w}^\alpha(t)$ representa um átomo correspondente ao instante k , de duração proporcional a α e frequência média w . Naturalmente, tudo isso depende da convenção usada na definição da banda de $g^\alpha(t)$, como será explicado adiante no texto.

Por vários motivos, tais como eficiência computacional ou conveniência de aplicação, pode ser interessante a utilização de outras funções como janelas de localização temporal. Para uma função $j(t) \in L^2(\mathbf{R})$ qualificar-se como uma janela de localização, deve satisfazer à condição de suporte compacto, ou seja, possuir decaimento rápido em $\pm\infty$, de forma que:

$$t.j(t) \in L^2(\mathbf{R}) . \quad (3.10)$$

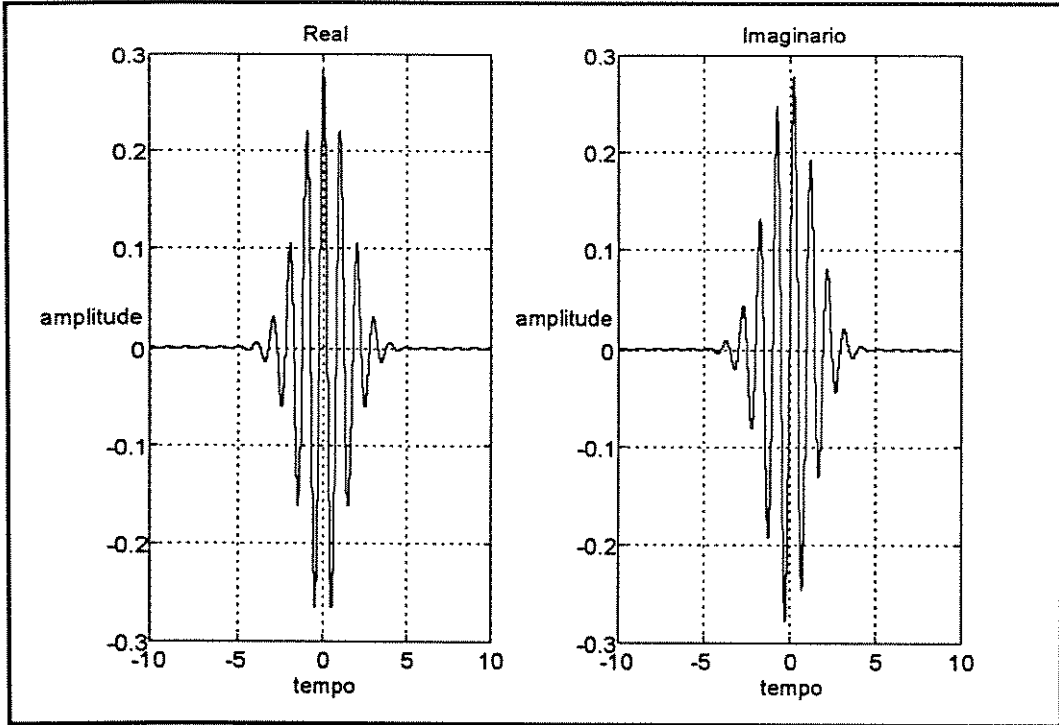


Fig. 3.02: Wavelet de Gabor; $\alpha = 1$, $k = 0$, $w = 2\pi \text{ rad} / s$

Pelo teorema de Parseval (2.24), podemos garantir que a sua transformada de Fourier integral $J(w)$ também pertence a $L^2(\mathbf{R})$, mas não que esta necessariamente satisfaz:

$$w J(w) \in L^2(\mathbf{R}), \quad (3.11)$$

ou seja, a função $j(t)$ não possui necessariamente suporte compacto no domínio da frequência. Dessa forma, para qualificarmos uma janela tempo-frequência, necessitamos de uma função com suporte compacto em ambos os domínios, tempo e frequência. Lembramos que a transformada de Fourier integral de uma função gaussiana (suporte compacto) é também uma função gaussiana.

Podemos assim definir, para qualquer função $j(t) \in L^2(\mathbf{R})$ que satisfaça (3.10), o centro t_m e o raio de janelamento L_t (domínio do tempo), segundo o conceito de desvio padrão ou duração quadrática média, respectivamente como:

$$t_m = \frac{1}{\|j\|_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} t |j(t)|^2 dt \quad (3.12)$$

e

$$L_t = \frac{1}{\|j\|_2^2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (t - t_m)^2 |j(t)|^2 dt \right\}^{1/2}, \quad (3.13)$$

sendo a largura do janelamento definida por $2L_t$.

Analogamente, se $J(w)$ também satisfaz (3.11), definimos o centro de frequência w_m e a banda quadrática média $2L_w$ da função janela $J(w)$ (domínio da frequência). Em suma, quando definimos como função janela, da transformada definida em (3.04), uma função $j(t)$ de suporte compacto nos domínios do tempo e da frequência, definimos também um átomo no plano tempo-frequência com as seguintes dimensões:

$$[t_m + b - L_t, t_m + b + L_t] \times [w_m + w - L_w, w_m + w + L_w]. \quad (3.14)$$

Essas dimensões definem o suporte do átomo nos domínios do tempo e da frequência, respectivamente. Esses átomos são também chamados elipses de Heisenberg e são representados na figura 3.03.

Sendo assim, para uma precisa localização tempo-frequência, deve-se escolher uma função $j(t)$ de modo a se obter o átomo de menor dimensão possível. No caso das funções gaussianas definidas em (3.03), temos: $L_t = \sqrt{\alpha}$ e $L_w = 1/2\sqrt{\alpha}$ e, além disso, o Princípio da Incerteza de Heisenberg nos assegura que este é o menor átomo tempo-frequência que pode ser obtido por uma função janela.

É importante ressaltar que as dimensões do átomo tempo-frequência, em oposição ao que ocorre na análise tempo-escala, permanecem constantes. Sendo a frequência diretamente proporcional ao número de ciclos por unidade de tempo, é necessária uma janela temporal estreita a fim de se localizar mais precisamente fenômenos de alta frequência e, por outro

lado, uma janela mais larga a fim de se examinar minuciosamente as componentes de baixa frequência do sinal. Dessa forma, esta técnica não se mostra eficiente na análise de sinais de banda larga, ou seja, que possuam simultaneamente altas e baixas frequências.

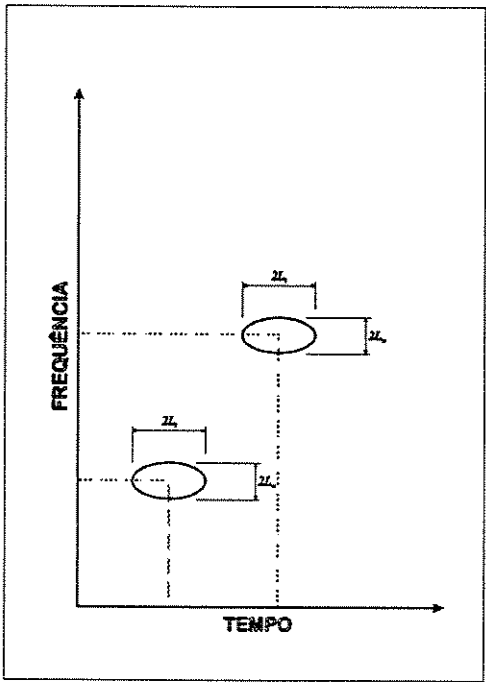


Fig. 3.03: Representação de dois átomos no plano tempo-frequência

Um outro problema essencial é a criação de um algoritmo que decomponha, de maneira ótima, um dado sinal pela transformada de Gabor. Quando lidamos com decomposições contínuas (utilização de todas as frequências e todo o tempo), as wavelets de Gabor podem ser tratadas como se formassem uma base ortonormal, possibilitando a reconstrução do sinal através da transformada inversa na forma descrita em (3.07). Mas, na prática, o algoritmo discreto não existe ou requer muita elaboração [26], o que inviabiliza sua utilização.

Os átomos tempo-frequência de Liénard diferem dos de Gabor por permitirem que a duração do ataque (antes do máximo do envelope) seja independente da duração do decaimento. Mesmo incluindo mais dois

parâmetros e perdendo o janelamento ótimo, Liénard não atingiu a ortogonalidade. De fato, no começo da década de 80, Low e Balian mostraram que, se uma função janela $j(t)$ é suficientemente regular e bem localizada, então a família de funções (wavelets)

$$J_{k,w}(t) = e^{i(2\pi wt)} j(t-k) \quad (3.15)$$

nunca pode formar uma base ortonormal para $L^2(\mathbb{R})$ [26].

Imaginemos, agora, uma análise local do período de amostragem $[0, T)$ através de B janelas quadradas $j_b(t) = 1$ no intervalo $[bT/B, (b+1)T/B)$, $b = 0, 1, 2, \dots, B-1$ e $j_b(t) = 0$ em qualquer outro instante de tempo. De (2.13), temos que estas janelas são ortogonais mas, devido a sua falta de regularidade, são induzidas descontinuidades quando da periodização dos intervalos $[bT/B, (b+1)T/B)$ na análise de Fourier. Como efeito, temos que a transformada de Fourier discreta irá considerar um grande número de frequências a fim de caracterizar a descontinuidade, encobrindo o real conteúdo espectral do sinal. Quanto melhor a localização temporal (menor suporte da janela no domínio do tempo), piores são esses efeitos (maior o suporte no domínio da frequência). No limite, temos a função impulso ou delta de Dirac.

Estes efeitos podem ser atenuados pela Transformada Coseno Discreta (DCT) que, utilizando uma base ortogonal composta pela seguinte família de funções:

$$C_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{ e } C_w(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos\left(\frac{2\pi w}{2}t\right), \quad w = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.16)$$

decompõe cada segmento de sinal $[bT/B, (b+1)T/B)$ através do seguinte operador:

$$(C_b f)(w) = \langle f, C_{b,w} \rangle. \quad (3.17)$$

Se o sinal $f(t)$ é bastante regular, os efeitos numéricos causados pela segmentação crua são reduzidos da ordem de $1/w$ a $1/w^2$ [26].

Buscou-se, então, contornar o teorema de Low e Balian utilizando um janelamento mais regular, com decaimento exponencial em ambos os domínios e alternando, para posições (b) ímpares ou pares, a DCT e a Transformada Seno Discreta (DST). A DST é definida por:

$$(S_b f)(w) = \langle f, S_{b,w} \rangle, \quad (3.18)$$

e, em cada segmento, utiliza como base ortogonal a seguinte família de funções:

$$S_w(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi w}{2}t\right), \quad w = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.19)$$

garantindo ortogonalidade entre intervalos adjacentes, mesmo quando as janelas se sobrepõem parcialmente (devido à ortogonalidade entre as funções seno e cosseno).

Em 1987, quatro décadas após Gabor, Malvar propôs partir a linha real do tempo em intervalos adjacentes através de janelas simples e bem definidas que, devido a uma particular sobreposição parcial, formam uma base ortonormal para o espaço $L^2(\mathbb{R})$. Seja $l_b = a_{b+1} - a_b$ a duração da janela correspondente ao intervalo $[a_b, a_{b+1}]$ e $\alpha_b > 0$ pequeno o suficiente para que $l_b \geq \alpha_b + \alpha_{b+1}$. Assim, essas janelas devem respeitar as seguintes condições:

$$0 \leq m_b(t) \leq 1 \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}, \quad (3.20)$$

$$m_b(t) = 1 \quad \text{se } a_b + \alpha_b \leq t \leq a_{b+1} - \alpha_{b+1}, \quad (3.21)$$

$$m_b(t) = 0 \quad \text{se } t \leq a_b - \alpha_b \quad \text{ou} \quad t \geq a_{b+1} + \alpha_{b+1}, \quad (3.22)$$

$$m_b^2(a_b + \sigma) + m_b^2(a_b - \sigma) = 1 \quad \text{se } |\sigma| \leq \alpha_b, \quad (3.23)$$

$$m_{b-1}(a_b + \sigma) = m_b(a_b - \sigma) \quad \text{se } |\sigma| \leq \alpha_b. \quad (3.24)$$

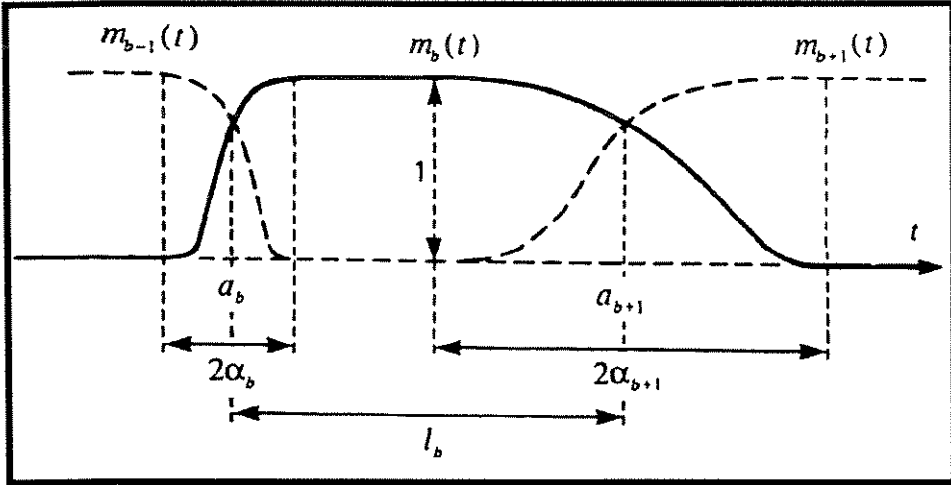


Fig. 3.04: Características da wavelet de Malvar (depois de Meyer [26])

Da figura 3.04, notamos que a janela se desenvolve de forma regular de $m_b(t)=0$ a $m_b=1$ durante um intervalo $2\alpha_b$, permanece constante em $m_b=1$ durante um tempo arbitrário $l_b - \alpha_b - \alpha_{b+1}$ e, então, decai progressivamente a zero durante um intervalo $2\alpha_{b+1}$ [28]. Cada um desses intervalos é analisado pela DCT ou, alternadamente, pela DCT e DST. Dessa forma, chegamos às wavelets de Malvar (Fig. 3.05).

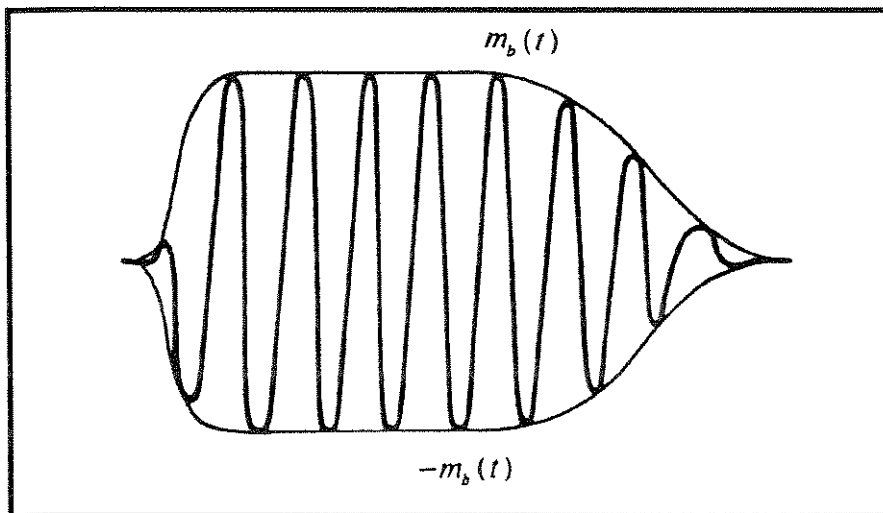


Fig. 3.05: Wavelet de Malvar (depois de Meyer [26])

Temos que nessas wavelets as durações do ataque, do período estacionário e do decaimento são determinadas de forma arbitrária e independente. Com isto, se faz necessário um meta-algoritmo de busca da segmentação que melhor se adapte ao sinal, em função do objetivo da análise. Nos limitaremos aqui a esta breve introdução, mas adiantamos que tal técnica se mostra bastante promissora na análise de frases sonoras, tais como: música, reconhecimento de vozes, análise da fala, etc... .

3.2 Análise tempo-escala

Como vimos anteriormente, para obtermos uma base ortonormal interessante para o espaço funcional $L^2(\mathbb{R})$, devemos voltar nossa atenção a wavelets de suporte compacto e geradas a partir de uma única função básica, agora chamada $\psi(t)$. Assim, para cobrirmos todo o domínio do tempo, iremos novamente transladar esta função através de deslocamentos k na linha temporal, através de:

$$\psi_k(t) = \psi(t - k) , \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (3.25)$$

Mas, se pretendemos relacionar essas wavelets a um conteúdo frequencial e, ao mesmo tempo, manejar o suporte dessas a fim de obtermos uma localização precisa de fenômenos simultâneos de altas e baixas frequências, tudo o que precisamos são diferentes dilatações¹ (escalas) para essas wavelets, definidas por:

$$\psi_{j,k}(t) = \psi(2^j t - k) , \quad j, k \in \mathbb{Z}. \quad (3.26)$$

Estas dilatações 2^j são possíveis graças a uma importante condição não considerada por Gabor e seus seguidores [10]. Seja ela:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0. \quad (3.27)$$

¹Por motivos de eficiência computacional, estas dilatações serão sempre por 2^j [10].

Além disso, se definimos nossa família de wavelets por:

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k) , \quad j, k \in \mathbf{Z}, \quad (3.28)$$

temos:

$$\|\psi_{j,k}\|_2 = \|\psi\|_2 = 1 , \quad j, k \in \mathbf{Z}, \quad (3.29)$$

caracterizando um sistema normalizado.

Uma função $\psi(t) \in L^2(\mathbf{R})$ é chamada de wavelet ortonormal se a família definida em (3.28) constitui uma base ortogonal de $L^2(\mathbf{R})$ (sistema linearmente independente e denso em $L^2(\mathbf{R})$), ou seja:

$$\langle \psi_{j,k} , \psi_{x,y} \rangle = \delta_{j,x} \cdot \delta_{k,y} , \quad j, k, x, y \in \mathbf{Z}, \quad (3.30)$$

e toda função $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$ pode ser descrita pela série wavelet abaixo:

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{j,k} \cdot \psi_{j,k}(t) . \quad (3.31)$$

Os coeficientes $c_{j,k}$ são calculados através do seguinte produto interno:

$$c_{j,k} = \langle f , \psi_{j,k} \rangle , \quad (3.32)$$

e a convergência em $L^2(\mathbf{R})$ é dada por:

$$\lim_{M_1, N_1, M_2, N_2 \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{j=-M_2}^{N_2} \sum_{k=-M_1}^{N_1} c_{j,k} \cdot \psi_{j,k} \right\|_2 = 0 . \quad (3.33)$$

Como veremos adiante, existem infinitas possibilidades para esta função $\psi(t)$ mas, mesmo antes da formalização do espaço funcional $L^2(\mathbf{R})$, Haar apresentou a mais simples dentre elas. Seja esta a wavelet básica de Haar:

$$\psi_H(t) = \begin{cases} -1 & \text{para } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{para } \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0 & \text{para } t < 0 \text{ e } t \geq 1 \end{cases} \quad (3.34)$$

A partir de $\psi_H(t)$, podemos gerar todo o sistema de Haar $\psi_{H,j,k}$ através de (3.28).

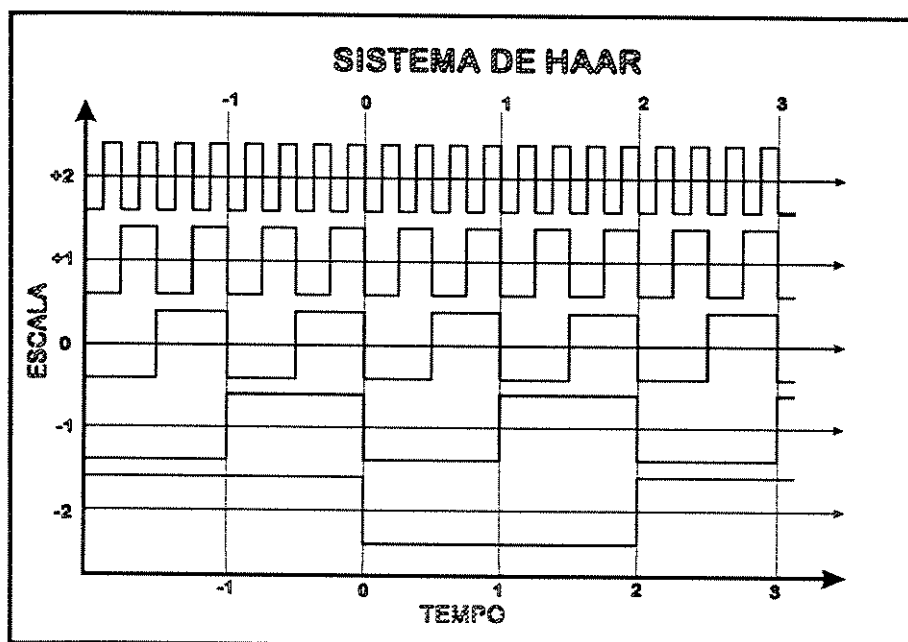


Fig. 3.06: Sistema de Haar; escalas $j = -2$ a 2 no intervalo $(0, 3)$

Na figura 3.06, apresentamos as wavelets de Haar (com amplitudes padronizadas) de escalas $j = -2$ a $j = 2$, no intervalo $(-2, 3)$. Vale ressaltar que não há sobreposição entre wavelets de uma mesma escala e, além disso, uma wavelet sempre possui valor constante no suporte das wavelets em escalas superiores. Essas observações comprovam facilmente a condição de ortogonalidade definida por (3.30).

Além disso, podemos perceber que na escala $j = 0$ somente uma única wavelet está contida no intervalo unitário $[0, 1)$ ¹. Já na escala $j = 1$, temos duas wavelets de comprimento $1/2$, uma com suporte em $[0, 1/2)$ e outra em

¹Na verdade, através de uma padronização na escala de tempo, esse intervalo unitário pode corresponder a qualquer intervalo de interesse em uma dada função. Na prática, corresponde ao período de amostragem de um sinal, o qual é o objeto de nossa análise.

