

TESE DEFENDIDA POR *Cristina Minioli Saracho*  
E APROVADA F  
COMISSÃO JULGADORA EM *23, 09 2002*  
*Ilmar F Santos*  
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA  
MECÂNICA

Modelos Matemáticos Lineares e Não-lineares para  
Representar o Acoplamento entre Rotor e Palhetas  
Flexíveis – Exemplos Numéricos e Verificação  
Experimental

200306838

Autora: Cristina Minioli Saracho  
Orientador: Prof Dr. Ilmar Ferreira Santos

34/02

UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL  
SEÇÃO CIRCULANTE

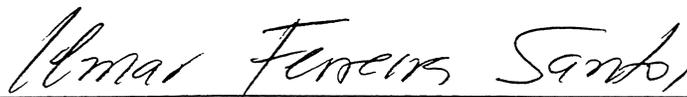
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

TESE DE DOUTORADO

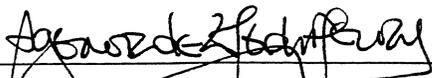
Modelos Matemáticos Lineares e Não-lineares para  
Representar o Acoplamento entre Rotor e Palhetas  
Flexíveis – Exemplos Numéricos e Verificação  
Experimental

Autora: Cristina Minioli Saracho

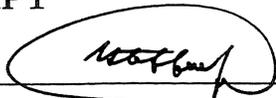
Orientador: Prof. Dr. Ilmar Ferreira Santos



Prof. Dr. Ilmar Ferreira Santos, Presidente  
DPM/FEM/UNICAMP



Prof. Dr. Agenor de Toledo Fleury  
ASC/IPT



Prof. Dr. Valder Steffen Jr.  
DEM/UFU



Prof. Dr. Hans Ingo Weber  
DPM/FEM/UNICAMP



Prof. Dr. Robson Pederiva  
DPM/FEM/UNICAMP

Campinas, 23 de setembro de 2002.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

**Modelos Matemáticos Lineares e Não-lineares para  
Representar o Acoplamento entre Rotor e Palhetas  
Flexíveis – Exemplos Numéricos e Verificação  
Experimental**

Autora: **Cristina Minioli Saracho**

Orientador: **Prof. Dr. Ilmar Ferreira Santos**

Curso: Engenharia Mecânica

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Tese de doutorado apresentada à comissão de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2002

S.P. - Brasil

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

Sa71m Saracho, Cristina Minioli  
Modelos matemáticos lineares e não-lineares para  
representar o acoplamento entre rotor e palhetas flexíveis  
– exemplos numéricos e verificação experimental /  
Cristina Minioli Saracho. --Campinas, SP: [s.n.], 2002.

Orientador: Ilmar Ferreira Santos.  
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de  
Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Dinâmica das máquinas. 2. Rotores - Dinâmica. 3.  
Dinâmica estrutural. 4. Sistemas lineares. I. Santos, Ilmar  
Ferreira. II. Universidade Estadual de Campinas.  
Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

# Dedicatória

*Este trabalho é dedicado aos meus pais e à minha família, pelo seu constante incentivo e apoio.*

# Agradecimentos

Inicialmente gostaria de agradecer ao **Prof. Dr. Ilmar Ferreira Santos** pela orientação deste trabalho e pela amizade e apoio durante estes seis anos de trabalho em conjunto.

Aos Profs. **Dr.-Ing Richard Market** e **Dr. Peder Klit** que me receberam quando estivesse no exterior, em Darmstadt e em Copenhage.

A todos os colegas, professores, em especial ao **Prof. Dr. Paulo Roberto Gardel Kurka**, e funcionários, em especial às secretárias **Denise** e **Cleusa**, do Departamento de Projeto Mecânico por este período em que estive trabalhando junto a este departamento.

A todos os colegas e amigos da pós-graduação, em especial, à **Zilda de Castro Silveira**, **Paula Frassinetti Cavalcante**, **Cláudio Alessandro de Carvalho Silva** e **Rodrigo Nicoletti**.

A **Fapesp** pela bolsa de estudos concedida.

Em especial, ao **Paulo** pelo seu constante apoio e compreensão.

# Resumo

SARACHO, Cristina Minioli, *Modelos Matemáticos Lineares e Não-lineares para Representar o Acoplamento entre Rotor e Palhetas Flexíveis - Exemplos Numéricos e Verificação Experimental*, Campinas : Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2002. 241p. Tese (Doutorado)

Os objetivos deste trabalho são o desenvolvimento, a solução, a análise e a validação experimental das equações de movimento de um conjunto formado por um rotor rígido acoplado a palhetas flexíveis. As palhetas flexíveis são modeladas como vigas girantes, sendo que tanto aproximações lineares quanto não-lineares são utilizadas para descrever a sua deformação, o que leva a diferentes tipos de modelos matemáticos desta viga. As equações globais do conjunto são obtidas usando a metodologia de sistemas de múltiplos corpos híbridos (rígidos + flexíveis), sendo que as equações resultantes são variantes no tempo e lineares ou não-lineares dependendo do modelo matemático da viga girante. As equações lineares periodicamente variantes no tempo são apresentadas e resolvidas matematicamente via análise modal em sistemas periodicamente variantes no tempo. A influência dos efeitos de coriolis, giroscópico, rigidez rotacional e enrijecimento centrífugo no comportamento das frequências do sistema é investigada. Outra característica deste sistema é o aparecimento de vibrações paramétricas, que nada mais são que as frequências naturais do sistema variante no tempo, e podem ser observadas tanto teoricamente quando experimentalmente, com o auxílio de uma bancada de testes. As equações não-lineares são resolvidas numericamente e as limitações dos modelos lineares e não lineares são apontadas. Os resultados experimentais também deixam claro que somente com uma aproximação não-linear para as deformações da viga girante consegue-se descrever corretamente o comportamento do sistema rotor-palhetas e o efeito de enrijecimento centrífugo.

## *Palavras Chave*

Dinâmica de Múltiplos Corpos, Análise Modal em Sistemas Variantes no Tempo, Palhetas Flexíveis, Dinâmica de Rotores

# Abstract

SARACHO, Cristina Minioli, *Numerical and Experimental Analysis of Flexible Blades Dynamic Behavior*, Campinas : Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2002. 241p. Tese (Doutorado)

In this work, the development, solution, analysis and experimental validation of the equations of motion of a system, a rigid rotor attached to flexible blades, is presented. The flexible blades are modeled as rotating beams, and both linear and nonlinear approaches are used to describe the beam deformation. These linear and non-linear approaches result in three different mathematical models of the rotating beam. The global equations of this assembly are obtained using the methodology of hybrid systems (rigid + flexible bodies). The resulting equations are time-varying linear or time-varying nonlinear, depending on the mathematical model of the rotating beam. Periodic time-varying linear equations are presented and analyzed mathematically using modal analysis in periodic time-varying systems. The influence of the rotational stiffness, coriolis effects, gyroscopic and centrifugal stiffening on the behavior of the rotor-blade frequencies is also investigated. Another characteristic of this system is the appearance of parametric vibrations, which are no other than the natural frequencies of the time-varying system. These parametric vibrations can be observed both theoretically and experimentally, with the aid of a test rig. The nonlinear equations are numerically solved and the limitations of the linear and nonlinear models are highlighted. The experimental results clearly shows that at least a second order nonlinear approach must be employed in order to describe correctly the behavior of the rotor-blade system and the effect of centrifugal stiffening.

## *Keywords*

Multibody dynamics, Modal Analysis in Time-varying Systems, Flexible Blades, Rotor Dynamics

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Revisão bibliográfica . . . . .	7
1.1.1	Viga girante . . . . .	7
1.1.2	Sistemas de múltiplos corpos – corpos rígidos e flexíveis . . . . .	13
1.1.3	Análise modal em sistemas rotativos e variantes no tempo . . . . .	17
1.2	Objetivos do trabalho e contribuição original . . . . .	18
1.3	Conteúdo e organização do trabalho . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Modelagem matemática - viga girante</b>	<b>21</b>
2.1	Introdução . . . . .	21
2.2	Modelos de viga – aproximações lineares e não-lineares . . . . .	22
2.2.1	Sistemas de referência . . . . .	23
2.2.2	Matrizes de transformação . . . . .	24
2.2.3	Vetores de posição . . . . .	24
2.2.4	Vetores de velocidade . . . . .	26
2.2.5	Vetores de aceleração . . . . .	27
2.2.6	Esforços atuantes na viga . . . . .	28
2.2.7	Equações diferenciais de equilíbrio . . . . .	29
2.2.8	Relações entre deslocamento e deformação . . . . .	32
2.2.9	Relações entre tensão e deformação . . . . .	36
2.2.10	Ordem da teoria da viga e equação diferencial de equilíbrio . . . . .	37
2.2.11	Sistema de equações diferenciais lineares . . . . .	40
2.2.12	Definição alternativa do vetor de deformação . . . . .	41

2.3	Implementação numérica das equações de movimento . . . . .	42
2.3.1	Discretização do campo de deslocamento . . . . .	43
2.3.2	Forças generalizadas de inércia . . . . .	44
2.4	Energia potencial da viga . . . . .	46
2.4.1	Deformações utilizando uma aproximação linear . . . . .	46
2.4.2	Deformações utilizando uma aproximação não-linear de segunda ordem . . . . .	47
2.4.3	Deformações não-lineares . . . . .	48
2.4.4	Equações de movimento . . . . .	48
2.5	Desacoplamento da deformação e deslocamento na direção longitudinal . . . . .	49
2.5.1	Forças generalizadas de inércia . . . . .	51
2.5.2	Energia potencial . . . . .	52
2.5.3	Equações de movimento . . . . .	53
2.6	Inclusão de um corpo rígido na extremidade livre da viga flexível . . . . .	54
2.6.1	Descrição do movimento . . . . .	54
2.6.2	Equações de movimento . . . . .	55
2.6.3	Implementação numérica das equações de movimento . . . . .	56
2.7	Exemplos numéricos . . . . .	57
2.7.1	Escolha da função de interpolação . . . . .	57
2.7.2	Influência da inércia de rotação . . . . .	64
2.7.3	Viga girante com velocidade angular variável . . . . .	65
2.7.4	Viga girante com massa concentrada . . . . .	68
<b>3</b>	<b>Modelagem matemática - acoplamento rotor-viga girante</b>	<b>73</b>
3.1	Introdução . . . . .	73
3.2	Equações de movimento de um rotor plano acoplado a palhetas flexíveis . . . . .	74
3.2.1	Sistemas de referência . . . . .	75
3.2.2	Vetores de velocidade e aceleração angulares . . . . .	76
3.2.3	Vetores de posição . . . . .	77
3.2.4	Vetores de velocidade e aceleração do centro de massa do rotor . . . . .	79
3.2.5	Vetores de velocidade e aceleração das palhetas . . . . .	80

3.2.6	Vetores de forças externas . . . . .	81
3.2.7	Propriedades inerciais . . . . .	81
3.2.8	Jacobianos das velocidades dos corpos . . . . .	82
3.2.9	Energia potencial . . . . .	83
3.2.10	Equações de equilíbrio dinâmico – equações de Newton-Euler-Jourdain . . . . .	84
3.2.11	Equações de movimento . . . . .	85
3.3	Equações de movimento de um rotor com efeito giroscópico acoplado a vigas . . . . .	93
3.4	Equações de movimento de um rotor tridimensional acoplado a vigas . . . . .	100
<b>4</b>	<b>Solução analítica e numérica das equações de movimento – rotor-viga girantes</b>	<b>109</b>
4.1	Características dinâmicas de sistemas invariantes no tempo . . . . .	110
4.1.1	Teoria geral de sistemas lineares invariantes no tempo . . . . .	110
4.1.2	Solução obtida utilizando parâmetros modais . . . . .	112
4.1.3	Transformada de Laplace . . . . .	115
4.1.4	Transformada de Fourier . . . . .	116
4.1.5	Desacoplamento das equações de movimento . . . . .	117
4.1.6	Resposta ao impulso . . . . .	119
4.1.7	Resposta a uma excitação harmônica . . . . .	119
4.2	Características dinâmicas de sistemas lineares variantes no tempo . . . . .	122
4.3	Sistemas de Floquet – sistemas lineares periódicos . . . . .	125
4.4	Solução de sistemas periódicos usando a equação de Hill . . . . .	126
4.4.1	Autovalores e autovetores variantes no tempo . . . . .	127
4.4.2	Autovalores e autovetores básicos . . . . .	129
4.4.3	Desacoplamento das matrizes variantes no tempo . . . . .	132
4.4.4	Função de resposta em frequência variante no tempo . . . . .	133
4.4.5	Resposta ao impulso . . . . .	136
4.4.6	Resposta a uma excitação harmônica . . . . .	136
4.5	Estudo de casos . . . . .	137
4.5.1	Sistema periódico comutativo - solução analítica . . . . .	137
4.5.2	Sistema periódico comutativo - solução pela equação de Hill . . . . .	140

<b>5</b>	<b>Exemplos teóricos</b>	<b>147</b>
5.1	Modelo matemático T1 - rotor plano . . . . .	148
5.1.1	Análise modal do sistema não-girante . . . . .	148
5.1.2	Análise modal do sistema girante . . . . .	150
5.1.3	Integração numérica das equações de movimento – efeito da velocidade de rotação constante . . . . .	155
5.1.4	Integração numérica das equações de movimento – efeito da aceleração do rotor	159
5.1.5	Integração numérica das equações de movimento – diagramas de cascata . . .	161
5.1.6	Análise modal variante no tempo – autovalores-básicos . . . . .	169
5.1.7	Solução transiente por superposição modal . . . . .	170
5.1.8	Diagrama de cascata teórico . . . . .	171
5.2	Modelo matemático 2 - rotor com inclusão do efeito giroscópico . . . . .	176
5.2.1	Análise modal do sistema não-girante . . . . .	176
5.2.2	Análise modal do sistema girante . . . . .	177
5.2.3	Variação dos autovalores-básicos . . . . .	177
5.2.4	Diagramas de cascata . . . . .	184
5.3	Modelo matemático 3 - rotor tridimensional . . . . .	189
<b>6</b>	<b>Exemplos experimentais</b>	<b>203</b>
6.1	Sistema com cinco graus de liberdade . . . . .	203
6.1.1	Parâmetros da bancada . . . . .	206
6.1.2	Calibração da bancada e estimativa de amortecimento . . . . .	207
6.1.3	Modos de vibração do sistema não-girante . . . . .	208
6.1.4	Modos de vibração do sistema girante . . . . .	211
6.1.5	Diagramas de cascata e análise na frequência . . . . .	212
6.1.6	Comparação com resultados teóricos . . . . .	213
<b>7</b>	<b>Conclusões</b>	<b>219</b>
<b>A</b>	<b>Transformação de um sistema variante no tempo em um sistema invariante</b>	<b>225</b>
<b>B</b>	<b>Teoria de Floquet</b>	<b>233</b>

# Lista de Figuras

1.1	Bancada de testes para a investigação do acoplamento vibratório entre rotores rígidos e palhetas flexíveis, construída com o apoio do Convênio Unicamp-Ceman no Departamento de Projeto Mecânico da Faculdade de Engenharia Mecânica da UNICAMP – (a) rotor sem palhetas; (b) rotor com palhetas. . . . .	2
1.2	Verificação do comportamento dinâmico de palhetas flexíveis – (a) compressor axial composto por 12 estágios, com 43 palhetas por estágio; (b) uma das palhetas do compressor na condição de montagem livre-livre; (c) palhetas raspadas dos dois primeiros estágios – Convênio Unicamp-Petrobras. . . . .	3
1.3	Bancada de testes utilizada para a verificação da influência do fluido escoante sobre o comportamento dinâmico de palhetas flexíveis, construída com o apoio da Fapesp, no Departamento de Projeto Mecânico da Faculdade de Engenharia Mecânica da UNICAMP (proc.98/14654-0) – (a) palheta flexível (elemento 1), montada num sistema massa mola (elemento 2, 3 e 4), cujos movimentos são restringidos à deslocamentos lineares na direção vertical. O elemento 5 ilustra o sistema de excitação (zoom na figura (c)) e o elemento 6 ilustra o sistema de medição direta de vibração via extensômetros colados na palheta (zoom na figura (d)); (b) Sistema montado no túnel de vento. . . . .	5
2.1	Sistemas de referência para descrever o movimento de uma viga plana girante. . . .	24
2.2	Deslocamento do ponto $O$ , pertencente à linha neutra da viga. . . . .	25
2.3	Deslocamento do ponto genérico $A$ , pertencente à viga. . . . .	25
2.4	Diagrama de esforços atuantes em um elemento diferencial de viga de tamanho $\Delta x$ . . . .	28
2.5	Diagrama de esforços longitudinais atuantes em um elemento diferencial de viga. . . .	30
2.6	Diagrama de esforços transversais atuantes em um elemento diferencial de viga. . . .	30
2.7	Diagrama de momentos atuantes em um elemento diferencial de viga . . . . .	31
2.8	Incremento de deslocamento de um elemento diferencial de viga. . . . .	33

2.9	Comparação entre o ângulo de inclinação da viga deformada, $\psi$ e ângulo de rotação da seção transversal da viga, $\alpha$ . . . . .	33
2.10	Interpretação física do vetor de deformação de um elemento diferencial de viga (Simo e Vu-Quoc, 1986a). . . . .	34
2.11	Encurtamento longitudinal da viga devido ao deslocamento transversal. . . . .	49
2.12	Dimensões do corpo finito acoplado à extremidade livre da viga girante. . . . .	54
2.13	Perfil de velocidade e aceleração angular do rotor. $T_s = 15$ s e $\Omega_s = 5$ rad/s. . . . .	68
2.14	Comparação entre os resultados obtidos para o deslocamento da extremidade livre da viga utilizando diferentes teorias de viga . . . . .	69
2.15	Comparação entre os resultados obtidos para o deslocamento da extremidade livre da viga utilizando diferentes aproximações para a deformação da viga com uma massa concentrada na ponta. . . . .	71
3.1	Modelo mecânico de um rotor plano, apoiado sobre suportes flexíveis, acoplado a quatro palhetas flexíveis. . . . .	74
3.2	Diagrama geral – componentes do conjunto. . . . .	75
3.3	Diagrama geral – pontos de acoplamento entre os componentes do conjunto. . . . .	75
3.4	Sistemas de referência para descrever o movimento do conjunto rotor-palhetas. . . . .	76
3.5	Vetores de posição relativas do centro do rotor, centro de massa do rotor e palhetas. . . . .	78
3.6	Forças externas atuantes sobre o conjunto rotor-palhetas. . . . .	81
3.7	Modelo mecânico de um rotor montado por meio de uma rótula em uma extremidade e apoiado sobre suportes elásticos na outra. . . . .	97
3.8	Vetores de posição do centro do rotor $C$ e ponto de apoio dos mancais $B$ . . . . .	98
3.9	Modelo mecânico de um rotor apoiado sobre suportes elásticos nas extremidades, livre para se movimentar no espaço. . . . .	104
4.1	Solução analítica obtida pelo teorema de Liapunov . . . . .	143
4.2	Comparação entre a solução analítica obtida pelo teorema de Liapunov e a solução aproximada com diferentes ordem de expansão $n_o$ , o que resulta em $2n_o + 1$ termos da série de Fourier . . . . .	143
4.3	Comparação entre a solução analítica obtida pelo teorema de Liapunov e a solução aproximada com diferentes ordem de expansão $n_o$ , o que resulta em $2n_o + 1$ termos da série de Fourier . . . . .	144

4.4	Comparação entre a solução analítica obtida pelo teorema de Liapunov e a solução aproximada com diferentes ordem de expansão $n_o$ , o que resulta em $2n_o + 1$ termos da série de Fourier . . . . .	145
5.1	Frequências e modos de vibração do conjunto rotor-palhetas – modelo matemático usando rotor plano (T1) – $\dot{\phi} = 0$ . . . . .	149
5.2	Autovalores e autovetores-básicos (T1) – $\Omega = \dot{\phi} = 10$ Hz . . . . .	154
5.3	Autovalores e autovetores de vibração paramétrica de ordem $k = 1$ (T1) – $\Omega = \dot{\phi} = 10$ Hz . . . . .	155
5.4	Autovalores e autovetores de vibração paramétrica de ordem $k = 2$ (T1) – $\Omega = \dot{\phi} = 10$ Hz . . . . .	156
5.5	Comparação entre os modelos linear, não-linear completo e não-linear de segunda ordem. Deslocamento da extremidade livre da palheta 1. . . . .	157
5.6	Comparação entre os modelos não-lineares – não-linear completo e não-linear de segunda ordem – velocidades de rotação mais altas. Deslocamento na palheta 1. . .	158
5.7	Perfil de velocidade e aceleração angular do rotor. $T_s = 0.1$ s e $\Omega_s = 15$ rad/s. . . . .	160
5.8	Comparação entre os modelos linear, não-linear de segunda ordem (matriz de rigidez geométrica incluída) não-linear. Deslocamento na palheta 1. . . . .	160
5.9	Diagramas de cascata - variação das respostas em frequência em função da velocidade de rotação. Modelo linear. . . . .	163
5.10	Diagramas de cascata - variação das respostas em frequência em função da velocidade de rotação. Modelo linearizado de segunda ordem. . . . .	164
5.11	Diagramas de cascata - variação das respostas em frequência em função da velocidade de rotação. Modelo não-linear. . . . .	165
5.12	Respostas em frequência – diferentes modelos. $\Omega = 5$ Hz . . . . .	167
5.13	Respostas em frequência – diferentes modelos. $\Omega = 10$ Hz . . . . .	168
5.14	Respostas em frequência – diferentes modelos. $\Omega = 15$ Hz . . . . .	169
5.15	Variação dos autovalores-básicos. Modelos linear e linearizado de segunda ordem . .	170
5.16	Deslocamento no domínio do tempo – solução modal com diversas ordens de expansão $n_o$ : (a) $n_o = 0$ (‘.’); (b) $n_o = 1$ (‘-.’); (c) $n_o = 2$ (‘-.-’). $\Omega = 10$ Hz . . . . .	172
5.17	Diagramas de cascata teórico - variação das respostas em frequência. Excitação no centro do rotor $y$ . . . . .	174
5.18	Diagramas de cascata teórico- variação das respostas em frequência. Excitação na palheta 1. . . . .	175

5.19	Frequências e modos de vibração do conjunto rotor-palhetas – modelo matemático usando rotor com movimentos angulares (T2) – $\dot{\phi} = 0$ . . . . .	178
5.20	Frequências e modos de vibração do conjunto rotor-palhetas – modelo matemático usando rotor com movimentos angulares (T2) – $\dot{\phi} = 20$ Hz . . . . .	179
5.21	Frequências e modos de vibração do conjunto rotor-palhetas – modelo matemático usando rotor com movimentos angulares (T2) – $\dot{\phi} = 20$ Hz . . . . .	180
5.22	Variação dos autovalores em função da velocidade de rotação – comparação do comportamento observado com diferentes matrizes da equação de movimento incluídas ou excluídas. . . . .	183
5.23	Variação dos autovalores em função da velocidade de rotação – comparação do comportamento observado com diferentes matrizes da equação de movimento incluídas ou excluídas. . . . .	186
5.24	Diagramas de cascata dos sinais de aceleração. Excitação em $\Gamma$ . . . . .	187
5.25	Diagramas de cascata dos sinais de aceleração. Excitação em $p_1$ . . . . .	188
5.26	Frequências e modos-básicos de vibração do conjunto rotor-palhetas – modelo matemático usando rotor com movimentos tridimensionais (T3) – $\dot{\phi} = 20$ Hz . . . . .	190
5.27	Frequências e modos de vibração do conjunto rotor-palhetas (vibração paramétrica de ordem 1)– modelo matemático usando rotor com movimentos tridimensionais (T3) – $\dot{\phi} = 20$ Hz . . . . .	191
5.28	Variação dos autovalores-básicos (Hz) em função da velocidade de rotação . . . . .	192
5.29	Diagramas de cascata dos sinais de aceleração. Excitação em $y$ . . . . .	193
5.30	Diagramas de cascata dos sinais de aceleração. Excitação em $p_1$ . . . . .	194
5.31	Sinais de aceleração no domínio da frequência (fft) - $\Omega = 5$ Hz . . . . .	196
5.32	Sinais de aceleração no domínio da frequência (fft) - $\Omega = 10$ Hz . . . . .	197
5.33	Sinais de aceleração no domínio da frequência (fft) - $\Omega = 15$ Hz . . . . .	198
5.34	Sinais de aceleração no domínio da frequência (fft) - $\Omega = 20$ Hz . . . . .	199
5.35	Sinais de aceleração no domínio da frequência (fft) - $\Omega = 25$ Hz . . . . .	200
5.36	Sinais de aceleração no domínio da frequência (fft) - $\Omega = 30$ Hz . . . . .	201
6.1	Bancada de testes construída na Universidade Técnica da Dinamarca DTU para análise da dinâmica do conjunto rotor e palhetas flexíveis (Eiland, Torry-Smith e Santos, 2001)– aspecto geral . . . . .	204
6.2	(a) Montagem do acelerômetro na base e (b) montagem das palhetas – detalhe (Eiland, Torry-Smith e Santos, 2001) . . . . .	204

6.3	(a) Modelo matemático da bancada de testes (b) massas concentradas acopladas às palhetas . . . . .	206
6.4	Curva de calibração – relação entre a voltagem de entrada e velocidade de rotação .	207
6.5	Modos de vibração do conjunto base-palhetas – $\Omega = 0$ – resultados teóricos . . . . .	209
6.6	Aceleração experimental da massa da base, excitada por uma força impulsiva, realizada com dois incrementos de frequência $\Delta f$ . . . . .	210
6.7	Variação das frequências naturais em função do aumento da razão da massa $mp_i/m_0$	210
6.8	Variação das formas modais (RP) e (PR) em função do aumento da razão da massa. As figuras (a), (b), (c), (d) e (e) correspondem ao primeiro modo (RP). As figuras (f), (g), (h), (i) e (j) correspondem ao quinto modo (PR). . . . .	211
6.9	Modos-báscos de vibração do conjunto rotor-palhetas. Velocidade de rotação $\Omega = \dot{\phi} = 10$ Hz . . . . .	212
6.10	Modos paramétricos de ordem 1 do conjunto rotor-palhetas. Velocidade de rotação $\Omega = 10$ Hz . . . . .	213
6.11	Diagrama de cascata experimental. Descrição dos picos observados: (A) velocidade de rotação; (B) frequências paramétricas dos modos de palheta, de ordem 1, termos positivos; (C) frequências paramétricas dos modos de palheta, de ordem 1, termos negativos e (D) frequências naturais da fundação. . . . .	214
6.12	Diagrama de cascata numérico. Ponto de excitação: fundação. Ponto de observação: fundação. Descrição dos picos observados: (A) velocidade de rotação; (B) frequências paramétricas dos modos de palheta, de ordem 1, termos positivos; (C) frequências paramétricas dos modos de palheta, de ordem 1, termos negativos e (D) frequências naturais da fundação. . . . .	215
6.13	Diagrama de cascata numérico – Ponto de excitação: fundação. Ponto de observação: palheta $p_1$ . Descrição dos picos observados: (A) velocidade de rotação e (B) frequências críticas (básicas) das palhetas. . . . .	215
6.14	Diagrama de cascata numérico – Ponto de excitação: palheta $p_1$ . Ponto de observação: fundação. Descrição dos picos observados: (A) velocidade de rotação; (B) frequências paramétricas dos modos de palheta, de ordem 1, termos positivos e (C) frequências paramétricas dos modos de palheta, de ordem 1, termos negativos. . . . .	216
6.15	Diagrama de cascata numérico – Ponto de excitação: palheta $p_1$ . Ponto de observação: palheta $p_1$ . Descrição dos picos observados: (A) velocidade de rotação e (B) frequências críticas (básicas) das palhetas. . . . .	216

# Lista de Tabelas

2.1	Valores obtidos para as quatro primeiras freqüências naturais normalizadas de uma viga uniforme com diferentes funções de interpolação utilizando o Método dos Modos Assumidos e o Método dos Elementos Finitos. . . . .	60
2.2	Valores obtidos para as quatro primeiras freqüências naturais (Hz) de uma viga uniforme, com uma massa concentrada na ponta, com diferentes funções de interpolação utilizando o Método dos Modos Assumidos e o Método dos Elementos Finitos. * A solução analítica corresponde a solução do MEF com 12 elementos. . . . .	62
2.3	Valores obtidos para as quatro primeiras freqüências naturais (Hz) de uma viga uniforme, com uma massa, cuja inércia de rotação não é desprezada, na extremidade livre, com diferentes funções de interpolação utilizando o Método dos Modos Assumidos e o Método dos Elementos Finitos. * A solução analítica corresponde a solução do MEF com 12 elementos. . . . .	63
2.4	Freqüências naturais (Hz) de uma viga engastada com uma massa na extremidade livre: (a) massa pontual; (b) massa com inércia de rotação fixa pelo centro de massa e (c) massa com inércia de rotação fixa por um ponto qualquer . . . . .	65
5.1	Parâmetros – rotor plano (T1) . . . . .	148
5.2	Variação dos autovalores-básicos, Hz, em função da ordem de expansão $n_o$ – rotor plano (T1) . . . . .	153
5.3	Autovalores-básicos, Hz, em diferentes velocidades de rotação $\Omega$ – rotor plano (T1) . . . . .	162
5.4	Parâmetros – rotor tridimensional com movimento restrito a deslocamentos angulares (T2) . . . . .	176
5.5	Sistema não-girante – formas modais teóricas do modelo T2 . . . . .	177
5.6	Autovalores-básicos, Hz, em diferentes velocidades de rotação $\Omega$ – rotor tridimensional (T3) . . . . .	192
6.1	Parâmetros da bancada de testes . . . . .	206

6.2 Sistema não-girante – formas modais teóricas . . . . .	208
------------------------------------------------------------	-----

# Nomenclatura

## Letras latinas

$I$	sistema de referência inercial (definido pelos vetores unitários $\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0$ )
$B_1$	sistema de referência móvel (definido pelos vetores unitários $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ )
$B_2$	sistema de referência móvel (definido pelos vetores unitários $\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2$ )
$B_{p_i}$	sistema de referência móvel (definido pelos vetores unitários $\vec{i}_{p_i}, \vec{j}_{p_i}, \vec{k}_{p_i}$ )
$x_0, y_0, z_0$	coordenadas cartesianas da base $I$
$x_1, y_1, z_1$	coordenadas cartesianas da base $B_1$
$x_2, y_2, z_2$	coordenadas cartesianas da base $B_2$
$x, y, z$	coordenadas cartesianas da base $B_1$
$A_\rho$	produto da área da seção transversal pela densidade do material da viga
$I_\rho$	produto do momento de inércia pela densidade do material da viga
$AE$	produto da área da seção transversal pelo módulo de elasticidade da viga
$EI$	produto do momento de inércia da seção transversal pelo módulo de elasticidade da viga
$GA_s$	produto área da seção transversal (corrigida) pelo módulo de rigidez torsional da viga
$C$	centro geométrico do rotor
$C^*$	centro de massa do rotor
$O$	ponto pertencente à linha neutra da viga girante
$O'$	ponto pertencente à linha neutra da viga girante deformada
$O_i$	ponto onde a palheta é fixa ao rotor
$a_x$	componente do vetor de aceleração na direção longitudinal da viga girante
$a_y$	componente do vetor de aceleração na direção transversal da viga girante
$b_i$	largura da viga
$bt_i$	largura do corpo finito
$e$	desbalanço
$u_1$	deslocamento longitudinal (devido à deformação) da viga girante
$u_2$	deslocamento transversal (devido à deformação) da viga girante
$g$	aceleração da gravidade
$h_i$	espessura da viga
$h_{t_i}$	espessura do corpo finito
$I_1, I_2, I_3$	momento de inércia de massa do rotor nas direções $x, y$ e $z$ , respectivamente

$I_p$	momento de inércia polar do rotor
$I_t$	momento de inércia lateral do rotor
$I_{t_i}$	momento de inércia do corpo finito na ponta da viga ou palheta
$k_y$	rigidez do mancal na direção horizontal $y$
$k_z$	rigidez do mancal na direção vertical $z$
$k_{yA}$	rigidez do mancal $A$ na direção horizontal $y$
$k_{zA}$	rigidez do mancal $A$ na direção vertical $z$
$k_{yB}$	rigidez do mancal $B$ na direção horizontal $y$
$k_{zB}$	rigidez do mancal $B$ na direção vertical $z$
$k_i$	rigidez equivalente da palheta $p_i$
$L_i$	comprimento da palheta $p_i$
$L_{t_i}$	comprimento do corpo finito
$M$	momento fletor aplicado à seção transversal da viga girante
$m_r$	massa do rotor
$m_1, m_2, m_3$	massa do rotor nas direções $x$ , $y$ e $z$ , respectivamente
$m_{p_i}$	massa da palheta $p_i$
$m_{t_i}$	massa do corpo finito na ponta da viga ou palheta
$N$	força normal à seção transversal da viga girante
$N_i$	força normal atuante ao longo da palheta $p_i$
$p_i$	$i$ -ésima palheta
$\mathbf{q}$	vetor de coordenadas generalizadas
$r_o$	distância do mancal $A$ ao centro do rotor $C$
$r_B$	distância do mancal $A$ ao mancal $B$
$r_i$	distância entre $C$ e $O_i$
$r_{t_i}$	distância do ponto de fixação do corpo finito a seu centro de massa
$V$	força transversal à seção transversal (esforço cortante) da viga girante
$v_i$	deslocamento (devido à deformação) transversal da palheta $p_i$
$y_o$	deslocamento linear do rotor na direção horizontal
$y_i$	deslocamento longitudinal da palheta $p_i$
$z_o$	deslocamento linear do rotor na direção vertical
$z_i$	deslocamento transversal da palheta $p_i$
$\mathbf{A}$	matriz de estado
$\hat{\mathbf{A}}$	matriz expandida
$\mathbf{x}$	vetor de estado
$\mathbf{x}_0$	vetor com as condições iniciais
$\mathbf{p}$	vetor de excitação
$\mathbf{r}_k$	$k$ -ésimo autovetor à direita
$\mathbf{r}_{kj}$	$k$ -ésimo autovetor, à direita, de ordem paramétrica $j$
$\mathbf{r}_{k0}$	$k$ -ésimo autovetor-básico, à direita, ( $j = 0$ )
$\mathbf{R}$	matriz modal à direita
$\hat{\mathbf{R}}$	matriz modal à direita expandida

$\mathbf{l}_k$	$k$ -ésimo autovetor à esquerda
$\mathbf{L}$	matriz modal à esquerda
$\hat{\mathbf{L}}$	matriz modal à esquerda expandida
$\mathcal{F}$	transformada de Fourier
$f$	variável de Fourier
$\mathcal{L}$	transformada de Laplace
$s$	variável de Laplace
$\hat{\mathbf{I}}$	matriz identidade expandida
$N$	número total de graus de liberdade
$n_o$	ordem de expansão

## Letras gregas

$\chi_i, \xi_i, \eta_i$	coordenadas cartesianas da base $B_{p_i}$
$\alpha$	ângulo de rotação relativa da seção transversal da viga
$\beta$	deslocamento angular do rotor
$\delta_r$	vetor de deformação do mancal
$\delta_{r_A}$	vetor de deformação do mancal $A$
$\delta_{r_B}$	vetor de deformação do mancal $B$
$\Delta x$	tamanho de um elemento incremental da viga
$\Delta_1$	deslocamento longitudinal de um elemento incremental da viga
$\Delta_2$	deslocamento transversal de um elemento incremental da viga
$\phi$	ângulo de rotação do rotor ou viga girante
$\Gamma$	deslocamento angular do rotor
$\Gamma_1$	deformação longitudinal da viga
$\Gamma_2$	deformação transversal da viga
$\Gamma_3$	deformação angular da viga
$\pi$	energia potencial
$\pi_r$	energia potencial armazenada no rotor
$\pi_{p_i}$	energia potencial armazenada na palheta $p_i$
$\pi_{l_i}$	parcela linear da energia potencial da palheta $p_i$
$\pi_{g_i}$	parcela da energia potencial da palheta $p_i$ devido a matriz de rigidez geométrica
$\Omega$	velocidade de rotação da viga ou rotor
$\psi$	ângulo que define a inclinação da seção transversal da viga deformada
$\varphi$	fase do desbalaço
$\psi(x)$	função admissível
$\psi_a(x)$	função admissível na direção longitudinal
$\psi_f(x)$	função admissível na direção transversal

$\theta_i$	ângulo de posição da palheta/viga $p_i$
${}_{B_1}\boldsymbol{\omega}$	vetor de velocidade angular absoluta da base $B_1$
$\dot{\omega}_z$	componente do vetor de aceleração angular da seção transversal na direção perpendicular ao plano da viga
$\delta(t)$	função delta de Dirac (impulso idela)
$\Lambda$	matriz com os autovalores
$\lambda_{kj}$	$k$ -ésimo autovalor de ordem paramétrica $j$
$\lambda_{k0}$	$k$ -ésimo autovalor-básico ( $j = 0$ )
$\lambda_k$	$k$ -ésimo autovalor
$\Phi$	matriz de transição de estado
$\omega$	freqüência
$\Omega_0$ e $f_0$	freqüências de rotação (freqüências principais da série de Fourier)

## Matrizes e vetores

negrito minúsculo	vetor
negrito maiúsculo	matriz
<b>r</b>	vetor de posição
<b>v</b>	vetor de velocidade
<b>a</b>	vetor de aceleração
<b>u</b>	vetor de deslocamento devido à deformação
<b>J</b>	matriz dos jacobianos
<b>H</b>	matriz do encurtamento longitudinal
$\boldsymbol{\omega}$	vetor de velocidade angular
$\boldsymbol{\alpha}$	vetor de aceleração angular
$\mathbf{T}_\phi$	matriz de transformação da base $I$ para a base $B_1$
$\mathbf{T}_\alpha$	matriz de transformação da base $B_1$ para a base $B_2$
$\mathbf{T}_{\theta_i}$	matriz de transformação da base $B_1$ para a base $B_{p_i}$
<b>M</b>	matriz de massa
$\mathbf{M}_1$	primeira parcela da matriz de massa não-linear
$\mathbf{M}_2$	segunda parcela da matriz de massa não-linear
<b>G</b>	matriz giroscópica
$\mathbf{G}_1$	primeira parcela da matriz giroscópica não-linear
<b>C</b>	matriz de coriolis
<b>K</b>	matriz de rigidez estrutural
$\mathbf{K}_g$	matriz de rigidez geométrica
$\mathbf{K}_\Omega$	matriz de rigidez rotacional

$\mathbf{K}_\alpha$	matriz de rigidez associada a aceleração angular $\ddot{\phi}$
$\mathbf{K}_p$	matriz de rigidez gravitacional
$\mathbf{K}_1$	primeira parcela da matriz de rigidez não-linear
$\mathbf{f}_{ext}$	vetor de forças externas
$\mathbf{f}_\Omega$	vetor de força centrífuga
$\mathbf{f}_\alpha$	vetor de força associada a aceleração angular $\ddot{\phi}$
$\mathbf{f}_p$	vetor de força peso
$\mathbf{f}_1$	primeira parcela do vetor de força não-linear
$\mathbf{f}_2$	segunda parcela do vetor de força não-linear
$\mathbf{f}_3$	terceira parcela do vetor de força não-linear

## Subscritos

${}_{B_1}\mathbf{s}_C$	vetor genérico, o subscrito anterior indica que o vetor $\mathbf{s}$ está representado na base $B_1$ e refere-se ao ponto $C$
${}_{B_1}\mathbf{s}_c$	vetor genérico, o subscrito anterior indica que o vetor $\mathbf{s}$ está representado na base $B_1$ e refere-se ao corpo $c$
${}_{B_1}\mathbf{s}_{B_2}$	vetor genérico, o subscrito anterior indica que o vetor $\mathbf{s}$ está representado na base $B_1$ e refere-se à base $B_2$
${}_{B_1}\mathbf{s}_y$	vetor genérico, o subscrito anterior indica que o vetor $\mathbf{s}$ está representado na base $B_1$ e refere-se ao vetor $\mathbf{y}$
$u_{,x}$	derivada parcial da função $u$ em relação a $x$

# Capítulo 1

## Introdução

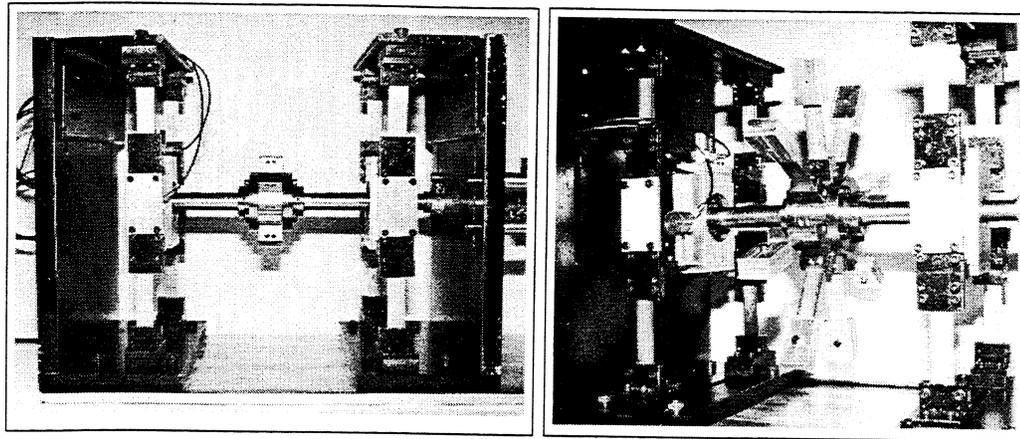
As primeiras investigações teórico-experimentais relacionadas com a Dinâmica de Palhetas Flexíveis no Departamento de Projeto Mecânico da Universidade Estadual de Campinas datam de 1995-96. Inicialmente, com apoio do Convênio entre a Unicamp e a Central de Manutenção do Polo-Petroquímico de Camaçari (Ceman) na área de *Vibração em Máquinas Rotativas*, uma pequena bancada de testes foi construída, visando o estudo experimental de palhetas flexíveis (ver figura (1.1)). Esta pequena bancada de testes foi utilizada tanto para a realização dos primeiros testes experimentais (*pesquisa*) quanto para aulas experimentais (*educação*), entre outras nas disciplinas de Modelagem de Máquinas e Estruturas (graduação), Dinâmica de Rotores (pós-graduação) e curso de treinamento para engenheiros mecânicos da Ceman (*extensão*), procurando integrar *pesquisa* e *educação*. Esta bancada é mostrada na figura (1.1) e foi objeto de alguns projetos de pesquisa apoiados também pela Fapesp <sup>1</sup> e SAE-Unicamp (proc.092/95).

A calibração desta bancada de testes (alinhamento, balanceamento, não-linearidades dos mancais, etc.) e a elaboração de um modelo matemático para descrever a interação dinâmica entre palhetas flexíveis e um rotor rígido foram temas de um trabalho técnico<sup>2</sup> publicado em 1997. Alguns testes experimentais foram realizados, em duas condições: (a) rotor-mancal sem palhetas; (b) rotor-mancal acoplado com oito palhetas flexíveis. Em ambos os casos as análises teórico-experimentais foram conduzidas para velocidade angular nula. Posteriormente, foi desenvolvido um modelo matemático do conjunto rotor-mancal-palhetas, utilizando equações de Newton-Euler, o qual, no entanto, revelou dificuldades para prever o comportamento dinâmico do sistema girante. Os resultados numéricos permaneceram inconclusivos, não sendo possível prever ou analisar, a partir do modelo linear elaborado, a resposta dinâmica do sistema em função do aumento da velocidade de rotação do rotor.

---

<sup>1</sup>FAPESP - Proc. 96/2115-2, Investigações Teórico-Experimentais em Sistemas Rotativos acoplados com Pás Flexíveis.

<sup>2</sup>Santos, I.F. e Colla, G.C. Influência de palhetas flexíveis na dinâmica de sistemas rotativos – teoria e experimento. In: *Anais do COBEM'97 - XIV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica 8-12 Dez (CDROM), Bauru, Brasil, 1997.*



(a)

(b)

**Figura 1.1:** Bancada de testes para a investigação do acoplamento vibratório entre rotores rígidos e palhetas flexíveis, construída com o apoio do Convênio Unicamp-Ceman no Departamento de Projeto Mecânico da Faculdade de Engenharia Mecânica da UNICAMP – (a) rotor sem palhetas; (b) rotor com palhetas.

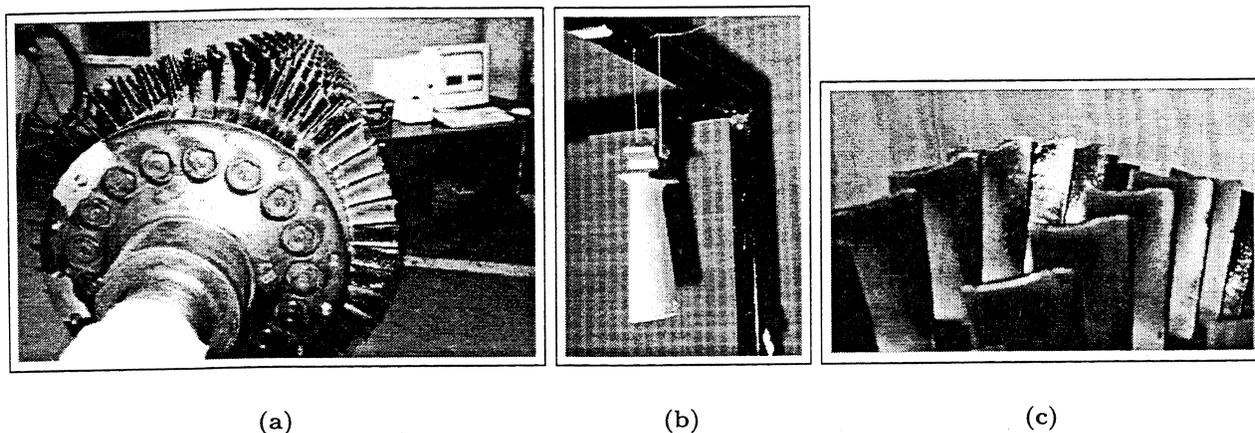
Várias perguntas relacionadas à criação de modelos matemáticos e às hipóteses adotadas ficaram sem respostas. Várias discrepâncias entre resultados teóricos e experimentais não puderam ser explicadas, como por exemplo o aparecimento de vibrações mecânicas em diferentes frequências. Estas frequências não se relacionavam nem às frequências naturais do rotor, nem às das palhetas flexíveis e tão pouco à de rotação do eixo (desbalanço). Estas frequências, detectadas experimentalmente, apresentavam algumas parcelas que aumentavam e outras que diminuía com o aumento da velocidade angular do rotor.

Em seguida, 1996-99, com o apoio do Convênio entre a Unicamp e a Petrobras<sup>3</sup> na área de *Dinâmica de Palhetas Flexíveis de Compressores Industriais*, palhetas flexíveis de diferentes dimensões de 12 estágios de um compressor axial da refinaria do Vale do Paraíba puderam ser modeladas via Método dos Elementos Finitos (ver figura (1.2)). O comportamento dinâmico de tais palhetas foi determinado teoricamente e experimentalmente em duas condições de montagem: (a) livre-livre e (b) montada no compressor axial da REVAP, como pode ser visto na figura (1.2). Os resultados teórico-experimentais deste convênio de pesquisa foram objetos de alguns traba-

---

<sup>3</sup>Convênio Petrobrás/Unicamp - Carta-Contrato 285.3.825.97-8, Funcamp N.35/97, Estudo do Comportamento Dinâmico das Palhetas do Compressor Axial da Revap.

lhos técnicos<sup>4 5</sup>, também apoiados pelo CNPq<sup>6</sup> e pela CAPES<sup>7</sup>. O principal objetivo do convênio Unicamp-Petrobrás foi a determinação, tanto numérica quanto experimental das frequências críticas das palhetas do compressor, e a análise das possíveis condições de operação, em regime ou durante a partida, que poderiam excitar estas frequências. O modelo numérico desenvolvido para cada palheta dos doze estágios do compressor foi obtido pelo Método dos Elementos Finitos. Nesta modelagem foi utilizado o elemento sólido quadrático (com 20 nós), sendo que para cada palheta um modelo com 2322 graus de liberdade foi criado, conseguindo-se prever os dois primeiros modos de flexão e o primeiro modo de torção com extrema precisão. Além disso, durante medições "in-situ" verificou-se que as palhetas do primeiro e segundo estágio do compressor encontravam-se desgastadas devido à raspagem contra a carcaça da máquina (ver figura (1.2)). Entretanto, isto pôde ser verificado apenas após a desmontagem da máquina, quando as palhetas já se encontravam parcialmente danificadas.



**Figura 1.2:** Verificação do comportamento dinâmico de palhetas flexíveis – (a) compressor axial composto por 12 estágios, com 43 palhetas por estágio; (b) uma das palhetas do compressor na condição de montagem livre-livre; (c) palhetas raspadas dos dois primeiros estágios – Convênio Unicamp-Petrobras.

Uma outra questão prática em se tratando da dinâmica de palhetas flexíveis e variação das

<sup>4</sup>Saracho, C.M. e Santos, I.F. Theoretical and experimental investigation of flexible blades dynamics, In: *Proceedings of the VII International Conference on Dynamic Problems in Mechanics*, Angra dos Reis, Brasil, 6-10 Mar., 1997, pp.151-153.

<sup>5</sup>Santos, I.F. e Saracho, C.M. Campbell's Diagram for flexible blades critical frequencies – theory and experiment, In: *Anais do COBEM'99 – Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica (CDROM)*, Águas de Lindóia, SP, Brasil, 22-26 Nov, 1999.

<sup>6</sup>Saracho, C. M. *Análise Numérica e Experimental de Palhetas Flexíveis*, Tese de Mestrado defendida em 2 de março de 1998 no Departamento de Projeto Mecânico da Faculdade de Engenharia Mecânica da UNICAMP.

<sup>7</sup>Projeto Probral Daad /Capes – Cooperação Bilateral Brasil-Alemanha envolvendo a Technische Universität Darmstadt e Universidade Estadual de Campinas (Janeiro de 1998 - Julho de 2001); Título: *Dinâmica de Máquinas Rotativas considerando a Raspagem entre Componentes Estacionários e Girantes*; Coordenador Brasileiro: Prof. Dr.-Ing. Ilmar Ferreira Santos; Coordenador Alemão: Prof. Dr.-Ing. Richard Markert; Agentes Financiadores: CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (proc.1160-14/97) e DAAD – Deutsche Akademische Austauschdienst.

suas frequências naturais foi levantada também durante o período do convênio Unicamp-Petrobrás: (I) O aumento da velocidade de rotação da máquina faz com que as frequências naturais das palhetas aumentem devido aos efeitos centrífugos<sup>8</sup>; (II) O aumento da velocidade do fluido escoando entre as palhetas flexíveis contribui com uma rigidez e amortecimento adicional, o qual faz com que algumas frequências naturais aumentem e outras diminuam<sup>9</sup>. Fica então a pergunta: Qual dos dois parâmetros, (I) rotação ou (II) interação fluido-estrutura, é mais importante quando se tem em foco o comportamento vibratório das palhetas? Algumas destas perguntas foram e estão sendo respondidas com o auxílio do projeto de pesquisa<sup>10</sup> apoiado pela Fapesp (proc.98/14654-0), e a bancada de testes mostrada na figura (1.3).

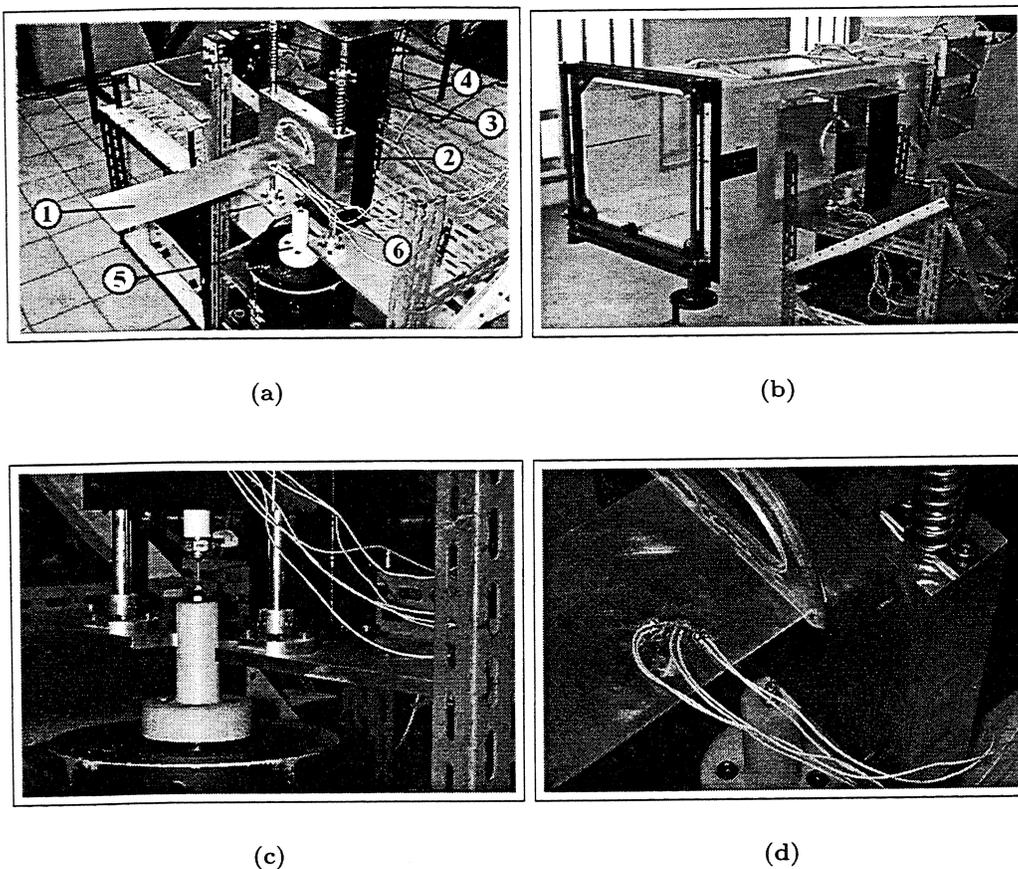
A partir destes trabalhos desenvolvidos, surgiu a necessidade de um estudo aprofundado do acoplamento dos movimentos de vibração de rotor e palhetas para explicar matematicamente tópicos relacionados com enrijecimento centrífugo e vibrações paramétricas. A inclusão da raspagem no problema introduz ainda o aparecimento de vibrações sub-harmônicas e superharmônicas, de características não-lineares (Choy e Padovan, 1987; Muszynska, 1989; Saracho, 1999) e que podem levar ao movimento caótico (Chu e Zhang, 1998; Piccoli, 1994). Contudo, sem o profundo conhecimento da dinâmica do conjunto formado por rotor e palhetas flexíveis, o tratamento do problema da raspagem torna-se impraticável. Diferentes tipos de vibração precisam ser identificados: vibrações subharmônicas ou superharmônicas decorrentes da raspagem, vibrações paramétricas e vibrações de estruturas flexíveis que sofrem enrijecimento centrífugo, sendo que a natureza destes fenômenos ainda não estava elucidada com modelos matemáticos lineares (Santos e Colla, 1997). Por outro lado, a modelagem do conjunto rotor e palhetas deve ser realizada de maneira a limitar o número total de graus de liberdade, por meio da escolha de um modelo reduzido da palheta. Por exemplo, no caso prático do compressor axial da Revap de 12 estágios, com 43 palhetas flexíveis por estágio, onde estas são discretizadas com 2322 graus de liberdade, chega-se a modelos matemáticos rotor-palhetas, discretizados pelo Método dos Elementos Finitos, com mais de 100.000 ( $12 \times 43 \times 2322$ ) graus de liberdade. Assim, no caso da discretização pelo método dos elementos finitos deve-se buscar a utilização de um número mínimo de elementos, ou ainda, a utilização de um método de redução de modelos (Junkins e Kim, 1993; Friswell e Mottershead, 1995), ou condensação dinâmica (Wiedemann e Gasch, 1993). Por outro lado, com a utilização de outros métodos de discretização, como o método dos modos assumidos, o modelo reduzido é obtido com o auxílio de famílias de funções de tentativa, ou funções admissíveis, as quais permitam aproximar os modos de vibração dentro da faixa de interesse com um número mínimo de graus de liberdade (Baruh, 1999; Gérardin e Cardona, 2001; Schwertassek *et al.*, 1999). Assim, busca-se, nesta tese, trabalhar com modelos

---

<sup>8</sup>Saracho, C. M. e Santos, I.F. Dynamic Models for Coupled Blade-Rotor Vibrations. In: *Proceedings of the IX International Conference on Dynamic Problems in Mechanics*, Florianópolis, Brasil, 5-9 Mar, 2001, pp.263-268.

<sup>9</sup>Padovese, G. C. e Santos, I.F. Theoretical and experimental determination of the equivalent stiffness and damping deriving from the fluid flow passing through flexible plates, In: *Proceedings of the IX International Conference on Dynamic Problems in Mechanics*, Florianópolis, Brasil, 5-9 Mar, 2001, pp.365-370.

<sup>10</sup>Padovese, G. C., *Determinação da rigidez e amortecimento equivalentes provenientes do fluido escoando e interagindo com placas flexíveis – teoria e constatações experimentais*, Tese de Mestrado defendida em 6 de agosto de 2001 no Departamento de Projeto Mecânico da Faculdade de Engenharia Mecânica da UNICAMP.



**Figura 1.3:** Bancada de testes utilizada para a verificação da influência do fluido escoante sobre o comportamento dinâmico de palhetas flexíveis, construída com o apoio da Fapesp, no Departamento de Projeto Mecânico da Faculdade de Engenharia Mecânica da UNICAMP (proc.98/14654-0) – (a) palheta flexível (elemento 1), montada num sistema massa mola (elemento 2, 3 e 4), cujos movimentos são restringidos à deslocamentos lineares na direção vertical. O elemento 5 ilustra o sistema de excitação (zoom na figura (c)) e o elemento 6 ilustra o sistema de medição direta de vibração via extensômetros colados na palheta (zoom na figura (d)); (b) Sistema montado no túnel de vento.

reduzidos para descrever o acoplamento das vibrações entre rotor e palhetas flexíveis.

A análise dinâmica de um conjunto formado por um rotor apoiado sobre suportes flexíveis acoplado a palhetas também flexíveis é desenvolvida ao longo deste trabalho. A metodologia empregada para analisar este conjunto, tanto do ponto de vista analítico (formulação das equações de movimento), numérico (solução numéricas das equações diferenciais de movimento) e experimental (validação dos modelos matemáticos), consiste em dividir o problema inicial – rotor rígido acoplado a palhetas flexíveis – em problemas intermediários que são estudados detalhadamente. Inicialmente, ressalta-se que o sistema de um rotor rígido acoplado a palhetas flexíveis pode ser estudado como um sistema de múltiplos corpos, rígidos e flexíveis, conhecido também como *flexible multibody systems*, FMBS, (Gérardin e Cardona, 2001). Neste trabalho, assume-se que as palhetas

são relativamente longas e delgadas, sendo que o elemento estrutural que pode ser utilizado para aproximar esta palheta é uma viga unidimensional. Assim sendo, o primeiro tópico a ser desenvolvido dentro deste trabalho é o estudo de uma viga girante que, posteriormente, é acoplada a um sistema de múltiplos corpos. O problema da análise dinâmica de uma viga girante caracteriza-se pela influência da velocidade de rotação nas frequências críticas da viga, que passam a variar em função da velocidade de rotação e das condições de operação, como a curva de aceleração inicial, por exemplo. O acoplamento entre o movimento de rotação e deslocamento elástico da viga girante não é linear, não é possível aplicar uma superposição linear entre os dois tipos de movimento (Absy e Shabana, 1996).

A principal característica que se observa nas equações de movimento do conjunto formado por rotor e palhetas é que as matrizes são variantes no tempo. Observa-se também que, dependendo do número de termos não-lineares incluídos no vetor de deformação da viga, as equações de movimento além de variantes no tempo, são não-lineares. A solução e análise das equações diferenciais de movimento lineares são conhecidas e fornecem parâmetros a respeito da dinâmica do sistema, tais como frequências naturais e modos de vibração. A análise dinâmica do sistema a partir de tais parâmetros define a análise modal, que tem aplicação tanto na análise numérica quanto experimental do sistema. Contudo, no caso de equações diferenciais variantes no tempo ou não-lineares, este tipo de estudo não é possível. Na condição em que a velocidade de rotação é constante, a variação destas matrizes é periódica. Adicionalmente, se termos linearizados de segunda ordem são considerados no vetor de deformação, as equações resultantes são lineares. Dessa forma, a análise das características dinâmicas deste sistema deve ser alterada e expandida, a partir do estudo da teoria geral de sistemas lineares, sejam estes invariantes no tempo ou não. Assim sendo, a terceira etapa deste trabalho tem como objetivo apresentar a análise modal de sistemas periodicamente variantes no tempo. Este novo tipo de análise modal permite redefinir os parâmetros tais como frequências naturais e modos de vibração para sistemas periodicamente variantes no tempo. Outra característica de tais sistemas é o aparecimento de vibrações paramétricas originadas da variação periódicas dos coeficientes da equação diferencial de movimento. No caso do sistema em análise, o rotor rígido com palhetas flexíveis, dois fenômenos, que são função da velocidade de rotação, são observados: o enrijecimento centrífugo e vibração paramétrica. A observação destas duas características é evidenciada pela aplicação do conceito de análise modal expandida às equações de movimento do conjunto formado por rotor e palhetas.

Finalmente, o modelo do conjunto deve ser validado tanto do ponto de vista numérico quanto experimental. A análise numérica consiste em solucionar as equações diferenciais de movimento no domínio do tempo, através da integração numérica, e comparar com os resultados obtidos pela análise modal expandida. A validação experimental é obtida com a construção de uma bancada de testes. Nesta bancada, formada por um rotor rígido acoplado a quatro palhetas flexíveis, que é apoiado sobre uma fundação flexível, são medidas as respostas em frequências nas partes não girantes do conjunto. Os resultados medidos são, então, comparados com os resultados obtidos pela análise modal variante no tempo e pela integração numérica.

O desenvolvimento do modelo numérico e experimental do conjunto rotor e palhetas procura, da maneira proposta, elucidar como ocorre o acoplamento entre o movimento de corpo rígido e rotação do rotor com os deslocamentos devido à flexibilidade das palhetas. Adicionalmente, busca-se analisar como este acoplamento altera a resposta dinâmica do conjunto. Inicialmente, dois fenômenos são predominantes: o enrijecimento centrífugo das palhetas e o aparecimento de vibrações paramétricas. Estes são os efeitos estudados nesta tese de doutorado. O conhecimento detalhado das interações entre os componentes e a resposta global do conjunto permite também a inclusão de outros fenômenos, como por exemplo, a raspagem das palhetas contra a carcaça do rotor. Neste caso, o modelo desenvolvido permitiria estudar como a raspagem afeta a resposta global do conjunto. Embora o estudo do efeito da raspagem não seja objetivo desta tese, acredita-se que a base teórica-experimental apresentada permite a inclusão deste tipo de excitação ao conjunto em etapas futuras desta linha de pesquisa.

## 1.1 Revisão bibliográfica

Seguindo a divisão de etapas apresentada anteriormente, esta revisão bibliográfica também é dividida em tópicos a saber: (a) viga girante; (b) sistemas de múltiplos corpos e (c) análise modal em sistemas rotativos e variante no tempo.

### 1.1.1 Viga girante

A análise dinâmica de uma viga que gira em torno de um eixo transversal ao seu plano de deformação pertence a uma classe de problemas que tem sido estudada nos últimos 30 anos. Em sistemas de múltiplos corpos, a exigência por materiais mais leves, aliada a maior exigência na performance destes sistemas, introduziu dificuldades na modelagem dos mesmos. Inicialmente modelados como um sistema de corpos rígidos, a introdução da flexibilidade em alguns ou todos os corpos do sistema leva a análise de uma nova classe de problemas: sistemas de corpos rígidos e flexíveis. Os grandes deslocamentos e rotações, associados aos movimentos de corpo rígido, são acoplados aos deslocamentos devido à flexibilidade do corpo. A principal característica de um sistema de corpos rígidos e flexíveis é o acoplamento entre estes dois tipos de deslocamento, de corpo rígido e flexível, de tal forma que o movimento resultante não é a simples soma destes movimentos se os corpos não estivessem acoplados. Assim, a modelagem destes sistemas muitas vezes resulta em equações de movimento não-lineares. Este tipo de problema encontra variada aplicação diversos sistemas na Engenharia, tais como mecanismos flexíveis, manipuladores e braços de robôs, antenas de satélites, hélices de helicópteros e palhetas de turbomáquinas.

O objetivo principal da primeira parte desta revisão é analisar a modelagem de uma viga girante flexível acoplada a um sistema de corpos rígidos. A utilização do modelo de uma viga, acoplado a um sistema de múltiplos corpos, permite modelar mecanismos flexíveis, manipuladores e palhetas, de helicópteros ou turbomáquinas. Em geral, a viga é sujeita à velocidade de rotação

e movimentos de translação. No caso inicial da viga girante apenas os movimentos de rotação são considerados. Em ambos os casos, estes movimentos se acoplam à deformação elástica da viga. A primeira alteração observada no comportamento dinâmico da viga é o aumento das frequências naturais com a velocidade de rotação, num efeito que é conhecido como “enrijecimento centrífugo” (*centrifugal stiffening*).

O cálculo das frequências naturais da viga girante, inicialmente, é realizado através de um método de aproximações sucessivas (Schilhansl e Providence, 1958). Este método relaciona as velocidades de rotação e as frequências naturais da viga não-girante através de uma proporção quadrática. Contudo, este é um método empírico. Anderson (1975) apresentou as equações de movimento de uma viga delgada girante, incluindo termos não-lineares de deformação. Estes termos não-lineares se referem às relações geométricas entre deslocamento e deformação, sendo que a hipótese de pequenos deslocamentos, neste caso, não é válida. O autor discute que as equações de movimento obtidas apenas com termos lineares de deformação não representam adequadamente o comportamento dinâmico de uma viga girante, uma vez que, neste caso, as frequências naturais diminuem com o aumento da velocidade de rotação. Neste trabalho, o autor propõe a solução do chamado problema de tensão inicial para linearizar as equações de movimento da viga girante. O objetivo do problema de valor inicial é separar os termos lineares e não-lineares de deformação para obter uma equação de movimento que seja linear e inclua corretamente o efeito de enrijecimento centrífugo. Supõe-se então que a viga tem um grande deslocamento, devido à aceleração centrífuga, e depois oscila linearmente em torno desta posição de equilíbrio. Este tipo de formulação entretanto se restringe para o caso de uma viga que está sujeita apenas a uma velocidade de rotação constante e não translada.

A formulação das equações de movimento de uma viga tridimensional sujeita a grandes rotações é apresentada por Simo (1985). Neste trabalho o autor apresenta a base teórica para a análise dinâmica de uma viga tridimensional na qual os deslocamentos e rotações não podem ser considerados pequenos. A cinemática da deformação da viga é apresentada. Entretanto, o trabalho não apresenta a implementação numérica das equações obtidas. A análise dinâmica de uma viga plana submetida a grandes movimentos é apresentada por Simo e Vu-Quoc (1986a). As equações de movimento da viga são obtidas utilizando uma teoria não-linear para descrever os deslocamentos e as deformações de uma viga plana. A implementação numérica das mesmas equações é apresentada por Simo e Vu-Quoc (1986b), utilizando o Método dos Elementos Finitos. A implementação numérica das equações de movimento de uma viga tridimensional, incluindo torção e acoplada a uma base livre para se movimentar no espaço, é apresentada por Kane, Ryan e Banerjee (1987), com a definição de um vetor de deformação finita geometricamente não-linear. Este trabalho é uma extensão de outro trabalho apresentado por Buffinton e Kane (1985), em que os autores apresentam a formulação das equações de movimento de uma barra com deformação longitudinal apenas acoplada a uma base que se movimenta. As equações de movimento são obtidas pelo Método de Kane, que é análogo ao Método das Potências Virtuais, sendo que a viga pode realizar um movimento de corpo rígido genérico, devido ao acoplamento com o movimento da base a que a viga girante está montada.

O sistema resultante das equações de movimento, originalmente não-linear, é linearizado utilizando um processo de linearização consistente de tal forma que o efeito de enrijecimento centrífugo não seja desprezado. A interpretação física deste enrijecimento e sua relação com os termos não-lineares de deformação é apresentada no trabalho de Simo e Vu-Quoc (1987). Os autores discutem a ordem de linearização necessária para que o efeito de enrijecimento centrífugo seja adequadamente considerado, demonstrando que os termos não-lineares são responsáveis pela transferência de parcela de energia de rotação para a equação de flexão da viga. Neste trabalho, o autor compara as hipóteses utilizadas por Simo e Vu-Quoc (1986a) e Kane, Ryan e Banerjee (1987) e conclui que as equações de movimento resultantes são análogas, se for utilizada uma aproximação não-linear de segunda ordem. A formulação de um elemento de viga com rotações finitas é apresentado por Cardona e Geradin (1988) e Hsiao, Yang e Lee (1994), sendo que este tipo de formulação também pode ser aplicada ao problema de viga girante. Os trabalhos acima citados apresentam as bases teóricas para a formulação das equações de uma viga girante acoplada a outros corpos.

Os trabalhos publicados posteriormente destacam a implementação numérica dos conceitos de formulação apresentados anteriormente. Inicialmente, discute-se a utilização desta linearização de segunda ordem que introduz no sistema de equações uma matriz de rigidez geométrica, que representa os termos do enrijecimento centrífugo. No caso de vigas sujeitas a velocidades de rotação constantes esta matriz é calculada através da solução do problema de tensão inicial e esta matriz é suposta constante ao longo do movimento. Entretanto, no caso mais geral, esta matriz é variável ao longo do movimento, e depende dos deslocamentos longitudinais da viga (Bakr e Shabana, 1986). Dessa maneira, a matriz de rigidez geométrica deve ser atualizada iterativamente. Neste trabalho, os autores, embora considerem que a matriz de rigidez é variável, não incluem a derivada desta matriz, pois estes representariam termos de ordem mais alta. A influência da derivada da matriz de rigidez geométrica é incluída no trabalho de Mayo e Domínguez (1996). Neste trabalho, os autores demonstram que estes termos que são usualmente desprezados podem levar a diferentes soluções. Entretanto, a solução torna-se extremamente sensível à função de forma utilizada para discretizar o deslocamento na direção axial. Neste caso, é necessário incluir um grande número de modos axiais para corretamente modelar o acoplamento entre o movimento das direções axial e transversal, de tal forma que a solução numérica é dificultada, tornando-se instável em muitas situações. Mayo, Domínguez e Shabana (1995) discutem a eficiência numérica do modelo não-linear completo. As equações de movimento são discretizadas pelo Método dos Modos Assumidos. Os autores comparam os resultados obtidos quando a rigidez é calculada a partir do modelo linear, não-linear de segunda ordem (matriz de rigidez geométrica) e pelo modelo não-linear completo e também discutem o número de modos necessários para corretamente modelar o sistema. Outra maneira de modelar este problema é apresentada neste trabalho, na qual os deslocamentos axiais são estimados a partir da própria deformação transversal e considera-se que não há deformação axial. Segundo os autores, este tipo de abordagem leva a um modelo numérico muito eficiente e estável, sendo que não é necessário incluir nenhum modo axial, dependendo da faixa de frequências de interesse. Este tipo de formulação em que o deslocamento e a deformação axial são desacopladas é válida para

sistemas em que a rigidez axial é muito maior que a rigidez transversal. A implementação numérica deste modelo utilizando o Método dos Elementos Finitos é apresentada em Mayo e Domínguez (1997). Um maneira de melhorar a implementação numérica para contornar esta atualização da matriz de rigidez geométrica é proposta por Fallahi e e Lai (1994), em que os termos dependentes e independentes do deslocamento são separados e as matrizes reorganizadas em função destes termos. Sharf (1996) compara as formulações para a energia potencial da viga utilizando aproximações de primeira, segunda e terceira ordem. O autor conclui que a utilização de um modelo de ordem mais alta é menos eficiente, de difícil solução e instável. Para contornar estas dificuldades o autor propõe a utilização de funções de interpolação de ordem mais alta para o deslocamento axial.

Uma análise detalhada do problema do encurtamento longitudinal em vigas girantes é apresentada em Radisavljevic e Baruh (2001). As magnitudes das vibrações combinadas nas direções longitudinais e transversais são analisadas, procurando-se verificar em que condições a elasticidade longitudinal passa a ter a mesma grandeza do encurtamento devido ao grande deslocamento transversal. Em geral, a presença de forças longitudinais determina em que condições o efeito de elasticidade longitudinal ou encurtamento da projeção longitudinal devido à curvatura devem ser considerados. Se há uma força longitudinal, como no caso da viga girante, o encurtamento da projeção deve ser incluído no modelo matemático. Na ausência desta força longitudinal, deve-se incluir a deformação na direção longitudinal, antes de incluir o encurtamento. Neste caso, a deformação longitudinal é um termo de primeira ordem e o termo de encurtamento, de segunda ordem.

Finalmente, um apanhado geral das condições de linearização das equações de movimento de um viga girante é apresentada em D'Eleuterio e Barfoot (1999). Neste trabalho, também é apresentada uma implementação numérica eficiente das equações de movimento.

As vigas estudadas nos trabalhos citados anteriormente, assume-se que a viga é delgada. Contudo, a inércia de rotação da viga passa a ter maior influência na resposta dinâmica de vigas quando a viga considerada não é delgada. Al-Ansary (1998) relata que desprezar a inércia de rotação da viga pode levar a erros de até 10% nas frequências naturais da viga. Segundo o autor, enquanto a velocidade de rotação tem grande influência no primeiro modo de flexão da viga, este efeito não é tão acentuado para os modos mais altos, sendo que para estes a inércia de rotação exerce maior influência. A formulação e implementação das equações de movimento de uma viga de Timoshenko girante foi apresentada por Oguamanam e Heppler (1998). Os autores testam diferentes formulações não-lineares para aproximar o efeito de enrijecimento centrífugo e concluem que a viga de Timoshenko prevê deslocamentos maiores que a viga de Euler-Bernoulli em velocidade de rotação mais elevadas.

Os trabalhos de Lee (1995) e Tan, Lee e Leng (1997) analisaram a estabilidade dinâmica de uma viga girante sujeita a um movimento da base. As equações de movimento da viga são obtidas a partir de uma viga de Euler-Bernoulli, incluindo o efeito da matriz de rigidez geométrica através da força normal atuante ao longo da viga. O método das múltiplas escalas é utilizado para determinar as fronteiras instáveis do sistema. Os autores concluem que a velocidade de rotação tem efeito de

estabilização, enquanto que a excitação da base tende a aumentar a região de instabilização.

### **Viga girante com massa concentrada**

Enquanto as equações de movimento e formas modais de uma viga não-girante são amplamente conhecidas (Inman, 1996), no caso de uma viga com massa concentrada, ou elementos inerciais, fixos em sua extremidade livre ou ao longo de seu comprimento, a determinação de expressões analíticas para as frequências naturais e formais modais é mais complicada, sendo que muitas vezes esta estimativa só pode ser realizada numericamente. A massa que é fixa à viga pode ser modelada de três diferentes maneiras, dependendo de suas dimensões e condições de fixação. No primeiro caso, a massa é considerada concentrada, pontual, ou seja, a inércia de rotação é desprezada. No segundo caso, as dimensões da massa são finitas e sua inércia de rotação não pode ser desprezada, mas considera-se que o ponto de fixação deste corpo à viga se dá pelo centro de gravidade do corpo finito. Finalmente, tem-se o caso em que as dimensões do corpo são finitas, mas que a fixação deste à viga se dá por um ponto diferente do centro de gravidade, sendo que, em geral, este ponto é uma das extremidades do corpo finito. Cada uma destas diferentes hipóteses leva a diferentes condições de contorno e, portanto, diferentes frequências críticas e formas modais (Bhat e Wagner, 1976; Liu e Huang, 1988a). Outros aspectos que poderiam ser adicionados a este problema são inclusão de rigidez na extremidade juntamente com a massa (Stephen, 1982) ou em outro ponto da viga (Gurgoze e Batan, 1986), seção transversal variável com massa fixa a extremidade livre (Laura e Gutierrez, 1986), influência da posição de molas e massas ao longo do comprimento nas frequências e formas modais (Liu e Huang, 1988b), ou ainda vibração de um viga com massa na ponta sujeita a uma excitação na base (To, 1982).

O estudo da implementação de métodos numéricos para discretizar um viga com elementos inerciais e elásticos ao longo de seu comprimento ou na extremidade é apresentado por Hamdan e Abdel Latif (1994). Neste trabalho, os autores comparam as soluções obtidas pelos Métodos de Galerkin, Rayleigh-Ritz e Elementos Finitos quanto aos seguintes aspectos: condições suficientes e necessárias para a convergência, taxa de convergência, taxa de convergência e precisão da solução em função do esforço computacional para obter a solução com um erro pré-determinado. As conclusões obtidas pelos autores neste trabalho mostram que: (a) os três tipos de discretização apresentam razoável precisão e boa taxa de convergência, se os elementos inerciais apresentam pequenos valores em comparação às dimensões da viga; (b) a precisão e taxa de convergência diminuem drasticamente se a magnitude dos elementos inerciais é aumentada; (c) o aumento do número de funções de tentativa não aumenta a precisão dos modos e frequências mais altos; e (d) o Método de Rayleigh-Ritz apresenta vantagens quanto ao aspecto dos esforço computacional, enquanto o Método dos Elementos Finitos apresenta maior estabilidade e precisão.

As frequências de vibração de uma viga girante com massa, ou corpo finito, acoplado a sua extremidade são estudadas em Wrigh, Smith, Thresher e Wang (1982), massa concentrada, e Low (1990), corpo finito com ponto de fixação diferente do centro de massa deste corpo. Em

ambos trabalhos, busca-se obter uma solução analítica, ou ainda, expressões para as formas modais e frequências naturais da viga girante com estas duas condições de contorno. Por outro lado, Hoa (1979) investiga a solução deste problema utilizando o método dos elementos finitos, incluindo uma matriz de rigidez geométrica constante para aproximar o efeito de enrijecimento centrífugo da viga. Neste trabalho, o autor conclui que a massa concentrada na extremidade tende a diminuir as frequências críticas em baixa velocidade de rotação, mas tende a aumentar estas frequências em altas velocidades. As vibrações transientes de uma viga girante com massa concentrada são analisadas em Kojima (1986). Yigit, Scott e Ulsoy (1988) analisam as vibrações transversais de uma viga de Euler-Bernoulli, girante, com um corpo finito na extremidade livre, aproximando a matriz de rigidez geométrica a partir da força normal atuante na viga, tanto nas condições de velocidade de rotação constante quanto aceleração.

Fallahi, Lai e Gupta (1994) apresentam o modelo de uma viga de Timoshenko com um corpo finito na extremidade livre, considerando movimentos longitudinais e transversais da viga, sendo que a matriz de rigidez geométrica, variável no tempo, e sua derivada são incluídas na formulação. Também é apresentado um método numérico eficiente para montar as matrizes das equações de movimentos, em que os termos independentes e dependentes do tempo são calculados separadamente. A formulação e implementação de uma viga geometricamente não-linear girante com um corpo finito é apresentado em Lai (1994). Low (1994) estuda a influência de parâmetros tais como razão das massas (da viga e pontual) e inércia da resposta dinâmica. A dinâmica da massa concentrada, ou corpo finito, exerce grande influência a resposta dinâmica da viga, uma vez que acentua os efeitos de acoplamento entre os termos elásticos e dinâmicos.

## Outros aspectos

As frequências naturais de uma viga girante podem ser obtidas experimentalmente utilizando equipamentos que permitam transmitir os sinais do sistema girante para o sistema inercial. Fan, Ju e Tsuei (1994) utilizaram uma bancada de testes em que as medidas de deformação obtidas em extensômetros são transferidas através de um sistema de telemetria. Os autores compararam os resultados encontrados com o modelo de uma viga de Timoshenko com rigidez geométrica incluída e encontraram boa concordância entre as frequências experimentais e numéricas. Também foi observado que a variação das frequências naturais da viga com a velocidade de rotação é uma relação não-linear. A vibração de vigas girantes pode ser medida também utilizando sensores ópticos (Nava *et al.*, 1994).

O modelo de uma viga girante sujeita a grandes movimentos de translação é utilizado também na solução de problemas de mecanismos e manipuladores flexíveis. Ao contrário do problema de dinâmica de rotores, as velocidades de rotação envolvidas não são tão elevadas, porém os deslocamentos de corpo rígido tornam-se mais importantes. Assim, a utilização de um modelo dinâmico que inclua a rigidez geométrica é suficiente para acoplar adequadamente os deslocamentos axiais e transversais (Meek e Liu, 1995). Neste trabalho, um manipulador flexível é formulado como uma

viga plana de Timoshenko. Du e Ling (1995) apresentam o modelo de mecanismos tridimensionais utilizando vigas de Euler-Bernoulli incluindo também o efeito da matriz de rigidez geométrica. A utilização de um modelo não-linear completo incluindo todos os termos de deformação encontra limitações (Hsiao *et al.*, 1994), pois no caso da análise dinâmica de mecanismos, a solução numérica é obtida utilizando um procedimento incremental-iterativo, pois para cada incremento de tempo é necessário resolver uma equação vetorial fechada. O esquema numérico utilizado é em geral uma combinação do método de Newmark e Newton-Raphson (Kim e Haug, 1988; Kim e Haug, 1989).

### 1.1.2 Sistemas de múltiplos corpos – corpos rígidos e flexíveis

A formulação, implementação e solução das equações de movimento de um sistema de corpos rígidos e flexíveis é uma expansão do conceito da dinâmica de sistemas de corpos rígidos. Os movimentos de cada um dos corpos é descrito com ajuda de sistemas de referência auxiliares, sendo que os movimentos entre os mesmos é definido por juntas cinemáticas. As relações de equilíbrio dinâmico entre os corpos são obtidos através das equações de Lagrange, ou ainda, da equações de Newton-Euler. No primeiro caso, não há necessidade de avaliar as forças de interação entre os corpos, sendo, por outro lado, necessário calcular a energia potencial e cinética do conjunto, bem como a velocidade absoluta do centro de massa de cada corpo. No segundo caso, as grandezas estimadas são força, momento e aceleração absoluta do centro de massa de cada um dos corpos. Uma terceira abordagem ainda é possível, com a utilização das equações de Newton-Euler-Jourdain, em que velocidades e acelerações absolutas são calculadas e apenas as forças e momentos externos contribuem para a equação de equilíbrio dinâmico. As equações de Newton-Euler-Jourdain e Lagrange são equivalentes, pois se baseiam na busca do ponto mínimo de energia, que corresponde ao equilíbrio dinâmico do sistema. No caso das equações de Lagrange, o princípio dos trabalhos virtuais é utilizado, enquanto que no caso das equações de Newton-Euler-Jourdain, o princípio das potências virtuais é aplicado.

No caso de um sistema formado tanto por corpos rígidos quanto flexíveis (FMBS - *flexible multibody systems*), a elasticidade dos corpos flexíveis deve ser considerada, sendo que este corpo deve ser modelado como um corpo sujeito a deslocamentos e rotações finitos, que se acoplam à sua deformação elástica. O resultado é que aparecem termos não-lineares de inércia acoplando os dois tipos de movimento (De Veubeke, 1976; Shabana, 1990; Barhorst e Everett, 1995). Em geral, deve-se considerar que a hipótese de pequenos deslocamentos não é válida para obter as relações entre deslocamento e deformação do corpo elástico do conjunto (Sorge *et al.*, 1993). Entretanto, se a grandeza dos deslocamentos e velocidades de rotação envolvidas for baixa, em relação ao sistema global, o corpo elástico pode ser modelado linearmente (Jahnke *et al.*, 1993).

No caso de FMBS, a formulação das equações de movimento com restrições de movimento, sejam estas holonômicas ou não-holonômicas, requer a solução de uma equação vetorial fechada (Barhorst, 1998), o que leva a um sistema de equações diferenciais e algébricas não-linear. Dessa forma, a configuração do sistema deve ser determinada a cada instante de tempo durante o processo

de integração numérica (Shabana, 1991; Anantharaman e Hiller, 1993).

A formulação das equações de movimento de FMBS pode ser facilitada utilizando-se programas comerciais de manipulação simbólica (Barhorst, 1997), pois segue-se uma metodologia facilmente automatizável para obtenção das equações de movimento.

Ressalta-se que os efeitos de enrijecimento centrífugo observados em corpos flexíveis girante – sejam estes vigas, placas ou elementos em que as três dimensões do corpo são importantes – exercem papel fundamental na dinâmica do sistema de múltiplos corpos, pois acoplam os movimentos de rotação e elásticos dos corpos. Dessa forma, o efeito de enrijecimento deve ser considerado na formulação através da inclusão de termos não-lineares de deformação na modelagem do corpo flexível, ou incluindo, ao menos, a matriz de rigidez geométrica (Wallrapp e Schwertassek, 1991; Tadikonda e Chang, 1995). A utilização desta matriz, na verdade, é de implementação numérica mais simples e representa termos linearizados de segunda ordem. Além da não-linearidade geométrica, devido aos grandes deslocamentos, efeitos tais como não-linearidade do material, devido à plasticidade também podem ser incluídas na formulação de FMBS (Ambrósio, 1996).

A discretização dos corpos flexíveis, em geral, é obtida utilizando um dos seguintes métodos: modos assumidos ou elementos finitos. No caso do método dos modos assumidos, consideram-se as formas modais das primeiras frequências naturais do corpo flexíveis com as mesmas condições de contorno geométricas do corpo acoplado ao conjunto. O método dos elementos finitos mostra-se mais fácil de ser implementado, permitindo a inclusão de amortecimento e efeitos de não-linearidades geométricas. Contudo, neste caso, o número de graus de liberdade aumenta consideravelmente (Langlois e Anderson, 1999). A discussão a respeito da obtenção de um modelo representativo e de pequena dimensão para o corpo flexível é apresentada a seguir.

### **Escolha da função de forma e redução de modelo**

A escolha do método ou esquema de discretização do corpo flexível é uma etapa essencial no desenvolvimento do modelo matemático do sistema de múltiplos corpos. Em especial, dois aspectos devem ser ponderados. Um deles é o "tamanho" do modelo numérico do corpo flexível, ou seja, o número de graus de liberdade em que este corpo é discretizado. O segundo, é a capacidade deste modelo representar a dinâmica deste corpo, seja pela escolha do número de modos a ser considerado ou ainda pela inclusão de termos não-lineares do vetor de deformação. Um grande número de graus de liberdade, em primeira análise, poderia levar a um modelo numérico mais fino ou representativo da dinâmica do corpo flexível. Contudo, devido às montagem e acoplamento com o sistema de múltiplos corpos, um grande número de graus de liberdade para o corpo flexível torna a implementação e solução numérica do conjunto custosa, do ponto de vista computacional, ou até mesmo proibitiva. Dessa forma, busca-se a obtenção de um modelo discretizado do corpo flexível que tenha um número mínimo de coordenadas generalizadas. Por outro lado, este modelo numérico deve descrever a dinâmica do corpo flexível de maneira precisa, considerando a faixa de frequências de interesse, e os efeitos dinâmicos não-lineares envolvidos, como o enrijecimento centrífugo. A

escolha do método de discretização do corpo flexível é a busca de um modelo discretizado, eficiente e representativo ao mesmo tempo.

A discretização do corpo flexível pode ser feita de diferentes maneiras (Sorge *et al.*, 1993): (a) substituir do corpo elástico por uma combinação de massas e molas; (b) tratar o corpo elástico como contínuo; (c) concentrar a massa do corpo em alguns nós, sendo que a elasticidade é mantida contínua. Embora, as primeiras e terceiras opções possam ser utilizadas, a mais empregada é a segunda. Neste caso, são utilizados métodos de discretização do corpo contínuo, sendo que a massa e rigidez são distribuídas pelos graus de liberdade ou nós da malha discretizada, a partir da introdução de funções de tentativa que relacionam os deslocamentos nodais e os deslocamentos ao longo do corpo contínuo. No caso em que estas funções de tentativa respeitam todas as condições de contorno, tanto essenciais quanto naturais, as funções recebem o nome de funções de comparação e o método de discretização é o Método de Galerkin. Se estas funções respeitam apenas as condições de contorno essenciais recebem o nome de funções admissíveis e o método é denominado Método de Rayleigh-Ritz. A utilização de funções admissíveis no domínio por partes define o Método dos Elementos Finitos (Hamdan e Abdel Latif, 1994). Outra diferença entre os dois métodos é que as funções admissíveis no Método dos Elementos Finitos são polinômios de baixa ordem, que satisfazem requerimentos mínimos de diferenciabilidade. Estas funções admissíveis são muitas vezes conhecidas como funções de interpolação ou funções de forma. A divisão do domínio em partes traz uma série de vantagens ao MEF, entre elas a facilidade de modelar geometrias complexa, descontinuidades e não-uniformidades. E a utilização de funções polinomiais facilita a implementação numérica. Contudo, nos casos em que a geometria é simples e uniforme, o método clássico de Rayleigh-Ritz é capaz de apresentar precisão superior, com o mesmo número de graus de liberdade, ou a mesma precisão com um número menor de graus de liberdade (Meirovitch e Kwak, 1990), com a utilização de diferentes famílias de funções admissíveis. Outra abordagem para o Método de Rayleigh-Ritz apresentada por este trabalho é a utilização de famílias de funções de quase-comparação. Estas funções são funções admissíveis que, embora individualmente não satisfaçam as condições naturais de contorno, a combinação linear finita destas são capazes de satisfazê-las com certo grau desejado de precisão. A utilização desta nova classe de funções acelera a taxa de convergência e a precisão com menos graus de liberdade.

O Método dos Elementos Finitos é um método muito popular, largamente empregado na análise estrutural, estática ou dinâmica. A grande vantagem deste método é sua maleabilidade e facilidade para modelar geometrias complexas, além da facilidade de implementação numérica. Seguindo estas vantagens, o Método dos Elementos Finitos tornou-se também um método utilizado na modelagem de sistemas de múltiplos corpos flexíveis (Gérardin e Cardona, 2001; Jahnke *et al.*, 1993; Langlois e Anderson, 1999). Outro método também bastante conhecido da mecânica estrutural, é o Método dos Elementos de Contorno, sendo que sua aplicação para FMBS é apresentada por Kerdjoudj e Amirouche (1996). A utilização do Método dos Elementos Finitos, contudo, aumenta o número de graus de liberdade do conjunto. Uma solução proposta para contornar esta dificuldade é a utilização de técnicas de redução, tais como a subestruturação.

Uma técnica de redução de subestruturas, sujeitas a grandes deslocamentos lineares e angulares é apresentada por (1983). O método consiste em transformar as equações de movimento do sistema de coordenadas nodal em um sistema de coordenadas modal. Contudo as coordenadas envolvidas nesta transformação correspondem apenas às coordenadas relativas ao movimento elástico. A dificuldade para este tipo de problema (FMBS) é que, devido à complexidade dos movimentos do conjunto e das não-linearidades envolvidas, torna-se mais complicada a determinação do número de modos que contribuem para o movimento. A identificação da matriz modal pode ser feita de diferentes maneiras. Uma delas pode ser a identificação dos autovetores a partir da solução do problema de autovalores do corpo elástico discretizado pelo Método dos Elementos Finitos. Outra possibilidade é a identificação experimental destes autovetores. Além de autovetores, numéricos, a redução ou transformação modal da subestrutura pode ser feita através das funções de forma e dos autovetores obtidos pelo Método dos Elementos Finitos. Após a transformação modal e redução das matrizes de cada corpo elástico obtém-se uma subestrutura que é representada por um conjunto mínimo de coordenadas e incluindo apenas os modos associados às frequências naturais mais baixas, sendo que esta subestrutura é acoplada ao sistema global (Shabana, 1985). Outro método que pode ser utilizado para a redução das coordenadas do corpo flexível é o Método dos Modos Componentes (Craig Jr. e Anthony, 1996), que é bastante semelhante, pois, utiliza-se dos autovetores para definir uma transformação de coordenadas (transformação de Ritz), sendo que os sistemas resultantes desta transformação são denominados de sistemas de referência componentes. Este sistema de coordenadas, local, é o sistema que deve ser acoplado ao sistema global.

Alternativamente ao Método dos Elementos Finitos, o Método de Rayleigh-Ritz pode ser utilizado. Neste caso, procura-se escolher uma família de funções admissíveis que represente adequadamente a dinâmica do corpo flexível com um número mínimo de graus de liberdade. Uma família de funções a ser utilizada é a família de auto-funções, ou seja, funções que representem os primeiros modos de vibração. Contudo, a determinação destas funções, de maneira analítica, é difícil e, na maioria das vezes, as condições de contorno naturais não podem ser previstas, pois dependem das condições de movimento e acoplamento entre os corpos. Por outro lado, a utilização de auto-funções que respeitem apenas as condições de contorno essenciais, como apresentado em Al-Bedoor e Khulief (1996) leva uma taxa de convergência muito baixa e pobre (Schwertassek *et al.*, 1999). O Método de Rayleigh-Ritz com a classe de funções de quase-comparação pode ser também utilizada em FMBS, pois permite uma solução com alta taxa de convergência com menos graus de liberdade. Outra vantagem é a capacidade destas funções de representar condições de contorno naturais que não são conhecidas a priori, o que é o caso dos sistemas de múltiplos corpos (Hagedorn, 1993; Meirovitch e Hagedorn, 1994) e também sistemas amortecidos.

Outras funções de forma também podem ser utilizadas no Método de Rayleigh-Ritz, como, por exemplo, um função polinomial de ordem mais alta (Sharf, 1995; Sharf, 1999) tanto para o deslocamento transversal e especialmente para o deslocamento longitudinal de um viga acoplada a um sistema de corpos. Outra possibilidade, pode ser também a utilização do Método dos Elementos Finitos utilizando a versão p para um elemento de viga geometricamente não-linear (Orth e Surana,

1994).

Uma formulação alternativa para o sistema de múltiplos corpos é a utilização de funções de forma chamadas nodais absolutas. Neste caso, as funções de forma são globais, pois, incluem também os modos de corpo rígido (Shabana e Schwertassek, 1998). A vantagem deste tipo de abordagem reside no fato de que a matriz de massa é constante. Por outro lado, as funções de forma devem formar um conjunto completo, que inclua também os modos de corpo rígido. Esta formulação mostra-se bastante adequada para analisar grandes deslocamentos em sistemas de múltiplos corpos (Escalona *et al.*, 1998).

### 1.1.3 Análise modal em sistemas rotativos e variantes no tempo

As características e propriedades de sistemas lineares são conhecidas (Zadeh e Desoer, 1963). A forma fechada da solução da equação diferencial pode ser obtida, sendo dada pela matriz de transição de estado. Posteriormente, a solução da equação forçada é dada pela integral de convolução entre esta a matriz de transição de estado e a função de excitação ao sistema.

A solução da equação em sua forma homogênea pode ser também obtida por uma combinação linear de funções exponenciais. Utilizando esta abordagem, a matriz de transição de estado pode ser escrita em função dos autovalores e autovetores do sistema original. Adicionalmente, sendo a transformada de Fourier uma relação entre a função no tempo e suas componentes em harmônicas (exponenciais imaginárias), esta transformada é utilizada para transformar a equação diferencial do domínio do tempo para o domínio da frequência.

A análise no domínio da frequência, juntamente com a determinação de parâmetros, tais como frequências naturais e modos de vibração (autovalores e autovetores do sistema, respectivamente), formam as bases para a análise modal. Esta é uma ferramenta extremamente utilizada para caracterizar propriedades dinâmicas de sistemas mecânicos, sejam rígidos ou flexíveis, tanto do ponto de vista numérico quanto experimental (Ewins, 1984). Contudo, a premissa básica deste desenvolvimento é o fato dos sistemas lineares apresentarem coeficientes constantes. Em sistemas rotativos, formados por rotor, disco e mancais, a análise modal (invariante no tempo) também é extensamente aplicada, embora algumas dificuldades práticas sejam introduzidas para realizar uma análise modal em estruturas girantes (Bucher *et al.*, 1996; Stanbrigde e Ewins, 1996).

No caso de sistemas lineares com coeficientes variantes no tempo, algumas propriedades e características da solução podem ser estudadas (Meirovitch, 1988). No entanto, uma forma fechada para a solução não pode ser obtida, a não ser em casos bem simples ou particulares. Uma das classes em que características da solução podem ser melhor definidas é o caso de sistemas periodicamente variantes no tempo. Uma das principais características de tais sistemas é que seus autovalores também são periódicos. Além disso, a variação periódica dos coeficientes da equação diferencial introduz no sistema uma tipo de excitação paramétrica (Nayfeh e Mook, 1979).

Uma metodologia para aproximar a solução de sistemas periodicamente variantes no tempo,

também chamados de sistema de Floquet, no entanto, pode ser desenvolvida. Esta solução é fundamentada por teoremas que garantem que sistemas lineares variantes podem ser transformados em sistemas lineares invariantes (Wu e Sherif, 1976; Wu *et al.*, 1975; Wu, 1978). Dessa forma, propõe-se uma metodologia que se baseia na obtenção da série de Fourier dos coeficientes da equação diferencial (Xu e Gasch, 1995). Um novo problema, invariante, é construído, sendo que uma matriz expandida, em função dos coeficientes de Fourier é obtida. Em um problema geral, a dimensão desta matriz é infinita, pois os termos da série de Fourier podem ser infinitos, sendo que busca-se uma solução aproximada para os autovalores desta matriz (Friedmann *et al.*, 1977). Os autovalores desta matriz expandida correspondem aos autovalores da problema variante original. Com a determinação destes autovalores e seus respectivos autovetores conceitos análogos aos da análise modal podem ser definidos (Irretier, 1999; Liu, 1999).

Este tipo de análise modal expandida tem aplicação especial em problemas rotativos sejam estes rotores que momentos de inércia variável (Brusa *et al.*, 1997), mecanismos flexíveis (Liu, 1999), discos flexíveis de rotores (Reuter, 1998), rotores assimétricos (von M. Ertz e Nordmann, 1995) e turbinas eólicas (Xu e Gasch, 1995). Em todos estes tipos de problemas as estruturas flexíveis são submetidas a rotações, o que também ocorre no problema de modelagem de rotores acoplados a palhetas flexíveis.

A utilização de um formalismo análogo à análise modal para tratar problemas periodicamente variantes permite a introdução de conceitos análogos também: autovalores e autovetores periódicos e função de resposta em frequência cíclica, por exemplo, (Irretier, 1999). Além disso, permite desenvolver como identificação de sistemas (Liu, 1997), projetar controle para sistemas periodicamente variantes (Sinha e Joseph, 1994) ou propor redução de ordem em tais sistemas (Deshmukh *et al.*, 2000). Cada uma destas técnicas é adaptada de maneira análoga ao sistemas invariantes, mas seguindo os conceitos expandidos para o problema periodicamente variante no tempo.

