

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA  
TESE DEFENDIDA POR VALTER AP. FRANCO  
DA SILVEIRA E APROVADA PELA  
COMISSÃO JULGADORA EM 16/05/1997.

Renato Pavanello  
ORIENTADOR

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**SIMULAÇÃO DA PROPAGAÇÃO DE TRINCAS  
BIDIMENSIONAIS EM PROBLEMAS DE MECÂNICA DA  
FRATURA LINEAR ELÁSTICA ATRAVÉS DO MÉTODO DE  
ELEMENTOS FINITOS**

Autor : Valter Ap. Franco da Silveira

Orientador: Renato Pavanello

05/97

Si39s

31031/BC

UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL**

**SIMULAÇÃO DA PROPAGAÇÃO DE TRINCAS  
BIDIMENSIONAIS EM PROBLEMAS DE MECÂNICA DA  
FRATURA LINEAR ELÁSTICA ATRAVÉS DO MÉTODO DE  
ELEMENTOS FINITOS**

Autor : Valter Ap. Franco da Silveira

Orientador: Renato Pavanello

Curso: Engenharia Mecânica.

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos

Dissertação de Mestrado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 1997

S.P. - Brasil .

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

Si39s                      Silveira, Valter Ap. Franco da  
                                 Simulação da propagação de trincas bidimensionais em  
                                 problemas de mecânica da fratura linear elástica através do  
                                 método de elementos finitos / Valter Ap. Franco da  
                                 Silveira.--Campinas, SP: [s.n.], 1997.

                                 Orientador: Renato Pavanello.  
                                 Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de  
                                 Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

                                 1. Método dos elementos finitos. 2. Mecânica da  
                                 fratura. I. Pavanello, Renato. II. Universidade Estadual de  
                                 Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL**

**Dissertação de Mestrado**

**SIMULAÇÃO DA PROPAGAÇÃO DE TRINCAS  
BIDIMENSIONAIS EM PROBLEMAS DE MECÂNICA DA  
FRATURA LINEAR ELÁSTICA ATRAVÉS DO MÉTODO DE  
ELEMENTOS FINITOS**

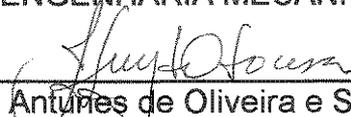
Autor : Valter Ap. Franco da Silveira

Orientador: Prof Dr. Renato Pavanello



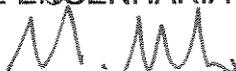
---

Prof. Dr. Renato Pavanello, Presidente  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA - UNICAMP



---

Prof. Dr. José Luiz Antunes de Oliveira e Sousa  
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL - UNICAMP



---

Prof. Dr. Paulo Sollero  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA - UNICAMP

Campinas, 16 de Maio de 1997

## **Dedicatória**

Dedico este trabalho à meu sobrinho Willian (em memória), minha filha Lívia, minha esposa Luisa, meus pais Euclides e Therezinha e a toda minha família.

## **Agradecimentos**

A Deus, pelas “casualidades” ocorridas, as quais, indicaram-me caminhos a serem seguidos, quando mais necessitei.

Aos meus pais pela ajuda ao longo de minha vida.

A Luisa e Lívia, por terem cedido parte do tempo que lhes pertenciam, para elaboração deste trabalho.

Ao meu orientador, que me orientou nos caminhos seguidos.

Ao Eng. Rubens Colombrini (em memória), ex-gerente de engenharia de aplicação do depto de refratários da Carborundum, que concedeu permissão para que eu pudesse cursar os créditos necessários.

Ao prof. Marco Lúcio por ter indicado pessoas, que contribuíram para este trabalho.

Ao prof. José Luiz Antunes da Faculdade de Enga Civil da UNICAMP, por sugestões apresentadas e fornecimento de material técnico.

Ao prof. Túlio Bittencourt da Escola Politécnica da USP, por ceder material técnico para validação final das técnicas utilizadas.

A profa. Ellen Goudet, pelas correções de gramática.

A todos os professores e colegas do departamento, que ajudaram de forma direta e indireta na conclusão deste trabalho

Eu disse comigo mesmo: " Eis que amontoei e acumulei mais sabedoria que todos os que me precederam em Jerusalém. Porque meu espírito estudou muito a sabedoria e a ciência, e apliquei o meu espírito ao discernimento da sabedoria, da loucura e da tolice. Mas cheguei à conclusão de que isso é também vento que passa".

(Bíblia, Eclesiástico, Cap. 1, vers.16 e 17)

## SUMÁRIO

1- Introdução	1
2 - Elasticidade plana e mecânica da fratura	7
2.1 - Equações básicas da elasticidade e estados planos.	7
2.1.1 - Equações de deformação-deslocamento	7
2.1.2 - Equações de tensão deformação	8
2.1.3 - Distribuição de tensão bidimensional	10
2.1.3.1 - Estado plano de tensão	10
2.1.3.2 - Estado plano de deformação	11
2.2 - Equações básicas de mecânica da fratura.	11
2.2.1 - Métodos de avaliação de $K_I$ e $K_{II}$ .	15
2.2.1.1 - Método baseado em deslocamento	15
2.2.1.2 - Método baseado em energia	16
2.2.1.2.1 - Integral J	18
2.2.2 - Resistência a abertura da trinca	19
2.2.3 - Avaliação da direção de propagação da trinca.	19
2.2.3.1 - Critério da tensão tangencial máxima	20
3 - Abordagem numérica da mecânica da fratura	22
3.1 - Métodos para simulação da Mecânica da fratura	22
3.2 - Formulação de elementos finitos em elasticidade plana	26
3.3.- Implementação computacional de elementos isoparamétricos	30

3.4 - Recuperação das tensões nodais	35
3.5 - Elementos finitos isoparamétricos aplicado à mecânica da fratura	38
3.5.1 - Elemento do tipo "quarter point".	38
3.5.2 - Elemento quadrilateral degenerado de oito para seis nós.	41
3.5.3 - Elemento singular através da correção das funções de forma.	42
3.6 - Implementação numérica do cálculo do fator de intensidade de tensão	46
3.6.1 - Método da correlação do deslocamento	47
3.6.2 - Método da taxa de liberação de energia	48
4 - Implementação em computador e resultados obtidos	50
4.1 - Implementação em computador	50
4.2 - Validação dos elementos	53
4.3 - Cálculo dos parametros de fratura	53
4.3.1 - Obtenção dos fatores de intensidade de tensão em modo I	54
4.3.1.1 - Distribuição das tensões	62
4.3.2 - Obtenção dos fatores de intensidade de tensão em modo misto	64
4.3.2.1 - Distribuição das tensões	67
4.4 - Análise da direção da trinca	69
4.5 - Simulação da trajetória da trinca	70

4.5.1 - Aplicação e validação experimental.	73
5 - Conclusões.	91
6 - Sugestões para trabalhos futuros.	92
Bibliografia.	93
ANEXO A - Programa em linguagem paramétrica para geração de malha durante a propagação da trinca através do programa ANSYS.	99

## **Lista de figuras**

2.1 - Modos de fratura	12
2.2 - Coordenadas da trinca	13
2.3 - Modelo da ponta da trinca	15
2.4 - Representação da trinca em ângulo	20
3.1 - Etapas na análise numérica linear de problemas de equilíbrio	22
3.2 - Fluxograma para prog. de elem. finitos em mecânica da fratura	23
3.3 - Sequência de cálculo para propagação da trinca	24
3.4 - Tipos de elementos dos parâmetros de fratura	24
3.5 - Métodos utilizados para cálculo dos parâmetros de fratura	25
3.6 - Métodos utilizados para cálculo da direção da trinca	25
3.7 - Elemento triangular com seis nós (a) e quadrilateral com oito nós (b)	31
3.8 - Montagem do elemento	32
3.9 - Representação da interpolação de uma função típica de tensão	36
3.10 - (a) elemento espaço geométrico e (b) espaço de referência	39
3.11 - Elemento unidirecional: (a) esp. referência (b) esp. geométrico	40
3.12 - Elemento singular triangular com seis nós	45
3.12 - Desloc. dos nós da região da ponta da trinca para cálculo de G	48
4.1 - Diagrama de utilização do programa	51
4.2 - Modelo de barra submetida a tração	55

4.3 - Malha gerada próximo a ponta da trinca com elemento triangulares	56
4.4 - Modelo 1	56
4.5 - Modelo 2 - Primeiro refinamento de malha na ponta da trinca	56
4.6 - Modelo 3 - Segundo refinamento da malha na ponta da trinca	56
4.7 - Variação do erro em função da malha adotada	58
4.8 - Elemento quadrilateral de oito nós	59
4.9 - Refinamento da malha para o elemento quadrado (modelo 2)	59
4.10 - Visualização do modelo total representado através de $\frac{1}{4}$ da estrutura	62
4.11 - Concentração da tensão na ponta da trinca com elemento triangular "quarter point"	63
4.12 - Aproximação para ponta da trinca (elem. triang. quarter point)	63
4.13 - Modelo para avaliação em modo misto	64
4.14 - Modelo adotado para modo misto	65
4.15 - Malha gerada na ponta da trinca	66
4.16 - Distribuição de tensão no modelo	67
4.17 - Concentração da tensão nas pontas da trinca	68
4.18 - Vista ampliada da concentração de tensão na ponta da trinca	68
4.19 - Ilustração da direção teórica da ponta da trinca	69
4.20 - Direção de propagação da trinca inclinada sob carregamento de tração	70
4.21 - Modelo para simulação do crescimento da trinca incl. sob tração	71

4.22 - Primeiro incremento de trinca	72
4.23 - Segundo incremento de trinca	72
4.24 - Terceiro incremento de trinca	73
4.25 - Placa de PMMA submetida a flexão	74
4.26 - Trajetória obtida na simulação	75
4.27 - Trajetória obtida na ref. [8]	75
4.28 - Comparação das trajetórias	77
4.29 - Visão da malha gerada na região do furo para propagação da trinca - exemplo I	78
4.30 - Fim da propagação da trinca, exemplo I - incremento 0.00635 m	79
4.31 - Malha gerada no final da propagação da trinca, exemplo I - incremento 0,00635m	79
4.32 - Fim da propagação da trinca, exemplo I - incremento 0,0127 m	80
4.33 - Malha gerada no final da propagação da trinca, exemplo I - incremento 0,0127 m	80
4.34 - Fim da propagação da trinca, exemplo I - incremento 0,0254 m	81
4.35 - Malha gerada no final da propagação da trinca, exemplo I - incremento 0,0254 m	81
4.36 - Trajetória obtida na simulação	84
4.37 - Trajetória obtida na ref [8]	84
4.38 - Malha inicial para o exemplo II	85
4.39 - Malha inicial gerada na região da trinca para o exemplo II	86

4.40 - Visualização da trinca propagada para o exemplo II	86
4.41 - Visualização da malha no final da propagação da trinca	87
4.42 - Comparação entre os modelos com e sem furos para os dois exemplos	88
4.43 - Gráfico de avaliação do relacionamento entre $K_I/K_{II}$ durante o crescimento da trinca para o primeiro exemplo	89
4.44 - Gráfico de avaliação do relacionamento entre $K_I/K_{II}$ durante o crescimento da trinca para o segundo exemplo	90

## **Lista de tabelas**

3.1 - Pontos de integração de Gauss e pesos de ponderação	33
3.2 - Pontos de integ. para regra de três pontos e pesos de ponderação	33
3.3 - Valores da matriz A - elemento degenerado	42
3.4 - Parâmetros de integração Gauss-Radau modificado.	45
3.5 - Valores da matriz A - elemento Akin	46
4.1 - Comparação dos resultados obtidos com elementos triangulares em modo I através do método da correlação de deslocamento.	57
4.2 - Comparação dos resultados obtidos com elementos triangulares em modo I, através do método da taxa de liberação de energia - G	58
4.3 - Resultados obtidos com elementos quadrilateral de oito nós em modo I através do método da correlação de deslocamento	60
4.4 - Resultados obtidos com elementos quadrilateral de oito nós em modo I através do método da taxa de liberação de energia	60
4.5 - Resultados obtidos em modo misto com o método da correlação de deslocamento	66
4.6 - Direção de propagação	69
4.7 - Valores obtidos dos parâmetros de fratura	71
4.8 - Valores obtidos para o exemplo I	76
4.9 - Valores obtidos para o exemplo II	83

## NOMENCLATURA

$[A]$  = matriz do ponto de integração .

$a$  = comprimento da trinca.

$[B]$  = matriz deformação

$B_i$  = coordenada do ponto de integração

$b$  = coeficiente de reta para calculo de K mét. direto

$c$  = valor obtido de  $\frac{|\Delta v|}{\sqrt{r}}$  para nó da ponta da trinca

$[D]$  = matriz constitutiva do material

$E$  = módulo de elasticidade.

$F^e$  = força nodal equivalente

$G$  = taxa de liberação de energia

$G_I$  = taxa de liberação de energia em modo I

$G_{II}$  = taxa de liberação de energia em modo II

$g_c$  = módulo de cisalhamento

$[H]$  = matriz das funções de forma modificada

$I$  = valor obtido da integração numérica

$J$  = Jacobiano

$[J]$  = matriz Jacobiano

$K$  = fator de intensidade de tensão.

$K_I$  = fator de intensidade de tensão em modo I de fratura.

$K_{IC}$  = fator de intensidade de tensão em modo I crítico para o material

$K_{II}$  = Fator de intensidade de tensão em modo II de fratura.

$[K]$  = matriz de rigidez global.

$[K^e]$  = matriz de rigidez elementar.

$[K_f]$  = matriz de rigidez do grupo de elem. que compõem a ponta da trinca

$[K_f^*]$  = matriz de rigidez do grupo de elementos que compõem a ponta da trinca após o incremento para propagação da trinca

$[N]$  = matriz das funções de forma.

$n$  = número de nós

$nelem$  = número de elementos

$p$  = forças de corpo pôr unidade de volume

$q$  = forças de superfícies

$Q$  = função para correção das funções de forma

$R$  = variação da energia de superfície

$R_c$  = variação da energia de superfície crítica para o material

$r$  = distância que se inicia na ponta da trinca.

$s$  = distância ao longo da trajetória  $\Gamma$

$S^e$  = área do elemento

$t$  = espessura do corpo

$\{t_x\}$  = vetor tração ao longo do eixo  $x$ .

$\{t_y\}$  = vetor tração ao longo do eixo  $y$ .

$U$  = densidade de energia de deformação (pôr unid. vol.).

$U^e$  = densidade de energia de deformação do elemento (pôr unid. vol.).

$U^*$  = densid. energia deform. para a trinca após sua propagação.

$u$  = deslocamento em  $x$ .

$u_i$  = deslocamento em  $x$  para o nó  $i$

$u_m$  = deslocamento médio em  $x$  para o nó  $i$

$\bar{u}$  = deslocamento relativo a abertura da trinca em  $x$

$V_e$  = volume do elemento

$v$  = deslocamento em  $y$

$v_i$  = deslocamento em  $y$  para o nó  $i$

$v_m$  = deslocamento médio em  $y$  para o nó  $i$

$W$  = energia de superfície

$w_i$  = fator de ponderação para o nó i  
 $w_j$  = fator de ponderação para o nó j  
 $w$  = deslocamento na direção z  
 $x$  = eixo cartesiano  
 $y$  = eixo cartesiano  
 $\alpha_\sigma$  = ângulo formado entre as tensões principais  
 $\alpha$  = ângulo de inclinação da trinca  
 $\Gamma$  = qualquer trajetória ao redor da ponta da trinca  
 $\Delta a$  = incremento ao comprimento de trinca.  
 $\gamma_{xy}$  = deformação no plano xy  
 $\gamma_{xz}$  = deformação no plano xz  
 $\gamma_{yz}$  = deformação no plano yz  
 $\{\delta\}$  = vetor deslocamento  
 $\{\delta^*\}$  = vetor deslocamento após a trinca se propagar  
 $\{\delta^{e*}\}$  = vetor deslocamento do elemento  
 $\delta\pi$  = variação da energia potencial  
 $\varepsilon$  = deformação  
 $\varepsilon_x$  = deformação no eixo x  
 $\varepsilon_y$  = deformação no eixo y  
 $\varepsilon_z$  = deformação no eixo z  
 $\{\varepsilon\}$  = vetor deformação  
 $\{\varepsilon^o\}$  = vetor deformação inicial  
 $\eta$  = eixo de referência  
 $\theta$  = ângulo formado entre r e o eixo x  
 $\mu$  = razão de Poisson  
 $\xi$  = eixo de referência  
 $\kappa$  = parâmetro determinados pelas equ. 3.22 e 3.23.

$\Pi$  = energia potencial total

$\Pi_e$  = energia potencial do elemento

$\sigma$  = Tensão de tração

$\sigma_x$  = Tensão de tração no eixo x

$\sigma_y$  = Tensão de tração no eixo y

$\sigma_z$  = Tensão de tração no eixo z

$\sigma_\theta$  = Tensão de tração para o ângulo  $\theta$

$\sigma_1$  = Tensão principal de máxima

$\sigma_2$  = Tensão principal de mínima

$\{\sigma^o\}$  = Tensão iniciais

$\tau_{xy}$  = Tensões de cisalhamento no plano xy

$\tau_{zx}$  = Tensões de cisalhamento no plano zx

$\tau_{zy}$  = Tensões de cisalhamento no plano zy

$\tau_\theta$  = Tensão de cisalhamento para o ângulo  $\theta$

## RESUMO

SILVEIRA, Valter A. F., Simulação da propagação de trincas bidimensionais em problemas de mecânica da fratura linear elástica através do método de elementos finitos, Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1997, 124 p, Dissertação (mestrado).

O propósito deste trabalho é utilizar o método de elementos finitos para desenvolver um programa capaz de calcular os parâmetros de fratura envolvidos na verificação da estabilidade de trincas, e de simular sua propagação, para problemas de mecânica da fratura elástica linear bidimensional. Para isto, verifica-se o comportamento frente aos modos I e misto de fratura de elementos singulares e métodos de cálculos dos parâmetros de fratura, atualmente existentes na literatura. Além disso, cria-se dentro do programa Ansys, um gerador de malha, que permite simular o caminho percorrido pela trinca, durante a fase de propagação, interagindo com o programa desenvolvido pelo autor e as técnicas implementadas são validadas em comparações com exemplos teóricos e práticos.

### Palavras-Chaves:

Método de elementos finitos, elementos finitos singulares, propagação de trincas, "quarter point element", mecânica da fratura, método da correlação de deslocamentos, método da taxa de liberação de energia, método da máxima tensão circunferencial.

## **Abstract**

SILVEIRA, Valter A. F., Simulação da propagação de trincas bidimensionais em problemas de mecânica da fratura linear elástica através do método de elementos finitos, Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1997, 124 p, Dissertação (mestrado).

The purpose of this work is to apply the finite element method to develop a computer program capable of determining the fracture parameters involved in crack stability and simulate its propagation according to two-dimensional linear elastic fracture mechanics. The behavior of singular elements and methods to determine the fracture parameters existent nowadays is verified in face to mode I and mixed mode. Besides, a mesh generator is created inside of ANSYS program, that permits the simulation of the crack path, during the propagation process, working together with author's program. The implemented techniques are validated by comparison among theoretical and practical examples.

Keys words:

Singular finite element, crack propagation, quarter point element, fracture mechanics, displacement correlation technics, Energy release rate method, maximum tangential stress method.

## 1 - Introdução

Encontram-se registrados inúmeros casos de acidentes catastróficos com conseqüências graves para a sociedade, devido ao aparecimento de trincas em estruturas de equipamentos. Com isto, várias áreas da engenharia vêm-se dedicando aos estudos desses fenômenos para evitar que acidentes, como esses, possam ocorrer. Permite-se, assim, que muitas estruturas operem com trincas oriundas de falhas de processo de fabricação ou devido a solicitações mecânicas.

Ao projetar-se um elemento de máquina, deseja-se conhecer suas dimensões finais e saber qual material é economicamente mais adequado, para uma dada condição de carregamento. Para isto, necessita-se ter em mente o modo provável de falha, aplicando-se um critério em sua avaliação, que em geral, é uma verificação da intensidade da carga aplicada em uma geometria de peça, para obter-se, como parâmetro, a resistência característica do material. Não obstante, quando uma trinca se faz presente, os conceitos de mecânica da fratura devem ser aplicados.

Pode-se dizer que, a trinca se caracteriza pela formação de novas superfícies no material, e que uma característica do fenômeno de fratura é a ruptura de ligações interatômicas coesivas ou adesivas do mesmo. Portanto, o fenômeno da fratura vem sendo estudado com relação ao aspecto microscópico (microestrutura de novos materiais, propriedades mecânicas, etc) e com relação ao aspecto macroscópico em aplicações de engenharia. Presume-se que a trinca seja macroscópica e que suas leis possam ser idealizadas como algo contínuo em seus comportamentos mecânicos.

Desta forma, torna-se cada vez maior o envolvimento das áreas que estudam a parte microscópica com as que estudam a parte macroscópica, permitindo atualmente, o desenvolvimento de materiais inibidores de propagação de trincas, obtidos a partir de certas características mecânicas específicas a serem observadas na elaboração dos novos materiais.

Com relação ao aspecto macroscópico, de acordo com o tipo de solicitação, pode-se classificar os problemas da análise estrutural em: lineares, não lineares e outros. Neste estudo adota-se um modelo elástico linear característico de problemas de fratura em materiais frágeis. Tem-se como preocupação, determinar o comportamento de estruturas que possuem, de alguma forma, trincas previamente nucleadas, responsáveis pela descontinuidade de sua geometria.

O propósito deste capítulo é rever brevemente alguns trabalhos de mecânica da fratura elástica linear bidimensional, que envolve a utilização do método de elementos finitos isoparamétricos. Diversas publicações discutem, exaustivamente, casos tradicionais, nos quais os parâmetros de fratura podem ser determinados diretamente através de equações analíticas (Broek [10], Paris [37], Liebowitz [49]). Os casos em que a obtenção torna-se complexa, devido à geometria ou a condições de carregamento, serão mais exatamente determinados se empregando um método numérico. Neste trabalho, é utilizado o método de elementos finitos, e as publicações a respeito do problema encontram-se geralmente divididas com relação ao tipo de elemento ou ao método de cálculo dos parâmetros de fratura, na tentativa de obter-se o melhor modelo para retratar as condições às quais as pontas da trinca estão submetidas.

A pesquisa efetuada observa os tipos de elementos e métodos de cálculo dos parâmetros de fratura que se aplicam na avaliação de problemas de mecânica da fratura elástica linear bidimensional.

Sabendo-se que as tensões, na ponta de uma trinca tendem ao infinito, torna-se necessário modelar esta região com elementos que englobem esta singularidade. Elementos singulares ou elementos de ponta de trinca, como são chamados, devem ser adicionados ao modelo da estrutura construída com elementos normais, para aumento da precisão dos valores obtidos de deslocamento, tensão e parâmetros de fratura no contorno da ponta da trinca. Encontram-se publicadas diversas propostas de elementos singulares, dentre as quais destaca-se algumas.

É comum encontramos na literatura, elementos singulares gerados a partir de uma função deslocamento especial. Dois exemplos de elementos triangulares que possuem função deslocamento especial, são sugeridos por Freese [20] e Stern [52].

Uma outra maneira é a modelagem da ponta da trinca, com um único elemento especial singular, ligando-o com o restante da estrutura. Byskov [11], Swedlon [54] e Tsamasphyros [55], propõem esses elementos, incorporando em sua função deslocamento a singularidade ocorrida, e permitindo que, com um único elemento, se descreva o campo de deslocamento no contorno da ponta trinca. Yosibash [60] faz o mesmo, porém utilizando um superelemento singular.

Outra forma de se obter a singularidade para um elemento, proposta por Barsoum [3] e Henshell [24], consiste em deslocar nós centrais das arestas de um elemento triangular quadrático, aproximando-os do nó que representa a ponta da trinca, conduzindo o valor do Jacobiano a zero para este nó. Barsoum atribui a esse elemento o nome de “quarter point element”, e esta técnica é empregada neste trabalho (capítulo 3).

Segundo alguns autores, usando-se a técnica anterior, pode-se aumentar a precisão de um elemento do mesmo tipo e com o mesmo numero de nós se ele for degenerado, ou seja, transformando um elemento quadrilateral em triangular. Para isto empregam-se elementos lineares, quadráticos e bi-cúbicos, ou seja, degeneram-se elementos de quatro nós para três (Tracey [56]), de oito para seis nós (Barsoum [3]) e de doze para nove nós (Lorensen [30]). Neste trabalho, verifica-se o efeito em elementos triangulares quadráticos e seus resultados podem ser observados no capítulo 4.

Akin [2] propõe uma nova forma de gerar a singularidade através de um elemento cuja singularidade é obtida através da divisão das funções de forma de um elemento isoparamétrico padrão por uma outra função especial, resultando para o nó, que representa a ponta da trinca, a singularidade. Este tipo de elemento é descrito neste trabalho (capítulo 3), e seus resultados são apresentados no capítulo 4.

No intuito de se obter uma melhor descrição do campo de deslocamento gerado a partir da ponta da trinca, Ingrassia [32] propõe um elemento quadrilateral de oito nós para ser usado como elemento transição, e faz a ligação entre os elementos singulares “quarter point”, que modelam a ponta da trinca, com os elementos normais da estrutura.

Todos os elementos, vistos até agora, necessitam, para obtenção dos fatores de intensidade de tensão de um método de cálculo baseado nos resultados obtidos após a solução do sistema de equações. Alguns autores (Walsh [57], Benzley [6]) propuseram elementos, cuja função deslocamento incorpora os fatores de intensidade de tensão, obtendo-se, com isso os valores dos fatores de intensidade de tensão diretamente ao solucionar-se o sistema de equações, tornando os fatores citados em uma variável pertencente ao vetor deslocamento. Gifford [22] estende este trabalho a um elemento triangular bi-cúbico com nove nós, mantendo as mesmas características.

Com relação aos métodos que se aplicam na obtenção dos fatores de intensidade de tensão, podemos dizer que, geralmente, se baseiam nos resultados de deslocamentos obtidos em pontos no contorno da abertura da trinca ou na taxa de liberação de energia de deformação causada pela mesma (Gallagher [21]).

Um método que se baseia em deslocamento, é o método da correlação de deslocamentos. Ele consiste em calcular os fatores de intensidade de tensão a partir dos resultados de deslocamentos obtidos na abertura da trinca. Diversos autores utilizam este método, dentre muitos, pode-se citar Shih [46], que discute sua aplicação em elementos do tipo “quarter point”.

Entre os métodos baseados em energia, encontra-se um proposto por Watwood [59], que calcula a taxa de liberação de energia a partir de um pequeno deslocamento do nó que representa a ponta da trinca, ou seja, a energia de deformação é calculada para o modelo inicial e novamente em outro modelo com o incremento do nó. Obtem-se assim a taxa de liberação de energia, dividindo a diferença entre as duas energias de deformação pelo valor do deslocamento do nó. Hellen [23] aplica a mesma teoria, porém sem

estender o comprimento da trinca, propondo o método da extensão virtual da trinca, para cálculo da taxa de liberação de energia, com um único modelo.

Um outro método empregado para situações em que a conduta plástica do material não pode ser negligenciada, é proposto por Rice [41], e consiste em uma integral de linha que exhibe o mesmo valor para qualquer contorno adotado ao redor da trinca, conhecida por integral J. Esse método permite que os valores calculados possam ser igualados à taxa de liberação de energia, obtendo-se assim o valor do fator de intensidade de tensão. Porém como surgem dificuldades na determinação da taxa de liberação de energia em modo misto o emprego da integral J em solicitações em modo misto é discutido por Eischen [18]. Diversos outros autores utilizam esse método na obtenção do fator de intensidade de tensão. Um exemplo pode ser encontrado em Anderson [1].

Rybicki [42] utiliza o método da integral de fechamento de trinca modificado, baseando-se na integral de fechamento de Irwin, o que significa que, quando uma trinca é estendida em um pequeno comprimento  $\Delta a$ , a energia absorvida no processo é igual ao trabalho realizado para fechá-la ao comprimento original. Ramamurthy [40] e Raju [39] discutem sua aplicação em modo misto, obtendo  $G_I$  e  $G_{II}$  para elementos quadrilaterais e triangulares padrões, com quatro, seis, oito e doze nós. Já Sethuraman [43] utiliza este mesmo método com elementos singulares conseguindo respostas mais precisas.

Atluri [12] utiliza o método da integral de domínio equivalente para avaliação da taxa de liberação de energia G para problemas tridimensionais em modo misto, que envolve os três casos de carregamento, e leva esse nome por computar, através de uma integral, o domínio tridimensional ao redor da ponta da trinca.

Os métodos de cálculos, até agora vistos, determinam os valores dos fatores de intensidade de tensão para uma a determinação da estabilidade da trinca. Quando o material que compõe a estrutura não resiste às tensões às

quais a ponta da trinca está submetida, ocorre sua propagação e, para isto, às vezes, é necessário saber em qual direção angular a citada trinca crescerá.

Com esta finalidade, atualmente, discutem-se três métodos:

1) O critério da máxima tensão circunferencial, o qual afirma que a trinca iniciará seu crescimento da ponta para a direção na qual a tensão  $\sigma_\phi$  (tangencial) for máxima, o que equivale a tensão de cisalhamento  $\tau_\phi$  igual a zero (Erdogan [19]).

2) O critério da densidade de energia de deformação mínima, afirma que o início da trinca ocorrerá na direção radial, na qual a densidade da energia local possua um valor estacionário calculada através do fator de densidade de energia (Sih [47]).

3) O critério da taxa de liberação de energia de deformação máxima, determina em qual ângulo a taxa de liberação de energia é máxima e para que direção uma trinca, sujeita a cargas combinadas, crescerá (Hussain [31]).

Bittencourt [9], oportunamente, avaliou o emprego desses três métodos citados acima, verificando a proximidade de resultado obtidos entre eles. Entretanto o critério da máxima tensão circunferencial é mais amplamente utilizado por vários outros autores como, Smith [51], Maccagno [33], Bhattacharjee [7], e será ele o adotado neste trabalho.

## 2 - Elasticidade plana e mecânica da fratura

Quando se aplica um determinado carregamento em uma estrutura, sabe-se que, para cada material, o estado atual de tensões da estrutura depende somente do estado de deformação corrente, ou seja, a tensão é função da deformação obtida [13]. Para determinação da distribuição de deslocamento ou tensões em uma estrutura sob um carregamento externo, deve-se obter a solução para as equações básicas da teoria de elasticidade. Caso na estrutura existam trincas, as tensões se concentram significativamente, e a mecânica da fratura propõe-se a modelar estes fenômenos.

