



Allan Patrick Cordeiro Dias

Elemento Mortar de Alta Ordem Aplicado à Análise Computacional não-Linear de Contato Mecânico Estrutural

42/2013

CAMPINAS

2013



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

Allan Patrick Cordeiro Dias

Elemento Mortar de Alta Ordem Aplicado à Análise Computacional não-Linear de Contato Mecânico Estrutural

Orientador: Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa

Coorientador: Prof. Dr. Marco Lúcio Bittencourt

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica na área de Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico.

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO ALLAN PATRICK CORDEIRO DIAS, E ORIENTADO PELO PROF. DR ALBERTO LUIZ SERPA.



ASSINATURA DO ORIENTADOR

CAMPINAS

2013

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Rose Meire da Silva - CRB 8/5974

D543e Dias, Allan Patrick Cordeiro, 1984-
Elemento mortor de alta ordem aplicado à análise computacional não-linear de contato mecânico estrutural / Allan Patrick Cordeiro Dias. – Campinas, SP : [s.n.], 2013.

Orientador: Alberto Luiz Serpa.
Coorientador: Marco Lúcio Bittencourt.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Método dos elementos finitos. 2. Mecânica do contato. 3. Deformações e tensões. I. Serpa, Alberto Luiz, 1967-. II. Bittencourt, Marco Lúcio, 1972-. III. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: High order mortar finite element applied to nonlinear analysis of computational contact mechanics

Palavras-chave em inglês:

Finite Element Method

Contact Mechanics

Strains and stresses

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica

Banca examinadora:

Alberto Luiz Serpa [Orientador]

Renato Pavanello

Sérgio Persival Baroncini Proença

Data de defesa: 11-04-2013

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

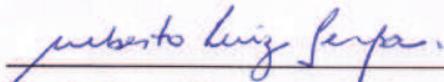
**Elemento Mortar de Alta Ordem Aplicado à Análise
Computacional não-Linear de Contato Mecânico
Estrutural**

Autor: Allan Patrick Cordeiro Dias

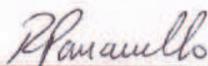
Orientador: Dr. Alberto Luiz Serpa

Coorientador: Dr. Marco Lúcio Bittencourt

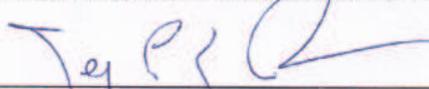
A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:



Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa, Presidente
FEM - Universidade Estadual de Campinas



Prof. Dr. Renato Pavanello
FEM - Universidade Estadual de Campinas



Prof. Dr. Sérgio Persival Baroncini Proença
EESC - Universidade de São Paulo

Campinas, 11 de abril de 2013.

Dedicatória

Dedico este trabalho às minhas duas mães, Célia Virgínia de Souza Cordeiro e Suelena de Souza Cordeiro Guindani, pelo o amor e carinho incondicionais oferecidos a mim durante toda a minha vida.

Agradecimentos

À Deus, criador da minha vida a quem devo toda honra e toda glória.

Ao meu orientador, prof. Dr. Alberto Luiz Serpa, e coorientador, prof. Dr. Marco Lúcio Bittencourt, pela oportunidade oferecida, dedicação constante, paciência e amizade.

À minha família, pelo apoio incondicional em todos os momentos, pela motivação e ajuda financeira.

Ao meu pai, Delcy Dias, e minha irmã, Suenya Cordeiro Dias, pelo carinho, paciência e pelas inúmeras discussões sobre os mais variados temas.

Aos amigos "irmãos" Jorge Suzuki, Luan Franchini e Letícia Medeiros, pela estimada amizade, a qual não tenho palavras para descrever.

Aos colegas e companheiros de laboratório Caio Rodrigues, Carlos Mingoto Jr, Fabiano Bargas, Gilberto Valente, Jaime Delgado, Jaime Izuka, Oscar Rojas e Paola Gonzalez, pela convivência diária de trabalho, colaboração e importantes momentos de descontração.

Ao prof. Dr. Sérgio Persival Baroncini Proença, pelas importantes contribuições ao progresso deste trabalho.

Aos colegas, professores e funcionários da FEM que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

À CAPES, DMC, DPM, FEM e UNICAMP pelo suporte financeiro e institucional destinados a esse projeto.

*“Se fui capaz de ver mais longe, foi por
estar de pé sobre os ombros de gigantes.”*

Isaac Newton

Resumo

DIAS, Allan Patrick Cordeiro. Elemento Mortar de Alta Ordem Aplicado à Análise Computacional não-Linear de Contato Mecânico Estrutural. 2013. 131p. Dissertação (Mestrado). Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

No presente trabalho, apresenta-se um elemento de contato com alta ordem de interpolação, construído a partir do método mortar de decomposição de domínios discretizados. O alvo de estudo é a verificação da acurácia da solução com o aumento da ordem de interpolação do elemento em problemas bidimensionais de contato com grandes deformações, atrito sem considerar efeitos termomecânicos. São apresentadas soluções para alguns problemas clássicos da literatura de contato. Os resultados obtidos, de uma forma geral, tanto para pequenas como para grandes deformações, mostram que a alta ordem de interpolação pode ser considerada uma interessante estratégia para ganho de precisão na solução deste tipo de problemas, quando o foco em análise é o estudo das tensões e esforços gerados pelo contato.

Palavras-chave: Método dos Elementos Finitos de Alta Ordem, Mecânica do Contato Computacional, Elemento Mortar de Contato de Alta Ordem, Grandes Deformações, Material Hiperelástico.

Abstract

DIAS, Allan Patrick Cordeiro Dias. High Order Mortar Finite Element Applied to Nonlinear Analysis of Computational Contact Mechanics. 2013. 131p. Dissertação (Mestrado). Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

This work presents a high-order mortar finite element for frictional contact problems considering finite deformations without thermomechanics effects. The aim of this work is to increase the accuracy of the solution in the contact region with the application of p-FEM high-order method. The results for both small and large strains shows that the high order interpolations can be considered an interesting strategy in this kind of problems, when the analysis is focused on the study of stresses and reactions generated by contact.

Keywords: High Order Finite Element Method, Computational Contact Mechanics, High Order Mortar Finite Element, Finite Deformations, Hyperelastic Materials.

Lista de Ilustrações

1.1	Representação do elemento de contato nó-a-nó.	6
1.2	Representação do elemento de contato nó-a-segmen- to.	7
1.3	Representação do elemento de contato segmen- to-a-segmen- to.	7
1.4	Elemento finito mortar.	8
1.5	Elemento finito mortar de contato.	9
1.6	Representação das principais partes do olho humano. (Extraída de [38])	10
2.1	Movimento geral de um corpo deformável.	14
2.2	Vetor tração.	17
2.3	Representação esquemática do Princípio das potências virtuais.	19
2.4	Interpretação dos tensores de tensão.	22
2.5	Pressão uniforme de superfície.	28
3.1	Representação do problema de contato em deformações finitas.	30
3.2	Coordenadas convectivas.	31
3.3	Configuração deformada dos corpos \mathcal{B}^α	34
3.4	Problema de mínima distância.	35
3.5	Tensão na interface de contato.	42
4.1	Representação dos pontos de colocação do elemento finito unidimensional.	45
4.2	Funções de interpolação unidimensionais para $p = 1$	46
4.3	Funções de interpolação unidimensionais para $p = 2$	47
4.4	Funções de interpolação unidimensionais para $p = 3$	48
4.5	Representação dos pontos de colocação do elemento finito bidimensional de ordem 1.	48
4.6	Funções de interpolação bidimensionais para $p = 1$	49
4.7	Funções de interpolação bidimensionais para $p = 2$	50
4.8	Funções de interpolação bidimensionais para $p = 3$	51
4.9	Funções de interpolação da base dual para $p = 1$	53
4.10	Funções de interpolação da base dual para $p = 2$	54
4.11	Funções de interpolação dual para $p = 3$	54
5.1	Determinação do elemento <i>mortar</i>	61
5.2	Detalhe dos alvos do elemento <i>mortar</i>	63
5.3	Condições de adesão e deslizamento na interface de contato.	72
5.4	Configurações inicial e corrente dos dois corpos em contato.	74
5.5	Descrição da abordagem do movimento do cone de fricção.	75

6.1	Representação dos pontos de Gauss nos elementos de contato.	89
7.1	Problema bidimensional de Hertz.	93
7.2	Malhas utilizadas para o problema de Hertz.	94
7.3	Solução para a malha m^4 com grau de interpolação $p = 1$	95
7.4	Tensão σ_{yy} no domínio obtida via elementos finitos.	96
7.5	Malha utilizada para o refino p (elementos com grau de interpolação $p = 1$ à esquerda e $p = 5$ à direita).	96
7.6	Comparativo para tensões de contato para elemento reto e com mapeamento curvo.	97
7.7	Detalhe da discretização da superfície cilíndrica.	98
7.8	Curvas de erros para o elemento de contato <i>mortar</i> com penalidade.	99
7.9	Curvas de erros para o elemento de contato <i>mortar</i> com multiplicadores de Lagrange.	99
7.10	Solução para a malha m^1 com grau de interpolação $p = 5$	101
7.11	Curvas de tempo de processamento em função dos graus de liberdade livres.	102
7.12	Curvas de erro percentual em função do tempo de processamento.	102
7.13	Número de condicionamento em função do grau de interpolação.	103
7.14	Bloco retangular em contato com solo.	104
7.15	Malha com elemento de grau $p = 2$ (<i>caso 1</i>).	105
7.16	Malha com elemento de grau $p = 4$ (<i>caso 2</i>).	106
7.17	Comparativo entre deslocamentos tangenciais para o caso 1.	106
7.18	Comparativo entre forças tangenciais para o caso 1.	107
7.19	Comparativo entre forças normais para o caso 1.	108
7.20	Comparativo entre deslocamentos tangenciais para o caso 2.	109
7.21	Comparativo entre forças tangenciais para o caso 2.	109
7.22	Comparativo entre forças normais para o caso 2.	110
7.23	Anel hiperelástico em contato com fundação.	110
7.24	Malha para o anel hiperelástico em contato com fundação.	111
7.25	Forças de reação no suporte esquerdo do anel.	112
7.26	Campo de deslocamentos u_y para estrutura deformada em $t = 1, 30, 60$ e 100 , respectivamente. Fundação com módulo de elasticidade $E = 1,0 \times 10^8$	113
7.27	Campo de deslocamentos u_y para estrutura deformada em $t = 1, 30, 60$ e 100 , respectivamente. Fundação com módulo de elasticidade $E = 300 [UF/UC^2]$	114
7.28	Problema do canal com bloco hiperelástico.	115
7.29	Malha do problema da prensagem.	116
7.30	Comparativo entre soluções para o problema de prensagem.	117

7.31	Comparativo entre soluções para aumento do grau de interpolação.	117
7.32	Campo de tensões σ_{yy} para estrutura deformada em $t = 1, 55, 105$ e 150 , respectivamente.	118

SUMÁRIO

Lista de Ilustrações	xvii
SUMÁRIO	xxiii
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Revisão bibliográfica	2
1.2 Motivação	9
1.3 Objetivos	11
1.4 Organização do texto	11
2 MECÂNICA DO CONTÍNUO NÃO LINEAR	13
2.1 Descrição material e espacial	13
2.2 Medidas de deformação	15
2.2.1 Gradiente de deformação	15
2.2.2 Tensores de Green Lagrange e Almansi	16
2.2.3 Taxa de deformação	16
2.3 Medida de tensão	17
2.4 Equação de equilíbrio	18
2.5 Princípio das potências virtuais	19
2.6 Medidas conjugadas de tensão e deformação	20
2.6.1 Tensor de tensão de Kirchhoff	20
2.6.2 Primeiro tensor de Piola-Kirchhoff	21
2.6.3 Segundo tensor de Piola-Kirchhoff	22
2.7 Lei constitutiva	23
2.8 Linearização da equação de equilíbrio	25
2.8.1 Linearização da potência virtual interna	26
2.8.2 Linearização da potência virtual externa	27
3 MECÂNICA DO CONTATO	30
3.1 Parametrização da superfície alvo de contato	31
3.2 Contato normal	34
3.2.1 Variação da função de penetração (gap) normal	36
3.3 Contato tangencial	36

3.3.1	Variação da função de penetração (gap) tangencial	38
3.4	Linearização das contribuições do contato	39
3.5	Tratamento das restrições de contato	41
3.5.1	Método dos multiplicadores de Lagrange	42
3.5.2	Método da penalidade	43
4	DISCRETIZAÇÃO DO CONTÍNUO	45
4.1	Construção dos polinômios de Lagrange de alta ordem	45
4.2	Construção da base dual	51
4.3	Discretização das formas fracas	54
4.3.1	Formulação do Lagrangiano Total	56
4.3.2	Formulação do Lagrangiano Atualizado	58
5	DISCRETIZAÇÃO DO CONTATO	60
5.1	Determinação do elemento mortar e cálculo da coordenada de projeção	60
5.2	Elemento <i>mortar</i> de contato sem atrito	64
5.3	Lei de Coulomb	72
5.3.1	Abordagem do movimento do cone de fricção	73
5.4	Elemento <i>mortar</i> de contato com atrito	77
5.5	Estratégia de ativação do elemento de contato	82
5.5.1	Método dos multiplicadores de Lagrange	82
5.5.2	Método da penalidade	84
6	ALGORITMOS COMPUTACIONAIS	85
6.1	Algoritmo para o cálculo das coordenadas de projeção	85
6.2	Algoritmo para atualização da coordenada de deslizamento	86
6.3	Algoritmo para montagem do elemento de contato sem atrito	87
6.4	Algoritmo para montagem do elemento de contato com atrito	88
6.5	Algoritmo para solução do sistema de equações	91
7	RESULTADOS	92
7.1	Problema de Hertz	92
7.2	Problema de atrito entre bloco e solo	103
7.3	Problema do anel hiperelástico	110
7.4	Problema do canal com bloco hiperelástico	115

8 CONCLUSÕES	119
8.1 Sugestões de trabalhos futuros	120
Referências	122

1 INTRODUÇÃO

O avanço de tecnologias computacionais torna possível a implantação de novos processos de desenvolvimento e validação de produtos com a introdução de ferramentas virtuais. Essas ferramentas representam uma oportunidade para redução de custos e tempo de desenvolvimento de projetos [66]. Com um mercado altamente competitivo e com a crescente demanda por novos produtos, que atendam aos requisitos básicos de qualidade e confiabilidade, é crescente o interesse em resultados de simulação numérica para problemas de engenharia.

A popularização da simulação computacional, aliada ao aumento da capacidade de processamento dos computadores, estimula a busca por soluções de problemas cada vez mais complexos. O estudo desses problemas, em geral multidisciplinares, exige o aprimoramento de conhecimento em diversas áreas como, Matemática, Computação, Física e Engenharia.

A qualidade e confiabilidade dos resultados também são fatores de peso para o emprego da simulação. Esses requisitos dependem, entre outros fatores, da técnica numérica empregada na solução. Para problemas de engenharia estrutural, o Método dos Elementos Finitos (MEF) é a técnica mais utilizada.

O presente trabalho apresenta uma aplicação do Método dos Elementos Finitos de Alta Ordem (MEF-AO) à problemas de contato entre corpos. O problema de contato estrutural é bastante comum e é caracterizado por ser um problema não linear. Problemas de valor de contorno envolvendo contato são de grande importância em aplicações nas áreas de engenharia mecânica, civil, assim como em aplicações ambientais e biomédicas. Praticamente todo movimento envolve contato e fricção entre corpos, e a inclusão do efeito do atrito acaba complicando ainda mais este problema no que se refere ao emprego de técnicas numéricas e computacionais. A determinação do modo com que as pressões são distribuídas na interface de contato é essencial na fase de projeto de componentes e exerce um papel direto e fundamental na determinação do desgaste e vida útil destes componentes. No presente trabalho, apresenta-se um elemento de contato com alta ordem de interpolação, construído a partir do método *mortar* de decomposição de domínios discretizados. O alvo de estudo é a verificação da acurácia da solução com o aumento da ordem de interpolação do elemento em problemas bidimensionais de contato com grandes deformações, atrito sem considerar efeitos termomecânicos.

A revisão bibliográfica que segue apresenta um breve histórico sobre a teoria de contato estrutural, assim como uma introdução sobre o MEF e o MEF-AO e a aplicação destes métodos no processo de resolução de problemas de contato.

1.1 Revisão bibliográfica

A teoria de contato teve sua primeira colaboração em 1882 com a famosa publicação de Hertz [48] “*On the Contact of Elastic Solid*”. O trabalho tratava da solução de um problema de contato entre dois corpos elipsoidais sem atrito. Novas colaborações surgiram no início do século XX para aplicações em ferrovias, indústria de engrenagens e rolamentos.

A história da abordagem de problemas de contato através de soluções analíticas teve sua história iniciada no trabalho de Hertz, e continuada em trabalhos importantes como nas monografias [64, 1], assim como em trabalhos relativamente mais recentes como [54, 44, 45, 94]. Outras contribuições significativas nesta linha surgiram da escola russa de engenharia mecânica através das publicações de Galin [39, 40] e Muskhelishvili [69]. Entretanto, estas abordagens são aplicáveis a uma faixa muito limitada de tipos de problemas, como por exemplo, problemas com geometria e condições de contorno simples, materiais lineares e apenas aproximações com base nestas abordagens podem ser estabelecidas para os complexos problemas com atrito.

A maioria dos problemas de contato surgiu de necessidades industriais, onde tais problemas são acoplados à geometrias complexas, materiais não lineares, adesão, desgaste, grandes deformações, grandes deslizamentos, dentre outros efeitos. Com o início da tecnologia computacional e a natureza complexa dos problemas industriais, métodos baseados em soluções semi-analíticas surgiram, porém não foram suficientes para atender a demanda industrial de problemas complexos de contato.

Em 1943, o matemático americano Richard Courant publicou um artigo que foi a base da teoria numérica de discretização conhecida hoje por Método dos Elementos Finitos (MEF). O método matemático foi ignorado naquela época, uma vez que ainda não haviam sido desenvolvidos computadores capazes de realizar uma grande quantidade de cálculos.

Um pouco mais tarde, na década de 50, M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin e L. J. Topp, os quais eram pesquisadores da Boeing, iniciaram os primeiros trabalhos práticos no estabelecimento dos conceitos formulados por Richard Courant aplicados à indústria aeronáutica. Juntos publicaram em 1956, um dos primeiros artigos que delinearão os principais conceitos de formulação do MEF como a montagem matemática dos elementos e a da matriz de rigidez [92].

Desde então, o método se tornou uma das ferramentas mais utilizadas e eficientes para tratamento de problemas de mecânica estrutural. Com o passar do tempo e com a tendência natural de a ciência atender a demanda de problemas complexos da indústria, a sociedade científica desenvolveu ferramentas matemáticas válidas para a abordagem das teorias de contato juntamente com o Método dos Elementos Finitos. Porém, somente em 1970 com o trabalho de Wilson e Parson [95] e em 1971 com Chan e Tuba [18] foram publicados os primeiros artigos com métodos de solução

de problemas de contato juntamente com o MEF.

O MEF pode ser entendido como um método numérico para solução de Problemas de Valor de Contorno (PVC), baseado em discretização, que utiliza funções polinomiais na aproximação da solução. Deseja-se que essa solução aproximada seja tão próxima quanto se queira da solução real. Mostrou-se que o erro na aproximação pode ser controlado por meio de estratégias de refinamento. Essas estratégias de refinamento definem as versões do MEF. Em geral, divide-se o MEF em três versões: h , p e hp . Na versão h , a convergência da solução se dá com a redução do tamanho dos elementos e foi a primeira técnica empregada, a partir da década de 60. Na versão p , a redução do erro é obtida com o aumento da ordem polinomial da expansão e começou a ser desenvolvida no final da década de 70 [90]. Quando empregadas em conjunto dão origem à versão hp desenvolvida e implementada em [3].

As versões p e hp constituem um dos tipos do MEF de Alta Ordem (MEF-AO). Nos últimos anos, esse método tem recebido grande atenção, principalmente por apresentar convergência exponencial (também chamada espectral) da solução. Na prática, esse tipo de convergência implica que, para soluções suaves, o erro na solução numérica decai no mínimo de duas ordens ao se duplicar o número de funções de interpolação, diferentemente dos métodos de baixa ordem nos quais o erro diminui com um fator fixo [55].

As versão p e hp do MEF foram intensamente investigadas durante os últimos 20 anos, mostrando-se superior a versão h em um número significativo de problemas de importância prática. Em Mecânica dos Sólidos, por exemplo, mostrou-se eficiente fornecendo resultados robustos e confiáveis [89]. Em elasticidade linear, o MEF-AO apresenta muitas vantagens em relação aos métodos clássicos, tais como, alta taxa de convergência, flexibilidade em se usar elementos com grande razão de aspecto, não apresentar travamento (*locking-free*) com relação à espessura para elementos de placa e casca e nem para materiais quase incompressíveis [26].

A eficiência e as vantagens do MEF-AO foram estendidas à problemas estruturais não lineares, como a elastoplasticidade [49, 53, 27], metalurgia do pó [47] e contato com pequenas deformações [70, 59].

Apesar do crescimento significativo de áreas de aplicabilidade do MEF-AO, a área de contato estrutural com grandes deformações e atrito tem recebido relativamente menos atenção. Assim, grandes desafios ainda permanecem abertos na literatura de ferramentas computacionais desta área da mecânica estrutural e a aplicação do MEF-AO está entre estes desafios.

Pode-se dizer que a história da abordagem de problemas de contato por meio de ferramentas computacionais teve início em 1933, com os trabalhos de Signorini, onde ele formulou o problema geral de equilíbrio de um corpo elástico linear em contato sem atrito com uma fundação rígida [85, 86]. Uma análise rigorosa desta classe de problemas foi realizada nos trabalhos [32, 33, 34], onde

foram discutidas, principalmente, questões de existência e unicidade de solução dos variacionais de desigualdade que surgem da minimização do funcional em subconjuntos convexos. Ainda na linha de investigação de existência e unicidade de solução do problema de Signorini, pode-se citar a importante colaboração dada pelo livro de Kikuchi and Oden [56].

As contribuições destes autores, e de muitos outros aqui não citados, foram de suma importância para o desenvolvimento da formulação do problema de contato sem atrito como um problema de ponto de sela, o qual pode ser abordado através da teoria de minimização com restrições. Tais problemas podem ser tratados com métodos de otimização usuais, como por exemplo: o método da penalidade, método dos multiplicadores de Lagrange, método do Lagrangiano Aumentado, dentre outros. Infelizmente, não existe um princípio de minimização para problemas com atrito [56, 68]. Neste caso, a energia potencial total do sistema (função objetivo) depende da condição de atrito, esta depende da pressão normal de contato que por sua vez depende do campo de deslocamentos. Portanto, não existe um funcional de energia potencial suave associado com problemas de contato com atrito.

Apesar de o problema de contato com atrito ter registros de estudos do século XV, com o trabalho de Amontons [2] *apud* [97], e no século XVI com os trabalhos de Euler [29, 30] *apud* [97] e Coulomb [21], somente em 1976 um importante avanço na formulação numérica para esta classe de problemas foi observado com o trabalho de Duvaut and Lions [28]. Os autores investigaram a solução de problemas de contato com atrito e grandes deformações, abrindo as portas para importantes trabalhos que seguiram a mesma linha [20, 71, 81, 41].

Muitas formas de abordagem do problema de contato ganharam destaque na literatura. Um exemplo bastante utilizado é partir da suposição de que se conhece a priori a interface de contato na iteração computacional corrente, o que permite transformar os variacionais de desigualdade em variacionais de igualdade [83]. Uma outra abordagem é a aplicação de diferentes métodos de programação matemática, como por exemplo, a solução do problema de contato via método *simplex* [19], ou através do método da programação quadrática paramétrica [58, 107, 108].

Vários métodos são atualmente consolidados, vastamente estudados e aplicados em problemas práticos de engenharia. Uma discussão completa sobre métodos de resolução de problemas de contato pode ser encontrada em [97, 61].

De um modo geral, a estratégia usualmente utilizada é tratar o problema de contato como um problema de otimização com restrições [5], onde a função objetivo corresponde à energia potencial total dos corpos em contato $\Pi(\mathbf{u})$, que é a energia potencial do sistema mecânico ($\Pi^{Sistema}(\mathbf{u})$) mais a energia potencial de contato ($\Pi^{Contato}(\mathbf{u})$).

A solução de um problema de contato sem atrito pode ser obtida a partir da minimização da energia potencial total sujeita às restrições de desigualdade de não penetração entre os corpos.

Matematicamente, pode-se definir o problema como

$$(P) \begin{cases} \min & \Pi(\mathbf{u}) = \Pi^{Sistema}(\mathbf{u}) + \Pi^{Contato}(\mathbf{u}) \\ s.a. & g_i(\mathbf{u}) \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \end{cases} \quad (1.1)$$

As restrições $g_i(\mathbf{u})$ representam as condições de não interpenetração dos corpos, têm a dimensão dos deslocamentos e representam distâncias pontuais entre os corpos na região de contato. Para uma condição onde $g_i = 0$ ocorre contato pontual perfeito. Para a condição de interpenetração entre os corpos $g_i < 0$ e para não interpenetração $g_i > 0$.

Para o problema com atrito são necessárias restrições adicionais que serão tratadas no capítulo referente à lei de Coulomb.

Este conjunto de restrições é também conhecido como função penetração. O índice m corresponde ao número de restrições ativas, ou seja, pontos no corpo discretizado que estão efetivamente em contato.

A energia potencial de contato é construída de acordo com o método de minimização restrita adotado.

Uma vez definidas as energias do sistema e do contato, é aplicado um princípio variacional integral para transformar as equações do problema da forma forte para forma fraca, e finalmente, um procedimento de linearização é utilizado para que o sistema de equações resultante seja resolvido através de um processo iterativo. Estas etapas são apresentadas separadamente para o sistema mecânico (contínuo) e para o contato no presente trabalho, e a resposta final do sistema é em função dos deslocamentos e das tensões de contato.

Uma vez definido o método de resolução do problema de minimização restrita do funcional do problema de contato, o MEF ou o MEF-AO é utilizado para discretizar os termos do domínio em estudo e é necessário a adoção de um método para a discretização dos termos de contato. A função deste método é basicamente discretizar o domínio de contato em estudo em um número finito de elementos de contato, e transformar as equações integrais provenientes do método de minimização em equações algébricas. Esta é considerada uma das principais etapas dentro do procedimento numérico para a resolução do problema de contato [106].

Estes elementos são construídos a partir de entidades das duas superfícies de contato, como por exemplo, os nós e arestas. Cada elemento possui seu próprio vetor de variáveis, vetor de resíduo, matriz tangente e matriz de massa (para problemas dinâmicos). Os elementos de contato também determinam a forma com que se realizará a transferência dos esforços da superfície contactora para a superfície alvo.

Basicamente, são encontrados na literatura três tipos de elemento de contato, o elemento de

contato nó-a-nó, o elemento de contato nó-a-segmento e o segmento-a-segmento.

O elemento de contato nó-a-nó, ou como conhecido do inglês *node-to-node* (NTN), é a forma mais antiga que se tem registro na literatura para discretização do contato [37]. É uma formulação simples de ser implementada, porém, não permite a descrição do comportamento de deslizamento e somente pode ser utilizada em problemas de pequenas deformações. Além disso, esta formulação impõe restrições na geração de malha, uma vez que os nós da mesma necessitam estar alinhados (Figura 1.1).

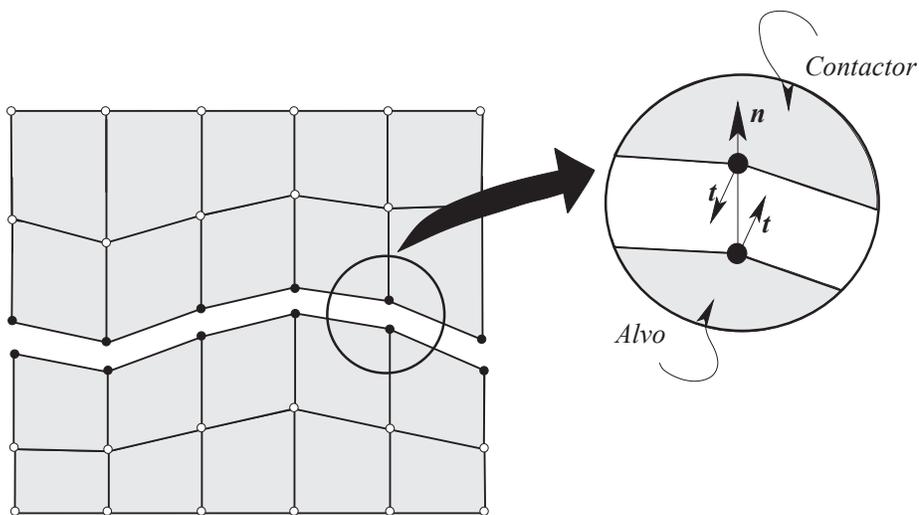


Figura 1.1: Representação do elemento de contato nó-a-nó.

O elemento de contato nó-a-segmento, ou como conhecido do inglês *node-to-segment* (NTS) [52], é amplamente utilizado em programas comerciais de elementos finitos (Figura 1.2). Pode ser aplicado em problemas com malhas não conforme, em aplicações com grandes deformações e deslizamento. Porém, esta formulação não passa por alguns testes padrões de contato, conhecidos como *patch tests*, os quais podem ser encontrados nas referências [91, 22, 9]. Estes trabalhos mostram que, para malhas não conformes, uma pressão de contato constante não pode ser transmitida corretamente através das superfícies de contato.

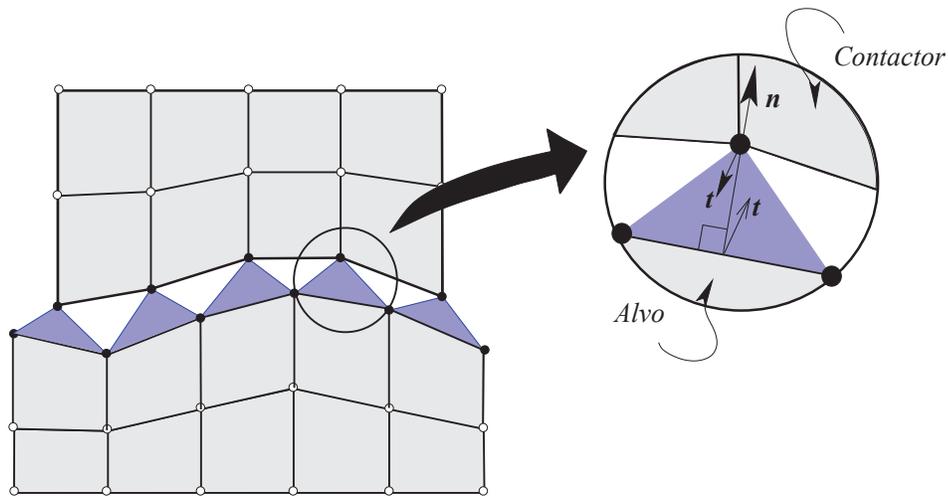


Figura 1.2: Representação do elemento de contato nó-a-segmento.

O elemento de contato segmento-a-segmento, do inglês *segment-to-segment* (STS), foi proposto na referência [87] para o caso bidimensional.

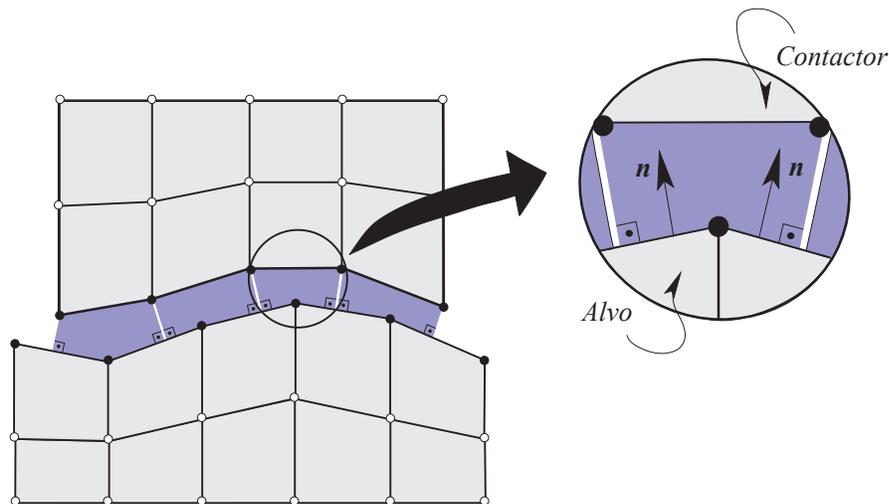


Figura 1.3: Representação do elemento de contato segmento-a-segmento.

Atualmente, esta formulação é aplicada acoplada com o método de decomposição de domínio conhecido como método *mortar* [96]. Esta estratégia é amplamente utilizada na solução de problemas estruturais de contato bidimensionais e tridimensionais [76, 75, 104, 103, 67]. As referências citadas mostram que a formulação passa nos testes padrões de contato (*patch tests*), mas é considerada de difícil implementação [76]. Uma outra formulação do tipo segmento-a-segmento pode ser encontrada na literatura, conhecida como método Nitsche [101].

O método *mortar*, ou do português argamassa, surgiu originalmente para técnicas de decomposição de domínios [13]. É utilizado, por exemplo, quando se deseja dividir um mesmo corpo B^1 em subdomínios Ω^α . Estas divisões podem ter elementos de tamanhos diferentes, malhas não conformes, assim como elementos com diferentes graus de interpolação.

Basicamente, o elemento finito *mortar* é utilizado para transferir os esforços gerados nas interfaces onde são empregados. Na Figura 1.4, pode-se observar a representação de um corpo B^1 subdividido em dois subdomínios Ω^1 e Ω^2 . Estes elementos são construídos a partir dos nós e arestas destes subdomínios em contato e possuem resposta tanto às cargas compressivas quanto às trativas, funcionando de forma a unir e compatibilizar os deslocamentos e os esforços entre estes subdomínios.

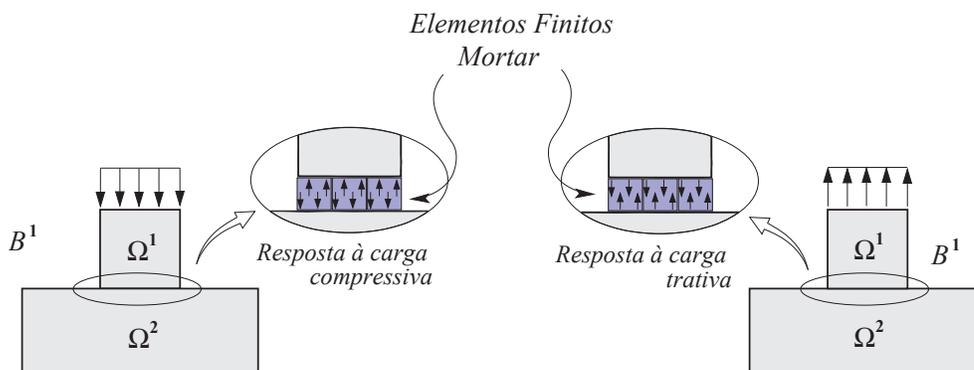


Figura 1.4: Elemento finito mortar.

Este tipo de elemento foi posteriormente adaptado para problemas de contato sem atrito em [11]. Os elementos finitos *mortar* de contato são construídos a partir dos nós e arestas de corpos distintos em contato. Na Figura 1.5, pode-se observar a representação de dois corpos, B^1 e B^2 , que estão em contato. Ao contrário da formulação do elemento finito *mortar* usual, o elemento finito *mortar* de contato não promove a união das superfícies, somente impede que um corpo penetre no outro. Como pode ser observado no detalhe a direita da Figura 1.5, os elementos somente produzem resposta às cargas compressivas na região de contato. A formulação foi estendida para problemas de contato com atrito considerando grandes deformações em [67]. Nos problemas com atrito o elemento também transmite esforços tangenciais na região de contato.

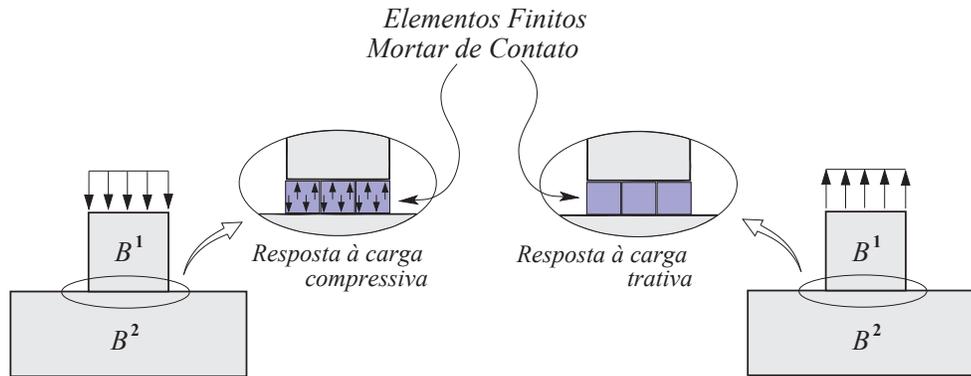


Figura 1.5: Elemento finito mortar de contato.

O método *mortar* para discretização dos termos de contato é amplamente utilizado nas mais atuais referências na área [36, 73, 74, 77, 78, 79, 80, 105, 102].

1.2 Motivação

A grande maioria dos algoritmos para a resolução de problemas de contato desenvolvidos no passado é baseada no emprego do elemento nó-a-segmento, aplicando as restrições de contato nos pontos de colocação da estrutura, os quais são os nós dos elementos finitos. Apesar de ainda ser amplamente estudada e aplicada, esta formulação apresenta algumas desvantagens relativas à robustez do método em certas aplicações, como já foi discutido e referenciado na seção anterior. Nos últimos anos, a atenção tem se voltado para a implementação dos elementos chamados segmento-a-segmento, mais especificamente abordagens baseadas no método *mortar* de discretização [36, 73, 74, 77, 78, 79, 80, 105, 102]. Entre os desafios mais importantes em problemas de contato está a discretização com malhas não conformes nas interfaces entre os diferentes corpos em contato.

O método *mortar* foi originalmente formulado para decomposição de domínios [96]. Este fato o torna uma ferramenta interessante para aplicações com grandes deslizamentos, onde a malha do corpo contactor se encontra constantemente mudando de um alvo para outro.

Outro aspecto importante, que ainda necessita de consideráveis avanços, é a solução de problemas de contato com grandes deformações e atrito [8]. O foco em tais aplicações tem se voltado para a obtenção de mais precisão na solução. Trabalhos atuais, nos quais também foram utilizados elementos de contato do tipo *mortar*, mostram um ganho significativo de acurácia na solução, quando são utilizadas funções de interpolação quadráticas nos elementos de contato [74, 43, 97, 36].

Um comparativo entre simulações feitas com elementos de contato lineares e quadráticos mostra que é possível se obter uma solução com melhor precisão, empregando menos graus de liberdade, com o elemento de contato quadrático [97]. Estes trabalhos recentes apontam a implementação de um elemento finito de contato de alta ordem como um interessante alvo a ser atingido.

A implementação deste elemento de contato foi fortemente motivada pelo grupo de pesquisa no qual o presente trabalho está inserido. Um alvo específico é empregar simulação estrutural em aplicações biomédicas. Atualmente, está sendo desenvolvido pelo grupo um modelo virtual do olho humano para análise de tensão devida à doenças degenerativas do tecido conjuntivo.

Existem patologias que, apesar de envolverem alterações bioquímicas, são essencialmente causadas por esforços mecânicos, e podem ser simplificadas para um problema puramente mecânico, como o rompimento e descolamento da retina.

Um trabalho recente na área propõe um modelo virtual de um olho míope utilizando elementos finitos, e considera contato entre retina, coróide e esclera (Figura 1.6). A simulação foi realizada em um código comercial, considerando a retina e a coróide fixas uma sobre a outra. Entre a coróide e a esclera foi considerado contato sem atrito e a esclera foi mantida rígida e fixa no espaço.

O objetivo era encontrar os valores críticos das tensões nestes tecidos conjuntivos devido ao aumento da IOP (do inglês *intraocular pressure*), parâmetros relacionados à progressão da degeneração macular, e utilizá-los para análise de estágio da miopia. Para isso, foi utilizado o material hiperelástico quasi-incompressível de Mooney-Rivlin [12].

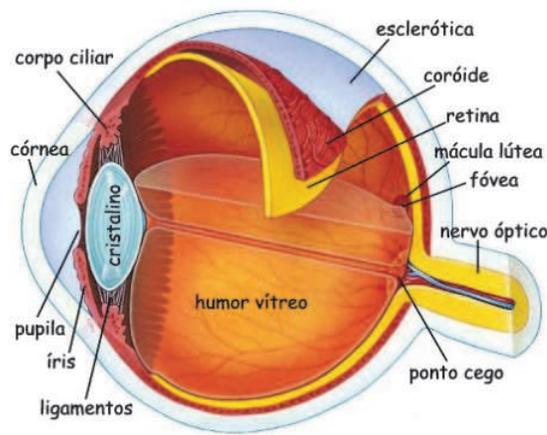


Figura 1.6: Representação das principais partes do olho humano. (Extraída de [38])

Existe uma frente no grupo de pesquisa, cujo presente trabalho está inserido, trabalhando na implementação do material quasi-incompressível de Mooney-Rivlin e de um modelo de dano com seus parâmetros devidamente identificados para a aplicação em tecidos conjuntivos. O trabalho

também tem como objetivo resolver o problema de travamento (*locking*) volumétrico que surge com o emprego deste tipo de material [51]. A estratégia que está sendo utilizada é contornar o travamento a partir de uma formulação mista, aplicada juntamente com o método dos elementos finitos de alta ordem (MEF-AO). Uma vez implementada esta estratégia, será necessário um elemento de contato que também possua alta ordem de interpolação.

O objetivo é utilizar os modelos de elemento de contato desenvolvidos no presente trabalho e o modelo material desenvolvido pelo grupo de pesquisa em conjunto em um futuro trabalho. A ferramenta final será utilizada para avaliar o alongamento do olho e a degradação associada à retina em altos graus de miopia, e para a indicação de possíveis indivíduos com potencial rompimento e descolamento retina. Com base nisso, tendo um histórico das medidas da espessura da retina e comprimento axial do olho, será possível estimar o tempo para a ruptura da retina.

1.3 Objetivos

Toda a motivação proposta pela literatura e pelo grupo de pesquisa contribuiu para o desenvolvimento e a implementação de um elemento de contato de alta ordem, para solução de problemas bidimensionais de contato com pequenas e grandes deformações, atrito e sem considerar efeitos termomecânicos.

É realizada a verificação deste elemento em pequenas deformações com a solução analítica para o problema de Hertz, e para os problemas com atrito em grandes deformações as verificações são realizadas com soluções conhecidas da literatura. É proposto também um estudo de verificação da acurácia de solução com o aumento da ordem de interpolação do elemento de contato.

Com a análise da ferramenta aqui desenvolvida em pequenas deformações, e a verificação da mesma em grandes deformações, o presente trabalho deixa como contribuição acadêmica um elemento de alta ordem de interpolação para problemas de contato com grandes deformações. Esta contribuição fica como base para a realização de estudos de aspectos importantes da teoria numérica de contato, que ainda permanecem abertos na literatura, como os citados na seção de sugestões de trabalhos futuros.