## 1.2 Objetivos do trabalho e contribuição original

Os objetivos deste trabalho são o desenvolvimento, a solução, a análise e a validação experimental das equações de movimento de um conjunto formado por um rotor rígido acoplado a palhetas flexíveis. A originalidade da tese está na forma holística como o problema vibratório entre rotor e vigas flexíveis girantes é tratado, tanto teoricamente quanto com exemplos numéricos e experimentais. Passa-se pela modelagem matemática de sistemas híbridos (rígidos + flexíveis), chegando-se a sistemas de equações lineares e não lineares variantes no tempo. As equações lineares periodicamente variantes no tempo são apresentadas de forma extremamente transparente, e são resolvidas matematicamente via análise modal em sistemas periodicamente variantes no tempo. A influência dos efeitos de coriolis, giroscópico, rigidez rotacional e enrijecimento centrífugo no comportamento das frequências-básicas do sistema é investigada com rigor e riqueza de detalhes. Além disto, o comportamento das formas modais variantes no tempo é ilustrado e explicado

com o auxílio de três diferentes exemplos teóricos. As vibrações paramétricas nada mais são que as frequências naturais do sistema variante no tempo, e podem ser observadas tanto teoricamente quando experimentalmente, com o auxílio de uma bancada de testes. No entanto, a participação das vibrações paramétricas na resposta total do sistema se reduz com o aumento da rotação. Isto pode ser observado tanto teoricamente quanto experimentalmente. As equações não lineares são tratadas numericamente e as limitações dos modelos lineares e não lineares são claramente apontadas. Os resultados experimentais também deixam claro que somente com uma aproximação não-linear para as deformações da viga girante consegue-se descrever corretamente o comportamento do sistema rotor-palhetas, o efeito de enrijecimento centrífugo e as vibrações paramétricas.

### 1.3 Conteúdo e organização do trabalho

Este trabalho está dividido em sete capítulos e dois apêndices, sendo que em cada um destes, as seguintes etapas foram desenvolvidas:

- **Capítulo 1** – Neste capítulo são apresentados os objetivos do trabalho e um resumo da metodologia e etapas que se pretendem seguir para a condução do tema. Ainda neste capítulo é apresentada uma revisão bibliográfica de temas que são abordados ao longo deste trabalho, tais como, viga girante, modelagem de sistemas de múltiplos corpos e análise modal variante no tempo;
- **Capítulo 2** – Neste capítulo a formulação e implementação das equações de movimento de uma viga girante são apresentadas. A cinemática da deformação da viga é apresentada, sendo que relações geometricamente não-lineares entre deslocamento e deformação são estudadas. A relação entre estes termos não-lineares de deformação e o acoplamento ao movimento de rotação da viga é discutida. A utilização de diferentes funções de interpolação para discretizar a viga é apresentada, considerando uma viga girante apenas e a viga acoplada com massa, concentrada ou finita, na extremidade livre. Alguns exemplos numéricos de uma viga sujeita a um perfil de aceleração são apresentados, considerando três modelos para a deformação da viga: linear, linearizado de segunda ordem e completamente não-linear;
- **Capítulo 3** – Neste capítulo as equações de movimento do conjunto rotor e palhetas (viga flexível girante), seguindo a metodologia de múltiplos corpos é apresentada. Inicialmente, as equações de um rotor que se movimenta em um plano acoplado a quatro palhetas flexíveis são apresentadas, sendo que as vigas são modeladas com as três abordagens discutidas no capítulo anterior (linear, linearizada de segunda ordem e não-linear). Em seguida, as equações de movimento do conjunto, considerando que o eixo do rotor está apoiado em uma das extremidades e livre na outras de tal forma que tenha movimentos angulares apenas, são desenvolvidas. Com esta configuração, procura-se elucidar o papel do efeito giroscópico na resposta do conjunto, sendo que a viga é modelada com uma abordagem linearizada de segunda ordem. Finalmente,

as equações de um rotor que apresenta movimentos de translação e rotação acoplado a palhetas flexíveis é apresentado;

- **Capítulo 4** – Neste capítulo a teoria de sistemas lineares é revisada. Inicialmente, a solução de equações diferenciais com coeficientes constantes é revisada, a partir da apresentação de conceitos como matriz de transição de estado, transformada de Laplace e Fourier, função de resposta em frequência, que são conhecidos. Posteriormente, a forma da solução de equações diferenciais variantes no tempo é discutida. No caso de sistemas lineares periodicamente variantes no tempo (sistemas de Floquet) é possível obter uma solução utilizando a equação de Hill. Dessa forma, novos conceitos relacionados ao problema de autovalores e autovetores variantes no tempo, autovetores e autovalores básicos são apresentados, formando a base da análise modal expandida. Alguns exemplos de solução são apresentados;
- **Capítulo 5** – Neste capítulo, os resultados obtidos de simulações numéricas são apresentados. Os modelos matemáticos desenvolvidos no Capítulo 3 são resolvidos por um processo de integração numérica (Runge-Kutta) e também utilizando a solução modal expandida. Os resultados são apresentados tanto no domínio do tempo quanto da frequência. No domínio da frequência os resultados são mostrados através de diagramas de cascata. Este tipo de curva permite visualizar a variação do comportamento dinâmico em função da velocidade de rotação, com o aparecimento de vibrações paramétricas e o efeito de enrijecimento centrífugo. Os modos associados aos autovalores-básicos e autovalores periódicos (paramétricos) também são apresentados, de forma a ilustrar a composição das formas modais neste tipo de sistema periodicamente variante no tempo;
- **Capítulo 6** – Neste capítulo são apresentados resultados experimentais medidos na bancada de testes. As curvas de calibração são apresentadas. As medidas são realizadas com velocidades de rotação crescentes, sendo que uma diagrama de cascata experimental é construído. Com os parâmetros da bancada, simulações numéricas são realizadas também, permitindo a validação do modelo numérico. Os modos de vibração, básico e paramétrico, também são ilustrados;
- **Capítulo 7** – Neste capítulo um pequeno resumo das etapas realizadas juntamente com as observações feitas e conclusões obtidas ao longo deste trabalho é apresentada. Sugestões para trabalhos futuros são apresentadas;
- **Apêndice A** – Neste apêndice são apresentados definições, teoremas e corolários que permitem realizar a transformação de um sistema variante no tempo em um sistema invariante;
- **Apêndice B** – Neste apêndice é apresentada a teoria de Floquet de sistemas periodicamente variantes no tempo. As propriedades e teoremas que regem tais sistemas é apresentada.

## Capítulo 2

# Modelagem matemática - viga girante

### 2.1 Introdução

Inicialmente, a formulação e implementação das equações de uma viga girante são apresentadas. Um viga girante é uma viga sujeita à rotação em um eixo perpendicular ao seu plano de vibração. A principal característica de uma viga com tal configuração é a influência da velocidade de rotação na sua resposta dinâmica. Uma das conseqüências desta influência é o aumento das freqüências naturais da viga em função da velocidade de rotação. Contudo, existe uma limitação na formulação usual de vigas, se o efeito da velocidade da rotação for incluído. Observa-se que as relações lineares entre deslocamento e deformação da viga são inadequadas para analisar o acoplamento dinâmico entre rotação e deformação da viga. As equações de movimento da viga girante, obtidas a partir destas relações lineares, por exemplo, sugerem que suas freqüências naturais diminuem em função da velocidade de rotação, o que é o oposto do comportamento verificado na realidade (Anderson, 1975; Simo, 1985).

A limitação observada nas equações de movimento pode ser corrigida, entretanto, se a relação entre deslocamento e deformação da viga for obtida com termos não-lineares de deformação. Nas formulações usuais de vigas estes termos normalmente são desprezados, pois são considerados termos de ordem mais alta devido a ordem de grandeza dos deslocamentos. Contudo, devido ao movimento de rotação da viga, a hipótese de pequenos deslocamentos é inadequada, sendo que termos não-lineares de deformação, que são usualmente desprezados, passam a ter importância. Uma análise detalhada da configuração da deformação da viga mostra que estes termos não-lineares são responsáveis por acoplar os deslocamentos das direções transversais e longitudinais (Simo e Vu-Quoc, 1987; Kane *et al.*, 1987). O acoplamento do movimento nestas duas direções, desprezível no caso de uma viga não-girante, é resultado do efeito da velocidade de rotação na resposta dinâmica da viga. Dessa forma, parte deste capítulo consiste em analisar a cinemática da deformação da viga, desenvolver detalhadamente as equações de movimento de uma viga girante e analisar a importância dos termos não-lineares de deformação nestas equações.

A discussão da implementação numérica das equações de movimento constitui a segunda parte deste capítulo. A inclusão dos termos não-lineares de deformação torna a implementação das equações de movimento um procedimento delicado. O procedimento de discretização das equações de movimento a ser empregado é o método dos modos assumidos. Entretanto, devido aos termos não-lineares de deformação, é necessário incluir um grande número de funções admissíveis, para obter um modelo numérico preciso das equações de movimento (Mayo *et al.*, 1995; Sharf, 1996). O resultado é um modelo numérico com grande número de graus de liberdade, que apresenta também dificuldades na integração numérica, tais como instabilidade numérica e necessidade de um incremento de tempo muito pequeno.

A necessidade de desenvolver um modelo numérico de pequena dimensão, contudo, torna-se importante, pois futuramente, a viga girante é acoplado a um sistema de múltiplos corpos. Ou seja, a implementação numérica da viga girante, para este caso, deve ter como objetivo minimizar o número de graus de liberdade, sem que os efeitos do acoplamento entre a rotação (devido ao movimento de corpo rígido da viga) e deformação (devido à flexibilidade da viga) sejam negligenciados. Com estes objetivos em mente algumas soluções são apresentadas, tais como considerar apenas os termos não lineares de segunda ordem (Simo e Vu-Quoc, 1987), desacoplar as deformações das direções transversal e longitudinal (Mayo *et al.*, 1995), escolher uma família de funções de tentativa que tenha alta taxa de convergência (Schwertassek *et al.*, 1999). A taxa de convergência de uma família de funções de tentativa é a relação que existe entre a convergência da solução e o número de funções empregadas para obtê-la. Comparando-se duas soluções, aquela que utilizar menor número de funções e, portanto, menos graus de liberdade apresenta maior taxa de convergência (Meirovitch e Kwak, 1990).

Finalmente, alguns exemplos numéricos são apresentados, de maneira a ilustrar e corroborar as equações desenvolvidas e implementadas. Assim, inicialmente são apresentados os resultados obtidos a partir de diferentes discretizações com três tipos de famílias de funções de tentativa. Posteriormente, modelos numéricos, obtidos com diferentes relações entre deslocamento e deformação – linear, não-linear de segunda ordem e completamente não-linear – são comparados no caso em que a viga está acelerando. Além disso, considera-se também a influência da inclusão de uma massa de dimensão finita na extremidade livre da viga.

## 2.2 Modelos de viga – aproximações lineares e não-lineares

A formulação das equações de movimento da viga girante, apresentada neste trabalho, segue uma metodologia semelhante à utilizada na descrição dos movimentos de um corpo rígido. Dessa forma, é analisada a cinemática da deformação de um ponto pertencente à seção transversal da viga. A escolha desta metodologia é justificada pelo tipo de movimento a que a viga está sujeita, sendo este o movimento de rotação. Além disso, posteriormente, mesmo se a viga estiver acoplada a um sistema de corpos rígidos que realize um movimento geral, a mesma metodologia pode ser

empregada para descrever o movimento de um ponto da viga e obter as equações de movimento do sistema em análise.

A descrição do movimento de um ponto pertencente à seção transversal da viga é obtida através de sistemas de referência auxiliares. Cada um destes referenciais representa um movimento de rotação. O deslocamento devido à flexibilidade da viga é melhor representado em um referencial que seja solidário à viga girante. Neste referencial, a descrição da sua deformação se dá de maneira semelhante a uma viga que não gira. Este referencial também é chamado de *floating frame reference system* (Shabana, 1990) ou *shadow beam* (Simo e Vu-Quoc, 1986a). Contudo, os vetores de posição, velocidade e aceleração deste ponto devem considerar seu movimento absoluto. Cabe ressaltar que, uma vez que o corpo é flexível, existe uma velocidade relativa entre os pontos da viga.

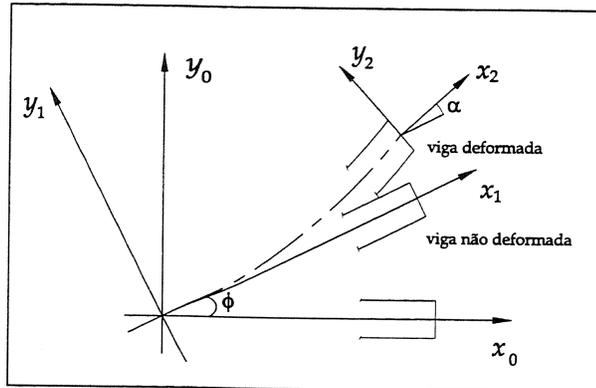
Os esforços internos, que equilibram as forças de inércia são obtidos em função da deformação, seguindo a lei de Hooke. As relações entre deformação e deslocamento, obtidas a partir da geometria da deformação, são o principal objetivo da análise neste problema. A viga sendo sujeita a grandes velocidades, apresenta deslocamentos que não podem ser considerados pequenos. Dessa forma, termos não-lineares do vetor de deformação, usualmente desprezados por serem de ordem elevada, não podem mais ser negligenciados. Procura-se, assim, estudar qual a participação destes termos não-lineares na resposta dinâmica da viga girante.

### 2.2.1 Sistemas de referência

O movimento de um ponto qualquer pertencente à viga girante pode ser representado de maneira mais fácil se forem utilizados sistemas de referência auxiliares. Neste caso, em que o movimento, tanto de rotação quanto de deformação da viga, é restrito a um plano, três referenciais são empregados, conforme apresentado na figura (2.1), sendo estes definidos como:

- Referencial  $I$  – este referencial representa o sistema de coordenadas inercial. Este sistema de referência é descrito pelas coordenadas  $(x_0, y_0, z_0)$  e pelos vetores unitários  $(\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0)$ . Sua origem é o ponto  $Q$ , extremidade da viga que está engastada.
- Referencial  $B_1$  – referencial móvel, realiza uma rotação  $\phi$  em torno do eixo  $z_0$  do referencial  $I$ . Este referencial é solidário à viga não-deformada, e é descrito pelas coordenadas  $(x_1, y_1, z_1)$ , ou simplificada  $(x, y, z)$ , e pelos vetores unitários  $(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1)$ . Sua origem também é o ponto  $Q$ .
- Referencial  $B_2$  – referencial móvel, auxiliar, corresponde à rotação da seção transversal da viga. A rotação entre os referenciais  $B_1$  e  $B_2$  é o ângulo  $\alpha$  em torno do eixo  $z_1$  do referencial  $B_1$ . Deve-se notar que o eixo  $y_2$  é definido de tal forma que é sempre tangente à seção transversal. O ângulo  $\alpha$  varia ao longo do comprimento da viga e, portanto, para cada ponto desta viga é definido um sistema de referência  $B_2$ . Este referencial fornece a orientação da seção transversal após a deformação da viga e está definido pelas coordenadas  $(x_2, y_2, z_2)$  e

pelos vetores unitários  $(\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_2)$ . Sua origem é o ponto  $O$ , ponto pertencente à linha neutra ao longo da viga.



**Figura 2.1:** Sistemas de referência para descrever o movimento de uma viga plana girante.

## 2.2.2 Matrizes de transformação

Os três sistemas de referência, anteriormente apresentados, são relacionados entre si por matrizes de transformação. As matrizes de transformação de coordenadas são matrizes ortogonais que representam as transformações lineares entre os sistemas de referência. Dessa forma, a matriz de transformação entre os sistemas de referência  $I$  e  $B_1$  é dada por  $\mathbf{T}_\phi$ , sendo que um vetor  $I$ s qualquer, escrito no referencial  $I$ , é escrito no referencial  $B_1$  de acordo com a equação

$$\mathbf{T}_\phi = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B_1 \mathbf{s} = \mathbf{T}_\phi \cdot B_1 \mathbf{s} \quad (2.1)$$

Analogamente, a matriz de transformação entre os sistemas de referência  $B_1$  e  $B_2$  é dada por  $\mathbf{T}_\alpha$  e um vetor  $B_1 \mathbf{s}$ , definido no sistema de referência  $B_1$ , é escrito no referencial  $B_2$ , de acordo com a equação

$$\mathbf{T}_\alpha = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B_2 \mathbf{s} = \mathbf{T}_\alpha \cdot B_1 \mathbf{s} \quad (2.2)$$

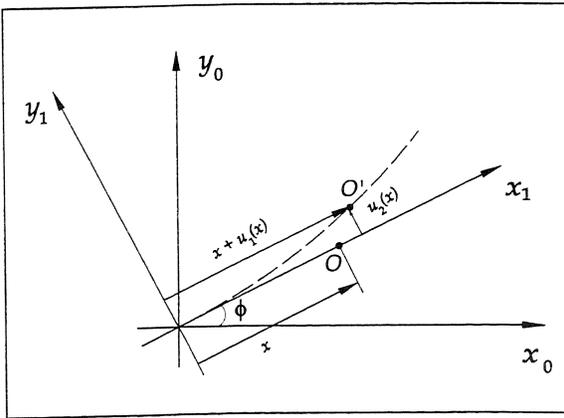
## 2.2.3 Vetores de posição

A posição de um ponto qualquer da viga pode ser descrito utilizando tanto o sistema de referência solidário à viga girante,  $B_1$ , quanto o sistema solidário à seção transversal deformada da viga,  $B_2$ . A origem de ambos sistemas é o ponto em que a viga está engastada, sendo que eixo  $x_1$ , ou simplesmente  $x$ , da base  $B_1$ , é coincidente com a linha neutra da viga. A linha neutra é a

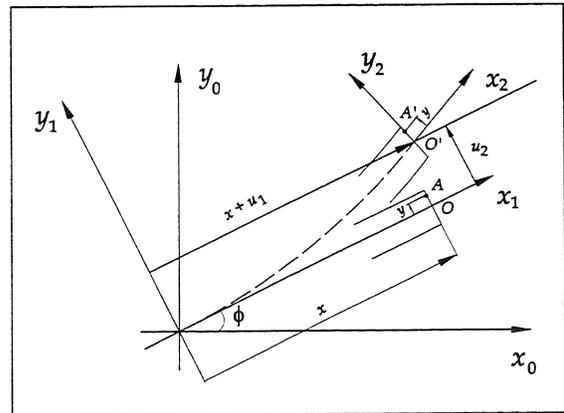
linha formada pela união dos diversos centros de flexão das seções transversais ao longo da direção longitudinal  $x_1$ . Dois pontos genéricos,  $O$  e  $A$ , são definidos. O ponto  $O$  é um ponto que pertence necessariamente à linha neutra da viga e o ponto  $A$  é um ponto geral da viga. Em ambos os casos a viga não está deformada. Os vetores posição de cada um destes pontos, utilizando o sistema de referência  $B_1$ , são dados por

$${}_{B_1}\mathbf{r}_O = \begin{Bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad {}_{B_1}\mathbf{r}_A = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

Os pontos  $O'$  e  $A'$ , ilustrados nas figuras (2.2) e (2.3) respectivamente, apresentam a posição dos pontos  $O$  e  $A$  após a deformação elástica da viga. O vetor de posição dos novos pontos é função da posição inicial destes pontos e das funções de deslocamento da viga. Estas funções de deslocamento da viga são definidas pelas quantidades  $u_1 = u_1(x, t)$ , na direção longitudinal da viga, e  $u_2 = u_2(x, t)$ , direção transversal. Estes deslocamentos são definidos em relação ao referencial  $B_1$ , conforme apresentado na figura (2.2). A figura (2.3) apresenta caráter ilustrativo do deslocamento de um ponto fora da linha neutra,  $A$ . Ressalta-se que a formulação das equações de movimento para este ponto  $A$  não será desenvolvida, mesmo porque neste caso o deslocamento viga não é unidimensional, mas bidimensional dependendo, portanto, das coordenadas  $x$  e  $y$ .



**Figura 2.2:** Deslocamento do ponto  $O$ , pertencente à linha neutra da viga.



**Figura 2.3:** Deslocamento do ponto genérico  $A$ , pertencente à viga.

O vetor de posição do ponto  $O'$  representa o deslocamento do ponto  $O$  após a deformação da viga, conforme apresentado na figura (2.2). Este vetor  $\mathbf{r}_{O'}$  pode ser escrito tanto utilizando o sistema de referência  $B_1$ , solidário à viga girante, ou utilizando o sistema  $B_2$ , que fornece a orientação da seção transversal após a deformação, de acordo com

$${}_{B_1}\mathbf{r}_{O'} = \begin{Bmatrix} x + u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned}
{}_{B_2}\mathbf{r}_{O'} &= \mathbf{T}_\alpha \cdot {}_{B_1}\mathbf{r}_{O'} \\
&= \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x + u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x + u_1) \cos \alpha + u_2 \sin \alpha \\ -(x + u_1) \sin \alpha + u_2 \cos \alpha \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

O vetor de posição do ponto  $A'$  representa o deslocamento do ponto  $A$  após a deformação da viga, conforme apresentado na figura (2.3). Uma vez que os deslocamentos longitudinais e transversais são definidos em relação a um ponto  $O$  da linha neutra, a posição do ponto  $A'$  é escrita em função da posição do ponto  $O'$ . A relação entre os deslocamentos dos dois pontos é obtida da hipótese de que as seções planas da viga permanecem planas após a deformação, ou ainda, as seções planas sofrem apenas rotação. O vetor de posição do ponto  $A'$  é a soma do vetor de posição  ${}_{B_1}\mathbf{r}_{O'}$ , que tenha a mesma coordenada  $x$  do ponto  $A$ , e o vetor com a coordenada  $y$  do mesmo ponto porém considerada no referencial  $B_2$ , que girou juntamente com a seção transversal, de acordo com a figura (2.3). A representação deste vetor nos referenciais  $B_1$  e  $B_2$  é dada respectivamente por

$${}_{B_1}\mathbf{r}_{A'} = {}_{B_1}\mathbf{r}_{O'} + \mathbf{T}_\alpha^T \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + u_1 - y \sin \alpha \\ u_2 + y \cos \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

$${}_{B_2}\mathbf{r}_{A'} = \mathbf{T}_\alpha \cdot {}_{B_1}\mathbf{r}_{O'} + \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x + u_1) \cos \alpha + u_2 \sin \alpha \\ -(x + u_1) \sin \alpha + u_2 \cos \alpha + y \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

Com a determinação destes vetores de posição, os vetores de velocidade e aceleração podem ser avaliados de acordo com as regras para derivação de vetores em diferentes sistemas de coordenadas.

## 2.2.4 Vetores de velocidade

Os vetores de velocidade são determinados a partir da derivada absoluta dos vetores de posição. Estas derivadas são calculadas em relação ao referencial inercial  $I$  de modo a representar a velocidade absoluta dos pontos da viga. Este é o procedimento empregado para obter a derivada de vetores escritos em diferentes sistemas de referência móveis, seja para calcular os vetores de velocidade ou aceleração absoluta de um corpo rígido ou flexível. Dessa forma, a derivada absoluta de um vetor  ${}_{B_1}\mathbf{s}$ , em relação ao referencial inercial  $I$ , é dada pela relação :

$${}_{B_1}\mathbf{v} = \frac{d}{dt} ({}_{B_1}\mathbf{s}) + {}_{B_1}\boldsymbol{\omega} \times {}_{B_1}\mathbf{s} + {}_{B_1}\mathbf{v}_C \tag{2.8}$$

onde  ${}_{B_1}\mathbf{v}_C$  é a velocidade da origem do sistema de referência  $B_1$ , que neste caso é nula. Nesta equação, o vetor  ${}_{B_1}\boldsymbol{\omega}$  representa a velocidade angular absoluta da base  $B_1$  em relação à base inercial

I. No caso da viga girante, este vetor é representado por

$${}_{B_1}\boldsymbol{\omega} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

A velocidade de um ponto  $O'$  da linha neutra da viga é calculada no referencial móvel  $B_1$  de acordo com a equação:

$$\begin{aligned} {}_{B_1}\mathbf{v}_{O'} &= \frac{d}{dt}({}_{B_1}\mathbf{r}_{O'}) + {}_{B_1}\boldsymbol{\omega} \times {}_{B_1}\mathbf{r}_{O'} \\ &= \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\phi} & 0 \\ \dot{\phi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x + u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 - \dot{\phi}u_2 \\ \dot{u}_2 + \dot{\phi}(x + u_1) \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.10)$$

A velocidade de um ponto  $A'$  da viga deformada, também representada no referencial móvel  $B_1$ , é escrita segundo a equação

$$\begin{aligned} {}_{B_1}\mathbf{v}_{A'} &= \frac{d}{dt}({}_{B_1}\mathbf{r}_{A'}) + {}_{B_1}\boldsymbol{\omega} \times {}_{B_1}\mathbf{r}_{A'} \\ &= \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 - y\dot{\alpha} \cos \alpha \\ \dot{u}_2 - y\dot{\alpha} \sin \alpha \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\phi} & 0 \\ \dot{\phi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x + u_1 - y \sin \alpha \\ u_2 + y \cos \alpha \\ 0 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 - \dot{\phi}u_2 - y \cos \alpha (\dot{\phi} + \dot{\alpha}) \\ \dot{u}_2 + \dot{\phi}(x + u_1) - y \sin \alpha (\dot{\phi} + \dot{\alpha}) \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.11)$$

### 2.2.5 Vetores de aceleração

Os vetores de aceleração da viga são obtidos de maneira análoga ao apresentado anteriormente. Contudo, neste caso, as derivadas absolutas dos vetores de velocidade são calculados. Dessa forma, o vetor de velocidade absoluta, escrito utilizando o referencial móvel  $B_1$ , é derivado em relação ao referencial inercial  $I$  e fornece a aceleração absoluta de um ponto da viga, de acordo com a equação

$${}_{B_1}\mathbf{a} = \frac{d}{dt}({}_{B_1}\mathbf{v}) + {}_{B_1}\boldsymbol{\omega} \times {}_{B_1}\mathbf{v} \quad (2.12)$$

O vetor de da velocidade do ponto  $O'$ , pertencente à linha neutra, é derivado, sendo que a

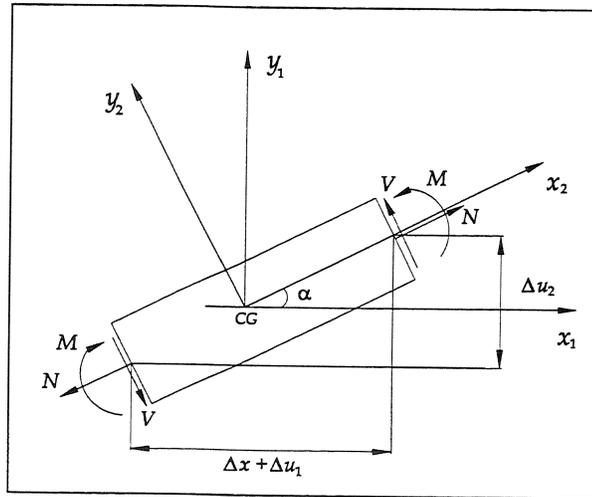
expressão para a aceleração absoluta deste ponto, escrita no referencial  $B_1$ , é dada por

$$\begin{aligned}
 {}_{B_1}\mathbf{a}_{O'} &= \frac{d}{dt} ({}_{B_1}\mathbf{v}_{O'}) + {}_{B_1}\boldsymbol{\omega} \times {}_{B_1}\mathbf{v}_{O'} = \\
 &= \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 - \ddot{\phi}u_2 - \dot{\phi}\dot{u}_2 \\ \ddot{u}_2 + \ddot{\phi}(x + u_1) + \dot{\phi}\dot{u}_1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\phi} & 0 \\ \dot{\phi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 - \dot{\phi}u_2 \\ \dot{u}_2 + \dot{\phi}(x + u_1) \\ 0 \end{Bmatrix} \\
 &= \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 - \ddot{\phi}u_2 - 2\dot{\phi}\dot{u}_2 - \dot{\phi}^2(x + u_1) \\ \ddot{u}_2 + \ddot{\phi}(x + u_1) + 2\dot{\phi}\dot{u}_1 - \dot{\phi}^2u_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

### 2.2.6 Esforços atuantes na viga

Três tipos de esforços atuam na seção transversal de um elemento diferencial de viga. Estes esforços são: a força normal; a força cortante; e o momento fletor, de acordo com figura (2.4). Cada um destes vetores está representado no referencial  $B_2$ , que é solidário à seção transversal da viga, mesmo quando esta encontra-se deformada. A escolha deste referencial é direta, pois as direções das forças normal ou tangencial refere-se à orientação, normal ou tangencial, à seção transversal, que é dada pelo sistema  $B_2$ . Estes esforços são representados pelos vetores

$${}_{B_2}\mathbf{N} = \begin{Bmatrix} N \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad {}_{B_2}\mathbf{V} = \begin{Bmatrix} 0 \\ V \\ 0 \end{Bmatrix} \quad {}_{B_2}\mathbf{M} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M \end{Bmatrix} \tag{2.14}$$



**Figura 2.4:** Diagrama de esforços atuantes em um elemento diferencial de viga de tamanho  $\Delta x$ .

Estes vetores de esforços podem ser representados também no referencial  $B_1$ , que é solidário

à viga não deformada, segundo as seguintes equações

$${}_{B_1}\mathbf{N} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N \cos \alpha \\ N \sin \alpha \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.15a)$$

$${}_{B_1}\mathbf{V} = \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -V \sin \alpha \\ V \cos \alpha \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.15b)$$

$${}_{B_1}\mathbf{M} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M \end{Bmatrix} \quad (2.15c)$$

### 2.2.7 Equações diferenciais de equilíbrio

A teoria da Resistência dos Materiais estabelece relações de equilíbrio entre forças externas e reações internas, a partir da distribuição de forças na estrutura considerada. Assim, para uma barra, por exemplo, é possível estabelecer uma relação entre as forças externas que atuam na estrutura e a distribuição de forças internas normais ao longo do seu comprimento. Da mesma forma, para uma viga unidimensional é possível determinar equações diferenciais que relacionam a força externa aplicada à viga e a distribuição, ao longo do comprimento da mesma, dos esforços cortantes e do momento fletor.

As equações diferenciais de equilíbrio da viga plana são determinadas de forma muito semelhante as equações de barra e viga da teoria da Resistência dos Materiais, obtendo a equações de equilíbrio do elemento diferencial nas direções longitudinal e transversal e de momento fletor. Entretanto, algumas diferenças são observadas. Na equação do momento fletor é necessário considerar o somatório dos momentos a partir de um elemento diferencial deformado. Por outro lado, na equação de equilíbrio das direções longitudinal e transversais contribuem tanto componentes da força normal quanto componentes da força cortante ou transversal à seção transversal. Estas duas modificações correspondem a desprezar a hipótese de pequenos deslocamentos. As equações diferenciais de equilíbrio são obtidas com auxílio do referencial  $B_1$ , que está solidário à viga não deformada, embora os esforços tenham sido definidos no sistema  $B_2$ .

As equações de equilíbrio da viga plana são desenvolvidas a partir de elemento diferencial da mesma. Inicialmente, o equilíbrio na direção longitudinal da viga, ou seja, na direção  $x_1$ , são analisados, conforme apresentado na figura (2.5). Nesta figura, as variáveis  $N_1$  e  $V_1$  foram definidas nas equações (2.15a) e (2.15b) e são componentes das forças normal e cortante na direção  $x_1$ . A variação das forças ao longo do elemento de comprimento  $\Delta x$  é obtida utilizando uma aproximação do polinômio de Taylor de primeira ordem. Desta forma, a equação de equilíbrio na direção longitudinal é definida por

$$V_1 + \frac{\partial V_1}{\partial x} \Delta x + N_1 + \frac{\partial N_1}{\partial x} \Delta x - V_1 - N_1 = A_\rho \cdot a_x \Delta x \quad (2.16)$$

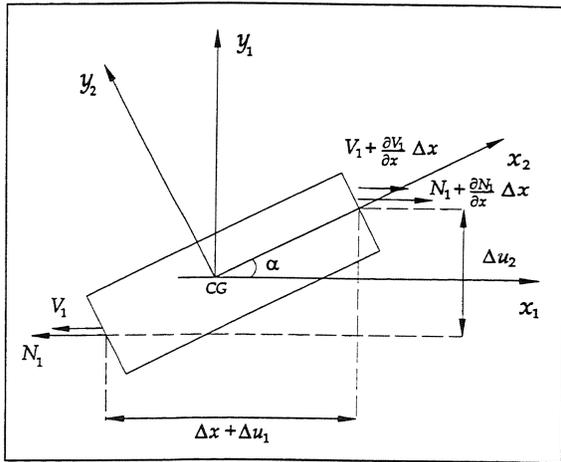
sendo que  $a_x$  é a componente da aceleração do centro de gravidade na direção  $x_1$  do elemento de viga considerado, equação (2.13), e  $A_\rho$  é a densidade volumétrica do material multiplicada pela área da seção transversal. A equação diferencial na direção longitudinal é, portanto, dada por

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial N_1}{\partial x} = A_\rho \cdot a_x \quad (2.17)$$

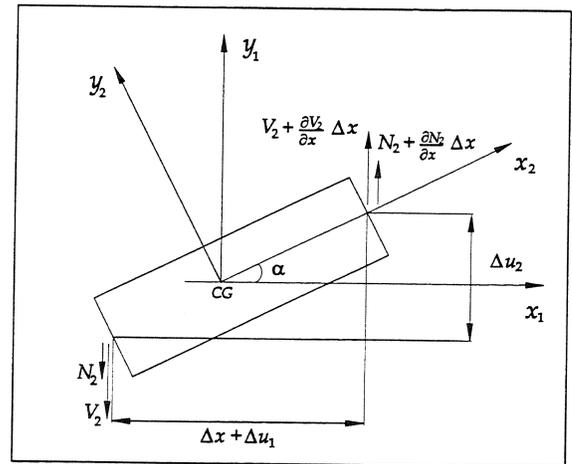
Esta equação diferencial tem forma bastante próxima da equação das forças normais para um barra unidimensional. Entretanto, naquele caso não é considerada nenhuma componente da força cortante e  $N_1 = N$ , pois supõe-se que não exista flexão da seção transversal, ou ainda, que esta é desprezível.

A equação de equilíbrio na direção transversal é obtida considerando os esforços na direção  $y_1$ , conforme apresentado na figura (2.6). Nesta figura, as variáveis  $N_2$  e  $V_2$  foram definidas nas equações (2.15a) e (2.15b). Novamente, a variação das forças ao longo do elemento de comprimento  $\Delta x$  é obtida utilizando uma aproximação do polinômio de Taylor de primeira ordem, sendo que esta equação é representada por:

$$V_2 + \frac{\partial V_2}{\partial x} \Delta x + N_2 + \frac{\partial N_2}{\partial x} \Delta x - V_1 - N_1 = A_\rho \cdot a_y \Delta x \quad (2.18)$$



**Figura 2.5:** Diagrama de esforços longitudinais atuantes em um elemento diferencial de viga.



**Figura 2.6:** Diagrama de esforços transversais atuantes em um elemento diferencial de viga.

Neste caso, o termo  $a_y$  é a componente da aceleração do centro de gravidade do elemento na direção  $y_1$ , dada pela equação (2.13). A equação diferencial resultante é dada por

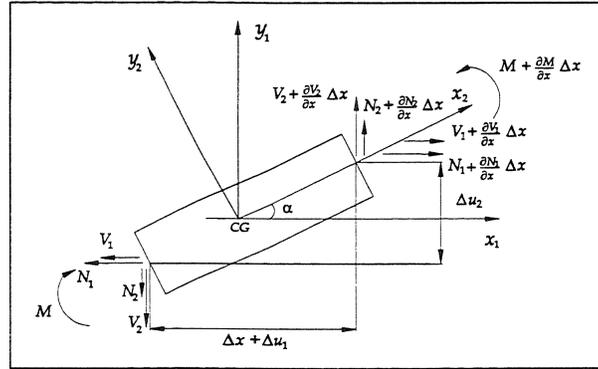
$$\frac{\partial V_2}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial x} = A_\rho \cdot a_y \quad (2.19)$$

A equação de equilíbrio dos momentos é obtida com o cálculo dos momentos em relação ao centro de gravidade do elemento diferencial deformado, ou seja, utilizando as suas novas dimensões após a deformação. A utilização da configuração da viga não deformada leva à exclusão de termos

que contribuem efetivamente para o momento fletor. Por exemplo, a contribuição das forças axiais com a equação global do momento fletor é desprezada, caso esta configuração deformada não seja empregada, sendo que apenas as forças transversais ao eixo da viga acabam contribuindo para a expressão do momento fletor. Na verdade, estes termos passam a ter importância apenas quando são consideradas grandes deslocamentos da viga. Como será visto adiante, é justamente a parcela do momento fletor devido à força normal que resulta na correção da equação de movimento da viga, de tal forma que as frequências naturais da viga aumentem com o aumento da velocidade de rotação  $\dot{\phi}$ . O diagrama dos momentos que atuam em um elemento de viga é apresentado na figura (2.7), sendo que a equação de equilíbrio de momentos resultante é dada por

$$\begin{aligned}
I_\rho \dot{\omega}_z \Delta x = & -M - N_1 \frac{\Delta u_2}{2} - V_1 \frac{\Delta u_2}{2} + V_2 \left( \frac{\Delta x + \Delta u_1}{2} \right) + N_2 \left( \frac{\Delta x + \Delta u_1}{2} \right) \\
& + \left( M + \frac{\partial M}{\partial x} \Delta x \right) - \left( N_1 + \frac{\partial N_1}{\partial x} \Delta x \right) \frac{\Delta u_2}{2} - \left( V_1 + \frac{\partial V_1}{\partial x} \Delta x \right) \frac{\Delta u_2}{2} \\
& + \left( V_2 + \frac{\partial V_2}{\partial x} \Delta x \right) \left( \frac{\Delta x + \Delta u_1}{2} \right) + \left( N_2 + \frac{\partial N_2}{\partial x} \Delta x \right) \left( \frac{\Delta x + \Delta u_1}{2} \right)
\end{aligned} \tag{2.20}$$

em que  $\dot{\omega}_z$  é a componente aceleração angular absoluta da seção transversal da viga na direção  $z_1$ .



**Figura 2.7:** Diagrama de momentos atuantes em um elemento diferencial de viga

A velocidade angular absoluta do elemento de viga considerado é dada pela soma da velocidade angular  $\dot{\phi}$  do sistema de referência  $B_1$  e da velocidade angular do elemento em relação a este referencial. Os vetores de velocidade e aceleração da base  $B_1$  são dados, respectivamente, por

$${}_{B_1}\boldsymbol{\omega} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} + \dot{\alpha} \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad {}_{B_1}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\phi} + \ddot{\alpha} \end{Bmatrix} \tag{2.21}$$

A inércia de rotação da viga está sendo incluída no equacionamento, uma vez que a velocidade angular relativa da seção transversal ao referencial  $B_1$ , que é solidário à viga não-deformada, é considerada. Finalmente, a equação diferencial de equilíbrio para os momentos é dada por

$$-N_1 u_{2,x} - V_1 u_{2,x} + V_2 (1 + u_{1,x}) + N_2 (1 + u_{1,x}) + \frac{\partial M}{\partial x} = I_\rho (\ddot{\alpha} + \ddot{\phi}) \tag{2.22}$$

em que  $u_{1,x}$  e  $u_{2,x}$  são, respectivamente, as derivadas dos deslocamentos longitudinais e transversais.

As equações de equilíbrio apresentadas em (2.17), (2.19) e (2.20) assumem sua forma final substituindo as expressões das forças  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $V_1$  e  $V_2$ , equações (2.15a) e (2.15b), as expressões da aceleração do ponto  $O'$ , equação (2.13), e da aceleração angular da seção transversal, equação (2.21). O sistema de equações diferenciais de equilíbrio da viga plana girante é, então, escrito como

$$A_\rho(\ddot{u}_1 - \ddot{\phi}u_2 - 2\dot{\phi}\dot{u}_2 - \dot{\phi}^2(x + u_1)) = N_{,x} \cos \alpha - N\alpha_{,x} \sin \alpha - V_{,x} \sin \alpha - V\alpha_{,x} \cos \alpha \quad (2.23a)$$

$$A_\rho(\ddot{u}_2 + \ddot{\phi}(x + u_1) + 2\dot{\phi}\dot{u}_1 - \dot{\phi}^2u_2) = N_{,x} \sin \alpha + N\alpha_{,x} \cos \alpha + V_{,x} \cos \alpha - V\alpha_{,x} \sin \alpha \quad (2.23b)$$

$$I_\rho(\ddot{\alpha} + \ddot{\phi}) = -N(\cos \alpha \cdot u_{2,x} - \sin \alpha(1 + u_{1,x})) \\ + V(\sin \alpha \cdot u_{2,x} + \cos \alpha(1 + u_{1,x})) + \frac{\partial M}{\partial x} \quad (2.23c)$$

## 2.2.8 Relações entre deslocamento e deformação

A viga plana é um elemento estrutural unidimensional, o que equivale a dizer que as grandezas de deslocamento são funções apenas da variável na direção longitudinal da viga, a variável  $x$ . No caso de uma viga plana, três grandezas de deslocamento ou rotação, estão relacionadas com a deformação do corpo:  $u_1$ , deslocamento na direção longitudinal da viga,  $u_2$ , deslocamento na direção transversal, e  $\alpha$ , ângulo de rotação da seção transversal. Deve-se notar que estas três quantidades estão definidas no referencial  $B_1$ , conforme apresentado na figura (2.2). Por outro lado, o vetor de deformações pode ser descrito tanto no sistema  $B_1$ , quanto no sistema  $B_2$ .

Inicialmente, os deslocamentos dentro de um elemento diferencial de viga são analisados. O comprimento deste elemento é dado por  $\Delta x$ , conforme apresentado na figura (2.8). Na direção longitudinal  $x_1$ , o comprimento do elemento diferencial após a deformação é denominado  $\Delta_1$ , enquanto na direção transversal  $y_1$  este comprimento é denominado  $\Delta_2$ , sendo estes dados respectivamente por

$$\Delta_1 = (x + \Delta x + u_1(x + \Delta x)) - (x + u_1(x)) \Rightarrow \Delta_1 = \Delta x + \Delta u_1 \quad (2.24)$$

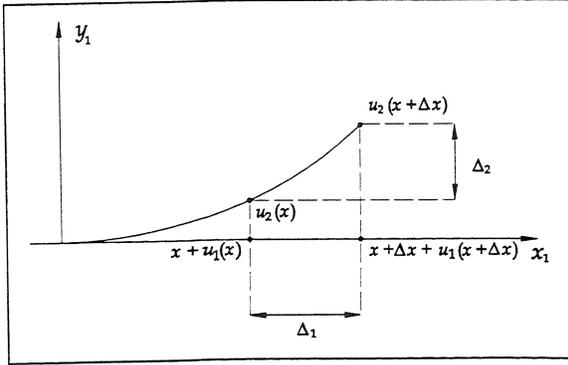
$$\Delta_2 = u_2(x + \Delta x) - u_2(x) = \Delta u_2 \quad (2.25)$$

A expansão de Taylor de primeira ordem é utilizada para avaliar a variação do deslocamento ao longo do elemento diferencial. Dessa forma, o incremento de deslocamento na direção longitudinal, em um elemento de comprimento  $\Delta x$  é denominado  $\Delta u_1$ , enquanto que o incremento na direção transversal é denominado  $\Delta u_2$ . Estas duas quantidades são dadas respectivamente por

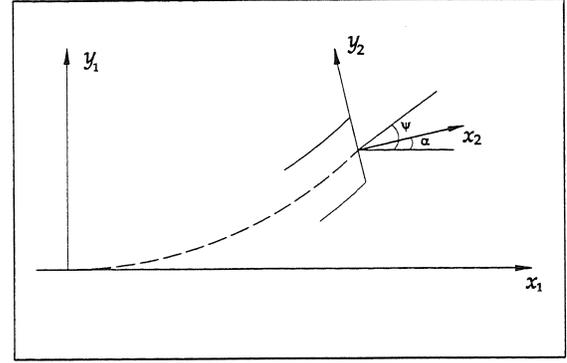
$$\Delta u_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x} \Delta x \Rightarrow \Delta_1 = \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x}\right) \Delta x \quad (2.26)$$

$$\Delta u_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x} \Delta x \Rightarrow \Delta_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x} \Delta x \quad (2.27)$$

A figura (2.9) apresenta o ângulo de inclinação da viga deformada,  $\psi$ , bem como o ângulo de rotação da seção transversal,  $\alpha$ . A tangente do ângulo  $\psi$  e o vetor correspondente desta inclinação,



**Figura 2.8:** Incremento de deslocamento de um elemento diferencial de viga.



**Figura 2.9:** Comparação entre o ângulo de inclinação da viga deformada,  $\psi$  e ângulo de rotação da seção transversal da viga,  $\alpha$ .

representado na base  $B_1$ , são dados respectivamente por

$$\tan \psi = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \frac{u_{2,x}}{1 + u_{1,x}} \quad (2.28)$$

$$B_1 \Delta = \begin{Bmatrix} 1 + u_{1,x} \\ u_{2,x} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.29)$$

A inclinação da seção transversal do incremento diferencial  $\Delta x$  devido à rotação de um ângulo  $\alpha$  é representada vetorialmente no referencial  $B_1$  por

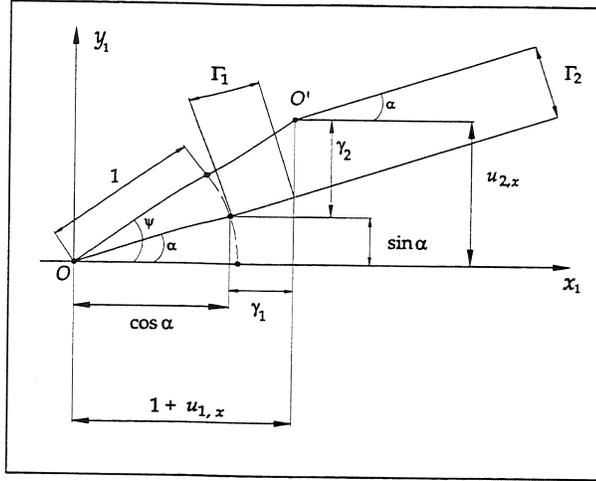
$$B_1 \alpha = \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \text{sen } \alpha \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.30)$$

A deformação da viga é definida pela diferença entre a inclinação da viga deformada, dada pelo ângulo  $\psi$ , e a rotação da seção transversal, dada pelo ângulo  $\alpha$ . O ângulo  $\alpha$  representa a rotação de corpo total da seção transversal, incluindo o movimento de corpo rígido. Estes dois vetores estão representados no sistema  $B_1$ , sendo que o vetor de deformação neste mesmo sistema móvel é representado por

$$B_1 \gamma = B_1 \Delta - B_1 \alpha$$

$$B_1 \gamma = \begin{Bmatrix} 1 + u_{1,x} - \cos \alpha \\ u_{2,x} - \text{sen } \alpha \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

A interpretação física deste vetor de deformação é apresentado na figura (2.10). Nesta figura as quantidades  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  representam os componentes do vetor  $B_1 \gamma$  nas direções  $x_1$  e  $y_1$ , respectivamente. Este vetor de deformação pode ser representado também no referencial  $B_2$ . Neste caso, o vetor de



**Figura 2.10:** Interpretação física do vetor de deformação de um elemento diferencial de viga (Simo e Vu-Quoc, 1986a).

inclinação da rotação da seção transversal é o próprio vetor normal à seção transversal da viga (Simo e Vu-Quoc, 1986a; Simo e Vu-Quoc, 1987):

$${}_{B_2}\boldsymbol{\alpha} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

O vetor de deformações  ${}_{B_2}\boldsymbol{\Gamma}$  é a diferença entre a inclinação da viga deformada, vetor  ${}_{B_1}\boldsymbol{\Delta}$  representado com auxílio do sistema móvel  $B_2$ , e o vetor unitário na direção normal à seção transversal da viga :

$$\begin{aligned} {}_{B_2}\boldsymbol{\Gamma} &= \mathbf{T}_\alpha {}_{B_1}\boldsymbol{\Delta} - {}_{B_2}\boldsymbol{\alpha} \\ {}_{B_2}\boldsymbol{\Gamma} &= \begin{Bmatrix} (1 + u_{1,x}) \cos \alpha + u_{2,x} \operatorname{sen} \alpha - 1 \\ -(1 + u_{1,x}) \operatorname{sen} \alpha + u_{2,x} \cos \alpha \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.33)$$

A interpretação física do vetor de deformação na base  $B_2$  também está apresentada na figura (2.10). A representação deste vetor de deformação na base  $B_2$  é mais adequada, pois coincide com as direções tangencial, direção  $y_2$ , e normal, direção  $x_2$ , à seção transversal, quantidades  $\Gamma_2$  e  $\Gamma_1$  respectivamente.

A expressão para o vetor de deformações, entretanto, ainda não está completa, visto que é necessário considerar ainda uma componente na direção  $z_2$ , que é a taxa de rotação da seção transversal por comprimento não deformado da viga, ou seja, a derivada do ângulo  $\alpha$  em relação a  $x$ . A variação do ângulo  $\alpha$  em torno de uma posição qualquer é dada por

$$\Delta\alpha = \frac{\partial\alpha}{\partial x} \Delta x = \alpha_{,x} \Delta x \quad (2.34)$$

Esta grandeza está escrita no referencial  $B_1$ , porém tem a mesma forma quando escrito no referencial  $B_2$ . Dessa forma, as três componentes que formam o vetor de deformações, que serão denominadas,  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_3$  e que representam respectivamente, as deformações nas direções normal e tangencial à seção transversal e normal ao plano de deformação da viga são dadas por

$$\Gamma_1 = (1 + u_{1,x}) \cos \alpha + u_{2,x} \sin \alpha - 1 \quad (2.35a)$$

$$\Gamma_2 = -(1 + u_{1,x}) \sin \alpha + u_{2,x} \cos \alpha \quad (2.35b)$$

$$\Gamma_3 = \alpha_{,x} \quad (2.35c)$$

A definição da forma final do vetor de deformação é introduzida nas equações diferenciais de equilíbrio, equações (2.23a), (2.23b) e (2.23c). Dessa forma, estas equações são reescritas substituindo os termos para as derivadas de  $u_{1,x}$  e  $u_{2,x}$  em função dos termos  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  e  $\Gamma_3$ , de acordo com

$$\left\{ \begin{array}{c} A_\rho(\ddot{u}_1 - \ddot{\phi}u_2 - 2\dot{\phi}\dot{u}_2 - \dot{\phi}^2(x + u_1)) \\ A_\rho(\ddot{u}_2 + \ddot{\phi}(x + u_1) + 2\dot{\phi}\dot{u}_1 - \dot{\phi}^2u_2) \\ I_\rho(\ddot{\alpha} + \ddot{\phi}) \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} N_{,x} - V\alpha_{,x} \\ V_{,x} + N\alpha_{,x} \\ M_{,x} - N\Gamma_2 + V(1 + \Gamma_1) \end{array} \right\} \quad (2.36)$$

ou ainda,

$$\left\{ \begin{array}{c} A_\rho(\ddot{u}_1 - \ddot{\phi}u_2 - 2\dot{\phi}\dot{u}_2 - \dot{\phi}^2(x + u_1)) \\ A_\rho(\ddot{u}_2 + \ddot{\phi}(x + u_1) + 2\dot{\phi}\dot{u}_1 - \dot{\phi}^2u_2) \\ I_\rho(\ddot{\alpha} + \ddot{\phi}) \end{array} \right\} = \mathbf{T}_\alpha^T \left\{ \begin{array}{c} N_{,x} - V\alpha_{,x} \\ V_{,x} + N\alpha_{,x} \\ M_{,x} - N\Gamma_2 + V(1 + \Gamma_1) \end{array} \right\} \quad (2.37)$$

sendo que este último vetor está escrito com auxílio do sistema de referência móvel  $B_2$ , portanto. O sistema de equações diferenciais está escrito utilizando o referencial  $B_1$ , que é solidário à viga não-deformada.

### (A) Vetor de deformações utilizando uma aproximação linear

As expressões da deformação da viga desenvolvidas anteriormente consideram todos os componentes não-lineares que relacionam seu deslocamento e sua deformação. Contudo, a partir da equação (2.33) é possível obter a expressão comumente empregada do vetor de deformações, determinada a partir da teoria linear da viga. Neste caso, as seguintes aproximações são introduzidas para as funções trigonométricas

$$\cos \alpha \simeq 1; \quad \sin \alpha \simeq \alpha \quad (2.38)$$

A segunda simplificação introduzida ao vetor de deformação é desprezar os termos de segunda ordem, que estão multiplicados entre si. Assim, os termos  $u_{2,x} \cdot \alpha$  e  $u_{1,x} \cdot \alpha$  são eliminados. O vetor

de deformação resultante neste caso pode ser representado tanto no referencial  $B_1$  e  $B_2$ , pois os vetores, escritos nestes dois sistemas, são coincidentes.

$$\Gamma_L = \begin{pmatrix} u_{1,x} \\ u_{2,x} - \alpha \\ \alpha_{,x} \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

Em uma viga delgada a deformação por cisalhamento é desprezível, sendo que a segunda componente do vetor  $\Gamma_L$  é nula. Portanto  $u_{2,x} = \alpha$ , ou ainda,  $u_{2,xx} = \alpha_{,x}$  que é a aproximação usualmente empregada para determinar a equação da linha elástica da viga de Euler-Bernoulli.

### (B) Vetor de deformações utilizando uma aproximação não-linear de segunda ordem

O vetor de deformações não-linear de segunda ordem é obtido a partir do vetor de deformações, mantendo os termos não-lineares de segunda ordem e desprezando os termos de ordem mais alta. Neste caso, as aproximações utilizadas para as funções trigonométricas são dadas por

$$\cos \alpha \simeq 1 - \alpha^2/2; \quad \sin \alpha \simeq \alpha \quad (2.40)$$

Os termos de terceira ordem como  $u_{1,x} \cdot \alpha^2/2$  e  $u_{2,x} \cdot \alpha^2/2$  são desprezados e o vetor de deformação com termos não-lineares de segunda ordem é representado por

$${}_{B_2}\Gamma_{L_2} = \begin{pmatrix} u_{1,x} + u_{2,x}\alpha - \alpha^2/2 \\ -\alpha - u_{1,x}\alpha + u_{2,x} \\ \alpha_{,x} \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

### 2.2.9 Relações entre tensão e deformação

Três tipos de esforços atuam em um elemento diferencial da viga nas direções  $x_2$ ,  $y_2$  e  $z_2$ , respectivamente, as forças  $N$ , ou força normal,  $V$ , ou força cortante, e  $M$ , momento fletor, conforme apresentado na figura (2.4). Cada uma destas forças está relacionada a um dos componentes de deformação pelas seguintes expressões, que são obtidas da teoria da Resistência dos Materiais, e são dependentes das propriedades geométricas e do material da viga.

$$N = EA\Gamma_1 \quad (2.42a)$$

$$V = GA_s\Gamma_2 \quad (2.42b)$$

$$M = EI\Gamma_3 \quad (2.42c)$$

As três expressões de força e as deformações são escritas no referencial  $B_2$ , sistema que define as direções normal e tangencial à seção transversal da viga. As propriedades geométricas da viga são  $A$ , área da seção transversal,  $A_s$ , área da seção transversal corrigida pelo fator  $\beta$ , e  $I$ , momento de inércia de área da seção transversal. As propriedades do material da viga são  $E$ , módulo de elasticidade de Young, e  $G$ , módulo de rigidez torsional. Os termos  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_3$  representam as componentes do vetor de deformação, de acordo com a equação (2.35).

## 2.2.10 Ordem da teoria da viga e equação diferencial de equilíbrio

As equações diferenciais de equilíbrio determinadas anteriormente, equação (2.36), incluem todos os efeitos não-lineares dinâmicos e de deformação da viga. No entanto, a solução destas equações envolve a utilização de métodos numéricos de solução de problemas com equações diferenciais-parciais, o qual leva ao desenvolvimento de um modelo numérico discretizado para as equações. A utilização das equações diferenciais de movimento com todos os termos não-lineares, dessa forma, não é a mais adequada. Procura-se, então, linearizar estas equações, de modo a obter um novo sistema de equações, cuja solução ou implementação numérica seja possível.

O processo de linearização das equações deve ser conduzido com cuidado para que não ocorra mascaramento de efeitos dinâmicos que influenciam o comportamento da viga girante. Dessa forma, é necessário verificar quais são os termos que estão sendo desprezados e se estes tem algum tipo de influência significativa na resposta da estrutura. Deve-se lembrar que a hipótese de pequenos deslocamentos não pode ser garantida ao analisar as vibrações de uma viga girante.

A primeira linearização aplicada às equações diferenciais de movimento é a de primeira ordem. Neste caso, as funções trigonométricas são aproximadas de acordo com a equação (2.38) e os termos de segunda ordem multiplicados entre si, e mais altos, são desprezados. Estas aproximações introduzidas são as mesmas utilizadas para determinar o vetor de deformações representada em (2.39). Assim, o sistema de equações é reduzido a

$$\left\{ \begin{array}{l} A_\rho(\ddot{u}_1 - \ddot{\phi}u_2 - 2\dot{\phi}\dot{u}_2 - \dot{\phi}^2(x + u_1)) \\ A_\rho(\ddot{u}_2 + \ddot{\phi}(x + u_1) + 2\dot{\phi}\dot{u}_1 - \dot{\phi}^2u_2) \\ I_\rho(\ddot{\alpha} + \ddot{\phi}) \end{array} \right\} \simeq \left\{ \begin{array}{l} N_{,x} \\ V_{,x} \\ M_{,x} + V \end{array} \right\} \quad (2.43)$$

Este sistema de equações diferenciais de equilíbrio é obtida apenas com termos lineares de deformação. A diferença para a equação de uma viga, comumente encontrada em textos de Resistência dos Materiais, está nos termos relacionados à aceleração absoluta da viga girante (aceleração centrífuga, centrífuga e de Coriolis). Com o objetivo de diminuir o número de equações, será assumido que a viga é delgada e a deformação por cisalhamento é desprezível. Dessa forma,  $\alpha = u_{2,x}$  e, portanto, supõe-se que não há deformação por cisalhamento, o que permite reduzir o sistema de três para duas equações diferenciais de equilíbrio. Assim, derivando a terceira equação deste sistema em relação a  $x$  é possível obter :

$$[I_\rho(\ddot{\alpha} + \ddot{\phi})]_{,x} - M_{,xx} = V_{,x} \quad (2.44)$$

A expressão para  $V_{,x}$  da segunda equação de (2.43) é substituída na equação anterior de tal forma que o sistema de equações resultante de uma viga delgada girante é :

$$\begin{aligned} A_\rho(\ddot{u}_1 - \ddot{\phi}u_2 - 2\dot{\phi}\dot{u}_2 - \dot{\phi}^2(x + u_1)) &= N_{,x} \\ [I_\rho(\ddot{\alpha} + \ddot{\phi})]_{,x} + A_\rho(\ddot{u}_2 + \ddot{\phi}(x + u_1) + 2\dot{\phi}\dot{u}_1 - \dot{\phi}^2u_2) &= M_{,xx} \end{aligned} \quad (2.45)$$

A primeira equação é a equação de movimento na direção longitudinal enquanto que a segunda equação diferencial é a equação de flexão da viga. Para simplificar o número de termos, mas sem perder a generalidade, é, inicialmente, considerado que a velocidade angular  $\dot{\phi}$  é constante e que  $I_\rho$  é constante ao longo de  $x$ . Este sistema de equações pode ser rearranjado em função de termos inerciais e termos elásticos, que contribuem para a rigidez da viga. As relações entre a força normal  $N$  e o momento fletor  $M$  são dados pela equação (2.42), sendo que os termos de deformação são os mesmos apresentados na equação (2.39), equação do vetor linear de deformações. O sistema de equações diferenciais lineares de uma viga delgada girante é dado por

$$\begin{Bmatrix} A_\rho(\ddot{u}_1 - 2\dot{\phi}\dot{u}_2) \\ I_\rho\ddot{u}_{2,xx} - A_\rho(\ddot{u}_2 + 2\dot{\phi}\dot{u}_1) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} EAu_{1,xx} + A_\rho\dot{\phi}^2(x + u_1) \\ EIu_{2,xxxx} - A_\rho\dot{\phi}^2u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.46)$$

Na segunda equação do sistema, que representa a equação de flexão da viga, nota-se que o termo  $A_\rho\dot{\phi}^2u_2$  introduz uma diminuição na rigidez da viga, proporcional ao quadrado da velocidade de rotação. Deve-se notar que apenas a componente transversal da aceleração centrífuga, ou seja, do termo pertencente ao eixo  $y_1$ , contribui para a equação dos momentos ou equação da flexão da viga. Por outro lado, a componente da aceleração centrífuga na direção  $x_1$  não tem nenhuma participação na equação da flexão, ou ainda, a contribuição das forças axiais para a equação do momento fletor, neste tipo de formulação linear, é desprezado. Se esta equação de flexão for discretizada em matrizes de massa e rigidez é possível encontrar um valor para o qual a matriz de rigidez seja singular, ou seja, que a rigidez da viga é nula. *Fisicamente, a perda da rigidez da viga é explicada pela transferência de apenas uma parcela da força centrífuga para a equação de flexão* (Simo e Vu-Quoc, 1987).

O segundo tipo de aproximação que pode ser empregado para linearizar o sistema de equações da viga é uma aproximação não-linear de segunda ordem. Neste caso, as funções trigonométricas são aproximadas pelas relações apresentadas em (2.40) e os termos não-lineares de terceira ordem são desprezados, sendo que se obtém a seguinte simplificação para o sistema de equações diferenciais:

$$N_{,x} - (V\alpha)_{,x} = A_\rho(\ddot{u}_1 - \ddot{\phi}u_2 - 2\dot{\phi}\dot{u}_2 - \dot{\phi}^2(x + u_1)) \quad (2.47a)$$

$$(\alpha N)_{,x} + V_{,x} = A_\rho(\ddot{u}_2 + \ddot{\phi}(x + u_1) + 2\dot{\phi}\dot{u}_1 - \dot{\phi}^2u_2) \quad (2.47b)$$

$$M_{,x} - N\Gamma_2 + V(1 + \Gamma_1) = I_\rho(\ddot{\alpha} + \ddot{\phi}) \quad (2.47c)$$

Outra simplificação que é empregada nesta discussão é considerar que as deformações por cisalhamento da seção transversal são desprezíveis, ou seja, que  $u_{,2x} \simeq \alpha_{,x}$ . Deve-se lembrar que esta hipótese é válida no caso de vigas delgadas. Utilizando estas hipóteses e com auxílio das equações (2.35) e (2.42), os seguintes termos podem ser reduzidos a:

$$(V\alpha) = GA_s\Gamma_2\alpha = GA_s\alpha(-\alpha - u_{1,x}\alpha + u_{2,x}) \simeq GA_s\alpha(u_{2,x} - \alpha) \simeq 0$$

$$N\alpha = AE\Gamma_1\alpha = AE\alpha(u_{1,x} + u_{2,x}\alpha - \alpha^2/2) \simeq AEu_{1,x}\alpha$$

$$\Gamma_1\Gamma_2 = (u_{1,x} + u_{2,x}\alpha - \alpha^2/2)(-\alpha - u_{1,x}\alpha + u_{2,x}) \simeq u_{1,x}(u_{2,x} - \alpha) \simeq 0 \quad (2.48)$$

$$N\Gamma_2 = AE\Gamma_1\Gamma_2 \simeq 0$$

$$V(1 + \Gamma_1) = GA_s\Gamma_2 + GA\Gamma_2\Gamma_1 \simeq GA_s\Gamma_2$$

Assim, o sistema de equações diferenciais (2.47) com termos não-lineares de segunda ordem é reduzido a:

$$N_{,x} = A_\rho(\ddot{u}_1 - \ddot{\phi}u_2 - 2\dot{\phi}\dot{u}_2 - \dot{\phi}^2(x + u_1)) \quad (2.49a)$$

$$(\alpha N)_{,x} + V_{,x} = A_\rho(\ddot{u}_2 + \ddot{\phi}(x + u_1) + 2\dot{\phi}\dot{u}_1 - \dot{\phi}^2u_2) \quad (2.49b)$$

$$M_{,x} + V = I_\rho(\ddot{\alpha} + \ddot{\phi}) \quad (2.49c)$$

O termo  $(\alpha N)_{,x}$  pode ser aproximado a partir da primeira equação do sistema (2.49). De acordo com as condições de contorno de sistema na extremidade livre a força normal  $N$ , em  $x = L$ , é nula. Desde que uma expressão para  $N_{,x}$  é conhecida (Simo e Vu-Quoc, 1987), é possível escrever que:

$$N(x) = - \int_x^L [N_{,\xi}] d\xi = - \underbrace{\int_x^L A_\rho(\ddot{u}_1 - \ddot{\phi}u_2 - 2\dot{\phi}\dot{u}_2 - \dot{\phi}^2u_1) d\xi}_I + \underbrace{\int_x^L A_\rho\dot{\phi}^2x d\xi}_{II} \quad (2.50)$$

$$N(x) \simeq \frac{A_\rho\dot{\phi}^2}{2}(L^2 - x^2) = N^0$$

Os termos da primeira expressão (I) são desprezados em uma primeira aproximação, sendo que o termo  $N^0$  representa uma aproximação razoável para a força normal. Na verdade, este termo corresponde ao valor da força normal que atua na viga no instante inicial, onde os termos dinâmicos associados à deformação da mesma são nulas. Esta força normal  $N$  é também chamada de força de membrana da viga e está relacionada com a componente longitudinal da força centrífuga.

Novamente, como as deformações por cisalhamento foram desprezadas, é possível reduzir o sistema de três para duas equações diferenciais de equilíbrio. A terceira equação do sistema (2.49c) será derivada em relação a  $x$  e substituída na segunda equação. Novamente, para diminuir o número total de termos é adotado velocidade angular constante e momento de inércia da seção transversal constante ao longo do eixo da viga. Finalmente, as relações lineares entre forças e deformação, equação (2.39), são introduzidas. O sistema de equações diferenciais com os termos não-lineares de segunda ordem é então dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_\rho(\ddot{u}_1 - 2\dot{\phi}\dot{u}_2) \\ I_\rho\ddot{u}_{2,xx} - A_\rho(\ddot{u}_2 - 2\dot{\phi}\dot{u}_1) \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} AEu_{1,xx} + A_\rho\dot{\phi}^2(x + u_1) \\ EIu_{2,xxxx} - (u_{2,x}N^0)_{,x} - A_\rho\dot{\phi}^2u_2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right\} \quad (2.51)$$

A principal diferença encontrada entre o sistema de equações determinado a partir das aproximações lineares, equação (2.46), e do sistema de equações representado em (2.51) é a presença do termo  $(u_{2,x}N^0)_{,x}$  na equação de flexão. Este termo está relacionado à componente axial da aceleração centrífuga. Portanto, dois componentes da aceleração centrífuga estão contribuindo para a equação de flexão. Ou seja, além do termo de aceleração centrífuga, transversal ao eixo da viga, os termos axiais que contribuem para o momento fletor também são considerados. Neste caso, além de um termo desestabilizador,  $A_\rho\dot{\phi}^2u_2$ , que tende a diminuir a rigidez da estrutura, existe um novo termo,  $(u_{2,x}N^0)_{,x}$ , que domina o termo desestabilizador permitindo que o efeito da velocidade de rotação na rigidez da viga seja corretamente considerado (Simo e Vu-Quoc, 1987).

### 2.2.11 Sistema de equações diferenciais lineares

A seção anterior apresentou a discussão do processo de linearização das equações de movimento da viga girante. A linearização simples e direta leva a um sistema de equações que não corresponde ao comportamento dinâmico da viga, pois sua rigidez diminui em função da velocidade. Um segundo processo de linearização foi apresentado em que termos lineares de segunda ordem são mantidos. Neste caso, mostra-se que a componente da força longitudinal que contribui para a equação de momento fletor aparece na equação de flexão da viga. Este termo está relacionado a um termo de segunda ordem, sendo que, na aproximação linear, este termo acaba por ser desprezado, o que leva a um sistema linear incompleto.

Um sistema de equações diferenciais linear da viga girante pode ser obtido a partir das mesmas hipóteses que foram empregadas na dedução das equações não-lineares de segunda ordem. Entretanto, ao contrário do sistema obtido anteriormente, em que foram desprezados os efeitos da aceleração angular e da deformação por cisalhamento, estes efeitos são incorporados ao equacionamento, sendo necessário, portanto, três equações para caracterizar a estrutura. Dessa maneira, o sistema de equações a ser empregado é definido por:

$$\begin{aligned} N_{,x} &= A_\rho(\ddot{u}_1 - \ddot{\phi}u_2 - 2\dot{\phi}\dot{u}_2 - \dot{\psi}^2(x + u_1)) \\ (\alpha N)_{,x} + V_{,x} &= A_\rho(\ddot{u}_2 + \ddot{\phi}(x + u_1) + 2\dot{\phi}\dot{u}_1 - \dot{\phi}^2u_2) \\ M_{,x} + V &= I_\rho(\ddot{\alpha} + \ddot{\phi}) \end{aligned} \quad (2.52)$$

Conforme demonstrado anteriormente, este sistema de equações, da maneira que está apresentado, permite considerar corretamente a influência dos efeitos dinâmicos na rigidez da viga. As expressões para as forças normais e cortante e do momento fletor são obtidas a partir das componentes lineares do vetor de deformações, permitindo, dessa forma, a obtenção de um sistema de equações diferenciais lineares.

$$N = EAu_{1,x} \quad (2.53a)$$

$$V = GA_s(u_{2,x} - \alpha) \quad (2.53b)$$

$$M = EI\alpha_{,x} \quad (2.53c)$$

O termo  $(\alpha N)_{,x}$ , força de membrana relacionada com a componente longitudinal da aceleração centrífuga, pode ser aproximado de acordo com a equação (2.50). Assim,

$$(\alpha N^0)_{,x} = \left( \alpha \frac{A_\rho \dot{\phi}^2}{2} (L^2 - x^2) \right)_{,x} \quad (2.54)$$

O sistema de equações resultante pode ser escrito de acordo com

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} A_\rho \dot{\phi}^2 x \\ -A_\rho \ddot{\phi} x \\ -I_\rho \ddot{\phi} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} A_\rho \ddot{u}_1 \\ A_\rho \ddot{u}_2 \\ I_\rho \ddot{\alpha} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -2A_\rho \dot{\phi} \dot{u}_2 \\ 2A_\rho \dot{\phi} \dot{u}_1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -AEu_{1,xx} \\ -GA(u_{2,x} - \alpha)_{,x} \\ -EI\alpha_{,xxx} - GA(u_{2,x} - \alpha) \end{Bmatrix} \\ &+ \begin{Bmatrix} -A_\rho(\ddot{\phi}u_2 + \dot{\phi}^2u_1) \\ A_\rho(\ddot{\phi}u_1 - \dot{\phi}^2u_2) - \dot{\phi}^2(\alpha \frac{A_\rho}{2}(L^2 - x^2))_{,x} \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.55)$$

Neste sistema de equações é possível distinguir os diversos termos que influenciam o comportamento dinâmico das palhetas. Do lado esquerdo da equação estão representadas as forças de corpo, distribuídas ao longo da viga, que se originam da velocidade e aceleração angulares  $\dot{\phi}$  e  $\ddot{\phi}$ . Do lado direito da equação, quatro vetores representam as forças internas. No primeiro vetor estão representados as forças de inércia, sendo que o terceiro termo deste vetor corresponde a chamada inércia de rotação. O segundo vetor corresponde ao efeito giroscópico. Nota-se que o efeito giroscópico acopla os dois componentes de deformação que são perpendiculares. O terceiro vetor corresponde a contribuição da elasticidade ou rigidez do material. O quarto vetor contém os termos referentes a rigidez dinâmica e rigidez geométrica. A rigidez dinâmica é responsável pela diminuição da rigidez do sistema, enquanto que a rigidez geométrica tem um efeito oposto.

### 2.2.12 Definição alternativa do vetor de deformação

O vetor de deformação da viga girante pode ser definido também com auxílio da expressão para o comprimento de arco. Dessa forma, e baseando-se na figura (2.8), o comprimento de um elemento deformado da viga é dado por

$$\Delta l = \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2} = \sqrt{(1 + u_{1,x})^2 + u_{2,x}^2} \Delta x \quad (2.56)$$

Ainda seguindo esta equação, o incremento do comprimento do elemento deformado é denominado  $\Delta s$ , sendo definido como (Kane *et al.*, 1987)

$$\Delta s = \Delta l - \Delta x = \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2} - \Delta x = \sqrt{(1 + u_{1,x})^2 + u_{2,x}^2} \Delta x - \Delta x \quad (2.57)$$

Finalmente, o incremento de comprimento de viga por unidade de comprimento é dada por

$$s_{,x} = \sqrt{(1 + u_{1,x})^2 + u_{2,x}^2} - 1 = \varepsilon \quad (2.58)$$

Os componentes de deformação  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , nas direções normais e tangencial à seção transversal da viga, foram apresentadas na figura (2.10). Utilizando a definição de comprimento de arco e das

quantidades  $\Delta l$  e  $\Delta s$ ,  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  são redefinidos por (Simo, 1985)

$$\begin{aligned}\Delta\Gamma_1 &= \Delta l \cos(\psi - \alpha) - \Delta x = (1 + \varepsilon) \cos(\psi - \alpha)\Delta x - \Delta x \\ \Gamma_1 &= (1 + \varepsilon) \cos(\psi - \alpha) - 1\end{aligned}\tag{2.59}$$

$$\begin{aligned}\Delta\Gamma_2 &= \Delta l \sin(\psi - \alpha) \\ \Gamma_2 &= (1 + \varepsilon) \sin(\psi - \alpha)\end{aligned}\tag{2.60}$$

No caso em que não há cisalhamento,  $\psi = \alpha$ , e as componentes de deformação tornam-se

$$\Gamma_1 = (1 + \varepsilon) - 1 = \varepsilon \quad \text{e} \quad \Gamma_2 = 0\tag{2.61}$$

Esta nova definição do vetor de deformação em função do parâmetro  $\varepsilon$  são idênticas às apresentadas nas equações (2.35). Utilizando a definição do ângulo  $\psi$ , da figura (2.8), obtém-se, então, a forma originalmente obtida para os vetores  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ :

$$\sin \psi = \frac{\Delta_2}{\Delta l} = \frac{u_{2,x}}{1 + \varepsilon} \quad \text{e} \quad \cos \psi = \frac{\Delta_1}{\Delta l} = \frac{1 + u_{1,x}}{1 + \varepsilon}\tag{2.62}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= (1 + \varepsilon) \cos(\psi - \alpha) - 1 = (1 + \varepsilon) \left[ \frac{1 + u_{1,x}}{1 + \varepsilon} \cos \alpha + \frac{u_{2,x}}{1 + \varepsilon} \sin \alpha \right] - 1 \\ &= (1 + u_{1,x}) \cos \alpha + u_{2,x} \sin \alpha - 1\end{aligned}\tag{2.63}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_2 &= (1 + \varepsilon) \sin(\psi - \alpha) = (1 + \varepsilon) \left[ \frac{u_{2,x}}{1 + \varepsilon} \cos \alpha - \frac{1 + u_{1,x}}{1 + \varepsilon} \sin \alpha \right] \\ &= -(1 + u_{1,x}) \sin \alpha + u_{2,x} \cos \alpha\end{aligned}\tag{2.64}$$

### 2.3 Implementação numérica das equações de movimento

A formulação das equações diferenciais de movimento da viga girante foi apresentada anteriormente. Além de apresentar o resultado destas equações, a influência da ordem da linearização do vetor de deformação, no acoplamento dos deslocamentos da viga nas duas direções com o movimento de rotação da viga, foi discutida. A principal conclusão obtida a partir destas discussões é que a teoria clássica de viga, que assume pequenos deslocamentos e relações lineares entre deslocamento e deformação, não é adequada para modelar uma viga girante. Isto ocorre porque a teoria linear de viga não acopla os deslocamentos nas direções longitudinal e transversal e, por consequência, não permite transferir a influência da força centrífuga, que é uma força na direção longitudinal da viga, ao deslocamento transversal da viga. O resultado é que as frequências naturais da viga ao invés de aumentarem em função da velocidade de rotação, diminuem, levando à instabilização do movimento da viga em altas velocidades de rotação. Para obter um conjunto linear de equações de movimento consistente, a força normal, na direção longitudinal da viga e resultante da aceleração centrífuga, deve ser incluída na equação de flexão de viga. Neste caso, as equações de movimento incluem

os termos não-lineares de segunda ordem, sendo que o efeito corretor é obtido com introdução de uma matriz de rigidez geométrica, resultante da força normal atuante na viga. Esta força normal é calculada em função da velocidade de rotação da viga. Esta formulação, entretanto, apresenta limitações, pois a força normal é aproximada a partir das condições iniciais de movimento e supondo também que a velocidade de rotação é constante. Finalmente, outra abordagem para o problema, em que todos os componentes não-lineares de deformação são considerados, é possível. Embora este tipo de abordagem seja o mais genérico possível e permita incluir qualquer condição de operação do sistema, o custo computacional, ou seja, o tempo de processamento é elevado (Mayo *et al.*, 1995; Mayo e Domínguez, 1996; Sharf, 1996). No caso do acoplamento de corpos rígidos e flexíveis, a utilização desta abordagem pode levar a um sistema de equações cuja solução é inviável.

O objetivo desta seção é discutir a implementação numérica das equações de movimento apresentadas nas seções anteriores, de tal forma que os modelos numéricos correspondentes sejam eficientes do ponto de vista computacional. As equações de movimento são obtidas utilizando o Método de Newton-Euler-Jourdain, resultando em um sistema de equações de movimento em sua forma integral. Estas equações de movimento são discretizadas utilizando o Método dos Modos Assumidos, sendo que diferentes funções de tentativa são testadas e comparadas posteriormente.

### 2.3.1 Discretização do campo de deslocamento

Um modelo discreto para representar a viga é obtido a partir da separação de variáveis no domínio do tempo e do espaço. No caso da viga girante, os campos de deslocamento  $u_1(x, t)$  e  $u_2(x, t)$  são aproximados pelo produto de uma função no domínio do tempo e uma função de interpolação no domínio do espaço. Para cada direção, longitudinal ou transversal, é definida uma função temporal e uma função de interpolação. Isto implica dizer que

$$u_1(x, t) = \sum_{i=1}^{N_a} \psi_{ai}(x) q_{ai}(t) \quad (2.65)$$

$$u_2(x, t) = \sum_{i=1}^{N_f} \psi_{fi}(x) q_{fi}(t) \quad (2.66)$$

sendo  $\psi_{ai}(x)$  e  $\psi_{fi}(x)$ , as funções de interpolação,  $q_{ai}$  e  $q_{fi}$  as coordenadas generalizadas da viga (funções temporais), e  $N_a$  e  $N_f$ , o número de modos associados às direções longitudinal e transversal, respectivamente. As funções de interpolação devem representar um conjunto completo de funções linearmente independentes e satisfazer todas ou parte das condições de contorno do sistema. Se as funções de interpolação satisfazem todas as condições de contorno, geométricas e cinéticas, estas são chamadas de funções de comparação. Caso apenas as condições de contorno geométricas sejam satisfeitas, as funções de interpolação são classificadas como funções admissíveis. A função de interpolação deve ser contínua e ter derivadas contínuas até certa ordem, dependendo da ordem da equação diferencial do problema (Baruh, 1999). Para uma barra, por exemplo, a equação diferencial é de segunda ordem e, assim, a função interpoladora deve ter derivada contínua até primeira ordem,

como, por exemplo, um polinômio de grau 1.

A escolha da função de interpolação define diferentes classes de métodos numéricos que são usualmente empregados na discretização de sistemas contínuos, realizada posteriormente a separação das variáveis do espaço e tempo. O esquema de discretização empregado, em geral, é o Método de Ritz, sendo que as formas mais comuns da implementação deste métodos são o Método dos Modos Assumidos (MMA) e o Método dos Elementos Finitos (MEF). O Método dos Modos Assumidos emprega funções admissíveis válidas para todo o domínio, enquanto que o Método dos Elementos Finitos utiliza funções admissíveis que são válidas localmente, sobre uma determinada parte do domínio. A vantagem do Método dos Elementos Finitos sobre o Método dos Elementos Finitos é sua habilidade para tratar geometrias complexas, mas com o custo do aumento da dimensão do modelo discreto (Meirovitch e Kwak, 1990).

No Método dos Modos Assumidos (MMA), as funções de interpolação podem ser escolhidas como a própria forma modal da estrutura, respeitando as condições de contorno do problema. Essa escolha apresenta, entretanto, algumas desvantagens, pois é necessário conhecer previamente a solução modal analítica da estrutura. Muitas vezes esta função pode não ser de fácil obtenção, ou ainda não ser possível obtê-la, mesmo que esta função exista, ela pode ser de difícil integração, introduzindo dificuldades numéricas no processo de solução. Por esse motivo, muitas vezes funções polinomiais são utilizadas como funções interpoladoras. Entretanto, este procedimento pode levar a uma perda da precisão na solução, pois uma função polinomial de grau pré-determinado é usada para aproximar a forma modal da estrutura.

No Método dos Elementos Finitos (MEF), as desvantagens apresentadas pelo MMA podem ser contornadas, pois as funções de interpolação são escolhidas como polinômios. O aumento no número de elementos, mesmo que mantendo o grau dos polinômios nas funções interpoladoras, permite aproximar melhor a forma modal da estrutura. O custo, neste caso, é o aumento do número de graus de liberdade da estrutura.

### 2.3.2 Forças generalizadas de inércia

As forças generalizadas de inércia correspondem à potência virtual da viga. Em um elemento diferencial da viga, estas forças são calculadas pelo produto escalar do jacobiano da velocidade do ponto  $O'$  com aceleração correspondente deste ponto, multiplicada pela massa deste elemento, de acordo com

$$\Delta F^* = \left( \frac{\partial \mathbf{v}_{O'}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T \mathbf{a}_{O'} \cdot \Delta m \quad (2.67)$$

sendo que o vetor  $\dot{\mathbf{q}}$  é a derivada em relação ao tempo do vetor de coordenadas generalizadas.

A força generalizada total é obtida somando-se a contribuição de cada elemento diferencial de tal forma que

$$F^* = \sum_{\Delta m} \Delta F^* = \int \left( \frac{\partial \mathbf{v}_{O'}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T \mathbf{a}_{O'} \cdot dm \quad (2.68)$$

O vetor com as coordenadas generalizadas  $\mathbf{q}$ , é subdividido em dois outros vetores, referentes aos movimentos nas direções longitudinal, vetor  $\mathbf{q}_a$ , e transversal, vetor  $\mathbf{q}_f$ . Esta notação será utilizada para enfatizar o acoplamento do movimento nas duas direções:

$$\mathbf{q} = \{\mathbf{q}_a \quad \mathbf{q}_f\}^T \quad (2.69)$$

Utilizando a discretização proposta na equações (2.65) e (2.66) para os campos de deslocamento longitudinal e transversal obtém-se:

$$u_1 = \sum_{i=1}^N \psi_{ai} \cdot q_{ai} = \psi_a \mathbf{q}_a \quad (2.70a)$$

$$u_2 = \sum_{i=1}^N \psi_{fi} \cdot q_{fi} = \psi_f \mathbf{q}_f \quad (2.70b)$$

As derivadas dos deslocamentos são, então, dadas por:

$$\dot{u}_1 = \psi_a \dot{\mathbf{q}}_a \quad \ddot{u}_1 = \psi_a \ddot{\mathbf{q}}_a \quad (2.71a)$$

$$\dot{u}_2 = \psi_f \dot{\mathbf{q}}_f \quad \ddot{u}_2 = \psi_f \ddot{\mathbf{q}}_f \quad (2.71b)$$

O vetor de velocidade, equação (2.10), escrito em função das funções de interpolação, dadas pelas equações (2.71a) e (2.71b), e deslocamentos nodais, dados pelas equações (2.70a) e (2.70b), é escrito como:

$$\mathbf{v}_{O'} = \begin{Bmatrix} \psi_a \dot{\mathbf{q}}_a - \dot{\phi} \psi_f \mathbf{q}_f \\ \psi_f \dot{\mathbf{q}}_f + \dot{\phi}(x + \psi_a \mathbf{q}_a) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.72)$$

O jacobiano da velocidade do ponto  $O'$  é dado por:

$$\mathbf{J}_{O'} = \frac{\partial \mathbf{v}_{O'}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{v}_{O'}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_a} & \frac{\partial \mathbf{v}_{O'}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_a & 0 \\ 0 & \psi_f \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

A aceleração do ponto  $O'$ , equação (2.13), após a substituição das expressões para as funções de interpolação e as grandezas nodais, equações (2.71) e (2.70), é dada por:

$$\mathbf{a}_{O'} = \begin{Bmatrix} \psi_a \ddot{\mathbf{q}}_a - \ddot{\phi} \psi_f \mathbf{q}_f - 2\dot{\phi} \psi_f \dot{\mathbf{q}}_f - \dot{\phi}^2 (x + \psi_a \mathbf{q}_a) \\ \psi_f \ddot{\mathbf{q}}_f + \ddot{\phi}(x + \psi_a \mathbf{q}_a) + 2\dot{\phi} \psi_a \dot{\mathbf{q}}_a - \dot{\phi}^2 \psi_f \mathbf{q}_f \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.74)$$

As forças generalizadas de inércia para a viga plana girante são dadas por:

$$\begin{aligned}
F^* &= \int_0^L \mathbf{J}_{O'}^T \cdot \mathbf{a}_{O'} A \rho dx \\
&= \int_0^L A \rho \begin{bmatrix} \psi_a^T \psi_a & 0 \\ 0 & \psi_f^T \psi_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_a \\ \ddot{\mathbf{q}}_f \end{Bmatrix} dx - \ddot{\phi} \int_0^L A \rho \begin{bmatrix} 0 & \psi_a^T \psi_f \\ -\psi_f^T \psi_a & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_a \\ \mathbf{q}_f \end{Bmatrix} dx \\
&\quad - 2\dot{\phi} \int_0^L A \rho \begin{bmatrix} 0 & \psi_a^T \psi_f \\ -\psi_f^T \psi_a & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_a \\ \dot{\mathbf{q}}_f \end{Bmatrix} dx - \dot{\phi}^2 \int_0^L A \rho \begin{bmatrix} \psi_a^T \psi_a & 0 \\ 0 & \psi_f^T \psi_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_a \\ \mathbf{q}_f \end{Bmatrix} dx \\
&\quad + \int_0^L A \rho \begin{Bmatrix} -\dot{\phi}^2 \psi_a^T x \\ \dot{\phi} \psi_f^T x \end{Bmatrix} dx
\end{aligned} \tag{2.75}$$

onde  $A$  é a área da seção transversal da viga e  $\rho$  é a densidade do material.

## 2.4 Energia potencial da viga

A distribuição das forças internas da viga girante é estimada a partir da energia potencial correspondente. Contudo, a forma final da expressão da energia potencial depende da ordem da teoria da viga: linear, não-linear de segunda ordem e completamente não-linear. Cada uma destas expressões, levando em consideração as funções de interpolação da viga, são apresentadas a seguir. Em todos os casos, o cisalhamento é desprezado.

### 2.4.1 Deformações utilizando uma aproximação linear

A energia potencial da viga, neste caso, é dada apenas pelos componentes lineares de deformação, ou seja, segundo os termos da equação (2.39).

$$\pi = \frac{1}{2} \int_0^L EA \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EI \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right)^2 dx \tag{2.76}$$

onde a relação  $\alpha_{,x} = u_{2,xx}$ , é utilizada. Substituindo a expressão para as funções de interpolação, chega-se a seguinte expressão para a energia potencial da viga:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_0^L EA \mathbf{q}_a^T (\psi'_a)^T (\psi'_a) \mathbf{q}_a dx + \frac{1}{2} \int_0^L EI \mathbf{q}_f^T (\psi''_f)^T (\psi''_f) \mathbf{q}_f dx \tag{2.77}$$

A força generalizada associada à energia potencial é então dada por

$$F = - \frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{q}} \tag{2.78}$$

Ou ainda,

$$F = - \begin{bmatrix} \int_0^L EA (\psi'_a)^T (\psi'_a) dx \\ \int_0^L EI (\psi''_f)^T (\psi''_f) dx \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_a \\ \mathbf{q}_f \end{Bmatrix} = \mathbf{K} \mathbf{q} \tag{2.79}$$

A matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  corresponde à matriz de rigidez usualmente obtida em problemas estruturais lineares.

## 2.4.2 Deformações utilizando uma aproximação não-linear de segunda ordem

Neste caso, a energia potencial é avaliada com os termos de deformação apresentados na equação (2.41). Entretanto, apenas termos de segunda ordem são mantidos na expressão da energia potencial, o que resulta na seguinte expressão da energia potencial:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_0^L EA \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EI \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L AE u_{1,x} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} \right)^2 dx \quad (2.80)$$

Uma simplificação que pode ser introduzida na expressão anterior é considerar que a força normal ao longo da viga pode ser aproximada por  $N(x) = AE u_{1,x}$ , sendo que

$$N(x) = \frac{A\rho\dot{\phi}^2}{2} (L^2 - x^2) \quad (2.81)$$

Neste caso a força generalizada é dada por

$$F = -\frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{q}} = -(\mathbf{K} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{K}_{g1} \cdot \mathbf{q}) \quad (2.82)$$

A matriz  $\mathbf{K}$  é a mesma matriz de rigidez estrutural calculada anteriormente. A matriz  $\mathbf{K}_{g1}$  é a chamada matriz de rigidez geométrica, que, neste caso, é estimada a partir da força normal inicial. Esta matriz é dada por:

$$\mathbf{K}_{g1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \int_0^L N(x) (\psi'_f)^T (\psi'_f) dx \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

Deve-se notar que esta matriz apresenta termos não-nulos apenas nos graus de liberdade referentes ao deslocamento transversal. Esta matriz corresponde à transferência da influência da força normal na equação de flexão da viga. Outra abordagem possível no cálculo da matriz de rigidez geométrica é considerar a terceira parcela da equação (2.80) em função dos deslocamentos longitudinais iniciais, sem utilizar a aproximação da força normal. A expressão  $EA \frac{\partial u_1}{\partial x}$  é calculada a partir da solução do chamado problema de tensão inicial. Assim, os deslocamentos longitudinais da viga devido à força centrífuga são calculados para as condições iniciais do movimento. Um nova matriz de rigidez geométrica  $\mathbf{K}_{g2}$  é definida baseando-se na solução do problema de tensão inicial. Ao longo do movimento, entretanto, esta matriz mantém-se constante e o problema torna-se linear, pois a viga oscila em torno de uma posição de equilíbrio. Esta nova matriz de rigidez geométrica é então definida por

$$\mathbf{K}_{g2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \int_0^L EA \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} \right)_0 (\psi'_f)^T (\psi'_f) dx \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

A interpretação física desta outra matriz de rigidez é a mesma da matriz rigidez calculada a partir da força normal. Portanto, as matrizes das equações (2.83) e (2.84) são equivalentes. As duas abordagens utilizadas para obter estas matrizes são análogas, pois nos dois casos utiliza-se uma

aproximação para a força normal devido à aceleração centrífuga. O vetor de força inicial pode ser calculado também utilizando as funções interpoladoras para o deslocamento longitudinal. Assim,

$$EA\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)_0 = EA\left(\frac{u_1(L) - u_1(0)}{L}\right)_0 \quad (2.85)$$

### 2.4.3 Deformações não-lineares

Neste caso, a energia potencial é calculada incorporando os termos relativos à variação da matriz geométrica, que foi considerada constante no item anterior, e os termos de deformação de quarta ordem. Assim, a expressão para a energia potencial é dada por

$$\begin{aligned} \pi = & \frac{1}{2} \int_0^L EA \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)^2 dx \\ & + \frac{1}{2} \int_0^L EA \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{EI}{4} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)^4 dx \end{aligned} \quad (2.86)$$

A força generalizada resultante é dada por:

$$F = -\frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{q}} = -(\mathbf{K} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{K}_g \cdot \mathbf{q}) - \mathbf{f}_e \quad (2.87)$$

sendo a matriz dada por

$$\mathbf{K}_g = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \int_0^L EA \mathbf{q}_a^T (\boldsymbol{\psi}'_a)^T (\boldsymbol{\psi}'_f)^T (\boldsymbol{\psi}'_f) dx \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

e o vetor

$$\mathbf{f}_e = \left\{ \begin{array}{l} \int_0^L EA (\boldsymbol{\psi}'_a)^T (\mathbf{q}_f^T (\boldsymbol{\psi}'_f)^T (\boldsymbol{\psi}'_f) \mathbf{q}_f) dx \\ \int_0^L EA (\boldsymbol{\psi}'_f)^T (\mathbf{q}_f^T (\boldsymbol{\psi}'_f)^T \boldsymbol{\psi}'_f \mathbf{q}_f) (\boldsymbol{\psi}'_f \mathbf{q}_f) dx \end{array} \right\} \quad (2.89)$$

### 2.4.4 Equações de movimento

As equações de movimento da viga plana girante são obtidas igualando as forças generalizadas de inércia e as forças generalizadas externas. Neste caso, estão sendo consideradas apenas as forças generalizadas resultantes da energia potencial, que foram calculadas anteriormente. Portanto (Shabana, 1989),

$$F^* = F \quad (2.90)$$

Assim, combinando as equações (2.75) e (2.87) obtém-se a forma das equações discretizadas da viga girante

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} - 2\dot{\phi}\mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_g - \dot{\phi}^2\mathbf{M} - \ddot{\phi}\mathbf{G})\mathbf{q} = -\mathbf{f}_e - \mathbf{f} \quad (2.91)$$

onde  $\mathbf{M}$  é a matriz de massa,  $\mathbf{G}$ , a matriz giroscópica,  $\mathbf{K}$ , a matriz de rigidez estrutural,  $\mathbf{K}_g$ , a matriz de rigidez geométrica,  $\mathbf{f}$ , o vetor de forças associadas a velocidade e aceleração angular da viga, e  $\mathbf{f}_e$ , o vetor de forças elásticas não-lineares. Esta é a forma completa da equação de movimento assumindo que a energia potencial foi considerada em sua forma completa, ou seja, com todos os termos não-lineares incluídos. Entretanto dependendo da abordagem escolhida para a implementação estes termos podem ser excluídos. Assim, para uma abordagem linear a matriz  $\mathbf{K}_g$  e o vetor  $\mathbf{f}_e$  são desprezados. No caso de um modelo linearizado de segunda ordem apenas a matriz de rigidez geométrica é incluída, sendo que o vetor  $\mathbf{f}_e$  é desprezado. Neste caso, ainda é possível escolher entre duas formas para a matriz de rigidez geométrica,  $\mathbf{K}_{g1}$  ou  $\mathbf{K}_{g2}$ .

## 2.5 Desacoplamento da deformação e deslocamento na direção longitudinal

A implementação numérica das equações de movimento dadas em (2.91) apresenta limitações quando a rigidez na direção longitudinal é muito maior que na direção transversal. Neste caso, as primeiras frequências naturais relacionadas à direção longitudinal são muito mais altas que as primeiras frequências associadas à direção transversal. O sistema de equações diferenciais de movimento torna-se um problema duro (*stiff problem*). A integração numérica torna-se pouco eficiente e muito lenta, pois é necessário usar um incremento de tempo muito pequeno devido às altas frequências associadas aos modos longitudinais (Mayo *et al.*, 1995; Mayo e Domínguez, 1997; Radisavljevic e Baruh, 2001).

Com objetivo de contornar estas dificuldades propõe-se estudar uma forma de desacoplar o deslocamento e a deformação na direção longitudinal. O deslocamento longitudinal da viga plana pode ser compreendido como a soma de duas parcelas. A primeira é relativa à rigidez longitudinal e a segunda relativa ao encurtamento transversal. Este encurtamento está apresentado na figura (2.11) pela quantidade  $\Delta u_t$ .

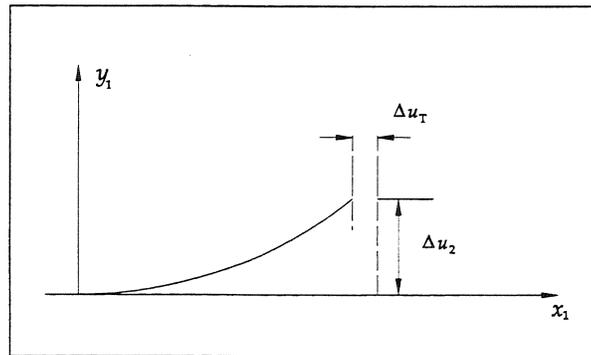


Figura 2.11: Encurtamento longitudinal da viga devido ao deslocamento transversal.

O comprimento da viga deformada  $s$  pode ser estimado a partir do comprimento de arco,

conforme apresentado na equação (2.57), que é dado por:

$$s(x) = \int_0^L \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi}\right)^2} d\xi - x \quad (2.92)$$

A derivada do comprimento da viga é a deformação na direção longitudinal, quando não há cisalhamento, ou seja,

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)^2} - 1 \quad (2.93)$$

Supondo que a deformação longitudinal, devido à rigidez longitudinal, é nula, pode-se obter uma relação entre os deslocamentos longitudinais e transversais, mesmo que a deformação nesta direção seja nula. Assim,

$$\frac{ds}{dx} = 0 \Rightarrow \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)^2} - 1 = 0 \quad (2.94)$$

Utilizando a aproximação de Taylor para a função  $\sqrt{1+A}$ , obtém-se:

$$\sqrt{1+A} = 1 + \frac{A}{2} - \frac{A^2}{8} + \frac{A^3}{16} + \text{termos de ordem mais alta} \quad (2.95)$$

desprezando os termos de ordem mais alta (Sharf, 1999)

$$\sqrt{\left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)^2} - 1 = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right) \right]^2 \quad (2.96)$$

Este é o termo comumente empregado na Teoria de Elasticidade para a deformação longitudinal, obtida através do tensor de Euler. Considerando que os termos  $u_{1,x}$  e  $u_{2,x}^2$  tem a mesma ordem, o termo  $u_{1,x}^2$ , de ordem mais alta, pode ser desprezado. Neste caso, a expressão para a deformação longitudinal torna-se:

$$\frac{ds}{dx} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)^2 = 0 \quad (2.97)$$

e portanto

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)^2 \quad (2.98)$$

Assim, o incremento de deslocamento na direção longitudinal devido ao deslocamento transversal e, portanto, independente da rigidez longitudinal, é dada por:

$$\Delta u_1 = -\frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} u_{2,x}^2 dx \quad (2.99)$$

Se o deslocamento longitudinal em  $x = 0$  é nulo, obtém-se uma expressão para o deslocamento longitudinal em função de  $x$ :

$$u_1(x) = -\frac{1}{2} \int_0^x u_{2,\xi}^2 d\xi \quad (2.100)$$

Introduzindo a discretização da equação (2.66), o deslocamento longitudinal é dado por:

$$u_1(x) = -\frac{1}{2} \int_0^x \mathbf{q}_f^T \boldsymbol{\psi}_{f,\xi}^T \boldsymbol{\psi}_{f,\xi} \mathbf{q}_f d\xi \quad (2.101)$$

ou ainda,

$$u_1(x) = -\frac{1}{2} \mathbf{q}_f^T \mathbf{H} \mathbf{q}_f \quad (2.102)$$

onde a matriz  $\mathbf{H}$  é dada por

$$\mathbf{H} = \int_0^x \boldsymbol{\psi}_{f,\xi}^T \boldsymbol{\psi}_{f,\xi} d\xi \quad (2.103)$$

As equações de movimento da viga devem ser recalculadas considerando que as coordenadas generalizadas são representadas apenas pelo vetor  $\mathbf{q}_f$ , que por simplificação é denominado apenas de  $\mathbf{q}$  a seguir.

