

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR CORNELIS JOANNES VAN
DER POEL FILHO E APROVADA
PELA COMISSÃO JULGADORA EM 25 / 02 / 2005

R. Pavanello
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

Modelagem Numérica de Problemas de
Domínios Acoplados para
Aplicação em Microsistemas Eletromecânicos

Autor: Cornelis Joannes van der Poel Filho

Orientador: Renato Pavanello

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

Modelagem Numérica de Problemas de Domínios Acoplados para Aplicação em Microsistemas Eletromecânicos

Autor: **Cornelis Joannes van der Poel Filho**

Orientador: **Prof. Dr. Renato Pavanello**

Curso: Engenharia Mecânica

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Tese de doutorado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2005

S.P. - Brasil

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

TESE DE DOUTORADO

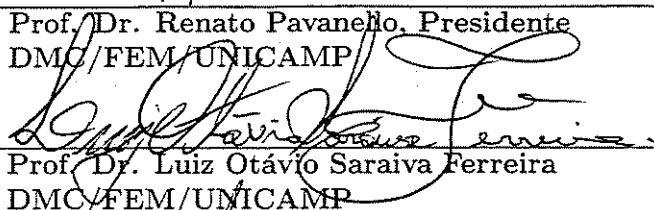
Modelagem Numérica de Problemas de Domínios Acoplados para Aplicação em Microsistemas Eletromecânicos

Autor: Cornelis Joannes van der Poel Filho

Orientador: Prof. Dr. Renato Pavanello



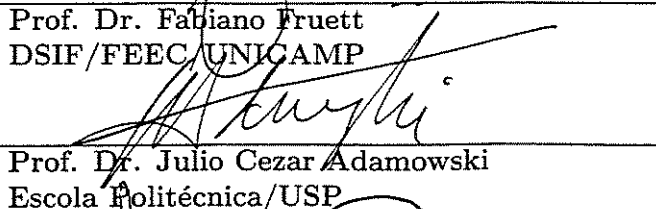
Prof. Dr. Renato Pavanello, Presidente
DMC/FEM/UNICAMP



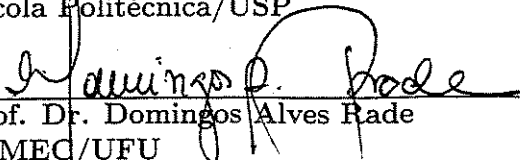
Prof. Dr. Luiz Otávio Saraiva Ferreira
DMC/FEM/UNICAMP



Prof. Dr. Fabiano Fruett
DSIF/FEEC/UNICAMP



Prof. Dr. Julio Cezar Adamowski
Escola Politécnica/USP



Prof. Dr. Domingos Alves Rade
FEMEC/UFU

Campinas, 25 de fevereiro de 2005.

Dedicatória

À minha família, e em especial a meu irmão, Jankees,
pelo sucesso em sua luta pela vida, dedico.

“... Prefiro ser feliz, embora louco, que em conformidade viver.”

Martin Luther King

Agradecimentos

- Ao Professor Renato Pavanello pela orientação, amizade, apoio e incentivo durante todo o doutorado.
- Aos Professores Antonio Gugliotta e Aurelio Somà, pela supervisão e apoio durante estágio de um ano no Politecnico di Torino, Itália.
- Ao CNPq e à CAPES pelo apoio financeiro ao desenvolvimento do trabalho.
- A Cornelis e Salete, meus pais, pelo carinho e amor dados a mim durante toda minha vida. Também pelo ambiente cultural e pedagógico ao qual estive inserido desde a infância.
- A Naiche e Jankees, meu irmãos, pelo carinho, amizade e bons momentos de convivência.
- À Fabiana pela compreensão, amor e paciência durante a fase de final deste doutorado.
- A Carlos, Flávia, Ílson e Talita pela amizade e constante intercâmbio de informações acerca do MefLab++.
- Novamente ao meu irmão Jankees pelas úteis dicas em programação orientada a objetos e C++.
- Aos amigos Simone, Marcos Pinho, Vanessa e Marcelo Cavaguti pela agradável convivência desde minha chegada em Campinas.
- Aos eternos amigos César, Chinês, Cristiano, Felipe, Gutembergh, Hamilton, Kátia, Lug, Mané, Neto, Newton, Paulo Mutamba, Ricardo, Sérgio Edoardo, Sérgio Mico e Walmira e pelos inigualáveis momentos de diversão e descontração.
- Aos professores e funcionários do Departamento de Mecânica Computacional e da Coordenação de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da UNICAMP.
- A todos aqueles que contribuíram direta ou indiretamente para elaboração deste trabalho.

Resumo

Poel Filho, Cornelis Joannes van der, *Modelagem Numérica de Problemas de Domínios Acoplados para Aplicação em Microsistemas Eletromecânicos*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2005, 137 p., Tese (Doutorado).

Microsistemas eletromecânicos geralmente têm seu princípio de funcionamento baseado na interação entre dois ou mais campos físicos. Para seu projeto são necessárias ferramentas de simulação multi-domínios. Este trabalho visa estudar o fenômeno de acoplamento eletromecânico em microsistemas e construir uma ferramenta de simulação numérica para este tipo de problema. São apresentados métodos de análise estática, modal e transiente baseados em modelos de elementos finitos e de ordem reduzida. Na análise estática cada domínio é resolvido separadamente. Foi mostrado um método de transferência das forças eletrostáticas para o domínio mecânico e proposto e testado um esquema de atualização da malha elétrica. Para a análise dinâmica transiente foi implementado um método de Newmark adaptado de forma a considerar os efeitos do acoplamento eletromecânico. Outro método de análise dinâmica apresentado é baseado numa estratégia de perturbação do sistema em equilíbrio em conjunto com a resolução de um problema de autovalor/autovetor. O método de perturbação fornece diretamente as frequências naturais de vibração do sistema acoplado. A técnica de redução de ordem apresentada é baseada numa projeção de Galerkin da equação diferencial governante utilizando como funções de base os modos empíricos do sistema dinâmico. Um programa computacional para modelagem numérica multi-domínios com solução particionada para o acoplamento eletromecânico foi proposto e implementado. O código computacional, denominado MefLab, onde os métodos numéricos foram programados, usa o paradigma de orientação a objetos e a linguagem C++. Resultados com as diversas metodologias são mostrados e analisados.

Palavras chaves: Domínios Acoplados, Microsistemas Eletromecânicos, Elementos Finitos, Análise Estática, Análise Dinâmica, Programação Orientada a Objetos.

Abstract

Poel Filho, Cornelis Joannes van der, *Coupled Field Problems Numerical Modeling for Microelectromechanical Systems*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2005, 137 p., Thesis (Doctorate)

Microelectromechanical systems have their working principles based on the interaction between two or more physical fields. To design them, multi-physics simulation tools are needed. This work aims to study the coupled field effects in microsystems and build a computer code for numerical simulation of this problem. Static, dynamic modal and transient methods are introduced. They are based on finite elements and reduced order models. The static analysis is done by a staggered treatment. A method for transferring electrostatic pressures to the mechanical domain was shown and a mesh updating scheme was proposed and tested. For the transient analysis, in order to consider the electromechanical coupling effects, an adaptation was inserted in the classical Newmark direct integration method. A dynamical modal method based in a perturbation strategy was presented. It involves the staggered static algorithm and the solution of an eigenvalue/eigenvector problem. This method is able to give the natural coupled frequencies of the system with low computational costs. A reduced order model was constructed by using a Galerkin projection of the governing differential equations in an empirical basis. This basis was obtained through results of transient finite element analysis. A multi-domain project with staggered procedures for the electromechanical coupling was proposed and implemented. It refers to the software MefLab++, a computer code written in C++ where numerical strategies are programmed according to the oriented object paradigm. Numerical results for the static, dynamic modal and transient methodologies are shown.

Key words: Coupled Fields, Electromechanical Microsystems, Finite Elements, Static Analysis, Dynamic Analysis, Object Oriented Programming.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Relevância e motivação	1
1.2	Objetivos do trabalho	3
1.3	Estrutura do texto	4
2	Revisão Bibliográfica	5
2.1	Níveis de modelagem para microsistemas	5
2.2	Problemas de acoplamento	8
2.3	Estratégias de simulação numérica em nível físico para problemas de acoplamento eletromecânico	10
3	Modelos Matemáticos	23
3.1	Domínio elétrico	23
3.1.1	Comentários sobre condutores	25
3.2	Domínio mecânico	27
3.3	Mecanismo de acoplamento entre o meio elétrico e mecânico	29
4	Metodologias para Solução do Problema de Acoplamento Eletromecânico	31
4.1	Método dos Elementos Finitos aplicado ao domínio elétrico	31
4.1.1	Elemento triangular elétrico	32
4.1.2	Determinação das pressões eletrostáticas	34
4.2	Método dos Elementos Finitos aplicado ao domínio mecânico	36
4.2.1	Elemento bi-linear mecânico	36
4.2.2	Elemento de linha mecânico	39

4.3	Análise estática do acoplamento eletromecânico com o MEF	41
4.4	Análise dinâmica do acoplamento eletromecânico com o MEF	45
4.4.1	Método de Newmark	46
4.4.2	Análise por perturbação e problema de autovalor	49
4.5	Modelo de ordem reduzida (MOR)	54
4.5.1	Decomposição ortogonal própria (DOP)	54
4.5.2	Construção do macromodelo	58
5	Implementação Computacional	62
5.1	Programação orientada a objetos (POO)	62
5.2	O código MefLab++	64
5.3	Acoplamento eletromecânico no MefLab++	68
6	Exemplos Analisados e Resultados Numéricos	72
6.1	Exemplo 1: Análise estática de uma microviga engastada-livre	72
6.2	Exemplo 2: Análise dinâmica de uma microviga engastada-livre pelo método de Newmark e estratégia de perturbação	88
6.3	Exemplo 3: Análise dinâmica de uma microviga bi-engastada pelo método de Newmark e estratégia de perturbação	93
6.4	Exemplo 4: Análise dinâmica de uma microviga engastada-livre com o modelo de ordem reduzida	99
6.5	Avaliações e conclusões	105
7	Conclusão	107
7.1	Conclusões finais	107
7.2	Trabalhos futuros	109
A	Artigo: Application of the Finite Element Method to Model the Problem of Electromechanical Coupling in Microsystems	121
B	Artigo: Dynamic identification of MEMS by eigensensitivity and Newmark simulation	131

Lista de Figuras

2.1	Níveis de modelagem para microsistemas.	7
3.1	Sistema eletrostático com condutores inseridos em um meio dielétrico uniforme sem perdas.	24
3.2	Condutor submetido a um campo externo $\mathbf{E}_0$	26
3.3	Corpo com esforços atuantes.	27
3.4	Sistema eletromecânico.	29
3.5	Comportamento não-linear do sistema acoplado.	30
4.1	Elemento triangular (a) no espaço real e (b) no espaço isoparamétrico. . . .	33
4.2	Elemento bi-linear plano (a) no espaço real e (b) no espaço isoparamétrico. .	37
4.3	(a) Tração p atuante na estrutura e (b) domínio e fronteira discretizados. . .	39
4.4	Elemento de linha (a) no espaço real e (b) no espaço isoparamétrico.	40
4.5	Tração p_n normal ao contorno.	41
4.6	Fluxograma da estratégia seqüencial.	42
4.7	Região (a) original e (b) deformada para a malha elétrica.	43
4.8	Algoritmo de atualização da malha elétrica.	45
4.9	Método de Newmark adaptado.	50
4.10	Estratégia de perturbação.	53
5.1	Estrutura geral do MefLab++.	65
5.2	Classe mãe BoundaryConditions e classes filhas.	66
5.3	Classe mãe MaterialsBehaviour e classes filhas.	66
5.4	Classe mãe Domínios, classes filhas e algumas relações.	67

5.5	Classe mãe <i>Tasks</i> e classes filhas.	69
6.1	Microviga de silício usada na análise estática.	73
6.2	Áreas referentes aos domínios mecânico (preta) e elétrico (cinza).	74
6.3	Malhas elétrica (superior) e malha mecânica (inferior).	74
6.4	Parâmetros geométricos da malha elétrica.	74
6.5	Potencial elétrico para <i>Malha 1</i> com $V = 0$ no contorno exterior.	75
6.6	Potencial elétrico para <i>Malha 2</i> com $V = 0$ no contorno exterior.	76
6.7	Potencial elétrico para <i>Malha 3</i> com $V = 0$ no contorno exterior.	76
6.8	Potencial elétrico para <i>Malha 4</i> com $V = 0$ no contorno exterior.	77
6.9	Potencial elétrico para <i>Malha 1</i> com $\partial V/\partial n = 0$ no contorno exterior.	77
6.10	Potencial elétrico para <i>Malha 2</i> com $\partial V/\partial n = 0$ no contorno exterior.	78
6.11	Potencial elétrico para <i>Malha 3</i> com $\partial V/\partial n = 0$ no contorno exterior.	78
6.12	Potencial elétrico para <i>Malha 4</i> com $\partial V/\partial n = 0$ no contorno exterior.	79
6.13	Deslocamento normalizado para $V = 0$ no contorno exterior.	81
6.14	Deslocamento normalizado para $\partial V/\partial n = 0$ no contorno exterior.	81
6.15	Variação nos resultados com o refinamento da malha estrutural	83
6.16	Erro nos resultados com o refinamento da malha elétrica	83
6.17	Deslocamento máximo versus condição de parada.	84
6.18	Malha atualizada sem realocação de nós. $V = 80V$	85
6.19	Malha atualizada sem realocação de nós. $V=120V$	86
6.20	Malha atualizada com realocação de nós. $V=120V$	86
6.21	Configuração de deslocamentos para a microviga com o sistema em equilíbrio estático.	86
6.22	Configuração do campo elétrico com o sistema em equilíbrio estático.	87
6.23	Detalhe do campo elétrico da Figura 6.22.	87
6.24	Microviga de silício usada na análise dinâmica.	89
6.25	Deslocamento com métodos de Newmark clássico e adaptado. $V=80V$	90
6.26	Deslocamento com métodos de Newmark clássico e adaptado. $V=100V$	90
6.27	Deslocamento máximo com método de Newmark.	91

6.28	Frequência normalizada do Exemplo 2 com a variação da voltagem.	92
6.29	Função potencial elétrico aplicada à microviga bi-engastada.	94
6.30	Resposta do Newmark para voltagens de 1V a 20V.	95
6.31	Resposta do Newmark para voltagens de 30V a 60V.	95
6.32	Resposta amortecida para entrada degrau.	97
6.33	Resposta amortecida para entrada conforme Figura 6.29.	97
6.34	Frequência normalizada do Exemplo 3 com a variação da voltagem.	98
6.35	Modos ortogonais próprios.	100
6.36	Deflexão com o MOR e usando o MEF.	101
6.37	Deflexão da viga para o MOR com número variado de MOPs.	102
6.38	Resposta ao potencial elétrico com frequência igual à do primeiro modo de vibração. Macromodelo com três MOPS. Passo de tempo $\Delta t = 5,0 \cdot 10^{-8} s$. . .	103
6.39	Resposta ao potencial elétrico com frequência igual à do segundo modo de vibração. Macromodelo com três MOPS. Passo de tempo $\Delta t = 1,0 \cdot 10^{-8} s$. . .	104

Lista de Tabelas

5.1	Classes do MefLab+ e suas responsabilidades.	68
5.2	Métodos usados nos algoritmos de solução de problemas acoplados.	70
6.1	Configurações de malhas elétricas.	74
6.2	Deslocamento máximo com $V = 0$ no contorno exterior.	79
6.3	Deslocamento máximo com $\partial V / \partial n = 0$ no contorno exterior.	80
6.4	Tempo computacional das simulações com as diversas malhas elétricas. . . .	82
6.5	Valor médio da resposta do Newmark e o deslocamento no equilíbrio estático.	91
6.6	Frequências naturais para o Exemplo 2	92
6.7	Frequências naturais para o Exemplo 3	98
6.8	Energia dos modos ortogonais próprios.	100
6.9	Deslocamentos médios para o MOR e o MEF.	101
6.10	Frequências para o segundo modo de vibração do microsistema.	104

Nomenclatura

Acrônimos

$gdl(s)$ - grau(s) de liberdade

DOP - Decomposição Ortogonal Própria

DVS - Decomposição de Valor Singular

EDO(s) - Equação(ões) Diferencial(is) Ordinária(s)

EDP(s) - Equação(ões) Diferencial(is) Parcial(is)

MDF - Método das Diferenças Finitas

MEF - Método dos Elementos Finitos

MEC - Método dos Elementos de Contornos

MEMS - Micro-Electro-Mechanical Systems

MOP(s) - Modo(s) Ortogonal(is) Próprio(s)

POO - Programação Orientada a Objetos

VOP(s) - Valor(es) Ortogonal(is) Próprio(s)

Símbolos

δ_{ij} - delta de Kroenecker

ϵ_{ij} - tensor de deformações infinitesimais

ϵ_o - permissividade do espaço livre

γ - densidade de carga de superfície

ω - frequência acoplada de um sistema eletromecânico

ω_j - frequências de vibração naturais de um sistema mecânico

ω_u - maior frequência de interesse no carregamento ou resposta de uma estrutura

ν - coeficiente de Poisson
 $\phi(x)$ - estruturas coerentes, modos ortogonais próprios ou modos empíricos
 $\psi_i(x, y)$ - funções de ponderação
 ρ_s - massa específica
 ϱ - densidade de carga de volume
 σ_{ij} - tensor de tensões
 ξ, η - coordenadas no espaço isoparamétrico
 Δt - passo de tempo
 Γ_{elec} - contorno de domínio elétrico
 Γ_{mec} - contorno de domínio mecânico
 Ω^r - espaço isoparamétrico
 Ω_{elec} - domínio elétrico
 Ω_{mec} - domínio mecânico
 $c_{i(x)}, c_{i(y)}$ - coordenadas em x e y do centróide de um elemento finito i
 d_i - coeficiente de distorção de um elemento finito i
 d_{med} - distorção média de uma malha
 f - pressão eletrostática
 f_e - força eletrostática em um sistema de um grau de liberdade
 f_{sup} - força de superfície
 k - rigidez mecânica em um sistema de um grau de liberdade
 k_e - rigidez eletrostática em um sistema de um grau de liberdade
 l_1, l_2, l_3 - lados de um elemento finito triangular
 m - massa em um sistema de um grau de liberdade
 n_i - componentes de um vetor normal unitário, $i = 1, 2$ e 3
 p - tração
 q - coordenada generalizada
 s_x, s_y - coordenadas de um nó
 t - tempo
 u - deslocamento

$\hat{u}$ - aproximação para o deslocamento
 w - deflexão
 $\hat{w}$ - aproximação para a deflexão
 x, y - coordenadas geométricas no espaço real
 $z(x, t)$ - campo médio ajustado
 A - área
 E - módulo de elasticidade ou de Young
 $\mathbf{E}$ - campo elétrico
 E_T - energia total contida em um conjunto de autofunções
 F - força de volume
 I - momento de inércia
 $J_{11}^I, J_{12}^I, J_{21}^I$ e J_{22}^I - termos da inversa da matriz jacobiana $[J]$
 $L(\cdot)$ - operador linear
 N_1, N_2, N_3 e N_4 - funções de interpolação
 R - função resíduo
 $R(x, x')$ - função de autocorrelação
 V - potencial elétrico
 $\hat{V}$ - aproximação para o potencial elétrico
 $\{a\}_j$ - modos de vibração de um sistema mecânico
 $\{F_{efet}\}$ - vetor de forças efetivo
 $\{F_M\}$ - vetor de forças de volume mecânico global
 $\{F_M^e\}$ - vetor de forças de volume mecânico elementar
 $\{P_E\}$ - vetor de trações elétrica global
 $\{P_M\}$ - vetor de trações mecânico global
 $\{P_M^e\}$ - vetor de trações mecânico elementar
 $\{Q_E\}$ - vetor de cargas nodais elétricas global
 $\{Q_E^e\}$ - vetor de cargas nodais elétricas elementar
 $[C]$ - matriz de propriedades materiais
 $[C_M]$ - matriz de amortecimento mecânico global

$[J]$ - matriz jacobiana

$[K_{efet}]$ - matriz de rigidez efetiva

$[K_E]$ - matriz de rigidez elétrica global

$[K_E^e]$ - matriz de rigidez elétrica elementar

$[K_M]$ - matriz de rigidez mecânica global

$[K_M^e]$ - matriz de rigidez mecânica elementar

$[M_M]$ - matriz de massa mecânica global

$[M_M^e]$ - matriz de massa mecânica elementar

$[Z]$ - matriz com valores de um campo médio ajustado

Capítulo 1

Introdução

1.1 Relevância e motivação

Microsistemas eletromecânicos são dispositivos que combinam atuação e sensoriamento elétrico e mecânico em uma estrutura cujas dimensões são da ordem de micrômetros. Na literatura, do termo em língua inglesa *Micro-Electro-Mechanical Systems*, criou-se o acrônimo MEMS. Atualmente, o termo MEMS é usado para se referir a microdispositivos de um modo geral e não apenas aos de atuação eletromecânica. Na Europa, a comunidade científica prefere identificá-los diretamente por *Microsistemas*.

As aplicações estão nas mais diversas áreas. Nas indústrias automotiva e espacial destacam-se os sensores inerciais e de pressão. Um dos exemplos mais populares da tecnologia de microsistemas é o acelerômetro (Ko et al., 1995; Yazdi and Najfi, 2000). Atualmente, esse microsensor inercial é empregado, entre outros, em sistemas de freio com controle de travamento, acionamento de *airbags* e em sistemas de sensoriamento sísmico. Nesse mesmo campo, encontram-se os microgiroscópios para medida e controle de rotação em veículos automotores (Lee et al., 2000; Rajendran and Liew, 2004). Sensores de pressão são bastantes úteis no campo de medições de intensidades acústicas e fluxo (Burns et al., 1995).

A miniaturização em si traz um campo de aplicações impossível de ser alcançado por equipamentos em macro escala. Na engenharia biomédica, a tecnologia de MEMS tem impulsionado o desenvolvimento de ferramentas para cirurgias com o mínimo de invasão do corpo humano. Nestas, microdispositivos são inseridos no organismo do paciente por meio de pequenas incisões no corpo e os procedimentos necessários são então efetuados. O re-

sultado é uma intervenção onde há menos trauma dos tecidos, menos risco de inflamação, redução de complicações pós-operatórias e recuperação mais rápida (Dargahi et al., 2000). Outra aplicação médica de MEMS são os aparelhos para administração de drogas. Em (Cao et al., 2000) é apresentada uma microbomba para ser implantada no corpo humano que serve para auxiliar no tratamento de pessoas com doenças como diabetes e mal de Parkinson. Vantagens imediatas são o alívio das dores causadas pelas freqüentes injeções e o maior controle na dosagem da droga.

Como outras aplicações, pode-se citar: cabeças de impressão a jato de tinta (Lee et al., 1999), scanners para impressoras a laser, leitores de código de barra e mostradores digitais (Ferreira and Moehlecke, 1999; Yan et al., 2004), componentes para disco rígido de computadores (Temesvary et al., 1995), relés micromecânicos (Gretillat et al., 1999), dispositivos chaveadores (McCarthy et al., 2002), e micropinças para transporte de pequenos objetos e manipulação de células em procedimentos biomédicos (Millet et al., 2004).

O desenvolvimento de MEMS iniciou-se pela verificação da possibilidade de uso das tecnologias da indústria de semicondutores na fabricação de dispositivos mecânicos miniaturizados. Historicamente, no momento em que os semicondutores começaram a ser fabricados em larga escala, o custo de sua produção foi enormemente reduzido e eles puderam ser utilizados em inúmeros aparelhos e dispositivos eletrônicos, dos mais complexos àqueles hoje presentes no dia-a-dia de qualquer cidadão comum (televisão, tocadores de CD, telefones celulares, entre outros). Um fator fundamental a esse sucesso da indústria de semicondutores foi o alcance de um nível de simulação computacional que minimizou a necessidade de construção de protótipos experimentais. A redução do custo de produção se deu ainda pela própria diminuição de tamanho e massa e pelo uso de processos de fabricação em lotes.

A pesquisa direcionada ao projeto de MEMS tem objetivos semelhantes. Computacionalmente, pela característica intrínseca de funcionamento baseado na interação entre um ou mais campos físicos, o desafio reside em se conseguir modelos numéricos de simulação multi-domínios. Do ponto de vista de fabricação, procura-se adequar os processos à construção de sistemas dotados de estruturas onde a geometria é essencial ao seu correto funcionamento.

O presente trabalho se situa na área de desenvolvimento de estratégias de resolução

numérica para sistemas onde há acoplamento de domínios, particularmente para aqueles onde a atuação é do tipo eletrostática. Embora a atuação eletrostática normalmente não seja usada para aplicações em macro escala, como por exemplo, em motores, ao nível de micrômetros ela é benéficamente empregada. Em micro escala, a razão de aspecto entre superfície e volume é alta e as forças de superfície, como é o caso da eletrostática, são dominantes. Adicionalmente, a atuação é conseguida pelas simples aplicação de um potencial elétrico.

Em microsistemas de atuação eletrostática é necessária a análise de dois campos acoplados: mecânico e elétrico. Nesta área se encontram sistemas onde os dois domínios se superpõem, como no caso de cristais piezoelétricos, e sistemas onde a influência de um domínio sobre o outro ocorre pelas interfaces em comum. Essa última classe constitui o alvo deste trabalho. Aplicações são encontradas em filtros eletromecânicos, sensores ressonantes e microsensores e atuadores em geral.

1.2 Objetivos do trabalho

O objetivo global deste trabalho é a investigação e implementação de estratégias de solução numérica estática e dinâmica para problemas de acoplamento eletromecânico por superfície. São usados modelos de elementos finitos e de ordem reduzida com vistas à obtenção de simuladores precisos e eficientes que possam ser aplicados em procedimentos numéricos de otimização estrutural.

Pode-se mencionar os seguintes objetivos específicos do trabalho:

- Estudo da forma de interação entre os domínios mecânico e elétrico em problemas de acoplamento eletromecânico;
- Implementação de elementos finitos para análise em separado de problemas eletrostáticos e estruturais no programa MefLab++;
- Implementação de algoritmos de análise estática e dinâmica baseados em tratamentos particionados iterativos para considerar a interação entre os domínios envolvidos;

- Implementação de estratégia de atualização de malha com controle de distorção elementar e geral;
- Utilização de uma técnica de redução de modelos com base em dados de simulações transientes por elementos finitos para rápida simulação de microsistemas;
- Emprego dos algoritmos em exemplos diversos, avaliar os resultados e compreender o comportamento de microdispositivos eletromecânicos; e
- Construção de uma ferramenta robusta e modular de simulação multi-domínios com a linguagem C++ e segundo o paradigma da orientação a objetos.

1.3 Estrutura do texto

A estrutura do texto é descrita a seguir.

O Capítulo 2 inicia-se com uma exposição geral sobre a modelagem de microsistemas. Em seguida, tem-se uma abordagem sobre as classificações para problemas de acoplamento, bem como os possíveis tratamentos para eles. Por último tem-se uma revisão bibliográfica onde é apresentado o estado da arte do tema.

No Capítulo 3 são apresentadas as equações governantes para o domínio elétrico e para o domínio mecânico. A forma com a qual se dá o acoplamento entre os dois também é exposta.

No Capítulo 4 estão as metodologias de simulação numérica propostas para o problema de acoplamento eletromecânico. Tem-se uma breve exposição sobre os elementos finitos implementados e em seguida os métodos de análise estática, dinâmica transiente e dinâmica modal são apresentados.

O Capítulo 5 fornece uma visão geral sobre a programação orientada a objetos, o MefLab++ e as estratégias de simulação acoplada dentro do programa.

O Capítulo 6 contém exemplos analisados com as estratégias de solução desenvolvidas ao longo do trabalho. São usados sistemas eletromecânicos com estruturas simples tipicamente presentes em microdispositivos.

No Capítulo 7 são apresentadas as considerações e conclusões finais sobre o trabalho desenvolvido. Também são indicadas propostas para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

A revisão bibliográfica está dividida em três seções. Na primeira seção, a fim de fornecer uma visão global sobre o projeto de microsistemas, os diversos níveis de modelagem na área são apresentados. Na segunda, são expostas as classificações e procedimentos de análise gerais para problemas de acoplamento de domínios. Por fim, na última seção, a revisão é sobre os procedimentos numéricos de simulação estática e dinâmica a nível físico e comportamental para o caso específico do acoplamento eletromecânico.

2.1 Níveis de modelagem para microsistemas

A modelagem de microsistemas costuma ser dividida em quatro níveis (Senturia, 1998; Senturia, 2001; Gilbert et al., 1998; Gerlach and Klein, 1998; Wachutka, 1999):

1. Nível de processo;
2. Nível físico;
3. Nível de dispositivo; e
4. Nível de sistema.

O primeiro item refere-se à simulação dos processos de fabricação. Esse nível é importante em microsistemas porque as propriedades dos materiais dependem dos processos pelos quais os componentes são fabricados. A modelagem busca prever a geometria do sólido resultante de um determinado processo de corrosão anisotrópica ou outra tecnologia de microfabricação.

Desse modo, os dispositivos sobre os quais serão realizadas as simulações de nível físico já serão aqueles gerados pelo método específico empregado em sua produção.

A modelagem em nível físico procura capturar o comportamento real do dispositivo no continuum tridimensional. As equações governantes são tipicamente Equações Diferenciais Parciais (EDPs). A primeira opção para este nível é o uso de métodos analíticos para encontrar soluções fechadas em geometrias ideais. Como a abrangência nesse caso é muito limitada, normalmente métodos numéricos são preferidos. Entre esses os mais utilizados são: Método dos Elementos Finitos (MEF), Método dos Elementos de Contorno (MEC) e Método das Diferenças Finitas (MDF).

No cerne das simulações em nível físico está o problema da análise de campos acoplados. Os modelos envolvendo diversos campos (mecânico, térmico, elétrico, magnético, ótico e químico, entre outros) são geralmente representados por EDPs acopladas no espaço e tempo. Os modelos físicos adequados devem ser selecionados e, após a definição das condições de operação e dos parâmetros de controle, a solução numérica para o conjunto de EDPs deve ser encontrada.

Os modelos nas simulações em nível físico possuem muitos graus de liberdade e têm como resultado final uma distribuição espacial dos campos possivelmente como função do tempo. Visando avaliar a qualidade de um microdispositivo de forma mais simplificada e em termos de apenas alguns parâmetros característicos, é necessário desenvolver modelos de baixa ordem (compactos) que tenham a capacidade de prever a performance do sistema de modo mais rápido do que os modelos em nível físico. Esses modelos “simples” são conhecidos como macromodelos ou modelos comportamentais e são representativos do nível de dispositivo do processo de modelagem de microsistemas.

Algumas são as possibilidades para o nível de dispositivo. Primeiramente, pode-se citar modelos descritos por Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) com coeficientes extraídos de simulações de nível físico. Essas EDOs devem conter parâmetros que representem quantidades físicas e geométricas do sistema e qualidade suficiente para fornecer respostas que concordem com as de simulações físicas de mesma configuração. As próprias simulações de nível físico constituem outra possibilidade para o nível de dispositivo. O esforço porém, vai

de moderado a proibitivo, dependendo da complexidade do dispositivo e das ferramentas numéricas disponíveis. A maneira mais simples de se gerar modelos compactos é através de um ajuste de curva baseado em medições de dados ou resultados de simulações com o MEF, MEC ou MDF. A escolha da opção mais adequada vai depender das restrições tecnológicas, da geometria e da aplicação do dispositivo, dentre outros fatores.

Acima do nível de dispositivo tem-se o nível de sistema. Aqui, os macromodelos representativos dos diversos elementos são reunidos com o objetivo de se estudar o comportamento do sistema como um todo, sob as condições de operação de interesse. O modelo no nível de sistema pode ser representado, por exemplo, por redes de parâmetros concentrados, diagramas de bloco ou através de linguagem de descrição de hardware analógica.

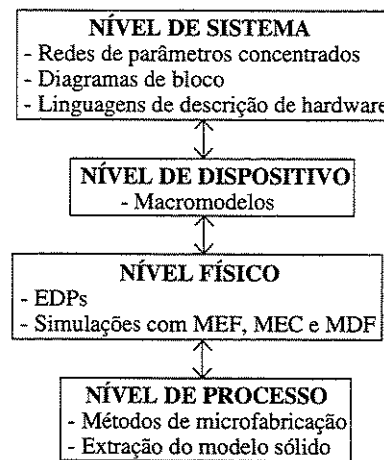


Figura 2.1: Níveis de modelagem para microsistemas.

Para utilização efetiva dos macromodelos no nível de sistema, algumas características desejadas são assinaladas (Senturia, 1998; Gilbert et al., 1998):

- Concordância com simulações em nível físico;
- Poucos graus de liberdade;
- Parametrização com base nas dimensões e propriedades dos materiais;
- Abrangência de comportamento quasi-estático e dinâmico;

- Assegurar conservação de energia e conter mecanismos dissipativos;
- Possuir representação analítica; e
- Facilidade de inserção em simuladores de nível de sistema.

Na Figura 2.1 estão representados os diversos níveis de modelagem e a conexão entre eles.

Este trabalho refere-se principalmente ao nível físico, mas aborda também a construção de macromodelos.

2.2 Problemas de acoplamento

Problemas de acoplamento são aqueles onde dois ou mais campos físicos estão presentes e interagem entre si. A solução para o sistema não pode ser encontrada resolvendo-se as equações governantes de apenas um dos domínios. O. C. Zienkiewicz foi um dos primeiros autores a fornecer uma classificação objetiva para este tipo de problema. Segundo ele (Zienkiewicz, 1984), duas categorias básicas distintas podem ser definidas:

- **Classe I.** Contém problemas onde os vários domínios se sobrepõem (totalmente ou parcialmente). O acoplamento ocorre via equações diferenciais e normalmente refere-se a diferentes fenômenos físicos; e
- **Classe II.** Contém problemas onde o acoplamento ocorre através das interfaces dos domínios, pelas condições de contorno impostas. Uma subclassificação para esta classe pode ser identificada:
 - (a) Problemas nos quais diferentes físicas (e/ou variáveis independentes) ocorrem em diferentes domínios físicos; e
 - (b) Problemas nos quais idênticas físicas e variáveis independentes são especificadas em cada domínio.

Atualmente, outras nomenclaturas são mais comuns na literatura. Em (Wachutka, 1999) os problemas da Classe I são chamados de *acoplamento por volume* e os da Classe II de *acoplamento por superfície*. Analisando-se as equações acopladas dos sistemas, os problemas

podem ser classificados como sendo do *tipo fraco* e do *tipo forte* (Korvink et al., 1994). Se dois tipos genéricos de graus de liberdade $\{x_1\}$ e $\{x_2\}$ descrevem um problema de campos acoplados, sua formulação discreta consiste em um conjunto de equações cuja expressão típica geral se apresenta no seguinte formato (Collenz et al., 2004):

$$\begin{bmatrix} [K_{11}(\{x_1\}, \{x_2\})] & [K_{12}(\{x_1\}, \{x_2\})] \\ [K_{21}(\{x_1\}, \{x_2\})] & [K_{22}(\{x_1\}, \{x_2\})] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{x_1\} \\ \{x_2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{P_1(\{x_1\}, \{x_2\})\} \\ \{P_2(\{x_1\}, \{x_2\})\} \end{Bmatrix}$$

onde P_1 e P_2 são vetores de carga nodal genéricos e $[K_{ij}]$ são matrizes do sistema discreto. As dependências dos termos com relação a $\{x_1\}$ e $\{x_2\}$ variam para cada problema específico. O caso onde o acoplamento é causado pela presença das sub-matrizes $[K_{12}]$ e $[K_{21}]$ é considerado do tipo forte. Se os termos da anti-diagonal forem nulos ou se for possível solucionar o sistema de forma precisa fazendo-os iguais a zero, o acoplamento é dito fraco.

Um exemplo de acoplamento por volume ocorre nos materiais piezoelétricos. Nesses, os dois campos físicos presentes, elétrico e mecânico, estão sobrepostos. O acoplamento por superfície pode ser visto em problemas do tipo fluido-estrutura. Considerando um container com líquido em seu interior, tem-se que os domínios estão espacialmente separados mas interagindo entre si pela interface comum entre eles. Outro exemplo são os sistemas alvos deste trabalho. Os dispositivos são constituídos de uma estrutura condutora que possui um campo elétrico ao seu redor. A interação entre os dois domínios acontece apenas através das interfaces em comum. Um problema da Classe II-(b) poderia ser o de uma estrutura mecânica com locais diferentes tratados como domínios diferentes.

As metodologias de análise para problemas de acoplamento podem ser divididas em três categorias (Felippa et al., 2001):

- **Eliminação de campo.** Um ou mais campos são eliminados por técnicas tais como transformada integral ou redução de modelo, e os campos restantes são tratados por um esquema simultâneo de passo no tempo ou fazendo-se uma análise estacionária estática ou dinâmica no domínio da frequência;
- **Tratamento monolítico (simultâneo ou direto).** o problema inteiro é tratado como uma entidade monolítica, e todos os componentes são analisados simultaneamente; e

- **Tratamento particionado (ou seqüencial).** Os modelos de campo são computacionalmente tratados como entidades isoladas que são analisadas separadamente seja em cada passo no tempo para o caso transiente, ou para cada condição de equilíbrio nos casos estacionários. Os efeitos da interação são vistos como carregamentos que são aplicados entre os componentes individuais por alguma técnica específica.

Felippa et al. (2001) apontam ainda duas abordagens para o tratamento particionado: algébrica e diferencial. Na algébrica o sistema acoplado é espacialmente discretizado e depois decomposto. Na diferencial, ao contrário, a decomposição é feita e em seguida cada campo é discretizado separadamente. Neste trabalho, as estratégias são particionadas do tipo diferencial.

2.3 Estratégias de simulação numérica em nível físico para problemas de acoplamento eletromecânico

Os primeiros trabalhos voltados ao desenvolvimento de métodos e construção de ferramentas de simulação numérica para microsistemas eletromecânicos surgiram no início dos anos noventa.

Em (Senturia et al., 1992) um sistema integrado de simulação multi-domínio chamado MEMCAD® é apresentado. Esse programa atua como uma interface entre vários códigos específicos de análise numérica. A parte mecânica é resolvida pelo Método dos Elementos Finitos e a elétrica pelo Método dos Elementos de Contorno. O PATRAN® é usado para modelagem dos sólidos, construção de malha e imposição de cargas no meio mecânico. A solução pelo MEF é encontrada com o ABAQUS® e o MEC é aplicado através do FASTCAP® (Nabors and White, 1991). Os exemplos mostrados consistem de uma microviga bi-engastada e um diafragma submetidos a diferentes pressões onde a deformação é obtida pelo ABAQUS® e transferida ao FASTCAP® para cálculo da capacitância do sistema. A ação ocorre apenas no sentido domínio mecânico-domínio elétrico.

Em (Artz and Cathey, 1992) é apresentado um algoritmo misto onde a estrutura é modelada através do MEF usando o código ABAQUS® e a força elétrica é aproximada por uma expressão analítica para capacitores de placas paralelas. O problema é resolvido de forma

iterativa e a cada passo de solução a força é atualizada de acordo com os deslocamentos mecânicos. No ABAQUS® a aplicação da carga é feita de forma incremental possibilitando a análise até o alcance da voltagem de *pull-in*¹ do sistema. Análises estáticas de um diafragma e uma placa engastada em uma viga torsional são apresentadas. Para o primeiro, a simulação inclui o comportamento até a voltagem de *pull-in*.

Em (Yamaguchi et al., 1993) é proposto e construído um microatuador de atuação eletrostática e apresentada uma simulação numérica baseada em elementos finitos para ele. A estratégia é elaborada no programa ANSYS®. O algoritmo se inicia com a resolução do problema eletrostático e obtenção do campo elétrico, segue com a obtenção das forças eletrostáticas, calcula as deformações mecânicas e após estas reposiciona as coordenadas nodais. Esse processo se repete até que a razão entre as deformações de duas iterações subseqüentes fique abaixo de um limite pré-definido. Na literatura, esse tipo de esquema é conhecido como *relaxamento*. O método numérico é exposto de forma extremamente sucinta e carece de maiores detalhes. Os resultados de análises estáticas numéricas e experimentais são consideravelmente diferentes.

Em (Schwarzenbach et al., 1993) é mostrada a configuração básica de um programa onde módulos de análise para os campos físicos são construídos sobre uma mesma plataforma computacional. Vantagens em relação ao código apresentado em Senturia (1998) são o formato único para leitura e armazenamento de dados e maior facilidade para incorporar formulações monolíticas para problemas de acoplamento forte. A análise do domínio elétrico é realizada por um simulador de dispositivos semicondutores (SESES - *Semiconductor Sensor and Actuator Simulation*) e tanto esta como a mecânica são baseadas no MEF. A resposta estática de um modelo representativo de um *comb-drive*² constituído de uma mola elástica linear para o comportamento mecânico e um elemento de força não-linear dependente dos deslocamentos para a parte elétrica é mostrada. O elemento de força é construído com base em resposta de simulação elétrica tridimensional isolada realizada com o SESES considerando diferentes posicionamentos da estrutura do *comb-drive*.

¹Voltagem na qual uma estrutura atuada eletrostaticamente se desloca de forma brusca, geralmente acarretando no contato entre as partes condutoras envolvidas.

²Dispositivo eletromecânico formado por estruturas em forma de pente ("*comb*") construídas para funcionar como séries de capacitores.

Em (Korvink et al., 1994) são expostos avanços no código SESES. Ressalta-se o uso de modelos de dados únicos mas aponta-se a inclusão de interfaces para simuladores externos como o ANSYS® e o FASTCAP®. É citado o uso de um algoritmo adaptativo para construção de malhas de elementos finitos e a capacidade de compor e resolver formulações de acoplamento tipo forte. A distribuição de potencial para um micro espelho torsional é apresentada e efeitos de tensões térmicas devido ao processo de fabricação são comentados.

Progressos do MEMCAD® (Senturia et al., 1992) são reportados em (Osterberg et al., 1994). Três modelos implementados são expostos: um de parâmetros concentrados tipo capacitor de placas paralelas-mola mecânica, outro baseado na teoria da viga unidimensional e forças derivadas do capacitor, e um terceiro tridimensional com MEF para estrutura e MEC para o domínio elétrico. Nesta versão, o programa Pro/ENGINEER® é usado para modelagem sólida, malha e inserção de propriedades materiais, o PATRAN® para visualização, ABAQUS® para o MEF e FASTCAP® para o MEC. A solução é particionada com esquema de convergência tipo relaxamento. Resultados estáticos para uma membrana e uma placa circular indicam boa concordância para os modelos uni- e tridimensional.

Em (Gilbert et al., 1995) um código chamado de CoSolve-EM® para resolução tridimensional de problemas quasi-estáticos eletromecânicos é apresentado. Sua concepção é semelhante à do MEMCAD® empregando simuladores externos (ABAQUS®, FASTCAP® e PATRAN®) para realização das análises de cada campo envolvido. O programa é escrito em C++. Simulações tridimensionais acopladas são realizadas para diversos dispositivos e respostas de deslocamento, deformação e capacitância são apresentadas.

