

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

Modelagem, Simulação e Controle de Robôs Flexíveis

Autor : Sergio Adriani David

Orientador: Prof. Dr. João Maurício Rosário

08/96

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL
DA TESE DEFENDIDA POR Sergio Adriani
David E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 23, 08, 1996.

João Maurício Rosário
ORIENTADOR

D28m

28690/BC

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO**

Modelagem, Simulação e Controle de Robôs Flexíveis

Autor : Sergio Adriani David

Orientador: Prof. Dr. João Maurício Rosário

Curso: Engenharia Mecânica.

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Dissertação de Mestrado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 1996

S.P. - Brasil



FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

D28m

David, Sergio Adriani

Modelagem, simulação e controle de robôs flexíveis /
Sergio Adriani David.--Campinas, SP: [s.n.], 1996.

Orientador: João Maurício Rosário.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Robótica. 2. Simulação (Computadores). 3. Robôs
industriais. I. Rosário, João Maurício. II. Universidade
Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica.
III. Título.

I.
D. 1. 1988

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO**

Dissertação de Mestrado

**Modelagem, Simulação e Controle de
Robôs Flexíveis**

Autor : Sergio Adriani David

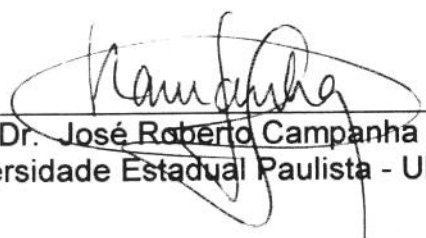
Orientador: Prof. Dr. João Maurício Rosário



Prof. Dr. João Maurício Rosário, Presidente
Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP



Prof. Dr. José Manoel Balthazar
Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP



Prof. Dr. José Roberto Campanha
Universidade Estadual Paulista - UNESP

Campinas, 23 de agosto de 1996

Dedicatória:

Dedico este trabalho ao meu querido pai Romeu David (in memorian), à minha querida mãe Virgilina B. David e às minhas irmãs Sueli e Silvia.

Agradecimentos

Este trabalho não poderia ser terminado sem a ajuda de diversas pessoas às quais presto minha sincera homenagem:

Primeira e especialmente aos meus pais, pelo permanente incentivo e suporte moral fornecido desde o início de minha educação.

Ao meu orientador, Prof. Dr. João Maurício Rosário por suas importantes e direcionadas sugestões cumprindo seu papel com dedicação no decorrer deste trabalho.

Ao colega e professor Dr. José Manoel Balthazar, pelas participações nas discussões em momentos delicados no desenvolvimento deste trabalho, e por fazer despertar em mim o interesse pela área de robótica, ainda na graduação.

Ao meu amigo Cláudio E. A. de Sá, pelas proveitosas trocas de idéias ao longo da realização deste estudo.

A minha querida namorada Rosimeire C. Gonçalves e aos meus amigos Clivaldo de Oliveira e Wiliam C. Mariano pelo suporte não técnico.

Final e principalmente, a Deus.

Sumário:

Capítulo 1: Introdução

1.1 Escopo do Trabalho	1
1.2 Caracterização do Problema	2
1.3 Posicionamento do Problema de Controle	4

Capítulo 2: Modelagem Dinâmica de Robô Rígido

2.1 Introdução	7
2.2 Equações Dinâmicas	7
2.2.1 Sistema Rígido com n Graus de Liberdade	8
2.2.2 Sistema Rígido com 2 Graus de Liberdade	9

Capítulo 3: Modelagem Dinâmica de Robô Flexível

3.1 Introdução	12
3.2 Modelo Físico	13
3.3 Descrição Cinemática	15
3.3.1 Link 1	16
3.3.2 Link 2	16
3.4 Energia Cinética	18
3.5 Energia Potencial	22
3.6 Equações de Movimento	22

Capítulo 4: Simulações e Resultados	
4.1 Introdução	42
4.2 Manipulador Rígido	42
4.2.1 Sistema Desacoplado	43
4.2.2 Sistema Acoplado	47
4.3 Manipulador Flexível	54
 Capítulo 5: Conclusões e Sugestões para Trabalhos Futuros	
5.1 Introdução	64
5.2 Resumo das Conclusões Sobre o Modelo	64
5.3 Observações Gerais	65
5.4 Sugestões para Trabalhos Futuros	66
 Referências Bibliográficas	67
Anexo A	71
Anexo B	81
Anexo C	124

Lista de Figuras

- 1.1 Estrutura de controle
- 1.2 Sistema de compensação de efeitos físicos
- 2.1 Manipulador rígido com dois graus de liberdade
- 3.1 Modelo físico proposto
- 3.2 Vetor posição de um ponto sobre o link 1
- 3.3 Vetor posição de um ponto sobre o link 2
- 4.1 Sistema desacoplado sem carga na extremidade
- 4.2 Sistema desacoplado com carga na extremidade
- 4.3 Sistema acoplado sem carga na extremidade
- 4.4 Sistema acoplado com carga na extremidade
- 4.5 Sistema flexível com carga na extremidade

Nomenclatura

Letras Latinas

$\vec{A}, \vec{B}, \dots, \vec{a}, \vec{b}, \dots$	vetores geométricos
$[A], [B], \dots$	matrizes
jA_i	matriz transformação que relaciona o i-ésimo ao j-ésimo sistema de referência
E	módulo de Young
EI	rigidez
m	massa
m_p	massa da carga a ser movida pelo manipulador
m_j	massa da junta
g	aceleração da gravidade
L	comprimento
q_i	coordenada generalizada do manipulador
t	tempo
T	energia cinética
$u \bullet_E$	deslocamento flexível no fim do link (•)
V	energia potencial
$\dot{A}, \dot{a}, \dots$	primeira derivada no tempo de A, a, ...
$\ddot{A}, \ddot{a}, \dots$	segunda derivada no tempo de A, a, ...

Letras Gregas

ϕ_{ij}	funções admissíveis
θ_1, θ_2	ângulos
τ_1, τ_2	torques
μ	densidade por unidade de comprimento

Abreviações

$\bullet^T$	transposta da matriz ($\bullet$)
Tr	traço de uma matriz

Resumo

DAVID, Sergio Adriani, *Modelagem, Simulação e Controle de Robôs Flexíveis*, Campinas, :

Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1996., 128 p.
Tese (Mestrado)

Este estudo tem como objetivo principal a modelagem dinâmica de manipuladores flexíveis, e um estudo comparativo com robôs rígidos, tornando-se possível uma simulação deste modelo e o desenvolvimento de controladores eficientes. Neste trabalho desenvolve-se a modelagem dinâmica para um sistema que possui dois links flexíveis e duas juntas rotacionais, e para efeito de comparação trabalha-se também com uma estrutura rígida nas mesmas condições. A modelagem do sistema flexível exige o desenvolvimento de um conveniente modelo matemático. Ressalta-se o fato de que trata-se o problema com todas as suas não linearidades sem usar de nenhuma linearização, processo que é utilizado em quase a totalidade dos trabalhos na área, a fim de simplificar as equações de movimento, sendo desenvolvida ainda uma parametrização dos termos nessas equações de tal forma que o sistema flexível possa ser escrito como uma extensão do modelo rígido. Isso permite facilidade nas comparações entre os sistemas, tornando possível através de simulações controladas uma avaliação do comportamento do sistema, mostrando a possibilidade de compensação de efeitos físicos num problema de controle robótico.

Palavras Chave

1. Robótica. 2. Simulação (Computadores). 3. Robôs Industriais

Abstract

DAVID, Sergio Adriani, *Modeling, Simulation and Control of Flexible Robots*, Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1996., 128 p., Master (Thesis).

The main goal of this work is to model the dynamic behavior of flexible manipulators. It is also presented a comparative study with rigid robots. It is possible to use the model for computer simulations to aid the development of efficient control. In this work the dynamic modeling is performed for a system that contains two flexible links and two rotational joints. For the sake of comparison a rigid structure with two links and two rotational joints is also analyzed. A convenient mathematical model is developed for the modeling of the flexible system. I outline the fact that the motion equations are treated with all non-linearities taken into account, without the usage of any simplifying linearization procedure, as found in most of the works presented in the literature. A parametrization of the terms of the motion equations, wich makes it easier to compare the rigid and the flexible system, to assess the system behavior through controlled simulations and to show the possibility of compensating physical effects present in the robot control problem is also developed.

Key Words

1. Robotics. 2. Simulation (Computers). 3. Industrial Robots

Capítulo 1

Introdução

1.1 Escopo do Trabalho

Muitos estudos têm sido realizados a fim de que manipuladores mecânicos sejam capazes de realizar movimentos e tarefas semelhantes às aquelas realizadas por braços de seres humanos, fazendo assim, surgir um novo campo dentro da engenharia conhecido atualmente como robótica.

Reconhece-se um grande sucesso nesse sentido, pois atualmente muitos robôs industriais disponíveis comercialmente são amplamente utilizados nas mais diversas tarefas, como montagem, soldagem, pintura, etc. São também utilizados em ambientes que trabalhadores humanos não têm fácil acesso ou onde a segurança dos mesmos fica comprometida, como por exemplo em explorações submarinas e espaciais, no manuseio de materiais perigosos, etc.

Esses manipuladores - na grande maioria das vezes - são construídos de tal forma que seus links* podem ser considerados rígidos. O aumento da rigidez de seus links tem como principal objetivo impedir modos de vibração da estrutura.

Projeta-se, assim, manipuladores cuja secção reta de cada membro seja superdimensionada, não comprometendo com isso a precisão do controle.

Entretanto, os efeitos da prática de tornar os robôs bastante rígidos, refletem-se principalmente no grande aumento de peso do sistema, necessitando assim de acionadores mais potentes.

Por outro lado, manipuladores com links flexíveis quando comparados aos manipuladores com links rígidos, requerem menos material na sua construção, possuem menos

* **link**: do inglês, significa elo; em robótica é a maneira pela qual se refere a um membro do manipulador

peso, podem ser capazes de mover cargas maiores, consomem menos potência, necessitam de acionadores menores, podem ser mais velozes e até mais fáceis de serem transportados.

Fica então evidente que a utilização de links flexíveis em manipuladores está diretamente relacionada com a otimização dos elementos que compõem um sistema robótico.

Somando-se a isso, a necessidade atual no meio industrial de robôs rápidos e precisos-que atendam as exigências de produtividade e qualidade simultaneamente e que alcancem um grande volume de trabalho-exige a utilização de manipuladores com links flexíveis.

Também em alguns casos específicos onde se exige aplicações de braços longos e delgados, como por exemplo em aplicações aeroespaciais, consideráveis deformações estruturais podem ocorrer.

Portanto, a flexibilidade estrutural em manipuladores e controle dos mesmos tem-se tornado uma importante área de pesquisa, motivando esse trabalho, que tem como principal objetivo a modelagem dinâmica de manipuladores flexíveis e um estudo comparativo com robôs rígidos, tornando-se possível uma simulação deste modelo e o desenvolvimento de controladores eficientes.

1.2 Caracterização do Problema

Um manipulador robótico é um dispositivo que tem por função posicionar e orientar um mecanismo existente na sua extremidade. Esse mecanismo tem como objetivo fazer a fixação adequada de ferramentas definidas pelo tipo de tarefa a executar. Assim, duas partes principais podem ser consideradas na estrutura de um manipulador. A primeira parte é o braço constituído, no mínimo por três graus de liberdade utilizados para posicionamento do ponto de concentração dos referenciais de orientação. A segunda parte é o punho, normalmente constituído por outros três graus de liberdade rotacionais, com a função de orientação do referencial terminal.

Não levando-se em consideração a deformação nas juntas, o grau de liberdade relacionado ao movimento da base do robô pode ser considerado rígido, assim como os três graus de liberdade relacionados à orientação. Dessa forma, nota-se que a flexibilidade do sistema está relacionada aos dois graus de liberdade relacionados ao movimento dos dois links do manipulador, e por isso, o sistema flexível aqui tratado possui dois links.

Para um manipulador flexível, a estrutura possui flexibilidade considerável, e portanto um eficiente sistema de controle deve ser desenvolvido. É bem sabido que, em geral, um problema de controle consiste na obtenção do modelo dinâmico do manipulador, utilizando-o posteriormente para determinar as leis de controle que fornecem uma performance desejada.

O comportamento dinâmico pode ser descrito por um conjunto de equações diferenciais chamadas equações de movimento. O sistema de controle é então projetado baseado nessas equações de movimento.

Neste trabalho, realiza-se a modelagem dinâmica para um sistema que possui dois links flexíveis e duas juntas rotacionais, e para efeito de comparação trabalha-se também com uma estrutura rígida que também possui dois links e duas juntas rotacionais, caracterizando neste caso dois graus de liberdade.

Desenvolve-se também neste trabalho uma conveniente parametrização dos termos nas equações de movimento facilitando comparações entre os sistemas rígido e flexível nas simulações realizadas e mostrando a possibilidade de compensação de efeitos físicos num problema de controle robótico.

Assume-se que o sistema flexível considerado tem movimento planar e, ainda assim, a complexidade das equações dinâmicas obtidas para esse sistema é grande quando comparada àquelas obtidas na elaboração de modelos de manipuladores rígidos.

Aplica-se as equações de Lagrange e o método dos modos assumidos no desenvolvimento deste modelo. Ele é obtido basicamente pela superposição do movimento

flexível sobre um movimento de corpo rígido hipotético. Para isso desenvolve-se um conveniente modelo matemático.

Neste estudo, trunca-se o movimento elástico dos links no segundo modo, ou seja, considera-se que as amplitudes de todos os modos de vibrar são muito menores quando comparadas ao primeiro modo. Obtêm-se assim, um modelo não linear de seis graus de liberdade.

Ressalta-se o fato de que trata-se o problema com todas as suas não linearidades sem usar de nenhuma linearização que em quase a totalidade dos trabalhos na área é utilizada a fim de simplificar as equações de movimento. Entretanto, essa prática matemática de linearização pode eventualmente desprezar pequenas contribuições de efeitos físicos que somados ou superpostos causem influência significativa no sistema.

Baseado nisto, um dos desafios desse trabalho é tratar as equações de movimento de maneira mais geral possível sem linearizações, e através de simulações controladas avaliar o comportamento do sistema.

1.3 - Posicionamento do Problema de Controle

Um robô industrial é um sistema mecânico complexo, com acoplamentos dinâmicos entre as articulações. Geralmente, cada junta é constituída de motores elétricos e sensores de posição incrementais.

Os sensores de posição são colocados antes do redutor, entre o eixo do motor e o eixo de transmissão de cada junta. Consequentemente, eles não são capazes de medir possíveis deformações da estrutura.

Ilustra-se na figura 1.1 uma estrutura de controle a fim de elucidar o raciocínio.

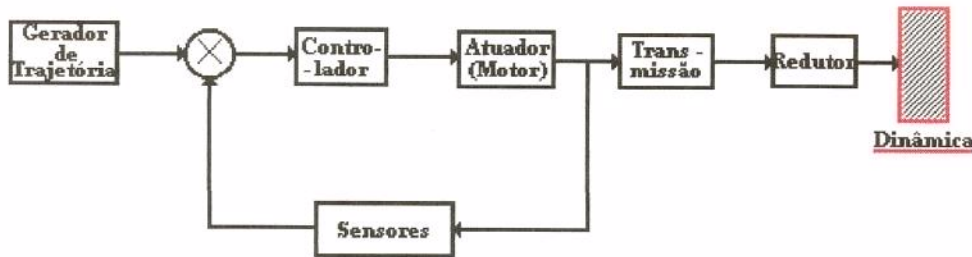


Figura 1.1: Estrutura de Controle

O comportamento desejado para o sistema é fornecido pelo gerador de trajetórias, que envia sinais de referência (entrada) relacionados a cada grau de liberdade do manipulador. Esses sinais podem representar, por exemplo, a dependência no tempo da variável posição angular. (Sá [31]).

Os sensores de posição fazem a leitura da posição angular real (saída) em que o sistema se encontra. Ambos os sinais são comparados e o erro - que é a diferença entre o sinal de referência e o sinal lido pelo sensor- é enviado ao controlador que tem o papel de minimizá-lo a fim de tornar a saída do sistema mais próxima possível da entrada de referência.

No caso de um manipulador flexível, a estrutura do sistema de controle deverá levar em consideração alguns aspectos dinâmicos devido a essa flexibilidade.

É nesse ponto que usualmente aplica-se a estratégia do aumento da rigidez dos links dos manipuladores, impedindo vibrações da estrutura. Perde-se, entretanto, as vantagens associadas ao uso de links flexíveis já mencionadas no início deste capítulo.

Com a preocupação de poder utilizar dessas vantagens, este trabalho focaliza a sua atenção na modelagem e simulação dinâmica de manipuladores com seus links mantidos flexíveis, tendo em vista suas implicações no sistema de controle dos mesmos.

Conhecendo-se a dinâmica do sistema flexível, pode-se pensar na possibilidade de realizar compensações de efeitos físicos, subtraindo termos das equações de movimento na malha de controle, que através de simulações revelaram-se relevantes para a flexibilidade do sistema.

Para atingir-se esse objetivo, desenvolve-se uma conveniente parametrização das equações de movimento para um sistema flexível, tratando-o da maneira mais geral possível sem linearizações. No capítulo 3 apresenta-se os detalhes deste procedimento

Aplica-se também essa parametrização na modelagem dinâmica de uma estrutura rígida com dois links e duas juntas rotacionais, que é brevemente tratado no capítulo 2, para efeito de comparação com o sistema flexível.

Essa maneira de tratar as equações de movimento permite um monitoramento sobre cada parcela de contribuição para a flexibilidade do sistema, possibilitando sua eventual compensação numa malha de controle. Ilustra-se na figura 1.2 um sistema de compensação de efeitos físicos.

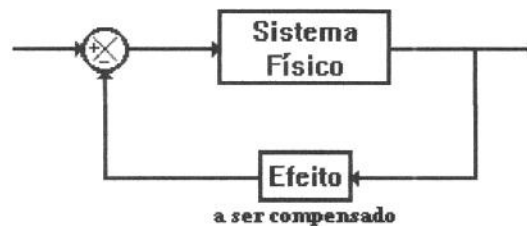


figura 1.2: Sistema de compensação de efeitos físicos

Com o interesse voltado em manter o sistema com links flexíveis - sem torná-lo rígido - pode-se pensar na possibilidade de compensar um efeito físico qualquer representado por uma dessas parcelas nas equações de movimento, subtraindo-o na malha de controle, ou seja, cancelando a alteração que ele poderia causar no comportamento do sistema.

Também pode-se matematicamente reduzir o sistema flexível aqui tratado ao sistema rígido com a anulação dos termos relacionados à flexibilidade. Isso caracteriza uma possibilidade de se encontrar uma fronteira entre os sistemas rígido e flexível. Tendo isso em vista, realiza-se simulações baseadas numa certa metodologia que é apresentada juntamente com os resultados das simulações no capítulo 4. No capítulo 5 são mostradas finalmente as conclusões e perspectivas de trabalhos futuros.

Capítulo 2

Modelagem Dinâmica de Robô Rígido

2.1 Introdução

O objetivo principal neste capítulo é apresentar uma conveniente parametrização dos termos que envolvem as equações de movimento para um sistema robótico rígido com dois links constituído de duas juntas rotacionais, caracterizando assim dois graus de liberdade.

Realiza-se esse procedimento através de descrição das equações de movimento do manipulador robótico de forma a facilitar o estabelecimento de comparações com o modelo flexível que será apresentado no capítulo 3.

Trata-se primeiramente a modelagem dinâmica para um sistema genérico com n graus de liberdade, procurando com isso esclarecer a sistemática de obtenção dessas equações de movimento. Particulariza-se então, essas equações para um sistema com dois graus de liberdade enfatizando a parametrização realizada.

2.2 Equações Dinâmicas

O comportamento dinâmico de um manipulador pode ser descrito por um conjunto de equações diferenciais chamadas equações dinâmicas de movimento.(Paul, [28]).

Essas equações de movimento podem convenientemente ser expressas através da aplicação direta do formalismo de Euler-Lagrange para sistemas não conservativos.(Goldstein, [19]).

A fim de obter informação cinemática do link, pode-se utilizar a representação de Denavit-Hartenberg, que descreve os deslocamentos espaciais entre sistemas de referência de dois links vizinhos.(Craig,[14]; Fu,[17]; Paul, [28])

A aplicação direta do formalismo Lagrangeano juntamente com a representação de Denavit-Hartenberg, resulta na descrição das equações de movimento do manipulador de forma compacta e sistemática. (Fu,[17], Paul,[28]).

A obtenção dessas equações dinâmicas para um manipulador rígido com n graus de liberdade foi baseada no conhecimento da:

1- Matriz de transformação homogênea 4×4 , ${}^{i-1}A_i$, que descreve a relação espacial entre o i -ésimo e o $(i-1)$ -ésimo sistema de referência. Ela relaciona um ponto fixo expresso no i -ésimo com o mesmo expresso no $(i-1)$ -ésimo sistema de referência.

2- Equação de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i \quad i = 1(1)n \quad (2.1)$$

onde:

$L = T - V$ é a função Lagrangeano do sistema;

T é a energia cinética total do sistema;

V é a energia potencial total do sistema;

q_i é a coordenada generalizada do link do robô;

$\dot{q}_i$ é a primeira derivada no tempo da coordenada generalizada, e

τ_i é o torque aplicado na junta i para mover o respectivo link i .

2.2.1 Sistema rígido com n graus de liberdade

A literatura, algumas vezes, traz a generalização dos resultados das equações dinâmicas para um manipulador rígido com n graus de liberdade. (Paul,[28]; Fu,[17]; Asada,[1]). Nesta seção, essas equações também são apresentadas, porém para que não se quebre a sequência lógica das idéias os detalhes podem ser encontrados em anexo [Anexo A]. Procura-se, entretanto, trazer em anexo uma riqueza de detalhes nas operações matemáticas normalmente não encontradas na literatura a fim de que o leitor interessado tenha mais facilidade na compreensão.

A obtenção das equações de movimento pelo formalismo de Lagrange implica na necessidade de se encontrar as energias cinética e potencial do sistema.

A energia cinética total para um manipulador rígido com n graus de liberdade é dada por:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i \left[\text{Tr} \left(U_{ip} J_i U_{ir}^T \right) \dot{q}_p \dot{q}_r \right] \quad (2.2)$$

A energia potencial total é dada por:

$$V = \sum_{i=1}^n -m_i g {}^0\tilde{r}_i = - \sum_{i=1}^n m_i g ({}^0A_i {}^i\tilde{r}_i) \quad (2.3)$$

Portanto, a função Lagrangeano tem a seguinte expressão:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i \left[\text{Tr} \left(U_{ip} J_i U_{ir}^T \right) \dot{q}_p \dot{q}_r \right] + \sum_{i=1}^n m_i g ({}^0A_i {}^i\tilde{r}_i) \quad (2.4)$$

Calculando-se as derivadas dessa função na equação de Euler-Lagrange (2.1) pode-se escrever as equações de movimento como:

$$\begin{aligned} \Gamma_i = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} = & \sum_{j=i}^n \sum_{k=1}^j \left[\text{Tr} \left(U_{jk} J_j U_{ji}^T \right) \ddot{q}_k \right] + \\ & + \sum_{j=i}^n \sum_{k=1}^j \sum_{m=1}^j \left[\text{Tr} \left(U_{jkm} J_j U_{ji}^T \right) \dot{q}_k \dot{q}_m \right] \\ & - \sum_{j=i}^n m_j g U_{ji} {}^j\tilde{r}_j \end{aligned} \quad (2.5)$$

para $i = 1(1)n$.

2.2.2 Sistema rígido com dois graus de liberdade

Um sistema robótico rígido com dois links e duas juntas rotacionais é ilustrado pela figura 2.1.

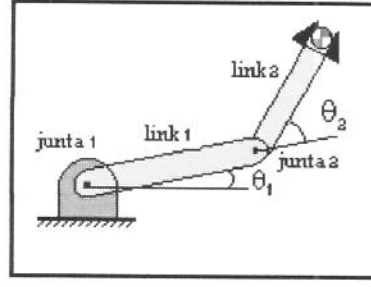


Figura 2.1 : Manipulador Rígido com Dois Graus de Liberdade

Esse sistema é, na verdade, um caso particular daquele apresentado na seção (2.2.1). Nesse caso, o sistema possui dois graus de liberdade ($n = 2$) e suas equações de movimento podem ser obtidas de forma análoga. Com o objetivo de estudar o comportamento do sistema desde a situação mais simples (rígido e desacoplado), até a situação de maior complexidade (flexível e acoplado), é proposta uma conveniente e sistemática parametrização dos termos nas equações de movimento, que para o manipulador rígido com dois graus de liberdade é mostrada a seguir:

$$J_1^* \ddot{\theta}_1 + F_1^* \dot{\theta}_1 + \Gamma_{perturb1}^* = \tau_1 \quad (2.6)$$

$$J_2^* \ddot{\theta}_2 + F_2^* \dot{\theta}_2 + \Gamma_{perturb2}^* = \tau_2 \quad (2.7)$$

onde os coeficientes são dados por:

$$J_1^* = A_1^* + B_1 + A_2^* c\theta_2 \quad (2.8)$$

$$F_1^* = -A_2^* \dot{\theta}_2 s\theta_2 \quad (2.9)$$

$$\Gamma_{perturb1}^* = \left(A_3^* + \frac{1}{2} A_2^* c\theta_2 \right) \ddot{\theta}_2 + \left(-\frac{1}{2} A_2^* \dot{\theta}_2^2 s\theta_2 \right) + A_4^* c\theta_1 + A_5^* c(\theta_1 + \theta_2) \quad (2.10)$$

$$J_2^* = A_3^* \quad (2.11)$$

$$F_2^* = 0 \quad (2.12)$$

$$\Gamma_{perturb2}^* = \left(A_3^* + \frac{1}{2} A_2^* c \theta_2 \right) \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{2} A_2^* \dot{\theta}_1^2 s \theta_2 + A_5^* c (\theta_1 + \theta_2) \quad (2.13)$$

e

$$\begin{aligned} A_1^* &= \alpha_1 + \alpha_1^{\downarrow} & A_4^* &= \alpha_4 + \alpha_4^{\downarrow} \\ A_2^* &= \alpha_2 + \alpha_2^{\downarrow} & A_5^* &= \alpha_5 + \alpha_5^{\downarrow} \\ A_3^* &= \alpha_3 + \alpha_3^{\downarrow} \end{aligned} \quad (2.14)$$

com

$$\alpha_1 = \frac{1}{3} m_1 L_1^2 + \frac{1}{3} m_2 L_2^2 + m_2 L_1^2 \quad \alpha_1^{\downarrow} = m_p L_1^2 + m_p L_2^2 \quad (2.15)$$

$$\alpha_2 = m_2 L_1 L_2 \quad \alpha_2^{\downarrow} = 2 m_p L_1 L_2 \quad (2.16)$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{3} m_2 L_2^2 \quad \alpha_3^{\downarrow} = m_p L_2^2 \quad (2.17)$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{2} m_1 L_1 g + m_2 L_1 g \quad \alpha_4^{\downarrow} = m_p L_1 g \quad (2.18)$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{2} m_2 L_2 g \quad \alpha_5^{\downarrow} = m_p L_2 g \quad (2.19)$$

No fim do capítulo 3, quando as equações de movimento para o sistema flexível já tiverem sido obtidas, apresentar-se-á um diagrama esquemático procurando elucidar ainda mais essa sistemática de parametrização utilizada, mostrando a maneira pela qual as equações são escritas desde o caso mais simples (desacoplado e rígido) até o mais complexo (acoplado e flexível).

O comportamento dinâmico desse manipulador rígido com dois graus de liberdade pode ser estudado por meio de simulações dessas equações de movimento. Realiza-se essas simulações com o intuito principal de estabelecer comparações com o manipulador flexível e os resultados são apresentados no capítulo 4.

Capítulo 3

Modelagem Dinâmica de Robô Flexível

3.1 Introdução

O objetivo principal deste capítulo é a obtenção das equações dinâmicas de movimento representativas de um manipulador robótico possuindo dois links flexíveis e duas juntas rotacionais, sem atrito.

Apresenta-se a metodologia proposta neste trabalho considerando que o sistema flexível descrito realizará um movimento planar. Mesmo assim, a complexidade das equações dinâmicas obtidas para esse sistema é grande quando comparada àquelas obtidas na elaboração de modelos de manipuladores rígidos. O problema poderá ser facilmente estendido na descrição de outros movimentos.

As equações de Lagrange e o método dos modos assumidos são aplicados neste modelo. Ele é obtido basicamente pela superposição do movimento flexível sobre um movimento de corpo rígido hipotético. Para isso torna-se extremamente necessário o desenvolvimento de um conveniente modelo matemático.

As equações de movimento são apresentadas da maneira mais genérica possível, considerando-se todos os termos não lineares intrínsecos no modelo do robô. Realiza-se também uma parametrização dessas equações de forma análoga àquela realizada no capítulo anterior para o sistema rígido. Detalhes e alguns cálculos realizados podem ser encontrados em anexo [Anexo B].

A partir dessas considerações as equações de movimento para um manipulador que possui seus links flexíveis poderão ser escritas como uma extensão daquelas obtidas para manipuladores com links rígidos, onde os termos matemáticos acrescidos neste modelo estão diretamente relacionados à flexibilidade do sistema.

Dessa forma, caracteriza-se a possibilidade matemática de uma transição de um modelo para outro, ou seja, pode-se com a anulação dos termos relacionados à flexibilidade no modelo flexível reduzi-lo ao modelo rígido, assim como o acréscimo de termos relacionados a flexibilidade no modelo rígido pode torná-lo flexível.

Isso permitirá possíveis comparações entre os sistemas rígido e flexível nas simulações que serão realizadas no capítulo 4, abrindo perspectivas para a compensação de efeitos físicos na estratégia de controle proposta.

3.2- Modelo Físico

O sistema físico em estudo é composto de dois links flexíveis constituído por duas juntas rotacionais sem atrito, como mostra a figura 3.1. Ele está fixo a um sistema de referência. O movimento relativo dos dois links é resultante dos torques aplicados em cada junta do sistema.

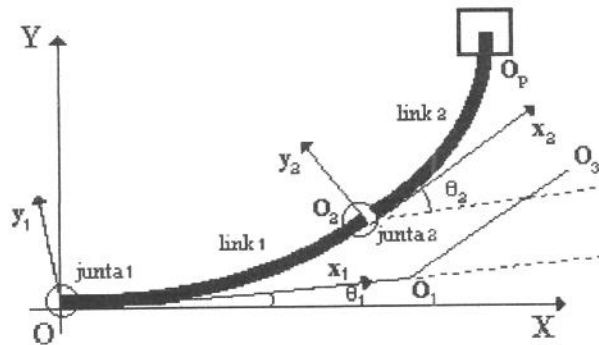


Figura 3.1 : Modelo Físico Proposto

No final do link 1, uma massa concentrada representa o servo motor e a própria massa da junta. No final do link 2, uma massa discreta pode aparecer, representando a carga a ser movida entre dois pontos do plano.

Para a descrição completa do movimento, três sistemas de referência podem ser definidos:

[O, X, Y] - sistema referencial inercial com origem na junta 1;

$[O, x_1, y_1]$ - sistema referencial com origem em O e o eixo x_1 tangente ao link 1 no ponto O ;

$[O_2, x_2, y_2]$ - sistema referencial com origem na junta 2 e com o eixo x_2 tangente ao link 2 no ponto O_2 .

Também dois ângulos podem ser definidos:

$\theta_1(t)$ é o ângulo entre os eixos x_1 e x ;

$\theta_2(t)$ é o ângulo entre os eixos x_1 e x_2 .

Define-se também um novo sistema como sendo formado por dois segmentos OO_1 e O_1O_3 , tendo ângulo θ_2 em O_1 , e o movimento global (total) pode ser entendido como um movimento de um sistema hipotético rígido OO_1O_3 e um movimento flexível dos links 1 e 2 com relação a esse sistema móvel.

A fim de simplificar as notações, introduz-se uma representação na forma de matrizes:

$$\{\vec{U}\} = \begin{bmatrix} \vec{u}_x \\ \vec{u}_y \end{bmatrix}, \text{ é o vetor unitário do sistema de referência } OXY;$$

$$\{\vec{U}_1\} = \begin{bmatrix} \vec{u}_{x1} \\ \vec{u}_{y1} \end{bmatrix}, \text{ é o vetor unitário do sistema de referência } Ox_1y_1;$$

$$\{\vec{U}_2\} = \begin{bmatrix} \vec{u}_{x2} \\ \vec{u}_{y2} \end{bmatrix}, \text{ é o vetor unitário do sistema de referência } O_2x_2y_2.$$

Assim,

$$\{\vec{U}_1\} = [C_1] \{\vec{U}\} \quad (3.1)$$

$$\{\vec{U}_2\} = [C_2] \{\vec{U}\} \quad (3.2)$$

onde $[C_1]$ e $[C_2]$ são as matrizes de transformação rotacionais, expressas como:

$$[C_1] = \begin{bmatrix} c\theta_1 & s\theta_1 \\ -s\theta_1 & c\theta_1 \end{bmatrix}$$

e

$$[C_2] = \begin{bmatrix} c(\theta_1 + \theta_2) & s(\theta_1 + \theta_2) \\ -s(\theta_1 + \theta_2) & c(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}$$

onde:

$$c\theta_1 = \cos\theta_1$$

$$s\theta_1 = \sin\theta_1$$

$$c(\theta_1 + \theta_2) = \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$s(\theta_1 + \theta_2) = \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

3.3 Descrição Cinemática

A posição de qualquer ponto no sistema pode ser descrita por uma definição conveniente de um conjunto de coordenadas. Como indicado na figura 3.2, qualquer ponto P_i pode ser especificado se uma nova variável $u_i(x_i, t)$ for definida como sendo a coordenada do movimento flexível com relação ao sistema de referência $[O x_i y_i]$.

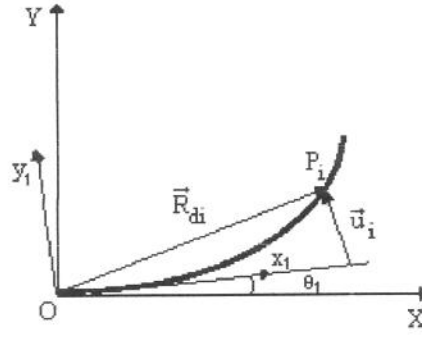


Figura 3.2 : Vetor posição de um ponto sobre o link 1

O vetor posição do ponto P_i será:

$$\vec{R}_{di} = \{\vec{U}_i\}^T \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} = x_i \vec{u}_{xi} + y_i \vec{u}_{yi} \quad (3.3)$$

3.3.1 Link 1

O vetor posição de qualquer ponto no link 1, pode agora ser escrito utilizando a definição introduzida. Sua expressão é a seguinte:

$$\vec{R}_{d1} = \{\vec{U}_1\}^T \begin{Bmatrix} x_1 \\ u_1 \end{Bmatrix} = \{\vec{U}\}^T [C_1]^T \begin{Bmatrix} x_1 \\ u_1 \end{Bmatrix} = (x_1 c \theta_1 - u_1 s \theta_1) \vec{u}_x + (x_1 s \theta_1 + u_1 c \theta_1) \vec{u}_y \quad (3.4)$$

3.3.2 Link 2

A fim de definir o vetor posição de qualquer ponto no link 2, será necessário assumir que os deslocamentos dos links flexíveis com relação aos sistemas de referência $[O \ x_1 \ y_1]$ e $[O_2 \ x_2 \ y_2]$ sejam pequenos o suficiente tal que podemos considerar o deslocamento dos pontos O_2 e O_p como uma linha reta (Book[4]). A figura 3.3 mostra o vetor posição de qualquer ponto P_2 no link 2.