### 2.5.1 Forças generalizadas de inércia

A expressão da velocidade em um ponto pertencente à linha neutra da viga é dada pela equação (2.10). Nesta equação as expressões para o deslocamento longitudinal podem ser substituídas pela expressão do deslocamento longitudinal, equação (2.102). Assim,

$$\mathbf{B}_1 \mathbf{v}_{O'} = \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 - \dot{\phi} u_2 \\ \dot{u}_2 + \dot{\phi}(x + u_1) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\mathbf{q}^T \mathbf{H} \dot{\mathbf{q}} + \dot{\phi} \boldsymbol{\psi} \mathbf{q} \\ \boldsymbol{\psi} \dot{\mathbf{q}} + \dot{\phi}(x - \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{H} \mathbf{q}) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.104)$$

pois

$$u_2 = \boldsymbol{\psi} \mathbf{q} \quad \dot{u}_2 = \boldsymbol{\psi} \dot{\mathbf{q}} \quad \ddot{u}_2 = \boldsymbol{\psi} \ddot{\mathbf{q}} \quad (2.105a)$$

$$u_1 = -\frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{H} \mathbf{q} \quad \dot{u}_1 = -\mathbf{q}^T \mathbf{H} \dot{\mathbf{q}} \quad \ddot{u}_1 = -\mathbf{q}^T \mathbf{H} \ddot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{H} \dot{\mathbf{q}} \quad (2.105b)$$

O vetor de coordenadas generalizadas, neste caso, é apenas o vetor  $\mathbf{q}$ . O jacobiano da velocidade é então dado por:

$$\mathbf{J}_{O'} = \frac{\partial \mathbf{v}_{O'}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \begin{Bmatrix} -\mathbf{q} \mathbf{H} \\ \boldsymbol{\psi} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.106)$$

A aceleração do mesmo ponto é dada pela equação (2.13). Substituindo as expressões (2.105)

dos deslocamentos, velocidades e aceleração discretizadas, obtém-se:

$$\begin{aligned}
B_1 \mathbf{a}_{O'} &= \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 - \ddot{\phi} u_2 - 2\dot{\phi} \dot{u}_2 - \dot{\phi}^2 (x + u_1) \\ \ddot{u}_2 + \ddot{\phi} (x + u_1) + 2\dot{\phi} \dot{u}_1 - \dot{\phi}^2 u_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \\
&= \begin{Bmatrix} -\mathbf{q}^T \mathbf{H} \ddot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{H} \dot{\mathbf{q}} - \ddot{\phi} \psi \mathbf{q} - 2\dot{\phi} \dot{\psi} \dot{\mathbf{q}} - \dot{\phi}^2 (x - \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{H} \mathbf{q}) \\ \psi \ddot{\mathbf{q}} + \ddot{\phi} (x - \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{H} \mathbf{q}) - 2\dot{\phi} \mathbf{q}^T \mathbf{H} \dot{\mathbf{q}} - \dot{\phi}^2 \psi \mathbf{q} \\ 0 \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.107}$$

As forças generalizadas de inércia, neste caso, são dadas por:

$$\begin{aligned}
F^* &= \int_0^L (\mathbf{J}_{O'}^T \mathbf{a}_{O'}) A \rho \, dx \\
&= \int_0^L A \rho \left[ (\mathbf{H}^T \mathbf{q} \mathbf{q}^T \mathbf{H} + \psi^T \psi) \ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{H}^T \mathbf{q} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{H}) \dot{\mathbf{q}} + \ddot{\phi} (\mathbf{H}^T \mathbf{q} \psi - \frac{1}{2} \psi^T \mathbf{q}^T \mathbf{H}) \mathbf{q} \right. \\
&\quad \left. + 2\dot{\phi} (\mathbf{H}^T \mathbf{q} \psi - \psi^T \mathbf{q}^T \mathbf{H}) \dot{\mathbf{q}} - \dot{\phi}^2 (\frac{1}{2} \mathbf{H}^T \mathbf{q} \mathbf{q}^T \mathbf{H} + \psi^T \psi) \mathbf{q} + \dot{\phi}^2 (\mathbf{H}^T \mathbf{q} x) + \ddot{\phi} \psi^T x \right] dx
\end{aligned} \tag{2.108}$$

Para simplificar será definida a matriz  $\lambda$  tal que

$$\lambda = \mathbf{q}^T \mathbf{H} \quad , \quad \dot{\lambda} = \mathbf{H}^T \dot{\mathbf{q}} \quad \text{e} \quad \ddot{\lambda} = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{H} \tag{2.109}$$

Assim, a expressão para a força generalizada de inércia é dada por:

$$\begin{aligned}
F^* &= \left[ \int_0^L (\lambda^T \lambda + \psi^T \psi) A \rho \, dx \right] \ddot{\mathbf{q}} + \left[ \int_0^L (\lambda^T \dot{\lambda}) A \rho \, dx \right] \dot{\mathbf{q}} + \ddot{\phi} \left[ \int_0^L (\lambda^T \psi - \frac{1}{2} \psi^T \lambda) A \rho \, dx \right] \mathbf{q} \\
&\quad - \dot{\phi}^2 \left[ \int_0^L (\frac{1}{2} \lambda^T \lambda + \psi^T \psi) A \rho \, dx \right] \mathbf{q} + 2\dot{\phi} \left[ \int_0^L (\lambda^T \psi - \psi^T \lambda) A \rho \, dx \right] \dot{\mathbf{q}} \\
&\quad + \ddot{\phi} \left[ \int_0^L (\psi^T x) A \rho \, dx \right] + \dot{\phi}^2 \left[ \int_0^L (\lambda^T x) A \rho \, dx \right]
\end{aligned} \tag{2.110}$$

## 2.5.2 Energia potencial

Neste caso a expressão da energia potencial corresponde apenas a parcela devido à flexão da viga, sendo dada por

$$\pi = \int_0^L EI \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right)^2 dx \tag{2.111}$$

Portanto a energia potencial considerada é linear, embora os termos não-lineares de deformação de alta ordem tenham sido considerados implicitamente nesta formulação, através da equação (2.98). A força generalizada elástica é, então, dada por:

$$F = -\frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{q}} = - \int_0^L EI \psi''^T \psi'' \mathbf{q} \, dx = -\mathbf{K} \mathbf{q} \tag{2.112}$$

### 2.5.3 Equações de movimento

A equação de movimento da viga plana considerando o desacoplamento da deformação e o deslocamento na direção longitudinal é dada por:

$$F^* - F = 0 \quad (2.113)$$

Combinando as equações (2.110) e (2.112) obtém-se a forma das equações de movimento da viga plana

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{D} + 2\dot{\phi}\mathbf{G})\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K}_a + \mathbf{K} - \mathbf{K}_r)\mathbf{q} = -(\mathbf{f}_a + \mathbf{f}_r) \quad (2.114)$$

onde

$$\mathbf{M} = \int_0^L (\boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\psi}) A \rho \, dx \quad (2.115a)$$

$$\mathbf{D} = \int_0^L (\boldsymbol{\lambda}^T \dot{\boldsymbol{\lambda}}) A \rho \, dx \quad (2.115b)$$

$$\mathbf{G} = \int_0^L (\boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\lambda}) A \rho \, dx \quad (2.115c)$$

$$\mathbf{K}_a = \ddot{\phi} \int_0^L (\boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\psi} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\lambda}) A \rho \, dx \quad (2.115d)$$

$$\mathbf{K}_r = \dot{\phi}^2 \int_0^L (\frac{1}{2} \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\psi}) A \rho \, dx \quad (2.115e)$$

$$\mathbf{K} = \int_0^L EI \boldsymbol{\psi}''^T \boldsymbol{\psi}'' \, dx \quad (2.115f)$$

$$\mathbf{f}_a = \ddot{\phi} \int_0^L (\boldsymbol{\psi}^T \mathbf{x}) A \rho \, dx \quad (2.115g)$$

$$\mathbf{f}_r = \dot{\phi}^2 \int_0^L (\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{x}) A \rho \, dx \quad (2.115h)$$

Nesta equação, a matriz  $\mathbf{M}$  é a matriz de massa, a matriz  $\mathbf{G}$ , a matriz giroscópica,  $\mathbf{K}_a$ , a matriz de rigidez relacionada a componente tangencial da aceleração angular,  $\mathbf{K}_r$ , a matriz de rigidez rotacional,  $\mathbf{K}$ , a matriz de rigidez estrutural, o vetor  $\mathbf{f}_a$ , o vetor associado a componente tangencial da aceleração angular, e  $\mathbf{f}_r$ , o vetor de força rotacional. A matriz  $\mathbf{D}$  é uma matriz variante no tempo associada à influência da velocidade na direção longitudinal na equação de flexão. Deve-se notar que estas equações de movimento resultam de uma expressão linear da energia potencial. Assim, a matriz de rigidez resultante é linear. As não-linearidades do problema são transferidas para os operadores inerciais, que são obtidos a partir das forças generalizadas de inércia, e o sistema de equações é fortemente não-linear. Outra importante observação é que esta equação é válida enquanto os modos axiais não tem influência na resposta do sistema. Assim, para análise do sistema em altas frequências é necessário considerar a equação apresentada em (2.91) em que a rigidez longitudinal é incluída.

## 2.6 Inclusão de um corpo rígido na extremidade livre da viga flexível

As equações de movimento da viga girante com uma corpo finito em sua extremidade livre são desenvolvidas. As dimensões deste corpo não podem ser desprezados. Estas dimensões estão apresentadas na figura (2.12). O corpo é acoplado à extremidade da viga, em  $x = L_t$ , sendo que a massa deste corpo é  $m_t$ , sua inércia de rotação  $I_t$  e a distância entre o centro de massa e o ponto de acoplamento à viga é  $r_t$ .

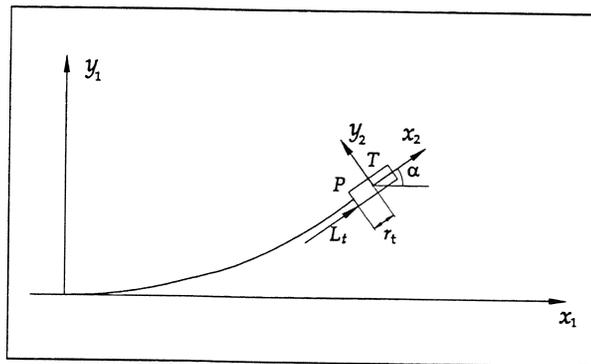


Figura 2.12: Dimensões do corpo finito acoplado à extremidade livre da viga girante.

### 2.6.1 Descrição do movimento

O movimento do corpo  $t$  são descritos da mesma maneira que a viga girante, sendo que os mesmos sistemas de referência  $I$ ,  $B_1$  e  $B_2$  são utilizados. Os vetores de posição, velocidade e aceleração do ponto  $P$  em que o corpo e a viga são acoplados correspondem aos vetores do ponto  $O'$ , sendo que  $x = L_t$ . Estes vetores são então dados por

$${}_{B_1}\mathbf{r}_P = \begin{Bmatrix} L_t + u_1(L_t, t) \\ u_2(L_t, t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.116)$$

$${}_{B_1}\mathbf{v}_P = \begin{Bmatrix} \dot{u}_1(L_t, t) - \dot{\phi}u_2(L_t, t) \\ \dot{u}_2(L_t, t) + \dot{\phi}(L_t + u_1(L_t, t)) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.117)$$

$${}_{B_1}\mathbf{a}_P = \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1(L_t, t) - \ddot{\phi}u_2(L_t, t) - 2\dot{\phi}\dot{u}_2(L_t, t) - \dot{\phi}^2(L_t + u_1(L_t, t)) \\ \ddot{u}_2(L_t, t) + \ddot{\phi}(L_t + u_1(L_t, t)) + 2\dot{\phi}\dot{u}_1(L_t, t) - \dot{\phi}^2u_2(L_t, t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.118)$$

Os vetores de posição, velocidade e aceleração do centro de massa do corpo  $t$  são definidos em função do ponto  $P$ . Estes vetores são escritos no referencial  $B_2$ , que é solidário ao corpo finito.

Inicialmente, é definido o vetor de posição do centro de massa do corpo  $t$ , em relação ao ponto  $P$

$${}_{B_2}\mathbf{r}_T = \begin{pmatrix} r_t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.119)$$

Em seguida, define-se também o vetor de velocidade angular da base  $B_2$ ,  ${}_{B_2}\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ . Ressalta-se que, neste vetor, o ângulo de rotação  $\alpha(L_t, t)$  corresponde ao ângulo de rotação da seção transversal da viga que passa pelo ponto  $P$ , em  $x = L_t$ . Dessa forma, o vetor de velocidade angular da base  $B_2$  é dado por

$${}_{B_2}\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} + \alpha(\dot{L}_t, t) \end{pmatrix} \quad (2.120)$$

Finalmente, os vetores de velocidade e aceleração do centro de massa  $T$  são determinados:

$${}_{B_2}\mathbf{v}_T = \mathbf{T}_\alpha \cdot {}_{B_1}\mathbf{v}_P + {}_{B_2}\dot{\boldsymbol{\alpha}} \times {}_{B_2}\mathbf{r}_T \quad (2.121)$$

$${}_{B_2}\mathbf{a}_T = \mathbf{T}_\alpha \cdot {}_{B_1}\mathbf{a}_P + {}_{B_2}\ddot{\boldsymbol{\alpha}} \times {}_{B_2}\mathbf{r}_T + {}_{B_2}\dot{\boldsymbol{\alpha}} \times {}_{B_2}\dot{\boldsymbol{\alpha}} \times {}_{B_2}\mathbf{r}_T \quad (2.122)$$

## 2.6.2 Equações de movimento

As equações de movimento do corpo  $t$  são obtidas de maneira análoga à equações da viga girante, utilizando o método de Newton-Euler-Jourdain. Dessa forma, inicialmente o conjunto de coordenadas generalizadas  $\bar{\mathbf{q}}$  é definido. Posteriormente, o jacobiano da velocidade do centro de massa  $T$  do corpo  $t$  e de sua velocidade angular são estimados, de acordo com

$$\bar{\mathbf{q}} = \{u_1(L_t, t) \quad u_2(L_t, t) \quad \alpha(L_t, t)\} \quad (2.123)$$

$$\mathbf{J}_T = \frac{\partial {}_{B_2}\mathbf{v}_T}{\partial \dot{\bar{\mathbf{q}}}} \quad (2.124)$$

$$\mathbf{J}_\alpha = \frac{\partial {}_{B_2}\dot{\boldsymbol{\alpha}}}{\partial \dot{\bar{\mathbf{q}}}} \quad (2.125)$$

As forças generalizadas de inércia são dadas pelo produto do jacobiano pelo vetor de velocidade, sendo que no caso do corpo  $t$  são dados por

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{J}_T m_t {}_{B_2}\mathbf{a}_T + \mathbf{J}_\alpha \mathbf{I}_t {}_{B_2}\ddot{\boldsymbol{\alpha}} \quad (2.126)$$

sendo

$$\mathbf{I}_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_t \end{bmatrix} \quad (2.127)$$

A expressão da força generalizada de inércia apresenta termos não-lineares e trigonométricos envolvendo o ângulo  $\alpha$ . As equações lineares são obtidas assumindo hipóteses tais como  $\cos \alpha \rightarrow 1$  e  $\sin \alpha \rightarrow \alpha$  e desprezando os termos cruzados de deslocamento, velocidade e aceleração entre  $u_1$ ,  $u_2$  e  $\alpha$ . A equação de movimento é obtida a partir da equação de equilíbrio dinâmico  $F^* = F$ . Neste caso  $F = 0$ , pois a força peso é inicialmente desprezada, e, portanto, as equações de movimento são dadas por

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} m_t & 0 & 0 \\ 0 & m_t & m_t r_t \\ 0 & m_t r_t & I_t + m_t r_t^2 \end{bmatrix} \ddot{\bar{\mathbf{q}}} + 2\dot{\phi} \begin{bmatrix} 0 & -m_t & -m_t r_t \\ m_t & 0 & 0 \\ m_t r_t & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{q}}} + \ddot{\phi} \begin{bmatrix} 0 & -m_t & -m_t r_t \\ m_t & 0 & 0 \\ m_t r_t & 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{q}} \\ & + \dot{\phi}^2 \begin{bmatrix} -m_t & 0 & 0 \\ 0 & -m_t & -m_t r_t \\ 0 & -m_t r_t & m_t L_t r_t \end{bmatrix} \bar{\mathbf{q}} + \left\{ \begin{array}{l} -m_t(L_t + r_t)\dot{\phi}^2 \\ m_t(L_t + r_t)\ddot{\phi} \\ I_t + m_t(L_t + r_t)r_t\ddot{\phi} \end{array} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (2.128)$$

### 2.6.3 Implementação numérica das equações de movimento

As equações de movimento do corpo finito  $t$  acoplado a uma viga girante foram determinados pela equação (2.128). A implementação numérica destas equações deve seguir o mesmo esquema proposto para as equações da viga girante, utilizando a separação de variáveis, equações (2.70a) e (2.70b), e funções de interpolação para o deslocamento ao longo da viga. No equacionamento da viga, é adotado que o cisalhamento é desprezível, o que implica que  $\alpha(x) = u_{2,x}(x)$ . Portanto, na equação de movimento do corpo  $t$  deve-se considerar, a partir de (2.70b), que

$$\alpha(x, t) = \psi'_f(x) \mathbf{q}_f(t) \quad (2.129)$$

As equações de movimento de  $t$  dependem do deslocamento da viga girante em  $x = L_t$ . As relações entre os deslocamentos nodais  $\mathbf{q}$  e o deslocamento na extremidade da viga são, portanto, dados por

$$u_1(L_t, t) = \psi_a(L_t) \mathbf{q}_a(t) \quad (2.130a)$$

$$u_2(L_t, t) = \psi_f(L_t) \mathbf{q}_f(t) \quad (2.130b)$$

$$\alpha(L_t, t) = \psi'_f(L_t) \mathbf{q}_f(t) \quad (2.130c)$$

As expressões anteriores são introduzidas na equação (2.128), sendo que a dimensão das matrizes é reduzida. A forma numérica destas equações de movimento é finalmente dada por

$$\mathbf{M}_t \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}_t \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K}_{\alpha_t} + \mathbf{K}_{\Omega_t}) \mathbf{q} = \mathbf{f}_t \quad (2.131)$$

onde

$$\mathbf{M}_t = \begin{bmatrix} m_t \psi_a^T(L_t) \psi_a(L_t) & 0 \\ 0 & m_t \psi_f^T(L_t) \psi_f(L_t) + 2m_t r_t \psi_f^T(L_t) \psi_f'(L_t) + (I_t + m_t r_t^2) (\psi_f'(L_t))^T \psi_f'(L_t) \end{bmatrix} \quad (2.132a)$$

$$\mathbf{G}_t = 2\dot{\phi} \begin{bmatrix} 0 & -m_t \psi_f^T(L_t) \psi_f(L_t) - m_t r_t \psi_f^T(L_t) \psi_f'(L_t) \\ m_t \psi_f^T(L_t) \psi_f(L_t) + m_t r_t \psi_f^T(L_t) \psi_f'(L_t) & 0 \end{bmatrix} \quad (2.132b)$$

$$\mathbf{K}_{\alpha_t} = \ddot{\phi} \begin{bmatrix} 0 & -m_t \psi_f^T(L_t) \psi_f(L_t) - m_t r_t \psi_f^T(L_t) \psi_f'(L_t) \\ m_t \psi_f^T(L_t) \psi_f(L_t) + m_t r_t \psi_f^T(L_t) \psi_f'(L_t) & 0 \end{bmatrix} \quad (2.132c)$$

$$\mathbf{K}_{\Omega_t} = \dot{\phi}^2 \begin{bmatrix} -m_t \psi_a^T(L_t) \psi_a(L_t) & 0 \\ 0 & -m_t \psi_f^T(L_t) \psi_f(L_t) - 2m_t r_t \psi_f^T(L_t) \psi_f'(L_t) + m_t L_t r_t (\psi_f'(L_t))^T \psi_f'(L_t) \end{bmatrix} \quad (2.132d)$$

$$\mathbf{f}_t = \left\{ \begin{array}{c} m_t (L_t + r_t) \psi_a^T(L_t) \dot{\phi}^2 \\ -m_t (L_t + r_t) \psi_f^T(L_t) \ddot{\phi} - (I_t + m_t (L_t + r_t) r_t) (\psi_f'(L_t))^T \ddot{\phi} \end{array} \right\} \quad (2.132e)$$

## 2.7 Exemplos numéricos

### 2.7.1 Escolha da função de interpolação

O objetivo desta primeira análise numérica é verificar como a escolha da função de interpolação, ou função de forma, para o deslocamento influencia os resultados obtidos para as primeiras frequências naturais de uma viga não-girante. O número de funções necessárias para garantir a convergência dos primeiros modos também é analisada. Dessa forma, este estudo procura verificar qual função de forma permite uma convergência rápida, com o menor número de graus de liberdade, para as primeiras frequências de uma viga.

Considerando que a viga esteja engastada, as função de forma modal  $v(x)$  é conhecida e dada por (Blevins, 1979)

$$u_2(x) = \cosh \frac{\beta_i x}{L} - \cos \frac{\beta_i x}{L} - \sigma_i \left( \sinh \frac{\beta_i x}{L} - \sen \frac{\beta_i x}{L} \right) \quad (2.133)$$

onde

$$\cos \beta_i \cosh \beta_i + 1 = 0 \quad \text{e} \quad \sigma_i = \frac{\sinh \beta_i - \sen \beta_i}{\cosh \beta_i + \cos \beta_i} \quad (2.134)$$

sendo as frequências naturais da viga dadas por

$$\omega_i = \frac{\beta_i^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (2.135)$$

e as primeiras  $i$ -ésimas soluções da equação transcendental correspondem a

$$\begin{aligned}\beta_1 &= 1.87510407 & \sigma_1 &= 0.734095514 \\ \beta_2 &= 4.69409113 & \sigma_2 &= 1.018467319 \\ \beta_3 &= 7.85475744 & \sigma_3 &= 0.999224497 \\ \beta_4 &= 10.99554073 & \sigma_4 &= 1.000033553 \\ \beta_5 &= 14.13716839 & \sigma_5 &= 0.999998550 \\ \beta_i &= (2i - 1)\frac{\pi}{2} & \sigma_i &= 1.0; \quad i > 5\end{aligned}$$

Neste exemplo, serão utilizados o Método dos Modos Assumidos, com diferentes funções admissíveis e diferentes dimensões do modelo discretizado, e o Método dos Elementos Finitos. Para o Método dos Modos Assumidos são empregadas cinco famílias de funções de interpolação. Inicialmente são consideradas funções polinomiais do tipo

$$\psi_r(x) = \left(\frac{x}{L}\right)^{r+1} \quad (2.136)$$

empregadas individualmente, sendo que a dimensão do modelo discreto é igual a 1, com polinômios de diferentes graus. Outra abordagem utilizada, emprega uma combinação linear destes polinômios, com grau 2 até o grau  $r + 1$ , resultando assim em modelo de dimensão  $r$ . Duas outras funções de interpolação, baseadas na solução estática de uma viga engastada com duas diferentes condições de contorno foram testadas. Na primeira delas assume-se que as condições de contorno são deslocamento e rotação nulos na extremidade engastada. Na segunda, além destas condições é assumido que o momento fletor na extremidade livre é nulo. Estes dois conjuntos de funções de interpolação são dados, respectivamente, por

$$\psi_1(x) = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad \text{e} \quad \psi_2(x) = -L\left(\frac{x}{L}\right)^2 + L\left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad (2.137a)$$

$$\psi_1(x) = \left[ \frac{3}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^3 \right] \quad (2.137b)$$

e portanto, os modelos discretizados obtidos com estes dois conjuntos de funções apresentam dimensão 2 e 1, respectivamente. Finalmente um modelo com função de interpolação senoidal, representada por (Junkins e Kim, 1993)

$$\psi_r(x) = 1 - \cos\left(\frac{r\pi x}{L}\right) + \frac{1}{2}(-1)^{r+1}\left(\frac{r\pi x}{L}\right)^2 \quad (2.138)$$

é testada. A dimensão do problema neste caso é igual a  $r$ .

As matrizes de massa e rigidez da viga discretizada são escritas a partir das funções de interpolação  $\psi_i(x)$  como

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{ij} &= \int_0^L \rho A \psi_i(x) \psi_j(x) dx \\ \mathbf{K}_{ij} &= \int_0^L EI \psi_i''(x) \psi_j''(x) dx\end{aligned}$$

Os resultados obtidos com estas funções de interpolação estão sumarizados na tabela (2.1), onde são apresentados os valores obtidos para as quatro primeiras frequências normalizadas, que correspondem a  $\omega_n L^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ , da viga engastada e o erro percentual em relação à solução analítica, dada pela equação (2.135). Nesta tabela são apresentados também os valores obtidos pelo Método dos Elementos Finitos, com diferentes números de elementos. A dimensão da discretização, neste caso, é o dobro do número de elementos e um elemento padrão de viga (polinômio cúbico) é utilizado (Cook *et al.*, 1989). Os resultados encontrados mostram que as funções polinomiais, equação (2.136), quando tomadas uma a uma, não são adequadas para ajustar as frequências desta viga. Entretanto, a combinação linear destes polinômios apresenta resultados concordantes com a solução analítica, sendo que a utilização de quatro funções de interpolação é suficiente para garantir a aproximação das duas primeiras frequências com erro da ordem de 0.56%. Contudo, para aproximar as quatro primeiras frequências, como erro máximo de 6.3% são necessárias cinco funções de interpolação. Por outro lado, a utilização das funções de interpolação baseadas na solução estática, equações (2.137a) e (2.137b), é suficiente para aproximar apenas o primeiro modo com erro menor que 1.5%. A solução obtida com a combinação linear das funções da equação (2.138) apresenta resultados bastante próximos da solução analítica, sendo que a utilização de quatro funções permite aproximar as quatro primeiras frequências com erro menor que 1.56%. Entretanto, a taxa de convergência para as frequências mais baixa, neste caso, é mais lenta que a taxa de convergência das funções polinomiais, de tal forma que a introdução de mais funções não acelera a convergência dos frequências mais baixas. Assim, a utilização de cinco funções de interpolação leva a um erro de 0.20% na segunda frequência, que é maior que o erro obtido para esta frequência com a utilização de cinco funções polinomiais. Finalmente, os resultados obtidos pelo Método dos Elementos Finitos mostram que a utilização de quatro elementos é razoável para aproximar os quatro primeiras frequências com erro menor de 1.45%, e as duas primeiras frequências com erro menor que 0.12%, entretanto neste caso a dimensão das matrizes de massa e rigidez é igual a oito, o dobro do número de elementos. Na tabela (2.1) a coluna 'dimensão' representa o tamanho das matrizes resultantes e não o número de elementos utilizados. Os parâmetros utilizados nesta simulação são dados por  $L = 29.20$  mm (comprimento da viga),  $b = 30$  mm (largura da viga),  $h = 1.2$  mm (espessura da viga),  $\rho = 7830$  kg/m<sup>3</sup> (densidade do material da viga),  $E = 2 \cdot 10^{11}$  N/m<sup>2</sup> (módulo de elasticidade).

Estas funções de interpolação foram novamente empregadas para obter as primeiras frequências de uma viga engastada com uma massa concentrada em sua extremidade livre. No caso do Método dos Modos Assumidos, a contribuição da massa concentrada para a matriz de massa discretizada do sistema é dada por

$$\bar{M}_{ij} = m_t \psi_i(L) \psi_j(L) \quad (2.139)$$

onde  $m_t$  é a massa concentrada, fixada à viga em sua extremidade livre em  $x = L_t$ .

Os resultados obtidos para esta condição estão apresentados na tabela (2.2), sendo que a massa concentrada é 10 vezes maior que a massa total da viga. Assim, os parâmetros utilizados nesta simulação são dados por  $L = 29.20$  mm (comprimento da viga),  $b = 30$  mm (largura da viga),

**Tabela 2.1:** Valores obtidos para as quatro primeiras frequências naturais normalizadas de uma viga uniforme com diferentes funções de interpolação utilizando o Método dos Modos Assumidos e o Método dos Elementos Finitos.

Aproximação		Modo 1		Modo 2		Modo 3		Modo 4	
Solução analítica		3.5160		22.0345		61.6972		120.90194	
Função	Dim.	$\bar{\omega}_1$	Erro (%)	$\bar{\omega}_2$	Erro (%)	$\bar{\omega}_3$	Erro (%)	$\bar{\omega}_4$	Erro (%)
$(x/L)^2$	1	4.4721	27.19	-	-	-	-	-	-
$(x/L)^3$	1	9.1652	160.68	-	-	-	-	-	-
$(x/L)^4$	1	16.0997	357.86	-	-	-	-	-	-
Eq(2.137a)	1	3.5327	0.48	34.8069	57.97	-	-	-	-
Eq(2.137b)	2	3.5675	1.47	-	-	-	-	-	-
Eq(2.136)	1	4.4721	27.19	-	-	-	-	-	-
	2	3.5327	0.48	34.8069	57.97	-	-	-	-
	3	3.5171	0.03	22.2334	0.90	118.1444	91.49	-	-
	4	3.5160	0.00	22.1578	0.56	63.3466	2.67	281.5963	132.91
	5	3.5160	0.00	22.0351	0.00	63.2397	2.50	128.5194	6.30
Eq(2.138)	1	3.5399	0.68	-	-	-	-	-	-
	2	3.5224	0.18	22.3636	1.49	-	-	-	-
	3	3.5181	0.06	22.2294	0.88	62.6264	1.51	-	-
	4	3.5170	0.03	22.1055	0.32	62.4631	1.24	122.7874	1.56
	5	3.5166	0.02	22.0784	0.20	61.9814	0.46	122.6443	1.44
MEF	2	3.5327	0.48	34.8069	57.97	-	-	-	-
	4	3.5177	0.05	22.2215	0.85	75.1517	21.82	218.1380	80.43
	6	3.5164	0.01	22.1069	0.33	62.4660	1.25	140.6711	16.35
	8	3.5161	0.00	22.0602	0.12	62.1749	0.77	122.6576	1.45
	10	3.5161	0.00	22.0455	0.05	62.9188	0.36	122.3197	1.17

$h = 1.2$  mm (espessura da viga),  $\rho = 7830$  kg/m<sup>3</sup> (densidade do material da viga),  $E = 2 \cdot 10^{11}$  N/m<sup>2</sup> (módulo de elasticidade) e  $m_t = 0.8231$  kg (massa concentrada na extremidade). Para este caso nota-se novamente que a utilização de funções polinomiais, individualmente não conduz a bons resultados, embora as diferenças encontradas com a solução analítica sejam menores nesta situação. Por outro lado, as respostas obtidas a partir das soluções estáticas, equações (2.137a) e (2.137b), conseguem aproximação com erro menor que 0.01% para a primeira frequência da viga. Já no caso da combinação das funções polinomiais, os resultados encontrados permitem uma boa aproximação das duas primeiras frequências da viga com erro menor que 0.09% com a utilização de quatro funções de interpolação e um erro de cerca de 4.27% para a quarta frequência com cinco funções, que é uma taxa de erro menor que a observada na condição anterior com extremidade livre. Entretanto, os resultados obtidos pela combinação das funções interpoladoras da equação (2.138), são piores do que na condição de viga sem a massa na ponta, pois neste caso com quatro funções interpoladoras o erro encontrado é de 4.15% para a quarta frequência e 0.48% para a segunda. No caso do Método dos Elementos Finitos, a utilização de quatro elementos aproxima as quatro primeiras frequências naturais com erro menor que 2.21% para a quarta frequência, um erro maior que o obtido no estudo da viga sem massa concentrada, mas 0.06% para a segunda frequência, menor que o erro cometido na condição anterior.

Finalmente é analisada a condição em que a massa fixa à extremidade livre da viga não pode ser considerada pontual, sendo que a inércia de rotação deste corpo deve ser incluída na formulação. Também assume-se que existe uma distância entre o centro de massa do corpo na extremidade e o ponto de fixação deste corpo à viga. Utilizando a discretização do Método dos Modos Assumidos, a contribuição deste corpo para a matriz de massa na equação dinâmica do sistema é dada por

$$\bar{M}_{ij} = m_t \psi_i(L)\psi_j(L) + (I_t + m_t r_t^2) \psi'_i(L)\psi'_j(L) + m_t r_t (\psi'_i(L)\psi_j(L) + \psi_i(L)\psi'_j(L)) \quad (2.140)$$

onde  $m_t$  é a massa do corpo, que está fixa à viga em sua extremidade livre em  $x = L_t$ ,  $I_t$  é sua inércia de rotação e  $r_t$ , a distância do ponto de fixação ao centro de massa do corpo.

Novamente, as funções de interpolação anteriormente apresentadas foram utilizadas para obter as quatro primeiras frequências do sistema viga e corpo. Os resultados para esta condição encontram-se organizados na tabela (2.3). Assim, os parâmetros utilizados nesta simulação são dados por  $L = 29.20$  mm (comprimento da viga),  $b = 30$  mm (largura da viga),  $h = 1.2$  mm (espessura da viga),  $\rho = 7830$  kg/m<sup>3</sup> (densidade do material da viga),  $E = 2 \cdot 10^{11}$  N/m<sup>2</sup> (módulo de elasticidade),  $m_t = 0.8231$  kg (massa do corpo finito na extremidade),  $l_t = 35.4$  mm (comprimento do corpo),  $h_t = 60$  mm (espessura do corpo) e  $I_t = m_t(l_t^2 + h_t^2)/12 = 3.7586 \cdot 10^{-4}$  kg m<sup>2</sup> (inércia de rotação do corpo). Neste caso, nota-se que a utilização das família de funções dada pela equação (2.138) não é adequada para aproximar as primeiras frequências deste sistema, sendo erros da ordem de 12% são observados na segunda frequência, embora sejam utilizadas cinco funções de aproximação. No caso das funções polinomiais, (2.136), observa-se uma rápida convergência, sendo que a utilização de quatro funções de interpolação permitem aproximar as duas primeiras frequências com erro menor que 0.01% e as quatro primeiras com erro menor que 2.18%. A con-

**Tabela 2.2:** Valores obtidos para as quatro primeiras frequências naturais (Hz) de uma viga uniforme, com uma massa concentrada na ponta, com diferentes funções de interpolação utilizando o Método dos Modos Assumidos e o Método dos Elementos Finitos. \* A solução analítica corresponde a solução do MEF com 12 elementos.

Aproximação		Modo 1		Modo 2		Modo 3		Modo 4	
Solução analítica*		1.7692		50.6917		163.6228		341.1261	
Função	Dim.	$\bar{\omega}_1$	Erro (%)	$\bar{\omega}_2$	Erro (%)	$\bar{\omega}_3$	Erro (%)	$\bar{\omega}_4$	Erro (%)
$(x/L)^2$	1	2.0465	15.67	-	-	-	-	-	-
$(x/L)^3$	1	3.5546	100.92	-	-	-	-	-	-
$(x/L)^4$	1	5.5154	211.73	-	-	-	-	-	-
Eq(2.137a)	1	1.7692	0.00	67.4781	33.11	-	-	-	-
Eq(2.137b)	2	1.7692	0.00	-	-	-	-	-	-
Eq(2.136)	1	2.0465	15.67	-	-	-	-	-	-
	2	1.7692	0.00	67.4781	33.11	-	-	-	-
	3	1.7692	0.00	50.7969	0.20	246.99	50.95	-	-
	4	1.7692	0.00	50.7420	0.09	166.09	1.51	593.35	73.94
	5	1.7692	0.00	50.6923	0.00	166.01	0.85	355.71	4.27
Eq(2.138)	1	1.7799	0.60	-	-	-	-	-	-
	2	1.7770	0.44	51.8437	2.27	-	-	-	-
	3	1.7706	0.07	51.7525	2.09	169.59	3.65	-	-
	4	1.7704	0.06	50.9363	0.48	169.09	3.34	355.28	4.15
	5	1.7696	0.02	50.9280	0.46	169.25	0.99	354.20	3.83
MEF	2	1.7692	0.40	34.8069	33.11	-	-	-	-
	4	1.7692	0.00	51.1569	0.92	191.31	16.92	509.41	49.33
	6	1.7692	0.00	50.7906	0.19	166.45	1.73	387.58	13.62
	8	1.7692	0.00	50.7233	0.06	164.62	0.61	348.66	2.21
	10	1.7692	0.00	50.7045	0.02	164.04	0.25	348.65	1.03

**Tabela 2.3:** Valores obtidos para as quatro primeiras frequências naturais (Hz) de uma viga uniforme, com uma massa, cuja inércia de rotação não é desprezada, na extremidade livre, com diferentes funções de interpolação utilizando o Método dos Modos Assumidos e o Método dos Elementos Finitos. \* A solução analítica corresponde a solução do MEF com 12 elementos.

Aproximação		Modo 1		Modo 2		Modo 3		Modo 4	
Solução analítica*		1.6147		26.4610		82.4811		206.5063	
Função	Dim.	$\bar{\omega}_1$	Erro (%)	$\bar{\omega}_2$	Erro (%)	$\bar{\omega}_3$	Erro (%)	$\bar{\omega}_4$	Erro (%)
$(x/L)^2$	1	1.7076	5.75	-	-	-	-	-	-
$(x/L)^3$	1	2.7923	72.92	-	-	-	-	-	-
$(x/L)^4$	1	4.0852	152.99	-	-	-	-	-	-
Eq(2.137a)	1	1.6147	0.00	26.8404	1.43	-	-	-	-
Eq(2.137b)	2	1.6167	0.12	-	-	-	-	-	-
Eq(2.136)	1	1.8137	12.32	-	-	-	-	-	-
	2	1.6147	0.00	26.8404	1.43	-	-	-	-
	3	1.6147	0.00	26.4691	0.03	82.94	0.55	-	-
	4	1.6147	0.00	26.4618	0.00	82.85	0.44	211.00	2.18
	5	1.6147	0.00	26.4610	0.00	82.48	0.00	210.95	2.15
Eq(2.138)	1	1.6341	1.20	-	-	-	-	-	-
	2	1.6275	0.79	33.8137	27.79	-	-	-	-
	3	1.6189	0.26	32.1713	21.58	119.50	44.88	-	-
	4	1.6181	0.21	30.2808	14.43	112.80	36.76	279.92	35.55
	5	1.6167	0.12	29.6845	12.18	103.52	25.51	269.60	30.55
MEF	2	1.6147	0.00	26.8404	1.43	-	-	-	-
	4	1.6147	0.00	26.4832	0.08	83.66	1.44	273.39	32.39
	6	1.6147	0.00	26.4653	0.01	82.81	0.40	210.39	1.88
	8	1.6147	0.00	26.4623	0.00	82.58	0.13	208.38	0.91
	10	1.6147	0.00	26.4615	0.00	82.52	0.05	207.30	0.39

vergência observada na solução obtida pelo Método dos Elementos Finitos também é rápida, sendo que a utilização de quatro elementos permite uma aproximação com menos de 0.92% de erro para as quatro primeiras frequências.

Os resultados obtidos com estas funções de interpolação, para a estas três condições apresentadas, permitem concluir que, para aproximar as quatro primeiras frequências naturais da viga engastada com extremidade livre ou com uma massa na ponta, a utilização do Método dos Modos Assumidos com as famílias de funções descritas pelas equações (2.136) e (2.138), apresentam bons resultados. Entretanto, verifica-se que para aproximar as duas primeiras frequências da viga engastada na condição de:

#### 1. extremidade livre

- (a) a função de interpolação senoidal, equação (2.138), permite a aproximação com menor

erro (1.49%) e menor número de funções (2). A inclusão de mais funções não acelera a taxa de convergência destas duas primeiras frequências;

- (b) a função de interpolação polinomial, equação (2.136), permite uma boa aproximação com erro menor que (0.56%) com quatro funções, sendo que a inclusão de mais uma função permite reduzir o erro na segunda frequência para menos de 0.01%;
- (c) a utilização do Método dos Elementos Finitos com três elementos, que é baseado em funções polinomiais, apresenta erro de 0.33% na segunda frequência, sendo que este erro pode ser diminuído rapidamente com a inclusão de mais elementos;

## 2. massa pontual

- (a) a função de interpolação senoidal, equação (2.138), permite uma aproximação apenas razoável, sendo que são necessárias quatro funções para obter um erro de 0.48%;
- (b) a função de interpolação polinomial, equação (2.136), permite uma boa aproximação com erro menor que 0.09% com quatro funções, sendo que a inclusão de mais uma função permite reduzir o erro na segunda frequência para menos de 0.01%;
- (c) a utilização do Método dos Elementos Finitos com três elementos apresenta erro de 0.19% na segunda frequência, sendo que este erro pode ser diminuído rapidamente com a inclusão de mais elementos;

## 3. massa com inércia não desprezível

- (a) a função de interpolação senoidal, equação (2.138), não permite uma boa aproximação, sendo que são necessárias cinco funções para obter um erro de 12.18%;
- (b) a função de interpolação polinomial, equação (2.136), permite uma boa aproximação com erro menor que 0.01% com quatro funções;
- (c) a utilização do Método dos Elementos Finitos com três elementos apresenta erro de 0.01% na segunda frequência;

A análise dos resultados obtidos permite então concluir que a escolha do Método dos Modos Assumidos com funções polinomiais é uma boa escolha para aproximar a solução de vigas engastadas. Para o caso de viga com massa na extremidade livre, essa escolha parece conduzir a resultados ainda melhores. Para que seja garantida uma boa convergência das duas primeiras frequências naturais da viga devem ser empregadas pelo menos quatro funções de interpolação. Outra solução conveniente para os exemplos estudados seria a utilização do Método dos Elementos Finitos, com pelo menos três elementos.

### 2.7.2 Influência da inércia de rotação

Neste segundo exemplo procura-se analisar a influência da inclusão da inércia da massa na extremidade livre nas duas primeiras frequências da viga. Neste caso, serão considerados o Método

**Tabela 2.4:** Frequências naturais (Hz) de uma viga engastada com uma massa na extremidade livre: (a) massa pontual; (b) massa com inércia de rotação fixa pelo centro de massa e (c) massa com inércia de rotação fixa por um ponto qualquer

Aproximação		Modo 1			Modo 2		
		(a)	(b)	(c)	(a)	(b)	(c)
MEF	4	27.5874	26.070	16.8889	1.1228e3	147.4161	218.5144
	5	27.5874	26.070	16.8889	1.1224e3	147.4161	218.5141
	12	27.5874	26.070	16.8889	1.1221e3	147.4161	218.5139
MMA <sup>1</sup>	4	27.5874	26.070	16.8889	1.1221e3	147.4161	218.5139
MMA <sup>2</sup>	4	27.6065	26.1331	17.1204	1.1276e3	185.9177	268.5672
(2.137b)	1	27.5875	26.1161	17.3069	–	–	–

dos Elementos Finitos e o Método dos Modos Assumidos com as funções de interpolação dadas pelas equações (2.136) e (2.138), com quatro funções de interpolação. Os resultados encontram-se sumarizados na tabela (2.4). Estes resultados mostram que quando a massa é considerada pontual na extremidade livre, a diferença entre a primeira e a segunda frequência é acentuada. Por outro lado, a inclusão da inércia de rotação na formulação leva a uma pequena diminuição da primeira frequência da viga e uma grande diferença para a segunda, diminuindo-a severamente. Finalmente, se a viga for considerada não fixa pelo centro de massa, mas por um ponto periférico, os efeitos observados são a diminuição da primeira frequência, neste caso, mais acentuada, e um valor intermediário da segunda. Nos casos estudados a utilização de quatro funções de interpolação polinomiais é muita boa, quando comparada com o Método dos Elementos Finitos com doze elementos, enquanto que utilização da função senoidal não leva a resultados satisfatórios. Os parâmetros utilizados nesta simulação são dados por  $L = 40$  mm (comprimento da viga),  $b = 15$  mm (largura da viga),  $h = 0.5$  mm (espessura da viga),  $\rho = 7830$  kg/m<sup>3</sup> (densidade do material da viga),  $E = 2 \cdot 10^{11}$  N/m<sup>2</sup> (módulo de elasticidade),  $m_t = 0.0482$  kg (massa do corpo finito na extremidade),  $l_t = 30$  mm (comprimento do corpo),  $b_t = 20$  mm (largura do corpo),  $h_t = 10$  mm (espessura do corpo),  $r_t = l_t/2 = 15$  mm (distância do ponto ao qual o corpo é fixo à viga ao centro de massa do corpo) e  $I_t = m_t(l_t^2 + h_t^2)/12 = 4.0167 \cdot 10^{-6}$  kg m<sup>2</sup> (inércia de rotação do corpo).

### 2.7.3 Viga girante com velocidade angular variável

Para testar a implementação numérica apresentada na seção anterior é apresentada a análise dinâmica transiente de uma viga girante, que está livre em uma das extremidades. Neste exemplo serão comparadas três tipos de formulações das equações de movimento. A primeira é a formulação linear em que pequenas deformações e pequenos deslocamentos são adotados. A segunda formulação adota a matriz de rigidez geométrica calculada a partir da força normal ao longo da viga. A terceira abordagem utiliza a formulação em que os deslocamentos e deformações na direção longitudinal são desacoplados. Nas três formulações empregadas, as funções de interpolação adotadas respeitam

as condições de contorno essenciais e naturais, assumindo que a viga é engastada em uma das extremidades e sujeita a uma carga concentrada na extremidade livre. Esta função de interpolação é dada na equação (2.137b).

Na primeira abordagem linear apenas os deslocamentos transversais são considerados, pois a rigidez na direção longitudinal é muito alta. A equação de movimento, neste caso, é a equação (2.91), em que a matriz  $\mathbf{K}_g$  e o vetor  $\mathbf{f}_e$  são desprezados. Para avaliar as matrizes  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{G}$  e  $\mathbf{K}$  e o vetor  $\mathbf{f}$  apenas a parte que contém os termos relacionados à função de interpolação  $\psi_f$  são considerados. Assim, estas matrizes, que neste exemplo se tornam escalares, são dadas por:

$$\mathbf{M} = \int_0^L \rho A \psi_f^T \psi_f dx = \frac{33}{140} \rho AL \quad (2.141a)$$

$$\mathbf{G} = 0 \quad (2.141b)$$

$$\mathbf{K} = \int_0^L EI \psi_f''^T \psi_f'' dx = \frac{3EI}{L^3} \quad (2.141c)$$

$$\mathbf{f} = \ddot{\phi} \frac{11}{40} \rho AL^2 \quad (2.141d)$$

As equações de movimento são então simplificadas para

$$\mathbf{M}\ddot{q} + (\mathbf{K} - \dot{\phi}\mathbf{M})q = -\mathbf{f} \quad (2.142)$$

A segunda formulação inclui na equação de movimento uma nova matriz de rigidez  $\mathbf{K}_g$ , calculada a partir da força normal  $N(x)$ , é dada por

$$N(x) = \dot{\phi}^2 \frac{\rho A (L^2 - x^2)}{2} \quad (2.143)$$

Assim a matriz de rigidez geométrica é dada por:

$$\mathbf{K}_g = \int_0^L N(x) \psi_f'^T \psi_f' dx = \dot{\phi}^2 \frac{81}{280} \rho AL \quad (2.144)$$

A equação de movimento é ampliada para:

$$\mathbf{M}\ddot{q} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_g - \dot{\phi}\mathbf{M})q = -\mathbf{f} \quad (2.145)$$

Para a terceira abordagem a forma das equações segue a forma geral apresentada na equação

(2.114), sendo a forma das matrizes dada na equação (2.115). Estas matrizes são, então, dadas por:

$$\mathbf{M} = \left( \frac{33}{140} + \frac{213}{770L^2}q^2 \right) \rho AL \quad (2.146a)$$

$$\mathbf{D} = \left( \frac{213}{770L^2}q\dot{q} \right) \rho AL \quad (2.146b)$$

$$\mathbf{G} = 0 \quad (2.146c)$$

$$\mathbf{K}_a = \ddot{\phi} \left( \frac{71}{560}q \right) \rho A \quad (2.146d)$$

$$\mathbf{K}_r = -\dot{\phi}^2 \left( \frac{3}{56} - \frac{213}{1540L^2}q^2 \right) \rho AL \quad (2.146e)$$

$$\mathbf{K} = \frac{3EI}{L^3} \quad (2.146f)$$

$$\mathbf{f} = \ddot{\phi} \left( \frac{11}{40} \right) \rho AL^2 \quad (2.146g)$$

A equação de movimento é dada por

$$\mathbf{M}\ddot{q} + \mathbf{D}\dot{q} + (\mathbf{K}_a(q) + \mathbf{K} - \mathbf{K}_r(q))q = -\mathbf{f} \quad (2.147)$$

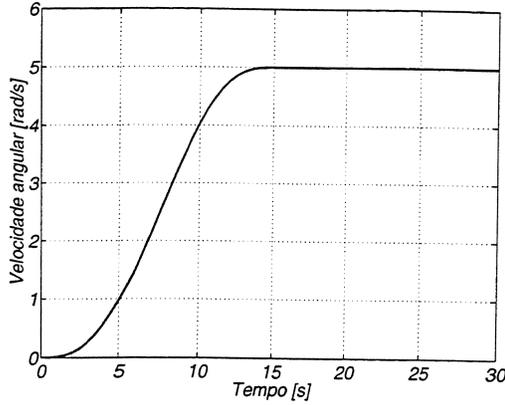
Nota-se que as matrizes não são lineares, envolvendo termos de  $q$  e  $q^2$  na equação (2.147), enquanto nas equações (2.142) e (2.145) as matrizes são constantes. Considerando, então, que a viga é sujeita a seguinte aceleração angular:

$$\phi(t) = \begin{cases} \left( \frac{\omega_s}{T_s} \right) \left[ \left( \frac{t^2}{2} \right) + \left( \frac{T_s}{2\pi} \right)^2 \left( \cos \frac{2\pi t}{T_s} - 1 \right) \right] & 0 \leq t \leq T_s \\ \omega_s \left( t - \frac{T_s}{2} \right) & T_s \leq t \end{cases} \quad (2.148)$$

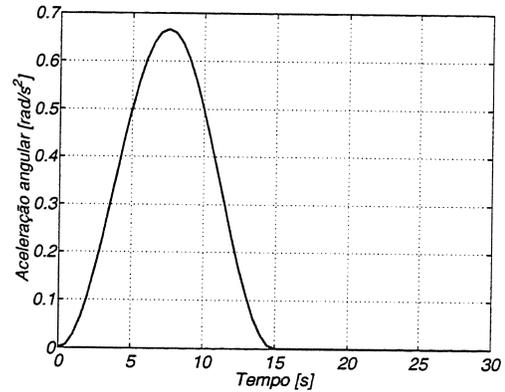
sendo  $\omega_s$  a velocidade angular em regime permanente e  $T_s$ , o tempo de partida. As figuras (2.13(a)) e (2.13(b)) apresentam o perfil da aceleração e velocidade angular a que a viga é submetida. Nestas simulações o tempo de partida escolhido foi  $T_s = 15s$  e diferentes velocidades angulares, entre 0.5 e 12 rad/s foram testadas. Os parâmetros geométricos e do material da viga escolhidos foram  $E = 6.895 \cdot 10^{10} Pa$ ,  $\rho = 2766.67 kg/m^3$ ,  $L = 8 m$ ,  $A = 7.3 \cdot 10^{-5} m^2$  e  $I = 8.218 \cdot 10^{-9} m^4$ .

Os resultados obtidos para o deslocamento na extremidade livre são apresentados na figura (2.14). Para velocidade angular  $\omega_s = 0.5$  rad/s nota-se que os deslocamentos obtidos pelas três diferentes formulações concordam entre si, sendo que pequena divergência é observada para a teoria linear. Com o aumento da velocidade angular verifica-se que os resultados obtidos pela teoria linear divergem completamente, sendo que as outras teorias mantêm-se em concordância. Entretanto, para uma velocidade de rotação mais elevada, as duas aproximações passam também a divergir um pouco.

Este exemplo foi apresentado por Buffinton e Kane (1985) e repetido por outros autores para testar as equações de movimento da viga girante (Simo e Vu-Quoc, 1986b; Simo e Vu-Quoc, 1987;



(a) Velocidade angular  $\dot{\phi}$



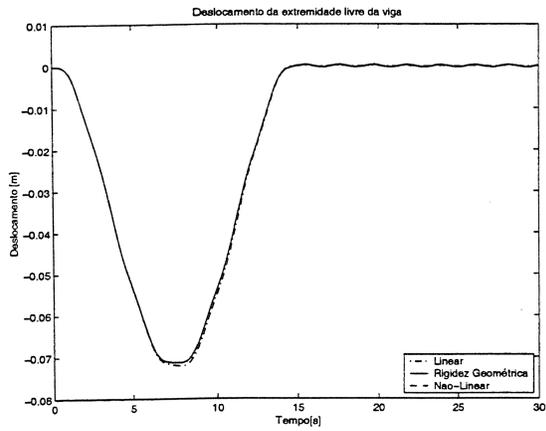
(b) Aceleração angular  $\ddot{\phi}$

**Figura 2.13:** Perfil de velocidade e aceleração angular do rotor.  $T_s = 15$  s e  $\Omega_s = 5$  rad/s.

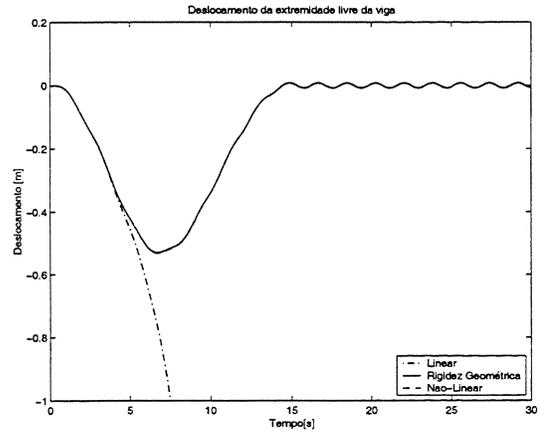
Sharf, 1996; Mayo e Domínguez, 1997). Nos dois primeiros trabalhos os autores procuram mostrar o efeito de enrijecimento centrífugo da viga. Os dois últimos discutem a eficiência numérica dos métodos de solução. Sharf (1996) compara os resultados obtidos através de um modelo que incluía apenas a rigidez geométrica e outro que incluía todos os termos não-lineares de deformação. O autor conclui que para vigas sujeitas a altas velocidades de rotação, as teorias divergem bastante. Entretanto, ressalta que a solução linear requer a utilização de muitos elementos para obter uma boa convergência. Análise semelhante é apresentada por Mayo e Domínguez (1997) em que os autores comparam também um modelo em que os deslocamentos e deformações axiais são desacoplados. Neste caso, os autores ressaltam a eficiência numérica de uma formulação que indiretamente inclui todos os termos não-lineares de deformação.

#### 2.7.4 Viga girante com massa concentrada

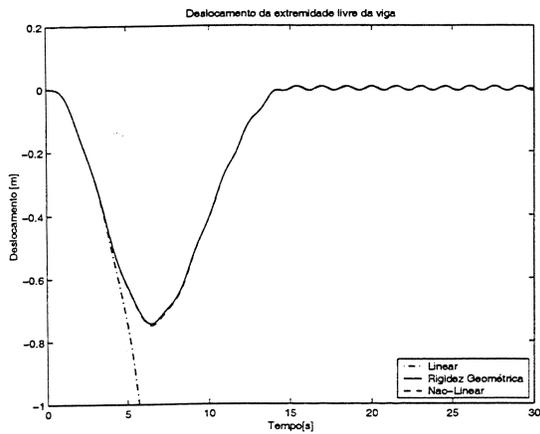
Considera-se agora a análise dinâmica de uma viga com uma massa concentrada na extremidade livre. Os vetores de deslocamento, velocidade e aceleração da massa concentrada correspondem aos vetores destas grandezas da viga em  $x = L_t$ . Novamente os três diferentes modelos são testados novamente. No caso da formulação linear, a equação de movimento (2.142) é a mesma, mas as



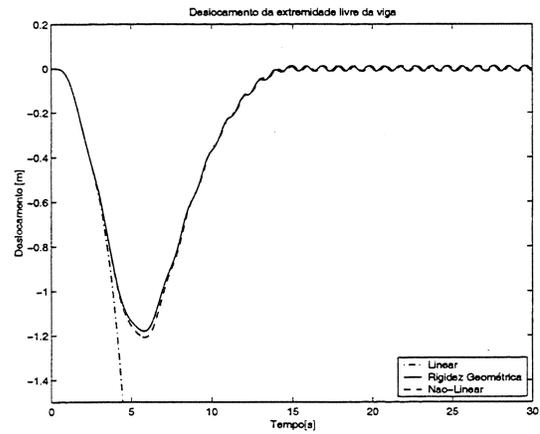
(a)  $\omega_s = 0.5 \text{ rad/s}$



(b)  $\omega_s = 4 \text{ rad/s}$



(c)  $\omega_s = 6 \text{ rad/s}$



(d)  $\omega_s = 12 \text{ rad/s}$

**Figura 2.14:** Comparação entre os resultados obtidos para o deslocamento da extremidade livre da viga utilizando diferentes teorias de viga

matrizes são dadas por

$$\mathbf{M} = \frac{33}{140}\rho AL_t + m_t \quad (2.149a)$$

$$\mathbf{G} = 0 \quad (2.149b)$$

$$\mathbf{K} = \frac{3EI}{L_t^3} \quad (2.149c)$$

$$\mathbf{f} = \ddot{\phi} \left( \frac{11}{40}\rho AL_t^2 + m_t L_t \right) \quad (2.149d)$$

sendo a massa concentrada dada por  $m_t$ .

No caso da segunda abordagem, a equação de movimento é dada por (2.145). A principal diferença é dada pela força normal da viga que apresenta outra condição de contorno. A força normal apresentada na equação (2.143) é calculada supondo que a força normal na extremidade livre é nula. Entretanto, para o problema da viga com a massa conectada na sua extremidade, essa hipótese não é mais válida, sendo que a força normal na extremidade livre corresponde à força normal que a massa concentrada aplica na extremidade da viga. Assim, a força normal é dada por:

$$N(x) = \dot{\phi}^2 \left( \frac{\rho A}{2}(L_t^2 - x^2) + m_t L_t \right) \quad (2.150)$$

Nesta equação, o segundo termo corresponde à componente introduzida pela massa concentrada. A matriz de rigidez geométrica, neste caso, assume a forma

$$\mathbf{K}_g = \dot{\phi}^2 \left( \frac{81}{280}\rho AL_t + \frac{6}{5}m_t \right) \quad (2.151)$$

A terceira forma da equação de movimento é dada por (2.147). As matrizes assumem a forma

$$\mathbf{M} = \left( \frac{33}{140} + \frac{213}{770L_t^2}q^2 \right) \rho AL_t + m_t + m_t \frac{36}{25L_t^2}q^2 \quad (2.152a)$$

$$\mathbf{D} = \left( \frac{213}{770L_t^2}q \dot{q} \right) \rho AL_t + m_t \frac{36}{25L_t^2}q \dot{q} \quad (2.152b)$$

$$\mathbf{G} = 0 \quad (2.152c)$$

$$\mathbf{K}_a = \ddot{\phi} \left( \frac{71}{560}q \right) \rho A + \ddot{\phi} m_t \frac{3}{5L}q \quad (2.152d)$$

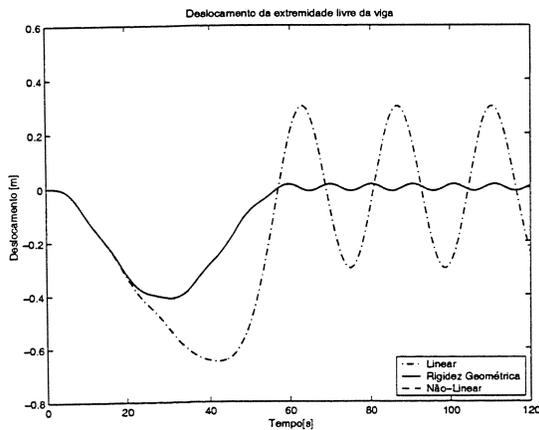
$$\mathbf{K}_r = -\dot{\phi}^2 \left( \frac{3}{56} - \frac{213}{1540L_t^2}q^2 \right) \rho AL_t - \dot{\phi}^2 m_t \left( \frac{1}{5} - \frac{18}{25L_t^2}q^2 \right) \quad (2.152e)$$

$$\mathbf{K} = \frac{3EI}{L_t^3} \quad (2.152f)$$

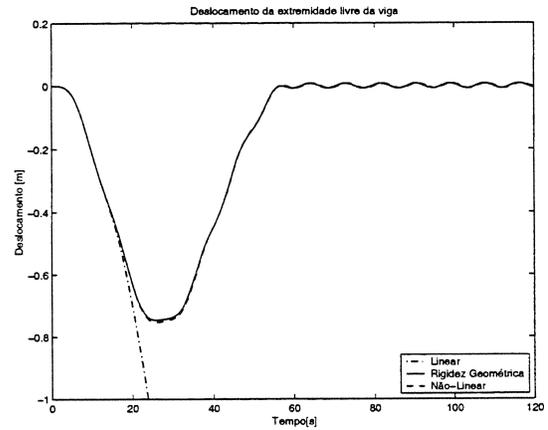
$$\mathbf{f} = \ddot{\phi} \left( \frac{11}{40} \right) \rho AL_t^2 + \ddot{\phi} m_t L_t \quad (2.152g)$$

Considera-se novamente que a viga é sujeita a uma variação angular dada pela equação (2.148). Os parâmetros utilizados na simulação são os mesmos do exemplo anterior, sendo que a massa concentrada  $m_t = 10 \text{ kg}$ . O tempo de partida considerado é  $T_s = 60 \text{ s}$ . O tempo de partida considerado

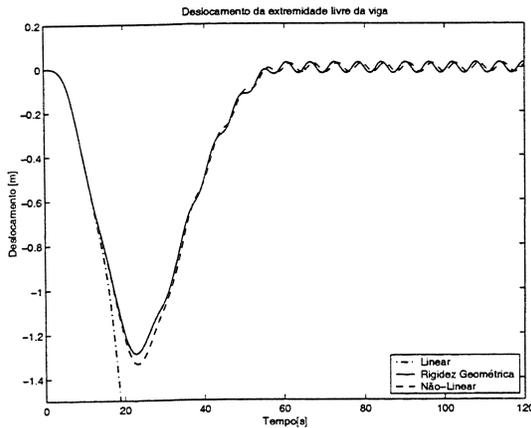
é maior, pois as frequências naturais da viga são menores neste caso. As velocidades de rotação considerados variam de  $\omega_s = 0.5$  rad/s a  $\omega_s = 4$  rad/s. Os resultados obtidos para a simulação numérica são dados na figura (2.15). Nota-se que o deslocamento calculado utilizando a aproximação linear diverge mesmo para velocidades de rotação mais baixas. Para velocidades maiores que  $\omega_s = 0.5$  rad/s, os resultados obtidos com a aproximação linear divergem completamente. No caso em que a velocidade de rotação é dada por  $\omega_s = 1$  rad/s, as aproximações não-lineares concordam entre si. Entretanto, para velocidades maiores estas duas aproximações divergem entre si também. Esta divergência é explicada em parte pelos termos de aceleração da massa concentrada, pois a introdução da massa aumenta os deslocamentos e forças envolvidas (Lai, 1994; Fallahi *et al.*, 1994).



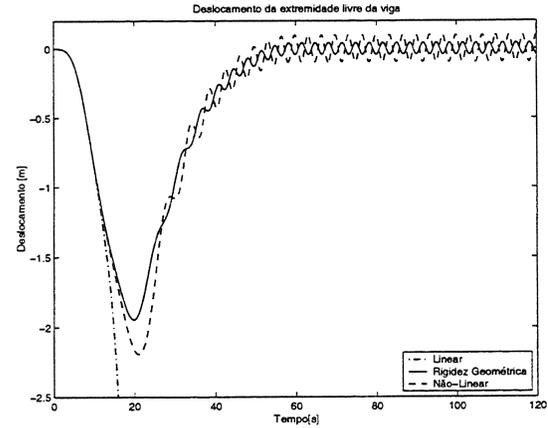
(a)  $\omega_s = 0.5$  rad/s



(b)  $\omega_s = 1$  rad/s



(c)  $\omega_s = 2$  rad/s



(d)  $\omega_s = 4$  rad/s

**Figura 2.15:** Comparação entre os resultados obtidos para o deslocamento da extremidade livre da viga utilizando diferentes aproximações para a deformação da viga com uma massa concentrada na ponta.

## Capítulo 3

# Modelagem matemática - acoplamento rotor-viga girante

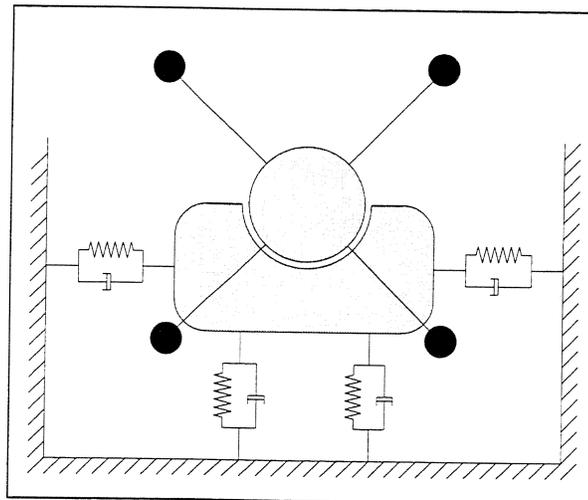
### 3.1 Introdução

O modelo matemático de um rotor acoplado a palhetas flexíveis é desenvolvido neste capítulo. A descrição do movimento relativo entre os componentes deste conjunto é auxiliada pela metodologia de múltiplos corpos (Shabana, 1989; Kane e Levinson, 1985; Santos, 2001). Ao longo deste desenvolvimento, as equações de movimento são obtidas com o Método de Newton-Euler-Jourdain, uma vez que não é necessário calcular as forças de acoplamento entre o rotor e as palhetas.

A dinâmica deste conjunto formado por rotor rígido e palhetas flexíveis é analisada utilizando três diferentes configurações do rotor, sendo estes: (a) rotor plano com movimentos lineares apenas; (b) rotor fixo em uma extremidade e apoiado sobre suportes elásticos, com movimentos angulares apenas; e (c) rotor apoiado sobre suportes elásticos, com movimentos lineares e angulares. Em todos os casos, o rotor é considerado rígido. Por outro lado, as palhetas são aproximadas por vigas girantes com uma massa concentrada em sua extremidade livre. A dinâmica da palheta é aproximada por três diferentes abordagens, correspondentes às relações entre tensão e deformação: (a) linear; (b) linearizada de segunda ordem; e (c) não-linear com desacoplamento entre deslocamento e deformação na direção longitudinal da viga. Tanto a formulação quanto implementação destas três abordagens para uma viga girante foram apresentadas detalhadamente no capítulo (2). Busca-se agora analisar o acoplamento dos movimento do rotor e das palhetas, a influência dos termos não-lineares de deformação da viga girante e a importância do enrijecimento centrífugo no conjunto formado por rotor e palhetas.

### 3.2 Equações de movimento de um rotor plano acoplado a palhetas flexíveis

O primeiro modelo matemático a ser trabalhado é o de um rotor rígido plano, que apresenta dois graus de liberdade, acoplado a quatro palhetas flexíveis. Dessa forma, os movimentos do conjunto formado por rotor e palhetas estão restritos a um plano e o efeitos giroscópico do rotor não influencia a dinâmica do conjunto. O esquema do modelo mecânico deste conjunto é apresentado na figura (3.1). As palhetas são modeladas como vigas, sem massa, conectadas a massas concentradas em sua extremidade livre. A grande vantagem deste tipo de abordagem para o modelo matemático do conjunto rotor-palhetas é a diminuição da dimensão das matrizes resultantes da equação de movimento, quando comparado com um modelo tridimensional do rotor. Os componentes deste conjunto estão representados na figura (3.2), sendo que na figura (3.3) ressaltam-se os pontos de acoplamento entre estes componentes e o centro do rotor.



**Figura 3.1:** Modelo mecânico de um rotor plano, apoiado sobre suportes flexíveis, acoplado a quatro palhetas flexíveis.

A modelagem da deformação e deslocamento das palhetas seguirá três diferentes abordagens. A primeira consiste em adotar que as relações entre deslocamento e deformação da viga são lineares. Na segunda abordagem, termos não-lineares de segunda ordem são incluídos também, embora seja possível obter um modelo linearizado de segunda ordem. Nestes dois casos, considera-se que a viga apresenta apenas deslocamentos transversais, devido à flexão, sendo que os deslocamentos longitudinais da viga são desprezados. O terceiro modelo a ser discutido, por outro lado, inclui tanto os deslocamentos transversais e quanto longitudinais. Neste caso, entretanto, a relação entre deslocamento e deformação longitudinais é obtida de tal forma que o deslocamento longitudinal é independente da deformação na mesma direção. Ou seja, assume-se que a viga está sujeita a grandes deslocamentos transversais e que estes são responsáveis por parte do deslocamento longitudinal, sendo que a outra parcela deste deslocamento é oriunda da deformação longitudinal. O

modelo matemático resultante nesta terceira abordagem, portanto, é não-linear. Estes três diferentes modelos serão desenvolvidos procurando elucidar a importância da escolha do modelo de viga pertencentes a sistemas de múltiplos corpos.

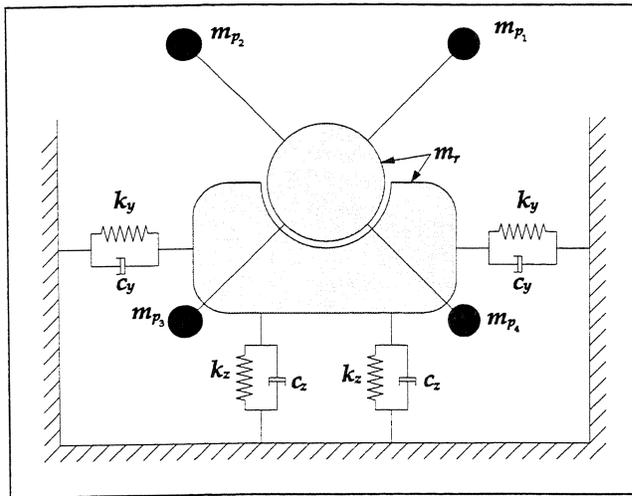


Figura 3.2: Diagrama geral – componentes do conjunto.

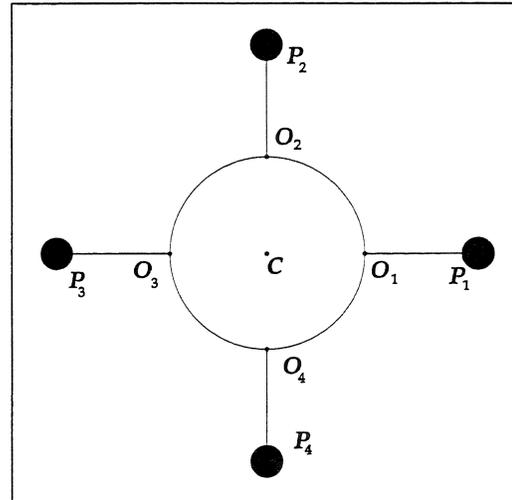


Figura 3.3: Diagrama geral – pontos de acoplamento entre os componentes do conjunto.

### 3.2.1 Sistemas de referência

Para descrever os movimentos do rotor e das palhetas são utilizados sistemas de referência auxiliares. Estes sistemas são móveis e solidários a cada um dos corpos do sistema. Para descrever o movimento de um rotor acoplado a 4 palhetas flexíveis são utilizados 5 sistemas de referência móveis e um sistema de referência inercial. Cada um destes sistemas de coordenadas está representado na figura (3.4). O sistema inercial, que será chamado de  $I$  tem sua origem no centro do rotor, ponto  $C$  em sua posição não deformada, sendo descrito pelas coordenadas  $(x_0, y_0, z_0)$ . A base  $B_1$ , solidária ao rotor, cuja origem também é o centro do rotor, é definida pela rotação de  $\phi$  em torno do eixo  $z_0$ , sendo definida pelas coordenadas  $(x_1, y_1, z_1)$ . Cada uma das bases  $B_{p_i}$ , com  $i = 1, \dots, 4$  é solidária a palheta  $p_i$ , sendo definida pela rotação de  $\theta_i$  em torno do eixo  $z_1$  da base  $B_1$ . A base  $B_{p_i}$  é um *floating frame reference* (Shabana, 1990). A origem de cada base  $B_{p_i}$  é o ponto  $O_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , onde a palheta está fixa ao rotor. As coordenadas desta base são  $(\chi_i, \xi_i, \eta_i)$ . Ressalta-se que, na verdade, as bases  $B_{p_i}$  estão solidárias ao rotor também, ou seja, à base  $B_1$ . Entretanto, é mais fácil descrever a deformação de cada uma das palhetas nas bases  $B_{p_i}$ .

Os diversos sistemas de referência estão relacionados por matrizes de transformação de coordenadas, que permitem transformar um vetor qualquer de uma base para outra. Assim, um vetor descrito com auxílio da base inercial  $I$ , por exemplo,  ${}_I s$  pode ser rescrito com auxílio do sistema

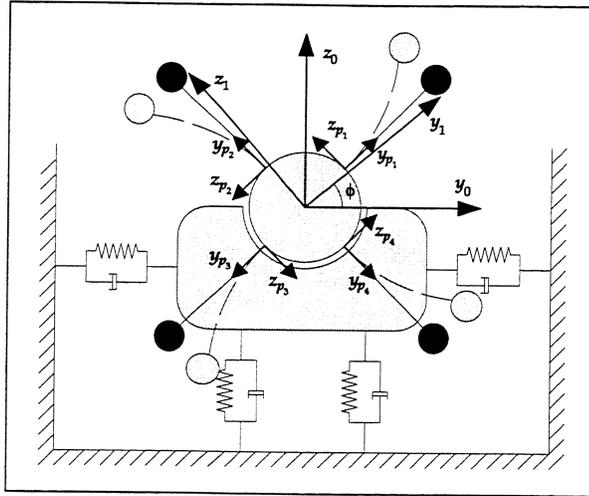


Figura 3.4: Sistemas de referência para descrever o movimento do conjunto rotor-palhetas.

de referência móvel  $B_1$  como

$$B_1 \mathbf{s} = \mathbf{T}_\phi \cdot I \mathbf{s} \quad (3.1)$$

sendo que a matriz de transformação  $\mathbf{T}_\phi$  é dada por

$$\mathbf{T}_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Da mesma forma, um vetor qualquer, escrito com auxílio do sistema móvel  $B_1$ , por exemplo,  $B_1 \mathbf{s}$  é escrito com auxílio do sistema de referência móvel  $B_{p_i}$ , multiplicando pela matriz de transformação correspondente. As matrizes de transformação que relacionam as bases  $B_1$  e  $B_{p_i}$  são dadas por:

$$\mathbf{T}_{\theta_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_i & \sin \theta_i \\ 0 & -\sin \theta_i & \cos \theta_i \end{bmatrix} \quad B_{p_i} \mathbf{s} = \mathbf{T}_{\theta_i} \cdot B_1 \mathbf{s} \quad (3.3)$$

### 3.2.2 Vetores de velocidade e aceleração angulares

Os diferentes sistemas de referência são definidos por rotações consecutivas a partir do sistema de referência inercial. Para facilitar a montagem das matrizes de transformação de coordenadas, considera-se um sistema de coordenadas para cada rotação em torno de um eixo. Este ângulo que define a rotação em torno de um eixo é utilizado para calcular as matrizes de transformação, que, portanto, relacionam os dois sistemas de coordenadas consecutivos. A derivada em relação ao tempo do ângulo de rotação também define a velocidade angular relativa entre os dois sistemas

de coordenadas. A velocidade angular absoluta de um dado sistema referencial é a soma das velocidades angulares relativas entre os diversos sistemas móveis consecutivos que resultam neste sistema de referência. Conseqüentemente, a velocidade angular absoluta de um corpo é a velocidade angular absoluta do sistema móvel solidário a este corpo. A velocidade relativa do sistema móvel  $B_1$  em relação ao sistema referencial inercial corresponde à própria velocidade angular absoluta da base  $B_1$  é dada pelo vetor  ${}_{B_1}\boldsymbol{\omega}_{B_1}$ , enquanto que o vetor  ${}_{B_1}\boldsymbol{\Omega}_r$  representa a velocidade de rotação absoluta do rotor, que é solidário a base  $B_1$ . Estes vetores são dados por

$${}_{B_1}\boldsymbol{\omega}_{B_1} = \begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad {}_{B_1}\boldsymbol{\Omega}_r = \begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

A velocidade angular dos sistemas de referência  $B_{p_i}$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , relativa ao sistema de referência  $B_1$  é nula, pois cada uma destas bases, da mesma forma que cada uma das palhetas, é solidária ao rotor. Dessa forma, a velocidade angular absoluta de cada um dos sistemas de referência  $B_{p_i}$ ,  ${}_{B_{p_i}}\boldsymbol{\omega}_{B_{p_i}}$ , e de cada uma das palhetas  $p_i$ ,  ${}_{B_{p_i}}\boldsymbol{\Omega}_{p_i}$ , correspondem à velocidade angular absoluta da base  $B_1$ , e são dadas respectivamente por:

$${}_{B_{p_i}}\boldsymbol{\omega}_{B_{p_i}} = \mathbf{T}_{\theta_i} \cdot {}_{B_1}\boldsymbol{\omega}_{B_1} = \begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad {}_{B_{p_i}}\boldsymbol{\Omega}_{p_i} = \mathbf{T}_{\theta_i} \cdot {}_{B_1}\boldsymbol{\Omega}_r = \begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

Os vetores de aceleração angular absoluta, seja dos sistemas móveis de referência e quanto dos corpos, são dados pela derivada total, em relação ao tempo, dos vetores de velocidade angular. O vetor de aceleração angular do sistema de referência  $B_1$ , que coincide com a aceleração angular do rotor, e o vetor de aceleração angular de cada uma dos sistemas móveis  $B_{p_i}$ , que coincidem com a aceleração angular de cada uma das palhetas  $p_i$ , são dados respectivamente por:

$${}_{B_1}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{B_1} = {}_{B_1}\dot{\boldsymbol{\Omega}}_r = \begin{Bmatrix} \ddot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad {}_{B_{p_i}}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{B_{p_i}} = {}_{B_{p_i}}\dot{\boldsymbol{\Omega}}_{p_i} = \begin{Bmatrix} \ddot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

### 3.2.3 Vetores de posição

A figura (3.5) apresenta os vetores de posição do centro de massa do rotor e de cada uma das palhetas  $p_i$ . Os vetores de posição absoluta do centro de massa, de cada um destes corpos, são calculados somando-se os vetores de posição relativa que estão apresentados nesta figura.

Para obter o vetor de posição absoluta do centro de massa do rotor,  ${}_{B_1}\mathbf{r}_{C^*}$ , são utilizados dois vetores auxiliares, que são: o vetor de posição do centro geométrico do rotor  $C$ ,  ${}_{I}\mathbf{r}_C$ ; e o vetor de posição relativa do centro de massa do rotor,  $C^*$ , a seu centro geométrico,  $C$ ,  ${}_{B_1}\mathbf{r}_{CC^*}$ . Este último vetor é mais facilmente representado com auxílio do sistema móvel  $B_1$ , solidária ao rotor. Os vetores

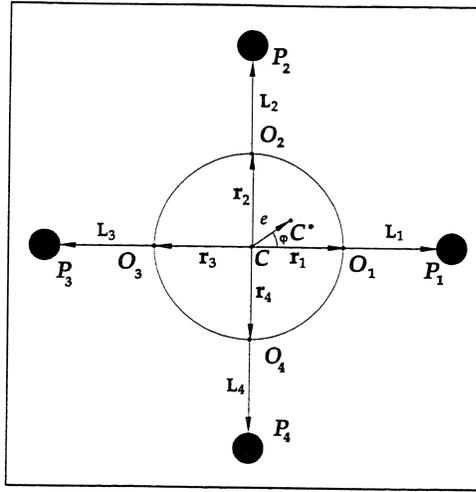


Figura 3.5: Vetores de posição relativas do centro do rotor, centro de massa do rotor e palhetas.

auxiliares, de posição relativa, são dados por

$${}^I\mathbf{r}_C = \begin{Bmatrix} 0 \\ y_o \\ z_o \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad {}^{B_1}\mathbf{r}_{CC^*} = \begin{Bmatrix} 0 \\ e \cos \varphi \\ e \sin \varphi \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

Portanto, o vetor de posição absoluta do centro de massa  $C^*$ ,  ${}^{B_1}\mathbf{r}_{C^*}$ , é dado por:

$${}^{B_1}\mathbf{r}_{C^*} = \mathbf{T}_\phi \cdot {}^I\mathbf{r}_C + {}^{B_1}\mathbf{r}_{CC^*} \quad (3.8)$$

Para obter o vetor de posição absoluta de cada uma das massas concentradas (palhetas),  ${}^{B_{p_i}}\mathbf{r}_{p_i}$ , são empregados, também, vetores auxiliares, que representam posições relativas entre os corpos. Assim, tem-se o vetor de posição relativa do ponto  $O_i$ , fixação da palheta ao rotor, em relação ao centro do rotor  $C$ ,  ${}^{B_{p_i}}\mathbf{r}_{O_i}$  e o vetor de posição da extremidade livre da palheta, relativa ao ponto  $O_i$ ,  ${}^{B_{p_i}}\mathbf{L}_i$ , que define a localização da massa concentrada na ponta da palheta. Finalmente, deve-se somar também o vetor de deslocamento da ponta da palheta devido à deformação elástica,  ${}^{B_{p_i}}\mathbf{u}_i$ . Cada um destes vetores auxiliares de posições relativas são dados por

$${}^{B_{p_i}}\mathbf{r}_{O_i} = \begin{Bmatrix} 0 \\ r_i \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad {}^{B_{p_i}}\mathbf{L}_i = \begin{Bmatrix} 0 \\ L_i \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad {}^{B_{p_i}}\mathbf{u}_i = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ z_i \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

Assim, o vetor de posição absoluta da extremidade livre da palheta, descrito com auxílio da base  $B_{p_i}$ , e dos vetores auxiliares, é dado por

$${}^{B_{p_i}}\mathbf{r}_{p_i} = \mathbf{T}_{\theta_i} \cdot \mathbf{T}_\phi \cdot {}^I\mathbf{r}_C + {}^{B_{p_i}}\mathbf{r}_{O_i} + {}^{B_{p_i}}\mathbf{L}_i + {}^{B_{p_i}}\mathbf{u}_i \quad (3.10)$$

### 3.2.4 Vetores de velocidade e aceleração do centro de massa do rotor

Os vetores de velocidade e aceleração do centro de massa do rotor,  $C^*$  não coincidem com o centro do rotor,  $C$ , uma vez que uma excentricidade  $e$  foi incluída para modelar o desbalanço do rotor. Desta forma, os vetores de velocidade e aceleração do centro de massa do rotor são calculados em função dos vetores do centro do rotor e da velocidade e aceleração relativa entre estes pontos. Os vetores de velocidade,  ${}^I\mathbf{v}_C$ , e aceleração,  ${}^I\mathbf{a}_C$ , absolutas do centro do rotor  $C$  são obtidas, diretamente, das derivadas destes vetores em relação ao tempo. Estes vetores são dados, respectivamente, por

$${}^I\mathbf{v}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{y}_o \\ \dot{z}_o \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad {}^I\mathbf{a}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ \ddot{y}_o \\ \ddot{z}_o \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Estes mesmos vetores podem ser representados com auxílio da base  $B_1$ , de tal forma que se obtém:

$${}_{B_1}\mathbf{v}_C = \mathbf{T}_\phi \cdot {}^I\mathbf{v}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{y}_o \cos \phi + \dot{z}_o \sin \phi \\ -\dot{y}_o \sin \phi + \dot{z}_o \cos \phi \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

$${}_{B_1}\mathbf{a}_C = \mathbf{T}_\phi \cdot {}^I\mathbf{a}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ \ddot{y}_o \cos \phi + \ddot{z}_o \sin \phi \\ -\ddot{y}_o \sin \phi + \ddot{z}_o \cos \phi \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

A velocidade do centro de massa do rotor é, então, obtida pela soma do vetor de velocidade do centro do rotor,  $\mathbf{v}_C$ , com a derivada do vetor de posição do centro de massa ao centro do rotor,  $\mathbf{r}_C^*$ . Aquele vetor é representado mais facilmente no sistema inercial  $I$ ,  ${}^I\mathbf{v}_{C^*}$ . Analogamente, o vetor de aceleração do centro de massa,  ${}^I\mathbf{a}_{C^*}$ , é obtida somando a aceleração absoluta do centro do rotor e a derivada segunda do vetor de posição relativa entre o centro do rotor e o centro de massa,  $\mathbf{r}_C^*$ . Os vetores de velocidade e aceleração do centro de massa do rotor, representados no referencial inercial  $I$ , são finalmente dados por

$$\begin{aligned} {}^I\mathbf{v}_{C^*} &= {}^I\mathbf{v}_C + \mathbf{T}_\phi^T \cdot \left( \frac{d}{dt} ({}_{B_1}\mathbf{r}_{CC^*}) + {}_{B_1}\boldsymbol{\omega}_{B_1} \times {}_{B_1}\mathbf{r}_{CC^*} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{y}_o - e\dot{\phi} \sin(\varphi + \phi) \\ \dot{z}_o + e\dot{\phi} \cos(\varphi + \phi) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} {}^I\mathbf{a}_{C^*} &= {}^I\mathbf{a}_C + \mathbf{T}_\phi^T \cdot \left( \frac{d^2}{dt^2} ({}_{B_1}\mathbf{r}_{CC^*}) + 2 {}_{B_1}\boldsymbol{\omega}_{B_1} \times \frac{d}{dt} ({}_{B_1}\mathbf{r}_{CC^*}) + \right. \\ &\quad \left. {}_{B_1}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{B_1} \times {}_{B_1}\mathbf{r}_{CC^*} + {}_{B_1}\boldsymbol{\omega}_{B_1} \times {}_{B_1}\boldsymbol{\omega}_{B_1} \times {}_{B_1}\mathbf{r}_{CC^*} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \ddot{y}_o - e\dot{\phi}^2 \cos(\varphi + \phi) - e\ddot{\phi} \sin(\varphi + \phi) \\ \ddot{z}_o - e\dot{\phi}^2 \sin(\varphi + \phi) + e\ddot{\phi} \cos(\varphi + \phi) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.15)$$

### 3.2.5 Vetores de velocidade e aceleração das palhetas

Os vetores de velocidade e aceleração das palhetas são obtidas de maneira análoga ao centro de massa do rotor. Na verdade, estão sendo considerados os vetores de velocidade e aceleração da massa concentrada fixa à ponta da palheta, uma vez que a massa da viga é desprezada. A velocidade de cada uma das palhetas  $p_i$  é obtida somando-se o vetor de velocidade do ponto  $O_i$ , em que a viga está montada ao rotor, à velocidade relativa da palheta a este ponto, derivada do vetor de posição  ${}_{B_{p_i}}\mathbf{L}_i$ . Por sua vez, o vetor de velocidade do ponto  $O_i$  é a soma do vetor de velocidade do centro do rotor  $C$  e a derivada do vetor de posição do ponto  $O_i$ ,  $r_{O_i}$ . Os vetores de velocidade e aceleração,  ${}_{B_{p_i}}\mathbf{v}_{O_i}$  e  ${}_{B_{p_i}}\mathbf{a}_{O_i}$  respectivamente, são dados por

$$\begin{aligned} {}_{B_{p_i}}\mathbf{v}_{O_i} &= \mathbf{T}_{\theta_i} \cdot \mathbf{T}_{\phi} \cdot I\mathbf{v}_C + {}_{B_{p_i}}\boldsymbol{\omega}_{B_{p_i}} \times {}_{B_{p_i}}\mathbf{r}_{O_i} \\ &= \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \dot{y}_o \cos(\phi + \theta_i) + \dot{z}_o \sin(\phi + \theta_i) \\ -\dot{y}_o \sin(\phi + \theta_i) + \dot{z}_o \cos(\phi + \theta_i) + r_i \dot{\phi} \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} {}_{B_{p_i}}\mathbf{a}_{O_i} &= \mathbf{T}_{\theta_i} \cdot \mathbf{T}_{\phi} \cdot I\mathbf{a}_C + ({}_{B_{p_i}}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{B_{p_i}} \times {}_{B_{p_i}}\mathbf{r}_{O_i} + {}_{B_{p_i}}\boldsymbol{\omega}_{B_{p_i}} \times {}_{B_{p_i}}\boldsymbol{\omega}_{B_{p_i}} \times {}_{B_{p_i}}\mathbf{r}_{O_i}) \\ &= \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -r_i \dot{\phi}^2 + \ddot{y}_o \cos(\phi + \theta_i) + \ddot{z}_o \sin(\phi + \theta_i) \\ r_i \ddot{\phi} - \ddot{y}_o \sin(\phi + \theta_i) + \ddot{z}_o \cos(\phi + \theta_i) \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Deve-se notar na equação anterior que os termos relacionados a aceleração de Coriolis e aceleração relativa não aparecem na expressão da aceleração, pois o vetor  $\mathbf{r}_{O_i}$  é um vetor solidário ao sistema de referência  $B_1$ , e, portanto, solidário ao rotor. Finalmente, os vetores de velocidade e aceleração de cada uma das palhetas  $p_i$   ${}_{B_{p_i}}\mathbf{v}_{p_i}$  e  ${}_{B_{p_i}}\mathbf{a}_{p_i}$  respectivamente, são dados por

$$\begin{aligned} {}_{B_{p_i}}\mathbf{v}_{p_i} &= {}_{B_{p_i}}\mathbf{v}_{O_i} + \frac{d}{dt}({}_{B_{p_i}}\mathbf{u}_i) + {}_{B_{p_i}}\boldsymbol{\omega}_{B_{p_i}} \times ({}_{B_{p_i}}\mathbf{L}_i + {}_{B_{p_i}}\mathbf{u}_i) \\ &= \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \dot{y}_o \cos(\phi + \theta_i) + \dot{z}_o \sin(\phi + \theta_i) - z_i \dot{\phi} \\ -\dot{y}_o \sin(\phi + \theta_i) + \dot{z}_o \cos(\phi + \theta_i) + \dot{z}_i + L_i \dot{\phi} + r_i \dot{\phi} \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} {}_{B_{p_i}}\mathbf{a}_{p_i} &= {}_{B_{p_i}}\mathbf{a}_{O_i} + \frac{d^2}{dt^2}({}_{B_{p_i}}\mathbf{u}_i) + 2 {}_{B_{p_i}}\boldsymbol{\omega}_{B_{p_i}} \times \frac{d}{dt}({}_{B_{p_i}}\mathbf{u}_i) \\ &\quad + {}_{B_{p_i}}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{B_{p_i}} \times ({}_{B_{p_i}}\mathbf{L}_i + {}_{B_{p_i}}\mathbf{u}_i) \\ &\quad + {}_{B_{p_i}}\boldsymbol{\omega}_{B_{p_i}} \times {}_{B_{p_i}}\boldsymbol{\omega}_{B_{p_i}} \times ({}_{B_{p_i}}\mathbf{L}_i + {}_{B_{p_i}}\mathbf{u}_i) \\ &= \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -2\dot{z}_i \dot{\phi} - (L_i + r_i) \dot{\phi}^2 - z_i \ddot{\phi} + \ddot{y}_o \cos(\phi + \theta_i) + \ddot{z}_o \sin(\phi + \theta_i) \\ -z_i \ddot{\phi}^2 + \ddot{z}_i + (L_i + r_i) \ddot{\phi} - \ddot{y}_o \sin(\phi + \theta_i) + \ddot{z}_o \cos(\phi + \theta_i) \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Deve-se notar que o vetor de posição da palheta é composta de duas parcelas: a localização da palheta em relação ao ponto  $O_i$ , vetor  $\mathbf{L}_i$ , e a deformação elástica, vetor  $\mathbf{u}_i$ . Apenas a parcela

referente à deformação elástica apresenta derivada em relação ao tempo, assim os termos referentes à velocidade e aceleração relativas e aceleração de Coriolis do vetor  $\mathbf{L}_i$  são nulos.

### 3.2.6 Vetores de forças externas

Os esforços externos atuantes sobre o conjunto rotor-palhetas são apresentados na figura (3.6). Portanto, os esforços sobre o rotor são a força peso de cada um dos corpos. Estas forças são representados no sistema referencial inercial  $I$ , sendo que os vetores correspondentes são dados por

$${}^I\mathbf{P}_r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g m_r \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

$${}^I\mathbf{P}_{p_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g m_{p_i} \end{pmatrix} \quad \text{ou ainda} \quad {}^{B_{p_i}}\mathbf{P}_{p_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \sin(\phi + \theta_i) m_{p_i} \\ -g \cos(\phi + \theta_i) m_{p_i} \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

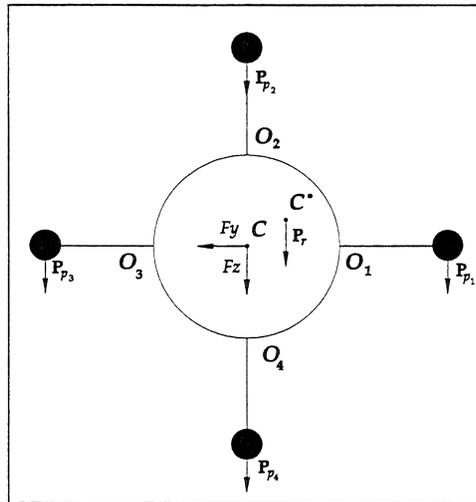


Figura 3.6: Forças externas atuantes sobre o conjunto rotor-palhetas.

As forças de acoplamento entre o rotor e cada uma das palhetas não são apresentadas, pois estas são forças internas do sistema. A metodologia de obtenção de equações de movimento empregada, o princípio de Jourdain (Shabana, 1989; Baruh, 1999; Santos, 2001), baseia-se na obtenção das potências virtuais do sistema. Desta forma, forças que não realizam trabalho, ou no caso, potência, não precisam ser consideradas durante a modelagem.

### 3.2.7 Propriedades inerciais

A massa total do rotor é representada nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  pelas grandezas escalares  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$ , considerando-se que a massa móvel em cada uma das direções possa ser diferente. Assim, a

massa do rotor é representada matricialmente por:

$$\mathbf{m}_r = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

O tensor de inércia do rotor em relação ao centro de massa do rotor é dado por:

$${}_{B_1}\mathbf{I}_{C^*} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

A massa de cada uma das palhetas é dada por  $m_{p_i}$ . Neste modelo a massa da palheta corresponde à massa concentrada na extremidade livre, pois adota-se que a massa da viga distribuída é muito menor que a massa concentrada. Além disso a inércia da massa da palheta é desprezada. A matriz de massa da palheta  $p_i$ , então, dada por:

$$\mathbf{m}_{p_i} = \begin{bmatrix} m_{p_i} & 0 & 0 \\ 0 & m_{p_i} & 0 \\ 0 & 0 & m_{p_i} \end{bmatrix} \quad (i = 1, \dots, 4) \quad (3.24)$$

### 3.2.8 Jacobianos das velocidades dos corpos

A metodologia utilizada para a obtenção das equações de movimento do modelo matemático do conjunto rotor-palhetas envolve a aplicação do Princípio de Jourdain, ou ainda, princípio das potências virtuais. A equação de equilíbrio dinâmico entre as potências virtuais das forças de inércia, das potências virtuais das forças externas e da energia potencial leva à equação de movimento. Entretanto, para obter as potências virtuais é necessário projetar as forças na direção das coordenadas generalizadas do sistema.

As coordenadas generalizadas representam o conjunto mínimo de coordenadas, suficiente para descrever a configuração de um sistema, em qualquer instante de tempo. Este conjunto de coordenadas é linearmente independente e corresponde aos graus de liberdade do sistema. No caso do modelo do conjunto rotor-palhetas, o número de graus de liberdade é seis, sendo que as coordenadas generalizadas são dadas por:

$$\mathbf{q}(t) = \left\{ y_o(t) \quad z_o(t) \quad z_1(t) \quad z_2(t) \quad z_3(t) \quad z_4(t) \right\}^T \quad (3.25)$$

Portanto, os graus de liberdade do sistema correspondem aos deslocamentos do centro do rotor,  $y_o$  e  $z_o$ , e aos deslocamentos das palhetas  $z_i$ . Definido o conjunto das coordenadas generalizadas, deve-se determinar os vetores de direção para projeção das forças, que são determinados pelo jacobiano das velocidades do ponto em que as forças são aplicadas. No caso das forças de inércia,

este ponto é o próprio centro de massa de cada um dos corpos em relações aos vetores. O jacobiano é a derivada do vetor de velocidade em relação ao vetor  $\dot{\mathbf{q}}(t)$ .

No caso do rotor, o jacobiano da velocidade do centro de massa do rotor,  ${}^I\mathbf{J}_{\mathbf{v}_{C^*}}$ , e o jacobiano da velocidade angular do rotor,  ${}_{B_1}\mathbf{J}_{\Omega_r}$  são dados, respectivamente, por

$${}^I\mathbf{J}_{\mathbf{v}_{C^*}} = \frac{d}{d\dot{\mathbf{q}}}({}^I\mathbf{v}_{C^*}) \quad \text{e} \quad {}_{B_1}\mathbf{J}_{\Omega_r} = \frac{d}{d\dot{\mathbf{q}}}({}_{B_1}\Omega_r) \quad (3.26)$$

Com a determinação do jacobiano do centro de massa do rotor, o vetor de aceleração pode ser escrito em função do jacobiano  ${}^I\mathbf{J}_{\mathbf{v}_{C^*}}$  e da derivada segunda do vetor de coordenadas generalizadas  $\ddot{\mathbf{q}}(t)$ . A forma deste vetor será usada posteriormente na equação de equilíbrio. Desta maneira obtém-se

$${}^I\mathbf{a}_{C^*} = [{}^I\mathbf{J}_{\mathbf{v}_{C^*}}]\ddot{\mathbf{q}} + {}^I\mathbf{j}_{\mathbf{a}_{C^*}} \quad \text{e} \quad {}_{B_1}\dot{\Omega}_r = [{}_{B_1}\mathbf{J}_{\Omega_r}]\ddot{\mathbf{q}} + {}_{B_1}\mathbf{j}_{\dot{\Omega}_r} \quad (3.27)$$

Analogamente, o jacobiano do vetor de velocidade do centro de massa de cada uma das palhetas  $p_i$  e o vetor de aceleração são dados por:

$${}_{B_{p_i}}\mathbf{J}_{\mathbf{a}_{p_i}} = \frac{d}{d\dot{\mathbf{q}}}({}_{B_{p_i}}\mathbf{v}_{p_i}) \quad \text{e} \quad {}_{B_{p_i}}\mathbf{a}_{p_i} = [{}_{B_{p_i}}\mathbf{J}_{\mathbf{a}_{p_i}}]\ddot{\mathbf{q}} + {}_{B_{p_i}}\mathbf{j}_{\mathbf{a}_{p_i}} \quad (3.28)$$

### 3.2.9 Energia potencial

No caso de elementos como molas e corpos elásticos, a potência virtual correspondente, ou ainda força generalizada, é dada diretamente pela derivada da energia potencial em relação ao vetor de coordenadas generalizadas  $\mathbf{q}(t)$ ,

$$\mathbf{F}_\pi = -\frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{q}} \quad (3.29)$$

onde  $\pi$  é a expressão da energia potencial.

No caso do rotor, energia potencial é armazenada nos suportes elásticos. De maneira simplificada, a expressão da energia potencial  $\pi_r$  é dada por

$$\pi_r = \frac{1}{2}(k_y y_o^2 + k_z z_o^2) \quad (3.30)$$

onde  $k_y$  e  $k_z$  representam os valores de constante de mola dos suportes elásticos nas direções  $y$  e  $z$ , respectivamente.