Em (Shi et al., 1995) um algoritmo híbrido MEF-MEC com relaxamento é proposto e testado. Aponta-se o uso do MEC para o domínio elétrico como vantajoso sobre MEF pelo fato dele não exigir discretização do domínio exterior. A análise estrutural é realizada por um elemento finito de viga com seis *gdl*s. O modelo numérico é aplicado a uma micropinça cujos braços são tratados como condutores e aos quais é aplicado o potencial elétrico. Uma analogia física à micropinça é feita por um modelo analítico simplificado composto de duas esferas com carga elétrica e duas molas mecânicas. Simulações com a micropinça e com o modelo simplificado são usadas para demonstrar fenômeno físicos como instabilidade, voltagem de

pull-in e soltura, histerese e não-linearidade da força eletrostática.

Em (Bachtold et al., 1995) um esquema de convergência iterativo baseado em uma atualização das pressões eletrostáticas segundo o deslocamento da superfície mecânica, usando o método de Newton-Rapson, é apresentado. O domínio elétrico é resolvido pelo MEC e o mecânico aparentemente pelo MEF. Esse esquema possui melhores propriedades de convergência do que o relaxamento, é computacionalmente mais caro e é indicado especialmente para os casos onde as forças e deformações são extremamente grandes.

Em (Shi et al., 1996) um método MEF-MEC para análise transiente é apresentado. O domínio elétrico é modelado pelo MEC e para a parte estrutural é usado um elemento finito de viga. O comportamento no tempo é obtido pelo método de integração de Newmark. A cada passo de tempo tem-se uma atualização da geometria dos condutores e conseqüente atualização da pressão eletrostática. Respostas transientes para uma micropinça e um modelo simplificado de um *gdl* análogo a esta são mostradas.

Em (Schroth et al., 1996) a simulação acoplada de um sensor de força ressonante com estrutura tipo viga bi-engastada e atuação piezoelétrica é conseguida através dos pacotes comerciais ANSYS® e PSPICE®. A estrutura de silício e atuadores piezoelétricos são analisados no ANSYS® e o circuito alimentador e controlador de tensão no PSPICE®. A troca de dados entre os dois programas e a checagem da convergência são feitos por uma interface externa.

Em (Funk et al., 1996) e (Funk et al., 1997) é apresentado um código computacional (SOLIDIS) para análise estática de microsistemas com atuação eletrotérmica, eletrostática por superfície e eletrostática por volume. O SOLIDIS resolve os problemas de acoplamento por um tratamento particionado onde esquemas iterativos (relaxamento e Newton-Raphson) são aplicados aos subsistemas e ao sistema como um todo até a obtenção primeiro de convergência local e em seguida global. O MEF é usado para todos os domínios envolvidos. Durante as simulações a malha elétrica na região próxima ao atuador é constantemente atualizada de acordo com os deslocamentos estruturais correntes. Para o acoplamento eletrostático por volume mostra-se uma formulação do tipo forte e o problema é resolvido em um único passo.

Em (Wunsche et al., 1997) é descrita uma interface que conecta o ANSYS® e um programa de simulação de circuitos chamado SABER®. A resposta transiente do problema é conseguida através de um algoritmo de resolução baseado em passos de tempo. Esses passos são variáveis, sendo longos com pequenas mudanças nos valores dos resultados, e curtos, na situação contrária. Um sensor de aceleração formado por duas vigas em balanço conectadas por uma massa sísmica é simulado. Em cada lateral da massa há um atuador eletrostático em forma de capacitor que serve para mantê-la em equilíbrio e sensoriar os deslocamentos.

A desvantagem do uso de simuladores de circuitos como em (Schroth et al., 1996) e (Wunsche et al., 1997) é a possibilidade de modelar o domínio elétrico unicamente por modelos de parâmetros concentrados. No caso de uma geometria onde essa aproximação não possa ser feita a metodologia não pode ser aplicada.

Em (Nagler et al., 1998) um programa (BOSS/Quattro) descrito como gerenciador de simuladores específicos é apresentado. Códigos comerciais como Pro/Engineer®, ANSYS® e SPICE® são usados para tarefas particulares necessárias ao projeto de microsistemas. Modelos parametrizados obtidos de análises tridimensionais podem ser programados em elementos transdutores em uma linguagem de descrição de hardware analógica e simulações a nível de sistema podem ser executadas. O programa é aplicado a um microacelerômetro composto de uma massa sísmica suspensa por quatro vigas flexíveis.

Nos últimos anos da década de noventa, a procura por modelos que possibilitassem uma aceleração do processo de análise numérica de microsistemas se intensificou. Razões para isso foram o elevado tempo computacional despendido na simulações completas através do MEF e/ou MEC e a necessidade de verificação do comportamento dos dispositivos em nível de sistema. Ferramentas de simulação em nível físico ainda continuaram a ser desenvolvidas, porém, em paralelo, começaram a ser buscados os modelos de ordem reduzida ou macromodelos.

Em (Swart et al., 1998) é reportado um código computacional, AutoMM®, capaz de construir de forma automática um modelo de parâmetros concentrados com até seis *gdl*s para estruturas tipo placa(corpo rígido)-haste flexível. O macromodelo é baseado numa aproximação de segunda ordem para um sistema com forças elásticas, inércia e amortecimento, onde

os coeficientes vêm de simulações físicas realizadas com o MEMCAD®. A força eletrostática é obtida com base numa curva capacitância versus *gdl* na massa do sistema. A ferramenta é demonstrada com um acelerômetro capacitivo e resultados de deslocamento e frequência são mostrados.

Em (König et al., 1999) uma ferramenta numérica baseada no MEF para o domínio mecânico e no MEC para o elétrico é apresentada. Um esquema iterativo com relaxamento é usado quando a operação se restringe à região estável do sistema. Um método é proposto para situações com instabilidades tipo *pull-in*. Nesse, a solução complexa de um problema B é alcançada pela solução contínua de um problema mais simples A por meio de um parâmetro $\lambda \in [a, b]$. Em $\lambda = a$ tem-se o caso mais fácil e com o aumento gradativo passo a passo até b chega-se ao mais difícil procurado. O parâmetro λ é a carga elétrica e por meio da variação deste a solução do balanço de forças para o equilíbrio estável é conectada até pontos de instabilidades do sistema. As análises são estáticas.

Uma metodologia de análise dinâmica capaz de avaliar o deslocamento da frequência natural em MEMS devido à aplicação de uma voltagem DC é apresentada em (He et al., 1999). Duas perturbações são dadas ao sistema em equilíbrio e, por meio de análises com elementos de contorno, forças eletrostáticas são encontradas. Pela razão entre a variação das forças e posições perturbadas é obtida uma rigidez eletrostática distribuída para o sistema. As frequências acopladas são determinadas resolvendo-se um problema de autovalor onde a matriz de rigidez total é obtida pela soma da rigidez mecânica com a eletrostática.

Em (Hung and Senturia, 1999) um macromodelo para um sensor de pressão é construído por um método que faz uso da projeção de Galerkin das equações diferenciais governantes em funções de bases globais fornecidas pela decomposição de valor singular. O sistema é modelado por uma equação de viga unidimensional (incluindo inércia), equação de Reynolds para fluxo laminar e forças eletrostáticas com aproximação por capacitor de placas paralelas. A matriz usada na decomposição de valor singular é formada por dados provenientes de simulações completas com diferenças finitas. A eficácia do método é demonstrada por simulações executadas com o macromodelo em situações de carga diversas das utilizadas em sua geração.

Em (Gabbay et al., 2000) os modos estruturais são usados para escrever a equação dinâmica do sistema em termos de um conjunto de coordenadas generalizadas. Usando apenas as coordenadas referentes aos modos de maior contribuição tem-se um modelo de ordem reduzida. Matrizes de massa e rigidez mecânicas vêm de um modelo de elementos finitos. A força eletrostática é obtida por ajuste a uma curva analítica baseado em simulações acopladas executadas no CoSolve-EM® (Gilbert et al., 1995). Estruturas baseadas em vigas e placas são analisadas. Os resultados do modelo reduzido e completo concordam apenas com voltagens e deslocamentos muito pequenos, no caso da viga, abaixo de 30% da condição de *pull-in*.

Os maus resultados em (Gabbay et al., 2000) são atribuídos a não inclusão do efeito de enrijecimento axial que ocorre com o movimento transversal das estruturas. Em (Mehner et al., 2000) é proposta uma modificação onde esses efeitos são considerados no modelo reduzido do sistema. Os resultados mostram boa concordância com modelos MEF-MEC porém a aplicação do método se restringe a casos onde existe um modo normal dominante, há uma superfície neutra bem definida para a estrutura e o movimento maior seja perpendicular a ela. Além disso, o modo e direção de movimento dominantes devem ser pré-definidos pelo usuário.

Em (Zhulin et al., 2000) uma técnica de reposicionamento de nós para atualização de malha em uma ferramenta de simulação multi-domínios baseada no MEF é apresentada. A metodologia de resolução empregada para o acoplamento é particionada com convergência por relaxamento. A cada iteração a posição dos nós elétricos é reajustada com base no centróide dos elementos adjacentes. Análise estática é realizada em um exemplo com estrutura tipo viga e resultados de deslocamento versus voltagem são traçados. O fenômeno de *pull-in* é retratado.

Em (Ostergaard and Gyimesi, 2000) dois métodos que permitem reduzir o tempo de simulação de sistemas acoplados são expostos. No primeiro é mostrado um elemento eletromecânico de parâmetros concentrados com variáveis correspondentes a *gdl*s usados em elementos finitos padrão. Desse modo, é possível fazer uma análise mista onde elementos concentrados substituem o campo elétrico e se conectam a modelos distribuídos mecânicos. O segundo

método aplica uma técnica de redução (Guyan) às matrizes de massa, amortecimento e rigidez do sistema e trabalha com um sistema com número de *gdl*s reduzido. A parte elétrica é resolvida separadamente.

Em (Liang et al., 2001) um macromodelo para uma microviga é obtido pela projeção de Galerkin das equações diferenciais governantes em uma base global fornecida pela aplicação de redes neurais a um conjunto de respostas numéricas obtidas de simulações completas por diferenças finitas. A base usada são os autovetores do conjunto de respostas numéricas e estes são equivalentes àqueles conseguidos através de uma decomposição de valor singular. Justifica-se o uso de redes neurais por ela necessitar menos memória computacional para o cálculo dos autovetores. Respostas do macromodelo indicam boa concordância com as do modelo de diferenças finitas da microviga.

Em (Lee et al., 2001) é apresentado um método de análise dinâmica modal para sistemas de atuação eletrostática. Um algoritmo particionado com domínio elétrico resolvido pelo MEC e mecânico pelo MEF é usado para se conseguir equilíbrio estático. Uma perturbação é imposta ao sistema e a força eletrostática é avaliada nesta condição. Pela razão entre a diferença de forças e deslocamentos para a posição de equilíbrio e perturbada tem-se a rigidez eletrostática. Considerando a rigidez total como sendo a estrutural mais a eletrostática, efetua-se uma análise de autovalor e tem-se a frequência acoplada do sistema. O deslocamento da primeira frequência natural com a voltagem aplicada para uma microviga e um microespelho são mostrados.

Em (Li and Aluru, 2001) a análise de sistemas eletromecânicos com estruturas tipo viga engastada-livre e bi-engastada até a condição de instabilidade é realizada por um algoritmo misto com solução em parte linear em parte não-linear. Até uma certa voltagem tem-se formulação linear, após esta, não-linear. Com essa estratégia poupa-se o elevado tempo exigido por métodos não-lineares computacionalmente caros enquanto o sistema se mantiver longe da condição de *pull-in*. A estrutura é modelada por um método discretização sem malha ("*finite cloud method*") e as forças eletrostáticas segundo capacitor de placas paralelas. Resultados estáticos incluindo *pull-in* são expostos.

O método usado em (Li and Aluru, 2001) é estendido para o caso transiente em (Li and

Aluru, 2002), sendo o campo elétrico também modelado por uma técnica de discretização sem malha (*"boundary cloud method"*). O método de Newmark é empregado. Resultados de análises estáticas e transientes para um microespelho e estruturas tipo viga-engastada e bi-engastada são mostrados.

Em (Bochobza-Degani et al., 2002) um novo esquema iterativo para aplicação em simuladores baseados em tratamento particionado é apresentado. Os algoritmos comumente utilizados calculam a cada iteração o deslocamento a partir da voltagem aplicada e quando este converge para um valor pré-definido o programa pára. É proposto um esquema inverso onde a cada iteração um deslocamento é imposto e procura-se pela voltagem necessária à sua obtenção. Como a máxima deformação pode ser estimada pela geometria do dispositivo (os espaços entre eletrodos são conhecidos) tem-se um intervalo de trabalho definido. Ao contrário, o limite para a voltagem não pode ser previamente avaliado. Uma microviga bi-engastada é simulada e mesmo na região de instabilidade do sistema, um número relativamente baixo de iterações é necessário à convergência.

Em (Collenz et al., 2002) três algoritmos de análise estática particionada escritos com a linguagem de programação do ANSYS® são expostos. No primeiro há uma simulação elétrica, cálculo das pressões, inserção delas no domínio mecânico e obtenção do deslocamentos. O processo é iterativo com relaxamento. O segundo procede do mesmo modo, porém, a pressão eletrostática é aplicada à estrutura de forma incremental. Para o terceiro caso, a diferença de potencial elétrico é incremental. Uma microviga engastada-livre é simulada e os resultados mostram boa concordância para pequenos deslocamentos. Com grandes deslocamentos e tensões, apenas quando o potencial é aumentado gradualmente há boa solução.

Em (Lin et al., 2003) um macromodelo para um dispositivo formado por uma viga maior central sustentada por duas menores nas extremidades é apresentado. A estrutura é dividida em componentes simples que são tratados separadamente. Pela imposição de restrições às interconexões de partes adjacentes os componentes se comportam como se estivessem na estrutura completa. Projeções de Galerkin onde as funções de base são autovetores extraídos de dados de simulações com diferenças finitas são usadas para as equações parciais diferenciais de cada parte. Respostas transientes de deslocamento para o modelo completo e o reduzido

em diversas situações de carregamento mostram boa concordância.

Em (Younis et al., 2003) um método para elaboração de macromodelos para MEMS com estruturas tipo viga é apresentado. A equação da viga (Euler) é discretizada por uma projeção de Galerkin usando os modos lineares não-amortecidos do sistema. Efeitos de enrijecimento axial com a deflexão são considerados. A força elétrica é capacitiva e duas opções para inseri-la nas equações discretizadas são testadas. Numa ela é expandida em uma série de Taylor de quinta ordem e na outra a equação diferencial é rearranjada de forma que na sua discretização o termo elétrico apareça de forma exata. No primeiro caso, constata-se que o tratamento não é adequado, no segundo, os resultados de frequência e deslocamento se mostram em concordância com os de modelos distribuídos e experimentais. É verificado que apenas os modos simétricos ímpares devem ser usados, caso contrário, ocorre divergência.

Em (Brusa et al., 2003) uma estrutura tipo viga bi-engastada com acoplamento eletromecânico é estudada por um modelo massa-mola-capacitor de um *gdl* e através de simulações iterativas baseadas no MEF com carga eletrostática distribuída analítica. É apontado que o deslocamento da frequência natural do sistema pode ser ajustado por uma curva de segunda ordem. Com base nessa informação, propõe-se o uso de dois pontos para determinação da curva frequência versus voltagem: um a zero volts (onde tem-se frequência natural da viga sem acoplamento) e outro com uma voltagem maior. Por uma única simulação pelo MEF a frequência para o segundo ponto seria calculada e a curva traçada. Um exemplo é testado e os resultados mostram diferenças menores do que 0,3% no intervalo delimitado pelos dois pontos usados no ajuste de curva.

Em (v. d. Poel Filho and Pavanello, 2003) a implementação de uma estratégia particionada com ambos os domínios modelados pelo MEF em um código orientado a objetos (MefLab++) é apresentada. É indicado um esquema simplificado de atualização da malha onde apenas os nós da interface entre os dois domínios são movidos. O método funciona para pequenos deslocamentos e é economicamente favorável para análises transientes onde a cada passo de tempo existe a necessidade de modificação da malha elétrica. A validade da estratégia é indicada por soluções estáticas para uma microviga engastada-livre.

Em (Schlegel et al., 2003) a simulação completa de um microsistema composto de oito

sensores ressonantes é exposta. Macromodelos individuais são elaborados escrevendo-se as equações dinâmicas em termos de coordenadas modais e incluindo forças capacitivas baseadas em funções capacitância-deslocamento obtidas de simulações com o MEF. Apenas os modos mais significativos são usados. A partir dos macromodelos um conjunto de equações algébricas diferenciais é gerado e exportado para uma linguagem de descrição de hardware. Realiza-se então a simulação do dispositivo incluindo o circuito controlador de sinais.

Em (Lishchynska et al., 2004) sugere-se que modelos comportamentais simples para microsistemas sejam formados por expressões analíticas extraídas de simulações com o MEF por meio de análise dimensional. Cita-se o fato de que as performances de inúmeros dispositivos têm sido extensivamente obtidas por modelos distribuídos complexos, porém, ao invés de se seguir adiante com a extração de um macromodelo analítico, pára-se na análise dos resultados. A metodologia é usada para vigas em balanço com diferentes engastes e fórmulas para a deflexão em função de parâmetros geométricos e propriedades materiais são mostradas. Respostas dessas fórmulas são comparadas com as do programa Conventor® (antigo MEMCAD®), e o erro percentual fica abaixo de 5%.

Em (Gyimesi et al., 2004) um elemento triangular transdutor eletromecânico distribuído é apresentado. Os graus de liberdade em cada um dos nós (três) são potencial elétrico e deslocamento estrutural. Como reações tem-se carga elétrica e força mecânica. Em problemas de acoplamento por superfície, a malha elétrica entre os condutores é formada por esses elementos e a mecânica com elementos finitos bidimensionais. Durante as iterações a malha é modificada de modo a levar em consideração as deformações. Exemplos são simulados e resultados estáticos e transientes concordam com os de algoritmos MEF-MEF e MEF-MEC. É apontada ainda a rápida convergência das simulações.

Collenz et al. (2004) e Roux et al. (2004) apresentam algoritmos de resolução acoplada estática para casos de grandes deslocamentos e deformações onde os domínios presentes são resolvidos pelo MEF. Em (Collenz et al., 2004) são propostos métodos onde ou a voltagem ou a pressão eletrostática é aplicada de forma incremental em cada iteração, e a atualização da malha elétrica é feita de forma diferenciada para as regiões mais críticas do problema. Nos dois trabalhos são usados esquemas especiais para inserção da carga nodal na estrutura. As

simulações são com elementos bidimensionais quadráticos mecânicos e elétricos e um elemento infinito para a fronteira exterior. Em (Collenz et al., 2004) uma viga reta engastada-livre é analisada. Em (Roux et al., 2004) tem-se uma viga com mesma condição de engaste, porém, curva. Os respectivos algoritmos se mostram eficazes nos casos considerados.

Em (Ahmed et al., 2004) um dispositivo capacitor dotado de várias estruturas tipo *comb* é usado para assinalar o caráter essencial de simulações a nível físico quando a topologia da estrutura for complexa. É indicado que, devido a complicações geométricas e efeitos de campo, a capacitância dificilmente pode ser estimada por modelos empíricos ou semi-empíricos. Uma estratégia particionada com elementos finitos é usada para a simulação do dispositivo exemplar em questão. Para facilitar os processos de construção da malha e resolução do sistema, as dimensões e constantes físicas são escaladas por um fator positivo. Uma curva de forças eletrostáticas versus voltagens é mostrada.

Em problemas de acoplamento eletromecânico por superfície, normalmente adota-se uma formulação lagrangiana para o domínio mecânico e euleriana para o elétrico. Em (Mukherjee et al., 2004) e (Shrivastava et al., 2004) é apresentada uma estratégia onde os dois domínios são resolvidos por uma formulação lagrangiana. A estrutura é modelada pelo MEF e o campo elétrico pelo MEC. A metodologia consiste no mapeamento da equação integral de contorno (função de Green) em termos da configuração indeformada do sistema. A vantagem do procedimento é indicada como a eliminação da necessidade de atualização da malha elétrica. Em (Mukherjee et al., 2004) a densidade de carga de superfície é avaliada para diversos casos e comparada com algoritmos MEF-MEC com formulação lagrangiana-euleriana. Os resultados se mostram em bom acordo. Em (Shrivastava et al., 2004) o método é empregado na análise estática de placas finas.

Avanços no código MefLab++ (v. d. Poel Filho and Pavanello, 2003) são reportados em (v. d. Poel Filho et al., 2004). Procedimentos para análise transiente e modal acoplada são apresentados. No primeiro é usada integração no tempo pelo método de Newmark. No segundo, através de uma transformação modal, o sistema é reduzido a um *gdl*. Por meio de uma perturbação é calculada a rigidez eletrostática do sistema. A frequência acoplada pode ser obtida considerando-se a rigidez total como sendo a soma da mecânica com a eletrostática.

Os métodos são aplicados a vigas e as respostas são comparadas entre si e com simulações no ANSYS® onde o campo elétrico é modelado por um elemento transdutor (TRANS126). Resultados de frequência se mostram em boa concordância nos dois códigos e aponta-se que o elemento transdutor parece subestimar o deslocamento com o aumento da voltagem.

Com o crescimento da indústria de microtecnologia, as exigências com relação à performance dos sensores e atuadores têm aumentado bastante. Nesse sentido, técnicas de otimização passam a ser fundamentais e já começam a ser aplicadas no projeto e simulação de microsistemas. Referências iniciais para métodos de otimização considerando a característica de campos acoplados presente em MEMS são (Schneider et al., 2002), (Allen et al., 2004) e (Raulli and Maute, 2005).

Dentro deste escopo, e verificada a importância do tema, o presente trabalho propõe metodologias de análise estática e dinâmica para microsistemas eletromecânicos com acoplamento por superfície. O MEF é usado para modelar ambos os domínios. Um código numérico orientado a objetos (MefLab++) é construído com a linguagem de programação C++ e as estratégias de simulação são nele inseridas. A programação segundo o paradigma da orientação a objetos permite elevada modularidade e facilidade de extensão do código. Como consequência, outras formulações acopladas e métodos numéricos em geral podem ser implementados de forma bastante eficaz.

Capítulo 3

Modelos Matemáticos

Os problemas de valor de contorno para o domínio mecânico e elétrico são apresentados neste capítulo. O mecanismo de acoplamento entre os dois domínios em um sistema eletromecânico também é mostrado. Trata-se de uma formulação consagrada para a análise de microsistemas eletromecânicos, que foi adaptada e testada para o ambiente computacional proposto neste trabalho.

3.1 Domínio elétrico

Considere um número m de condutores no interior de um meio dielétrico, conforme mostrado na Figura 3.1. Havendo cargas elétricas no meio, a distribuição de potencial elétrico no seu interior é dada pela equação de Poisson (Griffiths, 1998):

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_o} \quad (3.1)$$

onde V representa o potencial elétrico, ρ a densidade de carga de volume e ϵ_o a permissividade do espaço livre.

Na análise de microsistemas eletromecânicos busca-se determinar o potencial V no meio em que os condutores estão imersos. Nesta região normalmente não há a presença de cargas e a Equação (3.1) reduz-se à equação de Laplace.

Na Figura 3.1, considera-se a aplicação de um potencial V_k a cada um dos condutores, sendo $k = 1, 2, \dots, m$. $\Gamma_{elec_1}, \Gamma_{elec_2}, \dots, \Gamma_{elec_m}$ indicam os contornos dos condutores e Γ_{elec_∞} um contorno distante ou plano de referência. O problema eletrostático no domínio Ω_{elec} é

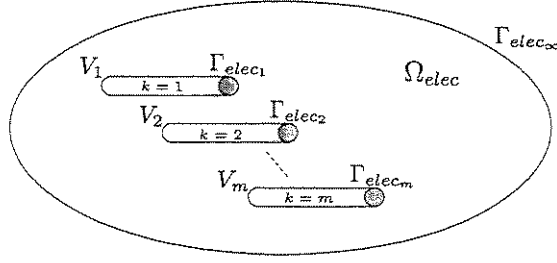


Figura 3.1: Sistema eletrostático com condutores inseridos em um meio dielétrico uniforme sem perdas.

definido por:

$$\nabla^2 V = 0 \quad \text{em} \quad \Omega_{elec} \quad (3.2)$$

$$V = V_k \quad \text{em} \quad \Gamma_{elec_1}, \Gamma_{elec_2}, \dots, \Gamma_{elec_m} \quad (3.3)$$

$$V = V_\infty \quad \text{ou} \quad V_{,n} = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_{elec_\infty} \quad (3.4)$$

onde n representa a direção normal no sentido para fora do contorno e a vírgula em $V_{,n}$ indica a derivada, no caso, em relação a n . A aproximação no contorno pode ser restrita usando uma condição de contorno aproximada de Dirichlet ou de Neumann.

Com a aplicação de uma voltagem, cargas elétricas se distribuem nas superfícies de cada condutor. A densidade de carga de superfície γ nos condutores pode ser obtida por (Griffiths, 1998):

$$\gamma = -\epsilon_o V_{,n} \quad (3.5)$$

O gradiente do potencial elétrico na direção normal, $V_{,n}$, é:

$$V_{,n} = V_{,i} n_i \quad (3.6)$$

onde n_i são as componentes do vetor normal unitário. O índice i vai de 1 a 3 e representa as direções x , y e z .

Conhecida a densidade de carga, pode-se determinar a pressão eletrostática f_i agindo na superfície dos condutores. Para isso tem-se (Griffiths, 1998):

$$f_i = \frac{1}{2} \frac{\gamma^2}{\epsilon_o} n_i \quad (3.7)$$

Esta pressão é normal à superfície e sempre no sentido de dentro para fora.

Nos dispositivos MEMS alvos deste trabalho, a atuação é feita pela aplicação de um potencial elétrico aos condutores envolvidos no sistema. O problema inicial é o de determinação da distribuição desse potencial pela Equação (3.2) no meio dielétrico. Em seguida, através de um pós-processamento desses dados, obtém-se a densidade de carga nas superfícies, Equação (3.5), e finalmente as pressões atuantes f_i , calculadas pela Equação (3.7).

3.1.1 Comentários sobre condutores

Como as estruturas mecânicas constitutivas dos microsistemas são de materiais condutores, algumas de suas importantes propriedades são comentadas. Antes de prosseguir, duas outras equações da eletrostática precisam ser apresentadas. A primeira é:

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (3.8)$$

e diz que o campo elétrico $\mathbf{E}$ em um dado meio é fornecido pelo gradiente do potencial escalar V . A segunda equação é a Lei de Gauss:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_o} \quad (3.9)$$

que refere-se à quantidade de carga total em um domínio elétrico.

As propriedades são (Griffiths, 1998):

1. **$\mathbf{E} = 0$ no interior do condutor.** Suponha um condutor colocado em um campo elétrico externo $\mathbf{E}_0$, conforme mostrado na Figura 3.2. Inicialmente, $\mathbf{E}_0$ fará com que as cargas positivas se dirijam para direita e as negativas para a esquerda. Ao alcançar as extremidades do material, as cargas vão nestes locais se acumulando. Estas cargas induzidas produzem então um campo próprio, $\mathbf{E}_1$, que age na direção oposta de $\mathbf{E}_0$. Com isto, o campo induzido pelas cargas tende a cancelar o campo externo original. É de fato o que acontece, com as cargas fluindo até o completo anulamento. O resultado é

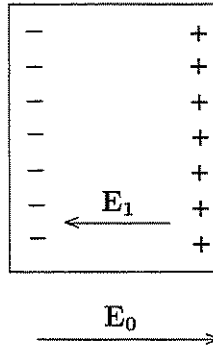


Figura 3.2: Condutor submetido a um campo externo $\mathbf{E}_0$.

o campo interno do condutor igual a zero. Neste modelo, considera-se que este processo ocorre instantaneamente;

2. $\rho = 0$ **no interior do condutor**. Sabendo que $\mathbf{E} = 0$, pela Equação (3.9), ρ também deve ser igual a zero;
3. **Todas as cargas existentes estão na superfície**. O item anterior não afirma a inexistência de cargas mas sim que as cargas no volume interior são iguais a zero. Dessa forma, elas podem estar somente na superfície. As cargas positivas e negativas são em igual número, ou seja, a quantidade líquida é igual a zero; e
4. **Um condutor é equipotencial**. Para dois pontos $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ no interior ou superfície de um condutor, pelo teorema fundamental para gradientes¹ e considerando a Equação (3.8), tem-se $V(\mathbf{b}) - V(\mathbf{a}) = \int_a^b (\nabla V) \cdot d\mathbf{l} = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$, e portanto $V(\mathbf{a}) = V(\mathbf{b})$.

O campo elétrico nulo e a ausência de cargas no interior do condutor apontam a não existência de forças eletrostáticas de volume no problema em questão. Ao contrário, a localização das cargas nas superfícies, e somente nelas, indica a presença de pressões eletrostáticas.

¹ $f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \int_a^b (\nabla f) \cdot d\mathbf{l}$

3.2 Domínio mecânico

A formulação apresentada nesta seção pressupõe algumas hipóteses. São elas: meio homogêneo e isotrópico, pequenos deslocamentos e deformações, e material na fase elástica linear. O referencial é lagrangiano.

Considere uma estrutura mecânica Ω_{mec} com contornos Γ_{mec1} e Γ_{mec2} . Conforme indicado na Figura 3.3, existem forças de volume, condições de contorno de Dirichlet em Γ_{mec1} e tração em Γ_{mec2} .

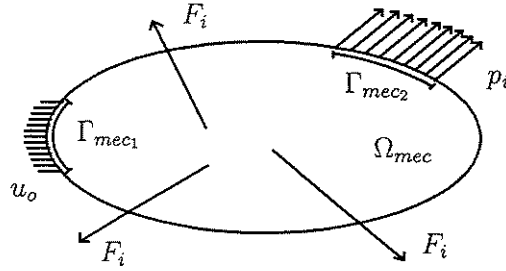


Figura 3.3: Corpo com esforços atuantes.

O problema de valor de contorno para o sistema indicado na Figura 3.3 pode ser definido como:

$$\sigma_{ij,j} - \rho_s u_{i,tt} + F_i = 0 \quad \text{em } \Omega_{mec} \quad (3.10)$$

$$u = u_o \quad \text{em } \Gamma_{mec1} \quad (3.11)$$

$$\sigma_{ij} n_j = p_i \quad \text{em } \Gamma_{mec2} \quad (3.12)$$

onde σ_{ij} é o tensor de tensões, ρ_s a massa específica, F_i as forças de volume, p_i o vetor de trações, u_i o deslocamento, e t refere-se ao tempo. Os índices i e j são 1, 2 e 3.

A Equação (3.10) é para um corpo em equilíbrio dinâmico. No caso estático, o termo relativo às forças de inércia, $\rho_s u_{i,tt}$, é nulo.

Para se obter a solução do problema elastomecânico são necessários mais dois conjuntos de equações. Relacionando deslocamento e deformação, tem-se as equações cinemáticas (Gould, 1983):

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.13)$$

onde ϵ_{ij} é o tensor de deformações infinitesimais.

A lei constitutiva para um sólido linear elástico é (Gould, 1983):

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{E}[(1 + \nu)\sigma_{ij} - \nu\delta_{ij}\sigma_{kk}] \quad (3.14)$$

onde ν é o coeficiente de Poisson, E o módulo de elasticidade ou de Young e δ_{ij} é o delta de Kroenecker.

As Equações (3.10), (3.13) e (3.14) juntamente com as relações de compatibilidade, Equação (3.15), formam a base da Teoria da Elasticidade. Desconsiderando a convenção de soma de Einstein, as equações de compatibilidade são:

$$\epsilon_{lm,ln} + \epsilon_{ln,lm} - \epsilon_{mn,ml} = \epsilon_{ll,mn} \quad (3.15)$$

Os índices l , m e n vão de 1 a 3. Estas condições impostas pela Equação (3.15) às componentes do tensor de deformação asseguram um campo de deslocamento contínuo e de valor único.

Uma importante propriedade do tensor de tensões infinitesimal é a simetria, ou seja:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (3.16)$$

A simetria também é válida para o tensor de deformações infinitesimais. Desse modo, tem-se que σ_{ij} e ϵ_{ij} possuem, cada, seis componentes independentes ao invés de nove. Somadas às três componentes do deslocamentos, u_i , totalizam um conjunto de quinze incógnitas. Como são quinze as equações governantes, três em (3.10), seis em (3.13) e seis em (3.14), a formulação é completamente satisfeita.

3.3 Mecanismo de acoplamento entre o meio elétrico e mecânico

O acoplamento entre os domínios elétrico e mecânico pode ser entendido através do sistema apresentado na Figura 3.4. Há uma viga engastada-livre de material condutor e um terra, isto é, local onde o potencial elétrico é considerado como sendo igual a zero. Quando um potencial elétrico é aplicado à viga, cargas eletrostáticas são induzidas em sua superfície, como ilustrado na Figura 3.4(a). Estas cargas fazem surgir uma pressão eletrostática normal à superfície condutora, no sentido de dentro para fora. Conforme indicado na Figura 3.4(b), a viga se deforma com a pressão e as cargas eletrostáticas são redistribuídas. A redistribuição das cargas resulta em uma mudança na pressão eletrostática e como consequência tem-se o surgimento de novas deformações. Este processo continua até o alcance de um estado de equilíbrio. O equilíbrio se dá quando a pressão eletrostática fica balanceada pelas forças elásticas de restauração da estrutura.

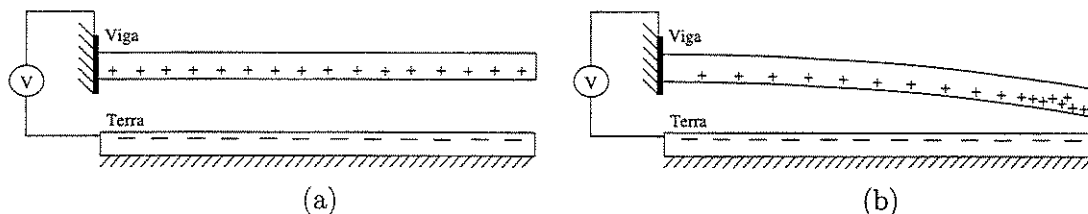


Figura 3.4: Sistema eletromecânico.

A dependência da pressão eletrostática com a densidade de carga pode ser verificada na Equação (3.7). O processo de solução do sistema acoplado se inicia com a análise do domínio elétrico e determinação da distribuição de potencial no meio. Devido à diferença de potencial entre a estrutura e o terra, as cargas eletrostáticas se rearranjam sobre as faces da estrutura e conseqüentemente surgem as forças de superfície. Segue-se então com a análise mecânica. O processo é repetido até a convergência.

O exemplo da Figura 3.4 pode ser usado também para indicar o comportamento não linear do sistema acoplado. A curva de deslocamento versus voltagem para um ponto na extremidade livre da microviga é mostrada na Figura 3.5. O parâmetro g no eixo das orde-

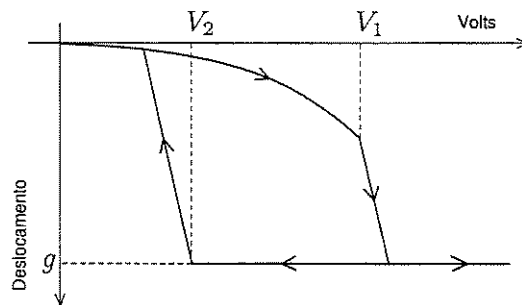


Figura 3.5: Comportamento não-linear do sistema acoplado.

nadas indica o espaço entre a viga e o terra. À medida em que é elevado o potencial elétrico o deslocamento aumenta. Ao se alcançar o valor $V = V_1$, ocorre uma descontinuidade e o deslocamento cresce bruscamente até o ponto g , correspondente ao contato da viga com o terra. Para valores além de V_1 , essa posição se mantém. Com potencial elétrico imediatamente abaixo de V_1 o contato ainda não cessa. Para que a viga se solte, é necessário chegar até um valor bem mais baixo V_2 . Na literatura, o valor V_1 é conhecido como *voltagem de pull-in*. Neste trabalho considera-se que os sistemas estarão atuando com tensões elétricas inferiores a V_1 , sem previsão de análise do fenômeno de *pull-in*.

Capítulo 4

Metodologias para Solução do Problema de Acoplamento Eletromecânico

Neste capítulo são apresentados os métodos numéricos de solução do problema de acoplamento eletromecânico. São usadas estratégias baseadas em elementos finitos e um esquema de redução de ordem de sistemas. Os algoritmos envolvendo elementos finitos requerem soluções individuais de cada domínio. Desse modo, o capítulo inicia-se com a aplicação do MEF aos domínios mecânico e elétrico em separado. Em seguida são abordadas as metodologias para o problema acoplado. As análises são estática, dinâmica transiente e dinâmica modal.

4.1 Método dos Elementos Finitos aplicado ao domínio elétrico

Nesta seção o MEF é aplicado ao domínio elétrico. Sua formulação é desenvolvida pelo cálculo de uma função resíduo da equação governante e uso de uma projeção de Galerkin. A discretização do domínio é feita por elementos lineares do tipo triângulo. A geometria e as incógnitas do problema são aproximadas pelas mesmas funções de interpolação, isto é, os elementos são isoparamétricos.

4.1.1 Elemento triangular elétrico

A solução de um problema eletrostático consiste em determinar a distribuição de potencial elétrico no meio em questão. Considerando uma aproximação $\hat{V}$ para o potencial elétrico, a função resíduo da equação diferencial parcial governante, Equação (3.1), para o caso bi-dimensional, é dada por:

$$R = \nabla^2 \hat{V}(x, y) + \frac{\rho}{\varepsilon_o} \quad (4.1)$$

A projeção do resíduo em uma base composta de funções $\psi_i(x, y)$ é dada por:

$$\int_{\Omega} R \psi_i(x, y) d\Omega = \int_{\Omega} (\nabla^2 \hat{V}(x, y) + \frac{\rho}{\varepsilon_o}) \psi_i(x, y) d\Omega \quad (4.2)$$

No método de Galerkin, as funções de ponderação $\psi_i(x, y)$ são escolhidas de forma que o resíduo seja ortogonal ao espaço gerado por elas. Assim,

$$\int_{\Omega} R \psi_i(x, y) d\Omega = 0 \quad (4.3)$$

e a Equação (4.2) fica

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 \hat{V}(x, y) - \frac{\rho}{\varepsilon_o}) \psi_i(x, y) d\Omega = 0 \quad (4.4)$$

A aproximação para o potencial elétrico é a seguinte:

$$\hat{V} = \{N_1 \quad N_2 \quad N_3\} \left\{ \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{array} \right\} = \{N\}^T \{V\} \quad (4.5)$$

onde N_1 , N_2 e N_3 são as funções de interpolação, e V_1 , V_2 e V_3 são os valores nodais de potencial elétrico.

As funções de ponderação $\psi_i(x, y)$ na Equação (4.4) são adotadas como sendo as funções de interpolação usadas nas aproximações. Substituindo a Equação (4.5) na Equação (4.4), calculando os resíduos para $\psi_1 = N_1$, $\psi_2 = N_2$ e $\psi_3 = N_3$, e trabalhando os resultados, pode-se chegar à seguinte equação:

$$-\int_{\Omega} \left[\left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\} \quad \left\{ \frac{\partial N}{\partial y} \right\} \right] \left[\begin{Bmatrix} \left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\}^T \\ \left\{ \frac{\partial N}{\partial y} \right\}^T \end{Bmatrix} \right]^T \{V\} d\Omega + \int_{\Omega} \{N\} \frac{\rho}{\varepsilon_o} d\Omega = 0 \quad (4.6)$$

Na Figura 4.1 tem-se o elemento triangular no espaço real e o respectivo elemento de referência no espaço isoparamétrico. As coordenadas globais são x e y e as naturais ξ e η .

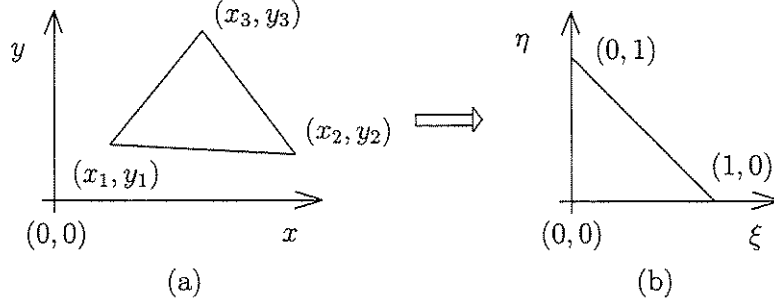


Figura 4.1: Elemento triangular (a) no espaço real e (b) no espaço isoparamétrico.

As coordenadas geométricas do elemento triangular no espaço isoparamétrico são interpoladas da seguintes forma:

$$x(\xi, \eta) = \{N(\xi, \eta)\}^T \{x\} \quad \text{e} \quad y(\xi, \eta) = \{N(\xi, \eta)\}^T \{y\}, \quad (4.7)$$

onde

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad y = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix}$$

e as funções de interpolação no espaço isoparamétrico são:

$$N_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta, \quad N_2 = \xi \quad \text{e} \quad N_3 = \eta.$$

Usando a inversa da matriz Jacobiana da transformação geométrica, as derivadas no espaço real podem ser escritas no espaço isoparamétrico. Além disso, mudando também o domínio de integração do real, Ω , para o do elemento de referência, Ω^r , a Equação (4.6) pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega^r} \left[\left\{ \frac{\partial N(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right\} \quad \left\{ \frac{\partial N(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right\} \right] [J]^{-T} [J]^{-1} \left[\begin{array}{c} \left\{ \frac{\partial N(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right\}^T \\ \left\{ \frac{\partial N(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right\}^T \end{array} \right]^T \det([J]) d\xi d\eta \{V\} = \int_{\Omega^r} \{N(\xi, \eta)\} \frac{\rho}{\epsilon_o} \det([J]) d\xi d\eta \quad (4.8)$$

onde $[J]$ é a matriz jacobiana e $\det()$ indica seu determinante. Para elementos planos isoparamétricos, $[J]$ é dada por:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \xi} & \frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \eta} & \frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} \left\{ \frac{\partial N(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right\}^T \{x\} & \left\{ \frac{\partial N(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right\}^T \{y\} \\ \left\{ \frac{\partial N(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right\}^T \{x\} & \left\{ \frac{\partial N(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right\}^T \{y\} \end{array} \right] \quad (4.9)$$

Denotando o termo à esquerda da Equação (4.8) de “rigidez” elétrica elementar $[K_E^e]$, e o vetor de cargas nodais elétricas de $\{Q_E^e\}$, pode-se escrever simplesmente:

$$[K_E^e] \{V\} = \{Q_E^e\} \quad (4.10)$$

O vetor de cargas nodais $\{Q_E^e\}$, no caso de MEMS, pelo fato de não existirem cargas elétricas no meio, é nulo, e o problema é resolvido apenas pela imposição das condições de contorno de Dirichlet. A sua inclusão permite, entretanto, o uso da formulação para aplicações elétricas diferentes daquelas encontradas em MEMS.

