



Luan Jose Franchini Ferreira

Resposta Temporal de Vigas com Vibro-Impacto Utilizando Modelos de Força de Contato

45/2013

**CAMPINAS
2013**



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

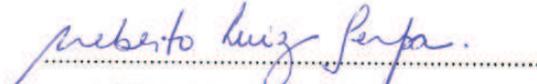
Luan Jose Franchini Ferreira

Resposta Temporal de Vigas com Vibro-Impacto Utilizando Modelos de Força de Contato

Orientador: Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica na área de Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico.

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO
FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO
ALUNO LUAN JOSE FRANCHINI FERREIRA,
ORIENTADO PELO PROF. DR. ALBERTO LUIZ
SERPA.


ASSINATURA DO ORIENTADOR

CAMPINAS
2013

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Elizângela Aparecida dos Santos Souza - CRB 8/8098

F413r Ferreira, Luan Jose Franchini, 1987-
Resposta temporal de vigas com vibro-impacto utilizando modelos de força de contato / Luan Jose Franchini Ferreira. – Campinas, SP : [s.n.], 2013.

Orientador: Alberto Luiz Serpa.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Método dos elementos finitos. 2. Dinâmica estrutural. 3. Análise no domínio do tempo. 4. Mecânica do contato. 5. Vibração. I. Serpa, Alberto Luiz, 1967-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: Time response of beams with vibro-impact using contact force models

Palavras-chave em inglês:

Finite element method

Structural dynamics

Time domain analysis

Contact mechanics

Vibration

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica

Banca examinadora:

Alberto Luiz Serpa [Orientador]

Jonas de Carvalho

Robson Pederiva

Data de defesa: 29-04-2013

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

Resposta Temporal de Vigas com Vibro-Impacto
Utilizando Modelos de Força de Contato

Autor: Luan Jose Franchini Ferreira

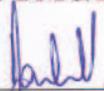
Orientador: Dr. Alberto Luiz Serpa

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:



Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa, Presidente

Instituição: DMC/FEM/UNICAMP



Prof. Dr. Jonas de Carvalho

Instituição: EESC/USP



Prof. Dr. Robson Pederiva

Instituição: DPM/FEM/UNICAMP

Campinas, 29 de Abril de 2013.

Dedicatória

Dedico este trabalho à minha Mãe Santina Franchini e minha Avó Ana Ferro Franchini (em memória).

Agradecimentos

À Deus pela minha existência.

À minha mãe pelo apoio incondicional e algumas vezes financeiro e por não medir esforços para a realização deste objetivo.

Aos demais familiares tios, tias, primos e primas pelo estímulo e confiança.

Ao meu orientador Alberto Luiz Serpa pela oportunidade e pela contribuições para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus melhores amigos e companheiros de vida acadêmica Allan Patrick Cordeiro Dias e Jorge Luis Suzuki, por nossa sincera amizade, pelas produtivas discussões e apoio.

Aos amigos que encontrei durante o mestrado Gilberto Luis Valente da Costa, Caio F. Rodrigues, Jaime Izuka e Fabiano Bargas pela amizade e apoio.

Ao Professores e as demais pessoas que durante à minha vida contribuíram de alguma forma para a realização deste objetivo.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro.

À Faculdade de Engenharia Mecânica da Unicamp pela infraestrutura.

”E como já estou no fim de minha carreira, há um conselho que dou a vocês: não tenham medo. Porque se tiverem medo, nunca poderão criar nada de original. É preciso que não tenham medo de dizer alguma coisa que possa ser considerada como um erro. Porque tudo que é novo aparece aos olhos antigos como coisa errada. É sempre nessa violação do que é considerado certo que nasce o novo e há a criação”.

Mário Schemberg

Resumo

FRANCHINI, L.J. Resposta Temporal de Vigas com Vibro-Impacto Utilizando Modelos de Força de Contato. 2013. 113p. Dissertação (Mestrado). Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

O vibro-impacto de vigas ocorre devido ao contato intermitente das estruturas na presença de folgas, gerando desgaste excessivo, vibração com grandes amplitudes, falhas prematuras de componentes e alto nível de ruído. A determinação da resposta no domínio do tempo do sistema, ou seja, deslocamentos, velocidades e acelerações, juntamente com os esforços de contato são de fundamental importância para o projeto desses sistemas, na prevenção de falhas e no controle de vibrações e ruído. Foi desenvolvido um código utilizando a linguagem MATLAB que a partir dos dados de uma malha de elementos finitos de viga, determina a resposta dinâmica da viga sobre a condição de vibro-impacto. A resposta dinâmica foi obtida utilizando a integração numérica da equação do movimento discretizada. Os métodos de integração numérica da diferença centrada, Newmark e alpha-HHT foram implementados para o caso de contato intermitente e utilizados na determinação da resposta dinâmica da estrutura. A condição de contato intermitente originada pelo processo de vibro-impacto foi tratada avaliando a condição de não penetração dos corpos nos instantes de tempo específicos definidos pelo intervalo de tempo utilizado na integração numérica. Os modelos de contato mecânico utilizados foram os modelos de força de contato proporcional e o cúbico.

Palavras-chave: Método dos elementos finitos, Dinâmica estrutural, Análise no domínio do tempo, Mecânica do contato, Vibração.

Abstract

FRANCHINI, L.J. Time Response of Beams with Vibro-Impact Using Contact Force Models. 2013. 113p. Thesis (Master). Faculty of Mechanical Engineering, University of Campinas, Campinas.

The vibro-impact of beams occurs due to intermittent contact of the structures in the presence of clearances, generating excessive wear, vibration with large amplitudes, premature failure of components and high noise level. A MATLAB code was developed using the finite element model of the beam, obtaining the dynamic response of the beam with the vibro-impact condition. The dynamic response was obtained using numerical integration of the discretized equation of motion. The numerical integration method of the central difference, Newmark and alpha-HHT were implemented for the case of contact and used for the determination of the structure time response. The contact condition caused by vibro-impact process was treated evaluating the condition of non-penetration bodies in specific instants of time defined by the numerical integration method. The mechanical contact models proportional force and cubic force were used.

Keywords: Finite element method, Structural dynamics, Time domain analysis, Contact mechanics, Vibration.

Lista de Ilustrações

2.1	Resultados obtidos por Leib <i>et al.</i> (2010): o gráfico da esquerda é a resposta temporal da aceleração medida quando o cabo esta sob uma excitação de $2 m/s^2$ e o da direita sob uma excitação de $4 m/s^2$, ambas na frequência de $106 Hz$, figura retirada de (Leib <i>et al.</i> , 2010).	6
2.2	Viga engastada livre excitada por um oscilação de base $\phi(t)$ impactando contra dois obstáculos, figura retirada de (Dumont, 2002).	7
2.3	Redução das oscilações da tensão de contato utilizando o método da redistribuição de massa e <i>Newmark</i> com $\Delta t = 1 \times 10^{-3} s$, (Khenous <i>et al.</i> , 2008).	8
2.4	Conservação da energia do sistema utilizando o método da redistribuição de massa e <i>Newmark</i> com passo de $1 \times 10^{-3} s$, (Khenous <i>et al.</i> , 2008).	8
2.5	Deslocamento da viga impactando contra dois obstáculos utilizando método de <i>Newmark</i> com coeficiente de restituição zero e passo de $1 \times 10^{-4} s$, o eixo vertical é a amplitude [m] e o eixo horizontal é o tempo em [s], figura retirada de Pozzolini <i>et al.</i> (2011).	9
3.1	Cinemática da viga de <i>Euler – Bernoulli</i>	11
3.2	Detalhe da seção deformada da viga	12
3.3	Esforços externo atuantes na viga	14
3.4	Elemento de viga de dois nós.	15
4.1	Contato entre dois corpos: <i>a)</i> sem contato, <i>b)</i> contato, (Zienkiewicz e Taylor, 2005).	19
4.2	Discretização do contato nó-nó, (Yastrebov, 2011).	21
4.3	Interpretação da mola virtual associada ao método da penalidade Yastrebov (2011).	25
4.4	Ilustração da aproximação das condições de impenetrabilidade pelo método da penalidade, Laursen (2003).	26
4.5	Modelo de força de contato proporcional.	28
4.6	Modelo de força de contato com suavização na região <i>e</i>	29
4.7	Modelo de força de contato cúbica.	29
4.8	Contato nó-nó.	31
5.1	Tipo de carregamento em uma estrutura, (Silva, 2005).	35
6.1	Viga bi-apoiada submetida a uma força harmônica senoidal	47

6.2	Comparação do sinal de deslocamento obtido pela expressão analítica com o obtido pelos métodos de integração temporal.	50
6.3	Comparação do sinal de velocidade obtido pela expressão analítica com o obtido pelos métodos de integração temporal.	52
6.4	Comparação do sinal de aceleração obtido pela expressão analítica com o obtido pelos métodos de integração temporal.	54
6.5	Comparação do diagrama de fase obtido pela expressão analítica com o obtido pelos métodos de integração temporal.	56
6.6	Comparação com o artigo de Dumont (2002).	57
6.7	Deslocamento x tempo para uma viga impactando contra dois obstáculos rígidos posicionados de forma simétrica em relação ao eixo axial da viga, $\Delta t = 5 \times 10^{-6} s$	59
6.8	Deslocamento x tempo para uma viga impactando contra dois obstáculos rígidos posicionados de forma simétrica em relação ao eixo axial da viga, $\Delta t = 1 \times 10^{-6} s$	61
6.9	Deslocamento x tempo para uma viga impactando contra dois obstáculos rígidos posicionados de forma simétrica em relação ao eixo axial da viga, $\Delta t = 5 \times 10^{-7} s$	62
6.10	Deslocamento x tempo para uma viga impactando contra dois obstáculos rígidos posicionados de forma simétrica em relação ao eixo axial da viga, $\Delta t = 2 \times 10^{-7} s$	63
6.11	Comparação do deslocamento obtido pelos métodos DFC, Newmark e $\alpha - HHT$, para $\Delta t = 1 \times 10^{-6} s$ e e excitação $e(t) = 0.2 \text{ sen}(10t)$	65
6.12	Comparação de ΔE obtido pelos métodos DFC, Newmark e $\alpha - HHT$, para $\Delta t = 1 \times 10^{-6} s$ e e excitação $e(t) = 0.2 \text{ sen}(10t)$	66
6.13	Distância da viga até os obstáculos (folga) obtida pelos métodos DFC, Newmark e $\alpha - HHT$, para $\Delta t = 1 \times 10^{-6} s$ e excitação $e(t) = 0.2 \text{ sen}(10t)$	67
6.14	Comparação força de contato p_N obtida pelos métodos DFC, Newmark e $\alpha - HHT$, para $\Delta t = 1 \times 10^{-6} s$ e excitação $e(t) = 0.2 \text{ sen}(10t)$	68
6.15	Comparação do deslocamento obtido pelos métodos DFC, Newmark e $\alpha - HHT$, para $\Delta t = 1 \times 10^{-6} s$ e excitação $e(t) = 0.1 \text{ sen}(10t)$	70
6.16	Comparação de ΔE obtido pelos métodos DFC, Newmark e $\alpha - HHT$, para $\Delta t = 1 \times 10^{-6} s$ e e excitação $e(t) = 0.1 \text{ sen}(10t)$	71
6.17	Distância da viga até os obstáculos (folga) obtida pelos métodos DFC, Newmark e $\alpha - HHT$, para $\Delta t = 1 \times 10^{-6} s$ e excitação $e(t) = 0.1 \text{ sen}(10t)$	72
6.18	Comparação força de contato p_N obtida pelos métodos DFC, Newmark e $\alpha - HHT$, para $\Delta t = 1 \times 10^{-6} s$ e excitação $e(t) = 0.1 \text{ sen}(10t)$	73
6.19	Problema de contato viga com viga	75

6.20	Comparação do deslocamento do grau de liberdade da viga 1 em que ocorre o contato, para o modelo de força de contato proporcional.	76
6.21	Comparação da velocidade do grau de liberdade da viga 1 em que ocorre o contato, para o modelo de força de contato proporcional.	77
6.22	Comparação da aceleração do grau de liberdade da viga 1 em que ocorre o contato, para o modelo de força de contato proporcional.	78
6.23	Comparação do deslocamento do grau de liberdade da viga 2 em que ocorre o contato, para o modelo de força de contato proporcional.	80
6.24	Comparação da velocidade do grau de liberdade da viga 2 em que ocorre o contato, para o modelo de força de contato proporcional.	81
6.25	Comparação da aceleração do grau de liberdade da viga 2 em que ocorre o contato, para o modelo de força de contato proporcional.	82
6.26	Comparação da variação da energia ΔE para o modelo de força de contato proporcional.	84
6.27	Evolução da distância da viga até os obstáculos (folga) para o modelo de força de contato proporcional.	85
6.28	Comparação da força de contato p_N para o modelo de força de contato proporcional.	86
6.29	Comparação do deslocamento do grau de liberdade da viga 1 em que ocorre o contato, para o modelo de força de contato cúbico.	88
6.30	Comparação da velocidade do grau de liberdade da viga 1 em que ocorre o contato, para o modelo de força de contato cúbico.	89
6.31	Comparação da aceleração do grau de liberdade da viga 1 em que ocorre o contato, para o modelo de força de contato cúbico.	90
6.32	Comparação do deslocamento do grau de liberdade da viga 2 em que ocorre o contato, para o modelo de força de contato cúbico.	92
6.33	Comparação da velocidade do grau de liberdade da viga 2 em que ocorre o contato, para o modelo de força de contato cúbico.	93
6.34	Comparação da aceleração do grau de liberdade da viga 2 em que ocorre o contato, para o modelo de força de contato cúbico.	94
6.35	Comparação da variação da energia ΔE para o modelo de força de contato cúbico.	97
6.36	Evolução da distância da viga até os obstáculos (folga) para o modelo de força de contato cúbico.	98
6.37	Comparação da força de contato p_N para o modelo de força de contato cúbico. . . .	99

Lista de Tabelas

6.1	Comparação dos métodos de integração temporal com a solução analítica da vibração de uma viga bi-apoiada excitada por uma carga senoidal.	49
-----	---	----

SUMÁRIO

Lista de Ilustrações	xvii
Lista de Tabelas	xxiii
SUMÁRIO	xxv
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Objetivo	2
1.2 Divisão do trabalho	3
2 VIBRO - IMPACTO	4
2.1 Revisão bibliográfica	4
3 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA	11
3.1 Modelo de viga	11
3.2 Discretização das equações do movimento	15
4 CONTATO	19
4.1 Método da penalidade	23
4.2 Modelos de rigidez de contato	26
4.3 Termos de contato	30
4.4 Discretização dos termos de contato	31
5 PROBLEMAS DINÂMICOS	35
5.1 Integração da equação do movimento do sistema	37
5.1.1 Método da diferença finita centrada	40
5.1.2 Método de Newmark	42
5.1.3 Método $\alpha - HHT$ (<i>Hilber - Hughes - Taylor</i>)	44
6 RESULTADOS E DISCUSSÕES	47
6.1 Verificação	47

6.1.1	Método de integração temporal	47
6.2	Vibro-impacto de viga contra obstáculo rígido	57
6.3	Vibro-impacto de viga contra viga	74
7	CONCLUSÕES	102
7.1	Trabalhos Futuros	103
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	104
	ANEXO A - Método de Newton-Raphson	107
	ANEXO B - Verificação do Método da Penalidade	109
	ANEXO C - Solução Analítica do Problema de Verificação	111

1 INTRODUÇÃO

Sistemas com vibro-impacto envolvem múltiplas interações de impacto, ou seja, o sistema é submetido a impactos repetitivos. Na maioria dos casos há uma perda de energia e o coeficiente de restituição associado mede o grau de dissipação da energia durante o evento. A escala de tempo envolvida durante o impacto é muito menor do que a escala de tempo da frequência natural do sistema (Ibrahim, 2009).

A solução de problema de vibro-impacto envolve um esforço computacional elevado, em virtude da não linearidade provocada pelo contato intermitente de componentes do sistema. Muitos trabalhos foram realizados considerando sistemas de corpos rígidos com parâmetros concentrados. Recentemente, modelos mais realísticos nos quais os corpos são considerados elásticos estão sendo utilizados na busca de melhor representação dos fenômenos envolvidos. A grande dificuldade se encontra na abordagem da interação de contato entre os corpos, onde dependendo do tratamento das forças de contato envolvidas a conservação da energia é violada, o que leva a instabilidades numéricas, provocando oscilações no campo de deslocamentos e de tensões da região de contato, dificultando a convergência do problema e provocando perda da acurácia da solução obtida, (Laurson, 2003) e (Pozzolini *et al.*, 2011).

Recentemente a indústria tem demonstrado grande interesse no problema de vibro-impacto devido degaste excessivo, vibração com grandes amplitudes, falhas prematuras de componentes e ao alto nível de ruído provocado por este fenômeno, (Yin *et al.*, 2007). Por exemplo, na indústria automotiva onde o nível de ruído e vibração dos componentes dos automóveis é considerado um fator importante, desenvolvimentos continuam sendo feitos nos projetos para reduzir o ruído indesejado. Outro exemplo é a falha das válvulas de compressores por fadiga, ocasionada pelo impacto repetitivo das válvulas com o assento, que responde por grande parte das falhas desses equipamentos sendo de grande interesse dos fabricantes a prevenção desta falha, (Lajus, 2012). A perfuração de poços em rochas duras ainda é um grande desafio para as companhias petrolíferas e pesquisas que utilizam a energia de vibração axial para gerar vibro-impacto visando aumentar a taxa de perfuração estão sendo realizadas, (Aguiar e Weber, 2006).

Em muitas outras situações corriqueiras da indústria pode-se encontrar a condição de vibro-impacto, como o impacto de gelo flutuante com navios, as ondas do mar batendo em estruturas *off – shore*, navios colidindo contra o cais, par de engrenagens com folga, colisão das cordas vocais humanas, presença de folga entre rotor e estator, folgas desenvolvidas no suporte das barras de combustível nuclear, corpos elásticos ligados imperfeitamente, usinagem ultrassônica, etc., (Ibrahim *et al.*, 2009).

O conhecimento da resposta temporal da estrutura e da magnitude e forma de variação ao longo do tempo dos esforços de contato, originados pela condição de vibro-impacto são fundamentais para a prevenção da falha desses sistemas e para desenvolvimentos de melhorias na operação dos mesmos.

A análise em frequência do fenômeno de vibro-impacto tem sido amplamente utilizada, especialmente nas situações onde a redução do ruído e o controle de vibração é o interesse. No entanto em situações onde as forças desenvolvidas durante o impacto são cruciais, como no caso de falha por fadiga e desgaste dos sistemas, onde a história temporal das forças desenvolvidas são necessária para o dimensionamento dos sistemas, a análise temporal tem sido empregada. Desta forma, de acordo com as características do sistema em análise a abordagem temporal é mais adequada que a análise em frequência e vice-versa.

Em grande parte dos sistemas mencionados anteriormente, a estrutura é modelada como uma viga engastada livre, especialmente a válvula de palheta do compressor e barras reguladoras do reator nuclear.

Este trabalho apresenta interesse em estruturas mecânicas que podem ser modeladas como vigas, onde estas estão sujeitas à condição de vibro-impacto.

1.1 Objetivo

O objetivo principal deste trabalho é implementar um código computacional utilizando a linguagem MATLAB que seja capaz obter a resposta dinâmica de vigas em situações onde fenômeno de vibro-impacto está presente.

Utilizando para representação da interação de contato entre as viga - viga ou viga - obstáculo o modelo de força de contato linearmente proporcional e o modelo cúbico.

Na determinação da resposta dinâmica via integração numérica da equação do movimento da estrutura será feita utilizando os seguintes algoritmos de integração temporal: o método diferença finita centrada (DFC), o método de *Newmark* e o método α -*HHT* (*Hilber - Hughes - Taylor*).

Desta forma deseja-se obter a variação temporal do deslocamento, velocidade, aceleração e força de contato de estruturas formadas por vigas sob a condição de vibro-impacto.

1.2 Divisão do trabalho

O presente trabalho é dividido em sete capítulos, no qual no capítulo dois é realizada uma breve revisão bibliográfica sobre o fenômeno de vibro-impacto. Onde aspectos básicos do fenômeno são apresentados e alguns trabalhos relacionados são discutidos.

No capítulo três, o modelo matemático do contínuo é apresentado e particularizado para viga de *Euler – Bernoulli*, e em seguida as equações obtidas são discretizadas utilizando o método dos elementos finitos.

No capítulo quatro aspectos relacionados a mecânica do contato são apresentados. Em seguida os modelos de força de contato são introduzidos e o equacionamento do modelo de contato proporcional e cúbico são desenvolvidos. E por fim as equações de contato são discretizadas.

No capítulo cinco os métodos de integração temporal são apresentados e a discretização temporal da equação do movimento com os modelos de contato inseridos é realizada para os esquemas de integração numérica da diferença finita centrada, *Newmark* e $\alpha - HHT$.

No capítulo seis os resultados são apresentados. Uma verificação dos métodos de integração é realizada. Em seguida, os resultados para o problema de vibro-impacto de uma viga que impacta contra dois obstáculos rígidos são apresentados e discutidos. Para concluir, o problema de vibro-impacto entre vigas é discutido e os resultados obtidos são apresentados.

No capítulo sete são apresentadas as conclusões dos estudos realizados e juntamente com as propostas de trabalhos futuros.

2 VIBRO - IMPACTO

2.1 Revisão bibliográfica

O fenômeno de vibro impacto é caracterizado pela ocorrência de impactos repetitivos, devido à vibração do sistema na presença de folga entre os corpos. A existência de impactos faz com que o sistema seja descontínuo e fortemente não linear, (Yuan e Jianhua, 2011). O impacto ocorre quando corpos com diferentes velocidades entram em contato (Wriggers, 2002). Algumas das características do fenômeno de impacto são: a curta duração do evento, alta magnitude das forças de impacto, rápida dissipação de energia e altas acelerações, estas provocadas pelas mudanças bruscas na amplitude e sentido da velocidade dos corpos, Aguiar (2006).

Segundo Stronge (2000), a cada instante durante o impacto a pressão nas superfícies que estão em contato criam forças de ação ou reação que atuam em direção opostas, resistindo à interpenetração dos corpos. Inicialmente a força de contato aumenta com a deformação dos corpos, reduzindo a velocidade em que os corpos se aproximam. Em algum instante durante o impacto, o trabalho realizado pela força de contato é suficiente para que a velocidade de aproximação dos dois corpos seja zero. Assim, a energia armazenada durante a compressão, impulsiona os corpos, até que, finalmente eles se separam com alguma velocidade relativa.

O fenômeno de impacto é de modelagem complexa por envolver diversos fenômenos não lineares. Uma das hipóteses mais utilizadas no estudo de sistemas com impacto é de que os corpos são rígidos e desta forma considera-se que não há deformação durante a colisão ou que essas podem ser desprezadas. No entanto, sabe-se que esta hipótese não é verdadeira para diversas situações reais, (Mattos, 1998). Se as deformações são consideradas para o efeito da modelagem do sistema, estas podem possuir uma relação linear ou não linear com a força atuante na região de contato.

De uma forma bastante abrangente, dois métodos diferentes são utilizadas para a modelagem do impacto. O primeiro método assume que a interação entre os corpos impactantes ocorre em um espaço de tempo curto de forma que a configuração dos corpos antes e depois do impacto não apresentem mudanças significativas. Esta abordagem é denominada de método discreto, e constantemente é aplicada para descrever o impacto de corpos rígidos, onde a duração do impacto tende para zero e a força de impacto tende para o infinito, (Aguiar, 2006; Brach, 1991). A análise dinâmica nesta abordagem restringe-se a análise antes do impacto e depois do impacto. Desta forma, as velocidades após o impacto são obtidas resolvendo as equações da quantidade de movimento linear e angular, juntamente com um coeficiente de restituição, onde este coeficiente de restituição não depende somente das propriedades materiais dos corpos, mas também de sua geometria e da

velocidade inicial de impacto, (Aguiar, 2006).

Esta abordagem foi extensivamente estudada na literatura, sendo que diversos trabalhos podem ser encontrados. Por exemplo, o trabalho de Yuan e Jianhua (2011), que estudaram a perda e a criação da simetria de bifurcação, em sistemas de vibro-impacto com restrição bilateral. Já Luo *et al.* (2007) estudou a bifurcação de dois pontos em sistemas de vibro-impacto, que podem ser associados à fortes ressonâncias. Por outro lado, Manevitch e Gendeman (2008) estudaram a resposta de sistemas oscilatórios com vibro-impacto estritamente não lineares utilizando vários modelos físicos para representar o problema. Um estudo de sistemas de múltiplos graus de liberdade com vibro-impacto utilizando modelos de coeficientes de restituição foi realizado por Wagg e Bishop (2000). Muitos outros trabalhos podem ser encontrados em Ibrahim (2009), que apresenta uma extensa revisão sobre a dinâmica de vibro-impacto.

O segundo método é denominado de análise contínua, ou ainda, de método baseado em força, (Gilardi e Sharf, 2002). Este é baseado no fato de que a força de interação age de modo contínuo durante o impacto. Esta abordagem é realizada adicionando um termo de força de contato na equação do movimento durante o período de duração do impacto. Isto permite uma melhor descrição do comportamento real do sistema, sendo esta análise a mais adequada e mais compatível com problemas que envolvem situações complexas de impacto, múltiplos impactos e vibro-impacto.

Desta forma, modelos de força de contato são adicionados à equação do movimento do sistema, sendo denominados de modelos fenomenológicos ou constitutivos. A principal aplicação deste método tem sido em problemas de vibro-impacto, em que um dos corpos pode ser modelado como rígido e outro deformável. Alguns dos principais modelos utilizados na literatura, referentes a vibro-impacto são: a lei de contato de *Hertz*, modelo do potencial, modelo proporcional, o modelo proporcional suavizado e o modelo cúbico.

Diversos trabalhos que utilizam este método podem ser encontrados na literatura específica. Por exemplo, o trabalho de Leib *et al.* (2010), no qual, os autores realizaram a simulação do cabo da caixa de câmbio de um automóvel que impactava contra o revestimento de material compósito que o protege. Nas simulações, o modelo de viga foi utilizado para representar o cabo e o revestimento. A lei de contato utilizada foi considerada plástica. As simulações foram feitas utilizando o software comercial *Abaqus*. A Figura 2.1 mostra os resultados obtidos para aceleração utilizando duas amplitudes diferentes de excitação.

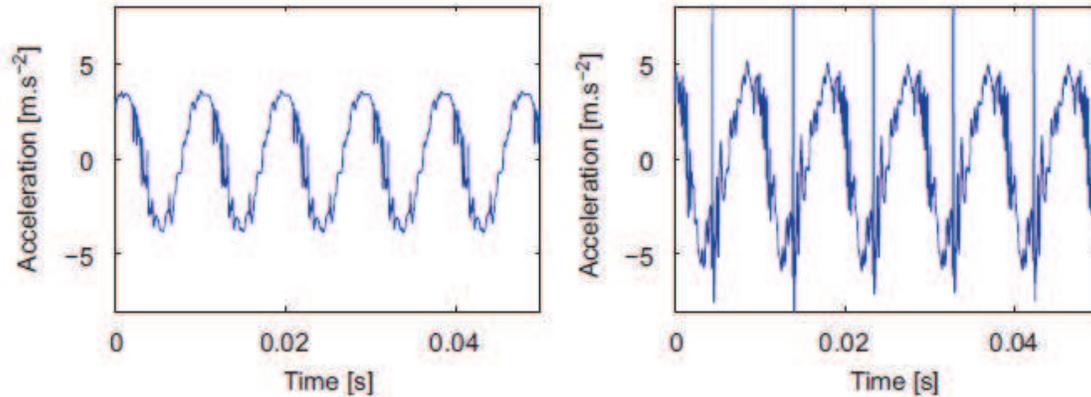


Figura 2.1: Resultados obtidos por Leib *et al.* (2010): o gráfico da esquerda é a resposta temporal da aceleração medida quando o cabo está sob uma excitação de $2 m/s^2$ e o da direita sob uma excitação de $4 m/s^2$, ambas na frequência de $106 Hz$, figura retirada de (Leib *et al.*, 2010).

Notam-se picos na aceleração em ambos os gráficos da Figura 2.1 que são característicos do fenômeno de vibro-impacto. Observa-se também que os picos apresentam maior magnitude no gráfico da direita, onde a amplitude da excitação é maior. Ambos os gráficos ilustram a característica descontínua da aceleração, que está associada ao fenômeno de vibro-impacto.

Outro trabalho relacionado ao método de análise contínua é o de Park *et al.* (2011), que realizaram a simulação de barras reguladoras de um reator nuclear excitadas por uma carga harmônica que provocava o impacto destas contra seus suportes. As barras reguladoras do reator nuclear foram modeladas como vigas e a força de contato foi assumida ser função da deformação dos corpos, possuindo duas regiões com comportamentos distintos. Estes modelos foram considerados contínuos, de forma que a força de contato na iteração atual pode ser representada por uma expansão em série de *Taylor* da força no instante anterior. Para a simulação temporal, o método de Newmark foi utilizado. Os autores relatam boa concordância com resultados experimentais disponíveis para este problema. Outro trabalho que também faz uso da expansão em série de *Taylor* da força de contato foi realizado por Knudsen e Massih (2000), no qual os autores estudaram o desgaste nas barras reguladoras do reator nuclear, provocado por vibro-impacto.

Dumont (2002) investigou o comportamento de uma viga engastada-livre que impacta contra dois obstáculos rígidos como mostrado na Figura 2.2, na determinação da resposta temporal diferentes esquemas de integração temporal foram utilizados, tais como: diferença finita para trás (backward), método de *Runge – Kutta* e o método $\alpha - HHT$. Em suas conclusões os autores afirmam que o método $\alpha - HHT$ se mostrou mais adequado ao problema de vibro-impacto, uma vez que este integrador apresentou menor tempo computacional comparado ao método de

Runge – Kutta, sendo de simples implementação e permitindo ainda amortecimento dos modos espúrios de alta frequência ¹. O autor ainda comenta a complexidade observada no movimento da viga, reportando a observação de movimentos irregulares e algumas vezes caótico. O autor ainda relata que o impacto provocou excitação de múltiplas frequências naturais da viga. Por fim, ainda afirma que o número de impactos pode depender do esquema de integração usado e do parâmetro de amortecimento.

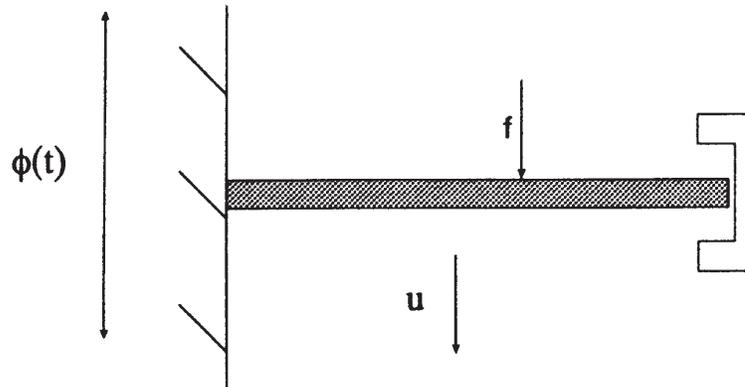


Figura 2.2: Viga engastada livre excitada por um oscilação de base $\phi(t)$ impactando contra dois obstáculos, figura retirada de (Dumont, 2002).

Dando continuidade ao trabalho anterior, Dumont e Paoli (2006) utilizaram o mesmo problema citado anteriormente, no entanto, eles estudaram a convergência da solução do problema. Segundo os autores, pequenos passos de integração são necessários para que a convergência seja alcançada quando o método de Newmark é utilizado. Se um passo grande é utilizado, o sistema tende à instabilidade após um certo período, apesar do problema convergir, a condição de não penetração não é completamente satisfeita. Por fim, os autores apresentam uma modificação para o método de Newmark, visando amenizar os efeitos de instabilidade observados atribuídos ao fato do esquema de integração temporal não conservar a energia durante o impacto, mesmo o sistema físico não sendo dissipativo.

Relacionado às dificuldades na obtenção de uma solução, Khenous *et al.* (2008) afirmam que as instabilidades observadas nos trabalhos anteriormente citados estão relacionadas aos termos da matriz de massa associados ao contorno em que o contato ocorre. Desta forma uma redistribuição da massa do sistema é proposta, onde a inércia da região de contato é redistribuída para o interior do corpo. Um problema elastodinâmico bidimensional foi solucionado para avaliar o desempenho

¹Modos espúrios: são soluções originadas por erros numéricos e não representam a física do problema

desta modificação. Diferentes métodos de integração foram utilizados, com e sem a modificação proposta. Segundo os autores, os métodos com a redistribuição de massa apresentaram melhor conservação da energia do sistema e ainda redução nas oscilações da tensão e do deslocamentos da região de contato. Segundo os autores isso ocorre porque a redistribuição de massa leva a um melhor condicionamento do sistema. As Figuras 2.3 e 2.4 mostram os gráficos da pressão de contato e da energia do sistema para o problema elastodinâmico resolvido por Khenous *et al.* (2008).

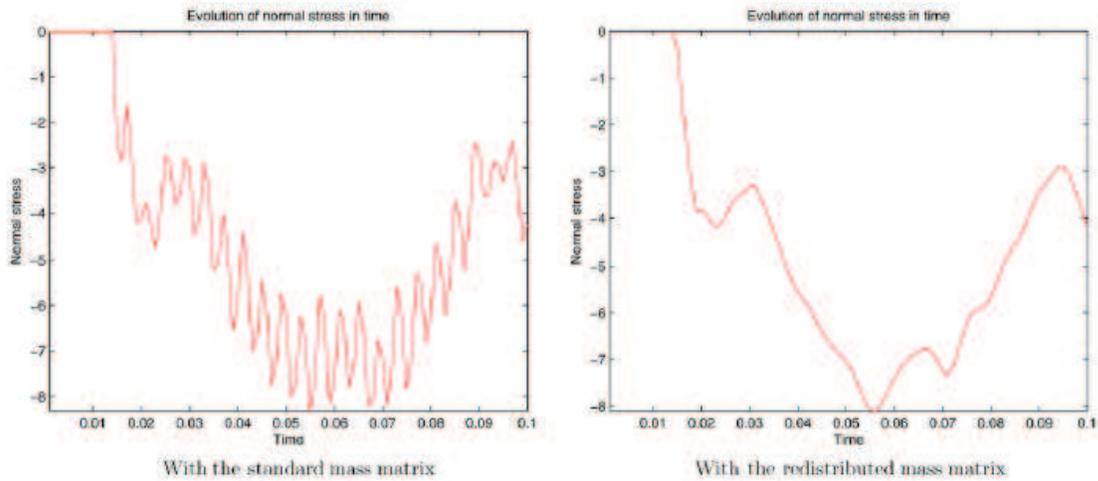


Figura 2.3: Redução das oscilações da tensão de contato utilizando o método da redistribuição de massa e *Newmark* com $\Delta t = 1 \times 10^{-3} s$, (Khenous *et al.*, 2008).

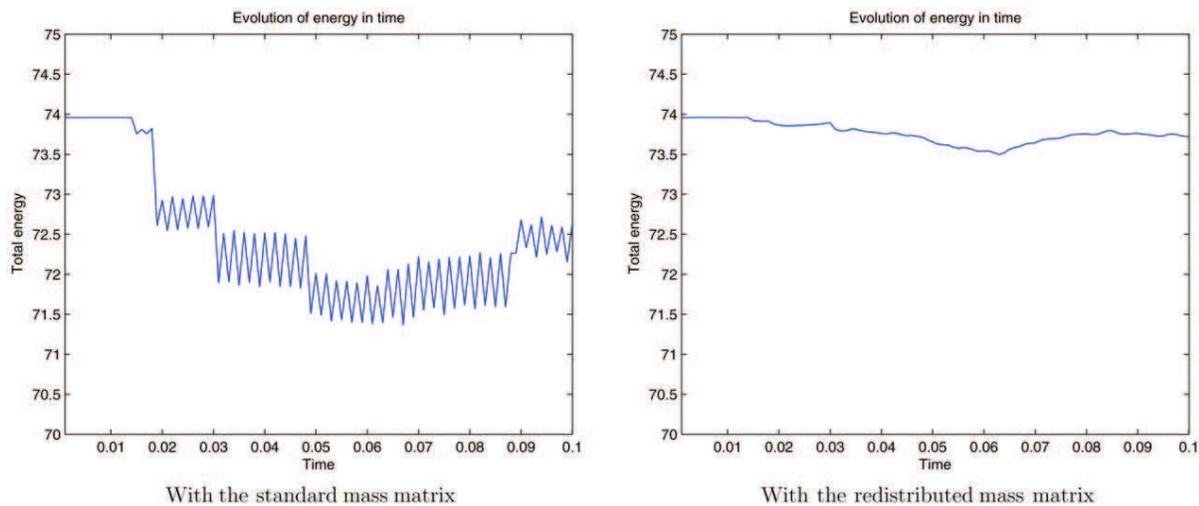


Figura 2.4: Conservação da energia do sistema utilizando o método da redistribuição de massa e *Newmark* com passo de $1 \times 10^{-3} s$, (Khenous *et al.*, 2008).

No caso sem a redistribuição de massa, os modos espúrios surgem perturbando a solução do

sistema, como pode ser visto nos gráficos da esquerda nas Figuras 2.3 e 2.4 respectivamente. No entanto, mesmo com a redistribuição de massa, o sistema ainda não conserva a energia, como pode ser visto no gráfico da direita da Figura 2.4.

Pozzolini *et al.* (2011) estudaram o problema de uma viga engasta-livre que impacta contra dois obstáculos rígidos utilizando diferentes métodos de integração com a adição de uma lei de impacto na forma de um coeficiente de restituição. No entanto, os resultados mostram que para um impacto conservativo com coeficiente de restituição unitário, a energia do sistema não é conservada. Apesar do sistema não apresentar divergência, as oscilações na região do contato ainda estão presentes. Por outro lado, o coeficiente de restituição menor que a unidade permite introduzir alguma perda de energia durante o impacto, podendo ser uma boa alternativa para representar o caso onde a dissipação de energia devido à colisão deve ser considerada. A Figura 2.5 mostra o gráfico do deslocamento da viga obtido por Pozzolini *et al.* (2011).

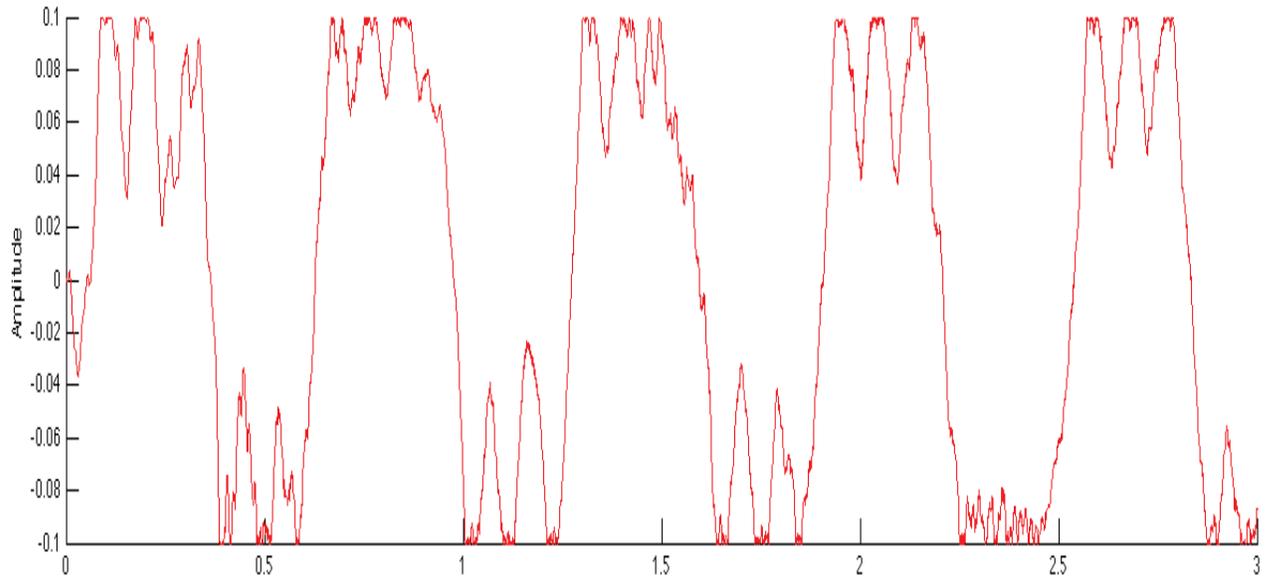


Figura 2.5: Deslocamento da viga impactando contra dois obstáculos utilizando método de Newmark com coeficiente de restituição zero e passo de 1×10^{-4} s, o eixo vertical é a amplitude [m] e o eixo horizontal é o tempo em [s], figura retirada de Pozzolini *et al.* (2011).

O processo de vibro-impacto os corpos entram em contato e se separam inúmeras vezes. Sendo necessário utilizar um processo numérico de integração da equação do movimento para obter a resposta temporal do sistema. Segundo (Deuffhrd *et al.*, 2008), o desenvolvimento de esquemas eficientes e estáveis ainda é um desafio, devido principalmente à forma de avaliação da condição de não penetração na interface de contato. Sua avaliação inadequada pode levar a oscilações espúrias na interface de contato, estas são oscilações que surgem por erros numéricos, deteriorando

a precisão da solução obtida, além de geralmente aumentar o tempo computacional consideravelmente. Segundo Laursen (2003), os efeitos das interações de impacto na estabilidade numérica da análise dinâmica podem ser a primeira vista difícil de contornar, mesmo em situações onde a não linearidade é provocada apenas pelo contato. Em problemas envolvendo mais não linearidades, acredita-se que estes efeitos sejam mais pronunciados.

No fenômeno de vibro-impacto, diversas questões estão presentes como o contato, a dinâmica do sistema e os esquemas de integração temporal. Desta forma, estes assuntos serão abordados mais detalhadamente nas próximas seções, buscando uma melhor compreensão do fenômeno de vibro-impacto.

3 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

3.1 Modelo de viga

O modelo estrutural de viga desenvolvido por *Euler – Bernoulli* é um modelo unidimensional onde o comprimento L é muito maior que as dimensões da seção transversal. As seguintes hipóteses cinemáticas são admitidas:

- O carregamentos admitidos são as cargas concentradas ou distribuídas na direção transversal e momentos concentrados na direção normal ao plano da viga;
- Pequenas deflexões e rotações;
- A viga é esbelta, ou seja, o comprimento (L) é muito maior que a espessura (h);
- Somente esforços de flexão são considerados;
- Dada uma seção plana e perpendicular à linha de referência na configuração indeformada, esta permanecerá plana e perpendicular à linha de referência na configuração deformada, sofrendo apenas uma rotação θ_z . Desta forma, este modelo não considera o efeito do cisalhamento transversal;
- Em uma fibra vertical não ocorre extensão ou compressão nesse sentido.

A Figura 3.1 mostra a cinemática de uma viga fletida onde as hipóteses cinemáticas adotadas podem ser visualizadas.

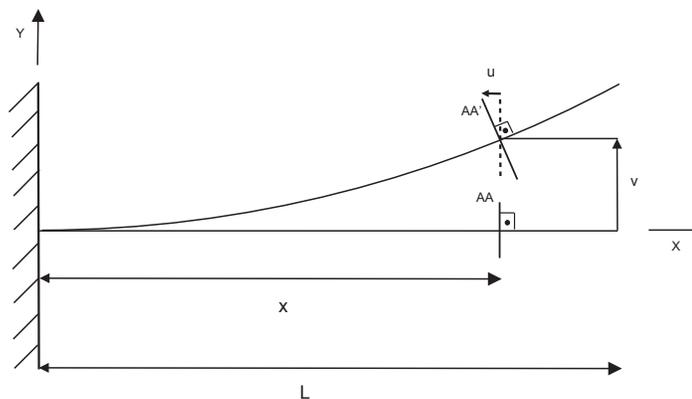


Figura 3.1: Cinemática da viga de *Euler – Bernoulli*

As deformações sofridas pela viga quando submetida aos esforços compatíveis com as hipóteses adotadas são dadas pelo tensor de deformações *infinitesimal*. Que é função do campo de deslocamento \mathbf{u} e v da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) = \begin{bmatrix} -y \frac{d^2 v}{dx^2} & \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} - \frac{dv}{dx} \right) & 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} - \frac{dv}{dx} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

assim a componente do tensor de deformações que não é nula é a componente ϵ_{xx} , dada por:

$$\epsilon_{xx} = -y \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (3.7)$$

Utilizando o princípio do trabalho virtual, que diz que um corpo deformável está em equilíbrio se a soma do trabalho virtual externo com o trabalho virtual interno é zero para os deslocamentos virtuais $\delta \bar{v}$ que satisfazem as equações cinemáticas e condições de contorno cinemáticas, ou seja, para $\delta \bar{v}$ que sejam cinematicamente admissíveis. Assim escrevendo na forma integral tem-se:

$$\int_{\mathcal{B}} \delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}} : \boldsymbol{\sigma} dV + \int_{\mathcal{B}} \rho \delta \bar{v} \cdot \ddot{\mathbf{u}} dV - \int_{\mathcal{B}} \delta \bar{v} \cdot \mathbf{b} dV - \int_S \delta \bar{v} \cdot \mathbf{t} dS = 0 \quad (3.8)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor de tensões de *Cauchy*, \mathbf{b} é a carga de corpo e $\rho \ddot{\mathbf{u}}$ é a força de inércia, \mathbf{t} é o vetor de cargas de superfície aplicadas no contorno da viga, \mathbf{p}_i é o vetor das cargas concentradas aplicadas no contorno da viga e $\delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}}$ são as deformações virtuais dada pela seguinte relação:

$$\delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{1}{2} (\nabla \delta \bar{\mathbf{v}} + \nabla \delta \bar{\mathbf{v}}^T) \quad (3.9)$$

a componente das deformações virtuais não nula é $\delta \bar{\epsilon}_{xx}$, dada por:

$$\delta \bar{\epsilon}_{xx} = -y \frac{d^2 \delta \bar{v}}{dx^2} \quad (3.10)$$

O tensor de tensões de *Cauchy* $\boldsymbol{\sigma}$ pode ser relacionado com o tensor de deformações por meio do tensor de elasticidade \mathbf{C} . Assumindo que o material seja linear elástico e isotrópico. Assim o tensor de tensões $\boldsymbol{\sigma}$ relaciona-se com as deformações $\boldsymbol{\epsilon}$, da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon} \quad (3.11)$$

para a viga a componente não nula do tensor de elasticidade está na direção xx , dada por:

$$\sigma_{xx} = C_{xx}\epsilon_{xx} \quad (3.12)$$

As cargas externas aplicadas compatíveis com o modelo de viga são: uma carga transversal distribuída ao longo do comprimento da viga denominada de $q(x)$ que representa um carga de corpo, forças e momentos concentrados. A Figura 3.3 mostra os esforços que podem ser aplicados ao modelo de viga.