No caso das palhetas, a energia potencial é armazenada nas palhetas (vigas), devido à deformação elástica das mesmas. Utilizando, a expressão para a energia potencial linear em um viga, a energia potencial de cada palheta é dada por

$$\pi_{p_i} = \frac{1}{2} \int_0^{L_1} EI \left( \frac{\partial^2 v_i}{\partial \xi_i^2} \right)^2 d\xi_i \quad (3.31)$$

Com a utilização da função de interpolação apresentada no capítulo anterior, equação (2.137b), o deslocamento ao longo de cada uma das vigas é dado por

$$v_i(\xi_i) = \frac{3}{L_i^3} \left( L_i \frac{\xi_i^2}{2} - \frac{\xi_i^3}{6} \right) z_i \quad (3.32)$$

E portanto, a energia potencial de cada palheta  $p_i$  é dada por

$$\pi_{p_i} = \frac{3}{2} \left( \frac{EI}{L_i^3} \right) z_i^2 = \frac{1}{2} k_i z_i^2 \quad \text{sendo} \quad k_i = \left( \frac{3EI}{L_i^3} \right) \quad (3.33)$$

### 3.2.10 Equações de equilíbrio dinâmico – equações de Newton-Euler-Jourdain

O ponto de equilíbrio entre as potências virtuais do sistema, quando a potência ativa das forças inerciais se iguala à potência ativa das forças externas, fornecem as equações de Newton-Euler-Jourdain. O resultado é o sistema de equações de movimento do sistema. Neste tipo de metodologia, as forças internas passivas, ou par de forças interna passivas que não realizam trabalho, não precisam ser estimadas. Esta é a grande vantagem deste tipo de abordagem para modelar sistemas de múltiplos corpos, a diminuição do número de vetores de força desenvolvidos. As potências virtuais são a projeção das forças na direção das coordenadas generalizadas de um determinado sistema, sendo que esta direção é definida pelo jacobiano da velocidade do centro de massa de cada um dos corpos (Shabana, 1989; Baruh, 1999; Santos, 2001). A forma da equação dinâmica de equilíbrio é dada por

$$\sum_{n=1}^N \mathbf{J}_{\mathbf{v}_n}^T \cdot \left[ m_n \mathbf{a}_n - \sum_{k=1}^{K_f} \mathbf{F}_k^n \right] + \sum_{n=1}^N \mathbf{J}_{\Omega_n}^T \cdot \left[ \mathbf{I}_n \frac{d(\Omega_n)}{dt} + \Omega_n \times (\mathbf{I}_n \Omega_n) - \sum_{k=1}^{K_m} \mathbf{M}_k^n \right] + \sum_{k=1}^{K_\pi} \frac{\partial \pi_k}{\partial \mathbf{q}} = 0 \quad (3.34)$$

sendo  $\mathbf{J}_{\mathbf{v}_n}$ , o jacobiano da velocidade do centro de massa do corpo  $k$ ,  $\mathbf{a}_n$ , o respectivo vetor de aceleração,  $m_n$ , sua massa,  $\Omega_n$ , o vetor de velocidade angular absoluta,  $\mathbf{J}_{\Omega_n}$ , o jacobiano da velocidade de rotação, e,  $\mathbf{I}_k$ , o tensor de inércia do corpo. O número total de corpos do sistema é  $N$ , sendo que cada destes pode estar sujeito a  $K_f$  forças externas,  $\mathbf{F}_k^n$ , e  $K_m$  momentos aplicados,  $\mathbf{M}_k^n$ .

Para simplificar a manipulação destas equações de movimento, a forma do vetor de aceleração do corpo  $n$  é rescrito em função do jacobiano da velocidade do centro de massa, do vetor da derivada segunda das coordenadas generalizadas  $\ddot{\mathbf{q}}$  e de um vetor resíduo, o qual não apresenta termos de derivada segunda. Da mesma forma, o vetor da derivada da velocidade angular é rescrito. Estes dois vetores são, então, representados respectivamente por

$$\mathbf{a}_n = [\mathbf{J}_{\mathbf{v}_n}] \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{j}_{\mathbf{a}_n} \quad \text{e} \quad \frac{d\Omega_n}{dt} = [\mathbf{J}_{\Omega_n}] \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{j}_{\Omega_n} \quad (3.35)$$

A forma das equações de Newton-Euler-Jourdain, apresentadas nas equações (3.34), com a substituição destas novas expressões dos vetores de aceleração, equação (3.35), finalmente é dada

por:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \left( [\mathbf{J}_{\mathbf{v}_n}^T m_n \mathbf{J}_{\mathbf{v}_n}] \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}_{\mathbf{v}_n}^T m_n \mathbf{j}_{\mathbf{a}_n} + [\mathbf{J}_{\Omega_n}^T \mathbf{I}_n \mathbf{J}_{\Omega_n}] \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}_{\Omega_n}^T \mathbf{I}_n \mathbf{j}_{\Omega_n} \right. \\ \left. + \mathbf{J}_{\Omega_n}^T [\Omega_n \times \mathbf{I}_n \Omega_n] - \mathbf{J}_{\mathbf{v}_n}^T \cdot \sum_{k=1}^{K_f} \mathbf{F}_k^n - \mathbf{J}_{\Omega_n}^T \cdot \sum_{k=1}^{K_m} \mathbf{M}_k^n \right) + \sum_{k=1}^{K_\pi} \frac{\partial \pi_k}{\partial \mathbf{q}} = 0 \end{aligned} \quad (3.36)$$

No caso do sistema formado pelo conjunto do rotor plano com palhetas flexíveis, o número total de corpos é cinco, sendo que seis coordenadas generalizadas definem sua configuração. Os jacobianos da velocidade do centro de massa do rotor, de sua velocidade angular, bem como do centro de massa de cada uma das palhetas  $p_i$  foram apresentadas nas equações (3.26), (3.27) e (3.28), respectivamente. As forças externas, força peso, foram apresentadas nas equações (3.20) e (3.21). Finalmente, as expressões para a energia potencial armazenada nos suportes elásticos,  $\pi_r$ , e nas vigas devido à deformação,  $\pi_{p_i}$ , foram apresentadas nas equações (3.30) e (3.33), respectivamente. A substituição destas expressões na equação (3.36) resulta na equação de equilíbrio dinâmico do conjunto:

$$\begin{aligned} [\mathbf{J}_{\mathbf{v}_{C^*}}^T m_r \mathbf{J}_{\mathbf{v}_{C^*}} + \mathbf{J}_{\Omega_r}^T \mathbf{I}_{C^*} \mathbf{J}_{\Omega_r} + \sum_{i=1}^4 \mathbf{J}_{\mathbf{v}_{p_i}}^T m_{p_i} \mathbf{J}_{\mathbf{v}_{p_i}}] \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}_{\mathbf{v}_{C^*}}^T m_r \mathbf{j}_{\mathbf{v}_{C^*}} + \mathbf{J}_{\Omega_r}^T \mathbf{I}_{C^*} \mathbf{j}_{\Omega_r} + \mathbf{J}_{\Omega_r}^T [\Omega_r \times \mathbf{I}_{C^*} \Omega_r] + \\ + \sum_{i=1}^4 \mathbf{J}_{\mathbf{v}_{p_i}}^T m_r \mathbf{j}_{\mathbf{a}_{p_i}} - \mathbf{J}_{\mathbf{v}_{C^*}}^T \cdot \mathbf{P}_r - \sum_{i=1}^4 \mathbf{J}_{\mathbf{v}_{p_i}}^T \cdot \mathbf{P}_{p_i} + \frac{\partial \pi_r}{\partial \mathbf{q}} + \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \pi_{p_i}}{\partial \mathbf{q}} = 0 \end{aligned} \quad (3.37)$$

### 3.2.11 Equações de movimento

#### (A) Modelo linear

A equação de movimento resultante para o modelo matemático linear é obtido diretamente da equação de equilíbrio (3.37). Após rearranjar os termos desta equação, obtém-se

$$\mathbf{M}(\phi) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\phi, \dot{\phi}) \dot{\mathbf{q}} + [\mathbf{K} + \mathbf{K}_\Omega(\phi, \dot{\phi}^2) + \mathbf{K}_\alpha(\phi, \ddot{\phi})] \mathbf{q} = \mathbf{f}_\Omega(\phi, \dot{\phi}^2) + \mathbf{f}_\alpha(\phi, \ddot{\phi}) + \mathbf{f}_p(\phi) \quad (3.38)$$

A forma destas matrizes e destes vetores está apresentada nas equações (3.39), (3.40) e (3.41), sendo que se deve ressaltar que as matrizes de massa,  $\mathbf{M}(\phi)$ , coriolis,  $\mathbf{C}(\phi, \dot{\phi})$ , rigidez centrífuga,  $\mathbf{K}_\Omega(\phi, \dot{\phi}^2)$  e rigidez associada a aceleração angular  $\ddot{\phi}$ ,  $\mathbf{K}_\alpha(\phi, \ddot{\phi})$ , e os vetores de força rotacional,  $\mathbf{f}_\Omega(\phi, \dot{\phi}^2)$ , força associada a aceleração angular  $\ddot{\phi}$ ,  $\mathbf{f}_\alpha(\phi, \ddot{\phi})$ , e força peso,  $\mathbf{f}_p(\phi)$ , são variantes com o tempo, pois dependem do ângulo  $\phi$ . No caso em que o rotor opera com velocidade constante, a forma de variação destas matrizes é periódica. Nestas condições o sistema é linear, embora variante no tempo. Este tipo de variação nos coeficientes das matrizes introduz uma excitação paramétrica no sistema. Contudo, a matriz de rigidez estrutural,  $\mathbf{K}$  é constante. Os vetores de excitação, lado direito da equação (3.38), também representam funções periódicas no tempo. O modelo resultante

é classificado de linear, pois as equações diferenciais de movimento são lineares. Neste caso, as relações lineares entre deslocamento e deformação são utilizadas para estimar a energia potencial da viga, de acordo com a equação (3.31).

### (B) Modelo linearizado de segunda ordem

No modelo matemático do conjunto rotor-palhetas apresentado anteriormente assume-se que a deformação das vigas é linear. Contudo, de acordo com os resultados apresentados no capítulo (2) para um viga girante, a teoria de linear de vigas não é adequada para modelar este tipo de problema. Inicialmente porque, devido à rotação do corpo, os deslocamentos da viga são maiores e a hipótese de pequenas deformações não pode mais ser considerada. Na verdade, os termos não-lineares da relação deslocamento e deformação são responsáveis pelo efeito de enrijecimento centrífugo da viga, ou seja, o aumento das frequências naturais da viga com o aumento da velocidade de rotação e, portanto, devem ser incluídos no modelo matemático.

Um modelo linear, todavia pode ser obtido, incluindo apenas os termos de deformação de segunda ordem. Estes termos são considerados a partir da inclusão de uma matriz de rigidez geométrica, que é calculada em função das forças normais, as quais agem na direção longitudinal da viga. A inclusão da matriz de rigidez geométrica implica que a influência da aceleração centrífuga, a que a viga está submetida devido à rotação, é transferida para o movimento de flexão da viga (Simo e Vu-Quoc, 1987), enrijecendo-a. Por outro lado, no modelo linear estes dois fenômenos estão desacoplados.

A matriz de rigidez geométrica é estimada a partir da energia potencial da palheta, que neste caso, é dada por

$$\pi_{p_i} = \frac{1}{2} \int_0^{L_i} EI \left( \frac{\partial^2 v_i}{\partial \xi_i^2} \right)^2 d\xi_i + \frac{1}{2} \int_0^{L_i} N_i(\xi_i) \left( \frac{\partial v_i}{\partial \xi} \right)^2 d\xi_i \quad (3.42)$$

ou simplesmente,

$$\pi_{p_i} = \pi_{l_i} + \pi_{g_i} \quad (3.43)$$

A energia potencial de cada uma das palhetas  $p_i$ , neste caso, é formada por duas parcelas:  $\pi_{l_i}$ , associada às deformações lineares, correspondente à energia potencial apresentada na equação (3.31), e  $\pi_{g_i}$ , associada à rigidez geométrica, em função da força normal atuante na direção longitudinal da viga.

A força normal atuante em cada palheta  $p_i$  é calculada a partir das condições iniciais nulas do movimento. Considera-se que a distribuição da força normal ao longo da viga é desprezível, uma vez que a massa da viga foi desprezada, de tal forma que apenas a contribuição da massa concentrada é considerada, sendo que a força normal é aproximada por (Kane *et al.*, 1987)

$$N_i(\xi_i) = m_{p_i} (L_i + r_i) \dot{\phi}^2 \quad (3.44)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_2 + \sum_{i=1}^4 m_{p_i} & 0 & -m_{p_1} \text{sen}(\phi + \theta_1) & -m_{p_2} \text{sen}(\phi + \theta_2) & -m_{p_3} \text{sen}(\phi + \theta_3) & -m_{p_4} \text{sen}(\phi + \theta_4) \\ 0 & m_3 + \sum_{i=1}^4 m_{p_i} & m_{p_1} \text{cos}(\phi + \theta_1) & m_{p_2} \text{cos}(\phi + \theta_2) & m_{p_3} \text{cos}(\phi + \theta_3) & m_{p_4} \text{cos}(\phi + \theta_4) \\ -m_{p_1} \text{sen}(\phi + \theta_1) & m_{p_1} \text{cos}(\phi + \theta_1) & m_{p_1} & 0 & 0 & 0 \\ -m_{p_2} \text{sen}(\phi + \theta_2) & m_{p_2} \text{cos}(\phi + \theta_2) & 0 & m_{p_2} & 0 & 0 \\ -m_{p_3} \text{sen}(\phi + \theta_3) & m_{p_3} \text{cos}(\phi + \theta_3) & 0 & 0 & m_{p_3} & 0 \\ -m_{p_4} \text{sen}(\phi + \theta_4) & m_{p_4} \text{cos}(\phi + \theta_4) & 0 & 0 & 0 & m_{p_4} \end{bmatrix} \quad (3.39a)$$

$$\mathbf{C} = -2\dot{\phi} \begin{bmatrix} 0 & 0 & m_{p_1} \text{cos}(\phi + \theta_1) & m_{p_2} \text{cos}(\phi + \theta_2) & m_{p_3} \text{cos}(\phi + \theta_3) & m_{p_4} \text{cos}(\phi + \theta_4) \\ 0 & 0 & m_{p_1} \text{sen}(\phi + \theta_1) & m_{p_2} \text{sen}(\phi + \theta_2) & m_{p_3} \text{sen}(\phi + \theta_3) & m_{p_4} \text{sen}(\phi + \theta_4) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.39b)$$

$$\mathbf{K}_\Omega = -\dot{\phi}^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -m_{p_1} \text{sen}(\phi + \theta_1) & -m_{p_2} \text{sen}(\phi + \theta_2) & -m_{p_3} \text{sen}(\phi + \theta_3) & -m_{p_4} \text{sen}(\phi + \theta_4) \\ 0 & 0 & m_{p_1} \text{cos}(\phi + \theta_1) & m_{p_2} \text{cos}(\phi + \theta_2) & m_{p_3} \text{cos}(\phi + \theta_3) & m_{p_4} \text{cos}(\phi + \theta_4) \\ 0 & 0 & m_{p_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{p_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{p_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{p_4} \end{bmatrix} \quad (3.39c)$$

$$\mathbf{K}_\alpha = \dot{\phi} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -m_{p1} \cos(\phi + \theta_1) & -m_{p2} \cos(\phi + \theta_2) & -m_{p3} \cos(\phi + \theta_3) & -m_{p4} \cos(\phi + \theta_4) \\ 0 & 0 & -m_{p1} \text{sen}(\phi + \theta_1) & -m_{p2} \text{sen}(\phi + \theta_2) & -m_{p3} \text{sen}(\phi + \theta_3) & -m_{p4} \text{sen}(\phi + \theta_4) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.40a)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix} \quad (3.40b)$$

$$\mathbf{f}_\Omega = \dot{\phi}^2 \begin{cases} e m_2 \cos(\phi + \varphi) + \sum_{i=1}^4 m_{p_i} (L_i + r_i) \cos(\phi + \theta_i) \\ e m_3 \sin(\phi + \varphi) + \sum_{i=1}^4 m_{p_i} (L_i + r_i) \sin(\phi + \theta_i) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \quad (3.41a)$$

$$\mathbf{f}_\alpha = \ddot{\phi} \begin{cases} e m_2 \sin(\phi + \varphi) + \sum_{i=1}^4 m_{p_i} (L_i + r_i) \sin(\phi + \theta_i) \\ -e m_3 \cos(\phi + \varphi) - \sum_{i=1}^4 m_{p_i} (L_i + r_i) \cos(\phi + \theta_i) \\ -m_{p_1} (L_1 + r_1) \\ -m_{p_2} (L_2 + r_2) \\ -m_{p_3} (L_3 + r_3) \\ -m_{p_4} (L_4 + r_4) \end{cases} \quad (3.41b)$$

$$\mathbf{f}_p = -g \begin{cases} 0 \\ m_3 + \sum_{i=1}^4 m_{p_i} \\ m_{p_1} \cos(\phi + \theta_1) \\ m_{p_2} \cos(\phi + \theta_2) \\ m_{p_3} \cos(\phi + \theta_3) \\ m_{p_4} \cos(\phi + \theta_4) \end{cases} \quad (3.41c)$$

A segunda parcela da energia potencial  $\pi_{g_i}$ , associada à rigidez geométrica, é portanto dada por

$$\pi_{g_i} = \frac{1}{2} \int_0^{L_i} m_{p_i} (L_i + r_i) \dot{\phi}^2 \left( \frac{\partial v_i}{\partial \xi_i} \right)^2 d\xi_i \quad (3.45)$$

Utilizando a função de interpolação para o deslocamento transversal da viga  $v_i$ , equação (3.32), a energia potencial devido ao enrijecimento centrífugo é dada por:

$$\pi_{g_i} = \frac{3}{5L_i} m_{p_i} \dot{\phi}^2 (L_i + r_i) z_i^2 \quad (3.46)$$

A equação de movimento resultante para o novo modelo matemático é obtido diretamente da equação de equilíbrio (3.37). Este novo modelo será chamado de linearizado de segunda ordem, visto que, embora o modelo resultante seja linear, termos não-lineares de segunda ordem foram empregados durante sua formulação. A diferença, neste caso, encontra-se na expressão para a energia potencial das palhetas, que é dada pela equação (3.43). Finalmente, a forma da equação do modelo linearizado de segunda ordem é dada por

$$\mathbf{M}(\phi) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\phi, \dot{\phi}) \dot{\mathbf{q}} + [\mathbf{K} + \mathbf{K}_\Omega(\phi, \dot{\phi}^2) + \mathbf{K}_\alpha(\phi, \ddot{\phi}) + \mathbf{K}_g] \mathbf{q} = \mathbf{f}_\Omega(\phi, \dot{\phi}^2) + \mathbf{f}_\alpha(\phi, \ddot{\phi}) + \mathbf{f}_p(\phi) \quad (3.47)$$

Portanto, esta equação é praticamente idêntica à obtida para o modelo linear, com exceção da matriz de rigidez geométrica agora incluída. As matrizes e vetores da equação (3.47) foram apresentadas nas equações (3.39), (3.40) e (3.41) e a nova matriz de rigidez geométrica é dada por:

$$\mathbf{K}_g = \dot{\phi}^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{p_1} \frac{6(L_1+r_1)}{5L_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{p_2} \frac{6(L_2+r_2)}{5L_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{p_3} \frac{6(L_3+r_3)}{5L_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{p_4} \frac{6(L_4+r_4)}{5L_4} \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Na equação (3.47), a matriz de rigidez geométrica é constante ao longo do tempo, sendo responsável pela inclusão do efeito de enrijecimento centrífugo. A grande vantagem deste tipo de modelo linearizado de segunda ordem, é sua simplicidade e facilidade de implementação numérica. Entretanto, restringe-se à situação em que o rotor opera com velocidade constante, ou ainda, em que a força normal ao longo da viga possa ser aproximada pela equação (3.44).

### (C) Modelo não-linear

O terceiro modelo matemático desenvolvido para conjunto rotor-palhetas apresenta a forma mais geral das equações de movimento, obtido quando a deformação da viga é estimada a partir

de teorias não-lineares, ou ainda relações não-lineares entre deslocamento e deformação. Neste caso, é necessário considerar tanto deslocamentos transversais quanto longitudinais para expressar a relação entre deslocamentos e deformações da viga. Entretanto, este tipo de abordagem, completamente não-linear, leva a uma implementação numérica instável e pouco eficiente. Do ponto de vista dinâmico, isto implica em considerar um grande número de modos longitudinais para que a vibração das palhetas, que se acoplam nas direções longitudinal e transversal, seja corretamente considerada. Do ponto de vista da discretização da viga, isto implica que a viga deve ser discretizada com um grande número de elementos, caso o esquema de discretização seja o Método dos Elementos Finitos, ou que um grande número de funções de interpolação seja considerado, no caso do Método dos Modos Assumidos. No caso do modelo matemático do conjunto rotor-palhetas, em que várias vigas são acopladas ao rotor, isto leva ao aumento do número de graus de liberdade do sistema. Do ponto de vista numérico, outra dificuldade é adicionada quando a rigidez longitudinal é muito maior que a rigidez transversal, sendo necessário utilizar um incremento de tempo muito pequeno na integração numérica (*stiff problem*). Uma maneira de contornar estas dificuldades é utilizar um modelo para a viga em que as deformações e deslocamentos longitudinais sejam desacopladas, ou seja, o deslocamento axial é resultado do deslocamento transversal, devido à hipótese de grandes deslocamentos. Assim, contorna-se tanto o problema da necessidade de incluir vários modos na formulação quanto o problema do pequeno incremento de tempo na integração numérica. O resultado é um modelo mais estável numericamente e também com menor número de graus de liberdade. Entretanto, restrito a um sistema em que a rigidez longitudinal é muito maior que a rigidez transversal (Radisavljevic e Baruh, 2001).

No caso deste modelo é necessário, portanto, incluir o deslocamento de cada palheta. O vetor de deslocamento,  $B_{p_i} \mathbf{u}_i$ , anteriormente apresentado na equação (3.9), é reescrito como

$$B_{p_i} \mathbf{u}_i = \begin{Bmatrix} 0 \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \quad (3.49)$$

O deslocamento longitudinal  $y_i$  de cada palheta  $p_i$  é calculado em função do deslocamento transversal  $v_i$ , assumindo que a deformação na direção longitudinal é nula, conforme a metodologia apresentada no capítulo (2). A função de interpolação para o deslocamento transversal  $v_i(\xi_i)$  é a mesma apresentada na equação (3.32). Assim, a função de forma utilizada nesta formulação é a mesma utilizada na formulação linear. O deslocamento longitudinal na extremidade livre da viga é, então, dado em função do deslocamento transversal  $z_i$ , de acordo com

$$y_i(\xi_i) = -\frac{1}{2} \int_0^{L_i} \left( \frac{\partial v_i}{\partial \xi_i} \right)^2 d\xi_i \quad \text{ou ainda,} \quad y_i(\xi_i) = -\frac{3}{5L_i} z_i(\xi_i)^2 \quad (3.50)$$

O novo vetor de posição da palheta, devido à deformação elástica, é dado por:

$$B_{p_i} \mathbf{u}_i = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{5L_i} z_i^2 \\ z_i \end{Bmatrix} \quad (3.51)$$

O vetor de posição absoluta da palheta foi apresentado na equação (3.10), sendo que o vetor  ${}_{B_{p_i}}\mathbf{u}_i$  é dado pela equação anterior. A velocidade e aceleração absolutas da palheta  $p_i$  são obtidas utilizando as equações (3.18) e (3.19), mas com a equação (3.51) para o deslocamento relativo da palheta. Deve-se notar que as derivadas em relação ao tempo do deslocamento  $y_i$  são dadas por:

$$\dot{y}_i = -\frac{6}{5L_i}z_i\dot{z}_i \quad \ddot{y}_i = -\frac{6}{5L_i}z_i\ddot{z}_i - \frac{6}{5L_i}\dot{z}_i^2 \quad (3.52)$$

A velocidade e aceleração absolutas da palhetas são, então, dadas por

$${}_{B_{p_i}}\mathbf{v}_{p_i} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \dot{y}_o \cos(\phi + \theta_i) + \dot{z}_o \sin(\phi + \theta_i) - z_i\dot{\phi} - \frac{6}{5L_i}z_i\dot{z}_i \\ -\dot{y}_o \sin(\phi + \theta_i) + \dot{z}_o \cos(\phi + \theta_i) + \dot{z}_i + L_i\dot{\phi} + r_i\dot{\phi} - \frac{3}{5L_i}z_i^2\dot{\phi} \end{array} \right\} \quad (3.53)$$

$${}_{B_{p_i}}\mathbf{a}_{p_i} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -2\dot{z}_i\dot{\phi} - (L_i + r_i)\dot{\phi}^2 - z_i\ddot{\phi} + \ddot{y}_o \cos(\phi + \theta_i) + \ddot{z}_o \sin(\phi + \theta_i) - \frac{6}{5L_i}z_i\ddot{z}_i - \frac{6}{5L_i}\dot{z}_i^2 + \frac{3}{5L_i}z_i^2\dot{\phi}^2 \\ -z_i\dot{\phi}^2 + \ddot{z}_i + (L_i + r_i)\ddot{\phi} - \ddot{y}_o \sin(\phi + \theta_i) + \ddot{z}_o \cos(\phi + \theta_i) - \frac{12}{5L_i}z_i\dot{z}_i\dot{\phi} - \frac{3}{5L_i}z_i^2\dot{\phi} \end{array} \right\} \quad (3.54)$$

O vetor de coordenadas generalizadas é o mesmo do problema linear, pois embora os deslocamentos longitudinais estejam incluídos na formulação, não foram introduzidos novos graus de liberdade ao sistema. O procedimento de obtenção das equações de movimento é, também, o mesmo apresentado para o modelo linear a partir das equações de Newton-Euler-Jourdain (3.36). É necessário, contudo, recalcular os jacobianos das velocidades das palhetas  $p_i$ , de acordo com as equações (3.28). Por outro lado, os jacobianos das velocidades do rotor não se alteram. A energia potencial da viga é calculada utilizando a teoria linear de deformações, de acordo com a equação (3.33). Desta forma, a equação de movimento resultante é dada por:

$$\begin{aligned} & [\mathbf{M}(\phi) + \mathbf{M}_1(\phi, \mathbf{q}) + \mathbf{M}_2(\phi, \mathbf{q})]\ddot{\mathbf{q}} + [\mathbf{C}(\phi, \dot{\phi}) + \mathbf{C}_1(\phi, \dot{\phi}, \mathbf{q})]\dot{\mathbf{q}} + \\ & [\mathbf{K} + \mathbf{K}_\Omega(\phi, \dot{\phi}^2) + \mathbf{K}_\alpha(\phi, \ddot{\phi}) + \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_p(\phi)]\mathbf{q} = \mathbf{f}_\Omega(\phi, \dot{\phi}^2) + \mathbf{f}_\alpha(\phi, \ddot{\phi}) + \mathbf{f}_p(\phi) \\ & + \mathbf{f}_1(\phi, \dot{\phi}^2, \mathbf{q}) + \mathbf{f}_2(\phi, \ddot{\phi}, \mathbf{q}) + \mathbf{f}_3(\phi, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{aligned} \quad (3.55)$$

Nesta equação as matrizes  $\mathbf{M}(\phi)$ ,  $\mathbf{C}(\phi, \dot{\phi})$ ,  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{K}_\Omega(\phi, \dot{\phi}^2)$  e  $\mathbf{K}_\alpha(\phi, \ddot{\phi})$  são as mesmas dadas nas equações (3.39) e (3.40), e os vetores  $\mathbf{f}_\Omega(\phi, \dot{\phi}^2)$ ,  $\mathbf{f}_\alpha(\phi, \ddot{\phi})$  e  $\mathbf{f}_p(\phi)$  são os mesmos das equações (3.41). As novas matrizes e vetores nesta equação de movimento são dados das equações (3.56), (3.57) e (3.58). Deve-se notar que a matriz  $\mathbf{K}_1$  corresponde à matriz de rigidez geométrica obtida na equação (3.48). Isto significa que o modelo não-linear contém o modelo linearizado de segunda ordem apresentado na equação (3.47). A matriz de rigidez  $\mathbf{K}_p$  é obtida a partir da força generalizada associada a força peso e depende apenas do ângulo  $\phi$ . As matrizes  $\mathbf{M}_1(\phi, \mathbf{q})$ ,  $\mathbf{M}_2(\phi, \mathbf{q})$  e  $\mathbf{C}_1(\phi, \dot{\phi}, \mathbf{q})$  dependem do deslocamento da viga, da mesma forma que os vetores  $\mathbf{f}_1(\phi, \dot{\phi}^2, \mathbf{q})$ ,  $\mathbf{f}_2(\phi, \ddot{\phi}, \mathbf{q})$ . O vetor  $\mathbf{f}_3(\phi, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  depende dos deslocamentos e velocidades da palheta. Isto implica que para pequenos deslocamentos

e baixas velocidades o modelo não-linear tende para o modelo linearizado de segunda ordem, equação (3.47). A diferença entre os dois modelos é maior para maiores velocidades angulares, quando os deslocamentos longitudinais da massa concentrada passam a ter influência maior na dinâmica do sistema.

### 3.3 Equações de movimento de um rotor com efeito giroscópico acoplado a vigas

O segundo modelo matemático a ser desenvolvido é o de um rotor rígido, que está fixo em uma das extremidades e apoiado sobre suportes elásticos na outra, de tal forma que apenas movimentos angulares do rotor são permitidos. Este rotor está também acoplado a quatro palhetas flexíveis. Este tipo de configuração do conjunto procura acentuar a influência dinâmica do efeito giroscópico do rotor, bem como analisar como ocorre o acoplamento entre os movimentos da palhetas e os movimentos angulares do rotor. O esquema do modelo mecânico deste conjunto é apresentado na figura (3.7). As palhetas são modeladas como vigas, sem massa, conectadas a massas concentradas em sua extremidade livre, da mesma forma que no modelo mecânico do rotor plano.

A metodologia para o desenvolvimento das equações de movimento deste segundo modelo é idêntica à apresentada anteriormente. Consequentemente, nesta seção são apresentadas apenas as etapas diferentes, sistemas de referência e vetores de posição deste novo tipo de sistema, em comparação ao caso anterior.

Inicialmente, para descrever os movimentos do rotor, são necessários dois outros sistemas de referência, correspondentes aos deslocamentos angulares,  $\Gamma$  e  $\beta$ , do rotor. A partir do sistema de referência inercial,  $I$ , é realizada uma rotação de  $\Gamma$  em torno do eixo  $z_0$ , que define um sistema de coordenadas auxiliar,  $A_1$ , cujas coordenadas são  $(x_a, y_a, z_a)$ . Em seguida, é realizada uma rotação de  $\beta$  em torno do eixo  $y_a$ , que define um segundo sistema de coordenadas auxiliar,  $A_2$ , cujas coordenadas são  $(x_b, y_b, z_b)$ . Finalmente, é realizada uma rotação de  $\phi$  em torno do eixo  $x_b$ , que define o sistema de coordenadas  $B_1$ , solidário ao rotor, e cujas coordenadas são dadas por  $(x_1, y_1, z_1)$ . Este último sistema de coordenadas é equivalente ao sistema  $B_1$  apresentado no modelo do rotor plano, pois é solidário ao rotor, embora agora seja definido com um número maior de rotações auxiliares.

O sistema de coordenadas inercial,  $I$ , e o sistema de coordenadas  $B_1$ , solidário ao rotor, são relacionados pelas matrizes de transformação de coordenadas  $\mathbf{T}_\Gamma$ ,  $\mathbf{T}_\beta$  e  $\mathbf{T}_\phi$ . No caso do rotor plano, apenas a matriz  $\mathbf{T}_\phi$  era necessária para relacionar os dois sistemas de coordenadas. As novas matrizes de transformação de coordenadas, associadas às novas rotações auxiliares, e, conseqüentemente a relação entre um vetor escrito no referencial inercial,  $I$  e solidário ao rotor,  $B_1$ , são dados

$$\mathbf{M}_1 = \frac{6}{5} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{m_{p_1 z_1}}{L_1} \cos(\phi + \theta_1) & -\frac{m_{p_1 z_1}}{L_1} \text{sen}(\phi + \theta_1) & -\frac{m_{p_1 z_1}}{L_1 z_1} \cos(\phi + \theta_1) & -\frac{m_{p_1 z_1}}{L_1 z_1} \text{sen}(\phi + \theta_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{m_{p_2 z_2}}{L_2} \cos(\phi + \theta_2) & -\frac{m_{p_2 z_2}}{L_2} \text{sen}(\phi + \theta_2) & -\frac{m_{p_2 z_2}}{L_2} \cos(\phi + \theta_2) & -\frac{m_{p_2 z_2}}{L_2} \text{sen}(\phi + \theta_2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{m_{p_3 z_3}}{L_3} \cos(\phi + \theta_3) & -\frac{m_{p_3 z_3}}{L_3} \text{sen}(\phi + \theta_3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{m_{p_4 z_4}}{L_4} \cos(\phi + \theta_4) & -\frac{m_{p_4 z_4}}{L_4} \text{sen}(\phi + \theta_4) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.56a)$$

$$\mathbf{M}_2 = \frac{36}{25} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{p_1} \frac{z_1^2}{L_1^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{p_2} \frac{z_2^2}{L_2^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{p_3} \frac{z_3^2}{L_3^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{p_4} \frac{z_4^2}{L_4^2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.56b)$$

$$\mathbf{C}_1 = \frac{12}{5} \phi \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{m_{p_1 z_1}}{L_1} \text{sen}(\phi + \theta_1) & \frac{m_{p_2 z_2}}{L_2} \text{sen}(\phi + \theta_2) & \frac{m_{p_3 z_3}}{L_3} \text{sen}(\phi + \theta_3) & \frac{m_{p_4 z_4}}{L_4} \text{sen}(\phi + \theta_4) \\ 0 & 0 & -\frac{m_{p_1 z_1}}{L_1} \cos(\phi + \theta_1) & -\frac{m_{p_2 z_2}}{L_2} \cos(\phi + \theta_2) & -\frac{m_{p_3 z_3}}{L_3} \cos(\phi + \theta_3) & -\frac{m_{p_4 z_4}}{L_4} \cos(\phi + \theta_4) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.56c)$$

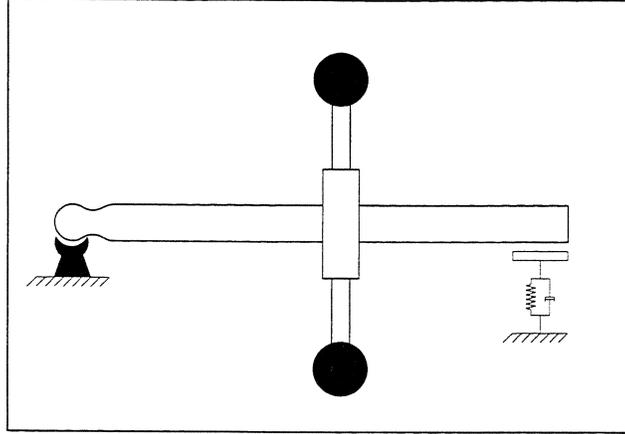
$$\mathbf{K}_1 = \phi^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{p1} \frac{6(L_1+r_1)}{5L_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{p2} \frac{6(L_2+r_2)}{5L_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{p3} \frac{6(L_3+r_3)}{5L_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{p4} \frac{6(L_4+r_4)}{5L_4} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.57a)$$

$$\mathbf{K}_p = g \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m_{p1} \frac{6 \operatorname{sen}(\theta_1+\phi)}{5L_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m_{p2} \frac{6 \operatorname{sen}(\theta_2+\phi)}{5L_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -m_{p3} \frac{6 \operatorname{sen}(\theta_3+\phi)}{5L_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -m_{p4} \frac{6 \operatorname{sen}(\theta_4+\phi)}{5L_4} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.57b)$$

$$\mathbf{f}_1 = \dot{\phi}^2 \left\{ \begin{array}{l} -\frac{3}{5} \sum_{i=1}^4 \frac{m_{p_i} z_i^2 \cos(\phi + \theta_i)}{L_i} \\ -\frac{3}{5} \sum_{i=1}^4 \frac{m_{p_i} z_i^2 \sin(\phi + \theta_i)}{L_i} \\ \frac{18}{25} \frac{m_{p_1} z_1^3}{L_1^2} \\ \frac{18}{25} \frac{m_{p_2} z_2^3}{L_2^2} \\ \frac{18}{25} \frac{m_{p_3} z_3^3}{L_3^2} \\ \frac{18}{25} \frac{m_{p_4} z_4^3}{L_4^2} \end{array} \right\} \quad (3.58a)$$

$$\mathbf{f}_2 = \frac{3}{5} \ddot{\phi} \left\{ \begin{array}{l} -\sum_{i=1}^4 \frac{m_{p_i} z_i^2 \sin(\phi + \theta_i)}{L_i} \\ \sum_{i=1}^4 \frac{m_{p_i} z_i^2 \cos(\phi + \theta_i)}{L_i} \\ -\frac{m_{p_1} z_1^2}{L_1} \\ -\frac{m_{p_2} z_2^2}{L_2} \\ -\frac{m_{p_3} z_3^2}{L_3} \\ -\frac{m_{p_4} z_4^2}{L_4} \end{array} \right\} \quad (3.58b)$$

$$\mathbf{f}_3 = \left\{ \begin{array}{l} \frac{6}{5} \sum_{i=1}^4 \frac{m_{p_i} z_i^2 \cos(\phi + \theta_i)}{L_i} \\ \frac{6}{5} \sum_{i=1}^4 \frac{m_{p_i} z_i^2 \sin(\phi + \theta_i)}{L_i} \\ -\frac{36}{25} \frac{m_{p_1} z_1 z_1^2}{L_1^2} \\ -\frac{36}{25} \frac{m_{p_2} z_2 z_2^2}{L_2^2} \\ -\frac{36}{25} \frac{m_{p_3} z_3 z_3^2}{L_3^2} \\ -\frac{36}{25} \frac{m_{p_4} z_4 z_4^2}{L_4^2} \end{array} \right\} \quad (3.58c)$$



**Figura 3.7:** Modelo mecânico de um rotor montado por meio de uma rótula em uma extremidade e apoiado sobre suportes elásticos na outra.

por

$$\mathbf{T}_\Gamma = \begin{bmatrix} \cos \Gamma & \text{sen } \Gamma & 0 \\ -\text{sen } \Gamma & \cos \Gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{T}_\beta = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\text{sen } \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen } \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

$${}_{B_1}\mathbf{s} = \mathbf{T}_\phi \mathbf{T}_\beta \mathbf{T}_\Gamma \cdot I\mathbf{s} \quad (3.60)$$

Devido ao aumento do número de rotações auxiliares, a forma do vetor de velocidade angular absoluta da base  $B_1$  também é alterada, sendo que as velocidades angulares, derivadas, destas rotações devem ser incluídas. Dessa maneira, o novo vetor de velocidade angular da base  $B_1$ ,  ${}_{B_1}\boldsymbol{\omega}_{B_1}$ , bem como a o vetor de velocidade angular do rotor  ${}_{B_1}\boldsymbol{\Omega}_r$ , são agora escritos como

$${}_{B_1}\boldsymbol{\omega}_{B_1} = \begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \mathbf{T}_\phi \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\beta} \\ 0 \end{Bmatrix} + \mathbf{T}_\phi \cdot \mathbf{T}_\beta \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\Gamma} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dot{\Gamma} \text{sen } \beta + \dot{\phi} \\ \dot{\beta} \cos \phi + \dot{\Gamma} \cos \beta \text{sen } \phi \\ -\dot{\beta} \text{sen } \phi + \dot{\Gamma} \cos \beta \cos \phi \end{Bmatrix} \quad (3.61a)$$

$${}_{B_1}\boldsymbol{\Omega}_r = {}_{B_1}\boldsymbol{\omega}_{B_1} \quad (3.61b)$$

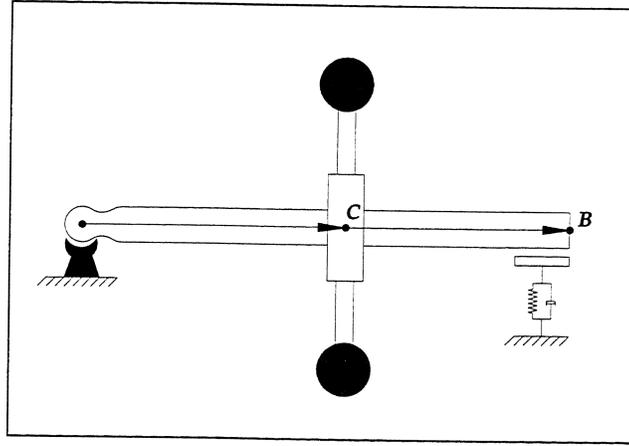
O vetor de velocidade angular absoluta de cada uma das palhetas  $p_i$ ,  ${}_{B_{p_i}}\boldsymbol{\Omega}_{p_i}$ , também é alterada e assume uma nova expressão em função das rotações  $\Gamma$  e  $\beta$ , sendo então dada por

$${}_{B_{p_i}}\boldsymbol{\omega}_{B_{p_i}} = \mathbf{T}_{\theta_i} \cdot {}_{B_1}\boldsymbol{\omega}_{B_1} = \begin{Bmatrix} -\dot{\Gamma} \text{sen } \beta + \dot{\phi} \\ \dot{\beta} \cos(\phi + \theta_i) + \dot{\Gamma} \cos \beta \text{sen}(\phi + \theta_i) \\ -\dot{\beta} \text{sen}(\phi + \theta_i) + \dot{\Gamma} \cos \beta \cos(\phi + \theta_i) \end{Bmatrix} \quad (3.62)$$

$${}_{B_{p_i}}\boldsymbol{\Omega}_{p_i} = {}_{B_{p_i}}\boldsymbol{\omega}_{B_{p_i}} \quad (3.63)$$

Finalmente, um novo vetor de posição do centro do rotor,  $C$ , deve também ser definido. A figura (3.3) apresenta os vetores de posição do centro de rotor e do ponto onde o rotor é apoiado sobre suportes elásticos. A posição relativa dos outros pontos, entretanto não se altera, sendo os mesmos apresentados na figura (3.5). O vetor de posição do centro do rotor, escrito agora no sistema solidário ao rotor é dado por

$${}_{B_1}\mathbf{r}_C = \begin{Bmatrix} r_o \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.64)$$



**Figura 3.8:** Vetores de posição do centro do rotor  $C$  e ponto de apoio dos mancais  $B$ .

Conseqüentemente, os vetores de velocidade e aceleração centro do rotor também assumem nova forma, sendo dados por

$${}_{B_1}\mathbf{v}_C = \frac{d}{dt}({}_{B_1}\mathbf{r}_C) + {}_{B_1}\boldsymbol{\omega}_{B_1} \times {}_{B_1}\mathbf{r}_C \quad \text{e} \quad {}_{B_1}\mathbf{a}_C = \frac{d}{dt}({}_{B_1}\mathbf{v}_C) + {}_{B_1}\boldsymbol{\omega}_{B_1} \times {}_{B_1}\mathbf{v}_C \quad (3.65)$$

Os vetores de posição relativa do centro do rotor ao centro de massa  ${}_{B_1}\mathbf{r}_{C^*}$ , equação (3.8), do centro do rotor ao ponto que a palheta  $p_i$  é fixa ao rotor,  ${}_{B_{p_i}}\mathbf{r}_{O_i}$ , do ponto  $O_i$  à ponta da palheta,  ${}_{B_{p_i}}\mathbf{L}_i$ , e o vetor de deslocamento devido à deformação elástica,  ${}_{B_{p_i}}\mathbf{u}_i$ , dados na equação (3.9), não se alteram. Por conseguinte, a forma de obtenção dos vetores de velocidade e aceleração dos pontos  $O_i$  e da palheta  $p_i$ , equações (3.16), (3.17), (3.18) e (3.19), não muda, embora o resultado final seja diferente, pois os vetores de posição, velocidade e aceleração do centro do rotor são novos. Os vetores de força externa também não se alteram sendo dados pelas equações (3.20), força peso do rotor, e (3.21), força peso da palheta.

A expressão para energia potencial do rotor  $\pi_r$  também é alterada. Neste caso, inicialmente é necessário obter o vetor correspondente à deformação dos suportes elásticos. Este vetor é obtido pela diferença entre o vetor de posição da ponta do rotor  $\mathbf{r}_B$ , quando os apoios elásticos estão

deformados e em sua configuração inicial. Este vetor de deformação inicial,  ${}_I\delta_r$ , é dado por

$${}_I\delta_r = (\mathbf{T}_\phi \cdot \mathbf{T}_\beta \cdot \mathbf{T}_\Gamma)^T \cdot \begin{Bmatrix} r_B \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} r_B \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_B \cos \beta \cos \Gamma - r_B \\ r_B \cos \beta \sin \Gamma \\ -r_B \sin \beta \end{Bmatrix} \quad (3.66)$$

A energia potencial armazenada pela deformação dos suportes elásticos do rotor  $\pi_r$  é então dada por

$$\pi_r = \frac{1}{2} \delta_r^T \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix} \cdot \delta_r \quad (3.67)$$

O modelo escolhido para descrever a deformação da palheta é linearizado de segunda ordem. Assim a energia potencial armazenada na deformação das palhetas é a soma da energia potencial linear e da energia potencial geométrica, dadas de acordo com a equação (3.43).

Finalmente, as equações de equilíbrio dinâmico de Newton-Euler-Jourdain, (3.37) fornecem as equações de movimento conjunto. A avaliação dos jacobianos é feita de maneira semelhante ao primeiro modelo, a partir das equações (3.26), (3.27) e (3.28). Contudo, o vetor de coordenadas generalizadas,  $\mathbf{q}(t)$ , neste caso é dado por

$$\mathbf{q}(t) = \left\{ \Gamma(t) \quad \beta(t) \quad z_1(t) \quad z_2(t) \quad z_3(t) \quad z_4(t) \right\}^T \quad (3.68)$$

As equações de movimento obtidas são não-lineares, pois envolvem termos senoidais e cruzados. Assim, para obter a forma final destas equações as seguintes simplificações são empregadas:

$$\begin{array}{llllll} \cos \beta \rightarrow 1 & \sin \beta \rightarrow \beta & \cos \Gamma \rightarrow 1 & \sin \Gamma \rightarrow \Gamma & & \\ \beta^2 \rightarrow 0 & \Gamma^2 \rightarrow 0 & \beta\Gamma \rightarrow 0 & \beta z_i \rightarrow 0 & \Gamma z_i \rightarrow 0 & z_i^2 \rightarrow 0 \\ \dot{\beta}^2 \rightarrow 0 & \dot{\Gamma}^2 \rightarrow 0 & \dot{\beta}\dot{\Gamma} \rightarrow 0 & \dot{\beta}\dot{z}_i \rightarrow 0 & \dot{\Gamma}\dot{z}_i \rightarrow 0 & \dot{z}_i^2 \rightarrow 0 \\ \beta\dot{\beta} \rightarrow 0 & \Gamma\dot{\Gamma} \rightarrow 0 & \beta\dot{\Gamma} \rightarrow 0 & \dot{\beta}\Gamma \rightarrow 0 & z_i\dot{z}_i \rightarrow 0 & \\ \beta\ddot{\beta} \rightarrow 0 & \Gamma\ddot{\Gamma} \rightarrow 0 & z_i\ddot{z}_i \rightarrow 0 & & & \end{array}$$

Após estas simplificações obtém-se o modelo matemático do conjunto rotor, com movimentos angulares, acoplado a palhetas flexíveis. O modelo resultante é linear para os deslocamentos angulares do rotor, entretanto, para as palhetas, termos não-lineares de segunda ordem são mantidos, através da matriz de rigidez geométrica, sendo as equações de movimentos classificadas como linearizadas de segunda ordem. Portanto, este sistema de equações inclui tanto o efeito giroscópico do rotor quanto o enrijecimento centrífugo das palhetas. Finalmente estas equações de movimento são dadas por

$$\mathbf{M}(\phi)\ddot{\mathbf{q}} + [\mathbf{C}(\phi, \dot{\phi}) + \mathbf{G}(\phi, \dot{\phi})]\dot{\mathbf{q}} + [\mathbf{K} + \mathbf{K}_\Omega(\phi, \dot{\phi}^2) + \mathbf{K}_\alpha(\phi, \ddot{\phi}) + \mathbf{K}_g + \mathbf{K}_p(\phi)]\mathbf{q} = \mathbf{f}_\Omega(\phi, \dot{\phi}^2) + \mathbf{f}_\alpha(\phi, \ddot{\phi}) + \mathbf{f}_p(\phi)$$

A forma destas matrizes e destes vetores está apresentada nas equações (3.70), sendo que estas matrizes são: matriz de massa,  $\mathbf{M}(\phi)$ , coriolis,  $\mathbf{C}(\phi, \dot{\phi})$ , giroscópica,  $\mathbf{G}(\phi, \dot{\phi})$ , rigidez centrífuga,  $\mathbf{K}_\Omega(\phi, \dot{\phi}^2)$ , rigidez associada a aceleração angular  $\ddot{\phi}$ ,  $\mathbf{K}_\alpha(\phi, \ddot{\phi})$ , rigidez estrutural  $\mathbf{K}$ , rigidez geométrica,  $\mathbf{K}_g$  e rigidez potencial (devido ao peso),  $\mathbf{K}_p(\phi)$ ; e os vetores rotacional,  $\mathbf{f}_\Omega(\phi, \dot{\phi}^2)$ , associado a aceleração angular  $\ddot{\phi}$ ,  $\mathbf{f}_\alpha(\phi, \ddot{\phi})$  e força-peso,  $\mathbf{f}_p(\phi)$ . As matrizes são dependentes do ângulo  $\phi$ , embora as matrizes de rigidez estrutural,  $\mathbf{K}$  e rigidez geométrica sejam constantes. No caso em que o rotor opera com velocidade constante, a forma de variação destas matrizes é periódica, que é o mesmo comportamento observado no modelo do rotor plano.

### 3.4 Equações de movimento de um rotor tridimensional acoplado a vigas

O terceiro modelo matemático a ser desenvolvido é o de um rotor rígido, apoiado sobre suportes elásticos nas duas extremidades, de tal forma que tanto movimentos lineares quanto angulares do rotor são permitidos. Dessa maneira, o movimento resultante do rotor é tridimensional. Este rotor está também acoplado a quatro palhetas flexíveis. Este tipo de configuração do conjunto é o mais geral, entre os modelos desenvolvidos neste capítulo. Com auxílio deste modelo, é possível analisar tanto a influência do efeito giroscópico do rotor, bem como analisar como ocorre o acoplamento entre os movimentos das palhetas e os movimentos lineares e angulares do rotor. O esquema do modelo mecânico deste conjunto é apresentado na figura (3.4). As palhetas são modeladas como vigas, sem massa, conectadas a massas concentradas em sua extremidade livre, da mesma forma que no modelo mecânico do rotor plano.

A metodologia para o desenvolvimento das equações de movimento deste terceiro modelo é idêntica à apresentada anteriormente. Conseqüentemente, nesta seção são apresentadas apenas as etapas diferentes. Os sistemas de referência empregados são os mesmos do caso anterior, ilustrados na figura (3.3), e, portanto, as matrizes de transformação de coordenadas são as mesmas apresentadas na equação (3.61).

O movimento do ponto  $A$ , uma das extremidades do rotor é descrito no sistema de referência inercial  $I$ . Os vetores de posição, velocidade e aceleração deste ponto são dados por

$${}^I\mathbf{r}_A = \begin{Bmatrix} 0 \\ y_o \\ z_o \end{Bmatrix}_I \quad \mathbf{v}_A = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{y}_o \\ \dot{z}_o \end{Bmatrix}_I \quad \mathbf{a}_A = \begin{Bmatrix} 0 \\ \ddot{y}_o \\ \ddot{z}_o \end{Bmatrix}_I \quad (3.71)$$

Analogamente, é definido um vetor de posição relativa entre os pontos  $A$  e  $C$ . Este vetor é

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix}
I_{r_i} + m_{1,r_o} r_o^2 + \sum_{i=1}^4 m_{p_i} r_o^2 + \sum_{i=1}^4 m_{p_i} (L_i + r_i)^2 \cos^2(\theta_i + \phi) & -\sum_{i=1}^4 m_{p_i} (L_i + r_i)^2 \cos(\theta_i + \phi) \operatorname{sen}(\theta_i + \phi) & \text{sym} & \text{sym} & \text{sym} \\
-\sum_{i=1}^4 m_{p_i} (L_i + r_i)^2 \cos(\theta_i + \phi) \operatorname{sen}(\theta_i + \phi) & I_{r_i} + m_{1,r_o} r_o^2 + \sum_{i=1}^4 m_{p_i} r_o^2 + \sum_{i=1}^4 m_{p_i} (L_i + r_i)^2 \operatorname{sen}^2(\theta_i + \phi) & \text{sym} & \text{sym} & \text{sym} \\
-m_{p_1} r_o \operatorname{sen}(\theta_1 + \phi) & -m_{p_1} r_o \cos(\theta_1 + \phi) & m_{p_1} & 0 & 0 \\
-m_{p_2} r_o \operatorname{sen}(\theta_2 + \phi) & -m_{p_2} r_o \cos(\theta_2 + \phi) & 0 & m_{p_2} & 0 \\
-m_{p_3} r_o \operatorname{sen}(\theta_3 + \phi) & -m_{p_3} r_o \cos(\theta_3 + \phi) & 0 & 0 & m_{p_3} \\
-m_{p_4} r_o \operatorname{sen}(\theta_4 + \phi) & -m_{p_4} r_o \cos(\theta_4 + \phi) & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix} \quad (3.70a)$$

$$\mathbf{C} = \dot{\phi} \begin{bmatrix}
-\sum_{i=1}^4 m_{p_i} (L_i + r_i)^2 \operatorname{sen}(2(\theta_i + \phi)) & -\sum_{i=1}^4 m_{p_i} (L_i + r_i)^2 \cos(2(\theta_i + \phi)) & -m_{p_1} r_o \cos(\theta_1 + \phi) & -m_{p_2} r_o \cos(\theta_2 + \phi) & -m_{p_3} r_o \cos(\theta_3 + \phi) & -m_{p_4} r_o \cos(\theta_4 + \phi) \\
-\sum_{i=1}^4 m_{p_i} (L_i + r_i)^2 \cos(2(\theta_i + \phi)) & \sum_{i=1}^4 m_{p_i} (L_i + r_i)^2 \operatorname{sen}(2(\theta_i + \phi)) & m_{p_1} r_o \operatorname{sen}(\theta_1 + \phi) & m_{p_2} r_o \operatorname{sen}(\theta_2 + \phi) & m_{p_3} r_o \operatorname{sen}(\theta_3 + \phi) & m_{p_4} r_o \operatorname{sen}(\theta_4 + \phi) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix} \quad (3.70b)$$

$$\mathbf{G} = \dot{\phi} \begin{bmatrix}
0 & -I_{r_p} - \sum_{i=1}^4 m_{p_i} (L_i + r_i)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
I_{r_p} + \sum_{i=1}^4 m_{p_i} (L_i + r_i)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix} \quad (3.70c)$$

$$\mathbf{K}_\Omega = \ddot{\phi}^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & m_{p_1} r_o \text{sen}(\theta_1 + \phi) & m_{p_2} r_o \text{sen}(\theta_2 + \phi) & m_{p_3} r_o \text{sen}(\theta_3 + \phi) & m_{p_4} r_o \text{sen}(\theta_4 + \phi) \\ 0 & 0 & m_{p_1} r_o \cos(\theta_1 + \phi) & m_{p_2} r_o \cos(\theta_2 + \phi) & m_{p_3} r_o \cos(\theta_3 + \phi) & m_{p_4} r_o \cos(\theta_4 + \phi) \\ 0 & 0 & -m_{p_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m_{p_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -m_{p_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -m_{p_4} \end{bmatrix} \quad (3.70d)$$

$$\mathbf{K}_\alpha = \ddot{\phi} \begin{bmatrix} 0 & -I_{r_p} - \sum_{i=1}^4 m_{p_i} (L_i + r_i)^2 & -m_{p_1} r_o \cos(\theta_1 + \phi) & -m_{p_2} r_o \cos(\theta_2 + \phi) & -m_{p_3} r_o \cos(\theta_3 + \phi) & -m_{p_4} r_o \cos(\theta_4 + \phi) \\ 0 & 0 & m_{p_1} r_o \text{sen}(\theta_1 + \phi) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{p_2} r_o \text{sen}(\theta_2 + \phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{p_3} r_o \text{sen}(\theta_3 + \phi) & m_{p_4} r_o \text{sen}(\theta_4 + \phi) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.70e)$$

$$\mathbf{K}_p = g \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sum_{i=1}^4 m_{p_i} (L_i + r_i) \text{sen}(\theta_i + \phi) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.70f)$$

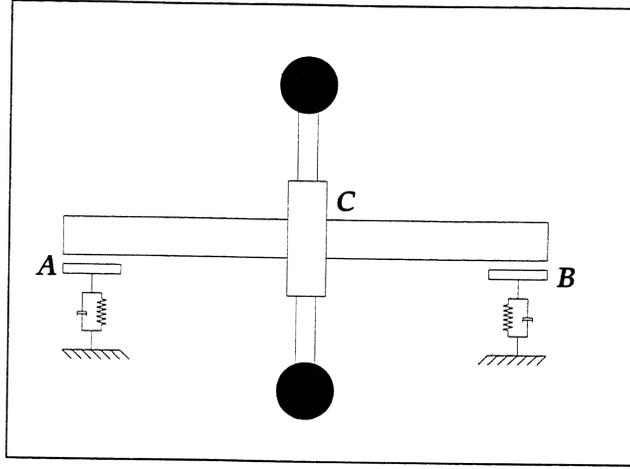
$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_y r_B^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_z r_B^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix} \quad (3.70g)$$

$$\mathbf{f}_\Omega = \dot{\phi}^2 \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^4 m_{p_i} r_o (L_i + r_i) \cos(\theta_i + \phi) \\ -\sum_{i=1}^4 m_{p_i} r_o (L_i + r_i) \sin(\theta_i + \phi) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.70i)$$

$$\mathbf{f}_\alpha = \ddot{\phi} \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^4 m_{p_i} r_o (L_i + r_i) \sin(\theta_i + \phi) \\ \sum_{i=1}^4 m_{p_i} r_o (L_i + r_i) \cos(\theta_i + \phi) \\ m_{p_1} (L_1 + r_1) \\ m_{p_2} (L_2 + r_2) \\ m_{p_3} (L_3 + r_3) \\ m_{p_4} (L_4 + r_4) \end{Bmatrix} \quad (3.70j)$$

$$\mathbf{f}_p = g \begin{Bmatrix} 0 \\ m_r r_o \sum_{i=1}^4 m_{p_i} r_o \\ -m_{p_1} \cos(\theta_1 + \phi) \\ -m_{p_2} \cos(\theta_2 + \phi) \\ -m_{p_3} \cos(\theta_3 + \phi) \\ -m_{p_4} \cos(\theta_4 + \phi) \end{Bmatrix} \quad (3.70k)$$

$$\mathbf{K}_g = \dot{\phi}^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{p_1} \frac{\sin(L_1+r_1)}{5L_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{p_2} \frac{\sin(L_2+r_2)}{5L_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{p_3} \frac{\sin(L_3+r_3)}{5L_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{p_4} \frac{\sin(L_4+r_4)}{5L_4} \end{bmatrix} \quad (3.70h)$$



**Figura 3.9:** Modelo mecânico de um rotor apoiado sobre suportes elásticos nas extremidades, livre para se movimentar no espaço.

escrito no sistema de referência solidário ao rotor.

$${}_{B_1}\mathbf{r}_{AC} = \begin{Bmatrix} r_o \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad {}_{B_1}\mathbf{v}_{AC} = \frac{d}{dt}({}_{B_1}\mathbf{r}_{AC}) + {}_{B_1}\boldsymbol{\omega}_{B_1} \times {}_{B_1}\mathbf{r}_{AC} \quad (3.72)$$

Assim, os vetores de velocidade e aceleração do centro do rotor  $C$  são redefinidos por

$${}_{B_1}\mathbf{v}_C = (\mathbf{T}_\phi \cdot \mathbf{T}_\beta \cdot \mathbf{T}_\Gamma)^T I \mathbf{v}_A + \frac{d}{dt}({}_{B_1}\mathbf{r}_{AC}) + {}_{B_1}\boldsymbol{\omega}_{B_1} \times {}_{B_1}\mathbf{r}_{AC} \quad (3.73)$$

$${}_{B_1}\mathbf{a}_C = (\mathbf{T}_\phi \cdot \mathbf{T}_\beta \cdot \mathbf{T}_\Gamma)^T I \mathbf{a}_A + \frac{d}{dt}({}_{B_1}\mathbf{v}_{AC}) + {}_{B_1}\boldsymbol{\omega}_{B_1} \times {}_{B_1}\mathbf{v}_{AC} \quad (3.74)$$

Os vetores de posição relativa do centro do rotor ao centro de massa  ${}_{B_1}\mathbf{r}_{C^*}$ , equação (3.8), do centro do rotor ao ponto que a palheta  $p_i$  é fixa ao rotor,  ${}_{B_{p_i}}\mathbf{r}_{O_i}$ , do ponto  $O_i$  à ponta da palheta,  ${}_{B_{p_i}}\mathbf{L}_i$ , e o vetor de deslocamento devido à deformação elástica,  ${}_{B_{p_i}}\mathbf{u}_i$ , dados na equação (3.9), não se alteram. Por conseguinte, a forma de obtenção dos vetores de velocidade e aceleração dos pontos  $O_i$  e da palheta  $p_i$ , equações (3.16), (3.17), (3.18) e (3.19), não muda, embora o resultado final seja diferente, pois os vetores de posição, velocidade e aceleração do centro do rotor são novos. Os vetores de força externa também não se alteram sendo dados pelas equações (3.20), força peso do rotor, e (3.21), força peso da palheta.

A expressão da energia potencial dos mancais  $A$  e  $B$  é a semelhante à apresentada na equação (3.67), sendo neste caso dada por

$$\pi_r = \frac{1}{2} \delta_{r_A}^T \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{y_A} & 0 \\ 0 & 0 & k_{z_A} \end{bmatrix} \cdot \delta_{r_A} + \frac{1}{2} \delta_{r_B}^T \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{y_B} & 0 \\ 0 & 0 & k_{z_B} \end{bmatrix} \cdot \delta_{r_B} \quad (3.75)$$

O vetor de deformação dos mancais  $A$  e  $B$  é dado respectivamente por

$$I\delta_{r_A} = \begin{Bmatrix} 0 \\ y_o \\ z_o \end{Bmatrix} \quad (3.76)$$

$$I\delta_{r_B} = \begin{Bmatrix} 0 \\ y_o \\ z_o \end{Bmatrix} + (\mathbf{T}_\phi \cdot \mathbf{T}_\beta \cdot \mathbf{T}_\Gamma)^T \cdot \begin{Bmatrix} r_B \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} r_B \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_B \cos \beta \cos \Gamma - r_B \\ y_o + r_B \cos \beta \sin \Gamma \\ z_o - r_B \sin \beta \end{Bmatrix} \quad (3.77)$$

O modelo escolhido para descrever a deformação da palheta é linearizado de segunda ordem. Assim, a energia potencial armazenada na deformação das palhetas é a soma da energia potencial linear e da energia potencial geométrica, dadas de acordo com a equação (3.43).

Finalmente, as equações de equilíbrio dinâmico de Newton-Euler-Jourdain, (3.37) fornecem as equações de movimento conjunto. A avaliação dos jacobianos é feita de maneira semelhante ao modelo anteriores, a partir das equações (3.26), (3.27) e (3.28). Contudo, o vetor de coordenadas generalizadas,  $\mathbf{q}(t)$ , neste caso é dado por

$$\mathbf{q}(t) = \left\{ y_o(t) \quad z_o(t) \quad \Gamma(t) \quad \beta(t) \quad z_1(t) \quad z_2(t) \quad z_3(t) \quad z_4(t) \right\}^T \quad (3.78)$$

As equações de movimento são linearizadas utilizando as mesmas hipótese apresentadas para o segundo modelo. Após estas simplificações obtém-se o modelo matemático do conjunto rotor, com movimentos lineares e angulares, acoplado a palhetas flexíveis. O modelo resultante é linear para os deslocamentos do rotor, entretanto, para as palhetas, termos não-lineares de segunda ordem são mantidos, através da matriz de rigidez geométrica, sendo as equações de movimentos classificadas como linearizadas de segunda ordem. Portanto, este sistema de equações inclui tanto o efeito giroscópico e o movimento linear do rotor quanto o enrijecimento centrífugo das palhetas. Estas equações de movimento são dadas por

$$\mathbf{M}(\phi)\ddot{\mathbf{q}} + [\mathbf{C}(\phi, \dot{\phi}) + \mathbf{G}(\phi, \dot{\phi})]\dot{\mathbf{q}} + [\mathbf{K} + \mathbf{K}_\Omega(\phi, \dot{\phi}^2) + \mathbf{K}_\alpha(\phi, \ddot{\phi}) + \mathbf{K}_g + \mathbf{K}_p(\phi)]\mathbf{q} = \mathbf{f}_\Omega(\phi, \dot{\phi}^2) + \mathbf{f}_\alpha(\phi, \ddot{\phi}) + \mathbf{f}_p(\phi) \quad (3.79)$$

A forma destas matrizes e destes vetores está apresentada nas equações (3.80), sendo que estas matrizes são: matriz de massa,  $\mathbf{M}(\phi)$ , coriolis,  $\mathbf{C}(\phi, \dot{\phi})$ , giroscópica,  $\mathbf{G}(\phi, \dot{\phi})$ , rigidez centrífuga,  $\mathbf{K}_\Omega(\phi, \dot{\phi}^2)$ , rigidez associada a aceleração angular  $\ddot{\phi}$ ,  $\mathbf{K}_\alpha(\phi, \ddot{\phi})$ , rigidez estrutural  $\mathbf{K}$ , rigidez geométrica,  $\mathbf{K}_g$  e rigidez potencial (de vido ao peso),  $\mathbf{K}_p(\phi)$ ; e os vetores rotacional,  $\mathbf{f}_\Omega(\phi, \dot{\phi}^2)$ , associado a aceleração angular  $\ddot{\phi}$ ,  $\mathbf{f}_\alpha(\phi, \ddot{\phi})$  e força-peso,  $\mathbf{f}_p(\phi)$ . As matrizes são dependentes do ângulo  $\phi$ , embora as matriz de rigidez estrutural,  $\mathbf{K}$  e rigidez geométrica sejam constantes. No caso em que o rotor opera com velocidade constante, a forma de variação destas matrizes é periódica, que é o mesmo comportamento observado nos modelos anteriores.



$$\mathbf{K}_\Omega = \ddot{\phi}^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -m_{p_1} \text{sen}(\phi + \theta_1) & -m_{p_2} \text{sen}(\phi + \theta_2) & -m_{p_3} \text{sen}(\phi + \theta_3) & -m_{p_4} \text{sen}(\phi + \theta_4) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{p_1} \cos(\phi + \theta_1) & m_{p_2} \cos(\phi + \theta_2) & m_{p_3} \cos(\phi + \theta_3) & m_{p_4} \cos(\phi + \theta_4) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{p_1} r_o \text{sen}(\theta_1 + \phi) & m_{p_2} r_o \text{sen}(\theta_2 + \phi) & m_{p_3} r_o \text{sen}(\theta_3 + \phi) & m_{p_4} r_o \text{sen}(\theta_4 + \phi) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{p_1} r_o \cos(\theta_1 + \phi) & m_{p_2} r_o \cos(\theta_2 + \phi) & m_{p_3} r_o \cos(\theta_3 + \phi) & m_{p_4} r_o \cos(\theta_4 + \phi) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -m_{p_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -m_{p_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -m_{p_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -m_{p_4} \end{bmatrix} \quad (3.80d)$$

$$\mathbf{K}_\alpha = \ddot{\phi} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -m_{p_1} \cos(\phi + \theta_1) & -m_{p_2} \cos(\phi + \theta_2) & -m_{p_3} \cos(\phi + \theta_3) & -m_{p_4} \cos(\phi + \theta_4) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -m_{p_1} \text{sen}(\phi + \theta_1) & -m_{p_2} \text{sen}(\phi + \theta_2) & -m_{p_3} \text{sen}(\phi + \theta_3) & -m_{p_4} \text{sen}(\phi + \theta_4) \\ 0 & 0 & 0 & -I_{r,p} - \sum_{i=1}^4 m_{p_i} (L_i + r_i)^2 & -m_{p_1} r_o \cos(\theta_1 + \phi) & -m_{p_2} r_o \cos(\theta_2 + \phi) & -m_{p_3} r_o \cos(\theta_3 + \phi) & -m_{p_4} r_o \cos(\theta_4 + \phi) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{p_1} r_o \text{sen}(\theta_1 + \phi) & m_{p_2} r_o \text{sen}(\theta_2 + \phi) & m_{p_3} r_o \text{sen}(\theta_3 + \phi) & m_{p_4} r_o \text{sen}(\theta_4 + \phi) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.80e)$$

$$\mathbf{K}_p = g \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sum_{i=1}^4 m_{p_i} (L_i + r_i) \text{sen}(\theta_i + \phi) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.80f)$$



## Capítulo 4

# Solução analítica e numérica das equações de movimento – rotor-viga girantes

O movimento dos sistemas dinâmicos é descrito por meio de um conjunto de equações diferenciais ou, em alguns casos, por um conjunto de equações diferenciais e algébricas. Nos casos em que a variável tempo aparece de maneira implícita na equação de movimento, através das variáveis de estado  $x_i(t)$ , os sistemas são classificados como autônomos. Sistemas em que o tempo aparece explicitamente na equação de movimento, como nos casos em que os parâmetros do sistema são funções explícitas do tempo, são classificados como não-autônomos. De maneira mais simples, sistemas autônomos são aqueles em que os coeficientes da equação diferencial são constantes com o tempo e sistemas não autônomos apresentam coeficientes que variam no tempo (Meirovitch, 1988).

O tratamento e análise de sistemas autônomos são largamente conhecidos. Para este tipo de sistema é possível obter soluções em forma fechada e analisar o comportamento e estabilidade da solução. No caso de sistemas não-autônomos, a análise da solução é mais complicada, uma vez que não é possível obter uma solução fechada. Em alguns casos, especialmente quando os coeficientes da equação são funções periódicas do tempo, é possível obter algumas informações a respeito da forma da solução, e estudar a estabilidade da mesma, mesmo sem ser possível obter a solução da equação propriamente dita (Zadeh e Desoer, 1963).

Neste capítulo é apresentada uma revisão sobre os métodos de solução e análise da teoria geral de sistemas lineares (autônomos e não autônomos). A forma de obtenção da solução para sistemas lineares autônomos é apresentada detalhadamente para revisão e futura referência. Finalmente a análise da solução de problemas não-autônomos com coeficientes periódicos é apresentada, procurando manter analogia com a solução de sistemas lineares autônomos.

## 4.1 Características dinâmicas de sistemas invariantes no tempo

### 4.1.1 Teoria geral de sistemas lineares invariantes no tempo

Sistemas lineares autônomos são sistemas que podem ser descritos pela equação

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{p}(t) \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (4.1)$$

Na equação (4.1), a matriz  $\mathbf{A}$ ,  $n \times n$ , é constante e  $\mathbf{x}(t)$ ,  $n \times 1$ , é um vetor que representa o estado do sistema em um instante de tempo  $t$ , sendo  $\mathbf{x}_0$ , o estado inicial do sistema. O vetor  $\mathbf{p}(t)$  representa uma força externa. A forma homogênea da equação (4.1) é dada por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (4.2)$$

As propriedades dinâmicas e estabilidade do sistema podem ser obtidas a partir da análise do sistema em sua forma homogênea. Neste caso, estuda-se a resposta a condições iniciais não-nulas, ou seja, a uma perturbação inicial que não é alterada posteriormente pela ação de forças externas. Além disso, parâmetros como frequências naturais e modos de vibração são definidos a partir do estudo do sistema dinâmico em sua forma homogênea. Inicialmente, a resposta da equação (4.2) é analisada utilizando o conceito de matriz de transição de estado. Posteriormente, esta matriz de transição será relacionada aos autovalores e autovetores da matriz  $\mathbf{A}$ .

A matriz de transição de estado é uma solução da equação (4.2) dada por

$$\dot{\Phi}(t) = \mathbf{A}\Phi(t), \quad \Phi(0) = \mathbf{I}, \quad \text{onde} \quad \Phi(t) = \exp[\mathbf{A}t] \quad (4.3)$$

A equação (4.3) pode ser facilmente provada, lembrando que a matriz  $\exp[\mathbf{A}t]$  é definida pela série (Zadeh e Desoer, 1963).

$$\exp[\mathbf{A}t] = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + \mathbf{A}^k \frac{t^k}{k!} \quad (4.4a)$$

$$\frac{d}{dt} \exp[\mathbf{A}t] = \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 t + \mathbf{A}^3 \frac{t^2}{2!} + \dots + \mathbf{A}^{(k+1)} \frac{t^k}{k!} = \mathbf{A} \exp[\mathbf{A}t] \quad (4.4b)$$

A substituição da definição da matriz  $\exp[\mathbf{A}t]$  e sua derivada, dadas pela equação (4.4), na equação (4.2), demonstra que esta matriz é uma solução da equação homogênea. Também é fácil verificar que  $\Phi(0) = \exp[\mathbf{A} \cdot 0] = \mathbf{I}$ . Assim sendo,  $\Phi(t) = \exp[\mathbf{A}t]$  é a matriz de transição de (4.2).

A partir desta matriz de transição de estado é possível estabelecer uma solução geral para o sistema sujeito a condições iniciais não nulas, expressa por

$$\mathbf{x}(t) = \exp[\mathbf{A}(t - t_0)] \mathbf{x}_0 = \Phi(t, t_0) \mathbf{x}_0 \quad (4.5)$$

A matriz de transição de estado  $\Phi(t, t_0)$  pode ser interpretada como uma transformação linear que leva o estado inicial  $\mathbf{x}(t_0)$  a qualquer estado,  $\mathbf{x}(t)$ , no instante  $t$ . Algumas propriedades da matriz  $\exp[\mathbf{A}t]$  são apresentadas na equação abaixo (Zadeh e Desoer, 1963):

$$\det[\exp[\mathbf{A}t]] \neq 0 \quad \forall t \quad (4.6a)$$

$$\det[\exp[\mathbf{A}t]] = \exp(\alpha t) \quad \text{onde } \alpha = \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_{i,i} \quad (4.6b)$$

$$\exp[\mathbf{A}t_1] \cdot \exp[\mathbf{A}t_2] = \exp[\mathbf{A}(t_1 + t_2)] \quad (4.6c)$$

$$[\exp[\mathbf{A}t]]^{-1} = \exp[-\mathbf{A}t] \quad (4.6d)$$

A solução da equação (4.1), resposta forçada do sistema é obtida a seguir. Considera-se a equação (4.1), pré-multiplicada por  $\Phi(t)^{-1} = \exp[-\mathbf{A}t]$ , o que resulta na expressão

$$\exp[-\mathbf{A}t]\dot{\mathbf{x}}(t) = \exp[-\mathbf{A}t]\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \exp[-\mathbf{A}t]\mathbf{p}(t) \quad (4.7)$$

Por outro lado, sabe-se, a partir da equação (4.4), que a derivada da matriz exponencial é dada por

$$\frac{d}{dt}[\exp[-\mathbf{A}t]] = -\exp[-\mathbf{A}t]\mathbf{A} \quad (4.8)$$

Substituindo a equação (4.7) na equação (4.8), obtém-se

$$\exp[-\mathbf{A}t]\dot{\mathbf{x}}(t) = -\frac{d}{dt}[\exp[-\mathbf{A}t]]\mathbf{x}(t) + \exp[-\mathbf{A}t]\mathbf{p}(t)$$

ou ainda,

$$\frac{d}{dt}[\exp[-\mathbf{A}t]\mathbf{x}] = \exp[-\mathbf{A}t]\mathbf{p}(t) \quad (4.9)$$

Integrando a equação (4.9), entre  $t_0$  e  $t$  obtém-se

$$\exp[-\mathbf{A}t]\mathbf{x}(t) = \exp[-\mathbf{A}t_0]\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \exp[-\mathbf{A}\tau]\mathbf{p}(\tau)d\tau \quad (4.10)$$

Pré-multiplicando a equação (4.10) por  $\exp[\mathbf{A}t]$  obtém-se, a forma solução geral para o sistema da equação (4.1) para uma excitação  $p(t)$  qualquer:

$$\mathbf{x}(t) = \exp[\mathbf{A}(t - t_0)]\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \exp[\mathbf{A}(t - \tau)]\mathbf{p}(\tau)d\tau \quad (4.11)$$

### 4.1.2 Solução obtida utilizando parâmetros modais

A equação (4.11) é uma solução em forma fechada para o problema descrito pela equação (4.1), satisfazendo as condições iniciais impostas e sujeita a uma força  $p(t)$  qualquer. Esta solução foi obtida utilizando a teoria geral de sistemas lineares, avaliando a solução diretamente a partir da matriz  $\mathbf{A}$  e da matriz de transição de estado associada a equação diferencial. Entretanto, a avaliação numérica desta equação, que exige o cálculo da função exponencial matricial, dada pela equação (4.3), não é eficiente. Na prática, outros métodos para avaliar a matriz  $\Phi(t) = \exp[\mathbf{A}t]$  são empregados (Zadeh e Desoer, 1963), sendo que a expansão em série é recomendada apenas nos casos em que  $t$  é pequeno. Outro tipo de abordagem para encontrar a solução das equações (4.1) e (4.2) é determinar  $n$  soluções linearmente independentes que formem uma base para a solução da equação diferencial. Assim, a solução  $\mathbf{x}(t)$  em qualquer instante  $t$  é obtida a partir do conhecimento deste conjunto de soluções e das condições iniciais do problema. Assim, ao invés de procurar uma matriz  $n \times n$  que satisfaça a equação homogênea (4.2), procura-se inicialmente um vetor  $n \times 1$  que seja solução desta equação. Este vetor seria então dado por

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{r}e^{\lambda t} \quad (4.12)$$

Substituindo a equação (4.12) na equação (4.2) obtém-se

$$\lambda \mathbf{I} \mathbf{r} e^{\lambda t} - \mathbf{A} \mathbf{r} e^{\lambda t} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{r} = 0 \quad (4.13)$$

A equação (4.13) representa o problema de autovalor associado à matriz  $\mathbf{A}$ . O determinante da matriz da equação (4.13),  $\Delta(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$ , define o chamado *polinômio característico* da matriz  $\mathbf{A}$ , sendo que as raízes deste polinômio são seus *autovalores*. Para cada uma das  $n$  raízes, ou autovalor  $\lambda_i$ , existe um *autovetor* definido por  $\mathbf{r}_i$  tal que  $\mathbf{A} \mathbf{r}_i = \lambda_i \mathbf{r}_i$ . É possível demonstrar que se os autovalores  $\lambda_i$  são distintos, os autovetores  $\mathbf{r}_i$  são linearmente independentes e formam uma base para o espaço de soluções da equação diferencial, de dimensão  $n$ . Assim, as soluções determinadas pela equação (4.13) para diferentes valores de  $\lambda = \lambda_i$  e  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_i$ , onde  $i = 1, \dots, n$  formam um conjunto de soluções linearmente independente, que pode ser usado como uma base para o espaço de todas as soluções da equação (4.1). Fisicamente, os autovalores e autovetores da matriz  $\mathbf{A}$  representam as frequências naturais e modos de vibração, respectivamente, que são superpostos de forma a determinar a solução final da equação, seja em sua forma homogênea ou forçada. A solução  $x(t)$  é dada, portanto, pela combinação linear das  $n$  soluções linearmente independentes:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^n \beta_i \mathbf{r}_i e^{\lambda_i t} \quad (4.14)$$

Em forma matricial, esta equação assume a forma:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{R} e^{\Lambda t} \mathbf{b} \quad (4.15)$$

onde  $\mathbf{R}$  é a matriz com os  $n$  autovetores,  $\mathbf{b}$  é um vetor com os fatores  $\beta_i$  e  $e^{\mathbf{A}t}$  é uma matriz diagonal:

$$\mathbf{R} = [\mathbf{r}_1 \quad \mathbf{r}_2 \quad \mathbf{r}_3 \quad \dots \quad \mathbf{r}_n] \quad (4.16a)$$

$$\mathbf{b} = \{\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad \dots \quad \beta_n\}^T \quad (4.16b)$$

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad (4.16c)$$

A equação (4.15) deve satisfazer as condições iniciais de movimento  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$ , o que significa impor que

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{R}e^{\mathbf{A}t_0}\mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{b} = e^{-\mathbf{A}t_0}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{x}_0 \quad (4.17)$$

Portanto, o vetor  $\mathbf{b}$  deve ser escolhido de acordo com a equação (4.17) para que a solução respeite as condições iniciais do movimento. A solução da equação homogênea (4.2) sujeita a condições iniciais não-nulas, utilizando o conceito de autovalores e autovetores, é dada por

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{R}e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{x}_0 \quad (4.18)$$

A equação (4.18) pode ainda ser simplificada utilizando as propriedades de ortogonalidade dos autovetores da matriz  $\mathbf{A}$ . Os autovetores definidos pela equação (4.13) são os autovetores à direita da matriz  $\mathbf{A}$ , sendo dados por

$$\mathbf{A}\mathbf{r}_i = \lambda_i\mathbf{r}_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.19)$$

Os autovetores à esquerda da matriz  $\mathbf{A}$  são definidos por

$$\mathbf{A}^T\mathbf{l}_j = \lambda_j\mathbf{l}_j \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (4.20)$$

Considerando a transposta da equação (4.20) e pós-multiplicando por  $\mathbf{r}_i$  obtém-se

$$\mathbf{l}_j^T\mathbf{A}\mathbf{r}_i = \lambda_j\mathbf{l}_j^T\mathbf{r}_i \quad (4.21)$$

Pré-multiplicando a equação (4.19) por  $\mathbf{l}_j^T$ , obtém-se

$$\mathbf{l}_j^T\mathbf{A}\mathbf{r}_i = \lambda_i\mathbf{l}_j^T\mathbf{r}_i \quad (4.22)$$

Subtraindo as equações (4.21) e (4.22), obtém-se a seguinte relação

$$0 = (\lambda_i - \lambda_j)\mathbf{l}_j^T\mathbf{r}_i \quad (4.23)$$

Assim, se  $i \neq j$  (autovalores distintos)

$$\mathbf{l}_j^T \mathbf{r}_i = 0 \quad (4.24)$$

Portanto, os autovetores à direita e à esquerda da matriz  $\mathbf{A}$  são ortogonais. Se for escolhida uma normalização tal que

$$\mathbf{l}_k^T \mathbf{r}_k = 1, \quad (4.25)$$

de acordo com a equação (4.21) ou (4.22), obtém-se a relação:

$$\mathbf{l}_i^T \mathbf{A} \mathbf{r}_j = \begin{cases} \lambda_i & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (4.26)$$

A equação (4.26) pode ser escrita também em forma matricial, utilizando a matriz modal à direita e à esquerda, ou seja, as matrizes com os autovetores de  $\mathbf{A}$  à direita e à esquerda:

$$\mathbf{L}^T \mathbf{A} \mathbf{R} = \mathbf{\Lambda} \quad \text{desde que} \quad \mathbf{L}^T \mathbf{R} = \mathbf{I} \quad (4.27)$$

sendo

$\mathbf{\Lambda}$ , matriz de autovalores (matriz diagonal)

$\mathbf{R}$ , matriz de autovetores à direita

$\mathbf{L}$ , matriz de autovetores à esquerda

A normalização utilizada na equação (4.27) equivale a

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{L}^T \quad (4.28)$$

Portanto, substituindo a expressão (4.28) na equação (4.18), resposta do sistema a condições iniciais não-nulas, obtém-se

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{R} \exp[\mathbf{\Lambda}(t - t_0)] \mathbf{L}^T \mathbf{x}_0 \quad (4.29)$$

Comparando as equações (4.5) e (4.29), verifica-se que a solução obtida pela superposição modal é uma aproximação para a matriz exponencial. Assim

$$\mathbf{\Phi}(t, t_0) = \exp[\mathbf{A}(t - t_0)] = \mathbf{R} \exp[\mathbf{\Lambda}(t - t_0)] \mathbf{L}^T \quad (4.30)$$

A avaliação numérica dos autovalores e autovetores de  $\mathbf{A}$  é mais eficiente numericamente do que a avaliação da exponencial da matriz. Além disso, a matriz modal pode ser utilizada para reduzir o modelo numérico empregado, ao se considerar apenas os primeiros  $m$  autovalores e autovetores. A solução forçada pode ser decomposta utilizando as matrizes modais e a equação (4.30). Assim a equação (4.11) torna-se

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{R} \exp[\mathbf{\Lambda}(t - t_0)] \mathbf{L}^T \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{R} \exp[\mathbf{\Lambda}(t - \tau)] \mathbf{L}^T \mathbf{p}(\tau) d\tau \quad (4.31)$$

### 4.1.3 Transformada de Laplace

Outra maneira de obter a solução das equações (4.1) e (4.2) é utilizar técnicas de transformação integrais para outros domínios que não o tempo, como por exemplo, o domínio da frequência. As técnicas integrais mais empregadas na análise de sistemas mecânicos são a transformada de Laplace e transformada de Fourier. Esta última é largamente empregada em análise de sistemas mecânicos, especialmente para análise experimental e análise do sistema no domínio da frequência. Os algoritmos de transformada rápida de Fourier (fft) tornam esta ferramenta muito eficiente computacionalmente. A transformada de Laplace, por outro lado, permite trabalhar diretamente com as condições iniciais do problema. A transformada de Laplace é definida por (Brigham, 1988)

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (4.32)$$

A variável  $s$  é uma variável complexa definida por  $s = \sigma + i\omega$ . Na solução de equações diferenciais algumas importantes propriedades da transformada de Laplace são empregadas:

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0) \quad \text{derivada da função} \quad (4.33a)$$

$$\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = \mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right] = F(s)G(s) \quad \text{convolução} \quad (4.33b)$$

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a} \quad \text{Re}(s-a) > 0; \text{exponencial} \quad (4.33c)$$

Outras propriedades desta transformada podem ser encontradas na literatura (Boas, 1983). Aplicando a definição de transformada de Laplace da derivada de uma função, equação (4.33a), à equação de movimento (4.1), obtém-se

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) + \mathbf{A}\mathbf{X}(s) = \mathbf{P}(s) \quad (4.34)$$

A solução da equação de movimento no domínio  $s$  é, portanto, dada por

$$\mathbf{X}(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{x}(0) + [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{P}(s) = \Phi(s)\mathbf{x}(0) + \Phi(s)\mathbf{P}(s) \quad (4.35)$$

Utilizando a transformada de Laplace da função exponencial, equação (4.33c), obtém-se uma expressão para a transformada de Laplace inversa da função  $\Phi(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}$ :

$$\mathcal{L}^{-1}[\Phi(s)] = \exp[\mathbf{A}t] \quad (4.36)$$

Portanto, a transformada de Laplace inversa da solução  $\mathbf{X}(s)$ , equação (4.35), utilizando a definição de convolução apresentada na equação (4.33b), conduz a  $\mathbf{x}(t)$ , que é dada por

$$\mathcal{L}^{-1}[\mathbf{X}(s)] = \mathbf{x}(t) = \exp[\mathbf{A}t]\mathbf{x}(0) + \int_0^t \exp[\mathbf{A}(t-\tau)]\mathbf{p}(\tau)d\tau \quad (4.37)$$

Esta equação é equivalente à solução encontrada para a resposta forçada do sistema, equação (4.11), deslocada apenas do tempo  $t_0$ .

#### 4.1.4 Transformada de Fourier

A metodologia de solução desenvolvida para utilização da transformada integral de Laplace, é semelhante à empregada na transformada de Fourier. Neste caso, a transformada e sua inversa são definidas pelas relações (Brigham, 1988):

$$F(f) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi i f t} dt \quad (4.38)$$

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} F(f)e^{2\pi i f t} df \quad (4.39)$$

Algumas propriedades da transformada de Fourier, as quais são empregadas na obtenção da solução da equação diferencial, são apresentadas a seguir

$$\mathcal{F}[f'(t)] = (i2\pi f)F(f) \quad \text{derivada da função} \quad (4.40a)$$

$$\mathcal{F}[f(t) * g(t)] = \mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau\right] = F(f)G(f) \quad \text{convolução} \quad (4.40b)$$

$$\mathcal{F}[e^{2\pi i f_0 t}] = \delta(f - f_0) \quad \text{exponencial} \quad (4.40c)$$

$$\mathcal{F}[\cos(2\pi f_0 t)] = \frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0) \quad \text{co-seno} \quad (4.40d)$$

$$\mathcal{F}[\sin(2\pi f_0 t)] = -i\frac{1}{2}\delta(f - f_0) + i\frac{1}{2}\delta(f + f_0) \quad \text{seno} \quad (4.40e)$$

$$\mathcal{F}[f(t)e^{2\pi i f_0 t}] = F(f - f_0) \quad \text{deslocamento na frequência} \quad (4.40f)$$

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)] = F(f)e^{-2\pi i f t_0} \quad \text{deslocamento no tempo} \quad (4.40g)$$

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = 1 \quad \text{delta de Dirac} \quad (4.40h)$$

$$\mathcal{F}[1] = \delta(f) \quad \text{função unitária} \quad (4.40i)$$

$$\mathcal{F}[e^{at}u_c(t)] = \frac{1}{2\pi i f - a} \quad u_c(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}; \text{Re}(a) < 0 \quad (4.40j)$$

Aplicando as propriedades de transformada de Fourier à equação (4.2) obtém-se

$$2\pi i f \mathbf{X}(f) - \mathbf{A}X(f) = \mathbf{P}(f) \quad (4.41)$$

Portanto, a resposta do sistema no domínio da frequência é dada por

$$\mathbf{X}(f) = [2\pi i f \mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{P}(f) = \mathbf{H}(f) \mathbf{P}(f) \quad (4.42)$$

A função  $\mathbf{H}(f)$  é conhecida como *função de resposta em frequência* do sistema e representa a relação entre saída (deslocamento) e entrada do sistema (força). A transformada inversa da função  $\mathbf{H}(f)$  é conhecida como *resposta ao impulso unitário*, sendo, portanto, definida por

$$\mathbf{h}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}(f)e^{2\pi i f t} df \quad (4.43)$$

Dessa forma, se for considerada a transformada inversa de Fourier da função  $\mathbf{X}(f)$  utilizando a propriedade da convolução, obtém-se

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{h}(t) * \mathbf{p}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{h}(t - \tau)\mathbf{p}(\tau)d\tau = \int_0^t \mathbf{h}(t - \tau)\mathbf{p}(\tau)d\tau = \int_0^t \mathbf{h}(\tau)\mathbf{p}(t - \tau)d\tau \quad (4.44)$$

A forma da função de resposta em frequência  $\mathbf{H}(f)$  foi apresentada na equação (4.42), sendo, portanto, dada por

$$\mathbf{H}(f) = [2\pi i f \mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \quad (4.45)$$

A transformada de Fourier inversa desta expressão pode ser facilmente obtida das propriedades apresentadas na equação (4.40j), sendo, portanto, dada por

$$\mathbf{h}(t) = \begin{cases} \exp[\mathbf{A}t] & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases} \quad (4.46)$$

A solução dada pela equação (4.44) é também conhecida como integral de Duhammel e representa a forma geral da resposta forçada de um sistema, desde que seja conhecida sua função resposta ao impulso  $\mathbf{h}(t)$ . A análise da resposta forçada no domínio da frequência permite estabelecer uma relação entre a saída e entrada e, posteriormente, utilizando a transformada de Fourier inversa, é possível obter uma expressão geral para a função  $\mathbf{h}(t)$ . A comparação da equação (4.44), onde  $\mathbf{h}(t)$  é dada pela equação (4.46), e da segunda parte da equação (4.11) mostra que as duas formas da solução são idênticas. Entretanto, a equação (4.44) apresenta apenas a parcela da resposta forçada. A parcela relativa a parte homogênea da solução pode ser obtida diretamente da função de resposta ao impulso, sendo dada por

$$\mathbf{x}(t) = \exp[\mathbf{A}t]\mathbf{x}(0) = \mathbf{h}(t)\mathbf{x}(0) \quad (4.47)$$

A solução completa da equação (4.1), em termos da função de resposta ao impulso, é dada por

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{h}(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{h}(t - \tau)\mathbf{p}(\tau)d\tau \quad (4.48)$$

Esta solução é idêntica as soluções encontradas nas equações (4.11), obtida pela teoria geral de sistemas lineares, e (4.37), obtida com auxílio da transformada de Laplace.

#### 4.1.5 Desacoplamento das equações de movimento

As matrizes de autovalores e autovetores da matriz  $\mathbf{A}$  podem ser empregada para desacoplar as equações de movimento. Utilizando as matrizes de autovetores  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{L}$ , é possível obter a partir da equação (4.1) um sistema de equações desacoplado. Para isso, utiliza-se da seguinte transformação

de coordenadas definida pelos autovetores à direita e um novo conjunto de coordenadas, chamadas de coordenadas modais, representadas pelo vetor  $\mathbf{q}(t)$  (Brigham, 1988)

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{R}\mathbf{q}(t) \quad (4.49)$$

Substituindo a expressão para a transformação de coordenadas na equação (4.1) obtém-se

$$\mathbf{R}\dot{\mathbf{q}}(t) - \mathbf{A}\mathbf{R}\mathbf{q}(t) = \mathbf{p}(t) \quad (4.50)$$

Pré-multiplicando a equação anterior por  $\mathbf{L}^T$  obtém-se

$$\mathbf{L}^T\mathbf{R}\dot{\mathbf{q}}(t) - \mathbf{L}^T\mathbf{A}\mathbf{R}\mathbf{q}(t) = \mathbf{L}^T\mathbf{p}(t) \quad (4.51)$$

Substituindo as condições impostas na normalização  $\mathbf{L}^T\mathbf{R} = \mathbf{I}$  e  $\mathbf{L}^T\mathbf{A}\mathbf{R} = \mathbf{\Lambda}$ , a equação anterior torna-se

$$\dot{\mathbf{q}}(t) - \mathbf{\Lambda}\mathbf{q}(t) = \mathbf{L}^T\mathbf{p}(t) \quad (4.52)$$

A equação (4.52) representa um sistema de  $n$  equações desacopladas, cuja solução pode ser obtida diretamente no domínio do tempo, analogamente à equação (4.11), sendo, portanto, dada por

$$\mathbf{q}(t) = \exp[\mathbf{\Lambda}(t - t_0)]\mathbf{q}_0 + \int_{t_0}^t \exp[\mathbf{\Lambda}(t - \tau)]\mathbf{L}^T\mathbf{p}(\tau)d\tau \quad (4.53)$$

Utilizando a transformação modal obtém-se a solução para  $\mathbf{x}(t)$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{R}[\mathbf{\Lambda}(t - t_0)]\mathbf{L}^T\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{R}[\mathbf{\Lambda}(t - \tau)]\mathbf{L}^T\mathbf{p}(\tau)d\tau \quad (4.54)$$

Esta forma de solução é idêntica a obtida anteriormente, equação (4.31). Outra forma possível para obter a solução do sistema de equações em sua forma desacoplada, equação (4.52) é utilizar a transformada de Fourier. Utilizando as propriedades da transformada de Fourier para a derivada de uma função obtém-se, a partir da equação (4.52), que

$$\mathbf{Q}(f) = \left[ \frac{1}{i2\pi f\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}} \right] \mathbf{L}^T\mathbf{P}(f) \quad (4.55)$$

Aplicando a transformação modal para voltar para a solução de  $\mathbf{X}(f)$  obtém-se:

$$\mathbf{X}(f) = \mathbf{R} \left[ \frac{1}{i2\pi f\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}} \right] \mathbf{L}^T\mathbf{P}(f) \quad (4.56)$$

A função de resposta em frequência dependendo dos parâmetros modais é, portanto, dada por

$$\mathbf{H}(f) = \mathbf{R} \left[ \frac{1}{i2\pi f\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}} \right] \mathbf{L}^T \quad (4.57)$$

A função de resposta ao impulso, no domínio do tempo, é dada por

$$\mathbf{h}(t) = \mathbf{R} \exp[\mathbf{\Lambda}t] \mathbf{L}^T \quad (4.58)$$

Assim a resposta geral é dada pela equação (4.48), com a diferença que, neste caso, a matriz  $\mathbf{h}$  é obtida através da superposição modal, equação (4.58).