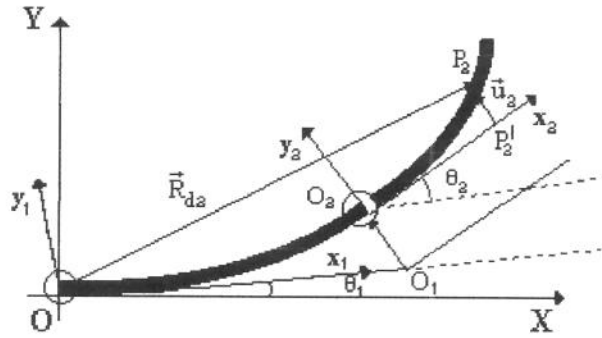


Figura 3.3 : Vetor posição de um ponto sobre o link 2

Observando a figura 3.3, fica fácil notar que o vetor posição de qualquer ponto P_2 sobre o link 2 será:

$$\vec{R}_{d2} = \vec{O} \vec{O}_1 + \vec{O}_1 \vec{O}_2 + \vec{O}_2 \vec{P}_2^I + \vec{P}_2^I \vec{P}_2 \quad (3.5)$$

Se,

u_{1E} = deslocamento linear flexível no final do link 1

L_1 = comprimento do link 1

L_2 = comprimento do link 2

então:

$$\vec{O} \vec{O}_1 = \{\vec{U}\}^T \begin{Bmatrix} L_1 c \theta_1 \\ L_1 s \theta_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} L_1 c \theta_1 \\ L_1 s \theta_1 \end{Bmatrix} = L_1 c \theta_1 \vec{u}_x + L_1 s \theta_1 \vec{u}_y \quad (3.6)$$

$$\vec{O}_1 \vec{O}_2 = \{\vec{U}\}^T \begin{Bmatrix} -u_{1E} s \theta_1 \\ u_{1E} c \theta_1 \end{Bmatrix} = -u_{1E} s \theta_1 \vec{u}_x + u_{1E} c \theta_1 \vec{u}_y \quad (3.7)$$

$$\vec{O}_2 \vec{P}_2^I = \{\vec{U}_2\}^T \begin{Bmatrix} x_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \{\vec{U}\}^T [C_2]^T \begin{Bmatrix} x_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = x_2 c(\theta_1 + \theta_2) \vec{u}_x + x_2 s(\theta_1 + \theta_2) \vec{u}_y \quad (3.8)$$

$$\vec{P}_2^T \vec{P}_2 = \{\vec{U}_2\}^T \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \{\vec{U}\}^T [C_2]^T \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \end{Bmatrix} = -u_2 s(\theta_1 + \theta_2) \vec{u}_x + u_2 c(\theta_1 + \theta_2) \vec{u}_y \quad (3.9)$$

e assim,

$$\vec{R}_{d2} = \{\vec{U}\}^T \left[\begin{Bmatrix} L_1 c \theta_1 \\ L_1 s \theta_1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -u_{1E} s \theta_1 \\ u_{1E} c \theta_1 \end{Bmatrix} + [C_2]^T \begin{Bmatrix} x_2 \\ 0 \end{Bmatrix} + [C_2]^T \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \end{Bmatrix} \right] \quad (3.10)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \vec{R}_{d2} = & [L_1 c \theta_1 - u_{1E} s \theta_1 + x_2 c(\theta_1 + \theta_2) - u_2 s(\theta_1 + \theta_2)] \vec{u}_x + \\ & + [L_1 s \theta_1 + u_{1E} c \theta_1 + x_2 s(\theta_1 + \theta_2) + u_2 c(\theta_1 + \theta_2)] \vec{u}_y \end{aligned} \quad (3.11)$$

Uma vez obtidos os vetores posição, pode-se agora, obter os vetores velocidade através de derivação no tempo desses vetores posição. Obtêm-se assim, $\dot{\vec{R}}_{d1}$ e $\dot{\vec{R}}_{d2}$. Da expressão (3.4), nota-se que:

$$\dot{\vec{R}}_{d1} = [-\dot{\theta}_1 x_1 s \theta_1 - \dot{u}_1 s \theta_1 - u_1 \dot{\theta}_1 c \theta_1] \vec{u}_x + [\dot{\theta}_1 x_1 c \theta_1 - \dot{\theta}_1 u_1 s \theta_1 + \dot{u}_1 c \theta_1] \vec{u}_y \quad (3.12)$$

De forma análoga, obtem-se da expressão (3.11)

$$\begin{aligned} \dot{\vec{R}}_{d2} = & [-L_1 \dot{\theta}_1 s \theta_1 - \dot{u}_{1E} s \theta_1 - u_{1E} \dot{\theta}_1 c \theta_1 - x_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) s(\theta_1 + \theta_2) \\ & - \dot{u}_2 s(\theta_1 + \theta_2) - u_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) c(\theta_1 + \theta_2)] \vec{u}_x + \\ & + [L_1 \dot{\theta}_1 c \theta_1 + \dot{u}_{1E} c \theta_1 - u_{1E} \dot{\theta}_1 s \theta_1 + x_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) c(\theta_1 + \theta_2) + \\ & + \dot{u}_2 c(\theta_1 + \theta_2) - u_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) s(\theta_1 + \theta_2)] \vec{u}_y \end{aligned} \quad (3.13)$$

3.4 Energia Cinética

Encontradas as velocidades sobre um ponto qualquer nos links 1 e 2, respectivamente $\dot{\vec{R}}_{d1}$ e $\dot{\vec{R}}_{d2}$, pode-se obter a energia cinética, que é expressa como:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} \int_{m_1} \dot{\vec{R}}_{d1} \cdot \dot{\vec{R}}_{d1} dm + \frac{1}{2} \int_{m_2} \dot{\vec{R}}_{d2} \cdot \dot{\vec{R}}_{d2} dm \quad (3.14)$$

onde:

dm é o elemento de massa no ponto P_i ($i = 1, 2$)

e

m_1 e m_2 são as massas dos links 1 e 2 respectivamente.

Se o produto escalar $\dot{\vec{R}}_{d1} \cdot \dot{\vec{R}}_{d1}$ for calculado, uma expressão para a energia cinética T_1 é obtida diretamente, e

$$T_1 = \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 \int_{m_1} x_1^2 dm + \frac{1}{2} \int_{m_1} \dot{u}_1^2 dm + \dot{\theta}_1 \int_{m_1} x_1 \dot{u}_1 dm + \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 \int_{m_1} u_1^2 dm \quad (3.15)$$

De maneira análoga, ou seja, calculando o produto escalar $\dot{\vec{R}}_{d2} \cdot \dot{\vec{R}}_{d2}$, obtêm-se a energia cinética T_2 , que tem a forma

$$\begin{aligned} T_2 = & \frac{1}{2} m_2 L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{u}_{1E}^2 + \frac{1}{2} m_2 u_{1E}^2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 L_1 \dot{\theta}_1 \dot{u}_{1E} + \frac{1}{2} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \int_{m_2} x_2^2 dm \\ & + \frac{1}{2} \int_{m_2} \dot{u}_2^2 dm + \frac{1}{2} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \int_{m_2} u_2^2 dm + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \int_{m_2} x_2 \dot{u}_2 dm \\ & + L_1 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) c\theta_2 \int_{m_2} x_2 dm + L_1 \dot{\theta}_1 c\theta_2 \int_{m_2} u_2 dm + \dot{u}_{1E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) c\theta_2 \int_{m_2} x_2 dm \\ & + \dot{u}_{1E} c\theta_2 \int_{m_2} \dot{u}_2 dm + \dot{u}_{1E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) s(-\theta_2) \int_{m_2} u_2 dm + u_{1E} \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) s\theta_2 \int_{m_2} x_2 dm \\ & + L_1 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) s(-\theta_2) \int_{m_2} u_2 dm + u_{1E} \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) c\theta_2 \int_{m_2} u_2 dm + u_{1E} \dot{\theta}_1 s\theta_2 \int_{m_2} \dot{u}_2 dm \end{aligned} \quad (3.16)$$

É importante observar que até o presente momento foram obtidas as energias cinéticas T_1 para o link 1 e T_2 para o link 2. Entretanto, o mesmo procedimento pode ser aplicado para uma massa concentrada na junta 2, e para uma carga com momento de inércia J_{xp} com relação a um eixo normal ao plano de movimento e através do centro de gravidade. Fazendo-se isto para uma massa na junta 2, a expressão (3.12) pode ser modificada para

$$\dot{\vec{R}}_j = [-\dot{\theta}_1 L_1 s\theta_1 - \dot{u}_{1E} s\theta_1 - \dot{\theta}_1 u_{1E} c\theta_1] \vec{u}_x + [\dot{\theta}_1 L_1 c\theta_1 + \dot{u}_{1E} c\theta_1 - u_{1E} \dot{\theta}_1 s\theta_1] \vec{u}_y \quad (3.17)$$

Deve-se, contudo observar que:

i) na modificação x_1 foi substituído por L_1 , pois nesse caso não estamos num ponto qualquer sobre o link 1, mas sim em sua extremidade, onde se situa a junta 2.

ii) u_1 foi substituído por u_{1E} , pois u_{1E} é o deslocamento linear flexível no final do link 1. Consequentemente $\dot{u}_1$ também foi substituído por $\dot{u}_{1E}$.

De forma análoga pode-se estender o raciocínio também para a carga a ser movida. Neste caso, a expressão (3.18) escreve-se da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{R}}_p = & [-L_1 \dot{\theta}_1 s\theta_1 - \dot{u}_{1E} s\theta_1 - u_{1E} \dot{\theta}_1 c\theta_1 - L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) s(\theta_1 + \theta_2) \\ & - \dot{u}_{2E} s(\theta_1 + \theta_2) - u_{2E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) c(\theta_1 + \theta_2)] \vec{u}_x + \\ & [L_1 \dot{\theta}_1 c\theta_1 + \dot{u}_{1E} c\theta_1 - u_{1E} \dot{\theta}_1 s\theta_1 + L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) c(\theta_1 + \theta_2) \\ & + \dot{u}_{2E} c(\theta_1 + \theta_2) - u_{2E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) s(\theta_1 + \theta_2)] \vec{u}_y \end{aligned} \quad (3.18)$$

Aqui, também cabem as seguintes observações:

i) a carga situa-se na extremidade do link 2, e portanto, x_2 foi substituído por L_2 .

ii) u_{2E} e $\dot{u}_{2E}$ substituem respectivamente u_2 e $\dot{u}_2$, enfatizando que o deslocamento considerado é devido a flexibilidade no final do link 2.

Se o momento de inércia da carga com relação a um eixo através do ponto O_2 é definido por J_p , e considerando que

$$\left[\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right]_{x_2=L_2} = u_{2E} \quad (3.19)$$

é o deslocamento angular, a energia cinética total do sistema pode finalmente ser expressa como:

$$T = \frac{1}{2} \int_{m_1} \dot{\vec{R}}_{d1} \cdot \dot{\vec{R}}_{d1} dm + \frac{1}{2} \int_{m_2} \dot{\vec{R}}_{d2} \cdot \dot{\vec{R}}_{d2} dm + \frac{1}{2} m_j \dot{\vec{R}}_j \cdot \dot{\vec{R}}_j + \frac{1}{2} m_p \dot{\vec{R}}_p \cdot \dot{\vec{R}}_p + \frac{1}{2} J_p \dot{u}_{2E}^2 \quad (3.20)$$

onde:

$\frac{1}{2} \int_{m_1} \dot{\vec{R}}_{d1} \cdot \dot{\vec{R}}_{d1} dm$ é a energia cinética do link 1;

$\frac{1}{2} \int_{m_2} \dot{\vec{R}}_{d2} \cdot \dot{\vec{R}}_{d2} dm$ é a energia cinética do link 2;

$\frac{1}{2} m_j \dot{\vec{R}}_j \cdot \dot{\vec{R}}_j$ é a energia cinética relacionada à massa concentrada representando o servo-motor e a própria junta. Essa massa situa-se no ponto O_2 , na junta 2;

$\frac{1}{2} m_p \dot{\vec{R}}_p \cdot \dot{\vec{R}}_p$ é a energia cinética relacionada à massa da carga a ser movida. Essa massa situa-se no fim do link 2; e

$\frac{1}{2} J_p \dot{u}_{2E}^2$ é a energia cinética rotacional da carga devido ao seu movimento em torno do eixo que passa pelo ponto O_2 e que é perpendicular ao plano da figura.

3.5 Energia Potencial

Para calcular a energia potencial do sistema assume-se uma energia associada ao movimento rígido (energia potencial gravitacional), mais a energia potencial elástica dos links.

Então, tomando-se Ox como a posição de referência, a energia potencial do sistema (assumindo u_1 e u_2 suficientemente pequenos) será

$$V = V_g + V_{\text{elástica}} \quad (3.21)$$

e, portanto

$$\begin{aligned} V = & m_1 g \frac{L_1}{2} s\theta_1 + m_j g L_1 s\theta_1 + \\ & + m_2 g \left[L_1 s\theta_1 + \frac{L_2}{2} s(\theta_1 + \theta_2) \right] + \\ & + m_p g \left[L_1 s\theta_1 + L_2 s(\theta_1 + \theta_2) \right] \\ & - \frac{1}{2} \int_0^{L_1} E I_1 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \right)^2 dx_1 - \frac{1}{2} \int_0^{L_2} E I_2 \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right)^2 dx_2 \end{aligned} \quad (3.22)$$

onde:

g é a aceleração da gravidade;

$E I_1$, $E I_2$ são rigidez dos links 1 e 2 respectivamente, assumidas constantes neste modelo.

3.6 Equações de Movimento

A fim de escrever as equações de movimento do sistema, utiliza-se o método dos modos assumidos. Esse método consiste em assumir uma solução dos movimentos flexíveis na forma de uma série composta de uma combinação linear de funções admissíveis, que são funções das coordenadas espaciais, multiplicadas pelas coordenadas generalizadas dependentes do tempo $q_i(t)$.

No caso dos deslocamentos flexíveis dos links 1 e 2, é possível assumir

$$u_1 = \sum_{i=1}^n \phi_{1i}(x_1) q_{1i}(t) \quad (3.23)$$

e

$$u_2 = \sum_{i=1}^n \phi_{2i}(x_2) q_{2i}(t) \quad (3.24)$$

onde as funções admissíveis $\phi_{ji}(x)$ devem satisfazer as condições de contorno geométricas com relação a representação dos links nos sistemas de referência $[Ox_1y_1]$ e $[O_2x_2y_2]$.

Assim, o sistema fica representado por $(2n + 2)$ graus de liberdade, com $[\theta_1(t), \theta_2(t)]$ e $[q_{1i}(t), q_{2i}(t)]$, $i = 1(1)n$ sendo as coordenadas generalizadas.

Assumindo que as amplitudes de todos os outros modos de vibrar são muito menores quando comparadas ao primeiro modo (Book[4]), o sistema pode ser truncado com n igual a 2, resultando num problema de seis graus de liberdade.

Com isso, as equações (3.23) e (3.24) assumem a forma:

$$u_1 = \phi_{11}(x_1) q_{11}(t) + \phi_{12}(x_1) q_{12}(t) \quad (3.25)$$

$$u_2 = \phi_{21}(x_2) q_{21}(t) + \phi_{22}(x_2) q_{22}(t) \quad (3.26)$$

Assumindo-se também que $\phi_{ji}(x)$ são as autofunções do problema de uma viga engastada-livre, isto é, engastada numa extremidade e livre na outra, as condições de contorno geométricas serão satisfeitas (Crandall[15]) e devido a ortogonalidade dessas funções

$$\int_0^{L_a} \phi_r(x) \phi_s(x) dx = \int_0^{L_a} \phi_r^{\parallel} \phi_s^{\parallel}(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } r \neq s \\ 1 & \text{se } r = s \end{cases} \quad (3.27)$$

onde

$$\phi_r(x) = \left(\cosh \lambda_r x - \cos \lambda_r x \right) - \sigma_r \left(\sinh \lambda_r x - \sin \lambda_r x \right);$$

r é o modo de vibração; e

λ_r e σ_r são constantes que possuem valores característicos para viga engastada-livre.

Pode-se agora avaliar as integrais nas expressões para as energias cinética e potencial.

Esse será o próximo passo, a começar pelas integrais relacionadas com a expressão para a energia cinética.

$$\int_{m_1} \dot{x}_1^2 dm = J_0 \quad (3.28)$$

$$\int_{m_1} \dot{u}_1^2 dm = m_1 (\dot{q}_{11}^2(t) + \dot{q}_{12}^2(t)) \quad (3.29)$$

$$\int_{m_1} \dot{u}_1 x_1 dm = n w_{11} \dot{q}_{11} + n w_{12} \dot{q}_{12} \quad (3.30)$$

onde

$$n w_{11} = \int_0^{L_1} \mu_1 x \phi_{11}(x) dx$$

com μ = densidade por unidade de comprimento

$$n w_{12} = \int_0^{L_1} \mu_1 x \phi_{12}(x) dx$$

$$\int_{m_1} \dot{u}_1^2 dm \quad - \quad \text{desprezada no modelo, pois assumimos } u_1 \text{ suficientemente pequeno}$$

$$\int_{m_2} \dot{x}_2^2 dm = J_{01} \quad (3.31)$$

$$\int_{m_2} \dot{u}_2^2 dm = m_2 (\dot{q}_{21}^2 + \dot{q}_{22}^2) \quad (3.32)$$

$\int_{m_2} u_2^2 dm$ - desprezada no modelo, pois assumimos u_2 suficientemente pequeno

$$\int_{m_2} x_2 \dot{u}_2 dm = n w_{21} \dot{q}_{21} + n w_{22} \dot{q}_{22} \quad (3.33)$$

onde

$$n w_{21} = \int_0^{L_2} \mu_2 x \phi_{21}(x) dx$$

$$n w_{22} = \int_0^{L_2} \mu_2 x \phi_{22}(x) dx$$

$$\int_{m_2} x_2 dm = m_2 \frac{L_2}{2} \quad (3.34)$$

$$\int_{m_2} \dot{u}_2 dm = n q_{21} \dot{q}_{21} + n q_{22} \dot{q}_{22} \quad (3.35)$$

onde

$$n q_{21} = \int_0^{L_2} \mu_2 \phi_{21}(x) dx$$

$$n q_{22} = \int_0^{L_2} \mu_2 \phi_{22}(x) dx$$

$$\int_{m_2} u_2 dm = n q_{21} q_{21} + n q_{22} q_{22} \quad (3.37)$$

Agora, serão avaliadas as integrais relacionadas à energia potencial.

$$\int_0^{L_1} E I_1 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \right)^2 dx_1 = k w_{111} q_{11}^2 + k w_{122} q_{12}^2 \quad (3.38)$$

onde

$$k w_{111} = E I_1 \int_0^{L_1} \phi_{11}^{\parallel} \phi_{11}^{\parallel} dx_1$$

$$k w_{122} = E I_1 \int_0^{L_1} \phi_{12}^{\parallel} \phi_{12}^{\parallel} dx_1$$

$$\int_0^{L_2} E I_2 \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right)^2 dx_2 = k w_{211} q_{21}^2 + k w_{222} q_{22}^2 \quad (3.39)$$

onde

$$k w_{211} = E I_2 \int_0^{L_2} \phi_{21}^{\parallel} \phi_{21}^{\parallel} dx_2$$

$$k w_{222} = E I_2 \int_0^{L_2} \phi_{22}^{\parallel} \phi_{22}^{\parallel} dx_2$$

Uma vez que todas as integrais foram avaliadas, pode-se agora escrever as expressões finais tanto para a energia cinética quanto para a energia potencial. Utilizando, então a expressão da energia cinética total (3.20) e fazendo as substituições

$$u_{1E} = \phi_{11E}(x_1) q_{11}(t) + \phi_{12E}(x_1) q_{12}(t) \quad (3.40)$$

$$\dot{u}_{1E} = \phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12} \quad (3.41)$$

$$u_{1E}^2 = \left(\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12} \right)^2 \quad (3.42)$$

$$\dot{u}_{1E}^2 = \left(\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12} \right)^2 \quad (3.43)$$

e também

$$u_{2E} = \phi_{21E} q_{21} + \phi_{22E} q_{22} \quad (3.44)$$

$$\dot{u}_{2E} = \phi_{21E} \dot{q}_{21} + \phi_{22E} \dot{q}_{22} \quad (3.45)$$

$$u_{2E}^2 = \left(\phi_{21E} q_{21} + \phi_{22E} q_{22} \right)^2 \quad (3.46)$$

$$\dot{u}_{2E}^2 = \left(\phi_{21E} \dot{q}_{21} + \phi_{22E} \dot{q}_{22} \right)^2 \quad (3.47)$$

$$\dot{u}_{2E}^{|2} = \left(\phi_{21E}^{|} \dot{q}_{21} + \phi_{22E}^{|} \dot{q}_{22} \right)^2 \quad (3.48)$$

obtêm-se a seguinte expressão final para a energia cinética total do sistema:

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_1 (\dot{q}_{11}^2 + \dot{q}_{12}^2) + \dot{\theta}_1 (nw_{11} \dot{q}_{11} + nw_{12} \dot{q}_{12}) + \frac{1}{2} m_2 L_1 \dot{\theta}_1^2 \\ & + \frac{1}{2} m_2 (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12})^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\theta}_1^2 (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12})^2 + \\ & + m_2 L_1 \dot{\theta}_1 (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) + \frac{1}{2} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 J_{01} + \frac{1}{2} m_2 (\dot{q}_{21}^2 + \dot{q}_{22}^2) \\ & + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (nw_{21} \dot{q}_{21} + nw_{22} \dot{q}_{22}) + \frac{1}{2} m_2 L_1 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) c\theta_2 + \\ & + L_1 \dot{\theta}_1 (nq_{21} q_{21} + nq_{22} q_{22}) c\theta_2 + \frac{1}{2} m_2 L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) c\theta_2 \\ & + (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) (nq_{21} \dot{q}_{21} + nq_{22} \dot{q}_{22}) c\theta_2 + \\ & + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (nq_{21} q_{21} + nq_{22} q_{22}) (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) s(-\theta_2) + \\ & + \frac{1}{2} m_2 L_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12}) s\theta_2 + \\ & + L_1 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (nq_{21} q_{21} + nq_{22} q_{22}) s(-\theta_2) + \\ & + \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (nq_{21} q_{21} + nq_{22} q_{22}) (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12}) c\theta_2 \\ & + \dot{\theta}_1 (nq_{21} \dot{q}_{21} + nq_{22} \dot{q}_{22}) (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12}) s\theta_2 \\ & + \frac{1}{2} m_j \dot{\theta}_1^2 L_1^2 + m_j L_1 \dot{\theta}_1 (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) + \frac{1}{2} m_j (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12})^2 \\ & + \frac{1}{2} m_j \dot{\theta}_1^2 (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12})^2 + \frac{1}{2} m_p L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_p (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12})^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} m_p \dot{\theta}_1^2 (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12})^2 + m_p L_1 \dot{\theta}_1 (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) \\
& + \frac{1}{2} m_p L_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + \frac{1}{2} m_p (\phi_{21E} \dot{q}_{21} + \phi_{22E} \dot{q}_{22})^2 \\
& + \frac{1}{2} m_p (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 (\phi_{21E} q_{21} + \phi_{22E} q_{22}) + m_p L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (\phi_{21E} \dot{q}_{21} + \phi_{22E} \dot{q}_{22}) \\
& + m_p L_1 L_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) c\theta_2 + m_p L_1 \dot{\theta}_1 (\phi_{21E} q_{21} + \phi_{22E} q_{22}) c\theta_2 \\
& + m_p L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) c\theta_2 \\
& + m_p (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{22E} \dot{q}_{22}) (\phi_{21E} \dot{q}_{21} + \phi_{22E} \dot{q}_{22}) c\theta_2 \\
& + m_p (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) (\phi_{21E} q_{21} + \phi_{22E} q_{22}) s(-\theta_2) \\
& + m_p L_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12}) s\theta_2 \\
& + m_p L_1 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (\phi_{21E} q_{21} + \phi_{22E} q_{22}) s(-\theta_2) \\
& + m_p \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12}) (\phi_{21E} q_{21} + \phi_{22E} q_{22}) c\theta_2 \\
& + \frac{1}{2} m_p \dot{\theta}_1 (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12}) (\phi_{21E} \dot{q}_{21} + \phi_{22E} \dot{q}_{22}) s\theta_2 \\
& + \frac{1}{2} J_p (\phi_{21E}^1 \dot{q}_{21} + \phi_{22E}^1 \dot{q}_{22})^2
\end{aligned} \tag{3.49}$$

De maneira análoga, ou seja, substituindo agora as integrais avaliadas relacionadas à energia potencial do sistema dada pela expressão (3.27) obtêm-se:

$$\begin{aligned}
V = & \left\{ (m_1 + 2m_j + 2m_2 + 2m_p) \frac{1}{2} L_1 s \theta_1 + (m_2 + 2m_p) \frac{1}{2} L_2 s(\theta_1 + \theta_2) \right\} g \\
& - k w_{111} q_{11}^2 - k w_{122} q_{12}^2 - k w_{211} q_{21}^2 - k w_{222} q_{22}^2 + C
\end{aligned} \tag{3.50}$$

onde a constante C representa a energia potencial referencial para as componentes flexíveis.

Considerando $\theta_1, \theta_2, q_{11}, q_{12}, q_{21}, q_{22}$ as coordenadas generalizadas, e Γ_1 e Γ_2 os torques não conservativos agindo na junta do sistema, é possível escrever as equações de movimento usando as equações de Lagrange para sistemas não conservativos

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \right] - \frac{\partial T}{\partial q_r} + \frac{\partial V}{\partial q_r} = Q_r \quad r = 1(1)6 \quad (3.51)$$

onde Q_r são as forças (ou torques) generalizados não conservativos dependentes do tempo.

Obtêm-se assim, um sistema de seis equações diferenciais fortemente não lineares e acopladas. A obtenção dessas equações de movimento foi realizada através de cálculos manuais [Anexo B]. Deve-se ressaltar que a tentativa de utilizar softwares de computação algébrica não apresentou resultados convenientes, pois com a proposta de apresentar as equações do modelo flexível como uma extensão do modelo rígido, exigiu-se um tratamento dedicado na manipulação algébrica das mesmas. Esse tratamento inclui a parametrização dos termos nas equações de movimento. Os detalhes e alguns cálculos realizados também podem ser encontrados em anexo [Anexo B]. Para o bom entendimento da sistemática desenvolvida, são apresentadas as cópias das folhas originais onde foram desenvolvidos os cálculos manuais.

Com a parametrização realizada, pode-se escrever as equações de movimento e seus respectivos coeficientes da seguinte maneira:

$$J_1 \ddot{\theta}_1 + F_1 \dot{\theta}_1 + \Gamma_{perturb\ 1} = \tau_1 \quad (3.52)$$

$$J_2 \ddot{\theta}_2 + F_2 \dot{\theta}_2 + \Gamma_{perturb\ 2} = \tau_2 \quad (3.53)$$

$$J_3 \ddot{q}_{11} + F_3 \dot{q}_{11} + \Gamma_{perturb\ 3} = 0 \quad (3.54)$$

$$J_4 \ddot{q}_{12} + F_4 \dot{q}_{12} + \Gamma_{perturb\ 4} = 0 \quad (3.55)$$

$$J_5 \ddot{q}_{21} + F_5 \dot{q}_{21} + \Gamma_{perturb\ 5} = 0 \quad (3.56)$$

$$J_6 \ddot{q}_{22} + F_6 \dot{q}_{22} + \Gamma_{perturb\ 6} = 0 \quad (3.57)$$

onde

$$J_1 = A_1 + B_1 + C_1 s\theta_2 + D_1 c\theta_2 + E_1 \quad (3.58)$$

$$F_1 = H_1 + I_1 s\theta_2 + M_1 c\theta_2 \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{perturb.1} = & P_1 \ddot{\theta}_2 + R_{111} \ddot{q}_{11} + R_{112} \ddot{q}_{12} + R_{121} \ddot{q}_{21} + R_{122} \ddot{q}_{22} + S_1 \dot{\theta}_2 - T_1 \dot{\theta}_2^2 \\ & + U_1 c\theta_1 + V_1 c(\theta_1 + \theta_2) - Y_1 + [a_1 \ddot{\theta}_2 - b_1 \dot{\theta}_2 - c_1 \dot{\theta}_2^2 + e_1] s\theta_2 \\ & + [p_1 \ddot{\theta}_2 + r_1 \dot{\theta}_2^2 + s_1 \dot{\theta}_2 + v_1] c\theta_2 \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$J_2 = A_2 + B_2 \quad (3.61)$$

$$F_2 = H_2 \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{perturb.2} = & P_2 \ddot{\theta}_1 + R_{211} \ddot{q}_{21} + R_{222} \ddot{q}_{22} + S_2 \dot{\theta}_1 + V_2 c(\theta_1 + \theta_2) + Y_2 \\ & [a_2 \ddot{\theta}_1 + b_2 \dot{\theta}_1 + c_2 \dot{\theta}_1^2 - e_2] s\theta_2 + [p_2 \ddot{\theta}_1 - r_2 \dot{\theta}_1^2 + s_2 \dot{\theta}_1 + v_2] c\theta_2 \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$J_3 = A_{311} \quad (3.64)$$

$$F_3 = 0 \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{perturb.3} = & P_{311} \ddot{\theta}_1 + R_{312} \ddot{q}_{12} - T_{312} \dot{\theta}_1^2 - 2Kw_{311} \\ & - \phi_{11E} [a_3 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + b_3 \dot{\theta}_1 + c_3 \dot{\theta}_2 + e_3] s\theta_2 \\ & + \phi_{11E} [p_3 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + 2a_3 (\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \dot{\theta}_2^2) + v_3] c\theta_2 \end{aligned} \quad (3.66)$$

$$J_4 = A_{412} \quad (3.67)$$

$$F_4 = 0 \quad (3.68)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{perturb.4} = & P_{412} \ddot{\theta}_1 + R_{411} \ddot{q}_{11} - T_{411} \dot{\theta}_1^2 - 2 K w_{412} \\ & - \phi_{12E} \left[a_4 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + b_4 \dot{\theta}_1 + c_4 \dot{\theta}_2 + e_4 \right] s \theta_2 \\ & + \phi_{12E} \left[p_4 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) - 2 a_4 (\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \dot{\theta}_2^2) + v_4 \right] c \theta_2 \end{aligned} \quad (3.69)$$

$$J_5 = A_{521} \quad (3.70)$$

$$F_5 = 0 \quad (3.71)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{perturb.5} = & P_{521} (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + R_{522} \ddot{q}_{22} - Z_{521} - 2 K w_{521} \\ & + \left[a_{521} \ddot{\theta}_1 + b_{521} \dot{\theta}_1 - c_{521} \dot{\theta}_2 + d_{521} (\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1^2) \right] s \theta_2 \\ & - \left[p_{521} \ddot{\theta}_1 + r_{521} \dot{\theta}_1^2 + s_{521} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - v_{521} \right] c \theta_2 \end{aligned} \quad (3.72)$$

$$J_6 = A_{622} \quad (3.73)$$

$$F_6 = 0 \quad (3.74)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{perturb.6} = & P_{622} (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + R_{621} \ddot{q}_{21} - Z_{622} - 2 K w_{622} \\ & + \left[a_{622} \ddot{\theta}_1 + b_{622} \dot{\theta}_1 - c_{622} \dot{\theta}_2 + d_{622} (\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1^2) \right] s \theta_2 \\ & - \left[p_{622} \ddot{\theta}_1 + r_{622} \dot{\theta}_1^2 + s_{622} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - v_{622} \right] c \theta_2 \end{aligned} \quad (3.75)$$

Os coeficientes dessas equações são apresentados abaixo da seguinte maneira. Apresenta-se como **coeficientes gerais** aqueles que aparecem em nas equações de forma geral e são os mesmos que apareceram nas equações do manipulador rígido tratado no capítulo anterior. Posteriormente, apresenta-se os coeficientes relacionados a cada uma das seis equações de movimento especificando a qual pertence. Dessa forma, tem-se:

Coeficientes Gerais:

$$\begin{aligned} A_1^* &= \alpha_1 + \alpha_1^{\downarrow} & A_4^* &= \alpha_4 + \alpha_4^{\downarrow} \\ A_2^* &= \alpha_2 + \alpha_2^{\downarrow} & A_5^* &= \alpha_5 + \alpha_5^{\downarrow} \\ A_3^* &= \alpha_3 + \alpha_3^{\downarrow} \end{aligned} \quad (3.76)$$

com

$$\alpha_1 = \frac{1}{3}m_1 L_1^2 + \frac{1}{3}m_2 L_2^2 + m_2 L_1^2 \quad \alpha_1^{\downarrow} = m_p L_1^2 + m_p L_2^2 \quad (3.77)$$

$$\alpha_2 = m_2 L_1 L_2 \quad \alpha_2^{\downarrow} = 2m_p L_1 L_2 \quad (3.78)$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{3}m_2 L_2^2 \quad \alpha_3^{\downarrow} = m_p L_2^2 \quad (3.79)$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{2}m_1 L_1 g + m_2 L_1 g \quad \alpha_4^{\downarrow} = m_p L_1 g \quad (3.80)$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{2}m_2 L_2 g \quad \alpha_5^{\downarrow} = m_p L_2 g \quad (3.81)$$

$$\begin{aligned} \beta &= m_p L_1 & \psi &= m_2 L_2 \\ \gamma &= 2L_1 & \delta &= m_p \\ \eta &= m_p L_2 & \alpha &= \psi + 2\eta \\ \varepsilon &= m_2 + m_j + m_p \end{aligned} \quad (3.82)$$

$$\mathfrak{I}_1 = \phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12}$$

$$\mathfrak{I}_2 = \phi_{21E} q_{21} + \phi_{22E} q_{22}$$

$$\mathfrak{I}_3 = \phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}$$

$$\mathfrak{I}_4 = \phi_{21E} \dot{q}_{21} + \phi_{22E} \dot{q}_{22}$$

$$\mathfrak{I}_5 = nq_{21} q_{21} + nq_{22} q_{22}$$

$$\mathfrak{I}_6 = nq_{21} \dot{q}_{21} + nq_{22} \dot{q}_{22}$$

$$\mathfrak{I}_7 = \phi_{11E} \ddot{q}_{11} + \phi_{12E} \ddot{q}_{12}$$

$$\mathfrak{I}_8 = \phi_{21E} \ddot{q}_{21} + \phi_{22E} \ddot{q}_{22}$$

$$\mathfrak{I}_9 = nq_{21} \ddot{q}_{21} + nq_{22} \ddot{q}_{22}$$

(3.83)

Coeficientes da 1ª equação de movimento:

$$A_1 = A_1^* \quad (3.84)$$

$$B_1 = m_j L_1^2 \quad (3.85)$$

$$C_1 = \alpha \mathfrak{I}_1 - 2\beta \mathfrak{I}_2 - \gamma \mathfrak{I}_5 \quad (3.86)$$

$$D_1 = A_2^* + 2(\delta \mathfrak{I}_1 \mathfrak{I}_2 + \mathfrak{I}_1 \mathfrak{I}_5) \quad (3.87)$$

$$E_1 = \varepsilon \mathfrak{I}_1^2 \quad (3.88)$$

$$H_1 = \eta \mathfrak{I}_4 + 2\varepsilon \mathfrak{I}_1 \mathfrak{I}_3 \quad (3.89)$$

$$I_1 = \left[3\eta \mathfrak{I}_3 - 2\beta \mathfrak{I}_4 - \gamma \mathfrak{I}_6 - (A_2^* + 2(\delta \mathfrak{I}_1 \mathfrak{I}_2 + \mathfrak{I}_1 \mathfrak{I}_5)) \dot{\theta}_2 \right] \quad (3.90)$$

$$M_1 = \left[(3\eta \mathfrak{I}_1 - 2\beta \mathfrak{I}_2 - \gamma \mathfrak{I}_5) \dot{\theta}_2 + 2\delta (\mathfrak{I}_1 \mathfrak{I}_4 + \mathfrak{I}_2 \mathfrak{I}_3) + 2(\mathfrak{I}_1 \mathfrak{I}_6 + \mathfrak{I}_3 \mathfrak{I}_5) \right] \quad (3.91)$$

$$P_1 = A_3^* + \eta \mathfrak{I}_2 \quad (3.92)$$

$$R_{111} = mw_{11} \quad (3.93)$$

$$R_{112} = mw_{12} \quad (3.94)$$

$$R_{121} = mw_{21} \quad (3.95)$$

$$R_{122} = mw_{22} \quad (3.96)$$

$$S_1 = \eta \mathfrak{I}_4 \quad (3.97)$$

$$T_1 = \mathfrak{I}_1 \mathfrak{I}_5 \quad (3.98)$$

$$U_1 = A_4^* \quad (3.99)$$

$$V_1 = A_5^* \quad (3.100)$$

$$Y_1 = \varepsilon \gamma \mathfrak{I}_7 \quad (3.101)$$

$$a_1 = \frac{1}{2} C_1 \quad (3.102)$$

$$b_1 = \beta \mathfrak{I}_4 + \gamma \mathfrak{I}_6 \quad (3.103)$$

$$c_1 = \frac{1}{2} (A_2^* + 2\delta \mathfrak{I}_1 \mathfrak{I}_2) \quad (3.104)$$

$$e_1 = \frac{1}{2} \delta (\mathfrak{I}_1 \mathfrak{I}_8 - \mathfrak{I}_3 \mathfrak{I}_4 - 2\mathfrak{I}_2 \mathfrak{I}_7) - \mathfrak{I}_5 \mathfrak{I}_7 \quad (3.105)$$

$$p_1 = c_1 \quad (3.106)$$

$$r_1 = a_1 \quad (3.107)$$

$$s_1 = \frac{1}{2} (\gamma \mathfrak{I}_6 + 3\delta \mathfrak{I}_1 \mathfrak{I}_4 + 4\mathfrak{I}_1 \mathfrak{I}_6) \quad (3.108)$$

$$v_1 = \frac{1}{2} \alpha \mathfrak{I}_7 + \eta \mathfrak{I}_8 + \mathfrak{I}_1 \mathfrak{I}_9 \quad (3.109)$$