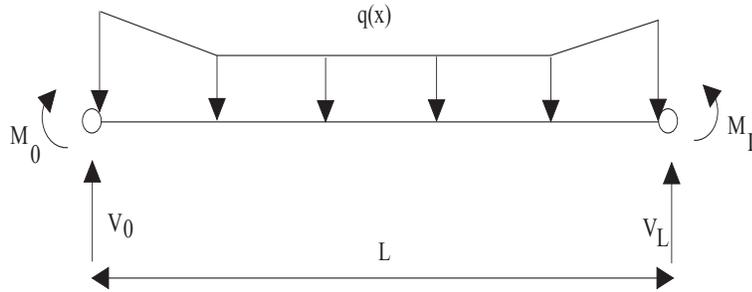


Figura 3.3: Esforços externo atuantes na viga .

Substituindo a Equação (3.7) na Equação (3.8) juntamente com as cargas aplicadas ao longo do contorno da viga, sendo o contorno \mathcal{S} da viga definido pelo intervalo $[0, L]$ e o diferencial de volume dado por $dV = A dx$ tem-se:

$$\int_0^L EI \frac{d^2 \delta v}{dx} \frac{d^2 v}{dx^2} dx + \int_0^L \rho \delta v \ddot{v} A dx - \int_0^L \delta v q(x) dx - [V_L - V_0] \delta v + [M_L - M_0] \delta \theta = 0 \quad (3.13)$$

$$I = \int_A y^2 dA \quad (3.14)$$

A Equação (3.13) representa a equação do movimento para o modelo de viga de *Euler – Bernoulli* na forma variacional também conhecida como forma fraca (onde os requisitos de continuidade do campo em questão são reduzidos) da equação do movimento, respeitando as hipóteses definidas anteriormente.

Na próxima seção a discretização espacial da equação do movimento da viga de *Euler – Bernoulli* na forma fraca é feita utilizando o método dos elementos finitos.

3.2 Discretização das equações do movimento

Para resolver a forma integral da equação do movimento da viga na forma fraca, obtida utilizando o método dos trabalhos virtuais utiliza-se o método de elementos finitos, onde o domínio é dividido em m subdomínios iguais chamados de elementos, onde os campos de deslocamento $v(x)$, o campo de deslocamento virtual $\delta v(x)$ e as acelerações \ddot{v} são aproximados por uma combinação linear das funções $N(x)$, denominadas de funções de forma dos elementos. Os coeficientes desta combinação são os valores de deslocamentos e acelerações em certos pontos denominados de nós, sendo representados pelos vetores de deslocamentos, acelerações e deslocamentos virtuais generalizados \mathbf{d} , $\ddot{\mathbf{d}}$ e $\delta \mathbf{d}$. Desta forma os campos de deslocamentos podem ser representados pela seguinte relação:

$$v(x) = \mathbf{N}(x) \mathbf{d} \quad (3.15)$$

$$\delta v(x) = \mathbf{N}(x) \delta \mathbf{d} \quad (3.16)$$

$$\ddot{v} = \mathbf{N}(x) \ddot{\mathbf{d}} \quad (3.17)$$

O elemento utilizado para discretizar a estrutura é o elemento finito de viga de dois nós, apresentado na Figura 3.4:

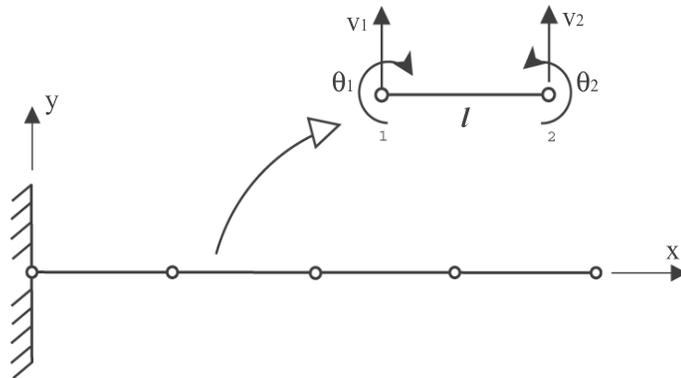


Figura 3.4: Elemento de viga de dois nós.

Cada nó do elemento de viga possui dois graus de liberdade, um grau de liberdade de deslocamento transversal v e um grau de liberdade de rotação θ , o elemento possui um comprimento l que é dado pela distância entre o nós 1 e 2 respectivamente. Os vetores de deslocamento e aceleração

nodais são:

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad e \quad \ddot{\mathbf{d}} = \begin{Bmatrix} \ddot{v}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{v}_2 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} . \quad (3.18)$$

As funções de forma do elemento de viga são as seguintes:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 & H_3 & H_4 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$H_1 = 2 \left(\frac{x}{l} \right)^3 - 3 \left(\frac{x}{l} \right)^2 + 1 \quad (3.20)$$

$$H_2 = l \left[\left(\frac{x}{l} \right)^3 - 2 \left(\frac{x}{l} \right)^2 + \frac{x}{l} \right] \quad (3.21)$$

$$H_3 = -2 \left(\frac{x}{l} \right)^3 + 3 \left(\frac{x}{l} \right)^2 \quad (3.22)$$

$$H_4 = l \left[\left(\frac{x}{l} \right)^3 - \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right] \quad (3.23)$$

Substituindo as equações (3.15), (3.16) e (3.17) na Equação (3.13) tem-se:

$$\sum_{e=1}^m EI \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2 (\delta \mathbf{d}^T \mathbf{N}^T)}{dx^2} \frac{d^2 (\mathbf{N} \mathbf{d})}{dx} dx + \int_{x_1}^{x_2} \rho (\delta \mathbf{d}^T \mathbf{N}^T) (\mathbf{N} \ddot{\mathbf{d}}) A dx - \int_{x_1}^{x_2} (\delta \mathbf{d}^T \mathbf{N}^T) q dx - \delta \mathbf{d}^T \mathbf{p} = 0 \quad (3.24)$$

$$\delta \mathbf{d}^T \left\{ \sum_{e=1}^m E^e I^e \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2 \mathbf{N}^T}{dx^2} \frac{d^2 \mathbf{N}}{dx} dx \mathbf{d} + \rho^e A^e \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dx \ddot{\mathbf{d}} - \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{N} q^e dx - \mathbf{p}^e \right\} = 0 \quad (3.25)$$

sendo $\delta \mathbf{d}^T \neq 0$, temos que a Equação (3.25) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{K} \mathbf{d} - \mathbf{f} = 0 \quad (3.26)$$

$$\mathbf{M} = \mathcal{A}_{e=1}^{nel} \left\{ \rho^e A^e \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dx \right\} \quad (3.27)$$

$$\mathbf{K} = \mathcal{A}_{e=1}^{nel} \left\{ E^e I^e \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2 \mathbf{N}^T}{dx^2} \frac{d^2 \mathbf{N}}{dx^2} dx \right\} \quad (3.28)$$

$$\mathbf{f} = \mathcal{A}_{e=1}^{nel} \left\{ \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{N}^T q^e dx + \mathbf{p}^e \right\} \quad (3.29)$$

$$\mathbf{p}^e = \begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} \quad (3.30)$$

onde operador $\mathcal{A}_{e=1}^{nel}$ representa operação de *assembly*, obtendo as matrizes de massa e rigidez, assim como o vetor de carregamento, através da contribuição de cada elemento finito, mais detalhes podem ser encontrados em Bathe (1982); Cook (1995); Chandrupatla e Belegundu (2002). A Equação (3.26) é denominada equação do movimento discretizada, onde \mathbf{M} representa a matriz de massa da estrutura, \mathbf{K} é a matriz de rigidez e \mathbf{f} é o vetor de carga aplicada e \mathbf{N} é matriz das funções de forma do elemento de viga, q^e é a carga distribuída que atua no elemento, \mathbf{p}^e são as forças e os momentos que atuam nos nós do elemento. As propriedades ρ^e , A^e , E^e e I^e são respectivamente: a massa específica do elemento, a área da seção transversal do elemento, o módulo de elasticidade do material e o momento de inércia de área da seção transversal. As coordenadas x_1 e x_2 representam a coordenada na direção x dos nós 1 e 2 do elemento de viga.

Realizando as integrações para um elemento tem-se as matrizes elementares de massa \mathbf{M}^e e rigidez \mathbf{K}^e , segundo Bathe (1982):

$$\mathbf{M}^e = \frac{\rho^e A^e l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

$$\mathbf{K}^e = \frac{E^e I^e}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Segundo Bathe (1982), é necessário incluir o termo de dissipação de energia na Equação (3.26). Este termo é denominado de força de amortecimento e é proporcional às velocidades nodais \dot{d} na forma $D \dot{d}$, onde D é denominada de matriz de amortecimento da estrutura. Onde a forma usual de representar a matriz de amortecimento em análise numéricas é a forma onde esta é proporcional a matriz de rigidez K e a matriz de massa M , sendo escrita da seguinte forma:

$$D = \mathcal{A} M + \mathcal{B} K \quad (3.33)$$

Mais detalhes sobre a matriz D podem ser obtido em Bathe (1982) e Hughes (2000). Assim tem-se a equação do movimento com amortecimento:

$$M \ddot{d} + D \dot{d} + K d - f = 0 \quad (3.34)$$

Esta equação é a equação do movimento da viga discretizada por elementos finitos. A partir da solução desta é possível obter a resposta do sistema em qualquer instante t como será visto nas etapas seguintes.

4 CONTATO

O problema de contato é não linear, onde a não linearidade ocorre devido às mudanças das condições de contorno durante o movimento, (Bathe, 1982; Zienkiewicz e Taylor, 2000).

Problemas que envolvem contato são de grande importância na indústria, especialmente os relacionados à engenharia mecânica e civil, mas também em aplicações ambientais e médicas. Alguns exemplos de problemas de contato são: a interação da fundação de construções com o solo, ligações de membros estruturais, impacto de veículos contra estruturas, projeto de engrenagens, processos de conformação de material, usinagem e contato entre pneu e a pista. Em sistemas onde o fenômeno de vibro-impacto está presente, o problema de contato também se torna de interesse, sendo necessário solucionar este problema para obter a resposta dinâmica do sistema em cada instante.

Quando os corpos entram em contato, condições cinemáticas devem ser impostas de modo a impedir a interpenetração desses corpos. Tais condições são denominadas de condições de não penetração. Em adição a essa condição deve existir ainda a condição de continuidade dos esforços entre os corpos durante o contato persistente.

Segundo Zienkiewicz e Taylor (2005), a solução de problemas de contato envolve as seguintes etapas: o desenvolvimento de um algoritmo para identificar as regiões de contato entre os corpos, o método de aplicação das condições apropriadas para prevenir a penetração, e a transmissão coerente dos esforços entre os corpos. A Figura 4.1 ilustra o que acontece durante o contato entre um corpo elástico e um corpo rígido.

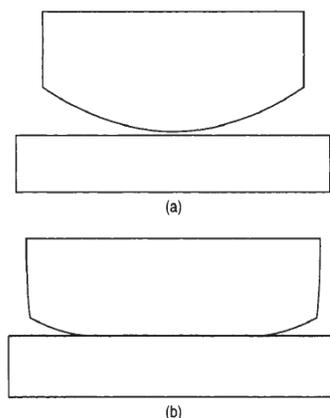


Figura 4.1: Contato entre dois corpos: *a*) sem contato, *b*) contato, (Zienkiewicz e Taylor, 2005).

Na Figura 4.1 *a*), os corpos não estão em contato e as condições de contorno são especificadas pela condição de esforço de contato zero. Na figura 4.1 *b*), os corpos estão em contato ao longo de uma parte do segmento do contorno e desta forma as condições de contorno devem ser inseridas para evitar a penetração e garantir que os esforços sejam consistentes.

Ao longo da superfície de contato, diferentes tipos de interações podem ser considerados e modelados, sendo uns mais simples e outros mais complexos. No caso mais simples, tem-se o contato sem atrito, em que somente a componente normal dos esforços é diferente de zero. Uma condição mais complexa, ocorre quando esforços tangenciais à superfície de contato são gerados pelo atrito entre as superfícies em contato.

Para resolver o problema de contato utilizando métodos numéricos de discretização, como o método dos elementos finitos, tem-se que tratar dos seguintes aspectos:

- Detecção do contato;
- Construção dos elementos de contato;
- Aplicações das condições de contato;
- Solução do sistema de equações resultantes.

A detecção das regiões que podem entrar em contato é o primeiro passo na solução do problema de contato. O objetivo desta etapa é identificar as regiões onde ambas as superfícies possam interagir no passo atual da solução. Desta forma, o algoritmo de detecção é baseado na identificação das regiões mais próximas. O critério de proximidade é especificado ou é escolhido com base nas condições de contorno e/ou discretização das superfícies de contato. Assim, a cada ciclo da solução as regiões são identificadas. Isso é necessário, pois com a evolução da solução a região de possível contato pode mudar. Segundo (Yastrebov, 2011), a detecção das regiões de possível contato é uma tarefa puramente algorítmica e está fortemente ligada à discretização da interface de contato, .

Os elementos de contato são uma espécie de ponte entre superfícies localmente separadas, mas que podem potencialmente interagir. Cada elemento de contato contém como componentes nós, arestas, segmentos ou partes de ambas as superfícies. A composição destes componentes depende da escolha do método de discretização do contato adotado. Cada elemento de contato tem o seu próprio vetor de incógnitas, vetor residual e matriz tangencial, que são montados juntamente com o vetor de incógnitas e matrizes elementares da estrutura, (Yastrebov, 2011).

Ao utilizar o método dos elementos finitos como técnica de discretização do meio contínuo, algumas dificuldades surgem ao tratar problemas de contato. Segundo Zienkiewicz e Taylor (2005), não é possível um modelo de contato em todos os pontos ao longo do contorno. Isto se deve ao fato

que a representação do contorno em elementos finitos é aproximada e a representação discreta do contorno não corresponde perfeitamente ao contorno real. Assim, em casos de contato bi e tri - dimensionais, onde o contorno dos elementos são linhas e superfícies, podem haver regiões dentro do mesmo elemento que estão em contato e outras que não estão. O modelo de elementos finitos não permite uma representação única das normais entre os dois corpos, ou seja as normais não são contínuas no contorno dos elementos. Assim, para uma mesma região de contato existem diferentes vetores normais, .

Em problemas com pequenas deformações, pequenos deslizamentos e geometria simples, pode-se utilizar malhas onde os nós de uma superfície interagem diretamente com os nós da malha da superfície oposta. Este método é denominado de contato nó-nó. No entanto, se a análise a ser realizada considerar efeitos de grandes deslocamentos, grandes deformações, atrito ou geometrias complexas outros métodos devem ser utilizados. Uma das possibilidades é a utilização dos métodos conhecidos como: nó-segmento e segmento-segmento. Mais detalhes desses métodos podem ser encontrados em Wriggers (2002), Laursen (2003) e Yastrebov (2011).

Como citado anteriormente, a etapa de detecção do contato está relacionada com o processo de discretização. Por exemplo, no caso de discretização nó-nó, a detecção do contato consiste simplesmente em estabelecer os pares de nós mais próximos. Assim, os nós de uma superfície denominada mestre (*master*) forma pares com os nós mais próximos da superfície oposta, denominada de seguidora (*slave*). A Figura 4.2 ilustra essa situação. A facilidade dessa discretização se encontra no fato de que uma vez criados os pares de contato, eles não precisam serem encontrados novamente, pois estes não mudam durante etapa de solução, (Yastrebov, 2011).

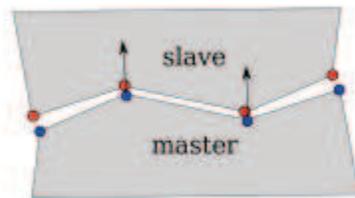


Figura 4.2: Discretização do contato nó-nó, (Yastrebov, 2011).

Para este tipo de discretização da região do contato, os nós do corpo mestre e seguidor devem estar alinhados. Este fato, limita o método para pequenas deformações e pequenos deslizamentos. Para definir se os corpos estão em contato é necessário avaliar a função penetração também chamada de função *gap* nas regiões de possível contato. A função penetração mede a menor distância entre o nó do corpo seguidor e a superfície ou nó do corpo mestre. Em problemas sem atrito, a função penetração é também chamada de função penetração normal, sendo definida pela Equação

(4.1), segundo Wriggers (2002),

$$g_N = (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{n}_1 \quad (4.1)$$

onde \mathbf{x}_2 e \mathbf{x}_1 são as posições na configuração atual (espacial) do corpo seguidor e do mestre respectivamente e \mathbf{n}_1 é a normal unitária do corpo mestre. A posição atual é definida como $\mathbf{x}^k = \mathbf{X}^k + \mathbf{u}^k$, sendo que \mathbf{X}^k é a posição na configuração inicial ou também chamada de material e \mathbf{u}^k é o campo de deslocamento. O índice superior k é utilizado para distinguir os corpos mestre e seguidor, onde o índice 1 indica o corpo mestre e 2 o seguidor. Assim a equação da função penetração pode ser reescrita da seguinte forma:

$$g_N = g_0 + \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \quad (4.2)$$

onde g_0 é a distância entre os corpos na configuração inicial, dada pela diferença entre a posição inicial entre o corpo mestre e o seguidor, ou seja, $g_0 = \mathbf{X}^2 - \mathbf{X}^1$. Então, pela avaliação da função penetração as seguintes situações podem ser identificadas:

$$g_N \begin{cases} > 0 & \text{sem contato} \\ = 0 & \text{contato} \\ < 0 & \text{penetração} \end{cases} \quad (4.3)$$

No caso do corpo mestre ser um corpo rígido, o campo de deslocamento $\mathbf{u}_1 \equiv \mathbf{0}$ e a normal \mathbf{n}_1 é a normal unitária da superfície do corpo rígido, (Wriggers, 2002).

Quando os corpos estão em contato, as restrições cinemáticas devem ser impostas para evitar a interpenetração dos corpos e garantir que a transferência dos esforços aconteça. As restrições cinemáticas para o problema de contato normal sem atrito são também conhecidas como condição de *Hertz–Signorini–Moreau*, (Wriggers, 2002). Quando o problema de contato é visto sob o ponto de vista da teoria de otimização estas condições são também chamadas de condição de *Karush – Kuhn – Tucker*, segundo (Wriggers, 2002) e são representadas em função da penetração g_N e da componente normal da tensão de contato p_N . De acordo com (Wriggers, 2002), estas condições podem ser escritas da seguinte forma:

$$g_N \geq 0 \quad , \quad p_N \leq 0 \quad , \quad p_N g_N = 0. \quad (4.4)$$

Se existe o contato sem penetração, ou seja onde ambas as superfícies estão em contato sem que exista uma invasão de uma superfície sobre a outra, $g_N = 0$ e $p_N = 0$. Se de alguma forma a superfície de um dos corpos for forçada a invadir a outra superfície uma força compressiva $p_N < 0$

irá surgir em ambos os corpos, evitando que a interpenetração aconteça ou seja que $g_N = 0$. De outra forma, se os corpos estão separados então $g_N > 0$ e $p_N = 0$. Inúmeras aproximações podem ser utilizadas para aplicar as condições cinemáticas ao problema discretizado. Os métodos mais conhecidos são: o Lagrangiano, método da penalidade e o método do Lagrangiano Aumentado. Na próxima seção o método da penalidade é apresentado e suas características são discutidas. Detalhes sobre os outros métodos podem ser encontrados nas seguintes referências: Wriggers (2002) e Laursen (2003).

Após impor a condição cinemática ao problema de contato discretizado, obtém-se um conjunto de equações resultantes. Segundo Wriggers (2002), a solução direta desse sistema não é possível devido a restrição de contato, sendo necessário o uso de técnicas de solução iterativas.

4.1 Método da penalidade

O método a ser utilizado neste trabalho para impor a restrição de não penetração dada na Equação (4.4) será o método da penalidade. Segundo Yastrebov (2011), pela simplicidade do método da penalidade, este é um dos métodos mais utilizados para o tratamento de problemas de contato em códigos de elementos finitos comerciais e científicos. Sendo de fácil implementação comparados aos métodos do Lagrangiano e Lagrangiano aumentado, pois apresenta poucas alterações ao sistema de equações original.

O método da penalidade é baseado em uma aproximação da satisfação dessas condições. Segundo Yastrebov (2011), no método da penalidade assume-se que a pressão de contato é uma função contínua da penetração, sendo representada pela relação entre a função penetração e um parâmetro ϵ_N , dada pela seguinte relação:

$$p_N(g_N) = \epsilon_N (\langle g_N \rangle) = \begin{cases} 0 & , \quad g_N > 0 \\ \epsilon_N g_N & , \quad g_N \leq 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

onde ϵ_N é uma constante positiva, assim, a condição de não penetração é cumprida para valores da função penetração positivos. No entanto, de acordo com as relações entre a pressão de contato e a função penetração dada pela Equação (4.5), segundo Yastrebov (2011). O contato sem penetração ocorre somente para o valor igual à zero, se o valor da função penetração é negativo numericamente existiria uma interpenetração dos corpos violando a condição de não penetração, desta forma uma força de contato surge e esta é proporcional ao valor numérico da função penetração. Desta forma, quanto maior a força de contato menor será a penetração e mais próximo da condição ideal deve-se estar. Assim no método da penalidade as superfícies em contato não estão restritas à penetração,

ou seja, que os corpos não podem penetrar um no outro, mas que existe uma resistência a que isso aconteça (Yastrebov, 2011) representada por:

$$\begin{cases} g_N > 0, p_N = 0 & , \quad g_N p_N = 0 \\ g_N < 0, p_N = \epsilon_N (g_N) < 0, & g_N p_N \neq 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

Quanto maior for o valor da função penetração dos corpos maior será a reação de resistência a ela. Desta forma a condição de não penetração é satisfeita de forma aproximada, sendo que a função penetração irá sempre apresentar um valor menor que zero, este valor será tão pequeno quanto maior for ϵ_N , no entanto se ϵ_N for muito grande os corpos se separaram. A interpretação física do método da penalidade leva a uma representação da superfície do corpo mestre como uma série de molas com comprimento inicial zero, que pode alongar para dentro do corpo na direção normal (Yastrebov, 2011), e conforme ϵ_N aumenta ajusta-se a penetração dos corpos até que o equilíbrio dos corpos é atingido.

A força de resistência à penetração dos corpos dadas pelas molas segue a lei $F_R = \epsilon_N (g_N)$, onde F_R é a reação que surge pelo alongamento da mola dado pela penetração g_N . Da mesma forma, a superfície do corpo mestre é suposta ser descrita por meio de molas não deformadas. Assim, uma vez que estas molas imaginárias são fixadas à superfície do corpo mestre, elas transferem essa força de resistência à ela (Yastrebov, 2011). A energia acumulada por essas molas devido à sua deformação é:

$$W = \int_0^{g_N} \epsilon_N (g_N) dg_N = \frac{1}{2} \epsilon_N (g_N)^2 \quad (4.7)$$

que é semelhante a energia acumulada por uma mola linear de rigidez ϵ_N , devido a um deslocamento g_N . Este método é denominado de método da penalidade padrão também chamado de linear segundo (Yastrebov, 2011).

A hipótese da dependência da pressão de contato com a penetração permite representar o trabalho das forças de contato como a integral do produto da pressão de contato p_N pela penetração virtual δg_N , análogo ao trabalho de uma tração prescrita (Yastrebov, 2011).

A contribuição de contato para o equilíbrio do trabalho virtual pode ser escrita da seguinte forma:

$$\delta W_c = \int_{\Gamma_c} \epsilon_N (g_N) \delta g_N d\Gamma_c \quad (4.8)$$

sendo que a integral representa o trabalho virtual do contato, não só devido a zona de contato ativa,

mas ao longo de toda zona de contato. A integral do trabalho de contato é análoga ao trabalho virtual devido à deformação das molas imaginárias na interface de contato (Yastrebov, 2011).

A Figura 4.3 apresenta a representação gráfica da deformação dessas molas imaginárias.

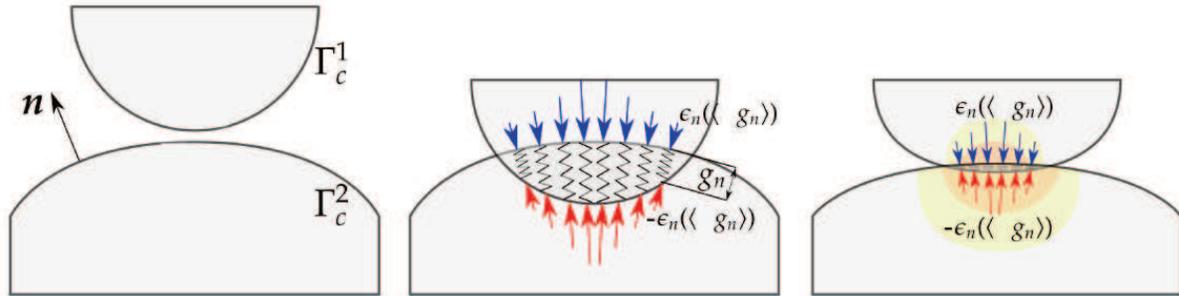


Figura 4.3: Interpretação da mola virtual associada ao método da penalidade Yastrebov (2011).

Na Figura 4.3 a ilustração à esquerda mostra a configuração dos corpos separados. A ilustração do meio mostra a configuração após a ocorrer uma penetração g_N , o que resulta em uma força de contato $p_N = \epsilon_N(g_N)$, como mostrado pelas setas vermelhas sobre o corpo mestre e em azul sobre o corpo seguidor. O ponto de equilíbrio é estabelecido sendo representado pela ilustração da direita na Figura 4.3

No entanto, a desvantagem do método da penalidade está na representação aproximada da condição de não penetração, que pode ser visualizada na Figura 4.4, onde está mostrada a comparação da aproximação da condição de não penetração (Hertz-Signorini-Moreau ou Karush-Kuhn-Tucker) obtida pelo método da penalidade representada pela linha tracejada, e a completa satisfação das mesmas condições representada pelo negrito nos eixos vertical p_N e no eixo horizontal g_N . Nesta figura a linha sólida representa a condição ideal de penetração e a linha tracejada a aproximação pelo método da penalidade.

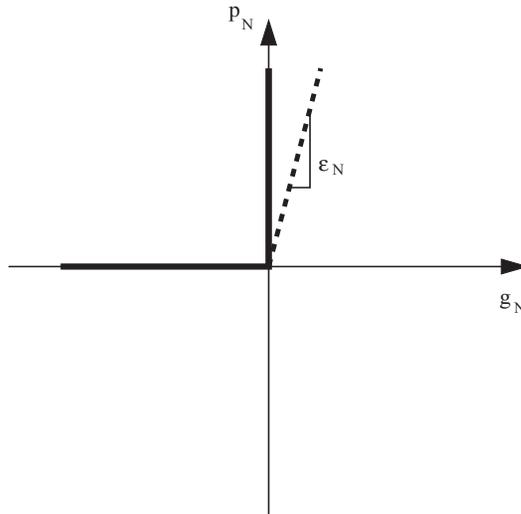


Figura 4.4: Ilustração da aproximação das condições de impenetrabilidade pelo método da penalidade, Laursen (2003).

A condição de não penetração é somente satisfeita perfeitamente quando $\epsilon_N \rightarrow \infty$, o que é impossível em cálculos computacionais pelo fato do mau condicionamento provocado pelo grande valor do penalizador. Assim, o método da penalidade apresenta a desvantagem de não representar perfeitamente a condição de não penetração. No entanto, o método da penalidade é bastante difundido, e vem sendo aplicado com boa apreciação em problemas lineares elásticos, segundo Laursen (2003).

Segundo Yastrebov (2011), o método de penalidade linear é uma ótima escolha do ponto de vista numérico, uma vez que não introduz não linearidades adicionais ao problema. Ainda segundo Yastrebov (2011), a função de penalidade linear não é ótima do ponto de vista de precisão, podendo outras funções não lineares serem utilizadas. Mais detalhes do método de penalidade com funções não lineares podem ser encontrados no trabalho de Yastrebov (2011). Esse método de penalidade com funções não lineares pode ser relacionado aos modelos de leis constitutivas (Wriggers, 2002). Na próxima subseção, diferentes modelos de leis constitutivas para força de contato são apresentadas.

4.2 Modelos de rigidez de contato

Em algumas situações em problemas de contato, leis constitutivas para pressão ou força de contato são utilizadas para representar os esforços na região de contato, tanto para casos mais simples onde a pressão de contato depende apenas da penetração, como para casos mais complexos

onde a pressão de contato depende das condições micromecânicas da superfície, (Wriggers, 2002).

Segundo Wriggers (2002), os modelos constitutivos onde a pressão ou força de contato são proporcionais à penetração, podem ser interpretados como o método de penalidade com uma função penalizadora não linear. Assim, elas também podem ser interpretadas como molas não lineares adicionadas à região de contato. Frequentemente, estes modelos constitutivos também são chamados de modelos de rigidez de contato. A seguir alguns modelos constitutivos são apresentados.

Segundo Ibrahim (2009), a lei de contato de Hertz relaciona a tensão localizada que é desenvolvida com a curvatura das duas superfícies em contato e a pequena deformação originada pela aplicação do carregamento. A força de contato pode ser escrita por:

$$F_C = k (g_N)^n \quad (4.9)$$

onde k é a constante de rigidez de contato que é uma função das propriedades elásticas e da geometria dos corpos em contato, o valor de n para o contato elástico pontual é $\frac{3}{2}$ e para um contato plano o valor de n está no intervalo de $\frac{3}{2}$ a $\frac{7}{2}$, (Ibrahim, 2009).

A rigidez do contato pode ser obtida por modelos analíticos ou experimentais, por exemplo, como no modelo de contato esférico. De acordo com Ibrahim (2009), a Equação (4.9) é válida enquanto a área de contato é pequena se comparada à geometria dos corpos e a superfície dos corpos é perfeitamente lisa de tal maneira que o contato não está associado com o atrito e o materiais dos corpos em contato são considerados elásticos lineares e isotrópicos.

No modelo de energia potencial de contato, a força de contato é obtida pela derivada de um potencial de contato Π em função da penetração g_N . De modo que esse potencial Π seja convexo e diferenciável, Park *et al.* (2011). Assim a força de contato nesse modelo é a dada pela seguinte relação, (Ibrahim, 2009):

$$F_c = \frac{d\Pi_C(g_N)}{dg_N} \quad (4.10)$$

$$\Pi_C(x) = k (g_N)^{\frac{2m+2}{2n+1}} \quad (4.11)$$

onde k é a rigidez de contato, os índices $m = 0, 1, 2, \dots$ e $n = 0, 1, 2, \dots$ com $m \geq n$.

Outro modelo muito utilizado é o modelo linearmente proporcional. Este modelo assume que a força de contato varia com uma proporção constante com o aumento da penetração dos corpos, como ilustra a Figura 4.5, onde o eixo horizontal é tomado como $-g_N$ para facilitar a visualização.

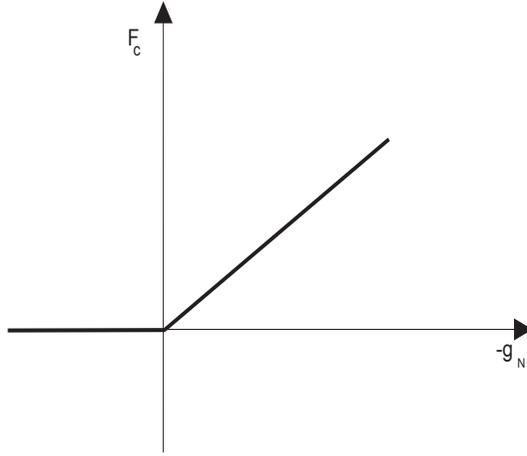


Figura 4.5: Modelo de força de contato proporcional.

A representação deste modelo é dada por:

$$F_c = \begin{cases} k (g_N) & , g_N \leq 0 \\ 0 & , g_N > 0 \end{cases} \quad (4.12)$$

e segundo Wriggers (2002), este modelo é idêntico ao modelo de penalidade padrão.

No modelo proporcional suavizado, tem-se dois comportamentos para força de contato. Para o valor da penetração dentro do intervalo de $-e < g_N < 0$ o modelo comporta-se como uma parábola e quando a penetração $g_N < -e$ o modelo passa a se comportar proporcionalmente com a penetração, segundo Park *et al.* (2011). Assim tem-se a seguinte expressão para a força de contato:

$$F_c = \begin{cases} \text{sign}(g_N) \frac{k}{2} (g_N)^2 & , -e < g_N < 0 \\ k e (g_N + \frac{e}{2}) & , g_N \leq -e \\ 0 & , g_N \geq 0 \end{cases} \quad (4.13)$$

onde $\text{sign}(g_N)$ é a função que retorna o sinal da penetração g_N . A Figura 4.6 ilustra o comportamento da força de contato com a penetração g_N , e o eixo horizontal é tomado como $-g_N$ para facilitar a visualização .

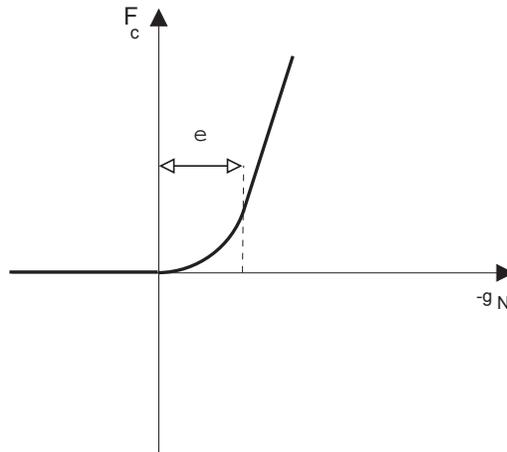


Figura 4.6: Modelo de força de contato com suavização na região e .

O modelo proporcional suavizado apresenta duas transições, a primeira entre a condição sem contato para condição de contato com a força de contato variando de forma parabólica. E a segunda onde a força de contato passa do modelo parabólico para o modelo de força de contato proporcional. A presença das duas transições podem provocar dificuldade na convergência da solução, além da maior dificuldade na implementação comparado aos modelos anteriores.

O modelo cúbico vem sendo utilizado principalmente para representar suportes em problemas de vibro-impacto envolvendo varetas de combustível nuclear. O modelo de força de contato cúbica é dado pela Equação (4.14) e seu comportamento em função da penetração é mostrado na Figura 4.7. Novamente o eixo horizontal é tomado como $-g_N$ para facilitar a visualização.

$$F_c = \begin{cases} k (g_N)^3 & , \quad g_N \leq 0 \\ 0 & , \quad g_N > 0 \end{cases} . \quad (4.14)$$

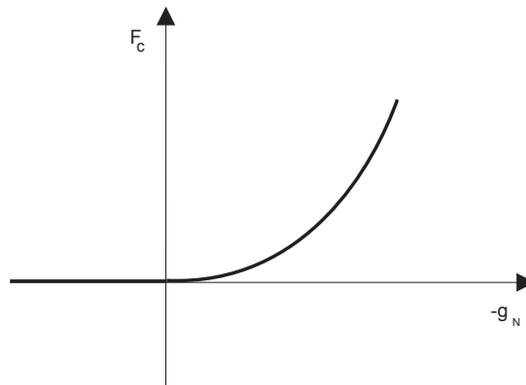


Figura 4.7: Modelo de força de contato cúbica.

Na literatura encontram-se modelos mais complexos em que a força de contato pode também considerar efeitos de dissipação, e a força de contato passa a ser uma função que depende do deslocamento e da velocidade tais como:

1. Força de contato com amortecimento linear:

$$F_c = k g_N (1 + \alpha \dot{g}_N) \quad (4.15)$$

2. Força de contato com amortecimento quadrático:

$$F_c = k g_N (1 + \alpha \dot{g}_N |\dot{g}_N|) \quad (4.16)$$

3. Força de contato de *Hertz* com amortecimento:

$$F_c = k (g_N)^{\frac{3}{2}} (1 + \dot{g}_N) \quad (4.17)$$

onde k é a rigidez de contato, α é uma contante utilizada para regular o amortecimento, g_N é a penetração e \dot{g}_N é a velocidade de penetração dos corpos. Mais detalhes desses modelos podem ser encontrados em Ibrahim (2009).

4.3 Termos de contato

O termo relacionado ao trabalho dos esforços de contato, que surgem quando os corpos interagem entre si, devem ser adicionados à equação do movimento do sistema. No entanto, nesta seção este termo será tratado separadamente. O termo de contato normal origina-se das condições cinemáticas impostas quando os corpos entram em contato. Assim, esforços surgem na região de contato e seu trabalho pode ser representado pela Equação (4.18), segundo Wriggers (2002):

$$\delta W_C = \int_{\Gamma_c} p_N \delta g_N d\Gamma_c \quad (4.18)$$

onde p_N é a força de contato normal para o caso unidimensional e δg_N é a variação da função penetração. A forma da força p_N é geralmente em função da penetração g_N , para o método da penalidade. De uma forma geral p_N pode ser escrito como:

$$p_N = \epsilon_N (g_N)^n \quad (4.19)$$

onde c_N e n são parâmetros constitutivos.

Neste trabalho considera-se os casos em que o contato entre os corpos pode ocorrer como um contato pontual, onde o nó de um corpo entra em contato com o nó do outro. O contato nó-nó é válido para deslocamentos relativos pequenos entre as superfícies em contato. No entanto, para ser possível esta abordagem, a malha de elementos finitos deve ser construída de forma que os nós do contorno do corpo mestre estejam alinhados com os nós do corpo seguidor.

A determinação de que nós irão entrar em contato é dada simplesmente pela comparação da posição de cada par de nó, ou seja, se o nó do corpo mestre está alinhado com o nó do corpo seguidor. A Figura 4.8 ilustra isso.

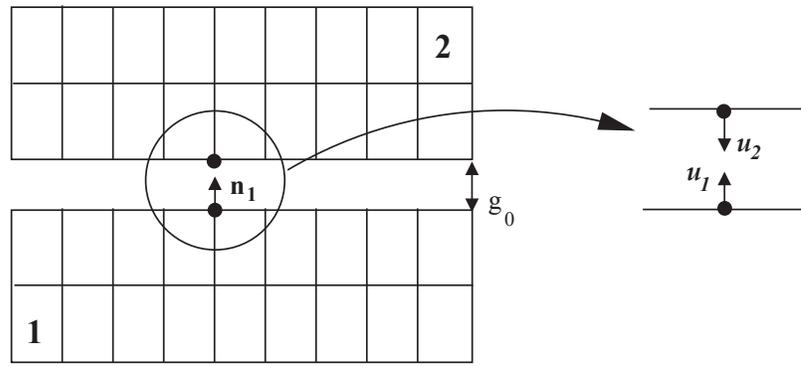


Figura 4.8: Contato nó-nó.

Para pequenas deformações e pequenos deslocamentos a mudança na normal é negligenciada. Desta forma, a variação da função penetração é dada pela seguinte relação:

$$\delta g_N = (\delta \mathbf{u}_2 - \delta \mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{n}_1 \quad (4.20)$$

e assim o termo do trabalho das forças de contato pode ser expresso como:

$$\delta W_C = \int_{\Gamma_c} \epsilon_N (g_N)^n (\delta \mathbf{u}_2 - \delta \mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{n}_1 d\Gamma_c \quad (4.21)$$

onde Γ_C representa a superfície de contato.

4.4 Discretização dos termos de contato

Para o caso em que o contato dos corpos é considerado nó-nó, as restrições de contato estarão ativas em n_c números de nós, onde n_c é o número de pares de contatos ativos. Assim o termo de

força de contato, pode ser escrito diretamente com os valores de deslocamentos nodais dos pares de contato ativos da seguinte forma, segundo Wriggers (2002):

$$\delta W_C = \int_{S_c} \epsilon_N (g_N)^n \delta g_N dS_c \quad (4.22)$$

$$= \mathcal{A}_{i=1}^{n_c} \epsilon_n (g_N^i)^n \delta g_N^i \quad (4.23)$$

$$= \mathcal{A}_{i=1}^{n_c} (\delta \mathbf{d}^i)^T \epsilon_N (g_N^i)^n \mathbf{c}_i \quad (4.24)$$

onde ϵ_N representa uma rigidez de contato, $\mathcal{A}_{i=1}^{n_c}$ representa a operação de *assembly* dos termos de contato par a par, e os vetores \mathbf{c}_i e $\delta \mathbf{d}$ são dados por:

$$\mathbf{c}_i = \begin{Bmatrix} -n_1^i \\ n_1^i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (4.25)$$

$$\delta \mathbf{d}^i = \begin{Bmatrix} \delta d_1^i \\ \delta d_2^i \end{Bmatrix} \quad (4.26)$$

Substituindo as equações (4.25) e (4.26) na Equação (4.22), tem-se:

$$\delta W_C = \mathcal{A}_{i=1}^{n_c} \left\{ \begin{matrix} \delta d_1^i & \delta d_2^i \end{matrix} \right\} \epsilon_N (g_N^i)^n \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (4.27)$$

sendo $\delta d_1^1 = \delta d_2^2 \neq 0$ e $p_N^i = \epsilon_N (g_N^i)^n$ uma força de contato nodal, onde a função penetração g_N pode ser escrita em relação aos deslocamentos nodais d_2^i e d_1^i como:

$$g_N^i = g_0^i + (d_2^i - d_1^i) \quad (4.28)$$

o vetor resíduo de contato \mathbf{r}_C e a matriz tangente de contato \mathbf{K}_C associada, são definidos como:

$$\mathbf{r}_C = \mathcal{A}_{i=1}^{n_c} \epsilon_N (g_N^i)^n \mathbf{c}_i \quad (4.29)$$

$$= \mathcal{A}_{i=1}^{n_c} \epsilon_N [g_0^i + (d_2^i - d_1^i)]^n \times \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (4.30)$$

$$\mathbf{K}_C = \mathcal{A}_{i=1}^{n_c} \frac{\partial \mathbf{r}_C^i}{\partial \mathbf{d}^i} \quad (4.31)$$

$$= \mathcal{A}_{i=1}^{n_c} \mathbf{K}_C^i \quad (4.32)$$

$$\mathbf{K}_C^i = n \epsilon_N (g_N^i)^{n-1} \mathbf{c}_i \mathbf{c}_i^T \quad (4.33)$$

$$= n \epsilon_N [g_0^i + (d_2^i - d_1^i)]^{n-1} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

Quando o contato entre os corpos existir, ou seja, $g_N \leq 0$ o vetor resíduo de contato \mathbf{r}_C deve ser adicionado nos respectivos graus de liberdade dos nós em contato à Equação (3.34), que é a equação do movimento da viga discretizada por elementos finitos. Assim adicionando o termo contato tem-se:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{D} \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K} \mathbf{d} + \mathbf{r}_C - \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (4.35)$$

onde \mathbf{M} é a matriz de massa, \mathbf{D} é matriz de amortecimento viscoso, \mathbf{K} é a matriz de rigidez, \mathbf{r}_C é o vetor resíduo de contato e \mathbf{f} é o vetor das forças externas aplicadas, e \mathbf{d} , $\dot{\mathbf{d}}$ e $\ddot{\mathbf{d}}$ são os vetores nodais de deslocamento, velocidade e aceleração respectivamente.

A condição de não penetração dada pela Equação (4.4), exige que um corpo não pode invadir o outro. No entanto, em termos computacionais não é factível $g_N = 0$. Em termos de implementação numérica a condição de não penetração deve ser realizada definindo uma penetração aceitável tão perto de zero quanto possível, denominada aqui por TOL :

$$g_N \leq TOL \quad (4.36)$$

Na grande maioria dos trabalhos que utilizam o método da penalidade padrão, ou seja, que consiste em utilizar a força contato p_N proporcional à penetração g_N como na Equação (4.5), o resíduo de contato para o par de contato i é representado explicitamente em função da matriz de rigidez de contato \mathbf{K}_C^i e dos deslocamentos dos nós de contato, da seguinte forma:

$$\mathbf{r}_C^i = \epsilon_N [g_0^i + (d_2^i - d_1^i)] \times \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (4.37)$$

$$= \epsilon_N \begin{Bmatrix} -g_0^i \\ g_0^i \end{Bmatrix} + \epsilon_N \begin{Bmatrix} -(d_2^i - d_1^i) \\ (d_2^i - d_1^i) \end{Bmatrix} \quad (4.38)$$

$$= \epsilon_N \begin{Bmatrix} -g_0^i \\ g_0^i \end{Bmatrix} + \epsilon_N \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1^i \\ d_2^i \end{Bmatrix} \quad (4.39)$$

$$= \mathbf{f}_c^i + \mathbf{K}_C^i \mathbf{d}_i \quad (4.40)$$

Da mesma forma para o modelo de força de contato cúbico $p_N^i = \epsilon_N (g_N)^3$ que também é utilizado neste trabalho, o vetor resíduo de contato pode ser escrito como:

$$\mathbf{r}_C^i = \epsilon_N [g_0^i + (d_2^i - d_1^i)]^3 \times \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (4.41)$$

$$\mathbf{r}_C^i = \epsilon_N \left[\begin{Bmatrix} -g_0^i - (d_2^i - d_1^i) \\ g_0^i + (d_2^i - d_1^i) \end{Bmatrix} \right]^3 \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_C^i = \epsilon_N \begin{Bmatrix} -g_0^i \\ g_0^i \end{Bmatrix}^3 + 3\epsilon_N g_0^2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1^i \\ d_2^i \end{Bmatrix} + 3\epsilon_N g_0 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1^i \\ d_2^i \end{Bmatrix}^2 \\ + \epsilon_N \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1^i \\ d_2^i \end{Bmatrix}^3 \end{aligned} \quad (4.43)$$

ou ainda como:

$$\mathbf{r}_C^i = \mathbf{f}_c^i + 3g_0^2 \mathbf{K}_C^i \mathbf{d}_i + 3g_0 \mathbf{K}_C^i \mathbf{d}_i^2 + \mathbf{K}_C^i \mathbf{d}_i^3 \quad (4.44)$$

Na discretização temporal da Equação (4.35) os termos de contato serão chamados apenas de \mathbf{r}_C para compactar a equação. Nota-se que como apresentando anteriormente \mathbf{r}_C é uma força de contato e um termo dependente da rigidez. Esse fato deve sempre permanecer em mente quando se referir à \mathbf{r}_C .

