Universidade Estadual de Campinas

Faculdade de Engenharia Mecânica

Instituto de Geociências

Coeficientes de Reflexão Elásticos: Análise e Aplicações†

Valeria Grosfeld

Doutorado em Ciências e Engenharia do Petróleo

Reservatórios e Gestão

Orientador: Prof. Dr. Lúcio Tunes dos Santos

†Trabalho financiado pela FAPESP, Processo No 02/08544-5 .

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

G912c	Grosfeld, Valeria Coeficientes de reflexão elásticos: análise e aplicações / Valeria Grosfeld.--Campinas, SP: [s.n.], 2007. Orientador: Lúcio Tunes dos Santos Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica e Instituto de Geociências. 1. Ondas sísmicas. 2. Geofísica. 3. Hidrocarbonetos. I. Santos, Lúcio Tunes dos. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. II. Instituto de Geociências. IV. Título.

Título em Inglês: Elastic reflection coefficents: analysis and applications
Palavras-chave em Inglês: Reflection coefficients, Hydrocarbons indicators, Elastic parameters estimation
Área de concentração: Reservatórios e Gestão
Titulação: Doutora em Engenharia Ciências e Engenharia do Petróleo
Banca examinadora: Jesse Carvalho Costa, Liliana Alcazar Diogo, Rodrigo de Souza Portugal e Jörg Schleicher
Data da defesa: 30/01/2007
Programa de Pós-Graduação: Ciências e Engenharia de Petróleo

Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Geociências–Faculdade de Engenharia Mecânica
DEPARTAMENTO DE GEOLOGIA E RECURSOS NATURAIS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DO PETRÓLEO

Coeficientes de Reflexão Elásticos: Análise e Aplicações†

Valeria Grosfeld
Doutorado em Ciências e Engenharia do Petróleo
Reservatórios e Gestão

Orientador: Prof. Dr. Lúcio Tunes dos Santos

†Trabalho financiado pela FAPESP, Processo No 02/08544-5 .

Coeficientes de Reflexão Elásticos: Análise e Aplicações

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Valeria Grosfeld** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 30 de janeiro de 2007.

Prof. Dr. **Lúcio Tunes dos Santos**
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Lúcio Tunes dos Santos

Prof. Dr. Jesse Carvalho Costa

Prof. Dra. Liliana Alcazar Diogo

Prof. Dr. Rodrigo Portugal

Prof. Dr. Jörg Schleicher

Tese apresentada ao Departamento de Engenharia do Petróleo, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de **Doutor em Ciencias e Engenharia do Petróleo**.

“Reconhece a queda
e não desanima,
levanta, sacode a poeira
e da volta por cima”
Paulo Vanzolini
(na voz de Beth Carvalho)

Agradecimentos

Ao Lucio por me aceitar como orientanda, e me acompanhar em este longo processo de crecimento profisional e pessoal.

Ao profesor e amigo Giorgio, por sempre me apoiar e dar as caras por mim nos momentos difíceis, do fundo do meu coração GRAZIE.

A Rodrigo e Ricardo por me oferecer a sua ajuda que mais que economica foi espiritual, e também por me facilitar os softwares da Hampson and Russell, valeu.

Ao DEP por me aceitar tantas veces no Doutorado e me deixar defender a tese. Especialmente queria agradecer a Fátima e a Beth seu apoio incondicional.

A Fapesp pelo apoio financeiro. E também ao meu supervisor anónimo que aceito por duas veces meu pedido de suspensão da bolsa.

Aos colegas do IMECC por me deixar ficar no predinho como se fosse uma mais. Especialmente ao Feodor, pelo suporte técnico, a paciencia e a amizade.

Ao Ricardo por ser amigo de todas as horas e por me ajudar novamente no Doutorado, nem vou detalhar aqui todo que não daria espaço suficiente. Claro que a Débora também por seu jeito e amizade incomparáveis.

A Carol, Alessandra, Fernando e Gabriela, por me deixar ver como se sente uma irmã mais velha. Fer muito obrigada pela ajuda na impressão da tese, teria ficado louca sem vc!!!!!!

A los amigos geologos y geofísicos que no hestiaron en responder mi llamado solidario. Aguante, Emilse, Lau Chiaramonte, Verito, Marcelo y Jaime! Gracias a Juan Moirano por la invalorable ayuda con las secciones de ángulo y atributos.

A Laura y a Raul por prestarse a ser tios postizos y amigos verdaderos em estos duros años.

A Lia, Victor, Ana Luz y Carolina, vecinos y amigos, que tanto me acompañaron en los primeros pasos como mamá. Los extraño.

A Gabi Martinez por compartir tantas tardes de sabado y domingo en familia.

A los amigos de ayer y siempre que me alentaron y apoyaron para terminar. Especialmente a Yani, Lore y Yani, que siguen siendo de fierro, ahora con la familia ampliada. A Juli que siempre esta cerca para proponerme nuevos desafíos. También a mis amigos de La Plata, que como se diría en portugués: não deixaram a peteca cair, manteniéndonos en contacto con nuestras historias emociones y discusiones en la lista de mails.

A Leticia per ripartire i timori ed i alegrias della madre, dell'allievo e dell'amico. E libero che Tomasito ha un posto speciale nella mia vita.

No Lau Chaluh, no me olvide de vos, gracias por estar, siempre.

A Juan Carlos, maestro de ayer, amigo de hoy y siempre, gracias por sus consejos.

A mi familia original, viejos gracias por estar ahi, Javi y familia tambien.

A Mirko, por cada dia sorpenderme con su nobleza y por aguantar mis malhumores sobre todo este último año. Hijo te amo.

A Tomás por no dejar que desista, por alentarme permanentemente para que termine, por creer como nadie en mi capacidad, por ser amor y amigo y el mejor critico que ya tuve. Espero que sigamos transitando otros senderos juntos, ahora completamente nuevos.

Resumo

Neste trabalho estudamos os coeficientes de reflexão R_{PP} e R_{PS} para ondas elásticas. Introduzimos uma nova aproximação tipo impedância para o coeficiente R_{PS}, baseados no êxito deste tipo de aproximações para o R_{PP} na região de ângulos críticos e pós-críticos. Apesar de não ter-se mostrado tão eficiente quanto a aproximação tipo impedância de reflexão para R_{PP} na região de interesse, se comparamos nossa aproximação com algumas já existentes, o comportamento é um pouco melhor que as aproximações precedentes. Esta análise foi feita mediante uma nova metodología, baseada em curvas de desempenho de algoritmos.

Também mostramos que aproximando o coeficiente de reflexão R_{PP} por uma aproximação tipo impedância é possível obter um indicador da presença de hidrocarbonetos sem necessidade de inverter os dados. Por outro lado discutimos como, com algumas hipóteses adicionais, se podem estimar alguns parâmetros elásticos das rochas diretamente dos dados. Por último, analisamos o efeito de parte do processamento sísmico na obtenção de nossas estimações em dados sintéticos.

Abstract

In this work we are concerned with the reflection coefficients R_{PP} and R_{PS} for elastic waves. Based on the success of an impedance type approximation for the coefficient R_{PP} in the critical region, we introduce a new approximation for the coefficient R_{PS}. Although the new approximation was not so good as for the previous in the R_{PP} case, comparing our approach with the existing ones we found that its behaviour is a little better than the preceding approaches. This comparison was made using a new methodology based on performace profile curves.

Moreover, we show that, using the impedance type approximation for the reflection coefficient R_{PP}, it is possible to get an indicator that reacts to the presence of hydrocarbons without the necessity of the invert the data. We also demostrate that under suitable conditions some elastic parameters of the rocks can be estimated directly from the data. Finally, we analyse the effect of seismic processing in order to obtain our estimate in synthetic data.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Capítulo 1

Introdução

Devido ao recente sucesso dos levantamentos tridimensionais (3D), a recuperação de atributos sísmicos está se tornando mais popular. Os atributos são de muita valia para extrair informações importantes que estão escondidas nos dados. Entretanto, a maioria dos atributos disponíveis não são informações independentes, mas sim representam maneiras diferentes de apresentar uma quantidade limitada de informação básica. A chave para o sucesso está na seleção do atributo correto de acordo com o problema. Podemos citar como mais importantes os seguintes atributos sísmicos: *Velocidade*, *Tempo*, *Ângulo*, *Curvatura*, *Coerência*, *Amplitude*, *Intercepto* e *Gradiente*.

O objetivo da análise dos atributos sísmicos é não somente a modelagem das estruturas geológicas do subsolo para descobrir se elas constituem um reservatório mas também a quantificação das propriedades físicas que o caracterizam.

A análise sísmica visa extrair quantitativamente a litologia, a porosidade e o conteúdo de fluido nos poros diretamente dos dados sísmicos. A física das rochas é a base fundamental para a determinação sísmica da litologia. Além da inversão convencional após o empilhamento dos dados, a ferramenta mais importante de análise litológica sísmica é a análise de *Variação da Amplitude com o Afastamento* – AVO (do inglês, "Amplitude-Variation-with-Offset") (Tygel et al., 1999; Ross, 2000; Castagna, 2001). Cada evento sísmico tem uma resposta diferente de AVO: amplitude constante, amplitude crescente, amplitude decrescente, reversão de fase, etc. O que faz a técnica de AVO ser amplamente utilizada é a capacidade de separar os contrastes de parâmetros elásticos, os quais podem ser utilizados para identificar a saturação de hidrocarbonetos e a porosidade (Rutherford and Williams, 1989; Castagna and Smith, 1994).

A curva de AVO dá a medida da amplitude da onda sísmica refletida num ponto em profundidade para traços com afastamentos (distância da fonte ao geofone) diferentes, desde muito pequenos até muito grandes. Esta variação dependente do ângulo de incidência, é descrita exatamente pelas equações de Zoeppritz para ondas planas incidentes numa fronteira separando dois meios elásticos. Estas equações predizem a relação desta variação com as mudanças nas velocidades e densidades do meio. Porém, via de regra, aproximações dessas equações tem sido utilizadas, sendo a linearização de Shuey (1985) a mais comum, que utiliza ângulos de incidência considerados baixos.

Na década passada, a análise dos dados sísmicos foi estendida para incluir dados com afastamentos longos, cuja razão afastamento-profundidade – O/D (do inglês, "Offset-to-Depth", afastamento sobre profundidade) as vezes excede dois. Em adição à maior abertura para o imageamento e à análise de AVO, a introdução dos afastamentos muito longos criou novos desafios tais como, por exemplo, manipulação de tempos de trânsito não necessariamente hiperbólicos na construção das curvas AVO, inadequação das aproximações de Zoeppritz e o efeito do ângulo de incidência pós-crítico. A comunidade de exploração tem pouca experiência em lidar com afastamentos longos porque historicamente esses dados tem sido eliminados do processamento. Alguns trabalhos recentes tentam driblar este último empecilho, trazendo resultados alentadores (Perroud and Tygel, 2004).

Mesmo utilizando fórmulas mais abrangentes, recentemente introduzidas na literatura para os tempos de trânsito (Douma and Calvert, 2006; Ursin and Stovas, 2006), para a análise das amplitudes a dificuldade persiste, pois as aproximações das equações de Zoeppritz geralmente assumem contrastes pequenos nos parâmetros elásticos e variações pequenas no ângulo de incidência, e falham perto do ângulo crítico (Castagna et al., 1998). No entanto, nos últimos anos tem se desenvolvido novas fórmulas para o coeficiente de reflexão R_{PP} (onda P, longitudinal, incidente e refletida) que aproximam bastante bem na região crítica (Connolly, 1999; Santos and Tygel, 2004; Pan et al., 2005).

Uma etapa fundamental na caracterização de reservatórios é a inversão dos parâmetros, considerando estas aproximações, para estimar os parâmetros físicos desejados. Nesta direção se encaminham os trabalhos, entre outros, de Smith and Gidlow (1987) e Goodway et al. (1999). Outra alternativa é tentar obter alguns parâmetros diretamente dos dados (Whitcombe et al., 2002).

Também na última década surgiu um real interesse pelas ondas convertidas P-S (onda P incidente e S, transversal, refletida), devido as novas tecnologias de aquisição dos dados sísmicos. Por isso o caminho desenvolvido para as ondas P-P se repete nestas ondas. Isto é, tentar achar melhores aproximações para o coeficiente de reflexão R_{PS}, (Ramos and Castagna, 2001; Duffaut et al., 2000), e utilizar estas fórmulas para inversão (Veire and Landro, 2006).

Nosso trabalho começa com um estudo detalhado das aproximações tipo impedância para o coeficiente de reflexão R_{PP} no Capítulo 2, em especial da aproximação tipo impedância de reflexão. No mesmo capítulo introduzimos uma nova aproximação tipo impedância para o coeficiente R_{PS} (Davolio et al., 2006). Também apresentamos uma nova metodologia para a comparação das aproximações: adaptamos para os erros uma ferramenta de avaliação de desempenho de métodos numéricos utilizada na otimização matemática.

No Capítulo 3 mostramos como são utilizadas as aproximações do coeficiente R_{PP} para encontrar indicadores na presença de hidrocarbonetos. Definimos um novo indicador baseado na aproximação tipo impedância que extraímos diretamente dos dados (Grosfeld and Santos, 2005a).

Inspirados no trabalho de Whitcombe et al. (2002), mostramos no Capítulo 4, como é possível estimar alguns parâmetros elásticos diretamente dos coeficientes de reflexão R_{PP} e R_{PS} considerando que o coeficiente de reflexão admita uma aproximação tipo impedância, sem necessidade de inversão (Grosfeld and Santos, 2005b).

Por fim, no Capítulo 5 mostramos como o processamento sísmico afeta o resultado final das estimações através de exemplos sintéticos.

Capítulo 2

Coeficientes de Reflexão para Ondas Sísmicas

Neste capítulo discutimos os coeficientes de reflexão R_{PP} e R_{PS} de uma onda sísmica e algumas de suas aproximações.

Consideramos uma onda longitudinal P incidente se propagando num semi-espaço e que reflete numa superfície suave, gerando (no caso de incidência não normal) uma onda longitudinal P refletida, uma onda transversal S refletida, uma onda longitudinal P transmitida e uma onda transversal S transmitida. Os coeficientes de reflexão e transmissão respectivos (R_{PP}, R_{PS}, T_{PP} e T_{PS}) representam a relação entre as amplitudes da onda incidente e de cada uma das geradas. Exibimos neste capítulo os coeficientes de reflexão R_{PP} e R_{PS} exatos e suas aproximações mais conhecidas. No caso do coeficiente de reflexão R_{PP} fazemos uma análise detalhada da aproximação tipo impedância, em particular da impedância de reflexão. Para o coeficiente de reflexão R_{PS} apresentamos uma nova aproximação tipo impedância. Também apresentamos uma nova metodologia de comparar erros, de maneira a poder decidir qual aproximação para R_{PS} é melhor sucedida.

2.1 Equações de Knott-Zoeppritz

Os coeficientes de reflexão e transmissão para ondas planas incidindo em uma superfície plana que divide dois semi-espaços elásticos foram derivados primeiramente por Knott (1899) e Zoeppritz (1919). Assumindo continuidade nas componentes normais e transversais à superfície de incidência do deslocamento e da tração, os coeficientes de reflexão R_{PP} e R_{PS} se escrevem em função das velocidades das ondas P e S (α e β, respectivamente), da densidade

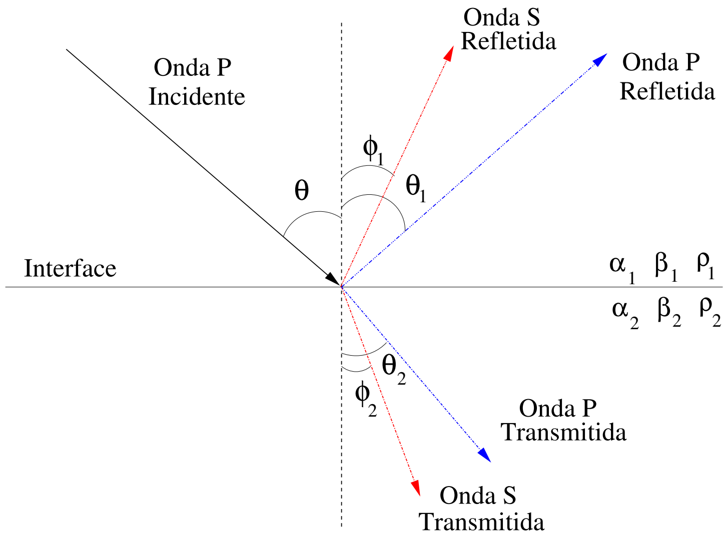


Figura 2.1: Incidência de onda plana P em superfície plana gerando ondas planas P e S transmitidas e ondas P e S refletidas.

(ρ) e da vagarosidade ou parâmetro de raio p, definido pela Lei de Snell como,

$$p = \frac{\sin\theta}{\alpha_1} = \frac{\sin\theta_1}{\alpha_1} = \frac{\sin\theta_2}{\alpha_2} = \frac{\sin\phi_1}{\beta_1} = \frac{\sin\phi_2}{\beta_2}, \tag{2.1}$$

onde θ, θ_1, θ_2, ϕ_1 e ϕ_2 são os ângulos descritos na Figura 2.1. Pela equação (2.1) é claro que $\theta_1 = \theta$. Os coeficientes R_{PP} e R_{PS} se expressam como,

$$R_{PP} = \frac{A+B-C-D+E-F}{A+B+C+D+E+F} \tag{2.2}$$

e

$$R_{PS} = \frac{-(G+H)}{A+B+C+D+E+F}, \tag{2.3}$$

com

$$\begin{aligned} A = q^2p^2P_1Q_1P_2Q_2, \quad B = \rho_1\rho_2\beta_1\alpha_2P_1Q_2, \quad C = \rho_1\rho_2\alpha_1\beta_2P_2Q_1, \\ D = \alpha_1\beta_1P_2Q_2Y^2, \quad E = \alpha_2\beta_2P_1Q_1X^2, \quad F = \alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2p^2Z^2, \\ G = 2\alpha_1pqP_1P_2Q_2Y \quad \text{e} \quad H = 2\alpha_1\alpha_2\beta_2pP_1XZ, \end{aligned} \tag{2.4}$$

onde

$$q = 2(\rho_2\beta_2^2 - \rho_1\beta_1^2), \quad X = \rho_2 - qp^2, \quad Y = \rho_1 + qp^2, \quad Z = \rho_2 - \rho_1 - qp^2, \tag{2.5}$$

e

$$
\begin{aligned}
P_1 &= \sqrt{1-\alpha_1^2 p^2} = \cos\theta_1, \qquad Q_1 = \sqrt{1-\beta_1^2 p^2} = \cos\phi_1, \\
P_2 &= \sqrt{1-\alpha_2^2 p^2} = \cos\theta_2, \qquad Q_2 = \sqrt{1-\beta_2^2 p^2} = \cos\phi_2.
\end{aligned} \tag{2.6}
$$

No caso de duas camadas acústicas, isto é, $\beta_1 = \beta_2 = 0$ e, portanto, sem propagação de ondas transversais S, a equação (2.2) se reduz, depois de algumas manipulações algébricas, a

$$R_{PP} = \frac{AI_2 \sec\theta_2 - AI_1 \sec\theta_1}{AI_2 \sec\theta_2 + AI_1 \sec\theta_1} \tag{2.7}$$

onde $AI_i = \alpha_i \rho_i$, $i = 1, 2$, é chamada impedância acústica.

Quando a incidência é normal ($\theta_1 = \theta_2 = 0$) o coeficiente de reflexão da onda P-P (caso acústico ou elástico) é dado por,

$$R_{PP} = \frac{AI_2 - AI_1}{AI_2 + AI_1}. \tag{2.8}$$

Note que tanto no caso acústico como no caso de incidência normal o coeficiente de reflexão R_{PP} pode ser escrito como o quociente da diferença entre uma função computada no meio 2 e no meio 1 dividida pela soma desses valores. Isto será fundamental para a construção das aproximações tipo impedância. Para o coeficiente de reflexão R_{PS} não se tem um caso simples ou particular para simplificar a expressão.

Como é possível observar, as equações (2.2) e (2.3) são difíceis de manipular e também é quase impossível prever como mudanças nos contrastes dos parâmetros elásticos afetam os coeficientes de reflexão. Por isto diferentes aproximações foram propostas no passado. São extremamente úteis para aplicações práticas e revelam rapidamente a informação contida no comportamento das amplitudes, e são a base das técnicas conhecidas como análise de AVO (do inglês, *Amplitude Variation with Offset*). Mostraremos, nas seções seguintes, uma aproximação baseada em série de Taylor e duas aproximações baseadas no conceito de impedância.

2.2 Aproximações Baseadas em Série de Taylor

Bortfeld (1961) foi o primeiro a linearizar as equações de Zoeppritz sob a hipótese de contraste fraco para os parâmetros elásticos, mas foram as fórmulas de Aki and Richards (1980) que ficaram famosas e mais citadas na literatura. Vamos mostrar a seguir uma dedução para tais equações utilizando o desenvolvimento de Taylor de primeira ordem nos contrastes, unicamente para R_{PP} (o caso do coeficiente de reflexão P-S é similar). Temos que considerar que os parâmetros elásticos entre as duas interfaces variam suavemente, ou seja, podemos escrever

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha - \Delta\alpha/2, \qquad \beta_1 = \beta - \Delta\beta/2, \qquad \rho_1 = \rho - \Delta\rho/2, \\ \alpha_2 &= \alpha + \Delta\alpha/2, \qquad \beta_2 = \beta + \Delta\beta/2, \qquad \rho_2 = \rho - \Delta\rho/2, \end{aligned} \tag{2.9}$$

onde u é a média aritmética entre u_1 e u_2 e $\Delta u = u_2 - u_1$, para $u = \alpha, \beta, \rho$.

Considerando os vetores $x = (\alpha, \beta, \rho)$ e $y = (\Delta\alpha, \Delta\beta, \Delta\rho)$ podemos inserir as expressões (2.9) nas equações (2.2)-(2.6) e definir R_{PP} como uma função de x e y,

$$R_{PP} = R(\alpha, \beta, \rho, \Delta\alpha, \Delta\beta, \Delta\rho) = R_{PP}(x, y). \tag{2.10}$$

O desenvolvimento de Taylor de primeira ordem na variável y ao redor de $y = 0$ é dado por

$$R_{PP} \approx R_{PP}(x, 0) + \nabla_y \, R_{PP}(x, 0) \, \cdot \, y, \tag{2.11}$$

onde ∇ denota a função gradiente e $\cdot$ denota o produto escalar canônico.É fácil ver que

$$R_{PP}(x, 0) = 0, \tag{2.12}$$

uma vez que se os contrastes são nulos não há reflexão. Resta obter o gradiente

$$\nabla_y R_{PP}(x, 0) = \left(\frac{\partial R_{PP}}{\partial \Delta\alpha}, \frac{\partial R_{PP}}{\partial \Delta\beta}, \frac{\partial R_{PP}}{\partial \Delta\rho} \right) \Bigg|_{y=0}. \tag{2.13}$$

Calcularemos a primeira derivada (com respeito a $\Delta\alpha$) sendo que as outras são obtidas de maneira análoga. Por definição,

$$\frac{\partial R_{PP}}{\partial \Delta\alpha}\bigg|_{y=0} = \lim_{\Delta\alpha \to 0} \frac{R_{PP}(x, \Delta\alpha, 0, 0) - R_{PP}(x, 0, 0, 0)}{\Delta\alpha} = \lim_{\Delta\alpha \to 0} \frac{R_{PP}(x, \Delta\alpha, 0, 0)}{\Delta\alpha}. \tag{2.14}$$

Chamando f e g ao numerador e ao denominador respectivamente na equação (2.2), temos que $R_{PP}(x, \Delta\alpha, 0, 0) = f(x, \Delta\alpha, 0, 0)/g(x, \Delta\alpha, 0, 0)$. Para $\Delta\alpha = 0$, $f(x, 0, 0, 0) = 0$ e $g(x, 0, 0, 0) \neq 0$. Podemos utilizar a regra de L'Hôpital para calcular o limite em (2.14),

$$\lim_{\Delta\alpha \to 0} \frac{R_{PP}(x, \Delta\alpha, 0, 0)}{\Delta\alpha} = \lim_{\Delta\alpha \to 0} \frac{f(x, \Delta\alpha, 0, 0)}{\Delta\alpha g(x, \Delta\alpha, 0, 0)} = \frac{\partial f}{\partial \Delta\alpha}(x, 0, 0, 0) \frac{1}{g(x, 0, 0, 0)}. \tag{2.15}$$

Desta última equação deduzimos que para calcular as três derivadas parciais em (2.13) precisamos de

$$g(x,0,0,0), \quad \frac{\partial f}{\partial \Delta\alpha}(x,0,0,0), \quad \frac{\partial f}{\partial \Delta\beta}(x,0,0,0) \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial \Delta\rho}(x,0,0,0). \tag{2.16}$$

Após manipulações algébricas,

$$\begin{aligned}
g(x,0,0,0) &= 4\alpha\beta\rho^2\sqrt{1-\alpha^2p^2}\sqrt{1-\beta^2p^2}, \\
\frac{\partial f}{\partial \Delta\alpha}(x,0,0,0) &= 2\beta\rho^2\frac{\sqrt{1-\beta^2p^2}}{\sqrt{1-\alpha^2p^2}}, \\
\frac{\partial f}{\partial \Delta\beta}(x,0,0,0) &= -8\alpha\beta^2\rho^2p^2\sqrt{1-\alpha^2p^2}\sqrt{1-\beta^2p^2} \quad \text{e} \\
\frac{\partial f}{\partial \Delta\rho}(x,0,0,0) &= 2\alpha\beta\rho\sqrt{1-\alpha^2p^2}\sqrt{1-\beta^2p^2}(1-4\beta^2p^2).
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Portanto, a aproximação baseada em série de Taylor do coeficiente de reflexão P-P é dada por

$$R_{PP} \approx \frac{1}{2}\left[1-4\beta^2p^2\right]\frac{\Delta\rho}{\rho} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-\alpha^2p^2}\frac{\Delta\alpha}{\alpha} - 4\beta^2p^2\frac{\Delta\beta}{\beta}. \tag{2.18}$$

Para escrever esta aproximação em função dos ângulos também temos que aproximar p como,

$$p \approx \frac{\sin\theta}{\alpha}, \tag{2.19}$$

onde θ é a média de θ_1 e θ_2. Assim a equação (2.18) fica,

$$R_{PP} \approx \frac{1}{2}\left[1-4\frac{\beta^2}{\alpha^2}\sin^2\theta\right]\frac{\Delta\rho}{\rho} + \frac{1}{2}\sec^2\theta\frac{\Delta\alpha}{\alpha} - 4\frac{\beta^2}{\alpha^2}\sin^2\theta\frac{\Delta\beta}{\beta}. \tag{2.20}$$

No caso do coeficiente de reflexão da onda P-S podemos utilizar as mesmas argumentações. Conseqüentemente, podemos aproximar R_{PS} por,

$$R_{PS} \approx R_{PS}(x,0) + \nabla_y\, R_{PS}(x,0)\ \cdot\ y. \tag{2.21}$$

Na equação (2.3) o numerador se anula quando $y=0$, logo, $R_{PS}(x,0)=0$. Só resta calcular o gradiente na equação (2.21), escrevendo $R_{PS}(x,y)=h(x,y)/g(x,y)$, já que o denominador na equação (2.3) e igual ao da equação (2.2). Fazendo os cálculos análogos as equações (2.13)–(2.15), resta calcular

$$g(x,0,0,0), \quad \frac{\partial h}{\partial \Delta\alpha}(x,0,0,0), \quad \frac{\partial h}{\partial \Delta\beta}(x,0,0,0) \quad \text{e} \quad \frac{\partial h}{\partial \Delta\rho}(x,0,0,0). \tag{2.22}$$

Após manipulações algébricas,

$$\begin{aligned}
g(x,0,0,0) &= 4\alpha\beta\rho^2\sqrt{1-\alpha^2p^2}\sqrt{1-\beta^2p^2},\\
\frac{\partial h}{\partial\Delta\alpha}(x,0,0,0) &= 0,\\
\frac{\partial h}{\partial\Delta\beta}(x,0,0,0) &= 16\alpha\beta\rho^2p\sqrt{1-\alpha^2p^2}(\sqrt{1-\alpha^2p^2}\sqrt{1-\beta^2p^2}-\alpha\beta p^2)\quad \text{e}\\
\frac{\partial h}{\partial\Delta\rho}(x,0,0,0) &= -4\alpha\rho\beta p\sqrt{1-\alpha^2p^2}\Big[2\beta\sqrt{1-\alpha^2p^2}\sqrt{1-\beta^2p^2}-\alpha(1-2\beta^2p^2)\Big].
\end{aligned}\tag{2.23}$$

A aproximação de primeira ordem do coeficiente de reflexão R_{PS}, é então dada por,

$$\begin{aligned}
R_{PS} \approx \frac{-p\alpha}{2\sqrt{1-\beta^2p^2}}\Bigg[&\left(1-2\beta^2p^2+2\beta^2\frac{\sqrt{1-\alpha^2p^2}}{\alpha}\frac{\sqrt{1-\beta^2p^2}}{\beta}\right)\frac{\Delta\rho}{\rho}-\\
&-\left(4\beta^2p^2-4\beta^2\frac{\sqrt{1-\alpha^2p^2}}{\alpha}\frac{\sqrt{1-\beta^2p^2}}{\beta}\right)\frac{\Delta\beta}{\beta}\Bigg].
\end{aligned}\tag{2.24}$$

Neste caso, para escrever a aproximação em função dos ângulos temos que considerar também os ângulos da onda S na definição do parâmetro p, equação (2.19),

$$p \approx \frac{\sin\theta}{\alpha} = \frac{\sin\phi}{\beta},\tag{2.25}$$

onde ϕ é a média de ϕ_1 e ϕ_2. Logo, a aproximação (2.24) se torna,

$$\begin{aligned}
R_{PS} \approx \frac{-\sin\theta}{2\cos\phi}\Bigg[&\left(1-2\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{\beta}{\alpha}\sin^2\theta-\cos\theta\cos\phi\right)\right)\frac{\Delta\rho}{\rho}-\\
&-4\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{\beta}{\alpha}\sin^2\theta-\cos\theta\cos\phi\right)\frac{\Delta\beta}{\beta}\Bigg].
\end{aligned}\tag{2.26}$$

Outras formas lineares baseadas em Séries de Taylor podem ser encontradas, por exemplo, em Aki and Richards (1980), Tjåland (1993) e Ramos and Castagna (2001). Algumas das aproximações para R_{PP} serão apresentadas neste Capítulo.

2.3 Aproximações Tipo Impedância

Uma nova abordagem surgiu nos últimos anos para aproximar os coeficientes de reflexão R_{PP} e R_{PS}. A idéia original, desenvolvida por Connolly (1999) para o coeficiente R_{PP}, é encontrar uma função impedância I tal que possamos aproximar o coeficiente de reflexão como,

$$R_{PP} \approx \frac{I(\alpha_2, \beta_2, \rho_2, p) - I(\alpha_1, \beta_1, \rho_1, p)}{I(\alpha_2, \beta_2, \rho_2, p) + I(\alpha_1, \beta_1, \rho_1, p)} = \frac{I_2 - I_1}{I_2 + I_1}, \tag{2.27}$$

onde os índices 1 e 2 fazem referência ao meio de incidência e de transmissão, respectivamente. Note que no caso acústico, ou no caso de incidência normal, o coeficiente de reflexão R_{PP} tem exatamente a forma da equação (2.27) com a função $I = AI \sec\theta$ no caso acústico, equação (2.7), ou $I = AI$ no caso da incidência normal, equação (2.8).

Santos and Tygel (2004) generalizaram o trabalho de Connolly, trabalhando com a função refletividade, chegando a uma equação diferencial parcial, cuja solução é a função impedância como veremos a seguir.

A função refletividade pode ser entendida como uma média da variação do coeficiente de reflexão na vizinhança do ponto de reflexão. Para poder expressá-la, consideramos as variáveis elásticas e o ângulo de incidência como função de um único parâmetro s perto do ponto de incidência. Tomando um pequeno incremento Δs as variáveis são reescritas como,

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \alpha(s - \Delta s/2), \;\; \beta_1 = \beta(s - \Delta s/2), \;\; \rho_1 = \rho(s - \Delta s/2), \;\; \theta_1 = \theta(s - \Delta s/2), \\ \alpha_2 = \alpha(s + \Delta s/2), \;\; \beta_2 = \beta(s + \Delta s/2), \;\; \rho_2 = \rho(s + \Delta s/2), \;\; \text{e} \;\; \theta_2 = \theta(s + \Delta s/2). \end{aligned} \tag{2.28}$$

Utilizando a Lei de Snell, equação (2.1), deve-se ter o cuidado ao reescrever o parâmetro de raio p,

$$p = \frac{\sin\theta(s - \Delta s/2)}{\alpha(s - \Delta s/2)} = \frac{\sin\theta(s)}{\alpha(s)} = \frac{\sin\theta(s + \Delta s/2)}{\alpha(s + \Delta s/2)}. \tag{2.29}$$

A função refletividade é descrita por,

$$\mathcal{R}(s) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{R_{PP}(x(s), x(s + \Delta s/2) - x(s - \Delta s/2))}{\Delta s}, \tag{2.30}$$

onde x é o mesmo que em (2.10), e, assim,

$$\mathcal{R}(s) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{R_{PP}(x(s), x(s + \Delta s/2) - x(s - \Delta s/2)) - R_{PP}(x(s), 0)}{\Delta s} = \nabla_y R_{PP} \cdot \frac{dx}{ds}. \tag{2.31}$$

Portanto, considerando os cálculos feitos anteriormente para a aproximação de Taylor, equações (2.14) – (2.17), e que $x' = (\alpha', \beta', \rho')$ se obtém,

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2}\left[1 - 4\beta^2 p^2\right]\frac{\rho'}{\rho} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1 - \alpha^2 p^2}\right]\frac{\alpha'}{\alpha} - 4\beta^2 p^2 \frac{\beta'}{\beta}. \tag{2.32}$$

onde $'$ indicam as derivadas com relação a s. Levando em conta a definição de refletividade, equação (2.30) podemos aproximar o coeficiente de reflexão como,

$$R_{PP} \approx \mathcal{R}(s)\Delta s, \tag{2.33}$$

e aproximando as derivadas exatas pelas derivadas discretas em (2.32), $u' \approx \Delta u/\Delta s$, é obtida a aproximação linear (2.18).

Por outro lado, utilizando a equação (2.27), a refletividade pode ser escrita como,

$$\mathcal{R}(s) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{1}{\Delta s} \frac{I(s+\Delta s/2) - I(s-\Delta s/2)}{I(s+\Delta s/2) + I(s-\Delta s/2)} = \frac{1}{2}\frac{I'(s)}{I(s)}. \tag{2.34}$$

Igualando (2.32) e (2.34) se chega a uma equação diferencial para I

$$\frac{I'}{I} = \left[1 - 4\beta^2 p^2\right] \frac{\rho'}{\rho} + \left[\frac{1}{1-\alpha^2 p^2}\right] \frac{\alpha'}{\alpha} - 8\left[\beta^2 p^2\right] \frac{\beta'}{\beta}. \tag{2.35}$$

A solução desta equação diferencial proverá as diferentes aproximações tipo impedância para R_{PP}.

