

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA  
TESE DEFENDIDA POR Léo Santana  
Pires..... E APROVADA  
PELA COMISSÃO JULGADORA EM 24/02/2005

Helder Anibal Hermini  
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA  
MECÂNICA

UMA CONTRIBUIÇÃO AO ESTUDO DA DINÂMICA NÃO-  
LINEAR E CONTROLE DE UM PARTICULAR SISTEMA  
ROBÓTICO LEVANDO-SE EM CONTA AS INTERAÇÕES  
ENTRE AS JUNTAS

Autor: Léo Santana Pires  
Orientador: Helder Anibal Hermini  
Co-orientador: José Manoel Balthazar

02/05

UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL  
SEÇÃO CIRCULAR

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO**

**UMA CONTRIBUIÇÃO AO ESTUDO DA DINÂMICA NÃO-  
LINEAR E CONTROLE DE UM PARTICULAR SISTEMA  
ROBÓTICO LEVANDO-SE EM CONTA AS INTERAÇÕES ENTRE  
AS JUNTAS**

Autor: **Léo Santana Pires**  
Orientador: **Helder Anibal Hermini**  
Co-orientador: **José Manoel Balthazar**

Curso: Engenharia Mecânica  
Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Dissertação de mestrado apresentada à comissão de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2005  
S.P. - Brasil

**UNICAMP**  
BIBLIOTECA CENTRAL  
SEÇÃO CIRCULANTE

UNIDADE BC  
Nº CHAMADA TUNICAMP  
P665c  
V \_\_\_\_\_ EX \_\_\_\_\_  
TOMEO 001 64842  
PROC 16-P.00086-05  
C \_\_\_\_\_ B \_\_\_\_\_  
PREÇO 11,00  
DATA 21/07/05  
Nº CPD Bv. d 358500

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

P665c Pires, Léo Santana  
Uma contribuição ao estudo da dinâmica não-linear e controle de um particular sistema robótico levando-se em conta as interações entre as juntas / Léo Santana Pires. -- Campinas, SP[s.n.], 2005.

Orientadores: Helder Anibal Hermini, José Manoel Balthazar.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Robôs - Dinâmica. 2. Robôs – Sistemas de controle. 3. Robótica. I. Hermini, Helder Anibal. II. Balthazar, José Manoel. III. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. IV. Título.

Titulo em Inglês: A contribution to the Analisis to Non Linear Dynamics  
And Control of a Particular Robotic System Considering the  
Interacting Between the Joints

Palavras-chave em Inglês: Robots dynamics, robots control systems e  
Robotics

Área de concentração: Projeto Mecânico e Mecânica dos Sólidos

Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica

Banca examinadora: Marco Lúcio Bittencourt e Masayoshi Tsuchida

Data da defesa: 24/02/2005

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

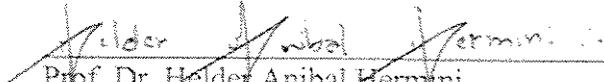
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

UMA CONTRIBUIÇÃO AO ESTUDO DA DINÂMICA NÃO-  
LINEAR E CONTROLE DE UM PARTICULAR SISTEMA  
ROBÓTICO LEVANDO-SE EM CONTA AS INTERAÇÕES  
ENTRE AS JUNTAS

Autor: Léo Santana Pires

Orientador: Helder Anibal Hermini

Co-orientador: José Manoel Balthazar

  
Prof. Dr. Helder Anibal Hermini

DPM/FEM/UNICAMP

  
Prof. Dr. José Manoel Balthazar

DEMACE/IGCE/UNESP

  
Prof. Dr. Marco Lúcio Bittencourt

DPM/FEM/UNICAMP

  
Prof. Dr. Masayoshi Tsuchida

DCCE/IBILCE/UNESP

Campinas, 24 de Fevereiro de 2005

## **Dedicatória**

Dedico este trabalho à minha Mãe, Neide, Minha irmã, Sidnéia, e ao meu Pai do Coração, Joaquim, por tudo que me fizeram nesses anos. E ao meu irmão Guilherme.

## **Agradecimentos**

Gostaria de agradecer inicialmente a Deus, por ter me iluminado nesse longo caminho, sem o qual a nenhum lugar teria chegado.

Ao meu Orientador, Amigo e irmão, Helder Anibal Hermini, pelo apoio fraterno nas horas difíceis, pela dedicação e presteza. Ao meu Co-orientador e Paizão, José Manoel Balthazar, pelos *insights* e esclarecimentos nas horas difíceis.

Aos amigos feitos, Jefersson, Luis Gustavo, Maira, Karen, e tantos outros.

À minha namorada e amiga Camila.

Aos funcionários Denise, Cristina, Raquel pela constante disposição em ajudar.

## Epígrafe

*"A vida brota a partir de milhares de fontes vibrantes, entrega-se à todos que a agarram, recusa-se a ser expressa em frases tediosas, aceita apenas ações transparentes, palavras verdadeiras e o prazer do amor (...)"*

Wilhelm Reich (1939)

## Resumo

PIRES, Léo Santana, *Uma contribuição ao Estudo da Dinâmica não-Linear e Estratégia de controle de um Particular Sistema Robótico Levando-se em Conta as Interações Entre as Juntas*, Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2005, 128 páginas. Dissertação (Mestrado).

Uma aproximação unificada para projeto e controle de manipuladores robóticos que retenha todas as não linearidades inerentes na dinâmica é desenvolvido para uma configuração robô-motor considerado como um sistema interagente. Este projeto de sistema interagente, baseado no modelo de teoria de controle de desacoplagem não-linear de Beekmann, desacopla a configuração robô-motor para os subsistemas robô, motor e interação em série. Esta aproximação está em contraste ao tratamento convencional do motor como uma pura fonte de torque e o negligenciamento da interação dinâmica entre a junta do robô e o motor, e ao desconsiderar a formulação não-linear.

### *Palavras chave*

- Interação Robô-Motor, Dinâmica Não-Linear, Controle Não-Linear, Simulação Numérica, Robótica.

## Abstract

PIRES, Léo Santana, *A contribution to the Analysis to Non Linear Dynamics And Control of a Particular Robotic System Considering the Interacting Between the Joints*, Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2005, 128 page. Dissertação (Mestrado).

A unified approach to a robotic control design, which retains all the nonlinearities inherent in the dynamics, is developed for the motor-robot configuration considered as an interacting system. This control system design, based on the Beekmann model's nonlinear decoupling control theory with arbitrary pole placement, decouples the motor-robot configuration into robot, motor, and series compliance (interaction) subsystems. This approach is in contrast to the conventional treatment of the motor as a pure torque source and the neglect of dynamic interactions between the robot joint and the motor drive mechanism and not consider the non-linear formulation.

### Key Words

- Robot-motor interacting, Non-Linear Dynamics, Non-Linear Control, Numerical Simulation, Robotic.

## Sumário

Lista de Figuras .....	ii
Lista de Tabelas .....	iv
Nomenclatura .....	v
1 Introdução .....	1
2 Revisão da Literatura .....	4
3 Desenvolvimento das Equações de Movimento para o Robô, Motor, Sistema de Interação e Estratégia de Controle e Resultado da simulação Numérica .....	34
4 Conclusões e Perspectivas .....	88
Referências Bibliográficas .....	92
Apêndices .....	95
Súmula Curricular .....	128

## Lista de Figuras

2.1	Modelo do sistema vibratório com dois graus de liberdade .....	4
2.2	Diagramas de blocos utilizados para efetuar as simulações .....	6
2.3	Simulações Numéricas das equações de movimento: variando o parâmetro $\varepsilon$ .....	7
2.4	Simulações Numéricas das equações de movimento: variando o parâmetro $m$ .....	10
2.5	Simulações Numéricas das equações de movimento: variando o parâmetro $\zeta$ .....	13
2.6	Modelo de pêndulo invertido para simulação de postura .....	16
2.7	Sistema de controle para o MODELO 1 com atuadores de torque estáticos . ...	18
2.8	Sistema de controle para o MODELO 2 com atuadores dinâmicos de torque e escolha da matriz de ganho segundo o modo de operação.....	19
2.9	Sistema de controle para o MODELO 3, incorporando os atuadores músculo-tendíneos através da excitação neural $u(t)$ associada à estimulação elétrica .....	20
2.10	Resposta temporal do MODELO 1 .....	21
2.11	Resposta temporal do MODELO 2 .....	21
2.12	Resposta temporal do MODELO 3 .....	22
2.13	Posição e orientação de uma prótese robótica com estrutura rígida de membro superior .....	24
2.14	Transformação direta de coordenadas .....	24
2.15	Malha de controle de posição .....	25

2.16 Planta do manipulador .....	27
2.17 Disposição espacial dos eixos de rotação .....	27
2.18 a) Modelo representativo de um sistema articular de três graus de liberdade (b) Malha de controle de posição do dedo .....	30
2.19 Apresentação da Planta e do Protótipo confeccionado .....	31
2.20 Estrutura de acionamento de controle .....	32
2.21 Estrutura de Controle implementada .....	33
3.1 Geometria robótica (revoluta-revoluta-revoluta) .....	35
..	
3.2 Modelo com fricção no motor e robô e interação em série .....	41
...	
3.4.1 a) Plotagem do ângulo e velocidades do robô em função do tempo b) Respectiveiros planos de fase c) Ângulo e velocidade do motor d) Respectiveiro Plano de fase, e e) Torque no motor.....	51
3.4.2.1 - 3.4.2.4 Plano de fase do robô, Plano de fase do motor e Torque no motor variando $J_M$ .....	54
3.4.2.6 - 3.4.2.8 Torque nos braços do robô, Torque nos motores e diferença entre os respectivos ângulos motor-robô, variando $J_R$ .....	58
3.4.2.9 - 3.4.2.12 Plano de fase do robô, Plano de fase do motor e Torque no robô variando $B_L$ .....	62
3.4.2.13 – 3.4.2.18 Plano de fase do robô, Plano de fase do motor e Torque no motor, variando $B_R$ .....	66
3.4.2.19 - 3.4.2.23 Plano de fase do robô, Plano de fase do motor e Torque no motor variando $K_i$ .....	71
3.4.2.24-3.4.2.29 Simulação da diferença entre os respectivos ângulos robô-motor .....	77
3.4.3.1 - 3.4.3.5 Torques no motor e robô lineares e não lineares .....	83

## Lista de Tabelas

3.4.1 a) Plotagem do ângulo e velocidades do robô em função do tempo b) Respective planos de fase c) Ângulo e velocidade do motor d) Respective Plano de fase, e e) Torque motor.....	51
3.4.2.1 - 3.4.2.4 Plano de fase do robô, Plano de fase do motor e Torque no motor variando $J_M$ .....	54
3.4.2.6 - 3.4.2.8 Torque nos braços do robô, Torque nos motores e diferença entre os respectivos ângulos motor-robô, variando $J_R$ .....	58
3.4.2.9 - 3.4.2.12 Plano de fase do robô, Plano de fase do motor e Torque no robô variando $B_L$ .....	62
3.4.2.13 – 3.4.2.18 Plano de fase do robô, Plano de fase do motor e Torque no motor, variando $B_R$ .....	66
3.4.2.19 - 3.4.2.23 Plano de fase do robô, Plano de fase do motor e Torque no motor variando $K_i$ .....	71
3.4.2.24-3.4.2.29 Simulação da diferença entre os respectivos ângulos robô-motor .....	77
3.4.3.1 - 3.4.3.5 Torques no motor e robô lineares e não lineares .....	83

## Nomenclatura

### *Letras Latinas*

- $I_i$  = Inércia nos elos do robô,  $i = 1, 2, 3$   
 $l_i$  = Comprimento dos elos do robô  
 $l_{ic}$  = Comprimento do centro de massa dos elos do robô  
 $m_i$  = Massa dos elos do robô  
 $g$  = Força gravitacional  
 $B_M = f_{MV} + f_{MC}(\omega_M)$  = Coeficiente de fricção no motor  
 $f_{MV}$  = Fricção viscosa no motor  
 $f_{MC}(\omega_M)$  = Fricção de Coulomb no motor  
 $B_L = f_{LV} + f_{LC}(\omega_M)$  = Coeficiente de fricção na carga  
 $f_{LV}$  = Fricção viscosa na carga  
 $f_{LC}(\omega_M)$  = Fricção de Coulomb na carga  
 $B_R = f_{RV}$  = Fricção viscosa relativa (de interação)  
 $K = f_{RK}(\theta_M - \theta_L)$  = Rigidez na mola  
 $J_M$  = Momento de inércia no motor  
 $z_i$  = Trajetória do motor

### *Letras Gregas*

- $\alpha_j$  = Coeficientes relacionados aos pólos da dinâmica da saída;  
 $\lambda_i$  = Ganhos, escolhidos arbitrariamente.  
 $\theta_i$  = Ângulo nas juntas do robô,  $i=1,2,3$   
 $\theta_i$  = Ângulo nas juntas do motor,  $i=4,5,6$   
 $\tau_i$  = Torque de controle no robô  
 $\omega_i$  = Trajetória do robô;

# Capítulo 1

## Introdução

A principal limitação dos modelos matemáticos publicados para o projeto mecânico e controle de robôs (ou manipuladores) é considerar os atuadores como possuindo pura fonte de torque e linearização da equação de movimento ao redor de um ponto de equilíbrio. Poucos trabalhos têm considerado a dinâmica do sistema robô-motor como um sistema interagente. É conhecido que a linearização das equações de movimento é um fator que descaracteriza o comportamento dinâmico do sistema, com maior ou menor grau é bem verdade, fator que depende da aproximação feita para a linearização e complexidade do modelo, Pires (2003). Também, pouco se tem dito da dinâmica robô-motor como um sistema interagente.

### 1.1 Objetivos

Este trabalho visa projetar a dinâmica de um particular sistema robótico de três graus de liberdade tal que preserve suas características dinâmicas mantendo todas as não-linearidades provindas das equações de Lagrange, fricções nos motores e juntas. Reproduz-se estratégias de controle efetuadas por Beekmann (1987), onde é considerado um modelo robô-motor com flexibilidade em série. A flexibilidade é dada por uma mola com rigidez  $K_i$ , e um modelo de interação e estratégia de controle não-linear são propostos. No decorrer deste texto explicita-se este procedimento.

Ressalta-se a interação entre este trabalho com outros que vem sendo desenvolvidos na Unicamp, D. P. M., F.E.M., pela equipe do Professor Balthazar. Recentemente publicou-se uma revisão destes trabalhos (Balthazar *et al.*, 2004), e este trabalho se encaixa nesta direção. Balthazar tem considerado o estudo de vibrações de sistemas não-ideais, isto é, quando uma excitação é influenciada pela resposta do sistema. Quando a excitação não é influenciada pela

resposta, é dita uma excitação ideal ou uma fonte ideal de energia. Por outro lado, quando uma excitação é influenciada pela resposta do sistema, é dita não-ideal. Assim, dependendo da excitação refere-se a um sistema vibratório como ideal e não-ideal. O comportamento ideal de sistemas vibratórios é bem conhecido na atual literatura, mas há poucos resultados sobre os não-ideais. Geralmente, sistemas vibratórios não-ideais são aqueles para os quais a potência disponível é limitada. O comportamento de sistemas vibratórios se afasta do caso ideal à medida que a potência suprida torna-se mais limitada. Para sistemas dinâmicos não-ideais, deve-se adicionar uma equação que descreve como a fonte de energia passa essa energia às equações que governam o correspondente sistema dinâmico ideal. Assim, como uma primeira característica, o sistema vibratório não-ideal tem um grau de liberdade a mais que seu paralelo ideal (Balthazar *et al* 2003).

Após uma série de pesquisa sobre projeto mecânico de robôs, percebeu-se que todos esses projetos podem ser modelados segundo uma representação interagente entre suas juntas e seus respectivos sistemas eletromecânicos, pois na prática, modelos reais serão melhor representados se houver tal interação, desde que haja uma forma de controle desta interação, o que é proposto nesse trabalho. Nota-se porém que deve-se saber como as não-linearidades influenciam no comportamento do robô, como foi feito em Pires (2003).

Para que os objetivos fossem atingidos, o texto foi redigido, como decorre, a seguir.

## 1.2 Esquema da Dissertação

A dissertação foi redigida segundo os capítulos:

**Capítulo 2:** Fez-se a revisão bibliográfica cujos fatores levaram ao desenvolvimento do presente trabalho, tanto na área da dinâmica não linear, Pires (2003) quanto nas aplicações em manipuladores robóticos, que se estendem desde aplicações em manipuladores industriais, Hermini (2000), e às aplicações em biomecânica Menegaldo (1997), Hermini (2000).

**Capítulo 3:** Mostra o desenvolvimento do estado da arte que foi objetivo dessa dissertação. Na seção 3.1 mostrou-se o desenvolvimento da equação da dinâmica do manipulador proposto, onde todas as não-linearidades foram consideradas. Em 3.2, desenvolveu-se o sistema de equações

para o motor e sistema de interação. Em 3.3, foi proposta a estratégia de controle, segundo Beekmann (1987). Em 3.4 iniciaram-se as simulações numéricas.

**Capítulo 4:** Mostra-se as conclusões obtidas nesta dissertação e perspectivas futuras.

**Apêndices:** O Apêndice 1 exibe uma revisão de dinâmica de rotação, pois exigiu-se o conhecimento de tal assunto para o projeto de controladores robóticos. No Apêndice 2, mostra-se o programa computacional desenvolvido para as simulações computacionais. O Apêndice 3 é um estudo complementar. Apesar de não ser diretamente utilizado aqui, seu conhecimento foi necessário para compreender de modo global o comportamento de manipuladores.

## Capítulo 2

### Revisão da Literatura

O objetivo principal desse capítulo é o de revisar a literatura que motivou o presente trabalho.

1. Em Pires (2003), tomou-se um problema vibratório modelado como sendo de dois graus de liberdade. Efetuou-se um número de simulações numéricas, cujo objetivo foi de analisar as contribuições das não-linearidades do modelo adotado quando comparado com o modelo linearizado. Desta forma, pode-se entender melhor o comportamento dinâmico deste sistema.

Desenvolveu-se um estudo analítico e numérico de um robô flexível composto por dois graus de liberdade, figura 2.1, sendo que se analisou o efeito dinâmico e vibratório na estrutura a partir da acoplagem não-linear. Neste trabalho, fez-se uma análise comparativa, através de simulações numéricas, deste sistema com não linearidades cúbicas, com um sistema linearizado, cujo modelo foi proposto por Golnaraghi (1989).

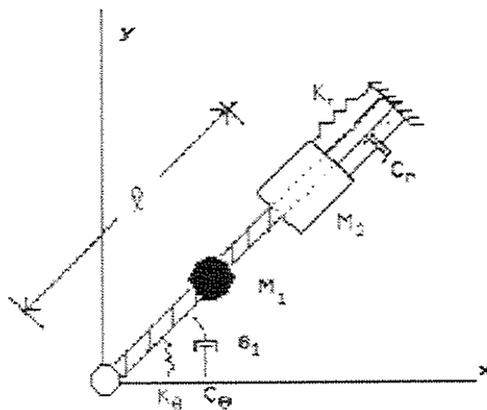


Figura 2.1: modelo do sistema vibratório com dois graus de liberdade (Pires(2003)).

As equações de movimento obtidas são:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} + 2\xi_{\theta} \dot{\theta} + \theta + m(r^2 + 2r)\ddot{\theta} + 2m(1+r)r\dot{\theta} &= 0 \\ \ddot{r} + \omega_r^2 r + 2\xi_r \omega_r \dot{r} - (l+r)\dot{\theta}^2 &= 0 \end{aligned}$$

Com:

$$\xi_{1\theta} = \xi_{\theta}/\epsilon, \quad \xi_{2r} = \xi_r/\epsilon$$

$$\theta = \epsilon\phi, \quad r = \epsilon\rho$$

$$r = \frac{r_1}{l}, \quad \theta = \theta_1$$

$$\omega_2 = \frac{\omega_r}{\omega_{\theta}}, \quad \omega_1 = \frac{\omega_{\theta}}{\omega_{\theta}} = 1$$

$$m = \frac{M_2}{\left(\frac{M_1}{4} + M_2\right)}$$

$$K_{\theta} = \omega_{\theta}^2 \left(\frac{M_1}{4} + M_2\right) l^2, \quad k_r = \omega_r^2 M_2$$

$$C_{\theta} = \xi_{\theta} 2 \left(\frac{M_1}{4} + M_2\right) l^2 \omega_{\theta}, \quad C_r = 2\xi_r M_2 \omega_r$$

$K_{\theta}$  = constante elástica da mola angular

$k_r$  = constante elástica da mola radial

$\omega_{\theta}$  = frequência natural angular

$\omega_r$  = frequência natural do deslizamento radial

$C_{\theta}$  = material de amortecimento angular

$C_r$  = material de amortecimento radial

$M_1$  = massa da barra

$M_2$  = massa do controlador

$l$  = distância de  $M_2$  à origem

$l/2$  = distância de  $M_1$  à origem

$\xi_{\theta}$  = razão entre os sistemas de amortecimento angular

$\xi_r$  = razão entre os sistemas de amortecimento radial

$m$  = massa adimensionalizada

$r_1 = r_1(t)$  = distância entre  $M_2$  e a garra

Efetuada-se um balanço de ordem nas equações de Lagrange do sistema e adimensionando-as, chegou-se ao sistema equações do modelo não-linear:

$$\begin{cases} \ddot{\phi} + 2\varepsilon\xi_1 \dot{\phi} + \phi + 2\varepsilon^2\phi^3 + \varepsilon m(2\rho + \varepsilon\rho^2)\ddot{\phi} + 2\varepsilon m(\dot{\rho} + \varepsilon\rho\dot{\rho})\dot{\phi} = 0 \\ \ddot{\rho} + \omega_2^2\rho + 2\varepsilon\xi_2\omega_2\dot{\rho} + 2\omega_2^2\varepsilon^2\rho - \varepsilon(1 + \varepsilon\rho)\dot{\phi}^2 = 0 \end{cases}$$

Onde os termos  $2\varepsilon^2\phi^3$  e  $2\omega_2^2\varepsilon^2\rho^3$  são devidos às não-linearidades cúbicas inserida no problema. Retirando-se esses termos, têm-se o modelo linear de Golnaraghi.

Através das simulações numéricas, pode-se observar a contribuição das não-linearidades no modelo adotado. Pode-se perceber maiores oscilações na dinâmica, em relação ao sistema linear. Isso pode parecer um comportamento desprezível, quando comparado com o modelo linear, porém é um resultado desejável em teoria de controle não-linear. Um diagrama de blocos utilizado para simular numericamente as equações de movimento está mostrada na figura 2.2.

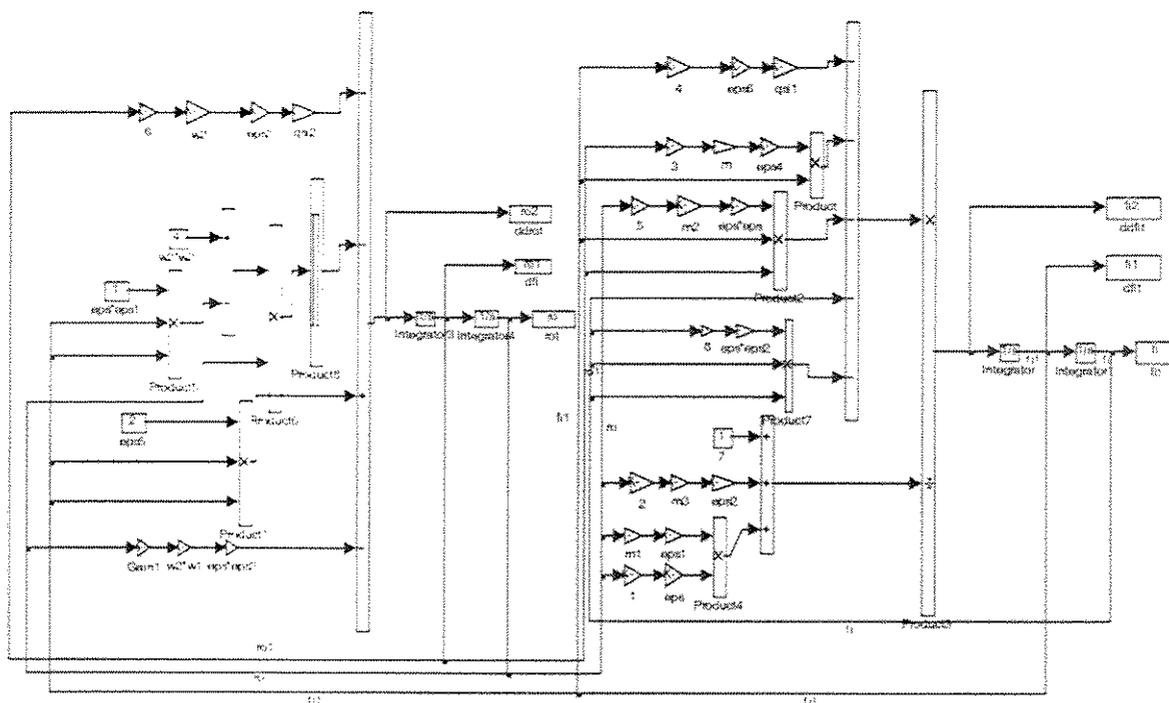


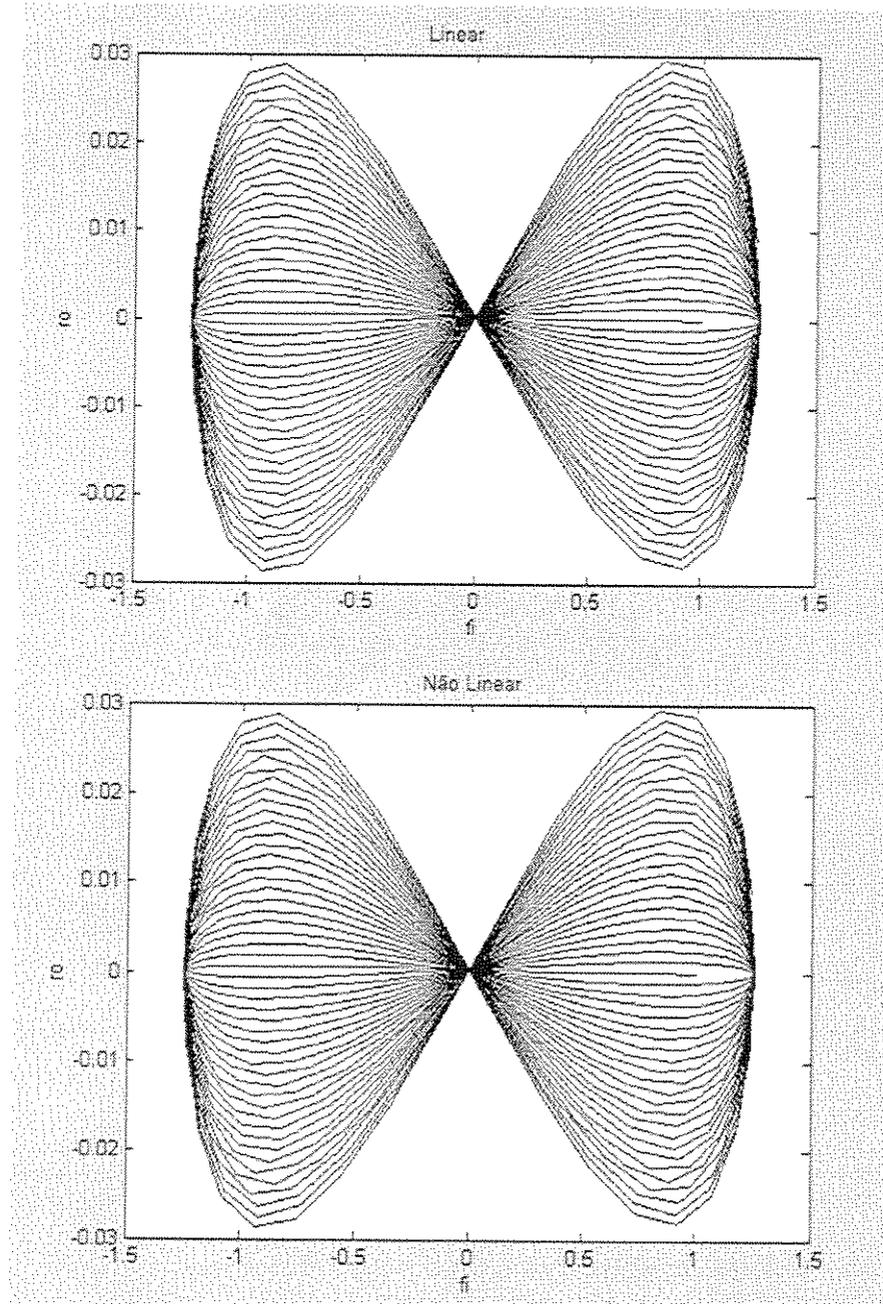
Figura 2.2. Diagramas de blocos utilizados para efetuar as simulações, desenvolvidas em ambiente MatLab/Simulink®.

A seguir, mostram-se os resultados que permitiram chegar às conclusões acima.

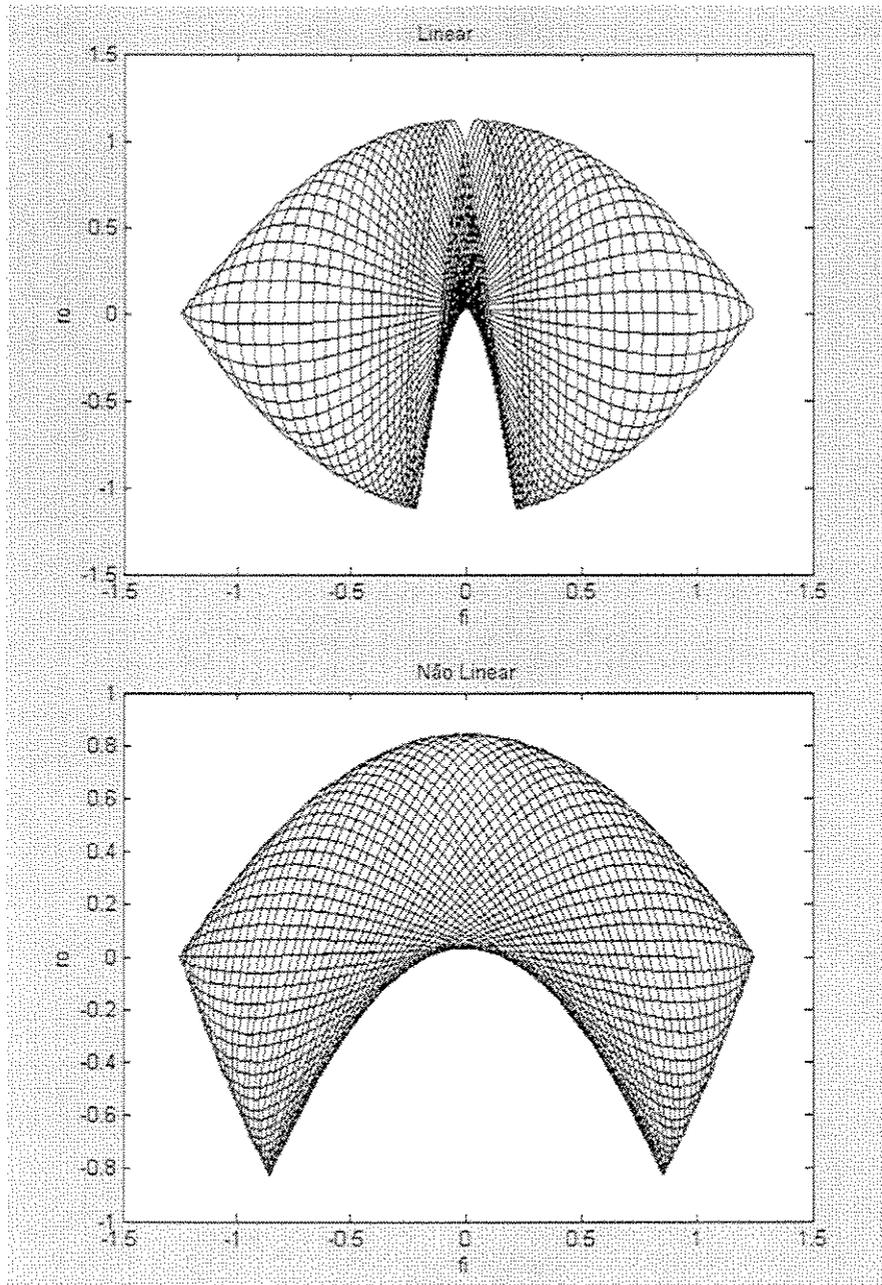
### Resultados das simulações numéricas:

Figura 2.3: Simulações Numéricas das equações de movimento mostrando os planos de fase  $\Phi(t)*\rho(t)$  com a variação dos parâmetros:  $\varepsilon$  mantendo os seguintes parâmetros fixados:  $\zeta_1=\zeta_2=0$ ,  $m=0.3$ ,  $\phi(0)=1$ , e  $\rho(0)=0$ ,  $\phi_1(0)=-0.754$ ,  $\rho_1(0)=0$ ,  $\omega_2=2$  em: a)  $\varepsilon=0.001$  b)  $\varepsilon=0.1$  c)  $\varepsilon=1$ .

a)  $\varepsilon=0.001$ .



b)  $\epsilon=0.1$



c)  $\epsilon = 1$

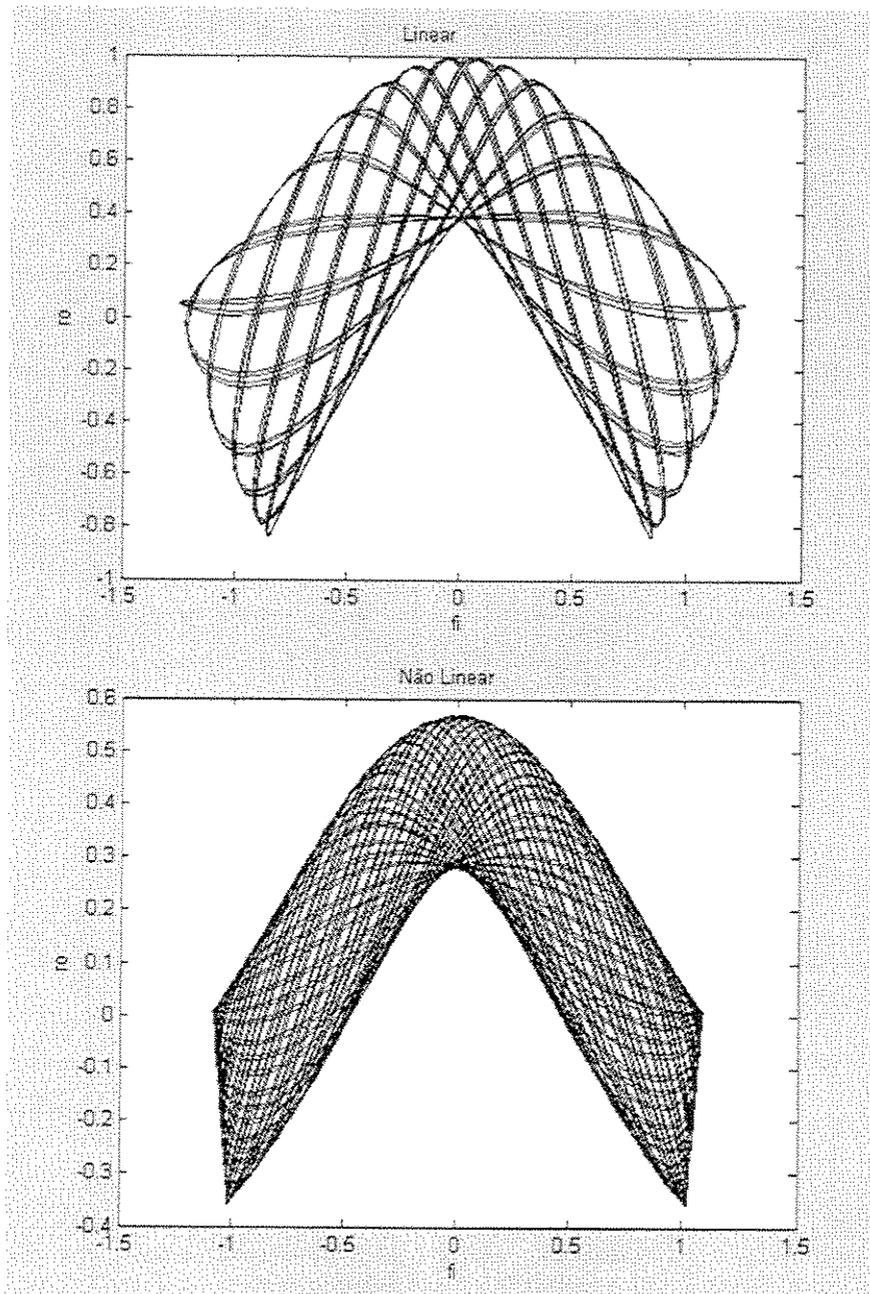
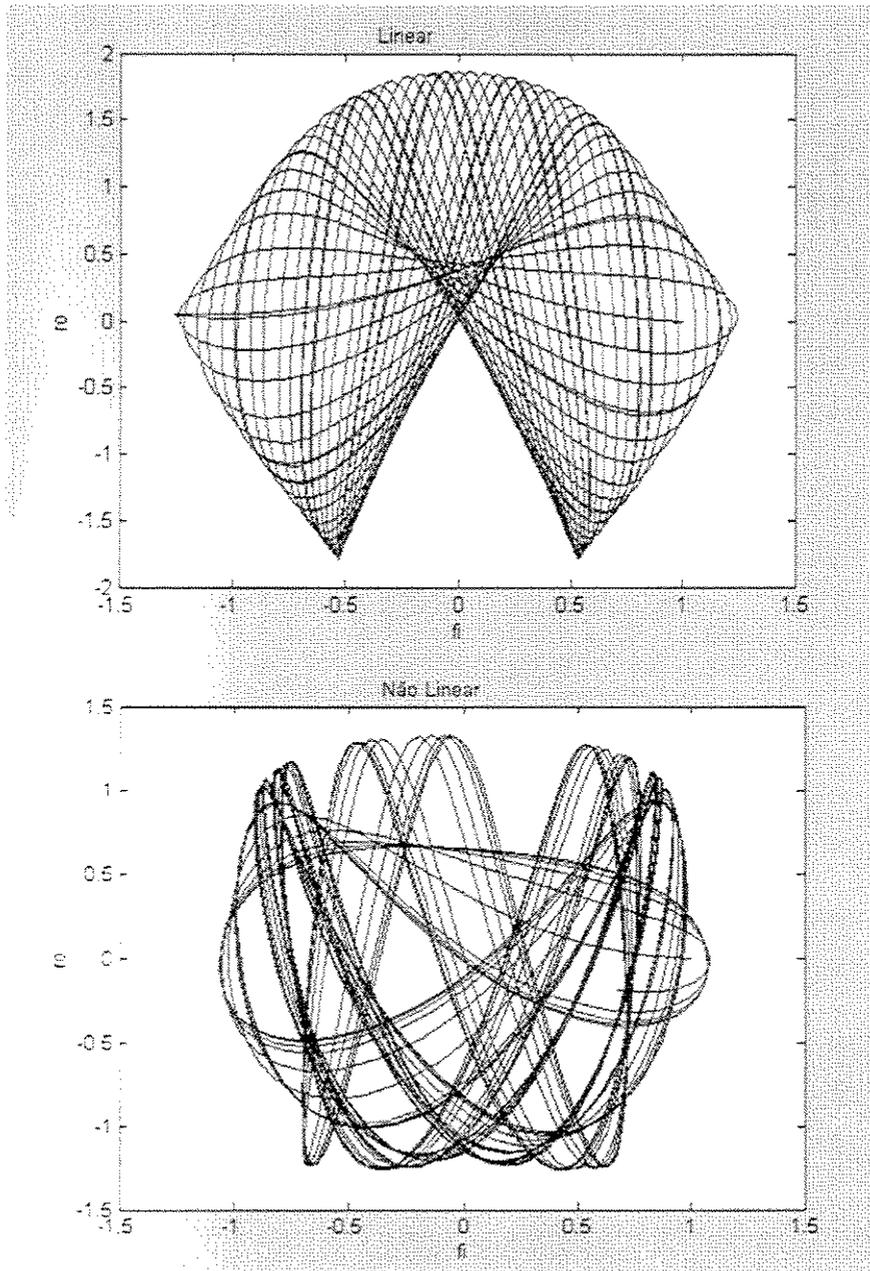
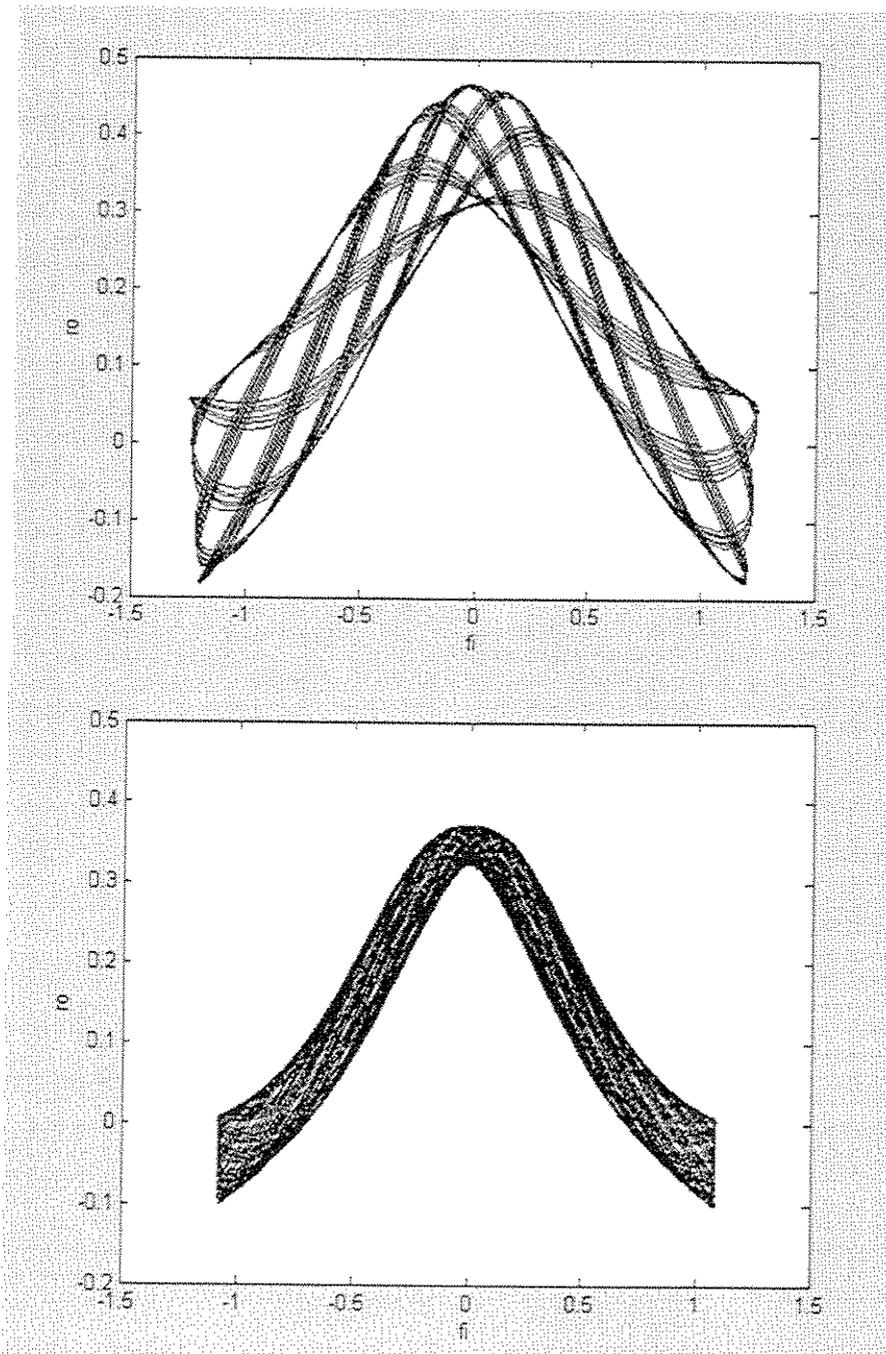


Figura 2.4: Simulações Numéricas das equações de movimento mostrando os planos de fase  $\Phi(t)*\rho(t)$  com a variação dos parâmetros:  $m$ ,  $\zeta_1=\zeta_2=0$ ,  $\phi(0)=1$ , e  $\rho(0)=0$ ,  $\phi_1(0)= -0.754$ ,  $\rho_1(0)=0$ ,  $\varepsilon=1$ ,  $\omega_2= 2$  em: a)  $m=0.1$  b)  $m=1$  c)  $m=5$ .

a)  $m=0.1$



b)  $m=1$



c)  $m=5$ .