$[1/2, 1)$. Assim seguimos às escalas mais finas. De forma análoga, na escala $j = -1$ somente metade da wavelet correspondente se encontra no intervalo unitário. Seguindo adiante, observamos que para todas as escalas negativas a contribuição de cada wavelet é constante em $[0, 1)$ e, com isso, podem ser representadas por uma única escala constante (esta será chamada $j = -1$). Em suma, em uma dada escala $j \geq 0$ existem 2^j wavelets no intervalo $[0, 1)$ e, ainda, temos o suporte de cada wavelet $\psi_{H_{j,k}}$ dado por:

$$I_{H_{j,k}} = [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}] . \quad (3.35)$$

Dessa forma, um sinal amostrado no intervalo $[0, 1)$ pode ser representado por uma constante somada à combinação linear das wavelets de todas as escalas $j \geq 0$. Assim, definindo $r = 2^j + k$, temos:

$$f(t) = a_0 + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} a_r \psi_{H_{j,k}} , \text{ para } 0 \leq t \leq 1 \quad (3.36)$$

e, devido à ortogonalidade das wavelets dada por (3.30), os coeficientes a_r podem ser facilmente calculados por:

$$a_0 = \int_0^1 f(t) dt , \quad (3.37)$$

$$a_r = 2^j \int_0^1 f(t) \psi_{H_{j,k}}(t) dt . \quad (3.38)$$

Esta é a clássica aproximação de um sinal contínuo $f(t)$ por funções degrau, cujos valores correspondem ao valor médio do sinal no intervalo diádico² correspondente [26]. Apesar da convergência apresentada em (3.33) estar garantida, devido à característica descontínua das wavelets de Haar pode ser necessário um grande número de termos a fim de se atingir uma representação precisa da função $f(t)$.

²Um intervalo diádico é o suporte resultante de uma dilatação por 2^j e uma translação de $k/2^j$.

Vale também ressaltar que as wavelets de Haar não possuem suporte compacto no domínio da frequência mas, de certa maneira, estão relacionadas a um conteúdo frequencial chamado escala. O trabalho de Haar somente seria completado em 1987, quando Daubechies formalizou um procedimento para a construção de wavelets tempo-escala, de suporte compacto e dotadas da regularidade desejada. A regularidade das wavelets irá determinar a banda de frequência de cada escala e o suporte das wavelets. Quanto maior a regularidade, maior o suporte das wavelets (pior definição temporal) e mais próxima a uma oitava é a banda de cada escala (melhor relação espectral). Essas questões serão tratadas com mais detalhes nos capítulos seguintes.

Vários trabalhos, de certa forma isolados, contribuíram para esta conclusão. Já em 1927, Franklin propôs um sistema de funções contínuas que formava uma base ortonormal para o espaço $L^2(\mathbb{R})$. Esse sistema não era gerado por uma única função e seria reduzido à forma (3.28) somente em 1980 por Strömberg.

Na década de 30, Littlewood e Paley em seus estudos sobre homogeneidade de funções introduziram na análise de Fourier o conceito de blocos diádicos $(\Delta_j f)(t)$, definidos por:

$$(\Delta_j f)(t) = \sum_{h=2^j}^{2^{j+1}-1} \{a_h \cos(\frac{2\pi ht}{T}) + b_h \text{sen}(\frac{2\pi ht}{T})\} , j \in \mathbb{N}, \quad (3.39)$$

sendo a série de Fourier representada por:

$$f(t) = a_0 + \sum_{h=1}^{\infty} \{a_h \cos(\frac{2\pi ht}{T}) + b_h \text{sen}(\frac{2\pi ht}{T})\} = a_0 + \sum_{j=0}^{\infty} (\Delta_j f)(t) . \quad (3.40)$$

Essa sequência de operadores Δ_j , $j \in \mathbb{N}$, constitui um banco de filtros passa-banda, orientados em intervalos de frequência que cobrem exatamente uma oitava. Através dos blocos diádicos de Littlewood-Paley, realiza-se uma análise do sinal $f(t)$ onde a principal atração é a possibilidade de variação das escalas j e, assim, embora os intervalos definidos por (3.39)

sejam dotados de um conteúdo frequencial, essa noção de frequência é de menor importância. O trabalho de Zygmund relaciona os blocos diádicos de Littlewood e Paley às wavelets definidas por (3.28) e, como veremos, essa divisão em blocos diádicos é de fundamental importância na elaboração de um algoritmo eficiente.

Calderón (década de 60), Grossman e Morlet (década de 80) trabalharam na formalização matemática da Transformada wavelet Integral (IWT), definida por:

$$(W_{\psi} f)(b, a) = |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt, \quad f \in L^2(\mathbb{R}), \quad (3.41)$$

onde b e a são respectivamente a translação e a dilatação na transformada wavelet integral. Além disso, para possibilitar a transformada wavelet integral inversa, a função $\psi(t)$ deve satisfazer a condição de admissibilidade, definida por:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\Psi(w)|^2}{|w|} dw < \infty, \quad (3.42)$$

onde $\Psi(w)$ é a transformada de Fourier integral de $\psi(t)$. Assim, existe uma variedade de funções (reais ou complexas) utilizadas como wavelet de análise. Em destaque está a wavelet de Morlet, seja esta:

$$Q(t) = e^{i2\pi ct} e^{-|t|^2/2}, \quad (3.43)$$

onde $c > 5$ é utilizado a fim de garantir (3.42) [36]. É importante notar que, ao contrário do que acontece na análise de Fourier, a IWT está intimamente relacionada com a série wavelet definida por (3.31). Esta relação é representada por:

$$c_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle = (W_{\psi} f)\left(\frac{k}{2^j}, \frac{1}{2^j}\right). \quad (3.44)$$

Talvez, para nós, esteja no trabalho de Mallat (1985) a maior contribuição, já que relacionou técnicas já utilizadas em processamento de

sinais à teoria wavelet, tornando efetivos os seus conceitos. A análise multi-resolução proposta por Mallat é baseada na técnica de codificação em sub-bandas através de filtros quadráticos em espelho, desenvolvida por Galand, juntamente com Esteban e Croissier, e utilizada em telefonia digital [26]. Apresentaremos a seguir o caso da codificação em dois canais de frequência.

Tomemos, novamente, um sinal digital arbitrário amostrado e definido nos instantes $n\Delta t$, $n \in \mathbf{Z}$, e representado por uma sequência de energia finita $f_n \in \ell^2(\mathbf{Z})$:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f_n|^2 < \infty . \quad (3.45)$$

Definimos o operador de decimação $D: \ell^2(\mathbf{Z}) \rightarrow \ell^2(2\mathbf{Z})$, representado por $2 \downarrow 1$, como a subamostragem que retém somente os termos com índices n pares na sequência $X = (f_n)_{n \in \mathbf{Z}}$. Seja também o operador adjunto $E: \ell^2(2\mathbf{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbf{Z})$, representado por $1 \uparrow 2$, a extensão mais simples possível de um sinal que, a partir de uma sequência $Y = (f_{2n})_{n \in \mathbf{Z}}$, constrói a sequência definida em $\mathbf{Z}$ adicionando zeros nas posições ímpares. São definidas as normas para os espaços sequenciais $\ell^2(\mathbf{Z})$ e $\ell^2(2\mathbf{Z})$ respectivamente por:

$$\|X\| = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad \|Y\| = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f_{2n}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} . \quad (3.46)$$

Primeiramente, os sinais X a serem analisados são filtrados por dois filtros F_0 e F_1 , resultando em duas saídas $X_0 = F_0(X)$ e $X_1 = F_1(X)$ com energia finita. A função de resposta ao impulso do filtro F_0 é determinada pela sequência dos coeficientes de Fourier da função 2π -periódica

$$F_0(\theta) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} c_h e^{i(h\theta)} , \quad \theta \text{ em rad/s} , \quad (3.47)$$

ocorrendo o mesmo com $F_1(\theta)$ e F_1 . Os sinais X_0 e X_1 são então subamostrados pelo operador $D=2\downarrow 1$, resultando em $Y_0=D(X_0)$ e $Y_1=D(X_1)$. Nessas condições, os filtros F_0 e F_1 são chamados filtros quadráticos em espelho³ se, para todos sinais X de energia finita, é válida a seguinte propriedade:

$$\|Y_0\|^2 + \|Y_1\|^2 = \|X\|^2 . \quad (3.48)$$

Sendo definidos os operadores totais: $T_0 = DF_0 : \ell^2(\mathbf{Z}) \rightarrow \ell^2(2\mathbf{Z})$ e $T_1 = DF_1 : \ell^2(\mathbf{Z}) \rightarrow \ell^2(2\mathbf{Z})$, bem como os seus adjuntos: $T_0^* = F_0^*E : \ell^2(2\mathbf{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbf{Z})$ e $T_1^* = F_1^*E : \ell^2(2\mathbf{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbf{Z})$, temos que a equação (3.48) é equivalente à propriedade de reconstrução perfeita. Seja esta:

$$I = T_0^*T_0 \oplus T_1^*T_1 , \quad (3.49)$$

onde $I : \ell^2(\mathbf{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbf{Z})$ é o operador identidade. Além disso, um espaço vetorial X é a soma direta de dois subespaços Y e Z , simbolizada por $X = Y \oplus Z$, se cada $X \in X$ possui uma representação única $X = Y + Z$, $Y \in Y$ e $Z \in Z$. A figura 3.07 ilustra este processo de análise e síntese.

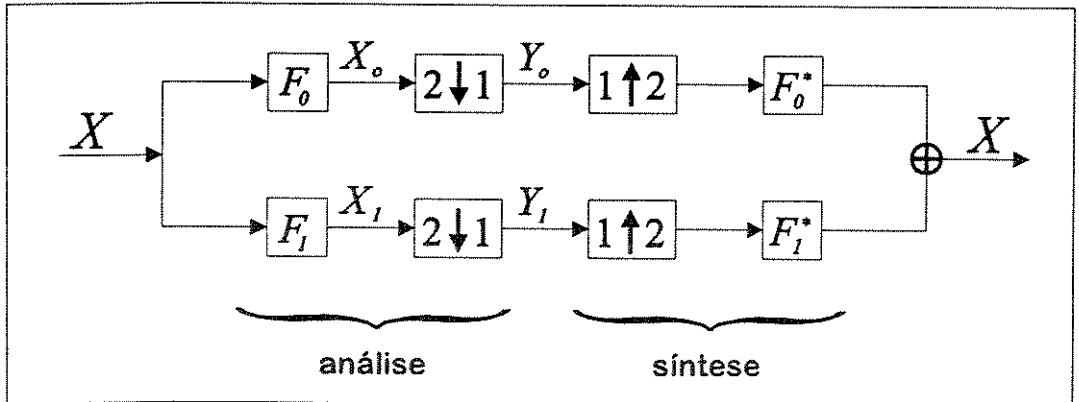


Fig. 3.07: Análise e síntese através de filtros quadráticos em espelho

³ Esta nomenclatura deriva das propriedades de ortogonalidade e simetria destes filtros.

Esses conceitos são sustentados pelo seguinte teorema:

Teorema 3.01: As seguintes propriedades são equivalentes:

- A matriz $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} F_0(\theta) & F_1(\theta) \\ F_0(\theta+\pi) & F_1(\theta+\pi) \end{bmatrix}$ é unitária para quase todo $\theta \in [0, 2\pi]$

(3.50)

- O operador $(T_0, T_1): \ell^2(\mathbf{Z}) \rightarrow \ell^2(2\mathbf{Z}) \times \ell^2(2\mathbf{Z})$ é um isomorfismo isométrico

(3.51)

Em outras palavras, a equação (3.51) estabelece que os filtros quadráticos em espelho constituem transformações ortogonais particulares, enquanto (3.50) nos permite construir filtros quadráticos em espelho com funções de resposta ao impulso finitas [26].

Seguindo Mallat, relacionamos a teoria wavelet aos filtros quadráticos em espelho. Partimos de uma função $\phi(t) \in L^2(\mathbf{R})$, de forma que $\phi(t-k)$, $k \in \mathbf{Z}$, é uma sequência ortonormal em $L^2(\mathbf{R})$. Seja V_0 o subespaço linear fechado gerado por esta sequência ($\phi(t-k)$, $k \in \mathbf{Z}$, é uma base ortonormal de V_0) e, generalizando, definimos V_j por uma mudança de escala, ou seja:

$$f(t) \in V_0 \Leftrightarrow f(2^j t) \in V_j, \quad (3.52)$$

de forma que: $\bigcap_{-\infty}^{+\infty} V_j = \{0\}$ e $\bigcup_{-\infty}^{+\infty} V_j$ é um subespaço denso em $L^2(\mathbf{R})$, ou seja, o conjunto dos subespaços V_j constitui uma base ortogonal para $L^2(\mathbf{R})$. Assim, apresentamos a família de funções

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \phi(2^j t - k), \quad j, k \in \mathbf{Z}, \quad (3.53)$$

e definimos a tendência do sinal $f(t)$ na escala j por:

$$v_j(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle f, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k}(t), \quad (3.54)$$

ou seja, pela projeção da função $f(t)$ no subespaço V_j através da sua base ortonormal $\phi_{j,k}(t)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Agora, são definidos também os detalhes em cada escala:

$$h_j(t) = v_{j+1}(t) - v_j(t) . \quad (3.55)$$

A fim de se analisar estes detalhes, definimos o subespaço H_j como o complemento ortogonal de V_j em V_{j+1} , de forma que $V_{j+1} = V_j \oplus H_j$. Então, existe pelo menos uma função $\psi(t) \in H_0$ de modo que $\psi(t-k)$, $k \in \mathbb{Z}$, é uma base ortonormal de H_0 . A família de funções

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k) , \quad j, k \in \mathbb{Z}, \quad (3.56)$$

constitui, também, uma base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$ e, mais precisamente, temos:

$$h_j(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}(t) . \quad (3.57)$$

Nessas condições, as funções $\phi(t)$ e $\psi(t)$ são associadas aos operadores T_0 e T_1 e, através das diferentes escalas, podem ser sucessivamente aplicadas segundo o esquema apresentado na figura 3.08:

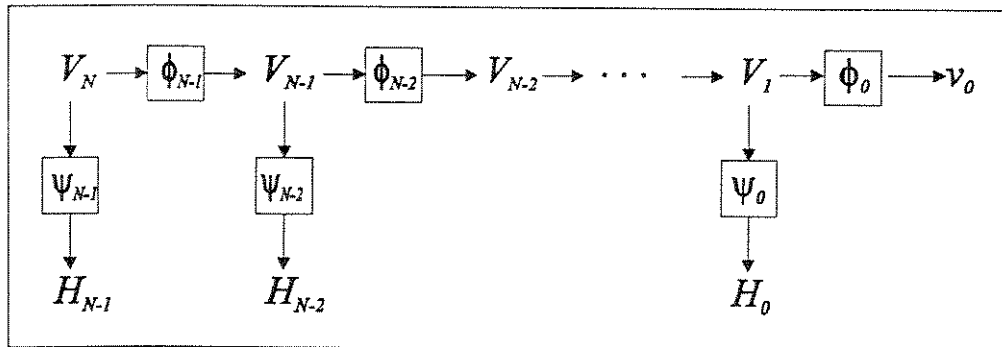


Fig. 3.08: Análise Multi-resolução

No caso discreto, temos que o sinal f_n a ser analisado é amostrado na escala mais fina V_N e decomposto em tendência e detalhes através das funções $\phi_{N,k}(t)$ e $\psi_{N,k}(t)$. A tendência será amostrada na próxima escala V_{N-1} como um novo sinal que será novamente decomposto em tendência e detalhes pelas wavelets da escala $j = N - 1$. Assim, o esquema segue sucessivamente até a escala $j = 0$.

Partindo das funções wavelet $\phi(t)$ e $\psi(t)$, Mallat foi capaz de caracterizar os filtros quadráticos em espelho e a análise multi-resolução correspondente. O caminho inverso foi trilhado somente em 1987 por Daubechies que, com esse novo enfoque, foi capaz de criar um método de construção de wavelets, dependentes de um inteiro $R \geq 1$ que define o suporte $[0, R - 1)$, bem como a regularidade destas wavelets e, além disso, o método é de fácil implementação e se adapta ao algoritmo de análise multiresolução que será desenvolvido nos capítulos seguintes.

Capítulo 4

Construindo Wavelets Ortonormais

Em 1987, Daubechies apresentou um método de construção de wavelets ortonormais, de suporte compacto e regularidade definida, baseando-se nos filtros quadráticos em espelho F_0 e F_1 . Neste método, calcula-se através de equações de dilatação a função de escala $\phi(t)$ e, a partir desta, chega-se à equação da wavelet básica $\psi(t)$. São essas as duas funções que formam a análise multi-resolução proposta por Mallat.

Além da possibilidade de implementação por uma simples sequência de multiplicações de matrizes, a grande qualidade deste método é que sua estrutura é diretamente utilizada no engenhoso algoritmo criado por Mallat. Este algoritmo efetua a chamada transformada wavelet ortonormal discreta (DWT) e será apresentado no próximo capítulo.

4.1 Equações de dilatação

Entendemos que $\phi(t)$ é uma versão dilatada (horizontalmente) de $\phi(2t)$. Em uma equação de dilatação, $\phi(t)$ é expressa como uma série finita de

termos (por exemplo) $\phi(2t)$, cada um desses termos ocupando uma diferente posição k na linha do tempo¹, ou seja:

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{R-1} c_k \phi(2t - k) . \quad (4.01)$$

onde os coeficientes c_k são constantes numéricas (positivas ou negativas). Estas constantes serão aqui chamadas construtores e, como veremos adiante no texto, são determinadas de forma específica.

Exceto em alguns poucos casos, estas equações não podem ser resolvidas diretamente [31] e, por isto, devemos recorrer a um método indireto. Assim, é proposto um processo iterativo de simples implementação matricial. Neste processo iterativo, partimos de uma função caixa unitária

$$\phi_0(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{outros} \end{cases} , \quad (4.02)$$

e cada nova aproximação $\phi_j(t)$ é calculada a partir do resultado anterior $\phi_{j-1}(t)$, seguindo o esquema

$$\phi_j(t) = \sum_{k=0}^{R-1} c_k \phi_{j-1}(2t - k) . \quad (4.03)$$

O processo segue até que $\phi_j(t)$ se assemelhe a $\phi_{j-1}(t)$ e a função resultante é chamada função de escala. Para melhor entendermos esse processo, analisaremos o desenvolvimento da função de escala ao longo das iterações para um número $R = 4$ de construtores. Este desenvolvimento é ilustrado na figura 4.01.

Nota-se que a primeira iteração transforma uma única ordenada unitária, definida em $[0,1)$, em quatro novas ordenadas c_0 , c_1 , c_2 e c_3 , correspondendo respectivamente aos intervalos $[0,0.5)$, $[0.5,1)$, $[1,1.5)$ e $[1.5,2)$. Na segunda iteração, a ordenada c_0 irá gerar quatro novas

¹ Veremos adiante que na implementação da transformada wavelet ortonormal discreta ocorre uma

ordenadas $c_0^2, c_0c_1, c_0c_2, c_0c_3$, referentes aos intervalos $[0,0.25), [0.25,0.5), [0.5,0.75)$ e $[0.75,1)$, bem como a ordenada c_1 irá gerar $c_1c_0, c_1^2, c_1c_2, c_1c_3$, aos intervalos $[0.5,0.75), [0.75,1), [1,1.25)$ e $[1.25,1.5)$, e assim sucessivamente.

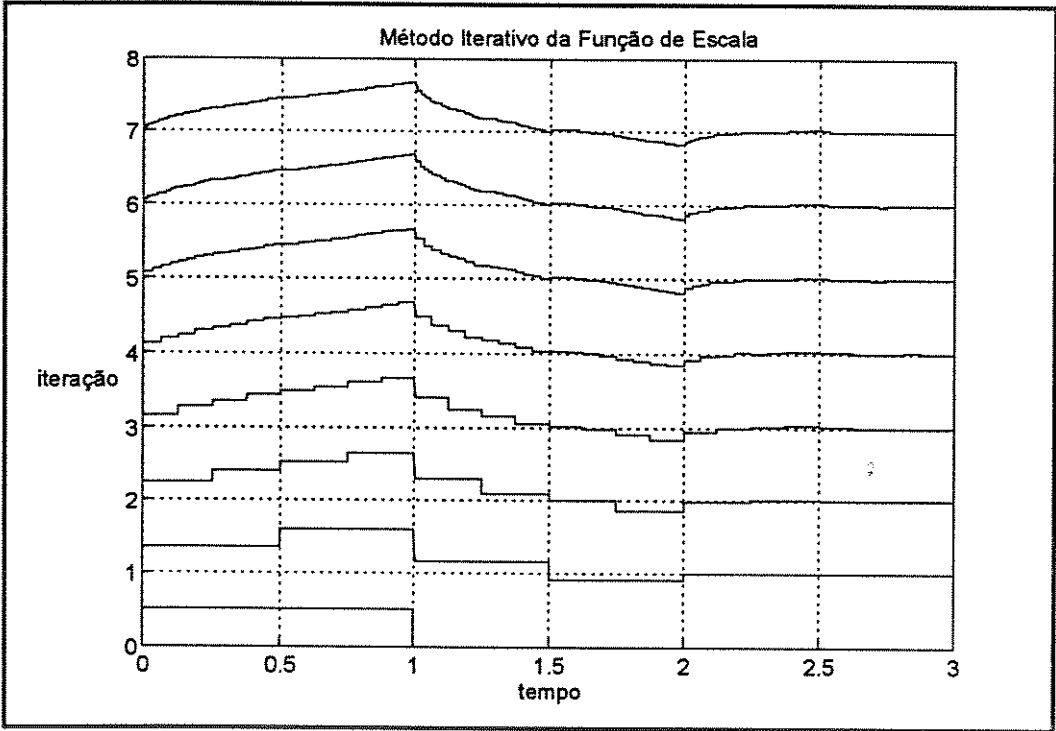


Fig. 4.01: Primeiras sete iterações na construção da função de escala, $R = 4$.

Esse processo pode ser implementado na seguinte forma matricial:

$$[\phi_2] = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 & c_0 \\ c_3 & c_1 \\ & c_2 & c_0 \\ & c_3 & c_1 \\ & & c_2 & c_0 \\ & & c_3 & c_1 \\ & & & c_2 \\ & & & c_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} [1] = M_2 \cdot M_1 \cdot [1], \tag{4.04}$$

padronização da escala de tempo, tornando unitário o período de amostragem.

onde a matriz M_i opera o i -ésimo passo de iteração. Estas matrizes possuem ordem $(2^{i+1} + 2^i - 2) \times (2^i + 2^{i-1} - 2)$, sendo que cada coluna possui uma submatriz de construtores posicionada 2 linhas abaixo em relação à coluna anterior. O número de segmentos é $(2^{i+1} + 2^i - 2)$ e cada um com comprimento $(1/2^i)$, determinando o suporte total da função de escala em $[0,3)$.

Em outras palavras, ocorre uma partição ponderada da função caixa unitária, seguindo adiante em cada segmento e alterando também o seu suporte. Dessa forma, é gerada uma nova função de natureza fractal (Fig. 4.02), chamada função de escala. Esta por sua vez irá dar origem à wavelet básica correspondente.