Os métodos da penalidade padrão (força de contato proporcional) e o método para o modelo de força de contato cúbico foram implementados em linguagem MATLAB conforme as equações apresentadas anteriormente. Para verificação da implementação um problema de contato viga-viga estático foi solucionado utilizando o método da penalidade padrão e o resultado obtido foi comparado com o resultado obtido utilizando o software comercial *ABAQUS* 6.8. Os resultados da comparação e detalhes do problema são apresentados no anexo *B*. O modelo de força de contato cúbico não foi comparado com o *ABAQUS* pois o software não continha este modelo implementado.

5 PROBLEMAS DINÂMICOS

Em muitas aplicações de engenharia, há situações em que a inclusão dos termos dinâmicos na análise de estruturas é essencial. O termo dinâmico se refere ao fato de que as forças proporcionais à aceleração e velocidade devem ser incluídas na equação de equilíbrio. Existem muitos exemplos em que os efeitos de inércia são importantes, como em situações de carregamentos de impacto em estruturas, condições de explosão, casos em que a carga é de alta intensidade e aplicada por um curto período de tempo e por fim em carregamentos sísmicos, onde a carga estrutural tem a forma de uma aceleração prescrita de acordo com Dokanish e Subraraj (1989).

Segundo Dokanish e Subraraj (1989), a resposta de submarinos e outros veículos navais à carregamentos dados pelo ambiente, a resposta dos reatores e de prédios muito elevados à carregamentos sísmicos, a resposta de estruturas *off – shore* ou de perfuração de petróleo como plataformas e equipamentos de suporte, que estão sujeitos à carregamentos sísmicos submarinos, ventos e ondas em condições climáticas severas são também situações onde os efeitos de inércia são relevantes.

Para determinar o tipo de análise de uma estrutura, é necessário conhecer a natureza da carga aplicada e a magnitude da primeira frequência natural. Segundo Silva (2005), do ponto de vista de carregamento, pode-se geralmente classificar uma carga atuando em uma estrutura em uma das seguintes categorias: estática, cíclica, transitória e aleatória, como mostra a Figura 5.1.

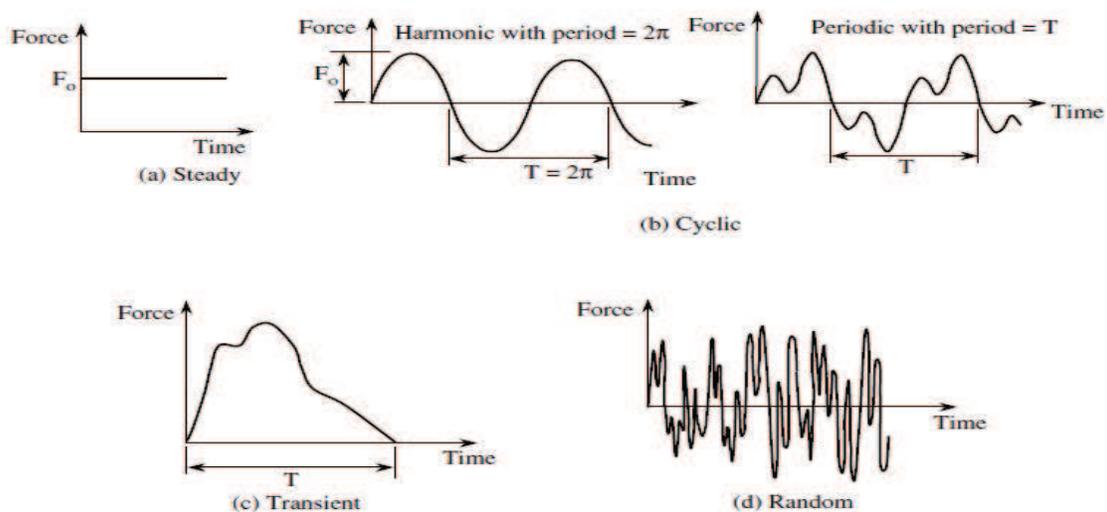


Figura 5.1: Tipo de carregamento em uma estrutura, (Silva, 2005).

A análise de uma estrutura pode ser dividida em dois tipos: a estática e a dinâmica. Se a carga é constante, isto é, uma carga que não muda com o tempo como na Figura 5.1 (a), uma análise estática pode ser realizada. Se a carga varia com o tempo, não significa necessariamente que a análise dinâmica seja necessária, (Silva, 2005).

Segundo Silva (2005), em problemas lineares onde o carregamento possui uma frequência muito menor primeira frequência natural da estrutura, uma análise estática irá fornecer uma solução precisa, sendo necessário apenas resolver o problema estático para o valor de pico do carregamento. Neste caso, a carga é chamada de carga quase estática.

De acordo com Silva (2005), em problemas lineares com carregamentos transitórios deve-se considerar o tempo de aplicação da carga para definir o tipo de análise. Se o período correspondente à primeira frequência natural da estrutura é mais do que cerca de duas vezes o tempo de aplicação do carregamento, a carga deve ser classificada como carga de choque ou impacto, sendo necessária uma análise dinâmica transiente. Se o período da menor frequência natural do sistema é inferior a um terço do tempo de aplicação da carga, a análise estática é suficiente e a carga pode ser considerada como quase estática. Se o período da menor frequência natural situa-se entre as condições quase estáticas e a de choque, uma análise dinâmica transiente é necessária e a carga é considerada como transitória.

De acordo com Silva (2005), a análise de resposta transiente é empregada se o carregamento que atua na estrutura é classificado como transitório ou choque. Duas abordagens para resolver a equação do movimento em uma análise dinâmica transiente podem ser empregadas. A primeira é a integração direta da equação do movimento e a segunda é a superposição modal. Neste trabalho o método da integração da equação do movimento será empregado onde detalhes sobre o método da superposição modal podem ser encontrados nas seguintes referências Silva (2005), Hughes (2000) e Bathe (1982).

No método da integração das equações do movimento, estas são integradas diretamente no domínio do tempo. O número de passos temporais utilizados depende do período e das variações pré-supostas para o deslocamento, velocidade e aceleração dentro de cada passo temporal, (Silva, 2005). Se o número de passos utilizados for muito grande, o custo computacional pode se tornar elevado ou até proibitivo, (Silva, 2005).

O problema de vibro-impacto envolve a condição de múltiplos impacto juntamente com a vibração do sistema. Este problema pode ser tratado como um problema dinâmico de resposta transiente. Este problema dentro da análise dinâmica transiente pode ainda ser subclassificado como um problema de contato elastodinâmico, isto é, um problema de contato sujeito as condição de não penetração dos corpos onde os efeitos da deformação elástica devido as forças de inércia são incluídos. Muitas vezes este último caso é denominado simplesmente como problema dinâmico de

Signorini, (Doyen *et al.*, 2002).

Definido o tipo de análise dinâmica transiente a ser realizada, o passo seguinte é decidir sobre o método de solução que será utilizado. Esta questão será discutida na próxima subseção.

5.1 Integração da equação do movimento do sistema

A descrição do movimento de um sistema é dada por uma equação diferencial de segunda ordem no tempo. Em sistemas lineares simples é possível resolver esta equação por meio da integração analítica. No entanto, em sistemas mais complexos este procedimento não é possível. Desta forma, é preciso utilizar técnicas numéricas de integração para obter a solução. A equação do movimento discretizada pelo método dos elementos finitos para o problema dinâmico sem contato pode ser representada pela Equação (5.1), segundo Bathe (1982) e Hughes (2000).

$$M \ddot{\mathbf{d}} + D \dot{\mathbf{d}} + K \mathbf{d} - \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (5.1)$$

onde M é a matriz de massa, D é matriz de amortecimento viscoso, K é a matriz de rigidez, \mathbf{f} é o vetor das forças externas aplicadas e \mathbf{d} , $\dot{\mathbf{d}}$ e $\ddot{\mathbf{d}}$, são os vetores nodais de deslocamento, velocidade e aceleração respectivamente.

As características fundamentais dos métodos de integração temporal utilizados para resolver a Equação (5.1) são: primeiro não satisfazem as equações diferenciais em todos os instantes de tempo t , mas somente em intervalos de tempo discretos separados por Δt ; segundo entende-se que há um tipo de variação adequada do deslocamento \mathbf{d} , da velocidade $\dot{\mathbf{d}}$ e da aceleração $\ddot{\mathbf{d}}$ dentro de cada intervalo de tempo, (Bathe, 1982; Rao, 2004).

Diferentes métodos de integração podem ser obtidos e cada um com seu tipo de variação suposta para \mathbf{d} , $\dot{\mathbf{d}}$ e $\ddot{\mathbf{d}}$. Neste métodos de integração, o tempo total de integração T é dividido em n intervalos iguais à $\Delta t = \frac{T}{n}$ e determina-se a solução em $t = 0, \Delta t, \dots, n\Delta t$.

Os métodos de integração podem ser divididos em métodos explícitos e implícitos. Os métodos explícitos tem como principal característica expressar as grandezas de interesse como deslocamento, velocidade e aceleração em um instante t em função dos valores conhecidos no instante $t - 1$. No método explícito, a solução no tempo $t + \Delta t$ é obtida considerando as condições de equilíbrio no tempo t . Dois métodos que se enquadram nesta classe são o método de diferenças finitas centrada e o método de *Runge - Kutta*. O método da diferença finita centrada será abordado na subseção seguinte. Detalhes sobre o método de *Runge - Kutta* podem ser encontrados em Dokanish e Subraraj (1989); Rao (2004); Hughes (2000).

Os métodos de integração explícitos, como o método da diferença finita, são particularmente bem adaptados para problemas dinâmicos de curta duração ou de problemas de propagação de ondas, como no caso de estruturas submetidas a explosão ou impacto de alta velocidade. Esse esquema de integração não necessita de fatoração da matriz de rigidez a cada passo da solução e não requer o armazenamento das matrizes, se a matriz de massa *lumped* (diagonal) é utilizada. O custo computacional por passo de tempo é geralmente muito menor do que o custo para os métodos implícitos e também menos armazenamento é exigido, (Dokanish e Subraraj, 1989). Os métodos explícitos requerem um número menor de operações de cálculos se comparados aos métodos implícitos.

No entanto, esquemas de integração explícitos são apenas condicionalmente estáveis e geralmente exigem intervalos de tempo pequeno para garantir a estabilidade numérica. Assim a restrição do tamanho do passo é muitas vezes mais grave do que as considerações de precisão exigida. Esta restrição limita a eficácia do esquema quando usado para estudar problemas dinâmicos de duração moderada, por exemplo, problemas de resposta em excitações sísmicas. No caso de um passo maior que o valor crítico ser utilizado, o método torna-se instável. O valor do passo crítico para um sistema de n graus de liberdade é dado por $\Delta t_{crit} = \frac{\tau_n}{\pi}$, onde τ_n é o menor período natural do sistema. Este critério é conhecido como critério de *Courant*, (Bathe, 1982; Wriggers, 2002). Em problemas não lineares, o valor crítico para o intervalo de tempo é variável com o tempo, uma vez que está atrelado às frequências naturais do sistema que se modificam ao longo da análise (Rao, 2004; Bathe, 1982; Wriggers, 2002). A estabilidade do método é importante na análise de problemas não lineares, pois o passo crítico varia a cada iteração, o que poderia fazer a solução do problema divergir, mesmo se o método for condicionalmente estável.

Os métodos de integração implícitos, em conjunto com o método dos elementos finitos, têm seus principais pontos fortes exatamente nas áreas onde os métodos explícitos, tem seus pontos fracos, ou seja, na capacidade de tratamento de problemas onde as forças de inércia devem ser consideradas, tal como impacto e problemas sísmicos e de estruturas com geometria complexa, (Subraraj e Dokanish, 1989). No método implícito, a solução no instantes $t + \Delta t$ é obtida resolvendo a equação de equilíbrio em $t + \Delta t$ e as equações dos deslocamentos no instante $t + \Delta t$ envolvem as velocidades e acelerações neste mesmo instante. Muitos métodos implícitos são incondicionalmente estáveis para análise linear e o valor do intervalo de tempo que pode ser empregado é governado pela precisão desejada para a solução, e não pela estabilidade do processo de integração (Subraraj e Dokanish, 1989).

Embora os métodos implícitos geralmente necessitem de mais esforço computacional por intervalo de tempo do que os métodos explícitos, o passo de tempo pode ser muito maior, uma vez que este é limitado apenas por requisitos de precisão. O passo de tempo em muitos métodos explícitos, por outro lado, são restringidos apenas pela estabilidade numérica. Para manter a estabilidade,

um passo de tempo muito menor do que o necessário para a precisão é usado, aumentando assim o custo computacional do método. Os métodos implícitos mais conhecidos são os método de Wilson, Newmark e $\alpha - \text{HHT}$. Nas próximas subseções os método de Newmark e o método $\alpha - \text{HHT}$ são abordados. Detalhes sobre o método de Wilson podem ser encontrados em (Bathe, 1982; Hughes, 2000; Subraraj e Dokanish, 1989).

Características como a estabilidade incondicional, presente na maioria dos algoritmos implícitos, os tornam competitivos e para certos tipos de problemas mais adequados que os algoritmos explícitos. Em problemas lineares a estabilidade incondicional permite a livre escolha do valor do incremento de tempo, ficando este apenas limitado pelos critérios de precisão. Nos casos em que o valor de Δt máximo para garantia da estabilidade é bem menor que o necessário para precisão desejada, os algoritmos implícitos apresentam-se vantajosos em relação aos explícitos. Essas situações geralmente são de análises quase estáticas ou de dinâmica estrutural, onde as baixas frequências envolvidas no problema permitem valores de incremento de tempo relativamente altos, para uma razoável precisão, (Dokanish e Subraraj, 1989). Porém, mesmo nesses casos, quando a análise envolve não linearidades, a estabilidade dos algoritmos implícitos não fica garantida a priori. Mas estes métodos têm a tendência de serem mais estáveis que os explícitos, gerando menos dificuldades para a obtenção da resposta do sistema, (Cook, 1995).

Segundo Hughes (2000), as seguintes características são exigidas para que um integrador temporal seja eficiente:

- Incondicionalmente estável quando aplicado em problemas lineares;
- Não mais de que um conjunto de equações para ser resolvido a cada passo;
- Segunda ordem de acurácia;
- Capaz de controlar a dissipação dos modos de alta frequência;
- Auto-iniciável.

A questão de estabilidade refere-se ao uso de intervalos de tempo menor que o necessário para a ordem de acurácia. Quanto menor o número de equações para serem resolvidas menor é o esforço computacional necessário. Métodos de segunda ordem de acurácia são desejados uma vez que proporcionam melhores resultados, comparados aos métodos de primeira ordem. O controle de dissipação dos modos espúrios de alta frequência é uma característica de grande interesse, uma vez que estes modos trazem instabilidades para a solução. Entende-se por algoritmos auto-iniciáveis, aqueles onde é necessário o armazenamento de dois ou menos passos anteriores para o avanço do processo, Hughes (2000).

Ainda segundo Hughes (2000), o algoritmo desejado para problemas de dinâmica estrutural é o que apresenta segunda ordem de acurácia, que seja incondicionalmente estável de passo único e apresente um bom balanço entre a dissipação numérica e a perda de acurácia quando comparado com a regra trapezoidal.

Segundo Hughes (2000), os períodos dos modos do modelo em elementos finitos podem ser distorcidos pelos integradores. Por exemplo, a regra trapezoidal irá alongar o período, enquanto o método da diferença central irá encurtar o período, quando comparados ao problema original. Desta forma, é recomendado que o integrador temporal e a matriz de massa sejam escolhidos de forma que os erros no período sejam cancelados. Para a regra trapezoidal é recomendado o uso da matriz de massa consistente.

5.1.1 Método da diferença finita centrada

A idéia principal do método da diferença finita centrada é substituir as derivadas que surgem na equação do movimento do sistema por aproximações algébricas dessas derivadas. Desta forma as seguintes equações para aproximação da velocidade e aceleração no instante t_n são utilizadas:

$$\dot{\mathbf{d}}_n = \frac{\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_{n-1}}{2 \Delta t} \quad , \quad \ddot{\mathbf{d}}_n = \frac{\mathbf{d}_{n+1} - 2 \mathbf{d}_n + \mathbf{d}_{n-1}}{\Delta t^2} \quad . \quad (5.2)$$

Substituindo as relações acima na equação do movimento do sistema dada pela Equação (5.1) e rearranjando dos termos tem-se:

$$\left(\frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} + \frac{\mathbf{D}}{2 \Delta t} \right) \mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{f}_n - \left(\mathbf{K} - \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right) \mathbf{d}_n - \left(\frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} - \frac{\mathbf{D}}{2 \Delta t} \right) \mathbf{d}_{n-1} \quad (5.3)$$

$$\mathbf{d}_{n+1} = \left(\frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} + \frac{\mathbf{D}}{2 \Delta t} \right)^{-1} \left[\mathbf{f}_n - \left(\mathbf{K} - \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right) \mathbf{d}_n - \left(\frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} - \frac{\mathbf{D}}{2 \Delta t} \right) \mathbf{d}_{n-1} \right] \quad (5.4)$$

e utilizando esta expressão é possível calcular o deslocamento no instante t_{n+1} , conhecendo os deslocamentos nos instantes t_n e t_{n-1} dados por \mathbf{d}_n e \mathbf{d}_{n-1} respectivamente. Nota-se que o deslocamento no instante t_{n+1} é obtido pela solução direta do sistema sem a necessidade de um processo iterativo para obter \mathbf{d}_{n+1} . Assim, é possível descrever o comportamento do sistema pela aplicação sucessiva desta equação, em cada intervalo de tempo. No entanto, no instante $t_n = 0$ há a necessidade de se conhecer \mathbf{d}_0 e \mathbf{d}_{-1} , sendo este método não auto-iniciável, (Rao, 2004). Para se calcular

o deslocamento \mathbf{d}_{-1} as seguintes relações podem ser utilizadas segundo Wriggers (2002):

$$\mathbf{d}_{-1} = \mathbf{d}_0 - \Delta t \dot{\mathbf{d}}_0 + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{d}}_0 \quad (5.5)$$

$$\ddot{\mathbf{d}}_0 = \mathbf{M}^{-1} \left[-\mathbf{D} \dot{\mathbf{d}}_0 - \mathbf{K} \mathbf{d}_0 + \mathbf{f}_0 \right] \quad (5.6)$$

A desvantagem deste método, como já mencionado anteriormente, é a necessidade de pequenos valores para Δt , devido as questões de estabilidade do método. Para problemas lineares o critério de *Courant* para o Δt_{crit} é uma boa estimativa, (Bathe, 1982).

Quando existe o contato entre os corpos, ou seja $g_N \leq 0$, a equação do movimento passa a ser a Equação (4.35). Substituindo as aproximações para velocidade e aceleração dadas pela Equação (5.2) na Equação (4.35), tem-se:

$$\mathbf{M} \left(\frac{\mathbf{d}_{n+1} - 2\mathbf{d}_n + \mathbf{d}_{n-1}}{\Delta t^2} \right) + \mathbf{D} \left(\frac{\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_{n-1}}{2\Delta t} \right) + \mathbf{K} \mathbf{d}_n + \mathbf{r}_C - \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (5.7)$$

lembrando que \mathbf{r}_c é dado pelas equações (4.44) e (4.40). Rearranjando os termos obtém-se:

$$\left(\frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} + \frac{\mathbf{D}}{2\Delta t} \right) \mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{f}_n - \mathbf{r}_c(\mathbf{d}_n) - \left(\mathbf{K} \mathbf{d}_n - \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right) \mathbf{d}_n - \left(\frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} - \frac{\mathbf{D}}{2\Delta t} \right) \mathbf{d}_{n-1} \quad (5.8)$$

$$\mathbf{d}_{n+1} = \left(\frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} + \frac{\mathbf{D}}{2\Delta t} \right)^{-1} \left[\mathbf{f}_n - \mathbf{r}_c(\mathbf{d}_n) - \left(\mathbf{K} \mathbf{d}_n - \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right) \mathbf{d}_n - \left(\frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} - \frac{\mathbf{D}}{2\Delta t} \right) \mathbf{d}_{n-1} \right] \quad (5.9)$$

O termo de força de contato $\mathbf{r}_c(\mathbf{d}_n)$ é avaliado no instante de tempo t_n , assim como a função penetração $g_N(\mathbf{d}_n)$. Novamente, o valor de Δt deve ser menor que o valor crítico. Para problemas não lineares uma estimativa para Δt_{crit} , segundo Wriggers (2002) é dada por:

$$\Delta t_{crit} = \delta \frac{l^e}{c} \quad (5.10)$$

onde l^e é o tamanho do menor elemento na malha, c é a velocidade do som na estrutura e δ é um fator de redução escolhido arbitrariamente para cada problema dentro do seguinte intervalo $0.2 < \delta < 0.9$.

5.1.2 Método de Newmark

O método de integração temporal de Newmark é o método mais conhecido para resolver as equações do movimento, (Wriggers, 2002). Este baseia-se nas seguintes aproximações para os deslocamentos e velocidades:

$$\mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{d}_n + \Delta t \dot{\mathbf{d}}_n + \frac{(\Delta t)^2}{2} \left[(1 - 2\beta) \ddot{\mathbf{d}}_n + 2\beta \ddot{\mathbf{d}}_{n+1} \right] \quad (5.11)$$

$$\dot{\mathbf{d}}_{n+1} = \dot{\mathbf{d}}_n + \Delta t \left[(1 - \gamma) \ddot{\mathbf{d}}_n + \gamma \ddot{\mathbf{d}}_{n+1} \right] \quad (5.12)$$

onde os parâmetros β e γ controlam a estabilidade e acurácia do método. O intervalo para os quais os parâmetros podem ser escolhidos são $0 \leq \beta \leq 0.5$ e $0 \leq \gamma \leq 1$, (Hughes, 2000). Neste trabalho será utilizado o método de *Newmark* com acelerações médias, também conhecido por regra trapezoidal, com os parâmetros β e γ iguais a $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$ respectivamente, (Hughes, 2000). O método da acelerações médias apresenta características interessantes como estabilidade incondicional e 2ª ordem de acurácia. Tomando $\gamma = \frac{1}{2}$, evita-se a introdução de qualquer amortecimento numérico, inerente do método de integração. Caso este valor seja maior de $\frac{1}{2}$ um amortecimento numérico positivo é introduzido no sistema, (Hughes, 2000). A aplicação do método de Newmark leva a um sistema de equações que pode ser facilmente resolvido.

As equações (5.11) e (5.12) são a forma convencional de escrever as aproximações dos deslocamentos e velocidades pelo método de Newmark, onde a variável primária é a aceleração. No entanto, será utilizada a formulação onde o deslocamento é a variável primária para trabalhar diretamente com o deslocamento no processo de solução das equações. As equações (5.11) e (5.12), podem ser rearranjadas na seguinte forma:

$$\ddot{\mathbf{d}}_{n+1} = a_1 (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n) - a_2 \dot{\mathbf{d}}_n - a_3 \ddot{\mathbf{d}}_n \quad (5.13)$$

$$\dot{\mathbf{d}}_{n+1} = a_4 (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n) + a_5 \dot{\mathbf{d}}_n + a_6 \ddot{\mathbf{d}}_n \quad (5.14)$$

onde as constantes $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, e a_6$ são:

$$a_1 = \frac{1}{\beta (\Delta t)^2}, a_2 = \frac{1}{\beta \Delta t}, a_3 = \frac{1 - 2\beta}{2\beta}, a_4 = \frac{\gamma}{\beta \Delta}, a_5 = \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right), a_6 = \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right) \Delta t \quad (5.15)$$

Para a condição sem contato, a equação do movimento é dada pela Equação (5.1). Substituindo as as equações (5.13) e (5.14) na Equação (5.1) e rearranjando os termos tem-se:

$$\psi(\mathbf{d}_{n+1}) = \mathbf{M} \left[a_1 (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n) - a_2 \dot{\mathbf{d}}_n - a_3 \ddot{\mathbf{d}}_n \right] + \mathbf{D} \left[a_4 (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n) + a_5 \dot{\mathbf{d}}_n + a_6 \ddot{\mathbf{d}}_n \right] + \mathbf{K} u_{n+1} - \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (5.16)$$

onde $\psi(\mathbf{d}_{n+1})$ é denominado de vetor resíduo. A Equação (5.16) representa um conjunto de equações lineares, em que não existe a necessidade de um processo iterativo para a obtenção do deslocamento \mathbf{d}_{n+1} . No entanto, por conveniência neste trabalho o processo iterativo foi utilizado e o método escolhido foi o método de *Newton – Raphson*, detalhes sobre o método se encontram no Anexo A. Assim tem-se:

$$[a_1 \mathbf{M} + a_4 \mathbf{D} + \mathbf{K}] \Delta \mathbf{d}_{n+1}^i = -\psi(\mathbf{d}_{n+1}^i) \quad (5.17)$$

$$\mathbf{d}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{d}_{n+1}^i + \Delta \mathbf{d}_{n+1}^i \quad (5.18)$$

onde $n + 1$ identifica o passo de tempo atual e i a iteração do método de *Newton – Raphson*.

Para o caso em que os corpos entram em contato, ou seja, $g_N \leq 0$ a equação do movimento é dada pela Equação (4.35). Substituindo as equações (5.13) e (5.14) na Equação (4.35) e rearranjando os termos tem-se:

$$\psi(\mathbf{d}_{n+1}) = \mathbf{M} \left[a_1 (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n) - a_2 \dot{\mathbf{d}}_n - a_3 \ddot{\mathbf{d}}_n \right] + \mathbf{D} \left[a_4 (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n) + a_5 \dot{\mathbf{d}}_n + a_6 \ddot{\mathbf{d}}_n \right] + \mathbf{K} \mathbf{d}_{n+1} + \mathbf{r}_C(\mathbf{d}_{n+1}) - \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (5.19)$$

A Equação (5.19) é a equação do movimento incluindo os termos de contato discretizada pelo método de integração de Newmark. Lembrando que \mathbf{r}_c é dado pelas equações (4.44) e (4.40). Utilizando o método de iterativo para solucionar o sistema tem-se:

$$[a_1 \mathbf{M} + a_4 \mathbf{D} + \mathbf{K}_T(\mathbf{d}_{n+1}^i)] \Delta \mathbf{d}_{n+1}^i = -\boldsymbol{\psi}(\mathbf{d}_{n+1}^i) \quad (5.20)$$

$$\mathbf{d}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{d}_{n+1}^i + \Delta \mathbf{d}_{n+1}^i \quad (5.21)$$

sendo $\mathbf{K}_T(\mathbf{d}_{n+1}^i)$ a matriz de rigidez tangente, que é dada por :

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{d}_{n+1}^i) = \mathbf{K} + \mathbf{K}_C(\mathbf{d}_{n+1}^i) \quad (5.22)$$

$$\mathbf{K}_C = \mathcal{A}_{i=1}^{n_c} \frac{\partial \mathbf{r}_C^i(\mathbf{d}_{n+1}^i)}{\partial \mathbf{d}_{n+1}^i} \quad (5.23)$$

com \mathbf{K} a matriz de rigidez linear da estrutura, e \mathbf{K}_C é a matriz de rigidez devido a não linearidade de contato. A matriz de rigidez de contato \mathbf{K}_C e a função penetração g_N são avaliadas utilizando \mathbf{d}_{n+1}^i em cada iteração. O índice i representa a iteração atual do processo de solução das equações. As velocidades e acelerações no instante $n + 1$ são obtidas substituindo o campo de deslocamento convergido \mathbf{d}_{n+1} nas equações (5.14) e (5.13) respectivamente.

5.1.3 Método $\alpha - HHT$ (Hilber – Hughes – Taylor)

O método $\alpha - HHT$ é uma generalização do método de Newmark com a introdução de um controle do amortecimento dos modos espúrios de alta frequência sem perda da acurácia. Este método foi desenvolvido inicialmente para tratar de problemas elastodinâmicos lineares. O método $\alpha - HHT$ é o método de integração temporal mais universal, pois a partir da escolha adequada dos parâmetros α , γ e β pode-se obter os integradores de *Newmark* e o método da diferença centrada. A equação discretizada do movimento é modificada para a seguinte equação:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}}_{n+1} + (1 - \alpha) [\mathbf{D} \dot{\mathbf{d}}_{n+1} - \mathbf{f}_{n+1}] + \alpha [\mathbf{D} - \mathbf{f}_n] + \mathbf{K} [(1 - \alpha) \mathbf{d}_{n+1} + \alpha \mathbf{d}_n] = \mathbf{0} \quad (5.24)$$

As aproximações da velocidade e deslocamento são as mesmas aproximações utilizadas no método de *Newmark*, dadas pelas equações (5.12) e (5.11) respectivamente. A solução do sistema de equações lineares por conveniência neste trabalho é obtida utilizando o método de *Newton – Raphson*, e assim tem-se:

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{d}_{n+\alpha}^i) = \mathbf{M} \left[a_1 (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n) - a_2 \dot{\mathbf{d}}_n - a_3 \ddot{\mathbf{d}}_n \right] + \mathbf{D} \left[(1 - \alpha) \mathbf{d}_{n+1} + \alpha \dot{\mathbf{d}}_n \right] \\ + \mathbf{K} \left[(1 - \alpha) \mathbf{d}_{n+1} + \alpha \mathbf{d}_n \right] - \left[(1 - \alpha) \mathbf{f}_{n+1} + \alpha \mathbf{f}_n \right] = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$\left[a_1 \mathbf{M} + (1 - \alpha) a_4 \mathbf{D} + (1 - \alpha) \mathbf{K} (\mathbf{d}_{n+1}^i) \right] \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{i+1} = -\psi(\mathbf{d}_{n+\alpha}^i) \quad (5.26)$$

$$\mathbf{d}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{d}_{n+1}^i + \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{i+1} \quad (5.27)$$

Os parâmetros α , γ e β definem as características de estabilidade e acurácia do método. O parâmetro α controla a dissipação numérica dos modos espúrios. Como mencionado anteriormente, ao fazer $\alpha = 1$ obtém-se a família dos integradores de *Newmark*. Por exemplo, para $\alpha = 1$, $\gamma = \frac{1}{2}$ e $\beta = \frac{1}{4}$ temos a regra trapezoidal. O método da diferença centrada é obtido fazendo $\alpha = 1$, $\gamma = \frac{1}{2}$ e $\beta = 0$.

O algoritmo é incondicionalmente estável e com segunda ordem de acurácia para os seguintes intervalos de parâmetros de acordo com Ericher *et al.* (2002):

$$0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}, \quad \gamma = \frac{1}{2} + \alpha \quad e \quad \beta = \frac{(1 + \alpha)^2}{4}. \quad (5.28)$$

O método *alpha - HHT* também leva a um sistema de equações não lineares, como no método de *Newmark*. Da mesma forma, como no método de anterior, este assunto irá ser tratado com mais detalhes na seção de discretização temporal.

Para o caso em que os corpos entram em contato, ou seja, $g_N \leq 0$ a equação do movimento incluindo os termos de contato para o método *alpha - HHT*, é dada pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}}_{n+1} + (1 - \alpha) \left[\mathbf{D} \dot{\mathbf{d}}_{n+1} - \mathbf{f}_{n+1} \right] + \alpha \left[\mathbf{D} \dot{\mathbf{d}}_n - \mathbf{f}_n \right] \\ + \mathbf{K} \left[(1 - \alpha) \mathbf{d}_{n+1} + \alpha \mathbf{d}_n \right] + \mathbf{r}_C(\mathbf{d}_{n+\alpha}) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$\mathbf{d}_{n+\alpha} = (1 - \alpha) \mathbf{d}_{n+1} + \alpha \mathbf{d}_n \quad (5.30)$$

Substituindo as equações (5.13) e (5.14) na equação (5.29) e rearranjando os termos tem-se:

$$\begin{aligned}
\psi(\mathbf{d}_{n+1}) &= \mathbf{M} \left[a_1 (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n) - a_2 \dot{\mathbf{d}}_n - a_3 \ddot{\mathbf{d}}_n \right] \\
&+ (1 - \alpha) \left[\mathbf{C} \left(a_4 (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n) + a_5 \dot{\mathbf{d}}_n - a_6 \ddot{\mathbf{d}}_n \right) - \mathbf{F}_{n+1} \right] + \alpha \left[\mathbf{D} \dot{\mathbf{d}}_n - \mathbf{F}_n \right] \\
&+ \mathbf{K} [(1 - \alpha) \mathbf{d}_{n+1} + \alpha \mathbf{d}_n] + \mathbf{r}_C(\mathbf{d}_{n+\alpha}) = \mathbf{0} . \quad (5.31)
\end{aligned}$$

Lembrando que \mathbf{r}_c é dado pelas equações (4.44) e (4.40). Para a solução da equação (5.31) foi utilizado o método de *Newton – Raphson*. Assim tem-se:

$$[a_1 \mathbf{M} + (1 - \alpha) a_4 \mathbf{D} + (1 - \alpha) \mathbf{K}_T(\mathbf{d}_{n+\alpha}^i)] \Delta \mathbf{d}_{n+1}^i = -\psi(\mathbf{d}_{n+1}^i) \quad (5.32)$$

$$\mathbf{d}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{d}_{n+1}^i + \Delta \mathbf{d}_{n+1}^i \quad (5.33)$$

sendo $\mathbf{K}_T(\mathbf{d}_{n+\alpha}^i)$ a matriz tangente, dada por:

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{d}_{n+\alpha}^i) = \mathbf{K} + \mathbf{K}_C(\mathbf{d}_{n+\alpha}^i) \quad (5.34)$$

$$\mathbf{K}_C(\mathbf{d}_{n+\alpha}^i) = \mathcal{A}_{i=1}^{n_c} \frac{\partial \mathbf{r}_C^i(\mathbf{d}_{n+\alpha}^i)}{\partial \mathbf{d}_{n+1}^i} \quad (5.35)$$

$$\mathbf{d}_{n+\alpha}^i = (1 - \alpha) \mathbf{d}_{n+1}^i + \alpha \mathbf{d}_n \quad (5.36)$$

com \mathbf{K} a matriz de rigidez linear, e \mathbf{K}_C a matriz de rigidez devido a não linearidade de contato. Estas matrizes são avaliadas utilizando o deslocamento $\mathbf{d}_{n+\alpha}^i$. A função penetração g_N também deve ser avaliada utilizando o deslocamento $\mathbf{d}_{n+\alpha}^i$ a cada iteração. O índice i representa a iteração atual do processo de solução das equações não lineares. Os coeficientes a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 , e a_6 são dados pela Equação (5.15). As velocidades e acelerações no instante $n + 1$ são obtidas substituindo o campo de deslocamento convergido \mathbf{d}_{n+1} nas equações (5.14) e (5.13) respectivamente.

Os métodos de integração numérica apresentados neste trabalho foram todos implementados em linguagem MATLAB. Cada método foi implementado de acordo com as equações apresentadas nas seções anteriores para cada esquema de integração descrito.

6 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo é realizada a verificação dos algoritmos de integração da diferença centrada (DFC), de Newmark e $\alpha - HHT$, com a solução analítica de vibração forçada de uma viga bi-apoiada com carga harmônica concentrada no meio do vão. Posteriormente, o problema de uma viga impactando contra dois obstáculos rígidos é estudado e os resultados obtidos aqui são comparados com os resultados obtidos por Dumont (2002). E por fim, a situação de vibro-impacto entre duas vigas é estudada e os resultados obtidos são apresentados e discutidos.

6.1 Verificação

6.1.1 Método de integração temporal

Com a finalidade de verificação dos métodos de integração temporal, o problema de vibração de uma viga bi-apoiada carregada com força harmônica senoidal mostrado na Figura 6.1 foi utilizado. Entende-se por verificação a comparação entre os resultados obtidos por uma simulação numérica com a solução analítica do problema.

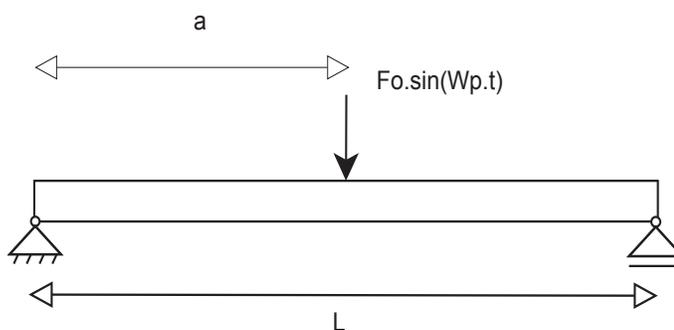


Figura 6.1: Viga bi-apoiada submetida a uma força harmônica senoidal

As condições de contorno e condições iniciais do problema são:

$$w(0, t) = w(L, t) = 0.0 ; \frac{\partial^2 w(0, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w(L, t)}{\partial x^2} = 0 ; w(x, 0) = \dot{w}(x, 0) = 0.0 \quad (6.1)$$

A solução para o deslocamento da viga em vibração forçada não amortecida é dada pela Equação (6.2). No anexo B se encontra a dedução de forma detalhada da solução analítica.

$$w(a, t) = \frac{2F_o}{\rho AL} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n^2 - \omega_p^2} \text{sen} \left(\frac{n\pi a}{L} \right) \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \left[\text{sen}(\omega_p t) - \frac{\omega_p}{\omega_n} \text{sen}(\omega_n t) \right] \quad (6.2)$$

$$\omega_n = (n\pi)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}} \quad (6.3)$$

As simulações do comportamento da viga foram feitas utilizando os métodos da diferença finita centrada, Newmark e $\alpha - HHT$ todos implementados em linguagem MATLAB utilizando as equações discretizadas apresentadas no capítulo 5. As soluções obtidas foram comparadas com a solução analítica dada pela Equação (6.2). Foram utilizados os 10 primeiros modos de vibração da viga para a construção da resposta analítica.

Os parâmetros utilizados nas simulações foram: força concentrada $F_o = 500 \text{ N}$, frequência do carregamento $f = 20 \text{ Hz}$ que corresponde a frequência angular de $\omega_p = 125,6637 \text{ rad/s}$, comprimento da viga $L = 10 \text{ m}$, área da seção transversal $A = 0.02 \text{ m}^2$, momento de inércia $I = 1.6667 \times 10^{-5} \text{ m}^4$, distância de aplicação da carga em relação ao vínculo $a = 5 \text{ m}$, módulo de elasticidade do material da viga $E = 70 \text{ GPa}$, massa específica do material da viga $\rho = 2700 \text{ Kg/m}^3$.

O intervalo de tempo em que a solução foi estudada foi de 0 à 2.5 s. O incremento de tempo utilizado nas simulações foi de $\Delta t = 1 \times 10^{-5} \text{ s}$ para todos os esquemas de integração numérica utilizado. A malha de elementos finitos utilizada continha 40 elementos de viga de dois nós como apresentado no capítulo 3. Para o método de *Newmark* os valores dos parâmetros β e γ foram 0.25 e 0.5 respectivamente, estes parâmetros correspondem ao esquema da regra trapezoidal. Para o método $\alpha - HHT$ o valor do parâmetro α escolhido foi igual à 0.1 e os valores dos parâmetros β e γ foram obtidos pela relação dada na Equação (5.28).

Para realização da comparação quantitativa dos resultados numéricos obtidos em relação a solução analítica, a norma L^2 do erro ($\|e\|_{L^2}$) e o valor *RMS* do erro entre o deslocamento numérico obtido no ponto $x = a$ e o deslocamento analítico em $x = a$ foram calculadas. As equações para norma L^2 e o valor *RMS* utilizadas foram as equações (6.4) e (6.5), apresentadas à seguir:

$$\|e\|_{L^2} = \sqrt{\int_{T_1}^{T_2} (w(a, t) - u(a, t))^2 dt} \cong \sqrt{\sum_{t=0}^T (w(a, t) - u(t))^2} = \sqrt{(\bar{w} - \mathbf{u})^T (\bar{w} - \mathbf{u})} \quad (6.4)$$

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} (w(a, t) - u(a, t))^2 dt} \cong \sqrt{\frac{\sum_{t=0}^T (w(a, t) - u(a, t))^2}{T_2 - T_1}} = \sqrt{\frac{(\bar{w} - \mathbf{u})^T (\bar{w} - \mathbf{u})}{T_2 - T_1}} \quad (6.5)$$

onde \bar{w} é o vetor solução analítica no ponto a em cada instante de tempo, u é o vetor da solução numérica no ponto a obtido por cada método de integração em cada instante de tempo. O tamanho dos vetores corresponde à quantidade de pontos no intervalo de tempo de interesse. Por exemplo, para este caso em que o intervalo de tempo de análise foi de 2.5 s e $\Delta t = 1 \times 10^{-5}\text{ s}$, temos 250000 pontos. A tabela à seguir mostra o valor da norma L^2 e o valor RMS obtidos para cada método.

Tabela 6.1: Comparação dos métodos de integração temporal com a solução analítica da vibração de uma viga bi-apoiada excitada por uma carga senoidal.

Método	$\ e\ _{L^2}$	RMS
Diferença Finita Centrada	$5.00672e - 004$	$2.00269e - 004$
Newmark	$4.97474e - 004$	$1.98990e - 004$
$\alpha - HHT$	$4.97017e - 004$	$1.97607e - 004$

Os resultados apresentados mostram que os métodos implementados são capazes obter soluções com acurácia na ordem de 10^{-4} na norma do erro, e valor RMS na ordem de 10^{-4} comparada com a solução analítica do problema utilizado como validação. Assim, os métodos implementados podem ser considerados verificados.

Para realização de comparação dos sinais ao longo do tempo das soluções obtidas pelos métodos de integração numérica e a solução analítica, foi gerado gráficos com o plot da sobreposição das soluções numéricas com a solução analítica para cada método de integração utilizado. A Figura 6.2 mostra a comparação visual do sinal de deslocamento do ponto $x = a$, obtido pelos métodos de integração numérica com o sinal obtido pela expressão analítica dada pela Equação (6.2).

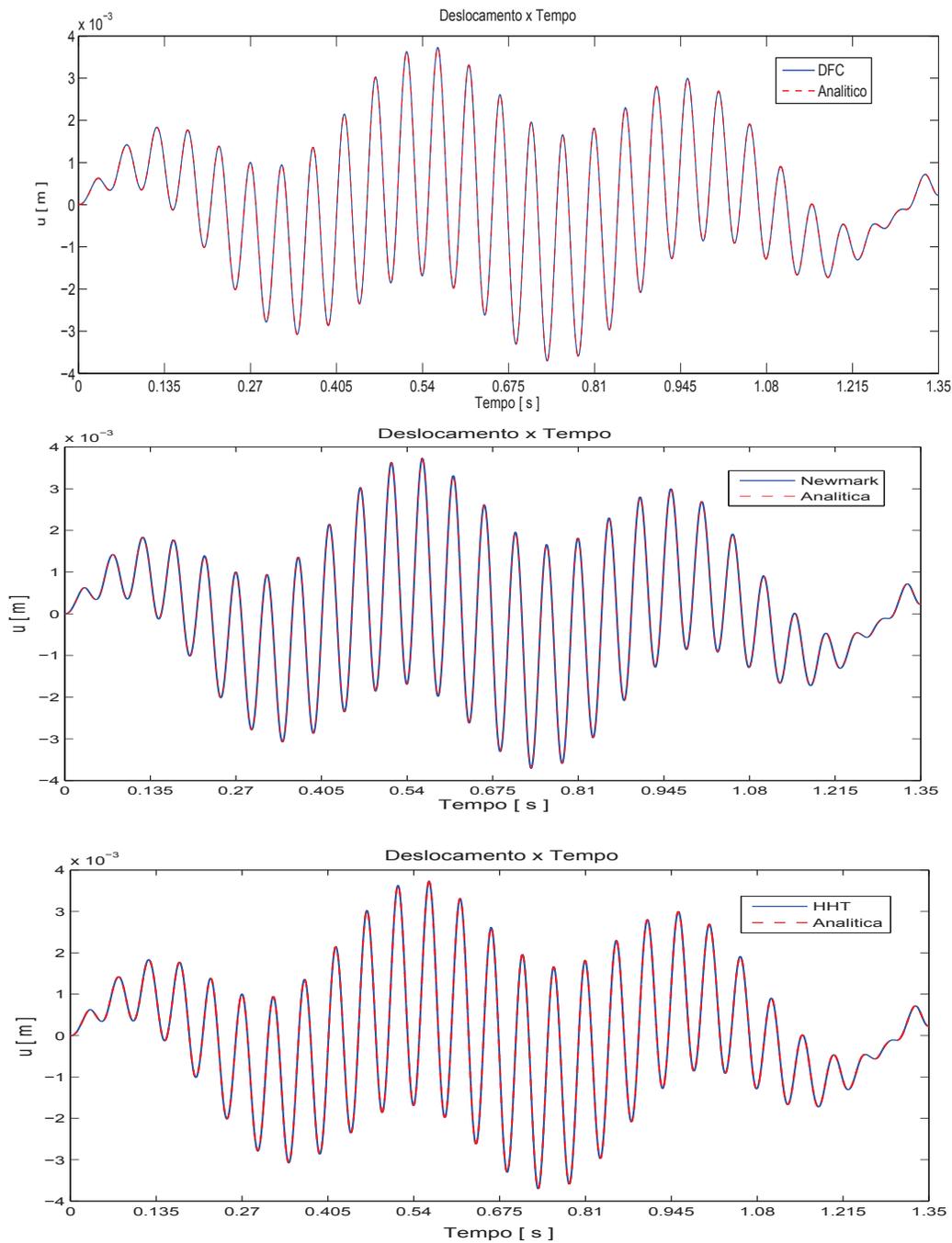


Figura 6.2: Comparação do sinal de deslocamento obtido pela expressão analítica com o obtido pelos métodos de integração temporal.