### 2.1 - Equações básicas da elasticidade e estados planos

Inúmeras formas matemáticas estão disponíveis para a modelagem de problemas de elasticidade [38]. Apresentam-se aqui, sucintamente, as relações cinemáticas e constitutivas básicas, para o caso de elasticidade linear, considerando-se, para isso os casos bidimensionais. Esta formulação é a base para a construção das soluções numéricas que serão usadas neste trabalho.

#### 2.1.1 - Equações de deformação-deslocamento

Os deslocamentos de uma estrutura sob um determinado carregamento podem ser descritos pelas equações 2.1, 2.2 e 2.3.

$$u = u(x, y, z) \quad (2.1)$$

$$v = v(x, y, z) \quad (2.2)$$

$$w = w(x, y, z) \quad (2.3)$$

E  $u, v$  e  $w$  são os deslocamentos de um ponto material, especificado no referencial fixo  $(x, y, z)$ . Os deslocamentos podem ser representados em função de  $x, y$  e  $z$ , e as deformações, na estrutura, podem ser definidas a partir das derivadas parciais dos deslocamentos [45]. Para pequenas deformações as componentes de deformação são lineares e dadas por:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.4)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.5)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.6)$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.7)$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad (2.8)$$

$$\gamma_{zx} = \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.9)$$

E  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  e  $\varepsilon_z$  representam as deformações normais e  $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}$  e  $\gamma_{zx}$  representam as deformações cisalhantes.

### 2.1.2 - Equações de tensão-deformação

A deformação total, em cada ponto de um corpo, é composta, geralmente, por uma parte de deformações de origem térmica e outra de deformações devido ao sistema de forças externas. As deformações elásticas são relacionadas com as tensões pela lei de Hooke, segundo a qual, para o caso de elasticidade isotérmica linear, são dadas pelas seguintes equações:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (2.10)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)] \quad (2.11)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad (2.12)$$

$$\gamma_{xy} = 2 \frac{1+\mu}{E} \tau_{xy} \quad (2.13)$$

$$\gamma_{yz} = 2 \frac{1+\mu}{E} \tau_{yz} \quad (2.14)$$

$$\gamma_{xx} = 2 \frac{1 + \mu}{E} \tau_{xx} \quad (2.15)$$

Nessas equações a constante  $E$  é chamada de módulo de elasticidade, ou módulo de Young, e considerando-se um sistema de tensão uniaxial,  $E$ , é uma constante de proporcionalidade que relaciona a tensão normal à sua deformação linear (equ. 2.16).

$$\sigma_x = E \varepsilon_x \quad (2.16)$$

Definimos como razão de Poisson  $\mu$ , a relação entre a deformação na direção lateral sobre a deformação na direção axial, em um sistema uniaxial de tensão.

Estas equações podem ser escritas em função das tensões e a relação tensão-deformação é dada por:

$$\sigma_x = \frac{E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} \left[ (1 - \mu)\varepsilon_x + \mu(\varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] \quad (2.17)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} \left[ (1 - \mu)\varepsilon_y + \mu(\varepsilon_x + \varepsilon_z) \right] \quad (2.18)$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} \left[ (1 - \mu)\varepsilon_z + \mu(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \right] \quad (2.19)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1 + \mu)} \gamma_{xy} \quad (2.20)$$

$$\tau_{yz} = \frac{E}{2(1 + \mu)} \gamma_{yz} \quad (2.21)$$

$$\tau_{zx} = \frac{E}{2(1 + \mu)} \gamma_{zx} \quad (2.22)$$

As equações (2.10) a (2.21) representam a lei constitutiva do material e neste caso representam a fase linear elástica do seu comportamento. Este modelo genérico pode ser aplicado à representação de materiais dúcteis ou frágeis indiferentemente. A principal aplicação deste modelo, neste trabalho, será para materiais frágeis.

### 2.1.3 - Distribuição de tensão bidimensional

Em engenharia, podem-se efetuar aproximações para estados particulares de tensões ou deformações a fim de retratar condições de solitação ocorridas no espaço, o que normalmente ocorre na natureza. Dois estados são comumente utilizados: estado plano de tensões e estado plano de deformações.

#### 2.1.3.1 - Estado plano de tensão

Ao simplificar-se que uma estrutura espacial está sob carregamento em estado plano de tensão, admite-se a hipótese de que as estruturas possam ser consideradas como placas finas carregadas no plano (x,y) cujo o carregamento é uniforme ao longo de z (espessura). Portanto:

$$\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad (2.23)$$

Supondo-se materiais isotrópicos, entende-se que a lei constitutiva do material pode ser definida da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\mu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

Quando a equação é escrita em função das deformações, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\mu & 0 \\ -\mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

E as deformações em z podem ser obtidas por:

$$\varepsilon_z = \frac{-\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) = \frac{-\mu}{1-\mu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad (2.26)$$

### 2.1.3.2 - Estado plano de deformação

Ao admitir-se a hipótese de estado plano de deformação, supõe-se que a estrutura é alongada no eixo z e com carregamento uniforme ao longo do mesmo, que é o caso de túneis ou barragens. Para isto adota-se:

$$\varepsilon_x = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \quad (2.27)$$

Para materiais isotrópicos, tem-se a relação tensão-deformação, é dada pela equação:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} (1-\mu) & \mu & 0 \\ \mu & (1-\mu) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\mu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.28)$$

E, inversamente, a relação tensão-deformação:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{(1+\mu)}{E} \begin{bmatrix} (1-\mu) & -\mu & 0 \\ -\mu & (1-\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.29)$$

As tensões em z podem ser obtidas por:

$$\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y) \quad (2.30)$$

Nos casos de estado plano de tensão e estado plano de deformação, os fenômenos da teoria da elasticidade são similares aos fenômenos que aparecem no caso geral tridimensional. Assim sendo, estas simplificações permitem resolver problemas mais reduzidos, sem nenhuma perda de generalidade.

## 2.2 - Equações básicas de mecânica da fratura

É apresentada, neste item, uma breve descrição dos aspectos estruturais da mecânica da fratura aplicada a problemas bidimensionais. Os aspectos ligados à engenharia dos materiais com relação a micro-estrutura e a fenomenologia da mecânica da fratura não serão aqui discutidos, e podem ser encontrados em livros clássicos [10].

Quando se deseja avaliar uma estrutura que apresenta uma trinca, deve-se efetuar uma análise aplicando-se os conceitos de mecânica da fratura, considerando-se a singularidade ocorrida na determinação da distribuição de deslocamentos e tensões na ponta da trinca, em função do modo de fratura a que a estrutura está sendo submetida. Ou seja, existem três movimentos das superfícies superior e inferior de uma trinca para determinação de sua conduta.

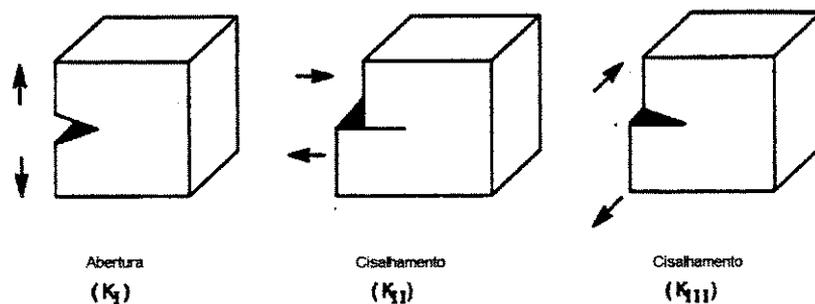


Figura 2.1 - Modos de fraturas.

Estes movimentos são denominados modos de fratura e são apresentados na figura 2.1. E são classificados da seguinte maneira:

- A) Modo I - (Abertura) Normalmente causado por solicitações de tração.
- B) Modo II - (Cisalhamento no Plano) Ocorre quando o efeito de forças cortantes no plano estão presentes.
- C) Modo III - (Cisalhamento fora do plano). Aparece geralmente quando determinados componentes estão sob efeito de torção.

Os campos de tensões e deslocamentos, na região da trinca, são usualmente descritos em termos de um sistema de coordenadas, com origem em sua ponta, conforme mostrado na figura 2.2. E são definidas através de funções paramétricas, envolvendo o fator de intensidade de tensões  $K$ , a distância  $r$  em relação a ponta da trinca e o ângulo  $\theta$ , formado com o eixo  $x$ . Representando termos de primeira ordem de soluções analíticas obtidas em séries infinitas, desprezando termos de ordem mais elevada, dadas pelas equações de 2.31 a 2.43 [10,37].

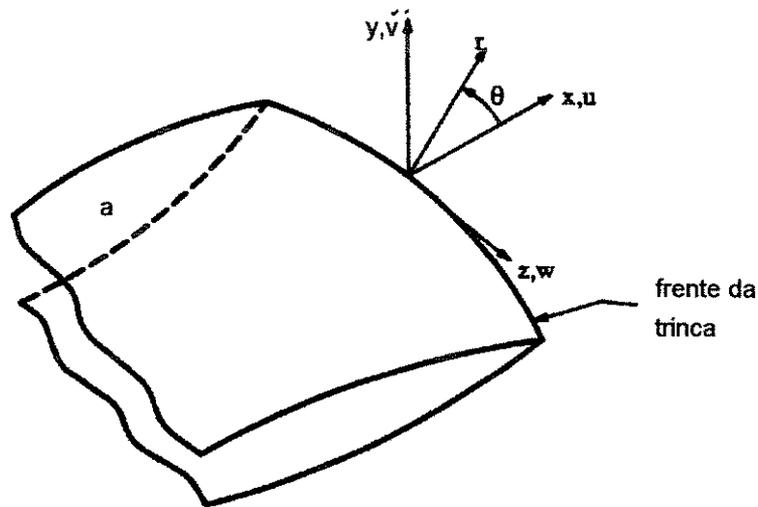


Figura 2.2 - Coordenadas da trinca.

Considerando-se uma placa infinita sob um carregamento de tensão bidimensional, os campos de tensões, para o caso de estado plano de tensões podem ser obtidos através das seguintes equações [37]:

Para o modo I, tem-se:

$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \quad (2.31)$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \quad (2.32)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (2.33)$$

E  $K_I$  é o fator de intensidade de tensões para o modo I (fig 2.1- Abertura)

Ainda para esta configuração, podem-se obter os deslocamentos (u,v) de qualquer ponto da estrutura próximo à trinca, usando-se as seguintes expressões:

$$u = \frac{K_I}{4g_c} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left( (2\kappa - 1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right) \quad (2.34)$$

$$v = \frac{K_I}{4g_c} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left( (2\kappa - 1) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (2.35)$$

Assim tem-se:

$$\text{para estado plano de deformação:} \quad (2.36)$$

$$\kappa = 3 - 4\mu$$

$$\text{para estado plano de tensão:} \quad (2.37)$$

$$\kappa = (3 - \mu) / (1 + \mu)$$

$$\text{e para o módulo de cisalhamento:} \quad (2.38)$$

$$g_c = E / 2(1 + \mu)$$

Para o modo de cisalhamento no plano (modo II):

$$\sigma_x = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left( 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \quad (2.39)$$

$$\sigma_y = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left( \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \quad (2.40)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (2.41)$$

E  $K_{II}$  é o fator de intensidade de tensões para o modo II (fig 2.1- Cisalhamento no plano).

Ainda para esta configuração, podem-se obter os deslocamentos (u,v) de qualquer ponto da estrutura, através das seguintes expressões.

$$u = \frac{K_{II}}{4g_c} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left( (2\kappa + 3) \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (2.42)$$

$$v = -\frac{K_{II}}{4g_c} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left( (2\kappa - 3) \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right) \quad (2.43)$$

Nos dois casos considerados, a determinação do estado de tensão de um corpo nas proximidades de uma trinca, passa pela determinação dos fatores de intensidade de tensão  $K_I$  e  $K_{II}$ . De acordo com o comportamento singular das tensões devido a dimensão  $r$ , geram-se pontos de tensões elevadas na

ponta da trinca, o que normalmente acentua a sua tendência a um rápido crescimento da falha e, eventualmente, à ocorrência de ruptura catastrófica.

### 2.2.1 - Métodos de avaliação de $K_I$ e $K_{II}$

Existem vários métodos para avaliação dos fatores de intensidade de tensão  $K$ . As metodologias desenvolvidas são geralmente baseadas nos campos de deslocamentos ou em critérios energéticos. Na seqüência, apresentam-se alguns modelos mais utilizados para a avaliação destes fatores.

#### 2.2.1.1 - Método baseado em deslocamentos

O método consiste na determinação do fator de intensidade de tensão  $K$  a partir do campo de deslocamentos que define a abertura da trinca [46,50].

O método baseia-se na obtenção dos valores da relação  $\frac{|v|}{\sqrt{r}}$  em pontos próximos à ponta da trinca e em extrapolá-los para onde ocorre a singularidade, ou seja o ponto onde o raio é zero, conforme mostrado na figura 2.3. Assim, avalia-se inicialmente o campo de deslocamento para uma dada configuração de abertura, e define-se uma abertura  $|v|$ , como mostrado na figura 2.3, considerando  $\theta = 180^\circ$ .

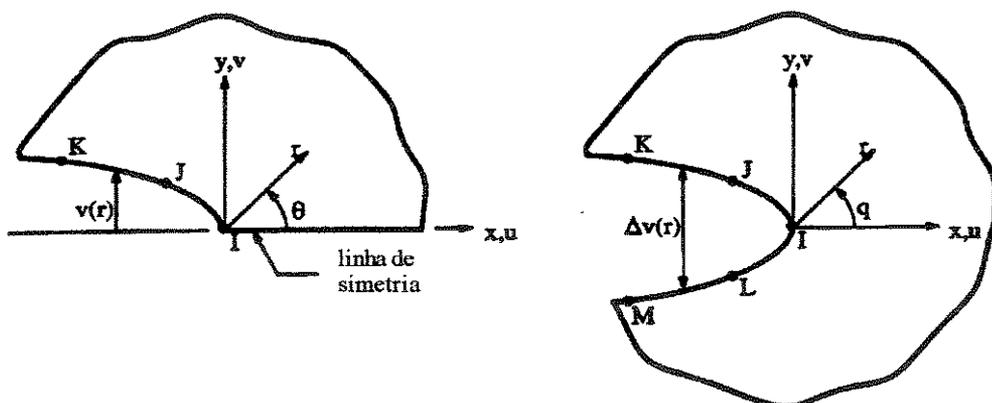


Figura 2.3 - Modelo da ponta da trinca.

Empregando-se as equações (2.34, 2.35, 2.42 e 2.43) para se obterem os deslocamentos, pode-se definir o campo total por superposição em função das seguintes equações:

$$u = \frac{K_I}{4g_c} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left( (2\kappa - 1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{4g_c} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left( (2\kappa + 3) \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (2.44)$$

$$v = \frac{K_I}{4g_c} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left( (2\kappa + 1) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right) - \frac{K_{II}}{4g_c} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left( (2\kappa - 3) \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right) \quad (2.45)$$

Neste caso, são considerados os modos I e II de fratura. A partir das equações 2.44 e 2.45, conhecendo-se os deslocamentos da trinca, pode-se calcular de forma direta os fatores de intensidade de tensão  $K_I$  e  $K_{II}$ .

### 2.2.1.2 - Método baseado em energia

Neste método um corpo fraturado estará em equilíbrio quando a variação da energia interna do corpo  $dU$ , gerada por um carregamento, for igual a variação de energia  $dW$ , requerida para um possível incremento de abertura  $da$ , para um material qualquer. Ou seja:

$$\frac{\partial U}{\partial a} + \frac{\partial W}{\partial a} = 0 \quad (2.46)$$

O que implica em:

$$\frac{\partial W}{\partial a} = - \frac{\partial U}{\partial a} \quad (2.47)$$

Na equação acima,  $W$  é a energia requerida para o crescimento da trinca, variando conforme o material empregado, também chamado por alguns autores de energia de superfície, e  $U$  é a energia de deformação do corpo que para o caso de um modelo discreto de elementos finitos, é dado por [61]:

$$U = \frac{1}{2} F \delta = \frac{1}{2} \{\delta\}^T [K] \{\delta\} \quad (2.48)$$

Sendo que,  $\{f\}$  é o vetor de carga externa,  $\{\delta\}$  é o vetor deslocamentos e  $[K]$  é a matriz de rigidez global do sistema.

Neste contexto, define-se **taxa de liberação de energia G** como sendo a variação da liberação de energia em relação à variação do comprimento da trinca, conforme a seguinte expressão:

$$G = -\frac{\partial U}{\partial a} = -\frac{U_{a+\Delta a} - U_a}{t\Delta a} \quad (2.49)$$

Na equação acima,  $t$  é a espessura da peça quando se considera problemas de estado plano de tensão. A partir desta definição,  $G$  pode ser medido em  $\text{Joule/m}^2$ , considerando-se o sistema internacional de unidades.

Sabendo-se que, em um carregamento de fratura em modo I, para uma trinca em uma placa plana infinita, o fator de intensidade de tensão é dado por [37]:

$$K_I = \sigma_1 \sqrt{\pi a} \quad (2.50)$$

e que a taxa de liberação de energia  $G$  também pode ser expressa por:

$$G = \frac{\pi \sigma_1^2 a}{E} \quad (2.51)$$

Através da substituição da equação (2.51) na equação (2.50) pode-se determinar a relação entre  $G$  e  $K$  para estado plano de tensão:

$$G_I = \frac{K_I^2}{E} \quad (2.51)$$

Para estado plano de deformação, tem-se:

$$G_I = (1 - \mu^2) \frac{K_I^2}{E} \quad (2.52)$$

Uma relação análoga, pode ser determinada para o modo II, que é definida através de:

$$G_{II} = \frac{K_{II}^2}{E} \quad (2.53)$$

A taxa total de liberação de energia em modo misto pode ser obtida adicionando-se a energia dos diferentes modos da seguinte maneira:

$$G = G_I + G_{II} = \frac{(K_I^2 + K_{II}^2)}{E} \quad (2.54)$$

Uma expressão equivalente a (2.54) pode ser estabelecida para o caso de estado plano de deformação conforme a expressão a seguir:

$$G = G_I + G_{II} = \frac{1 - \mu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (2.55)$$

Assim, os métodos baseados em energia podem ser implementados a partir das equações (2.52) e (2.53), podendo-se calcular os fatores de intensidade de tensão através das mesmas.

### 2.2.1.2.1 - Integral J

Até agora, foram abordados os casos de materiais com comportamento linear elástico, ou seja, sem deformação plástica na ponta da trinca. Se os efeitos plásticos não puderem ser negligenciados, G não mais pode ser determinado através do campo de deformações elásticas. Neste caso, o método da integral J (Rice (1968) [41]) permite determinar a taxa de liberação de energia para materiais perfeitamente plásticos (fratura dúctil). Com isto, efetua-se  $J=G$  e determina-se o coeficiente K para estes materiais, sendo J para o caso de estado plano de deformação, dado por:

$$J = \int_{\Gamma} U dy - \int_{\Gamma} (t_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + t_y \frac{\partial u_y}{\partial y}) ds \quad (2.56)$$

Na equação acima, U é a densidade de energia de deformação,  $t_x$  e  $t_y$  é o vetor tração (ou forças de superfícies) em seus respectivos eixos, u é o vetor deslocamento e ds é o elemento de comprimento de arco ao redor do contorno  $\Gamma$  distante a um raio qualquer ao redor da ponta da trinca.

### 2.2.2 - Resistência a abertura da trinca

Atribui-se o nome de resistência à trinca ( $R$ ), a variação da energia de superfície  $W$  em relação à variação do comprimento da trinca:

$$R = \frac{\partial W}{\partial a} \quad (2.57)$$

Realizando-se ensaios de laboratório, pode-se obter a máxima energia a que um material possa estar submetido para que a trinca não se propague. Este parâmetro é denominado de  $R_c$ , ou seja, a maior resistência do corpo à propagação da trinca. Esta propriedade relativa à resistência ao início da trinca, é chamada de tenacidade a fratura

Portanto, se durante a solicitação de uma estrutura a taxa de liberação de energia for maior que a resistência à trinca do material ou seja  $G > R_c$ , ocorrerá a propagação. Outra maneira de determinar se a trinca é estacionária ou não, é comparar o fator de intensidade de tensão  $K$ , calculado em função da solicitação aplicada, com o fator de intensidade de tensão crítico ( $K_{Ic}$ ), para qual o material, quando submetido a um ensaio, se rompe, então se o resultado for  $K > K_{Ic}$  não há estabilidade e ocorrerá a propagação da trinca.

### 2.2.3 - Avaliação da direção de propagação da trinca

Vários critérios têm sido propostos no sentido de prever a direção de propagação da trinca sob modo misto, sendo os mais usuais: o critério da densidade de energia de deformação [47], o critério da máxima tensão circunferencial [19] e o critério da taxa de liberação de energia máxima [31].

Smith 1991 [51] compara o critério da máxima tensão circunferencial com o critério da densidade de energia de deformação para uma dada condição de carregamento, concluindo que o critério da máxima tensão circunferencial é o que mais se aproxima dos resultados experimentais por ele realizados. Este método vem sendo amplamente empregado em publicações, e neste trabalho adota-se este critério.

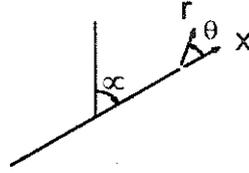


Figura 2.4 - Representação da trinca em ângulo.

### 2.2.3.1 - Critério da máxima tensão circunferencial

Pode-se afirmar que a trinca iniciará seu crescimento na direção em que a tensão normal de tração,  $\sigma_\theta$ , é máxima e a tensão de cisalhamento  $\tau_\theta$  for igual a zero [19]. Considerando-se o referencial oblíquo da figura 2.4, as tensões são dadas por:

$$\sigma_\theta = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ K_I \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta \right] \quad (2.58)$$

$$\tau_\theta = \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ K_I \sin \theta + K_{II} (3 \cos \theta - 1) \right] \quad (2.59)$$

Aplicando-se este critério, ângulo  $\theta$  é a direção onde a tensão normal de tração será máxima, dado por:

$$\cos \frac{\theta}{2} \left[ K_I \sin \theta + K_{II} (3 \cos \theta - 1) \right] = 0 \quad (2.60)$$

Ou ainda para o caso onde  $\theta \neq \pm \pi$ , tem-se:

$$K_I \sin \theta + K_{II} (3 \cos \theta - 1) = 0 \quad (2.61)$$

Para obtenção direta do ângulo, essa expressão pode ser transformada em [7]:

$$\theta = \arcsin \left[ \frac{\frac{K_I}{K_{II}} - 3\sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}}\right)^2 + 8}}{\left(\frac{K_I}{K_{II}}\right)^2 + 9} \right] \quad (2.62)$$

### 3 - Abordagem numérica da mecânica da fratura

Geralmente soluções analíticas de problemas de mecânica da fratura são possíveis para casos de geometria simples e condições de contorno regulares. Quando o corpo avaliado apresenta geometria complexa, uma boa aproximação dos parâmetros de fratura, pode ser obtida aplicando-se métodos numéricos.

Dois métodos que apresentam boa aplicabilidade para este tipo de análise são: o método de elementos finitos e o método de elementos de contorno. Neste trabalho aborda-se somente o método de elementos finitos aplicado em casos de fratura elástica linear bidimensional, ou seja, casos onde o fenômeno de plasticidade dos materiais ocorrido na ponta da trinca possam ser desprezados. Desconsideram-se também, efeitos térmicos e dinâmicos.

#### 3.1 - Métodos para simulação da mecânica da fratura

A resolução do problema de equilíbrio estático, utilizando-se o método de elementos finitos, pode ser dividida em três etapas, conforme a figura 3.1.

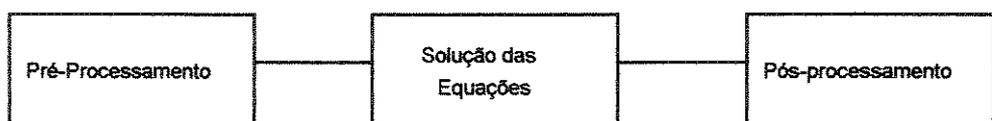


Figura 3.1 - Etapas da análise numérica linear de problemas de equilíbrio.

Quando se desejam obter os parâmetros da mecânica de fratura, alguns métodos de cálculo podem ser aplicados após a resolução do sistema de equações algébricas que governam o problema, objetivando determinar se haverá propagação da trinca e estimar o nível de tensão a que as peças estão submetidas. Para conhecer o caminho percorrido pela trinca, pode-se simular sua trajetória através de pequenos incrementos de crescimento, fazendo-se necessário obter novos valores dos parâmetros de fratura a cada incremento, ao longo do caminho, e calcular as novas direções de propagação.

O quadro mostrado na figura 3.2, apresenta, de forma genérica, as principais etapas de uma simulação, em computador, dos fenômenos de mecânica da fratura, no contexto de uma modelagem por elementos finitos na determinação da trajetória da trinca.

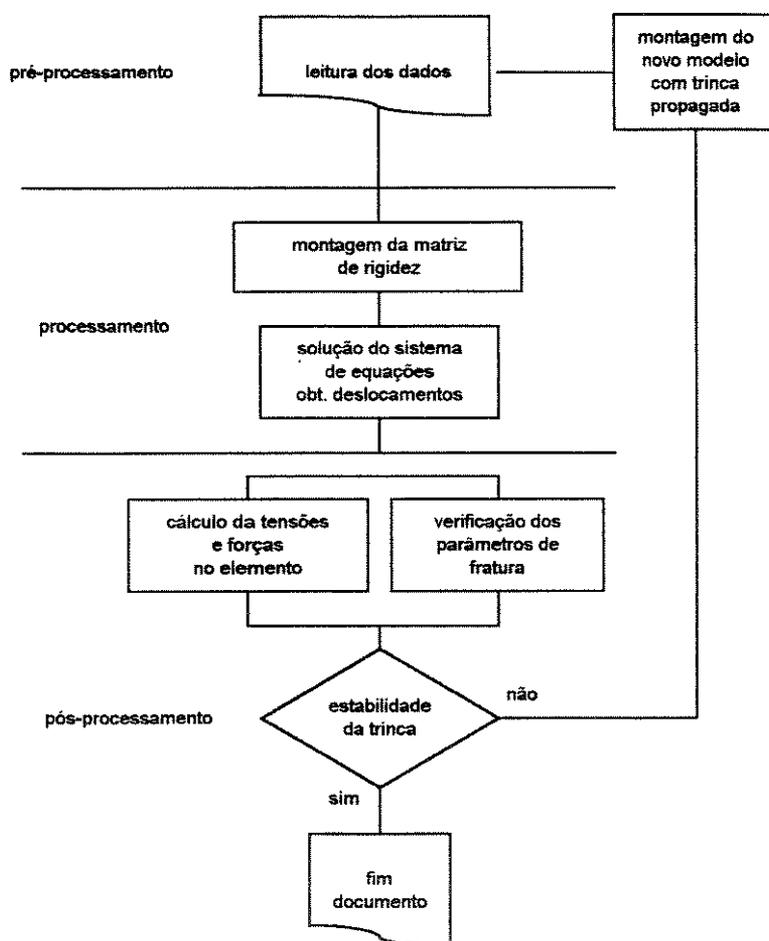


Figura 3.2 - Fluxograma para programa de elementos finitos em mecânica da fratura.

Conforme a figura 3.2, o processo utilizado na simulação do caminho percorrido pela trinca é interativo, e depende do tamanho do incremento de trinca adotado para melhor descrever a trajetória da mesma; neste trabalho, o tamanho do incremento é estimado e testes numéricos são realizados variando-se este parâmetro. Em cada etapa do crescimento, efetua-se uma avaliação do comportamento da trinca para decidir sobre a continuação da propagação ou não.

Pode-se observar na figura 3.3, que é necessário efetuar uma modelagem por elementos finitos, que seja adequada para o cálculo posterior

dos parâmetros de fratura. A precisão destes cálculos é fundamental para o sucesso da análise.

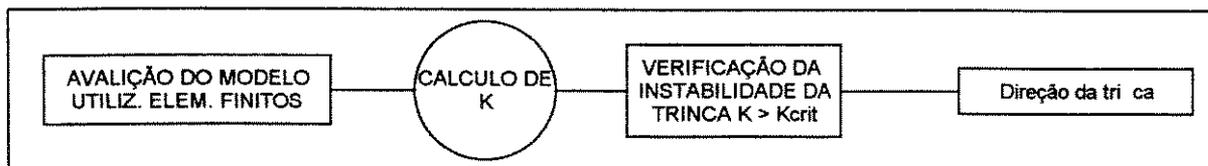


Figura 3.3 - Sequência de cálculo para propagação da trinca.

É importante ressaltar que não basta comparar os resultados obtidos com alguns elementos sob uma determinada condição de contorno para concluir se um elemento é mais preciso que outro; os resultados dos elementos variam conforme a malha empregada e um mesmo elemento pode ter seus resultados alterados ao adotar-se um sistema de integração diferente. A figura 3.4 ilustra alguns elementos encontrados em trabalhos publicados, empregados na solução de problemas de mecânica da fratura.