#### 4.1.6 Resposta ao impulso

Definidas a forma da resposta forçada do sistema utilizando parâmetros modais e transformada de Fourier, alguns tipos de excitação comuns em sistemas mecânicos e suas respostas são analisadas. Por exemplo, uma excitação do tipo impulsiva é uma força ideal definida por um delta de Dirac, que aproxima a distribuição da força aplicada por um martelo no domínio do tempo (Brigham, 1988)

$$\mathbf{p}(t) = \delta(t) \quad (4.59)$$

A transformada de Fourier deste sinal é conhecida e dada por, equação (4.40h)

$$\mathbf{P}(f) = 1 \quad (4.60)$$

Portanto, a resposta, no domínio da frequência, é dada por

$$\mathbf{X}(f) = \mathbf{H}(f) \quad (4.61)$$

A resposta no domínio do tempo é a própria transformada inversa de Fourier da função de resposta em frequência, de onde vem o nome de função de resposta ao impulso

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{F}^{-1}[\mathbf{H}(f)] = \mathbf{h}(t) = \mathbf{R} \exp[\mathbf{\Lambda}t] \mathbf{L}^T \quad (4.62)$$

A resposta completa, considerando as condições iniciais é dada por

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{h}(t)\mathbf{x}_0 \quad (4.63)$$

#### 4.1.7 Resposta a uma excitação harmônica

Uma excitação geral em forma harmônica é dada por

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}^+ e^{i2\pi f_0 t} + \mathbf{p}^- e^{-i2\pi f_0 t}, \quad (4.64)$$

a transformada de Fourier desta excitação é dada por

$$\mathbf{P}(f) = \mathbf{p}^+ \delta(f - f_0) + \mathbf{p}^- \delta(f + f_0) \quad (4.65)$$

Considerando que a solução é dada por

$$\mathbf{X}(f) = \mathbf{H}(f)\mathbf{P}(f) \quad (4.66)$$

A transformada de Fourier inversa é obtida diretamente da definição de transformada inversa, sendo expressa por

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}(f) \left[ \mathbf{p}^+ \delta(f - f_0) + \mathbf{p}^- \delta(f + f_0) \right] e^{2\pi i f t} df \Rightarrow \\ \mathbf{x}(t) &= \mathbf{H}(f_0)\mathbf{p}^+ e^{2\pi i f_0 t} + \mathbf{H}(f_0)\mathbf{p}^- e^{-2\pi i f_0 t} \Rightarrow \\ \mathbf{x}(t) &= \mathbf{R} \left[ \frac{1}{2\pi i f_0 - \Lambda} \right] \mathbf{L}^T \mathbf{p}^+ e^{2\pi i f_0 t} + \mathbf{R} \left[ \frac{1}{-2\pi i f_0 - \Lambda} \right] \mathbf{L}^T \mathbf{p}^- e^{-2\pi i f_0 t} \end{aligned} \quad (4.67)$$

sendo

$$\left[ \frac{1}{2\pi i f_0 - \Lambda} \right] = \text{diag} \left[ \frac{1}{2\pi i f_0 - \lambda_k} \right] \quad k = 1, \dots, n \quad (4.68)$$

A transformada de Fourier, ao contrário da transformada de Laplace, não permite acomodar as condições iniciais de movimento. Assim, a solução obtida anteriormente corresponde apenas à parcela conhecida como solução particular,  $\mathbf{x}_p(t)$ . Da teoria de sistemas lineares sabe-se que a solução total é a soma da solução homogênea e da solução particular

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_h(t) + \mathbf{x}_p(t) \quad (4.69)$$

As condições iniciais são definidas por  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ . A forma da solução homogênea é conhecida e dada por

$$\mathbf{x}_h(t) = \mathbf{R} \exp \Lambda t \mathbf{L}^T \phi \quad (4.70)$$

Portanto, avaliando a resposta  $\mathbf{x}(t)$  total no instante  $t$ , obtém-se

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0) = \phi + \mathbf{x}_p(0) \quad \Rightarrow \quad \phi = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_p(0) \quad (4.71)$$

A solução total é dada por

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{R} \exp[\Lambda t] \mathbf{L}^T [\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_p(0)] + \mathbf{x}_p(t) \quad (4.72)$$

Assim, no caso da excitação harmônica, o vetor  $\phi$  é dado por

$$\phi = \mathbf{x}_0 - \mathbf{R} \left[ \frac{1}{2\pi i f_0 - \Lambda} \right] \mathbf{L}^T \mathbf{p}^+ - \mathbf{R} \left[ \frac{1}{-2\pi i f_0 - \Lambda} \right] \mathbf{L}^T \mathbf{p}^- \quad (4.73)$$

A solução total é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{R} \exp[\Lambda t] \mathbf{L}^T \mathbf{x}_0 - \mathbf{R} \exp[\Lambda t] \left[ \frac{1}{2\pi i f_0 - \Lambda} \right] \mathbf{L}^T \mathbf{p}^+ - \mathbf{R} \exp[\Lambda t] \left[ \frac{1}{-2\pi i f_0 - \Lambda} \right] \mathbf{L}^T \mathbf{p}^- \\ &\quad + \mathbf{R} \left[ \frac{1}{2\pi i f_0 - \Lambda} \right] \mathbf{L}^T \mathbf{p}^+ e^{i2\pi f_0 t} + \mathbf{R} \left[ \frac{1}{-2\pi i f_0 - \Lambda} \right] \mathbf{L}^T \mathbf{p}^- e^{-i2\pi f_0 t} \end{aligned} \quad (4.74)$$

Considerando apenas a função co-seno, cuja excitação é dada por

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}^c \cos(2\pi f_0 t) \quad (4.75)$$

em que

$$\mathbf{p}^+ = \frac{1}{2}\mathbf{p}^c \quad \text{e} \quad \mathbf{p}^- = \frac{1}{2}\mathbf{p}^c \quad (4.76)$$

A solução é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) = & \mathbf{R} \exp[\mathbf{\Lambda}t] \mathbf{L}^T \mathbf{x}_0 + \mathbf{R} \exp[\mathbf{\Lambda}t + i\boldsymbol{\psi}] \mathbf{L}^T \frac{1}{2} \mathbf{p}^c + \mathbf{R} \exp[\mathbf{\Lambda}t - i\boldsymbol{\psi}] \mathbf{L}^T \frac{1}{2} \mathbf{p}^c \\ & - \mathbf{R} \exp[i2\pi f_0 t + i\boldsymbol{\psi}] \mathbf{L}^T \frac{1}{2} \mathbf{p}^c - \mathbf{R} \exp[-i2\pi f_0 t - i\boldsymbol{\psi}] \mathbf{L}^T \frac{1}{2} \mathbf{p}^c \end{aligned} \quad (4.77)$$

em que

$$\exp[\mathbf{\Lambda}t + i\boldsymbol{\psi}] = \text{diag}[e^{\lambda_k t + i\psi_k}] \quad (4.78)$$

$$\exp[i2\pi f_0 t + i\boldsymbol{\psi}] = \text{diag}[e^{i2\pi f_0 t + i\psi_k}] \quad (4.79)$$

sendo

$$\cos \psi_k = \frac{\lambda_k}{\lambda_k^2 + (2\pi f_0)^2} \quad k = 1, \dots, n \quad (4.80)$$

$$\sin \psi_k = \frac{2\pi f_0}{\lambda_k^2 + (2\pi f_0)^2} \quad k = 1, \dots, n \quad (4.81)$$

, ou ainda,

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{R} \exp[\mathbf{\Lambda}t] \mathbf{L}^T \mathbf{x}_0 + \mathbf{R} \exp[\mathbf{\Lambda}t] \cos[\boldsymbol{\psi}] \mathbf{L}^T \frac{1}{2} \mathbf{p}^c - \mathbf{R} \cos[2\pi f_0 t + \boldsymbol{\psi}] \mathbf{L}^T \mathbf{p}^c \quad (4.82)$$

onde

$$\cos[2\pi f_0 t + \boldsymbol{\psi}] = \text{diag}[\cos(2\pi f_0 t + \psi_k)] \quad k = 1, \dots, n \quad (4.83)$$

Considerando apenas uma excitação senoidal,

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}^s \sin(2\pi f_0 t) \quad (4.84)$$

em que

$$\mathbf{p}^+ = -i\frac{1}{2}\mathbf{p}^s \quad \text{e} \quad \mathbf{p}^- = i\frac{1}{2}\mathbf{p}^s \quad (4.85)$$

Sendo que a solução é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) = & \mathbf{R} \exp[\mathbf{\Lambda}t] \mathbf{L}^T \mathbf{x}_0 + \mathbf{R} \exp[\mathbf{\Lambda}t + i\boldsymbol{\psi}] \mathbf{L}^T \frac{1}{2i} \mathbf{p}^s - \mathbf{R} \exp[\mathbf{\Lambda}t - i\boldsymbol{\psi}] \mathbf{L}^T \frac{1}{2i} \mathbf{p}^s \\ & - \mathbf{R} \exp[i2\pi f_0 t + i\boldsymbol{\psi}] \mathbf{L}^T \frac{1}{2i} \mathbf{p}^s + \mathbf{R} \exp[-i2\pi f_0 t - i\boldsymbol{\psi}] \mathbf{L}^T \frac{1}{2i} \mathbf{p}^s \end{aligned} \quad (4.86)$$

Ou ainda,

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{R} \exp[\Lambda t] \mathbf{L}^T \mathbf{x}_0 + \mathbf{R} \exp[\Lambda t] \operatorname{sen}[\psi] \mathbf{L}^T \frac{1}{2} \mathbf{p}^s - \mathbf{R} \operatorname{sen}[2\pi f_0 t + \psi] \mathbf{L}^T \mathbf{p}^s \quad (4.87)$$

em que

$$\operatorname{sen}[2\pi f_0 t + \psi] = \operatorname{diag}[\operatorname{sen}(2\pi f_0 t + i\psi_k)] \quad k = 1, \dots, n \quad (4.88)$$

## 4.2 Características dinâmicas de sistemas lineares variantes no tempo

Sistemas cujas equações de movimento contém coeficientes dependentes do tempo são chamados de sistema não-autônomo. Isto acontece, em geral, quando algum dos parâmetros do sistema é uma função explícita do tempo. Um exemplo deste tipo de sistema é o de um pêndulo, cujo comprimento varia no tempo. Sistemas lineares não-autônomos podem ser descritos pela equação diferencial ordinária:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{p}(t) \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (4.89)$$

Na equação (4.89), os elementos da matriz de estado  $\mathbf{A}(t)$ ,  $n \times n$ , são funções contínuas do tempo. Da mesma forma, os elementos do vetor  $\mathbf{p}(t)$  que representa uma força externa,  $n \times 1$ , são funções contínuas no tempo  $t$ . O vetor de estado  $\mathbf{x}(t)$ ,  $n \times 1$ , é um vetor que representa o estado do sistema em um instante de tempo  $t$ , sendo  $\mathbf{x}_0$ , o estado inicial do sistema. A forma homogênea da equação (4.89) é dada por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (4.90)$$

É possível demonstrar (Zadeh e Desoer, 1963; Meirovitch, 1988) que para um sistema em que os elementos da matriz  $\mathbf{A}(t)$  são contínuos no tempo, a equação diferencial apresenta uma única solução dada por  $\mathbf{x}(t)$ , passando pelo estado  $\mathbf{x}_0$  no instante  $t_0$ . A matriz de transição de estado da equação (4.90) é definida por

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = \mathbf{A}(t)\Phi(t, t_0), \quad \Phi(t, t_0) = \mathbf{I} \quad (4.91)$$

Dessa forma, a solução da equação em qualquer instante  $t$  pode ser expressa em função da matriz de transição de estado  $\Phi(t, t_0)$  e das condições iniciais do problema, sendo dada por

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}_0 \quad (4.92)$$

A matriz de transição de estado  $\Phi(t, t_0)$  pode ser interpretada como uma transformação linear que mapeia o estado inicial  $\mathbf{x}_0$ , em  $t_0$ , no estado  $\mathbf{x}(t)$ , no instante  $t$ . Algumas propriedades da matriz

de transição são apresentadas a seguir (Zadeh e Desoer, 1963):

$$\det[\Phi(t, t_0)] \neq 0 \quad \text{se } \mathbf{A}(t) \text{ é contínua} \quad (4.93a)$$

$$\Phi(t_1, t_2) \cdot \Phi(t_2, t_3) = \Phi(t_1, t_3) \quad \forall t_1, t_2, t_3 \quad (4.93b)$$

$$\det[\Phi(t, t_0)] = \exp\left[\int_{t_0}^t \alpha(\tau) d\tau\right] \quad \alpha(\tau) = \sum_{i=1}^n \mathbf{A}(\tau)_{i,i} \quad (4.93c)$$

$$\Phi(t_1, t_2)^{-1} = \Phi(t_2, t_1) \quad (4.93d)$$

A matriz de transição de estado é não singular em um determinado intervalo de tempo se a matriz  $\mathbf{A}(t)$  é contínua neste intervalo. Isto implica que as colunas da matriz  $\Phi(t, t_0)$  são linearmente independentes e, portanto, formam uma base para o espaço de soluções da equação diferencial (4.89), que tem dimensão  $n$ . Dessa forma, qualquer solução desta equação diferencial pode ser escrita como uma combinação linear das colunas da matriz de transição de estado.

No caso de sistemas variantes no tempo não é possível escrever uma expressão fechada para a matriz de transição. Entretanto, em casos especiais, em que a matriz  $\mathbf{A}(t)$  é comutativa (Wu *et al.*, 1975; Wu e Sherif, 1976; Wu, 1978; Wu e Sinha, 1994) é possível obter a seguinte expressão para a matriz de transição, análoga para a solução de sistemas invariantes no tempo, conforme equação (4.3), expressa por

$$\Phi(t, t_0) = \exp\left[\int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau\right] \quad \text{se a matriz } \mathbf{A}(t) \text{ é comutativa} \quad (4.94)$$

A matriz  $\mathbf{A}(t)$  é comutativa apenas se

$$\left[\int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau\right] \mathbf{A}(t) = \mathbf{A}(t) \left[\int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau\right] \quad (4.95)$$

Apenas para esta classe de problemas, comutativos, é possível estabelecer uma expressão fechada para a matriz de transição. Entretanto, embora seja possível obter uma forma para a matriz  $\Phi(t, t_0)$ , sua avaliação não é simples. Como não é possível obter diretamente uma expressão para a solução da equação diferencial, outras propriedades deste sistema que permitem analisar o comportamento da resposta, mesmo sem conhecê-la, podem ser empregadas. Uma definição muito utilizada é a de matriz fundamental de  $\mathbf{A}(t)$ , que é uma matriz  $\mathbf{X}(t)$  que satisfaz (Zadeh e Desoer, 1963; Meirovitch, 1988).

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) \quad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{C} \quad (4.96)$$

onde  $\mathbf{C}$  é uma matriz constante definida pela equação

$$\mathbf{X}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{C} \quad (4.97)$$

Qualquer matriz não-singular que satisfaça a equação (4.90), é uma matriz fundamental do sistema. Portanto, qualquer matriz fundamental é da forma (4.97) para alguma matriz constante

não-singular  $\mathbf{C}$ , sendo que as colunas da matriz fundamental são soluções linearmente independentes da equação diferencial do sistema. Uma importante conclusão desta definição é que a partir do conhecimento de uma matriz fundamental de  $\mathbf{A}(t)$  e da matriz constante  $\mathbf{C}$ , é possível obter uma expressão para a matriz de transição

$$\Phi(t, t_0) = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}(t_0)^{-1} \quad (4.98)$$

Considerando agora a resposta do sistema forçado, equação (4.89), é dada em função da matriz de transição por

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)\mathbf{p}(\tau)d\tau \quad (4.99)$$

Embora não exista um método para determinar a matriz de transição do sistema e, assim, obter uma expressão fechada para sua solução, informações a respeito da solução, tais como estabilidade, podem ser obtidas sem o conhecimento total desta matriz. Nestas análises a matriz constante  $\mathbf{C}$ , associada a uma matriz fundamental da equação diferencial e definida pela equação (4.97) tem um papel importante. Outro conceito também muito utilizado é o de equivalência algébrica. Procura-se determinar um sistema invariante no tempo que seja algebricamente equivalente ao sistema original variante no tempo. Para isto utilizam-se transformações lineares  $\mathbf{T}(t)$ , que definem um novo conjunto de coordenadas. Como os dois sistemas são equivalentes, é possível analisar a estabilidade do sistema invariante e estender os resultados para o sistema variante no tempo (Zadeh e Desoer, 1963; Wu, 1978).

Expressões explícitas para a solução de sistemas variantes no tempo podem ser determinadas apenas nos casos em que o sistema é comutativo, sendo possível neste caso sintetizar expressões para a matriz de transição de estado  $\Phi(t, t_0)$ . Para problemas cuja matriz de estado não é comutativa, ainda é possível determinar uma metodologia para análise do comportamento da solução, tal como análise de autovalores e estabilidade, através da transformação do sistema variante no tempo em um sistema invariante, sem o pleno conhecimento da matriz de transição de estado. Uma apresentação mais detalhada dos teoremas e condições em que um sistema linear variável no tempo pode ser transformado em um sistema algebricamente equivalente e invariante no tempo são apresentadas no Apêndice (A).

Um classe de problemas variantes no tempo que podem ser transformados em sistemas invariantes algebricamente equivalentes são os sistemas periódicos. Estes sistemas, que apresentam matrizes cujos coeficientes são funções contínuas e periódicas, são conhecidos como sistemas de Floquet, cujas propriedades são apresentadas a seguir.

### 4.3 Sistemas de Floquet – sistemas lineares periódicos

Seja um sistema de equações de ordem  $n$  que é representado na forma matricial de acordo com

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \quad (4.100)$$

Os elementos da matriz  $\mathbf{A}$ ,  $A_{ij}$ , são funções periódicas no tempo, sendo que o período é dado por  $T$ , de tal forma que,

$$\mathbf{A}(t + T) = \mathbf{A}(t) \quad \forall t \quad (4.101)$$

Assim se  $\Phi(t, t_0)$  é uma matriz de transição da equação (4.100), então  $\Phi(t + T, t_0)$  também uma matriz fundamental desta equação:

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = \mathbf{A}(t + T)\Phi(t + T, t_0) = \mathbf{A}(t)\Phi(t, t_0) \quad (4.102)$$

A expressão anterior é válida apenas se  $\mathbf{A}(t)$  é uma matriz com coeficientes que são funções contínuas no tempo e periódicas com período  $T$ . Para este tipo de problema, é possível demonstrar (vide Teorema 3 do Apêndice (B)), que a matriz de transição de estado da equação (4.100) pode ser escrita como o produto de uma matriz periódica não-singular e uma matriz exponencial, de acordo com (Zadeh e Desoer, 1963; Meirovitch, 1988)

$$\Phi(t, t_0) = \mathbf{Q}(t, t_0) \exp[\mathbf{R}(t - t_0)] \quad (4.103)$$

no qual  $\mathbf{R}$  é uma matriz constante não-singular. Além disso, é possível demonstrar, vide Teorema 1 e Corolário 1 do Apêndice (A), que o sistema da equação (4.100) pode ser transformado no sistema com coeficientes constantes do tipo

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{R}\mathbf{y}(t) \quad (4.104)$$

utilizando a seguinte transformação de coordenadas:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{T}(t)\mathbf{y}(t) \quad (4.105)$$

onde

$$\mathbf{T}(t) = \mathbf{Q}(t, t_0) \quad (4.106)$$

Em outras palavras, é possível transformar um sistema de Floquet em um sistema invariante no tempo, utilizando uma matriz de transformação  $\mathbf{T}(t)$  dada por

$$\mathbf{T}(t) = \mathbf{Q}(t, t_0) = \Phi(t, t_0) \exp[-\mathbf{R}(t - t_0)] \quad (4.107)$$

A matriz  $\mathbf{Q}(t, t_0)$  é não-singular, pois as matrizes de transição  $\Phi(t, t_0)$  e  $\exp[-\mathbf{R}(t - t_0)]$  não são singulares. Além disso, a matriz  $\mathbf{Q}(t, t_0)$  é periódica com período  $T$ . A solução da equação (4.100) pode ser obtida a partir da solução do problema invariante equivalente (4.104). A solução de um sistema invariante no tempo foi analisada na primeira seção deste capítulo, equação (4.5), sendo dada por

$$\mathbf{y}(t) = \exp[\mathbf{R}(t - t_0)]\mathbf{y}(t_0) \quad (4.108)$$

em que,

$$\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{T}(t_0)^{-1}\mathbf{x}(t_0) \quad (4.109)$$

Utilizando a transformação  $\mathbf{T}(t)$  obtém-se a solução de  $\mathbf{x}(t)$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{T}(t)\mathbf{y}(t) = \mathbf{T}(t)\exp[\mathbf{R}(t - t_0)]\mathbf{T}(t_0)^{-1}\mathbf{x}(t_0) \quad (4.110)$$

ou ainda

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{Q}(t, t_0)\exp[\mathbf{R}(t - t_0)]\mathbf{x}(t_0) \quad (4.111)$$

pois

$$\mathbf{Q}(t_0, t_0) = \mathbf{I} \quad (4.112)$$

Não existe um método geral para avaliação da matriz de transformação  $\mathbf{Q}(t, t_0)$ . Na próxima seção é proposta uma aproximação para a matriz de transição de estado com a solução da chamada equação de Hill. Na verdade, o procedimento é uma aproximação numérica, pois a obtenção de uma expressão analítica da matriz de transição não é possível. Procura-se então determinar uma aproximação para a matriz periódica  $\mathbf{Q}(t)$  e para a matriz constante  $\mathbf{R}$  de tal forma que seja possível obter uma aproximação para a matriz de transição de estado.

## 4.4 Solução de sistemas periódicos usando a equação de Hill

O método de solução da equação de Hill é um método que procura aproximar numericamente a matriz de transição de estado de um sistema cuja matriz de estado apresenta coeficientes que são periódicos no tempo. Neste tipo de abordagem, a aproximação utilizada baseia-se no fato de que uma função que é periódica pode ser expandida em uma série de Fourier (Meirovitch, 1988). Assume-se que a solução também é periódica e, portanto, pode ser expandida em uma série de Fourier. A metodologia de solução consiste em transformar a equação diferencial do sistema variante no tempo em um novo sistema de equações em que se procura estimar os coeficientes da série de Fourier da solução  $\mathbf{x}(t)$ .

#### 4.4.1 Autovalores e autovetores variantes no tempo

A equação diferencial do sistema periódico no tempo em sua forma homogênea é dada por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) \quad \text{onde} \quad \mathbf{A}(t+T) = \mathbf{A}(t) \quad (4.113)$$

A solução proposta para esta equação é semelhante apresentada na equação (4.12), para problemas invariantes no tempo, com a diferença que neste caso o vetor  $\mathbf{r}$  é variante no tempo

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{r}(t)e^{\lambda t} \quad (4.114)$$

$\mathbf{r}(t)$  é um vetor  $n \times 1$  e  $\lambda$  é constante com o tempo.

Assim substituindo a forma da solução (4.114) na equação diferencial, obtém-se

$$\dot{\mathbf{r}}(t)e^{\lambda t} + \lambda\mathbf{r}(t)e^{\lambda t} = \mathbf{A}(t)\mathbf{r}(t)e^{\lambda t} \quad (4.115)$$

A equação anterior pode ser interpretada como a forma de um problema de autovalor variante no tempo

$$\dot{\mathbf{r}}(t) + [\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}(t)]\mathbf{r}(t) = 0 \quad (4.116)$$

A matriz  $\mathbf{A}(t)$  apresenta coeficientes periódicos, da mesma forma supõe-se que o vetor  $\mathbf{r}(t)$  também é periódico. Assim, ambos podem ser expandidos em forma de séries de Fourier. A aproximação exata pela série é obtida utilizando um número infinito de termos da série de Fourier. Entretanto, esta aproximação é obtida com um número finito de termos  $2N + 1$ , de acordo com (Xu e Gasch, 1995; Reuter, 1998)

$$\mathbf{A}(t) = \sum_{k=-K}^K \mathbf{A}_k e^{i\Omega_0 k t} \quad (4.117)$$

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{k=-K}^K \mathbf{r}_k e^{i\Omega_0 k t} \quad (4.118)$$

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \sum_{k=-K}^K (i\Omega_0 k) \mathbf{r}_k e^{i\Omega_0 k t} \quad (4.119)$$

Substituindo as expressões para a expansão em série de Fourier na equação (4.116), obtém-se

$$\sum_{k=-K}^K (i\Omega_0 k) \mathbf{r}_k e^{i\Omega_0 k t} + \left( \lambda\mathbf{I} - \sum_{j=-K}^K \mathbf{A}_j e^{i\Omega_0 j t} \right) \sum_{k=-K}^K \mathbf{r}_k e^{i\Omega_0 k t} = 0$$

ou ainda

$$\sum_{k=-K}^K (i\Omega_0 k) \mathbf{r}_k e^{i\Omega_0 k t} + \sum_{k=-K}^K \lambda \mathbf{r}_k e^{i\Omega_0 k t} - \sum_{j=-K}^K \mathbf{A}_j \sum_{k=-K}^K \mathbf{r}_k e^{i\Omega_0 (k+j)t} = 0 \quad (4.120)$$

As funções exponenciais  $e^{i\Omega_0 kt}$  são linearmente independentes para diferentes valores do coeficiente  $k$ . É possível, então, obter  $2N + 1$  equações independentes que possuam mesmos valores dos expoentes. Assim, considerando um valor qualquer de  $k$

$$(i\Omega_0 k)\mathbf{r}_k e^{i\Omega_0 kt} + \lambda \mathbf{r}_k e^{i\Omega_0 kt} - \sum_{j=-K}^K \mathbf{A}_j \mathbf{r}_k e^{i\Omega_0(k+j)t} = 0 \quad (4.121)$$

Para que seja possível igualar as funções exponenciais, deve ser considerado um deslocamento de índices no somatório, de tal maneira que o expoente seja sempre igual a  $k$ , enquanto os valores de  $j$  variam de  $-K$  a  $K$ . Dessa forma, obtém-se a seguinte expressão:

$$(i\Omega_0 k)\mathbf{r}_k e^{i\Omega_0 kt} + \lambda \mathbf{r}_k e^{i\Omega_0 kt} - \sum_{j=-K}^K \mathbf{A}_j \mathbf{r}_{k-j} e^{i\Omega_0(k-j+j)t} = 0 \Rightarrow$$

$$(i\Omega_0 k)\mathbf{r}_k + \lambda \mathbf{r}_k - \sum_{j=-K}^K \mathbf{A}_j \mathbf{r}_{k-j} = 0 \quad (4.122)$$

Assim são definidas  $2N + 1$  equações para diferentes valores de  $k$ , sendo que cada uma destas possui um somatório. Desta forma, é possível montar um sistema de equações para as variáveis desconhecidas, os coeficientes da série de Fourier,  $\mathbf{r}_k$ .

$$\left( \lambda \hat{\mathbf{I}} - \begin{bmatrix} 2i\Omega_0 \mathbf{I} + \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_{-1} & \mathbf{A}_{-2} & \mathbf{A}_{-3} & \mathbf{A}_{-4} \\ \mathbf{A}_1 & i\Omega_0 \mathbf{I} + \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_{-1} & \mathbf{A}_{-2} & \mathbf{A}_{-3} \\ \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_{-1} & \mathbf{A}_{-2} \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_1 & -i\Omega_0 \mathbf{I} + \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_{-1} \\ \mathbf{A}_4 & \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_1 & -2i\Omega_0 \mathbf{I} + \mathbf{A}_0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_{-2} \\ \mathbf{r}_{-1} \\ \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \end{Bmatrix} \quad (4.123)$$

Esta equação pode ser escrita da seguinte forma

$$(\lambda \hat{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{A}})\hat{\mathbf{r}} = 0 \quad (4.124)$$

Ou seja, a formulação desenvolvida para obtenção dos coeficientes da série de Fourier do vetor  $\mathbf{r}(t)$  leva a um problema de autovalor, mas neste caso da matriz expandida  $\hat{\mathbf{A}}$  formada pelos coeficientes da série de Fourier da matriz de estado  $\mathbf{A}(t)$  e em função do parâmetro  $\Omega_0$ . Na equação (4.123) são considerados  $4N + 1$  termos da série de Fourier da matriz  $\mathbf{A}(t)$  para obter  $2N + 1$  termos da série de Fourier do vetor  $\mathbf{r}(t)$ . Na verdade se for considerado que a série de Fourier para  $\mathbf{r}(t)$  tem

infinitos termos, então a matriz  $\widehat{\mathbf{A}}$  é uma matriz de dimensão infinita, dada por

$$\widehat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & 3i\Omega_0\mathbf{I} + \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_{-1} & \mathbf{A}_{-2} & \mathbf{A}_{-3} & \mathbf{A}_{-4} & \mathbf{A}_{-5} & \mathbf{A}_{-6} & \dots \\ \dots & \mathbf{A}_1 & 2i\Omega_0\mathbf{I} + \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_{-1} & \mathbf{A}_{-2} & \mathbf{A}_{-3} & \mathbf{A}_{-4} & \mathbf{A}_{-5} & \dots \\ \dots & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_1 & i\Omega_0\mathbf{I} + \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_{-1} & \mathbf{A}_{-2} & \mathbf{A}_{-3} & \mathbf{A}_{-4} & \dots \\ \dots & \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_{-1} & \mathbf{A}_{-2} & \mathbf{A}_{-3} & \dots \\ \dots & \mathbf{A}_4 & \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_1 & -i\Omega_0\mathbf{I} + \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_{-1} & \mathbf{A}_{-2} & \dots \\ \dots & \mathbf{A}_5 & \mathbf{A}_4 & \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_1 & -2i\Omega_0\mathbf{I} + \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_{-1} & \dots \\ \dots & \mathbf{A}_6 & \mathbf{A}_5 & \mathbf{A}_4 & \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_1 & -3i\Omega_0\mathbf{I} + \mathbf{A}_0 & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (4.125)$$

A expressão para a forma dos autovalores desta matriz é dada por  $\det[\lambda\widehat{\mathbf{I}} - \widehat{\mathbf{A}}]$ . Este determinante é conhecido como *determinante infinito de Hill* (Whittaker e Watson, 1963). A solução desta equação leva, portanto, a infinitos autovalores, ou seja, o vetor  $\mathbf{r}(t)$  deveria ser representado por infinitos termos da série de Fourier, o que significaria uma aproximação exata para a solução da equação diferencial. Entretanto, isto não é factível, pois não existe uma solução para um determinante de uma matriz de dimensão infinita. Apenas no caso em que a matriz  $\mathbf{A}(t)$  reduz-se a um escalar, existe uma solução para este determinante, que é uma função transcendental (Whittaker e Watson, 1963), com infinitas soluções. Para o caso mais geral, é possível considerar apenas as linhas e colunas centrais da matriz expandida e obter uma aproximação razoável para os primeiros termos da série de Fourier do vetor  $\mathbf{r}(t)$ . A convergência do determinante infinito pode ser provada (Friedmann *et al.*, 1977).

#### 4.4.2 Autovalores e autovetores básicos

Embora o número de autovalores da matriz expandida  $\widehat{\mathbf{A}}$  seja infinito, estes são redundantes entre si, podendo ser divididos em apenas  $n$  conjuntos, sendo que  $n$  é a dimensão da matriz  $\mathbf{A}(t)$  e, portanto, representa o número de graus de liberdade e autovalores de um sistema invariante equivalente. Estes  $n(2N + 1)$  autovalores da matriz expandida podem então ser divididos em  $n$  conjuntos formados cada por um autovalor-básico e seus múltiplos em função do parâmetro  $\Omega_0$ , de acordo com a seguinte forma

$$\lambda_j = \lambda_{j0} \pm ik\Omega_0 \quad j = 1, \dots, n \quad k = -K, \dots, K \quad (4.126)$$

onde  $\lambda_{j0}$  correspondem aos autovalores-básicos do sistema, que correspondem aos autovalores do sistema mecânico propriamente ditos (frequências naturais). A combinação  $\lambda_j$  corresponde ao efeito da variação paramétrica do sistema, que é função da velocidade angular  $\Omega_0$ . A demonstração desta propriedade dos autovalores da matriz expandida é apresentada no Apêndice (B) a partir da teoria

de sistemas lineares periódicos, conhecida também como teoria de Floquet (Meirovitch, 1988). A solução do problema de autovalor da matriz expandida  $\hat{\mathbf{A}}$  fornece, então,  $n$  autovalores-básicos e  $n$  autovetores-básicos. Outros  $2K$  conjuntos de autovalores podem ser obtidos a partir deste conjunto básico. Estes novos conjuntos são dependentes do parâmetro  $\Omega_0$  (Xu e Gasch, 1995; Reuter, 1998).

Para determinar entre todos os autovalores quais são os autovalores-básicos, pode-se comparar a parte real dos mesmos, sendo que os autovalores que apresentam mesma parte real pertencem ao mesmo conjunto de autovalores (Xu e Gasch, 1995). Outra maneira, é comparar duas soluções obtidas com diferentes valores para os termos da série de Fourier, por exemplo,  $K$  e  $K + 1$  e comparar os dois conjuntos de autovalores de forma a identificar quais seriam os autovalores-básicos e quais seriam autovalores redundantes. Esta metodologia para a escolha dos autovalores-básicos será discutida posteriormente, juntamente com exemplos numéricos. A seleção dos autovetores-básicos é feita depois da determinação dos autovalores-básicos. A partir da matriz como os  $n(2K+1)$  autovetores devem ser escolhidos  $n$  autovetores, sendo que cada um destes deve estar associado a um autovalor que não pertença ao mesmo conjunto redundante de  $\lambda_j$ . Ou seja, os  $n$  autovetores não precisam necessariamente estar associados aos autovalores-básicos, mas devem estar associados a autovalores que não sejam originados a partir do mesmo autovalor-básico. Escolhidos estes  $n$  autovetores, que serão também chamados de autovetores-básico, cada um deste é dividido em  $2K+1$  vetores de dimensão  $n \times 1$ . Cada um destes subvetores corresponde ao um termo da série de Fourier para  $\mathbf{r}$ , ordenados de acordo com a equação (4.123), ou seja, os termos variam de  $-K$  a  $K$  de cima para baixo de cada autovetor-básico. Assim, a solução do problema de autovalor fornece um conjunto de  $n$  autovalores e autovetores-básicos a partir da qual se pode montar uma solução aproximada do sistema com  $2K + 1$  termos da série de Fourier, dada por

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{R}(t) \exp[\Lambda t] = \sum_{j=1}^n \mathbf{r}_j(t) e^{\lambda_j t} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=-K}^K \mathbf{r}_{kj} e^{ik\Omega_0 t} e^{\lambda_j t} \quad (4.127)$$

A matriz de vetores variante no tempo  $\mathbf{R}(t)$  é semelhante a matriz modal de autovetores à direita de um sistema invariante no tempo, sendo que os autovetores  $\mathbf{r}_j(t)$  são denominados de *autovetores à direita variantes no tempo*. A resposta do sistema, considerando condições iniciais não-nulas, é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) = \mathbf{R}(t) \exp[\Lambda t] \mathbf{b} &\Rightarrow \mathbf{x}(0) = \mathbf{R}(0) \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{R}(0)^{-1} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}(t) &= \mathbf{R}(t) \exp[\Lambda t] \mathbf{R}(0)^{-1} \mathbf{x}_0 \end{aligned} \quad (4.128)$$

Analogamente ao sistema invariante no tempo, serão definidos os autovetores à esquerda variantes no tempo, representados por  $\mathbf{L}(t)$ . Esta matriz de autovetores é tal que

$$\mathbf{R}(t) \mathbf{L}^T(t) = \mathbf{I} \quad (4.129)$$

ou ainda,

$$\sum_{r=-K}^K \mathbf{R}_r e^{ir\Omega_0 t} \sum_{l=-K}^K \mathbf{L}_l^T e^{il\Omega_0 t} = \sum_{r=-K}^K \sum_{l=-K}^K \mathbf{R}_r \mathbf{L}_l^T e^{i(r+l)\Omega_0 t} = \sum_{r=-K}^K \mathbf{I}_r e^{ir\Omega_0 t} \quad (4.130)$$

Da mesma maneira que a equação (4.122), a equação (4.130) pode ser separada em  $2N + 1$  equações linearmente independentes, se os expoentes forem iguais. Assim, obtém-se a seguinte equação para cada valor de  $r$

$$\sum_{l=-K}^K \mathbf{R}_{r-l} \mathbf{L}_l^T e^{i(r-l+l)\Omega_0 t} = \mathbf{I}_r e^{ir\Omega_0 t} \Rightarrow \sum_{r=-K}^K \mathbf{R}_{l-r} \mathbf{L}_r^T = \mathbf{I}_r \quad (4.131)$$

sendo que

$$\mathbf{I}_r = \begin{cases} \mathbf{I} & \text{se } r = 0 \\ \mathbf{0} & \text{se } r \neq 0 \end{cases}$$

A partir desta equação é possível montar um sistema de equações para obter os coeficientes da série de Fourier da matriz  $\mathbf{L}(t)$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_0 & \mathbf{R}_{-1} & \mathbf{R}_{-2} & \mathbf{R}_{-3} & \mathbf{R}_{-4} \\ \mathbf{R}_1 & \mathbf{R}_0 & \mathbf{R}_{-1} & \mathbf{R}_{-2} & \mathbf{R}_{-3} \\ \mathbf{R}_2 & \mathbf{R}_1 & \mathbf{R}_0 & \mathbf{R}_{-1} & \mathbf{R}_{-2} \\ \mathbf{R}_3 & \mathbf{R}_2 & \mathbf{R}_1 & \mathbf{R}_0 & \mathbf{R}_{-1} \\ \mathbf{R}_4 & \mathbf{R}_3 & \mathbf{R}_2 & \mathbf{R}_1 & \mathbf{R}_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{L}_{-2}^T \\ \mathbf{L}_{-1}^T \\ \mathbf{L}_0^T \\ \mathbf{L}_1^T \\ \mathbf{L}_2^T \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (4.132)$$

onde

$$\widehat{\mathbf{R}} \mathbf{L}^T = \widehat{\mathbf{I}}$$

Utilizando a matriz definida por  $\mathbf{L}(t)$ , a resposta do sistema a condições iniciais não-nulas pode ser dada por

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{R}(t) \exp[\mathbf{\Lambda}t] \mathbf{L}^T(0) \mathbf{x}(0) \quad (4.133)$$

Portanto, utilizando esta metodologia é possível obter uma aproximação para a matriz de transição de estado, que é expressa por

$$\Phi(t, 0) = \mathbf{R}(t) \exp[\mathbf{\Lambda}t] \mathbf{L}^T(0) = \sum_{r=-K}^K \mathbf{R}_r e^{ir\Omega_0 t} \exp[\mathbf{\Lambda}t] \sum_{l=-K}^K \mathbf{L}_l^T \quad (4.134)$$

E dessa forma, a solução é dada por

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, 0) \mathbf{x}(0) \quad (4.135)$$

### 4.4.3 Desacoplamento das matrizes variantes no tempo

A matriz  $\mathbf{L}(t)$ , que pode ser definida como matriz de *autovetores à esquerda variantes no tempo*, também é utilizada para determinar as relações de ortogonalidade da matriz  $\mathbf{A}$ . Assim, partindo da equação de movimento

$$\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) = 0$$

Supondo uma solução do tipo

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{R}(t) \exp[\mathbf{\Lambda}t]$$

Substituindo esta expressão e sua derivada na equação de movimento, obtém-se

$$\dot{\mathbf{R}}(t) \exp[\mathbf{\Lambda}t] + \mathbf{R}(t)\mathbf{\Lambda} \exp[\mathbf{\Lambda}t] - \mathbf{A}(t)\mathbf{R}(t) \exp[\mathbf{\Lambda}t] = 0$$

ou ainda,

$$\dot{\mathbf{R}}(t) + \mathbf{R}(t)\mathbf{\Lambda} - \mathbf{A}(t)\mathbf{R}(t) = 0 \tag{4.136}$$

Pré-multiplicando esta equação por  $\mathbf{L}^T(t)$  obtém-se

$$\mathbf{L}^T(t)\dot{\mathbf{R}}(t) + \mathbf{L}^T(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{\Lambda} - \mathbf{L}^T(t)\mathbf{A}(t)\mathbf{R}(t) = 0$$

As matrizes de autovetores à direita e à esquerda, variantes no tempo, são relacionados pela normalização  $\mathbf{R}(t)\mathbf{L}(t)^T = \mathbf{I}$ . Portanto a relação de ortogonalidade para um sistema variante no tempo é dada por

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{L}^T(t)\mathbf{A}(t)\mathbf{R}(t) - \mathbf{L}^T(t)\dot{\mathbf{R}}(t) \tag{4.137}$$

E a forma da decomposição modal da matriz  $\mathbf{A}(t)$  é dada por

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{R}(t)\mathbf{\Lambda}\mathbf{L}^T(t) + \dot{\mathbf{R}}(t)\mathbf{L}^T(t) \tag{4.138}$$

A relação de ortogonalidade dos autovetores é utilizada para obter um sistema de equações desacopladas, à maneira da metodologia apresentada para sistemas invariantes no tempo, com a diferença de que neste caso esta relação é dada pela equação (4.137) para desacoplamento das equações de movimento. O sistema de equações desacoplado é empregado para obter a solução do sistema (4.113) em sua forma forçada, que é dada por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{p}(t) \quad \text{onde} \quad \mathbf{A}(t+T) = \mathbf{A}(t) \tag{4.139}$$

Assim, para o desacoplamento desta equação, será considerado que a matriz  $\mathbf{R}(t)$  define uma transformação de coordenadas e um novo conjunto de coordenadas modais  $\mathbf{q}(t)$  é introduzido:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{R}(t)\mathbf{q}(t); \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\mathbf{R}}(t)\mathbf{q}(t) + \mathbf{R}(t)\dot{\mathbf{q}}(t) \quad (4.140)$$

Assim, a equação de movimento assume a forma

$$\dot{\mathbf{R}}(t)\mathbf{q}(t) + \mathbf{R}(t)\dot{\mathbf{q}}(t) - \mathbf{A}(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{q}(t) = \mathbf{p}(t) \quad (4.141)$$

Pré-multiplicando esta equação por  $\mathbf{L}^T(t)$ , obtém-se

$$\mathbf{L}^T(t)\mathbf{R}(t)\dot{\mathbf{q}}(t) - [\mathbf{L}^T(t)\mathbf{A}(t)\mathbf{R}(t) - \mathbf{L}^T(t)\dot{\mathbf{R}}(t)]\mathbf{q}(t) = \mathbf{L}^T(t)\mathbf{p}(t) \quad (4.142)$$

Utilizando as propriedades de ortogonalidade para o sistema variante, equação (4.137), as equações de movimento em sua forma desacoplada são dadas por

$$\dot{\mathbf{q}}(t) - \mathbf{\Lambda}\mathbf{q}(t) = \mathbf{L}^T(t)\mathbf{p}(t) \quad (4.143)$$

A solução desta equação pode ser obtida analogamente à solução de um sistema invariante no tempo equação (4.11), sendo dada por

$$\mathbf{q}(t) = \exp[\mathbf{\Lambda}t]\mathbf{q}(0) + \int_0^t \exp[\mathbf{\Lambda}(t - \tau)]\mathbf{L}^T(\tau)\mathbf{p}(\tau)d\tau \quad (4.144)$$

Utilizando a transformação modal, definida pela equação (4.140), obtém-se a expressão para a solução  $\mathbf{x}(t)$  da equação diferencial (4.139)

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{R}(t)\exp[\mathbf{\Lambda}t]\mathbf{L}^T(0)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{R}(t)\exp[\mathbf{\Lambda}(t - \tau)]\mathbf{L}^T(\tau)\mathbf{p}(\tau)d\tau \quad (4.145)$$

#### 4.4.4 Função de resposta em frequência variante no tempo

Outra maneira de obter uma solução para a equação em sua forma forçada é utilizar a transformada de Fourier da equação desacoplada, seguindo a metodologia análoga a usada para sistemas invariantes no tempo. A principal diferença que deve ser observada neste caso, é que as matrizes modais  $\mathbf{R}(t)$  e  $\mathbf{L}(t)$  não são constantes com o tempo. Considerando a transformada de Fourier da equação (4.143) é dada por

$$i2\pi f\mathbf{Q}(f) - \mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}(f) = \mathbf{L}^T(f) * \mathbf{P}(f) \quad (4.146)$$

Nesta equação foi utilizada a propriedade de convolução apresentada na equação (4.40b). Portanto, a solução para  $\mathbf{Q}(f)$ , coordenadas modais, no domínio da frequência é dada por

$$\mathbf{Q}(f) = \left[ \frac{1}{i2\pi f - \mathbf{\Lambda}} \right] \mathbf{L}^T(f) * \mathbf{P}(f) \quad (4.147)$$

A forma da matriz de autovetores à esquerda  $\mathbf{L}(t)^T$  é conhecida, sendo dada por um série de Fourier, de tal maneira que transformada de Fourier desta matriz modal  $\mathbf{L}^T(f)$  pode ser simplificada utilizando a propriedade apresentada na equação (4.40c), sendo dada por

$$\mathcal{F}[\mathbf{L}^T(t)] = \mathcal{F}\left[\sum_{l=-K}^K \mathbf{L}_l e^{il\Omega_0}\right] = \sum_{l=-K}^K \mathbf{L}_l \delta(f - lf_0) \quad (4.148)$$

Assim, a expressão para  $\mathbf{Q}(f)$  pode ser obtida utilizando a definição de convolução, o que leva as seguintes equações

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(f) &= \left[\frac{1}{i2\pi f - \Lambda}\right] \sum_{l=-K}^K \mathbf{L}_l \delta(f - lf_0) * \mathbf{P}(f) \\ \mathbf{Q}(f) &= \left[\frac{1}{i2\pi f - \Lambda}\right] \sum_{l=-K}^K \mathbf{L}_l \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi - lf_0) \mathbf{P}(f - \xi) d\xi \\ \mathbf{Q}(f) &= \left[\frac{1}{i2\pi f - \Lambda}\right] \sum_{l=-K}^K \mathbf{L}_l \mathbf{P}(f - lf_0) \end{aligned} \quad (4.149)$$

A solução  $\mathbf{X}(f)$ , em coordenadas físicas pode ser obtida pela transformação de coordenadas dada pela equação (4.140). Analogamente à equação (4.149), obtém-se uma expressão para a solução  $\mathbf{X}(f)$ , ao expandir a expressão para  $\mathbf{R}(t)$  em série de Fourier e utilizando as propriedades da transformada de Fourier dadas em (4.40b) e (4.40c).

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\mathbf{x}(t)] = \mathbf{X}(f) &= \mathcal{F}[\mathbf{R}(t)\mathbf{q}(t)] = \mathbf{R}(f) * \mathbf{Q}(f) = \sum_{l=-K}^K \mathbf{R}_l \delta(f - rf_0) * \mathbf{Q}(f) \\ \mathbf{X}(f) &= \sum_{r=-K}^K \mathbf{R}_r \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi - rf_0) \mathbf{Q}(f - \xi) d\xi = \sum_{r=-K}^K \mathbf{R}_r \mathbf{Q}(f - rf_0) \end{aligned} \quad (4.150)$$

Assim, combinando as equações (4.149) e (4.150), obtém-se uma expressão para a resposta do sistema em função da força de excitação e das propriedades, autovalores e autovetores, do sistema:

$$\mathbf{X}(f) = \sum_{r=-K}^K \sum_{l=-K}^K \mathbf{R}_r \left[\frac{1}{i2\pi(f - rf_0) - \Lambda}\right] \mathbf{L}_l^T \mathbf{P}(f - rf_0 - lf_0) \quad (4.151)$$

Ao contrário dos sistemas invariantes no tempo, não é possível obter uma relação linear entre entrada e saída de tal forma a definir uma matriz de função de resposta em frequência, pois não é possível extrair o deslocamento na frequência no espectro da entrada. Entretanto, neste tipo de problema variante no tempo, é possível definir sub-matrizes de função de resposta em frequência  $\mathbf{H}_{rl}(f)$  (Irretier, 1999), que permitem obter a solução no domínio da frequência de acordo com a equação (4.151), ou seja, em função das propriedades do sistema, autovalores e autovetores, e em função do espectro da força de excitação, deslocada de acordo com os índices  $r$  e  $l$ . Estas sub-matrizes são definidas por

$$\mathbf{H}_{rl}(f) = \mathbf{R}_r \left[\frac{1}{i2\pi(f - rf_0) - \Lambda}\right] \mathbf{L}_l^T \quad (4.152)$$

Portanto, a solução  $\mathbf{X}(f)$  é dada por

$$\mathbf{X}(f) = \sum_{l=-K}^K \sum_{r=-K}^K \mathbf{H}_{rl}(f) \mathbf{P}(f - rf_0 - lf_0) \quad (4.153)$$

Assim, dependendo do tipo da excitação imposta ao sistema, deve-se obter o espectro da excitação, e posteriormente, seu espectro deslocado, de acordo com o somatório da equação (4.153), para apenas depois obter a solução no domínio da frequência. Embora o procedimento não seja idêntico ao desenvolvido para sistemas invariantes no tempo, ambos são análogos.

A transformada inversa de Fourier da função  $\mathbf{Q}(f)$  é definida a partir da transformada inversa da equação (4.149), utilizando as propriedades da transformada de Fourier de convolução, função exponencial e deslocamento na frequência, definidas pelas equações (4.40b), (4.40c) e (4.40f)

$$\mathbf{q}(t) = \exp[\Lambda t] * \sum_{l=-K}^K \mathbf{L}_l \mathbf{p}(t) e^{i2\pi l f_0 t} = \sum_{l=-K}^K \int_0^t \exp[\Lambda(t - \tau)] \mathbf{L}_l \mathbf{p}(\tau) e^{i2\pi l f_0 \tau} d\tau \quad (4.154)$$

Considerando agora a transformada inversa da equação (4.150), utilizando as propriedades da transformada de Fourier inversa e combinando com a equação (4.154), obtém-se uma expressão para  $\mathbf{x}(t)$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[\mathbf{X}(f)] = \mathbf{x}(t) &= \sum_{r=-K}^K \mathbf{R}_r e^{ir2\pi f_0 t} \mathbf{q}(t) \\ &= \sum_{r=-K}^K \sum_{l=-K}^K \mathbf{R}_r e^{ir2\pi f_0 t} \int_0^t \exp[\Lambda(t - \tau)] \mathbf{L}_l \mathbf{p}(\tau) e^{i2\pi l f_0 \tau} d\tau \end{aligned} \quad (4.155)$$

Esta parcela corresponde apenas a parte forçada da solução, sendo que a solução total é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \sum_{r=-K}^K \sum_{l=-K}^K \mathbf{R}_r \exp[\Lambda t] \mathbf{L}_l^T \mathbf{x}(0) \\ &+ \sum_{r=-K}^K \sum_{l=-K}^K \mathbf{R}_r e^{ir2\pi f_0 t} \int_0^t \exp[\Lambda(t - \tau)] \mathbf{L}_l^T \mathbf{p}(\tau) e^{i2\pi l f_0 \tau} d\tau \end{aligned} \quad (4.156)$$

que apresenta a forma

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, 0) \mathbf{x}(0) + \int_0^t \Phi(t, \tau) \mathbf{p}(\tau) d\tau \quad (4.157)$$

assim a matriz de transição de estado pode ser aproximada por

$$\Phi(t, t_0) = \sum_{r=-K}^K \sum_{l=-K}^K \mathbf{R}_r e^{ir2\pi f_0 t} \exp[\Lambda(t - t_0)] \mathbf{L}_l^T e^{i2\pi l f_0 t_0} \quad (4.158)$$

#### 4.4.5 Resposta ao impulso

Como não é possível obter diretamente a função de resposta em frequência para sistemas variantes no tempo, será utilizada a definição desta função, que é a resposta do sistema a uma excitação do tipo impulsiva dada por

$$\mathbf{p}(t) = \delta(t) \quad (4.159)$$

Inicialmente, será analisada a resposta diretamente no domínio do tempo a partir da equação (4.155),

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{r=-K}^K \sum_{l=-K}^K \mathbf{R}_r e^{ir2\pi f_0 t} \int_0^t \exp[\mathbf{\Lambda}(t-\tau)] \mathbf{L}_l \delta(\tau) e^{i2\pi l f_0 \tau} d\tau$$

o que resulta em

$$\mathbf{h}(t) = \sum_{r=-K}^K \sum_{l=-K}^K \mathbf{R}_r e^{ir2\pi f_0 t} \exp[\mathbf{\Lambda}t] \mathbf{L}_l \quad (4.160)$$

Esta é a forma da função de resposta ao impulso  $\mathbf{h}(t)$  para sistemas periódicos. A função de resposta em frequência é obtida a partir da análise da equação (4.150). A transformada de Fourier da função impulso, de acordo com a equação (4.40h), é dada por

$$\mathbf{P}(f) = 1 \quad (4.161)$$

Partindo da equação (4.151) obtém-se

$$\mathbf{H}(f) = \sum_{r=-K}^K \sum_{l=-K}^K \mathbf{R}_r \left[ \frac{1}{i2\pi(f - rf_0) - \mathbf{\Lambda}} \right] \mathbf{L}_l^T \quad (4.162)$$

Comparando as equações (4.160) e (4.162), verifica-se que

$$\mathcal{F}[\mathbf{h}(t)] = \mathbf{H}(f) \quad (4.163)$$

Ou seja, a transformada de Fourier da função de resposta ao impulso fornece a função de resposta em frequência cíclica (Reuter, 1998; Irretier, 1999). Esta relação, obtida com as propriedades (4.40c) e (4.40f) é válida apenas para este tipo de excitação.

#### 4.4.6 Resposta a uma excitação harmônica

Uma excitação geral em forma harmônica é dada por

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}^+ e^{i2\pi f_0 t} + \mathbf{p}^- e^{-i2\pi f_0 t} \quad (4.164)$$

A transformada de Fourier desta excitação é dada por

$$\mathbf{P}(f) = \mathbf{p}^+ \delta(f - f_0) + \mathbf{p}^- \delta(f + f_0) \quad (4.165)$$

Aplicando esta definição do espectro da força de excitação a resposta do deslocamento na frequência, equação (4.155), obtém-se

$$\mathbf{X}(f) = \sum_{r=-K}^K \sum_{l=-K}^K \mathbf{R}_r \left[ \frac{1}{i2\pi(f - rf_0) - \Lambda} \right] \mathbf{L}_l^T [\mathbf{p}^+ \delta(f - lf_0 - rf_0 - f_0) + \mathbf{p}^- \delta(f - lf_0 - rf_0 + f_0)] \quad (4.166)$$

Ou seja a solução pode ser dada em função das submatrizes de função de resposta em frequência, equação (4.152), uma vez que não é possível extrair os índices  $r$  e  $l$  da equação. Assim

$$\mathbf{X}(f) = \sum_{r=-K}^K \sum_{l=-K}^K \mathbf{H}_{rl}(f) [\mathbf{p}^+ \delta(f - lf_0 - rf_0 - f_0) + \mathbf{p}^- \delta(f - lf_0 - rf_0 + f_0)] \quad (4.167)$$

A transformada inversa desta equação é obtida utilizando as propriedades (4.40b) e (4.40h), sendo finalmente dada por (Xu e Gasch, 1995; Irretier, 1999)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \sum_{r=-K}^K \sum_{l=-K}^K \mathbf{R}_r \left[ \frac{1}{i2\pi(lf_0 + f_0) - \Lambda} \right] \mathbf{L}_l^T [\mathbf{p}^+ e^{i2\pi(lf_0 + rf_0 + f_0)t}] \\ &+ \sum_{r=-K}^K \sum_{l=-K}^K \mathbf{R}_r \left[ \frac{1}{i2\pi(lf_0 - f_0) - \Lambda} \right] \mathbf{L}_l^T [\mathbf{p}^- e^{i2\pi(lf_0 + rf_0 - f_0)t}] \end{aligned}$$

ou ainda

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{r=-K}^K \sum_{l=-K}^K \mathbf{H}_{rl}(lf_0 + f_0) [\mathbf{p}^+ e^{i2\pi(lf_0 + rf_0 + f_0)t}] + \sum_{r=-K}^K \sum_{l=-K}^K \mathbf{H}_{rl}(lf_0 - f_0) [\mathbf{p}^- e^{i2\pi(lf_0 + rf_0 - f_0)t}] \quad (4.168)$$

A principal característica a ser observada nesta resposta deste tipo de problema a uma excitação harmônica de frequência  $\pm f_0$  é que a solução apresenta componentes de frequência variados. No caso invariante, uma excitação harmônica corresponde a uma resposta onde aparecem apenas frequências do harmônico. Entretanto, no caso variante periódico, a resposta apresenta, além da componente de frequência harmônica, outras componentes  $rf_0$  e  $lf_0$ , múltiplas do parâmetro de variação do sistema  $\Omega_0$ .

## 4.5 Estudo de casos

### 4.5.1 Sistema periódico comutativo - solução analítica

Neste primeiro exemplo será considerado um sistema simples comutativo. A solução analítica deste exemplo foi obtida do trabalho de Wu (1978), sendo que alguns dos teoremas, nos quais

a solução analítica se baseia, estão apresentados no Apêndice (A). Procura-se, neste caso, obter uma matriz de transformação  $\mathbf{T}(t)$  que leve a um novo sistema de equações, invariante no tempo, e algebricamente equivalente ao original (Teorema de Liapunov). Seja, então, um sistema de equações dado por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) \quad (4.169)$$

sendo que a matriz  $\mathbf{A}(t)$  é dada por

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} a + \cos \omega_o t & \text{sen } \omega_o t \\ -\text{sen } \omega_o t & a + \cos \omega_o t \end{bmatrix} \quad (4.170)$$

na qual  $a$  e  $\omega_o$  são parâmetros constantes no tempo.

O sistema variante no tempo dado pelas equações (4.169) e (4.170) pode ser transformado em um sistema invariante através de uma transformação  $\mathbf{T}(t)$  uma vez que o sistema é periódico, ou seja é um sistema de Floquet, vide Teorema 1 e Corolário 1 do Apêndice (A). O período deste sistema é dado por  $T = 2\pi/\omega_o$ . Este sistema é comutativo, ou seja,  $\dot{\mathbf{A}}(t)\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}(t)\dot{\mathbf{A}}(t)$ . Além disso, é possível escrever a matriz  $\mathbf{A}(t)$  como a soma de uma função invariante no tempo e uma função do tempo, de tal forma que

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{F}(t) + \mathbf{F}_0 \quad (4.171)$$

em que  $\mathbf{F}_0$  é uma matriz constante.

A parte variante no tempo  $\mathbf{F}(t)$  pode ser expandida em funções escalares multiplicadas por matrizes constantes, de onde obtém-se que

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{A}_1\alpha_1(t) + \mathbf{A}_2\alpha_2(t) \quad (4.172)$$

em que

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \alpha_1(t) = \cos \omega_o t \quad (4.173)$$

e

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \alpha_2(t) = \text{sen } \omega_o t \quad (4.174)$$

sendo que a matriz  $\mathbf{F}_0$  é dada por

$$\mathbf{F}_0 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \quad (4.175)$$

A matriz de transformação  $\mathbf{T}(t)$  para problemas comutativos, de acordo com o Corolário 3 do Apêndice (A), apresenta uma forma fechada, a qual é dada por

$$\mathbf{T}(t) = \exp[\mathbf{A}_1\beta_1(t)] \exp[\mathbf{A}_2\beta_2(t)] \quad (4.176)$$

onde

$$\beta_1(t) = \int_0^t \alpha_1(\tau) d\tau = \frac{\text{sen } \omega_o t}{\omega_o} \quad (4.177)$$

$$\beta_2(t) = \int_0^t \alpha_2(\tau) d\tau = \frac{1}{\omega_o} - \frac{\cos \omega_o t}{\omega_o} \quad (4.178)$$

Dessa maneira, a matriz de transformação  $\mathbf{T}(t)$ , após algumas simplificações, é dada por

$$\mathbf{T}(t) = \exp[\beta_1(t)] \begin{bmatrix} \cos \beta_2(t) & \text{sen } \beta_2(t) \\ -\text{sen } \beta_2(t) & \cos \beta_2(t) \end{bmatrix} \quad (4.179)$$

Define-se, então, a seguinte transformação de coordenadas para obtenção de um novo sistema de equações diferenciais, invariante no tempo, que seja algebricamente equivalente ao sistema das equações (4.169) e (4.170), dada por

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{T}(t)\bar{\mathbf{x}}(t) \quad (4.180)$$

Assim, de acordo com o Teorema 1 e Corolário 3 do Apêndice (A), o sistema invariante equivalente é dado por

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{F}_0\bar{\mathbf{x}}(t) \quad (4.181)$$

A solução da equação (4.181) é conhecida da teoria de sistemas lineares invariantes no tempo, de acordo com a equação (4.5). Assim, obtém-se para  $\bar{\mathbf{x}}(t)$

$$\bar{\mathbf{x}}(t) = \exp[\mathbf{F}_0 t] \bar{\mathbf{x}}(0) \quad (4.182)$$

Utilizando a transformação de coordenadas definida pela equação (4.180) obtém-se a solução analítica do sistema variante no tempo

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{T}(t) \exp[\mathbf{F}_0 t] \mathbf{T}^{-1}(0) \mathbf{x}(0) \quad (4.183)$$

onde  $\mathbf{T}(t)$  é dada pela equação (4.179).

Este método de solução, contudo, é restrito a problemas comutativos, não sendo possível desenvolver uma metodologia de solução geral. A solução pelo determinante infinito de Hill, que será apresentado a seguir, por outro lado permite desenvolver um método de solução mais geral para sistemas periódicos.

#### 4.5.2 Sistema periódico comutativo - solução pela equação de Hill

A solução do sistema (4.169) e (4.170) pode ser obtida utilizando o conceito de autovalores e autovetores variantes no tempo, a partir da obtenção do determinante infinito de Hill. Inicialmente, deve-se determinar a expansão em série de Fourier da matriz de estado periódica  $\mathbf{A}(t)$ . A expansão em série desta matriz possui apenas três termos não-nulos, sendo expressa pela soma de matrizes constantes de acordo com

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}_{-1}e^{-i\omega_0 t} + \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1e^{i\omega_0 t} \quad (4.184)$$

Estas matrizes constantes que formam a série de Fourier para  $\mathbf{A}(t)$  são dadas por

$$\mathbf{A}_{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (4.185)$$

Para obter estes termos da série de Fourier são empregadas diretamente as expressões para a série de Fourier para as funções  $\cos \omega_0 t$  e  $\sin \omega_0 t$  (Brigham, 1988). A matriz expandida  $\hat{\mathbf{A}}$  é obtida com dimensão finita  $2n_o + 1$ , onde  $n_o$  é uma variável que será definida como *ordem de expansão*. Esta variável controla o tamanho da matriz expandida e o número de termos da série de Fourier para o vetor de autovetores variantes no tempo  $\mathbf{r}(t)$  a serem determinados que é igual a  $2n_o + 1$ . Para montagem da matriz expandida são necessários  $4n_o + 1$  termos da série de Fourier da matriz de estado  $\mathbf{A}(t)$ . Neste caso, apenas os três primeiros termos da série de Fourier não são nulos. Assim, a matriz expandida para este problema é dada por

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2i\omega_0\mathbf{I} + \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_1 & i\omega_0\mathbf{I} + \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 & -i\omega_0\mathbf{I} + \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 & -2i\omega_0\mathbf{I} + \mathbf{A}_0 \end{bmatrix} \quad (4.186)$$

Os autovalores e autovetores da matriz  $\widehat{\mathbf{A}}$  são dados por

$$\widehat{\boldsymbol{\lambda}} = \left\{ a - i\omega_o \quad a - i\omega_o \quad a + i\omega_o \quad a + i\omega_o \quad a + 2i\omega_o \quad a + 2i\omega_o \quad a - 2i\omega_o \quad a - 2i\omega_o \quad a \quad a \right\}^T$$

$$\widehat{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & i & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 & 1 & 48\omega_o^4 & -i & 0 & -i & 0 & 1 \\ -3i\omega_o & 0 & -6\omega_o^3 & \omega_o & -24\omega_o^3 & 0 & 0 & -4i\omega_o & 0 & 2\omega_o \\ -3\omega_o & 0 & -6i\omega_o^3 & -i\omega_o & -24i\omega_o^3 & 0 & 0 & -4\omega_o & 0 & -2i\omega_o \\ -6\omega_o^2 & 0 & 6i\omega_o^2 & 0 & 12i\omega_o^2 & 0 & 0 & -12\omega_o^2 & -2\omega_o^2 & -2i\omega_o^2 \\ 6i\omega_o^2 & 0 & -6\omega_o^2 & 0 & -12\omega_o^2 & 0 & 0 & 12i\omega_o^2 & -2i\omega_o^2 & -2\omega_o^2 \\ 6i\omega_o^3 & i\omega_o & 3\omega_o & 0 & 4\omega_o & 0 & 0 & 24i\omega_o^3 & 2i\omega_o & 0 \\ 6\omega_o^3 & -\omega_o & 3i\omega_o & 0 & 4i\omega_o & 0 & 0 & 24\omega_o^3 & -2\omega_o & 0 \\ 0 & 1 & -i & 0 & -i & 0 & -i & 48\omega_o^4 & 1 & 0 \\ 0 & i & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & i & 0 \end{bmatrix} \quad (4.187)$$

Da expressão para  $\widehat{\boldsymbol{\lambda}}$  tem-se que os autovalores são da forma

$$\lambda_j = a \pm ik\omega_o \quad k = 1, \dots, n_o \quad (4.188)$$

ou seja, o conjunto dos autovalores-básicos deste problema é dado por

$$\lambda_{1o} = a; \quad \lambda_{2o} = a; \quad \text{ou ainda} \quad \boldsymbol{\lambda}_0 = \left\{ a \quad a \right\} \quad (4.189)$$

Os autovetores estão organizados na matriz  $\widehat{\mathbf{r}}$  de tal forma que podem ser escolhidos dois a dois para definir os autovetores-básicos. Por simplificação serão escolhidas as duas últimas colunas como autovetores-básicos. Cada uma destas colunas é, então, dividida em  $2n_o + 1$  vetores, de tal maneira que o resultado são  $2n_o + 1$  termos da série de Fourier de  $\mathbf{r}(t)$ . Assim, nomeando as duas últimas colunas de  $\mathbf{r}_{k1}$  e  $\mathbf{r}_{k2}$ , estas colunas são subdivididas em vetores  $2 \times 1$ , com  $k$  variando de  $-n_o$  a  $n_o$ . Estes vetores, que correspondem aos termos da série de Fourier para  $\mathbf{r}(t)$  podem ser combinados em matrizes de forma a se obter uma expressão para a matriz modal  $\mathbf{R}(t)$ , dada por

$$\mathbf{R}(t) = \sum_{k=-n_o}^{n_o} \mathbf{R}_k e^{i\omega_o k t} \quad n_o = 2 \quad (4.190)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{-2} &= \begin{bmatrix} 0 & i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \mathbf{R}_{-1} &= \begin{bmatrix} 0 & 2\omega_o \\ 0 & -2i\omega_o \end{bmatrix} \\ \mathbf{R}_0 &= \begin{bmatrix} -2\omega_o^2 & -2i\omega_o^2 \\ -2i\omega_o^2 & -2\omega_o^2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{R}_1 &= \begin{bmatrix} 2i\omega_o & 0 \\ -2\omega_o & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{R}_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.191)$$

A solução da equação diferencial, de acordo com a equação (4.128) é dada por

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{R}(t) \exp[\Lambda t] \mathbf{R}(0)^{-1} \mathbf{x}(0) \quad (4.192)$$

ou ainda

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=-n_o}^{n_o} \mathbf{R}_k e^{i\omega_0 k t} \exp[\Lambda t] \left[ \sum_{k=-n_o}^{n_o} \mathbf{R}_k \right]^{-1} \mathbf{x}(0) \quad (4.193)$$

onde

$$\Lambda = \text{diag } \lambda_0 \quad (4.194)$$

Na equação anterior as matrizes  $\mathbf{R}_k$  estão definidas na equação (4.191) e os autovalores-básicos  $\lambda_0$  estão definidos na equação (4.189). Para este exemplo, verifica-se que uma relação direta entre as soluções obtidas utilizando o teorema de Liapunov e utilizando a abordagem de Hill, equações (4.183) e (4.192), de tal forma que se obtém a seguinte relação para a matriz de transformação  $\mathbf{T}(t)$ .

$$\mathbf{T}(t) \mathbf{T}(0)^{-1} = \sum_{k=-n_o}^{n_o} \mathbf{R}_k e^{i\omega_0 k t} \left[ \sum_{k=-n_o}^{n_o} \mathbf{R}_k \right]^{-1} \quad (4.195)$$

Se os termos dependentes do estado inicial forem desconsiderados pode se dizer que a expansão em série de Fourier da matriz de autovetores variantes à direita corresponde a expansão em série de Fourier da matriz de transformação  $\mathbf{T}(t)$ . Analogamente, obtém-se uma expressão para a matriz de transição de estado, dada por

$$\Phi(t, 0) = \mathbf{R}(t) \exp[\Lambda t] \mathbf{R}(0)^{-1} = \sum_{k=-n_o}^{n_o} \mathbf{R}_k e^{i\omega_0 k t} \exp[\Lambda t] \left[ \sum_{k=-n_o}^{n_o} \mathbf{R}_k \right]^{-1} \quad (4.196)$$

Considerando valores numéricos para as variáveis  $a$  e  $\omega_o$ , observa-se o comportamento da solução se o sistema é perturbado por condições iniciais não-nulas. Sejam adotados os seguintes valores  $a = -1$  e  $\omega_o = 4\pi \text{rad/s}$  e condições iniciais dadas por

$$\mathbf{x}_0 = \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \end{matrix} \right\}^T \quad (4.197)$$

A figura (4.1) apresenta o comportamento das variáveis de estado  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  obtidas pela equação (4.183). Esta solução, obtida pelo Teorema de Liapunov, é considerada uma forma de solução analítica. Neste gráfico observa-se o decaimento exponencial da resposta somada a uma função periódica, que correspondem a influência do parâmetro  $\omega_o$  no comportamento das variáveis de estado.

A mesma solução é obtida com a aproximação numérica através da solução do determinante de Hill (4.192). Os gráficos da figura (4.2) apresentam a comparação entre a solução analítica, já apresentados na figura (4.1), e os resultados numéricos obtidos com diferentes valores de  $n_o$ , ordem

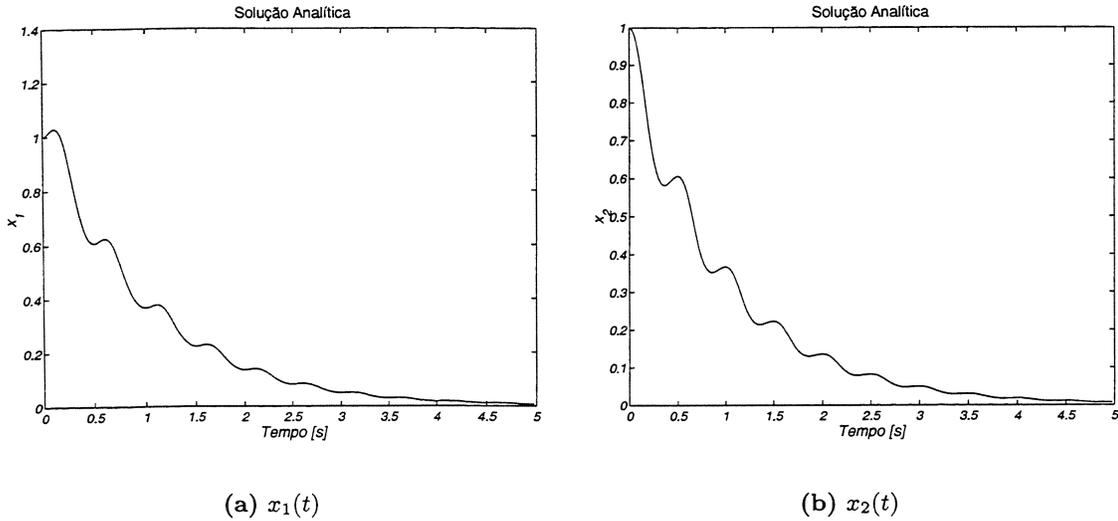


Figura 4.1: Solução analítica obtida pelo teorema de Liapunov

de expansão, da matriz expandida  $\hat{\mathbf{A}}$ . Ou seja, a variável  $n_o$  controla o número de termos da série de Fourier para  $\mathbf{R}(t)$  que são calculadas. Nesta figura nota-se que a solução numérica converge para a solução analítica, com o aumento do número de termos da série de Fourier da matriz modal  $\mathbf{R}(t)$ . Observa-se também que a solução obtida para  $n_o = 0$  corresponde apenas ao decaimento exponencial da solução, sem o efeito da variação do parâmetro  $\omega_o$ , pois apenas os termos constantes da série de Fourier estão sendo considerados.

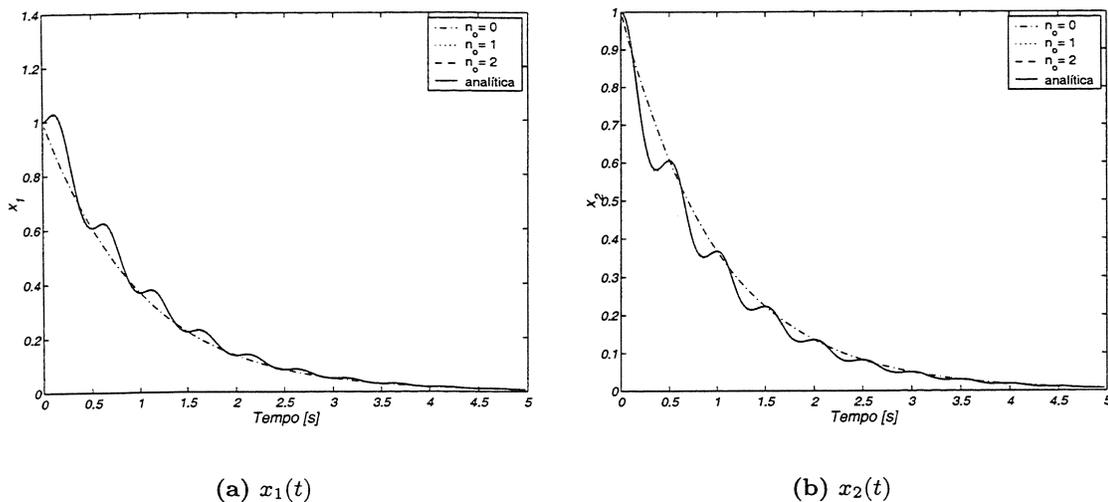
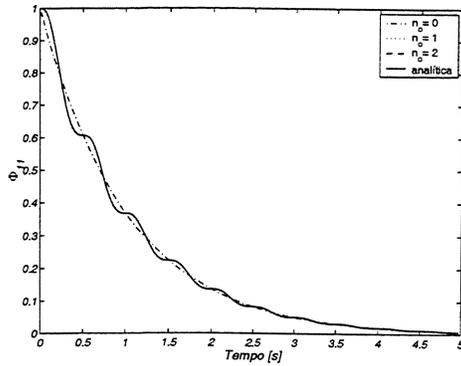


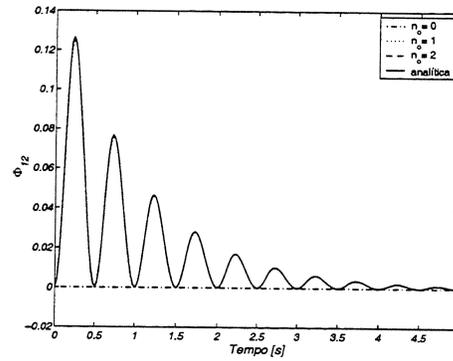
Figura 4.2: Comparação entre a solução analítica obtida pelo teorema de Liapunov e a solução aproximada com diferentes ordem de expansão  $n_o$ , o que resulta em  $2n_o + 1$  termos da série de Fourier

A figura (4.3) apresenta a variação no tempo dos elementos  $\Phi_{i,j}(t)$  da matriz de transição de

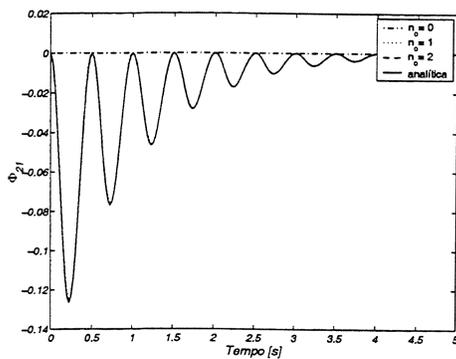
estado obtida tanto pela solução analítica quanto pela solução numérica. Novamente, observa-se a convergência da solução numérica para a solução analítica com o aumento do número de termos na série de Fourier. Se a ordem de expansão é nula, apenas os termos constantes são considerados e a influência da variação paramétrica não é incluída. A figura (4.4) apresenta a comparação entre a matriz de transformação de coordenadas  $\mathbf{T}(t)$  com a solução analítica e numérica.



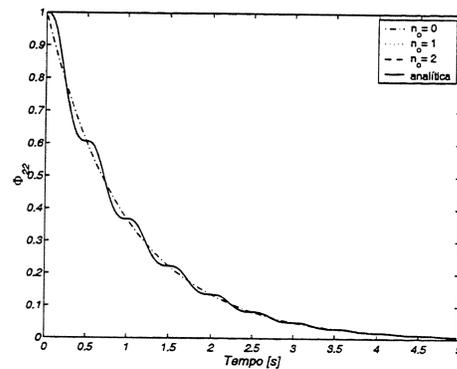
(a)  $\Phi_{11}(t)$



(b)  $\Phi_{12}(t)$

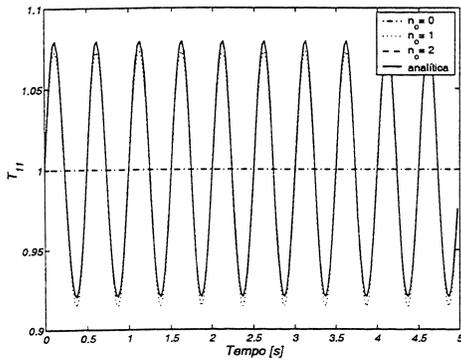


(c)  $\Phi_{21}(t)$

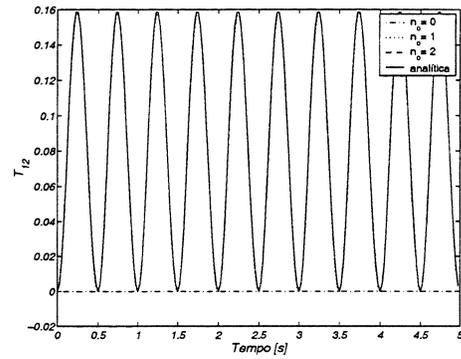


(d)  $\Phi_{22}(t)$

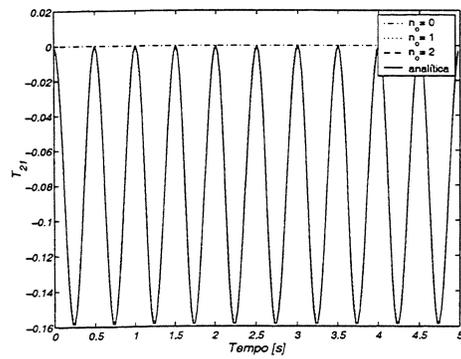
**Figura 4.3:** Comparação entre a solução analítica obtida pelo teorema de Liapunov e a solução aproximada com diferentes ordem de expansão  $n_o$ , o que resulta em  $2n_o + 1$  termos da série de Fourier



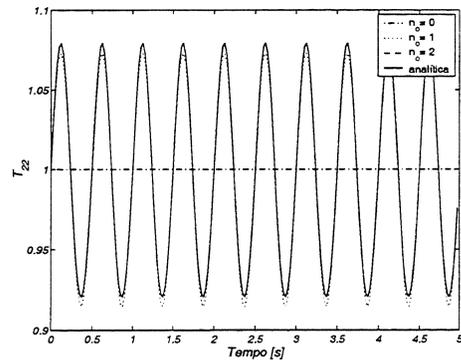
(a)  $T_{11}(t)$



(b)  $T_{12}(t)$



(c)  $T_{21}(t)$



(d)  $T_{22}(t)$

**Figura 4.4:** Comparação entre a solução analítica obtida pelo teorema de Liapunov e a solução aproximada com diferentes ordem de expansão  $n_o$ , o que resulta em  $2n_o + 1$  termos da série de Fourier

## Capítulo 5

# Exemplos teóricos

O objetivo deste capítulo é apresentar algumas soluções para os modelos matemáticos apresentados no capítulo (3). No caso das palhetas flexíveis, por exemplo, procura-se elucidar o papel dos termos não-lineares de deformação de viga no acoplamento dos movimentos do rotor e palhetas, através da integração numérica das equações de movimento. A variação do comportamento dinâmico do sistema com a velocidade de rotação, como, por exemplo, o efeito de enrijecimento centrífugo das vigas, pode ser estudado com maior clareza através dos diagramas de cascata, que são curvas construídas com a superposição do sinal em frequência do deslocamento em função da velocidade de rotação. Adicionalmente, a análise modal variante no tempo, fornece subsídios para o estudo da variação das frequências críticas, das palhetas e rotor, em função da velocidade de rotação, bem como as formas modais de vibração, elucidando de que forma os movimentos do rotor e palhetas se combinam e qual a relevância dos modos acoplados na resposta do sistema. As análises teóricas fornecem também fundamentos para futuras medidas experimentais a serem realizadas em bancadas de teste.

Os seguinte modelos matemáticos são analisados neste capítulo: (a) T1 – rotor plano e palheta modelada como uma viga com uma massa concentrada na ponta (momento de inércia da massa desprezado), conforme apresentado na figura (3.2), sendo que as três abordagens utilizadas para aproximar a deformação da viga, apresentadas no capítulo anterior, são empregados, resultando em três diferentes modelos do rotor plano; (b) T2 – rotor fixo em uma das extremidades e apoiados sobre suportes elásticos na outras, de tal forma que apenas os graus de liberdade de rotação são considerados e viga com massa concentrada na ponta para modelar a palheta, conforme figura (3.7); (c) T3 – rotor apoiado sobre mancais elásticos em suas duas extremidades, de tal forma que o movimento do centro rotor seja tridimensional (deslocamentos lineares e angulares) e viga com massa concentrada na ponta para modelar a palheta, conforme figura (3.4). Ressalta-se que as simulações são realizadas considerando um amortecimento nulo em todos os modelos.

## 5.1 Modelo matemático T1 - rotor plano

Inicialmente, será considerado um rotor plano, que está livre apenas para se movimentar linearmente nas direções  $y$  e  $z$ , acoplado a quatro palhetas flexíveis, conforme apresentado na figura (3.2), cujas propriedades físicas e geométricas constam da tabela (5.1). As equações de movimento deste sistema, (3.38), (3.47) e (3.55), descrevem diferentes abordagens para modelar a deformação da viga. A inércia de rotação da massa é desprezada nesta aproximação, sendo esta considerada pontual (concentrada).

**Tabela 5.1:** Parâmetros – rotor plano (T1)

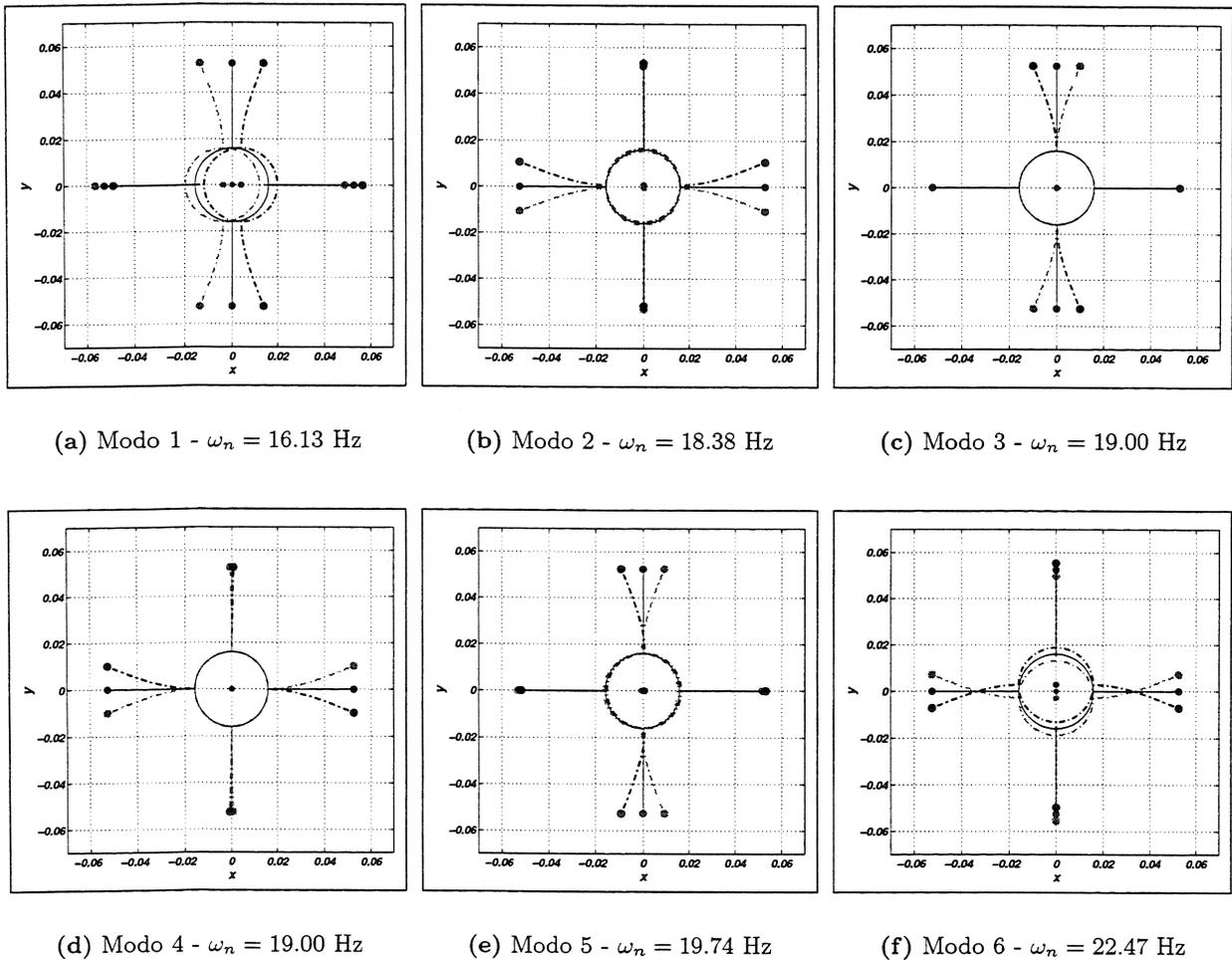
Rotor			Palhetas ( $i = 1, 2, 3, 4$ )		
$m_2$	1.907	kg	$m_i$	0.0217	kg
$m_3$	1.661	Kg	$r_i$	0.040	m
$k_y$	$2.16e^4$	N/m	$L_i$	0.0365	m
$k_z$	$3.18e^4$	N/m	$k_i$	310	N/m
$e$	0.001	m	$\theta_i$	$(i - 1)\pi/2$	rad
$\varphi$	0	rad			

### 5.1.1 Análise modal do sistema não-girante

As análises teóricas das equações de movimento serão inicialmente consideradas sem o efeito da velocidade de rotação. Dessa forma, procura-se verificar como os movimentos do rotor e palhetas se acoplam e quais são as formas modais de vibração deste sistema. Posteriormente, a introdução da velocidade de rotação constante e sua influência nas formas modais serão também analisadas, utilizando as técnicas de análise modal variante no tempo apresentadas no capítulo (4). Neste caso, são consideradas as equações de movimento do modelo linearizado de segunda ordem, (3.47).

Caso rotor e palhetas sejam considerados separadamente, como estruturas desacopladas, existem três frequências críticas distintas. Duas delas estão associadas ao rotor, cujas propriedades nas direções perpendiculares são distintas, assumindo os valores  $\omega_1 = 16.95$  Hz e  $\omega_2 = 22.03$  Hz. Por outro lado, as frequências associadas às quatro palhetas idênticas assumem o valor de  $\omega_3 = 19.00$  Hz. Entretanto, se forem consideradas as equações de movimento do sistema acoplado não-girante,  $\dot{\phi} = \phi = 0$  nas equações (3.47), as frequências naturais sofrem uma pequena alteração em relação aos valores obtidos para os subsistemas desacoplados. Além disso, novas formas de vibração passam a caracterizar o comportamento dinâmico do conjunto. Os seis modos de vibração na condição de velocidade de rotação nula estão apresentados na figura (5.1). Nota-se assim que cinco frequências naturais distintas aparecem, ao invés de três dos componentes desacoplados. As duas únicas frequências idênticas  $\omega_3 = \omega_4 = 19.00$  Hz correspondem aos modos de vibração das palhetas apenas, figuras (5.1(c)) e (5.1(d)). As frequências de vibração do rotor contudo sofrem

uma pequena alteração. A primeira frequência  $\omega_1 = 16.13$  Hz sofreu uma pequena redução e representa agora um modo em que tanto a palheta, quanto o rotor vibram. O mesmo comportamento de acoplamento das vibrações do rotor e palheta é observado para o segundo modo do rotor,  $\omega_6 = 22.47$  Hz, cuja frequência sofreu um pequeno aumento em relação ao valor do componente desacoplado. Finalmente, é interessante notar o aparecimento de dois modos de vibração em que rotor e palhetas também vibram acopladas, mas com predominância do movimento da palheta. As frequências que caracterizam estes modos são  $\omega_2 = 18.38$  Hz e  $\omega_5 = 19.74$  Hz, apresentados respectivamente nas figuras (5.1(b)) e (5.1(e)).



**Figura 5.1:** Frequências e modos de vibração do conjunto rotor-palhetas – modelo matemático usando rotor plano ( $T1$ ) –  $\dot{\phi} = 0$

A análise das frequências e modos de vibração apresentada, todavia, restringem-se ao caso em que o rotor não gira, não tendo validade para a condição de operação normal do conjunto. Entretanto, busca-se com estes estudos iniciais elucidar como o conjunto responde e quais as modificações introduzidas pelo acoplamento de componentes rígidos e flexíveis. Posteriormente, a análise modal deste conjunto será considerada para um velocidade de rotação não nula, utilizando a teoria de

sistemas lineares variantes no tempo.

### 5.1.2 Análise modal do sistema girante

As análises preliminares são limitadas a condição em que a velocidade de rotação do rotor é nula. Novamente a análise das formas modais de vibração será apresentada, mas utilizando o conceito de análise modal variante no tempo, apresentado no capítulo (4). Segundo esta metodologia, o número de frequências críticas deste tipo de sistema, cujos parâmetros variam periodicamente no tempo, é infinito, embora apenas um conjunto finito destes autovalores seja efetivamente calculado. Os autovalores são, na verdade, função da frequência de variação dos parâmetros do sistema, que neste caso, é a própria velocidade de rotação.

Para calcular as frequências e modos, básicos e paramétricos, são utilizadas as equações de movimento (3.47), apresentadas no capítulo (3), do modelo linearizado de segunda ordem, que permitem a inclusão do efeito do enrijecimento centrífugo. Assim, as equações de movimento podem ser sumarizadas por

$$\mathbf{M}(\phi)\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\dot{\phi}, \phi)\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_\Omega(\dot{\phi}, \phi) + \mathbf{K}_g(\dot{\phi}))\mathbf{q} = \mathbf{f}_\Omega + \mathbf{f}_p \quad (5.1)$$

sendo que

$\mathbf{M}(\phi)$ , é a matriz de massa

$\mathbf{C}(\dot{\phi}, \phi)$ , é a matriz de coriolis

$\mathbf{K}$ , é a matriz de rigidez estrutural

$\mathbf{K}_\Omega(\dot{\phi}, \phi)$ , é a matriz de rigidez rotacional

$\mathbf{K}_g(\dot{\phi})$ , é a matriz de rigidez geométrica

$\mathbf{f}_\Omega$  é o vetor de força rotacional

$\mathbf{f}_p$ , é o vetor da força peso

A análise modal variante no tempo pressupõe a utilização da equação diferencial ordinária de movimento em sua forma de estado. Assim, obtém-se

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{K} + \mathbf{K}_\Omega + \mathbf{K}_g) & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f} \end{Bmatrix} \quad (5.2)$$

ou simplesmente,

$$\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{A}(t)\mathbf{u} = \mathbf{p}$$

com o seguinte vetor de graus de liberdade

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix}$$

Retomando a solução apresentada no capítulo (4), uma solução, no domínio do tempo, é proposta para a equação diferencial de movimento, sendo dada por

$$\mathbf{u} = \mathbf{r}(t)e^{\lambda t} \quad (5.3)$$

Nesta equação são reconhecidos os termos  $\mathbf{r}(t)$ , autovetor variante no tempo e  $\lambda$ , autovalor associado. A forma do problema de autovalor variante no tempo foi apresentada na equação (4.116). Ao contrário do problema invariante no tempo, cujos autovalores e autovetores são obtidos diretamente da solução do problema de autovalor associado à matriz  $\mathbf{A}$ , no caso do sistema periodicamente variante no tempo é necessário expandir tanto a matriz  $\mathbf{A}(t)$  e o autovetor variante no tempo  $\mathbf{r}(t)$  em suas respectivas séries de Fourier. Utilizando esta abordagem, apresentada detalhadamente no capítulo (4), obtém-se uma nova forma do problema de autovalor, neste caso para uma matriz expandida  $\hat{\mathbf{A}}$ , invariante no tempo, cujos termos são formados a partir da série de Fourier da matriz  $\mathbf{A}(t)$  e da frequência fundamental  $\Omega = \dot{\phi}$ , que é a própria velocidade de rotação do rotor. A forma deste novo problema de autovalor, associado à matriz  $\hat{\mathbf{A}}$  equivalente, apresentada na equação (4.124).

Os autovalores da matriz expandida correspondem assim a uma aproximação para os autovalores do sistema original variante no tempo, enquanto que os autovetores correspondem aos termos da série de Fourier do autovetor variante no tempo  $\mathbf{r}(t)$ , conforme equação (4.123). De acordo com a teoria de sistemas periodicamente variantes no tempo, a matriz  $\hat{\mathbf{A}}$ , é uma matriz infinita, sendo que a solução do problema de autovalor implica na resolução de um determinante infinito, ou determinante de Hill (Zadeh e Desoer, 1963; Whittaker e Watson, 1963). Na prática, apenas um número finito de autovalores e autovetores desta matriz expandida é calculado, uma vez que são calculados apenas os primeiros  $2n_o$  termos da série de Fourier da matriz  $\mathbf{A}(t)$ , ou seja, da matriz infinita  $\hat{\mathbf{A}}$  os termos centrais em torno de  $\mathbf{A}_0$  são considerados (Meirovitch, 1988; Xu e Gasch, 1995).

O conjunto de autovalores desta matriz expandido, portanto, corresponde a uma aproximação numérica para os autovalores do sistema original. Na verdade, duas aproximações numéricas são empregadas para obter os autovalores do sistema expandido equivalente. A primeira ocorre quando da obtenção dos termos da série de Fourier da matriz  $\mathbf{A}(t)$ , pois este procedimento é realizado numericamente: a matriz  $\mathbf{A}(t)$  é amostrada em um intervalo de tempo e, utilizando um algoritmo de Transformada Rápida de Fourier, os termos da série são calculados. A segunda aproximação empregada é o truncamento da matriz expandida  $\hat{\mathbf{A}}$ . Seja definida a grandeza  $n_o$ , ordem de expansão, o número de termos necessários na série da matriz é  $4n_o + 1$ , de  $-2n_o$  a  $2n_o$ . Lembrando que o número de graus de liberdade do sistema é  $N$  e, portanto, a dimensão da matriz  $\mathbf{A}(t)$  é  $2N$ , a ordem da matriz expandida  $\hat{\mathbf{A}}$  será  $2(n_o + 1) \times 2N$ , que corresponde ao total de autovalores e autovetores a serem extraídos. Todavia, este conjunto de autovalores não é linearmente independente, sendo que existe um subconjunto de autovalores, de tamanho  $2N$ , chamado de autovalores-básicos, a partir dos quais os outros autovalores são obtidos em função da frequência de variação dos parâmetros das matrizes, ou seja, a própria velocidade de rotação,  $\Omega = \dot{\phi}$ . O conjunto de autovalores-básicos é denominado de  $\lambda_0$  (Xu e Gasch, 1995; von M. Ertz e Nordmann, 1995; Reuter, 1998), sendo que o

$k$ -ésimo elemento é dado por

$$\lambda_{n,k} = \lambda_{n,0} \pm ik\Omega \quad n = 1, 2, \dots, 2N \quad k = -n_o, \dots, n_o \quad (5.4)$$

Analogamente, o conjunto de autovetores  $\hat{\mathbf{r}}$  calculado é redundante, sendo que apenas  $2N$  devem ser considerados. Estes recebem o nome de autovetores-básicos. A partir de cada autovetor-básico é possível extrair  $2n_o + 1$  termos da série de Fourier para  $r(t)$ , os autovetores variantes no tempo, lembrando que cada autovetor  $\hat{\mathbf{r}}$  é organizado em subvetores  $\mathbf{r}_k$ , cuja dimensão é  $2N$ , de acordo com a equação (4.123).

Portanto, a solução no tempo em função dos autovalores-básicos,  $\lambda_{n,0}$ , e autovetores variantes no tempo,  $\mathbf{r}_n(t)$ , é dada por

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^{2N} \mathbf{r}_n(t) e^{i\omega_{n,0}t} = \sum_{k=-n_o}^{n_o} \sum_{n=1}^{2N} \mathbf{r}_{n,k} e^{(\omega_{n,0} + ik\Omega)t} \quad (5.5)$$

Em resumo, para um sistema invariante no tempo existem  $2N$  autovalores e autovetores correspondentes, enquanto que para um sistema periodicamente variante no tempo podem ser estimados  $(2n_o + 1) \times 2N$  autovetores  $\mathbf{r}_{n,k}$ , cujos autovalores correspondentes podem ser interpretados como sendo  $(\omega_{n,0} + ik\Omega)$ . Com este paralelo é possível analisar as formas modais associadas as vibrações paramétricas, à semelhança do que foi apresentado para o caso do sistema não girante, para a condição normal de operação do rotor, com determinada velocidade  $\Omega = \dot{\phi}$ . Os coeficientes de Fourier dos autovetores variantes no tempo são imaginários, uma vez que a matriz expandida  $\hat{\mathbf{A}}$  é imaginária.

Antes de iniciar a apresentação das formas modais, serão discutidos alguns detalhes da implementação numérica da análise modal variante no tempo. Dois aspectos importantes, do ponto de vista prático, não foram analisados. O primeiro se refere a convergência da solução, ou seja, se o determinante infinito de Hill, matriz expandida  $\hat{\mathbf{A}}$ , é truncado com um número finito de termos, é necessário verificar se os autovalores calculados estão corretos. Como será mostrado nos resultados obtidos, uma ordem de expansão  $n_o = 2$  deve ser empregada. A partir desta ordem, não se observa mais variação nos autovalores-básicos e, portanto, considera-se então que a solução convergiu. O segundo aspecto, refere-se a escolha, entre os  $2(n_o + 1) \times 2N$  autovalores calculados, de quais são os  $2N$  autovalores-básicos. Inicialmente deve-se notar que

$$\lambda_{n,k} = \Re[\lambda_{n,0}] + \Im[\lambda_{n,0}] \pm ik\Omega \quad n = 1, 2, \dots, 2N \quad k = -n_o, \dots, n_o \quad (5.6)$$

Ou seja, a variação paramétrica influencia apenas a parte imaginária do autovalor, de tal forma que é possível identificar cada conjunto de autovalores linearmente dependentes por aqueles que apresentam mesma parte imaginária. Dentro de cada um dos  $N$  conjuntos, é necessário ainda identificar qual é o par, complexo conjugado, que representa o autovalor-básico. A parte real do autovalor está relacionada com o fator de amortecimento,

$$\xi = -\frac{\Re[\lambda_n]}{\text{abs}[\lambda_n]} \quad (5.7)$$

No caso do amortecimento estrutural, o fator de amortecimento pode ser calculado também a partir dos parâmetros do sistema. Assim considerando que o amortecimento estrutural é dado por  $\mathbf{C} = \alpha\mathbf{K}$ , o fator de amortecimento é dado por (Inman, 1996)

$$\xi = \frac{\alpha}{2}\lambda_{n,k} \quad (5.8)$$

A comparação entre os valores de  $\xi$  obtidos pelas duas aproximações indica qual é o valor de  $k$  corresponde ao autovalor-básico em um determinado conjunto linearmente dependente. Este procedimento de escolha dos autovalores e autovetores-básicos é empregado nas análises apresentadas neste capítulo. Destaca-se, ainda que no caso em que o amortecimento é nulo, não há como escolher os grupos através da parte real, que é nula para todos. Assim, é incluído um pequeno amortecimento estrutural,  $\alpha$ , de tal forma que seja possível selecionar os autovalores-básicos.