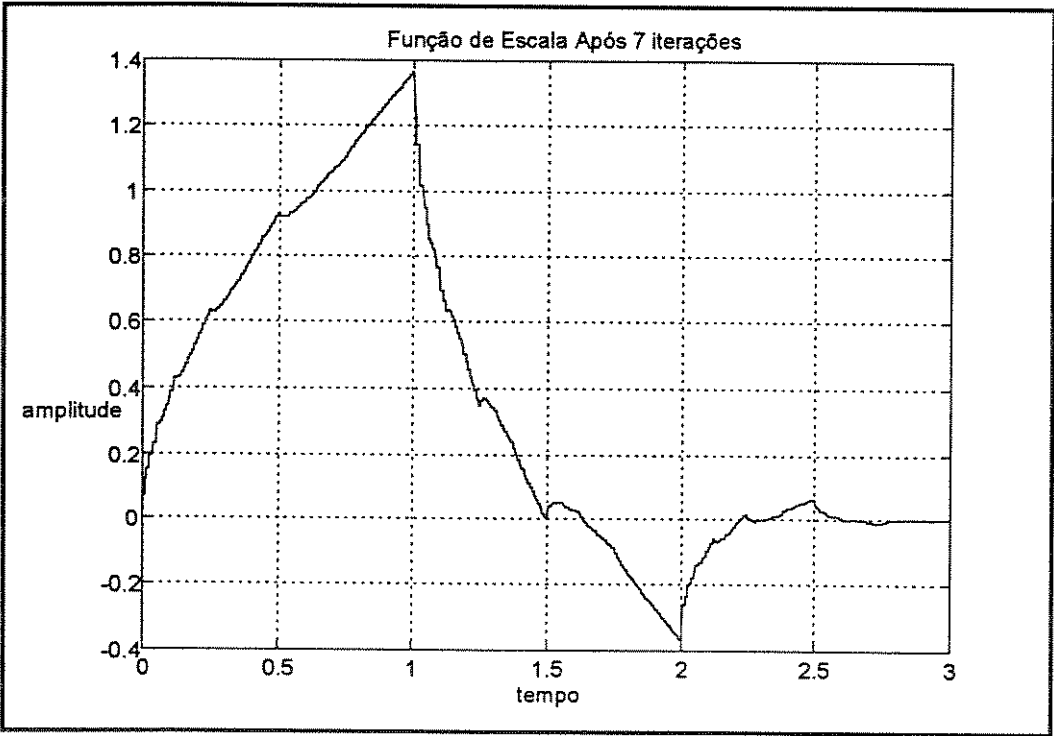


Fig. 4.02: Função de escala após 7 iterações , $R = 4$.

4.2 Wavelets de dilatação

Uma família de wavelets é gerada a partir da função wavelet básica $\psi(t)$, a qual deriva da função de escala correspondente também através de uma equação de dilatação, definida por:

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^{R-1} (-1)^k c_k \phi(2t + k - n + 1) . \quad (4.05)$$

São utilizados os mesmos construtores, em diferente ordem e com sinais alternados. O resultado, apresentado na figura 4.03, é uma função com características semelhantes às da função de escala. Outras definições são possíveis [37], mas esta se ajusta de forma mais conveniente ao algoritmo da DWT [31].

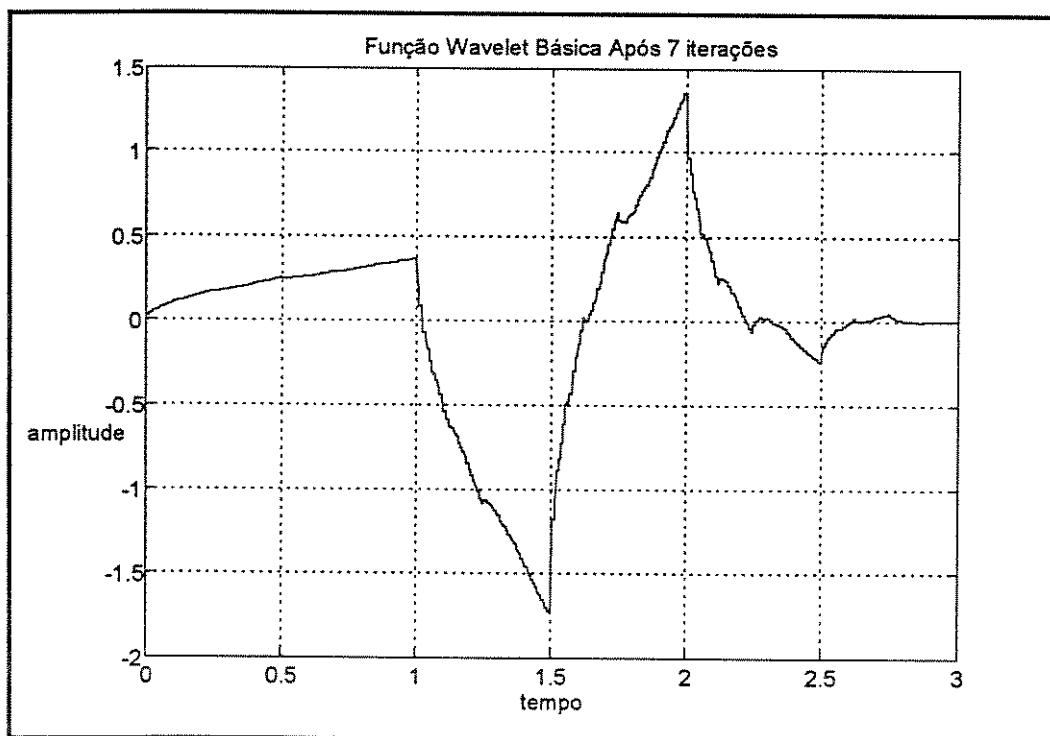


Fig. 4.03: Função wavelet básica após 7 iterações

Como podemos perceber, a equação (4.05) pode ser encarada como mais um passo no processo iterativo de geração da função de escala,

executado após o seu completo desenvolvimento (i iterações)². Na forma matricial, isso pode ser conseguido acrescentando-se a matriz M_{i+1} e alterando-se a ordem e o sinal dos construtores na matriz M_1 . Para uma função de escala com $R = 4$ construtores e desenvolvida após $i = 2$ iterações temos:

$$[\psi_3] = M_3 \cdot M_2 \cdot \begin{bmatrix} -c_3 \\ c_2 \\ -c_1 \\ c_0 \end{bmatrix}. \quad (4.06)$$

As equações (4.04) e (4.06) são de suma importância, pois formam a estrutura básica do algoritmo da DWT. Antes da apresentação deste algoritmo, valem alguns comentários sobre os construtores c_k .

4.3 Propriedades dos construtores

Logicamente, o resultado das operações matriciais descritas acima dependem da escolha dos construtores c_k e, em função disso, estes devem satisfazer certas condições a fim de garantir a eficiência do método. Estas condições são traduzidas em equações e, como resultado, temos tantas equações linearmente independentes quanto construtores. Assim, esses construtores são determinados de forma unívoca.

Existem três diferentes categorias de condições, quais sejam:

- Conservação de área

Para que uma equação de dilatação seja coerente, se faz necessária uma normalização dos construtores c_k . Para dilatações de ordem 2, como em (4.01), temos:

²Mais adiante no texto, ver-se-á que este desenvolvimento completo está relacionado com o número de pontos de nossa amostra discreta do sinal. Em outras palavras, devemos desenvolver nossas funções até uma precisão compatível com a da amostra do sinal, que por sua vez está relacionada à frequência de amostragem do mesmo.

$$\sum_{k=0}^{R-1} c_k = 2 . \quad (4.07)$$

Como consequência, a função de escala é única e sua área se mantém unitária durante o processo iterativo. Com isso, ocorre também a normalização das wavelets.

- Precisão

Surge da necessidade de se garantir que a decomposição de um segmento de sinal discreto, em um número finito de wavelets, representa o sinal em questão de forma tão precisa quanto possível. Strang [37][38] relacionou este fenômeno à forma da transformada de Fourier da função de escala e, assim, apresentou um conjunto de $(R/2)$ equações a fim de garantir uma representação robusta, sejam estas:

$$\sum_{k=0}^{R-1} (-1)^k k^m c_k = 0 \text{ para } x = 0, 1, 2, \dots, (R/2) - 1 . \quad (4.08)$$

- Ortogonalidade

Para que o algoritmo da DWT funcione de forma simples e eficiente, é necessário que o processo iterativo descrito acima possa ser facilmente revertido. Para tanto, as matrizes M_i devem ser ortogonais, de modo que:

$$\beta M_i^t M_i = I , \quad (4.09)$$

onde β é um fator escalar. Assim, para tal condição, devemos satisfazer o conjunto de $(R/2) - 1$ equações apresentado abaixo:

$$\sum_{k=0}^{R-1} c_k c_{k+2x} = 0 \text{ para } x = 1, 2, 3, \dots, (n/2) - 1 . \quad (4.10)$$

Como consequência, temos ainda a condição adicional de média quadrática constante durante as iterações, seja esta:

$$\sum_{k=0}^{R-1} c_k^2 = 2 , \quad (4.11)$$

4.4 Consequências das propriedades ortogonais

Como consequências destas condições, temos que a função de escala é ortogonal a suas próprias translações, ou seja:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) \phi(t-k) dt = \begin{cases} 0, & \text{para } k \neq 0 \\ 1, & \text{para } k = 0 \end{cases} . \quad (4.12)$$

Além disso, se utilizamos um número par de construtores, a função wavelet $\psi(t)$ é automaticamente ortogonal a sua função de escala $\phi(t)$ e a suas translações, como representamos abaixo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) \phi(t-k) dt = 0 , \quad \text{para todo } k \in \mathbf{Z} . \quad (4.13)$$

Ocorre também a ortogonalidade em relação às dilatações de $\psi(t)$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(2^j t) \phi(t-k) dt = 0 , \quad \text{para todo } k \in \mathbf{Z} . \quad (4.14)$$

Seguindo adiante, temos a ortogonalidade da função wavelet em relação a suas próprias translações e dilatações, como descrito a seguir:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) \psi(2^j t - k) dt = 0 , \quad \text{para todo } k \in \mathbf{Z} \text{ e } j \neq 0 . \quad (4.15)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) \psi(t-k) dt = \begin{cases} 0, & \text{para } k \neq 0 \\ 1, & \text{para } k = 0 \end{cases} . \quad (4.16)$$

Dessa forma, a partir das equações genéricas (4.10) e (4.11), pode-se gerar todo um sistema ortogonal de wavelets, dotado de propriedades que podem ser demonstradas sem mesmo uma expressão explícita para as funções $\phi(t)$ e $\psi(t)$ [31]. Devemos também ressaltar que este sistema

compartilha das mesmas propriedades que tornam o sistema de Haar tão peculiar e, de fato, este é o resultado do método para um número $R=2$ de construtores.

Sobre o número de construtores, podemos comentar que: quanto maior o número de construtores, maior é o suporte e maior a regularidade das wavelets que, além disso, se aproximam de filtros de oitavas (funções harmônicas janeladas). Em outras palavras, quanto maior o número de construtores, melhor a caracterização frequencial e pior a localização temporal das wavelets.

Capítulo 5

Algoritmo da Transformada Wavelet Ortonormal Discreta

O objetivo do operador wavelet é decompor um sinal arbitrário $f(t)$ em uma série infinita de wavelets de diferentes escalas e posições, como representado pela seguinte expansão:

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{j,k} \psi(2^j t - k) . \quad (5.01)$$

Como na transformada de Fourier, para uma efetiva utilização prática desses conceitos, se faz necessária a implementação de um algoritmo discreto que, a partir de uma amostra digital finita representando um segmento de sinal, determine de forma única um número também finito de coeficientes wavelet. Estes coeficientes irão ponderar as respectivas wavelets que, quando então somadas, devem recuperar o segmento de sinal em questão com a devida precisão.

5.1 Transformada wavelet circular

Por conveniência na implementação da transformada wavelet discreta, iremos limitar ou simplesmente padronizar o intervalo de amostragem ao intervalo unitário. Para uma melhor compreensão dessa decomposição e das

novas idéias que serão apresentados neste capítulo, iremos novamente nos referir ao sistema de Haar e à figura (3.06). Já foi dito que, para este sistema, a contribuição das escalas negativas sobre cada intervalo unitário é constante. Agora, se geramos este sistema pelo método das equações de dilatação ($R = 2$ construtores), temos que a sua função de escala é também constante no intervalo unitário;

$$\phi(t) = 1, \quad 0 \leq t < 1. \quad (5.02)$$

Assim, para este exemplo, representamos a contribuição das escalas negativas por:

$$\sum_{j=-\infty}^{-1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{j,k} \psi(2^j t - k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{\phi,k} \phi(t - k), \quad (5.03)$$

onde $c_{\phi,k}$ é um novo conjunto de coeficientes. Além disso, em função das definições (4.01) e (4.05), é possível demonstrar que para as escalas negativas $\psi(2^j t - k)$ pode sempre ser representada como uma somatória de termos $\phi(t - k)$, independentemente do número (par) de construtores [30]. Podemos então, sem perda de generalidade, rescrever (5.01) da seguinte forma:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{\phi,k} \phi(t - k) + \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{j,k} \psi(2^j t - k). \quad (5.04)$$

Entretanto, em função do suporte da wavelet básica (que por sua vez é função do número R de construtores), algumas wavelets $\psi(2^j t - k)$ podem ultrapassar os limites do intervalo unitário. Para resolvermos esta questão, consideramos novamente que a amostra em questão se repete em intervalos adjacentes, ou seja:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t - k), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (5.05)$$

Devido à característica local das wavelets, as descontinuidades induzidas por tal periodização não apresentam grandes dificuldades práticas quando da análise de amostras suficientemente grandes. De toda forma, deve-se estar atento a efeitos indesejados durante a interpretação dos resultados.

Podemos encarar essa periodização como o enrolamento do sinal, ou seja, toda vez que ultrapassamos o limite superior do intervalo unitário, voltamos ao início do mesmo. Portanto, quando uma wavelet de análise com início em $[0,1)$ ultrapassar este intervalo, podemos assumir que esta é também enrolada sobre o sinal (se necessário mais de uma vez). No caso da função de escala ocorre o mesmo e, como efeito, esta se torna constante após o enrolamento [30]. Sendo assim, representamos (5.04) da seguinte maneira:

$$f(t) = a_0 \phi(t) + a_1 \psi(t) + [a_2 \ a_3] \begin{bmatrix} \psi(2t) \\ \psi(2t-1) \end{bmatrix} + [a_4 \ a_5 \ a_6 \ a_7] \begin{bmatrix} \psi(4t) \\ \psi(4t-1) \\ \psi(4t-2) \\ \psi(4t-3) \end{bmatrix} + \dots + a_r \psi(2^j t - k) + \dots , \quad (5.06)$$

onde os coeficientes a_r correspondem à contribuição de cada wavelet (após enrolamento) para a representação do segmento de sinal $f(t)$. Quanto maior a escala, mais finos são os detalhes e maior é o número de wavelets, sendo que na escala j existem 2^j wavelets espaçadas de 2^{-j} ao longo do eixo temporal.

Um fato importante é que as condições de ortogonalidade (4.12) a (4.16) continuam sendo respeitadas após o enrolamento e, com isso, podemos calcular os coeficientes a_r através das seguintes convoluções:

$$a_0 = \int_0^1 f(t) \phi(t) dt , \quad (5.07)$$

$$a_r = 2^j \int_0^1 f(t) \psi(2^j t - k) dt . \quad (5.08)$$

Note que os limites de integração foram restringidos ao intervalo unitário e, se $\phi(t)$ e $\psi(2^j t - k)$ foram previamente geradas e enroladas, os valores dessas integrais podem ser avaliados com a precisão desejada. Porém, através do engenhoso algoritmo de Mallat, podemos avaliar os coeficientes wavelet sem mesmo obter explicitamente $\phi(t)$ e $\psi(2^j t - k)$.

5.2 Algoritmo de Mallat

Descreveremos agora o algoritmo da transformada wavelet ortonormal discreta, seguindo a análise multi-resolução proposta por Mallat. Neste algoritmo, um sinal discreto representado pela série f_n ($n = 0:2^x - 1$) é transformado em uma nova série a_r ($r = 0:2^x - 1$) de coeficientes wavelet. Como vemos, o número de pontos da amostra determina o número de wavelets e, conseqüentemente, de escalas na decomposição. Com isso, para analisarmos de forma completa todas as escalas presentes, o número de pontos deve ser sempre uma potência de dois. Em suma, uma sequência de 2^x pontos irá propiciar uma decomposição em $x + 1$ escalas, gerando um total de 2^x coeficientes wavelet.

Este algoritmo de decomposição utiliza a mesma estrutura do método de geração das wavelets e, para melhor compreensão de sua engenhosidade, será primeiramente apresentado o algoritmo inverso de recuperação de uma amostra de sinal a partir de seus coeficientes wavelet. Para tanto, consideramos que o grupo de coeficientes abaixo é o resultado da decomposição de uma amostra discreta do sinal $f(t)$, com oito pontos, em wavelets geradas por quatro construtores.

$$a = [a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6 \ a_7] . \quad (5.09)$$

De (5.06), sabemos que o elemento a_0 corresponde à contribuição de $\phi(t)$ (escala -1) na reconstrução do sinal. Sendo $\phi(t)$ gerada iterativamente a partir de uma função caixa unitária definida em $[0,1)$, podemos gerar $a_0 \cdot \phi(t)$

de forma análoga, partindo de uma função caixa com amplitude a_0 , definida nesse intervalo. Temos, então, o primeiro passo de iteração na forma matricial:

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} [a_0] . \quad (5.10)$$

Porém, o resultado dessa primeira iteração ultrapassa o intervalo unitário (Fig.4.01) e, portanto, deve ser enrolado na maneira descrita anteriormente. Tal enrolamento pode ser obtido na forma matricial por:

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} c_0 + c_1 \\ c_1 + c_2 \end{bmatrix} [a_0] . \quad (5.11)$$

Seguindo adiante, após a terceira iteração, obtemos:

$$\phi_3 = \begin{bmatrix} c_0 & & & c_2 \\ c_1 & & & c_3 \\ c_2 & c_0 & & \\ c_3 & c_1 & & \\ & c_2 & c_0 & \\ & c_3 & c_1 & \\ & & c_2 & c_0 \\ & & c_3 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 & c_2 \\ c_1 & c_3 \\ c_2 & c_0 \\ c_3 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 + c_2 \\ c_1 + c_3 \end{bmatrix} [a_0] . \quad (5.12)$$

Como resultado, obtemos um vetor com oito ordenadas em $[0,1)$, representando a função de escala enrolada e ponderada pelo coeficiente a_0 .

Como podemos notar, as matrizes M_i são redefinidas devido ao enrolamento. As novas matrizes possuem ordem $2^i \times 2^{i-1}$, sendo que cada coluna possui uma submatriz de construtores posicionada duas linhas abaixo em relação à coluna anterior. Quando as submatrizes ultrapassam as dimensões de M_i , os elementos excedentes devem ser recolocados no topo da coluna, seguindo abaixo na ordem original. Assim, podemos rescrever (5.12) na seguinte forma:

$$f^\phi(t) = M_3 \cdot M_2 \cdot M_1 \cdot a_0 \quad (5.13)$$

e, na forma de diagrama:

$$a_0 = f^\phi(1) \xrightarrow{M_1} f^\phi(1:2) \xrightarrow{M_2} f^\phi(1:4) \xrightarrow{M_3} f^\phi(1:8) , \quad (5.14)$$

onde $f^\phi(1:8)$ é um vetor com oito elementos representando a contribuição de $a_0 \cdot \phi(t)$ para a amostra do sinal $f(t)$, em $t = 0, 1/8, 1/4, \dots, 7/8$ [30].

De volta à sequência (5.09) partimos ao coeficiente a_1 , relativo à contribuição da função wavelet $\psi(t)$ (escala 0) na reconstrução da amostra de sinal. Tomaremos novamente o processo iterativo, substituindo a função caixa unitária original por uma de amplitude a_1 . A diferença em relação à função de escala, como no método de construção das wavelets, está na ordem e no sinal dos construtores na matriz M_1 . A matriz resultante, após o enrolamento, é definida por:

$$G_1 = \begin{bmatrix} -c_3 - c_1 \\ c_2 + c_0 \end{bmatrix} . \quad (5.15)$$

Assim, analogamente à (5.13), os oito elementos que representam a contribuição de $a_1 \cdot \psi(t)$ na reconstrução da amostra de sinal são obtidos através das seguintes operações:

$$f^{(0)}(t) = M_3 \cdot M_2 \cdot G_1 \cdot a_1 \quad (5.16)$$

ou ainda, em diagrama:

$$a_1 = f^{(0)}(1) \xrightarrow{G_1} f^{(0)}(1:2) \xrightarrow{M_2} f^{(0)}(1:4) \xrightarrow{M_3} f^{(0)}(1:8) . \quad (5.17)$$

Já na escala 1, o coeficiente a_2 corresponde à contribuição da wavelet $\psi(2t)$ na reconstrução da amostra de sinal. Essa wavelet pode ser gerada pelo mesmo processo iterativo descrito no capítulo anterior mas, por ser uma

versão contraída à metade em relação à $\psi(t)$, devemos partir de uma função unitária definida em $[0,0.5)$. Assim, a contribuição de $a_2 \cdot \psi(2t)$ para a amostra de sinal é obtida partindo-se de uma função de amplitude a_2 definida neste intervalo. Na forma matricial, essa contribuição (após o enrolamento) é obtida por:

$$f^{(1)}(1.8) = M_3 \begin{bmatrix} -c_3 \\ c_2 \\ -c_1 \\ c_0 \end{bmatrix} [a_2] . \quad (5.18)$$

Ainda nessa escala temos $\psi(2t-1)$, versão deslocada de $t = 1/2$ à direita em relação à $\psi(2t)$. Assim, quando da geração de $\psi(2t-1)$, partimos de uma função unitária definida em $[0.5,1)$ e, como no caso anterior, obtemos $a_3 \cdot \psi(2t-1)$ a partir de uma função de amplitude a_3 definida nesse intervalo. Na forma matricial, representamos essa contribuição (após o enrolamento) da seguinte maneira:

$$f^{(1,2)}(1.8) = M_3 \begin{bmatrix} -c_1 \\ c_0 \\ -c_3 \\ c_2 \end{bmatrix} [a_3] . \quad (5.19)$$

Agora, se combinarmos (5.18) e (5.19), obtemos a contribuição total da escala 1 para a amostra de sinal. Definindo

$$G_2 = \begin{bmatrix} -c_3 & -c_1 \\ c_2 & c_0 \\ -c_1 & -c_3 \\ c_0 & c_2 \end{bmatrix} , \quad (5.20)$$

temos:

$$f^{(1)}(1.8) = M_3 G_2 \begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} , \quad (5.21)$$

ou, ainda:

$$\begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = f^{(1)}(1:2) \xrightarrow{G_2} f^{(1)}(1:4) \xrightarrow{M_3} f^{(1)}(1:8) . \quad (5.22)$$

Chegamos à escala 2, onde os coeficientes a_4 , a_5 , a_6 e a_7 correspondem respectivamente às amplitudes das wavelets $\psi(4t)$, $\psi(4t-1)$, $\psi(4t-2)$ e $\psi(4t-3)$ na reconstrução da amostra de sinal em questão. Seguindo a linha de raciocínio anterior, podemos descrever a contribuição total dessa escala da seguinte maneira:

$$f^{(2)}(1:8) = G_3 \begin{bmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \end{bmatrix} , \quad (5.23)$$

ou, em diagrama:

$$\begin{bmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \end{bmatrix} = f^{(2)}(1:4) \xrightarrow{G_3} f^{(2)}(1:8) . \quad (5.24)$$

Como no caso das matrizes M_i , as matrizes G_i possuem ordem $2^i \times 2^{i-1}$, sendo que cada coluna possui uma submatriz de construtores posicionada duas linhas abaixo em relação à coluna anterior. A diferença está na ordem e no sinal dos construtores (igual ao método de construção das wavelets) e, novamente, quando as submatrizes ultrapassam as dimensões de G_i , os elementos excedentes devem ser recolocados no topo da coluna, seguindo abaixo na mesma ordem.