Para maiores detalhes na formulação do elemento triangular, referências adequadas são (Dhatt and Touzot, 1984) e (Malkus et al., 1989).

4.1.2 Determinação das pressões eletrostáticas

As pressões eletrostáticas nas superfícies dos condutores são determinadas pelo pós-processamento dos resultados fornecidos pela simulação com o elemento triangular elétrico. Inicialmente, deve-se encontrar o potencial elétrico na direção normal. Para o caso bi-dimensional, a Equação (3.6) fica:

$$\frac{\partial \hat{V}}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial x} n_x + \frac{\partial V}{\partial y} n_y \quad (4.11)$$

Considerando a aproximação do potencial, Equação (4.5), as derivadas $\partial V/\partial x$ e $\partial V/\partial y$ podem ser escritas como:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\}^T \{V\} \quad \text{e} \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \left\{ \frac{\partial N}{\partial y} \right\}^T \{V\} \quad (4.12)$$

Colocando as Equações (4.12) em forma matricial e escrevendo-as no espaço isoparamétrico tem-se a seguinte expressão:

$$\begin{Bmatrix} \partial V/\partial x \\ \partial V/\partial y \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \left\{ \frac{\partial N(\xi,\eta)}{\partial \xi} \right\}^T \\ \left\{ \frac{\partial N(\xi,\eta)}{\partial \eta} \right\}^T \end{bmatrix} \{V\} \quad (4.13)$$

Rearranjando a Equação (4.11) e substituindo nela a Equação (4.13),

$$\frac{\partial \hat{V}}{\partial n} = \{n_x \quad n_y\} \begin{Bmatrix} \partial V/\partial x \\ \partial V/\partial y \end{Bmatrix} = \{n_x \quad n_y\} [J]^{-1} \begin{bmatrix} \left\{ \frac{\partial N(\xi,\eta)}{\partial \xi} \right\}^T \\ \left\{ \frac{\partial N(\xi,\eta)}{\partial \eta} \right\}^T \end{bmatrix} \{V\} \quad (4.14)$$

tem-se a equação para determinação do potencial na direção normal em qualquer face do elemento finito triangular. Em problemas eletrostáticos, no entanto, apenas o lado exterior dos elementos nas interfaces com os condutores é de interesse.

Conhecendo $\partial \hat{V}/\partial n$, pode-se utilizar a Equação (3.5) para se calcular a densidade de carga de superfície nos condutores. Substituindo a Equação (3.5) na Equação (3.7), determina-se a pressão eletrostática. As suas componentes na direção x e y são:

$$f_x = \frac{1}{2} \varepsilon_o \left(\frac{\partial \hat{V}}{\partial n} \right)^2 n_x \quad (4.15)$$

$$f_y = \frac{1}{2} \varepsilon_o \left(\frac{\partial \hat{V}}{\partial n} \right)^2 n_y \quad (4.16)$$

onde $\partial \hat{V}/\partial n$ é dado pela Equação (4.14).

4.2 Método dos Elementos Finitos aplicado ao domínio mecânico

A simulação do domínio mecânico é realizada com um elemento bi-linear quadrilateral plano. Assim como no elemento triangular elétrico, usa-se um método de resíduos ponderados com projeção de Galerkin e elementos isoparamétricos. A formulação visa determinar o campo de deslocamentos estruturais.

4.2.1 Elemento bi-linear mecânico

O equilíbrio dinâmico em um corpo é governado pela Equação (3.10). Para o caso bi-dimensional:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} - \rho_s \ddot{u}_x + F_x = 0 \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} - \rho_s \ddot{u}_y + F_y = 0 \quad (4.18)$$

Considerando uma aproximação $\hat{u}$ para o deslocamento, e projetando o resíduo das Equações (4.17) e (4.18) em uma base ψ_i , tem-se as seguintes expressões:

$$\int_{\Omega} R_1 \psi_{i(x)} d\Omega = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} - \rho_s \hat{u}_x + F_x \right) \psi_{i(x)} d\Omega = 0 \quad (4.19)$$

$$\int_{\Omega} R_2 \psi_{i(y)} d\Omega = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} - \rho_s \hat{u}_y + F_y \right) \psi_{i(y)} d\Omega = 0 \quad (4.20)$$

Adotando $\psi_{i(x)} = \psi_{i(y)} = \psi_i$ e trabalhando as Equações (4.19) e (4.20) pode-se chegar à seguinte equação matricial:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial \psi_i}{\partial y} & \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} d\Omega + \rho_s \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \psi_i & 0 \\ 0 & \psi_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_x \\ \hat{u}_y \end{Bmatrix} d\Omega = \\ \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \psi_i & 0 \\ 0 & \psi_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} d\Omega + \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \psi_i & 0 \\ 0 & \psi_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix} d\Gamma \end{aligned} \quad (4.21)$$

Para o elemento bi-linear, a aproximação para os deslocamentos é dada por:

$$\begin{Bmatrix} \hat{u}_x \\ \hat{u}_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \\ u_{x4} \\ u_{y4} \end{Bmatrix} \quad (4.22)$$

onde $N_1, \dots, N_4$ são as funções de interpolação.

Considerando a aproximação $\{\hat{u}\}$ conforme a Equação (4.22), usando a lei constitutiva, Equação (3.14), e as equações cinemáticas, Equações (3.13), pode-se escrever a formulação da Equação (4.21) em termos de deslocamentos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial \psi_i}{\partial y} & \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \end{bmatrix} [C] \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} d\Omega \{u\} + \\ + \rho_s \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \psi_i & 0 \\ 0 & \psi_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} d\Omega \{\ddot{u}\} = \\ = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \psi_i & 0 \\ 0 & \psi_i \end{bmatrix} \{F\} d\Omega + \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \psi_i & 0 \\ 0 & \psi_i \end{bmatrix} \{p\} d\Gamma. \end{aligned} \quad (4.23)$$

onde $[C]$ é a matriz de propriedades materiais para o caso do estado plano de tensões.

O elemento bi-linear no espaço real e de referência é mostrado na Figura 4.2.

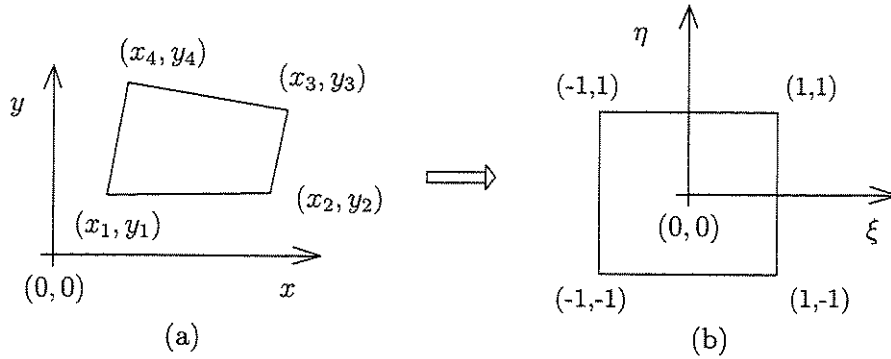


Figura 4.2: Elemento bi-linear plano (a) no espaço real e (b) no espaço isoparamétrico.

As coordenadas geométricas no espaço isoparamétrico são interpoladas como se segue:

$$x(\xi, \eta) = \{N\}^T \{x\} \quad \text{e} \quad y(\xi, \eta) = \{N\}^T \{y\} \quad (4.24)$$

onde

$$\{N\}^T = \{N_1(\xi, \eta) \quad N_2(\xi, \eta) \quad N_3(\xi, \eta) \quad N_4(\xi, \eta)\}, \quad (4.25)$$

$$\{x_i\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \{y_i\} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix}, \quad (4.26)$$

e as funções de forma são:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) & N_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) & N_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned}$$

Calculando os resíduos da Equação (4.23) para $\psi_1 = N_1, \dots, \psi_4 = N_4$ e escrevendo-a no espaço do elemento de referência, tem-se a expressão final para o elemento bi-linear mecânico:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^r} [B_\xi]^T [G^T] [C] [G] [B_\xi] \det([J]) d\xi d\eta \{u\} + \rho_s \int_{\Omega^r} [D]^T [D] \det([J]) d\xi d\eta \{\ddot{u}\} = \\ = \int_{\Omega^r} [D]^T \{F\} \det([J]) d\xi d\eta + \int_{\Gamma^r} [D]^T \{p\} \det([J]) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (4.27)$$

onde:

$$[B_\xi] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{bmatrix}, \quad [C] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix},$$

$$[G] = \begin{bmatrix} J_{11}^I & J_{12}^I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{21}^I & J_{22}^I \\ J_{21}^I & J_{22}^I & J_{11}^I & J_{12}^I \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [D] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}$$

e $J_{11}^I, J_{12}^I, J_{21}^I$ e J_{22}^I são os termos da inversa da matriz jacobiana $[J]$.

Denotando as matrizes elementares de rigidez e massa de $[K_M^e]$ e $[M_M^e]$ e os vetores de força de volume e de tração de $\{F_M^e\}$ e $\{P_M^e\}$, respectivamente, a Equação (4.27) pode ser escrita do seguinte modo:

$$[K_M^e]\{u\} + [M_M^e]\{\ddot{u}\} = \{F_M^e\} + \{P_M^e\} \quad (4.28)$$

que corresponde à forma semi-discretizada (discretizada do espaço e contínua no tempo) do domínio mecânico.

4.2.2 Elemento de linha mecânico

O termo $\{P_M^e\}$ expresso na Equação (4.28) refere-se a um vetor de cargas de tração que opera somente sobre os nós da superfície da estrutura conforme ilustrado na Figura 4.3(a).

A expressão para $\{P_M^e\}$ conforme a Equação (4.27) é dada por:

$$\{P_M^e\} = \int_{\Gamma^r} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix} \det(J) d\xi d\eta \quad (4.29)$$

Para considerar a influência das trações no contorno, optou-se em usar apenas duas funções de interpolação, uma para cada nó na face exterior do elemento. Uma solução para este problema é discretizar a fronteira da estrutura com um elemento auxiliar de linha, obter as forças nodais equivalentes somente nos nós das faces externas, e inserí-las na formulação da Equação (4.28). Na Figura 4.3(b) mostra-se o domínio discretizado por elementos bi-lineares e também os elementos de linha auxiliares.

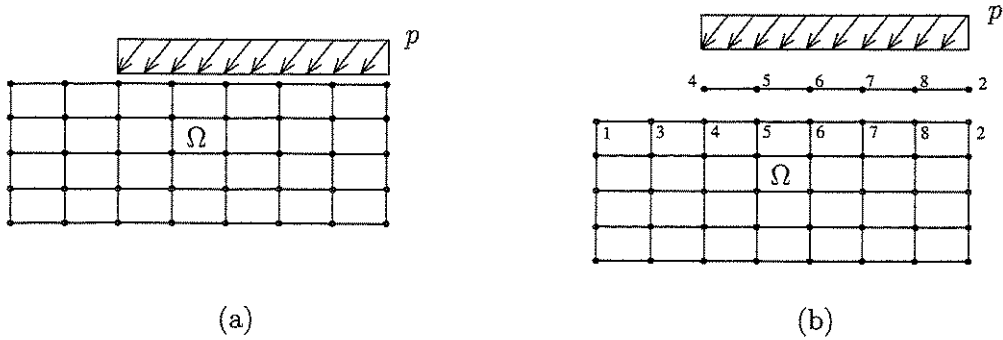


Figura 4.3: (a) Tração p atuante na estrutura e (b) domínio e fronteira discretizados.

O elemento de linha construído também é isoparamétrico. Na Figura 4.4 tem-se ele no espaço real e no de referência.

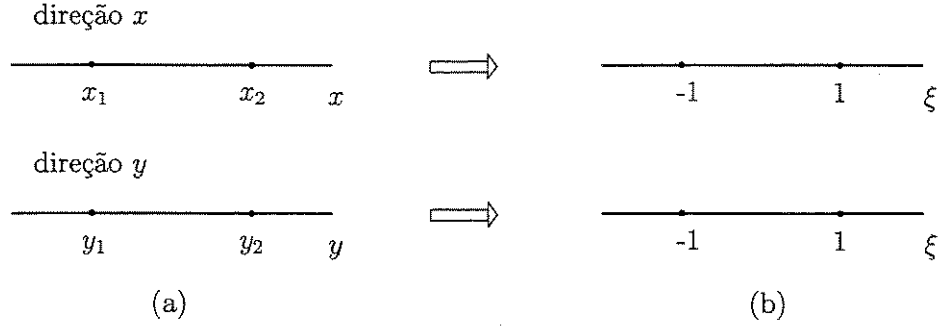


Figura 4.4: Elemento de linha (a) no espaço real e (b) no espaço isoparamétrico.

O vetor forças nodais assume a seguinte forma:

$$\{P_M^e\} = \int_{\Gamma^r} \begin{Bmatrix} \tilde{N}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{N}_1 \\ \tilde{N}_2 & 0 \\ 0 & \tilde{N}_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix} \det(J) d\xi \quad (4.30)$$

sendo as funções de interpolação

$$\tilde{N}_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad \text{e} \quad \tilde{N}_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (4.31)$$

Para a situação onde assegura-se que as trações atuam na direção normal ao contorno, por exemplo, como indicado na Figura 4.5, tem-se

$$p_x = -n_x p_n \quad \text{e} \quad p_y = -n_y p_n \quad (4.32)$$

e a Equação (4.30) torna-se:

$$P_M^e = - \int_{\Gamma^r} p_n \begin{Bmatrix} \tilde{N}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{N}_1 \\ \tilde{N}_2 & 0 \\ 0 & \tilde{N}_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} \det(J) d\xi \quad (4.33)$$

Na montagem do sistema de equações global com todos os graus de liberdade do domínio, para que as cargas nodais sejam facilmente alocadas na posição correta, deve-se ter o cuidado de colocar os números do nós dos elementos de linha iguais aos dos nós do lado geometri-

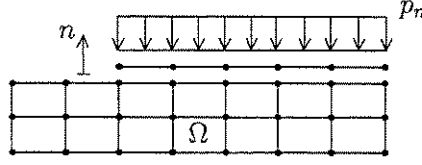


Figura 4.5: Tração p_n normal ao contorno.

camente coincidente do elemento bi-linear na fronteira. Na Figura 4.3(b) pode-se visualizar essa idéia.

4.3 Análise estática do acoplamento eletromecânico com o MEF

Para se analisar sistemas eletromecânicos, a estratégia de resolução deve considerar o domínio mecânico e seu acoplamento com o domínio elétrico. Para o caso estático, as equações de equilíbrio globais discretizadas para o problema acoplado são:

$$\begin{bmatrix} [K_M] & 0 \\ 0 & [K_E(V, u)] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{V\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_M\} + \{P_M\} + \{P_E(V(u))\} \\ \{Q_E\} \end{Bmatrix} \quad (4.34)$$

A primeira linha da Equação (4.34) refere-se ao domínio mecânico e a segunda ao domínio elétrico. O acoplamento se mostra pela dependência de $[K_E]$ não apenas do potencial elétrico V , mas também do deslocamento u , e pela presença da pressão eletrostática $\{P_E\}$ na equação do domínio mecânico. $\{P_E\}$ é função de V e conseqüentemente de u . Em dispositivos MEMS, normalmente $\{F_M\}$, $\{P_M\}$ e $\{Q_E\}$ são iguais a zero.

A estratégia usada para resolver o problema acoplado é do tipo particionada iterativa. Os domínios são simulados separadamente e os resultados de um são vistos como entrada para o outro. Os passos do algoritmo são apresentados através do fluxograma mostrado na Figura 4.6. A simulação começa com a análise do domínio elétrico através da qual são obtidos os potenciais nos nós da malha. Conhecendo-se a distribuição de potencial elétrico no meio, segue-se com um pós-processamento para se calcular as pressões eletrostáticas (ver seção 4.1.2). Essas pressões são transferidas para o domínio mecânico. Isso é feito pela Equação (4.30) ou (4.33) sendo as componentes p_x e p_y iguais, respectivamente, a f_x e f_y dados pelas

Equações (4.15) e (4.16). O problema mecânico é então resolvido e os deslocamentos estruturais são calculados. Há uma necessidade de atualização da malha elétrica e, caso esta tenha sido modificada em alguma iteração anterior, ela deve ser recolocada na configuração original. Com os deslocamentos estruturais, a malha elétrica é atualizada. Nesse procedimento de atualização da malha, a imposição dos deslocamentos é sempre feita à configuração inicial para se evitar a sobreposição de deslocamentos, o que ocorreria no caso do uso de uma malha já deformada. A condição de parada do algoritmo, onde considera-se que a resposta convergiu, é a variação dos deslocamentos entre uma iteração e a subsequente. Se for menor do que um limite pré-estabelecido, o programa pára, caso contrário, segue com a simulação.

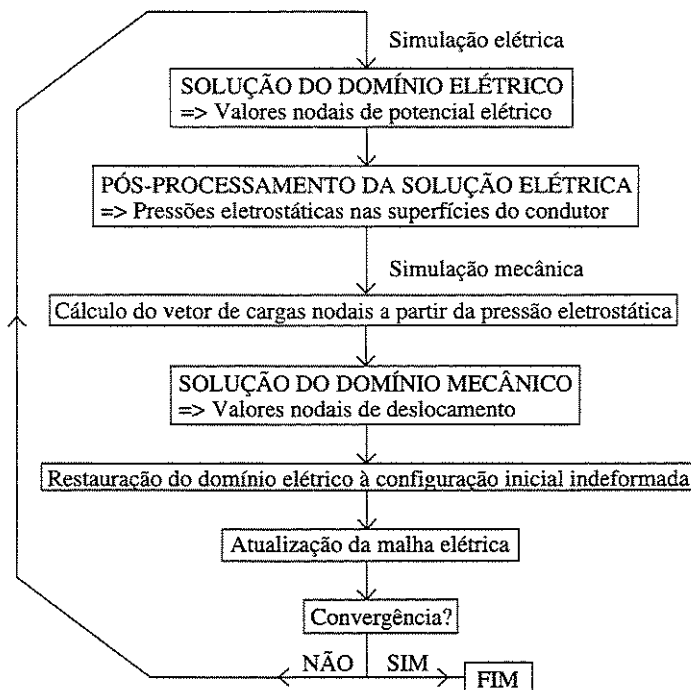


Figura 4.6: Fluxograma da estratégia seqüencial.

Pela Equação (3.7) nota-se a dependência da pressão eletrostática com a densidade de carga de superfície. A cada deformação da estrutura há um rearranjo das cargas sobre as faces dos condutores e a consequência imediata é a alteração das pressões. As novas pressões deformam novamente a estrutura e naturalmente uma outra distribuição de cargas é obtida. Essa ação contínua do domínio elétrico para o mecânico e vice-versa é responsável pelo

acoplamento do sistema. O fato é que matematicamente a distribuição de cargas de superfícies só muda quando a Equação de Laplace (3.2) é resolvida para cada configuração do domínio externo, considerando a posição deformada da estrutura. Isso também pode ser notado pela equação de elementos finitos elétrica, segunda linha da Equação (4.34), pois as condições de contorno, potenciais elétricos impostos, serão sempre as mesmas e sempre aplicadas nos mesmos nós. Distribuições de potencial diferentes serão obtidas somente se a geometria da malha for mudada. Por essa razão, a cada passo de solução há a necessidade de se modificar a malha elétrica. Na Figura 4.7 tem-se um exemplo de áreas para a malha elétrica antes e depois de uma deformação. O espaço interno vazio refere-se ao local ocupado pelo condutor. Existem dois mecanismos para atualização de malha: *realocação de nós* e *remalhagem*. Com realocação de nós não há reconstrução de malha mas apenas um reposicionamento dos nós de acordo com os deslocamentos mecânicos. A malha é apenas deformada. A remalhagem é um método onde remove-se toda a malha original e constrói-se uma completamente nova. Uma vantagem evidente da realocação de nós com relação à remalhagem é o fato dela ser numericamente mais econômica. O alto custo computacional da remalhagem ocorre pela necessidade de criação de novos nós e elementos a cada passo de iteração da simulação acoplada. Caso ocorram deslocamentos grandes, entretanto, deve-se obrigatoriamente recorrer a ela. Neste trabalho, como a aplicação é para pequenos deslocamentos, faz-se uso da realocação de nós.

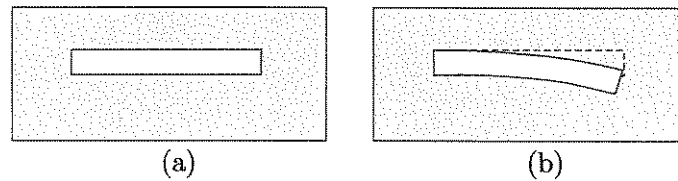


Figura 4.7: Região (a) original e (b) deformada para a malha elétrica.

O algoritmo empregado para realocação de nós ajusta suas posições pelos centróides dos elementos adjacentes. Para um nó N cuja localização é dada pelas coordenadas s_x e s_y , o reposicionamento é feito através de (Zhulin et al., 2000):

$$s_x = \frac{\sum_{i=1}^{n_n} A_i c_i(x)}{\sum_{i=1}^n A_i} \quad \text{e} \quad s_y = \frac{\sum_{i=1}^{n_n} A_i c_i(y)}{\sum_{i=1}^n A_i} \quad (4.35)$$

onde $c_{i(x)}$ e $c_{i(y)}$ são as coordenadas em x e y do centróide do elemento i adjacente a N , e A_i é a área do elemento i . O número total de elementos adjacentes ao nó N é dado por n_n . No caso tridimensional, A_i passaria a ser o volume dos elementos adjacentes.

O algoritmo de atualização da malha se inicia com a aplicação dos deslocamentos estruturais aos nós elétricos na interface entre o domínio elétrico e o mecânico. Em seguida, aplica-se a Equação (4.35) aos outros nós da malha, podendo-se restringir às proximidades da deformação ou estender-se por toda ela. A exceção está nos nós dos limites externos do domínio elétrico, os quais permanecem imutáveis. Como o reposicionamento é feito de acordo com o centróide dos elementos adjacentes, a movimentação destes nós pode gerar uma malha irregular. A cada atualização, para obtenção de melhores resultados, emprega-se a Equação (4.35) até três vezes.

Embora na maioria dos casos a Equação (4.35) melhore a forma dos elementos, nada garante que isso ocorra. Desse modo, no processo de realocação de nós, algum controle da qualidade dos elementos deve ser feito. O coeficiente de distorção de um elemento triangular pode ser calculado por (Duarte, 2003):

$$d_i = \frac{4\sqrt{3}A_i}{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2} \quad (4.36)$$

onde l_1 , l_2 e l_3 são os lados do triângulo e A_i é sua área. A distorção média analisando toda a malha é:

$$d_{med} = \frac{\sum_{i=1}^m d_i}{m} \quad (4.37)$$

onde m é o número total de elementos. Quanto mais próximos d_i e d_{med} estiverem do valor 1 (um), menos deformados são os elementos e mais uniforme é a malha.

No algoritmo de realocação, a Equação (4.35) é aplicada a cada nó da malha e através da Equação (4.36) avalia-se a distorção de cada elemento que o contém. Se qualquer um dos elementos passar a ter uma distorção inaceitável, o nó é recolocado em sua posição anterior. Embora procure-se aprimorar a forma de todos os elementos, nem sempre isto é possível. Ao mesmo tempo, deve-se ter cuidado porque há um limite para d_i além do qual os resultados podem deixar de ser coerentes e a matriz de rigidez elementar se tornar singular.

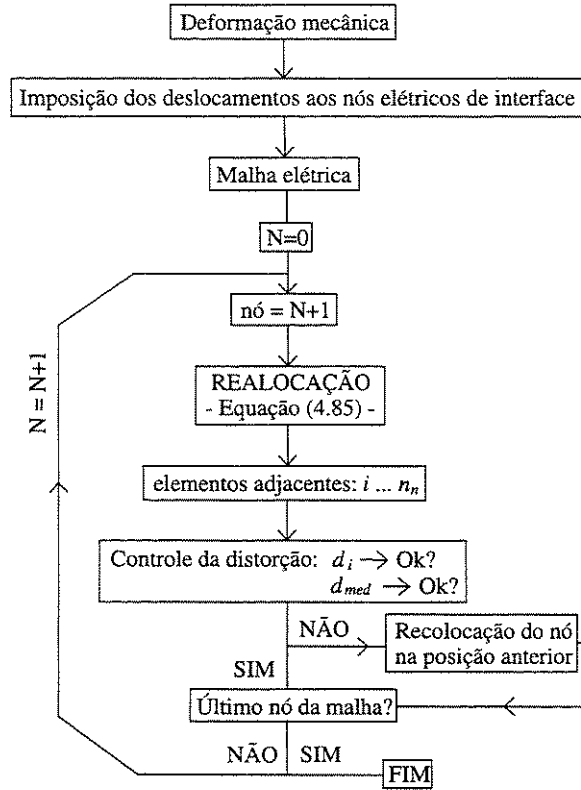


Figura 4.8: Algoritmo de atualização da malha elétrica.

Assegurando-se uma malha inicial uniforme, trabalha-se com uma relação de compromisso onde a cada nó movido é permitido um pequeno aumento na distorção elementar com relação à original, desde que a distorção média dada pela Equação (4.37) não se altere muito. As etapas do algoritmo de atualização da malha elétrica proposto neste trabalho são ilustradas na Figura 4.8.

4.4 Análise dinâmica do acoplamento eletromecânico com o MEF

Duas estratégias de solução dinâmica do problema de acoplamento eletromecânico serão mostradas. A primeira baseia-se no método de integração direta de Newmark e a segunda em um técnica de imposição de perturbação ao sistema em equilíbrio estático associada com

um problema de autovalor.

4.4.1 Método de Newmark

O método de Newmark é um método implícito de integração direta incondicionalmente estável. Essas suas características foram fatores decisivos em sua escolha uma vez que tem-se a garantia da estabilidade e a possibilidade de uso de passos de tempo maiores do que em outros métodos existentes. Através do método de Newmark, pode-se determinar a história no tempo de deslocamento, velocidade e aceleração do sistema. A equação dinâmica do problema não é satisfeita em qualquer instante de tempo mas para um intervalo discreto onde os pontos estão distantes um certo Δt . O algoritmo clássico (Malkus et al., 1989), no entanto, necessita ser modificado para levar em conta os efeitos do acoplamento entre os domínios envolvidos.

As equações dinâmicas de equilíbrio para problemas de acoplamento eletromecânico por superfície são:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} [M_M] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{u}\} \\ \{\ddot{V}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C_M] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{u}\} \\ \{\dot{V}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_M] & 0 \\ 0 & [K_E(V, u)] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{V\} \end{Bmatrix} = \\ = \begin{Bmatrix} \{P_E(V(u))\} \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.38)$$

onde $[C_M]$ é a matriz de amortecimento global do sistema.

Percebe-se na Equação (4.38) que o domínio elétrico continua a ser resolvido de forma estática. Isso ocorre porque a expansão do campo elétrico é instantânea com velocidade na ordem da de propagação da luz.

Novamente pela Equação (4.38), verifica-se que o domínio elétrico é resolvido por $[K_E(V, u)]\{V\} = \{0\}$. Aparentemente, essa equação não pode ser resolvida. Entretanto, no vetor $\{V\}$, referente aos potenciais elétricos nodais, alguns dos valores são conhecidos (impostos), como por exemplo nos nós da malha pertencentes ao contorno da estrutura mecânica. Trabalhando-se $[K_E(V, u)]\{V\} = \{0\}$, esses valores impostos podem ser passados para o lado direito da equação e o problema pode então ser resolvido normalmente por algum método numérico para solução de sistemas de equações lineares.

A Equação (4.38) é resolvida para um período $[0, T]$, discretizado em $[t_0, t_1, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots, t_N]$ onde $t_0 = 0$ e $t_N = T$. As condições iniciais são $\{u_0\}$ e $\{\dot{u}_0\}$.

Nos métodos de integração direta, aproximações por diferenças finitas são usadas para substituir as derivadas temporais presentes na equação dinâmica do sistema. Velocidade e aceleração são obtidas por diferenças do deslocamento a cada instante de tempo. Para um período discretizado, pode-se escrever a parte da Equação (4.38) referente ao domínio mecânico como:

$$[K_M]\{u_{n+1}\} + [C_M]\{\dot{u}_{n+1}\} + [M_M]\{\ddot{u}_{n+1}\} = \{P_E(\{V(\{u_{n+1}\})\})\} \quad (4.39)$$

As aproximações são:

$$\{u_{n+1}\} = \{\bar{u}_{n+1}\} + \Delta t^2 \beta \{\ddot{u}_{n+1}\} \quad (4.40)$$

$$\{\dot{u}_{n+1}\} = \{\dot{\bar{u}}_{n+1}\} + \Delta t \alpha \{\ddot{u}_{n+1}\} \quad (4.41)$$

onde

$$\{\bar{u}_{n+1}\} = \{u_n\} + \Delta t \{\ddot{u}_n\} \Delta t^2 \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \{\ddot{u}_n\} \quad (4.42)$$

$$\{\dot{\bar{u}}_{n+1}\} = \{\dot{u}_n\} + \Delta t (1 - \alpha) \{\ddot{u}_n\} \quad (4.43)$$

e α e β são parâmetros ligados à precisão e estabilidade do método. Para o algoritmo clássico de Newmark, os valores de α e β são, respectivamente, $1/2$ e $1/4$.

Da Equação (4.40) pode-se conseguir a aceleração em um instante t_{n+1} :

$$\{\ddot{u}_{n+1}\} = \frac{1}{\Delta t^2 \beta} (\{u_{n+1}\} - \{\bar{u}_{n+1}\}) \quad (4.44)$$

Substituindo a Equação (4.44) na Equação (4.41) tem-se a velocidade:

$$\{\dot{u}_{n+1}\} = \{\dot{\bar{u}}_{n+1}\} + \frac{\alpha}{\Delta t \beta} (\{u_{n+1}\} - \{\bar{u}_{n+1}\}) \quad (4.45)$$

Substituindo $\{\ddot{u}_{n+1}\}$ e $\{\dot{u}_{n+1}\}$ na Equação (4.39),

$$[K_M]\{u_{n+1}\} + [C_M](\{\dot{u}_{n+1}\} + \frac{\alpha}{\Delta t \beta}(\{u_{n+1}\} - \{\bar{u}_{n+1}\})) + \quad (4.46)$$

$$+ [M_M](\frac{1}{\Delta t^2 \beta}(\{u_{n+1}\} - \{\bar{u}_{n+1}\})) = \{P_E(\{V(\{u_{n+1}\})\})\} \quad (4.47)$$

Isolando $\{u_{n+1}\}$ chega-se a:

$$[K_{fet}]\{u_{n+1}\} = \{F_{fet}\} \quad (4.48)$$

onde

$$[K_{fet}] = \frac{1}{\Delta t^2 \beta}[M_M] + \frac{\alpha}{\Delta t \beta}[C_M] + [K_M] \quad (4.49)$$

$$\{F_{fet}\} = \{P_E(\{V(\{u_{n+1}\})\})\} + (\frac{1}{\Delta t^2 \beta}[M_M] + \frac{\alpha}{\Delta t \beta}[C_M])\{\bar{u}_{n+1}\} - [C_M]\{\bar{u}_{n+1}\} \quad (4.50)$$

O método de Newmark adaptado ao problema de acoplamento eletromecânico é mostrado na Figura 4.9. Antes de começar a integração no tempo, em $t = t_0$ são definidas as condições iniciais de deslocamento e velocidade. Faz-se $n = 0$ e avança-se um passo, ou seja, $t = t_1$. Determina-se a solução do domínio elétrico e pós-processando os resultados da distribuição de potencial no meio obtém-se as pressões nas superfícies dos condutores. Determina-se o vetor de carga nodal para a estrutura. Com a primeira configuração de carga nodal obtida na simulação, usa-se a Equação (4.39) para se calcular a aceleração inicial:

$$\{\ddot{u}_0\} = [M_M]^{-1}(\{P_E(\{V(\{u_0\})\})\} - [C_M]\{\dot{u}_0\} - [K_M]\{u_0\}) \quad (4.51)$$

Pelas Equações (4.42) e (4.43) calcula-se $\{\bar{u}_{n+1}\}$ e $\{\dot{u}_{n+1}\}$ e através da Equação (4.48) obtém-se o valor corrente de $\{u_{n+1}\}$. É de se observar que $\{u_{n+1}\}$ é determinado com pressões vindas de uma configuração onde o deslocamento é anterior ao corrente, ou seja, $\{u_n\}$. A fim de se ter $\{P_E(\{V(\{u_{n+1}\})\})\}$ ao invés de $\{P_E(\{V(\{u_n\})\})\}$ é necessário incluir um laço interno onde a geometria do domínio elétrico seja atualizada dentro de cada instante de tempo do intervalo de integração. Há a atualização da malha com $\{u_{n+1}\}$ e segue-se com uma nova simulação do domínio elétrico e conseqüente determinação de novas pressões. Essas causam novos deslocamentos mecânicos. A partir da segunda iteração interna i_i , verifica-se a

convergência dos resultados de deslocamentos e, caso estes não tenham atingido a tolerância pré-definida, repete-se o processo conforme indicado na Figura 4.9. A freqüente atualização da malha elétrica é responsável pelos efeitos de acoplamento entre os dois domínios presentes. Alcançada a convergência, pelas Equações (4.44) e (4.45) calcula-se a velocidade e a aceleração correntes. Em seguida, fazendo $n = n + 1$ avança-se um passo no tempo. Este processo é repetido até o instante final t_N .

Na aplicação do método de Newmark, deve-se ter cuidado na escolha do passo de tempo Δt . O método é incondicionalmente estável porém isso não assegura que uma resposta adequada seja obtida com um Δt grande. Inversamente, a adoção de um Δt muito pequeno pode levar a tempos de simulação bastante longos, principalmente em se tratando de MEMS, onde a cada instante de tempo o algoritmo deve lidar com os efeitos do acoplamento eletromecânico, e no caso de se haverem malhas de grandes dimensões. Em (Malkus et al., 1989), é fornecida uma sugestão para escolha do Δt . Inicialmente, identifica-se a maior freqüência de interesse no carregamento ou resposta da estrutura. Essa freqüência é chamada de ω_u . Para se ter uma resposta de boa precisão, um número mínimo de vinte passos de tempo por período de ω_u deve ser usado. Nesse caso, tem-se $\Delta t < (2\pi/\omega_u)/20 \approx 0,3/\omega_u$. Um Δt menor pode ser requerido no caso de análises não-lineares onde houverem dificuldades de convergência da solução.

A idéia sobre a atualização da força eletrostática a cada passo de tempo no método de Newmark foi apresentada em (Shi et al., 1996). Shi et al. (1996) usaram o método dos elementos de contorno para modelar o domínio elétrico e um elemento finito de viga para a parte mecânica. Neste trabalho, a técnica foi adaptada para o uso do MEF na modelagem dos dois domínios, utilizando a estratégia de atualização de malha proposta na Seção 4.3.

4.4.2 Análise por perturbação e problema de autovalor

Nesta seção, a simulação eletromecânica dinâmica é realizada com base numa estratégia de imposição de uma ou mais perturbações ao sistema em equilíbrio estático. O algoritmo requer também o cálculo dos modos de vibração estruturais obtidos pela resolução de um problema de autovalor. O resultado desta análise são as freqüências de vibração do sistema

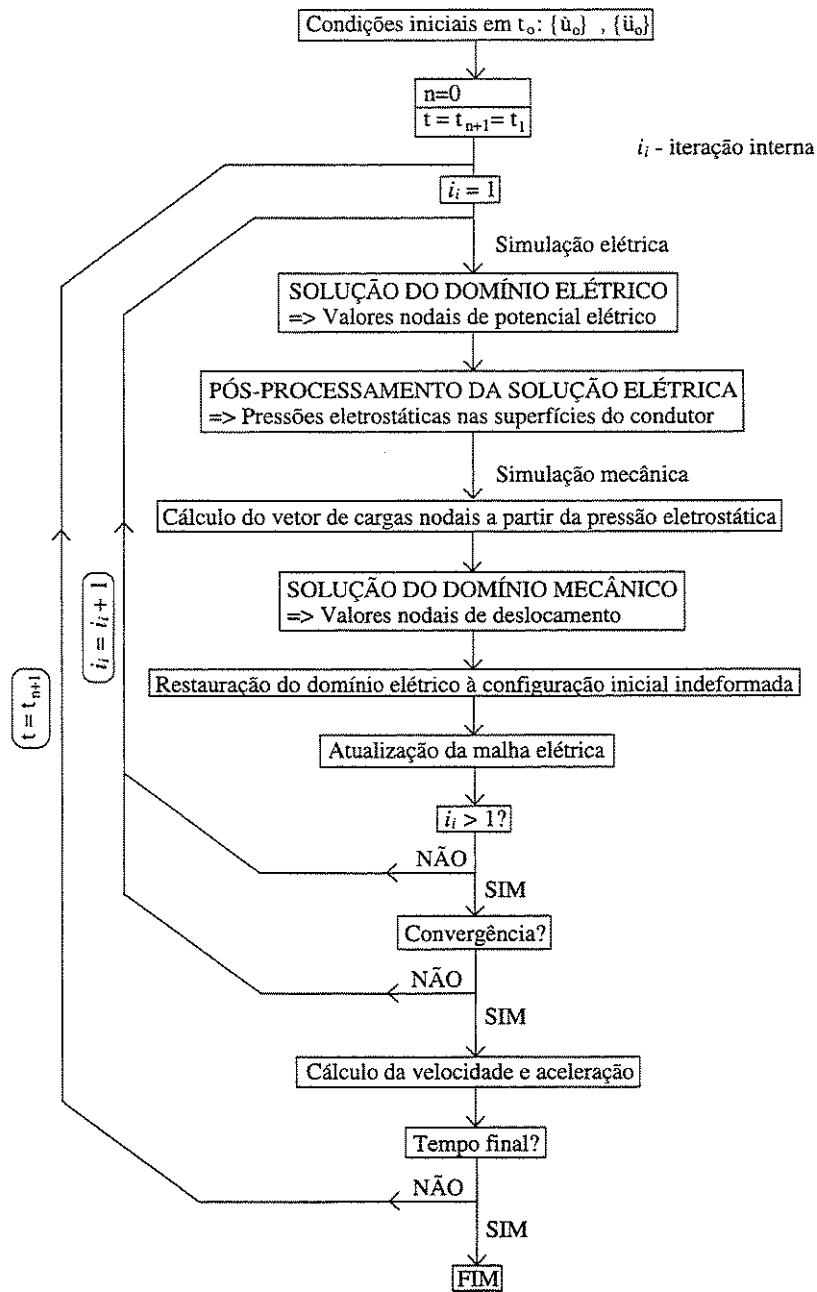


Figura 4.9: Método de Newmark adaptado.

com os efeitos da rigidez eletrostática incluídos. Adicionalmente, pelo fato de se realizar uma pré-análise estática, a posição de equilíbrio estático também é fornecida.

Considerando a equação dinâmica de elementos finitos para o problema eletromecânico, Equação (4.38), no caso particular de uma vibração em torno de uma posição de equilíbrio, é possível escrever o vetor de deslocamento como:

$$\{u(t)\} = \{u_0\} + \{\Delta u(t)\} \quad (4.52)$$

onde $\{u_0(t)\}$ é a posição no equilíbrio estático e $\{\Delta u(t)\}$ indica a variação do deslocamento em torno deste estado.

Desprezando-se o amortecimento na Equação (4.38), pode-se calcular o j -ésimo modo normal de vibração sem efeito eletrostático pelo seguinte problema de autovalor:

$$(-\omega_j^2[M_M] + [K_M])\{a\}_j = 0 \quad (4.53)$$

onde ω_j são as freqüências naturais do sistema e $\{a\}_j$ os respectivos modos de vibração.

O deslocamento pode ser aproximado através de uma combinação linear modal. Por exemplo, considerando estruturas simples e supondo a variação em torno da posição de equilíbrio como sendo do tipo senoidal, teria-se para a Equação (4.52):

$$\{u(t)\} = \{u_0(t)\} + \{a\}q_{sen}(\omega t) \quad (4.54)$$

onde ω é uma das freqüências naturais, $\{a\}$ o modo referente a ω , e q é uma coordenada generalizada. Nesse caso, considera-se o sistema movimentando-se em uma de suas freqüências fundamentais.

O modo de vibração $\{a\}$ deve ser escolhido como sendo aquele referente à freqüência que se deseja determinar. Por exemplo, para a primeira freqüência, tem-se o primeiro modo, para a segunda freqüência, o segundo modo, e assim por diante. Por meio de uma coordenada generalizada q , é possível se escalonar o modo $\{a\}$ de acordo com o máximo valor de deslocamento, u_{max} , em $\{u_0\}$, a posição de equilíbrio estático. Isso é feito da seguinte maneira:

$$u_{max} = qa_{max} \quad (4.55)$$

onde q é adimensional e limitada entre 0 e 1.

Pela Equação (4.38), sem amortecimento, e usando a propriedade de ortogonalidade dos modos de vibração, o modelo de elementos finitos pode ser reduzido a um sistema de um *gdl* onde:

$$m = \{a\}^T [M_M] \{a\} \quad (4.56)$$

$$k = \{a\}^T [K_M] \{a\} \quad (4.57)$$

e a força eletrostática é

$$f_e = \{a\}^T \{P_E(V(\{u\}))\} \quad (4.58)$$

A equação de um *gdl* do sistema é escrita como:

$$m\ddot{q} + kq = f_e \quad (4.59)$$

A variação de rigidez devida ao efeito eletrostático pode ser calculada usando duas pequenas perturbações na coordenada generalizada Δq :

$$k_e = \frac{\Delta f_e}{\Delta q} = \frac{\{a\}^T (\{P_E(V(\{u_0\} + \Delta q_1 \{a\}))\}) - \{P_E(V(\{u_0\} + \Delta q_2 \{a\}))\}}{\Delta q} \quad (4.60)$$

Por meio de duas análises eletrostáticas, $\{P_E^g(V(\{u_0\} + \Delta q_1 \{a\}))\}$ e $\{P_E^g(V(\{u_0\} + \Delta q_2 \{a\}))\}$ podem ser determinadas e a influência da rigidez eletrostática avaliada. A frequência eletromecânica acoplada pode ser calculada pelas Equações (4.56), (4.57) e (4.60):

$$\omega = \sqrt{\frac{k - k_e}{m}} \quad (4.61)$$

O algoritmo completo pode ser visualizado na Figura 4.10. Inicialmente, com uma análise estática acoplada, descrita na Seção 4.3, computa-se a posição de equilíbrio. Em seguida,

tem-se a análise modal estrutural através da Equação (4.53). Seleciona-se o modo de vibração referente à frequência natural específica que se deseja determinar e reduz-se o sistema a um equivalente de um *gdl*. Faz-se um escalonamento entre o máximo deslocamento na posição de equilíbrio estático e a máxima componente do modo escolhido e encontra-se um valor para a coordenada generalizada. Através de sua variação, são impostas as duas perturbações e, pela Equação (4.60), tem-se a rigidez eletrostática. Deve-se observar que as forças eletrostáticas são obtidas na configuração global do sistema. A geometria referente a cada perturbação é imposta à malha elétrica de elementos finitos e calcula-se o $\{P_E\}$ equivalente. Finalmente, pela Equação (4.61) tem-se a frequência natural de vibração do sistema acoplado.