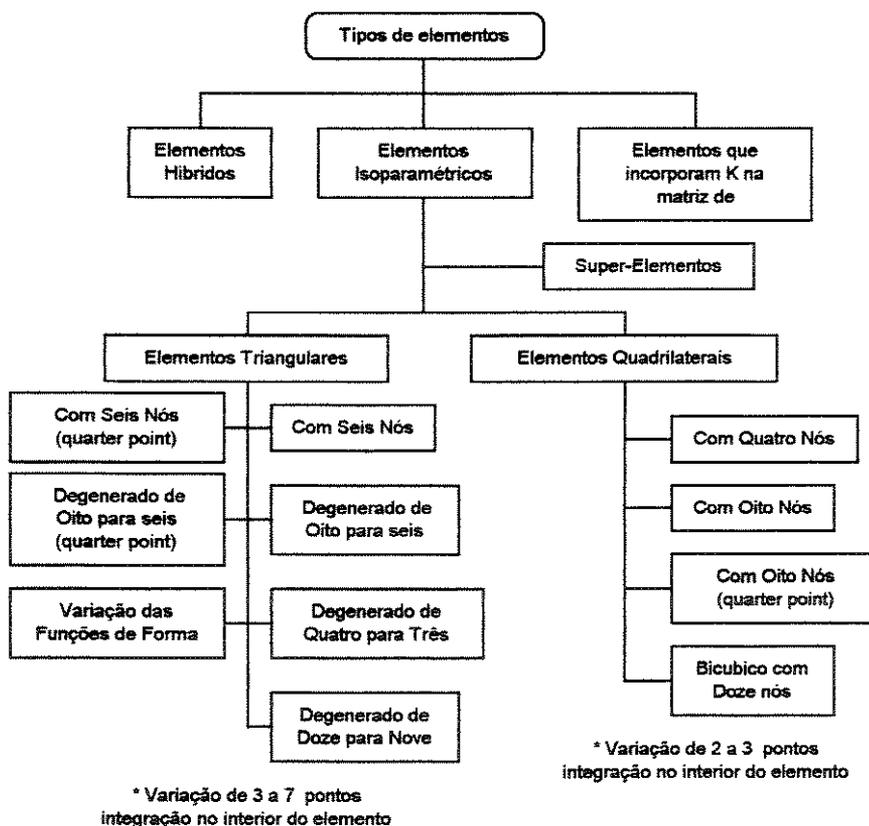


Figura 3.4 - Tipos de elementos.

Muitos métodos podem ser encontrados na literatura para o cálculo dos fatores de intensidade de tensão. Um resumo dos mais usuais encontra-se na figura 3.5. Geralmente são obtidos através de métodos baseados em energia ou em deslocamentos. É importante ressaltar que a precisão destes métodos é influenciada diretamente pelos resultados obtidos com o uso dos elementos.

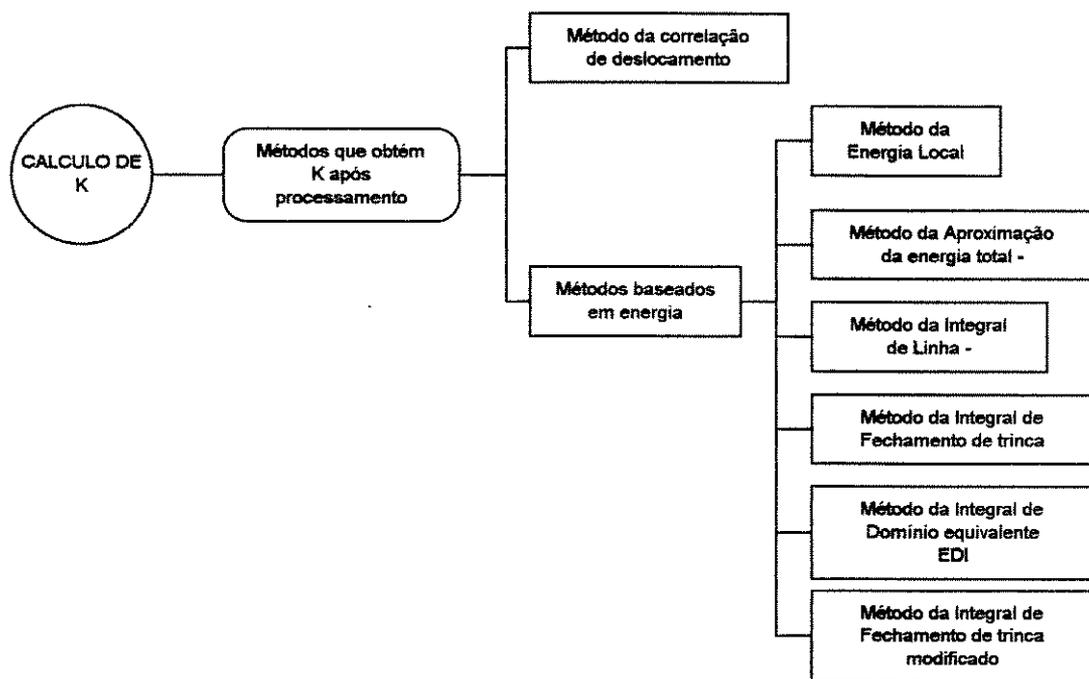


Figura 3.5 - Métodos utilizados para cálculo dos parâmetros de fratura.

Para se conhecer em qual direção angular a trinca se propagará, a figura 3.6 ilustra três métodos usualmente citados.

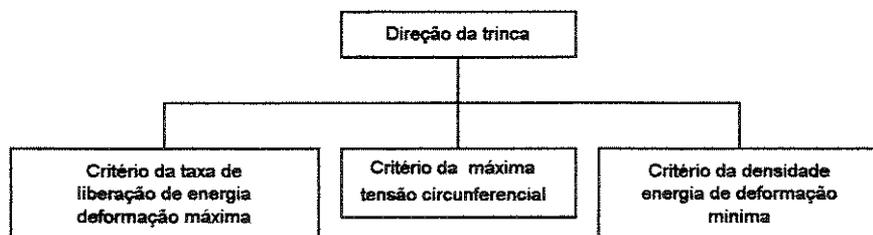


Figura 3.6 - Métodos utilizados para cálculo da direção da trinca.

Neste trabalho avalia-se a utilização de alguns elementos empregando-se métodos diferentes de cálculo dos fatores de intensidade de tensão.

Testam-se os seguintes elementos:

- Elementos isoparamétricos triangulares - padrão, singular através da correção das funções de forma (Akin) e "quarter point".
- Elementos isoparamétricos quadrilaterais - padrão e "quarter point".

Métodos de cálculo dos fatores de intensidade de tensão utilizados:

- métodos da correlação de deslocamentos.
- método da taxa de liberação de energia, através do crescimento real da trinca.

Para simulação do caminho de propagação da trinca, utiliza-se o critério da máxima tensão circunferencial na determinação do ângulo de propagação.

Na seqüência são apresentados os procedimentos usados para a implementação computacional, que se baseiam em aproximações do tipo elementos finitos.

### 3.2 - Formulação do método de elementos finitos em elasticidade plana.

Usando-se uma formulação clássica em energia [55,61], o problema de equilíbrio elastoestático pode ser resolvido minimizando a energia potencial do sistema  $\Pi$ , que é dada por:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV - \int_V \{\delta\}^T \{p\} dV - \int_S \{\delta\}^T \{q\} dS \quad (3.1)$$

e  $\{\sigma\}$  é vetor tensão,  $\{\varepsilon\}$  é vetor deformação,  $\{\delta\}$  é vetor deslocamento,  $\{p\}$  são as forças de corpo por unidade de volume e  $\{q\}$  são as forças de superfície.

O primeiro termo da equação (3.1) representa a energia de deformação do corpo; o segundo e o terceiro termos representam as contribuições do trabalho realizado pelas forças de corpo e as de superfície.

Assume-se que os deslocamentos sejam desconhecidos nos nós e adota-se uma aproximação clássica de elementos finitos, do tipo:

$$\{\delta\} = [N]\{u\} \quad (3.2)$$

onde  $[N]$  é a matriz que contém as funções de forma e  $\{u\}$  é o vetor das variáveis nodais de cada elemento [16].

Usando-se uma transformação de coordenadas isoparamétrica, define-se a aproximação de elementos finitos da seguinte forma para o espaço geométrico:

$$x = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) x_i \quad (3.3)$$

$$y = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) y_i \quad (3.4)$$

Para o espaço de referência:

$$u = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) u_i \quad (3.5)$$

$$v = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) v_i \quad (3.6)$$

e são usadas as mesmas funções de forma  $N_i$ , para a aproximação da geometria  $(x, y)$  e para as variáveis do problema  $(u, v)$ .

Usando-se a definição de deformação adotada no capítulo 2 pode-se determinar para o modelo discreto a seguinte relação matricial:

$$\{\epsilon\} = [B]\{\delta^e\} = [B] \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

e  $[B]$  é denotada matriz das derivadas das funções de forma. Para o caso de estado plano de tensão, a matriz  $[B]$  pode ser escrita pela expressão 3.8.

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Os operadores diferenciais são definidos no espaço real (x,y) e se relacionam com os operadores no espaço ( $\xi,\eta$ ) através da seguinte expressão 3.9.

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

E [J] é a matriz Jacobiana da transformação isoparamétrica, calculada pela expressão 3.10.

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Referindo-se a  $\Pi_e$  como sendo a energia potencial de cada elemento, tem-se, na equação 3.11:

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} \{\delta^e\}^T [B]^T [D] [B] \{\delta^e\} dV - \int_{V_e} \{\delta^e\}^T [N]^T \{p\} dV - \int_{S_e} \{\delta^e\}^T [N]^T \{q\} dS \quad (3.11)$$

E  $V_e$  é o volume do elemento e  $S_e$  a área do contorno de cada elemento.

Rescrevendo o mesmo sistema no espaço isoparamétrico, obtém-se:

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} \{\delta^e\}^T [J]^{-1} [B_\zeta] [D] [B_\zeta] [J]^{-1} \det[J] d\eta d\xi - \int_{V_e} \{\delta^e\}^T [N_\zeta] \{p\} d\eta d\xi - \int_{S_e} \{\delta^e\}^T [N_\zeta] \{q\} \det[J] d\xi \quad (3.12)$$

E  $V_\zeta$  é o volume do elemento, ou área para o caso bidimensional, e  $S_\zeta$  a área do elemento, ou uma aresta para o caso bidimensional. Na formulação isoparamétrica, o  $\det [J]$  corresponde ao determinante da matriz jacobiana dada por 3.10, e as funções de forma  $[N_\zeta]$  são definidas em um espaço de referência. Neste caso, a matriz que contém as derivadas das funções de forma é dada por:

$$[B_\zeta] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_\zeta}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_\zeta}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_\zeta}{\partial \eta} & \frac{\partial N_\zeta}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Por definição, as soluções globais são obtidas, a partir da hipótese de que a energia total do sistema corresponde ao somatório da energia potencial de cada elemento, o que permite escrever:

$$\Pi = \sum_{i=1}^{nelem} \Pi_e \quad (3.14)$$

E  $nelem$  é o número total de elementos.

Assim, minimizando-se a energia do sistema com relação ao deslocamento nodal, que são as incógnitas do problema, para cada elemento, obtém-se:

$$\frac{\partial \Pi_e}{\partial \delta^e} = [K^e] \{\delta^e\} - \{F^e\} = 0 \quad (3.15)$$

A matriz de rigidez do elemento  $[K^e]$  para um dado elemento é dada por:

$$[K^e] = \int \int [B]^T [D] [B] \det[J] d\eta d\xi \quad (3.16)$$

E o vetor força nodal equivalente  $\{F^e\}$  é:

$$\{F^e\} = \int_{\pi} [N_\zeta]^T \{p\} d\eta d\xi + \int_{\pi} [N_\zeta]^T \{q\} \det[J] d\xi \quad (3.17)$$

Para serem obtidos os deslocamentos nodais, realiza-se a superposição da energia de cada elemento, montando-se assim um sistema global, e resolve-se o sistema algébrico de equações utilizando um método numérico para solução de sistemas lineares.

No pós-processamento, as tensões podem ser obtidas multiplicando-se a matriz elasticidade  $D$  pelo vetor deformação calculado, isto é:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (3.18)$$

Pode-se também, determinar para, um ponto qualquer os valores das tensões principais, através das seguintes equações:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau_{xy}^2} \quad (3.19)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau_{xy}^2} \quad (3.20)$$

$$\alpha_\sigma = \frac{1}{2} \text{Tan}^{-1} \left( \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right) \quad (3.21)$$

E  $\sigma_1$  é a máxima tensão principal,  $\sigma_2$  é a mínima tensão principal,  $\alpha$  - é o ângulo formado entre a máxima tensão principal e o eixo x.

Na análise clássica de tensões, usam-se as tensões principais na aplicação de algum critério de resistência, como por exemplo o critério de von Mises.

### 3.3 - Implementação computacional do elemento isoparamétrico

Muitos autores orientam a implementação computacional do elemento isoparamétrico [4,5,14,26,29 e 61]. A figura 3.8 apresenta a seqüência da implementação computacional necessária para programação dos elementos isoparamétricos. Observa-se, nesse fluxograma, que a obtenção das matrizes dos elementos é feita a partir de uma integração numérica, através das equações 3.22 e 3.23.

Neste trabalho, usam-se elementos finitos bidimensionais quadrilaterais e triangulares, com aproximação quadrática conforme a figura 3.7 b.

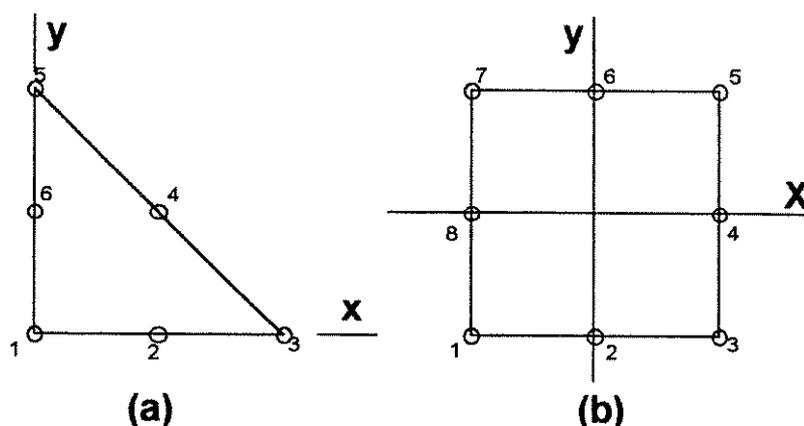


Figura 3.7 - Elementos triangular com seis nós (a) e quadrilateral com oito nós (b).

Para se calcular a matriz de rigidez do elemento quadrilateral de oito nós usa-se uma integração numérica pelo método da quadratura de Gauss [16], que consiste em efetuar a integração da equação 3.16, através de uma integração numérica, da seguinte forma:

$$I_{2,2} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n w_i w_j f(\xi, \eta) \quad (3.22)$$

E  $w_i$  e  $w_j$  são os pesos da ponderação,  $f(\xi, \eta)$  é a função a ser integrada e  $(\xi, \eta)$  são as coordenadas dos pontos de integração. Para os casos dos elementos quadrilaterais com aproximação quadrática, podem-se usar dois pontos de Gauss em cada direção, cujos pesos e coordenadas são dadas na tabela 3.1.

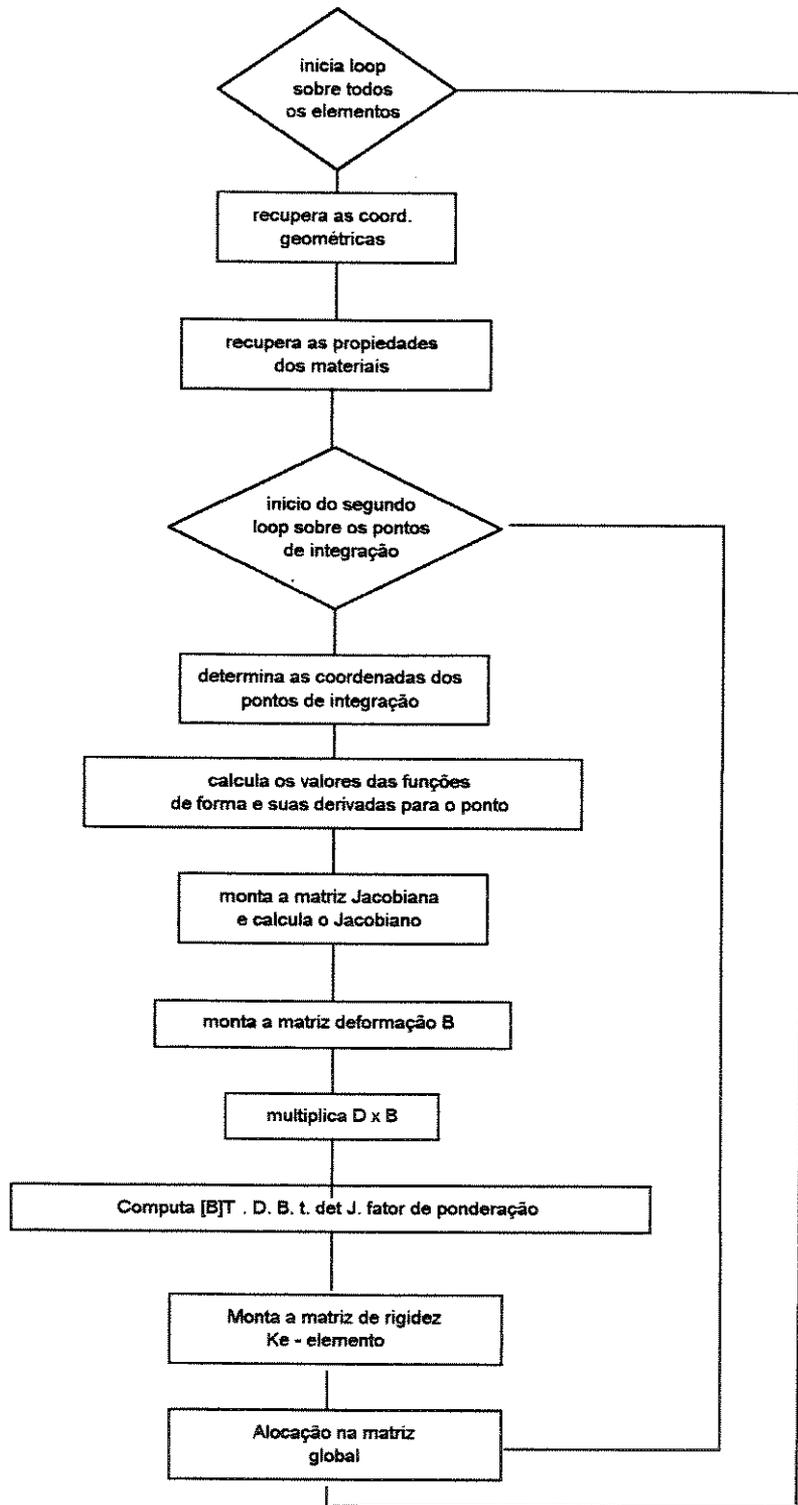


Figura 3.8 - Montagem do elemento.

Ponto	Coordenadas	Pesos
1	$\xi = -0.5773500269189626$ $\eta = -0.5773500269189626$	$w_i=1$ $w_j=1$
2	$\xi = +0.5773500269189626$ $\eta = -0.5773500269189626$	$w_i=1$ $w_j=1$
3	$\xi = +0.5773500269189626$ $\eta = +0.5773500269189626$	$w_i=1$ $w_j=1$
4	$\xi = -0.5773500269189626$ $\eta = +0.5773500269189626$	$w_i=1$ $w_j=1$

Tabela 3.1 - Pontos de integração de Gauss e pesos de ponderação

Para o elemento triangular de seis nós utiliza-se a regra de integração de três pontos, que pode ser representada da seguinte forma:

$$I_3 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w_i f(\xi, \eta) \quad (3.23)$$

E  $w_i$  é o peso de ponderação e  $(\xi, \eta)$  são as coordenadas dos pontos de integração

Ponto	Coordenadas	Pesos
1	$\xi = 1/6$ $\eta = 1/6$	$w_i=1$
2	$\xi = 2/3$ $\eta = 1/6$	$w_i=1$
3	$\xi = 1/6$ $\eta = 2/3$	$w_i=1$

Tabela 3.2 - Pontos de integração para regra de três pontos e peso de ponderação

Em função do suporte geométrico definido na figura 3.7 b, adotam-se as seguintes funções de forma para o elemento quadrilateral de oito nós:

$$N_1(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta) \quad (3.24)$$

$$N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta) \quad (3.25)$$

$$N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)(\xi - \eta - 1) \quad (3.26)$$

$$N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 - \eta^2) \quad (3.27)$$

$$N_5(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)(\xi + \eta - 1) \quad (3.28)$$

$$N_6(\xi, \eta) = -\frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta) \quad (3.29)$$

$$N_7(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)(-\xi + \eta - 1) \quad (3.30)$$

$$N_8(\xi, \eta) = -\frac{1}{2}(1 - \xi)(1 - \eta^2) \quad (3.31)$$

Para elemento triangular de seis nós, usando-se também o referencial isoparamétrico, têm-se as seguintes funções de forma:

$$L = 1 - \xi - \eta \quad (3.32)$$

$$N_1(\xi, \eta) = -L(1 - 2L) \quad (3.33)$$

$$N_2(\xi, \eta) = 4\xi L \quad (3.34)$$

$$N_3(\xi, \eta) = -\xi(1 - 2\xi) \quad (3.35)$$

$$N_4(\xi, \eta) = 4\xi\eta \quad (3.36)$$

$$N_5(\xi, \eta) = -\eta(1 - 2\eta) \quad (3.37)$$

$$N_6(\xi, \eta) = 4\eta L \quad (3.38)$$

Com relação à matriz Jacobiana, para uma geometria bidimensional, expressa-se por:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

E  $n$  é o número de nós do elemento e a inversa da matriz Jacobiana é dada por:

$$[J]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

### 3.4 - Recuperação das tensões nodais

Geralmente as tensões são calculadas nos pontos de integração do elemento, porém torna-se necessário conhecer os valores para os nós a partir dos valores de tensões conhecidos nos pontos de integração [26 e 27].

Considera-se uma tensão típica  $\sigma(\xi)$  que varia parabolicamente em uma dimensão para  $\xi$ , de -1 a +1, e que passa pelos pontos de integração de Gauss ( $-\frac{1}{\sqrt{3}}$  e  $+\frac{1}{\sqrt{3}}$ ). Para se obterem os valores das tensões para os pontos inicial e final (-1 e +1), adota-se uma nova tensão ajustada, representada por  $\sigma^*$ , que varia de forma linear, obtida por:

$$\sigma^*(\xi) = A_1 + A_2 \xi \quad (3.41)$$

ou

$$\{\sigma(\xi)^*\} = [1, \xi] \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = [P][A] \quad (3.42)$$

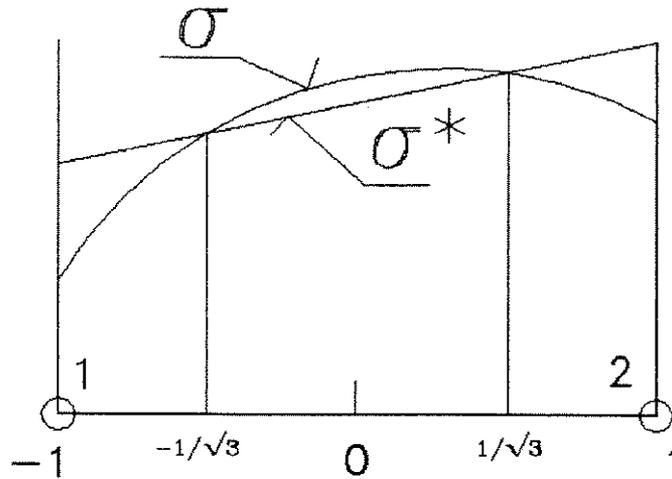


Figura 3.9 - Representação da interpolação de uma função típica de tensão

Sabendo-se que nos dois pontos de Gauss, ao longo do espaço de referência do elemento unidimensional, a tensão típica é igual ao valor da tensão ajustada, ou seja:

$$\{\sigma^*(\xi)\} = \{\sigma(\xi)\} \quad (3.43)$$

temos então:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_I \\ \sigma_{II} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ \sigma\left(+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \end{Bmatrix} = [P][A] = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 & +\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} \quad (3.44)$$

onde  $\sigma_{II}$  e  $\sigma_I$  são as tensões típicas para os pontos de Gauss. Portanto interessa-nos saber quais valores de  $[A]$  satisfazem a condição de igualdade da equação (3.44), e interpolarmos para os pontos (-1 e +1). Então:

$$[A] = [P]^{-1}\{\sigma\} \quad (3.45)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{(-1)} \\ \sigma_{(+1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_I \\ \sigma_{II} \end{Bmatrix} \quad (3.46)$$

ou

$$\{\sigma_{n\acute{o}s}\} = [A]\{\sigma_{pontos}\} = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} & \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} & \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \{\sigma_{pontos}\} \quad (3.47)$$

O mesmo procedimento é repetido para problemas bidimensionais, quando a tensão ajustada varia bilinearmente sobre o elemento de refer\encia:

$$\{\sigma^*(\xi)\} = [1, \xi, \eta, \xi\eta] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \quad (3.48)$$

O que resultará em uma matriz A, para elemento quadrilateral de oito n\os, com integra\c3o pelo m\etodo da quadratura de Gauss 2x2:

$$[A] = \begin{bmatrix} a & b & c & b \\ b & a & b & c \\ c & b & a & b \\ b & c & b & a \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

onde  $a = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $b = -\frac{1}{2}$  e  $c = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

Todavia os valores obtidos s\ao para os n\os dos v\ertices do elemento, o que significa que os valores do n\o do meio da aresta, s\ao obtidos atrav\es da m\edia entre os valores encontrados nos dois v\ertices.

Para o elemento triangular de seis n\os, considerando-se a regra de integra\c3o de tr\es pontos, a matriz [A] \e dada por:

$$[A] = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

onde  $a = 1,66666666667$  e  $b = -0,333333333333$

### 3.5 - Elementos finitos isoparamétricos aplicados à mecânica da fratura.

Ao formular-se um elemento baseado em deslocamento, para representar o comportamento de uma estrutura que possua uma trinca, tem-se que representar de alguma forma a singularidade do tipo  $r^{\frac{1}{2}}$  que aparece na ponta da trinca. Neste trabalho avaliam-se duas técnicas que procuram simular a singularidade a partir de um elemento isoparamétrico padrão.

A primeira técnica, proposta por Henshell e Shaw [24] e ao mesmo tempo por Barsoum [3], consiste no deslocamento do nó da posição central para posição de um quarto da aresta do elemento (fig 3.11). Este elemento foi chamado por Barsoum como “quarter point element”.

A segunda técnica estudada é a proposta por Akin [2], que simula a singularidade através da correção das funções de forma.

#### 3.5.1 - Elemento do tipo “quarter point”

Neste elemento, desloca-se o nó central das laterais para a posição  $\frac{1}{4}$  da origem, aproximando-o do nó que determina a ponta da trinca e mantendo as mesmas funções de forma. Com isto, cria-se a singularidade, onde o Jacobiano do nó que representa a ponta da trinca assume o valor zero.

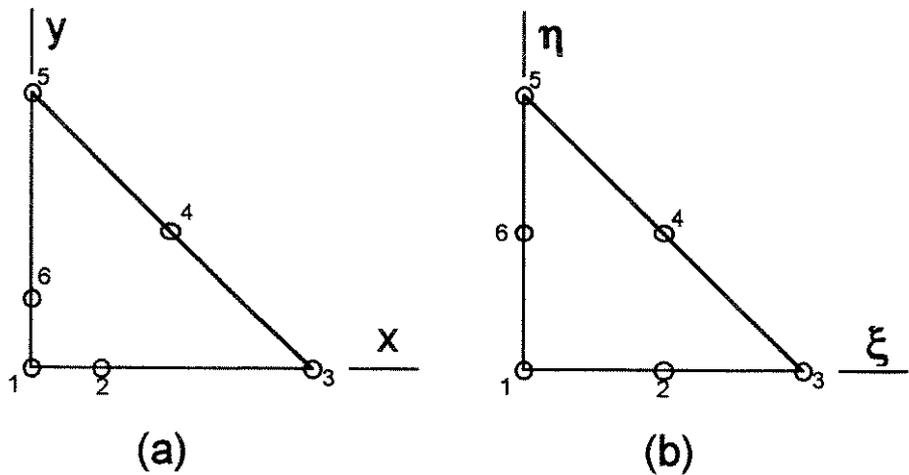


Figura 3.10 - (a) elemento espaço geométrico e (b) espaço de referência.

Isto pode ser demonstrado, observando-se um elemento unidirecional. Sabe-se que os deslocamentos são interpolados no espaço de referência por

$$u = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi) u_i \quad (3.51)$$

cujas funções de forma são

$$N_1(\xi) = -\frac{1}{2}\xi(1-\xi) \quad (3.52)$$

$$N_2(\xi) = (1-\xi^2) \quad (3.53)$$

$$N_3(\xi) = \frac{1}{2}\xi(1+\xi) \quad (3.54)$$

Tem-se para o espaço geométrico a seguinte transformação:

$$x = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi, \eta) x_i \quad (3.55)$$

Ou seja:

$$x = -\frac{1}{2}\xi(1-\xi)x_1 + (1-\xi^2)x_2 + \frac{1}{2}\xi(1+\xi)x_3 \quad (3.56)$$

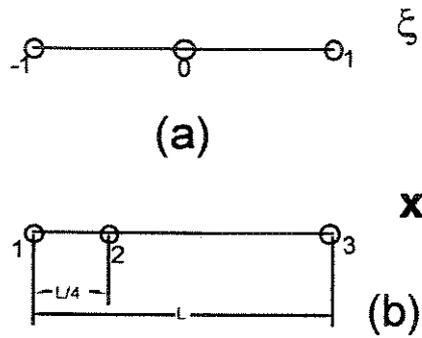


Figura 3.11 - Elemento unidirecional: (a) espaço de referência (b) espaço geométrico

Escolhendo  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = L/4$  e  $x_3 = L$ , ou seja, deslocando o nó central (nó 2), para a posição  $L/4$ , tem-se a seguinte representação do ponto no espaço isoparamétrico:

$$x = \frac{1}{2} \xi (1 + \xi) L + (1 - \xi^2) \frac{L}{4} \quad (3.57)$$

Resolvendo a equação (3.57), obtém-se a seguinte expressão para a coordenada  $\xi$ , correspondente ao nó 2;

$$\xi = -1 + 2\sqrt{\frac{x}{L}} \quad (3.58)$$

No caso unidirecional, o Jacobiano da transformação geométrica, considerando  $\xi$  dado pela equação 3.58, tem-se:

$$J = \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{L}{2} (1 + \xi) = \sqrt{\frac{x}{L}} \quad (3.59)$$

O que torna o Jacobiano nulo em  $x=0$  e correspondente a  $\xi = -1$ , que é o nó a ser situado na ponta da trinca.

Sabendo-se que a deformação é dada por

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = J^{-1} \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \xi} \quad (3.60)$$

O nó  $x_1$  iguala-se a zero ocorrendo a singularidade. Observa-se neste caso que a singularidade é do tipo  $x^{1/2}$ , coerente com a formulação básica da mecânica da fratura.