Coeficientes da 2ª equação de movimento:

$$A_2 = A_3^* \quad (3.110)$$

$$B_2 = \delta \mathfrak{I}_2^2 \quad (3.111)$$

$$H_2 = \eta \mathfrak{I}_4 \quad (3.112)$$

$$P_2 = A_3^* + \eta \mathfrak{I}_2 \quad (3.113)$$

$$R_{221} = R_{121} \quad (3.114)$$

$$R_{222} = R_{122} \quad (3.115)$$

$$S_2 = S_1 \quad (3.116)$$

$$V_2 = V_1 \quad (3.117)$$

$$Y_2 = \eta \mathfrak{I}_8 \quad (3.118)$$

$$a_2 = a_1 \quad (3.119)$$

$$b_2 = \alpha \mathfrak{I}_3 - \beta \mathfrak{I}_4 \quad (3.120)$$

$$c_2 = \frac{1}{2} (A_2^* + 2\delta \mathfrak{I}_1 \mathfrak{I}_2 + 2\mathfrak{I}_1 \mathfrak{I}_5) \quad (3.121)$$

$$e_2 = \delta \mathfrak{I}_2 \mathfrak{I}_7 + \mathfrak{I}_5 \mathfrak{I}_7 \quad (3.122)$$

$$p_2 = c_2 \quad (3.123)$$

$$r_2 = a_2 \quad (3.124)$$

$$s_2 = \frac{1}{2}(\delta \mathfrak{I}_1 \mathfrak{I}_4 + 4\delta \mathfrak{I}_2 \mathfrak{I}_3 + 4\mathfrak{I}_3 \mathfrak{I}_5) \quad (3.125)$$

$$v_2 = \frac{1}{2}\alpha \mathfrak{I}_7 \quad (3.126)$$

Coefficientes da 3ª equação de movimento:

$$A_{311} = (m_1 + \varepsilon) \phi_{11E}^2 \quad (3.127)$$

$$P_{311} = (mw_{11} + \frac{1}{2}\varepsilon \gamma \phi_{11E}) \quad (3.128)$$

$$R_{312} = \varepsilon \phi_{11E} \phi_{12E} \quad (3.129)$$

$$T_{312} = \varepsilon (\phi_{11E}^2 + \phi_{11E} \phi_{12E} q_{12}) \quad (3.130)$$

$$Kw_{311} = Kw_{111} \quad (3.131)$$

$$a_3 = \mathfrak{I}_5 + \delta \mathfrak{I}_2 \quad (3.132)$$

$$b_3 = 2\mathfrak{I}_6 + \frac{3}{2}\delta \mathfrak{I}_4 \quad (3.133)$$

$$c_3 = 2\mathfrak{I}_6 + 2\delta \mathfrak{I}_4 \quad (3.134)$$

$$e_3 = \frac{1}{2}\alpha (2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) \quad (3.135)$$

$$p_3 = \frac{1}{2}\alpha \quad (3.136)$$

$$v_3 = \delta \mathfrak{I}_8 + \mathfrak{I}_9 \quad (3.137)$$

Coefficientes da 4ª equação de movimento:

$$A_{412} = (m_1 + \varepsilon) \phi_{12E}^2 \quad (3.138)$$

$$P_{412} = mw_{12} + \frac{1}{2} \varepsilon \gamma \phi_{12E} \quad (3.139)$$

$$R_{411} = R_{312} \quad (3.140)$$

$$T_{411} = \varepsilon (\phi_{12E}^2 + \phi_{11E} \phi_{12E} q_{11}) \quad (3.141)$$

$$Kw_{412} = Kw_{122} \quad (3.142)$$

$$a_4 = a_3 \quad (3.143)$$

$$b_4 = b_3 \quad (3.144)$$

$$c_4 = c_3 \quad (3.145)$$

$$e_4 = e_3 \quad (3.146)$$

$$p_4 = p_3 \quad (3.147)$$

$$v_4 = v_3 \quad (3.148)$$

Coefficientes da 5ª equação de movimento:

$$A_{521} = (m_2 + \delta) \phi_{21E}^2 + J_p \phi_{22E}^2 \quad (3.149)$$

$$P_{521} = (mw_{21} + \eta \phi_{21E}) \quad (3.150)$$

$$R_{522} = (J_p \phi_{21E}^1 \phi_{22E}^1 + \delta \phi_{21E} \phi_{22E}) \quad (3.151)$$

$$Z_{521} = \frac{1}{2} \beta \phi_{21E} (2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) \quad (3.152)$$

$$Kw_{521} = Kw_{211} \quad (3.153)$$

$$a_{521} = (nq_{21} + \frac{1}{2} \delta \phi_{21E}) \mathfrak{I}_1 \quad (3.154)$$

$$b_{521} = (2nq_{21} + \frac{3}{2} \delta \phi_{21E}) \mathfrak{I}_3 \quad (3.155)$$

$$c_{521} = (2nq_{21} - 2\delta \phi_{21E}) \mathfrak{I}_3 \quad (3.156)$$

$$d_{521} = (\beta \phi_{21E} + \frac{1}{2} \gamma nq_{21}) \quad (3.157)$$

$$p_{521} = \frac{1}{2} \gamma nq_{21} \quad (3.158)$$

$$r_{521} = (nq_{21} + \delta \phi_{21E}) \mathfrak{I}_1 \quad (3.159)$$

$$s_{521} = \frac{1}{2} \delta \phi_{21E} \mathfrak{I}_1 \quad (3.160)$$

$$v_{521} = (nq_{21} + \delta \phi_{21E}) \mathfrak{I}_7 \quad (3.161)$$

Coefficientes da 6ª equação de movimento:

$$A_{622} = (m_2 + \delta) \phi_{22E}^2 + J_p \phi_{22E}^1 \quad (3.162)$$

$$P_{622} = (mw_{22} + \eta \phi_{22E}) \quad (3.163)$$

$$R_{621} = (J_p \phi_{21E}^1 \phi_{22E}^1 + \delta \phi_{21E} \phi_{22E}) \quad (3.164)$$

$$Z_{622} = \frac{1}{2} \beta \phi_{22E} (2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) \quad (3.165)$$

$$Kw_{622} = Kw_{222} \quad (3.166)$$

$$a_{622} = (nq_{22} + \frac{1}{2} \delta \phi_{22E}) \mathfrak{I}_1 \quad (3.167)$$

$$b_{622} = (2 nq_{22} + \frac{3}{2} \delta \phi_{22E}) \mathfrak{I}_3 \quad (3.168)$$

$$c_{622} = (2 nq_{22} - 2 \delta \phi_{22E}) \mathfrak{I}_3 \quad (3.169)$$

$$d_{622} = (\beta \phi_{22E} + \frac{1}{2} \gamma nq_{22}) \quad (3.170)$$

$$p_{622} = \frac{1}{2} \gamma nq_{22} \quad (3.171)$$

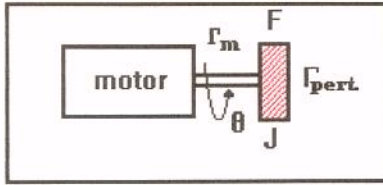
$$r_{622} = (nq_{22} + \delta \phi_{22E}) \mathfrak{I}_1 \quad (3.172)$$

$$s_{622} = \frac{1}{2} \delta \phi_{22E} \mathfrak{I}_1 \quad (3.173)$$

$$v_{622} = (nq_{22} + \delta \phi_{22E}) \mathfrak{I}_7 \quad (3.174)$$

É importante notar que as equações do sistema flexível foram escritas de forma análoga às equações do sistema rígido, ou seja, obedecendo uma mesma sistemática de parametrização dos termos nas equações de movimento.

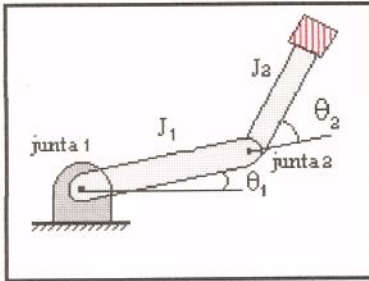
Apresenta-se a seguir um diagrama esquemático procurando esclarecer ainda mais a proposta de escrever as equações de movimento desde o caso mais simples (sistema descoplado e rígido), passando pelo caso do manipulador rígido com dois graus de liberdade (sistema acoplado e rígido) e até o caso mais complexo considerado que é o manipulador flexível com dois links (sistema acoplado e flexível), com as mesmas características, aumentando obviamente a complexidade dos coeficientes dessas equações a medida que se aumenta a complexidade do sistema.



sistema desacoplado e rígido

$$J \ddot{\theta} + F \dot{\theta} + \Gamma_{pert.} = \tau_m$$

$$J, F, \Gamma \approx \text{constantes}$$

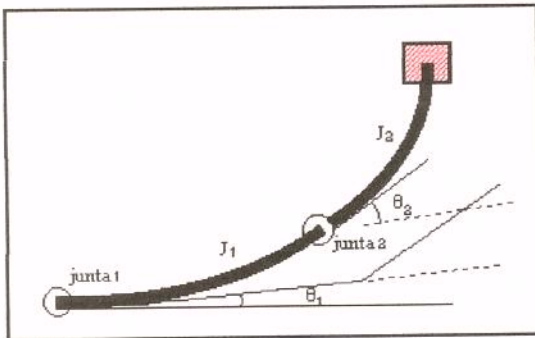


sistema acoplado e rígido

$$J_1^* \ddot{\theta}_1 + F_1^* \dot{\theta}_1 + \Gamma_{perturb1}^* = \tau_1$$

$$J_2^* \ddot{\theta}_2 + F_2^* \dot{\theta}_2 + \Gamma_{perturb2}^* = \tau_2$$

$$J, F, \Gamma \text{ (não-lineares)}$$



sistema acoplado e flexível

$$J_1 \ddot{\theta}_1 + F_1 \dot{\theta}_1 + \Gamma_{perturb.1} = \tau_1$$

$$J_2 \ddot{\theta}_2 + F_2 \dot{\theta}_2 + \Gamma_{perturb.2} = \tau_2$$

$$J_3 \ddot{q}_{11} + F_3 \dot{q}_{11} + \Gamma_{perturb.3} = 0$$

$$J_4 \ddot{q}_{12} + F_4 \dot{q}_{12} + \Gamma_{perturb.4} = 0$$

$$J_5 \ddot{q}_{21} + F_5 \dot{q}_{21} + \Gamma_{perturb.5} = 0$$

$$J_6 \ddot{q}_{22} + F_6 \dot{q}_{22} + \Gamma_{perturb.6} = 0$$

$$J, F, \Gamma, \text{ (não-lineares);}$$

maior complexidade

Uma vez obtidas as equações de movimento para o manipulador flexível tratado neste capítulo, pode-se através de simulações dessas equações estudar o comportamento dinâmico do sistema.

Com uma metodologia a ser descrita no próximo capítulo, essas equações são simuladas, assim como aquelas obtidas para o manipulador rígido do capítulo 2. Os resultados dessas simulações e comparações entre ambos os sistemas são apresentados no capítulo 4.

Capítulo 4

Simulações e Resultados

4.1 Introdução

Apresenta-se neste capítulo os resultados das simulações realizadas para as equações de movimento do manipulador rígido tratado no capítulo 2 e do manipulador flexível estudado no capítulo 3.

As simulações dinâmicas foram realizadas utilizando o pacote MATLAB-SIMULINKTM em ambos os casos, ou seja, para os sistemas rígido e flexível.

Os resultados das simulações são apresentados separadamente, baseados na seguinte metodologia:

- simula-se primeiro o sistema rígido modelado individualmente; inicialmente considera-se o sistema desacoplado e sem nenhuma carga a ser movida por ele e estende-se a análise até a situação de acoplamento com uma carga na extremidade do manipulador.
- a seguir, simula-se o sistema flexível com todas as suas contribuições de flexibilidade;
- a partir daí, subtraem-se efeitos desse sistema flexível isoladamente e também de maneira acumulativa e estuda-se o comportamento dinâmico do manipulador flexível;
- os efeitos relacionados a flexibilidade são subtraídos até o caso limite quando o sistema flexível reduz-se ao rígido e a resposta do sistema converge - como era de se esperar - para o caso do sistema rígido modelado individualmente.

4.2 Manipulador Rígido

Iniciou-se as simulações para o manipulador rígido considerando primeiramente o sistema desacoplado, ou seja, o manipulador constituído de um único link. Posteriormente, é considerado o acoplamento entre os dois links do manipulador e o sistema é simulado também nestas condições.

4.2.1 Sistema Desacoplado

O sistema desacoplado é simulado primeiro sem nenhuma carga a ser movida pelo manipulador e depois com uma carga em sua extremidade. São observados as evoluções temporais de posição, velocidade e aceleração angulares.

A figura 4.1 ilustra a primeira situação a ser simulada, ou seja, o manipulador com um único link e sem nenhuma carga em sua extremidade a ser movida.

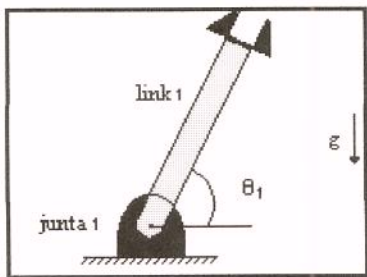
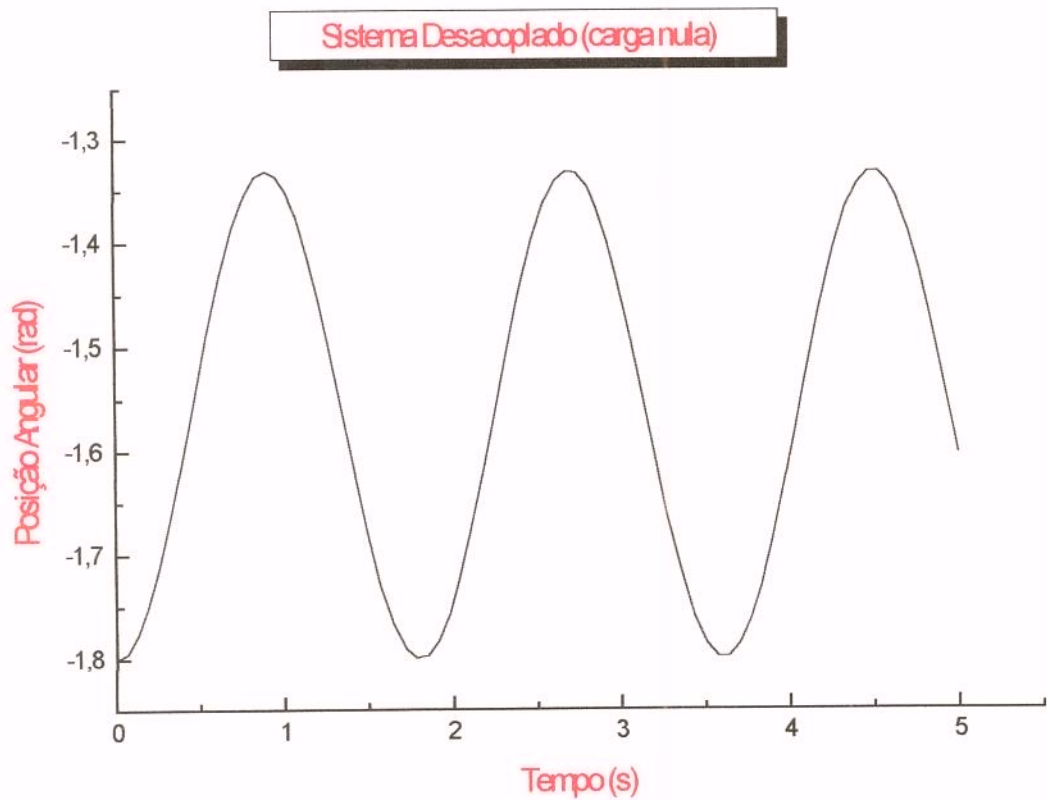
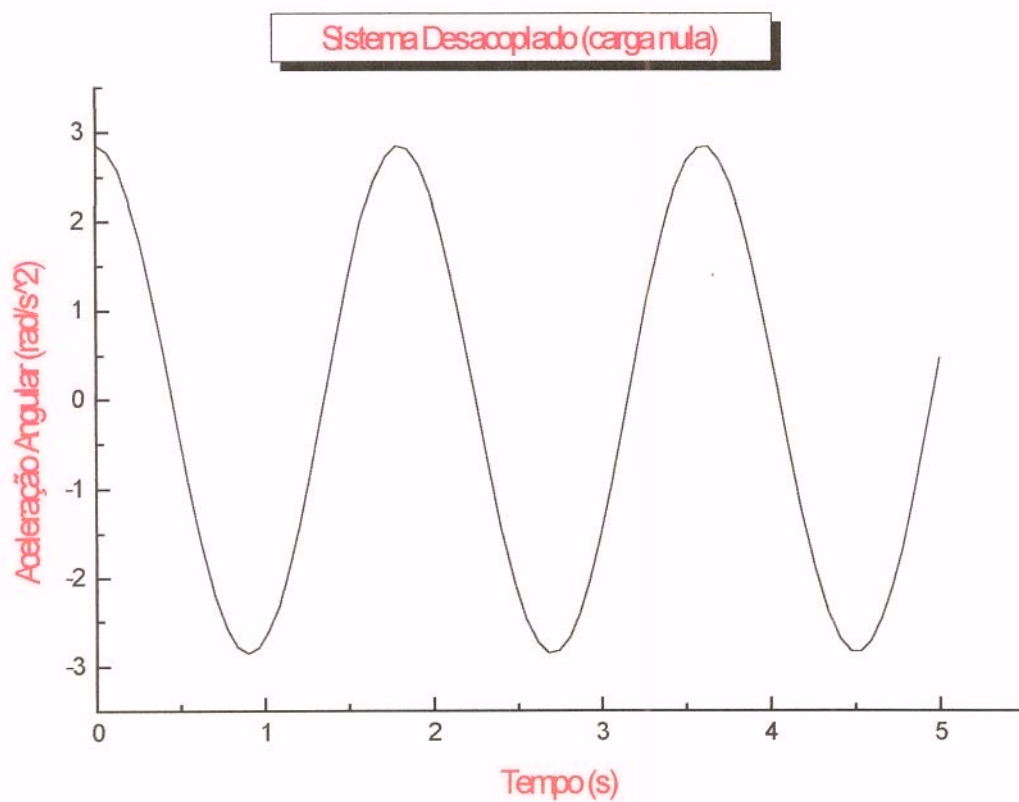
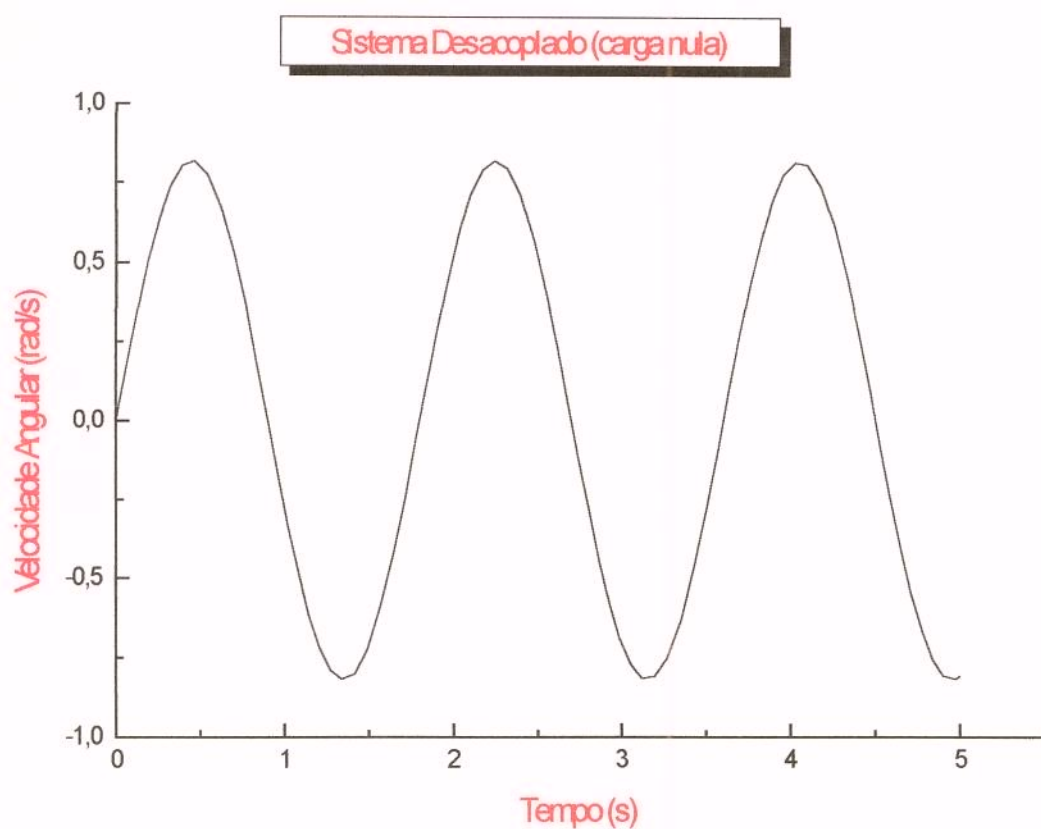


Figura 4.1 : Sistema desacoplado sem carga na extremidade





Ilustra-se agora, na figura 4.2 a situação em que o manipulador é simulado ainda desacoplado, porém com uma carga na extremidade de seu link.

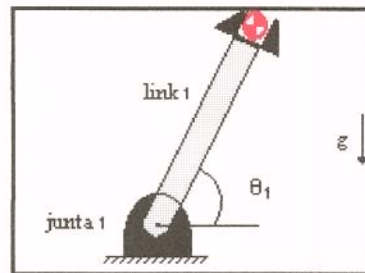
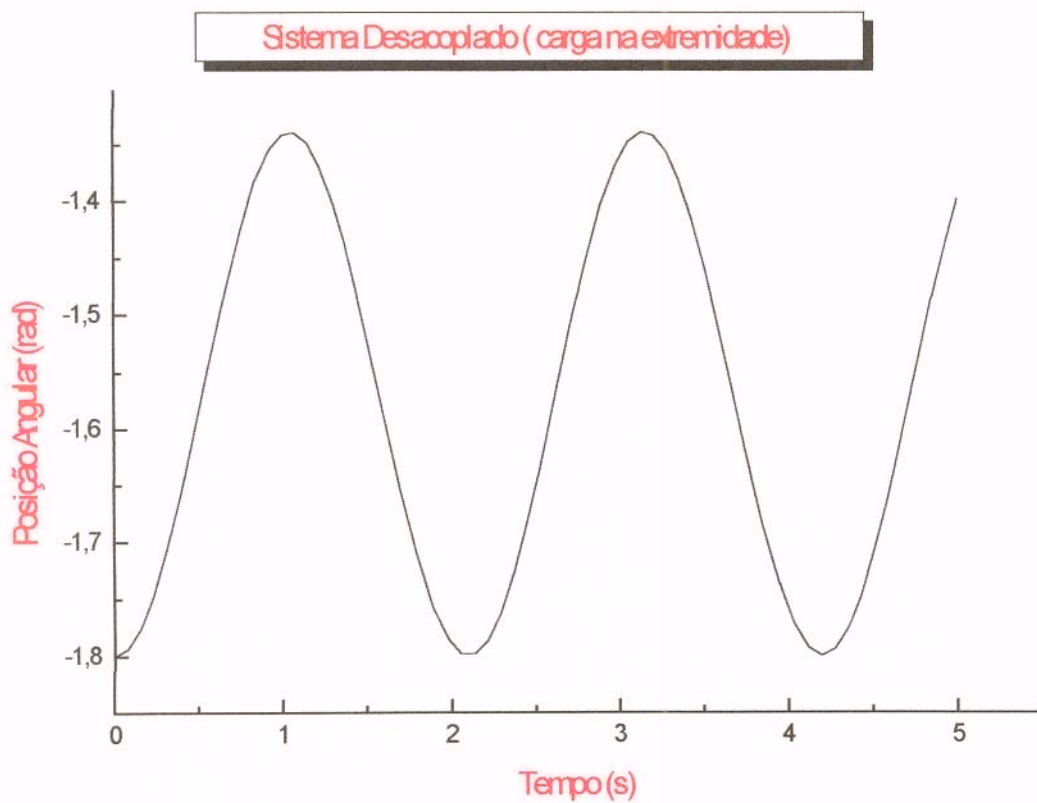
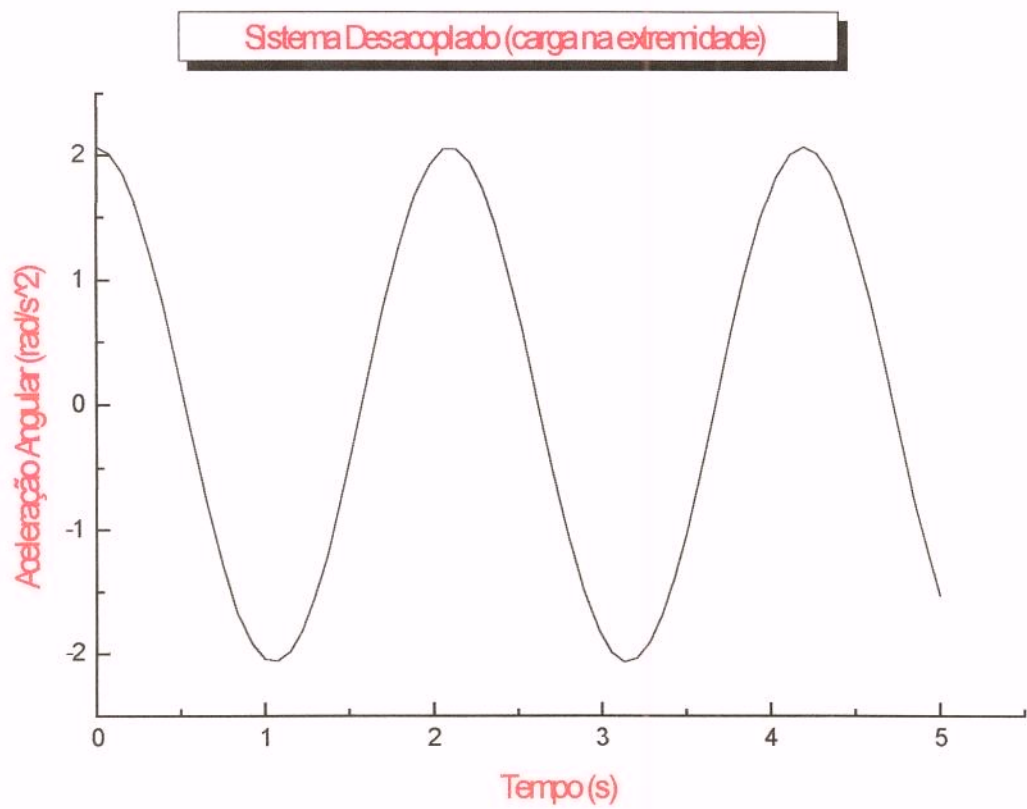
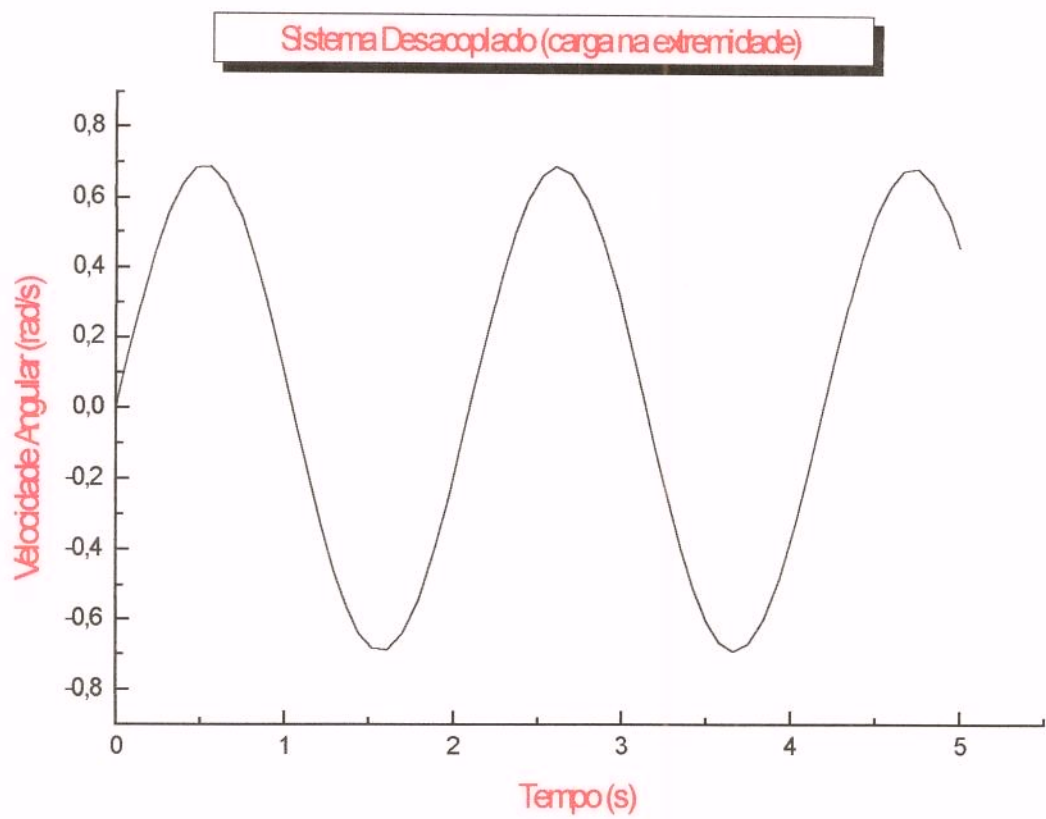


Figura 4.2: Sistema desacoplado com carga na extremidade





4.2.2 Sistema Acoplado

O sistema é agora simulado com os dois links do manipulador acoplados. Nesta condição também considera-se duas situações como foi considerado para o sistema desacoplado, ou seja, as equações de movimento são simuladas sem nenhuma carga a ser movida pelo manipulador e depois com uma carga na extremidade de seu link 2. Apresenta-se os resultados da dependência no tempo das variáveis posição, velocidade e aceleração angulares.