Dessa maneira, podemos recuperar exatamente nossa amostra de sinal com a somatória das contribuições de todas as escalas, ou seja:

$$f(1:8) = f^{\#}(1:8) + f^{(0)}(1:8) + f^{(1)}(1:8) + f^{(2)}(1:8) . \quad (5.25)$$

Na forma de diagrama, apresentamos o algoritmo inverso de Mallat [23]:

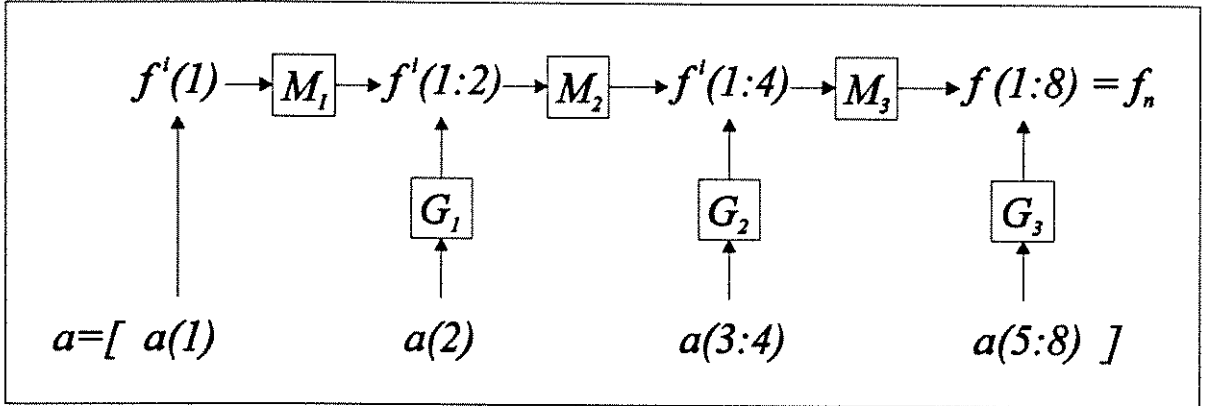


Fig. 5.01: Algoritmo inverso da transformada wavelet ortonormal discreta

Buscaremos agora inverter essas operações, a fim de se obter os coeficientes wavelet $a(1:2^x)$ a partir de uma amostra de sinal $f(1:2^x)$. Veremos que, em função das condições de ortogonalidade impostas aos construtores, esta inversão ocorre de forma trivial. Como consequência das condições (4.10) e (4.11), temos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M_i^t \cdot M_i &= I & M_i^t \cdot G_i &= 0 \\ G_i^t \cdot M_i &= 0 & \frac{1}{2} G_i^t \cdot G_i &= I . \end{aligned} \quad (5.26)$$

Assim, definindo

$$P_i = \frac{1}{2} G_i^t \quad \text{e} \quad Q_i = \frac{1}{2} M_i^t , \quad (5.27)$$

podemos rescrever os passos (5.13), (5.16), (5.21) e (5.23) de maneira inversa, respectivamente como:

$$a_0 = Q_1 \cdot Q_2 \cdot Q_3 \cdot f , \quad (5.28)$$

$$a_1 = P_1 \cdot Q_2 \cdot Q_3 \cdot f , \quad (5.29)$$

$$\begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = P_2 \cdot Q_3 \cdot f \quad (5.30)$$

e

$$\begin{bmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \end{bmatrix} = P_3 \cdot f . \quad (5.31)$$

Dessa forma, todo o diagrama (5.26) pode ser revertido, resultando no algoritmo de Mallat para a transformada wavelet ortonormal discreta [23].

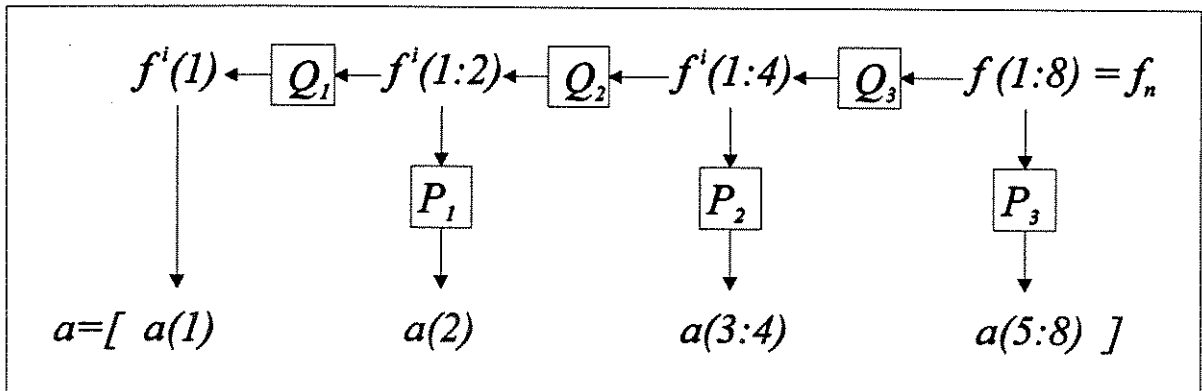


Fig. 5.02: Algoritmo da transformada wavelet ortonormal discreta

Este algoritmo efetua a análise multiresolução apresentada no capítulo 4. As matrizes P_i atuam como filtros passa alta, separando os detalhes mais finos a cada escala. De maneira análoga, as matrizes Q_i atuam como filtros passa baixa, quadráticos a P_i . Sendo assim, os filtros Q_i captam exatamente o restante de informações não analisadas por P_i .

5.3 Software utilizado

Todos os algoritmos utilizados neste trabalho foram implementados em plataforma MATLAB®, software comercial para computação numérica e visualização. Esse software, produto da companhia americana The Math Works Inc., se destaca pela habilidade na operação de matrizes, pelos recursos gráficos e pela sua estrutura de programação em linguagem orientada ao objeto. Através da linguagem orientada ao objeto, o software fornece uma biblioteca de algoritmos interessantes que podem ser utilizados de maneira simples, sendo desnecessário o acesso direto aos códigos.

Existem, assim, bibliotecas chamadas de caixas de ferramentas (toolboxes), com algoritmos de aplicação específica que estendem o ambiente MATLAB® para a solução de classes particulares de problemas. Neste trabalho, foi utilizada a caixa de ferramentas para processamento de sinais (produto da The Math Works Inc.), juntamente com a caixa de ferramentas Wavelab® para análise wavelet. Além disso, foram também utilizadas algumas rotinas apresentadas por David Newland em seu livro *Random Vibrations, Spectral and Wavelet Analysis* [30].

A caixa de ferramentas Wavelab® foi desenvolvida na Universidade de Stanford (USA) e é disponível, livre de encargos, via Internet (anonymous FTP para playfair.stanford.edu, diretório /pub/wavelab). Esse acesso facilitado se enquadra na filosofia de pesquisa reproduzível em ciências da computação, difundida pela escola de Stanford. Tal filosofia defende a apresentação dos algoritmos utilizados juntamente com os resultados obtidos, já que muitas vezes uma descoberta científica é determinada pelo correto ajuste de parâmetros capaz de produzir bons resultados com dados reais em um ambiente computacional complexo.

Capítulo 6

Aplicações e Resultados

Tendo-se em mente as propriedades e generalidades das bases ortonormais, associadas à versatilidade do algoritmo da transformada wavelet ortonormal discreta, torna-se fácil a experimentação nas mais diversas aplicações práticas. Logicamente, esse número de aplicações é ainda maior se contarmos com todos os diferentes algoritmos associados às wavelets. As aplicações atuais estão relacionadas a: processamento numérico de imagens, análise não linear, análise fractal, turbulência, identificação de fontes de ruídos, sismologia, análise da fala, sinais musicais, eliminação de ruído branco, dentre outros. A nós cabe relacionar estas técnicas à análise de vibrações mecânicas.

Iniciamos com uma simulação simples, a fim de introduzir as possibilidades computacionais e a forma de apresentação dos resultados. A seguir, analisaremos a aceleração e a desaceleração de um rotor montado em bancada. Apresentamos, também, uma relação de trabalhos atuais de interesse e fechamos com comentários sobre a importância de técnicas eficientes na avaliação do comportamento dinâmico de equipamentos.

6.1 Um exemplo simples

Consideramos, aqui, um sinal composto por três componentes harmônicas de frequências 100Hz , 60Hz e 25Hz , ponderadas respectivamente por 1.0, 0.4 e 0.6 e, além disso, a amplitude da terceira componente é modulada por uma frequência de 12Hz . A esse sinal é acrescentado um ruído branco normalizado, com nível $RMS = 10^{-2}$. Esse sinal pode exemplificar a vibração mecânica de um sistema rotativo, com as componente relacionadas respectivamente ao desbalanço na velocidade de rotação, a uma ressonância estrutural excitada e a uma frequência de engrenamento. Um período de amostragem de 1 segundo desse sinal é apresentado na figura 6.01(A), sendo a frequência de amostragem igual a 4096Hz (4096 pontos). A figura 6.02(A) apresenta o espectro correspondente.

Processamos, então, a transformada wavelet ortonormal discreta deste sinal, utilizando uma wavelet com 12 construtores. Na figura 6.03(A), os coeficientes wavelet são representados, em cada escala, por segmentos verticais proporcionais aos seus valores, cada um posicionado no instante temporal referente ao centro da wavelet correspondente.

Uma outra forma de representação, chamada mapa de quadrados médios, é apresentada na figura 6.04(A). Nessa representação, cada escala j é dividida em 2^j intervalos (a escala $j = -1$ possui um único intervalo), sendo que cada um desses intervalos está centrado exatamente no instante temporal correspondente ao centro de uma wavelet de mesma escala. Assim, a cada um desses intervalos é associado o valor do quadrado da amplitude do coeficiente wavelet correspondente, formando assim uma superfície que representa a distribuição do valor quadrático médio do sinal entre as diferentes escalas e entre as diferentes wavelets de mesma escala. Através de curvas de nível de diferentes cores e em escala logaritmica de base 2, podemos mapear a distribuição de energia do sinal, percebendo que sua energia se concentra nas escalas 5 a 9.

Agora, iremos somar a esse sinal harmônico uma sequência de 8 pulsos transitórios, representando algum tipo de impacto como por exemplo o toque

de uma palheta de turbina na carcaça ou alguma partícula na superfície de engrenamento. Esses pulsos possuem um nível $RMS = 10^{-1}$, duração de $2.44ms$ e estão localizados aleatoriamente entre os instantes $t = 0.5s$ e $t = 0.54s$. Esse novo sinal no tempo é apresentado na figura 6.01(B) e o seu espectro na figura 6.02(B). Nas figuras 6.03(B) e 6.04(B) temos, respectivamente, a transformada wavelet ortonormal discreta e o mapa de quadrados médios do sinal.

Temos que as perturbações se mostram evidentes somente no mapa de quadrados médios (Fig. 6.04), alterando muito pouco e de forma irregular o espectro. Além disso, podemos ter uma localização precisa dos eventos através do processo de filtragem das escalas wavelet, como descrito a seguir.

Percebe-se que os coeficientes wavelet bastante alterados pelas perturbações se localizam nos níveis 10 e 11. Assim, iremos zerar todos os coeficientes de escalas inferiores (muito relacionados aos sinais harmônicos) e, em seguida, efetuar a transformada wavelet ortonormal discreta inversa, recuperando o sinal no tempo correspondente aos níveis 10 e 11. O resultado é apresentado na figura 6.05 nos domínios wavelet (A) e do tempo (B). Na figura 6.06, faz-se uma comparação entre as perturbações originais, acrescentadas ao sinal sem ruído (A), e as perturbações recuperadas pela filtragem wavelet (B). Sem dúvidas o resultado é satisfatório.

Apresentamos nas figuras 6.07, 6.08 e 6.09 os resultados obtidos pelo mesmo procedimento utilizando respectivamente wavelets com 4, 8 e 20 construtores. Podemos notar que com um menor número de construtores, as componentes harmônicas interferem em um maior número de escalas, caracterizando uma pior definição de frequências. Assim, no caso com 4 construtores, recuperamos somente a escala 11 e, no caso com 20 construtores, recuperamos as escalas 9, 10 e 11. Apesar de possuir uma pior localização temporal, a wavelet com 20 construtores foi capaz de localizar muito bem as perturbações (frequência de amostragem suficiente).

