



Mariane Mendes Medeiros

Otimização simultânea de estrutura e controlador para atenuação de vibrações em estruturas via Algoritmos Genéticos

44/2013

CAMPINAS
2013



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

Mariane Mendes Medeiros

**Otimização Simultânea de Estrutura e
Controlador para Atenuação de Vibrações em
Estruturas via Algoritmos Genéticos**

Orientador: Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica, na Área de Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico.

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL
DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELA ALUNA
MARIANE MENDES MEDEIROS E ORIENTADA PELO
PROF. DR. ALBERTO LUIZ SERPA.

ASSINATURA DO ORIENTADOR

CAMPINAS
2013

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Rose Meire da Silva - CRB 8/5974

M467o Medeiros, Mariane Mendes, 1985-
Otimização simultânea de estrutura e controlador para atenuação de vibrações em estruturas via algoritmos genéticos / Mariane Mendes Medeiros. – Campinas, SP : [s.n.], 2013.

Orientador: Alberto Luiz Serpa.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Vibração - Controle. 2. Otimização estrutural. 3. Controle H [Infinito]. 4. Algoritmos genéticos. I. Serpa, Alberto Luiz, 1967-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: Simultaneous optimization of structure and controller to vibration minimization via genetic algorithms

Palavras-chave em inglês:

Vibration - Control

Structural optimization

H [infinity] control

Genetic algorithms

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Mestra em Engenharia Mecânica

Banca examinadora:

Alberto Luiz Serpa [Orientador]

José Maria Campos dos Santos

Décio Crisol Donha

Data de defesa: 06-05-2013

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

**Otimização Simultânea de Estrutura e
Controlador para Atenuação de Vibrações em
Estruturas via Algoritmos Genéticos**

Autor: Mariane Mendes Medeiros

Orientador: Prof Dr. Alberto Luiz Serpa

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:



Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa
DMC/FEM/UNICAMP



Prof. Dr. José Maria Campos dos Santos
DMC/FEM/UNICAMP



Prof. Dr. Décio Crisol Donha
USP/POLI/São Paulo

Campinas, 06 de maio de 2013

Dedicatória

Dedico este trabalho à minha família e noivo, mas principalmente aos meus “pequenos”, para que lembrem que tudo é possível para aqueles que acreditam e seguem em frente.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à minha família, que mesmo longe se faz presente em cada minuto da minha vida através de um amor que consegue superar qualquer distância, e ao meu noivo Fábio que, estando presente, paciente e carinhosamente me apóia e me acompanha a cada novo dia.

Agradeço também:

- ao professor Alberto pela oportunidade que me ofereceu e pela paciência dedicada ao meu aprendizado como meu orientador neste trabalho;
- aos colegas com quem convivi durante o período e com quem dividi não só preocupações, mas também excelentes momentos;
- aos demais professores que de alguma forma estiveram presentes e contribuíram compartilhando uma parcela do seu conhecimento;
- à Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior – CAPES – pelo apoio financeiro;
- aos colegas de Manufatura Digital da Embraer, que me incentivaram e estiveram presentes em momentos importantes do meu desenvolvimento profissional; e finalmente
- ao amigo Sebastião, pelo gosto com que me apresentou a disciplina de robótica e que me inspirou a desenvolver o meu conhecimento na área de controle.

“Imagination is more important than knowledge. For knowledge is limited, whereas imagination embraces the entire world, stimulating progress, giving birth to evolution. It is, strictly speaking, a real factor in scientific research.”

Albert Einstein

Resumo

MEDEIROS, Mariane Mendes, *Otimização simultânea de estrutura e controlador para a atenuação de vibrações em estruturas via algoritmos genéticos*, Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2013. 141 p. Dissertação de mestrado.

O presente trabalho propõe o estudo de estruturas flexíveis e controle de vibrações sob a ótica da otimização simultânea de ambos. Iniciando pela modelagem da estrutura, é apresentada a justificativa para o uso de Elementos Finitos e modelagem no Espaço de Estados, passando ainda pela realização balanceada e redução de ordem do sistema. Na sequência, é descrita a síntese do controlador \mathcal{H}_∞ , que parte do princípio da minimização da Norma \mathcal{H}_∞ do sistema. A solução do problema é então apresentada sob a abordagem das Desigualdades Matriciais Lineares, enfoque mais atual devido às suas propriedades de linearidade e convexidade quando aplicada dentro da teoria de controle.

Em se tratando do processo de otimização, é desenvolvido um estudo sobre o método simultâneo, onde parâmetros da estrutura são otimizados juntamente com os do controlador de maneira a diminuir os efeitos negativos entre as dinâmicas quando otimizadas separadamente. Ainda assim, são apresentadas duas outras abordagens como forma de comparação: a Ativa Serial e a Passiva Estrutural. Para todos os três casos, a técnica escolhida para a resolução do problema de otimização foi o Algoritmo Genético, cujas vantagens e desvantagens são mostradas junto com toda a descrição de conceitos envolvidos, considerando seus operadores, fluxo algorítmico e até mesmo critérios de parada.

Por fim, serão apresentados os resultados analisados sobre um modelo de uma viga engastada, submetida à distúrbios externos, através de uma simulação em MATLAB que engloba todos os conceitos estudados.

Palavras-Chave: Controle de vibrações \mathcal{H}_∞ , Estrutura Flexível, Algoritmo Genético, Otimização Simultânea.

Abstract

MEDEIROS, Mariane Mendes, *Simultaneous optimization of structure and controller to vibration minimization via genetic algorithms*, Campinas, Mechanical Engineering Department, University of Campinas, 2013. 141 p. Master's Degree.

The present work proposes the study of flexible structures and vibration control under the light of simultaneous optimization. Starting by structure modeling, it presents the reason for use Finite Element and State-Space modeling, passing also through the balanced realization and order reduction of the system. Sequentially, it describes the synthesis of \mathcal{H}_∞ controller, which considers the minimization of \mathcal{H}_∞ norm of the system. The solution of the problem is then presented under Linear Matrix Inequalities approach, the most up-to-date method due to linearity and convexity properties when applied to control theory.

Regarding optimization process, it is developed a study of a simultaneous optimization method where structure parameters are optimized along with the controller ones, aiming to diminish negative influence between dynamics when separately optimized. Even tough, two other approaches are presented by means of comparison: Serial Active and Structural Passive. For all three cases, the chosen technique to solve the optimization problem was the Genetic Algorithm whose advantages and disadvantages are shown along with a description of all involved concepts, considering its operators, algorithmic flux and even stopping criteria.

Last, the results analysed over a clamped beam model subjected to external disturbances are shown, through a MATLAB simulation that encloses all studied concepts.

Keywords: \mathcal{H}_∞ vibration control, Flexible structure, Genetic Algorithm, Simultaneous Optimization

Lista de Figuras

Figura 1: Antena de alto desempenho projetada via AG [Fonte: www.inovacaotecnologica.com.br]	1
Figura 2: Exemplo conceitual de malha de elementos finitos	11
Figura 3: Exemplo de diagrama de valores singulares	18
Figura 4: Diagrama de Blocos do Problema \mathcal{H}^∞	19
Figura 5: Seleção por (a) <i>Rank</i> ; (b) Torneio; e (c) Roleta Russa	33
Figura 6: Cruzamento por troca em (a) ponto-único; e (b) dois-pontos; a troca parametrizada uniforme terá resultados finais semelhantes, mesmo com processo diferenciado	35
Figura 7: Viga engastada de seção retangular	42
Figura 8: Algoritmo de otimização para a abordagem Passiva Estrutural	50
Figura 9: Algoritmo de otimização para a abordagem Ativa Serial	52
Figura 10: Algoritmo de otimização para a abordagem Simultânea	54
Figura 11: Relação de GDLs da viga de 8 elementos finitos	57
Figura 12: Passiva Estrutural: curvas de resposta em frequência para a viga de 8 elementos finitos	66
Figura 13: Passiva Estrutural: vista superior da viga de 8 elementos finitos otimizada	67
Figura 14: Passiva Estrutural: simulação com sinal <i>chirp</i> como distúrbio de entrada para a viga de 8 elementos finitos	68
Figura 15: Passiva Estrutural: esforços de controle necessários para a viga de 8 elementos finitos	69
Figura 16: Ativa Serial: curvas de resposta em frequência para a viga de 8 elementos finitos	70
Figura 17: Ativa Serial: vista superior da viga de 8 elementos finitos otimizada	71
Figura 18: Ativa Serial: simulação com sinal <i>chirp</i> como distúrbio de entrada para viga de 8 elementos finitos	72
Figura 19: Ativa Serial: esforços de controle necessários para viga de 8 elementos finitos	73
Figura 20: Simultânea: curvas de resposta em frequência para viga de 8 elementos finitos	74
Figura 21: Simultânea: vista superior da viga de 8 elementos finitos otimizada	75
Figura 22: Simultânea: simulação com sinal <i>chirp</i> como distúrbio de entrada para viga de 8 elementos finitos	76
Figura 23: Simultânea esforços de controle necessários para viga de 8 elementos finitos	77
Figura 24: Comparativo entre abordagens: curvas de resposta em frequência para viga de 8 elementos finitos	78
Figura 25: Comparativo entre abordagens: simulações com sinal <i>chirp</i> como entrada para viga de 8 elementos finitos	79
Figura 26: Comparativo entre abordagens: formatos finais da viga de 8 elementos finitos	80
Figura 27: Relação de GDLs da viga de 20 elementos finitos	81
Figura 28: Passiva Estrutural: curvas de resposta em frequência para viga de 20 elementos finitos	87
Figura 29: Passiva Estrutural: vista superior da viga de 20 elementos finitos otimizada	88

Figura 30: Passiva Estrutural: simulação com sinal <i>chirp</i> como distúrbio de entrada para viga de 20 elementos finitos	89
Figura 31: Passiva Estrutural: esforços de controle necessários para viga de 20 elementos finitos	90
Figura 32: Ativa Serial: curvas de resposta em frequência para viga de 20 elementos finitos	91
Figura 33: Ativa Serial: vista superior da viga de 20 elementos finitos otimizada	92
Figura 34: Ativa Serial: simulação com sinal <i>chirp</i> como distúrbio de entrada para viga de 20 elementos finitos	93
Figura 35: Ativa Serial: esforços de controle necessários para viga de 20 elementos finitos	94
Figura 36: Simultânea: curvas de resposta em frequência para viga de 20 elementos finitos	95
Figura 37: Simultânea: vista superior da viga de 20 elementos finitos otimizada	96
Figura 38: Simultânea: simulação com sinal <i>chirp</i> como distúrbio de entrada para viga de 20 elementos finitos	97
Figura 39: Simultânea: esforços de controle necessários para viga de 20 elementos finitos	98
Figura 40: Comparativo entre abordagens: curvas de resposta em frequência para viga de 20 elementos finitos	99
Figura 41: Comparativo entre abordagens: simulações com sinal <i>chirp</i> como entrada para viga de 20 elementos finitos	100
Figura 42: Comparativo entre abordagens: formatos finais de viga de 20 elementos finitos	101

Lista de Tabelas

Tabela 1: Resumo dos atributos da viga.....	58
Tabela 2: Resultados da Abordagem Passiva Estrutural – viga de 8 elementos finitos	58
Tabela 3: Controlador final obtido para a abordagem Passiva Estrutural – viga de 8 elementos finitos	59
Tabela 4: Parâmetros otimizados da viga pela abordagem Passiva Estrutural – viga de 8 elementos finitos	60
Tabela 5: Resultados da Abordagem Ativa Serial – viga de 8 elementos finitos.....	60
Tabela 6: Controlador final obtido para a abordagem Ativa Serial – viga de 8 elementos finitos.....	61
Tabela 7: Parâmetros otimizados da viga pela abordagem Ativa Serial – viga de 8 elementos finitos	61
Tabela 8: Resultados da Abordagem Simultânea – viga de 8 elementos finitos.....	62
Tabela 9: Controlador final obtido para a abordagem Simultânea – viga de 8 elementos finitos.....	62
Tabela 10: Parâmetros otimizados da viga pela abordagem Simultânea – vida de 8 elementos finitos.....	63
Tabela 11: Comparativo entre abordagens – viga de 8 elementos finitos.....	65
Tabela 12: Resultados da Abordagem Passiva Estrutural – viga de 20 elementos finitos	82
Tabela 13: Parâmetros otimizados da viga pela abordagem Passiva Estrutural – viga de 20 elementos finitos	82
Tabela 14: Resultados da Abordagem Ativa Serial – viga de 20 elementos finitos.....	83
Tabela 15: Parâmetros otimizados da viga pela abordagem Ativa Serial – viga de 20 elementos finitos ..	84
Tabela 16: Resultados da Abordagem Simultânea – viga de 20 elementos finitos.....	85
Tabela 17: Parâmetros otimizados da viga pela abordagem Simultânea – viga de 20 elementos finitos....	85
Tabela 18: Comparativo entre abordagens estudadas – viga de 20 elementos finitos	86
Tabela 19: Controlador final obtido para a abordagem Passiva Estrutural – viga de 20 elementos finitos	113
Tabela 20: Controlador final obtido para a abordagem Ativa Serial – viga de 20 elementos finitos.....	115
Tabela 21: Controlador final obtido para a abordagem Simultânea – viga de 20 elementos finitos.....	117

Lista de Símbolos, Abreviaturas e Notações

\mathbf{x}	Letras minúsculas e em negrito itálico representam vetores
\mathbf{X}	Letras maiúsculas e em negrito itálico representam matrizes
$(\cdot)^T$	Matriz transposta
$(\cdot)^*$	Matriz transposta conjugada
$(\cdot)^{-1}$	Matriz inversa
$(\cdot)^+$	Matriz pseudoinversa
\mathbf{I}_k	Matriz identidade da ordem da matriz \mathbf{K}
$\mathbf{0}_k$	Matriz de zeros da ordem da matriz \mathbf{K}
AG	Algoritmo Genético
GDL	Grau de Liberdade
LMI	<i>Linear Matrix Inequalities</i> – Desigualdades Matriciais Lineares
ARE	<i>Algebraic Riccati Equations</i> – Equações Algébricas de Riccati
SISO	<i>Single-Input and Single-Output</i> – Entrada única e saída única
MIMO	<i>Multiple-Input and Multiple-Output</i> – Entrada múltipla e saída múltipla
FRF	Função de Resposta em Frequência
HNA	<i>Optimal Hankel Norm Approximation</i> – Aproximação ótima da Norma de Hankel
ALGA	<i>Augmented Lagrangian Genetic Algorithm</i>
SQP	<i>Sequential Quadratic Programming</i>
LQG	Controlador do tipo <i>Linear Quadratic Gaussian</i> – Linear Quadrático Gaussiano
RMS	<i>Root Mean Square</i>

Sumário

1. INTRODUÇÃO	1
1.1. Revisão bibliográfica	3
1.2. Estrutura do trabalho	6
2. MODELAGEM DA ESTRUTURA	8
2.1. Introdução	8
2.2. Formulação	9
2.3. Realização balanceada do sistema	12
2.4. Redução do sistema	13
2.5. Resultado da modelagem	15
3. CONTROLADOR \mathcal{H}^∞	16
3.1. Introdução	16
3.2. Formulação	17
3.2.1. Norma \mathcal{H}^∞	17
3.2.2. Definição do problema \mathcal{H}^∞	18
3.3. Problema \mathcal{H}^∞ sob enfoque LMI	20
3.3.1. Problema subótimo	22
3.3.2. Norma \mathcal{H}^∞ como problema de otimização	24
3.4. Síntese do controlador \mathcal{H}^∞	25
3.5. Justificativa para o uso do controlador \mathcal{H}^∞	26
4. ALGORITMOS GENÉTICOS	27
4.1. Introdução	27
4.2. Definição	28
4.3. Fluxo de um AG	29
4.4. Elementos e operadores de um AG	30
4.4.1. População Inicial	30
4.4.2. Função de Avaliação	31
4.4.3. Operador de seleção	31

4.4.4.	Operador de Elitismo.....	33
4.4.5.	Operador de Cruzamento.....	34
4.4.6.	Operador de Mutação	35
4.5.	Critério de parada e término	35
4.6.	Restrições não-lineares	36
4.7.	Vantagens e desvantagens	38
4.8.	Interesse no uso de AG na otimização simultânea	39
5.	OTIMIZAÇÃO: PROJETO SIMULTÂNEO DE ESTRUTURA E CONTROLE	40
5.1.	Introdução.....	40
5.2.	Problema a ser otimizado.....	41
5.3.	Parâmetros do problema a ser otimizado.....	42
5.3.1.	Variáveis de otimização.....	43
5.3.2.	Restrições.....	44
5.3.3.	Critério de Parada	45
5.4.	Abordagens de otimização e descrição de algoritmos	46
5.4.1.	Funções em comum	46
5.4.2.	Abordagem Passiva Estrutural.....	49
5.4.3.	Abordagem Ativa Serial	50
5.4.4.	Abordagem Simultânea	52
6.	RESULTADOS	55
6.1.	Escopo de Simulações	55
6.2.	Acerca dos resultados	55
6.3.	Viga engastada dividida em 8 elementos finitos	57
6.3.1.	Parâmetros da estrutura.....	57
6.3.2.	Resultados do Modelo Passivo Estrutural	58
6.3.3.	Resultados do Modelo Ativo Serial.....	60
6.3.4.	Resultados do Modelo Simultâneo	61
6.3.5.	Comparativo entre os resultados das diferentes abordagens.....	63
6.4.	Viga engastada dividida em 20 elementos finitos	81
6.4.1.	Parâmetros da estrutura.....	81
6.4.2.	Resultados do Modelo Passivo Estrutural	82

6.4.3.	Resultados do Modelo Ativo Serial.....	83
6.4.4.	Resultados do Modelo Simultâneo	84
6.4.5.	Comparativo entre os resultados das diferentes abordagens.....	86
6.5.	Análise dos resultados	102
7.	CONCLUSÕES	104
APÊNDICE A - ESTABILIDADE DE LYAPUNOV		108
APÊNDICE B - CONCEITOS COMPLEMENTARES		109
B.1	NORMA	109
B.2	VALOR SINGULAR MÁXIMO	109
B.3	COMPLEMENTO DE SCHUR	110
B.4	TRANSFORMAÇÃO DE CONGRUÊNCIA	110
B.5	NORMA \mathcal{L}_2	111
B.6	NORMA DE HANKEL	111
B.7	REALIZAÇÃO MÍNIMA BALANCEADA DE UM SISTEMA	112
APÊNDICE C - CONTROLADORES PARA VIGA DE 20 ELEMENTOS		113
Referências Bibliográficas		119

1. INTRODUÇÃO

A evolução da capacidade de processamento computacional ao longo das últimas décadas tem sido de grande relevância para o desenvolvimento científico, uma vez modelagem computacional de sistemas facilitou a experimentação e a simulação de determinados mecanismos complexos e de alto custo de forma eficiente e relativamente rápida. Não obstante, o desenvolvimento de técnicas baseadas em processos naturais, como os Algoritmos Genéticos, passou a permitir a obtenção de resultados por vezes inimagináveis. É o caso, por exemplo, da antena de alto desempenho mostrada na Figura 1, projetada por Jason Lohn como parte do projeto Space Technology 5 da NASA, a partir da programação genética de John Koza, este último sendo um dos pioneiros no uso deste tipo de programação (LOHN, LINDEN e HORNBY, 2011), (Inovação Tecnológica, 2011).

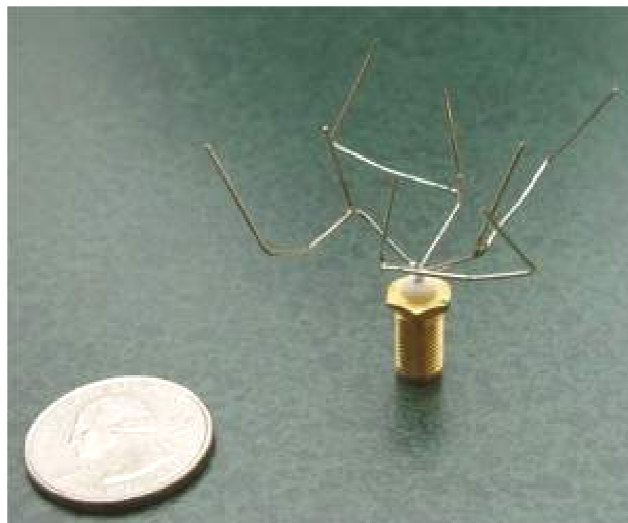


Figura 1: Antena de alto desempenho projetada via AG [Fonte: www.inovacaotecnologica.com.br]

Os benefícios da inovação trazida por esta evolução foram enormes em termos práticos, de forma que as aplicações industriais e de engenharia na sua generalidade puderam, então, evoluir também. Dentre todas as possibilidades conhecidas do uso de Algoritmos Genéticos, desde a robótica até projeto de motores, passando por programação evolutiva e projeto dos mais diversos componentes, encontra-se também o problema de controle de vibrações. Vibrações

podem ser indesejadas em certas estruturas, e por este motivo, podem demandar algum tipo de medição e atuação para o controle destas. Seria impossível conceber, por exemplo, imprecisão em cabeçotes de discos rígidos ou leitores ópticos, desvios em trajetórias de satélites artificiais devido à vibração de placas e partes anexas, ou mesmo, diminuição de desempenho em vôos e similares (TAKAHASHI, KAJIWARA e ARISAKA, 2009), (GERVINI, 2003). Sendo assim, o projeto de controladores passa a ser de extrema importância no cenário industrial atual, onde a flexibilidade está cada vez mais presente devido à necessidade de estruturas mais leves e resistentes, seja pela diminuição de massa ou pela composição dos novos materiais empregados nas mesmas.

Segundo Lu e Skelton (2000), este desafio de projeto de modelo estrutural e controle pode ser dividido nas seguintes eras:

- A era do **Projeto estático**, onde a estrutura era modelada e projetada com intenção de atender requisitos estáticos pré-definidos;
- A era do **Projeto dinâmico**, onde os modos de vibração eram previamente analisados e então considerados no projeto da estrutura, caracterizando assim um controle passivo;
- A era do **Projeto híbrido**, onde a necessidade de respostas dinâmicas mais adequadas e efetivas exigiram a inclusão de controladores ativos;
- E por fim, a atual **Era dos sistemas**, onde o projeto simultâneo de estrutura e controlador busca parâmetros otimizados, objetivando uma maior cooperação entre ambos.

A tendência atual introduzida pela era dos sistemas torna-se claramente vantajosa devido à importância em se otimizar o sistema de controle e a estrutura de forma a obter o máximo de cooperação entre ambos e atender os requisitos de desempenho e estabilidade da forma mais integrada possível, obtendo assim o melhor desempenho do sistema como um todo. Para isto, técnicas mais recentes de otimização simultânea podem ser empregadas, com as quais até mesmo o posicionamento ótimo de atuadores e sensores pode ser avaliado de forma a determinar a melhor relação custo-benefício entre quantidade de instrumentação necessária e resposta desejada para o sistema.

A importância do projeto simultâneo em estudos recentes têm sido tamanha que, em certos cenários, este deixa de ser somente uma opção inovadora para ser quase uma necessidade. É o caso, por exemplo, do desenvolvimento de sistemas aerodinâmicos. A integração das disciplinas envolvidas em um projeto de controle desta natureza, quando concebido de forma simultânea, ajuda a garantir que as interações entre as mesmas também serão consideradas no sistema resultante. Consequentemente, os esforços de controle necessários podem ser minimizados, uma vez que os distúrbios resultantes do efeito negativo que as dinâmicas exercem entre si quando modeladas individualmente são atenuados. Além disto, obtém-se uma maior flexibilidade de projeto: ao contrário das técnicas amplamente utilizadas onde se projeta a estrutura de acordo com os requisitos de carga que deve suportar para só então projetar sobre esta um controlador que atenda às especificações de desempenho do sistema, os parâmetros envolvidos são otimizados de acordo com a necessidade de resposta do sistema como um todo. Isto evita o ciclo por vezes complexo onde se projeta uma estrutura ideal que não pode ser adequadamente controlada, ou ainda, onde o controlador ideal limita as especificações de estrutura que podem ser alcançadas, permitindo portanto que mais variáveis possam ser consideradas no projeto sem necessidade de retrabalhos sucessivos desta ou daquela disciplina em específico.

Neste ponto, o presente trabalho propõe a utilização de Algoritmos Genéticos para o estudo do controle de vibrações em estruturas, considerando o projeto simultâneo da estrutura e do controlador na tentativa de obter uma otimização mais adequada, aumentando assim a eficiência do sistema controlado como um todo. Como estudo de caso, o projeto será feito sobre uma viga engastada, visando tanto a otimização da base de sua seção transversal quanto a redução da Norma \mathcal{H}_∞ da malha fechada final como um todo, sem considerar, entretanto, otimização de número e posição de sensores e atuadores.

1.1. Revisão bibliográfica

Estudos sobre controle de estruturas flexíveis podem ser encontrados em diversos contextos na literatura. Lopes Jr. e Silva (2005) mostram uma revisão sobre técnicas de controle ativo citando

diversas referências no assunto, desde trabalhos que se utilizam de técnicas mais usuais, como controladores LQG¹, até técnicas mais recentes como o uso de Lógica Fuzzy e Algoritmos Genéticos, considerando ainda em alguns casos o posicionamento de sensores e atuadores no projeto. Dentre os trabalhos que tratam de controladores \mathcal{H}_∞ , podem ser citados o trabalho de Picinatti e Paglione (2009), para controle de arremetida de aeronaves; e Takashi, Kajiwara e Arisaka (2009), que o utilizou para melhoria de performance em *hard-disk drives*.

Em termos de modelagem, o uso de elementos finitos pode ser encontrado em literatura da área, como Hutton (2004) e Kwon e Bang (1997). Sheng (2004), em seu trabalho de posicionamento de atuadores e sensores lançou mão desta técnica, utilizando inclusive algoritmos genéticos na busca do posicionamento ótimo da instrumentação em estruturas telescópicas. Segundo ele, o método dos elementos finitos tem se tornado essencial em diversas aplicações de engenharia, dentre outras, as áreas de aplicação aeroespacial e civil.

Quanto aos demais aspectos de modelagem, o estudo sobre realização balanceada de sistemas foi embasado basicamente em Gawronski (2004); a redução de ordem do modelo da estrutura possui como boas referências tanto o trabalho de Zhou, Doyle e Glover (1995) quanto o de Benner, Quintana-Ortí E.S. e Quintana-Ortí G. (2005), tendo este último uma boa base de cálculos sobre o assunto; e por fim, o uso do amortecimento proporcional aplicado na modelagem pode ser encontrado em Adhikari (2006).

O equacionamento no espaço de estados para um controlador \mathcal{H}_∞ , por sua vez, pode ser visto em Doyle, Glover *et al.* (1989), que consideram em seu trabalho as Equações de Riccati, abordagem amplamente utilizada, ainda que exigente quanto ao condicionamento matemático do problema a ser resolvido. Já Gahinet e Apkarian (1994) mostram as vantagens da formulação via Desigualdades Matriciais Lineares (*Linear Matrix Inequalities* - LMI), método mais recente que possibilita uma maior facilidade de aplicação para diversos problemas que podem ser encontrados ao longo do projeto de controladores \mathcal{H}_∞ . Mais informações sobre LMIs podem ser encontradas ainda em Boyd, El Ghaoui (1994), cujo livro dedica-se ao uso desta formulação aplicada à teoria de sistemas e controle. Por fim, uma comparação entre o uso das Equações de Riccati e de LMIs dentro do controle \mathcal{H}_∞ pode ser vista em Van de Heuvel (1997), concluindo que ainda que mais lenta, a formulação por LMIs é mais robusta devido às suas características de

¹ O controlador Linear Quadrático Gaussiano (*Linear Quadratic Gaussian* – LQG) é um tipo de controlador muito utilizado composto de estimador e regulador.

linearidade e convexidade e por não falhar nas situações em que as condições iniciais são violadas, ao contrário das Equações de Riccati.

Quanto às abordagens de otimização mostradas neste trabalho, Grigoriadis e Wu (1997), que também utilizam LMI para o projeto de controladores \mathcal{H}_∞ , apresentam o projeto Ativo Serial, cujo processo envolve otimização alternada entre estrutura e controlador: ora estrutura é otimizada com os parâmetros do controlador fixos, e ora o controlador é otimizado com os parâmetros da estrutura fixos.

Já a abordagem simultânea, foco deste trabalho, aparece em Lu e Skelton (2000), que justificam esta forma de projeto devido a necessidade de obter uma resposta dinâmica acoplada onde os modelos da estrutura e do controlador são otimizados juntos, sem que uma dinâmica interfira negativamente sobre o desempenho da outra. Park e Asada (1994) utilizam a referida abordagem no projeto de um robô de dois elos de alta velocidade, obtendo uma melhor performance que, segundo os próprios autores, seria impossível de ser atingida se os projetos de estrutura e controle fossem projetados individualmente. Da mesma forma, Maghami, Joshi e Price (1992) não só comprovam a melhor performance do método em projeto de espaçonaves como também esclarecem que as alternativas possíveis de otimização para projetos desta natureza implicam necessariamente em maior consumo de combustível ou performance reduzida. Por sua vez, Livne, Schmit e Friedmann (1993) mostram que para uma asa em compósito o uso da abordagem simultânea considera de forma apropriada a alta interação existente entre estrutura, controlador e aspectos aerodinâmicos do projeto, levando a melhores resultados. Por fim, ainda seguindo a mesma linha de projeto, Fathy, Papalambros, *et. al* (2001) também apresentam resultados que comprovam que, dada a natureza acoplada das dinâmicas da estrutura e do controlador, o projeto simultâneo apresenta melhores resultados que as demais abordagens.

Por último, o uso de Algoritmos Genéticos (AG) para a otimização do sistema teve seu estudo teórico apoiado principalmente no livro de Mitchell (1998), que trata de todos os aspectos necessários para o entendimento do assunto, e no trabalho de Worden, Staszewski e Hensman (2010), que trata da computação natural como um todo, incluindo uma boa visão também sobre AGs. Podem também ser citados como referência os trabalhos de Castro (2001), cujo objetivo central foi o estudo de AGs aplicados à otimização com multi-objetivos, por fim testados em problemas estruturais diversos; a pesquisa de Jain e Martin (1998), que trabalham não somente com AGs, mas também com Lógica Nebulosa (*Fuzzy Logic*) e Redes Neurais aplicados em

problemas industriais; e trabalhos de aspectos mais específicos, como a investigação acerca das funções de avaliação (*fitness*) desenvolvida por Kreinovich, Quintana e Fuentes (1993) e o estudo sobre cruzamento (*crossover*) feito por Spears e De Jong (1991), entre outros.

É importante mencionar o fato de que este trabalho foi proposto como uma extensão do trabalho desenvolvido por De Paiva (2009), que também atendendo ao problema de otimização simultânea de estrutura e controlador via \mathcal{H}_∞ , utilizou como solução para o problema de otimização a técnica de Programação Sequencial Quadrática (*Sequential Quadratic Programming* - SQP), um método iterativo de programação não-linear baseado em gradientes que, segundo De Paiva, são “o estado da arte dentre os métodos de programação não-lineares”. Neste ponto, o objetivo do presente estudo é revisitar a teoria sobre modelagem e otimização do referido trabalho, adicionando a técnica de Algoritmos Genéticos como uma nova possibilidade de resolução do problema de otimização simultânea proposto.

1.2. Estrutura do trabalho

O capítulo 2 dará uma visão sobre estruturas flexíveis. Com uma passagem breve pelas eras no desafio de projeto estrutural, trará em um primeiro momento a justificativa do uso de Elementos Finitos e de Amortecimento Proporcional para a modelagem da estrutura, bem como a necessidade da abordagem no Espaço de Estados. Na sequência, a obtenção de uma realização balanceada do sistema baseada nas suas características de observabilidade e controlabilidade será apresentada, com subsequente redução de ordem do mesmo. Todo o equacionamento pertinente à modelagem da estrutura é mostrado ao longo do capítulo.

O capítulo 3 iniciará com a definição da norma \mathcal{H}_∞ , estendendo seu conceito ao problema de projeto e síntese do controlador de mesmo tipo, que deve visar a estabilidade do sistema em malha fechada através da minimização da referida norma. Partindo-se do diagrama de blocos apresentado, define-se na sequência todo o equacionamento do controlador a ser projetado, baseado na abordagem de Desigualdades Matriciais Lineares. A solução geral do problema então é demonstrada passo-a-passo, bem como a solução do problema subótimo no tempo.

O capítulo 4 abordará o estudo sobre Algoritmos Genéticos. Junto a um breve histórico,

serão explicados os conceitos envolvidos na solução, desde definição e descrição de fluxo algorítmico até suas aplicações mais comuns. Seus elementos e operadores principais serão detalhados, bem como serão apresentados critérios de parada e os cálculos realizados na resolução das restrições não-lineares envolvidas. Por fim, serão expostas suas vantagens e desvantagens.

O capítulo 5, por sua vez, abordará o projeto simultâneo de estrutura e controle para uma viga engastada, dando uma visão geral do problema a ser resolvido através da minimização da norma \mathcal{H}_∞ do sistema como um todo. Serão descritos os parâmetros utilizados, as variáveis a serem otimizadas, as restrições de problema, entre outros. Além do método de projeto simultâneo, outras abordagens serão brevemente descritas para que comparações de resultados possam ser feitas. Neste capítulo, todos os algoritmos envolvidos serão detalhados.

O capítulo 6 mostrará e discutirá alguns resultados obtidos, apresentando gráficos de resposta em frequência, formato otimizado de viga, esforços de controle e simulações de vibrações para cada uma das abordagens mencionadas ao longo do trabalho, bem como um comparativo geral para melhor entendimento e visibilidade dos conceitos envolvidos em cada método.

Por fim, o capítulo 7 apresentará as conclusões obtidas sobre todo o estudo teórico e testes práticos executados no MATLAB, com algumas sugestões para trabalhos futuros.

O trabalho é então encerrado com a indicação das referências utilizadas e com os apêndices que descrevem conceitos periféricos de importância para o suporte ao entendimento do tema desenvolvido.

2. MODELAGEM DA ESTRUTURA

2.1. Introdução

Atualmente, é notável o esforço na busca por estruturas cada vez mais leves no contexto industrial, culminando por vezes no aumento de flexibilidade das mesmas. Estruturas flexíveis, sejam simples ou complexas, estão submetidas a vibrações mecânicas, um fenômeno que pode afetar o desempenho de sistemas dinâmicos (MEDEIROS, 2009). Por isto, é importante que não somente os esforços em controlá-las, mas também em modelá-las, receba a devida atenção dentro do âmbito da engenharia.

Seria inconcebível que em certos sistemas vibrações indesejadas não atenuadas viessem a interferir na sua aplicação prática. Como mencionado anteriormente na seção 1, no domínio aeroespacial qualquer característica vibratória indesejada poderia levar, entre outros, à mudanças de trajetória dos corpos, além de interferências nas características de resistência do material ou até mesmo, mudança na forma das peças componentes (GERVINI, 2003), (MEHRABIAN e YOUSEFI-KOMA, 2009). Já nas estruturas pertinentes à área de construção civil, comportamentos vibratórios podem vir a ser a ruína de construções inteiras. Por isso, sejam estas vibrações influenciadas por aspectos como o material empregado, geometria da estrutura, parâmetros incertos do modelo ou causadas por excitações externas, este comportamento deve ser analisado e levado em conta nas simulações que usam o respectivo modelo. O levantamento de todas as frequências de excitação às quais a estrutura estará submetida é tão importante quanto o próprio controlador para um correto funcionamento do sistema como um todo.

Para tal, a modelagem do sistema dinâmico em questão deve receber a devida atenção. Segundo (MONTEIRO, 2006), esta modelagem permite “conhecer como as coisas são e compreender as regras que governam as mudanças que ocorrerão”. Matematicamente, um sistema dinâmico vem a ser descrito através de um conjunto de equações de movimento cujo objetivo é reproduzir da maneira mais fiel possível o comportamento físico do mesmo ao longo do tempo, seja de forma natural ou quando submetido à perturbações externas. A modelagem destas

equações é comumente feita através do formalismo de Newton, que considera uma aproximação vetorial por considerar análise de forças e momentos, ou então via formalismo de Lagrange, cuja abordagem é escalar, baseada em medidas de energia e trabalho.

Neste ponto, o mapeamento das equações diferenciais no conjunto de variáveis que descrevem o comportamento do sistema ao longo do tempo introduzido pelo uso da modelagem no Espaço de Estados, além de ser mais adequado à resolução de sistemas de múltiplas entradas/saídas, possui a vantagem de ser resolvido numericamente e ser, portanto, mais adequado às técnicas computacionais, resultando em maior simplicidade na obtenção da solução do problema (FRANKLIN, POWELL e EMAMI-NAEINI, 2001). Esta modelagem permite descrever não somente o comportamento de entrada e saída do sistema como também os seus estados, de forma que o estado do mesmo em um determinado tempo t_n depende de um estado inicial t_0 e das entradas do sistema para o intervalo de 0 a n , representando um histórico do seu comportamento até então (BROGAN, 1991).

Segue na sequência, então, a modelagem de uma estrutura flexível genérica sob o ponto de vista da modelagem no Espaço de Estados.

2.2. Formulação

A equação de movimento de uma estrutura flexível pode ser dada por

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{C}_c\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} = \mathbf{u} , \quad (1)$$

onde \mathbf{M} , \mathbf{C}_c e \mathbf{K} são respectivamente as matrizes de massa, amortecimento e rigidez, \mathbf{u} o vetor de esforços externos que atuam no sistema e \mathbf{y} o vetor de resposta em termos de deslocamento. Considerando que o sistema pode ser descrito através das variáveis de posição e velocidade, o vetor \mathbf{x} de estados será:

$$\mathbf{x}^T = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2] = [\mathbf{y} \quad \dot{\mathbf{y}}] , \quad (2)$$

levando às equações

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -M^{-1}C_c x_2 - M^{-1}K x_1 + M^{-1}u ,\end{aligned}\tag{3}$$

ou ainda matricialmente,

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C_c \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -M^{-1} \end{bmatrix} u .\tag{4}$$

O sistema de equações diferenciais (1) até então de segunda ordem passa agora a ser representando por um conjunto de equações de primeira ordem (4). Adicionando por fim uma matriz **B** que defina o posicionamento das forças externas que atuam no sistema, obtém-se a representação do modelo no espaço de estados:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du ,\end{aligned}\tag{5}$$

sendo:

- **x** o vetor de variáveis de estado, menor conjunto de variáveis independentes capazes de caracterizar de forma única as mudanças do sistema;
- **u** o vetor de entrada, representando as forças externas atuantes no sistema;
- **y** o vetor de saídas, ou de medição de sinais;
- **A** a matriz dinâmica de estados, que determina o comportamento do sistema;
- **B** a matriz de entrada, que define a localização dos sinais especificados em **u** no sistema;
- **C** a matriz de saída, que define quais sinais do sistema serão medidos;
- **D** a matriz de transmissão direta entre entrada e saída.

Para a determinação destas matrizes para uma estrutura, pode-se empregar o método dos elementos finitos (HUTTON, 2004), (KWON e BANG, 1997). Nesta abordagem, a estrutura é modelada como um conjunto composto de diversos elementos conectados por nós (ver Figura 2) e

com características individuais que possuem matrizes de rigidez e massa próprios. Uma vez discretizada a estrutura e aplicadas as condições de contorno apropriadas, a junção destas matrizes acaba por levar à obtenção das matrizes \mathbf{M} e \mathbf{K} do sistema como um todo.

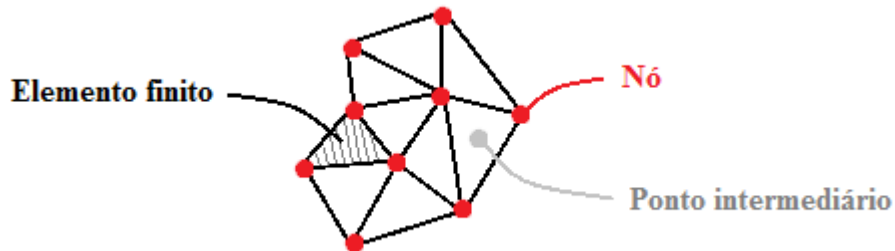


Figura 2: Exemplo conceitual de malha de elementos finitos

A partir das informações calculadas em cada nó, o método consegue obter informações aproximadas para pontos intermediários através da interpolação dos resultados calculados. Segundo Hutton (2004), este é o ponto crucial do método, que “*é uma técnica poderosa para obter soluções aproximadas baseadas em métodos numéricos com boa precisão*”.

A obtenção da matriz de amortecimento usualmente não é tão simples quanto a obtenção das matrizes de massa e rigidez. Por isto, é comum se utilizar o chamado Amortecimento Proporcional (ou ainda, Amortecimento de Rayleigh), uma combinação linear das matrizes de massa e de rigidez já obtidas através do método dos elementos finitos, dada por:

$$\mathbf{C}_c = \alpha_1 \mathbf{M} + \alpha_2 \mathbf{K}, \quad (6)$$

onde α_1 e α_2 são escalares reais. Esta consideração é usualmente utilizada para que a análise dos modos de vibração de sistemas não amortecidos possa ser realizada para sistemas com amortecimento (ADHIKARI, 2006).

2.3. Realização balanceada do sistema

A realização balanceada de um sistema dinâmico está diretamente relacionada às suas características de controlabilidade e observabilidade, propriedades estruturais que fornecem informações úteis para o controle do mesmo (GAWRONSKI, 2004). A medida destas propriedades é dada pelos gramianos, matrizes que representam o grau de controlabilidade e observabilidade dos estados do sistema e que podem ser definidos para o sistema representado pela Equação (5), respectivamente, como:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_c(t) &= \int_0^t e^{A\tau} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{A^T\tau} d\tau \\ \mathbf{W}_o(t) &= \int_0^t e^{A^T\tau} \mathbf{C}^T \mathbf{C} e^{A\tau} d\tau , \end{aligned} \quad (7)$$

ou na forma de equação diferencial como:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{W}}_c &= \mathbf{A} \mathbf{W}_c + \mathbf{W}_c \mathbf{A}^T + \mathbf{B} \mathbf{B}^T \\ \dot{\mathbf{W}}_o &= \mathbf{A}^T \mathbf{W}_o + \mathbf{W}_o \mathbf{A} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} . \end{aligned} \quad (8)$$

Diz-se então que um sistema estável e invariante no tempo, cuja solução estacionária é obtida considerando $\dot{\mathbf{W}}_c = \dot{\mathbf{W}}_o = 0$, possui realização balanceada quando os gramianos $\dot{\mathbf{W}}_c$ e $\dot{\mathbf{W}}_o$, soluções das Equações de Lyapunov dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \mathbf{W}_c + \mathbf{W}_c \mathbf{A}^T + \mathbf{B} \mathbf{B}^T &= 0 \\ \mathbf{A}^T \mathbf{W}_o + \mathbf{W}_o \mathbf{A} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

são iguais e diagonais:

$$\mathbf{W}_c = \mathbf{W}_o = \text{diag} (\rho_1, \dots, \rho_n) , \quad (10)$$

com todos os Valores Singulares de Hankel obedecendo a condição $\rho_i \geq 0$ para $i = 1, \dots, n$. A

igualdade entre os gramianos garante que cada estado do sistema será igualmente controlável e observável, ou seja, que sua energia será medida na mesma proporção em que poderá ser injetada. A diagonalidade, por sua vez, garante que cada estado do sistema seja independente em termos de controlabilidade e observabilidade. Sendo assim, um sistema balanceado pode ser melhor avaliado qualitativamente para fins de controle: cada estado x_i , de forma isolada, poderá ter seu grau de influência medido conforme possui maior ou menor grau de controlabilidade e observabilidade, permitindo que estados altamente controláveis/observáveis recebam maior importância no projeto de controle bem como estados pouco controláveis/observáveis sejam descartados sem impacto no projeto (GAWRONSKI, 2004). Isto permite que a ordem do sistema possa ser reduzida através da eliminação dos estados com menor grau de acoplamento entre entrada e saída sem, no entanto, alterar significativamente o seu comportamento dentro da faixa de frequência onde atuam os seus modos dominantes (DE QUEIROZ, 2007).

2.4. Redução do sistema

Desenvolver projetos de controladores para sistemas compostos por muitos estados pode ser uma tarefa custosa em termos de implementação computacional. Sistemas de alta ordem implicam em uma complexidade computacional que pode vir a ser um impedimento prático para a obtenção dos resultados desejados: o tempo necessário para execução pode ser alto, os recursos disponíveis podem ser insuficientes, entre outros. Por isto torna-se essencial o emprego de alguma técnica de redução de ordem de sistema que permita, ao mesmo tempo, uma implementação prática factível e a preservação de características relevantes para o comportamento do sistema.

Segundo Zhou, Doyle e Glover (1995), a redução de ordem sob uma ótica mais ampla resume-se em encontrar um modelo $G_{red}(s)$ de ordem menor que o modelo inicial $G(s)$ e que mantenha, de alguma forma, uma certa proximidade entre ambos. Uma das formas de reduzir um sistema balanceado é através da aproximação ótima da norma de Hankel (HNA, do inglês “*Hankel Norm Approximation*”). Para Benner, Quintana-Ortí E.S. e Quintana-Ortí G. (2005), o processo de obtenção do modelo reduzido por HNA de um sistema $G(s)$ pode ser descrito em 4 principais passos:

- Primeiramente, calcula-se a realização mínima balanceada (Apêndice B.7) de $\mathbf{G}(s) = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$;
- Na sequência, escolhe-se o grau r do modelo reduzido $\mathbf{G}_{red}(s)$ de forma que os valores singulares de Hankel de $\mathbf{G}(s)$ satisfaçam a condição

$$\rho_1 \geq \rho_2 \geq \dots \geq \rho_r > \rho_{r+1} = \rho_{r+2} = \dots = \rho_{r+k} > \rho_{r+k+1} \geq \dots \geq \rho_n > 0$$

com $k \geq 1$ (11)

e reordena-se a realização mínima balanceada de $\mathbf{G}(s)$ de forma que seu gramiano $\check{\mathbf{\Sigma}}$ seja

$$\begin{bmatrix} \check{\mathbf{\Sigma}} & \\ & \rho_{r+1} \mathbf{I}_k \end{bmatrix}; \quad (12)$$

- Então, particiona-se a realização mínima balanceada resultante $(\check{\mathbf{A}}, \check{\mathbf{B}}, \check{\mathbf{C}}, \check{\mathbf{D}})$ de acordo com o gramiano $\check{\mathbf{\Sigma}}$

$$\check{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \check{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \quad e \quad \check{\mathbf{C}} = [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2], \quad (13)$$

o que leva à realização $\tilde{\mathbf{G}}(s) = (\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}}, \tilde{\mathbf{D}})$ descrita como

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}} &= \mathbf{\Gamma}^{-1} (\rho_{r+1}^2 \mathbf{A}_{11}^T + \check{\mathbf{\Sigma}} \mathbf{A}_{11} \check{\mathbf{\Sigma}} + \rho_{r+1} \mathbf{C}_1^T \mathbf{U} \mathbf{B}_1^T) \\ \tilde{\mathbf{B}} &= \mathbf{\Gamma}^{-1} (\check{\mathbf{\Sigma}} \mathbf{B}_1 - \rho_{r+1} \mathbf{C}_1^T \mathbf{U}) \\ \tilde{\mathbf{C}} &= \mathbf{C}_1 \check{\mathbf{\Sigma}} - \rho_{r+1} \mathbf{U} \mathbf{B}_1^T \\ \tilde{\mathbf{D}} &= \mathbf{D} + \rho_{r+1} \mathbf{U} \end{aligned} \quad (14)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= (\mathbf{C}_2^T)^+ \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{\Gamma} &= \check{\mathbf{\Sigma}}^2 - \rho_{r+1}^2 \mathbf{I}_{n-k}; \end{aligned}$$

- Por fim, realiza-se uma decomposição de $\tilde{\mathbf{G}}(s)$ de forma que se obtenha

$$\tilde{\mathbf{G}}(s) = \tilde{\mathbf{G}}_-(s) + \tilde{\mathbf{G}}_+(s) , \quad (15)$$

sendo $\tilde{\mathbf{G}}_-(s)$ a parte instável da função de transferência do sistema e $\tilde{\mathbf{G}}_+(s)$ a parte estável definida como a HNA $\mathbf{G}_{red}(s)$ de r -ésima ordem de $\mathbf{G}(s)$.

Este processo de obtenção da HNA foi pensado de forma a garantir que a norma de Hankel do erro entre $\mathbf{G}(s)$ e $\mathbf{G}_{red}(s)$ possa ser computada como:

$$\|\mathbf{G} - \mathbf{G}_{red}\|_H = \rho_{r+1}(\mathbf{G}) , \quad (16)$$

ou seja, que a norma do erro seja a mesma do sistema completo. Como no presente trabalho a HNA foi aplicada para a redução de ordem da planta da estrutura através do comando *hankelmr* do MATLAB, a minimização do erro entre sistema completo e sistema reduzido passa a ser calculada em termos da norma \mathcal{H}_∞ (GLOVER, 1984):

$$\|\mathbf{G} - \mathbf{G}_{red}\|_\infty \leq 2 \sum_{k+1}^n \rho_i(\mathbf{G}) . \quad (17)$$

2.5. Resultado da modelagem

Dados os conceitos apresentados ao longo deste capítulo, a estrutura flexível a ser utilizada no trabalho será então modelada via elementos finitos de modo a se obter uma solução para o sistema numericamente. Da mesma forma, a planta da estrutura será balanceada e terá sua ordem reduzida na intenção de se obter um modelo de estados de menor ordem e mais adequado ao projeto de controle, facilitando também a implementação computacional a ser desenvolvida neste trabalho.

3. CONTROLADOR \mathcal{H}_∞

3.1. Introdução

No âmbito da teoria de controle, o controle robusto é um dos ramos que trata de técnicas que visam garantir um determinado nível de desempenho e estabilidade perante às incertezas envolvidas no processo dinâmico modelado, dentre as quais, incertezas paramétricas ou dinâmicas, ruídos e perturbações externas. O seu objetivo principal é projetar uma lei de controle que lide com as flutuações geradas pelas incertezas e assegure a validade da referida lei em situações adversas, rejeitando os efeitos de resposta indesejados. Da mesma forma, deve-se garantir que uma vez projetada sobre um modelo de planta nominal, esta funcione na planta real a ser controlada. Deste desejo de diminuição da sensibilidade do sistema à perturbações surgiu, então, o projeto de controle via \mathcal{H}_∞ (GOODWIN, GRAEBE e SALGADO, 2000), (FIGUEIREDO, 2011).