A figura 4.3 ilustra a primeira situação de simulação para o sistema acoplado

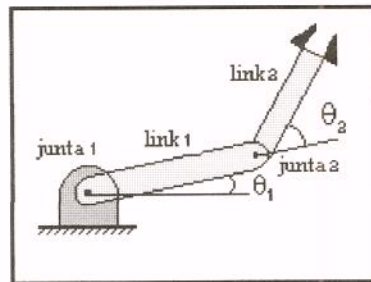
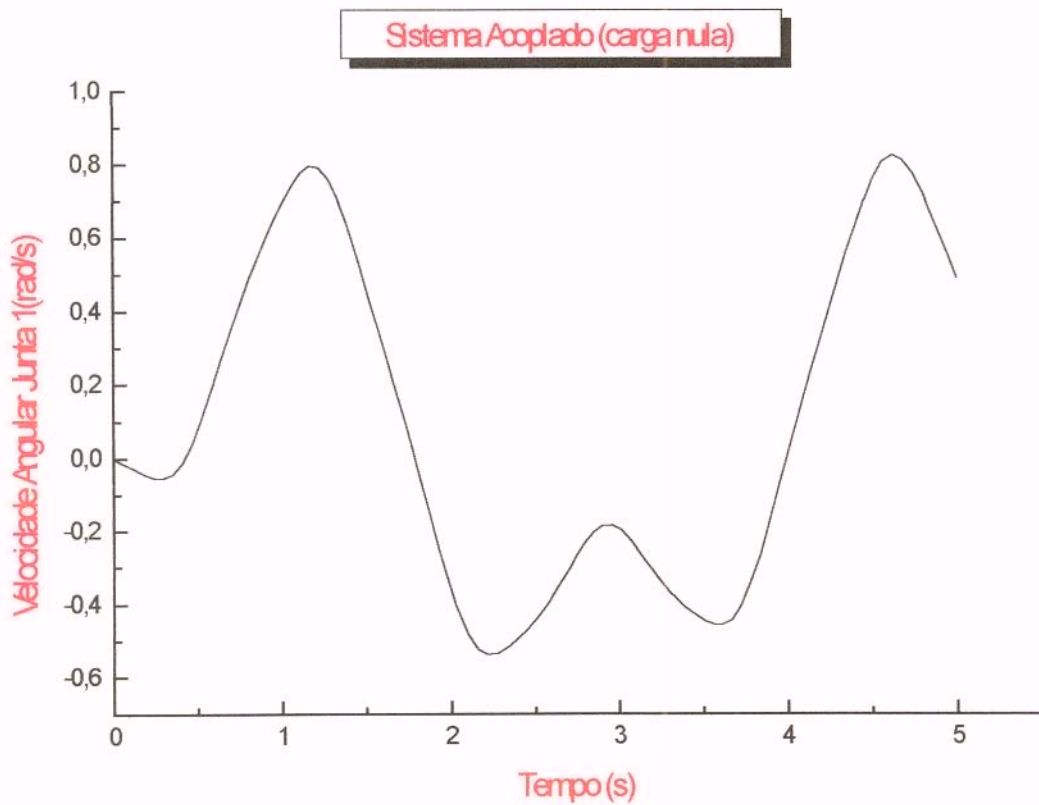
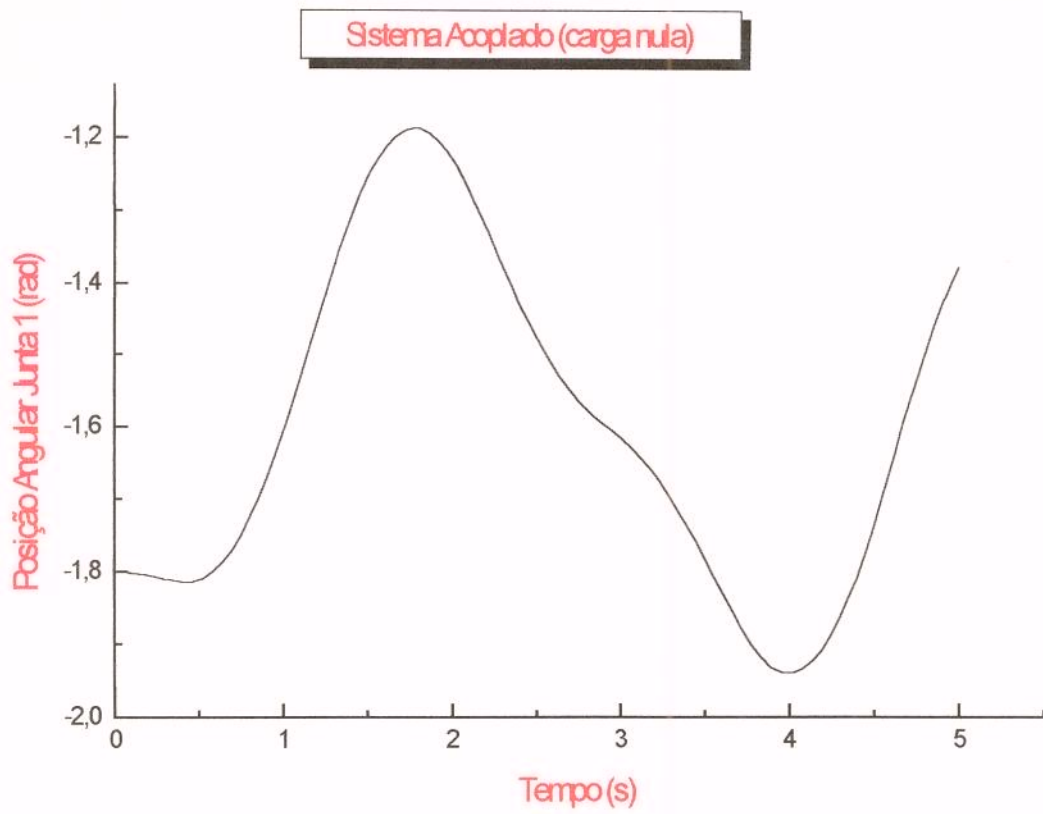
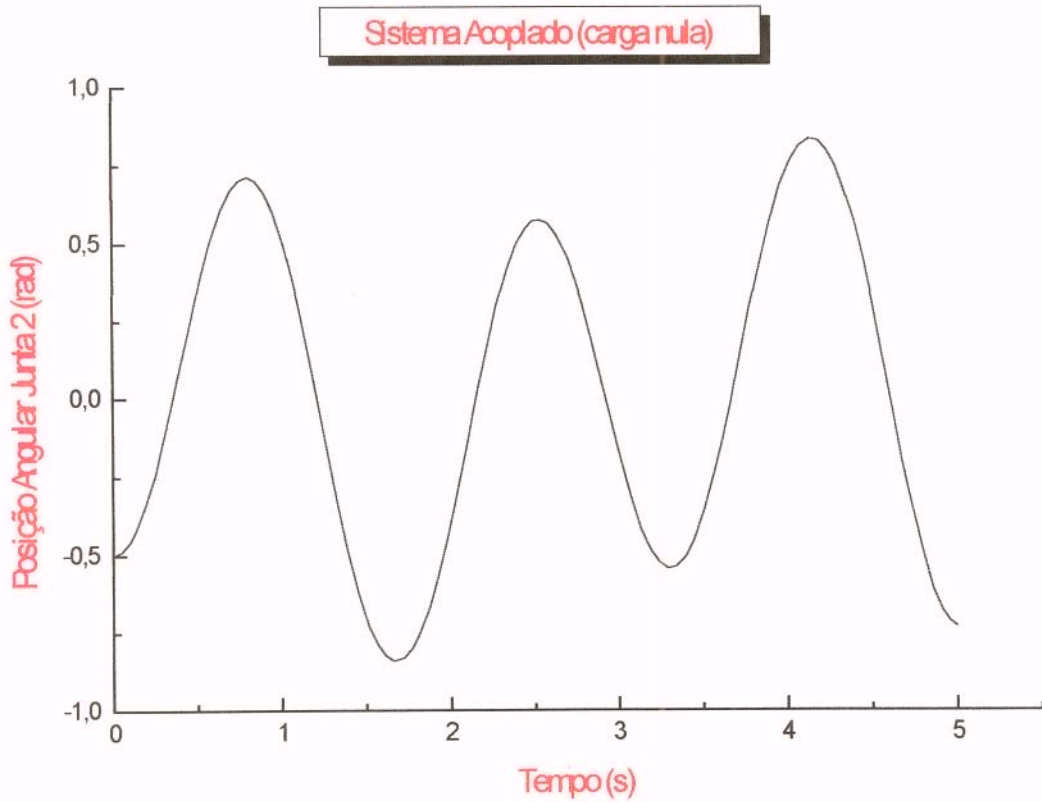
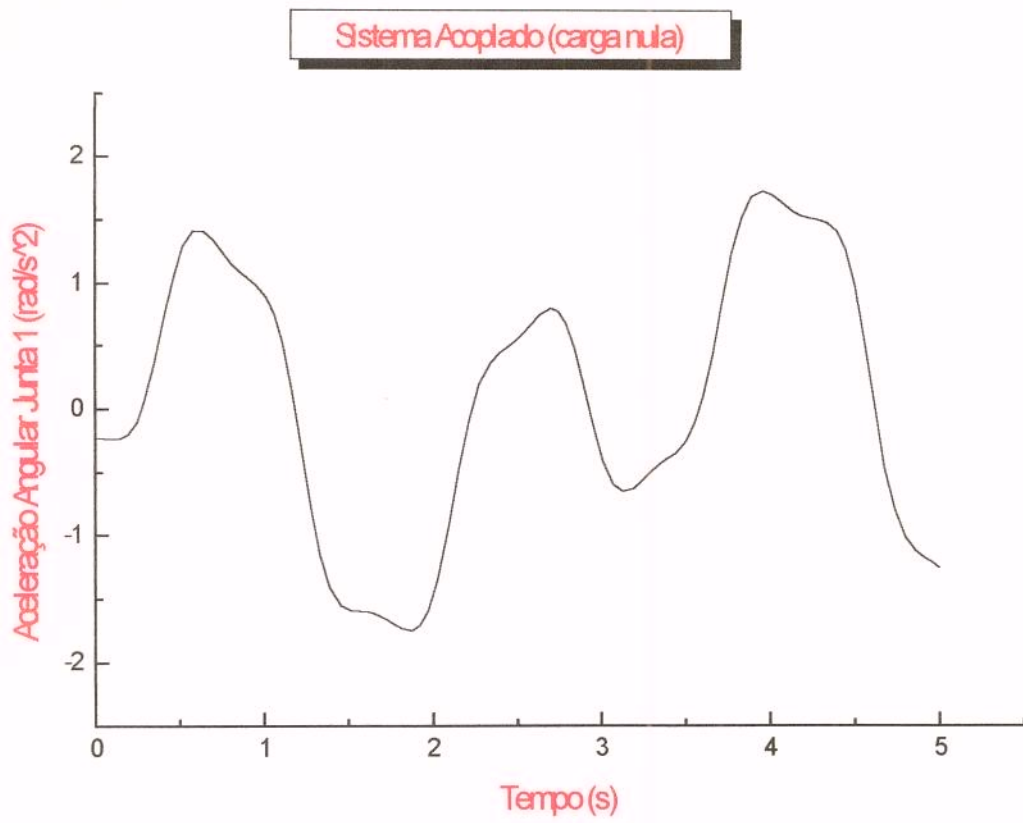
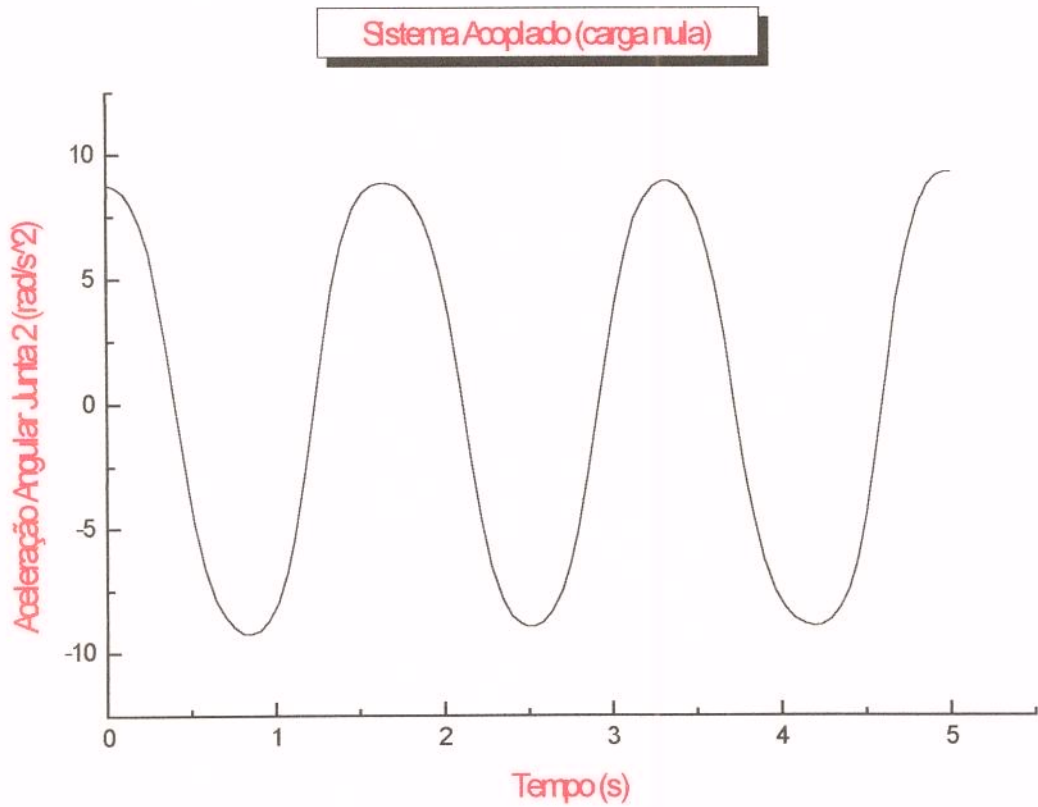
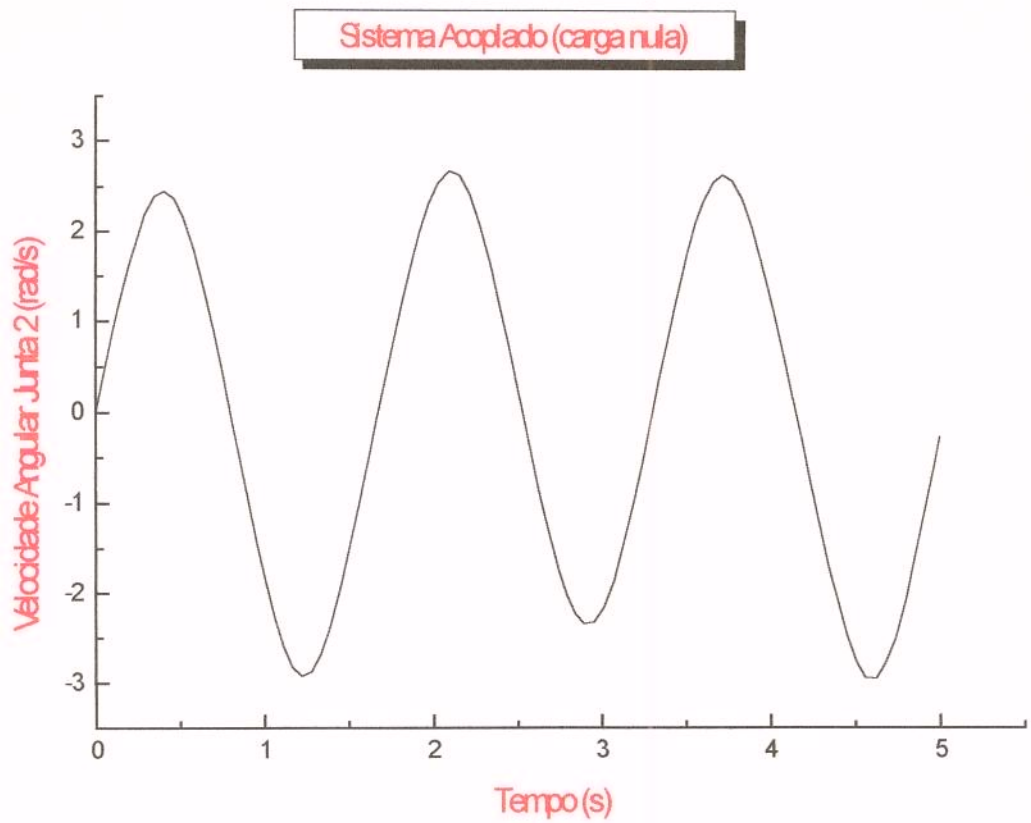


Figura 4.3: Sistema acoplado sem carga na extremidade







Na figura 4.4 é ilustrada a situação de simulação com uma carga na extremidade para o sistema acoplado.

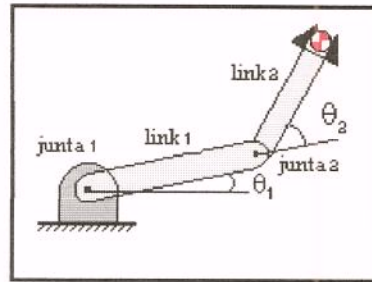
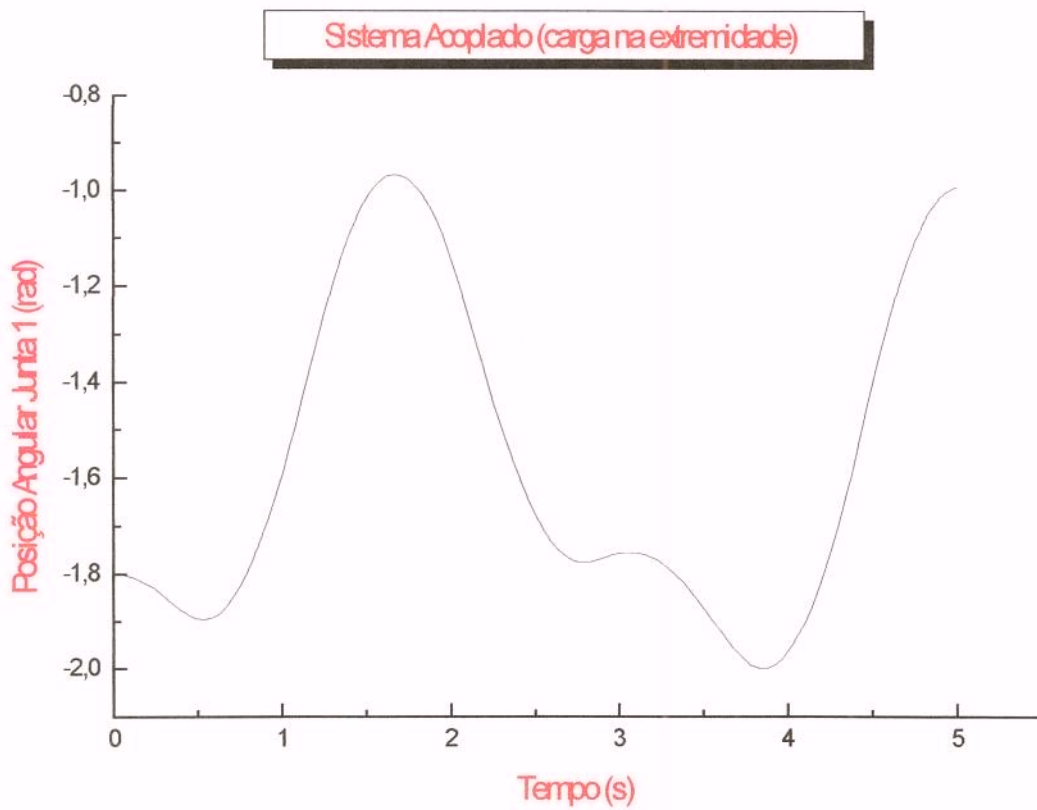
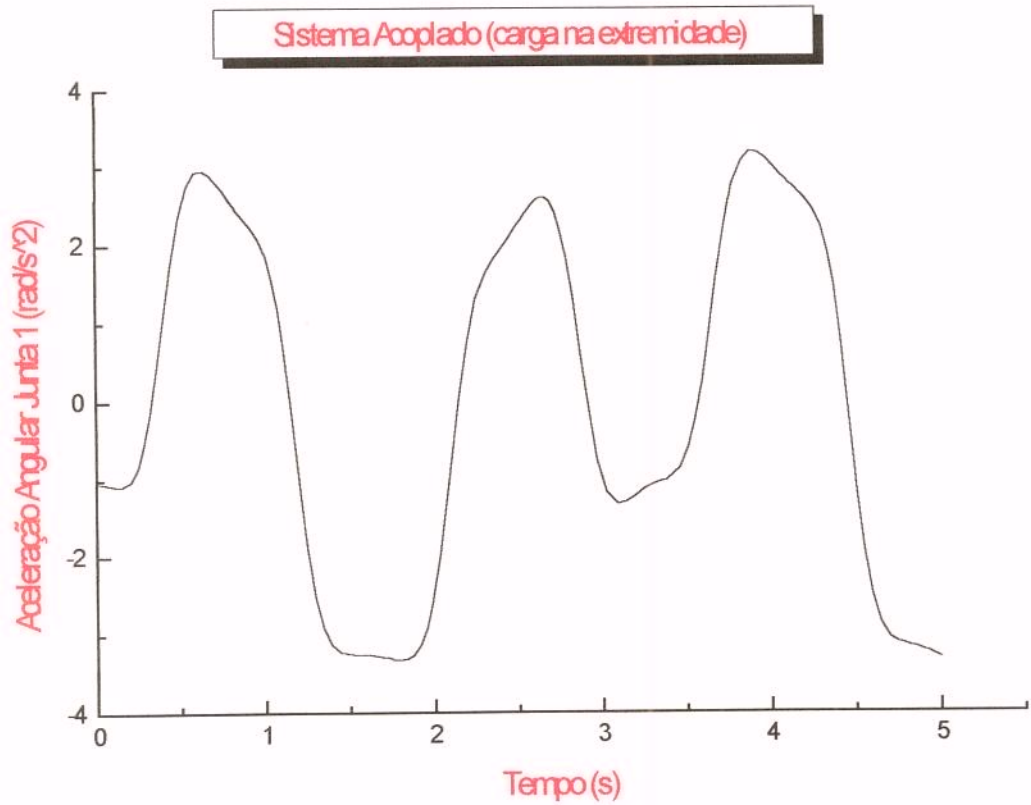
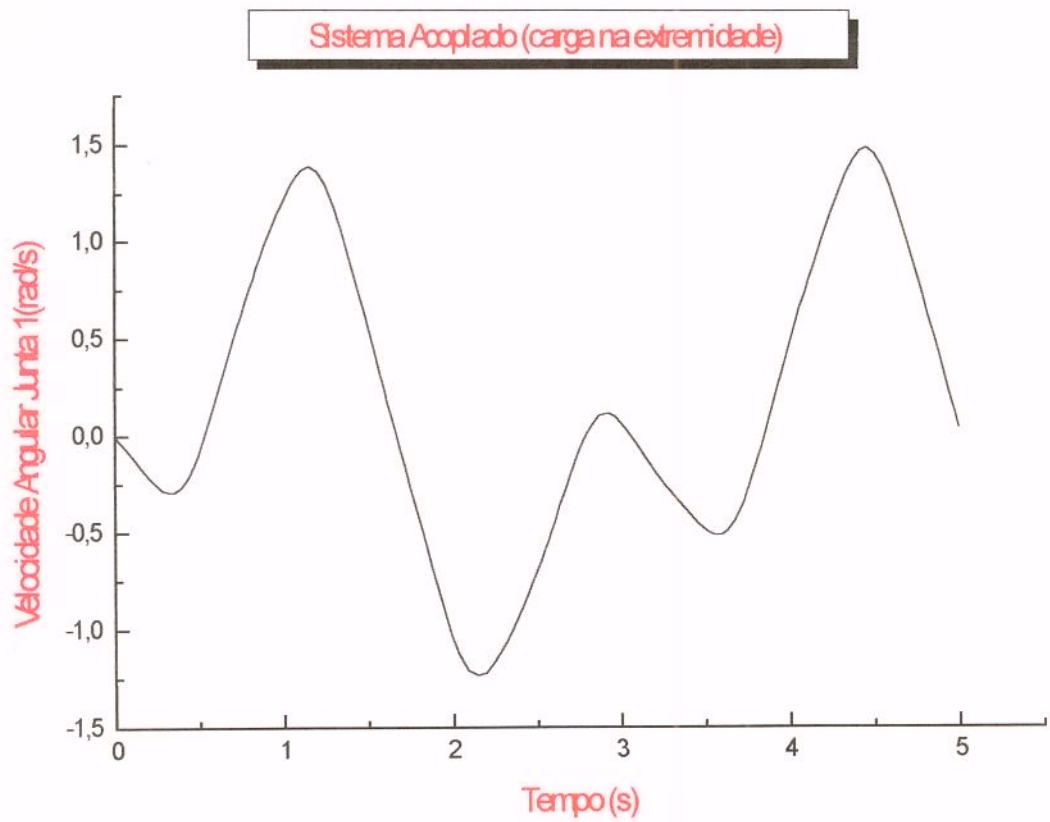
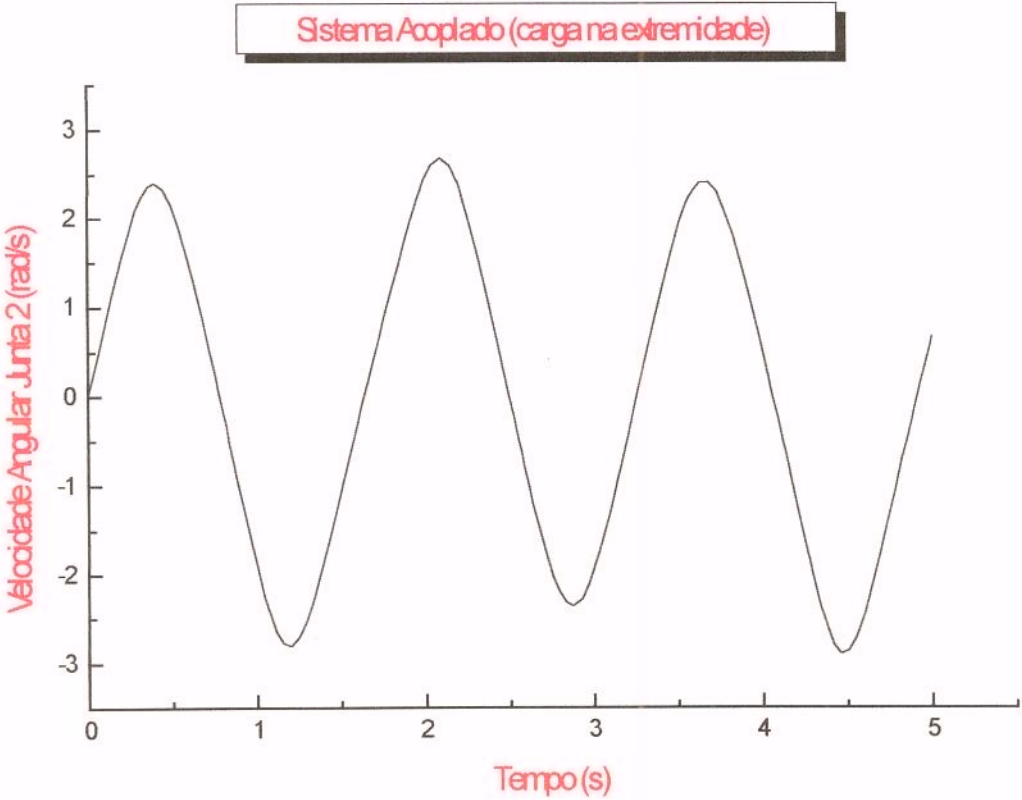
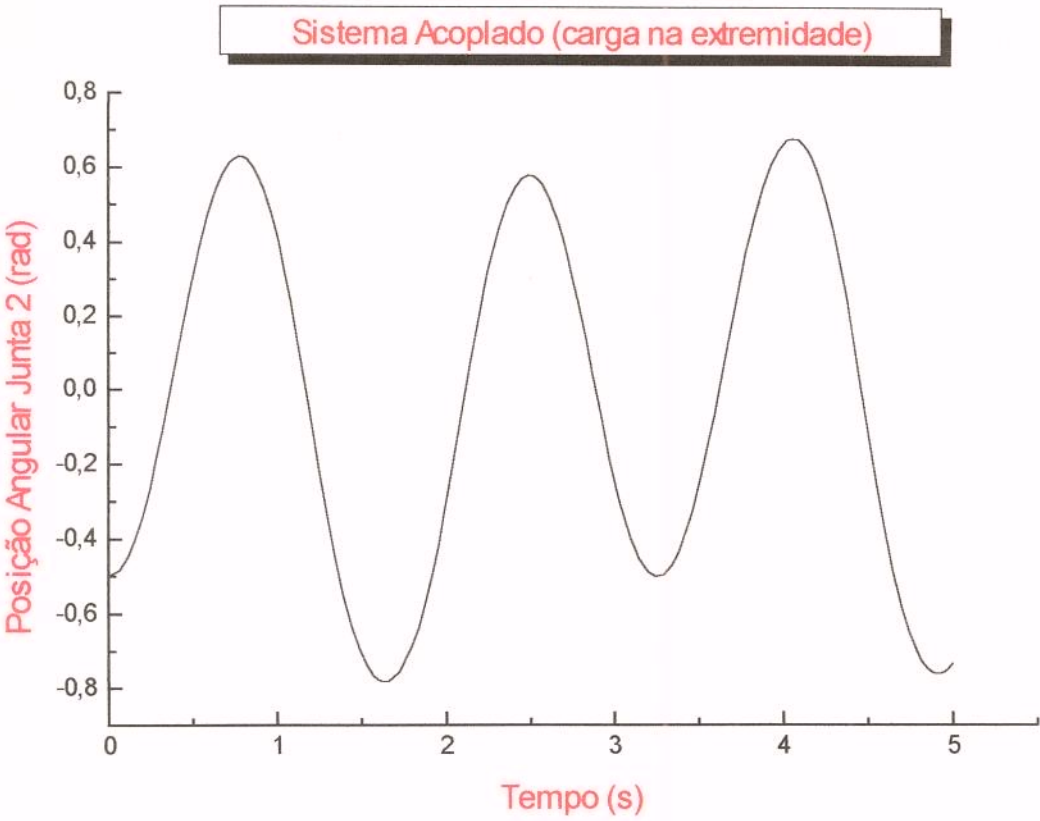
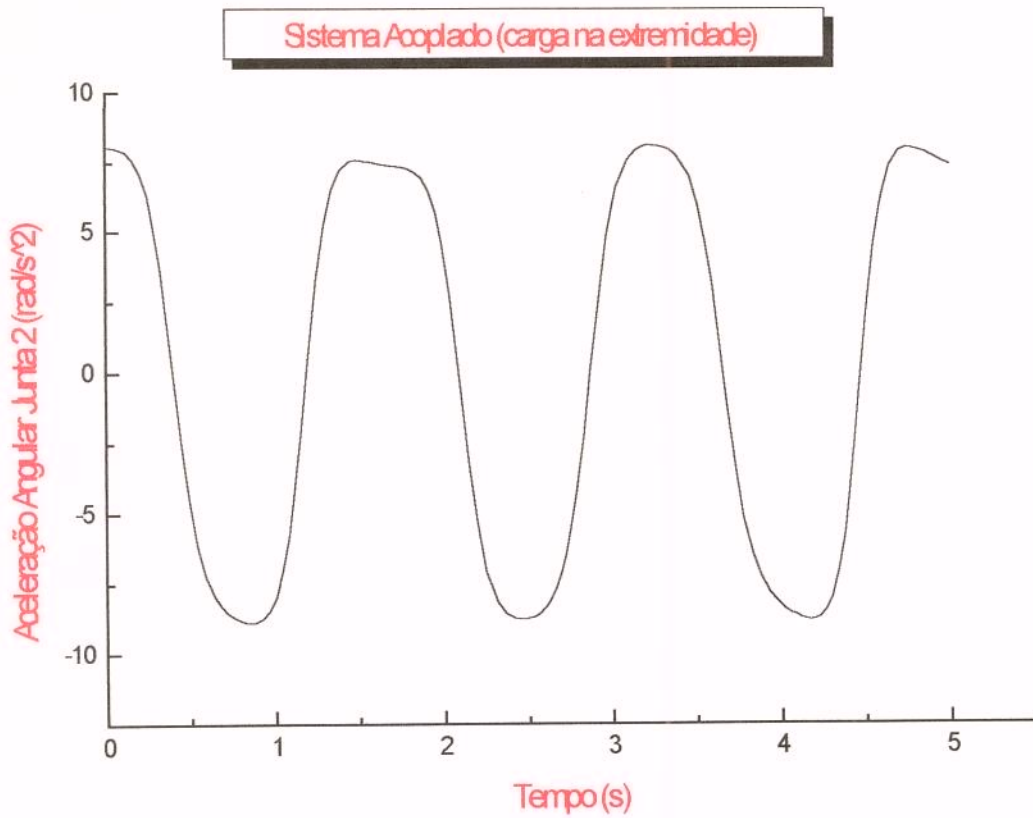


Figura 4.4: Sistema acoplado com carga na extremidade









4.3 Manipulador Flexível

A figura 4.5 ilustra a situação de simulação para o sistema flexível acoplado com uma carga na extremidade, cujas equações de movimento foram obtidas no capítulo. São apresentadas as evoluções temporais de posição e velocidade angulares para as juntas 1 e 2.

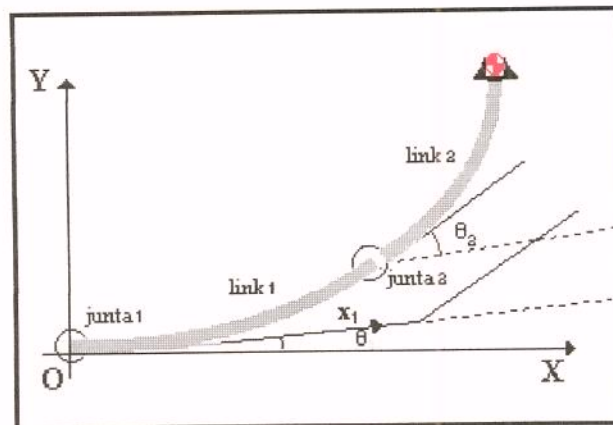
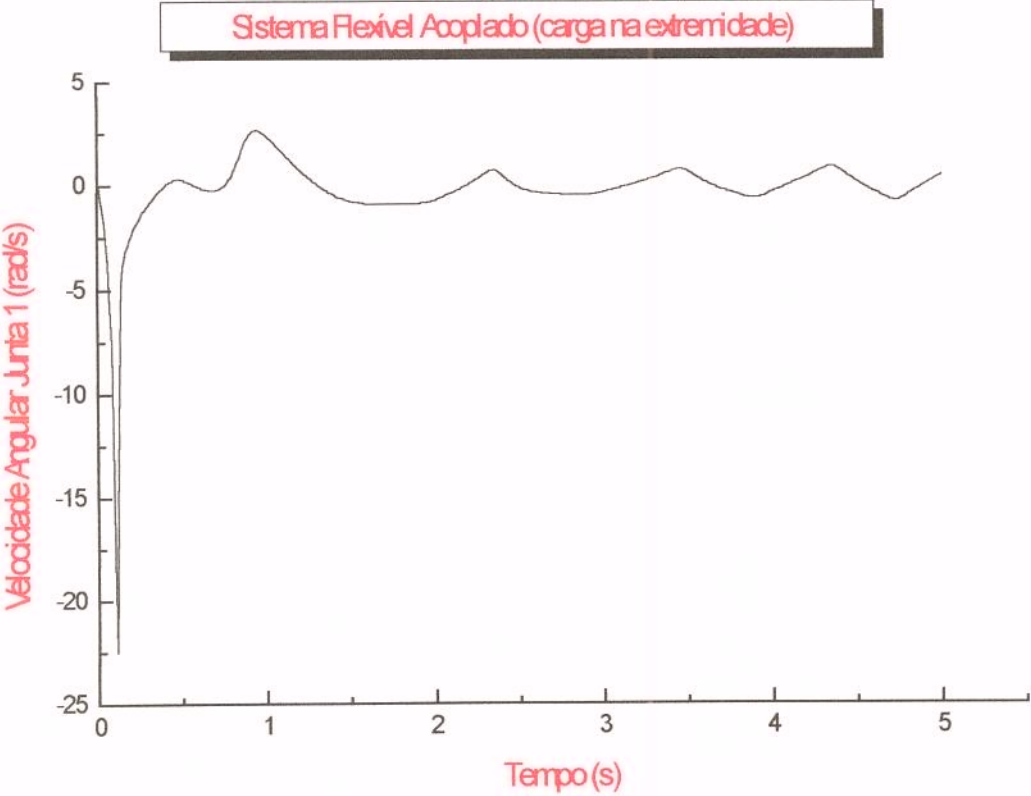
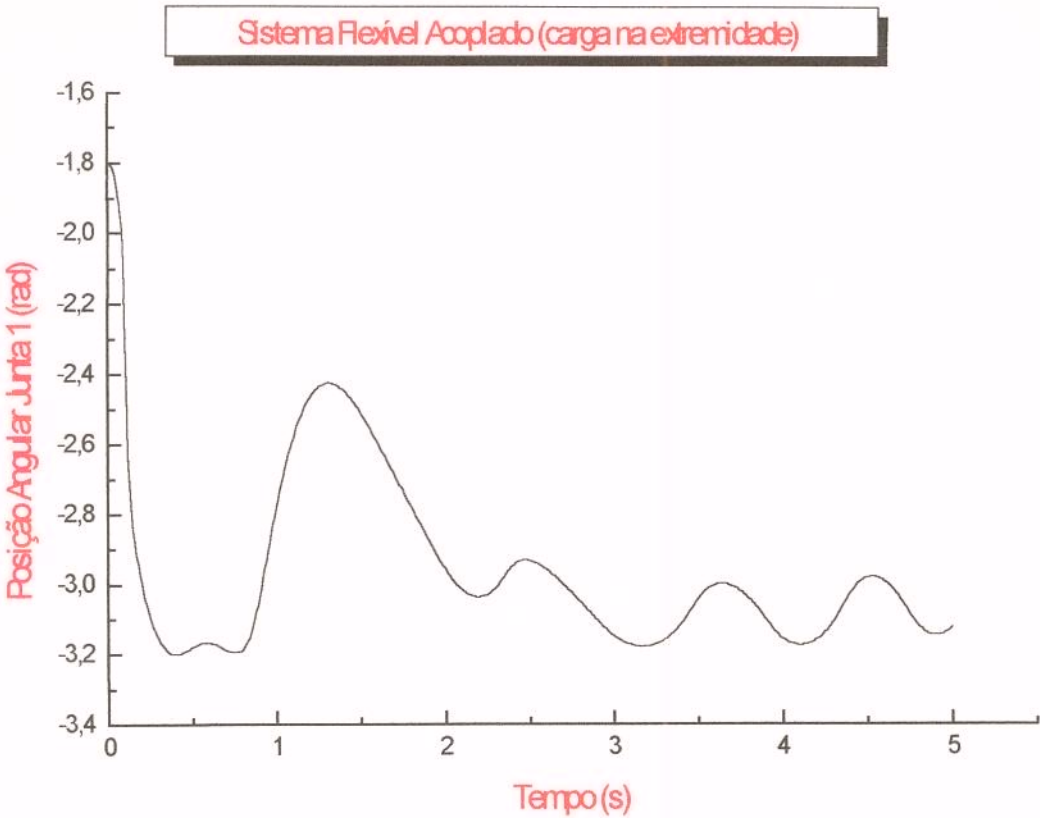
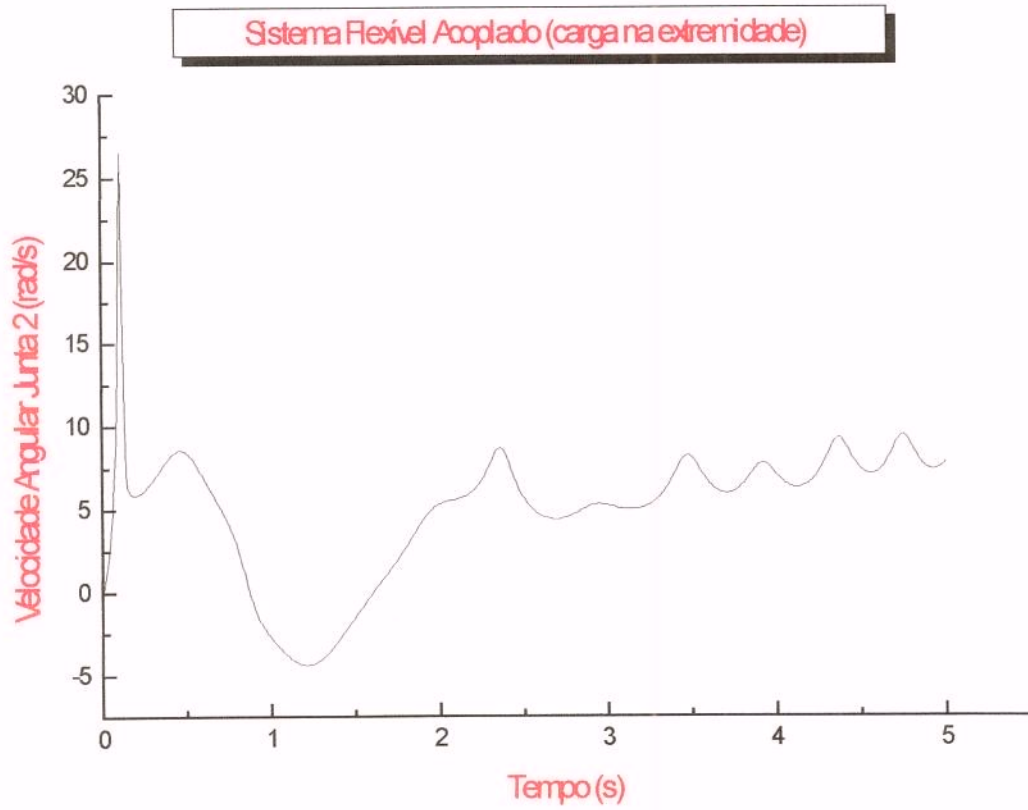
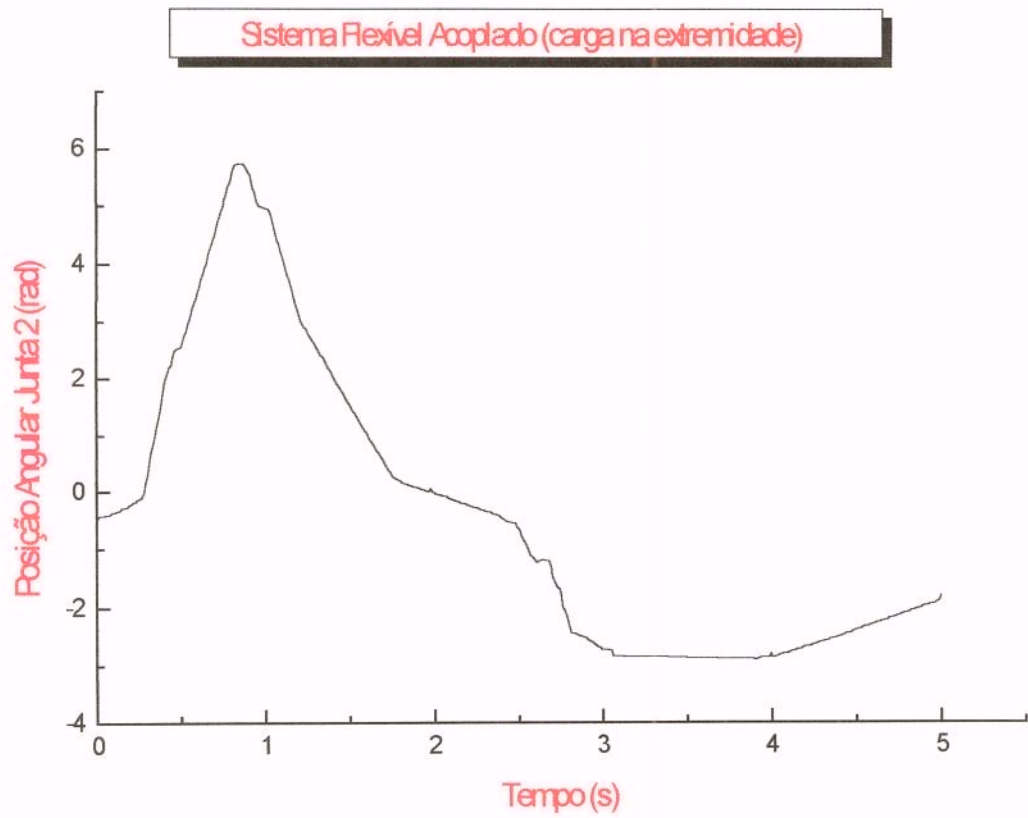