No primeiro gráfico da Figura (6.2) tem-se a comparação do deslocamento obtido pelo método da diferença finita centrada (DFC) com o deslocamento analítico, e em seguida a comparação do deslocamento obtido pelo método de Newmark com o deslocamento analítico é realizada. Por

fim, tem-se a comparação do deslocamento obtido pelo método $\alpha - HHT$ com o deslocamento analítico. Os sinais de deslocamentos obtidos pelos métodos de integração numérica apresentaram concordância com o sinal do deslocamento analítico. As figuras 6.3, 6.4 e 6.5 apresentam os gráficos dessa comparação qualitativa para a velocidade, aceleração e diagrama de fase.

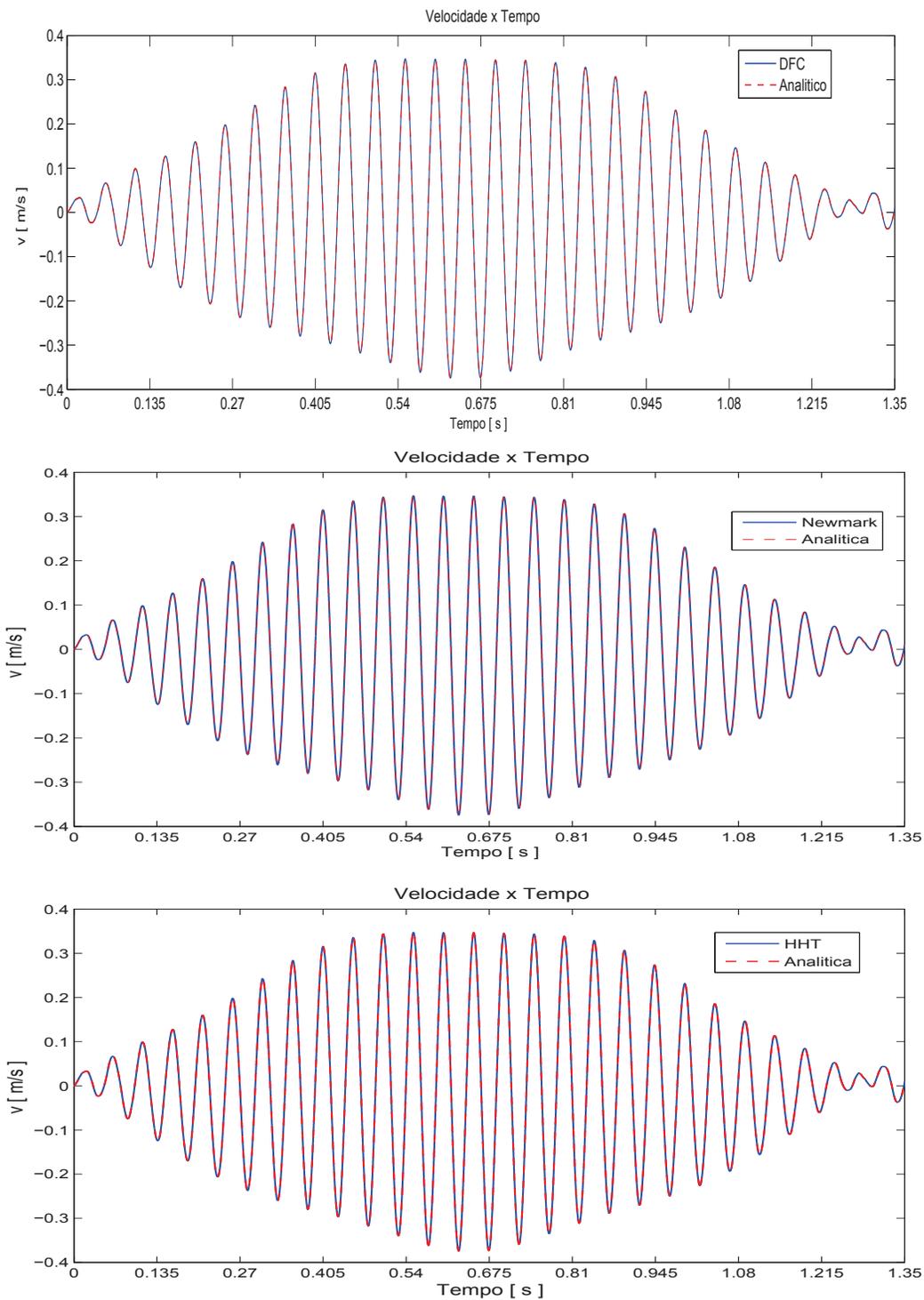


Figura 6.3: Comparação do sinal de velocidade obtido pela expressão analítica com o obtido pelos métodos de integração temporal.

No primeiro gráfico da Figura (6.3) tem-se a comparação da velocidade obtida pelo método

da diferença finita centrada (DFC) com a velocidade analítica, e em seguida a comparação da velocidade obtida pelo método de Newmark com a velocidade analítica é realizada. Por fim, tem-se a comparação da velocidade obtida pelo método $\alpha-HHT$ com a velocidade analítica. Os sinais das velocidades obtidas pelos métodos de integração numérica apresentaram concordância com o sinal da velocidade analítica, obtida pela primeira derivada em relação ao tempo da solução analítica do deslocamento dada na Equação (6.2).

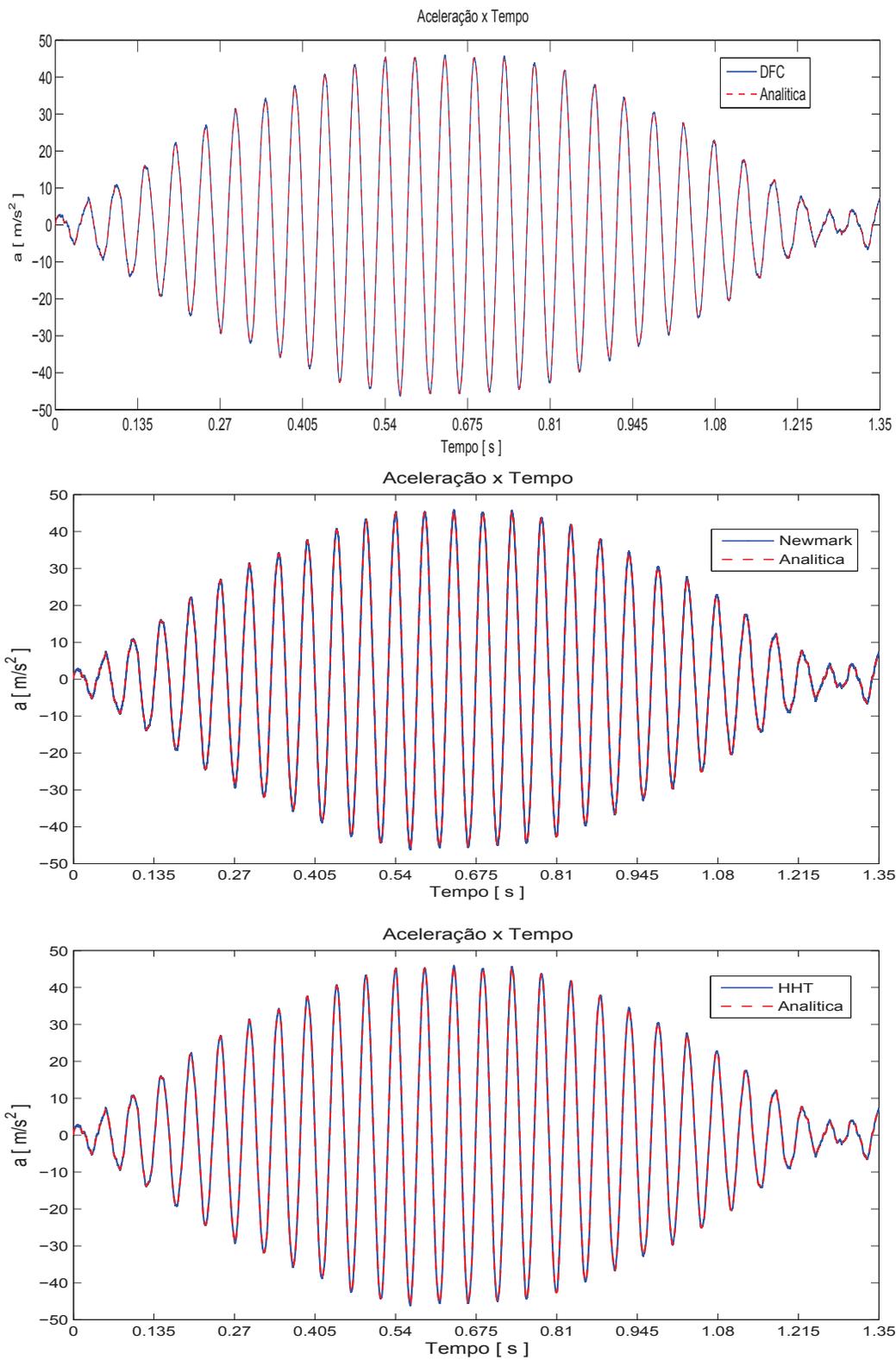


Figura 6.4: Comparação do sinal de aceleração obtido pela expressão analítica com o obtido pelos métodos de integração temporal.

No primeiro gráfico da Figura (6.4) tem-se a comparação da aceleração obtida pelo método da diferença finita centrada (DFC) com a aceleração analítica, e em seguida a comparação da aceleração obtida pelo método de Newmark com a aceleração analítica é realizada. Por fim, tem-se a comparação da aceleração obtida pelo método $\alpha - HHT$ com a aceleração analítica. Os sinais das acelerações obtidas pelos métodos de integração numérica apresentaram concordância com o sinal da aceleração analítica, obtida pela segunda derivada em relação ao tempo da solução analítica do deslocamento dada na Equação (6.2)

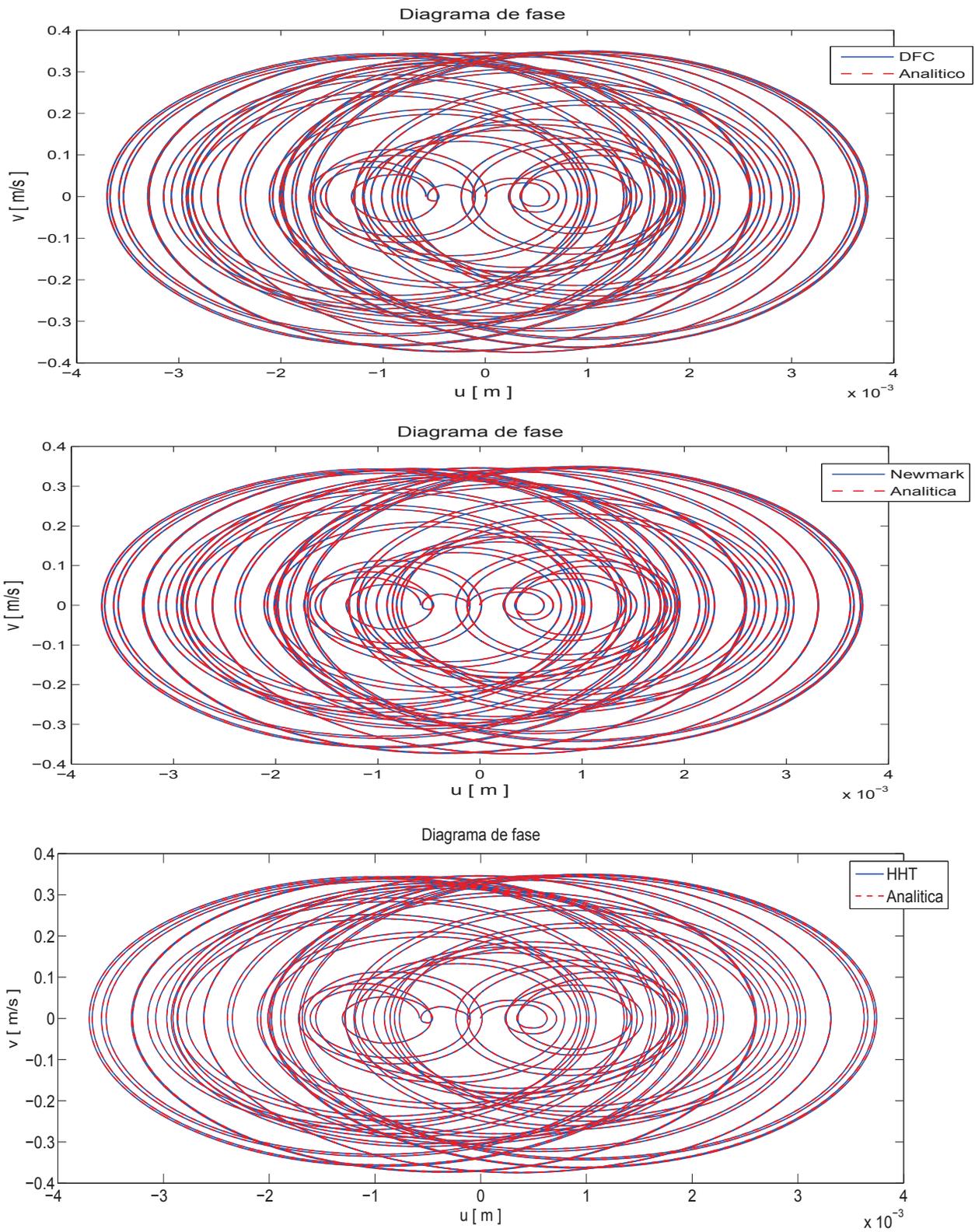


Figura 6.5: Comparação do diagrama de fase obtido pela expressão analítica com o obtido pelos métodos de integração temporal.

No primeiro gráfico da Figura (6.5) tem-se, a comparação do diagrama de fase obtido pelo método da diferença finita centrada (DFC) com a diagrama de fase analítico. Em seguida a comparação do diagrama de fase obtido pelo método de Newmark com o diagrama de fase analítico. é realizada. Por fim, tem-se a comparação do diagrama de fase obtido pelo método $\alpha - HHT$ com o diagrama de fase analítico. Os diagramas de fase obtidos pelos métodos de integração numérica apresentaram concordância com o diagrama de fase analítico. Em resumo, conclui-se que os métodos de integração numérica implementados foram capazes de reproduzir a solução analítica de forma satisfatória. Nota-se que o erro numérico dado pela norma L^2 e pelo valor RMS são da ordem 10^{-4} , em termos da variação do sinal ao longo do tempo as soluções numéricas se aproximaram de forma satisfatória.

6.2 Vibro-impacto de viga contra obstáculo rígido

Nesta seção serão apresentado os resultados obtidos para o problema de uma viga engastada livre que impacta repetidamente contra dois obstáculos rígidos como mostra a Figura 6.6.

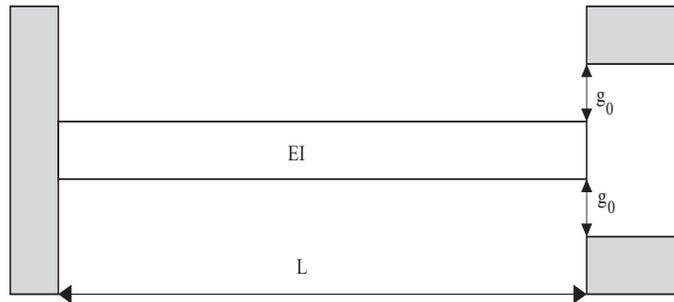


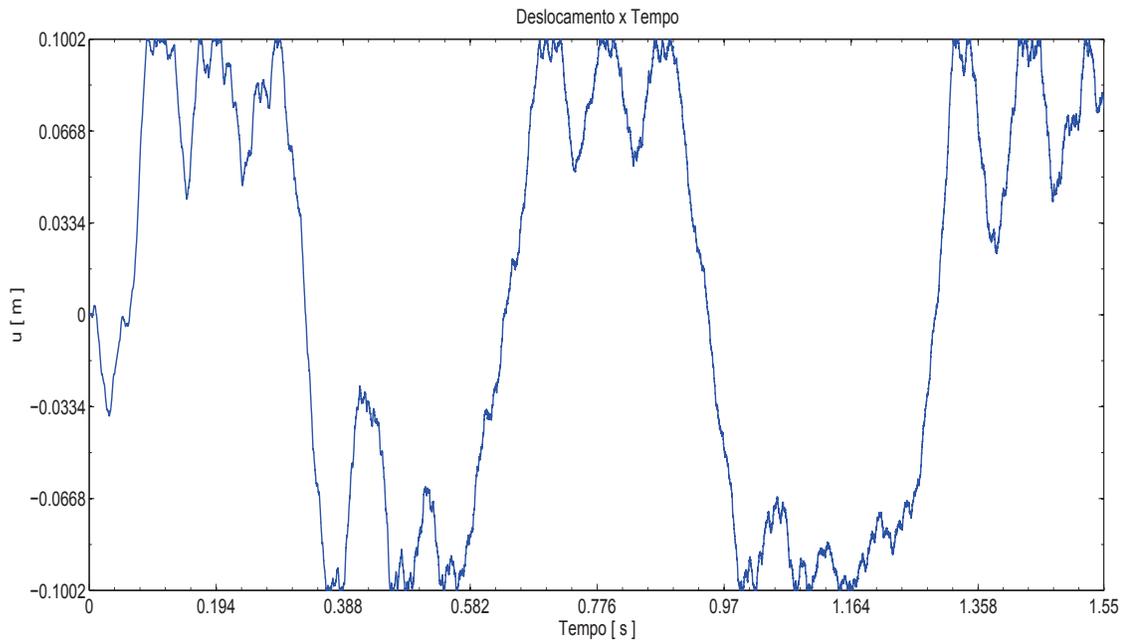
Figura 6.6: Comparação com o artigo de Dumont (2002).

Os parâmetros do problema são: comprimento da viga $L = 1,501 m$, folga entre a viga e os obstáculos $g_0 = 0.1 m$, módulo de elasticidade $E = 2 \times 10^{11} GPa$ e massa específica $\rho = 8.000 \frac{Kg}{m^3}$. A viga possui seção circular vazada com diâmetro externo de $D_e = 1 cm$ e espessura $t = 0.5 mm$. A viga está sujeita a uma excitação de base do tipo senoidal dada por $e(t) = 0.2 sen(10 t)$. A malha de elementos finitos utilizada possui 19 elementos, os intervalos de tempo utilizados foram de $\Delta t = 5 \times 10^{-6} s$, $\Delta t = 1 \times 10^{-6} s$, $\Delta t = 5 \times 10^{-7} s$ e $\Delta t = 2 \times 10^{-7} s$. O valor do penalizador do método da penalidade foi $\epsilon_N = 1 \times 10^8 \frac{N}{m}$. Este problema foi estudado anteriormente por Dumont (2002), os parâmetros do problema foram os mesmo utilizados por Dumont (2002) em seus estudos.

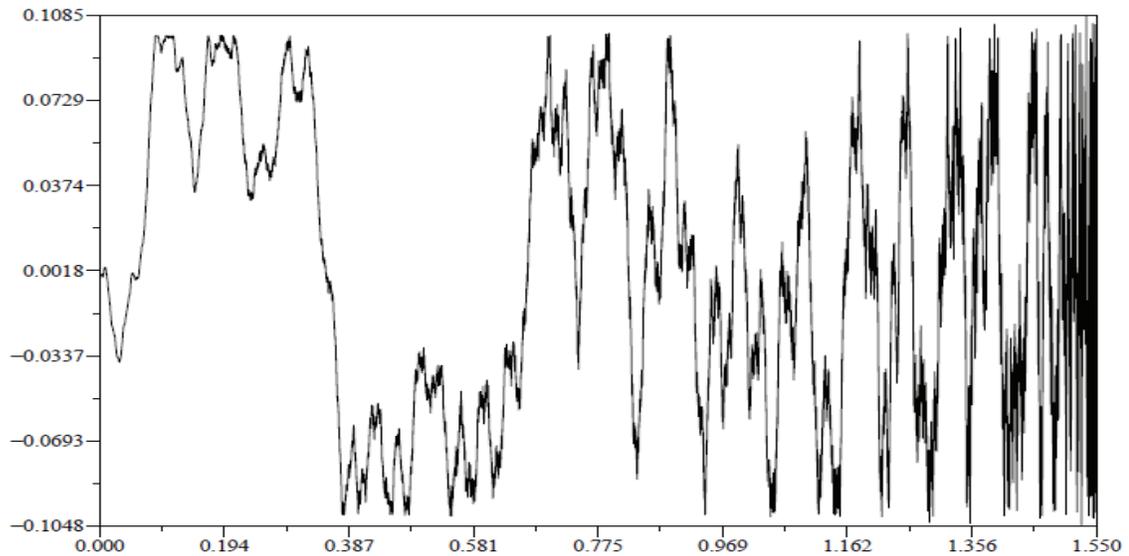
A tolerância na penetração dos corpos utilizada no presente trabalho foi $TOL = 1 \times 10^{-8}$. Os resultados obtidos foram comparados com os resultados apresentados por Dumont e Paoli (2006)

utilizando o método de Newmark para a regra trapezoidal.

As Figuras 6.7, 6.8, 6.9 e 6.10 apresentam os gráficos do deslocamento por tempo para diferentes valores de Δt obtido pelo método de *Newmark* implementado neste trabalho em linguagem MATLAB e os gráficos do deslocamento por tempo apresentados no trabalho de Dumont e Paoli (2006) obtidos pelo método de *Newmark* por ele implementado.



(a) Resultados obtidos pelo método de *Newmark* implementado neste trabalho

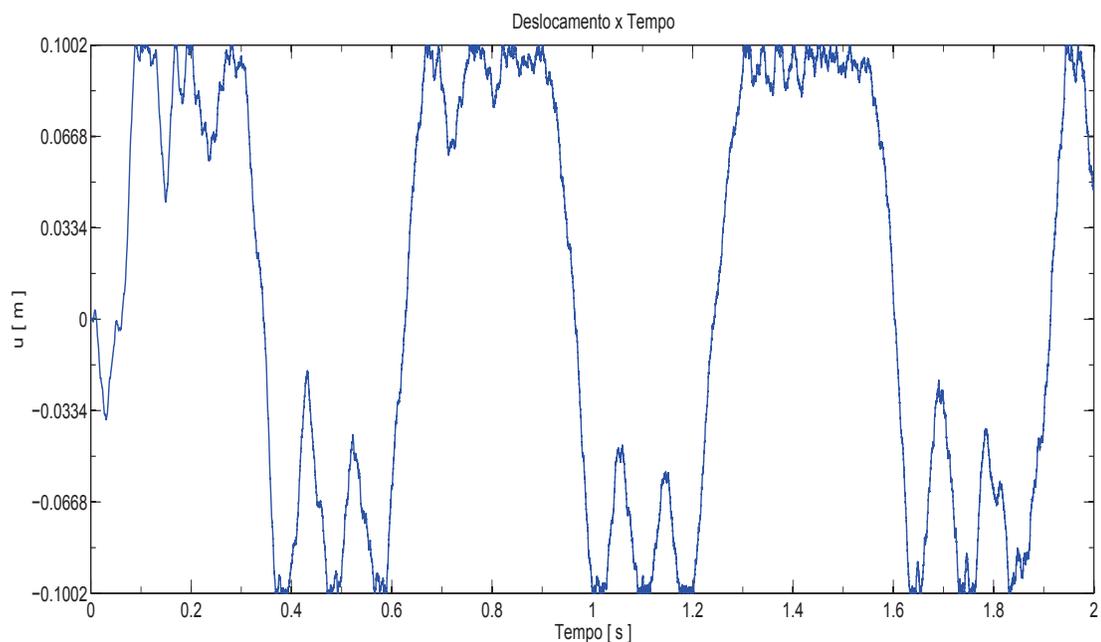


(b) Resultados do deslocamento x tempo obtidos pelo método de *Newmark* apresentado por Dumont (2002).

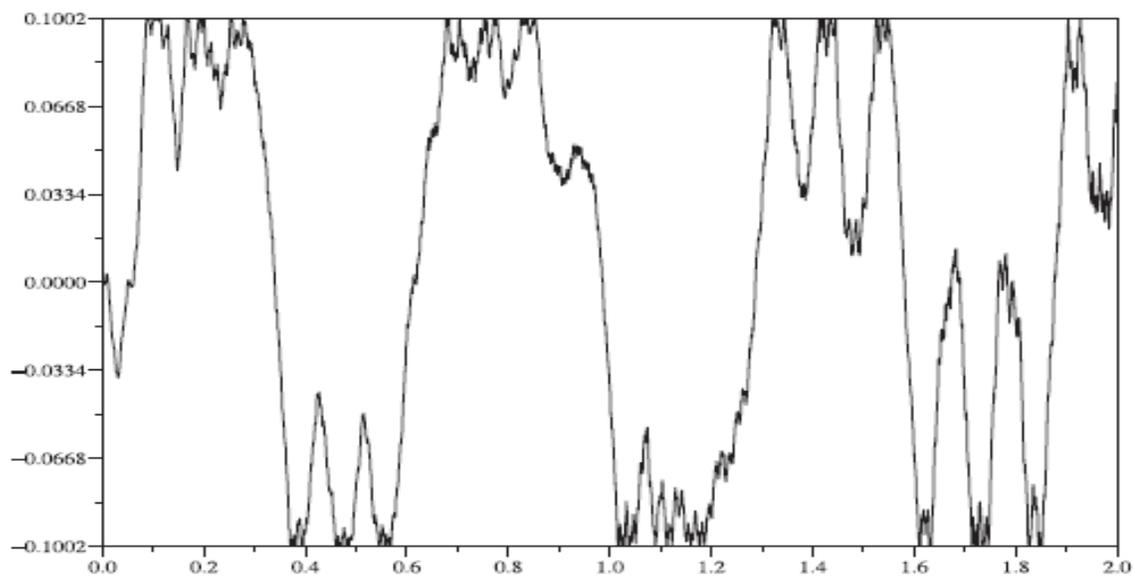
Figura 6.7: Deslocamento x tempo para uma viga impactando contra dois obstáculos rígidos posicionados de forma simétrica em relação ao eixo axial da viga, $\Delta t = 5 \times 10^{-6} s$.

Os resultados obtidos pelo método de *Newmark* implementado neste trabalho em linguagem MATLAB, mostraram ser mais estáveis após o primeiro impacto do que o o método de *Newmark*

apresentado no trabalho de Dumont (2002), mas destaca-se também boa concordância do deslocamento durante os primeiros 0.15 s segundos do movimento onde as instabilidades eram ainda muito pequenas. Acredita-se que esta diferença possa ser explicada pela diferença entre a tolerância da penetração utilizada neste trabalho com a do trabalho de Dumont (2002). No entanto esta tolerância não é mencionada por Dumont (2002) em seu trabalho. Outra possibilidade seria a forma de imposição do movimento de base que neste trabalho se deu na forma de um deslocamento prescrito na forma de $\bar{u} = 0.2 \text{ sen}(10t)$, Dumont (2002) em seu trabalho não fornece detalhes sobre este aspecto.

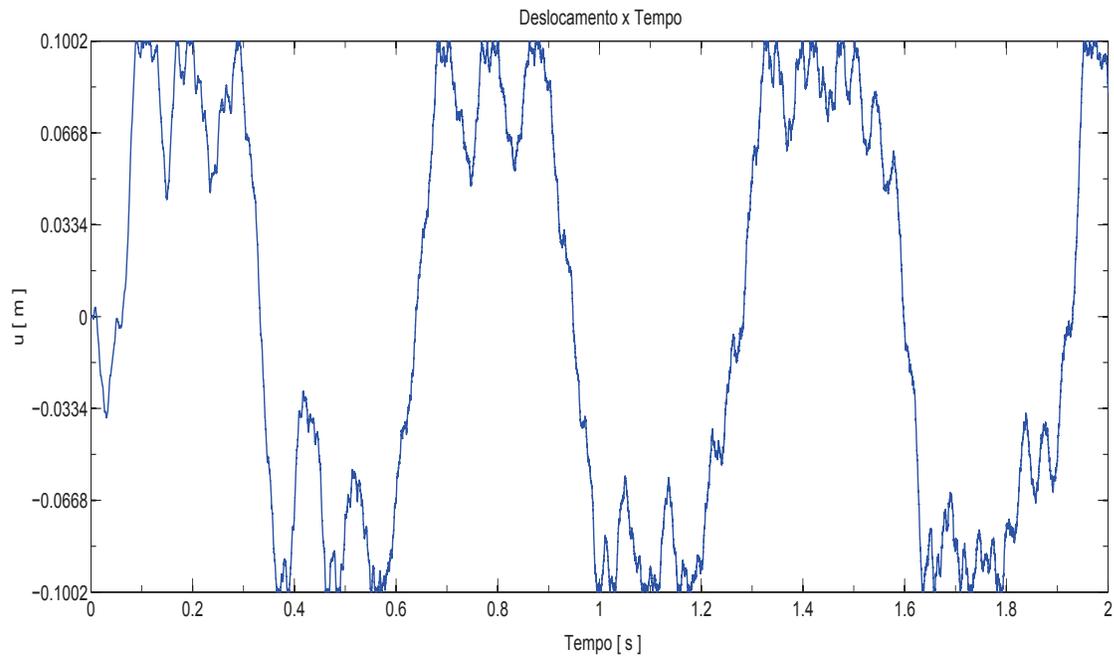


(a) Resultados obtidos pelo método de Newmark implementado neste trabalho.

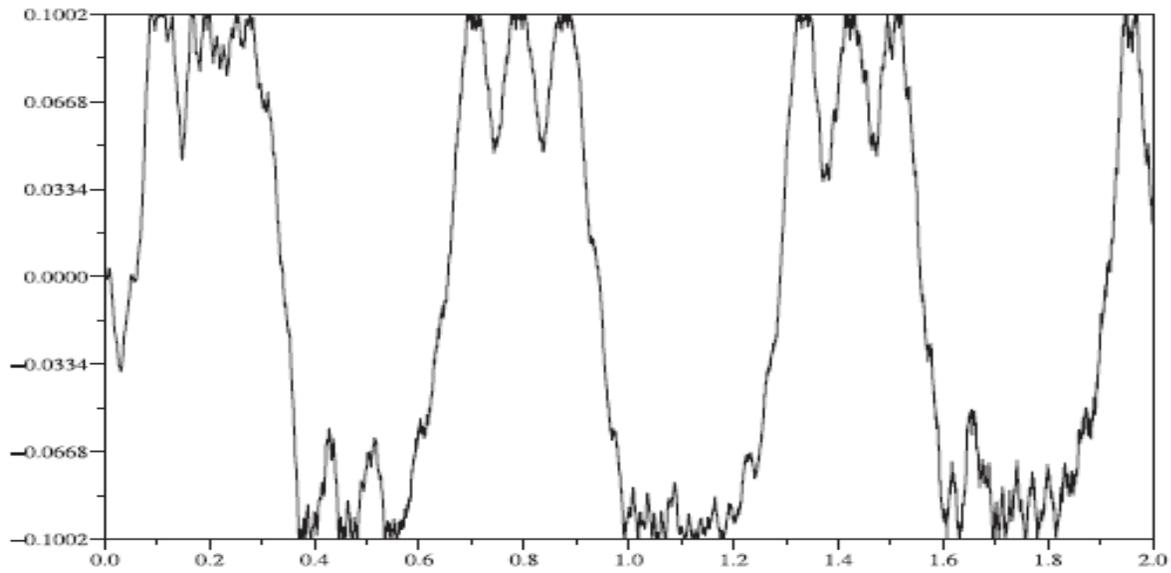


(b) Resultados do deslocamento x tempo obtidos pelo método de Newmark apresentado por Dumont (2002).

Figura 6.8: Deslocamento x tempo para uma viga impactando contra dois obstáculos rígidos posicionados de forma simétrica em relação ao eixo axial da viga, $\Delta t = 1 \times 10^{-6} s$.

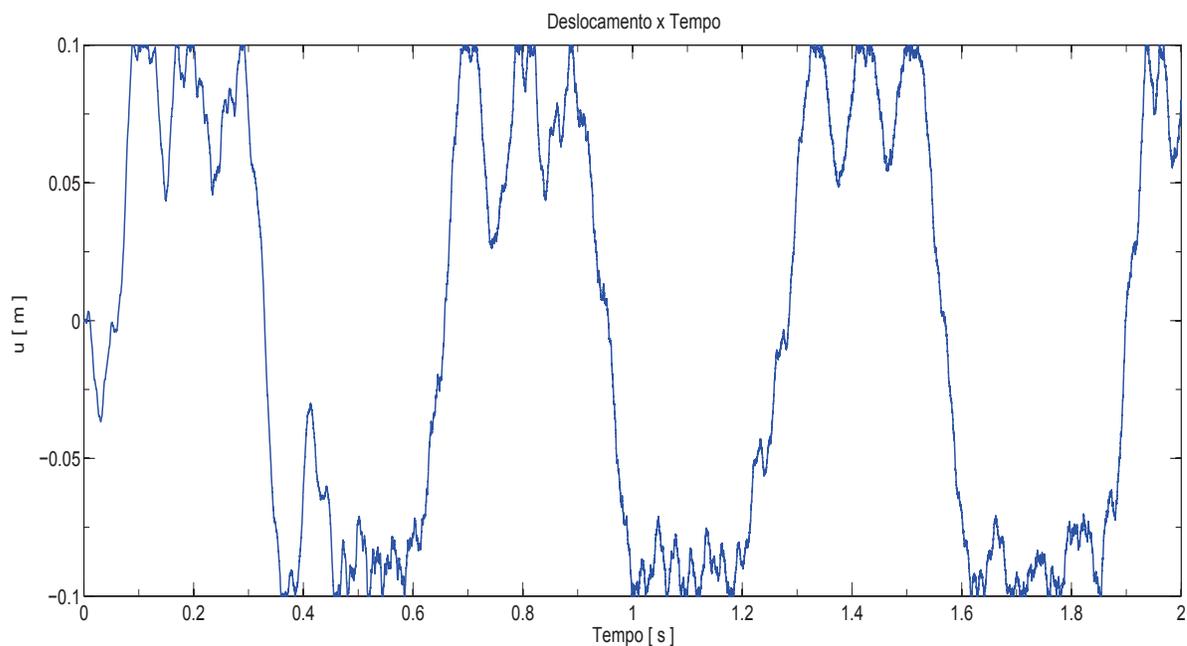


(a) Resultados obtidos pelo método de Newmark implementado neste trabalho.

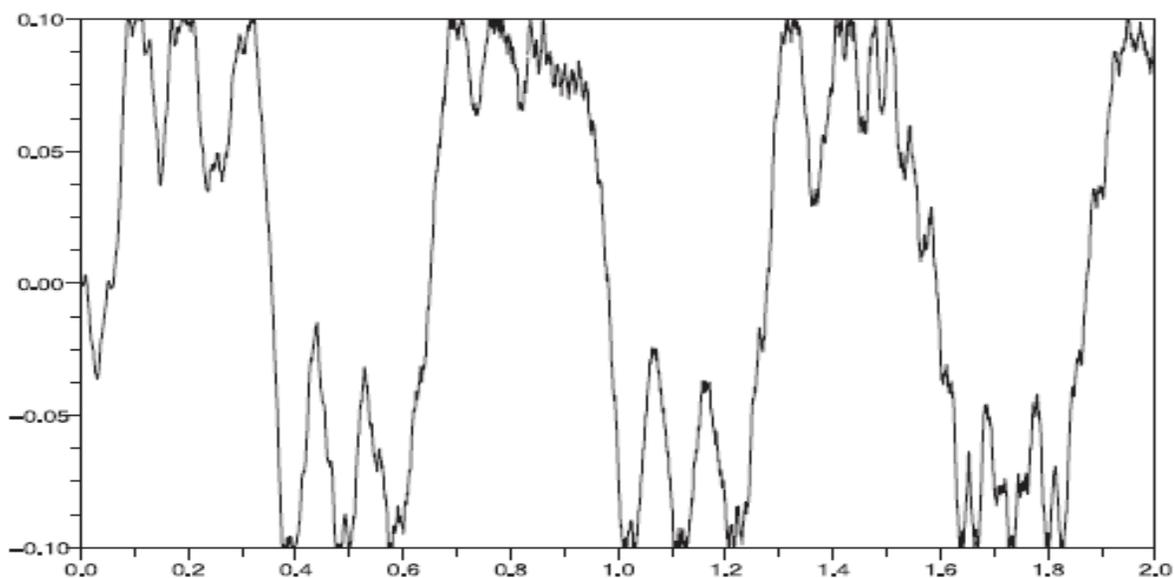


(b) Resultados do deslocamento x tempo obtidos pelo método de Newmark apresentado por Dumont (2002).

Figura 6.9: Deslocamento x tempo para uma viga impactando contra dois obstáculos rígidos posicionados de forma simétrica em relação ao eixo axial da viga, $\Delta t = 5 \times 10^{-7} s$.



(a) Resultados obtidos pelo método de Newmark implementado neste trabalho.



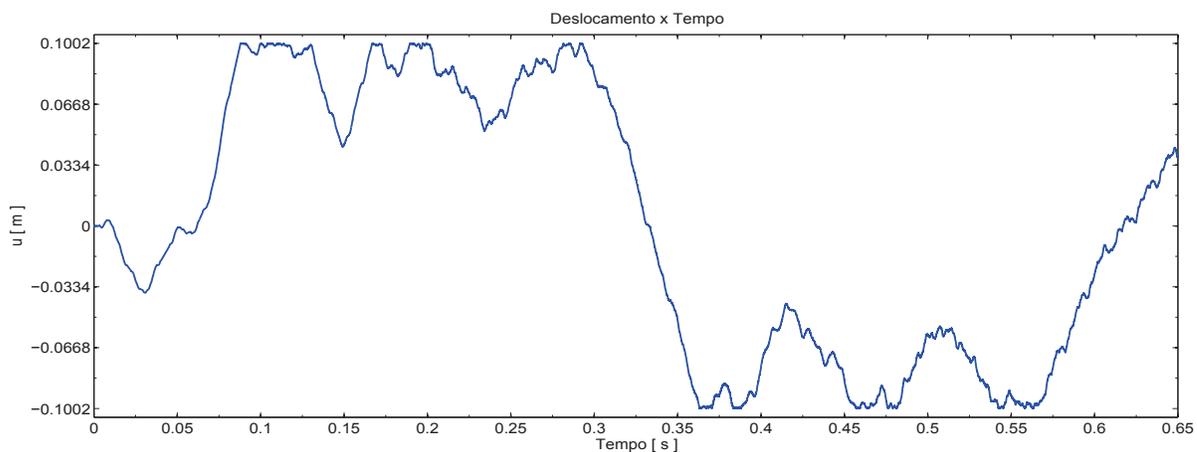
(b) Resultados do deslocamento x tempo obtidos pelo método de Newmark apresentado por Dumont (2002).

Figura 6.10: Deslocamento x tempo para uma viga impactando contra dois obstáculos rígidos posicionados de forma simétrica em relação ao eixo axial da viga, $\Delta t = 2 \times 10^{-7} s$.

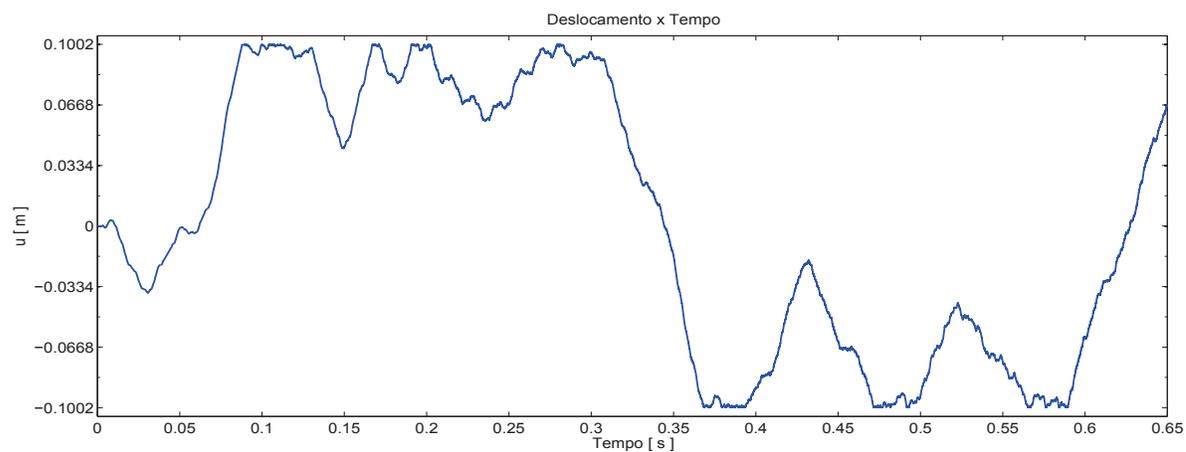
Os resultados obtidos pelo método de *Newmark* implementado neste trabalho apresentaram boa concordância com os resultados obtidos por de Dumont e Paoli (2006) utilizando o método

de *Newmark* por ele implementado, especialmente para Δt pequenos como os utilizados nas Figuras 6.8, 6.9 e 6.10. Os resultados obtidos por este trabalho apresentaram boa concordância em termos de valores e forma do sinal de deslocamento até valores de $t = 0.4 s$, que corresponde ao início do impacto com o obstáculo inferior. Para valores de $t > 0.4 s$ diferenças entre as repostas obtidas pelo método de *Newmark* implementado neste trabalho em relação ao implementado por Dumont (2002) são observáveis sendo mais destacadas para $\Delta t = 2 \times 10^{-7} s$. Deve-se destacar também o alto custo computacional destas simulações devido ao intervalo de tempo muito pequeno e quantidade de dados gerados.

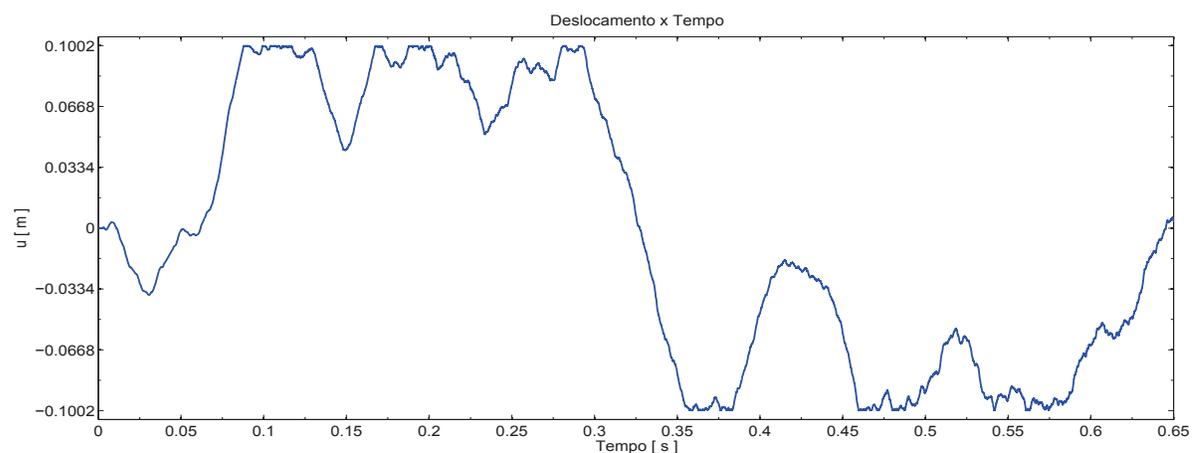
Avançando além das análises feitas no trabalho de Dumont (2002) para o problema da viga impactando contra os obstáculos rígidos. Desejava-se investigar os deslocamentos, variação da energia (ΔE) entre dois instantes consecutivos (t_n, t_{n+1}), a evolução da folga e a força de contato para o problema anterior das vigas impactando contra dois obstáculos rígidos em seus instantes iniciais. Portanto, foi definindo um intervalo de análise $0 \leq t \leq 0.65 s$. Os resultados obtidos são apresentados nas figuras 6.11, 6.12, 6.13 e 6.14 e mostram respectivamente a comparação dos deslocamentos, variação da energia ΔE entre dois instantes consecutivos (t_n, t_{n+1}), a evolução da folga e a força de contato obtidos pelo método da diferença centrada, *Newmark* e o método $\alpha - HHT$, para $\Delta t = 1 \times 10^{-6} s$. Os resultados são apresentados para o intervalo de tempo de 0 até 0.65 s.



(a) Método da diferença finita centrada (DFC).

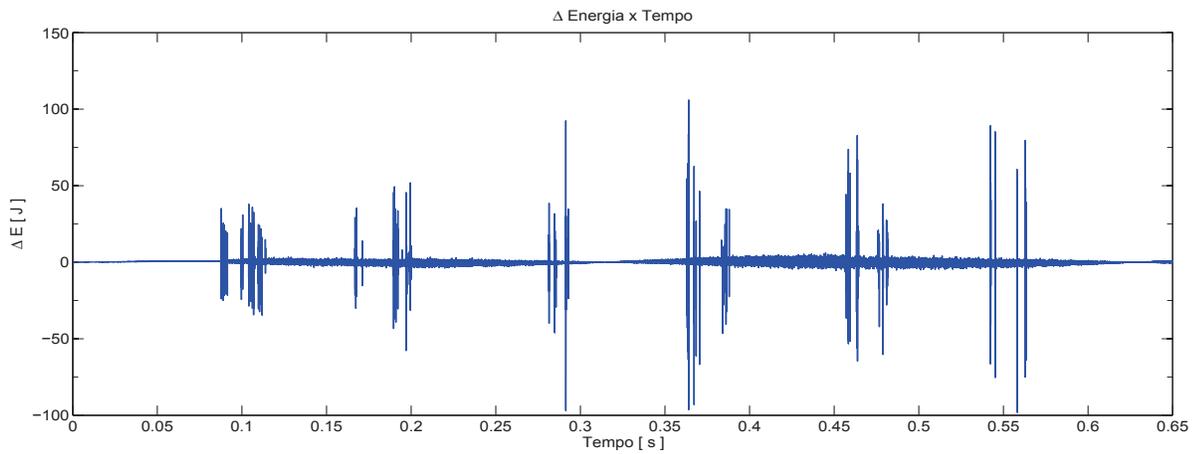


(b) Método de *Newmark* com $\gamma = 0.5$ e $\beta = 0.25$.