No caso da onda P-S não se tem os casos particulares acústico e de incidência normal da onda P-P, porém, é possível matematicamente procurar uma função L tal que o coeficiente de reflexão R_{PS} seja aproximado por

$$R_{PS} \approx \frac{L(\alpha_2, \beta_2, \rho_2, p) - L(\alpha_1, \beta_1, \rho_1, p)}{L(\alpha_2, \beta_2, \rho_2, p) + L(\alpha_1, \beta_1, \rho_1, p)} = \frac{L_2 - L_1}{L_2 + L_1}. \tag{2.36}$$

Neste caso, temos que considerar também que

$$\phi_1 = \phi(s - \Delta s/2) \quad \text{e} \quad \phi_2 = \phi(s + \Delta s/2), \tag{2.37}$$

e, portanto, o parâmetro do raio, equação (2.29) é dado por,

$$p \approx \frac{\sin\theta(s)}{\alpha(s)} = \frac{\sin\phi(s)}{\beta(s)}. \tag{2.38}$$

Analogamente ao caso P-P, equações (2.27) e (2.34), e considerando as derivadas calculadas em (2.23) para a aproximação de Taylor de R_{PS} se estabelece uma equação diferencial para

L,

$$\frac{L'}{L} = \frac{p\alpha}{\sqrt{1-\beta^2p^2}} \left[\left(-1 + 2\beta^2p^2 - 2\beta^2 \frac{\sqrt{1-\alpha^2p^2}}{\alpha} \frac{\sqrt{1-\beta^2p^2}}{\beta} \right) \frac{\rho'}{\rho} + \right.$$

$$\left. + \left(4\beta^2p^2 - 4\beta^2 \frac{\sqrt{1-\alpha^2p^2}}{\alpha} \frac{\sqrt{1-\beta^2p^2}}{\beta} \right) \frac{\beta'}{\beta} \right]. \tag{2.39}$$

Desta equação resultam as diferentes aproximações de tipo impedância. Novamente aproximando as derivadas exatas pelas derivadas discretas se obtém a aproximação linear (2.24).

2.3.1 Impedância Elástica

Considerando a Lei de Snell, equação (2.29), e escrevendo $K = \beta/\alpha$, a equação (2.35) se torna

$$\frac{I'}{I} = \left[1 - 4K^2 \sin^2\theta\right] \frac{\rho'}{\rho} + \sec^2\theta \frac{\alpha'}{\alpha} - 8\left[K^2 \sin^2\theta\right] \frac{\beta'}{\beta}. \tag{2.40}$$

A função *Impedância Elástica (EI)* obtida por Connolly (1999) se obtêm de resolver esta equação, considerando θ e K constantes através da interface refletora. A hipótese do ângulo viola a própria a Lei de Snell. Integrando a equação (2.40) sob estas hipóteses, obtemos,

$$EI = C_{EI} \;\; \rho^{1-4K^2\sin^2\theta} \alpha^{\sec^2\theta} \; \beta^{-8K^2\sin^2\theta}, \tag{2.41}$$

onde C_{EI} é uma constante de normalização, veja por exemplo (Whitcombe, 2002).

González et al. (2002) introduziram a *PS Impedância Elástica (PSEI)* que é a solução de (2.39) considerando novamente θ e K constantes,

$$PSEI = \rho^c \; \beta^d \tag{2.42}$$

sendo

$$\begin{aligned} c &= \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-K^2\sin^2\theta}} \left[2K^2\sin^2\theta - 1 - 2K\cos\theta\sqrt{1-K^2\sin^2\theta} \right] \quad \text{e} \\ d &= \frac{4\sin\theta}{\sqrt{1-K^2\sin^2\theta}} \left[K^2\sin^2\theta - K\cos\theta\sqrt{1-K^2\sin^2\theta} \right]. \end{aligned} \tag{2.43}$$

2.3.2 Impedância de Reflexão

Para obter a função *Impedância de Reflexão* obtida por Santos e Tygel (2004), supomos que (2.35) admite uma solução do tipo $I = I(\alpha(s), \beta(s), \rho(s), p)$, sendo p constante. Fazendo isto, o diferencial total de I com respeito a s é dado por

$$I^{'} = \frac{\partial I}{\partial \rho}\rho^{'} + \frac{\partial I}{\partial \alpha}\alpha^{'} + \frac{\partial I}{\partial \beta}\beta^{'} \tag{2.44}$$

Substituindo esta expressão em (2.35) se conclui que, esta última admite solução se as três equações diferenciais parciais

$$\begin{aligned} \frac{1}{I}\frac{\partial I}{\partial \rho} &= \frac{1 - 4\beta^2 p^2}{\rho}, \\ \frac{1}{I}\frac{\partial I}{\partial \alpha} &= \frac{1}{\alpha(1 - \alpha^2 p^2)}, \\ \frac{1}{I}\frac{\partial I}{\partial \beta} &= -8\beta p^2, \end{aligned} \tag{2.45}$$

se satisfazem simultaneamente. Integrando a última equação de (2.45) com respeito β temos que

$$I = G(\alpha, \rho)\exp(-4\beta^2 p^2) \tag{2.46}$$

onde $G(\alpha, \rho)$ é uma função a ser determinada. Introduzindo (2.46) nas duas primeiras equações de (2.45) são obtidas as relações

$$\frac{1}{G}\frac{\partial G}{\partial \rho} = \frac{1 - 4\beta^2 p^2}{\rho} \quad \text{e} \quad \frac{1}{G}\frac{\partial G}{\partial \alpha} = \frac{1}{\alpha(1 - \alpha^2 p^2)}. \tag{2.47}$$

A equação referente à derivada com respeito a α pode ser integrada fornecendo

$$G = H(\rho)\frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2 p^2}}. \tag{2.48}$$

onde H é uma função a ser determinada. Porém, ao substituir (2.48) na primeira equação de (2.47) chegamos a

$$\frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial \rho} = \frac{1 - 4\beta^2 p^2}{\rho}. \tag{2.49}$$

Note que o lado esquerdo desta equação depende somente de ρ enquanto o lado direito depende de ρ e de β. Portanto a função I não tem a forma esperada. Para contornar este problema supomos que ρ e β tenham uma relação funcional, isto é, $\beta = \beta(\rho)$. Agora sim, a equação (2.49) pode ser integrada em ρ e

$$H = C_0 \, \rho \exp\left\{-4p^2 \int \frac{\beta^2}{\rho} d\rho\right\}, \tag{2.50}$$

sendo C_0 uma constante de integração. Juntando (2.46), (2.48) e (2.50), uma solução de (2.35), é então dada por

$$I = C_0 \, \frac{\rho\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2p^2}} \exp\left\{-4p^2\left[\beta^2 + \int \frac{\beta^2}{\rho} d\rho\right]\right\}. \tag{2.51}$$

Se retornamos à equação (2.35) e substituímos nesta equação a relação entre β e ρ o resultado é o mesmo. É importante ressaltar que a impedância de reflexão (2.51) se reduz ao valor correto para $\beta = 0$, equação (2.7), e também na incidência normal $p = 0$, equação (2.8). A aproximação (2.41) só se reduz ao valor correto no caso acústico.

Para estabelecer uma impedância de reflexão análoga para o coeficiente de reflexão da onda P-S proposta neste trabalho, procuramos uma função $L = L(\alpha(s), \beta(s), \rho(s), p)$ que seja solução de (2.39). O seguinte sistema de equações é estabelecido,

$$\begin{aligned} \frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial \rho} &= \frac{\alpha p}{\rho\sqrt{1-\beta^2p^2}}\left(-1 + 2\beta^2p^2 - 2\beta^2\frac{\sqrt{1-\alpha^2p^2}}{\alpha}\frac{\sqrt{1-\beta^2p^2}}{\beta}\right) \\ \frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial \beta} &= \frac{\alpha p}{\beta\sqrt{1-\beta^2p^2}}\left(4\beta^2p^2 - 4\beta^2\frac{\sqrt{1-\alpha^2p^2}}{\alpha}\frac{\sqrt{1-\beta^2p^2}}{\beta}\right). \end{aligned} \tag{2.52}$$

Para integrar a equação referente a β vemos que o lado direito da segunda equação de (2.52) depende de α, portanto para poder continuar supomos uma relação entre α e β, isto é, $\alpha = \alpha(\beta)$, obtemos,

$$L = N(\rho) \exp\left\{\int \frac{\alpha p}{\beta\sqrt{1-\beta^2p^2}}\left(4\beta^2p^2 - 4\beta^2\frac{\sqrt{1-\alpha^2p^2}}{\alpha}\frac{\sqrt{1-\beta^2p^2}}{\beta}\right)d\beta\right\}, \tag{2.53}$$

onde N é uma função a ser determinada. Substituindo este resultado na primeira equação de (2.52) chegamos a

$$\frac{1}{N}\frac{\partial N}{\partial \rho} = \frac{\alpha p}{\rho\sqrt{1-\beta^2p^2}}\left(-1 + 2\beta^2p^2 - 2\beta^2\frac{\sqrt{1-\alpha^2p^2}}{\alpha}\frac{\sqrt{1-\beta^2p^2}}{\beta}\right) \tag{2.54}$$

onde observamos que o lado direito depende de ρ e β enquanto o esquerdo só de ρ, novamente devemos supor uma relação funcional entre ρ e β, integrando obtemos a função L como

$$L = \exp\left\{\int \frac{2\alpha p}{\sqrt{1-\beta^2p^2}}\left[\left(\beta^2p^2 - \beta^2\frac{\sqrt{1-\alpha^2p^2}}{\alpha}\frac{\sqrt{1-\beta^2p^2}}{\beta}\right)\left(2-\frac{\rho_0}{\rho}\right)-1\right]d\beta\right\}. \quad (2.55)$$

Considerando a relação entre ρ e β, $\rho = b\beta^\gamma$, e acrescentando que $K = \beta/\alpha$ seja constante, e resolvendo as integrais em (2.55) obtemos a aproximação que chamamos *SRI- Shear Reflection Impedance* como

$$SRI = \exp\left\{\frac{2\text{arcsin}(\beta p)}{K} - (2+\gamma)\left[\beta p\sqrt{1-\alpha^2p^2} + \alpha p\sqrt{1-\beta^2p^2} + K\text{arcsin}(\alpha p)\right]\right\}. \quad (2.56)$$

2.3.3 A Função $\beta = \beta(\rho)$ no Coeficiente R_{PP}

A impedância de reflexão para a aproximação de R_{PP} necessita de uma relação entre a velocidade da onda S e a densidade do meio. Testamos diferentes relações entre β e ρ. Santos and Tygel (2004) escolheram como dependência entre ρ e β uma relação tipo Gardner (Gardner et al., 1974),

$$\rho = b\,\beta^\gamma, \quad (2.57)$$

onde b e γ são constantes. Originalmente esta relação é estabelecida entre α e ρ, porém, como também é utilizado na prática temos uma relação linear entre α e β, esta escolha está bem justificada. Utilizando (2.57) em (2.51) obtemos,

$$I = RI = C_0\,\frac{\rho\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2p^2}}\begin{cases}\exp\{2[2+\gamma]\beta^2p^2\} & \text{se} \quad \beta' \neq 0\\ (\rho/\rho_0)^{-4\beta^2p^2} & \text{se} \quad \beta' = 0\end{cases} \quad (2.58)$$

Supondo uma relação exponencial,

$$\rho = \rho_0\,\exp\{\gamma_1\beta\}, \quad (2.59)$$

com ρ_0 e γ_1 constantes, obtemos

$$I = RIE = C_0\,\frac{\rho\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2p^2}}\begin{cases}\exp\{\frac{4}{3}[3+\gamma_1\beta]\beta^2p^2\} & \text{se} \quad \beta' \neq 0\\ (\rho/\rho_0)^{-4\beta^2p^2} & \text{se} \quad \beta' = 0\end{cases} \quad (2.60)$$

Propondo uma relação afim entre ρ e β,

$$\rho = \rho_0 + \;\gamma_2\,\beta, \quad (2.61)$$

onde ρ_0 e γ_2 são constantes, e resolvendo a integral na equação (2.51) a impedância fica

$$I = RIA = C_0 \frac{\rho\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2 p^2}} \begin{cases} \exp\{2p^2[2\beta^2 + a^2 - 4ca + 2c^2 \log(\gamma_2 a)]\} & \text{se } \beta' \neq 0 \\ (\rho/\rho_0)^{-4\beta^2 p^2} & \text{se } \beta' = 0 \end{cases} \tag{2.62}$$

onde $c = \rho_0/\gamma_2$ e $a = c + \beta$.

Na próxima seção mostraremos alguns exemplos para comparar estas três aproximações.

2.4 Experimentos Numéricos

De maneira a poder avaliar as diferentes aproximações utilizamos os modelos apresentados em Castagna et al. (1985), descritos na Tabela 2.1. Estes modelos são muito utilizados na literatura por serem dados reais a partir de medidas de poço e de laboratório, principalmente do Golfo do México. São 25 modelos, contendo em cada um, uma camada de areia com gás (em inglês, "gas sand"), uma camada de areia com água de mar (em inglês, " brine sand"), e uma camada de folhelho (em inglês, "shale").

Para calcular K em cada modelo não utilizamos a média dos quocientes ao quadrado das velocidades, como é utilizado usualmente (Connolly, 1999). Utilizamos a solução de quadrados mínimos por apresentar um melhor ajuste. Logo, as constantes foram calculadas como,

$$K = \frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \qquad \text{e} \qquad \gamma = \frac{\log(\rho_2/\rho_1)}{\log(\beta_2/\beta_1)}. \tag{2.63}$$

No apêndice apresentamos os valores calculados para os 25 modelos e as quatro interfaces consideradas, assim como também os valores dos contrastes das velocidades e a densidade. Estabelecemos um critério de erro para as aproximações para ser apresentado junto com os gráficos. Sempre analisamos a parte real do coeficiente de reflexão. Os erros utilizados foram o erro percentual relativo $(100 * (R_{PP} - R_{aprox})/R_{PP})$ e o erro absoluto $(|R_{PP} - R_{aprox}|)$, onde R_{aprox} representa cada aproximação. Na Figura 2.2 vemos os dois tipos de erros para uma interface folhelho sobre areia com água. Nos gráficos da figura acima à esquerda observamos que exibindo todos os ângulos há uma discrepância entre os erros e as aproximações apresentadas. Observe que o erro absoluto é mais sensível na região de ângulo crítico (o pico) e o relativo, para ângulos menores a 50%. Este último fato se deve aos baixos valores para o coeficiente de reflexão nesta região. A aparente diferença entre o observado e os erros se deve a um problema de escala como é possível observar nas ampliações para diferentes intervalos apresentados nas outras figuras: observamos no intervalo de ângulos menores a 40° um erro que chega a 15% (onde as aproximações são muito boas).

	Areia com gás			Areia com água			Folhelho		
Modelo	α	β	ρ	α	β	ρ	α	β	ρ
1	3.04	1.74	2.05	3.28	1.68	2.19	3.27	1.65	2.20
2	3.70	2.06	2.26	4.06	2.03	2.40	4.69	2.61	2.49
3	3.08	2.34	2.14	3.85	2.24	2.24	2.77	1.52	2.29
4	3.62	2.58	2.30	4.06	2.34	2.30	4.06	2.18	2.58
5	2.91	1.85	2.01	3.21	1.79	2.22	3.05	1.69	2.34
6	3.96	2.80	2.41	4.55	2.61	2.44	3.21	1.60	2.39
7	2.69	1.59	2.25	3.05	1.56	2.40	2.77	1.27	2.45
8	3.39	1.79	2.50	3.42	1.78	2.53	2.77	1.45	2.67
9	1.58	0.94	1.94	2.52	0.90	2.11	2.31	0,85	2.18
10	3.19	1.98	2.45	3.44	1.94	2.52	2.75	1.26	2.43
11	3.47	1.75	2.21	3.55	1.54	2.38	3.51	1.85	2.46
12	4.91	3.30	2.59	5.03	3.32	2.61	3.60	1.85	2.63
13	1.54	0.98	2.05	2.07	0.81	2.10	1.94	0.77	2.10
14	2.07	1.29	2.02	2.69	1.38	2.13	2.67	1.13	2.29
15	1.68	1.15	2.10	2.19	1.21	2.15	2.10	1.03	2.10
16	1.86	1.16	2.09	2.52	1.20	2.24	2.59	1.39	2.30
17	3.45	2.02	2.10	3.81	2.30	2.25	3.81	2.26	2.40
18	2.25	1.30	2.06	2.66	1.25	2.23	2.38	0.94	2.27
19	2.84	1.76	2.08	2.84	1.47	2.08	2.74	1.39	2.06
20	1.44	0.58	1.53	2.13	0.67	1.90	1.83	0.40	2.02
21	2.18	1.37	2.19	3.05	1.46	2.30	3.35	1.72	2.36
22	3.04	1.92	2.09	3.46	1.85	2.26	2.31	0.94	1.90
23	1.42	0.97	1.97	2.11	0.93	2.11	2.10	0.64	2.14
24	2.93	1.79	1.96	3.21	1.85	2.17	2.87	1.30	2.27
25	4.05	2.38	2.32	4.35	2.34	2.40	2.77	1.52	2.30

Tabela 2.1: Modelos tomados de Castagna et al. (1985) para testar as diferentes aproximações. As velocidades estão expressas em km/s e a densidade em g/cm^3.

Na apresentação dos resultados utilizaremos o erro percentual por acreditar que representa adequadamente o comportamento das aproximações. Outro tipo de erro que apresentaremos, para comparar as aproximações para os diferentes tipo de interfaces para todos os 25 modelos é o erro quadrático médio, para poder avaliar o erro considerando todo o intervalo de ângulos de 0° até 90°. Este erro é computado como,

$$\text{Erro quadrático médio} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{\theta} |R_{PP} - R_{aprox}|^2}, \tag{2.64}$$

com $n = 90$ o número de ângulos considerados.

2.4.1 Reflexão P-P

Primeiramente fizemos uma análise da função $\beta = \beta(\rho)$. Escolhemos 4 tipos de interfaces presentes na natureza: areia com gás sobre areia com água de mar, folhelho sobre areia com gás, areia com água de mar sobre folhelho, e folhelho sobre areia com água de mar. Nos exemplos das Figuras 2.3 podemos observar primeiro o impacto da função $\beta = \beta(\rho)$. Nestes exemplos não houve praticamente diferença entre as funções tipo Gardner e a função tipo afim, sendo a aproximação tipo exponencial a que apresentou maiores erros. Este fato pode ser observado melhor na Figura 2.4, onde o erro quadrático médio mostra que a pior aproximação é a da impedância de reflexão utilizando a função exponencial. A função tipo Gardner e a função tipo linear são quase indistinguíveis. Porém, deve ser observado que para alguns modelos, por exemplo o modelo 12 para três das quatro interfaces, o erro quadrático médio da aproximação afim não aparece na figura. Isto se deve ao fato que nestes modelos esta aproximação tem valores muito altos e, portanto, o erro é muito grande. Baseados nesses testes, comparamos as diferentes aproximações para o coeficiente de reflexão utilizando na aproximação tipo impedância de reflexão, uma relação tipo Gardner entre β e ρ. Na Figura 2.5 comparamos as aproximações para o coeficiente de reflexão R_{PP}, utilizando os mesmos modelos apresentados anteriormente. Observamos que a aproximação tipo impedância de reflexão é a que melhor se aproxima da fórmula exata, mesmo na presença de ângulo crítico. Este fato pode ser corroborado na Figura 2.6 onde são mostrados os erros quadráticos médios. Um fato destacável desta figura é o pior desempenho da aproximação de Aki-Richards para todos os modelos considerando todos os ângulos. A aproximação tipo impedância elástica tem um bom comportamento, porém, um pouco pior que a impedância de reflexão.

2.4.2 Reflexão P-S

Nesta seção apresentamos alguns exemplos utilizando as aproximações para o coeficiente de Reflexão R_{PS}. Na Figura 2.7 apresentamos quatro modelos selecionados da Tabela 2.1, os mesmos que utilizamos para comparar as aproximações R_{PP}. Nos dois primeiros modelos se observa que todas as aproximações foram muito boas, sendo a de impedância de reflexão melhor para ângulos grandes. Em presença de ângulo crítico nenhuma aproximação foi satisfatória. A aproximação que utiliza a impedância de reflexão tenta encontrar o pico mas depois tem erros muito grandes. É notável também que os erros são bastantes grandes nesta região, mas devemos alertar que estamos trabalhando com o erro relativo e, neste, caso temos que nesta região o coeficiente alcança o valor zero duas vezes, logo o erro relativo não está definido. Na Figura 2.8 apresentamos os erros quadráticos médios para os quatro modelos escolhidos para os 25 modelos da Tabela 2.1. Destas figuras não podemos decidir qual aproximação teve um melhor desempenho sendo que para alguns tipos de interfaces e modelos o erro foi menor para uma aproximação e em outros casos o erro foi baixo para outras aproximações. Por este motivo desenvolvemos um novo critério que pode ser aplicado somente quando o número de modelos estudados é grande.

2.4.3 Curvas de Desempenho

Adaptamos um critério utilizado na área de otimização matemática para avaliar o desempenho de métodos computacionais (Dolan and Moré, 2002). Para construir as chamadas curvas de desempenho para cada aproximação devemos definir duas variáveis. Uma, chamada quociente de desempenho, compara o desempenho da aproximação a para o modelo m com a melhor aproximação para esse modelo, sendo a melhor aproximação aquela com menor erro,

$$r_{m,a} = \frac{e_{m,a}}{\min\{e_{m,a} : a \in A\}}, \tag{2.65}$$

onde $e_{m,a}$ é o erro para o modelo m utilizando a aproximação a e A é o conjunto de aproximações. Sendo n o número total de modelos, o perfil de desempenho é definido como,

$$p_a(\tau) = \frac{1}{n} \text{ tamanho } \{m \in M | r_{m,a} \leq \tau\}, \tag{2.66}$$

onde M é o conjunto de modelos. Logo, $p_a(\tau)$ é a função distribuição cumulativa do quociente de desempenho. Logo aproximações com grandes probabilidades seriam as preferidas. Devemos esclarecer que o método está baseado na hipótese de que as aproximações foram satisfatórias.

Na Figura 2.9 observamos os perfis de desempenhos para as três aproximações do coeficiente de reflexão R_{PS} utilizando o erro quadrático médio. O valor de $p_a(\tau)$, num ponto da curva, é a porcentagem de modelos aproximados pela aproximação a com uma precisão de até τ vezes o menor erro possível para cada modelo. Logo, considerando este erro, se queremos ter o menor erro para cada modelo observamos que as aproximações utilizando impedâncias aproximam melhor um pouco mais de 40% dos 100 modelos. A de Aki-Richards um pouco mais de 10% dos modelos. Se consideramos τ entre 1 e 2, $PSEI$ e SRI têm um comportamento similar. Para $2.0 \leq \tau$ a SRI é melhor que as outras duas. O real significado se pode entender melhor analisando a Figura 2.10. Nesta figura desenhamos, com quadrado preto, os erros mínimos para cada modelo. Vemos que o erro está abaixo de 0.3 para todos o modelos, mas que na verdade fora alguns modelos o erro quadrático médio ficou abaixo de 0.1. Note que não sabemos qual aproximação foi a de menor erro. Os cículos marrons são os erros mínimos para cada modelo multiplicados por um fator de 2.6. Aqui observamos que, novamente fora alguns modelos, o erro ficou abaixo de 0.3. Logo voltando ao gráfico de desempenhos, se consideramos aceitável ficar com um erro menor a 0.3, a SRI aproxima quase 95% dos modelos, a $PSEI$ um 85%, e a aproximação linear 75% com um erro no máximo 2.6 vezes o erro mínimo para cada modelo.

O perfil de desempenho calculado usando a média dos erros absolutos se observa na Figura 2.11 e 2.12. Nesta última o τ escolhido foi de 2.5. Vemos que quase todos os erros ficam menores que 0.3. As aproximações de Aki e SRI aproximam quase 85% com erros que foram no máximo 2.5 o erro mínimo para cada modelo. Se aumentamos um pouco o τ a SRI aproxima quase todos os modelos, porém o erro pode não ser aceitável.

Os perfis de desempenho das aproximações para a média dos erros relativos se apresenta na Figura 2.13. Se observa que neste caso a SRI aproximou melhor 40% dos modelos em quanto que as outras duas ficaram com 30%. A SRI aproximou 60% dos modelos com um erro no máximo duas vezes o menor erro, como observado na Figura 2.14, isto significa um erro menor a 20%. As outras duas aproximações aproximam para a mesma tolerância menos de 50% dos modelos. Se a tolerância for mais alta, 7 vezes o erro mínimo, Aki e SRI aproximam 80% dos modelos com este erro o que significa erro de quase 60%, porém, este erro é só para alguns modelos, o resto fica abaixo de 30% (Figura 2.14).

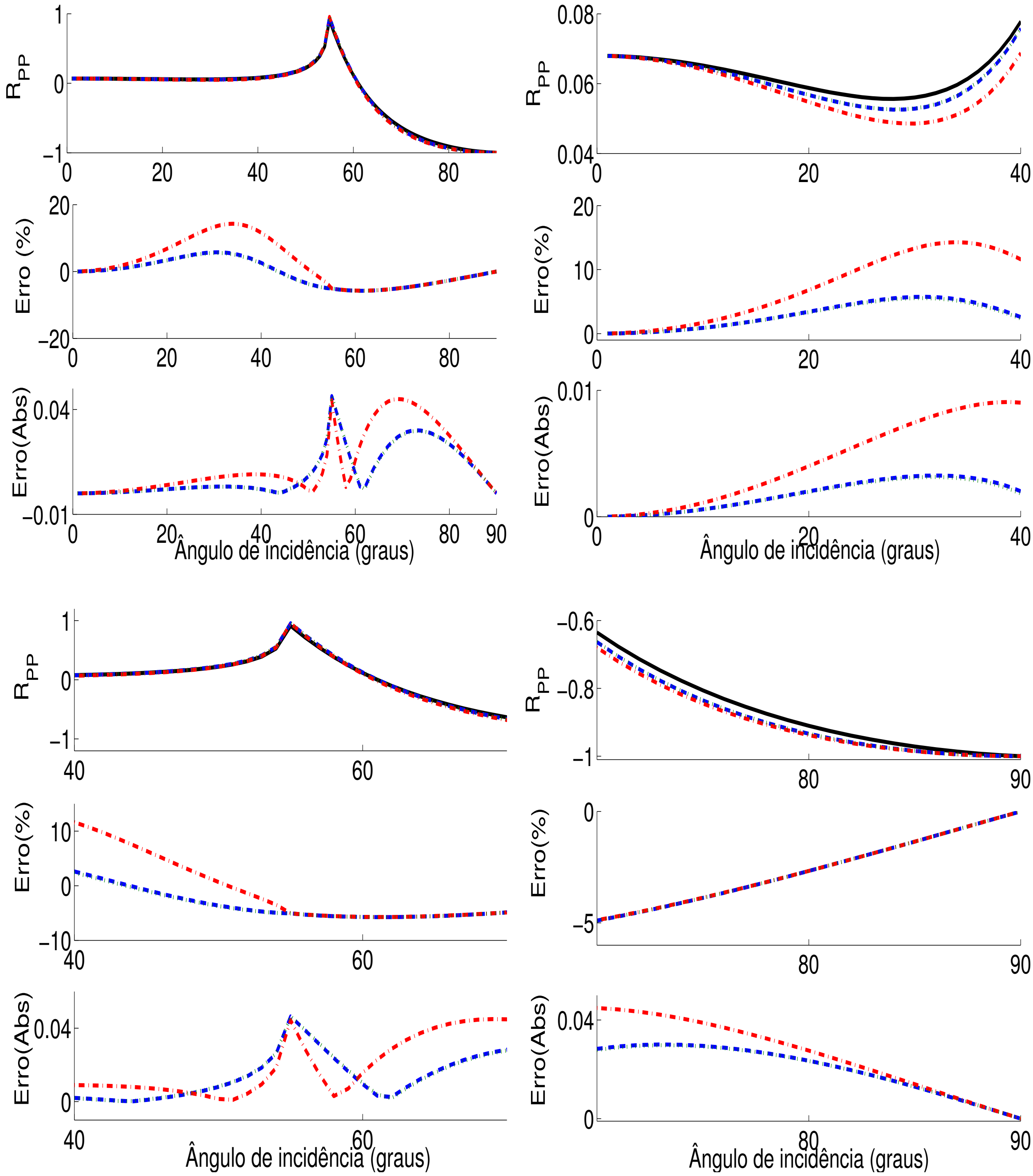


Figura 2.2: Comparação dos erros percentual e absoluto para um dos modelos da Tabela 2.1, utilizando as aproximações tipo impedância de reflexão: RI em azul, RIE em vermelho e RIA em verde. Acima à esquerda, $0° < \theta < 90°$. Acima à direita $0° < \theta < 40°$. Abaixo à esquerda: $40° < \theta < 70°$. Abaixo à direita: $70° < \theta < 90°$.

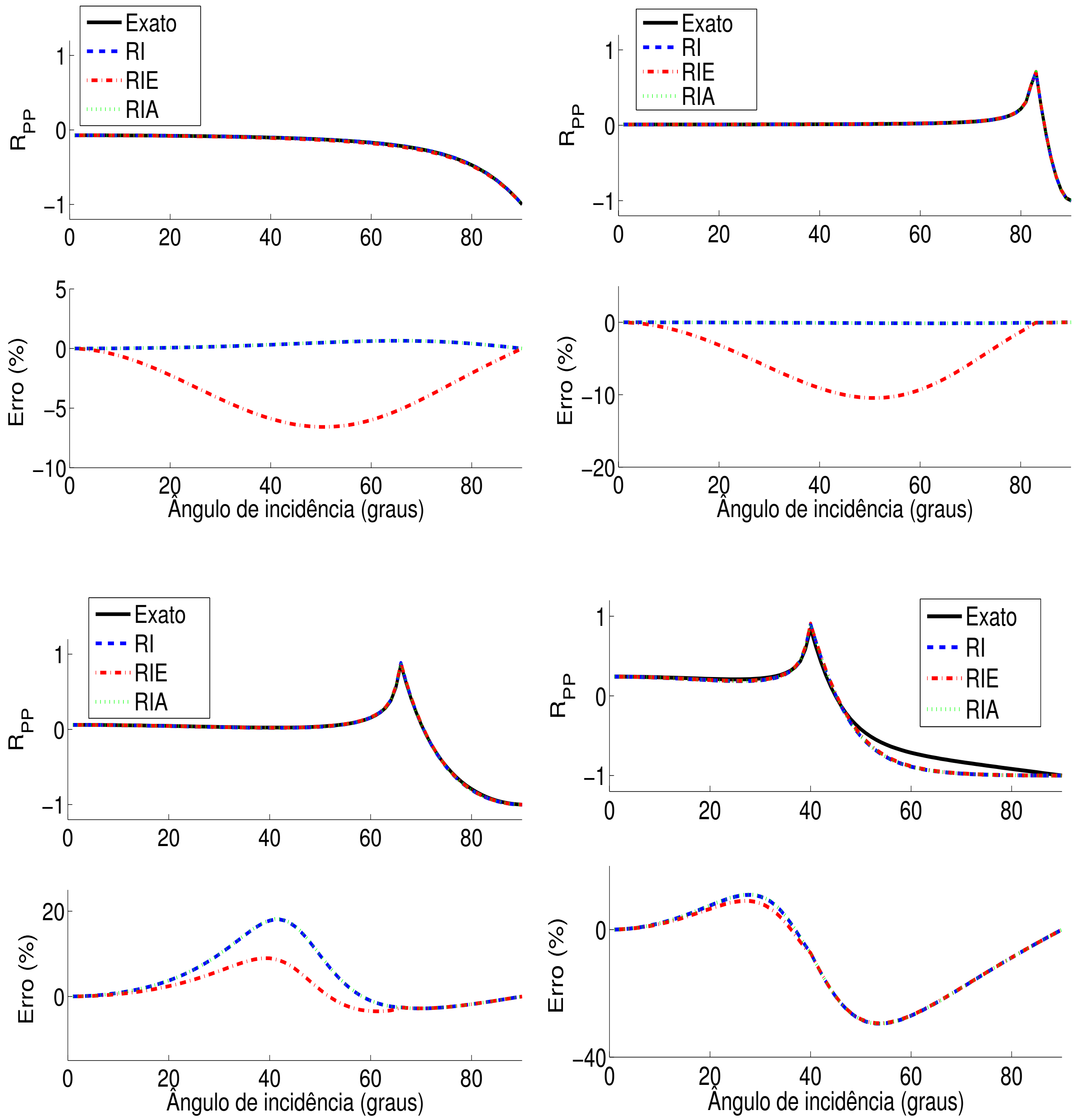


Figura 2.3: Comparação da fórmula exata de R_{PP} e aproximações tipo impedância de reflexão com diferentes relações entre β e ρ: tipo Gardner (RI), exponencial (RIE) e afim (RIA) para alguns modelos da Tabela 2.1. Acima à esquerda: folhelho sobre areia com gás, Modelo 1. Acima à direita: areia com gás sobre areia com água, Modelo 8. Abaixo à esquerda: areia com água sobre folhelho, Modelo 21. Abaixo à direita: folhelho sobre areia com água, Modelo 25. Abaixo de cada modelo o erro percentual para cada aproximação.