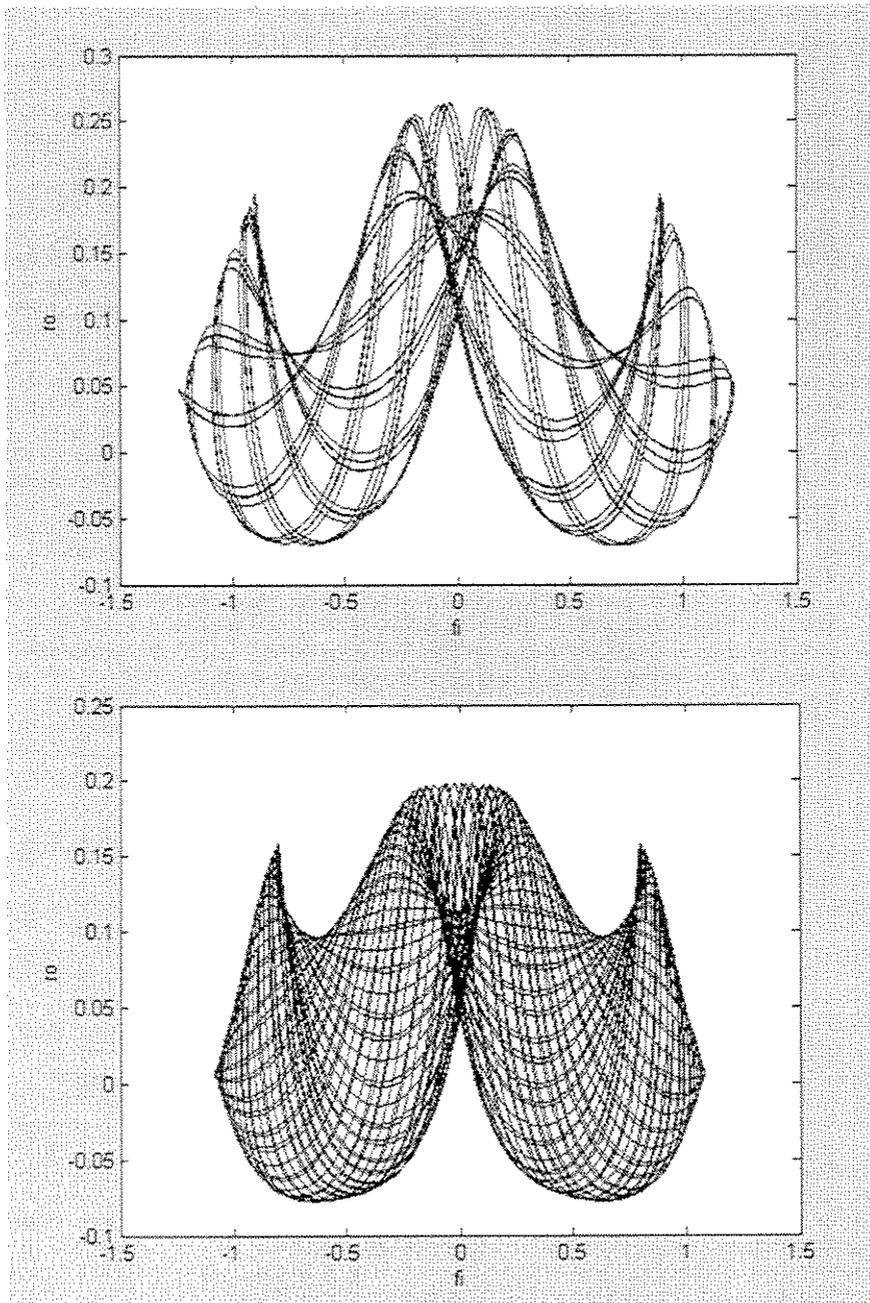
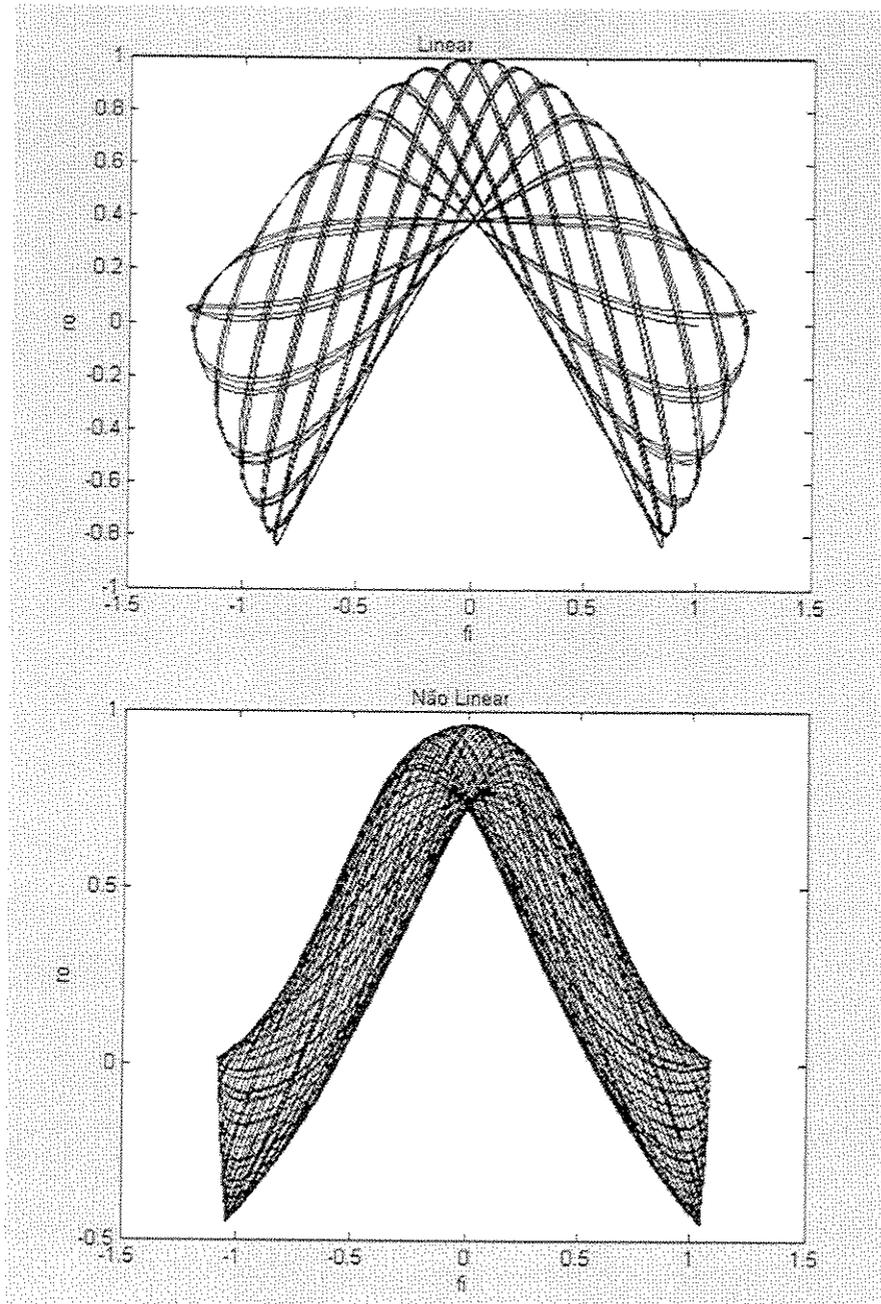
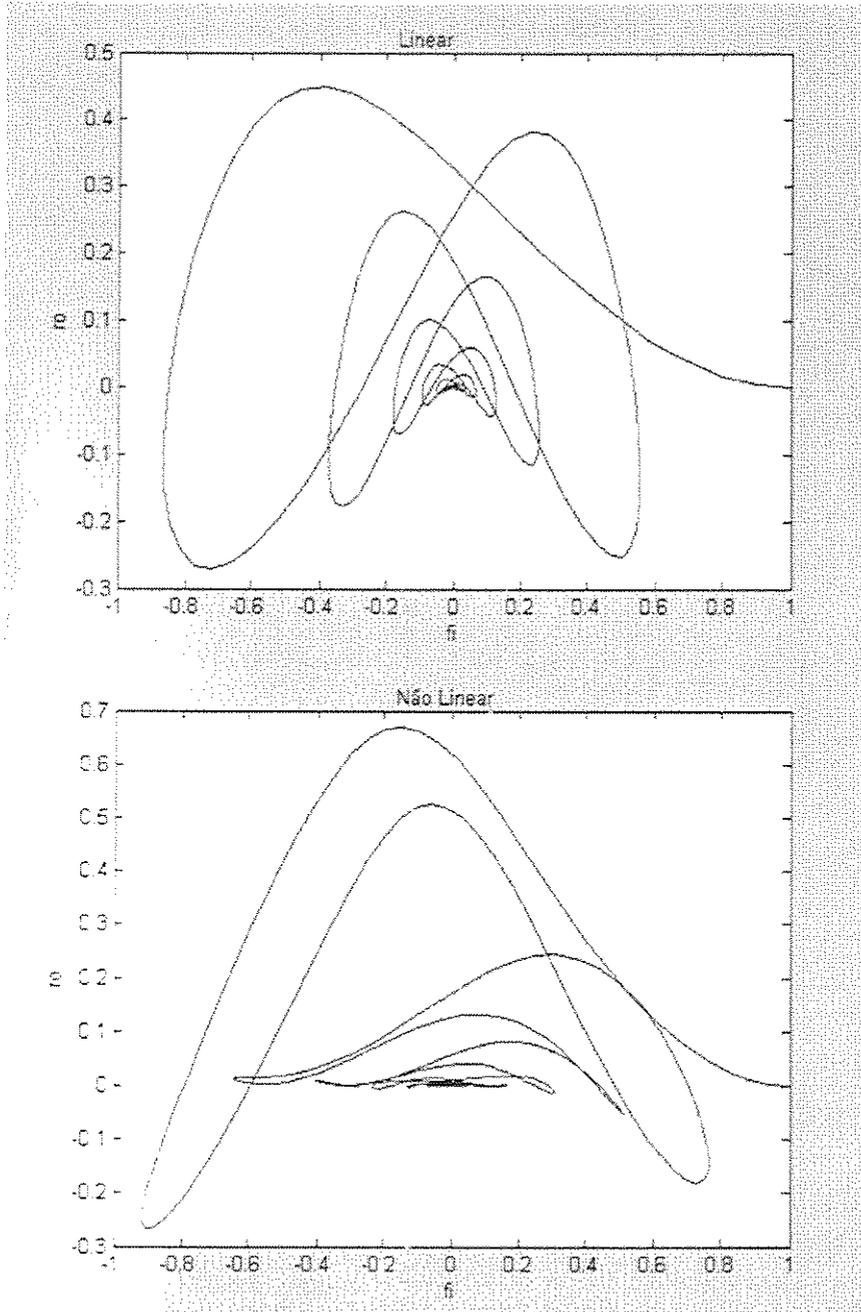


Fig. 2.5: Simulações Numéricas das equações de movimento mostrando os planos de fase  $\Phi(t)*\rho(t)$  com a variação dos parâmetros:  $\zeta_i, i=1, 2, m=0.3, \phi(0)=1, e \rho(0)=0, \phi(1(0)= -0.754, \rho(1(0)=0, \omega_2=2, \varepsilon=1$  em: a)  $\zeta_1 = \zeta_2=0.000001$  b)  $\zeta_1 = \zeta_2=0.1$  c)  $\zeta_1 = \zeta_2= 1$ .

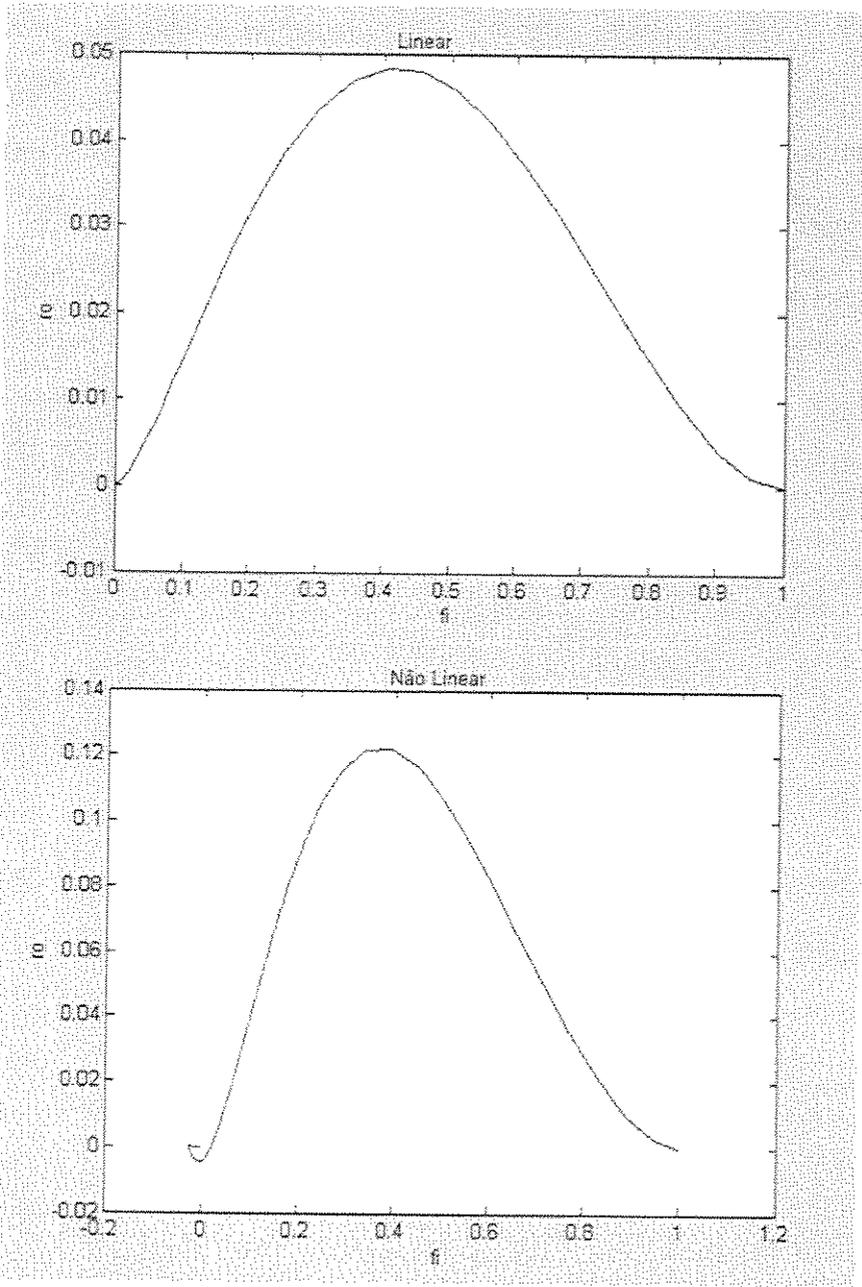
a)  $\zeta_1 = \zeta_2=0.000001$



b)  $\zeta_1 = \zeta_2 = 0.1$



e)  $\zeta_1 = \zeta_2 = 1$



2. Em Menegaldo (1997), encontrou-se um modelo que, atendendo-se à dinâmica e ao controle de postura em seres humanos, desenvolveu-se uma série de modelos que incorpora: a mecânica de corpos rígidos, a dinâmica da contração muscular e da excitação neural e um modelo da geometria músculo-esquelética associado. Estabeleceram-se metodologias para o projeto de um controlador, utilizando uma síntese de controle ótimo utilizando-se o método LQR, e a matriz pseudo-inversa na distribuição, entre os atuadores músculos-tendíneos, dos torques de controle, empregando um modelo inverso da dinâmica da contração. Os resultados da simulação para condições iniciais mostraram alguns efeitos da variação das matrizes de ponderação.

Um modelo dinâmico de múltiplos corpos rígidos que atendesse aos objetivos propostos para este trabalho foi formulado: um pêndulo no plano com três graus de liberdade, invertido, onde cada grau de liberdade corresponde ao ângulo que cada segmento do pêndulo - perna, coxa e tronco - faz com o eixo vertical de um referencial inercial solidário ao solo, fig. 2.6.

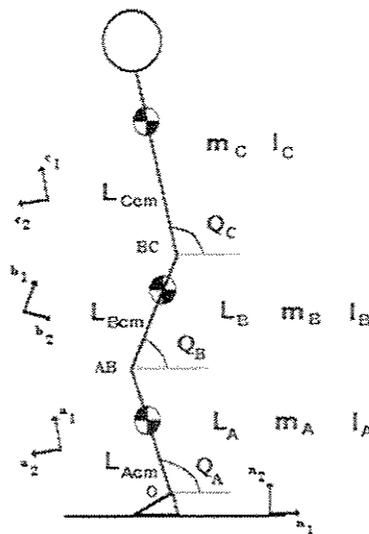


Figura 2.6 Modelo de pêndulo invertido para simulação de postura

Seguindo-se a metodologia dinâmica de Kane, Chegou-se às equações de movimento do sistema:

$$M\ddot{e} + C\dot{e}^2 + g = D\tau$$

sendo:

M matriz de massa;

C matriz de termos Centrípotos;

g vetor de termos gravitacionais;

D matriz relacionando os torques de corpo rígido atuando nos centros de massa com o torque de controle nas articulações;

$\tau$  vetor de torques de controle nas articulações;

À partir das equações constitutivas da biomecânica, formularam-se três modelos para o projeto de controle tais que, a partir da representação pendular de postura, representasse o movimento humano. Esses modelos são:

MODELO 1: Onde o controle é dado diretamente pelos torques nas articulações;

MODELO 2: É efetuado um controle por ativação no modelo com atuadores equivalentes de torque;

MODELO 3: Controle com atuadores músculo-tendíneo.

**Modelo1:** Diretamente por torque nas articulações, equação (2.1), figura 2.7;

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{x}_4 \\ \ddot{x}_5 \\ \ddot{x}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ Mi_1 G_1 & Mi_2 G_2 & Mi_3 G_3 & 0 & 0 & 0 \\ Mi_2 G_1 & Mi_4 G_2 & Mi_5 G_3 & 0 & 0 & 0 \\ Mi_3 G_1 & Mi_5 G_2 & Mi_6 G_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Mi_1 & Mi_2 - Mi_1 & Mi_3 - Mi_2 \\ Mi_2 & Mi_4 - Mi_2 & Mi_5 - Mi_4 \\ Mi_3 & Mi_5 - Mi_3 & Mi_6 - Mi_5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Onde as variáveis são:

- $x_1 = \theta_1 = \text{Angulo da base}$
- $\dot{x}_1 = x_2 = \text{Respectiva velocidade}$
- $x_2 = \theta_2 = \text{Angulo do joelho}$
- $\dot{x}_2 = x_3 = \text{Respectiva velocidade}$
- $x_3 = \theta_3 = \text{Angulo do tronco}$
- $\dot{x}_3 = \theta_6 = \text{Respectiva velocidade}$

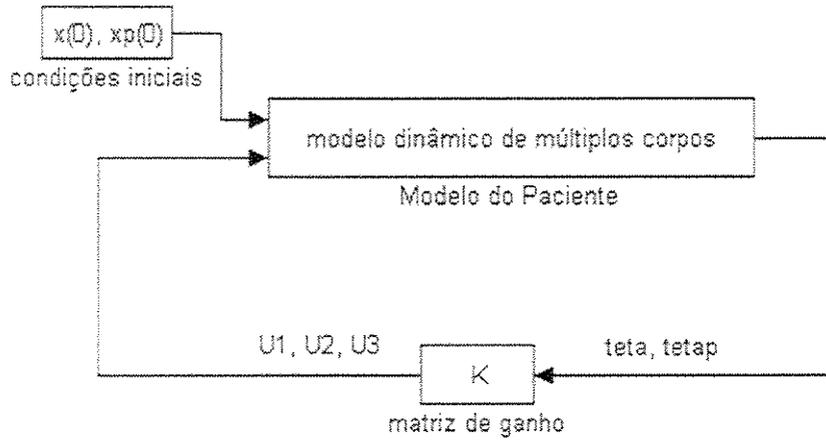


Figura 2.7: Sistema de controle para o MODELO 1 com atuadores de torque estáticos.

**Modelo 2:** Controle por ativação no modelo com atuadores equivalentes de torque, equação (2.2), figura 2.8.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \\ \dot{x}_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ Mi_1 G_1 & Mi_2 G_2 & Mi_3 G_3 & 0 & 0 & 0 & Mi_1 & Mi_2 - Mi_1 & Mi_3 - Mi_2 \\ Mi_2 G_1 & Mi_4 G_2 & Mi_5 G_3 & 0 & 0 & 0 & Mi_2 & Mi_4 - Mi_2 & Mi_5 - Mi_4 \\ Mi_3 G_1 & Mi_5 G_2 & Mi_6 G_3 & 0 & 0 & 0 & Mi_3 & Mi_5 - Mi_3 & Mi_6 - Mi_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ C_1' & 0 & 0 \\ 0 & C_2' & 0 \\ 0 & 0 & C_3' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{T1} \\ a_{T2} \\ a_{T3} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

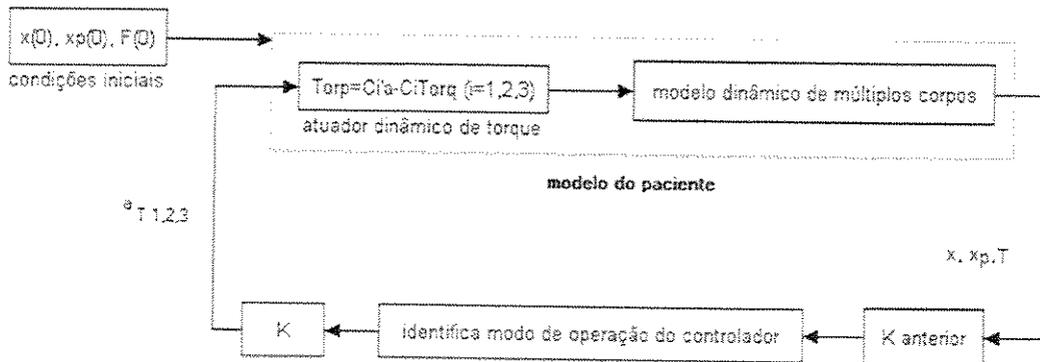


Figura 2.8: Sistema de controle para o MODELO 2 com atuadores dinâmicos de torque e escolha da matriz de ganho segundo o modo de operação.

Onde  $a_{Ti}$  são os atuadores equivalentes de torque.

**Modelo 3:** Neste modelo, à partir da primeira abordagem, introduziu-se uma metodologia para distribuição dos torques de controle entre os vários grupos musculares. Conhecendo-se a força necessária em cada um dos músculos para controlar o sistema e o modelo matemático da dinâmica da contração, o controle do modelo com atuadores músculos-tendíneos pode ser realizado através da excitação neural equação (2.3), Figura 2.9.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n+6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ M(x_1, x_2, x_3)^{-1} \left( [D] \begin{pmatrix} x_7 \\ x_8 \\ \vdots \\ x_{n+6} \end{pmatrix} - [C(x_1, x_2, x_3)] \begin{pmatrix} x_4^2 \\ x_5^2 \\ x_6^2 \end{pmatrix} - g(x_1, x_2, x_3) \right) \\ \dot{F}_1^T = f_1(a, \tilde{L}^{MT}, \tilde{F}^T, \tilde{k}^T, \tilde{L}_s^T, F_0^M, \dots) \\ \dot{F}_2^T = f_2(a, \tilde{L}^{MT}, \tilde{F}^T, \tilde{k}^T, \tilde{L}_s^T, F_0^M, \dots) \\ \vdots \\ \dot{F}_n^T = f_n(a, \tilde{L}^{MT}, \tilde{F}^T, \tilde{k}^T, \tilde{L}_s^T, F_0^M, \dots) \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

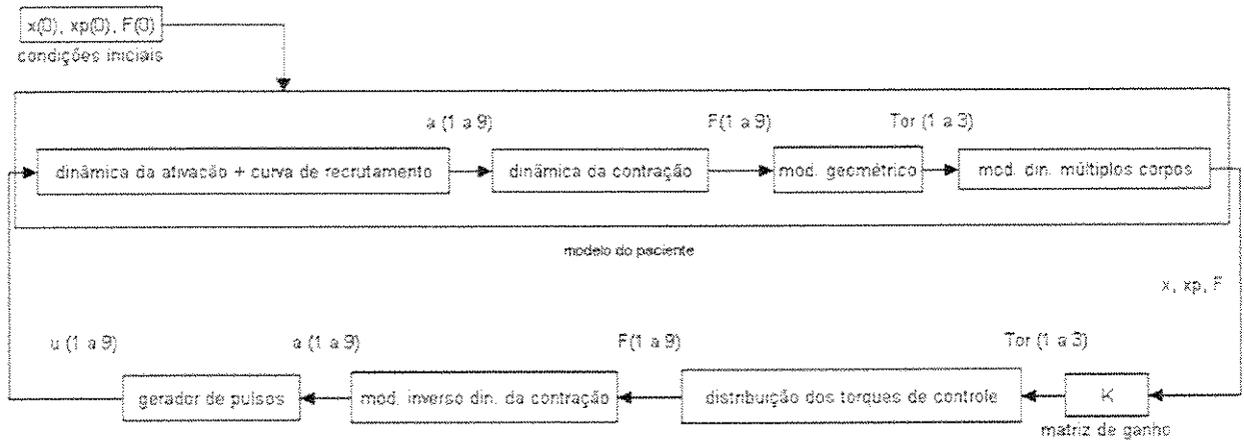


Figura 2.9: Sistema de controle para o MODELO 3, incorporando os atuadores músculo-tendíneos através da excitação neural  $u(t)$  associada à estimulação elétrica.

Estabelecidos os três modelos, e a partir da simulação em ambiente Matlab, chegou-se às seguintes conclusões para os modelos estabelecidos:

- **Para o MODELO 1**, com condições iniciais de flexão nos três segmentos, a diminuição da porção de  $Q$  relativa ao deslocamento leva ao aumento do tempo de estabilização e à diminuição dos picos de velocidade.
  - A diminuição da porção de  $Q$  relativa à velocidade levou à diminuição do tempo de estabilização, mas o sistema pode apresentar soluções instáveis para tempos subsequentes.

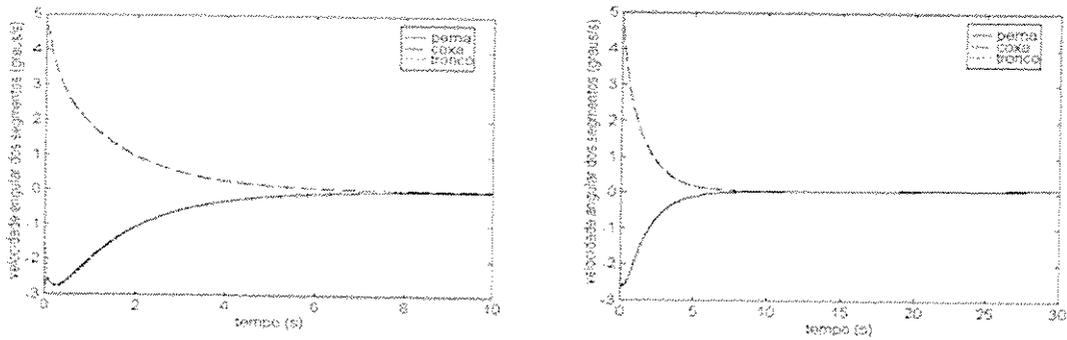


Figura 2.10. Resposta temporal do MODELO 1 (velocidades angulares dos segmentos) com as condições iniciais (0.1, -0.1, 0.1) radianos de deslocamento e (0, 0, 0) de velocidade, matrizes de ponderação

a)  $Q = I (350 \ 600 \ 300 \ 1500 \ 1000 \ 800)^T$  e  $R = I (0.0320, 0.0348, 0.0800)$     b)  $Q = I (17,5 \ 30 \ 15 \ 750 \ 500 \ 400)^T$  e  $R = I (0.0320, 0.0348, 0.0800)$ .

- A diminuição de R levou a aumentos dos picos de velocidade

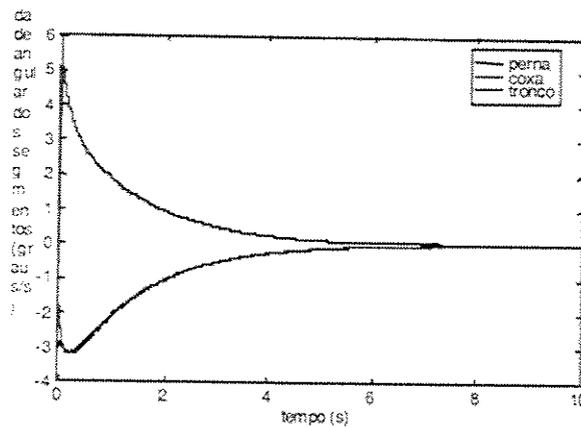


Figura 2.11. Resposta temporal do MODELO 1 (velocidades angulares dos segmentos) com as mesmas condições iniciais (0.1, -0.1, 0.1) radianos de deslocamento e (0, 0, 0) de velocidade, matrizes de ponderação  $Q = I (17,5 \ 30 \ 15 \ 750 \ 500 \ 400)^T$  e  $R = I (0.0160, 0.0174, 0.0400)$ .

- Com flexão inicial apenas do quadril, a restauração da postura ereta ocorreu com poucas alterações de deslocamento angular nas demais articulações.
- O MODELO 2 foi considerado pouco viável, uma vez que para as condições testadas apresentou respostas altamente oscilatórias.

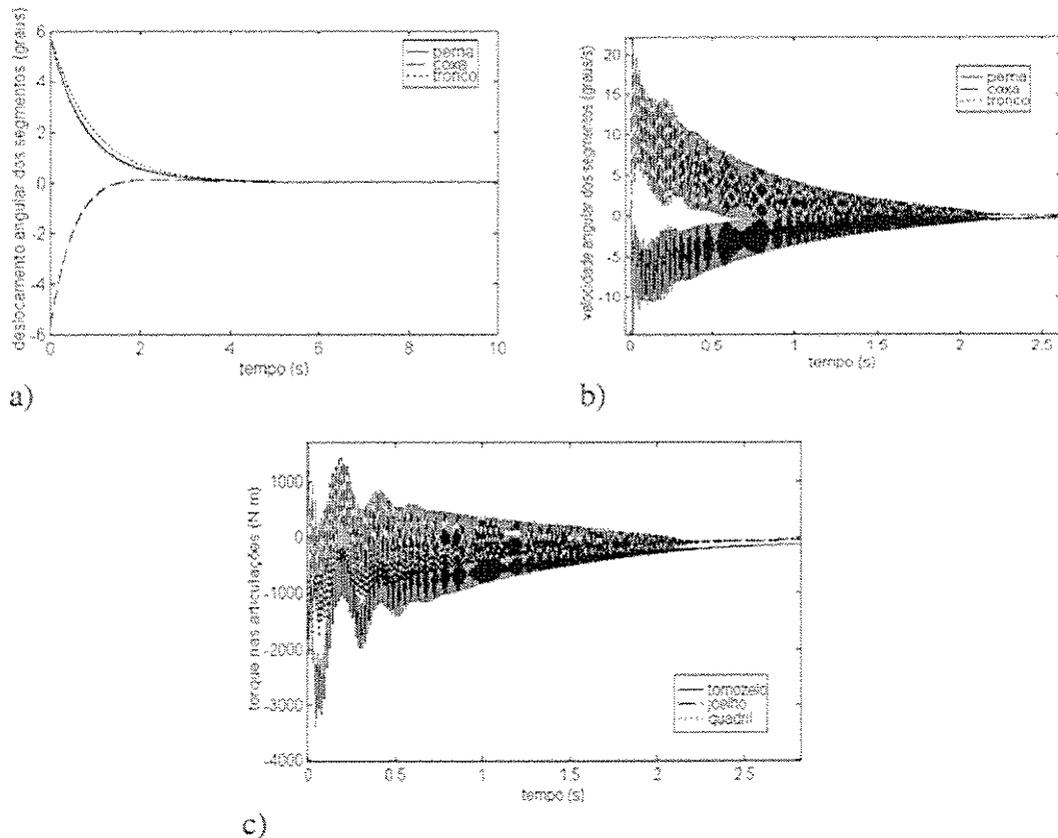


Figura 2.12. Resposta temporal do MODELO 2 com condições iniciais (0.1, -0.1, 0.1) de deslocamento e (0, 0, 0) de velocidade, matrizes de ponderação  $Q = I (350 \ 600 \ 300 \ 1500 \ 1000 \ 800)^T$  e  $R = I (0.0320, 0.0348, 0.0800)$

a) deslocamentos angulares dos segmentos b) velocidades angulares dos segmentos c) torques de controle

- **O MODELO 3**, incorporando atuadores músculo-tendíneos lineares e otimização através da matriz pseudo-inversa, foi testado inicialmente a partir das respostas do MODELO 1, uma vez as curvas de deslocamento angular foram semelhantes; esta propriedade é fundamental, pois a escolha de  $Q$  e  $R$  não é trivial, e a diferença de custo computacional entre os dois modelos é muito grande.
  - As respostas musculares sugerem um padrão tipo trifásico na ativação de músculos opostos.
  - Músculos com braços de momento menor são menos utilizados.
  - Músculo bi-articulares que exercem ações desejadas numa articulação e não-desejadas em outra são também poupados.

- Em frequências de estimulação mais reduzidas, músculos rápidos (constante de tempo pequena) apresentam respostas mais oscilatórias e, de um modo geral, demoram mais tempo para se estabilizarem.
- Abaixo de uma frequência crítica a coordenação entre os músculos opostos não é satisfatória, levando ao crescimento descontrolado da atividade muscular, saturação e falha do sistema de controle.

3. Em Hermini (2000), a partir de estudos das propriedades anatômicas, fisiológicas, cinesiológicas do sistema articular humano, conceitos de automação e robótica, é desenvolvido uma metodologia envolvendo modelagem, controle e implementação cinemática de sistemas biomecânicos, tanto de membros superiores quanto para membros inferiores. Por analogia comparativa, fez-se a elaboração de sistemas articulares artificiais considerando aspectos relacionados com a estrutura, transmissão e controle dos acionadores artificiais e naturais. Considerando-se esta analogia, a partir de um modelo cinemático geométrico, foi definido o espaço de trabalho do membro considerado, para assim, fazer a modelagem cinemática do sistema considerado.

### **Modelagem cinemática do sistema articular:**

Definido o espaço de trabalho do membro considerado, membros superiores e inferiores, Hermini (2000) desenvolve o modelo geométrico do sistema articular, definindo seus parâmetros, referenciais, elos e juntas, de acordo com o sistema real, figura 2.13. A relação entre cada elo  $R_i$  com o sistema articular e também com o referencial da base, foi feita usando o método usando o método dos referenciais locais

$$o_{i+1} = o_i + A_{i,i+1} * L_i$$

onde  $A_{i,i+1}$  representa a matriz de transformação de transformação homogênea, a qual faz uma descrição cinemática do sistema articulado com seus N graus de liberdade. Outra forma de obtenção das equações cinemáticas que regem o sistema é através da utilização da metodologia de Denavit-Hartenberg, onde são levantados os parâmetros  $\theta_i$ ,  $a_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $d_i$  da matriz, sendo que no anexo B faz-se uma descrição completa sobre notação deste método.

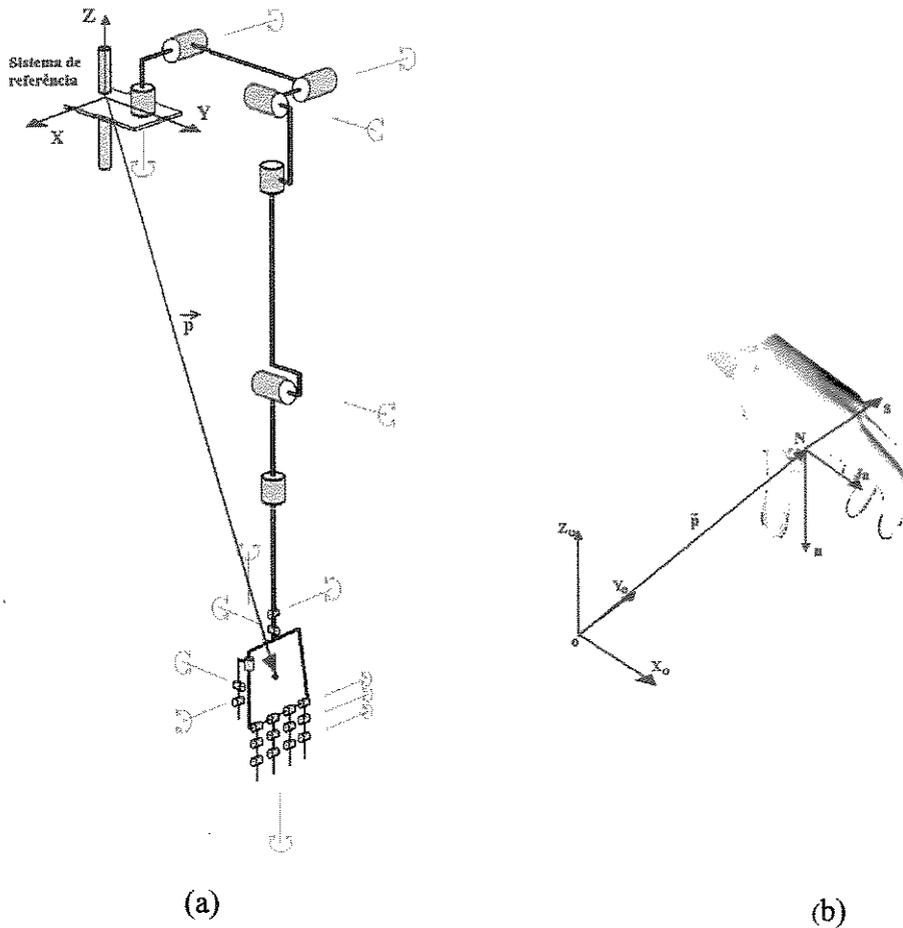


Figura 2.13 – Posição e orientação de uma prótese robótica com estrutura rígida de membro superior:

- (a) Representação de um sistema de Coordenadas (vetor posição);
- (b) Configuração do elemento terminal (matriz orientação).

Para obter as coordenadas angulares em seu trabalho, Hermini recorre à métodos numéricos iterativos, figura 2.14, que utiliza o cálculo do modelo geométrico direto e da matriz jacobiana inversa:

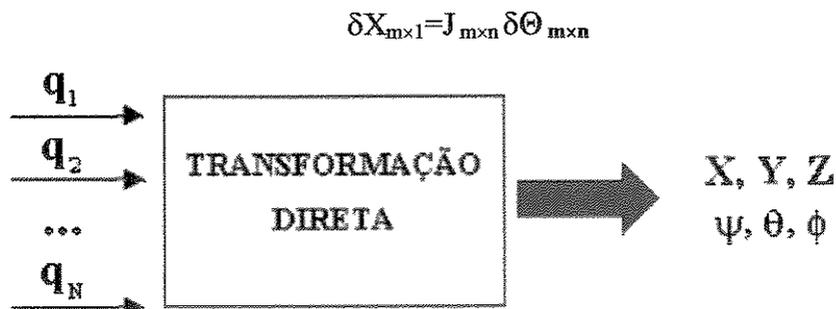


Figura 2.14 Transformação direta de coordenadas.

onde a matriz jacobiana foi definida como:

$$[J(\theta)_{i,j}] = [\partial f_i / \partial \theta_j]$$

em que:  $i$  é a  $i$ -ésima coordenada generalizada da junta;

$j$  é o  $j$ -ésimo grau de liberdade da junta.

A partir da comparação da posição do robô  $X$  (valor calculado a partir da posição atual  $X_{\text{atual}}$  obtida das informações de posição dos sensores dispostos nas juntas) e sua posição de referência  $X_d$ , um sinal de erro é amplificado e transformado em termos de coordenadas articulares  $\delta\theta_i$  a partir do cálculo de  $J(\theta)^{-1}$ . O sinal de erro é integrado e depois utilizado como sinal de entrada para controle das variáveis articulares da prótese, figura 2.15.