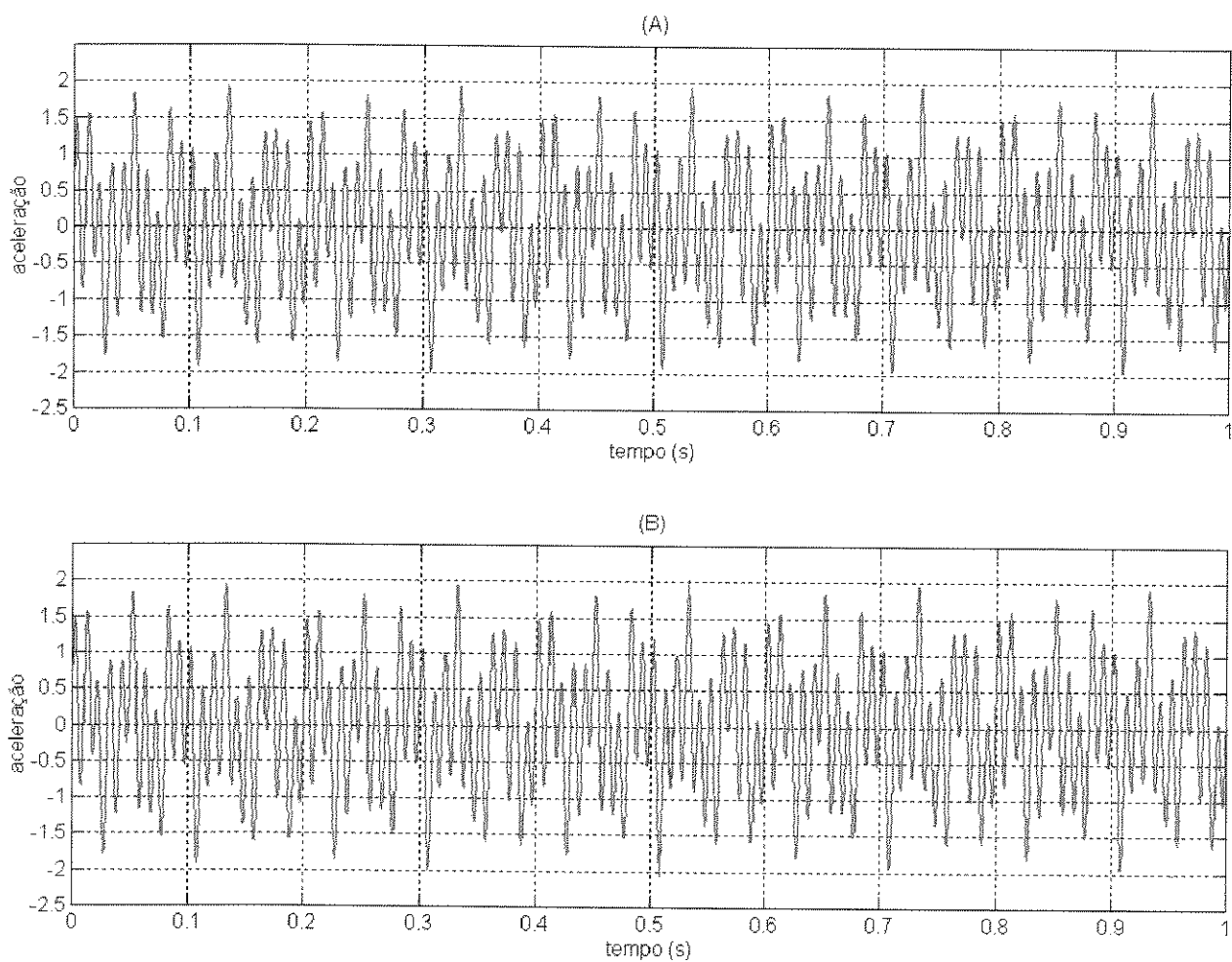


Fig. 6.01: Domínio do tempo.
(A) Sem falha (B) Com falha

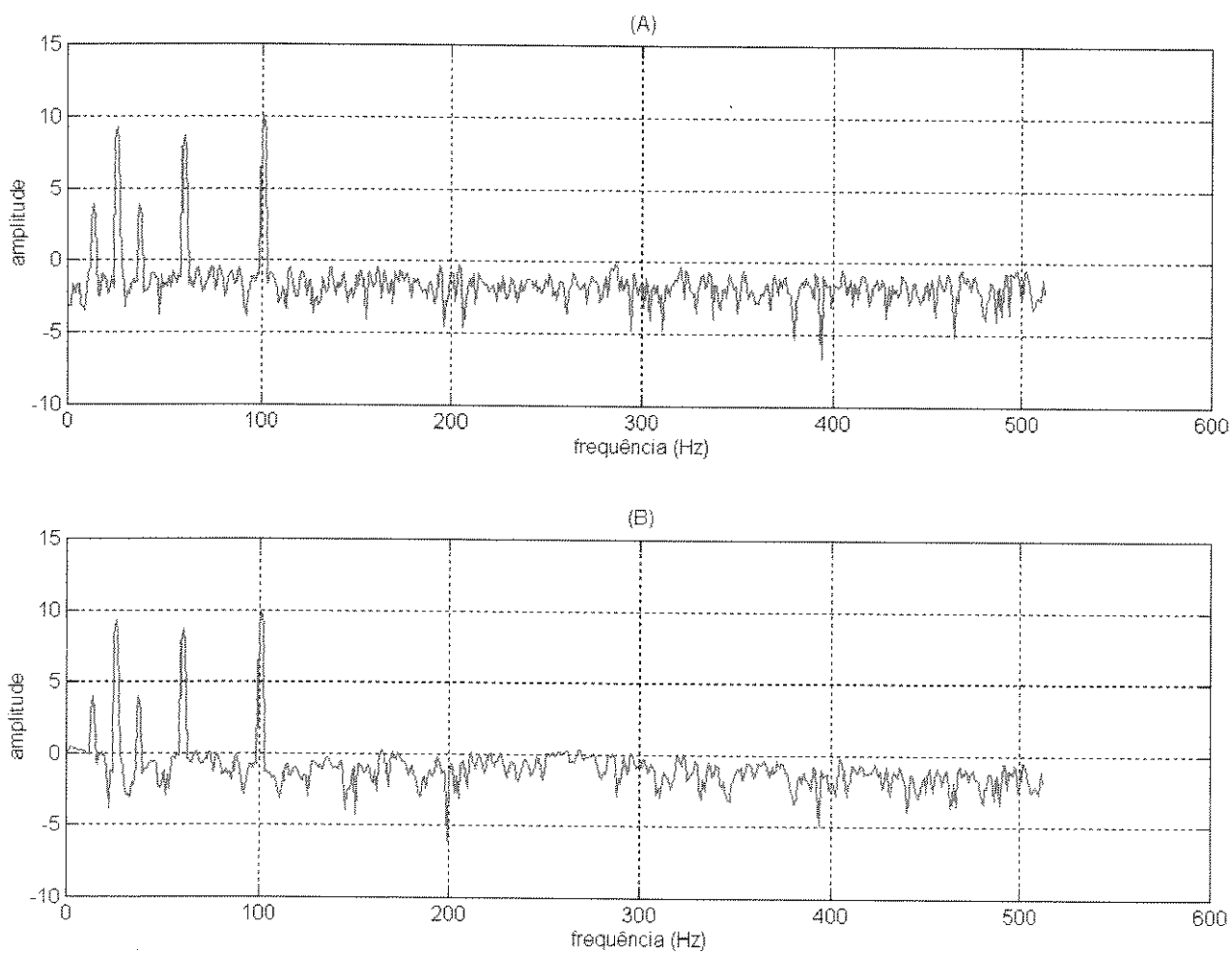


Fig. 6.02: Domínio da frequência.
(A) Sem falha (B) Com falha

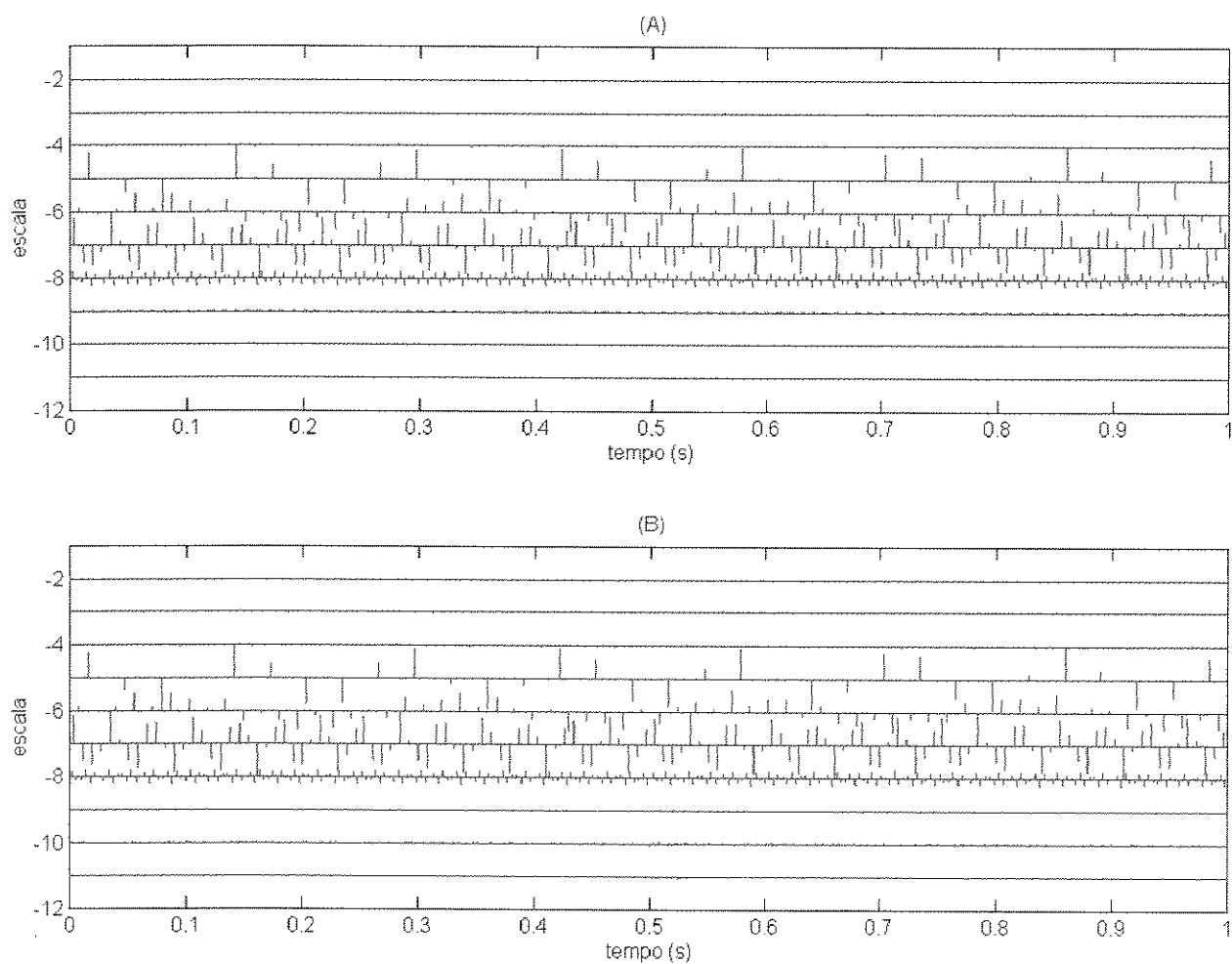


Fig. 6.03: Domínio wavelet.
(A) Sem falha (B) Com falha

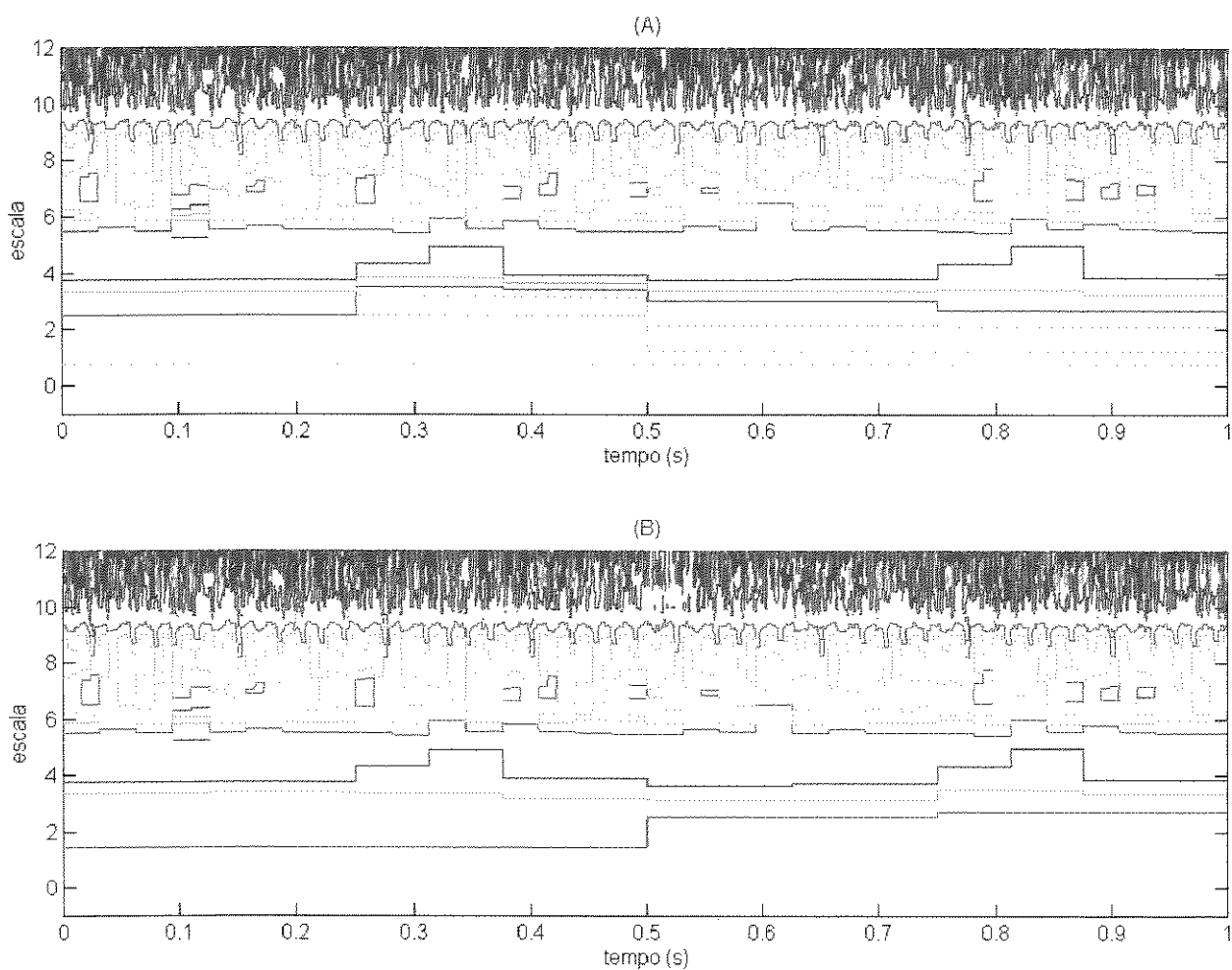


Fig. 6.04: Mapas de quadrados médios (escala $\log_2$).
(A) Sem falha (B) Com falha

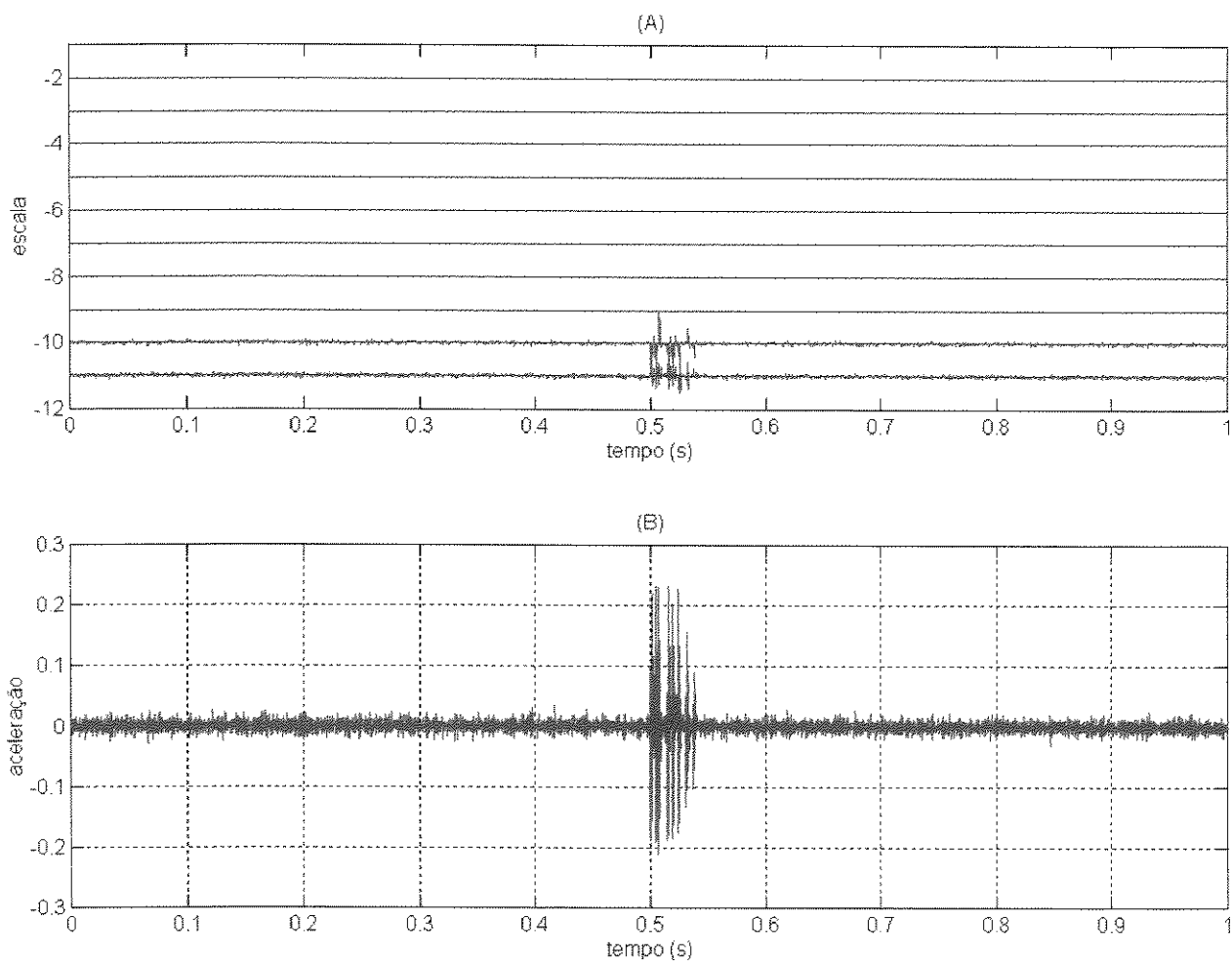


Fig. 6.05: Filtragem das escalas 10 e 11.
(A) DomínioWavelet (B) Domíniodo tempo

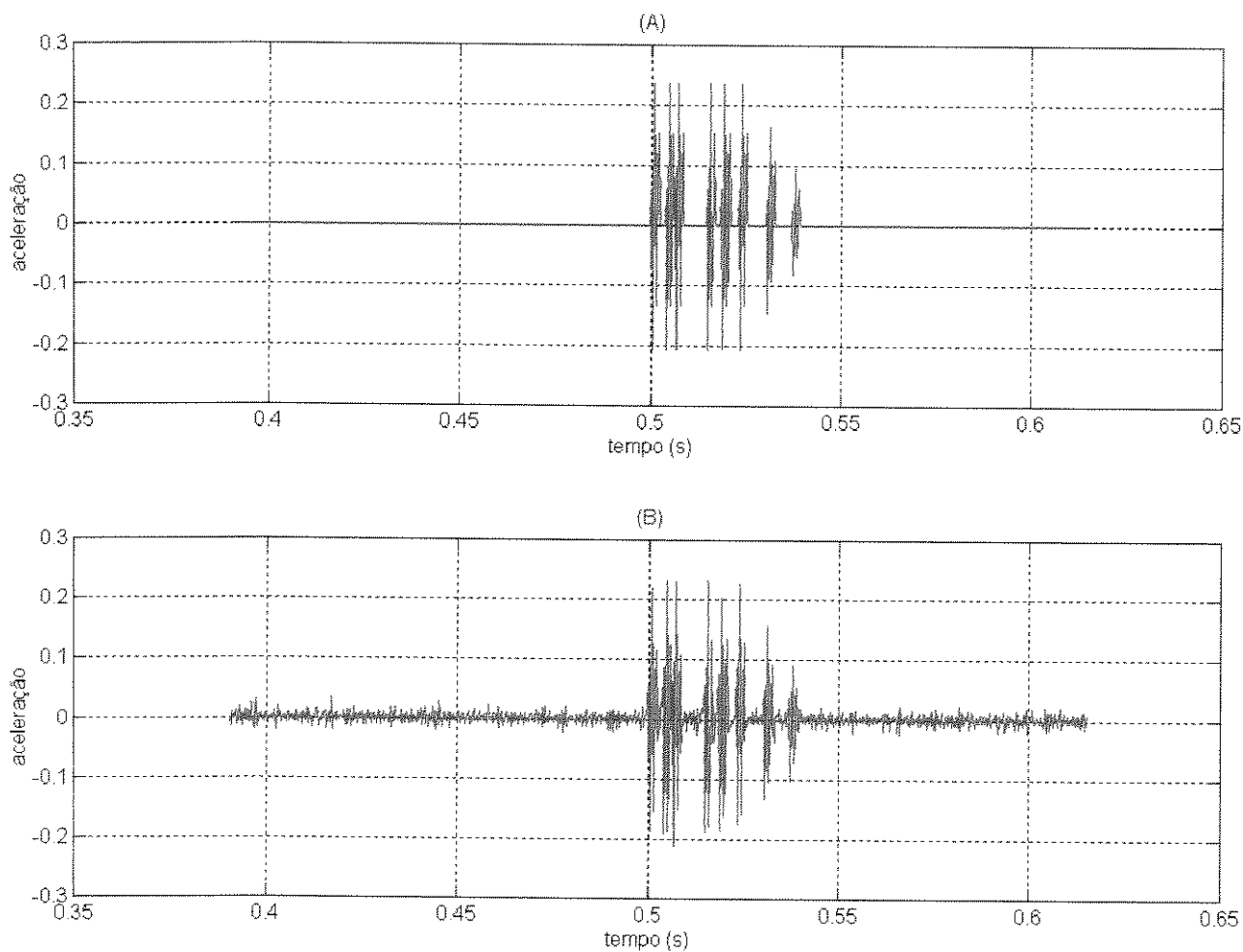


Fig. 6.06: Recuperação da falha (domínio do tempo).
(A) Original (B) Recuperada

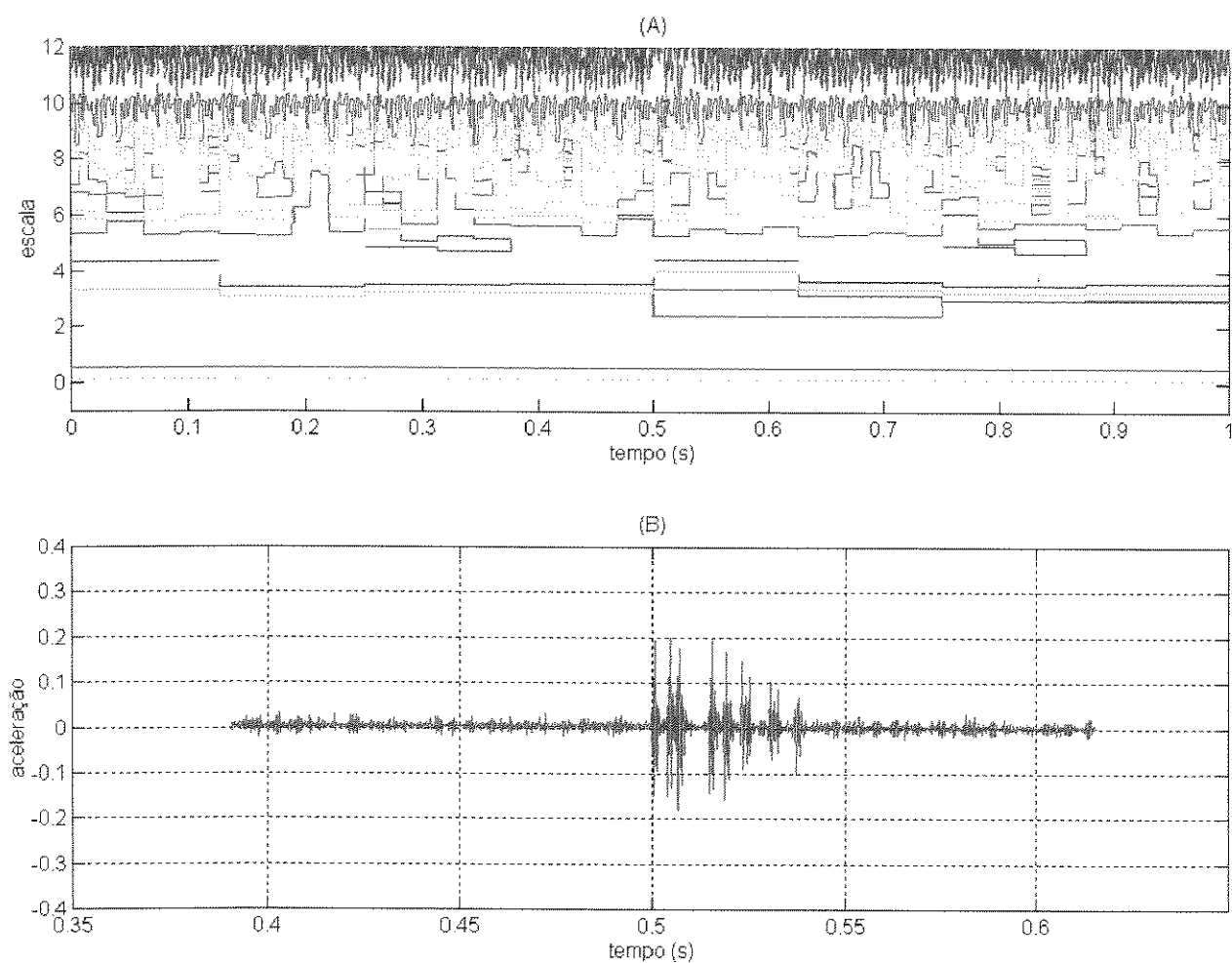


Fig. 6.07: Análise wavelet com 4 construtores.
 (A) Mapa de quadrados médios (B) Recuperação da falha

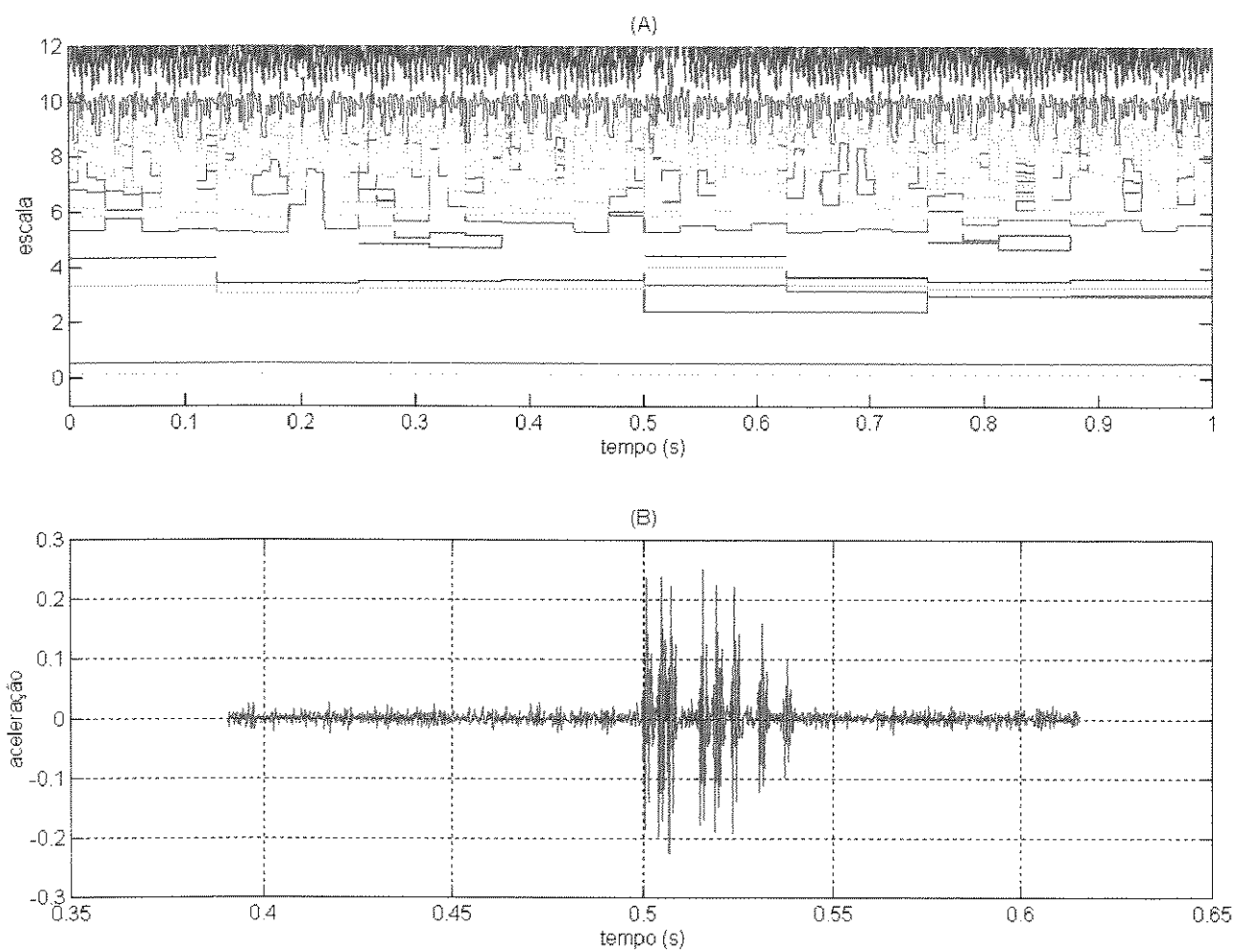


Fig. 6.08: Análise wavelet com 8 construtores.
 (A) Mapa de quadrados médios (B) Recuperação da falha