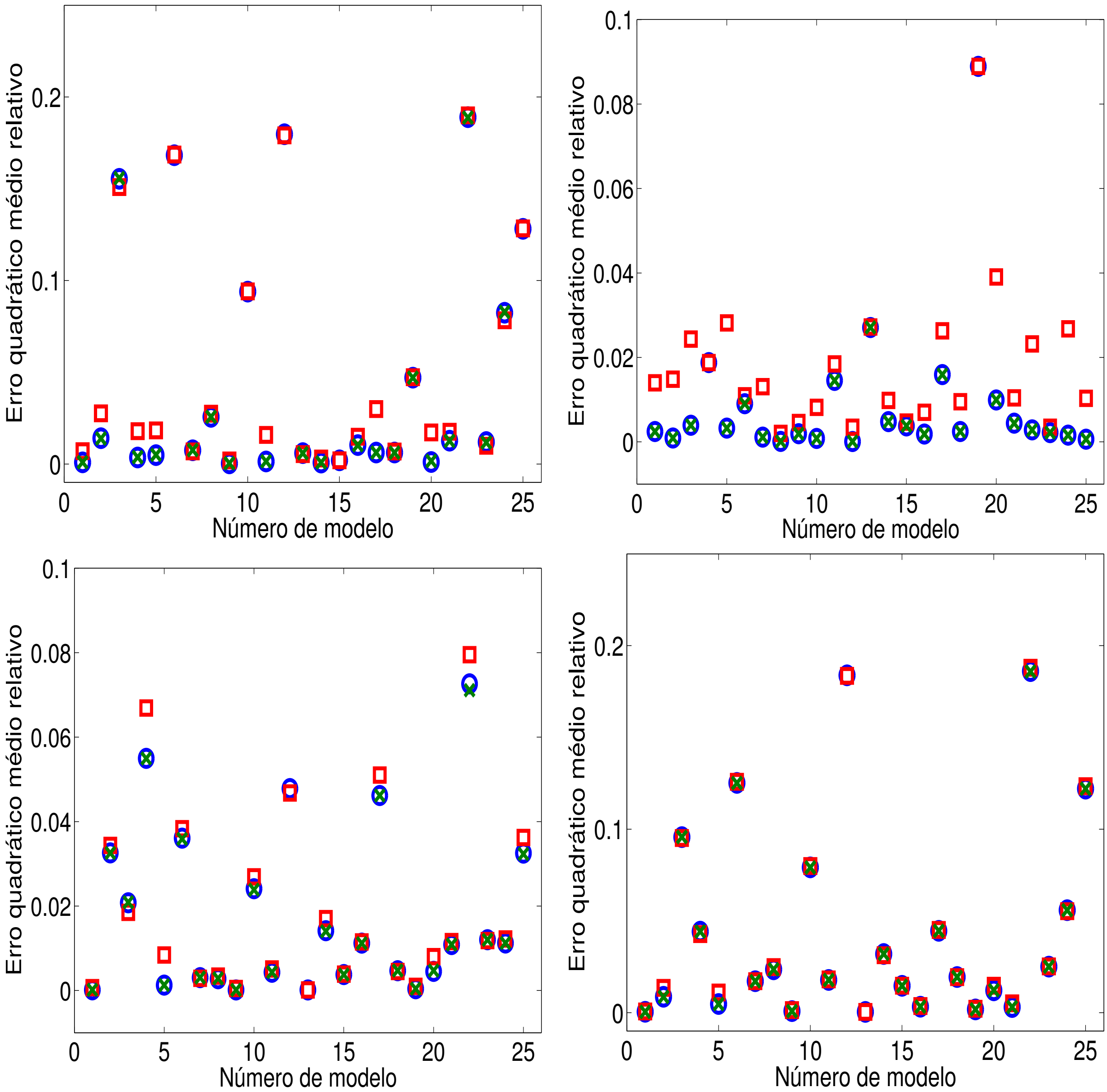


Figura 2.4: Erro quadrático médio para as aproximações tipo impedância de R_{PP} com diferentes relações entre β e ρ: tipo Gardner ($\circ$), exponencial ($\Box$) e afim ($\times$) para os 25 modelos da Tabela 2.1. Acima à esquerda: folhelho sobre areia com gás. Acima à direita: areia com gás sobre areia com água. Abaixo à esquerda: areia com água sobre folhelho. Abaixo à direita: folhelho sobre areia com água.

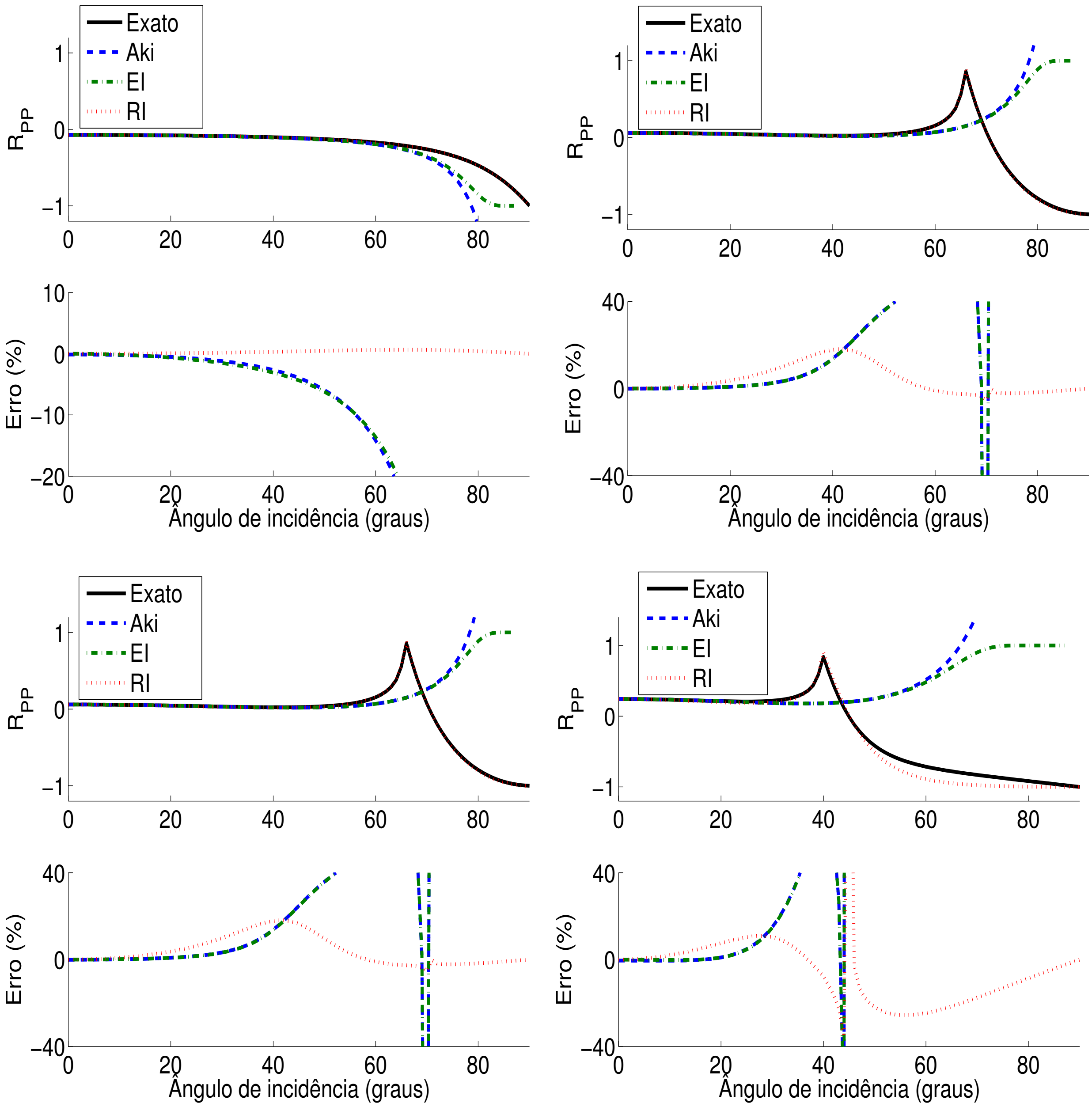


Figura 2.5: Comparação da fórmula exata de R_{PP} e as aproximações de Aki-Richards (Aki) tipo impedância elástica (EI) e reflexão (RI) para alguns modelos da Tabela 2.1. Acima à esquerda: folhelho sobre areia com gás, Modelo 1. Acima à direita: areia com gás sobre areia com água, Modelo 8. Abaixo à esquerda: areia com água sobre folhelho, Modelo 21. Abaixo à direita: folhelho sobre areia com água, Modelo 25. Abaixo de cada modelo o erro percentual para cada aproximação.

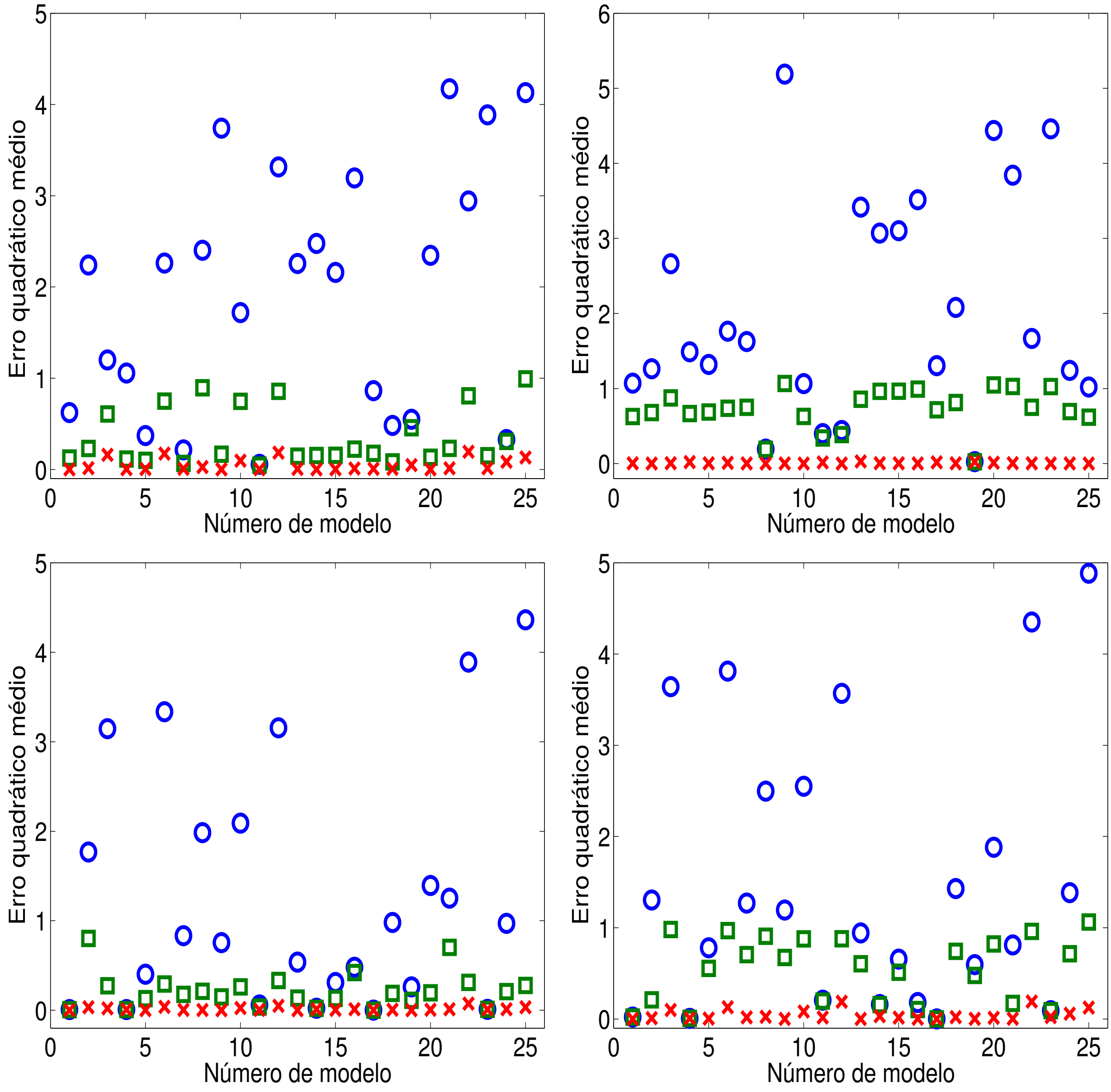


Figura 2.6: Erro quadrático médio para as aproximações Aki-Richards (○), Impedância Elástica (□) e Impedância de Reflexão (×) para R_{PP} para os 25 modelos da Tabela 2.1. Acima à esquerda: folhelho sobre areia com gás. Acima à direita: areia com gás sobre areia com água. Abaixo à esquerda: areia com água sobre folhelho. Abaixo à direita: folhelho sobre areia com água.

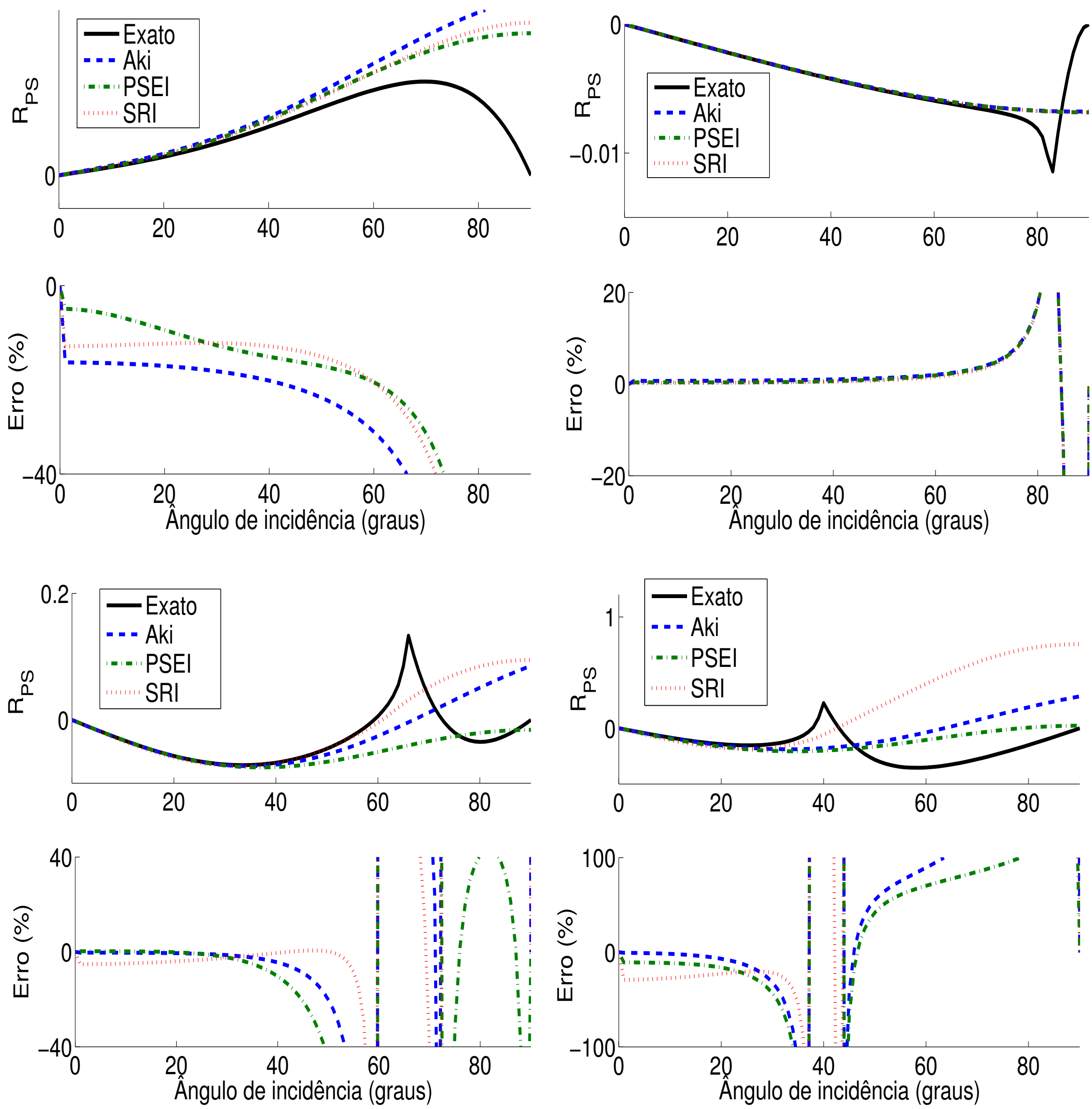


Figura 2.7: Comparação da fórmula exata de R_{PS} e as aproximações de Aki-Richards (Aki) tipo impedância elástica (PSEI) e reflexão (SRI) para alguns modelos da Tabela 2.1. Acima à esquerda: folhelho sobre areia com gás, Modelo 1. Acima à direita: areia com gás sobre areia com água, Modelo 8. Abaixo à esquerda: areia com água sobre folhelho, Modelo 21. Abaixo à direita: folhelho sobre areia com água, Modelo 25. Abaixo de cada modelo o erro percentual para cada aproximação.

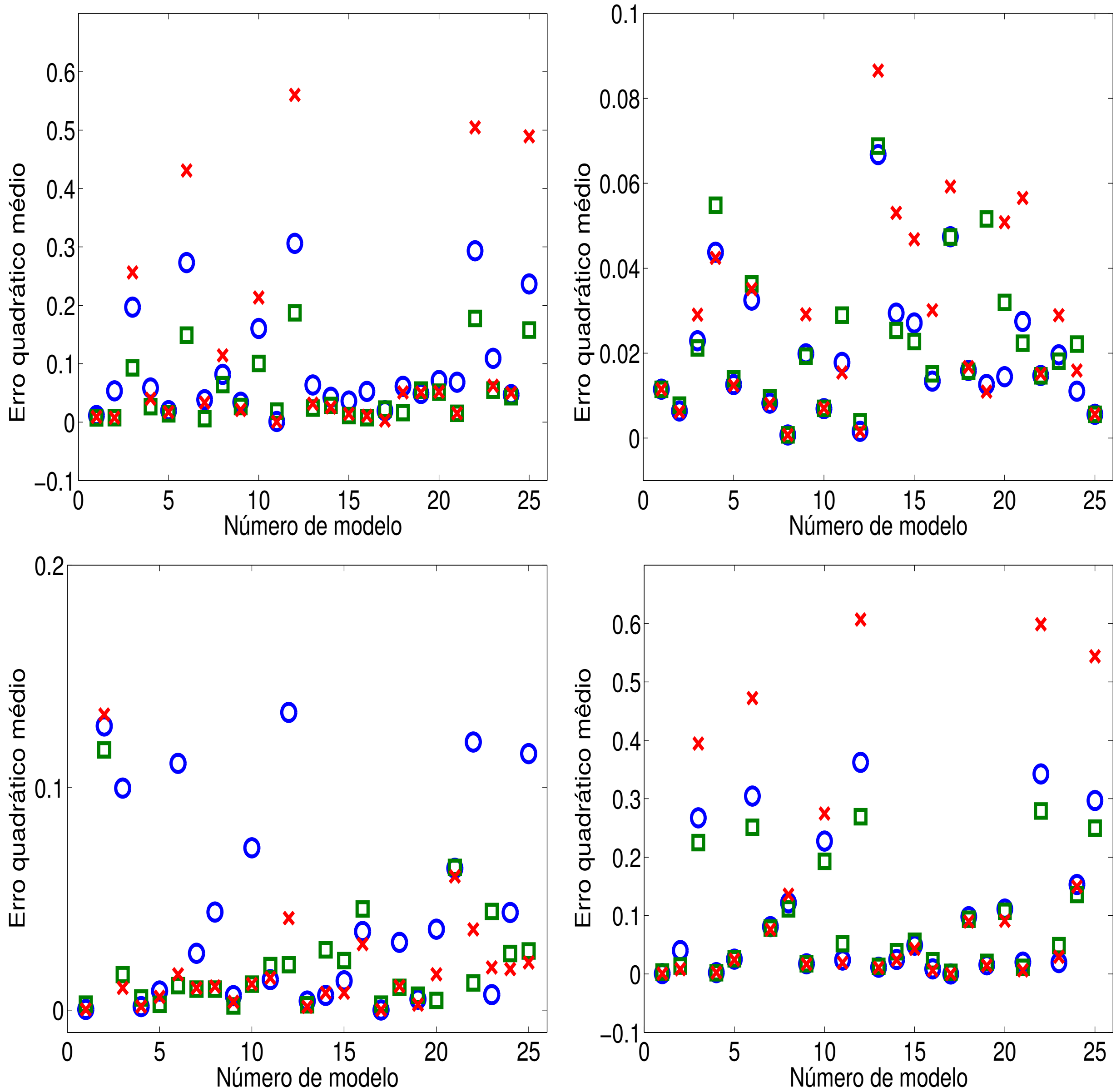


Figura 2.8: Erro quadrático médio para as aproximações Aki-Richards (○), Impedância Elástica (□) e Impedância de Reflexão (×) de R_{PS} para os 25 modelos da Tabela 2.1. Acima à esquerda: folhelho sobre areia com gás. Acima à direita: areia com gás sobre areia com água. Abaixo à esquerda: areia com água sobre folhelho. Abaixo à direita: folhelho sobre areia com água.

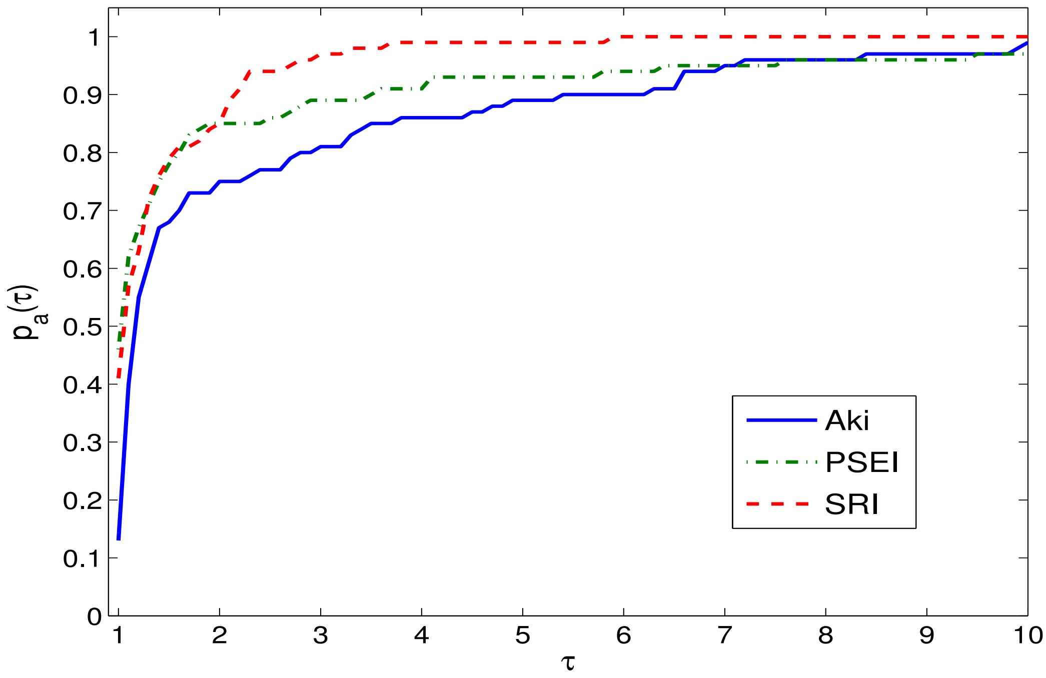


Figura 2.9: Perfis de desempenho para as aproximações de R_{PS}, utilizando o erro quadrático médio.

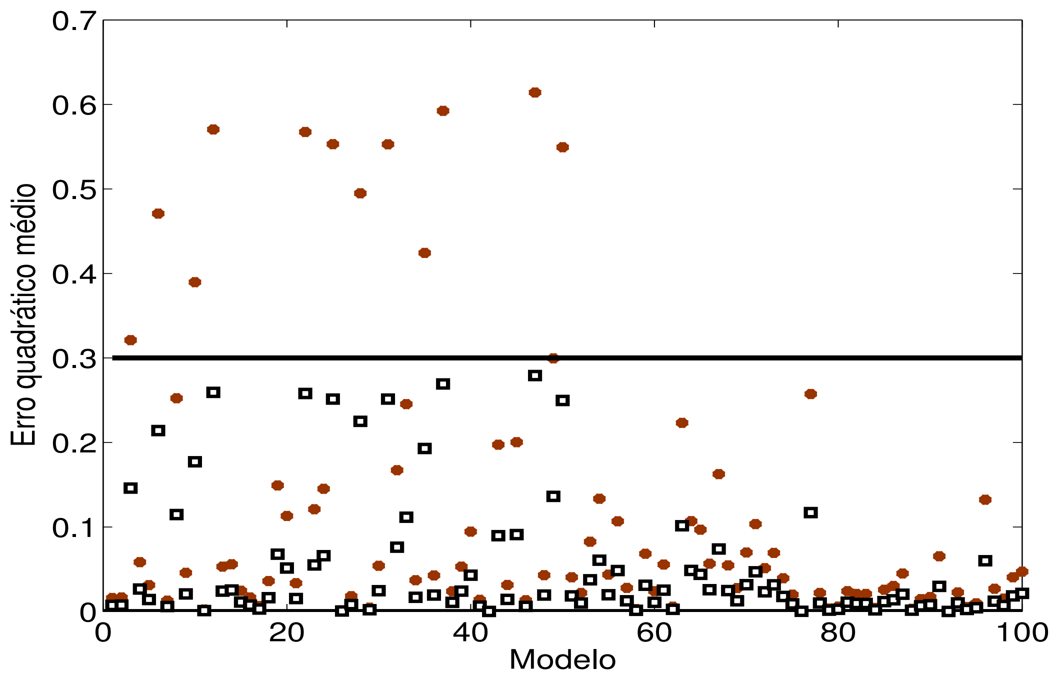


Figura 2.10: Mínimos erros quadráticos médios para cada modelo, quadrados pretos. Os círculos marrons são os erros mínimos multiplicados por 2.6. A linha preta representa uma possível tolerância ao erro.

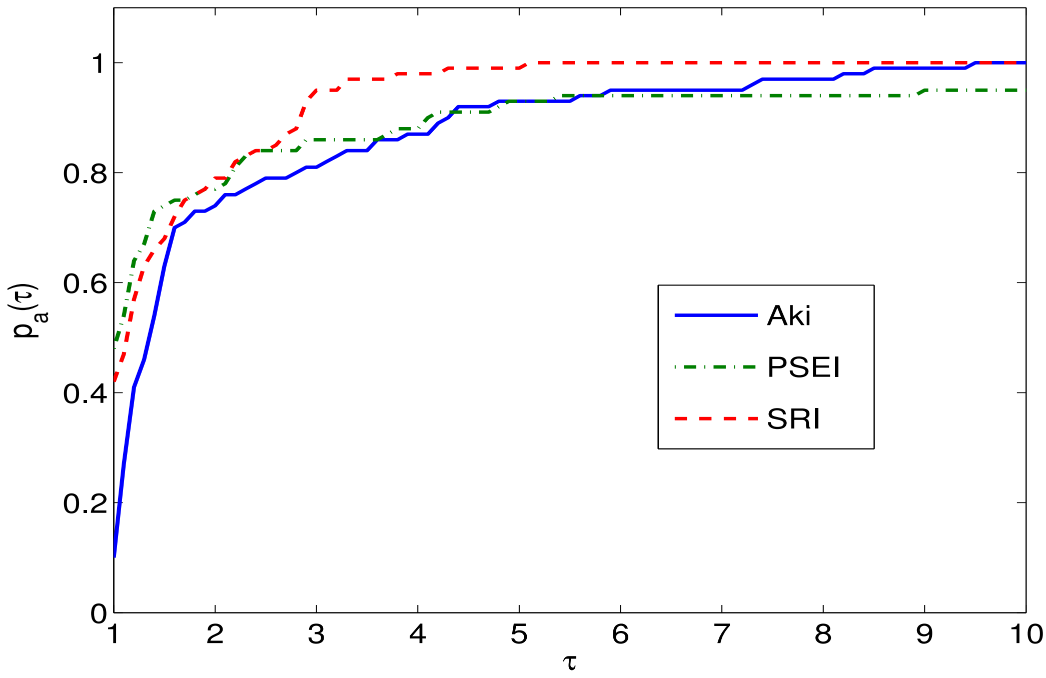


Figura 2.11: Perfis de desempenho para as aproximações de R_{PS}, utilizando a média dos erros absolutos.

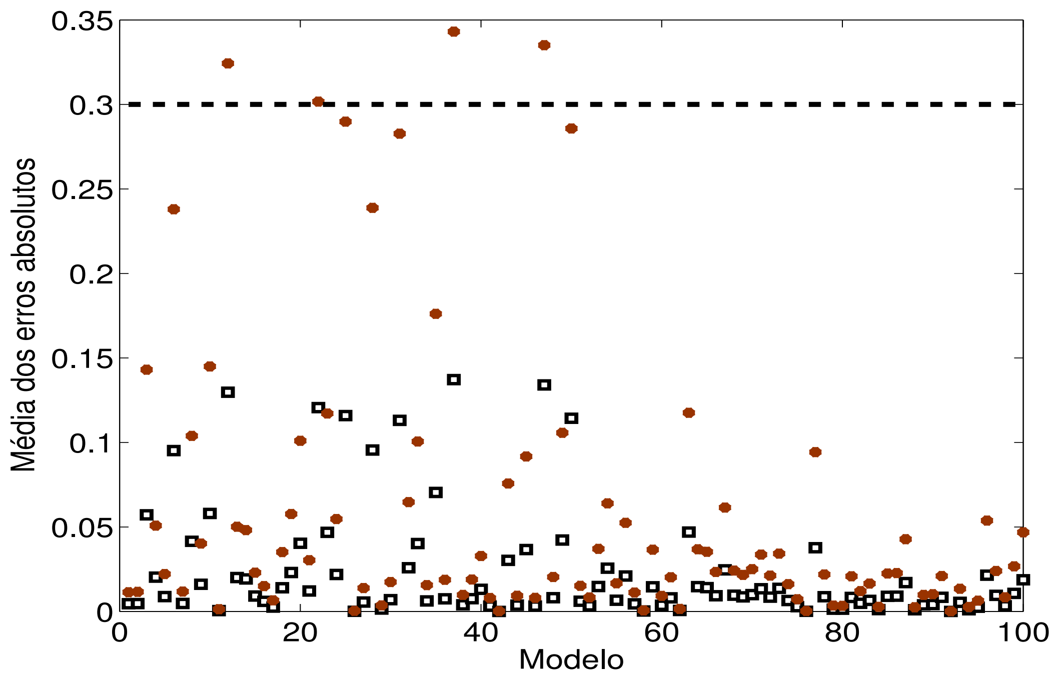


Figura 2.12: Mínimos das médias dos erros absolutos para cada modelo, quadrados pretos. Os círculos marrons são os erros mínimos multiplicados por 2.5. A linha preta representa uma possível tolerância ao erro.

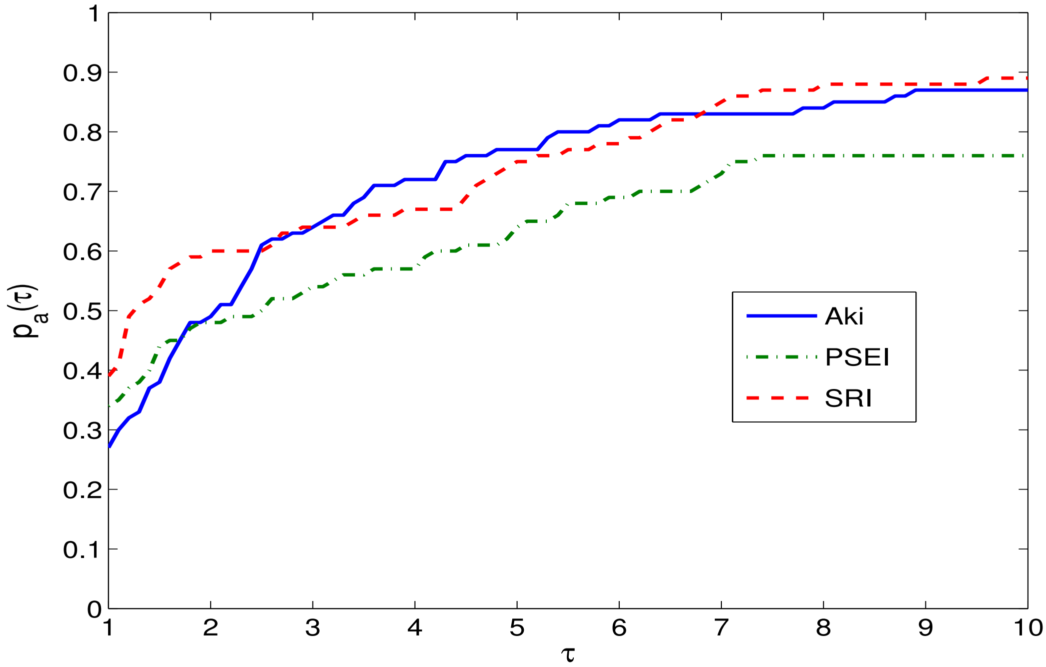


Figura 2.13: Perfis de desempenho para as aproximações de R_{PS}, utilizando a média dos erros relativos.

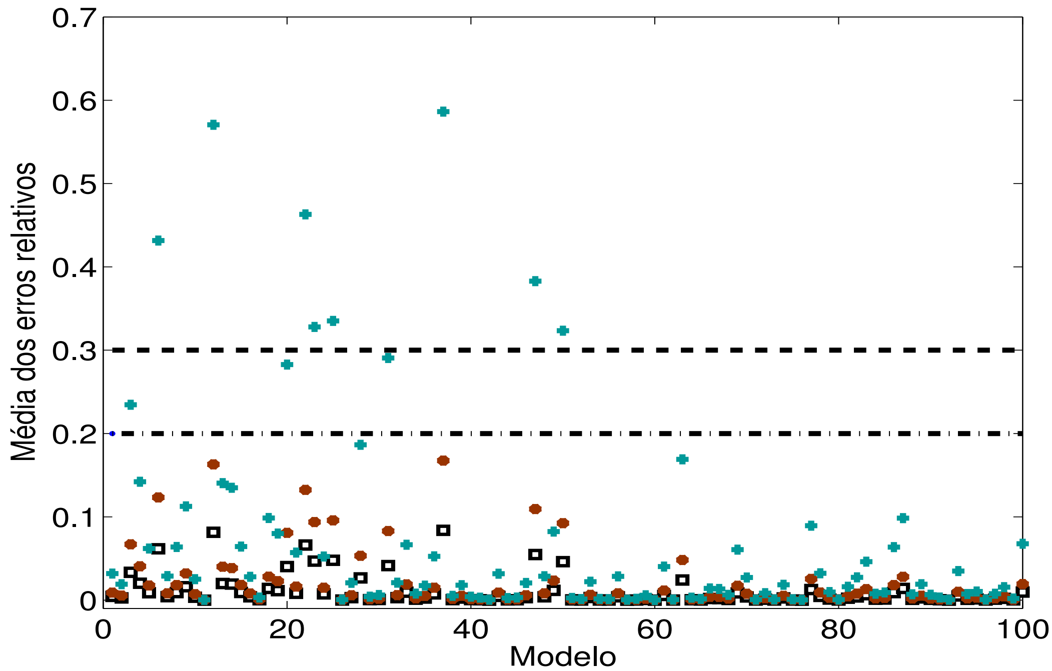


Figura 2.14: Mínimos das médias dos erros relativos para cada modelo, quadrados pretos. Os círculos marrons são os erros mínimos multiplicados por 2, os celestes por 7. As linhas representam possíveis tolerâncias ao erro.

Capítulo 3

Coeficiente R_{PP} e Presença de Gás

Koefoed (1955) e Ostrander (1984), alertaram sobre como a variação da amplitude em função do ângulo de incidência era afetada pela presença de gás, mais precisamente com a variação na relação de Poisson. A partir daí, vários métodos surgiram, assim como parametrizações da aproximação de Aki-Richards para o coeficiente de reflexão da onda P-P com o intuito de extrair a informação dos parâmetros elásticos contida nele. Também surgiram vários "indicadores" da presença de gás em rochas clásticas, dependendo da parametrização ou de algumas hipótese adicionais. Neste capítulo apresentamos algumas destas formas de escrever o coeficiente de reflexão R_{PP} assim como os indicadores associados a elas. Também definimos um novo indicador baseado na aproximação tipo impedância.