1.4 Organização do texto

No capítulo 1, realiza-se uma introdução sobre o problema de contato e são apresentados os principais trabalhos correlatos. O capítulo segue com os aspectos que motivaram a realização do

presente trabalho e os objetivos a serem alcançados.

No capítulo 2, é feita uma introdução à mecânica do contínuo clássica. Aborda-se conceitos básicos envolvendo as medidas de deformação e tensão, a equação de equilíbrio do problema e o modelo constitutivo utilizado. A forma fraca da equação de equilíbrio é determinada através do Princípio das Potênticas Virtuais em sua forma integral. Por último, apresenta-se a linearização da forma fraca da equação de equilíbrio.

Apresenta-se a mecânica do contato no capítulo 3. Inicialmente, introduz-se o conceito de parametrização da superfície alvo de contato com coordenadas convectivas. Logo após, toda a cinemática de contato normal e tangencial e a linearização das contribuições de contato são demonstradas detalhadamente. O capítulo segue com uma apresentação dos métodos utilizados para adicionar as restrições de contato à forma fraca do problema.

Os principais aspectos referentes à discretização das formas fracas, que descrevem o comportamento do contínuo, são abordados no capítulo 4. Realiza-se a construção das funções de interpolação de alta ordem utilizadas na discretização do problema. O capítulo segue com uma breve introdução sobre as funções de interpolação utilizadas na discretização dos multiplicadores de Lagrange. Por último, é apresentado o procedimento de discretização das formas fracas, resultando na matriz de rigidez e nos vetores de força interna e externa discretizados.

No capítulo 5, faz-se uma descrição detalhada do método mortar utilizado para discretização da forma fraca proveniente dos termos de contato. Também é apresentado, neste capítulo, o modelo constitutivo de contato com atrito seco, a lei clássica de atrito de Coulomb. O capítulo é encerrado com uma apresentação das estratégias utilizadas para ativação do elemento de contato.

No capítulo 6, apresenta-se uma descrição detalhada dos algoritmos utilizados para solução dos problemas de contato com e sem atrito.

No capítulo 7, são estudados alguns problemas clássicos da literatura de contato. É realizada uma verificação da formulação proposta em pequenas deformações com a solução analítica para o problema de Hertz. Para problemas com atrito em grandes deformações as verificações são feitas com soluções conhecidas na literatura. É proposto também um estudo da acurácia de solução com o aumento da ordem de interpolação do elemento de contato.

Algumas considerações relativas às contribuições deixadas pelo trabalho, assim como sugestões para trabalhos futuros, são feitas no capítulo 8.

2 MECÂNICA DO CONTÍNUO NÃO LINEAR

Este capítulo tem como objetivo introduzir os conceitos essenciais sobre mecânica do contínuo necessários à formulação do problema de contato mecânico entre corpos. Toda teoria aqui apresentada é vastamente aplicada em problemas clássicos estruturais, não se fazendo referência, neste momento, aos termos de contato propriamente ditos, os quais serão tratados nos capítulos posteriores.

No presente trabalho, foi utilizado o método dos elementos finitos (MEF) para a discretização da forma fraca da equação diferencial de equilíbrio. Por isso, este capítulo é basicamente construído de forma a abordar os conhecimentos necessários à transformação da forma forte do problema mecânico de equilíbrio em forma fraca, para que essa discretização seja possível.

O capítulo trata, inicialmente, da definição de configuração material e espacial, conceito este utilizado na teoria da elasticidade para a descrição do comportamento dos corpos, cujos movimentos estão sendo estudados. Então, uma breve introdução sobre medidas de deformação e tensão é apresentada, com intuito de dar suporte à seção de definição da forma forte do problema através da equação de equilíbrio. A transformação da forma forte do problema em forma fraca é feita via Princípio das Potências Virtuais (PPV).

O capítulo segue com uma revisão sobre conjugamento energético e medidas de tensão, os modelos constitutivos utilizados no presente trabalho e, por último, a linearização da forma fraca da equação de equilíbrio, que é a base do método de solução de Newton-Raphson.

Foram utilizadas as referências [7, 16, 14] como bibliografias de base para o desenvolvimento do capítulo.

2.1 Descrição material e espacial

A Figura 2.1 mostra a representação do movimento geral de um corpo deformável constituído de partículas materiais, que são rotuladas como coordenadas \mathbf{X} na configuração material (ou inicial). Tais partículas são escritas a partir de uma base cartesiana \mathbf{E}_I numa posição inicial, $tempo = 0$. Analogamente, a posição corrente destas partículas, localizadas no $tempo = t$, são escritas a partir de uma base cartesiana \mathbf{e}_I e rotuladas como coordenadas \mathbf{x} na configuração espacial.

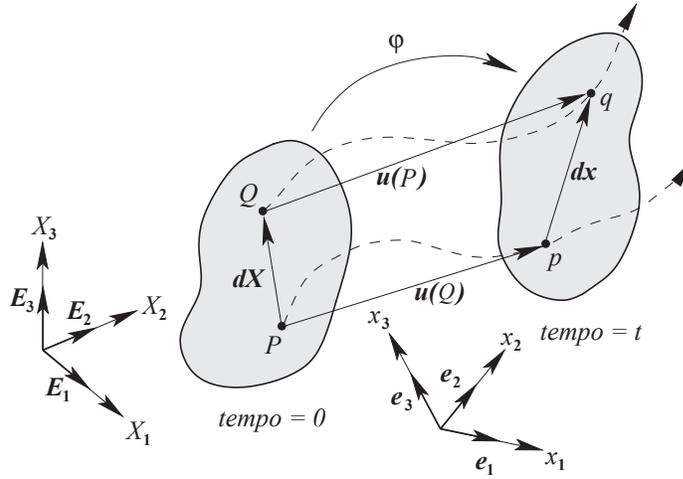


Figura 2.1: Movimento geral de um corpo deformável.

O movimento pode ser então descrito por um mapeamento φ entre as posições iniciais e correntes das partículas como:

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t). \quad (2.1)$$

Assim como o mapeamento inverso de movimento é dado por:

$$\mathbf{X} = \varphi^{-1}(\mathbf{x}, t). \quad (2.2)$$

Dada esta definição, pode-se escrever pontos e propriedades, como por exemplo a densidade de um corpo, tanto na configuração inicial ($\rho = \rho(\mathbf{X}, t)$, descrição material) como na configuração corrente ($\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$, descrição espacial), o que caracteriza, como de costume na literatura, uma descrição Lagrangiana e Euleriana, respectivamente.

Neste exemplo, uma mudança no tempo t , na descrição material da densidade, significa que uma mesma partícula material \mathbf{X} tem uma densidade diferente. Enquanto que, uma mudança no tempo t , na descrição espacial da densidade, significa diferentes leituras de densidades observadas em uma mesma posição espacial \mathbf{x} .

Pode-se associar à uma mudança de configuração, um campo vetorial \mathbf{u}_t , denominado campo de deslocamentos relativo à configuração de referência, definido matematicamente como

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{x} - \mathbf{X} = \varphi(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}. \quad (2.3)$$

Sendo assim, pode-se reescrever o mapeamento entre as posições iniciais e correntes das partículas como

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t) = \mathbf{X} + \mathbf{u}_t. \quad (2.4)$$

2.2 Medidas de deformação

Nesta seção são apresentadas, de forma breve, a definição de gradiente de deformação e as principais medidas de deformação utilizadas em problemas com grandes deformações.

2.2.1 Gradiente de deformação

Um dos principais tensores utilizados na análise de problemas de grandes deformações é o tensor gradiente de deformação, que é definido como:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \varphi(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}}. \quad (2.5)$$

Substituindo a Equação 2.4 em 2.5, é possível reescrever o tensor gradiente de deformação como:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial \mathbf{u}_t}{\partial \mathbf{X}} = \nabla \mathbf{X} + \nabla \mathbf{u}_t, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}_t. \quad (2.7)$$

Nas Equação 2.7, \mathbf{I} é o tensor identidade de segunda ordem.

Através do tensor gradiente de deformação é possível transformar vetores elementares descritos na configuração material, em vetores na configuração espacial, através do seguinte mapeamento tangencial

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \varphi(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} = \mathbf{F} d\mathbf{X}. \quad (2.8)$$

Esta transformação é denominada na literatura de *push forward*, aqui demonstrada na transformação do vetor material infinitesimal $d\mathbf{X}$.

O mesmo pode ser feito na direção inversa, ou seja, uma transformação *pull back* de vetores espaciais em vetores materiais. Como exemplo, tem-se a transformação do vetor espacial infinitesimal $d\mathbf{x}$ como

$$d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1}d\mathbf{x}. \quad (2.9)$$

2.2.2 Tensores de Green Lagrange e Almansi

Para a determinação dos tensores de medida de deformação, parte-se primeiramente da definição dos tensores de deformação de Cauchy-Green à direita e à esquerda, respectivamente, como

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}, \quad (2.10)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T. \quad (2.11)$$

A partir do tensor de Cauchy-Green à direita, pode-se definir um tensor para a descrição Lagrangiana (ou material) de deformação, denominado tensor de deformação de Green Lagrange, que é definido como

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}). \quad (2.12)$$

A descrição Euleriana (ou espacial) de deformação é representada pelo o tensor de deformação de Almansi, que é definido a partir do tensor de Cauchy-Green à esquerda como segue

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{b}^{-1}). \quad (2.13)$$

2.2.3 Taxa de deformação

Considera-se a velocidade de uma partícula como a derivada temporal da Equação 2.1 como

$$\mathbf{v}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \varphi(\mathbf{X}, t)}{\partial t},$$

ou ainda expressa em função da posição espacial e o tempo como

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\varphi^{-1}(\mathbf{x}, t), t).$$

A partir desta expressão, é possível definir o tensor gradiente de velocidade como

$$\mathbf{l} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} = \text{grad} \mathbf{v}. \quad (2.14)$$

O tensor \mathbf{l} permite definir a derivada temporal do tensor gradiente de deformação como

$$\dot{\mathbf{F}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{lF}. \quad (2.15)$$

A partir da Equação 2.15, define-se o tensor taxa de deformação material como

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}}), \quad (2.16)$$

e sua contraparte, o tensor taxa de deformação espacial como

$$\mathbf{d} = \mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{E}} \mathbf{F}^{-1}. \quad (2.17)$$

2.3 Medida de tensão

O objetivo deste capítulo é introduzir o conceito de tensão para um corpo deformável. Considera-se um corpo na configuração corrente como mostrado na Figura 2.2. Para o desenvolvimento do conceito de tensão é preciso estudar a ação de forças aplicadas em regiões R_α arbitrárias do corpo. Assim, considera-se o elemento de área Δa e a normal \mathbf{n} na vizinhança do ponto espacial p .

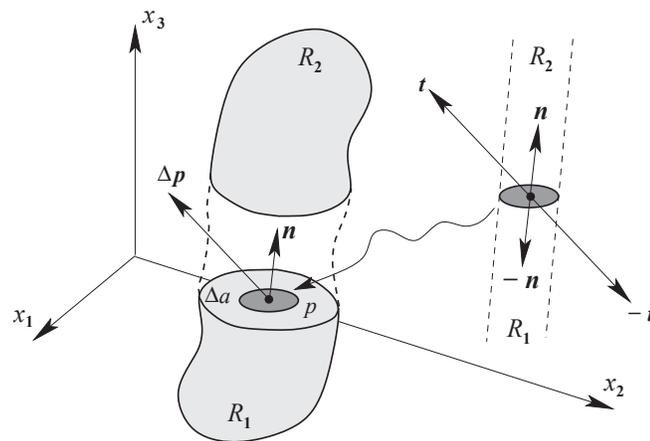


Figura 2.2: Vetor tração.

Tomando como a resultante dessas forças neste elemento de área o vetor $\Delta \mathbf{p}$, pode-se determi-

nar o vetor de tração de Cauchy $\mathbf{t}(\mathbf{n})$ correspondente à normal \mathbf{n} no ponto p como:

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta a}, \quad (2.18)$$

onde a relação entre \mathbf{t} e \mathbf{n} satisfaz a terceira lei de Newton de ação e reação

$$\mathbf{t}(-\mathbf{n}) = -\mathbf{t}(\mathbf{n}).$$

Pode-se escrever o vetor de tração em termos do tensor de tensão de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ como:

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}.$$

2.4 Equação de equilíbrio

Dado um corpo com volume v na configuração espacial, assume-se que forças de corpo \mathbf{f} (por unidade de volume) e forças de superfícies \mathbf{t} (por unidade de área) agem no domínio e no contorno do corpo, respectivamente. Em uma análise estática, pode-se dizer que o equilíbrio translacional do corpo implica na resultante zero de todas as forças agindo sobre o mesmo. Assim, utilizando uma notação integral, tem-se o equilíbrio translacional como:

$$\int_{\partial v} \mathbf{t} da + \int_v \mathbf{f} dv = \mathbf{0}. \quad (2.19)$$

Uma vez que $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$, pode-se reescrever o termo de superfície da equação anterior, como um termo de volume através do Teorema da Divergência de Gauss [16], resultando em

$$\int_v (\text{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}) dv = \mathbf{0}. \quad (2.20)$$

Considerando que a Equação 2.20 pode ser aplicada em qualquer região do corpo, pode-se reescrever a equação de equilíbrio, em caso de problemas estáticos, como um vetor de força residual, da seguinte forma:

$$\mathbf{r} = \text{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \mathbf{0}. \quad (2.21)$$

A Equação 2.21 é denominada forma forte do problema, e satisfaz a relação de equilíbrio espacial em cada ponto do volume v .

2.5 Princípio das potências virtuais

Na Seção anterior, foi estabelecida a equação diferencial de equilíbrio em sua forma forte. O Princípio das Potências Virtuais em sua forma integral é aqui utilizado para tornar esta formulação forte, que é satisfeita em cada ponto do domínio, em uma formulação mais fraca baseada numa formulação variacional. Esta forma fraca será posteriormente discretizada através do método dos elementos finitos para a solução do problema de equilíbrio de uma forma aproximada.

A partir da Figura 2.3, considera-se um vetor velocidade virtual arbitrário $\delta \mathbf{v}$ cinematicamente admissível na posição corrente do corpo. A potência virtual $\delta \dot{w}$, por unidade de volume, feito pelo vetor força residual \mathbf{r} (Equação 2.21) durante este movimento virtual é definida como

$$\delta \dot{w} = \mathbf{r} \cdot \delta \mathbf{v} = 0, \quad (2.22)$$

onde o sinal (\cdot) é o produto interno entre dois vetores.

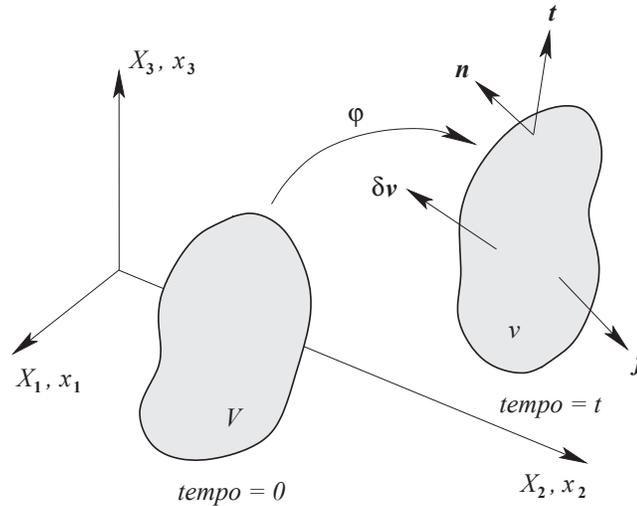


Figura 2.3: Representação esquemática do Princípio das potências virtuais.

Substituindo a Equação 2.21 para o vetor força residual \mathbf{r} na Equação 2.22, e integrando sobre o volume espacial, resulta em uma expressão que é a forma fraca do equilíbrio espacial do corpo conhecida como equação da potência virtual espacial integral

$$\delta \dot{W} = \int_v (\text{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}) \cdot \delta \mathbf{v} dv = 0. \quad (2.23)$$

Após algumas manipulações descritas com detalhes em [16], é possível reescrever a Equação

2.23 como

$$\delta\dot{W} = \int_v \boldsymbol{\sigma} : \delta\mathbf{d}dv - \int_v \mathbf{f} \cdot \delta\mathbf{v}dv - \int_{\partial v} \mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{v}da = 0, \quad (2.24)$$

onde $\delta\mathbf{d}$ é o tensor taxa de deformação virtual. O sinal $(:)$ é o produto interno entre dois tensores de 2ª ordem, ou dupla contração. Essa equação escalar fundamental indica o equilíbrio de um corpo deformável, na descrição espacial, e é a base para a discretização através do método dos elementos finitos.

Para o problema de contato, deve-se adicionar um termo C_c devido à potência virtual produzida pela força de contato, o qual será tratado no capítulo referente à formulação dos termos de contato. Então, para o problema de contato, tem-se

$$\delta\dot{W} = \int_v \boldsymbol{\sigma} : \delta\mathbf{d}dv - \int_v \mathbf{f} \cdot \delta\mathbf{v}dv - \int_{\partial v} \mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{v}da + C_c = 0.$$

2.6 Medidas conjugadas de tensão e deformação

Na Equação 2.24, a potência virtual interna produzida pela tensão é dada pelo primeiro termo

$$\delta\dot{W}_{int} = \int_v \boldsymbol{\sigma} : \delta\mathbf{d}dv. \quad (2.25)$$

Os termos $\boldsymbol{\sigma}$ e \mathbf{d} são conhecidos como tensores energeticamente conjugados em relação ao volume corrente deformado. Uma vez que o produto entre eles resulta na potência por unidade de volume corrente. Outros pares energeticamente conjugados de tensão e taxa de deformação surgirão expressando a equação da potência virtual em coordenadas materiais.

Através das relações do jacobiano da transformação $J = dv/dV$, da força por unidade de volume indeformado $\mathbf{f}_0 = J\mathbf{f}$ e do vetor tração por unidade de área inicial $\mathbf{t}_0 = \mathbf{t}(da/dA)$, pode-se ainda expressar a Equação 2.25 em relação ao volume e área iniciais, como

$$\int_V J\boldsymbol{\sigma} : \delta\mathbf{d}dV = \int_V \mathbf{f}_0 \cdot \delta\mathbf{v}dV + \int_{\partial V} \mathbf{t}_0 \cdot \delta\mathbf{v}dA. \quad (2.26)$$

2.6.1 Tensor de tensão de Kirchhoff

A potência virtual interna, dada pelo lado esquerdo da Equação 2.26, pode ser escrita em termos do tensor de tensão de Kirchhoff $\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma}$, como

$$\delta\dot{W}_{int} = \int_V \boldsymbol{\tau} : \delta\mathbf{d}dV. \quad (2.27)$$

A Equação 2.27 mostra que o tensor de tensão de Kirchhoff é conjugado energeticamente com o tensor taxa de deformação, em relação ao volume inicial. Estas transformações, resultantes da potência virtual interna, ainda não são totalmente satisfatórias, pois ainda que são escritas em função de dV na configuração material, estão em função dos tensores espaciais $\boldsymbol{\tau}$ e $\boldsymbol{\sigma}$.

Com base nesta definição, nas seções que seguem, o primeiro e o segundo tensor de Piola-Kirchhoff são definidos.

2.6.2 Primeiro tensor de Piola-Kirchhoff

Utilizando-se da simetria do tensor de tensões de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$, da propriedade do traço de tensores [16] e reescrevendo a Equação 2.15 como $\mathbf{l} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}$, pode-se expressar a potência virtual interna como

$$\begin{aligned} \delta\dot{W}_{int} &= \int_V J\boldsymbol{\sigma} : \delta\mathbf{l}dV \\ &= \int_V J\boldsymbol{\sigma} : \left(\delta\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} \right) dV \\ &= \int_V tr \left(J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\delta\dot{\mathbf{F}} \right) dV \\ &= \int_V (J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T}) : \delta\dot{\mathbf{F}}dV. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Observa-se que o tensor de tensão conjugado energeticamente com a taxa do tensor gradiente de deformação é o primeiro tensor de Piola-Kirchhoff definido por

$$\mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T}. \quad (2.29)$$

Reescrevendo a Equação 2.26, tem-se a expressão da potência virtual em termos do primeiro tensor de Piola-Kirchhoff como

$$\int_V \mathbf{P} : \delta\dot{\mathbf{F}}dV = \int_V \mathbf{f}_0 \cdot \delta\mathbf{v}dV + \int_{\partial V} \mathbf{t}_0 \cdot \delta\mathbf{v}dA + C_c.$$

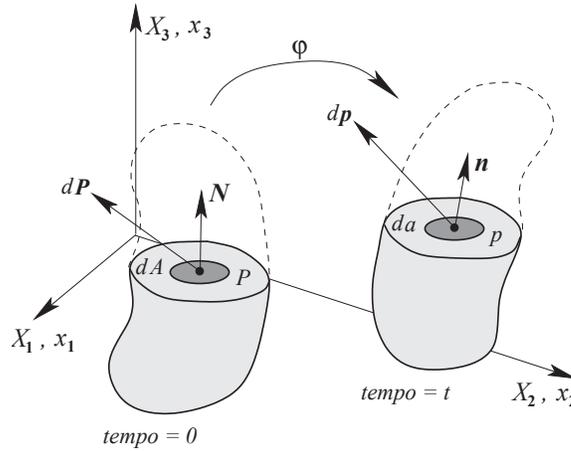


Figura 2.4: Interpretação dos tensores de tensão.

Pode-se também definir a equação diferencial de equilíbrio em termos do primeiro tensor de Piola-Kirchhoff como

$$\mathbf{r}_0 = J\mathbf{r} = DIV \mathbf{P} + \mathbf{f}_0, \quad (2.30)$$

onde $DIV \mathbf{P}$ é o divergente de \mathbf{P} em relação ao sistema de coordenada inicial

$$DIV \mathbf{P} = \nabla_0 \mathbf{P} : \mathbf{I}; \quad (2.31)$$

$$\nabla_0 \mathbf{P} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{X}}. \quad (2.32)$$

2.6.3 Segundo tensor de Piola-Kirchhoff

O primeiro tensor de Piola-Kirchhoff é um tensor de segunda ordem não simétrico, não completamente descrito na configuração material. No entanto, é possível definir um tensor simétrico de segunda ordem, conhecido como segundo tensor de tensão de Piola-Kirchhoff \mathbf{S} , através de uma transformação do tipo *pull back* de um elemento de força $d\mathbf{P}$ (Figura 2.4) para um dado elemento espacial de força $d\mathbf{p}$ como

$$d\mathbf{P} = \mathbf{F}^{-1}d\mathbf{p}. \quad (2.33)$$

Uma vez que $d\mathbf{p} = J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T}d\mathbf{A} = \mathbf{P}d\mathbf{A}$, pode-se substituir esta relação na Equação 2.33, e escrever $d\mathbf{P}$ em termos do segundo tensor de Piola-Kirchhoff como

$$d\mathbf{P} = J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T}d\mathbf{A} = \mathbf{S}d\mathbf{A}, \quad (2.34)$$

$$\mathbf{S} = J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T}. \quad (2.35)$$

Substituindo esta relação na potência virtual interna (Equação 2.25), tem-se

$$\begin{aligned} \delta\dot{W}_{int} &= \int_v \boldsymbol{\sigma} : \delta\mathbf{d}dv \\ &= \int_V J\boldsymbol{\sigma} : \left(\mathbf{F}^{-T}\delta\dot{\mathbf{E}}\mathbf{F}^{-1} \right) dV \\ &= \int_V \text{tr} \left(\mathbf{F}^{-1}J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T}\delta\dot{\mathbf{E}} \right) dV \\ &= \int_V \mathbf{S} : \delta\dot{\mathbf{E}}dv. \end{aligned} \quad (2.36)$$

A Equação 2.36 mostra que o tensor \mathbf{S} é conjugado energeticamente com $\dot{\mathbf{E}}$, e permite expressar a potência virtual em termos do segundo tensor de Piola-Kirchhoff como

$$\int_V \mathbf{S} : \delta\dot{\mathbf{E}}dV = \int_V \mathbf{f}_0 \cdot \delta\mathbf{v}dV + \int_{\partial V} \mathbf{t}_0 \cdot \delta\mathbf{v}dA. \quad (2.37)$$

Agora é possível expressar o tensor de tensão de Cauchy em termos do primeiro e segundo tensor de Piola-Kirchhoff, respectivamente, como

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1}\mathbf{P}\mathbf{F}^T, \quad (2.38)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1}\mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{F}^T. \quad (2.39)$$

2.7 Lei constitutiva

O modelo constitutivo utilizado no presente trabalho, para a modelagem do material em grandes deformação, é o Neo-Hookeano isotrópico hiperelástico compressível. Quando aplicado em casos de pequenas deformações suas equações se reduzem à clássica lei de Hooke para material isotrópico linear elástico [97].

Uma vez que o material é considerado isotrópico, ou seja, seu comportamento constitutivo é o mesmo em qualquer direção material [16], pode-se escrever um funcional de energia ψ que depende dos invariantes do tensor de Cauchy-Green à direita \mathbf{C} (Equação 2.10), como

$$\psi(\mathbf{C}(\mathbf{X}), \mathbf{X}) = \psi(I_{\mathbf{C}}, II_{\mathbf{C}}, III_{\mathbf{C}}, \mathbf{X}). \quad (2.40)$$

Os invariantes do tensor de Cauchy-Green à direita são definidos como

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{C}} &= \text{tr}(\mathbf{C}) = \mathbf{C} : \mathbf{I}, \\ II_{\mathbf{C}} &= \text{tr}(\mathbf{C}\mathbf{C}) = \mathbf{C} : \mathbf{C}, \\ III_{\mathbf{C}} &= \det(\mathbf{C}) = J^2. \end{aligned} \quad (2.41)$$

De forma geral, pode-se obter o segundo tensor de tensão de Piola-Kirchhoff pela seguinte expressão

$$\mathbf{S} = 2\psi_I \mathbf{I} + 4\psi_{II} \mathbf{C} + 2J^2 \psi_{III} \mathbf{C}^{-1}, \quad (2.42)$$

onde

$$\begin{aligned} \psi_I &= \frac{\partial \psi}{\partial I_{\mathbf{C}}}, \\ \psi_{II} &= \frac{\partial \psi}{\partial II_{\mathbf{C}}}, \\ \psi_{III} &= \frac{\partial \psi}{\partial III_{\mathbf{C}}}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Pode-se também recuperar o tensor de tensões de Cauchy, dado por

$$\boldsymbol{\sigma} = 2J^{-1} \psi_I \mathbf{b} + 4J^{-1} \psi_{II} \mathbf{b}^2 + 2J \psi_{III} \mathbf{I}. \quad (2.44)$$

Para o caso específico do material Neo-Hookeano compressível, a Equação 2.40 para o funcional de energia de deformação, é definida como

$$\psi = \mu(I_{\mathbf{C}} - 3) - \mu \ln J + \frac{\lambda}{2} (\ln J)^2. \quad (2.45)$$

As constantes λ e μ são conhecidas como constantes de Lamé. Estas podem ser convertidas em parâmetros materiais mais conhecidos, como o módulo de Young, ou módulo de elasticidade, E , e o coeficiente de poisson ν , através das seguintes relações

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad (2.46)$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \quad (2.47)$$

Neste caso $\mu = G$, ou módulo de cisalhamento.

O segundo tensor de tensão de Piola-Kirchhoff pode ser obtido pelas Equações 2.42, 2.43 e 2.45,

resultando em

$$\mathbf{S} = \mu (\mathbf{I} - \mathbf{C}^{-1}) + \lambda (\ln J) \mathbf{C}^{-1}. \quad (2.48)$$

Analogamente para o tensor de tensões de Cauchy, tem-se

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\mu}{J} (\mathbf{b} - \mathbf{I}) + \frac{\lambda}{J} (\ln J) \mathbf{I}. \quad (2.49)$$

O tensor Lagrangiano de elasticidade de quarta ordem \mathcal{C} , para o material Neo-Hookeano, pode ser obtido diferenciando a Equação 2.48 em relação as componentes do tensor \mathbf{C} . As manipulações algébricas necessárias podem ser encontradas na referência [16]. No presente texto somente se define \mathcal{C} como

$$\mathcal{C} = \lambda \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} + 2(\mu - \lambda \ln J) \mathcal{I}, \quad (2.50)$$

$$\mathcal{I} = -\frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}}, \quad (2.51)$$

onde (\otimes) é o produto tensorial entre dois tensores.

O tensor Euleriano de elasticidade \mathbf{c} , ou tensor de elasticidade espacial, pode ser obtido a partir de uma transformação do tipo *pushing forward* do tensor de elasticidade Lagrangeano [16], assim como feito para o tensor Lagrangiano de elasticidade. No presente texto somente se define \mathbf{c} como

$$\mathbf{c} = \frac{\lambda}{J} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + \frac{2}{J} (\mu - \lambda \ln J) \mathbf{i}. \quad (2.52)$$

Na Equação 2.52, \mathbf{i} é um tensor de quarta ordem que pode ser obtido por uma transformação do tipo *pushing forward* de \mathcal{I} , e é dado em função do delta de Kroneker como

$$\mathbf{i} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (2.53)$$

2.8 Linearização da equação de equilíbrio

A Equação 2.24 é não linear em relação à geometria e ao material do problema. Para estas condições materiais e de carga, sua solução é dada por uma configuração deformada φ , em um estado de equilíbrio [16]. A fim de se obter esta posição de equilíbrio utilizando o método de Newton-Raphson, é necessário realizar a linearização das equações de equilíbrio usando a derivada direcional da Equação 2.24. Muitos detalhes matemáticos são aqui omitidos, mas podem ser

encontrados nas referências [16, 65].

Considerando uma função teste φ_k , a Equação 2.24 pode ser linearizada na direção de um incremento de deslocamento $[\Delta \mathbf{u}]$, através de uma expansão em série de Taylor e truncando no termo de primeira ordem como

$$\delta \dot{W}(\varphi_k, \delta \mathbf{v}) + D\delta \dot{W}(\varphi_k, \delta \mathbf{v})[\Delta \mathbf{u}] = \mathbf{0}. \quad (2.54)$$

onde o primeiro termo é a potência virtual, que dará origem ao vetor de força residual. O segundo termo é a derivada direcional desta potência virtual espacial em φ_k na direção de um incremento de deslocamento $[\Delta \mathbf{u}]$. Este termo dará origem a matriz de rigidez tangente e será considerado em três partes: componente interna, externa e de contato, ou seja

$$D\delta \dot{W}(\varphi_k, \delta \mathbf{v})[\Delta \mathbf{u}] = D\delta \dot{W}_{int}(\varphi_k, \delta \mathbf{v})[\Delta \mathbf{u}] - D\delta \dot{W}_{ext}(\varphi_k, \delta \mathbf{v})[\Delta \mathbf{u}] + D\dot{C}_c[\Delta \mathbf{u}]. \quad (2.55)$$

Observa-se que

$$\delta \dot{W}_{int}(\varphi_k, \delta \mathbf{v}) = \int_v \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{d} dv; \quad (2.56)$$

$$\delta \dot{W}_{ext}(\varphi_k, \delta \mathbf{v}) = \int_v \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{v} dv + \int_{\partial v} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{v} da, \quad (2.57)$$

ou ainda na configuração material

$$\delta \dot{W}_{int}(\varphi_k, \delta \mathbf{v}) = \int_V \mathbf{S} : \delta \dot{\mathbf{E}} dV; \quad (2.58)$$

$$\delta \dot{W}_{ext}(\varphi_k, \delta \mathbf{v}) = \int_V \mathbf{f}_0 \cdot \delta \mathbf{v} dV + \int_{\partial V} \mathbf{t}_0 \cdot \delta \mathbf{v} dA. \quad (2.59)$$

A componente $D\dot{C}_c[\Delta \mathbf{u}]$ é a linearização da componente de potência virtual de contato, a qual será tratada nas seções específicas de contato.

2.8.1 Linearização da potência virtual interna

Após extensiva manipulação algébrica, disponível na referência [16], pode-se escrever a Equação 2.58, como

$$D\delta\dot{W}_{int}(\varphi_k, \delta\mathbf{v})[\Delta\mathbf{u}] = \int_v D\mathbf{E}[\delta\mathbf{v}] : \mathcal{C} : D\mathbf{E}[\Delta\mathbf{u}] dV + \int_v \mathbf{S} : [\nabla_0\mathbf{u}^T \nabla_0\delta\mathbf{v}] dV. \quad (2.60)$$

Os termos $D\mathbf{E}[\Delta\mathbf{u}]$ e $D\mathbf{E}[\delta\mathbf{v}]$ podem ser expressados como

$$D\mathbf{E}[\Delta\mathbf{u}] = \frac{1}{2}\mathbf{F}^T \left[\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T \right] \mathbf{F}, \quad (2.61)$$

$$D\mathbf{E}[\delta\mathbf{v}] = \mathbf{F}^T \delta\mathbf{d}\mathbf{F}. \quad (2.62)$$

De forma análoga, para a descrição espacial, escreve-se

$$D\delta\dot{W}_{int}(\varphi_k, \delta\mathbf{v})[\Delta\mathbf{u}] = \int_v \delta\mathbf{d} : \mathbf{c} : \boldsymbol{\epsilon} dv + \int_v \boldsymbol{\sigma} : [(\nabla\mathbf{u})^T \nabla\delta\mathbf{v}] dv. \quad (2.63)$$

Detalhes adicionais podem ser encontrados nas referências [16, 65].

2.8.2 Linearização da potência virtual externa

O termo $D\delta\dot{W}_{ext}(\varphi_k, \delta\mathbf{v})[\Delta\mathbf{u}]$ da Equação 2.55, referente à linearização da potência virtual devida à aplicação de forças externas ao corpo, será tratado em duas partes. A primeira devida à força externa de corpo, aqui considerada somente a parcela gravitacional $\mathbf{f} = \rho\mathbf{g}$. A expressão da potência virtual para esta parcela, sem a contribuição dos termos de contato, é dada por

$$\delta\dot{W}_{ext}^{\mathbf{f}}(\varphi_k, \delta\mathbf{v}) = \int_v \frac{\rho_0}{J} \mathbf{g} \cdot \delta\mathbf{v} dv = \int_V \rho_0 \mathbf{g} \cdot \delta\mathbf{v} dV. \quad (2.64)$$

Nenhum dos termos da Equação 2.64 é dependente da geometria corrente, portanto $D\delta\dot{W}_{ext}^{\mathbf{f}}(\varphi_k, \delta\mathbf{v})[\Delta\mathbf{u}] = 0$.

A segunda parcela é devida à aplicação de forças externas de superfície

$$\delta\dot{W}_{ext}^{\mathbf{p}}(\varphi_k, \delta\mathbf{v}) = \int_{\partial v} \mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{v} da = \int_{\partial V} \mathbf{t}_0 \cdot \delta\mathbf{v} dA. \quad (2.65)$$

Alguns exemplos de força de tração, que resultam em trabalho desta natureza, podem ser citados, entre eles, a pressão de contato, cujos termos e as linearizações serão discutidos nas próximas seções.

Um outro exemplo simples, porém relevante, é o caso de aplicação de uma pressão constante à uma superfície a de um corpo. A Figura 2.5 mostra um corpo com pressão uniforme p distribuída

em uma superfície a que tem normal \mathbf{n} . Pode-se assim, representar o vetor de tração \mathbf{t} , da Equação 2.65, como $\mathbf{t} = p\mathbf{n}$. Reescrevendo a Equação 2.65, tem-se

$$\delta\dot{W}_{ext}^p(\varphi, \delta\mathbf{v}) = \int_{\partial v} p\mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{v} da. \quad (2.66)$$

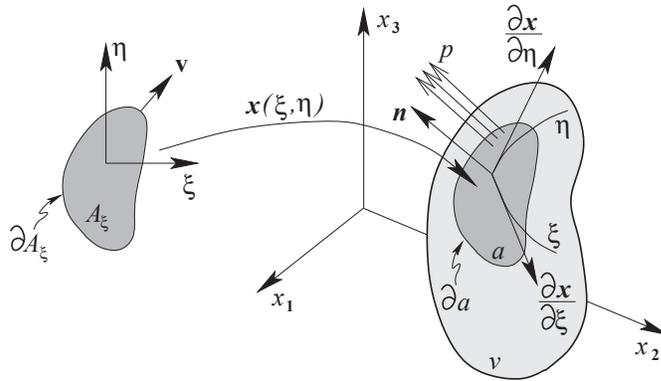


Figura 2.5: Pressão uniforme de superfície.

Neste tipo de carregamento, tanto o elemento de área quanto a orientação da normal são dependentes da deformação do corpo. Com isso, qualquer mudança na configuração da geometria promove uma mudança na condição de equilíbrio.

Em termos da parametrização proposta na referência [16], e os vetores tangentes $\partial\mathbf{x}/\partial\xi$ e $\partial\mathbf{x}/\partial\eta$, pode-se definir o vetor normal e o diferencial de área como

$$\mathbf{n} = \frac{\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\xi} \times \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\eta}}{\left\| \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\xi} \times \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\eta} \right\|}, \quad (2.67)$$

$$da = \left\| \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\xi} \times \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\eta} \right\| d\xi d\eta. \quad (2.68)$$

Reescrevendo a Equação 2.66 com os termos anteriores, tem-se

$$\delta\dot{W}_{ext}^p(\varphi_k, \delta\mathbf{v}) = \int_{A_\xi} p\delta\mathbf{v} \cdot \left(\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\xi} \times \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\eta} \right) d\xi d\eta. \quad (2.69)$$

Após algumas considerações e uma extensa manipulação matemática, disponível em [16], pode-se escrever a linearização da Equação 2.69 como

$$\begin{aligned}
D\delta\dot{W}_{ext}^{\mathbf{p}}(\varphi_k, \delta\mathbf{v})[\Delta\mathbf{u}] &= \frac{1}{2} \int_{A_\xi} p \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \cdot \left[\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \eta} \times \delta\mathbf{v} \right) + \left(\frac{\partial \delta\mathbf{v}}{\partial \eta} \times \Delta\mathbf{u} \right) \right] d\xi d\eta \\
&- \frac{1}{2} \int_{A_\xi} p \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} \cdot \left[\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} \times \delta\mathbf{v} \right) + \left(\frac{\partial \delta\mathbf{v}}{\partial \xi} \times \Delta\mathbf{u} \right) \right] d\xi d\eta. \quad (2.70)
\end{aligned}$$

3 MECÂNICA DO CONTATO

No presente trabalho, consideram-se problemas envolvendo efeitos não-lineares, de grandes deformações, onde dois ou mais corpos entram em contato. A formulação aqui apresentada está baseada nas referências [61, 97].

Dada a Figura 3.1, a região no espaço onde estes corpos têm seus contornos em contato é denominada superfície de contato. Para simplificar a formulação aqui proposta, consideram-se somente dois corpos elásticos B^α , com $\alpha = 1, 2$, cada um ocupando um domínio delimitado $\Omega^\alpha \subset R^3$.

O contorno Γ^α é constituído por três partes: Γ_σ com carregamentos de superfície prescritos, Γ_u com deslocamentos prescritos e Γ_c , onde os dois corpos B^1 e B^2 entram em contato. As seguintes relações devem ser satisfeitas: $\Gamma^\alpha = \Gamma_\sigma^\alpha \cup \Gamma_u^\alpha \cup \Gamma_c^\alpha$ e $\Gamma_\sigma^\alpha \cap \Gamma_u^\alpha \cap \Gamma_c^\alpha = 0$.

Considera-se que dois pontos na configuração material \mathbf{X}^1 e \mathbf{X}^2 , localizados nestes corpos distintos, podem ocupar a mesma posição na configuração corrente (ou espacial), $\varphi(\mathbf{X}^2, t) = \varphi(\mathbf{X}^1, t)$, com o processo de deformação. Por isso, as condições de contato devem ser formuladas em relação à configuração corrente.

Em geral, duas etapas são executadas no processo de solução deste problema. A primeira é a busca global para a detecção da região de contato. A segunda é o estabelecimento das relações cinemáticas locais necessárias às restrições impostas pela física do problema de contato.

O objetivo do presente capítulo é formular as relações de restrição e cinemática para o contato normal e tangencial para problemas de contato em grandes deformações. Primeiramente, realiza-se uma apresentação do sistema de parametrização da superfície alvo de contato.

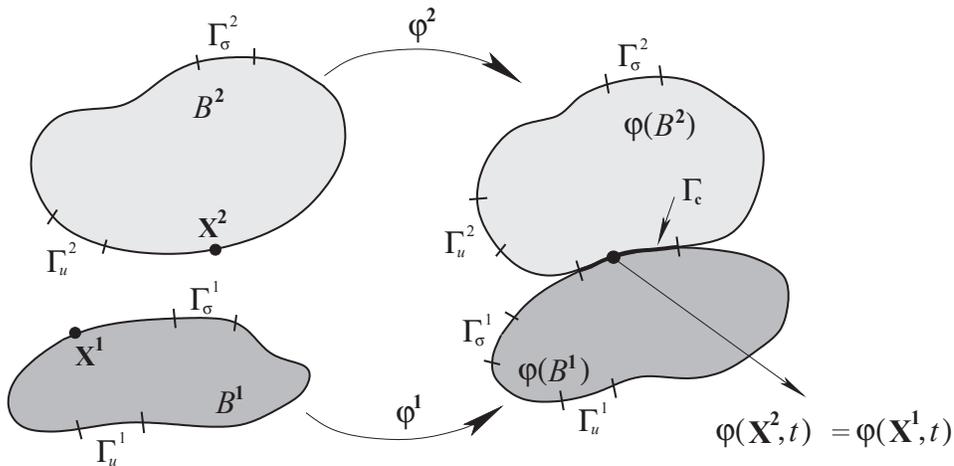


Figura 3.1: Representação do problema de contato em deformações finitas.

3.1 Parametrização da superfície alvo de contato

Para a parametrização da superfície alvo de contato será utilizado um sistema de coordenadas convectivas. Este sistema de parametrização de superfícies curvas é amplamente utilizado na literatura tanto para a resolução de problemas de contato [98, 99, 97, 36], quanto na teoria de problemas de casca [23, 24]. Para problemas de contato, este sistema de coordenadas consegue descrever melhor as superfícies deformadas que estão sendo utilizadas para estabelecer as restrições de contato [97]. Com este sistema também é possível, para problemas de contato bidimensionais, descrever a superfície alvo com uma só coordenada de parametrização. Isso promove uma redução no número de termos das variações das funções de penetração normal e tangencial, assim como das linearizações de termos dependentes das coordenadas de parametrização, sendo este um aspecto importante que traz vantagem ao sistema.

A idéia básica é formar um sistema de coordenadas ligadas ao corpo alvo, e conforme o corpo alvo se deforma, este sistema se deforma juntamente com o corpo (Figura 3.2).