Figura 4.5: Sistema flexível com carga na extremidade



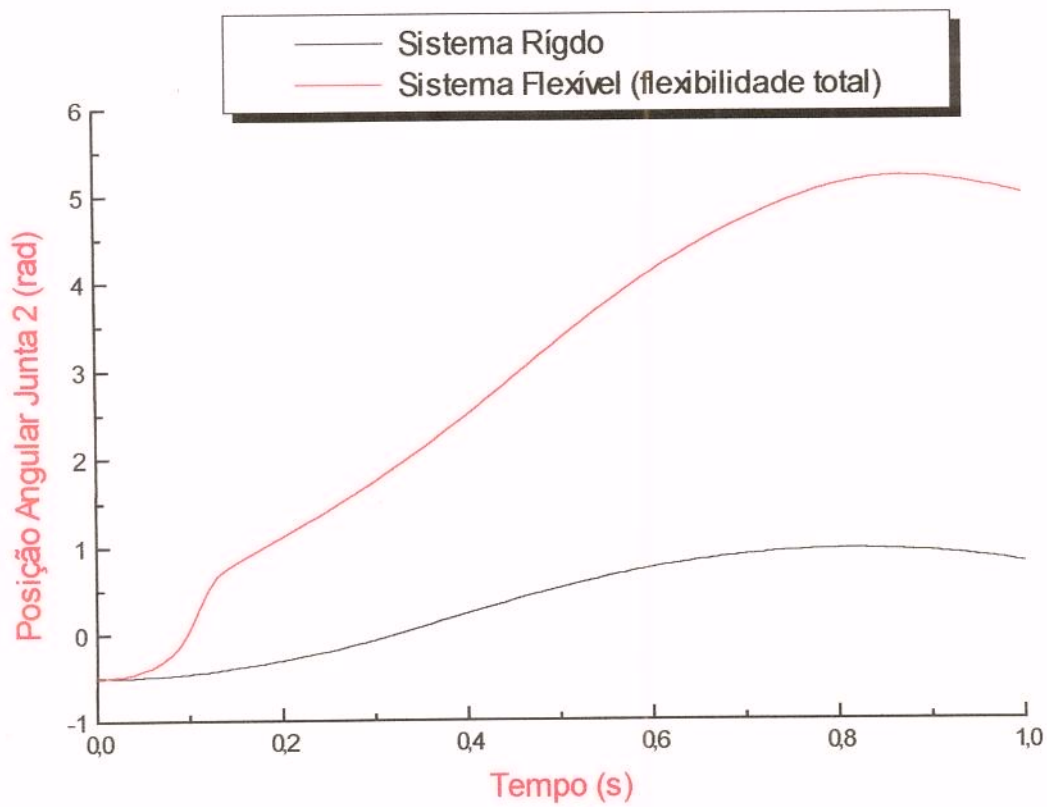
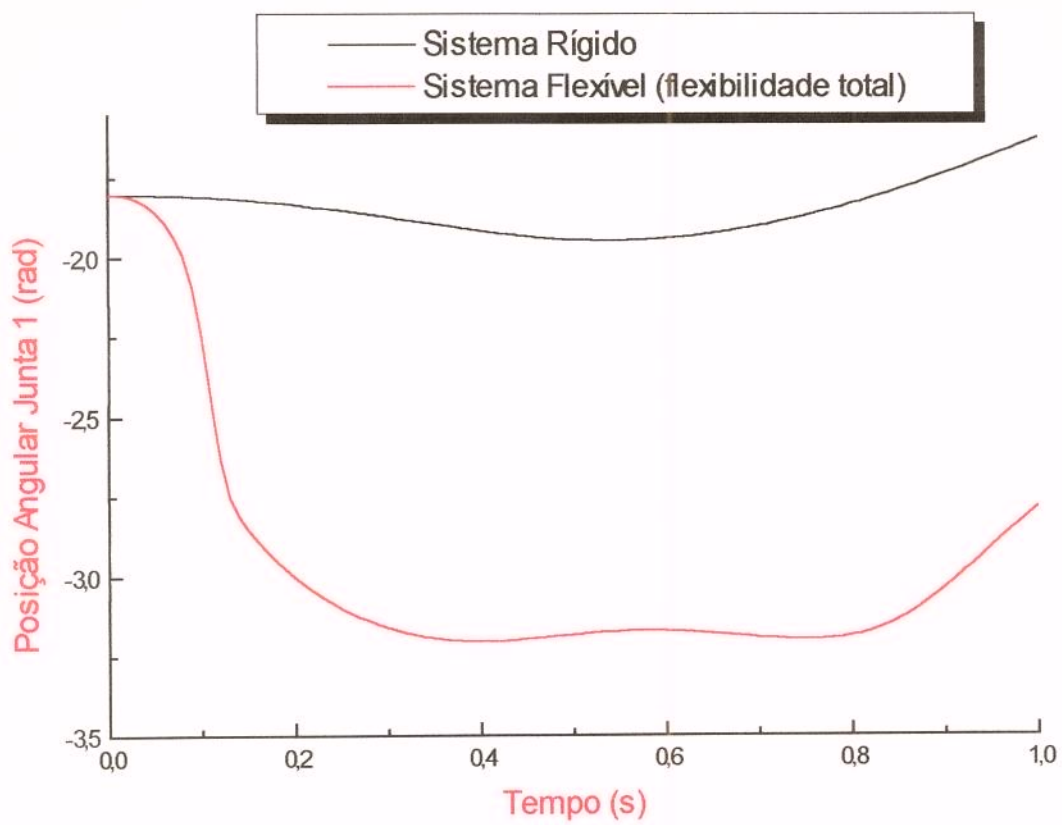


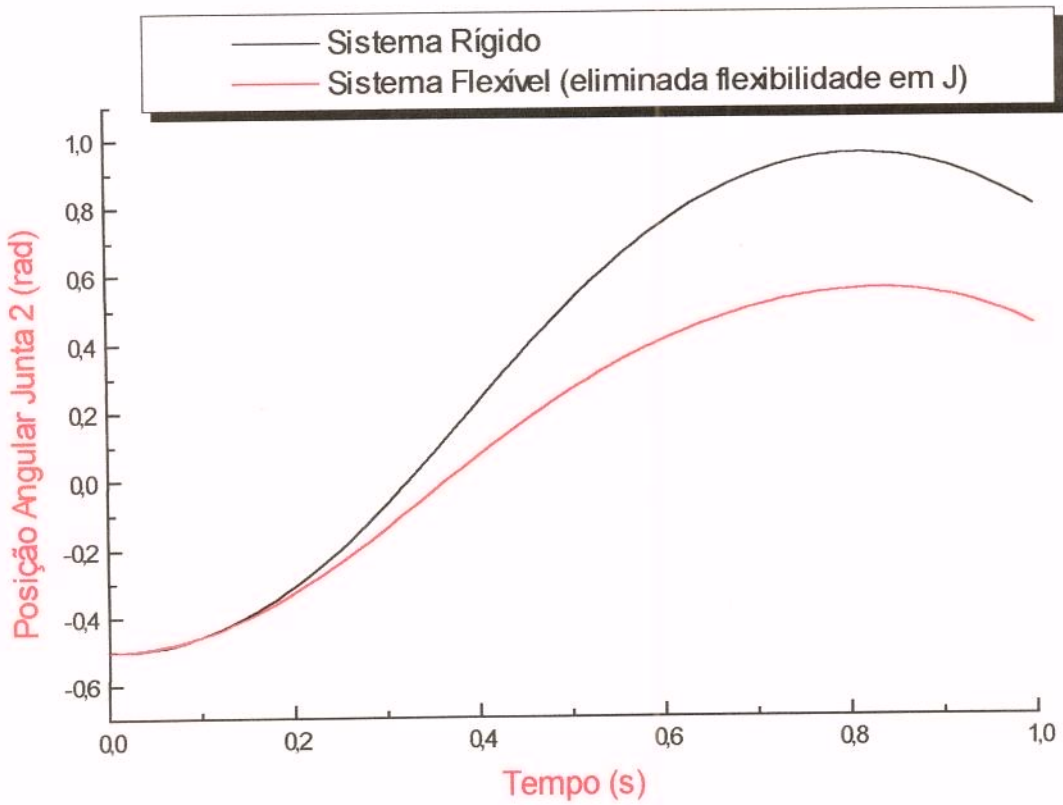
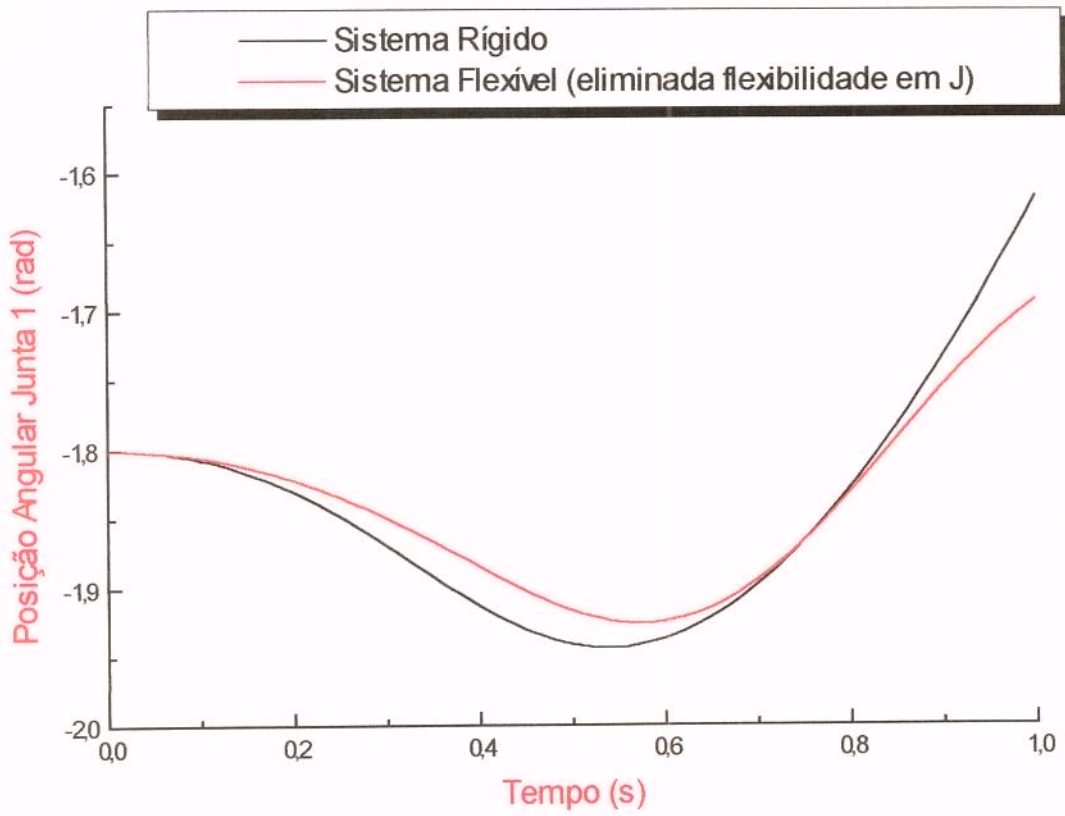
Mostra-se a seguir comparações entre as evoluções temporais de posições angulares para as juntas 1 e 2 de ambos os sistemas, rígido e flexível, representados respectivamente pelas figuras 4.4 e 4.5.

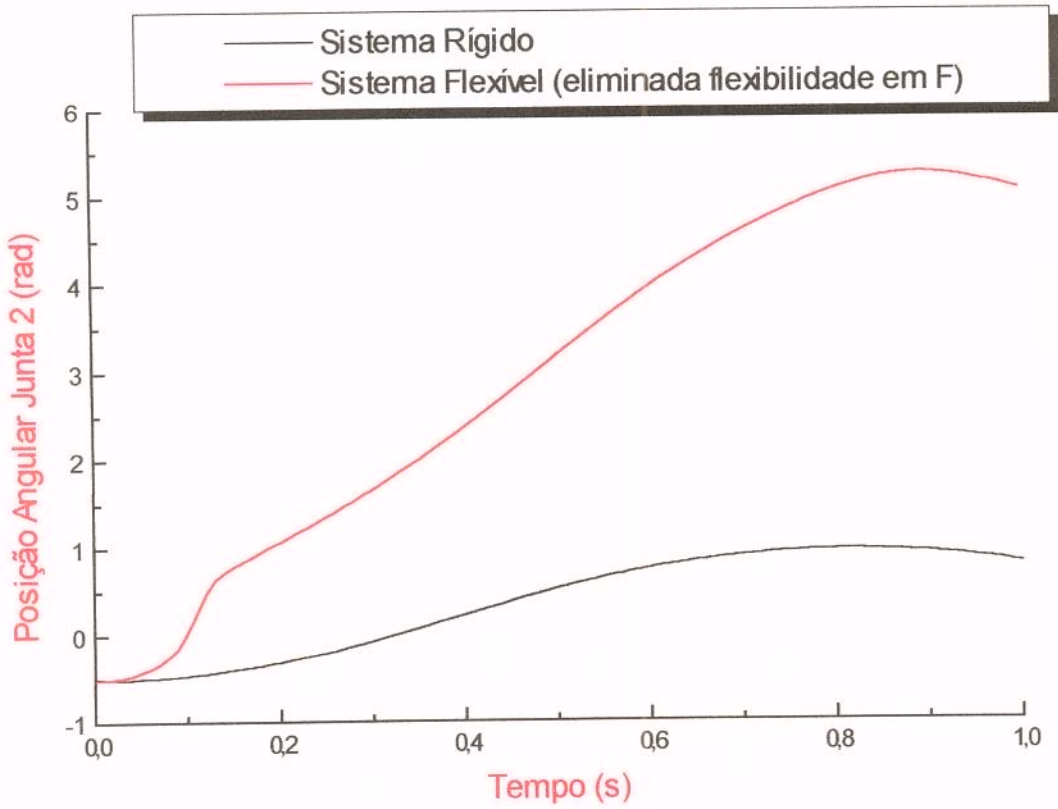
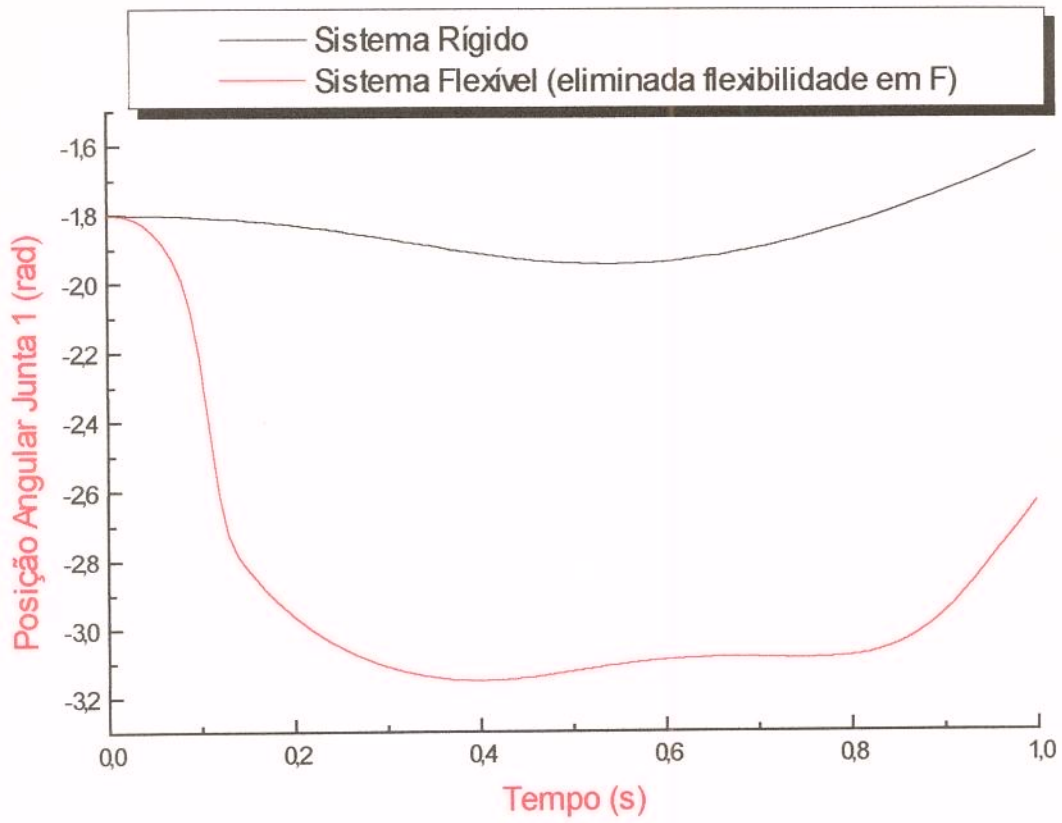
A atenção principal às posições angulares se justificam pelo fato de que, num problema de controle robótico são utilizados, na maioria das vezes, sensores de posição incrementais a fim de corrigir a resposta do elemento terminal, como já mencionado no capítulo 1 deste texto.

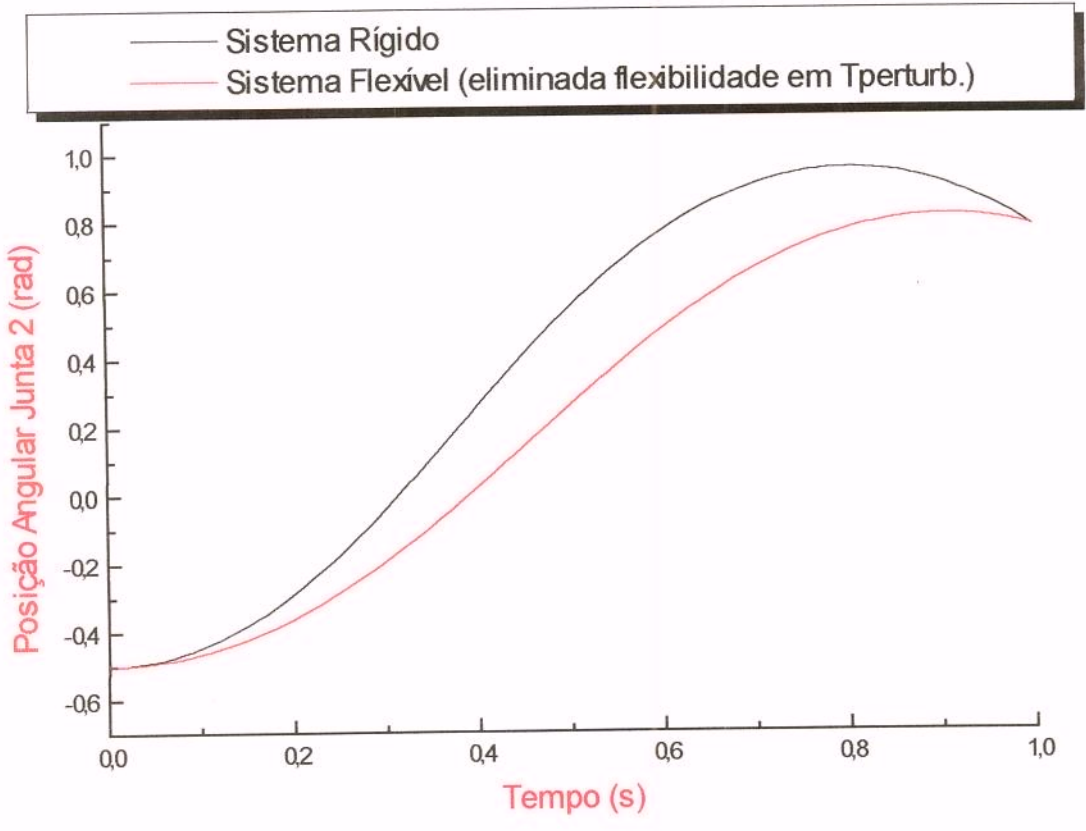
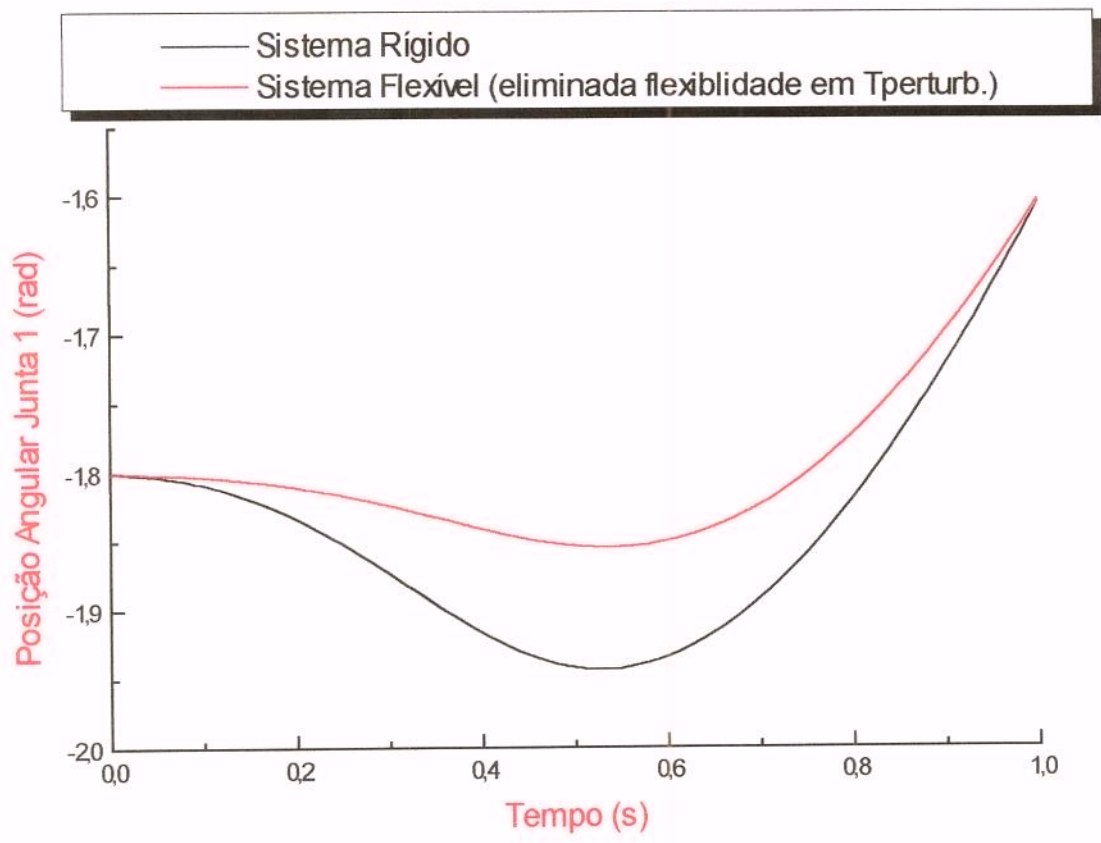
Ambos os sistemas são considerados acoplados e com carga na extremidade. O manipulador flexível é simulado inicialmente com todas as suas contribuições matemáticas que representam flexibilidade para o sistema. A partir daí, esses efeitos são eliminados gradativamente pela anulação dos termos matemáticos que os representam. Novas simulações são realizadas para estudar o comportamento do sistema. Os efeitos devido a flexibilidade são subtraídos até o caso em que o sistema flexível reduz-se ao rígido e a resposta do sistema deve convergir para essa situação de manipulador rígido que estará sendo mostrada em cada gráfico com a finalidade de facilitar comparações entre as situações.

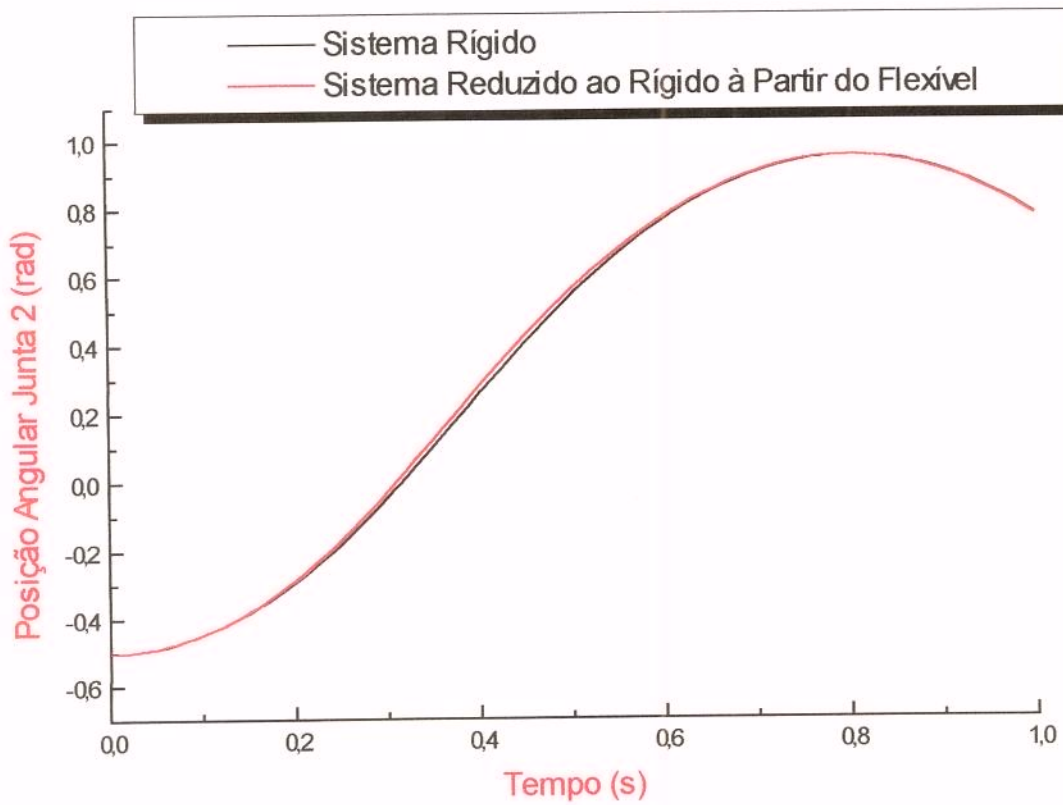
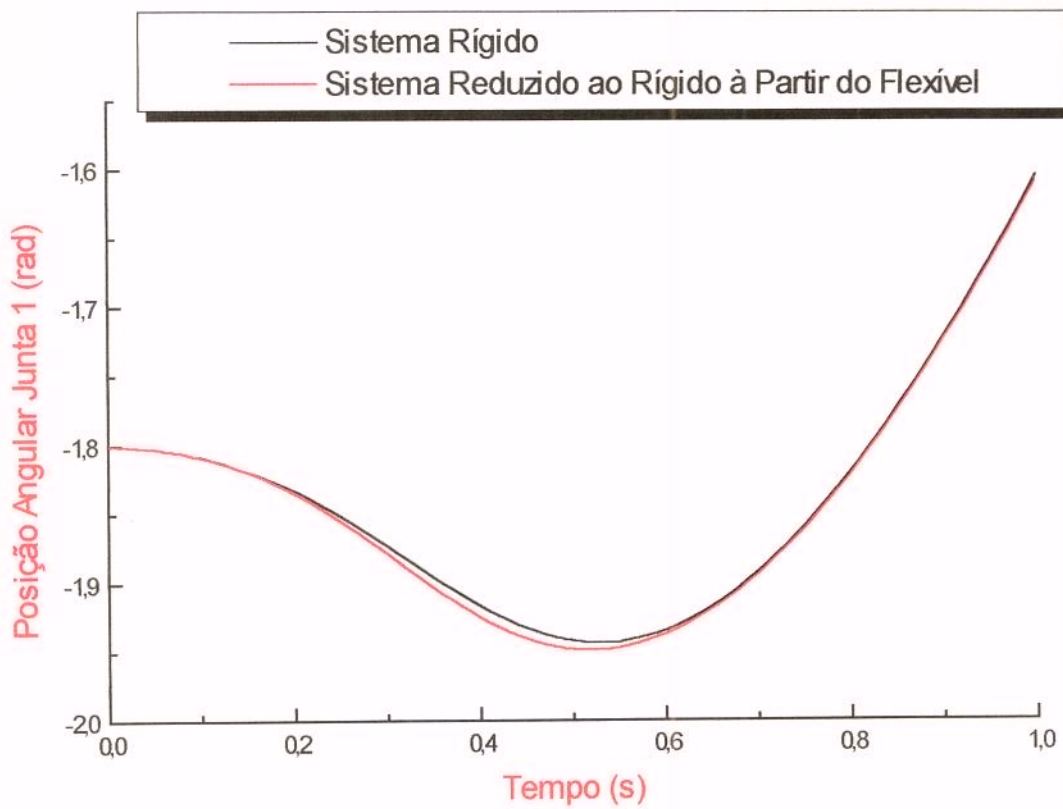
Um quadro explicativo no topo de cada gráfico traz a situação de simulação que o respectivo gráfico representa.











Esse capítulo apresentou algumas simulações especiais usando resultados obtidos nos capítulos 2 e 3, onde foram desenvolvidas as equações de movimento para os manipuladores rígido e flexível respectivamente.

Apresenta-se em anexo [Anexo C] a maneira com a qual se trabalhou com o software SIMULINK durante as simulações, mostrando o diagrama de blocos para uma das situações de simulação.

Capítulo 5

Conclusões e Sugestões para Trabalhos Futuros

5.1 Introdução

Neste capítulo, resume-se os principais resultados da análise dessa dissertação. Algumas conclusões sobre o modelo proposto para o manipulador são apresentadas e discutidas. Sugestões para trabalhos futuros são dadas na última seção deste capítulo.

5.2 Resumo das Conclusões Sobre o Modelo

Esse estudo apresentou um modelo de manipulador flexível formado por dois links e duas juntas rotacionais, sem atrito, cujo movimento global pode ser entendido como um movimento de um sistema hipotético rígido e um movimento flexível dos links com relação a esse sistema rígido móvel.

Mostrou-se que é possível trabalhar com as equações dinâmicas de movimento da maneira mais genérica possível, sem linearizações. Trabalhou-se também com um sistema rígido nas mesmas condições do flexível a fim de que comparações entre ambos pudessem ser estabelecidas.

Além disso, o trabalho mostra através de uma conveniente parametrização das equações de movimento, que o sistema flexível pode ser escrito matematicamente como uma extensão do modelo rígido, e conseqüentemente o manipulador flexível pode ser reduzido ao rígido com a anulação dos termos relacionados à flexibilidade.

Esse procedimento foi estendido às simulações, e os resultados mostram a resposta do comportamento do sistema.

Nota-se que, eliminando contribuições de flexibilidade devido ao coeficiente F , o sistema continua respondendo praticamente como se fosse totalmente flexível. De fato, uma simples

observação das equações de movimento sugere esse comportamento, já que esses coeficientes são representados por um número menor de termos nas equações.

Deve-se notar também que as contribuições de flexibilidade para o sistema representadas tanto pelos coeficientes em J , como pelos coeficientes em $\Gamma_{\text{perturb.}}$, quando eliminadas fazem com que o sistema tenha uma resposta que vai se aproximando daquela dada pelo manipulador rígido.

É importante que se observe, entretanto, que os coeficientes em J também não possuem tantos termos matemáticos quando comparados com coeficientes em $\Gamma_{\text{perturb.}}$, mas ainda assim apresentam uma influência relativamente significativa na resposta do sistema. Esses coeficientes estão relacionados com a inércia efetiva de cada link e também com o acoplamentos de inércia entre os links.

Uma vez eliminadas as contribuições de flexibilidade relacionadas aos três coeficientes (J , F e $\Gamma_{\text{perturb.}}$), a resposta do sistema converge para àquela dada pelo manipulador rígido, como era de se esperar.

A análise das equações de movimento tal como foi feita nesse trabalho permite um monitoramento sobre cada parcela de contribuição para a flexibilidade do sistema. Pode-se assim, pensar na possibilidade de se encontrar uma fronteira entre ambos os sistemas, rígido e flexível.

Pode-se também pensar em construir controladores que façam compensações de efeitos físicos-que através das simulações foram considerados relevantes para a flexibilidade do sistema- a fim de corrigir a resposta do elemento terminal do manipulador aos sinais de entrada do sistema de controle.

5.3 Observações Gerais

Se a lei de controle requer mais que a medida das posições angulares para efetuar as correções de movimento, faz-se necessário uma análise um pouco mais sofisticada para medir as componentes flexíveis. Pode-se entretanto utilizar deste modelo para tal análise.

Um estudo mais detalhado desse movimento planar é também possível introduzindo-se deformações e amortecimentos associados aos acionadores.

5.4 Sugestões para Trabalhos Futuros

O trabalho apresentado nesta dissertação sugere vários problemas para investigações futuras:

- 1-) Uma validação experimental deste modelo através de construção de um protótipo.
- 2-) Aplicação da estratégia de controle proposta através de compensações de efeitos físicos considerados relevantes para a flexibilidade do sistema.
- 3-) Estudar a possibilidade de associar ao modelo dinâmico proposto, outras técnicas de controle de manipuladores flexíveis, baseadas por exemplo em redes neurais.
- 4-) Estender o modelo proposto para representações de movimentos espaciais considerando também deformações torsionais.
- 5-) Incluir um terceiro link no modelo, podendo este ser rígido ou flexível.

Referências Bibliográficas:

[1]-ASADA, H., SLOTINE, J.J.E.: "Robot Analysis and Control", John Wiley and Sons, 1986.

[2]-BARBIERI, E., OZGUNER, U. : "Unconstrained and Constrained Mode Expansions for a Flexible Slewing Link", Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol. 110, pp.416-421, december 1988.

[3]-BOOK, W.J., "Recursive Lagrangian Dynamics of Flexible Manipulator Arms", The International Journal of Robotics Research, v.3, No. 3, p. 87-101, 1984.

[4]-BOOK, W.J., MAIZZA-NETO, O., WHITNEY, D.E., "Feedback Control of Two Beam, Two Joint Systems With Distributed Flexibility", Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, v.97, No. 4, p. 424-431, december 1975.

[5]-BOOK, W.J., MAJETTE, M. "Controller Design for Flexible, Distributed Parameter Mechanical Arms Via Combined State Space and Frequency Domain Techniques", Journal of Dynamics Systems, Measurement, and Control, v.105, p. 245-254, december 1983.

[6]-BREMER, H., "On The Dynamics of Flexible Manipulators", IEEE Conf. Robotics Automat., p. 1556-1560, in Proc. 1987.

[7]-BUTKOV, E., "Física Matemática", Editora Guanabara S.A., 1988, 725 p.

[8]-CANNON, R.H.Jr., SCHMITZ, E., "Initial Experiments on End-Point Control of a Flexible One-Link Robot", The International Journal of Robotic Research, v.3, No.3, p. 62-75, 1984.

[9]-CETINKUNT, S., BOOK, W.J., "Performance Limitations of Joint Variable-Feedback Controllers Due to Manipulator Structural Flexibility", IEEE Transactions on Robotics and Automation, v.6, No.2, p. 219-230, april 1990.

[10]- CETINKUNT, S., BOOK, W.J., "Symbolic Modeling and Dynamic Simulation of Robotic Manipulators With Compliant Links and Joints", *Robotics & Computer Integrated Manufacturing*, v.5, No.4, p. 301-310, 1989.

[11]- CHANG, L.W., HAMILTON, J.F., "Dynamics of Robotic Manipulators With Flexible Links", *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, v.113, p. 54-59, march 1991.

[12]- CHOURA,S., JAYASURIYA,S., MEDICK,M.A., "On the Modeling, and Open-Loop Control of a Rotating Thin Flexible Beam", *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, v.113, p. 26-33, march 1991.

[13]- CRAIG, J.J., "Adaptative Control of Mechanical Manipulators". Addison-Wesley Publishing Company,1988.

[14]- CRAIG, J.J., "Introduction to Robotics: Mechanics & Control". Addison-Weslwy Publishing Company, 1986.

[15]-CRANDALL,S.H., "Engineering Analysis", Mac Graw-Hill Company 1956.

[16]-FELIU, V., RATTAN, K.S., BROWN, B.Jr., "Adaptative Control of a Single-Link Flexible Manipulator", *IEEE Control Systems Magazine*, p. 29-33, february 1990.

[17]-FU, K.S., GONZALEZ, R.C., LEE, C.S.G., "Robotics: Control, Sensing, Vision, and Intelligence"., Mc Graw-Hill Company 1987.

[18]-GARCIA, E., "On The Modeling and Control of Slewing Flexible Structures"., Ph.D. Thesis, State University of New York, august 1989.

[19]-GOLDSTEIN, H., "Classical Mechanics", Reading, Mass., Addison-Wesley Publishing Company, Second Edition, 1981.

[20]-HASTINGS, G.G., BOOK, W.J., "A linear Dynamic Model for Flexible Robotic Manipulators", IEEE Control Systems Mag. 7, p. 61-64, 1987.