3.1 Indicadores Baseados na Aproximação Linear

A mais utilizada aproximação baseada em série de Taylor para o coeficiente R_{PP}, é a equação (2.20),

$$R_{PP} \approx \frac{1}{2}\left[1 - 4\frac{\beta^2}{\alpha^2}\sin^2\theta\right]\frac{\Delta\rho}{\rho} + \frac{1}{2}\sec^2\theta\frac{\Delta\alpha}{\alpha} - 4\frac{\beta^2}{\alpha^2}\sin^2\theta\frac{\Delta\beta}{\beta}. \tag{3.1}$$

Foi Shuey (1985) quem deu uma nova visão analítica do coeficiente de reflexão a partir desta equação. O interesse já não era só encontrar uma alternativa às tediosas equações de Knott–Zoeppritz (2.2), como descrever também, nas equações, os fatos observados por Koefoed (1955) e Ostrander (1984). Considerando a relação de Poisson

$$\sigma = \frac{0.5 - (\beta/\alpha)^2}{1 - (\beta/\alpha)^2}, \tag{3.2}$$

a equação (3.1) pode ser reescrita como, (Shuey, 1985),

$$R_{PP} \approx R_0 + \Big[A_0 R_0 + \frac{\Delta\sigma}{(1-\sigma)^2}\Big] \sin^2\theta + \frac{1}{2}\frac{\Delta\alpha}{\alpha}(\tan^2\theta - \sin^2\theta), \tag{3.3}$$

onde

$$R_0 = \frac{1}{2}\left[\frac{\Delta\rho}{\rho} + \frac{\Delta\alpha}{\alpha}\right], \quad A_0 = B_0 - 2(1+B_0)\frac{1-2\sigma}{1-\sigma}, \quad \text{e} \quad B_0 = \frac{\Delta\alpha/\alpha}{\Delta\alpha/\alpha + \Delta\rho/\rho}. \tag{3.4}$$

Reescrevendo as constantes em função dos contrastes das propriedades do meio temos que,

$$R_{PP} \approx A + B\sin^2\theta + C[\tan^2\theta - \sin^2\theta], \tag{3.5}$$

onde

$$A = \frac{1}{2}\left[\frac{\Delta\rho}{\rho} + \frac{\Delta\alpha}{\alpha}\right], \quad B = \frac{1}{2}\frac{\Delta\alpha}{\alpha} - 2\frac{\beta^2}{\alpha^2}\left[\frac{\Delta\rho}{\rho} + 2\frac{\Delta\beta}{\beta}\right], \quad \text{e} \quad C = \frac{1}{2}\frac{\Delta\alpha}{\alpha}\,. \tag{3.6}$$

Nesta equação pode ser observado a contribuição de cada intervalo de ângulos de incidência. Para ângulos menores que 30°, $\tan^2\theta \approx \sin^2\theta$, tornando o último termo da equação (3.5) desprezível e a aproximação para R_{PP} é então dada por

$$R_{PP} \approx A + B\sin^2\theta. \tag{3.7}$$

Esta é a famosa equação de AVO onde A é chamado de *Intercepto* e B de *Gradiente*. Para obter A e B se faz uma regressão linear dos dados. Como é apresentado em Castagna and Smith (1994), estas quantidades podem ser utilizadas como indicadores da presença de hidrocarbonetos, especialmente gás. O produto $A \times B$ é utilizado normalmente como indicador de "pontos brilhantes" (do inglês, "bright spots") nas seções sísmicas, que são anomalias das amplitudes. Também apontam que $(A+B)/2$ pode ser um excelente indicador de hidrocarbonetos em seções clásticas, separando areia com água de areia com gás, baseando-se na aproximação feita por Wiggins et al. (1983),

$$R_P - R_S \approx \frac{A+B}{2}, \tag{3.8}$$

onde R_P e R_S se definem como

$$R_P = \frac{1}{2}\Big(\frac{\Delta\alpha}{\alpha} + \frac{\Delta\rho}{\rho}\Big) \quad \text{e} \quad R_S = \frac{1}{2}\Big(\frac{\Delta\beta}{\beta} + \frac{\Delta\rho}{\rho}\Big). \tag{3.9}$$

A diferença entre R_P e R_S, equação (3.8), apresenta algumas características altamente desejáveis para um indicador em seções clásticas:

- Para "Background", sem hidrocarbonetos, o indicador deve ser relativamente constante e perto de zero.
- O indicador deve ser negativo para interfaces de folhelhos sobre areia com gás, e com valor ainda mais negativo em relação as interfaces de folhelho sobre areia com água.

Smith and Gidlow (1987) utilizaram a relação entre α e ρ de Gardner et al. (1974) para rochas saturadas em água,

$$\rho = \alpha^{1/4} \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta\rho}{\rho} \approx \frac{1}{4}\frac{\Delta\alpha}{\alpha}, \tag{3.10}$$

para aproximar a equação (3.1) por

$$R_{PP} \approx \left[\frac{5}{8} - \frac{1}{2}\frac{\beta^2}{\alpha^2}\sin^2\theta + \frac{1}{2}\tan^2\theta\right]\frac{\Delta\alpha}{\alpha} - 4\frac{\beta^2}{\alpha^2}\sin^2\theta\frac{\Delta\beta}{\beta}. \tag{3.11}$$

Supondo que se pode estimar a relação β/α, Smith and Gidlow (1987) desenvolveram um método, que é tão somente um ajuste de quadrados mínimos com peso, para obter os contrastes $\Delta\alpha/\alpha$ e $\Delta\beta/\beta$. Considerando também a relação de "linha de rochas de lama" ou no inglês " mudrock line",

$$\alpha = 1.36 + 1.16\,\beta \quad (\text{em km/s})\ , \tag{3.12}$$

se deduz que

$$\frac{\Delta\alpha}{\alpha} = 1.16\,\frac{\beta}{\alpha}\,\frac{\Delta\beta}{\beta}. \tag{3.13}$$

A equação (3.13) prediz o valor do contraste $\Delta\alpha/\alpha$ calculado a partir do contraste $\Delta\beta/\beta$ utilizando a linha de rochas com lama o que levou a Smith and Gidlow (1987) definirem o fator de fluidos como

$$\Delta F = \frac{\Delta\alpha}{\alpha} - 1.16\,\frac{\beta}{\alpha}\,\frac{\Delta\beta}{\beta}, \tag{3.14}$$

Ou seja, em presença de rochas saturadas em água ou folhelhos este valor deve ser zero, e deve ser negativo para interfaces de folhelhos sobre areia com gás. O quociente β/α deve ser estimado e os contrastes são obtidos invertendo-se a equação (3.11).

Fatti et al. (1994) preferem reescrever a equação (3.1) em função das impedâncias acústicas,

$I_P = \rho\,\alpha$ e $I_S = \rho\,\beta$,

$$R_{PP} \approx \frac{1}{2}\left[1 + \tan^2\theta\right]\frac{\Delta I_P}{I_P} - 4\left[\frac{\beta^2}{\alpha^2}\sin^2\theta\right]\frac{\Delta I_S}{I_S} - \left[\frac{1}{2}\tan^2\theta - 2\frac{\beta^2}{\alpha^2}\sin^2\theta\right]\frac{\Delta\rho}{\rho}. \tag{3.15}$$

O último termo na equação (3.15) é pequeno para ângulos de incidência menores que 35° e supondo que a razão β/α está entre 1.5 e 2.0, temos então,

$$R_{PP} \approx \frac{1}{2}\left[1 + \tan^2\theta\right]\frac{\Delta I_P}{I_P} - 4\left[\frac{\beta^2}{\alpha^2}\sin^2\theta\right]\frac{\Delta I_S}{I_S}. \tag{3.16}$$

Goodway et al. (1999) sugerem que propriedades fundamentais das rochas, a constante de Lamé λ e o módulo de cisalhamento μ,

$$\lambda = \rho(\alpha^2 - \beta^2) \quad \text{e} \quad \mu = \rho\beta^2, \tag{3.17}$$

podem ser utilizados como indicadores. Porém, dada a dificuldade no processo de inversão preferem definir outros parâmetros. Da equação (3.17) e da definição das impedâncias acústicas calcularam novos indicadores

$$V = \lambda\rho = I_P^2 - I_S^2 \quad \text{e} \quad W = \mu\rho = I_S^2, \tag{3.18}$$

onde I_P e I_S são obtidos da equação (3.16) mediante um ajuste de quadrados mínimos.

Considerando β/α constante e conhecida para a inversão, Gray et al. (1999) utilizam os contrastes de λ, μ e ρ como parâmetros e reescrevem (3.1) como

$$R_{PP} \approx \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right]\sec^2\theta\frac{\Delta\lambda}{\lambda} + \frac{\beta^2}{\alpha^2}\left[\frac{1}{2}\sec^2\theta - 2\sin^2\theta\right]\frac{\Delta\mu}{\mu} + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sec^2\theta\right]\frac{\Delta\rho}{\rho}. \tag{3.19}$$

Note que neste caso é preciso encontrar três parâmetros em lugar de dois. Os próprios contrastes são tidos como indicadores, sendo λ, segundo Goodway et al. (1999), um indicador direto de hidrocarbonetos.

Smith and Gidlow (2000) reescrevem a equação (3.19) como

$$\begin{aligned} R_{PP} \approx \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\frac{W}{W+V}\right]\sec^2\theta\frac{\Delta V}{V} &+ \frac{W}{W+V}\left[\frac{1}{2}\sec^2\theta - 2\sin^2\theta\right]\frac{\Delta W}{W} \\ &- \left[\tan^2\theta - 4\frac{W}{W+V}\sin^2\theta\right]\frac{\Delta\rho}{\rho}, \end{aligned} \tag{3.20}$$

onde o quociente $W/(W+V)$ é o quociente das velocidades β^2/α^2 como nas outras equações.

Uma vez conhecido este quociente, pode-se inverter a equação (3.20) para achar os contrastes, que funcionam como indicadores. Novamente é necessário inverter para três parâmetros a equação (3.20).

A Tabela abaixo exibe um resumo dos indicadores discutidos nesta seção,

Autores	Equação	Indicadores
Shuey (1985)	3.5	$A \times B$, $(A+B)/2$
Smith e Gidlow (1987)	3.11	ΔF
Fatti et al. (1994)	3.16	$\Delta I_P/I_P$, $\Delta I_S/I_S$
Goodway et al. (1999)	3.16	$\lambda\rho$, $\lambda\mu$
Gray et al. (1999)	3.19	$\Delta\lambda/\lambda$, $\Delta\mu/\mu$, $\Delta\rho/\rho$
Smith e Gidlow (2000)	3.20	$\Delta V/V$, $\Delta W/W$

Tabela 3.1: Diferentes parametrizações e aproximações da equação 3.1 e seus respectivos indicadores de hidrocarbonetos.

Existem outros indicadores calculados a partir dos já apresentados como, por exemplo, a razão de Pseudo-Poisson e a razão de Poisson. Considerando a definição das impedâncias acústicas, podemos calcular β/α como,

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{I_S}{I_P}. \tag{3.21}$$

Logo, uma vez obtidas as impedâncias acústicas podemos obter a razão de Poisson a través da equação (3.2). Mallick et al. (2000) propõem aproximar I_S e I_P, considerando $\beta/\alpha = 0.5$,

$$I_P \approx A \quad \text{e} \quad I_S \approx \frac{1}{2}(A - B). \tag{3.22}$$

Stewart et al. (2001) definem a razão de Pseudo-Poisson como

$$Pseudo\ \sigma = \frac{\Delta I_P}{I_P} - \frac{\Delta I_S}{I_S}. \tag{3.23}$$

3.2 Indicador Baseado na Aproximação Tipo Impedância

Nesta seção apresentamos um novo indicador, denominado J, baseado na aproximação tipo impedância do coeficiente de reflexão da onda P-P. A equação (2.27) pode ser escrita como

$$R_{PP} \approx \frac{1-J}{1+J}, \tag{3.24}$$

onde

$$J = \frac{I_1}{I_2}. \tag{3.25}$$

Note que I pode ser qualquer função impedância, elástica, de reflexão, etc. Conseqüentemente J pode ser calculado diretamente a partir do coeficiente de reflexão como

$$J \approx \frac{1 - R_{PP}}{1 + R_{PP}}. \tag{3.26}$$

Note que este indicador J depende do ângulo de incidência e, assim, temos um indicador para cada ângulo. Como mostraremos a seguir, o indicador J se mostra um bom indicador de hidrocarbonetos para ângulos intermediários. Porém, sem cumprir as regras propostas em Castagna et al. (1985) apresentadas anteriormete. Portanto, definimos o indicador complementar,

$$T = 1 - J = \frac{2R_{PP}}{1 + R_{PP}}. \tag{3.27}$$

Note que não é necessário conhecer a função impedância da equação (2.27), já que o cálculo dos indicadores J e T, equações (3.26) e (3.27) respectivamente, é direto do coeficiente R_{PP}, sendo de todos os indicadores apresentados neste capítulo os únicos a prescindir de um processo de inversão.

3.3 Experimentos Numéricos

De maneira a comparar os diferentes indicadores usamos o mesmo conjunto de dados fornecidos na Tabela 2.1. O objetivo agora é comprovar se os indicadores apresentados na seção anterior funcionam separando folhelho sobre areia com gás de folhelho sobre areia com água e se cumprem as regras propostas em Castagna et al. (1985).

Na Figura 3.1 apresentamos alguns indicadores baseados na aproximação tipo série de Taylor. Na parte superior da figura está o produto do gradiente com o intercepto ($A \times B$). Como apontado em Castagna et al. (1985), este indicador não tem o comportamento esperado. No entanto, a média aritmética de A e B na maioria dos modelos consegue separar gás de água, falhando em outros, como por exemplo no modelo 8. Contudo, o indicador não cumpre uma das premissas que é que onde não há hidrocarbonetos o valor fique próximo de zero. Nesse sentido, o fator de fluídos ΔF, e o contraste de $V = \lambda\, \rho$ tem um desempenho melhor como pode ser observado nas duas últimas figuras, sendo este último ainda um pouco melhor, já que consegue separar em quase todos (exceto o modelo 8) areia com gás de areia com água, e o valor do indicador na presença de gás é mais negativo relativamente ao fator de fluídos.

Nas Figuras 3.2 e 3.3 são apresentados os indicadores baseados na aproximação tipo impedância. Na Figura 3.2 observamos primeiro que o valor de J exato é indistinguível dos aproximados utilizando a impedância elástica ou de reflexão para o caso particular de $\theta = 30°$. Note que há uma boa separação entre gás e água. Porém, na ausência de hidrocarbonetos, isto é, na interface folhelho sobre areia com água o valor do indicador é próximo de um, e os valores na interface folhelho sobre areia com gás os valores são positivos. Por isto definimos T como na equação (3.27). A Figura 3.3 mostra como este indicador discrimina bem água de areia, além de ter um valor quase constante e perto de zero na interface folhelho sobre areia com água, e ter um valor negativo relativamente grande para a interface folhelho areia com gás. Porém para alguns modelos (por exemplo o 25) o indicador para gás ficou positivo. Também observamos nesta figura que o valor de T independe do tipo de impedância utilizada em $\theta = 30°$.

A escolha de $\theta = 30°$ foi feita analisando o T para ângulos de $0°$ ate $60°$. Apresentamos alguns destes T na Figura 3.4. Como ilustrado na Figura 3.5 observamos que para ângulos ao redor de $30°$ o comportamento é similar. Na prática teríamos uma média destes valores, observado na última imagem da Figura 3.5, que apresenta o mesmo comportamento.

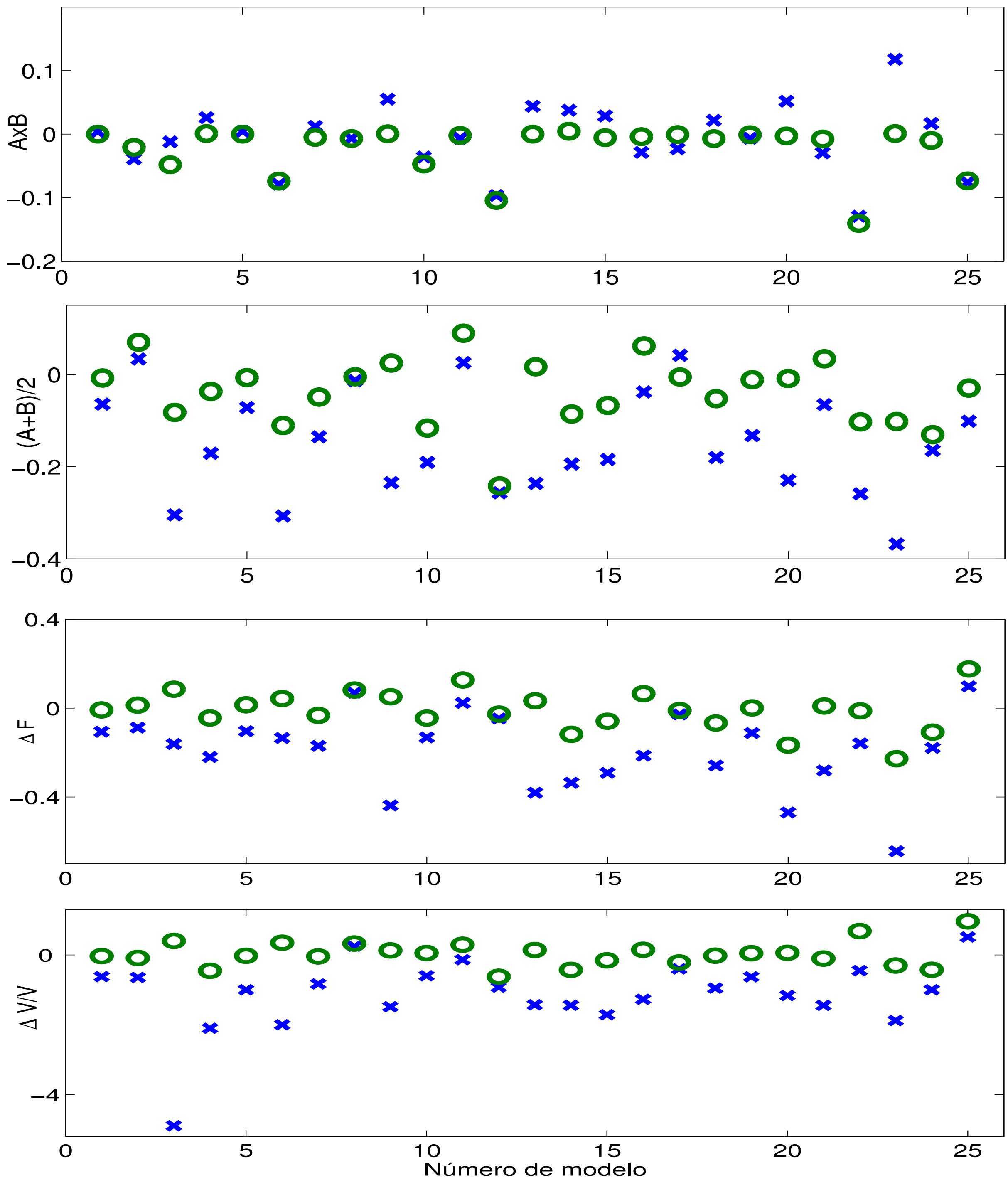


Figura 3.1: Comparação de alguns indicadores obtidos da aproximação de R_{PP} baseadas em série de Taylor. Separação de interfaces folhelho sobre areia com gás ($\times$) de folhelho sobre areia com água (o) para os 25 modelos da Tabela 2.1.

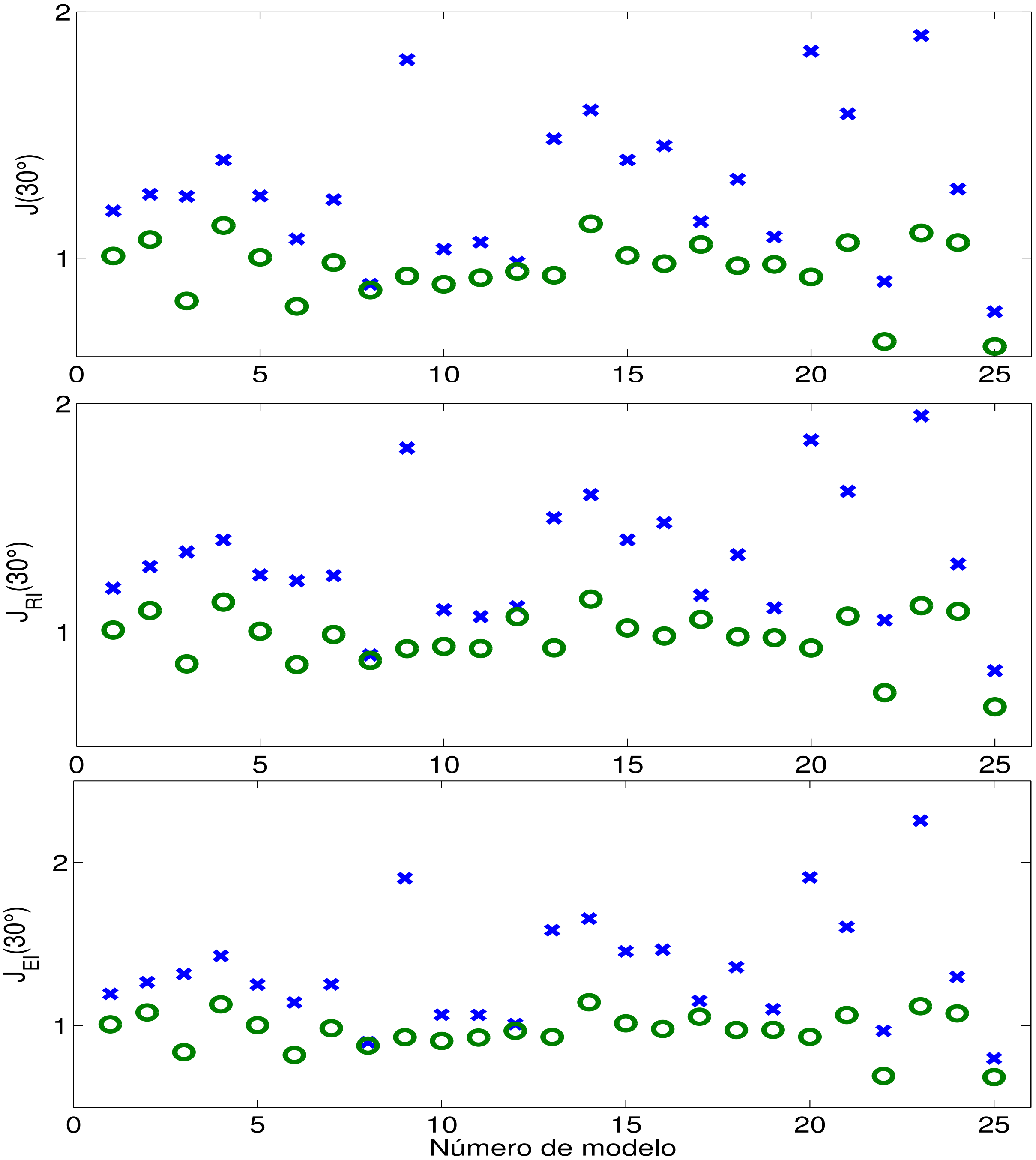


Figura 3.2: Separação de interfaces folhelho sobre areia com gás ($\times$) de folhelho sobre areia com água (o) para os 25 modelos da Tabela 2.1, utilizando a aproximação de R_{PP} tipo impedância pra calcular J em $\theta = 30°$. Na parte superior: valor exato. No centro: aproximação tipo impedância de reflexão. Na parte inferior: aproximação tipo impedância elástica.

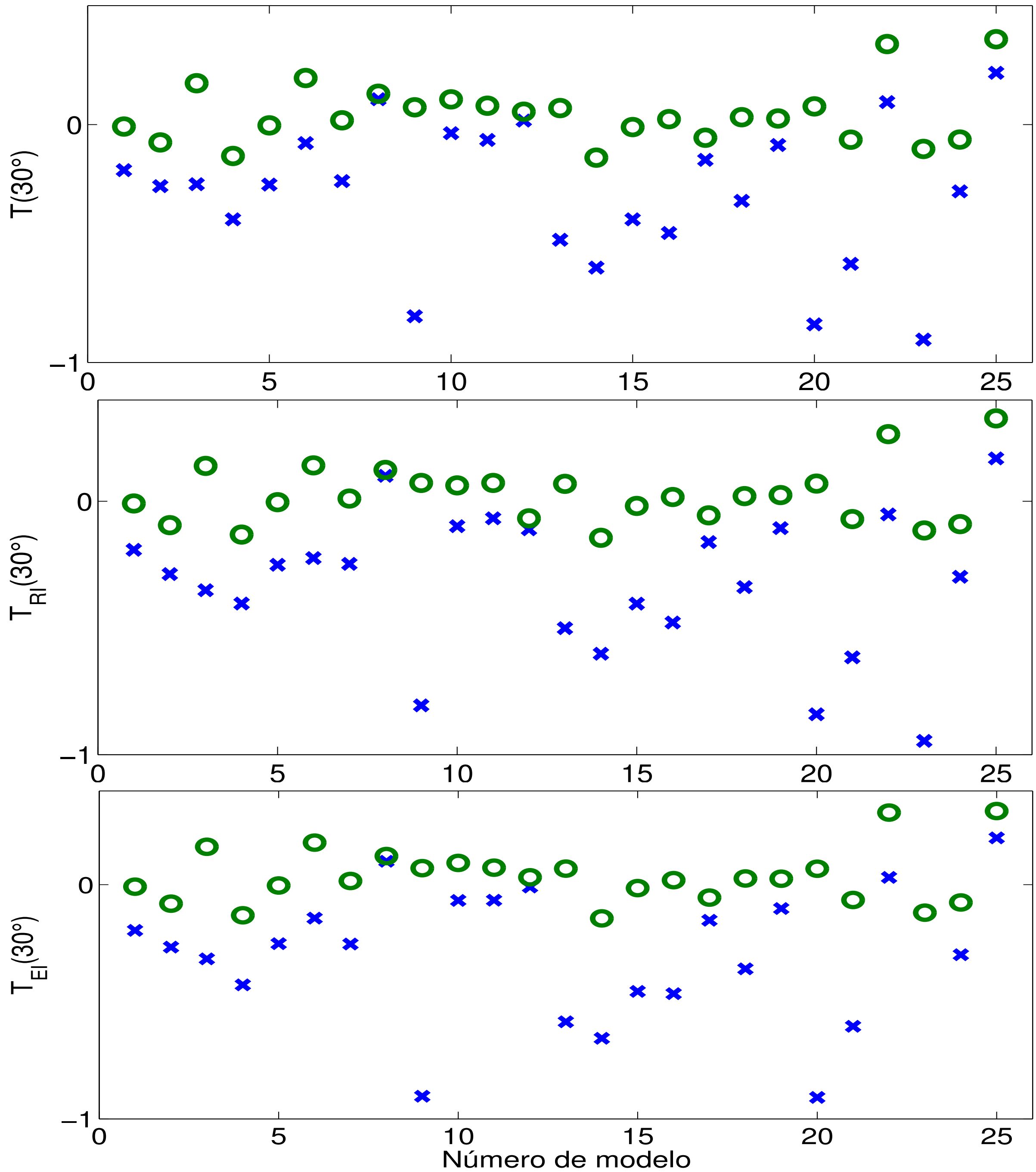


Figura 3.3: Separação de interfaces folhelho sobre areia com gás ($\times$) de folhelho sobre areia com água (o) para os 25 modelos da Tabela 2.1, utilizando a aproximação de R_{PP} tipo impedância pra calcular $T = 1 - J$ em $\theta = 30°$. Na parte superior: valor exato. No centro: a aproximação tipo impedância de reflexão. Na parte inferior: aproximação tipo impedância elástica.

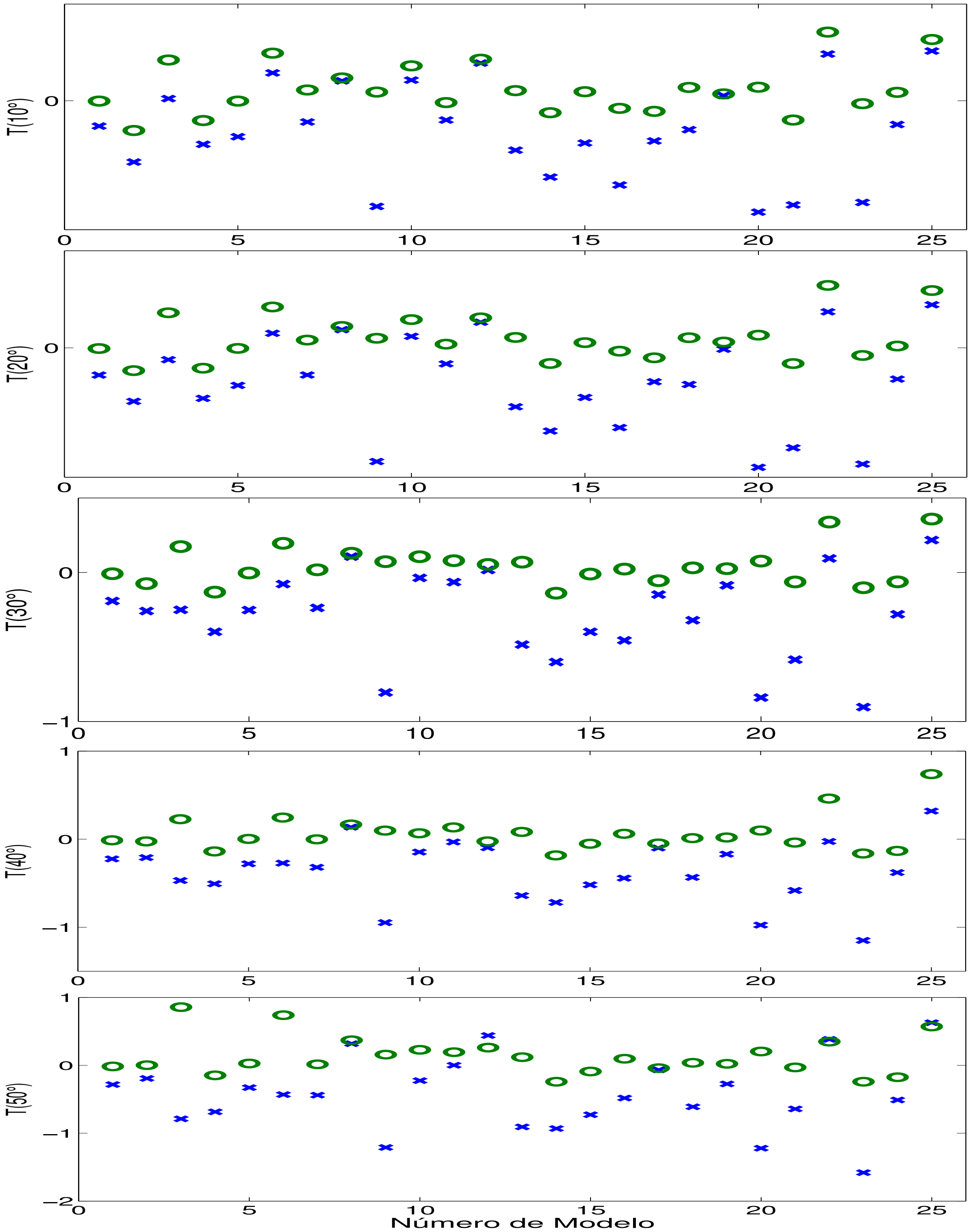


Figura 3.4: $T(\theta)$ para diferentes $\theta = 10, 30, 20, 40, 50$. Areia com gás ($\times$) de folhelho sobre areia com água (o) para os 25 modelos da Tabela 2.1.

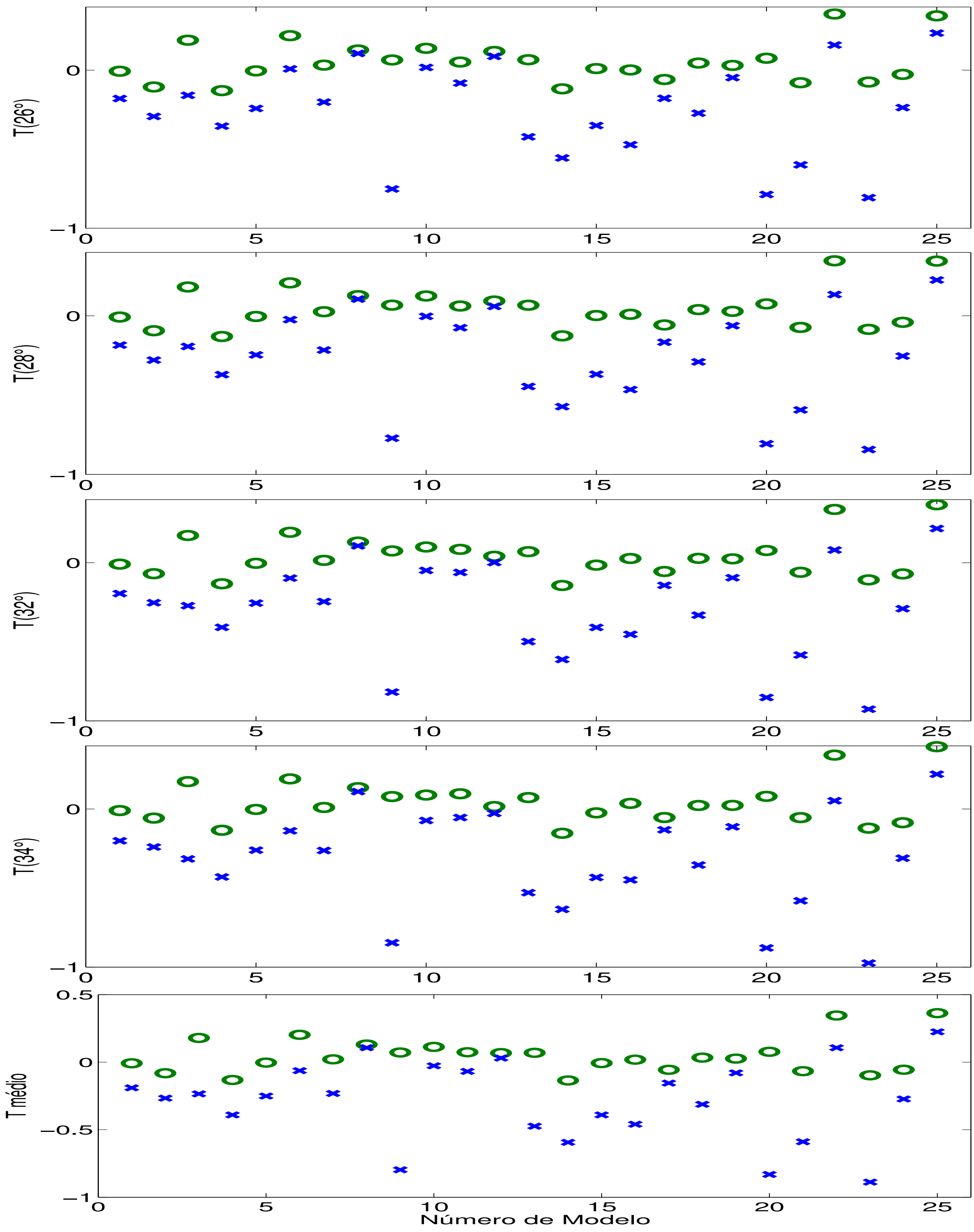


Figura 3.5: Diferentes $T(\theta)$ ao redor de $T(30°)$. Abaixo: Média de $T(\theta)$ para θ entre 26 e 34.