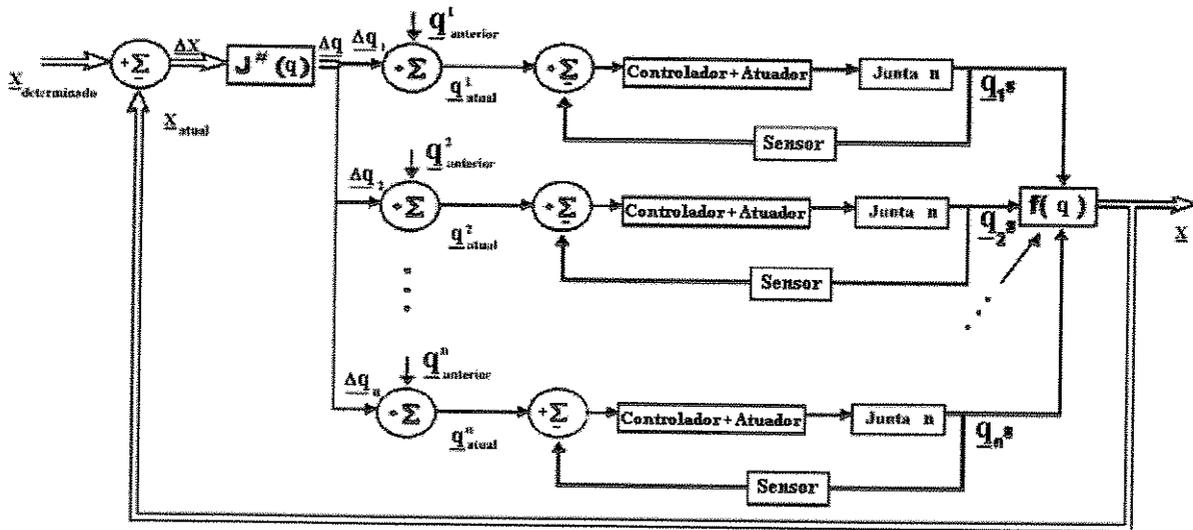
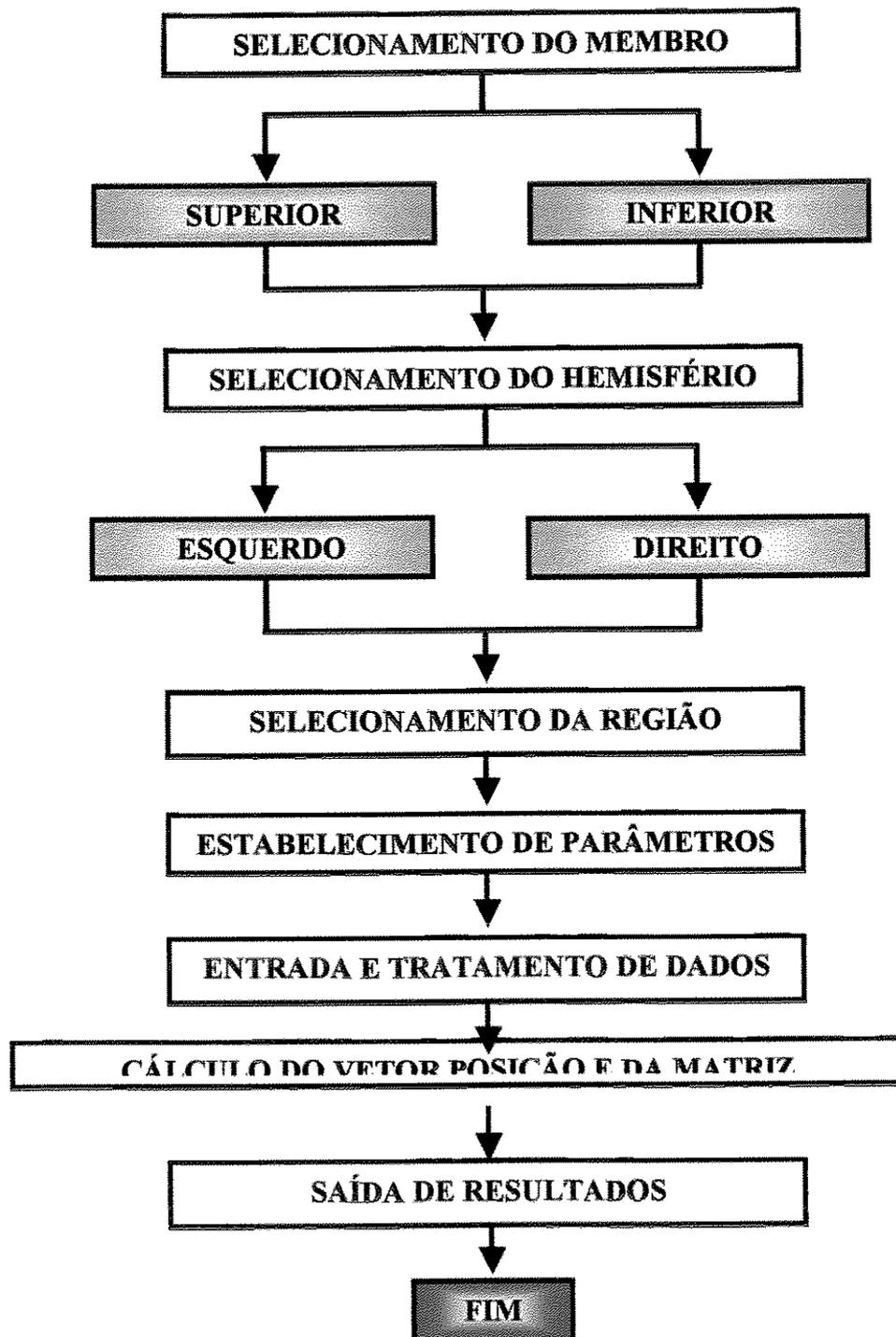


Figura 2.15 Malha de controle de posição.

O desenvolvimento de projetos de sistemas articulares artificiais, assim como a elaboração de leis de controle que reproduzam o comando aplicado pelo sistema nervoso, é fundamentado na simulação computacional dos movimentos executados pelas articulações do sistema natural.

Neste contexto, e utilizando-se a modelagem cinemática do modelo, como especificou-se anteriormente, Hermini desenvolve um algoritmo para simulação computacional, cujo fluxograma é descrito à seguir:

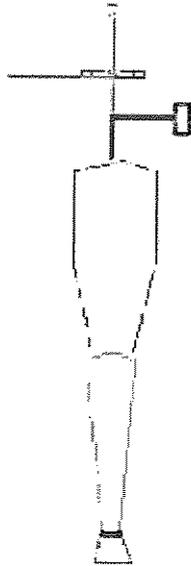


Utilizando-se do modelo cinemático, foi gerado no aplicativo comercial WORKSPACE™ um sistema articular análogo ao natural (movimentos básicos da cintura escapular humana), que aplica a metodologia de parametrização de Denavit-Hartenberg, para essa cadeia cinemática,

obtendo os parâmetros ( $\alpha$ ,  $d$ ,  $a$ ,  $\theta$ ) automaticamente após definida a configuração espacial do sistema, desenvolvendo a partir disso a simulação dos principais movimentos desse setor.

A seguir são descritas as principais plantas do modelo, figura 2.16, com seus respectivos planos de rotação, figura 2.17.

**VISTA LATERAL**



**VISTA DE TOPO**

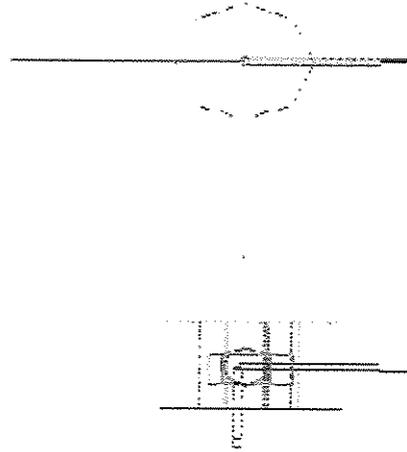


Figura 2.16 Planta do manipulador

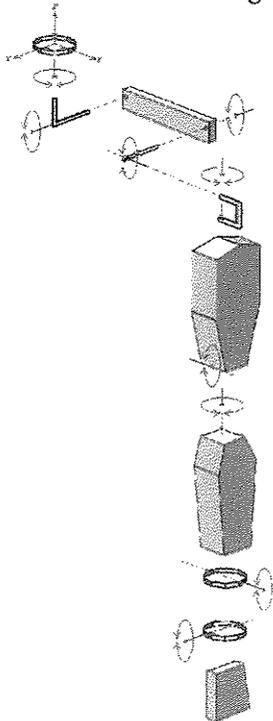


Figura 2.17 Disposição espacial dos eixos de rotação

**Resultados obtidos em simulações de duas configurações da cintura escapular:**

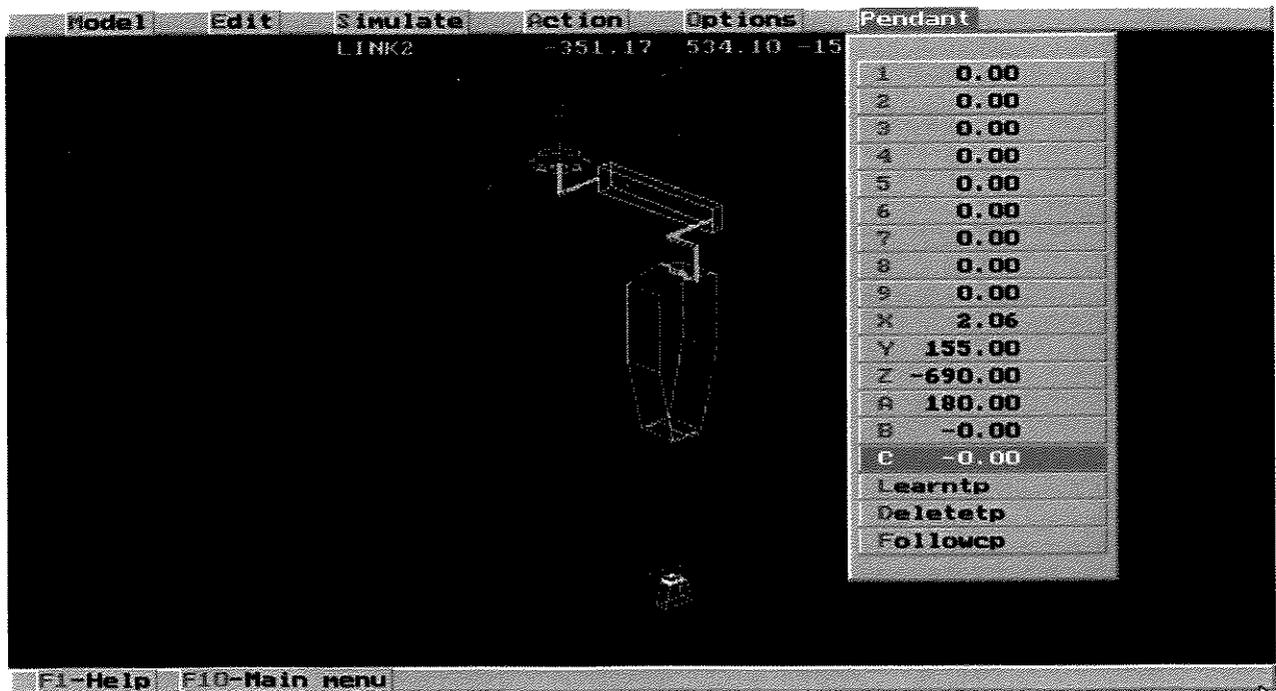
Alguns Resultados obtidos das simulações computacional:

**1ª Configuração: Posição de Park**

**Resultado obtido via software dedicado**

Config. Atual (graus)	Matriz de Orientação	Posição Final (em mm)
$q(1)=0$ $q(2)=0$ $q(3)=0$ $q(4)=0$ $q(5)=0$ $q(6)=0$ $q(7)=0$ $q(8)=0$ $q(9)=0$	$\begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \\ s_x & s_y & s_z \\ a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,06 \\ 155,00 \\ -690,00 \end{bmatrix}$

**Resultado obtido via Wspace**



2ª Configuração: Uma posição qualquer no espaço:

**Resultado obtido via software dedicado**

Config. Atual (graus)	Matriz de Orientação	Posição Final (em mm)
q (1) = 0 q (2) = 0 q (3) = 0 q (4) = 0 q (5) = 0 q (6) = 0 q (7) = 0 q (8) = 0 q (9) = 0	$\begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \\ s_x & s_y & s_z \\ a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,06 \\ 155,00 \\ -690,00 \end{bmatrix}$

**Resultado obtido via Wspace**



Assim, entrando com os valores de  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8, \theta_9$  (espaço das juntas) no software WORKSPACE obteve-se o vetor posição do elemento terminal (mão). Analogamente, entrando com os mesmos valores no software dedicado gerado em seu trabalho, os resultados obtidos foram análogos aos anteriores, o que mostra a validade do software dedicado que foi gerado por Hermiini.

## Realização Experimental:

O primeiro experimento teve como objetivo principal a validação da modelagem cinemática de um sistema antropomórfico. Com essa finalidade foi implementado um protótipo de manipulador planar com três articulações rotacionais planares com redundância que reproduz os movimentos de flexão e extensão dos dedos indicador, médio e anelar da mão humana, proporcionando a partir disso, a verificação do modelo, a aplicação do conceito de controle de movimentos para o manipulador descrito anteriormente, estendendo e validando experimentalmente os conceitos descritos anteriormente.

As equações cinemáticas foram desenvolvidas de acordo com o modelo geométrico da figura 2.18.

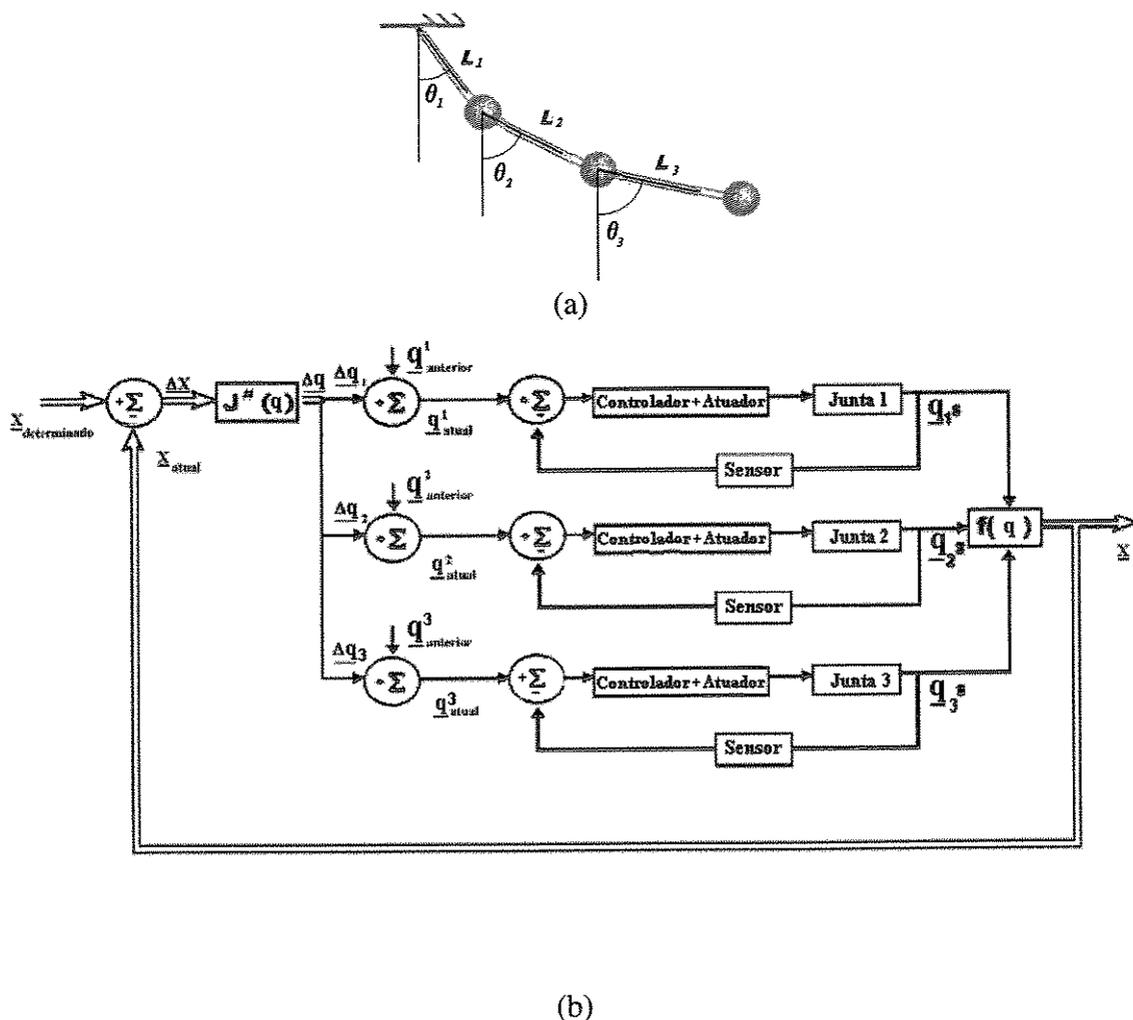
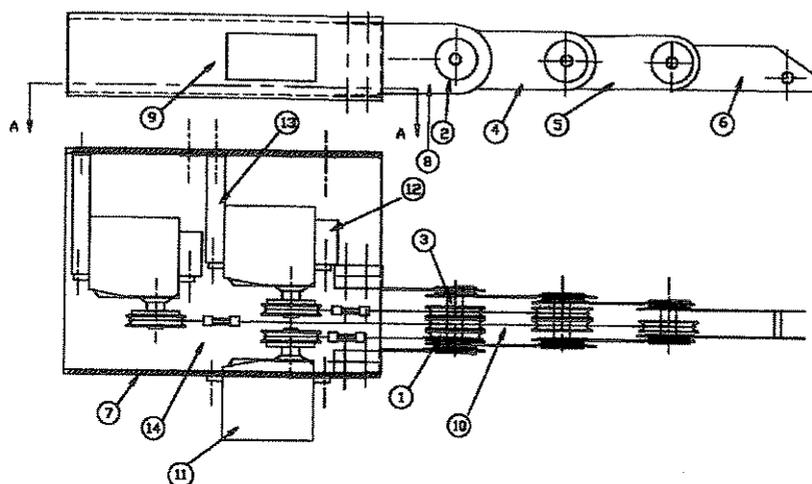


figura 2.18 – (a) Modelo representativo de um sistema articular de três graus de liberdade (b) Malha de controle de posição do dedo.

Com a finalidade de validar o conceito do protótipo em estudo, Hermini utilizou servomotores de corrente contínua para acionamento e controle dos três graus de liberdade do protótipo, figura 2.19.



- 1) Roldanas
- 2) Mancal
- 3) Eixo
- 4) Corpo 1
- 5) Corpo 2
- 6) Corpo 3
- 7) Base
- 8) Corpo 0
- 9) Motor
- 10) Cabo de aço
- 11) Suporte de motor
- 12) Suporte de motor
- 13) Esticador
- 14) Acoplamento

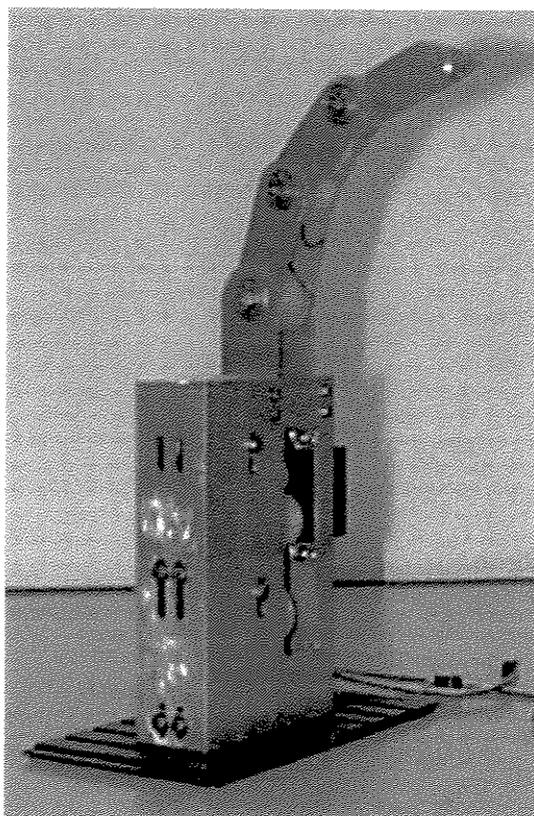


Figura 2.19 – Apresentação da Planta e do Protótipo confeccionado

Para a implementação do modelo cinemático do protótipo de dedo antropomórfico foi utilizado um sistema de acionamento e controle comercial, apresentado na figura 2.20.

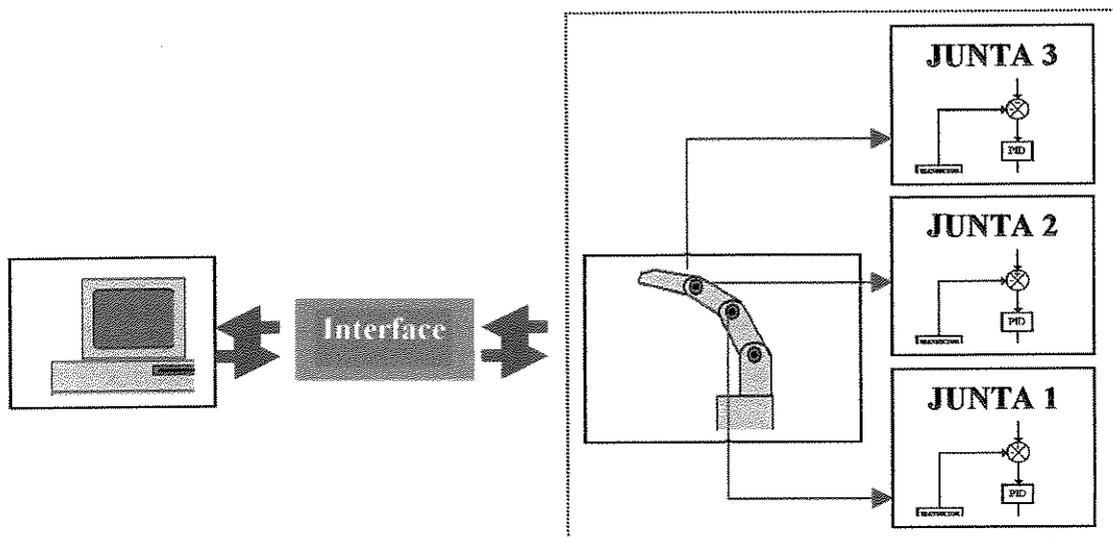


Figura 2.20 Estrutura de acionamento de controle

A proposta de arquitetura de controle está mostrada na figura 2.21

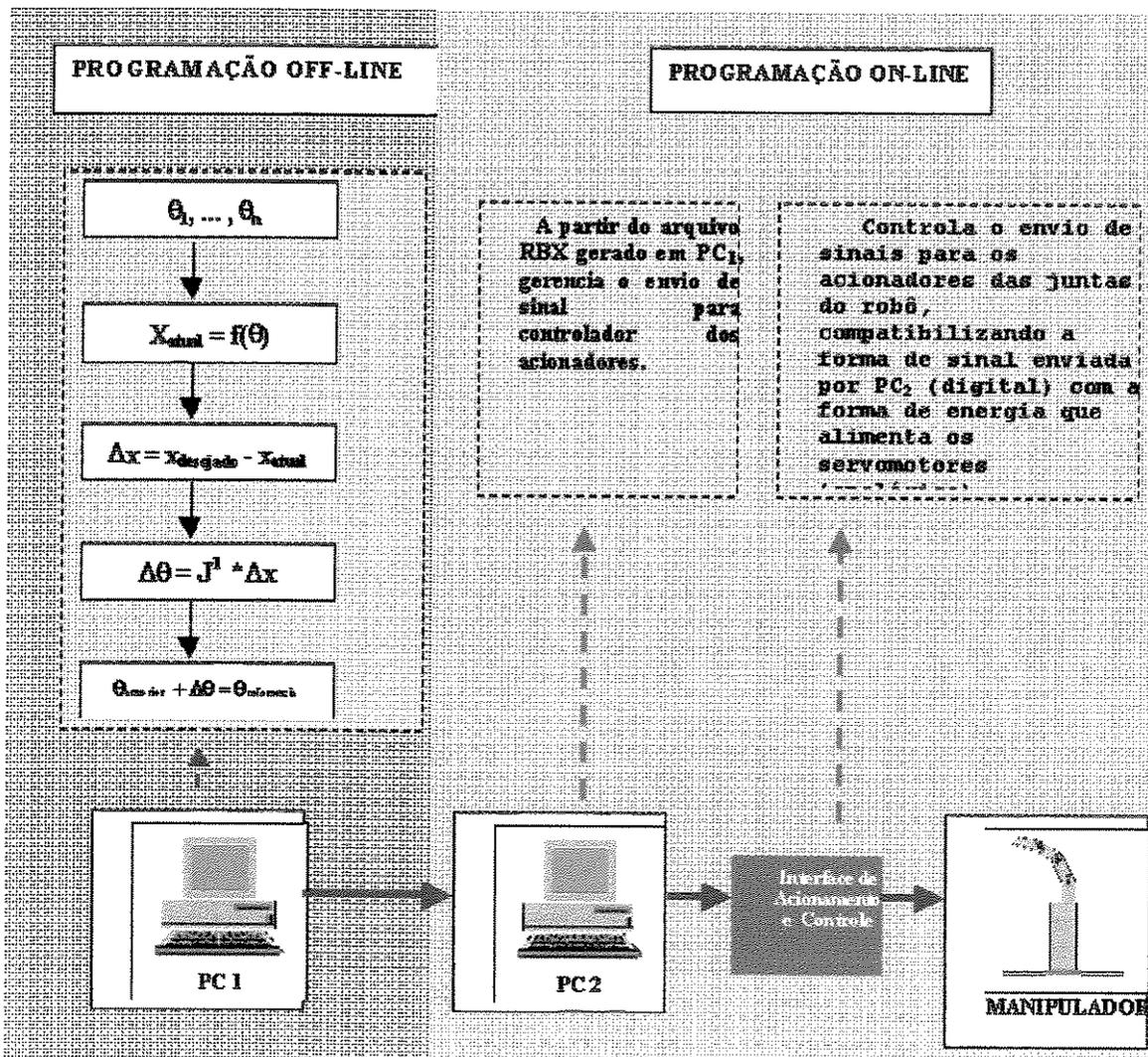


Figura 2.21 Estrutura de Controle implementada

Do conhecimento das 3 situações exploradas, optou-se pelo estudo da interação de juntas, por tratar-se de um problema mais realístico.

## **Capítulo 3**

# **Desenvolvimento das Equações de Movimento para o Robô, Motor, Sistema de Interação e Estratégia de Controle e Resultado da Simulação Numérica**

### **Introdução**

Uma grande limitação dos modelos publicados para projeto mecânico e controle de robôs é considerar os atuadores como pura fonte de torque. Poucos trabalhos têm considerado a dinâmica do sistema robô-motor como um sistema interagente, Beekmann (1987).

Assim, um projeto de controle que retenha todas as não linearidades inerentes na dinâmica é desenvolvido para a configuração robô-motor, considerado como um sistema interagente em série e com as fricções devida ao robô, motor e sistema interagente. Este projeto de controle, proposto por Beekmann (1987), desacopla a configuração robô-motor para subsistemas robô, motor e sistema de interação em série, com alocação arbitrária de pólos. Esta aproximação está em contraste ao tratamento convencional de tratar o motor como pura fonte de torque e de negligenciar a interação dinâmica entre as juntas do robô e motor.

Após uma pesquisa da literatura, verificou-se que poucos trabalhos têm considerado a interação dinâmica entre os elos do robô e seus respectivos sistemas eletro-mecânicos, assim como a não linearização da equação do sistema, que pode preservar, em muito, as características dinâmicas do sistema. Assim sendo, esse trabalho de acordo com o nosso conhecimento é o primeiro, em nível de Brasil, a tratar a dinâmica do sistema robô-motor como um sistema interagente no campo de robótica.

Este capítulo está assim disposto:

3.1 Desenvolvimento da equação dinâmica do robô;

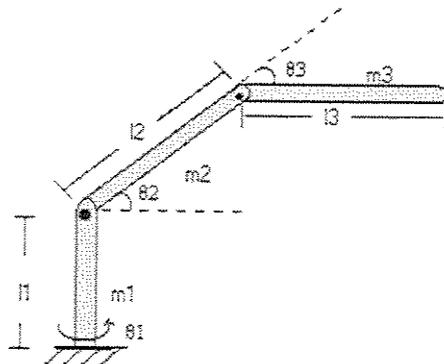
3.2 É proposta a equação dinâmica para o motor ;

3.3 É desenvolvido a estratégia de controle e sistemas interagentes, segundo o modelo proposto em Beekmann (1987);

3.4 Resultado da simulação numérica.

### 3.1 Sistemas de Equações para o Robô

Para atingir esta meta, um braço robótico (revoluto- revoluto- revoluto), figura 3.1, é modelado, tal que retenha toda as não linearidades da equação de movimento de Lagrange.



**Figura 3.1** Geometria robótica (revoluta-revoluta-revoluta).

Considera-se as seguintes equações em variáveis de estados definidas:

$$\begin{aligned} x_{2i-1} &= \theta_i \\ x_{2i} &= \dot{\theta}_i \quad i = 1, 2, \dots, 6. \end{aligned}$$

onde  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  são os ângulos da base, cotovelo e braço do robô, respectivamente, de acordo com a figura 3.1, e  $\theta_4, \theta_5, \theta_6$  são os correspondentes ângulos da base, cotovelo e braço, respectivamente, do motor, figura 3.2.

Definição da equação de movimento para o robô, Meirovich (1985) , Riwin (1987):

⇒ **Para o link 1**, a base do robô, as energias cinética e pontencial são definidas como segue:

$$K_1 = I_1 \frac{\dot{\theta}_1^2}{2}, \quad V_1 = 0 \quad (3.1)$$

O torque na base é definido pela equação de Lagrange e é:

$$T_{11} = I_1 \ddot{\theta}_1 \quad (3.2)$$

⇒ Para o link 2, cotovelo, o vetor posição  $\mathbf{r}_{2g}$  do centro de gravidade e a velocidade  $\mathbf{v}_{2g}$  é:

$$\mathbf{r}_{2g} = l_{2c} [(\cos\theta_1 \cos\theta_2)\mathbf{i} + (\sin\theta_1 \cos\theta_2)\mathbf{j} + (\sin\theta_2)\mathbf{k}] \quad (3.3)$$

Derivando-se  $\mathbf{r}_{2g}$ , obtém-se a velocidade do centro de gravidade:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{2g} = \dot{\mathbf{r}}_{2g} = l_{2c} \{ [(-\sin\theta_1 \cos\theta_2)\dot{\theta}_1 + (\cos\theta_1 \sin\theta_2)\dot{\theta}_2] \mathbf{i} \\ + [(\cos\theta_1 \cos\theta_2)\dot{\theta}_2 + (\sin\theta_1 \sin\theta_2)\dot{\theta}_3] \mathbf{j} - (\cos\theta_2)\dot{\theta}_3 \mathbf{k} \} \quad (3.4) \end{aligned}$$

A energia cinética do link 2 é:

$$K_2 = m_2 \frac{v_{2g}^2}{2} + I_2 \frac{\omega_2^2}{2} \quad (3.5)$$

onde

$$\omega_2 = v_{2g}/l_{2c} \quad (3.6)$$

Assumindo que o link tenha eixo simétrico de seção cruzada,  $I_2$  não depende da direção do eixo.

Após substituir (3.6) e (3.4) em (3.5):

$$K_2 = \frac{m_2 l_{2c}^2 + I_2}{2} (\dot{\theta}_2^2 \cos^2 \theta_2 + \dot{\theta}_3^2) \quad (3.7)$$

Os componentes do torque a ser desenvolvido pela base e pelo cotovelo para suportar o elo 2 são, respectivamente:

$$T_{12} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K_2}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial K_2}{\partial \theta_1} = (m_2 l_{2c}^2 + I_2) (\ddot{\theta}_1 \cos^2 \theta_2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_1 \cos \theta_2) \quad (3.8)$$

$$T_{22} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K_2}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial K_2}{\partial \theta_2} = (m_2 l_{2c}^2 + I_2) (\ddot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2 \cos \theta_2) \quad (3.9)$$

Na equação (3.8) o primeiro termo representa a inércia do link 2 sobre o eixo Z enquanto o segundo termo representa a força de Coriolis.

Na equação (3.9), o primeiro termo é a inércia sobre Z e o segundo termo é uma força centrífuga, refletindo a tendência do link tornar-se horizontal enquanto gira ao redor do eixo Z.

⇒ **Para o link 3**, analogamente ao anterior:

$$\begin{aligned} r_{3g} = & \cos \theta_1 [l_2 \cos \theta_2 + l_{3c} \cos(\theta_2 + \theta_3)] i \\ & + \sin \theta_1 [l_2 \cos \theta_2 + l_{3c} \cos(\theta_2 + \theta_3)] j \\ & + [l_2 \sin \theta_2 + l_{3c} \sin(\theta_2 + \theta_3)] k \end{aligned} \quad (3.10)$$

e a velocidade do centro de gravidade do link 3 é:

$$\begin{aligned} v_{3g} = \dot{r}_{3g} = & \{-[l_2 \cos \theta_2 + l_{3c} \cos(\theta_2 + \theta_3)] \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \\ & + [l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 + l_{3c} (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \sin(\theta_2 + \theta_3)]\} i \\ & + \{[l_2 \cos \theta_2 + l_{3c} \cos(\theta_2 + \theta_3)] \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \\ & + [l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 + l_{3c} (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \sin(\theta_2 + \theta_3)] \sin \theta_1\} j \\ & + [-l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 - l_{3c} (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \cos(\theta_2 + \theta_3)] k \end{aligned} \quad (3.11)$$

A velocidade angular do link 3 se escreve:

$$\omega_3 = \dot{\theta}_1 \cos^2(\theta_2 + \theta_3) + (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2 \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} K_3 = & \frac{1}{2} \{ m_3 [l_2^2 \cos^2 \theta_2 + 2l_2 l_{3c} \cos \theta_2 \cos(\theta_2 + \theta_3) \\ & + l_{3c}^2 \cos^2(\theta_2 + \theta_3)] \dot{\theta}_1^2 + m_3 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \\ & + m_3 l_2 l_{3c} \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \cos \theta_3 + (m_3 l_{3c}^2 + I_3) (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2 \} \end{aligned} \quad (3.13)$$

A energia cinética torna-se, portanto:

Obtém-se então as equações de Lagrange de movimento:

$$\begin{aligned}
 T_{13} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K_3}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \left( \frac{\partial K_3}{\partial \theta_1} \right) = & \{ m_3 [l_2^2 \cos^2 \theta_2 + \\
 & + 2l_2 l_{3c} \cos \theta_2 \cos(\theta_2 + \theta_3) + (m_3 l_{3c}^2 + I_3) \cos^2(\theta_2 + \theta_3)] \ddot{\theta}_1 \\
 & + 2\{ m_3 [l_2^2 \sin \theta_2 \cos \theta_2 + l_2 l_{3c} \sin \theta_2 \cos(\theta_2 + \theta_3)] \\
 & + (m_3 l_{3c}^2 + I_3) \sin(\theta_2 + \theta_3) \cos(\theta_2 + \theta_3) \} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\
 & + 2\{ m_3 l_2 l_{3c} \cos \theta_2 \sin(\theta_2 + \theta_3) \\
 & + (m_3 l_{3c}^2 + I_3) \sin(\theta_2 + \theta_3) \cos(\theta_2 + \theta_3) \} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}
 T_{23} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K_3}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \left( \frac{\partial K_3}{\partial \theta_2} \right) = & (m_3 l_{3c}^2 + 2m_3 l_2 l_{3c} \cos \theta_3 + m_3 l_{3c}^2 + I_3) \ddot{\theta}_2 + \\
 & + (m_3 l_2 l_{3c} \cos \theta_3 + m_3 l_{3c}^2 + I_3) \ddot{\theta}_3 \\
 & - \{ m_3 [l_2^2 \sin \theta_2 \cos \theta_2 + l_2 l_{3c} \sin \theta_2 \cos(\theta_2 + \theta_3)] \\
 & + l_2 l_{3c} \cos \theta_2 \sin(\theta_2 + \theta_3) + l_{3c}^2 \sin(\theta_2 + \theta_3) \cos(\theta_2 + \theta_3) \} \\
 & + I_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) \cos(\theta_2 + \theta_3) \} \dot{\theta}_1^2 \\
 & + (m_3 l_2 l_{3c} \sin \theta_3) \dot{\theta}_3^2 + (2m_3 l_2 l_{3c} \sin \theta_3) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}
 T_{33} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K_3}{\partial \dot{\theta}_3} \right) - \left( \frac{\partial K_3}{\partial \theta_3} \right) = & (m_3 l_2 l_{3c} \cos \theta_3 + m_3 l_{3c}^2 + I_3) \ddot{\theta}_2 \\
 & + (m_3 l_{3c} + I_3) \ddot{\theta}_3 - \{ m_3 [l_2 l_{3c} \cos \theta_2 \sin(\theta_2 + \theta_3) \\
 & - (m_3 l_2 l_{3c} \sin \theta_3) \dot{\theta}_3^2
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Ressalta-se que os torques que irão contra-agir com a energia gravitacional são devidos a expressão da energia potencial:

$$V = g \{ m_2 l_{2c} \sin \theta_2 + m_3 [l_2 \sin \theta_2 + l_3 \sin(\theta_2 + \theta_3)] \} \tag{3.17}$$

E os componentes do torque que são devido à gravidade são:

$$T_{2g} = -dV/d\theta_2 = g\{m_2 l_{1c} \cos\theta_2 + m_3[l_2 \cos\theta_2 + l_{3c} \cos(\theta_2 + \theta_3)]\} \quad (3.18)$$

$$T_{3g} = -dV/d\theta_3 = g[m_3 l_{3c} \cos(\theta_2 + \theta_3)] \quad (3.19)$$

Por fim, tem-se o torque resultante em cada uma das  $i$  juntas:

$$T_1 = T_{11} + T_{12} + T_{13}$$

$$T_2 = T_{22} + T_{23} + T_{2g}$$

$$T_3 = T_{33} + T_{3g}$$

Ou, numa formulação

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_1 = f_1 \ddot{\theta}_1 + f_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + f_3 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \\ \tau_2 = g_1 \ddot{\theta}_2 + g_2 \ddot{\theta}_3 + g_3 \dot{\theta}_1^2 + g_4 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + g_5 \dot{\theta}_3^2 + g_6 \end{array} \right. \quad (3.21)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_2 = g_1 \ddot{\theta}_2 + g_2 \ddot{\theta}_3 + g_3 \dot{\theta}_1^2 + g_4 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + g_5 \dot{\theta}_3^2 + g_6 \\ \tau_3 = h_1 \ddot{\theta}_2 + h_2 \ddot{\theta}_3 + h_3 \dot{\theta}_1^2 + h_4 \dot{\theta}_2^2 + h_5 \end{array} \right. \quad (3.22)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_3 = h_1 \ddot{\theta}_2 + h_2 \ddot{\theta}_3 + h_3 \dot{\theta}_1^2 + h_4 \dot{\theta}_2^2 + h_5 \\ \tau_1 = f_1 \ddot{\theta}_1 + f_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + f_3 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \end{array} \right. \quad (3.23)$$

mais compacta, pode-se expressar o torque nas três juntas:

Onde:

$$f_1 = \{I_1 + (m_2 l_{2c}^2 + I_2) \cos^2 \theta_2 + m_3 l_2 [l_2 \cos \theta_2 + 2l_{3c} \cos(\theta_2 + \theta_3) \cos \theta_2] + (m_3 l_{3c}^2 + I_3) \cos(\theta_2 + \theta_3)\}$$

$$f_2 = 2\{(m_2 l_{2c}^2 + I_2) \sin \theta_2 \cos \theta_3 + m_3 l_2 [l_2 \sin \theta_2 \cos \theta_2 + l_{3c} \sin \theta_2 \cos(\theta_2 + \theta_3)] + (m_3 l_{3c}^2 + I_3) \sin(\theta_2 + \theta_3) \cos(\theta_2 + \theta_3)\}$$

$$f_3 = 2\{m_3 l_2 l_{3c} \cos \theta_2 \sin(\theta_2 + \theta_3) + (m_3 l_{3c}^2 + I_3) \sin(\theta_2 + \theta_3) \cos(\theta_2 + \theta_3)\}$$

$$g_1 = (m_2 l_{2c}^2 + I_2 + m_3 l_2^2 + 2m_3 l_2 l_{3c} \cos \theta_3 + m_3 l_{3c}^2 + I_3)$$

$$g_2 = (m_3 l_2 l_{3c} \cos \theta_3 + m_3 l_{3c}^2 + I_3)$$

$$g_3 = l_2 l_{3c} \sin \theta_2 \cos(\theta_2 + \theta_3) + l_{3c}^2 \sin(\theta_2 + \theta_3)$$

$$g_4 = 2m_3 l_2 l_{3c} \sin \theta_3$$

$$g_5 = m_3 l_2 l_{3c} \sin \theta_3$$

$$g_6 = g\{m_2 l_{2c} \cos \theta_2 + m_3 [l_2 \cos \theta_2 + l_{3c} \cos(\theta_2 + \theta_3)]\}$$

$$h_1 = (m_3 l_{3c}^2 + I_3)$$

$$h_2 = m_3 l_2 l_{3c} \cos \theta_3 + m_3 l_{3c}^2 + I_3$$

$$h_3 = \{m_3 [l_2 l_{3c} \cos \theta_2 \sin(\theta_2 + \theta_3) + l_{3c}^2 \sin(\theta_2 + \theta_3) \cos(\theta_2 + \theta_3) + I_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) \cos(\theta_2 + \theta_3)]\}$$

$$h_4 = -(m_3 l_2 l_{3c} \sin \theta_3)$$

$$h_5 = g[m_3 l_{3c} \cos(\theta_2 + \theta_3)]$$

Como pode-se observar através de (3.21)-(3.23), os torques nas juntas são diretamente proporcionais às não-linearidades quadráticas.

### 3.2 Sistema de Equações Para o Motor

Para desenvolver o modelo que inclua fricção, assim como interação em série, considerou-se o modelo simplificado da figura 3.2. Nesta figura, o motor está atuando sobre uma fricção viscosa,  $f_{MC}(\omega_M) = B_M(\omega_M)$ , e fricção de Coulumb,  $f_{MC}(\omega_M) = C_M(\omega_M)$ . A carga, está disposta como indicado na figura (3.2). O motor e a carga estão conectados por uma mola,  $f_{RK}(\theta_L - \theta_M)$ , que contém uma viscosidade relativa  $f_{RV}$ .