### 3.5.2 - Elemento degenerado de oito para seis nós

Barsoum [3] trabalha com elementos triangulares, gerados a partir de elementos quadrilaterais degenerados de oito para seis nós, com os nós do meio das arestas deslocados para  $1/4$  da origem.

Para obtenção do elemento degenerado, faz-se indispensável alterar algumas etapas na elaboração do elemento quadrilateral de oito nós padrão. Sabe-se que suas funções deslocamentos são dadas pelas equações 3.5 e 3.6, e são escritas da seguinte maneira:

$$u = N_1u_1 + N_2u_2 + N_3u_3 + N_4u_4 + N_5u_5 + N_6u_6 + N_7u_7 + N_8u_8 \quad (3.61)$$

$$v = N_1v_1 + N_2v_2 + N_3v_3 + N_4v_4 + N_5v_5 + N_6v_6 + N_7v_7 + N_8v_8 \quad (3.62)$$

Agrupando-se os nós 1,7 e 8 da figura 3.5 b, para transformar o elemento quadrilateral em elemento triangular, necessita-se efetuar, para as equações acima a seguinte transformação:

$$N_1^*u_1 = N_1u_1 + N_7u_7 + N_8u_8 \quad (3.63)$$

$$N_1^*v_1 = N_1v_1 + N_7v_7 + N_8v_8 \quad (3.64)$$

e  $N_1^*u_1$  e  $N_1^*v_1$  são os termos modificados para o nó 1.

Com relação às derivadas, temos:

$$\frac{\partial N_1^*}{\partial \xi} = \frac{\partial N_1}{\partial \xi} + \frac{\partial N_7}{\partial \xi} + \frac{\partial N_8}{\partial \xi} \quad (3.65)$$

$$\frac{\partial N_1^*}{\partial \eta} = \frac{\partial N_1}{\partial \eta} + \frac{\partial N_7}{\partial \eta} + \frac{\partial N_8}{\partial \eta} \quad (3.66)$$

e  $\frac{\partial N_1^*}{\partial \xi}$  e  $\frac{\partial N_1^*}{\partial \eta}$  são os termos modificados para o nó 1.

Para a recuperação das tensões nodais, a técnica é semelhante à usada no elemento padrão. Utilizam-se os valores de tensões dos pontos de integração e extrapolam-os para os nós, através da equação 3.47, onde a matriz A é dada por:

$$[A] = \begin{bmatrix} a & e & f & d \\ -b & b & e & -b \\ c & e & b & c \\ d & f & e & d \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

Os valores dos termos da matriz [A] são apresentados na tabela 3.3.

a = 0.683012702234
b = 1.8301270234
c = -0.183012702035
d = 0.683012702035
e = -0.5
f = 0.13397459668

Tabela 3.3 - Valores da matriz A

Para os nós intermediários das arestas, é efetuada uma média aritmética entre os nós dos vértices.

### 3.5.3 - Elemento singular através da correção das funções de forma

Este elemento singular foi proposto por Akin [2], basendo-se em um elemento isoparamétrico cujas funções de forma são modificadas para englobar a singularidade ocorrida para o nó que representa a ponta da trinca.

Resaltando que as funções de forma adotadas devem satisfazer à condição abaixo:

$$\sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) = 1 \quad (3.68)$$

E que para todo ponto de integração no elemento, diferenciando-se a expressão (3.68) com relação às coordenadas locais obtêm-se as seguintes condições:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi}(\xi, \eta) = 0 \quad (3.69)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta}(\xi, \eta) = 0 \quad (3.70)$$

Para converter um elemento convencional, satisfazendo as condições acima, em um elemento especial singular, deve-se definir uma função local  $M(\xi, \eta)$ , onde  $M=0$  para o nó 1, que representa a ponta da trinca, e  $M=1$  para os demais nós.

Cria-se uma função  $Q(\xi, \eta)$ , onde:

$$Q = M^{\frac{1}{2}} \quad (3.71)$$

$$M(\xi, \eta) = 1 - N_1(\xi, \eta) \quad (3.72)$$

Definindo-se novas funções de forma  $H_i$ , para o elemento singular, os deslocamentos podem ser escritos da seguinte forma:

$$u(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n H_i(\xi, \eta) u_i \quad (3.73)$$

onde para o nó 1 a função de forma é:

$$H_1(\xi, \eta) = 1 - \frac{M(\xi, \eta)}{Q(\xi, \eta)} \quad (3.74)$$

e para os demais nós de 2 até  $n$  (no caso 6 nós):

$$H_j(\xi, \eta) = \frac{N_j(\xi, \eta)}{Q(\xi, \eta)} \quad 2 \leq j \leq n \quad (3.75)$$

Esta transformação também satisfaz a condição de:

$$\sum_{i=1}^n H_i(\xi, \eta) = 1 \quad (3.76)$$

As funções de forma para um suporte geométrico triangular de seis nós são dadas pela divisão da função de forma pela função local  $Q$ , dada por:

$$Q = M(\xi, \eta)^{\frac{1}{2}} = (1 - N_1)^{\frac{1}{2}} \quad (3.77)$$

$$N_1 = -L(1 - 2L) \quad (3.78)$$

$$L = 1 - \xi - \eta \quad (3.79)$$

As novas funções de forma tornam-se:

$$H_1(\xi, \eta) = 1 - (1 - N_1) / Q \quad (3.80)$$

$$H_2(\xi, \eta) = 4\xi L / Q \quad (3.81)$$

$$H_3(\xi, \eta) = -\xi(1 - 2\xi) / Q \quad (3.82)$$

$$H_4(\xi, \eta) = 4\xi\eta / Q \quad (3.83)$$

$$H_5(\xi, \eta) = -\eta(1 - 2\eta) / Q \quad (3.84)$$

$$H_6(\xi, \eta) = 4\eta L / Q \quad (3.85)$$

As derivadas locais para o nó 1 podem ser escritas da seguinte maneira:

$$\frac{\partial H_1(\xi, \eta)}{\partial \xi} = (1 - p) \frac{\partial N_1(\xi, \eta)}{\partial \xi} M^{-p} \quad (3.86)$$

$$\frac{\partial H_1(\xi, \eta)}{\partial \eta} = (1 - p) \frac{\partial N_1(\xi, \eta)}{\partial \eta} M^{-p} \quad (3.87)$$

E para os demais nós de 2 até  $n$  (no caso 6 nós):

$$\frac{\partial H_j(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{\partial N_j(\xi, \eta)}{\partial \xi} M^{-p} + p \frac{\partial N_j}{\partial \xi} N_j M^{-(1+p)} \quad 2 \leq j \leq n \quad (3.88)$$

$$\frac{\partial H_j(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{\partial N_j(\xi, \eta)}{\partial \eta} M^{-p} + p \frac{\partial N_j}{\partial \eta} N_j M^{-(1+p)} \quad 2 \leq j \leq n \quad (3.89)$$

O método utilizado para integração numérica do elemento é a quadratura Gauss-Radau com nove pontos modificada [2]. Testes com outros métodos de integração apresentaram valores menos precisos na obtenção dos fatores de intensidade de tensão. A figura 3.12 ilustra as coordenadas dos pontos de integração no elemento de referência.

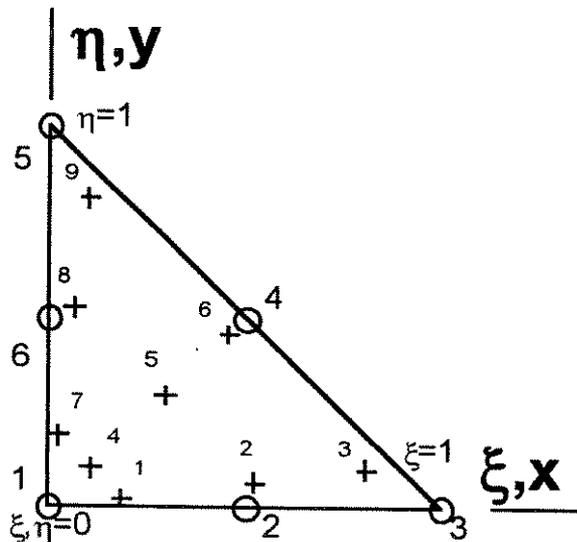


Figura 3.12 - Elemento singular triang. com seis nós

As coordenadas dos nove pontos de integração e fatores de ponderação são mostradas na tabela 3.4:

$i$	$\xi$	$\eta$	$w_i$		
1	$a_5$	$a_1$	$c_1$	$a_1 = 0.02393113229$	$c_1 = 0.019396383304$
2	$a_8$	$a_2$	$c_4$	$a_2 = 0.06655406786$	$c_2 = 0.031034213285$
3	$a_9$	$a_3$	$c_3$	$a_3 = 0.10271765483$	$c_3 = 0.055814420490$
4	$a_4$	$a_4$	$c_2$	$a_4 = 0.10617026910$	$c_4 = 0.063678085097$
5	$a_6$	$a_6$	$c_6$	$a_5 = 0.188409405913$	$c_5 = 0.089303072783$
6	$a_7$	$a_7$	$c_5$	$a_6 = 0.29526656780$	$c_6 = 0.101884936154$
7	$a_1$	$a_5$	$c_1$	$a_7 = 0.45570602025$	
8	$a_2$	$a_8$	$c_4$	$a_8 = 0.52397906774$	
9	$a_3$	$a_9$	$c_3$	$a_9 = 0.80869438567$	

Tabela 3.4 - Parâmetros de integração Gauss- Radau modificado.

Para a recuperação das tensões nodais, a técnica é semelhante à aplicada no elemento padrão. São utilizados os valores de tensões dos pontos de integração extrapolando-os para os nós, usando-se para isso, uma expressão dada na equação 3.90.

$$\{\sigma_{n\acute{o}s}\} = [A]\{\sigma_{pontos}\} \quad (3.90)$$

Para elemento triangular de seis nós, com integração pelo método da quadratura de Gauss-Radau especial com 9 pontos, a matriz  $[A]$  é dada pela equação 3.91.

$$[A] = \begin{bmatrix} a & b & b \\ c & d & e \\ c & e & d \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

Os valores do termos da matriz  $[A]$  são apresentados na tabela 3.5.

a = 1.30374652307
b = -0.151873261534
c = -0.12672231554
d = 1.27159979817
e = -0.144877482623

Tabela 3.5 - Valores da matriz A

Para o nó intermediário das arestas, é efetuada uma média aritmética entre os nós dos vértices.

### 3.6 - Implementação numérica do cálculo dos fatores de intensidade de tensão

Em trabalho recente, Bittencourt 1993 [9] compara três métodos usuais para cálculo dos fatores de intensidade de tensão: o método da correlação de deslocamento, o método da integral J e o método da Integral de fechamento de trinca modificada. Os resultados mostraram que não há diferença significativa entre os métodos, na avaliação dos fatores de intensidade de tensão em problemas de elasticidade linear. Assim sendo, um dos métodos utilizados neste trabalho é o método da correlação de deslocamentos, obtido de forma direta, e o outro é o método da taxa de liberação de energia, através do crescimento real da trinca.

### 3.6.1 - Método da correlação de deslocamentos

O método da correlação de deslocamentos, como apresentado no item 2.2.1.1, consiste na implementação das equações 2.44 e 2.45, para determinação dos fatores de intensidade de tensão  $K_I$  e  $K_{II}$  diretamente dos deslocamentos obtidos após uma execução do programa de elementos finitos (Shih [46]).

Determinando-se os valores dessas equações para  $\theta=180^\circ$ , os valores de  $K$  podem ser obtidos para trinca não simétrica em modo I:

$$v = (\kappa + 1) \frac{K_I}{2g_c} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \quad (3.92)$$

$$K_I = \sqrt{2\pi} \frac{2g_c}{1 + \kappa} \frac{|\Delta v|}{\sqrt{r}} \quad (3.93)$$

E  $\Delta v$  é a média dos deslocamentos dos nós (J-L) e (K-M), porém os valores de deslocamentos são conhecidos somente nestes nós (figura 2.3) Estabelecendo-se uma equação de reta a partir dos valores nos pontos conhecidos, pode-se calcular o coeficiente  $b$  da reta estipulada

$$\frac{|\Delta v|}{\sqrt{r}} = c + b.r \Rightarrow \lim_{r \rightarrow 0} \frac{|\Delta v|}{\sqrt{r}} = c \quad (3.94)$$

Determina-se o valor de  $c$  para o nó I, e obtem-se, assim, o fator de intensidade de tensão para a ponta da trinca:

$$K_I = \sqrt{2\pi} \frac{2g_c}{1 + \kappa} c \quad (3.95)$$

Em solicitação mista, a trinca pode encontrar-se inclinada com relação ao plano e desloca-se da posição na qual se encontra inicialmente antes do carregamento, para isto, deve-se calcular a média dos deslocamentos obtidos na abertura da trinca:

$$u_m = \frac{(u_J - u_L)}{2} \quad (3.96)$$

$$v_m = \frac{(v_J - v_L)}{2} \quad (3.97)$$

$$u = v_m \cos\theta - u_m \sin\theta \quad (3.98)$$

$$v = v_m \sin\theta + u_m \cos\theta \quad (3.99)$$

Desta forma, os valores de K podem ser obtidos em uma trinca, em modo misto, em  $\theta = 180^\circ$ , por

$$K_I = \frac{2g_c}{1+\kappa} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} v \quad (3.100)$$

$$K_{II} = \frac{2g_c}{1+\kappa} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} u \quad (3.101)$$

Este método foi implementado e os resultados obtidos são apresentados no capítulo 4.

### 3.6.2 - Método da taxa de liberação de energia

Sabendo-se que a taxa de liberação de energia é dada por

$$G = -\frac{\partial U}{\partial a} = -\frac{U_{a+\Delta a} - U_a}{\Delta a} \quad (3.102)$$

pode-se obter o fator de intensidade de tensão através da taxa de liberação de energia, utilizando-se o método da extensão de trinca real conforme mostrado na figura 3.13 [59].

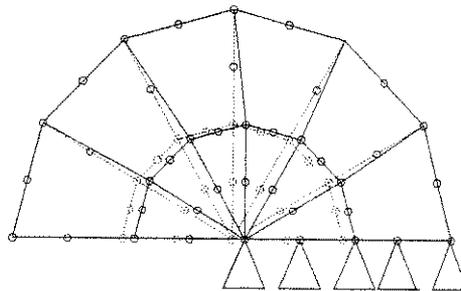


Figura 3.13 - Deslocamento dos nós da região da ponta da trinca para cálculo de G.

Sabe-se que a densidade de energia de deformação para os elementos de um modelo pode ser obtida através da equação 3.103.

$$U^e = \frac{1}{2} \{\delta\}^T [K^e] \{\delta\} \quad (3.103)$$

A energia de deformação  $U$  total do modelo é obtida com a somatória das energias  $U^e$  de cada elemento.

A aplicação deste método implica em dois cálculos dos valores de energia de deformação: um para o modelo inicial e outro para o modelo com o nó deslocado ( $\Delta a$ ), que representa o crescimento da trinca, conforme mostrado na figura 3.13.

Conhecendo-se a energia liberada para a propagação da trinca, podem-se determinar os fatores de intensidade de tensão através das equações abaixo, de acordo com os casos analisados:

Para estado plano de tensão em modo I:

$$G_I = \frac{K_I^2}{E} \quad (3.104)$$

Para estado plano de deformação:

$$G_I = \frac{(1-\mu^2)}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (3.105)$$

O emprego do método de deslocamento real da trinca para obtenção de  $K$  em modo misto é inviável, devido ao fato da taxa de liberação de energia obtida com o método, ser a total do sistema, não se conhecendo as parcelas atribuída a cada modo.

## 4 - IMPLEMENTAÇÃO EM COMPUTADOR E RESULTADOS OBTIDOS

Neste capítulo, descreve-se a estrutura do programa de computador empregado na avaliação numérica de problemas de mecânica da fratura linear elástica e sua interação com o programa Ansys versão 5.0, utilizado para a geração automática da malha durante a propagação da trinca.

Avaliam-se problemas de mecânica da fratura em modo I e misto, alternando-se os tipos de elementos e métodos de cálculo do fator de intensidade de tensão, e simula-se a propagação de trinca em exercícios teóricos, comparando-os com resultados experimentais.

### 4.1 - Implementação em computador

As etapas para implementação em computador seguem as figuras 3.1 e 3.2 do capítulo três, e estão divididas em três grandes blocos: pré-processamento, processamento e pós-processamento. Cada bloco possui uma estrutura de programas modulares que trabalham individualmente, e cujos resultados são escritos em disco, facilitando com isto o teste de diversos métodos de cálculos ou tipos de elementos. Sua estrutura modular é descrita pelo diagrama contido na figura 4.1, onde cada programa tem a seguinte função:

**ELEMEF** - Leitura dos dados através de uma carta contendo os blocos de comandos, tais como:

**SYSTEM**- Determina o tipo de análise a ser efetuada (estática ou outras).

**JOINTS** - Determina as coordenadas X,Y e Z para os nós.

**SOLID-2D** - Leitura das propriedades dos materiais e dos elementos.

**SOLD2D-ANS** - Leitura das propriedades dos materiais e dos elementos gerados através do programa ANSYS (comandos NWRITE e EWRITE).

RESTRAINTS - Aplica as restrições aos nós.

LOADS - Aplica forças aos nós.

**GRAPH** - Gera arquivo em DXF, podendo ser lido através de programas gráficos (tais como Autocad), o que permite a visualização da posição dos nós e a ligação dos elementos na estrutura, facilitando a correção de possíveis erros.

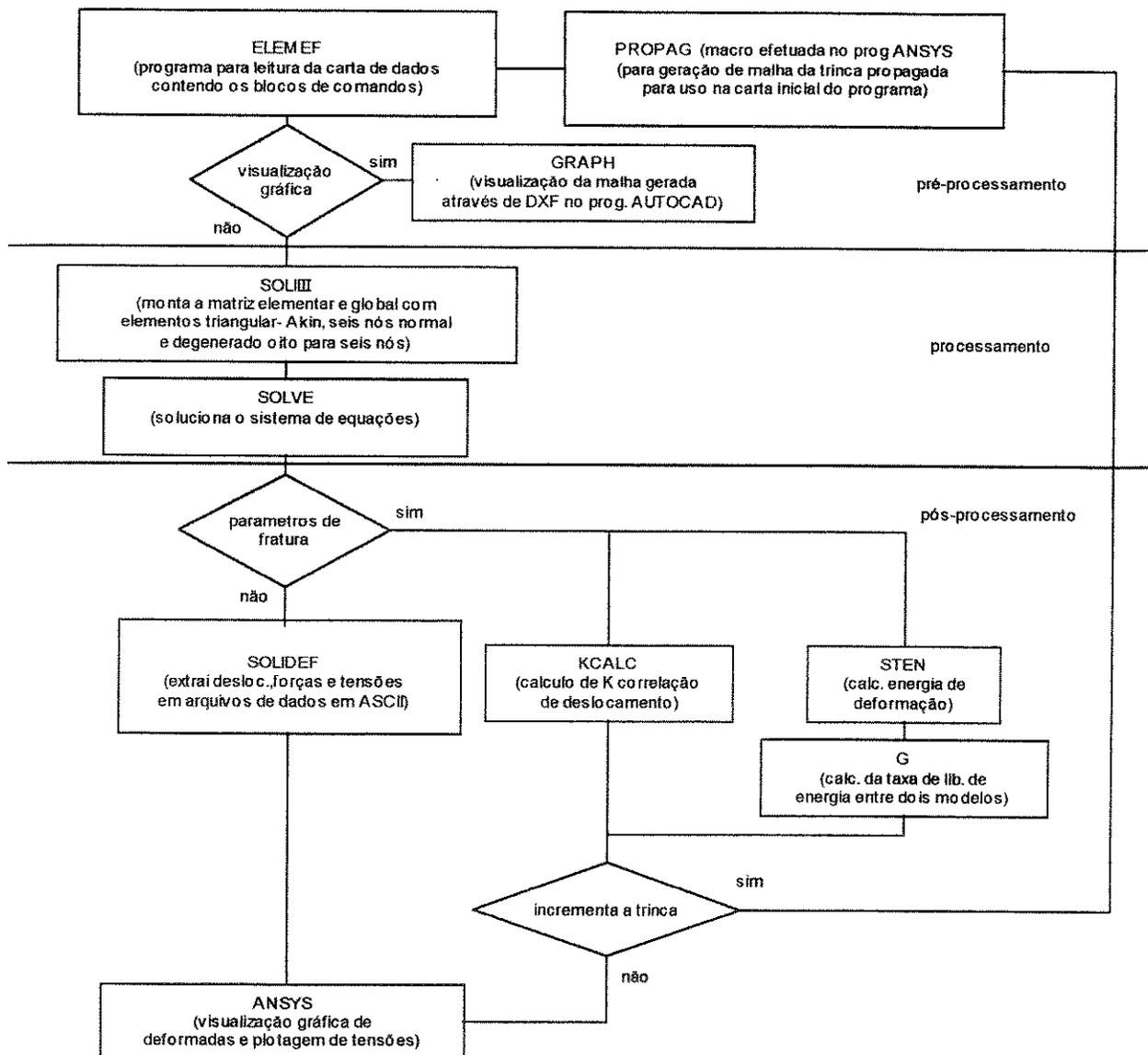


Figura 4.1 - Diagrama de utilização do programa

**SOLID** - Gera a matriz de rigidez do elemento (quadrilateral de oito nós, triangular degenerado, triangular de seis nós padrão, triangular seis nós Akin) para análise elástica plana de tensão e monta a matriz global do sistema.

**SOLVE** - Soluciona o sistema de equação (utilizando método de Gauss ou Cholesky).

**SOLIDEF** - Gera um arquivo ASCII para impressão, o qual contém, dados da estrutura, deslocamento nodal, forças nodais, tensões nos pontos de integração e tensões interpoladas para os nós.

**KCALC** - Calcula o fator de intensidade de tensão em modo I , II e misto, utilizando o método da correlação de deslocamentos.

**STEN** - Calcula a energia de deformação sofrida pela estrutura após deformação.

**G** - Calcula o fator de intensidade de tensão em modo I, através da diferença entre as energias de deformação geradas em dois modelos distintos, sobre a variação do deslocamento da trinca.

**INTERFACE COM PROGRAMA ANSYS [53]** - Duas formas de interação com o programa foram utilizadas:

1) A primeira durante a fase de pré-processamento: O programa PROPAG (anexo A) efetuado em linguagem paramétrica, efetua a geração automática da malha em função do incremento e direção da trinca, simulando o caminho percorrido pela trinca, escrevendo em um arquivo ASCII, os dados dos nós e elementos através dos comandos NWRITE e EWRITE, para ser lido pelo programa em questão.

A fase de pós-processamento: Para a visualização da estrutura deformada ou dos valores nodais de tensão, utiliza-se um arquivo em ASCII, que contém as informações nodais, onde o comando DNSOL atribui os dados de tensão ou deslocamento para todos os nós, permitindo, dessa forma a visualização através do comando PLNSOL.

## **4.2 - Validação dos elementos**

Para certificar que o programa elaborado é confiável, foi efetuada sua validação, comparando-se numericamente suas respostas com as do programa ANSYS.

O problema avaliado, foi empregado somente na comparação numérica dos valores obtidos, para os seguintes elementos: o elemento quadrilateral de oito nós com sistema de integração 2x2 e o elemento triangular de seis nós com três pontos de integração..

Esses elementos possuem características semelhantes às do programa comercial e são passíveis, portanto, de comparação, mostrando correspondência nos resultados numéricos.

Para validação dos elementos utilizados na determinação dos parâmetros de fratura, efetua-se a comparação entre os resultados numéricos e os resultados de equações analíticas aplicadas na avaliação de problemas de mecânica da fratura linear elástica bidimensional, em modo I e misto.

## **4.3 - Cálculos dos parâmetros de fratura**

Efetua-se o estudo do comportamento numérico, variando-se o tipo de elemento e o método de cálculo dos fatores de intensidade de tensão sob modo I e misto, ao mesmo tempo que se direciona a escolha dos métodos que melhor se adaptem para simulação do caminho percorrido pela trinca durante o processo de fratura.

#### 4.3.1 - Obtenção dos fatores de intensidade de tensão em modo I

Para verificação em modo I foram testados os seguintes elementos:

##### Triangulares

- 1) Triangular isoparamétricos com 6 nós
- 2) Quadrilateral isopar. 8 degenerado em 6
- 3) Triangular **quarter point** - 6 nós
- 4) Quadrilateral **quarter point** - degenerado 8 em 6 nós
- 5) Elemento triangular proposto por **Akin**.

##### Quadrilaterais

- 1) Quadrilateral isoparamétrico - 8 nós
- 2) Quadrilateral isoparamétrico 8 nós **quarter point**

Utilizando-se, para isso os seguintes métodos de cálculo na determinação dos fatores de intensidade de tensão:

Método da correlação de deslocamentos

Método da taxa de liberação de energia

Outra consideração que deve ser observada durante o cálculo de fatores de intensidade de tensão, refere-se à malha empregada. Para tanto, efetua-se um breve estudo da interferência da malha, refinando-a somente na região da ponta da trinca.

Para obtenção do fator de intensidade de tensão em modo I de fratura, utiliza-se um exercício que consiste em uma placa de material hipotético ( $E=0.6e11$  ,  $\mu = 0.2$ ) com dimensões 0,4m x 0,4 m x 0,02m, submetida a uma solitação de tração  $\sigma_t = 1$  MPa, e que contem uma trinca de comprimento 0,0267m no centro conforme indicado na figura 4.2.

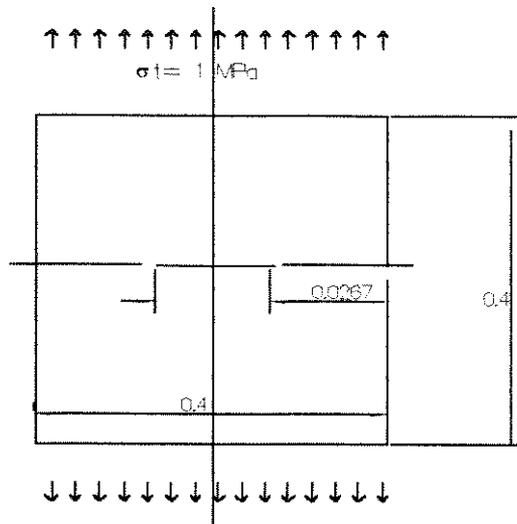


Figura 4.2 - Modelo de barra submetida a tração.

Observa-se que as dimensões da placa são significativamente maiores que o comprimento da trinca, e despreza-se qualquer correção para o fator de intensidade de tensão.

Neste caso, o fator de intensidade tensão teórico pode ser obtido pela equação 4.1 [34], ou seja  $K_I = 204663 \text{ MPa}\sqrt{m}$ .

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \quad (4.1)$$

Este problema foi modelado por elementos finitos, considerando-se a simetria geométrica e de carregamento existente na peça. Com isto, a geração da malha, para o modelo, é efetuada através de  $\frac{1}{4}$  da peça somente, como mostrado na figura 4.3.

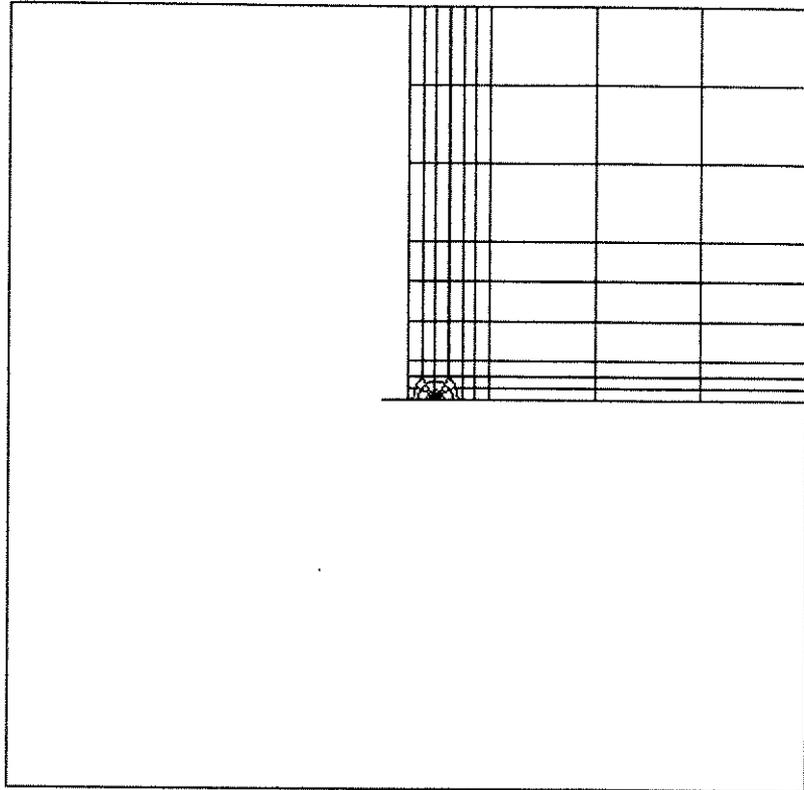


Figura 4.3 - Malha gerada próximo à trinca com elemento triangulares

Para o estudo do efeito do refinamento da malha com elementos triangulares, efetua-se o refinamento da região da ponta da trinca em três modelos. A Figura 4.4 representa o primeiro modelo, a figura 4.5, o segundo modelo refinado e a figura 4.6, o terceiro modelo mais refinado.

602 graus de liberdade

641 graus de liberdade

678 graus de liberdade

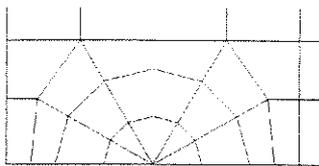


Figura 4.4 - Modelo 1

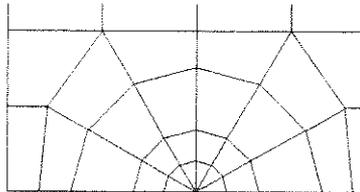


Figura 4.5 - Modelo 2 Primeiro refinamento da malha na ponta da trinca

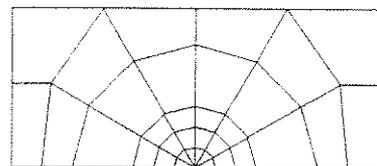


Figura 4.6 - Modelo 3 - Segundo refinamento da malha na ponta da trinca

**Método da correlação de deslocamentos:** Os resultados dos fatores de intensidade de tensão, obtidos mediante a utilização do método da correlação de deslocamentos, podem ser observados na tabela 4.1, e Foram calculados com os seguintes elementos:

Elemento normal triangular com 6 nós.