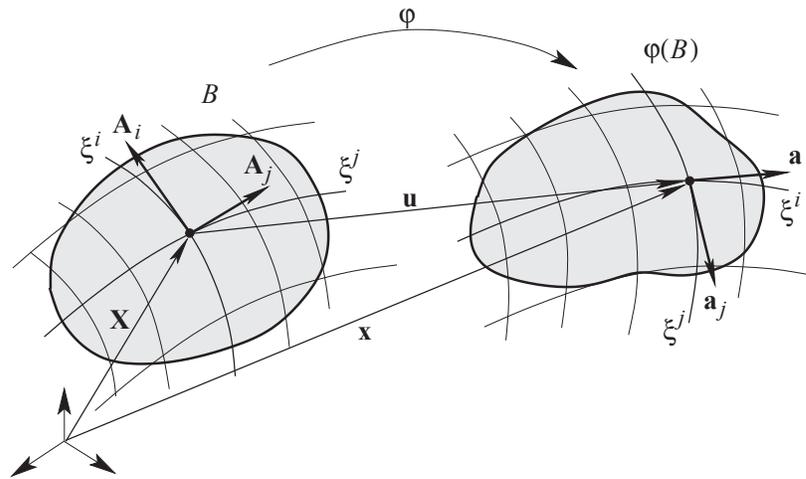


Figura 3.2: Coordenadas convectivas.

Primeiramente, deve-se escrever as coordenadas material \mathbf{X} e espacial \mathbf{x} no sistema cartesiano, como função das coordenadas convectivas ξ^j . Para problemas de contato tridimensionais, necessita-se de duas direções de parametrização, uma vez que o alvo de contato é descrito geometricamente por uma superfície, portanto, $j = 1, 2$. Para problemas de contato bidimensionais, apesar de o alvo ser chamado de superfície alvo de contato, ele é descrito geometricamente por uma linha, portanto $j = 1$. Reescrevendo as coordenadas cartesianas, têm-se

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\xi^j), \quad (3.1)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi^j). \quad (3.2)$$

Pode-se agora definir um vetor tangente no ponto \mathbf{X} na configuração B como

$$\mathbf{A}_j = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^j} = \mathbf{X}_{,j}. \quad (3.3)$$

Como no presente trabalho se deseja modelar problemas de contato bidimensionais, este capítulo será focado na parametrização em uma só direção, portanto, $\xi^j = \xi^1 = \xi$ e $\mathbf{A}_j = \mathbf{X}_{,\xi}$.

Uma importante observação é que esta notação compacta, para a primeira derivada parcial, será também utilizada para outras grandezas no texto, assim como a notação compacta para segunda derivada, exemplo: $\mathbf{X}_{,\xi\xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi} \right)$.

Para uma direção de parametrização, o vetor tangente no ponto é definido como

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi} = \mathbf{X}_{,\xi}. \quad (3.4)$$

Assumindo que a superfície é suave, o mesmo pode ser definido para um ponto que é descrito por $\varphi(\mathbf{X}, t)$ em $\varphi(B)$

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\partial \varphi(\mathbf{X}, t)}{\partial \xi} = \varphi_{,\xi}. \quad (3.5)$$

Utilizando a regra da cadeia, juntamente com as Equações 3.4 e 3.5, pode-se reescrever o vetor tangente como

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\partial \varphi(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi} = \mathbf{F} \mathbf{A}_1. \quad (3.6)$$

A Equação 3.6 indica, que é possível estabelecer uma relação de recorrência entre \mathbf{a}_1 e \mathbf{A}_1 através do tensor gradiente de deformação, definido em coordenadas convectivas por

$$\mathbf{F} = \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{A}^i. \quad (3.7)$$

Estes vetores tangentes são denominados covariantes do sistema de parametrização convectivo [24]. Estes são conectados com os vetores contravariantes de forma a atender a relação $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}^k = \delta_i^k$ (δ_i^k é o delta de Kronecker) [24].

Pode-se escrever quatro relações de transformação baseadas nas definições anteriores

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{F}\mathbf{A}_i; \quad (3.8)$$

$$\mathbf{a}^i = \mathbf{F}^{-T}\mathbf{A}^i; \quad (3.9)$$

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{a}_i; \quad (3.10)$$

$$\mathbf{A}^i = \mathbf{F}^T\mathbf{a}^i. \quad (3.11)$$

Os vetores normais em \mathbf{X} e \mathbf{x} são definidos, respectivamente, como

$$\mathbf{N}_1(\xi, t) = \frac{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{A}_1(\xi, t)}{\|\mathbf{e}_3 \times \mathbf{A}_1(\xi, t)\|}, \quad (3.12)$$

$$\mathbf{n}_1(\xi, t) = \frac{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{a}_1(\xi, t)}{\|\mathbf{e}_3 \times \mathbf{a}_1(\xi, t)\|}. \quad (3.13)$$

Agora, pode-se definir o tensor métrico $a_{\alpha\beta}$ e o tensor de curvatura $b_{\alpha\beta}$, como

$$a_{\alpha\beta} = a_{11} = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 \quad e \quad a^{11}a_{11} = \delta_1^1, \quad (3.14)$$

$$b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha} = b_{11} = -\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{n}_{1,\xi}. \quad (3.15)$$

Com o tensor métrico é possível se definir a base de vetores contravariantes como

$$\mathbf{a}^1 = a^{11}\mathbf{a}_1. \quad (3.16)$$

Com essas definições, pode-se escrever, após algumas manipulações matemáticas disponíveis em [97], o tensor gradiente de deformação na superfície contactora para problemas de contato bidimensionais como

$$\mathbf{F}_s = \mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{A}^1 + \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{N}_1. \quad (3.17)$$

Este tensor gradiente de deformação permite calcular medidas de deformação e tensão na superfície de contato. O termo é utilizado principalmente para transformação de tensores de tensão obtidos na superfície de contato.

3.2 Contato normal

Considerando a Figura 3.3, a coordenada espacial, ou corrente, é dada pela Equação 2.4, onde agora a mesma é reescrita de forma a representar posições em corpos distintos, $\mathbf{x}^\alpha = \mathbf{X}^\alpha + \mathbf{u}^\alpha$, com $\alpha = 1, 2$. Para o contato normal entre dois corpos, a condição matemática para que um corpo não penetre no outro é expressa por

$$(\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1) \cdot \mathbf{n}^1 \geq 0. \quad (3.18)$$

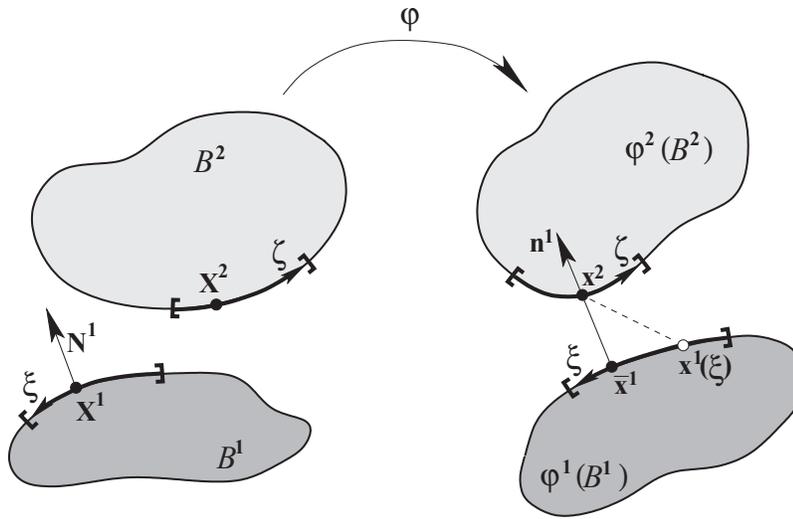


Figura 3.3: Configuração deformada dos corpos B^α .

A normal \mathbf{n}^1 é associada com o corpo B^1 . Considerando que o contorno da região de contato é localmente convexa, pode-se associar a cada ponto \mathbf{x}^2 em Γ^2 , um ponto de projeção $\bar{\mathbf{x}}^1 = \mathbf{x}^1(\bar{\boldsymbol{\xi}})$ em Γ^1 , através da solução do problema de mínima distância [25], como

$$\hat{d}^1(\boldsymbol{\xi}) = \|\mathbf{x}^2 - \bar{\mathbf{x}}^1\| = \min_{\mathbf{x}^1 \in \Gamma^1} \|\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1(\boldsymbol{\xi})\|. \quad (3.19)$$

A coordenada $\boldsymbol{\xi}$ denota a parametrização do contorno Γ^1 , através de coordenadas convectivas (Figura 3.4). Para problemas tridimensionais, tem-se $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$, enquanto que para problemas bidimensionais é possível parametrizar o contorno de contato somente com uma coordenada de parametrização $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1)$.

A Equação 3.19 será utilizada para a determinação da função penetração. O ponto de projeção $\bar{\mathbf{x}}^1$ é computado através da condição necessária para ponto de mínimo de uma função

$$\frac{d}{d\xi^\alpha} [\hat{d}^1(\boldsymbol{\xi})] = \frac{\mathbf{x}^2 - \hat{\mathbf{x}}^1(\boldsymbol{\xi})}{\|\mathbf{x}^2 - \hat{\mathbf{x}}^1(\boldsymbol{\xi})\|} \cdot \hat{\mathbf{x}}_{,\alpha}^1(\boldsymbol{\xi}) = 0. \quad (3.20)$$

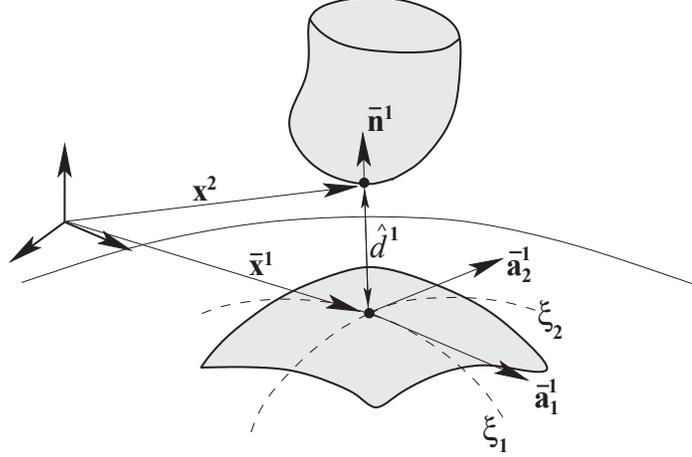


Figura 3.4: Problema de mínima distância.

A solução da Equação 3.20 requer ortogonalidade entre o primeiro e o segundo termo. O termo $\hat{\mathbf{x}}_{,\alpha}^1(\boldsymbol{\xi})$ é o vetor tangente \mathbf{a}_α^1 . Com isso, o primeiro termo precisa ter a mesma direção do vetor normal \mathbf{n}^1 no ponto de mínimo. Sendo assim, tem-se a condição $-\mathbf{n}^1(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{a}_\alpha^1(\boldsymbol{\xi}) = 0$.

Esse resultado tem uma importante interpretação física para o problema de contato, pois significa que o ponto $\hat{\mathbf{x}}^1(\boldsymbol{\xi})$ é a projeção ortogonal dada pelo ponto contactor \mathbf{x}^2 na superfície $\varphi_i^1(\Gamma_c^1)$.

Nesta seção, tudo que for avaliado na coordenada que produz a mínima distância ($\bar{\boldsymbol{\xi}}$), será representado com uma barra. O sobrescrito, como dito anteriormente, faz referência ao corpo, enquanto que o subscrito à direção da coordenada de parametrização, uma vez que para problemas tridimensionais $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$. Portanto, o vetor normal, avaliado na coordenada de projeção ortogonal, é definido como

$$\bar{\mathbf{n}}^1 = \frac{\bar{\mathbf{a}}_1^1 \times \bar{\mathbf{a}}_2^1}{\|\bar{\mathbf{a}}_1^1 \times \bar{\mathbf{a}}_2^1\|}, \quad (3.21)$$

para o casos tridimensionais. Para os casos bidimensionais, basta substituir o vetor tangente $\bar{\mathbf{a}}_1^1$ pelo vetor unitário perpendicular ao plano de análise \mathbf{e}_3 .

Assim, pode-se definir o vetor penetração \mathbf{g} como

$$\mathbf{g} = (\mathbf{x}^2 - \bar{\mathbf{x}}^1). \quad (3.22)$$

A partir da Equação 3.22 e a normal $\bar{\mathbf{n}}^1$, pode-se definir a função penetração ou, como conhe-

cidade na literatura, função *gap* entre os corpos como

$$\bar{g}_N = \begin{cases} (\mathbf{x}^2 - \bar{\mathbf{x}}^1) \cdot \bar{\mathbf{n}}^1 & \text{se } (\mathbf{x}^2 - \bar{\mathbf{x}}^1) \cdot \bar{\mathbf{n}}^1 < 0 \\ 0 & \text{se } (\mathbf{x}^2 - \bar{\mathbf{x}}^1) \cdot \bar{\mathbf{n}}^1 \geq 0 \end{cases} \quad (3.23)$$

A Equação 3.23 permite definir a magnitude de penetração numérica entre os corpos, uma vez que fisicamente não existe penetração entre estes. Não foram abordados, no presente trabalho, casos onde ocorrem mais de uma projeção ortogonal de contato. Para casos especiais de mais de uma coordenada de projeção, pode-se consultar a referência [97].

Apresenta-se ainda, para a descrição completa da formulação de contato utilizada no presente trabalho, os cálculos das variações das funções de penetração normal e tangencial, a linearização dos termos de contato e a discretização destes termos.

3.2.1 Variação da função de penetração (gap) normal

Para a determinação da forma fraca do problema de contato, será necessário avaliar a variação da função de penetração. A mesma pode ser obtida a partir a Equação 3.23 como

$$\delta \bar{g}_N = \delta \{ [\mathbf{x}^2 - \bar{\mathbf{x}}^1(\bar{\boldsymbol{\xi}})] \cdot \bar{\mathbf{n}}^1(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \}. \quad (3.24)$$

Considerando todos os termos da Equação 3.24 dependentes da deformação, tem-se

$$\delta \bar{g}_N = [\boldsymbol{\eta}^2 - \bar{\boldsymbol{\eta}}^1 - \bar{\mathbf{x}}_{,\alpha}^1 \delta \xi^\alpha] [\mathbf{x}^2 - \bar{\mathbf{x}}^1(\bar{\boldsymbol{\xi}})] \cdot \bar{\mathbf{n}}^1(\bar{\boldsymbol{\xi}}), \quad (3.25)$$

onde $\boldsymbol{\eta}^\alpha = \delta \mathbf{u}^\alpha$ é a função teste ou o deslocamento virtual [97]. Algumas simplificações podem ser aplicadas à Equação 3.25 pelo fato de se utilizar um sistema de coordenadas convectivas na parametrização da superfície Γ^1 . Neste sistema adotado, tem-se que $\bar{\mathbf{x}}_{,\alpha}^1 \cdot \bar{\mathbf{n}}^1 = 0$ e $\bar{\mathbf{n}}^1 \cdot \delta \bar{\mathbf{n}}^1 = 0$ [97], o que resulta em

$$\delta \bar{g}_N = [\boldsymbol{\eta}^2 - \bar{\boldsymbol{\eta}}^1] \cdot \bar{\mathbf{n}}^1. \quad (3.26)$$

3.3 Contato tangencial

Na componente tangencial de contato, deve-se considerar duas situações. A primeira ocorre quando um ponto, na superfície de contato Γ^2 , não apresenta movimento tangencial relativo a outra superfície Γ^1 . Esta situação é conhecida como condição tangencial de adesão (*stick*). A segunda

situação é o oposto da primeira, ou seja, o ponto em análise se move tangencialmente sobre a superfície de contato. Esta situação é denominada deslizamento (*slip*).

Nas seções que seguem, por conveniência de notação, omite-se a barra dos termos que serão calculados na coordenada de projeção (termos na superfície Γ^1), por exemplo $\bar{\xi} = \xi$, $\bar{x}^1 = x^1$, etc.

Como na condição de adesão, o ponto que se adere ao outro corpo não se move tangencialmente, e o valor computado para a coordenada convectiva de projeção ξ não muda durante o movimento, ou seja, $\dot{\xi} = 0$. Dado este efeito, e a partir da Equação 3.19, é possível escrever para o caso de adesão que

$$\mathbf{g}_T = g_{T\alpha} \mathbf{a}^\alpha = 0, \quad (3.27)$$

$$g_{T\alpha} = (\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1) \cdot \mathbf{a}_\alpha^1. \quad (3.28)$$

A condição de deslizamento (*slip*) é um processo dissipativo e caracterizado pela mudança da posição do ponto \mathbf{x}^2 em relação à coordenada de projeção \bar{x}^1 . Isso significa que a coordenada ξ obtida pelo problema de minimização (Equação 3.19) irá se mover sobre a superfície Γ_c^1 . Faz-se necessário o conhecimento do caminho percorrido por \mathbf{x}^2 na superfície Γ_c^1 , uma vez que o problema é dependente deste caminho. A formulação apresentada em [97] propõem a integração da velocidade para a obtenção deste caminho. Para isso, define-se o deslocamento tangencial do ponto \mathbf{x}^2 na superfície de contato, definido no corpo \mathcal{B}^1 . O caminho do ponto \mathbf{x}^2 em Γ_c^1 é dado por

$$d\mathbf{g}_T = \mathbf{a}_\alpha^1 d\xi_\alpha = \mathbf{x}_{,\alpha}^1 d\xi_\alpha, \quad (3.29)$$

onde o vetor tangente \mathbf{a}_α^1 é avaliado na coordenada de projeção ξ . A partir da Equação 3.29, e com as relações $d\mathbf{g}_T = \|d\mathbf{g}_T\|$ e $d\xi_\alpha = \dot{\xi}_\alpha dt$, pode-se definir a integração cujo o resultado é o comprimento do caminho de fricção

$$g_T = \int_{t_0}^t \left\| \dot{\xi}^\alpha \mathbf{x}_{,\alpha}^1 \right\| dt = \int_{t_0}^t \sqrt{\dot{\xi}_\alpha \dot{\xi}_\beta a_{\alpha\beta}} dt, \quad (3.30)$$

onde t é o tempo utilizado para parametrizar o caminho percorrido pelo ponto \mathbf{x}^2 .

Para avaliar a Equação 3.30, é necessário se conhecer a derivada no tempo da coordenada ξ , a qual pode ser obtida da derivada temporal da relação $(\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1) \cdot \mathbf{a}_\alpha^1 = 0$, como se segue:

$$\frac{d}{dt} [(\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1(\xi))] \cdot \mathbf{a}_\alpha^1 = [\mathbf{v}^2 - \mathbf{v}^1 - \mathbf{a}_{\beta} \dot{\xi}_\beta] \cdot \mathbf{a}_\alpha^1 + [\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1] \cdot \dot{\mathbf{a}}_\alpha^1, \quad (3.31)$$

onde $\dot{\mathbf{a}}_\alpha^1 = \mathbf{v}_{,\alpha}^1 + \mathbf{x}_{,\alpha\beta}^1 \dot{\xi}_\beta$. Isso resulta no seguinte sistema de equações

$$H_{\alpha\beta}\dot{\xi}_\beta = R_\alpha; \quad (3.32)$$

$$H_{\alpha\beta} = [a_{\alpha\beta} - g_N b_{\alpha\beta}]; \quad (3.33)$$

$$R_\alpha = [\mathbf{v}^2 - \mathbf{v}^1] \cdot \mathbf{a}_\alpha^1 + g_N \mathbf{n}_\alpha^1 \cdot \mathbf{v}_{,\alpha}^1. \quad (3.34)$$

O termo $a_{\alpha\beta}$ é tensor métrico, e $b_{\alpha\beta} = \mathbf{x}_{,\alpha\beta}^1(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{n}^1$ é o tensor de curvatura. Utilizando da relação $H^{\alpha\beta} = (H_{\alpha\beta})^{-1}$, pode-se escrever explicitamente a velocidade relativa como

$$\dot{\xi}_\beta = H^{\alpha\beta} [(\mathbf{v}^2 - \mathbf{v}^1) \cdot \mathbf{a}_\alpha^1 + g_N \mathbf{n}^1 \cdot \mathbf{v}_{,\alpha}^1]. \quad (3.35)$$

Para problemas bidimensionais, pode-se reescrever a Equação 3.35 como

$$\dot{\xi} = \frac{1}{a_{11} - g_N b_{11}} [(\mathbf{v}^2 - \mathbf{v}^1) \cdot \mathbf{x}_{,\xi}^1 + g_N \mathbf{n}^1 \cdot \mathbf{v}_{,\xi}^1],$$

onde $a_{11} = \mathbf{x}_{,\xi}^1 \cdot \mathbf{x}_{,\xi}^1$ é o tensor métrico e $b_{11} = \mathbf{x}_{,\xi\xi}^1(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{n}^1$ é o tensor curvatura do contorno. Conhecendo a mudança de coordenada $\boldsymbol{\xi}$, pode-se escrever a velocidade relativa tangencial, utilizando da simplificação de notação proposta em [97], como

$$\dot{\mathbf{g}}_T = \dot{\xi}_\alpha \mathbf{x}_{,\xi}^1. \quad (3.36)$$

A Equação 3.30 também se resume para problemas bidimensionais a

$$g_T = \int_{t_0}^t \left\| \dot{\xi}^1 \mathbf{x}_{,\xi}^1 \right\| dt = \int_{\xi_0}^{\xi} \sqrt{a_{11}} d\xi. \quad (3.37)$$

3.3.1 Variação da função de penetração (gap) tangencial

Assim como para os termos de contato com componentes normais, para a formulação da forma fraca do problema de contato, também será necessária a avaliação da variação do termos tangenciais. A variação do deslizamento tangencial pode ser obtida da mesma maneira que as Equações 3.35 e 3.36 foram determinadas. Portanto,

$$\delta \dot{\mathbf{g}}_T = \delta \dot{\xi}_\alpha \mathbf{x}_{,\alpha}^1, \quad (3.38)$$

onde $\delta \dot{\xi}_\alpha$ pode ser obtido, substituindo \mathbf{v} pela função teste $\boldsymbol{\eta}$, na Equação 3.35, resultando em

$$\delta \dot{\xi}_\alpha = H^{\alpha\beta} [(\boldsymbol{\eta}^2 - \boldsymbol{\eta}^1) \cdot \mathbf{a}_\beta^1 + g_N \mathbf{n}^1 \cdot \boldsymbol{\eta}_{,\beta}^1]. \quad (3.39)$$

Para casos bidimensionais, a Equação 3.39 se resume a

$$\delta \dot{\xi} = \frac{1}{a_{11} - g_N b_{11}} [(\boldsymbol{\eta}^2 - \boldsymbol{\eta}^1) \cdot \mathbf{x}_{,\xi}^1 + g_N \mathbf{n}^1 \cdot \boldsymbol{\eta}_{,\xi}^1]. \quad (3.40)$$

3.4 Linearização das contribuições do contato

Para a solução do sistema não linear de equações associado à forma fraca do problema proposto, a linearização das contribuições de contato são necessárias. De forma geral, o trabalho virtual realizado pela força de contato pode ser escrito como

$$C_c = \int_{\Gamma_c} c_N d\Gamma + \int_{\Gamma_c} c_T d\Gamma, \quad (3.41)$$

onde c_N e c_T são forças por unidade de comprimento nas direções normal e tangencial, respectivamente, que são integradas no diferencial de área de superfície de contato $d\Gamma$.

Analisando c_N para o método dos multiplicadores de Lagrange, tem-se

$$c_N = \lambda_N \delta g_N + \delta \lambda_N g_N, \quad (3.42)$$

e para o método da penalidade

$$c_N = \epsilon_N g_N \delta g_N. \quad (3.43)$$

O único termo que não colabora para a linearização é o multiplicador de Lagrange.

A linearização de c_N pode ser obtida da relação

$$\frac{\partial c_N}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} = \frac{\partial c_N}{\partial \lambda_N} \Delta \lambda_N + \frac{\partial c_N}{\partial g_N} \Delta g_N + \frac{\partial c_N}{\partial \delta g_N} \Delta \delta g_N. \quad (3.44)$$

Para o método dos multiplicadores de Lagrange

$$\frac{\partial c_N}{\partial \lambda_N} = \delta g_N; \quad \frac{\partial c_N}{\partial g_N} = \delta \lambda_N \quad e \quad \frac{\partial c_N}{\partial \delta g_N} = \lambda_N. \quad (3.45)$$

Substituindo as relações anteriores na Equação 3.44, tem-se

$$\frac{\partial c_N}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} = \delta g_N \Delta \lambda_N + \delta \lambda_N \Delta g_N + \lambda_N \Delta \delta g_N. \quad (3.46)$$

O mesmo pode ser realizado para o método das penalidades

$$\frac{\partial c_N}{\partial \lambda_N} = 0; \quad \frac{\partial c_N}{\partial g_N} = \epsilon_N \delta g_N \quad e \quad \frac{\partial c_N}{\partial \delta g_N} = \epsilon_N g_N. \quad (3.47)$$

Substituindo as relações anteriores na Equação 3.44, tem-se

$$\frac{\partial c_N}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} = \epsilon_N \delta g_N \Delta g_N + \epsilon_N g_N \Delta \delta g_N. \quad (3.48)$$

Observa-se que, tanto na Equação 3.46 para o método dos multiplicadores de Lagrange, quanto para a Equação 3.48 para o método das penalidades, é necessário se computar as linearizações Δg_N e $\Delta \delta g_N$. Todos os detalhes matemáticos para a obtenção destes termos podem ser vistos na referência [97]. Aqui somente se definem os mesmos, para o caso bidimensional, como

$$\Delta g_N = [\Delta \mathbf{u}^2 - \Delta \mathbf{u}^1(\boldsymbol{\xi})] \cdot \mathbf{n}^1(\boldsymbol{\xi}); \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} \Delta \delta g_N &= -(\boldsymbol{\eta}_{,\xi}^1 \Delta \xi + \Delta \mathbf{u}_{,\xi}^1 \delta \xi + \mathbf{x}_{,\xi\xi}^1 \Delta \xi \delta \xi) \cdot \mathbf{n}^1 \\ &+ \frac{g_N}{a_{11}} (\boldsymbol{\eta}_{,\xi}^1 + \mathbf{x}_{,\xi\xi}^1 \delta \xi) \cdot [\mathbf{n}^1 \otimes \mathbf{n}^1] (\Delta \mathbf{u}_{,\xi}^1 + \mathbf{x}_{,\xi\xi}^1 \Delta \xi). \end{aligned} \quad (3.50)$$

Nas equações anteriores, $\Delta \mathbf{u}^1$ é o incremento em $\mathbf{x}^1 = \mathbf{X}^1 + \mathbf{u}^1$, e $\Delta \xi$ é o incremento em $\boldsymbol{\xi}$. O incremento $\Delta \xi$ é definido como

$$\Delta \xi = \frac{1}{a_{11} - g_N b_{11}} [(\Delta \mathbf{u}^2 - \Delta \mathbf{u}^1(\boldsymbol{\xi})) \cdot \mathbf{a}^1 + g_N \mathbf{n}^1 \cdot \Delta \mathbf{u}_{,\xi}^1]. \quad (3.51)$$

Uma vez que, no presente trabalho, só será feita a discretização do problema de contato com atrito com o método da penalidade, o termo c_T , presente no trabalho virtual de contato, será analisado somente para este método.

Como poderá ser visto no capítulo de discretização dos termos de contato, somente os termos $\Delta \xi$ e $\Delta \delta \xi$ serão necessários à formulação adotada. Novamente, todos os detalhes matemáticos para a obtenção do termo $\Delta \delta \xi$ podem ser vistos na referência [97]. Aqui somente se define o mesmo, para o caso bidimensional, como

$$\begin{aligned}
\Delta\delta\xi = & \left[-\mathbf{a}^1 \cdot (\delta\xi\Delta\mathbf{u}_{,\xi}^1 + \boldsymbol{\eta}_{,\xi}^1\Delta\xi) - (\mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{a}_{,\xi}^1 - g_N\mathbf{n}^1 \cdot \mathbf{a}_{,\xi\xi}^1) \delta\xi\Delta\xi \right. \\
& + g_N (\boldsymbol{\eta}_{,\xi\xi}^1\Delta\xi + \Delta\mathbf{u}_{,\xi\xi}^1\delta\xi) \cdot \mathbf{n}^1 - (\boldsymbol{\eta}_{,\xi}^1 + \mathbf{a}_{,\xi}^1\delta\xi) \cdot \mathbf{a}^1\Delta\xi \\
& - (\Delta\mathbf{u}_{,\xi}^1 + \mathbf{a}_{,\xi}^1\Delta\xi) \cdot \mathbf{a}^1\delta\xi + (\boldsymbol{\eta}^2 - \boldsymbol{\eta}^1) \cdot (\Delta\mathbf{u}_{,\xi}^1 + \mathbf{a}_{,\xi}^1\Delta\xi) \\
& \left. + (\Delta\mathbf{u}^2 - \Delta\mathbf{u}^1) \cdot (\boldsymbol{\eta}_{,\xi}^1 + \mathbf{a}_{,\xi}^1\delta\xi) \right] H^{11}. \tag{3.52}
\end{aligned}$$

3.5 Tratamento das restrições de contato

De um modo geral, a estratégia usualmente utilizada para a solução de problemas estruturais de contato é a minimização da energia potencial total dos corpos em estudo, sujeita às restrições de contato impostas ao problema. Por isso, faz-se necessária a adoção de um método de solução de problemas restritos de otimização.

O objetivo desta seção é apresentar os métodos aqui utilizados para adicionar as restrições de contato à forma fraca do problema. Desta maneira, o método dos multiplicadores de Lagrange e o método da penalidade são apresentados.

O elemento de contato *mortar* (deduzido nos capítulos posteriores) é só uma estratégia, dentre tantas outras, de discretização e integração estas formas fracas de restrição.

Uma estratégia clássica de formulação do contato normal, e utilizada por diversos trabalhos, por exemplo [57, 54], é tratar o contato normal como um problema de restrição unilateral. Esta estratégia é utilizada quando é essencial aplicar a restrição geométrica de contato de uma maneira correta. Como neste tipo de estratégia não é necessário se especificar uma relação constitutiva na interface de contato, a pressão de contato não é obtida via equações constitutivas.

A condição necessária para que um corpo não penetre no outro é $g_N \geq 0$. Observada a representação na Figura 3.5, quando da existência de contato, surge um vetor de tensão associado ao contato dado por

$$\mathbf{t}^1 = \boldsymbol{\sigma}^1 \mathbf{n}^1 = t_N \mathbf{n}^1 + t_T \mathbf{a}^1. \tag{3.53}$$

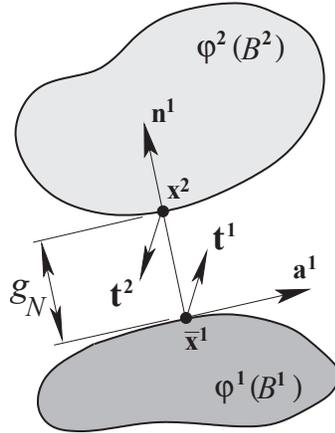


Figura 3.5: Tensão na interface de contato.

Pode-se observar na Equação 3.53 as componentes t_N , associada ao esforço normal de contato, e t_T , associada ao esforço tangencial de contato. O vetor de tensão age nas duas superfícies, $\mathbf{t}^1(\boldsymbol{\xi}) = -\mathbf{t}^2$, obedecendo o princípio de ação e reação em um dado ponto de contato. Para o caso de contato sem atrito $t_T = 0$.

Quando observada uma condição de existência de contato, ou seja, $g_N = 0$, tem-se para tensão de contato $t_N < 0$, e para a inexistência de contato $g_N > 0$, e a tensão $t_N = 0$, resultando no seguinte conjunto de equações

$$\begin{aligned} g_N &\geq 0; \\ t_N &\leq 0; \\ t_N g_N &= 0. \end{aligned} \tag{3.54}$$

Este conjunto de equações é conhecido como condições de Hertz-Signorini-Moreau, que é a base para o tratamento de problemas de contato sem atrito como um problema de otimização restrita. Na teoria de otimização, este conjunto de equações é conhecido como condições de KKT (Karush-Kuhn-Tucker) [10, 63].

Diferentes métodos são utilizados de forma a aplicar estas restrições ao problema de contato. Apresentam-se aqui, somente os que foram utilizadas no presente trabalho.

3.5.1 Método dos multiplicadores de Lagrange

Primeiramente, apresenta-se o método clássico dos multiplicadores de Lagrange. A formulação parte da definição da contribuição da energia potencial devido ao contato como

$$\Pi_c^{LM} = \int_{\Gamma_c} (\lambda_N g_N + \boldsymbol{\lambda}_T \cdot \mathbf{g}_T) dA, \quad (3.55)$$

onde λ_N e $\boldsymbol{\lambda}_T$ são os multiplicadores de Lagrange, e g_N e \mathbf{g}_T são as funções de penetração normal e tangencial, respectivamente (Equações 3.23 e 3.27). O trabalho virtual realizado pela contribuição de contato pode ser obtido pelo variacional desta energia potencial como

$$C_c^{LM} = \delta \Pi_c^{LM} = \int_{\Gamma_c} (\lambda_N \delta g_N + \boldsymbol{\lambda}_T \cdot \delta \mathbf{g}_T) dA + \int_{\Gamma_c} (\delta \lambda_N g_N + \delta \boldsymbol{\lambda}_T \cdot \mathbf{g}_T) dA. \quad (3.56)$$

A primeira integral é o trabalho realizado pelos multiplicadores de Lagrange ao longo das variações das funções de penetração normal e tangencial. A segunda integral descreve a aplicação das restrições [97]. Nessa formulação, os multiplicadores de Lagrange podem ser interpretados como a tensão de contato, $\lambda_N = t_N$ e $\boldsymbol{\lambda}_T = \mathbf{t}_T$. Os termos δg_N e $\delta \mathbf{g}_T$ foram discutidos na seção de obtenção dos variacionais para as funções de penetração.

Na Equação 3.56, os termos $\boldsymbol{\lambda}_T \cdot \delta \mathbf{g}_T$ e $\delta \boldsymbol{\lambda}_T \cdot \mathbf{g}_T$ estão associados à condição de adesão tangencial. A formulação utilizada para tratar a Equação 3.56, nas condições de adesão e deslizamento, serão tratadas no capítulo de discretização dos termos de contato, quando o método *mortar* é apresentado.

3.5.2 Método da penalidade

De forma geral, pode-se reescrever a contribuição da energia potencial devido ao contato como

$$\Pi_c = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_c} (t_N g_N + \mathbf{t}_T \cdot \mathbf{g}_T) dA. \quad (3.57)$$

No método da penalidade, um termo de penalização é adicionado à energia potencial de contato. Isso pode ser realizado substituindo as tensões de contato, normal e tangencial, na Equação 3.57, por tensões de contato proporcionais às funções de penetração. Estas proporções são obtidas via penalizadores como

$$t_N = \epsilon_N g_N; \quad (3.58)$$

$$\mathbf{t}_T = \epsilon_T \mathbf{g}_T. \quad (3.59)$$

onde ϵ_N e ϵ_T são os penalizadores das direções normal e tangencial, respectivamente.

Substituindo as Equações 3.58 e 3.59 na Equação 3.57, tem-se a contribuição da energia potencial devido ao contato pelo método da penalidade

$$\Pi_c^{PE} = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_c} (\epsilon_N (g_N)^2 + \epsilon_T \mathbf{g}_T \cdot \mathbf{g}_T) dA. \quad (3.60)$$

Os penalizadores ϵ_N e ϵ_T são escalares positivos. No presente trabalho é adotado $\epsilon_N = \epsilon_T = \epsilon$ e a estratégia de escolha de penalizador utilizada é observada em referências atuais [35, 97, 36, 102, 46]. Nestes trabalhos é aplicado o método da penalidade juntamente com elementos *mortar* de contato, e definido um mesmo penalizador para todos os elementos de contato, e este é mantido fixo durante o processo iterativo. O valor é sempre escolhido de acordo com cada problema estudado. Para problemas onde são comparados soluções com resultados disponíveis na literatura, procura-se empregar o mesmo penalizador utilizado no exemplo de comparação. Quando estudados problemas sem referência de valores para o penalizador, é utilizado um procedimento de análise de tentativa, tal como é feito para determinação do tamanho de malha e tamanho de passo de tempo em problemas numéricos em geral.

A Equação 3.60 é adicionada à energia potencial total do sistema somente quando a restrição de contato está ativada.

O trabalho virtual realizado por essa contribuição de contato pode ser obtido, assim como para o caso anterior do método dos multiplicadores de Lagrange, pelo variacional desta energia potencial como

$$C_c^{PE} = \delta \Pi_c^{PE} = \int_{\Gamma_c} (\epsilon_N g_N \delta g_N + \epsilon_T \mathbf{g}_T \cdot \delta \mathbf{g}_T) dA. \quad (3.61)$$

4 DISCRETIZAÇÃO DO CONTÍNUO

Este capítulo tem o objetivo de introduzir a construção das funções de interpolação de alta ordem utilizadas na discretização do problema com base na referência [15]. O capítulo segue com uma breve introdução sobre as funções de interpolação utilizadas na discretização dos multiplicadores de Lagrange [60]. Por último, é apresentado o procedimento de discretização das formas fracas, resultando na matriz de rigidez e nos vetores de força interna e externa discretizados com base nas referências [7, 16].

4.1 Construção dos polinômios de Lagrange de alta ordem

Os polinômios de Lagrange $h_i(\xi)$ são utilizados como base polinomial para construção das funções de interpolação unidimensionais $N_i(\xi)$. Para recuperar estes polinômios em qualquer ordem, dentro de um determinado domínio padrão $\Omega_{st} = \{\xi \mid -1 \leq \xi \leq 1\}$ (Figura 4.1), é utilizada a seguinte relação

$$N_i^p(\xi) = h_i(\xi) = \frac{\prod_{j=1, j \neq i}^{Nne} (\xi - \xi_j)}{\prod_{j=1, j \neq i}^{Nne} (\xi_i - \xi_j)}, \quad i = 1, \dots, Nne., \quad (4.1)$$

onde Nne é o número de nós no elemento finito e p é o grau do polinômio dada pela relação $p = Nne - 1$. Assim, associa-se a cada nó do elemento uma função de forma [15].

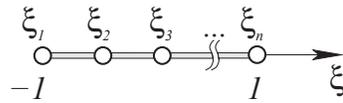


Figura 4.1: Representação dos pontos de colocação do elemento finito unidimensional.

Apresentam-se a seguir, com objetivo de ilustrar, as funções de interpolação unidimensionais e bidimensionais para $p = 1, 2$ e 3 .

Para $p = 1$, tem-se 2 nós no elemento unidimensional, e as funções de interpolação resultam em

$$N_1^1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi), \quad (4.2)$$

$$N_2^1(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi). \quad (4.3)$$

Na Figura 4.2, apresentam-se as funções de interpolação unidimensionais para $p = 1$.

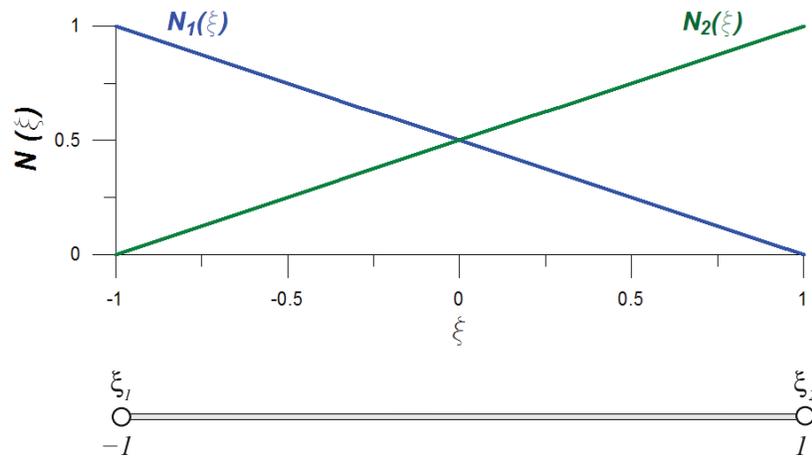


Figure 4.2: Funções de interpolação unidimensionais para $p = 1$.

Para $p = 2$, tem-se 3 nós no elemento unidimensional (Figura 4.3), e as funções de interpolação resultam em

$$N_1^2(\xi) = \frac{\xi(\xi - 1)}{2}, \quad (4.4)$$

$$N_2^2(\xi) = \frac{\xi(\xi + 1)}{2}, \quad (4.5)$$

$$N_3^2(\xi) = (1 - \xi^2). \quad (4.6)$$

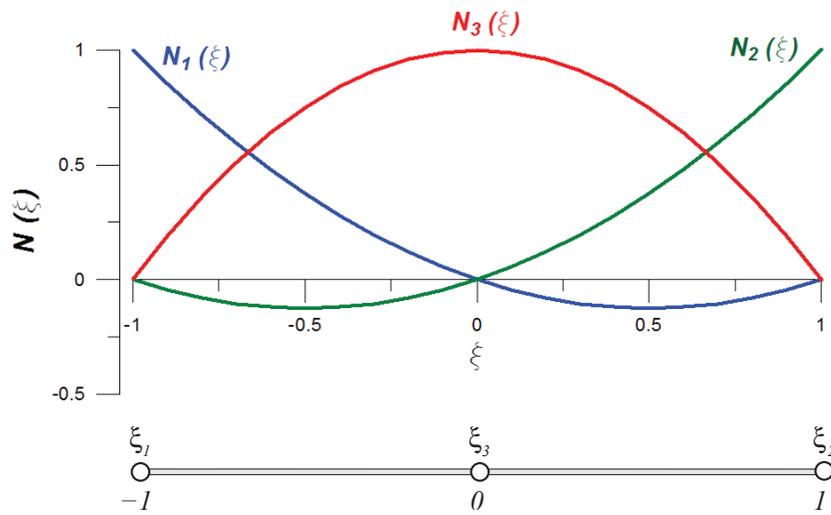


Figure 4.3: Funções de interpolação unidimensionais para $p = 2$.

Para $p = 3$, tem-se 4 nós no elemento unidimensional (Figura 4.4), e as funções de interpolação resultam em

$$N_1^3(\xi) = \frac{1}{16} (9\xi^2 - 1) (1 - \xi), \quad (4.7)$$

$$N_2^3(\xi) = \frac{1}{16} (9\xi^2 - 1) (1 + \xi), \quad (4.8)$$

$$N_3^3(\xi) = \frac{9}{16} (1 - \xi^2) (1 - 3\xi), \quad (4.9)$$

$$N_4^3(\xi) = \frac{9}{16} (1 - \xi^2) (1 + 3\xi). \quad (4.10)$$

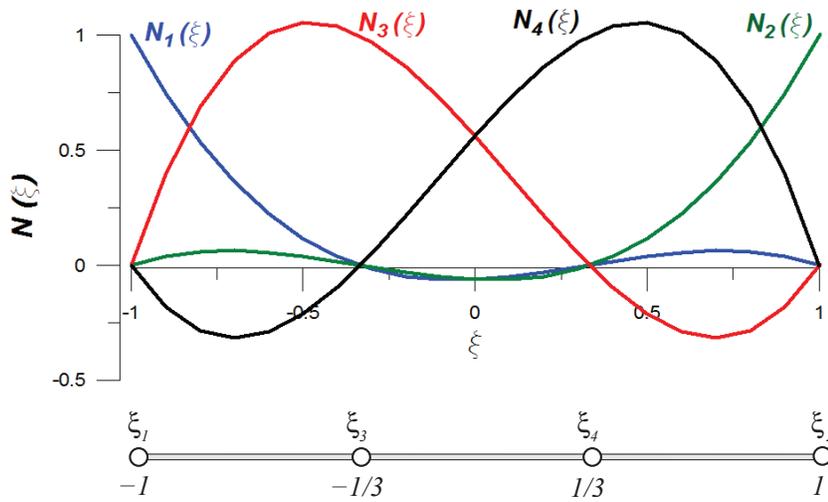


Figure 4.4: Funções de interpolação unidimensionais para $p = 3$.