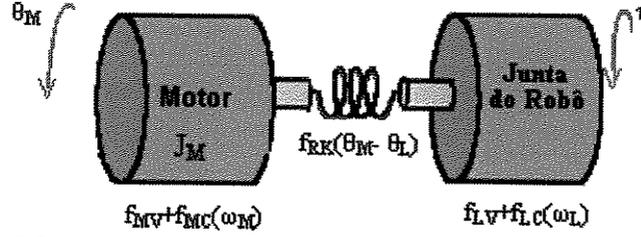


Figura 3.2 Modelo com fricção no motor e robô e interação em série.

Assim, as equações diferenciais definindo as relações entre o comando de voltagem, velocidade da carga no motor e posição são dados como segue:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_M = \omega_M \\ J_M \dot{\omega}_M = -B_M \omega_M - B_R (\omega_M - \omega_L) - K(\theta_M - \theta_L) - K_v e_i \end{cases} \quad (3.24)$$

$$\begin{cases} \dot{\theta}_L = \omega_L \\ J_L \dot{\omega}_L = -B_L \omega_L - B_R (\omega_M - \omega_L) + K(\theta_M - \theta_L) \end{cases} \quad (3.25)$$

O lado direito da equação (3.25) é o torque aplicado à carga, e quando há interação, esse termo é igual aos termos do lado esquerdo das equações (3.21)-(3.23). Os termos:

$$\begin{cases} \tau_1^s = B_{R1}(x_8 - x_2) + BK_1(x_7 - x_1) \\ \tau_2^s = B_{R2}(x_{10} - x_4) + BK_2(x_9 - x_3) \\ \tau_3^s = B_{R3}(x_{12} - x_6) + BK_3(x_{11} - x_5) \end{cases} \quad (3.26)$$

Podem ser identificados como o torque exercido sobre a mola pela junta do motor e é definido como o torque de controle. Na ausência de interação e fricção, têm-se

$$\tau_i^s = \tau_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

o controle clássico de sistemas robóticos.

Fazendo-se a mudança de variáveis:

$$\begin{aligned} x_{2i-1} &= \theta_i \\ x_{2i} &= \dot{\theta}_i \quad i = 1, 2, \dots, 6. \end{aligned}$$

E definindo os termos:

$$\begin{aligned}
 b_1 &= 1/f_1(x); \\
 b_2 &= g_2(x)/[g_1(x)*h_1(x)-g_2(x)*h_2(x)]; \\
 b_3 &= h_1(x)/[g_1(x)*h_1(x)-g_2(x)*h_2(x)]; \\
 b_4 &= g_1(x)/[g_1(x) *h_1(x)-g_2(x) *h_2(x)]; \\
 b_5 &= h_2(x)/[g_1(x) *h_1(x)-g_2(x) *h_2(x)].
 \end{aligned}$$

Pode-se fazer uma mudança na equação de estados para todas as juntas do robô, tornando-se:

$$\begin{cases}
 \dot{x}_1 = x_2 \\
 \dot{x}_2 = -b_1(x)[f_2(x)x_2x_4 + f_3(x)x_2x_6 + B_{L1}x_2] + b_1(x)\tau_1^s
 \end{cases} \quad (3.27)$$

$$\begin{cases}
 \dot{x}_3 = x_4 \\
 \dot{x}_4 = b_2(x)[h_3(x)x_2^2 + h_4(x)x_4^2 + h_5(x) + B_{L3}x_6(x)] - \\
 \quad - b_2(x)\tau_3^s - b_3(x)[g_3(x)x_2^2 + g_4(x)x_4x_6 + g_5(x)x_6^2 \\
 \quad + g_6(x) + B_{L2}x_4] + b_3(x)\tau_2^s
 \end{cases} \quad (3.28)$$

$$\begin{cases}
 \dot{x}_5 = x_6 \\
 \dot{x}_6 = b_5(x)[g_3(x)x_2^2 + g_4(x)x_4x_6 + g_5(x)x_6^2 + B_{L2}x_4] - b_5(x)\tau_2^s \\
 \quad - b_4(x)[h_3(x)x_2^2 + h_4(x)x_4^2 + h_5(x) + B_{L3}x_6] + b_4(x)\tau_3^s
 \end{cases} \quad (3.29)$$

As equações (3.27)-(3.29) representam a dinâmica do robô quando os torques de interação são aplicados. Do mesmo modo, desenvolve-se a equação de estados para o motor, usando-se a equação do motor (3.24) e a equação de torques (3.26):

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_7 = x_8 \\ \dot{x}_8 = \frac{-[B_{M1}x_8 + \tau_1^s]}{J_{M1}} + \frac{K_{v1}e_1}{J_{M1}} \\ \dot{x}_9 = x_{10} \\ \dot{x}_{10} = \frac{[-B_{M2}x_{10} + \tau_2^s]}{J_{M2}} + \frac{K_{v2}e_2}{J_{M2}} \\ \dot{x}_{11} = x_{12} \\ \dot{x}_{12} = \frac{[-B_{M3}x_{12} + \tau_3^s]}{J_{M3}} + \frac{K_{v3}e_3}{J_{M3}} \end{array} \right. \quad (3.30)$$

Onde:

$B_{M1}, B_{M2}, B_{M3}$  = Coeficientes de fricção dos motores, conectados às respectivas juntas.

$K_{v1}, K_{v2}, K_{v3}$ . são as constantes de ganho de voltagem.

$e_1, e_2, e_3$  são as voltagens aplicadas nos motores.

$J_{M1}, J_{M2}, J_{M3}$  são os correspondentes momentos de inércia dos motores.

### 3.3 Estratégia de Controle

Para a estratégia de controle utilizou-se o modelo de Beekmann (1987) para projetar o controle de desacoplagem para cada subsistema: robô, motor e sistemas interagentes. Para o subsistema motor, esta teoria requer que as variáveis de saída sejam os ângulos do motor  $\theta_4, \theta_5, \theta_6$ . Este fato força a criação de outro subsistema, que é o subsistema de interação, que nada mais é que as equações de torque  $[\tau^s]$ , eq. (3.26).

O subsistema do robô determina um subsistema de desacoplagem,  $\tau^s$ , tal que cada saída possa seguir uma trajetória desejada, " $\omega$ ". O subsistema de interação determina a saída do motor,

$\theta_M$ , que produzirá o torque requerido,  $\tau^s$ , para o controle do robô. Ultimamente, o subsistema motor determina uma voltagem de entrada,  $e$ , que produzirá a saída requerida para o motor,  $\theta_M$ .

As equações em espaço de estado para o robô pode ser posta em uma formulação de estados no contexto da teoria de Freund:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(x,t) + B(x,t)u(t) & (3.31) \\ y &= C(x,t) \end{aligned}$$

Onde a saída  $x$  é o vetor de estados,  $u$  é o vetor de entrada,  $y$  é a saída,  $A(x,t)$  e  $C(x,t)$  são vetores colunas e  $B(x,t)$  é uma matriz  $6 \times 3$ . Comparando com (3.27)-(3.29), (3.31) toma a forma:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_2 \\ f(x) \\ x_4 \\ g(x) \\ x_6 \\ h(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_1(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_3(x) & -b_2(x) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_5(x) & b_4(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1^s \\ \tau_2^s \\ \tau_3^s \end{pmatrix} & (3.32) \\ \left. \begin{matrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{matrix} \right\} y &= \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & (3.33) \end{aligned}$$

Sendo  $f(x)$ ,  $g(x)$  e  $h(x)$  definidas das relações (3.27)-(3.29) e  $y$  é a saída.

Assim, pela teoria de Freund, o controle pode ser escrito como:

$$\begin{cases} \tau_1^s = -f_1(x)[f(x) + \alpha_{11}x_2 + \alpha_{10}x_1 - \lambda_1\omega_1(t)] \\ \tau_2^s = -g_1(x)[g(x) + \alpha_{21}x_4 + \alpha_{20}x_3 - \lambda_2\omega_2(t)] \\ \quad - g_2(x)[h(x) + \alpha_{31}x_6 + \alpha_{30}x_5 - \lambda_3\omega_3(t)] \\ \tau_3^s = -h_2(x)[g(x) + \alpha_{21}x_4 + \alpha_{20}x_3 - \lambda_2\omega_2(t)] \\ \quad - g_2(x)[h(x) + \alpha_{31}x_6 + \alpha_{30}x_5 - \lambda_3\omega_3(t)] \end{cases} \quad (3.34)$$

onde:

$\Rightarrow w_i$  são as saídas desejadas, ou, trajetória do robô;

$\Rightarrow \alpha_{ij}$  são os coeficientes relacionados aos pólos da dinâmica da saída;

$\Rightarrow \lambda_i$  são ganhos, escolhidos arbitrariamente.

Para o motor, a equação de estados (3.30) toma a seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \\ \dot{x}_9 \\ \dot{x}_{10} \\ \dot{x}_{11} \\ \dot{x}_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_8 \\ i(x) \\ x_{10} \\ l(x) \\ x_{12} \\ k(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_4(t) \\ u_5(t) \\ u_6(t) \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

Onde:

$$\begin{aligned} u_4(t) &= K_1 v_1 e_1 / J_{M1}, & i(x) &= \frac{B_{M1} x_8 + \tau_1^s}{J_{M1}} \\ u_5(t) &= K_2 v_2 e_2 / J_{M2}, & l(x) &= \frac{B_{M2} x_{10} + \tau_2^s}{J_{M2}} \\ u_6(t) &= K_3 v_3 e_3 / J_{M3}, & k(x) &= \frac{B_{M3} x_{12} + \tau_3^s}{J_{M3}} \end{aligned} \quad (3.37)$$

A equação de saída é :

$$y = (C(x)) = \begin{pmatrix} \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_7 \\ x_9 \\ x_{11} \end{pmatrix}. \quad (3.38)$$

Seguindo o mesmo procedimento para o desenvolvimento da equação de controle do robô e equação (3.34) o controle do motor pode ser escrito por inspeção. Eles são:

$$\begin{aligned} u_4 &= -[i(x) + \alpha_{41} x_8 + \alpha_{40} x_7 - \lambda_4 z_4]; \\ u_5 &= -[l(x) + \alpha_{51} x_{10} + \alpha_{50} x_9 - \lambda_5 z_5]; \\ u_6 &= -[k(x) + \alpha_{61} x_{12} + \alpha_{60} x_{11} - \lambda_6 z_6]; \end{aligned} \quad (3.39)$$

onde:

- $\Rightarrow z_i$  são as saídas desejadas do motor, ou, ângulo do motor;
- $\Rightarrow \alpha_{ij}$  são os coeficientes relacionados aos pólos da saída e pode ser escolhido arbitrariamente;
- $\Rightarrow \lambda_i$  são os ganhos, escolhidos arbitrariamente.

Similar à formulação dos subsistemas robô e motor, um subsistema de interação que conecte os sistemas robô e motor foi desenvolvido. Da equação (3.26), o subsistema de interação é representado por:

$$\begin{aligned}\dot{x}_7 &= \frac{1}{B_{R1}} (-K_1 x_7 + K_1 x_1 + B_{R1} x_2 + \tau_1^s) \\ \dot{x}_9 &= \frac{1}{B_{R2}} (-K_2 x_9 + K_2 x_3 + B_{R2} x_4 + \tau_2^s) \\ \dot{x}_{11} &= \frac{1}{B_{R3}} (-K_3 x_{11} + K_3 x_5 + B_{R3} x_6 + \tau_3^s).\end{aligned}\tag{3.40}$$

A seguir, exibem-se os resultados das simulações numéricas com o objetivo de entender os resultados que foram obtidos.

### 3.4 Resultados das Simulações Numéricas

Estabelecidos os modelos da dinâmica do robô, motor e controle, foram implementadas rotinas de simulação: a integração numérica de sistemas de equações diferenciais ordinárias não-lineares. Através destas simulações foi possível observar o comportamento da dinâmica do sistema motor, robô e sistema interagente. Foram feitas simulações sem a interação, considerando-se o caso usual, afim de estabelecer parâmetros iniciais para a dinâmica. A seguir, simulou-se o sistema com interação, variando-se os parâmetros de interação, tais como rigidez de mola  $K_i$  e fricção relativa  $B_R$ . Um modelo do sistema linearizado em torno do ponto de equilíbrio foi simulado comparando-se com o modelo linear. Simulou-se os torques no motor e o torque no robô. Tal simulação serviu unicamente como um efeito comparativo.

Dados os modelos dinâmicos do motor e do robô estabelecidos na seção anterior, foram implementadas rotinas de simulação em ambiente *Matlab*<sup>®</sup>, apêndice B. A ferramenta utilizada foi um microcomputador PC Pentium IV, 1.88 GHz, 256 M Ram, Placas on Board.

Essas rotinas consistem de:

- Definição dos parâmetros do motor e robô;
- Definição das equações de movimento para o motor, robô, estratégias de controle e sistemas interagentes;
- Simulação robô-motor.

No Apêndice B exibem-se os programas utilizados para as simulações numéricas.

Fez-se a simulação inicial com valores de parâmetros do motor e robô sem interação tal que melhor se ajustassem à resultados estáveis desejados para o comportamento robô-motor, seção 3.4.1. Em 3.4.2 efetuou-se uma série de simulações para o sistema com interação, considerando-se inicialmente os parâmetros de robô e motor obtidos em 3.4.1 e variando-se os parâmetros de interação  $K_i$  e  $B_R$ .

Para analisar o comportamento dinâmico do sistema, fez-se a simulação, variando-se os diversos parâmetros, tais como:

Variáveis do motor:

- Inércia no motor;
- Fricção no motor.
- Variáveis do robô:
- Inércia do robô;
- Fricção no robô .

E dos parâmetros de interação, como:

- Coeficiente de fricção relativo;
- Rigidez de mola.

O objetivo das simulações foi observar o comportamento do sistema dinâmico com interação. A seguir, fez-se simulações do sistema linearizado, comparando-as com o sistema não-linear, afim de verificar os ganhos obtidos com o sistema não-linear, 3.4.3.

### **Simulações do Sistema não-linear**

Simulando-se inicialmente o sistema sem interação, as simulações mostraram o comportamento do sistema dinâmico robô e motor isoladamente. Observou-se que o comportamento destes sistemas estão de acordo com o esperado para a dinâmica de sistemas robô e motor, o que mostra que esta estratégia de controle não viola resultados já conhecidos em projeto e controle de robôs. Vê-se também que a estratégia de controle está de acordo com o esperado, pois se comporta bem sem a interação.

Considerando como parâmetros iniciais os obtidos no caso sem interação e simulando-se diversos valores para o parâmetro momento de inércia do robô, observou-se pouca variação na amplitude de movimento para valores altos de inércia no motor. Ao contrário, para pequenos valores de inércia, uma grande amplitude foi observada, figuras 3.4.2.1 a 3.4.2.4. Este efeito é devido ao aumento das não-linearidades no motor quando se diminui seu momento de inércia. Isso explica também a maior oscilação na frequência da trajetória.

Uma estabilização dos torques nas juntas foi observado ao aumentar os valores do momento de inércia no robô, porém com um rápido aumento de amplitude. Os torques no motor observou comportamento semelhante ao robô, com exceção do motor 3, que permaneceu estável, tanto na convergência para a solução quanto na amplitude. O comportamento mostrado para as diferenças angulares entre o robô e motor é comentado mais adiante. Figuras 3.4.2.5 a 3.4.2.8.

Com a variação do coeficiente de fricção do robô, diminuiu-se a frequência de oscilações nos torques exercidos nas juntas. Com o aumento da fricção relativa observou um comportamento semelhante para os torques nos motores onde uma diminuição na frequência de oscilações foi observada, figuras 3.4.2.9 a 3.4.2.12.

Com o aumento da rigidez na mola levou a uma convergência rápida para a solução de controle, isso é obvio, pois está-se tendo um sistema mais rígido. Para uma menor rigidez, um sistema mais flexível foi observado, podendo-se ajustar o sistema em tempo real, conforme se deseje um sistema mais rígido ou mais flexível. Para fins industriais isso pode ser considerado de grande importância, pois se economizará tempo e custos. Isso por que esse controle pode substituir várias máquinas de diferentes rigides.

Outra vez variando a rigidez de mola, percebeu-se também a importância do sistema de controle ao variar a diferença entre os ângulos do robô e o ângulo do motor. Logo, pode-se controlar a interação no sistema. Como aplicações importantes, cita-se os exemplos em biomecânica, onde há uma interação entre o sistema músculo/ esqueleto e o ambiente. Figuras 3.4.2.24 a 3.4.2.29.

### **Simulação Com Interação robô/motor Linear e Não-Linear**

Com o objetivo de fazer-se uma análise dos ganhos desse sistema não linearizado, fez-se uma simulação do sistema linearizado, onde a linearização foi feita em torno do ponto de equilíbrio com a aproximação  $\cos(x)=1$  e  $\sin(x)=x$ .

Obviamente um comportamento mais regular foi observado devido ao sistema linear, assim como uma convergência mais rápida para a solução. Porém uma maior sensibilidade às variações

paramétricas foi observada para o sistema não-linear, assim como uma amplitude de movimento muito menor em relação ao sistema linearizado. Isso indica que o sistema não-linear responde melhor às condições impostas, de acordo com Pires *et all* 2003, figuras 3.4.3.1 a 3.4.3.5.

Quanto ao custo computacional, não se observou diferença expressiva de custo entre os dois sistemas. Acredita-se que o tempo de simulação está relacionado ao tamanho do sistema dinâmico, pois se trata de um sistema de seis graus de liberdade, assim, uma simulação de um sistema de 12 graus de liberdade é simulado.

Algumas perspectivas futuras que podem ser úteis para complementar esse trabalho é aqui indicada:

- Otimização da equação de controle, para assim diminuir o custo computacional;
- Verificar mais aprofundadamente projeto e controle de sistemas interagentes, dado as poucas referências disponíveis na literatura;
- Verificação experimental do sistema com interação;
- Verificação da existência de caos no sistema.

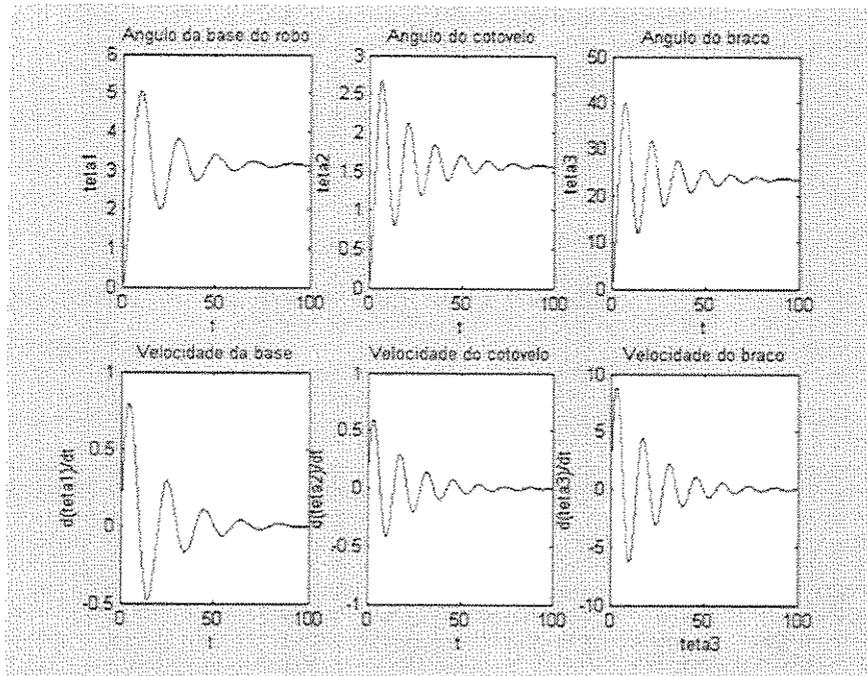
A seguir exibem-se os resultados dos ensaios numéricos efetuados:

### 3.4.1 Simulação do movimento sem interação e não-linear

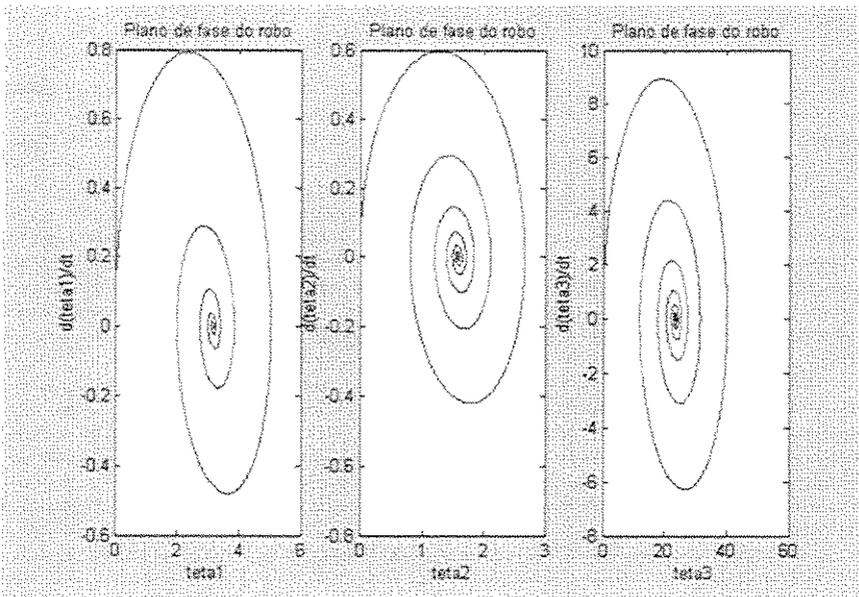
Simulação do ângulo, velocidade e plano de fase do robô utilizando os parâmetros definidos na tabela 3.4.1e condições iniciais [0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -2.25 0 -0.5].:

i	Mi	li	lic	li	BLi	BMi	Ji	wi	Zi
1	10.3800	0.4000	0.2810	1.47714	1	0.1	1.0000	$\pi$	$\pi$
2	5.0000	0.3700	0.2000	2.1880	1	0.1	5.0000	$\pi/2$	$\pi/2$
3	32.3240	0.3500	0.1130	2.0079	1	0.1	10.0000	$\pi/2$	$\pi/2$

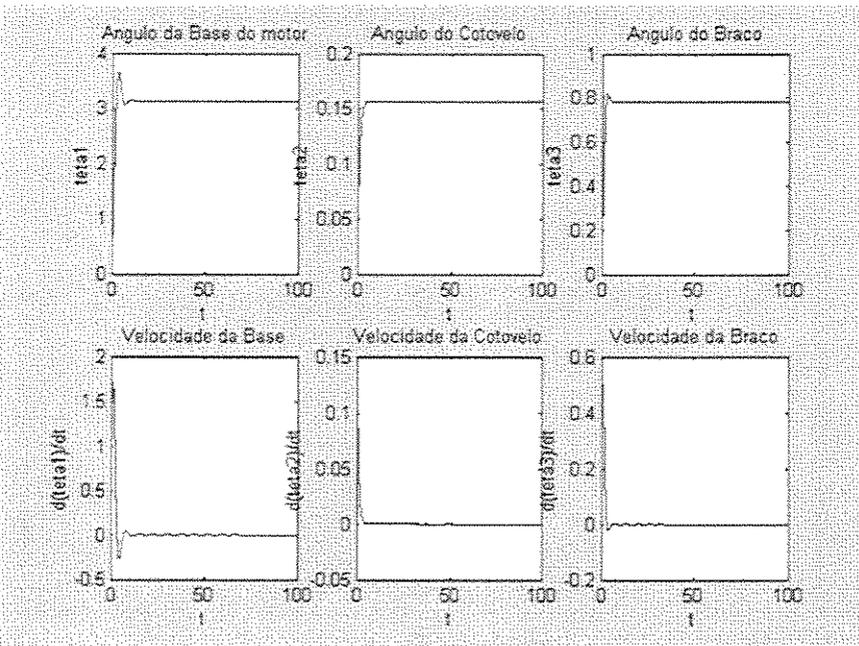
**Tabela 3.4.1:** Parâmetros para simulação do robô e motor.



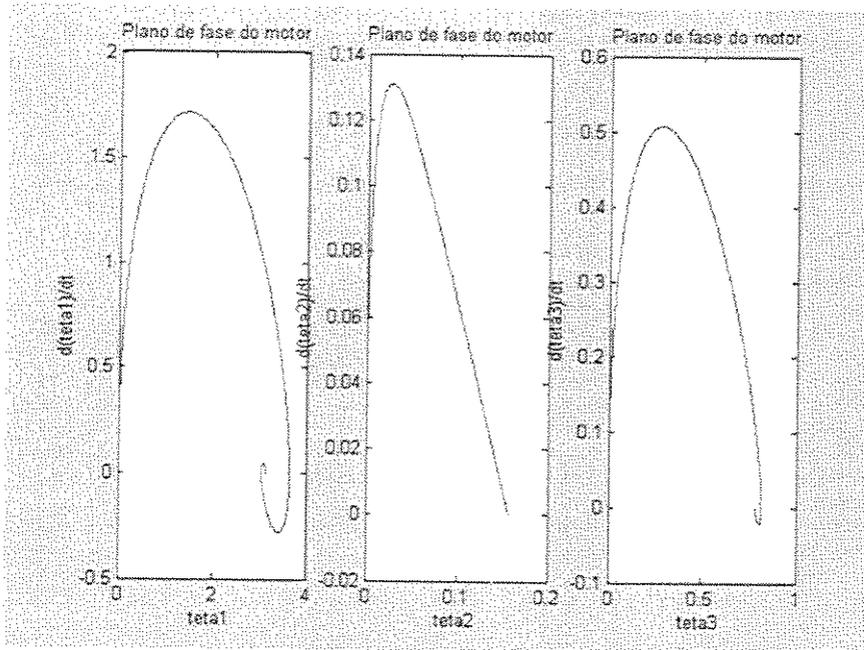
a)



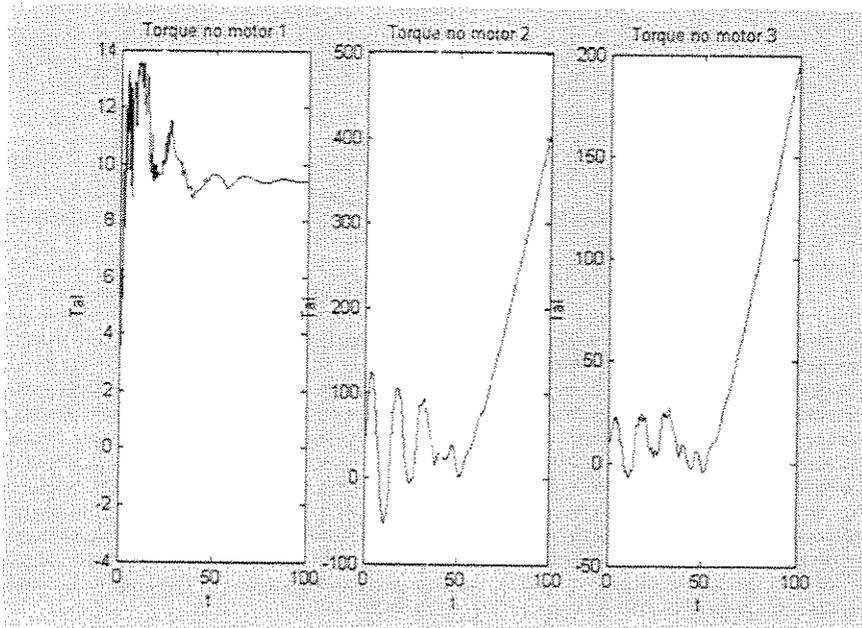
b)



c)



d)



e)

Figura 3.4.1: a) Plotagem do ângulo e velocidades do robô em função do tempo b) Respective planos de fase c) Ângulo e velocidade do do motor d) Respective Plano de fase, e e) Torque no motor utilizando os parâmetros definidos na tabela 4.1e condições iniciais  $[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -2.25 \ 0 \ -0.5]$ .

### 3.4.2 Simulação Com Interação robô/motor não-linear

1. Simulação variando o momento de inércia no motor, segundo os dados da tabela

3.4.2.1a 3.4.2.4 e condições iniciais  $[0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ -2.25\ 0\ -0.5]$ .

i	Mi	li	lic	li	BLi	BMi	JMi	Ki	BRi	wi	Zi
1	10.3800	0.400	0.2810	1.47714	1	1	1.0000	50.000	10	$\pi$	$\pi$
2	5.00000	0.370	0.2000	2.18800	1	1	5.00000	1.000	8	$\pi/2$	$\pi/2$
3	32.3240	0.350	0.1130	2.00793	1	1	10.0000	0.55	200	$\pi/2$	$\pi/2$

Tabela 3.4.2.1: Parâmetros para simulação do robô e motor.

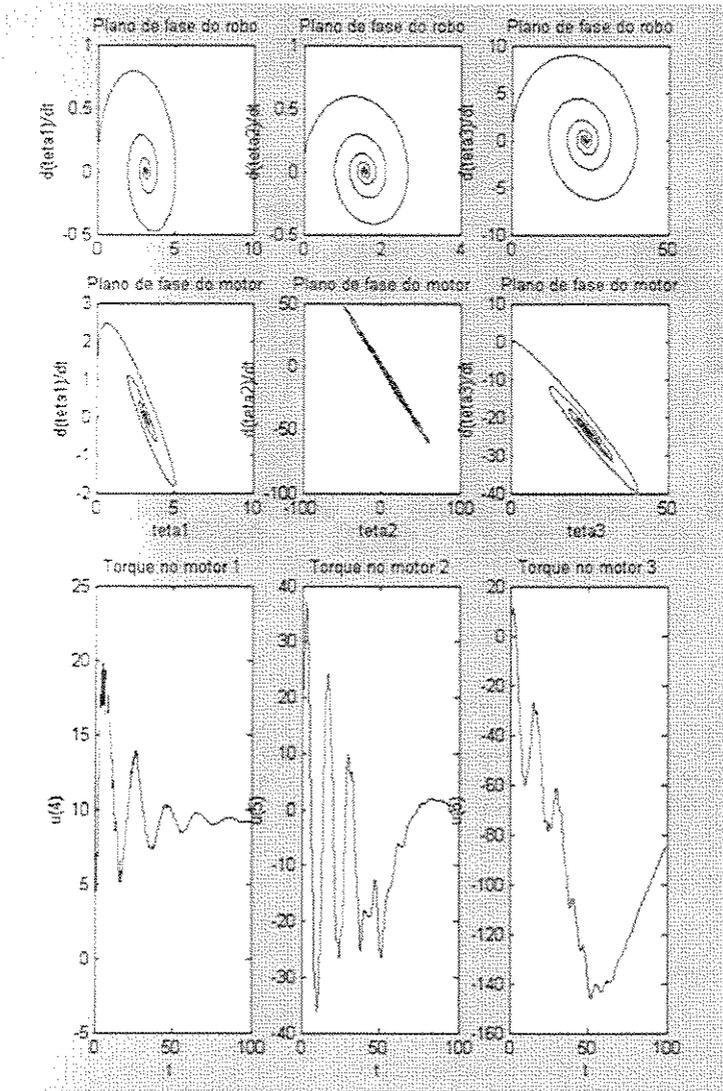


Figura 3.4.2.1 Plano de fase do robô, Plano de fase do motor e Torque no motor, considerando as condições iniciais  $[0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ -2.25\ 0\ -0.5]$  e tabela.

i	Mi	li	lic	Ii	Bli	BMi	JMi	Ki	BRi	wi	Zi
1	10.3800	0.4000	0.2810	1.47714	1	1	1.0000	50.0000	10	$\pi$	$\pi$
2	5.0000	0.3700	0.2000	2.18800	1	1	50.0000	1.0000	8	$\pi/2$	$\pi/2$
3	32.3240	0.3500	0.1130	2.00793	1	1	100.0000	0.55	200	$\pi/2$	$\pi/2$

Tabela 3.4.2.2: Parâmetros para simulação do robô e motor.

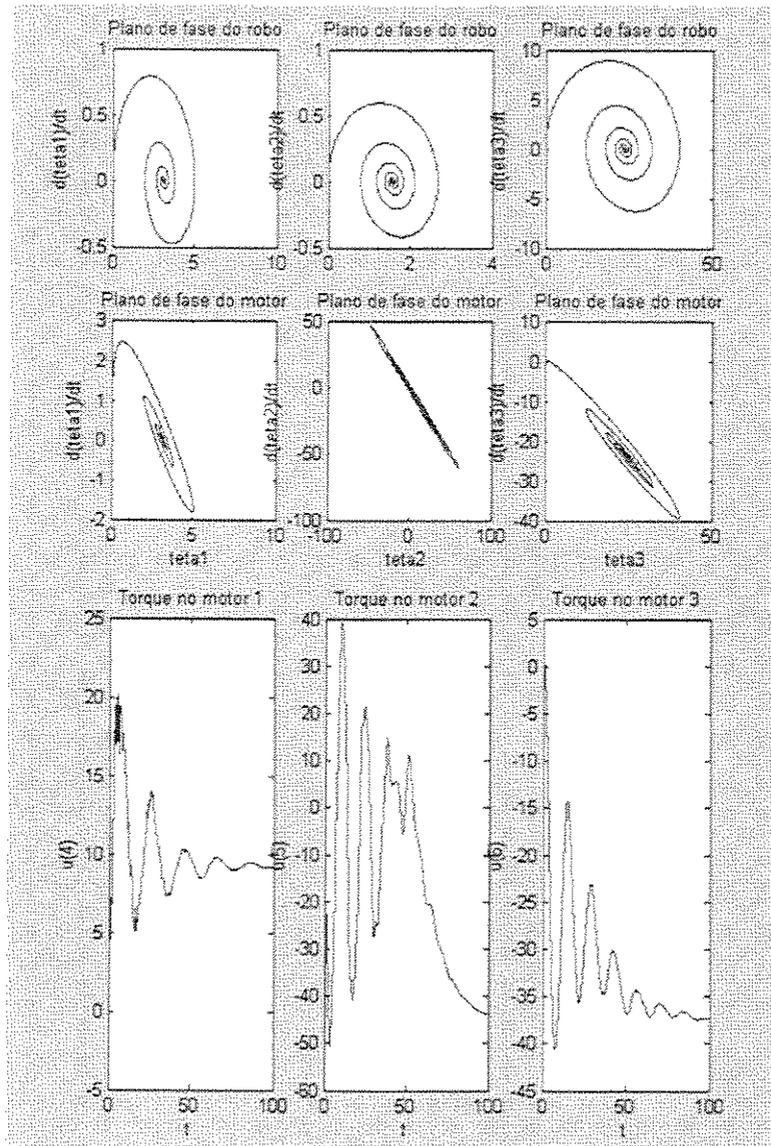


Figura 3.4.2.2 Plano de fase do robô, Plano de fase do motor e Torque no motor, considerando as condições iniciais [0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -2.25 0 -0.5] e tabela.

i	Mi	li	lic	li	Bli	BMi	JMi	Ki	BRi	wi	Zi
1	10.3800	0.4000	0.2810	1.47714	1	1	1.0000	50.0000	10	$\pi$	$\pi$
2	5.00000	0.3700	0.2000	2.18800	1	1	200.000	1.000	8	$\pi/2$	$\pi/2$
3	32.3240	0.3500	0.1130	2.00793	1	1	200.000	0.55	200	$\pi/2$	$\pi/2$

Tabela 3.4.2.3: Parâmetros para simulação do robô e motor.

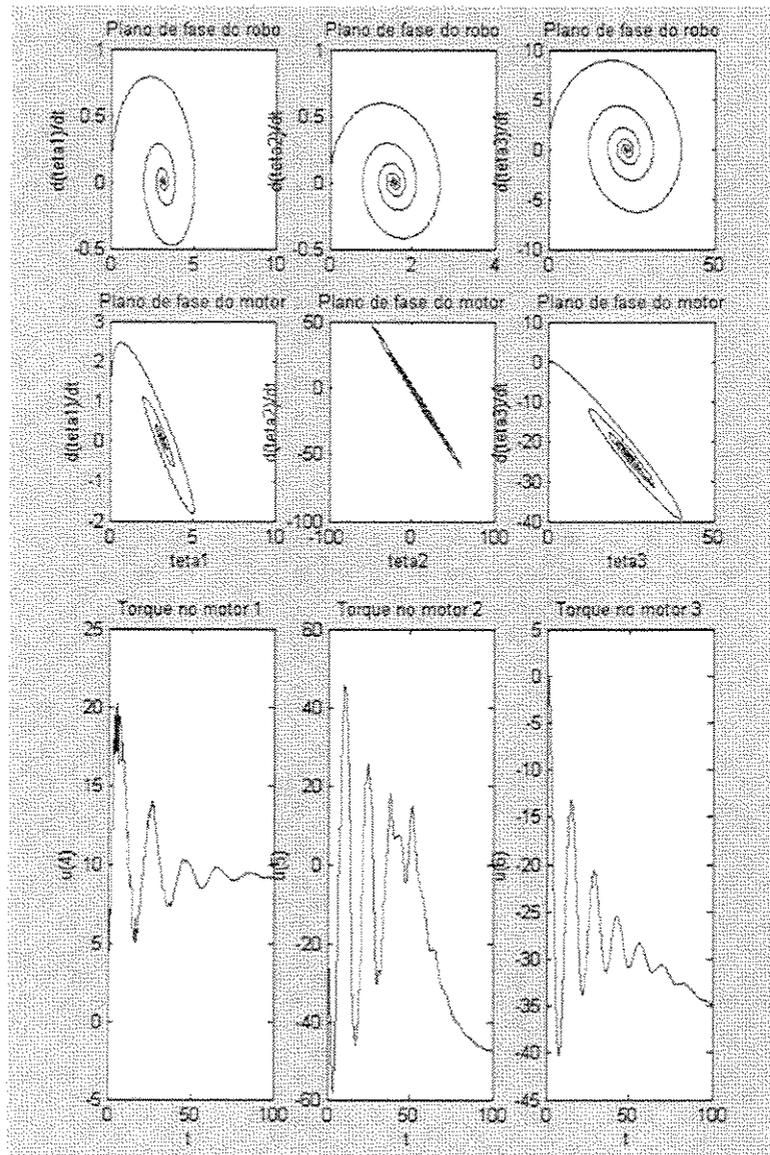


Figura 3.4.2.3 a) Plano de fase do robô, Plano de fase do motor e Torque no motor, considerando as condições iniciais  $[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -2.25 \ 0 \ -0.5]$  e tabela.

i	Mi	li	lic	li	Bli	BMi	JMi	Ki	BRi	wi	Zi
1	10.3800	0.4000	0.2810	1.47714	1	1	1.0000	50.000	10	$\pi$	$\pi$
2	5.0000	0.3700	0.2000	2.18800	1	1	400.000	1.000	8	$\pi/2$	$\pi/2$
3	32.3240	0.3500	0.1130	2.00793	1	1	400.000	0.55	200	$\pi/2$	$\pi/2$

Tabela 3.4.2.4: Parâmetros para simulação do robô e motor.

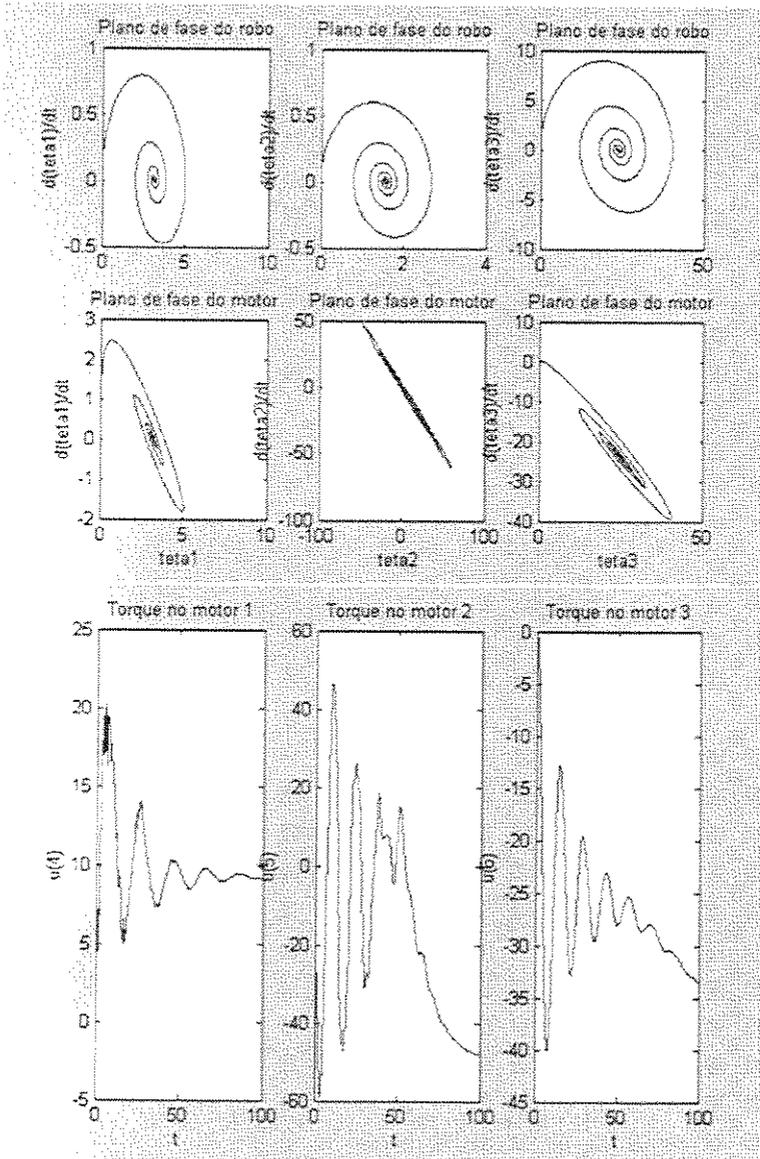


Figura 3.4.2.4 Plano de fase do robô, Plano de fase do motor e Torque no motor, considerando as condições iniciais  $[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -2.25 \ 0 \ -0.5]$  e tabela.

Varição do momento de inércia  $I_i$  do robô segundo as tabelas 3.4.2.5 a 3.4.2.8 e condições iniciais [0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -2.25 0 -0.5].

i	Mi	li	lic	li	Bli	BMi	JMi	Ki	BRi	wi	Zi
1	10.3800	0.400	0.2810	1.4771	1	1	1.0000	10	10	$\pi$	$\pi$
2	5.0000	0.370	0.2000	2.1880	1	1	200.0	10	8	$\pi/2$	$\pi/2$
3	32.3240	0.350	0.1130	2.0079	1	1	200.00	10	200	$\pi/2$	$\pi/2$

Tabela 3.4.2.5: Parâmetros para simulação do robô e motor.