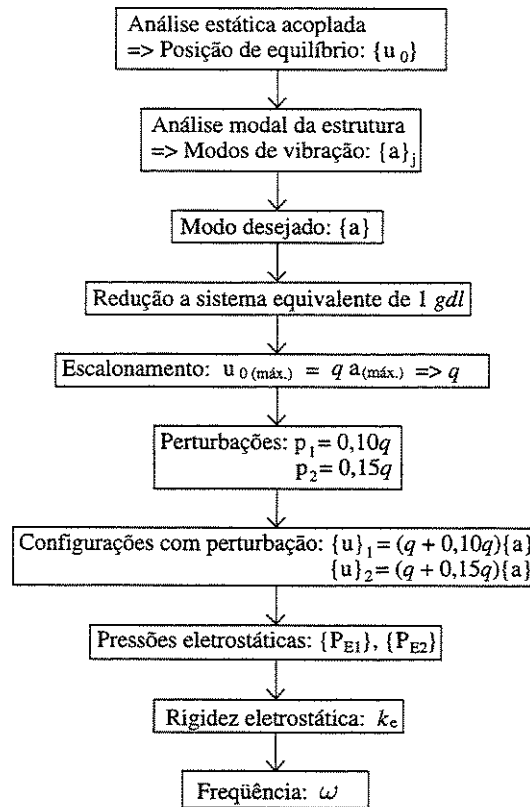


Figura 4.10: Estratégia de perturbação.

4.5 Modelo de ordem reduzida (MOR)

O elevado esforço computacional das simulações multi-domínios exigidas para lidar com problemas de acoplamento levam à necessidade de se encontrar modelos de ordem reduzida capazes de gerar resultados similares aos de modelos distribuídos completos a um custo muito menor. Esses modelos de baixa ordem são chamados de *macromodelos*. Os macromodelos possibilitam agilizar o projeto de MEMS uma vez que permitem simular diversas configurações geométricas e de cargas aplicadas de modo bastante rápido. Em simulações em nível de sistema, onde o uso de técnicas tipo MEF e/ou MEC torna-se impraticável, o desenvolvimento de macromodelos é indispensável. Ainda, pelas suas características de simulação com baixo custo computacional, os macromodelos podem ser úteis quando trabalhando-se com otimização. Nesta seção, um método de redução de ordem baseado numa projeção da equação diferencial governante em uma base fornecida por uma técnica conhecida como *Decomposição Ortogonal Própria* é apresentado.

4.5.1 Decomposição ortogonal própria (DOP)

Sistemas mecânicos têm geralmente formas espaciais recorrentes no tempo denominadas de *estruturas coerentes* (Wolter, 2001). Estas estruturas podem ser determinadas pela DOP e sua principal característica é a de conterem a maior parte da energia do sistema. A DOP é um procedimento que pode ser aplicado para extração de bases empíricas a partir de dados experimentais ou numéricos de resposta no tempo de um determinado sistema. Como resultado de sua aplicação tem-se a obtenção de um conjunto de auto-funções denominadas de *Modos Ortogonais Próprios* (MOPs) ou *modos empíricos*. Estas autofunções já são as estruturas coerentes da dinâmica em questão. Para cada MOP há um respectivo autovalor denominado de *Valor Ortogonal Próprio* (VOP). Os VOPs fornecem uma medida da energia contida em cada modo.

A DOP tem seus fundamentos em teorias estatísticas de processos estocásticos. O aprofundamento dessa teoria fugiria ao escopo deste trabalho. Dessa forma, são introduzidos apenas os conceitos essenciais e o foco maior será em seu uso dentro da formulação de um modelo de ordem reduzida. Para um maior aprofundamento, ver (Holmes et al., 1996) e

(Wolter, 2001) .

Supor um processo estocástico dado por um campo $u(x, t)$ em um domínio Ω . Seja $z(x, t)$ o campo médio ajustado

$$z(x, t) = u(x, t) - \tilde{u}(x, t) \quad (4.62)$$

onde $\tilde{u}(x, t)$ é a média do campo dada por

$$\tilde{u}(x, t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(x, t) dt \quad (4.63)$$

O campo $z(x, t)$ representa um processo estocástico de média nula. Na prática, o campo é obtido a partir de um número finito de amostras obtidas para diversos instantes de tempo. Assim, no tempo t_n , o campo $z(x)$ é representado por $z_n(x)$, uma função contínua de x em Ω . Essas representações do campo em cada instante de tempo são chamadas de *retratos* (Wolter, 2001). A aplicação da DOP permite encontrar as estruturas coerentes $\phi(x)$ de um conjunto de N retratos representativos de um sistema. Isso é equivalente a minimizar a função objetivo λ (Azeez and Vakakis, 2001):

$$\text{Minimizar} \quad \left\{ \lambda = \sum_{n=1}^N (\phi(x) - z_n(x))^2 \right\} \quad \forall x \in \Omega \quad (4.64)$$

Esta minimização é feita ponto a ponto para cada x . A Equação (4.64) pode ser colocada na forma de um problema de autovalor e diversos $\phi(x)$ podem ser determinados. É imposta uma condição de normalidade:

$$\int_{\Omega} \phi(x)^2 dx = 1 \quad (4.65)$$

e as seguintes notações são adotadas:

- $z(x, t)$ - um campo aleatório definido em Ω , o espaço de funções;
- $\{z_n\}$ - uma coleção de retratos de $z(x)$;
- $(f, g) \equiv \int_{\Omega} f(x)g(x)dx$ - produto interno de duas funções em Ω ; e
- $\langle z_n \rangle \equiv \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N z_n(x)$ - média do campo discreto ou média dos retratos.

A Equação (4.64) significa que a soma dos quadrados das diferenças entre $z_n(x)$ e $\phi(x)$ deve ser minimizada. Em outras palavras, são desejadas funções $\phi(x)$ que maximizem a projeção normalizada de $z_n(x)$ em $\phi(x)$. O problema dado pela Equação (4.64) pode ser colocado da seguinte forma (Azeez and Vakakis, 2001):

$$\text{Maximizar } \left\{ \lambda = \frac{\langle \phi, z_n \rangle^2}{(\phi, \phi)} \right\} \quad \text{com respeito a } \phi(x). \quad (4.66)$$

O numerador dessa expressão pode ser expandido usando a notação para o produto interno:

$$\langle (\phi, z_n)^2 \rangle = \left\langle \int_{\Omega} \phi(x) z_n(x) dx \int_{\Omega} \phi(x') z_n(x') dx' \right\rangle \quad (4.67)$$

$$= \int_{\Omega} \left\{ \int_{\Omega} \langle z_n(x) z_n(x') \rangle \phi(x) dx \right\} \phi(x') dx' \quad (4.68)$$

Introduzindo a função de autocorrelação R definida como

$$R(x, x') = \langle z_n(x) z_n(x') \rangle \equiv \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N z_n(x) z_n(x') \quad (4.69)$$

e o operador linear L

$$L(\cdot) \equiv \int_{\Omega} R(x, x') (\cdot) dx' \quad (4.70)$$

a Equação (4.68) pode ser compactada e escrita como:

$$\langle (\phi, z_n)^2 \rangle = \int_{\Omega} \{L\phi\} \{\phi\} dx = (L\phi, \phi). \quad (4.71)$$

Substituindo a Equação (4.71) na Equação (4.66) e expandindo o produto interno do denominador, pode-se chegar a:

$$\int_{\Omega} \lambda \phi \phi dx = \int_{\Omega} \{L\phi\} \{\phi\} dx \Rightarrow (\lambda \phi, \phi) = (L\phi, \phi) \quad (4.72)$$

Inspecionando esta equação, nota-se que a maximização da Equação (4.66) pode ser conseguida resolvendo-se o seguinte problema de autovalor integral (Azeez and Vakakis, 2001):

$$L\phi = \lambda \phi \Rightarrow \int_{\Omega} R(x, x') \phi(x') dx' = \lambda \phi \quad (4.73)$$

A solução da Equação (4.73) é comumente realizada pelo Método dos Retratos (Holmes et al., 1996; Azeez and Vakakis, 2001; Wolter, 2001). Neste método assume-se que as autofunções $\phi(x)$ são combinações lineares dos retratos:

$$\phi(x) = \sum_k \alpha_k z_k(x) \quad (4.74)$$

Substituindo a Equação (4.74) na Equação (4.73), tem-se

$$\sum_n \int_{\Omega} \frac{1}{N} z_n(x) z_n^T(x') \sum_k \alpha_k z_k(x') dx' = \lambda \sum_n \alpha_n z_n(x). \quad (4.75)$$

A Equação (4.75) gera o seguinte problema de autovalor (Azeez and Vakakis, 2001):

$$\sum_{k=1}^N H_{nk} \alpha_k = \lambda \alpha_n \quad \text{para } n = 1, 2, \dots, N \quad (4.76)$$

$$\Rightarrow [H]\{\alpha\} = \lambda\{\alpha\} \quad \text{onde } H_{nk} = \frac{1}{N} \int_{\Omega} z_n(x) z_k(x') dx'. \quad (4.77)$$

A matriz $[H]$ tem dimensão $N \times N$ e é simétrica e positiva definida. O vetor $\{\alpha\}$ tem comprimento N e é constituído pelos coeficientes a serem determinados α_k . O problema de autovalor dado pela Equação (4.77) deve ser resolvido para se produzir autovalores λ e autovetores α . Os autovalores quantificam a participação de cada autovetor na energia total do sistema. A energia contida nas p primeiras autofunções é dada por

$$E_T = \frac{\sum_{i=1}^p \lambda_i}{\sum_{i=1}^N \lambda_i} \quad (4.78)$$

onde p é um número inteiro.

Com base em na Equação (4.78) pode-se determinar o número mínimo de modos a serem usados para representar o sistema. Comumente exige-se $E_T > 0,99$.

Uma ferramenta algébrica que permite o cálculo direto dos MOPs é a Decomposição de Valor Singular (DVS) (Liang et al., 2002). A aplicação direta da DVS a uma matriz $[Z]$ com os valores do campo médio ajustado fornece um resultado do tipo $[Z] = [P][\Sigma][Q]^T$. As colunas de $[Q]$ já são os MOPs e a diagonal de $[\Sigma]$ é composta pelos VOPs. A matriz $[Z]$ é de ordem N (instantes de tempo) $\times M$ (valores do campo) e é dada por:

$$[Z] = [U] - [\bar{U}] \quad (4.79)$$

onde

$$[U] = [\{u_1\} \quad \{u_2\} \quad \dots \quad \{u_M\}] = \begin{bmatrix} u_1(t_1) & u_2(t_1) & \dots & u_M(t_1) \\ u_1(t_2) & u_2(t_2) & \dots & u_M(t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1(t_N) & u_2(t_N) & \dots & u_M(t_N) \end{bmatrix} \quad (4.80)$$

e

$$[\bar{U}] = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N u_1(t_i) & \sum_{i=1}^N u_2(t_i) & \dots & \sum_{i=1}^N u_M(t_i) \\ \sum_{i=1}^N u_1(t_i) & \sum_{i=1}^N u_2(t_i) & \dots & \sum_{i=1}^N u_M(t_i) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^N u_1(t_i) & \sum_{i=1}^N u_2(t_i) & \dots & \sum_{i=1}^N u_M(t_i) \end{bmatrix} \quad (4.81)$$

As matrizes $[P]$, $[\Sigma]$ e $[Q]$ são de ordem, respectivamente, $N \times N$, $N \times M$ e $M \times M$. As colunas de $[U]$ representam o comportamento no tempo de uma componente do campo que na prática pode ser, por exemplo, um grau de liberdade qualquer de um sistema. Nas linhas de $[U]$ tem-se o comportamento do campo como um todo para cada instante de tempo.

4.5.2 Construção do macromodelo

Os modos empíricos obtidos por meio da DOP servem como funções de base para projeções de Galerkin a partir das quais são gerados os macromodelos. Duas formulações são apresentadas, uma usando uma equação de viga e outra com as equações da elasticidade.

Macromodelo com equação de viga

A equação para uma viga elástica unidimensional é dada por:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \rho_s A \ddot{w} + f_{sup} = 0 \quad (4.82)$$

onde w é a deflexão, A é a área da seção transversal da viga, E é o módulo de Young, I é o momento de inércia e f_{sup} é a força de superfície atuante, no caso, de origem elétrica.

Discretizando a Equação (4.82) através de uma projeção de Galerkin numa base ψ_i , tem-se:

$$\int_0^L (EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \rho_s A \ddot{w} + f_{sup}) \psi_i dx = 0 \quad (4.83)$$

onde L é o comprimento da viga.

A aproximação para a deflexão em termos dos modos ortogonais é dada por:

$$\hat{w} = a_1(t)\phi_1(x) + a_2(t)\phi_2(x) + \dots + a_{n_f}(t)\phi_{n_f}(x) = \{\phi(x)\}^T \{a(t)\} \quad (4.84)$$

onde $\{a(t)\}$ são os coeficientes a serem determinados e n_f é o número total de MOPs usado na aproximação. Aqui, a matriz $[U]$, Equação (4.80), necessária para obtenção de $\{\phi(x)\}$, é montada com valores de deflexão para diversos pontos da viga, medidos experimentalmente ou retirados de simulações numéricas.

Substituindo $\hat{w}$ em (4.83), tem-se a seguinte expressão:

$$\int_L (EI \left\{ \frac{\partial^4 \phi(x)}{\partial x^4} \right\}^T \{a(t)\} - \rho_s A \{\phi(x)\}^T \{\ddot{a}(t)\} + f_{sup}) \psi_i dx = 0 \quad (4.85)$$

As funções de base ψ_i são adotadas como sendo os MOPS, isto é, $\psi_i = \phi_i$, onde $i = 1, 2, \dots, n_f$. Calculando os n_f resíduos da Equação (4.85) e manipulando os resultados, pode-se chegar ao seguinte sistema de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs):

$$[K]\{a\} + [M]\{\ddot{a}\} = \{F\} \quad (4.86)$$

onde

$$[K] = EI \int_L \left\{ \frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} \right\} \left\{ \frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} \right\}^T dx \quad (4.87)$$

$$[M] = \rho_s A \int_L \{\phi(x)\} \{\phi(x)\}^T dx \quad (4.88)$$

$$\{F\} = \int_L \{\phi(x)\} f_{sup} dx \quad (4.89)$$

A Equação (4.86) constitui o macromodelo procurado. Diferentemente da formulação por elementos finitos, onde as funções de interpolação são locais e o domínio precisa ser discretizado por um grande número de elementos e conseqüentemente de *gdl*s, aqui a base é global, válida para todo o domínio. No MEF a forma da equação discreta final é semelhante

à Equação (4.86), porém, o número de equações é muito maior. A Equação (4.86) pode ser resolvida pelo Método de Newmark apresentado na Seção 4.4.1. Para cada instante de tempo do intervalo discreto onde é feita a integração, determina-se o valor dos coeficientes $\{a(t)\}$ e usando a Equação (4.84) tem-se a deflexão.

Para tornar a simulação mais rápida a força elétrica pode ser aproximada pelo modelo de um capacitor de placas paralelas. Neste caso f_{sup} é dada por

$$f_{sup} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_o A_C V^2}{(g - w)^2} \quad (4.90)$$

onde A_C é a área localizada da superfície onde deseja-se calcular a força, e g é a distância inicial entre os condutores onde é aplicada a diferença de potencial elétrico.

Macromodelo com equações da elasticidade

Para desenvolvimento do macromodelo com base nas equações da elasticidade procede-se de modo similar ao usado na Seção 4.2.1 para construção do elemento finito bi-linear plano. Mudam as aproximações para as componentes do deslocamento u_x e u_y e também as funções de base para a projeção de Galerkin.

Considerando aproximações $\hat{u}_x$ e $\hat{u}_y$ para os deslocamentos e projetando o resíduo das Equações (4.17) e (4.18), respectivamente, em bases $\psi_{i(x)}$ e $\psi_{i(y)}$, pode-se chegar à seguinte expressão matricial:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_{i(x)}}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \psi_{i(x)}}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial \psi_{i(y)}}{\partial y} & \frac{\partial \psi_{i(y)}}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} d\Omega + \rho_s \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \psi_{i(x)} & 0 \\ 0 & \psi_{i(y)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_x \\ \hat{u}_y \end{Bmatrix} d\Omega = \\ \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \psi_{i(x)} & 0 \\ 0 & \psi_{i(y)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} d\Omega + \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \psi_{i(x)} & 0 \\ 0 & \psi_{i(y)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix} d\Gamma \end{aligned} \quad (4.91)$$

As aproximações adotadas são:

$$\hat{u}_x = b_1(t)\phi_{1(x)}(x, y) + \dots + b_{n_f}(t)\phi_{n_f(x)}(x, y) = \{\phi_{(x)}(x, y)\}^T \{b(t)\} \quad (4.92)$$

$$\hat{u}_y = c_1(t)\phi_{1(y)}(x, y) + \dots + c_{n_f}(t)\phi_{n_f(y)}(x, y) = \{\phi_{(y)}(x, y)\}^T \{c(t)\} \quad (4.93)$$

onde $\{b(t)\}$ e $\{c(t)\}$ são os coeficientes temporais, $\{\phi_{(x)}(x, y)\}$ e $\{\phi_{(y)}(x, y)\}$ são os MOPs para o deslocamentos em x e em y , e n_f é o número total de funções usado na aproximação.

Para esta formulação, a matriz de dados $[U]$, Equação (4.80), é montada do seguinte modo:

$$U = \begin{bmatrix} u_{x1}(t_1) & u_{y1}(t_1) & u_{x2}(t_1) & u_{y2}(t_1) & \dots & u_{xM}(t_1) & u_{yM}(t_1) \\ u_{x1}(t_2) & u_{y1}(t_2) & u_{x2}(t_2) & u_{y2}(t_2) & \dots & u_{xM}(t_2) & u_{yM}(t_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ u_{x1}(t_N) & u_{y1}(t_N) & u_{x2}(t_N) & u_{y2}(t_N) & \dots & u_{xM}(t_N) & u_{yM}(t_N) \end{bmatrix} \quad (4.94)$$

onde $u_{x1}, \dots, u_{xM}$ e $u_{y1}, \dots, u_{yM}$ são valores de graus de liberdade obtidos de simulações com o modelo de elementos finitos.

Substituindo as Equações (4.92) e (4.93) na Equação (4.91), calculando tantos resíduos quanto forem necessários (cada resíduo é obtido fazendo $\psi_{i(x)} = \phi_{i(x)}$ e $\psi_{i(y)} = \phi_{i(y)}$), usando a lei constitutiva para o estado plano de tensões e as relações de deformação-deslocamento, pode-se chegar à formulação final para o modelo de ordem reduzida:

$$\int_{\Omega} [B]^T [C] [B] d\Omega \{a(t)\} + \rho_s \int_{\Omega} [S]^T [S] d\Omega \{\ddot{a}(t)\} = \int_{\Omega} [S]^T \{F\} d\Omega + \int_{\Gamma} [S]^T \{P\} d\Gamma \quad (4.95)$$

Os termos desta equação, considerando aproximações com dois MOPs, isto é,

$$\hat{u}_x = b_1(t)\phi_{1(x)}(x, y) + b_2(t)\phi_{2(x)}(x, y) \quad \text{e} \quad \hat{u}_y = c_1(t)\phi_{1(y)}(x, y) + c_2(t)\phi_{2(y)}(x, y)$$

são:

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_{1(x)}}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \phi_{2(x)}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \phi_{1(y)}}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \phi_{2(y)}}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_{1(x)}}{\partial y} & \frac{\partial \phi_{1(y)}}{\partial x} & \frac{\partial \phi_{2(x)}}{\partial y} & \frac{\partial \phi_{2(y)}}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad [S] = \begin{bmatrix} \phi_{1(x)} & 0 & \phi_{2(x)} & 0 \\ 0 & \phi_{1(y)} & 0 & \phi_{2(y)} \end{bmatrix},$$

$$\{a(t)\} = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ c_1(t) \\ b_2(t) \\ c_2(t) \end{bmatrix}^T \quad \text{e} \quad [C] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Os resultados para aproximações com um número maior de MOPs são facilmente alcançados.

Capítulo 5

Implementação Computacional

Este capítulo inicia-se com uma exposição geral sobre as idéias e conceitos de uma programação orientada a objetos. Em seguida apresenta-se a estrutura do código computacional MefLab++ e o modo como as estratégias de solução do problema de acoplamento eletromecânico estão nele inseridas.

5.1 Programação orientada a objetos (POO)

Um princípio fundamental da POO é a utilização de classes. Uma classe define um tipo de objeto e as características, comportamentos e responsabilidades dos objetos derivados dela. Um objeto é simplesmente uma instância de uma classe. Segundo o paradigma da POO os programas computacionais devem ser compostos por uma coleção de objetos únicos. Diferentemente de uma linguagem baseada em procedimentos, onde o problema é resolvido pela execução seqüencial de um conjunto de funções, na POO os algoritmos são constituídos de objetos que ficam trocando informações entre si pelo envio e recebimento de “mensagens”. A idéia de se operar com objetos individuais de responsabilidades próprias e que podem comumente agir como “caixas pretas” aponta uma forte característica da POO, a modularidade.

Além dos objetos, outras propriedades que ressaltam as capacidades da POO são:

1. **Abstração.** Em POO busca-se ignorar os detalhes das partes para focalizar a atenção em um nível mais elevado do problema. As tarefas maiores são subdivididas em tarefas menores, e estas são novamente subdivididas. Segue-se com este processo até que os problemas individuais se tornem suficientemente pequenos para serem de fácil ma-

nipulação. A abstração é a habilidade de fazer essa divisão do problema maior em componentes e subcomponentes. Os algoritmos não são implementados através de blocos monolíticos de programação mas a partir de pequenas partes com responsabilidades distintas exclusivas. Os componentes e subcomponentes são os próprios objetos.

2. **Classes.** Conforme explicado anteriormente, as classes são criadas pelo programador para definir os objetos e suas propriedades. Por exemplo, uma classe chamada *Pesquisador* poderia ser caracterizada por atributos como cargo, salário e idade. Um objeto *José* instanciado dessa classe poderia ser caracterizado por cargo = doutorando, salário = 1250,00 e idade = 29. Outro objeto poderia ser *João* com cargo = mestrando, salário = 850,00 e idade = 25;
3. **Herança.** Uma nova classe pode ser construída herdando todas as propriedades e métodos de uma outra já existente e acrescentando características que se desejar a mais. Em outras palavras, a herança possibilita a criação de classes de objetos pela extensão daquelas já existentes. Essa propriedade elimina a necessidade de reconstrução total de uma classe quando apenas alguma capacidade adicional for necessária;
4. **Encapsulamento.** Os dados e métodos devem ficar ocultos dentro das classes e os usuários devem poder utilizá-los sem conhecer ou se preocupar com o que há internamente a elas. Fazendo uma analogia com a vida real, ao usar objetos *geladeira* e *carro*, desde que o primeiro resfrie alimentos e bebidas e o segundo transporte pessoas e cargas, não há a preocupação de se saber como funcionam, respectivamente, o compressor e o motor de combustão interna; e
5. **Polimorfismo.** A habilidade de ter vários métodos para realizar uma mesma operação é chamada de polimorfismo. Um mesmo método pode ser construído com tipos e/ou número de argumentos diferentes, por exemplo, *func(int a)* e *func(double a, int b)*. O polimorfismo refere-se ao fato de que a *func()* específica a ser usada será identificada pelos argumentos passados a ela. *Poli* significa *muitas* e *morphos* significa *forma*, e o termo completo em POO indica o mesmo nome tomando diversas formas. Pela característica de encapsulamento, pouco importa o conhecimento da implementação

interna de *func()*, uma vez passados os argumentos corretos, deseja-se apenas uma saída com a resposta correta.

A modularidade proporcionada pela POO e as propriedades de herança e encapsulamento tornam a atualização e manutenção dos programas computacionais bastante práticas. Trechos de códigos não precisam ser completamente reconstruídos quando houver necessidade de se efetuar alguma modificação em um determinado método (ou adicionar outro) em um objeto. Uma nova classe pode ser criada herdando as características da antiga e incluindo as modificações desejadas. Não é necessário analisar e nem alterar a implementação do código já existente. Como um código em POO é baseado na manipulação de módulos individuais e não em estruturas longas de programação, sua reutilização é relativamente mais simples do que em códigos feitos com base nos paradigmas tradicionais da programação estruturada. Quando lidando com códigos computacionais grandes, e em especial com necessidade constante de atualização, a idéia da POO é bastante funcional.

5.2 O código MefLab++

O MefLab++ é um código computacional orientado a objetos e escrito em C++. O escopo deste programa é a resolução de problemas específicos de engenharia. Métodos numéricos como elementos finitos estão nele implementados bem como estratégias de otimização de sistemas.

Na Figura 5.1 tem-se uma visão da organização geral do MefLab++. Os blocos indicam as classes maiores existentes no programa. No topo da estrutura organizacional está a classe *MainProblem*. Antes de prosseguir, é necessário definir dois tipos de relações entre classes, juntamente com suas respectivas representações. Uma linha contínua com um pequeno círculo branco em uma das extremidades indica uma relação de *uso*. A classe onde estiver o círculo branco usa objetos instanciados da outra conectada a ela. Quando numa extremidade da linha houver uma seta, a relação é de *herança*. Uma classe *filha* herda da classe *mãe* para a qual está “apontando”. Na Figura 5.1, observa-se que *MainProblem* usa diretamente objetos e métodos de *BoundaryConditions*, *Domains* e *Tasks*. A implementação de *Domains* requer o

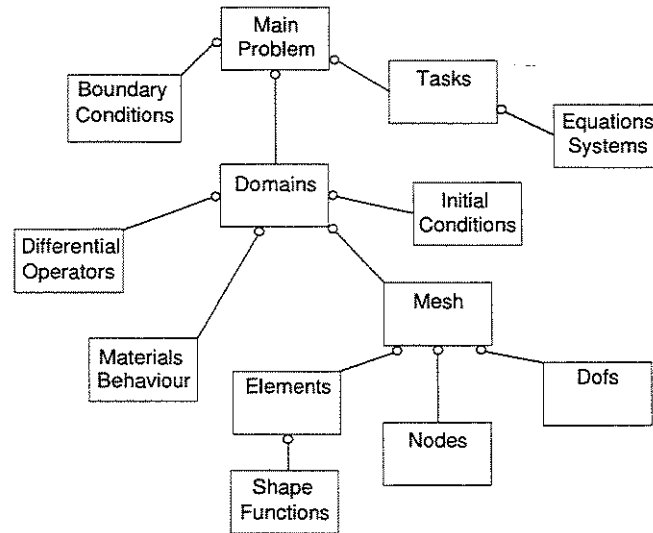


Figura 5.1: Estrutura geral do MefLab++.

uso de `DifferentialOperators`, `MaterialsBehaviour`, `Mesh` e `InitialConditions`. Essas por sua vez necessitam de outras classes e assim por diante.

Os nomes das classes são indicativos da funcionalidade de cada uma delas. Desse modo, os objetos instanciados de `BoundaryConditions` servem para lidar com a imposição de condições de contorno. A Figura 5.2 mostra a classe mãe `BoundaryConditions`, e suas filhas. Os métodos comuns a quaisquer condições de contorno estão na classe mãe e são todos herdados pelas filhas, que possuem ainda aqueles específicos para cada caso (forças externas, deslocamentos, forças de volume, trações, forças variantes no tempo, pressões, densidade de carga e voltagens). Nota-se que `BoundaryConditions` usa as classes `GeoNode`, `GeometricMesh`, `PhyElement` e `PhyNode`. Pelo encapsulamento dos dados, há o uso de objetos dessas classes sem o conhecimento de como estão implementados os seus métodos. Outra classe é mostrada na Figura 5.3. `MaterialsBehaviour` possui métodos gerais para leis constitutivas e as classes filhas os específicos de cada caso, como por exemplo, estado plano de tensões e estado plano de deformações. Para as outras classes segue-se com o mesmo raciocínio e à medida que for necessário elas serão melhor especificadas.

A solução de um problema de engenharia envolve sempre um domínio. No MefLab++,

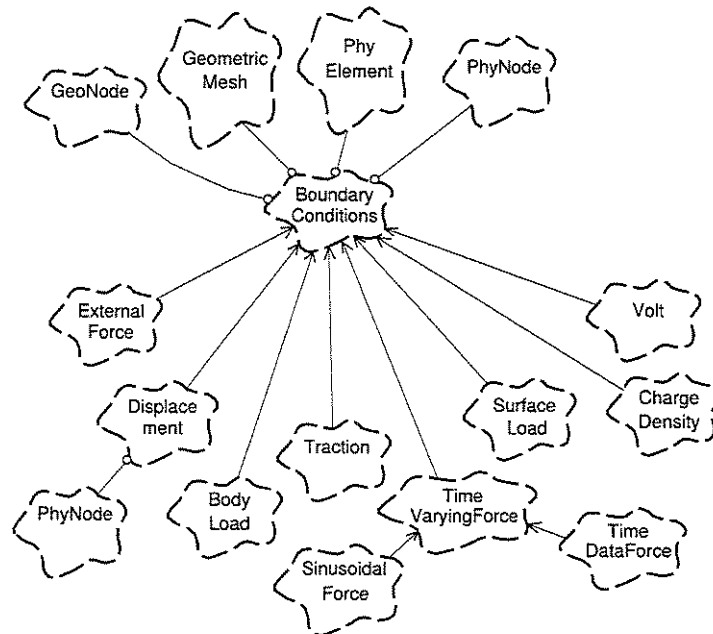


Figura 5.2: Classe mãe BoundaryConditions e classes filhas.

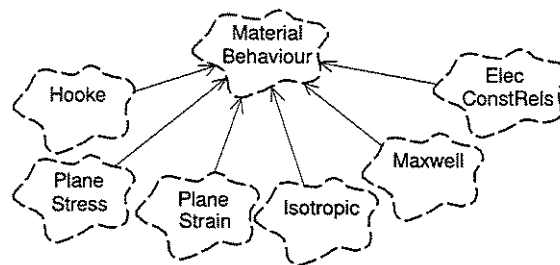


Figura 5.3: Classe mãe MaterialsBehaviour e classes filhas.

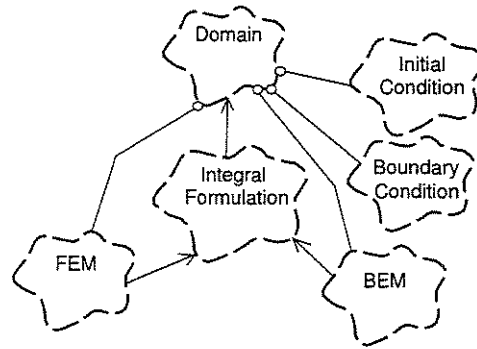


Figura 5.4: Classe mãe Domínios, classes filhas e algumas relações.

esse é representado pela classe **Domains**. **Domains**, suas filhas e sua relação com algumas outras classes (na realidade são muito mais relações) estão apresentadas na Figura 5.4. A classe referente à formulação de elementos finitos é **FEM**. Algumas de suas responsabilidades específicas são:

- Solicitação da montagem das matrizes elementares de massa, rigidez e amortecimento e do vetor de carga nodal;
- Montagem do sistema global de equações diferenciais ordinárias; e
- Pós-processamento de resultados.

A implementação de elementos finitos precisa de itens como operadores diferenciais, condições de contorno, regras de quadratura para integração, leis constitutivas, algoritmos numéricos de solução de sistemas de equações, malhas geométricas e físicas, e outros. Para cada item desses há uma classe equivalente no **MefLab++** e na construção dos métodos de **FEM** são usados objetos de praticamente todas elas. Vale lembrar que pelo encapsulamento dos dados os objetos de cada tipo são usados pela classe **FEM** sem que esta tenha qualquer conhecimento sobre o que há internamente a eles.

Na Tabela 5.1 há uma exposição sucinta das classes maiores do **MefLab++**, juntamente com suas responsabilidades e algumas de suas filhas.

A seguir maiores especificações acerca do problema de acoplamento eletromecânico no **MefLab++** são expostas.

Tabela 5.1: Classes do MefLab+ e suas responsabilidades.

CLASSE	RESPONSABILIDADES	CLASSES FILHAS
Domain	Compor o método numérico a ser usado na solução do problema físico real.	IntegralFormulation, FEM, BEM
Differential-Operators	Especificar a equação governante do problema.	Electrostatic, Helmholtz, Elasticity, Beam, Maxwell
Mesh	Construir e operar com as malhas físicas e geométricas do problema.	GeometricMesh, PhysicalMesh
Elements	Construir elementos geométricos e físicos e calcular todas as suas propriedades.	GeoElements, PhyElements
Shape-Functions	Fornecer as funções de forma e suas derivadas para cada tipo de elemento.	ShapeFunctionBeam, ShapeFunctionTriag, ShapeFunctionQuad
Nodes	Armazenar e fornecer dados de coordenadas geométricas e número dos nós, gerar e manusear lista dos <i>gdl</i> s de cada nó.	GeoNode, PhyNode
DOFS	Estabelecer valor do <i>gdl</i> em cada nó físico e fornecer o número de sua equação no sistema de EDOs global.	–
Initial-Conditions	Operar com as condições iniciais.	ICDisplacement, ICVelocity
Tasks	Especificar o tipo de tarefa a ser realizada.	Static, Dynamic, CoupledFieldSolutions
Equations-System	Fornecer algoritmos numéricos de solução de problemas, equações e sistemas de equações.	Newmark, Gauss, Cholesky-Decomp, RungeKutta, Houbolt
Numerical-Integration	Regras de quadratura para integração numérica de funções.	GaussIntegration, Hammer-Integration

5.3 Acoplamento eletromecânico no MefLab++

Na Figura 5.5 tem-se uma representação da classe Tasks e suas filhas específicas para métodos de análise acoplada. As relações com outras classes mães (ver a Tabela 5.1) são omitidas. A classe geral para problemas de acoplamento é a CoupledFieldSolutions. Ela possui duas filhas: SequentialAnalysis e EigenvalueAnalysis. A primeira possui métodos comuns a quaisquer análises sequenciais. Na segunda estão métodos para algoritmos que envolvem solução modal do sistema.

Os métodos necessários ao algoritmo de análise estática acoplada, Figura 4.6, pertencem a classe StaticSA. Ela usa objetos de diversas outras classes, por exemplo, tipo FEM para

resolução dos domínios elétrico e mecânico, e tipo `GeoMesh` para atualização da malha elétrica a cada iteração. A esses objetos de outras classe apenas é solicitada a execução da tarefa específica e obtida a resposta desejada. Os objetos agem como se fossem caixas pretas onde os métodos estão todos encapsulados.

Os métodos específicos para o algoritmo de análise dinâmica por perturbação pertencem a classe `EigenvalueAnalysis`. A seqüência de passos mostrada na Figura 4.10 está nela inserida. Na Figura 5.5 nota-se a relação de uso com a classe `StaticSA`. Através de objetos instanciados dessa classe, a posição de equilíbrio estático requerida pela estratégia de perturbação é computada. Pela característica de encapsulamento, tem-se a realização da análise estática sem nenhum conhecimento do código interno dos métodos de `StaticSA`. Da mesma forma, são executados os passos seguintes. Por exemplo, as perturbações são efetuadas e solicita-se à classe `FEM` o cálculo das pressões eletrostáticas.

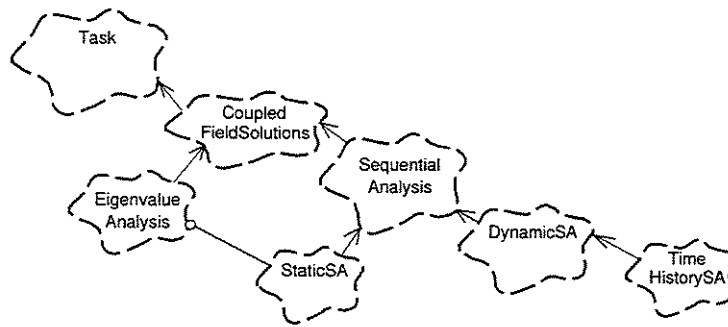


Figura 5.5: Classe mãe `Tasks` e classes filhas.

A tarefa de solicitar uma análise transiente acoplada, Figura 4.9, é conseguida através da classe `TimeHistorySA`. Ela possui objetos da classe `NewmarkSA`, cuja responsabilidade é execução da integração direta de Newmark. `NewmarkSA` é filha da classe `Newmark`. Ela possui (herda) os métodos comuns ao Newmark clássico mas incorpora outros específicos para o caso acoplado.

Alguns dos métodos usados nos algoritmos de solução de problemas acoplados, suas responsabilidades e classes às quais pertencem estão mostrados na Tabela 5.2.

As capacidades do `MefLab++` não se limitam a problemas de acoplamento eletromecânico.

Tabela 5.2: Métodos usados nos algoritmos de solução de problemas acoplados.

MÉTODO	RESPONSABILIDADE	CLASSE
give_StaticLHSide()	Calcular a matriz de rigidez em um problema estático pelo método dos elementos finitos.	FEM
give_LHSide()	Calcular as matrizes de rigidez e massa pelo método dos elementos finitos.	FEM
give_RHSide()	Calcular o vetor de cargas nodais pelo método dos elementos finitos.	FEM
solve_Equation()	Resolver o sistema de equações diferenciais ordinárias final fornecido pelo método dos elementos finitos.	FEM
give_Flux()	Calcular o gradiente na direção normal de algum parâmetro físico, por exemplo, o potencial elétrico.	FEM
update_Surface-Load()	Atualizar o valor de forças de superfície.	FEM
give_Electrical-Pressure()	Calcular o valor da pressão eletrostática em uma superfície.	Electrostatic
update_PositionOf-InterfaceNodes()	Reposicionar nós na linha ou área de interface entre dois domínios.	SequentialAnalysis
do_Morphing()	Atualizar a malha do domínio.	GeoMesh
EvaluateMesh-Quality()	Avaliar a distorção da malha geométrica.	GeoMesh
give_Element-DistortionCoeficient()	Avaliar a distorção do elemento finito.	GeoElement
give_TangentMatrix()	Calcular a matrix efetiva, Equação (4.48), no método de Newmark	NewmarkSA
give_Initial-Acceleration()	Calcular aceleração inicial de um problema dinâmico.	Domain
update_data()	Atualizar dados de condição de contorno.	BoundaryConcitions
solve_task()	Resolver problema de autovalor/autovetor.	Jacob
solve_posStatic-EigenSolution()	Solicitar a solução de um problema de autovalor usando objetos instanciados, por exemplo, da classe Jacob.	FEM

O programa contém estratégias de solução numérica para acoplamento fluido-estrutura, poroelasticidade, acoplamento fluido-meio poroelástico, acústica, otimização e placas. Para maior detalhamento da abrangência do MefLab++, pode-se consultar (da Silva, 2001), (Souto and Pavanello, 2003), (Pizzirani, 2003), (da Silva Jr., 2003) e (Carvalho, 2004).

O MefLab++ encontra-se em pleno desenvolvimento e estratégias de solução numérica

para outros problemas vêm sendo constantemente implementadas. Atualmente, pode-se afirmar que o programa já constitui uma ferramenta numérica capaz de auxiliar no projeto e desenvolvimento de sistemas nos casos específicos de suas aplicações.

As etapas de pré e pós processamento não foram incluídas no projeto do sistema. No estágio atual de desenvolvimento, são usadas ferramentas comerciais para executar estas tarefas. O pré processamento é realizado no programa ANSYS® e o pós processamento no MATLAB® e/ou também no ANSYS®.

Capítulo 6

Exemplos Analisados e Resultados Numéricos

Neste capítulo, as metodologias de simulação numérica para problemas de acoplamento eletromecânico propostas ao longo do trabalho são testadas e usadas para analisar exemplos de estruturas típicas encontradas em microsistemas.

Os exemplos escolhidos são simples, todavia representativos dos fenômenos de acoplamento eletromecânico, e, além disso, são freqüentemente estudados na literatura específica da área de microsistemas.

6.1 Exemplo 1: Análise estática de uma microviga engastada-livre

Estruturas tipo viga são bastante usadas na construção de microdispositivos. O primeiro exemplo apresentado refere-se à análise estática de uma microviga engastada-livre. O algoritmo de simulação empregado é o particionado iterativo apresentado na Seção 4.3. O objetivo é avaliar os seguintes itens:

- Influência da extensão da malha elétrica sobre os resultados;
- Esforço computacional despendido nas simulações;
- Condições de convergência e oscilação da resposta;
- Funcionamento do esquema de atualização da malha elétrica; e

- Configuração de deslocamentos estruturais.

Na Figura 6.1 tem-se um esquema geral da microviga simulada. À esquerda dessa figura, V indica a voltagem aplicada entre a viga e o terra. Os parâmetros geométricos e propriedades materiais, referentes ao silício, usados na simulação são: $L_v = L_t = 150\mu m$, $t_v = t_t = 2,0\mu m$, $g = 6,0\mu m$, $E = 150\text{GPa}$, $\nu = 0,23$ e $\varepsilon_o = 8,854.10^{-6}pF/\mu m$. As unidades básicas fundamentais consideradas nos dados de entrada para o MefLab++ são o micrômetro (μm), quilograma (kg) e segundo (s).

O silício é um material semi-condutor. Para que ele se comporte como condutor é necessário dopá-lo ou aplicar em sua superfície uma camada de metal. No caso da metalização, a simulação deve levar em consideração as diferentes propriedades materiais para as diferentes camadas. Nos exemplos apresentados neste trabalho, a microviga é suposta como sendo condutora e constituída de apenas um material com propriedades equivalentes às do silício. Uma estrutura com várias camadas poderia ser simulada discretizando-se o domínio mecânico com uma malha para cada camada, com as propriedades materiais específicas de cada região.

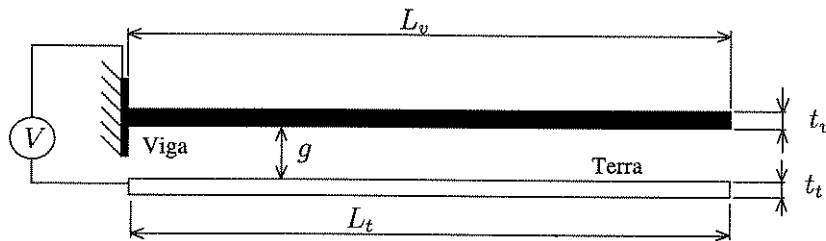


Figura 6.1: Microviga de silício usada na análise estática.