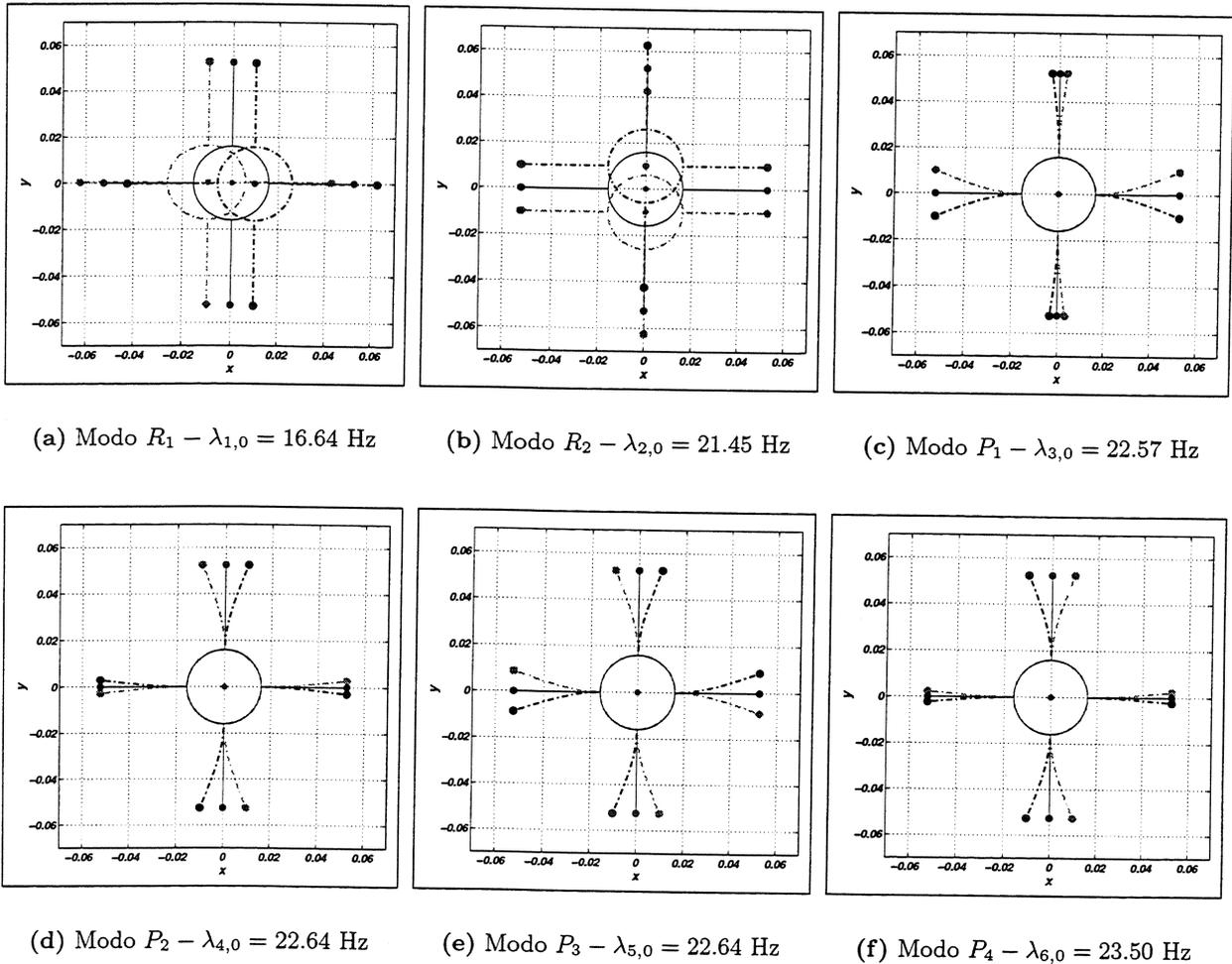
O modelo mecânico T1, cujas propriedades estão apresentadas na tabela (5.1) não apresenta nenhum tipo de amortecimento, assim para identificar os grupos de autovalores linearmente dependentes, cujas partes reais são idênticas, é introduzido um pequeno amortecimento estrutural  $\alpha = 0.0005$ , para permitir a escolha dos autovalores-básicos. A convergência dos autovalores da matriz expandida  $\hat{\mathbf{A}}$  para os autovalores-básicos do sistema variante no tempo, em função da ordem de expansão utilizada é apresentada na tabela (5.2). A velocidade de rotação considerada, nos resultados apresentados, é de  $\Omega = \dot{\phi} = 10$  Hz. Nota-se que os autovalores-básicos estimados variam, para valores de  $n_o = 0$  (apenas termos constantes) e  $n_o = 1$  (termos constante mais dois termos da série de Fourier). A partir de  $n_o = 2$ , os autovalores-básicos não sofrem mais variação, sendo que considera-se que a solução convergiu. Dessa forma, os resultados apresentados para os autovetores-básicos foram calculados com esta ordem de expansão.

**Tabela 5.2:** Variação dos autovalores-básicos, Hz, em função da ordem de expansão  $n_o$ - rotor plano (T1)

	$n_o=0$	$n_o=1$	$n_o=2$	$n_o=3$	$n_o=4$
1	16.7564	16.6375	16.6375	16.6375	16.6375
2	21.7431	21.4556	21.4556	21.4556	21.4556
3	22.6387	22.5680	22.5678	22.5678	22.5678
4	22.6387	22.6387	22.6387	22.6387	22.6387
5	22.7216	22.6387	22.6387	22.6387	22.6387
6	23.1989	23.5022	23.5019	23.5019	23.5019

Os autovalores extraídos da matriz expandida e escolhidos de maneira a formar um conjunto linearmente independente, podem ser interpretados como modos de vibração, cujas frequências associadas são dadas por  $\lambda_{k,0} \pm ik\Omega$ , sendo  $k = 0, 1, 2$ . Se  $k = 0$ , tem-se o conjunto de autovetores-básicos. Se  $k = 1$  o conjunto é chamado de conjunto de autovetores paramétricos de ordem 1. A figura (5.2) apresenta as formas modais associadas aos autovalores-básicos. Nota-se que, das seis formas modais apresentadas, quatro estão associadas a modos de vibração com movimento predominante das palhetas apenas e outros dois representam os modos com movimento predominante

do rotor.



**Figura 5.2:** Autovalores e autovetores-básicos (T1) –  $\Omega = \dot{\phi} = 10$  Hz

As figuras (5.3) e (5.4) apresentam as formas modais associadas a vibração paramétrica propriamente dita. Na figura (5.3), os modos paramétricos de ordem 1 são ilustrados. Nota-se que existem dois modos de vibração das palhetas apenas e quatro modos de vibração com movimento predominante do rotor. Finalmente, na figura (5.4), que apresenta os modos paramétricos de ordem 2, nota-se um comportamento semelhante aos modos paramétricos de ordem 1.

Finalmente, os resultados apresentados nesta seção referem-se apenas as formas modais, sendo que a contribuição de cada modo para a resposta da estrutura será apresentada na próxima seção através da análise numérica no tempo e ainda através da solução por superposição modal.

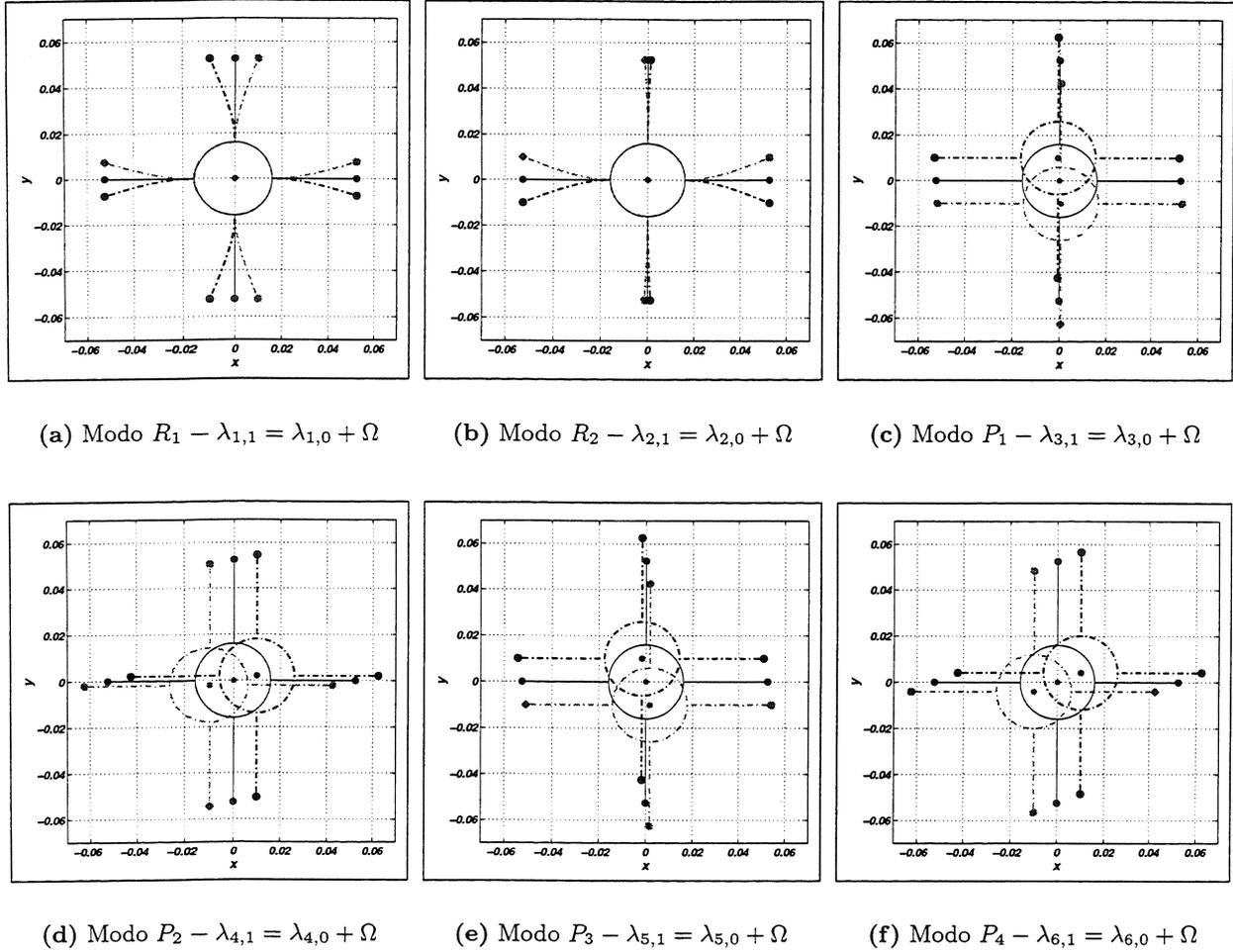


Figura 5.3: Autovalores e autovetores de vibração paramétrica de ordem  $k = 1$  (T1) -  $\Omega = \dot{\phi} = 10$  Hz

### 5.1.3 Integração numérica das equações de movimento – efeito da velocidade de rotação constante

As equações de movimento apresentadas nas equações (3.38), (3.47) e (3.55) foram resolvidas numericamente, utilizando um integrador do tipo Runge-Kutta de ordem 5. O objetivo desta análise é comparar os modelos matemáticos lineares, linearizado de segunda ordem e não-linear completo e observar as diferenças entre eles quando o rotor opera com velocidade constante. As condições iniciais de movimento são de deslocamento nulo para os deslocamentos, tanto para o centro do rotor  $y$  e  $z$  e quanto para cada uma das palhetas  $z_i$ , sendo que as velocidades também são nulas com exceção da velocidade inicial da palheta  $p_1$ ,  $\dot{z}_1$ , que é igual a 0.001 m/s.

A figura (5.5) apresenta os deslocamentos da palheta  $p_1$  com velocidades de rotação do rotor variando entre 1 e 18 Hz (60 a 1080 rpm). Verifica-se uma grande diferença entre a resposta do modelo linear e dos modelos não-lineares, sendo que esta divergência é acentuada para valores de

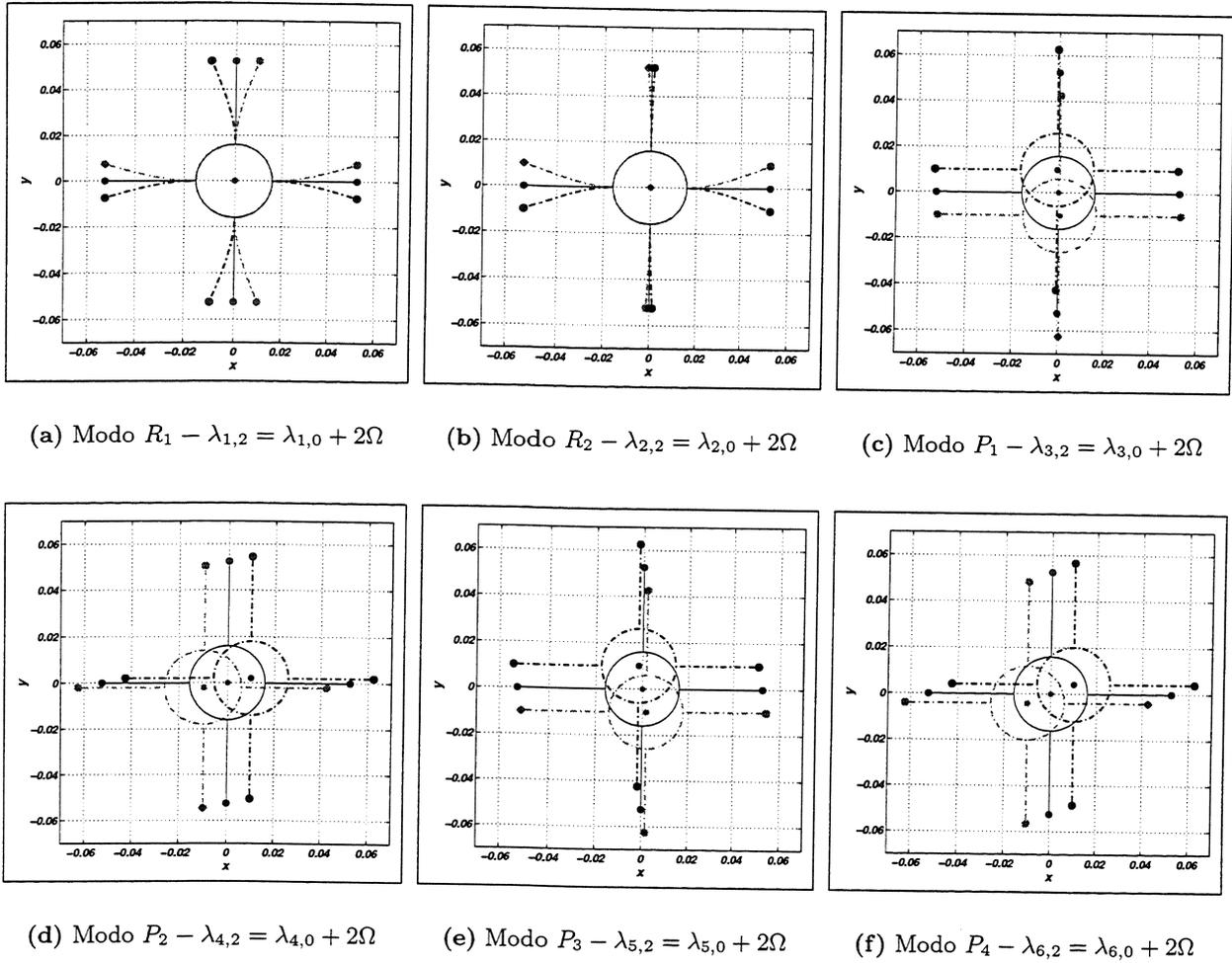
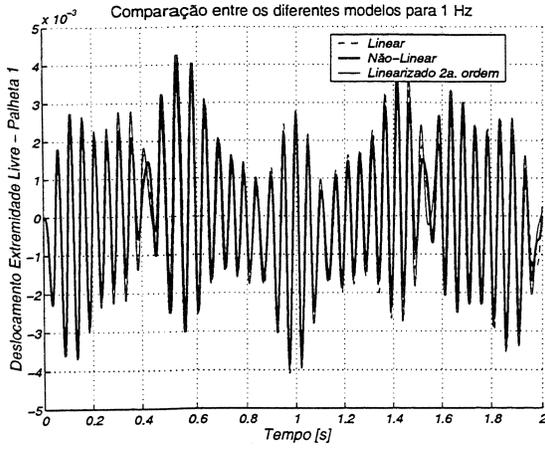


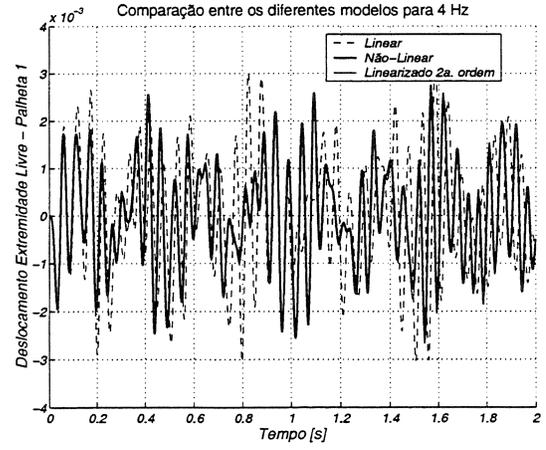
Figura 5.4: Autovalores e autovetores de vibração paramétrica de ordem  $k = 2$  (T1) –  $\Omega = \dot{\phi} = 10$  Hz

rotação maiores que  $\Omega = 16$  Hz. Quando a velocidade do rotor é igual a  $\Omega = 19$  Hz, o sistema linear torna-se instável, pois a rigidez aparente da palheta é nula. Nos resultados apresentados para  $\Omega = 18$  Hz nota-se que o deslocamento obtido pelo modelo linear é muito maior que nos outros dois modelos, indicando a diminuição da rigidez aparente da palheta.

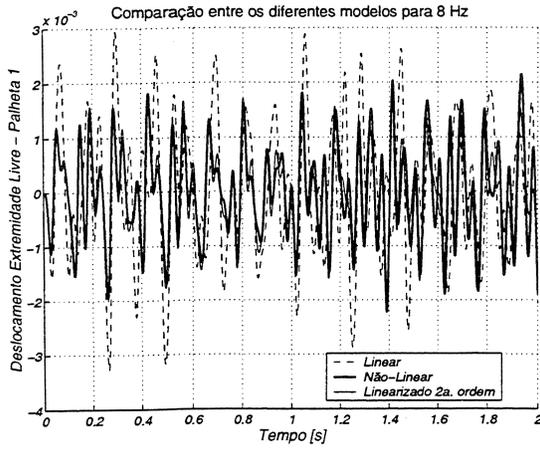
A figura (5.6) apresenta a comparação entre os deslocamentos da palheta  $p_1$  obtidos pelos modelos não-linear e linearizado de segunda ordem. Nesta figura, o intervalo total considerando é de 0.5 s, sendo que a velocidade do rotor varia entre  $\Omega = 0$  Hz e  $\Omega = 35$  Hz. Observa-se boa concordância entre os deslocamentos nos dois modelos, sendo que para velocidades de rotação maiores que  $\Omega = 30$  Hz, a discrepância entre as respostas dos modelos é maior, mas não muito acentuada. Assim, na faixa de velocidades de rotação analisada, quando esta velocidade é constante, a diferença entre estes dois modelos é pequena.



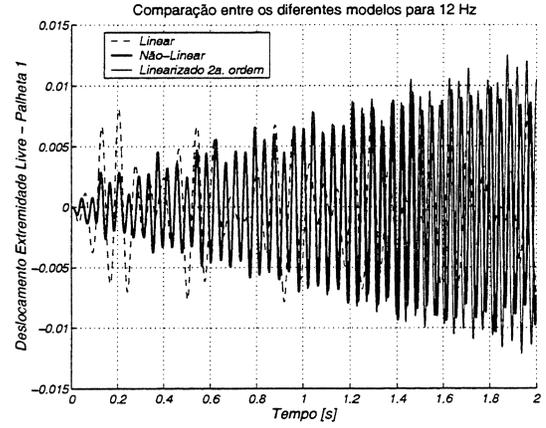
(a)  $\Omega = 1$  Hz (60 rpm)



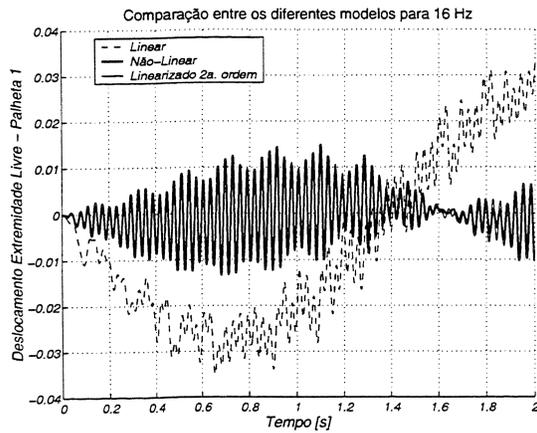
(b)  $\Omega_s = 4$  Hz (240 rpm)



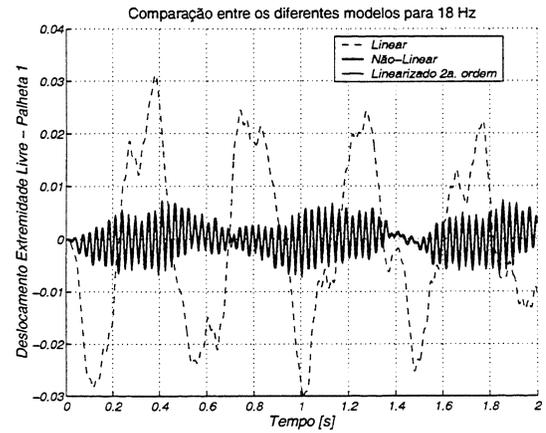
(c)  $\Omega = 8$  Hz (480 rpm)



(d)  $\Omega = 12$  Hz (720 rpm)

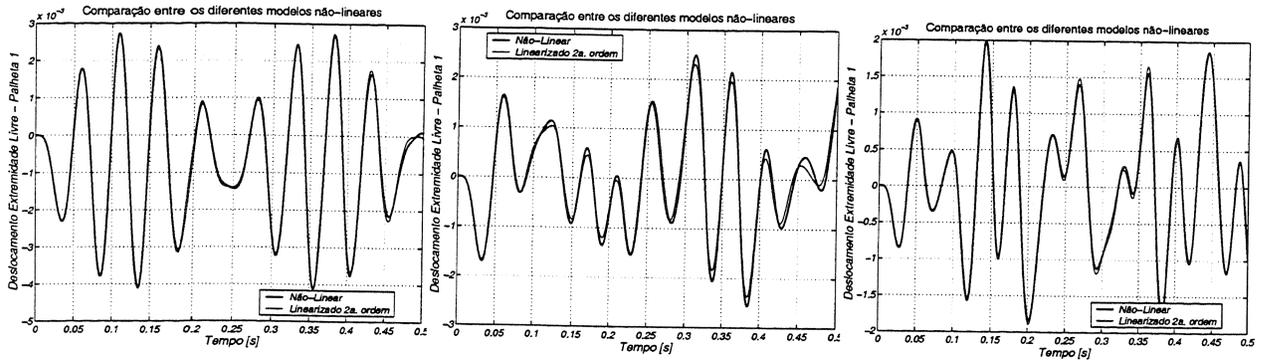


(e)  $\Omega = 16$  Hz (960 rpm)



(f)  $\Omega = 18$  Hz (1080 rpm)

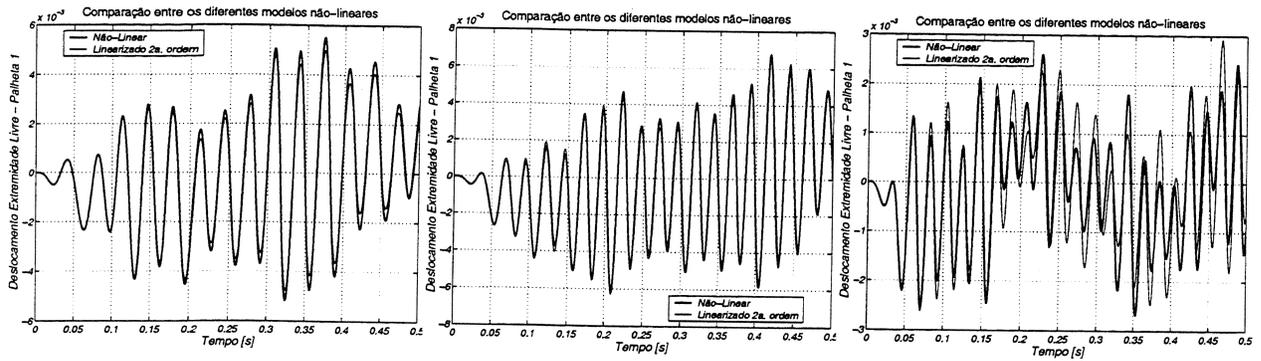
Figura 5.5: Comparação entre os modelos linear, não-linear completo e não-linear de segunda ordem. Deslocamento da extremidade livre da palheta 1.



(a)  $\Omega = 0$  Hz (0 rpm)

(b)  $\Omega = 5$  Hz (300 rpm)

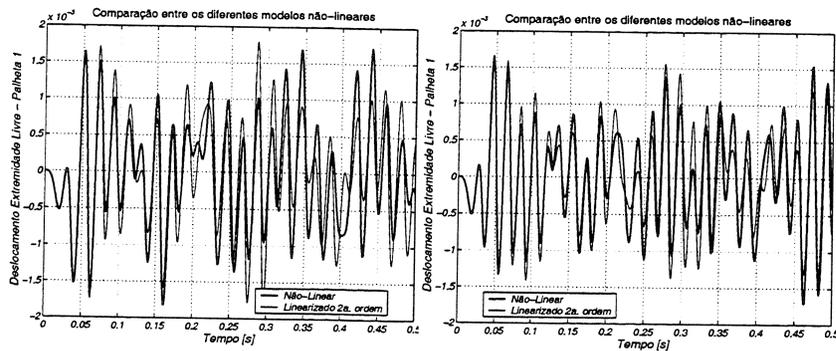
(c)  $\Omega = 10$  Hz (600 rpm)



(d)  $\Omega = 15$  Hz (900 rpm)

(e)  $\Omega = 20$  Hz (1200 rpm)

(f)  $\Omega = 25$  Hz (1500 rpm)



(g)  $\Omega = 30$  Hz (1800 rpm)

(h)  $\Omega = 35$  Hz (2100 rpm)

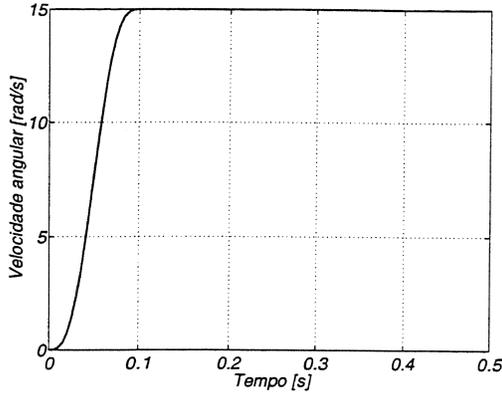
**Figura 5.6:** Comparação entre os modelos não-lineares – não-linear completo e não-linear de segunda ordem – velocidades de rotação mais altas. Deslocamento na pálheia 1.

### 5.1.4 Integração numérica das equações de movimento – efeito da aceleração do rotor

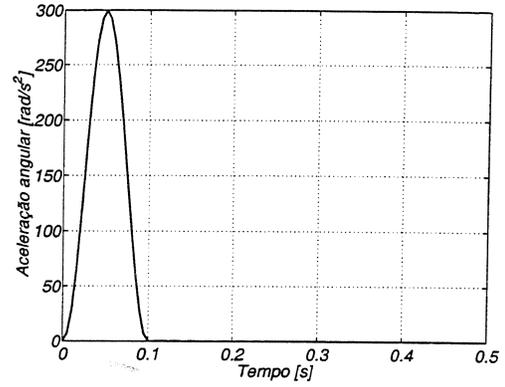
As respostas obtidas anteriormente foram calculadas supondo que a velocidade do rotor é constante ao longo do tempo. Entretanto, em algumas situações como a partida do rotor, o conjunto está sujeito a uma variação na velocidade de rotação. Neste caso, o rotor está sujeito a uma aceleração durante um determinado intervalo de tempo  $T_s$  e após este intervalo, o rotor opera com velocidade constante  $\omega_s$ . A variação angular do rotor, neste caso, pode ser aproximada pela seguinte relação (apresentada no capítulo anterior)

$$\phi(t) = \begin{cases} \left( \frac{\omega_s}{T_s} \right) \left[ \left( \frac{t^2}{2} \right) + \left( \frac{T_s}{2\pi} \right)^2 \left( \cos \frac{2\pi t}{T_s} - 1 \right) \right] & 0 \leq t \leq T_s \\ \omega_s \left( t - \frac{T_s}{2} \right) & T_s \leq t \end{cases} \quad (5.9)$$

O tempo de partida considerado nas simulações é  $T_s = 0.1s$ , sendo que diferentes valores para a velocidade final do rotor  $\omega_s$  foram testados. As figuras (5.7(a)) e (5.7(b)) apresentam o perfil da aceleração e velocidade angular a que o rotor é submetido. As condições iniciais tanto de deslocamento quanto de velocidade são nulas nestas simulações. Os resultados obtidos para o deslocamento da palheta  $p_1$  estão apresentados na figura (5.8). Nestas simulações, os três modelos do conjunto rotor palhetas foram testados. Para valores baixos de velocidade,  $\omega_s = 15$  rad/s, verifica-se que os três modelos apresentam concordância, ainda que o modelo linear apresente uma pequena diferença para os modelos não-lineares. Quando a velocidade é aumentada para  $\omega_s = 30$  rad/s, embora os dois modelos não-lineares apresentem boa concordância entre si, o modelo linear apresenta grande discrepância. Esta discrepância é acentuada quando a velocidade final de rotação aumenta para  $\omega_s = 60$  rad/s. Para valores maiores de  $\omega_s = 120$  rad/s, a solução obtida pelo modelo linear de viga é completamente discrepante, sendo que para  $\omega_s = 150$  rad/s, o resultado diverge drasticamente. Para estas duas velocidades observa-se também a divergência nos deslocamentos obtidos com auxílio dos dois modelos não-lineares. Nos casos em que o rotor opera com velocidade de rotação constante, as diferenças observadas entre os dois modelos não-lineares de viga não é tão acentuada, mas no caso de variação desta velocidade angular a concordância entre os dois modelos não é boa. Ressalta-se que o modelo não-linear de segunda ordem, equação (3.47), assumem velocidade de rotação constante para calcular a força normal, que resulta na matriz de rigidez geométrica. Isto pode explicar a diferença encontrada entre estes dois modelos não-lineares quando o rotor não opera com velocidade constante. Além disso, a comparação entre as equações de movimento (3.47) e (3.55) mostra que esta segunda equação contém a primeira, sendo que a diferença entre as duas ocorre para valores maiores de deslocamento e velocidade das palhetas, o que ocorre quando se aumenta a velocidade do rotor.

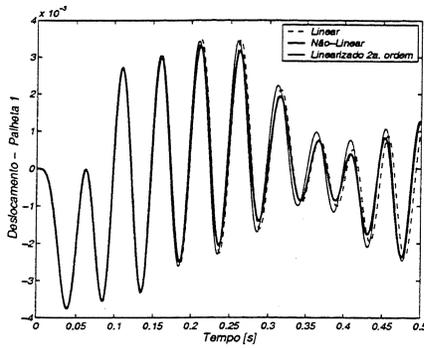


(a) Velocidade angular  $\dot{\phi}$

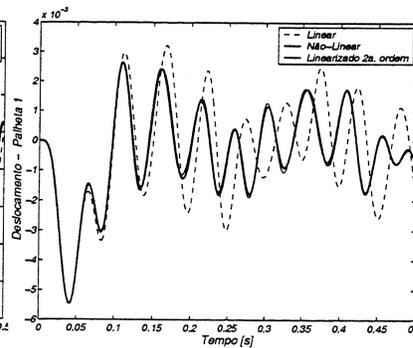


(b) Aceleração angular  $\ddot{\phi}$

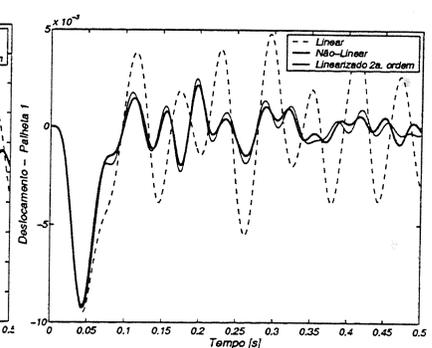
Figura 5.7: Perfil de velocidade e aceleração angular do rotor.  $T_s = 0.1$  s e  $\Omega_s = 15$  rad/s.



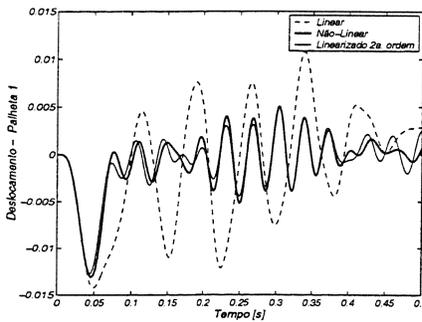
(a)  $\omega_s = 15$  rad/s



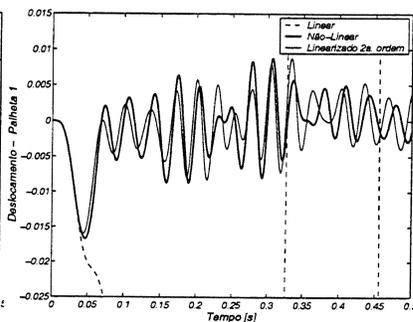
(b)  $\omega_s = 30$  rad/s



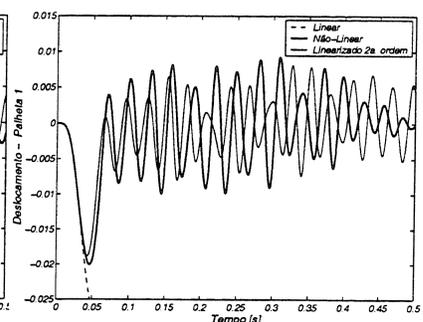
(c)  $\omega_s = 60$  rad/s



(d)  $\omega_s = 90$  rad/s



(e)  $\omega_s = 120$  rad/s



(f)  $\omega_s = 150$  rad/s

Figura 5.8: Comparação entre os modelos linear, não-linear de segunda ordem (matriz de rigidez geométrica incluída) não-linear. Deslocamento na palheta 1.

### 5.1.5 Integração numérica das equações de movimento – diagramas de cascata

As mesmas simulações numéricas apresentadas para o rotor operando com velocidade constante, inclusive com mesmas condições iniciais, são utilizadas para construir os diagramas de cascata. Este tipo de diagrama é especialmente útil para analisar a variação do comportamento dinâmico do sistema com o aumento da velocidade de rotação. Estas curvas são obtidas com a aplicação da transformada rápida de Fourier ao sinal obtido no tempo para cada velocidade de rotação constante. As figuras (5.9), (5.10) e (5.10) apresentam os diagramas de cascata do rotor plano, T1. Nestes diagramas são apresentadas os sinais de deslocamento no domínio da frequência para velocidades de rotação do rotor variando entre 0 e 18 Hz, sendo que cada curva corresponde a um aumento na velocidade de 1Hz. Nos gráficos estão apresentados os resultados obtidos para o centro do rotor nas direções  $y$  e  $z$  e duas das palhetas  $p_1$  e  $p_2$ , que são defasadas entre si de  $90^\circ$ .

Os diagrama de cascata da figura (5.9) apresentam os resultados obtidos com o modelo linear da equação (3.38). Nos diagramas das figuras (5.9(c)) e (5.9(d)), que apresentam os deslocamentos das palhetas  $p_1$  e  $p_2$ , nota-se que as frequências críticas associadas aos modos de vibração das palhetas, identificados pela letra (B), diminuem com o aumento da velocidade de rotação, seguindo uma distribuição quadrática. Quando a velocidade de rotação é igual a 19 Hz, a resposta é instável pois a rigidez aparente da palheta se anula. Ainda nos diagramas das figuras (5.9(c)) e (5.9(d)) observam-se os seguintes conjuntos de picos: (A) velocidade de rotação; (B) frequências críticas (básicas) das palhetas associadas aos modos  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  e  $P_4$  (estas quatro frequências apresentam valores muito próximos e nos diagramas são coincidentes); (C) vibração paramétrica de ordem 1 associada ao modo  $R_1(+\Omega)$ ; (D) vibração paramétrica de ordem 1 associada ao modo  $R_2(+\Omega)$ ; (E) vibração paramétrica de ordem 1 associada ao modo  $R_1(-\Omega)$  e (F) vibração paramétrica de ordem 1 associada ao modo  $R_2(-\Omega)$ . Por outro lado, os diagramas das figuras (5.9(a)) e (5.9(b)) apresentam os seguintes conjuntos de pico: (A) velocidade de rotação; (H) frequência crítica (básica) do rotor, associada ao modo  $R_1$ ; (I) frequência crítica (básica) do rotor, associada ao modo  $R_2$ ; (J) vibração paramétrica de ordem 1 associada ao modo  $P_4(+\Omega)$  e (K) vibração paramétrica de ordem 1 associada ao modo  $P_1(-\Omega)$ . As frequências (básicas) das palhetas identificadas por (B) apresentam comportamento quadrático, tendendo a zero quando a velocidade de rotação se aproxima de 19 Hz, pois a rigidez aparente da palheta se anula. As frequências (básicas) do rotor, identificadas pelos picos (H) e (I) são pouco influenciadas pela velocidade de rotação, tendendo a ser constantes. A variação das frequências paramétricas dos modos  $R_1$  e  $R_2$ , representados pelos picos (C), (D), (E) e (F) tende a ser linear em função da velocidade de rotação, visto que as frequências básicas correspondentes (os modos  $R_1$  e  $R_2$ ) são praticamente constantes. A variação das frequências paramétricas dos modos  $P_1$  e  $P_4$ , identificados respectivamente por (K) e (J), tendem a seguir o comportamento quadrático de seus modos básicos, (B), mas tendendo a desaparecer com o aumento da velocidade de rotação.

Os diagrama de cascata das figuras (5.10) e (5.11) apresentam os resultados obtidos com o modelo linearizado de segunda ordem, equação (3.47), e modelo não-linear, (3.55). Neste caso os

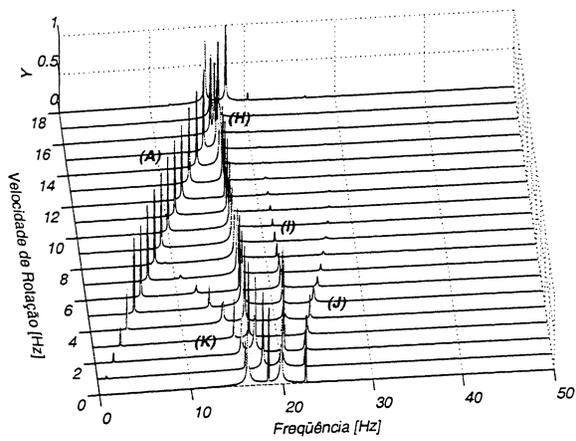
picos observados, bem como sua classificação, são os mesmos do modelo linear, figura (5.9). Seu comportamento, contudo, é diferente. Em primeiro lugar, nas figuras (5.10(c)), (5.10(d)), (5.11(c)) e (5.11(d)), os picos que representam as frequências críticas, (B), tendem a aumentar com o aumento da velocidade de rotação, sendo este efeito mais acentuado nas velocidades de rotação mais altas. Este é um comportamento oposto ao observado nos diagramas obtidos com o modelo linear, em que as frequências diminuam. A variação dos picos (B) apresenta uma tendência quadrática, sendo que a concavidade é oposta ao resultado obtido com o modelo linear. Os picos (K) e (J), que são vibrações paramétricas dos modos de palheta também apresentam comportamento distinto em relação ao modelo linear. Os outros picos, embora apresentem comportamento semelhante ao modelo linear, apresentam valores (frequências críticas) diferentes. Além disso, não são observadas grandes diferenças entre os diagramas obtidos pelos modelos não-lineares. Contudo, a comparação entre as figuras (5.9), (5.10) e (5.10) mostra que os diagramas obtidos para o deslocamento do centro do rotor são pouco influenciados pela velocidade de rotação, sendo estas diferenças mais marcantes nos diagramas do deslocamento das palhetas  $p_1$  e  $p_2$ . Finalmente, ressalta-se que, nas figuras (5.9(c)), (5.10(c)), (5.11(c)), (5.9(d)), (5.10(d)) e (5.11(d)), nota-se o aparecimento de um segundo pico, um pouco menor que a frequência crítica da palheta, ao longo de (B), que segue a mesma tendência desta dependendo do modelo empregado. Isto ocorre porque, com o aumento da velocidade de rotação, as diferenças das frequências dos modos  $P_1$  e  $P_4$  aumentam.

**Tabela 5.3:** Autovalores-básicos, Hz, em diferentes velocidades de rotação  $\Omega$ - rotor plano (T1)

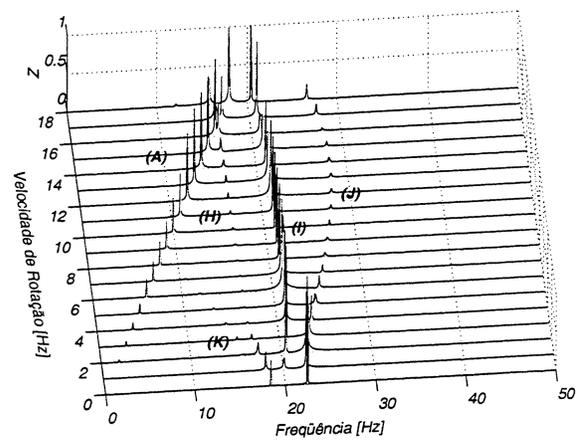
	$\Omega = 5$ Hz		$\Omega = 10$ Hz		$\Omega = 15$ Hz	
	Linear	Linear 2a. ord	Linear	Linear 2a. ord	Linear	Linear 2a. ord
$R_1$	16.61	16.77	16.51	16.63	16.41	16.61
$R_2$	21.06	21.31	21.17	21.45	21.03	21.48
$P_1$	18.20	19.69	16.15	22.56	11.66	26.46
$P_2$	18.33	19.97	16.15	22.63	11.66	26.49
$P_3$	18.33	19.97	16.15	22.63	11.66	26.49
$P_4$	19.51	20.93	17.26	23.50	13.13	26.49

Um análise mais detalhada da variação dos frequências críticas do conjunto é obtida com a análise conjunta da tabela (5.3) e das figuras (5.12), (5.13) e (5.14). A tabela (5.3) apresenta os autovalores-básicos calculados a partir da solução do problema de autovalores variantes no tempo em três diferentes velocidades de rotação  $\Omega = 5, 10$  e  $15$  Hz. As formas modais a que está tabela se refere estão apresentadas na figura (5.2). Por outro lado, as figuras (5.12), (5.13) e (5.14) apresentam os deslocamentos em frequência do centro do rotor na direção  $y$  e da palheta  $p_1$ , nestas três velocidades de rotação, obtidos pela integração numérica. As condições iniciais e de integração são as mesmas utilizadas para a construção dos diagramas de cascata. Quando o rotor opera com velocidade constante de  $\dot{\phi} = 5$  Hz observa-se que

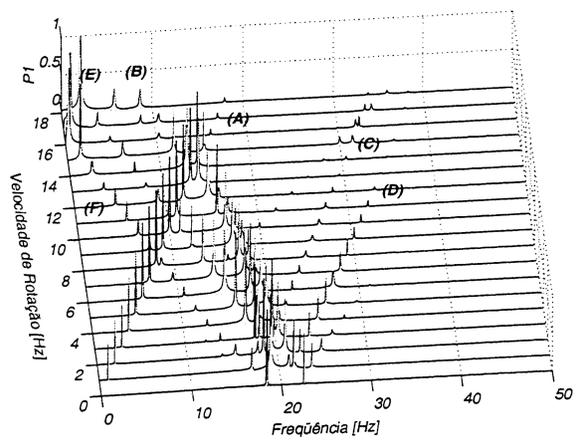
- nas figuras (5.12(a)) e (5.12(b)), os picos de 5 Hz referem-se a velocidade de rotação;



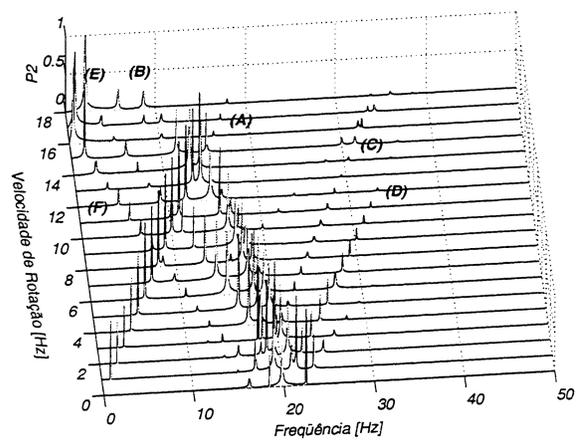
(a)  $y$



(b)  $z$

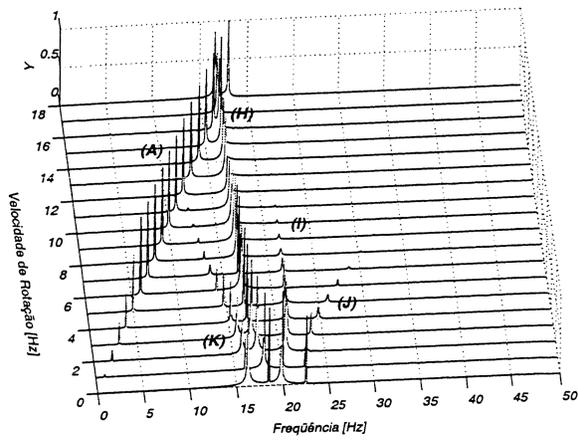


(c)  $p_1$

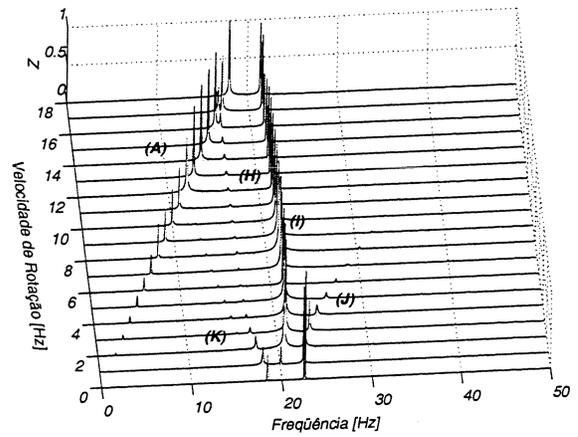


(d)  $p_2$

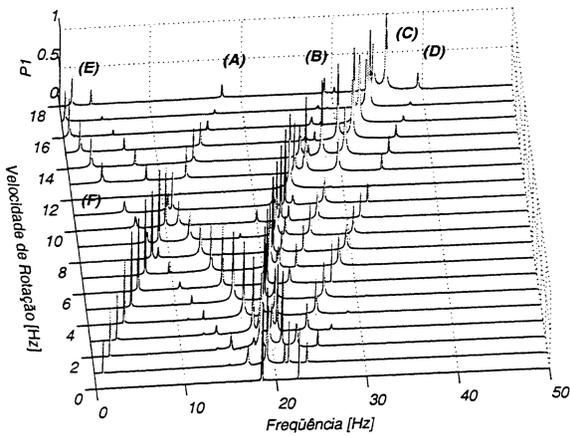
**Figura 5.9:** Diagramas de cascata - variação das respostas em frequência em função da velocidade de rotação. Modelo linear.



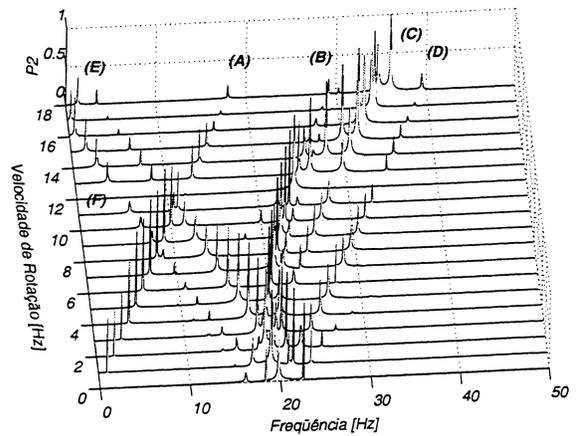
(a)  $y$



(b)  $z$

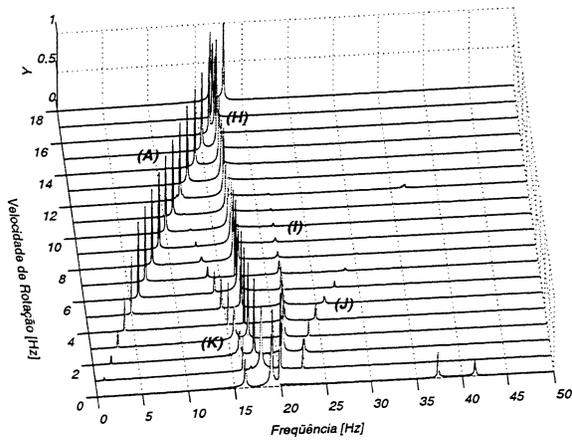


(c)  $p_1$

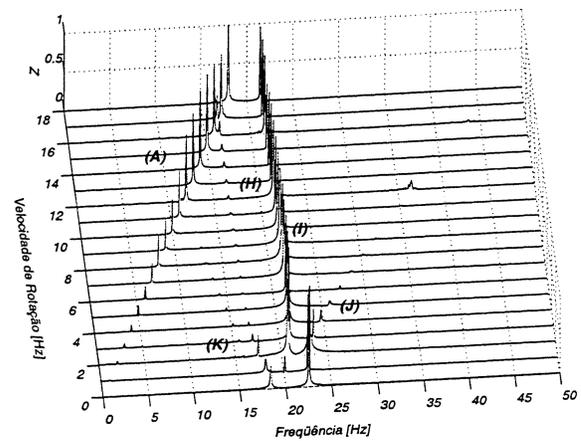


(d)  $p_2$

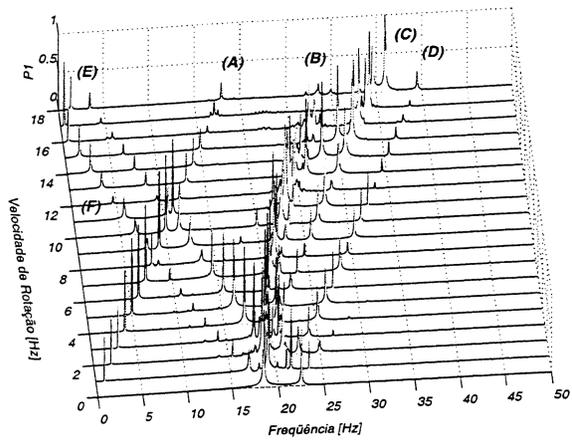
**Figura 5.10:** Diagramas de cascata - variação das respostas em frequência em função da velocidade de rotação. Modelo linearizado de segunda ordem.



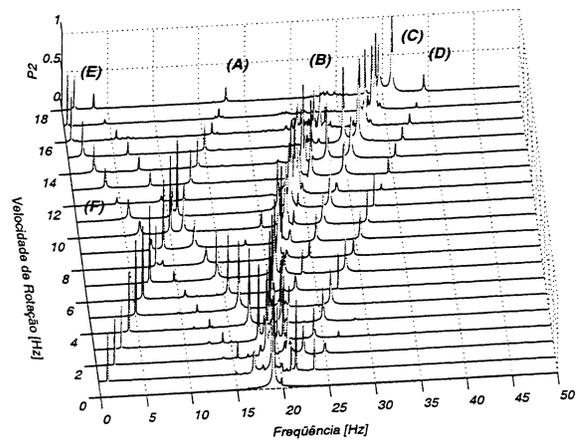
(a)  $y$



(b)  $z$



(c)  $p_1$



(d)  $p_2$

Figura 5.11: Diagramas de cascata - variação das respostas em frequência em função da velocidade de rotação. Modelo não-linear.

- na figura (5.12(a)), do modelo linear, os picos de 16.6 Hz e 21.1 Hz referem-se às frequência crítica do rotor na direção  $y$  e  $z$ , respectivamente. Nota-se que o valor dos picos nos modelos linear e não-lineares apresenta uma pequena diferença, assumindo os valores 16.7 Hz e 21.2 Hz. Em comparação com a tabela (5.3) verifica-se que estas frequências correspondem aos modos  $R_1$  e  $R_2$ , que no caso linear assumem os valores de 16.61 Hz e 21.06 Hz e, no caso linearizado de segunda ordem, os valores de 16.77 Hz e 21.31 Hz;
- na figura (5.12(a)), do modelo linear, observam-se os picos em 13.1 Hz e 24.4 Hz. No caso dos modelos não-lineares, estas frequências críticas assumem os valores 14.6 Hz e 25.9 Hz. Em ambos os modelos, estes picos estão associados a vibrações paramétricas de primeira ordem dos modos de palheta. De acordo com a tabela (5.3), o autovalor-básico do modo  $P_1$  é igual a 18.2, no caso do modelo linear, e 19.69 Hz, no caso do modelo linearizado de segunda ordem. Diminuindo 5 Hz referente à velocidade de rotação obtém-se os valores de 13.2 Hz e 14.69 Hz, que correspondem aproximadamente aos primeiros picos observados. Da mesma forma, a tabela (5.3) fornece o autovalor-básico do modo  $P_4$  é igual a 19.51, no caso do modelo linear, e 20.93 Hz, no caso do modelo linearizado de segunda ordem. Somando 5Hz obtém-se os valores de 24.51 Hz e 25.93 Hz, que correspondem aproximadamente aos picos observados;
- na figura (5.12(b)), os picos de 18.2 Hz e 19.5 Hz, modelo linear, e 19.7 Hz e 20.8 Hz, modelos não-lineares, correspondem às frequências críticas associadas aos modos de palheta. A comparação com autovalores-básicos da tabela (5.3) mostram que estes valores correspondem aproximadamente aos autovalores associados aos modos  $P_1$  e  $P_4$ , que são 18.20 Hz e 19.51 Hz, no caso do modelo linear, e 19.69 Hz e 20.93 Hz, no caso do modelo linearizado de segunda ordem;
- na figura (5.12(b)), os picos de 11.5 Hz, 16.1 Hz, 21.5 Hz e 26 Hz, no caso do modelo linear e os picos de 11.7 Hz, 16.3 Hz, 21.8 Hz e 26.3 Hz, no caso dos modelos não-lineares, correspondem às frequências paramétricas de ordem 1 dos modos  $R_1$  e  $R_2$  do rotor. De acordo com a tabela (5.3), no caso do modelo linear, estes autovalores assumem os valores de 16.61 Hz e 21.06 Hz. Somando-se e diminuindo 5Hz, devido à velocidade de rotação, obtém-se os valores de 15.61 Hz, 16.06 Hz, 21.61 Hz e 26.06, que correspondem aproximadamente aos picos observados. No casos dos modelos não-lineares, a tabela (5.3) indica os valores de 16.77 Hz e 21.31 Hz para os modos  $R_1$  e  $R_2$ . Somando-se e diminuindo-se 5 Hz a estes valores obtém-se 11.77 Hz, 16.31 Hz, 21.77 Hz e 26.31 Hz, que correspondem aproximadamente aos picos observados.

Quando o rotor opera com velocidade constante de  $\dot{\phi} = 10$  Hz observa-se que

- nas figuras (5.13(a)) e (5.13(b)), os picos de 10 Hz referem-se a velocidade de rotação;
- na figura (5.13(a)), do modelo linear, os picos de 16.5 Hz e 21.1 Hz referem-se às frequência crítica do rotor na direção  $y$  e  $z$ , respectivamente. Nota-se que o valor dos picos nos modelos linear e não-lineares apresenta uma pequena diferença, assumindo os valores 16.7 Hz e 21.4

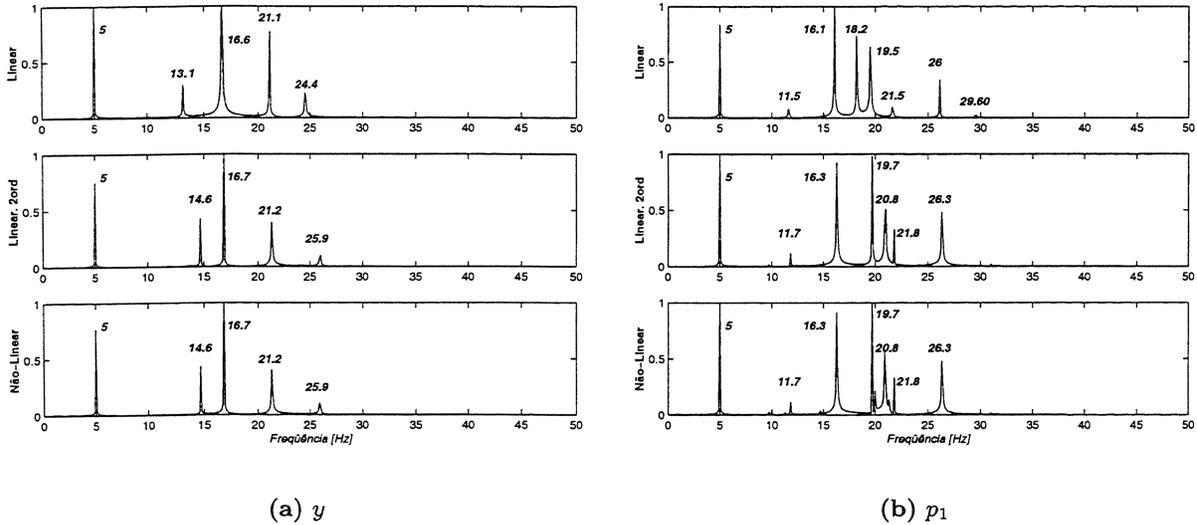
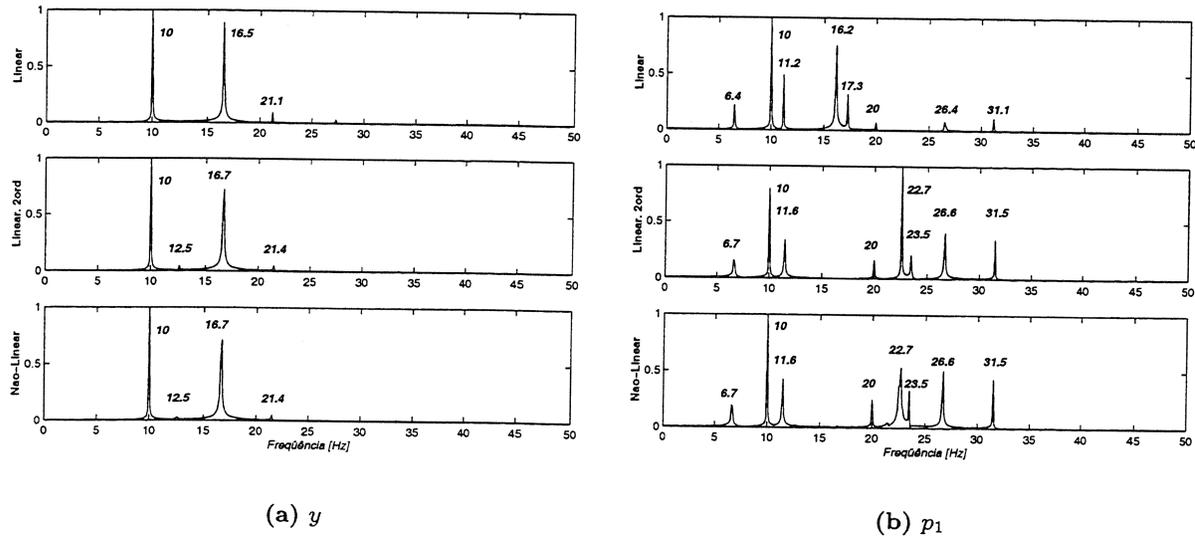


Figura 5.12: Respostas em frequência – diferentes modelos.  $\Omega = 5$  Hz

Hz. Em comparação com a tabela (5.3) verifica-se que estas frequências correspondem aos modos  $R_1$  e  $R_2$ , que no caso linear assumem os valores de 16.51 Hz e 21.27 Hz e no caso linearizado de segunda ordem, os valores de 16.63 Hz e 21.45 Hz;

- na figura (5.13(a)), o pico de 12.5 Hz, modelos não-lineares, corresponde às frequências paramétricas de ordem 1 associadas ao modo de palheta  $P_1$ . De acordo com a tabela (5.3), este autovalor é igual a 22.56 Hz, sendo que ao diminuir 10 Hz devido à velocidade de rotação obtém o valor aproximado do pico;
- na figura (5.13(b)), os picos de 16.2 Hz e 17.3 Hz, modelo linear, e 22.7 Hz e 23.5 Hz, modelos não-lineares, correspondem às frequências críticas associadas aos modos de palheta. A comparação com autovalores-básicos da tabela (5.3) mostram que estes valores correspondem aproximadamente aos autovalores associados aos modos  $P_1$  e  $P_4$ , que são 16.51 Hz e 17.26 Hz, no caso do modelo linear, e 22.56 Hz e 23.50 Hz, no caso do modelo linearizado de segunda ordem;
- na figura (5.13(b)), o pico de 20 Hz corresponde ao dobro da velocidade de rotação;
- na figura (5.13(b)), os picos de 6.4 Hz, 11.2 Hz, 26.4 Hz e 31.1 Hz, no caso do modelo linear e os picos de 6.7 Hz, 11.6 Hz, 26.6 Hz e 31.5 Hz, no caso dos modelos não-lineares, correspondem às frequências paramétricas de ordem 1 do modos  $R_1$  e  $R_2$  do rotor. De acordo com a tabela (5.3), no caso do modelo linear, estas autovalores assumem os valores de 16.51 Hz e 21.17 Hz. Somando-se e diminuindo 10Hz, devido à velocidade de rotação, obtém-se os valores de 6.51 Hz, 11.17 Hz, 26.51 Hz e 31.17, que correspondem aproximadamente aos picos observados. No casos dos modelos não-lineares, a tabela (5.3) indica os valores de 16.63 Hz e 21.45 Hz para

os modos  $R_1$  e  $R_2$ . Somando-se e diminuindo-se 10 Hz a estes valores obtém-se 6.63 Hz, 11.45 Hz, 26.63 Hz e 31.45 Hz, que correspondem aproximadamente aos picos observados.



**Figura 5.13:** Respostas em frequência – diferentes modelos.  $\Omega = 10$  Hz

Quando o rotor opera com velocidade constante de  $\dot{\phi} = 15$  Hz observa-se que

- nas figuras (5.14(a)) e (5.14(b)), os picos de 15 Hz referem-se a velocidade de rotação;
- na figura (5.14(a)), do modelo linear, o pico de 16.4 Hz refere-se à frequência crítica do rotor na direção  $y$ . Nota-se que o valor deste pico nos modelos linear e não-lineares apresenta uma pequena diferença, assumindo o valor de 16.6 Hz. Em comparação com a tabela (5.3) verifica-se que esta frequência corresponde ao modo  $R_1$  e  $R_2$ , que no caso linear assume o valor de 16.41 Hz e no caso linearizado de segunda ordem, o valor de 16.61 Hz;
- na figura (5.14(b)), os picos de 11.6 Hz e 13.1 Hz, modelo linear, e 26.4 Hz e 27.4 Hz, modelos não-lineares, correspondem às frequências críticas associadas aos modos de palheta. A comparação com autovalores-básicos da tabela (5.3) mostram que estes valores correspondem aproximadamente aos autovalores associados aos modos  $P_1$  e  $P_4$ , que são 11.66 Hz e 13.13 Hz, no caso do modelo linear, e 26.46 Hz e 27.48 Hz, no caso do modelo linearizado de segunda ordem;
- na figura (5.14(b)), o pico de 30 Hz corresponde ao dobro da velocidade de rotação;
- na figura (5.14(b)), os picos de 1.4 Hz, 6 Hz e 31.5 Hz, no caso do modelo linear e os picos de 1.6 Hz, 6.5 Hz, 31.8 Hz e 36.4 Hz, no caso dos modelos não-lineares, correspondem às frequências paramétricas de ordem 1 do modos  $R_1$  e  $R_2$  do rotor. De acordo com a tabela (5.3), no caso do modelo linear, estas autovalores assumem os valores de 16.41 Hz e 21.03 Hz.

Somando-se e diminuindo 15Hz, devido à velocidade de rotação, obtém-se os valores de 1.41 Hz, 6.03 Hz, 31.41 Hz e 36.03, que correspondem aproximadamente aos picos observados. No casos dos modelos não-lineares, a tabela (5.3) indica os valores de 16.61 Hz e 21.48 Hz para os modos  $R_1$  e  $R_2$ . Somando-se e diminuindo-se 15 Hz a estes valores obtém-se 1.61 Hz, 6.48 Hz, 31.61 Hz e 36.48 Hz, que correspondem aproximadamente aos picos observados.

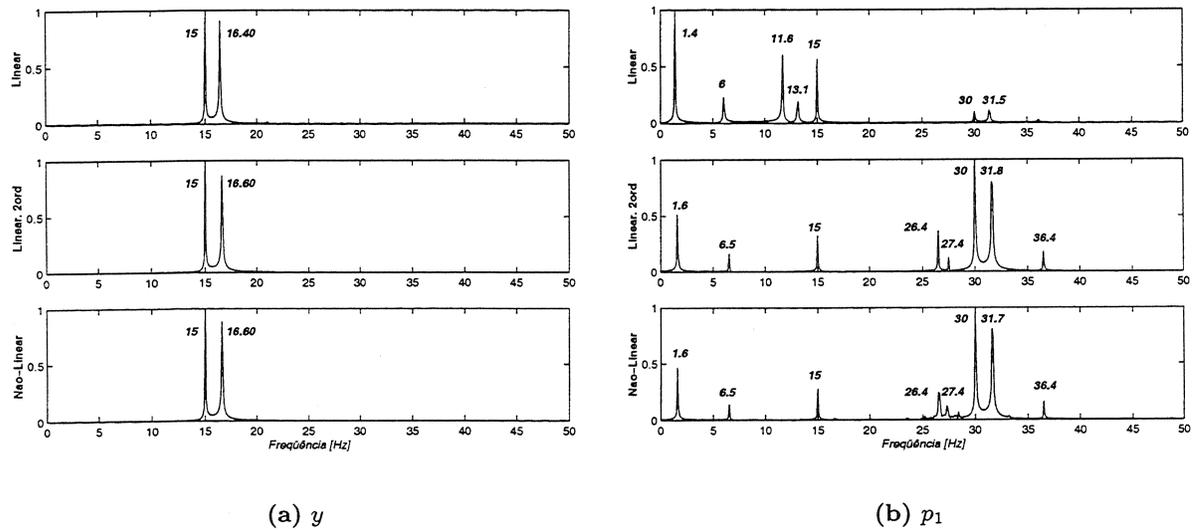


Figura 5.14: Respostas em frequência – diferentes modelos.  $\Omega = 15$  Hz

### 5.1.6 Análise modal variante no tempo – autovalores-básicos

A análise dos diagramas de cascata permite uma boa visualização das mudanças na dinâmica do sistema com o aumento da velocidade de rotação. A partir dos diagramas apresentados torna-se evidente que o modelo linear despreza o efeito de enrijecimento centrífugo e, por outro lado, nota-se que os modelos linearizado de segunda ordem e não-linear não apresentam grandes diferenças entre si. A solução obtida por estes modelos apresenta diferenças quando o rotor opera com velocidades de rotação mais elevadas ou acelerando. O efeito da velocidade de rotação constante pode ser estudada também verificando a variação dos autovalores-básicos do sistema em função da velocidade de rotação, conforme apresentado na figura (5.15). Esta variação é claramente quadrática. A análise modal variante no tempo é restrita a sistemas lineares, assim apenas as soluções obtidas pelos modelos linear e linearizado de segunda ordem estão representadas. Nota-se nesta figura também que abaixo de 3 Hz, o comportamento dos autovalores extraídos não está bem elucidado, sendo que o método de identificação e escolha de autovalores-básicos falha para velocidades baixas neste exemplo. A forma modal dos autovetores apresentados está descrita na figura (5.2).

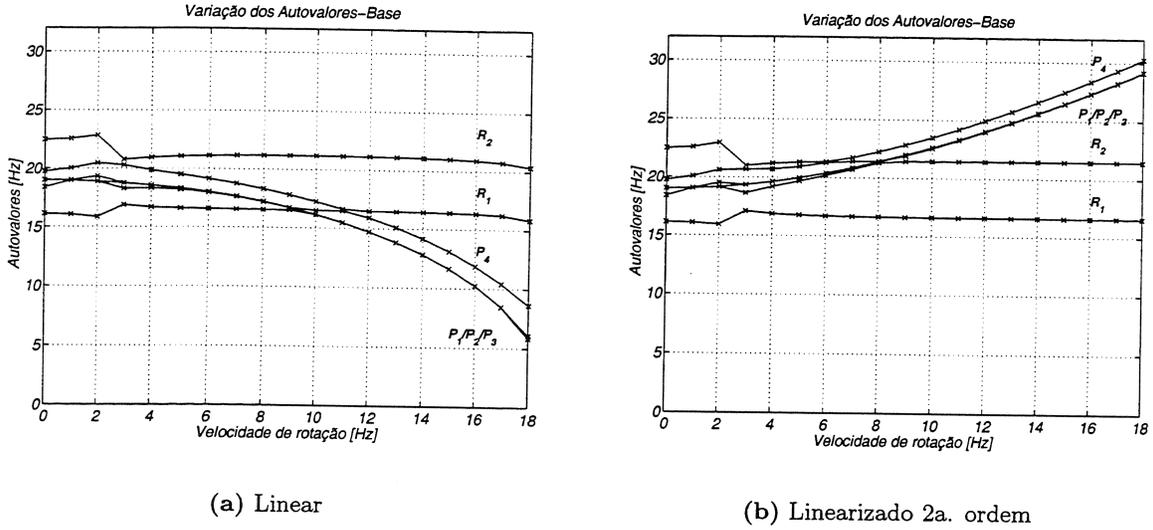


Figura 5.15: Variação dos autovalores-básicos. Modelos linear e linearizado de segunda ordem

### 5.1.7 Solução transiente por superposição modal

Inicialmente será considerada a solução transiente da equação de movimento variante no tempo (5.1.2), em sua forma homogênea, ou seja, tomando  $\mathbf{p} = 0$ . Esta solução pode obtida tanto pela integração numérica, quanto pela equação de Hill, utilizando um processo semelhante à superposição modal para sistemas invariantes. Entretanto, no caso periodicamente variante no tempo, devem ser considerados os termos da série de Fourier dos autovetores variantes no tempo:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^{2N} \mathbf{r}_n(t) e^{i\omega_{n,0}t} = \sum_{k=-n_o}^{n_o} \sum_{n=1}^{2N} \mathbf{r}_{n,k} e^{(\omega_{n,0} + ik\Omega)t} \quad (5.10)$$

A solução das equação de movimento variante no tempo, para um sistema submetido a uma excitação harmônica foi apresentada no capítulo (4), sendo dada pela equação (4.168). No caso do conjunto rotor-palhetas o vetor de excitação externa na forma de estado, de acordo com a equação (5.1.2), é dada por

$$\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f} \end{Bmatrix} \quad (5.11)$$

Embora o vetor  $\mathbf{f}(t)$  seja harmônico em  $f_o$ , o vetor  $\mathbf{p}(t)$  apresenta mais freqüências devido ao inverso da matriz  $\mathbf{M}(t)$ , que é periódica também. Sendo assim, a solução apresentada na equação (5.1.2) não seria mais válida. Uma maneira de contornar este problema, é considerar a transformada de Fourier da matriz  $\mathbf{M}(t)^{-1}$ . Neste caso a expansão em série de Fourier desta matriz é dada por

$$\mathbf{M}(t)^{-1} = \mathbf{W}(t) = \sum_{w=-K}^K \mathbf{W}_k e^{i\Omega_0 w t} \quad (5.12)$$

E a resposta no tempo para um excitação harmônica  $\mathbf{f}(t)$  a partir da equação (4.168), incluindo a expansão da série da inversa da matriz de massa, então é dada por (Xu e Gasch, 1995)

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) = & \sum_{r=-K}^K \sum_{l=-K}^K \sum_{w=-K}^K \mathbf{R}_r \left[ \frac{1}{i2\pi(f_0 + lf_0 + wf_0) - \Lambda} \right] \mathbf{L}_l^T \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{W}_w \end{bmatrix} \mathbf{f}^+ e^{i2\pi t f_0(l+r+w+1)} \\ & + \sum_{r=-K}^K \sum_{l=-K}^K \sum_{w=-K}^K \mathbf{R}_r \left[ \frac{1}{i2\pi(-f_0 + lf_0 + wf_0) - \Lambda} \right] \mathbf{L}_l^T \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{W}_w \end{bmatrix} \mathbf{f}^- e^{i2\pi t f_0(l+w+r-1)} \\ & + \sum_{r=-K}^K \sum_{l=-K}^K \sum_{w=-K}^K \mathbf{R}_r \left[ \frac{1}{i2\pi(lf_0 + wf_0) - \Lambda} \right] \mathbf{L}_l^T \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{W}_w \end{bmatrix} \mathbf{f}^o e^{i2\pi t f_0(l+w+r)} \end{aligned} \quad (5.13)$$

onde,  $\mathbf{f}^+ = \frac{1}{2}(\mathbf{f}^c - i\mathbf{f}^s)$  e  $\mathbf{f}^- = \frac{1}{2}(\mathbf{f}^c + i\mathbf{f}^s)$ , sendo  $\mathbf{f}^c$  é o vetor de termos dependentes de  $\cos f_0 t$ ,  $\mathbf{f}^s$  é o vetor de termos dependentes de  $\sin f_0 t$  e  $\mathbf{f}^o$  é o vetor de termos constantes. Deve-se notar que a resposta principal da resposta não é idêntica à frequência de excitação  $f_0$ , mas apresenta diversas frequências de resposta  $f_0 + (r + l + w)f_0$ . Isto explica o aparecimento de picos super-harmônicos nos diagramas de cascata.

A resposta do sistema completo, incluindo as forças de excitação harmônica e a força peso é obtida utilizando a equação (5.1.2) em sua forma completa. A resposta no domínio do tempo do conjunto rotor-palhetas sujeito a condições iniciais não nulas foi obtida para diferentes valores de ordem de expansão com objetivo de verificar a convergência da solução. A figura (5.16) apresenta os gráficos com os resultados obtidos para o velocidade de rotação do rotor  $f_o = 10$  Hz. Nestas curvas verifica-se uma grande diferença nos valores do deslocamentos obtidos com ordem de expansão  $n_o = 0$ , que considera apenas os termos constantes da série de Fourier, para o deslocamento estimado com valores de ordem de expansão mais alta, que inclui a influência da variação do parâmetro  $\phi$  na resposta. O modelo matemático empregado é o linearizado de segunda ordem.

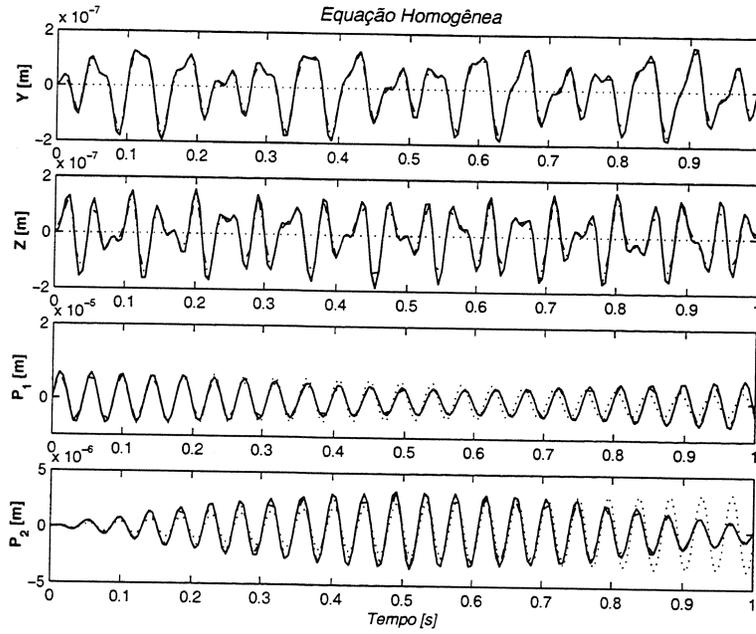
### 5.1.8 Diagrama de cascata teórico

O conceito de função de resposta em frequência para sistemas lineares periodicamente variantes no tempo não está definido (Irretier, 1999). A relação, no domínio da frequência, entre os sinais de entrada e saída, para este tipo de problema não é constante, pois depende do tipo e da frequência de excitação. A relação entre entrada e saída neste caso é dada por

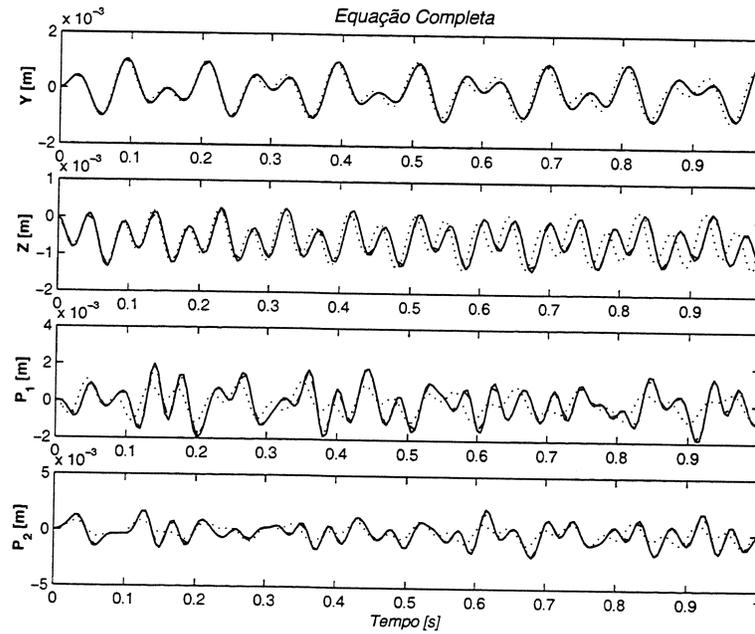
$$U(f) = \sum_{l=-K}^K \sum_{r=-K}^K \mathbf{R}_r \left[ \frac{1}{i2\pi(f - f_0) - \Lambda} \right] \mathbf{L}_l^T P(f - rf_0 - lf_0) \quad (5.14)$$

Entretanto no caso de uma excitação do tipo impulso, modelada por um delta de Dirac, a transformada de Fourier do sinal de entrada é  $P(f) = 1$ , sendo possível definir uma função de resposta em frequência do sistema excitado por um impulso, dada por

$$H(f) = \sum_{l=-K}^K \sum_{r=-K}^K \mathbf{R}_r \left[ \frac{1}{i2\pi(f - f_0) - \Lambda} \right] \mathbf{L}_l^T \quad (5.15)$$



(a) Solução homogênea

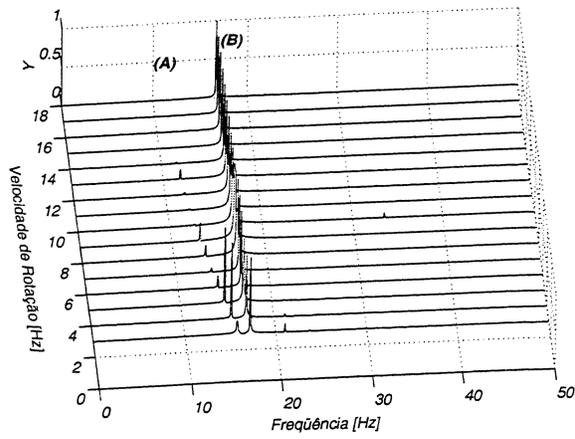


(b) Solução completa

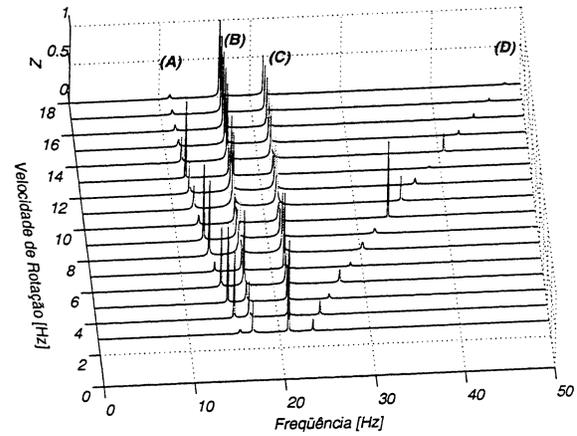
**Figura 5.16:** Deslocamento no domínio do tempo – solução modal com diversas ordens de expansão  $n_o$ : (a)  $n_o = 0$  (':'); (b)  $n_o = 1$  ('-'); (c)  $n_o = 2$  ('-').  $\Omega = 10$  Hz

A partir destas funções de resposta em frequência, são construídos diagramas de cascata teóricos, em oposição aos outros diagramas que foram construídos a partir da resposta no tempo, transformada para o domínio da frequência. A figura (5.17) apresenta a variação das funções de resposta em frequência, com a velocidade angular para uma excitação no centro do rotor, na direção  $y$ . O modelo utilizado é o linearizado de segunda ordem e para velocidades de rotação menores que  $\Omega = 3$  Hz, as curvas não estão desenhadas, uma vez que a rotina de identificação de autovalores-básicos falha nesta faixa de rotação para este exemplo. A resposta no centro do rotor  $y$ , figura (5.17(a)), apresenta comportamento com predominância dos picos associados a frequência-básica do rotor  $R_1$ , em torno de 16 Hz indicados pela letra (B), sendo que se observa também o aparecimento da vibração paramétrica da palheta  $P_1$ , indicados pela letra (A). No caso da resposta do centro do rotor na direção  $z$ , figura (5.17(b)), o comportamento é semelhante, com o aparecimento dos picos de vibração paramétrica de  $P_1$ , (A), e frequências-básicas do rotor  $R_1$ , (B), e também o aparecimento das frequência-básica do rotor na direção  $z$ ,  $R_2$ , em torno de 21 Hz, indicado pela letra (C), e da vibração paramétrica de  $P_4$ , representada pelos picos ao longo de (D). Entretanto, a resposta das palhetas, figuras (5.17(c)) e (5.17(d)) é ligeiramente diferente, sendo que os picos referem-se as frequências-básicas das palhetas, representados pelos picos identificados por (E), além das vibrações paramétrica do modos do rotor  $R_1$  e  $R_2$ , indicados pela letra (F) e (G).

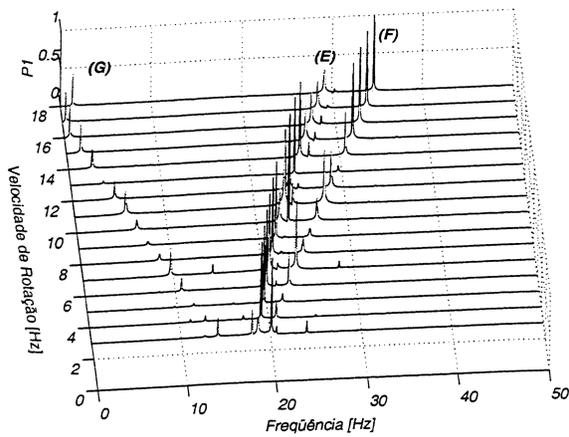
O diagrama em cascata apresentado na figura (5.18), é obtido supondo uma excitação na palheta  $p_1$ . No caso do deslocamento do centro do rotor, direções  $y$  e  $z$  apresentados nas figuras (5.17(b)) e (5.18(b)), observam-se os picos relativos às frequências-básicas do rotor, (B) e (C) e as vibrações paramétricas de ordem das palhetas, (A) e (D), semelhante ao observado no diagrama de cascata anterior com excitação no centro do rotor. Entretanto, no caso dos deslocamentos da palheta, as frequências predominantes são as duas frequências-básicas das palhetas  $P_1$  e  $P_4$ , que apresentam valores bastante próximos, picos indicados por (E) , de forma mais acentuada que os resultados obtidos para o deslocamento da palheta com a excitação no centro do rotor.



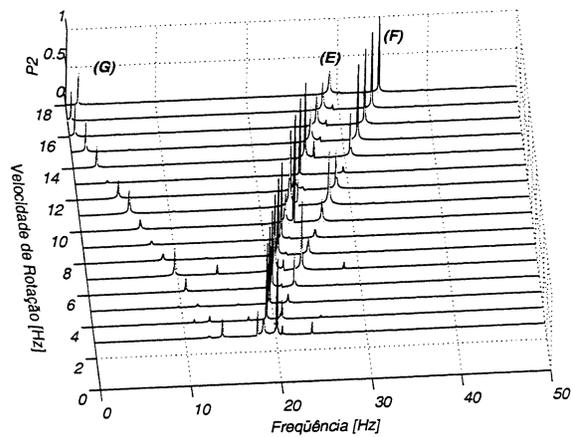
(a)  $y$



(b)  $z$

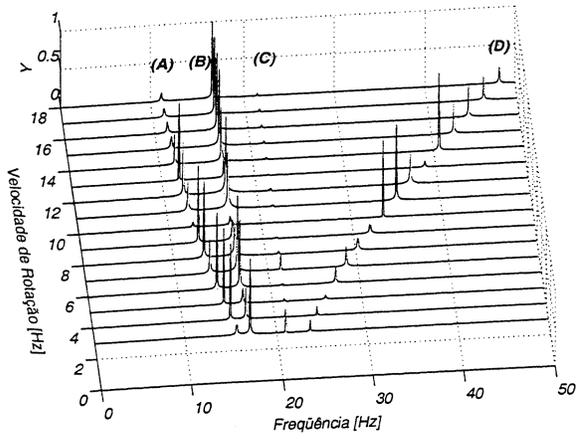


(c)  $p_1$

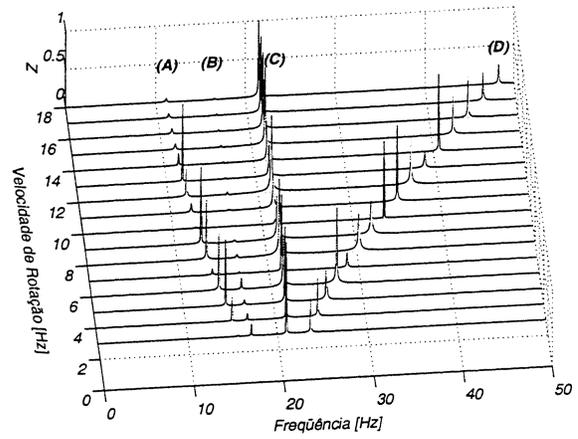


(d)  $p_2$

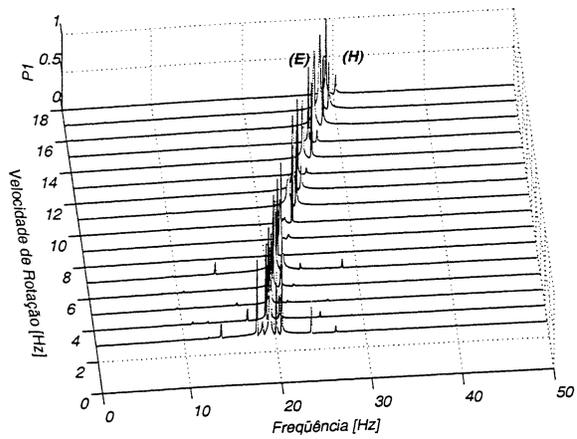
Figura 5.17: Diagramas de cascata teórico - variação das respostas em frequência. Excitação no centro do rotor  $y$ .



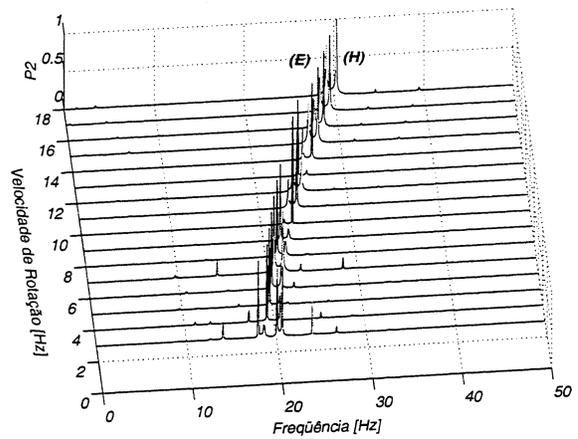
(a)  $y$



(b)  $z$



(c)  $p_1$



(d)  $p_2$

Figura 5.18: Diagramas de cascata teórico- variação das respostas em frequência. Excitação na palheta 1.

## 5.2 Modelo matemático 2 - rotor com inclusão do efeito giroscópico

Neste segundo estudo teórico será considerado o modelo de um rotor que está fixo em uma das extremidades e apoiado sobre suportes elásticos na outra de tal forma que apenas movimentos angulares do rotor são permitidos. Por outro lado, as palhetas são modeladas da mesma forma que no caso anterior, como vigas com uma massa concentrada na ponta. O modelo mecânico utilizado para este sistema está ilustrado na figura (3.7), cujos parâmetros estão apresentados na tabela (5.4).

**Tabela 5.4:** Parâmetros – rotor tridimensional com movimento restrito a deslocamentos angulares (T2)

Rotor e apoios			Vigas flexíveis ( $i = 1, 2, 3, 4$ )			Massa ( $i = 1, 2, 3, 4$ )		
$m_r$	1.7848	kg	$\theta_i$	$(i-1)\pi/2$	rad	$mt_i$	0.0482	kg
$k_y$	$2.1628e^{-4}$	N/m	$m_i$	0	kg	$Lt_i$	0.030	m
$k_z$	$2.1628e^{-4}$	N/m	$r_i$	0.040	m	$bt_i$	0.015	m
$I_p$	$6.7208e^{-4}$	kg m <sup>2</sup>	$L_i$	0.040	m	$ht_i$	0.0005	m
$I_t$	$7.5e^{-4}$	kg m <sup>2</sup>	$b_i$	0.015	m	$rt_i$	0.015	m
$d_a$	0.0984	m	$h_i$	0.0005	m	$Ix_i$	$mt_i \frac{Lt_i^2 + ht_i^2}{12}$	$4.0167e^{-6}$ kg m <sup>2</sup>
$d_b$	0.0984	m	$E_i$	$2.1e^{11}$	N/m <sup>2</sup>	$Iy_i$	$mt_i \frac{bt_i^2 + ht_i^2}{12}$	$2.0083e^{-6}$ kg m <sup>2</sup>
$\varepsilon$	0	m;	$A_i$	$b_i \cdot h_i$	$7.5e^{-6}$ m <sup>2</sup>	$Iz_i$	$mt_i \frac{Lt_i^2 + bt_i^2}{12}$	$5.2217e^{-6}$ kg m <sup>2</sup>
$\psi$	0	rad;	$I_i$	$\frac{b_i h_i^3}{12}$	$1.5625e^{-13}$ m <sup>4</sup>			
			$k_i$	$\frac{3EI_i}{L_i^3}$	309.2 N/m			

### 5.2.1 Análise modal do sistema não-girante

As equações de movimento deste modelo foram apresentadas no capítulo (3), equação (3.69), sendo que para obtenção das frequências e modos de vibração não-girante, adota-se  $\dot{\phi} = \phi = 0$ . As formas modais deste sistema de rotor e palheta são mostradas na figura (5.19), juntamente com a frequências críticas correspondentes. Nota-se que para os seis graus de liberdade do conjunto, existem três frequências distintas, uma vez que o sistema é simétrico. As frequências coincidentes  $\omega_3 = \omega_4 = 27.75$  Hz correspondem às frequências de vibração das palhetas apenas, ou seja, são as mesmas da palheta desacoplada do conjunto. Por outro lado, as outras formas modais correspondem à vibração acoplada do rotor e palhetas. As frequências naturais  $\omega_1 = \omega_2 = 25.56$  Hz, cujas formas modais estão apresentadas nas figuras (5.19(a)) e (5.19(b)), representam vibração acoplada do rotor e palhetas nas duas direções ortogonais. O mesmo ocorre com as frequências naturais  $\omega_5 = \omega_6 = 30.83$  Hz, cujas formas modais estão apresentadas nas figuras (5.19(e)) e (5.19(f)). A tabela (5.5) apresenta os resultados dos autovetores dos seis modos do sistema não-girante. No caso do sub-sistema formado apenas pelo rotor com movimentos angulares, sua frequência natural é dada por 29.28 Hz, enquanto que a frequência das palhetas é dada por 27.75 Hz.

**Tabela 5.5:** Sistema não-girante – formas modais teóricas do modelo T2

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6
Teo. (Hz)	25.56	25.56	27.74	27.74	30.82	30.82
$\Gamma$	-0.7882	0.0226	0.0000	-0.0000	0.0143	0.8068
$\beta$	0.0000	-0.7878	0.0000	0.0000	-0.8067	0.0000
$z_1$	0.0000	0.4350	0.0000	0.7071	-0.4177	0.0000
$z_2$	0.4352	-0.0125	-0.7071	0.0015	0.0074	0.4178
$z_3$	0.0000	-0.4350	-0.0000	0.7071	0.4177	0.0000
$z_4$	-0.4352	0.0125	-0.7071	0.0015	-0.0074	-0.4178

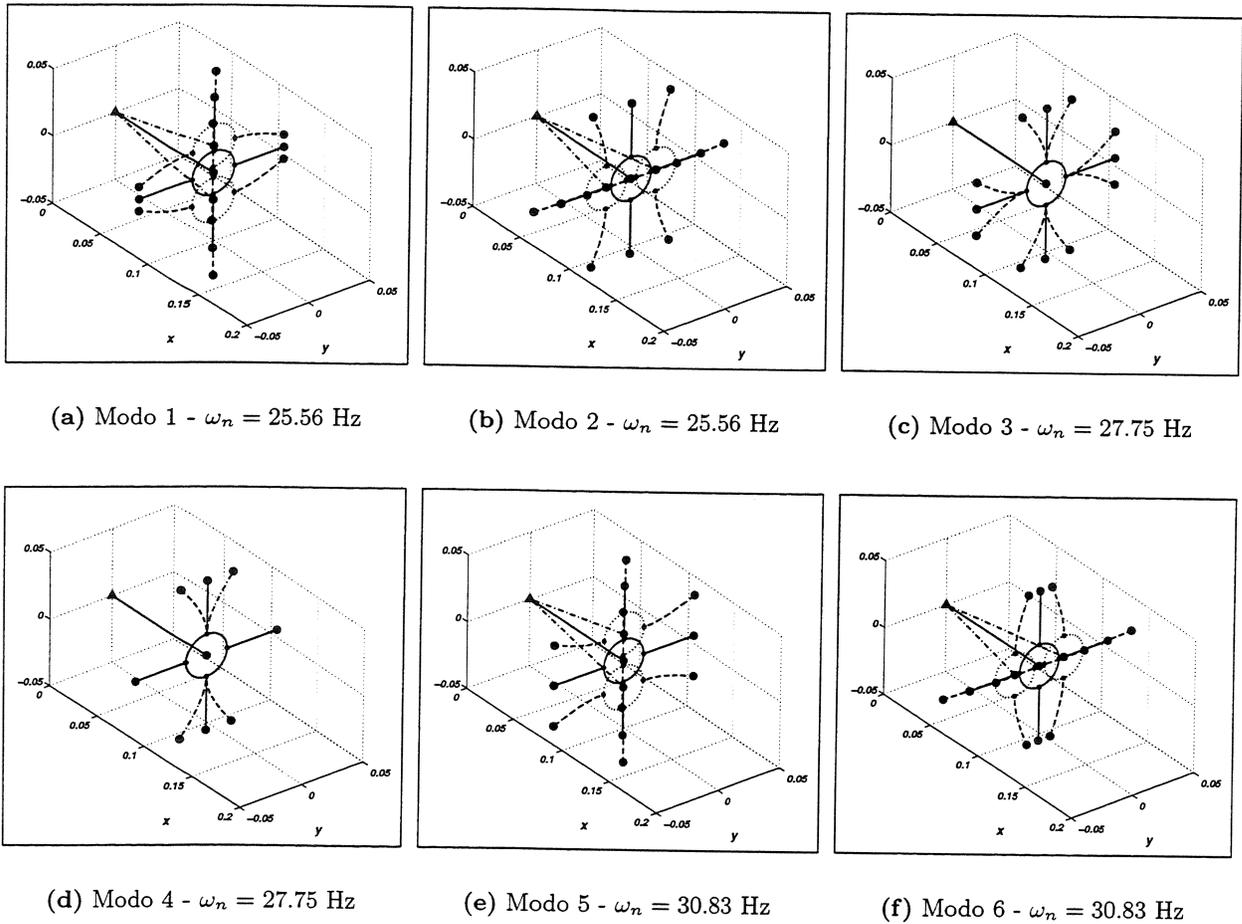
### 5.2.2 Análise modal do sistema girante

As figuras (5.20) e (5.21) apresentam, respectivamente, os modos-básicos (autovalores-básicos) e paramétricos de ordem 1, do conjunto rotor e palhetas, quando este opera com velocidade de 20 Hz. Nota-se que os modos de palheta e rotor são desacoplados e que para um modo-básico de palheta, seu modo paramétrico é um modo de rotor e vice-versa. Para obtenção destes modos, a equação de movimento (3.69), linearizada de segunda ordem é utilizada, seguindo a metodologia de análise modal de sistemas variantes no tempo.

### 5.2.3 Variação dos autovalores-básicos

A análise das formas modais do conjunto não-girante mostrou que existe um grande acoplamento entre as vibrações do rotor e palheta, quando comparado ao modelo mecânico do rotor plano com quatro palhetas flexíveis. Além disso, as equações de movimento dos modelos T1 e T2 apresentam algumas diferenças notáveis. Inicialmente, nota-se o aparecimento da matriz giroscópica  $\mathbf{G}$ , anti-simétrica, no modelo T2. Verifica-se também que os coeficientes das matrizes dependentes do ângulo de rotação  $\phi$  não aparecem apenas nas posições de acoplamento, como acontecia no modelo T1, mas também nos coeficientes da diagonal principal. A partir destas observações, é esperado que a influência da variação paramétrica neste segundo modelo seja mais pronunciada, juntamente com o efeito giroscópico e o enrijecimento centrífugo.

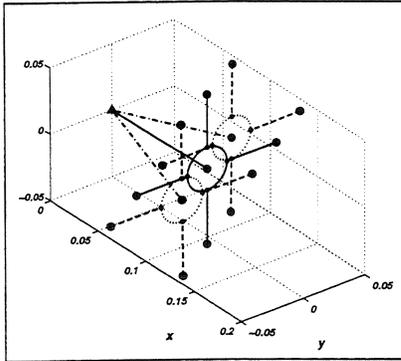
Com objetivo de elucidar a participação dos diferentes fenômenos componentes – efeito giroscópico, matriz de coriolis, rigidez rotacional, enrijecimento centrífugo e vibração paramétrica – do movimento deste sistema, a análise dos autovalores será apresentada considerando a participação das matrizes separadamente. Ressalta-se que esta análise é original, sendo que a metodologia de análise modal de variante no tempo permite a determinação dos autovalores-básicos deste sistema. De outra forma, a análise detalhada do comportamento dinâmico poderia ser feita apenas com a integração numérica das equações de movimento. Assim, as figuras (5.22) e (5.23) apresentam a variação das frequências-básicas do conjunto, considerando apenas algumas matrizes da equação (3.69), em



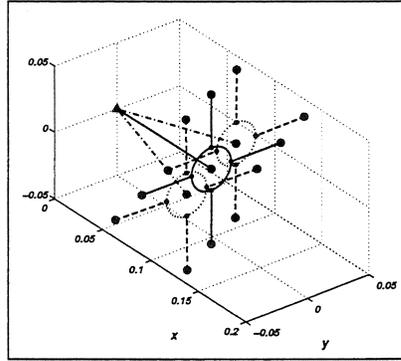
**Figura 5.19:** Frequências e modos de vibração do conjunto rotor-palhetas – modelo matemático usando rotor com movimentos angulares (T2) –  $\dot{\phi} = 0$

função da velocidade de rotação.