Introduzido nos anos 80 por George Zames (1981) para sistemas tipo *Single-Input and Single-Output* (SISO) e posteriormente generalizado para sistemas no espaço de estados *Multiple-Input and Multiple-Output* (MIMO) (DOYLE, 1984), o controlador robusto do tipo \mathcal{H}_∞ baseia-se na redução dos efeitos de distúrbios e ruídos através da minimização da norma \mathcal{H}_∞ do sistema. Em linhas gerais, em estruturas flexíveis esta minimização traduz-se na redução do maior pico da resposta em frequência da malha fechada (em sistemas SISO) ou da curva de valores singulares máximos (em sistemas MIMO). Ao reduzir o efeito dos referidos picos, o controlador estará agindo de forma a aumentar a estabilidade da malha como um todo.

Fica evidente, então, que sendo o projeto de controle \mathcal{H}_∞ uma técnica de análise de pior caso que atua sempre sobre a resposta em frequência vibratória de maior magnitude do sistema, ele não prevê a possibilidade de controlar um pico de vibração da estrutura em específico, ou seja, o controlador obtido pode implicar na mudança da frequência dominante na resposta do sistema, uma vez que frequência crítica atenuada pode tornar-se menor que qualquer outra presente no sistema.

A principal vantagem do controle \mathcal{H}_∞ apóia-se no fato de que atende a uma boa variedade de problemas de controle devido à facilidade de aplicação e implementação, além de ser adequado a sistemas de controle não-colocados² (GAWRONSKI, 2004), (BUENO, 2007).

3.2. Formulação

3.2.1. Norma \mathcal{H}_∞

Uma norma³, segundo Skogestad e Postlethwaite (2005), é “*um número que fornece o tamanho de um vetor ou matriz, ou de um sinal ou sistema*”. A norma \mathcal{H}_∞ de uma matriz de transferência pode ser dada por:

$$\|\mathbf{G}(s)\|_\infty = \sup_{\omega} \sigma_{\max}(\mathbf{G}(j\omega)), \quad (18)$$

onde σ_{\max} é o maior valor singular⁴ da matriz complexa \mathbf{G} , avaliada na frequência ω , e a norma em si é o maior dentre todos os valores singulares avaliados dentro de uma faixa de frequências. Visualiza-se facilmente assim, que de fato a norma \mathcal{H}_∞ é definida pelo maior pico na curva máxima de valores singulares da resposta em frequência de um sistema MIMO, como visto na Figura 3.

Nos casos em que $\mathbf{G}(s)$ é a matriz de transferência da entrada $\mathbf{Z}(s)$ para a saída $\mathbf{W}(s)$ dada por

$$\mathbf{G}(s) = \frac{\mathbf{Z}(s)}{\mathbf{W}(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}, \quad (19)$$

² Sistemas de controle onde o posicionamento dos atuadores não coincide com a posição das entradas de distúrbio e/ou o posicionamento dos sensores não coincide com a posição das saídas de desempenho.

³ Detalhes da definição matemática de norma podem ser vistos no Apêndice B.1.

⁴ Detalhes da definição e valor singular podem ser vistos no Apêndice B.2.

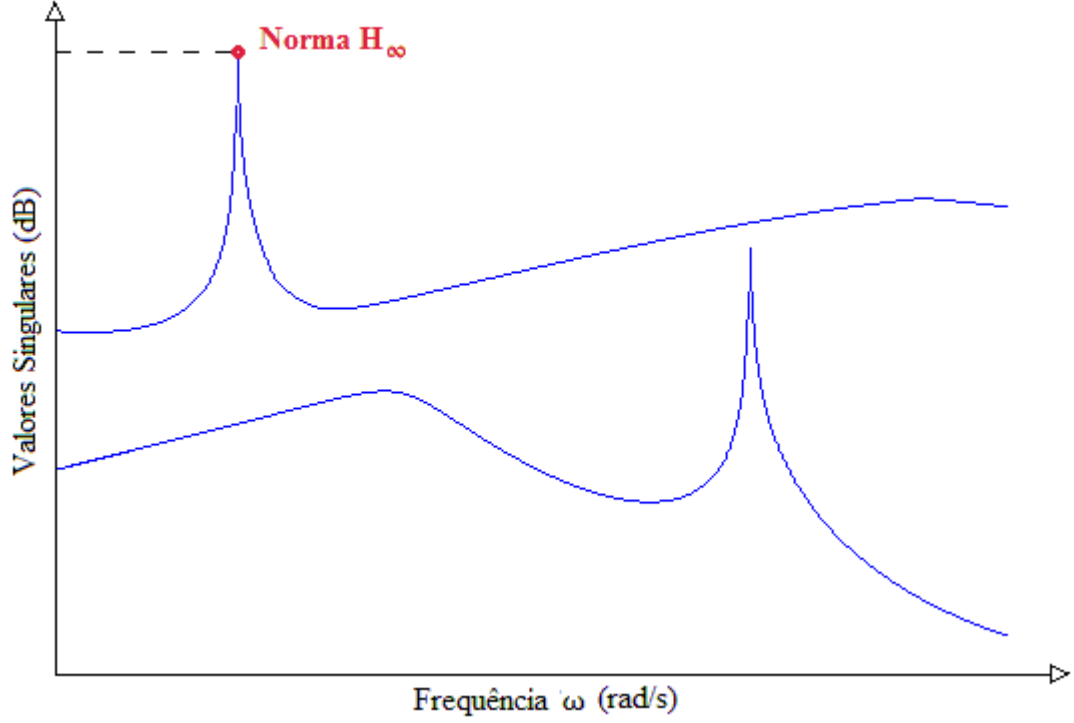


Figura 3: Exemplo de diagrama de valores singulares

a norma \mathcal{H}_∞ pode ser definida como:

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{w \neq 0} \frac{\|Z(s)\|_2}{\|W(s)\|_2}, \quad (20)$$

onde $\|\cdot\|_2$ refere-se à norma \mathcal{L}_2 definida no apêndice B.5. Portanto, de uma forma simples a norma \mathcal{H}_∞ pode ser vista como o maior ganho RMS de entrada/saída do sistema (DE MEDEIROS, 2005), (SKOGESTAD e POSTLETHWAITE, 2005)

3.2.2. Definição do problema \mathcal{H}_∞

Considerando o modelo apresentado na Figura 4, constituído de uma planta \mathbf{P} e um controlador

K , há dois tipos de entrada e dois tipos de saída a serem considerados:

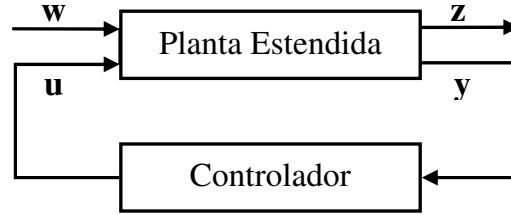


Figura 4: Diagrama de Blocos do Problema \mathcal{H}_∞

- w são as entradas exógenas, que correspondem a distúrbios externos, ruídos e sinais de referência;
- u são as entradas de controle, que correspondem aos sinais de entrada de atuadores;
- z são as saídas para avaliação do desempenho, que determinam as características de desempenho do sistema;
- y são as saídas medidas, ou seja, os sinais obtidos pela leitura de sensores.

As entradas exógenas e saídas de desempenho usualmente não são diretamente acessadas pelos atuadores e sensores, ao contrário das entradas de controle e as saídas de medida, que são diretamente manipuladas ou acessadas pelo controlador na busca de um determinado desempenho para o sistema (salvo nos casos em que uma saída de desempenho é também uma saída de medida).

As relações de transferência da planta P e do controlador K são, respectivamente:

$$\begin{pmatrix} Z(s) \\ Y(s) \end{pmatrix} = P(s) \begin{pmatrix} W(s) \\ U(s) \end{pmatrix} \quad (21)$$

$$U(s) = K(s)Y(s),$$

ou ainda de forma mais específica:

$$\begin{aligned}
\mathbf{z} &= \mathbf{P}_{zw}\mathbf{w} + \mathbf{P}_{zu}\mathbf{u}, \\
\mathbf{y} &= \mathbf{P}_{yw}\mathbf{w} + \mathbf{P}_{yu}\mathbf{u}, \\
\mathbf{u} &= \mathbf{K}\mathbf{y} .
\end{aligned} \tag{22}$$

Do diagrama de blocos mostrados na Figura 4 e da Equação (22), percebe-se claramente que \mathbf{P}_{zw} é o mapeamento da planta afetada pelas variações do controlador \mathbf{K} , enquanto que \mathbf{P}_{zu} , \mathbf{P}_{yw} e \mathbf{P}_{yu} refletem a maneira como \mathbf{P}_{zw} é afetada pelo controle (ZHOU, DOYLE e GLOVER, 1995). Rearranjando as equações definidas em (22), obtém-se a função de transferência entre os sinais exógenos e o desempenho do sistema:

$$\mathbf{z} = \left[\mathbf{P}_{zw} + \mathbf{P}_{zu}\mathbf{K}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{yu}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{P}_{yw} \right] \mathbf{w} = \mathbf{T}_{zw}\mathbf{w} . \tag{23}$$

A matriz de malha fechada \mathbf{T}_{zw} é chamada de Transformação Linear Fracional, e neste ponto, o problema de controle \mathcal{H}_∞ define-se como a obtenção de um controlador \mathbf{K} que mantenha a malha fechada estável e minimize a norma \mathcal{H}_∞ de \mathbf{T}_{zw} , tornando o desempenho \mathbf{z} o mais independente possível dos distúrbios exógenos de entrada representados por \mathbf{w} (PICINATTI e PAGLIONE, 2009). Para fins de resolução computacional pode-se adotar o problema de minimização subótimo, expresso como

$$\|\mathbf{T}_{zw}\|_\infty < \gamma, \quad \text{com } \gamma > 0, \tag{24}$$

onde se procura o menor γ possível de forma que a estabilidade seja mantida.

3.3. Problema \mathcal{H}_∞ sob enfoque LMI

A solução de problemas \mathcal{H}_∞ no espaço de estados é usualmente abordada por dois métodos: *Algebraic Riccati Equations* (ARE) ou *Linear Matrix Inequalities* (LMI). O primeiro, de formulação analítica, parte das equações de espaço de estados propostas por Glove e Doyle

(DOYLE, GLOVER, *et al.*, 1989) e baseia-se nas Equações de Riccati. Neste método, diversas restrições são aplicadas à planta nominal para que um controlador que estabilize a malha fechada possa ser projetado. Uma vez satisfeitas as condições necessárias, o problema resume-se na resolução de duas equações de Riccati auxiliares. Esta técnica é mais antiga e amplamente usada, porém, é exigente quanto ao condicionamento matemático do problema a ser resolvido e, na violação de qualquer uma das suposições envolvidas, os resultados podem ser inacurados (VAN DE HEUVEL, 1997). Informações deste método podem ser encontradas em Skogestad e Postlethwaite (2005) e Zhou, Doyle e Glover (1995).

O enfoque mais atual para a resolução do problema \mathcal{H}_∞ representado pela inequação (24) é o método de desigualdades matriciais lineares (LMI), onde a síntese de controladores pode ser simplificada devido principalmente às propriedades de linearidade e convexidade desta abordagem matemática quando aplicada dentro da teoria de controle (BOYD, EL GHAOU, *et al.*, 1994). Isto implica na possibilidade de problemas de projeto de controladores serem numericamente resolvidos como problemas de otimização convexa, onde diversas restrições podem ser adicionadas, além daquelas propostas no método ARE (DE PAIVA, 2009).

Considera-se então o sistema \mathbf{P} mostrado na Figura 4 e o controlador \mathbf{K} a ser obtido, respectivamente descritos como:

$$\mathbf{P} \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\mathbf{u} \\ \mathbf{z} = \mathbf{C}_1\mathbf{x} + \mathbf{D}_{11}\mathbf{w} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w} + \mathbf{D}_{22}\mathbf{u} \end{cases} \quad (25)$$

$$\mathbf{K} \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_k = \mathbf{A}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k\mathbf{y} \\ \mathbf{u} = \mathbf{C}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{D}_k\mathbf{y} \end{cases} \quad (26)$$

Substituindo a expressão \mathbf{y} de (25) na expressão \mathbf{u} de (26) a fim de obter o sinal de controle \mathbf{u} em função da saída \mathbf{y} da planta \mathbf{P} , e isolando \mathbf{u} , obtém-se:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{C}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{N}\mathbf{D}_k\mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbf{N}\mathbf{D}_k\mathbf{D}_{21}\mathbf{w}, \text{ com } \mathbf{N} = (\mathbf{I} - \mathbf{D}_k\mathbf{D}_{22})^{-1}. \quad (27)$$

Reescrevendo as equações de \mathbf{P} e \mathbf{K} utilizando (27) e agrupando-as de forma matricial,

chega-se à equação de malha fechada definida como:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_k \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A + B_2 N D_k C_2 & B_2 N C_k \\ B_k C_2 + B_k D_{22} N D_k C_2 & A_k + B_k D_{22} N C_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_k \end{bmatrix} \\
 &\quad + \begin{bmatrix} B_1 + B_2 N D_k D_{21} \\ B_k D_{21} + B_k D_{22} N D_k D_{21} \end{bmatrix} w \\
 z &= [C_1 + D_{12} N D_k C_2 \quad D_{12} N C_k] \begin{bmatrix} x \\ x_k \end{bmatrix} + (D_{11} + D_{12} N D_k D_{21}) w ,
 \end{aligned} \tag{28}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
 \tilde{\dot{x}} &= \tilde{A} \tilde{x} + \tilde{B} w \\
 z &= \tilde{C} \tilde{x} + \tilde{D} w
 \end{aligned} \tag{29}$$

onde

$$\begin{aligned}
 \tilde{x} &= \begin{bmatrix} x \\ x_k \end{bmatrix} \\
 \tilde{A} &= \begin{bmatrix} A + B_2 N D_k C_2 & B_2 N C_k \\ B_k C_2 + B_k D_{22} N D_k C_2 & A_k + B_k D_{22} N C_k \end{bmatrix} \\
 \tilde{B} &= \begin{bmatrix} B_1 + B_2 N D_k D_{21} \\ B_k D_{21} + B_k D_{22} N D_k D_{21} \end{bmatrix} \\
 \tilde{C} &= [C_1 + D_{12} N D_k C_2 \quad D_{12} N C_k] \\
 \tilde{D} &= D_{11} + D_{12} N D_k D_{21} .
 \end{aligned} \tag{30}$$

As matrizes de malha fechada em (30) compõem as restrições do problema de otimização para o cálculo da norma \mathcal{H}_∞ do sistema.

3.3.1. Problema subótimo

Do conceito de Norma \mathcal{H}_∞ apresentado na Equação (18), pode-se escrever para a matriz de

transferência $\mathbf{Z}(s) = \mathbf{T}(s) \mathbf{W}(s)$ do sistema em malha fechada mostrado em (30) que:

$$\|\mathbf{T}(s)\|_{\infty}^2 = \lambda_{\max}(\mathbf{T}^*(j\omega) \mathbf{T}(j\omega)) . \quad (31)$$

Sendo λ_{\max} o maior autovalor de \mathbf{T} e sabendo-se que um autovalor de uma matriz \mathbf{M} qualquer satisfaz a condição $\mathbf{M}\mathbf{w} = \lambda \mathbf{w}$, ou ainda, $\mathbf{w}^* \mathbf{M} \mathbf{w} = \mathbf{w}^* \lambda \mathbf{w}$, tem-se que:

$$\|\mathbf{T}(s)\|_{\infty}^2 = \max \frac{\mathbf{W}^*(j\omega) \mathbf{T}^*(j\omega) \mathbf{T}(j\omega) \mathbf{W}(j\omega)}{\mathbf{W}^*(j\omega) \mathbf{W}(j\omega)} , \quad (32)$$

ou ainda

$$\|\mathbf{T}(s)\|_{\infty}^2 = \max \frac{\mathbf{Z}^*(j\omega) \mathbf{Z}(j\omega)}{\mathbf{W}^*(j\omega) \mathbf{W}(j\omega)} , \quad (33)$$

onde aplicando a definição de norma \mathcal{L}_2 (Apêndice B.5):

$$\max \frac{\mathbf{Z}^*(j\omega) \mathbf{Z}(j\omega)}{\mathbf{W}^*(j\omega) \mathbf{W}(j\omega)} \geq \frac{\|\mathbf{z}\|_2}{\|\mathbf{w}\|_2} . \quad (34)$$

Considerando

$$\|\mathbf{T}(s)\|_{\infty} < \gamma \quad (35)$$

e a relação entre as normas \mathcal{H}_{∞} e \mathcal{L}_2 dadas pela Equação (20), a relação no domínio do tempo obtida entre o problema subótimo definido em (24) e a Equação (34), por fim, é:

$$\frac{\|\mathbf{z}\|_2}{\|\mathbf{w}\|_2} < \gamma^2 \implies \mathbf{z}^T(t) \mathbf{z}(t) - \gamma^2 \mathbf{w}^T(t) \mathbf{w}(t) < 0 . \quad (36)$$

3.3.2. Norma \mathcal{H}_∞ como problema de otimização

Do critério de estabilidade de Lyapunov (APÊNDICE A -) em conjunto com a Equação (36) tem-se que:

$$\dot{x}^T Q x + x^T Q \dot{x} + z^T z - \gamma^2 w^T w < 0. \quad (37)$$

Substituindo as equações de estado (29) em (37) chega-se ao seguinte problema:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}^T \\ \tilde{w}^T \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A}^T Q + Q \tilde{A} + \tilde{C}^T \tilde{C} & Q \tilde{B} + \tilde{C}^T \tilde{D} \\ \tilde{B}^T Q + \tilde{D}^T \tilde{C} & -\gamma^2 I + \tilde{D}^T \tilde{D} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{w} \end{pmatrix} < 0, \quad (38)$$

que ao aplicar a propriedade matricial que diz que $x^T M x > 0 \Rightarrow M > 0$, fica:

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}^T Q + Q \tilde{A} & Q \tilde{B} \\ \tilde{B}^T Q & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < - \begin{bmatrix} \tilde{C}^T \\ \tilde{D}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix}. \quad (39)$$

Por vezes, o problema a ser resolvido não pode ser naturalmente expresso em forma de uma LMI. Neste caso, faz-se necessária a aplicação de algumas ferramentas matemáticas, como o Complemento de Schur⁵

$$\left[\begin{array}{cc|c} \tilde{A}^T Q + Q \tilde{A} & Q \tilde{B} & \tilde{C}^T \\ \tilde{B}^T Q & -\gamma^2 I & \tilde{D}^T \\ \hline C & D & -I \end{array} \right] < 0 \quad (40)$$

e na sequência, a Transformação de Congruência⁶, resultando na equação:

⁵ Detalhes sobre Complemento de Schur podem ser visto no Apêndice B.3.

⁶ Detalhes sobre a Transformação de Congruência podem ser visto no Apêndice B.4.

$$\begin{bmatrix} \gamma^{-1}I & 0 & 0 \\ 0 & \gamma^{-1}I & 0 \\ 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A}^T Q + Q \tilde{A} & Q \tilde{B} & \tilde{C}^T \\ \tilde{B}^T Q & -\gamma^2 I & \tilde{D}^T \\ \tilde{C} & \tilde{D} & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma^{-1}I & 0 & 0 \\ 0 & \gamma^{-1}I & 0 \\ 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (41)$$

onde, uma vez resolvida a multiplicação de matrizes, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}^T \bar{Q} + \bar{Q} \tilde{A} & \bar{Q} \tilde{B} & \tilde{C}^T \\ \tilde{B}^T \bar{Q} & -I & \tilde{D}^T \\ \tilde{C} & \tilde{D} & -\mu I \end{bmatrix} < 0 \quad (42)$$

com $\mu = \gamma^2$ e $\bar{Q} = \mu^T Q = \gamma^{-2} Q$.

Assim, o cálculo da norma \mathcal{H}_∞ do sistema introduzido pela equação de malha fechada em (29) resume-se a um problema de otimização do tipo:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & \mu \\ \text{sujeito a} & \begin{bmatrix} \tilde{A}^T \bar{Q} + \bar{Q} \tilde{A} & \bar{Q} \tilde{B} & \tilde{C}^T \\ \tilde{B}^T \bar{Q} & -I & \tilde{D}^T \\ \tilde{C} & \tilde{D} & -\mu I \end{bmatrix} < 0 \\ & \bar{Q} > 0. \end{array} \quad (43)$$

3.4. Síntese do controlador \mathcal{H}_∞

A minimização dada pela Equação (43) implica em resolver o problema para μ e para as matrizes de malha fechada $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ e \tilde{D} , escritas em função das matrizes do controlador K a ser projetado, de modo que o sistema controlado seja estável e sua norma \mathcal{H}_∞ seja menor que γ .

Porém, o trabalho de Gahinet e Apkarian (1994) mostra como reescrever o problema de minimização em função das matrizes do controlador em si. A descrição formal por eles mostrada é a base utilizada na implementação do comando *hinflmi* do MATLAB, utilizado ao longo deste trabalho apenas nas abordagens em que o controlador necessitou ser projetado separadamente da estrutura, ou seja, nos casos Passivo Estrutural e Ativo Serial.

3.5. Justificativa para o uso do controlador \mathcal{H}_∞

O controlador do tipo \mathcal{H}_∞ tem por objetivo reduzir a norma \mathcal{H}_∞ do sistema, traduzindo-se na redução do pico de resposta em frequência da sua malha fechada. Esta minimização implica na redução dos efeitos negativos de distúrbios e ruídos ao qual a estrutura possa estar submetida, aumentando a estabilidade como um todo. Neste contexto, a técnica de controle \mathcal{H}_∞ parece adequada aos propósitos deste trabalho, não somente pela simplicidade de implementação, mas também pela variedade de problemas que atende, tornando-se uma boa solução a ser empregada no projeto simultâneo de estrutura e controlador a ser avaliado.

4. ALGORITMOS GENÉTICOS

4.1. Introdução

Ao longo dos anos, diversas técnicas baseadas no comportamento humano e sua biologia permitiram um grande avanço no desenvolvimento da robótica e em campos de pesquisa envolvendo aprendizado e percepção de máquinas. Com o início da pesquisa de técnicas evolutivo-inspiradas em meados dos anos 50, como parte da ciência de Inteligência Artificial, deu-se início à era da chamada computação natural e evolutiva. Nos anos 60, mais especificamente, John Holland deu início ao estudo de Algoritmos Genéticos, técnica desenvolvida por ele e seus colegas na Universidade de Michigan com o objetivo de estudar os fenômenos adaptativos que ocorrem na natureza e desenvolver meios de incorporá-los nos sistemas computacionais (HOLLAND, 1975)⁷ apud (MITCHELL, 1998).

Baseados nos artifícios da hereditariedade, os AGs aplicam os mesmos mecanismos de transferência de informações entre gerações encontrados no processo de reprodução sexuada, e portanto, partem dos mesmos princípios e conceitos encerrados pela área da genética. No entanto, ainda que de fácil entendimento teórico, na prática sua implementação pode tornar-se um pouco trabalhosa, uma vez que, em termos computacionais, não há na literatura estudos conclusivos sobre como proceder na escolha de seus parâmetros e sobre a interação entre os mesmos, sendo boa parte das pesquisas baseadas em análise empírica sobre resultados obtidos.

Atualmente, mais de 50 anos depois do seu surgimento, estes algoritmos são amplamente utilizados em processos de otimização em engenharia, simplificando a resolução de problemas por vezes complexos o bastante para métodos mais tradicionais, sendo aplicável inclusive na presença de incertezas e ruídos que poderiam inviabilizar uma solução através do seu uso.

⁷ Holland, J. H. **Adaptation in Natural and Artificial Systems**. [S.I.]: University of Michigan Press, 1975.

4.2. Definição

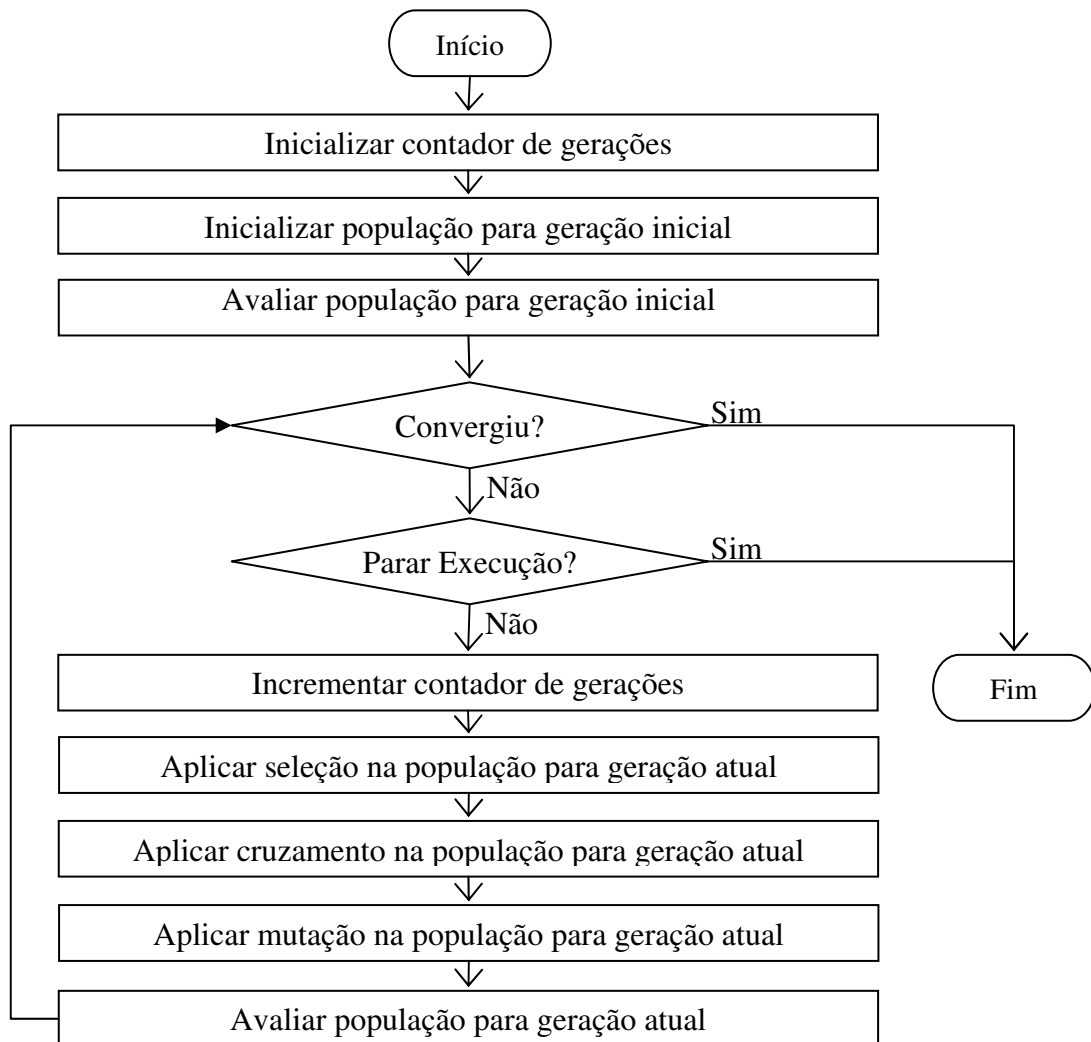
De modo geral, um AG é um algoritmo baseado em comportamento de populações considerado como um método de otimização estocástica global, motivado pela biologia e baseado nos mecanismos de genética e seleção natural descritos por Charles Darwin (WORDEN, STASZEWSKI e HENSMAN, 2010), (SHENG, 2004). Segundo Darwin, o processo de reprodução genética na biologia trata de garantir a continuidade hereditária de características convenientes à sobrevivência e adaptabilidade de futuras gerações de uma determinada espécie, levando as características desfavoráveis da mesma a uma gradual extinção. De forma muito similar, o AG garante a continuidade dos conjuntos de soluções mais convenientes à convergência do problema proposto, levando também as soluções menos favoráveis a um progressivo desaparecimento ao longo de sua execução.

O processo computacional de um AG é, na maioria dos aspectos, semelhante ao processo biológico no que concerne à aplicação dos chamados *operadores genéticos* (seleção, mutação e cruzamento). Mais especificamente, os *cromossomos* ou *indivíduos* são os candidatos à solução do problema a ser otimizado e constituem a cada iteração ou *geração* do algoritmo a chamada *população*, conjuntos de soluções onde os melhores cromossomos perduram e os demais modificam-se conforme os parâmetros do AG. De maneira mais direta, o AG recebe como entrada um conjunto de valores propostos como solução inicial de um problema e, através de modificações impostas pelos operadores, resulta em um conjunto mais adequado à solução do que os valores previamente escolhidos. O tipo de cromossomo empregado depende em geral, do tipo de problema a ser resolvido, podendo ser representado por bits, números inteiros ou reais, estruturas customizadas, entre outros.

Por fim, assim como no processo evolutivo de Darwin é necessário diversidade populacional para que a evolução das espécies ocorra, é necessário também para o AG que, em cada conjunto de valores obtido a cada interação, haja variabilidade suficiente entre os indivíduos de modo que o domínio do problema seja melhor explorado. Só assim garante-se que os operadores genéticos possam desempenhar sua função como esperado em busca da solução do problema e que a convergência prematura do algoritmo seja evitada.

4.3. Fluxo de um AG

De acordo com Jain e Martin (1998), um AG possui a seguinte estrutura algorítmica conceitual:



O fluxo de instruções é simples: para uma população inicial escolhida ou aleatoriamente gerada, enquanto um critério de parada ou a convergência não forem alcançados, aplicam-se os operadores genéticos de seleção, cruzamento e mutação. O resultado será, a cada geração, uma população qualitativamente melhor que a anterior. A seguir cada elemento do AG será melhor descrito para que o processo possa ser entendido em maior nível de detalhamento.

4.4. Elementos e operadores de um AG

Um AG possui diversos elementos, os quais podem ou não ser aplicados dependendo da sua implementação. O algoritmo utilizado neste trabalho é implementado sob o comando *ga*, parte integrante da Toolbox de Otimização Global do MATLAB, e portanto, serão apresentados somente os elementos considerados pertinentes, sempre sob o ponto de vista desta implementação. Mais detalhes podem ser encontrados em (MATHWORKS, 2011a).

4.4.1. População Inicial

No caso de AGs com população composta por números reais, a população inicial é um conjunto composto por n indivíduos inicialmente escolhidos como candidatos à solução, que pode conter ou não as variáveis iniciais a serem otimizadas pelo AG, e pode ser tanto um conjunto aleatório como uma inicialização plausível do problema. A diversidade da população inicial, bem como seu tamanho, são pontos importantes de projeto. Alguns problemas podem ser melhor resolvidos via AG se possuírem uma população inicial factível quanto às restrições do problema. Outros, por sua vez, sugerem que uma população aleatória independente das características restritivas é mais eficiente. Seja de uma maneira ou de outra, é indispensável que a população inicial possua cromossomos diversificados o bastante para que o processo de seleção natural subsista ao longo de um número suficiente de gerações.

No que diz respeito ao tamanho, uma população maior permite uma busca mais ampla no espaço de soluções, reduzindo a probabilidade de que o algoritmo atenha-se à mínimos locais. Isto acontece devido ao fato de que quanto maior a população, menos significativo será o efeito do fenômeno de *deriva genética* (ou *genetic drift*), que nada mais é do que a diminuição da frequência de ocorrência de genes no processo de seleção devido simplesmente ao acaso, levando à perda de variabilidade populacional. Entretanto, nestas situações o desempenho computacional pode ser drasticamente reduzido uma vez que com o aumento do número de cromossomos envolvidos no processo, aumenta também o tempo de execução de cada iteração do algoritmo

bem como a convergência torna-se mais lenta (CASTRO, 2001), (HEDRICK, 2009), (MATHWORKS, 2011a).

4.4.2. Função de Avaliação

A função de avaliação (*fitness*) é a função alvo da otimização, guiando a maneira como as populações evoluem ao longo das gerações. Ela avalia a qualidade dos cromossomos gerados verificando quão bem estes se adequam à solução do problema, definindo de forma indireta a probabilidade dos mesmos perdurarem ou reproduzirem-se. A aptidão atribuída a um cromossomo pela função é o índice que capacita os operadores genéticos a definirem quais cromossomos serão envolvidos em cada operação, podendo ser traduzida como a aptidão de um cromossomo perante todos os que compõem a população.

Este processo de avaliação dos cromossomos via função de avaliação tem implicação direta no processo de convergência, devido à sua grande influência nos operadores genéticos. Por isso, pode ser necessária a aplicação de alguma técnica de escalonamento sobre os resultados brutos obtidos da função, para que a aptidão seja convertida em um espaço de resultados que facilite a análise dos operadores. Seria de pouco interesse, por exemplo, trabalhar sobre os resultados negativos que determinadas funções geram, ou ainda, operar sobre espaços de resultados muito esparços ou que possuam genes excessivamente dominantes. Neste ponto, a não aplicação de escalonamento inevitavelmente levaria à problemas e diminuição de diversidade populacional, culminando em uma convergência prematura do algoritmo (KREINOVICH, QUINTANA e FUENTES, 1993), (SADJADI, 2004).

4.4.3. Operador de seleção

O operador de seleção é aquele que seleciona, dentro da população, os cromossomos pais que reproduzirão a cada geração. Esta escolha é feita com base no aptidão atribuída pela função de

avaliação, sendo mais provável que aqueles que possuem melhor aptidão sejam os escolhidos, cumprindo o papel deste operador de propagar as características genéticas dos cromossomos com maior aptidão da população.

Ao escolher o método de seleção, há de se ter a consciência do seu nível de *pressão seletiva*⁸: (i) métodos muito rígidos podem levar a uma redução rápida de diversidade populacional por escolher sempre indivíduos muito bons em detrimento de alguns que podem ser bons, mas não dominantes; e (ii) métodos muito flexíveis resultarão em uma evolução genética mais lenta (MITCHELL, 1998). Dentre os diversos métodos de seleção, podem ser citados como mais comuns seleção por *ranking*, torneio e roleta russa. Eles são similares em muitos aspectos, mas se diferenciam em tempo de processamento e o tipo de tratamento dos valores gerados pela função de avaliação. Basicamente,

- A seleção por *rank* (diretamente associada ao escalonamento da função de avaliação), permite uma seleção mais uniforme, onde a diferença entre indivíduos com alta e baixa aptidão é reduzida, distribuindo de forma mais justa a chance de escolha entre os cromossomos; por consequência, ele aumenta o tempo de convergência ao passo que evita que os melhores indivíduos tornem-se rapidamente predominantes ao longo de poucas gerações;
- A seleção por torneio é essencialmente estocástica; na maioria dos casos, este método seleciona de forma aleatória um número pré-especificado de cromossomos, e dentre os escolhidos, seleciona o que apresenta melhor aptidão; o processo é então repetido, aumentando a pressão seletiva a cada rodada do torneio; costuma ser mais rápido que a seleção por *rank*, mas por ser de natureza não determinística, a escolha errada do parâmetro de torneio pode incluir indivíduos mais fracos na seleção;
- Por fim, a seleção por roleta russa é igualmente aleatória, porém, considera que cada indivíduo está associado a uma área de seleção relacionada à sua aptidão; ao dividir o intervalo possível de escolha em áreas iguais, pode acabar tornando-se de alta pressão seletiva, escolhendo indivíduos dominantes e diminuindo a diversidade populacional

⁸ Segundo (BÄCK, 1994), pressão seletiva é um termo empregado para denotar a intensidade aplicada na seleção dos melhores indivíduos, ou seja, uma alta pressão seletiva é sinônimo de um processo mais criterioso que resultará em uma seleção de indivíduos altamente qualificados em detrimento de outros de menor aptidão.

rapidamente.

A Figura 5 mostra, de forma simplista, como cada método funcionaria em uma população de quatro cromossomos. Como explicado anteriormente, torna-se mais fácil perceber a probabilidade mais uniforme implicada pela seleção por *ranking*, bem como a aleatoriedade mais desigual dos métodos por torneio e por roleta russa.

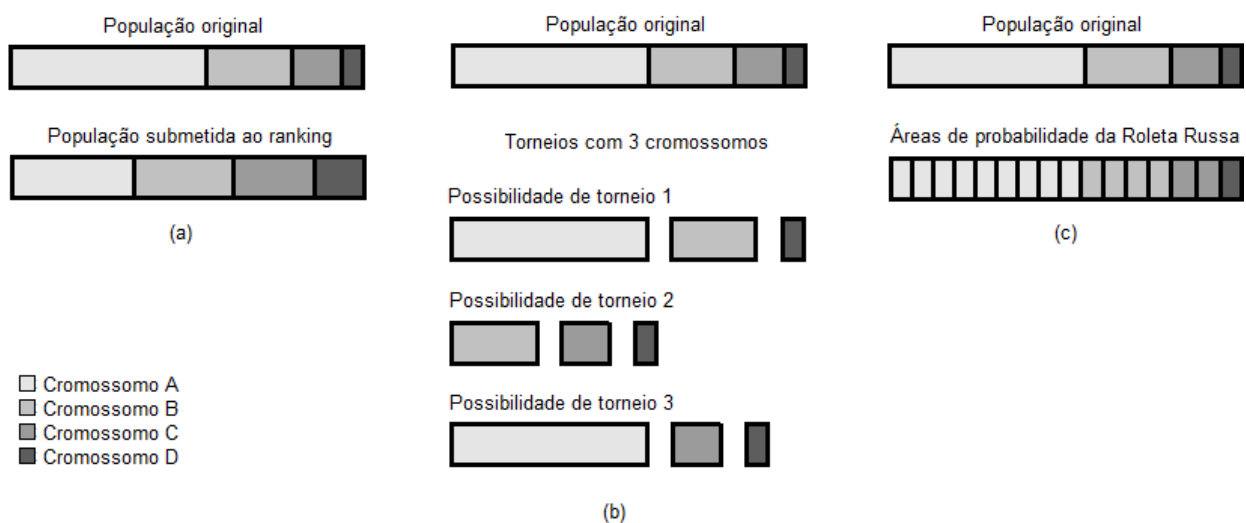


Figura 5: Seleção por (a) *Rank*; (b) Torneio; e (c) Roleta Russa

4.4.4. Operador de Elitismo

O elitismo é uma forma de seleção. Entretanto, não tem relação com a escolha dos cromossomos que irão gerar a nova população, mas sim, com os que devem ser repassados à próxima geração sem sofrer nenhum tipo de alteração genética. A conservação de indivíduos com boas características é uma boa prática por manter intactos alguns genes de qualidade que poderiam sofrer *deriva genética*, sendo descartados como reprodutores ou ainda perdendo suas propriedades benéficas no processo de mutação ou cruzamento. Porém, torna-se evidente que, se for escolhida uma porcentagem muito grande de indivíduos de elite, a diversidade populacional

será comprometida, causando a finalização do algoritmo devido à convergência prematura do processo evolutivo.

4.4.5. Operador de Cruzamento

O operador de cruzamento é de extrema importância no processo evolutivo ao longo das gerações. É comum que, independente do tipo de otimização envolvida, este seja o operador mais representativo entre seleção, elitismo, cruzamento e mutação. Ele parte do mesmo princípio da troca de material genético que ocorre na reprodução das células na natureza, e através de uma recombinação de bits de dois cromossomos da população atual, gera descendentes com a carga genética herdada de ambos garantindo a diversidade populacional.

Mesmo que alguns aspectos do cruzamento não sejam bem conhecidos e, logo, não se possa saber ao certo qual a melhor técnica a empregar em cada caso, este operador pode ser definido das mais distintas maneiras. As implementações mais comuns e mais citadas, mostradas na Figura 6, tratam de recombinar partes dos cromossomos envolvidos através de n pontos de troca (usualmente um ou dois – *single-point* e *two-point*) ou de forma parametrizada uniforme. A técnica de n pontos garante a recombinação através da troca dos segmentos dos pais a partir de pontos de corte aleatoriamente escolhidos. A forma parametrizada, por sua vez, define para cada posição da cadeia de bits a probabilidade p , normalmente entre 0,5 e 0,8, de que ocorra a troca de material genético entre os pais e de qual pai herdará o gene na posição, sendo sob certo ponto de vista, uma forma especializada de troca por n -pontos (JAIN e MARTIN, 1998), (MITCHELL, 1998), (SPEARS e DE JONG, 1991).

Conquanto saiba-se de sua importância, a literatura não possui muitas referências de como exatamente esta operação depende de outros parâmetros do AG, ou qual o impacto exato dela no processo evolutivo. Porém, é clara a sua contribuição na manipulação do espaço de busca por cromossomos mais aptos à resolução do problema e sua escolha, mesmo que empírica, desempenha um grande papel no sucesso ou fracasso do algoritmo.

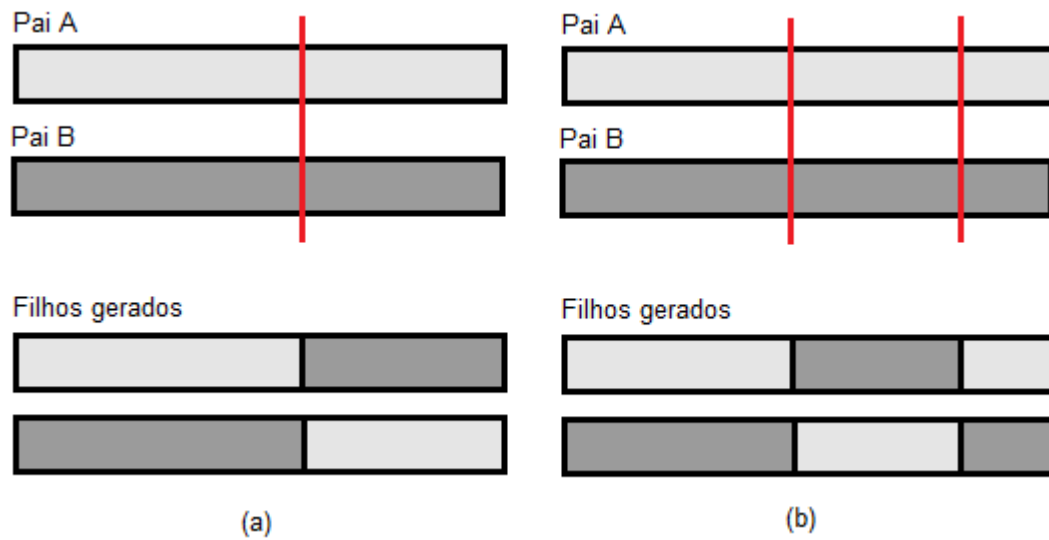


Figura 6: Cruzamento por troca em (a) ponto-único; e (b) dois-pontos; a troca parametrizada uniforme terá resultados finais semelhantes, mesmo com processo diferenciado

4.4.6. Operador de Mutação

O operador de mutação ajuda na diversificação populacional de uma forma bem diferente do cruzamento. Ambos operadores atuam na quebra de padrões genéticos, mas a mutação não consegue criar padrões novos. Operando sobre um cromossomo por vez, sua finalidade é evitar que haja a fixação de determinado padrão em qualquer *locus*⁹ ao longo de gerações, diferenciando o indivíduo sem que haja mistura de material genético de indivíduos externos. Usualmente, para que isto ocorra, o operador de mutação utiliza-se de aleatoriedade na escolha das posições do cromossomo que sofrerão alterações.

4.5. Critério de parada e término

Fora os elementos acima descritos, outro fator importante a ser considerado é o critério de parada

⁹ Posição do gene dentro do cromossomo.

do algoritmo. A decisão de quando o AG deve ser terminado é complexa. A não-linearidade existente na interação entre os seus parâmetros dificulta uma análise criteriosa a respeito da qualidade de uma população em determinado ponto da sua execução e impede que critérios de parada sejam decididos de forma determinística. Logo, os critérios mais usados são simplesmente a determinação de número máximo de gerações, tempo máximo de execução, tempo ou número de gerações no qual a variação genética não é significativa (atingindo a estagnação, ou *stall*), entre outros de natureza similar (MITCHELL, 1998), (MATHWORKS, 2011a). A eficiência de cada critério dependerá do problema em questão, e principalmente, de testes exaustivos que mostrem a melhor maneira de terminá-lo.

Visto que os critérios de parada são diversos e não podem ser facilmente determinados, é aceitável que o AG possa ter mais de uma solução factível. Sabe-se que a evolução populacional garante melhora na aptidão dos cromossomos ao longo das gerações, e por isso, uma vez que todas as restrições do problema sejam obedecidas, os indivíduos dominantes no momento do término podem ser tomados como uma solução aceitável do problema (WORDEN, STASZEWSKI e HENSMAN, 2010), ainda que possam não ser a melhor solução.

4.6. Restrições não-lineares

Como mencionado anteriormente, o algoritmo utilizado ao longo deste trabalho é a implementação fornecida pela Toolbox de Otimização Global do MATLAB através do comando *ga*. As restrições lineares aplicadas ao algoritmo são tratadas simplesmente garantindo que os resultados obtidos a cada iteração permaneçam dentro dos limites inferior e superior fornecidos. Já o *solver*¹⁰ para problemas com restrições não-lineares utilizados na referida implementação é o *Augmented Lagrangian Genetic Algorithm*, ou ALGA (MATHWORKS, 2011d). O problema a ser resolvido pelo ALGA é:

¹⁰ Termo usado em inglês para designar uma ferramenta para resolução de cálculos, simulações e similares.

$$\begin{aligned}
& \min_x && f(x) \\
& \text{sujeito a} && A_{eq}x = b_{eq} \\
& && Ax \leq b \\
& && c_{eq}(x) = 0 \\
& && c(x) \leq 0 \\
& && lb \leq x \leq ub,
\end{aligned} \tag{44}$$

onde as duas primeiras restrições são lineares, as duas subsequentes não-lineares e a última compõe as restrições laterais, de limites mínimos e máximos possíveis. Neste método, as não-linearidades são resolvidas de forma separada através da busca irrestrita de Lagrangiano Aumentado, uma combinação dos métodos de otimização de Lagrange e de Penalidade.

Seja a função de Lagrange:

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^p \lambda_j c_j(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{c}(\mathbf{x}) \tag{45}$$

para a função objetivo $f(\mathbf{x})$ e para as p restrições não-lineares com $\lambda = 1, \dots, p$ multiplicadores (SINGIRESU, 2009). Adicionando termos de penalidade associados às restrições da função lagrangiana, chega-se a:

$$\Theta(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, s, \rho) = f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^p \lambda_j s_j \log(s_j - c_j(\mathbf{x})) + \sum_{j=p+1}^p \lambda_j c_{eq_j}(\mathbf{x}) + \frac{\rho}{2} \sum_{j=p+1}^p c_{eq_j}(\mathbf{x})^2, \tag{46}$$

onde λ_j , s_j e ρ são, respectivamente, o multiplicador de lagrange, o parâmetro de deslocamento e o parâmetro de penalidade aplicados na restrição não-linear c_j . A dedução da Equação (46) não é de interesse direto neste trabalho e pode ser vista em (CONN, GOULD e TOINT, 1991) e (CONN, GOULD e TOINT, 1992).

Neste ponto, o algoritmo genético repete diversas otimizações do subproblema apresentado na Equação (46), aumentando a penalidade ao final de cada otimização que não satisfaça a tolerância estabelecida para as condições de factibilidade ou atualizando os multiplicadores de Lagrange em caso contrário. O método ALGA é finalizado quando a

tolerância definida para a convergência é alcançada (MATHWORKS, 2011d).

4.7. Vantagens e desvantagens

Os algoritmos genéticos como expostos até agora possuem características boas para a resolução de problemas complexos. Diferente de métodos mais tradicionais, ele pode ser aplicado na busca de soluções de problemas não-convexos, com restrições igualmente não-convexas, não diferenciáveis e não lineares. Nem mesmo o conhecimento acerca do mecanismo de mapeamento de entradas em saídas é necessário: seja através de equações bem definidas ou qualquer outro método de análise de aptidão de indivíduos, basta que para toda e cada entrada, haja o retorno de uma saída única que possa ser convertida em um índice manipulável pelos operadores genéticos.

Por poder trabalhar com problemas não-diferenciáveis, ele pode superar alguns métodos analíticos que partem de uma solução inicial e caminham no espaço de busca através de direções dependentes das derivadas da função objetivo. Da mesma forma, pode ser mais adequado do que algumas técnicas conhecidas como busca de encosta, métodos cujas direções são definidas pela própria função em pontos adjacentes. Em ambos os casos, estas direções acabam por implicar em uma busca restrita aos arredores da solução da atual iteração do algoritmo, aumentando consequentemente a possibilidade de que eles atenuem-se à ótimos locais (NORVIG e RUSSEL, 2004). Já o AG, por trabalhar com um espaço de busca esparsa, variado e não uniforme normalmente consegue evitar estes pontos, obtendo como resultado pontos mais próximos de um ótimo global.

Há também de se dizer que, por ser um método baseado em população, o AG permite-se trabalhar na operação simultânea de um conjunto de soluções (JAIN e MARTIN, 1998). Diversas das técnicas de busca global, inclusive as definidas por direções de busca, restringem-se à trabalhar avaliando um ponto por vez e por isto, podem não explorar o espaço de soluções de forma ampla o suficiente.

Outra vantagem do AG é permitir a hibridização do processo de otimização. Para alguns métodos mais tradicionais, a busca de parâmetros iniciais factíveis pode ser complexa, e nestes casos, é comum que um AG seja utilizado como uma ferramenta de pré-busca, deixando a

otimização em si a cargo de outra técnica qualquer (CASTRO, 2001).

O uso dos AGs, no entanto, deve ser bem avaliado. De forma geral, segundo Castro (2001), um AG é suficientemente eficiente para um conjunto geral de problemas, mas não mais eficiente que uma solução específica para um dado problema ou seja, ainda que possa obter resultados bons para uma tarefa qualquer proposta, dificilmente estes serão mais precisos do que os resultados de uma técnica exclusivamente desenvolvida para a classe ao qual esta tarefa pertence. Sabe-se que determinados critérios de parada podem resultar em soluções boas ou até muito boas, mas que talvez não sejam ótimas comparadas a resultados de métodos de otimização particularmente projetados para o problema.