Capítulo 4

Estimação de Parâmetros Elásticos

A análise de amplitude versus afastamento (AVO) é baseada na dependência do coeficiente de reflexão com o ângulo de incidência. Ao se corrigirem efeitos indesejáveis da amplitude do traço sísmico, e restar somente o efeito do afastamento, se pode relacionar as amplitudes com os contrastes nos parâmetros elásticos. Alguns métodos para obter estes contrastes utilizam uma inversão utilizando as fórmulas de Zoeppritz (Crase et al., 1990; Dahl and Ursin, 1991). Outros, como o apresentado em Smith and Gidlow (1987), ajustam as amplitudes a uma aproximação de contraste fraco (Aki and Richards, 1980) e todas as possíveis parametrizações podem ser ajustadas da mesma maneira. Utilizando o conceito de impedância, Whitcombe et al. (2002) mostram como estimar alguns parâmetros elásticos em função do que eles chamam *impedância elástica estendida*, necessitando um processo de inversão. Inspirados nesse trabalho apresentamos como obter uma estimativa dos parâmetros elásticos diretamente do coeficiente de reflexão, sem envolver um processo de inversão.

4.1 Estimação de Parâmetros Elásticos via Impedância Elástica Estendida

Dong (1996) propõe calcular as mudanças nos parâmetros elásticos λ, μ e κ (módulo de imcompressibilidade) a partir dos parâmetros da equação de Shuey (3.5). A definição de κ é

$$\kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu = \left(\alpha^2 - \frac{4}{3}\beta^2\right)\rho \qquad (4.1)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}\Delta\kappa &= 2\rho\alpha\Delta\alpha - \frac{8}{3}\rho\beta\Delta\beta + (\alpha^2 - \frac{4}{3}\beta^2)\Delta\rho \\ &= \frac{2}{3}\alpha^2\rho\left[3\frac{\Delta\alpha}{\alpha} - 4\frac{\beta^2}{\alpha^2}\frac{\Delta\beta}{\beta} + \Big(\frac{3}{2} - 2\frac{\beta^2}{\alpha^2}\Big)\frac{\Delta\rho}{\rho}\right].\end{aligned} \tag{4.2}$$

Em função dos coeficientes A, B e C, equação (3.6), a mudança no valor do módulo de compressibilidade através de uma interface é dada por,

$$\Delta\kappa = \frac{2}{3}\alpha^2\rho(3A + B + 2C). \tag{4.3}$$

Shuey (1985), examinando a relação C/A (B_0 na equação (3.4)), notou que esta tende a estar entre 0 e 1. Whitcombe et al. (2002) chamaram este quociente de f, que deve ser determinado para cada área de estudo. Por exemplo, no caso das rochas descritas em Gardner et al. (1974), $f = 0.8$. Usando f e dividindo a equação (4.3) por κ obtemos

$$\frac{\Delta\kappa}{2\kappa} = \Big(A + \frac{B}{3+2f}\Big)\Big(\frac{3+2f}{3-4K^2}\Big), \tag{4.4}$$

onde $K = \beta/\alpha$. Podemos considerar o primeiro termo da equação (4.4) na forma da equação de AVO (3.7), definindo,

$$\sin^2\theta_\kappa = \frac{1}{3+2f}. \tag{4.5}$$

Uma vez definido o valor de f, obtemos $\Delta\kappa/2\kappa$ como uma proporção de $R(\theta_\kappa)$. Isto vale se consideramos o segundo termo da equação (4.4) como um valor constante na área de estudo. Concluindo, a refletividade associada ao módulo de imcompressibilidade pode ser considerada como uma projeção escalada da reflexão num determinado ângulo. Um tratamento similar para o parâmetro de Lamé, λ, proporciona a refletividade associada ao parâmetro λ,

$$\frac{\Delta\lambda}{2\lambda} = \Big(A + \frac{B}{2+f}\Big)\Big(\frac{2+f}{2-4K^2}\Big). \tag{4.6}$$

Novamente analisando o primeiro termo definimos,

$$\sin^2\theta_\lambda = \frac{1}{2+f}. \tag{4.7}$$

Para o módulo de cisalhamento, μ, a refletividade associada é descrita por

$$\frac{\Delta\mu}{2\mu} = \Big(A - \frac{B}{f}\Big)\Big(\frac{f}{4K^2}\Big), \tag{4.8}$$

e, portanto, definimos,

$$\sin^2\theta_\mu = -\frac{1}{f}. \tag{4.9}$$

Analisando as equações (4.5), (4.7) e (4.9), para valores típicos de f e K, $f = 0.8$ e $K = 0.5$, temos que $\theta_\kappa = 28°$, $\theta_\lambda = 37°$ e θ_μ não é real. Whitcombe et al. (2002) propõem fazer uma extrapolação dos valores de $\sin^2\theta$ para achar o valor associado a μ e, também, fazem algumas mudanças na definição da impedância elástica como descrito a seguir.

O primeiro passo para a definição da impedância elástica estendida é substituir $\sin^2\theta$ por $\tan\chi$ na equação (3.7),

$$R_{PP} \approx A + B\tan\chi = \frac{A\cos\chi + B\sin\chi}{\cos\chi}. \tag{4.10}$$

Note que agora estamos considerando a equação de AVO (3.7) e não a equação de três termos de Shuey, equação (3.5), como fez Connolly (1999) para a dedução da impedância elástica. Whitcombe et al. (2002) definem a refletividade escalada multiplicando a equação (4.10) por $\cos\chi$,

$$R_E = R_{PP}\cos\chi \approx A\cos\chi + B\sin\chi, \tag{4.11}$$

e integrando da mesma maneira que na Seção 1.3.1, a impedância elástica estendida se torna,

$$EEI = \alpha_0\rho_0\Big[\Big(\frac{\rho}{\rho_0}\Big)^r\Big(\frac{\alpha}{\alpha_0}\Big)^h\Big(\frac{\beta}{\beta_0}\Big)^q\Big], \tag{4.12}$$

onde

$$r = \cos\chi - 4K^2\sin\chi, \quad h = \cos\chi + \sin\chi, \quad \text{e} \quad q = -8K^2\sin\chi. \tag{4.13}$$

A utilidade desta aproximação é apenas predizer os valores das constantes elásticas, por isto não a apresentamos no capítulo de aproximações. Os autores apontam que encontrando o parâmetro apropriado χ, se podem aproximar λ, μ e κ, entre outros, pela função impedância elástica estendida. Note, que para tanto, é necessário calcular o valor de f e o valor de K, e considerar ambos constantes na região, além de um processo de inversão para calcular a função impedância, como descrito em Connolly (1999).

4.2 Estimação Direta de Parâmetros Elásticos

A partir do trabalho de Whitcombe et al. (2002) propomos encontrar outra maneira de aproximar as constantes elásticas diretamente do coeficiente de reflexão e tentando impor menos condições a priori.

4.2.1 Estimação de λ a partir de R_{PP}

Partimos da parametrização de Gray et al. (1999), equação (3.19),

$$R_{PP} \approx \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right] \sec^2\theta \frac{\Delta\lambda}{\lambda} + \frac{\beta^2}{\alpha^2}\left[\frac{1}{2}\sec^2\theta - 2\sin^2\theta\right]\frac{\Delta\mu}{\mu} + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sec^2\theta\right]\frac{\Delta\rho}{\rho}\ .$$

Observamos que para $\theta = 45°$ os termos que acompanham os contrastes em μ e ρ desaparecem e, assim,

$$R_{PP}(45°) \approx (1 - 2K^2)\frac{\Delta\lambda}{2\lambda}, \quad K = \frac{\beta}{\alpha}. \tag{4.14}$$

Portanto, podemos obter, considerando K constante na área de estudo, o contraste do parâmetro de Lamé a partir de uma seção em $\theta = 45°$. Como veremos na próxima seção, isto não apresentou bons resultados, o que nos levou a propor uma nova abordagem. Se consideramos a aproximação tipo impedância, equação (2.27), podemos escrever também

$$R_{PP} \approx \frac{\Delta I}{2I}, \tag{4.15}$$

e conseqüentemente,

$$\left.\frac{\Delta I}{2I}\right|_{\theta=45°} \approx (1 - 2K^2)\frac{\Delta\lambda}{2\lambda}. \tag{4.16}$$

Integrando esta equação de diferenças, considerando K constante, obtemos,

$$I(45°) \approx C_0\lambda^\epsilon, \quad \epsilon = 1 - 2K^2, \tag{4.17}$$

com C_0 uma constante de integração. A partir da definição de J, equação (3.25), temos também que

$$J(45°) = \frac{I_1(45°)}{I_2(45°)} \approx \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\epsilon}. \tag{4.18}$$

O valor de J é obtido diretamente do coeficiente de reflexão R_{PP}. Temos então uma maneira de obter o quociente dos λ diretamente dos dados, uma vez conhecido K. Porém, temos que dizer rigorosamente que utilizamos as hipóteses do trabalho de Connolly (1999). Este fato deveria corroborar que $J(45°)$ é o obtido utilizando a impedância elástica em $\theta = 45$ °, isto é, usando a equação (2.41),

$$I(45°) = C_0 \alpha^2 \rho \mu^{-2K^2}, \tag{4.19}$$

onde C_0 é uma constante e, portanto,

$$J(45°) = \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2 \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right) \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{-2K^2}. \tag{4.20}$$

Da hipótese de K ser constante, vem

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2}. \tag{4.21}$$

Logo, substituindo (4.21) na equação (4.20), e considerando a definição de μ, equação (3.17), obtemos

$$J(45°) = \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{\epsilon}. \tag{4.22}$$

Assim, o valor de J em $\theta = 45°$ estimaria também o quociente dos μ. Como veremos nos testes numéricos apenas a equação (4.18) apresenta bons resultados.

Para o caso acústico podemos mostrar que a relação (4.18) é verdadeira. No caso acústico $\epsilon = 1$ já que $\beta = 0$. Partimos de

$$\theta = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} = 45°, \quad \text{ou} \quad \theta_1 + \theta_2 = 90° \tag{4.23}$$

Logo, o coeficiente de reflexão acústico (2.7) se torna,

$$R_{PP} = \frac{\rho_2\alpha_2 \sin\theta_2 - \rho_1\alpha_1 \sin\theta_1}{\rho_2\alpha_2 \sin\theta_2 + \rho_1\alpha_1 \sin\theta_1} = \frac{\rho_2\alpha_2^2 - \rho_1\alpha_1^2}{\rho_2\alpha_2^2 + \rho_1\alpha_1^2}. \tag{4.24}$$

Como $\lambda = (\alpha^2 - 2\beta^2)\rho = \alpha^2\rho$, temos então que

$$R_{PP} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 + \lambda_1}. \tag{4.25}$$

Daí,

$$J(45°) = \frac{1 - R_{PP}}{1 + R_{PP}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}. \tag{4.26}$$

No caso da Impedância Elástica vimos que $J(45°)$ equivale ao quociente dos μ. Mas nesta aproximação é considerado que o quociente das velocidades é constante. Logo, λ pode ser escrito como

$$\lambda = (\alpha^2 - 2\beta^2)\rho = (1 - 2K^2)\alpha^2\rho, \tag{4.27}$$

e o quociente

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\alpha_1^2\rho_1}{\alpha_2^2\rho_2} = \frac{\beta_1^2\rho_1}{\beta_2^2\rho_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \tag{4.28}$$

Portanto levando em consideração esta última equação e a equação (4.20), utilizando a impedância elástica, $J(45°)$ deveria aproximar bem o quociente dos λ elevados a ϵ.

Utilizando a Impedância de Reflexão, equação (2.58) em $\theta = 45°$, a relação entre θ_1 e θ_2, equação (4.23), e a Lei de Snell, escrevemos $J(45°)$ como,

$$J(45°) = \frac{\rho_1\alpha_1^2}{\rho_2\alpha_2^2} \exp\left\{ -2[2+\gamma](\beta_1^2 - \beta_2^2)p^2 \right\}. \tag{4.29}$$

Neste caso o parâmetro do raio p é,

$$p^2 = \frac{1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}, \tag{4.30}$$

e, portanto,

$$J(45°) = \frac{\rho_1\alpha_1^2}{\rho_2\alpha_2^2} \exp\left\{ 2[2+\gamma]\frac{(\beta_2 - \beta_1)(\beta_1 + \beta_2)}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \right\}. \tag{4.31}$$

Considerando os Δu definidos anteriormente para $u = \alpha, \beta$,

$$J(45°) \approx \frac{\rho_1 \alpha_1^2}{\rho_2 \alpha_2^2} \exp\left\{ \frac{\Delta\beta}{\beta} \Big(2[2+\gamma] \frac{\beta^2}{\alpha^2 + (\Delta a)^2} \Big) \right\}. \tag{4.32}$$

Desprezando o fator $(\Delta a)^2$ e considerando a definição de $K = \beta/\alpha$,

$$J(45°) \approx \frac{\rho_1 \alpha_1^2}{\rho_2 \alpha_2^2} \exp\left\{ \frac{\Delta\beta}{\beta} \Big(2[2+\gamma] K^2 \Big) \right\}. \tag{4.33}$$

Aproximando $e^{\Delta\beta/\beta}$ por Taylor ao redor de $\beta_2/\beta_1 = 1$,

$$J(45°) \approx \frac{\rho_1 \alpha_1^2}{\rho_2 \alpha_2^2} \left[\Big(\frac{\beta_2}{\beta_1} \Big)^{-[2+\gamma]} \right]^{-2K^2}. \tag{4.34}$$

Considerando a relação funcional entre β e ρ, ($\rho = b\beta^\gamma$), e novamente a definição de K chegamos a,

$$J(45°) \approx \frac{\rho_1 \alpha_1^2}{\rho_2 \alpha_2^2} \left[\Big(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \Big)^2 \Big(\frac{\rho_1}{\rho_2} \Big) \right]^{-2K^2} = \left[\frac{\rho_1 \alpha_1^2}{\rho_1 \alpha_2^2} \right]^{1-2K^2}. \tag{4.35}$$

Finalmente, considerando a primeira igualdade da equação (4.28),

$$J(45°) = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{\epsilon}. \tag{4.36}$$

4.2.2 Estimação de ρ a partir de R_{PS}

A aproximação baseada em série de Taylor do coeficiente de reflexão da onda P-S, equação (2.26), pode ser reescrita em função dos contrastes de μ e ρ como

$$R_{PS} \approx \frac{\sin\theta}{\cos\phi} \left[\cos(\theta+\phi) \frac{\Delta\mu}{\mu} - \frac{\Delta\rho}{2\rho} \right]. \tag{4.37}$$

O fator que acompanha o contraste em μ é igual a zero quando $\theta + \phi = 90°$. Utilizando a Lei de Snell, temos que tal ângulo θ é dado por,

$$\theta_\rho = \arctan\left(\frac{\alpha}{\beta} \right) = \arctan\left(\frac{1}{K} \right). \tag{4.38}$$

Nesse caso a equação (4.37) se torna

$$R_{PS}(\theta_\rho) = -\frac{\Delta\rho}{2\rho}. \tag{4.39}$$

Concluindo, podemos obter o contraste das densidades a partir da reflexão da onda P-S, num ângulo determinado estimando o valor de K na área de estudo. Considerando que K é suposto geralmente perto de 0.5 o ângulo correspondente estaria próximo de 60°, que pode ser considerado um ângulo muito grande. Porém, ao se tratar de ondas convertidas, podemos dizer que um ângulo de incidência de 60° para a onda convertida equivale a um ângulo de incidência de 30° para a onda P-P. Logo se consideramos afastamentos grandes, e as duas aquisições simultâneas, este ângulo estaria presente nos dados. Esta abordagem também não forneceu bons resultados, analogamente ao caso do contraste para λ.

Podemos reescrever o coeficiente de reflexão da onda P-S, equação (2.36), como,

$$R_{PS} \approx \frac{\Delta L}{2L}, \tag{4.40}$$

onde L é função impedância para R_{PS}. Igualando (4.39) com (4.40) chegamos a,

$$\left.\frac{\Delta L}{2L}\right|_{\theta=\theta_\rho} = -\frac{\Delta\rho}{2\rho}, \tag{4.41}$$

e integrando esta equação de diferenças, obtemos $L(\theta_\rho)$ como

$$L(\theta_\rho) = \frac{C_0}{\rho}, \tag{4.42}$$

onde C_0 é uma constante de integração. Também podemos definir neste caso J_S a partir de R_{PS} como

$$J_S = \frac{1 - R_{PS}}{1 + R_{PS}} = \frac{L_1}{L_2}, \tag{4.43}$$

e, assim, os quocientes das densidades ficam estimados a partir de (4.42) e (4.43) como

$$J_S(\theta_\rho) = \frac{\rho_2}{\rho_1}. \tag{4.44}$$

Neste caso, a diferença da estimativa dos λ, trocando o valor de θ por θ_ρ na impedância elástica P-S ($PSEI$), equação (2.43) fornece o mesmo resultado que a equação (4.44), obtido de substituir o valor de θ_ρ em (2.43). González et al. (2002) apontam que a relação dos ρ

pode ser calculada em $\theta = 1/K$, no lugar de $\theta = \arctan(1/K)$ como mostramos. Eles também sugerem que uma das dificuldades em utilizar $PSEI$ para estimar ρ, além do cálculo do ângulo de incidência, é o processo de inversão dos dados para obtê-la. Utilizando a equação (4.44) ao invés da equação (4.42) estaríamos contornando este problema, já que não é requerido um processo de inversão, nem saber qual é a impedância L.

4.2.3 Estimação de σ a partir de R_{PP}

Baseados nas relações "perto/longe", (do inglês "far/near ") tão utilizadas na sísmica, propomos calcular o quociente da relação de Poisson como,

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{J(\theta_{longe})}{J(\theta_{perto})}, \tag{4.45}$$

onde os ângulos devem ser escolhidos adequadamente. Por exemplo, ângulos pequenos entre 0 e 10 graus e grandes entre 40 e 60 graus. Não temos uma demonstração analítica desta aproximação, porém, os resultados se apresentaram muito bons na prática como analisado na próxima seção. Porém, observando a expressão da impedância de reflexão (equação (2.58)), observamos que o efeito da equação (4.45) está na exponencial, isto é, na diferença das razões das velocidades, K, de cada interface amplificado pela diferença dos senos dos ângulos próximo e afastado. Observando que a razão das velocidades está diretamente relacionado com a relação de Poisson, equação (3.2), pode ser este o motivo da boa estimação do quociente.

4.3 Experimentos numéricos

Para testar nossa nova abordagem utilizamos um poço real, apresentado na Figura 4.1. Utilizamos para os cálculos o coeficiente de reflexão no ângulo de incidência $\theta_1 = 45°$ ao invés do ângulo médio $\theta = 45°$, já que na prática consideramos ângulos de incidência. Sendo que deveria ser a média em 45° acreditamos que não existe muita divergências nos resultados, como confirmado no gráfico das correlações entre $J(\theta)$ e $(\lambda_1/\lambda_2)^\epsilon$, exibido na Figura 4.7.

Na Figura 4.2 observamos que utilizar $R_{PP}(45°)$ para estimar o contraste em λ, equação (4.14), não fornece bons resultados, sendo o erro relativo inaceitável. Por outro lado $J(45°)$ estima o quociente dos λ através da equação (4.18) muito bem, como pode ser observado na Figura 4.3. O erro percentual ficou abaixo de 3% para quase todo o poço. Um detalhe pode ser visto na Figura 4.4, onde as duas curvas são praticamente coincidentes. Na Figura 4.5 vemos a estimativa do quociente dos λ se estivéssemos utilizando as impedâncias de reflexão e elástica. Fica claro que a melhor estimação é a do J exato, e a pior é a aproximação que utiliza a impedância elástica, sendo a aproximação do J mediante a impedância de reflexão muito mais precisa. Isto, além de confirmar o fato que a aproximação tipo impedância de reflexão é melhor que a elástica, nos mostra que realmente há uma relação forte entre $J(45°)$ e os quocientes dos λ.

Para estimar a razão dos λ utilizamos ϵ constante na equação (4.18) que depende de K, razão das velocidades da onda P e S. Como pode ser observado na Figura 4.6 parte inferior, o valor de ϵ que foi utilizado nos cálculos não é constante ao longo do poço. Porém, ao plotarmos os logaritmos de $J(45°)$ e λ_1/λ_2 vemos que realmente há uma relação do tipo (4.18) (parte superior da Figura 4.6). Nesse mesmo gráfico observamos que a constante ϵ calculada como a média dos quocientes das velocidades ao quadrado, é muito próxima do valor que se tem da solução de quadrados mínimos aplicados aos dados do gráfico. A diferença no cálculo do quociente dos lambidas é desprezível. Outra boa verificação que se observa é que o coeficiente de correlação entre $J(45°)$ e $(\lambda_1/\lambda_2)^\epsilon$ é de 0.98, que é o máximo valor de correlação para todos os ângulos (Figura 4.7).

A Figura 4.8 exibe a estimação dos quocientes dos μ, μ_1/μ_2, através da equação (4.22), para o poço. Observamos que a estimação é muito pobre, tendo erros relativos perto de 20%. Tendo em consideração que trabalhamos com o dado exato este resultado é muito ruim. O coeficiente de correlação entre as curvas de $J(45°)$ e $(\mu_1/\mu_2)^\epsilon$ para o poço inteiro foi muito menor que 1. Um detalhe da Figura 4.8 se apresenta na Figura 4.9, onde podemos apreciar que além dos valores não concordarem as curvas são bem diferentes, confirmando a baixa correlação.

Verificamos também que um quociente de $J(45°)/J(5°)$, utilizando o coeficiente R_{PP}, tipo "longe/perto", estimou bastante bem o quociente das razões de Poisson, equação (3.2), como ilustrado nas Figuras 4.10 e 4.11. Vemos que o erro relativo foi pequeno (Figura 4.10, abaixo) e que ambas as curvas tem o mesmo comportamento (Figura 4.11). O coeficiente de correlação entre ambas as curvas foi de 0.92 e tomamos $J(45°)$ como J em ângulos grandes por supor que o calcularíamos para a estimação da razão das λ.

Os resultados referentes à estimação de ρ são exibidos nas Figuras 4.12 a 4.15. O valor de θ_ρ, calculado utilizando o ϵ da Figura 4.6, foi igual a 64°. Na Figura 4.12 vemos a estimação do contraste dos ρ através da equação (4.39). Apesar do valor da correlação das curvas ter sido 0.9, o erro relativo é inaceitável (ver a parte inferior da Figura 4.12). Isto significa que a forma das curvas é parecida mas não os valores. Em contraposição, na Figura 4.13 vemos que a estimação do quociente dos ρ, equação (4.44), foi excelente, tendo um erro relativo perto de 1% para quase todo o poço e uma correlação alta, 0.93. Um detalhe pode ser visto na Figura 4.14. Na Figura 4.15 vemos que a correlação entre o J_S e o quociente ρ_2/ρ_1 apresenta um máximo perto de 64°, confirmando assim o bom desempenho apresentado pela equação (4.44).

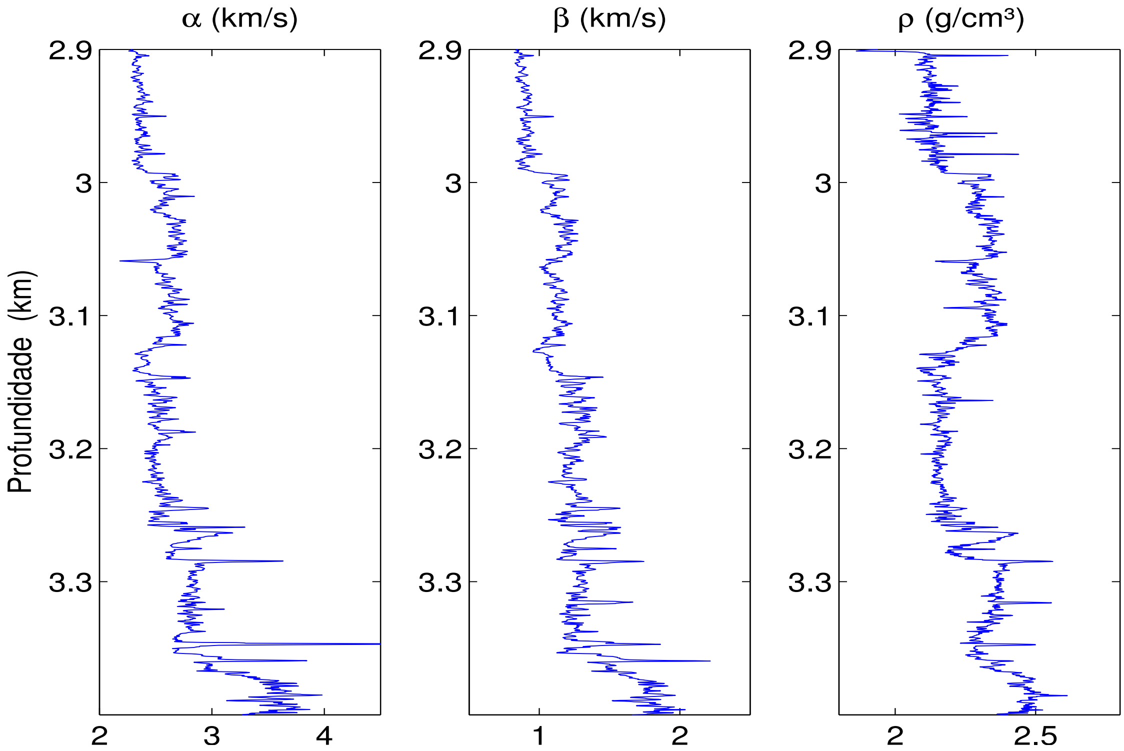


Figura 4.1: Poço utilizado nos experimentos numéricos. À esquerda: velocidade da onda P. No centro: velocidade da onda S. À direita: densidade.

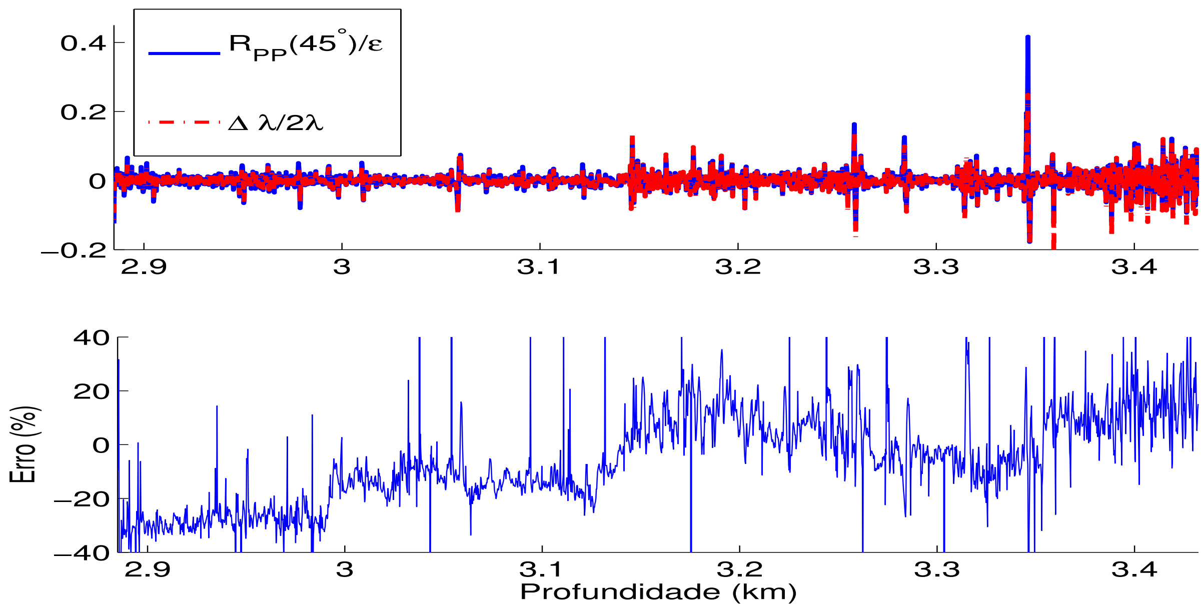


Figura 4.2: Acima: Comparação de $R_{PP}(45°)/\epsilon$ com $\Delta\lambda/\lambda$, equação (4.14). Abaixo: Erro percentual.

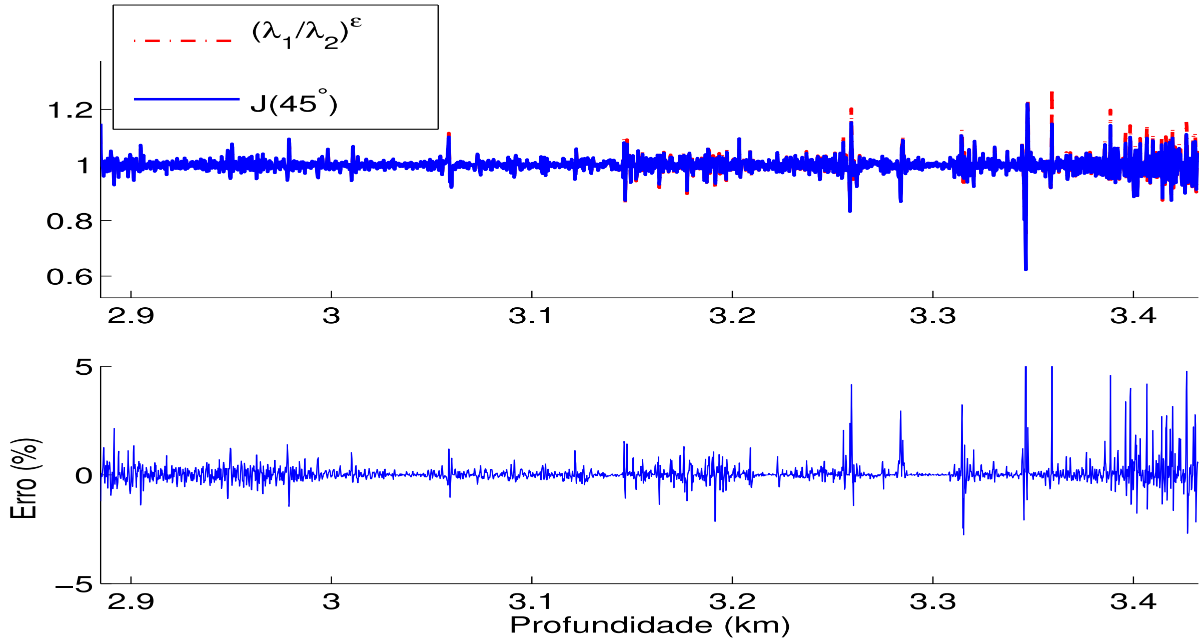


Figura 4.3: Acima: Comparação de $J(45°)$ com $(\lambda_1/\lambda_2)^\epsilon$, equação (4.18). Abaixo: Erro percentual.

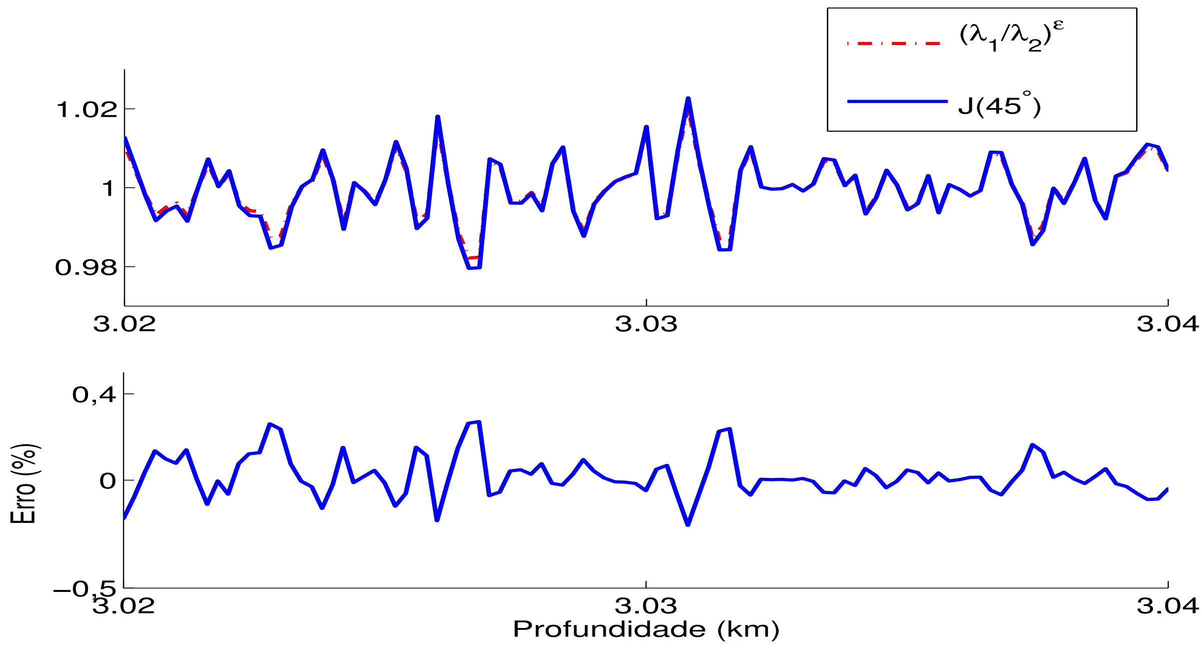


Figura 4.4: Comparação de $J(45°)$ com $(\lambda_1/\lambda_2)^\epsilon$, equação (4.18). Detalhe da Figura 4.3.

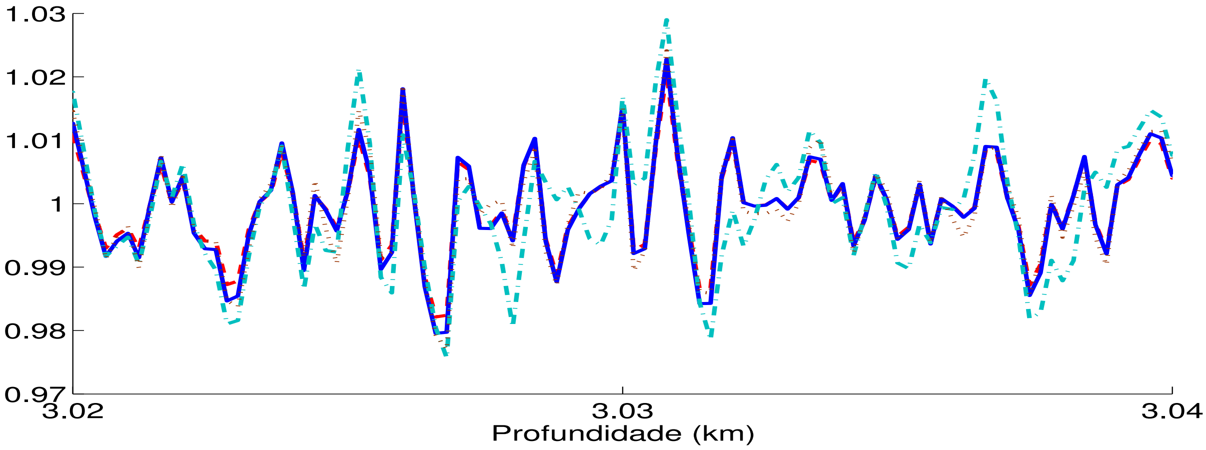


Figura 4.5: Comparação de $J(45°)$ (linha contínua), $J_{RI}(45°)$ (linha pontilhada) e $J_{EI}(45°)$ (linha tracejada-pontilhada) como estimadores de $(\lambda_1/\lambda_2)^\epsilon$ (linha tracejada). O intervalo de profundidade é o mesmo da Figura 4.4.