As funções são construídas de forma análoga para ordens de interpolação mais elevada.

Para a determinação dos elementos finitos quadrilaterais que compõem a discretização do domínio, toma-se o produto tensorial das polinômios de Lagrange [15]

$$N_{jk}(\xi, \eta) = h_j^p(\xi)h_k^p(\eta), \quad j = 1, \dots, (Nne)^2 \text{ e } k = 1, \dots, (Nne)^2, \quad (4.11)$$

sendo j e k os índices dos nós nas direções ξ e η , respectivamente.

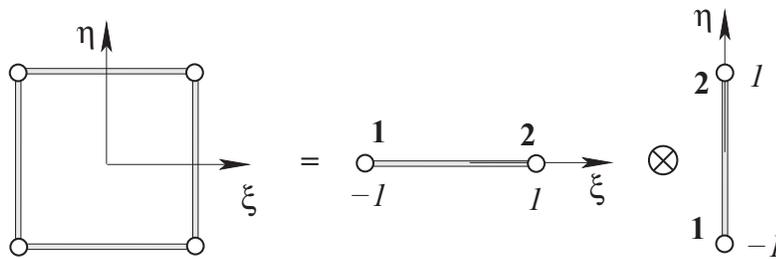


Figura 4.5: Representação dos pontos de colocação do elemento finito bidimensional de ordem 1.

Para $p = 1$, tem-se 4 nós no elemento bidimensional, para um domínio de $\xi = [-1 \ 1]$ e $\eta = [-1 \ 1]$. Como para o caso unidimensional, tem-se uma função de forma associada a cada nó do elemento. Assim, as funções de interpolação resultam em

$$N_1^1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta), \quad (4.12)$$

$$N_2^1 = \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta) , \quad (4.13)$$

$$N_3^1 = \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 + \eta) , \quad (4.14)$$

$$N_4^1 = \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 + \eta) . \quad (4.15)$$

Na Figura 4.6, apresentam-se as funções de interpolação bidimensionais para cada nó do elemento e para $p = 1$. Estas funções apresentam um domínio de $\xi = [-1 \ 1]$ e $\eta = [-1 \ 1]$ e valor 1 no nó a qual é associada e 0 nos nós restantes.

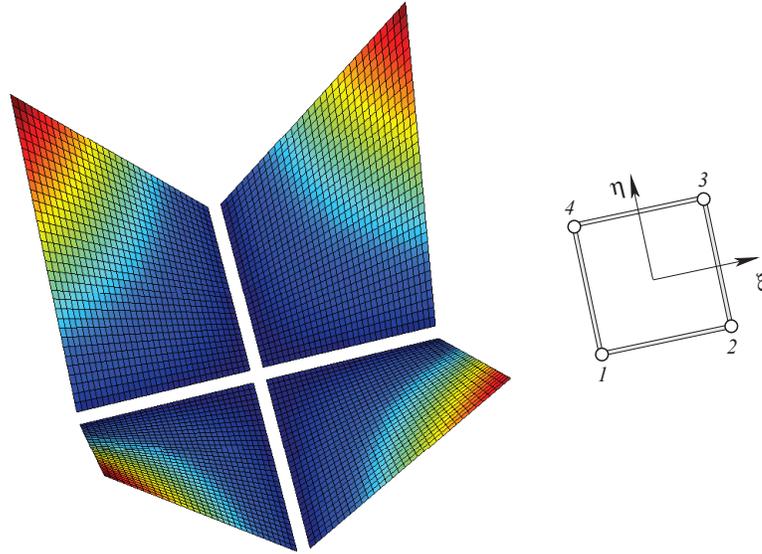


Figure 4.6: Funções de interpolação bidimensionais para $p = 1$.

Para $p = 2$, tem-se 9 nós no elemento bidimensional (Figura 4.7). E as funções de interpolação resultam em

$$N_1^2 = \frac{1}{4} \xi \eta (1 - \xi) (1 - \eta) , \quad (4.16)$$

$$N_2^2 = -\frac{1}{4} \xi \eta (1 + \xi) (1 - \eta) , \quad (4.17)$$

$$N_3^2 = \frac{1}{4} \xi \eta (1 + \xi) (1 + \eta) , \quad (4.18)$$

$$N_4^2 = -\frac{1}{4}\xi\eta(1-\xi)(1+\eta), \quad (4.19)$$

$$N_5^2 = -\frac{1}{2}\eta(1-\eta)(1-\xi^2), \quad (4.20)$$

$$N_6^2 = \frac{1}{2}\xi(1+\xi)(1-\eta^2), \quad (4.21)$$

$$N_7^2 = \frac{1}{2}\eta(1+\eta)(1-\xi^2), \quad (4.22)$$

$$N_8^2 = -\frac{1}{2}\xi(1-\xi)(1-\eta^2), \quad (4.23)$$

$$N_9^2 = (1-\xi^2)(1-\eta^2). \quad (4.24)$$

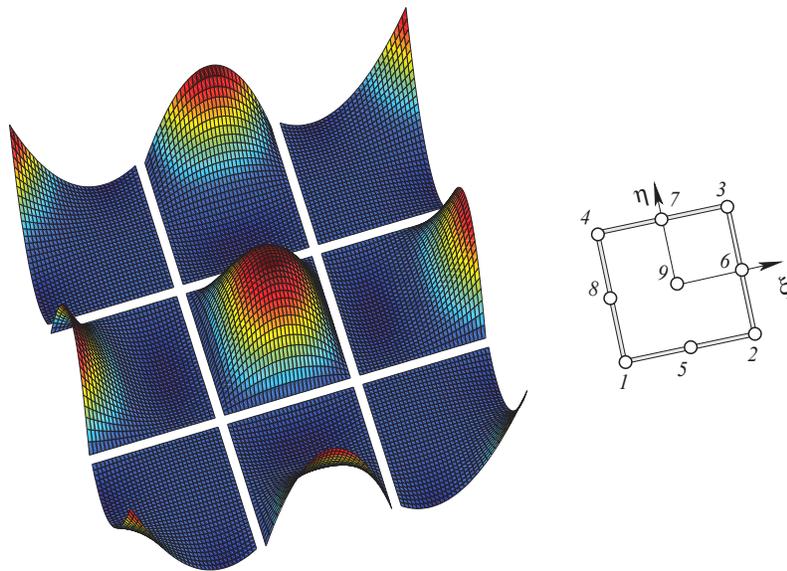


Figure 4.7: Funções de interpolação bidimensionais para $p = 2$.

Para $p = 3$, tem-se 16 nós no elemento bidimensional (Figura 4.8). E as funções são construídas de forma análoga.

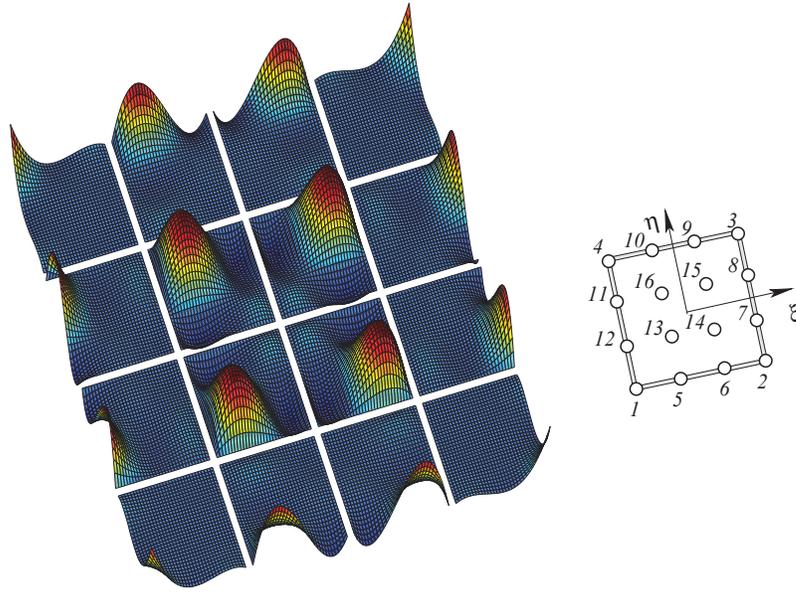


Figure 4.8: Funções de interpolação bidimensionais para $p = 3$.

4.2 Construção da base dual

O objetivo desta seção é apresentar a base polinomial utilizada para interpolar os multiplicadores de Lagrange. Apesar de não ser empregada para discretização do domínio, fez-se a escolha de apresentação deste procedimento de obtenção da base neste capítulo, uma vez que o processo envolve os polinômios de Lagrange abordados na seção anterior.

Para a interpolação dos multiplicadores de Lagrange nodais será utilizada uma base dual proposta no trabalho [60]. Esta base é biortogonal à base de Lagrange. Os detalhes e vantagens ao se utilizar uma base com esta característica são amplamente discutidos na literatura [60, 74].

A base dual $M_j(\xi)$ é construída de forma a satisfazer a seguinte relação:

$$\mathbf{G} = \int_{-1}^1 N_i(\xi) M_j(\xi) d\xi = w_{i(k)} \delta_{jk}, \quad w_{i(k)} \neq 0, \quad (4.25)$$

onde w_i são os pesos de integração de Gauss-Lobatto-Legendre [55], definidos como

$$w_{i(k)} = \int_{-1}^1 N_i(\xi_k) d\xi. \quad (4.26)$$

É importante agora definir a matriz de massa de um elemento unidimensional padrão, ou matriz de projeção [55], como

$$\mathbf{M}_L = \int_{-1}^1 N_i(\xi)N_j(\xi)d\xi = \mathbf{V}_L^T \mathbf{W} \mathbf{V}_L. \quad (4.27)$$

A matriz \mathbf{W} é definida como

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_{n_p} \end{bmatrix}_{(n_p, n_p)}. \quad (4.28)$$

onde n_p é o número de pontos de integração utilizado e \mathbf{V}_L é a matriz de Vandermonde da base de Lagrange

$$\mathbf{V}_L = \begin{bmatrix} N_1(\xi_1) & N_2(\xi_1) & \cdots & N_{Nne}(\xi_1) \\ N_1(\xi_2) & N_2(\xi_2) & \cdots & N_{Nne}(\xi_2) \\ N_1(\xi_3) & N_2(\xi_3) & \cdots & N_{Nne}(\xi_3) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_1(\xi_{n_p}) & N_2(\xi_{n_p}) & \cdots & N_{Nne}(\xi_{n_p}) \end{bmatrix}_{(n_p, Nne)}. \quad (4.29)$$

A matriz de Vandermonde possui as funções de forma atribuídas a cada nó (colunas), calculadas em todos os pontos de integração utilizados (linhas).

Com as definições anteriores, pode-se recuperar a matriz de Vandermonde contendo os polinômios da base dual, $M_i(\xi)$, através da seguinte relação

$$\mathbf{V}_M = \mathbf{G} \mathbf{M}_L^{-1} \mathbf{V}_L = \begin{bmatrix} M_1(\xi_1) & M_2(\xi_1) & \cdots & M_{Nne}(\xi_1) \\ M_1(\xi_2) & M_2(\xi_2) & \cdots & M_{Nne}(\xi_2) \\ M_1(\xi_3) & M_2(\xi_3) & \cdots & M_{Nne}(\xi_3) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_1(\xi_{n_p}) & M_2(\xi_{n_p}) & \cdots & M_{Nne}(\xi_{n_p}) \end{bmatrix}_{(n_p, Nne)}. \quad (4.30)$$

Assim como foi realizado para a base de Lagrange, apresentam-se a seguir, com o objetivo de ilustrar, as funções de interpolação para a base dual para $p = 1, 2$ e 3 .

Para $p = 1$, tem-se 2 nós no elemento unidimensional, e as funções de interpolação da base dual resultam em

$$M_1^1(\xi) = \frac{(1 - 3\xi)}{2}, \quad (4.31)$$

$$M_2^1(\xi) = \frac{(1 + 3\xi)}{2}. \quad (4.32)$$

Na Figura 4.9, apresentam-se as funções de interpolação da base dual para $p = 1$.

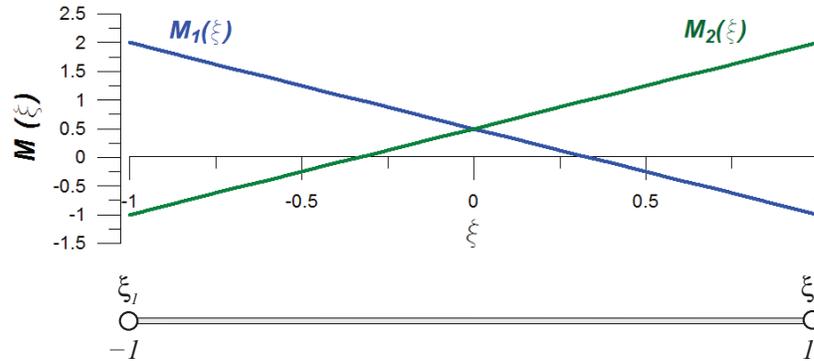


Figure 4.9: Funções de interpolação da base dual para $p = 1$.

Para $p = 2$, tem-se 3 nós no elemento unidimensional, e as funções de interpolação da base dual resultam em

$$M_1^2(\xi) = \frac{1}{4} (5\xi^2 - 2\xi - 1), \quad (4.33)$$

$$M_2^2(\xi) = \frac{1}{4} (5\xi^2 + 2\xi - 1), \quad (4.34)$$

$$M_3^2(\xi) = \frac{1}{2} (3 - 5\xi^2). \quad (4.35)$$

Na Figura 4.10, apresentam-se as funções de interpolação da base dual para $p = 2$.

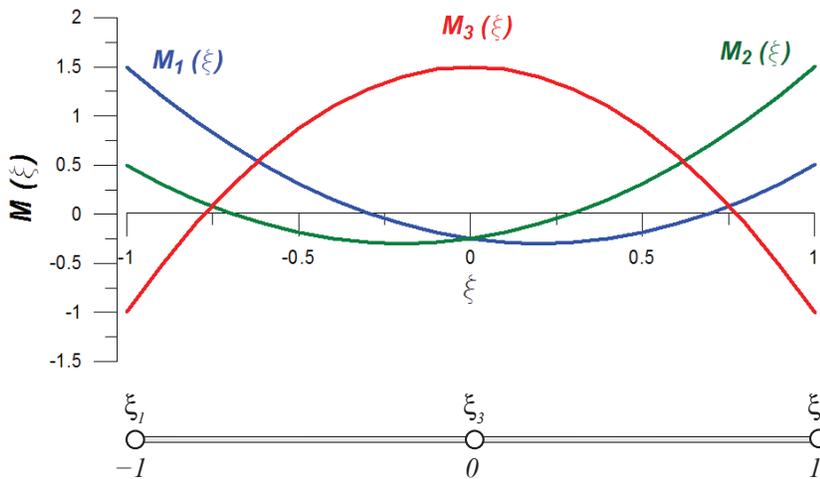


Figure 4.10: Funções de interpolação da base dual para $p = 2$.

Para $p = 3$, tem-se 4 nós no elemento unidimensional (Figura 4.11). E as funções da base dual são construídas de forma análoga.

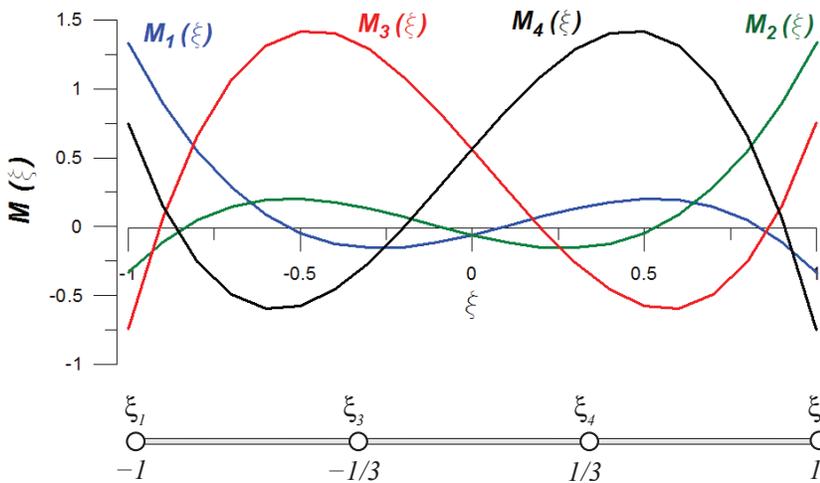


Figure 4.11: Funções de interpolação dual para $p = 3$.

4.3 Discretização das formas fracas

Para a discretização do domínio e do contato foi utilizado o elemento finito isoparamétrico, ou seja, o mesmo grau de interpolação para a geometria e as grandezas interpoladas.

Assim, reescreve-se a coordenada material, o campo de deslocamentos, a linearização do campo de deslocamentos e a velocidade virtual, respectivamente, como

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{Nne} N_i(\xi, \eta) \mathbf{X}_i, \quad (4.36)$$

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{Nne} N_i(\xi, \eta) \mathbf{u}_i, \quad (4.37)$$

$$\Delta \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{Nne} N_i(\xi, \eta) \Delta \mathbf{u}_i, \quad (4.38)$$

$$\delta \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{Nne} N_i(\xi, \eta) \delta \mathbf{v}_i. \quad (4.39)$$

Com isso, pode-se reescrever todas as medidas de deformação, medidas de tensão, formas fracas e linearizações, do capítulo anterior, substituindo estes termos. Os detalhes da obtenção de todos estes termos discretizados podem ser obtidos em [16]. No presente texto, limita-se à apresentação do vetor resíduo e da matriz tangente discretizados.

Dada as definições da linearização da expressão da potência virtual (Equação 2.54), e dos termos discretizados acima, pode-se reescrever o primeiro termo da Equação 2.54 como

$$\delta \dot{W}(\varphi_k, \delta \mathbf{v}) = \delta \mathbf{v}^T (\mathbf{f}_{int} - \mathbf{f}_{ext}), \quad (4.40)$$

Define-se a expressão do vetor força residual como

$$\boldsymbol{\psi} = (\mathbf{f}_{int} - \mathbf{f}_{ext}), \quad (4.41)$$

onde \mathbf{f}_{int} é o vetor de força interna e \mathbf{f}_{ext} o vetor de força externa.

A matriz tangente \mathbf{K}_T é obtida a partir do segundo termo da Equação 2.54, que é a derivada direcional da potência virtual, para um dado estado de deformação φ_k na direção de um incremento de deslocamento $[\Delta \mathbf{u}]$, o que resulta na seguinte relação, substituindo os termos discretizados

$$D\delta \dot{W}(\varphi_k, \delta \mathbf{v}) [\Delta \mathbf{u}] = \delta \mathbf{v}^T \mathbf{K}_T \Delta \mathbf{u}, \quad (4.42)$$

Dadas as Equações 4.40 e 4.42, pode-se reescrever a Equação 2.54 como

$$\delta \mathbf{v}^T \boldsymbol{\psi} + \delta \mathbf{v}^T \mathbf{K}_T \Delta \mathbf{u} = 0. \quad (4.43)$$

A Equação 4.43 deve ser satisfeita para qualquer velocidade virtual $\delta \mathbf{v}$ cinematicamente compatível. Esta relação é a base para o procedimento de solução do sistema de equações pelo método

de Newton Raphson, que será abordado no capítulo de algoritmos computacionais.

Nas seções que seguem, apresentam-se separadamente os vetores de força interna e externa e a matriz tangente, para duas formulações incrementais de problemas não lineares, a formulação do Lagrangiano Total e a formulação do Lagrangiano Atualizado.

4.3.1 Formulação do Lagrangiano Total

Nesta formulação todas as variáveis estáticas e cinemáticas são referenciadas na configuração inicial ou indeformada [7]. De acordo com [7], para a formulação do Lagrangiano Total, os vetores de forças internas e externas discretizados para um elemento finito são

$$\mathbf{f}_{int}^e = \int_{V_e} [\mathbf{B}_{L_0}]^T \bar{\mathbf{S}} dV, \quad (4.44)$$

$$\mathbf{f}_{ext}^e = \int_{V_e} N_i \mathbf{f}_0 dV + \int_{\partial V} N_i \mathbf{t}_0 dA. \quad (4.45)$$

A matriz de rigidez tangente para o Lagrangiano Total é definida como

$$\mathbf{K}_T^e = \int_{V_e} \left([\mathbf{B}_{L_0}]^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{L_0} + [\mathbf{B}_{NL_0}]^T \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{B}_{NL_0} \right) dV, \quad (4.46)$$

onde \mathbf{D} é a forma matricial do tensor constitutivo [7]. As matrizes \mathbf{B}_{L_0} e \mathbf{B}_{NL_0} são as matrizes linear e não linear de transformação deformação-deslocamento para a formulação do Lagrangiano Total [7]. A matriz \mathbf{B}_{L_0} é definida dividindo a mesma em duas parcelas

$$\mathbf{B}_{L_0} = \mathbf{B}_{L_0}^0 + \mathbf{B}_{L_0}^1, \quad (4.47)$$

onde a parcela $\mathbf{B}_{L_0}^0$ é definida como

$$\mathbf{B}_{L_0}^0 = \begin{bmatrix} N_{1,1}^0 & 0 & N_{2,1}^0 & 0 & N_{3,1}^0 & 0 & \cdots & N_{Nne,1}^0 & 0 \\ 0 & N_{1,2}^0 & 0 & N_{2,2}^0 & 0 & N_{3,2}^0 & \cdots & 0 & N_{Nne,2}^0 \\ N_{1,2}^0 & N_{1,1}^0 & N_{2,2}^0 & N_{2,1}^0 & N_{3,2}^0 & N_{3,1}^0 & \cdots & N_{Nne,2}^0 & N_{Nne,1}^0 \\ \frac{N_1}{\bar{X}_1} & 0 & \frac{N_2}{\bar{X}_1} & 0 & \frac{N_3}{\bar{X}_1} & 0 & \cdots & \frac{N_{Nne}}{\bar{X}_1} & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.48)$$

sendo os termos $N_{k,j}^0$ e \bar{X}_1 definidos por

$$N_{k,j}^0 = \frac{\partial N_k}{\partial X_j}, \quad (4.49)$$

$$\bar{X}_1 = \sum_{k=1}^{Nne} N_k X_1^k. \quad (4.50)$$

A parcela $\mathbf{B}_{L_0}^1$ é definida como

$$\mathbf{B}_{L_0}^1 = \begin{bmatrix} l_{11}N_{1,1}^0 & l_{21}N_{1,1}^0 & l_{11}N_{2,1}^0 & l_{21}N_{2,1}^0 \\ l_{12}N_{1,2}^0 & l_{22}N_{1,2}^0 & l_{12}N_{2,2}^0 & l_{22}N_{2,2}^0 \\ (l_{11}N_{1,2}^0 + l_{12}N_{1,1}^0) & (l_{21}N_{1,2}^0 + l_{22}N_{1,1}^0) & (l_{11}N_{2,2}^0 + l_{12}N_{2,1}^0) & (l_{21}N_{2,2}^0 + l_{22}N_{2,1}^0) \\ l_{33} \frac{N_1}{\bar{X}_1} & 0 & l_{33} \frac{N_2}{\bar{X}_1} & 0 \\ \cdots & l_{11}N_{Nne,1}^0 & l_{21}N_{Nne,1}^0 & \\ \cdots & l_{12}N_{Nne,2}^0 & l_{22}N_{Nne,2}^0 & \\ \cdots & (l_{11}N_{Nne,2}^0 + l_{12}N_{Nne,1}^0) & (l_{21}N_{Nne,2}^0 + l_{22}N_{Nne,1}^0) & \\ \cdots & l_{33} \frac{N_{Nne}}{\bar{X}_1} & 0 & \end{bmatrix}, \quad (4.51)$$

onde os termos l_{11} , l_{22} , l_{21} , l_{12} e l_{33} são, respectivamente,

$$l_{11} = \sum_{k=1}^{Nne} N_{k,1}^0 u_1^k, \quad (4.52)$$

$$l_{22} = \sum_{k=1}^{Nne} N_{k,2}^0 u_2^k, \quad (4.53)$$

$$l_{21} = \sum_{k=1}^{Nne} N_{k,1}^0 u_2^k, \quad (4.54)$$

$$l_{12} = \sum_{k=1}^{Nne} N_{k,2}^0 u_1^k, \quad (4.55)$$

$$l_{33} = \frac{\sum_{k=1}^{Nne} N_k u_1^k}{\bar{X}_1}. \quad (4.56)$$

A matriz \mathbf{B}_{NL_0} é definida como

$$\mathbf{B}_{NL_0} = \begin{bmatrix} N_{1,1}^0 & 0 & N_{2,1}^0 & 0 & N_{3,1}^0 & 0 & \cdots & N_{Nne,1}^0 & 0 \\ N_{1,2}^0 & 0 & N_{2,2}^0 & 0 & N_{3,2}^0 & 0 & \cdots & N_{Nne,2}^0 & 0 \\ 0 & N_{1,1}^0 & 0 & N_{2,1}^0 & 0 & N_{3,1}^0 & \cdots & 0 & N_{Nne,1}^0 \\ 0 & N_{1,2}^0 & 0 & N_{2,2}^0 & 0 & N_{3,2}^0 & \cdots & 0 & N_{Nne,2}^0 \\ \frac{N_1}{X_1} & 0 & \frac{N_2}{X_1} & 0 & \frac{N_3}{X_1} & 0 & \cdots & \frac{N_{Nne}}{X_1} & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.57)$$

A matriz de tensão $\tilde{\mathbf{S}}$ e o vetor de tensão $\bar{\mathbf{S}}$ são construídos a partir das componentes do segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff, como

$$\tilde{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{11} & S_{12} & 0 \\ 0 & 0 & S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{33} \end{bmatrix}, \quad (4.58)$$

$$\bar{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{22} & S_{12} & S_{33} \end{bmatrix}^T. \quad (4.59)$$

4.3.2 Formulação do Lagrangiano Atualizado

Na formulação do Lagrangiano Atualizado todas as variáveis estáticas e cinemáticas são referenciadas na configuração atual ou deformada [7]. De acordo com [7], para a formulação do Lagrangiano Atualizado, os vetores de forças internas e externas discretizados são:

$$\mathbf{f}_{int}^e = \int_{V_e} [\mathbf{B}_{L_t}]^T \bar{\boldsymbol{\sigma}} dV, \quad (4.60)$$

$$\mathbf{f}_{ext}^e = \int_{V_e} N_i \mathbf{f} dV + \int_{\partial V} N_i \mathbf{t} dA. \quad (4.61)$$

A matriz de rigidez tangente para Lagrangiano Atualizado é definida como

$$\mathbf{K}_T^e = \int_{V_e} \left([\mathbf{B}_{L_t}]^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{L_t} + [\mathbf{B}_{NL_t}]^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{B}_{NL_t} \right) dV, \quad (4.62)$$

As matrizes \mathbf{B}_{L_t} e \mathbf{B}_{NL_t} são as matrizes linear e não linear de transformação deformação-deslocamento para a formulação do Lagrangiano Atualizado [7], onde a matriz \mathbf{B}_{L_t} é definida como

$$\mathbf{B}_{L_t} = \begin{bmatrix} N_{1,1}^t & 0 & N_{2,1}^t & 0 & N_{3,1}^t & 0 & \cdots & N_{Nne,1}^t & 0 \\ 0 & N_{1,2}^t & 0 & N_{2,2}^t & 0 & N_{3,2}^t & \cdots & 0 & N_{Nne,2}^t \\ N_{1,2}^t & N_{1,1}^t & N_{2,2}^t & N_{2,1}^t & N_{3,2}^t & N_{3,1}^t & \cdots & N_{Nne,2}^t & N_{Nne,1}^t \\ \frac{N_1}{\bar{x}_1} & 0 & \frac{N_2}{\bar{x}_1} & 0 & \frac{N_3}{\bar{x}_1} & 0 & \cdots & \frac{N_{Nne}}{\bar{x}_1} & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.63)$$

sendo os termos $N_{k,j}^t$ e \bar{x}_1 definidos por

$$N_{k,j}^t = \frac{\partial N_k}{\partial x_j}, \quad (4.64)$$

$$\bar{x}_1 = \sum_{k=1}^{Nne} N_k x_1^k. \quad (4.65)$$

A matriz \mathbf{B}_{NL_t} é definida como

$$\mathbf{B}_{NL_t} = \begin{bmatrix} N_{1,1}^t & 0 & N_{2,1}^t & 0 & N_{3,1}^t & 0 & \cdots & N_{Nne,1}^t & 0 \\ N_{1,2}^t & 0 & N_{2,2}^t & 0 & N_{3,2}^t & 0 & \cdots & N_{Nne,2}^t & 0 \\ 0 & N_{1,1}^t & 0 & N_{2,1}^t & 0 & N_{3,1}^t & \cdots & 0 & N_{Nne,1}^t \\ 0 & N_{1,2}^t & 0 & N_{2,2}^t & 0 & N_{3,2}^t & \cdots & 0 & N_{Nne,2}^t \\ \frac{N_1}{\bar{X}_1} & 0 & \frac{N_2}{\bar{X}_1} & 0 & \frac{N_3}{\bar{X}_1} & 0 & \cdots & \frac{N_{Nne}}{\bar{X}_1} & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.66)$$

A matriz de tensão $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ e o vetor de tensão $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ são construídos a partir do tensor de tensões de Cauchy, como

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}, \quad (4.67)$$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \left[\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{33} \right]^T. \quad (4.68)$$

5 DISCRETIZAÇÃO DO CONTATO

O objetivo deste capítulo é fazer uma descrição detalhada do método *mortar* utilizado para a discretização da forma fraca proveniente dos termos de contato. Tanto para parte de contato sem atrito, quanto para o contato com atrito a metodologia, aqui apresentada, foi baseada nas referências [97, 36].

No trabalho [97] é feita toda a discretização do contato sem atrito para os métodos dos multiplicadores de Lagrange e penalidade com funções de interpolação lineares e quadráticas. É feita ainda uma introdução sobre a discretização do problema de contato com atrito utilizando o método da penalidade e funções de interpolação quadráticas.

Em [36] é realizado todo o detalhamento da discretização do problema com atrito utilizando a mesma estratégia proposta em [97]. O trabalho é focado na aplicação da abordagem do movimento do cone de fricção e na comparação entre se utilizar funções de interpolação lineares ou quadráticas para a interpolação dos campos. No presente trabalho é feita uma extensão destas formulações para funções de interpolação de alta ordem. Espera-se obter, com a formulação aqui proposta, melhoras significativas na solução de problemas de contato com o aumento da ordem de interpolação, baseados nos resultados obtidos em trabalhos atuais que comparam simulações feitas com elementos de contato lineares e quadráticos [97, 36, 74]. Estes trabalhos mostram que é possível se obter uma solução com melhor precisão, empregando menos graus de liberdade, com o elemento de contato quadrático.

Um comparativo entre simulações feitas com elementos de contato lineares e quadráticos mostra que é possível se obter uma solução com melhor precisão, empregando menos graus de liberdade, com o elemento de contato quadrático [97].

O objetivo deste capítulo é apresentar a formulação para o elemento de contato de alta ordem desenvolvida. Primeiramente, realiza-se uma introdução à montagem dos elementos de contato. Depois o capítulo segue com a discretização das integrais de restrição do contato para o elemento de contato sem atrito. O mesmo é feito para o elemento com atrito na última seção deste capítulo, onde também são apresentadas a Lei de Coulomb e a estratégia do movimento do cone de fricção.

5.1 Determinação do elemento mortar e cálculo da coordenada de projeção

Usualmente, as superfícies em contato são discretizadas por malhas não-conformes. As mesmas

podem ser segmentos que não se correspondem e podem ser aproximadas por um número diferente de segmentos

$$\Gamma_c^{nm} \approx \bigcup_{s=1}^{n_s} \Gamma_{c_s}^{nm} \quad e \quad \Gamma_c^m \approx \bigcup_{m=1}^{n_m} \Gamma_{c_m}^m. \quad (5.1)$$

Nos capítulos anteriores, toda a formulação foi proposta de forma geral, fazendo referência às superfícies como: Γ_c^2 superfície contactora e Γ_c^1 superfície alvo. Para o caso específico do método *mortar*, denomina-se superfície *non-mortar* (ou *slave*) Γ_c^{nm} a parte contactora e superfície *mortar* Γ_c^m (ou *master*) a parte alvo. Os sobrescritos *nm* e *m* são indicadores de grandezas descritas nas superfícies *non-mortar* e *mortar*, respectivamente (Figura 5.1).

Usualmente se define também uma interface comum de contato, que aqui será definida como $\Gamma_c^h = \Gamma_c^{nm}$.

A partir de um domínio discretizado pelo método dos elementos finitos, é possível definir, associado às arestas dos elementos que entraram em contato, estas superfícies *non-mortar* e *mortar*, como ilustrado na Figura 5.1.

O corpo formado pelo elemento finito 1 foi definido como contactor e o corpo formado pelos elementos 2 e 3 foi definido como alvo. O número de elementos *mortar* é definido pelo número de segmentos (ou superfícies) *non-mortar* $\Gamma_{c_s}^{nm}$. Para este exemplo, estuda-se um elemento *mortar*. Dada a Equação 5.1, o elemento do exemplo é formado por 1 segmento *non-mortar* $\Gamma_{c_s}^{nm}$ e 2 segmentos *mortar* $\Gamma_{c_m}^m$.

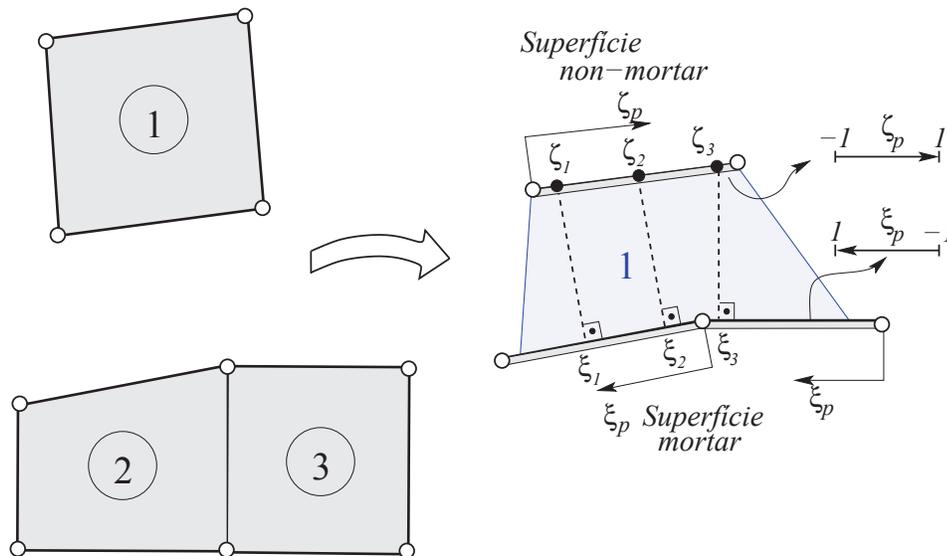


Figura 5.1: Determinação do elemento *mortar*.

Os deslocamentos e coordenadas nas superfícies Γ_c^{nm} e Γ_c^m são dadas pelas seguintes discretizações

$$\mathbf{u}^{nm}(\zeta) = \sum_{i=1}^{Nns} N_i^{nm}(\zeta) \mathbf{u}_i^{nm}, \quad (5.2)$$

$$\mathbf{X}^{nm}(\zeta) = \sum_{i=1}^{Nns} N_i^{nm}(\zeta) \mathbf{X}_i^{nm}, \quad (5.3)$$

$$\mathbf{u}^m(\xi) = \sum_{i=1}^{Nns} N_i^m(\xi) \mathbf{u}_i^m, \quad (5.4)$$

$$\mathbf{X}^m(\xi) = \sum_{i=1}^{Nns} N_i^m(\xi) \mathbf{X}_i^m. \quad (5.5)$$

onde Nns é o número de nós na superfície de cada elemento de contato, por exemplo: $Nns = 2$ para funções lineares; $Nns = 3$ para funções quadráticas; $Nns = 5$ para funções quárticas, etc. Utilizam-se os mesmos nós da estrutura discretizada para discretização do elemento de contato. Para o exemplo aqui abordado na Figura 5.1, utilizam-se funções de interpolações lineares, portanto, $Nns = 2$.

As coordenadas na configuração corrente (ou espacial) são dadas pela Equação 2.4, resultando para as diferentes superfícies

$$\mathbf{x}^{nm}(\zeta) = \mathbf{X}^{nm}(\zeta) + \mathbf{u}^{nm}(\zeta), \quad (5.6)$$

$$\mathbf{x}^m(\xi) = \mathbf{X}^m(\xi) + \mathbf{u}^m(\xi). \quad (5.7)$$

Os multiplicadores de Lagrange são definidos na superfície *non-mortar* como

$$\lambda_{N_s}(\zeta) = \sum_{i=1}^{Nns} M_i^{nm}(\zeta) \lambda_{N_{si}}. \quad (5.8)$$

As funções de forma N_i^{nm} e N_i^m , para qualquer ordem desejada, são obtidas através dos polinômios de Lagrange e M_i^{nm} é a base dual descrita anteriormente. O domínio para as coordenadas locais que compõem os elementos é definido como: $\zeta \in [-1, 1]$ para a superfície *non-mortar* e $\xi \in [-1, 1]$ para a superfície *mortar*.

As coordenadas de projeção ξ_p são obtidas através da resolução do problema de mínima distân-

cia (Equação 3.19) para cada ponto de integração ζ_p . No capítulo de algoritmos computacionais é apresentado o procedimento numérico completo para obtenção destas coordenadas.

Um aspecto importante a ser observado, é que as projeções dos pontos de integração ζ_p , podem ocorrer de uma única superfície *non-mortar* para superfícies *mortar* distintas, como observado no exemplo atual. Então, apesar de o exemplo possuir somente um elemento *mortar*, o mesmo possui duas superfícies alvo distintas (Figura 5.2).

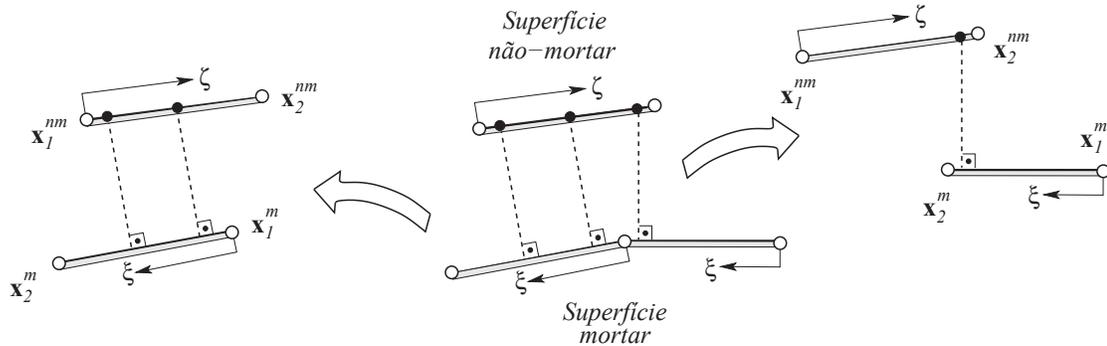


Figura 5.2: Detalhe dos alvos do elemento *mortar*.

Este detalhe é importante na obtenção da coordenada espacial dada pela Equação 5.7. Como pode ser observado no detalhe à esquerda da Figura 5.2, para os dois primeiros pontos ζ_p a coordenada de projeção ξ_p é obtida sobre o primeiro alvo. Isso implica na obtenção de coordenadas espaciais dadas pela Equação 5.7 também sobre este alvo. Para o terceiro ponto ζ_p estes termos são computados no segundo alvo (detalhe à direita da Figura 5.2).

As projeções em alvos diferentes implicam também em uma descontinuidade do vetor normal, e conseqüentemente, da função de penetração. Um trabalho recente usa uma metodologia de obtenção de uma normal média nestes casos de descontinuidade [46]. Dentre as desvantagens do método está a avaliação dispendiosa desta normal média em cada iteração. Com intuito de contornar esse problema é utilizado em [36] um número maior de pontos de integração por elemento de contato. Dentre as desvantagens do método está: (i) a avaliação do vetor resíduo e da matriz tangente de contato em mais pontos de integração e (ii) a incerteza na quantidade de pontos de integração a ser utilizada para um determinado problema. Ainda em [46] é feito um comparativo com a metodologia utilizada em [36], mostrando que do ponto de vista de eficiência de resultados os dois métodos se equivalem. Baseado neste resultado, foi escolhida a metodologia prevista em [36].

Dadas as definições anteriores, pode-se escrever o trabalho virtual de contato para um elemento como

$$C_c = \int_{\Gamma_c^{nm}} (\lambda_N \delta g_N + \delta \lambda_N g_N + \mathbf{t}_T \cdot \delta \mathbf{g}_T) d\Gamma. \quad (5.9)$$

Ou ainda sobre todos os segmentos n_s de contato

$$C_c = \bigcup_{s=1}^{n_s} \int_{\Gamma_c^{nm}} (\lambda_N \delta g_N + \delta \lambda_N g_N + \mathbf{t}_T \cdot \delta \mathbf{g}_T) d\Gamma. \quad (5.10)$$

A integração da Equação 5.10 é então realizada sobre os segmentos Γ_c^{nm} . Utiliza-se a quadratura de Gauss-Legendre [15].

As seções que seguem apresentam o processo de discretização para os elementos de contato com e sem atrito.

5.2 Elemento *mortar* de contato sem atrito

Para caso de contato sem atrito, utiliza-se a Equação 5.10 para o método dos multiplicadores de Lagrange, sem os termos de atrito, escrevendo-se

$$C_e^L = \sum_{p=1}^{n_p} [\lambda_N(\zeta_p) \delta g_N(\zeta_p) + \delta \lambda_N(\zeta_p) g_N(\zeta_p)] \|\mathbf{a}_{0p}^{nm}\| w_p. \quad (5.11)$$

onde ζ_p é o ponto de integração da quadratura, n_p é o número de pontos de integração em um elemento de contato, w_p são os pesos da quadratura e $\|\mathbf{a}_{0p}^{nm}\|$ o jacobiano de transformação do elemento de contato.