No mais, um AG pode ser de difícil configuração devido à falta de conhecimento da comunidade científica acerca das suas interações e pela intrincada rede de parâmetros envolvidos. A escolha inadequada destes, ou mesmo de uma função de avaliação imprópria pode facilmente suprimir as vantagens que possui (MITCHELL, 1998). Por fim, o custo computacional e de tempo pode acabar por tornar sua aplicação um pouco proibitiva em certas situações que demandem configurações mais rígidas de avaliação e processamento.

4.8. Interesse no uso de AG na otimização simultânea

Por ser um método baseado em populações e por ser capaz de explorar um maior espaço de busca do que os métodos tradicionais, o AG surge como uma opção interessante para o objetivo de projeto simultâneo de estrutura e controlador discutido neste trabalho. Ainda que possa ser trabalhoso em termos da escolha de seus parâmetros devido ao grande número de variáveis que o problema proposto apresenta, sua característica estocástica e a amplitude de sua busca no espaço de soluções resultante de sua simultaneidade em testar conjuntos de soluções o torna atrativo como método de otimização para a resolução do problema simultâneo em questão.

5. OTIMIZAÇÃO: PROJETO SIMULTÂNEO DE ESTRUTURA E CONTROLE

5.1. Introdução

Dada a base inicial dos conceitos de controle \mathcal{H}_∞ e Algoritmos Genéticos, bem como a formulação de estruturas flexíveis, pode-se explicitar o problema de otimização proposto no trabalho. Ainda que o projeto simultâneo de estrutura e controlador seja o foco do mesmo, esta não será a única abordagem testada. Para fins de comparação, serão recapituladas as abordagens encontradas em (DE PAIVA, 2009):

- *Passiva Estrutural*, onde se otimiza previamente a estrutura e projeta-se um controlador sobre a estrutura resultante;
- *Ativa Serial*, onde se otimiza de forma alternada tanto estrutura quanto controlador, sendo que enquanto os parâmetros estruturais são otimizados, os parâmetros do controlador são mantidos fixos, e vice-versa;
- *Simultânea*, onde se otimizam estrutura e controlador juntos, ao mesmo tempo.

As duas primeiras têm suas vantagens dependendo da aplicação a ser considerada, pois algumas estruturas podem dispensar controle ativo quando otimizadas em forma, bem como alguns controladores, quando otimizados, podem ser aplicados sem exigência de modificação na estrutura. Mas, uma vez que em estruturas modernas, cada vez mais flexíveis e com modelos cada vez mais detalhados, a otimização visa o aprimoramento da resposta dinâmica, é interessante analisar a possibilidade de projeto simultâneo de ambos. Projetar a estrutura com base em análise de pré-requisitos de desempenho, integrando-a com os componentes ativos do sistema modelado e considerando que mudanças na massa, forma e rigidez influenciam nas características vibratórias, pode aumentar significativamente a cooperação entre estrutura e controlador. Isto pode implicar, de forma geral, na redução das vibrações e numa otimização em

características de projeto como peso, forma, número de sensores e atuadores necessários e, conseqüentemente, em custos (LU e SKELTON, 2000).

5.2. Problema a ser otimizado

Como dito anteriormente, para cada uma das abordagens, a norma \mathcal{H}_∞ será otimizada com base em diferentes conjuntos de variáveis:

- para a abordagem Passiva estrutural, a otimização considera apenas as variáveis da estrutura sem controle;
- para a abordagem Ativa Serial; considera ora as variáveis da estrutura, ora as variáveis do controlador;
- e por fim, na abordagem Simultânea, considera as variáveis da estrutura e do controlador ao mesmo tempo.

Independente de qual otimização deve ser feita, de forma geral, o processo de otimização se dá através do seguinte problema:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \quad \|f(\mathbf{b}_{comp})\|_\infty \\ & \text{sujeito a} \quad r(\mathbf{b}_{comp}) \\ & \quad \mathbf{b}_{min} < \mathbf{b}_{comp} < \mathbf{b}_{max} , \end{aligned} \tag{47}$$

onde \mathbf{b}_{comp} é o vetor de variáveis de otimização, $f(\mathbf{b}_{comp})$ é a função objetivo cuja norma \mathcal{H}_∞ será minimizada, $r(\mathbf{b}_{comp})$ é o conjunto de restrições não-lineares ao qual o problema deve obedecer no processo de otimização e \mathbf{b}_{min} e \mathbf{b}_{max} são, respectivamente, as restrições de limite inferior e superior para as variáveis de otimização. O objetivo, em todas as abordagens, será a redução da norma \mathcal{H}_∞ dos sistemas envolvidos.

5.3. Parâmetros do problema a ser otimizado

Para os testes apresentados, será utilizada uma viga engastada de seção retangular (vide Figura 7) dividida em elementos finitos, onde cada nó possuirá dois graus de liberdade (aqui chamados GDLs), uma vez que para os propósitos deste trabalho os GDLs axiais podem ser desconsiderados. As condições de contorno a serem aplicadas ao problema devido ao engaste também eliminarão os três GDLs do primeiro nó da viga.

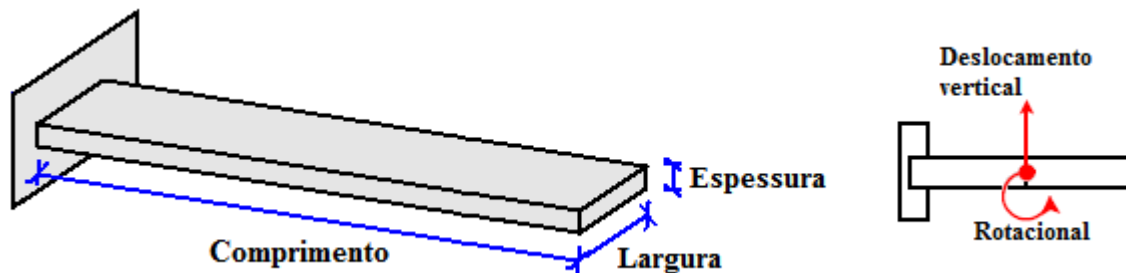


Figura 7: Viga engastada de seção retangular

O parâmetro de otimização da geometria da viga é a base da seção transversal (largura) de cada elemento finito. Este parâmetro foi escolhido uma vez que, em se tratando de complexidade de produção, torna-se mais simples manter uma espessura constante e adaptar seu formato através da base do que o inverso. A espessura da seção permanece constante neste trabalho.

Quanto aos parâmetros do Algoritmo Genético, como dito anteriormente, foram escolhidos por tentativa e erro ao longo de alguns testes com o algoritmo implementado. Portanto, os resultados obtidos, ainda que satisfatórios aos propósitos do trabalho dada a redução de norma \mathcal{H}_∞ adequadamente obtida, talvez não sejam os melhores, visto que foram consideradas restrições de tempo e de processamento como critérios importantes na convergência do algoritmo. De forma geral, a configuração escolhida para os testes realizados via MATLAB foi:

- *Cruzamento aritmético*, cujo resultado é a média aritmética ponderada dos pais, sendo sempre factível quanto às restrições lineares e laterais;

- *Mutação*, de resultado igualmente factível, gerado através de mutações aleatoriamente calculadas;
- E por fim, *Seleção por torneio*, onde é realizada uma sucessão de iterações - ou torneios - onde são escolhidos os cromossomos de melhor aptidão dentro de um subconjunto de cromossomos aleatoriamente escolhidos na iteração anterior, aumentando a pressão seletiva a cada torneio do processo.

5.3.1. Variáveis de otimização

O conjunto de variáveis de otimização será composto por dois vetores:

- \mathbf{b}_{est} : vetor com parâmetros de projeto da estrutura;
- \mathbf{b}_{cont} : vetor com parâmetros de projeto do controlador, nos casos em que há controle ativo.

O vetor \mathbf{b}_{est} é composto pelas bases da seção transversal de cada um dos elementos finitos definidos. Sendo, então, um total de n elementos, tem-se:

$$\mathbf{b}_{est} = [base_1 \ base_2 \ \cdots \ base_n] . \quad (48)$$

Para o controlador \mathbf{K} definido em (26), suas matrizes podem ser definidas como:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_k &= \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_k &= \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_k &= [c_1 \ \cdots \ c_k] \\ \mathbf{D}_k &= 0 \ , \end{aligned} \quad (49)$$

onde \mathbf{D}_k será considerada nula por não haver transmissão direta entre entrada e saída do controlador \mathbf{K} , por decisão de projeto. Sendo assim, o vetor \mathbf{b}_{cont} será dado por:

$$\mathbf{b}_{cont} = [a_{11} \ a_{12} \ \cdots \ a_{11} \ \cdots \ a_{k1} \ a_{k2} \ \cdots \ a_{kk} \ b_1 \ \cdots \ b_k \ c_1 \ \cdots \ c_k] . \quad (50)$$

O vetor completo de parâmetros de otimização passado como entrada para o problema de otimização, será, por fim, a concatenação de (48) e (50):

$$\mathbf{b}_{comp} = [\mathbf{b}_{est} \ \mathbf{b}_{cont}] . \quad (51)$$

5.3.2. Restrições

São aplicados dois tipos de restrições ao problema de otimização: as laterais e as não-lineares. As primeiras referem-se às restrições de limites inferiores e superiores de cada parâmetro dos vetores de variáveis de estrutura e controle, e são definidas por:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{est_min} &\leq \mathbf{b}_{est} \leq \mathbf{b}_{est_max} \\ \mathbf{b}_{cont_min} &\leq \mathbf{b}_{cont} \leq \mathbf{b}_{cont_max} , \end{aligned} \quad (52)$$

ou ainda, para o vetor completo de parâmetros:

$$\mathbf{b}_{min} < \mathbf{b}_{comp} < \mathbf{b}_{max} . \quad (53)$$

As restrições de desigualdade não-lineares representadas por $r(\mathbf{b}_{comp})$, por sua vez, referem-se à estabilidade do sistema a ser obtido. Sabendo-se que um sistema será obrigatoriamente estável se todos os seus polos tiverem sua parte real negativa (estando assim no semiplano complexo esquerdo), utiliza-se como restrição a expressão

$$\max \left(\text{real} \left(\text{eig}(\tilde{A}) \right) \right) < 0 . \quad (54)$$

Desta forma, uma vez garantido que a máxima parte real dentre todos os autovalores da matriz dinâmica da malha fechada \tilde{A} (calculada sobre \mathbf{b}_{comp}) seja negativa, estará garantida também a estabilidade do resultado obtido no problema de otimização.

5.3.3. Critério de Parada

Há dois critérios de parada a serem considerados: o de parada de execução do AG, que impede que este execute por tempo indeterminado na busca de uma convergência, e o de parada de algoritmo como um todo.

O primeiro depende dos parâmetros previamente escolhidos para a interrupção do AG, como mencionado na Seção 4.4. do capítulo de Algoritmos Genéticos. Para todas as abordagens, a decisão de parada do algoritmo baseou-se em um ou mais dos seguintes parâmetros:

- número máximo de gerações igual a 100, o que estabelece que o algoritmo poderá realizar um máximo de 100 iterações;
- número de gerações estagnadas igual a 50, que em conjunto com uma tolerância de função de avaliação de 1×10^{-6} , garante que o algoritmo pare de executar quando após 50 iterações consecutivas o valor da média ponderada dos valores obtidos pela função de avaliação esteja abaixo desta tolerância. O fator de ponderação é dado por $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ para cada n -ésima geração, garantindo desta forma que as últimas iterações do AG tenham maior influência sobre o resultado¹¹.

Já o critério de parada do algoritmo dependerá da abordagem de otimização em questão.

¹¹ Este fator de ponderação foi encontrado em um tópico em discussão na central MATLAB, afirmado pelo escritor técnico da Mathworks Alan Weiss, em resposta a uma dúvida de um usuário sobre a opção *StallGenLimit* dos critérios de parada do comando *ga*.

Nos casos de Otimização Passiva Estrutural e Ativa Serial, que são abordagens iterativas, o critério escolhido é

$$\frac{\|b_{comp_otimo} - b_{comp}\|}{\|b_{comp}\|} < \varepsilon , \quad (55)$$

onde ε será escolhido através de análise de resultados de simulação intermediários obtidos, considerando o menor valor a partir do qual diminuí-lo trará aumento de tempo de execução computacional sem no entanto obter-se resultados significativamente melhores. Em ambos os casos, a otimização é executada por diversas vezes em um laço de repetição tornando razoável as comparações entre os resultados de cada iteração.

A abordagem simultânea, por sua vez, executa a otimização apenas em um ciclo e, por isto, tem como critério de parada os parâmetros estabelecidos previamente para a execução do AG já mencionadas.

5.4. Abordagens de otimização e descrição de algoritmos

5.4.1. Funções em comum

Como dito anteriormente, serão três as abordagens de otimização apresentadas neste trabalho: passiva estrutural, ativa serial e simultânea, com destaque para esta última. As três serão detalhadas na sequência, bem como os algoritmos de cada método serão apresentados. Para isto, torna-se interessante evidenciar funções comuns à uma ou mais abordagens. Considerando os vetores de variáveis iniciais b_{est} e b_{cont} e os de variáveis otimizadas b_{est}^* e b_{cont}^* pertinentes à função sendo descrita, P a planta da estrutura e K a planta do controlador, são elas:

Função: $\mathbf{P} = \text{calcular_planta_estrutura}(\mathbf{b}_{est})$

Entrada: parâmetros estruturais \mathbf{b}_{est}

Saída: planta da estrutura \mathbf{P}

Objetivo:

- Montar a malha de elementos finitos da estrutura com base em \mathbf{b}_{est} , calculando as matrizes de massa e de rigidez de cada elemento e, subsequentemente, as matrizes de massa e rigidez globais da estrutura;
- Calcular a planta da estrutura \mathbf{P} no Espaço de Estados, a partir das matrizes globais de massa e rigidez e do amortecimento proporcional;
- Balancear \mathbf{P} ;
- Reduzir \mathbf{P} em n modos de vibração.

Função: $\mathbf{K} = \text{calcular_planta_controlador}(\mathbf{b}_{cont})$

Entrada: parâmetros do controlador \mathbf{b}_{cont}

Saída: planta do controlador \mathbf{K}

Objetivo:

- Calcular a planta do controlador \mathbf{K} a partir dos parâmetros \mathbf{b}_{cont} .

Função: $\mathbf{T} = \text{calcular_malha_fechada}(\mathbf{P}, \mathbf{K})$

Entrada: planta da estrutura \mathbf{P} e do controlador \mathbf{K}

Saída: malha fechada \mathbf{T}

Objetivo:

- Calcular a malha fechada \mathbf{T} , com base em \mathbf{P} e \mathbf{K} .

Função: $\mathbf{b}_{cont}^* = \text{otimizar_controlador}(\mathbf{P})$

Entrada: planta da estrutura \mathbf{P}

Saída: parâmetros \mathbf{b}_{cont}^* do controlador \mathbf{K}

Objetivo:

- Calcular os parâmetros \mathbf{b}_{cont}^* do controlador \mathbf{K} com base na planta da estrutura \mathbf{P} , otimizando-o via comando *hinflmi* do MATLAB;

Função: $\mathbf{b}_{est}^* = \text{otimizar_estrutura}(\mathbf{b}_{est})$

Entrada: parâmetros estruturais \mathbf{b}_{est}

Saída: parâmetros otimizados \mathbf{b}_{est}^* da planta da estrutura

Objetivo:

- Calcular, através de AGs e seus respectivos parâmetros de cruzamento, mutação e elitismo, com população inicial \mathbf{b}_{est} , os parâmetros \mathbf{b}_{est}^* da estrutura \mathbf{P} , minimizando a Norma \mathcal{H}_∞ da planta.

Função: $\text{critério_parada} = \text{calcular_critério_parada}(\mathbf{b}, \mathbf{b}^*)$

Entrada: parâmetros \mathbf{b} e \mathbf{b}^* , sejam eles as variáveis da estrutura ou do controlador

Saída: valor do critério de parada do algoritmo a ser comparado com ε (ver Equação (55))

Objetivo:

- Calcular o valor do critério de parada do algoritmo, ou seja, a parte imediatamente anterior ao sinal de desigualdade da Equação (55).

Por fim, há também a função *otimizar_ambos*, pertinente apenas à abordagem simultânea. Considerando \mathbf{b}_{comp} e \mathbf{b}_{comp}^* respectivamente os vetores compostos das variáveis iniciais e otimizadas da estrutura e do controlador, ela pode ser descrita como:

Função: $\mathbf{b}_{comp}^* = \text{otimizar_ambos}(\mathbf{b}_{comp})$

Entrada: vetor \mathbf{b}_{comp} de parâmetros estruturais e do controlador

Saída: vetor \mathbf{b}_{comp}^* de parâmetros otimizados da planta da estrutura e do controlador

Objetivo:

- Calcular, através de AGs e seus respectivos parâmetros de cruzamento, mutação e elitismo, com população inicial \mathbf{b}_{comp} , os parâmetros \mathbf{b}_{comp}^* da estrutura \mathbf{P} e do controlador \mathbf{K} , minimizando a Norma \mathcal{H}_∞ da malha fechada \mathbf{T} .

5.4.2. Abordagem Passiva Estrutural

Nesta abordagem, otimiza-se previamente a estrutura e projeta-se o controlador sobre a estrutura resultante. Daí o nome passiva estrutural: em nenhum momento durante a otimização da estrutura é considerado o controlador. O algoritmo pode ser resumido, sendo i o número indicativo da iteração do algoritmo, como:

1. Escolher os parâmetros iniciais \mathbf{b}_{est} a serem otimizados;
2. Em cada iteração do algoritmo, obter os parâmetros \mathbf{b}_{est}^i ótimos da estrutura minimizando a norma \mathcal{H}_∞ da mesma durante a otimização, com base nos parâmetros \mathbf{b}_{est}^{i-1} da iteração anterior e nas devidas restrições de estrutura; calcular a nova planta da estrutura \mathbf{P} otimizada e sua respectiva norma \mathcal{H}_∞ ;
3. Calcular o critério de parada **critério_parada** do algoritmo sobre \mathbf{b}_{est}^{i-1} e \mathbf{b}_{est}^i ;
4. Verificar:
 - a. Se **critério_parada** for maior que o valor especificado para **epsilon** como especificado na Equação (55), dar continuidade ao algoritmo fazendo com que \mathbf{b}_{est}^{i-1} assumam os valores de \mathbf{b}_{est}^i e voltando ao passo 2;
 - b. Senão, terminar o algoritmo seguindo para o passo 5.
5. Calcular o controlador \mathbf{K} para a planta da estrutura otimizada \mathbf{P} e a malha fechada \mathbf{T} de \mathbf{P} com \mathbf{K} .

Na forma de fluxograma, o algoritmo resultante pode ser visto na Figura 8.

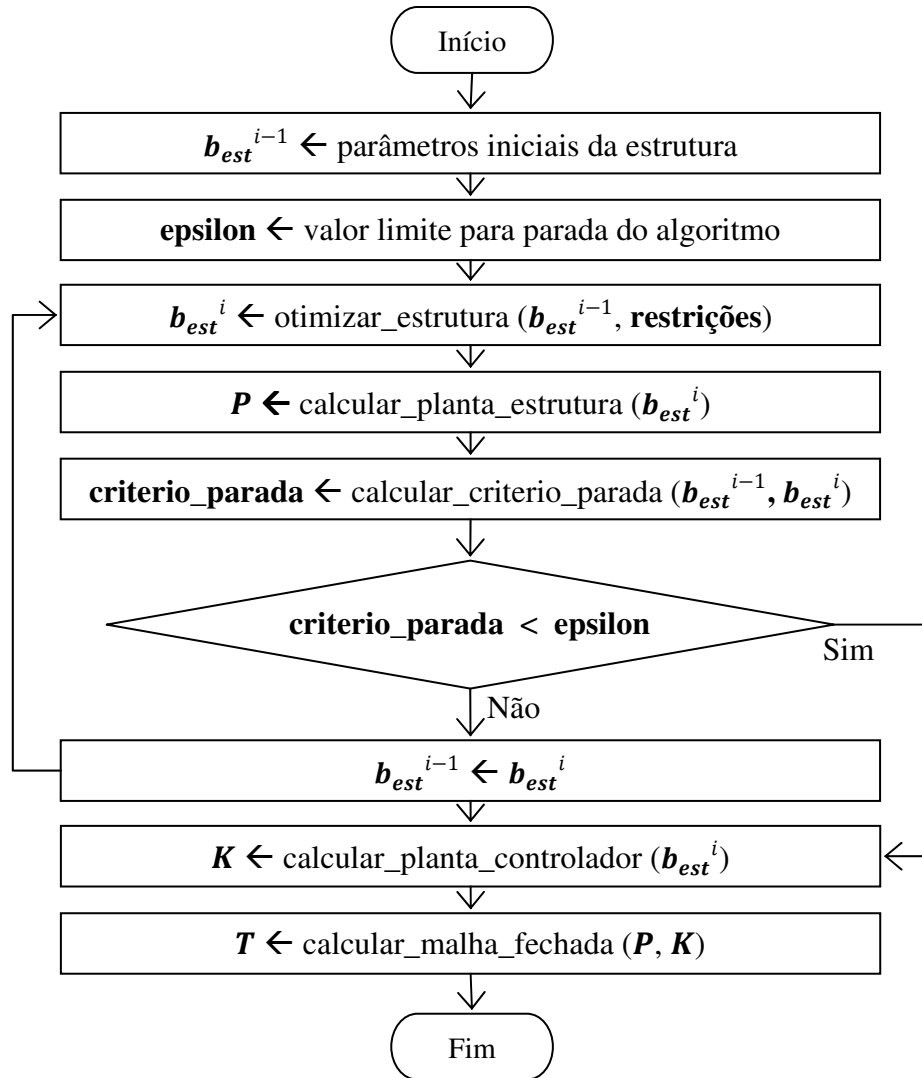


Figura 8: Algoritmo de otimização para a abordagem Passiva Estrutural

5.4.3. Abordagem Ativa Serial

Nesta abordagem, diferentemente da anterior, otimiza-se tanto estrutura quanto controlador, porém, de forma alternada. Enquanto os parâmetros da estrutura estão sendo otimizados, os do controlador permanecem fixos, e vice-versa. O algoritmo pode ser descrito nos seguintes passos:

1. Escolher os parâmetros iniciais \mathbf{b}_{est} a serem otimizados para a estrutura de modo que se possa calcular a planta da estrutura \mathbf{P} inicial;
2. Obter os parâmetros \mathbf{b}_{est}^i do controlador minimizando a Norma \mathcal{H}_∞ do mesmo durante a otimização, com base na planta \mathbf{P} e nas devidas restrições de controle; calcular, então, o controlador \mathbf{K} otimizado;
3. Obter os parâmetros \mathbf{b}_{est}^i da estrutura minimizando a Norma \mathcal{H}_∞ da mesma durante a otimização, com base no controlador \mathbf{K} e as devidas restrições de estrutura; calcular, então, a nova planta da estrutura \mathbf{P} otimizada;
4. Calcular o critério de parada **critério_parada** do algoritmo sobre \mathbf{b}_{est} e \mathbf{b}_{est}^i ;
5. Verificar:
 - a. Se **critério_parada** for maior que o valor especificado para **epsilon**, dar continuidade ao algoritmo voltando ao passo 2;
 - b. Senão, terminar o algoritmo, tendo como resultado a planta da estrutura \mathbf{P} , o controlador \mathbf{K} otimizados.

Na forma de fluxograma, o algoritmo resultante pode ser visto na Figura 9.

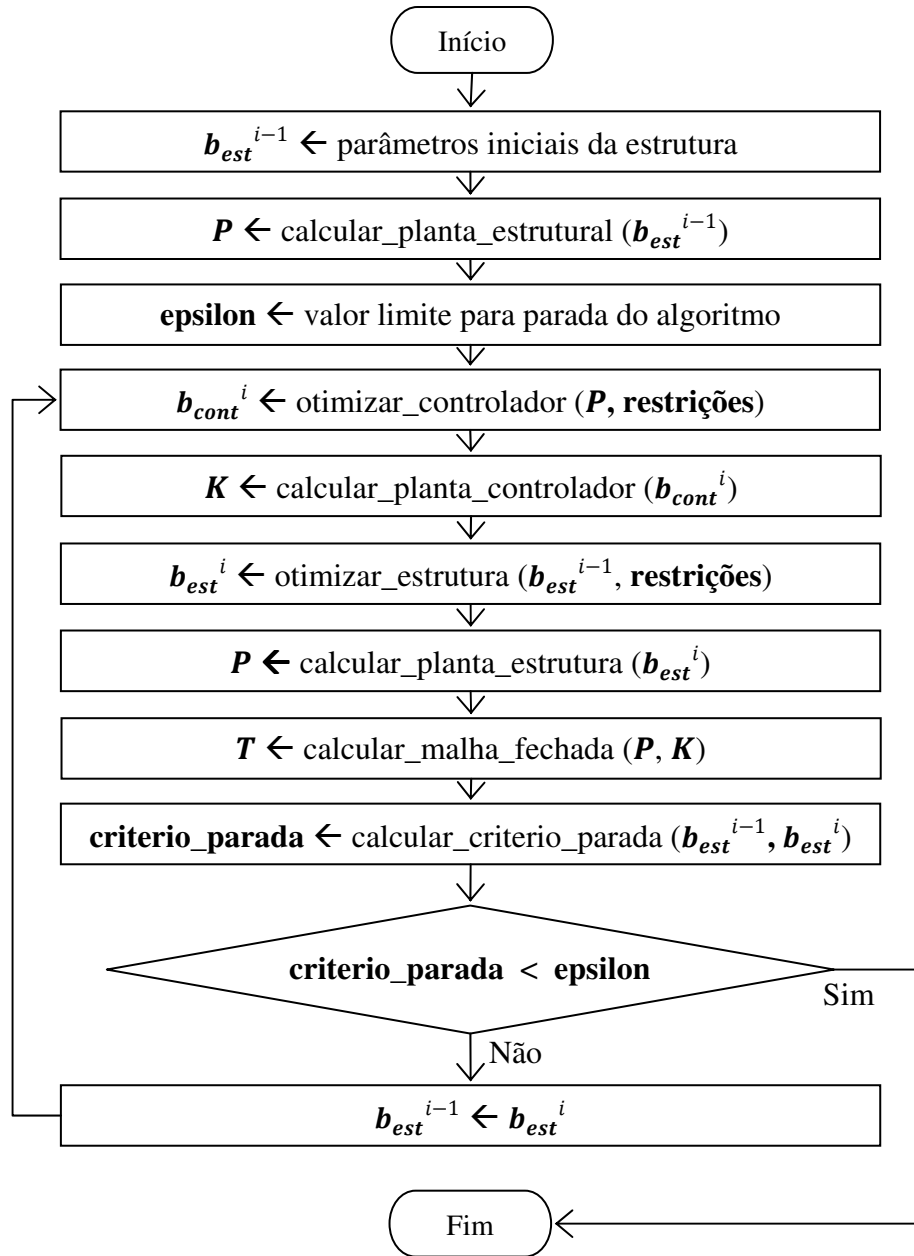


Figura 9: Algoritmo de otimização para a abordagem Ativa Serial

5.4.4. Abordagem Simultânea

Assim como na abordagem ativa serial, nesta também ocorre a otimização tanto da estrutura

quanto do controlador, porém, com os parâmetros de ambos sendo otimizados de forma simultânea. Esta abordagem é um enfoque mais atual para o projeto de sistemas de controle e tem como principal objetivo acoplar as dinâmicas da estrutura e do controle, uma vez que estas não são independentes e, quando projetadas de forma individual, impõem-se mútua diminuição de desempenho (SKELTON, 1989).

Desta forma, este projeto integrado possui como vantagem sobre os demais o fato de que permite a otimização da resposta dinâmica e consequente aumento de desempenho do sistema como um todo (LU e SKELTON, 2000), sendo por vezes impossível obter através dos métodos mais tradicionais a performance que é obtida através do projeto simultâneo (PARK e ASADA, 1994). Isto pode implicar em reduções nos custos de projeto pela obtenção de ganhos de estrutura em termos de massa e geometria por exemplo, ao passo que também resulta na redução das vibrações.

O algoritmo pode ser descrito nos seguintes passos:

1. Escolher os parâmetros iniciais \mathbf{b}_{est} a serem otimizados para a estrutura, bem como os parâmetros \mathbf{b}_{cont} a serem otimizados para o controlador;
2. Obter os parâmetros \mathbf{b}_{est}^* da estrutura e \mathbf{b}_{cont}^* do controlador minimizando a Norma \mathcal{H}_∞ do sistema em malha fechada \mathbf{T} durante a otimização, com base, respectivamente, nos parâmetros \mathbf{b}_{est} e \mathbf{b}_{cont} iniciais e nas devidas restrições do sistema como um todo;
3. Calcular a planta da estrutura \mathbf{P} sobre os parâmetros \mathbf{b}_{est}^* ;
4. Calcular a planta do controlador \mathbf{K} sobre os parâmetros \mathbf{b}_{cont}^* ;
5. Calcular a malha fechada \mathbf{T} do sistema simultaneamente otimizado, fechada sobre \mathbf{P} e \mathbf{K} .

De forma estruturada, o algoritmo resultante pode ser visto na Figura 10.

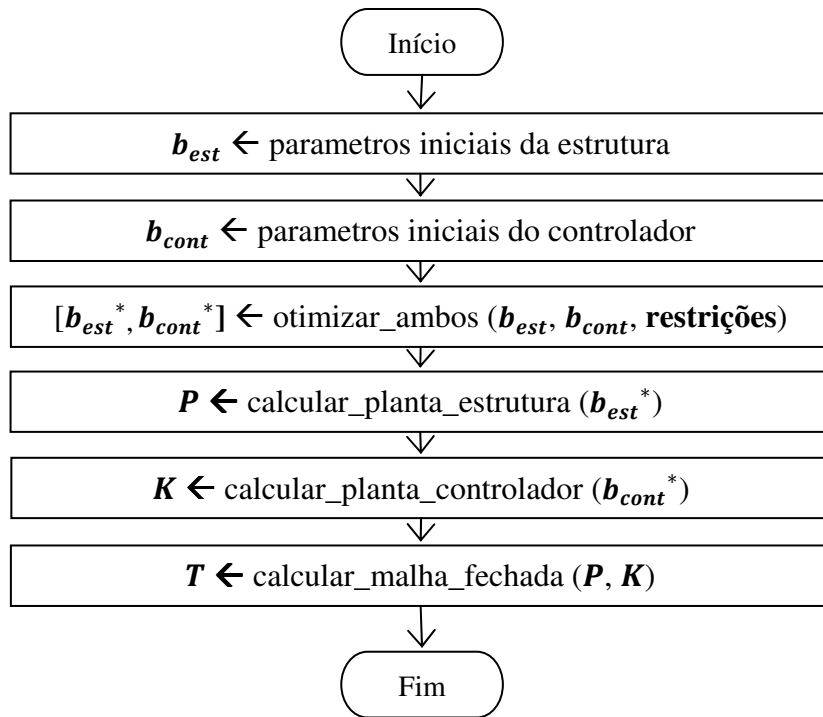


Figura 10: Algoritmo de otimização para a abordagem Simultânea

6. RESULTADOS

6.1. Escopo de Simulações

Para cada método de simulação, os resultados foram obtidos através da ferramenta de Algoritmos Genéticos *ga* da Toolbox de Otimização Global do MATLAB (MATHWORKS, 2011b). Para a otimização da base da viga, considerou-se para todos os elementos finitos o valor inicial de 35 mm, podendo variar entre 30 e 45 mm. Já para os parâmetros α_1 e α_2 indicados na Equação (6) para o cálculo da matriz de amortecimento proporcional \mathbf{C}_c , o valor utilizado foi 1×10^{-3} , escolhido com base no trabalho de (DE PAIVA, 2009). A planta é balanceada e reduzida a cada iteração do algoritmo de otimização, sendo que a ordem à qual a planta é reduzida foi obtida através de testes de simulação até que se garantisse que o algoritmo não enfrentasse problemas de precisão numérica devido à representação numérica do computador utilizado. Para todos os testes realizados, utilizou-se um notebook Intel® Core™ 2 Duo T6600 x64, com 4GB de memória RAM e MATLAB® 7.9.0.

Nos casos em que também há otimização do controlador, o parâmetro inicial de otimização foi um controlador previamente projetado sobre a planta inicial não otimizada via *hinflmi*, rotina da Toolbox de Controle LMI do MATLAB (MATHWORKS, 2011c) para obtenção de controladores via desigualdades matriciais lineares.

Por fim, dois conjuntos de teste serão apresentados: uma viga dividida em 8 elementos finitos, para estudo e comprovação das abordagens apresentadas neste trabalho, e a mesma viga dividida em 20 elementos, para comprovação de resultados e robustez computacional dos algoritmos. Em cada conjunto de teste, os três métodos serão testados: abordagem passiva estrutural, ativa serial e, por fim, abordagem simultânea.

6.2. Acerca dos resultados

Para cada caso de teste simulado no MATLAB, serão apresentados 4 gráficos: um de função de

resposta em frequência (FRF), um com o formato final da viga otimizada, um de resposta à um dado distúrbio de entrada e, por fim, um dos esforços de controle envolvidos.

No caso das respostas em frequência, as curvas poderão ser analisadas considerando que:

- “Estrutura sem controle original” é a FRF de \mathbf{P} , a planta da estrutura original calculada sobre os parâmetros iniciais do modelo sem otimização;
- “Malha Fechada Original” é a FRF de \mathbf{T} , a malha fechada de \mathbf{P} com \mathbf{K} sendo \mathbf{K} o controlador projetado para a planta \mathbf{P} ;
- “Estrutura sem controle otimizada” é a FRF de \mathbf{P}_{otima} , a planta da estrutura otimizada via ga ;
- “Malha Fechada Otimizada” é a FRF de \mathbf{T}_{otima} , a malha fechada de \mathbf{P}_{otima} com \mathbf{K}_{otimo} , sendo \mathbf{K}_{otimo} o controlador projetado para a planta \mathbf{P}_{otima} via $hinflmi$ (no caso das abordagens Passiva Estrutural e Ativa Serial) ou via ga (no caso da abordagem simultânea);

O gráfico da viga, por sua vez, mostrará a vista superior da mesma, com cada elemento finito da estrutura demarcado por um retângulo, com os limites máximos e mínimos possíveis para a largura da viga desenhados, respectivamente, em verde e ciano. Sabendo que para cada elemento o valor a ser otimizado é a largura da seção transversal no ponto médio do elemento, os valores otimizados, marcados por um asterisco são interpolados via *spline*¹², para só então ser mostrado o formato final suavizado da viga.

Já os gráficos de simulação e de esforço de controle serão obtidos pela aplicação de um sinal de distúrbio do tipo *chirp* como entrada do sistema. Este sinal é um sinal senoidal e tem como característica o aumento linear de sua frequência ao longo do tempo. Mais especificamente, o sinal terá frequência variando de 0 ao máximo de 150Hz no instante máximo do intervalo de tempo especificado para a geração do sinal, com uma amostragem de 1kHz.

Além dos gráficos, será apresentada também uma tabela com os resultados numéricos de Norma \mathcal{H}_∞ para cada abordagem, comparando suas malhas originais e suas malhas otimizadas

¹² Técnica de interpolação que faz sucessivos ajustes de curvas de forma que a curva resultante contenha o conjunto de pontos iniciais (GOMES, MEDEIROS, *et al.*, 2009), neste caso, os valores otimizados encontrados para cada elemento finito.

tanto com controle quanto para os casos sem controlador. Juntamente, o controlador obtido em cada abordagem será apresentado em formato de tabela, de acordo com o formato:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline C & D \\ \hline \end{array} \quad (56)$$

onde n é a ordem do controlador de modo que $A_{n \times n}$, $B_{n \times 1}$, $C_{1 \times n}$ e $D_{1 \times 1}$.

Por fim, as informações de tempo de execução do algoritmo (em minutos) encerrará o conjunto de dados suficientes para um análise comparativa entre as abordagens testadas.

6.3. Viga engastada dividida em 8 elementos finitos

6.3.1. Parâmetros da estrutura

Neste conjunto de testes, a viga engastada da Figura 7 foi dividida em 8 elementos finitos, resultando em 16 GDLs na malha (Figura 11), onde:

- a medição de sinal será feita no grau de liberdade de deslocamento vertical 15;
- o sinal de controle momento será aplicado no grau de liberdade de rotação 8;
- e o distúrbio de entrada momento será aplicado no grau de liberdade de rotação 4.

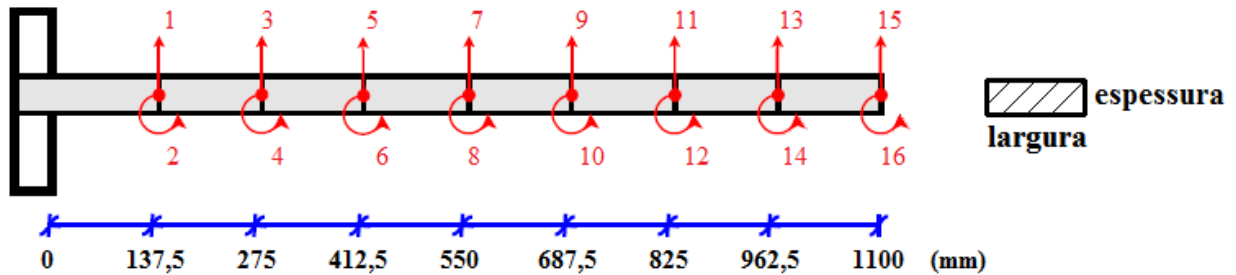


Figura 11: Relação de GDLs da viga de 8 elementos finitos

A Tabela 1 mostra o resumo de suas características e as informações necessárias para o projeto da estrutura e, posteriormente, do controlador.

Tabela 1: Resumo dos atributos da viga

Característica	Especificação	Unidade
Massa Específica	2700	kg/m ³
Módulo de Young	72×10^9	Pa
Comprimento total	1100	mm
Comprimento por elemento	137,5	mm
Esspessura seção transversal	10	mm
Largura mínima da base	30	mm
Largura máxima da base	45	mm

Seguem na sequência os resultados obtidos para cada abordagem considerando a viga de 8 elementos finitos.

6.3.2. Resultados do Modelo Passivo Estrutural

Com um tempo total de 19,6 minutos de execução, o algoritmo *ga* apresentou os resultados numéricos vistos na Tabela 2.

Tabela 2: Resultados da Abordagem Passiva Estrutural – viga de 8 elementos finitos

Planta	Norma \mathcal{H}_∞
Estrutura sem controle original <i>P</i>	0,647160
Malha Fechada Original <i>T</i>	0,012487
Estrutura sem controle otimizada <i>P_{ótima}</i>	0,483900
Malha Fechada Otimizada <i>T_{ótima}</i>	0,010760

O controlador final obtido calculado sobre a planta da estrutura otimizada pode ser visto na Tabela 3. Sua função de transferência foi verificada e confirmada como sendo estritamente própria e estável.

Tabela 3: Controlador final obtido para a abordagem Passiva Estrutural – viga de 8 elementos finitos

-2,751	-4,241	11,624	-47,002	2,473	12,508	0,150	2,803	1,232	-0,423	23,55482
5,831	-0,291	56,059	32,867	-3,151	0,979	-0,545	-0,147	-1,280	0,471	-24,9243
-29,192	-54,428	-15,212	-22,594	9,837	-2,695	-2,532	1,090	10,622	-3,845	205,3974
71,271	-35,482	39,245	-6,735	-21,522	10,605	-4,218	1,324	-20,373	7,496	-394,031
-1,890	3,953	-12,245	30,520	-0,383	20,262	1,388	0,153	-0,280	0,076	-4,95823
-23,999	0,121	-10,989	1,732	-23,565	-4,924	-0,356	0,073	9,002	-3,240	173,595
-4,529	1,550	-6,004	17,650	-3,025	-7,172	-2,465	8,099	3,737	-1,275	71,99797
-19,886	1,164	-13,882	4,419	-6,248	-8,681	-17,767	-1,729	14,723	-5,359	284,6786
7,090	-0,361	4,984	-1,430	2,519	3,204	3,853	0,724	-6,171	0,717	-118,463
-22,811	1,161	-15,939	4,643	-8,107	-10,276	-12,388	-2,433	21,238	-7,749	380,8039
-0,043	0,003	0,001	0,000	-0,006	0,006	-0,072	0,005	-1,665	-4,368	0

É notável que houve uma redução de 25,23% entre as normas \mathcal{H}_∞ da planta da estrutura original e a otimizada pelo AG. O resultado de malha fechada final obtido com um controlador calculado sobre a planta otimizada apresentou uma redução de 98,34% da norma original. O gráfico de resposta em frequência pode ser visto na Figura 12.

Já a configuração final da viga pode ser vista na Figura 13. A Tabela 4 mostra a largura final da base da viga para cada elemento.

Por fim, as Figuras 14 e 15, mostram respectivamente os gráficos de simulação da viga e dos esforços de controle necessários para a atenuação das vibrações, quando aplicado o sinal *chirp* da seção 6.2 como distúrbio de entrada. Percebe-se que houve uma discreta redução na amplitude de vibração da estrutura quando otimizada em relação à planta original, ainda que a diminuição do esforço de controle necessário não tenha sido significativa.

Tabela 4: Parâmetros otimizados da viga pela abordagem Passiva Estrutural – viga de 8 elementos finitos

Elemento	1	2	3	4	5	6	7	8
Largura inicial (mm)	35	35	35	35	35	35	35	35
Largura final (mm)	44,98	45,00	44,69	45,00	39,71	38,32	38,15	30,05

6.3.3. Resultados do Modelo Ativo Serial

Com um tempo total de 117,86 minutos de execução, o algoritmo *ga* apresentou os resultados numéricos vistos na Tabela 5:

Tabela 5: Resultados da Abordagem Ativa Serial – viga de 8 elementos finitos

Planta	Norma \mathcal{H}_∞
Estrutura sem controle original \mathbf{P}	0,647160
Malha Fechada Original \mathbf{T}	0,012472
Estrutura sem controle otimizada \mathbf{P}_{otima}	0,479100
Malha Fechada Otimizada \mathbf{T}_{otima}	0,011271

O controlador final obtido no processo de otimização pode ser visto na Tabela 6. Sua função de transferência foi verificada e confirmada como sendo estritamente própria e estável.

Nota-se que houve uma redução de 25,97% entre as normas \mathcal{H}_∞ da planta da estrutura original e a otimizada pelo AG. O resultado de malha fechada final obtido com um controlador calculado sobre a planta otimizada apresentou uma redução de 98,25% da norma original. O gráfico de resposta em frequência pode ser visto na Figura 16.

Já a configuração final da viga pode ser vista na Figura 17. A Tabela 7 mostra a largura final da base da viga para cada elemento.

Por fim, as Figuras 18 e 19, mostram respectivamente os gráficos de simulação da viga e

dos esforços de controle necessários para a atenuação das vibrações, quando aplicado sinal *chirp* como distúrbio de entrada. Percebe-se que houve uma discreta redução na amplitude de vibração da estrutura quando otimizada em relação à planta original. Ainda assim, a diminuição do esforço de controle necessário novamente não foi significativa

Tabela 6: Controlador final obtido para a abordagem Ativa Serial – viga de 8 elementos finitos

-4,107	8,211	10,093	-51,849	1,663	11,376	0,686	2,473	-2,143	-0,764	-39,2589
-15,134	-0,568	-58,059	-32,993	2,129	-2,605	1,728	0,337	-5,891	-2,210	-108,931
-32,413	52,928	-16,303	-17,538	5,750	-1,854	6,111	1,934	-13,999	-5,146	-258,743
90,616	36,682	40,932	-6,406	-8,503	7,410	-7,040	-0,401	33,677	12,556	622,362
-2,045	-5,454	-11,631	26,912	-0,395	20,637	-0,889	0,078	-0,001	-0,017	-0,31129
-27,593	0,441	-12,463	2,904	-27,521	-3,929	5,180	0,927	-13,446	-4,934	-247,929
5,557	2,407	5,692	-15,819	3,707	5,035	-3,329	-8,411	4,873	1,724	89,65422
-27,250	-1,629	-17,928	3,959	-11,611	-7,129	22,982	-0,557	-21,771	-8,035	-402,315
-10,389	-0,486	-6,717	1,155	-4,793	-2,511	6,033	-0,233	-9,133	-1,767	-168,011
-33,413	-1,563	-21,517	3,775	-15,414	-8,044	19,417	-0,872	-30,837	-11,348	-540,019
0,038	0,003	-0,001	0,000	0,004	-0,007	-0,079	-0,005	-1,662	4,324	0

Tabela 7: Parâmetros otimizados da viga pela abordagem Ativa Serial – viga de 8 elementos finitos

Elemento	1	2	3	4	5	6	7	8
Largura inicial (mm)	35	35	35	35	35	35	35	35
Largura final (mm)	45,00	45,00	45,00	44,98	43,11	30,36	30,02	30,01

6.3.4. Resultados do Modelo Simultâneo

Com um tempo total de 122,19 minutos de execução, o algoritmo *ga* apresentou os resultados

numéricos vistos na Tabela 8.

Tabela 8: Resultados da Abordagem Simultânea – viga de 8 elementos finitos

Planta	Norma \mathcal{H}_{∞}
Estrutura sem controle original P	0,6472800
Malha Fechada Original T	0,0124890
Estrutura sem controle otimizada P_{otima}	0,5980200
Malha Fechada Otimizada T_{otima}	0,0024961

O controlador final obtido no processo de otimização pode ser visto na Tabela 9. Sua função de transferência foi verificada e confirmada como sendo estritamente própria e estável.

Tabela 9: Controlador final obtido para a abordagem Simultânea – viga de 8 elementos finitos

-0,843	-2,565	9,902	40,937	-0,464	11,946	2,212	3,723	2,274	0,783	25,943
10,825	2,968	46,703	-26,227	5,854	3,057	-0,069	2,260	4,313	1,510	-33,895
-21,363	-42,072	-11,108	18,552	-6,518	1,128	6,228	2,795	-7,747	-3,806	183,485
-61,643	31,782	-30,232	-4,022	-10,361	-6,514	5,899	0,971	-16,025	-5,220	374,164
4,165	-0,758	11,224	26,341	-0,221	-15,309	3,596	1,710	0,583	0,652	2,610
-20,641	1,333	-8,491	-0,340	22,009	-1,248	5,137	2,641	-6,796	-1,554	167,590
6,817	1,215	5,208	14,085	-1,062	7,529	1,159	-4,772	3,751	1,972	-65,901
-14,557	2,985	-10,585	-1,423	9,707	-3,176	16,728	1,557	-12,632	-1,933	260,235
-5,429	3,325	-3,708	0,217	5,465	-0,908	6,405	2,753	-4,778	0,129	118,032
-23,583	2,581	-15,748	-3,468	14,209	-6,890	17,814	-0,454	-20,594	-4,867	424,038
2,498	1,501	2,127	3,900	2,944	0,271	1,241	1,144	5,510	-4,552	0

Percebe-se que houve uma redução de apenas 7,61% entre as normas \mathcal{H}_{∞} da planta da estrutura original e a otimizada pelo AG. Já o resultado de malha fechada final obtido com um controlador calculado sobre a planta otimizada apresentou uma redução de 99,6% em relação à

norma original. O gráfico de resposta em frequência pode ser visto na Figura 20.

Já a configuração final da viga pode ser vista na Figura 21. A Tabela 10 mostra a largura final da base da viga para cada elemento:

Tabela 10: Parâmetros otimizados da viga pela abordagem Simultânea – vida de 8 elementos finitos

Elemento	1	2	3	4	5	6	7	8
Largura inicial (mm)	35	35	35	35	35	35	35	35
Largura final (mm)	37,81	38,05	37,17	36,61	37,80	39,59	37,67	37,21

Por fim, as Figuras 22 e 23, mostram respectivamente os gráficos de simulação da viga e dos esforços de controle necessários para a atenuação das vibrações, quando aplicado sinal *chirp* como distúrbio de entrada. Percebe-se que houve uma redução bem mais significativa na amplitude de vibração da estrutura quando otimizada em relação à planta original do que os métodos anteriores, porém, os esforços de controle necessários tiveram um aumento significativo.

6.3.5. Comparativo entre os resultados das diferentes abordagens

Sabendo que:

- no modelo Passivo Estrutural a otimização via AG é feita somente sobre a planta da estrutura, tendo um controlador \mathcal{H}_∞ projetado de forma usual via *hinflmi* para a planta final da estrutura otimizada;
- no modelo Ativo Serial a otimização via AG é feita somente para a planta da estrutura, tendo um controlador \mathcal{H}_∞ calculado via *hinflmi* sobre a planta da estrutura otimizada a cada iteração;
- e por fim, no modelo Simultâneo a otimização via AG é feita sobre planta da estrutura e controlador ao mesmo tempo,

há algumas observações a serem destacadas dentre os resultados apresentados em cada abordagem. Considerando, por exemplo, os modelos Passivo Estrutural e Ativo Serial, os resultados similares são coerentes, uma vez que ambos otimizam via AG apenas a planta da estrutura, tendo seu controlador calculado via *hinflmi*. Neste ponto, ainda que a segunda abordagem seja iterativa (e por isto tenha demorado mais a convergir), o processo de otimização que parte de parâmetros de entrada similares acabou por obter resultados similares. Em ambos os casos, a redução da Norma \mathcal{H}_∞ foi obtida com sucesso.

A abordagem simultânea, por outro lado, não obteve os melhores resultados em termos de redução da Norma \mathcal{H}_∞ no que diz respeito à planta estrutural sem controle otimizada. Porém, em termos da malha fechada obtida após a otimização de estrutura e controlador, foi a abordagem que obteve a maior redução de norma e, conseqüentemente, de amplitude de vibração, ainda que para isto tenha exigido um esforço de controle inicial maior que as demais abordagens. Esta diferença em termos de resultado pode ser justificada pela diferença conceitual da abordagem, que possui um número de variáveis muito maior a ser otimizado via AG, implicando em uma complexidade computacional maior que, além de exigir maior tempo para a convergência, apresenta ainda resultados mais diversificados por varrer um maior espaço de soluções de forma estocástica. Os gráficos das Figuras 24 e 25 mostram as curvas de resposta em frequência otimizadas e as simulações feitas com a aplicação do distúrbio de entrada de cada método para comparação de ganho em relação à planta da estrutura original não otimizada.

Quanto às formas finais de viga obtidas, mais uma vez a abordagem simultânea apresenta resultados bem diferentes das demais: o tamanho final dos elementos variou mais do que nas abordagens Passiva Estrutural e Ativa Serial, resultando em uma viga de formato mais homogêneo devido à otimização efetiva dos elementos mais próximos do engaste, diferentemente das outras abordagens. A Figura 26 mostra a comparação dos formatos finais de viga obtidos. É importante ressaltar que a curva suavizada é uma interpolação e, portanto, é um recurso empregado meramente com a intenção de uma melhor visualização dos resultados.