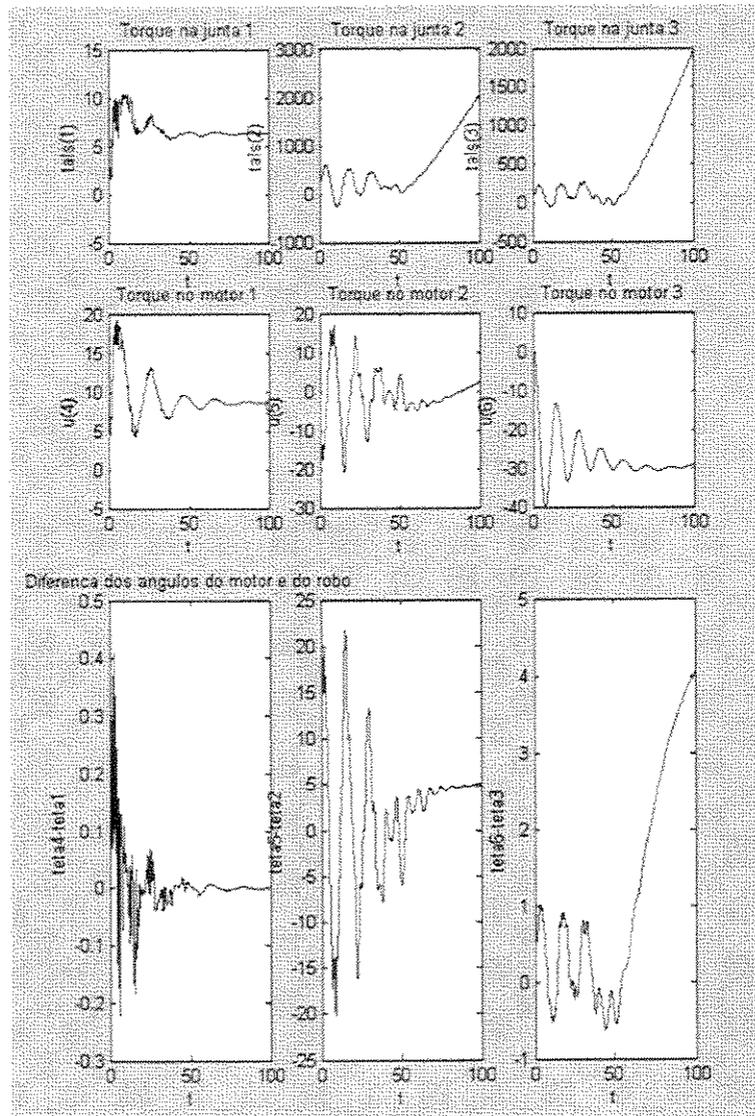


Figura 3.4.2.5 Torque nos braços do robô. Torque nos motores e diferença entre os respectivos ângulos motor-robô, considerando as condições iniciais [0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -2.25 0 -0.5] e tabela.

i	Mi	li	lic	li	Bli	BMi	JMi	Ki	B Ri	wi	Zi
1	10.3800	0.400	0.2810	50	1	1	1.0000	10	10	$\pi$	$\pi$
2	5.0000	0.370	0.2000	50	1	1	200.0	10	8	$\pi/2$	$\pi/2$
3	32.3240	0.350	0.1130	50	1	1	200.00	10	200	$\pi/2$	$\pi/2$

Tabela 3.4.2.6: Parâmetros para simulação do robô e motor.

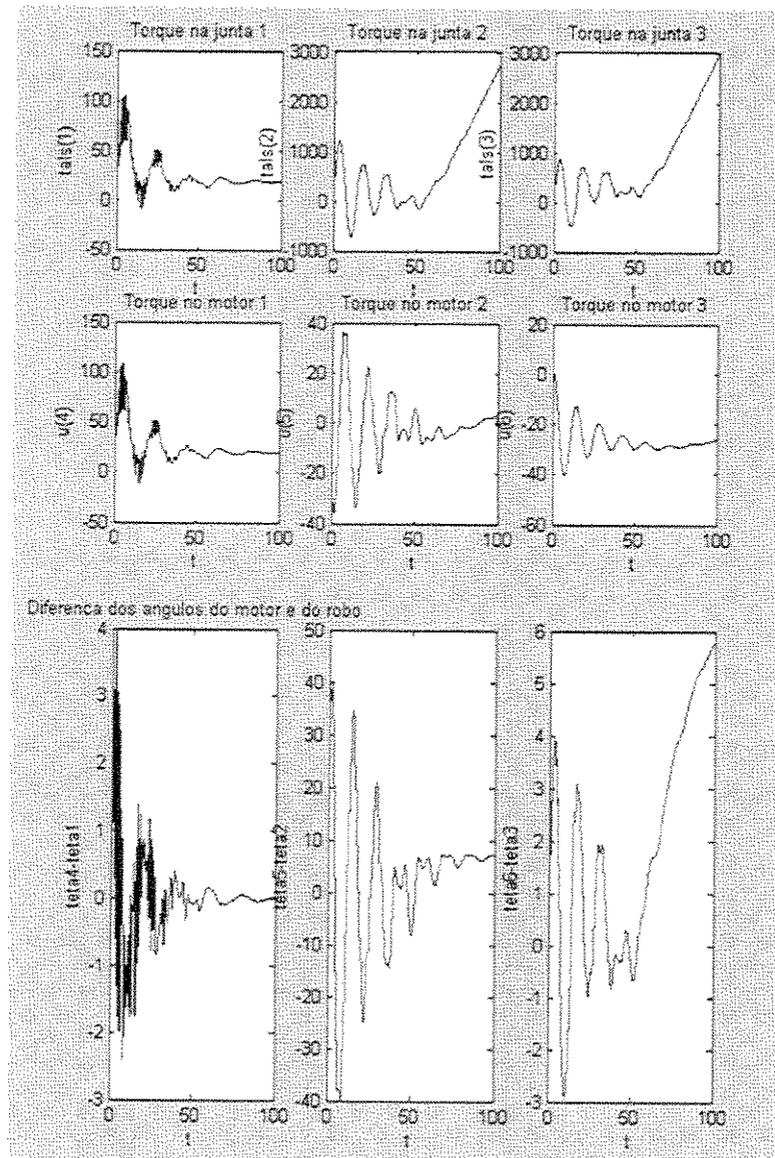


Figura 3.4.2.6 Torque nos braços do robô, Torque nos motores e diferença entre os respectivos ângulos motor-robô, considerando as condições iniciais [0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -2.25 0 -0.5] e tabela.

i	Mi	li	lic	li	Bli	BMi	JMi	Ki	BRi	wi	Zi
1	10.3800	0.400	0.2810	200	1	1	1.0000	10	10	$\pi$	$\pi$
2	5.00000	0.370	0.2000	200	1	1	200.0	10	8	$\pi/2$	$\pi/2$
3	32.3240	0.350	0.1130	200	1	1	200.00	10	200	$\pi/2$	$\pi/2$

Tabela 3.4.2.7: Parâmetros para simulação do robô e motor.

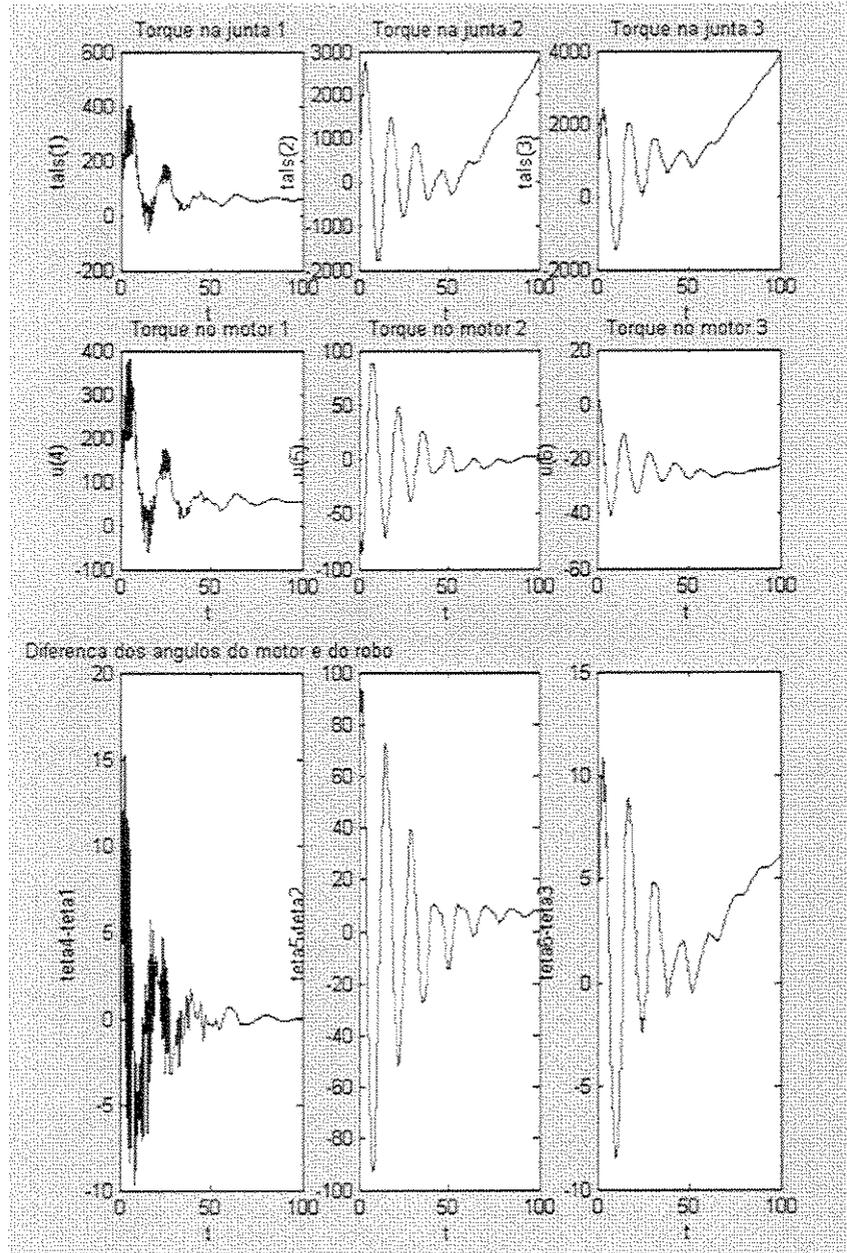


Figura 3.4.2.7 Torque nos braços do robô, Torque nos motores e diferença entre os respectivos ângulos motor-robô, considerando as condições iniciais  $[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -2.25 \ 0 \ -0.5]$  e tabela.

i	Mi	li	lie	Ii	Bli	BMi	JMi	Ki	BRi	wi	Zi
1	10.3800	0.4000	0.2810	500	1	1	1.0000	10	10	$\pi$	$\pi$
2	5.0000	0.3700	0.2000	500	1	1	200.00	10	8	$\pi/2$	$\pi/2$
3	32.3240	0.3500	0.1130	500	1	1	200.00	10	200	$\pi/2$	$\pi/2$

Tabela 3.4.2.8: Parâmetros para simulação do robô e motor.

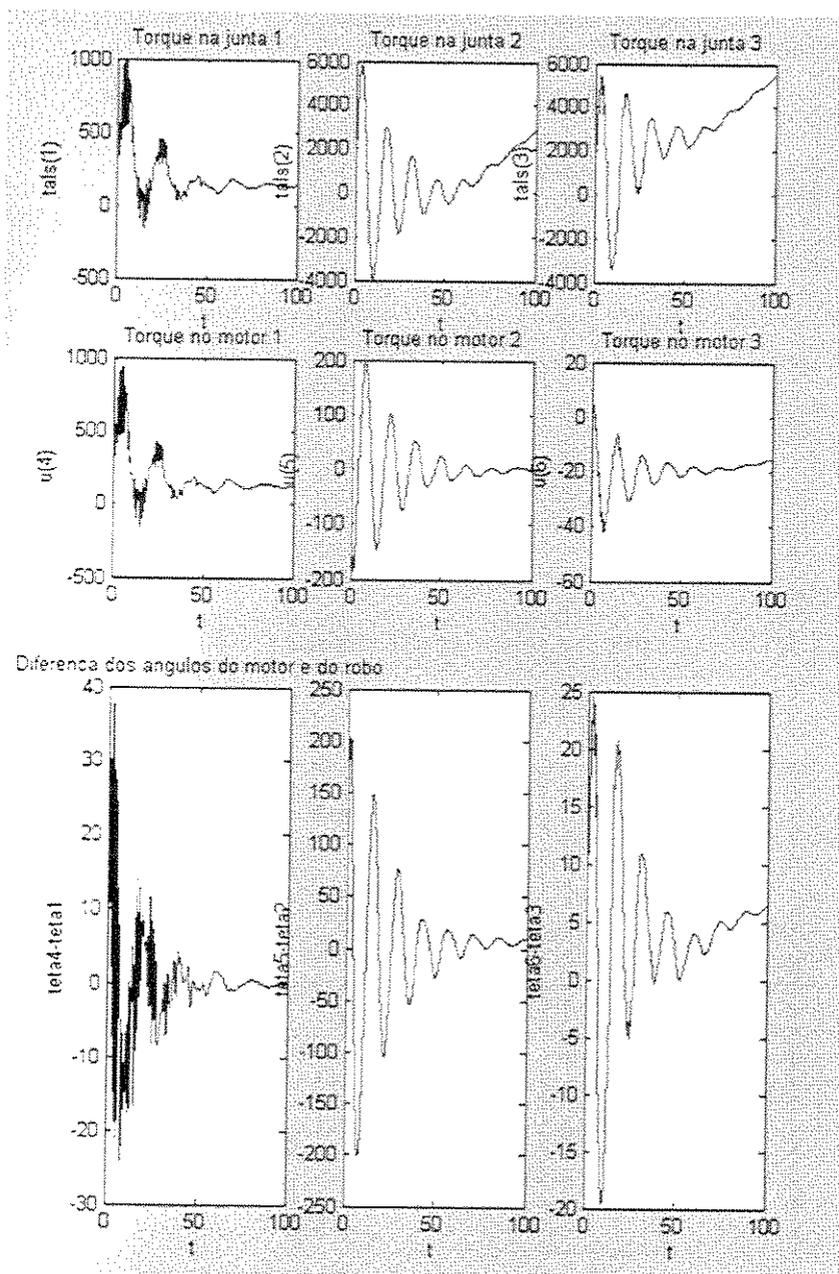


Figura 3.4.2.8 Torque nos braços do robô, Torque nos motores e diferença entre os respectivos ângulos motor-robô, considerando as condições iniciais [0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -2.25 0 -0.5] e tabela.

Simulação Variando a fricção do robô segundo dados das tabelas 3.4.2.9-3.4.2.12 que seguem e condições iniciais [0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -2.25 0 -0.5].

i	Mi	li	lic	li	Bli	BMi	JMi	Ki	BRi	wi	Zi
1	10.3800	0.400	0.2810	1.47714	1	1	1.0000	50.000	10	$\pi$	$\pi$
2	5.00000	0.370	0.2000	2.18800	1	1	200.000	1.000	8	$\pi/2$	$\pi/2$
3	32.3240	0.350	0.1130	2.00793	1	1	200.000	0.55	200	$\pi/2$	$\pi/2$

Tabela 3.4.2.9: Parâmetros para simulação do robô e motor.

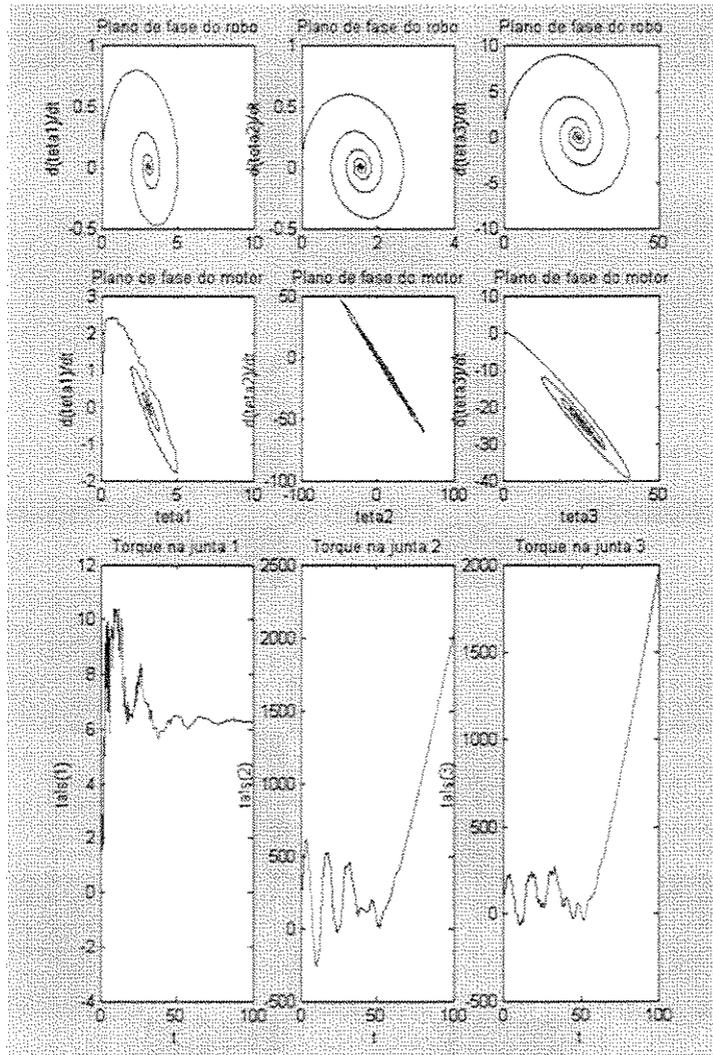


Figura 3.4.2.9 Plano de fase do robô, Plano de fase do motor e Torque no robô, considerando as condições iniciais [0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -2.25 0 -0.5] e tabela.

i	Mi	li	lic	li	Bli	BMi	JMi	Ki	BRi	wi	Zi
1	10.3800	0.400	0.2810	1.47714	10	1	1.0000	50.000	10	$\pi$	$\pi$
2	5.0000	0.370	0.2000	2.18800	10	1	200.000	1.000	8	$\pi/2$	$\pi/2$
3	32.3240	0.350	0.1130	2.00791	10	1	200.000	0.55	200	$\pi/2$	$\pi/2$

Tabela 3.4.2.10: Parâmetros para simulação do robô e motor.

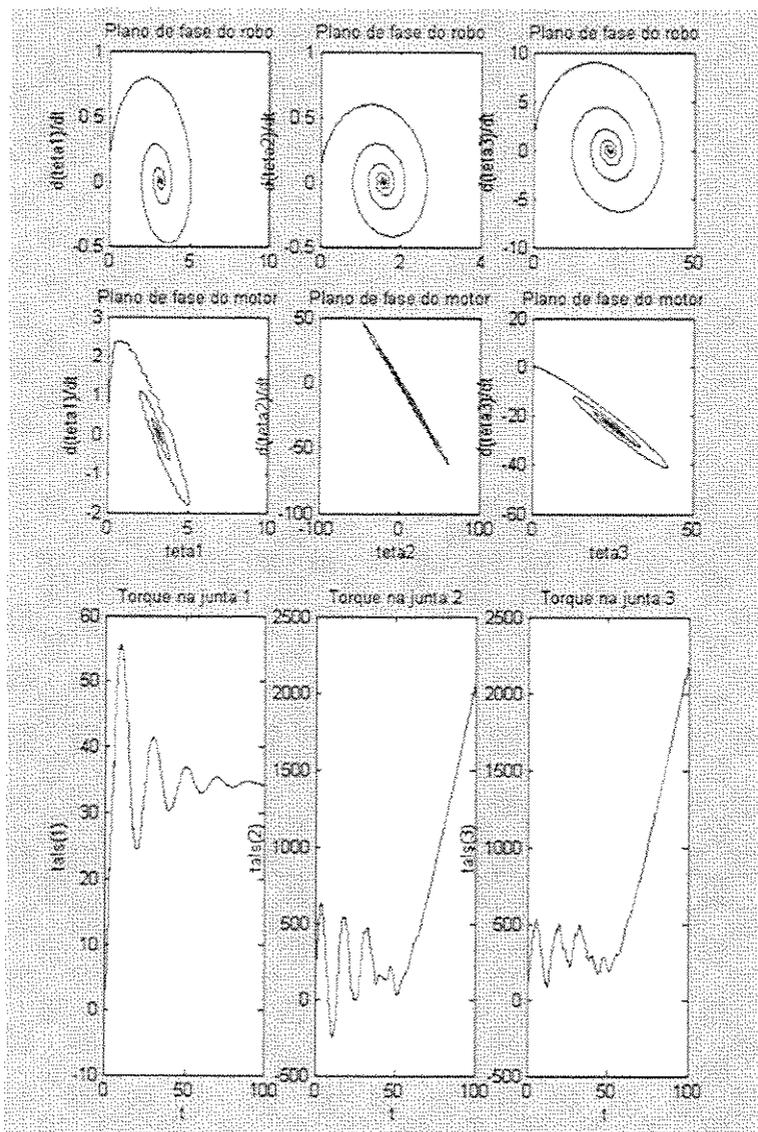


Figura 3.4.2.10 Plano de fase do robô, Plano de fase do motor e Torque no robô, considerando as condições iniciais  $[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -2.25 \ 0 \ -0.5]$  e tabela.

i	Mi	li	lic	li	Bli	BMi	JMi	Ki	BRi	wi	Zi
1	10.3800	0.4000	0.2810	1.47714	100	1	1.0000	50.0000	10	$\pi$	$\pi$
2	5.00000	0.3700	0.2000	2.18800	100	1	200.000	1.000	8	$\pi/2$	$\pi/2$
3	32.3240	0.3500	0.1130	2.00795	100	1	200.000	0.55	200	$\pi/2$	$\pi/2$

Tabela 3.4.2.11: Parâmetros para simulação do robô e motor.

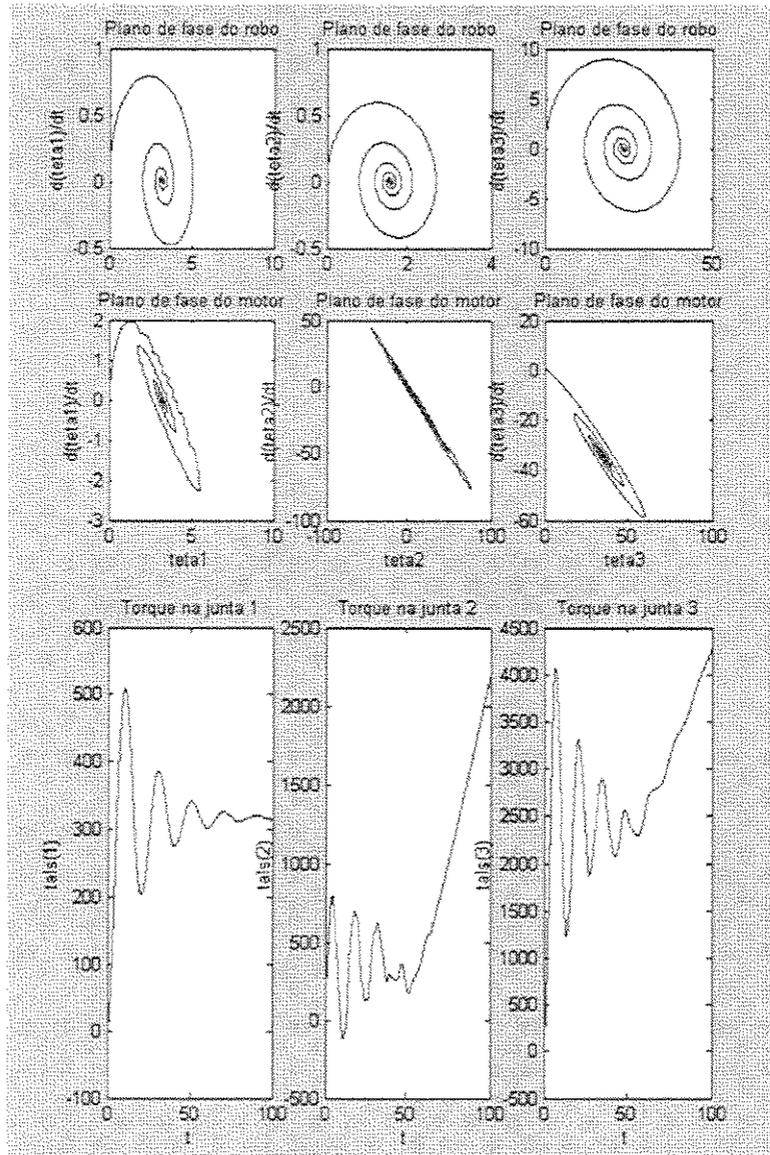


Figura 3.4.2.11 Plano de fase do robô, Plano de fase do motor e Torque no robô, considerando as condições iniciais  $[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -2.25 \ 0 \ -0.5]$  e tabela.

	Mi	li	lic	Ii	Bli	BMi	JMi	Ki	BRi	wi	Zi
1	10.3800	0.4000	0.2810	1.47714	500	1	1.0000	50.000	10	$\pi$	$\pi$
2	5.00000	0.3700	0.2000	2.18800	500	1	200.000	1.000	8	$\pi/2$	$\pi/2$
3	32.3240	0.3500	0.1130	2.00793	500	1	200.000	0.55	200	$\pi/2$	$\pi/2$

Tabela 3.4.2.12: Parâmetros para simulação do robô e motor.

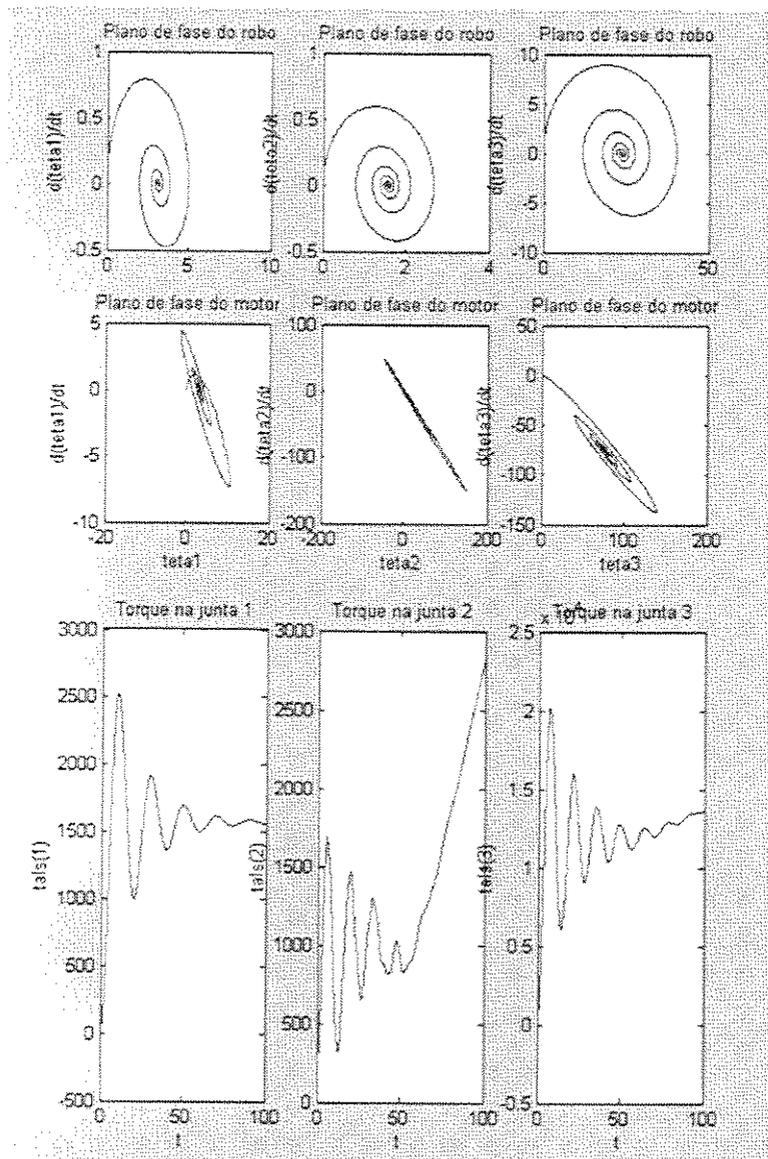


Figura 3.4.2.12 Plano de fase do robô, Plano de fase do motor e Torque no motor, considerando as condições iniciais  $[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -2.25 \ 0 \ -0.5]$  e tabela.

Simulação variando a fricção relativa  $B_{Ri}$ , segundo dados das tabelas 3.4.2.13 a 3.4.2.17 e condições iniciais [0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -2.25 0 -0.5]

i	Mi	li	lic	li	Bli	BMi	JMi	Ki	BRi	wi	Zi
1	10.3800	0.4000	0.2810	1.47714	1	1	1.0000	50.000	0.5	$\pi$	$\pi$
2	5.00000	0.3700	0.2000	2.18800	1	1	5.000	1.000	0.5	$\pi/2$	$\pi/2$
3	32.3240	0.3500	0.1130	2.00793	1	1	10.000	0.55	0.5	$\pi/2$	$\pi/2$

Tabela 3.4.2.13: Parâmetros para simulação do robô e motor.

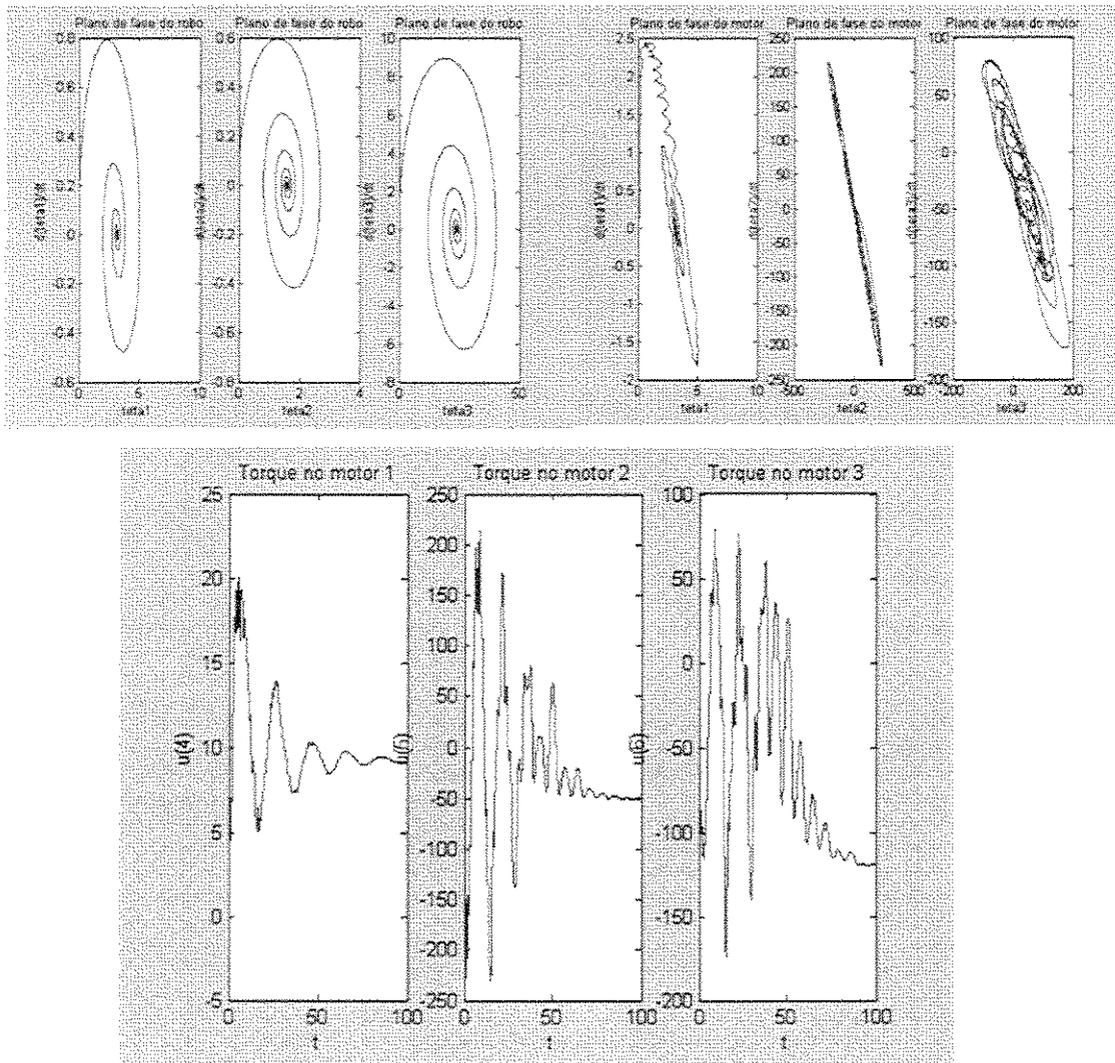


Figura 3.4.2.13 Plano de fase do robô, Plano de fase do motor e Torque no motor, considerando as condições iniciais [0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -2.25 0 -0.5] e tabela.

i	Mi	li	lic	li	Bli	BMi	JMi	Ki	BRi	wi	Zi
1	10.3800	0.400	0.2810	1.47714	1	1	1.0000	50.000	1	$\pi$	$\pi$
2	5.0000	0.370	0.2000	2.18800	1	1	5.000	1.000	1	$\pi/2$	$\pi/2$
3	32.3240	0.350	0.1130	2.0079	1	1	10.000	0.55	1	$\pi/2$	$\pi/2$

Tabela 3.4.2.14: Parâmetros para simulação do robô e motor.

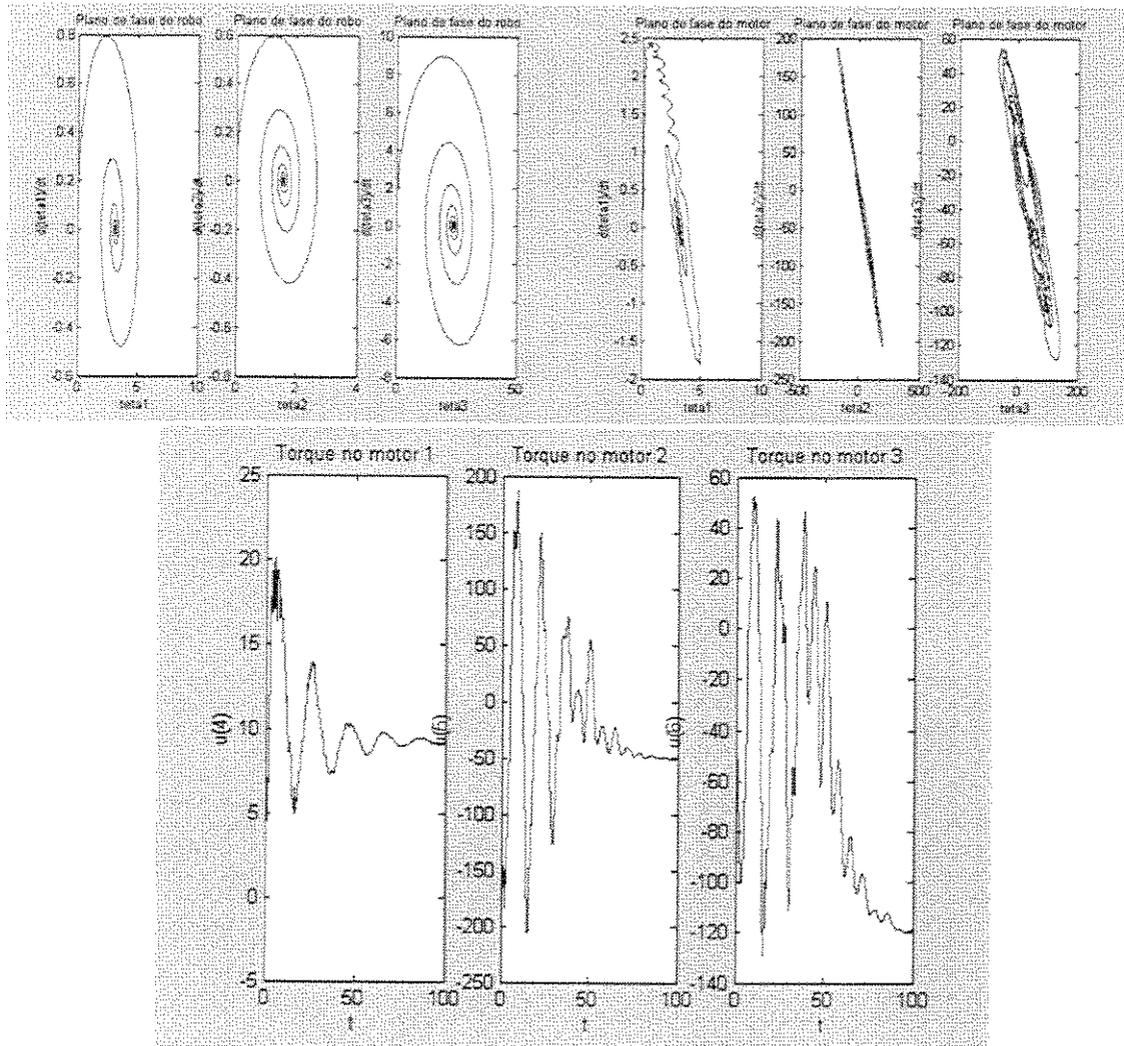


Figura 3.4.2.14 Plano de fase do robô, Plano de fase do motor e Torque no motor, considerando as condições iniciais  $[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -2.25 \ 0 \ -0.5]$  e tabela.

i	Mi	li	lic	li	Bli	BMi	JMi	Ki	BRi	wi	Zi
1	10.3800	0.400	0.2810	1.47714	1	1	1.0000	50.000	10	$\pi$	$\pi$
2	5.00000	0.370	0.2000	2.18800	1	1	5.000	1.000	5	$\pi/2$	$\pi/2$
3	32.3240	0.350	0.1130	2.00793	1	1	10.000	0.55	10	$\pi/2$	$\pi/2$

Tabela 3.4.2.15: Parâmetros para simulação do robô e motor.

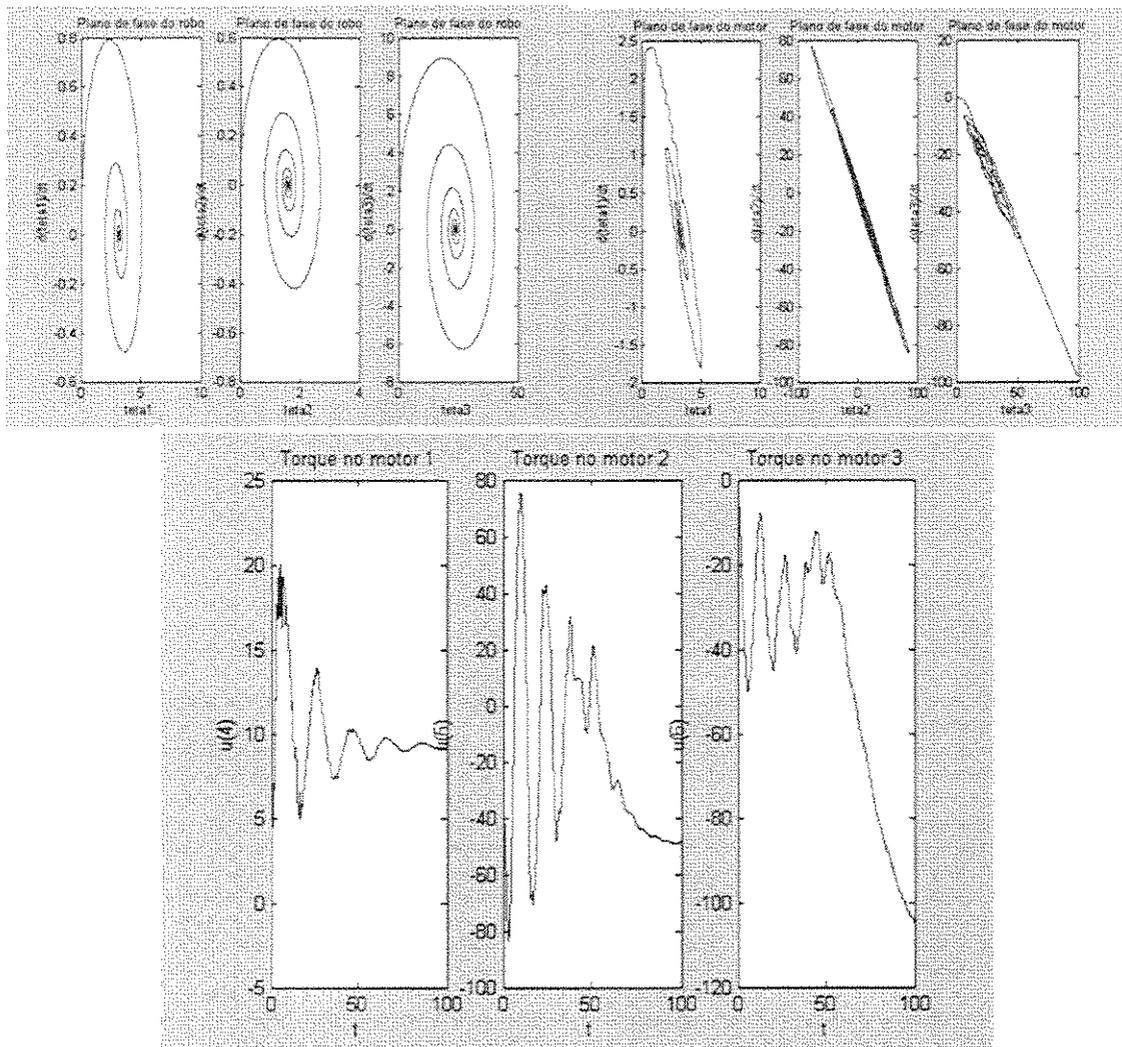


Figura 3.4.2.15 Plano de fase do robô. Plano de fase do motor e Torque no motor, considerando as condições iniciais  $[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -2.25 \ 0 \ -0.5]$  e tabela.

i	Mi	li	lic	li	Bli	BMi	JMi	Ki	BRi	wi	Zi
1	10.3800	0.400	0.2810	1.47714	1	1	1.0000	50.000	10	$\pi$	$\pi$
2	5.0000	0.370	0.2000	2.18800	1	1	5.000	1.000	8	$\pi/2$	$\pi/2$
3	32.3240	0.350	0.1130	2.00793	1	1	10.000	0.55	10	$\pi/2$	$\pi/2$

Tabela 3.4.2.16: Parâmetros para simulação do robô e motor.