Como os domínios são modelados separadamente, duas malhas são necessárias. Na Figura 6.2, com relação ao sistema da Figura 6.1, a área em cor preta refere-se à viga e constitui o domínio discretizado com a malha mecânica. O campo elétrico ocupa o espaço em volta da viga, representado pela área em cor cinza, indicadora também da geometria da malha elétrica. Na Figura 6.3 são mostrados exemplos de malhas usadas na simulação do sistema acoplado.

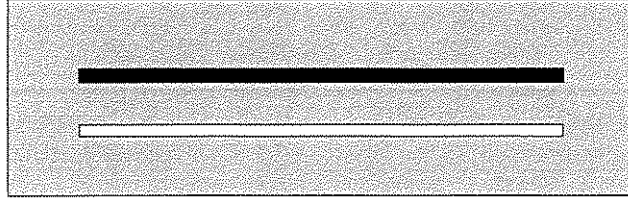


Figura 6.2: Áreas referentes aos domínios mecânico (preta) e elétrico (cinza).

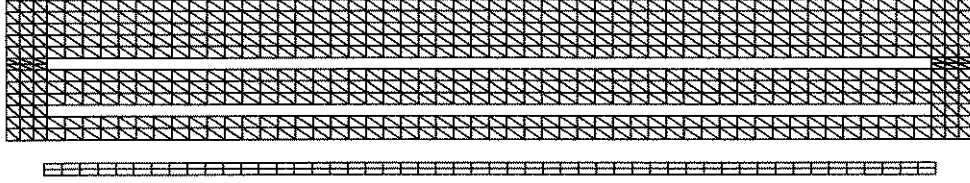


Figura 6.3: Malhas elétrica (superior) e malha mecânica (inferior).

O fato do domínio elétrico ser ilimitado requer uma verificação da influência da extensão da malha elétrica nos resultados das simulações. Com esse propósito, quatro configurações diferentes de malha elétrica foram analisadas. Na Tabela 6.1 são indicadas as dimensões para cada caso. Os parâmetros h_s , h_b , l_e e l_d são indicados na Figura 6.4. Nota-se neste caso que o refinamento na região de interação eletromecânica, isto é, em torno da viga e do terra, foi mantido constante para não influir nos resultados.

Tabela 6.1: Configurações de malhas elétricas.

Parâmetro	Malha 1	Malha 2	Malha 3	Malha 4
h_s	20	10	40	80
h_b	8	4	16	32
$l_e = l_d$	14	7	28	56

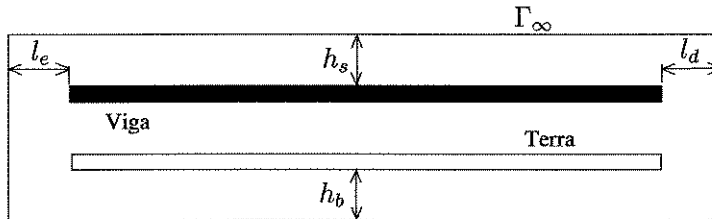


Figura 6.4: Parâmetros geométricos da malha elétrica.

As simulações foram realizadas com potencial elétrico tipo função degrau aplicado à viga variando entre 0V e 100V. No limite externo, as condições impostas foram $\partial V/\partial n = 0$ e $V = 0$. As distribuições de potencial para as malhas da Tabela 6.1 considerando uma voltagem aplicada de 80V e $V = 0$ no contorno externo são apresentadas nas Figuras 6.5, 6.6, 6.7 e 6.8. Nas Figuras 6.9, 6.10, 6.11 e 6.12 tem-se o caso onde $\partial V/\partial n = 0$ no contorno externo.

A Equação (3.8), $\mathbf{E} = -\nabla V$, indica que o campo elétrico em um meio é dado pelo gradiente do potencial elétrico escalar. Assim, observa-se que a condição de contorno $\partial V/\partial n = 0$ implica em um valor de $\mathbf{E}$ igual a zero no limite externo da malha elétrica, situação ideal encontrada na condição de radiação para meios infinitos. Por outro lado, a imposição de $V = 0$ indica que a fronteira foi isolada, o que está em desacordo com a hipótese de meio infinito. Cabe salientar, que em alguns tipos de capacitores, usa-se a configuração de carcaça aterrada. Neste caso, a condição de potencial elétrico nulo deve ser usada.

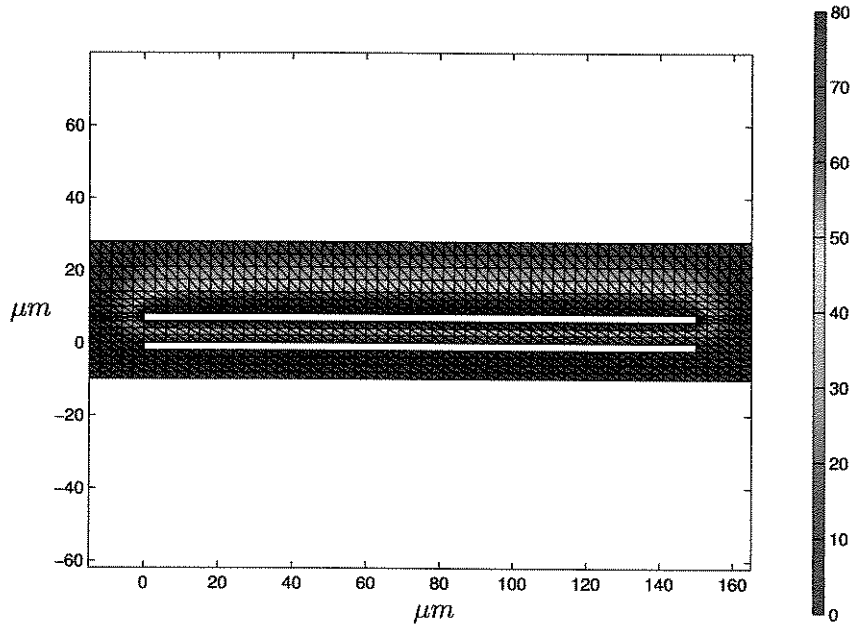


Figura 6.5: Potencial elétrico para *Malha 1* com $V = 0$ no contorno exterior.

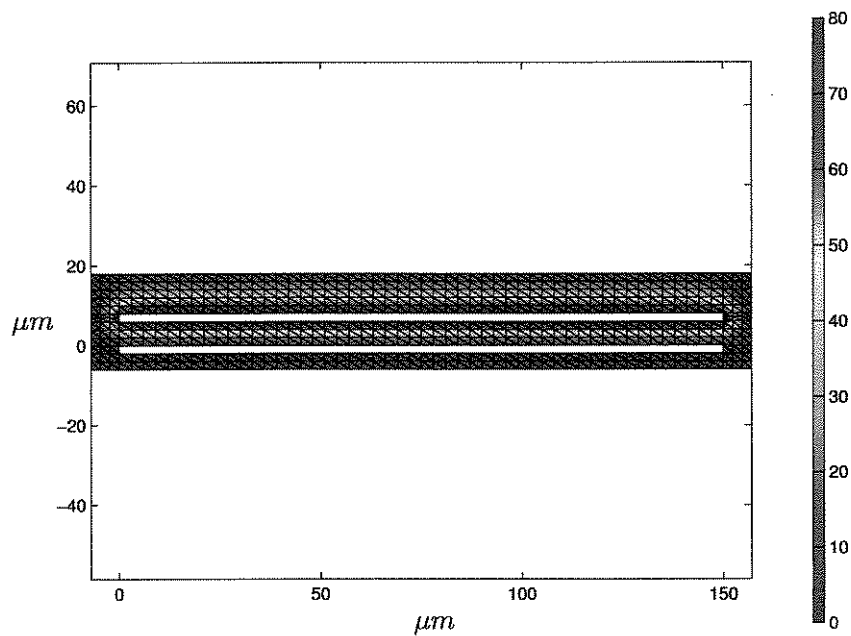


Figura 6.6: Potencial elétrico para *Malha 2* com $V = 0$ no contorno exterior.

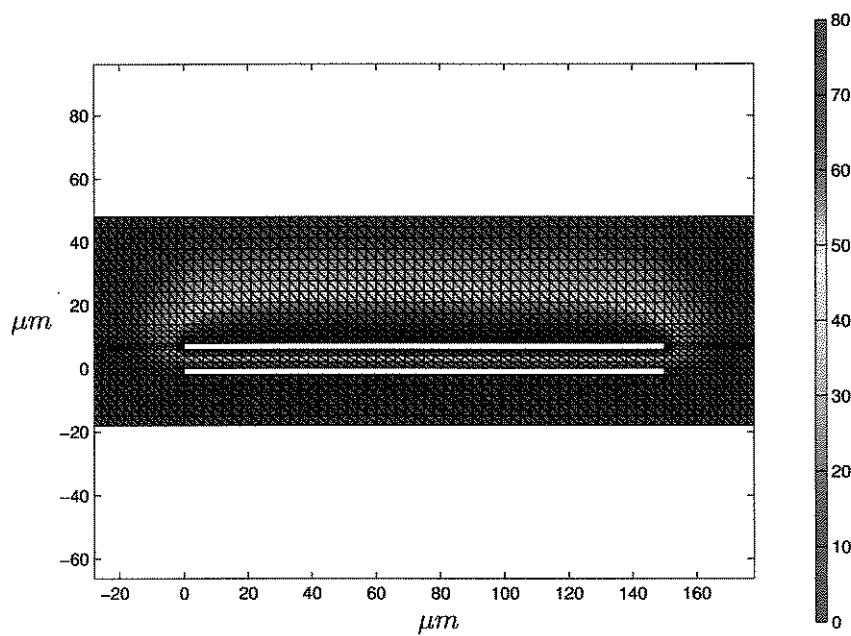


Figura 6.7: Potencial elétrico para *Malha 3* com $V = 0$ no contorno exterior.

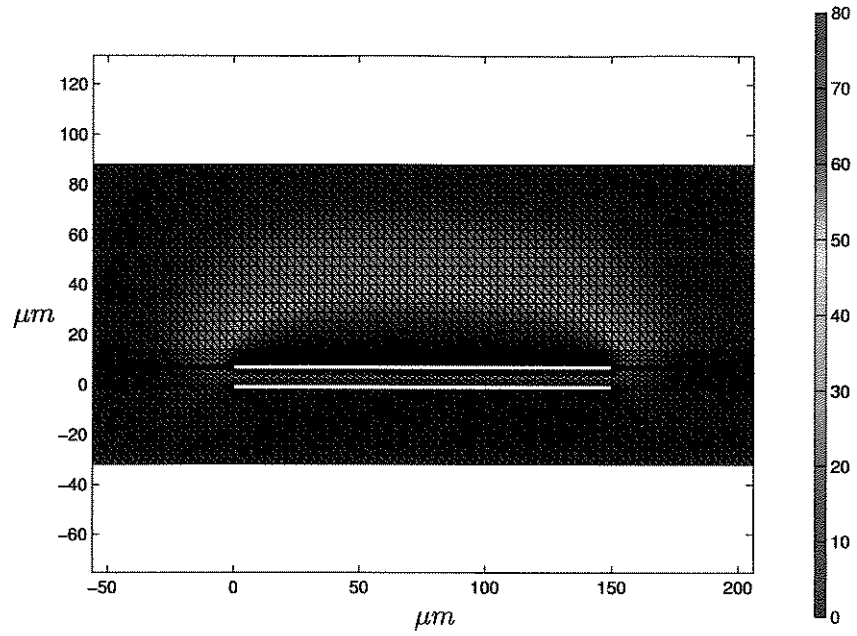


Figura 6.8: Potencial elétrico para *Malha 4* com $V = 0$ no contorno exterior.

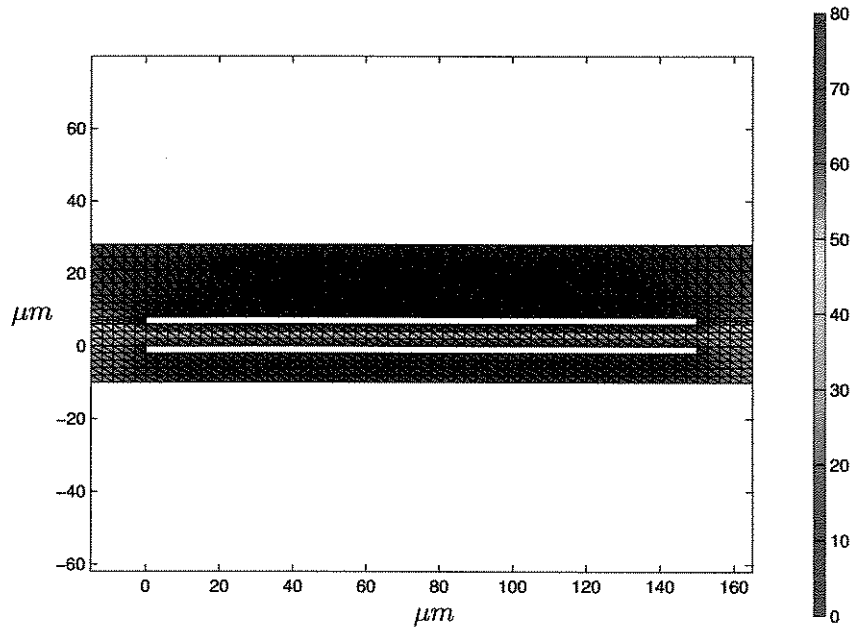


Figura 6.9: Potencial elétrico para *Malha 1* com $\partial V/\partial n = 0$ no contorno exterior.

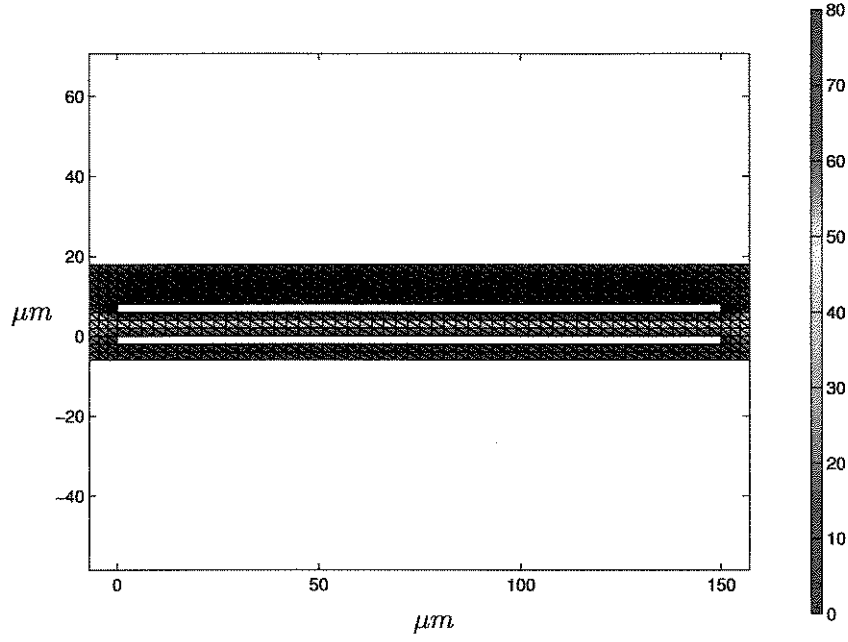


Figura 6.10: Potencial elétrico para *Malha 2* com $\partial V/\partial n = 0$ no contorno exterior.

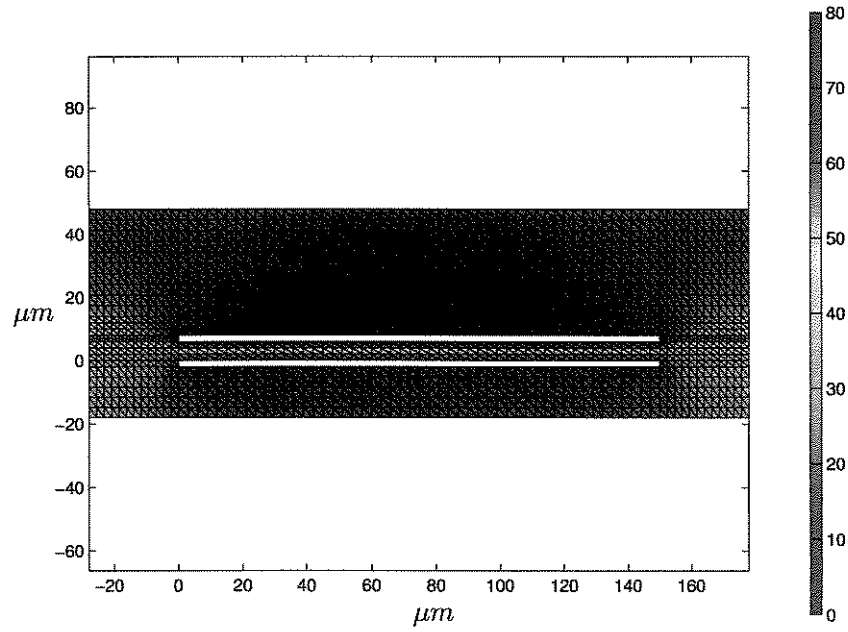


Figura 6.11: Potencial elétrico para *Malha 3* com $\partial V/\partial n = 0$ no contorno exterior.

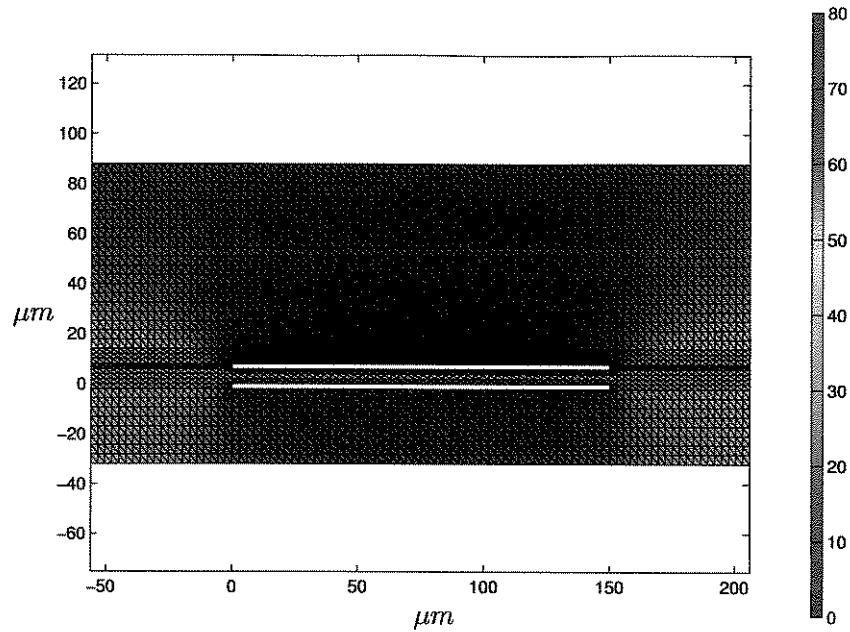


Figura 6.12: Potencial elétrico para *Malha 4* com $\partial V/\partial n = 0$ no contorno exterior.

Os resultados de deslocamentos para as simulações com $V = 0$ e $\partial V/\partial n = 0$ no contorno exterior, com todas as configurações de malha elétrica usadas, são apresentados, respectivamente, nas Tabelas 6.2 e 6.3. O deslocamento u_y refere-se ao máximo da estrutura na direção y e ocorre na extremidade livre da microviga.

Tabela 6.2: Deslocamento máximo com $V = 0$ no contorno exterior.

	$u_y (\mu m)$			
Volts	<i>Malha 1</i>	<i>Malha 2</i>	<i>Malha 3</i>	<i>Malha 4</i>
1	0,000	0,000	0,000	0,000
10	-0,007	-0,005	-0,008	-0,008
20	-0,028	-0,020	-0,030	-0,031
40	-0,116	-0,084	-0,124	-0,126
60	-0,272	-0,199	-0,291	-0,295
80	-0,517	-0,381	-0,553	-0,561
100	-0,902	-0,670	-0,966	-0,978

Tabela 6.3: Deslocamento máximo com $\partial V/\partial n = 0$ no contorno exterior.

Volts	$u_y(\mu m)$			
	<i>Malha 1</i>	<i>Malha 2</i>	<i>Malha 3</i>	<i>Malha 4</i>
1	0,000	0,000	0,000	0,000
10	-0,008	-0,008	-0,008	-0,008
20	-0,031	-0,031	-0,031	-0,031
40	-0,127	-0,127	-0,127	-0,127
60	-0,296	-0,297	-0,296	-0,296
80	-0,562	-0,563	-0,563	-0,562
100	-0,978	-0,981	-0,981	-0,979

Os valores de deslocamentos normalizados para as duas condições de contorno e diversas malhas de campo elétrico podem ser vistos nas Figuras 6.13 e 6.14. Nota-se que ambos os gráficos apontam a convergência da resposta para o mesmo valor, e verifica-se que nos casos onde a condição $\partial V/\partial n = 0$ é imposta ao limite exterior, este valor é atingido também com as malhas de menor dimensão. Pode-se concluir então que o método dos elementos finitos fornece bons resultados para o problema de acoplamento eletromecânico mesmo com malhas elétricas de extensão reduzida, desde que a condição de contorno imposta à fronteira exterior seja $\partial V/\partial n = 0$. Conforme esperado, esta condição reproduz melhor a hipótese de meio infinito. Todavia, existe uma aproximação em sua aplicação uma vez que o campo elétrico nulo na fronteira externa, ocasionado pela imposição de $\partial V/\partial n = 0$, a rigor ocorreria em pontos mais distantes da região condutor-terra. O uso de elementos infinitos, a técnica de elementos de contorno ou ainda o Método Dirichlet-to-Neumann são alternativas para solução deste problema (Givoli, 1992).

Para todos os outros exemplos presentes no trabalho, é adotada a proporção dimensão malha elétrica-dimensão condutor semelhante à empregada nas simulações com *Malha 1* e *Malha 2*. Também, a condição de contorno no limite externo é sempre $\partial V/\partial n = 0$.

A possibilidade de uso de malhas elétricas relativamente pequenas é importante porque o esforço computacional exigido nas análises multi-físicas é bastante grande. Na Tabela 6.4 tem-se a porcentagem de tempo gasto nas simulações com as *Malha 1*, *Malha 2* e *Malha 3* com relação ao tempo gasto com a *Malha 4*. Verifica-se um elevado aumento do tempo computacional à medida em que cresce a região do campo elétrico discretizada. Com *Malha*

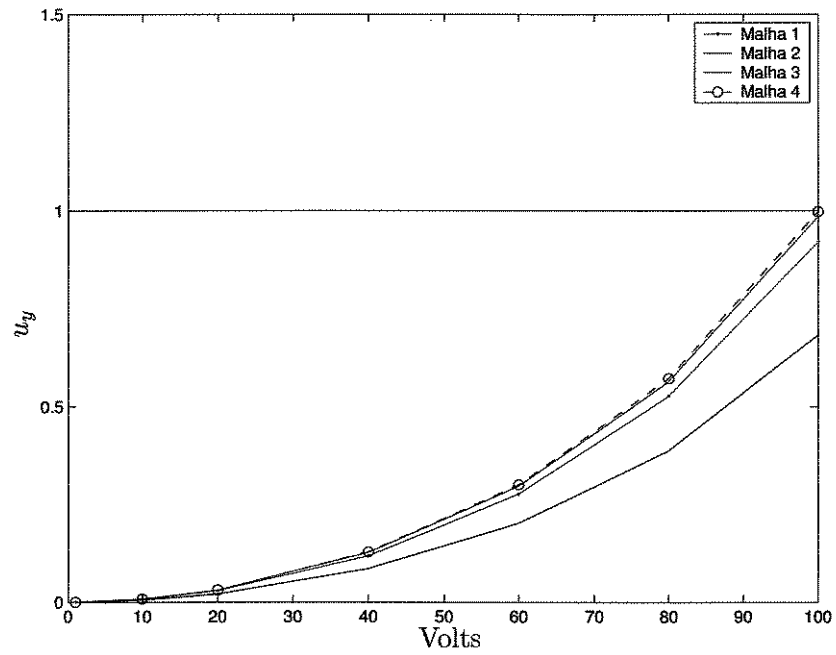


Figura 6.13: Deslocamento normalizado para $V = 0$ no contorno exterior.

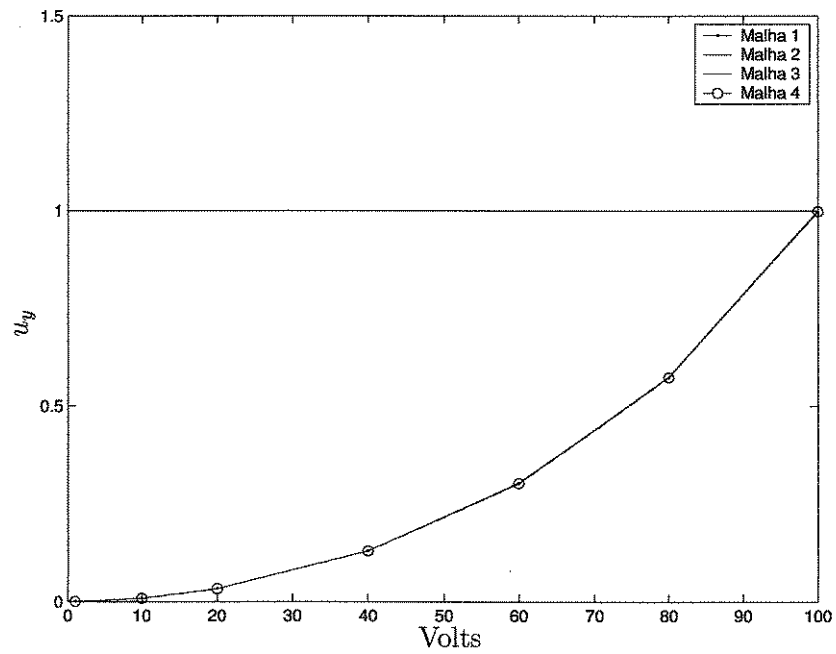


Figura 6.14: Deslocamento normalizado para $\partial V / \partial n = 0$ no contorno exterior.

Tabela 6.4: Tempo computacional das simulações com as diversas malhas elétricas.

Volts	Tempo(%)			
	<i>Malha 1</i>	<i>Malha 2</i>	<i>Malha 3</i>	<i>Malha 4</i>
1	5,2	2,6	18,3	100
10	6,0	2,6	17,9	100
20	4,8	1,8	16,9	100
40	5,4	2,4	16,7	100
60	5,4	2,4	17,0	100
80	4,1	1,8	16,1	100
100	4,2	1,9	16,0	100

1 e *Malha 2*, além dos bons resultados de deslocamento, o tempo não passou de 6% do dispendido pela *Malha 4*. O número de iterações em cada simulação variou entre 2 e 6.

Testes foram realizados para verificar a influência da malha mecânica nos resultados. Foram usados um, dois e três elementos na espessura da viga e cinquenta, cem e cento e cinquenta ao longo da mesma. A malha elétrica foi mantida constante. Calculando a média dos resultados de deslocamento e comparando cada solução com este valor foi traçado o gráfico mostrado na Figura 6.15. No eixo das abscissas tem-se o número de elementos no comprimento da viga. A maior parte das respostas foi idêntica e apenas um ponto, no caso de um elemento na espessura não coincidiu com os demais. Com essas simulações, constatou-se que uma malha estrutural com número de elementos a partir de dois e cinquenta na espessura e ao longo da viga, respectivamente, é suficiente para se ter bons resultados.

Outro teste foi efetuado com a malha mecânica fixa e variando o número de elementos na vertical entre a viga e o terra. Neste caso, a partir de três elementos na vertical os resultados passaram a ter o mesmo valor. Esse comportamento pode ser verificado na Figura 6.16. Na ordenada do gráfico, o erro considerado é a diferença percentual entre os vários resultados e o valor obtido com a malha mais refinada.

A condição de parada para o algoritmo iterativo foi estipulada em termos da variação de deslocamento Δu entre uma iteração e a subsequente. O programa considera que as respostas convergiram quando $\Delta u \leq 0,5\%$. Este valor foi escolhido com base em testes que indicaram pequena alteração da resposta fazendo $\Delta u < 0,5\%$. Na Figura 6.17 é traçado um gráfico com o deslocamento máximo para diferentes valores de Δu e considerando voltagens

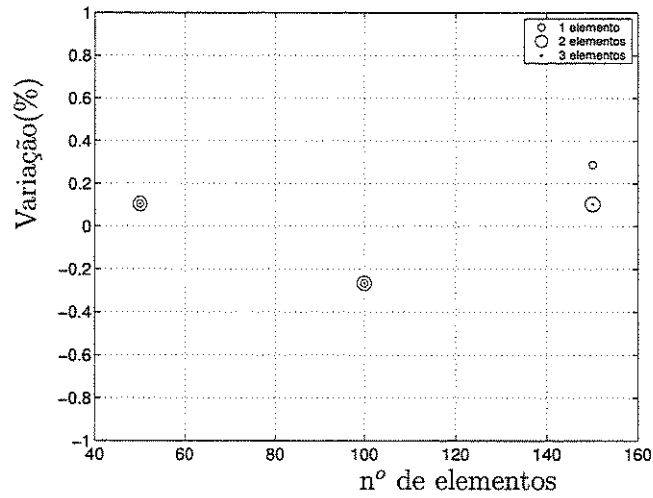


Figura 6.15: Variação nos resultados com o refinamento da malha estrutural

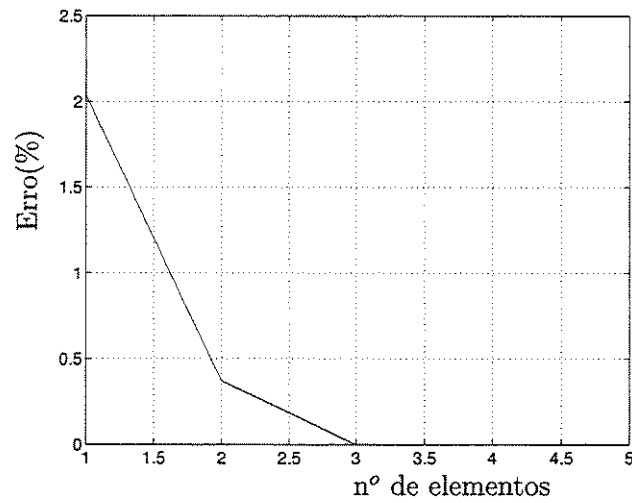


Figura 6.16: Erro nos resultados com o refinamento da malha elétrica

aplicadas de 60V e 80V. Constata-se que os resultados não se alteram com a redução de Δu desde 0,5% até valores muito pequenos. A diferença no deslocamento máximo para $\Delta u = 0,5\%$ e $\Delta u = 1.10^{-6}\%$ foi insignificante e não passou de 0,03%. Nos casos analisados, as respostas também não indicaram oscilação em torno do ponto de equilíbrio após o alcance da condição de parada.

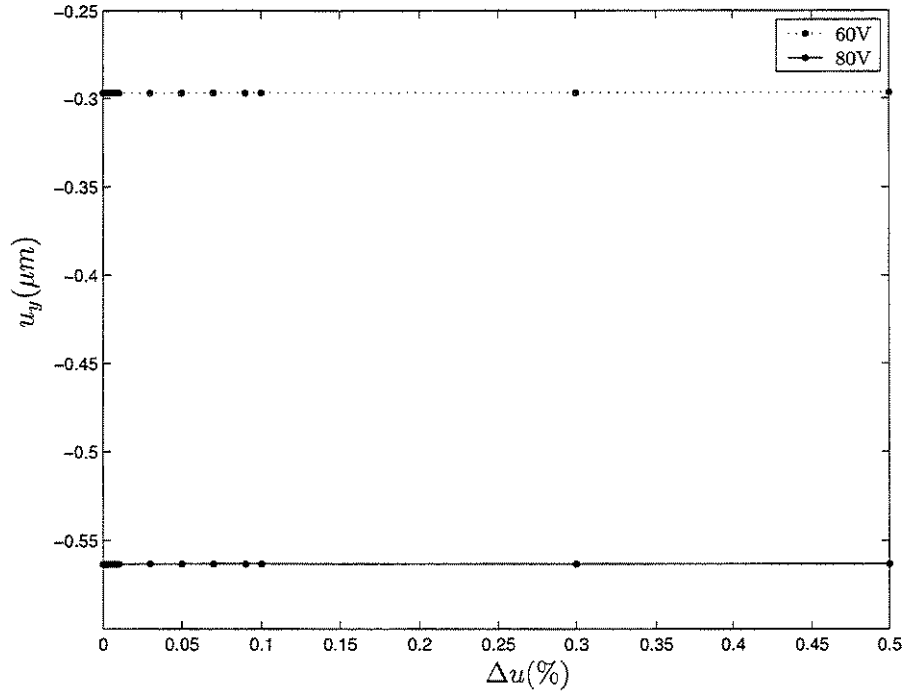


Figura 6.17: Deslocamento máximo versus condição de parada.

Conforme discutido na Seção 4.3, a simulação do acoplamento eletromecânico exige a constante atualização do domínio elétrico. Para atender a esta necessidade foi implementado um esquema onde os nós elétricos na interface com o domínio mecânico são movidos de acordo com os deslocamentos estruturais e em seguida, para os outros nós da malha elétrica, é aplicado o algoritmo de realocação de nós.

Em casos onde os deslocamentos são pequenos com relação ao tamanho dos elementos elétricos usados na discretização da região vizinha ao condutor, é possível executar a simulação apenas com a atualização dos nós elétricos na interface entre os dois domínios e sem o uso do algoritmo de realocação. Na Figura 6.18 tem-se um exemplo onde não há necessidade de aplicação deste algoritmo. Apenas uma parte da malha é mostrada. A malha elétrica original é a da Figura 6.3 e a voltagem aplicada é 80V. Observa-se que apenas os nós na interface com o condutor foram movidos. Os elementos finitos ainda possuem forma aceitável para o fornecimento de uma boa solução.

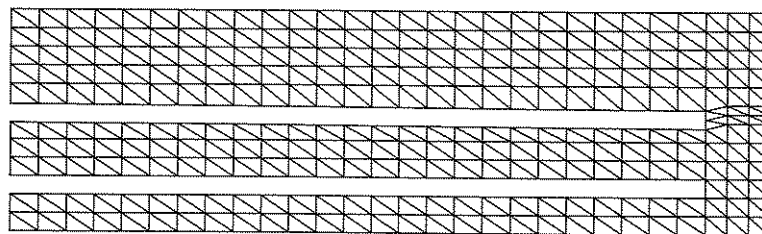


Figura 6.18: Malha atualizada sem realocação de nós. $V = 80V$.

Para malhas refinadas e quando existirem deslocamentos relativamente grandes em comparação com a dimensão dos elementos finitos próximos à região do condutor, a realocação de nós é indispensável. Considerando novamente a malha elétrica da Figura 6.3, para o caso definido na Tabela 6.1 como *Malha 1*, sendo agora o condutor submetido a 120v, sem a realocação de nós tem-se a situação indicada na Figura 6.19. Os elementos estão excessivamente deformados e caso dêem uma resposta (a matriz elementar pode se tornar singular), ela não será adequada. Na Figura 6.20 tem-se a malha com os nós da interface movidos e subsequente aplicação da adaptatividade por realocação de nós. O reposicionamento dos nós internos à malha torna os elementos mais uniformes e ainda pode-se obter uma resposta confiável. Para esse exemplo, a Equação (4.35) foi aplicada duas vezes a cada nó. O valor do coeficiente de distorção médio para os seis elementos na parte inferior da extremidade livre da viga na configuração inicial era 0,80. Com a deformação indicada na Figura 6.19, o valor passou a 0,15. A distorção da malha completa também era 0,80 e reduziu para 0,78. Com a realocação de nós, para os seis elementos da extremidade, o valor passou do 0,80 inicial para 0,70 final. O coeficiente para malha completa ficou em 0,80. Conforme explicado na Seção 4.3, é admitida uma pequena queda na distorção elementar com relação à original. Neste caso, foi permitido um aumento de até 20%, desde que a distorção global se mantivesse adequada.

Para finalizar a exposição sobre este **Exemplo 1**, nas Figuras 6.21 e 6.22 são apresentados mapas de cores com os deslocamentos na direção y e o campo elétrico da microviga no ponto de equilíbrio. O potencial elétrico aplicado é de 100V. Para melhor visualização, os deslocamentos foram ampliados em 15 vezes. Na Figura 6.23 o mapa de cores na extremidade livre da viga também é mostrado em escala maior.

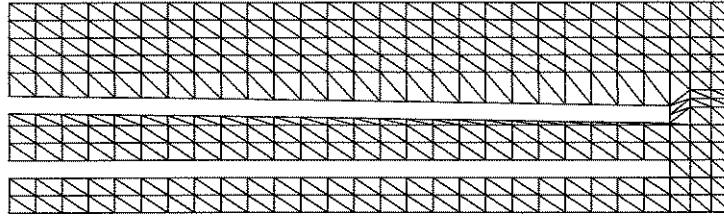


Figura 6.19: Malha atualizada sem realocação de nós. $V=120V$.

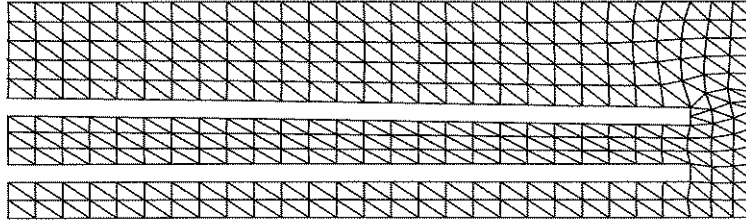


Figura 6.20: Malha atualizada com realocação de nós. $V=120V$.

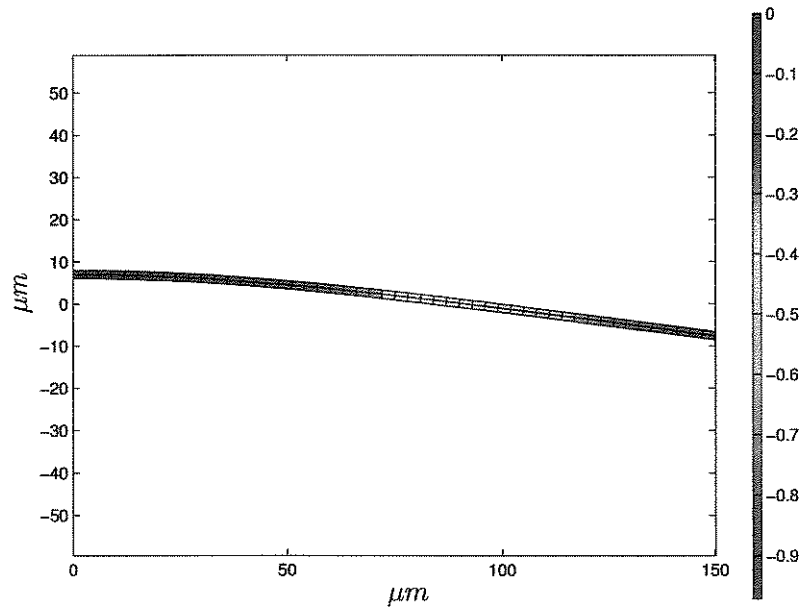


Figura 6.21: Configuração de deslocamentos para a microviga com o sistema em equilíbrio estático.

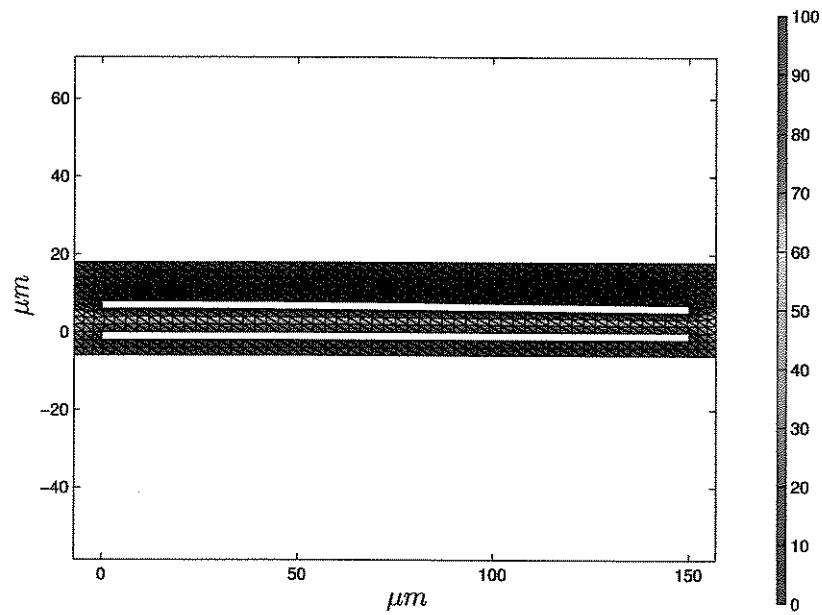


Figura 6.22: Configuração do campo elétrico com o sistema em equilíbrio estático.

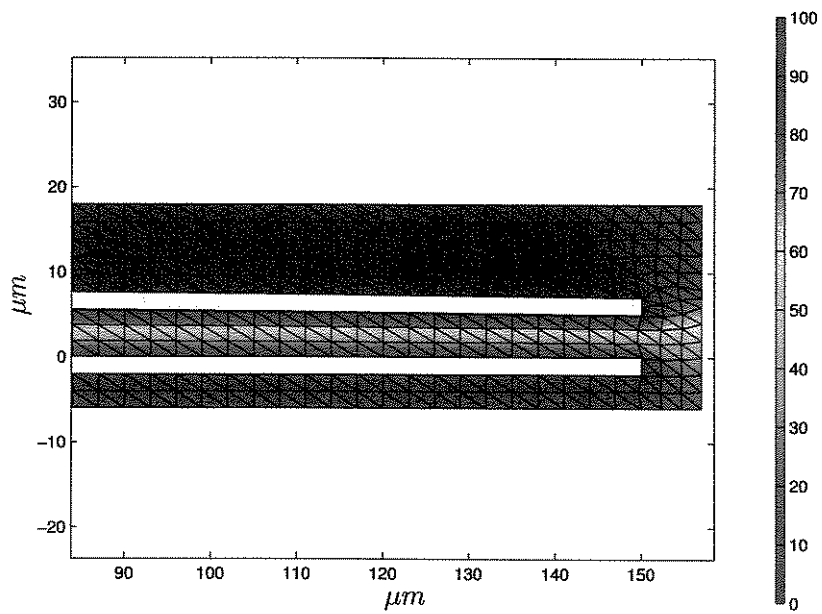


Figura 6.23: Detalhe do campo elétrico da Figura 6.22.