Elemento triangular degenerado com 6 nós.

Elemento triangular proposto por Akin.

Elemento triangular “quarter point” com 6 nós

Elemento degenerado “quarter point” com 6 nós.

Modelo		TRIANG NORMAL	DEGEN NORMAL	AKIN	QUARTER Point	
					TRIANG	DEGEN
1	erro	14.1 %	14.2 %	-2.7 %	-1.1 %	-0.7 %
2	erro	14.0 %	14.6 %	-2.3 %	-0.6 %	-0.96 %
3	erro	14.1 %	14.2 %	-2.14 %	-0.4 %	-0.86 %

Tabela 4.1 - Comparação dos resultados obtidos com elementos triangulares em modo I através do método da correlação de deslocamento.

Podemos observar que, quando aplicado o método da correlação de deslocamentos com elementos normais, os mesmos apresentam desvios elevados em relação às soluções analíticas, por isso recomenda-se o uso de elementos especiais.

**Método da taxa de liberação de energia:** Aplica-se um deslocamento de  $1,67 \times 10^{-4}$  m no eixo x para o nó situado na ponta da trinca e efetua-se o cálculo da taxa de liberação de energia através da diferença entre o modelo inicial e o modelo com o nó deslocado, na obtenção do fator de intensidade de tensão. Este método utiliza elementos normais para obtenção dos fatores de intensidade de tensão e os resultados são apresentados na tabela 4.2.

Modelo		TRIANG	DEGEN
1	erro	1.7 %	0,9 %
2	erro	-0.4 %	-0.8 %
3	erro	1.78 %	0.52 %

Tabela 4.2 - Comparação dos resultados obtidos com elementos triangulares em modo I, através do método da taxa de liberação de energia - G

A figura 4.7, compara os métodos utilizados em função da variação da malha, mostrando os erros obtidos em cada caso. Observando-se o gráfico, percebe-se que, para os elementos avaliados pelo método da taxa de liberação de energia, o efeito do refinamento da malha não conduz a uma tendência de diminuição do valor do erro obtido, ao contrário dos elementos avaliados pelo método da correlação de deslocamentos, nos quais o efeito do refinamento apresenta tendência de valores menores de erro.

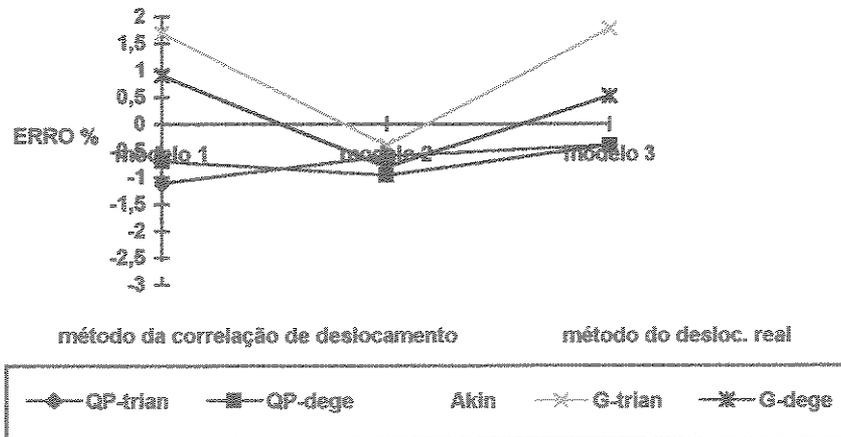


Figura 4.7 - Variação do erro em função da malha adotada.

Para os elementos quadrilaterais foram utilizadas as mesmas condições anteriores, porém gerando-se a malha com elementos quadrilaterais, cujo o modelo avaliado pode ser visto na figura 4.10.

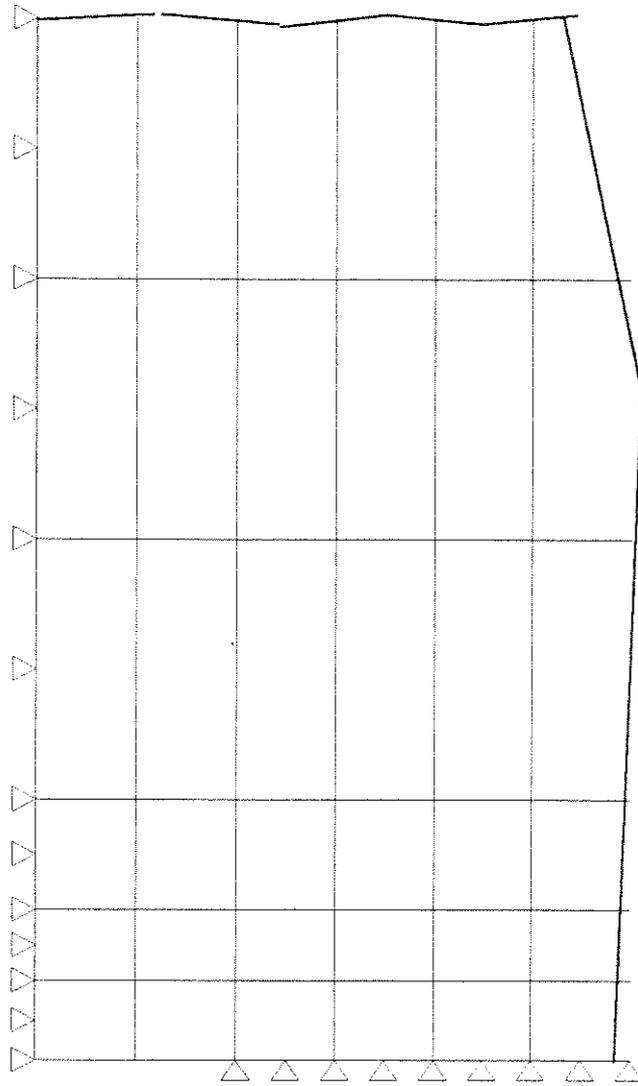


Figura 4.8 - Elemento quadrilateral de oito nós.

Neste caso, são testados apenas dois casos de refinamento de malha. O primeiro com 527 graus de liberdade (figura 4.8) e o segundo com 552 graus de liberdade (figura 4.9). E o refinamento foi realizado somente na região próxima à ponta da trinca.

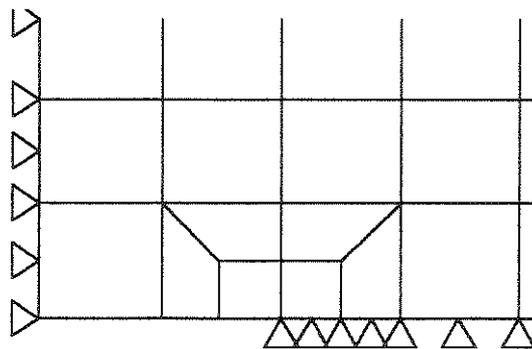


Figura 4.9 - Refinamento da malha para o elemento quadrado (modelo 2).

**Método da correlação de deslocamentos:** Os resultados dos fatores de intensidade de tensão, que foram obtidos através da utilização do método da correlação de deslocamento, podem ser observados na tabela 4.3 e foram calculados, com elemento quadrilateral de 8 nós normal e do tipo “quarter point”.

modelo		quadr normal	quadr- QP
1	erro	14.5 %	-2,54 %
2	erro	14.7 %	-2,47 %

Tabela 4.3- Resultados obtidos com elem. quadrilateral 8 nós em modo I através do método da correlação de deslocamento.

Verifica-se que repete, o que ocorreu para o elemento triangular, quando se aplica o método da correlação de deslocamentos em elementos normais, os mesmos não apresentam precisão suficiente para serem considerados, necessitando-se, portanto, o emprego de elementos especiais.

**Método da taxa de liberação de energia:** Para obtenção do fator de intensidade de tensão, através do método da taxa de liberação de energia, adota-se o mesmo procedimento do caso anterior: aplica-se um único deslocamento de  $1,67 \times 10^{-4}$  m para cálculo da taxa de liberação de energia, e os resultados obtidos são mostrados na tabela 4.4.

modelo		quadr
1	erro	2,83 %
2	erro	2,0 %

Tabela 4.4 - Resultados obtidos com elem. quadrilateral 8 nós em modo I através do método da taxa de liberação de energia G.

Como já foi visto anteriormente, nota-se que o elemento quadrilateral normal, utilizando o método da correlação dos deslocamentos, não apresenta bons resultados para obtenção direta do fator de intensidade de tensão. Porém observa-se que o mesmo elemento, utilizando o método da taxa de liberação

de energia, conduz a resultados compatíveis com os obtidos pelos elementos dot tipo “quarter point”.

Percebe-se que o refinamento da malha tende a melhorar os resultados obtidos, porém, para a mesma precisão, o número de graus de liberdade seria semelhante ao utilizado pelos elementos triangulares. Por outro lado, a geração automática da malha com elementos quadrilaterais, torna-se complexa, sendo menos indicada para análise do caminho percorrido pela trinca.

**Avaliação dos elementos triangulares e quadrilaterais:** No caso de estudos de mecânica da fratura elástica linear, para determinar se a trinca irá ou não se propagar e se a avaliação será realizada somente em termos de verificação do fator de intensidade de tensão, ou seja  $K_I > K_{Ic}$ , constata-se que:

a) o método da taxa de liberação de energia, da maneira como foi empregado, ou seja, pelo crescimento real da trinca, através dos deslocamento dos nós que representam a ponta da trinca, constitui-se em uma forma rápida e precisa de se obter o valor do fator de intensidade de tensão.

b) o emprego de elementos quadrilaterais é útil no caso da geração da malha uniforme e rápida, não necessitando de nenhum algoritmo especial para modelar a ponta da trinca. E que os resultados obtidos, em conjunto, com o método da taxa de liberação de energia e o seu emprego como elementos do tipo “quarter point”, em conjunto com o método da correlação de deslocamento, conduzem neste caso a resultados satisfatórios.

c) com relação aos elementos triangulares, torna-se necessário o desenvolvimento de um algoritmo especial para sua geração automática, podendo-se utiliza-los em qualquer um dos métodos estudados para cálculo dos fatores de intensidade de tensão. Para o estudo do caminho percorrido pela trinca, este tipo de elemento parece ser o mais indicado, por sua facilidade, no uso pelos geradores de malha.

#### 4.3.1.1 - Distribuição das tensões

Como vimos anteriormente, em uma análise de mecânica da fratura, a verificação da estabilidade da trinca é realizada através da verificação do fator de intensidade de tensão  $K_I > K_c$  (para o modo I), ou seja, no caso de fratura elástica linear, os valores de tensões gerados na ponta da trinca não têm o mesmo interesse, como em casos de análise de fraturas não lineares, nas quais a verificação da ocorrência do fenômeno da plasticidade se dá através dos valores de tensões nas pontas da trinca.

Todavia, neste item, a fim de ilustrar o efeito de intensificação da tensão nesta região, apresenta-se, somente para o elemento triangular "quarter point", a visualização da distribuição da tensão principal S1 (tensão normal máxima), onde o campo de tensão ilustrado tem seu valor calculado nos pontos de integração do elemento e estrapolado para os nós.

Pode-se verificar, através da figura 4.10, que a maior parte da peça está submetida a uma tensão de 1 MPa, e somente na região da ponta da trinca, ocorre a elevação desse valor (figuras 4.11 e 4.12).

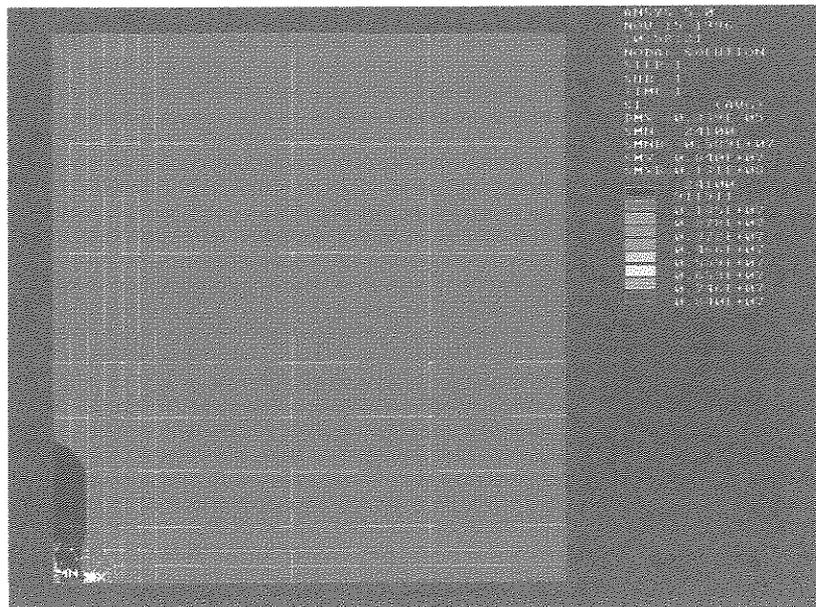


Figura 4.10 - Visualização do modelo total representado através de ¼ da estrutura.

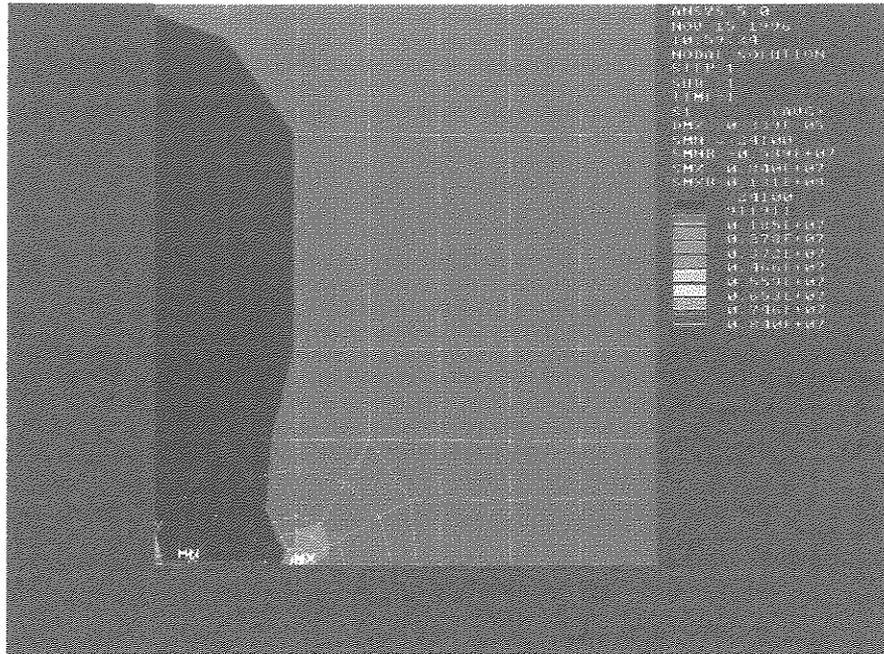


Figura 4.11 - Concentração da tensão na ponta da trinca com elemento triang. "quarter point".

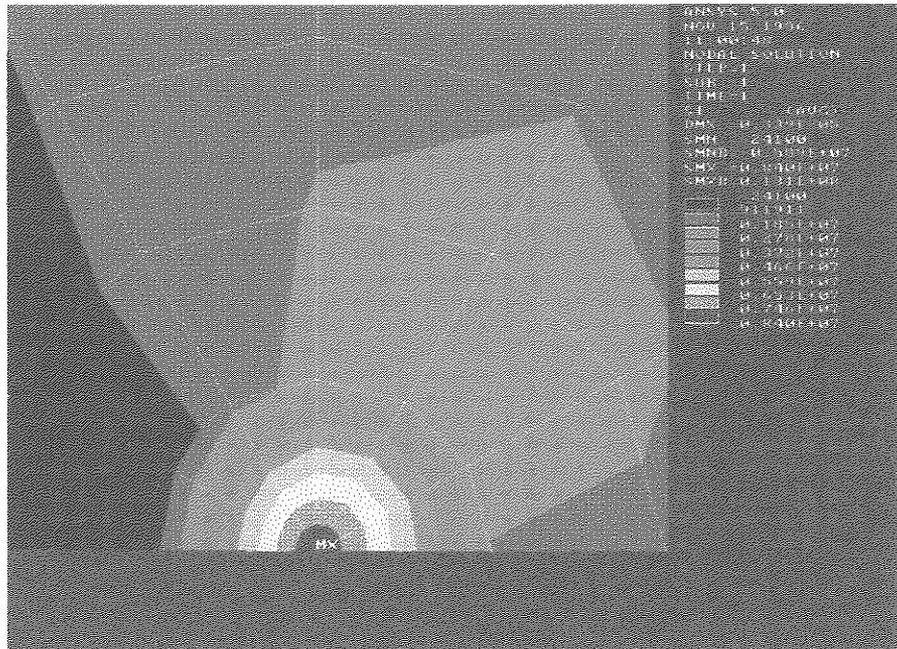


Figura 4.12 - Aproximação para a ponta da trinca (elemento triangular "quarter point").

#### 4.3.2 - Obtenção dos fatores de intensidade de tensão em modo misto

A partir dos resultados obtidos em modo I, decidiu-se prosseguir os cálculos dos fatores em modo misto para os seguintes elementos:

Elementos triangulares: Quarter point - triangular - 6 nós (triang-QP)

Quarter point - Degenerado (degen-QP)

Proposto por Akin (Akin)

E para obtenção do fator de intensidade de tensão aplicou-se o método da correlação de deslocamentos

Apesar do elemento triangular proposto por Akin não ter apresentado resultados tão bons quanto os elementos do tipo “quarter point”, no que se refere à determinação do fator de intensidade de tensão em modo I, optou-se por verificar seu comportamento em modo misto.

O exercício utilizado é semelhante ao anterior para modo I (definido na figura 4.2) com as mesmas condições de carregamento e geometria, porém com a trinca inclinada a  $30^\circ$  da linha horizontal, conforme figura 4.13.

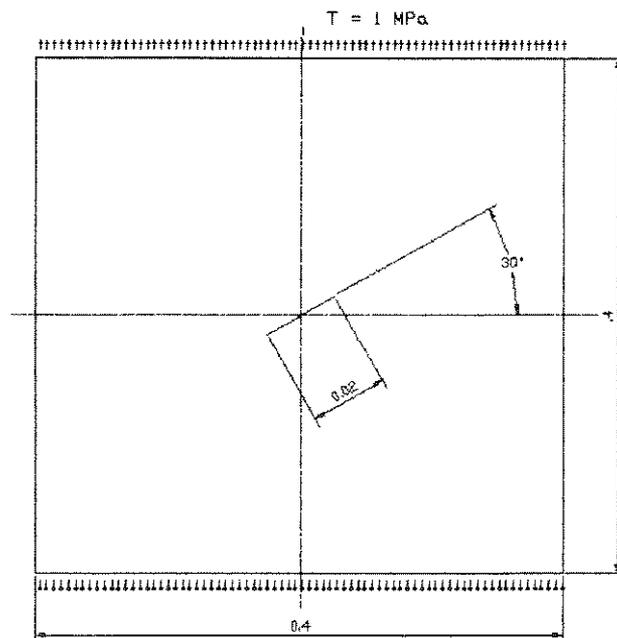


Figura 4.13 - Modelo para avaliação em modo misto.

O fator de intensidade de tensão teórico para o problema pode ser obtido através das equações 4.2 e 4.3 [34], ou seja,  $K_I = 132934 \text{ MPa}\sqrt{m}$  e  $K_{II} = 76749 \text{ MPa}\sqrt{m}$ .

$$K_I = \sigma \cos^2 \beta \sqrt{\pi a} \quad (4.2)$$

$$K_{II} = \sigma \sin \beta \cos \beta \sqrt{\pi a} \quad (4.3)$$

Para a geração do modelo neste caso, não foi possível a simplificação devido às condições de simetria, e o modelo adotado pode ser visto na figura 4.14.

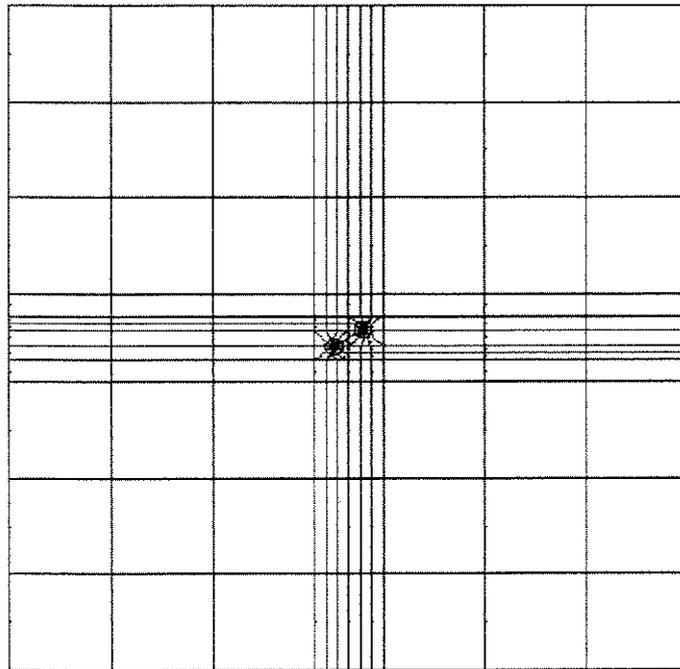


Figura 4.14 - Modelo adotado para modo misto.

A malha gerada na região das pontas da trinca é apresentada na figura 4.15, onde nota-se o refinamento adotado para a ponta da trinca.

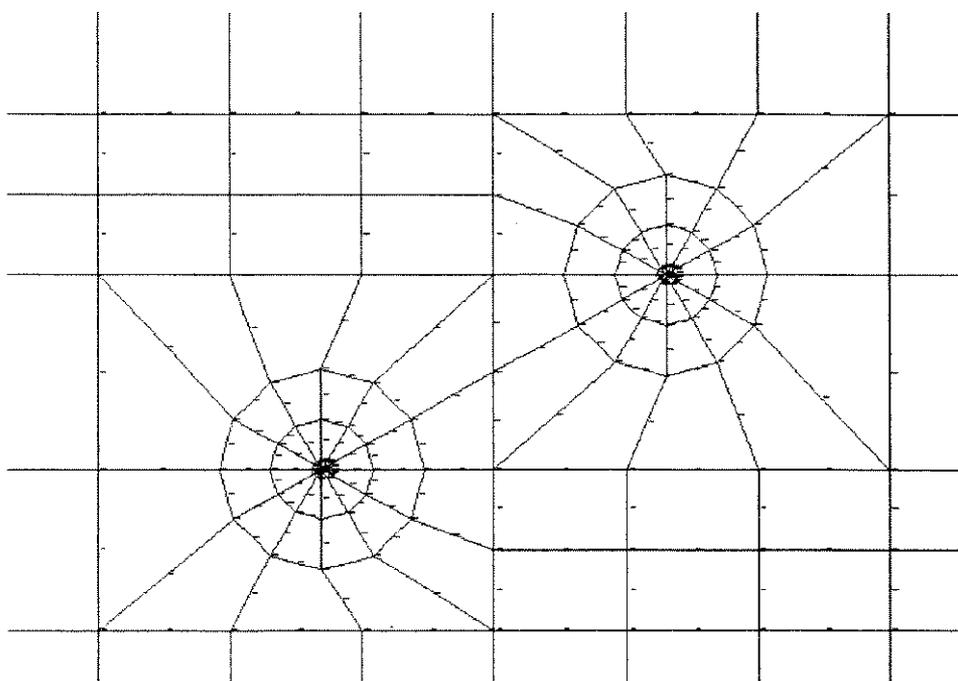


Figura 4.15 - Malha gerada na ponta da trinca.

Os valores obtidos para os fatores de intensidade de tensão através do método da correlação dos deslocamentos, são mostrados na tabela 4.5, e referem-se os três tipos de elementos analisados.

	<b>Akin</b>	<b>triang-QP</b>	<b>degen-QPr</b>
<b>erro</b>	1.78 %	1.90 %	1.68 %
<b>erro</b>	0.59 %	1.04 %	1.79 %

Tabela 4.5 - Resultados obtidos em modo misto com o método da correlação de deslocamento.

Percebe-se uma variação nos resultados obtidos entre os fatores para os modos I e modo II, constatando-se também que um elemento, que apresenta um resultado um pouco melhor para modo I, não necessariamente o apresentará para o modo II.

No item 4.3.1 para comportamento em modo I, o elemento proposto por Akin não apresentava bons resultados. Todavia, em modo misto, o mesmo apresentou resultados compatíveis com os elementos do tipo "quarter point", mostrando um bom desempenho no que se refere ao  $K_{II}$ .

Observando-se os resultados obtidos em modo I e modo misto, percebe-se que os três elementos conduzem a resultados satisfatórios, podendo assim ser empregados para simulação do caminho da trinca durante o processo de fratura.

Para simulação do caminho percorrido pela trinca, utiliza-se o elemento triangular do tipo “quarter point” degenerado de 8 nós para 6 nós.

#### 4.3.2.1 - Distribuição das tensões

No intuito de ilustrar o efeito da intensificação das tensões na região da trinca, apresenta-se a distribuição da tensão principal S1 (tensão normal máxima) obtida com o elemento quarter point degenerado, onde se percebe o campo de tensões circunferenciais ocorrido nas pontas das trincas. Verifica-se através das figuras 4.16 a 4.18 que a maior parte da peça esta submetida a uma tensão de 1 Mpa, que varia somente na região da ponta da trinca.

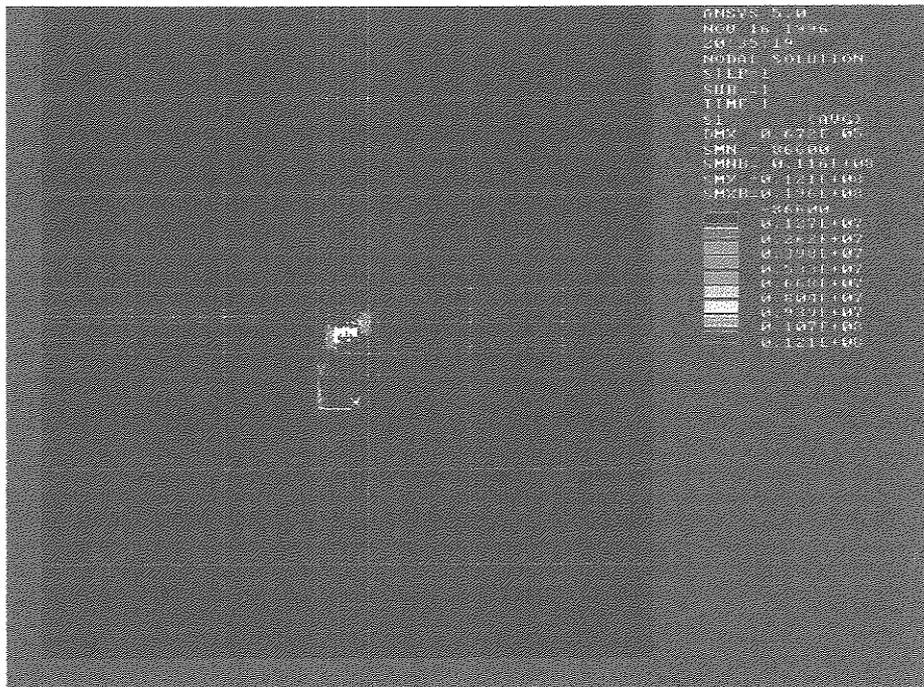


Figura 4.16 - Visualização do modelo total.

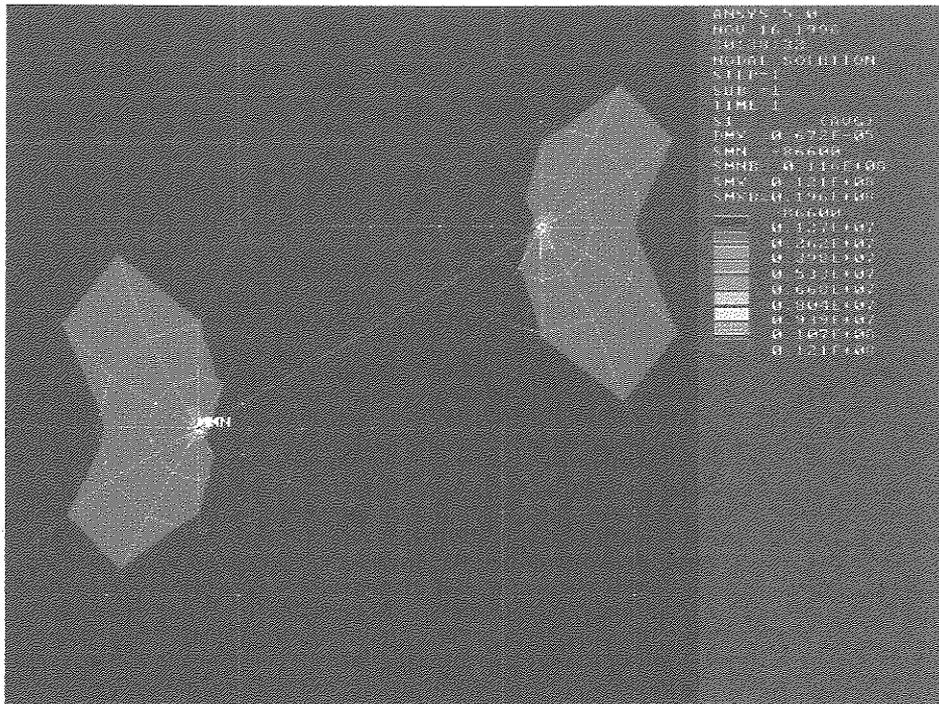


Figura 4.17 - Concentração da tensão nas pontas da trinca

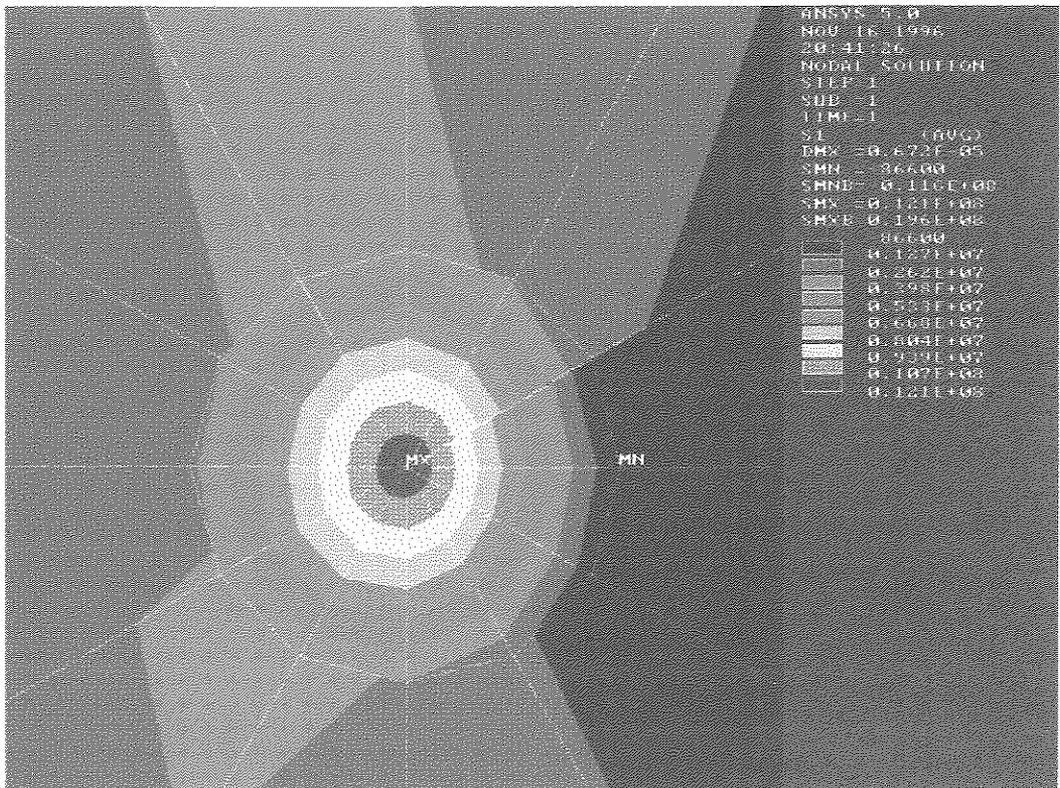


Figura 4.18 -Vista ampliada da concentração de tensão na ponta da trinca.