[21]-HOLLERBACH, J.M. "A Recursive Lagrangian Formulation of Manipulator Dynamics and a Comparative Study of Dynamics Formulation Complexity", IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Vol. smc-10, No.11, november 1980.

[22]-KOIVO, A. J. "Fundamentals for Control of Robotic Manipulators", John Wiley & Sons, Inc. 1989.

[23]-LI, C.J., SANKAR, T.S., "A systematic Method of Dynamics for Flexible Robot Manipulators", Journal of Robotic Systems 9 (7), p. 861-891, 1992.

[24]-MEIROVITCH, L., "Analytical Methods in Vibrations", The MacMillan Company, 1971.

[25]-NATHAN, P.J.;SINGH, S.N. "Nonlinear Ultimate Boundedness Control and Stabilization of a Flexible Robotic Arm", Journal of Robotic Systems 9(3), 301-326, 1992.

[26]-NATHAN, P.J.;SINGH, S.N., "Sliding Mode Control and Elastic Mode Stabilization of a Robotic Arm With Flexible Links", Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control", v.113, p. 669-676, december 1991.

[27]-NAYFEH, A.H., MOOK, D.J., "Nonlinear Oscillations", John Wiley & Sons, New York, 1979.

[28]-PAUL, R.P., "Robot Manipulators: Mathematics, Programming, and Control", The M.I.T. Press, 1986.

[29]-PC- MATLAB with SIMULINK user's guide, The MathWorks, Inc., march 1992.

[30]-ROSÁRIO, J.M. “Modelisation Dynamique Dún Robot Industriel”. Ministère de l’Education Nationale. Institut Supérieur des Matériaux et de la Construction Mécanique., scp, France, september 1987.

[31]-SÁ, C.E.A. “Implementação de Métodos Numéricos para a Resolução do Problema Cinemático Inverso de Robôs com Ênfase em Controle de Posição”, Tese de Mestrado, Unicamp, agosto 1996

[32]-SCHIELEN, I.W. “Technische Dynamik”. s.l.p. ; s.c.p., s.d.p. 106 pp.

[33]-SEEGER, G., “Selbsteinstellende, Modellgestutzte Regelung Eines Industrieroboters, Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig / Wiesbaden, 1992.

[34]-SPONG, M.W., “Modeling and Control of Elastic Joint Robots”, ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, v.109, p. 310-319, 1987.

[35]-SYMON, K.R., “Mecânica”, Editora Campus LTDA, 1982, 685 p.

[36]-THOMSON, W.T., “Theory of Vibrations with Applications”, Second Edition, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1981.

[37]-TIMOSHENKO, S.P., “Resistência dos Materiais”, Ao Livro Técnico S.A., v.1, 1969.

[38]-WANG, D., VIDYASAGAR, M., “Control of a Class of Manipulators With a Single Flexible Link - Part I: Feedback Linearization”, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, v.113, p. 655-661, december 1991.

Anexo A: Modelagem Dinâmica de Robô Rígido com n Graus de Liberdade.

Introdução

Nesse anexo procura-se esclarecer os detalhes da sistemática de obtenção das equações dinâmicas de movimento de um manipulador rígido com n graus de liberdade. Utiliza-se o formalismo Lagrangeano, o que implica na necessidade de se encontrar as energias cinética e potencial do sistema.

Dessa forma, faz-se necessário o conhecimento dos vetores posição e velocidade de um ponto no manipulador, e esse é o primeiro procedimento a ser realizado. A partir desses vetores pode-se escrever as energias cinéticas e potencial, e conseqüentemente o Lagrangeano. Finalmente, são encontradas as equações de movimento a partir das equações de Euler-Lagrange.

A-1 Velocidade de um ponto no manipulador

Seja ${}^i r_i$ um ponto fixo e em repouso em um link i. Pode-se expressá-lo com relação ao i-ésimo sistema de referência - que é fixo ao link i - da seguinte maneira:

$${}^i r_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{bmatrix} = (x_i, y_i, z_i, 1)^T \quad (\text{A.1})$$

Seja, também, ${}^0 r_i$ o mesmo ponto que foi descrito acima, mas agora escrito com relação ao sistema de referência da base. Se ${}^0 A_i$ representa a matriz transformação que relaciona o i-ésimo sistema de referência ao sistema de referência da base, então ${}^0 r_i$ está relacionado ao ponto ${}^i r_i$ por:

$${}^0 r_i = {}^0 A_i {}^i r_i \quad (\text{A.2})$$

onde:

$${}^0 A_i = {}^0 A_1 \cdot {}^1 A_2 \cdot \dots \cdot {}^{i-1} A_i \quad (\text{A.3})$$

Desde que o ponto ${}^i r_i$ está em repouso no link i , e assumindo movimento de corpo rígido, outros pontos (tão bem como o ponto ${}^i r_i$) que estão fixos no link i e expressos com relação ao i -ésimo sistema de referência, terão velocidade zero com relação ao i -ésimo sistema de referência, que não é um referencial inercial.

A velocidade de ${}^0 r_i$ expressa no sistema de referência da base - que é um referencial inercial - pode ser expressa como:

$${}^0 v_i = v_i = \frac{d}{dt}({}^0 r_i) = \frac{d}{dt}({}^0 A_i {}^i r_i) \quad (\text{A.4})$$

Mas:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}({}^0 A_i {}^i r_i) &= \frac{d}{dt}[({}^0 A_1 {}^1 A_2 \dots {}^{i-1} A_i) {}^i r_i] = \\ \frac{d}{dt}({}^0 A_1 {}^1 A_2 \dots {}^{i-1} A_i) \cdot {}^i r_i &+ ({}^0 A_1 {}^1 A_2 \dots {}^{i-1} A_i) \cdot \frac{d}{dt}({}^i r_i) = \\ \frac{d}{dt}({}^0 A_1 {}^1 A_2 \dots {}^{i-1} A_i) \cdot {}^i r_i &+ {}^0 A_i {}^i \dot{r}_i \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Portanto,

$$\begin{aligned} v_i = \frac{d}{dt}({}^0 A_i {}^i r_i) &= {}^0 \dot{A}_1 \cdot {}^1 A_2 \cdot {}^2 A_3 \dots {}^{i-1} A_i \cdot {}^i r_i + {}^0 A_1 \cdot {}^1 \dot{A}_2 \cdot {}^2 A_3 \dots {}^{i-1} A_i \cdot {}^i r_i + \\ &{}^0 A_1 \cdot {}^1 A_2 \cdot {}^2 \dot{A}_3 \dots {}^{i-1} A_i \cdot {}^i r_i + {}^0 A_1 \cdot {}^1 A_2 \cdot {}^2 A_3 \dots {}^{i-1} \dot{A}_i \cdot {}^i r_i + {}^0 A_i {}^i \dot{r}_i \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Como já justificou-se, ${}^i \dot{r}_i = 0$. Dessa forma,

$$v_i = \left[\sum_{j=1}^i \frac{\partial {}^0 A_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right] {}^i r_i \quad (\text{A.7})$$

A fim de simplificar a notação, vamos definir $U_{ij} \equiv \frac{\partial {}^0A_i}{\partial q_j}$. (A.8)

Usando esta notação, pode-se expressar a velocidade da seguinte maneira:

$$v_i = \left[\sum_{j=1}^i U_{ij} \dot{q}_j \right] {}^i r_i \quad (A.9)$$

A-2 Energia Cinética

Uma vez que a velocidade foi obtida, pode-se agora encontrar a energia cinética. Seja T_i a energia cinética do link i , $i = 1(1)n$, expressa no referencial da base, e seja também dT_i a energia cinética de uma partícula com um diferencial de massa dm no link i . Assim,

$$dT_i = \frac{1}{2} (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) dm \quad (A.10)$$

ou ainda,

$$dT_i = \frac{1}{2} \text{Tr}(v_i v_i^T) dm \quad (A.11)$$

Mas viu-se que:

$$v_i = \left[\sum_{j=1}^i U_{ij} \dot{q}_j \right] {}^i r_i \quad (A.12)$$

Substituindo, então na expressão para dT_i , tem-se :

$$dT_i = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\sum_{p=1}^i U_{ip} \dot{q}_p {}^i r_i \left(\sum_{r=1}^i U_{ir} \dot{q}_r {}^i r_i \right)^T \right] dm \quad (A.13)$$

Portanto,

$$dT_i = \frac{1}{2} Tr \left[\sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i U_{ip} \left({}^i r_i \, dm \, {}^i r_i^T \right) U_{ir}^T \dot{q}_p \dot{q}_r \right] \quad (A.14)$$

Nota-se que, $\dot{q}_i$ é independente da distribuição de massa do link i , e então, ao somar todas as energias cinéticas de todos os links pode-se colocar a integral dentro dos parênteses, como mostra-se abaixo:

$$T_i = \int dT_i = \frac{1}{2} Tr \left[\sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i U_{ip} \left(\int {}^i r_i \, {}^i r_i^T \, dm \right) U_{ir}^T \dot{q}_p \dot{q}_r \right] \quad (A.15)$$

Sabe-se entretanto que:

$${}^i r_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{bmatrix} = (x_i, y_i, z_i, 1)^T \quad (A.16)$$

Dessa forma,

$${}^i r_i \, {}^i r_i^T = \begin{bmatrix} x_i^2 & x_i y_i & x_i z_i & x_i \\ x_i y_i & y_i^2 & y_i z_i & y_i \\ x_i z_i & y_i z_i & z_i^2 & z_i \\ x_i & y_i & z_i & 1 \end{bmatrix} \quad (A.17)$$

Portanto, a inércia de todos os pontos sobre o link i , denotada J_i , poderá ser escrita:

$$J_i = {}^i r_i \, {}^i r_i^T = \begin{bmatrix} \int dm x_i^2 & \int dm x_i y_i & \int dm x_i z_i & \int dm x_i \\ \int dm x_i y_i & \int dm y_i^2 & \int dm y_i z_i & \int dm y_i \\ \int dm x_i z_i & \int dm y_i z_i & \int dm z_i^2 & \int dm z_i \\ \int dm x_i & \int dm y_i & \int dm z_i & \int dm \end{bmatrix} \quad (A.18)$$

Lembrando-se que:

i) os momentos de inércia sobre os eixos x y z são dados respectivamente por:

$$I_{xx} = \int_m (r^2 - x^2) dm ; \quad I_{yy} = \int_m (r^2 - y^2) dm ; \quad I_{zz} = \int_m (r^2 - z^2) dm \quad (\text{A.19})$$

ii) os produtos de inércia sobre os mesmos eixos, dados respectivamente por:

$$I_{xy} = I_{yx} = \int_m xy dm ; \quad I_{xz} = I_{zx} = \int_m xz dm ; \quad I_{yz} = I_{zy} = \int_m yz dm \quad (\text{A.20})$$

iii) e que as coordenadas do centro de massa são dadas por:

$$m\tilde{x} = \int_m x dm ; \quad m\tilde{y} = \int_m y dm ; \quad m\tilde{z} = \int_m z dm \quad (\text{A.21})$$

fica fácil notar que:

$$\int_m x^2 dm = \frac{1}{2} (-I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}) \quad (\text{A.22})$$

$$\int_m y^2 dm = \frac{1}{2} (I_{xx} - I_{yy} + I_{zz}) \quad (\text{A.23})$$

$$\int_m z^2 dm = \frac{1}{2} (I_{xx} + I_{yy} - I_{zz}) \quad (\text{A.24})$$

Pode-se, portanto, expressar J_i da seguinte maneira:

$$J_i = \begin{bmatrix} (-I_{xx} + I_{yy} + I_{zz})/2 & I_{xy} & I_{xz} & m_i \tilde{x}_i \\ I_{xy} & (I_{xx} - I_{yy} + I_{zz})/2 & I_{yz} & m_i \tilde{y}_i \\ I_{xz} & I_{yz} & (I_{xx} + I_{yy} - I_{zz})/2 & m_i \tilde{z}_i \\ m_i \tilde{x}_i & m_i \tilde{y}_i & m_i \tilde{z}_i & m_i \end{bmatrix} \quad (\text{A.25})$$

Consequentemente, a energia cinética total será dada por:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i \left[\text{Tr} \left(U_{ip} J_i U_{ir}^T \right) \dot{q}_p \dot{q}_r \right] \quad (\text{A.26})$$

A-3 Energia Potencial

Se V_i denotar a energia potencial do link i de um robô manipulador, então:

$$V_i = -m_i g \, {}^0\tilde{r}_i = -m_i g \left({}^0A_i \, {}^i\tilde{r}_i \right) \quad (\text{A.27})$$

Portanto, pode-se obter a energia potencial total somando para todas as energias em cada link. Dessa forma, a energia potencial total V , é dada por:

$$V = \sum_{i=1}^n V_i = \sum_{i=1}^n -m_i g \left({}^0A_i \, {}^i\tilde{r}_i \right) \quad (\text{A.28})$$

onde:

$g = (g_x, g_y, g_z, 0)$ é um vetor linha expresso no sistema de referência da base.

e

$${}^i\tilde{r}_i = \begin{bmatrix} \tilde{x}_i \\ \tilde{y}_i \\ \tilde{z}_i \\ 1 \end{bmatrix} \text{ é o vetor centro de massa do link } i \text{ expresso no } i\text{-ésimo sist. de referência}$$

A-4 O Lagrangeano

Tendo sido obtidas as energias cinética e potencial, pode-se agora facilmente escrever a função Lagrangeano, que é simplesmente a diferença entre essas duas quantidades, ou seja, $L = T - V$.

Portanto,

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i \left[\text{Tr} \left(U_{ip} J_i U_{ir}^T \right) \dot{q}_p \dot{q}_r \right] + \sum_{i=1}^n m_i g \left({}^0A_i {}^i\tilde{r}_i \right) \quad (\text{A.29})$$

A-5 Equações de Movimento

A aplicação da formulação de Euler-Lagrange à função Lagrangeano encontrada, fornece diretamente os torques generalizados τ_i necessários para que os atuadores posicionados nas respectivas juntas possam mover os respectivos links.

A equação de Euler-Lagrange a ser utilizada - como um reforço à menção já feita na seção 2.2.1 - tem a seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_p} = \tau_p \quad p = 1(1)n \quad (\text{A.30})$$

Deve-se portanto, calcular cada uma das derivadas que compõem essa equação. Para que não se perca de vista o objetivo principal com tantos cálculos a serem feitos, as derivadas serão calculadas individualmente.

Já foi definido que:

$$U_{ij} = \frac{\partial {}^0A_i}{\partial q_j}$$

Com essa definição pode-se notar que o Lagrangeano escreve-se também como:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \left[\text{Tr} \left(\frac{\partial {}^0A_i}{\partial q_j} J_i \left(\frac{\partial {}^0A_i}{\partial q_k} \right)^T \right) \dot{q}_j \dot{q}_k \right] + \sum_{i=1}^n m_i g \left({}^0A_i {}^i\tilde{r}_i \right) \quad (\text{A.31})$$

Calcula-se, então, primeiro a derivada $\frac{\partial L}{\partial q_p}$.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial q_p} = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \left[\text{Tr} \left(\frac{\partial^2 {}^0A_i}{\partial q_j \partial q_p} J_i \left(\frac{\partial {}^0A_i}{\partial q_k} \right)^T \right) \dot{q}_j \dot{q}_k \right] + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \left[\text{Tr} \left(\frac{\partial {}^0A_i}{\partial q_j} J_i \left(\frac{\partial^2 {}^0A_i}{\partial q_p \partial q_k} \right)^T \right) \dot{q}_j \dot{q}_k \right] + \\
 & + \sum_{i=1}^n m_i g \left(\frac{\partial {}^0A_i}{\partial q_p} {}^i\tilde{r}_i \right)
 \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Lembrando-se que:

$$\text{Tr} (A \cdot B^T) = \text{Tr} (B \cdot A^T) \quad (\text{A.33})$$

E, lembrando-se também que podemos trocar as letras que representam os índices de soma (pois são somente índices), a expressão para $\frac{\partial L}{\partial q_p}$ pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\frac{\partial L}{\partial q_p} = \sum_{i=1}^n \sum_{m=1}^i \sum_{k=1}^i \left[\text{Tr} \left(\frac{\partial^2 {}^0A_i}{\partial q_p \partial q_m} J_i \left(\frac{\partial {}^0A_i}{\partial q_k} \right)^T \right) \dot{q}_m \dot{q}_k \right] + \sum_{i=p}^n m_i g \left(\frac{\partial {}^0A_i}{\partial q_p} {}^i\tilde{r}_i \right) \quad (\text{A.35})$$

Calcula-se agora, a derivada parcial $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p}$.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \left[\text{Tr} \left(\frac{\partial {}^0A_i}{\partial q_p} J_i \left(\frac{\partial {}^0A_i}{\partial q_k} \right)^T \right) \dot{q}_k \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \left[\text{Tr} \left(\frac{\partial {}^0A_i}{\partial q_j} J_i \left(\frac{\partial {}^0A_i}{\partial q_p} \right)^T \right) \dot{q}_j \right] \quad (\text{A.36})$$

Trocando-se, na expressão acima, os índices de soma convenientemente e fazendo valer a relação (A-33), obtêm-se:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \left[\text{Tr} \left(\frac{\partial {}^0A_i}{\partial q_k} J_i \left(\frac{\partial {}^0A_i}{\partial q_p} \right)^T \right) \dot{q}_k \right] \quad (\text{A.37})$$

Como $\frac{\partial {}^0A_i}{\partial q_p} = 0$ para $p > i$, então:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p} = \sum_{i=p}^n \sum_{k=1}^i \left[\text{Tr} \left(\frac{\partial {}^0A_i}{\partial q_k} J_i \left(\frac{\partial {}^0A_i}{\partial q_p} \right)^T \right) \dot{q}_k \right] \quad (\text{A.38})$$

Resta, agora, calcular $\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p} \right]$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p} \right] = \frac{d}{dt} \left[\sum_{i=p}^n \sum_{k=1}^i \left[\text{Tr} \left(\frac{\partial {}^0A_i}{\partial q_k} J_i \left(\frac{\partial {}^0A_i}{\partial q_p} \right)^T \right) \dot{q}_k \right] \right] \quad (\text{A.39})$$

Utilizando mais uma vez a relação (A-33), e também a regra do produto para derivação,

pode-se escrever $\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p} \right]$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p} \right] &= \sum_{i=p}^n \sum_{k=1}^i \left[\text{Tr} \left(\frac{\partial {}^0A_i}{\partial q_k} J_i \left(\frac{\partial {}^0A_i}{\partial q_p} \right)^T \right) \ddot{q}_k \right] + \\ &\quad \sum_{i=p}^n \sum_{k=1}^i \sum_{m=1}^i \left[\text{Tr} \left(\frac{\partial^2 {}^0A_i}{\partial q_k \partial q_m} J_i \left(\frac{\partial {}^0A_i}{\partial q_p} \right)^T \right) \dot{q}_k \dot{q}_m \right] + \\ &\quad \sum_{i=p}^n \sum_{k=1}^i \sum_{m=1}^i \left[\text{Tr} \left(\frac{\partial^2 {}^0A_i}{\partial q_p \partial q_m} J_i \left(\frac{\partial {}^0A_i}{\partial q_k} \right)^T \right) \dot{q}_k \dot{q}_m \right] \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

Uma vez que todas as derivadas foram calculadas, pode-se finalmente escrever as equações de movimento. Faz-se isso, e as equações são escritas com as seguintes substituições já realizadas:

i-) volta-se à notação para $U_{ij} = \frac{\partial {}^0A_i}{\partial q_j}$;

ii-) também, baseando-se na definição mostrada pelo item i, fica fácil notar que:

$$\frac{\partial^2 {}^0A_i}{\partial q_k \partial q_m} = \frac{\partial U_{jm}}{\partial q_k} = U_{jmk}$$

iii-) e, os índices de soma serão reescritos como i, j, k simplesmente por serem mais usuais.

Dessa forma, as equações de movimento escrevem-se como:

$$\begin{aligned} \tau_i = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_{j=i}^n \sum_{k=1}^j \left[\text{Tr} \left(U_{jk} J_j U_{ji}^T \right) \ddot{q}_k \right] + \\ + \sum_{j=i}^n \sum_{k=1}^j \sum_{m=1}^j \left[\text{Tr} \left(U_{jkm} J_j U_{ji}^T \right) \dot{q}_k \dot{q}_m \right] \\ - \sum_{j=i}^n m_j g U_{ji}^T \tilde{r}_j \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

para $i = 1(1)n$.

A partir da apresentação da sistemática de obtenção dessas equações de movimento para um manipulador rígido com n graus de liberdade, fica fácil tratar o problema de um manipulador com dois links rígidos constituído de duas juntas rotacionais, caracterizando assim dois graus de liberdade, apresentado no item 2.2.2 do capítulo 2. As equações para esse caso são apresentadas com seus termos parametrizados de forma conveniente visando a realização de simulações e comparações com o manipulador flexível que são apresentadas no capítulo 4.

Anexo B - Cálculos manuais de obtenção e parametrização das equações de movimento para o sistema flexível.

Introdução:

Apresenta-se neste anexo uma cópia das folhas originais onde foram desenvolvidos os cálculos manuais que permitiram a obtenção e parametrização das equações dinâmicas de movimento para o manipulador flexível tratado no capítulo 3.

Evidentemente, as folhas onde foram desenvolvidos esses cálculos possuem rasuras que se justificam pela pesada tarefa de trabalhar analiticamente com equações tão extensas. Entretanto, com o propósito de reafirmar a veracidade do trabalho, as cópias são feitas sem que haja uma preocupação no sentido de passar as folhas a limpo.

É importante ressaltar mais uma vez que a tentativa de se utilizar softwares de computação algébrica não apresentou resultados convenientes, pois com o objetivo de apresentar as equações do manipulador flexível como uma extensão do modelo rígido, exigiu-se um tratamento dedicado na manipulação algébrica das mesmas.

Dessa forma, a apresentação é feita obedecendo a seguinte sequência :

- apresenta-se primeiramente as derivações que se fazem necessárias na obtenção de cada uma das seis equações pelo formalismo de Lagrange.
- em seguida, apresenta-se algumas sucessões de passos de manipulação algébrica possibilitando uma certa compactação das equações;
- finalmente, a apresentação da parametrização com seus coeficientes que também foram mostrados digitados no capítulo 3.

B-1 Apresentação das derivações

1ª equação de movimento:

1ª equação

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_1} + \frac{\partial V}{\partial \theta_1} = \tau_1$$

L) primeiro será calculado $\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1}$ (da equação 3.63)

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} = & J_0 \dot{\theta}_1 + (m w_{11} \dot{q}_{11} + m w_{12} \dot{q}_{12}) + m_2 L_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 \dot{\theta}_1 (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12})^2 + \\ & + m_2 L_1 (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) + J_{01} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + (m w_{21} \dot{q}_{21} + m w_{22} \dot{q}_{22}) + \\ & + \frac{1}{2} m_2 L_1 L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos \theta_2 + \frac{1}{2} \dot{\theta}_1 m_2 L_1 L_2 \cos \theta_2 + L_1 (m \dot{q}_{21} \dot{q}_{21} + m \dot{q}_{22} \dot{q}_{22}) \cos \theta_2 + \\ & + \frac{1}{2} m_2 L_2 (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) \cos \theta_2 + (m \dot{q}_{21} \dot{q}_{21} + m \dot{q}_{22} \dot{q}_{22}) (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) \sin(-\theta_2) + \\ & + \frac{1}{2} m_2 L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) \sin \theta_2 + \frac{1}{2} \dot{\theta}_1 m_2 L_2 (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) \sin \theta_2 + \\ & + L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (m \dot{q}_{21} \dot{q}_{21} + m \dot{q}_{22} \dot{q}_{22}) \sin(-\theta_2) + \dot{\theta}_1 L_2 (m \dot{q}_{21} \dot{q}_{21} + m \dot{q}_{22} \dot{q}_{22}) \sin(-\theta_2) + \\ & + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (m \dot{q}_{21} \dot{q}_{21} + m \dot{q}_{22} \dot{q}_{22}) (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) \cos \theta_2 + \dot{\theta}_1 (m \dot{q}_{21} \dot{q}_{21} + m \dot{q}_{22} \dot{q}_{22}) (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) \cos \theta_2 + \\ & + (m \dot{q}_{21} \dot{q}_{21} + m \dot{q}_{22} \dot{q}_{22}) (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) \sin \theta_2 + m_j L_1^2 \dot{\theta}_1 + m_j L_2 (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) + \\ & + m_j \dot{\theta}_1 (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12})^2 + m_p L_1^2 \dot{\theta}_1 + m_p \dot{\theta}_1 (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12})^2 + m_p L_1 (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) + \\ & + m_p L_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + m_p (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (\phi_{21E} \dot{q}_{21} + \phi_{22E} \dot{q}_{22}) + m_p L_2 (\phi_{21E} \dot{q}_{21} + \phi_{22E} \dot{q}_{22}) + \\ & + m_p L_1 L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos \theta_2 + m_p L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 + m_p L_2 (\phi_{21E} \dot{q}_{21} + \phi_{22E} \dot{q}_{22}) \cos \theta_2 + \\ & + m_p L_2 (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) \cos \theta_2 + m_p (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) (\phi_{21E} \dot{q}_{21} + \phi_{22E} \dot{q}_{22}) \sin(-\theta_2) + \\ & + m_p L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) \sin \theta_2 + m_p L_2 \dot{\theta}_1 (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) \sin \theta_2 + \\ & + m_p L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (\phi_{21E} \dot{q}_{21} + \phi_{22E} \dot{q}_{22}) \sin(-\theta_2) + m_p L_2 \dot{\theta}_1 (\phi_{21E} \dot{q}_{21} + \phi_{22E} \dot{q}_{22}) \sin(-\theta_2) + \\ & + m_p (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) (\phi_{21E} \dot{q}_{21} + \phi_{22E} \dot{q}_{22}) \cos \theta_2 + m_p \dot{\theta}_1 (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) (\phi_{21E} \dot{q}_{21} + \phi_{22E} \dot{q}_{22}) \cos \theta_2 + \\ & + \frac{1}{2} m_p (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) (\phi_{21E} \dot{q}_{21} + \phi_{22E} \dot{q}_{22}) \sin \theta_2 \end{aligned}$$

2) agora, será calculado $\frac{\partial T}{\partial \theta_2}$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta_2} = 0$$

3) Calculando $\frac{\partial V}{\partial \theta_2}$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_2} = \left[(m_1 + 2m_j + 2m_2 + 2m_p) \frac{1}{2} L \cos \theta_1 + (m_2 + 2m_p) \frac{1}{2} l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \right] g$$

4) finalmente calculamos $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} \right)$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = & J_0 \ddot{\theta}_1 + (m w_{11} \ddot{q}_{11} + m w_{12} \ddot{q}_{12}) + m_2 L_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 \ddot{\theta}_1 (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12})^2 + \\
 & + 2 m_2 \dot{\theta}_1 (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12}) (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) + m_2 L_1 (\ddot{\phi}_{11E} \dot{q}_{11} + \ddot{\phi}_{12E} \dot{q}_{12}) + \\
 & + J_{01} (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + (m w_{21} \ddot{q}_{21} + m w_{22} \ddot{q}_{22}) + \frac{1}{2} m_2 L_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \cos \theta_2 \\
 & - \frac{1}{2} m_2 L_1 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 + \frac{1}{2} \ddot{\theta}_1 m_2 L_1 \cos \theta_2 - \frac{1}{2} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 m_2 L_1 \sin \theta_2 + \\
 & + L_1 \cos \theta_2 (m q_{21} \dot{q}_{21} + m q_{22} \dot{q}_{22}) - L_1 \dot{\theta}_2 (m q_{21} q_{21} + m q_{22} q_{22}) \sin \theta_2 + \\
 & + \frac{1}{2} m_2 L_2 \cos \theta_2 (\phi_{11E} \ddot{q}_{11} + \phi_{12E} \ddot{q}_{12}) - \frac{1}{2} m_2 L_2 \dot{\theta}_2 (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) \sin \theta_2 + \\
 & + (m q_{21} \dot{q}_{21} + m q_{22} \dot{q}_{22}) (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) \sin(-\theta_2) + (m q_{21} q_{21} + m q_{22} q_{22}) (\phi_{11E} \ddot{q}_{11} + \phi_{12E} \ddot{q}_{12}) \sin(-\theta_2) \\
 & - (m q_{21} q_{21} + m q_{22} q_{22}) (\phi_{11E} \ddot{q}_{11} + \phi_{12E} \ddot{q}_{12}) \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + \frac{1}{2} m_2 L_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12}) \sin \theta_2 + \\
 & + \frac{1}{2} m_2 L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) \sin \theta_2 + \frac{1}{2} m_2 L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12}) \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \\
 & + \frac{1}{2} m_2 L_2 \ddot{\theta}_1 (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12}) \sin \theta_2 + \frac{1}{2} m_2 L_2 \ddot{\theta}_1 (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) \sin \theta_2 + \\
 & + \frac{1}{2} m_2 L_2 \dot{\theta}_1 (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12}) \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + L_1 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) (m q_{21} q_{21} + m q_{22} q_{22}) \sin(-\theta_2) + \\
 & + L_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (m q_{21} \dot{q}_{21} + m q_{22} \dot{q}_{22}) \sin(-\theta_2) - L_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (m q_{21} q_{21} + m q_{22} q_{22}) \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + \\
 & + \dot{\theta}_1 L_1 (m q_{21} q_{21} + m q_{22} q_{22}) \sin(-\theta_2) + \dot{\theta}_1 L_1 (m q_{21} \dot{q}_{21} + m q_{22} \dot{q}_{22}) \sin(-\theta_2) \\
 & - \dot{\theta}_1 L_1 (m q_{21} q_{21} + m q_{22} q_{22}) \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (m q_{21} q_{21} + m q_{22} q_{22}) (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12}) \cos \theta_2 \\
 & + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (m q_{21} \dot{q}_{21} + m q_{22} \dot{q}_{22}) (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12}) \cos \theta_2 + \\
 & + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (m q_{21} q_{21} + m q_{22} q_{22}) (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) \cos \theta_2 + \cancel{(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (m q_{21} q_{21} + m q_{22} q_{22}) (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12}) \dot{\theta}_2 \sin \theta_2} \\
 & + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (m q_{21} q_{21} + m q_{22} q_{22}) (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12}) \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \ddot{\theta}_1 (nq_{21} q_{21} + nq_{22} q_{22}) (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) c\theta_2 + \dot{\theta}_1 (nq_{21} \dot{q}_{21} + nq_{22} \dot{q}_{22}) (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) c\theta_2 + \\
 & + \dot{\theta}_1 (nq_{21} q_{21} + nq_{22} q_{22}) (\phi_{11E} \ddot{q}_{11} + \phi_{12E} \ddot{q}_{12}) c\theta_2 - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (nq_{21} q_{21} + nq_{22} q_{22}) (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) s\theta_2 \\
 & + (nq_{21} \ddot{q}_{21} + nq_{22} \ddot{q}_{22}) (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) c\theta_2 + (nq_{21} \dot{q}_{21} + nq_{22} \dot{q}_{22}) (\phi_{11E} \ddot{q}_{11} + \phi_{12E} \ddot{q}_{12}) s\theta_2 + \\
 & + (nq_{21} \ddot{q}_{21} + nq_{22} \ddot{q}_{22}) (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) \dot{\theta}_2 c\theta_2 + m_j L_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_j L_1 (\phi_{11E} \ddot{q}_{11} + \phi_{12E} \ddot{q}_{12}) + \\
 & + m_j \ddot{\theta}_1 (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12})^2 + 2m_j \dot{\theta}_1 (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) (\phi_{11E} \ddot{q}_{11} + \phi_{12E} \ddot{q}_{12}) + \\
 & + m_p L_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_p \ddot{\theta}_1 (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12})^2 + 2m_p \dot{\theta}_1 (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) (\phi_{11E} \ddot{q}_{11} + \phi_{12E} \ddot{q}_{12}) + \\
 & + m_p L_1 (\phi_{11E} \ddot{q}_{11} + \phi_{12E} \ddot{q}_{12}) + m_p L_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + m_p (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) (\phi_{21E} \dot{q}_{21} + \phi_{22E} \dot{q}_{22}) \\
 & + m_p (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (\phi_{21E} \ddot{q}_{21} + \phi_{22E} \ddot{q}_{22}) + m_p L_2 (\phi_{21E} \ddot{q}_{21} + \phi_{22E} \ddot{q}_{22}) + \\
 & + m_p L_1 L_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) c\theta_2 - m_p L_1 L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_2 s\theta_2 + m_p L_1 L_2 \ddot{\theta}_1 c\theta_2 - m_p L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 s\theta_2 \\
 & + m_p L_1 (\phi_{21E} \dot{q}_{21} + \phi_{22E} \dot{q}_{22}) c\theta_2 - m_p L_1 (\phi_{21E} q_{21} + \phi_{22E} q_{22}) \dot{\theta}_2 s\theta_2 + \\
 & + m_p L_2 (\phi_{11E} \ddot{q}_{11} + \phi_{12E} \ddot{q}_{12}) c\theta_2 - m_p L_2 (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) \dot{\theta}_2 s\theta_2 + \\
 & + m_p (\phi_{11E} \ddot{q}_{11} + \phi_{12E} \ddot{q}_{12}) (\phi_{21E} q_{21} + \phi_{22E} q_{22}) s(-\theta_2) + m_p (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) (\phi_{21E} \dot{q}_{21} + \phi_{22E} \dot{q}_{22}) s(-\theta_2) \\
 & - m_p (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) (\phi_{21E} q_{21} + \phi_{22E} q_{22}) \dot{\theta}_2 c\theta_2 + m_p L_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) s\theta_2 + \\
 & + m_p L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (\phi_{11E} \ddot{q}_{11} + \phi_{12E} \ddot{q}_{12}) s\theta_2 + m_p L_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) \dot{\theta}_2 c\theta_2 + \\
 & + m_p L_2 \ddot{\theta}_1 (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) s\theta_2 + m_p L_2 \dot{\theta}_1 (\phi_{11E} \ddot{q}_{11} + \phi_{12E} \ddot{q}_{12}) s\theta_2 + m_p L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) c\theta_2 \\
 & + m_p L_1 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) (\phi_{21E} q_{21} + \phi_{22E} q_{22}) s(-\theta_2) + m_p L_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (\phi_{21E} \dot{q}_{21} + \phi_{22E} \dot{q}_{22}) s(-\theta_2) \\
 & - m_p L_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (\phi_{21E} q_{21} + \phi_{22E} q_{22}) \dot{\theta}_2 c\theta_2 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + m_p L_L \ddot{\theta}_1 (\phi_{21E} \dot{q}_{21} + \phi_{22E} \dot{q}_{22}) s(-\theta_2) + m_p L_L \dot{\theta}_1 (\phi_{21E} \ddot{q}_{21} + \phi_{22E} \ddot{q}_{22}) s(-\theta_2) \\
& - m_p L_L \dot{\theta}_1 (\phi_{21E} \dot{q}_{21} + \phi_{22E} \dot{q}_{22}) \dot{\theta}_2 c\theta_2 + m_p (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) (\phi_{21E} \dot{q}_{21} + \phi_{22E} \dot{q}_{22}) c\theta_2 \\
& + m_p (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (\phi_{11E} \ddot{q}_{11} + \phi_{12E} \ddot{q}_{12}) (\phi_{21E} \dot{q}_{21} + \phi_{22E} \dot{q}_{22}) c\theta_2 + \\
& + m_p (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) (\phi_{21E} \ddot{q}_{21} + \phi_{22E} \ddot{q}_{22}) c\theta_2 \\
& - m_p (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) (\phi_{21E} \dot{q}_{21} + \phi_{22E} \dot{q}_{22}) \dot{\theta}_2 s\theta_2 + \\
& + m_p \ddot{\theta}_1 (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) (\phi_{21E} \dot{q}_{21} + \phi_{22E} \dot{q}_{22}) c\theta_2 + m_p \dot{\theta}_1 (\phi_{11E} \ddot{q}_{11} + \phi_{12E} \ddot{q}_{12}) (\phi_{21E} \dot{q}_{21} + \phi_{22E} \dot{q}_{22}) c\theta_2 \\
& + m_p \dot{\theta}_1 (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) (\phi_{21E} \ddot{q}_{21} + \phi_{22E} \ddot{q}_{22}) c\theta_2 - m_p \dot{\theta}_1 (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) (\phi_{21E} \dot{q}_{21} + \phi_{22E} \dot{q}_{22}) \dot{\theta}_2 s\theta_2 \\
& + \frac{1}{2} m_p (\phi_{11E} \ddot{q}_{11} + \phi_{12E} \ddot{q}_{12}) (\phi_{21E} \dot{q}_{21} + \phi_{22E} \dot{q}_{22}) s\theta_2 + \frac{1}{2} m_p (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) (\phi_{21E} \ddot{q}_{21} + \phi_{22E} \ddot{q}_{22}) s\theta_2 \\
& + \frac{1}{2} m_p (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) (\phi_{21E} \ddot{q}_{21} + \phi_{22E} \ddot{q}_{22}) \dot{\theta}_2 c\theta_2
\end{aligned}$$

2ª equação de movimento:

2ª equação

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} \right] - \frac{\partial T}{\partial \theta_2} + \frac{\partial V}{\partial \theta_2} = \tau_2$$

1- primeiro será calculado $\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2}$ (da eq. 3.61)

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} = & J_{O1} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + m_{W21} \dot{q}_{21} + m_{W22} \dot{q}_{22} + \frac{1}{2} m_2 L_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \\ & + \frac{1}{2} m_2 L_2 (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) \cos \theta_2 + (m_{q21} q_{21} + m_{q22} q_{22}) (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) \sin(-\theta_2) \\ & + \frac{1}{2} m_2 L_2 \dot{\theta}_1 (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12}) \sin \theta_2 + L_1 \dot{\theta}_1 (m_{q21} q_{21} + m_{q22} q_{22}) \sin(-\theta_2) \\ & + \dot{\theta}_1 (m_{q21} q_{21} + m_{q22} q_{22}) (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12}) \cos \theta_2 + m_p L_1^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ & + m_p (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (\phi_{21E} q_{21} + \phi_{22E} q_{22}) + m_p L_2 (\phi_{21E} \dot{q}_{21} + \phi_{22E} \dot{q}_{22}) + \\ & + m_p L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 + m_p L_2 (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) \cos \theta_2 + \\ & + m_p (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) (\phi_{21E} q_{21} + \phi_{22E} q_{22}) \sin(-\theta_2) + \\ & + m_p L_2 \dot{\theta}_1 (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12}) \sin \theta_2 + m_p L_1 \dot{\theta}_1 (\phi_{21E} q_{21} + \phi_{22E} q_{22}) \sin(-\theta_2) + \\ & + m_p \dot{\theta}_1 (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12}) (\phi_{21E} q_{21} + \phi_{22E} q_{22}) \cos \theta_2 \end{aligned}$$

2) Será calculado agora $\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2}$

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} = & + \frac{1}{2} m_2 L_1 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin \theta_2 + L_1 \dot{\theta}_1 (n_{q_{21}} q_{21} + n_{q_{22}} q_{22}) \sin \theta_2 \\
 & + \frac{1}{2} m_2 L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) \sin \theta_2 \\
 & + (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) (n_{q_{21}} \dot{q}_{21} + n_{q_{22}} \dot{q}_{22}) \sin \theta_2 \\
 & + \frac{(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (n_{q_{21}} q_{21} + n_{q_{22}} q_{22}) (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12})}{\cos \theta_2} \\
 & - \frac{1}{2} m_2 L_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12}) \cos \theta_2 + L_1 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (n_{q_{21}} q_{21} + n_{q_{22}} q_{22}) \cos \theta_2 \\
 & + \frac{\dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (n_{q_{21}} q_{21} + n_{q_{22}} q_{22}) (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12})}{\sin \theta_2} + \\
 & - \dot{\theta}_1 (n_{q_{21}} \dot{q}_{21} + n_{q_{22}} \dot{q}_{22}) (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12}) \cos \theta_2 + m_p L_1 L_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin \theta_2 \\
 & + m_p L_1 \dot{\theta}_1 (\phi_{21E} q_{21} + \phi_{22E} q_{22}) \sin \theta_2 + m_p L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) \sin \theta_2 \\
 & + m_p (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) (\phi_{21E} \dot{q}_{21} + \phi_{22E} \dot{q}_{22}) \sin \theta_2 \\
 & + m_p (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) (\phi_{21E} q_{21} + \phi_{22E} q_{22}) \cos \theta_2 \\
 & - m_p L_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12}) \cos \theta_2 + m_p L_1 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (\phi_{21E} q_{21} + \phi_{22E} q_{22}) \cos \theta_2 \\
 & + m_p \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12}) (\phi_{21E} q_{21} + \phi_{22E} q_{22}) \sin \theta_2 + \\
 & - \frac{1}{2} m_p \dot{\theta}_1 (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12}) (\phi_{21E} \dot{q}_{21} + \phi_{22E} \dot{q}_{22}) \cos \theta_2
 \end{aligned}$$

3) ~~Calculado $\frac{\partial V}{\partial \theta_2}$~~

~~$$V = \frac{1}{2} L_2 (m_2 + 2m_p) \left(1 - \cos(\theta_1 + \theta_2) \right)^{-1/2} \cdot \frac{d}{d\theta_2} \left(\cos(\theta_1 + \theta_2) \right)$$~~

~~$$= \frac{1}{2} L_2 (m_2 + 2m_p) \left(1 - \cos(\theta_1 + \theta_2) \right)^{-1/2} \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2)$$~~

~~$$\frac{\partial V}{\partial \theta_2} = \frac{1}{2} L_2 (m_2 + 2m_p) \left(1 - \cos(\theta_1 + \theta_2) \right)^{-1/2} \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2)$$~~

3) Calculado $\frac{\partial V}{\partial \theta_2}$:

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_2} = (m_2 + 2m_p) \left(\frac{L_2}{2} \cdot g \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) \right) = (m_2 + 2m_p) \frac{L_2}{2} g \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

↑
é só o cos!