A Tabela 11 mostra alguns dados comparativos de forma resumida das três abordagens:

Tabela 11: Comparativo entre abordagens – viga de 8 elementos finitos

	Passiva Estrutural	Ativa Serial	Simultânea
Tempo de execução do algoritmo (min)	19,6	117,86	122,19
Redução da Norma \mathcal{H}_∞ de P_{otima} em relação à P	25,23%	25,97%	7,60%
Redução da Norma \mathcal{H}_∞ de T_{otima} em relação à T	13,83%	9,63%	80,01%
Redução da Norma \mathcal{H}_∞ de T_{otima} em relação à P	98,34 %	98,25 %	99,60%
Esforço máximo de controle de T_{otima} (N.mm)	0,002647	0,002697	0,033846
Posição vertical máxima da extremidade da viga submetida ao distúrbio em T_{otima} (mm)	0,00053	0,00056	0,00053

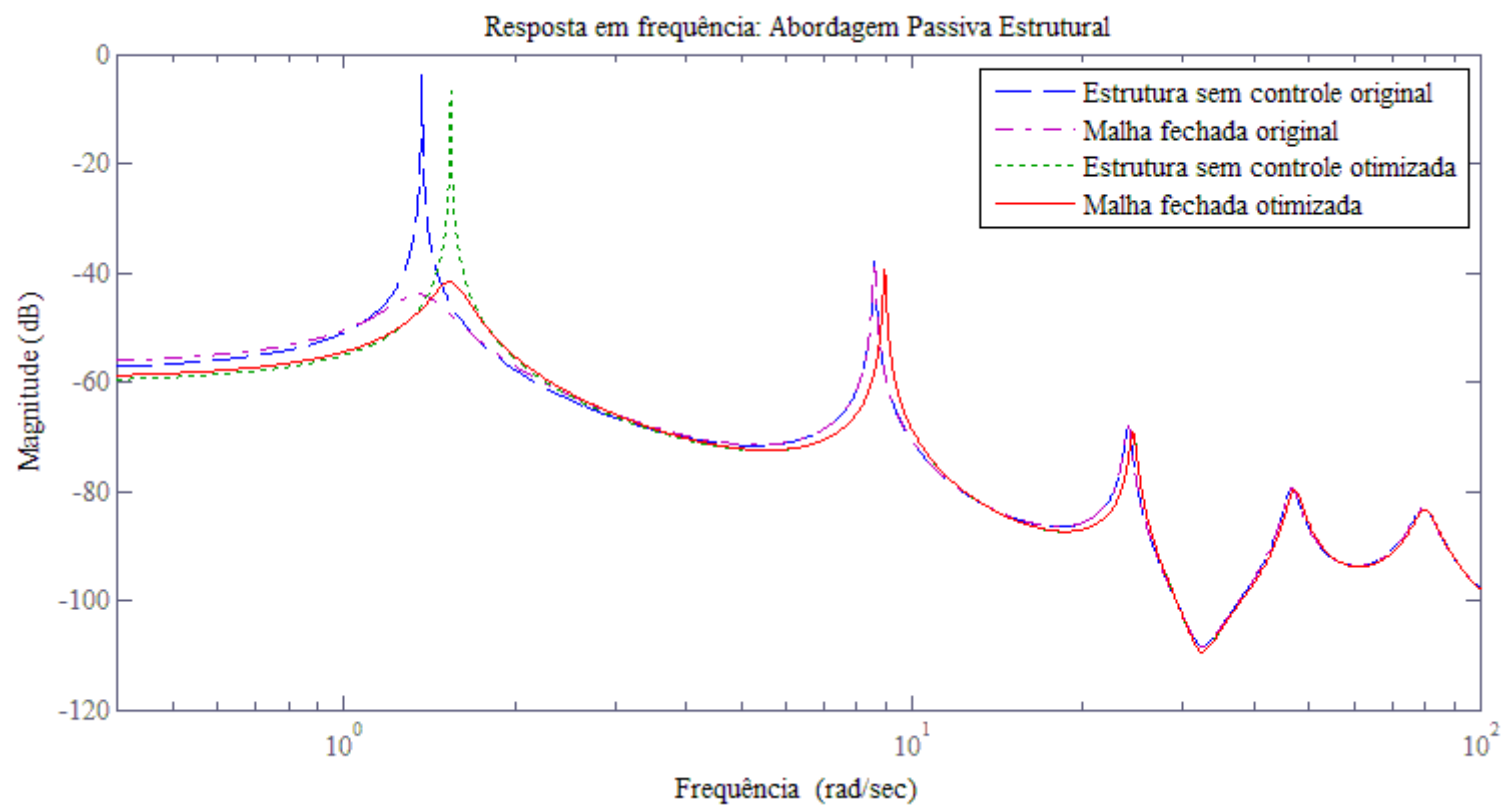


Figura 12: Passiva Estrutural: curvas de resposta em frequência para a viga de 8 elementos finitos

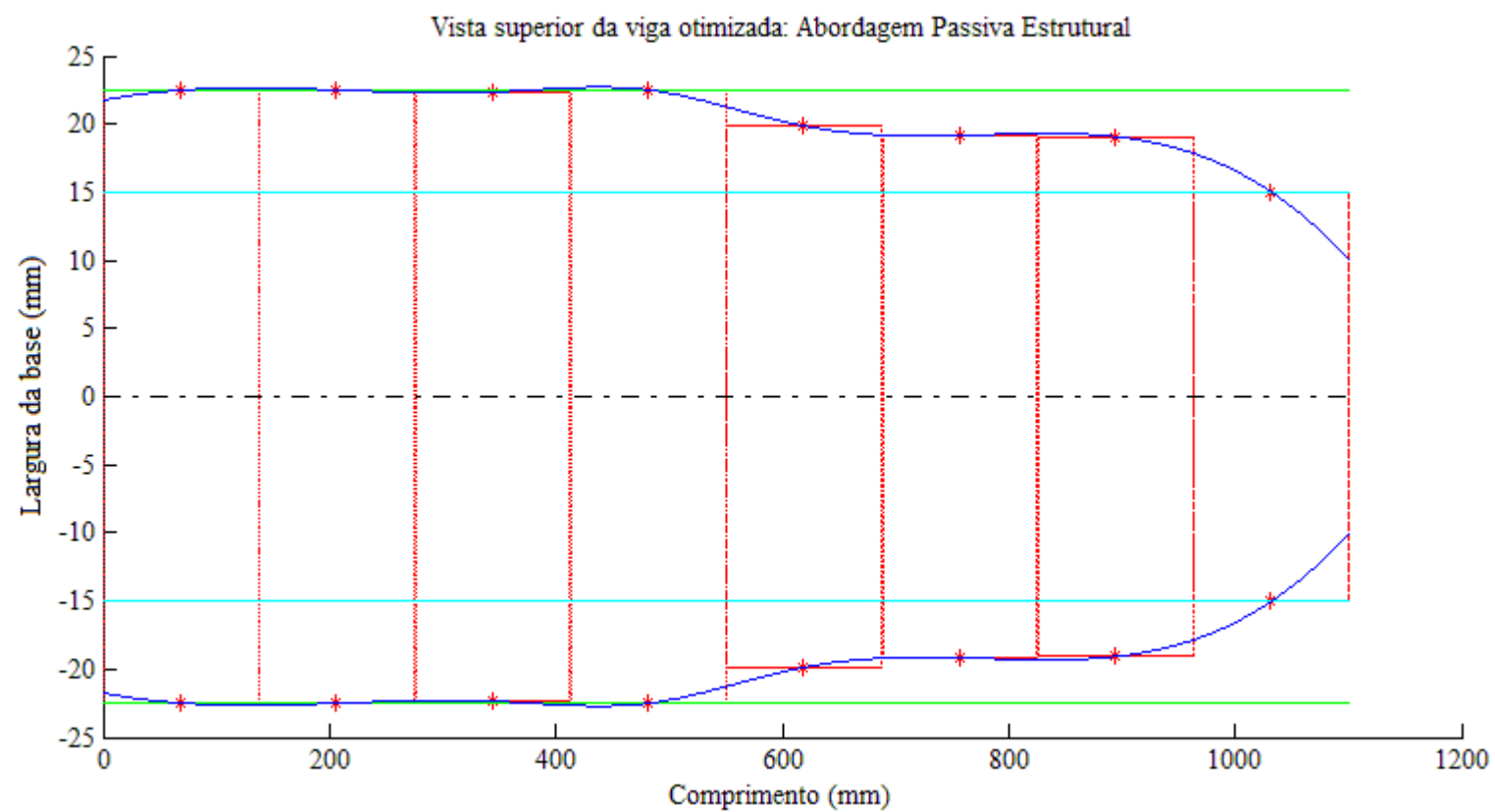


Figura 13: Passiva Estrutural: vista superior da viga de 8 elementos finitos otimizada

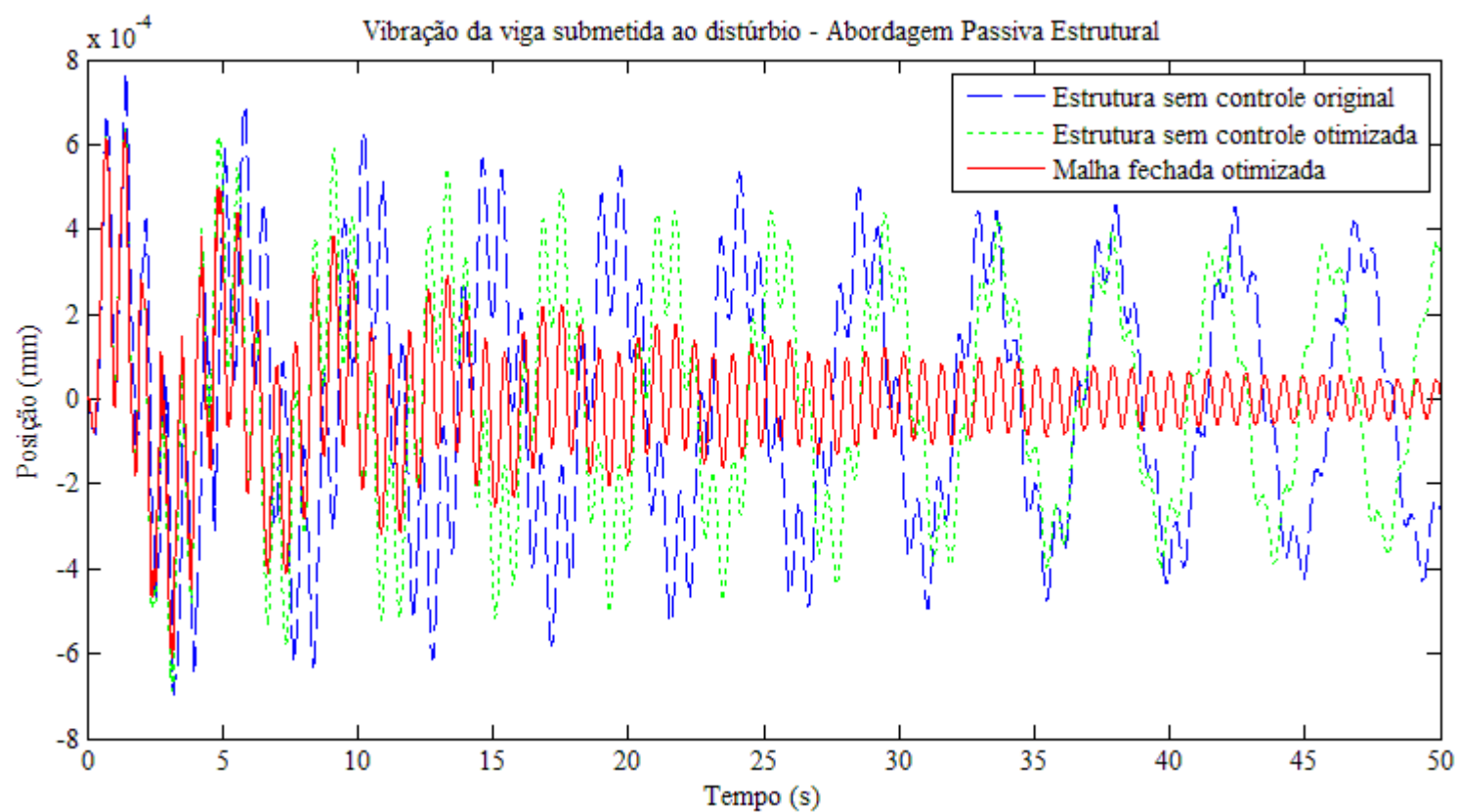


Figura 14: Passiva Estrutural: simulação com sinal chirp como distúrbio de entrada para a viga de 8 elementos finitos

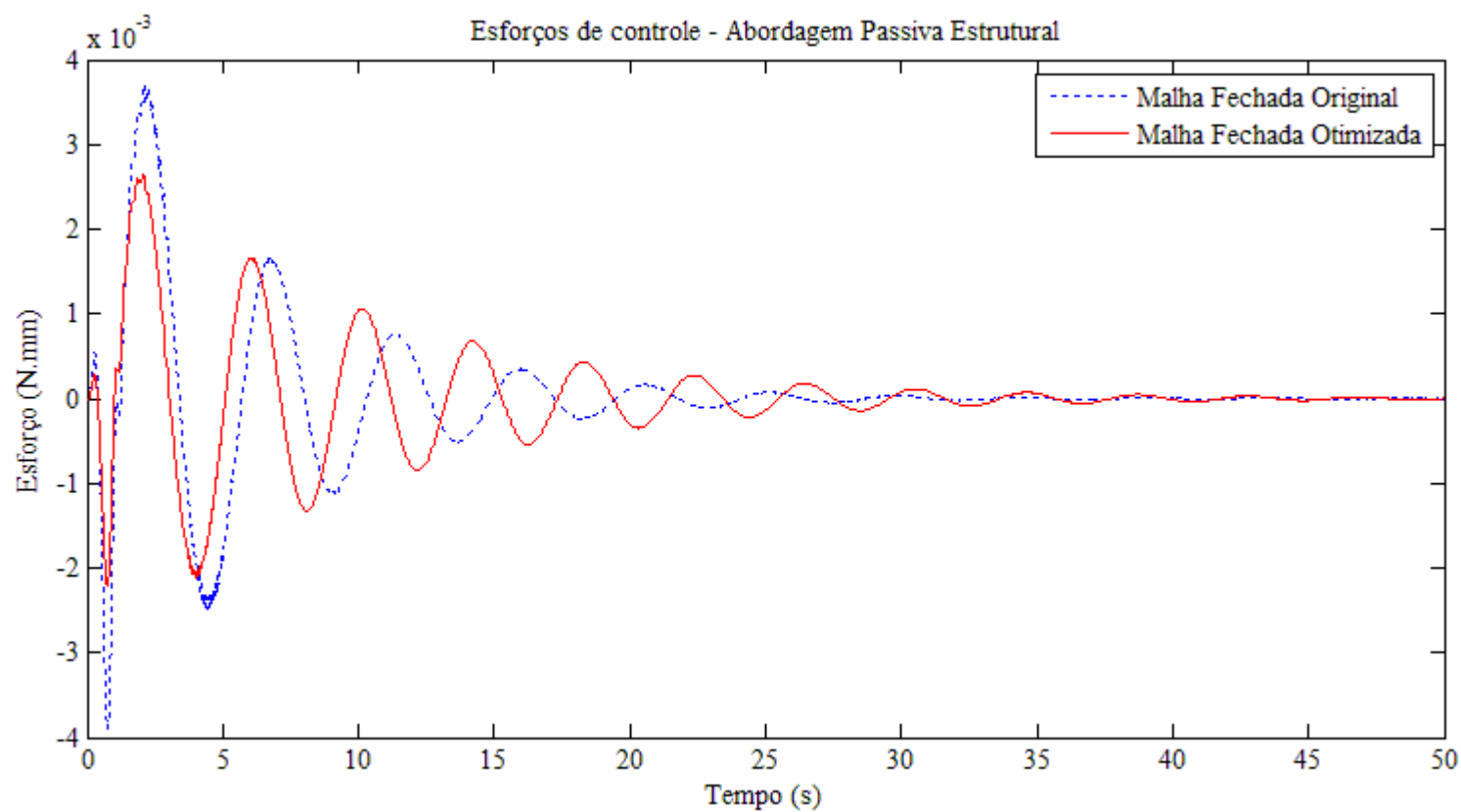


Figura 15: Passiva Estrutural: esforços de controle necessários para a viga de 8 elementos finitos

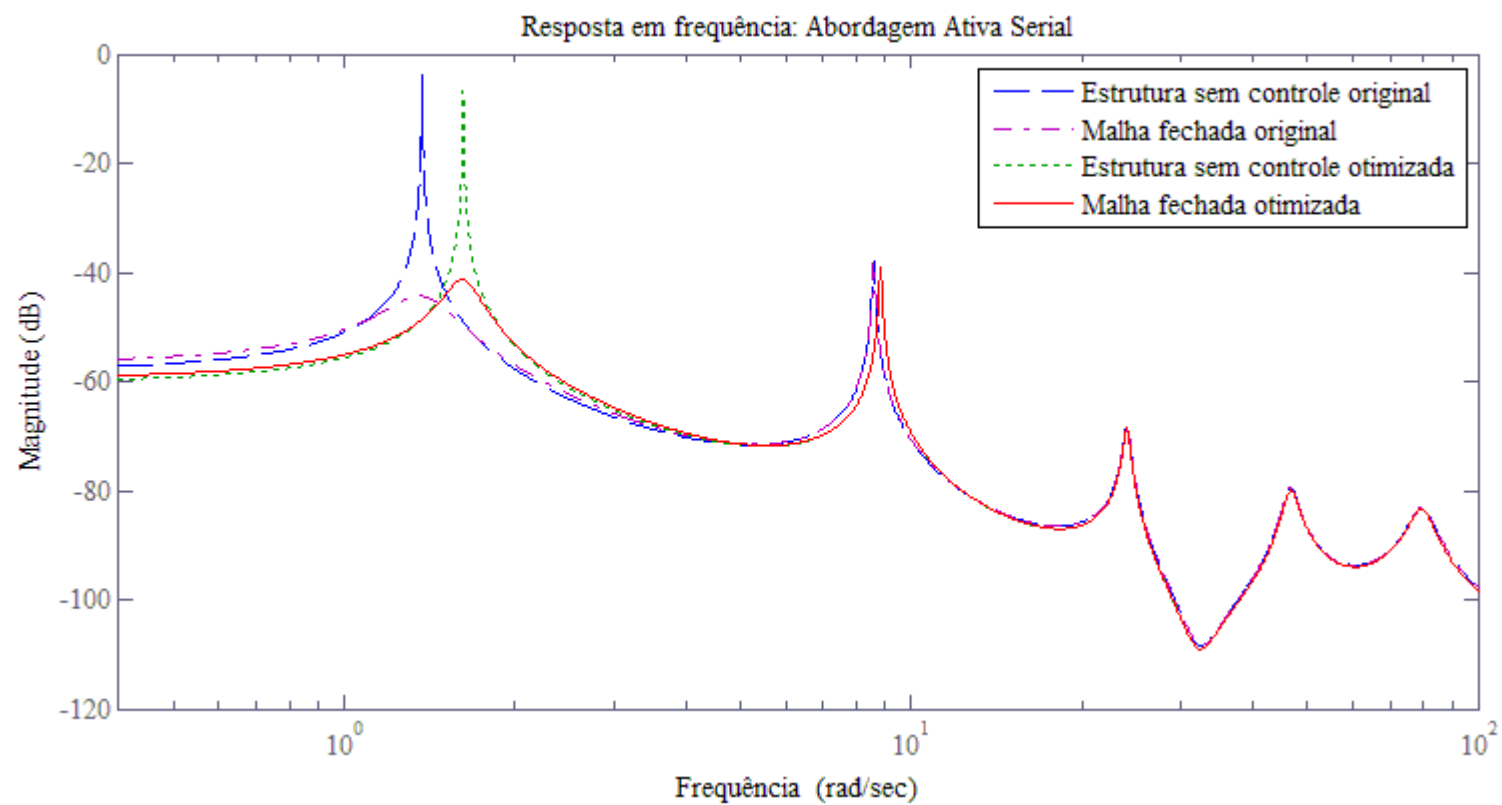


Figura 16: Ativa Serial: curvas de resposta em frequência para a viga de 8 elementos finitos

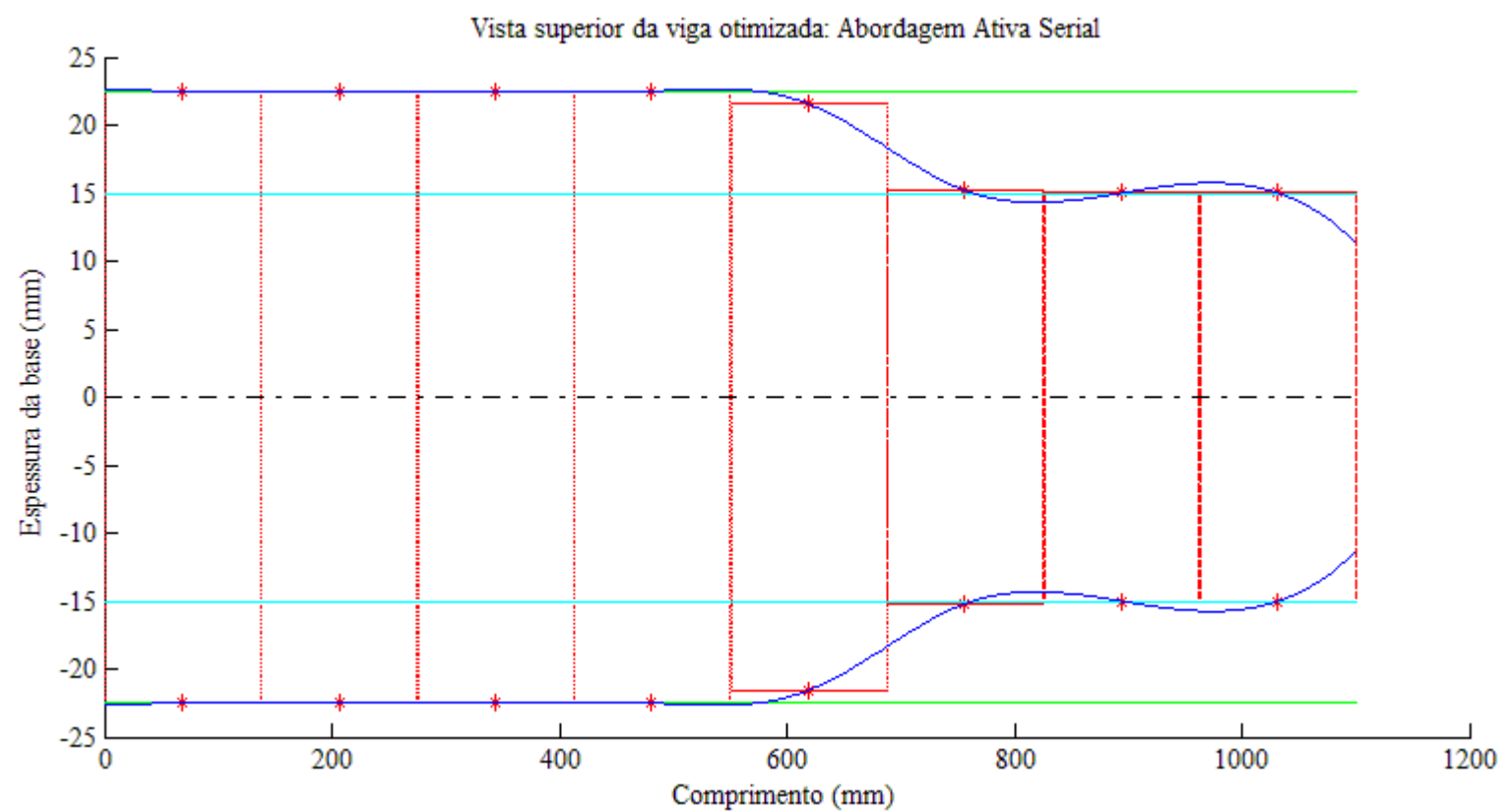


Figura 17: Ativa Serial: vista superior da viga de 8 elementos finitos otimizada

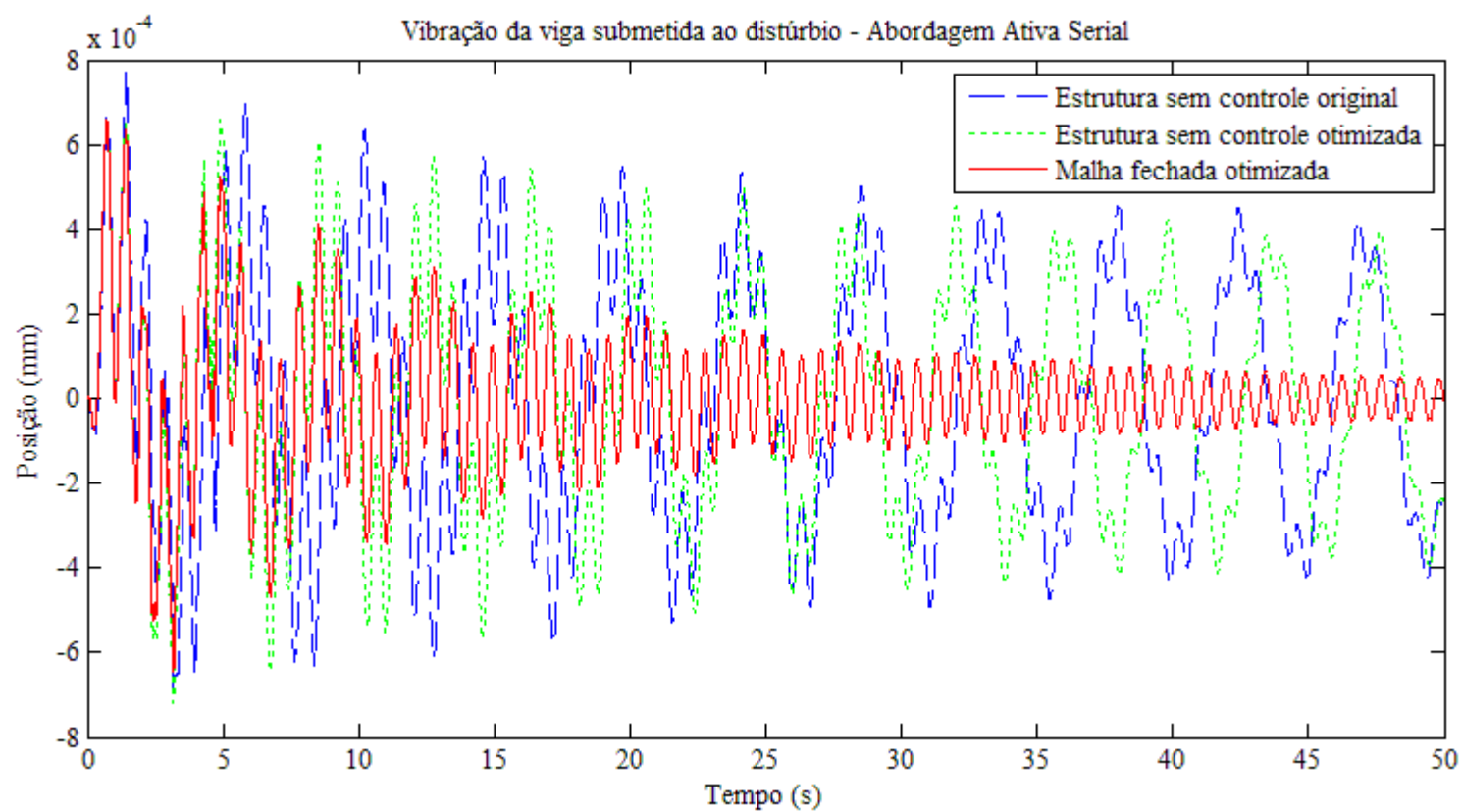


Figura 18: Ativa Serial: simulação com sinal *chirp* como distúrbio de entrada para viga de 8 elementos finitos

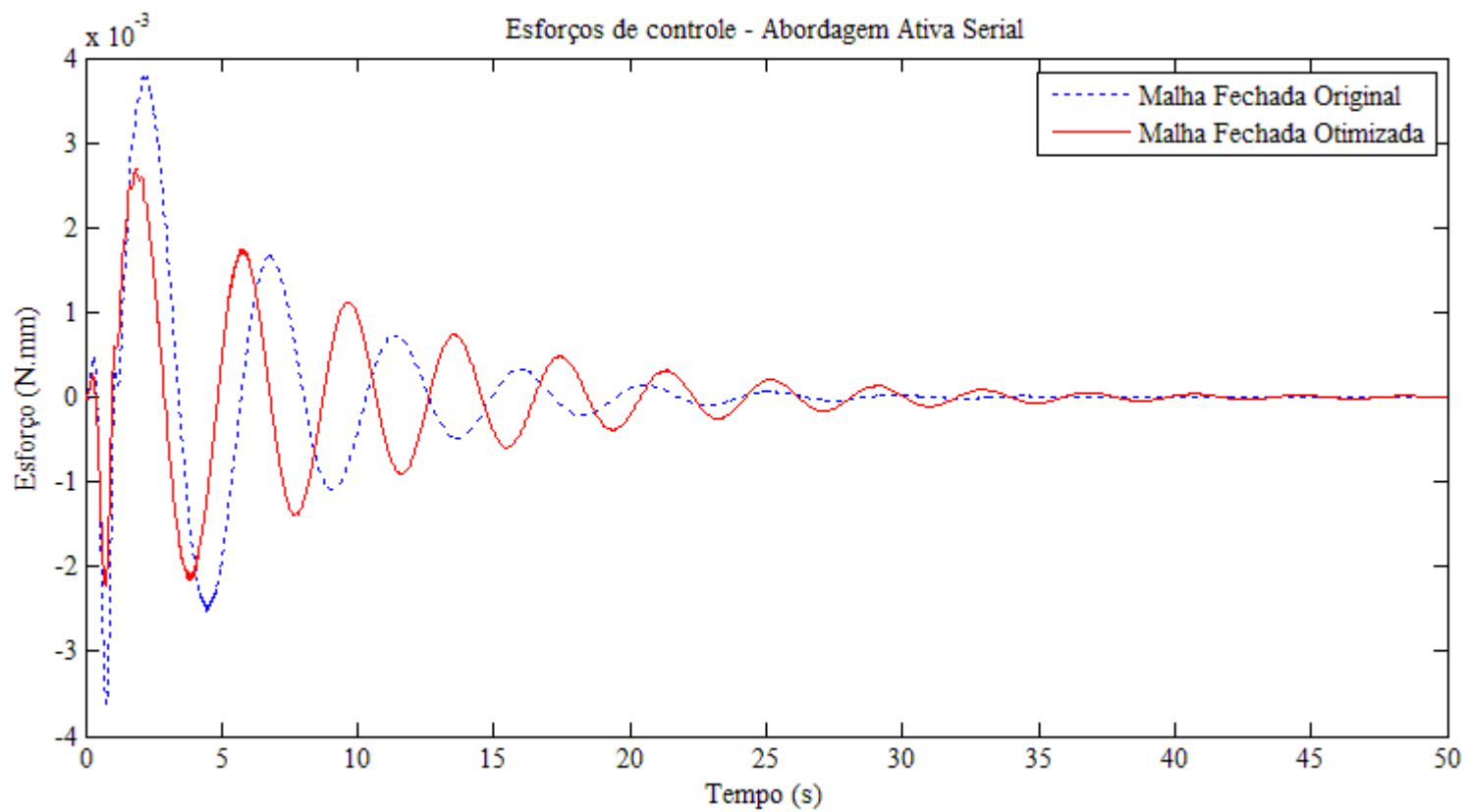


Figura 19: Ativa Serial: esforços de controle necessários para viga de 8 elementos finitos

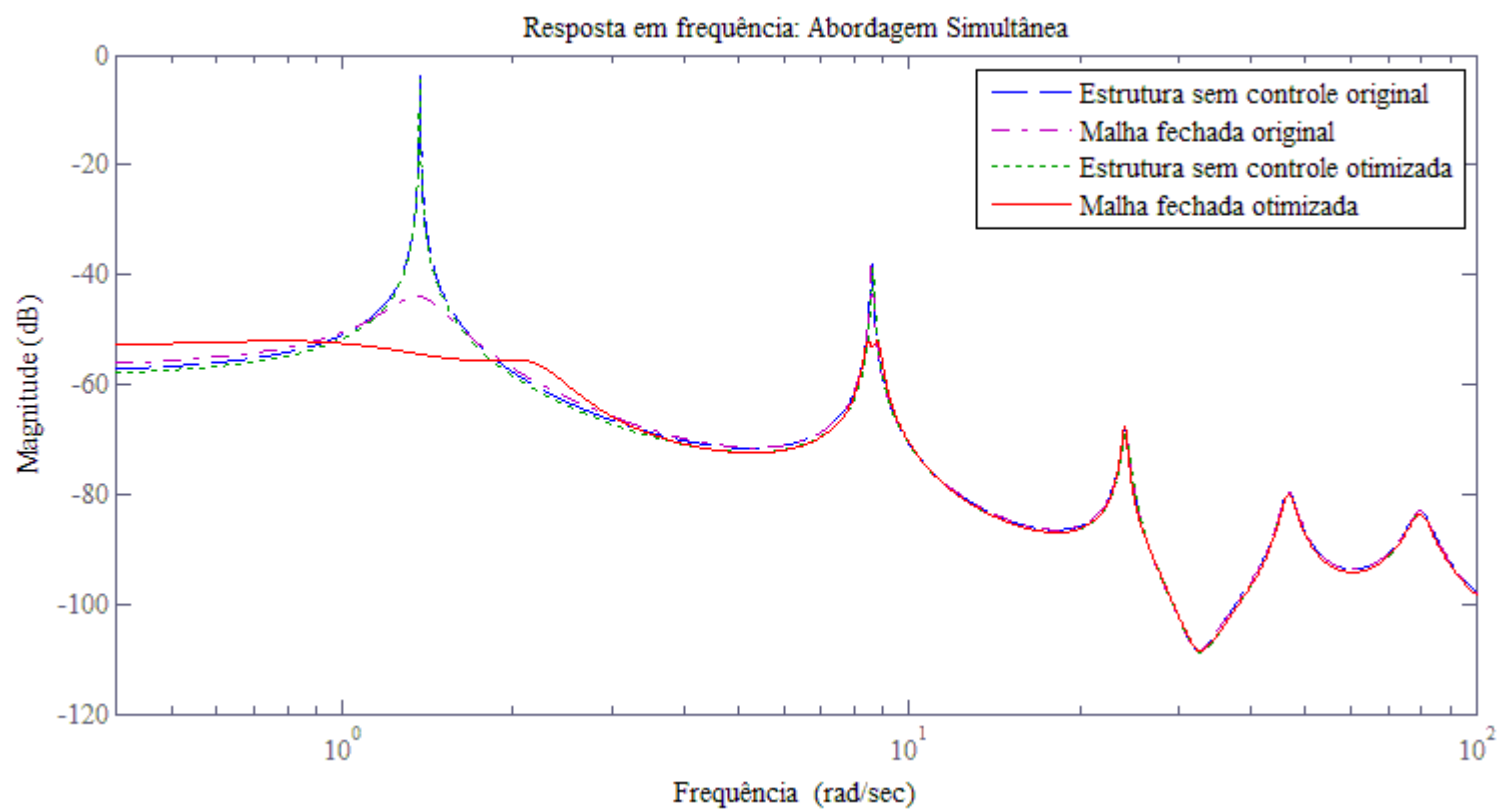


Figura 20: Simultânea: curvas de resposta em frequência para viga de 8 elementos finitos

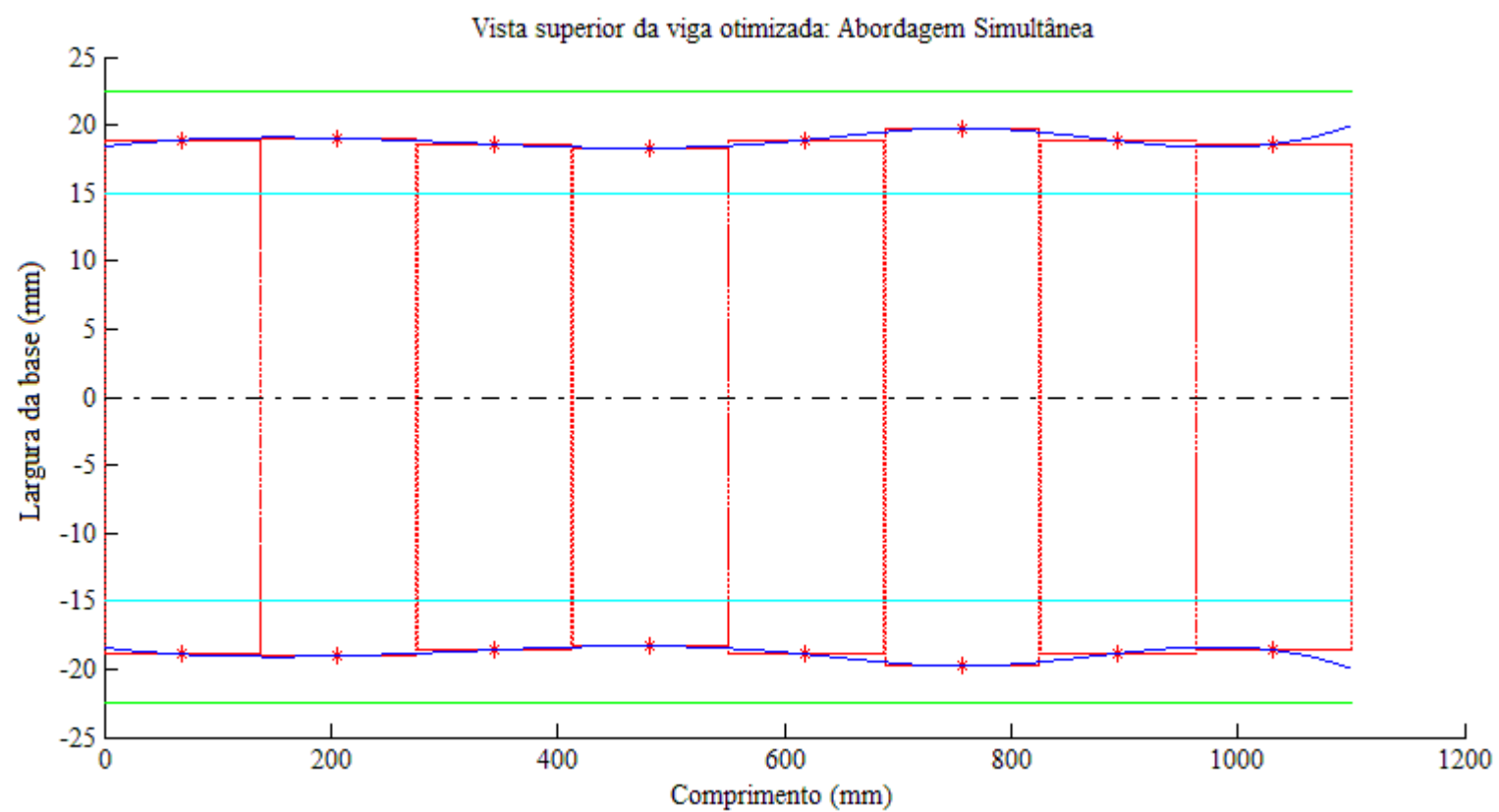


Figura 21: Simultânea: vista superior da viga de 8 elementos finitos otimizada

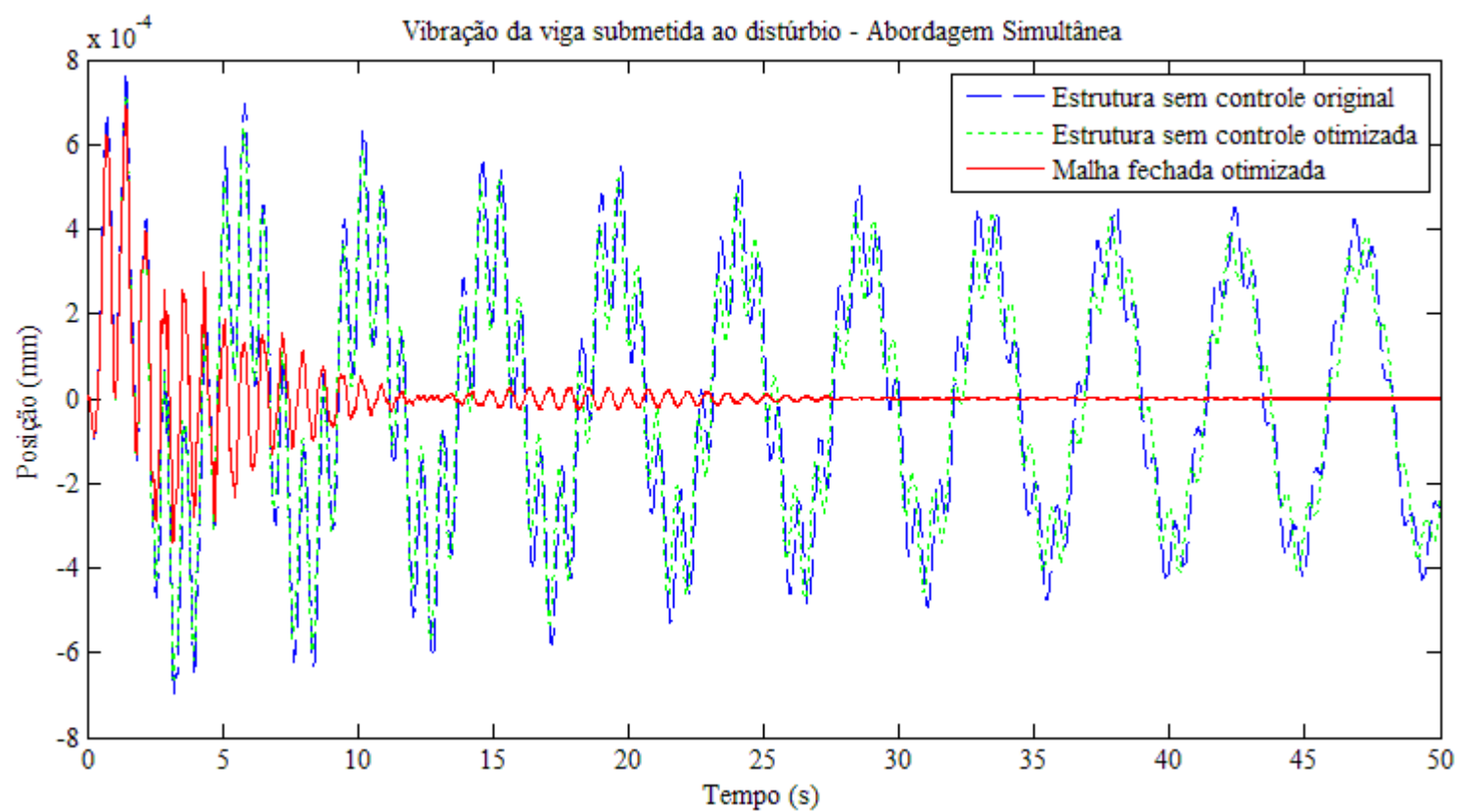


Figura 22: Simultânea: simulação com sinal *chirp* como distúrbio de entrada para viga de 8 elementos finitos

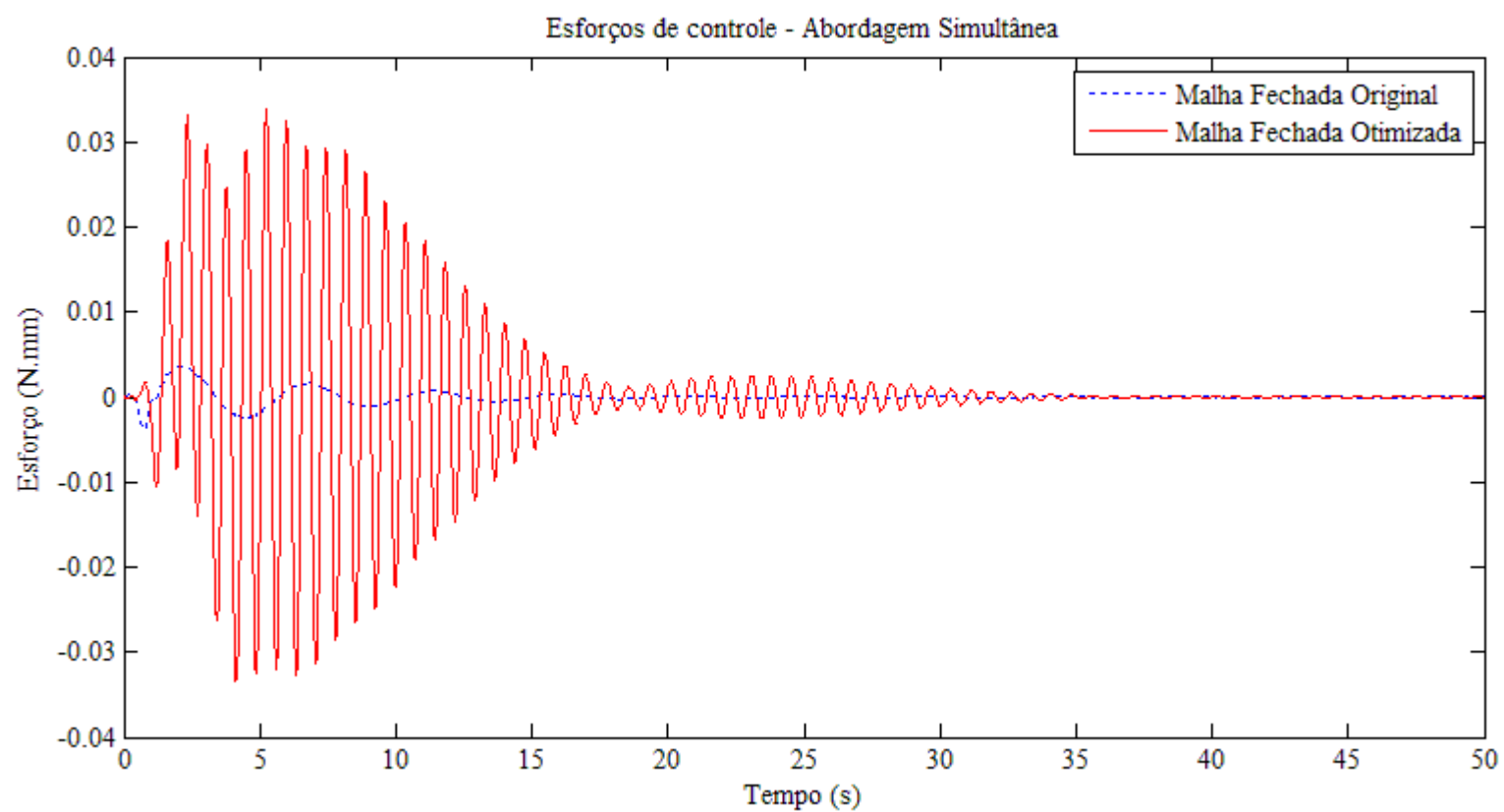


Figura 23: Simultânea esforços de controle necessários para viga de 8 elementos finitos

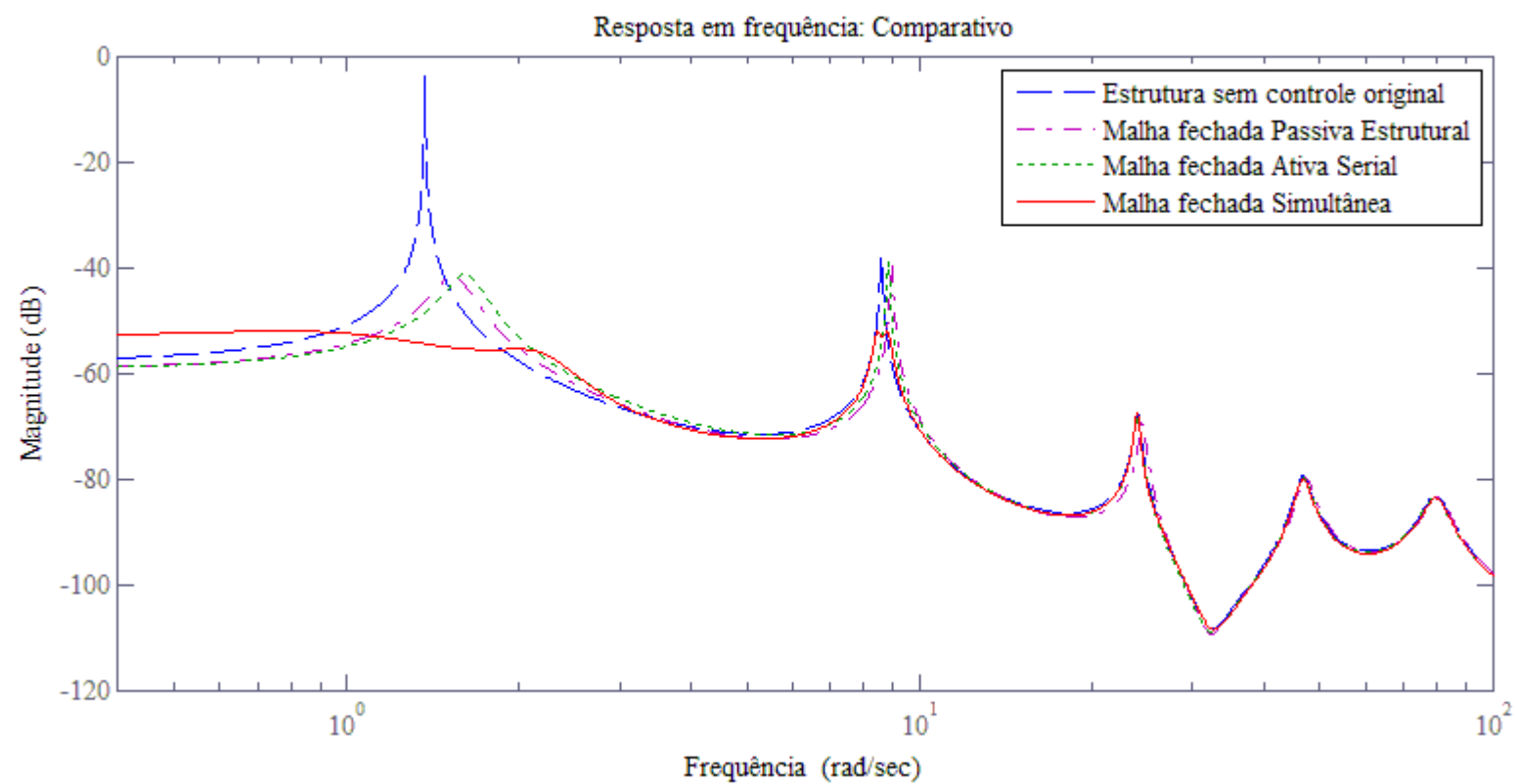


Figura 24: Comparativo entre abordagens: curvas de resposta em frequência para viga de 8 elementos finitos