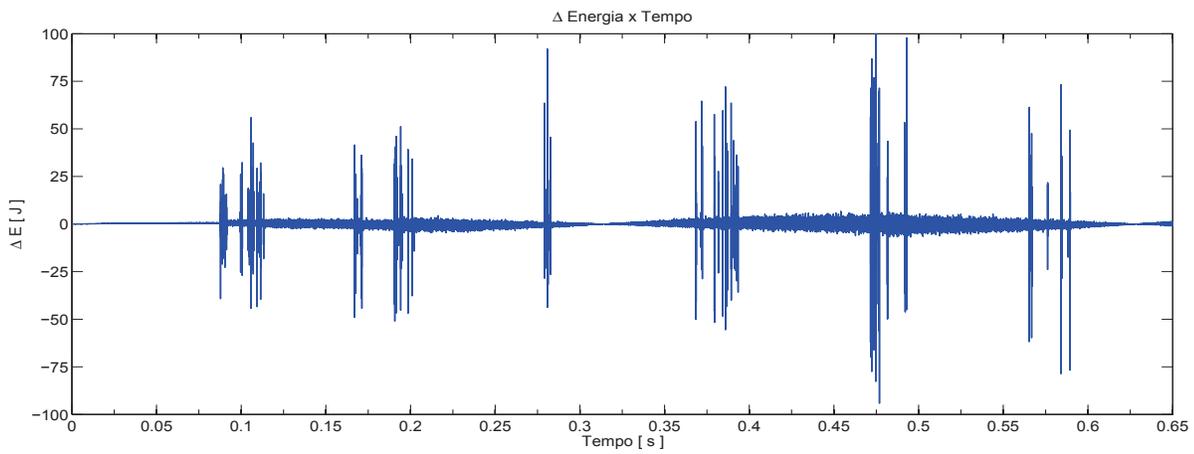


(c) Método $\alpha - HHT$ com $\alpha = 0.1$, $\gamma = 0.6$ e $\beta = 0.3025$.

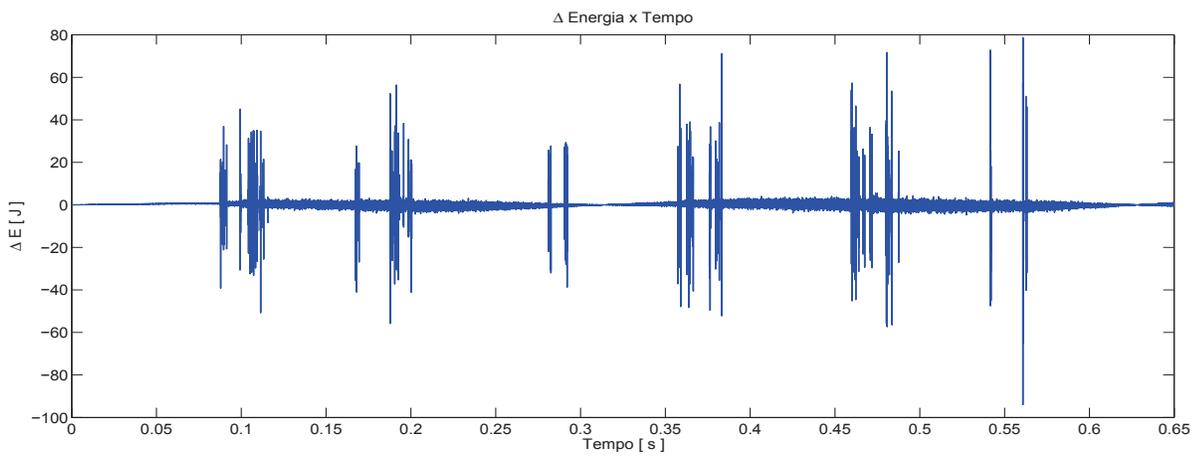
Figura 6.11: Comparação do deslocamento obtido pelos métodos DFC, Newmark e $\alpha - HHT$, para $\Delta t = 1 \times 10^{-6}$ s e excitação $e(t) = 0.2 \text{ sen}(10t)$.



(a) Método da diferença finita centrada (DFC).

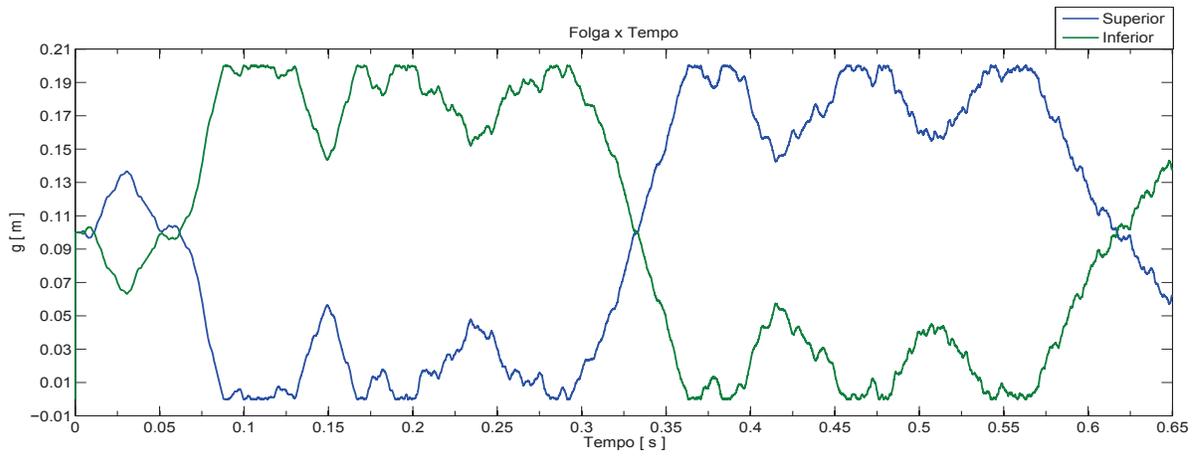


(b) Método de *Newmark* com $\gamma = 0.5$ e $\beta = 0.25$.

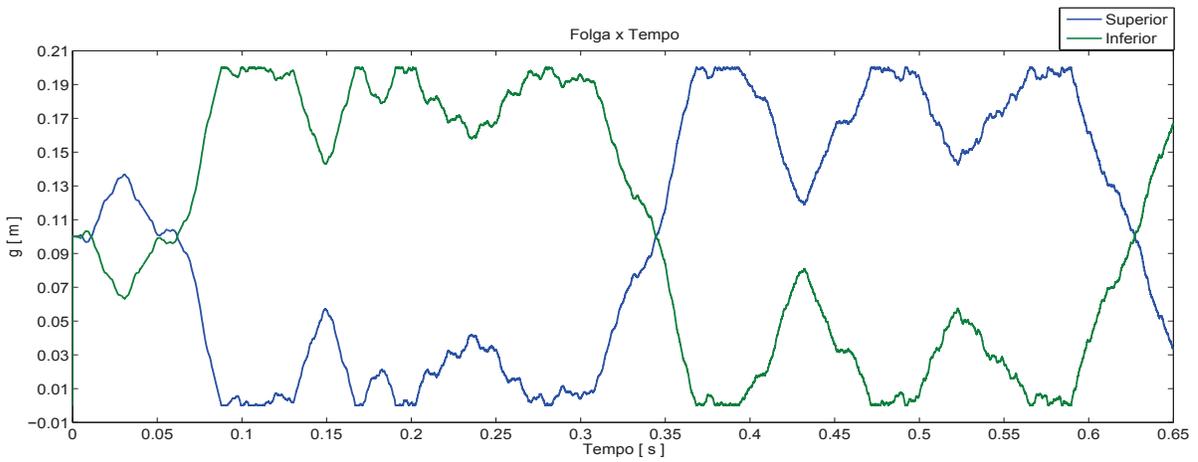


(c) Método $\alpha - HHT$ com $\alpha = 0.1$, $\gamma = 0.6$ e $\beta = 0.3025$.

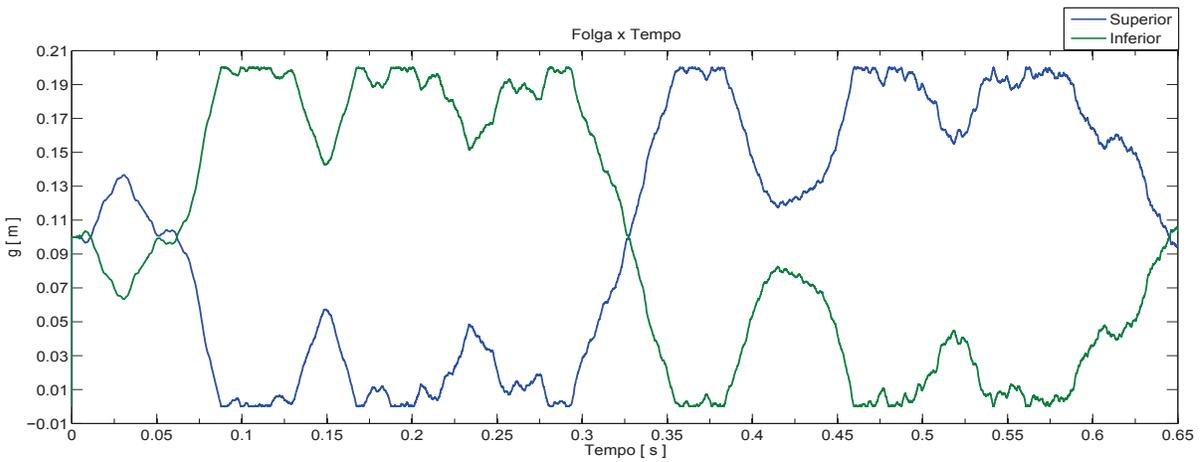
Figura 6.12: Comparação de ΔE obtido pelos métodos DFC, Newmark e $\alpha - HHT$, para $\Delta t = 1 \times 10^{-6}$ s e excitação $e(t) = 0.2 \text{ sen}(10t)$.



(a) Método da diferença finita centrada (DFC).

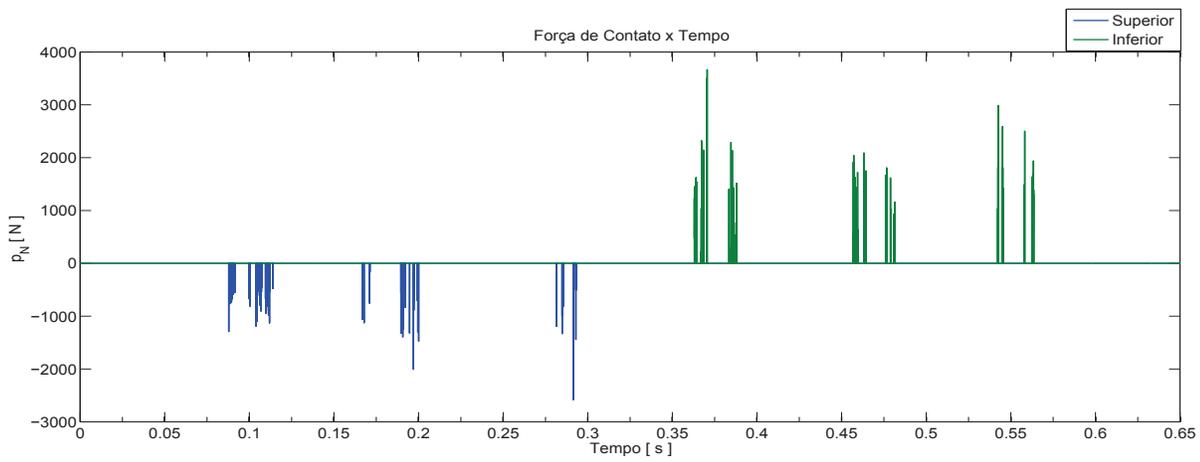


(b) Método de *Newmark* com $\gamma = 0.5$ e $\beta = 0.25$.

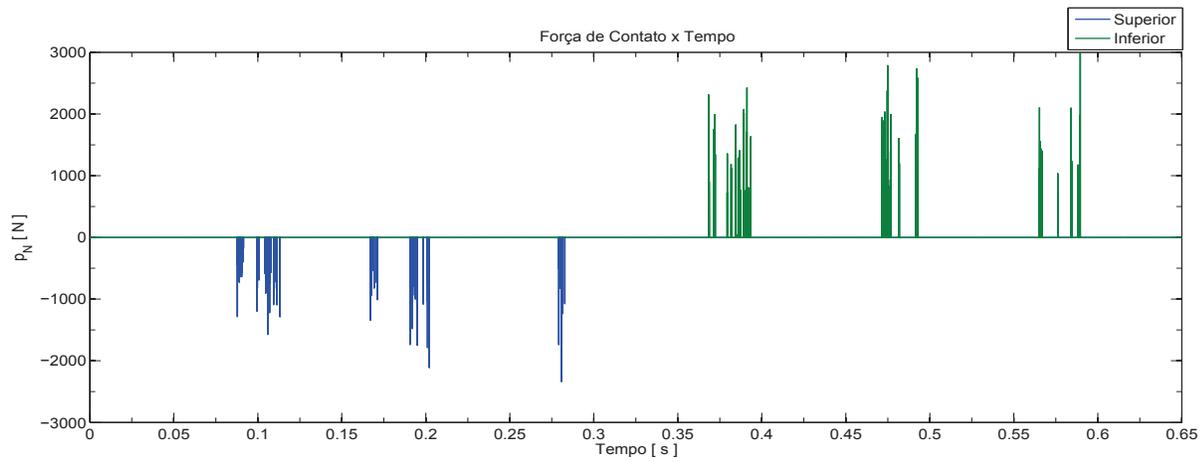


(c) Método $\alpha - HHT$ com $\alpha = 0.1$, $\gamma = 0.6$ e $\beta = 0.3025$.

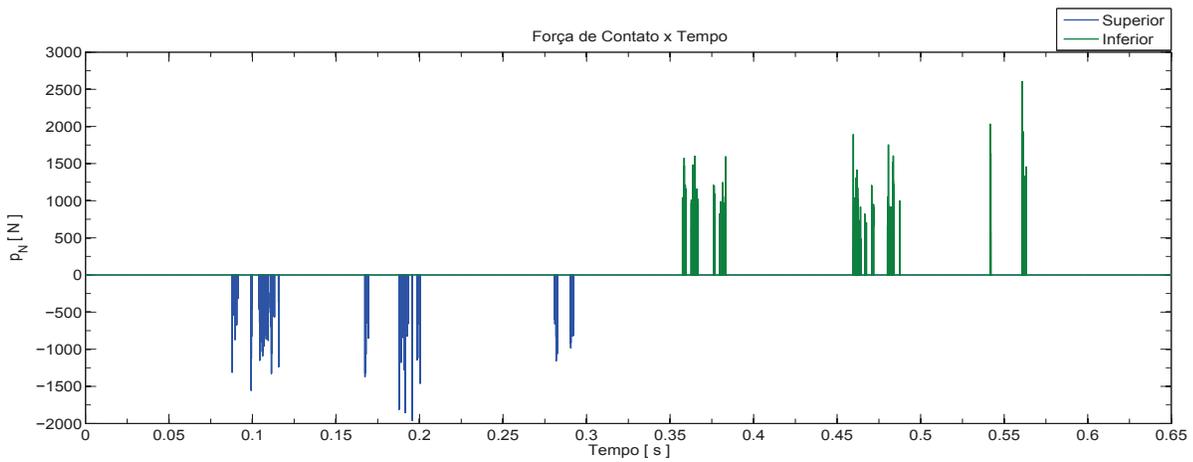
Figura 6.13: Distância da viga até os obstáculos (folga) obtida pelos métodos DFC, Newmark e $\alpha - HHT$, para $\Delta t = 1 \times 10^{-6}$ s e excitação $e(t) = 0.2 \text{ sen}(10t)$.



(a) Método da diferença finita centrada (DFC).



(b) Método de *Newmark* com $\gamma = 0.5$ e $\beta = 0.25$.

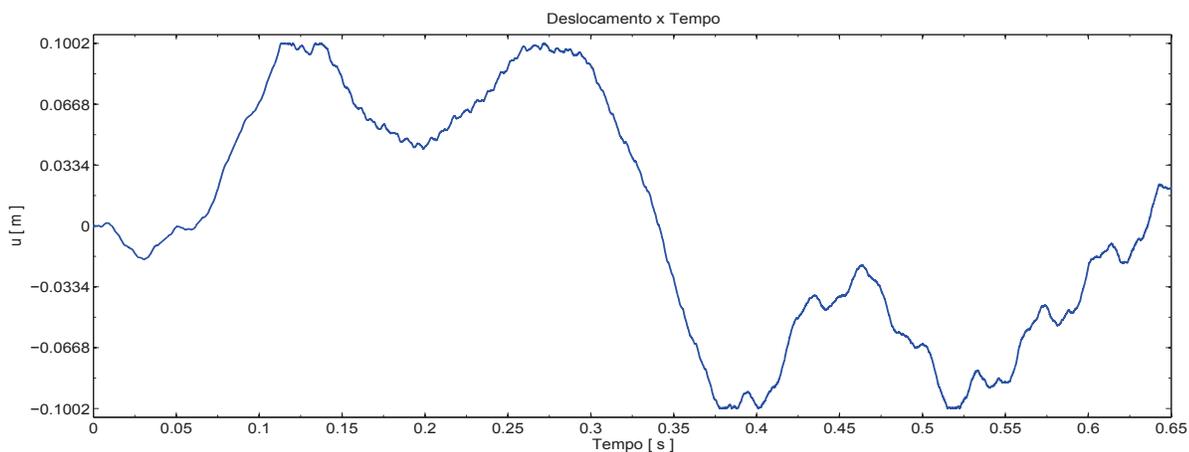


(c) Método $\alpha - HHT$ com $\alpha = 0.1$, $\gamma = 0.6$ e $\beta = 0.3025$.

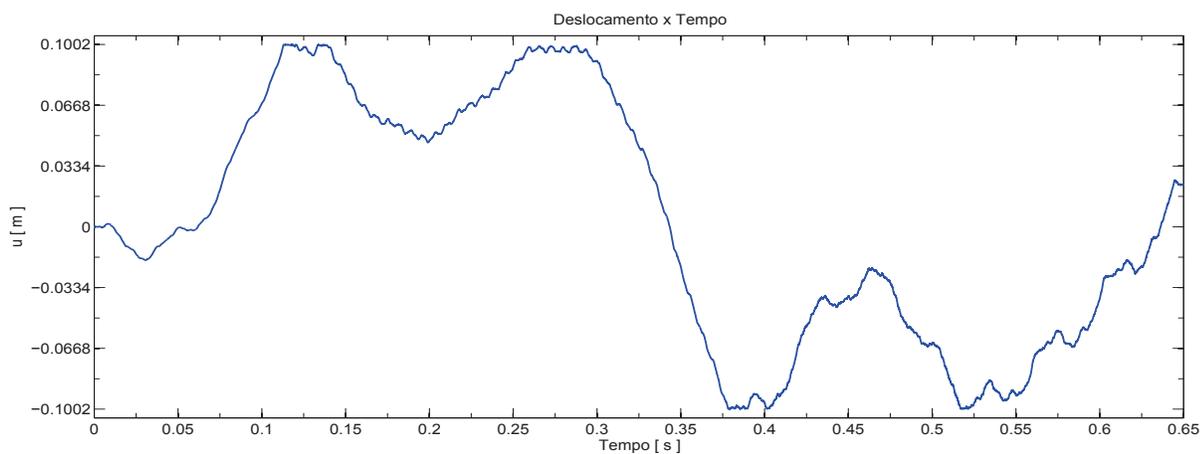
Figura 6.14: Comparação força de contato p_N obtida pelos métodos DFC, Newmark e $\alpha - HHT$, para $\Delta t = 1 \times 10^{-6}$ s e excitação $e(t) = 0.2 \text{ sen}(10t)$.

Os resultados de deslocamento apresentados na Figura 6.11 mostram diferenças significativas nos deslocamentos obtidos para cada método nas regiões onde os impactos ocorreram. Na medida da variação da energia verificam-se os picos de energia positivos e negativos mostrando aumento e redução respectivamente durante o impacto. Nota-se um "ruído" de energia (oscilações nos gráficos da energia após o primeiro impacto), que surge mostrando que os métodos de integração não conservam a energia durante o impacto, apesar do problema não possuir nenhum efeito de dissipação de não energia. Nota-se que esse "ruído" de energia aparentemente aumenta a cada vez que a viga impacta contra os obstáculos rígidos. Destaca-se também que o método *alpha - HHT* foi o método que menos viola a conservação da energia, quando comparados aos métodos de *Newmark* e *DFC*, uma vez que os valores da variação na energia foram menores para este integrador quando comparados aos outros dois. O comportamento da folga entre a viga e os obstáculos segue o mesmo comportamento observado no deslocamento, onde as diferenças mais significativas se localizam nos intervalos de tempo onde o impacto ocorre. A força de contato, como esperado, apresenta os picos característicos do fenômeno de impacto, sendo que os valores desta foram maiores para o método da diferença finita centrada e menores para o método $\alpha - HHT$. Os valores menores da força de contato para método $\alpha - HHT$ são justificados pela sua menor violação da conservação da energia, de forma que o sistema trabalha em um nível de energia mais baixo do que nos outros métodos de integração.

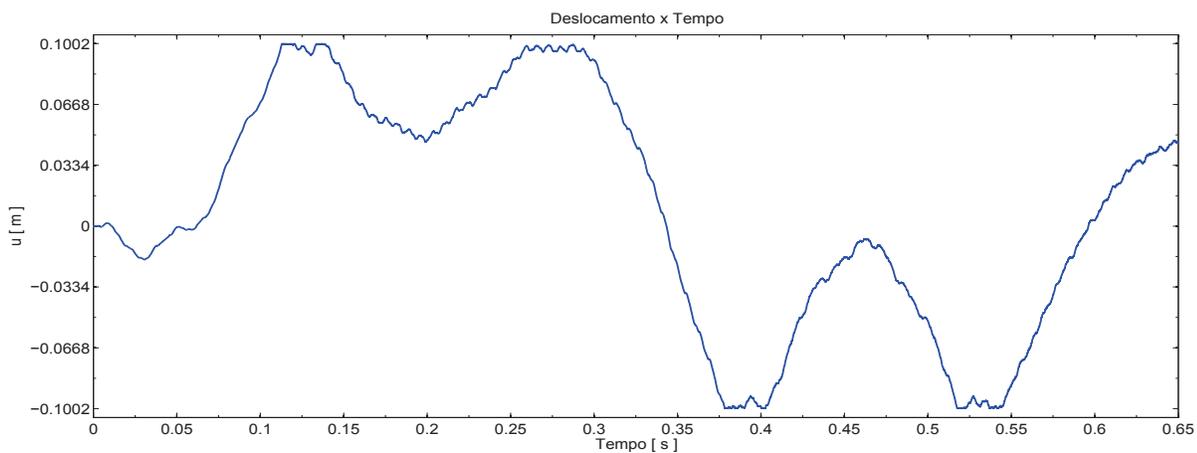
No resultados apresentados anteriormente a excitação de base era $e(t) = 0.2 \text{ sen}(10t)$. Buscando ajustar o nível da excitação de base ao valor da distância entre a viga e os obstáculos, a excitação foi reduzida a $e(t) = 0.1 \text{ sen}(10t)$. O mesmo problema da viga impactando contra os obstáculos rígidos representado pela Figura 6.6 é considerado agora com a excitação de base reduzida, utilizando os mesmos parâmetros anteriores. Os resultados da comparação dos deslocamentos, variação da energia ΔE entre dois instantes consecutivos (t_n, t_{n+1}) , a evolução da folga e a força de contato obtidos pelo método da diferença centrada, *Newmark* e o método $\alpha - HHT$, para $\Delta t = 1 \times 10^{-6} \text{ s}$ com intervalo de tempo de 0 até 0.65 s, são obtidos e apresentados nas figuras 6.15, 6.16, 6.17 e 6.18.



(a) Método da diferença finita centrada (DFC).

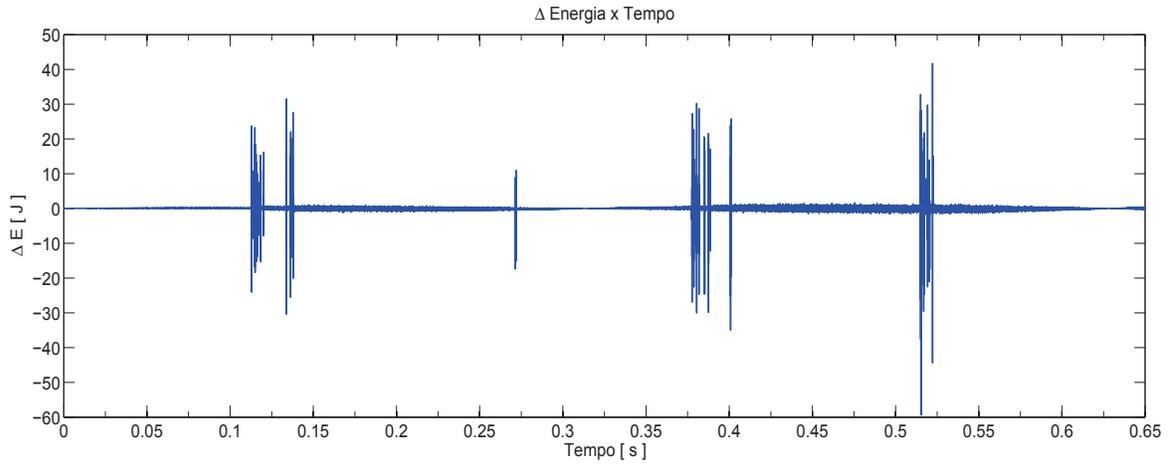


(b) Método de *Newmark* com $\gamma = 0.5$ e $\beta = 0.25$.

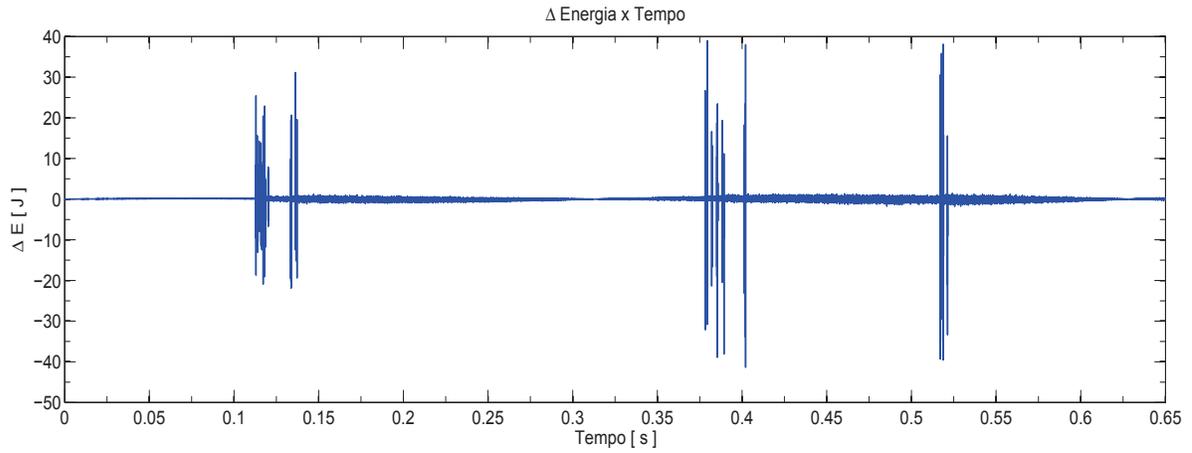


(c) Método $\alpha - HHT$ com $\alpha = 0.1$, $\gamma = 0.6$ e $\beta = 0.3025$.

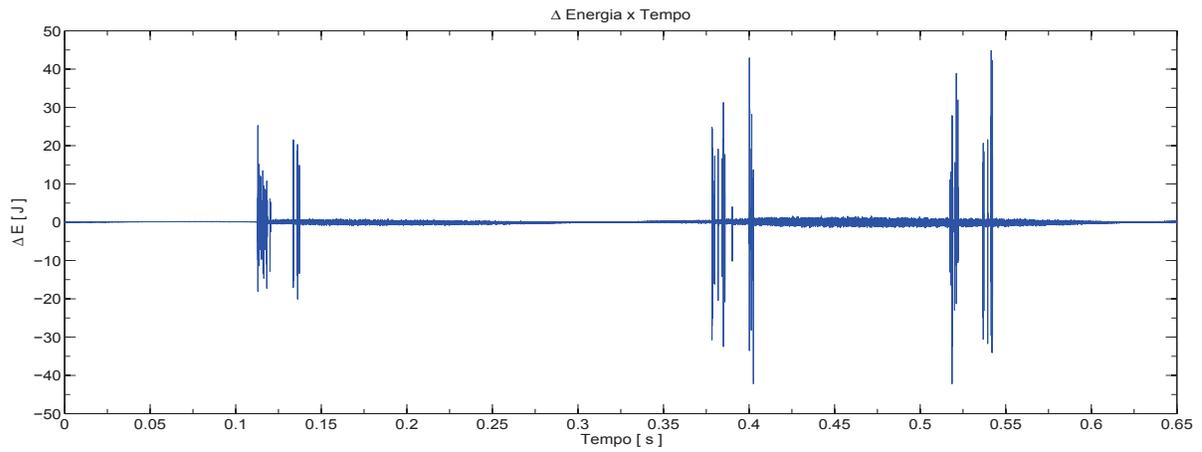
Figura 6.15: Comparação do deslocamento obtido pelos métodos DFC, Newmark e $\alpha - HHT$, para $\Delta t = 1 \times 10^{-6}$ s e excitação $e(t) = 0.1 \text{ sen}(10t)$.



(a) Método da diferença finita centrada (DFC).

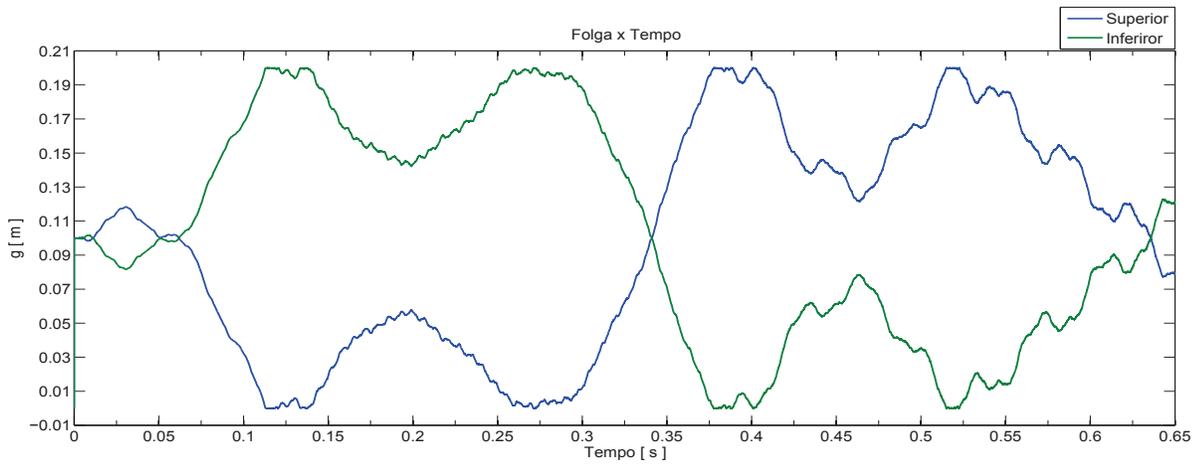


(b) Método de *Newmark* com $\gamma = 0.5$ e $\beta = 0.25$.

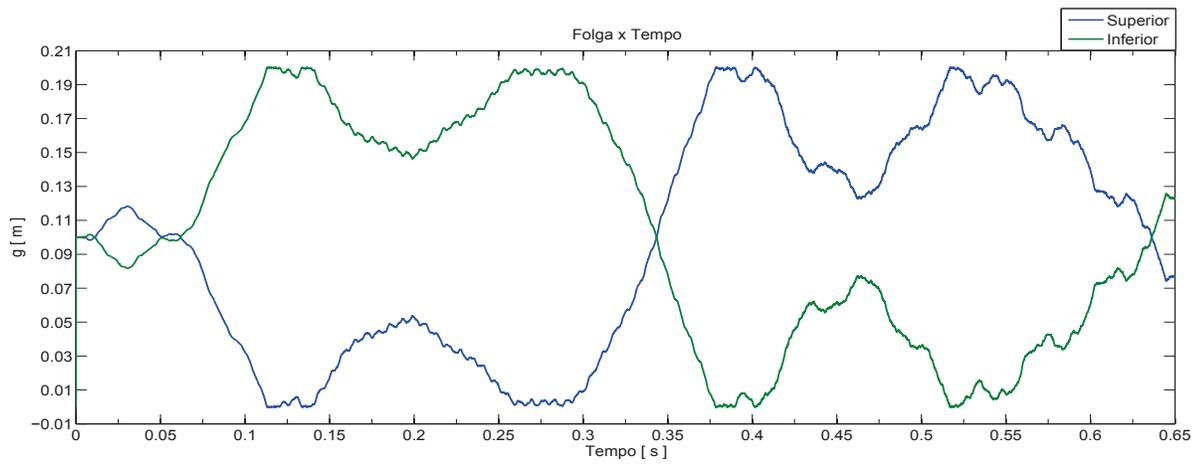


(c) Método $\alpha - HHT$ com $\alpha = 0.1$, $\gamma = 0.6$ e $\beta = 0.3025$.

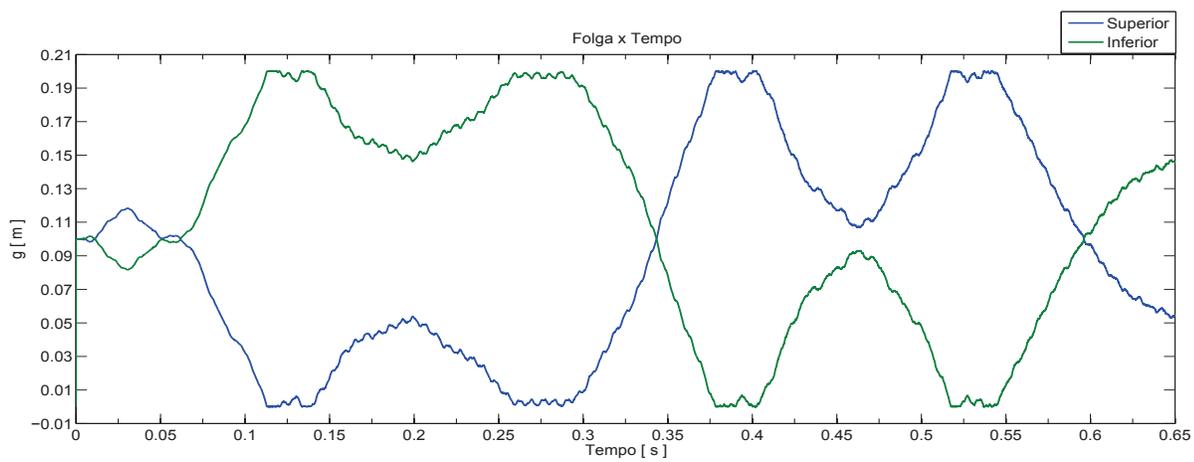
Figura 6.16: Comparação de ΔE obtido pelos métodos DFC, Newmark e $\alpha - HHT$, para $\Delta t = 1 \times 10^{-6}$ s e excitação $e(t) = 0.1 \text{ sen}(10t)$.



(a) Método da diferença finita centrada (DFC).

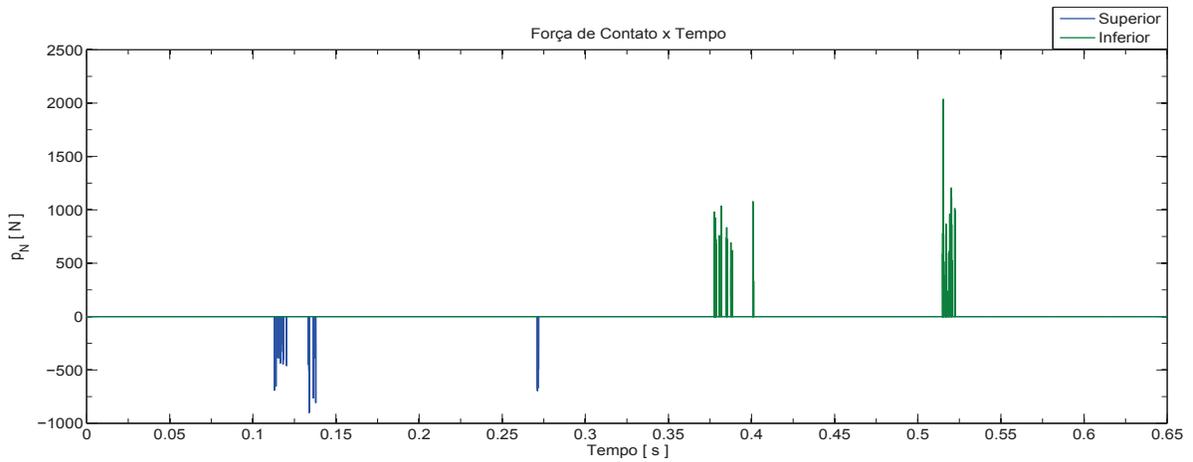


(b) Método de *Newmark* com $\gamma = 0.5$ e $\beta = 0.25$.

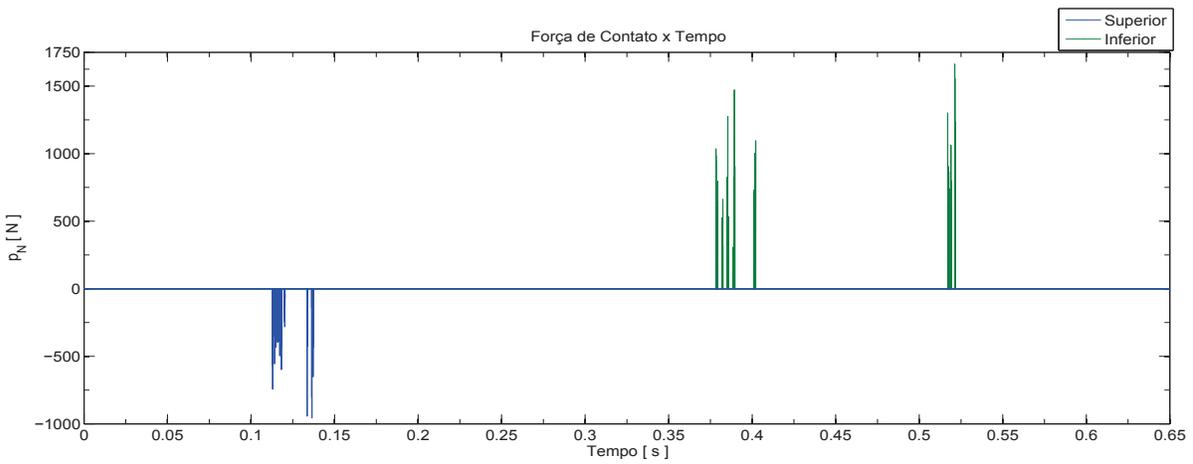


(c) Método $\alpha - HHT$ com $\alpha = 0.1$, $\gamma = 0.6$ e $\beta = 0.3025$.

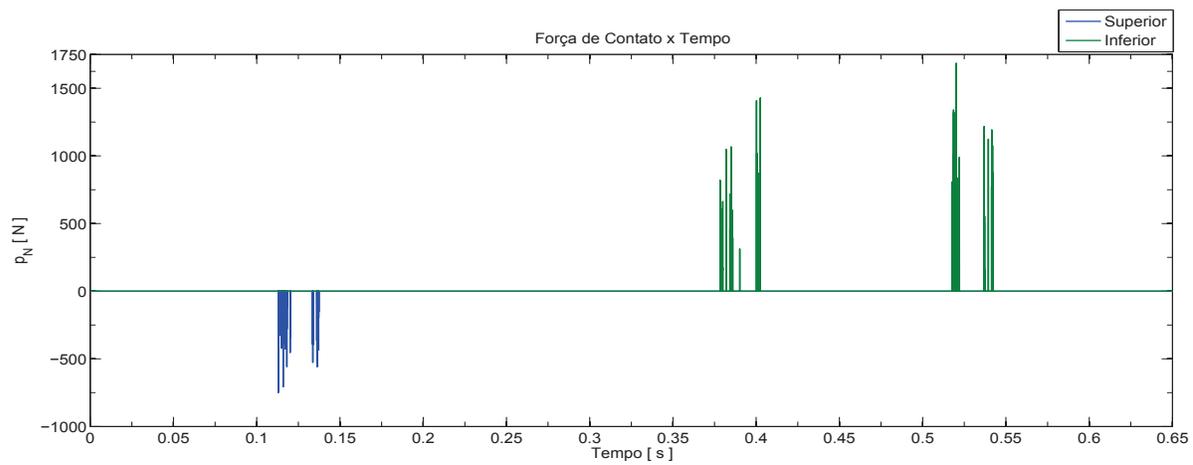
Figura 6.17: Distância da viga até os obstáculos (folga) obtida pelos métodos DFC, Newmark e $\alpha - HHT$, para $\Delta t = 1 \times 10^{-6}$ s e excitação $e(t) = 0.1 \text{ sen}(10t)$.



(a) Método da diferença finita centrada (DFC).



(b) Método de *Newmark* com $\gamma = 0.5$ e $\beta = 0.25$.



(c) Método $\alpha - HHT$ com $\alpha = 0.1$, $\gamma = 0.6$ e $\beta = 0.3025$.

Figura 6.18: Comparação força de contato p_N obtida pelos métodos DFC, Newmark e $\alpha - HHT$, para $\Delta t = 1 \times 10^{-6}$ s e excitação $e(t) = 0.1 \text{ sen}(10t)$.

Os resultados de deslocamento obtido para a amplitude do movimento de base de 0.1 m mostraram as mesmas características observadas com a amplitude de 0.2 m . Destaca-se que a região do impacto ficou mais evidente, o que permite identificar no gráfico de deslocamento, próximo ao instante 0.125 s , a ocorrência do impacto entre a viga e o obstáculo superior e em instantes seguintes a viga se separa e volta a impactar em aproximadamente 0.15 s . Estes instantes ficam evidentes quando observa-se os gráficos da variação da energia e da força de contato (ver os picos). O mesmo comportamento é observado quando a viga impacta com obstáculo inferior próximo ao instante 0.375 s e se separa para impactar novamente em aproximadamente 0.4 s . Ao verificar os gráficos da variação da energia e da força de contato verifica-se os picos neste instantes. Depois ainda em aproximadamente 0.525 s um novo impacto com o obstáculo inferior ocorre seguido de uma separação e um novo impacto. Nota-se também que a variação de energia apresentou menos discrepância entre os métodos. O método da diferença finita (DFC) apresentou um valor um pouco maior ainda, já o método α -HHT e o método de *Newmark* foram muito semelhantes. Novamente observa-se o "ruído" na energia mostrando que a conservação da energia não é satisfeita apesar do problema não incluir efeitos dissipativos. A folga entre a viga e os obstáculo apresentou o mesmo comportamento descrito para o deslocamento. Na força de contato verifica-se os instantes onde o impacto ocorre bem destacados pelos picos que surgem, nota-se também que a força desenvolvida no impacto com obstáculo inferior foi maior que a desenvolvida no impacto superior, isso de fato mostra que o método de solução leva a um aumento de energia durante o impacto com obstáculo superior e conseqüentemente aumentado a energia do sistema, provocando que o impacto contra o obstáculo inferior ocorra em um nível energético maior.

6.3 Vibro-impacto de viga contra viga

Após uma análise de impacto entre uma viga impactando contra um obstáculo rígido, deseja-se saber como é a resposta de uma viga impactando contra outra viga. Diferentemente do apresentado na situação anterior em que um corpo era flexível e o outro rígido, na situação de interesse atual ambos os corpos são flexíveis. O problema das duas vigas impactando é mostrado na Figura 6.19.