Define-se matricialmente os termos que devem ser avaliados em ζ_p e ξ_p . Assim, tem-se para a penetração normal (*normal gap*) e o multiplicador de Lagrange para um ponto de integração, respectivamente,

$$g_{N_p} = [\mathbf{x}^{nm}(\zeta_p) - \mathbf{x}^m(\xi_p)] \cdot \mathbf{n}^m(\xi_p) = \mathbf{w}_p^T \mathbf{B}_p \mathbf{n}_{mp}, \quad (5.12)$$

$$\lambda_{N_p} = \mathbf{w}_p^T \mathbf{M}_p. \quad (5.13)$$

Os multiplicadores de Lagrange nos pontos de integração são equivalentes às tensões de contato avaliadas nestes pontos, portanto $t_{N_p} = \lambda_{N_p}$. As matrizes \mathbf{B}_p , \mathbf{M}_p e o vetor \mathbf{w}_p são definidos como

$$\mathbf{B}_p = \begin{bmatrix} N_1^{nm}(\zeta_p)\mathbf{1} \\ \vdots \\ N_{Nns}^{nm}(\zeta_p)\mathbf{1} \\ N_1^m(\xi_p)\mathbf{1} \\ \vdots \\ N_{Nns}^m(\xi_p)\mathbf{1} \\ \mathbf{0}_{(nnod \times 2)} \end{bmatrix}, \quad (5.14)$$

$$\mathbf{M}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(4 * Nns \times 1)} \\ M_1^{nm}(\zeta_p) \\ \vdots \\ M_{Nns}^{nm}(\zeta_p) \end{bmatrix}, \quad (5.15)$$

$$\mathbf{w}_p^T = \left(\mathbf{x}_1^{nmT}, \dots, \mathbf{x}_{Nns}^{nmT}, \mathbf{x}_1^{mT}, \dots, \mathbf{x}_{Nns}^{mT}, \lambda_{N_1}, \dots, \lambda_{N_{Nns}} \right), \quad (5.16)$$

onde $\mathbf{1}$ é a matriz identidade (2×2)

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.17)$$

Os termos anteriores estão escritos para qualquer grau de funções de interpolação. Para um melhor entendimento, a sistemática adotada será sempre mostrar como ficam definidos todos os termos para grau de interpolação $p = 1$. Assim, para $p = 1$, tem-se

$$\mathbf{B}_p = \begin{bmatrix} N_1^{nm}(\zeta_p) & 0 \\ 0 & N_1^{nm}(\zeta_p) \\ N_2^{nm}(\zeta_p) & 0 \\ 0 & N_2^{nm}(\zeta_p) \\ N_1^m(\xi_p) & 0 \\ 0 & N_1^m(\xi_p) \\ N_2^m(\xi_p) & 0 \\ 0 & N_2^m(\xi_p) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.18)$$

$$\mathbf{M}_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_1^{nm}(\zeta_p) \\ M_2^{nm}(\zeta_p) \end{bmatrix}, \quad (5.19)$$

$$\mathbf{w}_p^T = \left(\mathbf{x}_1^{nmT}, \mathbf{x}_2^{nmT}, \mathbf{x}_1^{mT}, \mathbf{x}_2^{mT}, \lambda_{N_1}, \lambda_{N_2} \right). \quad (5.20)$$

O vetor \mathbf{w}_p é formado pelas coordenadas correntes e multiplicadores nodais do contactor e do alvo em análise. Pode-se observar os detalhes para o grau $p = 1$ destes termos na Figura 5.2.

O vetor normal \mathbf{n}_{mp} precisa ser avaliado em ξ_p , a partir do vetor tangente \mathbf{a}_{mp} dado por

$$\mathbf{a}_{mp} = \mathbf{B}_{p,\xi}^T \mathbf{w}_p, \quad (5.21)$$

$$\mathbf{n}_{mp} = \frac{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{a}_{mp}}{\|\mathbf{e}_3 \times \mathbf{a}_{mp}\|}. \quad (5.22)$$

A matriz $\mathbf{B}_{p,\xi}$ é definida como

$$\mathbf{B}_{p,\xi} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(2*Nns \times 2)} \\ N_{1,\xi}^m(\xi_p) \mathbf{1} \\ \vdots \\ N_{Nns,\xi}^m(\xi_p) \mathbf{1} \\ \mathbf{0}_{(Nns \times 2)} \end{bmatrix}. \quad (5.23)$$

Como exemplo para grau $p = 1$, a matriz anterior fica como

$$\mathbf{B}_{p,\xi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ N_{1,\xi}^m(\xi_p) & 0 \\ 0 & N_{1,\xi}^m(\xi_p) \\ N_{2,\xi}^m(\xi_p) & 0 \\ 0 & N_{2,\xi}^m(\xi_p) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.24)$$

Para o cálculo do vetor tangente \mathbf{a}_{0p}^{nm} , definido em ζ_p , e do vetor curvatura da superfície alvo \mathbf{c}_{mp} , definido em ξ_p , faz-se necessária a definição das matrizes $\mathbf{B}_{p,\zeta}^T$ e $\mathbf{B}_{p,\xi\xi}^T$ de derivadas da matriz \mathbf{B}_p e do vetor de coordenadas materiais, respectivamente, como

$$\mathbf{B}_{p,\zeta} = \begin{bmatrix} N_{1,\zeta}^m(\zeta_p)\mathbf{1} \\ \vdots \\ N_{Nns,\zeta}^m(\zeta_p)\mathbf{1} \\ \mathbf{0}_{(2*Nns \times 2)} \\ \mathbf{0}_{(Nns \times 2)} \end{bmatrix}, \quad (5.25)$$

$$\mathbf{B}_{p,\xi\xi} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(2*Nns \times 2)} \\ N_{1,\xi\xi}^m(\xi_p)\mathbf{1} \\ \vdots \\ N_{Nns,\xi\xi}^m(\xi_p)\mathbf{1} \\ \mathbf{0}_{(Nns \times 2)} \end{bmatrix}, \quad (5.26)$$

$$\mathbf{W}_p^T = \left(\mathbf{X}_1^{nmT}, \dots, \mathbf{X}_{Nns}^{nmT}, \mathbf{X}_1^{mT}, \dots, \mathbf{X}_{Nns}^{mT}, 0, \dots, 0_{Nns} \right). \quad (5.27)$$

Para grau $p = 1$, os termos ficam análogos àqueles apresentados anteriormente.

Definem-se os vetores \mathbf{a}_{0p}^{nm} e \mathbf{c}_{mp} como

$$\mathbf{a}_{0p}^{nm} = \mathbf{B}_{p,\zeta}^T \mathbf{W}_p, \quad (5.28)$$

$$\mathbf{c}_{mp} = \mathbf{B}_{p,\xi\xi}^T \mathbf{w}_p. \quad (5.29)$$

Para a avaliação da Equação 5.11, é preciso definir também a variação da penetração normal δg_{N_p} e do multiplicador de Lagrange $\delta \lambda_{N_p}$ como

$$\delta g_{N_p} = \boldsymbol{\eta}_p^T \mathbf{B}_p \mathbf{n}_{mp}, \quad (5.30)$$

$$\delta \lambda_{N_p} = \boldsymbol{\eta}_p^T \mathbf{M}_p, \quad (5.31)$$

sendo $\boldsymbol{\eta}_p$ o vetor que contém os deslocamentos e tensões virtuais, definido por

$$\boldsymbol{\eta}_p^T = \left(\boldsymbol{\eta}_1^{nmT}, \dots, \boldsymbol{\eta}_{N_{ns}}^{nmT}, \boldsymbol{\eta}_1^{mT}, \dots, \boldsymbol{\eta}_{N_{ns}}^{mT}, \delta \lambda_{N_1}, \dots, \delta \lambda_{N_{N_{ns}}} \right). \quad (5.32)$$

Com estas definições, a contribuição de trabalho virtual de contato, dada pela Equação 5.11, pode ser reescrita como

$$C_e^L = \sum_{p=1}^{n_p} \left[\boldsymbol{\eta}_p^T (\mathbf{B}_p \mathbf{n}_{mp} \mathbf{M}_p^T + \mathbf{M}_p \mathbf{n}_{mp}^T \mathbf{B}_p^T) \mathbf{w}_p \right] \|\mathbf{a}_{0p}^{nm}\| w_p. \quad (5.33)$$

Para a aplicação do método de Newton-Raphson, a linearização deste trabalho virtual de contato é necessária. Assim como realizado para o domínio, a Equação 2.24 pode ser linearizada na direção de um incremento de deslocamento $[\Delta \mathbf{u}]$, considerando uma função teste φ_k através de uma expansão em série de Taylor e truncando no termo de primeira ordem como

$$C^L(\varphi_k, \boldsymbol{\eta}_p) + DC^L(\varphi_k, \boldsymbol{\eta}_p) [\Delta \mathbf{u}] = 0. \quad (5.34)$$

A Equação 5.34 pode ser reescrita, substituindo os termos discretizados como

$$C^L(\varphi_k, \boldsymbol{\eta}_p) + DC^L(\varphi_k, \boldsymbol{\eta}_p) [\Delta \mathbf{u}] = \boldsymbol{\eta}_p^T (\boldsymbol{\psi}_c) + \boldsymbol{\eta}_p^T \mathbf{K}_c \Delta \mathbf{u} = 0, \quad (5.35)$$

onde $\boldsymbol{\psi}_c$ é o vetor de força residual de contato e \mathbf{K}_c a matriz tangente de contato.

Observa-se que, por conveniência, foram utilizados os conceitos de potência virtual para o domínio e trabalho virtual para o contato. A Equação 4.40 deve ser satisfeita para qualquer velocidade virtual $\delta \mathbf{v}$ cinematicamente compatível, assim como a Equação 5.35 deve ser satisfeita para qualquer deslocamento virtual $\boldsymbol{\eta}_p$ cinematicamente compatível, resultando assim, para as duas expressões vetores de força.

Dadas estas definições, pode-se escrever o vetor residual para o método *mortar* utilizando multiplicadores de Lagrange, para um elemento de contato, como

$$\boldsymbol{\psi}_e^L = \sum_{p=1}^{n_p} (\mathbf{B}_p \mathbf{n}_{mp} \mathbf{M}_p^T + \mathbf{M}_p \mathbf{n}_{mp}^T \mathbf{B}_p^T) \mathbf{w}_p \|\mathbf{a}_{0p}^{nm}\| w_p. \quad (5.36)$$

Para a obtenção da matriz tangente de contato é preciso computar a linearização discretizada da variação da função penetração $\Delta(\delta g_{N_p})$. Este termo é obtido a partir da Equação 3.50, ou seja,

$$\begin{aligned} \Delta(\delta g_{N_p}) &= \boldsymbol{\eta}_p^T \left[-\mathbf{B}_{p,\xi} \mathbf{n}_{mp} \mathbf{a}_{mp}^T \mathbf{B}_p^T - \mathbf{B}_p \mathbf{a}_{mp} \mathbf{n}_{mp}^T \mathbf{B}_{p,\xi}^T - g_{N_p} \mathbf{B}_{p,\xi} \mathbf{n}_{mp} \mathbf{n}_{mp}^T \mathbf{B}_{p,\xi}^T \right. \\ &\quad \left. - \frac{\mathbf{c}_{mp}^T \mathbf{n}_{mp}}{\|\mathbf{a}_{mp}\|^2} \mathbf{B}_p \mathbf{a}_{mp} \mathbf{a}_{mp}^T \mathbf{B}_p^T \right] \frac{\Delta \mathbf{w}_p}{\|\mathbf{a}_{mp}\|^2 - g_{N_p} \mathbf{c}_{mp}^T \mathbf{n}_{mp}}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Baseado neste resultado, pode-se escrever a matriz tangente para um elemento de contato como

$$\mathbf{K}_{Ne}^L = \sum_{p=1}^{n_p} \left[\mathbf{K}_{N_p}^{L1} - \left[\mathbf{K}_{N_p}^{L2} + \mathbf{K}_{N_p}^{L3} \right] \frac{\lambda_{N_p}}{\|\mathbf{a}_{mp}\|^2 - g_{N_p} \mathbf{c}_{mp}^T \mathbf{n}_{mp}} \right] \|\mathbf{a}_{0p}^{nm}\| w_p. \quad (5.38)$$

Para facilitar a visualização da matriz foram definidas as matrizes $\mathbf{K}_{N_p}^{L1}$, $\mathbf{K}_{N_p}^{L2}$ e $\mathbf{K}_{N_p}^{L3}$, respectivamente, como

$$\mathbf{K}_{N_p}^{L1} = \mathbf{B}_p \mathbf{n}_{mp} \mathbf{M}_p^T + \mathbf{M}_p \mathbf{n}_{mp}^T \mathbf{B}_p^T, \quad (5.39)$$

$$\mathbf{K}_{N_p}^{L2} = \mathbf{B}_{p,\xi} \mathbf{n}_{mp} \mathbf{a}_{mp}^T \mathbf{B}_p^T + \mathbf{B}_p \mathbf{a}_{mp} \mathbf{n}_{mp}^T \mathbf{B}_{p,\xi}^T, \quad (5.40)$$

$$\mathbf{K}_{N_p}^{L3} = g_{N_p} \mathbf{B}_{p,\xi} \mathbf{n}_{mp} \mathbf{n}_{mp}^T \mathbf{B}_{p,\xi}^T + \frac{\mathbf{c}_{mp}^T \mathbf{n}_{mp}}{\|\mathbf{a}_{mp}\|^2} \mathbf{B}_p \mathbf{a}_{mp} \mathbf{a}_{mp}^T \mathbf{B}_p^T. \quad (5.41)$$

Como já visto, a forma fraca do trabalho virtual devido à parcela de contato também pode ser escrita através do método da penalidade (Equação 3.61). Reescrevendo a Equação 3.61, tem-se

$$C_e^{PE} = \int_{\Gamma_c^{nm}} \epsilon_N g_{Nh} \delta g_{Nh} d\Gamma = \epsilon_N \sum_{p=1}^{n_p} [g_N(\zeta_p) \delta g_N(\zeta_p)] \|\mathbf{a}_{0p}^{nm}\| w_p. \quad (5.42)$$

Os vetores \mathbf{w}_p^T e \mathbf{W}_p^T mudam para o método da penalidade. São reescritos sem as variáveis relativas aos multiplicadores de Lagrange. As matrizes \mathbf{B}_p , $\mathbf{B}_{p,\xi}$, $\mathbf{B}_{p,\xi\xi}$ e $\mathbf{B}_{p,\zeta}$ também são reescritas sem as variáveis utilizadas para eliminar os multiplicadores de Lagrange. Sendo assim, os termos

são reescritos como

$$\mathbf{w}_p^T = \left(\mathbf{x}_1^{nmT}, \dots, \mathbf{x}_{Nns}^{nmT}, \mathbf{x}_1^{mT}, \dots, \mathbf{x}_{Nns}^{mT} \right), \quad (5.43)$$

$$\mathbf{W}_p^T = \left(\mathbf{X}_1^{nmT}, \dots, \mathbf{X}_{Nns}^{nmT}, \mathbf{X}_1^{mT}, \dots, \mathbf{X}_{Nns}^{mT} \right), \quad (5.44)$$

$$\mathbf{B}_p = \begin{bmatrix} N_1^{nm}(\zeta_p)\mathbf{1} \\ \vdots \\ N_{Nns}^{nm}(\zeta_p)\mathbf{1} \\ N_1^m(\xi_p)\mathbf{1} \\ \vdots \\ N_{Nns}^m(\xi_p)\mathbf{1} \end{bmatrix}, \quad (5.45)$$

$$\mathbf{B}_{p,\xi} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(2*Nns \times 2)} \\ N_{1,\xi}^m(\xi_p)\mathbf{1} \\ \vdots \\ N_{Nns,\xi}^m(\xi_p)\mathbf{1} \end{bmatrix}, \quad (5.46)$$

$$\mathbf{B}_{p,\xi\xi} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(2*Nns \times 2)} \\ N_{1,\xi\xi}^m(\xi_p)\mathbf{1} \\ \vdots \\ N_{Nns,\xi\xi}^m(\xi_p)\mathbf{1} \end{bmatrix}, \quad (5.47)$$

$$\mathbf{B}_{p,\zeta} = \begin{bmatrix} N_{1,\zeta}^m(\zeta_p)\mathbf{1} \\ \vdots \\ N_{Nns,\zeta}^m(\zeta_p)\mathbf{1} \\ \mathbf{0}_{(2*Nns \times 2)} \end{bmatrix}. \quad (5.48)$$

Com essas definições, pode-se escrever, para o método da penalidade, o vetor resíduo e a matriz tangente para um elemento de contato como

$$\psi_{Ne}^{PE} = \sum_{p=1}^{n_p} (\mathbf{B}_p \mathbf{n}_{mp} \mathbf{n}_{mp}^T \mathbf{B}_p^T) \mathbf{w}_p \|\mathbf{a}_{0p}^{nm}\| w_p, \quad (5.49)$$

$$\mathbf{K}_{Ne}^{PE} = \sum_{p=1}^{n_p} \left[\mathbf{K}_{N_p}^{PE1} - \left[\mathbf{K}_{N_p}^{PE2} + \mathbf{K}_{N_p}^{PE3} \right] \frac{g_{N_p}}{\|\mathbf{a}_{mp}\|^2 - g_{N_p} \mathbf{c}_{mp}^T \mathbf{n}_{mp}} \right] \|\mathbf{a}_{0p}^{nm}\| w_p, \quad (5.50)$$

$$\mathbf{K}_{N_p}^{PE1} = \mathbf{B}_p \mathbf{n}_{mp} \mathbf{n}_{mp}^T \mathbf{B}_p^T, \quad (5.51)$$

$$\mathbf{K}_{N_p}^{PE2} = \mathbf{B}_{p,\xi} \mathbf{n}_{mp} \mathbf{a}_{mp}^T \mathbf{B}_p^T + \mathbf{B}_p \mathbf{a}_{mp} \mathbf{n}_{mp}^T \mathbf{B}_{p,\xi}^T, \quad (5.52)$$

$$\mathbf{K}_{N_p}^{PE3} = g_{N_p} \mathbf{B}_{p,\xi} \mathbf{n}_{mp} \mathbf{n}_{mp}^T \mathbf{B}_{p,\xi}^T + \frac{\mathbf{c}_{mp}^T \mathbf{n}_{mp}}{\|\mathbf{a}_{mp}\|^2} \mathbf{B}_p \mathbf{a}_{mp} \mathbf{a}_{mp}^T \mathbf{B}_p^T. \quad (5.53)$$

Para as duas formulações, o termo \mathbf{c}_{mp} é um vetor nulo, $\mathbf{c}_{mp}^T = [0 \ 0]^T$, para o caso de funções de interpolação de grau $p = 1$, pois o mesmo carrega informação da curvatura do segmento *mortar*.

Pode-se observar que os termos para o vetor resíduo e a matriz tangente de contato estão escritos para um elemento de contato. Portanto, para a construção global destes termos, tem-se

$$\boldsymbol{\psi}_N^C = \sum_{e=1}^{Nec} \boldsymbol{\psi}_{Ne}^L, \quad (5.54)$$

$$\mathbf{K}_N^C = \sum_{e=1}^{Nec} \mathbf{K}_{Ne}^L. \quad (5.55)$$

Para o método da penalidade

$$\boldsymbol{\psi}_N^C = \sum_{e=1}^{Nec} \boldsymbol{\psi}_{Ne}^{PE}, \quad (5.56)$$

$$\mathbf{K}_N^C = \sum_{e=1}^{Nec} \mathbf{K}_{Ne}^{PE}, \quad (5.57)$$

sendo Nec o número de elementos de contato ativos. Os sobrescritos $(\bullet)_N$ são somente uma indicação de que os termos foram deduzidos para o contato na direção normal sem atrito.

Os termos a nível de elemento de contato têm o mesmo comportamento que um elemento finito, são calculados em pontos de integração e geram resíduo e rigidez nos nós do elemento.

Tem-se que tomar um cuidado especial com os elementos de contato, pois, como pode ser visto na Figura 5.2, os pontos de integração podem ser projetados em alvos diferentes. Dentro do mesmo

elemento de contato, podem existir pontos de integração gerando resíduo e rigidez em graus de liberdade diferentes. Isso deve ser levado em conta na hora de se construir a conectividade para a montagem do vetor resíduo e da matriz tangente de contato globais.

Todas as matrizes e vetores, definidos nesta seção, serão também utilizados na seção de discretização dos termos de contato com atrito.

5.3 Lei de Coulomb

Na interface de contato, a reação na direção tangencial, que aqui será denominada condição tangencial de contato (CTC), pode ter dois comportamentos distintos, adesão ou deslizamento (Figura 5.3).

Na adesão não ocorre movimento relativo entre as superfícies que estão em contato, e consequentemente $\mathbf{g}_T = 0$. No deslizamento, pode-se observar um movimento relativo entre estas superfícies e $\mathbf{g}_T \neq 0$.

Uma condição importante, dada a definição de adesão e deslizamento, e que não está representada na Figura 5.3, é que pode ocorrer as duas condições de atrito em uma mesma região de contato, ou seja, em algumas partes da superfície de contato se observa a condição de deslizamento e em outras partes a condição de adesão.

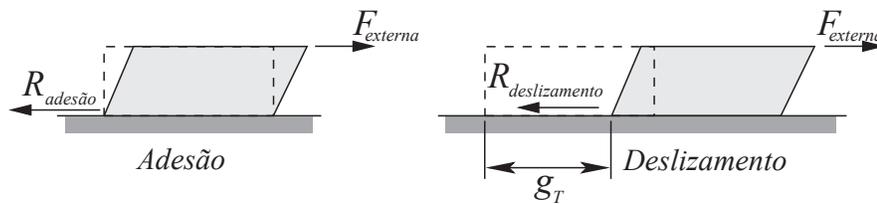


Figura 5.3: Condições de adesão e deslizamento na interface de contato.

A restrição tangencial do tipo adesão pode ser obtida da relação de velocidade tangencial nula, ou seja,

$$\dot{\mathbf{g}}_T = 0 \iff \mathbf{g}_T = 0.$$

Esse comportamento físico, quando modelado, impõe numericamente uma equação de restrição não linear no movimento da interface de contato. Associada à essa restrição, existe uma reação tangencial, aqui representada simplesmente por $R_{adesão}$. Esta reação, dependendo do modelo utilizado

na discretização das equações diferenciais, será uma reação por unidade de área ou uma reação pura, ou seja, terá unidades de tensão ou força, respectivamente. Observa-se que, assim como para o caso de contato sem atrito, não é necessária a aplicação de um modelo constitutivo de contato quando ocorre adesão.

Quando ocorre o deslizamento, faz-se necessário o uso de uma relação constitutiva de contato. O presente trabalho se restringe ao uso de uma das mais simples formulações para modelo constitutivo de contato com atrito seco, a lei clássica de atrito de Coulomb [97, 83, 82, 62, 36].

Para o deslizamento, define-se $(\mathbf{R}_{deslizamento})/A_{\text{área}} = \mathbf{t}_T$, e a tensão tangencial de contato pode ser obtida através da seguinte relação

$$\mathbf{t}_T = -\mu |t_N| \frac{\dot{\mathbf{g}}_T}{\|\dot{\mathbf{g}}_T\|} \text{ se } \|\mathbf{t}_T\| > \mu |t_N|. \quad (5.58)$$

O escalar μ é o coeficiente de atrito. Geralmente, este coeficiente depende de uma série de fatores, como, por exemplo, tensão normal de contato, rugosidade de superfície, temperatura, etc [97].

Na lei de Coulomb μ é considerado constante e depende somente dos materiais em contato. Na referência [97], encontra-se uma tabela com faixas de valores de coeficientes de atrito para diferentes pares de materiais em contato.

Uma coisa importante a ser observada, é que a necessidade de se empregar um modelo constitutivo na interface de contato vem da ocorrência do fenômeno de deslizamento. Apesar, de a lei de Coulomb ser utilizada, tanto para calcular a tensão tangencial de adesão, quanto a tensão tangencial de deslizamento, em um problema de pura adesão não seria necessária a adoção de um modelo constitutivo, uma vez que a reação tangencial na interface de contato poderia ser obtida diretamente das equações de restrição e equilíbrio.

A aplicação da lei de Coulomb, em problemas de contato com atrito, será realizada através da estratégia conhecida como Abordagem do Movimento do Cone de Fricção [36] (*Moving Friction Cone Approach - MFC*). Os detalhes desta abordagem são descritos na subseção seguinte.

5.3.1 Abordagem do movimento do cone de fricção

A abordagem do movimento do cone de fricção foi proposta em [98] para o caso de problemas bidimensionais de contato com atrito. Posteriormente, foi estendida para problemas tridimensionais em [99]. A mesma resulta em um algoritmo que explora a formulação baseada no método da penalidade para descrever a parte de contato com atrito, utilizando um único vetor de penetração \mathbf{g} , sem dividir a restrição de contato em normal e tangencial [36]. A utilização desta estratégia é eficaz [36]

e resulta em uma matriz de rigidez de contato com menos termos, podendo ser implementada de forma mais eficiente. O algoritmo resultante utilizado para resolver a parte do atrito é mais simples que as estratégias usuais [97].

A estratégia é baseada no fato que a posição ξ_0 (Figura 5.4) não muda enquanto os corpos permanecerem em adesão. Isto significa que quando o contato é iniciado no passo de tempo $t_n = t_0$, adesão é assumida e a coordenada ξ_0 define a posição do vetor \mathbf{x}_0^m . Enquanto o ponto \mathbf{x}^{nm} estiver em adesão, a coordenada ξ_0 permanece constante.

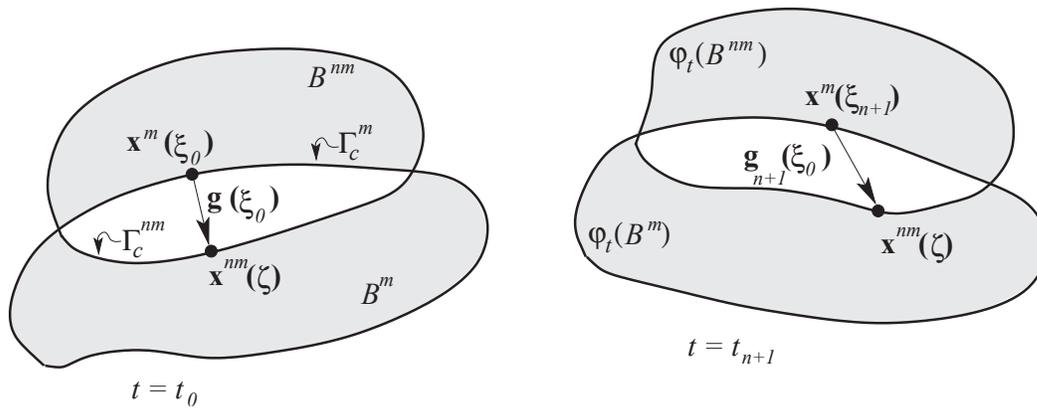


Figura 5.4: Configurações inicial e corrente dos dois corpos em contato.

Caso ocorra deslizamento, a coordenada ξ_0 , e conseqüentemente \mathbf{x}_0^m , devem ser atualizados, assumindo o valor da última posição após o deslizamento em ξ_n . Assim, define-se $\xi_0 = \xi_n$ e $\mathbf{x}_0^m = \mathbf{x}^m(\xi_n)$, e fixa-se esta posição novamente como uma nova adesão.

O procedimento de definição da nova coordenada de adesão após o deslizamento é realizado através de uma busca com o método de Newton-Raphson, e será discutido na seção de discretização do elemento *mortar* de contato com atrito.

Uma fase importante na abordagem é a verificação se ocorre deslizamento ou adesão. O procedimento de verificação aqui abordado, apesar de ser mostrado aqui para um só ponto, tem que ser realizado para cada ponto de integração da superfície contactora.

A Figura 5.5 ilustra uma situação onde uma força $F_{externa}$ é aplicada a um corpo.

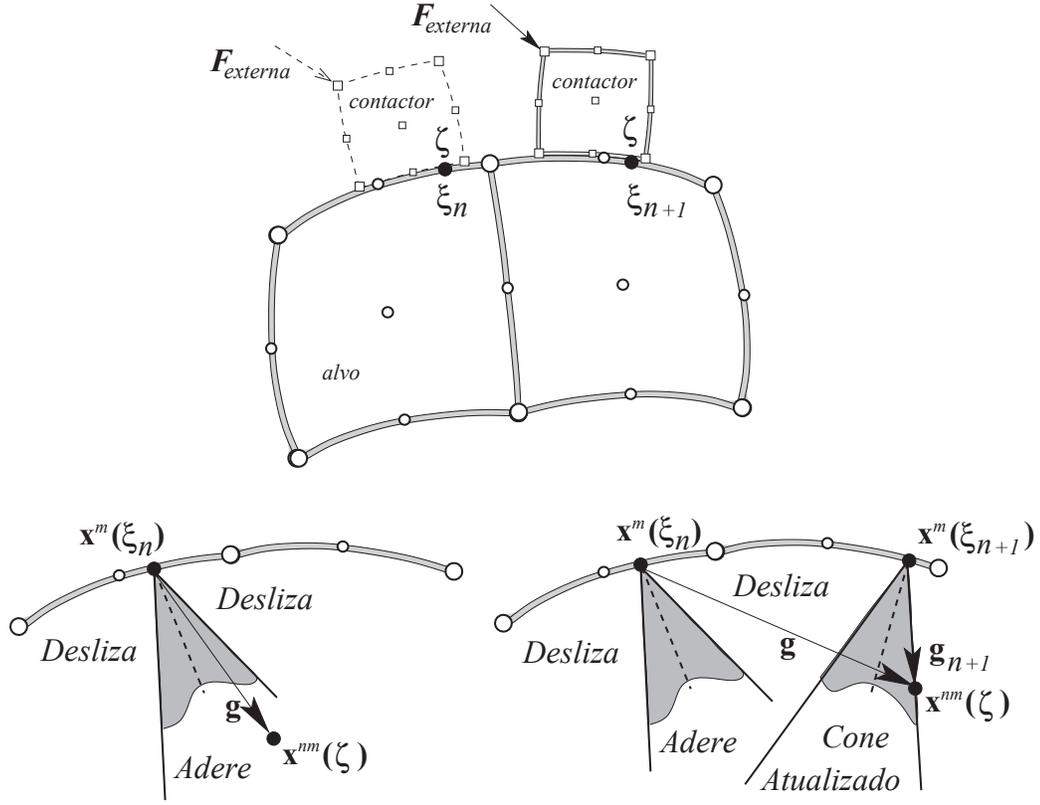


Figura 5.5: Descrição da abordagem do movimento do cone de fricção.

Pode-se observar o corpo contactor e o corpo alvo. O ponto de integração ζ está associado ao corpo contactor, enquanto sua projeção ξ_n , dada pela resolução do problema de mínima distância (Equação 3.20), está associada ao corpo alvo. Com ξ_n definido, é possível se obter um vetor tangente $\mathbf{a}_{mp} = \mathbf{x}_{,\xi}^m(\xi_n)$ e com a Equação 3.21 um vetor normal $\mathbf{n}_{mp}(\xi_n)$.

Para o método da penalidade o vetor de tensão é definido como

$$\mathbf{t} = \epsilon \mathbf{g} = \epsilon [\mathbf{x}^{nm}(\zeta) - \mathbf{x}^m(\xi_n)]. \quad (5.59)$$

A projeção deste vetor tensão no plano tangente é dada por

$$\mathbf{t}_T = \frac{1}{\|\mathbf{a}_{mp}(\xi_n)\|^2} (\mathbf{a}_{mp}(\xi_n) \otimes \mathbf{a}_{mp}(\xi_n)) \mathbf{t}. \quad (5.60)$$

A tensão normal de contato no ponto é definida por

$$t_N = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n}_{mp}(\xi_n). \quad (5.61)$$

Uma vez obtidos estes termos, a condição de adesão ou deslizamento pode ser verificada através da avaliação da função de deslizamento f_s , que é definida como

$$f_s = \|\mathbf{t}_T\| - \mu |t_N|. \quad (5.62)$$

Com a Equação 5.62 é possível distinguir duas situações

Condição de adesão $f_s \leq 0$

Os corpos permanecem em adesão e a coordenada ξ não muda. A situação é ilustrada pelo elemento tracejado na Figura 5.5, ou seja, aplica-se a força $F_{externa}$, e o elemento não sofre movimento relativo entre as superfícies em contato. Quando a adesão ocorre, a tensão tangencial $\|\mathbf{t}_T\|$ é menor que a tensão limite $\mu |t_N|$ provinda pelo modelo de Coulomb. Esta situação pode ser ilustrada pela representação inferior esquerda da Figura 5.5, onde g está dentro do cone de restrição imposta pela lei de Coulomb.

Condição de deslizamento $f_s > 0$

O ponto \mathbf{x}^{nm} move sobre a superfície alvo enquanto a conexão $\xi_0 = \xi_n$ muda e uma nova posição ξ_{n+1} precisa ser encontrada. A situação é ilustrada pelo elemento que parte de uma condição de adesão (tracejado na Figura 5.5), desliza e se adere à superfície alvo novamente (posição final na Figura 5.5). Isto é análogo a idéia de que o cone de atrito se move com o ponto $\mathbf{x}^{nm}(\zeta)$, garantindo que o mesmo sempre pertença ao cone de atrito (representação inferior direita da Figura 5.5).

Vale lembrar que para a ilustração aqui apresentada na Figura 5.5, as condições de adesão e de deslizamento foram mostradas, para melhor visualização, a nível de elemento, mas estas condições ocorrem a nível pontual. Como já foi dito anteriormente, em um mesmo elemento de contato pode ocorrer adesão em alguns pontos e deslizamento em outros.

Uma observação importante é que o método da penalidade insere na formulação a limitação de permitir pequenos valores numéricos para penetração e na condição de adesão pequenos deslocamentos tangenciais relativos na região de contato. Estes pequenos valores numéricos são necessários para obtenção do vetor de tensões de contato proporcional através da Equação 5.59, mas fazem com que a formulação não atenda de forma exata as condições de KKT $g_N \leq 0$ e de adesão $g_T = 0$.

5.4 Elemento *mortar* de contato com atrito

O elemento de contato adotado no presente trabalho, para problemas com atrito, foi também utilizado em [36], onde foi desenvolvido para funções de interpolação quadráticas. A formulação é baseada no elemento de contato sem atrito.

A proposta do presente trabalho é fazer uma extensão desta formulação, para um elemento de contato com grau de funções de interpolação de ordem arbitrária.

Quando o atrito está presente, forças tangencias surgem e devem ser transmitidas via formulação para a interface de contato. A lógica básica utilizada é a aplicação da abordagem do movimento do cone de fricção.

Para facilitar a leitura das equações são utilizados os sobrescritos $(\bullet)^{st}$ para adesão (*stick*) e $(\bullet)^{sl}$ para deslizamento (*slip*).

Em caso de adesão (detalhe à esquerda da Figura 5.5), os vetores penetração e tensão (ou tração) podem ser obtidos pelas expressões

$$\mathbf{g}_{n+1}(\xi_n) = \mathbf{x}_{n+1}^{nm}(\zeta_p) - \mathbf{x}_{n+1}^m(\xi_n). \quad (5.63)$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_{n+1}^{st} = \epsilon \mathbf{g}_{n+1}(\xi_n) = \epsilon [\mathbf{x}_{n+1}^{nm}(\zeta_p) - \mathbf{x}_{n+1}^m(\xi_n)]. \quad (5.64)$$

Observa-se que foi omitido o subscrito $(\bullet)_p$ da coordenada de projeção, para facilitar a notação, uma vez que a formulação para o atrito é escrita em função de um incremento de pseudo-tempo $\Delta t_{n+1} = t_{n+1} - t_n$, onde o subscrito $(\bullet)_n$ é utilizado para quantidades avaliadas no passo de tempo anterior e $(\bullet)_{n+1}$ no passo de tempo atual.

O vetor tensão é então decomposto em uma parcela normal e outra tangencial

$$t_{N_{n+1}}^{st} = \mathbf{t}_{n+1}(\xi_n) \cdot \mathbf{n}_{n+1}^m(\xi_n), \quad (5.65)$$

$$\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{st} = \left[\frac{\mathbf{a}_{n+1}^m(\xi_n)}{\|\mathbf{a}_{n+1}^m(\xi_n)\|} \otimes \frac{\mathbf{a}_{n+1}^m(\xi_n)}{\|\mathbf{a}_{n+1}^m(\xi_n)\|} \right] \mathbf{t}_{n+1}(\xi_n). \quad (5.66)$$

As penetrações normais e tangencias também são importantes para as etapas de avaliação da condição do atrito, e são definidas como

$$g_{N_{n+1}} = \mathbf{g}_{n+1}(\xi_n) \cdot \mathbf{n}_{n+1}^m(\xi_n), \quad (5.67)$$

$$g_{T_{n+1}} = \mathbf{g}_{n+1}(\xi_n) \cdot \frac{\mathbf{a}_{n+1}^m(\xi_n)}{\|\mathbf{a}_{n+1}^m(\xi_n)\|}. \quad (5.68)$$

Reescreve-se a Equação 5.62 para a função de verificação de deslizamento como

$$f_{s_{n+1}} = \|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{st}\| - \mu |t_{N_{n+1}}^{st}|. \quad (5.69)$$

Estes termos são todos computados na coordenada de projeção ξ_n , a qual é obtida pela Equação 6.1, para elementos de contato com funções de interpolação lineares, ou pelo Algoritmo 1, para elementos com funções de interpolação de alta ordem.

A etapa mais importante do método é determinar se ocorre ou não o deslizamento, pois em caso de adesão a coordenada de projeção não muda. Em caso de deslizamento é necessário avaliar a mudança desta coordenada. Assim, o procedimento de análise é basicamente realizado seguindo as seguintes etapas:

- 1) Considera-se adesão como condição de tentativa (falsa adesão), computando-se as Equações 5.65 e 5.66;
- 2) Checa-se a ocorrência de adesão ($f_{s_{n+1}} \leq 0$) ou o deslizamento ($f_{s_{n+1}} > 0$) com a Equação 5.69;
- 3) Em caso de adesão, a coordenada de projeção é ξ_n . Em caso de deslizamento esta coordenada muda para ξ_{n+1} .

Se na etapa 2) for observada a adesão, os termos anteriormente computados em ξ_n são utilizados para o cálculo do resíduo e da matriz tangente.

Dada a ocorrência de deslizamento, é realizado um procedimento de busca da coordenada ξ_{n+1} , que é o local na superfície *mortar* onde o ponto $x^{nm}(\zeta)$ se adere novamente após deslizar (detalhe à direita na Figura 5.5). Este local é determinado através do equilíbrio da Equação 5.69 em ξ_{n+1} , como

$$f_{s_{n+1}} = \|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{st}(\xi_{n+1})\| - \mu |t_{N_{n+1}}^{st}(\xi_{n+1})| = 0. \quad (5.70)$$

Substituindo as Equações 5.65 e 5.66 na Equação 5.70, é possível reescrever

$$g_{T_{n+1}} \text{sign}(g_{T_{n+1}}) - \mu g_{N_{n+1}} \text{sign}(g_{N_{n+1}}) = 0. \quad (5.71)$$

A solução desta relação é obtida através de um procedimento utilizando o método de Newton-Raphson [36]. No capítulo de algoritmos computacionais, é apresentado o procedimento e algoritmo numérico detalhado para obtenção da coordenada ξ_{n+1} .

Segue-se com a definição do vetor resíduo e da matriz tangente para cada caso de condição tangente de contato.

Vetor resíduo e matriz tangente para condição de adesão.

O vetor resíduo para o caso de adesão, onde ξ_n é fixo, pode ser definido como

$$\boldsymbol{\psi}^{st} = \int_{\Gamma_c} \mathbf{t}^{st} \cdot \delta \mathbf{g}^{st} d\Gamma. \quad (5.72)$$

Pode-se reescrever a Equação 5.72 na forma discretizada para um ponto de integração como

$$\boldsymbol{\psi}_p^{st} = \epsilon \mathbf{B}_p \mathbf{B}_p^T \mathbf{w}_p \| \mathbf{a}_{0p}^{nm} \| w_p. \quad (5.73)$$

Os termos são os mesmos definidos na seção do elemento de contato sem atrito para o método da penalidade. Todos os termos são computados na coordenada de adesão ξ_n .

Para a linearização é necessário obter a derivada direcional deste resíduo, na direção de um incremento de deslocamento, o que resulta em

$$D\boldsymbol{\psi}_p^{st} [\Delta \mathbf{u}] = \epsilon \int_{\Gamma_c^{nm}} [\delta \boldsymbol{\eta}_{n+1}^{nm}(\zeta_p) - \delta \boldsymbol{\eta}_{n+1}^m(\xi_n)] \cdot [\Delta \mathbf{x}_{n+1}^{nm}(\zeta_p) - \Delta \mathbf{x}_{n+1}^m(\xi_n)] d\Gamma. \quad (5.74)$$

Assim, a matriz de rigidez para o caso de adesão é definida por

$$\mathbf{K}_p^{st} = \epsilon \mathbf{B}_p \mathbf{B}_p^T \| \mathbf{a}_{0p}^{nm} \| w_p. \quad (5.75)$$

Vetor resíduo e matriz tangente para condição de deslizamento.