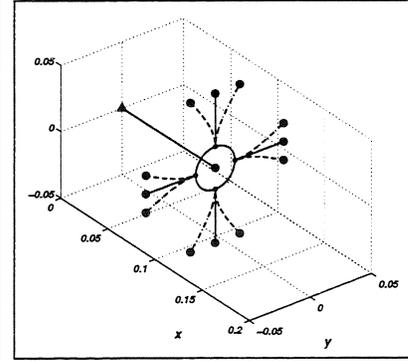
A figura (5.22) procura ressaltar o efeito das matrizes de Coriolis,  $\mathbf{C}$  e giroscópica  $\mathbf{G}$  nas frequências-básicas do conjunto. As matrizes de rigidez rotacional e rigidez geométrica são, portanto inicialmente desprezadas. A figura (5.22(a)) apresenta a variação dos autovalores-básicos se fossem consideradas apenas as matrizes de massa e rigidez, sem a inclusão nem do efeito de enrijecimento centrífugo, nem do efeito giroscópico e de coriolis. Observa-se unicamente o efeito da variação paramétrica dos coeficientes das matrizes de massa,  $\mathbf{M}$ , e rigidez,  $\mathbf{K}$ . Ressalta-se que a matriz de massa  $\mathbf{M}$  é dependente de  $\phi$ , enquanto que a matriz  $\mathbf{K}$  representa somente a matriz de rigidez estrutural, que é independente de  $\phi$  e  $\dot{\phi}$ . Nota-se, nestas curvas, que as frequências associadas ao modo de vibração da palheta, indicadas pela letra (C), não são afetadas pela velocidade de rotação. Além disso, observa-se que as duas frequências associadas a modos de vibração acopladas de rotor e palhetas se bifurcam em duas frequências distintas, ainda que próximas, que tendem a patamares constantes com o aumento da velocidade de rotação. A frequência de vibração mais alta se abre



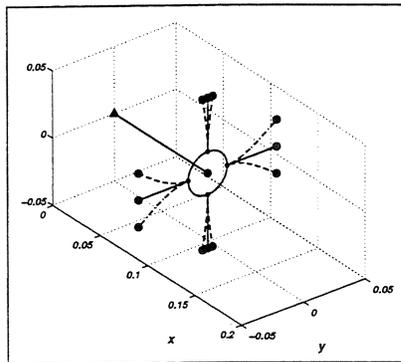
(a) Modo  $R_1 - \lambda_{1,0} = 27.65$  Hz



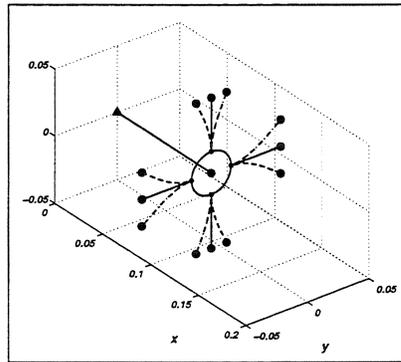
(b) Modo  $R_2 - \lambda_{2,0} = 28.34$  Hz



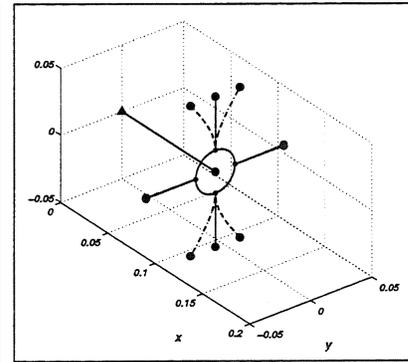
(c) Modo  $P_1 - \lambda_{3,0} = 38.74$  Hz



(d) Modo  $P_2 - \lambda_{4,0} = 38.85$  Hz

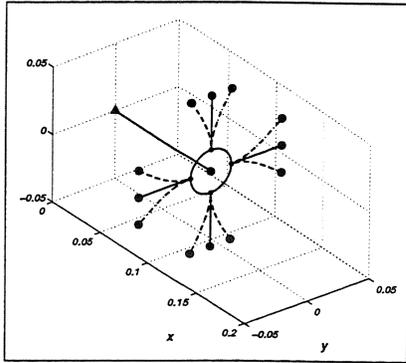


(e) Modo  $P_3 - \lambda_{5,0} = 38.85$  Hz

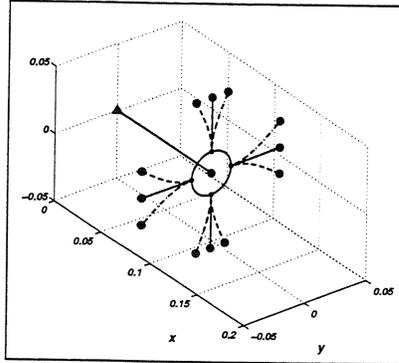


(f) Modo  $P_4 - \lambda_{6,0} = 40.93$  Hz

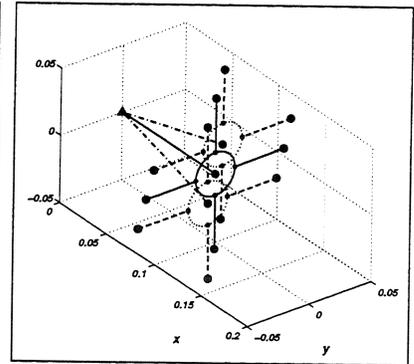
Figura 5.20: Frequências e modos de vibração do conjunto rotor-palhetas – modelo matemático usando rotor com movimentos angulares (T2) –  $\dot{\phi} = 20$  Hz



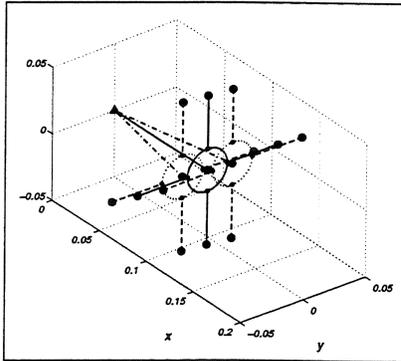
(a) Modo  $R_1 - \lambda_{1,1} = \lambda_{1,0} + \Omega$



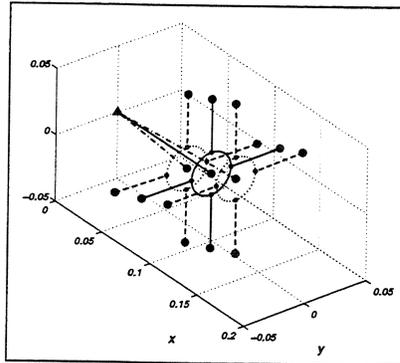
(b) Modo  $R_2 - \lambda_{2,1} = \lambda_{2,0} + \Omega$



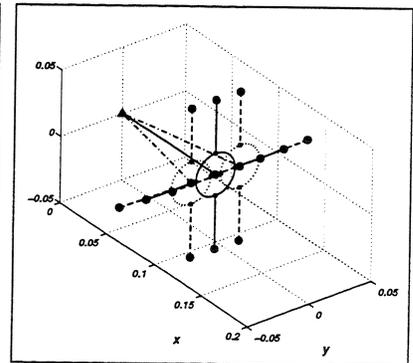
(c) Modo  $P_1 - \lambda_{3,1} = \lambda_{3,0} + \Omega$



(d) Modo  $P_2 - \lambda_{4,1} = \lambda_{4,0} + \Omega$



(e) Modo  $P_3 - \lambda_{5,1} = \lambda_{5,0} + \Omega$



(f) Modo  $P_4 - \lambda_{6,1} = \lambda_{6,0} + \Omega$

Figura 5.21: Freqüências e modos de vibração do conjunto rotor-palhetas – modelo matemático usando rotor com movimentos angulares (T2) –  $\dot{\phi} = 20$  Hz

em outras duas, indicadas pelas letras (A) e (B), ambas tendendo a diminuir com o aumento da velocidade de rotação e estabilizando após a 30 Hz aproximadamente. A frequência mais alta, (A), é um modo de vibração do rotor e a segunda, (B), é um modo de vibração de palheta. Ou seja, a velocidade de rotação desacopla os modos de rotor e palheta. Comportamento semelhante é observado para as frequências mais baixas, (D) e (E), sendo que, neste caso, estas aumentam com a velocidade de rotação, também se abrindo em outros dois modos, de rotor, mais alta frequência indicada pela letra (D), e palheta, (E), esta última tendendo para a frequência da palheta que não foi alterada pela velocidade de rotação. Estas duas últimas frequências, (D) e (E) tendem a diminuir após 40 Hz. Ressalta-se que a variação das frequências-básicas ocorre apenas em função da variação periódica da matriz de massa  $\mathbf{M}$ .

A inclusão da matriz  $\mathbf{G}$  na equação de movimento introduz algumas mudanças na variação das frequências-básicas, como pode ser observado na figura (5.22(b)). A matriz giroscópica  $\mathbf{G}$  é anti-simétrica e depende apenas da velocidade de rotação  $\dot{\phi}$ . Ou seja, para cada velocidade de rotação, esta matriz é constante. Novamente observa-se que as frequências associadas ao modo de vibração da palheta, indicadas por (C) não são alteradas pela velocidade de rotação e que as frequências associadas a modos de vibração acopladas de rotor e palhetas se bifurcam. Com o aumento da velocidade de rotação, a frequência mais alta se abre em duas, (A) e (B), que tendem a diminuir. A frequência-básica indicada por (A) tende a se estabilizar. Por outro lado, a frequência-básica indicada por (B) tende a diminuir com o aumento da velocidade. Da mesma forma, a frequência mais baixa se abre em duas com o aumento da velocidade de rotação, (D) e (E). Ambas sofrem aumento, sendo que a mais baixa, (E), por volta de 30 a 40 Hz tende para a frequência dupla inalterada (C) e depois sofre um decaimento. A frequência indicada por (D), após aumentar, sofre um mudança de comportamento e passa a decair. Comparando os resultados das figuras (5.22(a)) e (5.22(b)), nota-se que as frequências indicadas por (A) e (E), além de (C), não sofrem alteração com a introdução da matriz  $\mathbf{G}$ . A frequência indicada por (D) sofre um grande aumento, mas tende a decair por volta de 45 Hz, como na figura anterior. Por outro lado a frequência indicada por (B) apresenta grande mudança em relação ao caso anterior. diminuindo ao longo da faixa de frequências observadas.

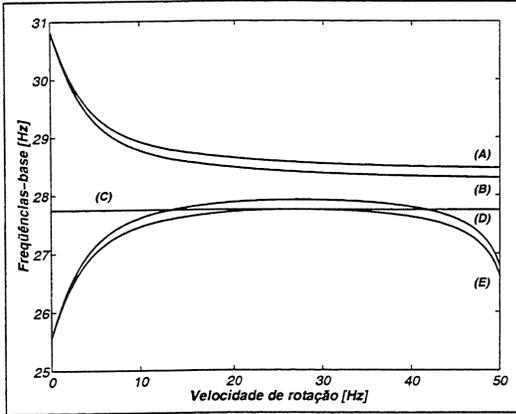
A inclusão da matriz  $\mathbf{C}$ , matriz de Coriolis, e sua influência nos autovalores-básicos é apresentada na figura (5.22(c)). Novamente as frequências indicadas por (C), frequências associadas a modos de vibração das palhetas, não são afetadas pela velocidade de rotação e as frequências associadas a modos acoplados de rotor e palhetas se abrem em duas novas frequências. Nota-se que a frequência mais alta se abre em outras duas (A) e (B). A primeira, indicada por (A), tende a diminuir até 10 Hz aproximadamente e depois sofre um aumento linear e a segunda, indicada por (B) diminui e tende para a frequência da palheta (C) por volta de 50 Hz. A frequência mais baixa também se abre em outras duas, as quais tendem a aumentar, embora com comportamentos diferentes. A frequência indicada por (D) inicialmente tem um crescimento com taxa mais alta até 15 Hz aproximadamente, tende para a frequência (C) entre 15 Hz e 30 Hz e depois retoma a tendência de crescimento. A frequência indicada por (E) apresenta crescimento com taxa menor,

mas na faixa entre 15 e 30 Hz, aproximadamente, ela tem um crescimento linear, sendo que após esta faixa mantém a tendência de crescimento. Comparando as figuras (5.22(a)) e (5.22(c)) nota-se um grande diferença, visto que o decaimento das freqüências é eliminado pelo efeito de Coriolis. A única freqüência que apresenta um comportamento aproximado, além de (C), é a (B), que apresenta decaimento e estabilização, embora em outro patamar.

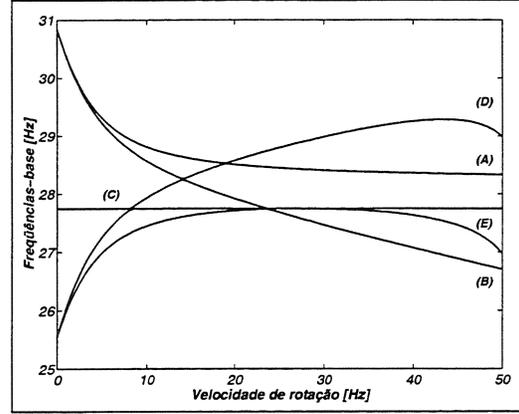
Na figura (5.22(d)) o efeito das matrizes  $\mathbf{G}$ , giroscópica, e  $\mathbf{C}$ , coriolis, são consideradas conjuntamente. Novamente, verifica-se que as freqüências indicadas por (C) não sofrem alteração com a velocidade de rotação e que as freqüências que indicavam modos acoplados de rotor e palhetas tendem a se abrir em duas novas freqüências. Neste caso, a freqüência mais alta se abre em uma que tende a aumentar, (A), e outra a decair (B), ambas sem patamar de estabilização. Por outro lado, a freqüência mais baixa se abre em duas, (D) e (E), que tendem a aumentar, cada uma com diferentes taxas de crescimento na faixa de freqüências observadas. Comparando as figuras (5.22(b)), (5.22(c)) e (5.22(d)) nota-se que as freqüências indicadas por (A), (D) e (E) no gráfico da figura (5.22(d)) seguem comportamento semelhante ao da figura (5.22(c)), que considera apenas o efeito de Coriolis, e a freqüência indicada por (B) segue comportamento semelhante ao da figura (5.22(b)), que considera apenas o efeito giroscópico. Entretanto, tanto para (B) quanto para (E) as taxas de decrescimento e crescimento, respectivamente, são mais altas.

A figura (5.23) apresenta a variação dos autovalores-básicos, incluindo também as matrizes de rigidez rotacional,  $\mathbf{K}_\Omega$  e rigidez geométrica,  $\mathbf{K}_g$ . Estas duas matrizes são dependentes da velocidade de rotação  $\dot{\phi}$ , sendo que a matriz de rigidez rotacional também é periodicamente variante no tempo. A figura (5.23(b)) apresenta a variação dos autovalores-básicos quando são consideradas apenas as matrizes de massa, rigidez e rigidez rotacional. O modelo matemático resultante é o chamado modelo linear, sendo que termos de deformação de segunda ordem da viga são desprezados, ou seja, o efeito de enrijecimento centrífugo é desprezado. Observa-se, neste caso, que as freqüências de palheta, indicadas nesta figura por  $P_1/P_2/P_3$  e  $P_4$ , são bastante influenciadas pela velocidade de rotação, seguindo uma curva quadrática que tende a diminuir com o aumento da mesma. As freqüências associadas aos modos de rotor  $R_1$  e  $R_2$  são pouco influenciadas pela velocidade de rotação. De maneira semelhante aos resultados observados nos gráficos da figura (5.22), as freqüências associados a modos acoplados de rotor e palhetas tendem a se bifurcar. A principal observação, contudo, refere-se ao ponto de descontinuidade do gráfico da figura (5.23(b)). A freqüência da palheta é 27.75Hz, sendo que, a esta velocidade de rotação, a rigidez aparente da palheta é nula e acima desta velocidade o movimento é instável.

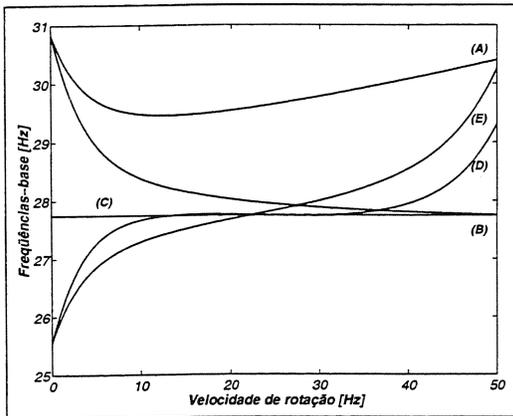
Na figura (5.23(c)), a rigidez geométrica, e portanto o enrijecimento centrífugo, é incluída. Observa-se que as freqüências das palhetas,  $P_1$ ,  $P_2/P_3$  e  $P_4$ , neste caso, apresentam um comportamento inverso, que é o aumento das freqüências naturais (básicas), seguindo uma curva quadrática. Novamente, as freqüências associadas aos modos de rotor  $R_1$  e  $R_2$  são pouco influenciadas pela velocidade de rotação e os modos originalmente (para velocidade de rotação nula) acoplados de rotor e palhetas sofrem uma abertura. Os resultados encontrados mostram que as freqüências associadas a modos de palheta são fortemente influenciados pelo efeito de enrijecimento centrífugo, sendo que



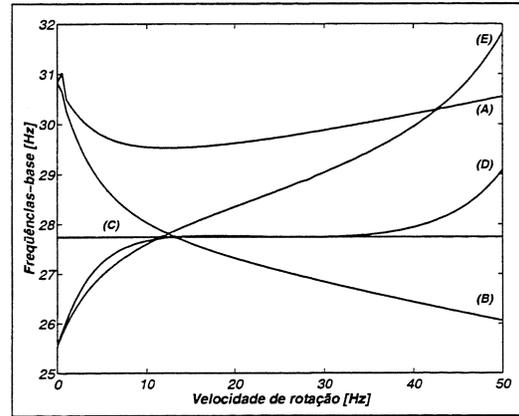
(a) M e K



(b) M, K e G



(c) M, K e C



(d) M, K, G e C

**Figura 5.22:** Variação dos autovalores em função da velocidade de rotação – comparação do comportamento observado com diferentes matrizes da equação de movimento incluídas ou excluídas.

este não influencia os modos associados ao rotor.

A figura (5.23(d)) inclui tanto o efeito de enrijecimento centrífugo quanto o efeito da matriz giroscópica  $\mathbf{G}$  no sistema. Nota-se nesta figura um comportamento muito semelhante ao caso anterior. Contudo, verifica-se que os dois modos associados ao movimento do rotor  $R_1$  e  $R_2$  tendem a se encontrar. por volta de 30 Hz, sendo que depois estas duas frequências se abrem, trocando sua ordem original. A figura (5.23(e)) inclui tanto o efeito de enrijecimento centrífugo quanto o efeito da matriz de coriolis  $\mathbf{C}$  no sistema. Nota-se neste caso também um comportamento semelhante ao apresentado na figura (5.23(c)), mas neste caso as duas frequências de palheta mais baixas,  $P_1$  e  $P_2/P_3$ , tendem para o mesmo valor. Também é observado que o cruzamento entre as frequências dos modos  $R_1$  e  $R_2$  ocorre por volta de 50 Hz neste caso.

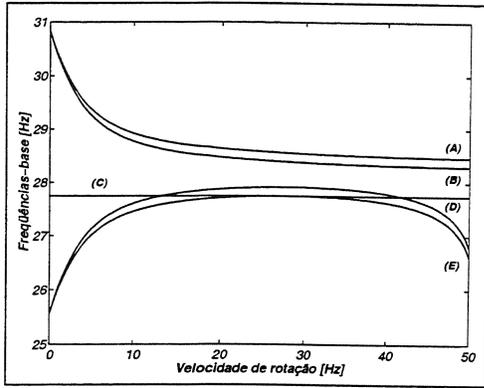
Finalmente, a figura (5.23(f)) apresenta a variação das frequências-básicas se a equação de movimento completa é considerada, ou seja, incluindo tanto o efeito de enrijecimento centrífugo quanto as matriz giroscópica e de Coriolis. O comportamento observado é semelhante às figuras (5.23(c)), (5.23(d)) e (5.23(e)) combinadas: as frequência associadas ao modo de palheta,  $P_1$ ,  $P_2/P_3$  e  $P_4$  tem um aumento quadrático; as duas frequências acopladas de rotor e palhetas se abrem, sendo que a partir desta abertura, os modos, rotor e palheta, se desacoplam; os modos de palheta  $P_1$  e  $P_2/P_3$  tendem a se encontrar e as frequências associadas aos modos de rotor  $R_1$  e  $R_2$  tendem a se cruzar por volta de 15 Hz, sofrendo abertura após o cruzamento.

A partir dos resultados encontrados conclui-se que o efeito do enrijecimento centrífugo é mais pronunciado nas frequências associados a modos de palheta. Por outro lado, os efeitos giroscópico e coriolis tendem a influenciar mais os modos de rotor, contribuindo para seu cruzamento, e sutilmente os modos de palhetas mais baixos ( $P_1$  e  $P_2/P_3$ ), contribuindo para que três modo sejam praticamente coincidentes.

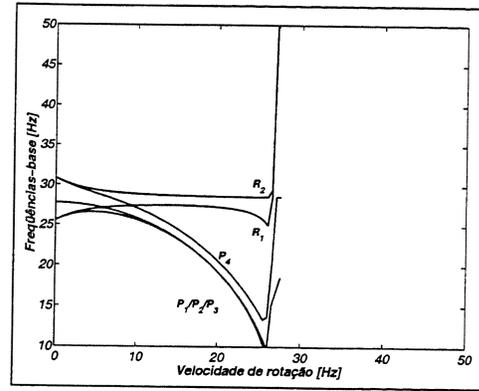
#### 5.2.4 Diagramas de cascata

As figuras (5.24) e (5.25) apresentam os diagramas de cascata do sistema rotor-palhetas, obtido com a integração numérica da equação de movimento do conjunto (3.69). Os sinais apresentados são a transformada dos sinais de aceleração, considerando dois pontos diferentes de excitação. Na figura (5.24) é considerada uma excitação  $\dot{\Gamma}_0 = 0.001s$  como condição inicial da simulação numérica. Já na figura (5.25), a condição inicial é de  $\dot{z}_{p1} = 0.001s$ . A comparação entre os resultados não apresenta diferenças marcantes. Em ambos os casos, contudo, observa-se que os sinais de deslocamentos angulares  $\ddot{\Gamma}$  e  $\ddot{\beta}$  são dominados pelas frequências críticas associadas ao modo de rotor. Os picos indicados por (E) e (F) representam as frequências associadas aos modos  $R_1$  e  $R_2$ , sendo que por volta de 15 Hz pode ser observado o cruzamento entre estas frequências, previsto pela curva dos autovalores-básicos da figura (5.23(f)). Os outros dois conjuntos de picos identificados por (G) e (H) correspondem a vibração paramétrica de ordem 1 de frequências associadas aos modos de palheta. No caso dos picos descritos em (G), a vibração é paramétrica do modo  $P_4 (+\Omega)$  e no caso dos picos descritos em (H), a vibração é paramétrica do modo  $P_1 (-\Omega)$ . Os sinais de aceleração de duas

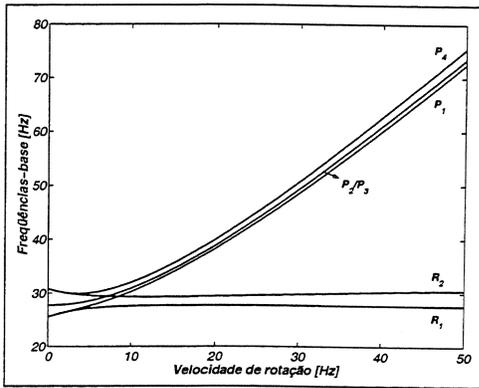
das palhetas,  $\ddot{z}_{p1}$  e  $\ddot{z}_{p2}$ , por sua vez, apresentam quatro picos característicos. O primeiro deles é a própria velocidade de rotação, indicado por (A), o segundo representa as frequências críticas dos modos de vibração das palhetas, modo  $P_4$ , e outros dois conjuntos de picos estão relacionados às vibrações paramétricas do rotor. Os picos indicados por (C) representam a vibração é paramétrica do modo  $R_2 (+\Omega)$  e os picos indicados por (D) representam a vibração é paramétrica do modo  $R_1 (-\Omega)$ .



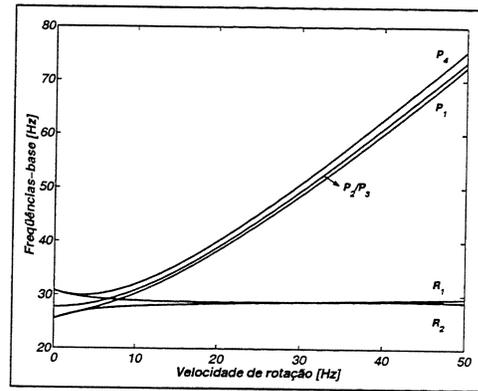
(a) M e K



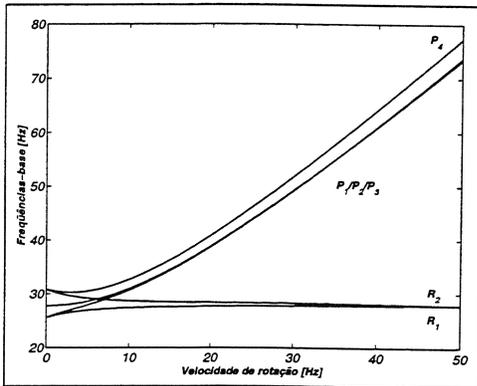
(b) M, K e  $K_\Omega$



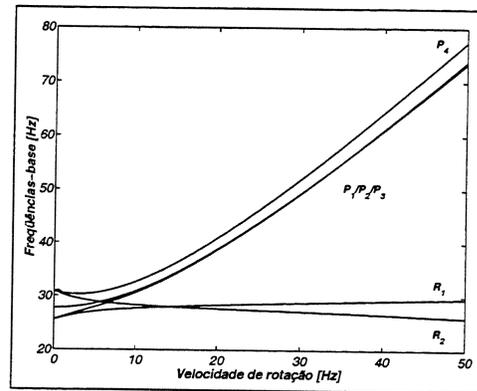
(c) M, K,  $K_\Omega$  e  $K_g$



(d) M, K,  $K_\Omega$ ,  $K_g$  e G

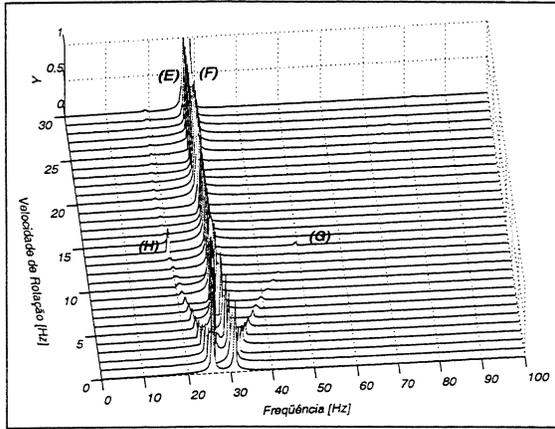


(e) M, K,  $K_\Omega$ ,  $K_g$  e C

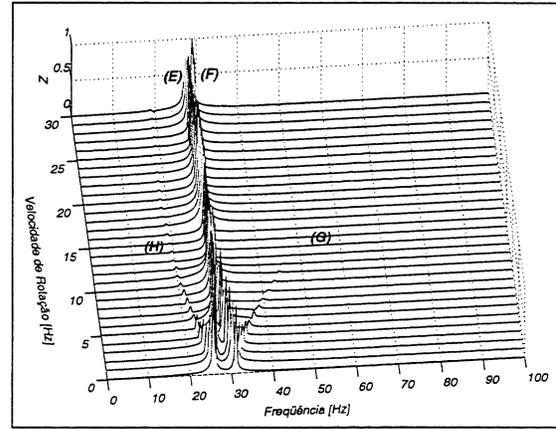


(f) Equação completa

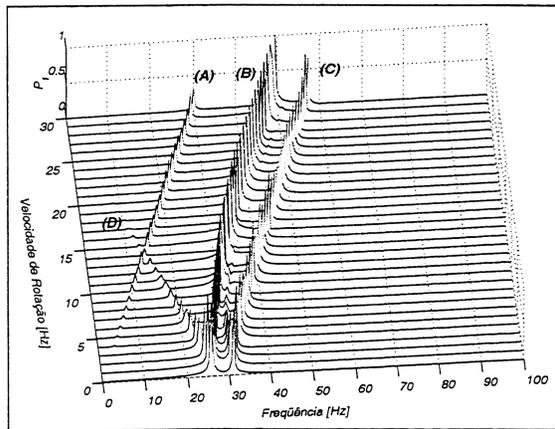
**Figura 5.23:** Variação dos autovalores em função da velocidade de rotação – comparação do comportamento observado com diferentes matrizes da equação de movimento incluídas ou excluídas.



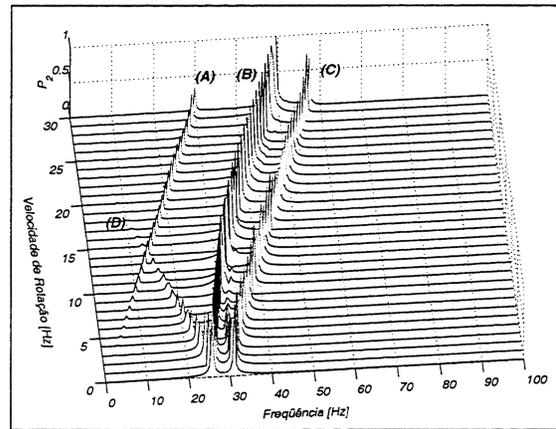
(a) Aceleração  $\Gamma$



(b) Aceleração  $\beta$

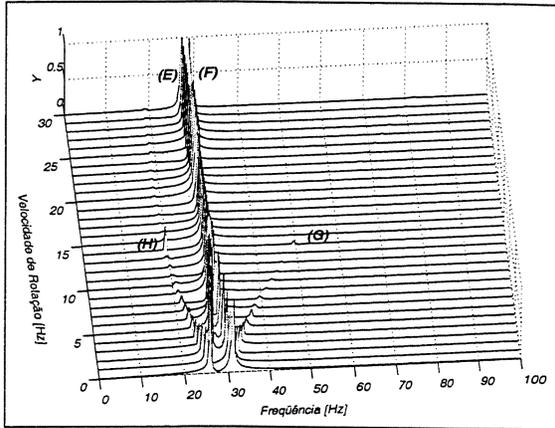


(c) Aceleração  $p_1$

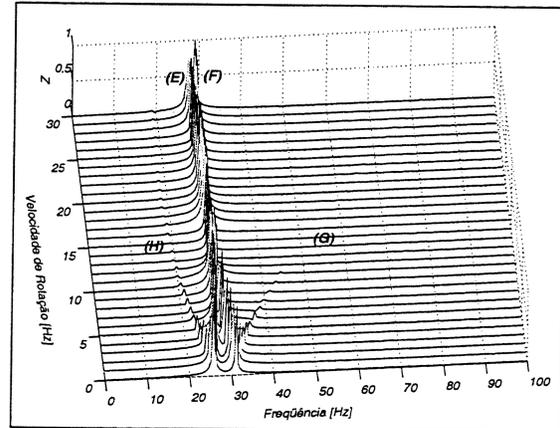


(d) Aceleração  $p_2$

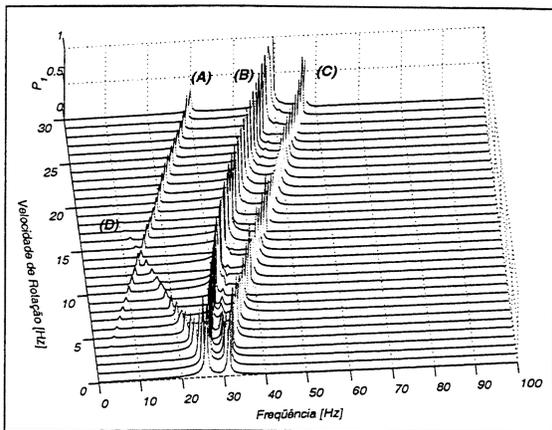
Figura 5.24: Diagramas de cascata dos sinais de aceleração. Excitação em  $\Gamma$



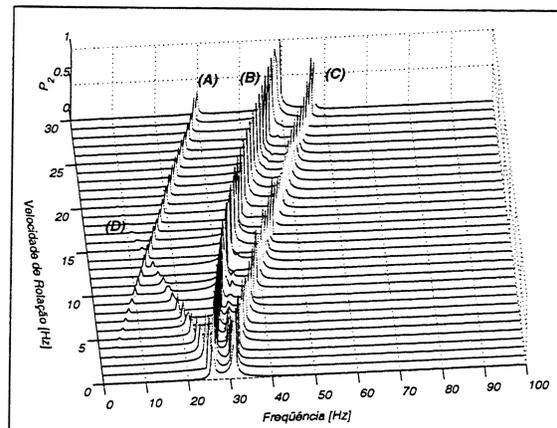
(a) Aceleração  $\Gamma$



(b) Aceleração  $\beta$



(c) Aceleração  $p_1$



(d) Aceleração  $p_2$

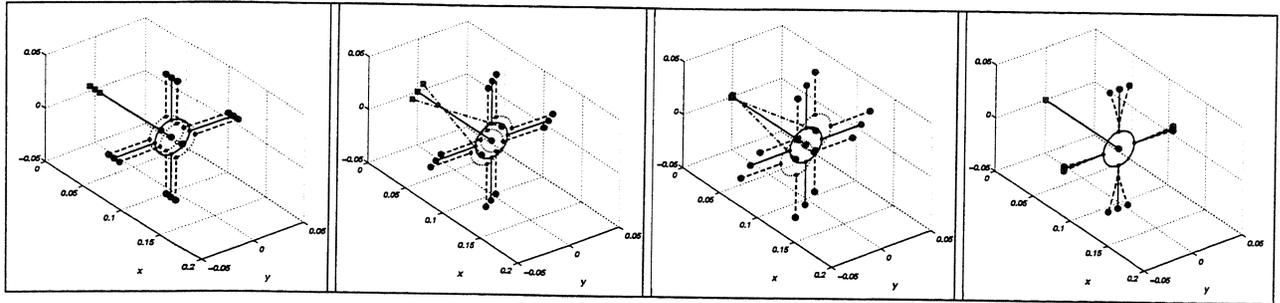
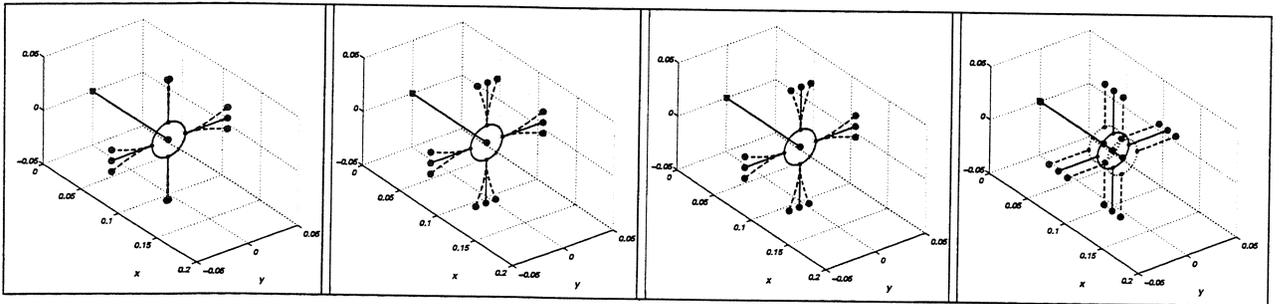
Figura 5.25: Diagramas de cascata dos sinais de aceleração. Excitação em  $p_1$ .

### 5.3 Modelo matemático 3 - rotor tridimensional

Finalmente, algumas simulações numéricas realizadas com o terceiro modelo matemático desenvolvido para o rotor são apresentadas T3. Neste caso, o rotor apresenta tanto movimentos lineares quanto angulares, sendo acoplado novamente a quatro palhetas flexíveis, de acordo com a figura (3.4). As equações de movimento deste conjunto foram apresentadas na equação (3.79). Os parâmetros utilizados nesta simulação são os mesmos apresentados na tabela (5.4), com diferença que a distância  $do_b = 2do_a$ . Mais uma vez a aproximação utilizada para o vetor de deformação da viga é a linearizada de segunda ordem.

Inicialmente, é realizada uma análise modal variante no tempo para observar tanto as formas modais do conjunto quanto a variação das frequências-básicas em função da velocidade de rotação. As formas modais associadas às frequências-básicas e as frequências paramétricas de ordem 1, quando a velocidade de rotação é 20 Hz, são apresentadas, respectivamente, nas figuras (5.26) e (5.27). Nota-se que o efeito da velocidade de rotação é desacoplar os modos de rotor e palhetas, sendo que quatro modos de vibração associados ao movimento do rotor e quatro modos de vibração associados ao movimento das palhetas são observados. Verifica-se também que para um modo-básico de palheta, o modo paramétrico associado é de rotor e vice-versa. A figura (5.28) apresenta a variação dos autovalores-básicos em função da velocidade de rotação. As frequências associadas aos dois primeiros modos do rotor, indicados por  $R_1$  e  $R_2$  são muito próximas e pouco afetadas pela velocidade de rotação. Por outro lado, as frequências associadas aos outros modos de rotor,  $R_3$  e  $R_4$ , que a baixas velocidades de rotação são coincidentes, tendem a se abrir, sendo que o modo indicado por  $R_3$  tende a diminuir e o modo indicado por  $R_4$  tende a aumentar. Este comportamento é influenciado pelo efeito giroscópico. Por outro lado, os modos de palhetas, indicados por  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  e  $P_4$ , são fortemente afetados pelo efeito de enrijecimento centrífugo, seguindo um aumento quadrático. As três frequências dos modos  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  são mais próximas entre si, enquanto que a frequência do modo  $P_4$  apresenta maior valor.

A análise da variação do comportamento mecânico deste conjunto em função da velocidade de rotação pode ser observado também com auxílio dos diagramas de cascata. A partir da integração numérica das equações diferenciais de movimento, os diagramas de cascata apresentados nas figuras (5.29) e (5.30) são construídos. No figura (5.29), a excitação ocorre no mancal  $A$  (indicado na figura (3.4)), na direção  $y$ , enquanto que na figura (5.30), a excitação ocorre na palheta  $p_1$ . Comparando os resultados obtidos nestas duas condições, não são observadas grandes diferenças resultantes da mudança do ponto de excitação. Os diagramas de cascata obtidos a partir da aceleração dos deslocamentos lineares e angulares do rotor, figuras (5.29(a)), (5.29(b)), (5.29(c)) e (5.29(d)) e figuras (5.30(a)), (5.30(b)), (5.30(c)) e (5.30(d)), apresentam os seguintes conjunto de picos: (A) modo-básico de vibração do rotor  $R_1/R_2$ ; (B) modo paramétrico de vibração da palheta  $P_3/P_4$ ; (C) modo-básico de vibração do rotor  $R_3$  e (C) modo-básico de vibração do rotor  $R_4$ . Já os diagramas obtidos a partir da aceleração das palhetas, figuras (5.29(e)) e (5.29(f)) e figuras (5.30(e)) e (5.30(f)) apresentam os seguintes conjuntos de picos : (E) velocidade de rotação; (F) modo-básico de vibração

(a) Modo  $R_1 - \lambda_{1,0}$ (b) Modo  $R_2 - \lambda_{2,0}$ (c) Modo  $R_3 - \lambda_{3,0}$ (d) Modo  $P_1 - \lambda_{4,0}$ (e) Modo  $P_2 - \lambda_{5,0}$ (f) Modo  $P_3 - \lambda_{6,0}$ (g) Modo  $P_4 - \lambda_{7,0}$ (h) Modo  $R_4 - \lambda_{8,0}$ 

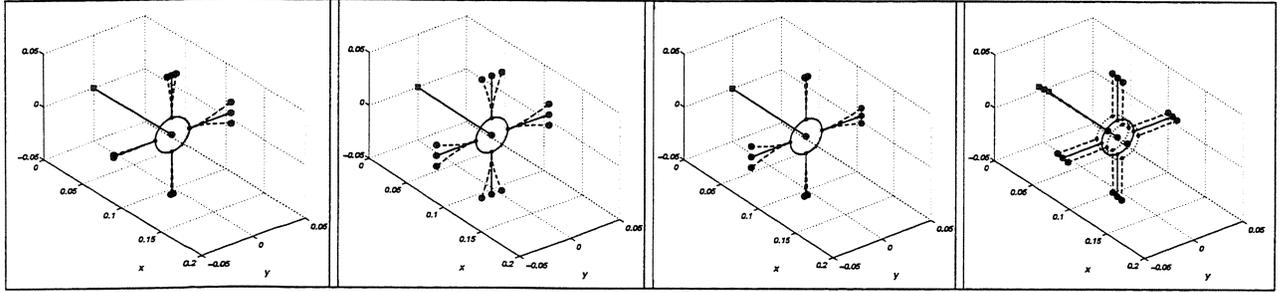
**Figura 5.26:** Frequências e modos-básicos de vibração do conjunto rotor-palhetas – modelo matemático usando rotor com movimentos tridimensionais (T3) –  $\dot{\phi} = 20$  Hz

da palheta  $P_3$ ; (G) modo-básico de vibração da palheta  $P_4$ ; (H) modo paramétrico de vibração do rotor  $R_1/R_2$ ; (I) modo paramétrico de vibração do rotor  $R_1/R_2$  e (J) modo paramétrico de vibração do rotor  $R_3$ .

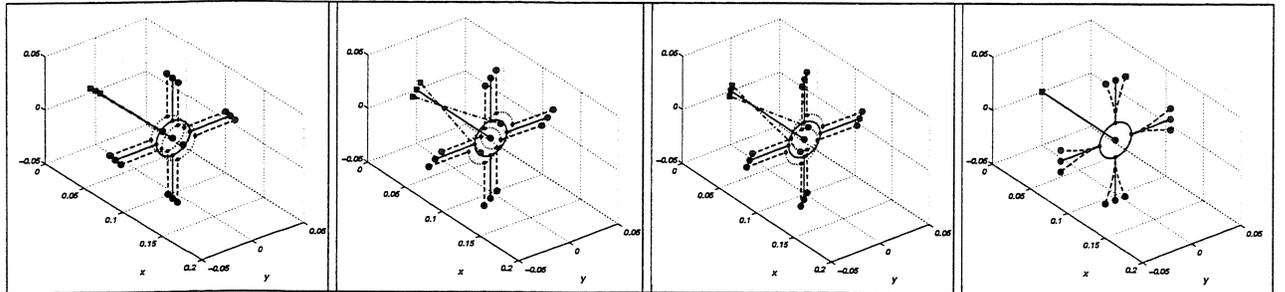
Com objetivo de melhor elucidar os picos que aparecem nos diagramas de cascata das figuras (5.30) e (5.29), os sinais de aceleração dos deslocamentos do rotor e palhetas, no domínio da frequência, são apresentados separadamente, nas figuras (5.31) a (5.36). Nestas figuras os picos presentes estão ressaltados, sendo que a resolução na frequência é de  $\Delta f = 0.5$  Hz. Abaixo, estes picos são identificados com seus respectivos modos de vibração e comparados com os autovalores-básicos. Estes autovalores-básicos nestas velocidades de rotação são apresentados na tabela (5.6). Estes autovalores são estimados com ordem de expansão  $n_o = 2$ , segundo a metodologia de análise modal variante no tempo, sendo que a variação destes autovalores-básicos em função da velocidade de rotação foi apresentada na figura (5.28). Os picos nos sinais de aceleração em função da velocidade de rotação são classificados como:

1. Velocidade de rotação  $\Omega = 5$  Hz;

(a) Picos observados nos sinais de aceleração  $\ddot{y}$ ,  $\ddot{z}$ ,  $\ddot{\Gamma}$  e  $\ddot{\beta}$ : 15.5 Hz, frequência-básica dos modos



(a) Modo  $R_1 - \lambda_{1,1} = \lambda_{1,0} + \Omega$     (b) Modo  $R_2 - \lambda_{2,1} = \lambda_{2,0} + \Omega$     (c) Modo  $P_1 - \lambda_{3,1} = \lambda_{3,0} + \Omega$     (d) Modo  $P_2 - \lambda_{4,1} = \lambda_{4,0} + \Omega$



(e) Modo  $P_3 - \lambda_{5,1} = \lambda_{5,0} + \Omega$     (f) Modo  $P_4 - \lambda_{6,1} = \lambda_{6,0} + \Omega$     (g) Modo  $R_3 - \lambda_{7,1} = \lambda_{7,0} + \Omega$     (h) Modo  $R_4 - \lambda_{8,1} = \lambda_{8,0} + \Omega$

**Figura 5.27:** Freqüências e modos de vibração do conjunto rotor-palhetas (vibração paramétrica de ordem 1)– modelo matemático usando rotor com movimentos tridimensionais (T3) –  $\dot{\phi} = 20$  Hz

$R_1/R_2$ ; 24.5 Hz, vibração paramétrica (-) do modo  $P_3$ ; 35 Hz, vibração paramétrica (+) do modo  $P_4$ ; 40.5 Hz, freqüência-básica do modo  $R_3$ ; 41.5 Hz, freqüência-básica do modo  $R_4$ ;

- (b) Picos observados nos sinais de aceleração  $\ddot{z}_{p_i}$ : 5 Hz, velocidade de rotação  $\Omega$ ; 10.5 Hz, vibração paramétrica (-) do modo  $R_1/R_2$ ; 20.5 Hz, vibração paramétrica (+) do modo  $R_1/R_2$ ; 29.5 Hz, freqüência-básica dos modos  $P_3/P_4$ ; 36.5 Hz, vibração paramétrica (-) do modo  $R_4$ ; 45.5 Hz, vibração paramétrica (+) do modo  $R_3$ .

2. Velocidade de rotação  $\Omega = 10$  Hz;

- (a) Picos observados nos sinais de aceleração  $\ddot{y}$ ,  $\ddot{z}$ ,  $\ddot{\Gamma}$  e  $\ddot{\beta}$ : 15.5 Hz, freqüência-básica dos modos  $R_1/R_2$ ; 21.5 Hz, vibração paramétrica (-) do modo  $P_3$ ; 40 Hz, freqüência-básica do modo  $R_3$ ; 41.5 Hz, freqüência-básica do modo  $R_4$ ; 43 Hz, vibração paramétrica (+) do modo  $P_4$ ;

- (b) Picos observados nos sinais de aceleração  $\ddot{z}_{p_i}$ : 5.5 Hz, vibração paramétrica (-) do modo  $R_1/R_2$ ; 10 Hz, velocidade de rotação  $\Omega$ ; 25.5 Hz, vibração paramétrica (+) do modo

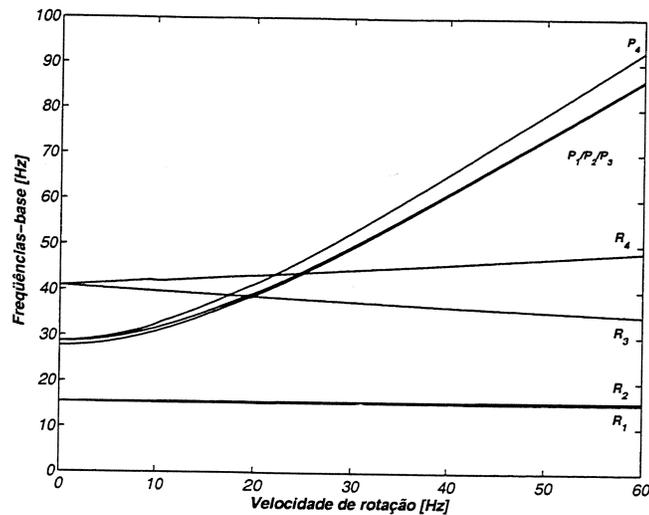


Figura 5.28: Variação dos autovalores-básicos (Hz) em função da velocidade de rotação

Tabela 5.6: Autovalores-básicos, Hz, em diferentes velocidades de rotação  $\Omega$ – rotor tridimensional (T3)

	$\Omega = 5 \text{ Hz}$	$\Omega = 10 \text{ Hz}$	$\Omega = 15 \text{ Hz}$	$\Omega = 20 \text{ Hz}$	$\Omega = 25 \text{ Hz}$	$\Omega = 30 \text{ Hz}$
$R_1$	15.40	15.34	15.32	15.34	15.36	15.36
$R_2$	15.52	15.56	15.59	15.62	15.64	15.66
$P_1$	28.56	30.90	34.43	38.85	43.88	49.34
$P_2$	28.56	30.90	34.43	38.85	43.88	49.34
$P_3$	29.38	31.61	35.07	39.39	44.35	49.75
$P_4$	29.75	32.48	36.51	41.34	46.83	52.77
$R_3$	40.34	39.77	39.21	38.66	38.11	37.58
$R_4$	41.56	42.09	42.61	43.25	43.88	44.52

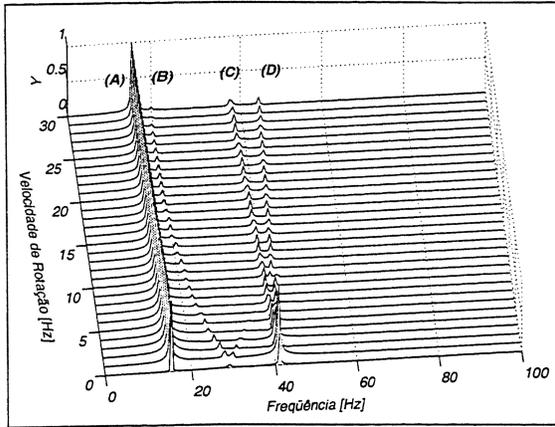
$R_1/R_2$ ; 31.5 Hz, frequência-básica do modo  $P_3$ ; 33 Hz, frequência-básica do modo  $P_4$ ; 50 Hz, vibração paramétrica (+) do modo  $R_3$ ;

3. Velocidade de rotação  $\Omega = 15 \text{ Hz}$ ;

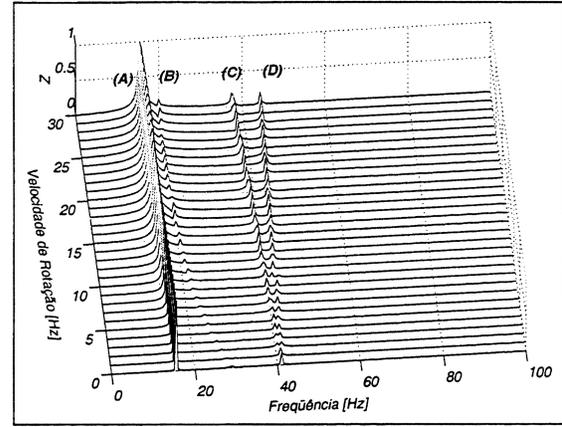
- (a) Picos observados nos sinais de aceleração  $\ddot{y}$ ,  $\ddot{z}$ ,  $\ddot{\Gamma}$  e  $\ddot{\beta}$ : 15.5 Hz, frequência-básica dos modos  $R_1/R_2$ ; 20 Hz, vibração paramétrica (-) do modo  $P_3$ ; 39.5 Hz, frequência-básica do modo  $R_3$ ; 42.5 Hz, frequência-básica do modo  $R_4$ ;
- (b) Picos observados nos sinais de aceleração  $\ddot{z}_{p_i}$ : 15 Hz, velocidade de rotação  $\Omega$ ; 30.5 Hz, vibração paramétrica (+) do modo  $R_1/R_2$ ; 35 Hz, frequência-básica do modo  $P_3$ ; 37 Hz, frequência-básica do modo  $P_4$ ; 54.5 Hz, vibração paramétrica (+) do modo  $R_3$ ;

4. Velocidade de rotação  $\Omega = 20 \text{ Hz}$ ;

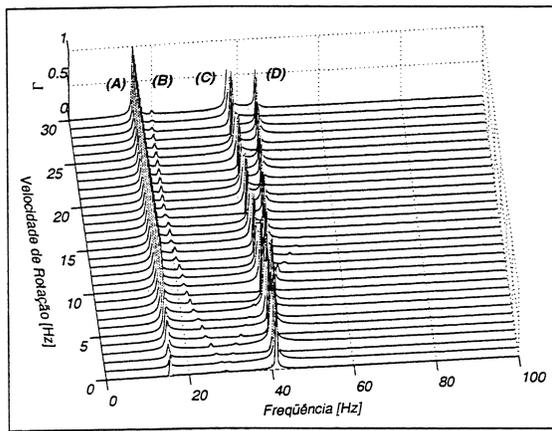
- (a) Picos observados nos sinais de aceleração  $\ddot{y}$ ,  $\ddot{z}$ ,  $\ddot{\Gamma}$  e  $\ddot{\beta}$ : 15.5 Hz, frequência-básica dos



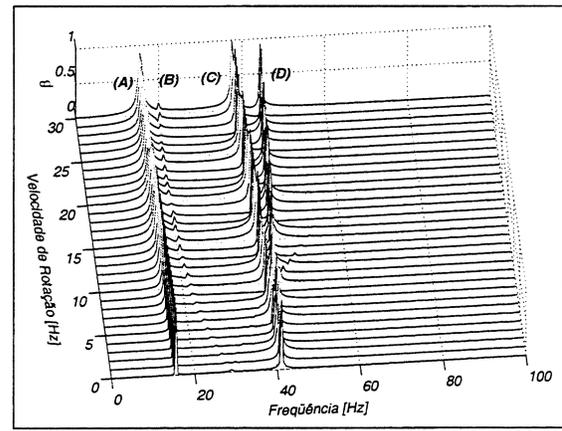
(a) Aceleração  $y$



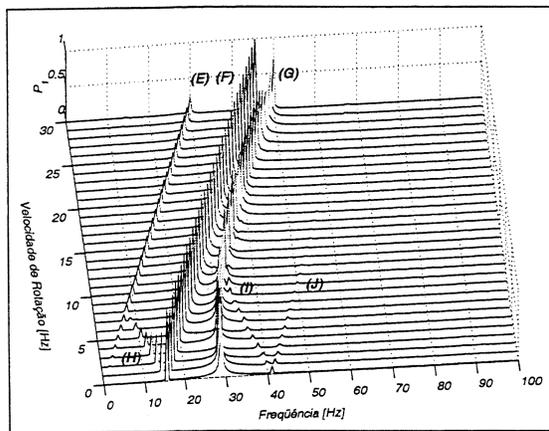
(b) Aceleração  $z$



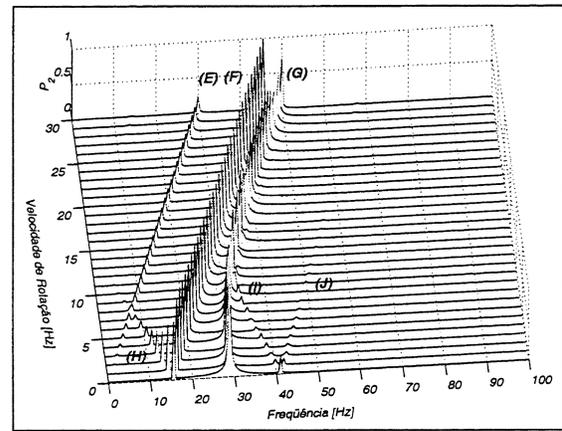
(c) Aceleração  $\Gamma$



(d) Aceleração  $\beta$

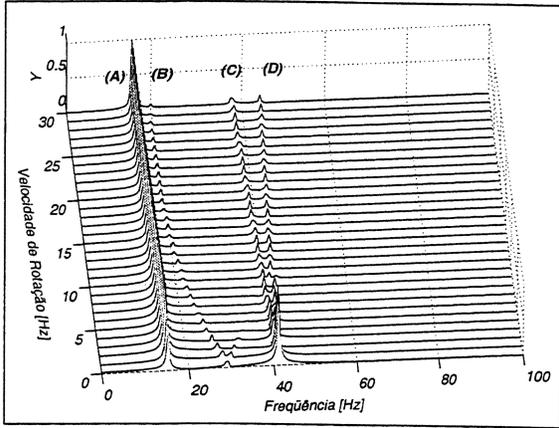


(e) Aceleração  $p_1$

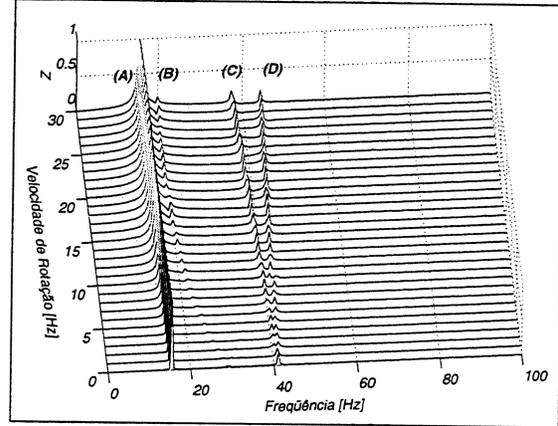


(f) Aceleração  $p_2$

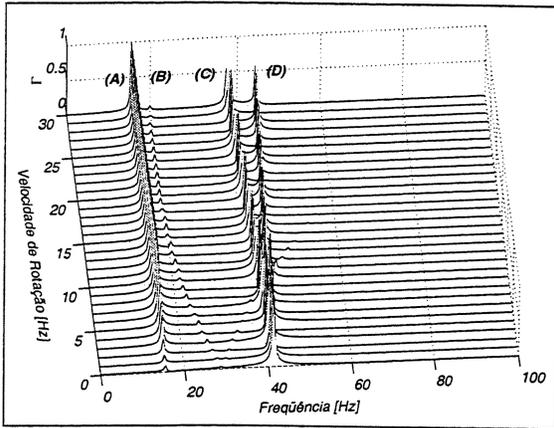
Figura 5.29: Diagramas de cascata dos sinais de aceleração. Excitação em  $y$



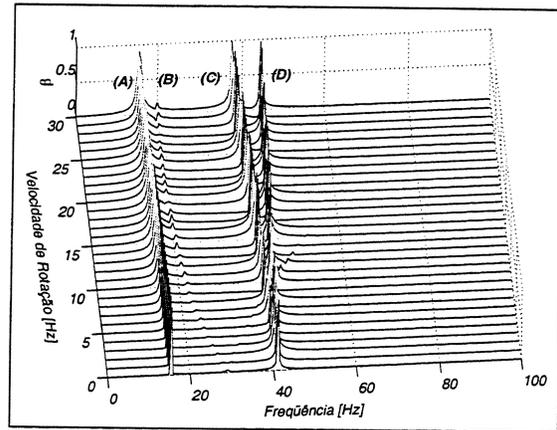
(a) Aceleração  $y$



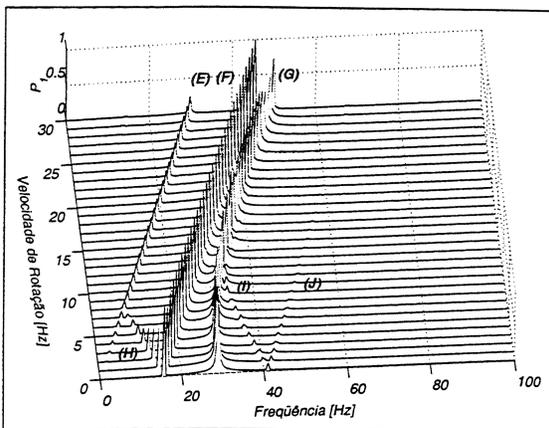
(b) Aceleração  $z$



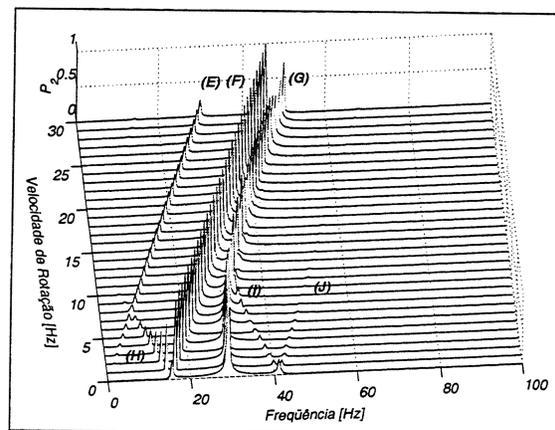
(c) Aceleração  $\Gamma$



(d) Aceleração  $\beta$



(e) Aceleração  $p_1$



(f) Aceleração  $p_2$

Figura 5.30: Diagramas de cascata dos sinais de aceleração. Excitação em  $p_1$

- modos  $R_1/R_2$ ; 19.5 Hz, vibração paramétrica (-) do modo  $P_3$ ; 39 Hz, frequência-básica do modo  $R_3$ ; 43.5 Hz, frequência-básica do modo  $R_4$ ;
- (b) Picos observados nos sinais de aceleração  $\ddot{z}_{p_i}$ : 20 Hz, velocidade de rotação  $\Omega$ ; 35.5 Hz, vibração paramétrica (+) do modo  $R_1/R_2$ ; 39.5 Hz, frequência-básica do modo  $P_3$ ; 41.5 Hz, frequência-básica do modo  $P_4$ ; 58.5 Hz, vibração paramétrica (+) do modo  $R_3$ ;
5. Velocidade de rotação  $\Omega = 25$  Hz;
- (a) Picos observados nos sinais de aceleração  $\ddot{y}$ ,  $\ddot{z}$ ,  $\ddot{\Gamma}$  e  $\ddot{\beta}$ : 15.5 Hz, frequência-básica dos modos  $R_1/R_2$ ; 19.5 Hz, vibração paramétrica (-) do modo  $P_3$ ; 38 Hz, frequência-básica do modo  $R_3$ ; 44 Hz, frequência-básica do modo  $R_4$ ;
- (b) Picos observados nos sinais de aceleração  $\ddot{z}_{p_i}$ : 25 Hz, velocidade de rotação  $\Omega$ ; 40.5 Hz, vibração paramétrica (+) do modo  $R_1/R_2$ ; 44.5 Hz, frequência-básica do modo  $P_3$ ; 47 Hz, frequência-básica do modo  $P_4$ ; 63 Hz, vibração paramétrica (+) do modo  $R_3$ ;
6. Velocidade de rotação  $\Omega = 30$  Hz;
- (a) Picos observados nos sinais de aceleração  $\ddot{y}$ ,  $\ddot{z}$ ,  $\ddot{\Gamma}$  e  $\ddot{\beta}$ : 15.5 Hz, frequência-básica dos modos  $R_1/R_2$ ; 20 Hz, vibração paramétrica (-) do modo  $P_3$ ; 37.5 Hz, frequência-básica do modo  $R_3$ ; 44.5 Hz, frequência-básica do modo  $R_4$ ;
- (b) Picos observados nos sinais de aceleração  $\ddot{z}_{p_i}$ : 14.5 (Paramétrica  $R_4$ ); 30 Hz, velocidade de rotação  $\Omega$ ; 45.5 Hz, vibração paramétrica (+) do modo  $R_1/R_2$ ; 50 Hz, frequência-básica do modo  $P_3$ ; 53 Hz, frequência-básica do modo  $P_4$ ; 68 Hz, vibração paramétrica (+) do modo  $R_3$ ;

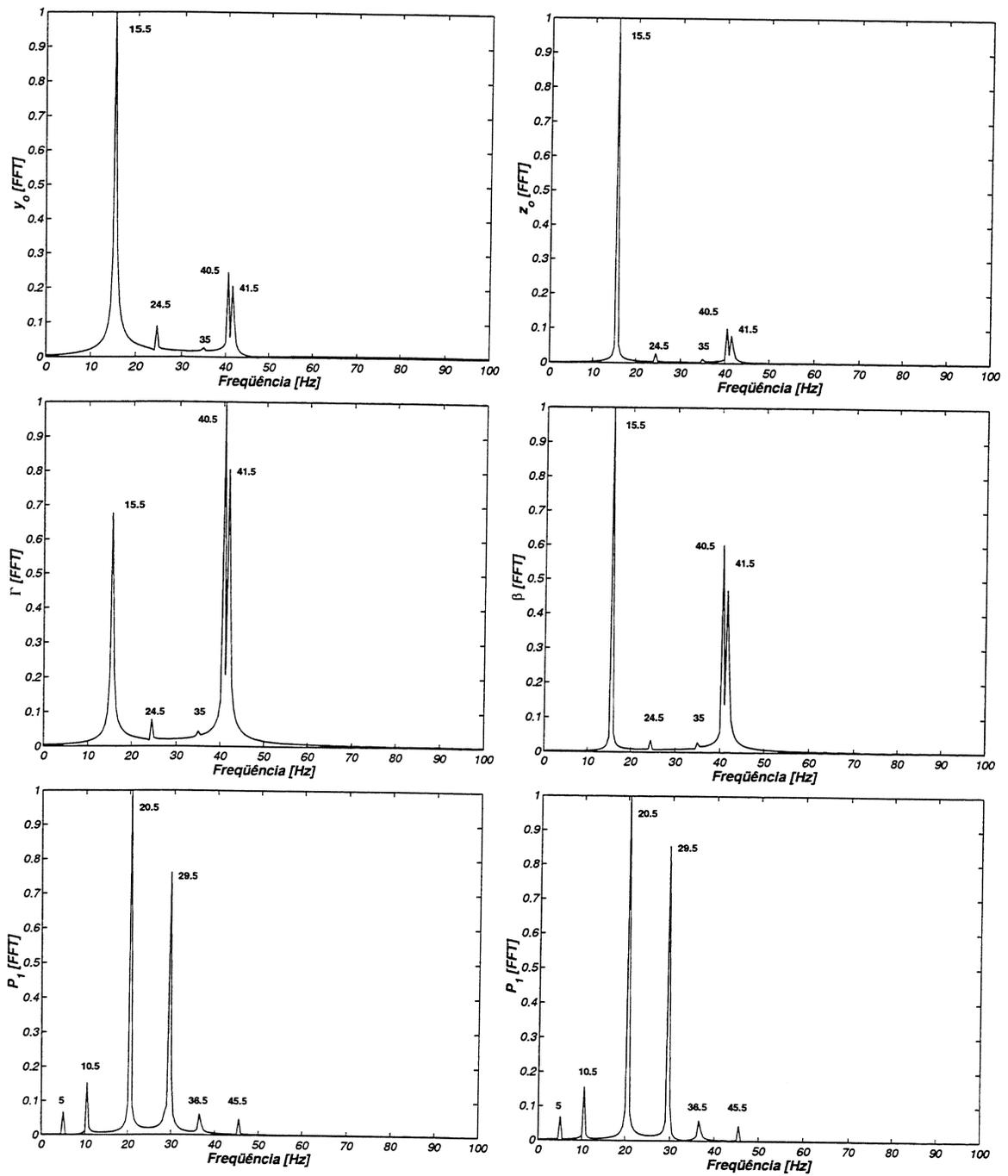


Figura 5.31: Sinais de aceleração no domínio da frequência (fft) -  $\Omega = 5$  Hz

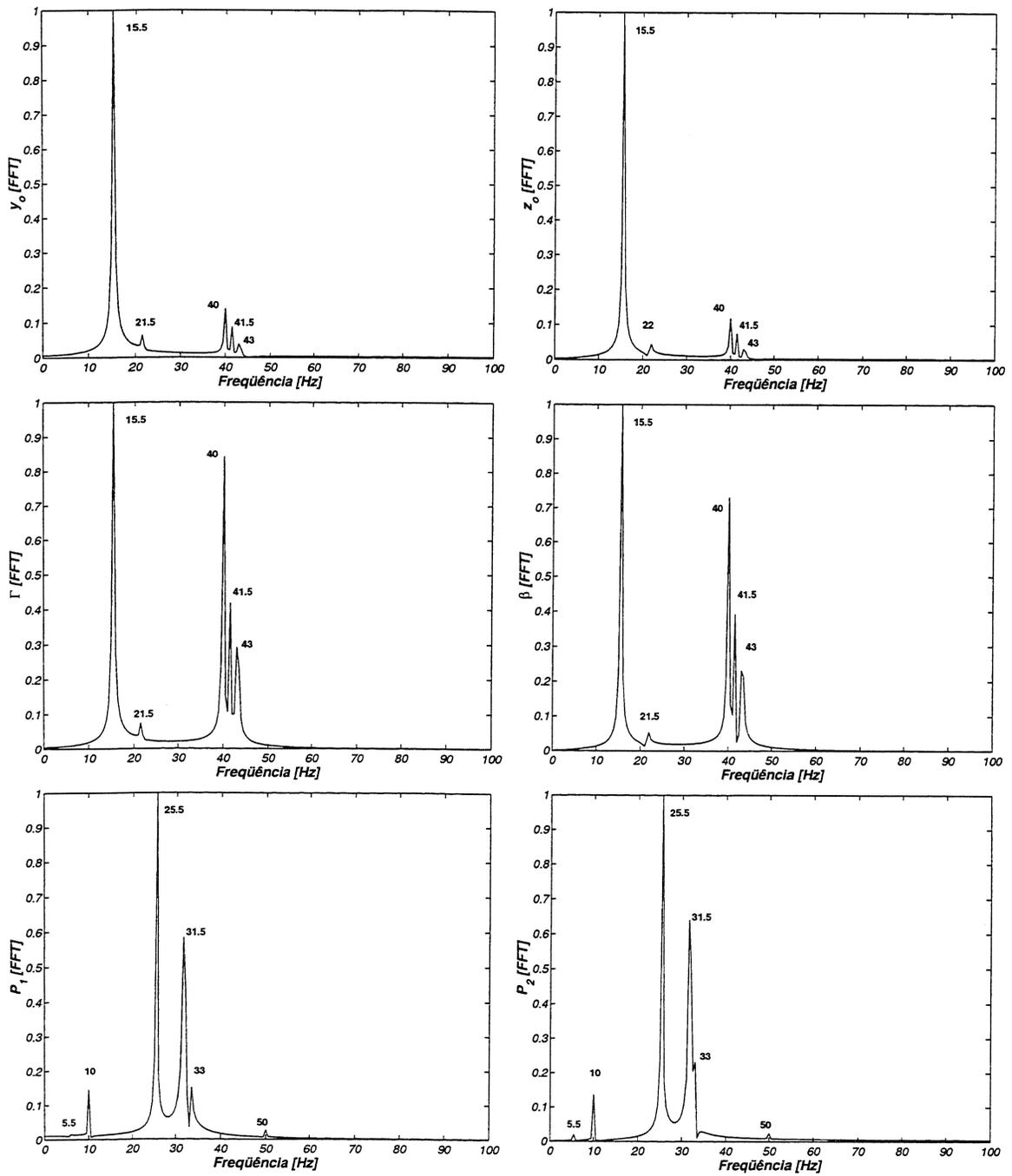


Figura 5.32: Sinais de aceleração no domínio da frequência (fft) -  $\Omega = 10$  Hz

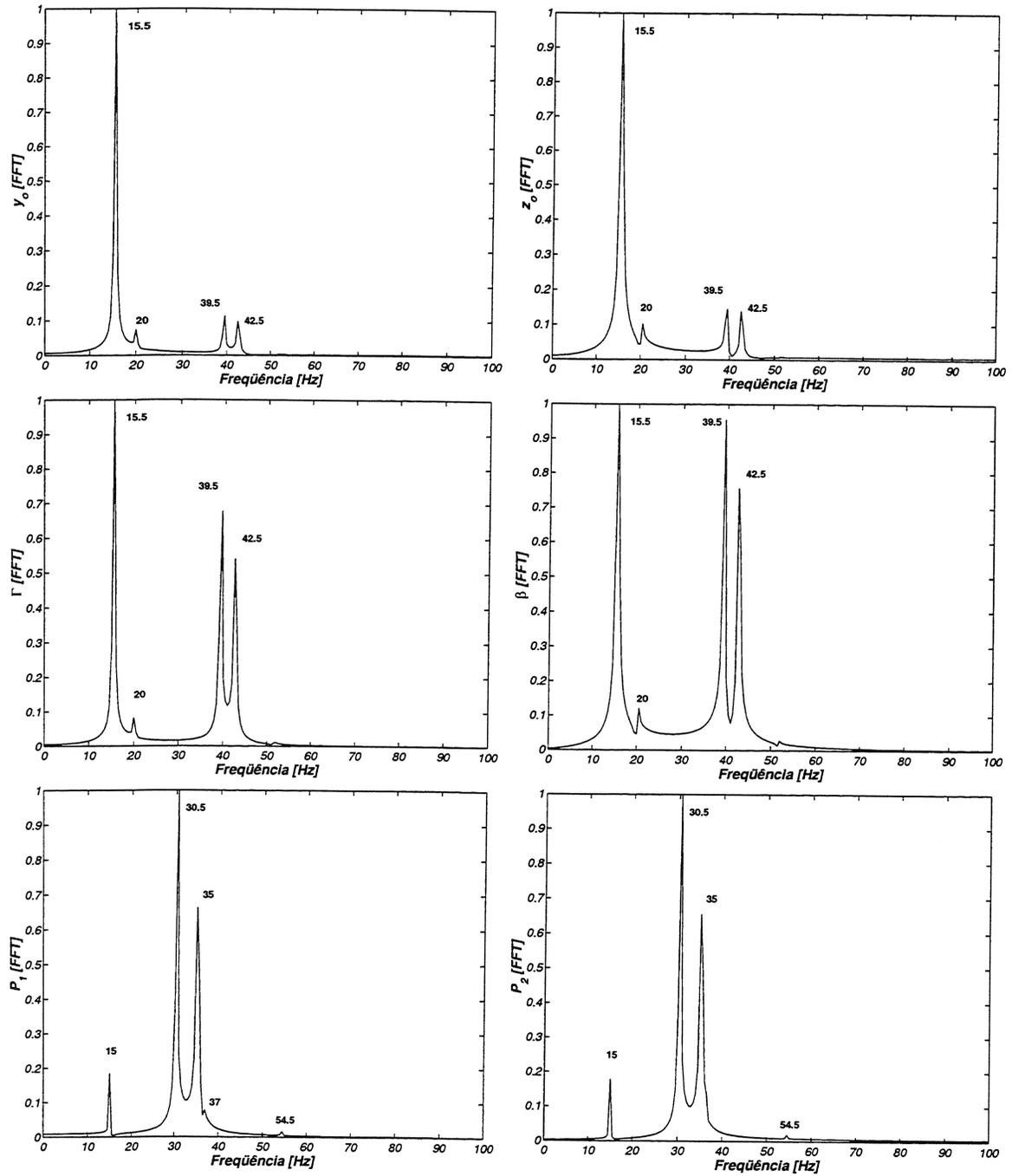


Figura 5.33: Sinais de aceleração no domínio da frequência (fft) -  $\Omega = 15$  Hz

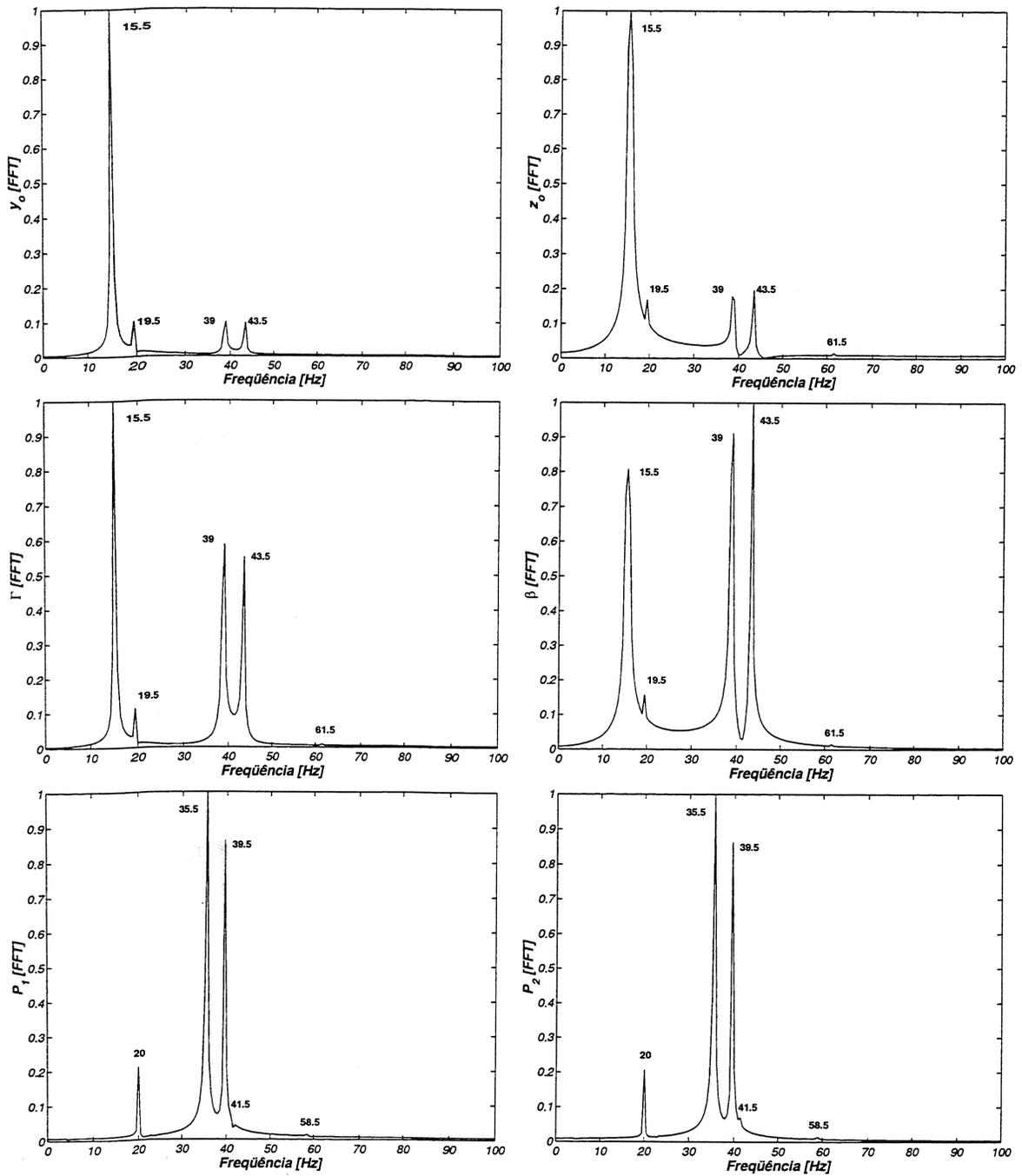


Figura 5.34: Sinais de aceleração no domínio da frequência (fft) -  $\Omega = 20$  Hz

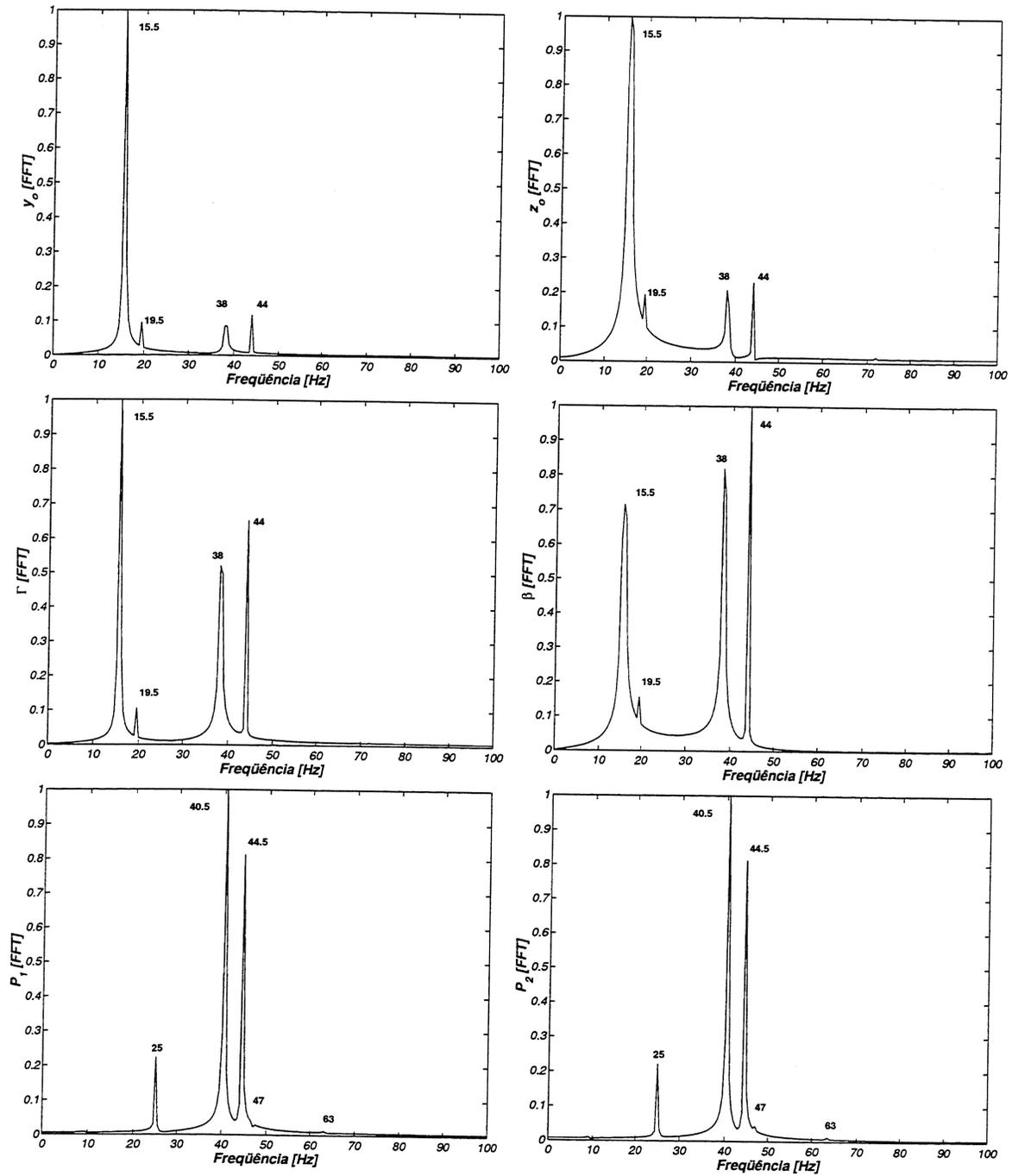


Figura 5.35: Sinais de aceleração no domínio da frequência (fft) -  $\Omega = 25$  Hz

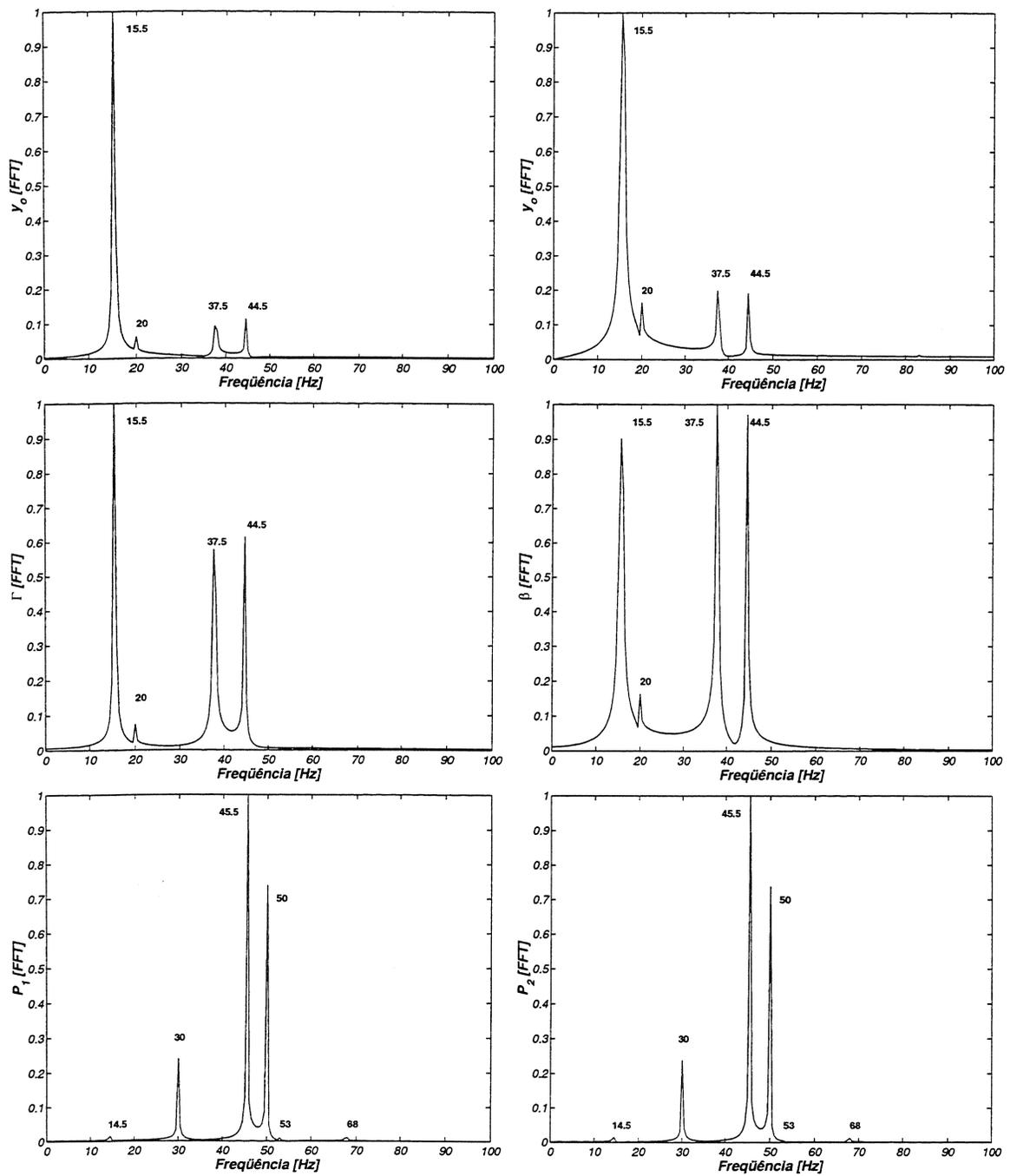


Figura 5.36: Sinais de aceleração no domínio da frequência (fft) -  $\Omega = 30$  Hz

## Capítulo 6

# Exemplos experimentais

### 6.1 Sistema com cinco graus de liberdade

A bancada de testes construída para validar os modelos matemáticos do rotor plano é apresentada na figura (6.1). Neste caso, a bancada é construída de tal forma que o rotor tenha movimentos laterais apenas em uma das direções. O rotor é montado em uma fundação que pode se movimentar na direção horizontal. Por sua vez, esta fundação é acoplada a vigas elásticas. Os movimentos lineares da fundação são medidos com auxílio de um acelerômetro, conforme apresentado na figura (6.2(a)). O rotor é acoplado a quatro palhetas flexíveis, de acordo com a figura (6.2(b)). Estas palhetas são formadas por régua flexíveis com massas concentradas na ponta. Estas massa são utilizadas para enfatizar o acoplamento entre os termos dinâmicos e elásticos, de tal forma que a dinâmica da viga girante é influenciada pela massa concentrada em sua extremidade livre (Yigit *et al.*, 1988; Fallahi e Lai, 1994).

A bancada de testes deve operar em faixa de frequências definida entre 0 e 50 Hz. A construção da bancada desta maneira também leva a um nível de amortecimento baixo, o que também facilita as medições. Dado que os movimentos do conjunto rotor e palhetas são restritos ao plano vertical, o modelo matemático (T1) desenvolvido no capítulo (3) é utilizado para aproximar o comportamento da bancada de testes,

Esta bancada de testes pode ser subdividida nos seguintes subestruturas:

- Um disco girante (disco + rotor) é montado rigidamente a uma base (fundação). Esta subestrutura formada pelo disco, rotor e fundação podem ser representados por uma única massa concentrada, sendo conectada à base inercial por meio de quatro régua flexíveis cujo comprimento é ajustável, funcionando dessa forma como molas ajustáveis. Este tipo de montagem permite que o centro do rotor tenha apenas movimentos lineares de tal forma a eliminar o efeito giroscópico devido aos movimentos angulares do rotor e fundação. Portanto, esta subestrutura apoiada sobre molas tem apenas um grau de liberdade, que é o deslocamento linear

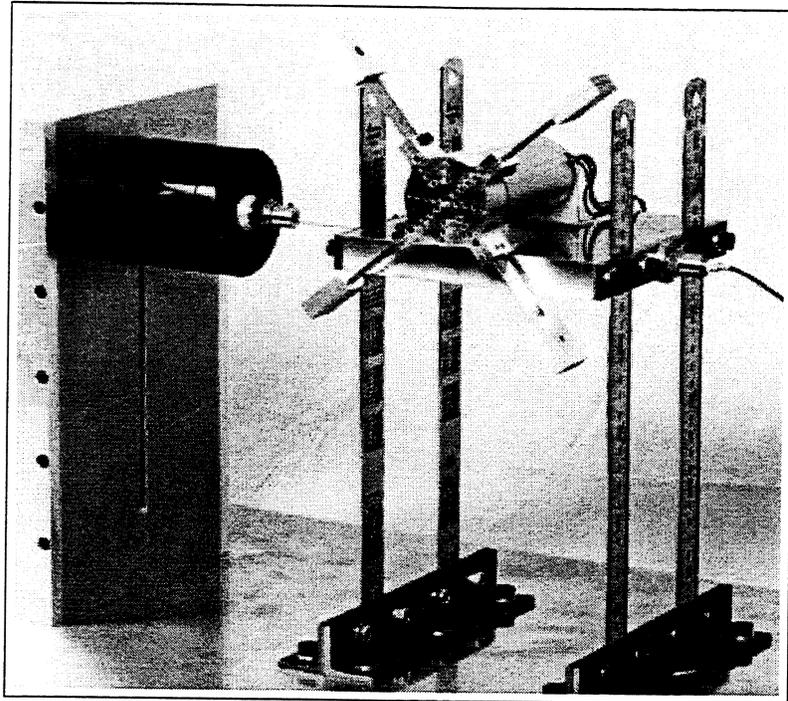
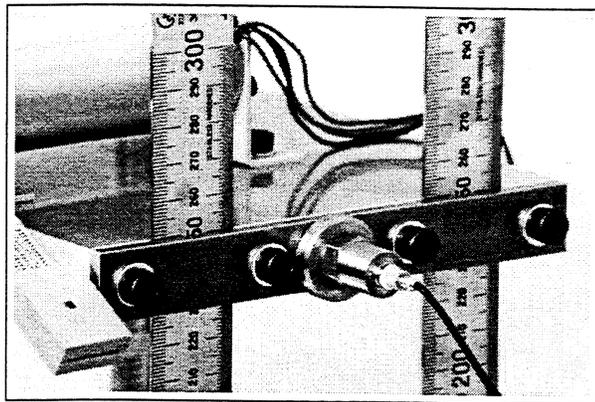
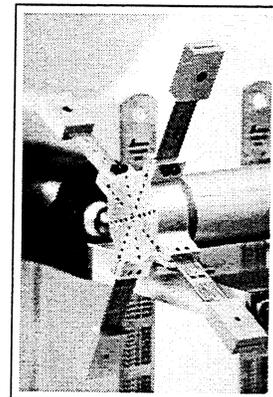


Figura 6.1: Bancada de testes construída na Universidade Técnica da Dinamarca DTU para análise da dinâmica do conjunto rotor e palhetas flexíveis (Eiland, Torry-Smith e Santos, 2001)– aspecto geral



(a)



(b)

Figura 6.2: (a) Montagem do acelerômetro na base e (b) montagem das palhetas – detalhe (Eiland, Torry-Smith e Santos, 2001)

na direção horizontal;

- Quatro massas são conectadas ao disco girante por meio de réguas flexíveis cujo comprimento pode ser ajustado. Os movimentos da massa conectada à ponta das réguas são deslocamentos lineares descritos em um sistema de referência girante solidário ao rotor. Na faixa de operação do rotor, apenas o primeiro modo de viga é importante na resposta dinâmica do conjunto;
- Um *shaker* electromagnético é utilizado para excitar a subestrutura da massa e suportes elásticos na direção horizontal. Um acelerômetro é utilizado para medir os movimentos lineares desta subestrutura e de forma indireta medir as mudanças no comportamento dinâmico das palhetas;
- O amortecimento da bancada, especialmente o fator de amortecimento dos modos de vibração das palhetas, é mantido em níveis baixos. Isto torna o procedimento de medição mais simples. No caso da medição da vibração das palhetas, que é realizada de maneira indireta através de acelerômetros montadas na fundação (base), o baixo amortecimento também facilita as medições.

O modelo mecânico que representa esta bancada de testes é apresentado na figura (6.3(a)), sendo que alguns detalhes das massa concentradas nas extremidades das palhetas são apresentados na figura (6.3(b)). O modelo matemático tem cinco graus de liberdade que são dados pelo vetor:  $\mathbf{q} = \{ y_o(t) \ z_1(t) \ z_2(t) \ z_3(t) \ z_4(t) \}^T$ , sendo que a primeira coordenada,  $y_o$  descreve o movimento horizontal da base e as outras quatro,  $z_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), representam o deslocamento das massas concentradas  $p_i$  relativa ao sistema de coordenadas girante  $B_{p_i}(x_{p_i}, y_{p_i}, z_{p_i})$ , que apresenta velocidade angular  $\dot{\phi}$ . Os sistemas de referência e a descrição dos movimentos de um rotor plano acoplado a quatro palhetas flexíveis foram apresentados no capítulo (3).

O deslocamento da viga é interpolado utilizando uma função cúbica polinomial, que satisfaz tanto as condições de contorno essenciais quanto naturais, que são de engastamento em uma das extremidades e uma força concentrada na outras. Esta função de forma é escolhida com o objetivo de minimizar o número de graus de liberdade e aproxima apenas o primeiro modo de vibração da viga. Um discussão detalhada da escolha da função de forma para modelar uma viga girante foi apresentada no capítulo (2). Dessa forma, o deslocamento elástico da viga é dado por

$$B_{p_i} \mathbf{u}_i = \begin{Bmatrix} 0 \\ v_i(\xi_i) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \psi_i(\xi_i) z_i(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{onde} \quad \psi_i(\xi_i) = \frac{3}{2} \left( \frac{\xi_i}{L_i} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\xi_i}{L_i} \right)^3 \quad (6.1)$$

A inércia de rotação da massa concentrada acoplada à ponta da viga é incluída no modelo adotando que o movimento angular é igual à derivada do deslocamento. Dessa forma, assume-se que não há força de cisalhamento atuando na viga, o que é uma hipótese adequada pois as réguas flexíveis são delgadas. Uma massa equivalente é estimada para a ponta, de tal forma que os efeitos

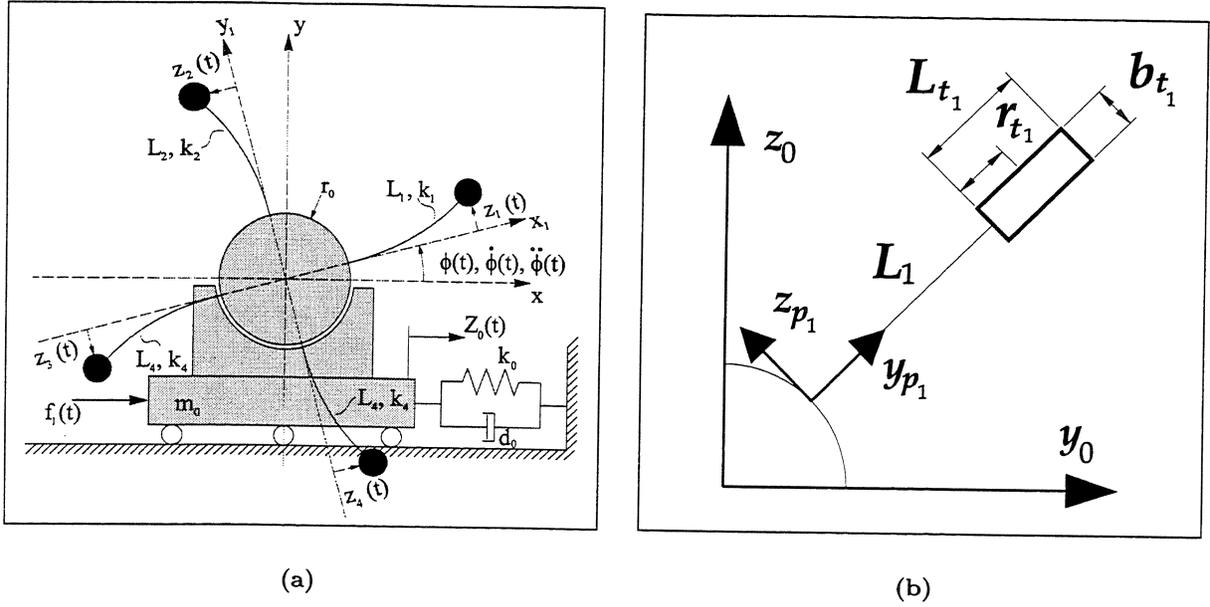


Figura 6.3: (a) Modelo matemático da bancada de testes (b) massas concentradas acopladas às palhetas

da inércia de rotação são incluídos no modelo matemático. Esta massa equivalente é dada por

$$\bar{m}_i = m_i \psi(L_i)^2 + (It_i + m_i r t_i^2) \psi'(L_i)^2 + 2m_i r t_i \psi(L_i) \psi'(L_i) \quad (6.2)$$

### 6.1.1 Parâmetros da bancada

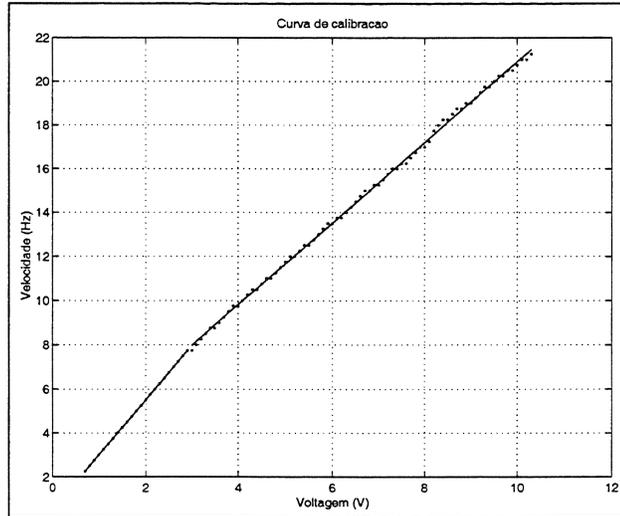
Os principais parâmetros da bancada de testes da figura (6.3(a)) estão apresentados na tabela (6.1). Estes parâmetros são usados posteriormente nas simulações numéricas, segundo as equações de movimento (3.38), (3.47) e (3.55).

Tabela 6.1: Parâmetros da bancada de testes

Base massa-mola			Vigas girantes flexíveis ( $i = 1, 2, 3, 4$ )			Massa da ponta ( $i = 1, 2, 3, 4$ )		
$m_0$	2.228	kg	$\theta_i$	$(i-1)\pi/2$	rad	$mt_i$	0.0482	kg
$r_0$	0.040	m	$m_i$	0	kg	$Lt_i$	0.030	m
$L_0$	0.200	m	$r_i$	0.040	m	$bt_i$	0.015	m
$b_0$	0.025	m	$b_i$	0.015	m	$ht_i$	0.0005	m
$h_0$	0.001	m	$h_i$	0.0005	m	$rt_i$	0.015	m
$E$	$2.1e^{11}$	N/m <sup>2</sup>	$E_i$	$2.1e^{11}$	N/m <sup>2</sup>	$Ix_i$	$mt_i \frac{Lt_i^2 + ht_i^2}{12}$	$4.0167e^{-6}$ kg m <sup>2</sup>
$I_0$	$\frac{b_0 h_0^3}{12}$	$2.0833e^{-12}$ m <sup>4</sup>	$I_i$	$\frac{b_i h_i^3}{12}$	$1.5625e^{-13}$ m <sup>4</sup>	$Iy_i$	$mt_i \frac{bt_i^2 + ht_i^2}{12}$	$2.0083e^{-6}$ kg m <sup>2</sup>
$k_0$	$4 \frac{12EI_0}{L_0^3}$	2625 N/m;	$k_i$	$\frac{3EI_i}{L_i^3}$	384,5 N/m	$Iz_i$	$mt_i \frac{Lt_i^2 + bt_i^2}{12}$	$5.2217e^{-6}$ kg m <sup>2</sup>

## 6.1.2 Calibração da bancada e estimativa de amortecimento

A velocidade de rotação do rotor é controlada através da entrada de voltagem. Para obter a relação entre a voltagem medida e a velocidade de operação do conjunto, uma curva de calibração que relaciona as duas grandezas foi construída. Esta curva é apresentada na figura (6.4). Nota-se que a relação entre voltagem e velocidade de rotação é linear em duas regiões distintas.