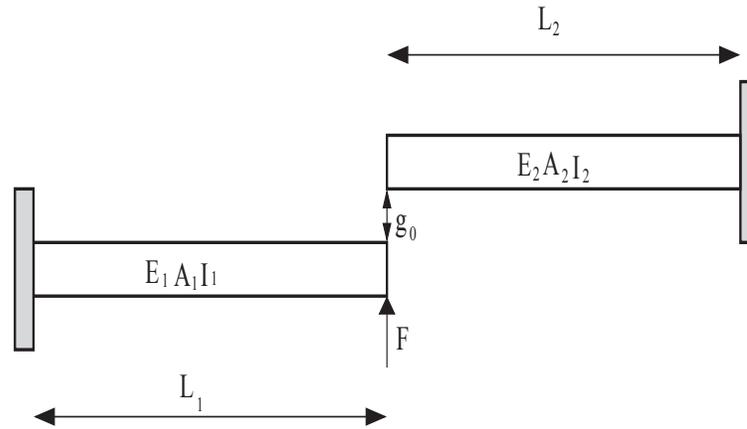
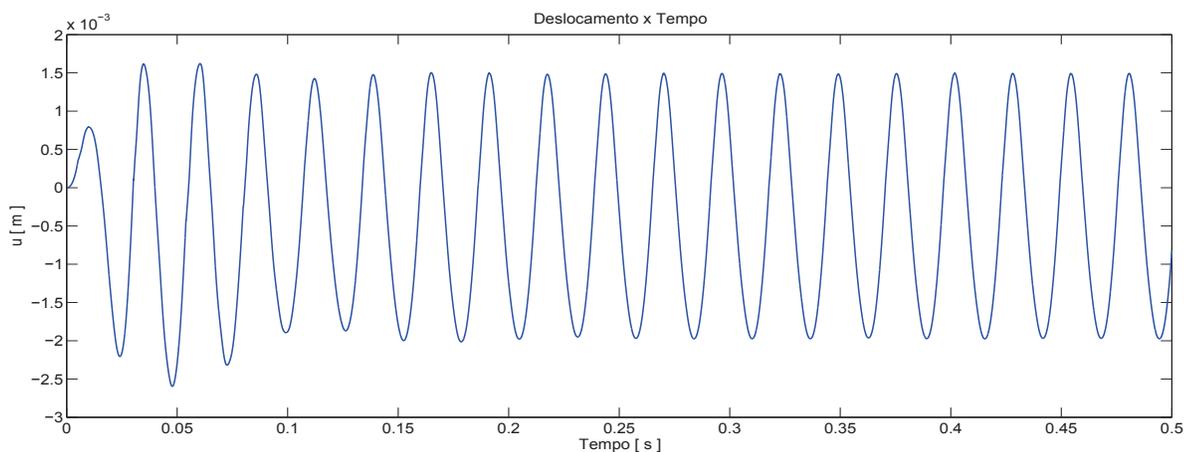


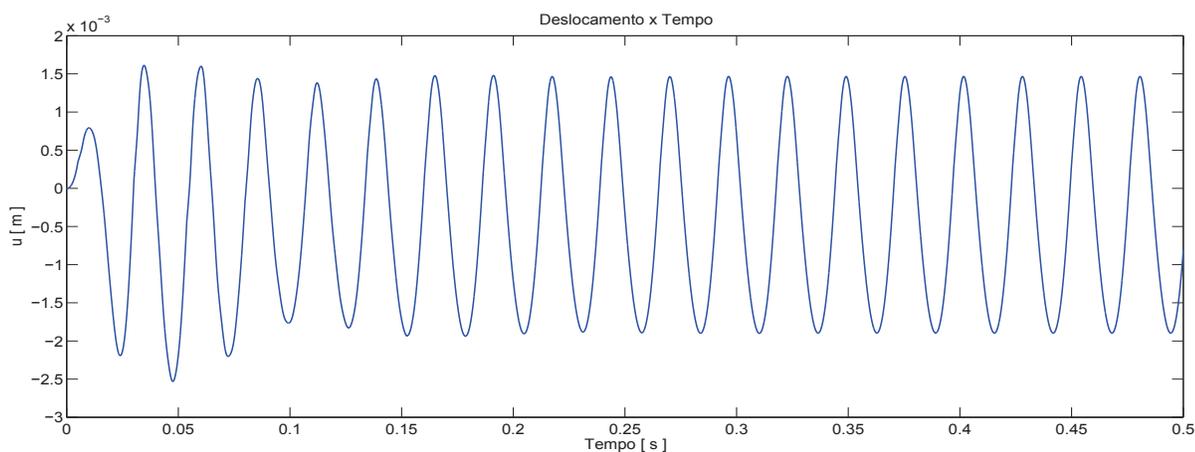
Figura 6.19: Problema de contato viga com viga

Os valores dos parâmetros do problema foram obtidos do trabalho desenvolvido Beltrame *et al.* (1998) e são os seguintes: $L_1 = 348 \times 10^{-3} \text{ m} = 10$ e $L_2 = 247 \times 10^{-3} \text{ m}$, $E_1 = E_2 = 67 \times 10^9 \text{ Pa}$, $\rho_1 = \rho_2 = 2750 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$, $A_1 = A_2 = 112.775 \times 10^{-6} \text{ m}^2$, $I_1 = I_2 = 397.062 \times 10^{-12} \text{ m}^4$ e $g_0 = 3.5 \times 10^{-4} \text{ m}$, a força externa aplicada $F = 1.98 \text{ sen}(38t)$ onde $w_p = 38 \text{ Hz}$ que corresponde a frequência natural da viga. Para a realização das simulações um amortecimento proporcional foi introduzido os valores dos parâmetros A e B utilizados foram de $\mathcal{A} = \mathcal{B} = 1 \times 10^{-4} \text{ s}$. A malha utilizada foi uma malha contendo 9 elementos finitos para cada viga. Os modelos de força de contato utilizados nas simulações foram o modelo de força de contato proporcional e o modelo de força de contato cúbico, com penalizador $\epsilon = 1 \times 10^{12} \text{ N/m}$ e a tolerância na penetração dos corpos adotada foi $TOL = 1 \times 10^{-8}$. A resposta dinâmica das duas vigas foi obtida utilizando os métodos da diferença finita centrada (DFC), Newmark com $\gamma = \frac{1}{2}$ e $\beta = \frac{1}{4}$ que corresponde a regra trapezoidal e o método $\alpha - HHT$ com $\alpha = 0.1$, $\gamma = 0.6$ e $\beta = 0.3025$. O intervalo de tempo de análise foi 0 até 0.5 s com intervalo de tempo $\Delta t = 1 \times 10^{-6} \text{ s}$ que menor do que o valor crítico do intervalo de tempo $\Delta t_{crit} = 3.24 \times 10^{-4} \text{ s}$ para o problema em análise obtido pela Equação (5.10).

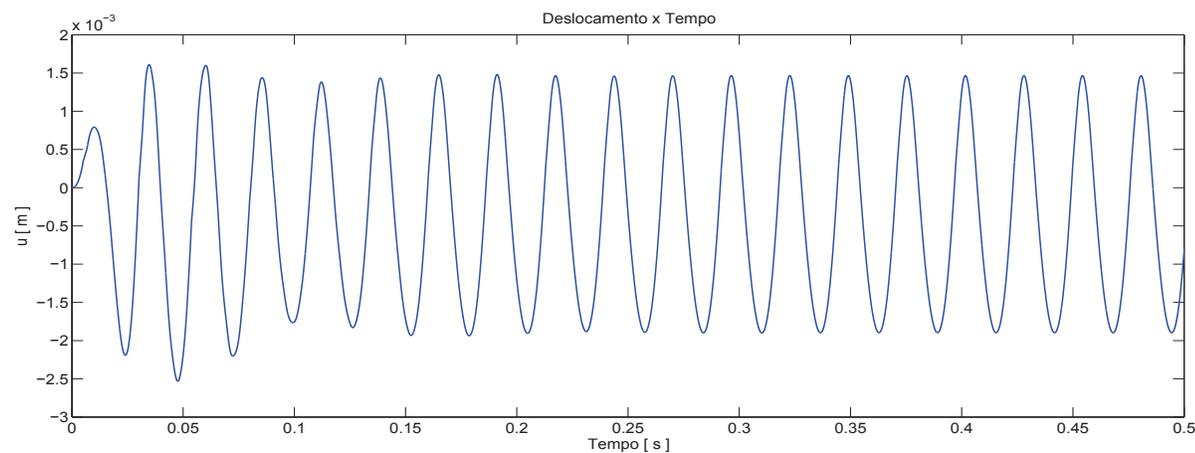
As figuras 6.20, 6.21 e 6.22 mostram respectivamente a evolução temporal do deslocamento, velocidade e aceleração para o grau de liberdade da viga 1 que entra em contato com a viga 2, para os seguintes esquemas de integração temporal: DFC, Newmark e $\alpha - HHT$.



(a) Método da diferença finita centrada (DFC).

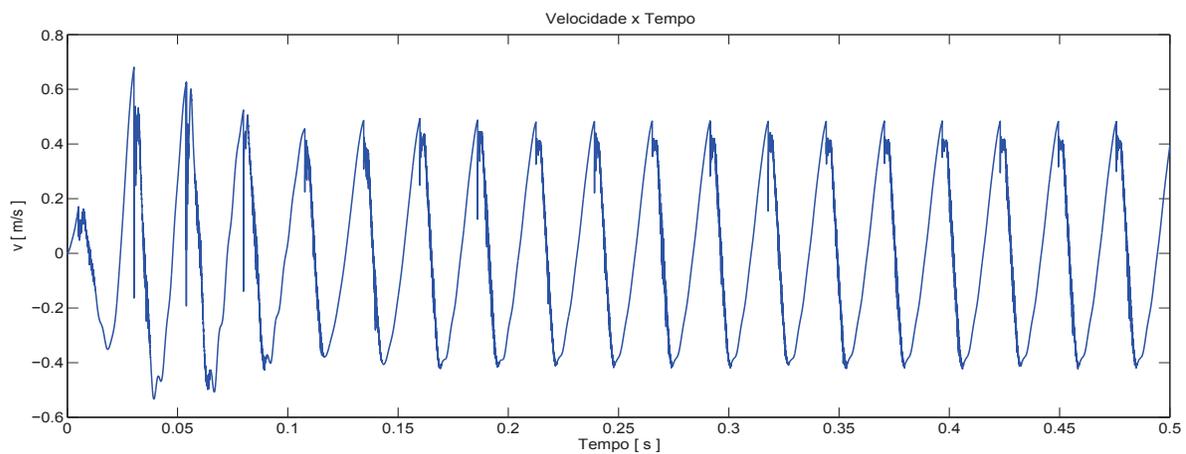


(b) Método de *Newmark* com $\gamma = 0.5$ e $\beta = 0.25$.

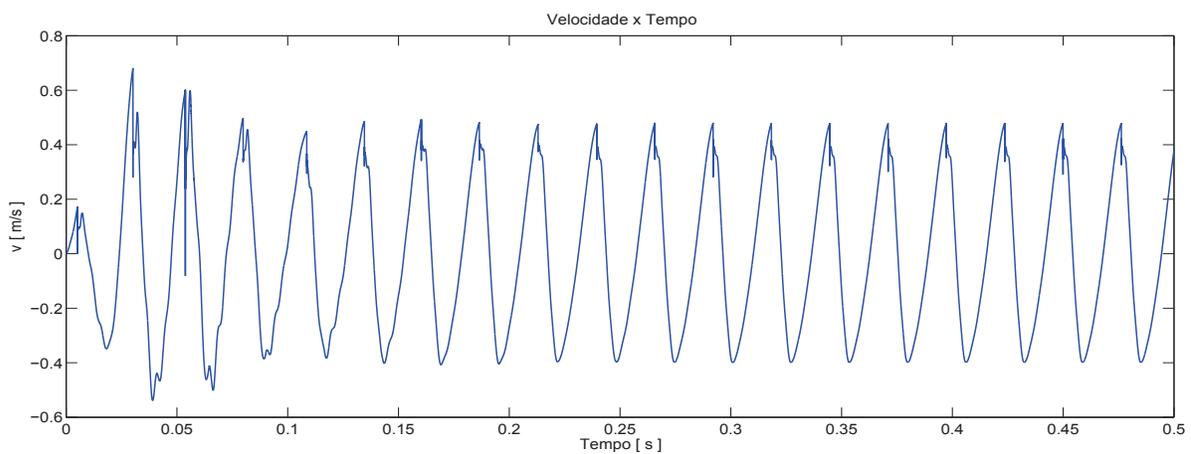


(c) Método α - *HHT* com $\alpha = 0.1$, $\gamma = 0.6$ e $\beta = 0.3025$.

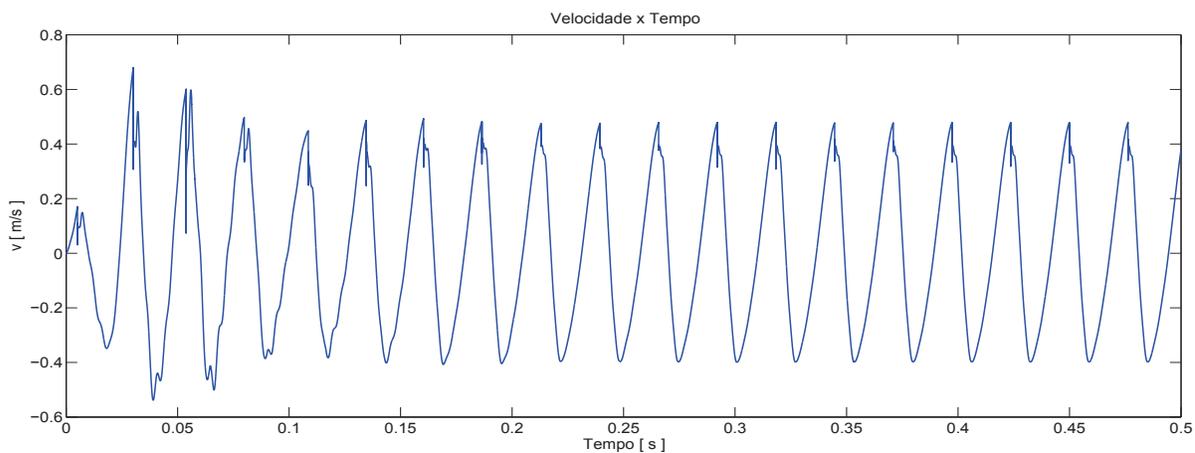
Figura 6.20: Comparação do deslocamento do grau de liberdade da viga 1 em que ocorre o contato, para o modelo de força de contato proporcional.



(a) Método da diferença finita centrada (DFC).

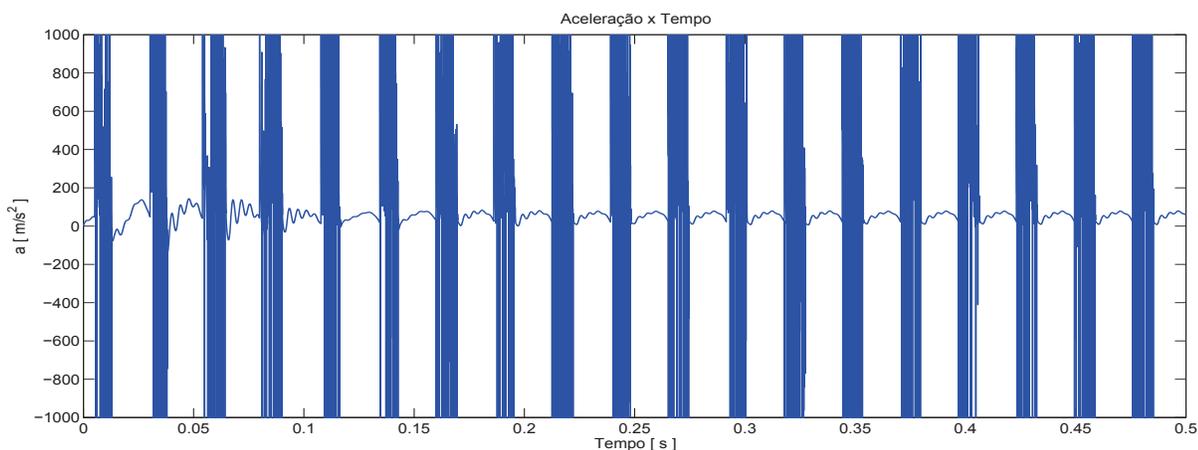


(b) Método de *Newmark* com $\gamma = 0.5$ e $\beta = 0.25$.

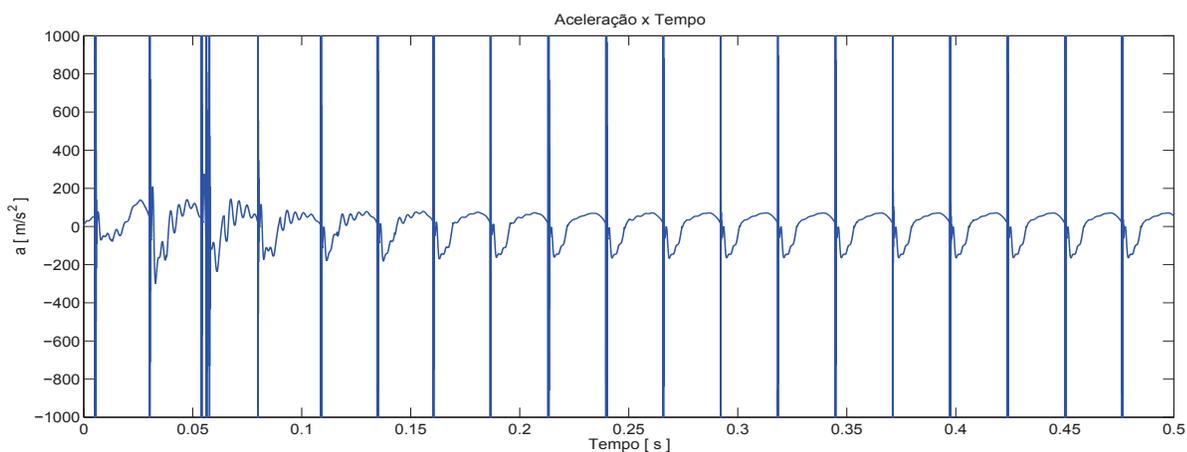


(c) Método α - *HHT* com $\alpha = 0.1$, $\gamma = 0.6$ e $\beta = 0.3025$.

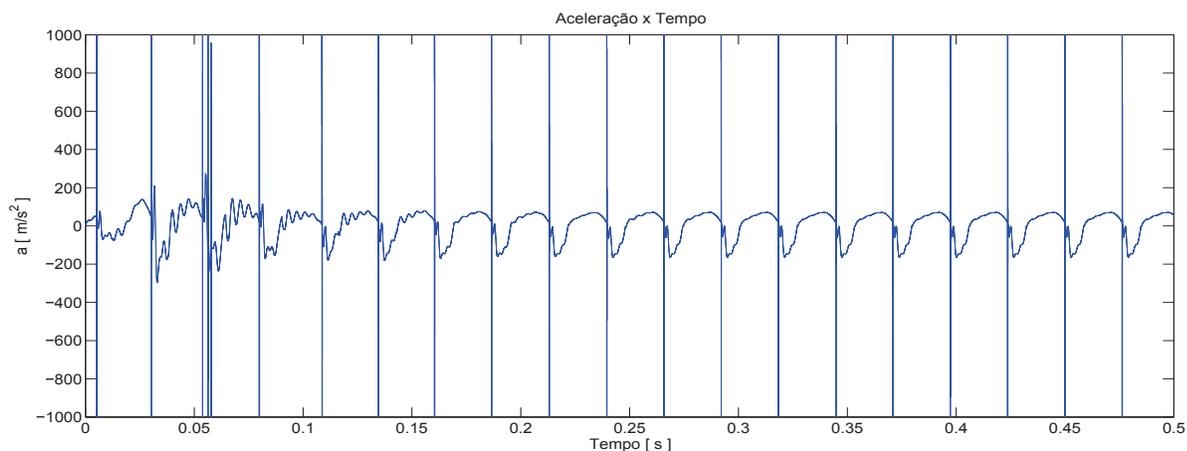
Figura 6.21: Comparação da velocidade do grau de liberdade da viga 1 em que ocorre o contato, para o modelo de força de contato proporcional.



(a) Método da diferença finita centrada (DFC).



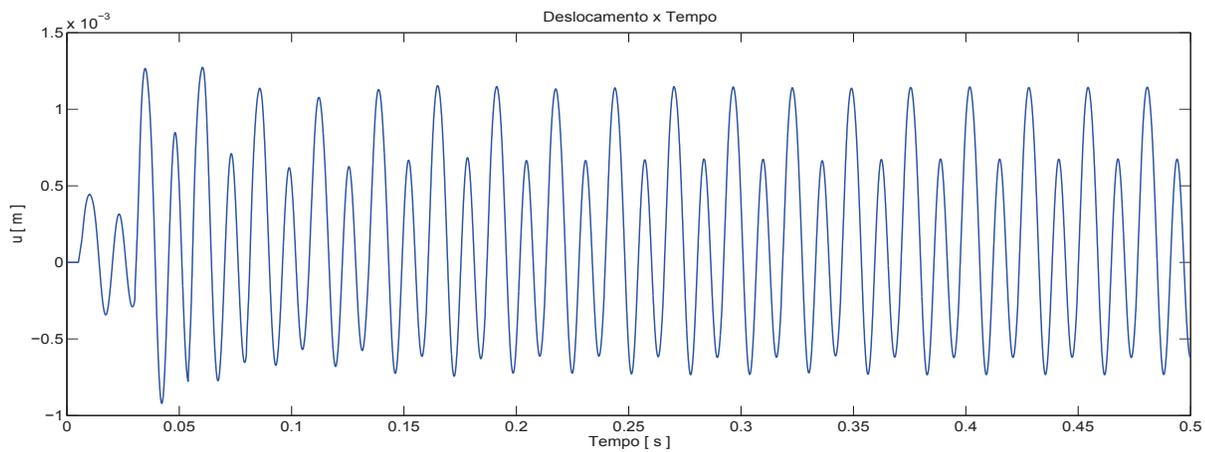
(b) Método de *Newmark* com $\gamma = 0.5$ e $\beta = 0.25$.



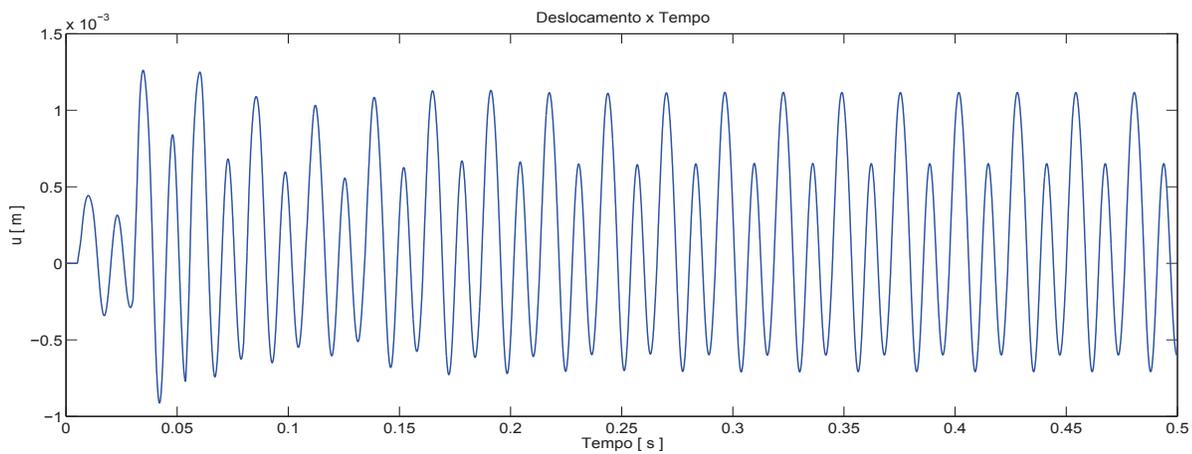
(c) Método $\alpha - HHT$ com $\alpha = 0.1$, $\gamma = 0.6$ e $\beta = 0.3025$.

Figura 6.22: Comparação da aceleração do grau de liberdade da viga 1 em que ocorre o contato, para o modelo de força de contato proporcional.

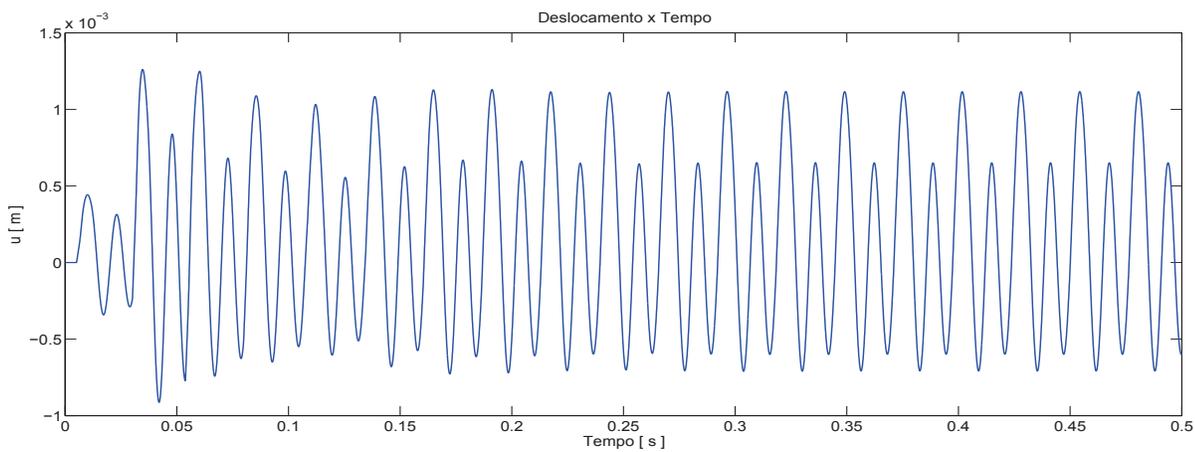
As figuras 6.23, 6.24 e 6.25 mostram respectivamente a evolução temporal do deslocamento, velocidade e aceleração para o grau de liberdade da viga 2 que entra em contato com a viga 1, para os seguintes esquemas de integração temporal: DFC, Newmark e $\alpha - HHT$.



(a) Método da diferença finita centrada (DFC).

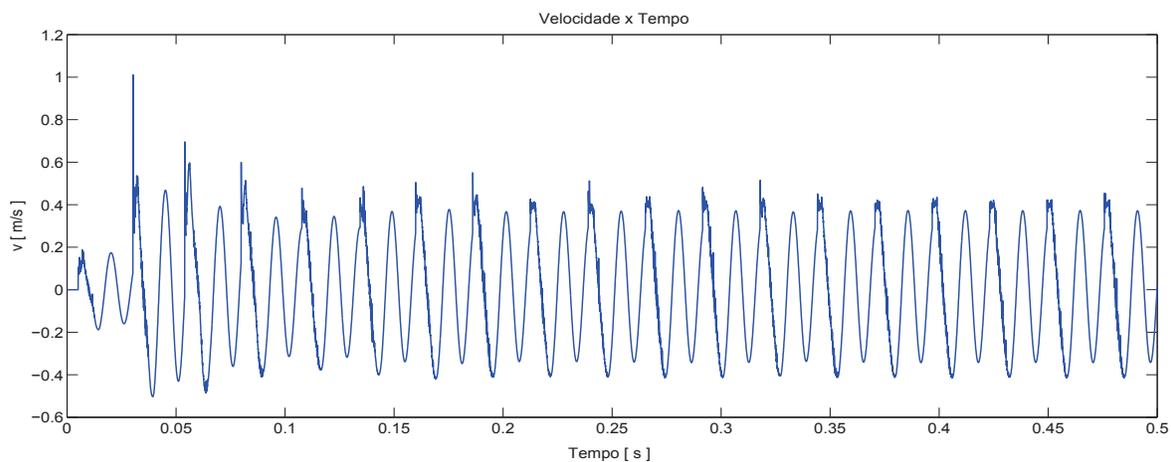


(b) Método de *Newmark* com $\gamma = 0.5$ e $\beta = 0.25$.

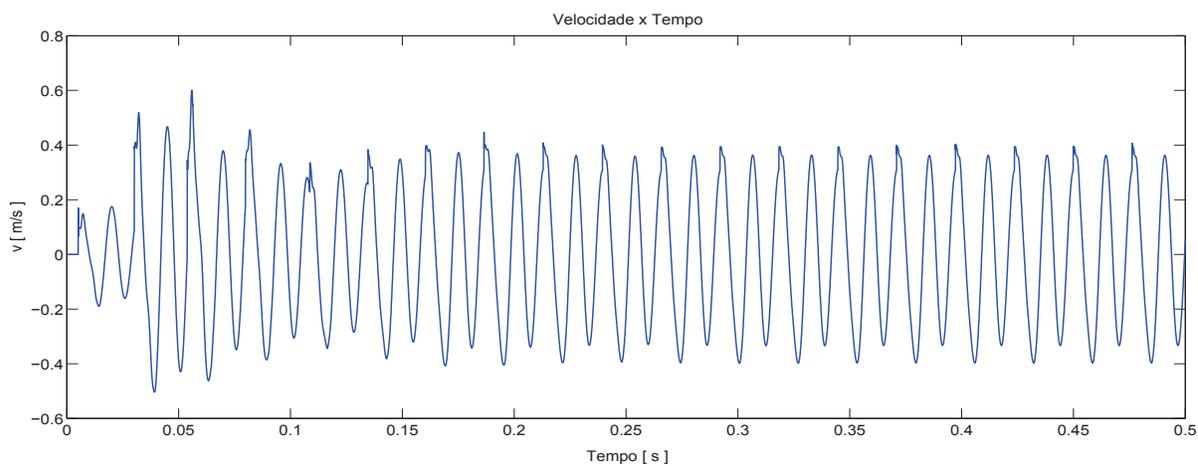


(c) Método α - *HHT* com $\alpha = 0.1$, $\gamma = 0.6$ e $\beta = 0.3025$.

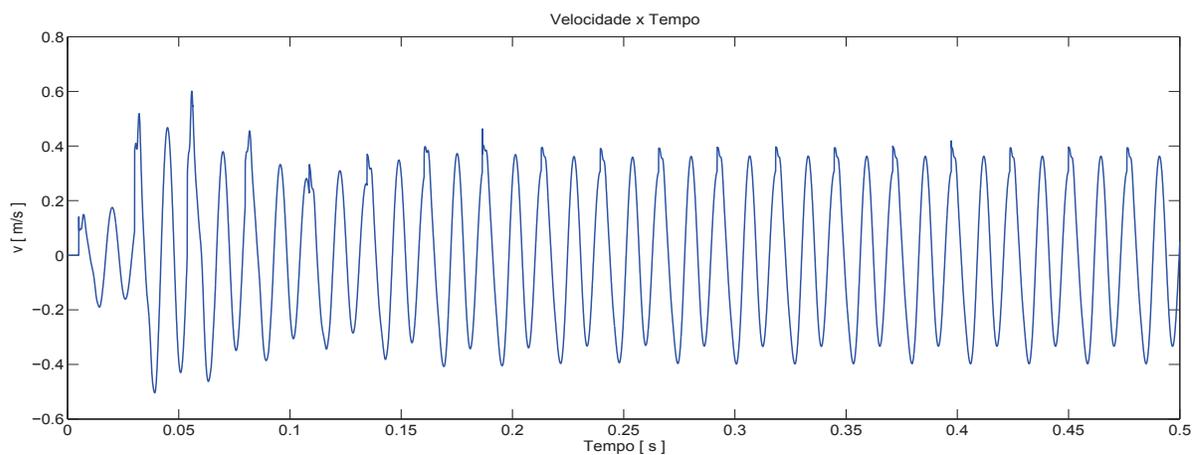
Figura 6.23: Comparação do deslocamento do grau de liberdade da viga 2 em que ocorre o contato, para o modelo de força de contato proporcional.



(a) Método da diferença finita centrada (DFC).

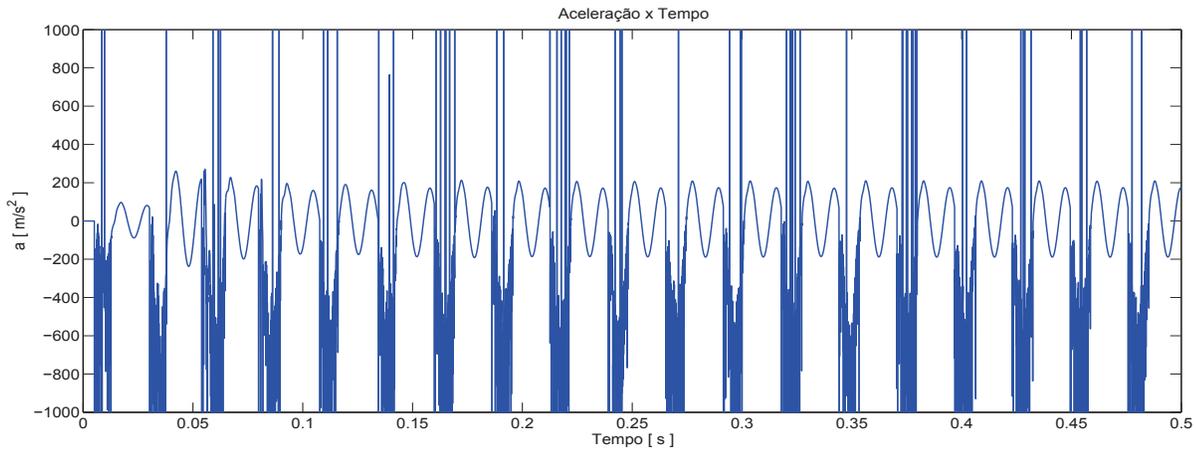


(b) Método de *Newmark* com $\gamma = 0.5$ e $\beta = 0.25$.

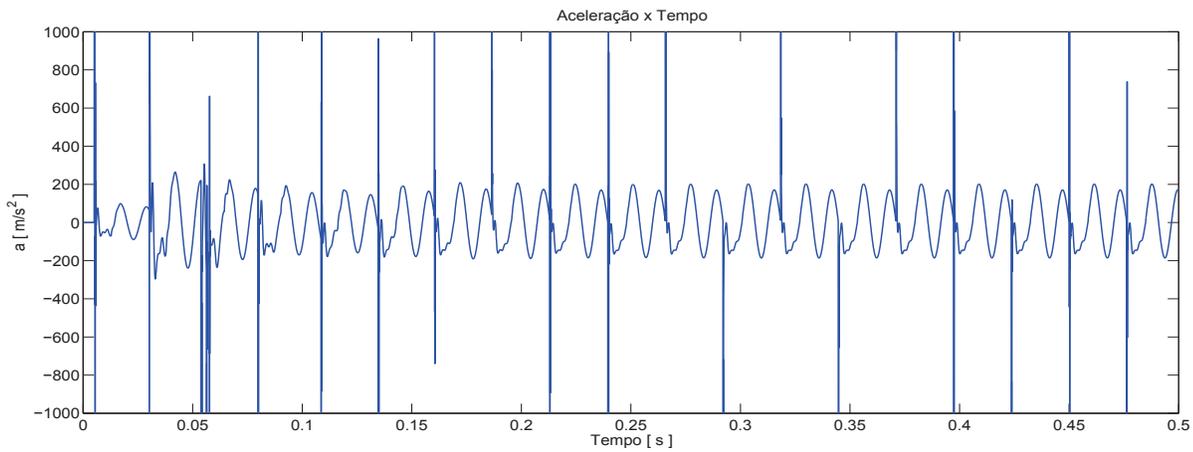


(c) Método α - *HHT* com $\alpha = 0.1$, $\gamma = 0.6$ e $\beta = 0.3025$.

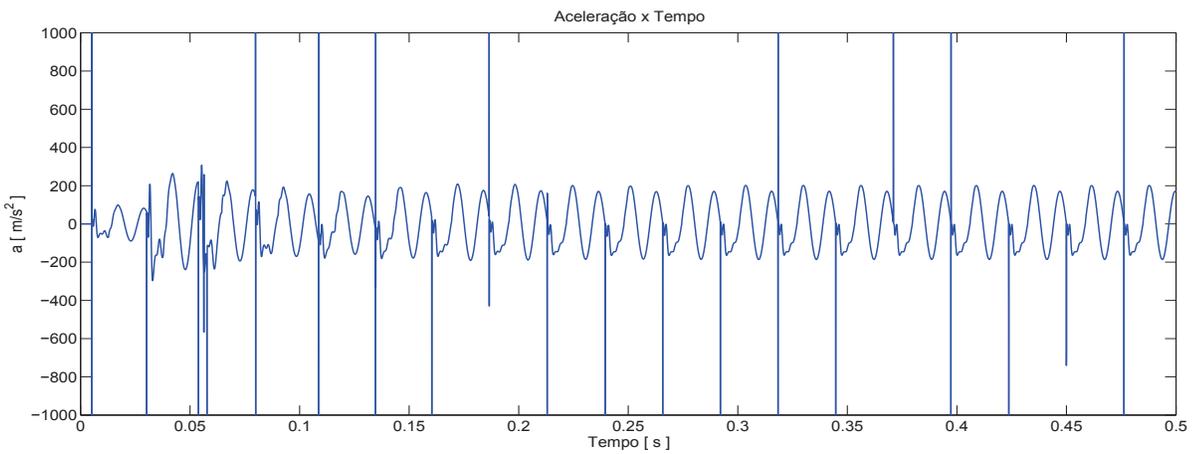
Figura 6.24: Comparação da velocidade do grau de liberdade da viga 2 em que ocorre o contato, para o modelo de força de contato proporcional.



(a) Método da diferença finita centrada (DFC).



(b) Método de *Newmark* com $\gamma = 0.5$ e $\beta = 0.25$.



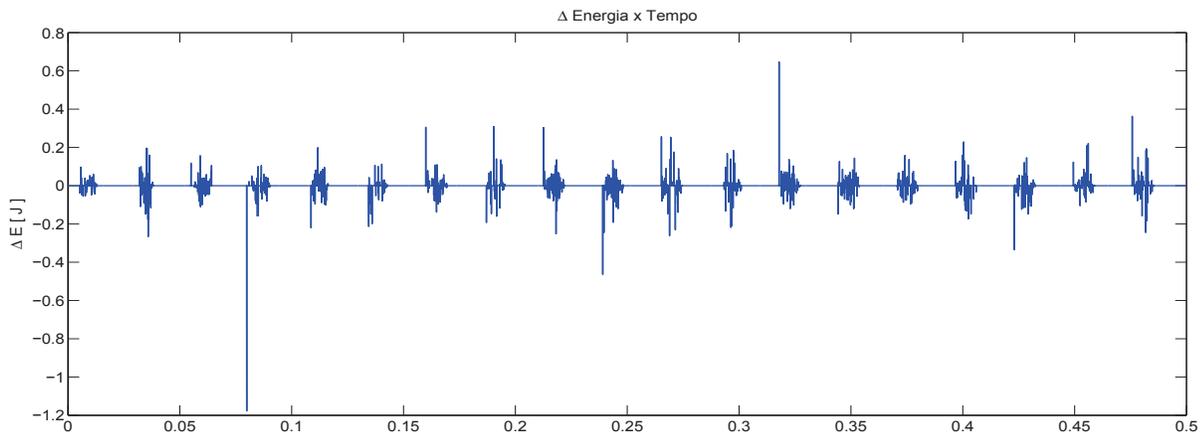
(c) Método $\alpha - HHT$ com $\alpha = 0.1$, $\gamma = 0.6$ e $\beta = 0.3025$.

Figura 6.25: Comparação da aceleração do grau de liberdade da viga 2 em que ocorre o contato, para o modelo de força de contato proporcional.

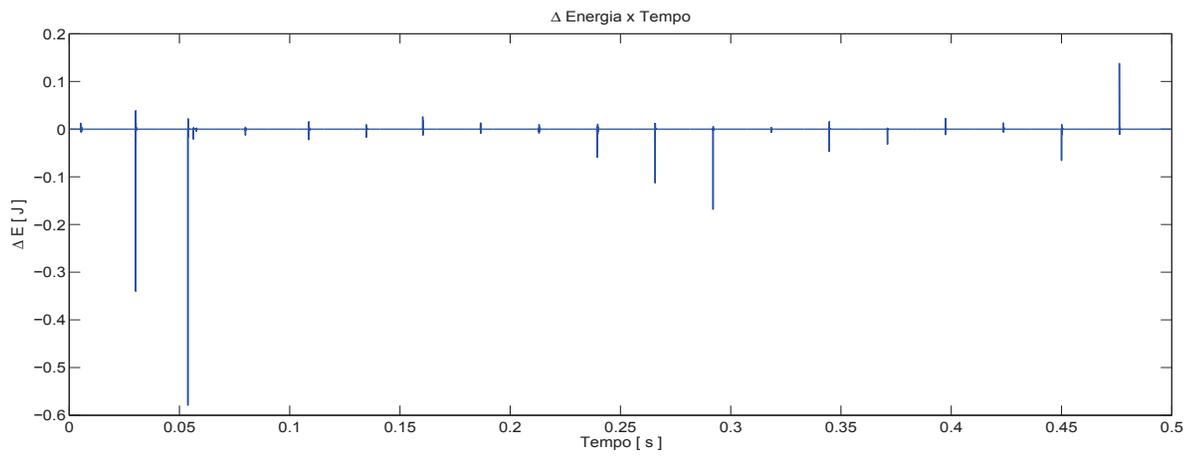
Os deslocamentos do grau de liberdade da viga 1 mostrados na Figura 6.20 foram muito próximos para os três métodos de integração utilizados. Na Figura 6.21, em que a velocidade é mostrada nota-se as diferenças nos métodos nos instantes onde o impacto ocorre, que podem ser identificadas pela brusca mudança no sentido da velocidade. Na Figura 6.22, em que os gráficos de aceleração são mostrados, ficam mais evidentes as diferenças na resposta obtida por cada integrador. Todos os métodos foram capazes de representar os picos característicos do fenômeno. Nota-se no entanto que o método da diferença finita centrada (DFC) não apresenta um único pico e sim uma pequena região onde os picos acontecem, diferente dos métodos de *Newmark* e $\alpha - HHT$. Isto pode ter acontecido pela característica do método DFC ser um método explícito e também devido ao mau condicionamento do sistema de equações, já que o valor do penalizador para o esquema de integração DFC com modelo de força de contato linear teve que ser reduzido para $\epsilon_N = 1 \times 10^{10} N/m$ para que o problema convergisse. Os valores nos gráficos foram limitados a $1000 m/s^2$, no entanto os valores máximos dos picos ficaram na ordem de $10^5 m/s^2$.

Os mesmos comentários feitos para o grau de liberdade em contato da viga 1 podem ser estendidos para o grau de liberdade em contato da viga 2. Destaca-se que em todos os gráficos o valor do deslocamento, velocidade e aceleração começaram em zero para o nó da viga 2 e só quando o impacto ocorre é que o movimento da viga 2 se inicia.

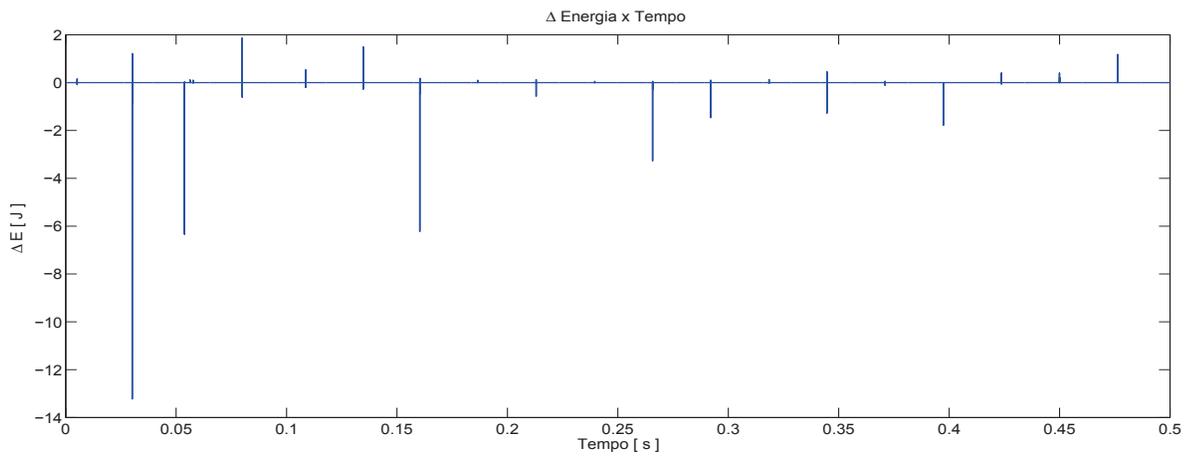
As figuras 6.26, 6.27 e 6.28 mostram respectivamente a variação da energia entre dois instantes consecutivos, evolução da folga e a força de contato para o problema do vibro-impacto entre vigas com modelo de força de contato proporcional, para os seguintes esquemas de integração temporal: DFC, *Newmark* e $\alpha - HHT$.



(a) Método da diferença finita centrada (DFC).

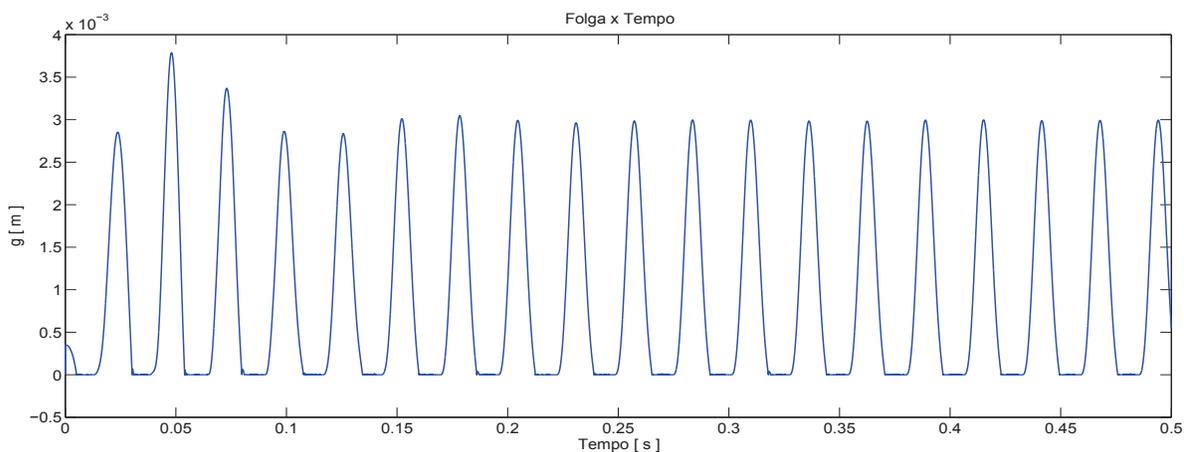


(b) Método de *Newmark* com $\gamma = 0.5$ e $\beta = 0.25$.