A fim de validar os resultados da estratégia de simulação estática deste trabalho, em (v. d. Poel Filho and Pavanello, 2003) os resultados obtidos com o MefLab++ para uma microviga engastada-livre similar a deste **Exemplo 1** foram comparados com os de uma estratégia de solução estática seqüencial acoplada do ANSYS®. Os dois códigos se mostraram em boa concordância. No Apêndice A encontra-se este artigo na íntegra.

6.2 Exemplo 2: Análise dinâmica de uma microviga engastada-livre pelo método de Newmark e estratégia de perturbação

Neste exemplo, os métodos de simulação dinâmica apresentados nas Seções 4.4.1 e 4.4.2 são aplicados a uma microviga engastada-livre. Os seguintes itens são avaliados:

- Método de Newmark clássico¹ versus método de Newmark adaptado;
- Resposta do método de Newmark com aplicação de voltagem tipo função degrau sem presença de amortecimento;
- Comportamento da amplitude do deslocamento com a variação de uma voltagem degrau aplicada usando o método de Newmark;
- Comportamento da frequência natural do sistema com a variação da voltagem degrau aplicada, usando Newmark e estratégia de perturbação; e
- Esforço computacional despendido nas simulações.

A microviga simulada é mostrada na Figura 6.24. Os parâmetros usados na simulação são: $L = 100\mu m$, $g = 4,0\mu m$, $t = 2,0\mu m$, $E = 150\text{GPa}$, $\varepsilon_o = 8,854.10^{-6}pF/\mu m$, $\nu = 0,23\mu m$ e $\rho_s = 2330kg/m^3$.

¹O método de Newmark clássico aqui citado refere-se ao método sem a atualização da malha elétrica, e conseqüentemente das pressões eletrostáticas, existente internamente em cada passo de tempo. O processo é realizado conforme o fluxograma da Figura 4.9, porém, sem a presença do laço referente à iteração interna.

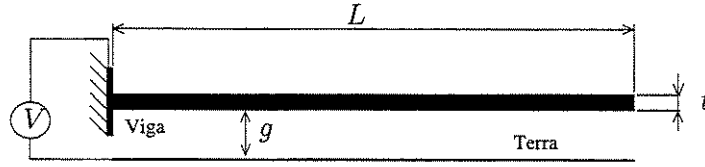


Figura 6.24: Microviga de silício usada na análise dinâmica.

A voltagem de *pull-in* para vigas engastadas-livres pode ser calculada por (Dufour and Sarraute, 1999):

$$V_{pull-in} = \frac{4}{9L^2} \sqrt{\frac{Et^3g^3}{(1+\nu^2)\varepsilon_0}} \quad (6.1)$$

Equação 6.1 fornece $V_{pull-in} = 127V$ para a viga da Figura 6.24. As estratégias de modelagem numérica deste trabalho visam a simulação do comportamento de microdispositivos em regime dinâmico de operação. Nessa situação, as microestruturas se movem em torno de uma posição de equilíbrio e a voltagem aplicada é geralmente mantida longe do valor de *pull-in*. Desse modo, as simulações foram executadas até o limite de 100V.

Nas Figuras 6.25 e 6.26, respostas de deslocamento no tempo de um nó na extremidade livre da microviga obtidas com o método de Newmark clássico e o adaptado para potenciais elétricos de 80V e 100V tipo função degrau são apresentadas. O passo de tempo para todas as simulações executadas com este **Exemplo 2** foi $\Delta t = 5,0 \cdot 10^{-8}s$. É perceptível o fato de que no método clássico há uma queda da amplitude de oscilação com o tempo. Como neste caso não há amortecimento inserido na formulação, é de se esperar que a amplitude não decaia com o passar do tempo. Aplicando o método adaptado tanto o período como a amplitude se mantêm estáveis. Averigua-se assim o caráter essencial da atualização da malha a cada passo tempo. As simulações que se seguem com o método de Newmark usam sempre sua forma adaptada.

O deslocamento para vários valores de voltagem degrau é mostrado na Figura 6.27. Nota-se um comportamento não-linear uma vez que as amplitudes da oscilação crescem quadraticamente com os potenciais e o período também varia. Como consequência tem-se que a frequência de vibração do sistema é dependente do potencial elétrico aplicado. A vibração

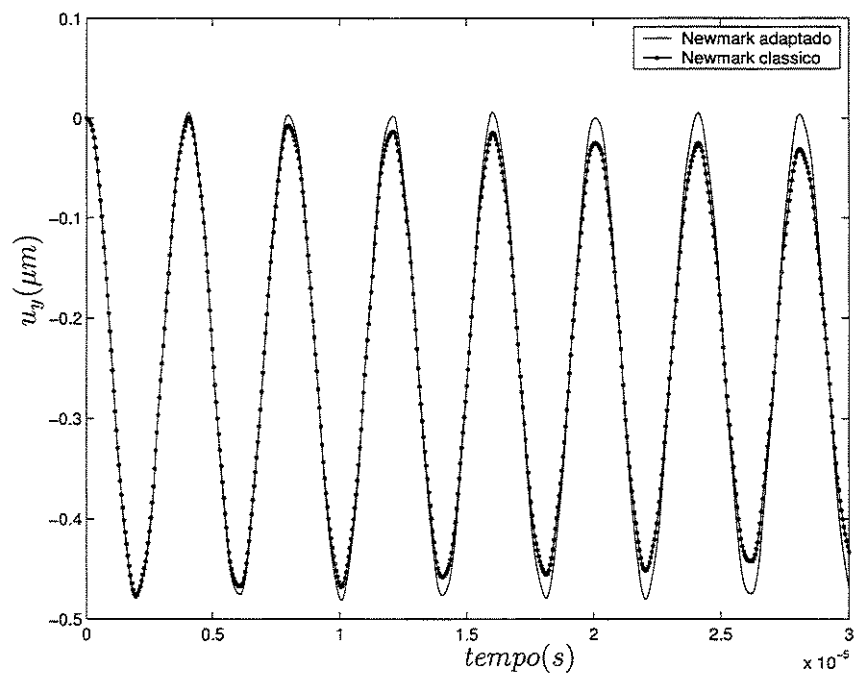


Figura 6.25: Deslocamento com métodos de Newmark clássico e adaptado. $V=80V$.

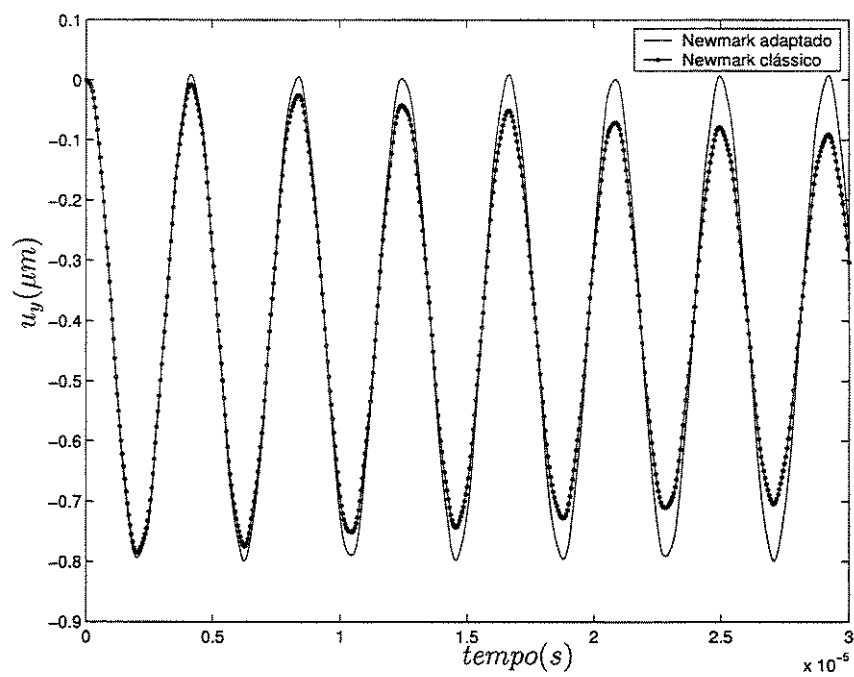


Figura 6.26: Deslocamento com métodos de Newmark clássico e adaptado. $V=100V$.

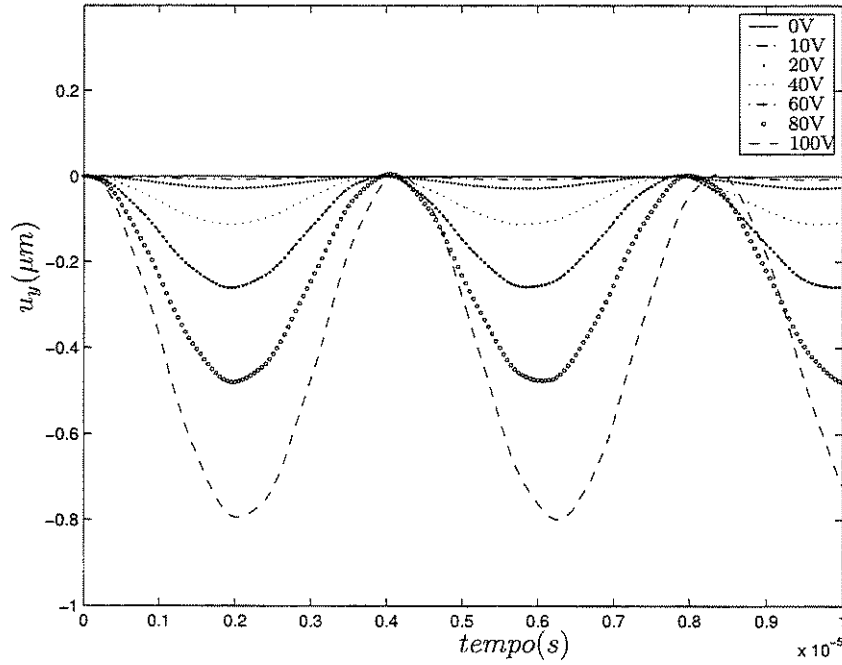


Figura 6.27: Deslocamento máximo com método de Newmark.

ocorre aproximadamente em torno da posição de equilíbrio estático. Essa característica pode ser vista pelos dados na Tabela 6.5. É indicada a posição de equilíbrio estático e o valor médio da resposta fornecida pelo Newmark.

Tabela 6.5: Valor médio da resposta do Newmark e o deslocamento no equilíbrio estático.

Volts	$u_y(\mu m)$	
	<i>Newmark</i>	<i>Estático</i>
1	$3,5 \cdot 10^{-5}$	$3,5 \cdot 10^{-5}$
10	-0,003	-0,003
20	-0,014	-0,014
40	-0,056	-0,055
60	-0,130	-0,128
80	-0,240	-0,236
100	-0,397	-0,390

Simulações com a estratégia de perturbação foram executadas com as mesmas configurações usadas com o método de Newmark. Na Tabela 6.6 estão mostrados os valores das frequências naturais acopladas computados com cada algoritmo em função do potencial

elétrico aplicado. No método de Newmark, a frequência é obtida verificando-se o tempo t_p equivalente a um período da resposta temporal e fazendo-se $1/t_p$. O método de perturbação fornece as frequências de forma direta. Pode-se constatar que os resultados dos dois métodos apresentam boa concordância.

Tabela 6.6: Frequências naturais para o **Exemplo 2**.

Volts	Frequência(kHz)	
	<i>Newmark</i>	<i>Perturbação</i>
1	260,1	260,0
10	259,9	259,8
20	259,3	259,4
40	257,2	257,5
60	253,9	254,1
80	248,7	248,7
100	240,0	240,1

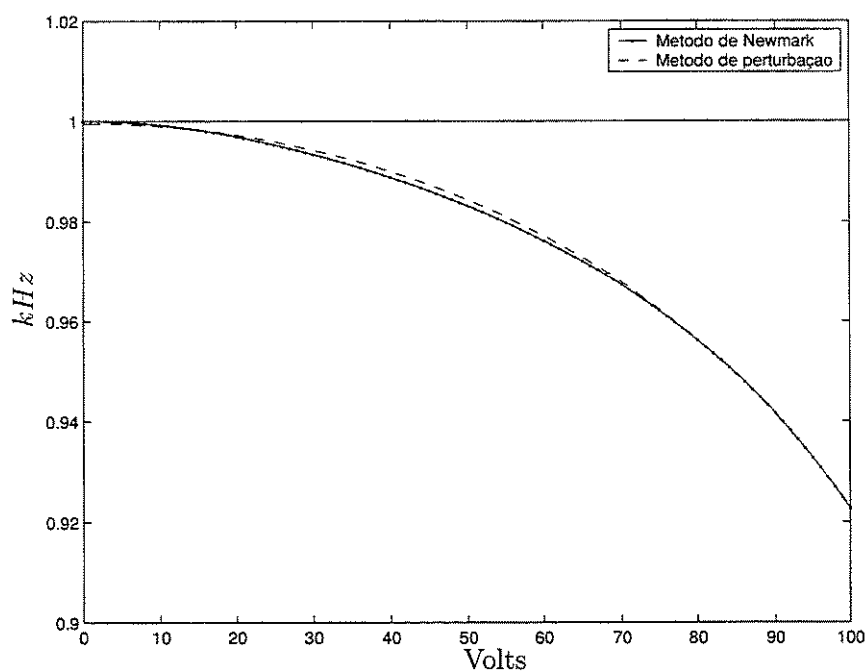


Figura 6.28: Frequência normalizada do **Exemplo 2** com a variação da voltagem.

Um gráfico com os resultados normalizados de frequência ajustados a um polinômio de grau 4 é mostrado na Figura 6.28. Nota-se novamente seu decaimento com o crescimento

do potencial degrau aplicado. A máxima diferença entre as frequências fornecidas pelos dois métodos foi de 0,14%. O decaimento da frequência do menor potencial até o maior é da ordem de 8%.

A estratégia de perturbação se mostrou econômica em termos de esforço computacional. O tempo de simulação gasto é praticamente igual ao de uma análise estática acoplada mais a solução de um problema de autovalor. Caso se procure o conhecimento da história dos parâmetros do sistema com o tempo, entretanto, deve-se recorrer ao método de Newmark.

Em (v. d. Poel Filho et al., 2004), este **Exemplo 2** é resolvido pelo MefLab++ e pelo ANSYS®. No ANSYS®, a análise dinâmica foi realizada com o elemento transdutor TRANS126 para modelar o domínio elétrico. Os resultados de frequência natural acoplada se mostraram em boa concordância. O artigo na íntegra está inserido no Apêndice B.

6.3 Exemplo 3: Análise dinâmica de uma microviga bi-engastada pelo método de Newmark e estratégia de perturbação

Na indústria de MEMS, diversos microdispositivos são baseados em estruturas tipo viga bi-engastada. Exemplos são sensores de pressão e relés micromecânicos. Nesta seção, os métodos de Newmark e de perturbação são aplicados a uma configuração deste tipo e busca-se avaliar os seguinte itens:

- Resposta do método de Newmark com aplicação de voltagem degrau por um curto intervalo de tempo;
- Resposta do método de Newmark com presença de amortecimento;
- Comportamento da amplitude do deslocamento com a variação de uma voltagem degrau aplicada usando Newmark;
- Comportamento da frequência natural do sistema com a variação da voltagem degrau aplicada, usando Newmark e estratégia de perturbação; e
- Esforço computacional despendido nas simulações.

A microviga simulada é de configuração semelhante à mostrada na Figura 6.24. Agora ela é bi-engastada e com os seguintes parâmetros: $L = 81\mu m$, $g = 2,2\mu m$, $t = 0,5\mu m$, $E = 130\text{GPa}$, $\varepsilon_o = 8,854.10^{-6}pF/\mu m$, $\nu = 0,23\mu m$ e $\rho_s = 2330\text{kg}/m^3$.

Inicialmente busca-se verificar o comportamento da resposta do sistema quando submetido a uma voltagem conforme indicado na Figura 6.29. O carregamento elétrico é retirado na metade do intervalo de simulação. Neste exemplo, a deflexão máxima da viga bi-engastada ocorre em seu ponto central. Os deslocamentos mostrados são para um nó situado no centro da viga. O passo de tempo para todas as simulações executadas foi $\Delta t = 2,5.10^{-8}s$. Espera-se que após se fazer a voltagem igual a zero, o sistema passe a oscilar em torno da posição inicial sem carregamento elétrico. Pelas Figuras 6.30 e 6.31 constata-se esse fato e verifica-se a eficácia do algoritmo de Newmark também para essa condição de entrada no sistema.

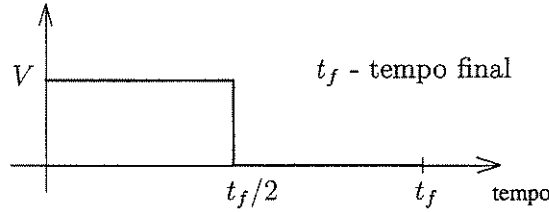


Figura 6.29: Função potencial elétrico aplicada à microviga bi-engastada.

A fim de se testar o método de Newmark considerando-se a presença de amortecimento, foi utilizado um modelo de amortecimento proporcional. Muitos problemas de vibração não podem ser tratados com esse tipo de modelo, porém, em geral, para sistemas levemente amortecidos, ele é satisfatório (Newland, 1989). Segundo (Weaver et al., 1990), para se ter essa situação, a razão de amortecimento modal ζ deve ser especificada de forma que $0 \leq \zeta \leq 0.2$ para todos os modos de vibração.

A matriz de amortecimento proporcional é dada por:

$$[C_M] = \kappa_1[K_M] + \kappa_2[M_M] \quad (6.2)$$

onde κ_1 e κ_2 são duas constantes.

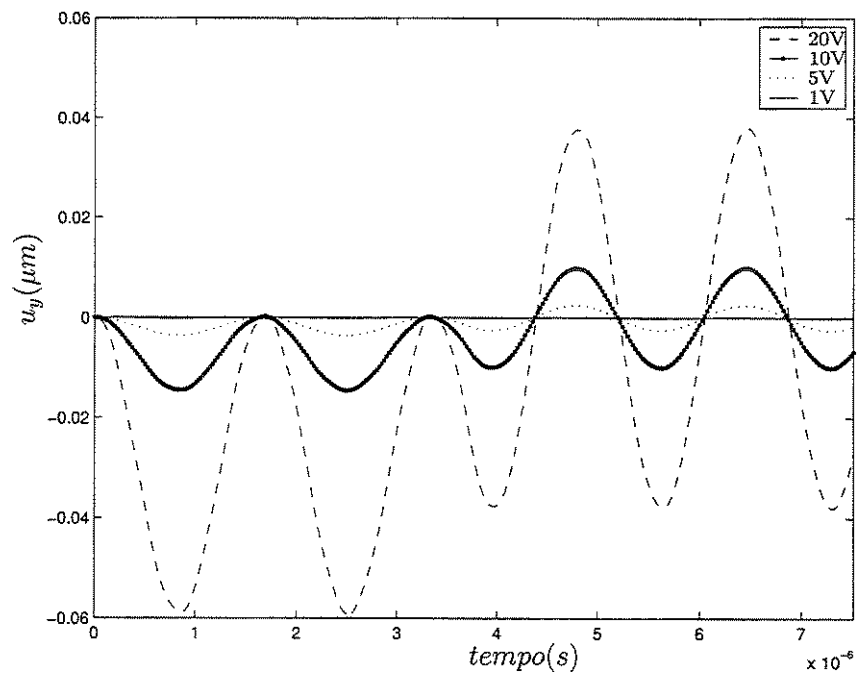


Figura 6.30: Resposta do Newmark para voltagens de 1V a 20V.

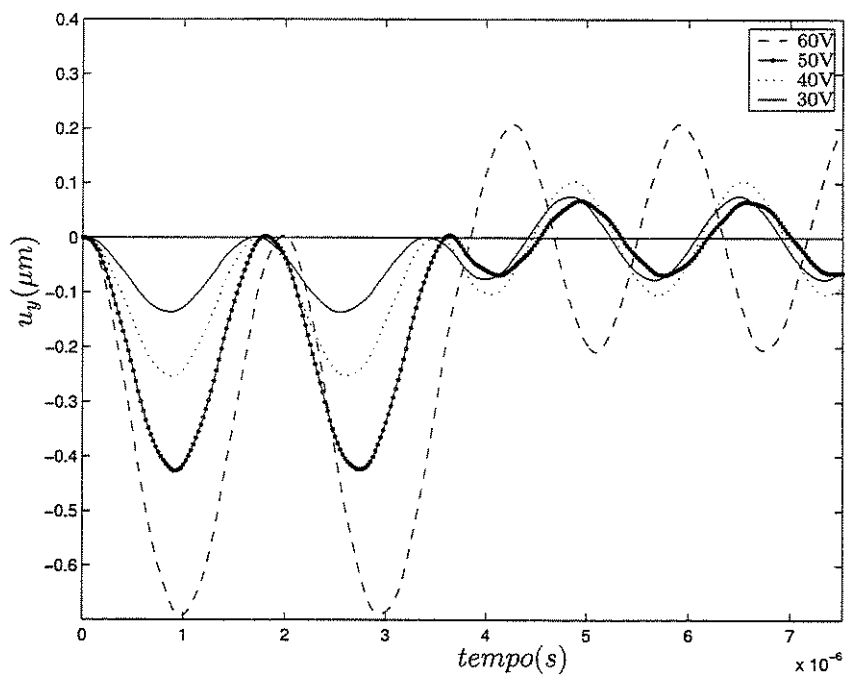


Figura 6.31: Resposta do Newmark para voltagens de 30V a 60V.

Relacionando a razão de amortecimento aos modos de vibração do sistema e às constantes κ_1 e κ_2 tem-se a seguinte equação (Weaver et al., 1990):

$$\zeta_i = \frac{\kappa_1 \omega_i}{2} + \frac{\kappa_2}{2\omega_i} \quad (6.3)$$

onde $i = 1, 2, \dots, n$ refere-se ao modo de vibração i .

Especificando-se dois valores de ζ para dois modos diferentes e usando a Equação (6.3), valores para κ_1 e κ_2 podem ser determinados. As duas primeiras frequências naturais não acopladas do sistema fornecidas pelo MefLab++ possuem valores $\omega_1 = 601,3kHz$ e $\omega_2 = 1657,9kHz$. Considerando essas duas frequências e adotando $\zeta_1 = \zeta_2 = 0,2$, as constantes de proporcionalidade ficam $\kappa_1 = 2,82 \cdot 10^{-8}$ e $\kappa_2 = 1,11 \cdot 10^6$. Esses foram os valores adotados para o cálculo do amortecimento proporcional inserido nos modelos simulados.

A inserção de amortecimento na formulação faz as vibrações diminuírem com o tempo e o sistema tende a se estabilizar. Para uma entrada degrau a estabilidade ocorre em torno da posição de equilíbrio estático do sistema. Caso se tenha uma função tipo a da Figura 6.29, a vibração tende à posição de equilíbrio estático mas, após a retirada da tensão, o deslocamento passa a ser em torno do estado inicial sem carga, estabilizando neste mesmo ponto. Esses comportamentos para $V=30V, 40V, 50V$ e $60V$ podem ser vistos nas Figuras 6.32 e 6.33.

As frequências naturais obtidas com os métodos de perturbação e de Newmark para diversas entradas tipo degrau estão na Tabela 6.7. A frequência normalizada é apresentada na Figura 6.34. A diferença máxima nas respostas não ultrapassou 1,1%. Embora as diferenças sejam maiores do que as encontradas com o **Exemplo 2**, os resultados se mostram próximos e em boa concordância. O decaimento da frequência natural do menor para o maior valor de potencial aplicado foi da ordem de 15%.

Em (v. d. Poel Filho et al., 2004), os resultados de frequência natural para a microviga deste exemplo são comparados com valores calculados com o ANSYS usando um elemento finito mecânico bi-linear para a estrutura e o elemento TRANS126 para o campo elétrico. Os métodos dos dois códigos se mostraram em bom acordo. Essa comparação pode ser vista no artigo presente no Apêndice B. No artigo, apenas uma perturbação ao sistema em equilíbrio estático foi dada. No presente exemplo, duas perturbações foram usadas.

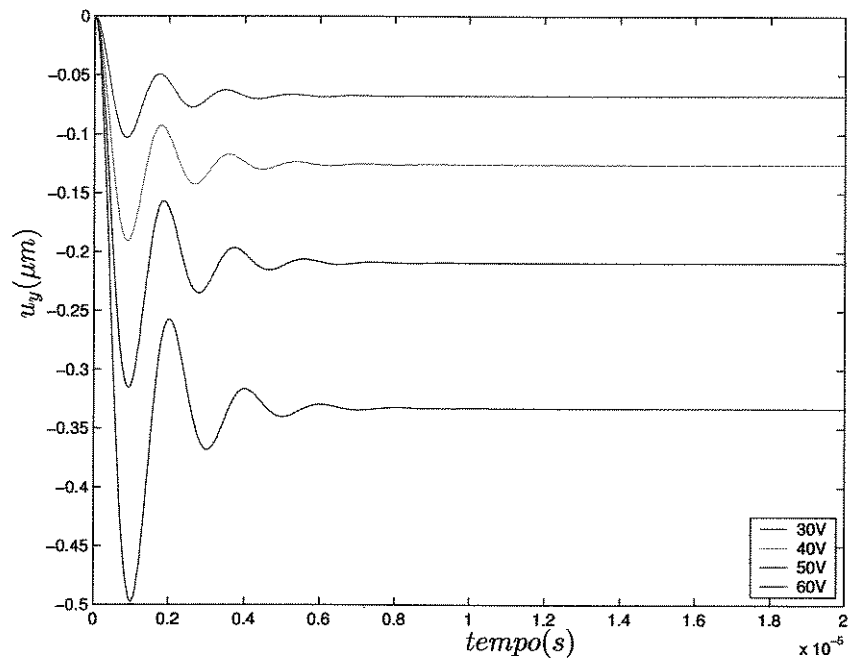


Figura 6.32: Resposta amortecida para entrada degrau.

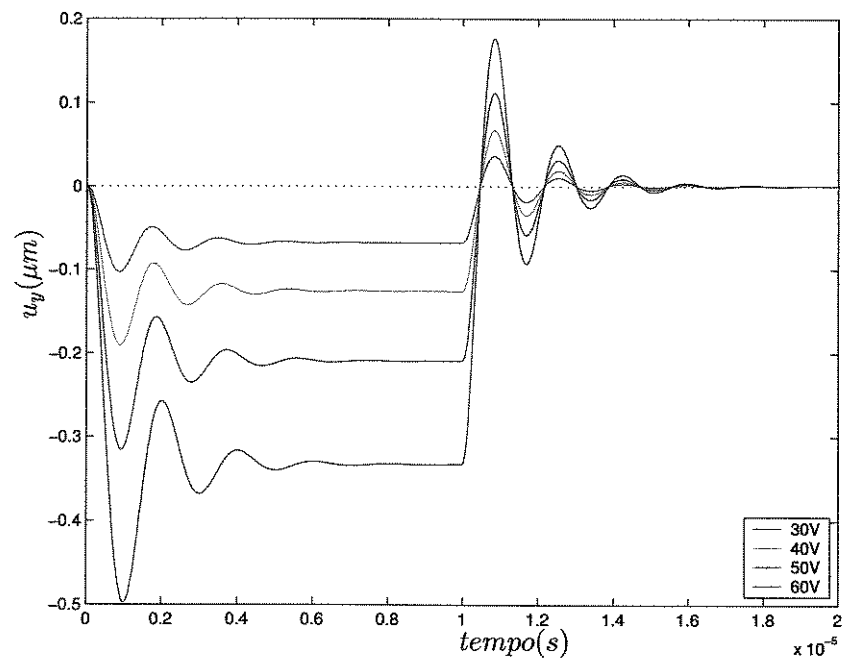


Figura 6.33: Resposta amortecida para entrada conforme Figura 6.29.

Tabela 6.7: Frequências naturais para o **Exemplo 3**.

Volts	Frequência(kHz)	
	<i>Newmark</i>	<i>Perturbação</i>
1	597,6	601,3
5	595,9	600,9
10	593,1	599,7
20	592,5	595,0
30	584,9	586,3
40	574,3	572,1
50	546,8	548,9
60	502,9	507,4

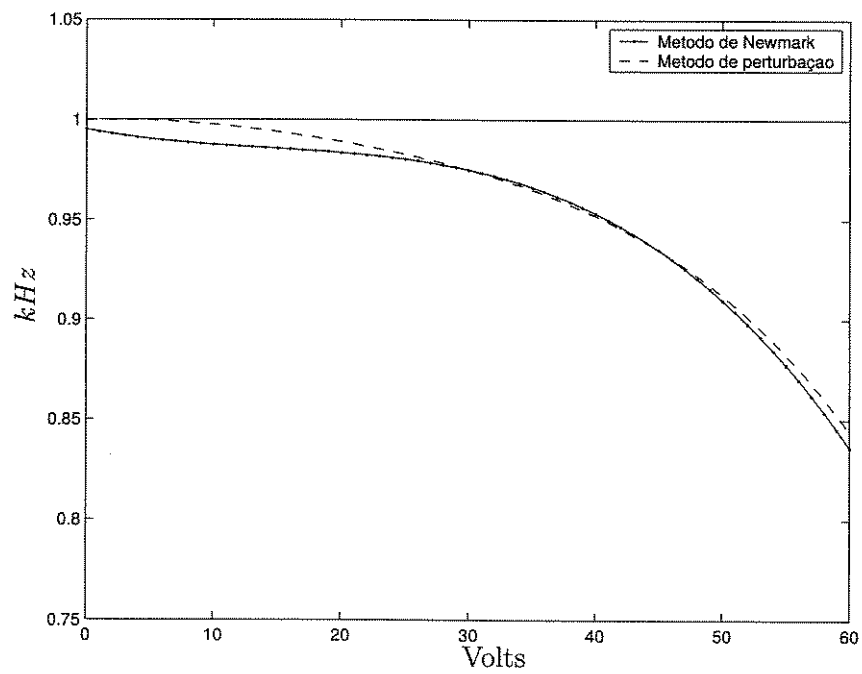


Figura 6.34: Frequência normalizada do **Exemplo 3** com a variação da voltagem.

6.4 Exemplo 4: Análise dinâmica de uma microviga engastada-livre com o modelo de ordem reduzida

O macromodelo desenvolvido na Seção 4.5.2 com base na equação da viga é aplicado no exemplo da Figura 6.24. Nesta seção, as simulações visam verificar:

- Precisão da resposta do macromodelo em relação aos modelos baseados em elementos finitos;
- Comportamento do macromodelo com configurações de carga diferentes daquela usada na sua construção; e
- Ganho em esforço computacional.

Antes de apresentar os resultados, é exposta a forma com a qual os modos ortogonais próprios do sistema foram obtidos.

O passo inicial no processo é a montagem da matriz de dados $[U]$, Equação (4.80). Para isso, foi realizada uma simulação com elementos finitos usando o método de Newmark adaptado e um potencial elétrico de 100V tipo função degrau. Foram tomados deslocamentos na direção y em cem posições ao longo da viga e em cem instantes de tempo. A matriz $[U]$ é:

$$[U] = \begin{bmatrix} u_{y1}(t_1) & u_{y2}(t_1) & \dots & u_{y100}(t_1) \\ u_{y1}(t_2) & u_{y2}(t_2) & \dots & u_{y100}(t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{y1}(t_{100}) & u_{y2}(t_{100}) & \dots & u_{y100}(t_{100}) \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

A partir da matriz $[U]$, obteve-se a matriz $[Z]$ com os valores do campo médio ajustado, Equação (4.79). Pela Decomposição de Valor Singular (DVS) de $[Z]$, tem-se:

$$\text{DVS}([Z]) = [P][\Sigma][Q^T] \quad (6.5)$$

Os modos ortogonais são as colunas de $[Q]$. A carga elétrica tipo função degrau excita majoritariamente o primeiro modo e a maior parte da energia do sistema está nele contida. Pela relação dada na Equação (4.78) a energia dos modos pode ser avaliada. A Tabela 6.8 contém os valores para os seis primeiros. Nessa tabela, os valores mostrados são cumulativos,

ou seja, onde há *Modo 2*, a energia é referente ao primeiro e segundo modos, onde há *Modo 3*, tem-se a energia dos primeiro, segundo e terceiro modos, e assim por diante. Na Figura 6.35 os quatro primeiros modos estão indicados. Na abscissa, L indica a posição ao longo da microviga.

Na aproximação para a deflexão, Equação (4.84), um número de modos que contém pelo menos 99% da energia total deve ser usado.

Tabela 6.8: Energia dos modos ortogonais próprios.

	<i>Modo 1</i>	<i>Modo 2</i>	<i>Modo 3</i>	<i>Modo 4</i>	<i>Modo 5</i>	<i>Modo 6</i>
Energia	99.260	99.946	99.989	99.996	99.998	99.999

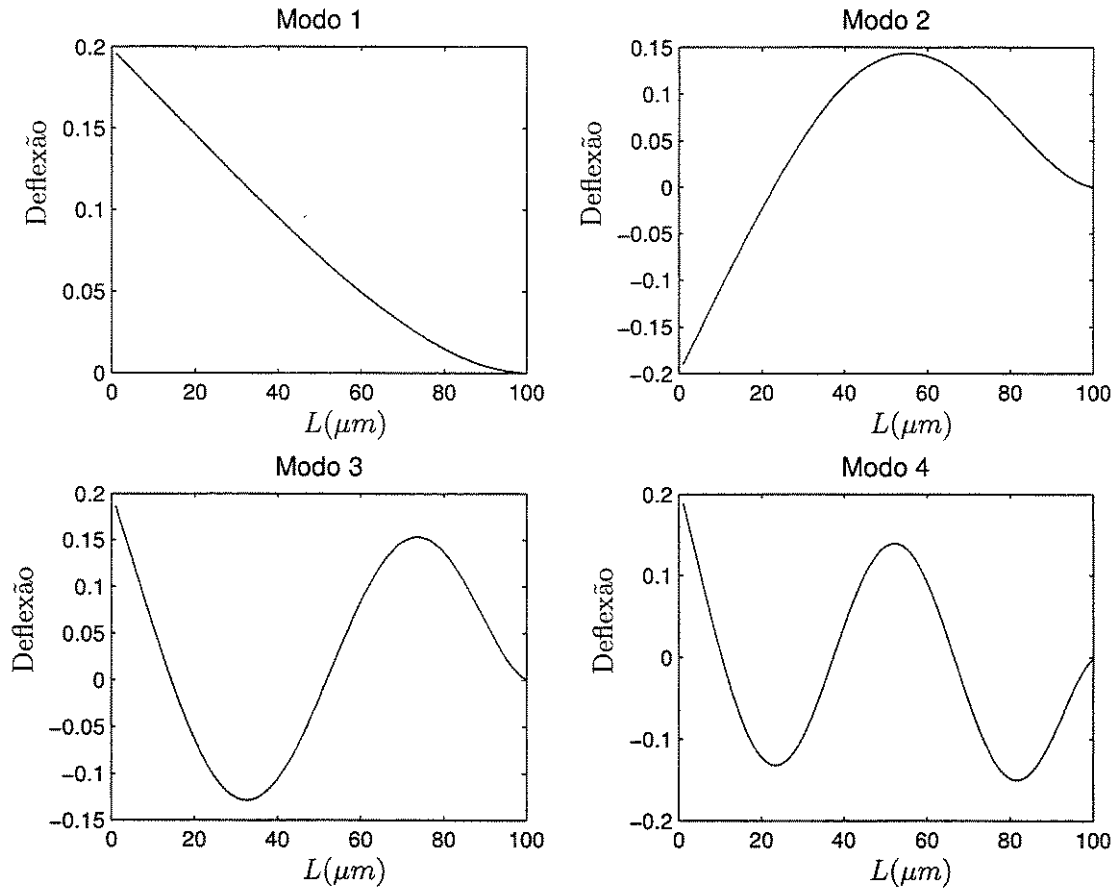


Figura 6.35: Modos ortogonais próprios.

Os primeiros testes com o macromodelo se referem a uma comparação de seus resultados com os de elementos finitos. Situações com entrada degrau variando entre 1V e 100V foram usadas. Na Figura 6.36 deflexões obtidas com o macromodelo nos casos de 60V, 80V e 100V são traçadas juntamente com as soluções por elementos finitos. A aproximação para a deflexão nessas simulações contém três MOPs. O modelo reduzido se mostra eficaz não apenas com 100V, condição usada para montagem de $[U]$, mas em todos os outros casos. Há uma boa concordância entre as curvas, com o modelo reduzido apresentando uma amplitude levemente maior nos vales mas casando perfeitamente no comprimento do período. Na Tabela 6.9 os deslocamentos médios com os dois modelos são mostrados.

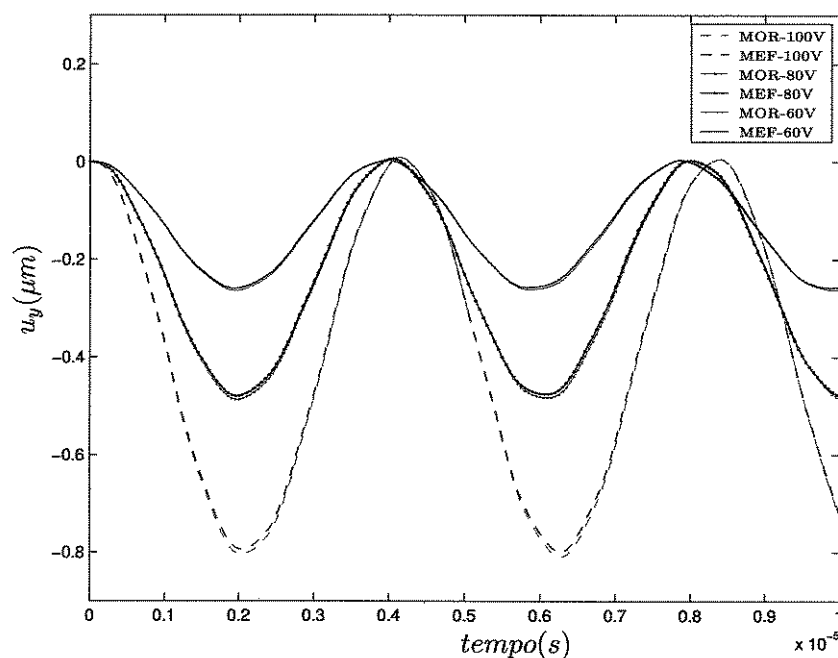


Figura 6.36: Deflexão com o MOR e usando o MEF.

Tabela 6.9: Deslocamentos médios para o MOR e o MEF.

	1V	10V	20V	40V	60V	80V	100V
MEF	$-3,5 \cdot 10^{-5}$	-0,003	-0,014	-0,056	-0,130	-0,240	-0,397
MOR	$-3,5 \cdot 10^{-5}$	-0,003	-0,014	-0,057	-0,132	-0,242	-0,402

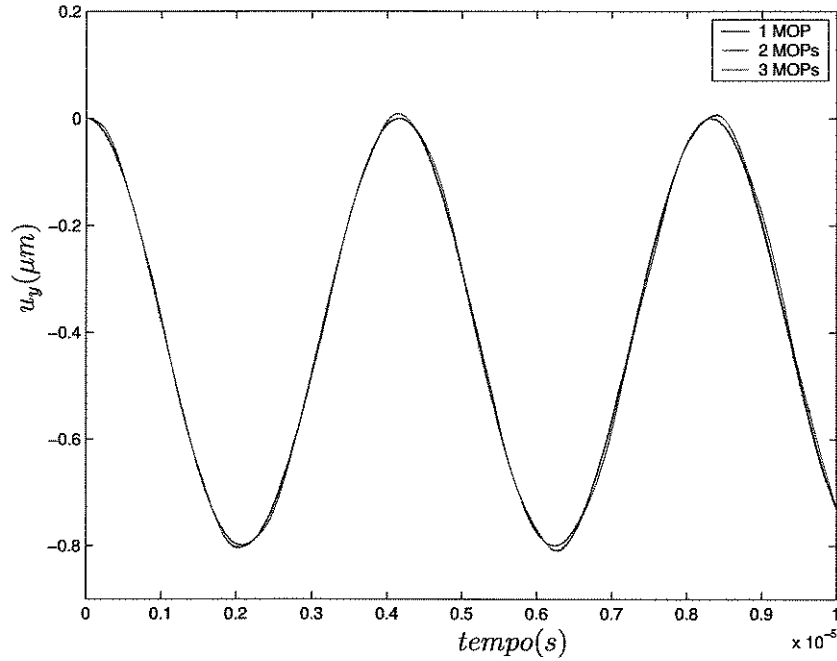


Figura 6.37: Deflexão da viga para o MOR com número variado de MOPs.

Algumas são as possibilidades para as diferenças entre as amplitudes das respostas. A primeira seria o uso de modelos teóricos diversos, isto é, viga de Euler e elasticidade. Também nesse sentido, o tratamento para a força elétrica não é o mesmo nos modelos completo e reduzido. Uma outra causa seria a forma de utilização dos modos ortogonais. Os MOPs fornecidos pela DVS são funções discretas da posição ao longo da viga. A fim de se evitar integração e derivação numérica de dados discretos na formulação do modelo reduzido, eles são ajustados a uma função contínua. Esse procedimento de ajuste pode ser fonte de erros, tanto pelo ajuste em si, como pela escolha da função.

Na figura 6.37 tem-se a deflexão na extremidade livre da microviga fornecida pelo macro-modelo construído com diferente número de modos. A curva obtida com um MOP se mostra um pouco separada enquanto as demais praticamente se sobrepõem. Confirma-se que para o presente caso, apenas poucos MOPs são necessários para se gerar um modelo reduzido com boa exatidão.

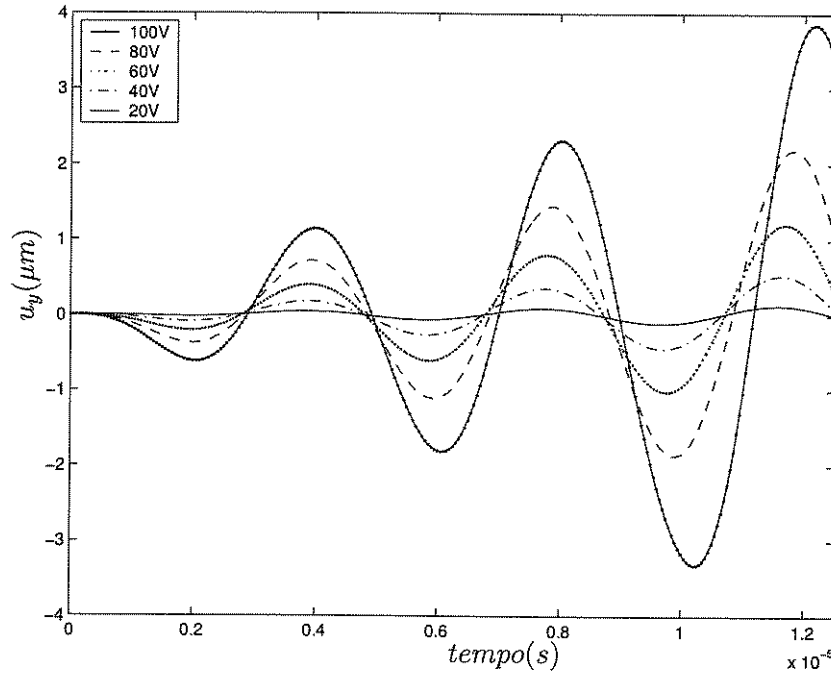


Figura 6.38: Resposta ao potencial elétrico com frequência igual à do primeiro modo de vibração. Macromodelo com três MOPS. Passo de tempo $\Delta t = 5,0 \cdot 10^{-8} s$.