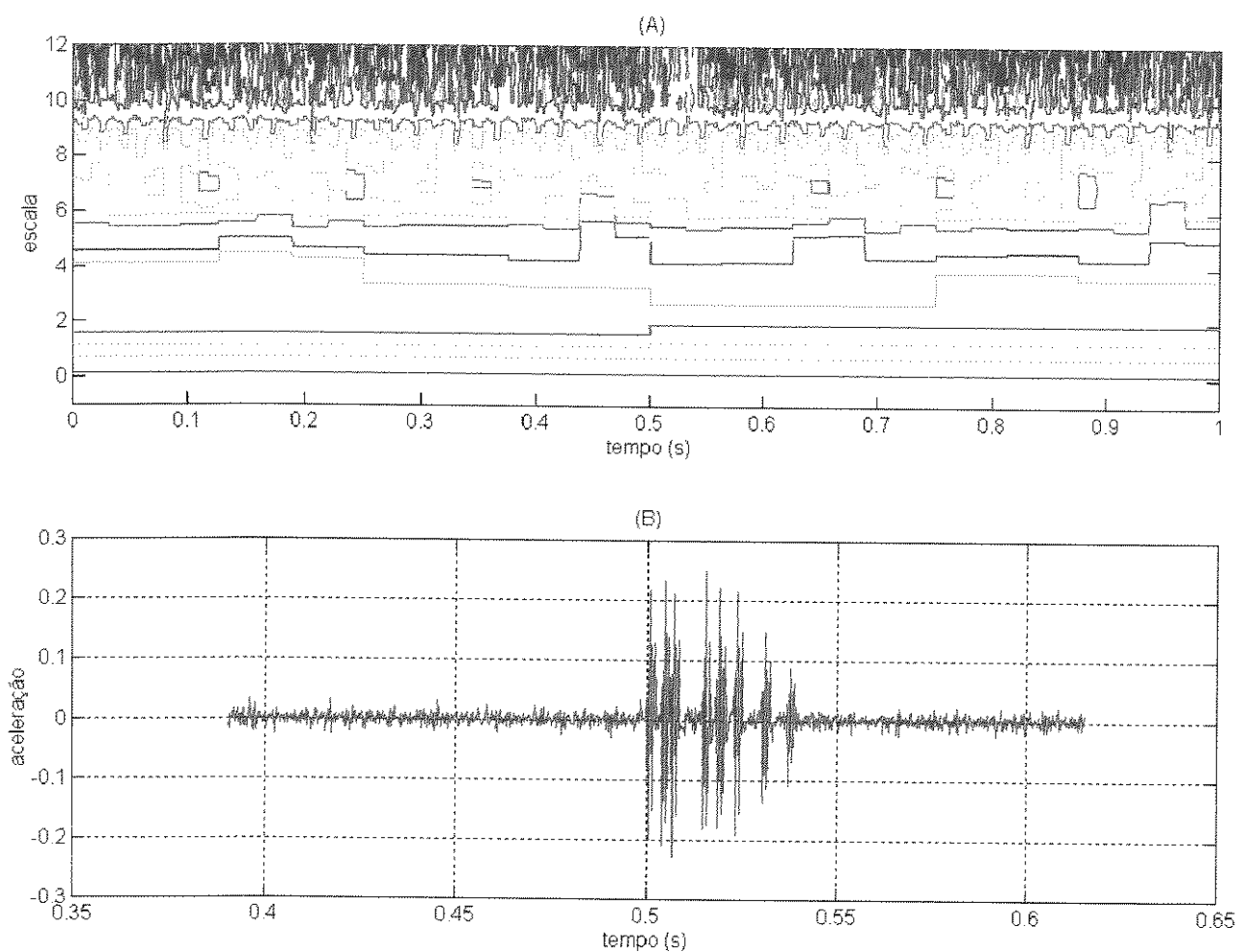


Fig. 6.09: Análise wavelet com 20 construtores.
(A) Mapa de quadrados médios (B) Recuperação da falha

6.2 Aceleração de rotores

É fato que o sinal de vibração proveniente do movimento de um rotor em aceleração possui características bastante dependentes do tempo, variando em função de parâmetros como velocidade de rotação, potência do motor, carga, etc... . Buscou-se então, através da análise wavelet, detectar experimentalmente efeitos não observáveis por técnicas convencionais ou, ao menos, detectar esses fenômenos com vantagens de implementação.

A montagem experimental¹ consiste de um eixo de Laval montado em mancais de rolamentos suportados por réguas flexíveis de aço. O eixo é conectado ao motor de corrente variável através de uma mangueira bastante flexível (silicone). Com acelerômetros colados nas direções vertical e horizontal do mancal mais próximo ao acoplamento, mediu-se os sinais vibratórios durante a aceleração do rotor. Partiu-se do repouso, fornecendo ao motor uma determinada condição de corrente, acelerando-o até aproximadamente $75Hz$. Foi feita também uma análise semelhante, partindo de uma velocidade constante de aproximadamente $95Hz$ e desligando o motor, obtendo assim o sinal da desaceleração do rotor até o repouso.

Os sinais foram primeiramente processados pelo analisador ScientificAtlanta®, sendo filtrados analogicamente (filtro anti-aliasing) e então quantificados digitalmente com frequência de amostragem conveniente, apesar da limitação de 2048 pontos. Estes sinais foram então convertidos para formato ASCII, através da conexão do analisador com um microcomputador (placa GPIB). Assim, é possível o processamento desses dados em nossos algoritmos computacionais.

Nas figuras 6.10 e 6.11 apresentamos os sinais da aceleração do rotor no tempo, com frequência de amostragem de $w_s = 512Hz$ (período de amostragem de $4s$), e os respectivos mapas de quadrados médios (wavelets com 20 construtores). Além da identificação das passagens por ressonâncias, podemos perceber um comportamento fora de padrão no

intervalo aproximado 2.6s a 3.1s (escalas 8 a 10). Ao contrário do que acontece com as ressonâncias, este efeito ocorre simultaneamente nas duas direções, sendo relacionado a características estruturais ou de flexão do rotor.

Assim, através da transformada de Fourier sob janela deslizante, foi feita uma análise espectral localizada, buscando caracterizar melhor o fenômeno. Utilizou-se uma sequência de 15 janelas de Hanning com 256 pontos cada e 75% de sobreposição entre elas, cobrindo o intervalo de 2 a 3.75s. Os resultados em cascata, para ambos os sentidos, são apresentados em três dimensões nas figuras 6.12 e 6.14 e, na forma de diagrama de contorno, nas figuras 6.13 e 6.15.

Podemos notar que, no instante em que a anormalidade foi detectada, surge uma componente com frequência aproximada de 95Hz e uma outra cuja frequência corresponde à soma da componente da rotação com a componente de 95Hz, caracterizando um fenômeno não linear com soma de frequências. Vejamos o que ocorre com o ensaio de desaceleração.

Ao fornecer corrente máxima ao motor, verificamos que este se estabiliza a uma rotação de 95Hz. Observamos então, através da transformada wavelet discreta com 20 construtores, quatro segundos do fenômeno de desaceleração. Nos mapas de quadrados médios (vertical e horizontal) apresentados nas figuras 6.16 e 6.17, localizamos novamente as passagens por ressonâncias, bem como um fenômeno semelhante ao descrito anteriormente, presente nos instantes imediatamente após o desligamento do motor (escalas 9 e 10). Efetuamos, também para esse caso, uma análise do intervalo de 0 a 2s através da transformada de Fourier sob janela deslizante (as características são as mesmas da análise anterior). Os resultados são apresentados nas figuras 6.18 e 6.21.

É bastante aparente, principalmente na direção horizontal (Figs. 6.20 e 6.21), que mesmo com a frequência de rotação caindo de 95Hz, esta

¹ Santos, I. F., Colla, G. C. *Influência das pás flexíveis e da sua distribuição na dinâmica de rotores rígidos suportados por elementos elásticos - teoria e experimento*. Relatório técnico SAE/UNICAMP, novembro 1996.

componente resiste por alguns instantes, sendo que da componente com frequência igual à da segunda harmônica de rotação (190Hz) surgem duas componentes, uma correspondente à segunda harmônica de rotação e a outra correspondente à soma da componente de rotação com a componente de 95Hz .

Podemos observar três casos onde ocorre a excitação da componente de 95Hz . No caso da desaceleração, podemos percebê-la excitada pela própria componente da rotação (instantes iniciais) e também pela segunda harmônica de rotação (instantes finais). No caso da aceleração, a componente de 95Hz é excitada por uma banda lateral à componente da rotação, causadas por uma modulação do sinal com frequência aproximada de 26Hz (distância entre a componente principal e a banda lateral).

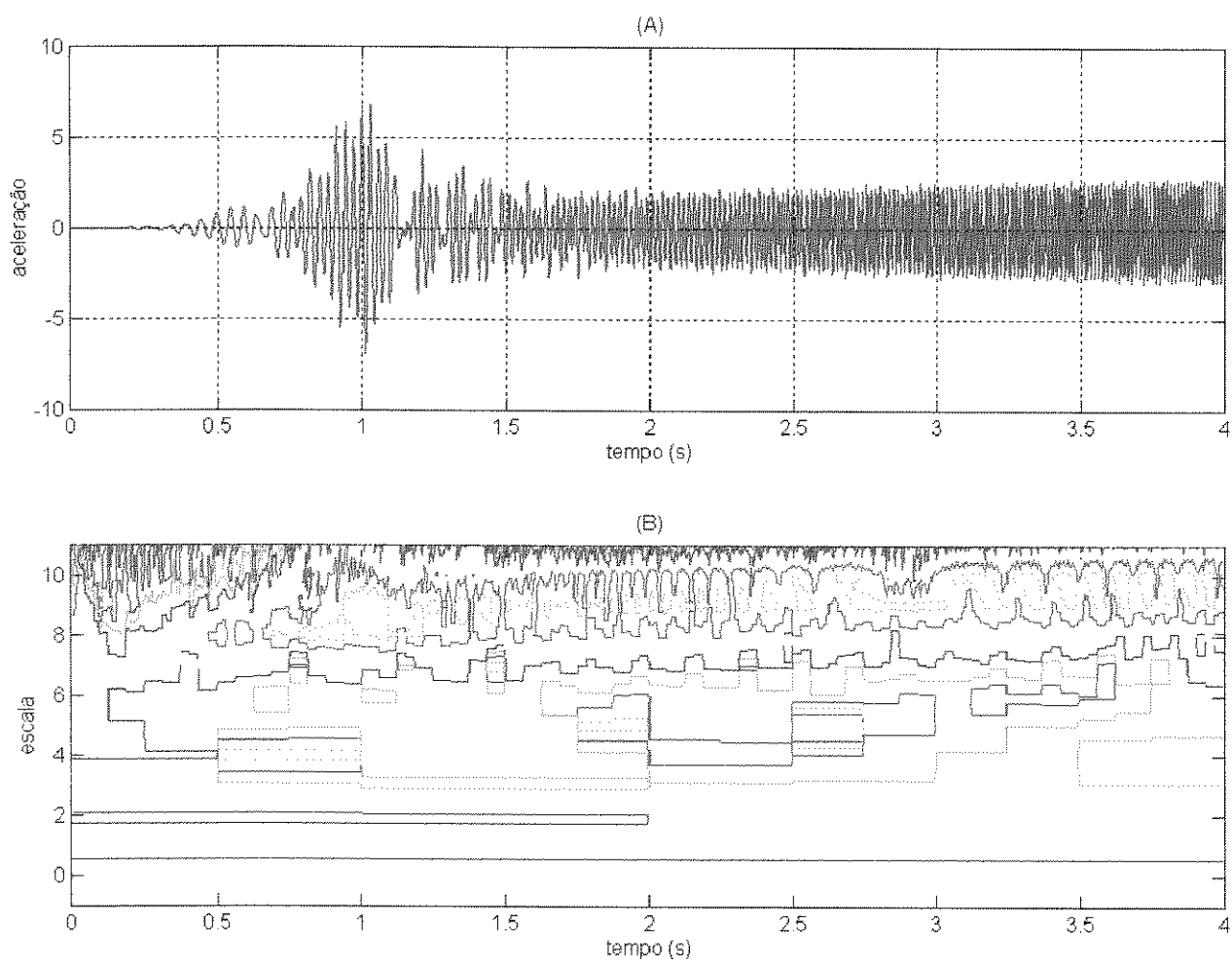


Fig. 6.10: Ensaio de aceleração (vertical).
(A) Domínio do tempo (B) Mapa de quadrados médios

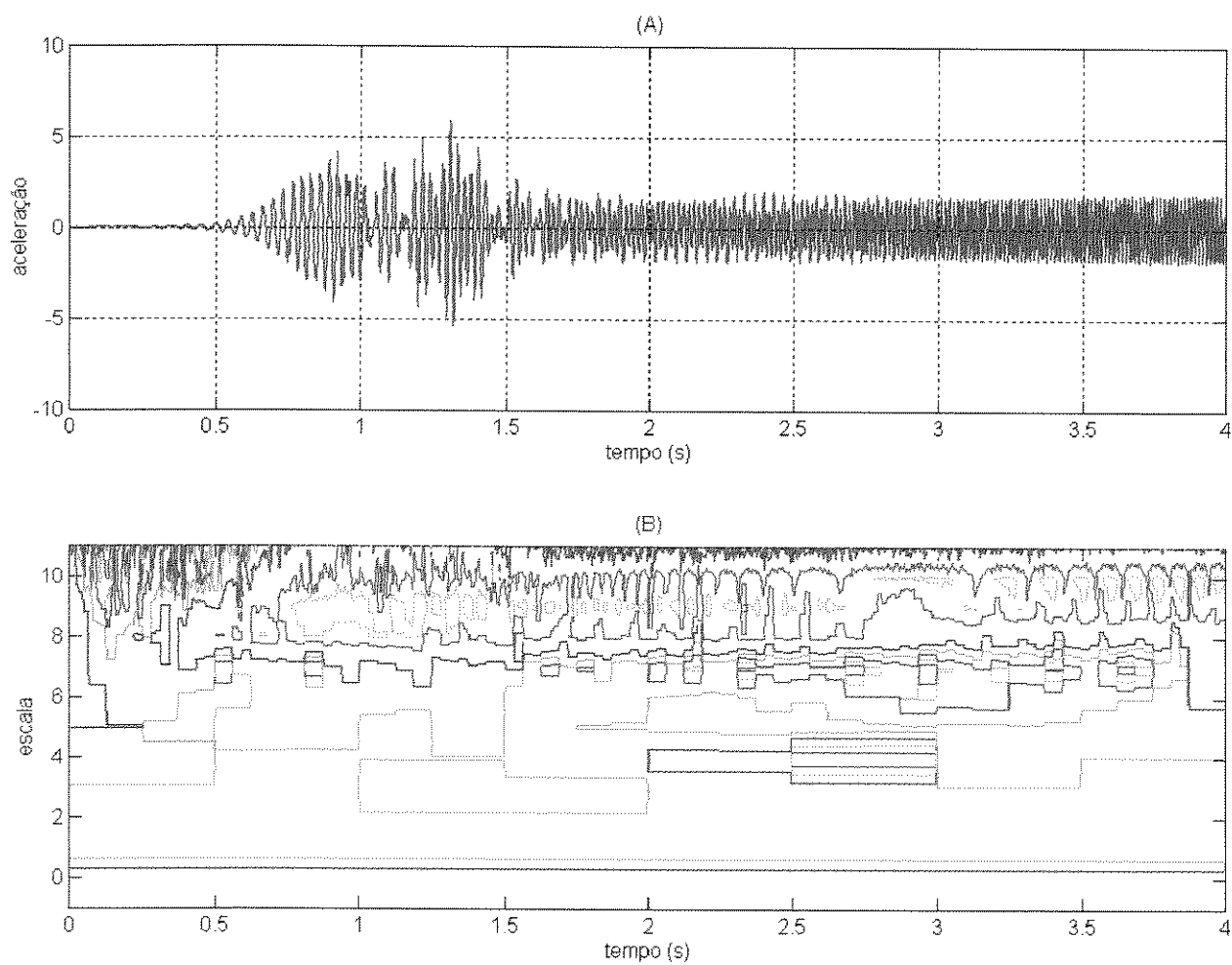


Fig. 6.11: Ensaio de aceleração (horizontal).
(A) Domínio do tempo (B) Mapa de quadrados médios

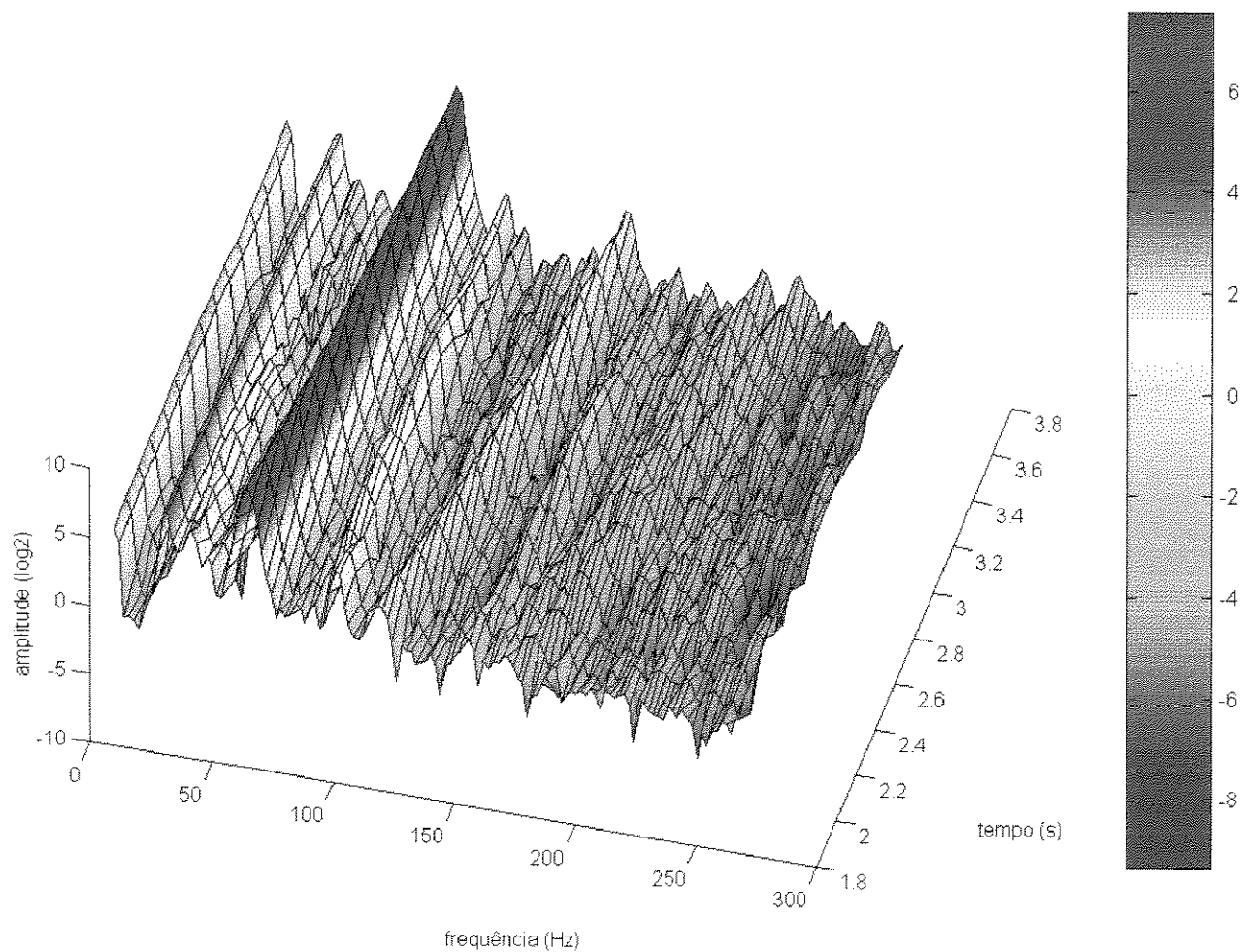


Fig. 6.12: Análise de Fourier sob janela deslizante.
Cascata 3-D para ensaio de aceleração (vertical)

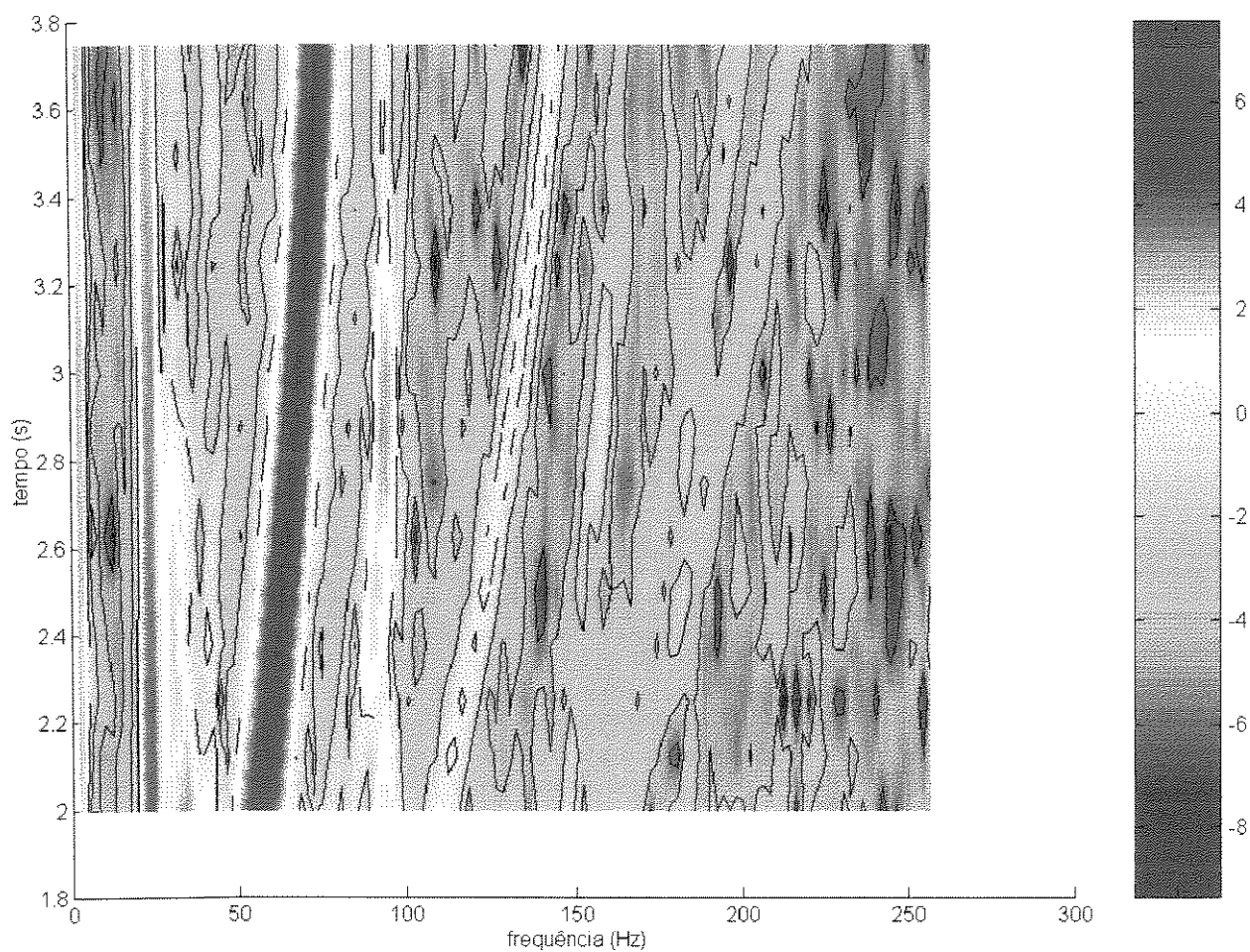


Fig. 6.13: Análise de Fourier sob janela deslizante.
Diagrama de contorno para ensaio de aceleração (vertical)