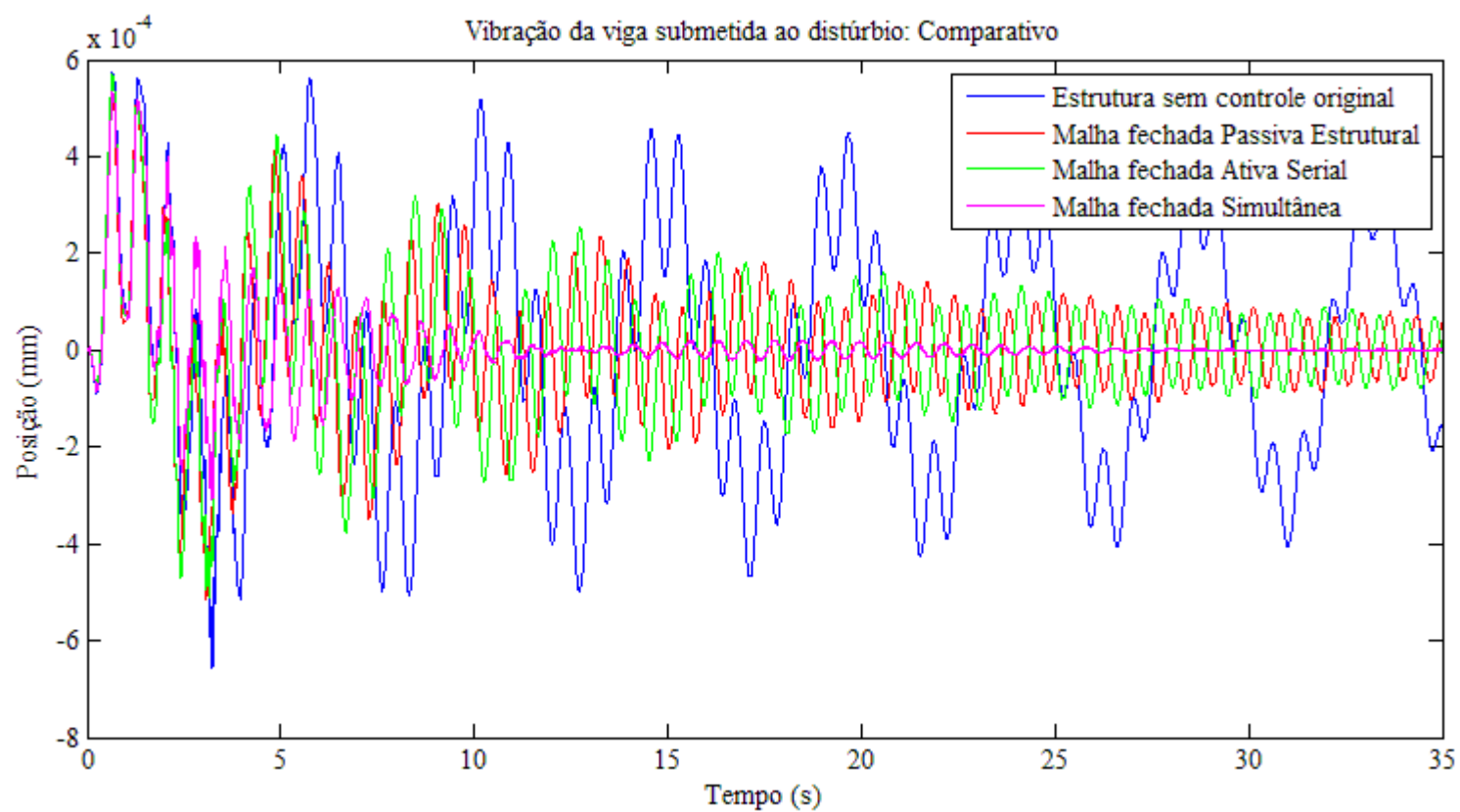


Figura 25: Comparativo entre abordagens: simulações com sinal *chirp* como entrada para viga de 8 elementos finitos

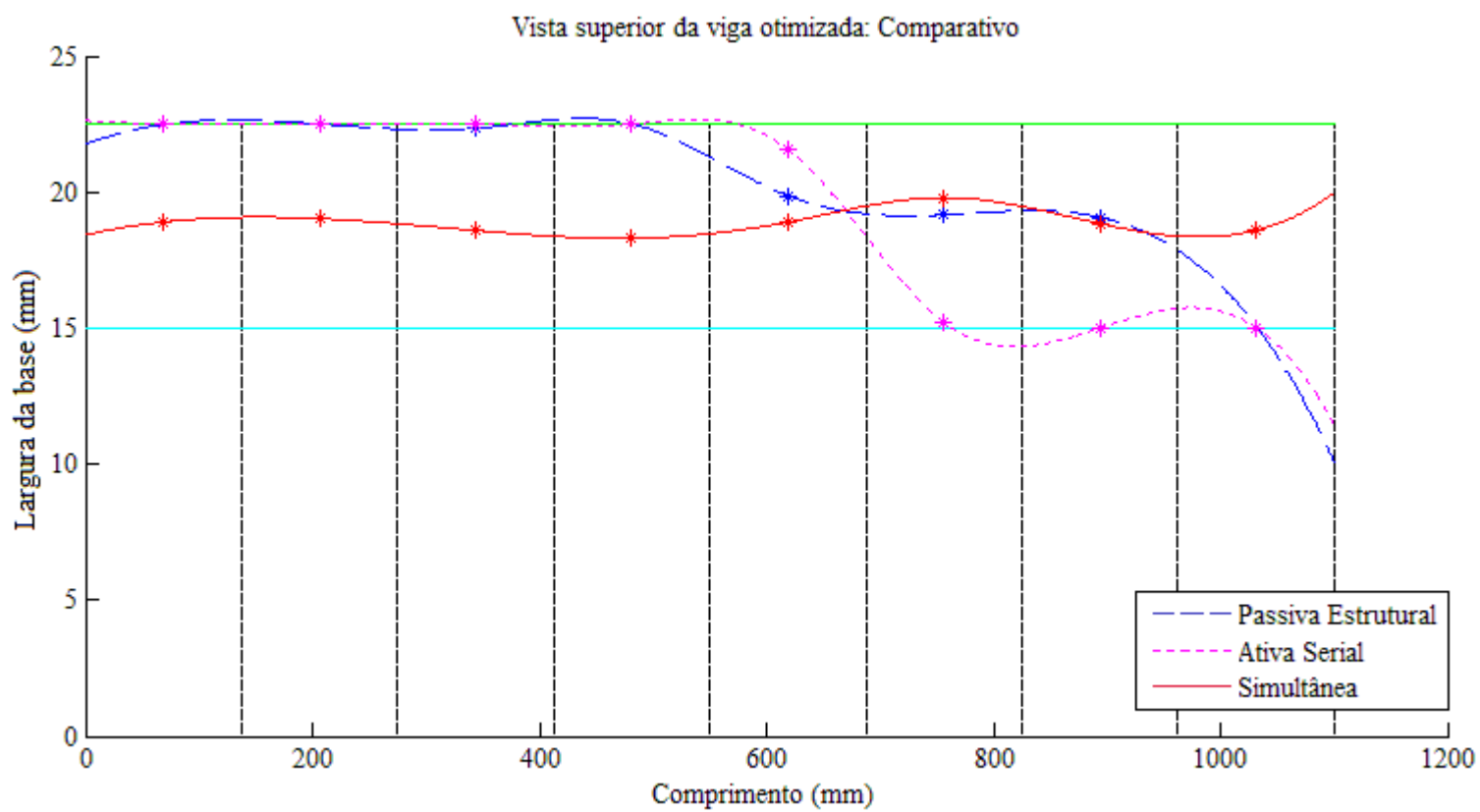


Figura 26: Comparativo entre abordagens: formatos finais da viga de 8 elementos finitos

6.4. Viga engastada dividida em 20 elementos finitos

6.4.1. Parâmetros da estrutura

Neste conjunto de testes, a viga engastada da Figura 7 foi dividida em 20 elementos finitos, resultando em 40 GDLs na malha, onde:

- a medição de sinal será feita no grau de liberdade de deslocamento vertical 39;
- o sinal de controle momento será aplicado no grau de liberdade de rotação 20;
- e o distúrbio de entrada momento será aplicado no grau de liberdade de rotação 10.

Estes graus de liberdade foram escolhidos de forma que a medição e a aplicação dos sinais de distúrbio e de controle possam ser feitos no mesmo ponto da viga em que foram feitos na simulação anterior, com a viga dividida em 8 elementos finitos.

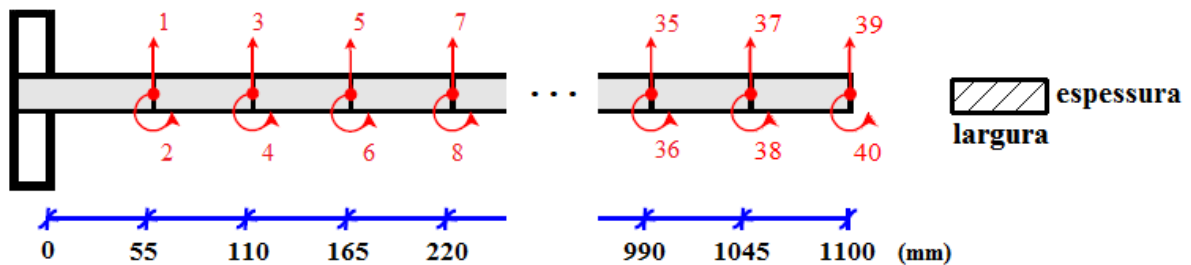


Figura 27: Relação de GDLs da viga de 20 elementos finitos

As características da viga e as informações necessárias para o projeto da estrutura e do controlador foram mantidas as mesmas apresentadas na Tabela 1.

Seguem na sequência os resultados obtidos para cada abordagem considerando a viga de 20 elementos finitos.

6.4.2. Resultados do Modelo Passivo Estrutural

Com um tempo total de 30,47 minutos de execução, o algoritmo apresentou os resultados numéricos vistos na Tabela 12.

Tabela 12: Resultados da Abordagem Passiva Estrutural – viga de 20 elementos finitos

Planta	Norma \mathcal{H}_∞
Estrutura sem controle original P	0,647290
Malha Fechada Original T	0,012462
Estrutura sem controle otimizada P_{otima}	0,496630
Malha Fechada Otimizada T_{otima}	0,010477

O controlador final obtido calculado sobre a planta da estrutura otimizada pode ser visto na Tabela 19. Sua função de transferência foi verificada e confirmada como sendo estritamente própria e estável.

Como pode ser notado, houve uma redução de 23,27% entre as normas \mathcal{H}_∞ da planta da estrutura original e a otimizada pelo AG, praticamente a mesma redução ocorrida na viga dividida em 8 elementos. O resultado de malha fechada final obtido com um controlador calculado sobre a planta otimizada apresentou uma redução de 15,93% em relação à malha fechada original, representando uma redução total de 98,38% em relação à norma da estrutura inicial. O gráfico de resposta em frequência pode ser visto na Figura 28.

Já a configuração final da viga pode ser vista na Figura 29. A Tabela 13 mostra a largura final da base da viga para cada elemento:

Tabela 13: Parâmetros otimizados da viga pela abordagem Passiva Estrutural – viga de 20 elementos finitos

Elemento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Largura inicial (mm)	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35
Largura final (mm)	44,9	45,0	44,9	45,0	44,8	44,9	44,9	39,6	37,1	39,1

Elemento	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Largura inicial (mm)	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35
Largura final (mm)	43,9	38,0	44,9	39,5	42,9	38,0	42,1	38,4	34,0	37,2

Por fim, as Figuras 30 e 31, mostram respectivamente os gráficos de simulação da viga e dos esforços de controle necessários para a atenuação das vibrações, quando aplicado sinal *chirp* como distúrbio de entrada. Mais uma vez percebe-se que houve uma redução suave na amplitude de vibração da estrutura quando otimizada em relação à planta original, ainda que a diminuição do esforço de controle necessário não tenha sido significativa.

6.4.3. Resultados do Modelo Ativo Serial

Com um tempo total de 232,13 minutos de execução, o algoritmo *ga* apresentou os resultados numéricos vistos na Tabela 14:

Tabela 14: Resultados da Abordagem Ativa Serial – viga de 20 elementos finitos

Planta	Norma \mathcal{H}_∞
Estrutura sem controle original \mathbf{P}	0,647290
Malha Fechada Original \mathbf{T}	0,012459
Estrutura sem controle otimizada \mathbf{P}_{otima}	0,483200
Malha Fechada Otimizada \mathbf{T}_{otima}	0,010807

O controlador final obtido no processo de otimização pode ser visto na Tabela 20. Sua função de transferência foi verificada e confirmada como sendo estritamente própria e estável.

Nota-se que houve uma redução de 25,35% entre as normas \mathcal{H}_∞ da planta da estrutura original e a otimizada pelo AG. O resultado de malha fechada final obtido com um controlador

calculado sobre a planta otimizada apresentou uma redução de 98,33% em relação à norma original da estrutura. A redução da Norma \mathcal{H}_∞ da malha fechada otimizada em relação à malha fechada original de 13,26% foi um pouco maior do que o resultado obtido para a viga de 8 elementos, de 9,63%. O gráfico de resposta em frequência desta abordagem pode ser visto na Figura 32.

Já a configuração final da viga pode ser vista na Figura 33. A Tabela 15 mostra a largura final da base da viga para cada elemento.

Tabela 15: Parâmetros otimizados da viga pela abordagem Ativa Serial – viga de 20 elementos finitos

Elemento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Largura inicial (mm)	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35
Largura final (mm)	45,0	44,9	45,0	45,0	45,0	45,0	44,6	44,9	44,3	44,9
Elemento	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Largura inicial (mm)	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35
Largura final (mm)	42,4	40,3	43,0	36,1	34,7	37,7	30,1	30,6	30,0	30,1

Por fim, as Figuras 34 e 35, mostram respectivamente os gráficos de simulação da viga e dos esforços de controle necessários para a atenuação das vibrações, quando aplicado sinal *chirp* como distúrbio de entrada. Percebe-se que houve uma discreta redução na amplitude de vibração da estrutura quando otimizada em relação à planta original. Ainda assim, a diminuição do esforço de controle necessário novamente não foi significativa

6.4.4. Resultados do Modelo Simultâneo

Com um tempo total de 559,12 minutos de execução, o algoritmo *ga* apresentou os resultados numéricos vistos na Tabela 16.

Tabela 16: Resultados da Abordagem Simultânea – viga de 20 elementos finitos

Planta	Norma \mathcal{H}_{∞}
Estrutura sem controle original \mathbf{P}	0,6472900
Malha Fechada Original \mathbf{T}	0,0124620
Estrutura sem controle otimizada \mathbf{P}_{otima}	0,5806100
Malha Fechada Otimizada \mathbf{T}_{otima}	0,0016173

O controlador final obtido no processo de otimização pode ser visto na Tabela 21. Sua função de transferência foi verificada e confirmada como sendo estritamente própria e estável.

Percebe-se que houve uma redução de apenas 10,30% entre as normas \mathcal{H}_{∞} da planta da estrutura original e a otimizada pelo AG. Já o resultado de malha fechada final obtido com um controlador calculado sobre a planta otimizada apresentou uma redução de 99,75% em relação à norma original. O gráfico de resposta em frequência pode ser visto na Figura 36.

Já a configuração final da viga pode ser vista na Figura 37. A Tabela 17 mostra a largura final da base da viga para cada elemento:

Tabela 17: Parâmetros otimizados da viga pela abordagem Simultânea – viga de 20 elementos finitos

Elemento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Largura inicial (mm)	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35
Largura final (mm)	39,26	38,75	38,58	37,65	40,30	36,76	38,26	37,97	39,30	38,55
Elemento	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Largura inicial (mm)	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35
Largura final (mm)	37,61	38,47	37,01	38,80	37,84	39,76	38,18	36,25	38,33	38,73

Por fim, as Figuras 38 e 39, mostram respectivamente os gráficos de simulação da viga e dos esforços de controle necessários para a atenuação das vibrações, quando aplicado sinal *chirp* como distúrbio de entrada. Percebe-se que houve uma redução bem mais significativa na amplitude de vibração da estrutura quando otimizada em relação à planta original do que os

métodos anteriores, porém, os esforços de controle necessários tiveram um aumento significativo.

6.4.5. Comparativo entre os resultados das diferentes abordagens

Partindo das mesmas considerações da seção 6.3.5, a simulação da viga dividida em 20 elementos finitos comprovou os resultados obtidos no caso de teste anterior, composto de 8 elementos. O comportamento dos algoritmos em cada método manteve-se o mesmo em termos de tempo de execução, redução de norma, esforço de controle e formato de viga. Os gráficos das Figuras 40 e 41 mostram as curvas de resposta em frequência otimizadas e as simulações feitas com a aplicação do distúrbio de entrada de cada método, em detrimento à planta da estrutura original não otimizada. Da mesma forma, a Figura 42 mostra a comparação dos formatos finais de viga obtidos, mais uma vez obtidos por interpolação para melhor visualização dos resultados.

Novamente, a abordagem simultânea foi a que obteve os melhores resultados em termos de redução de norma \mathcal{H}_∞ da malha fechada otimizada. Da mesma forma, a redução da norma \mathcal{H}_∞ da planta da estrutura otimizada teve uma redução muito pequena em relação à planta original, de apenas 10,30%. A Tabela 18 mostra alguns dados comparativos de forma resumida das três abordagens:

Tabela 18: Comparativo entre abordagens estudadas – viga de 20 elementos finitos

	Passiva Estrutural	Ativa Serial	Simultânea
Tempo de execução do algoritmo (min)	30,47	232,13	559,11
Redução da Norma \mathcal{H}_∞ de P_{otima} em relação à P	23,27%	25,35%	10,30%
Redução da Norma \mathcal{H}_∞ de T_{otima} em relação à T	15,93%	13,26%	87,02%
Redução da Norma \mathcal{H}_∞ de T_{otima} em relação à P	98,38%	98,33%	99,75%
Esforço máximo de controle de T_{otima} (N.mm)	0,002187	0,002252	0,065965
Posição vertical máxima da extremidade da viga submetida ao distúrbio em T_{otima} (mm)	0,00050	0,00055	0,00052

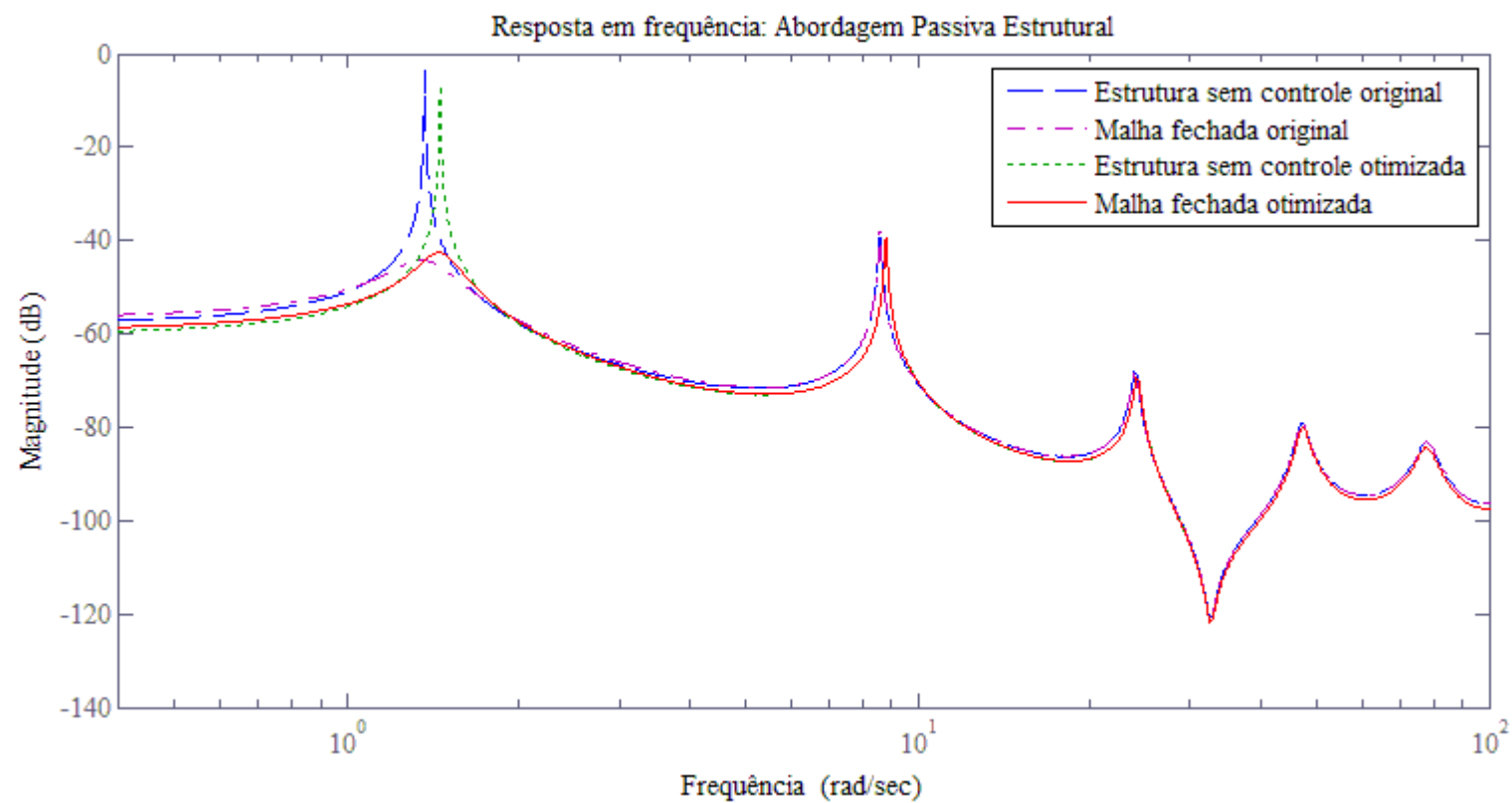


Figura 28: Passiva Estrutural: curvas de resposta em frequência para viga de 20 elementos finitos

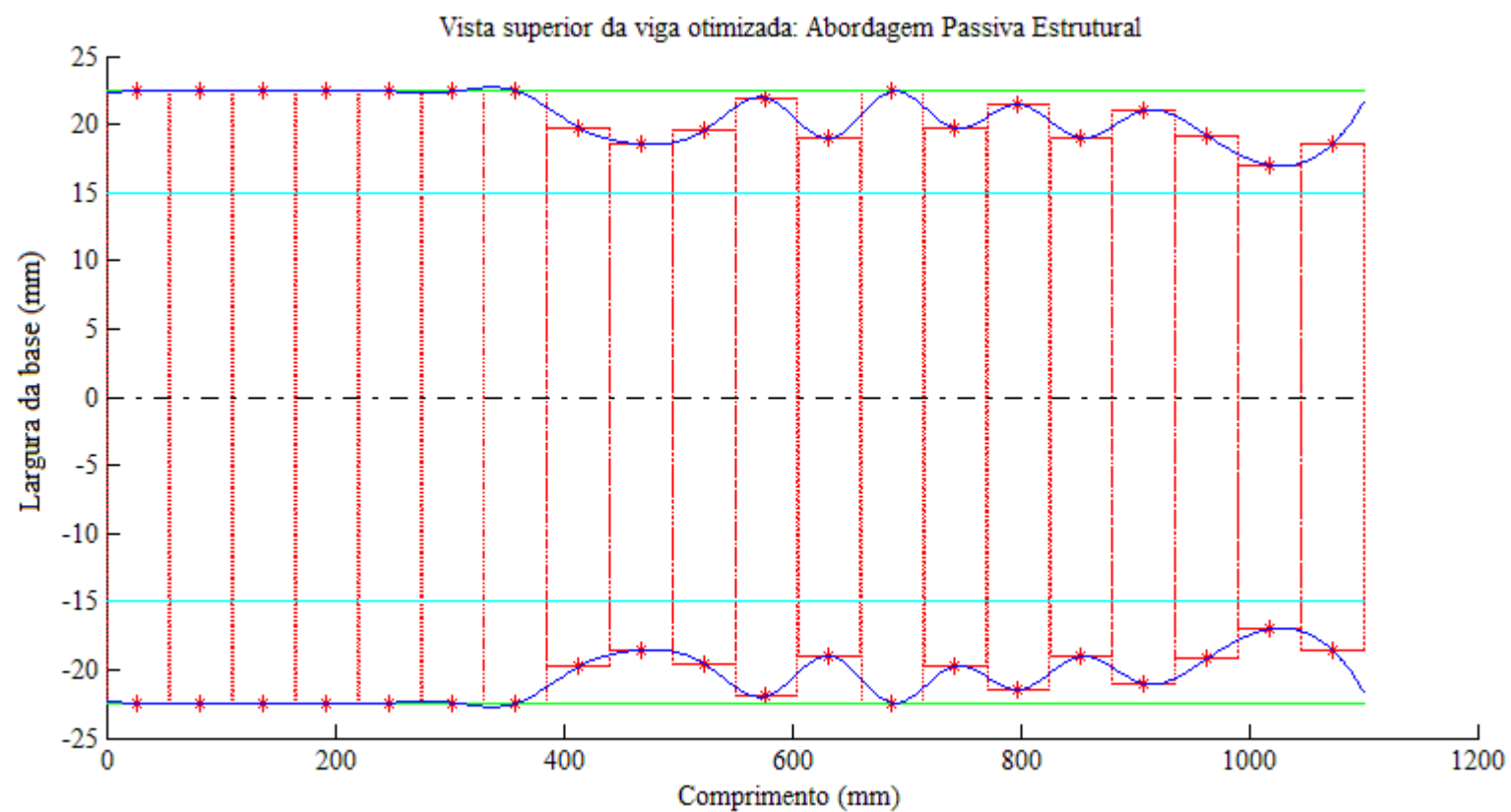


Figura 29: Passiva Estrutural: vista superior da viga de 20 elementos finitos otimizada

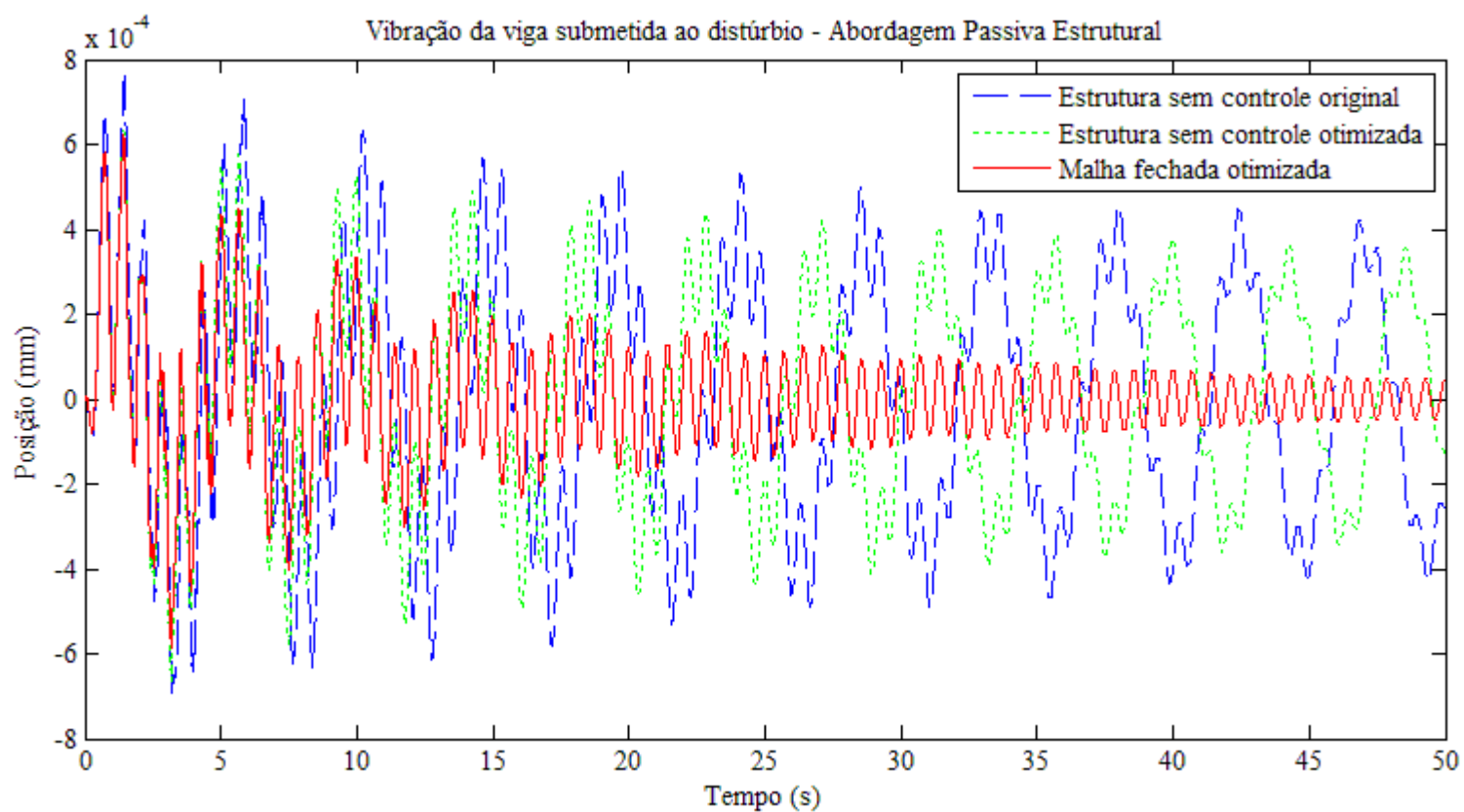


Figura 30: Passiva Estrutural: simulação com sinal chirp como distúrbio de entrada para viga de 20 elementos finitos

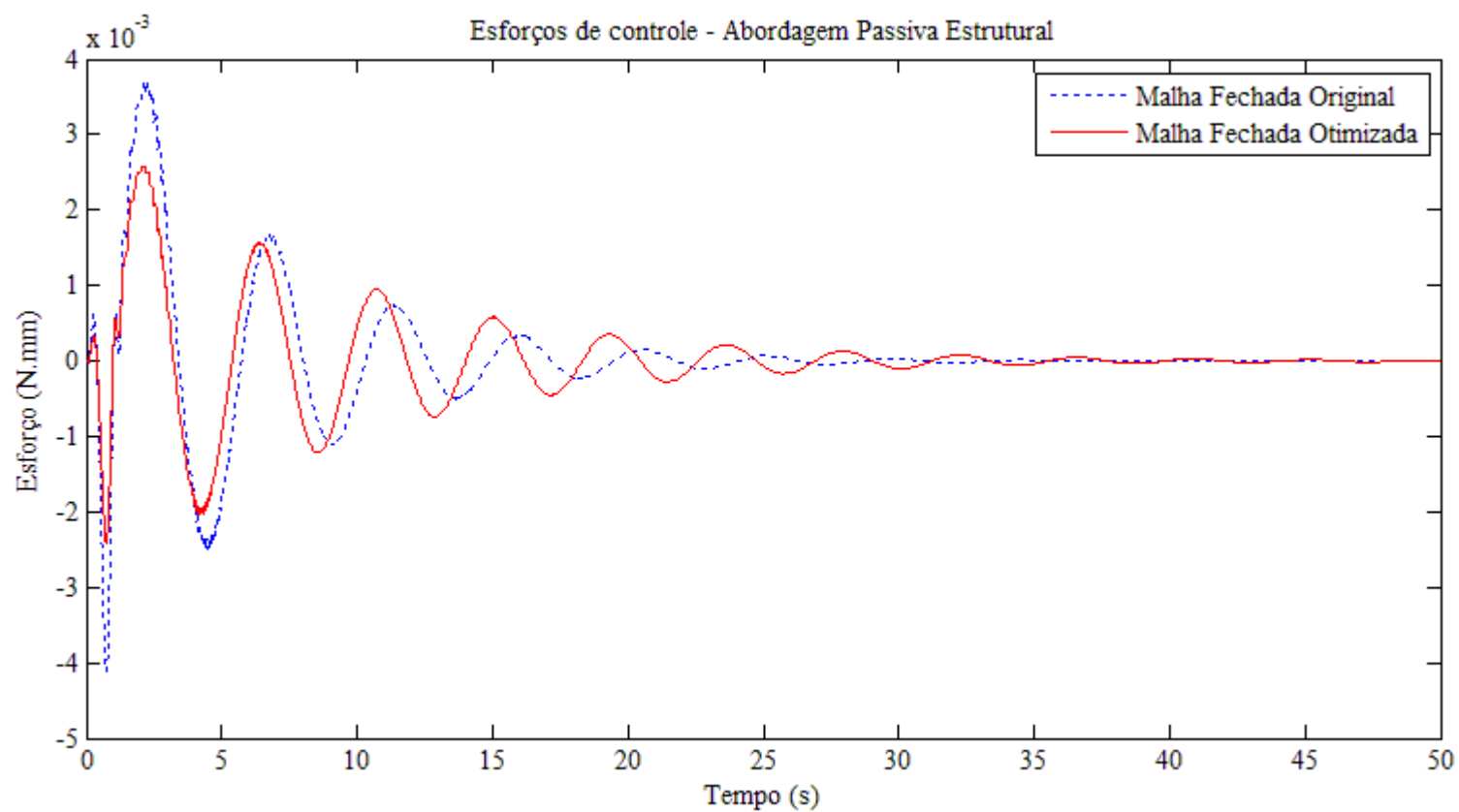


Figura 31: Passiva Estrutural: esforços de controle necessários para viga de 20 elementos finitos

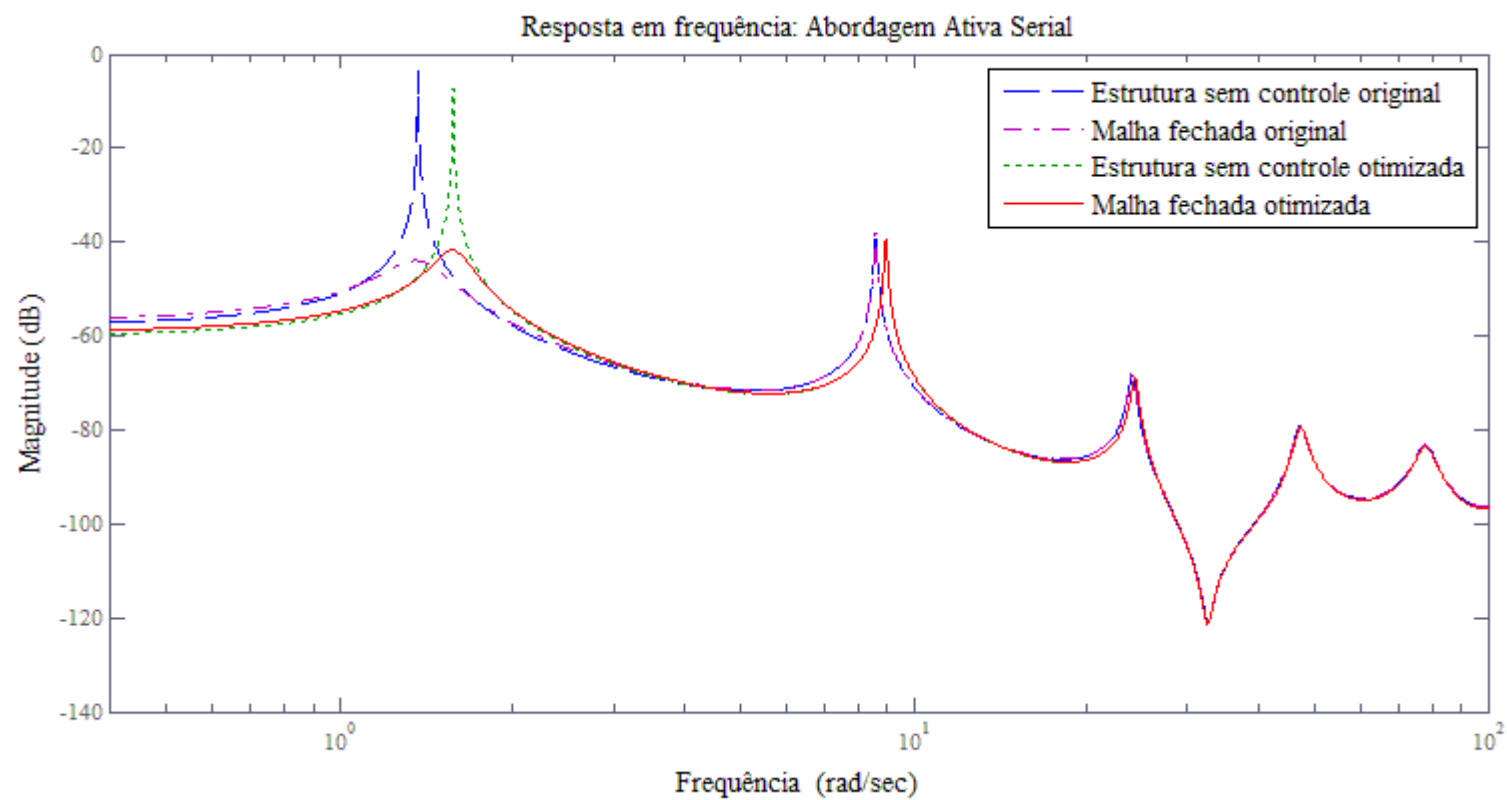


Figura 32: Ativa Serial: curvas de resposta em frequência para viga de 20 elementos finitos

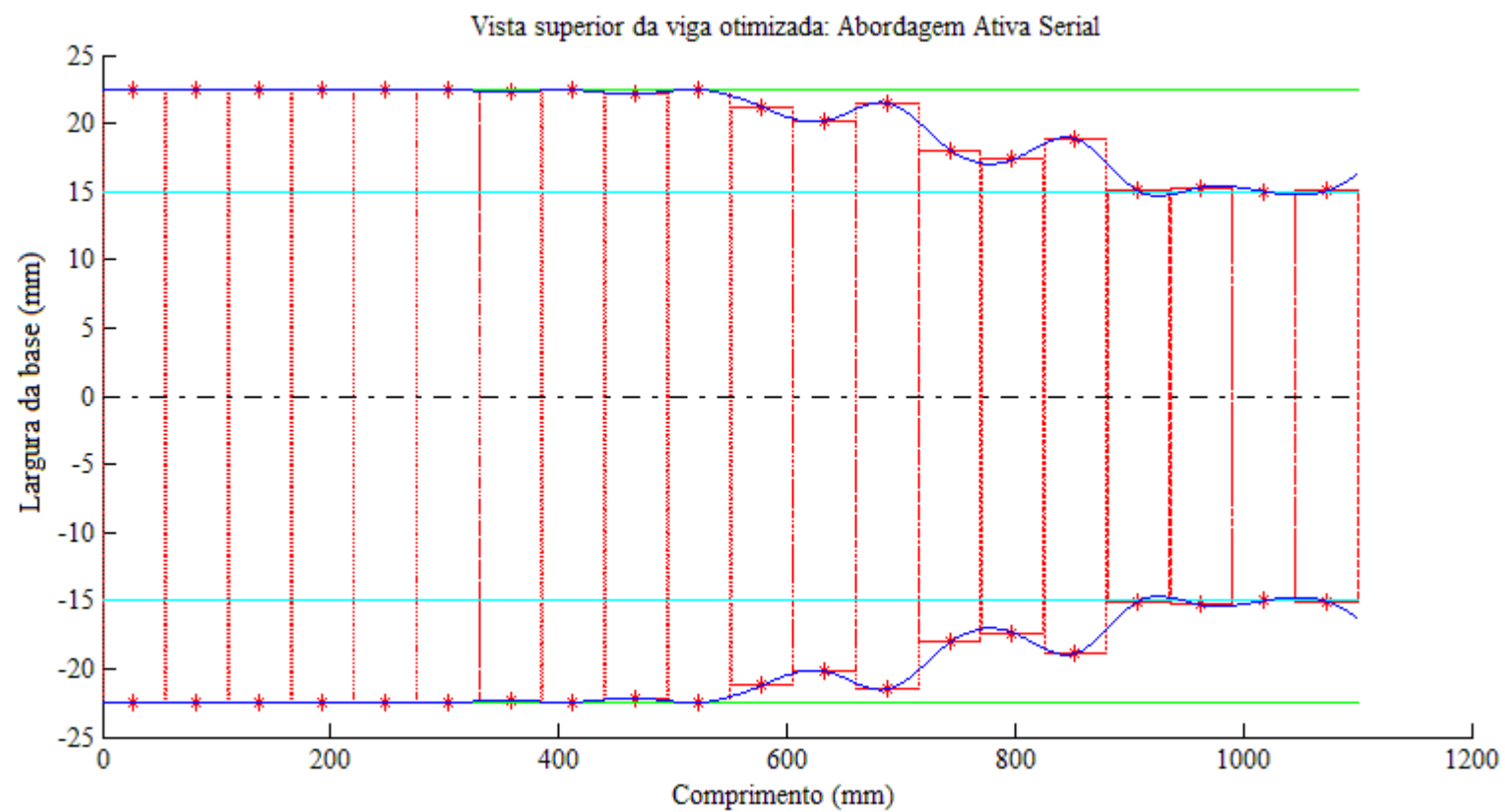


Figura 33: Ativa Serial: vista superior da viga de 20 elementos finitos otimizada

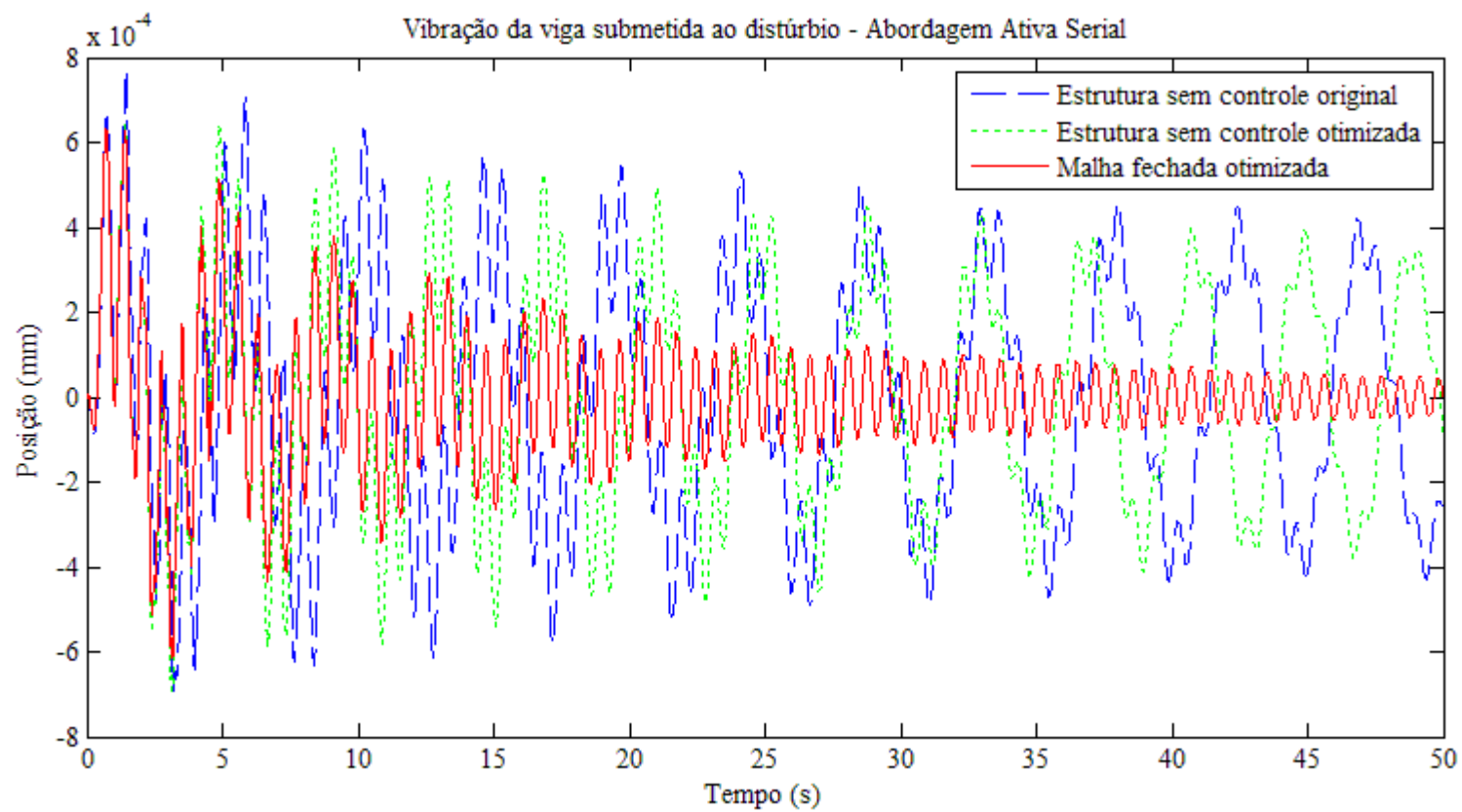


Figura 34: Ativa Serial: simulação com sinal chirp como distúrbio de entrada para viga de 20 elementos finitos

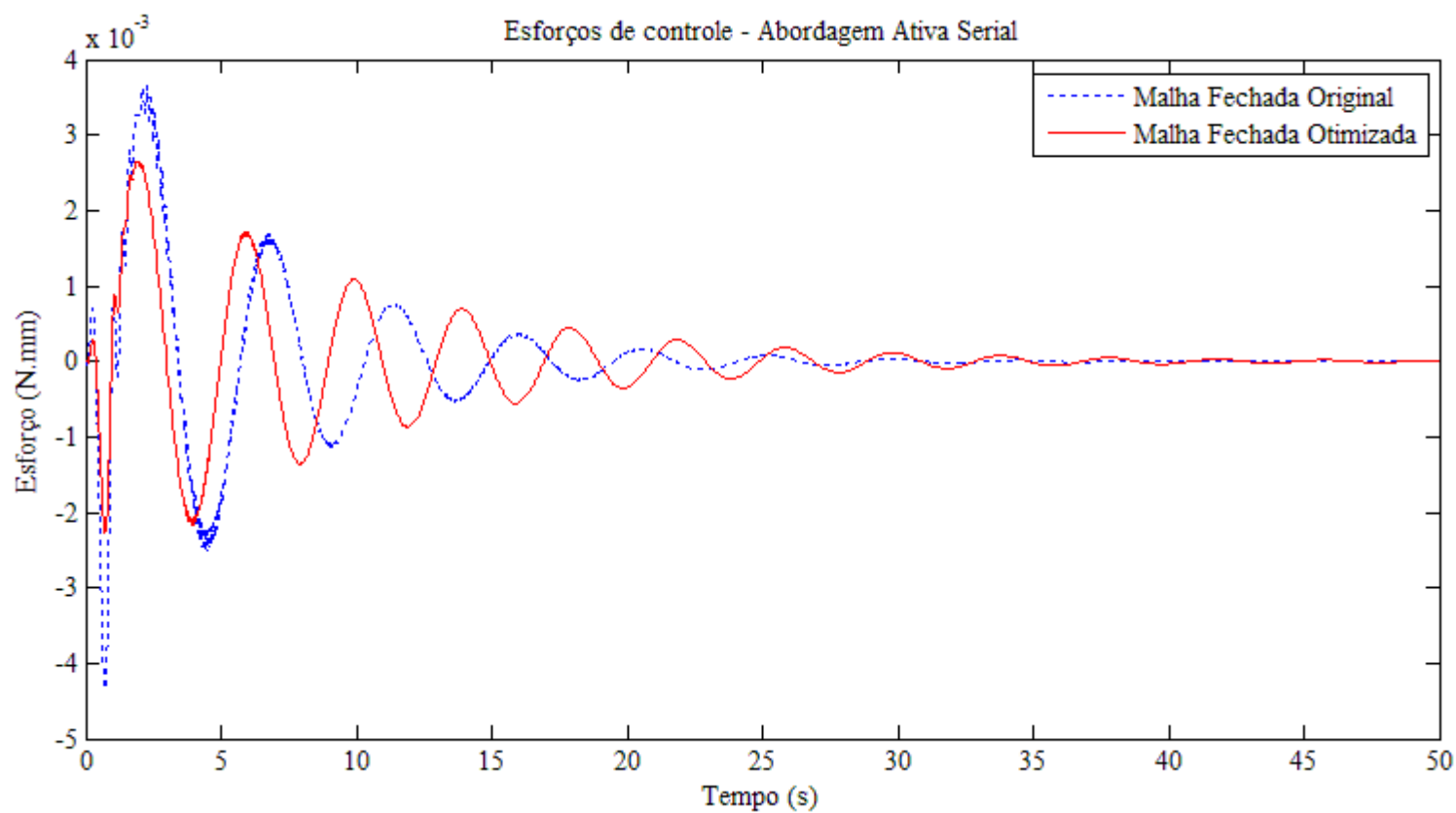


Figura 35: Ativa Serial: esforços de controle necessários para viga de 20 elementos finitos