**Figura 6.4:** Curva de calibração – relação entre a voltagem de entrada e velocidade de rotação

As medições iniciais no sistema não-girante tem como objetivo identificar corretamente os parâmetros de rigidez e amortecimento da bancada. Primeiramente, a bancada de testes é excitada através de um impulso, sendo que o *shaker* está desmontado da fundação. Neste caso, a frequência medida e o fator de amortecimento são dados por

$$\omega_d = 4.65Hz \quad \xi = 2.82 \cdot 10^{-3} \quad (6.3)$$

O fator de amortecimento é estimado a partir do decremento logarítmico do sinal de aceleração no tempo. Como o fator de amortecimento estimado é muito baixo, será desprezado no cálculo da rigidez

$$\omega_n = 4.65Hz \quad \rightarrow k_o = \omega_n^2 m_o = 1902N/m \quad (6.4)$$

O valor da massa foi apresentado na tabela (6.1). Repetindo estas medições, com uma excitação impulsiva, mas com o *shaker* montado (energizado) na fundação, os valores obtidos da frequência amortecida e do fator de amortecimento são:

$$\omega_d = 6.67Hz \quad \xi = 0.07 \quad (6.5)$$

Assim, a frequência natural e o amortecimento são dados por

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1 - \xi^2}} = 41.99rad/s \quad d = 2\xi\omega_n m_o = 13.10Ns/m \quad (6.6)$$

e, finalmente, a rigidez equivalente do conjunto é dada por

$$\omega_n = \frac{41.99}{2\pi} = 6.68Hz \quad \rightarrow \quad k_o = \omega_n^2 m_o = 3928N/m \quad (6.7)$$

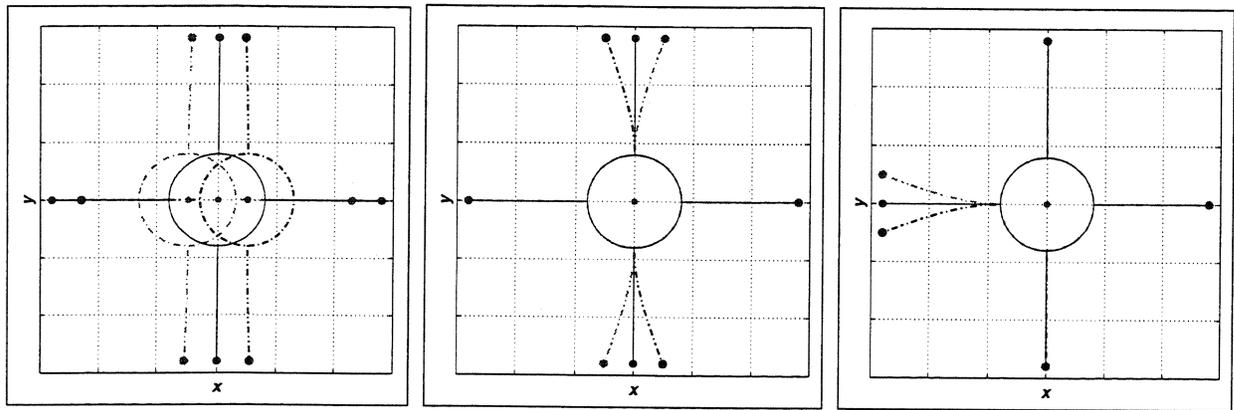
### 6.1.3 Modos de vibração do sistema não-girante

As freqüências e modos de vibração correspondentes do conjunto rotor e palhetas não-girante,  $\Omega = 0$  são obtidos a partir da análise de autovalores e autovetores da equação (3.38). Na tabela (6.2) as freqüências obtidas a partir do modelo teórico e com as medições da bancada de testes são comparadas. Na mesma tabela são apresentados também os autovetores obtidos nas condições sem amortecimento e com o amortecimento estimado na equação (6.6). Estas formas modais estão ilustradas na figura (6.5). O modo 1 (RP), figura (6.5(a)), representa um modo em que há vibração predominante do rotor, mas com uma pequena vibração das palhetas 2 e 4. Os modos 2, 3 e 4 (P), figuras (6.5(b)), (6.5(c)) e (6.5(d)), representam modo de vibração das palhetas apenas. Finalmente o modo 5 (PR), figura (6.5(e)) é um modo em que há vibração das palhetas, juntamente com uma pequena vibração do rotor.

**Tabela 6.2:** Sistema não-girante – formas modais teóricas

	Modo 1 (RP)	Modo 2 (P)	Modo 3 (P)	Modo 4 (P)	Modo 5 (PR)
Teo. (Hz)	6.39	17.34	17.34	17.34	17.73
Exp. (Hz)	6.60	16.5	16.5	16.5	17.0
Dif. (%)	3.18	5.09	5.09	5.09	4.29
Sem amortecimento					
$z_0$	1	0	0	0	0.0716
$z_1$	0	0	0	1	0
$z_2$	-0.0960	1	0	0	1
$z_3$	0	0	1	0	0
$z_4$	0.0960	1	0	0	-1
Amortecimento na base $c = 13.1 \text{ Nm/s}$					
$z_0$	0.9979 - 0.0021i	0	0	0	0.0714 + 0.0040i
$z_1$	0	0	0	1	0
$z_2$	-0.0945 - 0.0145i	1	0	0	1
$z_3$	0	0	1	0	0
$z_4$	0.0945 + 0.0145i	1	0	0	-1

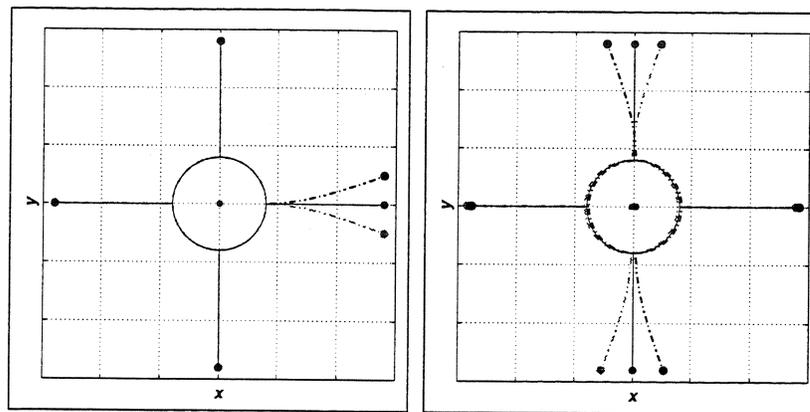
A diferença encontrada entre as freqüências críticas das palhetas, modos 2, 3 e 4 (P) são explicadas pelo tipo de função de forma escolhida, conforme discussão apresentada no capítulo (2), na tabela (2.4). A utilização da família de funções polinomiais de ordem quatro pode diminuir este erro. Contudo, comparando-se a ordem de erro obtida nos outros modos e levando-se em consideração resolução em freqüência utilizada, o erro observado encontra-se dentro de uma faixa aceitável. A utilização de outra família de funções de forma de quarta ordem, aumentaria a ordem do modelo numérico, sem grande benefício em contrapartida.



(a) Modo 1 (RP) -  $\omega_n = 6.39$  Hz

(b) Modo 2 (P) -  $\omega_n = 17.35$  Hz

(c) Modo 3 (P) -  $\omega_n = 17.35$  Hz



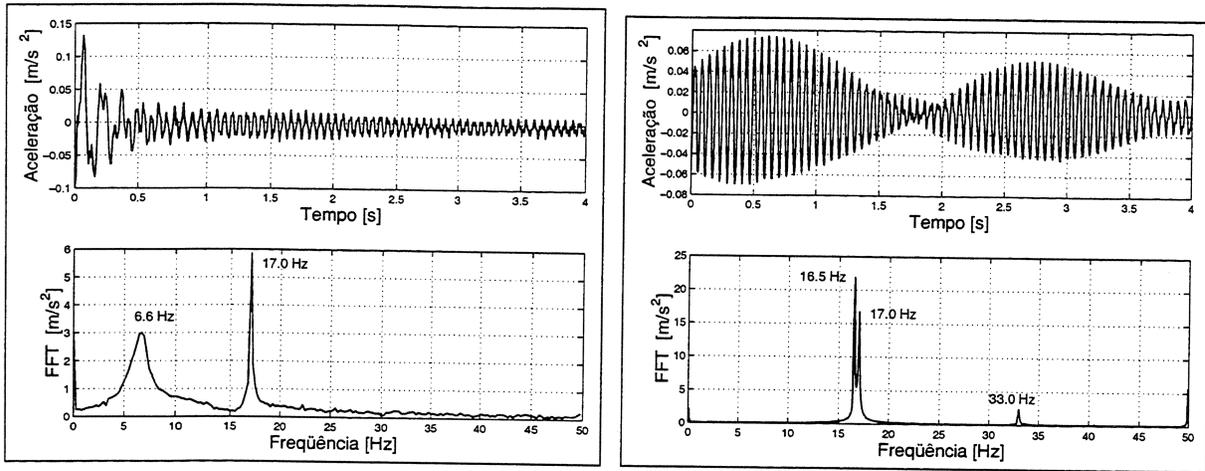
(d) Modo 4 (P) -  $\omega_n = 17.35$  Hz

(e) Modo 5 (PR) -  $\omega_n = 17.74$  Hz

**Figura 6.5:** Modos de vibração do conjunto base-palhetas -  $\Omega = 0$  - resultados teóricos

Os resultados obtidos com a análise modal numérica mostram que as frequências associadas ao segundo, modo (P), e quinto, modo (PR) estão muito próximas. Dessa forma, a escolha da resolução em frequência  $\Delta f$ , durante a montagem do experimento, deve ser feita de maneira cuidadosa. A figura (6.6) apresenta os sinais de aceleração obtidos com duas resoluções em frequência diferentes. Os resultados obtidos, mostram que é necessário uma resolução em frequência fina  $\Delta f$  para identificar corretamente as três primeiras frequências deste conjunto.

Conforme verificado anteriormente, as frequências críticas do segundo modo (P), que representa um movimento de palheta apenas, e do quinto modo, (PR), que representa movimentos acoplados da base e das palhetas, são extremamente próximas uma da outra. A figura (6.7) ilustra a variação das frequências naturais do conjunto em função da razão de massa  $mp_i/m_0$ , massa do palheta e massa da base. A linha fina vertical no gráfico indica o ponto em que a razão de massa da bancada de teste se encontra. Pode ser visto que, neste caso, a diferença entre o modo de palheta



(a)  $\Delta f = 0.25$  Hz e excitação na fundação

(b)  $\Delta f = 0.088$  Hz e excitação na palheta

Figura 6.6: Aceleração experimental da massa da base, excitada por uma força impulsiva, realizada com dois incrementos de frequência  $\Delta f$ .

(P) e o modo acoplado de rotor e palheta (PR) é pequena.

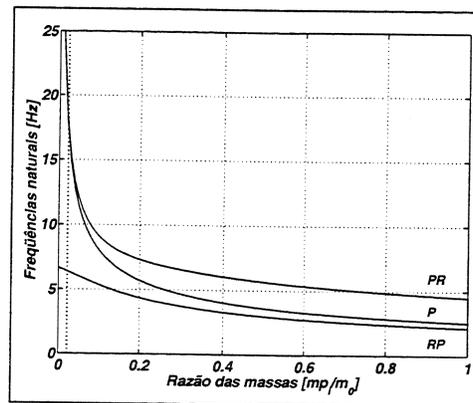
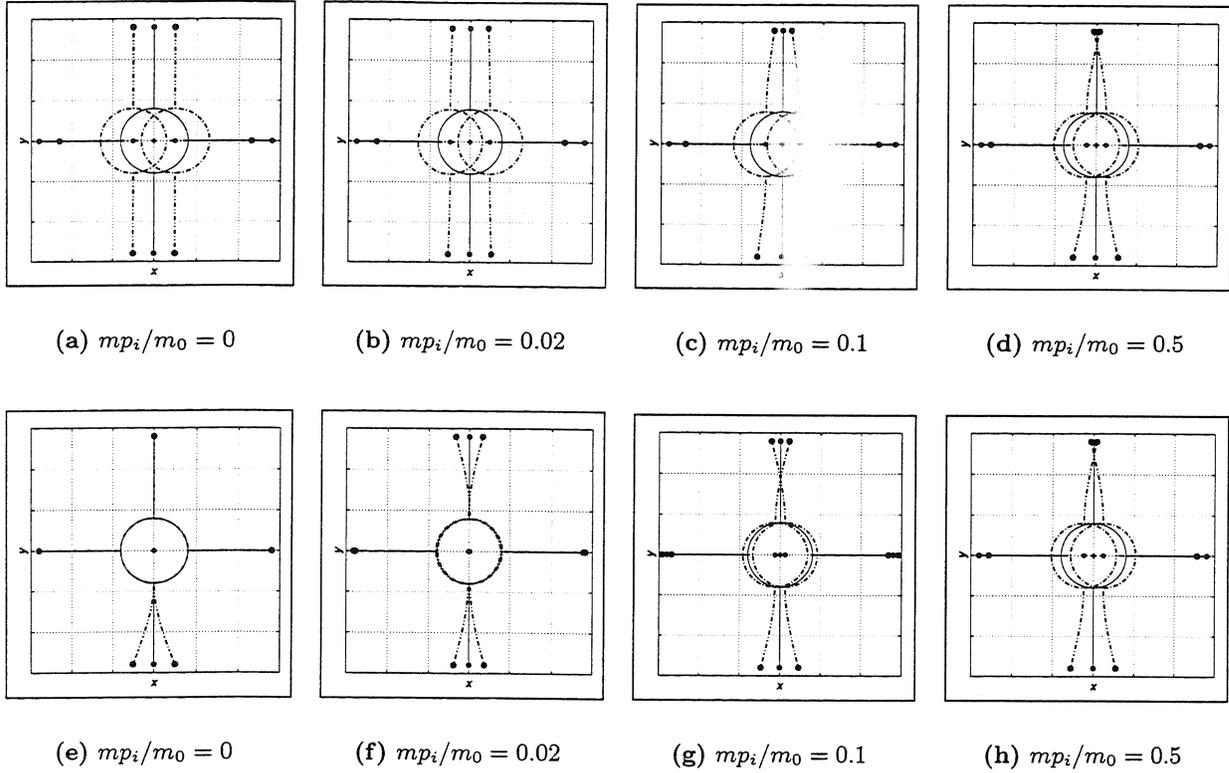


Figura 6.7: Variação das frequências naturais em função do aumento da razão da massa  $mp_i/m_0$

Na figura (6.5), o primeiro e quinto modos correspondem aos movimentos acoplados do rotor e palhetas. Nas condições da bancada de testes, o primeiro modo apresenta um grande movimento da base e pequeno deslocamento das palhetas. Contudo, o quinto modo apresenta comportamento oposto, sendo que neste caso o movimento das palhetas é predominante. Estes resultados podem ser verificados na tabela (6.2), em que os autovetores são apresentados. Conforme a razão da massa é aumentada o acoplamento entre estas dois movimentos, da base e palhetas, é maior, de acordo com a figura (6.8). No caso em que esta razão tende a zero, não há acoplamento entre estes dois movimentos.



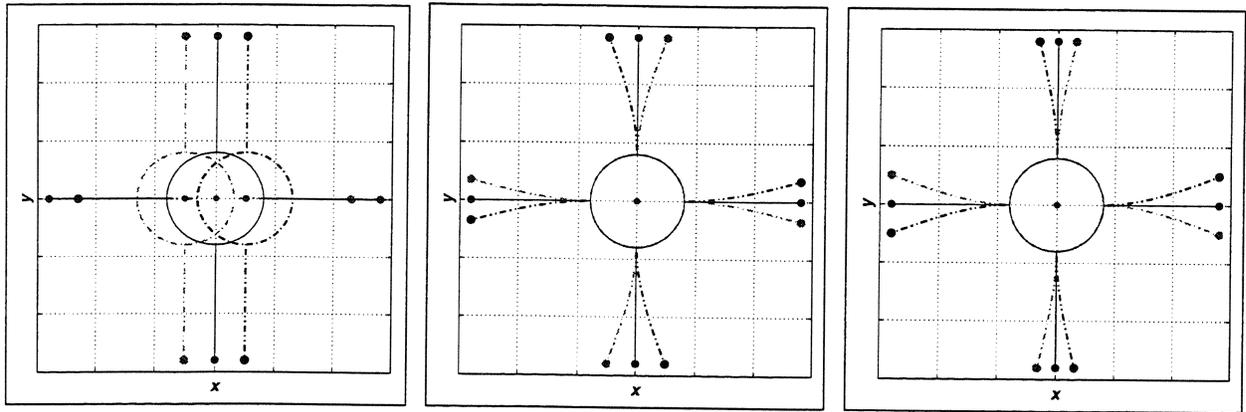
**Figura 6.8:** Variação das formas modais (RP) e (PR) em função do aumento da razão da massa. As figuras (a), (b), (c), (d) e (e) correspondem ao primeiro modo (RP). As figuras (f), (g), (h), (i) e (j) correspondem ao quinto modo (PR).

#### 6.1.4 Modos de vibração do sistema girante

Os resultados obtidos anteriormente referem-se à condição do conjunto em que o rotor não está operando. No caso em que o rotor opera com velocidade de rotação constante, a análise das freqüências e modos de vibração do conjunto deve ser feita seguindo os conceitos apresentados no capítulo (4), recorrendo-se ao conceito de análise modal variante no tempo.

No caso em que o rotor opera com a velocidade constante, as freqüências-básicas e os modos-básicos são obtidos a partir da solução do problema de autovalor equivalente, invariante no tempo. As formas modais destes autovetores-básicos são apresentados na figura (6.9), quando o rotor opera com velocidade constante de  $\Omega = 10$  Hz. Nota-se que o primeiro modo apresenta freqüência próxima à apresentada na tabela (6.2). Este modo apresenta movimento predominante da base, sendo que esta freqüência não é influenciada pela velocidade de rotação. Os modos 2 e 3, que apresentam freqüências coincidentes, e os modos 4 e 5 são influenciados pela velocidade de rotação, sofrendo aumento com o aumento da velocidade de rotação.

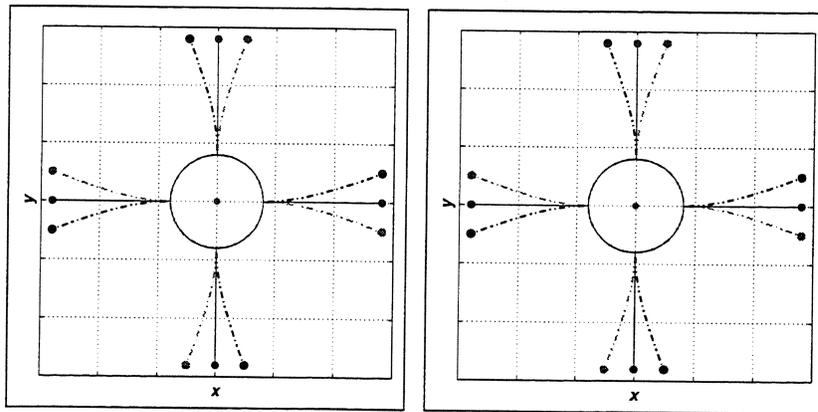
A figura (6.10) apresenta as formas modais de vibração paramétrica de ordem 1. A vibração paramétrica de ordem 1 corresponde ao primeiro termo da série de Fourier do autovetor variante no



(a) Modo 1 - 6.23 Hz

(b) Modo 2 - 19.88 Hz

(c) Modo 3 - 19.88 Hz



(d) Modo 4 - 20.14 Hz

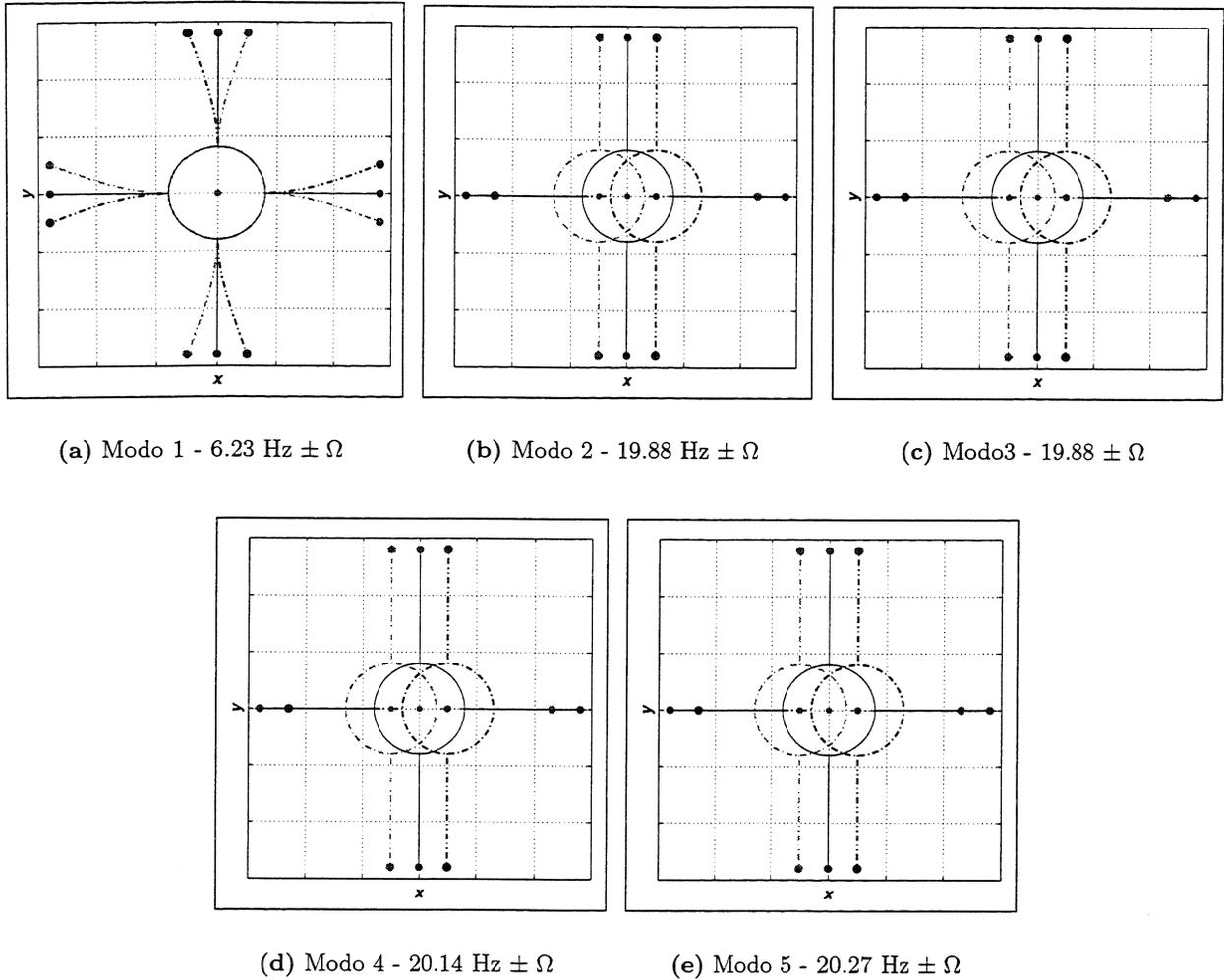
(e) Modo 5 - 20.27 Hz

Figura 6.9: Modos-básicos de vibração do conjunto rotor-palhetas. Velocidade de rotação  $\Omega = \dot{\phi} = 10$  Hz

tempo. As figuras mostram que os modos são recíprocos, ou seja, o modo-básico 1, cujo movimento é predominante da base, apresenta modo paramétrico, cujo movimento é predominante de palheta.

### 6.1.5 Diagramas de cascata e análise na freqüência

O diagrama de cascata experimental é construído a partir da superposição de vários sinais de aceleração, no domínio da freqüência, com diferentes velocidades angulares do rotor. A velocidade de rotação do rotor é controlada pela entrada de voltagem. As medidas foram realizadas com um incremento de 0,2 V e o valor de velocidade angular correspondente é obtida com a curva de calibração (6.4). O conjunto é excitado por um impulso, criado por um gerador de sinais e aplicado à estrutura por um *shaker* eletromagnético. A medição do sinal é obtida por um acelerômetro montado à massa da base ou fundação. O resultado deste diagrama construído é a figura (6.11).

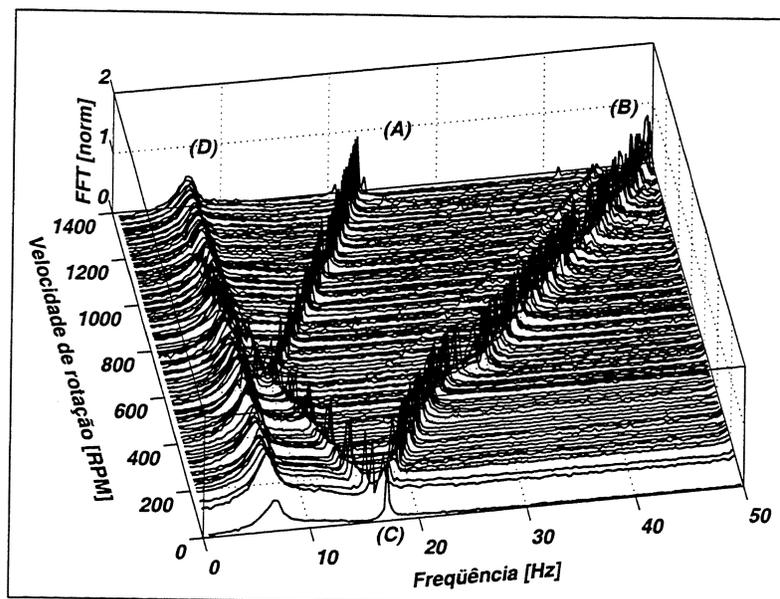


**Figura 6.10:** Modos paramétricos de ordem 1 do conjunto rotor-palhetas. Velocidade de rotação  $\Omega = 10 \text{ Hz}$

Nesta diagrama os seguintes conjuntos de picos são observados: (a) desbalanceo, cuja frequência varia linearmente em função da velocidade angular; (b) vibração paramétrica das frequências naturais das palhetas, aumentando em função da velocidade angular; (c) vibração paramétrica, diminuindo em função da velocidade angular e (d) frequência crítica associada ao sistema massa-mola, o qual não depende da velocidade angular.

### 6.1.6 Comparação com resultados teóricos

Após analisar os modos de vibração da bancada nas condições não-girante e girante, a variação das características dinâmicas do conjunto rotor e palhetas em função da velocidade de rotação é estudada numericamente. Neste caso, o diagrama de cascata é construído com a transformada de Fourier dos sinais de aceleração, que são obtidos pela integração numérica das equações de movimento do conjunto. Estas curvas são normalizadas, sendo o sinal no domínio da frequência é



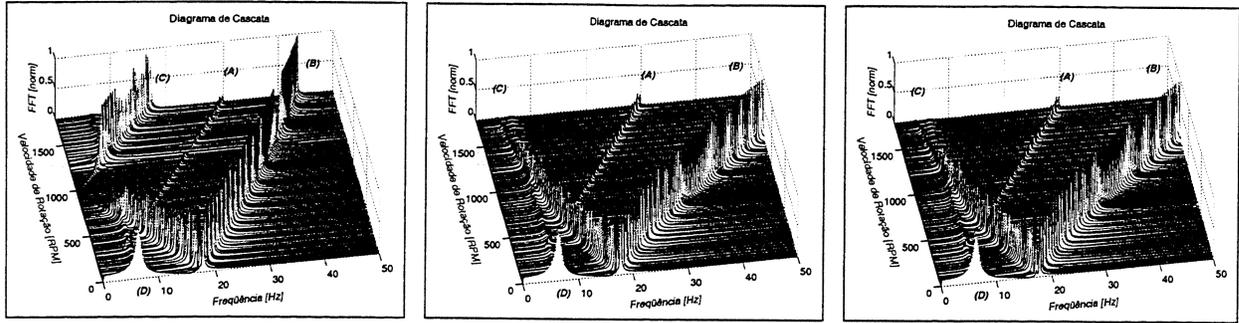
**Figura 6.11:** Diagrama de cascata experimental. Descrição dos picos observados: (A) velocidade de rotação; (B) frequências paramétricas dos modos de palheta, de ordem 1, termos positivos; (C) frequências paramétricas dos modos de palheta, de ordem 1, termos negativos e (D) frequências naturais da fundação.

dividido pelo valor máximo absoluto em cada velocidade. As equações de movimento, apresentadas no capítulo (3), representam três abordagens para modelar a deformação das vigas sendo que estas equações são lineares, equação (3.38), linearizadas de segunda ordem, equação (3.47), e não-lineares, equação (3.55). O método de integração numérico utilizado é o método de Runge-Kutta de quartas e quintas ordens. Nestas simulações numéricas são empregados os parâmetros apresentados na tabela (6.1), sendo que a massa equivalente das palhetas é dada pela equação (6.2).

Os diagramas de cascata construídos estão apresentados nas figuras (6.12), (6.13), (6.14) e (6.15). Em cada uma destas figuras três diagramas são apresentados, sendo que cada um destes corresponde a uma aproximação do modelo de viga: linear, linearizado de segunda ordem e não-linear. A excitação considerada é uma força impulsiva com duração de  $\Delta t = 0.001$  s, sendo que o ponto de excitação é a massa da base, figuras (6.12) e (6.13) ou a palheta  $p_1$ , figuras (6.14) e (6.15).

Os diagramas de cascata, tanto o experimental quanto os numéricos, apresentam, de maneira clara, as seguintes características: enrijecimento centrífugo, que é o aumento das frequências críticas das vigas devido à velocidade de rotação, e o aparecimento de vibrações paramétricas, devido à variação periódica das matrizes das equações de movimento. As vibrações paramétricas são calculadas pela soma das frequências-básicas, ou autovalores-básicos, e a velocidade em que as matrizes estão mudando, que neste caso corresponde à velocidade de rotação  $\dot{\phi} = \Omega$ .

A figura (6.12) apresenta a simulação numérica nas mesmas condições de excitação e medição da bancada de testes, ou seja, excitação e medição na massa da base (fundação). Nesta figura, entre os três diagramas apresentados, os diagramas de cascata das figuras (6.12(b)) e (6.12(c)),

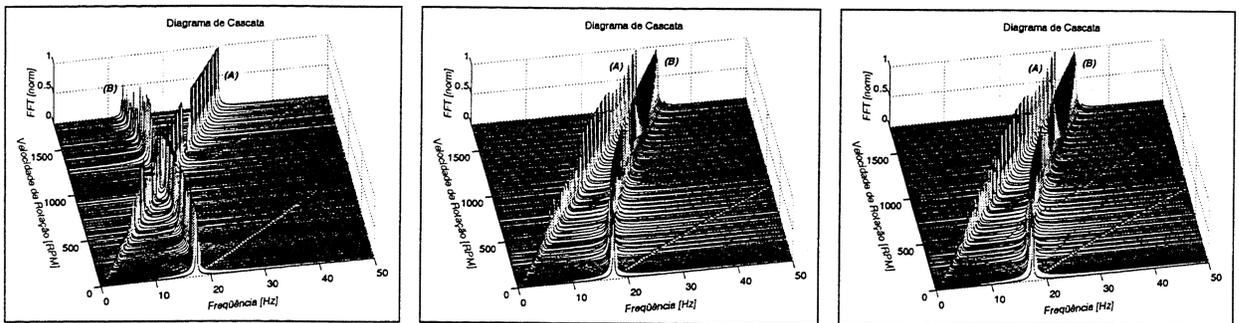


(a) Linear

(b) Linearizado 2a. ordem

(c) Não-linear

**Figura 6.12:** Diagrama de cascata numérico. Ponto de excitação: fundação. Ponto de observação: fundação. Descrição dos picos observados: (A) velocidade de rotação; (B) frequências paramétricas dos modos de palheta, de ordem 1, termos positivos; (C) frequências paramétricas dos modos de palheta, de ordem 1, termos negativos e (D) frequências naturais da fundação.



(a) Linear

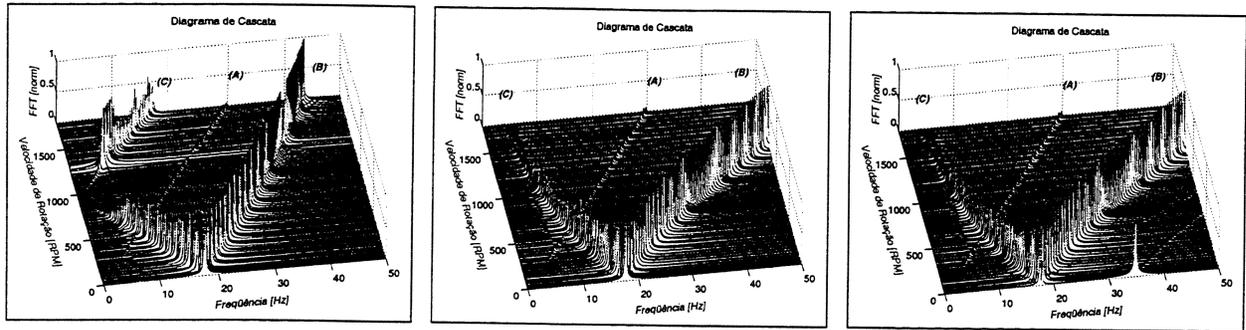
(b) Linearizado 2a. ordem

(c) Não-linear

**Figura 6.13:** Diagrama de cascata numérico – Ponto de excitação: fundação. Ponto de observação: palheta  $p_1$ . Descrição dos picos observados: (A) velocidade de rotação e (B) frequências críticas (básicas) das palhetas.

respectivamente modelos linearizado de segunda ordem e não-linear, concordam com o diagrama experimental da figura (6.11). Por outro lado, os resultados obtidos com o modelo linear, figura (6.12(a)) não concordam com os resultados experimentais. Assim pode-se concluir pelos resultados apresentados, que para obter um modelo matemático da bancada de testes, a utilização de um modelo linear de viga não é adequado. Ainda, não são observadas diferenças significativas entre os modelos não-linear e linearizado de segunda ordem.

A figura (6.13) apresenta os diagramas de cascata numéricos obtidos com a excitação na massa da base, mas com observação na palheta  $p_1$ . Neste caso, comportamento análogo é observado, com o aparecimento de vibrações paramétricas e do efeito de enrijecimento centrífugo. Nota-se, também, que não existem diferenças notáveis entre os modelos linearizados de segunda ordem e não-linear e

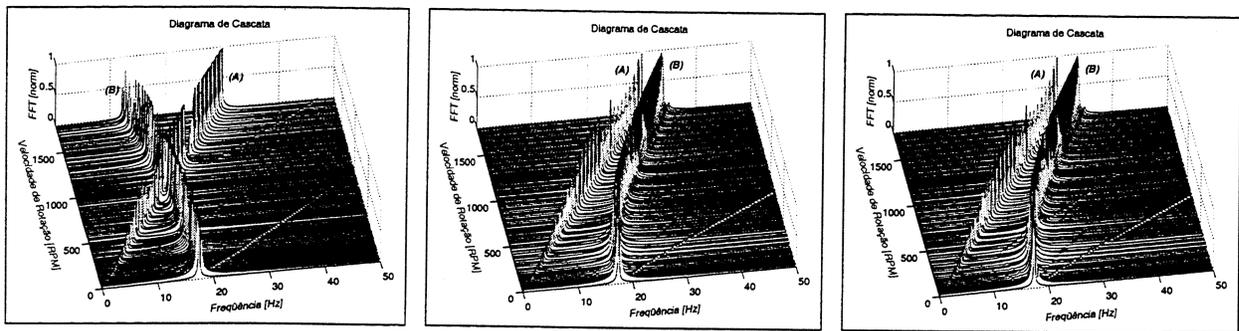


(a) Linear

(b) Linearizado 2a. ordem

(c) Não-linear

**Figura 6.14:** Diagrama de cascata numérico – Ponto de excitação: palheta  $p_1$ . Ponto de observação: fundação. Descrição dos picos observados: (A) velocidade de rotação; (B) freqüências paramétricas dos modos de palheta, de ordem 1, termos positivos e (C) freqüências paramétricas dos modos de palheta, de ordem 1, termos negativos.



(a) Linear

(b) Linearizado 2a. ordem

(c) Não-linear

**Figura 6.15:** Diagrama de cascata numérico – Ponto de excitação: palheta  $p_1$ . Ponto de observação: palheta  $p_1$ . Descrição dos picos observados: (A) velocidade de rotação e (B) freqüências críticas (básicas) das palhetas.

que o diagrama obtido com o modelo linear apresenta resultados discrepantes dos dois primeiros. Contudo, verifica-se que os picos indicados pela legenda (B) que aparecem na figura (6.13) são diferentes daqueles também indicados por (B) e que aparecem na figura (6.12). No primeiro caso, figura (6.12), em que a aceleração foi observada na massa da base, estes picos correspondem à vibração paramétrica das freqüências críticas das palhetas. Por outro lado, na figura (6.13), em que a aceleração é observada na palheta, os picos correspondem efetivamente às freqüências críticas das palhetas. Estas observações levam à conclusão de que, a partir de medições na massa da base, torna-se possível medir as freqüências das palhetas de maneira indireta, ou seja, a partir das medições de suas vibrações paramétricas. A medição direta da vibração das palhetas só é possível com sensores fixos ao rotor ou montados no sistema móvel de referência.

As figuras (6.14) e (6.15) apresentam os diagramas de cascata considerando que o sistema é excitado por uma força impulsiva na palheta  $p_1$ . Neste caso, o mesmo comportamento em relação aos modelos linear, linearizado de segunda ordem e não-linear são observados. Igualmente, verifica-se que na figura (6.14), em que a aceleração é medida na massa da base, os picos indicados por (B) correspondem à vibração paramétrica das frequências críticas das palhetas, enquanto que na figura (6.15) os picos indicados por (B) correspondem às frequências críticas das palhetas propriamente ditas.



## Capítulo 7

# Conclusões

O problema do acoplamento dinâmico entre rotor e palhetas foi dividido em: escolha da viga girante para modelar a palheta flexível, relação entre enrijecimento centrífugo e ordem da teoria de deformação da viga, escolha da função de forma, desacoplamento entre deslocamentos e deformações longitudinais da viga plana (Capítulo 2), desenvolvimento de modelos matemáticos de um rotor rígido acoplado a quatro palhetas flexíveis, empregando Método de Newton-Euler-Jourdain (Capítulo 3), estudo da teoria geral de sistemas lineares variantes e invariantes (no tempo), expansão do conceito de análise modal para sistemas periodicamente variantes (Capítulo 4), solução numérica de equações diferenciais não-lineares, solução de equações diferenciais periodicamente variantes através da superposição modal (Capítulo 5) e, finalmente, validação experimental (Capítulo 6).

Dadas as dimensões e características da palheta, optou-se por utilizar a viga plana para aproximar a palheta flexível. O acoplamento entre os deslocamentos devido à flexibilidade da viga e a velocidade de rotação torna a análise dinâmica deste sistema mais complexa, pois é necessário utilizar uma aproximação geometricamente não-linear para corretamente considerar este acoplamento. A hipótese de pequenos deslocamentos não é aplicável, no caso da viga girante, sendo que a relação entre seu deslocamento e deformação deve incluir termos não-lineares. Procurou-se verificar qual a importância real destes termos não-lineares e de que forma eles acoplam os dois movimentos a que viga está sujeita – deformação elástica e rotação – e seu resultado na resposta dinâmica da viga girante. A primeira conclusão importante é que os termos não-lineares são responsáveis pelo enrijecimento centrífugo, ou seja, o aumento das frequências naturais da viga em função da velocidade de rotação. No caso das equações de movimento obtidas apenas com os termos lineares de deformação, os resultados obtidos são discrepantes, uma vez que as frequências naturais da viga diminuem com o aumento da velocidade de rotação, o que é o oposto do observado experimentalmente. Conclui-se, também, que as equações de movimento da viga devem ser obtidas incluindo ao menos termos não-lineares de segunda ordem do vetor de deformação, para corretamente prever o enrijecimento centrífugo da viga girante. A utilização do vetor de deformação não-linear completo, embora possa parecer mais robusto, introduz limitações na solução das equações de movimento

resultantes. O vetor de deformação não-linear inclui deslocamentos longitudinais e transversais e, para que o acoplamento entre o movimento destas duas direções seja corretamente considerado, é necessária a inclusão de vários modos, tanto transversais quanto longitudinais, o que resulta em um modelo numérico de grande dimensão, instável e de difícil integração. Portanto, na escolha final da teoria de viga a ser utilizada, estes aspectos, teoria não-linear e modelo numérico resultante, devem ser ponderados.

Posterior a análise da importância dos termos não-lineares de deformação nas equações de movimento, foi apresentada uma metodologia de discretização destas equações, empregando o Método dos Modos Assumidos, sendo que alguns resultados numéricos foram apresentados comparando os valores obtidos para as frequências das palhetas para diversas famílias de funções tentativa. A família de funções que apresentou resultados satisfatórios com menor número de graus de liberdade foi a família polinomial. Com a escolha da função de forma para discretizar as equações de movimento da viga girante, três modelos numérico são obtidos para análise comparativa: (a) linear, que utiliza apenas termos lineares do vetor de deformação; (b) linearizado de segunda ordem, que utiliza termos lineares e não-lineares de segunda ordem do vetor de deformação; e (c) não-linear completo, que utiliza o vetor de deformação não-linear completo.

A implementação destes três modelos de viga plana, entretanto, encontrou grandes dificuldades numéricas. Estas limitações são originadas pelo fato da viga plana apresentar rigidez longitudinal muito maior que a transversal. A diferença entre os valores da rigidez torna a integração numérica muito lenta, pois é necessário utilizar um incremento de tempo muito pequeno, devido à frequência natural mais alta na direção longitudinal, ou seja, o problema é *stiff*. Além disso, devido à necessidade de utilizar vários modos longitudinais e transversais, de modo a corretamente considerar o acoplamento destas direções, o modelo numérico resultante apresenta muitos graus de liberdade, o que é proibitivo para a futura montagem em um sistemas de múltiplos corpos, em que se busca justamente minimizar o número de coordenadas. A opção escolhida para contornar estas dificuldades é desacoplar as deformações longitudinais e transversais. A partir do vetor de deformações não-linear é possível estimar o deslocamento longitudinal devido ao deslocamento transversal. Esta abordagem é equivalente a eliminar os modos longitudinais da resposta da viga em baixas frequências de tal forma que o modelo obtido é menor e mais eficiente do ponto de vista computacional. Resultados numéricos, obtidos nas condições em que a velocidade de rotação é constante e também acelerando, são comparadas, mostrando que na primeira condição os modelos linearizado de segunda ordem e não-linear apresentam boa concordância, o que não ocorre na segunda condição. Finalmente, conclui-se que o modelo linear não é adequado para representar a dinâmica da viga girante.

Em uma segunda etapa, apresentou-se a metodologia para obtenção das equações de movimento do conjunto formado por um rotor rígido e quatro palhetas flexíveis. Inicialmente o rotor considerado é plano (T1), ou seja, pode deslocar-se apenas em duas direções ortogonais. A metodologia de obtenção das equações diferenciais de movimento é detalhadamente apresentada, sendo que estas foram obtidas a partir das equações de Newton-Euler-Jourdain ou princípio das potências virtuais. A flexibilidade das palhetas é abordada de três diferentes maneiras, seguindo os exemplos

numéricos apresentados no segundo capítulo. Assim, três diferentes modelos do conjunto rotor e palhetas são obtidos: linear, linearizado de segunda ordem – que inclui apenas a rigidez geométrica – e um modelo não linear completo, sendo que, para este último, os deslocamentos e deformações longitudinais são desacoplados, como no caso da viga girante. A comparação entre as equações de movimento dos três modelos mostra que um está incluído no outro, sendo que a faixa de validade de cada um destes é definida pelas condições de operação do rotor. Finalmente, verifica-se também que as matrizes são variantes no tempo, pois dependem do ângulo de rotação do rotor. Se o rotor operar com velocidade constante, a variação destas matrizes é periódica. No caso deste tipo de sistema, os termos dependentes do tempo aparecem nas matrizes nas posições de acoplamento entre os graus de liberdade do rotor e palhetas. Seguindo a metodologia apresentada, são desenvolvidas as equação de movimento de um rotor acoplado também a quatro palhetas, sendo que neste caso o rotor apresenta somente movimentos angulares, ou em outras palavras, o efeito giroscópico do rotor é incluído, modelo T2. Neste caso, apenas o modelo linearizado de segunda ordem é desenvolvido, sendo que as matrizes também são variantes no tempo. A diferença em relação ao caso anterior é que os termos dependentes do ângulo de rotação também aparecem na diagonal principal das matrizes e não apenas nas posições de acoplamento entre rotor e palhetas. Finalmente, o modelo matemático de um rotor com movimento tridimensional, ou seja, deslocamentos lineares e angulares resultando em quatro graus de liberdade, é apresentado. Este modelo é chamado de T3. Também neste caso, o modelo desenvolvido é o linearizado de segunda ordem, sendo que observa-se novamente o aparecimento de termos dependentes do ângulo de rotação não apenas nas posições de acoplamento entre rotor e palhetas, mas também na diagonal principal das matrizes.

A partir da observação das equações de movimento desenvolvidas para o rotor acoplado a palhetas flexíveis, tornou-se necessário estudar novas técnicas para analisar estas equações. Dessa forma, o Capítulo 4 apresentou a teoria geral de sistemas lineares, que é válida tanto para sistemas cujas equações diferenciais de movimento apresentam coeficientes constantes ou variantes no tempo. Contudo, desenvolver uma metodologia para obter efetivamente a solução da equação diferencial de movimento só é possível nos casos em que os coeficientes são constantes ou, ao menos, periodicamente variantes no tempo. A solução de problemas com coeficientes constantes foi detalhadamente apresentada para revisão e comparação com a metodologia apresentada para sistemas com coeficientes periódicos. A metodologia de solução de sistemas periodicamente variantes é baseada na solução da equação de Hill, que consiste, basicamente, em expandir os coeficientes periódicos em série de Fourier. Desta forma, é possível estimar uma solução aproximada de um sistema constante, equivalente ao sistema periódico original. Além disso, alguns conceitos e parâmetros largamente empregados em dinâmica de múltiplos corpos e dinâmica estrutural, tais como frequências naturais, modos de vibração e função de resposta em frequência podem ser adaptados para descrever os sistemas periódicos. Conceitos, tais como frequências naturais-básicas, modos-básicos e função de resposta em frequência cíclica, são introduzidos e permitem uma análise dinâmica de sistemas periódicos análoga a sistemas com coeficientes constantes.

Finalmente, as equações de movimento do conjunto rotor-palhetas apresentadas no Capítulo

3 são resolvidas. Inicialmente, considera-se o rotor plano acoplado a quatro palhetas, para o qual três diferentes abordagens foram desenvolvidos. Primeiramente são apresentados resultados obtidos diretamente da integração numérica das equações de movimento, utilizando o Método de Runge-Kutta de quinta ordem com passo variável. O objetivo inicial é comparar estes três modelos, tanto nas condições em que o rotor opera com velocidade constante quanto em que o rotor acelera. As simulações indicaram que o modelo linear não é adequado, sendo que sua faixa de validade restringe-se a velocidades de rotação muito baixas, sendo que, na velocidade de rotação coincidente com a frequência natural da viga não girante, a rigidez resultante da palheta é nula, o que não ocorre no sistema físico correspondente. Por outro lado, os modelos linearizado de segunda ordem e não-linear apresentam boa concordância entre si quando o rotor opera com velocidade constante, mas apresentam diferenças quando o rotor acelera, sendo que para este caso, o modelo não-linear parece ser mais adequado. Para a condição em que o rotor opera com velocidade constante foram construídos também diagramas de cascata, no domínio da frequência, que permitem elucidar como o comportamento do sistema está variando em função da velocidade de rotação. A análise destes diagramas mostra o aparecimento de outros picos, além das frequências críticas, que são relacionadas a vibração paramétrica, originados da variação periódica das matrizes. Com o objetivo de melhor entender o aparecimento da vibração paramétrica na resposta dinâmica do conjunto, como esta é excitada e a forma modal a ela associada, a metodologia de análise modal variante no tempo é empregada para analisar estas equações de movimento. Esta metodologia, desenvolvida no Capítulo 4 para estimar as frequências-básicas e seus modos-básicos associados, é restrita aos modelos linear e linearizado de segunda ordem. Os gráficos mostrando a variação das frequências-básicas em função da velocidade de rotação deixam claro a variação quadrática das frequências críticas das palhetas. O modelo linearizado de segunda ordem apresenta crescimento destas frequências em função da velocidade de rotação, enquanto o modelo linear apresenta decrescimento. Com a determinação das frequências-básicas do conjunto rotor e palhetas, nota-se que as vibrações paramétricas que aparecem no diagrama de cascata correspondem às frequências-básicas adicionadas à velocidade de rotação do sistema. Ainda para este modelo é mostrada a comparação entre a solução, no domínio do tempo, numérica e obtida pela superposição modal variante no tempo, sendo os resultados extremamente coerentes.

Ainda com enfoque nas simulações numéricas, são apresentados os resultados obtidos para o segundo modelo mecânico T2 do conjunto rotor com palhetas. Para este exemplo é apresentada uma análise detalhada da influência dos diferentes fenômenos, enrijecimento centrífugo, efeito giroscópico e aceleração de coriolis, sobre as frequências-básicas do sistema, sendo que cada um destes foi sucessivamente incluído antes de proceder à análise modal variante no tempo. Finalmente, diagramas de cascata, no domínio da frequência, procuram ilustrar a variação do comportamento dinâmico deste modelo em função da velocidade de rotação. Em comparação aos resultados observados para o modelo do rotor plano, nota-se, nesta nova situação, o efeito do ângulo de rotação e da velocidade de rotação são mais pronunciados.

Após a detalhada análise numérica dos modelos desenvolvidos no Capítulo 3, procedeu-se a

validação experimental dos mesmos utilizando uma bancada de testes. As medidas realizadas, com diferentes velocidades de rotação de modo a criar um diagrama de cascata experimental, mostram a presença e significado dos fenômenos ressaltados durante o desenvolvimento e análise dos modelos teóricos: o enrijecimento centrífugo e a o aparecimento da vibração paramétrica. Uma importante conclusão obtida deste diagrama de cascata é que, ao excitar e medir na fundação, as frequências medidas são a frequência-básica da fundação e a paramétrica do modo palheta-rotor, ou seja, a frequência-básica da palheta não pode ser medida através de sensores na própria fundação. Para medir as frequências-básicas da palheta é necessário utilizar sensores fixos no rotor (ou no sistema móvel girante). Finalmente, os resultados experimentais são comparados a simulações numéricas realizadas a partir do modelo do rotor plano apresentado no Capítulo 3. Os resultados teóricos e experimentais encontrados mostram boa concordância, no caso dos modelos linearizado de segunda ordem e não-linear. Os resultados experimentais indicaram também a necessidade da inclusão da inércia de rotação da massa concentrada, o que é feito através do cálculo de uma massa equivalente. Os resultados experimentais apontam também que existe uma pequena diferença entre as frequências da palheta, sendo que esta se deve à função de forma escolhida. Destas observações, conclui-se que os resultados obtidos com esta bancada de testes validam o modelo teórico desenvolvido e corroboram as investigações numéricas realizadas.

Os resultados teórico e experimentais obtidos ao longo deste trabalho permitem elucidar os principais aspectos do acoplamento entre rotor e palhetas flexíveis. Duas características são marcantes para caracterizar o comportamento dinâmico do conjunto: o efeito do enrijecimento centrífugo e o aparecimento das vibrações paramétricas. Estes dois fenômenos foram detalhadamente estudados, tanto do ponto de vista teórico quanto da sua implementação numérica. Com o auxílio da bancada de testes, estes dois efeitos também foram observados. Acredita-se que a metodologia apresentada para modelagem, solução e análise de sistemas híbridos possa ser utilizada também para estudar o problema de outros sistemas, máquinas e dispositivos que são formados por corpos flexíveis acoplados a corpos girantes. Um exemplo imediato é o estudo de discos flexíveis em turbomáquinas. Outro campo de aplicação para este tipo de conjunto são as turbinas eólicas, em que as palhetas podem ser aproximadas por vigas. A partir deste trabalho de doutorado outros trabalhos encontram-se em estágio de desenvolvimento na Universidade Técnica da Dinamarca. O primeiro refere-se ao estudo da dinâmica de turbinas eólicas flutuantes, enquanto que o segundo trata do controle de estruturas girantes. Ambos trabalhos podem se beneficiar das conclusões e resultados obtidos ao longo desta tese de doutorado.

## Apêndice A

# Transformação de um sistema variante no tempo em um sistema invariante

Este apêndice apresenta os principais teoremas a respeito da transformação de um sistema variante no tempo em um sistema algebricamente equivalente, mas invariante no tempo. Para alguns problemas, como os sistemas comutativos, é possível apresentar uma expressão para sua solução, ou seja, é possível obter uma forma para a matriz de transição de estado (Wu, 1978). Para outros tipos de problemas, procura-se estabelecer as condições em que é possível estudar o comportamento da solução *sem* o conhecimento prévio da matriz de transição. Estes sistemas são chamados de sistemas algebricamente invariáveis, como, por exemplo, os sistemas de Floquet.

### Definição 1.

Um sistema linear variante no tempo do tipo  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)$  é chamado de invariável se ele pode ser transformado em um sistema invariante no tempo do tipo  $\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{z}(t)$  por uma transformação válida (como uma transformação algébrica ou uma transformação do tipo  $t \rightarrow \tau$ ), onde  $\mathbf{F}$  é uma matriz constante e  $\mathbf{z}$  pode ser ou não uma função explícita do tempo.

### Definição 2.

Uma transformação algébrica é uma transformação de estados definida por  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{T}(t)\bar{\mathbf{x}}(t)$ , onde  $\mathbf{T}(t)$  é uma matriz não-singular para qualquer  $t$  e  $\dot{\mathbf{T}}(t)$  existe para  $\forall t$ .

### Definição 3.

Uma transformação  $t \rightarrow \tau$  é uma transformação de escala do tempo que leva de um domínio  $t$  para um domínio  $\tau$  e é definida por uma função da forma  $\tau = g(t)$ .

Os sistemas invariáveis podem ser subdivididos em duas categorias

1. *sistemas algebricamente invariáveis*: sistemas lineares variantes no tempo que podem ser transformados em sistemas invariantes através de uma transformação algébrica;

2. *sistemas  $t \rightarrow \tau$ -algebricamente invariáveis*: sistemas lineares variantes no tempo que podem ser transformados em sistemas invariantes por uma transformação algébrica e uma transformação do tipo  $t \rightarrow \tau$ .

**TEOREMA 1 (TEOREMA FUNDAMENTAL)**

*Qualquer sistema linear variante no tempo do tipo*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) \quad (\text{A.1})$$

*é algebricamente invariável. Se  $\mathbf{R}$  é uma matriz constante de dimensão  $n \times n$ , então o sistema dado pela equação (A.1), pode ser sempre transformado em um sistema invariante no tempo e algebricamente equivalente dado por*

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{R}\bar{\mathbf{x}}(t) \quad (\text{A.2})$$

*pela utilização da seguinte transformação algébrica*

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)e^{-\mathbf{R}(t-t_0)}\bar{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{T}(t)\bar{\mathbf{x}}(t) \quad (\text{A.3})$$

*onde  $\Phi(t, t_0)$  é a matriz de transição do sistema (A.1) e, portanto, satisfaz*

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = \mathbf{A}(t)\Phi(t, t_0) \quad (\text{A.4})$$

*Prova.* Considerando que a transformação algébrica  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{T}(t)\bar{\mathbf{x}}$  leva a um novo sistema de equações algebricamente equivalente à equação (A.1), dado por

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \bar{\mathbf{A}}(t)\bar{\mathbf{x}}(t) \quad (\text{A.5})$$

Portanto a matriz  $\bar{\mathbf{A}}$  deve ser dada por

$$\bar{\mathbf{A}}(t) = \mathbf{T}^{-1}(t)[\mathbf{A}(t)\mathbf{T}(t) - \dot{\mathbf{T}}(t)] \quad (\text{A.6})$$

A equação (A.6) é obtida a partir da derivada transformação algébrica  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{T}(t)\bar{\mathbf{x}}$  em relação ao tempo. A nova expressão para  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  é substituída na equação (A.1)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\mathbf{T}}(t)\bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{T}(t)\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) \quad (\text{A.7})$$

Substituindo na equação anterior a expressão para  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{T}(t)\bar{\mathbf{x}}$ , obtém-se

$$\mathbf{A}(t)\mathbf{T}(t)\bar{\mathbf{x}}(t) = \dot{\mathbf{T}}(t)\bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{T}(t)\bar{\mathbf{A}}(t)\bar{\mathbf{x}}(t) \quad (\text{A.8})$$

Isolando a expressão para  $\bar{\mathbf{A}}(t)$  na equação (A.8) obtém-se a equação (A.6). Portanto, escolhendo a matriz de transformação como na equação (A.3), ou seja,

$$\mathbf{T}(t) = \Phi(t, t_0)e^{-\mathbf{R}(t-t_0)} \quad (\text{A.9})$$

A equação (A.6) é simplificada para

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}}(t) = e^{\mathbf{R}(t-t_0)} \Phi(t_0, t) [\mathbf{A}(t) \Phi(t, t_0) e^{-\mathbf{R}(t-t_0)} \\ - \dot{\Phi}(t, t_0) e^{-\mathbf{R}(t-t_0)} + \Phi(t, t_0) e^{-\mathbf{R}(t-t_0)} \mathbf{R}] \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

A função  $\Phi(t, t_0)$  é a matriz de transição da equação (A.1), então  $\Phi(t, t_0)$  satisfaz a equação (A.4) e  $\Phi(t, t_0) \Phi(t_0, t) = \Phi(t_0, t_0) = \mathbf{I}$ . Assim, a equação (A.10) torna-se  $\bar{\mathbf{A}}(t) = \mathbf{R}$ , que é uma matriz conhecida, constante, de tamanho  $n \times n$ . Isto prova o teorema.  $\square$

O teorema 1 mostra que qualquer sistema linear variante no tempo, descrito pela equação (A.1) é invariável. Além disso, o sistema é algebricamente invariável, desde que sua matriz de transição  $\Phi(t, t_0)$  possa ser determinada. Entretanto, esta matriz é extremamente difícil de ser obtida. Existe, contudo, uma classe de problemas variantes no tempo que podem ser explicitamente transformados em sistemas lineares invariantes no tempo, sem o conhecimento total da matriz de transição. Duas classes deste tipo de problema são identificadas: os sistemas algebricamente invariáveis e os sistemas  $t \rightarrow \tau$ -algebricamente invariáveis.

### Corolário 1 (Sistemas de Floquet).

Qualquer sistema de Floquet, sistema linear periodicamente variável no tempo, definido por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{A}(t+T) = \mathbf{A}(t), \quad \forall t \quad (\text{A.11})$$

onde  $T$  é o período, é algebricamente invariável.

*Prova.* A partir da teoria de Floquet (ver Apêndice B), sabe-se que se  $\mathbf{A}(t)$  é periódica com período  $T$ , então existe uma matriz  $\mathbf{Q}(t)$ , não singular de período  $T$ , e uma matriz constante  $\mathbf{R}$ , de tal forma que a matriz de transição  $\Phi(t, 0)$  da equação (A.11) é dada por

$$\Phi(t, 0) = \mathbf{Q}(t)e^{\mathbf{R}t} \quad (\text{A.12})$$

A partir do Teorema 1, conclui-se que o sistema é algebricamente invariável e que matriz de transformação algébrica do sistema é dada a partir da equação (A.3) por  $\mathbf{T}(t) = \mathbf{Q}(t)$ .  $\square$

### Corolário 2.

Considere o sistema linear variante no tempo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) \quad (\text{A.13})$$

Se a matriz  $\mathbf{A}(t)$  satisfaz as seguintes condições

1.  $\dot{\mathbf{A}}(t)$  existe;
2. existe uma matriz  $\mathbf{A}_1$  que satisfaz

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{A}(t) - \mathbf{A}(t) \mathbf{A}_1 = \dot{\mathbf{A}}(t), \quad \forall t \quad (\text{A.14})$$

então, o sistema da equação (A.13) é algebricamente invariável, sendo que a transformação algébrica é dada por

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}_1 t} \bar{\mathbf{x}}(t) \quad (\text{A.15})$$

Como consequência isto irá transformar o sistema da equação (A.13) em um sistema invariante no tempo dado por

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}_2 \bar{\mathbf{x}}(t) \quad (\text{A.16})$$

onde  $\mathbf{A}_2$  é uma matriz constante, definida por

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}(0) - \mathbf{A}_1 \quad (\text{A.17})$$

*Prova.* Se a equação (A.14) é válida, é possível demonstrar que a matriz de transição  $\Phi(t, 0)$  da equação (A.13) é dada por

$$\Phi(t, 0) = e^{\mathbf{A}_1 t} e^{\mathbf{A}_2 t} \quad (\text{A.18})$$

onde  $\mathbf{A}_1$  e  $\mathbf{A}_2$  são matrizes constantes que satisfazem as equações (A.14) e (A.17). Segue do Teorema 1 que o sistema da equação (A.13) é algebricamente invariável, sendo que a transformação algébrica dada pela equação (A.15) irá transformar o sistema da equação (A.13) em um sistema invariante no tempo dado pela equação (A.16). A equação (A.14) pode ser provada a partir da derivada da equação (A.6). Notando que a matriz  $\bar{\mathbf{A}}$  é constante, após algumas manipulações algébricas, a equação (A.14) é provada. A equação (A.17) é demonstrada diretamente da aplicação do Teorema 1 □

#### Definição 4.

Um sistema linear variante no tempo  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)$  é comutativo, se e somente se,

$$\mathbf{A}(t) \left[ \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau \right] = \left[ \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau \right] \mathbf{A}(t) \quad (\text{A.19})$$

*Lema 1:* 1. se  $\mathbf{A}(t)$  é escrita como

$$\mathbf{A}(t) = \sum_{i=1}^m \alpha_i(t) \mathbf{A}_i \quad (\text{A.20})$$

onde  $\mathbf{A}_i$ 's são matrizes constantes e  $\alpha_i(t)$ 's formam um conjunto de funções linearmente independentes. Dessa maneira, a equação (A.19) é equivalente

$$\mathbf{A}_i \mathbf{A}_j = \mathbf{A}_j \mathbf{A}_i, \quad i, j = 1, 2, \dots, m \quad (\text{A.21})$$

2. Se  $\dot{\mathbf{A}}(t)$  existe, então a equação (A.19) é equivalente a

$$\mathbf{A}(t) \dot{\mathbf{A}}(t) = \dot{\mathbf{A}}(t) \mathbf{A}(t), \quad \forall t \quad (\text{A.22})$$

**Corolário 3.**

Considere o sistema comutativo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) \quad (\text{A.23})$$

Se  $\mathbf{A}(t)$  puder ser escrita como

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{F}(t) + \mathbf{R} \quad (\text{A.24})$$

onde  $\mathbf{R}$  é uma matriz constante, então o sistema da equação (A.23) é algebricamente invariável. Particularmente, a transformação algébrica

$$\mathbf{x}(t) = e^{\int_0^t \mathbf{F}(\tau) d\tau} \bar{\mathbf{x}}(t) = \left[ \prod_{i=1}^l e^{\mathbf{F}_i \beta_i} \right] \bar{\mathbf{x}}(t) \quad (\text{A.25})$$

onde

$$\mathbf{F}(t) = \sum_{i=1}^l \alpha_i(t) \mathbf{F}_i \quad (\text{A.26})$$

$\mathbf{F}_i$ 's são matrizes constantes e

$$\beta_i(t) = \int_0^t \alpha_i(\tau) d\tau \quad (\text{A.27})$$

irá transformar o sistema da equação (A.23) e um sistema invariante no tempo da forma

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{R}\bar{\mathbf{x}}(t) \quad (\text{A.28})$$

*Prova.* Sendo o sistema comutativo, a matriz de transição de estado pode ser escrita como (Zadeh e Desoer, 1963)

$$\Phi(t, 0) = \exp \left[ \int_0^t \mathbf{A}(\tau) d\tau \right] \quad (\text{A.29})$$

Assim, considerando que a matriz de estado  $\mathbf{A}(t)$  possa ser escrita de acordo com a equação (A.24), a expressão para a matriz de transição de estado torna-se

$$\Phi(t, 0) = \exp \left[ \int_0^t \mathbf{F}(\tau) d\tau \right] \exp[\mathbf{R}(t)] \quad (\text{A.30})$$

Ou ainda, utilizando a definição da equação (A.26), juntamente com a definição para o  $\beta_i$  na equação (A.27), obtém-se a seguinte expressão para a matriz de transição de estado

$$\Phi(t, 0) = \prod_{i=1}^l \exp[\mathbf{F}_i \beta_i(t)] \exp[\mathbf{R}(t)] \quad (\text{A.31})$$

□

TEOREMA 2

O sistema variante no tempo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) \quad (\text{A.32})$$

é  $t \rightarrow \tau$ -algebricamente invariável, se a matriz de transição do sistema da equação (A.32) é da forma

$$\Phi(t, t_0) = \mathbf{T}(t, t_0)e^{\mathbf{R}g(t, t_0)}, \quad \mathbf{T}(t_0, t_0) = \mathbf{I} \quad (\text{A.33})$$

onde  $\dot{g}(t)$  existe e  $T_0$  é escolhido de tal forma que  $g(t_0, t_0) = 0$ .

Particularmente, a transformação algébrica

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{T}(t, t_0)\bar{\mathbf{x}}(t) \quad (\text{A.34})$$

juntamente com a transformação  $t \rightarrow \tau$

$$\tau = g(t, t_0) \quad (\text{A.35})$$

irá transformar o sistemas de equações (A.32) no sistema invariante no tempo:

$$\dot{\mathbf{z}}(\tau) = \mathbf{R}\mathbf{z}(\tau) \quad (\text{A.36})$$

onde  $\mathbf{z} = \bar{\mathbf{x}}$  e  $\dot{\mathbf{z}} = d\mathbf{z}(\tau)/d\tau$ .

**Corolário 4.**

Considere o sistema

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) \quad (\text{A.37})$$

Se  $\mathbf{A}(t)$  satisfaz as seguintes condições:

1.  $\dot{\mathbf{A}}(t)$  existe,
2. Existe uma função escalar do tempo  $h(t)$  e uma matriz constante tal que  $A_1$  tais que

$$\mathbf{A}_1\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{A}_1 = \frac{\dot{\mathbf{A}}(t)}{h(t)} - \frac{\dot{h}(t)}{h^2(t)}\mathbf{A}(t), \quad \forall t \quad (\text{A.38})$$

Então o sistema da equação (A.37) é do tipo  $t \rightarrow \tau$ -algebricamente invariável. Em particular, a transformação algébrica

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}_1 g(t, t_0)}\bar{\mathbf{x}}(t) \quad (\text{A.39})$$

juntamente com a transformação  $t \rightarrow \tau$

$$\tau = g(t, t_0) = \int_{t_0}^t h(\tau) d\tau \quad (\text{A.40})$$

irá transformar o sistema da equação (A.37) em um sistema invariante no tempo

$$\dot{\mathbf{z}}(\tau) = \mathbf{A}_2 \mathbf{z}(\tau) \quad (\text{A.41})$$

onde

$$\mathbf{A}_2 = \left[ \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\mathbf{A}(t)}{h(t)} \right] - \mathbf{A}_1 \quad (\text{A.42})$$

**Corolário 5 (Sistema de Euler).**

Qualquer sistema de Euler da forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t) \mathbf{x} \quad (\text{A.43})$$

onde  $\mathbf{A}(t)$  é uma matriz  $n \times n$  dada por

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_n}{t^n} & -\frac{a_{n-1}}{t^{n-1}} & \dots & \dots & -\frac{a_1}{t} \end{bmatrix} \quad (\text{A.44})$$

onde  $a_i$ 's são constantes, é do tipo  $t \rightarrow \tau$ -algebricamente invariável. Uma transformação algébrica desse tipo é dada por

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{T}(t) \bar{\mathbf{x}}(t) \quad (\text{A.45})$$

E a correspondente transformação  $t \rightarrow \tau$  é dada por

$$\tau = \ln t, \quad (t_0 = 1) \quad (\text{A.46})$$

onde  $\mathbf{T}(t)$  é dada por

$$\mathbf{T}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{t^2} & \frac{1}{t^2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (\text{A.47})$$

onde  $T_{ij}$ 's são elementos de  $\mathbf{T}(t)$  para  $2 \leq i \leq n$  dos coeficientes de  $\mathbf{D}^{j-1}$  na expansão

$$\frac{1}{t^{i-1}} \mathbf{D}(\mathbf{D} - 1)(\mathbf{D} - 2) \dots (\mathbf{D} - i + 2) \quad (\text{A.48})$$

**Corolário 6.**

Qualquer sistema comutativo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) \quad (\text{A.49})$$

é do tipo  $t \rightarrow \tau$ -algebricamente invariável. Além disso, se  $\mathbf{A}(t)$  for escrita como

$$\mathbf{A}(t) = \sum_{i=1}^m \alpha_i(t) \mathbf{A}_i \quad (\text{A.50})$$

onde  $\alpha_i$ 's são um conjunto de funções escalares linearmente independentes e  $\mathbf{A}_i$  são matrizes constantes. Então, para cada índice  $j \in [1, m]$ , a transformação algébrica

$$\mathbf{x}(t) = \left[ \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m \exp[\mathbf{A}_i \beta_i(t, t_0)] \right] \bar{\mathbf{x}}(t) \triangleq \mathbf{T}(t, t_0) \bar{\mathbf{x}}(t) \quad (\text{A.51})$$

onde

$$\beta_i(t, t_0) = \int_{t_0}^t \alpha_i(\tau) d\tau \quad (\text{A.52})$$

irá transformar o sistema da equação (A.49) em um sistema da forma

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}_j \alpha_j \bar{\mathbf{x}}(t) \quad (\text{A.53})$$

A transformação  $t \rightarrow \tau$  adicional, definida por

$$\tau = \beta_j(t, t_0) = \int_{t_0}^t \alpha_j(\tau) d\tau \quad (\text{A.54})$$

irá transformar o sistema da equação (A.49) em um sistema invariante no tempo

$$\dot{\mathbf{z}}(\tau) = \mathbf{A}_j \mathbf{z}(\tau) \quad (\text{A.55})$$

onde  $\mathbf{z}(\tau) = \bar{\mathbf{x}}$  e  $\dot{\mathbf{z}} = d\mathbf{z}(\tau)/d\tau$ .

## Apêndice B

# Teoria de Floquet

A matriz de transição de estado de um sistema periódico pode ser representada pelo produto de uma matriz periódica de período  $T$  e de uma matriz exponencial, que é a solução de um sistema com coeficientes constantes (Meirovitch, 1988).

TEOREMA 3 (TEOREMA DE FLOQUET)

Se  $\Phi(t)$  é a matriz de transição de estado de um sistema descrito pela equação  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$  onde  $\mathbf{A}(t+T) = \mathbf{A}$ , então  $\Phi(t+T)$  é também uma solução do sistema, definindo, portanto, uma matriz fundamental. Além disso, para cada matriz  $\Phi(t)$  existe uma matriz periódica não-singular  $\mathbf{Q}(t)$ , com período  $T$ , e uma matriz constante  $\mathbf{R}$ , tal que

$$\Phi(t) = \mathbf{Q}(t) \exp[\mathbf{R}t] \quad (\text{B.1})$$

sendo

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{Q}(t+T) \quad (\text{B.2})$$

*Prova.* A matriz de transição de estado satisfaz a equação do sistema . Assim

$$\dot{\Phi}(t) = \mathbf{A}(t)\Phi(t) \quad (\text{B.3})$$

Considerando agora um deslocamento de  $T$  no tempo, obtém-se a seguinte equação

$$\dot{\Phi}(t+T) = \mathbf{A}(t+T)\Phi(t+T) \Rightarrow \dot{\Phi}(t+T) = \mathbf{A}(t)\Phi(t+T) \quad (\text{B.4})$$

Assim, a matriz  $\Phi(t+T)$  satisfaz a equação do sistema e, portanto, é uma matriz fundamental. A matriz de transição de estado e uma matriz fundamental do sistema podem ser relacionadas por uma matriz constante , não-singular  $\mathbf{C}$ , de tal forma que

$$\Phi(t+T) = \Phi(t)\mathbf{C} \quad (\text{B.5})$$

Dada uma matriz  $\mathbf{C}$ , é possível encontrar uma matriz  $\mathbf{R}$ , tal que

$$\mathbf{C} = \exp[\mathbf{R}T] \quad (\text{B.6})$$

Combinando as equações (B.5) e (B.6), obtém-se a seguinte relação

$$\Phi(t+T) = \Phi(t) \exp[\mathbf{R}T] \quad (\text{B.7})$$

Define-se, então, uma matriz  $\mathbf{Q}(t)$ , que é dada por

$$\mathbf{Q}(t) = \Phi(t) \exp[-\mathbf{R}t] \quad (\text{B.8})$$

Considerando um deslocamento no tempo  $T$  nesta equação, obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(t+T) &= \Phi(t+T) \exp[-\mathbf{R}(t+T)] \\ \mathbf{Q}(t+T) &= \Phi(t) \exp[\mathbf{R}T] \exp[-\mathbf{R}(t+T)] \\ \mathbf{Q}(t+T) &= \Phi(t) \exp[-\mathbf{R}t] = \mathbf{Q}(t) \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Portanto, a matriz  $\mathbf{Q}(t)$  é periódica com período  $T$ . Como a matriz de transição de estado e a matriz  $\exp[-\mathbf{R}t]$  não são singular, o produto delas, é também não-singular. Assim, pós-multiplicando a equação (B.8) por  $\exp[\mathbf{R}t]$ , obtém-se

$$\Phi(t) = \mathbf{Q}(t) \exp[\mathbf{R}t] \quad (\text{B.10})$$

O que prova o teorema. □

A implicação deste teorema é que a determinação da matriz de transição de estado, ao longo de um período de tempo  $T$ , é equivalente a determinação da matriz  $\Phi(t)$  para todos os instantes de tempo  $t$ . Assumindo que esta matriz é conhecida ao longo do intervalo  $0 < t < T$  e impondo  $t = 0$  na equação (B.5), obtém-se

$$\mathbf{C} = \Phi(0)^{-1} \Phi(T) \quad (\text{B.11})$$

Com a determinação da matriz  $\mathbf{C}$ , a matriz  $\mathbf{R}$  é obtida a partir da equação (B.6),

$$\mathbf{R} = \frac{1}{T} \ln[\mathbf{C}] \quad (\text{B.12})$$

Assim pela equação (B.8), a matriz  $\mathbf{Q}(t)$  é determinada para o intervalo  $0 < t < T$ . Mas como esta matriz é periódica, isto significa que ela é determinada para todo instante de tempo  $t$  e pelo teorema 3, a matriz  $\Phi(t)$  é conhecida para todo instante de tempo  $t$ . A matriz  $\mathbf{C}$  não é única, pois depende da matriz fundamental escolhida. Embora a forma desta matriz  $\mathbf{C}$  possa mudar, dependendo da matriz fundamental escolhida, seus os autovalores são únicos. Se for considerada

outra matriz fundamental  $\Psi(t)$ , esta matriz e a matriz de transição de estado são relacionadas por uma matriz  $\mathbf{B}$

$$\Psi(t) = \Phi(t)\mathbf{B} \quad (\text{B.13})$$

Considerando um deslocamento no tempo de  $T$  nesta equação

$$\Psi(t+T) = \Phi(t+T)\mathbf{B} \Rightarrow \Psi(t+T) = \Phi(t)\mathbf{C}\mathbf{B} \Rightarrow \Psi(t+T) = \Psi(t)\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{B} \quad (\text{B.14})$$

ou seja, se for considerada uma outra matriz fundamental, a matriz constante associada (*monodromy matrix*) é algebricamente equivalente a matriz  $\mathbf{C}$ , uma vez que as duas matrizes se relacionam por uma transformação de similaridade. Assim, os autovalores desta matriz são invariantes sob tal transformação. Os autovalores da matrix  $\mathbf{C}$ , portanto, definem uma característica do sistema, sendo que uma vez definida a matriz de estado  $\mathbf{A}(t)$ , estes autovalores  $\lambda_j$ , conhecidos como *multiplicadores característicos*, representam uma propriedade do sistema. Os autovalores da matriz  $\mathbf{R}$  são conhecidos como *expoentes característicos*  $\rho_j$  e são relacionados aos multiplicadores característicos  $\lambda_j$ , de acordo com a relação:

$$\rho_j = \frac{1}{T} \left( \ln |\lambda_j| + i \arg \lambda_j \right) \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{B.15})$$

A parte imaginária dos expoentes característicos apresenta um número infinito de soluções, todas diferindo por um múltiplo de  $2\pi/T$ , uma vez que o logaritmo de um número complexo apresenta infinitas soluções, de acordo com (Boas, 1983)

$$w = \ln z = \ln r e^{i\theta} = \ln r + \ln e^{i\theta} = \ln r + i\theta = \ln r + i\theta_0 + ik2\pi\theta_0; \quad k = -\infty, \dots, \infty \quad (\text{B.16})$$

onde

$$r = |\lambda_j| \quad \theta = \arg \lambda_j \quad 0 < \theta_0 < 2\pi$$

Os expoentes característicos são uma propriedade do sistema dado pela equação de estado  $\mathbf{A}(t)$ . Algumas propriedades de estabilidade do sistema podem ser obtidas analisando estes expoentes.

1. Se todos os expoentes característicos apresentam parte real negativa, todas as soluções da equação diferencial são assintoticamente estáveis;

$$\lim_{t \rightarrow 0} \phi^j(t) = 0 \quad \text{Re}(\rho_j) < 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{B.17})$$

2. Se apenas um dos expoentes característicos apresentar parte real positiva, então o sistema é instável;
3. Se alguns expoentes apresentam parte real negativa e os outros apresentam parte real nula, então o sistema é marginalmente estável;

4. Uma solução puramente periódica é possível apenas quando um dos expoentes característicos é nulo.

Embora a teoria de Floquet permita determinar a forma da solução da equação diferencial com coeficientes periódicos, ela não fornece uma metodologia para a determinação da solução propriamente dita, uma vez que não existe uma metodologia para avaliação da matriz de transição de estado ou mesmo dos expoentes característicos. Alguns teoremas auxiliares permitem ampliar o estudo da solução de sistemas periódicos, embora também não forneçam a solução da equação.

TEOREMA 4 (TEOREMA DE LIAPUNOV)

*Um sistema com coeficientes periódicos dado pela equação  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)$  onde  $\mathbf{A}(t+T) = \mathbf{A}(t)$  pode ser reduzido a um sistema invariante no tempo através de uma matriz periódica*

TEOREMA 5

*Os autovalores do sistema transformado, que é constante no tempo, representam os expoentes característicos do sistema original com coeficientes periódicos.*

*Prova.* A prova destes teoremas decorre diretamente do Teorema 1, juntamente com o Corolário 1. □

# Referências Bibliográficas

- Absy, H. E. e Shabana, A. A. Coupling between rigid body and deformation modes. *Journal of Sound and Vibration*, 1996, vol. 198 (5), pp. 617–637.
- Al-Ansary, M. D. Flexural vibrations of rotating beams considering rotary inertia. *Computers & Structures*, 1998, vol. 69 (3), pp. 321–328.
- Al-Bedoor, B. O. e Khulief, Y. A. Vibrational motion of an an elastic beam with prismatic and revolte joints. *Journal of Sound and Vibration*, 1996, vol. 190 (2), pp. 195–206.
- Ambrósio, J. A. C. Dynamics of structures undergoing gross motion and nonlinear deformations: A multibody approach. *Computers & Structures*, 1996, vol. 59 (6), pp. 1001–1012.
- Anantharaman, M. e Hiller, M. Dynamic analysis of complex multibody systems using methods for differential-algebraic equations. In: *Advanced Multibody System Dynamics*, editado por W. Schiehlen, Kluwer Academic Publishers, 1993, pp. 173–194.
- Anderson, G. L. On the extensional and flexural vibrations of rotating bars. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1975, vol. 10, pp. 223–236.
- Bakr, E. M. e Shabana, A. A. Geometrically nonlinear analysis of a multibody systems. *Computers and Structures*, 1986, vol. 23 (6), pp. 739–751.
- Barhorst, A. A. Symbolic equation processing utilizing vector/dyad notation. *Journal of Sound and Vibration*, 1997, vol. 208 (5), pp. 823–839.
- Barhorst, A. A. On modelling variable structure dynamics of hybrid parameter multiple body systems. *Journal of Sound and Vibration*, 1998, vol. 209 (4), pp. 571–592.
- Barhorst, A. A. e Everett, L. J. Modeling hybrid parameter multiple body systems - a different approach. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1995, vol. 30 (1), pp. 1–21.
- Baruh, H. *Analytical Dynamics*. New York: McGraw-Hill, 1999.
- Bhat, B. R. e Wagner, H. Natural frequencies of a uniform cantilever with a tip mass slender in axial direction. *Journal of Sound and Vibration*, 1976, vol. 45 (2), pp. 304–307.

- Blevins, R. D. *Formulas for natural frequency and mode shape*. Malabar: Krieger Publishing Company, 1979.
- Boas, M. L. *Mathematical Methods in the Physical Sciences*. New York: John Wiley and Sons, 1983.
- Brigham, E. O. *The Fast Fourier Transform and its Applications*. New Jersey: Prentice Hall, 1988.
- Brusa, E., Delprete, C. e Genta, G. Torsional vibration of crankshafts: Effects of non-constant moments of inertia. *Journal of Sound and Vibration*, 1997, vol. 205 (2), pp. 135–150.
- Bucher, I., Ewins, D. J. e Robb, D. A. Modal testing of rotating structures: difficulties, assumptions, and practical approach. In: *IMEchE Conference Transactions, Sixth International Conference on Vibrations in Rotating Machinery*. pp. 539–562, 1996. C500/007/96.
- Buffinton, K. e Kane, T. R. Dynamics of a beam moving over supports. *International Journal of Solids and Structures*, 1985, vol. 21 (7), pp. 617–643.
- Cardona, A. e Geradin, M. A beam finite-element non-linear theory with finite rotations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1988, vol. 26 (11), pp. 2403–2438.
- Choy, F. K. e Padovan, J. Non-linear transient analysis of rotor-casing rub events. *Journal of Sound and Vibration*, 1987, vol. 113 (3), pp. 529–545.
- Chu, F. e Zhang, Z. Bifurcation and chaos in a rub-impact Jeffcott rotor system. *Journal of Sound and Vibration*, 1998, vol. 210 (1), pp. 1–18.
- Cook, R. D., Malkus, D. S. e Plesha, M. E. *Concepts and applications of finite element analysis*. New York: John Wiley & Sons, 1989.
- Craig Jr., R. R. e Anthony, T. C. On the use of components modes in multibody dynamics. In: *37th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference - Volume 3*. AIAA, pp. 1522– 1529, 1996.
- D'Eleuterio, G. e Barfoot, T. Just a second, we'd like to go first: A first-order discretized formulation for structural dynamics. In: *Fourth International Conference Dynamics and Control of Structures in Space, 24-28 May 1999*. London, England, pp. 1–23, 1999.
- Deshmukh, V., Sinha, S. e Joseph, P. Order reduction and control of parametrically excited dynamical systems. *Journal of Vibration and Control*, 2000, vol. 6 (7), pp. 1017–1028.
- Du, H. e Ling, S. F. A nonlinear dynamics model for three-dimensional flexible linkages. *Computer and Structures*, 1995, vol. 56 (1), pp. 15–23.
- Eiland, J., Torry-Smith, J. e Santos, I. F. *Eksperimentel Verifikation of Stivhedsforogelse i Rotor-Blad Dynamik*. Relatório técnico, Institut for Mekanik , Energu og Konstruktion, Danmarks Tekniske Universitet, 2001.

- Escalona, J. L., Hussien, H. A. e Shabana, A. A. Application of the absolute nodal co-ordinate formulation to multibody systems dynamics. *Journal of Sound and Vibration*, 1998, vol. 214 (5), pp. 833–851.
- Ewins, D. *Modal testing : theory and practice*. John Wiley & Sons, 1984.
- Fallahi, B. e Lai, S.-Y. An improved numerical scheme for characterizing dynamic behavior of high-speed rotating elastic beam structures. *Computers & Structures*, 1994, vol. 50 (6), pp. 749–755.
- Fallahi, B., Lai, S.-Y. e Gupta, R. Full beam formulation of a rotating beam-mass system. *Journal of Vibration and Acoustics*, 1994, vol. 116 (1), pp. 93–99.
- Fan, Y., Ju, M. e Tsuei, Y. G. Experimental study on vibration of a rotating blade. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 1994, vol. 116 (3), pp. 672–677.
- Friedmann, P., Hammond, C. E. e Woo, T. Efficient numerical treatment of periodic systems with applications to stability problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1977, vol. 11 (7), pp. 1117–1136.
- Friswell, M. I. e Mottershead, J. E. *Finite Element Model Updating in structural dynamics*. Kluwer, 1995.
- Langlois, R. G. e Anderson, R. J. Multibody dynamics of very flexible damped systems. *Multibody System Dynamics*, 1999, vol. 3 (2), pp. 109–136.
- Gérardin, M. e Cardona, A. *Flexible Multibody Dynamics*. New York: John Wiley & Sons, 2001.
- Gurgoze, M. e Batan, H. A note on the vibrations of a restrained cantilever beam carrying a heavy tip body. *Journal of Sound and Vibration*, 1986, vol. 106 (3), pp. 533–536.
- Hagedorn, P. The Rayleigh-Ritz method with quasi-comparison functions with non-self-adjoint problems. *Journal of Vibration and Acoustics*, 1993, vol. 115 (3), pp. 280–284.
- Hamdan, M. N. e Abdel Latif, L. On the numerical convergence of discretization methods for the free vibrations of beams with attached inertia elements. *Journal of Sound and Vibration*, 1994, vol. 169 (4), pp. 527–545.
- Ho, S. V. Vibration of a rotating beam with a tip mass. *Journal of Sound and Vibration*, 1979, vol. 67 (3), pp. 369–381.
- Hsiao, K. M., Yang, R. T. e Lee, A. A consistent finite-element formulation for nonlinear dynamic analysis of planar beam. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1994, vol. 37 (1), pp. 75–89.
- Inman, D. J. *Engineering Vibration*. New Jersey: Prentice Hall, 1996.

- Irretier, H. Mathematical foundations of experimental modal analysis in rotor dynamics. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 1999, vol. 13 (2), pp. 183–191.
- Jahnke, M., Popp, K. e Dirr, B. Approximate analysis of flexible parts in multibody systems using the finite element method. In: *Advanced Multibody System Dynamics*, editado por W. Schiehlen, Kluwer Academic Publishers, 1993, pp. 237–256.
- Junkins, J. L. e Kim, Y. *Introduction to dynamics an control of flexible structures*. AIAA, 1993.
- Kane, T. R. e Levinson, D. A. *Dynamics : theory and applications*. McGraw-Hill, 1985.
- Kane, T. R., Ryan, R. R. e Banerjee, A. K. Dynamics of a cantilever beam attached to a moving base. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 1987, vol. 10 (2), pp. 139–151.
- Kerdjoudj, M. e Amirouche, F. M. L. Implementation of the boundary element method in the dynamics of flexible bodies. *International Journal for Numerical Methods inf Engineering*, 1996, vol. 39 (2), pp. 321–354.
- Kim, S.-S. e Haug, E. J. A recursive formulation for flexible multibody dynamics, part I: Open-loop systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1988, vol. 71 (3), pp. 293–314.
- Kim, S.-S. e Haug, E. J. A recursive formulation for flexible multibody dynamics, part II: Closed-loop systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1989, vol. 74 (3), pp. 251–269.
- Kojima, H. Transient vibrations of a beam/mass system fixed to a rotating body. *Journal of Sound and Vibration*, 1986, vol. 107 (1), pp. 149–154.
- Lai, S. H.-Y. Geometrically nonlinear transient analysis of a rotating beam structure carrying a static payload. *Mechanics Research Communications*, 1994, vol. 21 (5), pp. 473–482.
- Laura, P. A. A. e Gutierrez, R. H. Vibrations of an elastically restrained cantilever beam of varying cross-section with tip mass of finite length. *Journal of Sound and Vibration*, 1986, vol. 108 (1), pp. 123–131.
- Lee, H. Dynamics of an axially extending and rotating cantilever beam including the effect of gravity. *International journal of solids and structures*, 1995, vol. 32 (11), pp. 1595–1606.
- Liu, K. Identification of linear time-varying systems. *Journal of Sound and Vibration*, 1997, vol. 206 (4), pp. 487–505.
- Liu, K. Extension of modal analysis to linear time-varying systems. *Journal of Sound and Vibration*, 1999, vol. 226 (1), pp. 149–167.
- Liu, W. e Huang, C. C. Vibrations of a constrained beam carrying a heavy tip body. *Journal of Sound and Vibration*, 1988a, vol. 123 (1), pp. 15–29.

- Liu, W. H. e Huang, C. Free vibration of restrained beam carrying concentrated masses. *Journal of Sound and Vibration*, 1988b, vol. 123 (1), pp. 31–42.
- Low, K. H. Eigen-analysis of a tip-loaded beam attached to a rotating joint. *Journal of Vibration and Acoustics*, 1990, vol. 112 (4), pp. 497–500.
- Low, K. H. Vibration analysis of a tip-loaded beam attached to a rotating joint. *Computers & Structures*, 1994, vol. 52 (5), pp. 955–968.
- Mayo, J. e Domínguez, J. Geometrically non-linear formulation of flexible multibody systems in terms of beam elements: Geometric stiffness. *Computers & Structures*, 1996, vol. 59 (6), pp. 1039–1050.
- Mayo, J. e Domínguez, J. A finite element geometrically nonlinear dynamic formulation of flexible multibody systems using a new displacements representation. *Journal of Vibration and Acoustics*, 1997, vol. 119 (4), pp. 573–581.
- Mayo, J., Domínguez, J. e Shabana, A. A. Geometrically nonlinear formulations of beams in flexible multibody dynamics. *Journal of Vibration and Acoustics*, 1995, vol. 117 (4), pp. 501–509.
- Meek, J. e Liu, H. Nonlinear dynamics analysis of flexible beams under large overall motions and the flexible manipulator simulation. *Computers & Structures*, 1995, vol. 56 (1), pp. 1–14.
- Meirovitch, L. *Methods of Analytical Mechanics*. New York: McGraw-Hill, 1988.
- Meirovitch, L. e Hagedorn, P. A new approach to the modeling of distributed nonself-adjoint systems. *Journal of Sound and Vibration*, 1994, vol. 178 (2), pp. 227–241.
- Meirovitch, L. e Kwak, M. K. Convergence of the classical Rayleigh-Ritz method and the finite element method. *AIAA Journal*, 1990, vol. 28 (8), pp. 1509–1516.
- Muszynska, A. Rotor-to-stationary element rub-related vibration phenomena in rotating machinery - literature survey. *The Shock and Vibration Digest*, 1989, vol. 21 (3), pp. 3–11.
- Nava, P., Paone, N., Rossi, G. L. e Tomasini, E. P. Design and experimental characterization of a nonintrusive measurement system of a rotating blade measurement. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 1994, vol. 116 (3), pp. 657–662.
- Nayfeh, A. H. e Mook, D. T. *Nonlinear oscillations*. John Wiley & Sons, 1979.
- Oguamanam, D. C. D. e Heppler, G. R. Geometric stiffening of timoshenko beams. *Journal of Applied Mechanics*, 1998, vol. 65 (4), pp. 923–929.
- Orth, F. J. e Surana, K. S. P-version 2-dimensional beam element for geometrically nonlinear analysis. *Computers & Structures*, 1994, vol. 50 (3), pp. 383–392.

- Piccoli, H. *Observação de caos nas medições do movimentos de um rotor sujeito a "rubbing"*. Tese de Doutorado, Departamento de Projeto Mecânico, Faculdade de Engenharia Mecânica, Unicamp, 1994.
- Radisavljevic, V. e Baruh, H. A comparison of shortening of the projection to axial deformation. In: *42nd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference 16-19 April 2001 (CD-ROM)*, editado por H. Irretier e R. Nordmann. Seattle, USA: AIAA, pp. 1-9, 2001.
- Reuter, F. Coupling of elastic and gyroscopic modes of rotating disc structures. In: *Fifth IFTTOM International Conference on Rotor Dynamics, Darmstadt, September 7-10, 1998*, editado por H. Irretier e R. Nordmann. Germany: Technical University of Darmstadt, pp. 443-455, 1998.
- Santos, I. F. *Dinâmica de Sistemas Mecânicos*. São Paulo: Makron Books, 2001.
- Santos, I. F. e Colla, G. C. Influência de palhetas flexíveis na dinâmica de sistemas rotativos. In: *XIV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica (Anais, CD-Rom)*. pp. 1-8, 1997.
- Saracho, C. *Dinâmica não linear de rotores com palhetas flexíveis considerando-se o fenômeno de raspagem e choque contra as partes estacionárias - teoria e experimento*. Relatório Técnico 1, Departamento de Projeto Mecânico, Faculdade de Engenharia Mecânica, Unicamp, 1999. Relatório de atividades Fapesp processo 98/00422-0.
- Schilhansl, M. J. e Providence, R. I. Bending frequency of a rotating cantilever beam. *Journal of Applied Mechanics*, 1958, pp. 28-30.
- Schwertassek, R., Wallrapp, O. e Shabana, A. A. Flexible multibody simulation and choice of shape functions. *Nonlinear Dynamics*, 1999, vol. 20 (4), pp. 361-380.
- Shabana, A. A. Substructure coordinate reduction technique for dynamic analysis of spatial substructures with large angular rotations. *Journal of Structural Mechanics*, 1985, vol. 11 (3), pp. 401-431.
- Shabana, A. A. *Dynamics of multibody systems*. John Wiley & Sons, 1989.
- Shabana, A. A. Dynamics of flexible bodies using generalized newton-euler equations. *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control*, 1990, vol. 112 (3), pp. 496-503.
- Shabana, A. A. Constrained motion of deformable-bodies. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1991, vol. 32 (8), pp. 1813-1831.
- Shabana, A. A. e Schwertassek, R. Equivalence of the floating frame of reference approach and finite element formulations. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1998, vol. 33 (3), pp. 417-432.

- Shabana, A. A. e Wehage, R. A coordinate reduction technique for dynamic analysis of spatial substructures with large angular rotations. *Journal of Structural Mechanics*, 1983, vol. 11 (3), pp. 401–431.
- Sharf, I. Geometric stiffening in multibody dynamics formulations. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 1995, vol. 18 (4), pp. 882–890.
- Sharf, I. Geometrically non-linear beam element for dynamics simulation of multibody systems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1996, vol. 39 (5), pp. 763–786.
- Sharf, I. Nonlinear strain measures, shape functions and beam elements for dynamics of flexible beams. *Multibody System Dynamics*, 1999, vol. 3 (2), pp. 189–205.
- Simo, J. C. A finite strain beam formulation. the three dimensional dynamic problem. part I. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1985, vol. 49 (1), pp. 55–70.
- Simo, J. C. e Vu-Quoc, L. On the dynamics of flexible beams under large overall motions - the plane case: Part I. *Journal of Applied Mechanics*, 1986a, vol. 53 (4), pp. 849–854.
- Simo, J. C. e Vu-Quoc, L. On the dynamics of flexible beams under large overall motions - the plane case: Part II. *Journal of Applied Mechanics*, 1986b, vol. 53 (4), pp. 855–863.
- Simo, J. C. e Vu-Quoc, L. The role of non-linear theories in transient dynamic analysis of flexible structures. *Journal of Sound and Vibration*, 1987, vol. 119 (3), pp. 487–508.
- Sinha, S. C. e Joseph, P. Control of general dynamic systems with periodically varying parameters via Liapunov-Floquet transformation. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 1994, vol. 116 (4), pp. 650–658.
- Sorge, K., Bremer, H. e Pfeiffer, F. Multi-body dynamics with rigid elastic subsystems. In: *Advanced Multibody System Dynamics*, editado por W. Schiehlen, Kluwer Academic Publishers, 1993, pp. 195–215.
- Stanbrigde, A. e Ewins, D. Modal testing of unconstrained rotors. In: *IMEchE Conference Transactions, Sixth International Conference on Vibrations in Rotating Machinery*, 1996 .
- Stephen, N. G. Note on the combined use of Dunkerleys's and Southwell's methods. *Journal of Sound and Vibration*, 1982, vol. 83 (4), pp. 585–587.
- Tadikonda, S. S. K. e Chang, H. T. On the geometric stiffness matrices in flexible multibody dynamics. *Journal of Vibrations and Acoustics*, 1995, vol. 117 (4), pp. 452–461.
- Tan, T. H., Lee, H. P. e Leng, G. S. B. Dynamic stability of a radially rotating beam subjected to base excitation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1997, vol. 146 (3-4), pp. 265–279.

- To, C. W. S. Vibration of a cantilever beam with a base excitation and tip mass. *Journal of Sound and Vibration*, 1982, vol. 83 (4), pp. 445–460.
- De Veubeke, B. F. The dynamics of flexible bodies. *International Journal of Engineering Science*, 1976, vol. 14, pp. 895–913.
- von M. Ertz, A. R. e Nordmann, R. Zur Berechnung der Eigenschwingungen von Strukturen mit periodisch zeitvarianten Bewegungsgleichungen. In: *SIRM'95 Schwingungen in rotierenden Maschinen II, 1995*, editado por H. Irretier e R. Nordmann. Germany, pp. 288–296, 1995.
- Wallrapp, O. e Schwertassek, R. Representation of geometric stiffening in multibody system simulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1991, vol. 32 (8), pp. 1833–1850.
- Whittaker, E. T. e Watson, G. N. *A Course of Modern Analysis*. New York: Cambridge University Press, 1963.
- Wiedemann, M. e Gasch, R. Rotor-Blatt-Kopplung. *Archive of Applied Mechanics*, 1993, vol. 63, pp. 337–344.
- Wright, A. D., Smith, C. E., Thresher, R. W. e Wang, J. L. C. Vibration modes of centrifugally stiffened beams. *Journal of Applied Mechanics*, 1982, vol. 49 (1), pp. 197–202.
- Wu, D.-H. e Sinha, S. A new approach in the analysis of linear systems with periodic coefficients for applications in rotorcraft dynamics. *The Aeronautical Journal*, 1994, vol. 98 (971), pp. 9–16.
- Wu, M., Horowitz, I. M. e Dennison, J. C. Solution, stability and transformation of linear time-varying systems. *International Journal of Control*, 1975, vol. 22 (2), pp. 169–180.
- Wu, M. e Sherif, A. Commutative class of linear time-varying systems. *International Journal of Control*, 1976, vol. 23 (3), pp. 433–444.
- Wu, M. Y. Transformation of a linear time-varying system into a linear time-invariant system. *International Journal of Control*, 1978, vol. 27 (4), pp. 589–602.
- Xu, J. e Gasch, R. Modale Behandlung linearer periodisch zeitvarianter Bewegungsgleichungen. *Archive of Applied Mechanics*, 1995, vol. 65 (3), pp. 178–193.
- Yigit, A., Scott, R. A. e Ulsoy, A. G. Flexural motion of a radially rotating beam attached to a rigid body. *Journal of Sound and Vibration*, 1988, vol. 121 (2), pp. 201–220.
- Zadeh, L. A. e Desoer, C. A. *Linear System Theory*. New York: McGraw-Hill, 1963.