Na Figura 6.38 tem-se respostas transientes para tensões senoidais com características de amplitude e frequência conforme mostrado na Tabela 6.6. Como era de se esperar, devido ao deslocamento da frequência com a tensão aplicada, tem-se uma tendência a ocorrer a ressonância em todos os casos, amplificando-se indefinidamente a amplitude da resposta do sistema. Observa-se ainda que a vibração passa a ser em torno da posição inicial ao invés da posição de equilíbrio.

O macromodelo foi usado ainda para se verificar o comportamento com sinais de excitação senoidal de frequências próximas às da segunda frequência natural de vibração do sistema. Os dados referentes à segunda frequência natural acoplada do sistema foram primeiro obtidos com o modelo de elementos finitos e usando a estratégia de perturbação. Esses resultados com o método de perturbação são mostrados na Tabela 6.10. Respostas do macromodelo a sinais de tensão senoidal com amplitudes iguais a 60V e 100V e frequências de excitação conforme a Tabela 6.10 são adotadas para a simulação da microviga, cujos resultados são traçados na Figura 6.39. A resposta apresentada indica um sinal composto pela soma de

Tabela 6.10: Frequências para o segundo modo de vibração do microsistema.

	1V	10V	20V	40V	60V	80V	100V
Frequência (kHz)	1624,8	1624,8	1624,7	1624,4	1624,0	1623,3	1622,5

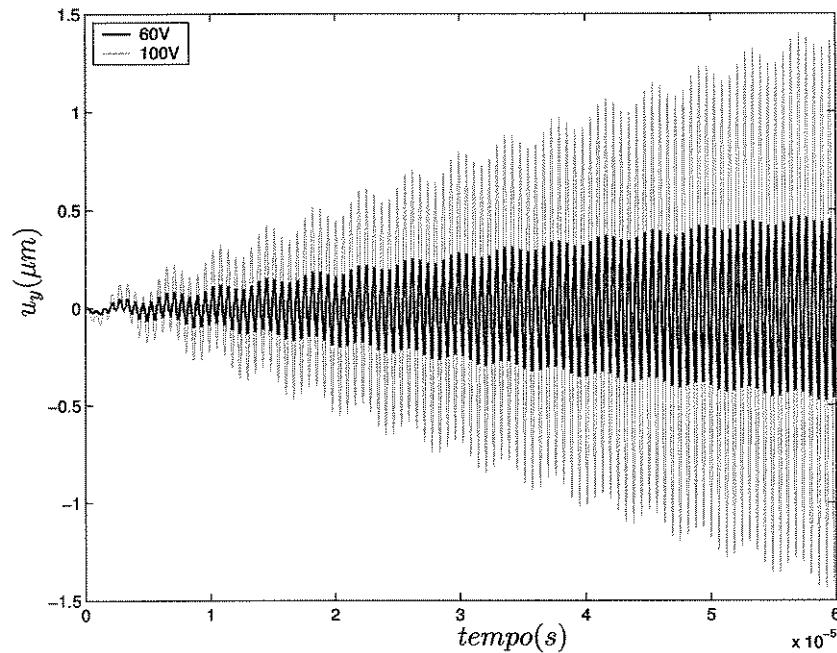


Figura 6.39: Resposta ao potencial elétrico com frequência igual à do segundo modo de vibração. Macromodelo com três MOPS. Passo de tempo $\Delta t = 1,0 \cdot 10^{-8} \text{ s}$.

duas curvas que oscilam com frequências diferentes, uma menor e outra maior, próximas, respectivamente, às primeira e segunda frequências naturais do sistema. Nota-se ainda uma tendência à ressonância em ambos os casos mostrados. O passo de tempo usado na simulação da resposta da Figura 6.39 é menor do que o da Figura 6.38 devido à presença de um valor mais alto de frequência.

O macromodelo foi testado para vários tipos de carregamento elétrico. Nos casos de voltagens tipo degrau, houve comparação com o MEF e os resultados apresentam boa concordância. O número de MOPs usados na aproximação para a deflexão da microviga foi variado e constatou-se que poucos deles são necessários para se ter uma resposta precisa. Outras simulações foram feitas e comportamentos de amplitude de deslocamento e vibração do sistema se mostraram coerentes.

O tempo computacional gasto pelo macromodelo é insignificante quando comparado com o modelo de elementos finitos. Por exemplo, para os resultados apresentados na Figura 6.36, o modelo de elementos finitos levou aproximadamente 700s para completar a simulação enquanto que o MOR precisou de apenas 10s. Esses valores indicam uma redução de cerca de setenta vezes no tempo de simulação do modelo completo para o reduzido. Embora para a construção do MOR seja requerida pelo menos uma simulação a nível físico, a economia de tempo proporcionada pelas rápidas análises em outras situações de carga é enorme. Dessa forma, várias topologias podem ser analisadas de forma bastante eficaz e como consequência direta tem-se a aceleração do projeto e desenvolvimento de microsistemas.

6.5 Avaliações e conclusões

Os métodos de simulação numérica propostos e implementados neste trabalho foram testados com estruturas típicas de microsistemas.

No **Exemplo 1** foi realizada a análise estática de uma microestrutura tipo viga engastada-livre. Foram estudados e avaliados itens como influência da extensão da malha elétrica, convergência do algoritmo particionado iterativo no MefLab++, estratégia de atualização da malha elétrica e campos de deslocamento e potencial elétrico no problema acoplado. Os resultados se apresentaram coerentes e os métodos se comprovaram eficazes.

Nos **Exemplos 2 e 3** foram usadas as metodologias de análise dinâmica, usando a técnica de perturbação, e transiente pelo método de Newmark adaptado. O comportamento característico de microsistemas eletromecânicos onde a frequência dos sistemas varia com o potencial elétrico aplicado foi verificado em ambos os exemplos. A resposta transiente foi obtida considerando diversas situações de carregamento elétrico. Os resultados de deslocamento e frequência dos dois algoritmos se mostraram coesos, indicando a validade dos códigos implementados.

Um macromodelo para realizar análises transientes de modo mais rápido que o modelo de elementos finitos foi implementado. Testes com ele foram realizados através do **Exemplo 4**. Os resultados do modelo reduzido apresentaram boa concordância com os de elementos finitos considerando diversas situações de carregamento elétrico. O tempo de simulação requerido

pelo MOR mostrou-se relativamente pequeno não ultrapassando 2% do despendido com o modelo completo de elementos finitos. Usando este macromodelo, o comportamento da microviga foi verificado para sinais de excitação com frequências próximas às frequências naturais sistema.

Pode-se afirmar que o código MefLab++ como ferramenta de análise multi-domínios, é aplicável para o estudo, compreensão e projeto de microsistemas eletromecânicos, tanto visando dispositivos de operação em regime estático como dinâmico. Além disso, os dados de simulações realizadas com o MefLab++ podem ser usados na construção de macromodelos.

Capítulo 7

Conclusão

7.1 Conclusões finais

As considerações e conclusões finais sobre o trabalho desenvolvido são apresentadas neste capítulo.

O trabalho iniciou-se com uma exposição geral sobre microsistemas e microtecnologias. Exemplos de importantes aplicações da área foram relatados e a relevância do tema foi destacada.

Uma revisão bibliográfica sobre o tema foi realizada. Foram discutidos itens como níveis de modelagem para microsistemas e classificações e tratamentos para problemas de campos acoplados. O estado da arte referente a técnicas de modelagem e redução de ordem direcionadas a microsistemas foi exposto.

Metodologias de análise estática e dinâmica para microsistemas eletromecânicos foram desenvolvidas, implementadas e testadas. A solução do problema estático foi obtida por meio de uma estratégia particionada iterativa onde os domínios são resolvidos separadamente pelo método dos elementos finitos. Os efeitos de acoplamento são conseguidos pela imposição de pressões eletrostáticas ao domínio mecânico e atualização da geometria do campo elétrico de acordo com os deslocamentos estruturais. Para a atualização da malha elétrica envolvida na análise, foi proposta uma técnica de realocação de nós com estimativas da distorção elementar e da malha globalmente. Foi mostrado que para o caso de elevados deslocamentos a aplicação dessa técnica é indispensável.

Ainda relativamente à malha elétrica, foram feitos estudos sobre a influência de sua ex-

tensão sem o uso de condições de contorno que levem em conta a característica de domínio ilimitado do campo elétrico. Constatou-se que fazendo-se o gradiente do potencial elétrico na direção normal igual a zero na fronteira externa da malha, pequenas dimensões desta são suficientes para a obtenção de bons resultados no caso de microsistemas eletromecânicos.

Para análise transiente foi proposto um método de Newmark adaptado baseado na modelagem dos domínios por elementos finitos. A adaptação refere-se ao fato de que a cada instante de tempo é realizada a atualização da malha elétrica de forma que as pressões eletrostáticas aplicadas ao domínio mecânico sejam obtidas considerando-se a geometria estrutural do passo corrente do intervalo de integração. O método mostrou-se eficiente para potencial elétrico aplicado de diferentes formas e com e sem amortecimento.

Uma estratégia de perturbação para determinação das frequências naturais acopladas em microsistemas eletromecânicos foi elaborada. O algoritmo é baseado no cálculo da rigidez eletrostática usando uma aproximação linear por diferenças finitas com forças e deslocamentos provenientes de posições do sistema perturbado a partir do seu estado de equilíbrio estático. Não havendo necessidade de determinação da história temporal dos graus de liberdade do sistema, por meio dessa estratégia o comportamento das frequências naturais em problemas acoplados pode ser determinado de forma direta.

Visando acelerar a análise transiente de microsistemas, um modelo de ordem reduzida baseado em dados de simulações por elementos finitos foi construído. Para os casos analisados, o macromodelo se mostrou muito eficaz, com tempos de simulação menores do que 2% dos requeridos com o modelo de elementos finitos, e apresentando resultados similares aos deste. Diversas situações de potencial elétrico foram testadas e as respostas obtidas foram sempre coerentes.

Adicionalmente, e com relação aos objetivos específicos traçados no Capítulo 1, as seguintes conclusões podem ser citadas:

- O fenômeno de acoplamento entre domínios em sistemas eletromecânicos foi estudado e compreendido;
- Elementos finitos mecânicos e elétricos, úteis à análise de cada campo individualmente e ao tratamento particionado de problemas acoplados, foram implementados;

- Algoritmos de simulação estática e dinâmica com procedimentos particulares para lidar com os efeitos de acoplamento foram propostos e implementados;
- Um modelo de ordem reduzida foi construído;
- Exemplos de estruturas típicas de dispositivos MEMS foram usados para testar os algoritmos, ao mesmo tempo em que serviram para aumentar o conhecimento sobre o comportamento de sistemas com acoplamento eletromecânico; e
- O código MefLab++ teve suas capacidades aumentadas e constitui já uma ferramenta de simulação multi-domínios robusta e eficaz.

A pesquisa gerou três publicações até o presente momento. As referências são (v. d. Poel Filho and Pavanello, 2003), (v. d. Poel Filho et al., 2004) e (v. d. Poel Filho et al., 2005).

7.2 Trabalhos futuros

As propostas para trabalhos futuros são:

- Estudar o fenômeno de *pull-in* e selecionar um algoritmo incremental não-linear para sua implementação no MefLab++;
- Incluir outros efeitos e/ou formulações de acoplamento nos modelos numéricos, como por exemplo, termomecânico, fluido-estrutura e eletromecânico por volume;
- Aprofundar e buscar mais opções para a redução de modelos, principalmente visando geometrias arbitrárias;
- Implementar outros elementos finitos no MefLab++, estendendo as opções para análise bidimensional e incluindo a tridimensional;
- Investir em técnicas de otimização a serem usadas em conjunto com o método dos elementos finitos e a análise acoplada particionada; e

- Pesquisar outros níveis de modelagem e buscar modos de realizar as interconexões entre eles, visando a construção de uma biblioteca de modelos e macromodelos dedicada ao projeto de microsistemas.

Referências

- Ahmed, K. B., Kouki, A. B., and Khebir, A. (2004). Physics-based analysis of variable RF MEMS capacitors. In *Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering*, pages 739–742.
- Allen, M., Raulli, M., Maute, K., and Frangopol, D. M. (2004). Reliability-based analysis and design optimization of electrostatically actuated MEMS. *Computers & Structures*, 82:1007–1020.
- Artz, B. E. and Cathey, L. W. (1992). A finite element method for determining structural displacements resulting from electrostatic forces. In *Proceedings of the IEEE Solid State Sensor and Actuator Workshop*, pages 190–193.
- Azeez, M. F. A. and Vakakis, A. F. (2001). Proper orthogonal decomposition (POD) of a class of vibroimpact oscillations. *Journal of Sound and Vibration*, 240:859–889.
- Bachtold, M., Korvink, J. G., Funk, J. M., and Baltes, H. (1995). New convergence scheme for self-consistent electromechanical analysis of iMEMS. In *Proceedings of the IEEE International Electron Device Meeting*, pages 605–608.
- Bochobza-Degani, O., Elata, D., and Nemirovsky, Y. (2002). An efficient DIPIE algorithm for CAD of electrostatically actuated MEMS devices. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 11:612–620.
- Brusa, E., Bona, F. D., Gugliotta, A., and Somà, A. (2003). Dynamic modeling of microbeams under electrostatic load. In *Proceedings of the Symposium on Design, Test, Integration and Packaging of MEMS/MOEMS*.

- Burns, D. W., Zook, J. D., Horning, R. D., Herb, W. R., and Guckel, H. (1995). Sealed-cavity resonant microbeam pressure sensor. *Sensors and Actuators*, 48:179–186.
- Cao, L., Mantell, S., and Polla, D. (2000). Design and simulation of an implantable medical drug delivery system using microelectromechanical systems technology. *Sensors and Actuators*, 94:117–125.
- Carvalho, J. R. C. (2004). Análise comparativa e de desempenho de elementos de placa. Master's thesis, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas.
- Collenz, A., Bona, F. D., Gugliotta, A., and Somà, A. (2002). Analisi FEM di microstrutture attuate elettrostaticamente in presenza di non-linearità geometriche. In *Atti del XXXI Convegno Nazionale*.
- Collenz, A., Bona, F. D., Gugliotta, A., and Somà, A. (2004). Large deflections of microbeams under electrostatic loads. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 14:365–373.
- da Silva, J. A. B. (2001). Investigação de um método evolucionário de otimização estrutural. Master's thesis, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas.
- da Silva Jr., F. I. (2003). Modelagem e implementação computacional da poroelásticidade acoplada. Master's thesis, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas.
- Dargahi, J., Parameswaran, M., and Payandeh, S. (2000). A micromachined piezoelectric tactile sensor for an endoscopic grasper - theory, fabrication and experiments. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 9:329–335.
- Dhatt, G. and Touzot (1984). *The Finite Element Method Displayed*. John Willey & Sons, New York.
- Duarte, H. V. (2003). *Estimador de erro para a formulação p do método dos elementos finitos aplicado ao problema de interação fluido-estrutura*. PhD thesis, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas.

- Dufour, I. and Sarraute, E. (1999). Analytical modeling of beam behavior under different actuations: Profile and stress expressions. *Journal of Modeling and Simulation of Microsystems*, 1:57–64.
- Felippa, C. A., Park, K. C., and Farhat, C. (2001). Partitioned analysis of coupled mechanical systems. *Computer Methods in Applied Mechanical and Engineering*, 190:3247–3270.
- Ferreira, L. O. S. and Moehlecke, S. (1999). A silicon micromechanical galvanometric scanner. *Sensors and Actuators*, 73:252–260.
- Funk, J. M., Korvink, J. G., Bühler, J., Bächtold, M., and Baltes, H. (1996). Coupled 3D thermo-electro-mechanical simulations of microactuators. In *Proceedings of the IEEE International Workshop on MEMS*, pages 133–138.
- Funk, J. M., Korvink, J. G., Bühler, J., Bächtold, M., and Baltes, H. (1997). SOLIDIS: A tool for microactuator simulation in 3-d. *IEEE/ASME Journal of Microelectromechanical Systems*, 6:70–82.
- Gabbay, L. D., Mehner, J. E., and Senturia, S. D. (2000). Computer-aided generation of nonlinear reduced-order dynamic macromodels - I: Non-stress-stiffened case. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 9:262–269.
- Gerlach, G. and Klein, A. (1998). Strategies of modelling and simulation of microsystems with electromechanical energy conversion. *Microelectronics Journal*, 29:773–783.
- Gilbert, J. R., Bart, S. F., and Romanowicz, B. F. (1998). Design of integrated systems including MEMS and ASICs. In *Proceedings of the 11th Annual IEEE Int. ASIC Conference*, pages 383–386.
- Gilbert, J. R., Legterberg, R., and Senturia, S. D. (1995). 3D coupled electro-mechanics for MEMS: Applications of CoSolve-EM. In *Proceedings of the IEEE International Workshop on MEMS*, pages 122–127.
- Givoli, D. (1992). *Numerical Methods for Problems in Infinite Domains*. Elsevier, Amsterdam.

- Gould, P. L. (1983). *Introduction to Linear Elasticity*. Springer-Verlag, New York.
- Gretillat, M.-A., Gretillat, F., and de Rooij, N. F. (1999). Micromechanical relay with electrostatic actuation and metallic contacts. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 9:324–331.
- Griffiths, D. J. (1998). *Introduction to Electrodynamics*. Prentice Hall, New Jersey.
- Gyimesi, M., Avdeev, I., and Ostergaard, D. (2004). Finite-element simulation of microelectromechanical systems (MEMS) by strongly coupled electromechanical transducers. *IEEE Transactions on Magnetics*, 40:557–560.
- He, Y., Marchetti, J., Gallegos, C., and Maseeh, F. (1999). Accurate fully-coupled natural frequency shift of MEMS actuators due to voltage bias and other external forces. In *Proceedings of the IEEE International MEMS Conference*, pages 321–325.
- Holmes, P., Lumley, J. L., and Berkooz, G. (1996). *Turbulence, coherent structures, dynamical systems and symmetry*. Cambridge University Press.
- Hung, E. S. and Senturia, S. D. (1999). Generating efficient dynamical models for microelectromechanical systems from a few finite-element simulation runs. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 8:280–289.
- König, E.-R., Groth, P., and Wachutka, G. (1999). New coupled-field device simulation tool for MEMS based on the TP2000 CAD platform. *Sensors and Actuators*, 76:9–18.
- Ko, J. S., Kim, G. H., Cho, Y. H., Lee, K., Kwak, B. M., and Park, K. (1995). A self-diagnostic airbag accelerometer with skew-symmetric proof-mass. In *Proceedings of the IEEE International Workshop on MEMS*, page 163.
- Korvink, J. G., Funk, J., Wachutka, G., and Baltes, H. (1994). SESES: A comprehensive MEMS modelling system. In *Proceedings of the IEEE International Workshop on MEMS*, pages 22–27.

- Lee, J.-D., Yoon, J.-B., Kim, J.-K., Chung, H.-J., and Lee, C.-S. (1999). A thermal inkjet printhead with a monolithically fabricated nozzle plate and self-aligned ink feed hole. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 8:229–235.
- Lee, S., Park, S., Kim, J., and Cho, D. (2000). Surface/bulk micromachined single-crystalline- silicon micro-gyroscope. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 9:557–567.
- Lee, W.-S., Kwon, K.-C., Kim, B.-K., Cho, J.-H., and Youn, S.-K. (2001). Eigenvalue analysis of tunable micro-mechanical actuator. In *Technical Proceedings of the 2001 Int. Conference on Modeling and Simulation of Microsystems*, pages 378–381.
- Li, G. and Aluru, N. R. (2001). Linear, nonlinear and mixed-regime analysis of electrostatic MEMS. *Sensors and Actuators*, 91:278–291.
- Li, G. and Aluru, N. R. (2002). Dynamic analysis of electrostatic MEMS by meshless methods. In *Technical Proceedings of the 2002 Int. Conference on Modeling and Simulation of Microsystems*, pages 356–359.
- Liang, Y. C., Lee, H. P., Lim, S. P., Lin, W. Z., Lee, K. H., and Wu, C. G. (2002). Proper orthogonal decomposition and its applications - part I: Theory. *Journal of Sound and Vibration*, 252:527–544.
- Liang, Y. C., Lin, W. Z., Lee, H. P., Lim, S. P., Lee, K. H., and Feng, D. P. (2001). A neural-network-based method of model reduction for the dynamic simulation of MEMS. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 11:226–233.
- Lin, W. Z., Lee, K. H., Lim, S. P., and Liang, Y. C. (2003). Proper orthogonal decomposition and component mode synthesis in macromodel generation for the dynamic simulation of a complex MEMS device. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 13:646–654.
- Lishchynska, M., Cordero, N., and Slattery, O. (2004). State of the art in prediction of mechanical behaviour of microsystems (MEMS). In *Proceedings of the 5th Int. Confer-*

- ence on *Thermal and Mechanical Simulation and Experiments in Microelectronics and Microsystems*, pages 287–294.
- Malkus, D. S., Plesha, M. E., and Cook, R. D. (1989). *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. IE-Wiley, New York.
- McCarthy, B., Adams, G. G., McGruer, N. E., and Potter, D. (2002). A dynamic model, including contact bounce, of an electrostatically actuated microswitch. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 11:276–283.
- Mehner, J. E., Gabbay, L. D., and Senturia, S. D. (2000). Computer-aided generation of nonlinear reduced-order dynamic macromodels - II: Stress-stiffened case. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 9:270–278.
- Millet, O., Bernardoni, P., Régnier, S., Bidaud, P., and Tsitsiris, E. (2004). Electrostatic actuated micro gripper using an amplification mechanism. *Sensors and Actuators*, 114:371–378.
- Mukherjee, S., Bao, Z., Roman, M., and Aubry, N. (2004). Nonlinear mechanics of MEMS plates with a total Lagrangian approach. *Computers & Structures*, em curso de publicação - disponível em www.sciencedirect.com.
- Nabors, K. and White, J. (1991). FastCap: a multipole accelerated 3-D capacitance extraction program. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 10:1447 – 1459.
- Nagler, O., Trost, M., Hillerich, B., and Kozlowski, F. (1998). Efficient design and optimization of MEMS by integrating commercial simulation tools. *Sensors and Actuators*, 66:15–20.
- Newland, D. E. (1989). *Mechanical Vibration Analysis and Computation*. Longman Scientific and Technical, New York.

- Osterberg, P., Yie, H., Cai, X., White, J., and Senturia, S. (1994). Self-consistent simulation and modelling of electrostatically deformed diaphragms. In *Proceedings of the IEEE International Workshop on MEMS*, pages 28–32.
- Ostergaard, D. F. and Gyimesi, M. (2000). Finite element based reduced order modeling of micro electro mechanical systems (MEMS). In *Technical Proceedings of the 2000 Int. Conference on Modeling and Simulation of Microsystems*, pages 684–687.
- Pizzirani, F. (2003). Otimização topológica de estruturas utilizando algoritmos genéticos. Master’s thesis, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas.
- Rajendran, S. and Liew, K. M. (2004). Design and simulation of an angular-rate vibrating microgyroscope. *Sensors and Actuators*, 116:241–256.
- Raulli, M. and Maute, K. (2005). Optimization of fully coupled electrostatic- fluid- structure interaction problems. *Computers & Structures*, 83:221–233.
- Roux, P., Woirgard, E., Pizzi, M., Martiis, O. D., and Koniachkine, V. (2004). Fem modelling of an electro-optical micro-shutter. *Sensors and Actuators*, em curso de publicação - disponível em www.sciencedirect.com.
- Schlegel, M., Bennini, F., Mehner, J., Herrman, G., Muller, D., and Dötzel, W. (2003). Analyzing and simulation of MEMS in VHDL-AMS based on reduced order FE-models. In *Proceedings of IEEE Sensors*, pages 866–871.
- Schneider, P., Schneider, A., and Schwarz, P. (2002). A modular approach for simulation-based optimization of MEMS. *Microelectronics Journal*, 33:29–38.
- Schroth, A., Blochwitz, T., and Gerlach, G. (1996). Simulation of a complex sensor system using coupled simulation programs. *Sensors and Actuators*, A54:632–635.
- Schwarzenbach, H. U., Korvink, J. G., Roos, M., Sartorist, G., and Anderheggen, E. (1993). A micro electromechanical CAD extension for SESES. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 3:118–122.

- Senturia, S. D. (1998). Simulation and design of microsystems: A 10-year perspective. *Sensors and Actuators*, 67:1–7.
- Senturia, S. D. (2001). *Microsystems Design*. Kluwer Academic Publishers, Massachusetts.
- Senturia, S. D., Harris, R. M., Johnson, B. P., Kim, S., Nabors, K., Shulman, M. A., and White, J. K. (1992). A computer-aided design system for microelectromechanical systems (MEMCAD). *Journal of Microelectromechanical Systems*, 1:3–13.
- Shi, F., Ramesh, P., and Mukherjee, S. (1995). Simulation methods for micro-electro-mechanical structures (MEMS) with application to a microtweezer. *Computer & Structures*, 56:769–783.
- Shi, F., Ramesh, P., and Mukherjee, S. (1996). Dynamic analysis of micro-electro-mechanical systems. *Int. Journal for Numerical Methods on Engineering*, 39:4119–4139.
- Shrivastava, V., Aluru, N. R., and Mukherjee, S. (2004). Numerical analysis of 3D electrostatics of deformable conductors using a Lagrangian approach. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 28:583–591.
- Souto, C. and Pavanello, R. (2003). 3d cyclic symmetry in the analysis of a structural-acoustic system. In *Proceedings of the 17th Int. Congress of Mechanical Engineering*.
- Swart, N. R., Bart, S. F., Zaman, M. H., Mariappan, M., Gilbert, J. R., and Murphy, D. (1998). AutoMM: automatic generation of dynamic macromodels for MEMS devices. In *Proceedings of the IEEE International Workshop on MEMS*, pages 178–183.
- Temesvary, V., Wu, S., Hsieh, W. H., Tai, Y.-C., and Miu, D. K. (1995). Design, fabrication, and testing of silicon microgimbals for super-compact rigid disk drives. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 4:18–27.
- v. d. Poel Filho, C. J., Gugliotta, A., Somà, A., and Pavanello, R. (2004). Dynamic identification of MEMS by eigensensitivity and Newmark simulation. In *Proceedings of the Symposium on Design, Test, Integration and Packaging of MEMS/MOEMS*, pages 43–48.

- v. d. Poel Filho, C. J., Gugliotta, A., Somà, A., and Pavanello, R. (2005). Dynamic identification of MEMS by eigensensitivity and Newmark simulation. *Journal of Analog Integrated Circuits and Signal Processing*, em curso de publicação - aceito em janeiro de 2005.
- v. d. Poel Filho, C. J. and Pavanello, R. (2003). Application of the finite element method to model the problem of electromechanical coupling in microsystems. In *Proceedings of the 17th Int. Congress of Mechanical Engineering*.
- Wachutka, G. (1999). The art of modeling coupled-field effects in microdevices and microsystems. In *International Conference on Modeling and Simulation of Microsystems*, volume 1, pages 14–19.
- Weaver, W., Timoshenko, S. P., and Young, D. H. (1990). *Vibration Problems in Engineering*. John Wiley & Sons, New York.
- Wolter, C. (2001). Uma introdução à redução de modelos através da expansão de karhunen-loève. Master's thesis, Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.
- Wunsche, S., Clauss, C., Schwarz, P., and Winkler, F. (1997). Microsystem design using simulator coupling. In *Proceedings of the European Design and Test Conference*, pages 113–118.
- Yamaguchi, M., Kawamura, S., Minami, K., and Esashi, M. (1993). Distributed electrostatic micro actuator. In *Proceedings of the IEEE International Workshop on MEMS*, pages 18–23.
- Yan, D., Xu, B., and Castracane, J. (2004). Development of winged microscanners: Architecture and performance. *IEEE Sensors Journal*, 4:603–611.
- Yazdi, N. and Najfi, K. (2000). An all-silicon single-wafer micro-g accelerometer with a combined surface and bulk micromachining process. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 9:544–550.

- Younis, M. I., Abdel-Rahmana, E. M., and Nayfeh, A. (2003). A reduced-order model for electrically actuated microbeam-based MEMS. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 12:672–680.
- Zhulin, V., Owen, S. J., and Ostergaard, D. F. (2000). Finite element based electrostatic-structural coupled analysis with automated mesh morphing. In *Technical Proceedings of the 2000 Int. Conference on Modeling and Simulation of Microsystems*, pages 501–504.
- Zienkiewicz, O. C. (1984). Coupled problems and their numerical solution. In *Numerical Methods in Coupled Systems*, pages 35–58. MacGraw-Hill, California.

Apêndice A

Artigo: Application of the Finite Element Method to Model the Problem of Electromechanical Coupling in Microsystems

APPLICATION OF THE FINITE ELEMENT METHOD TO MODEL THE PROBLEM OF ELECTROMECHANICAL COUPLING IN MICROSYSTEMS

Cornelis Joannes van der Poel Filho

Department of Computational Mechanics
Faculty of Mechanical Engineering/UNICAMP
P.O.Box 6122
CEP 13083-970, Campinas/SP, Brazil
vdpoelf@fem.unicamp.br/vdpoelf@yahoo.com

Renato Pavanello

Department of Computational Mechanics
Faculty of Mechanical Engineering/UNICAMP
P.O.Box 6122
CEP 13083-970, Campinas/SP, Brazil
pava@fem.unicamp.br

Abstract. For understanding and simulating the behavior of microsystems it is necessary to analyze several physical domains. Analytical solutions for coupled-field problems are hard to be obtained and numerical modeling tools are needed. The coupling between domains can be caused by imposed boundary conditions or when there is a superposition of different domains. These coupling mechanisms are identified as coupling by surface and by volume, respectively. In this work, attention is given to electromechanical devices where the existing coupling is by surface and occurs by the interaction between a structure and the electrostatic forces generated on it by the existence of an electric field. The solution methodology involves a sequential strategy where the two domains are modeled separately and the interaction is done by inserting the results of one domain analysis into the other. The process is executed iteratively until the convergence is reached. The Finite Element Method is used for the numerical modeling and its implementation is done in an object oriented code written in C++. The equations governing the mechanical and electrical domains are presented and the coupling mechanism explained. The case study of a silicon microbeam subjected to an electric potential difference is shown. The static analysis results are shown, and mesh managing strategies are tested and discussed.

Keywords. Coupled-field problems, microsystems, finite element method.

1. Introduction

The study of microsystems is related to the engineering area known as microengineering. Microengineering refers to the development of technologies to design and fabricate structures and devices with dimensions in the order of micrometers. One of its main goals is to integrate microelectronics together with microstructures to produce completely integrated systems. Because of the possibility of batch manufacturing and reduction of mass and size, the miniaturization of components and devices enables a very low cost of production. The number of applications involving microsystems is already large and tends to increase in the following years. Current examples are: components for rigid disks drives for data storage (Temesvary, 1995), inkjet print heads (Lee et al, 1999), micro pumps (Saif et al, 1999), sensors for endoscopes and medical equipment used in minimally invasive surgery (Dargahi et al, 2000 and Peirs et al, 2001), drug delivery systems (Cao et al, 2001), microrockets (Rossi et al, 2002), and sensors and actuators in general (Bhailis et al, 2000 and Johnson and Warne, 1995).

The design of microsystems is based on multi-physics simulation, i.e., it is necessary to deal with several physical domains. Usual domains appearing are electrical, mechanical, fluidic and thermal. The focus of this work is the analysis and simulation of microsystems with electrostatic actuation. Although the electrostatic actuation is not generally used for traditional applications (e.g. motors) (Trimmer, 1988), at the micrometer level it is advantageously employed. In microscale the electrostatic surface forces are dominant (high surface to volume ratio) (Fujita and Omodaka, 1987) and large enough to move or deform parts of a system. In addition, the actuation is simply driven by voltage application. For the design of microsystems with electrostatic actuation it is necessary to analyze and simulate two domains: the mechanical (structural) and the electrical. Analytical solutions for coupled-field problems are hard to be obtained and then numerical modeling tools are needed. Common numerical methods used for simulating the behavior of microelectromechanical systems are the Finite Element Method (FEM) (Malkus, 1989 and Silvester, 1990) and the Boundary Element Method (BEM) (Kane, 1994).

The coupling between domains can be caused by imposed boundary conditions or when there is a superposition of different domains (Zienkiewicz, 1984). These coupling mechanisms are identified as coupling *by surface* and coupling *by volume*, respectively. In this work attention is given to electromechanical devices where the existing coupling is by surface and occurs by the interaction between a structure and the electrostatic pressures generated on it by the existence of an electric field. Such coupling can be found in electromechanical filters, resonant sensors, oscillators and in general microsensors and microactuators. The solution methodology here implemented involves a sequential strategy where the two domains are modeled separately and the interaction between them is done by inserting the results of one domain analysis into the other until convergence is reached. The electromechanical analysis is difficult because the electrostatic pressures are non-uniform and change as the structure deforms.

This work concerns to our first efforts towards the construction of a FEM-based numerical tool to solve and optimize the coupled-field problem encountered in microelectromechanical systems. The numerical method together with the coupled-field solution algorithm is being programmed in our own software Meflab++. The Meflab++ is an oriented object code written in C++ where numerical modeling methods and strategies for solving engineering problems are inserted.

This paper is organized as follows. In Section 2, the mathematical formulation for the electromechanical coupled problem is presented. The mathematical models are shown separately for each domain and the way the coupling happens is explained. In Section 3, discussions about different approaches to treat coupled-field problems and the use of the FEM or BEM as numerical modeling tools for microsystems are done. The solution algorithm is also described. In section 4, the case study of a microbeam with an applied voltage is done and details of the implemented algorithm are given. Conclusions are given in Section 5.

2. Mathematical formulation

The governing equations for the mechanical and electrical domains are presented in this section. The coupling mechanism between the domains is also explained.

2.1. Electric domain

Consider a number m of conductors within a lossless dielectric medium, Fig. (1). The electrostatic potential in the exterior region satisfies the Laplace Equation (Eq. (2.1.1)). On the conductors an electric potential ϕ_k is applied. In Fig. (1), $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m$ are the boundaries of the conductors and Γ_∞ is a far-field boundary or reference plane. Ω_{el} is the electrical domain.

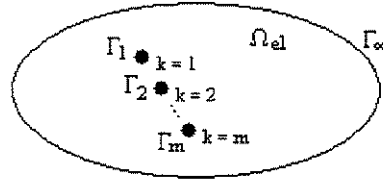


Figure 1. Electrostatic system with conductors embedded in a uniform lossless dielectric medium.

The electrostatic problem for the system in Fig. (1) can be written as:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \text{in } \Omega_{el} \quad (2.1.1)$$

$$\phi = \phi_k \quad \text{on } \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m \quad (2.1.2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \phi = \phi_\infty \\ \text{or} \\ \phi_{,n} \end{array} \right\} \quad \text{on } \Gamma_\infty \quad (2.1.3)$$

where n represents the outward normal direction.

After the application of a voltage, electric charges are induced on the surface of each conductor. The charge density γ on the conductors' surface satisfies (Griffiths, 1998)

$$\gamma_k = -\epsilon_e \phi_{,n} \quad (2.1.4)$$

where ϵ_e is the dielectric constant of the medium.

The potential in the normal direction is

$$\phi_{,n} = \phi_{,i} n_i \quad (2.1.5)$$

where n_i are the components of the unit normal vector. The index i goes from 1 to 3 and represents the x , y and z directions.

Once the charge density is known, it is possible to determinate the electrostatic surface force (pressure) acting on a conductor through the equation

$$f_i = -\frac{1}{2} \frac{\gamma^2}{\epsilon_e} n_i \quad (2.1.6)$$

2.2. Mechanical domain

Consider a mechanical (structural) domain Ω_{mec} with boundaries Γ_{mec1} and Γ_{mec2} . There are body forces, Dirichlet boundary conditions in Γ_{mec1} and traction in Γ_{mec2} . This problem is described by the following equations (Gould, 1983):

$$\sigma_{ij,j} - \rho_s \ddot{u}_i = F_i \quad \text{in } \Omega_{mec} \quad (2.2.1)$$

$$u = u_0 \quad \text{on } \Gamma_{mec1} \quad (2.2.2)$$

$$\sigma_{ij} n_j = f_i \quad \text{on } \Gamma_{mec2} \quad (2.2.3)$$

where σ_{ij} is the stress tensor, ρ_s the specific mass, F_i the body forces, f_i the traction vector acting on the surface and u_i is the displacement. The indexes i and j are 1, 2 and 3.

In a static case, Eq. (2.2.1) becomes

$$\sigma_{ij,j} = F_i \quad \text{in } \Omega_{mec} \quad (2.2.4)$$

To solve the elastic problem two other sets of equations are needed. Relating displacement and deformation (Gould, 1983),

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.2.5)$$

where ε_{ij} is the deformation tensor. The constitutive law for a linear elastic solid is (Gould, 1983)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E}[(1 + \nu)\sigma_{ij} - \nu\delta_{ij}\sigma_{kk}] \quad (2.2.6)$$

where ν is the coefficient of Poisson and E is the elasticity or Young modulus.

Equations (2.2.1) to (2.2.6), plus the compatibility relations, form the basis of the Theory of Elasticity.

2.3. Coupling between the electrical and mechanical domain

The coupling mechanism involving the electrical and mechanical domains can be better understood looking at the system in Fig. (2). When a voltage is applied between the cantilever beam and ground, electrostatic charges are induced on the surfaces of the conductors, Fig. (2a). These electrostatic charges are responsible for the appearance of electrostatic pressures acting in a direction normal (outward) to the surface. The electrostatic pressures deform the beam and then a redistribution of the charges, Fig. (2b), takes place. The charge redistribution results in a change in the electrostatic pressures and consequently new deformations occur. The process goes on until the equilibrium state is reached. The equilibrium happens when the electrostatic forces are balanced by the elastic restoring forces of the structure. The dependence of the electrostatic pressures on the charge distribution can be seen in the Eq. (2.1.6).

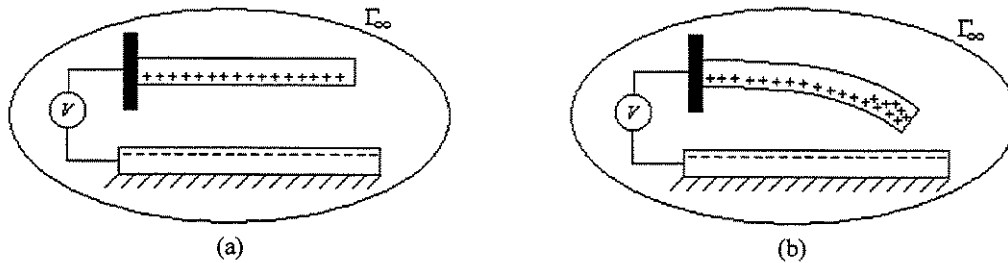


Figure 2. Electromechanical system: (a) applied voltage causing charge distribution and (b) deformed structure with redistributed charges.

3. Numerical modeling and solution algorithm

The need for numerical modeling tools comes from the fact that analytical solutions for coupled-field problems are difficult to be obtained. The most used numerical methods for microsystem simulation are the FEM and BEM. Usually, the mechanical domain is modeled by the FEM because many structural members in microsystems have long aspect ratios that make the BEM inefficient (Shi et al, 1995). For the exterior problem, i.e., the electrical domain, both the FEM and BEM can be used, existing advantages and disadvantages for each one. The application of the FEM requires the construction of a mesh for the whole exterior domain. However, in the electromechanical simulation the electrical domain is constantly changed and it is necessary to modify the mesh for each solution step. This modification makes the simulation computationally expensive and it is a drawback of the FEM. The BEM avoids constructing a mesh for the

domain and consequently reduces the computational effort (Senturia et al, 1997). The disadvantage of the BEM comes from the fact that the method generates dense matrices (Funk et al, 1997 and Senturia et al, 1997) and then to have efficiency it must be implemented together with sparsification algorithms (Senturia et al, 1997 and Cai et al, 1993). The FEM, in turn, generates sparsely populated matrices that are easy to be solved.

In this work the FEM is used for both the electrical and mechanical domain. The chosen formulation is the weighted residual with the Galerkin Method and isoparametric elements. Electrostatic and mechanical quadrilaterals with four nodes and triangles with three nodes are implemented. The degree of freedom (dof) on the nodes of the electrostatic elements is the electric potential. The mechanical nodes have displacements in the x and y directions. Body and surface forces and Dirichlet boundary conditions are supported. Through post-processing of the electrical domain, flux values and electrostatic pressures can be computed. The electrostatic pressures are fundamental because they serve as input for the simulation of the structural behavior. The post-processing of the mechanical simulation allows attainment of strain and stress results.

In this context, the discrete finite element equilibrium equations for the coupled problem could be written as follows:

$$[K(u)]\{u\} = \{F_{sr}\} + \{F_{elec}(\phi_n)\} \quad (3.1)$$

$$[H(\phi, u)]\{\phi\} = \{F\} \quad (3.2)$$

where $[K(u)]$ is the structural stiffness matrix, $\{u\}$ is the nodal displacement vector, $\{F_{sr}\}$ is the mechanical load vector, $\{F_{elec}(\phi_n)\}$ is the electrostatic load vector, $[H(\phi, u)]$ is the electrical stiffness matrix, $\{\phi\}$ is the nodal electric potential vector, and $\{F\}$ is the electrical load vector. Equation (3.1) is for the mechanical problem and Eq. (3.2) for the electrical. The terms $\{F_{elec}(\phi_n)\}$ and $[H(\phi, u)]$ show their mutual dependence.

Once the domains are being separately modeled by a numerical method, in this case the FEM, a strategy to deal with the coupling between them must be chosen. Several authors (Korvink et al, 1994, Schroth et al, 1996, Gerlach and Klein, 1998, König et al, 1999, Wachutka, 1999 and Felippa et al, 2001) indicate approaches to treat coupled-field problems. In a general sense, three are the methodologies (Felippa et al, 2001): *field elimination*, *monolithic treatment* (*simultaneous or direct*) and *partitioned treatment* (*sequential*). In the field elimination one or more components are eliminated by techniques such as integral transforms and the remaining components treated by a simultaneous time-integration scheme. This approach is restricted to special linear problems that permit efficient decoupling and often it leads to higher order differential systems in time, or to temporal convolutions (Felippa et al, 2001). These problems can be source of numerical difficulties and then the monolithic and partitioned treatments are more frequently used. In the simultaneous treatment the whole problem is treated as a monolithic entity and all the components are analyzed simultaneously. In the partitioned treatment, the domain models are treated as isolated entities that are separately analyzed for each time step in the transient case or for each equilibrium condition in the static case. The problem is solved iteratively and the coupling is done by taking the results from one analysis and inserting them as loads in the other(s).