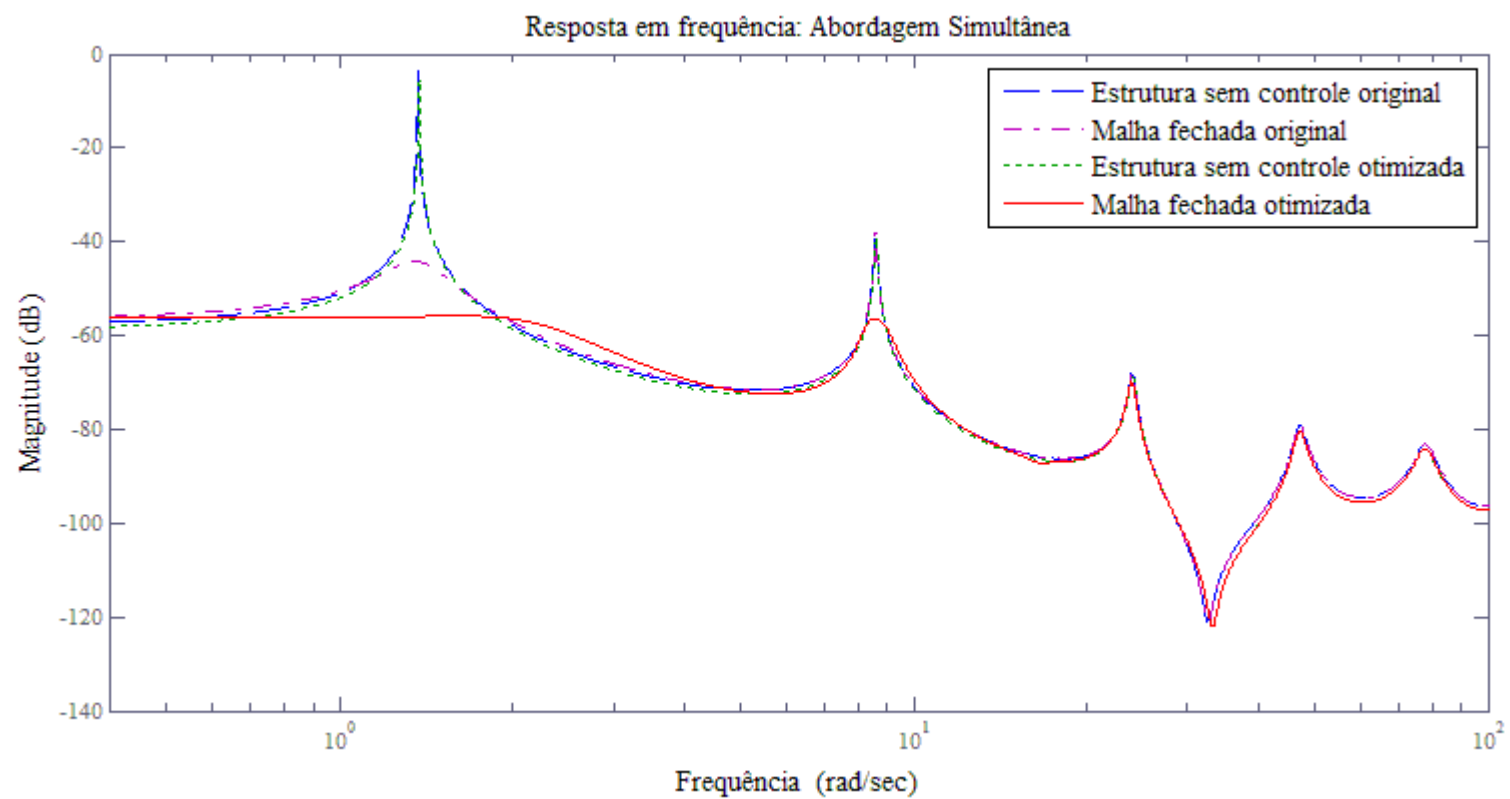


Figura 36: Simultânea: curvas de resposta em frequência para viga de 20 elementos finitos

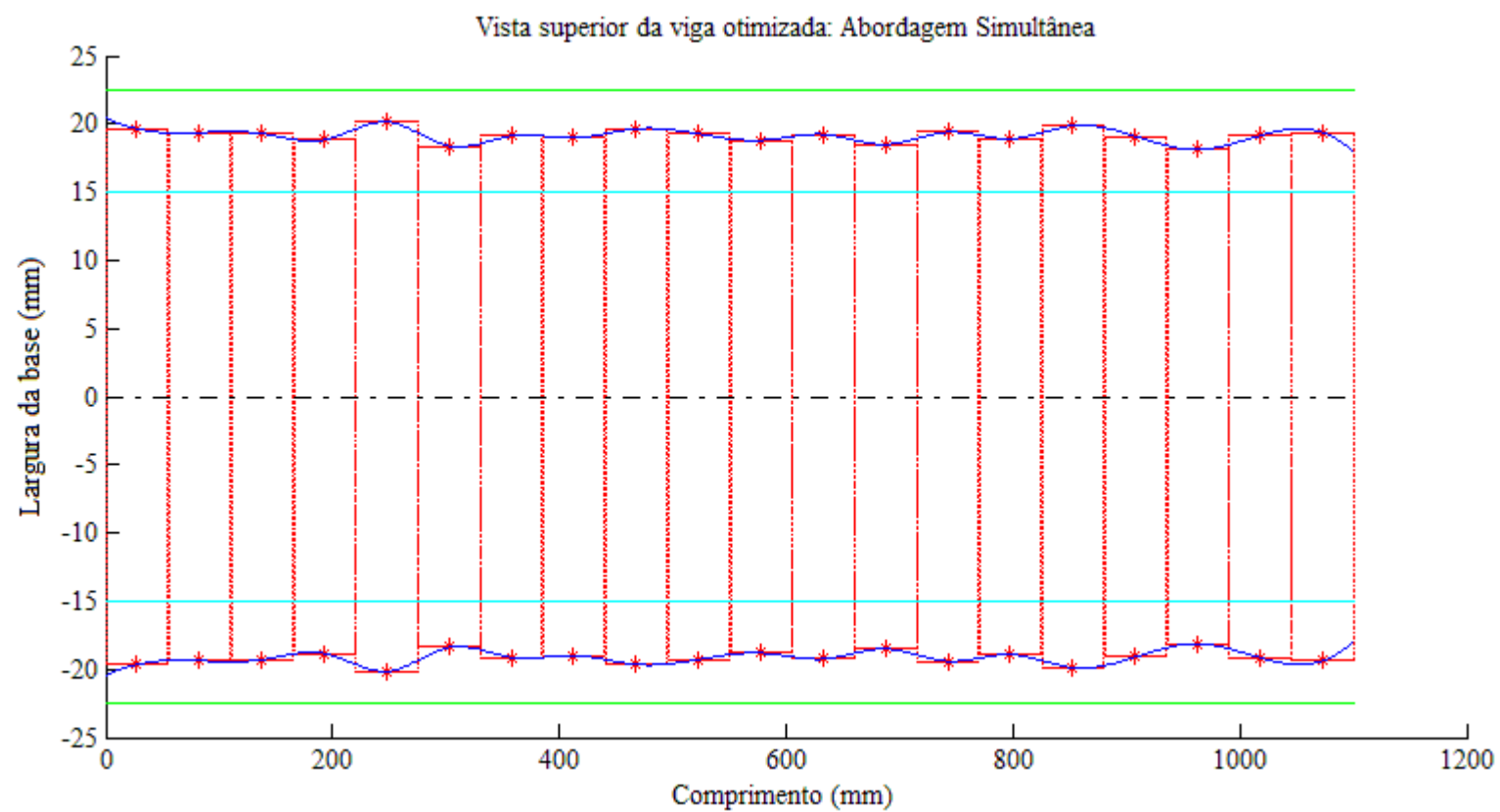


Figura 37: Simultânea: vista superior da viga de 20 elementos finitos otimizada

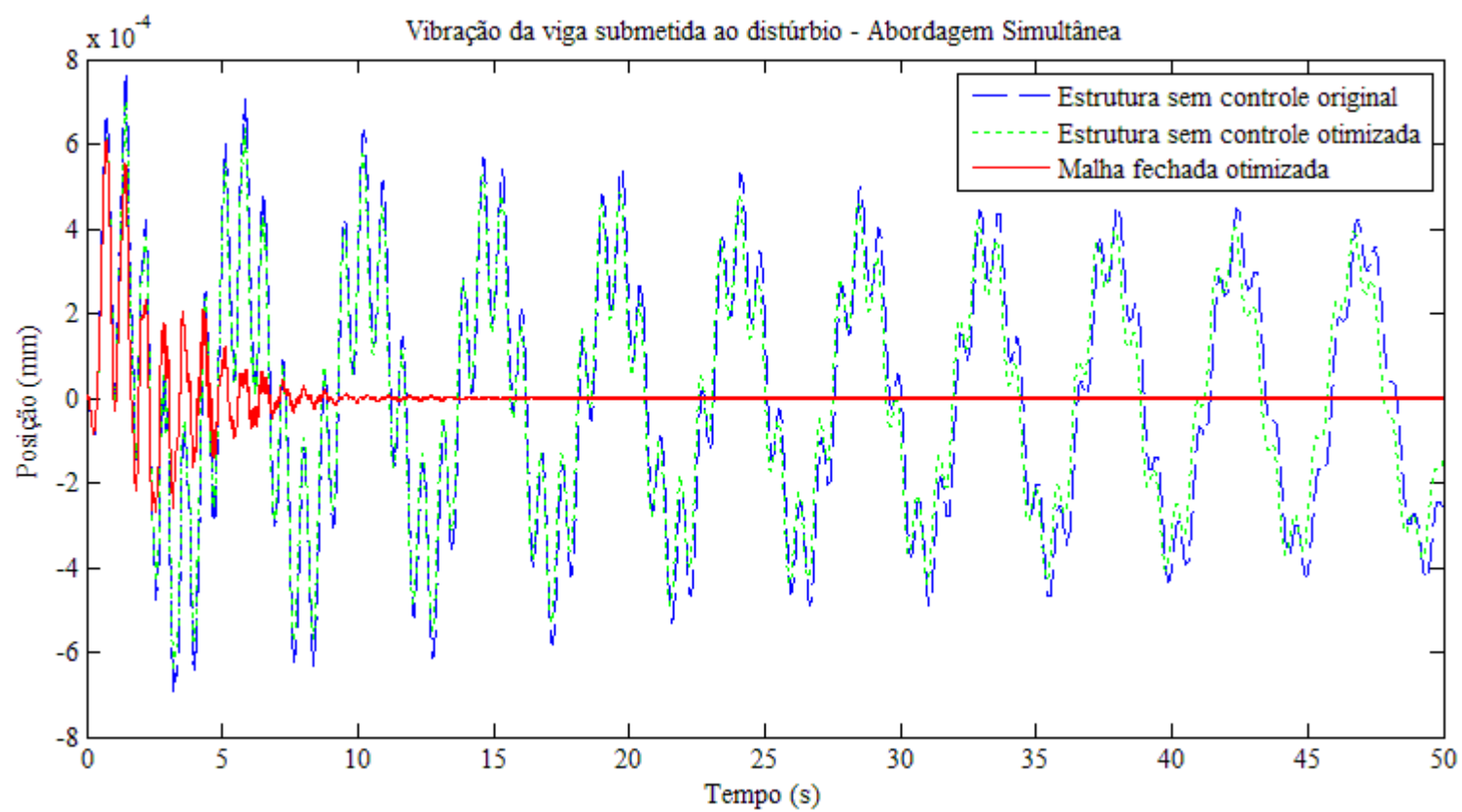


Figura 38: Simultânea: simulação com sinal *chirp* como distúrbio de entrada para viga de 20 elementos finitos

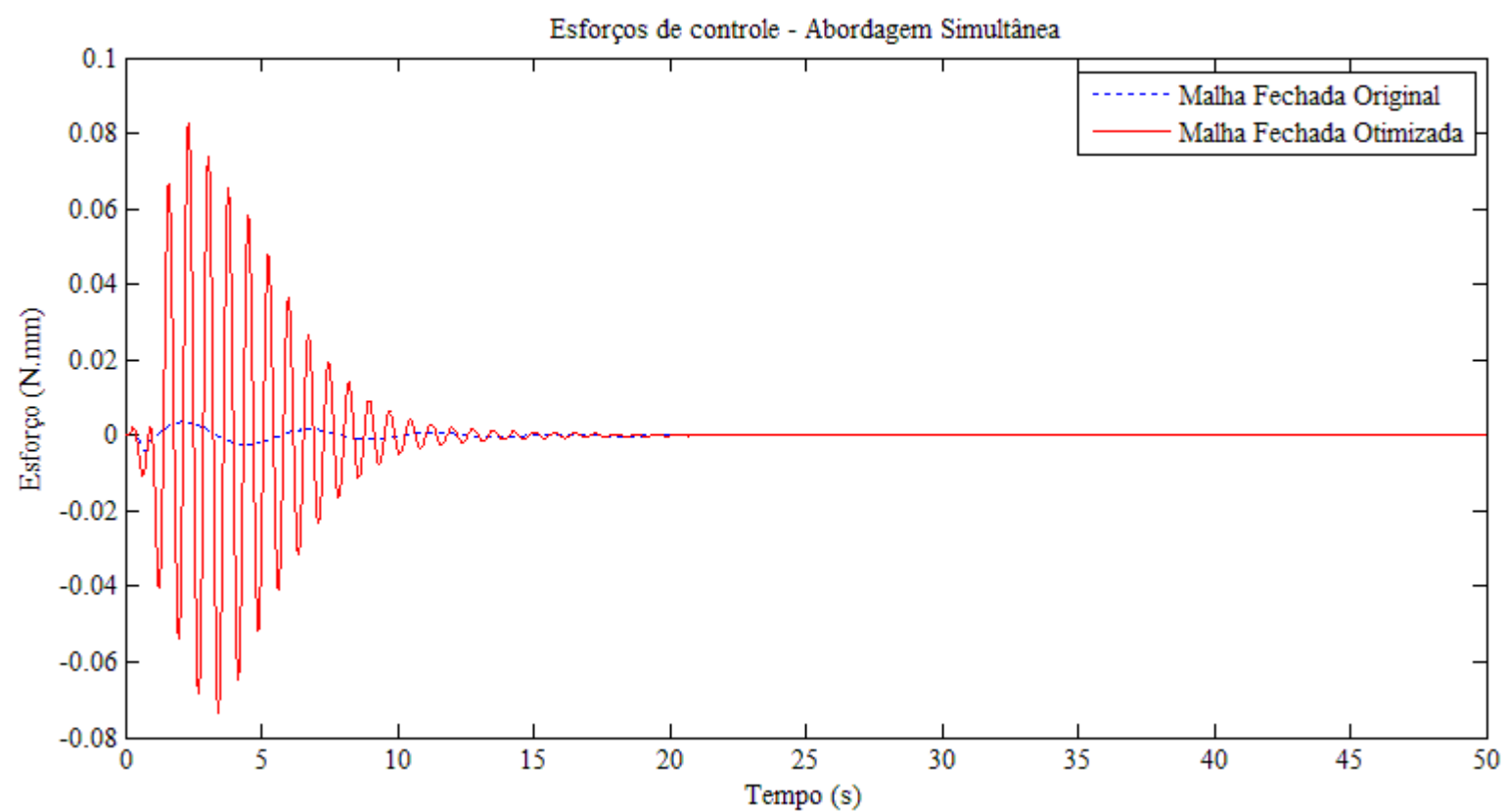


Figura 39: Simultânea: esforços de controle necessários para viga de 20 elementos finitos

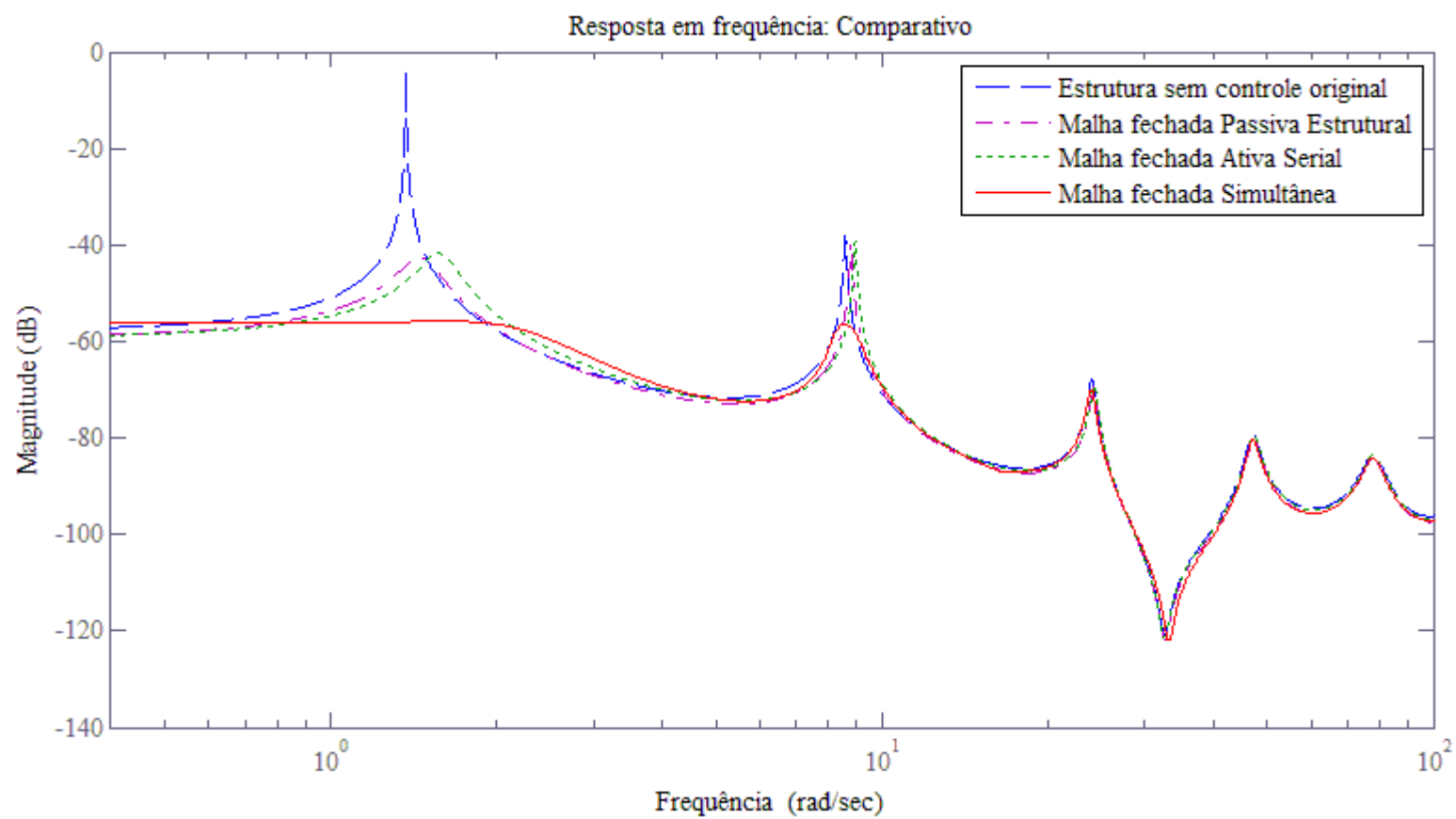


Figura 40: Comparativo entre abordagens: curvas de resposta em frequência para viga de 20 elementos finitos

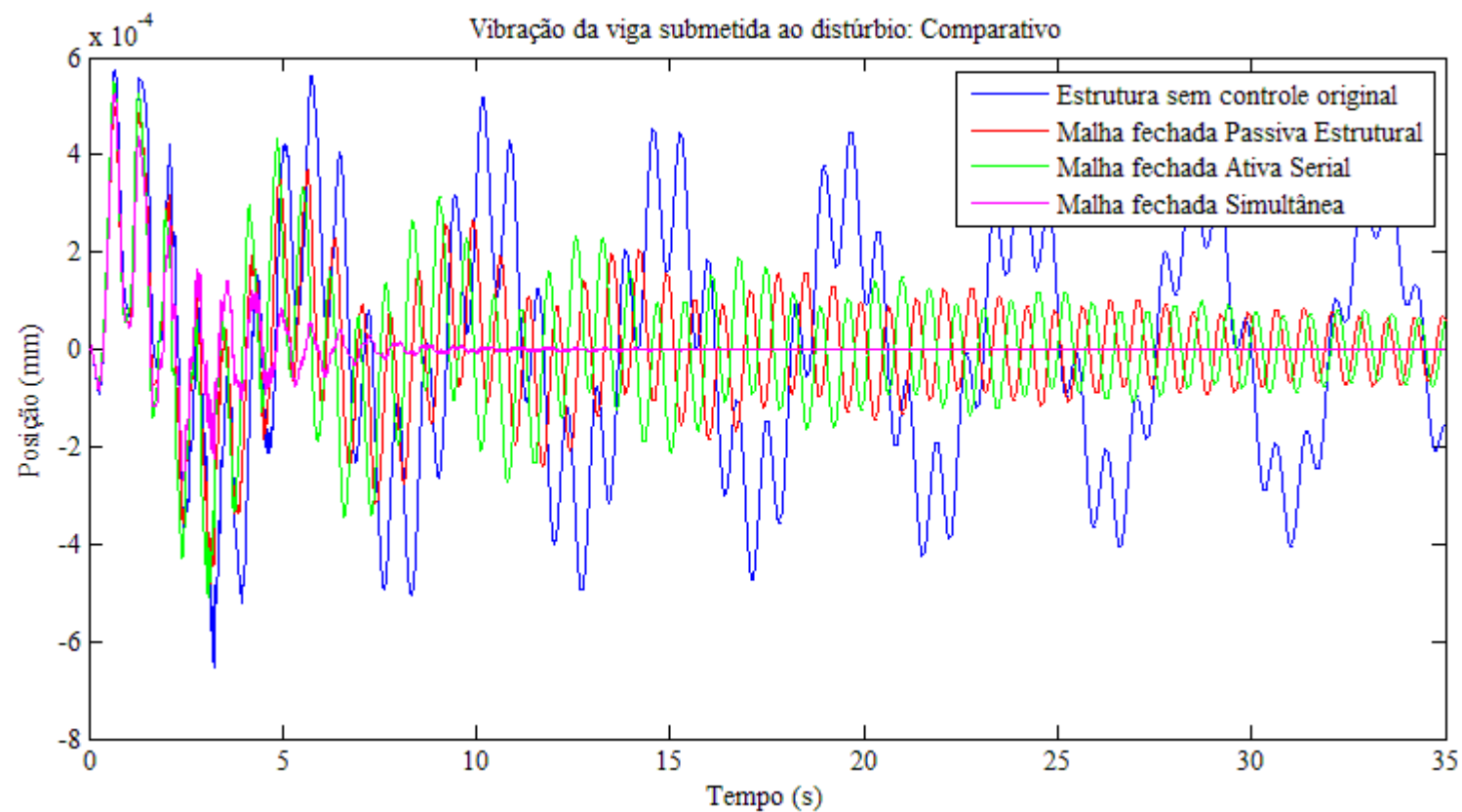


Figura 41: Comparativo entre abordagens: simulações com sinal *chirp* como entrada para viga de 20 elementos finitos

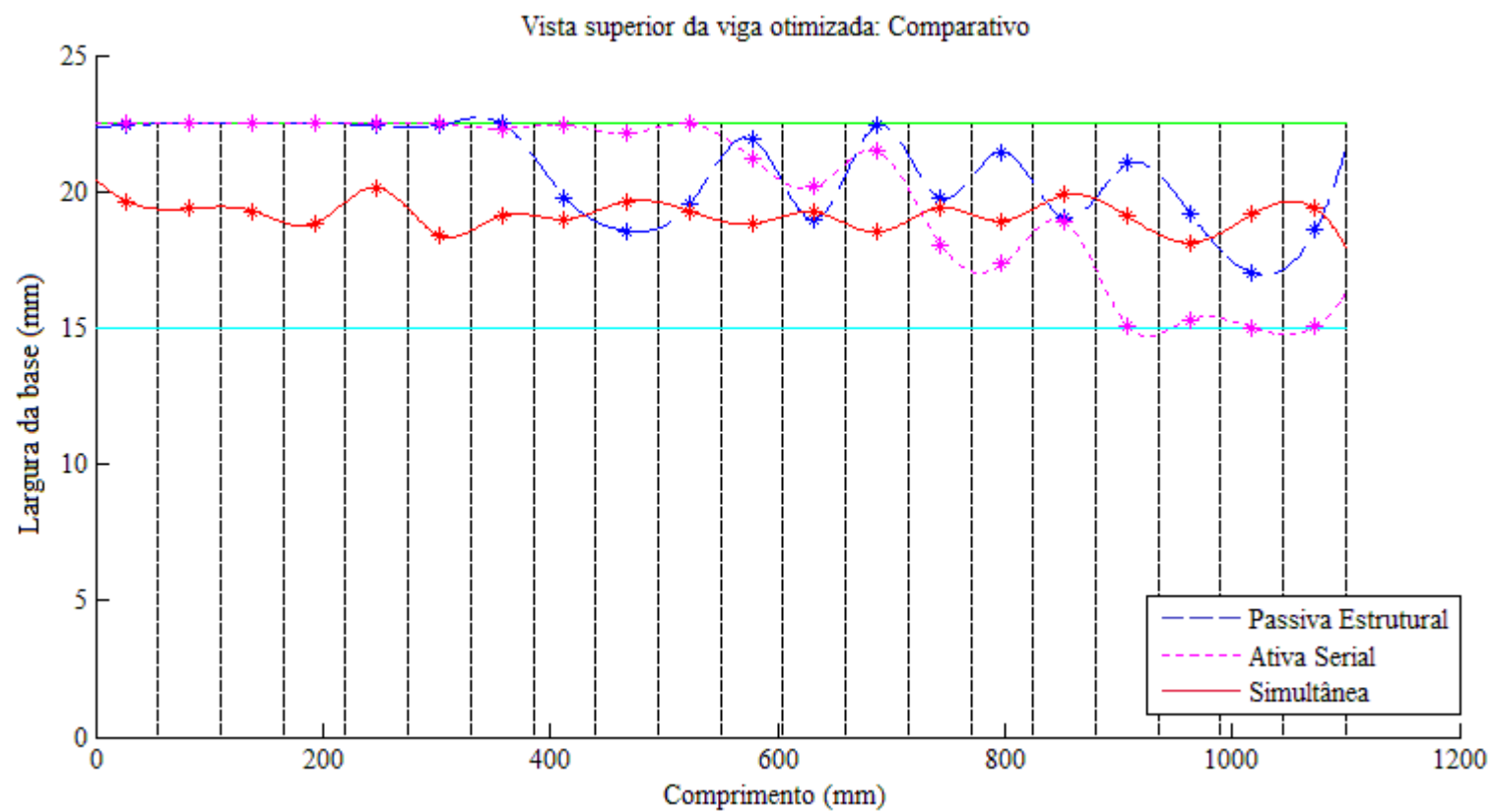


Figura 42: Comparativo entre abordagens: formatos finais de viga de 20 elementos finitos

6.5. Análise dos resultados

De acordo com os gráficos resultantes e os dados levantados em cada simulação apresentada, seja da viga dividida em 8 ou 20 elementos, percebe-se que em termos de formato de viga resultante as abordagens Passiva Estrutural e Ativa Serial possuem resultados similares: os elementos iniciais (mais próximos do engaste) tiveram a largura de base próximas do limite lateral máximo especificado como restrição linear, enquanto que os elementos medianos e mais próximos da extremidade livre tiveram maior variação em sua largura final. Da mesma forma, possuem curvas semelhantes em termos de FRF e esforço de controle, tendo projetado controladores que, embora demandem menor esforço para a atenuação das vibrações, precisam de mais tempo para a efetiva redução das mesmas.

A abordagem simultânea, por sua vez, obteve resultados diferenciados: o formato final da viga é mais uniforme do que nas demais abordagens uma vez que a variabilidade das larguras resultantes em torno da média é menor. Diferenciada também foi a redução da Norma \mathcal{H}_∞ da planta estrutural otimizada, bem menor que nas demais abordagens, e da malha fechada final, cuja redução foi significativamente maior. Isto pode ser explicado pelo melhor acoplamento das dinâmicas da estrutura e do controlador mencionado como uma das características do método simultâneo, resultando em uma estrutura com norma menos otimizada, mas em um sistema final de estrutura e controlador com norma bem inferior aos sistemas resultantes dos demais métodos.

O projeto simultâneo também apresentou um menor intervalo de tempo para que as vibrações tivessem uma atenuação efetiva. Porém, a maior rapidez foi obtida em detrimento de um esforço de controle muito maior, como observado nas Figura 23 e Figura 39. Ainda que neste caso se necessite de um atuador mais potente para o controle da estrutura, este aumento no esforço e consequente redução no tempo necessário para uma redução efetiva pode ser particularmente útil em sistemas onde vibrações são potencialmente danosas ao desempenho do mesmo e necessitam ser atenuadas mais rapidamente.

Em termos de amplitude de vibração, os três métodos obtiveram resultados muito similares em termos de posição vertical máxima da extremidade da viga quando a mesma foi submetida ao distúrbio *chirp* especificado na seção 6.2 do trabalho.

Por fim, o tempo de simulação dos métodos tradicionais foram consideravelmente

menores do que o tempo do método simultâneo. Isto pode ser explicado pelo número de variáveis de otimização deste último ser muito superior dada a necessidade de otimizar via AG não somente a largura da base da viga como também as variáveis do controlador.

7. CONCLUSÕES

Considerando o processo de otimização simultânea proposto via Algoritmos Genéticos, várias conclusões podem ser obtidas. Primeiramente, é importante ressaltar a dificuldade em configurar os parâmetros de execução de um AG. Ainda que alguns trabalhos apresentem suas conclusões, cada problema tem suas próprias restrições e deve ser direcionado de forma correta no que diz respeito à escolha de operadores e elementos a serem incluídos no processo. Este direcionamento não é feito de outra forma senão através de diversos testes práticos e observações que levem à solução mais próxima possível dos propósitos desejados em um tempo hábil determinado. Portanto, é importante lembrar que ainda que as curvas obtidas sejam uma boa solução em termos de custo/benefício computacional, resultados melhores poderiam ter sido obtidos com conjuntos de parâmetros e com critérios de parada menos flexíveis do que os escolhidos.

Por outro lado, ao longo de sua execução o AG ajusta sucessivamente uma solução inicial de acordo com os critérios impostos pelos seus parâmetros. De acordo com o nível de adequação da solução encontrada em cada iteração algorítmica, ela perde suas características que a afastam do objetivo do processo de otimização e tem suas melhores características continuadas, cumprindo os objetivos de evolução populacional do AG. No mais, é possível configurar os diferentes parâmetros desta técnica de forma que as soluções possam ser direcionadas às necessidades de projeto. Esta característica torna o AG mais flexível do que abordagens mais clássicas, como a Programação Sequencial Quadrática utilizada em (DE PAIVA, 2009), permitindo que uma mesma implementação possa resultar em soluções diferentes apenas com ajustes em seus parâmetros de execução.

Como base para o processo de otimização simultânea usado neste trabalho, os AGs mostram bons resultados em tempos de execução aceitáveis se configurados com elementos e operadores que apresentem certa factibilidade ao longo da evolução das soluções. Ainda que variabilidade populacional seja uma das demandas da técnica, conclui-se que uma variabilidade muito além do espaço de soluções pode tornar esta opção custosa em termos de tempo e esforço computacional dentro dos objetivos de projeto de estrutura e controle levantados neste trabalho.

A conclusão obtida quanto ao uso de Algoritmos Genéticos, então, é que a técnica é de

fácil entendimento teórico, porém, apresenta alguns aspectos de difícil constatação na prática: é notável que nos processos biológicos o cruzamento de material genético leva a características visíveis que permitem uma percepção razoavelmente clara a respeito da hereditariedade envolvida; computacionalmente, no entanto, a tradução de informações em resultados por vezes de difícil visualização, mas eficientes (exemplo da antena apresentada no capítulo 1), torna este método de otimização um tanto quanto complexo no que concerne à escolha dos elementos envolvidos.

Quanto ao projeto simultâneo de estrutura e controlador no escopo dos AGs, a redução da norma \mathcal{H}_∞ do sistema foi de fato verificada, ainda que o grande número de parâmetros a serem otimizados o tenha tornado mais custoso em termos de tempo e tenha exigido maiores esforços de controle que as demais abordagens testadas. Analisando os resultados comparativos mostrados, comprova-se a teoria de que a simultaneidade de otimização aumenta a cooperação entre estrutura e controle: a planta da estrutura otimizada por si só possui norma maior que a das demais abordagens, enquanto que juntamente com o controlador otimizado, possui o melhor resultado, sugerindo que a obtenção de bons resultados está atrelada ao seu uso conjunto. Este comportamento obtido nas simulações vai ao encontro das observações feitas por diversos autores citados ao longo do trabalho, confirmando que o acoplamento das dinâmicas da estrutura e do controlador é de fato algo benéfico para o sistema como um todo.

Da mesma forma, comparando-se os gráficos das figuras 26 e 42 percebe-se claramente que a otimização concomitante de estrutura e controlador resultou em uma viga de forma bem diferenciada daquelas geradas via modelo Passivo Estrutural e Ativo Serial, comprovando que a maior variabilidade de indivíduos (neste caso, introduzida pelo aumento no número de variáveis de otimização) garante uma busca mais ampla pelo espaço de soluções do problema. A homogeneidade da viga final obtida também pode ser vista como uma vantagem por melhor distribuir a carga imposta por seu próprio peso e diminuir assim as diferenças estruturais ao longo da mesma. Ainda assim, é importante mencionar que os formatos ótimos obtidos podem ser inviáveis na prática devido à complexidade e ao custo de produção associados ao processo de manufatura de vigas com as variações geométricas observadas nos resultados.

No entanto, o projeto simultâneo demonstrou necessidade de esforços de controle significativamente maiores do que as demais abordagens. Ainda que este aumento de esforços seja esperado, dependendo do contexto de aplicação da técnica, isto pode ser um impedimento

devido à necessidade de redução de custos com atuadores ou mesmo, de peso, uma vez que atuadores mais potentes normalmente são fisicamente maiores. Por outro lado, este comportamento pode ser insignificante perante aos benefícios que a abordagem traz devido à maior cooperação entre as plantas da estrutura e do controlador, por exemplo, a redução da amplitude de vibração de maneira mais efetiva que as demais técnicas em um intervalo de tempo menor. Portanto, em projetos onde não há restrições de atuadores a serem implementados, o maior esforço de controle exigido pela abordagem deixa de ser um impedimento prático.

Outro ponto negativo do projeto simultâneo pode ser o tempo necessário para a obtenção dos parâmetros otimizados de estrutura e controlador. A abordagem simultânea foi mais custosa em termos de tempo nas simulações computacionais devido não somente aos parâmetros de configuração do Algoritmo Genético, mas principalmente devido ao maior número de variáveis envolvidas. Porém, também neste ponto há alternativas computacionais para que o problema de tempo possa ser, se não completamente solucionado, pelo menos amenizado. Uma possibilidade seria, por exemplo, paralelizar a solução de Algoritmo Genético utilizada.

É possível então perceber através dos resultados obtidos que o projeto de estruturas controladas otimizadas simultaneamente via Algoritmos Genéticos não só é factível, como também pode ser vantajoso em diversos aspectos. A abordagem simultânea, relativamente recente, de fato se mostrou eficiente na busca por um resultado ótimo global do sistema devido ao seu conceito de acoplamento das dinâmicas da estrutura e do controlador no processo de otimização. Por sua vez, o uso do Algoritmo Genético também apresentou resultados bastante interessantes, comprovando ser uma técnica computacionalmente robusta quando aplicada no contexto de projetos de estruturas controladas. Conclui-se, portanto, que a combinação das técnicas foi eficiente e satisfaz o propósito de atenuação de vibrações em estruturas flexíveis proposto por este trabalho.

Feitas algumas observações pertinentes às técnicas e abordagens usadas, fica como sugestão para trabalhos futuros a inclusão de restrição para os esforços de controle a serem obtidos, ou ainda, a aplicação de técnicas de otimização multiobjetivo, que conseguem trabalhar sobre duas ou mais funções objetivo ao mesmo tempo permitindo assim que os esforços possam ser também otimizados. O próprio algoritmo genético poderia assim ser implementado para atender as necessidades do projeto simultâneo com múltiplas funções.

Também seria interessante a investigação de melhorias no algoritmo genético de modo

que o tempo de obtenção de resultado pudesse ser reduzido, ou mesmo, a investigação de métodos computacionais que possam atender ao projeto simultâneo de forma mais rápida.

APÊNDICE A - ESTABILIDADE DE LYAPUNOV

No final do século XIX, mais precisamente em 1892, Lyapunov estabeleceu um método para análise de estabilidade de um sistema baseado diretamente nas equações diferenciais que o compõem. Partindo do fato de que se a energia mecânica total de um sistema físico decresce até um mínimo local em um ponto de equilíbrio este ponto é assintoticamente estável, Lyapunov generalizou as considerações de energia para qualquer sistema que pudesse ser avaliado por funções escalares das variáveis de estado (MONTEIRO, 2006).

De maneira resumida, ele estabeleceu que uma equação do tipo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ é estável quando existe uma matriz \mathbf{A} que faça verdadeira duas assertivas:

- A candidata à Função de Lyapunov $V(\mathbf{x})$ deve ser definida positiva:

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} > 0 ; \quad (\text{A})$$

- Sua derivada $\dot{V}(\mathbf{x})$ deve ser negativa semi-definida:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \dot{\mathbf{x}} \leq 0 . \quad (\text{B})$$

Das Equações (A) e (B) tem-se então:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{A} < 0, \quad \text{com } \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \text{ e } \mathbf{Q} > 0 . \quad (\text{C})$$

Caso a condição necessária e suficiente de \mathbf{Q} ser positiva definida seja garantida, a matriz \mathbf{A} será estável. Se existir ainda uma matriz \mathbf{Q} simétrica positiva definida que faça com que a solução da Equação (C) seja única, a matriz \mathbf{A} então é definida como assintoticamente estável. Em qualquer outra situação de \mathbf{Q} , os autovalores de \mathbf{A} teriam partes reais positivas e o sistema seria, portanto, instável (MEIROVITCH, 1970).

APÊNDICE B - CONCEITOS COMPLEMENTARES

B.1 NORMA

Sendo V um espaço vetorial com produto interno, uma função é chamada de norma se para quaisquer \mathbf{v} e \mathbf{w} em V as seguintes propriedades forem verdadeiras (BOLDRINI, COSTA, *et al.*, 1986):

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}\| &\geq 0 \text{ e } \|\mathbf{v}\| = 0 \text{ se e somente se } \mathbf{v} = 0 \\ \|\alpha\mathbf{v}\| &= |\alpha|\|\mathbf{v}\| \\ \|\langle\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle\| &\leq \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| \\ \|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| &\leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\| .\end{aligned}\tag{D}$$

B.2 VALOR SINGULAR MÁXIMO

Sendo λ_{max} o maior autovalor de uma matriz \mathbf{M} qualquer e sabendo-se que autovalores satisfazem a condição

$$\mathbf{M}\mathbf{w} = \lambda \mathbf{w} ,\tag{E}$$

ou ainda,

$$\mathbf{w}^* \mathbf{M} \mathbf{w} = \lambda \mathbf{w}^* \mathbf{w} ,\tag{F}$$

o valor singular máximo de \mathbf{M} é dado então por:

$$\sigma_{max}(\mathbf{M}(s)) = \sqrt{\lambda_{max}(\mathbf{M}^*(j\omega) \mathbf{M}(j\omega))} .\tag{G}$$

B.3 COMPLEMENTO DE SCHUR

Segundo Strang (2005) dada uma matriz:

$$X = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} \quad (H)$$

onde $A = A^T$. Se $\det(A) \neq 0$ então o Complemento de Schur de X em relação a A é definido por:

$$CS = C - B^T A^{-1} B. \quad (I)$$

Este conceito permite que desigualdades que envolvam não linearidades possam ser convertidas em LMIs. Pode-se escrever então que

$$C > 0 \quad \text{e} \quad C - B^T A^{-1} B > 0, \quad (J)$$

é equivalente a

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} > 0. \quad (K)$$

B.4 TRANSFORMAÇÃO DE CONGRUÊNCIA

Para que duas matrizes simétricas A e B sejam congruentes, é necessária a existência de uma terceira matriz T não-singular que respeite a relação:

$$B = T^T A T. \quad (L)$$

Sendo congruentes, tem-se que $B > 0$ se e somente se $A > 0$.

B.5 NORMA \mathcal{L}_2

A norma \mathcal{L}_2 é definida como:

$$\|x(t)\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega)X(j\omega)d\omega} \quad (\text{M})$$

ou em função do tempo como

$$\|x(t)\|_2 = \sqrt{\int_0^{\infty} x^2(t)dt} . \quad (\text{N})$$

sendo definida como o valor RMS (*root mean square*) da soma dos quadrados das normas dos modos individuais.

B.6 NORMA DE HANKEL

A norma de Hankel de uma função de transferência $\mathbf{G}(s)$ estável é definida como sendo

$$\|\mathbf{G}(s)\|_H = \rho_1(\mathbf{G}(s)) , \quad (\text{O})$$

onde $\rho_1(\mathbf{G}(s))$ denota o maior valor singular de Hankel de $\mathbf{G}(s)$, ou seja, o estado de maior energia do sistema.

B.7 REALIZAÇÃO MÍNIMA BALANCEADA DE UM SISTEMA

Um sistema $\mathbf{G}(s)$ é dito uma realização mínima balanceada de um sistema na forma

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}\end{aligned} \quad \text{com } \mathbf{A}_{n \times n}, \mathbf{B}_{n \times r}, \mathbf{C}_{m \times n} \text{ e } \mathbf{D}_{m \times r} \quad (\text{P})$$

quando sua matriz \mathbf{A} possuir a menor dimensão possível e todos os seus estados não controláveis e não observáveis forem eliminados, garantindo então que:

- a matriz $\mathbf{M} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$ é controlável;
- a matriz $\mathbf{O} = [\mathbf{C} \quad \mathbf{CA} \quad \mathbf{CA}^2 \quad \dots \quad \mathbf{CA}^{n-1}]^T$ é observável.

Tabela 19: Controlador final obtido para a abordagem Passiva Estrutural – viga de 20 elementos finitos

-1,6E+00	-2,2E+01	-6,6E+00	4,8E+00	1,8E+00	3,4E+00	-9,7E+00	1,0E+01	-2,4E-01	3,3E+00	1,3E+00	-4,0E+00	1,8E+01	1,1E+01	1,0E+01	-1,5E+01	6,6E+00	-1,9E+01	1,4E+00	-1,9E+01	-3,4E+01	1,5E+01
3,3E+01	-5,6E+00	1,6E+01	2,5E+00	-8,1E-02	-1,7E+01	-5,3E+01	2,5E+01	-1,6E+01	-2,4E+01	1,3E+01	-3,7E+01	-1,5E+01	-3,1E+01	2,8E+01	-6,5E+00	-2,2E+01	-2,2E+01	-4,4E+00	-2,1E+01	-2,8E+01	1,2E+01
-7,7E+00	-1,5E+01	-3,5E+01	-2,4E+02	-1,4E+01	-7,0E+01	8,3E+01	-2,5E+01	4,3E+00	-1,4E+01	-4,7E+01	4,2E+01	2,6E+01	1,9E+01	-2,3E+01	1,2E+01	3,3E+01	2,4E+01	-1,2E+01	1,8E+01	2,3E+01	-2,8E+01
1,3E+01	4,3E+00	2,7E+02	-5,9E+01	-2,1E+02	3,7E+01	9,9E+01	-4,4E+01	2,0E+01	2,3E+01	-4,7E+01	6,5E+00	-5,6E+01	-1,6E+01	-2,6E+01	2,1E+01	7,1E+01	7,3E+01	-1,2E+01	7,3E+01	2,7E+01	3,8E+00
1,1E+00	3,0E+00	2,5E+01	1,8E+02	-2,8E+01	-4,6E+02	1,1E+02	2,8E+01	-1,8E+01	-1,6E+01	-2,7E+01	1,6E+01	-9,1E+01	3,1E+01	-2,2E+01	-3,5E+01	-1,6E+01	2,8E+01	3,2E+01	8,9E+00	3,3E+00	4,0E+00
4,5E+00	1,9E+01	8,1E+01	-4,5E+00	5,0E+02	-1,1E+02	-1,1E+01	3,6E+01	-8,3E+01	-1,7E+02	-3,7E+01	-3,7E+01	-1,1E+02	5,9E-01	-4,9E+01	-5,5E+01	1,4E+01	1,1E+01	4,8E+01	2,0E+01	-4,8E+00	-4,2E+01
1,3E+01	5,1E+01	-5,7E+01	-8,2E+01	-9,7E+01	2,2E+01	-5,5E+01	-3,5E+02	-1,2E+00	-8,8E+01	1,8E+02	-1,9E+02	-9,7E+00	-5,7E+01	-1,7E+01	3,0E+01	4,7E+01	6,9E+01	-1,7E+01	-6,4E+01	-5,8E+01	-7,9E+01
-2,8E+00	-2,1E+01	2,9E+01	-3,1E+01	-5,6E+00	7,5E+00	3,7E+02	-9,3E+01	-1,6E+02	-3,8E+02	-7,2E+00	-2,3E+02	1,6E+02	-9,6E+01	8,5E+01	-2,1E+01	4,0E+01	1,2E+01	-3,1E+01	-2,4E+01	8,1E+00	1,1E+02
2,0E+00	1,6E+01	-9,7E+00	-1,7E+01	3,7E+01	1,3E+01	-3,1E+00	1,2E+02	-1,8E+02	1,3E+02	1,5E+02	6,4E+01	-8,1E+01	3,7E+00	-1,5E+01	-4,4E+01	-4,9E+01	-5,8E+01	-1,1E+02	1,6E+02	-3,0E+01	6,5E+01
1,3E+00	2,4E+01	3,0E+00	-3,1E+01	7,0E+01	6,4E+01	1,1E+02	3,2E+02	-8,6E+01	-2,0E+02	3,4E+02	7,1E+01	-6,6E+01	-1,5E+01	1,5E+01	1,1E+02	1,2E+01	2,8E+01	-5,1E+01	6,1E+01	-2,9E+01	6,3E+01
-6,1E+00	-1,1E+01	2,6E+01	5,8E+01	9,2E+00	3,8E+01	-1,7E+02	2,0E+01	-1,8E+02	-2,7E+02	-2,5E+01	4,5E+02	1,1E+02	-1,8E+02	-3,2E+00	1,1E+02	8,8E+01	1,4E+02	-6,7E+01	-1,8E+01	4,3E+01	-7,7E+01
-1,7E+00	3,7E+01	-8,2E+00	2,7E+01	2,6E+01	2,0E+01	2,0E+02	1,8E+02	-9,7E+01	-1,1E+02	-4,1E+02	-1,0E+02	-3,8E+02	-1,2E+01	-4,0E+01	8,6E+01	1,4E+02	-8,2E+01	-1,1E+02	-1,9E+01	-9,4E+01	2,4E+01
-8,9E+00	2,3E+01	-2,8E+00	1,8E+01	3,3E+01	-2,0E+01	3,5E+01	-5,6E+01	1,1E+02	4,2E+01	-1,5E+02	4,9E+02	-1,5E+02	-4,4E+02	3,2E+01	-2,9E+01	5,7E+01	-1,1E+01	-6,7E+01	4,8E+01	-6,4E+01	1,0E+01
-2,0E+01	3,4E+01	-3,4E+01	1,5E+01	-3,3E+01	3,7E+01	3,6E+01	1,5E+01	-1,2E+02	-1,0E+01	1,7E+02	2,0E+00	4,9E+02	-5,6E+01	1,7E+02	3,7E+02	-2,3E+02	3,5E+02	2,5E+02	-1,7E+02	-8,6E+01	-5,4E+01
8,6E+00	-2,3E+01	3,1E+01	-3,1E+01	3,9E+00	-9,6E+00	4,8E+01	-1,1E+02	-1,9E+02	3,9E+01	-2,0E+01	8,2E+01	-1,4E+02	-4,8E+01	3,8E+01	2,4E+02	2,2E+02	6,3E+01	2,5E+02	-4,4E+02	1,2E+02	-2,1E+02
8,4E+00	3,3E-01	5,1E+00	1,4E+01	5,3E+01	2,0E+00	1,8E+00	2,3E+01	-3,0E+01	-7,5E+01	-1,0E+02	-9,8E+01	-2,6E+01	-3,3E+02	-1,2E+02	-8,7E+01	4,4E+02	1,3E+02	6,1E+02	-2,5E+02	7,8E+00	8,9E+01
-1,7E+01	2,3E+01	-5,8E+01	-1,3E+01	5,2E+01	1,3E+01	-9,1E+01	-2,2E+01	1,3E+01	3,6E+01	-1,0E+02	-1,6E+02	-4,2E+01	3,1E+02	-1,0E+02	-3,6E+02	-1,1E+02	-7,3E+02	4,0E+02	-7,9E+01	-3,5E+01	-1,9E+02
-6,9E-01	1,1E+01	-3,1E+01	1,3E+01	-4,5E+01	-1,4E+01	1,3E+01	1,3E+02	2,5E+01	2,7E+01	-1,2E+02	3,6E-01	-6,1E+01	-2,2E+02	2,8E+01	-2,5E+02	7,6E+02	-2,6E+02	-5,4E+02	-8,1E+02	6,4E+00	3,8E+02
1,3E+00	5,5E+00	8,9E+00	-1,9E+01	2,0E+01	-2,4E+00	3,5E+01	-3,1E+01	1,5E+01	-1,1E+01	7,6E+01	1,0E+02	1,3E+01	-1,1E+02	-2,4E+01	-5,6E+02	-4,3E+02	5,7E+02	-5,9E+02	-5,0E+02	2,6E+01	-3,5E+02
7,4E+00	1,2E+01	-2,0E+01	1,4E+01	2,1E+01	-1,7E+01	2,3E+01	5,4E+01	-7,6E+01	-1,2E+01	-1,5E+01	-5,5E+01	9,4E+01	-1,8E+01	3,1E+02	1,4E+02	2,4E+02	8,1E+02	3,4E+02	-4,7E+02	-5,5E+01	6,2E+02
6,3E+01	2,1E+01	1,9E+01	-6,8E+01	-1,1E+01	6,7E+00	6,5E+01	-4,0E+01	3,6E+01	4,4E+01	-2,4E+01	1,0E+02	5,3E+01	1,2E+02	-1,2E+02	-8,0E-01	5,2E+01	2,7E+01	-1,1E+01	1,3E+02	-4,1E+01	-7,0E+01
-6,8E-01	-4,0E+00	1,1E+01	-3,8E+01	-3,7E+00	1,3E+01	4,2E+01	-9,5E+01	7,1E+00	-1,3E+02	5,4E+01	-3,6E+01	4,5E+00	3,0E+01	-1,2E+02	-1,2E+01	3,8E+01	-4,0E+02	1,9E+02	-5,3E+02	9,0E+01	-2,2E+02
3,2E+01	2,6E+01	3,1E+01	-2,5E+01	-9,5E+00	-2,9E+01	-6,2E+01	1,8E+01	-1,7E+01	-4,3E+01	9,4E+00	-4,7E+01	-3,4E+01	-6,8E+01	3,4E+01	2,7E-01	-6,7E+01	-1,0E+01	-1,4E+01	2,4E+01	4,3E+01	-5,3E+01
4,5E+00	4,4E+00	2,5E+00	-7,4E+00	-1,3E+00	3,3E+01	7,4E+01	1,5E+01	-7,6E+01	-4,8E+01	3,3E+01	-1,2E+01	9,5E+01	-9,9E+01	1,3E+02	-3,0E+02	-6,5E+01	-1,7E+02	1,1E+02	7,8E+02	-2,6E+01	-1,1E+03
-2,0E-01	-6,2E-02	-3,7E+00	2,7E+01	-2,5E+00	-2,1E+01	-3,2E+01	1,1E+02	3,1E+02	-7,7E+01	-1,4E+01	-2,0E+01	5,9E+01	-1,8E+02	-4,4E+02	-8,9E+01	-6,1E+01	-1,6E+02	-1,6E+02	2,6E+02	-5,9E+01	1,0E+03
-4,3E+00	-6,5E+00	-6,3E+00	9,7E+00	-1,4E+01	-4,9E+00	-1,4E+01	8,1E+01	-9,3E+00	-4,2E+01	1,4E+01	-9,0E+01	5,8E+01	3,8E+01	-1,0E+02	2,6E+02	1,0E+01	9,8E+01	1,4E+02	-3,0E+02	-2,2E+01	-3,1E+02
8,3E-01	-5,0E+00	-2,3E+00	1,2E+01	1,2E+01	-6,8E+00	-7,9E+01	3,1E+01	-2,8E+00	4,5E+00	6,9E+00	-2,0E+01	2,7E+01	-2,3E+01	1,1E+02	-1,9E+02	6,3E+00	-1,2E+02	-6,3E+01	5,5E+01	-1,9E+02	1,9E+02
2,5E+00	2,1E+00	7,3E+00	-2,1E+01	3,1E+01	-1,3E-02	5,3E+01	-1,3E+02	-4,7E+02	1,4E+02	3,2E-01	3,4E+01	-1,4E+02	2,9E+02	7,8E+02	8,8E+01	2,3E+02	9,0E+01	2,2E+02	8,9E+00	-3,9E+01	5,0E+01
-4,8E+01	4,9E+01	-2,1E+01	2,0E+01	-2,1E+00	1,4E+01	5,7E+00	3,4E+00	3,9E+00	8,0E+00	-1,1E+01	-1,2E+01	6,5E+00	-1,6E+01	2,4E+01	-2,6E+00	-1,5E+01	-1,1E+01	1,7E+00	-4,6E+00	6,8E+01	1,3E+01
2,7E+01	2,5E+01	-5,5E+00	-1,4E+00	2,6E+00	7,6E+00	-3,4E-01	6,2E+00	5,0E+00	1,3E+01	5,6E-01	7,7E+00	3,4E+01	3,4E+01	8,4E-01	-2,4E+01	2,4E+01	-1,9E+01	2,9E+00	-2,3E+01	-6,6E+01	2,0E+01
-2,3E+00	-4,2E-01	-3,4E+00	2,4E+01	-3,1E+01	7,2E+00	-2,5E+01	1,6E+02	3,1E+02	-6,7E+01	-1,7E+01	-1,3E+02	2,8E+02	-4,9E+02	-1,1E+03	-2,0E+02	-2,9E+02	-2,1E+02	-4,8E+02	8,0E+02	-1,0E+02	9,8E+02
-1,4E+00	-7,2E-01	-1,9E+00	1,3E+01	-1,8E+01	4,5E+00	-1,3E+01	1,1E+02	3,0E+02	-1,1E+02	9,7E+00	-6,0E+01	1,3E+02	-2,3E+02	-5,4E+02	-7,2E+01	-1,5E+02	-1,2E+02	-2,4E+02	4,1E+02	-5,0E+01	5,2E+02
-3,8E+01	-5,9E+01	-1,6E+01	1,1E+01	1,7E+00	1,1E+01	2,9E+00	5,1E+00	4,1E+00	1,0E+01	-3,8E+00	-4,0E-01	2,1E+01	1,2E+01	1,1E+01	-1,4E+01	6,4E+00	-1,7E+01	2,2E+00	-1,6E+01	-1,9E+01	1,5E+01
1,9E+01	-6,2E+00	6,1E+00	-6,3E+00	-1,5E+00	-1,0E+00	1,7E+01	-1,4E+01	2,9E+00	7,7E-01	-1,8E+00	1,1E+01	-1,4E+01	-2,0E+00	-1,7E+01	1,5E+01	-2,0E+01	2,1E+01	-7,3E-01	2,0E+01	2,5E+01	-1,6E+01
4,0E+01	-4,9E+01	3,7E+00	-1,7E+00	9,6E-01	-1,2E+00	-8,9E+00	4,6E+00	-1,3E+00	2,1E-01	4,2E+00	-2,3E+00	7,4E+00	8,6E+00	2,1E+00	-8,0E+00	6,0E+00	-8,8E+00	1,1E-01	-1,2E+01	-4,0E+01	6,7E+00
4,7E+01	2,9E+00	3,7E+00	-2,6E+00	3,8E-01	-1,5E+00	-5,7E-01	-6,6E-01	-3,6E-01	-3,6E-01	1,9E+00	2,1E+00	4,5E-01	4,2E+00	-3,5E+00	-6,4E-01	3,2E+00	7,7E-01	9,4E-02	-5,7E-01	-1,1E+01	-7,0E-01
1,2E+00	-1,4E+01	-4,2E+00	2,9E+00	1,2E+00	2,2E+00	-6,1E+00	6,4E+00	1,2E+01	2,3E+01	9,3E-01	-2,3E+00	1,2E+01	7,8E+00	6,3E+00	-1,0E+01	-1,2E+01	9,3E-01	-1,2E+01	-1,2E+01	9,7E+00	9,7E+00
-2,0E+01	3,1E+00	-2,0E+00	1,4E+00	-6,0E-03	5,5E-01	-8,1E-01	1,3E+00	-9,3E-02	-6,9E-02	-7,3E-01	-1,4E+00	7,7E-01	-1,5E+00	2,3E+00	-6,3E-01	-1,4E+00	-1,6E+00	9,7E-03	-9,1E-01	3,2E+00	1,2E+00
9,2E-01	-1,1E+01	-2,8E+00	2,1E+00	8,8E-01	1,5E+00	-4,9E+00	4,8E+00	-1,9E-01	1,5E+00	8,0E-01	-2,0E+00	8,5E+00	5,4E+00	4,8E+00	-7,3E+00	3,2E+00	-8,8E+00	6,1E-01	-9,2E+00	-1,7E+01	7,1E+00
-1,6E+01	4,9E+00	-2,2E+00	1,4E+00	-1,1E-01	5,9E-01	1,8E-01	6,4E-01	3,3E-02	-1,4E-01	-1,1E+00	-1,0E+00	-1,9E-01	-2,4E+00	1,9E+00	3,7E-01	-2,0E+00	-5,0E-01	-2,0E-02	4,5E-01	6,7E+00	3,2E-01
-6,3E+00	2,0E+00	-1,3E+00	8,6E-01	-8,1E-03	4,3E-01	-5,7E-03	5,1E-01	5,2E-02	6,9E-02	-5,7E-01	-5,3E-01	3,8E-01	-8,8E-01	1,1E+00	-1,6E-01	-8,1E-01	-6,5E-01	3,2E-02	-1,8E-01	2,7E+00	5,0E-01
-2,1E+01	6,7E+00	-4,5E+00	2,9E+00	-2,5E-02	1,5E+00	-1,4E-02	1,7E+00	1,8E-01	2,5E-01	-1,9E+00	-1,8E+00	1,3E+00	-2,9E+00	3,8E+00	-5,7E-01	-2,7E+00	-2,2E+00	1,1E-01	-6,3E-01	9,0E+00	1,7E+00
6,7E-02	1,8E-03	-1,4E-05	-1,9E-05	-2,1E-06	-9,3E-06	-2,5E-06	1,9E-05	-1,3E-06	-2,9E-06	-1,6E-05	7,3E-06	2,1E-05	-1,3E-06	1,2E-05	-9,6E-06	8,2E-07	-1,5E-06	4,1E-06	1,9E-05	1,7E-04	5,8E-06