O vetor resíduo para o caso de deslizamento é definido como

$$\boldsymbol{\psi}^{sl} = \int_{\Gamma_c} \mathbf{t}^{sl} \cdot \delta \mathbf{g}^{sl} d\Gamma. \quad (5.76)$$

A forma discretizada do vetor resíduo para o caso de deslizamento e adesão são equivalentes. A diferença é que todos os termos no deslizamento são avaliados em ξ_{n+1} . O vetor resíduo então é definido para um ponto de integração como

$$\boldsymbol{\psi}_p^{sl} = \epsilon \mathbf{B}_p \mathbf{B}_p^T \mathbf{w}_p \| \mathbf{a}_{0p}^{nm} \| w_p. \quad (5.77)$$

A linearização da Equação 5.77 resulta em

$$\begin{aligned}
D\psi_p^{sl} [\Delta \mathbf{u}] = & - \int_{\Gamma_c^{nm}} \delta \boldsymbol{\eta}_{n+1, \xi}^m \Delta \xi \mathbf{t}_{n+1}^{sl} d\Gamma \\
& + \epsilon \int_{\Gamma_c^{nm}} [\delta \boldsymbol{\eta}_{n+1}^{nm} - \delta \boldsymbol{\eta}_{n+1}^m(\xi_{n+1})] \cdot [\Delta \boldsymbol{\eta}_{n+1}^{nm}(\zeta_n) - \Delta \boldsymbol{\eta}_{n+1}^m(\xi_{n+1})] d\Gamma \\
& - \epsilon \int_{\Gamma_c^{nm}} [\delta \boldsymbol{\eta}_{n+1}^{nm} - \delta \boldsymbol{\eta}_{n+1}^m(\xi_{n+1})] \cdot \mathbf{a}_{n+1}^m(\xi_{n+1}) \Delta \xi d\Gamma. \tag{5.78}
\end{aligned}$$

A linearização de ξ pode ser realizada a partir da multiplicação da Equação 5.70 pela norma do vetor tangente $\|\mathbf{a}_{mpi}\|$, como

$$\Delta ((g_T \text{sign}(g_T) - \mu \text{sign}(g_N) g_N) \cdot \|\mathbf{a}^m\|) = 0. \tag{5.79}$$

Isto produz a seguinte relação

$$\begin{aligned}
& \Delta \xi \cdot [\text{sign}(g_T) \cdot ((\mathbf{x}^{nm} - \mathbf{x}^m) \cdot \mathbf{x}_{,\xi\xi} - \|\mathbf{a}_{mp}\|^2) \\
& + \frac{\mu}{\|\mathbf{a}_{mp}\|} \text{sign}(g_N) (\mathbf{x}^{nm} - \mathbf{x}^m) \cdot (\mathbf{a}_{mp} \otimes \mathbf{n}_{mp} - \mathbf{n}_{mp} \otimes \mathbf{a}_{mp}) \mathbf{x}_{,\xi\xi}] = \\
& - [(\Delta \mathbf{u}^{nm} - \Delta \mathbf{u}^m) \cdot [\text{sign}(g_T) \mathbf{a}_{mp} - \mu \text{sign}(g_N) \mathbf{n}_{mp} \|\mathbf{a}_{mp}\|] + (\mathbf{x}^{nm} - \mathbf{x}^m) \\
& \cdot \left[\text{sign}(g_T) \Delta \mathbf{u}_{,\xi}^m + \mu \text{sign}(g_N) \frac{\mathbf{a}_{mp}}{\|\mathbf{a}_{mp}\|} \Delta \mathbf{u}_{,\xi}^m \cdot \mathbf{n}_{mp} - \mu \text{sign}(g_N) \frac{\mathbf{n}_{mp}}{\|\mathbf{a}_{mp}\|} \Delta \mathbf{u}_{,\xi}^m \cdot \mathbf{a}_{mp} \right]]. \tag{5.80}
\end{aligned}$$

A Equação 5.80 pode então ser resolvida, resultando no escalar $\Delta \xi$. Assim, após extensiva manipulação matemática, a matriz de rigidez pode então ser escrita para um ponto de integração em caso de deslizamento como

$$\mathbf{K}_p^{sl} = \epsilon \left[\mathbf{B}_p^T \mathbf{B}_p + \frac{1}{R_p} \mathbf{K}_{c_p}^{sl1} \left[\mathbf{K}_{c_p}^{sl2} \mathbf{K}_{c_p}^{sl3} \right] \right] \|\mathbf{a}_{0p}^{nm}\| w_p. \tag{5.81}$$

Os termos \mathbf{K}_p^{sl1} , \mathbf{K}_p^{sl2} , \mathbf{K}_p^{sl3} e o escalar R_p são definidos, respectivamente, como

$$\mathbf{K}_p^{sl1} = [\mathbf{B}_{p,\xi} \mathbf{B}_p^T \mathbf{w}_p + \mathbf{B}_p \mathbf{a}_{mp}], \tag{5.82}$$

$$\mathbf{K}_p^{sl2} = s_{Tp} [\mathbf{a}_{mp}^T - \mu s_{Np} \|\mathbf{a}_{mp}\| \mathbf{n}_{mp}^T] \mathbf{B}_p^T + \mathbf{w}_p^T \mathbf{B}_p, \tag{5.83}$$

$$\mathbf{K}_p^{sl3} = \left[s_{Tp} + \frac{\mu s_{Np}}{\|\mathbf{a}_{mp}\|} [\mathbf{a}_{mp} \mathbf{n}_{mp}^T - \mathbf{n}_{mp} \mathbf{a}_{mp}^T] \right] \mathbf{B}_{p,\xi}, \tag{5.84}$$

$$R_p = s_{Tp} [\mathbf{w}_p^T \mathbf{B}_p \mathbf{c}_{mp} - \|\mathbf{a}_{mp}\|^2] + \frac{\mu s_{Np}}{\|\mathbf{a}_{mp}\|} \mathbf{w}_p^T \mathbf{B}_p [\mathbf{a}_{mp} \mathbf{n}_{mp}^T - \mathbf{n}_{mp} \mathbf{a}_{mp}^T] \mathbf{c}_{mp}. \quad (5.85)$$

Os termos s_{Np} e s_{Tp} são direções normal e tangencial do movimento, definidas, respectivamente, como

$$s_{Np} = \text{sign} [\mathbf{w}_p^T \mathbf{B}_p(\xi_n) \mathbf{n}_{mp}(\xi_n)], \quad (5.86)$$

$$s_{Tp} = \text{sign} \left[\mathbf{w}_p^T \mathbf{B}_p(\xi_n) \frac{\mathbf{a}_{mp}(\xi_n)}{\|\mathbf{a}_{mp}(\xi_n)\|} \right]. \quad (5.87)$$

Para a formulação com atrito, além do cuidado tomado na construção da conectividade para a montagem do vetor resíduo e da matriz tangente globais, deve-se observar que, dentro de um mesmo elemento de contato, pode ocorrer adesão em alguns pontos de integração e deslizamento em outros. Por isso, toda a discretização para estes termos foi feita até aqui para um só ponto de integração. Assim, computa-se o vetor resíduo e matriz tangente, para um elemento de contato, respectivamente, como

$$\psi_e^C = \sum_{p=1}^{n_p} \psi_p^{sl/st}, \quad (5.88)$$

$$\mathbf{K}_e^C = \sum_{p=1}^{n_p} \mathbf{K}_p^{sl/st}. \quad (5.89)$$

O subscrito $(\bullet)^{sl/st}$ indica a dependência pontual, dentro de um mesmo elemento, de avaliação da condição de deslizamento e adesão.

Portanto, para a construção global destes termos, tem-se

$$\psi^C = \sum_{e=1}^{Nec} \psi_e^C. \quad (5.90)$$

$$\mathbf{K}^C = \sum_{e=1}^{Nec} \mathbf{K}_e^C. \quad (5.91)$$

Observada sempre a construção da conectividade, devido às projeções em diferentes alvos.

Todos os detalhes matemáticos aqui omitidos para a definição da matriz tangente, em caso de deslizamento, podem ser obtidos nas referências [97, 36].

As componentes dos vetores de tensão de contato \mathbf{t}_N e \mathbf{t}_T foram computadas nos pontos de integração do elemento de contato. Em alguns exemplos, é necessário se conhecer os valores das tensões nodais, para isso, é aplicada uma transformação do tipo *backward* no vetor de tensões obtidas nos pontos de integração de um elemento de contato para se recuperar o vetor de tensões nodais equivalentes $\hat{\mathbf{t}}$ para esse elemento. Utiliza-se as Equações 4.27, 4.28 e 4.29, e define-se a transformação para um elemento como

$$\hat{\mathbf{t}} = (\mathbf{V}_L^T \mathbf{W} \mathbf{V}_L)^{-1} \mathbf{V}_L^T \mathbf{W} \mathbf{t}. \quad (5.92)$$

O mesmo é realizado para a direção tangencial. As forças nodais F_N e F_T são obtidas pela multiplicação de cada tensão nodal pela área nodal equivalente.

5.5 Estratégia de ativação do elemento de contato

Uma vez definidos todos os passos para a construção do elemento de contato, a próxima etapa a ser discutida no processo de solução do problema é a determinação da estratégia de ativação deste elemento.

O objetivo desta seção é definir esta estratégia a partir da formulação proposta e dos termos discretizados obtidos nos capítulos anteriores. É então discutida a estratégia adotada para o elemento *mortar* com o método dos multiplicadores de Lagrange e depois com o método da penalidade.

5.5.1 Método dos multiplicadores de Lagrange

A idéia básica do elemento de contato *mortar* (segmento-segmento) com multiplicadores de Lagrange é a satisfação das restrições de contato em uma superfície de contato, e não mais pontualmente como nas formulações clássicas de contato. O procedimento de definição do conjunto de elementos ativos é discutido em [72].

A avaliação é feita a nível de elemento de contato, portanto, assume-se que se a maior parte do elemento atende uma determinada condição, considera-se que todo o elemento está em contato com o alvo, e ativa-se o elemento por completo.

A avaliação é realizada através do sinal da área sobre o gráfico da função penetração g_N ao longo de um elemento. A área sobre o gráfico da função penetração, $g_{N_e}^A$, é definida como

$$g_{N_e}^A = \int_{\Gamma_e^{nm}} g_N d\Gamma_e = \sum_{p=1}^{n_p} [\mathbf{w}_p^T \mathbf{B}_p \mathbf{n}_{mp}] \|\mathbf{a}_{0p}^{nm}\| w_p. \quad (5.93)$$

Assim, se $g_{N_e}^A \geq 0$ não existe tensão de contato, ou seja, $t_N = 0$, as condições de KKT estão satisfeitas e todo o elemento de contato será desativado. Assim, para elementos de contato que se encontram em uma condição de contato parcial, a ativação ou desativação destes elementos pode ser facilmente avaliada pelas Equações 5.93 e 5.95.

Uma vez detectada a penetração do elemento $g_{N_e}^A < 0$, o mesmo deve satisfazer a condição de tensão $t_N \leq 0$.

Teoricamente, mesmo para uma formulação fraca do problema de contato, esta condição teria que ser satisfeita para todos os nós de discretização da superfície de contato estudados. Estudos sobre formas de desativação do contato para atender esta relação podem ser encontrados na literatura [73, 50, 72, 35]. No presente trabalho, a verificação para esta condição também é feita em um consenso médio, através da relação

$$t_{N_e}^A = \int_{\Gamma_e^{nm}} t_N d\Gamma_e. \quad (5.94)$$

Para que um elemento esteja ativo, a Equações 5.93 e 5.94, devem obedecer as seguintes relações

$$g_{N_e}^A < 0. \quad (5.95)$$

$$t_{N_e}^A \leq 0. \quad (5.96)$$

Para o método dos multiplicadores de Lagrange a pressão normal de contato toma a forma $t_N = \lambda_N$, e as duas relações devem ser verificadas para a ativação do elemento (Equações 5.95 e 5.96).

Apesar de g_N e λ_N serem acoplados via sistema de solução global, matematicamente estes termos são independentes. Os multiplicadores de Lagrange são aproximados por funções de interpolação contínuas entre graus de liberdade nodais independentes, além disso, podem ocorrer descontinuidades na distribuição da penetração normal, devida às projeções dos pontos de integração da superfície *non-mortar* para a superfície *mortar* (Figura 5.2). Estes fatores, combinados ou não, podem fazer com que em uma da região de penetração, $g_{N_e}^A < 0$, ocorra valores de λ_N positivos [97], o que seria incoerente do ponto de vista das condições de KKT.

5.5.2 Método da penalidade

Apesar destes métodos de ativação terem sido originalmente desenvolvidos para o método dos multiplicadores de Lagrange, também foi posteriormente aplicado ao método da penalidade [35]. A avaliação para o método da penalidade é muito simples, uma vez que se tem as tensões de contato proporcionais às funções de penetração $t_N = \epsilon g_N$, basta avaliar a função penetração em cada ponto de integração

$$g_{N_p} = \mathbf{w}_p^T \mathbf{B}_p \mathbf{n}_{mp}. \quad (5.97)$$

Assim, se $g_{N_p} \geq 0$ não existe tensão de contato, ou seja, $t_{N_p} = 0$, as condições de KKT estão satisfeitas para este ponto de integração e desativa-se o mesmo.

Uma vez detectada a penetração em um ponto de integração do elemento $g_{N_p} < 0$, o mesmo deve ser ativado.

6 ALGORITMOS COMPUTACIONAIS

A formulação para o elemento de contato de alta ordem aqui apresentada foi implementada no *software* de elementos finitos de alta ordem *hp²fem* [6, 93]. Este *software* foi desenvolvido pelo grupo de pesquisa no qual o presente trabalho está inserido, e faz uso de Programação Orientada à Objeto com a linguagem MATLAB. É uma ferramenta de solução de problemas em pequenas e grandes deformações através do uso do método MEF-AO [15, 55].

Foi utilizado também o *software* comercial de pré e pós-processamento *GID (Geometry Description - The Personal Pre and Post Processor)*. A partir da malha composta por elementos com interpolação linear gerada no pré-processador, o *hp²fem* constrói a matriz de rigidez e o vetor resíduo dos corpos em contato em uma ordem qualquer de interpolação, e inclui na malha de elementos lineares os nós de alta ordem. Com o elemento finito do domínio construído, o código chama as rotinas implementadas para a construção do elemento de contato na mesma ordem de interpolação do elemento do domínio. Uma vez construídos resíduo e rigidez de cada elemento de contato, estes são adicionados ao resíduo e à rigidez global do sistema, respectivamente.

Inicia-se o capítulo com o procedimento numérico para obtenção das coordenadas de projeção ξ_p e de deslizamento ξ_{n+1} . O capítulo segue com uma apresentação dos algoritmos para montagem dos elementos de contato com e sem atrito, que são chamados durante o processo de solução do sistema global de equações. Na última seção é apresentado o algoritmo de solução do sistema global de equações, baseado no método de Newton-Raphson.

6.1 Algoritmo para o cálculo das coordenadas de projeção

É necessário se obter, para cada ponto de integração ζ_p , sua respectiva coordenada de projeção ξ_p . Este procedimento é baseado no problema de mínima distância (Equação 3.19). Utilizando funções de interpolação de grau $p = 1$, uma vez que os elementos possuem lado reto, pode-se, a partir da Equação 3.20, obter uma forma fechada para a coordenada de projeção como

$$\xi_p = \frac{1}{l_m^2} [\mathbf{x}^{nm}(\zeta_p) - \mathbf{x}_1^m] \cdot (\mathbf{x}_2^m - \mathbf{x}_1^m), \quad (6.1)$$

sendo $l_m = \|\mathbf{x}_2^m - \mathbf{x}_1^m\|$.

Para funções de interpolação $p > 1$, os vetores normal e tangencial mudam com a coordenada convectiva de parametrização ξ_p , devida à curvatura do segmento *mortar*. Com isso, não é possível se determinar uma forma fechada como para caso anterior. Utiliza-se para tal fim, um procedimento

iterativo de Newton-Raphson (Algoritmo 1), para se encontrar o ponto de projeção na superfície *mortar* [97].

Para isso, define-se os escalares

$$d_p(\xi_i) = \mathbf{w}_p^T \mathbf{B}_p \mathbf{a}_{mp} \quad (6.2)$$

e

$$d_{p,\xi}(\xi_i) = -\mathbf{a}_{mp}^T \mathbf{a}_{mp} + \mathbf{w}_p^T \mathbf{B}_p \mathbf{c}_{mp}. \quad (6.3)$$

O Algoritmo segue abaixo.

Algoritmo 1 Esquema iterativo para encontrar a coordenada de projeção.

Inicializar $\xi_1 = -1$

1) Faça $i = 1, \dots$, convergir

1.1) calcular termos $\mathbf{w}_p(\xi_i)$, $\mathbf{B}_p(\xi_i)$, $\mathbf{a}_{mp}(\xi_i)$ e $\mathbf{c}_{mp}(\xi_i)$ (Equações 5.43, 5.45, 5.21 e 5.29)

1.2) calcular $d_p(\xi_i)$ e $d_{p,\xi}(\xi_i)$ (Equações 6.2 e 6.3)

1.3) Checar convergência:

se $|d_p(\xi_i)| \leq tol \implies \text{Pare} \implies \xi_p = \xi_i$

se $|d_p(\xi_i)| > tol \implies \text{calcular } \xi_{i+1} = \xi_i - \frac{d_p}{d_{p,\xi}}, i = i + 1 \text{ e voltar 1)}$

fim 1.3)

Fim 1)

6.2 Algoritmo para atualização da coordenada de deslizamento

Dada a ocorrência de deslizamento, é realizado um procedimento de busca da coordenada ξ_{n+1} , que é o local na superfície *mortar* onde o ponto $x^{nm}(\zeta)$ se adere novamente após deslizar (detalhe à direita na Figura 5.5). Este local é encontrado através da solução da Equação 5.71. Para isso, define-se os escalares

$$\mathcal{X}_i(\xi_i) = \|\mathbf{a}_{mp}\| \cdot (g_{T_i} \text{sign}(g_{T_0}) - \mu g_{N_i} \text{sign}(g_{N_0})) \quad (6.4)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{i,\xi}(\xi_i) = & \text{sign}(g_{T_0}) \cdot [(\mathbf{x}^{nm} - \mathbf{x}^m(\xi_i)) \cdot \mathbf{a}_{mp,\xi} - \|\mathbf{a}_{mpi}\|^2] \\ & + \mu \text{sign}(g_{N_0}) \cdot \left(g_{T_i} \mathbf{n}_{mp} \cdot \mathbf{a}_{mp,\xi} - g_{N_i} \frac{\mathbf{a}_{mp} \cdot \mathbf{a}_{mp,\xi}}{\|\mathbf{a}_{mp}\|} \right). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Estes escalares são utilizados para construção de uma direção de busca necessária ao procedimento numérico para a busca da coordenada ξ_{n+1} . Este procedimento é baseado no método de Newton-Raphson e está ilustrado no Algoritmo 2.

Algoritmo 2 Procedimento de busca da coordenada ξ_{n+1} .

Inicializar $i = 0$, $\xi_1 = \xi_n$, $g_{N_0} = g_{N_{n+1}}$, $g_{T_0} = g_{T_{n+1}}$ da condição de tentativa.

1) Faça $i = 1, \dots$, convergir

1.1) calcular termos $\mathbf{w}_p(\xi_i)$, $\mathbf{B}_p(\xi_i)$, $\mathbf{a}_{mp}(\xi_i)$ e $\mathbf{c}_{mp}(\xi_i)$ (Equações 5.43, 5.45, 5.21 e 5.29)

1.2) calcular $g_{N_i}(\xi_i)$ e $g_{T_i}(\xi_i)$ (Equações 5.67 e 5.68)

1.3) calcular $\mathcal{X}_i(\xi_i)$ e $\mathcal{X}_{i,\xi}(\xi_i)$ (Equações 6.2 e 6.3)

1.4) Checar convergência:

se $|\mathcal{X}_i(\xi_i)| \leq tol \implies \text{Pare} \implies \xi_{n+1} = \xi_i$

se $|\mathcal{X}_i(\xi_i)| > tol \implies \text{calcular } \xi_{i+1} = \xi_i - \frac{\mathcal{X}_i}{\mathcal{X}_{i,\xi}}, i = i + 1 \text{ e voltar 1)}$

fim 1.4)

Fim 1)

No Algoritmo 2, os termos g_{T_i} e g_{N_i} são as Equações 5.68 e 5.67 computadas na coordenada ξ_i dentro do procedimento. Após a convergência, todos os termos anteriormente definidos devem ser recalculados na coordenada ξ_{n+1} encontrada no procedimento de busca.

As funções sinais na Equação 5.71 não são suaves, com isso, as direções de deslizamento, dadas pelos sinais $sign(g_{T_{n+1}})$ e $sign(g_{N_{n+1}})$, podem mudar dentro de cada iteração do procedimento de busca. Para evitar estas mudanças, as quais podem levar o procedimento para um caminho errado de solução, são fixadas as direções g_{T_0} e g_{N_0} computadas na condição de tentativa (falsa adesão). Este procedimento é baseado no algoritmo de predição e correção apresentado em [42] e [100]. Estas direções somente são atualizadas após a convergência do Algoritmo 2.

6.3 Algoritmo para montagem do elemento de contato sem atrito

O Algoritmo 3 que segue é utilizado no passo 2.1) do Algoritmo 5 para montagem do elemento de contato sem atrito com o método da penalidade.

Algoritmo 3 Montagem do elemento de contato sem atrito.

1) Faça $e = 1, \dots, ne$ (elementos de contato)

2) faça $p = 1, \dots, n_p$ (pontos de Gauss no elemento)

checar cada ponto de gauss ζ_p na região de contato e calcular:

2.1) calcular coordenada espacial $\mathbf{x}^{nm}(\zeta_p)$ (Equação 5.6)

2.2) calcular coordenada de projeção ξ_p

para grau de interpolação = 1 - Equação 6.1

para grau de interpolação > 1 - Algoritmo 1

2.3) calcular coordenada espacial $\mathbf{x}^m(\xi_p)$ (Equação 5.7)

2.4) calcular matrizes $\mathbf{B}_p, \mathbf{B}_{p,\xi}, \mathbf{B}_{p,\xi\xi}$ e $\mathbf{B}_{p,\zeta}$ (Equações 5.45, 5.46, 5.47 e 5.48)

2.5) calcular $\mathbf{w}_p(\zeta_p, \xi_p), \mathbf{a}_{mp}, \mathbf{n}_{mp}, \mathbf{c}_{mp}$ e \mathbf{a}_{0p}^{nm} (Equação 5.43, 5.21, 5.22, 5.29 e 5.28)

2.6) calcular gap $g_{N_p}(\zeta_p) = \mathbf{w}_p^T \mathbf{B}_p \mathbf{n}_{mp}$ (Equação 5.12)

2.7) checar existência do contato

se $g_N(\zeta_p) > 0 \implies$ O ponto de Gauss não está em contato

$p = p + 1$ e voltar para o **2)**

se $g_N(\zeta_p) \leq 0 \implies$ O ponto de Gauss está em contato

computar a parcela que colabora com resíduo e rigidez no elemento

calcular vetor resíduo $\psi_{N_e}^{PE}$ (Equação 5.49)

calcular matriz rigidez $\mathbf{K}_{N_e}^{PE}$ (Equação 5.49)

fim 2.7)

fim 2)

computar parcela do elemento no vetor resíduo de contato global

ψ_N^C (Equação 5.56)

computar parcela do elemento na matriz rigidez de contato global

\mathbf{K}_N^C (Equação 5.57)

Fim 1)

6.4 Algoritmo para montagem do elemento de contato com atrito

É apresentado nesta seção o algoritmo para montagem do elemento de contato com atrito utilizado no passo 2.1) do Algoritmo 5.

Na montagem deste elemento é necessário salvar todas coordenadas dos pontos de integração (pontos de Gauss), as condições tangenciais e os sentidos das forças horizontais de cada ponto de integração. Para isso, são utilizadas duas matrizes $\mathbf{A}(ntp, 3)$ e $map(nec, n_p)$, onde ntp é número total de pontos de integração, nec número total de elementos de contato e n_p é o número de pontos de integração em um elemento de contato.

A matriz $[\mathbf{A}]$ possui ntp linhas e 3 colunas. Nas linhas da coluna 1 são salvas as coordenadas ξ_p correspondentes a cada ζ_p . Nas linhas da coluna 2 são salvas as condições tangenciais de cada

ponto de integração. Os códigos utilizados são: 0 para inexistência de contato, 1 para adesão e 2 para deslizamento.

Nas linhas da coluna 3 são salvos os sentidos das forças tangenciais. Como os segmentos alvo podem estar inclinados é considerado um referencial local (Figura 6.1). Para isso os códigos utilizados são: -1 para força tangencial para a esquerda e 1 para força tangencial para a direita.

Para ler e salvar estes dados na matriz $[A]$ é utilizada a matriz de mapeamento $[map]$. Nas linhas de $[map]$ são salvos os números globais dos pontos de integração por elemento de contato.

Para ilustrar a montagem destas matrizes é apresentado um exemplo a partir da Figura 6.1. O corpo superior é definido como contactor e o inferior como alvo.

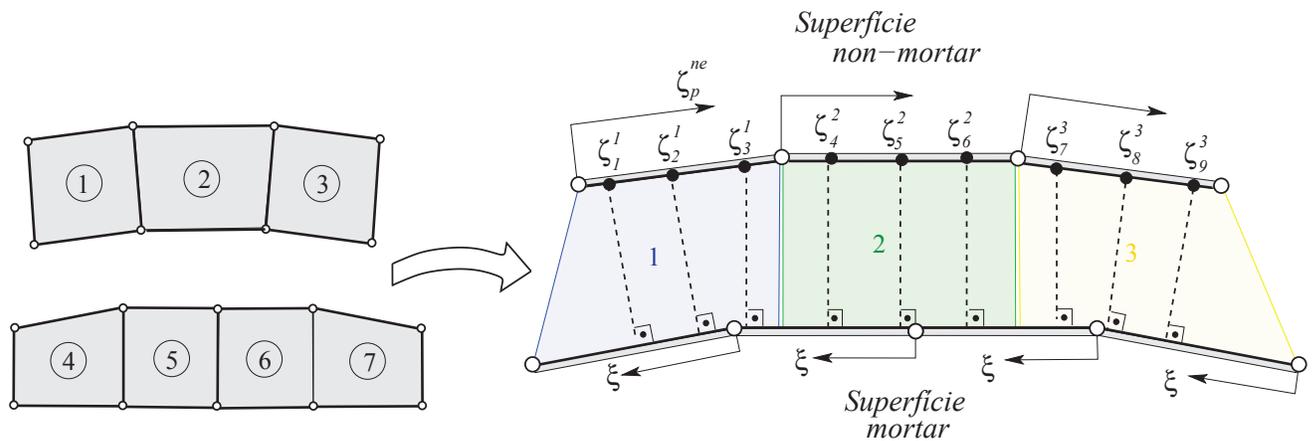


Figura 6.1: Representação dos pontos de Gauss nos elementos de contato.

O contactor possui 3 elementos, resultando em $nec = 3$ elementos de contato. Foi utilizado o elemento linear e 3 pontos de integração por elemento de contato, resultando em $n_p = 3$ e $ntp = 9$. O sobrescrito ne se refere ao número do elemento e o subscrito p se refere ao número global do ponto de Gauss. Para este caso a matriz de mapeamento resulta em

$$[map] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}. \quad (6.6)$$

Assim, para acessar a posição em $[A]$ do quinto ponto de integração global, localizado no elemento de contato 2, é só utilizar o número $e = 2$ do elemento de contato e o número local $p = 2$ do ponto de integração $[A (map(2, 2))]$. Este mapeamento local \implies global será necessário dentro dos passos **1**) e **2**) do Algoritmo 4.

Algoritmo 4 Montagem do elemento de contato com atrito.

1) Inicializar $map = zeros(nec, n_p)$ e $\mathbf{A} = zeros(ntp, 3)$

2) faça $e = 1, \dots, nec$ (elementos de contato)

3) faça $p = 1, \dots, n_p$ (pontos de gauss no elemento)

3.1) calcular coordenada espacial $\mathbf{x}^{nm}(\zeta_p)$ (Equação 5.6)

3.2) calcular coordenada de projeção ξ_p

se $\mathbf{A}(map(e, p), 2) = 0$

para grau de interpolação = 1 - calcular ξ_p com Equação 6.1

para grau de interpolação > 1 - calcular ξ_p com Algoritmo 1

se $\mathbf{A}(map(e, p), 2) \neq 0$

coordenada de projeção $\xi_p = \mathbf{A}(map(e, p), 1)$

fim 3.2)

3.3) computar $\xi_n = \xi_p$ (condição de tentativa) e calcular $\mathbf{x}^m(\xi_n)$ (Equação 5.7)

3.4) calcular $\mathbf{B}_p(\xi_n)$, $\mathbf{B}_{p,\xi}(\xi_n)$, $\mathbf{B}_{p,\xi\xi}(\xi_n)$ e $\mathbf{B}_{p,\zeta}(\xi_n)$ (Equações 5.45, 5.46, 5.47 e 5.48)

3.5) calcular \mathbf{w}_p , \mathbf{a}_{mp} , \mathbf{n}_{mp} , \mathbf{c}_{mp} e \mathbf{a}_{0p}^{nm} em ξ_n (Equações 5.43, 5.21, 5.22, 5.29 e 5.28)

3.6) calcular gap $g_{N_p}(\zeta_p)$ (Equação 5.12)

3.7) checar existência do contato

se $g_N(\zeta_p) > 0 \implies$ O ponto de Gauss não está em contato

salvar $\mathbf{A}(map(e, p), 2) = 0, p = p + 1 \implies$ voltar para o passo 3)

se $g_N(\zeta_p) \leq 0 \implies$ O ponto de gauss está em contato \implies continuar no passo 3.8)

fim 3.7)

3.8) calcular tensões $\mathbf{t}(\xi_n)$, t_N^{st} e t_T^{st} (Equações 5.64, 5.65 e 5.66)

3.9) calcular função sinal s_{N_p} e s_{T_p} (Equações 5.86)

3.10) verificação função sinal s_{T_p}

se $\mathbf{A}(map(e, p), 3) = 0 \implies$ calcular s_{T_p} (Equação 5.87) e $\mathbf{A}(map(e, p), 3) = s_{T_p}$

se $\mathbf{A}(map(e, p), 3) \neq 0 \implies$ computar $s_{T_p} = \mathbf{A}(map(e, p), 3)$

fim 3.10)

3.11) calcular a função de verificação de deslizamento f_s (Equação 5.69)

3.12) checar a condição tangente

se $f_s \leq 0 \implies$ O ponto de Gauss está em **adesão** \implies ir para 3.A)

se $f_s > 0 \implies$ O ponto de Gauss está em **deslizamento** \implies ir para 3.B)

fim 3.12)

3.A) Condição de Adesão

3.A.1) salvar $\mathbf{A}(map(e, p), 1) = \xi_n$, $\mathbf{A}(map(e, p), 2) = 1$ e $\mathbf{A}(map(e, p), 3) = s_{T_p}$

3.A.2) calcular vetor resíduo ψ_p^{st} e matriz rigidez \mathbf{K}_p^{st} (Equações 5.73 e 5.75)

3.B) Condição de Deslizamento

3.B.1) calcular ξ_{n+1} (Algoritmo 2) e coordenada espacial $\mathbf{x}^m(\xi_{n+1})$ (Equação 5.7)

3.B.2) calcular os passos 3.4), 3.5), 3.6), 3.8) e 3.9) na coordenada atualizada ξ_{n+1}

3.B.3) salvar $\mathbf{A}(map(e, p), 1) = \xi_{n+1}$, $\mathbf{A}(map(e, p), 2) = 2$ e $\mathbf{A}(map(e, p), 3) = s_{T_p}$

3.B.4) calcular vetor resíduo ψ_p^{sl} e matriz rigidez \mathbf{K}_p^{sl} (Equações 5.77 e 5.81)

fim 3)

calcular parcela do elemento no vetor resíduo e na matriz rigidez de contato global

ψ^C e \mathbf{K}^C (Equações 5.56 e 5.57)

fim 2)

FIM 1)

6.5 Algoritmo para solução do sistema de equações

O procedimento de solução do sistema de equações resultante é baseado no método de Newton-Raphson.

Para a montagem deste procedimento, escreve-se a Equação 2.54 em sua forma discretizada, utilizando as relações $\delta\dot{W}(\varphi_k, \delta\mathbf{v}) = \delta\mathbf{v}^T \boldsymbol{\psi}$ e $D\delta\dot{W}(\varphi_k, \delta\mathbf{v})[\Delta\mathbf{u}] = \delta\mathbf{v}^T \mathbf{K}\Delta\mathbf{u}$, como

$$\delta\mathbf{v}^T \mathbf{K}\Delta\mathbf{u} = -\delta\mathbf{v}^T \boldsymbol{\psi}, \quad (6.7)$$

onde a matriz de rigidez global \mathbf{K} e o vetor de resíduo global $\boldsymbol{\psi}$ possuem todos os termos do domínio e do contato.

Uma vez que as velocidades virtuais são arbitrárias, pode-se reescrever o procedimento de Newton-Raphson como

$$\Delta\mathbf{u} = -\mathbf{K}^{-1}\boldsymbol{\psi}, \quad \mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k + \Delta\mathbf{u}. \quad (6.8)$$

Abaixo é apresentado o Algoritmo 5 que é utilizado no processo de solução do sistema de equações resultante.

Algoritmo 5 Solução para o problema de contato com grandes deformações.

Inicializar $t = 1$, $k = 1$ e $\mathbf{u}_k^t = \{0\}$ (t é o passo de tempo)

1) Faça $t = 1, \dots$, até o número total de passos de tempo

2) faça $k = 1, \dots$, até convergir (k é a iteração de Newton-Raphson)

2.1) calcular o resíduo e a rigidez de contato: $\boldsymbol{\psi}^C(\mathbf{u}_k^t)$ e $\mathbf{K}^C(\mathbf{u}_k^t)$

para contato sem atrito montar elemento com Algoritmo 3

para contato com atrito montar elemento com Algoritmo 4

2.2) calcular o resíduo e a rigidez de sistema:

$\boldsymbol{\psi}^S(\mathbf{u}_k^t)$ (Equação 4.41) e $\mathbf{K}^S(\mathbf{u}_k^t)$ (Equação 4.46 ou 4.62)

2.3) calcular o resíduo e a rigidez total: $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}^S + \boldsymbol{\psi}^C$ e $\mathbf{K} = \mathbf{K}^S + \mathbf{K}^C$

2.4) checar convergência

se $\|\boldsymbol{\psi}(\mathbf{u}_k^t)\| \leq tol \implies \{\mathbf{u}_k^t\}$ convergiu, $t = t + 1$ e vá para **1)**

se $\|\boldsymbol{\psi}(\mathbf{u}_k^t)\| > tol \implies$ continuar no 2.5)

fim 2.4)

2.5) resolver o sistema global $\Delta\mathbf{u}_k^t = -[\mathbf{K}]^{-1} \boldsymbol{\psi}$

2.6) atualizar o ponto $\mathbf{u}_{k+1}^t = \mathbf{u}_k^t + \Delta\mathbf{u}_k^t$

2.7) voltar ao 2)

fim 2)

FIM 1)

7 RESULTADOS

As seções que seguem apresentam alguns problemas clássicos da literatura de contato. O objetivo foi utilizar as rotinas desenvolvidas para a solução destes problemas. Primeiramente é realizada a validação do elemento de contato em pequenas deformações com a solução analítica para o problema de Hertz. Ainda em pequenas deformações é proposta uma verificação da ferramenta em um problema com atrito. O capítulo termina com duas análises no regime de grandes deformações com soluções de problemas conhecidos na literatura. Para alguns dos problemas aqui apresentados, é proposto também um estudo de verificação da acurácia de solução com o aumento da ordem de interpolação do elemento de contato.

7.1 Problema de Hertz

O problema de contato de Hertz foi o primeiro caso com solução analítica publicada [48]. Consiste em um problema de contato entre dois corpos compostos por material isotrópico, linear e elástico. O contato é tratado sem atrito entre as superfícies e em regime de pequenas deformações. Foi considerado o modelo mecânico de estado plano de deformações.

Alguns exemplos de contato entre estruturas sólidas, onde se pode aplicar a teoria de Hertz, podem ser encontrados na literatura, como por exemplo: contato entre duas esferas, entre esfera e solo, cilindro e cilindro, cilindro e solo, etc. O exemplo aqui adotado é o contato entre um cilindro e o solo rígido. Como representado na Figura 7.1, a solução analítica para este problema pode ser obtida a partir da tensão analítica de Hertz para contato entre dois cilindros, fazendo o raio R_2 e o módulo de elasticidade E_2 tenderem a valores altos. De acordo com [84] a solução analítica de Hertz para a tensão normal t_N^{Hertz} e o comprimento b de contato para este caso são, respectivamente,

$$t_N^{Hertz}(x) = \frac{4R_1q}{\pi b^2} \sqrt{b^2 - x^2}, \quad (7.1)$$

$$b = 2\sqrt{\frac{2R_1^2q(1 - \nu_1^2)}{E_1\pi}}. \quad (7.2)$$

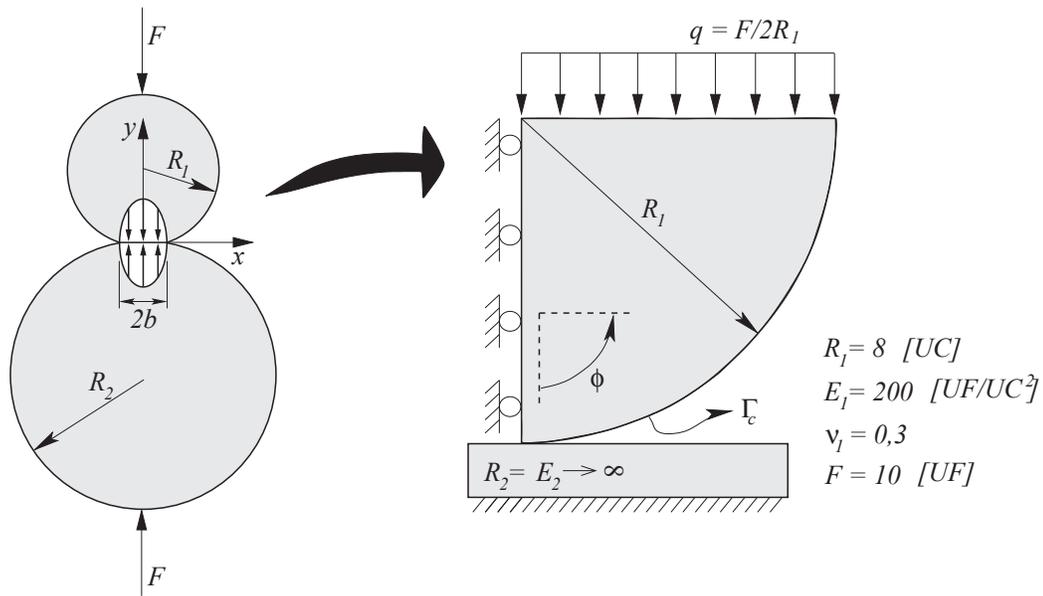


Figura 7.1: Problema bidimensional de Hertz.

Para a construção destes termos foram utilizados o coeficiente de poisson ν_1 , o raio do cilindro R_1 , o módulo de elasticidade E_1 e a força aplicada à estrutura F . Foram utilizados os dados mostrados na Figura 7.1. Com isso, obtém-se um carregamento distribuído $q = 0,625 [UF/UC]$. Sendo $[UC]$ a unidade de comprimento e $[UF]$ a unidade de força.

Publicações recentes mostram que para se obter uma solução satisfatória, com a configuração aqui utilizada, é necessário se aplicar uma malha muito refinada, entre 500 e 8000 elementos [74, 46, 102] ou 1000 e 16000 quando não utilizada a simetria. Isso acontece pois, uma vez que se considera o regime de pequenas deformações, tem-se que escolher os parâmetros do problema de forma a satisfazer as condições deste regime, o que resulta em uma pequena região b de contato. Logo, é necessário que se tenha um número suficiente de elementos de contato ativos. O trabalho [74] mostra que, para os parâmetros aqui utilizados, tem-se uma região de contato $b = 0,68077 [UC]$ e deve se utilizar pelo menos cinco elementos de contato nesta região. Os resultados que seguem mostram que com a aplicação do MEF-AO, é possível se obter boas soluções, com malhas mais grosseiras e menos elementos de contato ativos.

A Figura 7.2 mostra as malhas utilizadas para a comparação das soluções e a Tabela 7.1 os dados de cada malha. Para todos os casos analisados para o problema de Hertz foi considerado o solo como um elemento finito com todas as arestas restritas. A condição de contato inicial é que $g_N = 0$ no ponto de simetria do cilindro que entra em contato com o solo.

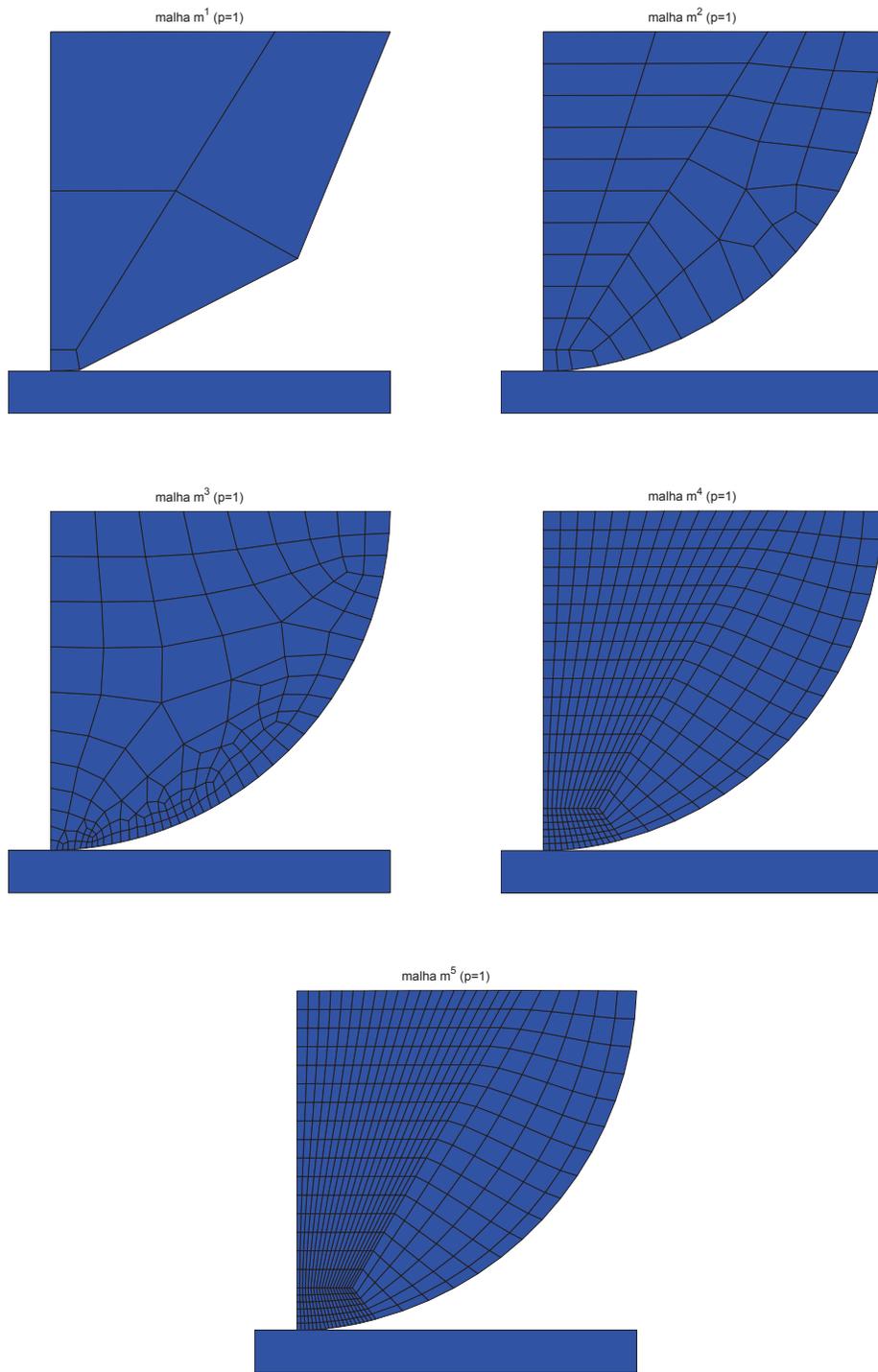


Figura 7.2: Malhas utilizadas para o problema de Hertz.

Tabela 7.1: Dados das malhas utilizadas no problema de Hertz.

<i>Malha</i>	<i>Elementos</i>	<i>Graus de liberdade</i>	<i>Graus de liberdade livres</i>
m^1	6	28	16
m^2	53	146	126
m^3	156	380	360
m^4	383	844	813
m^5	537	1166	1135

Para a primeira análise da ferramenta implementada foi utilizada a malha m^4 e ordem de interpolação $p = 1$. Foi utilizado o elemento de contato *mortar* com penalidade e penalizador $\epsilon = 1,0 \times 10^5$. A solução obtida é comparada com a tensão analítica de Hertz na Figura 7.3. A tensão numérica é plotada nos pontos de integração do elemento de contato. Tem-se, para esse caso, cinco elementos de contato ativos. Foi utilizada a integração de Gauss-Legendre com $n_p = p + 1$ pontos de integração por elemento de contato, totalizando dez pontos de integração em contato.