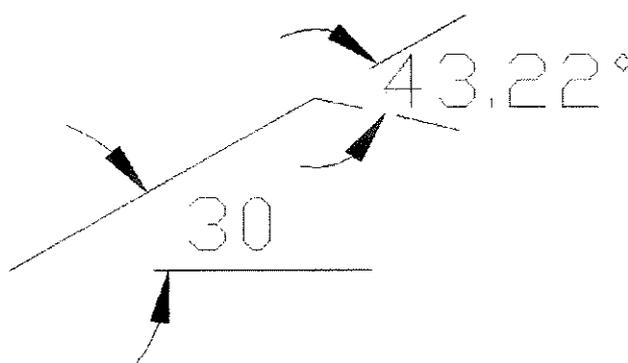
#### 4.4 - Análise da direção da trinca

Considerando o exemplo anterior de uma chapa com uma trinca inclinada a  $30^\circ$  ao centro (figura 4.13), pode-se determinar a direção angular de propagação da trinca, aplicando-se método da máxima tensão circunferencial (item 2.2.3.1).

Na tabela 4.6, são comparados os resultados teóricos da equação 2.62, com os valores gerados pelos elementos do exemplo anterior (Akin, Triang-QP e Degen-QP), quando aplicado o método da máxima tensão circunferencial

Angulo	teórico	Akin	Triang-QP	Degen-QP
$\theta$	$-43,22^\circ$	$-42,98^\circ$	$-43,02$	$-43,24$
erro %		$-0,56 \%$	$-0,46 \%$	$0,04 \%$

Tabela 4.6 - Direção da propagação.



Figuras 4.19 - Ilustração da direção teórica de crescimento.

Como pode ser observado através da tabela 4.16 o menor desvio é obtido com o elemento do tipo "quarter point", o que reforça a sua escolha na solução das aplicações apresentadas neste trabalho.

#### 4.5 - Simulação da trajetória da trinca

Para conhecer o caminho percorrido por uma trinca, quando submetida a um processo de fratura lenta, simula-se seu crescimento acrescentando um determinado incremento a partir de sua ponta, gera-se assim uma nova malha e calculam-se seus fatores de intensidade de tensão e sua conseqüente direção radial para cada incremento.

Para que este método se torne viável, é necessária a geração automática da malha no contorno da trinca em cada novo modelo; com este objetivo, elabora-se um programa em linguagem paramétrica em um programa comercial de elementos finitos (ANSYS) [53], conforme descrito no anexo A.

Para verificar a funcionabilidade do método, utiliza-se o exemplo anterior da placa submetida a modo misto de fratura, efetuando a verificação do caminho que a trinca percorreria no caso de ocorrer sua propagação. Quando uma trinca inclinada é submetida a um carregamento de tração, seu crescimento se dará conforme a figura 4.20 [48].

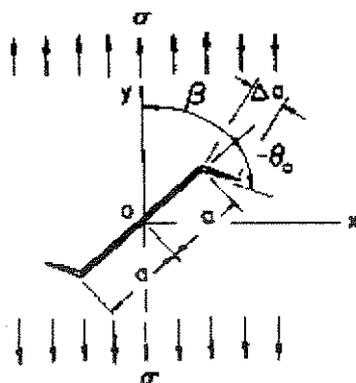


Figura 4.20 - Direção de propagação da trinca inclinada sob carregamento de tração

Na tabela 4.7 são apresentados os valores de  $K_I$  e  $K_{II}$ , bem como os ângulos de propagação  $\theta$  e  $\theta_{\text{acumulado}}$ , que são definidos em relação ao referencial global. Neste caso, usam-se os elementos triangulares degenerados de 8 para 6 nós e aplica-se o método da correlação de deslocamento para o cálculo dos fatores de intensidade de tensão. Para o

cálculo do ângulo de propagação, utiliza-se o critério da máxima tensão circunferencial.

comprimento (incr. - 0,003 m)	$K_I$ $MPa\sqrt{m}$	$K_{II}$ $MPa\sqrt{m}$	$\theta$	$\theta_{acum}$
0.000	130476	75105	-43.2	30.0
0.003	174966	-23484	14.8	-13.2
0.006	189088	4955	-3.0	1.6
0.009	200248	-5194	3.0	-1.4
				1.6

Tabela 4.7 - Valores obtidos dos parâmetros de fratura

A figura 4.21 mostra o modelo inicial com a trinca inclinada, e as figuras 4.22, 4.23 e 4.24 apresentam as configurações durante o crescimento da trinca, com o incremento de 0,003 m.

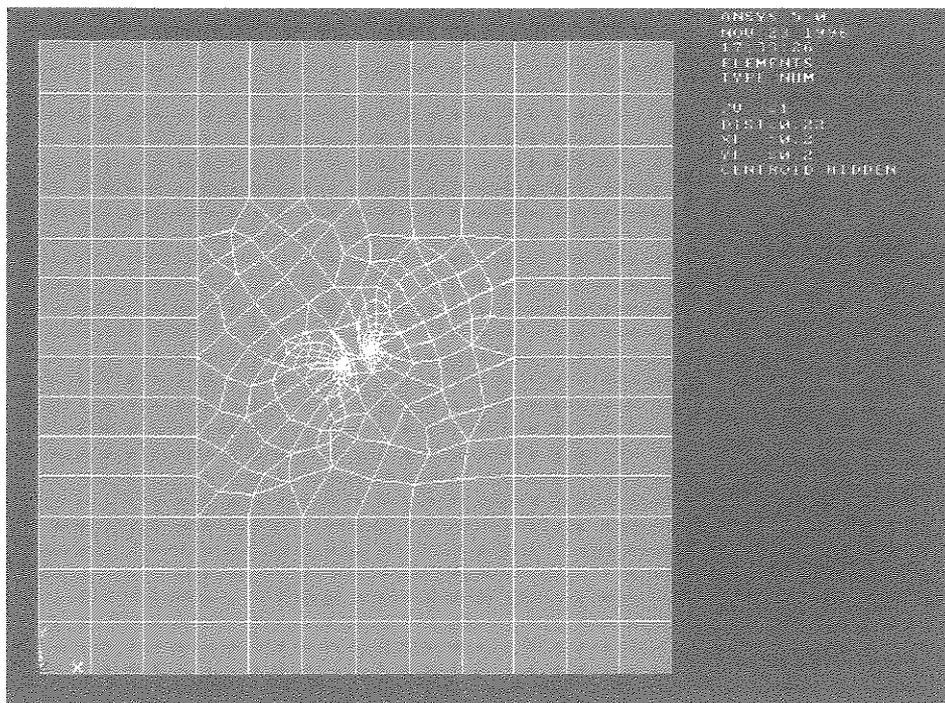


Figura 4.21 - Modelo para simulação do crescimento da trinca inclinada sob tração

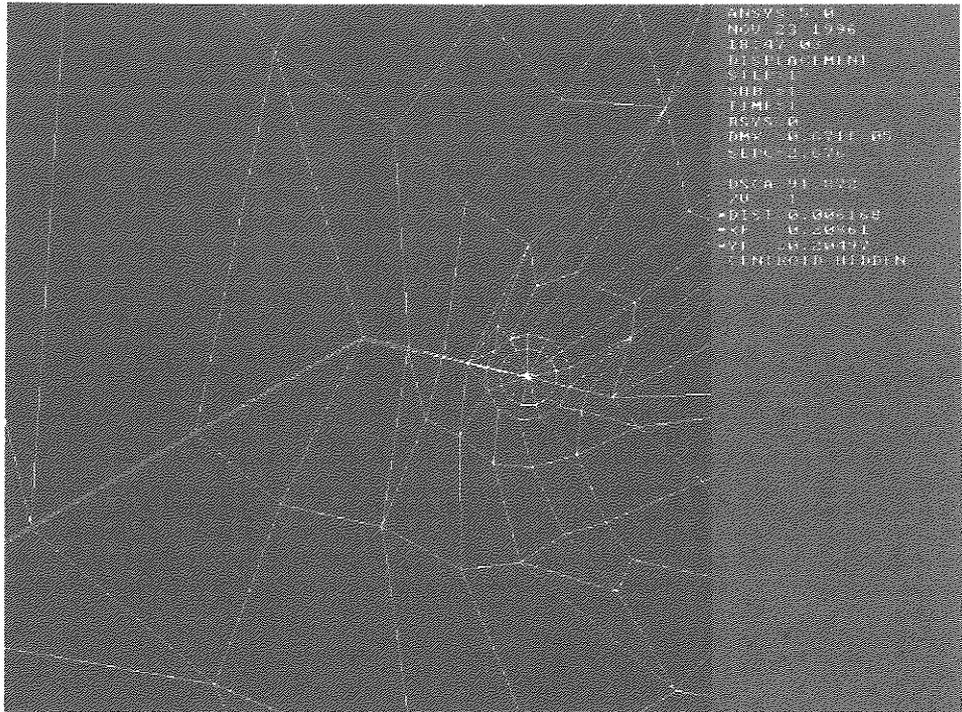


Figura 4.22 - Primeiro incremento de trinca

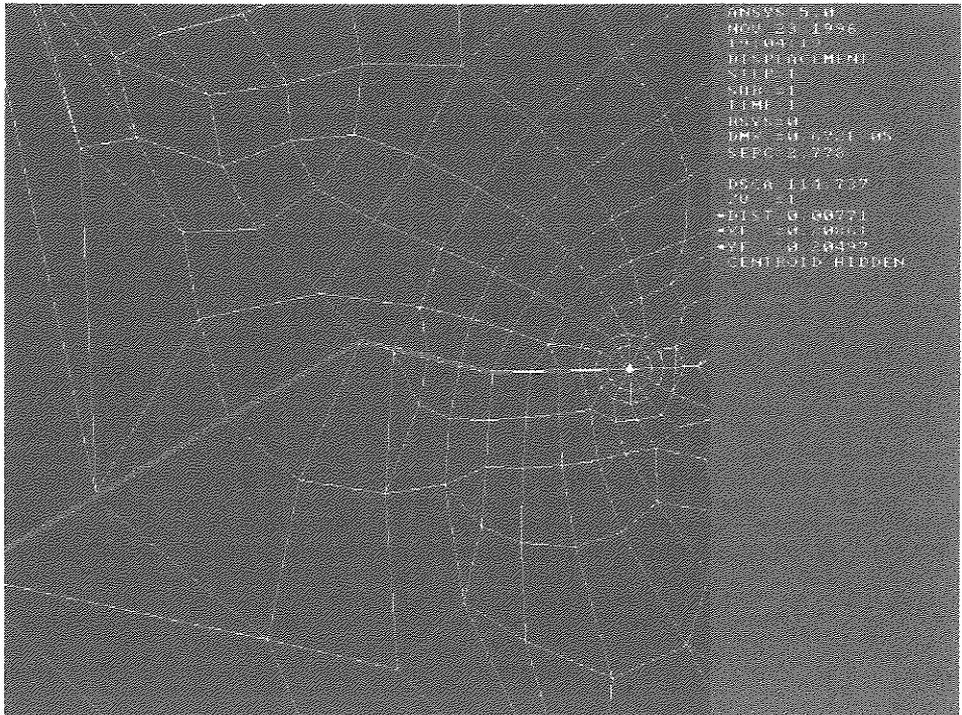


Figura 4.23 - Segundo incremento de trinca

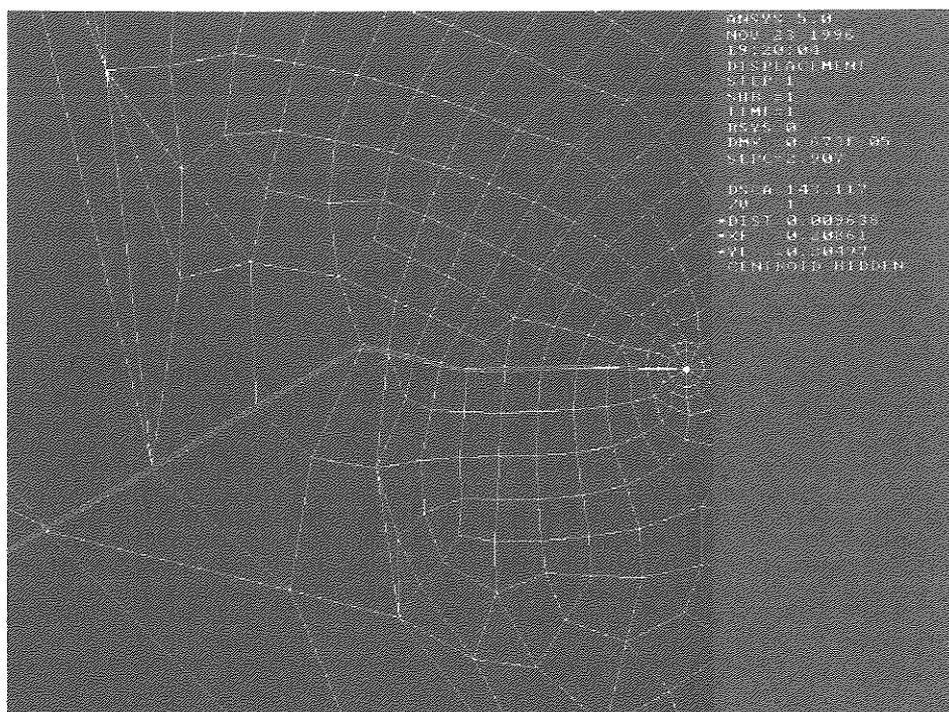


Figura 4.24 - Terceiro incremento de trinca

Como pode ser observado na figura 4.22 e na tabela 4.17, quando se inicia o crescimento da trinca, o valor elevado de  $K_{II}$ , faz crescer a trinca com um ângulo inicial elevado na descendente. À medida que ocorre sua propagação o valor de  $K_{II}$  vai diminuindo, e sua proporção em relação  $K_I$  decresce, levando a trinca a caminhar predominantemente sob modo I; em decorrência, a propagação será em linha reta.

#### 4.5.1 - Aplicação e validação experimental

Para validar os métodos escolhidos utilizamos o trabalho publicado por Bittencourt e outros [8], no qual os autores realizaram um estudo teórico e experimental sobre duas trincas propagadas em condições de laboratório, utilizando uma placa de 0,0254 m de espessura de polimetil metacrilato (PMMA) submetido a flexão. Aplicando uma carga unitária no centro dos apoios (figura 4.25) em duas condições diferentes, variando-se o comprimento inicial das trincas e suas posições em relação ao centro da placa.

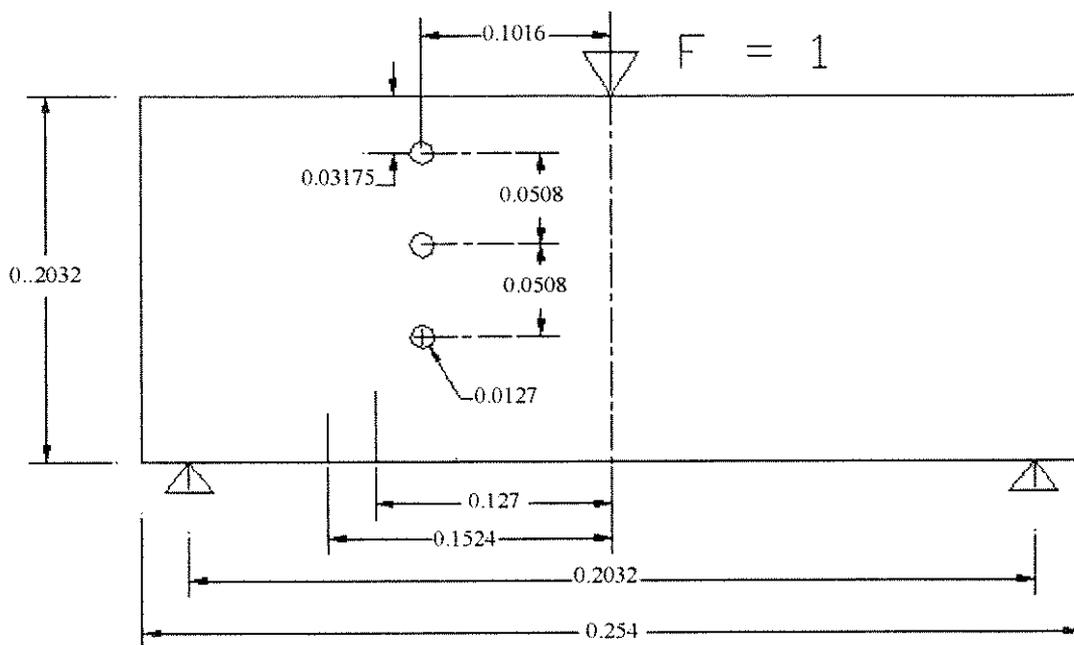


Figura 4.25 - Placa de PMMA submetida a flexão.

**EXEMPLO I** - Para o exemplo I, o comprimento inicial da trinca é de 0,0254 m e sua posição em relação o centro da placa é de 0,1524 m. Pode-se observar a trajetória simulada através da figura 4.26, e comparar o resultado com o experimento efetuado pela referência [8], através da figura 4.27, constatando-se sua semelhança.

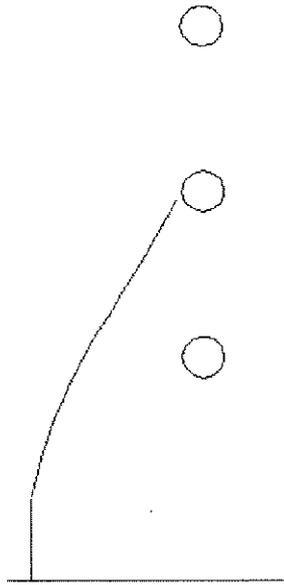


Figura 4.26 - Trajetória obtida na simulação.

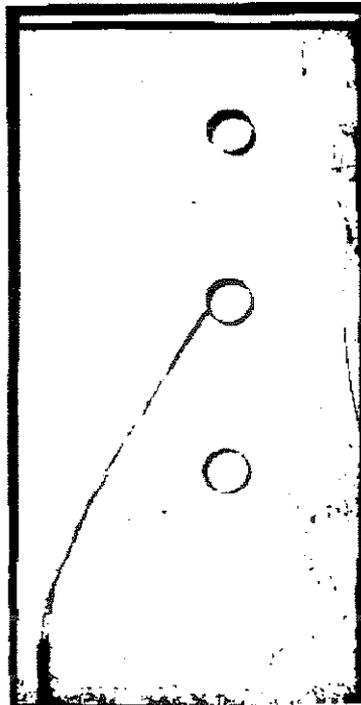


Figura 4.27 - Trajetória obtida na ref [8].

Por se tratar de uma análise incremental e sabendo-se que o tamanho do incremento é um parâmetro estimado, comparam-se algumas trajetórias, variando-se o comprimento dos incrementos utilizados. Podem ser observados

na tabela 4.8 os resultados obtidos e verificar o caminho descritos pelas suas trajetórias (figura 4.28).

Obs: Os valores dos fatores de intensidade de tensão estão em  $MPa\sqrt{m}$  e as dimensões em  $1 \times 10^{-3}$  m.

comp trinca	incr. 6.35				incr. 12.7				incr. 25.4			
	KI	KII	$\theta$	$\theta_{acum}$	KI	KII	$\theta$	$\theta_{acum}$	KI	KII	$\theta$	$\theta_{acum}$
25.4	0.053	0.006	-12.5	0.00	0.053	0.006	-12.5	0.00	0.053	0.006	-12.5	0.00
31.75	0.061	0.001	-2.30	-12.5								
38.1	0.068	0.002	-2.90	-14.8	0.068	0.003	-5.50	-12.5				
44.45	0.076	0.001	-2.30	-17.7								
50.8	0.083	0.002	-2.20	-20.0	0.083	0.005	-4.50	-18.0	0.082	0.008	-10.8	-12.5
57.15	0.092	0.002	-2.10	-22.2								
63.5	0.102	0.002	-1.90	-24.3	0.101	0.003	-4.00	-22.5				
69.85	0.112	0.002	-1.90	-26.2								
76.2	0.122	0.002	-1.70	-28.1	0.122	0.003	-3.50	-26.5	0.120	0.008	-7.20	-23.3
82.55	0.133	0.001	-1.30	-29.8								
88.9	0.144	0.0005	-0.40	-31.1	0.144	0.002	-1.50	-30.0				
95.25	0.157	-0.001	+0.7	-31.5								
101.6	0.174	-0.016	+1.1	-30.8	0.174	-0.002	+1.6	-31.5	0.17	-0.0003	+0.3	-30.5
107.9	0.196	-0.001	+0.8	-29.7								
114.3	0.224	-0.001	+0.5	-28.9	0.223	-0.003	+1.4	-29.9				
120.6	0.270	0.001	-0.3	-28.4								
127.0				-28.7				-28.5				-30.2

Tabela 4.8 - Valores obtidos para o exemplo I.

Como se pode constatar na figura 4.28, o incremento de 0,0254 m de comprimento não representa de maneira mais eficaz a trajetória real da trinca.

Melhor representado estará pelos incrementos menores (0.0127 e 0.00635 m) de propagação, porém se consome muito mais tempo de processamento, devido ao número de incrementos e malha mais refinada.

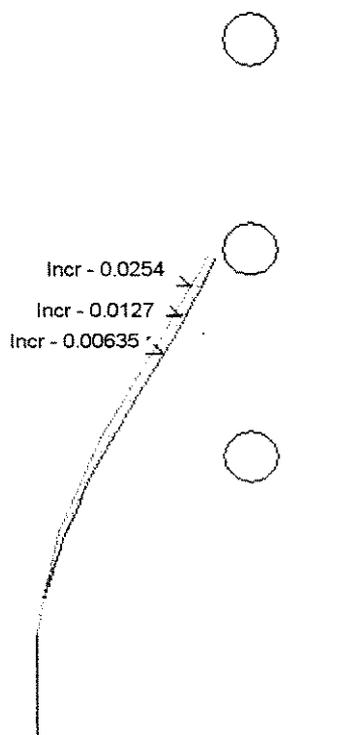


Figura 4.28 - Comparação das trajetórias.

Na figura 4.29, apresenta-se uma visão geral da malha gerada no início da propagação, e a partir da qual se iniciam todos os outros incrementos.

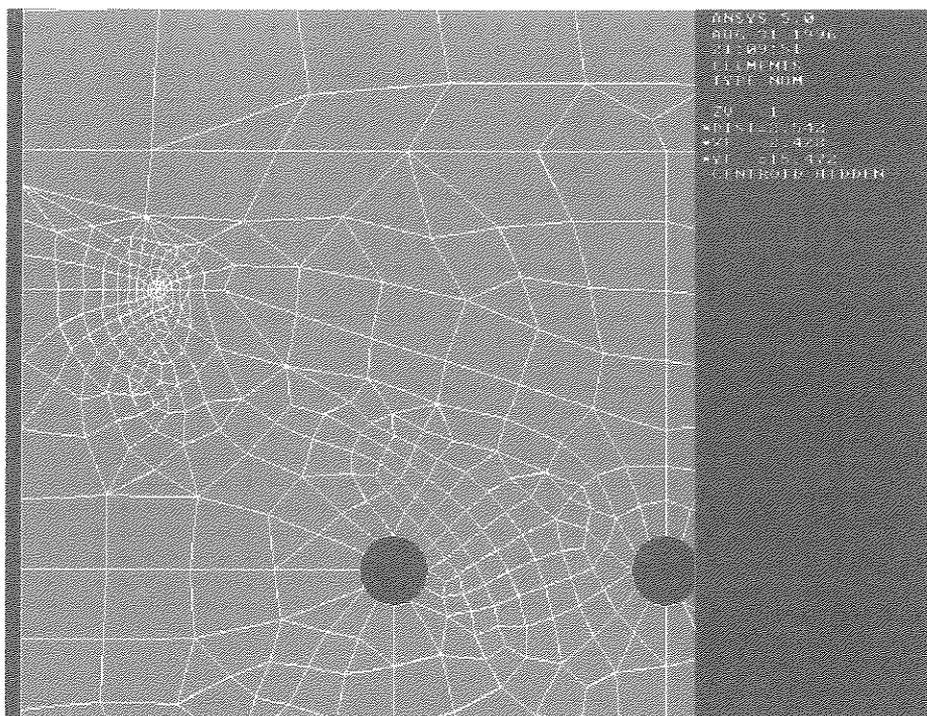


Figura 4.29 - Visão da malha gerada na região do furo para propagação da trinca - exemplo 1.

Nas figuras a seguir, é apresentada uma visão geral das malhas e o comportamento da trinca para os vários incrementos.

Para o incremento de 0,00635 m:

Figura 4.30 - Fim da propagação da trinca

Figura 4.31 - Malha gerada no final da propagação da trinca

Para o incremento de 0,0127 m:

Figura 4.32 - Fim de propagação da trinca, exemplo 1 (incr. 0.0127 m).

Figura 4.33 - Malha gerada no final de propagação da trinca

Para o incremento de 0.0254 m:

Figura 4.34 - Fim de propagação da trinca.

Figura 4.35 - Malha gerada no final de propagação da trinca.

## PROPAGAÇÃO COM INCREMENTO DE 0,00635 m

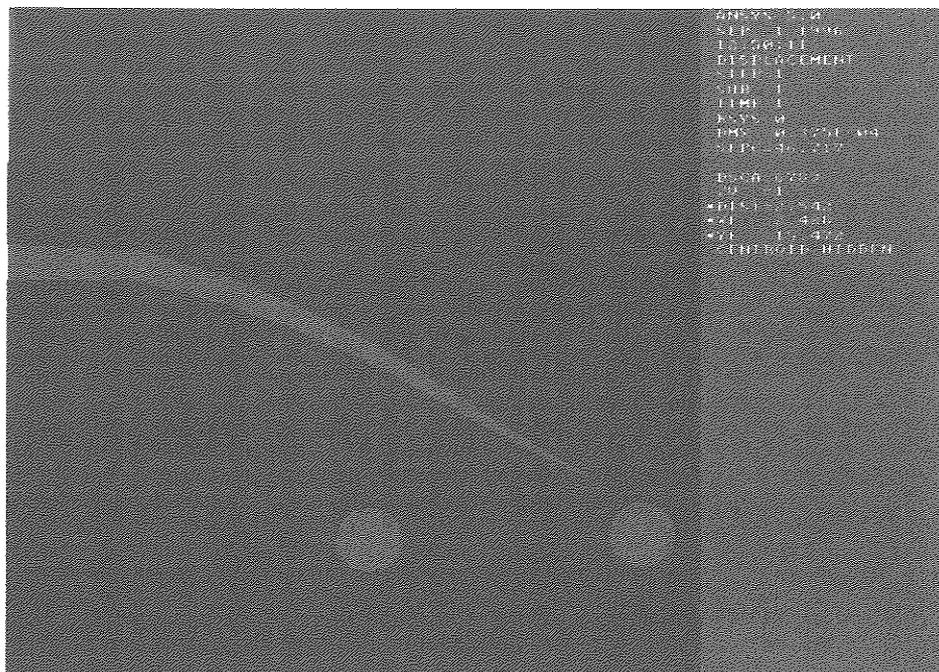


Figura 4.30 - Fim da propagação da trinca, exemplo 1- incremento 0,00635 m

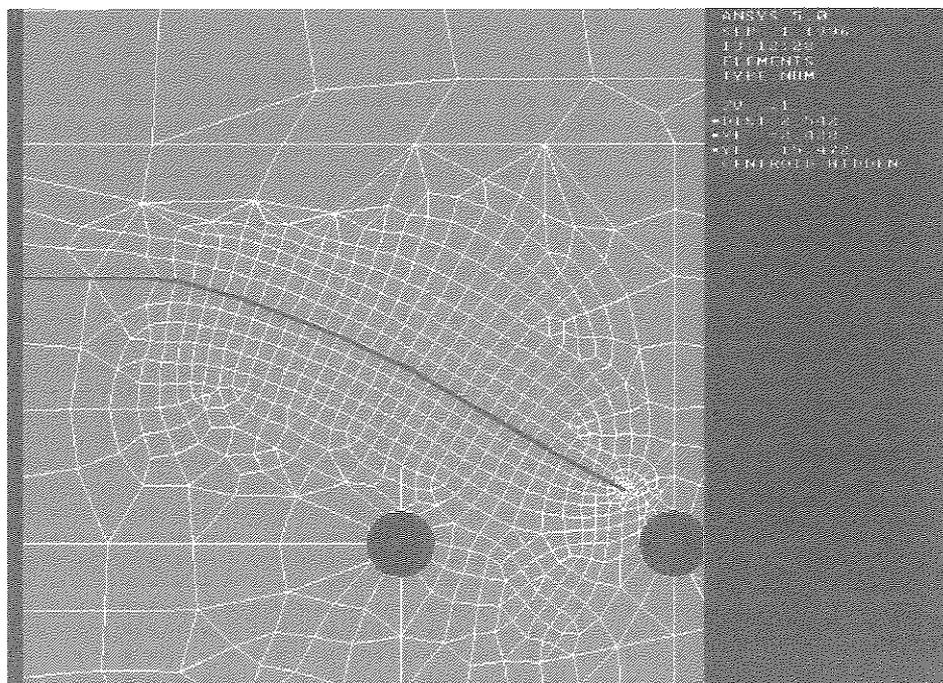


Figura 4.31 - Malha gerada no final da propagação da trinca, exemplo 1 - incr. 0,00635 m.