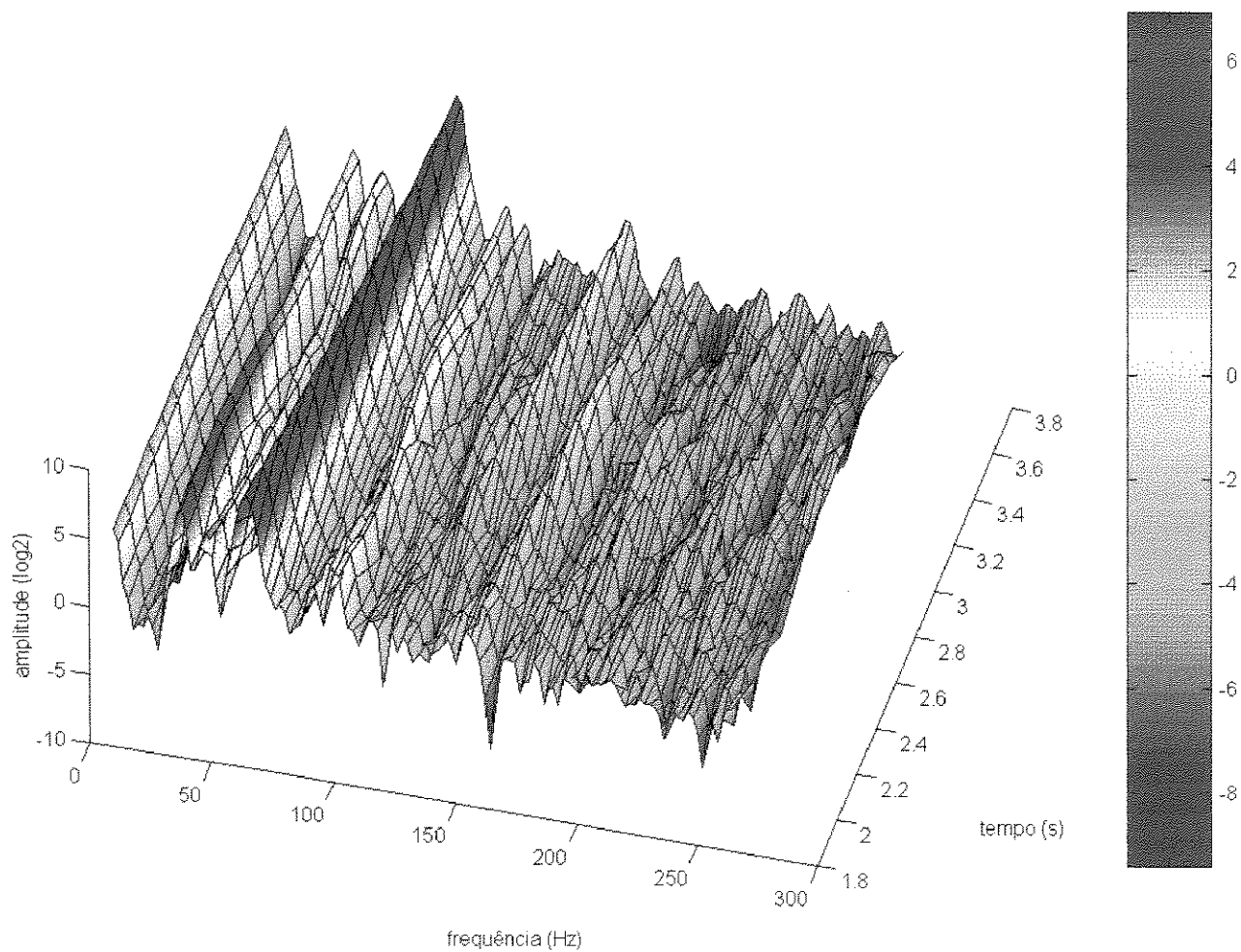


Fig. 6.14: Análise de Fourier sob janela deslizante.
Cascata 3-D para ensaio de aceleração (horizontal)

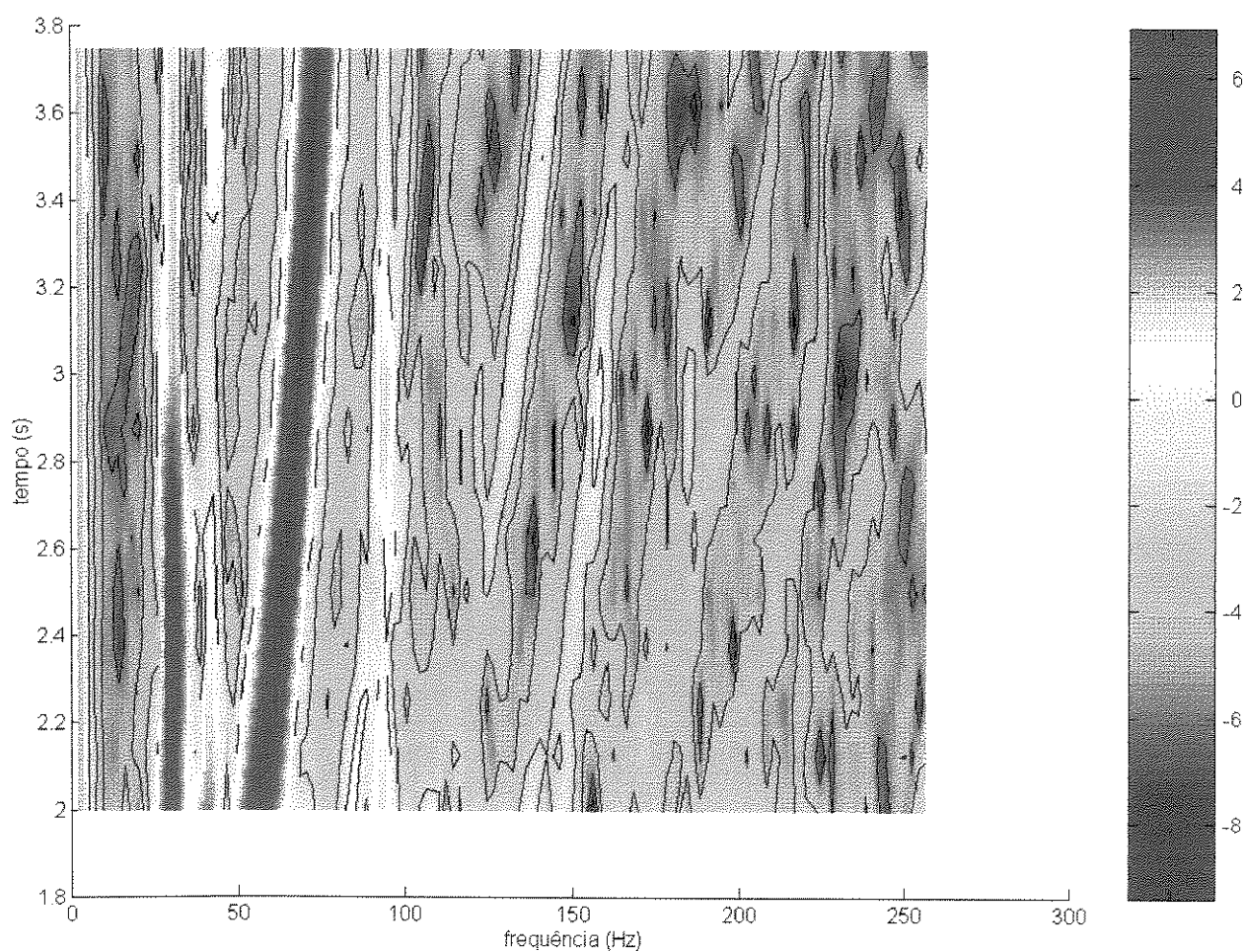


Fig. 6.15: Análise de Fourier sob janela deslizante.
Diagrama de contorno para ensaio de aceleração (horizontal)

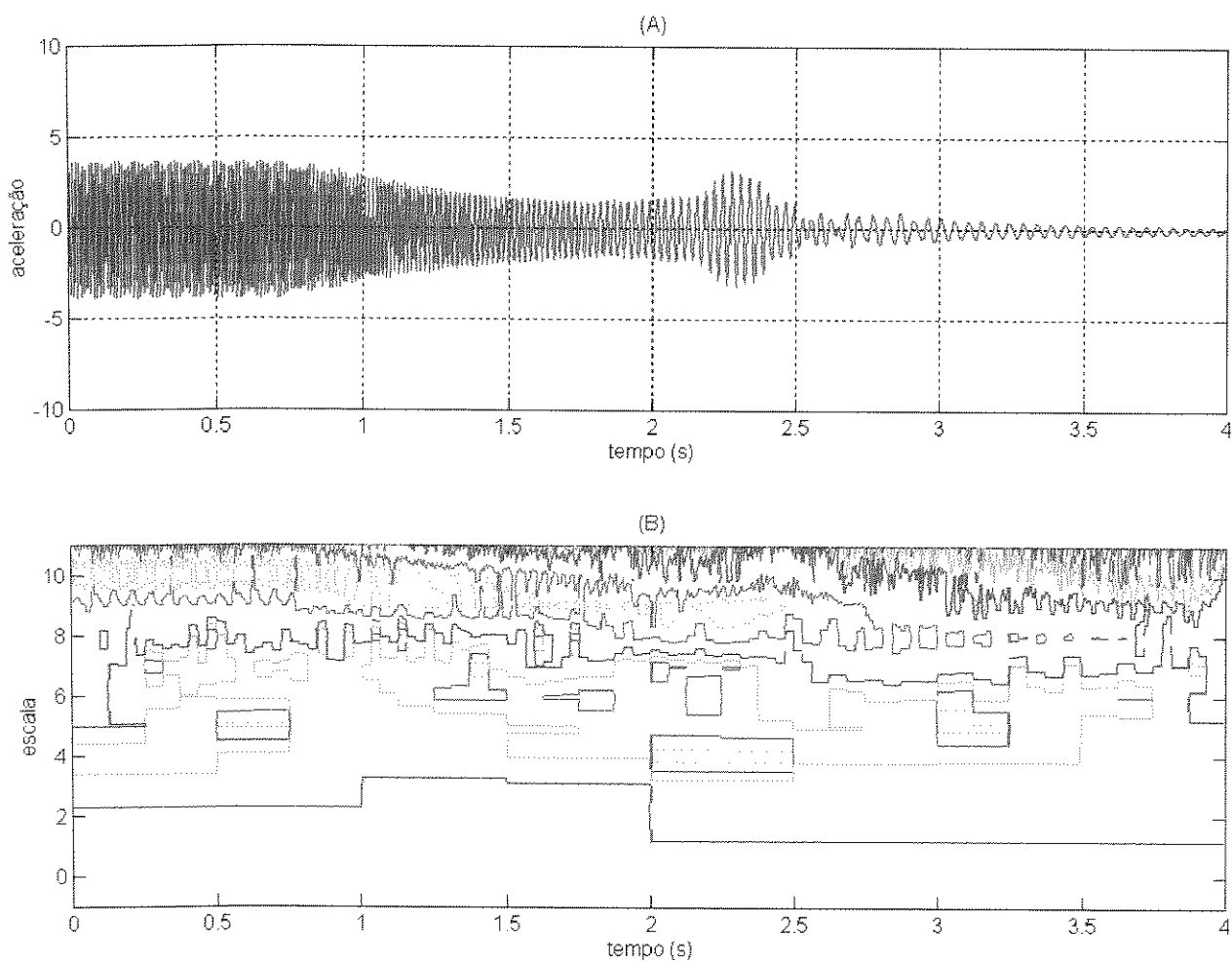


Fig. 6.16: Ensaio de desaceleração (vertical).
(A) Domínio do tempo (B) Mapa de quadrados médios

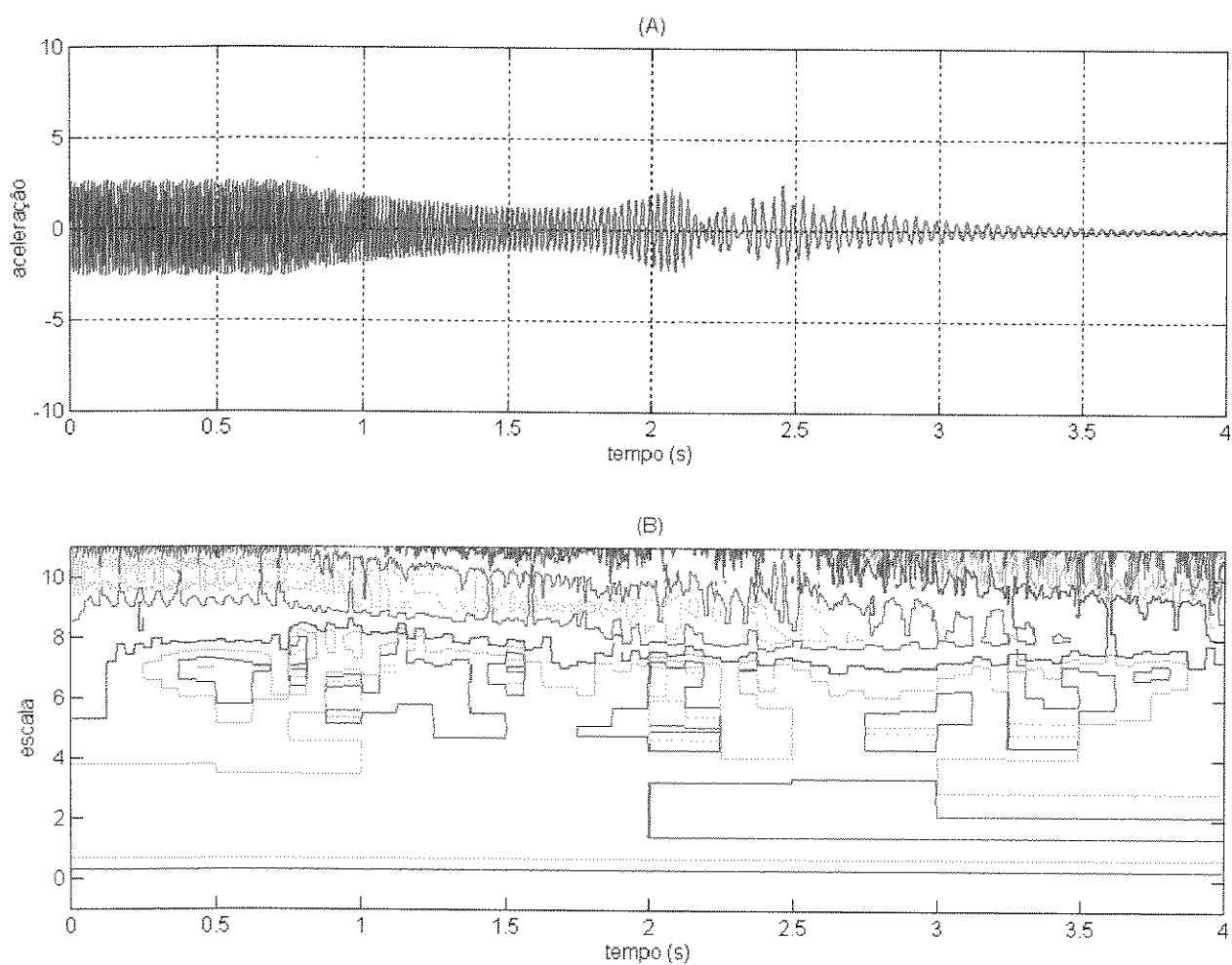


Fig. 6.17: Ensaio de desaceleração (horizontal).
(A) Domínio do tempo (B) Mapa de quadrados médios

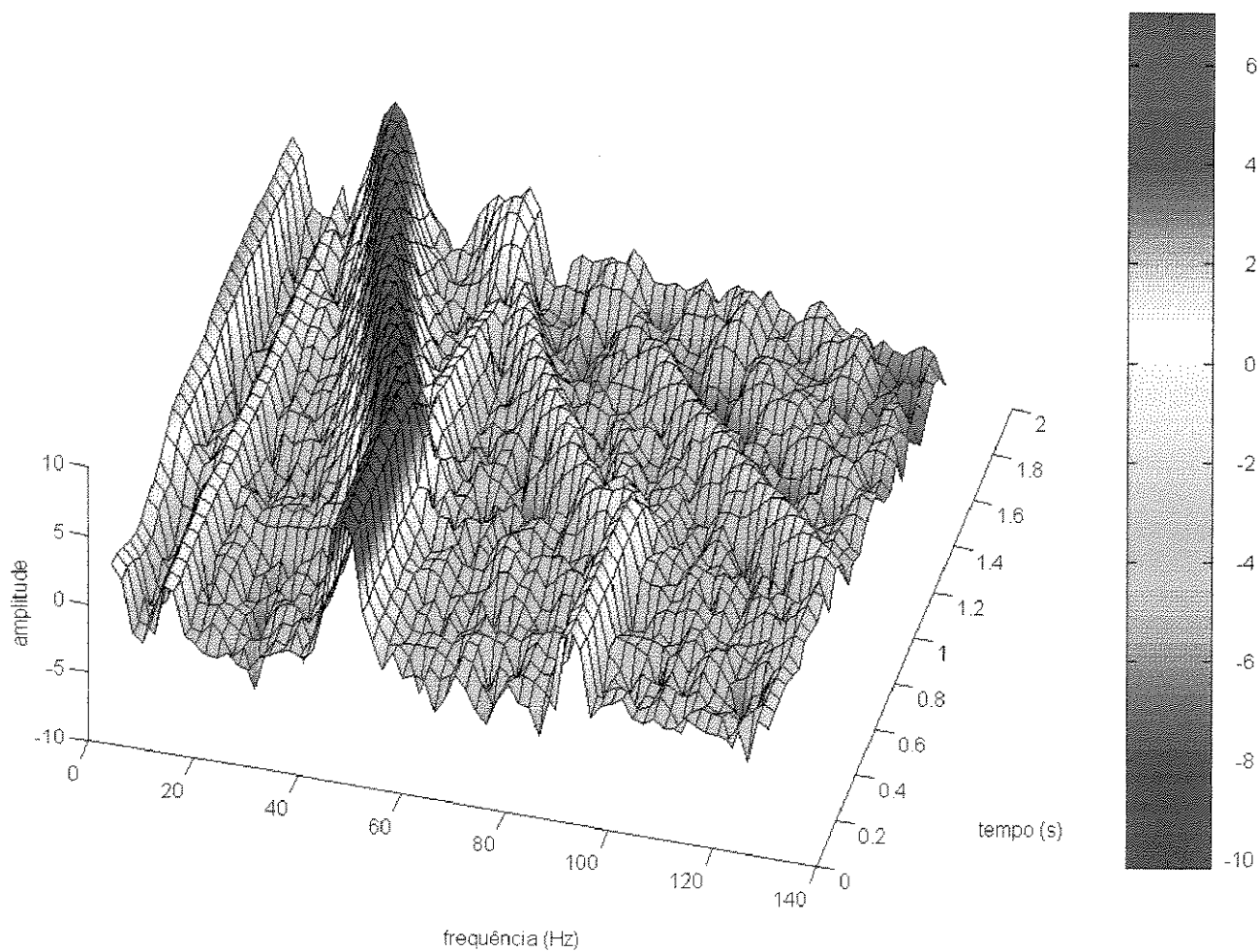


Fig. 6.18: Análise de Fourier sob janela deslizante.
Cascata 3-D para ensaio de desaceleração (vertical)

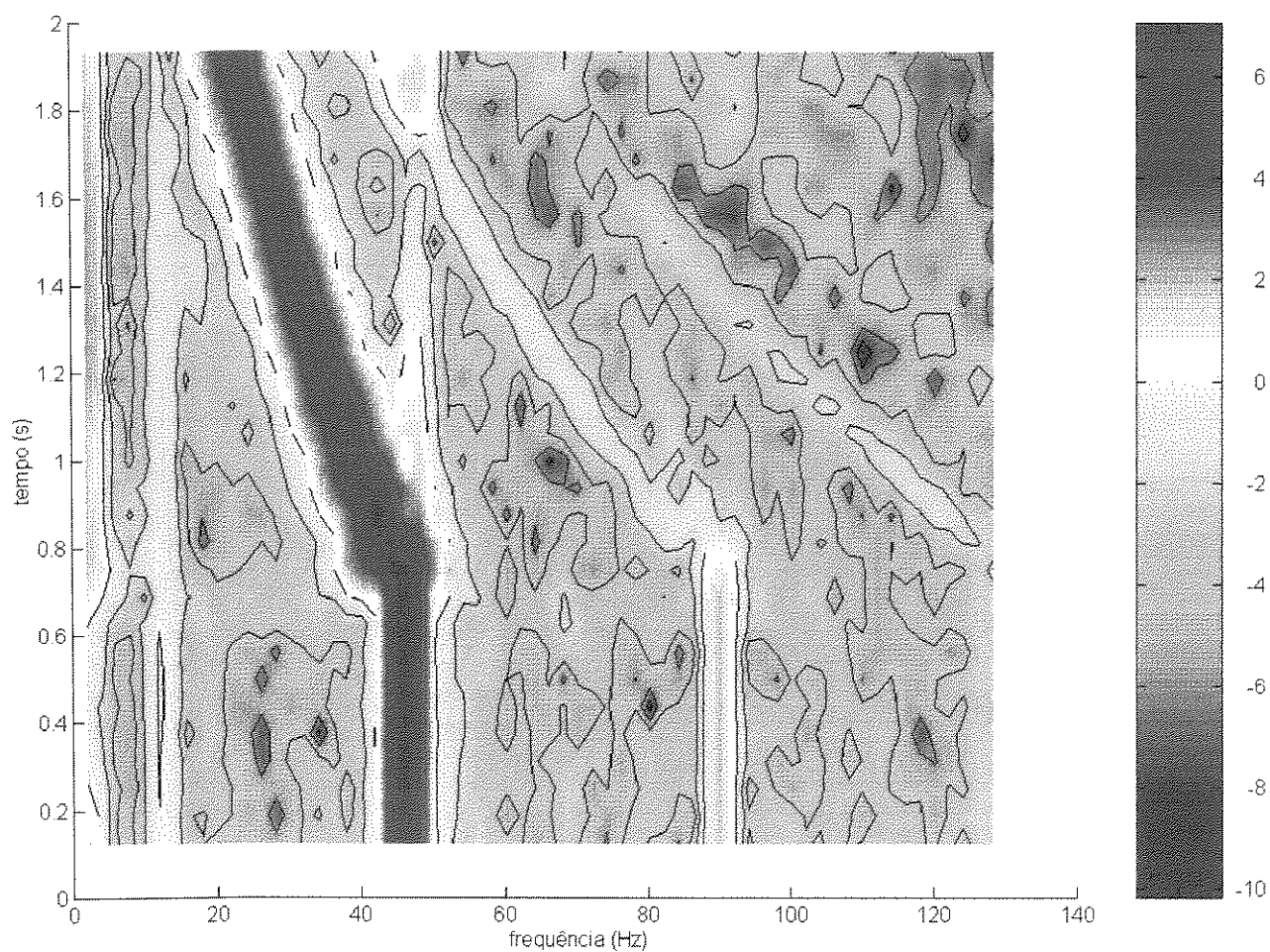


Fig. 6.19: Análise de Fourier sob janela deslizante.
Diagrama de contorno para ensaio de desaceleração (verical)