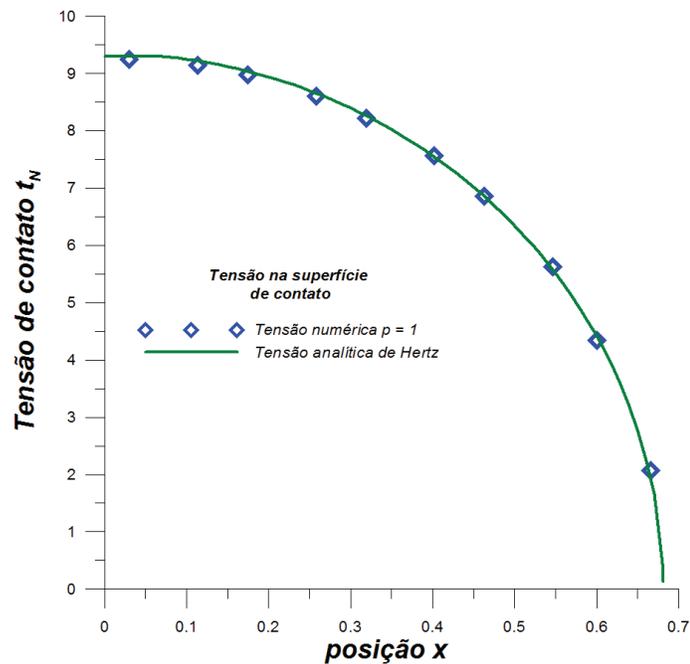


Figura 7.3: Solução para a malha m^4 com grau de interpolação $p = 1$.

A Figura 7.4 mostra o campo de tensões σ_{yy} no domínio, computado via MEF.

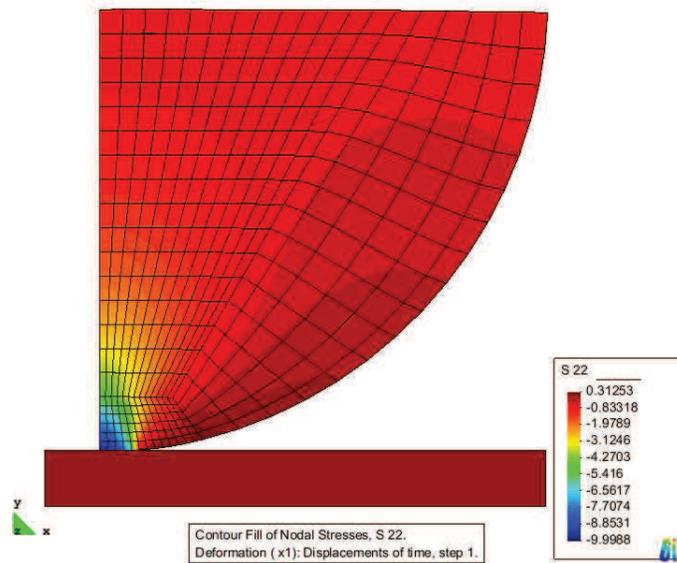


Figura 7.4: Tensão σ_{yy} no domínio obtida via elementos finitos.

Para o procedimento de aumento da ordem de interpolação dos elementos é importante observar que, no caso anterior, a solução é obtida a partir de uma interpolação linear, e o gerador de malhas (*GID*) aproxima a geometria por quadrados, colocando somente os nós dos vértices pertencentes à superfície de contato Γ_c dentro do quarto de circunferência $\phi \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$ (Figura 7.1). Para um grau de interpolação mais alto (acima de um) o *software*, *hp²fem*, constrói os nós de alta ordem, colocando-os sobre os lados retos do elemento, como representado na Figura 7.5, o que resulta em nós de aresta fora do quarto de circunferência $\phi \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$.

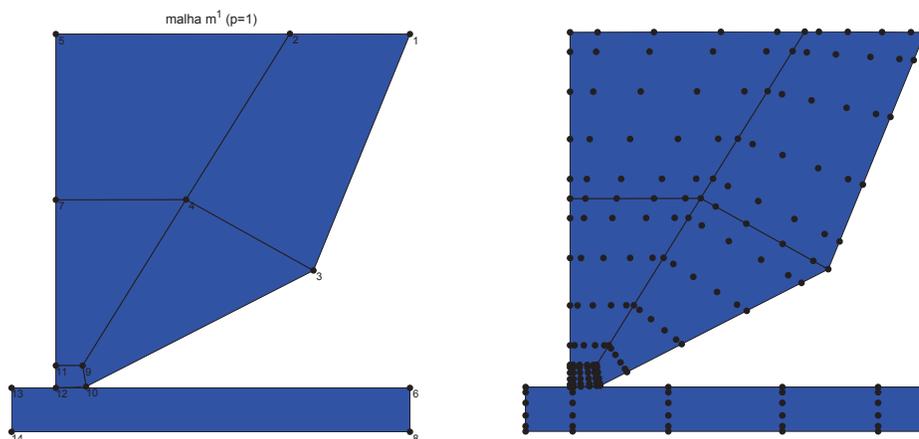


Figura 7.5: Malha utilizada para o refino p (elementos com grau de interpolação $p = 1$ à esquerda e $p = 5$ à direita).

A abordagem utilizando elementos finitos de lados retos funciona bem se a superfície a ser discretizada conserva uma pequena curvatura. Se a superfície é curvada como no caso do problema de Hertz, o emprego de elementos retos pode produzir oscilações nas forças de contato, saltos não realísticos nas tensões de contato e até mesmo a perda da convergência do sistema.

Então, um procedimento simples de mapeamento dos nós da região de contato se faz necessário. Calculou-se as coordenadas y , de todos os nós na superfície de contato, através da equação da circunferência $\phi \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$, dada a coordenada x de cada nó.

Foi avaliada a solução para o problema utilizando a malha m^4 e o grau de interpolação $p = 3$, com e sem o mapeamento curvo. Os resultados são apresentados novamente em termos de tensão normal de contato nos pontos de integração e mostrados na Figura 7.6.

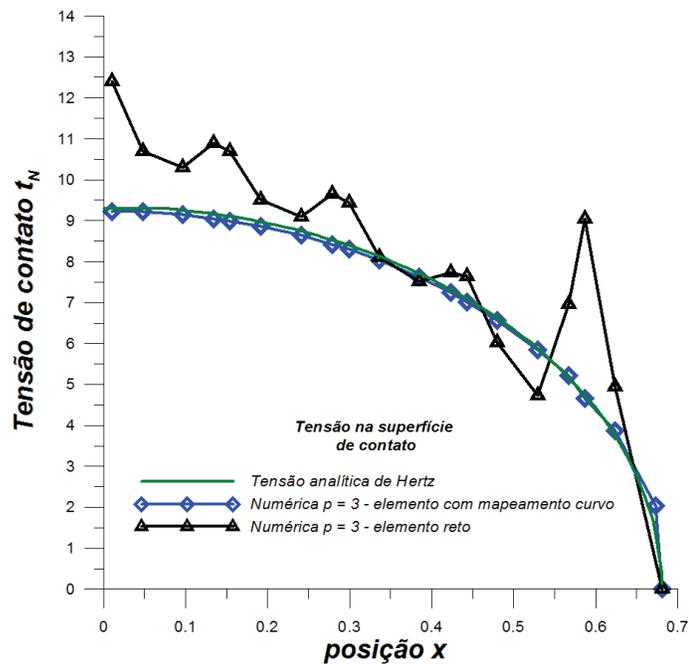


Figura 7.6: Comparativo para tensões de contato para elemento reto e com mapeamento curvo.

O campo de tensões de contato é significativamente afetado pelo mapeamento das superfícies de contato. Para elementos de lados retos somente os nós de vértices estão perfeitamente dentro da circunferência, fazendo com que os nós de aresta tenham coordenadas y discretizadas com valores maiores que os reais (Figura 7.7), tornando estes pontos mais afastados do alvo de contato. Isso faz com que todas as coordenadas y dos pontos de integração sejam também afastadas do alvo, uma vez que as mesmas são obtidas a partir das coordenadas nodais. Nestas coordenadas, a tensão para satisfazer a condição de não penetração é menor que em uma situação real, onde as mesmas estariam mais próximas ao alvo. Então para atingir o equilíbrio, os pontos de integração próximos

aos vértices tendem a suportar um esforço de contato maior que os pontos de integração mais internos, afetando assim todo o campo de tensões.

Este resultado comparativo aqui apresentado, apesar de ser muito simples, mostra a importância deste procedimento de mapeamento da geometria de contato. Para este caso analisado a superfície de contato é uma circunferência. Para uma superfície arbitrariamente curvada, faz-se necessária a aplicação de um mapeamento geral de superfícies, como por exemplo através do uso de NURBS [88].

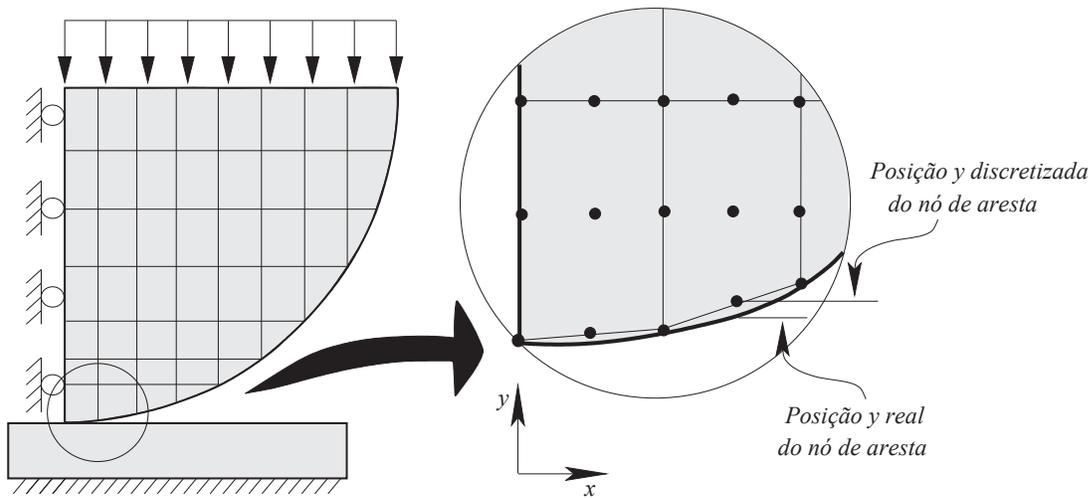


Figura 7.7: Detalhe da discretização da superfície cilíndrica.

Para esse problema é realizada a primeira análise do ganho de precisão com o aumento da ordem polinomial. Para isso, realizam-se os refinamentos p e h .

Para o refinamento p , fixa-se a malha m^1 e variam-se os graus de interpolação de $p = 1$ até $p = 9$, ficando com somente um elemento na região de contato. Estes casos são então denominados refinamentos $p1$ até $p9$.

Para o refinamento h , fixa-se o grau de interpolação $p = 1$ e variam-se as malhas de m^1 até m^5 , que são denominados refinamentos $h1$ até $h5$. Para esta análise é adotado um erro percentual η_σ apresentado em [109], o qual é baseado no erro da norma L^2 da tensão normal de contato como

$$\eta_\sigma = \frac{\|e_\sigma\|_{L^2}}{\sqrt{\int_{\Gamma_c} (t_N^{Hertz})^2 d\Gamma_c}} \times 100\% = \frac{\sqrt{\int_{\Gamma_c} (t_N^{Hertz} - t_N)^2 d\Gamma_c}}{\sqrt{\int_{\Gamma_c} (t_N^{Hertz})^2 d\Gamma_c}} \times 100\%. \quad (7.3)$$

Os resultados são apresentados na Figura 7.8 para o elemento de contato *mortar* com penalidade, e na Figura 7.9 para o elemento de contato *mortar* com multiplicadores de Lagrange.

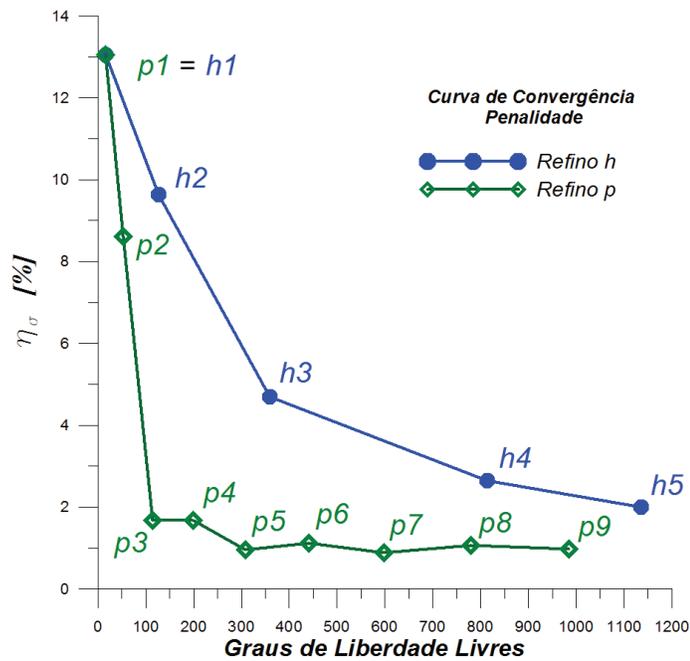


Figura 7.8: Curvas de erros para o elemento de contato *mortar* com penalidade.

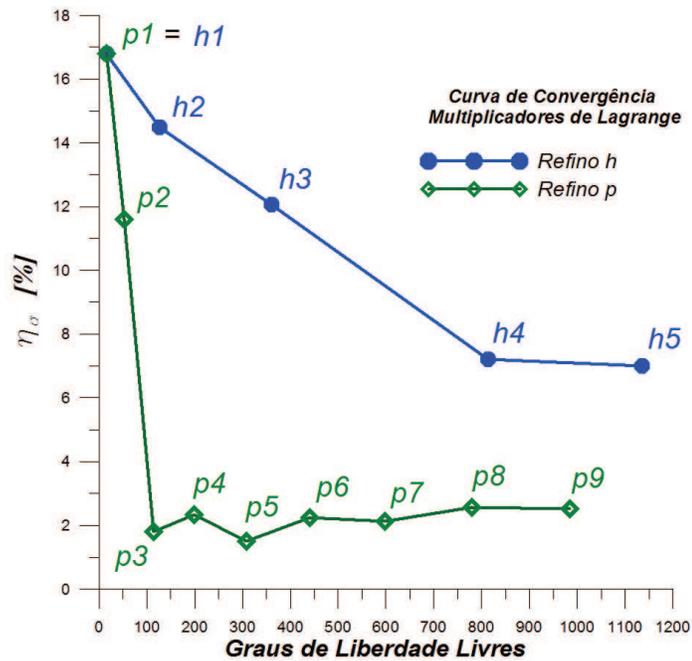


Figura 7.9: Curvas de erros para o elemento de contato *mortar* com multiplicadores de Lagrange.

Observa-se que para o elemento de contato *mortar* com penalidade (Figura 7.8), o erro atinge um valor mínimo de aproximadamente 0,88% no refino *p7*. Observa-se uma oscilação do erro para

os refinamentos acima de p_5 e a indicação da estabilização do mesmo. A mesma oscilação ocorre acima de p_3 para o elemento de contato *mortar* com multiplicadores de Lagrange (Figura 7.9), só que desta vez seguido de um pequeno aumento do erro para refino acima de p_5 .

Para os dois elementos de contato não se atingem valores de erro abaixo de 0,88%. Isso pode estar relacionado a resolução de malha, ou seja, um refino *hp* poderia ser avaliado no sentido de obter melhores resultados de tensões.

O fato de o erro não mais decrescer com o aumento da ordem de interpolação e ficar oscilando em torno de um valor, pode também estar associado ao comportamento da solução analítica (Equação 7.1). Isso também é observado quando se tenta interpolar uma solução analítica em problemas de projeção e a partir de um determinado grau p não se consegue mais alcançar uma melhora na interpolação da solução [55].

Quando comparados os refinamentos p e h , pode-se observar que é possível obter uma solução para tensão de contato com melhor precisão empregando menos graus de liberdade, utilizando elementos de contato de alta ordem. Para o elemento de contato *mortar* com penalidade, foi possível obter com 308 graus de liberdade livres um erro de 0,96% com o refino p_5 , enquanto que para o refino h_5 é alcançado um erro de 2,00% com 1135 graus de liberdade livres.

Os resultados, de uma forma geral, mostram que o refino p foi uma estratégia interessante para este problema de contato.

A Figura 7.10 apresenta a tensão de contato para o refino p_5 com o elemento de contato *mortar* com penalidade.

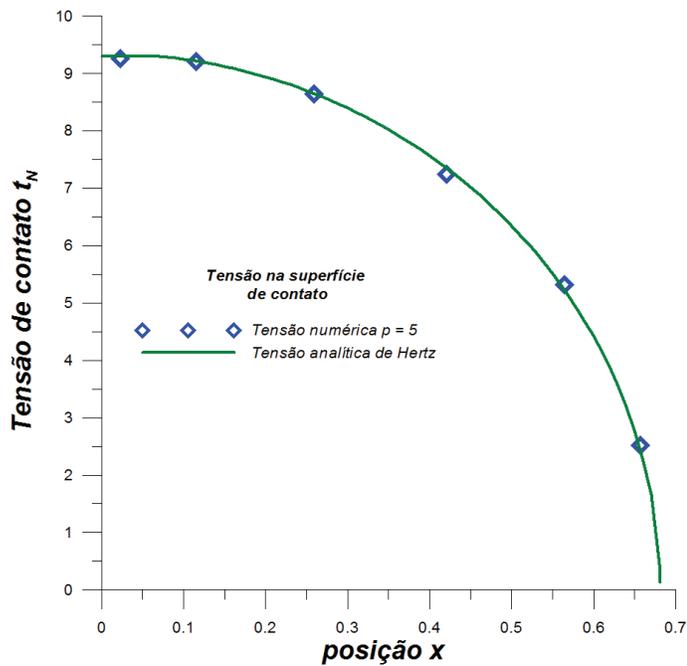


Figura 7.10: Solução para a malha m^1 com grau de interpolação $p = 5$.

Abaixo são apresentados os resultados em termos de tempo de processamento. As análises foram feitas em um computador com processador Intel Core(TM) i7-2640M CPU @ 2.8GHz e memória (RAM) de 6,00 GB, utilizando o método da penalidade.

A Figura 7.11 apresenta o tempo de processamento em função dos graus de liberdade livres utilizados para a solução do problema para os refinamentos h e p . Pode-se observar que é possível, para este problema, empregar mais graus de liberdade livres com um tempo de processamento menor com o refino p .

A Figura 7.12 mostra o resultado para o erro percentual η_σ obtido em função do tempo de processamento requerido em cada análise dos refinamentos. Pode-se observar que o desempenho do refino p é melhor que o do refino h para este problema analisado.

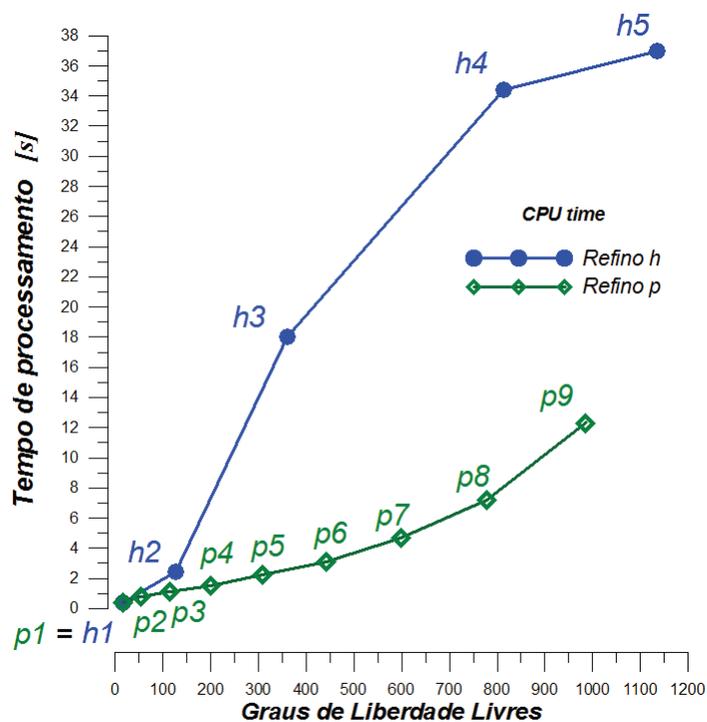


Figura 7.11: Curvas de tempo de processamento em função dos graus de liberdade livres.

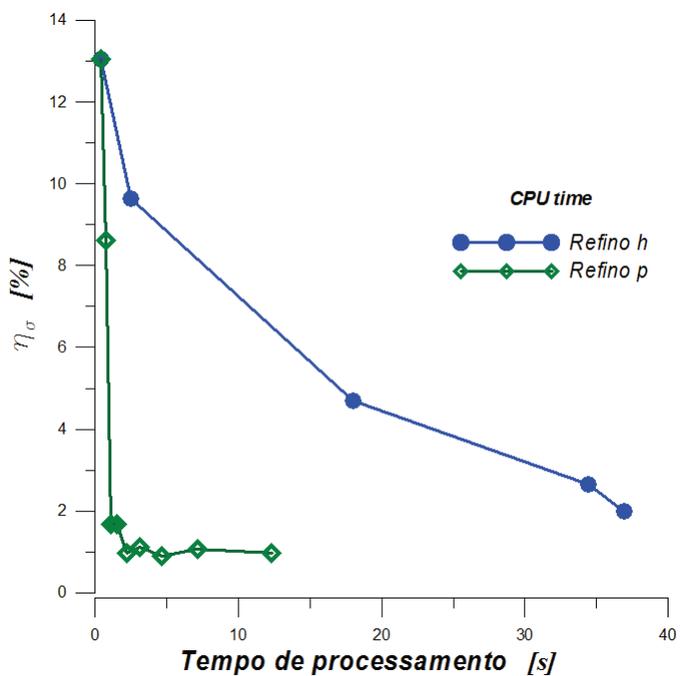


Figura 7.12: Curvas de erro percentual em função do tempo de processamento.

Um aspecto que deve ser considerado, quando se trabalha com alta ordem de interpolação, é o

condicionamento numérico da matriz de rigidez tangente. É importante garantir que o número de condição da matriz de rigidez não cresça com uma taxa pronunciada quando aumentada a ordem polinomial. Isso garante, por exemplo, que o sistema se mantenha estável durante o processo iterativo de solução. O número de condição é definido pela divisão do maior autovalor pelo menor autovalor não-nulo da matriz de rigidez.

No presente trabalho, este controle é realizado com a utilização dos pontos de colocação de Gauss-Lobatto-Legendre na resolução dos exemplos apresentados.

Na Figura 7.13, é apresentado um comparativo entre se utilizar pontos de colocação de Gauss-Lobatto-Legendre e os tradicionais pontos igualmente espaçados. É apresentado o número de condição para a matriz de rigidez tangente total (contato e sistema), utilizando o método da penalidade. Pode-se observar que a utilização de pontos igualmente espaçados faz com que o número de condição da matriz de rigidez tangente cresça com uma taxa pronunciada com o aumento da ordem polinomial, o que pode ser controlado, como pode ser visto, com a utilização de pontos de colocação de Gauss-Lobatto-Legendre.

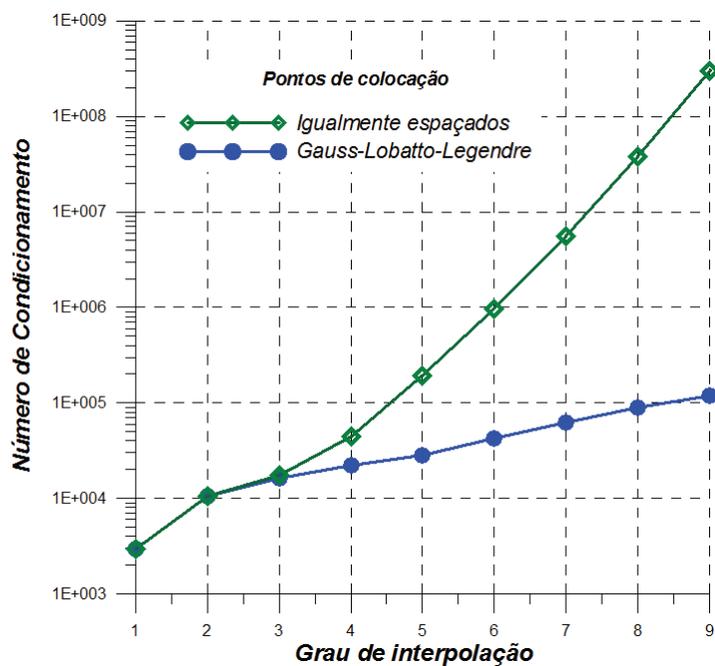


Figura 7.13: Número de condicionamento em função do grau de interpolação.

7.2 Problema de atrito entre bloco e solo

Dado o bloco em contato com o solo mostrado na Figura 7.14, é considerado material iso-

trópico, linear e elástico em regime de pequenas deformações. Este exemplo foi escolhido para a verificação do desempenho das rotinas em problemas com atrito em pequenas deformações, pois o mesmo possui soluções publicadas nas referências [4, 31, 82]. Foi considerado estado plano de deformações e os resultados foram obtidos no presente trabalho para um penalizador $\epsilon = 1,0 \times 10^4$. Foram utilizados $n_p = p + 4$ pontos de integração por elemento de contato.

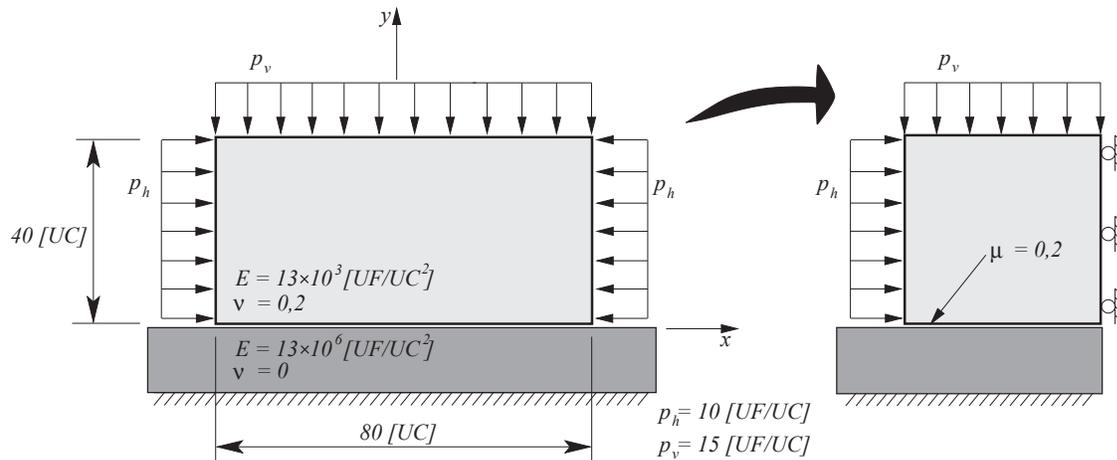


Figura 7.14: Bloco retangular em contato com solo.

Foram utilizadas duas malhas no trabalho [82] para o caso aqui apresentado, e os resultados são apresentados em termos de forças de contato, normais e tangenciais, e deslocamento tangencial dos nós em contato. O trabalho utiliza interpolação linear, produzindo dois resultados para este caso, um empregando 16 elementos na região de contato, resultando em um total de 17 nós nesta região, e outro empregando 32 elementos na região de contato, resultando em um total de 33 nós.

Para um comparativo direto com estas soluções, foram aqui utilizadas duas adaptações a partir de uma malha com 8 elementos na região de contato denominados *caso 1* e *caso 2*. Como todos os termos são comparados a nível nodal, optou-se por se fixar uma malha e escolher um grau de interpolação que resultasse em uma mesma quantidade de nós na região de contato. Os detalhes podem ser vistos na Tabela 7.2 e nas Figuras 7.15 e 7.16. O número de nós é apresetado para a superfície *non-mortar* ou contactora.

Tabela 7.2: Comparativo de elementos e nós na região de contato para os dois casos analisados.

<i>Caso 1</i>			
<i>Trabalho</i>	<i>Elementos de contato</i>	<i>Grau de interpolação</i>	<i>Nós em contato</i>
<i>Presente</i>	8	2	17
<i>A. L. Serpa [82]</i>	16	1	17
<i>Caso 2</i>			
<i>Trabalho</i>	<i>Elementos de contato</i>	<i>Grau de interpolação</i>	<i>Nós em contato</i>
<i>Presente</i>	8	4	33
<i>A. L. Serpa [82]</i>	32	1	33

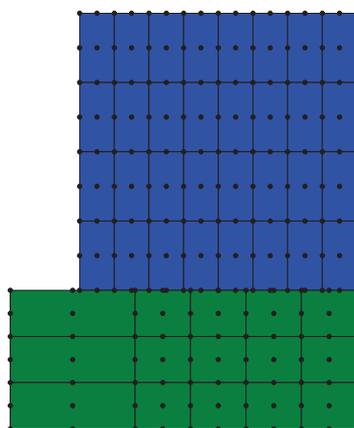


Figura 7.15: Malha com elemento de grau $p = 2$ (*caso 1*).

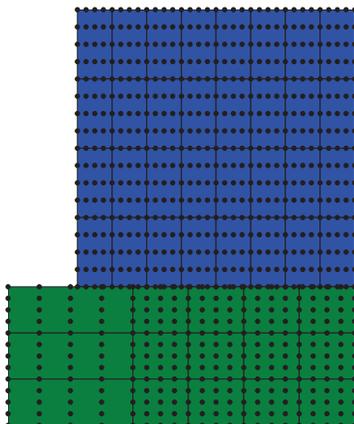


Figura 7.16: Malha com elemento de grau $p = 4$ (caso 2).

Os nós da região de contato são numerados da esquerda para a direita.

A Figura 7.17 mostra o comparativo para o deslocamento tangencial na região de contato.

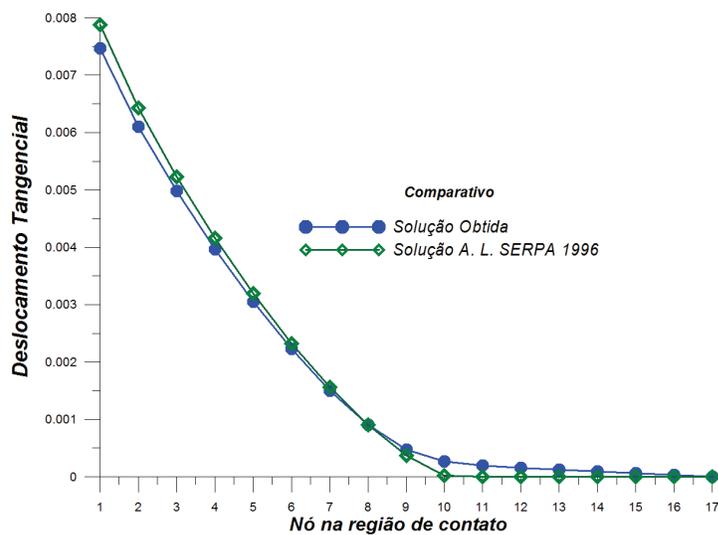


Figura 7.17: Comparativo entre deslocamentos tangenciais para o caso 1.

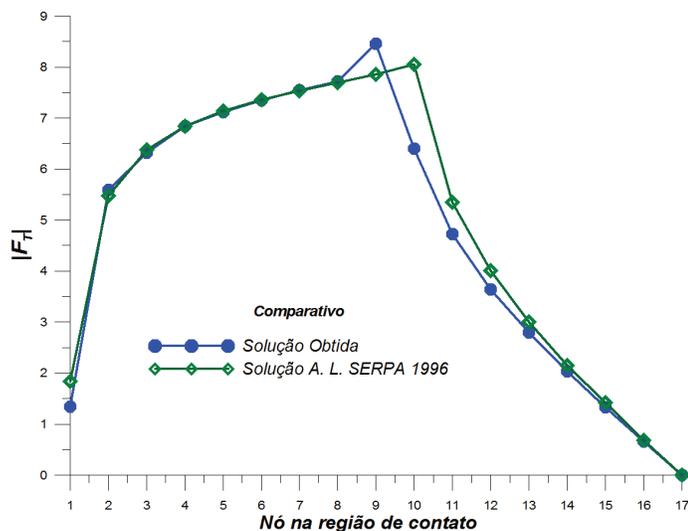


Figura 7.18: Comparativo entre forças tangenciais para o caso 1.

Para a curva de deslocamento tangencial do trabalho [82], observa-se uma condição de deslizamento do nó 1 ao 10 e adesão do nó 11 ao 17.

No presente trabalho, observa-se uma pequena diferença na curva de deslocamentos para a região de deslizamento (nó 1 ao 9) e no ponto de transição da condição tangencial de contato (CTC), ocorrendo adesão do nó 10 ao 17. Pode-se observar que no trabalho [82] não ocorre deslocamento tangencial na região de adesão. Isso acontece porque o trabalho utiliza o método do Lagrangiano Aumentado para aplicar as restrições de contato, satisfazendo a condição $g_T = 0$ para o caso de adesão. No presente trabalho foi utilizado o método da penalidade para problemas com atrito. Uma limitação deste método é que o mesmo permite pequenos deslocamentos tangenciais relativos mesmo no caso de adesão. Estes deslocamentos são utilizados para a obtenção das tensões de contato tangenciais proporcionais através da Equação 5.64. Os resultados desta limitação são modificações na curva de deslocamentos para a região de deslizamento (nó 1 ao 9) e de localização do ponto de transição da condição tangencial de contato (CTC). O que faz sentido do ponto de vista de equilíbrio, porque uma vez que ocorre estes deslocamentos na adesão, têm-se menos deslocamentos na região de deslizamento para se atingir o equilíbrio.

Este comportamento é também observado para outros exemplos de bloco em contato com o solo na referência [36]. O trabalho [36] destaca um outro fator que influencia a mudança do ponto de localização da condição tangencial de contato para o elemento mortar. O trabalho mostra que ocorre uma pequena oscilação de tensão tangencial na região de mudança de condição quando o ponto de transição se encontra no meio de um elemento de contato. Isso ocorre porque em alguns pontos de Gauss dentro do elemento são calculados o vetor resíduo e a matriz de rigidez com as

relações para a adesão, e para outros pontos de Gauss estes termos são calculados com as relações de deslizamento. Esta oscilação na tensão diminui com o refino da malha.

A Figura 7.18 mostra a curva de valores absolutos de força tangencial $|F_T|$, que também é afetada por esses comportamentos. O pico de esforço tangencial da solução obtida ocorre no primeiro ponto de transição de deslizamento do bloco, que é o nó 9. Já na referência utilizada isso ocorre no nó 10. De acordo com [36], este comportamento pode ser contornado com o aumento do número de elementos de contato. A curva de força normal de contato $|F_N|$ (Figura 7.19) não é afetada por esse comportamento.

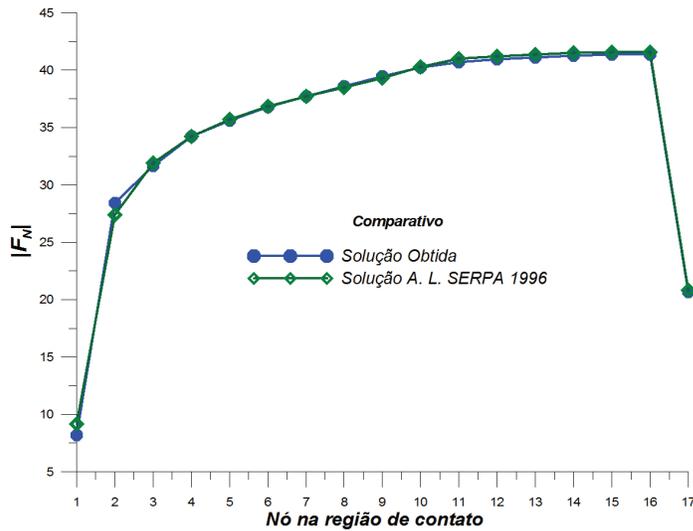


Figura 7.19: Comparativo entre forças normais para o caso 1.

O mesmo comportamento discutido para o *caso 1* também é observado para o *caso 2*. Tem-se para o trabalho [82] uma condição de deslizamento do nó 1 ao 19 e adesão do nó 20 ao 33. E os resultados aqui obtidos mostram um deslizamento do nó 1 ao 17 e adesão do nó 18 ao 33.

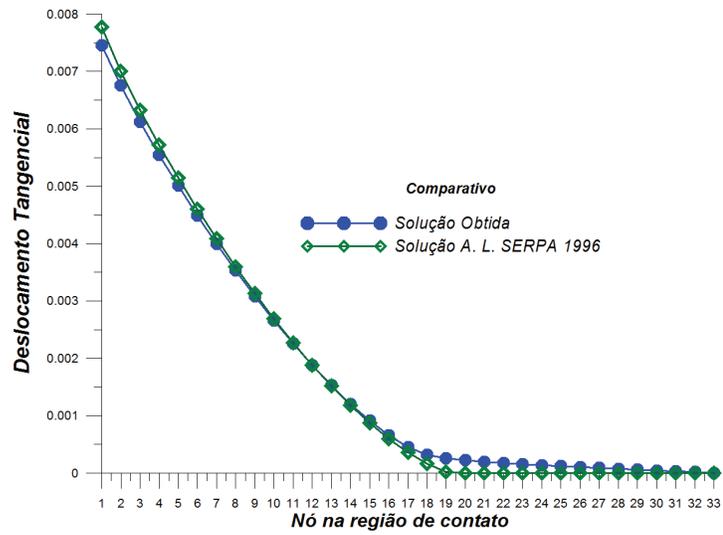


Figura 7.20: Comparativo entre deslocamentos tangenciais para o caso 2.

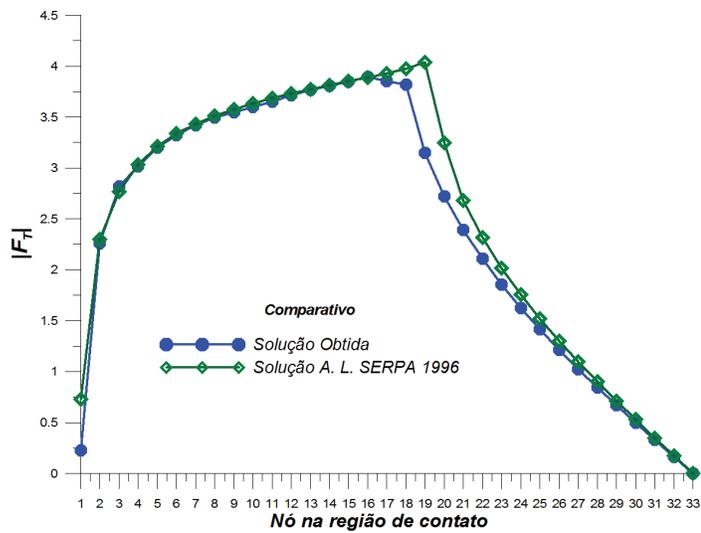


Figura 7.21: Comparativo entre forças tangenciais para o caso 2.

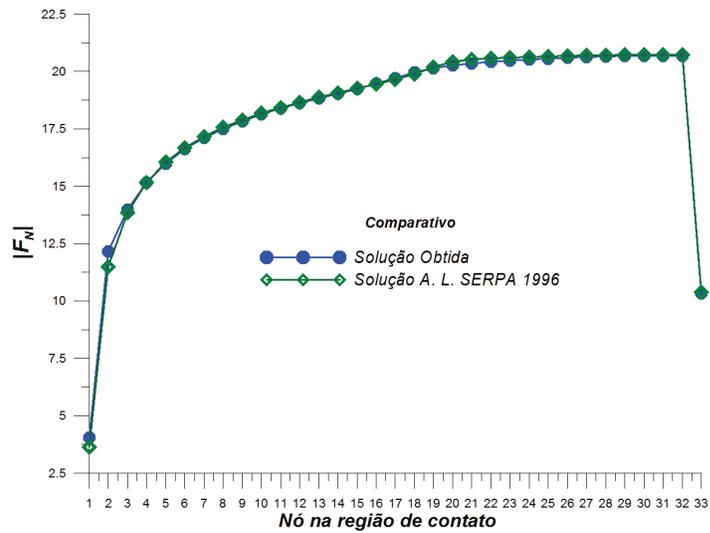


Figura 7.22: Comparativo entre forças normais para o caso 2.

7.3 Problema do anel hiperelástico

O primeiro problema considerando grandes deformações é ilustrado na Figura 7.23. Consiste na simulação numérica de contato sem atrito de uma anel hiperelástico com uma fundação. O anel é formado por uma parte interna, mais rígida, e outra externa. Os detalhes geométricos e materiais, tanto do anel quanto da fundação, estão dispostos na Figura 7.23. O problema foi alvo de análise nas referências [97, 36, 46].

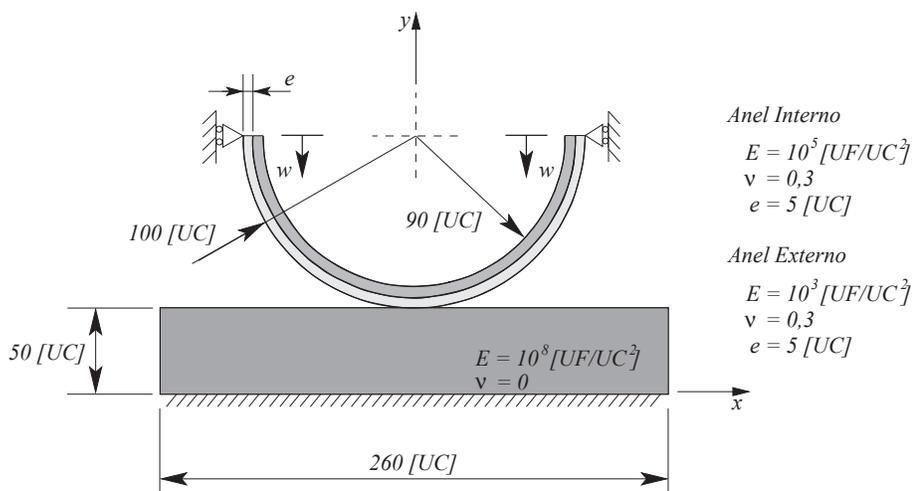


Figura 7.23: Anel hiperelástico em contato com fundação.

É considerado material hiperelástico Neo-Hookeano compressível para os dois componentes. Com esta simulação é possível avaliar o comportamento do elemento de contato em um problema com grandes deformações e grandes deslizamentos sem atrito. É utilizado o elemento *mortar* com penalidade e o penalizador adotado é $\epsilon = 1,0 \times 10^5$.

Um deslocamento vertical $w = -50 [UC]$ é aplicado no topo do anel (Figura 7.23) em 100 passos de tempo. O lado externo do anel é a superfície *non-mortar* (contactor) e o topo da fundação é a superfície *mortar* (alvo). É considerado estado plano de deformações e Lagrangiano atualizado. A malha utilizada é mostrada na Figura 7.24 e foram utilizados 6 pontos de integração por elemento de contato de grau $p = 1$.

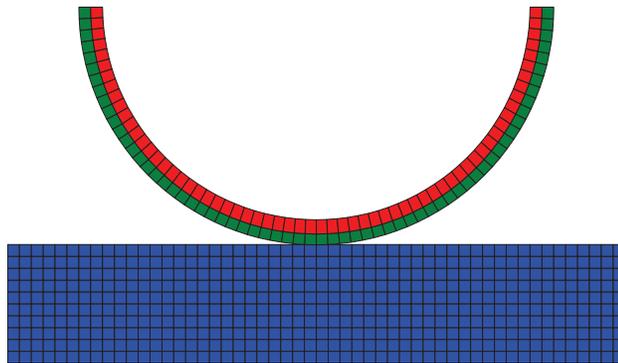


Figura 7.24: Malha para o anel hiperelástico em contato com fundação.