## PROPAGAÇÃO COM INCREMENTO DE 0,0127 m

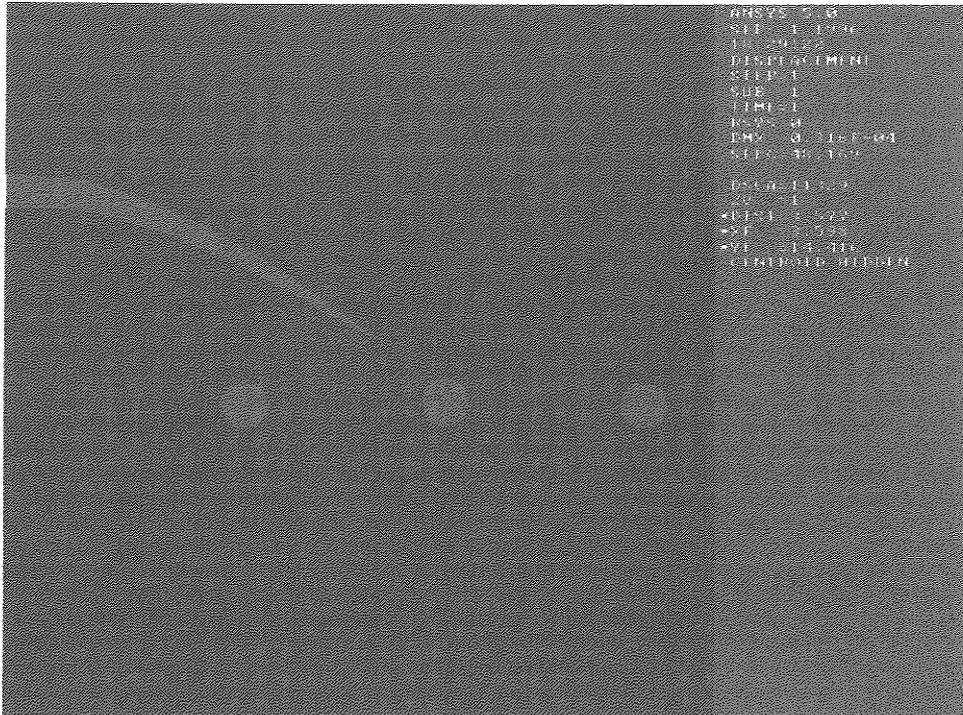


Figura 4.32 - Fim de propagação da trinca, exemplo 1 incremento 0,0127 m.

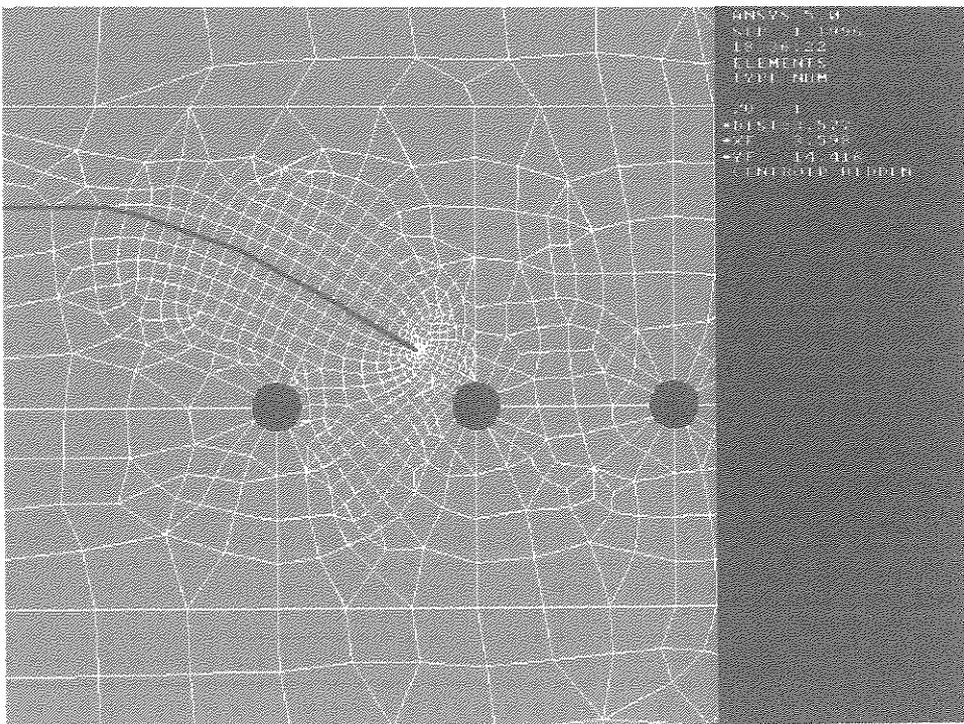


Figura 4.33 - Malha gerada no final de propagação da trinca, exemplo 1 incremento 0,0127 m.

## PROPAGAÇÃO COM INCREMENTO DE 0,0254 m

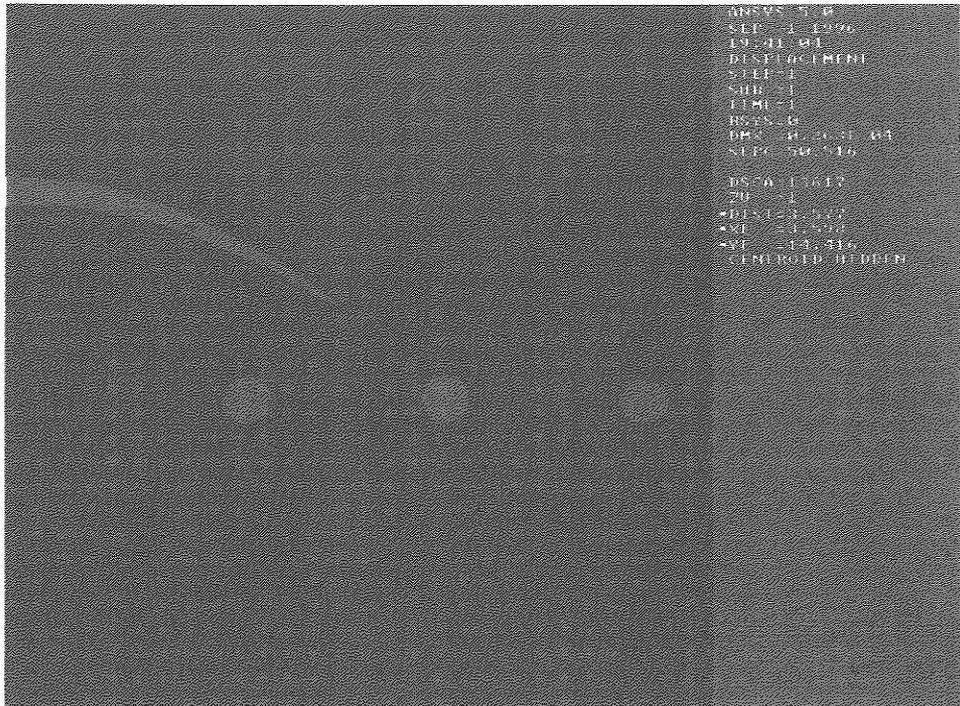


Figura 4.34 - Fim de propagação da trinca, exemplo 1 incremento 0,0254 m.

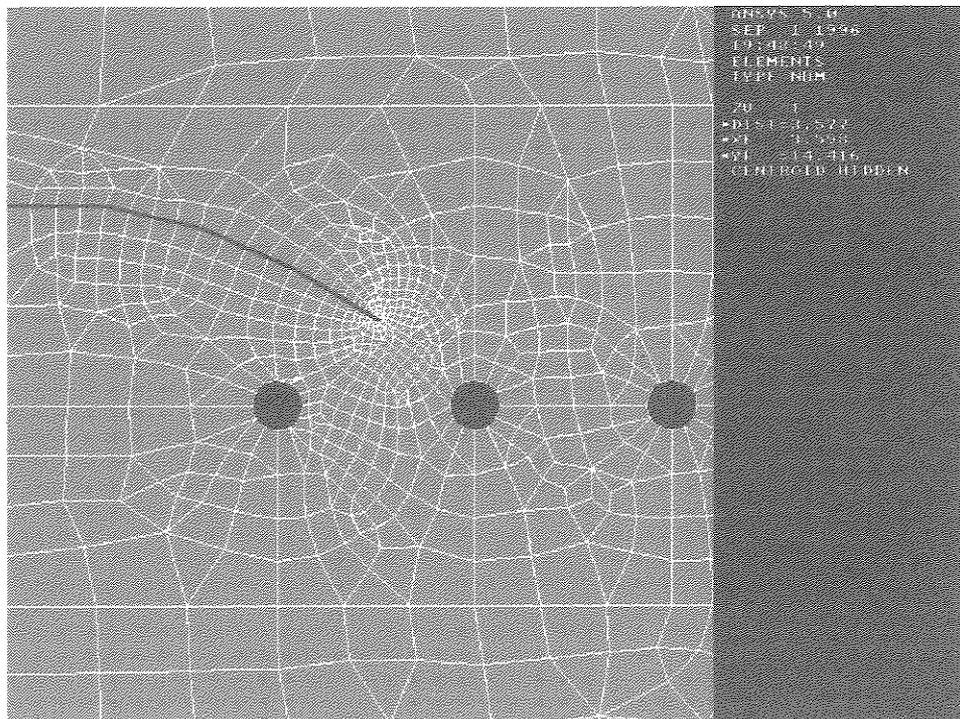


Figura 4.35 - Malha gerada no final de propagação da trinca, exemplo 1 incremento 0,0254 m.

Um problema que pode ocorrer durante a geração automática da malha é a deformação excessiva na geometria do elemento; no caso do gerador de malha do programa Ansys, é efetuado um teste com relação ao ângulo formado pelos vértices para verificar a distorção ocorrida.

Utilizam-se na avaliação do exemplo I as seguintes quantidades de elementos e nós, variando-se conforme a variação do incremento:

Incremento 0,0254 m	748 elementos	2288 nós.
incremento 0,0127 m	802 elementos	2436 nós.
incremento 0,00635 m	941 elementos	2875 nós

O elevado numero de equações deste exercício, não permitiu a solução do sistema de equação empregando a rotina solver descrita no item 4.1, devido ao fato de a mesma acumular os zeros desnecessários existentes no sistema. E foi preciso o auxílio do programa ANSYS na determinação do campo de deslocamento da estrutura.

**Exemplo II** - O comprimento inicial da trinca é de 0,0381 m e a distância para o centro da placa é de 0,127 m. Para este exemplo, adota-se um único incremento de 0,00762 m, que ao ser comparado com o caminho real ocorrido, descreve um trajeto aceitável. Na tabela 4.9 apresentam-se os valores obtidos.

Obs: Os valores dos fatores de intensidade de tensão estão em  $MPa\sqrt{m}$  e as dimensões em  $1 \times 10^{-3}$  m.

comp	KI	KII	$\theta$	$\theta_{acum}$
38.1	0.079	0.012	-16.6	0.00
45.72	0.090	0.002	-1.60	-16.6
53.34	0.106	0.002	-2.00	-18.2
60.96	0.123	0.003	-2.80	-20.2
68.58	0.142	0.009	-6.90	-23.0
76.2	0.148	0.016	-12.2	-29.9
83.82	0.129	-0.009	+8.3	-42.1
91.44	0.167	-0.022	+12	-33.8
99.06	0.199	0.003	-2.00	-21.8
106.68	0.232	0.002	-0.10	-23.8
114.3	0.274	-0.012	+4.8	-23.9
121.92	0.306	-0.035	+13.1	-19.1
129.34	0.305	-0.019	+7.3	-6.00
137.16				+1.3

Tabela 4.9 - Valores obtidos para o segundo modelo.

Pode-se observar a trajetória simulada através da figura 4.36 e comparar o resultado com o experimento efetuado pela referência [8] através da figura 4.37, constatando-se sua semelhança.

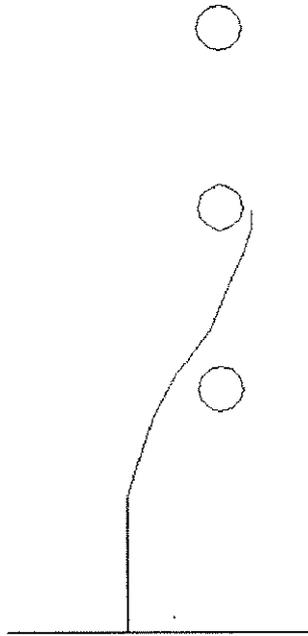


Figura 4.36 - Trajetória obtida na simulação.

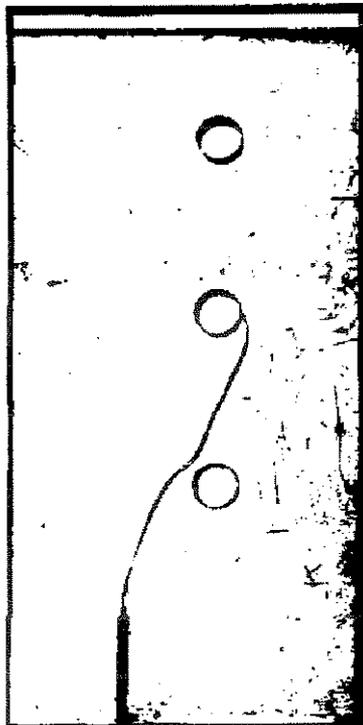


Figura 4.37 - Trajetória obtida na ref [8].

A figura 4.38, apresenta uma visão geral da malha gerada no início da propagação.

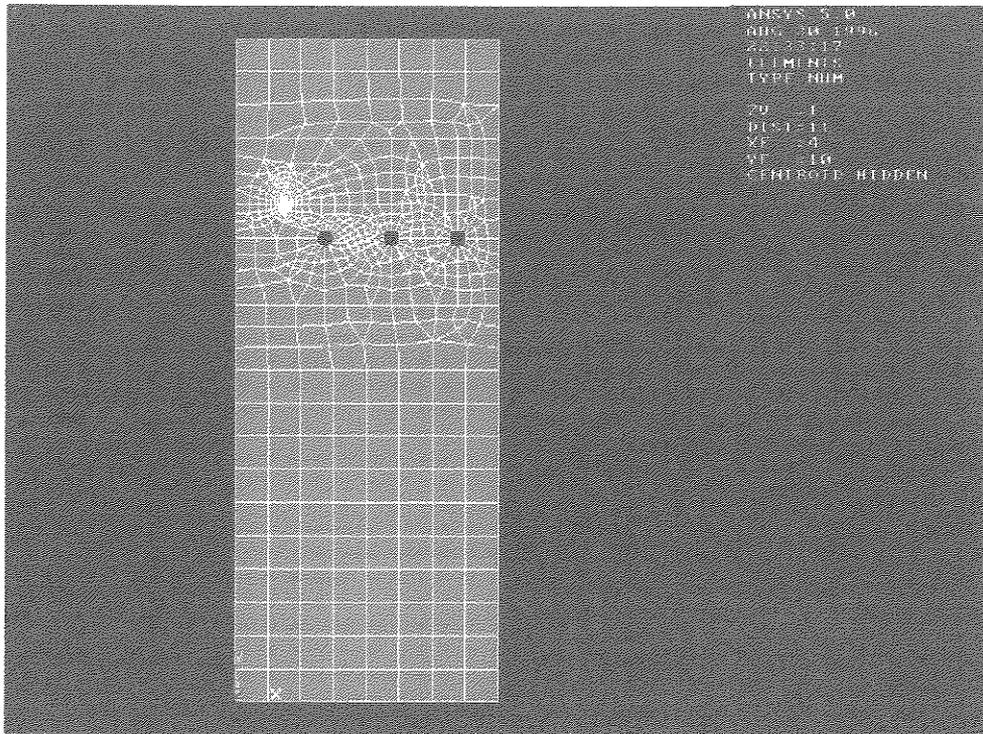


Figura 4.38 - Malha inicial para o segundo exemplo.

Nas figuras a seguir, é apresentada uma visão geral das malhas e o comportamento da trinca:

Figura 4.39 - Malha inicial gerada na região da trinca.

Figura 4.40 - Visualização da trinca propagada.

Figura 4.41 - Visualização da malha no final da propagação.

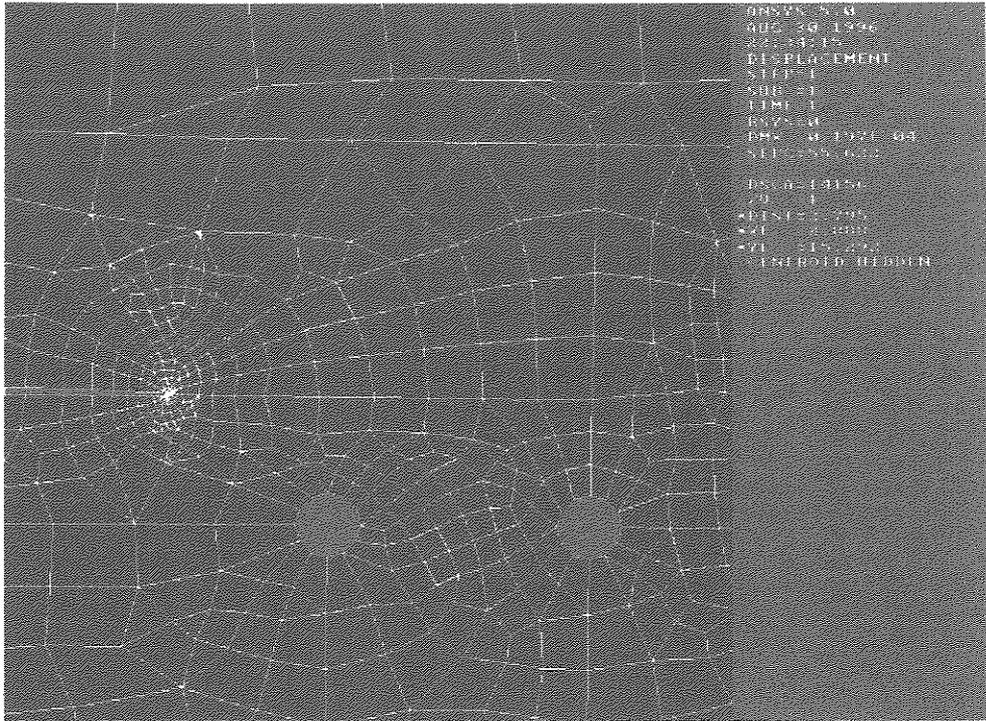


Figura 4.39 - Malha inicial gerada na região da trinca para o segundo exemplo.

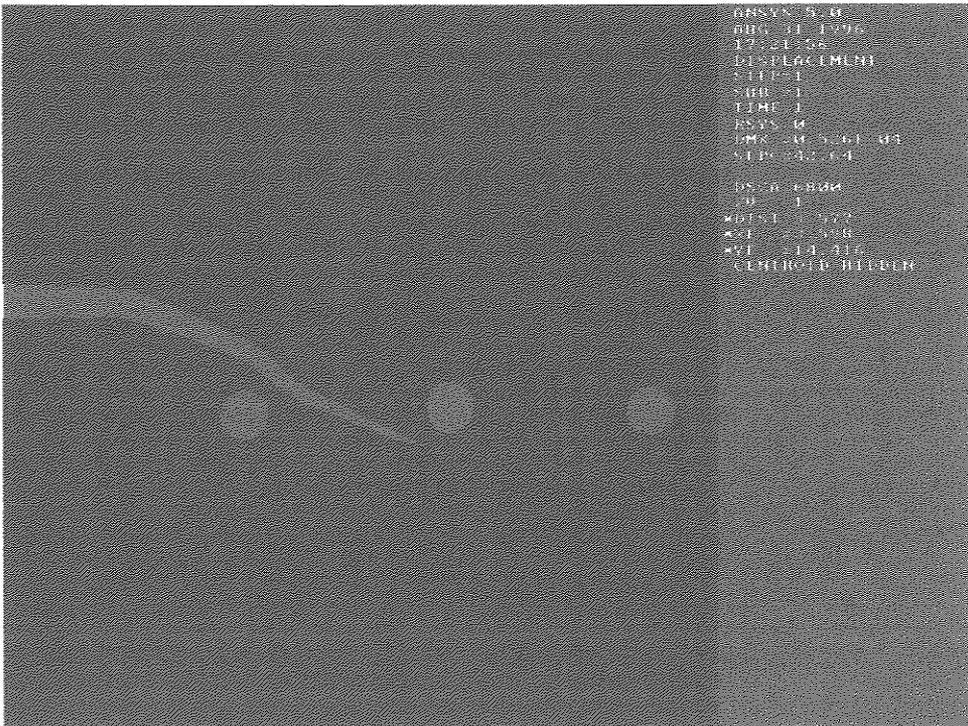


Figura 4.40 - Visualização da trinca propagada para o segundo exemplo.

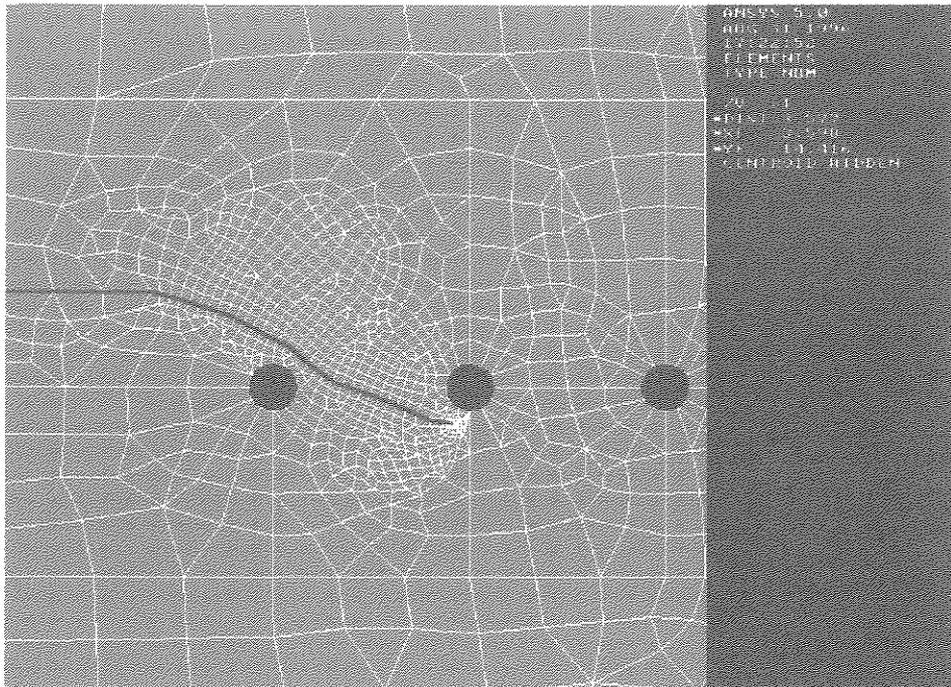


Figura 4.41 - Visualização da malha no final da propagação na região da trinca.

O grande número de equações deste exercício, utilizando-se 1002 elementos com 3046 nós, não permitiu a solução do sistema de equação com o emprego da rotina solver, descrita no item 4.1, devido ao fato de a mesma acumular os zeros desnecessários existentes no sistema. E foi preciso o auxílio do programa ANSYS para determinação do campo de deslocamento da estrutura.

**Análise da conduta da trinca no primeiro e no segundo exemplos -** Para compreensão do que ocorreu com os modelos anteriores, efetua-se o mesmo tipo de análise nos modelos sem a existência dos furos, e com isto determinam-se as influências que causam durante a propagação da trinca.

Sabe-se que, quando avaliado pelo critério da máxima tensão circunferencial, a direção  $\theta$  da trinca é dada pela equação 4.4.

$$K_I \sin\theta + K_{II} (3 \cos\theta - 1) = 0 \quad (4.4)$$

Segundo este critério, nota-se que o relacionamento entre  $K_I$  e  $K_{II}$ , determinará em qual direção a trinca irá propagar. Portanto, para determinar

porque as trincas do exemplo anterior comportam-se daquela maneira, deve-se conhecer de que forma os furos influenciam para alterar esse relacionamento, modificando o caminho natural da trinca, que ocorreria sem a existência dos mesmos.

Observa-se na figura 4.42 a comparação entre os caminhos que as trincas percorreriam sem os furos, contra os que ocorrem com a existência dos mesmos, para os dois exemplos.

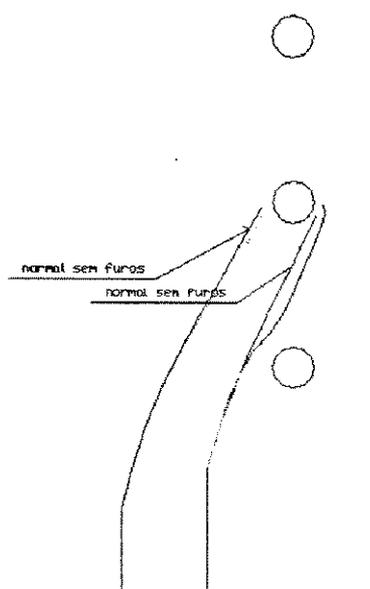


Figura 4.42 - Comparação entre os modelos com e sem furos para os dois exemplos.

Para o exemplo I, percebe-se no gráfico da figura 4.43 que a alteração do relacionamento entre os fatores de intensidade de tensão inicia-se com o comprimento da trinca a partir de 0,076 m, ou seja, o relacionamento permanece semelhante até a aproximação do segundo furo.

Comparando-se as trajetórias desenvolvidas pelas trincas, com ou sem furos (figura 4.42), verifica-se uma semelhança existente entre os caminhos percorridos. Conclui-se que, portanto o segundo furo se encontra no caminho natural da trinca e que, para o exemplo I, os outros dois furos exercem pouca influência.

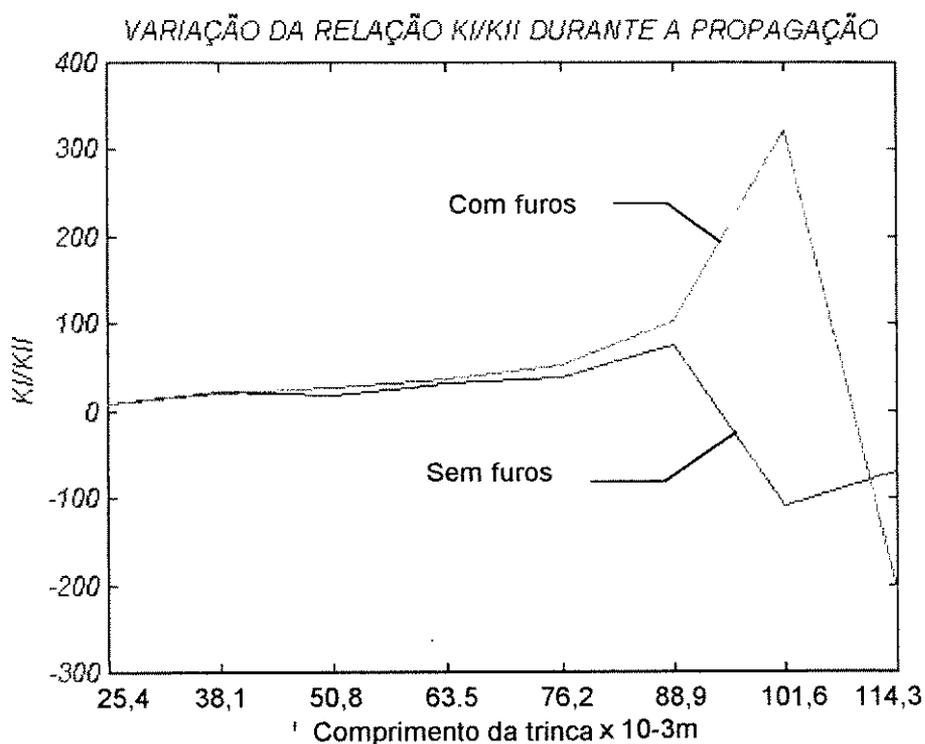


Figura 4.43 - Gráfico de avaliação do relacionamento entre  $K_I / K_{II}$  durante o crescimento da trinca para o primeiro exemplo.

Para o exemplo II, percebe-se no gráfico da figura 4.44 que a alteração do relacionamento entre os fatores de intensidade de tensão inicia-se com o comprimento da trinca a partir de 0,0635 m, ou seja, o relacionamento permanece semelhante até a aproximação do primeiro furo e passa a caminhar de forma paralela até sofrer a ação do segundo furo, a partir de 0,0889 m.

Comparando-se as trajetórias desenvolvidas pelas trincas, com ou sem furos (figura 4.42), verifica-se uma semelhança existente entre os caminhos percorridos no início da propagação: ao aproximar-se do primeiro furo, ocorre uma leve influência, desviando de seu caminho original; na seqüência, passa a caminhar de forma paralela, até sofrer interferência do segundo furo, não sofrendo nenhuma influência do terceiro furo.