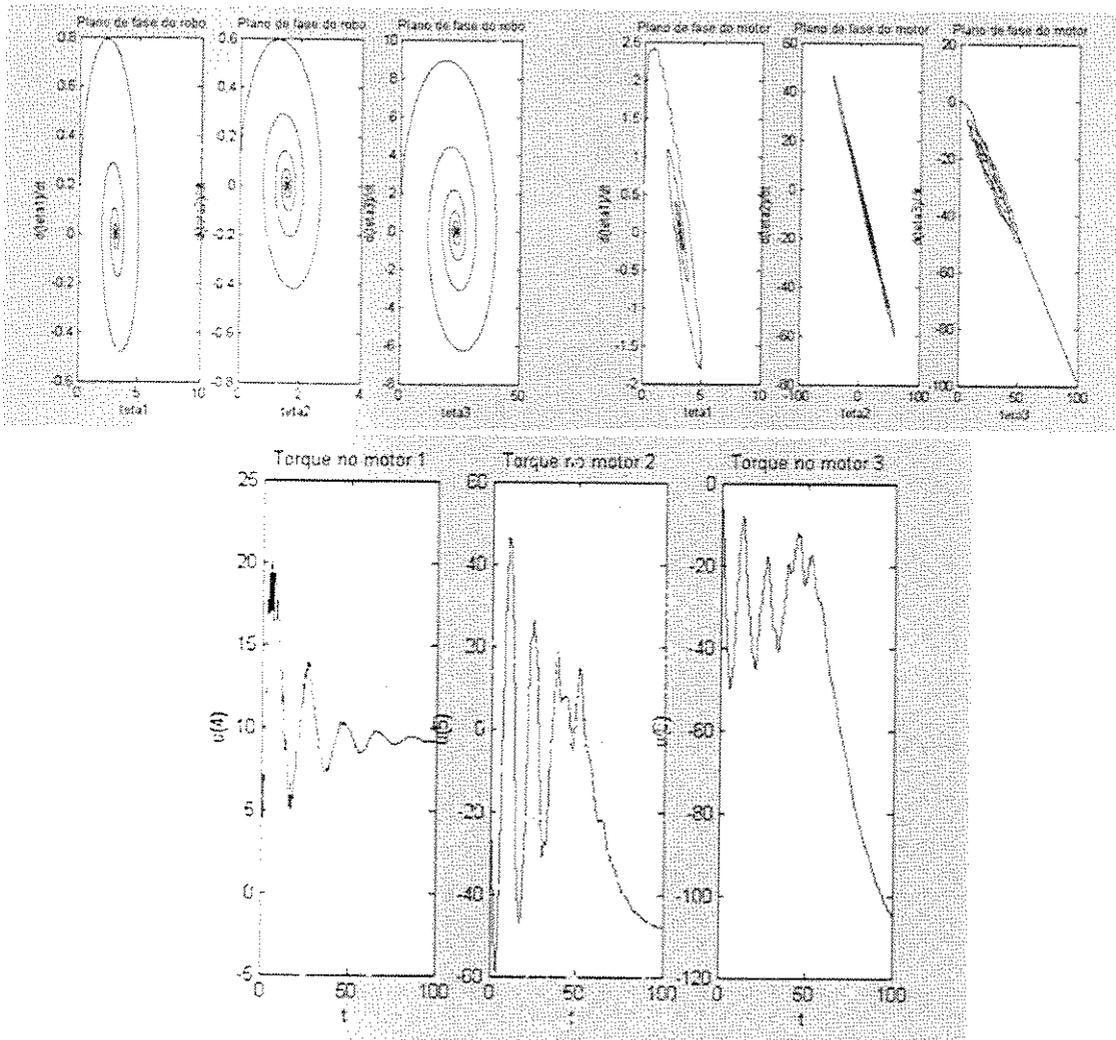


Figura 3.4.2.16 Plano de fase do robô, Plano de fase do motor e Torque no motor, considerando as condições iniciais [0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -2.25 0 -0.5] e tabela.

i	Mi	li	lic	li	Bli	BMi	JMi	Ki	BRi	wi	Zi
1	10.3800	0.400	0.2810	1.47714	1	1	1.0000	50.000	10	$\pi$	$\pi$
2	5.0000	0.370	0.2000	2.18800	1	1	5.000	1.000	8	$\pi/2$	$\pi/2$
3	32.3240	0.350	0.1130	2.00793	1	1	10.000	0.55	200	$\pi/2$	$\pi/2$

Tabela 3.4.2.17: Parâmetros para simulação do robô e motor.

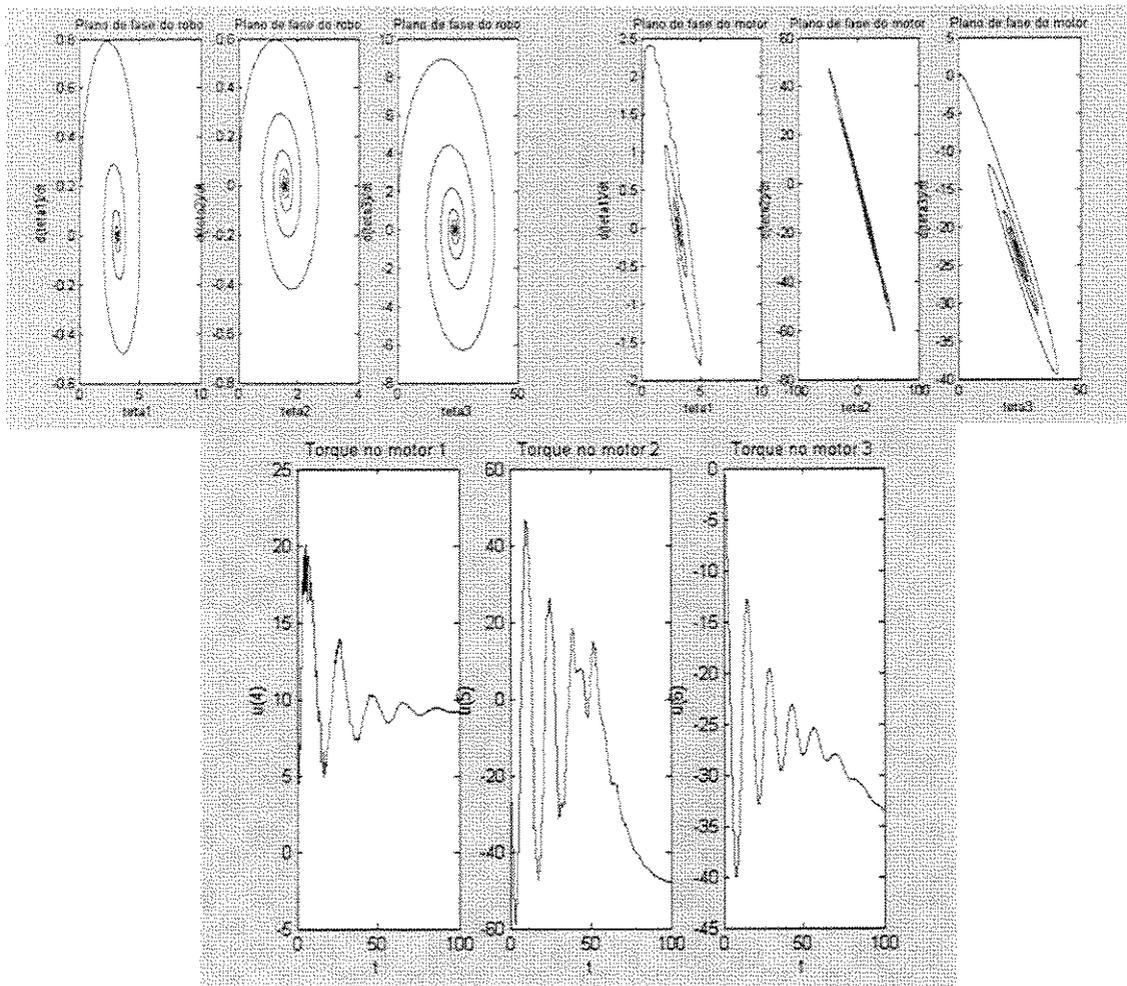


Figura 3.4.2.17 Plano de fase do robô, Plano de fase do motor e Torque no motor, considerando as condições iniciais  $[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -2.25 \ 0 \ -0.5]$  e tabela.

Simulação Variando a rigidez  $K_i$  da mola de acordo com as tabelas 3.4.2.18 a 3.4.2.23 e condições iniciais  $[0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ -2.25\ 0\ -0.5]$ .

i	Mi	li	lic	li	Bli	BMi	JMi	Ki	BRi	wi	Zi
1	10.380	0.400	0.2810	1.47714	1	1	1.0000	0.5	10	$\pi$	$\pi$
2	5.0000	0.370	0.2000	2.1880	1	1	200.0	0.5	8	$\pi/2$	$\pi/2$
3	32.324	0.350	0.1130	2.00793	1	1	200.00	0.5	200	$\pi/2$	$\pi/2$

Tabela 3.4.2.18: Parâmetros para simulação do robô e motor.

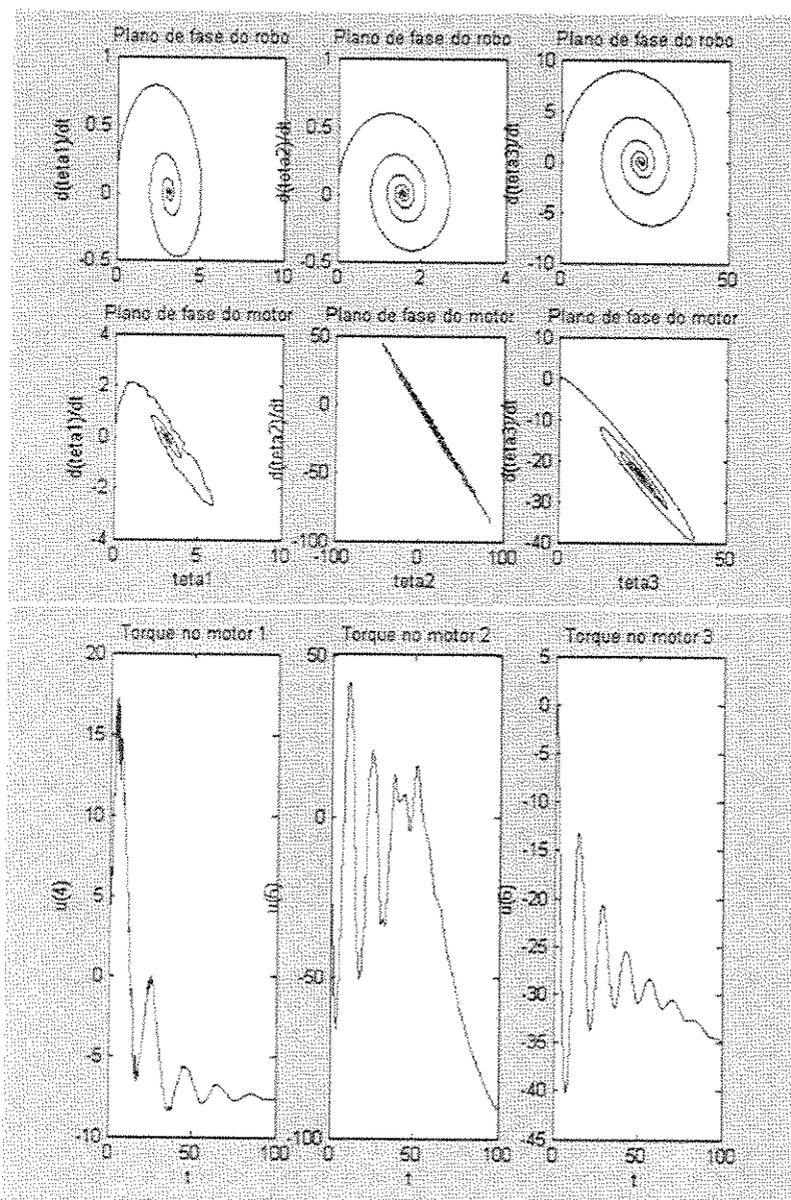


Figura 3.4.2.18 Plano de fase do robô, Plano de fase do motor e Torque no motor, considerando as condições iniciais  $[0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ -2.25\ 0\ -0.5]$  e tabela.

j	Mi	li	lic	li	Bli	BMi	JMi	Ki	BRi	wi	Zi
1	10.380	0.400	0.2810	1.47714	1	1	1.0000	10	10	$\pi$	$\pi$
2	5.0000	0.370	0.2000	2.18800	1	1	200.0	5	8	$\pi/2$	$\pi/2$
3	32.324	0.350	0.1130	2.00793	1	1	200.00	5	200	$\pi/2$	$\pi/2$

Tabela 3.4.2.19: Parâmetros para simulação do robô e motor.

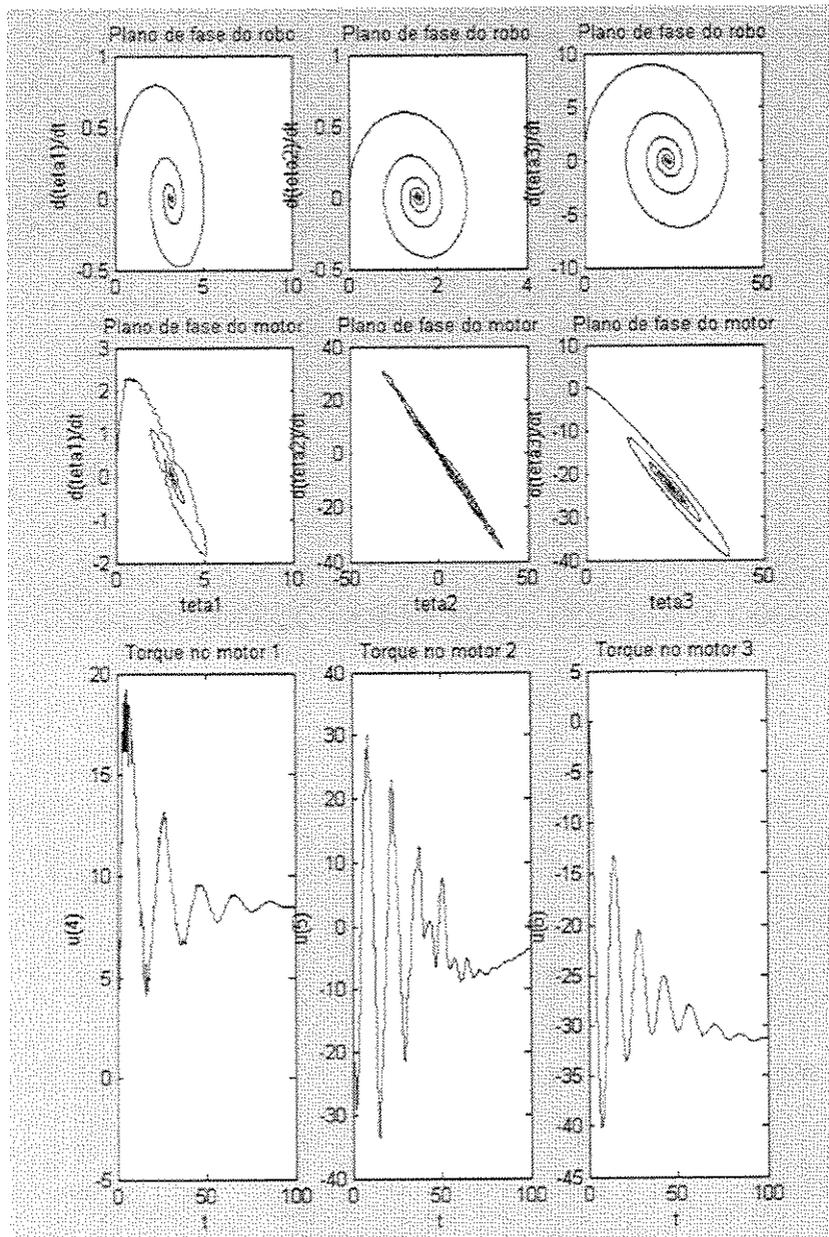


Figura 3.4.2.19 Plano de fase do robô, Plano de fase do motor e Torque no motor, considerando as condições iniciais  $[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -2.25 \ 0 \ -0.5]$  e tabela.

i	Mi	li	lic	li	Bli	BMi	JMi	Ki	BRi	wi	Zi
1	10.3800	0.400	0.2810	1.47714	1	1	1.0000	10	10	$\pi$	$\pi$
2	5.0000	0.370	0.2000	2.18800	1	1	200.0	2	8	$\pi/2$	$\pi/2$
3	32.3240	0.350	0.1130	2.00793	1	1	200.00	10	200	$\pi/2$	$\pi/2$

Tabela 3.4.2.20: Parâmetros para simulação do robô e motor.

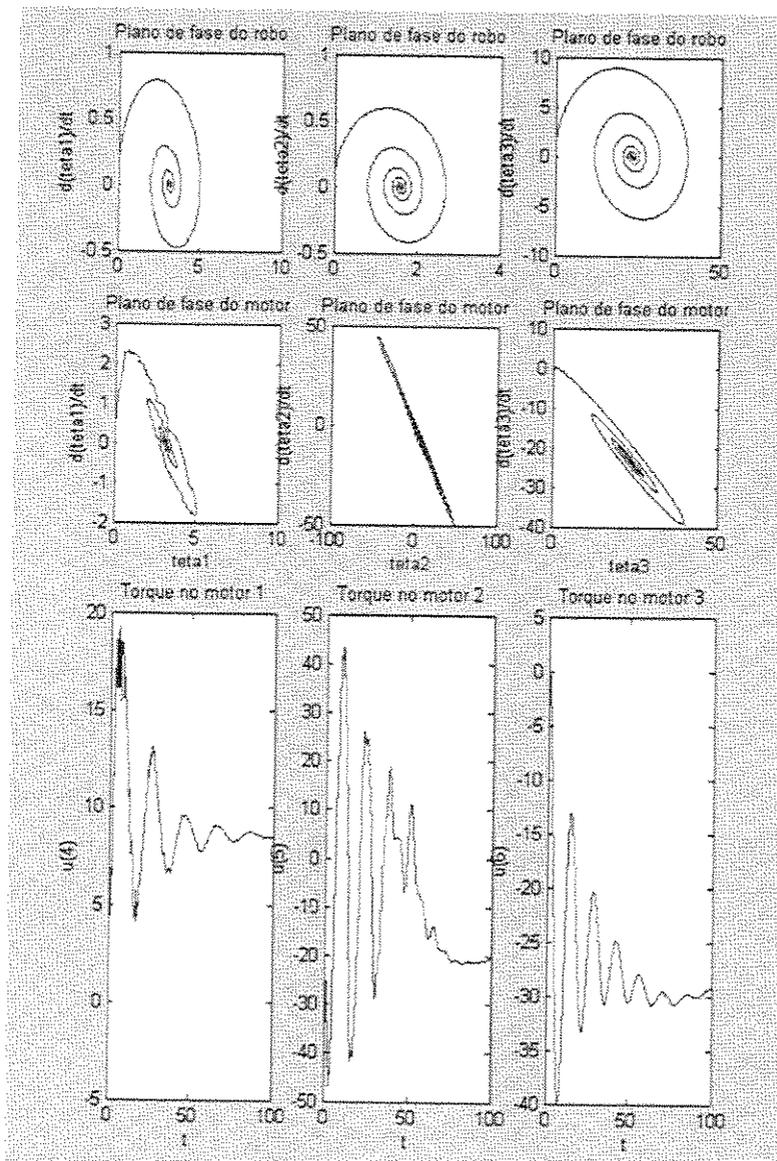


Figura 3.4.2.20 Plano de fase do robô, Plano de fase do motor e Torque no motor, considerando as condições iniciais [0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -2.25 0 -0.5] e tabela.

i	Mi	li	lic	li	Bli	BMi	JMi	Ki	BRi	wi	Zi
1	10.3800	0.400	0.2810	1.4771	1	1	1.0000	10	10	$\pi$	$\pi$
2	5.0000	0.370	0.2000	2.1880	1	1	200.0	4	8	$\pi/2$	$\pi/2$
3	32.3240	0.350	0.1130	2.0079	1	1	200.00	10	200	$\pi/2$	$\pi/2$

Tabela 3.4.2.21: Parâmetros para simulação do robô e motor.

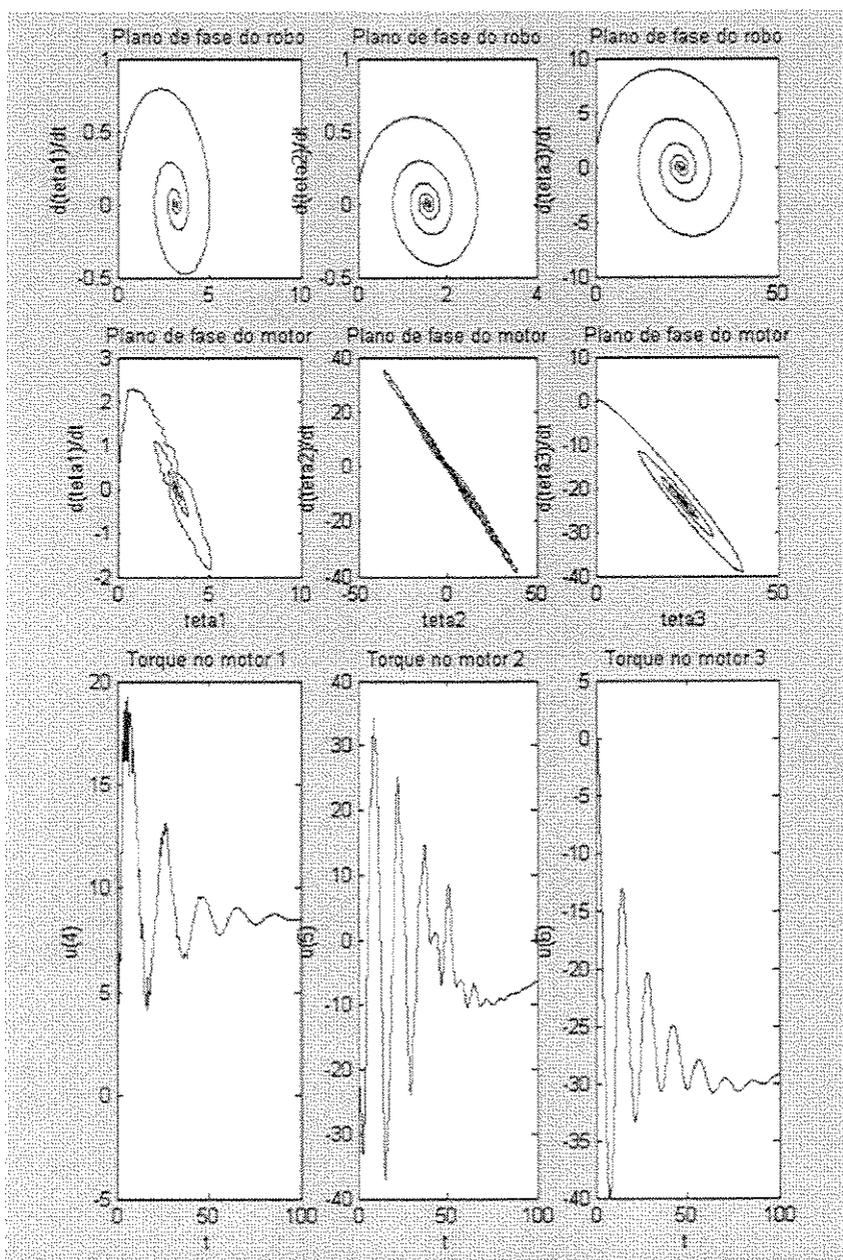


Figura 3.4.2.21 Plano de fase do robô, Plano de fase do motor e Torque no motor, considerando as condições iniciais  $[0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ -2.25\ 0\ -0.5]$  e tabela.

i	Mi	li	lic	Ii	Bli	BMi	JMi	Ki	BRi	wi	Zi
1	10.3800	0.400	0.2810	1.4771	1	1	1.0000	10	10	$\pi$	$\pi$
2	5.0000	0.370	0.2000	2.1880	1	1	200.0	10	8	$\pi/2$	$\pi/2$
3	32.3240	0.350	0.1130	2.0079	1	1	200.00	10	200	$\pi/2$	$\pi/2$

Tabela 3.4.2.22: Parâmetros para simulação do robô e motor.

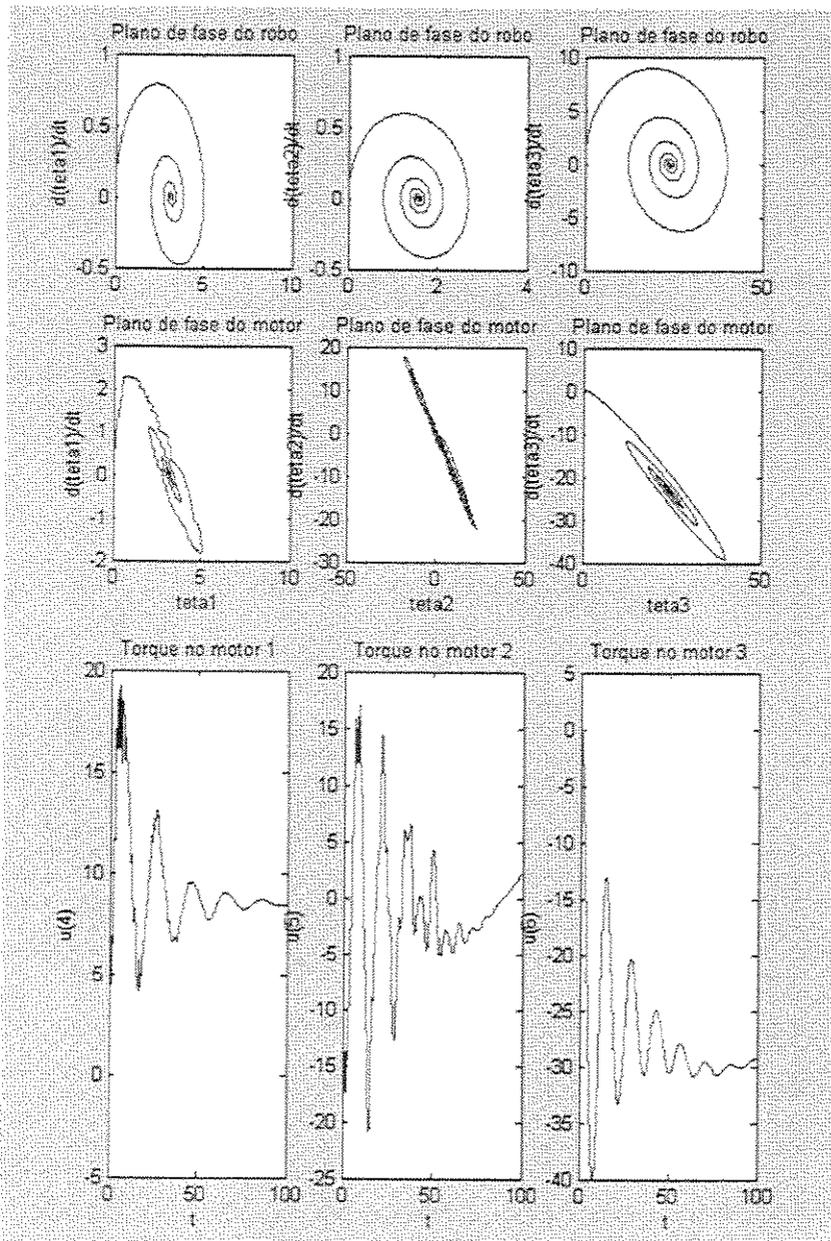


Figura 3.4.2.22 Plano de fase do robô, Plano de fase do motor e Torque no motor, considerando as condições iniciais [0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -2.25 0 -0.5] e tabela.

i	Mi	li	lic	li	Bli	BMi	JMi	Ki	BRi	wi	Zi
1	10.3800	0.400	0.2810	1.4771	1	1	1.0000	100	10	$\pi$	$\pi$
2	5.0000	0.370	0.2000	2.1880	1	1	200.0	100	8	$\pi/2$	$\pi/2$
3	32.3240	0.350	0.1130	2.0079	1	1	200.00	100	200	$\pi/2$	$\pi/2$

Tabela 3.4.2.23: Parâmetros para simulação do robô e motor.

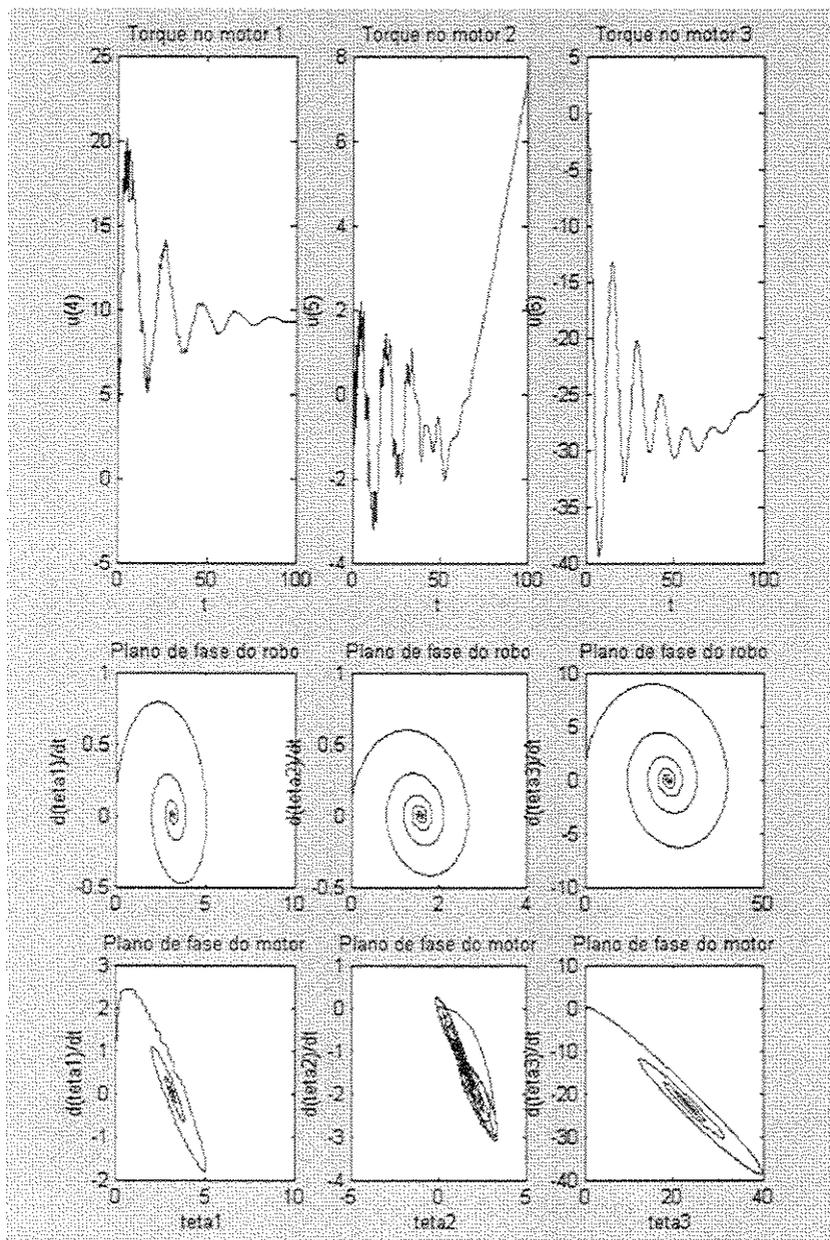


Figura 3.4.2.23 Plano de fase do robô, Plano de fase do motor e Torque no motor, considerando as condições iniciais [0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -2.25 0 -0.5] e tabela.

Simulação do comportamento da diferença entre o deslocamento angular do robô e seu respectivo motor ( $\theta_{iR}-\theta_{iM}$ ), variando  $K_R$  de acordo com os dados das tabelas 3.4.2.24 a 3.4.2.28

i	Mi	li	lic	li	Bli	BMi	JMi	Ki	BRi	wi	Zi
1	10.380	0.400	0.2810	1.47714	1	1	1.0000	0.5	10	$\pi$	$\pi$
2	5.0000	0.370	0.2000	2.18800	1	1	200.0	0.5	8	$\pi/2$	$\pi/2$
3	32.3240	0.350	0.1130	2.00793	1	1	200.00	0.5	200	$\pi/2$	$\pi/2$

Tabela 3.4.2.24: Parâmetros para simulação do robô e motor.

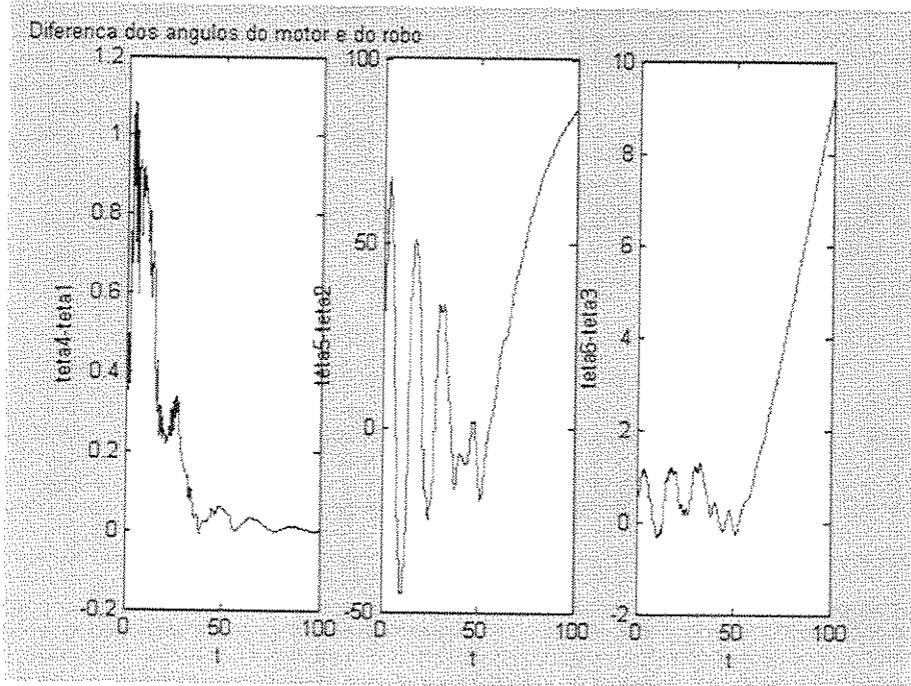


Figura 3.4.2.24 Variação da diferença entre os respectivos ângulos robô-motor, considerando as condições iniciais [0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -2.25 0 -0.5] e tabela.

i	Mi	li	lic	li	Bli	BMi	JMi	Ki	BRi	wi	Zi
1	10.3800	0.4000	0.2810	1.47714	1	1	1.0000	10	10	$\pi$	$\pi$
2	5.00000	0.3700	0.2000	2.18800	1	1	200.0	5	8	$\pi/2$	$\pi/2$
3	32.3240	0.3500	0.1130	2.00793	1	1	200.00	5	200	$\pi/2$	$\pi/2$

Tabela 3.4.2.25: Parâmetros para simulação do robô e motor.

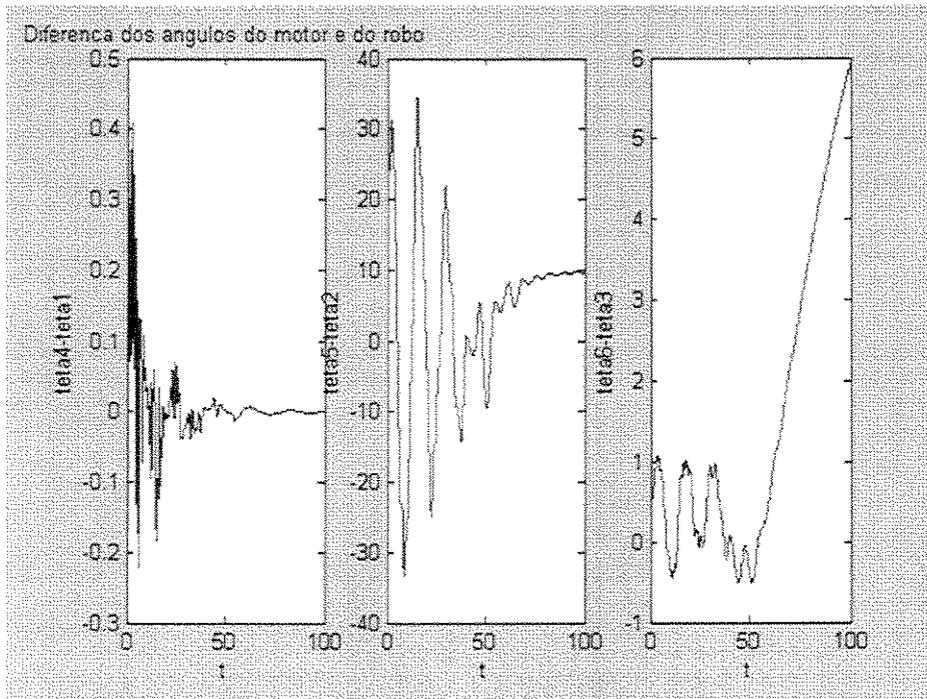


Figura 3.4.2.25 Variação da diferença entre os respectivos ângulos robô-motor, considerando as condições iniciais [0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -2.25 0 -0.5] e tabela.

i	Mi	li	lic	li	Bli	BMi	JMi	Ki	BRi	wi	Zi
1	10.3800	0.400	0.2810	1.47714	1	1	1.0000	10	10	$\pi$	$\pi$
2	5.00000	0.370	0.2000	2.18800	1	1	200.0	2	8	$\pi/2$	$\pi/2$
3	32.3240	0.350	0.1130	2.00793	1	1	200.00	10	200	$\pi/2$	$\pi/2$

Tabela 3.4.2.26: Parâmetros para simulação do robô e motor.

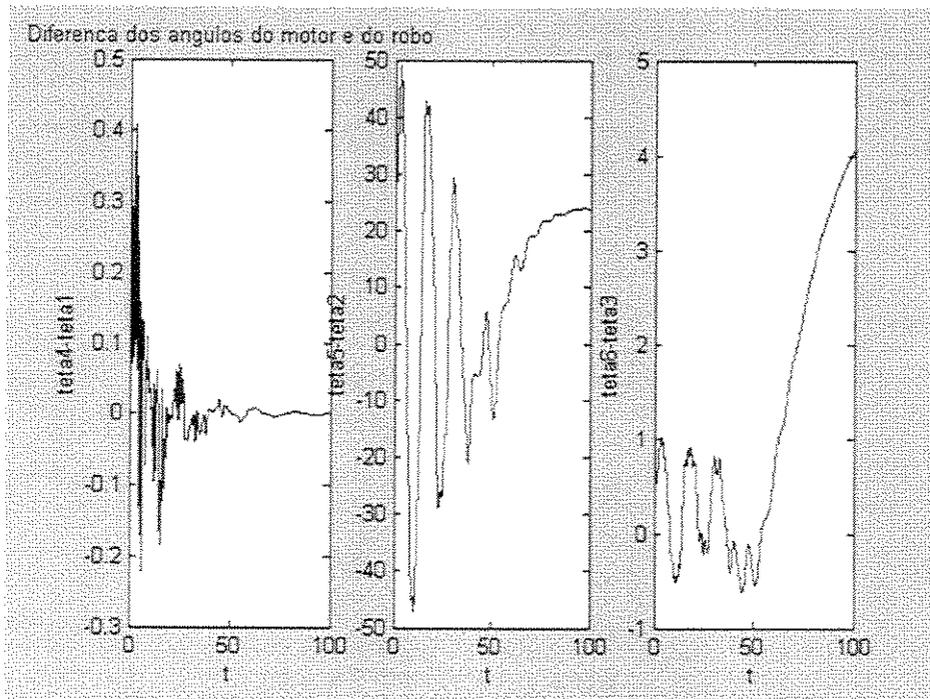


Figura 3.4.2.26 Variação da diferença entre os respectivos ângulos robô-motor, considerando as condições iniciais  $[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -2.25 \ 0 \ -0.5]$  e tabela.

i	Mi	li	lic	Ii	Bli	BMi	JMi	Ki	BRi	wi	Zi
1	10.3800	0.4000	0.2810	1.4771	1	1	1.0000	10	10	$\pi$	$\pi$
2	5.0000	0.3700	0.2000	2.1880	1	1	200.0	4	8	$\pi/2$	$\pi/2$
3	32.3240	0.3500	0.1130	2.0079	1	1	200.00	10	200	$\pi/2$	$\pi/2$

Tabela 3.4.2.27: Parâmetros para simulação do robô e motor.

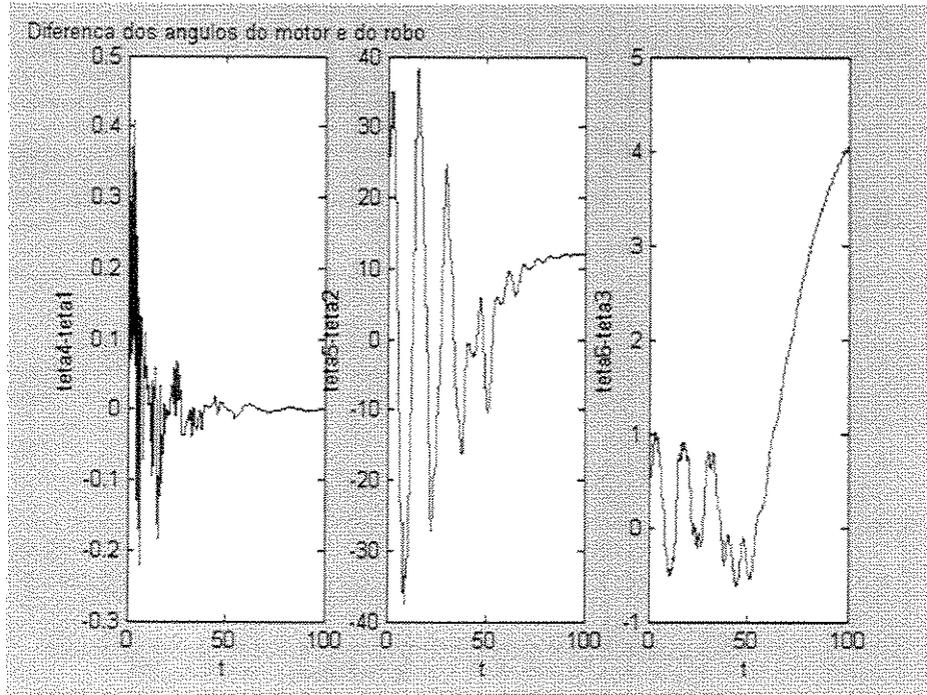


Figura 3.4.2.27 Variação da diferença entre os respectivos ângulos robô-motor, considerando as condições iniciais [0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -2.25 0 -0.5] e tabela.

i	Mi	li	lic	li	Bli	BMi	JMi	Ki	BRi	wi	Zi
1	10.380	0.400	0.2810	1.4771	1	1	1.0000	10	10	$\pi$	$\pi$
2	5.0000	0.370	0.2000	2.1880	1	1	200.0	10	8	$\pi/2$	$\pi/2$
3	32.324	0.350	0.1130	2.0079	1	1	200.00	10	200	$\pi/2$	$\pi/2$

Tabela 3.4.2.28: Parâmetros para simulação do robô e motor.