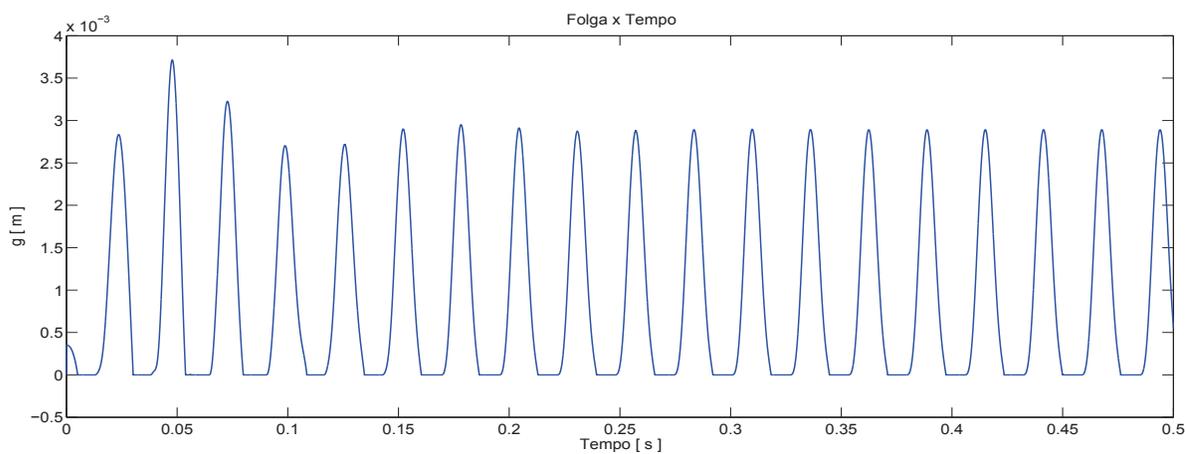


(c) Método α - *HHT* com $\alpha = 0.1$ $\gamma = 0.6$ e $\beta = 0.3025$.

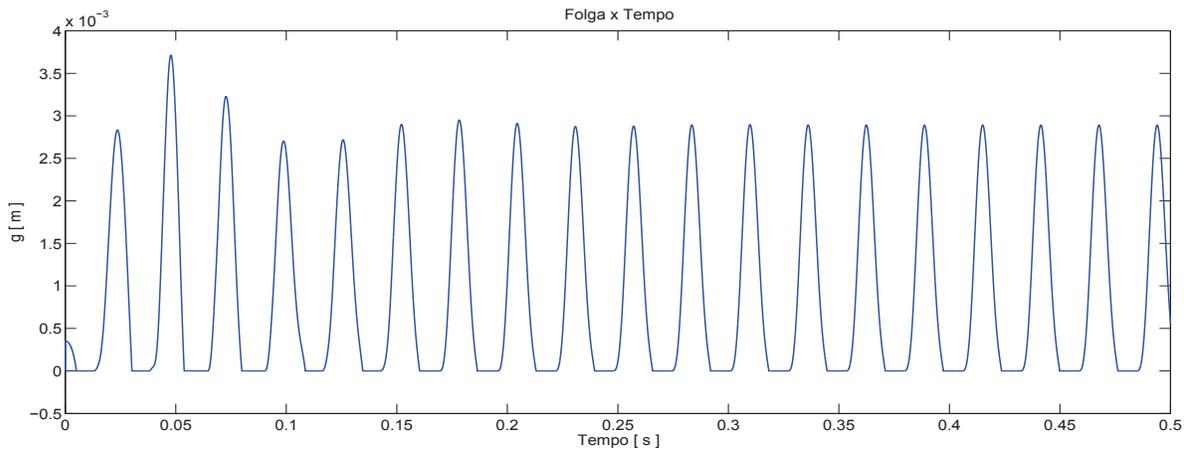
Figura 6.26: Comparação da variação da energia ΔE para o modelo de força de contato proporcional.



(a) Método da diferença finita centrada (DFC).

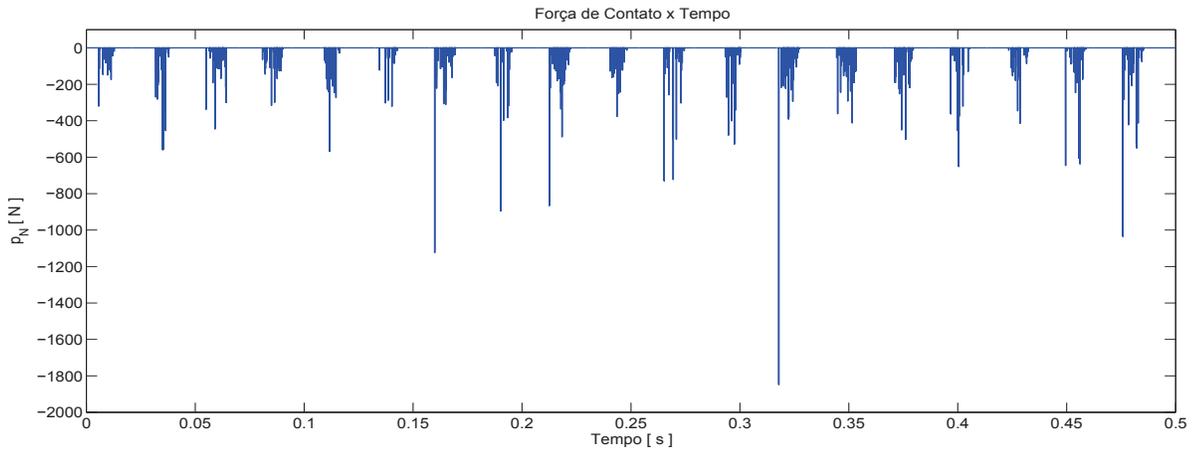


(b) Método de *Newmark* com $\gamma = 0.5$ e $\beta = 0.25$.

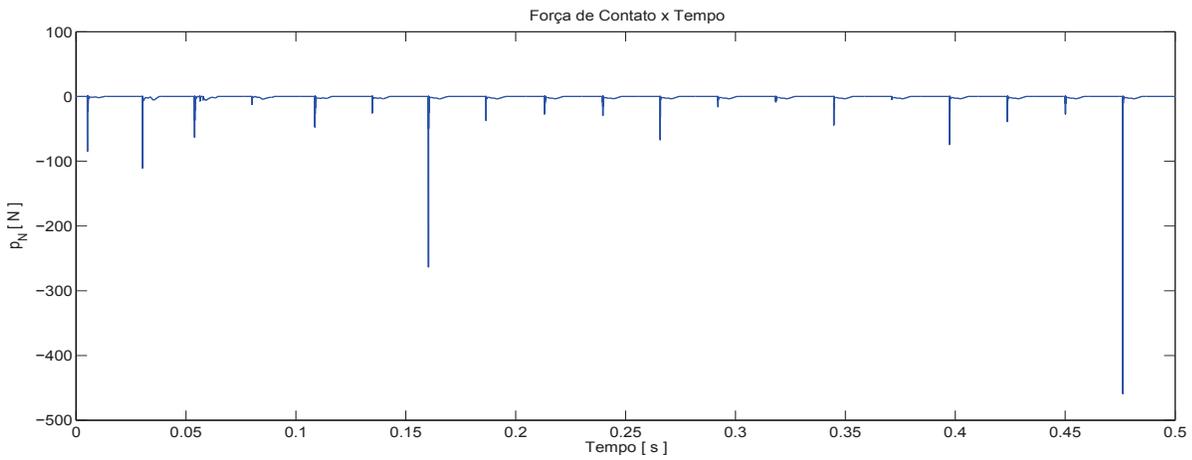


(c) Método α - *HHT* com $\alpha = 0.1$, $\gamma = 0.6$ e $\beta = 0.3025$.

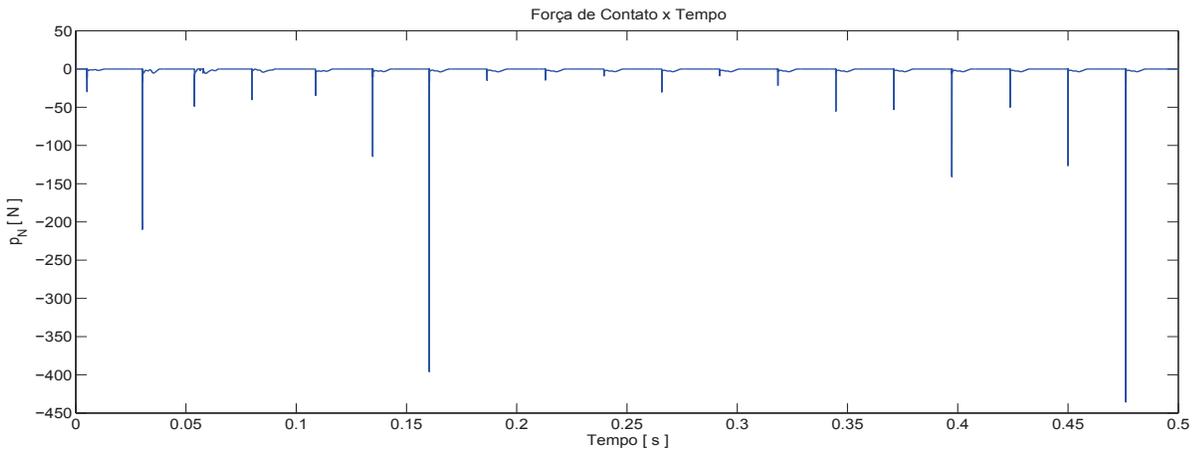
Figura 6.27: Evolução da distância da viga até os obstáculos (folga) para o modelo de força de contato proporcional.



(a) Método da diferença finita centrada (DFC).



(b) Método de *Newmark* com $\gamma = 0.5$ e $\beta = 0.25$.



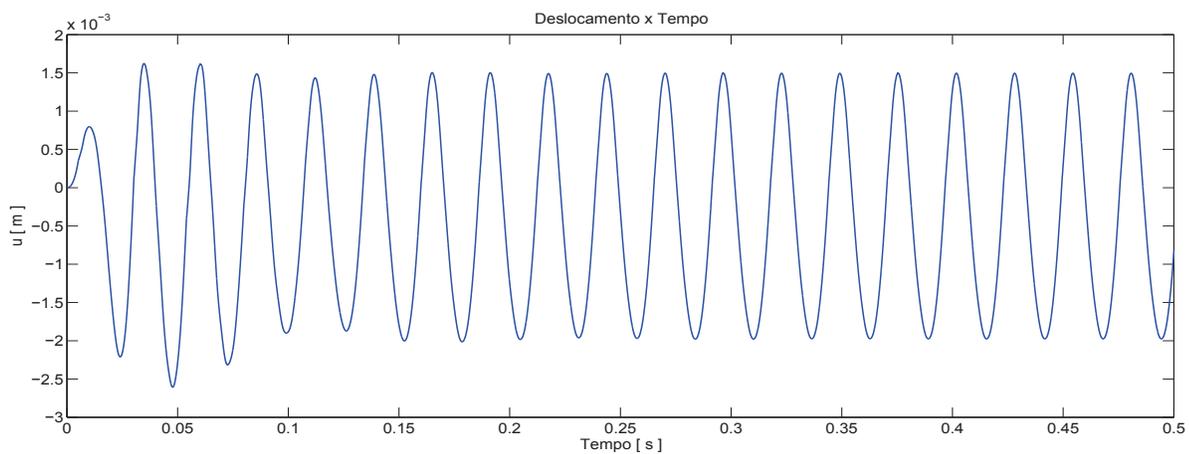
(c) Método α - *HHT* com $\alpha = 0.1$, $\gamma = 0.6$ e $\beta = 0.3025$.

Figura 6.28: Comparação da força de contato p_N para o modelo de força de contato proporcional.

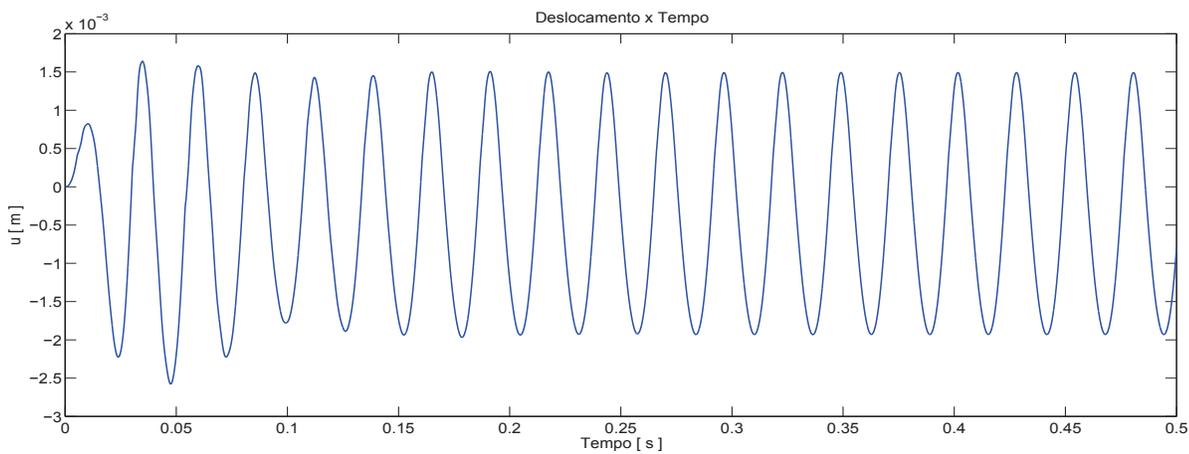
Os gráficos da variação da energia apresentados na Figura 6.26 mostram características já observadas na aceleração, onde o método da diferença finita centrada (DFC), diferente dos métodos de *Newmark* e $\alpha - HHT$, não apresenta um pico bem definido, mas sim uma pequena região em torno do ponto de impacto com vários picos de valores menores aos picos dos outros dois métodos. Em termos de valores de pico, o método de *Newmark* apresentou menor variação entre os valores máximo e mínimo dos picos, e o método $\alpha - HHT$ apresentou a maior variação entre os valores máximo e mínimo dos picos. Quanto ao gráfico da folga entre as vigas, mostrado na Figura 6.27, verifica-se que no impacto os corpos entram em contato e permanecem em contato por um tempo e depois voltam a se separar. Esta permanência pode ser vista também no gráfico da força de contato mostrado na Figura 6.28 em que verifica-se pequenas oscilações ao redor do pico de contato para os métodos de *Newmark* e o método $\alpha - HHT$ e vários picos de menores amplitudes ao pico inicial no método da diferença finita centrada. Quanto aos valores nota-se que os valores dos picos para o método $\alpha - HHT$ foram os menores o método de *Newmark* teve picos um pouco maiores mas não muito distantes do método $\alpha - HHT$. De outra forma os valores de pico obtidos no método da diferença finita centrada mostraram-se muito maiores aos outros dois métodos, mostrando a influência no método de integração no modelo na força de contato. Esses maiores valores novamente podem estar relacionados a característica de o método DFC ser um método de integração explícito diferente dos outros dois métodos.

A seguir os resultados para o problema de vibro-impacto de viga contra viga considerando o modelos de força de contato cúbico são apresentados. O valor do penalizador utilizado nas simulações foi $\epsilon = 1 \times 10^{12} N/m$, os demais parâmetros foram mantidos os mesmos que os utilizados no modelo proporcional.

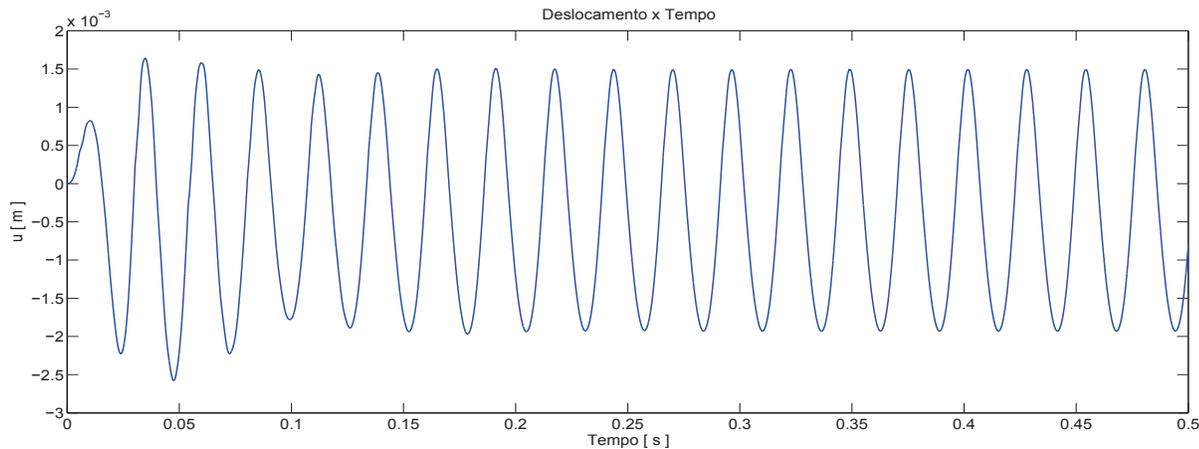
As figuras 6.29, 6.30 e 6.31 mostram respectivamente a evolução temporal do deslocamento, velocidade e aceleração para o grau de liberdade da viga 1 que entra em contato com a viga 2, para os seguintes esquemas de integração temporal: DFC, *Newmark* e $\alpha - HHT$.



(a) Método da diferença finita centrada (DFC)

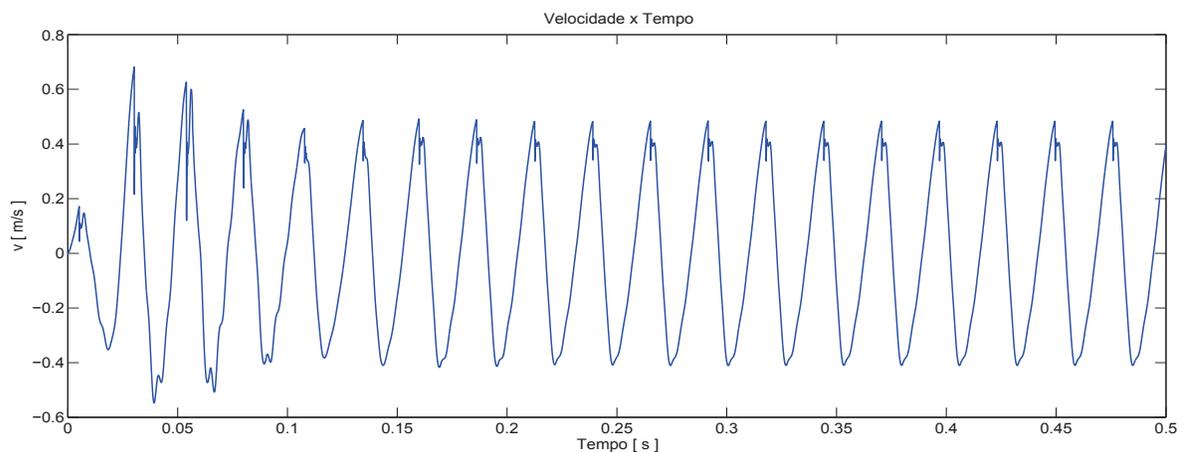


(b) Método de *Newmark* com $\gamma = 0.5$ e $\beta = 0.25$.

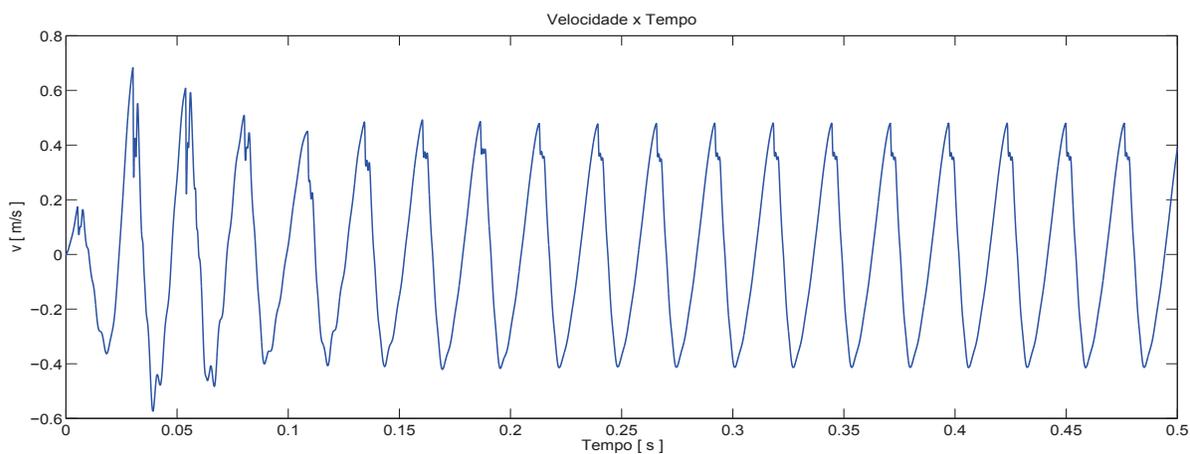


(c) Método α - *HHT* com $\alpha = 0.1$, $\gamma = 0.6$ e $\beta = 0.3025$.

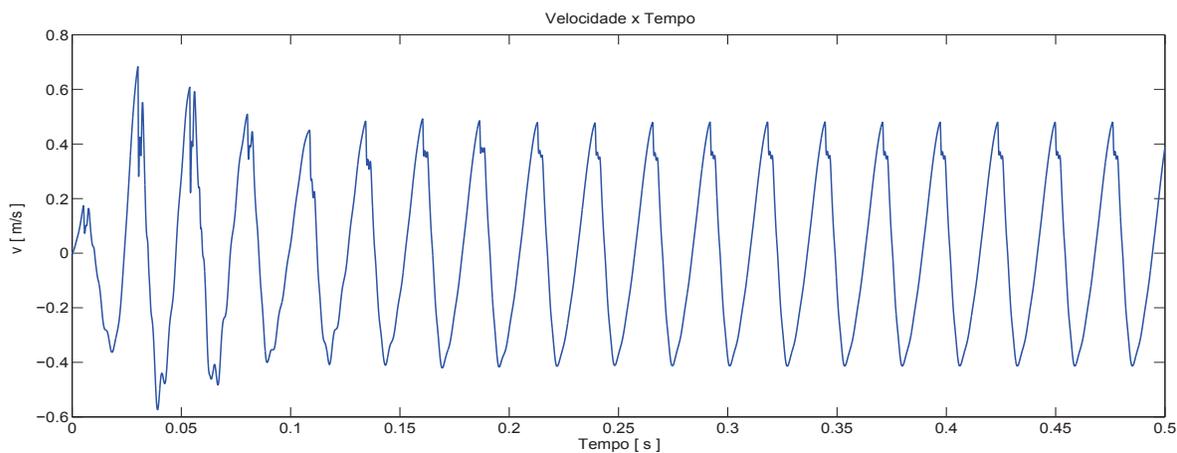
Figura 6.29: Comparação do deslocamento do grau de liberdade da viga 1 em que ocorre o contato, para o modelo de força de contato cúbico.



(a) Método da diferença finita centrada (DFC)

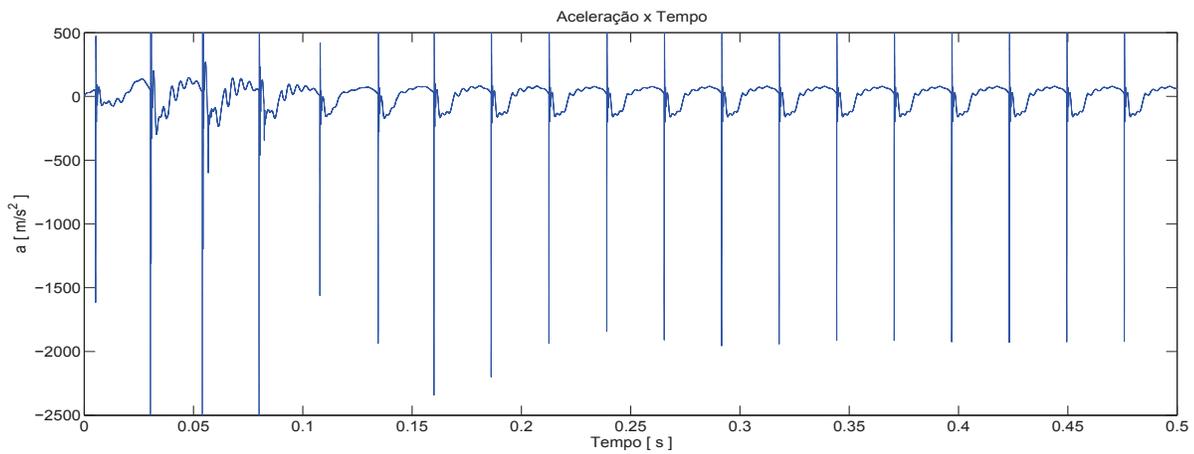


(b) Método de *Newmark* com $\gamma = 0.5$ e $\beta = 0.25$.

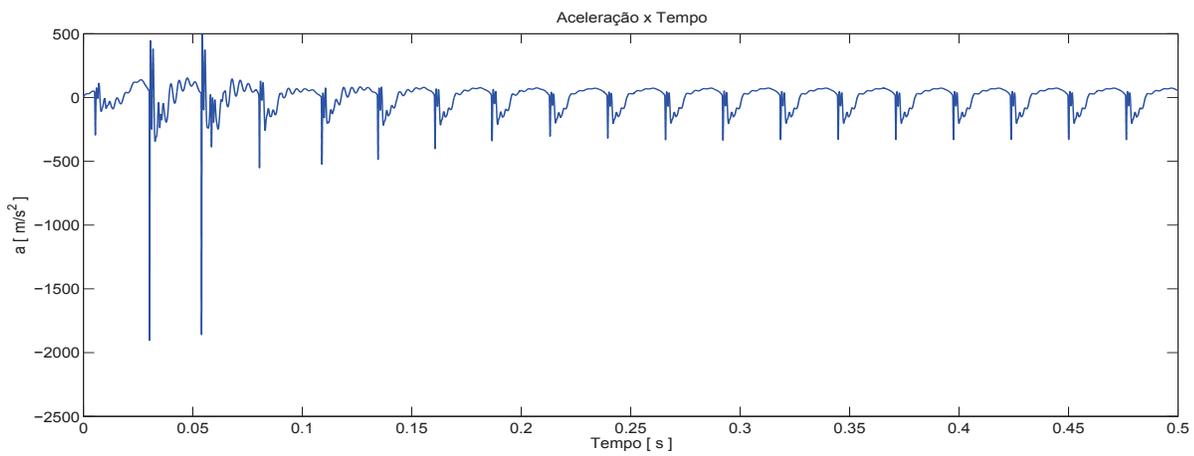


(c) Método α - *HHT* com $\alpha = 0.1$, $\gamma = 0.6$ e $\beta = 0.3025$.

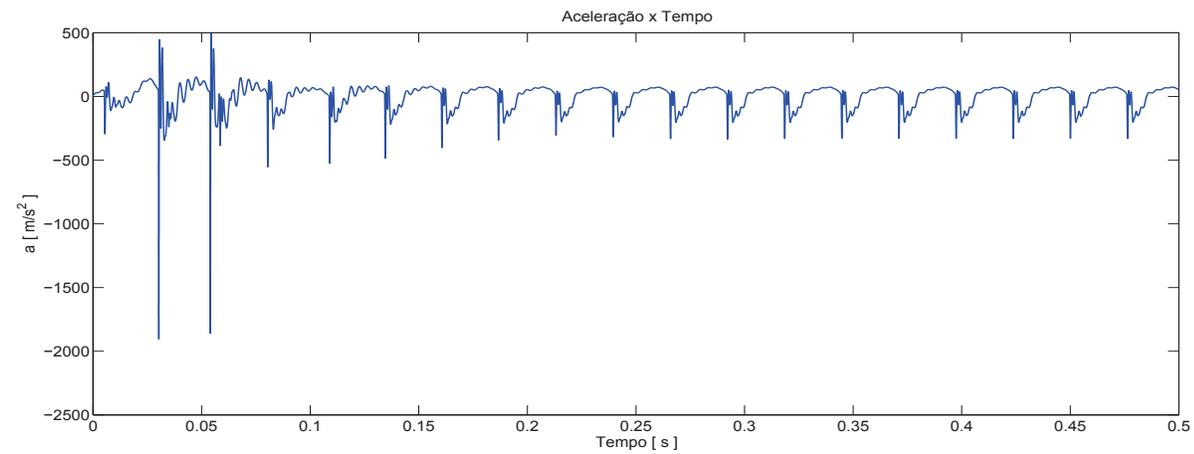
Figura 6.30: Comparação da velocidade do grau de liberdade da viga 1 em que ocorre o contato, para o modelo de força de contato cúbico.



(a) Método da diferença finita centrada (DFC)



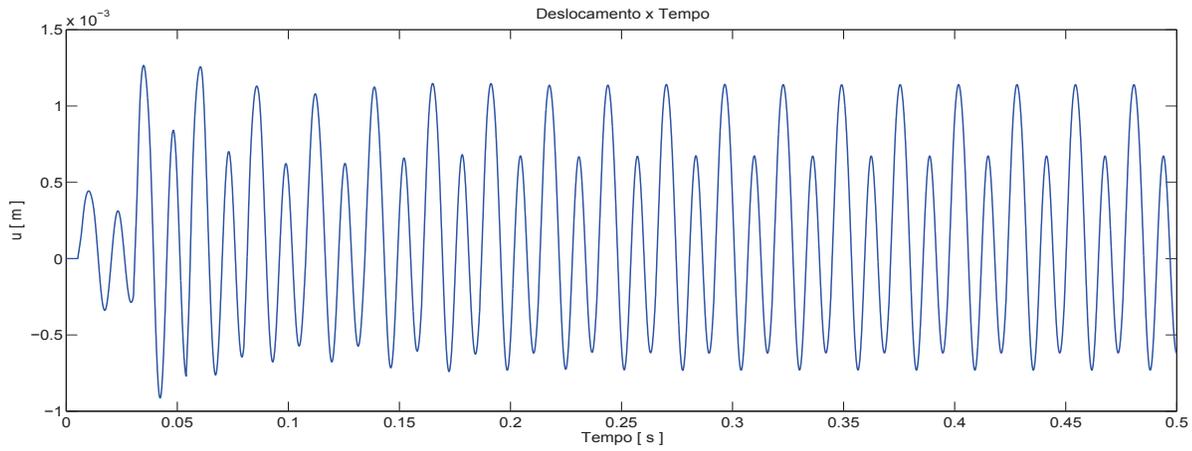
(b) Método de *Newmark* com $\gamma = 0.5$ e $\beta = 0.25$.



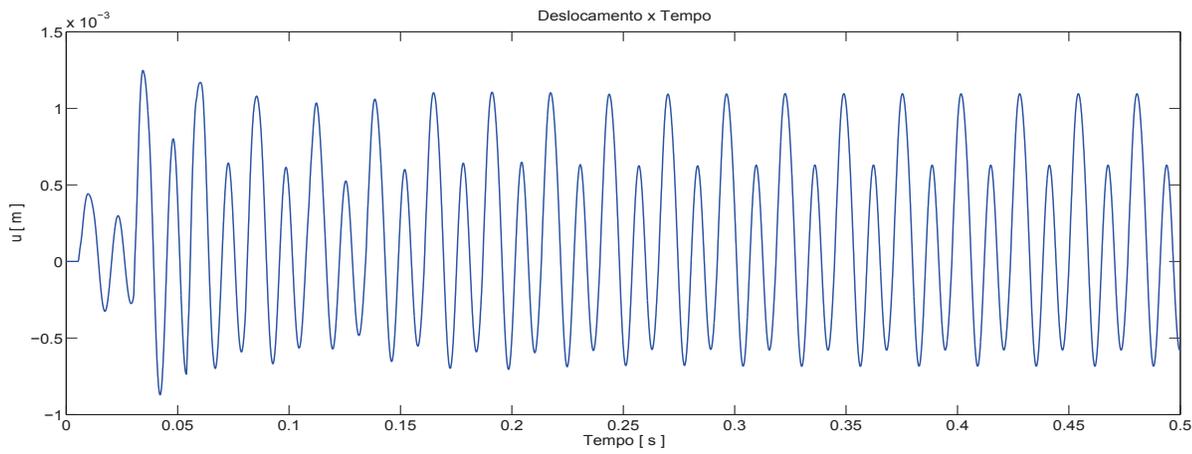
(c) Método $\alpha - HHT$ com $\alpha = 0.1$, $\gamma = 0.6$ e $\beta = 0.3025$.

Figura 6.31: Comparação da aceleração do grau de liberdade da viga 1 em que ocorre o contato, para o modelo de força de contato cúbico.

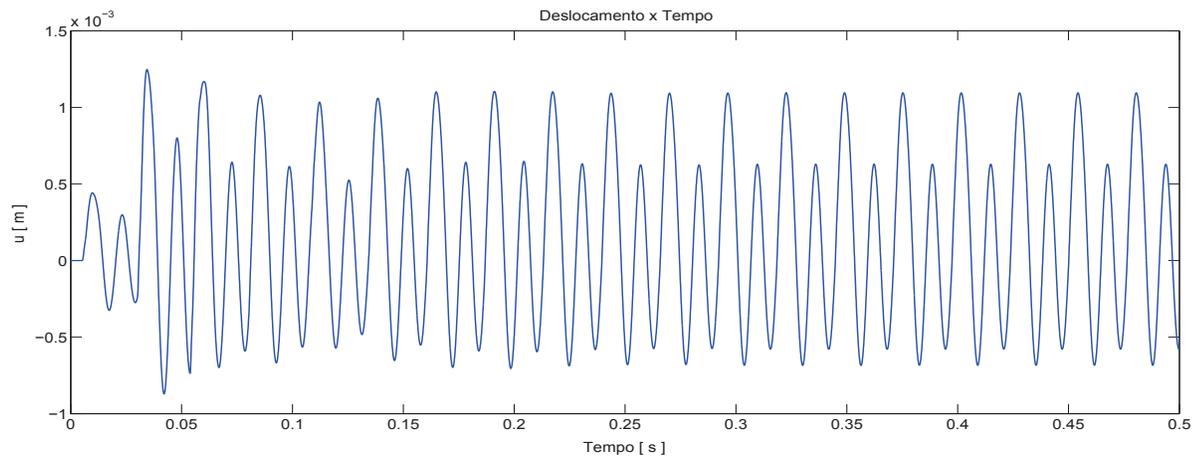
As figuras 6.32, 6.33 e 6.34 mostram respectivamente a evolução temporal do deslocamento, velocidade e aceleração para o grau de liberdade da viga 2 que entra em contato com a viga 2, para os seguintes esquemas de integração temporal: DFC, Newmark e $\alpha - HHT$.



(a) Método da diferença finita centrada (DFC)

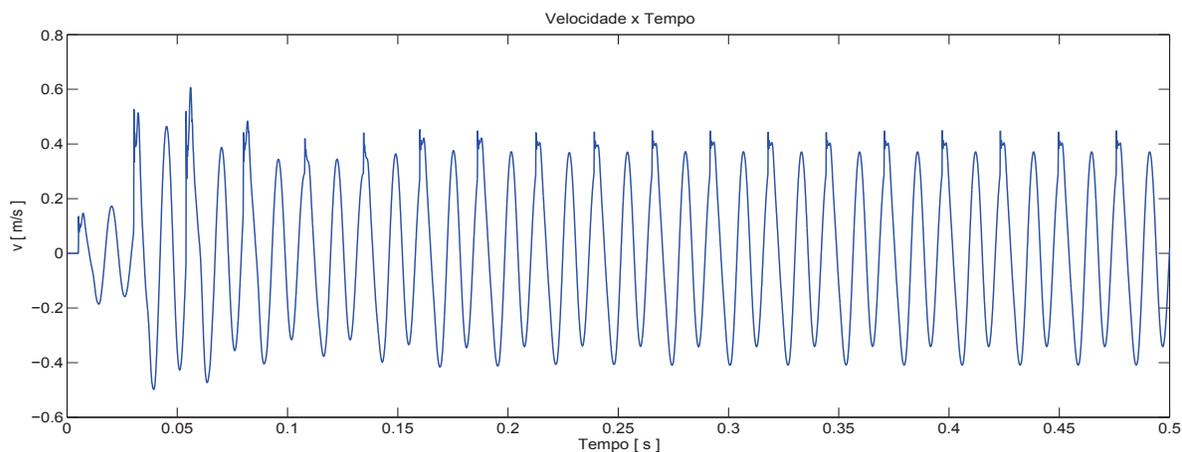


(b) Método de *Newmark* com $\gamma = 0.5$ e $\beta = 0.25$.

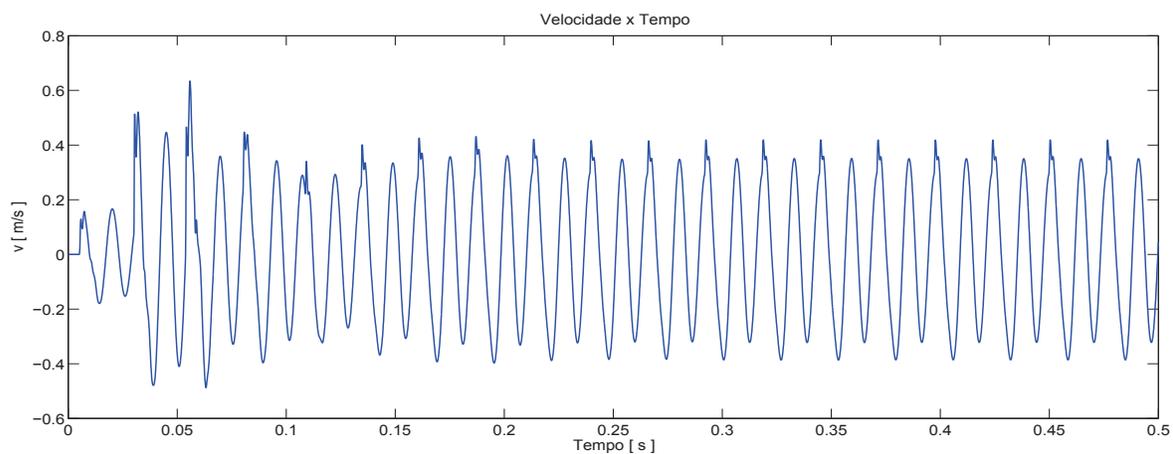


(c) Método α - *HHT* com $\alpha = 0.1$ $\gamma = 0.6$ e $\beta = 0.3025$.

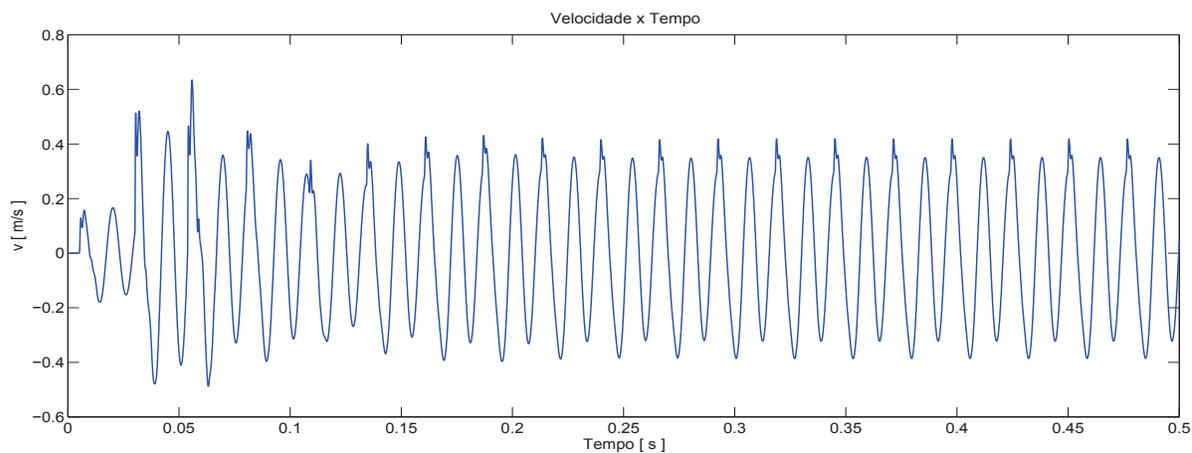
Figura 6.32: Comparação do deslocamento do grau de liberdade da viga 2 em que ocorre o contato, para o modelo de força de contato cúbico.



(a) Método da diferença finita centrada (DFC)

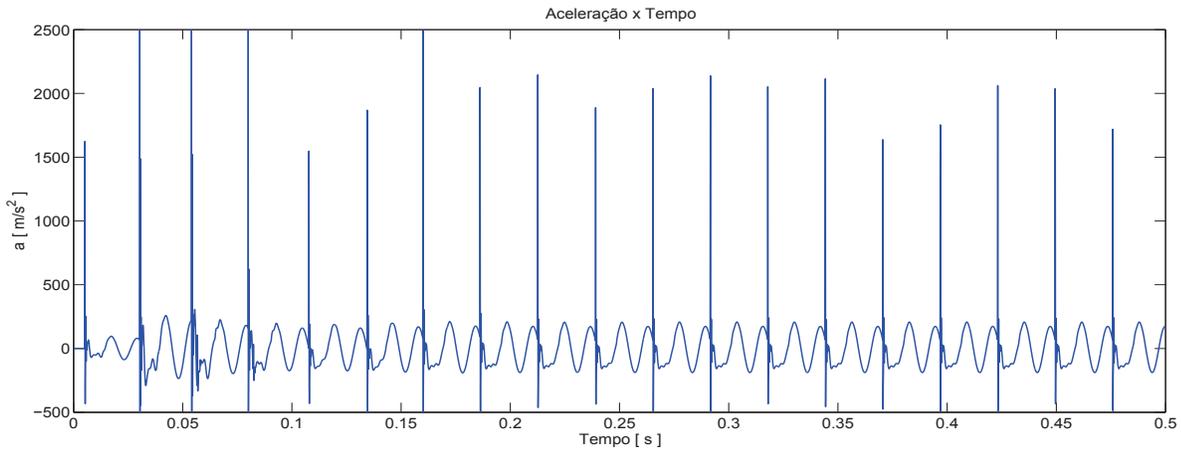


(b) Método de *Newmark* com $\gamma = 0.5$ e $\beta = 0.25$.

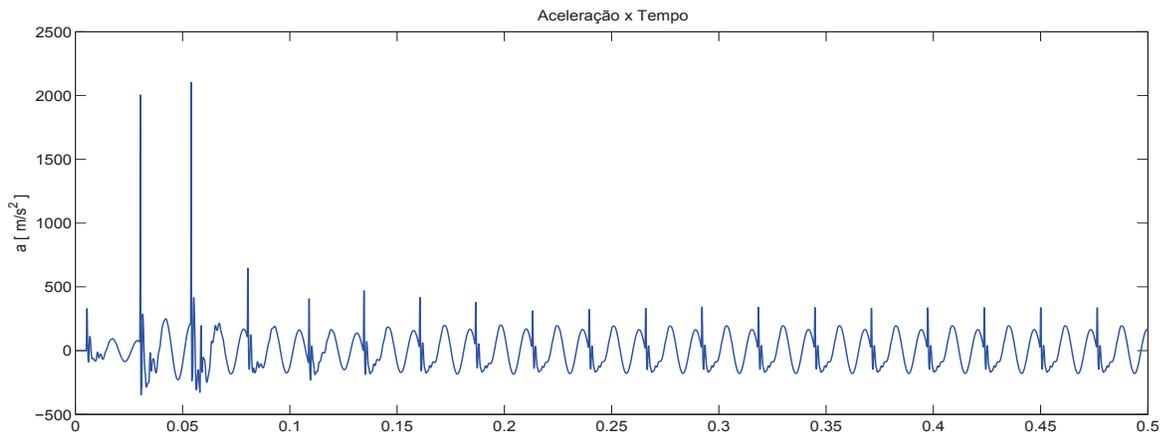


(c) Método α - *HHT* com $\alpha = 0.1$, $\gamma = 0.6$ e $\beta = 0.3025$.

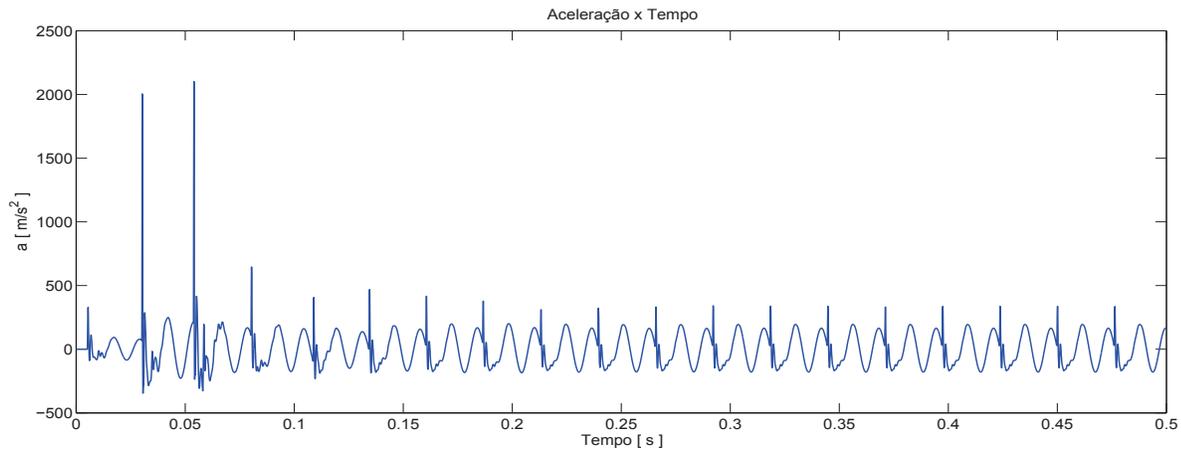
Figura 6.33: Comparação da velocidade do grau de liberdade da viga 2 em que ocorre o contato, para o modelo de força de contato cúbico.



(a) Método da diferença finita centrada (DFC)



(b) Método de *Newmark* com $\gamma = 0.5$ e $\beta = 0.25$.



(c) Método $\alpha - HHT$ com $\alpha = 0.1$, $\gamma = 0.6$ e $\beta = 0.3025$.

Figura 6.34: Comparação da aceleração do grau de liberdade da viga 2 em que ocorre o contato, para o modelo de força de contato cúbico.

Os deslocamentos do grau de liberdade da viga 1 mostrados na Figura 6.29 foram muito próximos para os três métodos de integração utilizados, assim como nos resultados obtidos no modelo de força de contato proporcional. Na Figura 6.30, em que a velocidade é mostrada, nota-se as diferenças nos métodos nos instantes onde o impacto ocorre, que pode ser identificado pela brusca mudança no sentido da velocidade. Na Figura 6.31, em que os gráficos de aceleração são mostrados são mais evidentes as diferenças da resposta obtida por cada integrador. Todos os métodos foram capazes de representar os picos característicos do fenômeno. Nota-se no entanto, que o método da diferença finita centrada (DFC) apresentou um único pico no instante do impacto assim como os outros métodos, diferente do observado quando o modelo de força de contato proporcional foi utilizado. Nota-se também os métodos $\alpha - HHT$ e o método de *Newmark*, após os dois primeiros impactos, apresentaram uma redução do valor de pico, diferente do observado para o método da diferença finita centrada. A redução do pico ocorre devido ao fato que depois dos dois primeiros impactos as vigas passam a impactar sempre na mesma configuração.