Tabela 19: Controlador final obtido para a abordagem Passiva Estrutural – viga de 20 elementos finitos (continuação)

-1,4E+01	-1,8E+01	-1,3E+00	7,3E+00	-1,9E+01	-7,1E+00	2,7E+01	-2,3E+01	4,3E+00	2,7E+00	1,7E+01	-7,2E+00	-3,0E+01	-3,2E+01	-5,5E+00	1,4E+01	-4,1E+00	4,4E+00	2,2E+00	1,1E+00	4,5E+01
-3,0E+01	-1,3E+01	-3,8E-01	1,2E+01	-2,2E+00	-5,0E+00	-3,1E+01	-3,3E+01	3,0E+00	1,7E+00	7,2E+01	-1,9E+00	3,4E+01	-1,5E+01	1,1E+01	1,1E+01	1,4E+00	3,2E+00	1,3E+01	5,2E+00	2,7E+02
-1,3E+00	1,9E+01	-2,7E+00	-1,6E+01	-1,5E+01	-5,7E+00	5,6E+00	2,8E+00	9,9E+00	6,6E+00	-3,4E+00	6,6E+00	-2,2E+00	1,9E+00	-1,5E+00	-3,9E+00	1,0E+00	-1,3E+00	-4,4E+00	-1,9E+00	-9,0E+01
4,1E+00	-1,5E+01	1,6E+01	3,6E+01	3,1E+01	3,5E+00	-5,7E+00	2,0E+01	-1,6E+01	-1,1E+01	7,4E+00	-1,1E+01	6,8E+00	7,4E-01	7,3E+00	1,8E+00	4,5E+00	-4,7E-04	1,8E+00	4,6E-01	3,8E+01
5,3E+00	-1,4E+01	1,6E+01	-2,0E+01	1,7E+01	-7,7E+00	-1,6E+00	8,0E-01	5,3E+01	3,6E+01	1,9E-01	-1,5E+00	1,1E+00	3,8E-01	1,1E+00	-2,8E-01	9,7E-01	-1,9E-01	-4,1E-01	-2,3E-01	-8,0E+00
3,4E+01	2,1E+01	-2,3E+01	1,7E+01	2,6E+01	-2,3E+01	-3,0E+00	1,7E+00	-9,8E-01	7,8E-02	7,3E-01	-6,3E+00	5,6E+00	-1,2E-01	2,7E+00	1,3E-01	2,4E+00	-1,7E-01	-1,4E-01	-1,7E-01	-2,1E+00
5,6E+01	5,1E+01	-5,7E+01	2,1E+01	7,9E+01	-1,4E+01	-7,5E+00	-1,4E+00	1,7E+01	1,1E+01	5,7E+00	-1,8E+01	1,2E+01	-1,5E+00	6,8E+00	2,3E+00	4,6E+00	2,7E-01	1,7E+00	4,7E-01	3,7E+01
-3,9E+01	1,8E+01	-3,6E+01	1,1E+02	-8,1E+01	3,7E+01	2,1E-01	3,1E-01	-2,1E+02	-1,6E+02	7,1E-02	6,2E+00	-4,6E+00	4,4E-01	-1,9E+00	2,8E-02	-1,9E+00	1,8E-01	4,6E-01	2,8E-01	8,8E+00
3,2E+01	1,3E+02	8,3E+01	3,6E+02	-1,3E+02	4,7E+01	-3,6E-01	-3,5E+00	-3,8E+02	-3,8E+02	1,5E-01	-3,8E+00	3,1E+00	-6,8E-01	8,4E-01	4,9E-01	6,6E-01	1,2E-01	3,4E-01	1,2E-01	7,3E+00
3,9E+01	-1,3E+02	4,0E+01	-1,4E+02	8,0E+01	-1,9E+01	-2,4E+00	-6,1E+00	1,5E+02	1,7E+02	-1,5E+00	-4,5E+00	4,3E+00	-8,3E-01	5,9E-01	1,8E-01	8,4E-01	3,5E-02	-1,1E-01	-6,4E-02	-2,0E+00
1,1E+00	5,2E+01	-2,1E+01	4,7E+00	-1,3E+01	-8,1E-01	-4,3E-01	-4,7E-01	2,3E+00	-1,6E+01	-4,6E+00	5,5E+00	-2,9E+00	1,3E+00	-2,1E+00	-2,1E+00	-4,4E-01	-6,2E-01	-2,3E+00	-9,3E-01	-4,8E+01
3,3E+01	-3,8E+00	1,2E+02	-9,8E+01	7,9E+01	2,2E+01	-7,7E+00	-1,7E+01	1,8E+02	1,0E+02	-3,5E+00	-4,7E+00	4,4E+00	-4,2E-01	1,6E-01	-1,2E+00	1,4E+00	-4,1E-01	-1,9E+00	-8,3E-01	-3,9E+01
3,6E+01	-2,6E+01	-1,1E+02	1,8E+02	-8,1E+01	-8,8E+01	-8,0E+00	-2,4E+01	-2,9E+02	-1,5E+02	-8,6E+00	4,3E+00	5,3E-01	-4,2E-01	-4,3E+00	-2,0E+00	-1,6E+00	-2,7E-01	-2,2E+00	-7,9E-01	-4,7E+01
6,1E+01	-8,1E+01	1,1E+02	-2,6E+02	9,2E+01	1,7E+02	-1,1E+01	-4,1E+01	4,4E+02	2,3E+02	-1,9E+01	1,0E+01	-3,0E+00	-2,4E-01	-9,4E+00	-4,4E+00	-3,8E+00	-7,2E-01	-5,2E+00	-1,9E+00	-1,1E+02
-4,5E+01	-2,1E+02	2,6E+02	-5,2E+02	2,0E+02	3,7E+01	2,4E+00	2,2E+01	1,3E+03	7,5E+02	7,9E+00	-2,0E+00	7,1E-01	3,3E-01	3,6E+00	2,0E+00	1,1E+00	3,9E-01	2,6E+00	9,8E-01	5,4E+01
4,4E-01	1,6E+01	-6,7E+01	-1,4E+02	7,4E+01	3,0E+02	7,9E+00	1,3E+01	-5,4E+01	-8,7E+01	7,3E+00	-7,3E+00	3,3E+00	-2,0E-01	4,5E+00	1,3E+00	2,6E+00	5,2E-02	1,3E+00	3,6E-01	2,7E+01
6,5E+01	5,6E+01	8,6E+00	-7,6E+01	6,5E+00	1,0E+00	-1,1E+01	-3,5E+01	3,1E+02	1,9E+02	-1,6E+01	9,6E+00	-4,8E+00	-7,5E-01	-8,9E+00	-2,1E+00	-5,0E+00	4,8E-02	-2,5E+00	-6,9E-01	-5,3E+01
2,8E+01	3,6E+01	1,2E+02	-2,2E+02	8,2E+01	1,1E+02	6,1E-01	-6,9E+00	1,9E+02	1,1E+02	-1,0E+00	-1,4E+00	7,5E-04	-9,8E-01	-9,1E-01	7,0E-01	-9,0E-01	3,3E-01	5,9E-01	3,0E-01	1,2E+01
-2,0E+01	-1,8E+02	9,4E+01	-1,5E+02	7,2E+01	2,2E+02	-3,1E+00	1,4E-01	3,9E+02	2,2E+02	8,9E-01	-1,9E+00	1,3E+00	5,7E-02	9,1E-01	4,2E-02	7,4E-01	-7,0E-02	-8,0E-02	-7,6E-02	-1,4E+00
-8,0E+00	-3,1E+02	-4,5E+02	2,8E+02	-9,7E+01	-6,1E+02	-6,3E+00	2,0E-01	-4,6E+02	-2,3E+02	5,4E+00	-7,2E+00	3,3E+00	-7,5E-01	3,2E+00	2,1E+00	1,2E+00	4,9E-01	2,1E+00	8,0E-01	4,4E+01
-9,2E+01	-4,7E+01	8,2E+01	3,6E+01	2,2E+02	1,2E+02	-3,8E+01	6,2E+01	2,9E+01	9,3E+00	5,2E+01	-4,8E+01	2,5E+01	-3,9E+00	2,7E+01	1,7E+01	1,1E+01	3,6E+00	1,8E+01	6,6E+00	3,7E+02
7,0E+01	1,8E+03	-1,0E+03	5,2E+02	-1,7E+02	-5,3E+02	-6,8E+00	-8,6E-01	-7,4E+02	-4,4E+02	-9,5E-01	1,7E+00	-3,9E-01	5,9E-02	-7,1E-01	1,5E-01	-6,7E-01	1,3E-01	3,3E-01	1,7E-01	6,5E+00
-2,0E+01	-3,3E+00	-7,1E+01	1,5E+02	1,4E+02	1,9E+01	2,0E+01	3,3E+01	-3,5E+01	-2,6E+01	1,1E+01	-3,0E+01	4,4E+00	-2,1E+00	1,2E+01	1,1E+01	3,0E+00	2,7E+00	1,1E+01	4,4E+00	2,3E+02
-1,4E+01	-4,2E+02	-1,5E+03	2,1E+03	-8,3E+02	3,4E+02	5,5E+00	2,4E+00	-5,7E+02	-4,6E+02	5,4E+00	-4,5E+00	2,8E+00	-1,3E-01	2,8E+00	2,7E-01	2,0E+00	-1,6E-01	8,6E-02	-8,1E-02	2,5E+00
1,2E+02	2,6E+03	-8,0E+02	3,6E+03	-1,4E+03	2,5E+03	4,5E+00	-2,5E+00	-1,2E+03	-1,0E+03	3,5E-01	1,5E-01	-1,6E-01	-2,2E-02	-1,2E-01	-5,3E-03	-9,3E-02	7,6E-03	6,0E-04	2,3E-03	-1,3E-02
-1,2E+02	-1,5E+03	-1,9E+03	-8,4E+02	2,2E+02	2,0E+03	-6,5E+00	1,1E+01	-7,8E+02	-5,4E+02	-1,2E+01	2,9E+00	-2,6E+00	1,3E+00	-2,3E+00	-6,7E-01	-1,4E+00	-3,4E-02	-6,3E-01	-1,7E-01	-1,3E+01
-1,3E+02	5,1E+02	7,6E+02	5,5E+02	-2,1E+02	-8,1E+02	-1,7E+01	3,9E+01	2,8E+02	1,9E+02	-1,9E+01	-4,0E+00	-4,9E-01	3,2E+00	1,1E+00	-5,4E-01	1,2E+00	-3,0E-01	-7,8E-01	-3,7E-01	-1,5E+01
-3,8E+01	-7,7E+02	-2,5E+03	-3,3E+03	1,3E+03	-2,7E+03	-8,0E+00	8,7E+00	3,2E+03	2,2E+03	1,1E+00	-2,2E+00	1,3E+00	1,7E-01	1,5E+00	2,0E-01	1,0E+00	-6,1E-02	1,3E-01	-1,4E-03	3,1E+00
-1,4E+01	-8,0E+00	-6,7E+00	2,9E+00	6,8E+00	-4,5E+00	-3,3E+01	-1,5E+02	9,8E+00	6,1E+00	-4,4E+01	2,8E+01	-8,7E+00	2,2E+00	-1,9E+01	-1,4E+01	-4,8E+00	-3,4E+00	-1,6E+01	-6,4E+00	-3,4E+02
-4,1E+01	-2,2E+01	-2,5E+00	-3,4E-01	-5,7E+01	-1,8E+01	1,5E+02	-7,4E+00	2,9E+00	2,7E+00	2,3E+01	-2,4E+01	3,4E+01	-5,0E-01	1,1E+01	7,9E+00	4,3E+00	2,0E+00	8,3E+00	3,1E+00	1,7E+02
3,6E+01	7,2E+02	3,6E+02	1,3E+03	-5,1E+02	-2,5E+03	-4,0E+00	-1,3E+01	-5,2E+03	-7,3E+02	-2,5E+00	2,1E+00	-1,1E+00	-5,1E-02	-1,4E+00	-1,3E-01	-1,0E+00	8,5E-02	-7,2E-02	4,1E-02	-2,0E+00
2,6E+01	5,4E+02	4,4E+02	9,3E+02	-3,6E+02	-1,5E+03	-2,3E+00	-6,5E+00	-1,3E+02	-5,4E+03	-9,2E-01	1,3E+00	-7,9E-01	-6,0E-02	-8,9E-01	-8,1E-02	-6,2E-01	5,0E-02	-4,2E-02	2,1E-02	-1,1E+00
9,8E+00	-1,8E+01	-2,1E+00	1,3E+01	-2,2E+00	-7,0E+00	1,3E+01	-1,5E+01	6,2E+00	4,6E+00	-1,9E+01	7,5E+01	-1,5E+01	8,0E+00	-1,4E+01	-1,3E+01	-4,3E+00	-3,6E+00	-1,3E+01	-5,2E+00	-2,7E+02
1,7E+01	1,9E+01	1,4E+00	-6,6E+00	2,3E+01	7,7E+00	-8,2E+00	2,2E+01	-5,9E+00	-3,8E+00	-5,8E+01	-6,8E+00	1,6E+01	-1,5E+01	6,7E+00	6,5E+00	-6,4E-02	1,7E+00	8,1E+00	3,2E+00	1,7E+02
-1,3E+01	-9,6E+00	-7,0E-01	7,0E+00	-3,2E+00	-3,9E+00	2,9E+01	-4,4E+01	2,3E+00	1,4E+00	2,7E+01	-2,9E+01	-1,3E+01	4,4E+01	1,8E+01	1,0E+01	1,4E+00	2,9E+00	1,6E+01	6,1E+00	3,2E+02
-6,1E+00	2,1E-01	7,7E-02	-2,0E-01	-4,0E-01	5,9E-03	1,8E+01	-8,0E+00	-4,2E-01	-3,0E-01	1,3E+01	3,1E+00	-6,0E+01	-1,0E+01	1,9E+01	1,6E+01	4,8E+00	4,5E+00	1,7E+01	6,8E+00	3,5E+02
-9,2E+00	-1,2E+01	-8,4E-01	4,8E+00	-1,3E+01	-4,6E+00	1,9E+01	-1,4E+01	2,9E+00	1,8E+00	1,1E+01	-4,9E+00	-2,2E+01	-2,3E+01	-1,5E+00	-2,0E+00	1,2E+00	-1,6E-01	-9,6E-02	6,3E-03	-1,2E+00
1,3E+00	-1,1E+00	-5,7E-02	-1,4E-01	-2,5E+00	-3,8E-01	-6,1E+00	1,0E+00	3,3E-01	2,1E-01	-3,9E+00	5,3E+00	8,9E+00	4,2E+00	2,1E+01	-8,0E+00	-9,9E-01	-1,9E+00	-8,7E+00	-3,5E+00	-1,8E+02
-7,1E+00	-8,5E+00	-6,1E-01	3,6E+00	-9,0E+00	-3,4E+00	1,3E+01	-1,1E+01	2,1E+00	1,3E+00	9,3E+00	-3,7E+00	-1,4E+01	-1,7E+01	-3,2E+00	8,3E+00	-1,9E+00	-7,6E+00	1,7E+00	5,1E-01	3,5E+01
3,1E+00	1,0E-01	3,1E-02	-8,8E-01	-1,7E+00	1,2E-01	-9,1E+00	3,2E+00	-2,3E-02	-1,2E-02	-8,0E+00	7,1E+00	1,0E+01	8,1E+00	3,0E+00	-1,4E+01	1,8E+01	-4,8E+00	-1,4E+01	-5,9E+00	-2,9E+02
1,4E+00	-3,4E-01	-1,3E-02	-3,0E-01	-1,3E+00	-9,4E-02	-3,9E+00	1,3E+00	7,6E-02	4,9E-02	-4,0E+00	3,3E+00	4,0E+00	3,6E+00	1,3E+00	4,9E+00	-2,5E+00	-7,4E+00	-1,6E+00	-1,5E+02	
4,5E+00	-1,2E+00	-4,8E-02	-1,0E+00	-4,6E+00	-3,3E-01	-1,3E+01	4,3E+00	2,6E-01	1,7E-01	-1,4E+01	1,1E+01	3,3E+01	1,2E+01	4,6E+00	-2,2E+01	1,7E+01	-8,3E+00	-2,6E+01	-1,1E+01	-5,0E+02
-1,7E-04	1,5E-05	3,1E-06	-1,1E-04	-2,7E-04	-2,9E-06	3,8E-05	3,4E-04	-1,3E-07	2,5E-08	2,7E-04	1,2E-03	-6,5E-04	1,8E-04	-6,6E-03	-3,9E-03	-5,9E-02	-6,4E-03	-1,9E+00	4,5E+00	0

Tabela 20: Controlador final obtido para a abordagem Ativa Serial – viga de 20 elementos finitos

-2,1E+00	-2,1E+01	1,3E+00	-5,4E+00	6,5E+00	7,1E+00	-7,7E+00	-8,1E+00	-1,6E+00	-6,8E+00	6,4E+00	-7,6E+00	5,3E+00	4,4E+00	-1,7E+01	1,0E+01	6,9E+00	4,4E+00	-2,0E+01	1,2E+01	7,1E+00	-8,5E+00
3,1E+01	-4,6E+00	-4,4E-01	1,2E+01	-4,0E+00	4,1E+00	6,0E+00	-5,8E+00	-2,8E+00	-2,1E+01	4,6E+01	-3,4E+01	1,6E+01	9,3E+00	1,4E+01	6,5E+00	8,4E+00	4,6E+01	2,4E+01	-1,2E+01	1,5E+01	-1,1E+01
-1,5E+00	1,4E-01	1,7E+02	8,6E-01	1,8E+00	-6,9E+00	-2,8E+00	1,7E+01	8,3E+00	-3,1E+01	-2,3E+01	-1,9E+01	-3,7E+01	-2,3E+01	-9,3E+00	5,4E+01	-6,6E+01	7,4E+01	1,4E+01	3,3E+02	3,3E+02	-4,3E+02
3,5E+00	-1,0E+01	-3,3E-01	-6,1E+01	-3,9E+02	4,4E+01	1,5E+02	7,2E+01	1,9E+01	7,0E+01	-9,0E+01	3,6E+01	-3,3E+01	-2,4E+00	-9,8E+00	-1,7E+01	-2,7E+01	-1,6E+01	-9,4E+00	1,4E+01	-3,4E+01	2,0E+01
1,4E+00	5,8E+00	-2,2E+00	4,6E+02	-3,4E+01	3,9E+02	-4,1E+00	9,0E+01	-4,9E+00	7,2E+01	1,2E+02	-4,8E+01	2,8E+01	-2,5E+01	5,2E+00	1,5E+00	-2,2E+01	5,0E+00	-1,0E+01	-1,5E+01	-3,7E+01	-5,1E+00
-8,5E-02	-3,4E+00	1,2E+00	-1,5E+02	-3,2E+02	-8,8E+01	-2,5E+02	-1,9E+02	6,0E+00	-1,1E+00	-2,5E+01	-2,8E+01	3,5E+01	1,7E+00	-4,3E+01	-3,6E+01	-2,0E+01	2,4E+01	6,1E+00	-4,6E+01	-4,2E+00	-9,7E+00
-1,8E+01	-1,1E+01	-3,4E+00	-1,6E+02	4,4E+01	2,6E+02	-7,9E+01	-2,9E+02	2,7E+01	1,3E+01	1,2E+00	-2,4E+01	1,1E+02	3,8E+00	-1,4E+02	8,0E+00	-2,7E-02	-1,3E+01	-6,9E+00	-8,6E+01	-3,6E+01	-2,4E+01
9,3E+00	2,8E+00	-1,4E+01	-1,0E+02	-3,3E+01	1,7E+02	2,7E+02	-1,6E+02	-6,7E+02	1,0E+02	-8,6E+01	-3,3E+01	2,1E+02	3,5E+01	-4,5E+01	8,4E+01	-7,4E+01	3,0E+01	-4,5E+01	-1,4E+01	-2,8E+01	-2,5E+01
-7,1E+00	1,1E+00	9,2E+00	1,4E+01	3,7E+01	6,2E+01	-9,9E+00	5,6E+02	-1,2E+02	-2,6E+02	-1,0E+02	-1,6E+02	-1,6E+02	-9,1E+00	2,0E+01	8,5E+01	-2,0E+01	4,1E+01	8,5E-02	1,1E+02	2,5E+02	-4,9E+01
1,1E+01	1,9E+01	3,5E+01	-6,5E+01	-4,0E+01	9,3E+00	1,5E+01	1,1E+01	1,9E+02	-1,8E+02	-4,8E+02	-8,4E+02	-2,1E+02	-1,7E+02	-1,9E+01	-1,3E+02	-6,5E+00	1,3E+01	6,9E+01	1,3E+02	7,4E+01	3,5E+01
-1,1E+01	-4,4E+01	1,0E+01	1,7E+01	-5,0E+01	-2,9E+01	-3,9E+00	8,1E+01	5,3E+01	3,2E+02	-1,6E+02	-3,4E+02	-2,0E+02	1,4E+02	-2,6E+02	-8,2E+01	1,5E+02	-1,5E+01	-4,7E+01	-5,7E+01	-7,0E+00	1,5E+01
7,6E+00	3,3E+01	-6,2E+00	3,4E+01	2,9E+01	5,9E+01	-1,3E+01	8,9E+01	1,6E+02	6,0E+02	1,5E+02	-2,1E+02	6,1E+01	7,1E+01	2,0E+02	-2,5E+02	3,2E+02	-5,8E+01	-8,6E+01	-2,1E+02	-2,2E+02	5,7E+01
-2,7E+00	-1,4E+01	2,4E+01	-8,5E-01	-8,1E+00	-2,3E+01	-3,1E+01	-4,6E+01	1,3E+02	-5,5E+01	3,0E+01	-2,7E+02	-2,0E+02	-6,1E+02	-3,8E+02	-3,6E+02	2,7E+02	2,3E+02	2,0E+01	-1,3E+01	-4,3E+01	7,6E+01
-1,0E+00	-1,3E+01	9,1E+00	1,0E+01	-7,7E+00	5,1E+00	2,1E+01	1,7E+01	1,6E+01	7,0E+01	-1,6E+02	-5,2E+01	4,4E+02	-1,6E+01	6,8E+01	2,0E+02	1,7E+02	-2,1E+02	5,2E+01	-9,9E+01	7,0E+01	-1,5E+01
5,2E+00	-2,1E+01	9,9E+00	8,9E+00	1,6E+01	5,0E+01	1,3E+01	-1,0E+02	-5,6E+01	-1,6E+01	1,5E+02	-2,8E+02	4,1E+02	3,6E+01	-9,1E+01	3,2E+02	-2,9E+02	-3,8E+02	9,0E+01	1,9E+01	-1,1E+02	-4,4E+00
-1,9E+00	-3,7E+00	-2,9E+01	-1,1E+01	-2,2E+01	2,8E+01	2,2E+01	-5,2E+01	1,1E+01	1,6E+02	5,4E+01	9,1E+01	2,8E+02	-1,8E+02	-4,3E+02	-3,8E+02	-5,8E+02	4,2E+02	-1,7E+02	-1,3E+02	-4,8E+01	-4,7E+01
-2,2E+00	-8,7E+00	9,4E+01	3,3E+01	-2,5E+01	-3,6E+01	-3,6E+01	1,6E+01	7,1E+01	4,7E+00	-1,5E+02	-1,7E+02	-2,4E+02	-5,2E+01	4,1E+02	1,0E+03	-1,6E+02	-7,5E+02	1,0E+03	5,5E+02	-3,5E+02	-3,4E+00
1,4E+01	-4,1E+01	-9,0E+01	4,5E+00	7,6E+00	-1,1E+01	4,8E+01	3,7E+01	2,0E+01	7,4E-01	3,0E+01	3,6E+01	-2,0E+02	2,3E+02	4,5E+02	-4,0E+02	8,0E+02	-2,1E+02	-5,2E+02	-5,9E+02	-2,4E+02	2,1E+01
2,2E+01	-3,2E+01	6,4E+01	8,5E+00	-1,8E+00	-4,4E+01	2,7E+01	5,8E+01	5,2E+01	1,4E+01	5,2E+01	1,5E+02	5,2E+01	-8,0E+01	-1,6E+02	-4,7E+01	-9,7E+02	7,8E+02	-2,1E+02	1,1E+03	1,1E+03	-6,3E+01
-1,4E+01	1,7E+01	-2,0E+02	-1,7E+01	1,5E+01	2,3E+01	-4,1E+01	4,5E+01	3,0E+01	-1,1E+02	3,4E+01	3,2E+01	7,6E+01	2,7E+02	-6,8E+01	-1,9E+02	-2,2E+02	3,0E+02	-1,0E+03	-3,0E+02	-2,0E+02	1,3E+02
4,4E+00	-1,2E+01	-4,2E+02	3,0E+01	-3,0E+01	-1,7E+01	1,6E+01	-1,3E+01	-4,1E+01	-2,6E+01	-1,9E+01	9,5E+01	-4,6E+01	-4,8E+00	2,0E+02	6,6E+01	3,7E+02	-7,7E+01	-7,3E+02	-2,3E+03	-9,2E+02	9,8E+02
-1,0E+00	6,2E+00	-1,4E+01	-1,5E+01	1,3E+01	1,5E+01	-2,6E+00	2,5E+01	1,1E+01	-8,3E+00	4,1E+01	3,8E+01	1,8E+01	1,1E+02	-1,1E+01	-9,5E+01	-3,9E+01	6,7E+01	-2,8E+02	-5,4E+02	-7,7E+02	5,8E+02
2,3E+00	1,2E+01	2,3E+02	-1,6E+01	4,5E+01	5,6E+01	3,5E+01	-4,9E+01	-8,4E+01	9,0E+01	1,1E+02	1,5E+02	-1,2E+00	-7,6E+01	3,8E+00	3,5E+02	9,4E+01	3,0E+02	-1,1E+02	2,6E+01	-2,2E+03	-8,2E+02
-4,9E+00	-6,6E+00	1,0E+03	7,6E+00	-6,7E+00	2,8E+01	4,0E+01	2,1E+00	-1,3E+02	-8,2E+01	5,0E+01	1,3E+02	1,4E+02	1,5E+02	5,6E+01	-8,6E+01	-6,0E+01	-4,5E+02	6,8E+02	6,8E+02	-1,7E+03	-3,2E+03
6,2E+01	1,9E+01	3,5E+01	-2,3E+01	-6,0E+00	-2,3E+01	6,1E+01	-1,1E+01	3,0E+01	1,7E+01	-7,1E+01	5,9E+01	-4,2E+01	-2,6E+01	-5,8E+01	2,5E+00	-1,4E+01	-1,5E+02	-7,9E+01	6,9E+01	-7,1E+01	-1,4E+02
-9,2E-01	2,0E+00	2,8E+02	4,7E+00	1,4E+01	-6,5E+00	-7,6E+00	2,1E+01	1,3E+01	-1,7E+01	-3,2E+01	-2,0E+01	-1,2E+02	-1,1E+02	4,7E+01	2,8E+02	1,4E+02	2,4E+02	-1,2E+02	2,6E+02	-3,9E+02	-1,7E+03
3,4E+01	2,4E+01	-9,6E-01	1,5E+01	-1,6E+01	-4,5E+00	3,8E+01	-3,6E+00	3,1E+00	-2,4E+01	5,9E+01	-4,2E+01	1,3E+01	1,5E+01	3,1E+01	-2,1E+00	1,3E+00	5,9E+01	7,8E+01	-5,2E+01	1,9E+01	-4,7E+00
3,7E+00	2,4E+00	5,7E+02	9,8E-01	-1,4E+01	-2,1E+01	-3,2E+01	-1,3E+01	1,1E+02	4,3E+01	-5,2E+01	-1,4E+02	-1,1E+02	-1,2E+02	-3,2E+01	8,4E+01	-5,8E+01	1,8E+02	-1,3E+01	5,5E+02	1,6E+02	-1,4E+03
-1,0E+00	1,0E+01	1,1E+00	1,9E+00	-1,5E+01	-2,4E+01	1,0E+01	2,9E+01	2,4E+00	3,6E+01	-6,6E+01	5,5E+01	-2,6E+01	-1,9E+01	3,7E+01	-4,5E+01	-2,9E+01	-7,9E+01	5,2E+01	-4,3E+01	-3,1E+01	4,4E+01
4,9E+01	-4,8E+01	-1,2E-01	9,2E+00	-9,7E+00	-7,6E+00	2,9E+01	-1,6E+00	1,4E+01	-6,6E+00	7,4E+00	4,8E+00	-2,7E+00	-1,1E+01	8,4E+00	-9,7E+00	-6,9E+00	-2,4E+01	-1,1E+01	6,8E+00	-9,8E+00	7,0E+00
-2,7E+01	-2,6E+01	1,3E+00	9,4E+00	-8,4E+00	-4,9E+00	2,0E+00	1,5E+01	-1,8E+00	5,1E+00	4,9E+00	8,9E-01	-2,5E+00	-1,2E+00	3,1E+01	-1,2E+01	-5,6E+00	1,4E+01	4,7E+01	-2,8E+01	-2,4E+00	7,6E+00
-4,0E+01	-5,9E+01	-4,9E-01	-1,0E+01	9,9E+00	7,7E+00	-1,8E+01	-4,7E+00	-5,1E+00	1,4E+00	-7,7E+00	8,2E-03	1,7E+00	4,6E+00	-1,9E+01	9,5E+00	5,8E+00	1,4E+00	-1,9E+01	1,1E+01	5,7E+00	-6,7E+00
-1,9E+01	6,8E+00	-1,3E+00	-3,6E+00	6,0E+00	8,1E+00	-8,7E+00	-7,2E+00	-2,8E+00	-8,9E+00	1,4E+01	-1,3E+01	7,5E+00	6,8E+00	-1,3E+01	1,1E+01	8,6E+00	1,5E+01	-1,1E+01	6,7E+00	1,0E+01	-9,3E+00
4,2E+01	-4,9E+01	-2,0E+00	9,9E-02	9,8E-01	9,8E-01	3,7E+00	-6,5E+00	1,1E+00	-6,0E+00	7,1E+00	-6,2E+00	3,7E+00	5,3E-01	-6,0E+00	3,3E+00	2,2E+00	7,8E-01	-1,3E+01	7,8E+00	2,7E+00	-3,7E+00
-2,8E+01	-7,7E-01	2,6E+03	-2,8E+00	-2,3E-01	-4,8E+00	-1,9E+00	-4,8E+00	3,2E+00	2,9E+00	-1,2E+01	-1,4E+01	7,9E-01	-2,8E+00	-1,3E+01	-5,5E+00	-6,6E+00	2,2E+00	7,1E+01	1,9E+02	-9,7E+01	-6,1E+02
4,4E+01	4,6E+00	4,7E+02	1,1E+00	-1,4E+00	-2,3E+00	4,1E+00	-2,2E+00	2,4E+00	-8,6E-01	-1,1E+00	-2,4E+00	1,5E-01	-2,2E+00	-2,4E+00	-2,0E+00	-2,0E+00	-3,7E+00	8,7E+00	3,7E+01	-1,9E+01	-1,1E+02
1,0E+00	-1,2E+01	1,0E+00	-3,4E+00	4,0E+00	-4,5E+00	-5,0E+00	-8,3E-01	-4,1E+00	3,8E+00	-4,5E+00	3,2E+00	2,5E+00	-1,0E+01	6,2E+00	4,2E+00	2,3E+00	-1,3E+01	2,7E+00	4,2E+00	-5,2E+00	-5,2E+00
-2,0E+01	2,7E+00	8,1E-03	-8,3E-01	8,8E-01	1,2E+00	-2,3E+00	1,9E-01	-7,9E-01	-1,9E-02	4,5E-01	-7,1E-01	3,9E-01	1,1E+00	-9,1E-01	1,1E+00	8,4E-01	2,3E+00	1,2E+00	-7,2E-01	1,1E+00	-7,2E-01
6,5E-01	-9,7E+00	6,0E-01	-2,3E+00	2,8E+00	3,1E+00	-3,1E+00	-3,7E+00	-6,3E-01	-3,1E+00	3,1E+00	-3,5E+00	2,4E+00	1,9E+00	-7,4E+00	4,5E+00	3,1E+00	2,0E+00	-9,0E+00	5,4E+00	3,2E+00	-3,8E+00
1,6E+01	-4,5E+00	5,0E-02	7,4E-01	-6,8E-01	-1,0E+00	2,5E+00	-8,8E-01	8,4E-01	-6,1E-01	2,5E-01	4,6E-02	1,0E-02	-9,4E-01	1,2E-01	-6,0E-01	-4,4E-01	-2,1E+00	-2,6E+00	1,7E+00	-8,0E-01	2,0E-01
6,4E+00	-1,8E+00	-4,9E-03	5,4E-01	-5,2E-01	1,5E+00	-2,8E-01	4,6E-01	4,6E-01	-2,2E-01	1,1E-01	-1,1E-01	-7,5E-02	-5,6E-01	-5,3E-01	-5,0E-01	-3,6E-01	-1,0E+00	-8,2E-01	5,4E-01	-5,4E-01	2,7E-01
-2,1E+01	6,0E+00	1,7E-02	-1,8E+00	1,7E+00	2,3E+00	-4,9E+00	9,2E-01	-1,5E+00	7,2E-01	-3,8E-01	-3,4E-01	2,4E-01	1,8E+00	-1,7E+00	1,7E+00	1,2E+00	3,4E+00	2,7E+00	-1,8E+00	1,8E+00	-9,0E-01
-6,6E-02	-1,9E-03	-9,8E-08	7,4E-06	-5,1E-07	-8,9E-06	-5,7E-06	-2,4E-06	-1,1E-05	4,6E-06	-5,2E-06	-5,9E-06	2,7E-06	-1,0E-05	2,3E-05	-1,4E-05	-1,2E-05	-3,1E-06	-5,4E-06	1,4E-06	-2,4E-06	-2,6E-06

Tabela 20: Controlador final obtido para a abordagem Ativa Serial – viga de 20 elementos finitos (continuação)