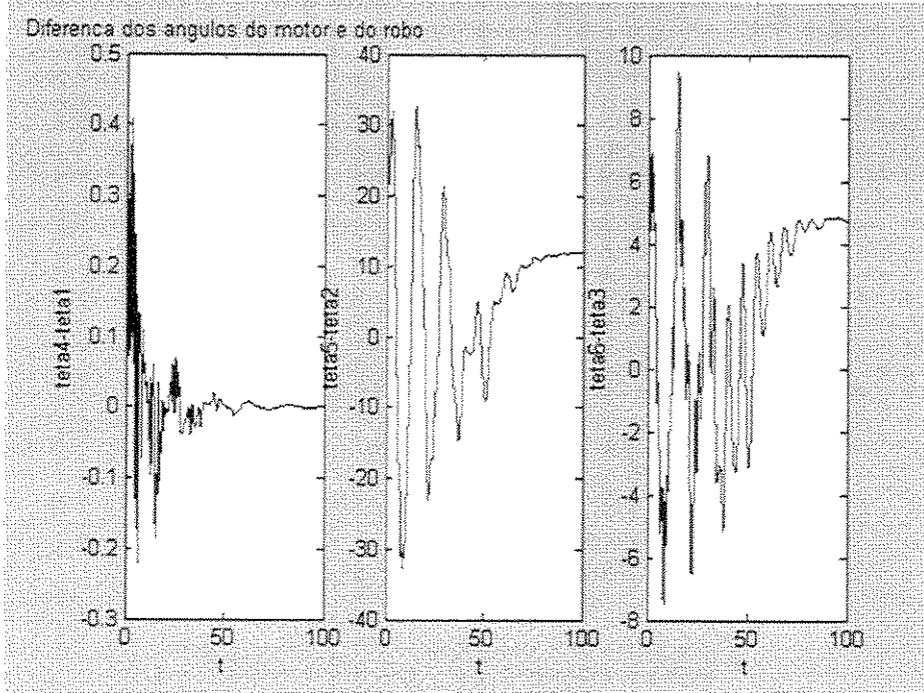


Figura 3.4.2.28 Variação da diferença entre os respectivos ângulos robô-motor, considerando as condições iniciais [0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -2.25 0 -0.5] e tabela.

i	Mi	li	lic	li	Bli	BMi	JMi	Ki	BRi	wi	Zi
1	10.3800	0.400	0.2810	1.4771	1	1	1.0000	100	10	$\pi$	$\pi$
2	5.0000	0.370	0.2000	2.1880	1	1	200.0	100	8	$\pi/2$	$\pi/2$
3	32.3240	0.350	0.1130	2.0079	1	1	200.00	100	200	$\pi/2$	$\pi/2$

Tabela 3.4.2.29: Parâmetros para simulação do robô e motor.

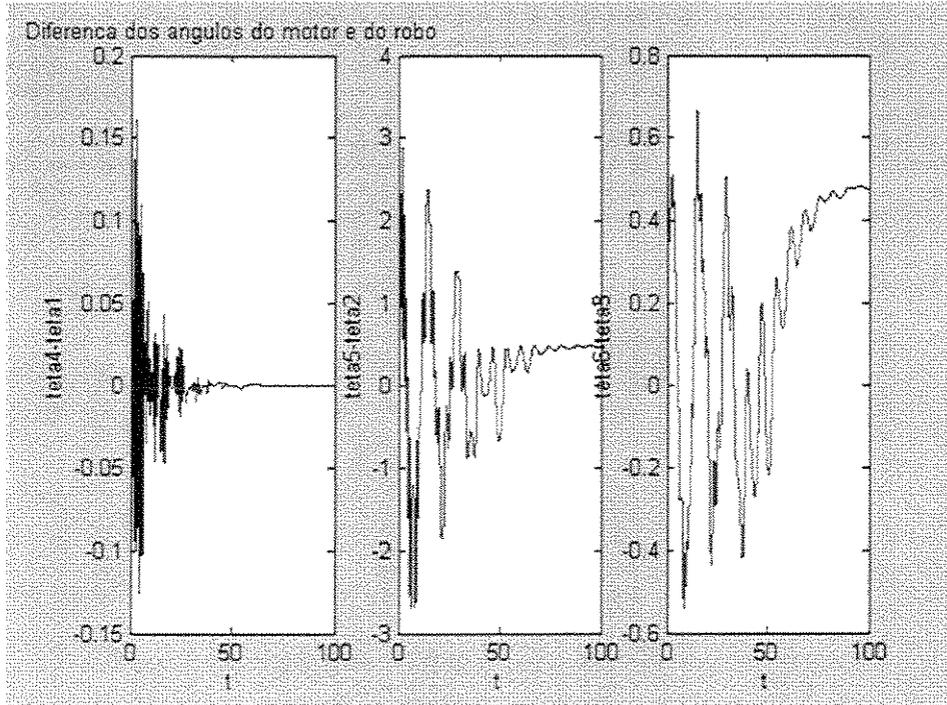


Figura 3.4.2.29 Simulação da diferença entre os respectivos ângulos robô-motor, considerando as condições iniciais  $[0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ -2.25\ 0\ -0.5]$  e tabela.

3.4.3 Simulação Com Interação robô/motor Linear e Não-Linear, de acordo com os dados das tabelas 3.4.3.1-3.4.3.5 e condições iniciais [0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -2.25 0 -0.5]

i	Mi	li	lic	li	BLi	BMi	JMi	Ki	BRi	wi	Zi
1	10.3800	0.400	0.2810	1.47714	1	1	1.0000	50.000	10	$\pi$	$\pi$
2	5.0000	0.370	0.2000	2.1880	1	1	5.0000	1.000	8	$\pi/2$	$\pi/2$
3	32.3240	0.350	0.1130	2.0079	1	1	10.000	0.55	200	$\pi/2$	$\pi/2$

Tabela 3.4.3.1: Parâmetros para simulação do robô e motor.

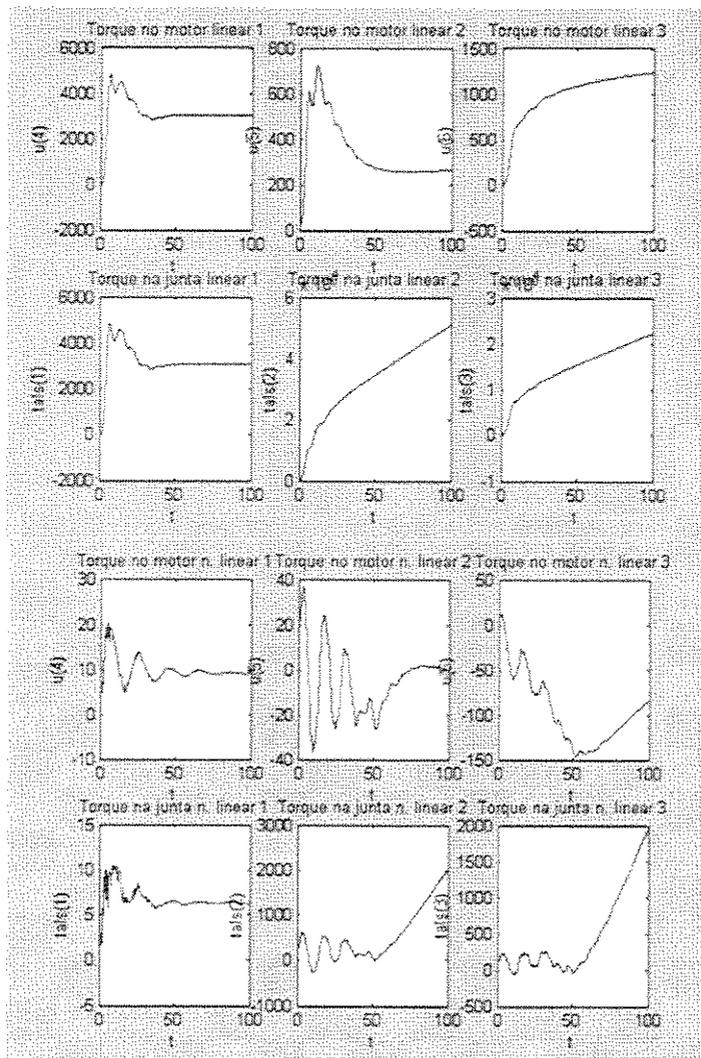


Figura 3.4.3.1 Torques no motor e robô lineares e não lineares considerando as condições iniciais [0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -2.25 0 -0.5] e tabela.



i	Mi	li	lic	li	Bli	BMi	JMi	Ki	BRi	wi	Zi
1	10.3800	0.4000	0.2810	1.47714	1	1	1.0000	50.0000	10	$\pi$	$\pi$
2	5.00000	0.3700	0.2000	2.18800	1	1	50.0000	1.0000	8	$\pi/2$	$\pi/2$
3	32.3240	0.3500	0.1130	2.00793	1	1	100.0000	0.55	200	$\pi/2$	$\pi/2$

Tabela 3.4.3.3: Parâmetros para simulação do robô e motor.

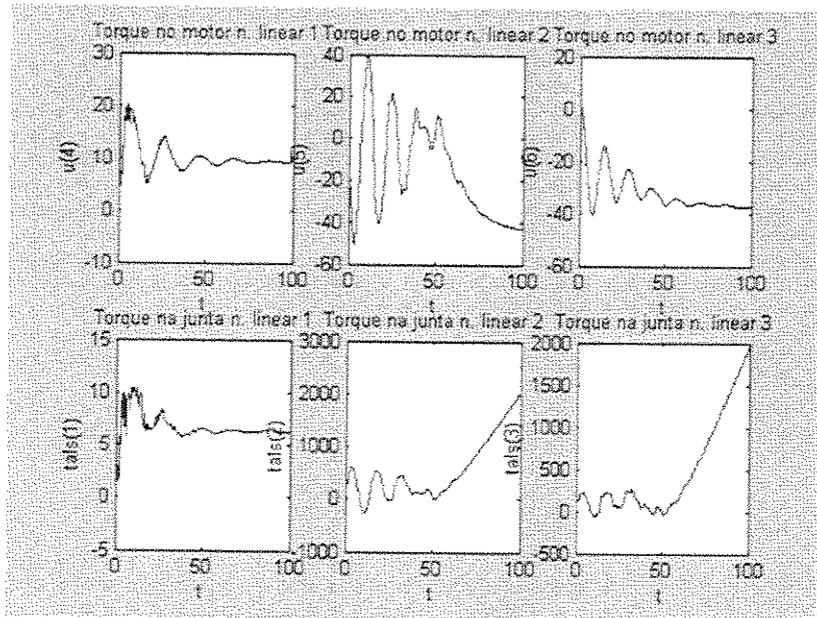


Figura 3.4.3.3 Torques no motor e robô lineares e não lineares considerando as condições iniciais [0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -2.25 0 -0.5] e tabela.

i	Mi	li	lic	Ii	Bli	BMi	JMi	Ki	BRi	wi	Zi
1	10.3800	0.400	0.2810	50	1	1	1.0000	10	10	$\pi$	$\pi$
2	5.0000	0.370	0.2000	50	1	1	200.0	10	8	$\pi/2$	$\pi/2$
3	32.3240	0.350	0.1130	50	1	1	200.00	10	200	$\pi/2$	$\pi/2$

Tabela 3.4.3.4: Parâmetros para simulação do robô e motor.

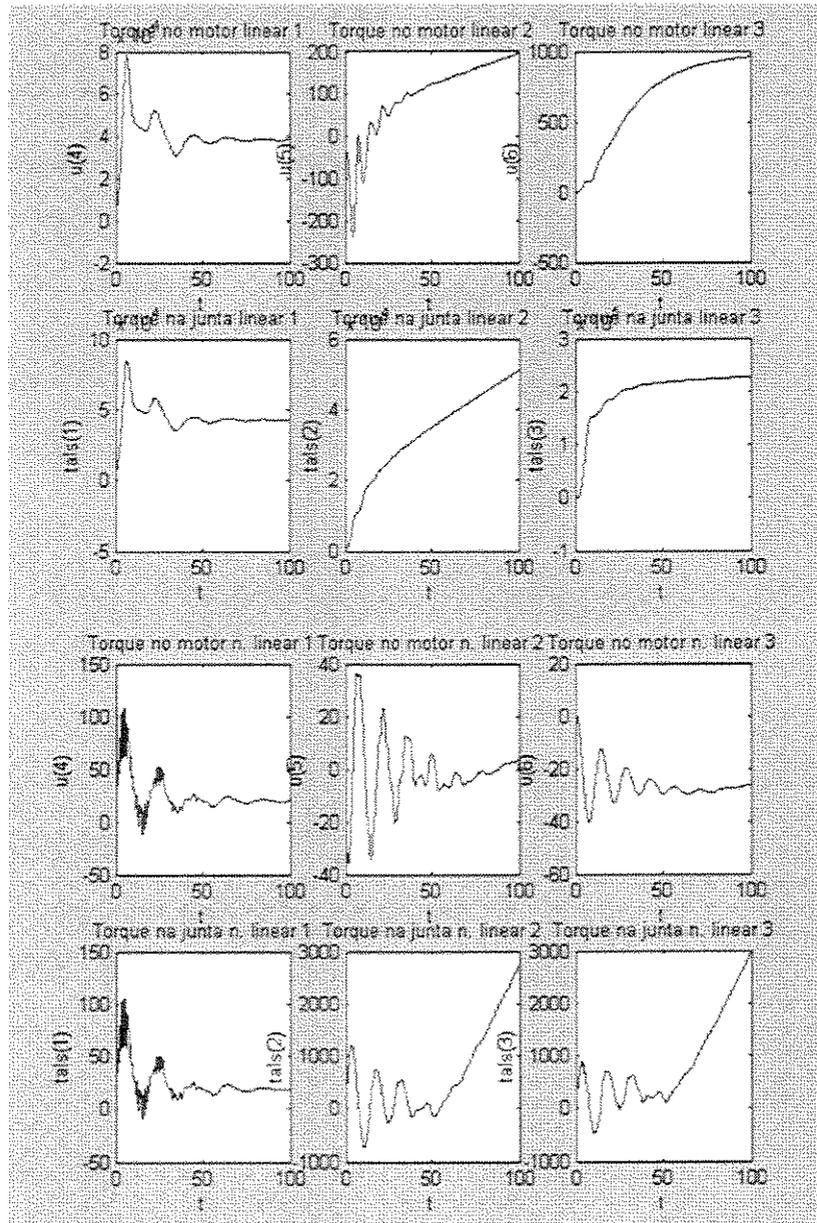


Figura 3.4.3.4 Torques no motor e robô lineares e não lineares considerando as condições iniciais [0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -2.25 0 -0.5] e tabela.

i	Mi	li	lic	li	Bli	BMi	JMi	Ki	BRi	wi	Zi
1	10.380	0.400	0.2810	200	1	1	1.0000	10	10	$\pi$	$\pi$
2	5.0000	0.370	0.2000	200	1	1	200.0	10	8	$\pi/2$	$\pi/2$
3	32.324	0.350	0.1130	200	1	1	200.00	10	200	$\pi/2$	$\pi/2$

Tabela 3.4.3.5: Parâmetros para simulação do robô e motor.

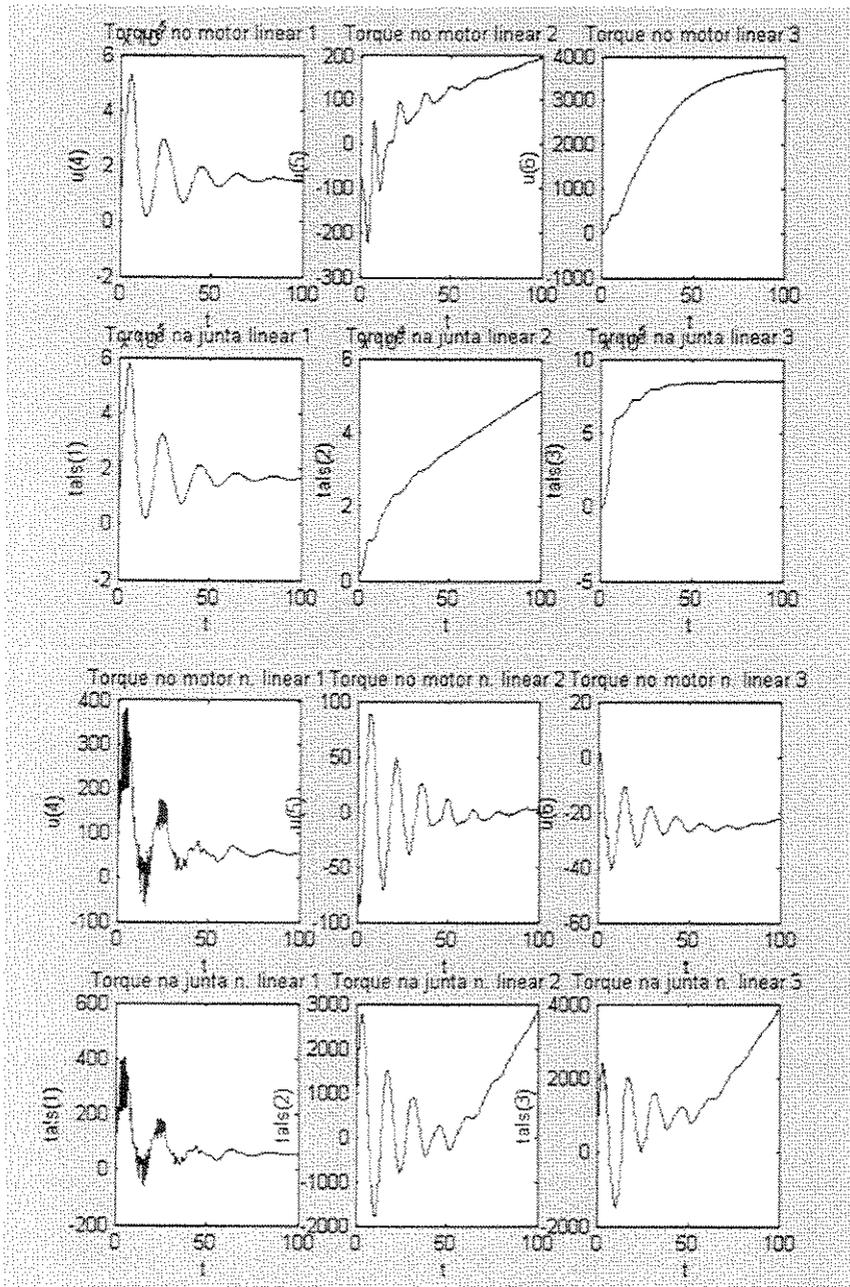


Figura 3.4.3.5 Torques no motor e robô lineares e não lineares considerando as condições iniciais [0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -2.25 0 -0.5] e tabela.

## Capítulo 4

### Conclusões e Perspectivas

Os resultados alcançados nos capítulos precedentes são agora discutidos.

No capítulo 2 fez-se a revisão bibliográfica cujos fatores levaram ao desenvolvimento do presente trabalho, tanto na área da dinâmica não linear, Pires *et al* 2003 quanto nas aplicações em manipuladores robóticos, que se estendem desde aplicações em manipuladores industriais, Hermini (2000), e às aplicações em biomecânica Menegaldo (1997), Hermini (2000).

O capítulo 3 mostra o desenvolvimento do estado da arte que foi objetivo dessa dissertação. Na seção 3.1 mostrou-se o desenvolvimento da equação da dinâmica do manipulador proposto, onde todas as não-linearidades foram consideradas. Em 3.2, desenvolveu-se o sistema de equações para o motor e sistema de interação. Em 3.3, foi proposta a estratégia de controle, segundo Beekmann (1987). Em 3.4 iniciaram-se as simulações numéricas.

Iniciaram-se as simulações para o sistema sem interação como um passo inicial para a simulação do sistema com interação.

Para analisar o comportamento dinâmico do sistema, fez-se a simulação, variando-se os diversos parâmetros, tais como:

Variáveis do motor:

- Inércia no motor;
- Fricção no motor.

Variáveis do robô:

- Inércia do robô;

- Fricção no robô .

E dos parâmetros de interação, como:

- Coeficiente de fricção relativo;
- Rigidez de mola.

O objetivo das simulações foi observar o comportamento do sistema dinâmico com interação. A seguir, fez-se simulações do sistema linearizado, comparando-as com o sistema não-linear, afim de verificar os ganhos obtidos com o sistema não-linear.

### **Simulações do Sistema não-linear**

Simulando-se inicialmente o sistema sem interação, as simulações mostraram o comportamento do sistema dinâmico robô e motor isoladamente. Observou-se que o comportamento destes sistemas estão de acordo com o esperado para a dinâmica de sistemas robô e motor, o que mostra que esta estratégia de controle não viola resultados já conhecidos em projeto e controle de robôs. Vê-se também que a estratégia de controle está de acordo com o esperado, pois se comporta bem sem a interação.

Considerando como parâmetros iniciais os obtidos no caso sem interação e simulando-se diversos valores para o parâmetro momento de inércia do robô, observou-se pouca variação na amplitude de movimento para valores altos de inércia no motor. Ao contrário, para pequenos valores de inércia, uma grande amplitude foi observada, figuras 3.4.2.1 a 3.4.2.4. Este efeito é devido ao aumento das não-linearidades no motor quando se diminui seu momento de inércia. Isso explica também a maior oscilação na frequência da trajetória.

Uma estabilização dos torques nas juntas foi observado ao aumentar os valores do momento de inércia no robô, porém com um rápido aumento de amplitude. Os torques no motor observou comportamento semelhante ao robô, com exceção do motor 3, que permaneceu estável, tanto na convergência para a solução quanto na amplitude. O comportamento mostrado para as diferenças angulares entre o robô e motor é comentado mais adiante. Figuras 3.4.2.5 a 3.4.2.8.

Com a variação do coeficiente de fricção do robô, diminuiu-se a frequência de oscilações nos torques exercidos nas juntas. Com o aumento da fricção relativa observou um comportamento semelhante para os torques nos motores onde uma diminuição na frequência de oscilações foi observada, figuras 3.4.2.9 a 3.4.2.12.

Com o aumento da rigidez na mola levou a uma convergência rápida para a solução de controle, isso é obvio, pois está-se tendo um sistema mais rígido. Para uma menor rigidez, um sistema mais flexível foi observado, podendo-se ajustar o sistema em tempo real, conforme se deseje um sistema mais rígido ou mais flexível. Para fins industriais isso pode ser considerado de grande importância, pois se economizará tempo e custos. Isso por que esse controle pode substituir várias máquinas de diferentes rigides.

Outra vez variando a rigidez de mola, percebeu-se também a importância do sistema de controle ao variar a diferença entre os ângulos do robô e o ângulo do motor. Logo, pode-se controlar a interação no sistema. Como aplicações importantes, cita-se os exemplos em biomecânica, onde há uma interação entre o sistema músculo/ esqueleto e o ambiente. Figuras 3.4.2.24 a 3.4.2.29.

### **Simulação Com Interação robô/motor Linear e Não-Linear**

Com o objetivo de fazer-se uma análise dos ganhos desse sistema não linearizado, fez-se uma simulação do sistema linearizado, onde a linearização foi feita em torno do ponto de equilíbrio com a aproximação  $\cos(x) \approx 1$  e  $\sin(x) \approx x$ .

Obviamente um comportamento mais regular foi observado devido ao sistema linear, assim como uma convergência mais rápida para a solução. Porém uma maior sensibilidade às variações paramétricas foi observada para o sistema não-linear, assim como uma amplitude de movimento muito menor em relação ao sistema linearizado. Isso indica que o sistema não-linear responde melhor às condições impostas, de acordo com Pires *et all* 2003, figuras 3.4.3.3 e 3.4.3.5.

Quanto ao custo computacional, não se observou diferença expressiva de custo entre os dois sistemas. Acredita-se que o tempo de simulação está relacionado ao tamanho do sistema dinâmico, pois se trata de um sistema de seis graus de liberdade, assim, uma simulação de um sistema de 12 graus de liberdade é simulado.

Algumas perspectivas futuras que podem ser úteis para complementar esse trabalho é aqui indicada:

- Otimização da equação de controle, para assim diminuir o custo computacional;
- Verificar mais aprofundadamente projeto e controle de sistemas interagentes, dado as poucas referências disponíveis na literatura;
- Verificação experimental do sistema com interação;
- Verificação da existência de caos no sistema.

## Referências Bibliográficas

Aguirre, L.A. *A tutorial introduction to nonlinear dynamics and chaos. Part I: Tools and Benchmarks*. SBA Controle & Automação, v.7, 1, 29-49, 1996.

Beeckmann, R. W., Lee, K. L., *Non Linear Robotic Control Including Drive Motor Interactions*, American Conference of Control, pág. 1333-1338, 1987.

Balthazar, J.M., Mook, D.T., Weber, H.I. Reyolando, M.L.R.F., Fenili, A., Belato, D., Felix, J.L.P., *An Overview On Non-Ideal Vibrations*, Meccanica, Vol. 38, 613-621, 2003.

Balthazar, J.M., V. A. Oliveira, G. N. Silva, J. M. Rosário, *Aplicações em Dinâmica e controle*, pág. 1-65, Associação Brasileira de Ciências Mecânicas(ABMC), Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada(SBMAC), 2001.

Craig, J.J. *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*, Second edition, Addison-Wesley Publishing Company, 1989.

Davis, S. A., Rosário, J.M., *Modeling, Simulation and Control of Flexible Robots*, CONTROLO'98 – 3rd Portuguese Conference on Automatic Control, Portugal, pps. 532-539, 1998.

E. Y. Matsumoto, *Matlab 6.0*, Editora Érica, Rio de Janeiro, 1991.

Fu, K. S., *Robotics, Control, Sensing and Intelligence*, Mc Graw-Hills, Series in Industrial Engineering, 1987.

Gao, F., Liu, W.Q., Sreeram, V., Teo, K. L., *NonLinear Control for the Lorenz System*, Dynamics and Control, 11, 57-69, 2001.

- Golnaraghi, M. F., *Chaotic Vibrations and Resonances in a Flexible-Arm Robot*, CSME, v. 15, (90), 213-234, 1991.
- Golnaraghi, M. F., *Resonance in high-speed flexible-arm robot*, Dynamic and stability, Vol. 4, pág. 170-188, Oxford University Press, New York, 1989.
- Golnaraghi, M. F., *Regulation of Flexible Structures Via Non Linear Coupling*, Dynamic and Control, pág. 405-428, Kluwer Academic Publisher, Boston, 1991.
- Hermini, H. A., *Modelagem, Implementação e Controle de Sistemas Biomecânicos Envolvendo Aspectos Cinemáticos*, Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas-SP, Brasil, 2000.
- Jin, J. D., Matsuzaki, Y., *Bifurcations in a Two-Degree-of-Freedom elastic System With Follower Forces*, Journal of Sound And Vibration, **126** (2), 265-277, 1988.
- Lonhard, W., *Control of Eletrical Drives*, Springer Verlag, 1985.
- Lindfield G., Penny, J., *Numerical Methods Using Mat lab*, Ellis Horwwod, 1995.
- Meirovitch, L., *Methods of Analytical Dynamics*, Series in Advanced Engineering, McGraw-Hill, 70-149.
- Menegaldo, L. L., *Modelagem Matemática, simulação e Controle Artificial de Postura em seres Humanos*, Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas-SP, Brasil, 1997.
- L.L. Menegaldo, A. T. Fleury, H. I. Weber. *Optimal control of human posture using algorithms based on consistent approximations theory*, In: F. Udwadia, H. Weber, Leitmann, G., (Editors), Dynamical Systems and Control, CRC Press, 2004.

Menegaldo, L. L., A. T. Fleury, H. I. Weber, *Biomechanical Modeling and Optimal Control of Human Posture*, Journal of Biomechanics, 36 1701-1712, 2003.

Ogata, Katsuhiko, *Engenharia de Controle Moderno*, Prentice Hall do Brasil, Terceira Edição Ltda, Rio de Janeiro, 1998.

Pandyan, R., Sinha, S. C., *Analysis of Time-Periodic Nonlinear Dynamical Systems Undergoing Bifurcations*, Non-linear Dynamics, 8, 21-43, 1995.

Paul, R. P., *Robot Manipulator: Mathematics, Programming and control*, MIT Press, Cambridge, MADD, 1980.

Pires, L. S., Hermini, H. A., Balthazar, J. M., *Simulação da dinâmica de um sistema robótico não linear com dois graus de liberdade*, pág. 2493-2501, Série Arquimedes, Volume 2, 2003.

Rivin, E. L., *Mechanical Designs of Robots*, Donnelly & sons Company, 77-83, 1987.

Spong, W. S., *Robotics Dynamics and Control*, John Wilwy and Sons, 1989.

Symon, K.R., *Mecânica Geral*, pág. 180-260, Makron Books Hill, Rio de Janeiro, 1991.

# APÊNDICES

## Apêndice 1: Revisão de Dinâmica de Rotações e Corpos Rígidos

A modelagem dinâmica do sistema robótico, como é o objetivo desse texto, exigiu um grande esforço em compreender a dinâmica de rotações e corpos rígidos. Neste capítulo faz-se uma síntese do estudo analítico efetuado sobre dinâmica de rotações e corpos rígidos.

### A.1.1 Movimento Relativo à Um Referencial Rotacional

As leis de Newton implicam no uso preferencial de referenciais inerciais. No entanto, em diversas ocasiões é mais conveniente o uso de sistemas não inerciais, como sistema com coordenadas rotacionais. Este é o caso, por exemplo, quando se deseja examinar o movimento de giro de um corpo rígido relativo a um referencial fixo. Um exemplo é o movimento de um giroscópio ou o movimento de um braço robótico em relação a um referencial fixo.

#### A.1.11 Transformação de Coordenadas

Um vetor  $\mathbf{r}$  pode ser expresso em mais de um sistema de coordenadas. Em muitos problemas de dinâmica, a relação das componentes de  $\mathbf{r}$  é muito útil, neste caso, o problema de dinâmica de rotação.

Considera-se a figura A.1 e o vetor  $\mathbf{r}$ . Pode-se expressar a posição de um vetor  $\mathbf{r}$  em termos de várias coordenadas. Considerando os sistemas  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  e  $\xi_3$  expressa-se  $\mathbf{r}$  como:

$$\mathbf{r} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} = \xi_1\mathbf{i}' + \xi_2\mathbf{j}' + \xi_3\mathbf{k}' \quad \text{A.1}$$

Como estes são dois modos de expressar o mesmo vetor  $\mathbf{r}$ , evidentemente pode-se relacioná-los usando o seguinte raciocínio:

$\xi_i$  é um vetor que pode ser expresso em termos de  $r$  na direção  $i'$ . Assim

$$\xi_i = i \cdot r$$

como se quer relacionar  $\xi_i$  e  $x_i$ , faz-se:

$$r = xi + yj + zk$$

então

$$\xi_i = i' \cdot (xi + yj + zk) = x_1 \cos(i', i) + x_2 \cos(i', j) + x_3 \cos(i', k)$$

$$\xi_i = l_{i'1}x_1 + l_{i'2}x_2 + l_{i'3}x_3 \quad A.2$$

onde  $l_{i'1} = \cos(i', i)$ .

Analogamente, chega-se à:

$$\xi_2 = l_{j'1}x_1 + l_{j'2}x_2 + l_{j'3}x_3 \quad A.3$$

$$\xi_3 = l_{k'1}x_1 + l_{k'2}x_2 + l_{k'3}x_3 \quad A.4$$

E usando-se uma representação em termos matriciais:

$$\{\xi\} = \{\xi_m\} \quad m = i', j', k'$$

$$\{x\} = \{x_n\} \quad n = i, j, k$$

$$[I] = [I_{mn}]$$

tem-se:

$$\{\xi\} = [I]\{x\} \quad A.5$$

### A.1.12 Sistemas de Coordenadas Rotacionais

Considera-se os sistemas de coordenadas inerciais  $x_i$  e rotacional  $\xi_i$ . Para mostrar uma seqüência de rotação, o sistema  $x_i$  passa pela seqüência de sucessivas rotações  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  sobre os eixos  $x_1, y_2$  e  $z_3$ , respectivamente:

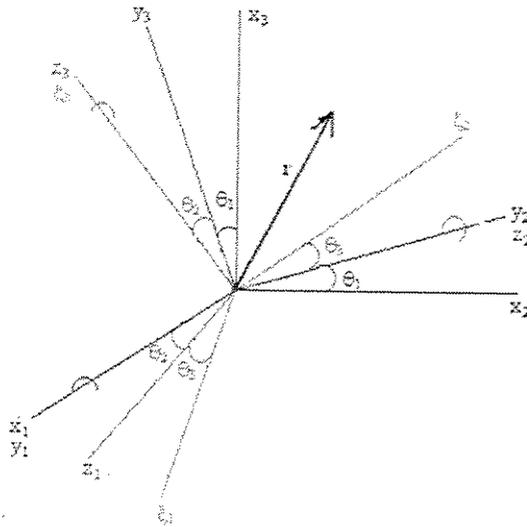


Figura A.1. Sistema de coordenadas com um referencial  $r$ .

Da figura A.1, pode-se obter a relação entre os sistemas coordenados como:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \cos \theta_1 + x_3 \operatorname{sen} \theta_1 \\ y_3 = -x_2 \operatorname{sen} \theta_1 + x_3 \cos \theta_1 \end{cases} \Rightarrow \{y\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_1 & \operatorname{sen} \theta_1 \\ 0 & -\operatorname{sen} \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\{y\} = [R_1(\theta_1)]\{x\} \quad \text{A.5}$$

onde

$$R_1(\theta_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_1 & \operatorname{sen} \theta_1 \\ 0 & -\operatorname{sen} \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix}$$

representa a matriz de rotação que transforma o sistema de coordenadas de  $x_i$  em  $y_i$ .

Analogamente, escreve-se as sucessivas rotações:

$$\{z\} = [R_2(\theta_2)]\{y\}$$

$$\text{onde: } R_2(\theta_2) = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & 0 & -\operatorname{sen} \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen} \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$\{\xi\} = [R_3(\theta_3)]\{z\}$$

A.6

A sucessiva rotação em  $x_1, y_2, z_3$  pode ser expressa em uma única matriz, que o produto das matrizes de rotação  $R_i(\theta)$ :

$$[1] = [R_3(\theta_3)] [R_2(\theta_2)] [R_1(\theta_1)]$$

$$\{\xi\} = [1]\{x\} \quad \text{A.7}$$

onde

$$[1] = \begin{bmatrix} c\theta_2c\theta_3 & c\theta_1s\theta_3 + s\theta_1s\theta_2c\theta_3 & s\theta_1s\theta_3 - c\theta_1s\theta_2c\theta_3 \\ -c\theta_2c\theta_3 & c\theta_1c\theta_3 - s\theta_1s\theta_2s\theta_3 & s\theta_1c\theta_3 + c\theta_1s\theta_2s\theta_3 \\ s\theta_2 & -s\theta_1c\theta_2 & c\theta_1c\theta_2 \end{bmatrix}$$

Como exemplo, cita-se um modelo simples de um robô de dois elos, cada elo constitui um grau de liberdade, como se vê nas figuras A.2 a) e b):

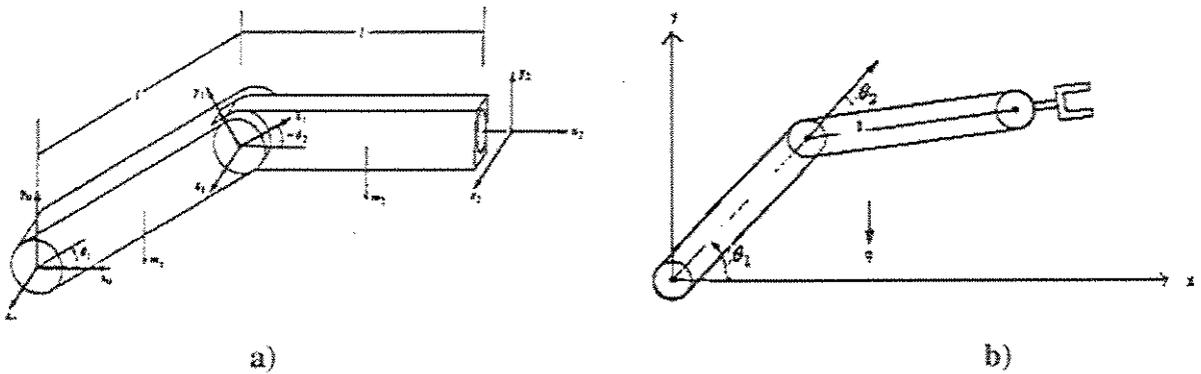


figura A.2 Diagramas esquemáticos de um robô de dois links.

onde as matrizes de transformação são:

$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} C1 & -S1 & 0 & l1C1 \\ S1 & C1 & 0 & l1S1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1A_2 = \begin{bmatrix} C2 & -S2 & 0 & l2C2 \\ S2 & C2 & 0 & l2S2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0A_2 = {}^0A_1 * {}^1A_2 = \begin{bmatrix} C12 & -S12 & 0 & l1c1 + l2C2 \\ S12 & C12 & 0 & l1s1 + l2S2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Sob essas circunstâncias, a segunda derivada assume a forma:

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{d(\dot{\vec{r}}')}{dt} + \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r}')}{dt} = \ddot{\vec{r}}' + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

onde  $\ddot{\vec{r}}' = \ddot{\xi}_1 i' + \ddot{\xi}_2 j' + \ddot{\xi}_3 k'$  é a derivada segunda do sistema rotacional.

Em termos de aceleração:

$\ddot{\vec{r}}$  é a aceleração de P num espaço inercial;

$\ddot{\vec{r}}'$  é a aceleração de P relativo à rotação;

$2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}'$  é conhecido como aceleração de Coriolis;

$\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$  é a aceleração do ponto coincidente

$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$  é a chamada aceleração centrípeta e está dirigida na direção de rotação do eixo.

E se ocorrer translação? Se a origem O com velocidade  $\mathbf{v}_0$  e aceleração  $\mathbf{a}_0$  em relação ao espaço inercial, a velocidade absoluta e a aceleração do ponto P serão:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}_0 + \dot{\vec{r}} \\ \mathbf{a} &= \mathbf{a}_0 + \ddot{\vec{r}} \end{aligned} \quad \text{A.10}$$

### A.1.2 DINÂMICA DE CORPOS RÍGIDOS

Um corpo rígido deformável de dimensões finitas pode ser considerado como sendo composto por um número infinito de partículas, logo, possuindo um número infinito de graus de liberdade.

Por outro lado, por definição, considera-se que um corpo rígido não sofre deformações, e pode-se mostrar que possui somente seis graus de liberdade. Isto resulta do fato de que a distância entre qualquer par de partículas é considerada constante. A maioria dos conceitos estudados em parte A.1 são válidos também para corpos rígidos.

### A.1.21 Cinemática de um corpo rígido

O movimento mais geral de um corpo rígido é descrito por seis coordenadas, tal que um corpo rígido se movendo livremente no espaço possua seis graus de liberdade. Considerando-se um corpo rígido consistindo de um número infinito de partículas, a distância entre qualquer duas partículas é constante, por definição.

Freqüentemente é conveniente escrever os seis sistemas coordenados como sendo três translações de um certo ponto dentro do corpo e três rotações sobre aquele ponto. Para este fim, um sistema de eixos é encaixado dentro do corpo e descreverá tal translação e rotação da origem O do eixo do corpo.

Assim, obtém-se as equações para velocidade e aceleração absolutas, respectivamente, para um corpo rígido:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \ddot{\mathbf{r}}' + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$$

onde  $\dot{\mathbf{r}}' = \ddot{\mathbf{r}}' = 0$  e  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$  é o raio do vetor em questão, em relação ao eixo do corpo.

A orientação do corpo pode ser definida em termos de uma transformação ortogonal dada pela matriz 3x3  $[l(t)]$  relacionando o eixo do corpo com o sistema inercial. Inicialmente se o eixo do corpo coincidir com o sistema inercial, então  $[l(0)] = [1]$ , que é a matriz unitária.

Da equação A.5

$$\{\xi\} = [1]\{x\} = \{x\} \quad \text{A.11}$$

Considerando-se o problema de auto-valor:

$$[l]\{x\} = \lambda\{x\} \quad \text{A.12}$$

em A.11 é um caso especial de A.12.

A equação homogênea A.12 tem soluções não triviais para somente certos valores de  $\lambda$ . Estas constantes, chamadas de auto-valores, são denotadas por  $\lambda_r$ , e os vetores correspondentes são denotados por  $\{x^r\}$  ( $r=1,2,3$ ).

Em geral, A.12 tem três auto valores distintos  $\lambda_r$ , que pode ser arranjado em uma matriz diagonal  $[\lambda]$ , e três auto-vetores associados  $\{x^{(r)}\}$ , formando a matriz quadrada  $\{x\}$ , tal que A.12 torna-se:

$$[I][x]=[x][\lambda] \quad \text{A.13}$$

Pré-multiplicando 2.13 por  $[x]^{-1}$ , obtém-se

$$[x]^{-1}[I][x]=[\lambda] \quad \text{A.14}$$

tal que, a solução do problema de auto-valores se reduz a encontrar uma matriz  $\{x\}$  que transforma  $[I]$  à uma matriz diagonal. Uma transformação do tipo A.14 é conhecida como uma transformação de similaridade.

As matrizes  $[I]$  e  $[\lambda]$  de 2.14 são ditas ser similares, isto implica que seus auto valores são iguais e assim, são os valores dos determinantes característicos correspondentes. Disto, e das propriedades de transformação similar, pode-se escrever:

$$||I-\lambda\delta_{ij}||=(\lambda_{ij}-\lambda)\delta_{ij}=0,$$

onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker.

Expandindo os dois determinantes, conclui-se

$$||=\lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

onde  $||$  é real.

Em A.1 mostrou-se que  $||=\pm 1$ , tal que o produto dos três outros valores sejam  $\pm 1$ . Porém, -1 corresponde à uma rotação imprópria, transformando um sistema do lado direito à um sistema do lado esquerdo, e deve ser ignorado. Pode-se citar o exemplo de um sistema robótico. Assim, o auto-valor deve ser igual a +1.

Isto prova que o movimento geral de um corpo rígido com um ponto fixado é uma rotação de Euler no movimento de corpos rígidos. A direção de rotação pode ser obtida resolvendo o problema de auto valores específico de A.11.