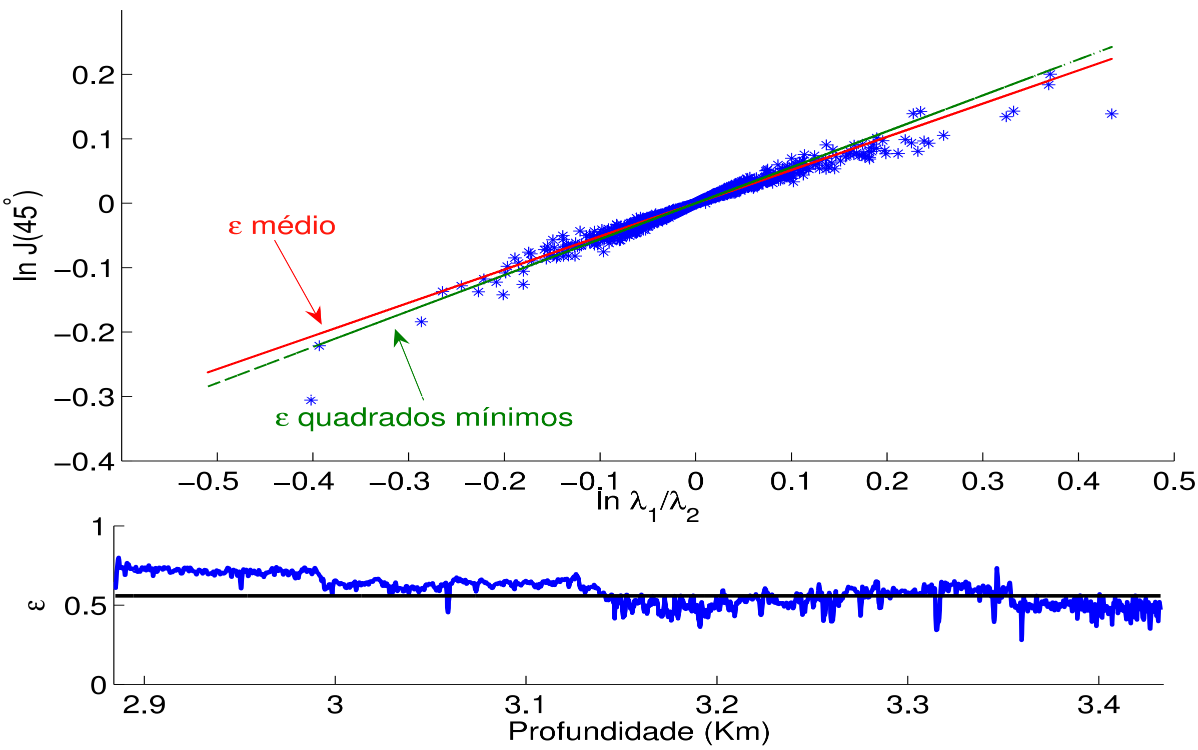


Figura 4.6: Acima: Logaritmo de $J(45°)$ versus logaritmo de λ_1/λ_2. A inclinação das retas são o valor de ϵ, um utilizando a média dos quocientes das velocidades ao quadrado, e o outro é a solução de quadrados mínimos. Abaixo: valor de ϵ para o poço; a linha horizontal é o valor médio de ϵ.

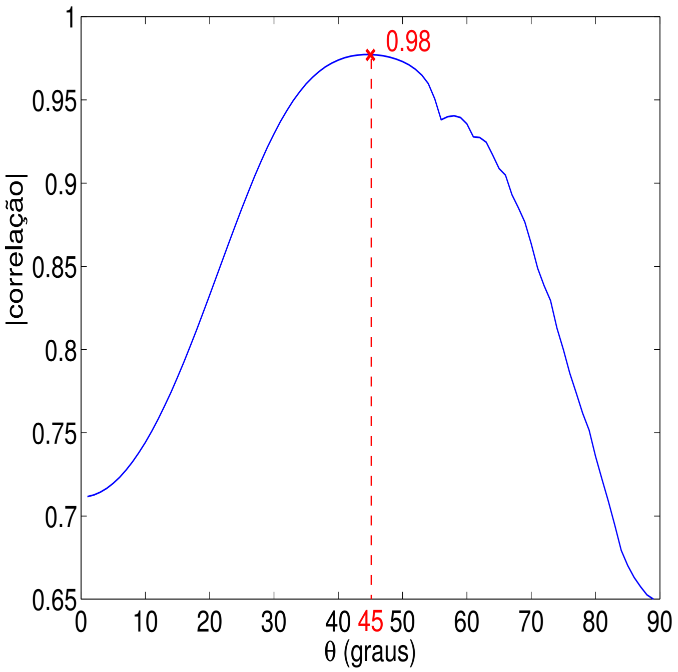


Figura 4.7: Correlação entre $J(\theta)$ e $(\lambda_1/\lambda_2)^\epsilon$.

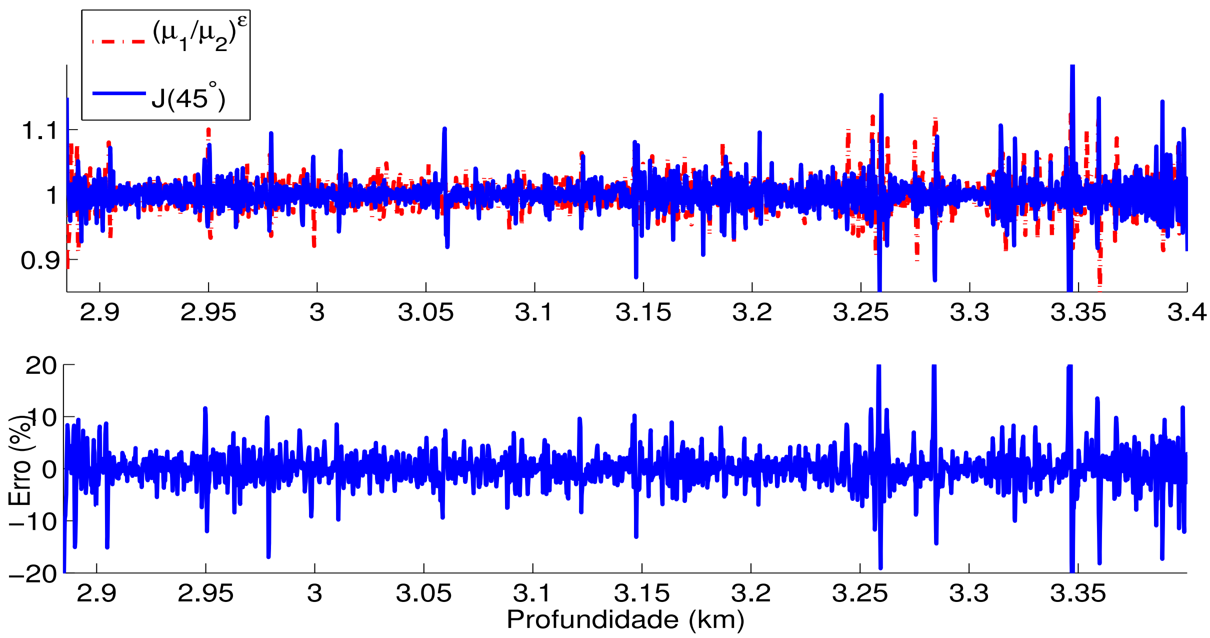


Figura 4.8: Acima: Comparação de $J(45°)$ com $(\mu_1/\mu_2)^\epsilon$, equação (4.22). Abaixo: Erro percentual.

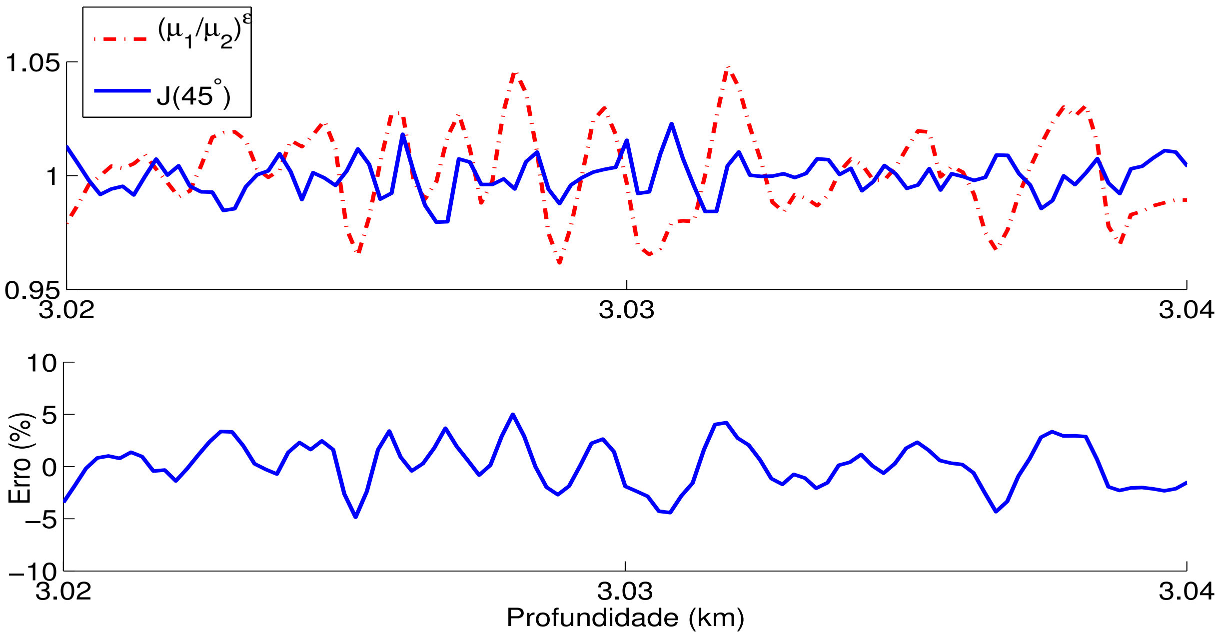


Figura 4.9: Acima: Comparação de $J(45°)$ com $(\mu_1/\mu_2)^\epsilon$, equação (4.22). Abaixo: Erro percentual.

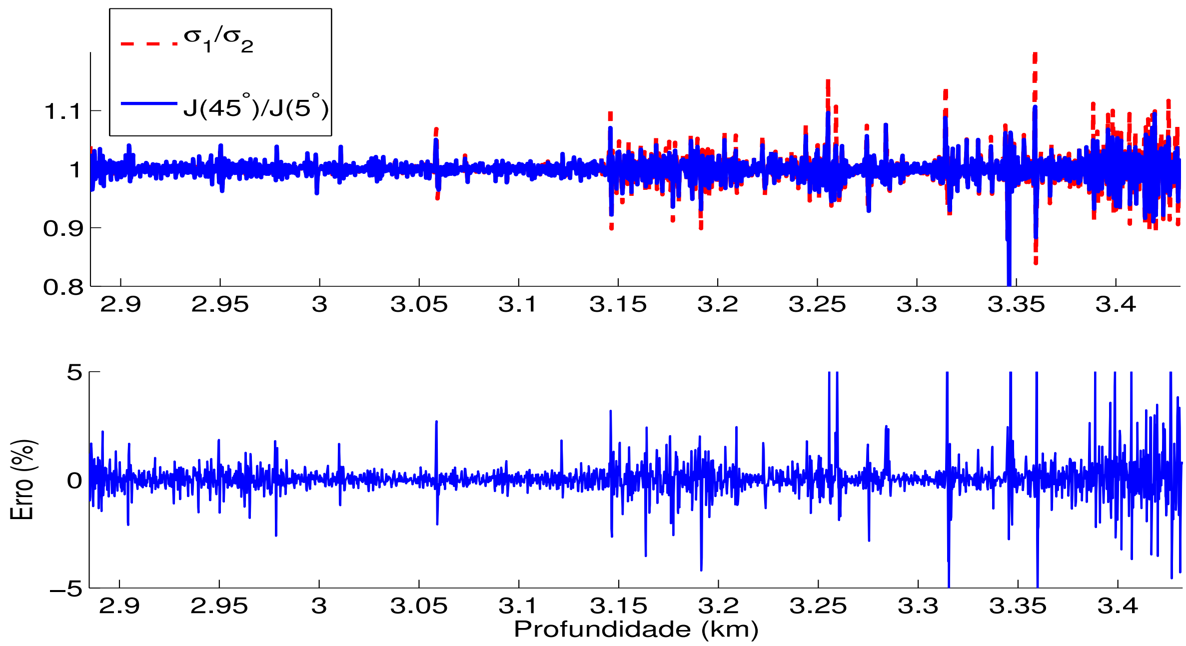


Figura 4.10: Acima: Comparação de $J(45°)/J(5°)$ com σ_1/σ_2. Abaixo: Erro percentual.

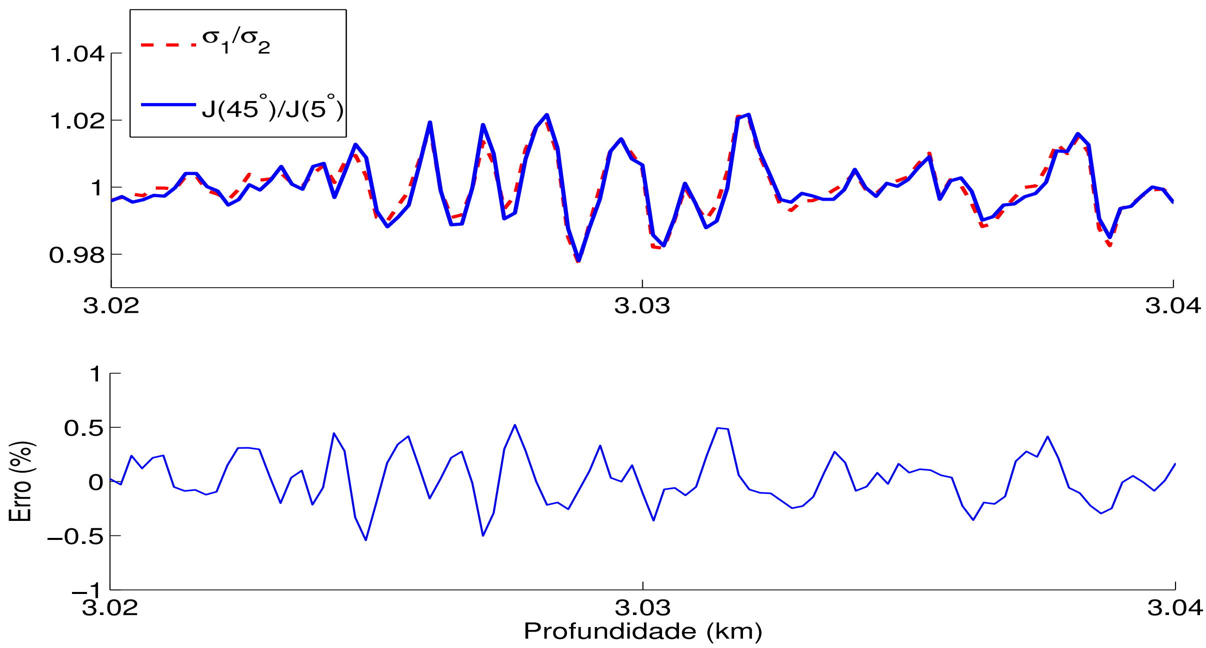


Figura 4.11: Comparação de $J(45°)/J(5°)$ com σ_1/σ_2. Detalhe da Figura 4.10.

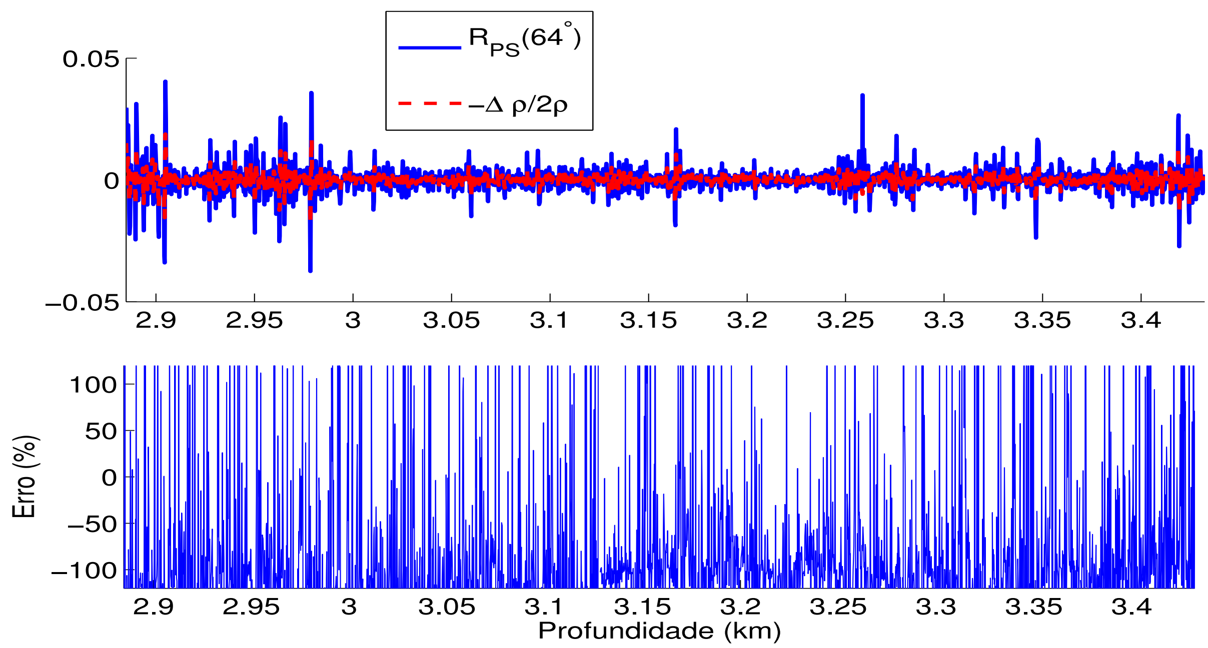


Figura 4.12: Acima: Comparação de $R_{PS}(64°)$ com $-\Delta\rho/2\rho$, equação (4.39). Abaixo: Erro percentual.

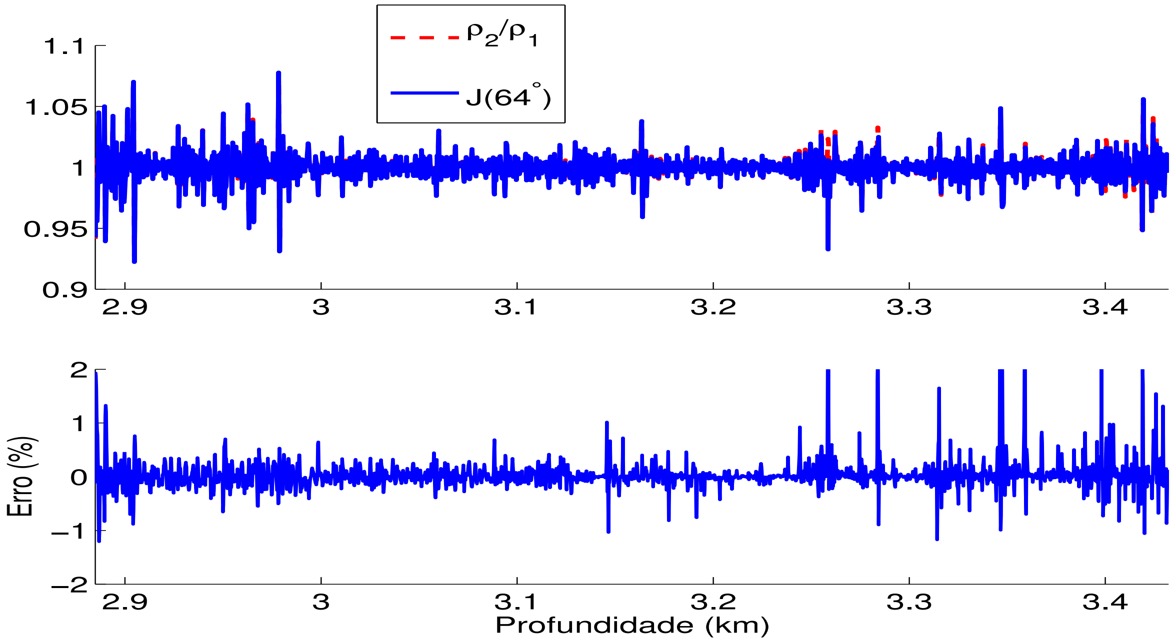


Figura 4.13: Acima: Comparação de $J_S(64°)$ com ρ_2/ρ_1, equação (4.44). Abaixo: Erro percentual.

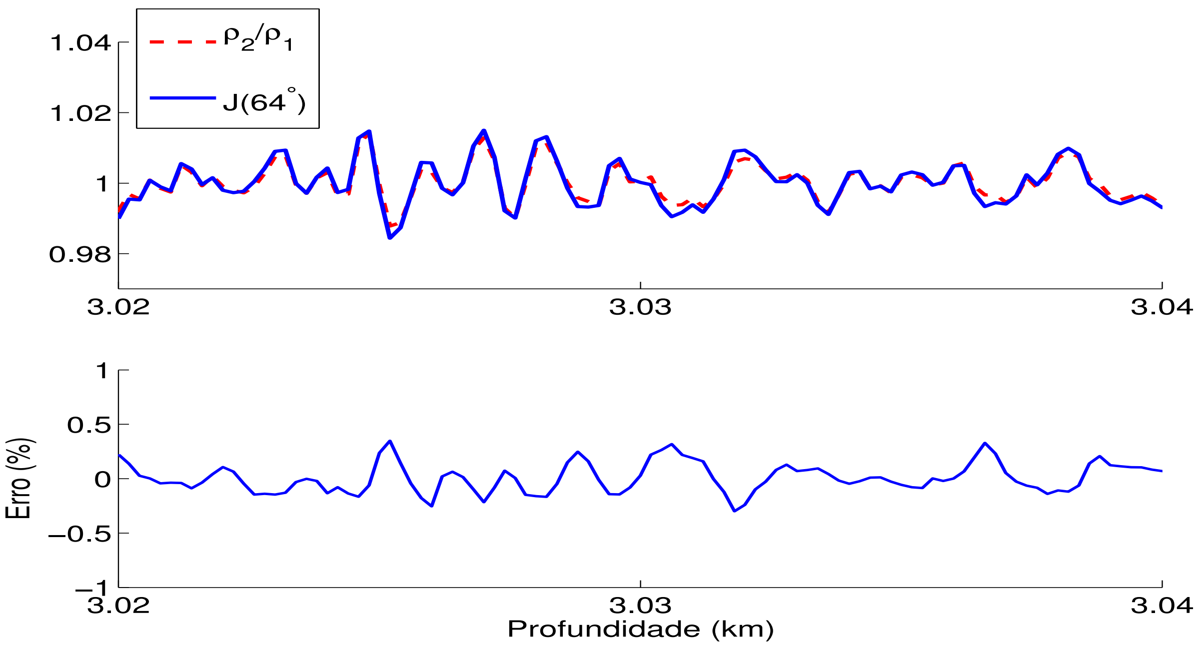


Figura 4.14: Comparação de $J_S(64°)$ com ρ_2/ρ_1, equação (4.44). Detalhe da Figura 4.13.

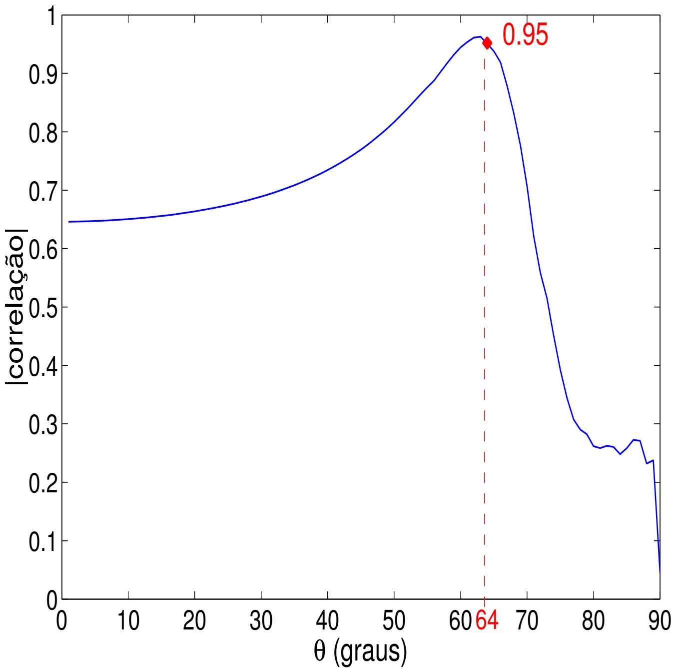


Figura 4.15: Correlação entre J e ρ_2/ρ_1.

Capítulo 5

Aplicações em Modelos Sintéticos

Neste capítulo apresentamos algumas aplicações propostas nos capítulos anteriores, para dados sintéticos.

O fluxo de modelamento e processamento para dados sintéticos pode ser observado na Figura 5.1. Primeiramente deve ser definido o modelo a partir do qual se obtém os parâmetros modelados, parâmetro de Lamé λ, relação de Poisson σ, etc. e sobre o qual simulamos o dado multi-cobertura. A este dado simulado aplicamos alguns processos sísmicos para finalmente obter as seções dos indicadores J para diversos ângulos e os outros indicadores usuais utilizados na análise de AVO. São estes processos que nos interessam testar.

O objetivo deste capítulo é mostrar como são obtidas as seções de J e avaliar como o processamento sísmico afeta as mesmas. Para isto utilizamos primeiro um modelo simples, de duas camadas com velocidades e densidades constantes separadas por uma superfície plana horizontal. Depois mostramos a utilidade de J como indicador num modelo tipo domo.

5.1 Dados Sintéticos

Após a definição do modelo, simulamos a aquisição de um dado sísmico. Tudo o desenvolvimento deste trabalho supõe que temos uma simetria cilíndrica, isto é, que na área de estudo não tem variações dos parâmetros na direção y (Figura 5.2) e, portanto, utilizamos modelamento bi-dimensional (2D) de ondas elásticas. Para isto simulamos uma aquisição sísmica 2D numa linha (linha tracejada na Figura 5.2). A fonte (representada pelo asterisco na figura) gera as ondas elásticas, que ao encontrarem uma interface onde as propriedades do meio mudam, se transmitem e refletem retornando à superfície onde são registradas pelos receptores (representados pelos triângulos). Cada receptor recolhe o dado que é chamado de traço sísmico, sendo uma coluna de dados onde a coordenada x traz a informação referente à localização da fonte e do receptor e a coordenada z é o tempo de registro. A amplitude

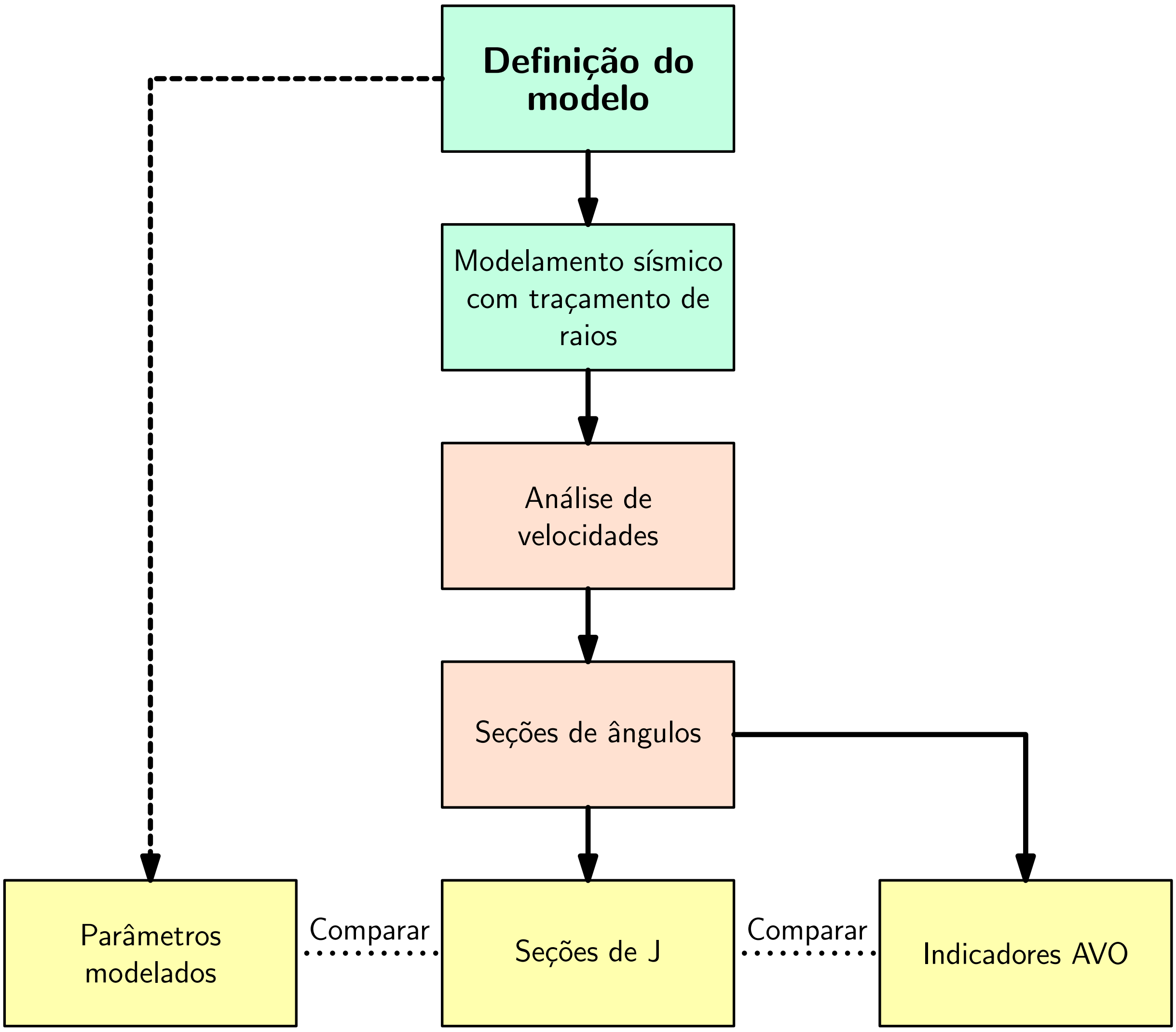


Figura 5.1: Fluxograma para modelamento e processamento de dado sintético.

corresponde em nosso caso ao coeficiente de reflexão, desconsiderando outro tipo de efeitos como espalhamento geométrico e absorção. Depois da primeira explosão, fonte e receptor se deslocam sobre a linha de aquisição e se repete o experimento, continuando assim até o fim da linha. O dado multi-cobertura foi simulado com o programa SEIS88 desenvolvido no Departamento de Geofísica da Charles University, República Checa Cerveny and Psencik (1988). Este programa nos permite simular o campo de ondas P-P e o campo de ondas P-S. Porém, ao não contar com programas que manipulem dados P-S simulamos só a aquisição do campo P-P.

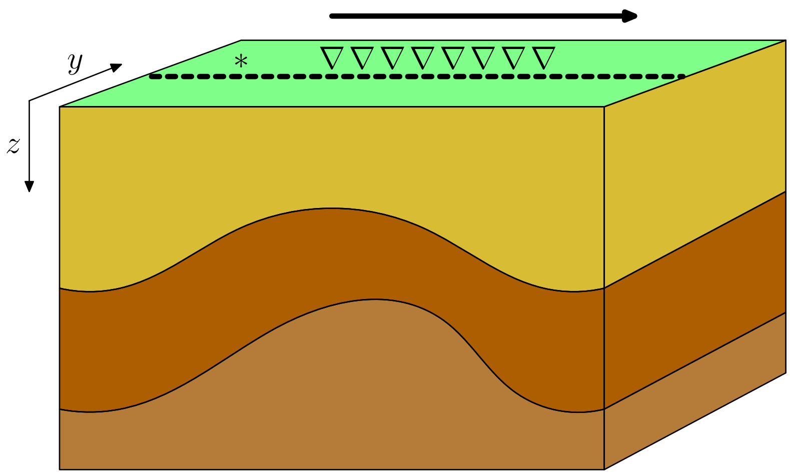


Figura 5.2: Aquisição $2D$ sísmica numa geometria com simetria cilíndrica.

5.2 Análise de Velocidade e Seções de Ângulo

Para a construção das seções de ângulo comum, utilizadas posteriormente para obter as seções de J em diferentes ângulos, é necessário fazer a chamada Análise de Velocidades (Velan). Não entraremos em detalhes sobre este processo porque escapa aos objetivos desta tese, mas rapidamente diremos que a análise de velocidades tem como objetivo estimar a velocidade do subsolo. Para maiores detalhes ver, por exemplo, Yilmaz (2001). Como resultado deste passo do processamento se obtém as velocidades chamadas RMS (do inglês, "Root Mean Square"). A estimação do ângulo de incidência depende destas velocidades mediante a seguinte fórmula (Castagna and Backus, 1993),

$$\sin\theta = \frac{v_{INT}}{v_{RMS}} \frac{d}{\sqrt{d^2 + (v_{RMS}t_0)^2}} \tag{5.1}$$

onde d é a distância entre fonte e receptor, v_{INT} é a velocidade intervalar, v_{RMS} é a velocidade RMS e t_0 é o tempo de ida é volta à interface para receptor e fonte no mesmo lugar. A velocidade intervalar v_{INT} é obtida a partir da velocidade RMS através do processo de inversão de Dix (1955). Portanto, um erro no cálculo das velocidades afeta diretamente o cálculo do ângulo de incidência e, conseqüentemente, a precisão dos parâmetros estimados.

5.3 Modelo 1

Primeiramente testamos o procedimento num modelo simples de duas camadas separadas por uma interface plana e paralela à superfície, descrita na Figura 5.3. A primeira camada é um folhelho e a segunda uma areia com gás. As linhas vermelhas representam o caminho

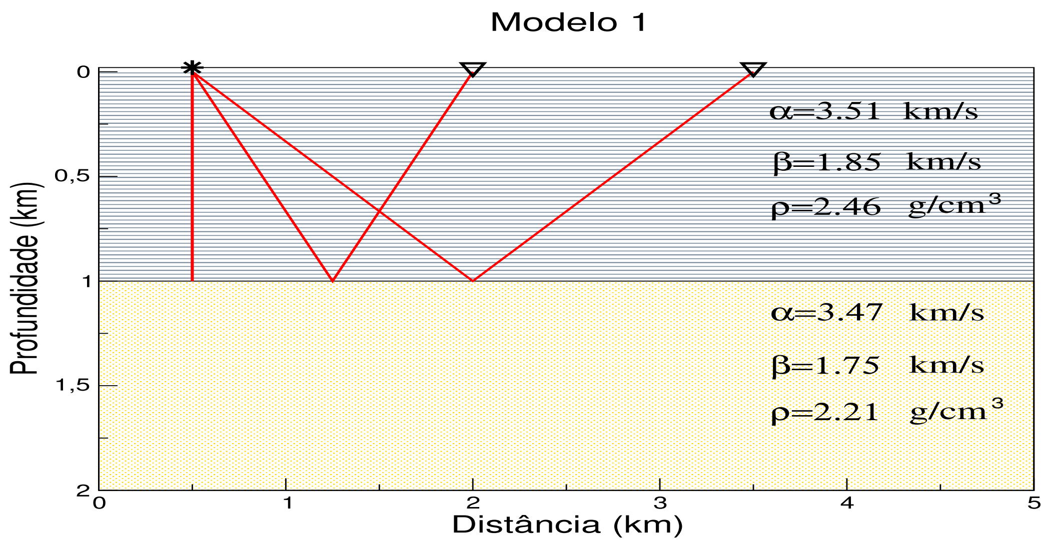


Figura 5.3: Modelo 1: Duas camadas homogêneas separadas por uma interface plana paralela à superfície.

de algumas reflexões P-P. Os valores das velocidades e as densidades foram extraídos da Tabela 2.1, modelo 11. Escolhemos este modelo uma vez que, neste caso, o erro percentual relativo entre $(\lambda_1/\lambda_2)^\epsilon$ e $J(45°)$ é 1%.