For problems with coupling by surface, the most common methodology is the partitioned treatment. This approach is often used with commercially available tools specific for each domain. In Senturia et al (1992) and Gilbert et al (1995), the ABAQUS finite element code is used for the mechanical analysis and other software based on boundary elements, FASTCAP, is used for the electrical analysis. Through an iterative algorithm, the solution of one program is applied in the other, and vice-versa, until the convergence of the results. In a similar way, Schroth et al (1996) employed ANSYS for the analysis of the mechanical domain and Pspice for the simulation of the electrical domain through macro models. Funk et al (1997) presented a numerical tool for static analysis of microsystems of possible different actuating mechanisms (thermomechanics, surface electrostatic forces and piezoelectric effects). Their solution algorithm employs a sequential strategy and applies the FEM for all the involved domains. Iterations schemes like Gauss-Seidel, Newton-Raphson and relaxation were used. Hybrid methods with both FEM and BEM are often used (Shi et al, 1995, Shi et al, 1996 and Aluru and White, 1997). The main advantage of this methodology is the modularity. Additional coupling effects can always be added to the computational code without having to change significantly what is already working.

Our implementation uses no commercial tools and is done in our own software Meflab++. The Meflab++ is a simulation environment where numerical methods and strategies for solving engineering problems are inserted. The software is based on object oriented programming and is written in C++. The software has a general central core from which the specific tasks are developed.

Figure (3) shows a flow chart with the sequential strategy implemented in the Meflab++. The analysis is static. The simulation starts with the analysis of the electrical domain. The nodal electric potentials are obtained and with these results a post-processing is realized. The electrostatic pressures are computed. These pressures are input loads for the mechanical analysis. As a pre-processing step in the structural simulation, the nodal load vector is computed from the electrostatic pressures on the conductor's surfaces. The mechanical problem is then solved. The mesh in the electrical domain, if altered in a previous iteration, is reset to its original configuration. With the mechanical displacements the electrical mesh is morphed. A detailed discussion about mesh managing is done in the next paragraph. Convergence check is performed and when the displacement variations are below 0,5% the program stops.

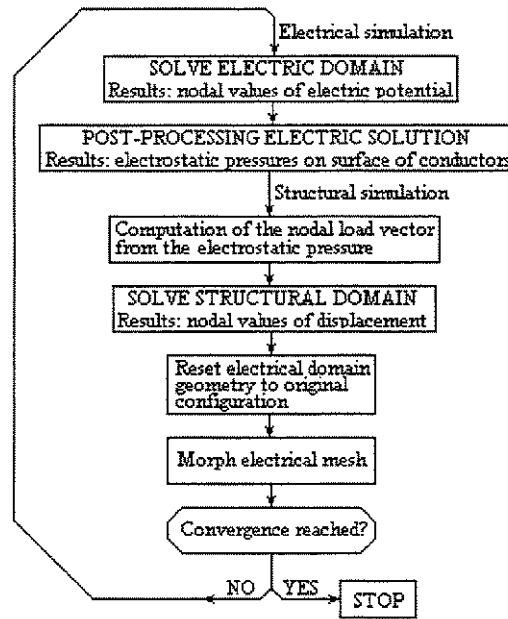


Figure 3. Algorithm for the sequential strategy in Meflab++

Equation (2.1.6) shows the dependence of the electrostatic surface forces on the charge density. Each time the structure deforms there is redistribution of charges on the conductor's surfaces and consequently an alteration of the electrostatic pressures. These new pressures deform again the structure and naturally other distribution of charges is obtained. This continued action in the two ways couples the two domains. The fact is that mathematically the charge distribution is only altered when the Laplace Equation is solved for each configuration of the exterior domain considering the deformed position of the structure. By this reason, for each solution step it is necessary to modify the electrical mesh. There are two mechanisms for mesh updating: morphing and remeshing. With the morphing there is no reconstruction of the mesh but only an update in the nodes position by summing the displacements of each iteration to the nodes coordinates. The mesh is not reconstructed but just deformed. The remeshing is an action where the whole mesh is removed and another one is built. The advantage of the morphing is that it requires less computational effort than the remeshing. However, when displacements start to get too large this technique becomes ineffective and the remeshing is recommended. The remeshing is computationally expensive because it creates new nodes and elements for each step solution of the coupled-field problem.

4. Case study

In this section the case study of a silicon microbeam with an applied voltage is done. Details of the solution algorithm implemented within the Meflab++ are discussed together with the simulation results.

4.1. Problem description

Figure (4) shows the simulated silicon microbeam. The potential difference between the beam and the ground generates an electric field that induces charges on the surface of the beam. The charges are responsible for the appearance of electrostatic pressures and these make the structure to deform. The parameters in Fig. (4) used in our simulations have the following values: $h_b = 150\mu\text{m}$, $h_g = 90\mu\text{m}$, $b_b = 2\mu\text{m}$, $b_g = 1,5\mu\text{m}$, $gap = 4.5$.

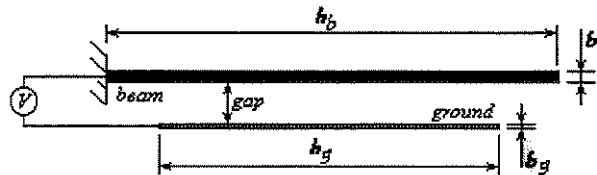


Figure 4. Silicon microbeam subjected to an electric potential difference.

Linear triangular and linear quadrilateral elements were used for the electrical and mechanical domains, respectively. The initial meshes for solving the coupled-field problem of Fig. (4) are shown in Fig. (5). The mechanical mesh has 84 nodes and 54 elements and the electrical mesh has 586 nodes and 982 elements. Nonzero electric voltages

are applied to the nodes on the biggest interior boundary of the electrical mesh (common boundary of both domains) while for the smallest (relative to the ground) the potentials are zero. The mechanical mesh has the two leftmost nodes with no displacement allowed and on the exterior surfaces, natural boundary conditions (surface forces) are applied. The domains are solved iteratively as explained in Section 3, Fig. (3).

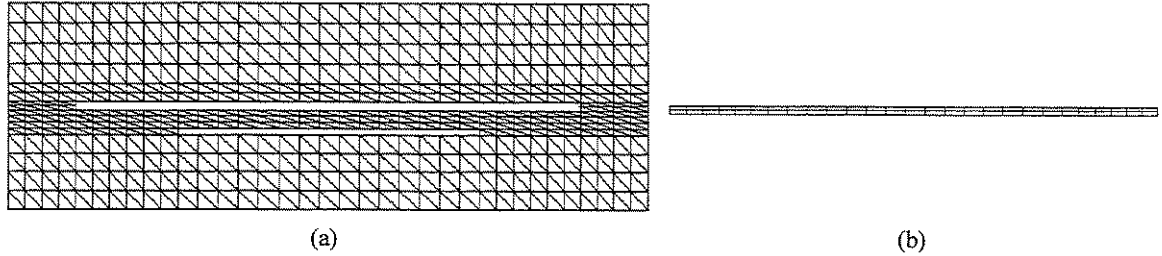


Figure 5. (a) electrical domain mesh and (b) mechanical domain mesh.

4.2. Simulation results and discussion

The simulation was done having as convergence test the displacement of the nodes. When the displacements in all nodes change less than 0,5% the program stops running. To validate our methodology, comparisons with simulations in the ANSYS software were done.

Figure (6) shows the maximum displacements at the cantilever beam for a range of applied voltages. Although both curves present a similar behavior, the values of the displacements are not equal. The Meflab++ displacements results were from 3,26% to 5,57% larger than those obtained by ANSYS.

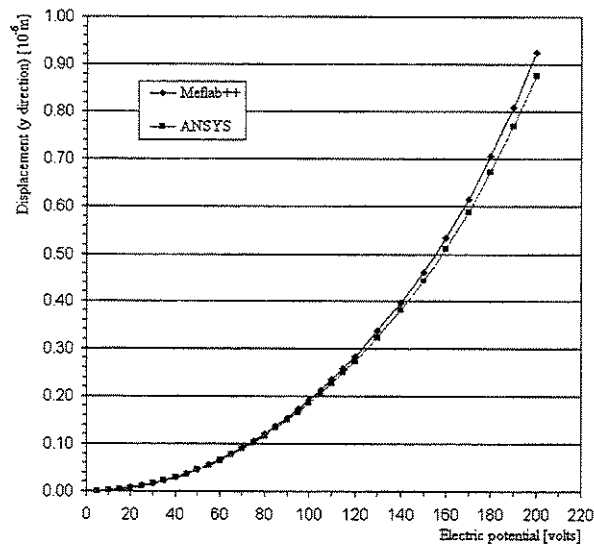


Figure 6. Displacement values versus electric potential

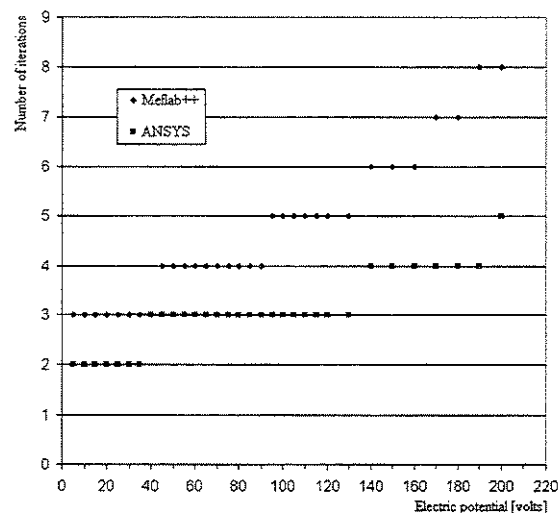
The difference between the Meflab++ and ANSYS results occurs due to simplifications adopted in our code. The first aspect concerns to the transposition of the electrostatic pressures to the mechanical structure. For each displacement of the structure the electrical domain must be modified so that the electrostatic pressures can be recomputed. For the application of these pressures on the surfaces of the beam, the structural mesh must also be altered so that the direction of the forces will be updated. This occurs because by default the pressures are applied on the surfaces following the direction of the normal of the boundary segments. However, care must be taken because a distorted structural mesh would generate another stiffness matrix, what would represent a structure dissimilar from the original one. The stiffness matrix then must be computed for the original beam configuration and used as such for all the subsequent iterations, i.e., the formulation is Lagrangian. For the calculation of the load vector the last deformed position must be taken into account so that the pressure would be applied in the right direction, i.e., normal to the beam surface. The algorithm in the Meflab++ is not updating the structural mesh and as a result the pressures are always being applied following the normals of the boundary segments in the original structure. The consequence of this, in the present case study, is that the load vector computed from the electrostatic pressures has always components only in the y direction. The pressures are being completely transformed into y direction forces when there should be a distribution through the x and y directions. This increases the vertical forces generating bigger displacements in this direction. Initially, the influence is not too large since the forces that should be computed in the x direction are small compared to

those in the y direction. The differences are accentuated with greater voltages because the curvature of the beam grows and the x components of the forces would exert more influence. The non updating structural mesh strategy is thus effective and low computational cost with acceptable precision for small voltages and displacements configurations.

Considering the same example, the second reason for the distinct simulation results is related to the electrical mesh updating procedure implemented in Meflab++. The mesh morphing is being done only in the nodes on the boundary of the electrical mesh. For a complete updating scheme, the morphing should be applied to all nodes or at least to nodes in several layers of elements surrounding the electrical boundary that follows the deformation of the structure. The difference in the values enlarges with higher electric potentials because the elements start to deform to a great extent. As only the node on the boundary moves, it may considerably approximate to the other nodes of the element and generate a too much distorted element shape.

The morphing procedure programmed in the Meflab++ also affects the convergence of the results. Figure (7) shows the number of iterations executed by the Meflab++ and by the ANSYS to reach convergence. For electric potentials until 160v the Meflab++ needed one or two more iterations than the ANSYS to converge. With values above 160v, the convergence was harder obtained and the Meflab++ needed three or four more iterations than the ANSYS. After 240v our algorithm failed. The failure is reasoned by the accentuated distortion of the elements' shapes with large voltage values. Although the failure occurred at 240v, the distortion of the elements starts to be considerable from 210v and with values above this the results are not trustworthy anymore. The ANSYS fails to converge from 230v, even with the morphing being applied to all the nodes in the electrical mesh.

A last fact to be pointed out is that quadratic triangular elements were used in the ANSYS for the simulation of the electrical domain.



7. References

- Aluru, N.R. and White, J., "An efficient numerical technique for electromechanical simulation of complicated microelectromechanical structures," *Sensors and Actuators*, vol. A58, pp. 1-11, 1997.
- Bhailis, D. et al., "Modelling and analysis of a magnetic microactuator," *Sensors and Actuators*, vol. 81, pp. 285-289, 2000.
- Cai, X., Yie, H., Osterberg, P., Gilbert, J., Senturia, S. and White, J., "A relaxation/multipole-accelerated scheme for self-consistent electromechanical analysis of complex 3-D microelectromechanical structures," in *Proceedings International Conference on Computer-Aided Design*, Santa Clara, California, November 1993, pp. 283-286.
- Cao, L., Mantell, S. and Polla, D., "Design and simulation of a implantable medical drug delivery system using microelectromechanical systems technology," *Sensors and Actuators*, vol. A94, pp. 117-125, 2000.
- Dargahi, J., Parameswaran M. and Payandeh, S., "A micromachined piezoelectric tactile sensor for an endoscopic grasper – Theory, fabrication and experiments," *IEEE/ASME Journal of Microelectromechanical Systems*, vol. 9, no. 3, pp. 329-335, Sept. 2000.
- Felippa, C.A., Park, K.C. and Farhat, C., "Partitioned analysis of coupled mechanical systems," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 190, pp.3247-3270, 2001.
- Fujita, H. and Omodoka, A., "Electrostatic actuators for micromechatronics", in Trimmer, W.S.N., *Micromechanics and MEMS*. IEEE Press, New York, 1997.
- Funk, J.M., Korvink, J.G., Bühler, J., Bächtold, M. and Baltes, H., "SOLIDIS: A tool for microactuator simulation in 3-D," *IEEE/ASME Journal of Microelectromechanical Systems*, vol. 6, no. 1, pp. 70-82, March 1997.
- Gerlach, G. and Klein, A., "Strategies of modeling and simulation of microsystems with electromechanical energy conversion," *Microelectronics Journal*, vol. 29, pp. 773-783, 1998.
- Gilbert, J. R., Legtenberg, R. and Senturia, S.D., "3D coupled electro-mechanics for MEMS: Applications of CoSolve-EM," in *Proceedings of the IEEE Workshop on MEMS*, Amsterdam, The Netherlands, 1995, pp. 122-127.
- Gould, P.L., "Introduction to Linear Elasticity". Springer-Verlag, New York, 1983.
- Griffiths, D.J., "Introduction to Electrodynamics," 3rd Ed. Prentice Hall, New Jersey, 1998.
- Johnson, W.A. and Warne, L.K., "Electrophysics of micromechanical comb actuators," *IEEE/ASME Journal of Microelectromechanical Systems*, vol. 4, no. 1, pp. 49-59, March 1995.
- Kane, J.H., "Boundary Element Analysis in Engineering Continuum Mechanics". Prentice Hall, New Jersey, 1994.
- König, E.-R., Groth, P. and Wachutka, G., "New coupled-field device simulation tool for MEMS based on the TP2000 CAD platform," *Sensors and Actuators*, vol. 76, pp. 9-18, 1999.
- Korvink, J.G., Funk, J., Roos, M., Wachutka, G. and Baltes, H., "SESES: A comprehensive MEMS modeling system", in *Proceedings of the IEEE MEMS 94*, Oiso, Japan, 1994, pp. 22-27.
- Lee, J.-D. et al., "A thermal inkjet printhead with a monolithically fabricated nozzle plate and self-aligned ink feed hole," *IEEE/ASME Journal of Microelectromechanical Systems*, vol. 8, no. 3, pp. 229-235, Sept. 1999.
- Malkus, D.S., Plesha, M.E. and Cook, R.D., "Concepts and Applications of Finite Element Analysis," 3rd Ed. IE-Wiley, New York, 1989.
- Peirs, J., Reynaerts, D. and Van Brussel, H., "A miniature manipulator for integration in a self-propelling endoscope," *Sensors and Actuators*, vol. A92, pp. 343-349, 2001.
- Rossi, C., Orioux, S., Larangot, B., Conto, T.D. and Estève, D., "Design, fabrication and modeling of solid propellant microrocket-application to micropropulsion," *Sensors and Actuators*, vol. A99, pp. 125-133, 2002.
- Saif, M.T.A., Alaca, B.E. and Sehitoglu, H., "Analytical modeling of electrostatic membrane actuator for micro pumps," *IEEE/ASME Journal of Microelectromechanical Systems*, vol. 8, no. 3, pp. 335-345, Sept. 1999.
- Schroth, A., Blochwitz, T. and Gerlach, G., "Simulation of a complex sensor system using coupled simulation programs," *Sensors and Actuators*, vol. A54, pp. 632-635, 1996.
- Senturia, S.D., Aluru, N. and White, J., "Simulating the behavior of MEMS devices: Computational methods and needs," *IEEE Computational Science & Engineering*, vol. 4, no. 1, pp. 30-43, January-March 1997.
- Senturia, S.D., Harris, R.M., Johnson, B.P., Nabors, S.K., Shulman, M.A. and White, J.K., "A computer-aided design system for microelectromechanical systems (MEMCAD)," *IEEE/ASME Journal of Microelectromechanical Systems*, vol. 1, no. 1, pp. 313, March 1992.
- Shi, F., Ramesh, P. and Mukherjee, S., "Dynamic analysis of micro-electro-mechanical systems," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 39, pp. 4119-4139, 1996.
- Shi, F., Ramesh, P. and Mukherjee, S., "Simulation methods for micro-electro-mechanical structures (MEMS) with application to a microtweezer," *Computer & Structures*, vol. 56, pp. 769-783, 1995.
- Silvester, P.P. and Ferrari, R.L., "Finite Elements for Electrical Engineers," 2nd Ed. Cambridge University, Cambridge, 1990.
- Temesvary, V., Wu, S., Hsieh, W.H., Tai, Y.-C. and Miu, D.K., "Design, fabrication, and testing of silicon microgimbals for super-compact rigid disk drives," *IEEE/ASME Journal of Microelectromechanical Systems*, vol. 4, no. 1, pp. 18-27, March 1995.
- Trimmer, W.S.N., "Microrobots and micromechanical systems", in Trimmer, W.S.N., *Micromechanics and MEMS*. IEEE Press, New York, 1997.
- Wachutka, G., "The art of modeling coupled-field effects in microdevices and Microsystems," in *International Conference on Modeling and Simulation of Microsystems*, Puerto Rico, April 1999, vol. 1, pp. 14-19.

Zienkiewicz, O. C., "Coupled problems and their numerical solution", in Lewis, R.W., Bettess, P. and Hinton, E., Numerical Methods in Coupled Systems. John Wiley & Sons, California, 1984.

8. Copyright Notice

The author is the only responsible for the printed material included in his paper.

Apêndice B

Artigo: Dynamic identification of MEMS by eigensensitivity and Newmark simulation

DYNAMIC IDENTIFICATION OF MEMS BY EIGSENSITIVITY AND NEWMARK SIMULATION

C.J.v.d. Poel Filho^{1,2}, A. Gugliotta¹, A. Somà¹, R. Pavanello²

¹ Dipartimento di Meccanica – Politecnico di Torino
C.so Duca degli Abruzzi, 24 – CAP 10129 Torino/TO – Italy

² Faculty of Mechanical Engineering – State University of Campinas
Caixa Postal 6122 – CEP 13083-970 Campinas/SP – Brazil

ABSTRACT

The study of dynamic behavior is essential for a large number of applications involving microelectromechanical systems (MEMS). Although solutions for static analysis are reaching maturity the simulation of dynamic behavior is still a demanding problem. As analytical solutions for coupled-field problems are hard to be obtained, numerical methods are preferred. This work reports and evaluates different numerical strategies for the dynamic analysis of MEMS. The first approach is based on the Newmark direct integration method, modified to consider the electromechanical coupled-field effects. A second method describes the system dynamic behavior through the modal solution of an eigenvalue problem. The numerical algorithms for these two methods are implemented in our software, the MefLab++, an object oriented computer code written in C++. A third dynamic simulation is carried out with the ANSYS commercial software. Its transducer element TRANS126 is used for modeling the electrical field. The three methods are applied to simple beams and results of displacement, frequency and computational time are compared.

1. INTRODUCTION

Numerical tools for dynamic simulation are fundamental for the design of microelectromechanical sensors and actuators. As a large number of micro devices is operated at resonance, the prediction of the natural frequencies and modes is a key factor in the design phase. For coupled electromechanical systems the natural frequencies shift with increasing voltage. This characteristic turns possible for example to tune an operating frequency with an applied bias voltage [1]. Forecasting this voltage dependent frequency behavior is thus very worthy.

Different approaches to address the dynamics of MEMS have been reported in the literature. The integration in time with the Newmark method is proposed in [2]. The coupling effects are considered with the use of a relaxation algorithm and the electrical and mechanical fields are modeled, respectively, through the Boundary Element Method (BEM) and the Finite Element Method (FEM). Macromodels obtained through order reduction techniques are also an option for the dynamic analysis. A methodology to generate macromodels from three-dimensional meshed physical simulation is presented in [3]. For simple structures, the frequency shifting can be obtained through curve fitting by means of polynomial functions [4]. Eigenvalue formulations for coupled-field analysis of MEMS are addressed in [1], [5] and [6].

In this work, three numerical solutions for dynamic simulation of MEMS are described and compared. These are the Newmark method, an eigensensitivity approach and a reduced order model within ANSYS (electromechanical transducer element TRANS126). The Newmark and eigensensitivity algorithms are implemented in our software, the MefLab++. The MefLab++ is an oriented object computer code developed in C++. Insight of MefLab++ coupled-field capabilities can be found in [7], [8] and [9]. The FEM is used to model both involved domains, i.e., the electrical and mechanical.

2. ELECTROMECHANICAL COUPLING

Electromechanical coupling can be generally classified as strong and weak or, respectively, by volume and by surface. For the former there is a superposition of domains while for the latter the coupling happens through imposed boundary conditions. Details about weak and strong formulations in MEMS can be found in [10]. The objects of study in this work are electromechanical devices with coupling by surface. The interactions occur between a structure and the electrostatic pressures

generated on it by the existence on an electric field induced from a voltage application.

The distribution of electric potential in a lossless dielectric medium with embedded conductors having different voltages is given by the Laplace equation:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (1)$$

where ϕ is the electric potential.

The electrostatic surface force (pressure) acting on a conductor is

$$f_i = \frac{1}{2} \epsilon_e (\phi_{,n})^2 n_i \quad (2)$$

where ϵ_e is the dielectric constant and n_i are the components of the unit normal vector.

The mechanical behavior is described with the equilibrium equation

$$\sigma_{ij,j} - \rho_s \ddot{u}_i = F_i \quad (3)$$

where σ_{ij} is the stress tensor, ρ_s the specific mass, F_i the body forces and u_i is the displacement. The indexes i and j are 1,2 and 3. Eq. (3) is solved for Dirichlet and traction boundary conditions. For more details on the governing equations for both domains, see [7].

The electrostatic solution through Eq. (1) gives the distribution of electric potential in the medium. Then, Eq. (2) allows determining the electrical pressures that act on the structure. The structure deforms, defines new boundaries for the electrical field and the pressures have to be re-computed. The process goes until equilibrium.

3. DYNAMIC ANALYSIS PROCEDURES

The numerical tool for modeling the electrical and mechanical domains is the FEM. In MeFlab++ the domains are modeled separately and staggered strategies are employed to deal with the coupling effects. The implemented algorithms are based on the Galerkin formulation. The electrical field is discretized with linear triangular elements and the mechanical structure with linear quadrilaterals.

The discrete equation governing the dynamic response of MEMS is:

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [C]\{\dot{u}(t)\} + [K]\{u(t)\} = F_e(\phi(u,t)) \quad (4)$$

where $[M]$, $[C]$ and $[K]$ are, respectively, the mass, stiffness and damping matrixes, and t is the time. The dependence of the force F_e on the electric potential ϕ indicates the coupling of the domains.

In what follows the three investigated solutions are described.

3.1. Newmark Method

The Newmark method integrates Eq. (4) in time and allows the determination of the system time history in terms of position, velocity and acceleration. The classical algorithm [11] however needs a modification to take into account the coupling field effects [2].

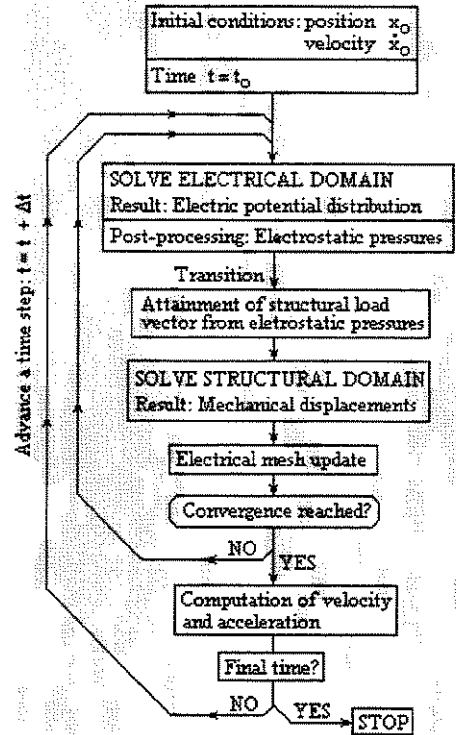


Figure 1: Newmark method

The adapted Newmark for weak electromechanical problems is sketched in Fig. (1). Firstly, initial conditions of displacement and velocity are defined. The algorithm is initialized at time t_0 . The electrical domain is solved and a post-processing gives the pressures on the surfaces of the conductor. With these pressures the structural simulation is carried out. The mechanical displacements delineate new boundaries for the electrostatic field. For each time-step, in order to consider the coupled nature of the problem, there is an internal loop to update the electrical field geometry. The internal loop ends when the displacement variation converges to a defined tolerance. Once convergence is reached, current velocity and acceleration are calculated. Next, advance one time-step and repeat the process until the final time.

Although the Newmark method is trustworthy it is numerically expensive. This is especially true for MEMS since for every time-step the coupled-field effects have to be well thought-out. The high computational effort turns it prohibitive for devices with complex geometries and requires alternative solutions.

3.2. Eigensensitivity Analysis

From the dynamic equation of finite element formulation for electrostatic field, Eq. (4), in the particular case of a vibration around the static equilibrium position, it is possible to write the displacement vector as:

$$\{u(t)\} = \{u\}_o + \{\Delta u(t)\} \quad (5)$$

where $\{u\}_o$ is the position in the equilibrium.

Neglecting the damping matrix, it is possible to calculate the i -th normal modes without the electrostatic effect by:

$$(-\omega_i^2 [M] + [K]) \{a\}_i = 0 \quad (6)$$

The mechanical displacement can be approximated by using a modal linear combination. For simple structures, like those in the microsystems of the present application, the linear combination can be limited to the first mode shape as follows:

$$\{u\} = \{u\}_o + \{a\}q \sin \omega t \quad (7)$$

where q is a generalized coordinate.

If the normal mode is scaled versus the maximum displacement thus $u_{\max} = a_{\max}$, q can be dimensionless and limited from 0 to 1.

Through Eq. (4) and the normal modes properties of orthogonality it is possible to reduce the FEM model to a single degree-of-freedom (dof) system where:

$$m = \{a\}^T [M] \{a\} \quad (8)$$

$$k = \{a\}^T [K] \{a\} \quad (9)$$

and the electrostatic force is:

$$f_e = \{a\}^T \{F_e \phi(u)\} \quad (10)$$

Then, the simple dof equation can be written as:

$$m\ddot{q} + kq = f_e \quad (11)$$

The stiffness variation due to the electrostatic effect can be computed using a small perturbation of the generalized coordinate Δq :

$$k_e = \frac{\Delta f_e}{\Delta q} = \frac{\{a\}^T (\{F_e(\phi(u_o + \Delta q \{a\}))\} - \{F_e(\phi(u_o))\})}{\Delta q} \quad (12)$$

By means of two electrostatic analysis, $F_e(\phi(u_o + \Delta q \{a\}))$ and $F_e(\phi(u_o))$ can be determined and electrostatic stiffness influence can be evaluated. The electromechanical coupled frequency can be computed through Equations (8), (9) and (12):

$$\omega = \sqrt{\frac{k - k_e}{m}} \quad (13)$$

3.3. ANSYS Reduced Order Solution

An option for electromechanical dynamic analysis in ANSYS is its transducer element TRANS126. The TRANS126 is a reduced-order model that realizes coupling through a distributed mechanical domain and a lumped electrical domain. The element has up to two degrees of freedom at each node: translation in the nodal x, y or z direction and electric potential. The TRANS126 is able to represent the capacitive response of a structure to movement in one direction.

For the simulations, the transducer elements can be constructed manually or automatically by the ANSYS macro command EMTGEN. The EMTGEN generates a set of TRANS126 elements connecting the surfaces of the conductors (structures).

For frequency behavior simulation, the routine is first to proceed with a static analysis with the option for pre-stress turned on and then perform a modal analysis. The included pre-stress is responsible for the effects of the applied voltage on the system frequency characteristic. The program outputs are mechanical displacements and eigenfrequencies with electrostatic effects incorporated.

Details for the TRANS126 element and electromechanical modal analysis in ANSYS can be found in [12] and [13].

4. NUMERICAL INVESTIGATION

The Newmark and eigensensitivity algorithms implemented in the MefLab++ and the ANSYS solutions through the TRANS126 element are compared in this section. The FEM models are built with the same number and type of elements for the structural domain. Two test cases are evaluated.

4.1. Test cases

The simulated structures are beam like microsystems. A representative scheme is shown in Fig. (2).

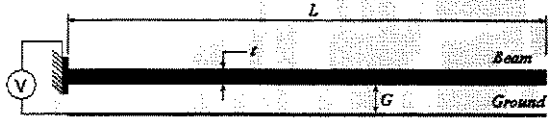


Figure 2: Microelectromechanical beam structure

The different configurations will be denoted as *Sample 1* and *Sample 2*. Table 1 shows details for each case. E is the Young Modulus, ν is the Poisson coefficient, ϵ is the dielectric permittivity and ρ is the specific mass.

Table 1: Configuration of samples

	Sample 1	Sample 2
Set-up	Clamped-Free	Clamped-Clamped
L	100.0 μm	81.0 μm
G	4.0 μm	2.2 μm
t	2.0 μm	0.5 μm
E	150GPa	130GPa
ϵ	8.854x10 pF/ μm	8.854x10 pF/ μm
ν	0.23	0.23
ρ	2330kg/m ³	2330kg/m ³

The selected structures are chosen to be compared with results from literature. *Sample 1* is reported in [14] and *Sample 2* in [1] and [6].

4.2. Numerical Results

The pull-in voltage for clamped-free beams can be computed from [15]:

$$V_{\text{Pull-in}} = \frac{4}{9L^2} \sqrt{\frac{Et^3G^3}{(1+\nu^2)\epsilon}} \quad (14)$$

Equation (5) gives $V_{\text{Pull-in}} = 127\text{V}$ for *Sample 1*. For *Sample 2*, clamped-clamped, [6] reports $V_{\text{Pull-in}} = 74\text{V}$. Dynamic operation of MEMS occurs around an equilibrium position and the system is intended not to reach pull-in. The simulations were carried out until 100v and 50v.

Mechanical displacements results are show in Table 2 and Table 3. In Fig. 3 an example of a Newmark response is sketched. The vibration occurs approximately around the static equilibrium condition. In Tables 2 and 3, the displacements in the equilibrium position, $\{u\}_0$, are compared for the three simulation strategies.

Table 2: Maximum displacement (μm) for Sample 1

Volts	U_{Newm}	U_{Eigen}	U_{ANSYS}
1	-3.5x10 ⁻⁵	-3.4x10 ⁻⁵	-3.5x10 ⁻⁵
10	-0.003	-0.003	-0.003
20	-0.014	-0.014	-0.014
40	-0.056	-0.055	-0.055
60	-0.130	-0.128	-0.124
80	-0.240	-0.236	-0.221
100	-0.397	-0.390	-0.346

Table 3: Maximum displacement (μm) for Sample 2

Volts	$U_{\text{Newm}}/2$	U_{Eigen}	U_{ANSYS}
1	-7.3x10 ⁻⁵	-7.2x10 ⁻⁵	-7.6x10 ⁻⁵
5	-0.002	-0.002	-0.002
10	-0.007	-0.007	-0.007
20	-0.030	-0.030	-0.030
30	-0.068	-0.068	-0.068
40	-0.127	-0.126	-0.121
50	-0.213	-0.209	-0.189

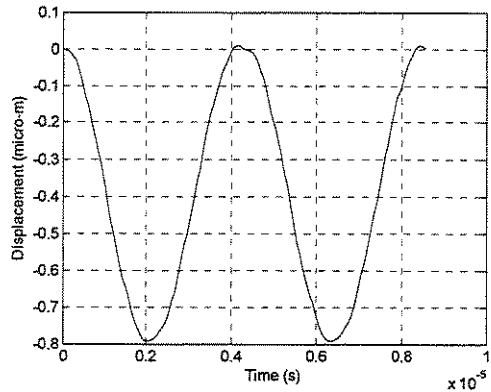


Figure 3: Newmark response for Sample 1 with 100 V

The first analytical frequency for clamped-free beams considering only the structure is given by [16]:

$$\text{Freq} = \frac{1.875^2}{L^2} \sqrt{\frac{Ewt^3}{12m}} \quad (15)$$

where w is the beam width and m is the mass. According to Eq. (6), *Sample 1* has the first mode occurring on 259.5 kHz. For clamped-clamped beams:

$$\text{Freq} = \frac{4.730^2 t}{L^2} \sqrt{\frac{E}{12\rho}} \quad (16)$$

The first mode of *Sample 2* happens on 585.1 kHz.

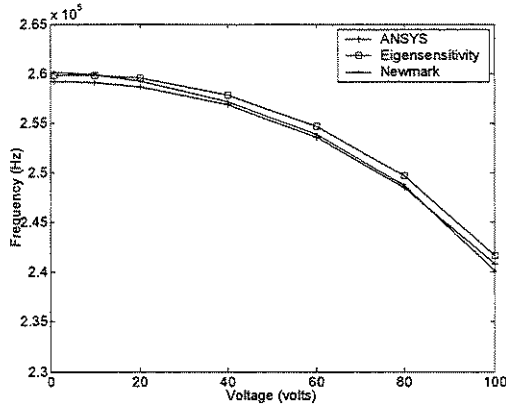


Figure 4: Frequency behavior for Sample 1

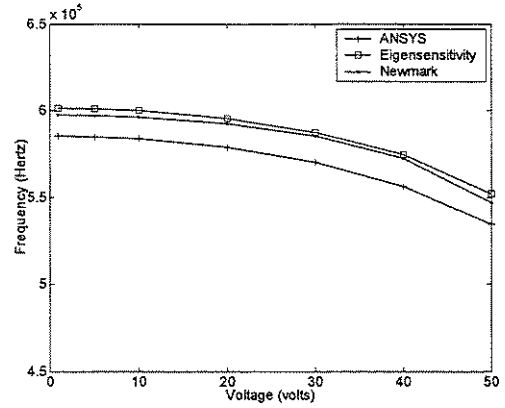


Figure 5: Frequency behavior for Sample 2

Table 4: Frequency (kHz) for Sample 1

Volts	FREQ _{Newm}	FREQ _{Eigen}	FREQ _{ANSYS}
1	260.1	259.9	259.2
10	259.9	259.8	259.1
20	259.3	259.6	258.6
40	257.2	257.8	256.8
60	253.9	254.7	253.6
80	248.7	249.7	248.5
100	240.0	241.6	240.8

Table 5: Frequency (kHz) for Sample 2

Volts	FREQ _{Newm}	FREQ _{Eigen}	FREQ _{ANSYS}
1	597.6	601.3	585.3
5	595.9	600.9	584.9
10	593.1	599.9	583.7
20	592.5	595.5	578.8
30	584.9	587.3	570.0
40	574.3	574.3	556.0
50	546.8	552.0	534.6

Tables 4 and 5 contain the resonant frequency given by each model. The shift with increasing voltage is clearly observed. Figures 4 and 5 show the frequency shift behavior for the analyzed MEMS examples.

The curves in Fig. 4 and Fig. 5 could be fitted with a polynomial equation as suggested in [4].

4.3. Results Discussion

Displacement values for the Newmark and eigenvalue methods are in good agreement. The simulations with the TRANS126 element, however, for the higher electric potentials, present lower values of displacement. The differences reach 14.7% and 12.7% for *Sample 1* with 100v, and 12.8% and 10.5% for *Sample 2* with 50v, comparing, respectively, with the Newmark and eigenvalue results.

This reduced order ANSYS model seems to underestimate the deformation since also when doing a static analysis with the macro ESSOLV in ANSYS, the maximum displacement with the same conditions is 0.386μm for *Sample 1* and 0.209μm for *Sample 2*.

The frequencies given by the three analyzed methods for *Sample 1* are fairly in accordance. The difference between the values is never larger than 0.6%. For *Sample 2*, the computation of the first structure mode with no coupling in the MefLab++ points out a frequency of 601.3kHz, which is 2.7% above the analytical one. Mesh refinement and FEM formulation for the quadrilateral element used to discretize the beam influence its stiffness and the consequence here is a slightly increase on natural frequency. Considering this, again all algorithms give similar behavior for the frequency results. The responses of the MefLab++ routines are close one to the other and have a difference about 2% to 3% with respect to the ANSYS simulation.

Computational time of the different simulation strategies has been compared in a relative manner. The faster is always the reduced order model (ANSYS) with a computational time lower than 1% of the same case with Newmark solution. The eigensensitivity algorithm shows a computational effort never larger than 3% of Newmark's time.

The strategies for dynamic analysis of MEMS presented consistent results also when compared with the data in [1] and [6].

5. CONCLUSION

Different strategies for dynamic analysis of MEMS were studied and evaluated. The Newmark method and an eigensensitivity analysis were implemented in our software MefLab++. ANSYS reduced order element TRANS126 was also tested. Two beam examples were considered, one clamped-free (*Sample 1*) and other clamped-clamped (*Sample 2*). For the frequency results the three models were in good agreement among themselves and with data in literature. The frequency shifting with increasing voltage was clearly observed in the simulated cases. Mechanical displacements obtained with MefLab++ were in accordance while the TRANS126 element appeared to underestimate the values for the higher voltages. This fact was also observed with the ANSYS ESSOLV macro for electromechanical static analysis, which gave results similar to the MefLab++ ones. The computational efforts for the eigensensitivity and reduced order analysis were much lesser than with the Newmark.

The MefLab++ algorithms and the transducer element TRANS126 in ANSYS proved to be effective for the dynamic analysis of microelectromechanical systems. Further verification is to be done with experimental measurements in simple structures under construction on our facilities.

6. REFERENCES

- [1] W.-S. Lee, K.-C. Kwon, B.-K. Kim, J.-H. Cho and S.-K. Yoon, "Frequency-Shifting Analysis of Electrostatic Tunable Micro-Mechanical Actuator," *Journal of Modeling and Simulation of Microsystems*, Vol. 2, No. 1, pp. 83-88, 2001.
- [2] F. Shi, P. Ramesh and S. Mukherjee, "Dynamic Analysis of Micro-Electro-Mechanical Systems," *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 39, pp. 4119-4139, 1996.
- [3] L.D. Gabbay, J.E. Mehner and S. Senturia, "Computer-Aided Generation of Nonlinear Reduced-Order Dynamic Macromodels - I: Non-Stress-Stiffened Case," *Journal of Microelectromechanical Systems*, Vol. 9, No. 2, pp. 262-269, June 2001.
- [4] E. Brusa, F. De Bona, A. Gugliotta, A. Somà, "Dynamic Modeling of Microbeams under Electrostatic Load," *Proc. of the Symposium on Desing, Test, Integration and Packaging of MEMS/MOEMS*, Cannes-Mandelieu, May 2003.
- [5] Y. He, J. Marchetti, C. Gallegos, F. Maseeh, "Accurate Fully-Coupled Natural Frequency Shift of MEMS Actuators due to Voltage Bias and other External Forces," *Proc. of the IEEE Int. MEMS '99 Conference*, Orlando, January 1999.
- [6] V. Rochus, D. Rixen and J.-C. Golinval, "Modeling of Electro-Mechanical Coupling Problem using the Finite Element Formulation," *Proc. of the SPIE's 10th Annual Int. Symposium on Smart Structures and Materials*, San Diego, March 2003.
- [7] C.J.v.d. Poel Filho and R. Pavanello, "Application of the Finite Element Method to Model the Problem of Electromechanical Coupling in Microsystems," *Proc. of the 17th Int. Congress of Mechanical Engineering - COBEM 2003*, São Paulo, November 2003.
- [8] C. Souto and R. Pavanello, "3D Cyclic symmetry in the analysis of a structural-acoustic system," *Proc. of the 17th Int. Congress of Mechanical Engineering - COBEM 2003*, São Paulo, November 2003.
- [9] F.I. Silva Junior, *Modelling and Computational Implementation of the Coupled Poroelasticity*, M.Sc. Thesis, State University of Campinas - UNICAMP, Campinas, August 2003.
- [10] A. Collenz, F. De Bona, A. Gugliotta and A. Somà, "Large Deflections of Beams under Electrostatic Loads," *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 14, pp. 365-373, 2004.
- [11] D.S. Malkus, M.E. Plesha and R.D. Cook, *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 3rd Edition, IE-Wiley, New York, 1989.
- [12] ANSYS Documentation, version 7.0, *Coupled-Field Analysis Guide*, ANSYS Inc. Corporate, 2002.
- [13] M. Gyimesi, D. Ostergaard, "Electro-Mechanical Transducer for MEMS Analysis in ANSYS," *Proc. of the International Conference on Modeling and Simulation of Microsystems - MSM'99*, Puerto Rico, April 1999.
- [14] A. Somà, F. De Bona, A. Gugliotta and E. Mola, "Meshing Approach in Non-Linear FEM Analysis of Microstructures under Electrostatic Load," *Proc. of the Symposium on Desing, Test, Integration and Packaging of MEMS/MOEMS*, Cannes-Mandelieu, May 2001.
- [15] I. Dufour and E. Sarraute, "Analytical Modeling of Beam Behavior under Different Actuators: Profile and Stress Expressions," *Journal of Modeling and Simulation of Microsystems*, Vol. 1, No. 1, pp. 57-64, 1999.
- [16] L. Meirovitch, *Analytical Methods in Vibrations*, The Macmillan Company, New York, 1967.