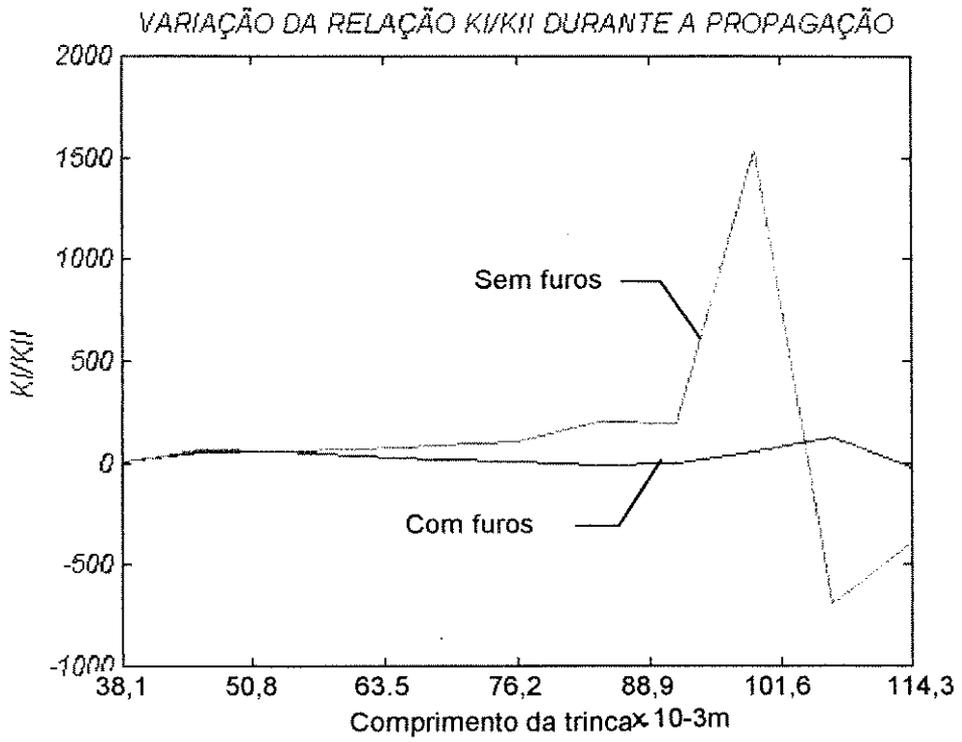


Figura 4.44 - Gráfico de avaliação do relacionamento entre  $K_I / K_{II}$  durante o crescimento da trinca para o segundo exemplo.

## 5 - CONCLUSÃO

Observa-se neste trabalho a existência de diversos métodos para cálculo dos parâmetros de mecânica da fratura, entretanto, quando se trabalha com problemas de fratura elástica linear bidimensional, após os estudos efetuados, constata-se que o emprego de elementos singulares do tipo “quarter point”, em conjunto com o método da correlação de deslocamento e do método da máxima tensão circunferencial, aliados a uma malha adequada, permitem o cálculo dos fatores de intensidade de tensão e da direção de crescimento da trinca, de maneira precisa, tornando-se ferramentas eficazes para simulação de problemas de propagação.

Um ponto importante abordado neste trabalho é a utilização de elementos quadrilaterais em análises para determinar a estabilidade de trincas, por se tratar de um elemento fácil de ser gerado; descomplica o modelo utilizado, podendo-se efetuar análises eficientes, seja em programas comerciais, seja para fins acadêmicos, utilizando elementos do tipo “quarter point” ou elementos normais com o emprego do método da taxa de liberação de energia.

Outra ferramenta imprescindível no processo de simulação é o emprego do gerador automático de malha; sem esta ferramenta é impossível efetuar-se o estudo do caminho percorrido pela trinca, devido ao elevado número de elementos que se formam ao longo do caminho da trinca propagada. A solução aqui empregada, através da elaboração de uma rotina para operar em conjunto com um programa comercial é uma maneira eficaz de solucionar o problema, já que o desenvolvimento de um gerador eficiente seria uma tema a ser explorado em um trabalho específico.

## 6 - SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

A área de mecânica da fratura é extensa e há muito para se fazer. Para continuação deste trabalho, porém, diversas frentes de estudos podem ser implementadas.

Um ponto primordial, a ser decidido antes de se iniciar um estudo de simulação de propagação de trincas, é quanto ao gerador de malha a ser empregado, duas opções podem ser utilizadas: o uso de um gerador próprio, que independe da mecânica da fratura, necessitando de estudos consideráveis para sua implementação ou utilização de geradores de malha de programas comerciais, através de rotinas implementadas em seu ambiente.

Como uma primeira sugestão, deve-se estender este estudo para a geração de malhas automáticas de trinca, a casos tridimensionais, efetuando-se novos estudos de comportamentos dos elementos frente aos modos de fraturas.

Outra frente de estudos pode ser criada para a extensão à problemas não lineares, envolvendo à plasticidade de determinados materiais.

Uma outra possibilidade de estudo, pode ser realizada com a introdução de carregamentos térmico para estudo de trincas submetidas a variações bruscas de temperaturas (choque térmicos).

## **Bibliografia**

- 01 - Anderson, G., Ruggles, V. and Stibor, S., "Use of finite element computer programs in Fracture Mechanics", *International Journal of Fracture Mechanics*, Vol7, No 1, march 1971.
- 02 - Akin, J. E., "The generation of elements with singularities", *International Journal for Numerical methods in Engineering*, vol 10, 1976, p. 1249-1259.
- 03 - Barsoum, R. S., "On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 10, 1976, p. - 25-37.
- 04 - Bathe, K.J., Wilson, E.L., "Numerical methods in finite element analysis", Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1976.
- 05 - Bathe, K.J., "Finite element procedures in engineering analysis", Prentice-Hall Inc., Englewood Cliff, New Jersey, U.S. , 1982.
- 06 - Benzley, S. E., "Representation of singularities with isoparametric finite elements", *International Journal for Numerical methods in Engineering*, vol 8, 1974, p. 537-545.
- 07 - Bhattacharjee, D. and Knott, J. F., "Effect of mixed mode I and II loading on the fracture surface of polymethyl methacrylate (PMMA).", *International Journal of Fracture*, vol 72, 1985, p. 359-381.
- 08 - Bittencourt, T. N., Wawrzynek P. A., Ingraffea A. R. e Sousa J. L., "Quasi-automatic simulation of crack propagation for 2D LEFM problems", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 55 N° 2, 1996, p. 321-334.
- 09 - Bittencourt, T. N., Barry A., Ingraffea A. R. , "Comparison of Mixed-mode stress-intensity factors obtained through displacement correlation, J-integral formulation and modified crack-closure integral", *Fracture Mechanics Twenty second simposium, volume II, ASTM STP 1131, Philadelphia, 1992, p. 69-82.*

- 10 - Broek, D. - "Elementary engineering fracture mechanics" - 1987 - Martinus Nijhoff Publishers, AD Dordrecht, the Netherlands.
- 11 - Byskov, E., "The calculation of stress intensity Factors using the finite element method with cracked elements", International Journal of fracture Mechanics, vol6 N2, June 1970.
- 12 - Chen, K.L. and Atluri S. N, "Comparison of different methods of evaluation of weight functions for 2-D mixed mode fracture analyses.", Engineering Fracture Mechanics, vol 34, No 4, 1989, p. 935-956.
- 13 - Chen, W.F., Saleeb, A.F., "Constitutive equations for engineering materials", Vol I, John Wiley & Sons, 1981.
- 14 - Connor, J.J., Brebbia, C.A., "Finite element techniques for fluid flow", Newnes - Butterworths, 1976.
- 15 - Cook, R.D., "Concepts and applications of finite element analysis", 2nd ed. New York, J. Wiley, 1971.
- 16 - Dhatt, G., Touzot, G., "Une presentation de la methode des elements finis", Maloine S.A. éditeur, Paris, 1981.
- 17 - Dutta, B. K., "A compatible and complete six noded element to model singularity", Engineering Fracture Mechanics, Vol 46, No 6, 1993, p. 991-1003.
- 18 - Eischen, J.W., "An improved method for computing the  $J_2$  integral", Engineering Fracture Mechanics, vol 26, No 5, 1987, p. 691-700.
- 19 - Erdogan, F. and Sih, G. C. "On crack extension in plates under plane loading and transverse shear", A.S.M.E. J. Basic Engr. Vol 85, 1963, p. 519-527.
- 20 - Freese, C. E. e Tracey, D. M., "The natural isoparametric triangle versus collapsed quadrilateral for elastic crack analysis", International Journal of Fracture, vol 12, 1976, p. 767-770.

- 21 - Gallagher, R.H. , "Survey and evaluation of the finite element method in linear fracture mechanics analysis", Conf. Struct. Mech. Reactor Technology, Berlin, 1971.
- 22 - Gifford,L.N. Jr., and Hilton,P. D.,"Stress intensity factors by enriched finite elements" Engineering Fracture Mechanics, Pergamon Press, Vol 10, 1978, p. 485-496.
- 23 - Hellen, T.K., "On the method of virtual crack extensions", International Journal for Numerical methods in Engineering, Vol. 9, 1975, p.187-207.
- 24 - Henshell, R.D., and Shaw,K. G., " Crack tip finite elements are unnecessary", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 9, 1975, p. 495-507.
- 25 - Hibbitt, H. D., "Some properties of singular isoparametric elements", International Journal for Numerical methods in Engineering, 1976.
- 26 - Hinton,E. , Owen, D.R.J. , "Finite element programming", Academic Press Inc., London, 1977.
- 27 - Hinton, E. , Scott, F.C. ,Ricketts, R. E. ,"Local least squares stress smoothing for parabolic isoparametric elements", Int. Journal Numerical Methods in Eng., Vol 9, 1975, p. 235-256.
- 28 - Hinton, E. , Campbell, J.S. , "Local and global smoothing of discontinuous finite element functions using a least squares method", Int. Journal Num.Methods in Eng., Vol 8 , 1974, p. 461-480.
- 29 - Hughes, T.J.R., "The finite element method", Prentice-Hall, Inc.,Englewood Cliffs, Jew Jersey, 1987.
- 30 - Hussain, M. A, Pu, S. L., e Lorensen, W., "The collapsed cubic isoparametric element as a singular element for crack problems", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 12, 1978, p. 1727-1742.
- 31 - Hussain, M. A, Pu, S. L., e Underwood, J., " Strain energy release rate for a crack under combined mode I and Mode II", ASTM STP 560, 1974, p. 2-28.

- 32 - Lynn, P. P, Ingraffea, A. F., "Transition elements to be used with quarter-point crack tip elements", International Journal for Numerical methods in Engineering, Vol 12, N6, 1978, p.1031-1036.
- 33 - Maccagno, T. M and Knott, J. F., "The fracture behaviour of PMMA in mixed modes I e II.", Engineering Fracture Mechanics, vol 34, 1989, p. 65-86.
- 34 - Murakami, Y. , "Stress intensity factor handbook", volume 1, Pergamon Press, Headington Hill Hall, Oxford, England, 1987.
- 35 - Oliveira, R. and Kaiser, S., "Modelling the HRR-singularity with Akin and conventional singular elements", Engineering Fracture Mechanics Vol 27, No 27, 1987, p. 199-204.
- 36 - Orringer, O., Lin, K.Y., Stalk, G., Tong, P. e Mar, W. , "K-Solutions with assumed-Stress hybrid Elements", Journal of the structural division, Vol 103, ST2, 1977, p. 321-334.
- 37 - Paris, P.C. and Sih , C. G. , " Stress Analysis of Cracks", Am. Soc. Testing and Materials Special Tech. Publ 381, 1965, p. 30-83.
- 38 - Popov, E.P., "Introdução a mecânica dos sólidos", Edit. Edgard Blucher Ltda, 1913.
- 39 - Raju, I.S."Calculation of strain-energy release rates with higher order and singular elements", Engineering Fracture Mechanics, vol 28, No 3, 1987, p. 251-274.
- 40 - Ramamurthy, T.S.; Krishnamurthy, T.S; Badari-Narayana, K., Vijayakumar, K. and Dataguru, B. "Modified crack closure integral method with quarter point elements", Mech. Research. Comm., 13(4), 1986, p. 179-186.
- 41 - Rice, J.R., " A path independent integral and the approximate analysis of strain Concentration by notches and Cracks"., Transactions of the ASME ,Journal of Applied Mechanics, june 1968, p. 379-386.

- 42 - Rybicki, E. F. and Kanninen, F. , "A finite element calculation of stress intensity factors by a modified crack closure", *Engineering Fracture Mechanics*, vol 9, 1977, p. 931-938.
- 43 - Sethuraman, R. and Maiti S., K., "Finite element based computation of strain energy release rate by modified crack closure integral", vol. 30, No 2, 1988, p. 227-231.
- 44 - Segerlind, L.J., "Applied finite element analysis", 2nd ed., John Wiley and sons, 1984
- 45 - Shigley, J. E. and Mitchell, L.D., "Mechanical Engineering design"- fourth edition, Mac Graw Hill, 1984.
- 46 - Shih, C. F., deLorenzi, H. G. and German, M., "Crack extension modeling with singular quadratic isoparametric elements", *International Journal of fracture* 12, 1976.
- 47 - Sih, G C., "Some basic problems in fracture mechanics and new concepts", *Engineering Fracture Mechanics*, vol 5, 1973, p. 365-377.
- 48 - Sih, G. C. - "Mechanics of Fracture initiation and propagation", Kluwer Academic Publishers Netherlands, 1991.
- 49 - Sih, G. C. e Liebowitz, H. "Mathematical theories of brittle fracture", capitulo 2 , volume 2, *Fracture*, publicado por Liebowitz 1968 - Academic Press - New York e London, p. 67-190.
- 50 - Smith, R.N.L. - "BASIC Fracture Mechanics",. Butterworth-Heinemann Ltd, Halley Court, Jordan Hill, Oxford 1991.
- 51 - Smith, R.N.L. - "Second-order terms and strain energy density for the angled crack problem",. *Engineering Fracture Mechanics* Vol 26, N° 3, 1987, p. 463-469.
- 52 - Stern, M. and Becker, E., "A conforming crack tip element with quadratic variation in the singular fields" , *International Journal for Numerical methods in Engineering*, vol 12, 1978 , p. 279-288.

- 53 - Swanson analysis systems, Inc., "Ansys User's Manual", (Ver. 5.0) Vol I,II,III e IV (1992).
- 54 - Swedlow, J.L., "Singularity computations", International Journal for Numerical methods in Engineering, vol 12, 1978, p. 1779-1798.
- 55 - Tsamasphyros, G. and Giannakopoulos, A. E., "The use of conformal mapping for creating singular elements", Vol 28, No 1, 1987, p 55-65.
- 56 - Tracey, M.D., "Finite elements for determination of crack tip elastic stress intensity factors", Engineering Fracture mechanics, Vol. 3 , 1971 p.255-265.
- 57 - Walsh, P. F., "The computation of stress intensity factors by a special finite element technique", Int. J. Solids Structures, Vol 7, 1971, p. 1333-1342.
- 58 - Washisuzu, K. , "Variational methods in elasticity and plasticity", 3rd , Oxford Pergamon, 1982.
- 59 - Watwood Jr, V.B., "The finite element method for prediction of crack behavior", Nuclear Engineering and Design 11, North-holland Publishing Company, Amesterdam, 1969, p.323-332.
- 60 - Yoshibash e outros , " Nastran superelement capability", 1992.
- 61 - Zienkiewicz, O.C., "The finite element method in Engineering science",. Mc Graw - Hill, London, 1971.

## ANEXO - A

### **ROTINA EM LINGUAGEM PARAMÉTRICA PARA GERAÇÃO DE MALHA DURANTE A PROPAGAÇÃO DA TRINCA ATRAVÉS DO PROGRAMA ANSYS.**

Esta rotina tem por função a geração de malhas bidimensionais automaticamente na região de contorno da ponta da trinca, permitindo a simulação do crescimento da trinca durante sua propagação.

O programa é efetuado em linguagem paramétrica, disponível no programa Ansys para criação de rotinas automáticas, possibilitando a confecção de sub programas dentro do mesmo.

O programa Ansys50 gera sua malha bidimensional a partir de áreas definidas por linhas ou pontos pré determinados (keypoints) . Para podermos utilizar este recursos disponíveis no programa, elaborou-se um texto gravado em arquivos ASCII, contendo a seqüência de comandos característicos do programa e introduzindo através do comando INPUT

Para utilização da rotina, as seguintes etapas anteriores devem ser efetuadas:

- Entrada na fase de pré-processamento do programa, PREP7.
- Geração das áreas do modelo completo (fig. 1) através das linhas ou keypoints, faltando somente as áreas superior e inferior da região da trinca (fig. 2).
- Introdução das divisões das linhas no modelo das áreas já existentes, através do comando ESIZE.
- Geração dos elementos para as áreas existentes
- Efetuado o modelo e gerados os elementos, pode-se iniciar a geração da malha ao redor da trinca (fig. 2).

- Criação dos keypoints superior (KS) e inferior (KI) que representaram a abertura da trinca
- Introduzir a rotina através do comando INPUT, e introduzir os dados necessários:
- KS - numero do keypoint superior do início da trinca.
- KI - número do keypoint inferior do início da trinca.
- KP - número do keypoint que representará a ponta da trinca (a ser criado pelo sistema).
- KPCX - valor da coordenada x do ponto KP.
- KPCY - valor da coordenada y do ponto KP.
- KOPP - número do keypoint oposto a trinca o qual determinará a linha de divisão entre as duas áreas.
- DIV1 - número de divisão para as linhas que representarão a abertura da trinca.
- DIV2 - número de divisões para linha de ligação com KOPP.
- DIV3 - número de divisões para linha de conexão entre a ponta da trinca e um nó criado pelo sistema para apoio.
- R - raio que determinará a dimensão dos elementos que contornarão a ponta da trinca.
- AS - número que representará a área superior ( deve-se utilizar o ultimo número disponível após o comando ALIST).
- AS - número que representará a área superior.
- NAS - número de linhas suplementares que irão compor a área superior,, não incluindo as linhas que irão ser criadas pelos sistema (fig. 2).

- Introdução dos números das linhas da área superior.
- AI - número que representará a área inferior.
- NAI - número de linhas suplementares que irão compor a área inferior,, não incluindo as linhas que irão ser criadas pelos sistema.
- Introdução dos números das linhas da área superior.

Automaticamente a rotina irá gerar a malha necessária no contorno da trinca. Para geração dos próximos incrementos durante a propagação, a rotina deverá ser acionada novamente e os seguintes dados deverão ser fornecidos:

- INCR - incremento da trinca.
- ANG - ângulo de propagação na qual a trinca deverá se propagar.
- R - raio que determinará a dimensão dos elementos que contornarão a ponta da trinca.
- DIV1 - número de divisão para as linhas que representará a abertura da trinca.
- DIV2 - número de divisões para linha de ligação com KOPP.
- DIV3 - número de divisões para linha de conexão entre a ponta da trinca e um nó criado pelo sistema para apoio.
- MODF- modificação da áreas superior e inferior (1 - Sim), com isto permite-se reestruturação das áreas para uma melhor remalhamento, caso seja necessário.

E novamente a malha será gerada automaticamente para o novo incremento.

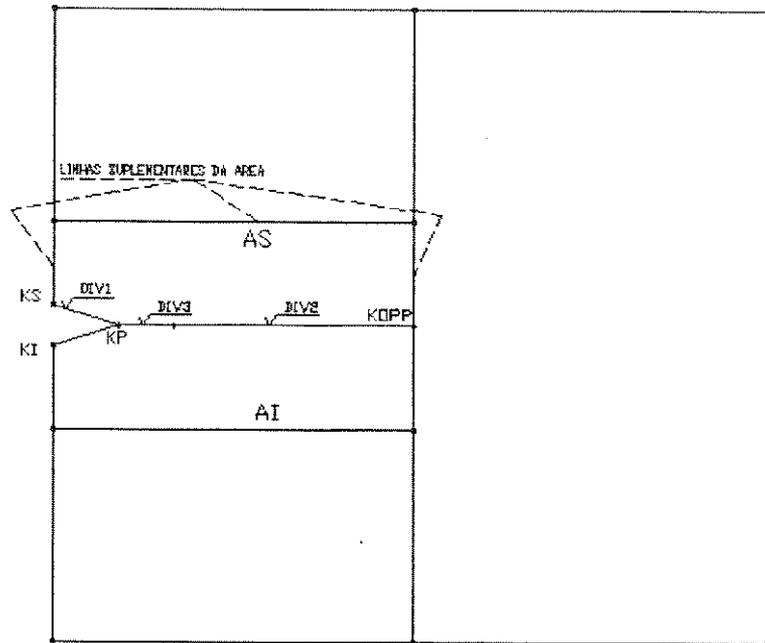


Figura A1 - Área do modelo inicial para geração do elementos.

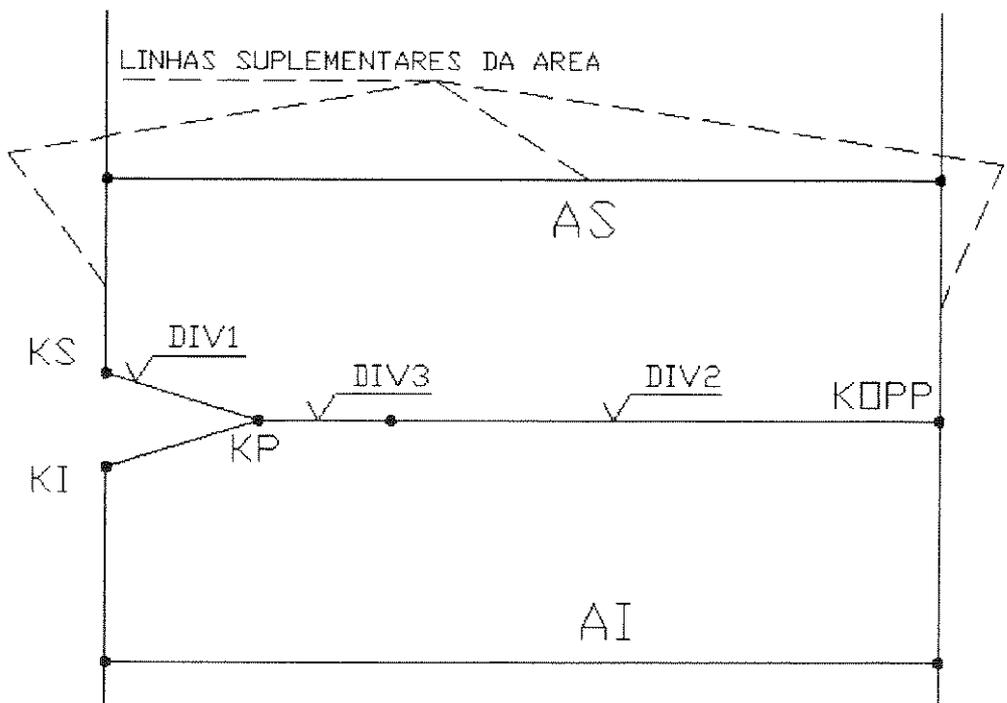


Figura A2- Áreas superior e inferior e keypoints necessários.

## Descrição da rotina utilizada para geração da malha:

```
FINI
/PREP7

!   programa para geracao de malha para propagacao de trinca
!   em uma peca em flexao com furos
!
*IF,I.EQ,1,,:PROP
*IF,I.GT,1,,:PROP

*DIM,KS,ARRAY,20
*DIM,KI,ARRAY,20
*DIM,LS,ARRAY,20
*DIM,LAS,ARRAY,20
*DIM,LI,ARRAY,20
*DIM,LAI,ARRAY,20
*DIM,CSX,ARRAY,20
*DIM,CSY,ARRAY,20
I = 1

*ASK,KS(I),NO SUP. INICIAL
*ASK,KI(I),NO INF. INICIAL
*ASK,KP,NO PONTA DA TRINCA
*ASK,KPCX,COORD X DA PONTA
*ASK,KPCY,COORD Y DA PONTA
*ASK,KOPP,NO OPOSTO A PONTA
*ASK,DIV1,DIVISAO DAS LINHA ANTES DA TRINCA
*ASK,DIV2,DIVISAO DAS LINHA APOS A TRINCA
*ASK,DIV3,DIV ENTRE PONTA/LINHA APOS TRINCA
*ASK,R,RAIO NA PONTA DA TRINCA

*ASK,AS,NUMERO AREA SUPERIOR
*ASK,NAS,NUMERO LINHAS SUPL. DA AREA SUPERIOR
L=0
:DA1
L=L+1
*ASK,LAS(L),LINHA DE AREA SUPERIOR
*IF,L,EQ,NAS,,:CONT1
*IF,L,LT,NAS,,:DA1
:CONT1

*ASK,AI,NUMERO AREA INFERIOR
*ASK,NAI,NUMERO LINHAS SUPL. DA AREA INFERIOR
L=0
:DA2
L=L+1
*ASK,LAI(L),LINHA DE AREA INFERIOR
*IF,L,EQ,NAI,,:CONT2
*IF,L,LT,NAI,,:DA2
:CONT2

K,KP,KPCX,KPCY
KSCON,KP,R,1
L,KS(I),KP
*GET,L,LINE,0,NUM,MAX
```

```

LS(I) = L
LESIZE,L...,DIV1
L,KI(I),KP
*GET,L,LINE,0,NUM,MAX
LI(I) = L
LESIZE,L...,DIV1

! geracao do nos apostro ao ponto
PP = KP+1
*GET,CSX(I),KP,KS(I),LOC,X
*GET,CSY(I),KP,KS(I),LOC,Y
DX = KPCX - CSX(I)
DY = KPCY - CSY(I)
KOPCX = KPCX + DX/2
KOPCY = KPCY + DY/2
KOP = PP
K,KOP,KOPCX,KOPCY

L,KP,KOP
*GET,L,LINE,0,NUM,MAX
LOP1 = L
LESIZE,L...,DIV3
L,KOP,KOPP
*GET,L,LINE,0,NUM,MAX
LOP2 = L
LESIZE,L...,DIV2

! formacao da area e geracao da malha
LSEL,S,LINE, ,LOP1
LSEL,A,LINE, ,LOP2
L=0
:DA3
L=L+1
LSEL,A,LINE, ,LAS(L)
*IF,L,EQ,NAS,:CONT3
*IF,L,LT,NAS,:DA3
:CONT3
LSEL,A,LINE, ,LS(I)
AL,ALL
AMESH,AS
LSEL,ALL
LSEL,S,LINE, ,LOP1
LSEL,A,LINE, ,LOP2
L=0
:DA4
L=L+1
LSEL,A,LINE, ,LAI(L)
*IF,L,EQ,NAI,:CONT4
*IF,L,LT,NAI,:DA4
:CONT4
LSEL,A,LINE, ,LI(I)
AL,ALL
LSEL,ALL
AMESH,AI

*GO,:END

! inicio da propagacao
:PROP
PP = PP+1

```

```

I = I + 1
*ASK,INCR,INCREMENTO DA PONTA
*ASK,ANG,ANGULO DO INCREMENTO
*ASK,R,RAIO NA PONTA DA TRINCA
*ASK,DIV1,DIVISAO DAS LINHA ANTES DA TRINCA
*ASK,DIV2,DIVISAO DAS LINHA APOS A TRINCA
*ASK,DIV3,DIV ENTRE PONTA/LINHA APOS TRINCA
*ASK,MODF,DESEJA ALTERAR AREA 0-NAO 1-SIM

*IF,MODF,EQ,1,:AREAMODF
*GO,:CONT11

:AREAMODF
*ASK,KOPP,NO OPOSTO A PONTA
*ASK,NAS,NUMERO LINHAS SUPL. DA AREA SUPERIOR
L=0
:DA10
L=L+1
*ASK,LAS(L),LINHA DE AREA SUPERIOR
*IF,L,EQ,NAS,:CONT10
*IF,L,LT,NAS,:DA10
:CONT10

*ASK,NAI,NUMERO LINHAS SUPL. DA AREA INFERIOR
L=0
:DA11
L=L+1
*ASK,LAI(L),LINHA DE AREA INFERIOR
*IF,L,EQ,NAI,:CONT11
*IF,L,LT,NAI,:DA11

:CONT11

ACLEAR,AS
ACLEAR,AI
ADELE,AS
ADELE,AI
*GET,L,LINE,0,NUM,MAX
LDELE,L
LDELE,L-1
LDELE,L-2
LDELE,L-3
NUMCMP,ALL

P1 = 3.14159265359
ANG = ANG*P1/180
KS(I) = PP
K,KS(I),KPCX,KPCY
PP = PP+1
KI(I) = PP
K,KI(I),KPCX,KPCY
CSX(I) = KPCX
CSY(I) = KPCY

! movendo a ponta da trinca
KPCX = KPCX + INCR*COS(ANG)
KPCY = KPCY + INCR*SIN(ANG)
K,KP,KPCX,KPCY
KSCON,KP,R,1

```

```

! gerando o no oposto
DX = KPCX - CSX(I)
DY = KPCY - CSY(I)
KOPCX = KPCX + DX/2
KOPCY = KPCY + DY/2
K,KOP,KOPCX,KOPCY

! geracao das linhas
L,KS(I-1),KS(I)
*GET,L,LINE,0,NUM,MAX
LS(I-1) = L
LESIZE,L,...DIV1
L,KI(I-1),KI(I)
*GET,L,LINE,0,NUM,MAX
LESIZE,L,...DIV1
LI(I-1) = L
L,KS(I),KP
*GET,L,LINE,0,NUM,MAX
LS(I) = L
LESIZE,L,...DIV1
L,KI(I),KP
*GET,L,LINE,0,NUM,MAX
LI(I) = L
LESIZE,L,...DIV1
L,KP,KOP
*GET,L,LINE,0,NUM,MAX
LOP1 = L
LESIZE,L,...DIV3
L,KOP,KOPP
*GET,L,LINE,0,NUM,MAX
LOP2 = L
LESIZE,L,...DIV2

! formacao da area e geracao da malha
LSEL,S,LINE, ,LOP1
LSEL,A,LINE, ,LOP2
L=0
:DA5
L=L+1
LSEL,A,LINE, ,LAS(L)
*IF,L,EQ,NAS,:CONT5
*IF,L,LT,NAS,:DA5
:CONT5
L=0
:DO1
L=L+1
LSEL,A,LINE, ,LS(L)
*IF,L,EQ,I,:CONT
*IF,L,LT,I,:DO1
:CONT
AL,ALL
AMESH,AS

LSEL,ALL
LSEL,S,LINE, ,LOP1
LSEL,A,LINE, ,LOP2
L=0
:DA6
L=L+1
LSEL,A,LINE, ,LAI(L)

```

```
*IF,L,EQ,NAI,CONT6
*IF,L,LT,NAI,DA6
:CONT6
L=0
:DO7
L=L+1
LSEL,A,LINE,LI(L)
*IF,L,EQ,I,CONT7
*IF,L,LT,I,DO7
:CONT7
AL,ALL
LSEL,ALL
AMESH,AI

:END
```