Como precisamos simular ângulos de incidência grandes utilizamos afastamentos entre fonte e receptor de 0 até 3980 metros. Os tiros foram simulados a cada 40 metros e a distância entre receptores foi de 20 metros. O intervalo de amostragem temporal foi de 4 milisegundos. Foi acrescentado ao dado multi-cobertura um ruído aleatório para produzir uma relação sinal/ruído semelhante à apresentada em dados reais. Porém, este ruído se aplica ao dado inteiro levando em consideração as máximas amplitudes, e então podemos estragar as amplitudes no ângulo de interesse. Neste modelo, o ângulo de incidência de 45° equivale a um afastamento fonte-receptor de 2000 metros. Logo, após fazer a simulação da aquisição, analisamos a seção de afastamento comum de 2000 metros para decidir qual ruído aplicaríamos ao dado inteiro. Esta seção tem todos os traços com distância entre fonte e receptor de 2000 metros, Figura 5.4. Este tipo de seção é conhecido como seção de afastamento comum, e dá uma idéia da geometria do refletor, como pode ser observado. Antes da adição de ruído todos os traços são iguais. Um destes traços se observa no centro da mesma figura.

Como o ruído acrescentado é aleatório, após a adição do mesmo estes traços não são mais iguais. Por isso selecionamos algumas localizações de CMP (do inglês“Comom Mid-Point”, ponto médio comum) para a estudar a variação da amplitude para diferentes relações

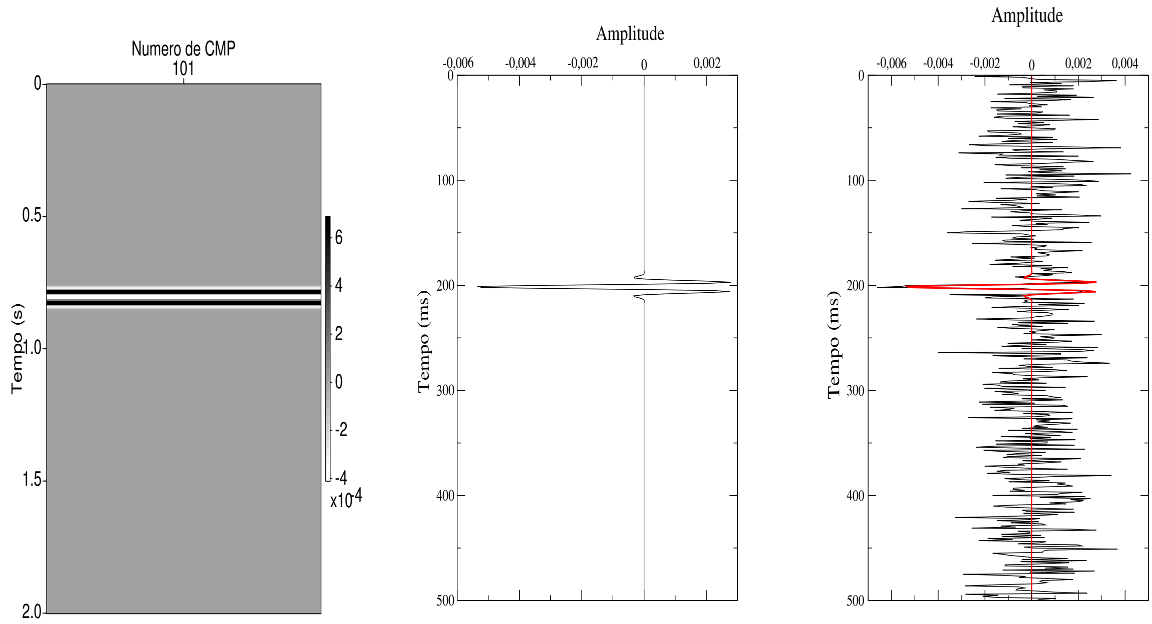


Figura 5.4: Afastamento comum de 2000 metros. À esquerda a seção sem ruído. Ao centro, um traço. À direita, traço para o CMP 203 com relação sinal/ruído=3 em preto; sem ruído em vermelho.

sinal-ruído. Na Figura 5.4 também apresentamos o efeito da adição de ruído no traço de afastamento de 2000 metros para a localização de CMP 203 (fonte e receptor localizados em 1020 metros e 3020 metros, respectivamente) com relação sinal/ruído=3. É quase impossível distinguir onde se encontra o evento de reflexão, que se observa superposto na figura em vermelho. O erro percentual relativo é de 114% (note que os valores são muito pequenos, por isso esta diferença não é aparente no gráfico). Fazendo isto para vários valores de sinal/ruído, escolhemos uma razão sinal/ruído=6. Na Figura 5.5 vemos como o ruído é diferente para duas localizações de CMP, 101 e 201. Na duas figuras se observa que o coeficiente de reflexão foi preservado, sendo o erro percentual relativo da ordem de 5%.

Na Figura 5.6 podemos observar duas seções clássicas de um dado sísmico. Na figura da esquerda se mostra uma seção de tiro comum. Isto significa que a variável horizontal neste caso é a posição do receptor, já que a posição da fonte é a mesma para todos os traços. Se observa uma curva em forma hiperbólica em concordância ao fato da interface ser plana. Também pode ser observado a inversão de fase ao longo do afastamento. Na figura da direita se observa uma seção de ponto comum médio: a localização do ponto médio entre fonte e receptor é a mesma para todos os traços. Neste caso a coordenada horizontal é ao afastamento entre fonte e receptor.

Em seguida foi realizada a análise de velocidades. Para ilustrar, mostramos no desenho

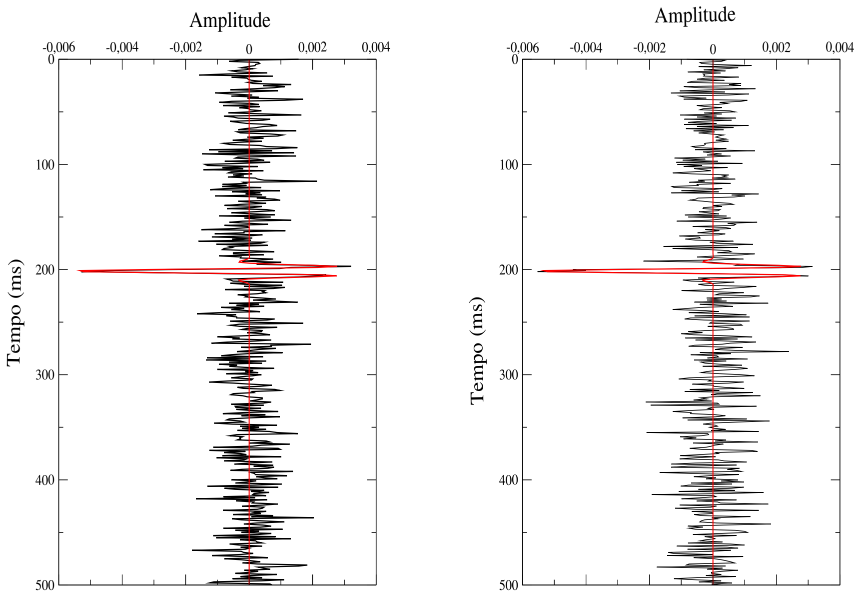


Figura 5.5: Traço de afastamento 2000 com sinal/ruído=6. À esquerda: CMP 203. À direita: CMP 103. Em vermelho, o traço sem ruído para ambas figuras.

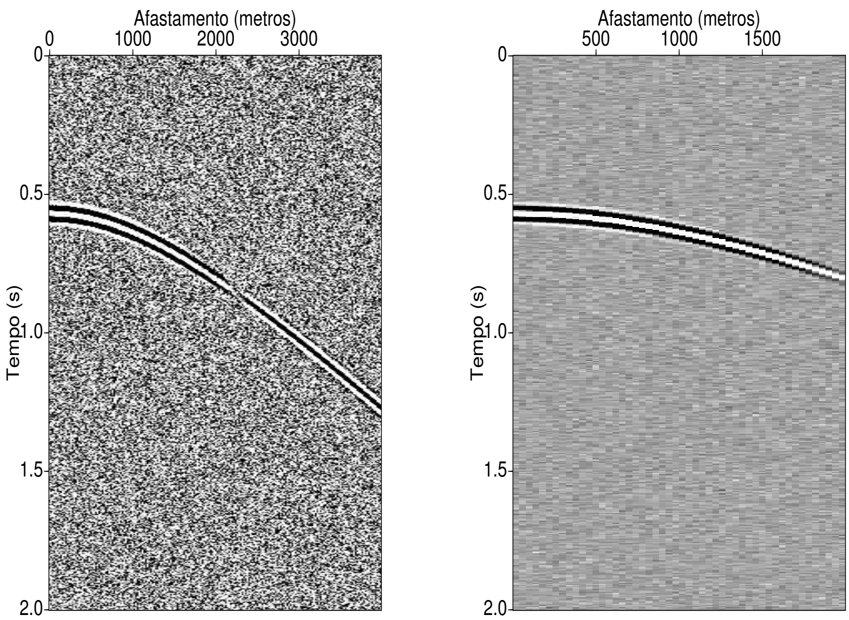


Figura 5.6: Duas seções sísmicas modeladas. À esquerda: seção de tiro comum, fonte em 1000 metros. À direita: seção de ponto médio comum 100.

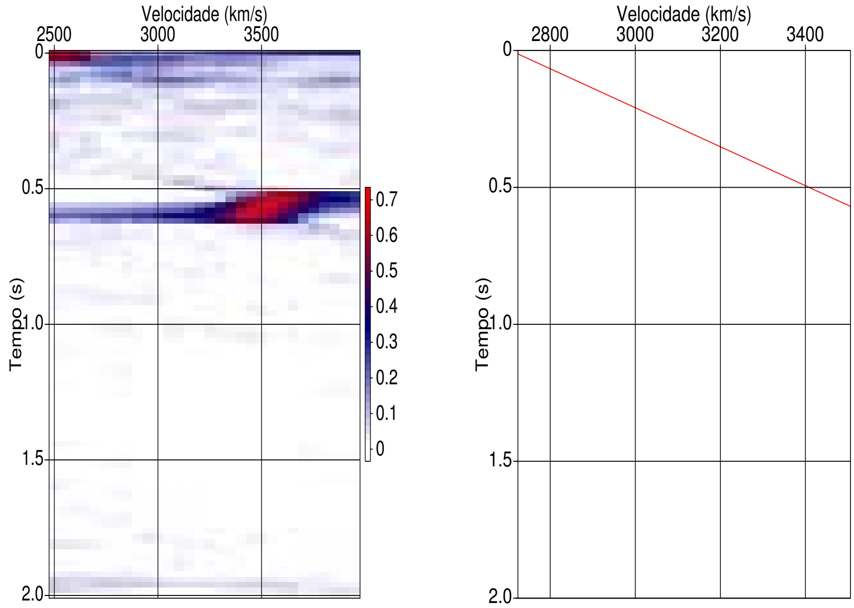
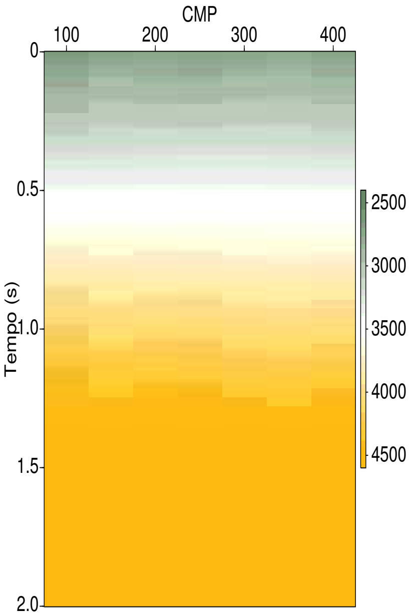


Figura 5.7: Velocidades RMS. À esquerda: mapa de coêrencia no CMP 200. À direita: velocidade RMS no CMP 200.

à esquerda da Figura 5.7 os valores de coerência, que em teoria variam entre 0 e 1; na figura vemos que temos um lugar onde a coerência assume um valor máximo (chegando no centro de uma dessas regiões a 0.7). Essa região representa o melhor ajuste da curva de tempos de percurso aos tempos de chegada das reflexões em uma camada, se tivéssemos mais interfaces veríamos mais destas regiões. Essas velocidades são selecionadas e as interpolamos para todos os tempos: desenho à direita da Figura 5.7. Este processo foi realizado a cada 40 CMP começando em 100. O resultado final das velocidades RMS e intervalares para o modelo inteiro é apresentado na Figura 5.8. Vemos a diferença entre os dois tipos de velocidades. Neste caso a velocidade intervalar deveria ser igual à RMS já que temos uma interface só. Para a adição do ruído e a análise de velocidades utilizamos o pacote de processamento SU (do inglês "Seismic Unix"), da Colorado School of Mines Cohen and Stockwell (2006).

O próximo passo foi a obtenção das seções de ângulo. Para isto foram gerados o que se chama em inglês "angle gather", ou seja, para cada amostra em todos os traços calculamos qual foi o ângulo de reflexão nesse ponto (equação (5.1)) e reorganizamos, para cada CMP, os traços em função do ângulo. O tempo também é corrigido para alinhar os eventos com o traço de afastamento nulo. Na Figura 5.9 apresentamos este cálculo para o CMP 180. Observamos como há um aumento das amplitudes em função do ângulo de incidência (de negativo para positivo). O ângulo máximo obtido foi 61°, em concordância com o máximo afastamento. Na Figura aparece CDP, (do inglês, "Common Depth-Point"), porque esta é a



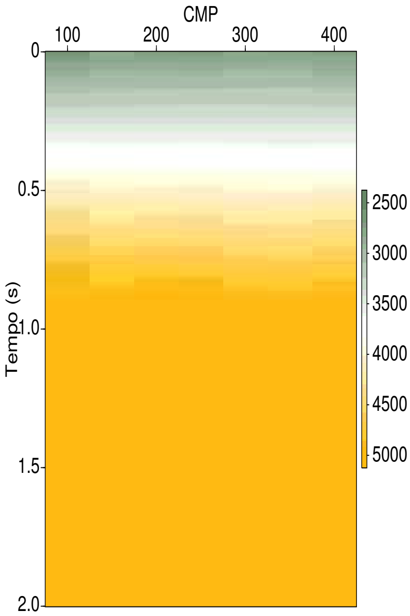


Figura 5.8: Velocidades: À esquerda, velocidades RMS; À direita, velocidades intervalares.

nomenclatura que erroneamente ainda é utilizado na industria no lugar de CMP.

Na Figura 5.10 observamos a influência do modelamento e da análise de velocidades no CMP 180. O coeficiente de reflexão teórico, obtida do modelo da Figura 5.3 é a curva em preto. Os "×" azuis representam o coeficiente de reflexão estimado através do dado modelado, com a adição de ruído, e utilizando a velocidade verdadeira. Observamos uma diferença na origem com o valor teórico, devido à adição de ruído, uma vez que como anteriormente, priorizamos o valor do coeficiente de reflexão para ângulos perto de 45°. A curva de coeficiente de reflexão estimada com análise de velocidades está representada pelos círculos vermelhos. Claramente um erro nas velocidades induz a um erro considerável no cálculo do coeficiente de reflexão, sobretudo, neste caso, para valores de θ maiores que 30°. Isto pode ser um grave problema na hora de fazer inversão, se queremos considerar ângulos grandes. Porém, como veremos a seguir, na estimações dos parâmetros propostos no capítulo anterior, os erros são bastante baixos.

Após o cálculo dos ângulos para cada amostra é necessário construir as seções de ângulo. Para isto fazemos um empilhamento dos dados anteriores. Neste caso fizemos um empilhamento a cada 5°. Na Figura 5.11 exibimos as seções de 5° e 55° para número de CMP entre 130 e 240. Podemos observar claramente a mudança no sinal da amplitude de uma seção para a outra. Também observamos que em algumas localizações de CMP não há amplitude, e que a seção de 55° é um pouco mais ruidosa.

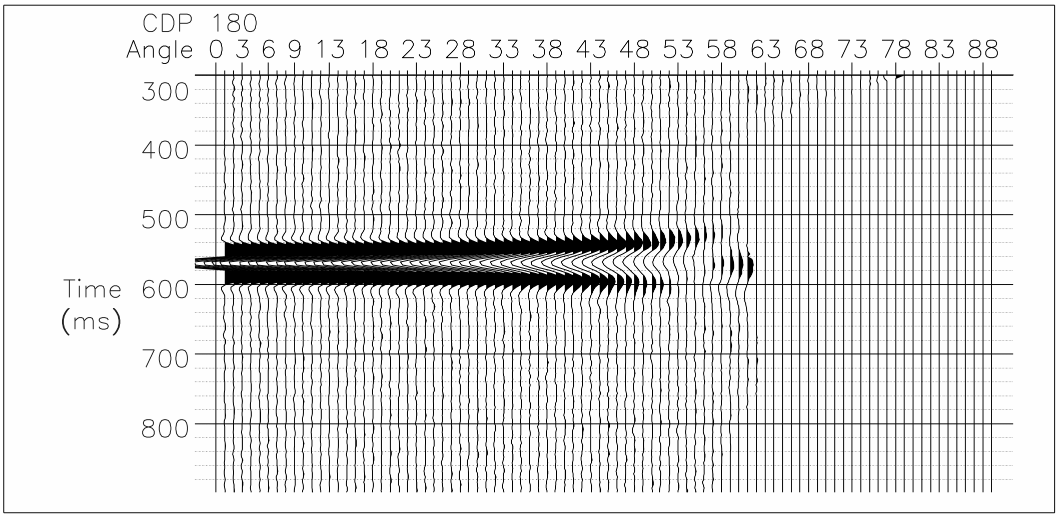


Figura 5.9: Gather de ângulos. CMP 180.

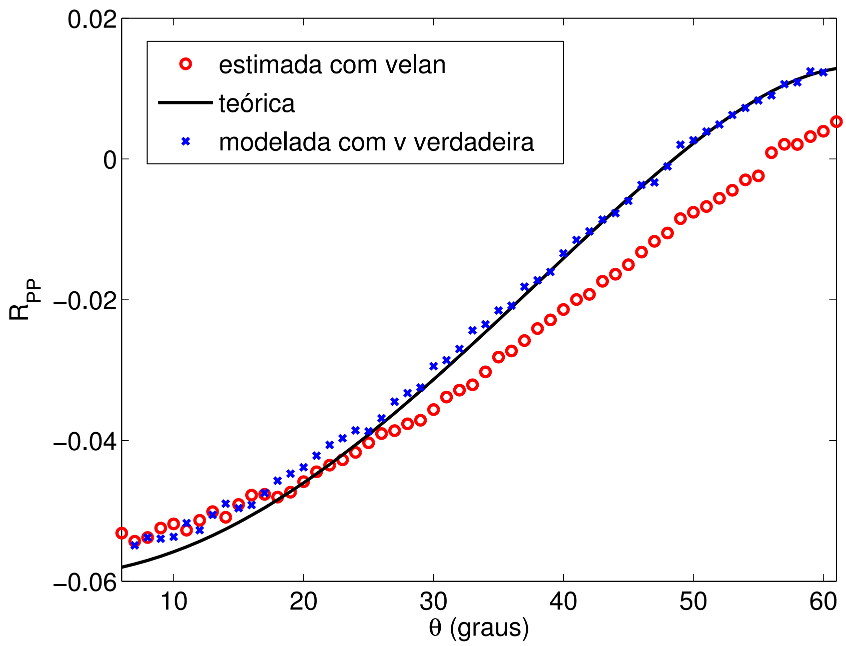


Figura 5.10: Curvas de R_{PP} para o CMP 180.

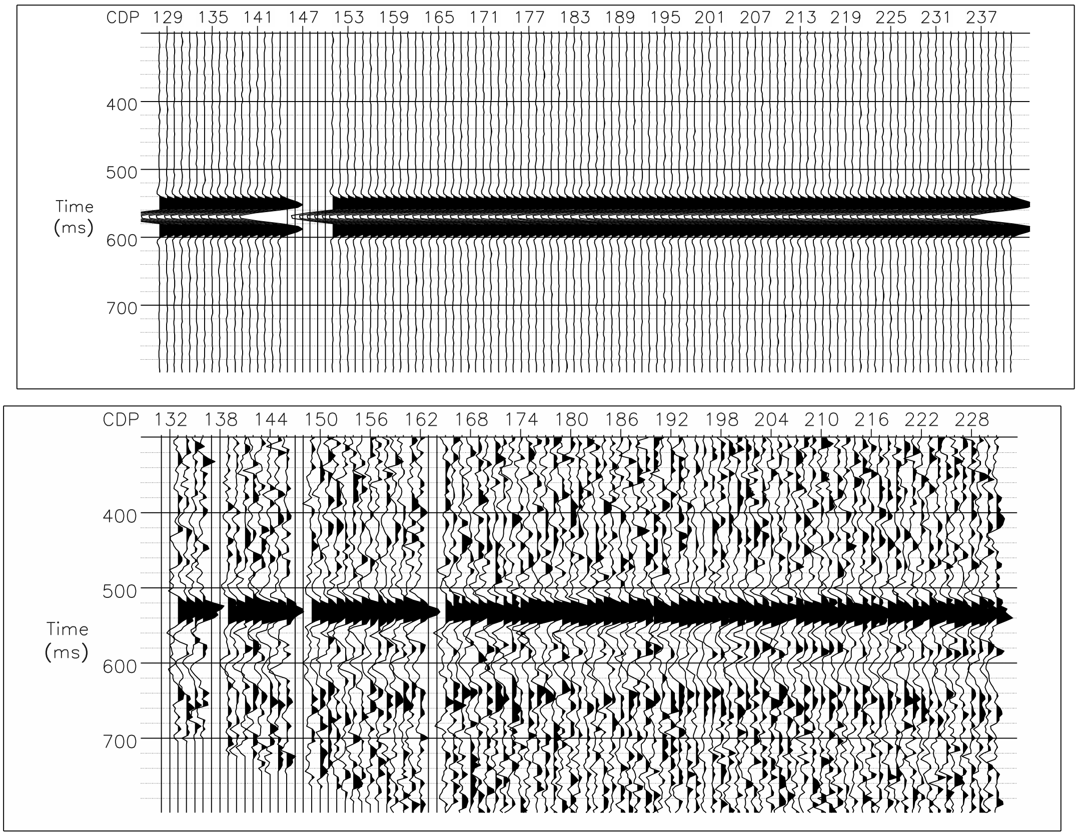


Figura 5.11: Seções de ângulo entre os CMP's 130 e 240. Acima, seção de 5°; abaixo, 55°.

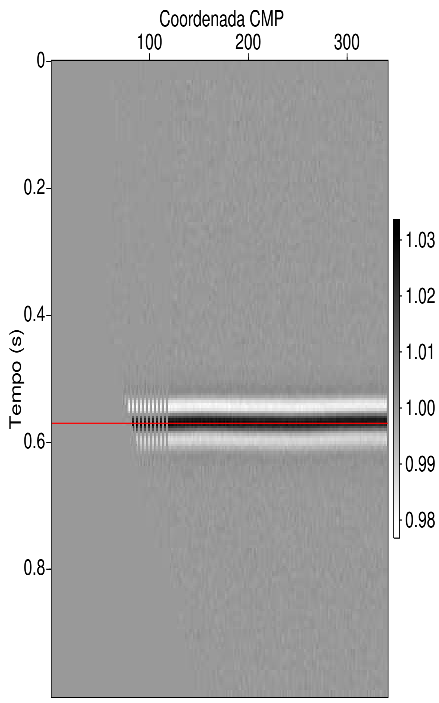


Figura 5.12: Seção de $J(45°)$. Em vermelho a curva extraída.

5.3.1 Resultados

Para computar $J(45°)$ utilizamos a seção de ângulo de 45°. O resultado de aplicar a equação (3.26), é exibido na Figura 5.12. Para observar o valor dos $J(45°)$ temos que selecionar o evento de interesse, já que este valor tem sentido unicamente onde temos uma interface, sendo em outros lugares ruído. Para isto devemos extrair as "curvas" de $J(45°)$ em cada evento e compara-las com as curvas do $J(45°)$ verdadeiras, Figura 5.12 em vermelho. Na Figura 5.13 observamos a comparação da curva teórica $J(45°)$ com várias curvas para diferentes valores de θ, e com o verdadeiro valor de $(\lambda_1/\lambda_2)^\epsilon$. Observamos que a curva $J(45°)$ estimada ficou próxima da curva verdadeira, com um erro relativo percentual baixo, Tabela 5.1. Porém, ficou mais próximo do verdadeiro valor do quociente dos λ. A curva extraída da seção de $J(50°)$, aproxima ainda melhor o $J(45°)$ verdadeiro. Isto pode ser devido a fato que um erro nas velocidades induz um erro nos ângulos e, portanto, a curva observada para 50° está mais próxima do verdadeiro valor para $J(45°)$. Estes erros são comuns na prática. Como observado da Tabela 5.1, os erros foram muito baixos numa vizinhança de $\theta = 45°$. Neste caso, como o refletor é plano e horizontal e não há variação lateral dos parâmetros do modelo, deveríamos ter um valor constante para cada interface. Porém, ao acrescentar ruído isto não acontece. Para comparar os valores obtidos caculamos a média dos J em cada curva.

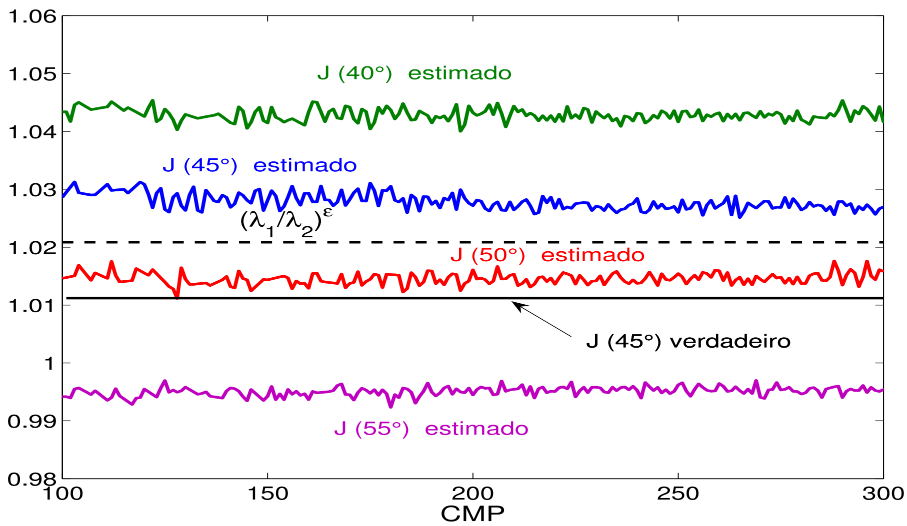


Figura 5.13: Comparação dos valores de J estimados: $\lambda_1/\lambda_2)^\epsilon$ (tracejado preto), $J(45°)$ verdadeiro (preto contínuo), $J(40°)$ estimado (verde), $J(45°)$ estimado (vermelho), $J(50°)$ estimado (azul) e $J(55°)$ estimado (roxo).

Também fizemos a estimação dos quocientes de $J(\theta_{longe})/J(\theta_{perto})$. Para tanto utilizamos a estimação de J para vários ângulos e comparamos o valor do quociente desses J com $J(5°)$,

θ	Tipo	J médio	Erro percentual (%)
45°	Verdadeiro	1.0112	–
40°	Estimado	1.0437	−3.21
45°	Estimado	1.0281	−1.68
50°	Estimado	1.0151	−0.4
55°	Estimado	0.9948	1.63

Tabela 5.1: Erros percentuais na estimação de $J(45°)$.

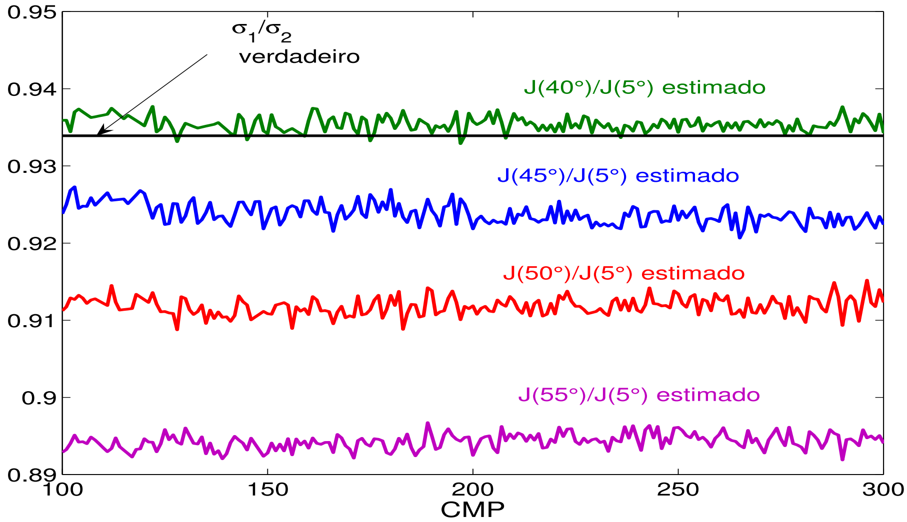


Figura 5.14: σ_1/σ_2 verdadeiro (preto), $J(40°)/J(5°)$ estimado (verde) $J(45°)/J(5°)$ estimado (azul), $J(50°)/J(5°)$ estimado (vermelho) e $J(55°)/J(5°)$ estimado (roxo).

e o verdadeiro valor do quociente das razões de Poisson (σ_1/σ_2), Figura 5.14. Observamos que a curva que melhor aproxima é a de $\theta = 40$. Na Tabela 5.2, observamos os erros calculados utilizando a média das curvas.

θ	$J(\theta)/J(5°)$	Erro percentual (%)
40°	0.938	−0.43
45°	0.924	1.07
50°	0.912	2.36
55°	0.8924	4.26

Tabela 5.2: Erros percentuais na estimação de σ_1/σ_2.

5.4 Modelo 2

Com este modelo queremos testar a capacidade do nosso indicador T de separar interfaces com diferentes fluidos. Para isto definimos um modelo tipo domo com uma pequena camada de areia com gás e outra final de areia com água, exibido na Figura 5.15. Fizemos o fluxo de processamento, e extraímos vários indicadores fazendo inversão da fórmula de Aki-Richards, utilizando o programa Probe da empresa Paradigm. Utilizamos como relação de Gardner: $\rho = 0.6\alpha^{1/4}$ e como relação entre as velocidades: $\beta = 0.86\alpha - 1.17$. Estes valores são os padrões do programa. Neste caso não utilizamos afastamentos muito longos porque o ângulo de incidência de interesse é de 30°, como mostrado no Capítulo 3. O nosso indicador T foi obtido do empilhamento das seções de ângulo a cada 5°. Lembramos que as refletividades são definidas por, $\Delta u/2u$, onde u é a variável parametrizada.

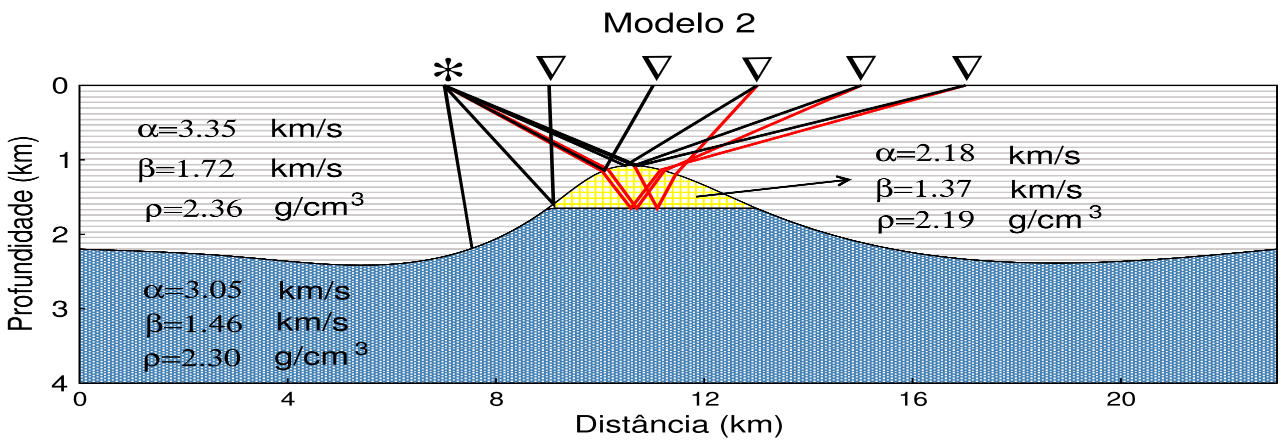


Figura 5.15: Modelo 2. Domo com camada de gás.

Os atributos calculados são: A, B, $A \times B$, $(A + B)/2$, o fator de fluidos (ΔF) a razão de Poisson e de Pseudo-Poisson, as refletividades para $I_P = \alpha\rho$, $I_S = \beta\rho$, $V = \lambda\rho$ e $W = \mu\rho$ e finalmente nosso $T(30°)$. Os resultados são apresentados nas Figuras 5.16 a 5.19. O produto entre A e B separa folhelho/areia com água de folhelho/areia com gás, porém, o sinal deste último é positivo em lugar de negativo, o mesmo sinal da interface areia com gás/areia com água. O gradiente B distingue estas últimas interfaces porém com sinal trocado. As refletividades para W e I_S e a razão de Pseudo-Poisson fazem um bom trabalho separando areia com gás/folhelho mas não detectam a diferença de fluidos na primeira interface. A razão de Poisson separa um pouco melhor dito contato porém, erra o sinal da segunda interface. A média entre A e B não tem uma boa definição na interface folhelho/areia com gás, e erra também o sinal da segunda interface.

O fator de fluidos (ΔF), o intercepto A, a refletividade V, a refletividade I_P e nosso $T(30°)$ conseguem separar bem folhelho com areia com gás de folhelho com areia com água. E também tem o sinal correto nas duas interfaces. Olhando a escala podemos dizer que a refletividade V foi a melhor sucedida, seguida pela refletividade I_P e nosso T e por último A e ΔF. Note que falta um pedaço do segundo refletor em nosso indicador, devido à falta de ângulos de incidência de 30° nesta parte da interface.