O angulo de rotação também pode ser encontrado por meio de uma transformação de similaridade em [1]. Sendo uma rotação em x, coincidindo com o eixo de rotação, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \text{sen} \phi \\ 0 & -\text{sen} \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$$

### A.1.22 Momento Linear e Momento Angular de Um Corpo Rígido

Seja um corpo rígido, como definido anteriormente, de massa total m, e seja x, y, z um eixo do corpo com origem O, como mestrado na figura A.4. Ele também pode ser representado como um sólido contínuo a cada ponto definido por um elemento de massa dm.

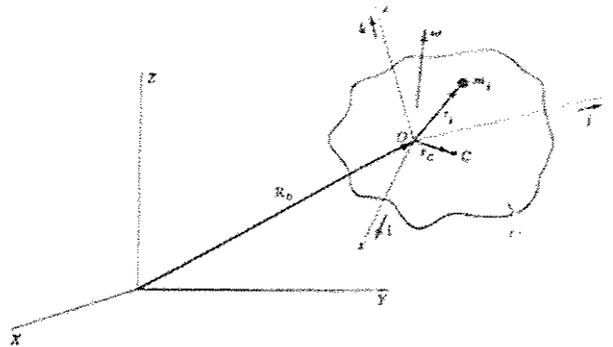


Fig. A.4. Representação de um corpo rígido em um sistema coordenado

O raio do vetor, da origem O ao centro de massa C é definido por:

$$r_c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i = \frac{1}{m} \int_{\text{corpo}} \vec{r} dm \quad \text{A.15}$$

Se a origem coincidir com o centro de massa  $\int \vec{r} dm = 0$ .

O momento linear do corpo rígido tem a expressão

$$\vec{P} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum (\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \vec{v}_0 \int dm + \vec{\omega} \times \int \vec{r} dm = m(\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_c) \quad \text{A.16}$$

Os momentos angulares podem ser escritos como:

$$\begin{aligned} L_x &= I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z \\ L_y &= -I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z \\ L_z &= -I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \end{aligned} \quad \text{A.17}$$

Onde as quantidades

$$I_{xx} = \int (r^2 - x^2) dm, \quad I_{yy} = \int (r^2 - y^2) dm, \quad I_{zz} = \int (r^2 - z^2) dm \quad \text{A.18}$$

são conhecidas como produto de inércia.

Como será visto mais adiante, pode-se definir uma matriz simétrica

$$[I] = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad \text{A.19}$$

que é conhecida como matriz de inércia.

Introduzindo-se a matriz coluna  $\{r_i\}$  representando o raio  $r_i$  e a matriz diagonal  $[r_i^2]$ , as equações de A.17 a A.19 podem ser compactadas na forma:

$$[I] = \int ([r^2] - \{r\}\{r\}^T) dm$$

A quantidade entre parênteses é conhecida como velocidade do centro de massa, tal que A.16 se torna:

$$\mathbf{P} = m\mathbf{v}_c \quad \text{A.20}$$

Onde  $\mathbf{v}_c$  é a velocidade do centro de massa.

Se a origem O coincidir com o centro de massa C, não haverá translação, logo, a velocidade de translação é zero,  $\mathbf{v}_0 = 0$ .

Assim, o momento angular de um corpo rígido sobre a origem é:

$$\vec{L}_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \int \vec{r} \times (\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}) dm = -\vec{v}_0 \times \int \vec{r} dm + \int \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm \quad A.21$$

onde  $\vec{v}_0=0$  se O é um ponto fixo e  $\int \vec{r} dm=0$  se O coincidir com o centro de massa.

Logo, o momento de um corpo rígido sobre O é:

$$\vec{L}_0 = \int \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm \quad A.22$$

Da Álgebra Vetorial tem-se a relação:  $\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega}(\vec{r} \cdot \vec{r}) - \vec{r}(\vec{\omega} \cdot \vec{r})$

Tal que A.22 torna-se:

$$\vec{L}_0 = \int [\vec{\omega}(\vec{r} \cdot \vec{r}) - \vec{r}(\vec{\omega} \cdot \vec{r})] dm \quad A.23$$

Tendo-se em vista A.9 e A.7, pode-se escrever **L** na matriz compacta

$$\{L\} = [I] \{\omega\} \quad A.24$$

Conclui-se aqui que a matriz [I] pode ser interpretada como um operador que transforma o vetor {L}. Sua unidade é  $ML^2$ .

### A.1.23 Energia Cinética de Um Corpo Rígido

Referindo-se novamente à figura A.1, será calculada a energia cinética de um corpo por meio de um conjunto de eixos x, y e z, com origem em O. Tem-se que

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int (\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot (\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}) dm = \\ &= \frac{1}{2} m \vec{v}_0 \cdot \vec{v}_0 + \vec{v}_0 \cdot \vec{\omega} \times \int \vec{r} dm + \frac{1}{2} \int (\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm \end{aligned} \quad A.25$$

Há dois casos de interesse particular:

1. o caso em que a origem O é fixa a um referencial inercial.;
2. e o em que a origem O coincide com o centro de massa C.

Quando a origem O é fixa caso 1, então  $\vec{v}_0=0$  e 2.25 se reduz a

$$T = \frac{1}{2} \int (\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm \quad A.26$$

Tal que a energia cinética do corpo pode ser considerada como sendo devido ao movimento rotacional do corpo sobre o ponto fixado.

Quando escolhe-se a origem O coincidindo com o centro de massa C (caso 2), tem-se  $\int \vec{r} dm = 0$ , então A.25 torna-se

$$T = \frac{1}{2} m \vec{v}_C * \vec{v}_C + \frac{1}{2} \int (\vec{\omega} \times \vec{r}) * (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm \quad A.27$$

onde

$$\frac{1}{2} m \vec{v}_C * \vec{v}_C = \text{energia cinética de translação}$$

$$\frac{1}{2} \int (\vec{\omega} \times \vec{r}) * (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm = \text{energia cinética de rotação}$$

A energia cinética de translação pode ser escrita na forma matricial

$$T_{tr} = (1/2) \{v_c\}' \{v_c\} \quad A.28$$

Onde  $v_c$  é a matriz coluna da componente velocidade do centro de massa.

A energia cinética rotacional também pode ser escrita de uma forma relativamente simples.

O produto vetorial da aceleração de coriolis é:

$$\begin{aligned} (\vec{\omega} \times \vec{r}) * (\vec{\omega} \times \vec{r}) &= \{r\}' [\omega] [\omega] \{r\} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}' \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & -\omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \\ &= (r^2 - x^2)\omega_x^2 + (r^2 - y^2)\omega_y^2 + (r^2 - z^2)\omega_z^2 - 2xy\omega_x\omega_y - 2xz\omega_x\omega_z - 2yz\omega_y\omega_z \quad A.29 \end{aligned}$$

Introduzindo A.29 em A.27, integrando relembrando as definições A.7 e A.8, obtém-se:

$$T_{rot} = \frac{1}{2} (I_{xx}\omega_x^2 + I_{yy}\omega_y^2 + I_{zz}\omega_z^2 - 2I_{xy}\omega_x\omega_y - 2I_{xz}\omega_x\omega_z - 2I_{yz}\omega_y\omega_z) \quad A.30$$

onde  $\{\omega\}$  é a matriz coluna da velocidade angular do corpo correspondente e  $[I]$  é a matriz simétrica de inércia.

### A.1.24 Eixo Principal

A equação A.30 expressa a energia cinética rotacional de um corpo rígido em termos das componentes velocidade angular do corpo e momentos e produto de inércia.

Devido ao movimento referir-se a um conjunto de eixos, o momento e produto de inércia não dependem do tempo, tal que A.30 tenha forma de uma função quadrática homogênea com coeficientes constantes.

A direção do conjunto de eixos usados, embora fixos em relação ao corpo, é arbitrário. Logo, A.30 pode ser simplificado pela escolha de um conjunto particular de eixos, chamado eixo principal. Assim, a matriz de inércia se reduz a uma forma diagonal e os termos perpendiculares da velocidade desaparecem na energia cinética.

Antes de discutir-se o método de obtenção de eixo principal, será examinado a relação entre produto e momento de inércia expressas em dois sistemas coordenados diferentes, nos eixos  $x$  e  $x'$ . Usando a transformação de coordenadas, vista na parte A.1:

$$\omega'_i = \sum_{j=1}^3 l_{ij} \omega_j, \quad i=1,2,3 \quad \text{A.31}$$

→ Em um espaço tridimensional, uma transformação de três componentes, de acordo com A.31, é chamada de tensor de rank 1.

A equação A.31 pode ser escrito na forma matricial:

$$\{\omega'\} = [I]\{\omega\} \quad \text{A.32}$$

onde  $[I]$  é a matriz dos cossenos diretores entre  $x_i$  e  $x'_i$ .

A energia cinética no conjunto de sistemas coordenados é:

$$T = (1/2)\{\omega\}^T [I] \{\omega\} = (1/2)\{\omega'\}^T [I] \{\omega'\} \quad \text{A.33}$$

Introduzindo-se A.32 em A.33

$$[I'] = [I][I][I]^T \quad \text{A.34}$$

Escrevendo A.34 em notação indicial

$$I'_{ij} = \sum_{r=1}^3 \sum_{s=1}^3 I_{ir} I_{js} I_{rs}, \quad i, j=1, 2, 3 \quad \text{A.35}$$

$I'_{ij}$  = tensor cartesiano de rank 2.

Por definição, o eixo principal é um conjunto de eixos em que os produtos de inércia sejam zero. Assim, para obter a direção dos eixos principais, deve-se buscar uma matriz  $[I]$  que reduza  $[I]$  à forma diagonal

$$[I'] = [I][I][I]^t \quad \text{A.36}$$

Isto é equivalente a resolver o problema de auto-valores

$$[I][u] = [u][\lambda] \quad \text{A.37}$$

Para este fim, pode-se escrever A.37 na forma

$$[I][u] = \lambda[u] \quad \text{A.38}$$

pré-multiplicando por  $u^t$

$$\{u\}^t [I] \{u\} = \lambda \{u\}^t \{u\} \quad \text{A.39}$$

normalizando  $\{u\}$

$$\{u\}^t \{u\} = \mathbf{u}^* \mathbf{u} = \sum_{i=1}^3 u_i^2 = 1 \quad \text{A.40}$$

que é equivalente a dizer que o comprimento de  $\{u\}$  é unitário.

Assim, A.38 pode ser escrito na forma

$$\frac{1}{\lambda} (I_{11}u_1^2 + I_{22}u_2^2 + I_{33}u_3^2 - 2I_{12}u_1u_2 - 2I_{13}u_1u_3 - 2I_{23}u_2u_3) = 1 \quad \text{A.41}$$

que é a equação de uma superfície quadrática com centro na origem do sistema cartesiano  $u_i$ .

O problema de encontrar o auto-valor de A.38 pode ser interpretado como o problema de encontrar as direções para que a um certo ponto, o raio de  $\mathbf{u}$  e a normal  $\mathbf{n}$  da elipsóide sejam paralelos. Estas direções são o eixo da elipsóide e corresponde ao eixo do corpo para que a matriz de inércia torne-se diagonal. Assim, a equação na forma canônica da elipsóide é

$$\frac{1}{\lambda} (I_1 u_1^2 + I_2 u_2^2 + I_3 u_3^2) = 1 \quad \text{A.42}$$

em que  $I_1, I_2, I_3$ , são os momentos principais de inércia do corpo.

Então, tendo encontrado o eixo de rotação, a energia cinética de rotação pode ser reduzida à simples expressão:

$$T_{\text{rot}} = (1/2) \{\omega\}^T [I] \{\omega\} = \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2) \quad \text{A.43}$$

### A.1.25 Equação de Movimento Para Um Corpo Rígido

Na parte 1 encontrou-se a equação de movimento para um sistema de partículas. Estas equações são perfeitamente válidas para um corpo rígido, pois um corpo rígido pode ser considerado como um sistema de partículas.

Logo, a equação da força é:

$$\vec{F} = m \ddot{\vec{R}}_C = \frac{d}{dt} (m \dot{\vec{v}}_C) = \dot{\vec{p}} \quad \text{A.44}$$

onde

$m \dot{\vec{v}}_C = \vec{p}$  = momento linear do centro de massa do corpo

$m$  = massa total

$\dot{\vec{v}}_C$  = velocidade do centro de massa do corpo

Similarmente à parte 1, a equação de movimento torna-se

$$\vec{N}_C = \dot{\vec{L}}_C \quad \text{A.45}$$

A.45, para o movimento rotacional sobre o centro de massa, pode ser tratado independentemente do momento de translação do centro de massa. Se o movimento ocorrer sobre um ponto fixo O, a equação do torque para um corpo rígido toma a forma

$$\vec{N}_O = \dot{\vec{L}}_O$$

### 2.1.26 Equação de Movimento de Euler

Será considerado aqui o movimento de rotação sobre um ponto. A equação do torque em relação ao momento angular é:

$$\{N\} = \{\dot{L}'\} + [\omega]\{L\} \quad \text{A.46}$$

Embora a direção do eixo do corpo seja arbitrário, a equação de movimento pode ser consideravelmente simplificada, fazendo-o coincidir com o eixo principal. Assim sendo, o produto de inércia some, tal que a matriz coluna momento angular reduz-se a

$$\{L\} = [I]\{\omega\} \quad \text{A.47}$$

Introduzindo A.39 em A.38, obtém-se

$$\{N\} = [I]\{\dot{\omega}'\} + \{\omega\}[I]\{\omega\} \quad \text{A.48}$$

que é conhecida como **equação de Euler de Movimento**

Denotando o eixo principal por 1,2,3 e o momento principal de inércia por A, B, C, a equação de Euler torna-se:

$$\begin{cases} N_1 = A\dot{\omega}_1 + (C - B)\omega_2\omega_3 \\ N_2 = B\dot{\omega}_2 + (A - C)\omega_1\omega_3 \\ N_3 = C\dot{\omega}_3 + (B - A)\omega_1\omega_2 \end{cases} \quad \text{A.49}$$

Deve-se distinguir entre velocidade angular  $\omega$  do referencial, da velocidade angular  $\Omega$  do corpo. Considerando-se o momento angular

$$\{L\} = [I]\{\Omega\} \quad \text{A.50}$$

tem-se o torque no corpo

$$\{N\} = [I]\{\dot{\Omega}'\} + \{\omega\}[I]\{\Omega\}. \quad \text{A.51}$$

em que A.51 é a equação de Euler modificada.

### 2.1.27 Ângulos de Euler

Um conjunto que descreve aceitavelmente toda a orientação do corpo, são os chamados ângulos de Euler. Estes são três deslocamentos angulares sucessivos que levam adequadamente à transformação de um sistema coordenado à outro, embora as rotações não sejam sobre três eixos ortogonais. No entanto, os três componentes angulares podem ser expressas em termos do ângulo de Euler e sua derivada no tempo.

A notação mais comum dos ângulos de Euler é:  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ .

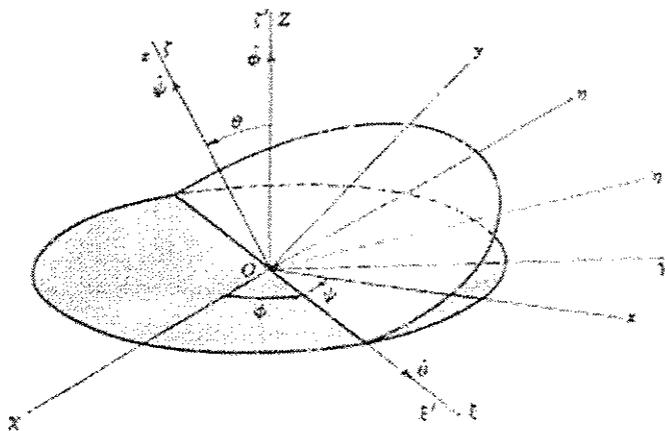


Fig. A.5 Representação cartesiana dos ângulos de Euler.

Considera-se inicialmente o sistema  $X, Y, Z$ , onde a orientação inicial do corpo coincide com este sistema cartesiano. Uma rotação de um ângulo  $\phi$  sobre o eixo  $Z$ , leva esta tríade à  $\xi', \eta', \zeta'$ . Após isso, uma rotação  $\theta$  sobre  $\xi'$  leva o corpo à orientação  $\xi, \eta, \zeta$ , onde  $\xi$  é conhecido como o eixo modal, permanecendo no plano horizontal todo tempo. Finalmente uma rotação  $\psi$  sobre  $\zeta$  faz a tríade coincidir com  $x, y, z$ .

Como na parte I,  $R_1(\phi)$  representa a rotação que leva  $X, Y, Z$  à  $\xi', \eta', \zeta'$

$$\{\xi'\} = [R_1(\phi)]\{X\}$$

onde











$$[R_1(\phi)] = \begin{bmatrix} \cos \phi & \text{sen} \phi & 0 \\ -\text{sen} \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Analogamente:

$$\{\xi\} = [R_2(\theta)]\{\xi'\}$$

$$[R_2(\theta)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \text{sen} \theta \\ 0 & -\text{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

e

$$\{x\} = [R_3(\psi)]\{\xi\}$$

$$[R_3(\psi)] = \begin{bmatrix} \cos \psi & \text{sen} \psi & 0 \\ -\text{sen} \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde  $\{x\}$  pode ser escrito diretamente

$$\{x\} = [R_3(\psi)R_2(\theta)R_1(\phi)]\{X\} = [R]\{X\} \quad \text{A.52}$$

e

$$[R] = \begin{bmatrix} c\phi c\psi - s\phi c\theta s\psi & s\phi c\psi + c\phi c\theta s\psi & s\theta s\psi \\ -c\phi s\psi - s\phi c\theta c\psi & -s\phi s\psi + c\phi c\theta c\psi & s\theta c\psi \\ s\phi s\theta & -c\phi s\theta & c\theta \end{bmatrix} \quad \text{A.53}$$

Como  $[R]$  representa uma transformação ortonormal entre dois sistemas cartesianos

$$\{X\} = [R]^T\{x\}$$

A seguir, será estabelecida a expressão da componente velocidade angular para vários sistemas coordenados em termos das velocidades  $\dot{\phi}$ ,  $\dot{\theta}$  e  $\dot{\psi}$ , que são conhecidas como precessão, rotação e spin, respectivamente.

Mostra-se a partir da figura A.5 que as componentes da velocidade angular do sistema  $\xi, \eta, \zeta$  são:

$$\begin{aligned} \Omega_\xi &= \dot{\theta} \\ \Omega_\eta &= \dot{\phi} \text{sen} \theta \\ \Omega_\zeta &= \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{aligned} \quad \text{A.54}$$

## Apendice B

% Programa para simulacao e controle Robo-motor  
% nao-linear com interacao entre as juntas.

function dx=carga(t,x)

%%%%%%%%%%%% Definicao dos parametros do robô  
%%%%%%%%%%%%

% massas dos links:

m1=10.38;

m2=5.00;

m3=32.324;

% momentos de inercia dos links:

I1=2000;

I2=2000;

I3=2000;

% Distancia entre a origem dos links e seu centro de gravidade:

l1c=0.281;

l2c=0.200;

l3c=0.113;

% Comprimento dos links:

l1=0.40;

l2=0.37;

l3=0.35;

% Aceleracao da gravidade

gr=9.81;

% Friccoes viscosas da carga

BL1=1.000;

BL2=1.000;

BL3=1.000;

%%%%%%%%%%%% Definicao das funcoes fi, gi, hi, ai, bi, ci %%%%%%%%%%

% Definicao das funcoes fi, i=1,2,3.

$$f1=(I1+(m2*I1c^2+I2)*(\cos(x(3)))^2+m3*I2*(I2*\cos(x(3))+2*I3c*\cos(x(3)+x(5))*\cos(x(3)))+(m3*I3c^2+I3)*\cos(x(3)+x(5)));$$

$$f2=2*((m2*I2c^2+I2)*\sin(x(3))*\cos(x(5))+m3*I2*(I2*\sin(x(3))*\cos(x(3))+I3c*\sin(x(3))*\cos(x(3)+x(5)))+(m3*I3c^2+I3)*\sin(x(3)+x(5))*\cos(x(3)+x(5)));$$

$$f3=2*(m3*I2*I3c*\cos(x(3))*\sin(x(3)+x(5))+(m3*I3c^2+I3)*\sin(x(3)+x(5))*\cos(x(3)+x(5)));$$

% Definicao das funcoes gi, i=1,2,3,4,5,6.

$$g1=(m2*I2c^2+I2+m3*I2^2+2*m3*I2*I3c*\cos(x(5))+m3*I3c^2+I3);$$

$$g2=(m3*I2*I3c*\cos(x(5))+m3*I3c^2+I3);$$

$$g3=I2*I3c*\sin(x(3))*\cos(x(5))+I3c^2*\sin(x(3)+x(5));$$

$$g4=2*m3*I2*I3c*\sin(x(5));$$

$$g5=m3*I2*I3c*\sin(x(5));$$

$$g6=gr*(m2*I2c*\cos(x(3))+m3*(I2*\cos(x(3))+I3c*\cos(x(3)+x(5))));$$

% Definicao das funcoes hi, i=1,2,3,4,5.

$$h1=(m3*I3c^2+I3);$$

$$h2=m3*I2*I3c*\cos(x(5))+m3*I3c^2+I3;$$

$$h3=(m3*(I2*I3c*\cos(x(3))*\sin(x(3)+x(5))+I3c^2*\sin(x(3)+x(5))*\cos(x(3)+x(5))+I3*\sin(x(3)+x(5))*\cos(x(3)+x(5)));$$

$$h4=-m3*I2*I3c*\sin(x(5));$$

$$h5=gr*(m3*I3c*\cos(x(3)+x(5)));$$

% Definicao dos bi, i=1,2,3,4,5.

$$b1=1/f1;$$

$$b2=g2/(g1*h1-g2*h2);$$

```
b3=h1/(g1*h1-g2*h2);
```

```
b4=g1/(g1*h1-g2*h2);
```

```
b5=h2/(g1*h1-g2*h2);
```

```
% Definicao da f, g, h
```

```
f=-b1*(f2*x(2)*x(4)+f3*x(2)*x(6)+BL1*x(2));
```

```
g=b2*(h3*x(2)^2+h4*x(4)^2+h5+BL3*x(6))-  
b3*(g3*x(2)^2+g4*x(4)*x(6)+g5*x(6)^2+g6+BL2*x(4));
```

```
h=b5*(g3*x(2)^2+g4*x(4)*x(6)+g5*x(6)^2+BL2*x(4))-  
b4*(h3*x(2)^2+h4*x(4)^2+h5+BL3*x(6));
```

```
%%%Equacao do controle do robo, de acordo com o modelo de Beekamann (1987) %%%%
```

```
% Parametros
```

```
w1=pi; % Trajetoria do link 1
```

```
w2=pi; % Trajetoria do link 2
```

```
w3=pi; % Trajetoria do link 3
```

```
% Coeficientes relacionados aos polos
```

```
alfa11=0.1;
```

```
alfa10=0.1;
```

```
alfa21=0.1;
```

```
alfa20=0.2;
```

```
alfa30=0.2;
```

```
alfa31=0.1;
```

```
% Ganhos (escolhidos arbitrariamente)
```

```
lambda1=.1;
```

```
lambda2=.1;
```

```
lambda3=1.5;
```

```
% Equacao de controle
```

```
tals(1)=-f1*(f+alfa11*x(2)+alfa10*x(1)-lambda1*w1);
```

```
tals(2)=-g1*(g+alfa21*x(4)+alfa20*x(3)-lambda2*w2)-g2*(h+alfa31*x(6)+alfa30*x(5)-  
lambda3*w3);
```

```
tals(3)=-h2*(g+alfa21*x(4)+alfa20*x(3)-lambda2*w2)-h1*(h+alfa31*x(6)+alfa30*x(5)-  
lambda3*w3);
```

%%%% Equacao de controle do motor %%%%

% Parametros

BM1=1; BM2=1; BM3=1;% Friccoes viscosas dos Motores

JM1=1; JM2=200; JM3=200: % Momentos de inercia dos motores

% Coeficientes relacionados aos polos

alfa41=1; alfa40=1;

alfa51=10; alfa50=10;

alfa61=2; alfa60=2;

% Ganhos

lambda4=1; lambda5=1; lambda6=1;

% Saida desejada do motor (Angulo de saida do motor desejado)

z(4)=pi; z(5)=pi/2; z(6)=pi/2;

i=-(BM1\*x(8)+tals(1))/JM1;

l=-(BM2\*x(10)+tals(2))/JM2;

k=-(BM3\*x(12)+tals(3))/JM3;

% equacao de controle

u(4)=-(i+alfa41\*x(8)+alfa40\*x(7)-lambda4\*z(4));

u(5)=-(l+alfa51\*x(10)+alfa50\*x(9)-lambda5\*z(5));

u(6)=-(k+alfa61\*x(12)+alfa60\*x(11)-lambda6\*z(6));

% Rigidez da mola do motor:

K1=10;

K2=10;

K3=10;

% Friccao viscosa relativa (na mola):

BR1=10;

BR2=8;

BR3=200;

%%%% Equacao de movimento %%%%

dx=zeros(15,1);

% Sem interacao robo/motor:



## Apêndice C

### C.1 Modelo cinemático e dinâmico de um robô manipulador

Este apêndice serviu como um estudo complementar. Apesar de não ser diretamente utilizado aqui, seu conhecimento foi necessário para compreender de modo global o comportamento de manipuladores.

As equações dinâmicas de um robô são expressões matemáticas que representam o comportamento dinâmico e temporal do sistema. Elas expressam a forma como a energia externa aplicada ao sistema é trocada entre seus armazenadores. Por comportamento dinâmico entendemos as respostas dos sistemas para as forças nele aplicadas, que naturalmente são funções da estrutura (dinâmica), definida pelas constantes de massa, inércia, comprimento, etc. Tais equações são úteis para se fazer simulações em computadores, para se projetar controladores ou simplesmente para se estudar analiticamente o sistema e seu comportamento no tempo. Desta forma, uma etapa preliminar a se considerar antes da implementação de alguma compensação é o estudo da dinâmica do manipulador.

As leis de movimento são obtidas obviamente das leis da mecânica (Newtoniana ou Lagrangeana). Apesar dos princípios elementares serem exatamente os mesmos, os diferentes formalismos tratam o estudo do manipulador de formas particulares, cada um possibilitando a elaboração de uma equação de movimento particular, com características próprias. Nos ataremos ao enfoque de Euler-Lagrange para o estudo da dinâmica do manipulador, sendo que poderíamos ter nos respaldado também em outros dois formalismos, os quais são Newton-Euler e D'Alambert para o desenvolvimento da modelagem.

Usualmente adota-se, para o estudo da dinâmica um dos três formalismos acima mencionados. O formalismo de Euler-Lagrange possibilita a dedução de um conjunto de equações não lineares de segunda ordem acopladas que, desprezando-se o efeito do controlador e atuador representam matricialmente o sistema (termos inerciais, centrípetos, e de coriolis, causados pela das juntas; e os termos gravitacionais), como será mostrado.

O formalismo de Newton-Euler possibilita o desenvolvimento de algoritmos recursivos para as deduções das expressões relativa das juntas. Entretanto esta recursividade dificulta a visualização da equação da equação e a conseqüente interpretação física da estrutura do sistema. Das mesmas forma o formalismo de D'Alambert também possibilita as relações discursivas, com a vantagem de preservar a estrutura dinâmica do sistema.

### **Formulação de Denavit-Hartenberg:**

Nesta formulação utiliza-se a noção de matriz de transformação de coordenadas, que são utilizadas para relacionar sistemas de coordenadas que se movem relativamente (movimento de rotação ou translação). Em linhas gerais, representa-se as relações entre dois sistemas de coordenadas deslocadas relativamente, através de multiplicações matriciais do tipo:

$$S_2 = T_R T_T S_1$$

onde  $T_R$  é uma matriz que representa a rotação do sistema 1 em relação ao sistema dois;  $T_T$  é uma matriz que representa a translação do sistema 1 em relação ao dois; e  $S_2$  e  $S_1$  = matrizes que representam as coordenadas dos sistemas 1 e 2, respectivamente.

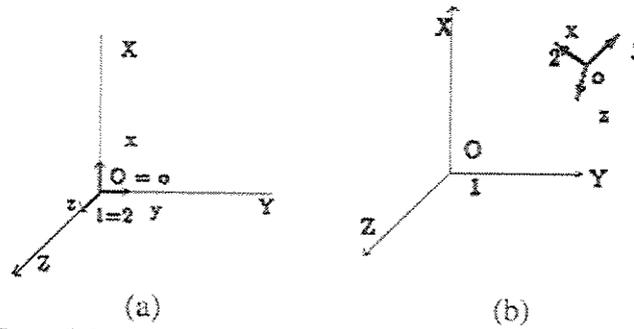


figura C.1: representação relativa de dois sistemas de controle  
 (a) instante inicial (b) o sistema 1 transladou-se e girou em relação ao sistema dois.

Para a representação cinemática que define o robô, utiliza-se as relações entre os links que a compõe, através de definições de eixos e posições relativas entre os links. Para se descrever as relações de rotação e translação entre links adjacentes D-H criaram um método matricial que relaciona os referidos links. A relação de D-H resulta uma matriz de translação (4x4) que expressa a transformação entre os links, podendo-se, assim, expressar, através de transformações sucessivas, qualquer link no sistema de coordenadas da base.

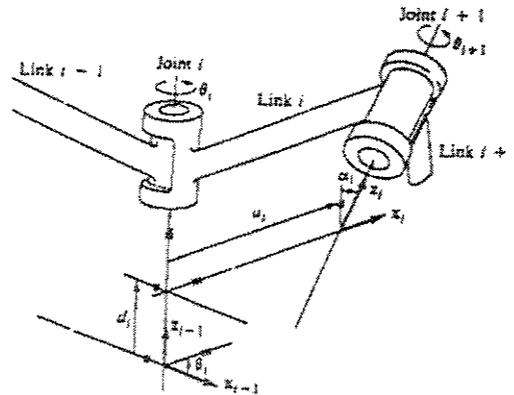


figura C.2: Esquema mostrando os parâmetros dos links e juntas

Referindo-se à fig. C.2, pode-se definir alguns parâmetros para os links e juntas.

$a_i$  é a menor distância entre os eixos das juntas;

$\alpha_i$  é o ângulo entre o eixo das juntas (ângulo de torção);

$\theta_i$  é o ângulo entre as juntas medido num, plano normal entre elas (ângulo de rotação);

$d_i$  é a distâncias, no eixo da junta, entre o ponto de inserção deste eixo com a reta  $a_i$  e oi ponto de inserção com a reta  $a_{i-1}$ . Este parâmetro é comumente chamado de *offset* do link.

Dados estes parâmetros e estabelecendo-se um sistema de coordenadas em cada link, é possível relacionar estes diferentes eixos da cadeia cinemática em relação a um sistema fixo, geralmente na base do manipulador (link 0).

Ainda referindo-se à figura dois podemos definir um sistema de coordenadas para os links. Cada sistema de coordenadas é definido com base em três regras:

1. O eixo  $z_{i-1}$  deve ficar ao longo da direção de movimento da  $i$ -ésima junta;
2. o eixo  $x_i$  é normal ao eixo  $z_{i-1}$  possui a direção da reta que define  $a_i$  e um sentido que faz apontar para o eixo  $z_i$  (vide figura).
3. o eixo  $y_i$  deve ser perpendicular aos dois anteriores.

Assim, uma vez que os parâmetros de D.H. são estabelecidos pode-se utilizar uma série de operações que transformam o sistema de coordenadas de um link para outro.

Por exemplo, examinando-se a figura dois podemos perceber que para representar o sistema (i-1) com relação ao sistema (i) devemos executar uma série de operações definidas como:

1. Rotação sobre o eixo  $z_{i-1}$  de um ângulo  $\theta_i$  para alinhar  $x_{i-1}$  com  $x_i$ ;
2. Translação ao longo de  $z_{i-1}$  de uma distância  $d_i$  para trazer o eixo  $x_{i-1}$  para a mesma origem de  $x_i$ ;
3. Translação ao longo de  $x_i$  de uma distância  $a_i$  para coincidir com as duas origens;
4. Rotação em torno de  $x_i$  de um ângulo  $\alpha_i$  para coincidir os dois eixos coordenados.

Estas operações podem ser descritas na forma matricial como:

$${}^{i-1}A_i = T_{Z,D} T_{Z,\theta} T_{X,a} T_{X,\alpha}$$

ou na forma de matrizes:

$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\text{sen}(\alpha) & 0 \\ 0 & \text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\cos(\alpha_i) * \sin(\theta_i) & \sin(\alpha_i) * \sin(\theta_i) & a_i * \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\alpha_i) * \sin(\theta_i) & -\sin(\alpha_i) * \cos(\theta_i) & a_i * \sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

As matrizes A relacionam as coordenadas dos links adjacentes e são denominadas matrizes de transformação.

Uma combinação dessas matrizes permite expressar os links em relação a um sistema fixo. A deduções seguintes se baseiam nessas matrizes, que permitirão encontrar uma expressão geral para as coordenadas e velocidades dos n-links, para então se deduzir as equações do movimento (baseando-se nas energias cinéticas e potencial).

## C.2 Equações de movimento para um robô de n-links

A figura C.3 mostra um esquema do sistema robótico com um ponto genérico  $i$  no link  $i$

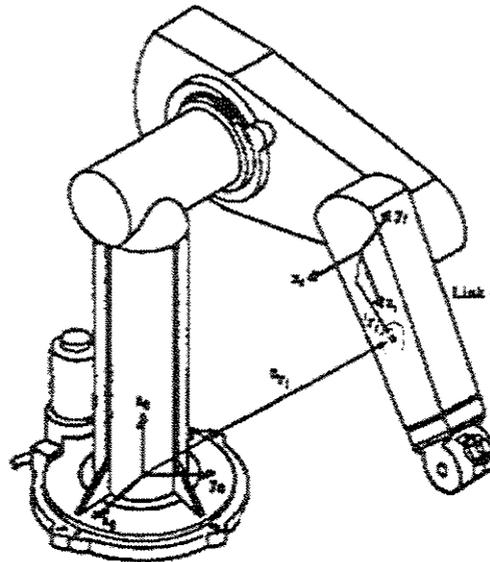


fig. C.3: esquema simplificado de um robô genérico

Partindo da figura C.3, seja  ${}^i r_i$  um ponto em repouso na junta  $i$  e a expressão nas coordenadas homogêneas do  $i$ -ésimo elo, isto é:

$${}^i r_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{bmatrix} = (x_i \ y_i \ z_i \ 1)^T$$

Seja:

${}^0 r_i$  = representação do ponto  ${}^i r_i$  em relação ao sistema de coordenadas da base

${}^{i-1} A_i$  = matriz de transformação que relaciona o sistema de coordenadas do elo  $i$

${}^0 A_i$  = matriz de transformação de coordenadas que relaciona sistemas de coordenadas (fixo em  $i$ ) com o sistema de coordenadas da base.

Então:

$${}^0 r_i = {}^{i-1} A_i * {}^i r_i$$

onde:  ${}^0A_i = {}^0A_1 * {}^1A_2 * \dots * {}^{i-1}A_i$

sendo a forma da matriz A para juntas de revolução:

$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\cos(\alpha_i) * \sin(\theta_i) & \sin(\alpha_i) * \sin(\theta_i) & a_i * \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\alpha_i) * \sin(\theta_i) & -\sin(\alpha_i) * \cos(\theta_i) & a_i * \sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A velocidade de  ${}^i r_i$  em relação ao sistema de coordenadas da base é:

$${}^0v_i = v_i = \frac{d}{dt} ({}^0r_i) = \frac{d}{dt} ({}^0A_i * i r_i) = {}^0\dot{A}_1 * {}^1A_2 * \dots * {}^{i-1}A_i * i r_i + {}^0A_1 * {}^1\dot{A}_2 * \dots * {}^{i-1}A_i * i r_i +$$

$${}^0A_1 * {}^1A_2 * \dots * {}^{i-1}A_i * \dot{i}r_i = \left( \sum_{j=1}^i \frac{\partial {}^0A_i}{\partial q_j} * \dot{q}_j \right) * i r_i + {}^0A_i * \dot{i}r_i$$

$$Q_i = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Então:

$$\frac{\partial {}^{i-1}A_i}{\partial q_i} = Q_i * {}^{i-1}A_i$$

que pode ser escrita como:

$$U_{ij} = \begin{cases} {}^0A_{j-1} * Q_j * {}^{j-1}A_i \rightarrow p / j \leq l \\ 0 \rightarrow p / j > l \end{cases}$$

$$U_{ij} = \frac{\partial {}^0A_i}{\partial q_j}$$

Assim

$$v_i = \left( \sum_{j=1}^i U_{ij} \dot{q}_j \right) {}^i r_i$$

### Calculo da energia Cinética do Manipulador:

Seja a energia cinética de uma partícula de massa diferencial  $dm$  no elo  $i$  dada por:

$$dK_i = \frac{1}{2} \left( \dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2 \right) dm = \frac{1}{2} Tr \left( v_i {}^* v_i^T \right) dm \rightarrow \text{no elo } i$$

Tr= traço da matriz

Substituindo  $v_i$  em  $dK_i$  e integrando, temos:

$$K_i = \frac{1}{2} Tr \left\{ \sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i U_{ip}^T \left[ \int {}^i r_i ({}^i r_i)^T dm \right] {}^* U_{ip}^T {}^* q_p {}^* q_r \right\}$$

$\int {}^i r_i ({}^i r_i)^T dm$  = inércia de todos os pontos do elo  $i$ , que pode ser escrita como:

$$J_i = \begin{bmatrix} (-I_{xx} + I_{yy} + I_{zz})/2 & I_{xy} & I_{yz} & m_i \bar{x}_i \\ I_{xy} & (I_{yy} - I_{xx} + I_{zz})/2 & I_{yz} & m_i \bar{y}_i \\ I_{xz} & I_{yz} & (I_{xx} + I_{yy} - I_{zz})/2 & m_i \bar{z}_i \\ m_i \bar{x}_i & m_i \bar{y}_i & m_i \bar{z}_i & m_i \end{bmatrix}$$

Assim, expressão da energia cinética total para um robô de  $n$  graus de liberdade é:

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i Tr \left( U_{ip} {}^* J_i {}^* U_{ir}^T {}^* q_p {}^* q_r \right)$$

### Calculo da energia potencial do manipulador:

Para o calculo da energia potencial do robô partiu-se da expressão da energia potencial de cada elo,  $P_i$

$$P_i = -m_i g {}^0 \bar{r}_i = -m_i g \left( {}^0 A_i {}^0 \bar{r}_i \right)$$

Para  $i=1,2,\dots$

Onde:

$g = g \begin{pmatrix} g_x & g_y & g_z \end{pmatrix}^T$  é o vetor coluna da aceleração da gravidade expresso nas

coordenadas de base e  ${}^i \bar{r}_i$  é o vetor que indica a posição do centro de massa do elo  $i$  a partir da  $i$ -ésima coordenada.

Logo, a energia total é dada por:

$$P = \sum_{i=1}^n -m_i g \left( {}^0 A_i {}^i r_i \right)_i$$

### Equações de movimento do manipulador:

A partir das expressões das energias cinética e potencial podemos calcular a Lagrangeana do sistema, que é definida por:

$$L = K - P$$

Substituindo a expressão de K e P em L, temos:

$$L = \left[ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i Tr \left( u_{ij} J_j U_{ik}^T \dot{q}_k \right) \right] + \left[ \sum_{i=1}^n g m_i \left( {}^i A_i {}^i r_i \right) \right]$$

Aplicando a formulação da Lagrangeana na equação acima, obtemos o valor do torque generalizado,  $\tau_i$ , aplicado a cada junta i:

$$\tau_i = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

$$\tau_i = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n Tr \left( U_{jk} J_j U_{ji}^T \ddot{q}_k \right) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j \sum_{m=1}^i Tr \left( U_{jm} J_j U_{ji}^T \dot{q}_k \dot{q}_m \right) - \sum_{j=1}^n \left( -m_j g U_{ji}^T \bar{r}_i \right)$$

para  $i=1,2,\dots,n$

ou na forma mais compacta:

$$\tau_i = \sum_{j=1}^n D_{ik} \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n D_{ikm} \dot{q}_k \dot{q}_m + D_i$$

onde

$$D_{ik} = \sum_{j=1}^n Tr \left( U_{jk} J_j U_{ji}^T \right), \quad D_{ikm} = \sum_{j=1}^n Tr \left( U_{jm} J_j U_{ji}^T \right), \quad D_i = \sum_{j=1}^n \left( m_j g U_{ji}^T \bar{r}_i \right)$$

Ou na forma matricial:

$$\tau(t) = D(q(t)) \ddot{q}(t) + d(q(t), \dot{q}(t)) + G(q(t))$$

Assim obteve-se uma equação para o movimento de um robô que é da forma:

$$\tau_i(t) = D(\theta) \ddot{\theta} + N(\theta, \dot{\theta}) + G(\theta)$$

onde cada termo pode ser assim identificado:

$\tau_i(t)$  = vetor ( $n \times 1$ ) dos torques generalizados nas juntas, isto é:

$$\tau(t) = (\tau_1(t), \tau_2(t), \dots, \tau_n(t))^T$$

$q(t)$  = vetor  $n \times 1$  das variáveis de posição das juntas;

$\dot{q}(t)$  = vetor  $n \times 1$  da velocidade das juntas;

## Súmula Curricular

- Participação em Congressos:

- II Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicações (DINCON 2003)

Título do Trabalho: *ESTUDO DA DINÂMICA DE UM PARTICULAR SISTEMA ROBOTICO (LINEAR E NÃO-LINEAR), COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE.*

Agosto de 2003 – Instituto Tecnológico da Aeronáutica (I.T.A.)

São José dos Campos - SP-Brasil.

- Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, (Cobém 2005)

Título do Trabalho: *DINÂMICA NÃO-LINEAR E ESTRATÉGIA DE CONTROLE DE UM SISTEMA ROBÓTICO DE 3 GRAUS DE LIBERDADE LEVANDO-SE EM CONTA AS INTERAÇÕES ENTRE AS JUNTAS.*

Novembro de 2005

Ouro Preto – MG – Brasil.

Trabalho no Prelo

- Publicações em Anais e Revistas:

- Anais do III COLAQB – Congresso Latino Americano de Órgãos Artificiais e Biomateriais.

Título do Trabalho: *MODELAGEM E SIMULAÇÃO DE SISTEMAS BIOMECÂNICOS DE MEMBROS INFERIORES.* 30 de Julho de 2004. Universidade Estadual de Campinas, Campinas-SP-Brasil.

- Anais do DINCON 2003, 'Simulação da dinâmica e um sistema robótico não linear com dois graus de liberdade. pág. 2493-2501, Série Arquimedes, Volume 2.