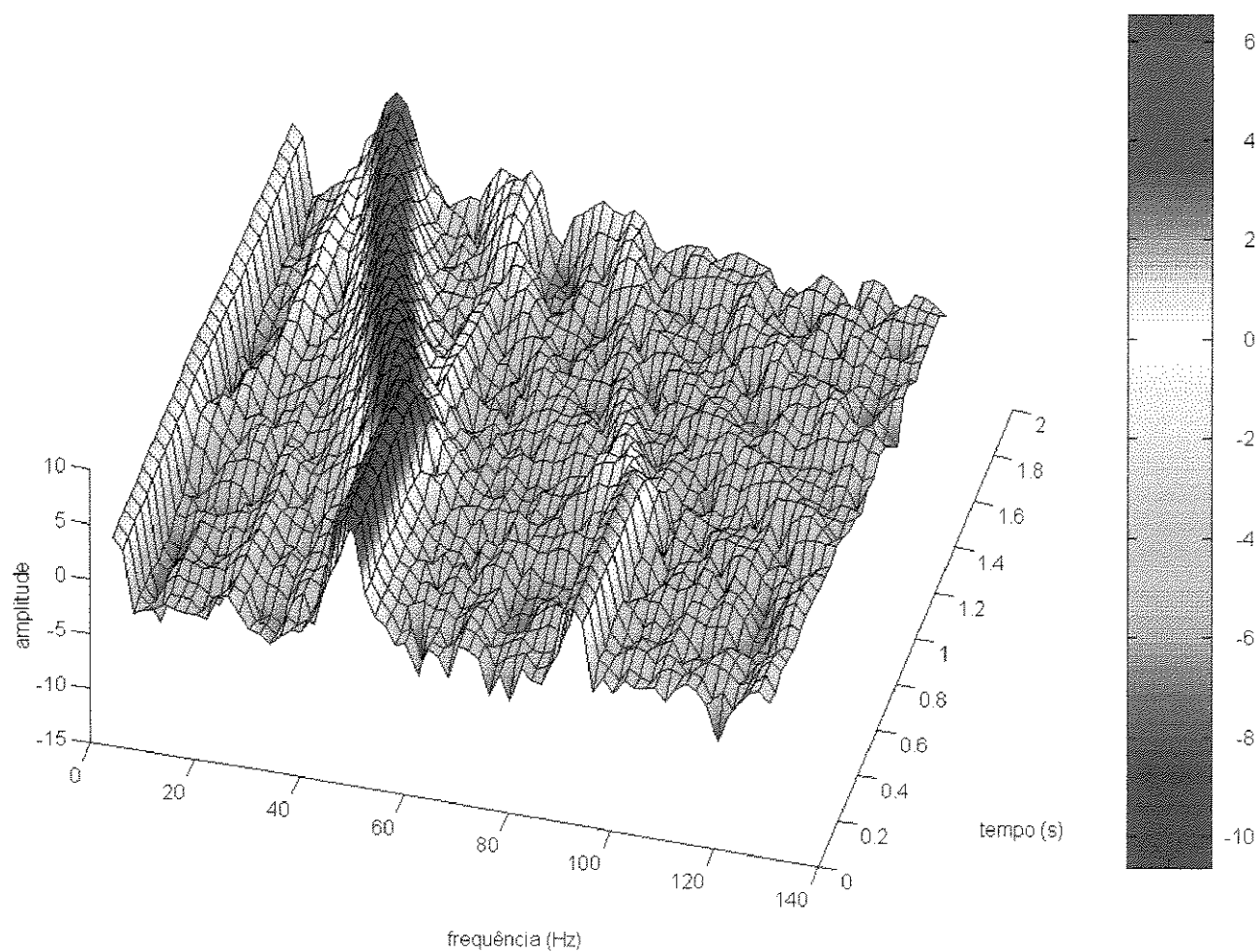


Fig. 6.20: Análise de Fourier sob janela deslizante.
Cascata 3-D para ensaio de desaceleração (horizontal)

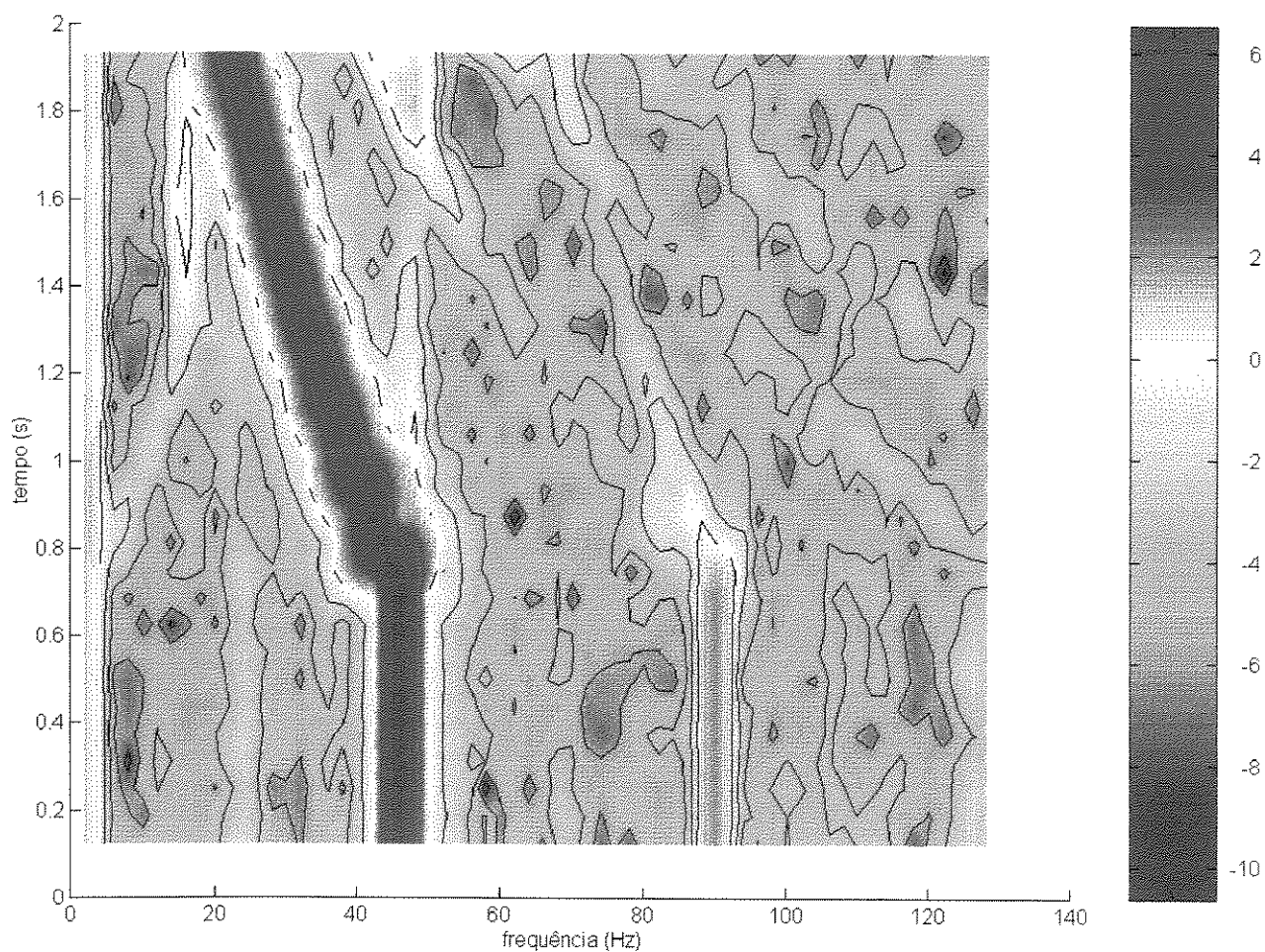


Fig. 6.21: Análise de Fourier sob janela deslizante.
Diagrama de contorno para ensaio de desaceleração (horizontal)

6.3 Outras referências

Comentaremos, agora, algumas aplicações atuais da teoria wavelet à análise de vibrações mecânicas.

Em seu livro [31], Newland estuda a vibração causada por um trem subterrâneo e medida em diversos andares de um edifício. Analisando separadamente cada nível wavelet, foi capaz de notar um comportamento correlacionado em baixas frequências e um comportamento multi-modal em altas frequências, ou seja, neste caso as vibrações em alta frequência são bastante dependentes da posição onde são medidas. Em um outro trabalho [28], o autor exemplifica a detecção de detalhes localizados e encobertos por outras componentes vibracionais, destacando as propriedades locais das wavelets ortonormais.

Tomlinson [39] destaca a importância do estudo de fenômenos não lineares, especialmente aqueles com características físicas identificáveis (casos práticos). Sugere, em função da grande variedade de comportamentos não lineares, uma análise baseada em várias técnicas, fundamentadas em diferentes conceitos. A teoria wavelet está incluída na lista de técnicas de identificação e caracterização de não linearidades. Este mesmo autor, juntamente com Staszewski [36], aplica a transformada wavelet integral na detecção de falhas em engrenamentos. A transformada wavelet foi capaz de localizar transientes resultantes de impactos em um dente defeituoso. Os resultados são também associados a simulações com sinais básicos, tais como: pulsos, funções harmônicas com decaimento e funções harmônicas com frequência variável.

Alattass, Mahfoudh e Play [01], também analisam falhas em engrenamentos através da IWT, seguindo a metodologia abaixo:

1. Testes com engrenagens em bom estado.
2. Criação de diferentes condições de falha (localizada ou uniforme).

3. Análise dos diferentes sinais nos domínios do tempo, da frequência e wavelet.
4. Determinação da influência das falhas em diferentes parâmetros através de métodos estatísticos.
5. Comparação dos resultados nos diferentes domínios em função de diferentes condições de torque e velocidade.

Os parâmetros analisados foram: pico, pico a pico, desvio padrão, valor quadrático médio (RMS), fator de crista, curtosis e grau de assimetria. Os autores verificaram que os parâmetros no domínio da frequência são menos sensíveis às falhas quando comparados às outras duas análises, mas esta representação é bastante eficiente na localização das frequências de engrenamento e suas harmônicas. Além disto, o comportamento dos parâmetros na representação wavelet é mais estável em função das condições de velocidade e torque, levando vantagem em relação a análise no domínio do tempo.

Gade e Herlufsen [18] fazem uma análise do som originário de uma explosão em indústria mineradora. Neste tipo de sinal, com duração inferior a um segundo, as características espectrais variam bruscamente com o tempo devido à ocorrência de eventos isolados, com duração aproximada de *100ms*. Sendo assim, estes sinais não podem ser completamente decifrados através da simples análise de Fourier. Através da aplicação da transformada de Fourier sobre janela deslizante e da transformada wavelet, é possível a localização temporal destes eventos, bem como a determinação de suas características espectrais. A análise é feita através do software comercial para análise de sinais não estacionários (tipo *WT 9362*) da companhia dinamarquesa Brüel&Kjær.

Uma análise semelhante é feita por Van de Auweraer, Leuridan e Vold [40], onde a pressão sonora proveniente do fechamento de uma porta de automóvel é analisada através da transformada de Fourier de curta duração (com janelas gaussianas de diferentes tamanhos) e, também, pela

transformada wavelet. Enquanto a transformada de Fourier de curta duração se mostra eficiente na resolução de frequências, somente a transformada wavelet é capaz de localizar precisamente os instantes em que ocorrem os fenômenos de alta frequência.

Donoho et.al. [13][14][15][16] descreve um método de eliminação do ruído branco presente nos sinais reais através de um determinado encolhimento dos coeficientes wavelet, seguido de uma transformação de volta ao domínio do tempo. Este método supera os métodos tradicionais por preservar descontinuidades do sinal.

Nos trabalhos [33] e [34], Robertson et. al. apresentam técnicas que empregam a transformada wavelet na extração de características de resposta ao impulso de sistemas dinâmicos lineares. Destaca-se a capacidade de distinção de diferentes sinais com mesma densidade espectral, pela localização temporal das componentes de cada escala, além da capacidade de detecção de descontinuidades bruscas, provenientes de trincas ou incidentes transitórios. É fácil assim imaginar novos desenvolvimentos no controle ativo de vibrações e no monitoramento on-line de condições estruturais.

6.4 Comentários finais

Como vimos, a teoria wavelet é mais uma tecnologia a passar do nível de ciência pura ao nível de ferramenta prática e, certamente, já é efetiva em equipamentos de última geração. Em nossa análise de vibrações mecânicas, é evidente a sua utilidade no monitoramento da saúde de máquinas, com intenções preditivas. Mais do que isso, hoje se fala em atitude pró-ativa, resolvendo situações problemáticas antes mesmo destas acontecerem.

Imaginamos, então, a fase de projeto dos chamados produtos de sistemas complexos, cuja principal característica é a integração de tecnologias avançadas de diferentes áreas da ciência em um único produto. Valendo-se de modelos físico-matemáticos, simulações, ensaios de

componentes e testes de integração, além da experiência adquirida, um fabricante concebe um equipamento e determina as suas capacidades operacionais. Logicamente, o grande volume de conhecimento envolvido não é passado ao usuário final, interessado somente na eficiência do equipamento no cumprimento de suas tarefas. Assim, é interessante que esses produtos possuam um sistema complementar, responsável por sua auto-avaliação e até mesmo por atitudes de readaptação.

Em termos de tecnologia corrente, poderíamos imaginar que uma máquina venha devidamente instrumentada e acompanhada de um CD-ROM, contendo modelos, parâmetros e bancos de dados do equipamento, além de algoritmos dedicados de monitoramento. Estes algoritmos seriam como caixas de ferramentas compatíveis com algum software matemático de interface amigável, se apresentando ao usuário na forma de instrumentos virtuais. Desta forma, os sinais da máquina seriam fornecidos (constantemente ou periodicamente) ao sistema, resultando numa capacidade de análise superior.

Fechando o trabalho, acreditamos que num futuro próximo a teoria wavelet aplicada à análise de vibrações pode ser uma ferramenta bastante eficiente na identificação de parâmetros de um modelo e no controle de sistemas mecânicos, além das já comprovadas habilidades de monitoramento.

Capítulo 7

Bibliografia

[01] ALATTASS, M., MAHFOUDH, J. Play, D. Vibration analysis for detection of gear faults within gearbox. In: *Proceedings* IFTOMM - FOURTH INTERNATIONAL CONFERENCE ON ROTOR DYNAMICS, Chicago, USA, september, 1994, pp197-203.

[02] ASH, R. B. *Measure, integration and functional analysis*. New York, Academic, 1972, 284p.

[03] AUWERAER, H. V. A., LEURIDAN, J., VOLD, H. Analysis of nonstationary noise and vibration signals. In: *Proceedings* ISMA19 - TOOLS FOR NOISE AND VIBRATION ANALYSIS, Leuven, september, 1994, vol. I, pp385-405.

[04] BONALDO, André Vinicius. *Transformada ondelete: Algoritmo baseado na transformada rápida de Fourier*. Rio de Janeiro, COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1993. 130p, Tese (mestrado).

[05] Buckheit, J., Chen, S., Donoho, D., Johnstone, I., Scargle, J., About Wavelab. Stanford University, january, 1995.

[06] Buckheit, J., Chen, S., Donoho, D., Johnstone, I., Wavelab reference manual. Stanford University.

[07] Cavalca, L. K. Non-linear analysis of a laval rotor passing through resonance under the action of Coulomb dry friction. *Machine Vibration*, 1993, vol 2, pp71-79.

[08] CHEN, D. J., WANG, W. J. Pattern changes of time-shifted vibration signals on wavelet time-scale maps. In: *Proceedings* DESIGN ENGINEERING TECHNICAL CONFERENCES, september, 1995, Boston, ASME: DE-Vol. 84-1, 1995, vol. 3, part A, pp 1345-1349.

- [09] Chen, S., Donoho, D. L., Atomic decomposition by basis pursuit. ftp.: playfair.stanford.edu, dir.: pub/chen_s, file: BasisPursuit.ps.z.
- [10] CHUI, C. K. *An introduction to wavelets*. USA, Academic Press, 1992, 266p.
- [11] DAUBECHIES, I. *Ten lectures on wavelets*. USA, SIAM, 1992.
- [12] DEVITO, C. L. *Functional analysis and linear operators theory*. USA, 1990, 358p.
- [13] Donoho, D. L., Johnstone, I. M., Kerkyacharian, G., Picard, D., Wavelet Shrinkage: asymptopia?, *Journal of the Royal Statistical Society, B* (1995) 57, N° 2, pp 301-369, 1995.
- [14] Donoho, D. L., Nonlinear wavelet methods for recovery of signals, densities, and spectra from indirect and noisy data, Stanford University.
- [15] Donoho, D. L., De-noising by soft-thresholding, Stanford University.
- [16] Donoho, D. L., Johnstone, I. M., Ideal denoising in an orthonormal basis chosen from a library of bases, ftp.: playfair.stanford.edu, dir.: pub/donoho, file: idealbasis.ps.z, Stanford University.
- [17] FERENCE JR., M., LEMON, H.B., STEPHENSON, R. J. *Curso de física*. Editora Edgard Blücher Ltda, 224p.
- [18] GADE, S., HERLUFSEN, H. The use of wavelet transform for analysis of transient noise. In: *Proceedings ISMA19 - TOOLS FOR NOISE AND VIBRATION ANALYSIS*, Leuven, september, 1994, vol. I, pp 423-429.
- [19] Haar, A. Zur theorie der orthogonalen funktionensysteme. *Math. Ann.*, vol 69, pp 331-371, 1910.
- [20] Johnstone, I. M., Silverman, B. W., Wavelet threshold estimators for data with correlated noise, ftp.: playfair.stanford.edu, dir.: pub/johnstone, file: correlated.ps.z, Stanford University.
- [21] KANTOROVICH, L. V., AKILOV, G. P. *Functional analysis*. U.K., 2^aed, 1982, 589p.
- [22] KREYSZIG, E. *Introductory functional analysis with applications*. New York, Wiley, 1978, 688p.
- [23] LIM, J. S., OPPENHEIM, A. V. *Advanced topics in signal processing*. USA, Prentice Hall, 1988, 518p.

[24] Mallat, S. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intell.*, vol11, pp 674-693, 1989.

[25] MARR, D. *Vision*. W. H. Freeman & Co., New York, 1982.

[26] MEYER, Y. *Wavelets: algorithms and applications*. USA, SIAM, 1993, 133p.

[27] MEYER, Y. *Wavelets and operators*. France, Cambridge University Press, 1992, 223p

[28] NEWLAND, D. E. Progress in the application of wavelet theory to vibration analysis. In: *Proceedings DESIGN ENGINEERING TECHNICAL CONFERENCES*, september, 1995, Boston, ASME: DE-Vol. 84-1, 1995, vol. 3, part A, pp 1311-1322.

[29] Newland, D. E. Wavelet analysis of vibration, part I: theory. *Transactions of the ASME, Journal of Vibration an Acoustics*, vol 116, pp 409-416, october, 1994.

[30] Newland, D. E. Wavelet analysis of vibration, part II: wavelet maps. *Transactions of the ASME, Journal of Vibration an Acoustics*, vol 116, pp 417-425, october, 1994.

[31] NEWLAND, D. E. *An introduction to random vibrations, spectral and wavelet analysis*. Great Britain, Longman Scientific and Technical, 3rd edition, 1993, 478p.

[32] PAPOULIS, A. *Signal analysis*. USA, McGraw-Hill, 1984, 431p.

[33] ROBERTSON, A. N., PARK, K. C., ALVIN, K. F. Extraction of impulse response data via wavelet transform for structural system identification. In: *Proceedings DESIGN ENGINEERING TECHNICAL CONFERENCES*, september, 1995, Boston, ASME: DE-Vol. 84-1, 1995, vol. 3, part A, pp 1323-1334.

[34] ROBERTSON, A. N., PARK, K. C., ALVIN, K. F. Identification of structural dynamics models using wavelet-generated impulse response data. In: *Proceedings DESIGN ENGINEERING TECHNICAL CONFERENCES*, september, 1995, Boston, ASME: DE-Vol. 84-1, 1995, vol. 3, part A, pp 1335-1344.

[35] RUDIN, W. *Functional analysis*. New Delhi, Tata McGraw-Hill, 1974, 397p.

[36] STASZEWSKI, W. J., TOMLINSON, G. R. Fault detection procedures employing the wavelet transform. In: *Proceedings ISMA19 - TOOLS FOR NOISE AND VIBRATION ANALYSIS*, Leuven, september, 1994, vol. I, pp 371-384.

[37] STRANG, G. Wavelets and dilation equations: a brief introduction. *SIAM Review*, vol. 31, No 4, pp 614-627, 1989.

[38] STRANG, G., FIX, G. A Fourier analysis of the finite element variational method. In: *Constructive Aspects of Functional Analysis*, Edizioni Cremonese, Rome, 1973.

[39] TOMLINSON, G. R. Linear or nonlinear - that is the question. In: *Proceedings ISMA19 - TOOLS FOR NOISE AND VIBRATION ANALYSIS*, Leuven, september, 1994, vol. I, pp 11-32.

[40] VAN DER AUWERAER, H., LEURIDAN, J., VOLD, H. Analysis of nonstationary noise and vibration signals. In: *Proceedings ISMA19 - TOOLS FOR NOISE AND VIBRATION ANALYSIS*, Leuven, september, 1994, vol. I, pp 385-405.