A Figura 7.25 mostra o resultado obtido para as forças de reação horizontal e vertical, F_H e F_V , no suporte esquerdo do anel. Pode-se observar o comportamento característico da força de reação quando se passa pelo ponto de instabilidade geométrica deste problema.

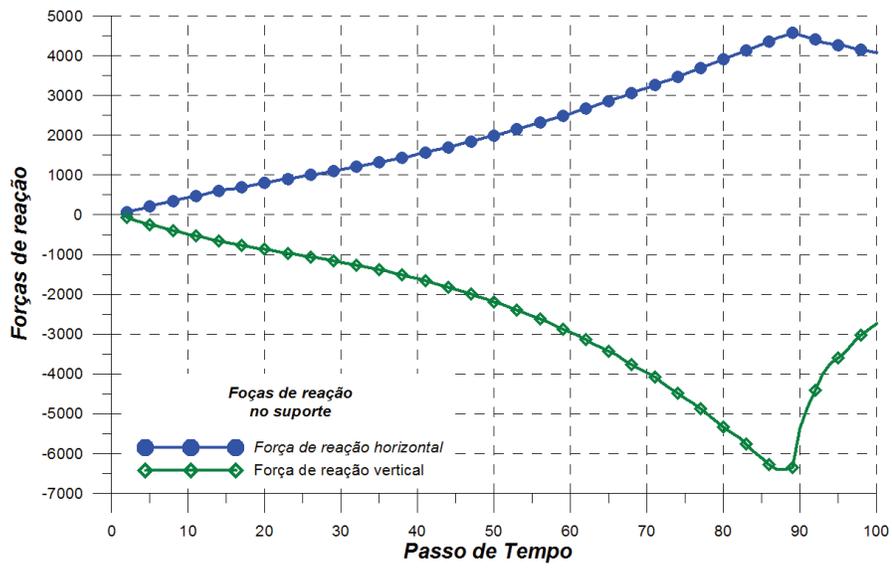


Figura 7.25: Forças de reação no suporte esquerdo do anel.

A Figura 7.26 mostra o campo de deslocamentos u_y na estrutura deformada em diferentes passos de tempo da solução.

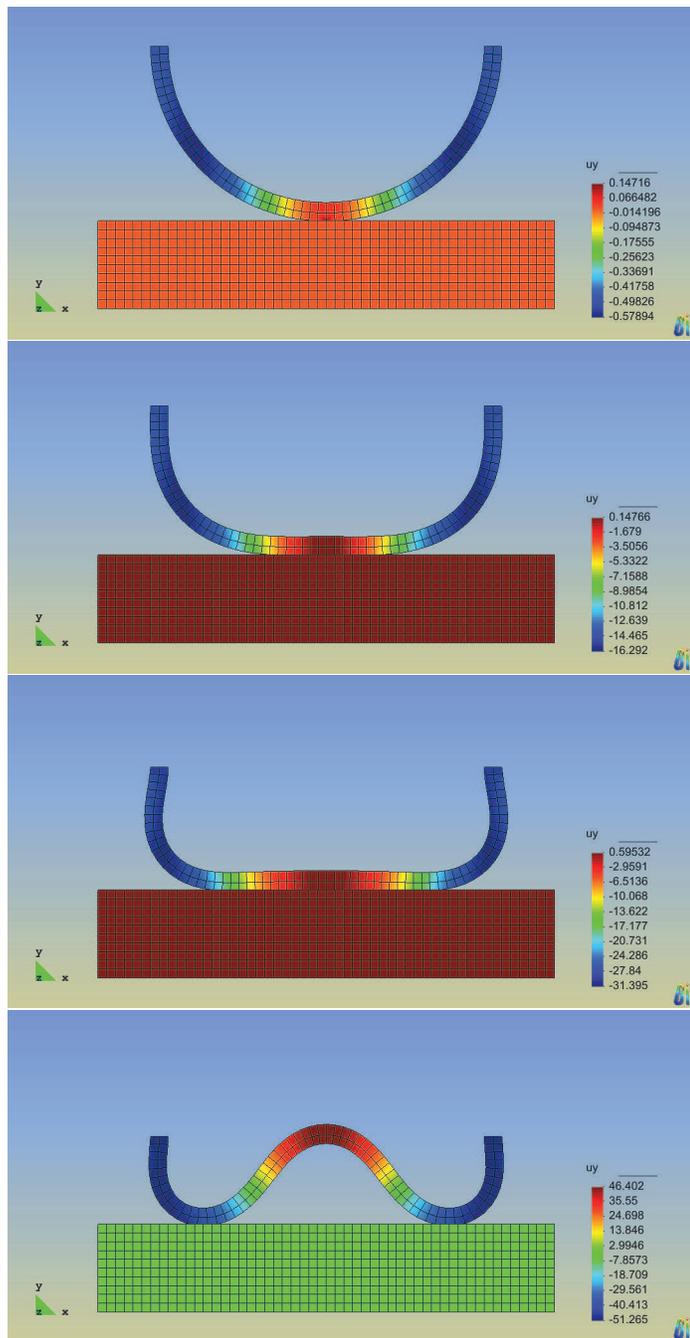


Figura 7.26: Campo de deslocamentos u_y para estrutura deformada em $t = 1, 30, 60$ e 100 , respectivamente. Fundação com módulo de elasticidade $E = 1,0 \times 10^8$.

Foi realizada uma segunda simulação com os mesmos parâmetros anteriores, mas considerando a fundação menos rígida. Foi escolhido um módulo de elasticidade de $E = 300 [UF/UC^2]$ e $\nu = 0,3$ para a fundação, permitindo que a mesma também entre em regime de grandes deformações.

O resultado pode ser visto em termos do campo de deslocamentos u_y na Figura 7.27.

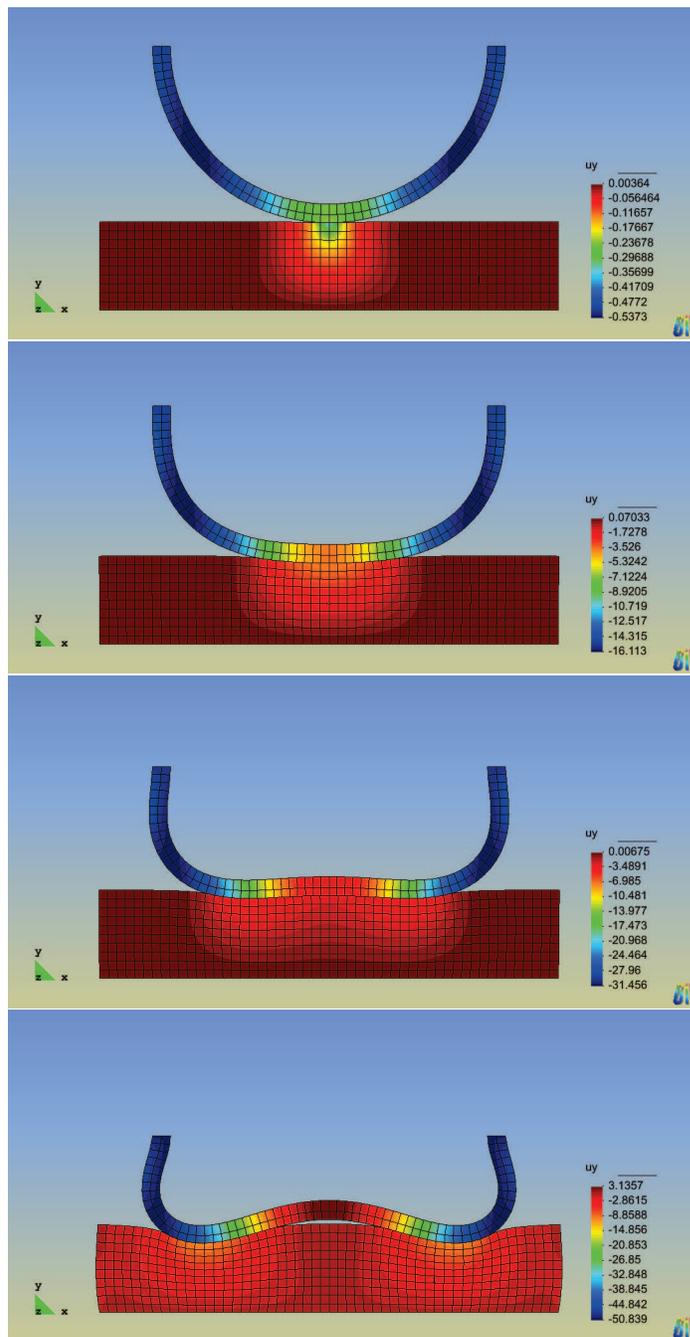


Figura 7.27: Campo de deslocamentos u_y para estrutura deformada em $t = 1, 30, 60$ e 100 , respectivamente. Fundação com módulo de elasticidade $E = 300 [UF/UC^2]$.

7.4 Problema do canal com bloco hiperelástico

O problema consiste na simulação numérica de um processo de prensagem de um bloco em um canal. Os detalhes geométricos e materiais estão dispostos na Figura 7.28. Este problema é apresentado em algumas referências na literatura [36, 97]. É considerado material hiperelástico Neo-Hookeano compressível para os dois componentes. Com esta simulação é possível avaliar o comportamento do elemento de contato em um problema com grandes deformações e grandes deslizamentos com atrito. O penalizador adotado é $\epsilon = 1,0 \times 10^3$ e as medidas de comprimento na Figura 7.28 estão em *mm*.

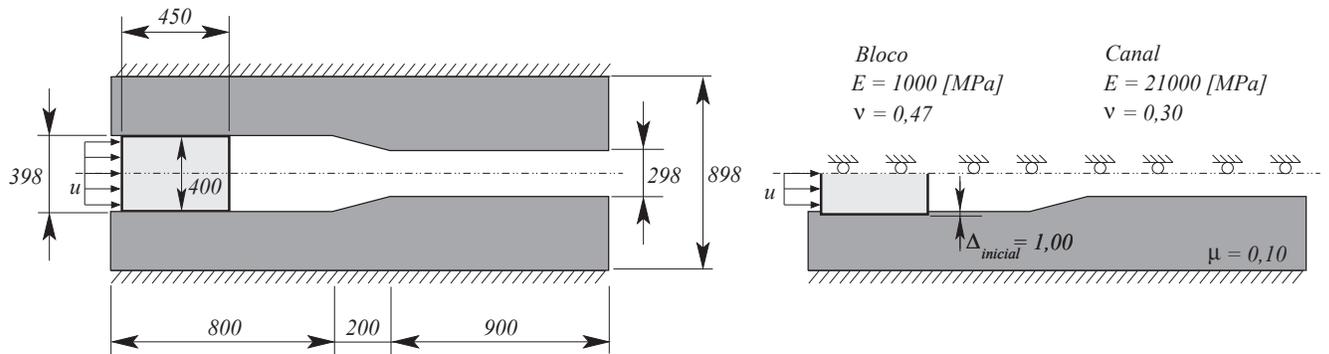


Figura 7.28: Problema do canal com bloco hiperelástico.

É utilizada a simetria do problema e somente a metade da estrutura é simulada.

O processo é modelado através da aplicação de uma condição de contorno não-homogênea $u = 1000 \text{ mm}$ na face esquerda do bloco. A altura do bloco é maior que a do canal, impondo ao problema uma penetração inicial de $\Delta_{inicial} = 1 \text{ mm}$, aplicada a fim de se introduzir ao problema uma tensão normal de contato. Então, para o primeiro passo de tempo é utilizado $u = 0$, para que o código gere a tensão normal necessária a condição de não penetração, separando os corpos em contato. Após esse passo é empregada a condição de contorno não-homogênea $u = 1000 \text{ mm}$ em 150 passos de tempo. A superfície do bloco que está em contato é a *non-mortar* (contactor) e a superfície do canal é a *mortar* (alvo). É considerado estado plano de deformações e Lagrangiano atualizado. A malha utilizada é mostrada na Figura 7.29 e foram utilizados 20 pontos de integração por elemento de contato.

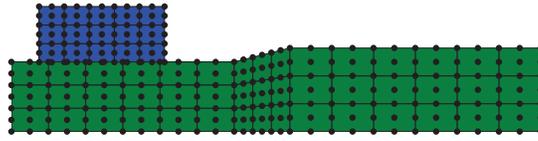


Figura 7.29: Malha do problema da prensagem.

O resultado estudado é a força de reação horizontal F_H na face de aplicação da condição de contorno não-homogênea. A Figura 7.30 mostra uma comparação do resultado obtido com resultados apresentados nos trabalhos [97, 36]. Foi utilizado um grau de interpolação $p = 2$.

As oscilações acontecem devida à modelagem da região de estricção do canal. Como a diferença de rigidez entre os corpos e o ângulo da subida são significativos, o bloco não se acomoda perfeitamente em uma pequena região no início da estricção. Isso faz com que os pontos de integração que passam nesta pequena região percam o contato com a estrutura, continuem deslizando e voltem a contactar novamente. O resultado é a oscilação da reação horizontal mostrada na Figura 7.30. Estas oscilações dependem do conjunto de parâmetros escolhidos para o problema (propriedades materiais dos componentes, ângulo da estricção, etc). Estes parâmetros determinam diretamente se ocorrerá e com qual intensidade o contato intermitente na subida. Este contato intermitente influencia fortemente a resposta em termos de esforços devido ao comportamento descontínuo da função de penetração (Equação 3.23). A descontinuidade ocorre devida a mudança repentina na direção dos vetores normal e tangente no início da estricção.

Os resultados mostram que para o elemento *mortar* de contato, a amplitude de oscilação é menor que no elemento NTS [97, 36].

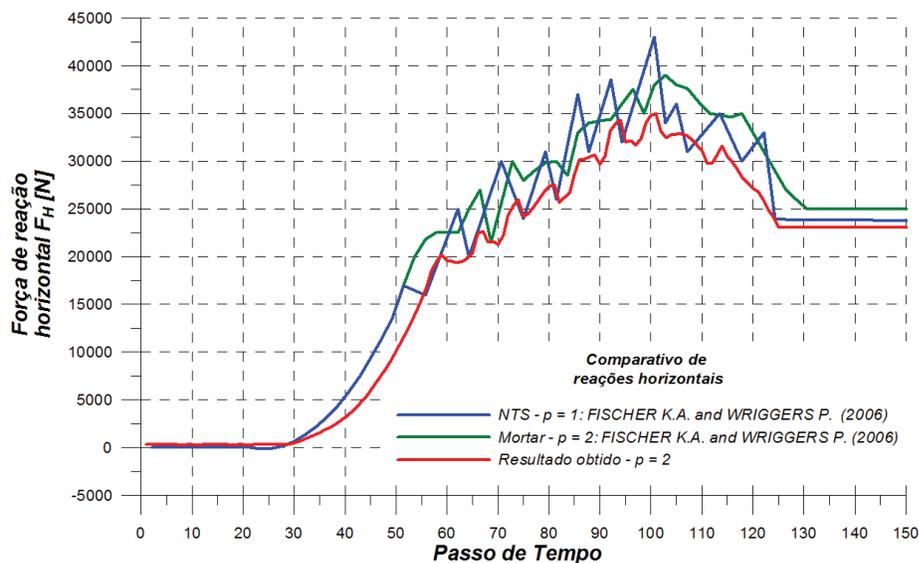


Figura 7.30: Comparativo entre soluções para o problema de prensagem.

A Figura 7.31 mostra os resultados obtidos para grau de interpolação $p = 2$ e $p = 3$. Pode-se observar que o aumento do grau de interpolação promove uma diminuição das oscilações e suas amplitudes. O aumento da ordem do elemento melhora a interpolação da função de penetração discretizada, dada pela Equação 5.12, e permite que o bloco fique com uma superfície de contato mais suave na transição da estricção.

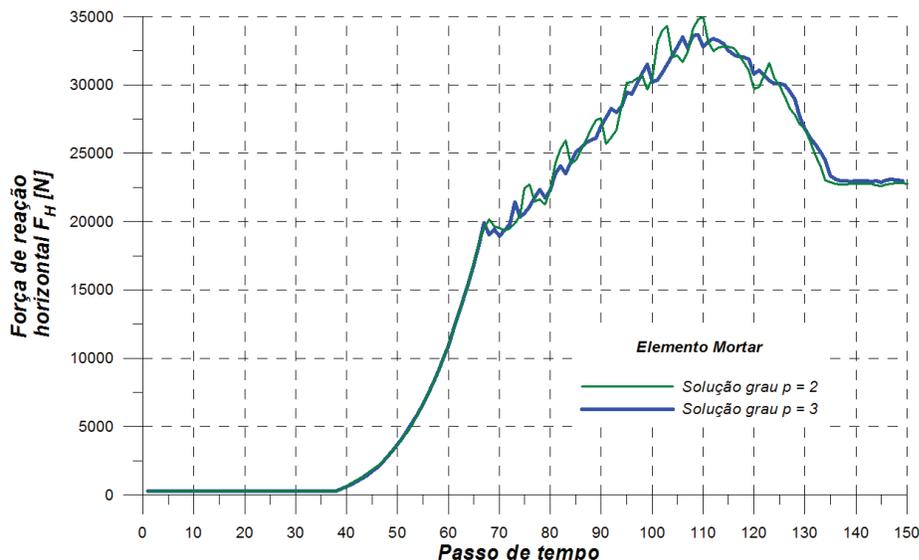


Figura 7.31: Comparativo entre soluções para aumento do grau de interpolação.

A Figura 7.32 mostra o campo de tensões σ_{yy} para diferentes passos de tempo.

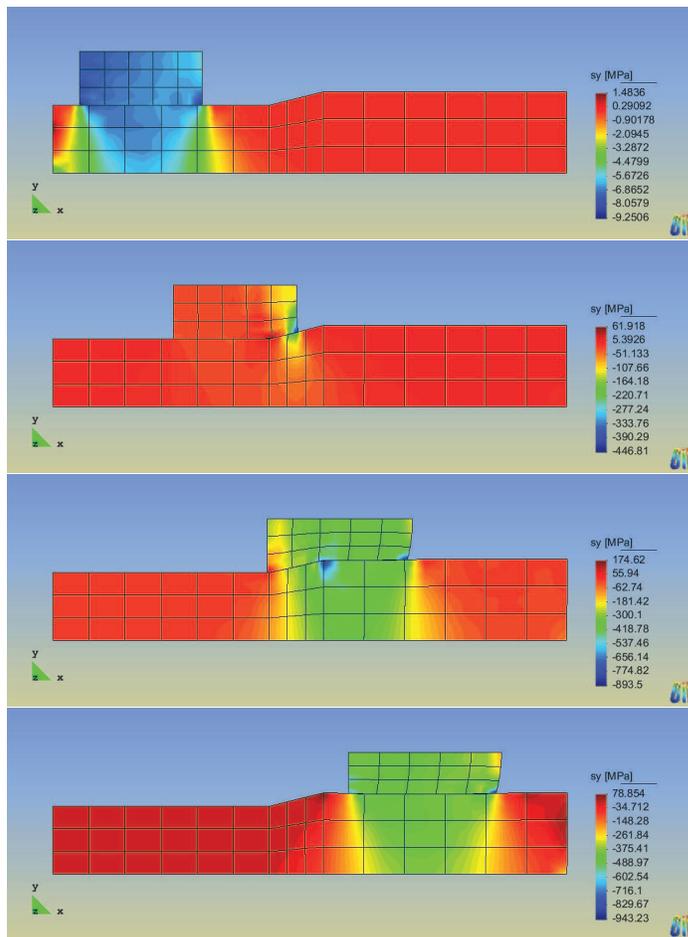


Figura 7.32: Campo de tensões σ_{yy} para estrutura deformada em $t = 1, 55, 105$ e 150 , respectivamente.

8 CONCLUSÕES

O trabalho teve como alvo de estudo problemas bidimensionais de contato com pequenas e grandes deformações, atrito e sem considerar efeitos termomecânicos. Do ponto de vista de formulação, a contribuição foi a extensão do elemento de contato quadrático apresentado em [97, 36] para alta ordem de interpolação. Este elemento é construído a partir do método *mortar* de decomposição de domínios discretizados. As referências atuais mostram que este tipo de formulação tem sido amplamente aplicada de forma eficiente no contexto atual [36, 73, 74, 77, 78, 79, 80, 105, 102], mas é considerada de difícil implementação [76]. Portanto a maior contribuição realizada foi a implementação computacional deste elemento no *software* de MEF-AO *hp²fem*.

Foram apresentadas soluções para alguns problemas clássicos da literatura de contato. Os resultados obtidos, de uma forma geral, tanto para pequenas como para grandes deformações, mostram que a alta ordem de interpolação pode ser considerada uma interessante estratégia neste tipo de problemas, quando o foco em análise é o estudo das tensões e esforços gerados pelo contato. Quando analisado o refino *p* uniforme (mesmo grau de interpolação para o domínio e região de contato), pode-se observar que é possível se obter uma solução para tensão de contato com melhor precisão.

Para os problemas com grandes deformações, apesar de terem sido observadas melhoras significativas na solução com o aumento da ordem de interpolação, ainda se faz necessária uma análise mais rigorosa do emprego de alta ordem, pois, ao se trabalhar com MEF-AO, tem-se o problema do aumento excessivo de graus de liberdade do problema e de tempo computacional de análise. Logo, para uma melhor avaliação do ganho com o aumento do grau de interpolação para estes problemas, seria necessária a implementação de uma estratégia de refino *p* não uniforme juntamente com uma *hp*. Isso permitiria o aumento da ordem de interpolação somente na área de contato.

Para o elemento de contato com atrito foi utilizada a abordagem do movimento do cone de fricção proposta em [98]. A mesma resulta em um algoritmo mais simples que as estratégias usuais, e explora a formulação baseada no método da penalidade. Isso permite descrever a parte de contato com atrito utilizando um único vetor de penetração \mathbf{g} , sem dividir a restrição de contato em normal e tangencial. A utilização desta estratégia resulta em uma matriz de rigidez de contato com menos termos, mas insere na formulação a limitação de permitir pequenas penetrações na região de contato, assim como pequenos deslocamentos tangenciais relativos no caso de adesão. Estas pequenas penetrações e deslocamentos tangenciais relativos numéricos são necessários para obtenção do vetor de tensões de contato proporcional através da Equação 5.59, mas fazem com que a formulação não atenda de forma exata as condições de KKT $g_N \leq 0$ e de adesão $\mathbf{g}_T = \mathbf{0}$. Os resultados desta limitação foram observados na análise do problema de contato de bloco com o solo. Uma forma

de contornar este problema é a implementação de métodos que adicionam as restrições de contato atendendo de forma exata estas condições, como por exemplo o método dos multiplicadores de Lagrange e método do Lagrangiano Aumentado.

Baseadas na contribuições e nas considerações levantadas no presente trabalho, algumas sugestões são apresentadas para trabalhos futuros:

8.1 Sugestões de trabalhos futuros

- Implementar uma estratégia de refino p não-uniforme;
 - Isso permitiria o aumento da ordem de interpolação somente na região de contato, promovendo uma redução do custo computacional necessário para a análise.
- Desenvolver estratégias para avaliação do desempenho do elemento de contato de alta ordem em grandes deformações;
 - Para a avaliação do ganho de acurácia com o aumento da ordem de interpolação do elemento de contato em problemas com grandes deformações, para os quais não existem soluções analíticas. Isso pode ser realizado com estimadores de erro *a posteriori* para problemas de contato baseados em recuperação de tensões disponíveis na literatura [57, 97].
- Implementar o elemento de contato de alta ordem aqui proposto com mapeamento das superfícies com NURBS;
 - Para o caso do cilindro onde ocorreu o problema de instabilidade devido o emprego de elementos retos, a correção aqui aplicada foi simples, por se tratar de uma circunferência. Para uma superfície arbitrariamente curvada, faz-se necessária a aplicação de um mapeamento geral de superfícies, como por exemplo através do uso de NURBS [88], o que proporciona robustez e acurácia superior à formulação.
- Implementar um modelo virtual do olho humano para análise de tensões na retina, utilizando o elemento de contato aqui desenvolvido;
 - Uma sugestão importante proposta em [12] é a análise das tensões de cisalhamento no contato retina e coróide, o que permitiria entender um pouco melhor as alterações na anatomia e na fisiologia relacionada às alterações patológicas. Para isso, ao contrário

do que foi feito em [12], deve-se considerar que a retina e a esclera não estão fixadas. Outra sugestão é considerar contato entre coróide e esclera com atrito, para obtenção de um modelo mais realístico.

- Desenvolver e implementar o elemento de contato proposto adicionando as restrições com o método do Lagrangiano Aumentado;
 - Utilizar um método que adiciona as restrições de contato atendendo de forma exata as condições de KKT $g_N \leq 0$ e de adesão $g_T = 0$;
- Desenvolver uma versão paralelizada de alto desempenho dos códigos resultantes do presente trabalho.
 - Para reduzir tanto o tempo computacional quanto os requerimentos de memória empregados na simulação de problemas de contato com grandes deformações empregando MEF-AO, é necessário o desenvolvimento de ferramentas para soluções desta classe de problemas baseadas em arquiteturas de computação paralela [17]. Devida à estrutura especial da matriz de rigidez global das formulações de contato com atrito, é esperado que a implementação de uma arquitetura paralela seja um desafio, assim como uma importante contribuição científica [102].

Referências

- [1] ALEXANDROV, M. e MHITARYAN, S. **Contact Problems for Bodies with Thin Coatings and Interlayers**. Nauka, 1983.
- [2] AMONTONS, G. On the resistance originating in machines (in french). **Memory Academy Royal**, p. 1699, 206-222.
- [3] BABUSKA, I. e SURI, M. The p and h-p versions of the finite element method for constraint boundary conditions. **Mathematics of Computation**, v. 51, 1–13, 1988.
- [4] BARBOSA, H. J. C. **Algoritimos Numéricos para Problemas de Contato em Elasticidade**. 1986. Tese (Doutorado). COPPE - Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ.
- [5] BARBOSA, H.J.C. e GHABOUSSI, J. Discrete finite element method for multiple deformable bodies. **Finite Elements in Analysis and Desing**, v. 7, 715–158.
- [6] BARGOS, F. F. **Implementação de Elementos Finitos de Alta Ordem baseado em Produto Tensorial**. 2009. Dissertação (Mestrado). FEM - Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP.
- [7] BATHE, K.J. **Finite Element Procedures in Engineering Analysis**. Prentice-Hall, 1982.
- [8] BATHE, K.J. **On Finite Element Methods for Nonlinear Dynamic Response**. Seventh Conference on Structural Dynamics, 2008.
- [9] BATHE, K.J. e EL-ABBASI, N. Stability and path test performance of contact discretizations and a new solution algorithm. **Computers and Structures**, v. 79, 1473–1486, 2001.
- [10] BAZARAA, M.S. e SHETTY, C.M. **Nonlinear Programming: Theory and Algorithms**. John Willey and Sons, 1979.
- [11] BELGACEM, F.; HILD, P. e LABORDE, P. The mortar finite element method for contact problems. **Mathematical and Computer Modelling**, v. 28, 263–271, 1998.
- [12] BENDRE, E. **Finite Element Analysis and Preliminary Experiments to Study the Effects of High Myopia in Macular Degeneration**. 2009. Dissertação (Mestrado). Department of Mechanical and Industrial Engineering - Northeastern University.
- [13] BERNARDI, C.; DEBIT, N. e MADAY, Y. Coupling finite element and spectral methods: First results. **Mathematics of Computation**, v. 54, 21–39, 1990.

- [14] BITTENCOURT, M.L. **Apostila de Mecânica do Contínuo Aplicada - Fundamentos e Ilustrações Usando o Programa Matlab**. 2009.
- [15] BITTENCOURT, M.L. **Análise Computacional de Estruturas**. Editora Unicamp, 2010.
- [16] BONET, J. e WOOD, R. **Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis**. Cambridge, second ed., 2008.
- [17] CANTÃO, R. F. **Construção de um software de Elementos Finitos usando Programação Genérica/Generativa: considerações sobre C++, performance e generalidade**. 2004. Tese (Doutorado). IMECC - Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP.
- [18] CHAN, S.H. e TUBA, I.S. A finite element method for contact problems in solid bodies. **International Journal of Mechanics Sciences**, v. 13, 615–639, 1971.
- [19] CHAND, R.; HAUG, E. e RIM, K. Analysis of unbounded contact problems by means of quadratic programming. **Journal of Optimization Theory and Applications**, v. 20, 171–189, 1976.
- [20] COCU., M. of solutions of signorini problems with friction. **International Journal of Engineering Science**, v. 22, 567–575, 1984.
- [21] COULOMB, C.A. The theory of simple machines (in french). **Memory Mathematics Physics Academy Science**, v. 10, 161–331, 1785.
- [22] CRISFIELD., M. Re-visiting the contact patch rest. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**.
- [23] CRISFIELD, M. **Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures**, v. 1. John Wiley and Sons, first ed., 2000.
- [24] CRISFIELD, M. **Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures**, v. 2. John Wiley and Sons, first ed., 2000.
- [25] CURNIER, A. Unilateral contact: Mechanical modelling. in p. wriggers and p. panagioto-poulos, editors. **New Developments in Contact Problems - Springer**, pp. 1–54, 1999.
- [26] DONG, S. e YOSIBASHI, Z. A parallel spectral element method for dynamic three-dimensional nonlinear elasticity problems. **Computers and Structures**, v. 87, 59–72, 2009.

- [27] DUSTER, A. e RANK, E. The p-version of the finite element method compared to an adaptive h-version for the deformation theory of plasticity. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, 1925–1935, 2001.
- [28] DUVAUT, G. e LIONS, J. **Inequalities in Mechanics and Physics**. Springer-Verlag, 1976.
- [29] EULER, L. Sur la diminution de la resistance du frottement. **Memory Academy Science of Berlin**, v. 4, 133–148, 1748.
- [30] EULER, L. Sur le frottement des corps solides. **Memory Academy Science of Berlin**, v. 4, 122–132, 1748.
- [31] FANCELLO, E. A. **Formulação Variacional do Problema de Contato com Atrito - Resolução via Regularização**. 1989. Dissertação (Mestrado). COPPE - Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ.
- [32] FICHERA., G. Sul problema elastostatico di signorini con ambigue condizioni al contorno. **Atti della Accademia Nazionale dei Lincei, Serie Ottava, Rendiconti, Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali**, v. 34, 138–142, 1963.
- [33] FICHERA., G. Problemi elastostatici con vincoli unilaterali: I problema di signorini con ambigue condizioni al contorno. **Atti della Accademia Nazionale dei Lincei, Mem., Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., Sez. I, VIII. Ser.**, v. 7, 91–140, 1964.
- [34] FICHERA., G. Boundary value problems of elasticity with unilateral constraints. **In C. Truesdell, ed., Mechanics of Solids - Springer-Verlag**, v. 2, 391–424, 1972.
- [35] FISCHER, K.A. e WRIGGERS, P. Frictionless 2d contact formulations for finite deformations based on the mortar method. **Computational Mechanics**, v. 36, 226–244, 2005.
- [36] FISCHER, K.A. e WRIGGERS, P. Mortar based frictional contact formulation for higher order interpolations using the moving friction cone. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 195, 5020–5036, 2006.
- [37] FRANCAVILLA, A. e ZIENKIEWICZ, O. A note on numerical computation of elastic contact problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 9, 913–924, 1975.
- [38] FROTA, P. **O Olho Humano e Defeitos de Visão**. URL: <http://profs.ccems.pt/PaulaFrota/olho.htm>, 2004.

- [39] GALIN, L. **Contact Problems in Elasticity**. Nauka, 1953.
- [40] GALIN, L. **Development of the Contact Theory in USSR**. Nauka, 1976.
- [41] GIANNAKOPOULOS, A. The return mapping method for the integration of friction constitutive relations. **Computers and Structures**, v. 32, 157–167, 1989.
- [42] GIANNOKOPOULOS, A.E. The return mapping method for the integration of friction constitutive relations. **Computers Structures**, v. 32, 157–167, 1989.
- [43] GITTERLE, M.; POPP, A.; MICHAEL, W.G. e WOLFGANG, A.W. Finite deformation frictional mortar contact using a semi-smooth newton with consistent linearization. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 84, 543–571, 2010.
- [44] GORYACHEVA, I. **Contact Mechanics in Tribology**. Springer, 1998.
- [45] GORYACHEVA, I. **Mechanics of Frictional Interaction**. Nauka, 2001.
- [46] HAMMER, M. E. **Frictional Mortar Contact for Finite Deformation Problems with Synthetic Contact Kinematics**. 2012. Tese (Doutorado). Graz University of Technology.
- [47] HEISSERER, U.; HARTMANN, S.; DUESTER, A.; BIER, W.; YOSIBASH, Z. e RANK, E. p-fem for finite deformation powder compaction. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 197, 727–740, 2008.
- [48] HERTZ, H. Ueber die berührung fester elastische korper. **Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik**, v. 92, 156–171, 1882.
- [49] HOLZER, S.M. e YOSIBASHI, Z. The p-version of the finite element method in incremental elasto-plastic analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 39, 1859–1878, 1996.
- [50] HUEBER, S. e WOHLMUTH, B.I. A primal-dual active set strategy for nonlinear multibody contact problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 194, 3147–3166, 2005.
- [51] HUGHES, T. **The Fnite Element Method: Linear Static and Dynamic Fnite Element Analysis**. Dover Civil and Mechanical Engineering Series - Dover Publications, 2000.

- [52] HUGHES, T.; TAYLOR, R. e KANOKNUKULCHAI, W.A. Finite element method for large displacement contact and impact problems. In **K.J. Bathe, J.T. Oden, W.Wunderlich and E.L. Wilson, ed., Formulations and computational algorithms in FE analysis - MIT Press**, pp. 468–495, 1977.
- [53] JEREMIC, B. e XENOPHONTOS, C. Application of the p-version of the finite element method to elastoplasticity with localization of deformation. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, v. 15, 867–876, 1999.
- [54] JOHNSON, K.L. **Contact Mechanics**. Cambridge University Press, 1985.
- [55] KARNIADAKIS, G. e SPENCER, S. **Spectral/hp Element Methods for Computational Fluid Dynamics**. Oxford Science Publications, second ed., 2004.
- [56] KIKUCHI, N. e ODEN, J. **Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods**. SIAM, 1988.
- [57] KIKUCHI, N. e ODEN, J.T. **Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods**. SIAM, 1985.
- [58] KLARBRING., A. A mathematical programming approach to three-dimensional contact problems with friction. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 58, 175–200, 1986.
- [59] KONYUKHOVA, A. e SCHWEIZERHOF, K. Incorporation of contact for high-order finite elements in covariant form. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 198, 1213–1223, 2009.
- [60] LAMICHHANE, B. P. **Higher Order Mortar Finite Elements with Dual Lagrange Multiplier Spaces and Applications**. 2006. p. 25–54. Tese (Doutorado). Institute for Applied Analysis and Numerical Simulation - University of Stuttgart.
- [61] LAURSEN, T. **Computational Contact and Impact Mechanics: Fundamentals of Modeling Interfacial Phenomena in Nonlinear Finite Element Analysis**. Springer-Verlag, 2002.
- [62] LAURSEN, T.A.; PUSO, M.A. e SANDERS, J. Mortar contact formulations for deformable-deformable contact: Past contributions and new extensions for enriched and embedded interface formulations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 205-208, 3–15, 2012.

- [63] LUENBERGER, D.G. **Linear and Non Linear Programming**. Addison-Wesley Publishing Company-Inc., 1984.
- [64] LURIE, A. **Theory of Elasticity**. Nauka, 1970.
- [65] MARSDEN, J.E. e HUGHES, J.R. **Mathematical Foundations of Elasticity**. Dover Publications, Inc., 1983.
- [66] MARTIN, A.C.M. e CARVALHO, M.M. **Os benefícios e as restrições do uso da simulação virtual no processo de desenvolvimento de produtos**. XXIV Encontro Nacional de Engenharia de Produção, 2004.
- [67] MCDEVITT, T. e LAURSEN, T. A mortar-finite element formulation for frictional contact problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 48, 1525–1547, 2000.
- [68] MIJAR, A. e ARORA., J. Review of formulations for elasto-static frictional contact problems. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 20, 2000, 167-189.
- [69] MUSKHELISHVILI, N. **Some Basic Problems in the Mathematical Theory of Elasticity**. Nauka, fifth ed., 1966.
- [70] PÁCZELT, I.; SZABÓ, B.A. e SZABÓ, T. Solution of contact problem using the hp-version of the finite element method. **Computers and Mathematics with Applications**, v. 38, 49–69, 1999.
- [71] PANAGIOTOPOULOS, P. **Inequality Problems in Mechanics, Convex and Nonconvex Energy Functions**. Birkhauser, 1985.
- [72] PATRICK, H. Numerical implementation of two nonconforming finite element methods for unilateral contact. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 184, 99–123, 2000.
- [73] PIEDADE, D. N. **Sobre Estratégias de Resolução Numérica de Problemas de Contato**. 2009. Dissertação (Mestrado). Departamento de Engenharia de Estruturas - Universidade de São Paulo - USP.
- [74] POPP, A.; MICHAEL, W.G. e WOLFGANG, A.W. A finite deformation mortar contact formulation using a primal-dual active set strategy. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 79, 1354–1391, 2009.

- [75] PUSO, M. A 3d mortar method for solid mechanics. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 59, 315–336, 2004.
- [76] PUSO, M. e LAURSEN, T. Mesh tying on curved interfaces in 3d. **Engineering Computations**, v. 20, 305–319, 2003.
- [77] PUSO, M.A. A 3d mortar method for solid mechanics. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 59, 315–336, 2004.
- [78] PUSO, M.A. e LAURSEN, T.A. A mortar segment-to-segment contact method for large deformation solid mechanics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 193, 601–629, 2004a.
- [79] PUSO, M.A. e LAURSEN, T.A. A mortar segment-to-segment contact method for large deformation. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 193, 4891–4913, 2004b.
- [80] PUSO, M.A.; LAURSEN, T.A. e SOLBERG, J. A segment-to-segment mortar contact method for quadratic elements and large deformations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 197, 555–566, 2008.
- [81] RABIER, P.; MARTINS, J.; ODEN, J. e CAMPOS, L. Existence and local uniqueness of solutions to contact problems in elasticity with nonlinear friction laws. **International Journal of Engineering Science**, v. 24, 1755–1768, 1086.
- [82] SERPA, A. L. **Problema de Contato com Atrito Utilizando o Método do Lagrangiano Aumentado**. 1996. Tese (Doutorado). FEM - Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP.
- [83] SERPA, A.L. e IGUTI, F. Contact with friction using the augmented lagrangian method: A conditional constrained minimization problem. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences**, v. XXII no2, 273–289, 2000.
- [84] SHIGLEY J. E., MISCHKE C. R., B.R.G. **Mechanical Engineering Design**. McGraw-Hill, 7th edn ed., 2004.
- [85] SIGNORINI., A. **Sopra Alcune Questioni di Elastostatica**. Attidella Societa Italiana per I Progresso delle Scienze, 1933.

- [86] SIGNORINI., A. Questioni di elasticità non linearizzata e semi linearizzata. **Rendiconti di Matematica e dell sue Applicazioni**, v. 18, 95–139, 1959.
- [87] SIMO, J.; WRIGGERS, P. e TAYLOR, R. A perturbed lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 50, 163–180, 1985.
- [88] STADLER, M.; HOLZAPFEL, G.A. e KORELC, J. Cn continuous modelling of smooth contact surfaces using nurbs and application to 2d problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 57, 2177–2203, 2003.
- [89] SZABÓ, B.A. The p- and h-p versions of the finite element methods in solid mechanics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 80, 185–195, 1990.
- [90] SZABÓ, B.A. e MEHTA, A.K. p-convergent finite element approximations in fracture mechanics. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 12, 551–560, 1978.
- [91] TAYLOR, R. e PAPADOPOULOS, O. On a patch test for contact problems in two dimensions. In P.Wriggers and W.Wagner, ed., **Nonlinear Computational Mechanics - Springer**, pp. 690–702, 1991.
- [92] TURNER, M.J.; CLOUGH, R.W.; MARTIN, H.C. e TOPP, L.J. Stiffness and deflection analysis of complex structures. **Journal of the Aeronautical Sciences**, v. 23, 805–823, 1956.
- [93] VALENTE, G. L. **hp2 FEM : Uma Arquitetura de Software p não-Uniforme para o Método de Elementos Finitos de Alta Ordem**. 2012. Dissertação (Mestrado). FEM - Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP.
- [94] VOROVICH, I. e ALEXANDROV, V. **Mechanics of Contact Interactions**. PhysMatLit, 2001.
- [95] WILSON, E.A. e PARSONS, B. Finite element analysis of elastic contact problems using differential displacement. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 2, 387–395, 1970.
- [96] WOHLMUTH, B.I. **Discretization Methods and Iterative Solvers Based on Domain Decomposition**. Springer, 2001.

- [97] WRIGGERS, P. **Computational Contact Mechanics**. Springer, second ed., 2006.
- [98] WRIGGERS, P. e HARALDSSON, A. A simple formulation for two-dimensional contact problems using a moving friction cone. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, v. 19, 285–295, 2003.
- [99] WRIGGERS, P. e KRSTULOVIC-OPARA, L. The moving friction cone approach for three-dimensional contact simulations. **International Journal of Computational Methods**, v. 1, 105–119, 2004.
- [100] WRIGGERS, P.; VAN, T.V. e STEIN, E. Finite element formulation of large deformation impact-contact problems with friction. **Computers Structures**, v. 37, 319–333, 1990.
- [101] WRIGGERS, P. e ZAVARISE, G. A formulation for frictionless contact problems using a weak form introduced by nitsche. **Computational Mechanics**, v. 41, 407–420, 2008.
- [102] YANG., B. **Mortar Finite Element Method for Large Deformation Contact Mechanics**. VDM Verlag Dr. Muller Aktiengesellschaft and Co. KG, 2009.
- [103] YANG, B. e LAURSEN, T. A large deformation mortar formulation of self contact with finite sliding. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 197, 756–772, 2008.
- [104] YANG, B.; LAURSEN, T. e MENG, X. Two dimensional mortar contact methods for large deformation frictional sliding. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 62, 1183–1225, 2005.
- [105] YANG, B. e LAURSEN, T.A. A large deformation mortar formulation of self contact with finite sliding. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 197, 756–772, 2008.
- [106] YASTREBOV, V. A. **Computational Contact Mechanics: Geometry, Detection and Numerical Techniques**. 2011. Tese (Doutorado). Institut des Sciences et Technologies - Paris Tech.
- [107] ZHONG, W. e SUN., S. A finite element method for elasto-plastic structure and contact problem by parametric quadratic programming. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 26, 2723–2738, 1988.

- [108] ZHONG, W.X. e SUN, S.M. A parametric quadratic programming approach to elastic contact problems with friction. **Computers and Structures**, v. 32, 37–43, 1989.
- [109] ZIENCKIEWICS, O.C. e TAYLOR, R.L. **The Finite Element Method**, v. 1. Butterworth Heinemann, fifth ed., 2000.