-3,3E+01	2,8E+01	-3,3E+01	-1,5E+01	-1,4E+01	-1,0E+01	1,7E+01	-2,7E+01	2,3E+01	1,8E+01	6,6E+00	-3,1E+01	-1,5E+01	-3,6E+01	-5,6E+00	1,4E+01	-4,1E+00	-4,2E+00	-2,1E+00	1,1E+00	-4,0E+01
-3,1E+01	2,3E+01	-2,5E+01	-1,2E+01	-2,8E+01	-9,6E+00	-5,0E+00	3,2E+01	3,4E+01	7,1E+01	5,4E-01	3,5E+01	2,7E+00	-1,6E+01	9,2E+00	1,1E+01	4,2E-01	-2,7E+00	-1,3E+01	5,2E+00	-2,4E+02
-8,1E+01	-1,2E+03	-6,2E+01	-7,0E+02	1,3E+00	-7,7E+02	3,5E+00	4,1E-01	-1,1E+00	4,1E-01	1,1E+00	1,9E+00	-2,7E+03	-4,9E+02	-1,2E+00	2,2E-02	-7,1E-01	-8,4E-02	-4,5E-02	5,8E-02	-6,4E-01
4,3E+01	-2,7E+01	3,0E+01	9,6E+00	-8,5E+00	-1,1E+00	-7,1E+00	-1,4E+00	-1,3E+01	3,3E+00	1,9E+00	1,3E+00	-1,9E+00	9,8E-01	3,1E+00	-8,3E-01	2,6E+00	5,9E-01	1,1E+00	-6,1E-01	2,0E+01
-3,1E+01	4,9E+00	-4,3E+00	-2,5E+01	8,2E+00	-2,6E+00	-5,9E+00	4,3E-01	1,0E+00	5,8E-02	1,8E+00	1,4E+00	1,8E+00	8,7E-02	5,3E-01	3,3E-01	2,9E-01	-8,3E-02	-3,5E-01	1,4E-01	-6,9E+00
-5,2E+01	2,8E+01	-1,1E-01	8,5E+00	-1,3E+01	4,4E+01	8,5E+00	2,4E+00	4,1E+00	-3,7E-01	-1,6E+00	-2,6E+00	3,0E+00	-2,3E-01	-1,5E+00	1,6E+00	-2,2E+00	-6,8E-01	-2,1E+00	9,9E-01	-4,0E+01
-9,9E+01	2,9E+01	-1,6E+01	-2,2E+01	-7,0E+00	4,4E+01	5,3E+01	-3,4E+00	1,9E+01	-9,7E+00	-1,5E+01	-8,3E+00	1,3E+00	6,1E-01	-8,1E+00	-3,7E+00	-3,9E+00	5,0E-01	3,9E+00	-1,4E+00	7,7E+01
-4,9E+00	6,4E+00	-1,9E+01	-4,2E+01	-1,6E+01	2,5E+01	-2,3E+01	5,0E-02	-8,2E+00	6,4E+00	7,4E+00	2,2E+00	1,0E+00	-5,1E-01	3,6E+00	2,8E+00	9,7E-01	-5,9E-01	-3,0E+00	1,2E+00	-5,9E+01
6,5E+01	2,8E+01	-3,3E+01	-3,2E+00	-7,8E+00	-1,6E+02	1,9E+01	8,6E-01	1,3E+01	-4,1E+00	-5,4E+00	-3,5E+00	-1,8E+01	-3,5E+00	-3,5E+00	-1,0E+00	-2,0E+00	1,2E-02	1,1E+00	-3,4E-01	2,2E+01
1,2E+01	5,1E+01	-1,9E+01	2,2E+01	2,1E+01	-1,4E+02	-3,9E+01	-5,8E-01	-6,0E+00	5,8E+00	1,1E+01	6,5E+00	-1,2E+01	-3,4E+00	4,6E+00	2,4E+00	2,3E+00	-4,0E-01	-2,3E+00	8,6E-01	-4,6E+01
-8,7E+01	8,8E+01	5,1E+01	4,8E+01	-6,7E+01	9,1E+01	6,6E+01	-9,4E-01	-2,2E+00	-3,9E+00	-1,6E+01	-1,1E+01	5,1E+00	2,8E+00	-5,1E+00	-2,1E+00	-3,4E+00	3,1E-01	1,6E+00	-5,4E-01	3,3E+01
-1,2E+02	4,4E+01	-5,9E+01	7,9E+01	2,6E+01	2,3E+02	-5,1E+01	3,6E+00	5,8E+00	3,1E+00	1,1E+01	6,8E+00	2,4E+01	3,0E+00	3,5E+00	1,7E+00	2,1E+00	-2,9E-01	-1,3E+00	4,6E-01	-2,7E+01
-2,2E+01	7,5E+01	5,4E+01	9,7E+01	-9,2E+00	1,7E+02	1,7E+01	5,2E-01	-3,2E+00	-1,4E+00	-4,6E+00	-2,9E+00	1,3E+01	3,0E+00	-1,4E+00	-4,6E-01	-9,8E-01	5,0E-02	2,7E-01	-6,7E-02	5,6E+00
-9,5E+00	9,7E+01	3,3E+01	1,7E+02	-1,4E+01	3,1E+02	2,2E+01	-3,4E+00	-1,7E+00	6,6E-01	-3,8E+00	-2,9E+00	3,1E+01	5,1E+00	-1,6E+00	9,2E-01	-2,0E+00	-4,5E-01	-1,4E+00	7,0E-01	-2,7E+01
-2,5E+00	-4,8E+01	6,7E+01	3,7E+01	-2,6E+01	4,1E+01	6,0E-01	-5,5E+00	-1,9E+01	4,8E+00	1,2E+00	-1,6E+00	5,1E+00	1,7E+00	2,5E+00	1,0E+00	8,6E-01	-4,2E-02	-1,2E+00	4,4E-01	-2,4E+01
-2,2E+02	-1,9E+02	1,3E+00	-1,7E+02	-8,2E+00	-3,2E+02	1,7E+01	4,3E+00	2,9E+00	-1,3E+00	-2,9E+00	-1,1E+00	-2,2E+01	-3,9E+00	-1,2E+00	-1,3E-01	-9,0E-01	-7,8E-02	-6,5E-02	7,6E-02	-9,2E-01
-1,6E+02	8,8E+01	-1,6E+01	-2,0E+02	-1,6E+01	-1,7E+02	1,9E+01	1,1E+00	1,1E+00	-8,4E-01	-3,8E+00	-2,0E+00	-2,5E+01	-4,2E+00	-1,3E+00	-2,0E-01	-1,0E+00	-5,4E-02	-3,0E-02	6,4E-02	-2,3E-01
-6,7E+01	3,8E+01	1,2E+02	-2,5E+02	-6,0E+01	-2,9E+02	2,0E+01	-7,7E+00	-3,5E+01	1,3E+01	2,9E+00	-1,8E+00	-1,2E+01	-2,2E+00	4,9E+00	4,2E+00	3,0E-01	-8,7E-01	-5,3E+00	2,2E+00	-1,0E+02
9,6E+01	-4,5E+02	7,8E+01	4,9E+01	-7,2E+01	-1,9E+01	-1,4E+01	-4,4E+01	2,0E+01	1,2E+01	3,3E+00	-5,7E+01	-1,0E+01	9,9E+00	4,4E+00	4,1E+00	-4,9E-01	-5,1E+00	1,9E+00	-1,0E+02	
5,8E+02	-9,2E+02	-8,1E+01	-4,9E+02	4,9E+01	-6,3E+02	2,1E+01	1,2E+01	2,8E+01	-1,3E+01	-8,2E+00	-3,5E+00	-1,6E+02	-3,0E+01	-7,3E+00	-1,8E+00	-4,0E+00	-9,8E-02	2,0E+00	-6,1E-01	4,2E+01
1,1E+03	1,6E+03	3,2E+01	-6,5E+01	-3,5E+01	5,2E+02	-5,4E+00	-3,0E+00	-1,3E+01	4,5E+00	1,2E+00	7,7E-01	1,5E+02	2,9E+01	2,7E+00	-9,4E-03	1,8E+00	2,6E-01	-1,2E-01	-6,4E-02	-3,0E+00
1,5E+02	3,5E+03	2,2E+02	2,6E+03	1,2E+01	1,6E+03	-1,2E+01	1,9E+00	6,5E+00	-1,7E+00	-3,7E-01	-8,4E-01	5,8E+02	1,1E+02	-9,1E-01	4,3E-01	-8,6E-01	-2,4E-01	-4,3E-01	2,3E-01	-8,0E+00
-1,2E+03	5,5E+02	-4,1E+01	-6,2E+02	2,2E+01	6,1E+02	-1,2E+01	9,4E-01	3,8E+00	1,1E+00	4,0E+00	1,6E+00	-9,1E+00	-2,4E+00	7,4E-01	1,0E+00	1,3E-01	-2,8E-01	-9,1E-01	3,8E-01	-1,8E+01
-1,5E+03	-2,0E+03	1,8E+02	1,9E+03	-6,8E+00	3,5E+02	7,8E+00	2,7E+00	3,4E+00	-3,9E+00	-5,2E+00	-2,5E+00	-1,6E+01	-2,5E+00	-2,4E+00	-9,7E-01	-1,3E+00	1,0E-01	8,7E-01	-2,9E-01	1,7E+01
6,4E+01	-2,9E+02	-4,5E+01	-6,9E+01	-8,5E+01	-2,2E+02	-2,2E+02	3,0E+01	-6,0E+01	4,9E+01	4,8E+01	2,3E+01	-3,8E+01	-1,1E+01	2,5E+01	1,7E+01	8,4E+00	-3,3E+00	-1,8E+01	7,2E+00	-3,6E+02
-8,2E+01	-2,2E+03	-1,3E+02	-1,7E+03	1,5E+01	-3,5E+03	2,9E+01	-2,7E+00	6,3E-02	-4,5E-01	4,9E-01	7,0E-01	-5,2E+02	-9,4E+01	2,4E-02	-7,2E-01	5,3E-01	2,5E-01	8,9E-01	-4,0E-01	1,7E+01
3,7E+00	-7,3E+00	3,6E+01	8,6E-02	-2,1E+01	1,4E+01	-1,9E+02	-2,8E+01	-3,5E+01	1,1E+01	3,2E+01	4,7E+00	8,8E-01	-2,4E+00	1,2E+01	1,2E+01	2,3E+00	-2,7E+00	-1,2E+01	5,0E+00	-2,4E+02
-5,6E+02	-1,7E+03	1,6E+02	2,4E+03	7,9E+00	-5,3E+03	1,1E+01	-3,2E+00	-5,0E+00	3,5E+00	3,8E+00	2,1E+00	-1,2E+02	-2,2E+01	2,2E+00	2,4E-01	1,5E+00	1,2E-01	-1,2E-01	-3,9E-02	-3,0E+00
1,6E+02	-1,3E+02	1,8E+02	7,1E+01	1,6E+02	1,2E+02	-2,8E+01	-1,9E+01	4,6E+01	2,0E+01	-2,9E+00	1,1E+00	4,6E+00	-2,6E+00	-7,4E-01	1,6E-01	-6,1E-01	-1,1E-01	-1,6E-01	8,9E-02	-2,7E+00
2,2E+01	-1,4E+01	-6,0E+01	1,4E+01	1,7E+01	8,7E+00	8,5E+00	-3,4E+01	-1,5E+02	4,5E+01	2,8E+01	7,8E+00	4,6E+00	-1,8E+00	1,8E+01	1,5E+01	3,4E+00	-3,1E+00	-1,7E+01	7,0E+00	-3,4E+02
4,1E+01	-3,8E+01	6,3E+01	2,0E+01	4,1E+01	1,4E+01	-5,8E+01	1,5E+02	-7,3E+00	-2,1E+01	-2,4E+01	-3,4E+01	-3,2E+00	9,0E-02	-1,0E+01	-8,0E+00	-3,5E+00	1,8E+00	8,4E+00	-3,3E+00	1,7E+02
-2,8E+01	2,4E+01	-1,6E+01	-1,4E+01	1,1E+01	-9,9E+00	-3,1E+00	-1,3E+01	1,3E+01	-1,9E+01	-7,7E+01	-1,6E+01	-1,8E+00	8,0E+00	-1,3E+01	-1,4E+01	-3,4E+00	3,5E+00	1,4E+01	-5,8E+00	2,8E+02
-3,6E+01	3,0E+01	-2,4E+01	-1,7E+01	-1,7E+01	-1,2E+01	1,9E+01	-6,4E+00	2,3E+01	5,8E+01	-7,0E+00	-1,6E+01	3,5E+00	1,7E+01	-6,2E+00	-6,6E+00	5,0E-01	1,5E+00	8,1E+00	-3,4E+00	1,6E+02
-1,7E+01	1,6E+01	-3,8E+01	-7,2E+00	-1,4E+01	-5,3E+00	1,8E+00	-2,9E+01	4,5E+01	3,0E+01	2,9E+01	-1,4E+01	1,0E+01	4,6E+01	1,7E+01	1,1E+01	2,8E-01	-2,6E+00	-1,7E+01	6,8E+00	-3,3E+02
-5,2E+01	-2,2E+02	3,6E+01	4,8E+02	-7,7E-01	-5,6E+00	-8,0E+00	5,3E+00	-6,0E+00	-9,9E-01	8,5E+00	2,9E+01	-2,8E+04	-5,1E+03	-1,8E+01	-3,1E+00	-9,7E+00	-2,2E-01	3,0E+00	-7,5E-01	6,3E+01
-8,8E+00	-4,0E+01	-4,3E+00	8,7E+01	-7,0E+00	-4,9E-01	-1,2E-01	-1,7E+01	6,9E+00	1,4E+01	-2,0E+00	-5,6E+01	-5,1E+03	-9,4E+02	1,5E+01	1,6E+01	1,9E+00	-4,4E+00	-1,8E+01	7,3E+00	-3,4E+02
-2,1E+01	1,7E+01	-2,0E+01	-9,3E+00	-9,0E+00	-6,4E+00	1,0E+01	-1,8E+01	1,4E+01	1,1E+01	4,4E+00	-2,2E+01	-1,2E+01	-2,4E+01	-1,6E+00	-2,0E+01	1,1E+00	1,7E-01	1,6E-01	-1,4E-02	2,3E+00
-2,2E+00	1,5E+00	3,1E+00	-1,2E+00	1,6E+00	-6,8E-01	2,0E+00	6,3E+00	-9,2E-01	-4,1E+00	-5,2E+00	8,8E+00	-1,0E+00	4,0E+00	2,2E+01	-8,2E+00	-4,2E-01	1,7E+00	8,9E+00	-3,7E+00	1,7E+02
-1,5E+01	1,3E+01	-1,5E+01	-6,7E+00	-6,8E+00	-4,6E+00	7,3E+00	-1,2E+01	1,1E+01	9,2E+00	3,2E+00	-1,4E+01	-6,8E+00	-1,7E+01	-3,1E+00	7,8E+00	-1,8E+00	7,9E+00	-1,5E+00	4,6E-01	-3,0E+01
5,6E-02	3,5E-01	-6,5E+00	1,8E-01	-3,5E+00	-1,0E-01	-1,5E+00	-9,4E+00	3,2E+00	8,4E+00	7,1E+00	-1,0E+01	5,8E-01	-8,2E+00	-3,3E+00	1,4E+01	-1,9E+01	-4,5E+00	-1,5E+01	6,4E+00	-2,9E+02
7,2E-01	-4,1E-01	-2,7E+00	4,1E-01	-1,5E+00	1,6E-01	-1,2E+00	-4,1E+00	1,2E+00	4,2E+00	3,4E+00	-4,2E+00	6,8E-01	-3,6E+00	-1,5E+00	6,7E+00	-5,2E+00	-2,3E+00	-7,6E+00	1,8E+00	-1,5E+02
-2,4E+00	1,4E+00	8,7E+00	-1,4E+00	5,1E+00	-5,2E-01	3,8E+00	1,3E+01	-4,1E+00	-1,4E+01	-1,1E+01	1,4E+01	-2,3E+00	1,2E+01	5,0E+00	-2,2E+01	1,7E+01	7,7E+00	2,7E+01	-1,2E+01	4,9E+02
-1,5E-06	3,8E-06	-1,6E-04	8,9E-06	1,6E-04	-2,1E-06	-2,8E-04	7,2E-06	3,4E-04	-2,7E-04	1,2E-03	6,2E-04	3,6E-05	-2,0E-04	7,3E-03	4,3E-03	6,1E-02	-5,8E-03	-1,9E+00	-4,4E+00	0

Tabela 21: Controlador final obtido para a abordagem Simultânea – viga de 20 elementos finitos

7,1E-01	-1,6E+01	4,4E+00	7,4E-01	-5,0E-01	2,1E-01	-4,5E+00	-8,8E-01	6,8E+00	4,9E+00	1,1E+01	1,2E+01	-1,0E+01	-2,7E+01	1,0E+00	-1,4E+01	5,8E+00	1,6E+01	-3,3E-01	-2,4E+01	3,4E+00	-1,4E+01
3,0E+01	-2,0E+00	3,8E-01	2,4E+01	-5,1E+00	3,9E+01	9,4E+00	1,4E+01	5,4E+00	2,1E+01	9,5E+00	2,1E+01	7,8E-01	-1,3E+01	-3,0E+00	-5,0E+00	-3,9E+00	7,9E+00	1,6E+00	1,6E+01	4,0E-01	-2,5E+00
-5,9E+00	6,9E+00	2,1E+02	-5,2E+00	-4,8E+00	2,5E+00	4,1E+01	-3,4E+01	4,8E+01	8,1E+01	-1,3E+02	-1,1E+02	-5,6E+02	1,4E+02	-1,2E+02	8,1E+01	-1,4E+02	2,0E+02	-5,2E+01	3,0E+01	-3,5E+02	-2,6E+02
-6,4E+00	-2,2E+01	4,1E+00	-2,2E+01	2,1E+02	-5,3E+01	-3,6E+01	-5,9E-01	4,4E+00	5,4E+00	-3,9E+01	2,9E+01	1,2E+01	1,2E+01	-7,2E+00	1,7E+00	3,3E+01	1,1E+01	-1,6E+01	-5,9E+00	1,7E+01	1,4E+00
9,5E+00	6,0E+00	-4,9E+00	-1,8E+02	-1,8E+01	1,6E+02	3,2E+01	2,3E+01	1,7E+01	4,9E+00	2,5E+01	2,2E+01	1,2E+01	-2,1E+01	2,7E+01	1,1E+01	3,2E+00	2,2E+00	-8,2E+00	5,5E+00	6,3E+00	3,7E+00
9,1E+00	-3,5E+01	-9,2E+00	3,0E+01	-1,5E+02	-4,0E+01	-2,3E+02	3,9E+01	5,5E+01	-3,0E+01	-8,5E+01	5,1E+01	-1,1E+01	-1,5E+00	2,9E+01	1,6E+01	4,8E+01	5,0E+00	-2,7E+00	-9,3E+00	-1,6E+00	-5,5E+00
1,3E+00	-2,3E+00	-3,8E+01	2,5E+01	-2,3E+01	2,3E+02	-3,4E+01	-1,4E+02	7,5E+01	-2,3E+02	-1,7E+01	1,2E+01	-1,2E+01	9,3E+00	4,2E+01	3,9E+01	4,3E+01	-1,9E+01	1,0E+01	-1,0E+01	-2,6E+01	1,2E+01
6,1E+00	-9,5E+00	4,6E+01	-1,5E+01	-3,0E+00	-3,9E+01	1,5E+02	-2,3E+01	3,6E+02	1,6E+02	-2,4E+01	2,6E+01	8,8E+01	2,7E+01	-5,9E+01	-4,8E+01	-4,6E+01	1,7E+01	-1,9E+01	-1,0E+01	8,2E+01	3,3E+01
-6,0E+00	4,4E+00	-5,9E+01	-5,5E+00	-2,8E+00	-7,4E+01	-1,0E+02	-3,3E+02	-6,0E+01	1,4E+02	8,0E+01	1,1E+02	2,3E+01	6,2E+01	4,1E+01	3,3E+01	5,6E+01	-1,9E+01	3,3E-02	2,0E+01	-1,2E+01	2,2E+01
1,8E+01	-1,9E+01	-8,0E+01	1,5E+01	5,5E+00	-2,0E+01	2,1E+02	-1,6E+02	-2,0E+02	-8,1E+01	-2,7E+02	-3,0E+01	6,5E+01	-4,1E+01	-3,3E+01	-5,5E+01	-2,3E+01	-2,1E+01	2,3E+01	-6,2E+00	3,4E+01	1,7E+01
-1,4E+01	1,8E+00	1,2E+02	4,7E+01	-1,9E+01	8,4E+01	4,1E+01	3,4E+01	-9,4E+01	2,9E+02	-2,1E+01	3,2E+00	6,6E+01	1,1E+02	-8,0E+01	2,8E+00	4,9E+01	1,5E+01	6,0E+01	-2,5E+01	4,0E+01	2,7E+01
-1,8E+01	-8,7E+00	1,2E+02	-3,3E+01	-1,1E+01	-6,5E+01	-9,3E+00	-1,1E+01	-9,7E+01	4,6E+01	-2,6E+01	-2,5E+01	5,7E+01	1,6E+02	-2,4E+02	-7,9E+00	6,7E+01	4,8E+01	1,2E+02	2,5E+00	-7,7E+01	-2,8E+01
2,1E+01	2,7E+00	5,2E+02	-8,3E+00	-1,4E+01	1,5E+01	-6,6E-01	-9,6E+01	-3,3E+01	-8,8E+01	-1,0E+02	-7,9E+01	-1,1E+02	-1,4E+02	6,1E+01	1,4E+02	-2,7E+01	1,6E+02	1,2E+02	-1,8E+00	6,2E+01	-9,6E+00
4,5E+01	8,3E+00	-1,1E+02	2,1E+01	-8,2E+00	-4,5E+01	2,2E+01	3,1E+01	-9,2E+01	3,5E+00	-1,2E+02	-1,6E+02	1,4E+02	-7,3E+01	-2,5E+02	-6,0E+01	-2,6E+02	-7,3E+01	1,1E+02	8,9E+00	-1,0E+02	-9,3E+01
3,3E+01	7,3E+00	1,2E+02	3,1E+01	-1,9E+00	-9,7E-02	1,2E+01	3,7E+01	2,6E+01	3,9E+01	1,3E+02	2,6E+02	-4,3E+01	3,3E+02	-1,2E+02	4,8E+01	-1,1E+02	4,4E+01	2,1E+02	1,8E+01	-1,3E+02	-7,7E+01
2,6E+01	8,6E+00	3,4E+01	7,9E+00	-1,3E+01	-1,3E+01	4,9E+00	1,3E+01	2,7E+00	6,1E+01	-7,6E+00	4,2E+01	-8,7E+01	7,9E+01	-2,4E+01	-7,5E+01	1,5E+02	-3,0E+02	3,2E+02	-2,4E+00	1,8E+02	1,6E+02
4,1E+00	7,5E+00	1,2E+01	-9,3E+00	4,2E+00	-3,3E+01	7,6E+00	4,9E+01	-1,8E+01	4,0E+01	-3,5E+01	-5,7E+01	6,6E+01	2,7E+02	9,2E+00	-1,6E+02	-3,9E+01	-3,3E+01	2,5E+02	-4,5E+01	2,2E+02	-3,2E+01
3,6E+00	-4,1E+00	1,7E+02	-4,7E+00	8,3E+00	-1,4E-01	2,0E+01	-4,7E+01	1,1E+01	-2,0E+01	-1,1E+01	-2,4E+01	-1,6E+02	1,1E+02	-4,4E+01	2,2E+02	4,7E+01	-4,2E+01	-8,1E+01	1,2E+01	-1,6E+02	-1,0E+02
-1,4E+01	4,2E+00	9,1E+01	4,3E+00	-3,0E+00	-2,5E+00	-2,4E+01	8,4E+01	-7,7E+00	7,3E+01	-6,7E+01	-1,4E+02	-8,8E+01	-1,6E+02	-1,1E+02	-3,0E+02	-2,4E+02	1,3E+02	-1,1E+02	-4,0E+01	4,3E+02	-3,6E+02
4,7E+01	-3,0E+01	-2,3E+01	1,2E+01	-1,2E+01	-5,3E+00	2,9E+01	-4,2E+00	1,5E+01	-1,8E+01	4,4E+01	1,7E+01	-4,2E+00	-1,4E+01	-3,6E+01	-1,4E+01	3,9E+01	-1,8E+01	8,5E+01	-3,4E+01	-1,0E+01	-2,5E-01
1,5E+01	2,2E+00	3,2E+02	1,2E+01	-8,2E+00	-2,6E+01	-1,8E+00	1,2E+01	-1,6E+01	-5,4E+01	1,9E+01	5,9E+01	1,2E+01	3,5E+01	3,3E+01	-8,1E+01	-2,2E+02	1,1E+02	-5,7E+02	6,1E+01	-3,5E+02	4,6E+02
-2,6E+00	5,0E+00	2,1E+02	-6,4E+00	-1,1E+00	1,5E+01	-4,6E+00	-3,9E+01	-1,2E+01	-6,2E+00	-2,7E+01	5,1E+01	2,6E+01	1,4E+02	1,0E+02	-2,0E+02	-7,9E+01	2,2E+02	2,6E+02	1,5E+01	-4,7E+02	-2,8E+02
-1,2E+01	-1,2E+01	8,0E+00	1,5E+01	4,8E+00	2,9E+01	1,7E+01	1,5E+01	-4,0E+00	1,9E+01	-1,1E+01	-2,0E+01	1,6E+01	6,3E+01	1,4E+01	5,8E+01	-1,6E+01	-2,3E+01	-3,4E+01	1,5E+02	-1,3E+01	1,0E+02
5,0E+00	4,2E+00	-5,2E+02	8,0E+00	1,3E+01	2,3E+00	8,0E+00	2,7E+01	1,5E+01	1,6E+01	3,8E+01	1,1E+01	1,8E+02	-6,1E+01	2,1E+01	-3,5E+01	7,8E+01	-1,1E+02	1,1E+01	-9,0E+00	1,7E+02	5,1E+02
1,7E+00	5,4E+00	6,5E+01	-3,8E+00	-8,4E+00	-1,3E+01	3,3E+01	1,1E+01	2,9E+01	6,9E+01	-6,1E+01	-4,3E+01	-1,5E+02	-3,3E+00	4,3E+01	3,7E+01	4,6E+00	1,7E+02	8,2E+00	2,3E+01	-4,2E+02	5,6E+02
-3,8E+01	-4,1E+01	-1,2E+01	-7,1E+00	6,1E+00	-3,4E+00	-3,8E+00	-1,5E+00	6,9E-01	1,1E+01	4,1E+00	-1,6E+01	-1,0E+01	-7,1E+00	1,7E+01	3,9E+00	1,3E+00	7,2E+00	8,8E-01	8,5E+00	1,1E+01	-1,5E+00
-5,6E+00	1,5E+00	-2,8E+02	7,5E+00	1,4E+01	2,0E+00	2,6E+01	2,1E+01	4,4E+01	5,4E+01	-4,8E+00	-6,7E+01	-1,4E+02	-2,6E+01	-1,3E+02	1,2E+02	6,5E+01	-2,0E+02	-6,6E+01	2,6E+00	1,6E+02	1,9E+02
1,6E+01	-6,7E+00	6,7E+00	-3,1E+00	5,6E+00	-7,9E+00	9,5E+00	1,5E+00	-1,1E+00	-1,1E+01	-4,3E+00	-9,5E+00	1,2E+01	3,3E+01	-1,5E+00	2,0E+01	-3,4E+00	-2,0E+01	5,5E+00	1,5E+01	-6,0E-01	2,1E+01
-1,1E+01	1,3E+00	7,7E+02	-4,8E+00	-1,4E+01	-5,3E+00	-1,7E+00	-1,4E+01	-1,3E+01	-9,7E+00	-3,0E+01	4,5E+00	-1,4E+02	7,5E+01	-8,4E+00	2,0E+01	-1,1E+02	1,6E+02	-5,0E+01	2,2E+01	-2,7E+02	-1,9E+02
-3,5E+01	4,9E+01	9,3E-01	-3,0E+00	7,6E+00	2,7E+00	-1,1E+00	2,4E+00	2,2E+00	1,5E+00	-1,3E+01	-1,1E+01	1,5E+01	2,9E+01	1,0E+01	1,7E+01	6,2E+00	-5,2E+00	-3,1E+00	3,0E+01	4,8E+00	9,3E+00
4,4E+00	3,2E+00	-2,7E+02	3,3E+00	4,4E+00	1,0E+00	3,4E-01	1,4E+01	2,5E+00	7,9E+00	4,0E+00	-7,6E+00	-3,4E-01	1,5E+00	-2,8E+01	1,2E+02	-2,8E+01	1,9E+02	9,9E+01	-4,5E+00	6,0E+01	2,0E+01
4,3E+01	8,2E+00	3,2E+00	1,7E+00	-1,1E+00	-7,7E-01	3,6E+00	3,3E-01	3,1E+00	-1,3E-01	5,9E+00	6,8E+00	-4,8E-01	-4,3E+00	-2,4E+00	-1,9E+00	1,5E+00	-8,9E-02	5,0E+00	-1,2E+01	-5,7E-01	3,2E+00
-2,1E-01	3,7E+00	-2,1E+02	3,1E+00	8,8E+00	6,2E+00	3,1E+00	4,7E+00	7,2E+00	-1,5E+00	2,8E+01	1,9E+01	1,4E+02	-3,3E+01	3,7E+01	-9,5E+01	6,6E+01	-1,9E+02	-4,1E+01	-2,1E+00	7,2E+01	3,9E+00
-7,7E-01	1,8E+00	-6,8E+02	5,5E+00	1,6E+01	2,1E+00	3,0E+01	2,7E+01	4,8E+01	6,5E+01	-2,5E+01	-9,3E+01	-2,9E+02	1,7E+00	-2,0E+02	4,0E+02	-3,1E+01	3,5E+02	1,9E+02	-1,9E+01	2,8E+02	3,2E+02
-4,5E-02	1,3E+01	-9,9E-01	5,2E+00	3,9E+00	4,9E+00	4,9E+00	4,4E+00	-9,9E-02	7,7E-01	-3,3E+00	-2,2E+00	8,9E+00	1,9E+01	2,2E+00	1,3E+01	2,0E+00	-6,3E+00	2,6E+00	1,9E+01	-8,0E-02	1,2E+01
-1,3E+01	3,2E+00	1,4E+00	2,1E+00	3,1E+00	6,3E-02	2,6E+00	1,2E+00	4,3E+01	1,8E+00	1,6E+00	2,1E+00	2,9E+00	3,9E+00	1,5E+00	4,3E+00	3,9E+00	1,5E+00	6,0E+00	3,9E+00	-8,0E-02	-8,0E-02
1,8E+00	1,2E+01	-3,9E-01	4,8E+00	4,1E+00	4,1E+00	7,0E+00	3,4E+00	-4,7E-01	1,4E+00	-1,9E+00	-2,1E+00	8,3E+00	1,7E+01	2,7E+00	1,1E+01	-1,5E-01	-4,9E+00	4,2E+00	1,5E+01	3,2E+00	8,5E+00
1,6E+01	-3,9E+00	4,2E+00	1,3E+00	-4,0E-02	1,1E+00	2,5E+00	2,3E+00	1,6E+00	4,5E-02	4,8E+00	5,0E+00	-3,4E-01	-2,4E+00	-1,4E+00	6,3E-01	1,0E+00	2,1E+00	3,2E+00	-6,6E+00	-7,3E-01	1,9E+00
7,9E+00	-4,9E-01	1,6E+00	2,5E+00	8,0E-01	1,6E+00	3,9E+00	3,6E+00	1,0E+00	1,5E+00	3,7E+00	3,8E+00	2,2E+00	1,9E+00	3,0E-01	2,3E+00	2,3E+00	1,5E+00	2,5E+00	-1,5E+00	2,7E+00	2,3E+00
2,7E+01	-4,8E+00	1,9E+00	2,9E+00	3,9E-02	-1,2E+00	6,9E+00	1,9E+00	2,0E+00	-1,6E+00	4,8E+00	7,1E+00	-1,2E+00	-3,9E+00	-3,3E+00	9,8E-01	-1,3E+00	-2,2E+00	7,1E+00	-1,5E+01	-1,4E+00	4,4E+00
1,5E+00	1,6E+00	3,2E+00	2,4E+00	1,8E+00	1,3E+00	3,2E+00	6,3E-01	1,7E+00	1,4E+00	2,7E+00	1,8E+00	2,2E+00	1,4E+00	2,0E+00	2,4E+00	2,1E+00	2,2E+00	2,1E+00	2,6E+00	2,3E+00	1,7E+00

Tabela 21: Controlador final obtido para a abordagem Simultânea – viga de 20 elementos finitos (continuação)

1,9E+01	-1,5E+00	-1,1E+01	2,3E+01	2,5E+01	-2,4E+00	1,6E+01	3,0E+01	1,4E+01	-2,5E+01	6,2E+00	2,2E+01	6,4E+00	1,4E+01	6,2E+00	-2,9E+00	5,2E-02	-9,8E-01	-4,9E+01
2,0E+01	1,2E+00	-5,1E+00	6,1E+01	5,9E+00	3,9E+00	2,4E+00	-3,1E+01	3,8E+00	-1,7E+01	2,2E+00	3,3E+00	-5,4E+00	1,3E+01	2,5E+00	-1,4E+00	-6,6E+00	-3,9E+00	-2,4E+02
2,6E+01	2,7E+02	3,0E+02	3,2E+01	6,6E+02	6,1E+00	-1,5E+02	4,3E-01	6,4E+02	2,3E+00	-2,9E+02	8,6E+02	4,7E+00	-6,9E-01	4,8E+00	2,2E+00	3,2E+00	2,9E+00	2,8E+01
-1,8E+00	1,2E+00	1,8E-01	8,1E-01	-8,2E+00	1,4E+01	3,5E-01	9,2E+00	1,2E+00	3,9E+00	5,3E+00	-3,2E+00	5,2E+00	-7,9E-01	3,6E+00	2,0E+00	3,7E+00	6,0E-01	3,5E+01
2,1E+00	-8,2E+00	-1,4E+01	6,0E+00	-1,5E+01	-1,6E+00	2,7E+00	-1,0E+00	-3,2E+00	-1,3E+00	8,6E+00	-6,8E+00	1,7E+00	3,8E+00	1,9E+00	1,5E+00	-8,7E-01	2,3E+00	-6,0E+01
-3,1E+01	-1,1E+00	-2,1E+00	5,7E+00	-8,1E+00	8,8E+00	2,2E+00	1,0E+01	1,9E+00	2,7E+00	-1,4E+00	2,9E+00	1,0E-01	5,9E+00	3,2E+00	1,4E+00	5,0E-01	3,2E+00	-5,1E+01
-9,4E+00	1,0E+01	-2,1E-01	-2,0E-01	1,6E+01	5,3E+00	-3,5E+00	3,9E+00	1,5E+00	3,5E+00	2,6E+01	-3,8E+00	2,2E+00	2,3E+00	9,5E-01	3,1E+00	4,5E+00	4,2E+00	3,6E+01
-1,1E+01	-1,9E+00	9,7E-01	6,1E+00	-1,6E+01	1,3E+00	1,6E+01	3,8E+00	-1,8E+01	3,2E+00	1,2E+01	-3,0E+01	-3,3E-01	1,6E+00	1,0E+00	2,8E+00	1,6E+00	2,0E+00	-8,3E+00
1,8E+01	5,9E+00	-2,4E+01	6,7E-01	1,2E+01	1,0E+01	-2,7E+00	4,9E+00	-5,3E+00	1,4E+00	3,6E+01	-1,8E+01	5,1E+00	1,8E+00	7,0E+00	1,4E+00	2,9E+00	1,9E+00	1,4E+01
-3,7E+01	2,7E+01	-2,6E+01	1,0E+01	4,8E+01	-3,7E+00	4,9E+00	3,1E+00	-1,8E+01	3,5E+00	5,5E+01	-2,9E+01	-1,3E+00	6,1E+00	1,8E+00	2,9E+00	1,7E+00	1,9E+00	-7,2E+01
2,0E+01	-3,4E+01	3,8E+00	-1,8E+01	-6,6E+01	1,7E+01	2,9E+01	1,5E+01	-1,1E+01	2,3E+00	-3,7E+01	-2,3E+00	1,1E+01	-2,9E+00	4,2E+00	2,9E+00	7,3E+00	3,4E+00	9,4E+01
2,2E+01	-3,3E+01	3,6E+01	-3,9E+00	-2,5E+01	2,1E+01	3,6E+01	4,0E+00	3,3E+00	5,9E+00	-8,5E+01	3,7E+01	8,6E+00	-8,7E+00	4,0E-01	4,4E+00	1,3E+01	6,1E+00	2,1E+02
-7,2E+00	-1,4E+02	6,2E+01	7,7E+00	-1,6E+02	-1,2E+01	2,1E+02	-3,5E+00	-8,8E+01	8,9E-01	-3,0E+02	4,8E+01	-5,2E+00	8,3E+00	-8,1E-01	9,8E-02	-1,5E+00	2,3E+00	-1,0E+02
-5,4E+01	9,8E+00	-8,6E+00	3,1E+01	4,0E+01	-3,6E+01	-5,4E+01	-1,3E+01	5,3E+01	-2,3E+00	2,0E+01	3,7E+01	-1,3E+01	1,5E+01	-4,1E+00	-8,5E-01	-1,0E+01	-2,4E+00	-2,4E+02
-4,6E+01	-3,0E+00	5,8E+01	1,7E+01	8,0E+01	-2,3E+01	1,1E+02	-7,9E+00	-3,9E+01	1,0E+00	-1,7E+02	6,8E+01	-9,5E+00	9,8E+00	-2,1E+00	-5,7E-01	-3,7E+00	4,2E-01	-1,3E+02
-4,7E+01	-1,5E+01	2,7E+01	9,2E+00	-7,3E+01	-2,3E+01	-9,9E+01	-1,2E+01	-2,8E+01	5,0E+00	3,0E+02	-2,2E+02	-6,9E+00	6,1E+00	-4,6E+00	2,2E+00	-1,3E+00	1,3E+00	-8,0E+01
2,3E+01	5,7E+00	-6,0E+01	1,2E+01	-3,9E+01	9,6E-01	6,3E+01	1,3E+00	-4,2E+01	-1,7E+00	-4,4E+01	7,6E+00	2,4E+00	4,4E+00	2,5E+00	1,5E+00	1,1E+00	1,2E+00	-2,9E+01
1,0E+01	-1,1E+02	1,0E+02	1,7E+01	1,9E+02	4,7E+00	-5,2E+00	3,2E+00	-9,5E+01	3,7E+00	2,7E+02	-2,9E+02	3,7E-01	3,4E+00	2,9E+00	3,4E+00	7,0E-01	1,3E+00	-1,2E+01
7,5E+01	-1,0E+02	6,6E+00	-1,5E+01	3,6E+01	1,8E+01	7,9E+01	1,1E+01	-1,2E+02	1,7E+00	1,1E+02	-1,9E+02	9,4E+00	-2,0E-01	8,2E+00	1,4E+00	5,1E+00	3,0E+00	4,1E+01
-1,5E+02	2,3E+01	-1,1E+01	3,0E+01	9,6E+00	-2,7E+01	-1,3E+01	-6,5E+00	2,1E+01	-7,3E-01	-8,1E+00	2,3E+01	-1,2E+01	1,7E+01	-1,1E+00	-4,3E-01	-1,3E+01	-2,1E+00	-3,1E+02
-3,3E+01	-2,1E+02	3,2E+02	5,4E+00	-3,1E+02	-1,3E+01	9,7E+01	-6,4E+00	-1,1E+02	5,0E+00	1,5E+02	-1,9E+02	-3,6E+00	3,6E+00	-2,2E+00	2,9E+00	2,8E-01	2,8E+00	-2,7E+01
-2,8E+01	-4,6E+02	-6,4E+02	-1,0E+01	1,6E+01	7,6E+00	1,1E+02	7,0E+00	-1,2E+02	1,1E+00	2,3E+02	-1,8E+02	4,4E+00	2,5E+00	3,6E+00	3,5E+00	3,3E+00	2,8E+00	2,1E+01
-1,1E+01	6,0E+01	9,5E+01	3,9E+00	7,0E+01	1,6E+01	9,0E+00	2,6E+01	4,0E+00	2,9E+00	-3,5E+00	-3,4E-01	6,3E+00	-2,9E+00	4,7E+00	4,1E+00	7,3E+00	2,7E+00	9,9E+01
-7,3E+01	-2,8E+02	-6,8E+02	-3,7E+01	-7,8E+02	1,3E+00	8,5E+02	-1,0E+00	-1,2E+02	2,6E+00	-8,2E+02	2,3E+01	3,0E-01	2,8E+00	1,6E+00	2,9E+00	6,1E-01	1,1E+00	-1,2E+00
-1,1E+02	3,9E+02	-3,9E+02	5,4E+01	1,3E+03	8,2E+00	-1,5E+02	3,6E+00	3,7E+01	1,0E+00	1,5E+02	-3,7E+01	2,5E+00	3,1E+00	4,8E+00	2,4E+00	9,3E-01	1,9E+00	-3,0E+00
-2,1E+00	1,7E+01	-7,5E+01	-2,0E+01	1,8E+01	8,1E+01	-5,3E+01	2,5E+01	1,0E+00	9,8E+00	1,3E+01	2,3E+00	1,3E+01	-1,3E+01	6,0E+00	5,2E+00	1,6E+01	7,8E+00	2,9E+02
-8,4E+01	2,8E+02	-1,3E+03	-5,1E+01	-6,3E+02	1,5E+00	-1,5E+03	1,0E+01	-7,7E+01	3,1E+00	2,5E+02	1,6E+01	6,0E+00	1,1E+00	7,5E+00	2,5E+00	3,5E-01	1,5E+00	2,1E+00
-1,8E+01	4,7E+00	1,8E+01	-5,8E+01	-2,0E+01	-4,3E+00	-1,5E+01	-2,3E+00	1,1E+01	-8,2E+00	2,2E+00	3,6E+00	-3,2E+00	7,6E+00	2,6E+00	4,1E-01	-4,8E+00	4,8E-01	-1,2E+02
3,5E+00	-5,5E+02	2,8E+02	7,2E+01	1,7E+03	9,2E+00	-9,7E+02	-1,8E+00	2,8E+03	-6,5E+00	-9,4E+02	2,1E+02	1,1E+01	7,2E-01	8,5E+00	1,9E+00	3,4E+00	2,1E+00	5,6E+00
-3,0E+01	4,0E+00	1,2E+01	-3,6E+01	-1,4E+01	2,3E+01	6,3E+00	-1,0E+01	-3,2E+00	-3,5E+01	1,3E+01	7,1E+00	1,6E+01	-1,1E+01	5,0E-01	4,7E+00	1,7E+01	7,9E+00	3,1E+02
6,8E+00	1,4E+02	-7,1E+01	-5,3E-01	7,5E+01	-3,4E+00	-2,5E+03	1,8E+01	-1,6E+03	2,7E+00	-2,8E+03	-2,8E+03	-2,7E+00	2,7E+00	-6,3E-01	1,3E+00	7,7E-01	3,3E+00	5,7E+00
5,9E+00	2,1E+00	3,3E+00	1,5E+01	2,6E+00	3,1E+00	6,4E+00	5,6E+01	1,1E+01	-6,3E+00	7,8E+00	7,5E+00	-9,5E+00	1,8E+01	6,4E-01	-1,6E+00	-1,3E+01	-3,6E+00	-3,1E+02
2,7E+00	5,3E+02	-1,2E+02	-2,2E+01	-6,4E+02	3,3E+00	1,8E+03	-9,5E+00	3,0E+03	-6,5E+00	-2,6E+03	-2,2E+03	1,9E+00	2,5E+00	5,3E+00	8,2E-01	3,1E+00	4,6E-01	2,5E+00
-4,9E+00	-6,7E+02	9,7E+01	6,9E-01	-7,0E+01	3,5E-01	1,1E+02	-2,6E+00	1,4E+03	9,0E-01	2,6E+03	-3,3E+03	3,5E+00	1,7E+00	3,1E+00	2,1E+00	3,3E+00	4,5E+00	6,3E+00
-8,8E+00	2,1E+00	1,1E+01	-1,0E+01	-1,2E+01	7,6E+00	-6,3E+00	-1,9E-01	-2,0E+00	1,9E+01	1,2E-02	-1,1E+01	4,3E-01	2,0E+01	3,5E+00	3,3E+00	1,6E+00	1,7E+00	5,9E+00
2,6E+00	2,9E+00	6,6E-01	1,2E+00	4,4E+00	5,1E+00	3,1E+00	-3,9E+00	2,7E+00	5,3E+00	3,2E+00	3,9E+00	-1,6E+01	-5,9E+00	2,6E+00	3,9E+00	9,1E+00	4,4E+00	1,5E+02
-7,8E+00	3,3E+00	9,1E+00	-9,6E+00	-8,2E+00	5,1E+00	-4,8E+00	-1,0E+01	-4,4E+00	1,5E+01	-1,2E+00	-8,9E+00	-6,3E-02	-4,1E+00	-6,4E-01	-5,8E+00	2,2E+00	1,5E+00	3,2E+01
4,7E+00	2,8E+00	2,3E+00	1,1E+01	2,1E+00	-3,7E+00	1,5E+00	1,1E+01	3,8E+00	-5,3E+00	1,4E+00	1,7E+00	4,8E+00	1,4E+01	1,8E+01	-2,0E+00	-1,0E+01	-3,3E+00	-2,5E+02
2,3E+00	3,6E+00	3,6E+00	6,8E+00	2,3E+00	-1,8E+00	2,9E+00	5,8E+00	1,8E+00	-2,5E+00	3,0E+00	1,9E+00	3,8E+00	7,6E+00	6,8E+00	-5,5E-01	-4,8E+00	-9,2E-01	-1,4E+02
4,6E+00	2,6E+00	2,8E+00	1,9E+01	1,6E-01	-1,1E+01	1,6E+00	1,7E+01	2,6E+00	-1,1E+01	3,5E+00	2,7E+00	1,1E+01	2,5E+01	2,1E+00	-6,2E+00	-2,1E+01	-8,9E+00	-5,3E+02
3,5E+00	2,7E+00	1,9E+00	3,3E+00	3,0E+00	2,2E+00	1,6E+00	2,9E+00	3,6E+00	2,9E+00	2,7E+00	2,2E+00	3,1E+00	2,0E+00	1,0E+00	4,6E+00	7,4E-01	8,0E+00	0

Referências Bibliográficas

ADHIKARI, S. Damping modelling and identification using generalized proportional damping. **Journal of Sound and Vibration**, v. 293, n. 1-2, p. 156-170, May 2006.

BÄCK, T. **Selective Pressure in Evolutionary Algorithms**: A Characterization of Selection Mechanisms. IEEE International Conference on Evolutionary Computation. Orlando, FL, USA: [s.n.]. 1994. p. 57-62.

BENNER, P.; QUINTANA-ORTÍ, E. S.; QUINTANA-ORTÍ, G. **Computing optimal Hankel norm approximations of large-scale systems**. 43rd IEEE Conference on Decision and Control. Chemnitz, SN, Germany: Technische Universität Chemnitz. 2005. p. 3078-3083 Vol.3.

BOLDRINI, J. L. et al. **Álgebra Linear**. 3^a. ed. São Paulo: HARBRA Ltda., 1986.

BOYD, S. et al. **Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory**. Philadelphia, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994. ISBN 0-89871-334-X.

BROGAN, W. L. **Modern Control Theory**. 3rd. ed. Upper Sadle River, NJ, USA: Prentice Hall, 1991.

BUENO, D. D. **Controle Ativo de Vibrações e Localização Ótima de Sensores e Atuadores Piezelétricos**. Dissertação de Mestrado na Faculdade de Engenharia Mecânica, UNESP Ilha Solteira. Ilha Solteira. 2007.

CASTRO, R. E. D. **Otimização de Estruturas com Multi-objetivos Via Algoritmos Genéticos**. Tese de Doutorado na COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro. 2001.

CONN, A. R.; GOULD, N.; TOINT, L. A Globally Convergent Augmented Lagrangian Algorithm for Optimization with General Constraints and Simple Bounds. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, v. 28, p. 545-572, 1991.

CONN, A. R.; GOULD, N.; TOINT, L. A Globally Convergent Lagrangian Barrier Algorithm for Optimization with General Inequality Constraints and Simple Bounds. **Mathematics of Computation**, v. 66, p. 261-288, 1992.

DE MEDEIROS, J. B. **Estudo Analítico e Experimental do Controle Ativo de Vibrações através de Atuadores Inerciais**. Dissertação de doutorado da Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE. Rio de Janeiro. 2005.

DE PAIVA, M. Z. **Controle de estruturas flexíveis levando em conta o projeto simultâneo da estrutura e do controlador**. Dissertação de Mestrado na Faculdade de Engenharia Mecânica, UNICAMP. Campinas. 2009.

DE QUEIROZ, E. M. **Controle Ativo de Vibrações em Máquinas-Ferramentas**. Dissertação de Mestrado da Universidade Federal de Santa Catarina em Engenharia Mecânica. Florianópolis. 2007.

DOYLE, J. C. **Lecture notes in advances in multivariable control**. Office of Naval Research (ONR) - Honeywell Workshop. Minneapolis, MN, USA: [s.n.]. 1984.

DOYLE, J. C. et al. State-space solutions to standard \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ control problems. **IEEE Transaction on Automatic Control**, 1989. 831-847.

FATHY, H. K. et al. **On the coupling between the plant and controller optimization problems**. Proceedings of the American Control Conference. Arlington, VA: [s.n.]. 2001. p. 25-27.

FIGUEIREDO, L. F. D. C. **Estabilidade e controle \mathcal{H}_∞ de sistemas de controle em rede com atrasos variantes no tempo e incertezas de modelo**. Dissertação de Mestrado do Departamento de Engenharia Elétrica, Faculdade de Tecnologia da Universidade de Brasília. Brasília. 2011.

FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; EMAMI-NAEINI, A. **Feedback Control of Dynamic Systems**. 4th. ed. New Jersey: Prentice Hall, 2001.

GAHINET, P.; APKARIAN, P. A linear matrix inequality approach to \mathcal{H}_∞ control. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, 1994.

GAWRONSKI, W. K. **Advanced Structural Dynamics and Active Control of Structures**. New York: Springer-Verlag, 2004.

GERVINI, V. I. **Controle Adaptativo de Estruturas Flexíveis**. Dissertação de Doutorado do Instituto Tecnológico de Aeronáutica em Engenharia Eletrônica e Computação. São José dos Campos. 2003.

GLOVER, K. All Optimal Hankel Norm Approximation of Linear Multivariable Systems, and their L_∞ -error Bounds. **Internacional Journal of Control**, London, v. 39, n. 6, p. 1145-1193, 1984.

GOMES, S. C. P. et al. Desenvolvimento de interfaces para a operação de uma plataforma de ensaios de embracações. **VETOR - Revista de Ciências Exatas e Engenharias (FURG)**, Rio Grande, RS, 2009. 05-19.

GOODWIN, G. C.; GRAEBE, S. F.; SALGADO, M. F. **Control System Design**. [S.l.]: Prentice Hall, 2000.

GRIGORIADIS, K. M.; WU, F. **Integrated \mathcal{H}_∞ Plant/Controller design via Linear Matrix Inequalities**. Conference on Decision & Control. Sand Diego, CA, USA: [s.n.]. 1997. p. 789-790.

HEDRICK, P. **The Princeton Guide To Ecology - Population Genetics and Ecology**. Princeton, NJ, USA: Princeton University Press, 2009. ISBN 978-1-4008-3302-3. Disponível em: <Available at http://press.princeton.edu/chapters/s1_8879.pdf>.

HOLLAND, J. H. **Adaptation in Natural and Artificial Systems**. [S.l.]: University of Michigan Press, 1975.

HUTTON, D. V. **Fundamentals of Finite Element Analysis**. New York: McGraw-Hill, 2004.

INOVAÇÃO Tecnológica. **Algoritmos Genéticos**: as invenções que evoluem, 2011. Disponível em: <<http://www.inovacaotecnologica.com.br/noticias/noticia.php?artigo=invencoesevolutivas-algoritmos-geneticos>>. Acesso em: Maio 2011.

JAIN, L. C.; MARTIN, N. M. (Eds.). **Fusion of Neural Networks, Fuzzy Systems and Genetic Algorithms**: Industrial Applications. USA: CRC Press, 1998.

KREINOVICH, V.; QUINTANA, C.; FUENTES, O. Genetic Algorithms: What Fitness Scaling Is Optimal? **Cybernetics and Systems: an International Journal**, v. 24, p. 9-26, 1993.

KWON, Y. W.; BANG, H. **The Finite Element Method Using MATLAB**. Boca Raton, FL, USA: CRC-Press, 1997.

LIVNE, E.; SCHMIT, L. A.; FRIEDMANN, P. P. Integrated Structure/Control/Aerodynamic Synthesis of Actively Controlled Composite Wings. **Journal of Aircraft**, v. 30, n. 3, May-June 1993.

LOHN, J. D.; LINDEN, D. S.; HORNBY, G. S. Computer-automated evolution of an x-band antenna for nasa's space technology 5 mission. **Evolutionary Computation**, v. 19, n. 1, p. 1-23, 2011.

LOPES JR, V.; SILVA, S. Revisão sobre técnicas de controle em estruturas inteligentes. **Science and Engineering Journal**, Uberlândia, MG, v. 14, p. 01-08, 2005.

LU, J.; SKELTON, R. E. Integrating structure and control design to achieve mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ performance. **International Journal Control**, v. 73(16), p. 1449-1462, 2000.

MAGHAMI, P. G.; JOSHI, S. M.; PRICE, D. B. **An integrated controls-structures design methodology for a flexible spacecraft**. NASA Langley Research Center. Hampton, VA. 1992.

MATHWORKS. Using Genetic Algorithms. **Online Documentation for MathWork Products, R2009b**, 2011a. Disponível em: <<http://www.mathworks.com/help/toolbox/gads/f6010dfi3.html>>. Acesso em: 2011.

MATHWORKS. Global Optimization Toolbox. **Online Documentation for MathWork Products, R2011b**, 2011b. Disponível em: <<http://www.mathworks.com/help/toolbox/gads>>. Acesso em: Maio 2011.

MATHWORKS. LMI Control Toolbox for use with MatLab. **Online Documentation for MathWork Products, R2011b**, 2011c. Disponível em: <http://www.mathworks.de/help/releases/R13sp2/pdf_doc/lmi/lmi.pdf>. Acesso em: Maio 2011.

MATHWORKS. Description of the Nonlinear Constraint Solver. **Online Documentation for MathWork Products, R2011b**, 2011d. Disponível em: <http://www.mathworks.com/help/gads/description-of-the-nonlinear-constraint-solver_bqf8bdd.html>. Acesso em: Maio 2011.

MEHRABIAN, A. R.; YOUSEFI-KOMA, A. A novel technique for optimal placement of piezoelectric actuators on smart structures. **Journal of the Franklin Institute**, v. 348, p. 12-23, 2009.

MEIROVITCH, L. **Methods of Analytical Dynamics**. New York: McGraw-Hill Book Company, 1970.

MITCHELL, M. **An Introduction to Genetic Algorithms**. London, England: A Bradford Book The MIT Press, 1998. ISBN 0-262-13316-4.

MONTEIRO, L. H. A. **Sistemas Dinâmicos**. São Paulo: Livraria da Física, 2006.

NORVIG, P.; RUSSEL, S. **Inteligência Artificial**. Tradução de Vandenberg D. de Souza. 2^a. ed. Rio de Janeiro: Elsevier Editora Ltda, 2004.

OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2003.

PARK, J. H.; ASADA, H. Concurrent Design Optimization of Mechanical Structure and Control for High Speed Robots. **Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control**, v. 16, n. 3, p. 344-356, September 1994. ISSN 0022-0434.

PICINATTI, B. S.; PAGLIONE, P. **Desenvolvimento de controlador de arremetida baseado em controle robusto H-infinito**. Proceedings of the 2009 Brazilian Symposium on Aerospace Engineering and Applications / 3rd CTA-DLR Workshop on Data Analysis and Flight Control. São José dos Campos: [s.n.]. 2009.

SADJADI, F. A. **Comparison of fitness scaling functions in genetic algorithms with applications to optical processing**. Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series. Bellingham, WA, USA: Bahram Javidi, Demetri Psaltis; Eds. 2004. p. 356-364.

SHENG, L. **Finite Element Analysis and Genetic Algorithm Optimization Design for the Actuator Placement on a Large Adaptive Structure**. PhD Thesis - Virginia Polytechnic Institute and State University. Blacksburg, VA, USA. 2004.

SINGIRESU, S. R. **Engineering Optimization Theory and Practice**. 4th. ed. New Jersey, USA: John Wiley & Sons, 2009. ISBN 978-0-470-18352-6.

SKELTON, R. E. Model error concepts in control design. **International Journal of Control**, p. 1725-1753, 1989.

SKOGESTAD, S.; POSTLETHWAITE, I. **Multivariable Feedback Control - Analysis and Design**. New Jersey: John Wiley & Sons, 2005.

SPEARS, W. M.; DE JONG, K. A. **On the virtues of parameterized uniform crossover**. Proceedings of the 4th International Conference on Genetic Algorithms. San Francisco, CA, USA: Morgan Kaufmann Publishers Inc. 1991. p. 230-236.

STRANG, G. **Linear Algebra and its Applications**. 4th. ed. USA: Brooks Cole, 2005.

TAKAHASHI, M.; KAJIWARA, I.; ARISAKA, T. Optimization of Smart Structures for Improving Servo Performance of Hard Disk Drive. **Journal of System Design and Dynamics**, v. 3 (6), p. 906-917, 2009.

VAN DE HEUVEL, I. **\mathcal{H}_∞ Controller Design - Algebraic Riccati Equalities versus Linear Matrix Inequalities**. Technische Universiteit Eindhoven. Eindhoven, Netherlands. 1997.

WORDEN, K.; STASZEWSKI, W. J.; HENSMAN, J. J. Natural computing for mechanical systems research: A tutorial overview. **Mechanical Systems and Signal Processing**, 25, 2010. 4-111.

ZAMES, G. Feedback and optimal sensitivity: model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses. **IEEE Transaction on Automatic Control**, AC-26, 1981. 301-320.

ZHOU, K.; DOYLE, J. C.; GLOVER, K. **Robust and Optimal Control**. New Jersey: Prentice Hall, 1995.