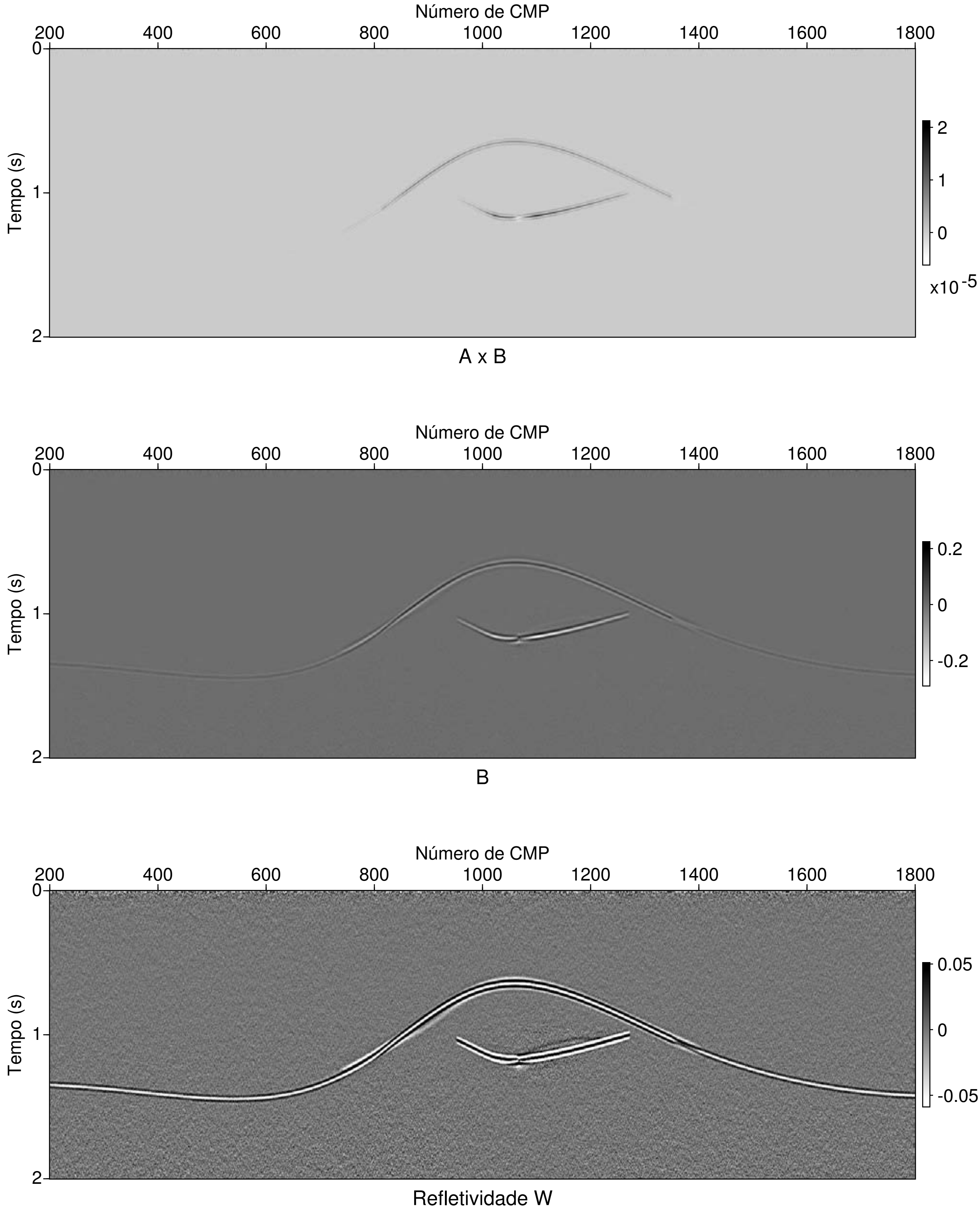


Figura 5.16: Atributos AVO. Acima: $A \times B$. Ao centro: B. Abaixo: $\Delta W/2W$.

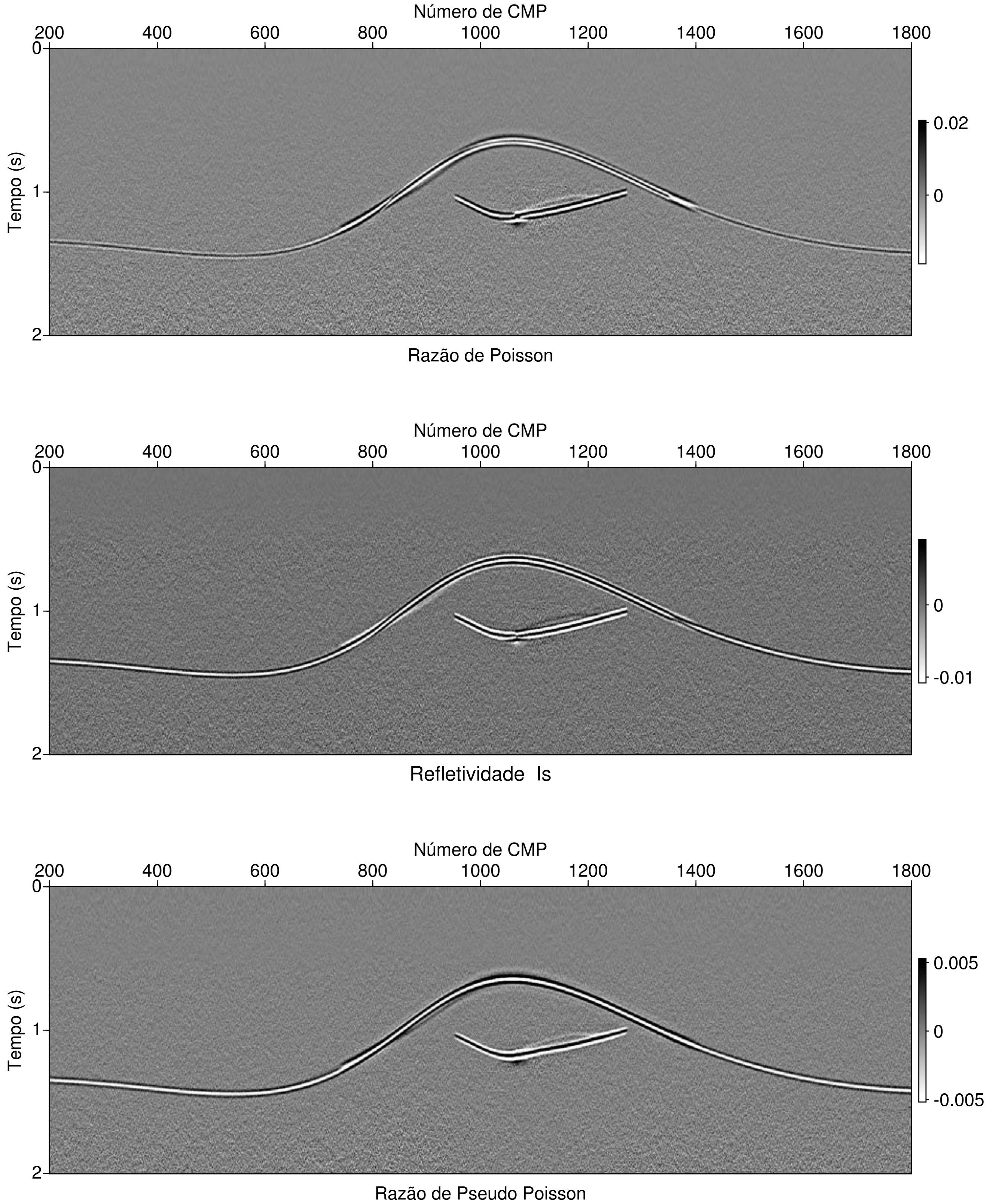


Figura 5.17: Atributos AVO. Acima: Razão de Poisson. Ao centro: $\Delta I_S/2I_S$. Abaixo: Razão de Pseudo-Poisson.

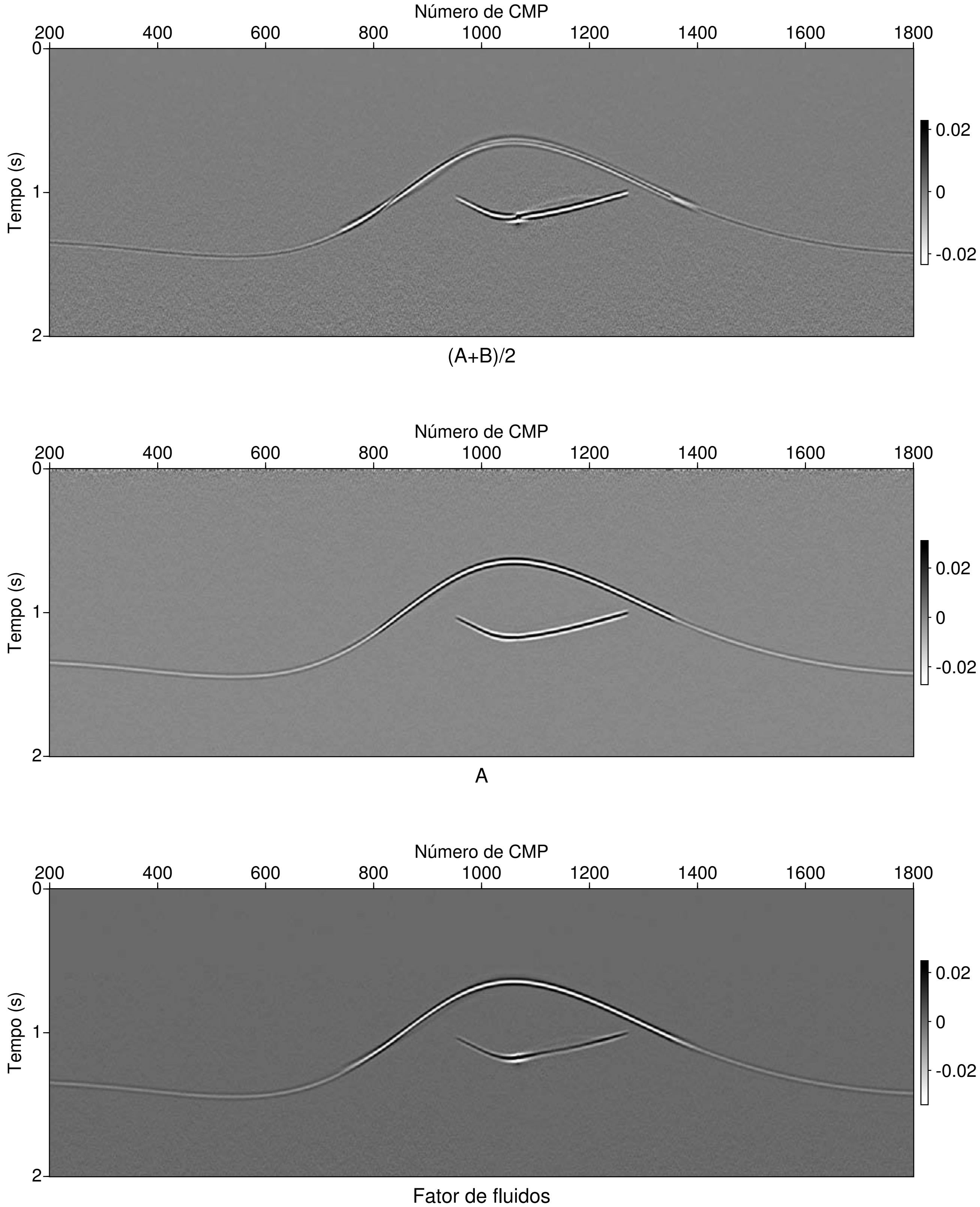


Figura 5.18: Atributos AVO. Acima: $(A + B)/2$. Ao centro: A. Abaixo: ΔF.

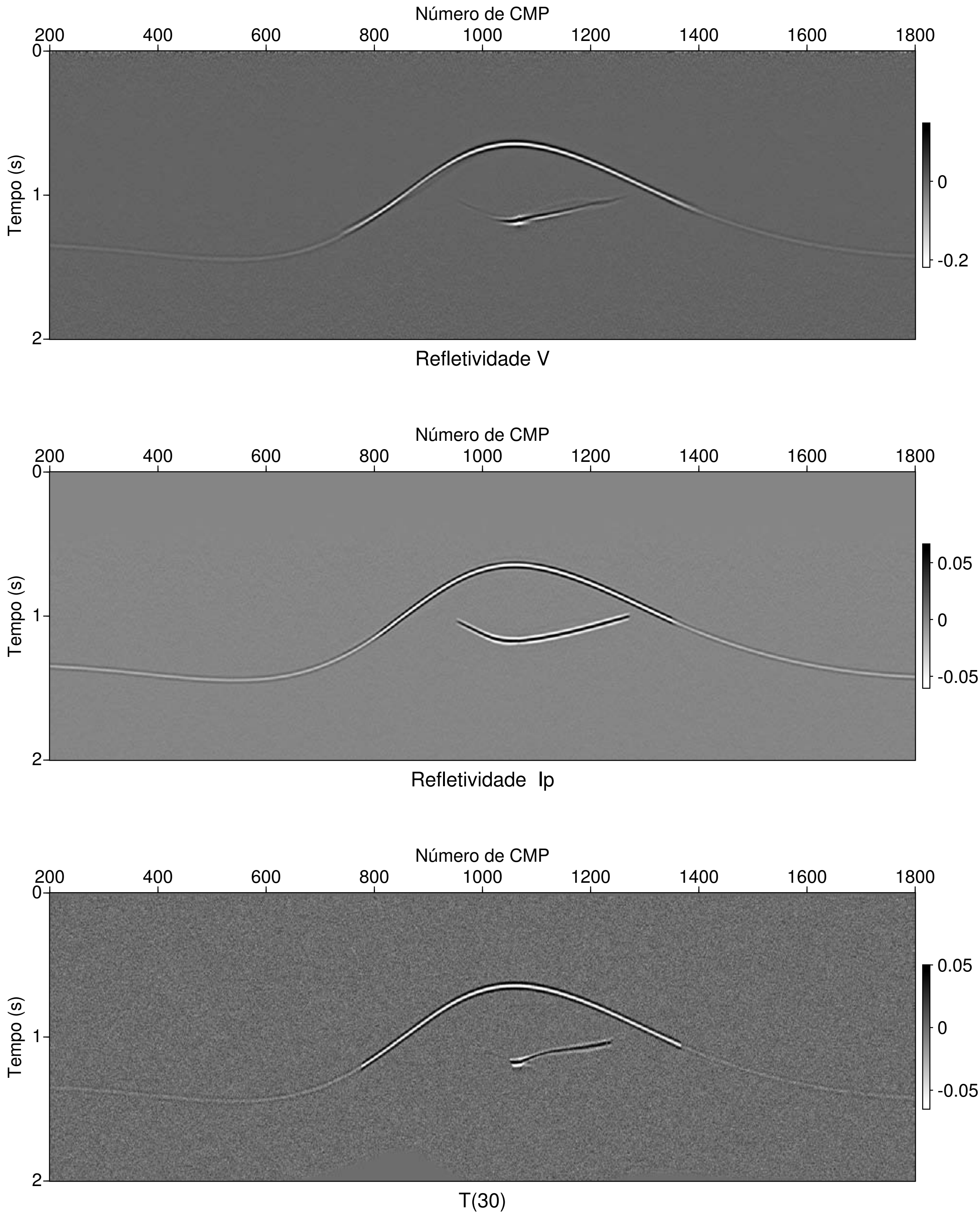


Figura 5.19: Atributos AVO. Acima: $\Delta V/2V$. Ao centro: $\Delta I_P/2I_P$. Abaixo: $T(30°)$.

Capítulo 6

Conclusões

Neste trabalho estudamos aproximações dos coeficientes de reflexão de ondas elásticas e algumas estimações de parâmetros elásticos feitas a partir dos mesmos.

Apresentamos os coeficientes de reflexão R_{PP} e R_{PS} de uma onda P incidente. Mostramos também dois tipos de aproximações para ambos coeficientes: uma baseada em série de Taylor que não é outra coisa senão a conhecida aproximação de Aki-Richards, e duas aproximações tipo impedância. As aproximações tipo impedância, no caso da onda P-P, tentam imitar o comportamento do coeficiente de reflexão R_{PP} no caso acústico. No caso da aproximação tipo impedância de reflexão é necessário estabelecer uma relação entre a velocidade da onda S e a densidade do meio, e mostramos que uma relação tipo Gardner exibe os erros menores. Em comparação com a aproximação tipo impedância elástica e Aki-Richards, a impedância de reflexão obtêm melhores resultados, ainda na presença de ângulo crítico. É importante ressaltar que se deve ter bastante cuidado para calcular adequadamente o parâmetro γ nesta aproximação, assim como no cálculo de K na aproximação tipo impedância elástica. No caso das aproximações para o coeficiente R_{PS}, apresentamos uma nova aproximação tipo impedância. Utilizando as mesmas argumentações feitas em Santos and Tygel (2004), chegamos a uma aproximação que chamamos impedância de reflexão cisalhante. Nossa aproximação teve um comportamento parecido com relação as outras duas aproximações apresentadas, todas com dificuldades para aproximar o coeficiente na região de ângulo crítico. Porém, observando simplesmente os erros não foi possível decidir qual aproximação foi a mais adequada. Por isto desenvolvemos um método de avaliação de erros. Adaptamos um método de avaliar desempenhos vindo da área de otimização matemática. Observando os perfis de desempenho das aproximações para diferentes tipos de erros concluímos que a nossa nova aproximação é um pouco mais eficiente que as outras duas.

Também apresentamos vários indicadores da presença de hidrocarbonetos a partir da aproximação do coeficiente de reflexão da onda P-P. A aproximação baseada em série de

Taylor fornece diferentes indicadores, dependendo de como se parametriza a aproximação. Dentre eles, o fator de fluidos e o contraste de $\lambda\rho$ tem se mostrado eficientes para separar interfaces de folhelho sobre areia com gás de folhelho de areia com água. Com base na aproximação tipo impedância para R_{PP} introduzimos um novo indicador que segundo os testes numéricos apresentados fornecem excelentes resultados. A grande vantagem desta última abordagem é o fato de prescindir de processos de inversão e estimações das velocidades. Também mostramos que não é necessário definir a função impedância, por ser o indicador obtido diretamente, e nos testes vimos que a utilização de qualquer das duas impedâncias, reflexão ou elástica, não interfere no resultado final.

Outra contribuição do nosso trabalho foi mostrar como é possível predizer alguns parâmetros elásticos mediante o uso do coeficiente de reflexão. Baseamos nossa abordagem no trabalho de Whitcombe et al. (2002) que utilizam a aproximação tipo impedância para a estimação de variáveis elásticas. Porém, nesta abordagem é necessário que alguns parâmetros permaneçam constantes, além da inversão para o cálculo da impedância elástica estendida. Tentando generalizar, partimos diretamente do coeficiente de reflexão sem inversão e utilizando apenas o quociente das velocidades como constante na área de estudo. Para testar nossa abordagem utilizamos dados reais de poço. Observamos que a estimação do contraste de λ não é bem sucedido utilizando o coeficiente de reflexão da onda P-P, mas que o quociente de λ é muito bem estimado por nosso indicador $J(45°)$. Mostramos também que parece existir uma relação intrínseca entres estas quantidades, independentemente das hipóteses utilizadas. Além disso mostramos como estimar o quociente das relações de Poisson usando uma relação tipo "perto/longe" de J. Utilizando uma aproximação tipo impedância elástica para o coeficiente de reflexão da onda P-S mostramos como estimar a razão das densidades com excelentes resultados para o poço teste.

Por último mostramos como extrair os valores de J no caso de modelos sintéticos, mostrando que o erro introduzido pelo cálculo do ângulo e a análise de velocidade, não afeta as nossas estimações. Na prática deve-se tomar com mais cuidado devido ao ruído presente nos dados e por não ter o modelo a priori. Também vimos, para um modelo sintético tipo domo, que o nosso indicador T tem um comportamento similar a outros indicadores que conseguem separar bem interfaces folhelho/água de folhelho/gás, com a diferença de não assumir hipótese alguma e prescindir de processos de inversão.

Como trabalhos futuros podemos enumerar, a aplicação de nossa proposta em dados reais como primeira prioridade, a obtenção de outros parâmetros elásticos sem inversão e um aprimoramento da nossa fórmula de aproximação para R_{PS}.

Apêndice

Neste apêndice apêndice mostramos na Tabela 6.1 os contrastes das velocidades e a densidade para os quatro tipos de interfaces que consideramos no nosso trabalho. Na Tabela 6.2 se exibem as constantes calculadas para essas mesmas interfaces.

	Folhelho sobre Areia com gás			Areia com gás sobre Areia com água			Areia com água sobre Folhelho			Folhelho sobre Areia com água		
$N°$	$\Delta\alpha/\alpha$	$\Delta\beta/\beta$	$\Delta\rho/\rho$	$\Delta\alpha/\alpha$	$\Delta\beta/\beta$	$\Delta\rho/\rho$	$\Delta\alpha/\alpha$	$\Delta\beta/\beta$	$\Delta\rho/\rho$	$\Delta\alpha/\alpha$	$\Delta\beta/\beta$	$\Delta\rho/\rho$
1	-0.07	0.05	-0.07	0.08	-0.04	0.07	-0.00	-0.02	0.00	0.00	0.02	-0.00
2	-0.24	-0.24	-0.10	0.09	-0.01	0.06	0.15	0.25	0.04	-0.15	-0.25	-0.04
3	0.11	0.42	-0.07	0.22	-0.04	0.05	-0.37	-0.37	0.02	0.37	0.37	-0.02
4	-0.11	0.17	-0.11	0.11	-0.10	0.00	0.00	-0.07	0.11	0.00	0.07	-0.11
5	-0.05	0.09	-0.15	0.10	-0.03	0.10	-0.05	-0.06	0.06	0.05	0.06	-0.06
6	0.21	0.55	0.01	0.14	-0.07	0.01	-0.37	-0.46	-0.02	0.37	0.46	0.02
7	-0.03	0.22	-0.09	0.13	-0.02	0.06	-0.10	-0.20	0.02	0.10	0.20	-0.02
8	0.20	0.21	-0.07	0.01	-0.01	0.01	-0.21	-0.20	0.05	0.21	0.20	-0.05
9	-0.38	0.10	-0.12	0.46	-0.04	0.08	-0.11	-0.06	0.03	0.11	0.06	-0.03
10	0.15	0.44	0.01	0.08	-0.02	0.03	-0.23	-0.42	-0.04	0.23	0.42	0.04
11	-0.01	-0.06	-0.11	0.02	-0.13	0.07	-0.01	0.17	0.03	0.01	-0.17	-0.03
12	0.31	0.56	-0.02	0.02	0.01	0.01	-0.34	-0.57	0.01	0.34	0.57	-0.01
13	-0.23	0.24	-0.02	0.29	-0.19	0.02	-0.07	-0.05	0.00	0.07	0.05	0.00
14	-0.25	0.13	-0.13	0.26	0.07	0.05	-0.01	-0.21	0.07	0.01	0.21	-0.07
15	-0.22	0.11	0.00	0.26	0.05	0.02	-0.05	-0.17	-0.02	0.05	0.17	0.02
16	-0.33	-0.18	-0.10	0.30	0.03	0.07	0.03	0.15	0.03	-0.03	-0.15	-0.03
17	-0.10	-0.11	-0.13	0.10	0.13	0.07	0.00	-0.02	0.07	0.00	0.02	-0.07
18	-0.06	0.32	-0.10	0.17	-0.04	0.08	-0.12	-0.28	0.02	0.12	0.28	-0.02
19	0.04	0.23	0.01	0.00	-0.18	0.00	-0.04	-0.05	-0.01	0.04	0.05	0.01
20	-0.24	0.37	-0.28	0.39	0.14	0.22	-0.18	-0.55	0.07	0.18	0.55	-0.07
21	-0.42	-0.23	-0.07	0.33	0.06	0.05	0.11	0.17	0.03	-0.11	-0.17	-0.03
22	0.27	0.69	0.10	0.13	-0.04	0.08	-0.43	-0.64	-0.18	0.43	0.64	0.18
23	-0.39	0.41	-0.08	0.39	-0.04	0.07	-0.01	-0.36	0.01	0.01	0.36	-0.01
24	0.02	0.32	-0.15	0.09	0.03	0.10	-0.12	-0.36	0.05	0.12	0.36	-0.05
24	0.38	0.44	0.01	0.07	-0.02	0.03	-0.46	-0.42	-0.04	0.46	0.42	0.04

Tabela 6.1: Contrastes para os modelos de Castagna et al. (1985) para as quatro interfaces consideradas.

	Folhelho sobre Areia com gás		Areia com gás sobre Areia com água		Areia com água sobre Folhelho		Folhelho sobre Areia com água	
$N°$	K	γ	K	γ	K	γ	K	γ
1	0.54	-1.33	0.54	-1.88	0.51	-0.25	0.51	-0.25
2	0.56	0.41	0.53	-4.10	0.53	0.15	0.53	0.15
3	0.67	-0.16	0.65	-1.05	0.57	-0.06	0.57	-0.06
4	0.61	-0.68	0.64	-0.00	0.56	-1.62	0.56	-1.62
5	0.59	-1.68	0.59	-3.01	0.56	-0.92	0.56	-0.92
6	0.62	0.01	0.63	-0.18	0.55	0.04	0.55	0.04
7	0.52	-0.38	0.55	-3.39	0.49	-0.10	0.49	-0.10
8	0.53	-0.31	0.52	-2.13	0.52	-0.26	0.52	-0.26
9	0.44	-1.16	0.42	-1.93	0.36	-0.57	0.36	-0.57
10	0.55	0.02	0.59	-1.38	0.52	0.08	0.52	0.08
11	0.52	1.93	0.47	-0.58	0.48	0.18	0.48	0.18
12	0.62	-0.03	0.67	1.27	0.61	-0.01	0.61	-0.01
13	0.49	-0.10	0.48	-0.13	0.39	-0.00	0.39	0.00
14	0.50	-0.95	0.55	0.79	0.47	-0.36	0.47	-0.36
15	0.57	0.00	0.60	0.46	0.52	0.15	0.52	0.15
16	0.57	0.53	0.53	2.04	0.51	0.18	0.51	0.18
17	0.59	1.19	0.60	0.53	0.60	-3.68	0.60	-3.68
18	0.48	-0.30	0.51	-2.02	0.44	-0.06	0.44	-0.06
19	0.57	0.04	0.57	-0.00	0.51	0.17	0.51	0.17
20	0.29	-0.75	0.34	1.50	0.27	-0.12	0.27	-0.12
21	0.55	0.33	0.53	0.77	0.50	0.16	0.50	0.16
22	0.55	0.13	0.58	-2.11	0.50	0.26	0.50	0.26
23	0.42	-0.20	0.52	-1.63	0.37	-0.04	0.37	-0.04
24	0.53	-0.46	0.59	3.09	0.52	-0.13	0.52	-0.13
25	0.58	0.02	0.56	-2.00	0.54	0.10	0.54	0.10

Tabela 6.2: Constantes para os modelos de Castagna et al. (1985) para as quatro interfaces consideradas.

Referências Bibliográficas

Aki, K. and Richards, P. G. (1980). *Quantitative Seismology, Theory and Methods: Volume 1*. W. H. Freeman and Company.

Bortfeld, R. (1961). Approximation to the reflection and transmission coefficient of plane longitudinal and tranverse waves. *Geophys. Prosp.*, 9:485–503.

Castagna, J. and Backus, M., editors (1993). *Offset-Dependent Reflectivity–Theory and Practice of AVO analysis*, volume 8 of *Investigations in Geophysics*. Society of Exploration Geophysicists.

Castagna, J., Batzle, M. L., and Eastwood, R. L. (1985). Relationship between compressional and shear-wave velocities in clastic silicate rocks. *Geophysics*, 50:551–570.

Castagna, J. and Smith, S, W. (1994). Comparison of AVO indicators: A modeling study. *Geophysics*, 59:1849–1855.

Castagna, J. P. (2001). Recent advances in seismic lithologic analysis. *Geophysics*, 66:42–46.

Castagna, J. P., Swan, H. W., and Foster, D. J. (1998). Framework for AVO gradient and intercept interpretation. *Geophysics*, 63:948–956.

Cerveny, V. and Psencik, I. (1988). *Numerical modelling of seismic wave fields in 2-D laterally varyng layered structures by the ray method*. http://sw3d.mff.cuni.cz/software.

Cohen, J. K. and Stockwell, J. J. W. (2006). *CWP/SU: Seismic Un*x Release No. 39: a free package for seismic research and processing*. Center for Wave Phenomena, Colorado School of Mines.

Connolly (1999). Elastic impedance. *Leading Edge*, 18:438–452.

Crase, E., Pica, A., Noble, M., McDonald, J., and Tarantola, A. (1990). Robust elastic nonlinear waveform inversion: Aplication to real data. *Geophysics*, 55:527–538.

Dahl, T. and Ursin, B. (1991). Parameter estimation in a one-dimensional anelastic medium. *Journal of Geophysical Research*, 96:217–233.

Davolio, A., Grosfeld, V., and Santos, L. T. (2006). Impedance-type approximation of the PP and PS reflection coeffcients and prediction of elastic parameters. *WIT Annual Report*, 9:199–208.

Dix, H. C. (1955). Seismic velocities from surface measurements. *Geophysics*, 20:68–86.

Dolan, E. D. and Moré, J. J. (2002). Benchmarking optimization software with performance profiles. *Mathematical Programing, Serie A*, 91:201–213.

Dong, W. (1996). A sensitive combination of AVO slope and intercept for hydorcarbon indication. *58 th Conference and Technical Exhibition, Eur. Assn. Geosci. Eng.*, paper M044.

Douma, H. and Calvert, A. (2006). Nonhyperbolic moveout analysis in VTI media using rational interpolation. *Geophysics*, 71:D59–D71.

Duffaut, K., Landrø, M., and Rogno, H. (2000). Shear-wave elastic impedance. *Leading Edge*, 19:1222–1229.

Fatti, J. L., Vail, P. J., Smith, G. C., Stauss, P. J., and Levitt, P. R. (1994). Detection of gas in sandstone reservoirs using AVO analysis: A 3-D seismic case history using Geostack technique. *Geophysics*, 59:1362–1367.

Gardner, G. H., Gardner, L. W., and Gregory, A. R. (1974). Formation velocity and density–the diagnostic for stratigraphic traps. *Geophysics*, 39:770–780.

González, F. E., Mukerji, T., Mavko, G., and Michelena, R. J. (2002). Near and far offset P-to-S elastic impedance for discriminating fizz water from commercial gas. *Leading Edge*, 22:1012–1015.

Goodway, B., Chen, T., and Downton, J. (1999). Improved AVO fluid detection and lithology discrimination, using Lamé petrophysical parameters, "$\lambda\rho$", "$\mu\rho$", and "λ/μ fluid stack" from P and S inversion. In *67th Ann. Int. Meeting, Expanded Abstracts*, pages 183–186. Soc. Exp. Geo.

Gray, D., Goodway, B., and Chen, T. (1999). Bridging the gap: Using AVO to detect changes in fundamental elastic constants. In *69th SEG Ann. Int. Meeting, Expanded Abstracts*, pages 852–855. Soc. Exp. Geo.

Grosfeld, V. and Santos, L. T. (2005a). A comparison of seismic attributes. *WIT Annual Report*, 8:241–246.

Grosfeld, V. and Santos, L. T. (2005b). Impedance-based indicator for elastic parameter prediction. In *9th International Congress, SBGF011 Extended Abstracts*. Brazilian Geophysical Society.

Knott, C. G. (1899). Reflection and refraction of elastic waves with seismological application. *Philos. Mag.*, 48:64–97.

Koefoed, O. (1955). On the effect of Poisson's ratio of rocks strata on the reflection coefficients of plane waves. *Geophys. prosp.*, 3:381–387.

Mallick, S., Huang, X., J., L., and Ahmad, R. (2000). Hybrid seismic inversion: A reconnaissance tool for deepwater exploration. *The Leading Edge*, 19:1230–1237.

Ostrander, W. J. (1984). Plane-wave reflection coefficents for gas sands at nonnormal angles of incidence. *Geophysics*, 49:1637–1648.

Pan, D., Liu, E., and Yue, J. (2005). Comparison of accuracies of elastic impedace. *Journal of Seismic Exploration*, 14:303–317.

Perroud, H. and Tygel, M. (2004). Nonstrech NMO. *Geophysics*, 69:599–607.

Ramos, A. C. and Castagna, J. P. (2001). Useful approximations for converted-wave AVO. *Geophysics*, 66:1721–1734.

Ross, C. P. (2000). Effective AVO crossplot modeling: A tutorial. *Geophysics*, 65:700–711.

Rutherford, S. R. and Williams (1989). Amplitude-versus-Offset variations in gas sands. *Geophysics*, 54:680–688.

Santos, L. T. and Tygel, M. (2004). Impedance-type approximations of the P-P elastic reflection coefficient: Modeling and AVO inversion. *Geophysics*, 69:592–598.

Shuey, R. T. (1985). A simplification of the Zoeppritz equations. *Geophysics*, 50:609–614.

Smith, G. C. and Gidlow, P. M. (1987). Weighted stacking for rock property estimation and detection of gas. *Geophys. Prosp.*, 35:993–1014.

Smith, G. C. and Gidlow, P. M. (2000). A comparison of the fluid factor with λ and μ in AVO analysis. In *68th Ann. Int. Meeting, Expanded Abstracts*, pages 122–125. Society of Exploration Geophysicists.

Stewart, M., Stewart, R., and Larsen, A. (2001). Joint PP and PS seismic inversion. *The Leading Edge*, 20:1048–1052.

Tjåland, E. (1993). *Analysis of the elastic reflection matrix*. PhD thesis, The Norwegian Institute of Thecnology, University of Trondheim.

Tygel, M., Santos, L. S., Schleicher, J., and Hubral, P. (1999). Kirchhoff imaging as a tool for AVA/AVO analysis. *The Leading Edge*, 18:940–945.

Ursin, B. and Stovas, A. (2006). Traveltime approximations for a layered transversely isotropic medium. *Geophysics*, 71:D23–D33.

Veire, H. H. and Landro, M. (2006). Simultaneous inversion of PP and PS seismic data. *Geophysics*, 71:D1–D10.

Whitcombe, D. N. (2002). Elastic impedance normalization. *Geophysics*, 67:60–62.

Whitcombe, D. N., Connolly, P. A., Reagan, R. L., and Redshaw, T. C. (2002). Extended elastic impedance for fluid and lithology prediction. *Geophysics*, 67:63–67.

Wiggins, R., Kenny, G. S., and McClure, C. D. (1983). A method for determining and displaying the shear-velocity refelctivities of geological formation. European Patent Application 0113944.

Yilmaz, O. (2001). *Seismic data analysis (2 Volumes)*, volume 10 of *Investigations in Geophysics*. Society of Exploration Geophysicists.

Zoeppritz, K. (1919). *Über Erdbebenwellen, VII B, Über Reflexion und Durchgang seismischer Wellen durch Unstetigkeitsflächen*, pages 57–84. Nachrichten Göttingen, Matematish physikalische Klasse.