4.) finalmente, calcular $\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} \right]$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} \right] &= \underline{J_{01} \ddot{\theta}_1} + \underline{J_{01} \ddot{\theta}_2} + n_{w_{c1}} \ddot{q}_{21} + n_{w_{c2}} \ddot{q}_{22} + \frac{1}{2} m_2 L_2 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 \\
 &\quad - \frac{1}{2} m_2 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 + \frac{1}{2} m_2 L_2 (\phi_{11E} \ddot{q}_{11} + \phi_{12E} \ddot{q}_{12}) \cos \theta_2 \\
 &\quad - \frac{1}{2} m_2 L_2 (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 + (n_{q_{21}} \dot{q}_{21} + n_{q_{22}} \dot{q}_{22}) (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) S(-\theta_2) \\
 &\quad + (n_{q_{21}} \ddot{q}_{21} + n_{q_{22}} \ddot{q}_{22}) (\phi_{11E} \ddot{q}_{11} + \phi_{12E} \ddot{q}_{12}) S(-\theta_2) - \underline{(n_{q_{21}} \dot{q}_{21} + n_{q_{22}} \dot{q}_{22}) (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) \dot{\theta}_2 \cos \theta_2} \\
 &\quad + \frac{1}{2} m_2 L_2 \ddot{\theta}_1 (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) \sin \theta_2 + \frac{1}{2} m_2 L_2 \dot{\theta}_1 (\phi_{11E} \ddot{q}_{11} + \phi_{12E} \ddot{q}_{12}) \sin \theta_2 + \\
 &\quad + \underline{\frac{1}{2} m_2 L_2 \dot{\theta}_1 (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) \dot{\theta}_2 \cos \theta_2} + L_1 \ddot{\theta}_1 (n_{q_{21}} \dot{q}_{21} + n_{q_{22}} \dot{q}_{22}) S(-\theta_2) \\
 &\quad + L_1 \dot{\theta}_1 (n_{q_{21}} \ddot{q}_{21} + n_{q_{22}} \ddot{q}_{22}) S(-\theta_2) - \underline{L_1 \dot{\theta}_1 (n_{q_{21}} \dot{q}_{21} + n_{q_{22}} \dot{q}_{22}) \dot{\theta}_2 \cos \theta_2} + \\
 &\quad + \dot{\theta}_1 (n_{q_{21}} \dot{q}_{21} + n_{q_{22}} \dot{q}_{22}) (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) \cos \theta_2 + \dot{\theta}_1 (n_{q_{21}} \ddot{q}_{21} + n_{q_{22}} \ddot{q}_{22}) (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) \cos \theta_2 \\
 &\quad + \dot{\theta}_1 (n_{q_{21}} \dot{q}_{21} + n_{q_{22}} \dot{q}_{22}) (\phi_{11E} \ddot{q}_{11} + \phi_{12E} \ddot{q}_{12}) \cos \theta_2 - \underline{\dot{\theta}_1 (n_{q_{21}} \dot{q}_{21} + n_{q_{22}} \dot{q}_{22}) (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) \dot{\theta}_2 \sin \theta_2} \\
 &\quad + m_p L^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + \underline{m_p (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) (\phi_{21E} \dot{q}_{21} + \phi_{22E} \dot{q}_{22})} + m_p (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) (\phi_{21E} \ddot{q}_{21} + \phi_{22E} \ddot{q}_{22}) \\
 &\quad + m_p L_2 (\phi_{21E} \ddot{q}_{21E} + \phi_{22E} \ddot{q}_{22}) + m_p L_1 L_2 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 - \underline{m_p L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2} + \\
 &\quad + m_p L_2 (\phi_{11E} \ddot{q}_{11} + \phi_{12E} \ddot{q}_{12}) \cos \theta_2 - \underline{m_p L_2 (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) \dot{\theta}_2 \sin \theta_2} + \\
 &\quad + m_p (\phi_{11E} \ddot{q}_{11} + \phi_{12E} \ddot{q}_{12}) (\phi_{21E} \dot{q}_{21} + \phi_{22E} \dot{q}_{22}) S(-\theta_2) + m_p (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) (\phi_{21E} \ddot{q}_{21} + \phi_{22E} \ddot{q}_{22}) S(-\theta_2) \\
 &\quad - \underline{m_p (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) (\phi_{21E} \dot{q}_{21} + \phi_{22E} \dot{q}_{22}) \dot{\theta}_2 \cos \theta_2} + m_p L_2 \dot{\theta}_1 (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) \sin \theta_2 + \\
 &\quad + m_p L_2 \dot{\theta}_1 (\phi_{11E} \ddot{q}_{11} + \phi_{12E} \ddot{q}_{12}) \sin \theta_2 + \underline{m_p L_2 \dot{\theta}_1 (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) \dot{\theta}_2 \cos \theta_2} + m_p L_1 \dot{\theta}_1 (\phi_{21E} \dot{q}_{21} + \phi_{22E} \dot{q}_{22}) S(-\theta_2) \\
 &\quad + m_p L_1 \dot{\theta}_1 (\phi_{21E} \ddot{q}_{21} + \phi_{22E} \ddot{q}_{22}) S(-\theta_2) - \underline{m_p L_1 \dot{\theta}_1 (\phi_{21E} \dot{q}_{21} + \phi_{22E} \dot{q}_{22}) \dot{\theta}_2 \cos \theta_2} \\
 &\quad + m_p \ddot{\theta}_1 (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) (\phi_{21E} \dot{q}_{21} + \phi_{22E} \dot{q}_{22}) \cos \theta_2 + m_p \dot{\theta}_1 (\phi_{11E} \ddot{q}_{11} + \phi_{12E} \ddot{q}_{12}) (\phi_{21E} \dot{q}_{21} + \phi_{22E} \dot{q}_{22}) \cos \theta_2 \\
 &\quad + m_p \dot{\theta}_1 (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) (\phi_{21E} \ddot{q}_{21} + \phi_{22E} \ddot{q}_{22}) \cos \theta_2 - \underline{m_p \dot{\theta}_1 (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) (\phi_{21E} \dot{q}_{21} + \phi_{22E} \dot{q}_{22}) \dot{\theta}_2 \sin \theta_2}
 \end{aligned}$$

3ª equação de movimento:

3ª equação

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{11}} \right] - \frac{\partial T}{\partial q_{11}} + \frac{\partial V}{\partial q_{11}} = \tau_z$$

1) primeiro será calculado $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{11}}$ (da eq. 3.63)

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{11}} = & m_1 \dot{q}_{11} + \dot{\theta}_1 m_{W1L} + m_2 \phi_{11E} (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) + m_2 L_1 \dot{\theta}_1 \phi_{11E} + \\ & + \frac{1}{2} m_2 L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \phi_{11E} \cos \theta_2 + \phi_{11E} (n_{21} \dot{q}_{11} + n_{22} \dot{q}_{12}) \cos \theta_2 + \\ & + \phi_{11E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (n_{21} q_{21} + n_{22} q_{22}) \sin(-\theta_2) + \cancel{m_j L_1 \dot{\theta}_1 \phi_{11E}} + m_j L_1 \dot{\theta}_1 \phi_{11E} + \\ & + m_j \phi_{11E} (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) + m_p \phi_{11E} (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) + m_p L_1 \dot{\theta}_1 \phi_{11E} + \\ & + m_p L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \phi_{11E} \cos \theta_2 + m_p \phi_{11E} (\phi_{21E} \dot{q}_{11} + \phi_{22E} \dot{q}_{12}) \cos \theta_2 + \\ & + m_p (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \phi_{11E} (\phi_{21E} q_{21} + \phi_{22E} q_{22}) \sin(-\theta_2) \end{aligned}$$

2) agora, $\frac{\partial T}{\partial q_{11}}$

$$\begin{aligned} - \frac{\partial T}{\partial q_{11}} = & - m_2 \dot{\theta}_1^2 (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12}) \phi_{11E} + \frac{1}{2} m_2 L_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \phi_{11E} (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12}) \sin \theta_2 \\ & + \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (n_{21} q_{21} + n_{22} q_{22}) \phi_{11E} \cos \theta_2 + \dot{\theta}_1 (n_{21} \dot{q}_{11} + n_{22} \dot{q}_{12}) \phi_{11E} \sin \theta_2 \\ & + m_j \dot{\theta}_1^2 (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12}) \phi_{11E} + m_p \dot{\theta}_1^2 (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12}) \phi_{11E} + \\ & + m_p L_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \phi_{11E} \sin \theta_2 + m_p \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \phi_{11E} (\phi_{21E} q_{11} + \phi_{22E} q_{12}) \cos \theta_2 \\ & + \frac{1}{2} m_p \dot{\theta}_1 \phi_{11E} (\phi_{21E} \dot{q}_{11} + \phi_{22E} \dot{q}_{12}) \sin \theta_2 \end{aligned}$$

3.) $\frac{\partial V}{\partial q_{11}} = - \frac{2 k_{w_{111}} q_{11}}{l_{11}}$

4.) $\text{calculado, } \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{11}} \right]$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{11}} \right] = & \frac{m_1}{2} \ddot{q}_{11} + \ddot{\theta}_1 n_{w_{11}} + m_2 \phi_{11E} (\phi_{11E} \ddot{q}_{11} + \phi_{12E} \ddot{q}_{12}) + m_2 L_1 \phi_{11E} \ddot{\theta}_1 \\ & + \frac{1}{2} m_2 L_2 \phi_{11E} (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \cos \theta_2 - \frac{1}{2} m_2 L_2 \phi_{11E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 + \\ & + \phi_{11E} (n_{q_{21}} \ddot{q}_{21} + n_{q_{22}} \ddot{q}_{22}) \cos \theta_2 - \phi_{11E} (n_{q_{21}} \dot{q}_{21} + n_{q_{22}} \dot{q}_{22}) \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 + \\ & + \phi_{11E} (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) (n_{q_{21}} q_{21} + n_{q_{22}} q_{22}) \sin(-\theta_2) + \phi_{11E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (n_{q_{21}} \dot{q}_{21} + n_{q_{22}} \dot{q}_{22}) \sin(-\theta_2) \\ & - \phi_{11E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (n_{q_{21}} q_{21} + n_{q_{22}} q_{22}) \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + m_j L_1 \ddot{\theta}_1 \phi_{11E} + m_j \phi_{11E} (\phi_{11E} \ddot{q}_{11} + \phi_{12E} \ddot{q}_{12}) \\ & + m_p \phi_{11E} (\phi_{11E} \ddot{q}_{11} + \phi_{12E} \ddot{q}_{12}) + m_p L_1 \phi_{11E} \ddot{\theta}_1 + m_p L_2 \phi_{11E} (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \cos \theta_2 \\ & - m_p L_2 \phi_{11E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 + m_p \phi_{11E} (\phi_{21E} \ddot{q}_{21} + \phi_{22E} \ddot{q}_{22}) \cos \theta_2 \\ & - m_p \phi_{11E} (\phi_{21E} \dot{q}_{21} + \phi_{22E} \dot{q}_{22}) \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 + m_p \phi_{11E} (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) (\phi_{21E} q_{21} + \phi_{22E} q_{22}) \sin(-\theta_2) \\ & + m_p \phi_{11E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (\phi_{21E} \dot{q}_{21} + \phi_{22E} \dot{q}_{22}) \sin(-\theta_2) - m_p \phi_{11E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (\phi_{11E} q_{21} + \phi_{21E} q_{22}) \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \end{aligned}$$

4ª equação de movimento:

4ª equação:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{12}} \right] - \frac{\partial T}{\partial q_{12}} + \frac{\partial V}{\partial q_{12}} = \tilde{T}_4$$

1) primeiro será calculado $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{12}}$ (da eq. 3.63)

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{12}} = & m_L \dot{q}_{12} + m_{W12} \dot{\theta}_1 + m_2 (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) \phi_{12E} + m_2 L_1 \dot{\theta}_1 \phi_{12E} \\ & + \frac{1}{2} m_2 L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \phi_{12E} \cos \theta_2 + \phi_{12E} (n_{q21} \dot{q}_{21} + n_{q22} \dot{q}_{22}) \cos \theta_2 \\ & + \phi_{12E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (n_{q21} q_{21} + n_{q22} q_{22}) \sin(-\theta_2) + m_j L_1 \dot{\theta}_1 \phi_{12E} \\ & + m_j (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) \phi_{12E} + m_p (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) \phi_{12E} \\ & + m_p L_1 \dot{\theta}_1 \phi_{12E} + m_p L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \phi_{12E} \cos \theta_2 + m_p (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \phi_{12E} (\phi_{21E} q_{21} + \phi_{22E} q_{22}) \sin(-\theta_2) \end{aligned}$$

2) agora, $\frac{\partial T}{\partial q_{12}}$

$$\begin{aligned} - \frac{\partial T}{\partial q_{12}} = & - m_2 \dot{\theta}_1^2 \phi_{12E} (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12}) + \cancel{m_2 L_1 \dot{\theta}_1 (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) \phi_{12E}} \\ & + \frac{1}{2} m_2 L_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \phi_{12E} \sin \theta_2 + \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (n_{q21} q_{21} + n_{q22} q_{22}) \phi_{12E} \cos \theta_2 \\ & + \dot{\theta}_1 (n_{q21} \dot{q}_{21} + n_{q22} \dot{q}_{22}) \phi_{12E} \sin \theta_2 + m_j \dot{\theta}_1^2 (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12}) \phi_{12E} \\ & + m_p \dot{\theta}_1^2 (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12}) \phi_{12E} + m_p L_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \phi_{12E} \sin \theta_2 \\ & + m_p \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \phi_{12E} (\phi_{21E} q_{21} + \phi_{22E} q_{22}) \cos \theta_2 + \frac{1}{2} m_p \dot{\theta}_1 \phi_{12E} (\phi_{21E} \dot{q}_{21} + \phi_{22E} \dot{q}_{22}) \sin \theta_2 \end{aligned}$$

3) Utilizado $\frac{\partial V}{\partial q_{12}}$

$$\frac{\partial V}{\partial q_{12}} = - \frac{2K_{W_{122}} q_{12}}{}$$

4) por fim, o cálculo de $\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{12}} \right]$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{12}} \right] = & \underline{m_1 \ddot{q}_{12}} + \underline{m_1 v_{12} \ddot{\theta}_1} + \underline{m_2 (\phi_{11E} \ddot{q}_{11} + \phi_{12E} \ddot{q}_{12})} \phi_{12E} + \\ & + m_2 L_1 \phi_{12E} \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{2} m_2 L_2 \phi_{12E} (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \cos \theta_2 - \frac{1}{2} m_2 L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \phi_{12E} \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \\ & + \phi_{12E} (n_{q_{11}} \ddot{q}_{11} + n_{q_{12}} \ddot{q}_{12}) \cos \theta_2 - \phi_{12E} (n_{q_{11}} \dot{q}_{11} + n_{q_{12}} \dot{q}_{12}) \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \\ & + \phi_{12E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (n_{q_{11}} q_{11} + n_{q_{12}} q_{12}) \sin(-\theta_2) + \phi_{12E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (n_{q_{11}} \dot{q}_{11} + n_{q_{12}} \dot{q}_{12}) \sin(-\theta_2) \\ & - \phi_{12E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (n_{q_{11}} q_{11} + n_{q_{12}} q_{12}) \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + \underline{m_j L_1 \phi_{12E} \ddot{\theta}_1} + \underline{m_j \phi_{12E} (\phi_{11E} \ddot{q}_{11} + \phi_{12E} \ddot{q}_{12})} \\ & + \underline{m_p \phi_{12E} (\phi_{11E} \ddot{q}_{11} + \phi_{12E} \ddot{q}_{12})} + \underline{m_p L_1 \phi_{12E} \ddot{\theta}_1} + \underline{m_p L_2 \phi_{12E} (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \cos \theta_2} \\ & - \underline{m_p L_2 \phi_{12E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_2 \sin \theta_2} + \underline{m_p \phi_{12E} (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) (\phi_{21E} q_{11} + \phi_{22E} q_{12}) \sin(-\theta_2)} \\ & + \underline{m_p (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \phi_{12E} (\phi_{21E} \dot{q}_{11} + \phi_{22E} \dot{q}_{12}) \sin(-\theta_2)} - \underline{m_p \phi_{12E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12}) \dot{\theta}_2 \cos \theta_2} \end{aligned}$$

5ª equação de movimento:

5ª equação

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{z1}} \right] - \frac{\partial T}{\partial q_{z1}} + \frac{\partial V}{\partial q_{z1}} = \tau_s$$

1-) primeiro, calcula-se $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{z1}}$ (da eq. 2.43)

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{z1}} = & m_z \dot{q}_{z1} + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) m_{Wz1} + \eta q_{z1} (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) \cos \theta_2 \\ & + \eta q_{z1} (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12}) \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 + m_p (\phi_{z1E} \dot{q}_{z1} + \phi_{z2E} \dot{q}_{z2}) \phi'_{z1E} \\ & + m_p L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \phi_{z1E} + m_p \phi_{z1E} (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) \cos \theta_2 \\ & + \frac{1}{2} m_p \dot{\theta}_1 \phi_{z1E} (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12}) \sin \theta_2 + \cancel{m_p L_2 \dot{\theta}_1 \phi_{z1E}} J_p (\phi'_{z1E} \dot{q}_{z1} + \phi'_{z2E} \dot{q}_{z2}) \phi'_{z1E} \end{aligned}$$

2-) agora, calcula-se $\frac{\partial T}{\partial q_{z1}}$

$$\begin{aligned} - \frac{\partial T}{\partial q_{z1}} = & - \eta q_{z1} L_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 + \eta q_{z1} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) \sin(-\theta_2) \\ & + \eta q_{z1} L_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin(-\theta_2) + \eta q_{z1} \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12}) \cos \theta_2 \\ & + \frac{1}{2} m_p \phi'_{z1E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + m_p L_1 \dot{\theta}_1 \phi_{z1E} \cos \theta_2 + m_p \phi_{z1E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) \sin(-\theta_2) \\ & + m_p L_1 \dot{\theta}_1 \phi_{z1E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin(-\theta_2) + m_p \dot{\theta}_1 \phi_{z1E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12}) \cos \theta_2 \end{aligned}$$

3) calculando $\frac{\partial V}{\partial q_{21}}$

$$\frac{\partial V}{\partial q_{21}} = -2k_{w_{211}} q_{21}$$

4) finalmente, calculando $\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{21}} \right]$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{21}} \right] &= \underline{m_2 \ddot{q}_{21}} + m_{w_{21}} (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + n q_{21} (\phi_{11E} \ddot{q}_{11} + \phi_{12E} \ddot{q}_{12}) \cos \theta_2 \\ &\quad - n q_{21} (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 + n q_{21} (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 + \\ &\quad + n q_{21} (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12}) \ddot{\theta}_1 \sin \theta_2 + n q_{21} (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12}) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \\ &\quad + \underline{m_p \phi_{21E} (\phi_{21E} \ddot{q}_{21} + \phi_{22E} \ddot{q}_{22})} + m_p L_2 \phi_{21E} (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + \\ &\quad + m_p \phi_{21E} (\phi_{11E} \ddot{q}_{11} + \phi_{22E} \ddot{q}_{22}) \cos \theta_2 - m_p \phi_{21E} (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{22E} \dot{q}_{22}) \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \\ &\quad + \frac{1}{2} m_p \phi_{21E} \ddot{\theta}_1 (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12}) \sin \theta_2 + \frac{1}{2} m_p \phi_{21E} \dot{\theta}_1 (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) \sin \theta_2 \\ &\quad + \frac{1}{2} m_p \phi_{21E} \dot{\theta}_1 (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12}) \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + \underline{J_P \phi_{21E}' (\phi_{21E}' \ddot{q}_{21} + \phi_{22E}' \ddot{q}_{22})} \end{aligned}$$

6ª equação de movimento:

6.ª equação:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{22}} \right] - \frac{\partial T}{\partial q_{22}} + \frac{\partial V}{\partial q_{22}} = \tau_6$$

1) primeiro, calcule-se $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{22}}$ (da eq. 363)

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{22}} = & m_2 \dot{q}_{22} + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) m w_{22} + m q_{22} (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) \cos \theta_2 \\ & + m q_{22} \dot{\theta}_1 (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12}) \sin \theta_2 + m_p (\phi_{21E} \dot{q}_{21} + \phi_{22E} \dot{q}_{22}) \phi_{22E} \\ & + m_p L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \phi_{22E} + m_p \phi_{22E} (\phi_{21E} \dot{q}_{21} + \phi_{22E} \dot{q}_{22}) \cos \theta_2 \\ & + \frac{1}{2} m_p \dot{\theta}_1 \phi_{22E} (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12}) \sin \theta_2 + J_p (\phi_{21E}' \dot{q}_{21} + \phi_{22E}' \dot{q}_{22}) \phi_{22E}' \end{aligned}$$

2) agora, calcule-se $\frac{\partial T}{\partial q_{22}}$

$$\begin{aligned} - \frac{\partial T}{\partial q_{22}} = & - m q_{22} L_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 + m q_{22} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) \sin(-\theta_2) \\ & + m q_{22} L_1 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin(-\theta_2) + m q_{22} \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12}) \cos \theta_2 \\ & + \frac{1}{2} m_p (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \phi_{22E} + m_p L_1 \dot{\theta}_1 \phi_{22E} \cos \theta_2 + m_p (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \phi_{22E} (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12}) \sin(-\theta_2) \\ & + m_p L_1 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \phi_{22E} \sin(-\theta_2) + m_p \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \phi_{22E} (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12}) \cos \theta_2 \end{aligned}$$

3) calcular

$$\frac{\partial V}{\partial q_{22}} = -2k_{w22} q_{22}$$

4) finalmente, calcular $\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{22}} \right]$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{22}} \right] &= \underline{m_2 \ddot{q}_{22}} + n_{w22} (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + n_{q22} (\phi_{11E} \ddot{q}_{11} + \phi_{12E} \ddot{q}_{12}) \cos \theta_2 - n_{q22} (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \\ &+ n_{q21} \ddot{\theta}_1 (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12}) \sin \theta_2 + n_{q21} \dot{\theta}_1 (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) \sin \theta_2 \\ &+ n_{q21} \dot{\theta}_1 (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12}) \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + \underline{m_p \phi_{21E} (\phi_{21E} \ddot{q}_{21} + \phi_{22E} \ddot{q}_{22})} \\ &+ \underline{m_p L_2 \phi_{22E} (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)} + \underline{m_j \phi_{22E} (\phi_{21E} \ddot{q}_{21} + \phi_{22E} \ddot{q}_{22}) \cos \theta_2} - \underline{m_p \phi_{22E} (\phi_{21E} \dot{q}_{21} + \phi_{22E} \dot{q}_{22}) \dot{\theta}_2 \sin \theta_2} \\ &+ \frac{1}{2} m_p \phi_{22E} \ddot{\theta}_1 (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12}) \sin \theta_2 + \frac{1}{2} m_p \phi_{22E} \dot{\theta}_1 (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) \sin \theta_2 \\ &+ \frac{1}{2} m_p \phi_{22E} \dot{\theta}_1 (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12}) \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + \underline{J_p \phi_{22E} (\phi_{21E} \ddot{q}_{21} + \phi_{22E} \ddot{q}_{22})} \end{aligned}$$

B-2 Compactação das equações

1ª equação de movimento:

1ª equação

$$J_1 \ddot{\theta}_1 + F_1 \dot{\theta}_1 + T_{pnh12} = \tau_1$$

onde

$$J_1 = A_1 + B_1 + [\alpha F_1 - 2\beta F_2 - \gamma F_3] s\theta_2 + [A_2 + 2(\delta F_1 F_2 + F_1 F_3)] c\theta_2 + \varepsilon F_1^2$$

$$F_1 = \gamma F_4 + 2\varepsilon F_1 F_3 + [3\gamma F_3 - 2\beta F_4 - \gamma F_6 - (A_2 + 2(\delta F_1 F_2 + F_1 F_3)) \dot{\theta}_2] s\theta_2 + \\ + [(3\gamma F_1 - 2\beta F_2 - \gamma F_3) \dot{\theta}_2 + 2\delta (F_1 F_4 + F_2 F_3) + 2(F_1 F_6 + F_3 F_5)] c\theta_2$$

$$T_{pnh12} = (A_3 + \eta F_2) \ddot{\theta}_2 + m w_{11} \ddot{q}_{11} + m w_{12} \ddot{q}_{12} + m w_{21} \ddot{q}_{21} + m w_{22} \ddot{q}_{22} + \\ + \eta F_4 \dot{\theta}_2 - F_1 F_5 \dot{\theta}_2^2 - \varepsilon \gamma F_7 + A_4 c\theta_1 + A_5 c(\theta_1 + \theta_2) + \\ + \left[\frac{1}{2} (\alpha F_1 - 2\beta F_2 - \gamma F_3) \ddot{\theta}_2 - (\beta F_4 + \gamma F_6) \dot{\theta}_2 - \frac{1}{2} (A_2 + 2\delta F_1 F_2) \dot{\theta}_2^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \delta (F_1 F_8 - F_3 F_4 - 2 F_2 F_7) - F_5 F_7 \right] s\theta_2 + \\ + \left[\frac{1}{2} (A_2 + 2\delta F_1 F_2) \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} (\alpha F_1 - 2\beta F_2 - \gamma F_3) \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} (\gamma F_6 + 3\delta F_1 F_4 + 4 F_1 F_5) \dot{\theta}_2 \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \alpha F_7 + \eta F_8 + F_1 F_7 \right] c\theta_2$$

2ª equação de movimento:

2ª equação:

$$\tau_2 = J_2 \ddot{\theta}_2 + F_2 \dot{\theta}_2 + T_{penda2}$$

onde:

$$J_2 = m_2 L_2^2 + m_p L_2^2 + m_p (\phi_{21E} \dot{q}_{21} + \phi_{22E} \dot{q}_{22})^2$$

$$F_2 = m_p L_2 (\phi_{21E} \dot{q}_{21} + \phi_{22E} \dot{q}_{22})$$

$$\begin{aligned} T_{penda2} = & m_2 L_2^2 \ddot{\theta}_1 + m_w L_2 \ddot{q}_{21} + m_w L_2 \ddot{q}_{22} + m_p L_2^2 \ddot{\theta}_1 + m_p L_2 \ddot{\theta}_1 (\phi_{21E} \dot{q}_{21} + \phi_{22E} \dot{q}_{22}) \\ & + m_p L_2 \ddot{\theta}_1 (\phi_{21E} \dot{q}_{21} + \phi_{22E} \dot{q}_{22}) + m_p L_2 (\phi_{21E} \ddot{q}_{21} + \phi_{22E} \ddot{q}_{22}) \\ & + k_{2A} + k_{2B} + k_{2C} \end{aligned}$$

2.1.100

$$J_2 = a_3 + a_3' + \delta F_2^2 = A_3 + \delta F_2^2$$

$$F_2 = \eta F_4$$

$$\begin{aligned} T_{penda2} = & a_3 \ddot{\theta}_1 + m_w L_2 \ddot{q}_{21} + m_w L_2 \ddot{q}_{22} + a_3' \ddot{\theta}_1 + \eta F_4 \ddot{\theta}_1 + \eta F_2 \ddot{\theta}_1 + \eta F_8 \\ & + a_5 c(\theta_1 + \theta_2) + a_5' c(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + & \left[\frac{1}{2} a_2 \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{2} b_1 F_7 + F_1 F_5 \ddot{\theta}_1 + 2 F_3 F_5 \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{2} a_2' \ddot{\theta}_1 + \eta F_7 \right. \\ & + \delta F_1 F_2 \ddot{\theta}_1 + 2 \delta F_2 F_3 \ddot{\theta}_1 - \frac{1}{2} b_1 F_3 \ddot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \gamma F_5 \ddot{\theta}_1^2 - \eta F_1 \ddot{\theta}_1^2 \\ & \left. + \eta F_2 \ddot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \delta F_1 F_4 \ddot{\theta}_1 \right] c\theta_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + & \left[\frac{1}{2} b_1 F_1 \ddot{\theta}_1 - F_5 F_7 + b_1 F_3 \ddot{\theta}_1 - \frac{1}{2} \gamma F_5 \ddot{\theta}_1 - \delta F_2 F_7 - \delta F_3 F_4 \right. \\ & + \eta F_1 \ddot{\theta}_1 + 2 \eta F_3 \ddot{\theta}_1 - \beta F_2 \ddot{\theta}_1 - \beta F_4 \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{2} a_2 \ddot{\theta}_1^2 + F_3 F_5 \ddot{\theta}_1^2 \\ & \left. + \frac{1}{2} a_2' \ddot{\theta}_1^2 + \delta F_3 F_4 + \delta F_1 F_2 \ddot{\theta}_1^2 \right] s\theta_2 \end{aligned}$$

2ª equação:

$$\tilde{T}_2 = J_2 \ddot{\theta}_2 + F_2 \dot{\theta}_2 + T_{penda2}$$

$$J_2 = A_3 + \delta F_2^2$$

$$F_2 = \eta F_4$$

$$\begin{aligned} T_{penda2} = & \underline{A_3 \ddot{\theta}_1} + \underline{\eta F_2 \ddot{\theta}_1} + n w_{21} \ddot{q}_{21} + n w_{22} \ddot{q}_{22} + \eta F_4 \dot{\theta}_1 + \eta F_8 + A_5 c(\theta_1 + \theta_2) \\ & + \left[\frac{1}{2} A_2 \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{2} \psi F_7 + F_1 F_5 \dot{\theta}_1 + 2 F_3 F_5 \dot{\theta}_1 + \eta F_7 + \delta F_1 F_2 \dot{\theta}_1 \right. \\ & \quad \left. + 2 \delta F_2 F_3 \dot{\theta}_1 - \frac{1}{2} \psi F_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \gamma F_5 \dot{\theta}_1^2 - \eta F_1 \dot{\theta}_1^2 + \beta F_2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \delta F_1 F_4 \dot{\theta}_1^2 \right] c \theta_2 \\ & + \left[\frac{1}{2} \psi F_1 \ddot{\theta}_1 - F_5 F_7 + \psi F_3 \dot{\theta}_1 - \frac{1}{2} \gamma F_5 \dot{\theta}_1 - \delta F_2 F_7 - \delta F_3 F_4 \right. \\ & \quad \left. + \eta F_1 \ddot{\theta}_1 + 2 \eta F_3 \dot{\theta}_1 - \beta F_2 \dot{\theta}_1 - \beta F_4 \dot{\theta}_1 + \frac{1}{2} A_2 \dot{\theta}_1^2 + F_1 F_5 \dot{\theta}_1^2 \right. \\ & \quad \left. + \delta F_3 F_4 + \delta F_1 F_2 \dot{\theta}_1^2 \right] s \theta_2 \end{aligned}$$

2ª equação

$$\tilde{T}_2 = J_2 \ddot{\theta}_2 + F_2 \dot{\theta}_2 + T_{penda2}$$

onde:

$$J_2 = A_3 + \delta F_2^2$$

$$F_2 = \eta F_4$$

$$\begin{aligned} T_{penda2} = & (A_3 + \eta F_2) \ddot{\theta}_1 + n w_{21} \ddot{q}_{21} + n w_{22} \ddot{q}_{22} + \eta F_4 \dot{\theta}_1 + \eta F_8 + A_5 c(\theta_1 + \theta_2) \\ & + \left[\left(\frac{1}{2} A_2 + F_1 F_5 + \delta F_1 F_2 \right) \ddot{\theta}_1 + \left(2 F_3 F_5 + 2 \delta F_2 F_3 + \frac{1}{2} \delta F_1 F_4 \right) \dot{\theta}_1 + \right. \\ & \quad \left. + \left(\beta F_2 - \eta F_1 + \frac{1}{2} \gamma F_5 - \frac{1}{2} \psi F_3 \right) \dot{\theta}_1^2 + \left(\eta + \frac{1}{2} \psi \right) F_7 \right] c \theta_2 \\ & + \left[\left(\eta F_1 + \frac{1}{2} \psi F_1 - \beta F_2 - \frac{1}{2} \gamma F_5 \right) \ddot{\theta}_1 + \left(\psi F_3 + 2 \eta F_3 - \beta F_4 \right) \dot{\theta}_1 \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{1}{2} A_2 + F_1 F_5 + \delta F_1 F_2 \right) \dot{\theta}_1^2 - \left(F_5 F_7 + \delta F_2 F_7 \right) \right] s \theta_2 \end{aligned}$$