As magnitudes dos picos de aceleração utilizando o modelo de força de contato proporcional parecem estar superestimadas, devido principalmente a não conservação da energia, sendo que energia é acrescentada ao sistema, levando a um estado energético que não corresponde ao do sistema. O modelo cúbico apresentou magnitudes mais moderadas como pode ser visto na Figura 6.37, verifica-se que os picos da aceleração sejam mais compatíveis ao problema real, no entanto seria necessário dados experimentais para comprovação dessa hipótese. A magnitude dos picos das acelerações ainda apresenta valores elevados apesar da variação da energia apresentar variações na ordem de $10^{-5} J$ a $10^{-4} J$. A variação discreta da velocidade V em dois pontos próximos separados por Δt pode ser escrita como:

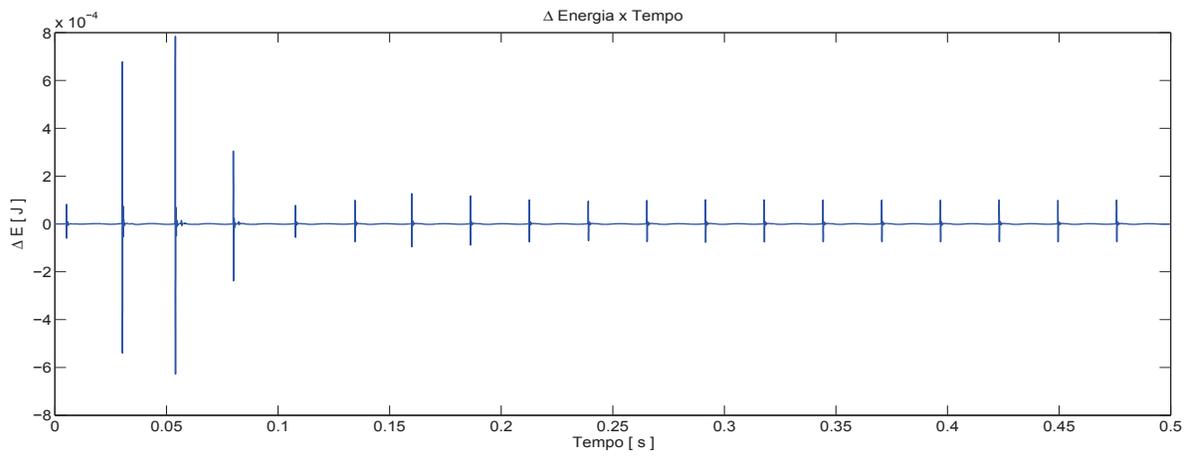
$$\frac{\Delta V}{\Delta t} \quad (6.6)$$

onde no problema em questão o valor do intervalo de tempo utilizado foi de $1 \times 10^{-6} s$ para aceleração. Assim para uma variação unitária na velocidade um valor de $1 \times 10^6 m/s^2$ seria obtido. Desta forma acredita-se que o valor de pico é afetado pela escolha do intervalo de tempo, no entanto estudos adicionais devem ser realizados.

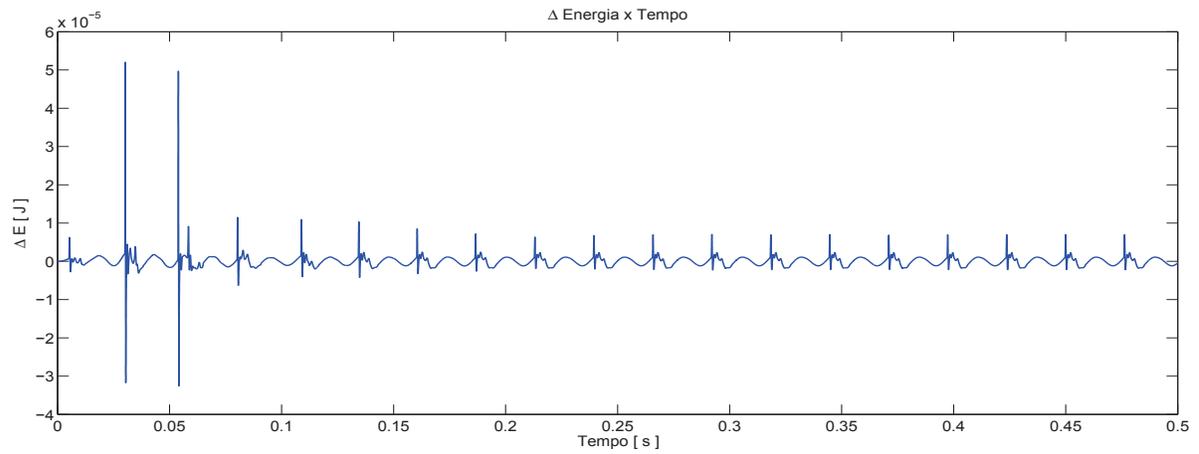
O comportamento observado no deslocamento, velocidade e aceleração do nó do grau de liberdade da viga 1 foi o mesmo observado no grau de liberdade da viga 2. Destaca-se novamente que todos os gráficos de deslocamento, velocidade e aceleração para o grau de liberdade da viga 2, iniciaram-se a partir de zero, mostrando que a viga 2 só entram em movimento no instantes em que o impacto ocorre.

As figuras 6.35, 6.36 e 6.37 mostram respectivamente a variação da energia entre dois instan-

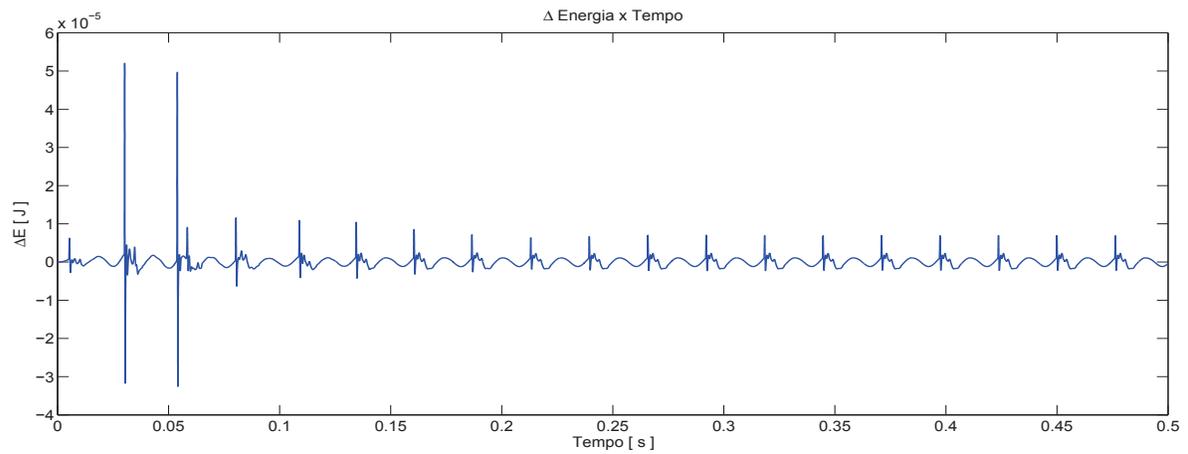
tes consecutivos, a evolução da folga e a força de contato para o problema do vibro-impacto entre vigas com modelo de força de contato cúbico, para os seguintes esquemas de integração temporal: DFC, Newmark e $\alpha - HHT$.



(a) Método da diferença finita centrada (DFC).

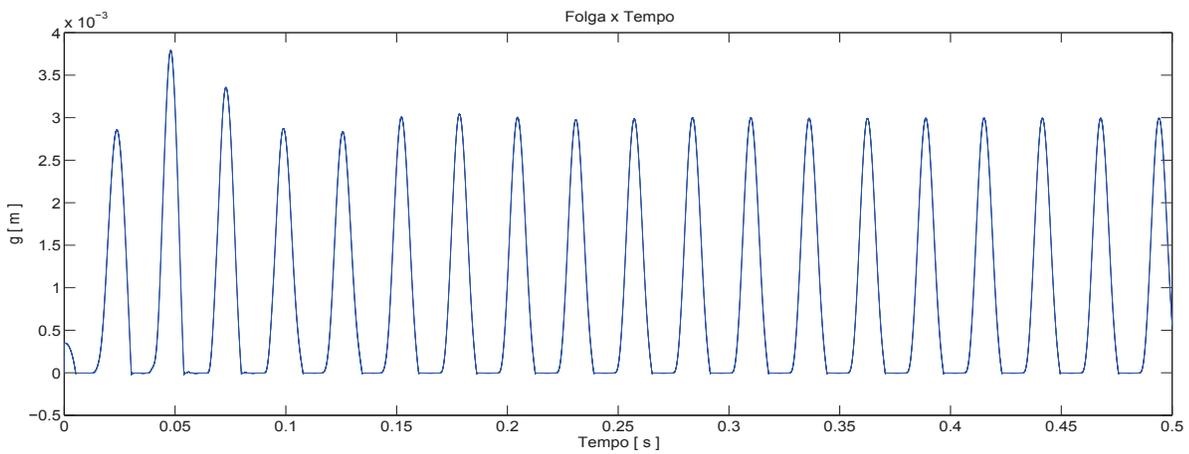


(b) Método de *Newmark* com $\gamma = 0.5$ e $\beta = 0.25$.

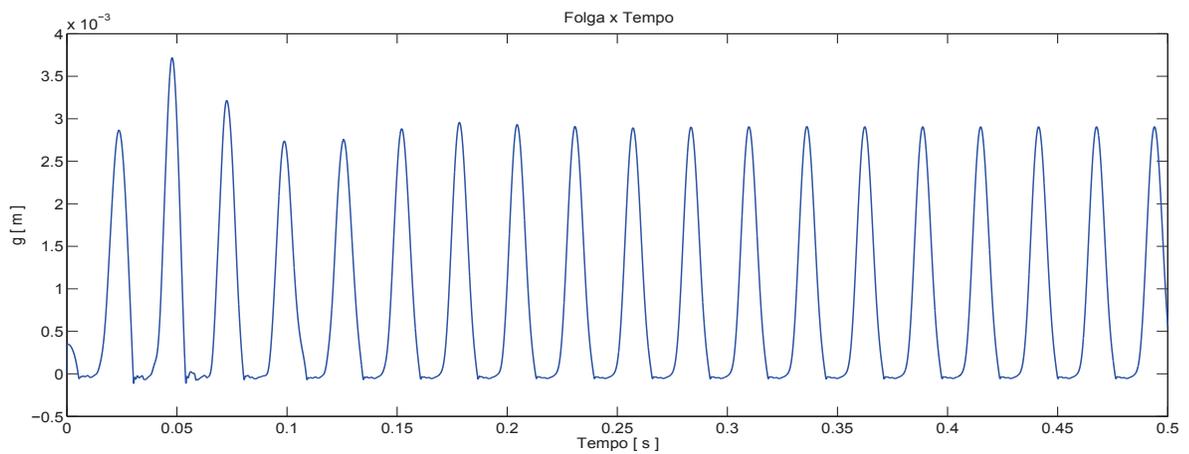


(c) Método α - *HHT* com $\alpha = 0.1$, $\gamma = 0.6$ e $\beta = 0.3025$.

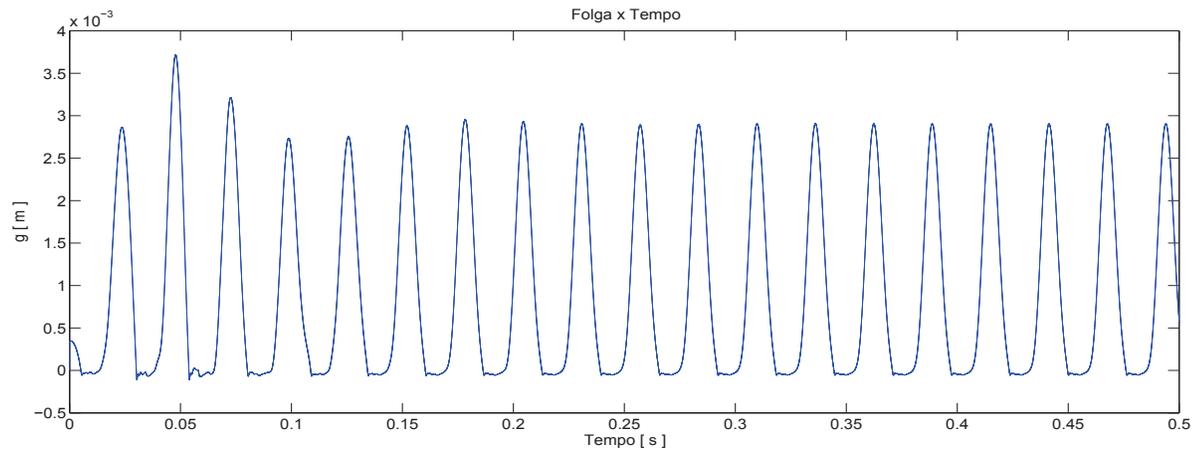
Figura 6.35: Comparação da variação da energia ΔE para o modelo de força de contato cúbico.



(a) Método da diferença finita centrada (DFC).

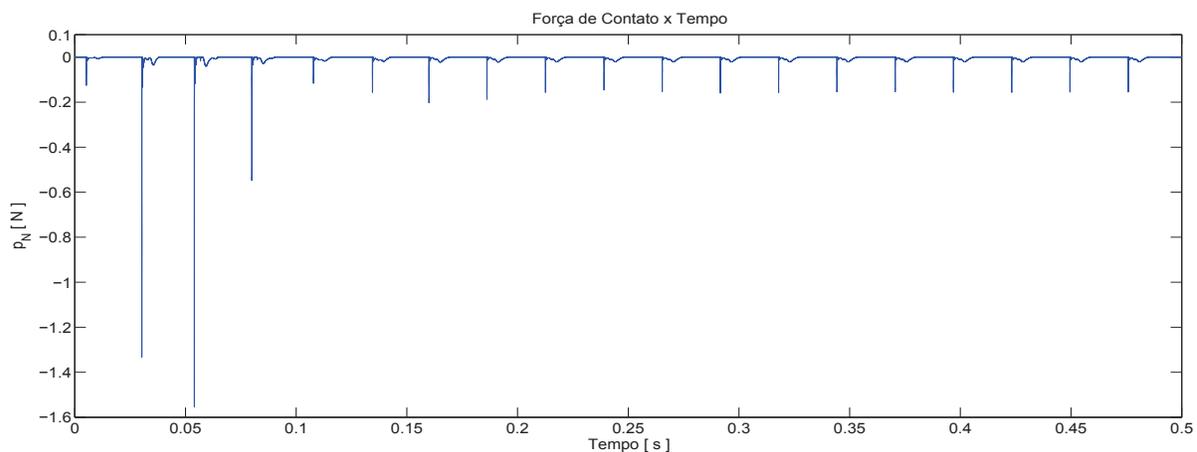


(b) Método de *Newmark* com $\gamma = 0.5$ e $\beta = 0.25$.

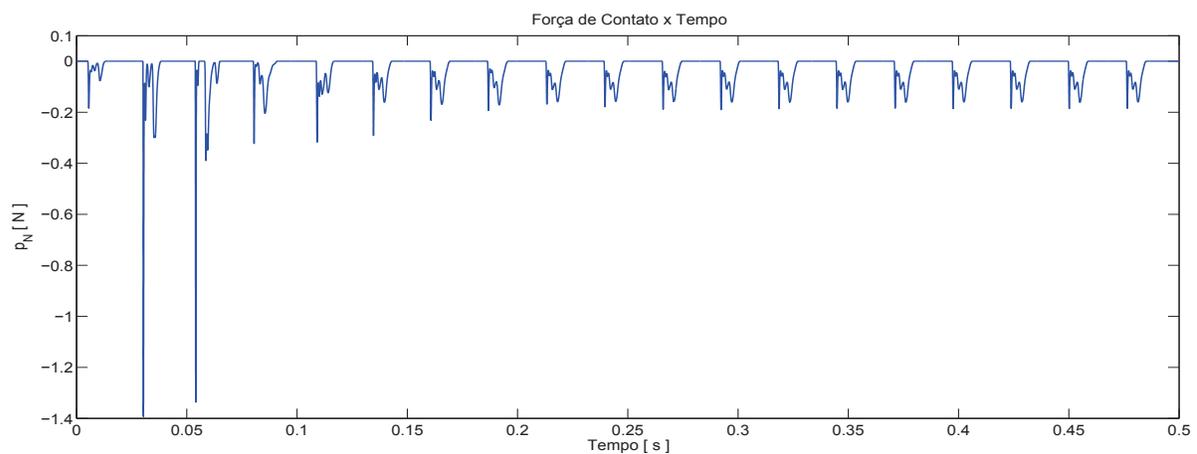


(c) Método α - *HHT* com $\alpha = 0.1$ $\gamma = 0.6$ e $\beta = 0.3025$.

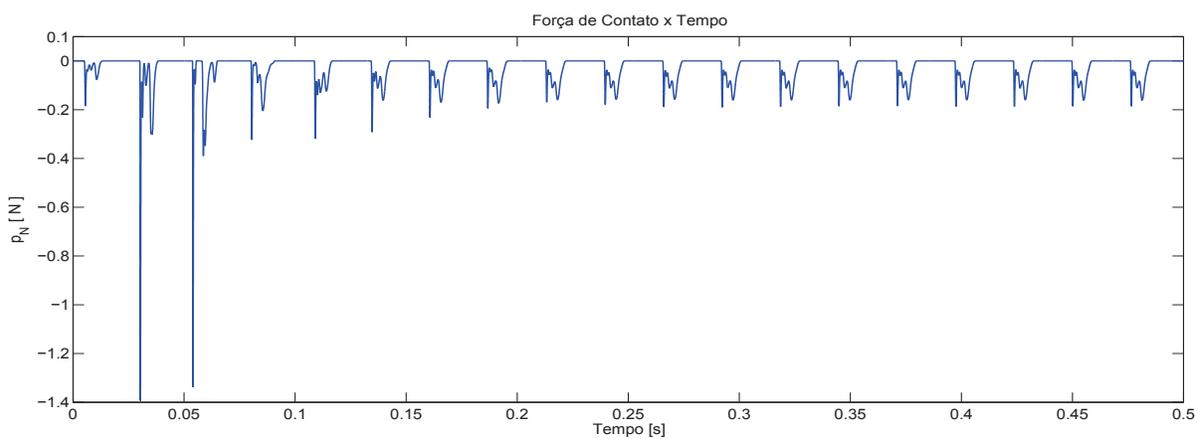
Figura 6.36: Evolução da distância da viga até os obstáculos (folga) para o modelo de força de contato cúbico.



(a) Método da diferença finita centrada (DFC).



(b) Método de *Newmark* com $\gamma = 0.5$ e $\beta = 0.25$.



(c) Método $\alpha - HHT$ com $\alpha = 0.1$, $\gamma = 0.6$ e $\beta = 0.3025$.

Figura 6.37: Comparação da força de contato p_N para o modelo de força de contato cúbico.

Os gráficos da variação da energia apresentados na Figura 6.35 mostram características opostas às observadas na aceleração para o método da diferença finita centrada. O pico da variação da energia após os dois primeiros impacto reduz sua amplitude assim como ocorre nos métodos de *Newmark* e o método $\alpha - HHT$, diferente do ocorrido na aceleração. Em termos de valores de pico, o método de *Newmark* e o método $\alpha - HHT$ apresentaram menor variação entre os valores máximo e mínimo dos picos muito semelhantes. No método da diferença finita centrada os valores possuem em torno de uma ordem de grandeza maior que os outros dois métodos. Destaca-se ainda a enorme diferença nos valores da variação da energia para todos os métodos com o modelo de contato cúbico em relação ao valores obtidos para o modelo de contato proporcional, mostrando a influencia do modelo de força de contato adotado na conservação da energia do sistema que não inclui nenhuma dissipação. Verifica-se que o modelo de força de contato cúbico apresenta uma variação muito pequena e aceitável em qualquer simulação numérica transiente, diferente do modelo proporcional.

Quanto ao gráfico da folga entre as vigas mostrado na Figura 6.36, verifica-se que no impacto os corpos entram em contato, de forma diferente da observada quando o modelo de contato proporcional foi usado. No modelo proporcional no início do contato as vigas permaneciam em contato por tempo antes de se separar. No modelo de força de contato cúbico observa-se uma oscilação em torno da folga nos instantes em que o contato ocorre, indicando a separação, mas logo em seguida retorna-se ao contato até que as vigas se definitivamente. Isso fica mais evidente quando se analisa o comportamento da força de contato após o pico inicial causado pelo impacto, observando-se a oscilação da força de contato que cai para zero indicando uma separação e logo em seguida ocorrendo outro pico de menor intensidade, indicando que o contato voltou a ocorrer. Isso se repete até os corpos se separem definitivamente. Este comportamento foram mais evidente nos método de *Newmark* e no método $\alpha - HHT$.

Quanto ao valor de pico, nota-se o mesmo comportamento observado na variação da energia. Os valores de pico obtidos para todos os métodos de integração foram muito próximos, mostrando pouca influência do método de integração no modelo cúbico. A diferença se encontra nas variações após o impacto, onde as oscilações observadas no método da diferença centrada foram menores do que nos outros métodos.

A diferença na força de contato obtida entre o modelo proporcional e o modelo cúbico pode ser explicada por dois efeitos. Primeiro, o modelo de força de contato proporcional apresentou uma variação da energia muito grande quando comparada ao modelo de contato cúbico, ou seja a energia do sistema no modelo de força proporcional estava em um nível de energia maior do que no modelo cúbico. Como consequência desse aumento tem-se um aumento da força de contato também. Segundo o modelo de força de contato proporcional leva a uma força de contato maior

para o mesmo valor da função penetração g_N e de ϵ_N , como mostrado na Figura 6.38. Desta forma a força de contato obtida pelo modelo proporcional será maior que a obtida pelo modelo cúbico.

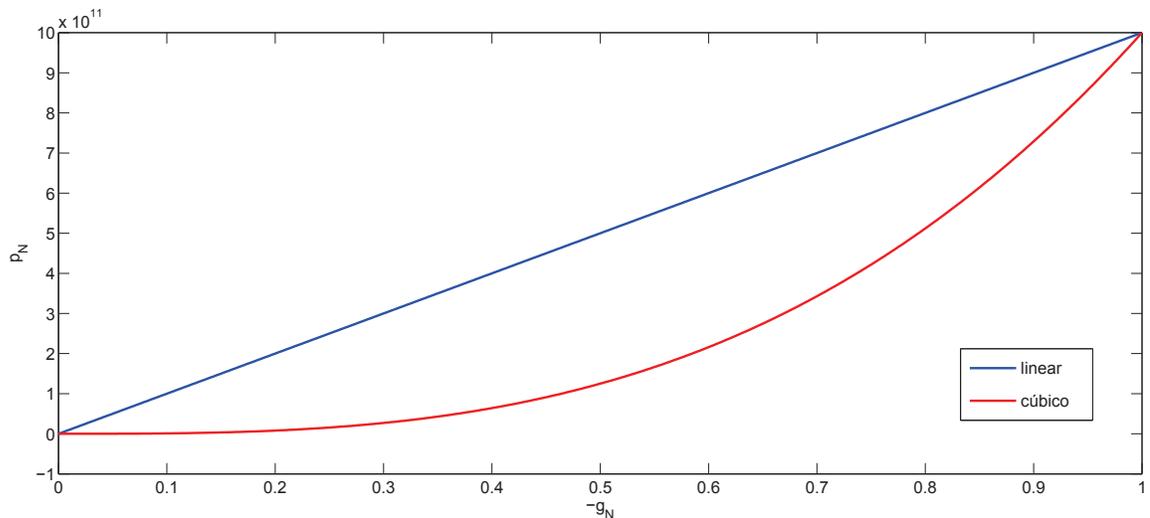


Figura 6.38: Comparação da força de contato entre o modelo cúbico e o proporcional, com $\epsilon_N = 1 \times 10^{12}$ com $-g_N$ faixa de $0 < -g_N < 1$.

Por fim, o modelo de força de contato cúbico mostrou-se mais estável e conseqüentemente mais adequado ao vibro-impacto de viga contra viga do que o modelo proporcional. Destaca-se também que o método de Newmark e o método $\alpha - HHT$ apresentaram menores valores para a variação da energia de um passo para outro quando comparados ao método DFC, sendo mais estáveis do que este. No entanto não foram observadas grandes diferença entre os resultados obtidos pelos três métodos.

7 CONCLUSÕES

Os resultados apresentados mostram que os métodos de integração implementados são capazes de lidar com a condição de vibro-impacto, conseguindo capturar o pico na aceleração e força de contato característico do problema. Os resultados obtidos neste trabalho para o problema de vibro-impacto de uma viga contra obstáculos rígidos apresentaram boa concordância com os resultados de Dumont (2002), sendo um ponto de verificação da implementação.

Destaca-se a contribuição deixada pelo trabalho ao realizar a análise do problema da viga impactando contra obstáculos rígidos, investigando-se o comportamento do deslocamento do sistema, da variação da energia e força de contato utilizando os métodos de integração numérica da diferença finita centrada (DFC), Newmark e $\alpha - HHT$. Os resultados mostram o bom desempenho do método de *Newmark* e o método $\alpha - HHT$ aliados ao método de força de contato proporcional no problema de viga impactando contra dois obstáculos rígidos. Acredita-se que os resultados obtidos proporcionaram uma melhor compreensão desse problema, mostrando características do fenômeno de vibro impacto. Acredita-se que esses resultados contribuirão na solução de problemas de vibro-impacto na indústria como na análise de falha por fadiga de impacto de válvula de palhetas em compressores alternativos, bem como na falha dos suportes de varetas de combustível nuclear.

Destaca-se também a contribuição deixada com os resultados obtidos para o vibro-impacto de viga contra viga, devido a existência de pouco material a respeito de vibro-impacto de uma estrutura flexível contra outra estrutura flexível. Os resultados mostram que o modelo se apresentou mais adequado ao problema de vibro-impacto de viga com viga, proporcionando maior estabilidade pela pequena variação de energia e valores mais realísticos de força de contato para o problema. O método de força de contato linear mostrou-se mais instável devido a elevada variação da energia do sistema não conseguindo representar de modo satisfatório a interação das vigas. Acredita-se que a análise e os resultados obtidos neste trabalho para esse problema são um primeiro passo para os estudos do vibro-impacto de viga com viga e que a partir desses resultados melhorias podem e devem ser feitas.

Por fim, conclui-se que o objetivo do desenvolvimento de um código em MATLAB para análise de problema de vibro-impacto foi bem sucedido, uma vez que os resultados obtidos mostram isso, assim o objetivo inicial deste trabalho foi alcançado.

7.1 Trabalhos Futuros

Os seguintes aspectos podem ser apontados como continuidade deste trabalho:

- Estudo de problemas que envolvam efeitos de dissipação de energia e amortecimento na região de impacto, efeitos estes desconsiderados neste trabalho.
- Desenvolvimento e investigação de esquemas de integração mais adaptados ao problema de impacto, que garantam a conservação da energia e sejam capazes de representar as mudanças da condição de contato como: a persistência do contato, a separação dos corpos em contato. Segundo Laursen (2003), quando essas condições são atendidas é possível ter um algoritmo estável.
- Investigação do comportamento do vibro-impacto de vigas utilizando elementos de contato mais robustos que o elemento nó-nó. Por exemplo elemento nó-segmento e elemento segmento-segmento.
- Aplicação de técnicas de controle de vibração de vigas com vibro-impacto.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGUIAR, R. R. **Desenvolvimento de um Dipositivo Gerador de Vibro-Impacto**. 2006. Dissertação (Mestrado).

AGUIAR, R.R. e WEBER, H.I. Mathematical modeling and experimental investigation of embeded vibro-impact system. **Nonlinear Dynamics**, v. 65, n. 3, 317 – 334, 2006.

URL: *10.1007/s11071-010-9894-0*

BATHE, K.J. **Finite Element Procedures in Engineering Analysis**. Prentice - Hall, 1982.

BELTRAME, L.R.; PAVANELLO, R. e SERPA, A. Problemas de vibro-impacto no domínio do tempo. Relatório técnico, 1998.

BRACH, T. **Mechanical Impact Dynamics - Rigid Body Collisions**. John Willey & Sons, 1991.

CHANDRUPATLA, T.R. e BELEGUNDU, A. **Introduction to Finite Elements in Engineering**. Prentice Hall, third ed., 2002.

COOK, R.D. **Finite Element Modeling For Stress Analysis**. John Wiley & Sons, 1995.

DEUFLHRD, P.; KRAUSE, R. e ERTEL, S. A contact - stabilized newmark method for dynamical contact problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 73, 1274 – 1290, 2008.

DOKANISH, M.A. e SUBRARAJ, K. Survey of direct time - integration methods in computacional structural dynamics - i explicit methods. **Journal Computers and Structures**, 1989.

DOYEN, D.; ERN, A. e PEPERNO, S. Time integration schemes for finite element dynamic signorini problem. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2002.

DUMONT, Y. Vibration of a beam between stops - numerical simulations and comparison of several numerical schemes. **Mathematics and Computers Simulation**, v. 60, 45–83, 2002.

DUMONT, Y. e PAOLI, L. Vibrations of a beam between stops: Convergence of a fully discretized approximation. **ESAIM : Mathematical Modeling and Numerical Analysis**, v. 40, 705 – 704, 2006.

- EDGAR, T.F.; HIMMEBLAU, D.M. e LADSON, L.S. **Optimization of Chemical Process**. McGraw-Hill, 2001.
- ERICHER, S.; BONAVENTURA, L. e BURSI, O.S. The analysis of generalized alpha methods for non - linear dynamic problems. **Journal of Computacional Mechanics**, v. 28, n. 2, 83 – 104, 2002.
- GILARDI, G. e SHARF, I. Literature survey of contact dynamics. **Modelling Mechanics and Machine Theory**, v. 37, 1213 – 1239, 2002.
- HUGHES, T.J.R. **The Finite Element Method - Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis**. Dover Publications, reprint ed., 2000.
- IBRAHIM, R.; BABITSKY, V. e OKUMA, M. **Vibro-Impact Dynamics of Ocean Systems and Related Problems**. Springer, 2009.
- IBRAHIM, R.A. **Vibro-impact Dynamics Modeling Mapping and Applications**. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics Springer, 2009.
- KHENOUS, H.B.; LABORDE, P. e RENARD, Y. Mass redistribution method for finite element contact problems in elastodynamics. **European Journal of Mechanics A Solids**, v. 27, 918 – 932, 2008.
- KNUDSEN, J. e MASSIH, A.R. Vibro - impact dynamics of a periodically forced beam. **Journal of Pressure Vessel Technology**, v. 122, 2000.
- LAJUS, F. C. **Uma Análise Numérica do Impacto em Válvulas do Tipo Palheta de Compressores**. 2012. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Santa Catarina.
- LAURSEN, T.A. **Computacional Contact and Impact mechanics - Fundamentals of Modeling Interfacial Phenomena in Nonlinear Finite Element Analysis**. Springer, 2003.
- LEIB, N.; NACIVET, S. e THOUVEREZ, F. Experimental and numerical study of vibro-impact phenomenon in gear shift cable. **Journal of Sound and Vibration**, v. 329, 289 – 381, 2010.
- LUO, G.; ZHANG, Y.; XIE, J. e J., Z. Vibro - impact dynamics near strong resonance point. **Acta Mechanica Sinica**, v. 23, 329 – 341, 2007.
- MANEVITCH, L.I. e GENDEMAN, O.V. Oscilatory modes of vibro-impact type for essentially non-linear systems. **Proceeding of Institution of Mechanical Engineers - Journal of Mechanical Engineering Science**, v. 222, 2008.

- MATTOS, M. C. **Alterações na Dinâmica de Sistemas com Vibro-Impacto Devidas a Variação da Folga**. 1998. Tese (Doutorado). Universidade Estadual de Campinas.
- PARK, N.; SUH, J. e JEON, K. Contact force model for a beam with discretely spaced gap supports and its approximated solution. **Journal Nuclear Engineering and Technology**, v. 43, n. 5, 2011.
- POZZOLINI, C.; RENARD, Y. e SALAUN, M. Vibro-impact of plate on rigid obstacles - existence theorem convergence of a scheme and numerical simulations. **IMA - Journal of Numerical Analysis**, pp. 1–35, 2011.
- RAO, S. **Finite Element Method**. Elsevier Science and Technology Books, 4 th ed., 2004.
- SILVA, C.W. **Vibration and Shock Handbook**. Taylor & Francis, 2005.
- STRONGE, W.J. **Impact Mechanics**. Cambridge University Press, 2000.
- SUBRARAJ, K. e DOKANISH, M.A. Survey of direct time - integration methods in computational structural dynamics - ii implicit methods. **Journal Computers and Structures**, v. 32, n. 6, 1387 – 1401, 1989.
- WAGG, D.J. e BISHOP, S.R. A note on modelling multi-degree-of-freedom vibro-impacts systems using coefficient of restitution models. **Journal of Sounds and Vibrations**, v. 236, 176 – 184, 2000.
- WRIGGERS, P. **Computational Contact Mechanics**. John Wiley & Sons LTD, 2002.
- YASTREBOV, V. A. **Computational contact mechanics: geometry detection and numerical techniques**. 2011. Tese (Doutorado). Paris Tech.
- YIN, X.; QIN, Y. e ZOU, H. Transient response of repeated impact of beam against a stop. **International Journal of Solids and Structures**, v. 44, 7323 – 7339, 2007.
- YUAN, Y. e JIANHUA, X. Symmetry breaking and symmetry increasing in vibro-impact with symmetric two-sided constraints. **Applied Mechanics and Materials**, 2011.
- ZIENKIEWICZ, O. e TAYLOR, R.L. **The Finite Element Method volume 1 - Basis**. Butterworth - Heineman, 5th ed., 2000.
- ZIENKIEWICZ, O. e TAYLOR, R.L. **The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics**. Elsevier, 6th ed., 2005.

Anexo A - Método de Newton-Raphson

Segundo Bathe (1982), o método de Newton-Raphson é o método iterativo mais frequentemente utilizado para solução das equações não lineares geradas em problemas não lineares que utilizam o método dos elementos finitos. A idéia básica do método de Newton-Raphson é escrever a função $f(x)$ como uma expansão em série de Taylor em torno de um ponto x_0 . O método apresenta taxa de convergência quadrática. Se a função $f(x)$ é uma função quadrática, o método converge em apenas uma iteração, Edgar *et al.* (2001).

Os sistemas de equações geradas pelo método dos elementos finitos possuem a seguinte forma:

$$\psi(\mathbf{u}) = \mathbf{f}_{int} - \mathbf{f}_{ext} = \mathbf{0}$$

Assumindo que a solução do sistema é dada por um processo iterativo, podemos escrever que $\psi(\mathbf{u}_{i+1})$ como uma expansão em série de Taylor ao redor do ponto \mathbf{u}_i , da seguinte forma:

$$\psi(\mathbf{u}_{i+1}) = \psi(\mathbf{u}_i) + \frac{\partial \mathbf{f}_{int}}{\partial \mathbf{u}_i} (\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i)$$

onde assumiu-se que os carregamentos externos aplicados são independentes dos deslocamentos. Desejamos encontrar o campo de deslocamentos \mathbf{u}^{1+1} para que $\psi(\mathbf{u}_{i+1}) = \mathbf{0}$. Assim rearranjando os termos da equação e fazendo $\Delta \mathbf{u}^i = (\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i)$, tem-se:

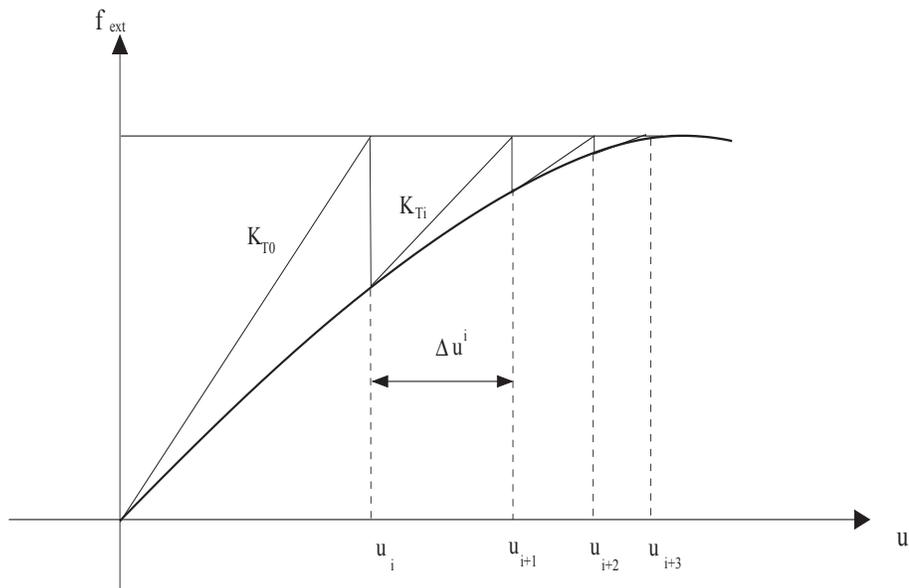
$$\frac{\partial \mathbf{f}_{int}}{\partial \mathbf{u}_i} \Delta \mathbf{u}_i = -\psi(\mathbf{u}_i) = \mathbf{f}_{ext} - \mathbf{f}_{int}$$

$$\mathbf{S}_i \Delta \mathbf{u}_i = -\psi(\mathbf{u}_i) = \mathbf{f}_{ext} - \mathbf{f}_{int} \quad (7.1)$$

onde \mathbf{S}_i é chamada de matriz tangente, está é avaliada na iteração i . A Equação 7.1 é conhecida como equação de Newton-Raphson. Solucionando o sistema de equações obtém-se $\Delta \mathbf{u}_i$. Assim o campo de deslocamento \mathbf{u}^{i+1} é obtido, pela seguinte relação:

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + \mathbf{S}_i \Delta \mathbf{u}_i$$

Em seguida a convergência de $\psi(\mathbf{u}_{i+1})$ é checada, e se $\psi(\mathbf{u}_{i+1}) < TOL$ o deslocamento \mathbf{u}_{i+1} é admitido como solução, caso contrário o processo iterativo continua, agora com $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{i+1}$. A figura abaixo ilustra o processo iterativo de Newton-Raphson.



Método de Newton-Raphson

O ponto inicial usualmente é dado por $u = 0$, onde a matriz tangente neste ponto é dada por S_0 , e a Equação 7.1 é solucionada obtendo u_i . A convergência é verificada e o processo é continuado até que a solução é encontrada.

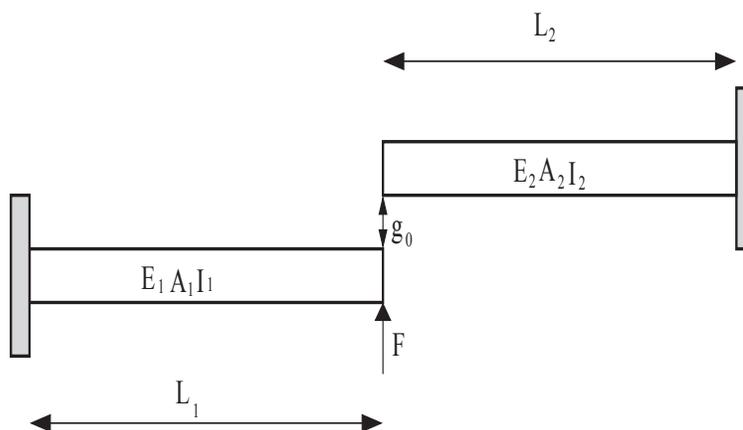
Anexo B - Verificação do Método da Penalidade

Para verificar o algoritmo de penalidade, que trata da imposição da condição de contato, o problema de contato estático de duas vigas foi simulado e a resposta foi comparada com o software comercial *ABAQUS* 6.8.

Neste trabalho entende-se por verificação a comparação dos resultados obtidos por uma simulação numérica com os resultados obtidos utilizando um código de simulação numérica já consolidado, por exemplo um software comercial.

O software comercial *ABAQUS* 6.8 foi utilizado como ferramenta de verificação em virtude do fácil acesso ao software, que pode ser encontrado em sua versão estudantil e também por se tratar de uma software comercial já consolidado na área de simulação computacional, sendo seus códigos confiáveis.

A figura a abaixo apresenta o problema.



Problema de contato viga com viga

Os dados utilizados na simulação foram: $L_1 = L_2 = 10\text{ m}$, $E_1 = E_2 = 70\text{ Gpa}$, $A_1 = A_2 = 0.02\text{ m}^2$, $I_1 = I_2 = 1.6667 \times 10^{-5}\text{ m}^4$ e $g_0 = 0.0005\text{ m}$. A malha utilizada foi uma malha contendo 10 elementos por viga. O problema de contato foi resolvido utilizando um penalizador $\epsilon_N = 1 \times 10^{10}\text{ N/m}$. Dois casos foram simulados, o primeiro utilizando uma carga $F = 100\text{ N}$ e o segundo com uma carga $F = 500\text{ N}$.

As simulações no *ABAQUS* foram feitas utilizando o elemento de viga de *Euler – Bernoulli* cúbico denominado no *ABAQUS* como elemento *B – 23*. A região de contato utilizada foi a região definida pelo nó da extremidade livre da viga 1 e todos os nós da viga 2. O modelo de

contato utilizado foi o modelo penalidade linear com o parâmetro de $\epsilon_N = 1 \times 10^{10} N/m$ com a opção de pequenos deslizamentos (small sliding). O carregamento foi aplicado como uma força concentrada no nó da extremidade livre da viga 1.

A tabela ?? mostra o comparativo dos deslocamentos do nó de contato para as duas condições de carregamento, utilizando as rotinas implementadas e o software comercial *ABAQUS*.

Comparativo dos deslocamentos dos nós de contato.

	$F = 100 N$		$F = 500 N$	
Nó de contato	<i>ABAQUS</i>	Implementado	<i>ABAQUS</i>	Implementado
Viga 1	0.0145357	0.0145357	0.0716786	0.0716786
Viga 2	0.0140357	0.0140357	0.0711786	0.0711786

Portanto pode-se concluir que o método da penalidade implementado foi capaz de reproduzir os mesmos resultados do software comercial *ABAQUS*. Desta forma, o método da penalidade implementado foi verificado.

Anexo C - Solução Analítica do Problema de Verificação

A solução para um problema de vibração forçada de viga pode ser determinada com a utilização do princípio da superposição dos modos segundo Rao (2004), desta forma a deflexão da viga é:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x) \cdot q_n(t)$$

onde $W_n(x)$ é o n-ésimo modo de vibração da viga, e $q_n(t)$ é a resposta temporal da coordenada generalizada do n-ésimo modo .

Para uma viga bi-apoiada mostrada na Figura 6.1, os modos de vibração segundo Rao (2004) são:

$$W_n(x) = \text{sen}(\beta_n x) \quad \text{onde} \quad \beta_n = \frac{n\pi}{l}$$

$$W_n(x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) .$$

A resposta temporal da coordenada generalizada do n-ésimo modo $q_n(t)$ é dada por:

$$q_n(t) = A_n \cos(\omega t) + B_n \text{sen}(\omega t) + \frac{1}{\rho A b \omega_n} \int_0^t Q_n(\tau) \text{sen}(\omega_n(t - \tau)) d\tau$$

onde os dois primeiros termos do lado esquerdo da igualdade representam a vibração transitória da viga, e o terceiro termo representa a vibração em regime permanente.

Para o problema de vibração de uma viga bi-apoiada carregada com força harmônica senoidal aplicada em a , como mostrado na Figura 6.1, cuja as condições iniciais são:

$$w(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(0) = 0 \quad e \quad \dot{w}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n(0) = 0$$

assim temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n = 0 \quad e \quad \sum_{n=1}^{\infty} B_n = 0$$

O termo $Q_n(t)$ é a força generalizada, representada por:

$$Q_n(t) = \int_0^l f(x, t) W_n(x) dx$$

sendo $f(x, t)$ a força externa aplicada sobre a viga. Para a viga da Figura 6.1 a força externa pode ser escrita da seguinte forma:

$$f(x, t) = f_0 \text{sen}(\omega t) \delta(x - a)$$

assim temos:

$$\begin{aligned} Q_n(t) &= \int_0^l f_0 \text{sen}(\omega t) \delta(x - a) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \\ &= f_0 \text{sen}(\omega t) \text{sen}\left(\frac{n\pi a}{l}\right). \end{aligned}$$

Os termos ω_n e b são dados por:

$$\begin{aligned} \omega_n &= (n\pi)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}} \\ b &= \int_0^l W_n(x)^2 dx = \int_0^l \text{sen}^2\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = \frac{l}{2}. \end{aligned}$$

Desta forma $q_n(t)$ resulta em:

$$\begin{aligned} q_n(t) &= \frac{2}{\rho A l \omega_n} \int_0^t f_0 \text{sen}(\omega \tau) \text{sen}\left(\frac{n\pi a}{l}\right) \text{sen}(\omega_n(t - \tau)) d\tau \\ &= \frac{2 f_0}{\rho A l \omega_n} \text{sen}\left(\frac{n\pi a}{l}\right) \int_0^t \text{sen}(\omega \tau) \text{sen}(\omega_n(t - \tau)) d\tau \\ &= \frac{2 f_0}{\rho A l \omega_n} \text{sen}\left(\frac{n\pi a}{l}\right) \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2} [\omega_n \text{sen}(\omega t) - \omega \text{sen}(\omega_n t)]. \end{aligned}$$

Assim temos a seguintes expressão para a resposta de uma viga bi-apoiada excitada por uma força harmônica senoidal localizada em a :

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2f_0}{\rho Al} \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a}{l}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \left[\operatorname{sen}(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_n} \operatorname{sen}(\omega_n t) \right]$$