2ª equação

$$J_2 \ddot{\theta}_2 + F_2 \dot{\theta}_2 + T_{\text{elástico}} = T_2$$

onde

$$J_2 = A_3 + 8 F_2^2$$

$$F_2 = \eta F_4$$

$$\begin{aligned} T_{\text{elástico}} = & (A_3 + \eta F_2) \ddot{\theta}_1 + \eta w_{21} \dot{q}_{21} + \eta w_{22} \dot{q}_{22} + \eta F_4 \dot{\theta}_1 + \eta F_8 + A_5 c(\theta_1 + \theta_2) + \\ & + \left[\frac{1}{2} (A_2 + 2\delta F_1 F_2 + 2 F_1 F_5) \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{2} (\delta F_1 F_4 + 4\delta F_2 F_3 + 4 F_3 F_5) \dot{\theta}_1 = \right. \\ & \Rightarrow \frac{1}{2} (\psi F_1 + 2\eta F_1 - \delta F_3 - 2\beta F_2) \dot{\theta}_1^2 + \left. \left(\eta + \frac{3}{2} \psi \right) F_7 \right] c\theta_2 + \\ & + \left[\frac{1}{2} (\psi F_1 + 2\eta F_1 - \delta F_3 - 2\beta F_2) \ddot{\theta}_1 + \left(z\eta F_3 + \psi F_3 - \beta F_4 \right) \dot{\theta}_1 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} (A_2 + 2\delta F_1 F_2 + 2 F_1 F_5) \dot{\theta}_1^2 - (\delta F_2 F_7 + F_5 F_7) \right] s\theta_2 \end{aligned}$$

2ª equação:

$$\bar{J}_2 \ddot{\theta}_2 + F_2 \dot{\theta}_2 + P_{pert_2} = \tau_2$$

onde:

$$\bar{J}_2 = A_3 + \delta F_2^2$$

$$F_2 = \eta F_4$$

$$\begin{aligned} P_{pert_2} = & \left(A_3 + \eta F_2 \right) \ddot{\theta}_1 + n w_{21} \ddot{q}_{21} + n w_{22} \ddot{q}_{22} + \eta \cdot \frac{F_4}{4} \dot{\theta}_1 + \eta \cdot \frac{F_8}{8} + A_5 c(\theta_1 + \theta_2) + \\ & + \left[\frac{1}{2} \left(\alpha F_1 - 2\beta F_2 - \gamma F_5 \right) \ddot{\theta}_1 + \left(\alpha F_3 - \beta F_4 \right) \dot{\theta}_1 + \right. \\ & + \left. \frac{1}{2} \left(A_2 + 2\delta F_1 F_2 + 2F_1 F_5 \right) \dot{\theta}_1^2 - \delta F_2 F_7 - F_5 F_7 \right] s\theta_2 \\ & + \left[\frac{1}{2} \left(A_2 + 2\delta F_1 F_2 + 2F_1 F_5 \right) \dot{\theta}_1 + \frac{1}{2} \left(\delta F_1 F_4 + 4\delta F_2 F_3 + 4F_3 F_5 \right) \dot{\theta}_1 \right. \\ & - \left. \frac{1}{2} \left(\alpha F_3 - 2\beta F_2 - \gamma F_5 \right) \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \alpha F_7 \right] c\theta_2 \end{aligned}$$

3ª equação de movimento:

3ª equação

$$J_3 \ddot{q}_{11} + F_3 \dot{q}_{11} + T_{penda3} = 0$$

onde:

$$J_3 = m_L + (m_2 + m_j + m_p) \phi_{11E}^2$$

$$\bar{F}_3 = 0$$

$$\begin{aligned} T_{penda3} = & - (m_2 + m_j + m_p) \phi_{11E} \dot{\theta}_1^2 - 2k w_{s11} \\ & + m w_{11} \ddot{\theta}_1 + m_2 \phi_{11E} \phi_{12E} \ddot{q}_{12} + \underline{m_2 L_1 \phi_{11E} \ddot{\theta}_1} + \underline{m_j L_1 \phi_{11E} \ddot{\theta}_1} \\ & + m_j \phi_{11E} \phi_{12E} \ddot{q}_{12} + m_p \phi_{11E} \phi_{12E} \ddot{q}_{12} + \underline{m_p L_1 \phi_{11E} \ddot{\theta}_1} - m_2 \phi_{11E} \phi_{12E} q_{12} \dot{\theta}_1^2 \\ & - m_j \phi_{11E} \phi_{12E} q_{12} \dot{\theta}_1^2 - m_p \phi_{11E} \phi_{12E} q_{12} \dot{\theta}_1^2 \\ & + \left[-\frac{1}{2} m_2 L_2 \phi_{11E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_2 - (n_{21} \dot{q}_{21} + n_{22} \dot{q}_{22}) \phi_{11E} \dot{\theta}_2 - (n_{21} q_{21} + n_{22} q_{22}) \phi_{11E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \right. \\ & - (n_{21} \dot{q}_{21} + n_{22} \dot{q}_{22}) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \phi_{11E} - m_p L_2 \phi_{11E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_2 - m_p \phi_{11E} (\dot{\phi}_{21E} \dot{q}_{21} + \dot{\phi}_{22E} \dot{q}_{22}) \dot{\theta}_2 \\ & - m_p \phi_{11E} (\phi_{21E} q_{21} + \phi_{22E} q_{22}) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) - m_p \phi_{11E} (\phi_{21E} \dot{q}_{21} + \phi_{22E} \dot{q}_{22}) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ & - \frac{1}{2} m_2 L_2 \phi_{11E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_1 - (n_{21} \dot{q}_{21} + n_{22} \dot{q}_{22}) \phi_{11E} \dot{\theta}_1 - m_p L_2 \phi_{11E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_1 \\ & \left. - \frac{1}{2} m_p \phi_{11E} (\phi_{21E} \dot{q}_{21} + \phi_{22E} \dot{q}_{22}) \dot{\theta}_1 \right] s \theta_2 \\ & \left[\frac{1}{2} m_2 L_2 \phi_{11E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + (n_{21} \dot{q}_{21} + n_{22} \dot{q}_{22}) \phi_{11E} - (n_{21} q_{21} + n_{22} q_{22}) \phi_{11E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_2 \right. \\ & + m_p L_2 \phi_{11E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + m_p \phi_{11E} (\phi_{21E} \dot{q}_{21} + \phi_{22E} \dot{q}_{22}) - m_p \phi_{11E} (\phi_{21E} q_{21} + \phi_{22E} q_{22}) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_2 \\ & \left. - (n_{21} q_{21} + n_{22} q_{22}) \phi_{11E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_1 - m_p \phi_{11E} (\phi_{21E} q_{21} + \phi_{22E} q_{22}) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_1 \right] c \theta_2 \end{aligned}$$

3ª equação

$$\bar{J}_3 \ddot{q}_{11} + \bar{F}_3 \dot{q}_{11} + \bar{T}_{pendas} = 0$$

$$\bar{J}_3 = m_L + E \phi_{11E}^2$$

$$\bar{F}_3 = 0$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_{pendas} = & -E \phi_{11E}^2 \dot{\theta}_1^2 - 2k w_{111} + \eta w_{11} \ddot{\theta}_1 + E \phi_{11E} \phi_{12E} \ddot{q}_{12} + \frac{1}{2} E \gamma \phi_{11E} \ddot{\theta}_1 \\ & - E \phi_{11E} \phi_{12E} \ddot{q}_{12} \dot{\theta}_1^2 \\ & + \left[-\frac{1}{2} \Psi \phi_{11E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_2 - \bar{F}_6 \phi_{11E} \dot{\theta}_2 - \bar{F}_5 \phi_{11E} (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \right. \\ & \quad - \bar{F}_6 \phi_{11E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) - \gamma \phi_{11E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_2 - \delta \bar{F}_4 \phi_{11E} \dot{\theta}_2 - \delta \bar{F}_5 \phi_{11E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ & \quad - \delta \bar{F}_4 \phi_{11E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) - \frac{\eta}{2} \Psi \phi_{11E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_1 - \bar{F}_6 \phi_{11E} \dot{\theta}_1 - \gamma \phi_{11E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_1 \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} \delta \bar{F}_4 \phi_{11E} \dot{\theta}_1 \right] \sin \theta_2 \\ & + \left[-\frac{1}{2} \Psi \phi_{11E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + \bar{F}_9 \phi_{11E} - \bar{F}_5 \phi_{11E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_2 + \gamma \phi_{11E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \right. \\ & \quad \left. + \delta \bar{F}_8 \phi_{11E} - \delta \bar{F}_2 \phi_{11E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_2 - \bar{F}_5 \phi_{11E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_1 - \delta \bar{F}_2 \phi_{11E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_1 \right] \cos \theta_2 \end{aligned}$$

3ª equação

$$\bar{J}_3 \ddot{q}_{11} + f_3 \dot{q}_{11} + T_{perturb.3} = 0$$

onde:

$$J_3 = m_L \phi_{1E}^2 + E \phi_{1E}^2$$

$$\bar{F}_3 = 0$$

$$\begin{aligned} T_{perturb.3} = & \left(\eta \omega_{11} + \frac{1}{2} E \delta \phi_{1E} \right) \ddot{\theta}_1 + E \phi_{1E} \phi_{12E} \ddot{q}_{12} - E \left(\phi_{1E}^2 + \phi_{1E} \phi_{12E} \dot{q}_{12} \right) \dot{\theta}_1^2 - 2k \omega_{11} \\ & - \phi_{1E} \left[(F_5 + \delta F_2) \ddot{\theta}_1 + (F_5 + \delta F_2) \ddot{\theta}_2 + 2F_6 \dot{\theta}_1 + 2\delta F_4 \dot{\theta}_1 + 2F_6 \dot{\theta}_2 + 2\delta F_4 \dot{\theta}_2 + \right. \\ & + F_6 \dot{\theta}_1 + \delta F_4 \dot{\theta}_1 + F_6 \dot{\theta}_2 + \delta F_4 \dot{\theta}_2 + F_6 \dot{\theta}_1 + \frac{1}{2} \delta F_4 \dot{\theta}_1 + \\ & + F_6 \dot{\theta}_2 + \delta F_4 \dot{\theta}_2 + \left(\frac{1}{2} \psi + \eta \right) \dot{\theta}_1^2 + \left(\frac{1}{2} \psi + \eta \right) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \\ & + \left(\frac{1}{2} \psi + \eta \right) \dot{\theta}_2^2 + \left(\frac{1}{2} \psi + \eta \right) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \left. \right] s \theta_2 \\ & + \phi_{1E} \left[\left(\frac{1}{2} \psi + \eta \right) \dot{\theta}_1 + \left(\frac{1}{2} \psi + \eta \right) \dot{\theta}_2 + F_5 \dot{\theta}_1^2 + F_5 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \delta F_2 \dot{\theta}_1^2 + \delta F_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \right. \\ & + F_5 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + F_5 \dot{\theta}_2^2 + \delta F_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \delta F_2 \dot{\theta}_2^2 + F_7 + \delta F_8 \left. \right] c \theta_2 \end{aligned}$$

3ª equação

$$\bar{J}_3 \ddot{q}_{11} + f_3 \dot{q}_{11} + T_{perturb.3} = 0$$

onde:

$$J_3 = m_L \phi_{1E}^2 + E \phi_{1E}^2$$

$$\bar{F}_3 = 0$$

$$\begin{aligned} T_{perturb.3} = & \left(\eta \omega_{11} + \frac{1}{2} E \delta \phi_{1E} \right) \ddot{\theta}_1 + E \phi_{1E} \phi_{12E} \ddot{q}_{12} - E \left(\phi_{1E}^2 + \phi_{1E} \phi_{12E} \dot{q}_{12} \right) \dot{\theta}_1^2 - 2k \omega_{11} \\ & - \phi_{1E} \left[(F_5 + \delta F_2) \ddot{\theta}_1 + (F_5 + \delta F_2) \ddot{\theta}_2 + (2F_6 + \frac{1}{2} \delta F_4) \dot{\theta}_1 + (2F_6 + \frac{1}{2} \delta F_4) \dot{\theta}_2 \right. \\ & + 2 \left(\frac{1}{2} \psi + \eta \right) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \left(\frac{1}{2} \psi + \eta \right) \dot{\theta}_1^2 + \left(\frac{1}{2} \psi + \eta \right) \dot{\theta}_2^2 \left. \right] s \theta_2 \\ & + \phi_{1E} \left[\left(\frac{1}{2} \psi + \eta \right) \dot{\theta}_1 + \left(\frac{1}{2} \psi + \eta \right) \dot{\theta}_2 + (2F_5 + 2\delta F_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + (F_5 + \delta F_2) \dot{\theta}_1^2 \right. \\ & + (F_5 + \delta F_2) \dot{\theta}_2^2 + \delta F_8 + F_9 \left. \right] c \theta_2 \end{aligned}$$

3ª equação:

$$J_3 \ddot{q}_{11} + F_3 \dot{q}_{11} + T_{perturb.3} = 0$$

onde:

$$J_3 = m_{11} + \epsilon \phi_{11E}^2$$

$$F_3 = 0$$

$$\begin{aligned} T_{perturb.3} = & \left(m w_{11} + \frac{1}{2} \epsilon \gamma \phi_{11E} \right) \ddot{\theta}_2 + \epsilon \phi_{11E} \phi_{12E} \ddot{q}_{12} - \epsilon \left(\phi_{11E}^2 + \phi_{11E} \phi_{12E} q_{12} \right) \dot{\theta}_2^2 \\ & - 2k w_{11} \\ & - \left[\left(F_5 + \delta F_2 \right) \phi_{11E} \left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \right) + \left(F_6 + \delta F_4 \right) \phi_{11E} \left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \right) + \right. \\ & \left. \left(F_6 + \frac{1}{2} \delta F_4 \right) \phi_{11E} \dot{\theta}_1 + \left(F_6 + \delta F_4 \right) \phi_{11E} \dot{\theta}_2 + \right. \\ & \left. \left(\frac{1}{2} \psi + \gamma \right) \phi_{11E} \left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \right) \dot{\theta}_1 + \left(\frac{1}{2} \psi + \gamma \right) \phi_{11E} \left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \right) \dot{\theta}_2 \right] \cos \theta_2 \\ & + \left[\left(\frac{1}{2} \psi + \gamma \right) \phi_{11E} \left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \right) + \left(F_5 + \delta F_2 \right) \phi_{11E} \left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \right) \dot{\theta}_1 + \right. \\ & \left. \left(F_5 + \delta F_2 \right) \phi_{11E} \left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \right) \dot{\theta}_2 + \left(F_7 + \delta F_8 \right) \phi_{11E} \right] \cos \theta_2 \end{aligned}$$

4ª equação de movimento:

4ª equação:

$$J_4 \ddot{q}_{12} + F_4 \dot{q}_{12} + T_{pendu4} = 0$$

onde:

$$J_4 = m_1 + (m_2 + m_j + m_p) \dot{\theta}_{12}^2$$

$$F_4 = 0$$

$$\begin{aligned} T_{pendu4} = & -(m_2 + m_j + m_p) \dot{\phi}_{12E}^2 \dot{\theta}_1^2 - 2K_{122} + n\omega_{12} \ddot{\theta}_1 + m_2 \phi_{11E} \phi_{12E} \ddot{q}_{11} \\ & + \frac{m_2 L_1 \phi_{12E} \ddot{\theta}_1}{\phi_{12E}} + \frac{m_j L_1 \phi_{12E} \ddot{\theta}_1}{\phi_{12E}} + \frac{m_j \dot{\phi}_{12E} \dot{\phi}_{12E} \ddot{q}_{11}}{\phi_{12E}} + \frac{m_p \phi_{11E} \phi_{12E} \ddot{q}_{11}}{\phi_{12E}} \\ & + \frac{m_p L_1 \dot{\phi}_{12E} \ddot{\theta}_1}{\phi_{12E}} - \frac{m_2 \phi_{11E} \dot{\phi}_{12E} \ddot{q}_{11} \dot{\theta}_1}{\phi_{12E}} - \frac{m_j \dot{\phi}_{12E} \dot{\phi}_{12E} \ddot{q}_{11} \dot{\theta}_1}{\phi_{12E}} - \\ & - \frac{m_p \phi_{11E} \dot{\phi}_{12E} \ddot{q}_{11} \dot{\theta}_1}{\phi_{12E}} \\ & + \left[-\frac{1}{2} m_2 L_2 \phi_{12E} (\dot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \ddot{\theta}_2 - (n\dot{q}_{21} \ddot{q}_{21} + n\dot{q}_{22} \ddot{q}_{22}) \phi_{12E} \ddot{\theta}_2 - \right. \\ & - (n\dot{q}_{21} \ddot{q}_{21} + n\dot{q}_{22} \ddot{q}_{22}) \phi_{12E} (\dot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) - (n\dot{q}_{21} \ddot{q}_{21} + n\dot{q}_{22} \ddot{q}_{22}) \phi_{12E} (\dot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ & - m_p L_2 \phi_{12E} (\dot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \ddot{\theta}_2 - m_p (\phi_{21E} \ddot{q}_{21} + \phi_{22E} \ddot{q}_{22}) \dot{\phi}_{12E} (\dot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ & - m_p (\phi_{21E} \ddot{q}_{21} + \phi_{22E} \ddot{q}_{22}) \phi_{12E} (\dot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) - \frac{1}{2} m_2 L_2 \dot{\phi}_{12E} (\dot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \dot{\theta}_1 \\ & - (n\dot{q}_{21} \ddot{q}_{21} + n\dot{q}_{22} \ddot{q}_{22}) \phi_{12E} \dot{\theta}_1 - m_p L_2 \dot{\phi}_{12E} (\dot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \dot{\theta}_1 \\ & \left. - \frac{1}{2} m_p (\phi_{21E} \ddot{q}_{21} + \phi_{22E} \ddot{q}_{22}) \phi_{12E} \dot{\theta}_1 \right] S\theta_2 \\ & + \left[\frac{1}{2} m_2 L_2 \phi_{12E} (\dot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + (n\dot{q}_{21} \ddot{q}_{21} + n\dot{q}_{22} \ddot{q}_{22}) \phi_{12E} \right. \\ & - (n\dot{q}_{21} \ddot{q}_{21} + n\dot{q}_{22} \ddot{q}_{22}) \phi_{12E} (\dot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \ddot{\theta}_2 + m_p L_2 \dot{\phi}_{12E} (\dot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ & - m_p (\phi_{21E} \ddot{q}_{21} + \phi_{22E} \ddot{q}_{22}) \dot{\phi}_{12E} (\dot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \ddot{\theta}_2 - (n\dot{q}_{21} \ddot{q}_{21} + n\dot{q}_{22} \ddot{q}_{22}) \dot{\phi}_{12E} (\dot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \dot{\theta}_1 \\ & \left. - m_p (\phi_{21E} \ddot{q}_{21} + \phi_{22E} \ddot{q}_{22}) \phi_{12E} (\dot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \dot{\theta}_1 \right] C\theta_2 \end{aligned}$$

4ª equação

onde

$$\bar{J}_4 \ddot{q}_{12} + F_4 \dot{q}_{12} + T_{penda4} = 0$$

$$\bar{J}_4 = m_1 + \varepsilon \phi_{12E}^2$$

$$\bar{F}_4 = 0$$

$$\begin{aligned} T_{penda4} = & -\varepsilon \phi_{12E}^2 \dot{\theta}_1^2 - 2k\omega_{122} + n\omega_{12} \ddot{\theta}_1 + \varepsilon \phi_{11E} \phi_{12E} \ddot{q}_{11} + \frac{1}{2} \varepsilon g \phi_{12E} \ddot{\theta}_1 \\ & - \varepsilon \phi_{11E} \phi_{12E} q_{11} \dot{\theta}_1^2 \\ & + \left[-\frac{1}{2} \Psi \phi_{12E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_2 - F_6 \phi_{12E} \dot{\theta}_2 - F_5 \phi_{12E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \right. \\ & - F_8 \phi_{12E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) - \eta \phi_{12E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_2 - \delta F_2 \phi_{12E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ & - \delta F_4 \phi_{12E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) - \frac{1}{2} \Psi \phi_{12E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_1 - F_6 \phi_{12E} \dot{\theta}_1 \\ & \left. - \eta \phi_{12E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_1 - \frac{1}{2} \delta F_4 \phi_{12E} \dot{\theta}_1 \right] \cos \theta_2 \\ & + \left[\frac{1}{2} \Psi \phi_{12E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + F_9 \phi_{12E} - F_5 \phi_{12E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_2 + \eta \phi_{12E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \right. \\ & \left. - \delta F_2 \phi_{12E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_2 - F_5 \phi_{12E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_1 - \delta F_2 \phi_{12E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_1 \right] \sin \theta_2 \end{aligned}$$

4ª equação:

$$\bar{J}_4 \ddot{q}_{12} + F_4 \dot{q}_{12} + T_{\text{restab},4} = 0$$

onde:

$$\bar{J}_4 = m_1 + \epsilon \phi_{12\epsilon}^2$$

$$F_4 = 0$$

$$T_{\text{restab},4} = \left(m \omega_{12} + \frac{1}{2} \epsilon \gamma \phi_{12\epsilon} \right) \dot{\theta}_1 + \epsilon \phi_{1\epsilon} \phi_{12\epsilon} \dot{q}_{11} - \epsilon \left(\phi_{12\epsilon}^2 + \phi_{1\epsilon} \phi_{12\epsilon} q_{11} \right) \dot{\theta}_2 - 2k \omega_{122}$$

$$- \phi_{12\epsilon} \left[\frac{1}{2} \psi \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} \psi \dot{\theta}_2^2 + \underline{F_6 \dot{\theta}_2} + \underline{F_5 \dot{\theta}_1} + \underline{F_5 \dot{\theta}_2} + \underline{F_6 \dot{\theta}_1} + \underline{F_6 \dot{\theta}_2} \right. \\ \left. + \gamma \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \gamma \dot{\theta}_2^2 + \underline{\delta F_2 \ddot{\theta}_1} + \underline{\delta F_2 \ddot{\theta}_2} + \underline{\delta F_4 \dot{\theta}_1} + \underline{2 \delta F_4 \dot{\theta}_2} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \psi \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \psi \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \underline{F_6 \dot{\theta}_1} + \gamma \dot{\theta}_1^2 + \gamma \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} \delta F_4 \dot{\theta}_1 \right] \sin \theta_2$$

$$+ \phi_{12\epsilon} \left[\frac{1}{2} \psi \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{2} \psi \ddot{\theta}_2 + \underline{F_7} - \underline{F_5 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2} - \underline{F_5 \dot{\theta}_2^2} + \gamma \ddot{\theta}_1 + \gamma \ddot{\theta}_2 \right. \\ \left. - \underline{\delta F_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2} - \underline{\delta F_2 \dot{\theta}_2^2} - \underline{F_5 \dot{\theta}_1^2} - \underline{F_5 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2} - \underline{\delta F_2 \dot{\theta}_1^2} - \underline{\delta F_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2} \right] \cos \theta_2$$

4ª equação:

$$\bar{J}_4 \ddot{q}_{12} + F_4 \dot{q}_{12} + T_{\text{restab},4} = 0$$

onde:

$$\bar{J}_4 = m_1 \phi_{1\epsilon}^2 + \epsilon \phi_{12\epsilon}^2$$

$$F_4 = 0$$

$$T_{\text{restab},4} = \left(m \omega_{12} + \frac{1}{2} \epsilon \gamma \phi_{1\epsilon} \right) \dot{\theta}_1 + \epsilon \phi_{1\epsilon} \phi_{12\epsilon} \dot{q}_{11} - \epsilon \left(\phi_{12\epsilon}^2 + \phi_{1\epsilon} \phi_{12\epsilon} q_{11} \right) \dot{\theta}_2 - 2k \omega_{122}$$

$$- \phi_{12\epsilon} \left[\left(\underline{F_5 + \delta F_2} \right) \dot{\theta}_1 + \left(\underline{F_5 + \delta F_2} \right) \dot{\theta}_2 + \left(2 \underline{F_6} + \frac{3}{2} \delta F_4 \right) \dot{\theta}_1 + \left(2 \underline{F_6} + 2 \delta F_4 \right) \dot{\theta}_2 \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \omega \left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \right) \right] \sin \theta_2 +$$

$$+ \phi_{12\epsilon} \left[\frac{1}{2} \omega \dot{\theta}_1 + \frac{1}{2} \omega \dot{\theta}_2 - 2 \left(\underline{F_5 + \delta F_2} \right) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - \left(\underline{F_5 + \delta F_2} \right) \dot{\theta}_1^2 - \left(\underline{F_5 + \delta F_2} \right) \dot{\theta}_2^2 + \delta F_4 \dot{\theta}_1 \right] \cos \theta_2$$

5ª equação de movimento:

5ª equação

$$J_S \ddot{\theta}_1 + F_S \ddot{\theta}_1 + T_{pendas} = 0$$

onde:

$$J_S = m_2 + m_p \phi_{21E}^2 + J_p \phi_{22E}^2$$

$$F_S = 0$$

$$\begin{aligned} T_{pendas} = & -2k w_{211} + n w_{21} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + m_p \phi_{21E} \phi_{22E} \ddot{\theta}_2 + m_p L_2 \phi_{21E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ & + J_p \phi_{21E}' \phi_{22E}' \ddot{\theta}_2 - \frac{1}{2} m_p \phi_{21E}^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ & + \left[-(\phi_{11E} \dot{\theta}_1 + \phi_{12E} \dot{\theta}_2) n q_{21} \dot{\theta}_2 + (\phi_{11E} \dot{\theta}_1 + \phi_{12E} \dot{\theta}_2) n q_{21} \dot{\theta}_1 + \right. \\ & + (\phi_{11E} \dot{\theta}_1 + \phi_{12E} \dot{\theta}_2) n q_{21} \ddot{\theta}_1 - m_p (\phi_{11E} \dot{\theta}_1 + \phi_{12E} \dot{\theta}_2) \phi_{21E} \dot{\theta}_2 \\ & + \frac{1}{2} m_p (\phi_{11E} \dot{\theta}_1 + \phi_{12E} \dot{\theta}_2) \phi_{21E} \dot{\theta}_1 + \frac{1}{2} m_p (\phi_{11E} \dot{\theta}_1 + \phi_{12E} \dot{\theta}_2) \phi_{21E} \dot{\theta}_1 \\ & + (\phi_{11E} \dot{\theta}_1 + \phi_{12E} \dot{\theta}_2) n q_{21} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + L_1 n q_{21} \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ & \left. + m_p (\phi_{11E} \dot{\theta}_1 + \phi_{12E} \dot{\theta}_2) \phi_{21E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + m_p L_1 \phi_{21E} \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \right] S \theta_2 \\ & + \left[(\phi_{11E} \ddot{\theta}_1 + \phi_{12E} \ddot{\theta}_2) n q_{21} + (\phi_{11E} \dot{\theta}_1 + \phi_{12E} \dot{\theta}_2) n q_{21} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + m_p (\phi_{11E} \ddot{\theta}_1 + \phi_{12E} \ddot{\theta}_2) \phi_{21E} \right. \\ & + \frac{1}{2} m_p (\phi_{11E} \dot{\theta}_1 + \phi_{12E} \dot{\theta}_2) \phi_{21E} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - L_1 n q_{21} \dot{\theta}_1 - (\phi_{11E} \dot{\theta}_1 + \phi_{12E} \dot{\theta}_2) n q_{21} \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ & \left. - m_p L_1 \phi_{21E} \dot{\theta}_1 - m_p (\phi_{11E} \dot{\theta}_1 + \phi_{12E} \dot{\theta}_2) \phi_{21E} \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \right] C \theta_2 \end{aligned}$$

5ª equação:

$$J_s \ddot{q}_{21} + F_s \dot{q}_{21} + P_{\text{elástico}} = 0$$

onde:

$$J_s = m_2 + \delta \phi_{21E}^2 + J_p \phi_{21E}'^2$$

$$F_s = 0$$

$$P_{\text{elástico}} = \left(m w_{21} \frac{\pi}{2} + \eta \phi_{21E} \right) \ddot{\theta}_1 + \left(m w_{21} + \eta \phi_{21E} \right) \ddot{\theta}_2 + \left(J_p \phi_{21E}' \phi_{21E}' + \delta \phi_{21E} \phi_{21E} \right) \ddot{q}_{22} \\ - \frac{1}{2} \beta \phi_{21E} \dot{\theta}_1^2 - \frac{1}{2} \beta \phi_{21E} \dot{\theta}_2^2 - \beta \phi_{21E} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - 2 k w_{21}$$

$$+ \left[\underline{F_3 \eta q_{21} \dot{\theta}_1} - \underline{F_3 \eta q_{21} \dot{\theta}_2} + \underline{F_1 \eta q_{21} \dot{\theta}_1} - \underline{\delta F_3 \phi_{21E} \dot{\theta}_2} + \underline{\frac{1}{2} \delta F_1 \phi_{21E} \dot{\theta}_1} \right. \\ + \underline{\frac{1}{2} \delta F_3 \phi_{21E} \dot{\theta}_1} + \underline{\eta q_{21} F_3 \dot{\theta}_1} + \underline{\eta q_{21} F_3 \dot{\theta}_2} + \underline{\frac{1}{2} \gamma \eta q_{21} \dot{\theta}_1^2} + \underline{\frac{1}{2} \gamma \eta q_{21} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2} \\ \left. + \underline{\delta \phi_{21E} F_3 \dot{\theta}_1} + \underline{\delta \phi_{21E} F_3 \dot{\theta}_2} + \underline{\beta \phi_{21E} \dot{\theta}_1^2} + \underline{\beta \phi_{21E} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2} \right] \sin \theta_2$$

$$+ \left[\underline{\eta q_{21} F_7} + \underline{\eta q_{21} F_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2} + \underline{\delta \phi_{21E} F_7} + \underline{\frac{1}{2} \delta \phi_{21E} F_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2} - \underline{\frac{1}{2} \gamma \eta q_{21} \dot{\theta}_1} \right. \\ \left. - \underline{\eta q_{21} F_1 \dot{\theta}_1^2} - \underline{\eta q_{21} F_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2} - \underline{\beta \phi_{21E} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2} - \underline{\delta \phi_{21E} F_1 \dot{\theta}_1^2} - \underline{\delta \phi_{21E} F_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2} \right] \cos \theta_2$$

59 equação

$$J_S \ddot{q}_{21} + F_S \dot{q}_{21} + T_{pendas} = 0$$

onde:

$$J_S = m_2 + \delta \phi_{21E}^2 + J_P \phi_{21E}'^2$$

$$F_S = 0$$

$$\begin{aligned} T_{pendas} = & (\eta w_{2L} + \eta \phi_{21E}) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + \left(\bar{J}_P \phi_{21E}' \phi_{21E}' + \delta \phi_{21E} \phi_{21E}' \right) \dot{q}_{21} \\ & - 2k w_{211} - \frac{1}{2} \frac{m_p L}{\rho} \phi_{21E}'^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ & + \left[F_3 \eta q_{21} \dot{\theta}_1 - F_3 \eta q_{21} \dot{\theta}_2 + F_1 \eta q_{21} \dot{\theta}_1 - \delta F_3 \phi_{21E} \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} \delta F_1 \phi_{21E} \dot{\theta}_1 \right. \\ & + \frac{1}{2} \delta F_3 \phi_{21E} \dot{\theta}_1 + F_3 \eta q_{21} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + \frac{1}{2} \gamma \eta q_{21} \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ & + \delta F_3 \phi_{21E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + \beta \phi_{21E} \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \left. \right] s \theta_2 \\ & + \left[F_7 \eta q_{21} + F_1 \eta q_{21} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \delta F_7 \phi_{21E} + \frac{1}{2} \delta F_1 \phi_{21E} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - \frac{1}{2} \gamma \eta q_{21} \dot{\theta}_1 \right. \\ & \left. - F_1 \eta q_{21} \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) - \beta \phi_{21E} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - \delta F_1 \phi_{21E} \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \right] c \theta_2 \end{aligned}$$

51 equação

$$J_S \ddot{q}_{21} + F_S \dot{q}_{21} + T_{perturb. S} = 0$$

onde:

$$J_S = m_2 \phi_{21E}'^2 + \delta \phi_{21E}^2 + J_P \phi_{21E}'^2$$

$$F_S = 0$$

$$\begin{aligned} T_{perturb. S} = & (\eta w_{21} + \eta \phi_{21E}) \ddot{\theta}_1 + (\eta w_{21} + \eta \phi_{21E}) \ddot{\theta}_2 + \left(\bar{J}_P \phi_{21E}' \phi_{21E}' + \delta \phi_{21E} \phi_{21E}' \right) \ddot{q}_{21} \\ & - \frac{1}{2} \beta \phi_{21E} (\ddot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1 \ddot{\theta}_2) - 2k w_{211} \\ & + \left[(\eta q_{21} + \frac{1}{2} \delta \phi_{21E}) F_1 \ddot{\theta}_1 + (2 \eta q_{21} + \frac{3}{2} \delta \phi_{21E}) F_3 \ddot{\theta}_1 - (2 \eta q_{21} - 2 \delta \phi_{21E}) F_3 \ddot{\theta}_2 \right. \\ & + \left(\beta \phi_{21E} + \frac{1}{2} \gamma \eta q_{21} \right) \dot{\theta}_1 \ddot{\theta}_2 + \left(\beta \phi_{21E} + \frac{1}{2} \gamma \eta q_{21} \right) \dot{\theta}_1^2 \left. \right] s \theta_2 + \\ & + \left[-\frac{1}{2} \gamma \eta q_{21} \ddot{\theta}_2 - \frac{1}{2} \delta \phi_{21E} F_1 \dot{\theta}_1 \ddot{\theta}_2 - (\eta q_{21} + \delta \phi_{21E}) F_1 \dot{\theta}_1^2 \right. \\ & \left. + (\eta q_{21} + \delta \phi_{21E}) F_7 \right] c \theta_2 \end{aligned}$$

6ª equação de movimento:

6ª equação

$$J_6 \ddot{q}_{22} + F_6 \dot{q}_{22} + T_{penda6} = 0$$

onde:

$$J_6 = m_2 + m_p \phi_{22E}^2 + \cancel{m_p \phi_{22E}^2} + J_p \phi_{22E}'^2$$

$$F_6 = 0$$

$$\begin{aligned} T_{penda6} = & -2k w_{22} + n w_{22} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + m_p \phi_{21E} \phi_{22E}' \ddot{q}_{21} + m_p L_2 \phi_{22E}' (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ & + J_p \phi_{22E}' \phi_{22E}'' \ddot{q}_{21} - \frac{1}{2} m_p L_1 \phi_{22E}' (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ & + \left[-(\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) n q_{22} \dot{\theta}_2 - (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12}) n q_{21} \ddot{\theta}_1 + \right. \\ & + (\dot{\phi}_{11E} \dot{q}_{11} + \dot{\phi}_{12E} \dot{q}_{12}) n q_{21} \dot{\theta}_1 - m_p \phi_{21E} \phi_{22E}' \dot{q}_{21} \dot{\theta}_2 \\ & + \frac{1}{2} m_p (\dot{\phi}_{11E} q_{11} + \dot{\phi}_{12E} q_{12}) \phi_{22E}' \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{2} m_p (\dot{\phi}_{11E} \dot{q}_{11} + \dot{\phi}_{12E} \dot{q}_{12}) \phi_{22E}' \dot{\theta}_1 \\ & + (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) n q_{22} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + L_1 n q_{22} \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ & \left. + m_p (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) \phi_{22E}' (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + m_p L_1 \phi_{22E}' \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \right] \cos \theta_2 \\ & + \left[(\phi_{11E} \ddot{q}_{11} + \phi_{12E} \ddot{q}_{12}) n q_{22} + (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12}) n q_{21} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \right. \\ & + m_p \phi_{21E} \phi_{22E}' \ddot{q}_{21} + \frac{1}{2} m_p (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12}) \phi_{22E}' \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ & - L_1 n q_{22} \ddot{\theta}_1 - (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12}) n q_{22} \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) - m_p L_1 \phi_{22E}' \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ & \left. - m_p (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) \phi_{22E}' \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \right] \sin \theta_2 \end{aligned}$$

6ª equação:

$$J_b \ddot{q}_{22} + F_b \dot{q}_{22} + T_{\text{rest}} = 0$$

onde:

$$J_b = m_2 + \delta \phi_{21E}^2 + \cancel{\delta \phi_{21E}^2} + J_p \phi_{21E}'^2$$

$$F_b = 0$$

$$\begin{aligned} T_{\text{rest}} = & (n w_{22} + \eta \phi_{21E}) \ddot{\theta}_1 + (n w_{22} + \eta \phi_{21E}) \ddot{\theta}_2 + (J_p \phi_{21E}' \phi_{21E}' + \delta \phi_{21E} \phi_{21E}') \ddot{q}_{11} \\ & - \frac{1}{2} \dot{\phi}_{21E} (2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - 2 k w_{222} \\ & + \left[-F_3 n q_{22} \dot{\theta}_2 - n q_{21} F_1 \dot{\theta}_1 + n q_{22} F_3 \dot{\theta}_1 - \delta \phi_{21E} \phi_{21E}' \dot{q}_{11} \dot{\theta}_2 \right. \\ & \quad + \frac{1}{2} \delta \phi_{21E} F_3 \dot{\theta}_1 + \frac{1}{2} \delta \phi_{21E} F_3 \dot{\theta}_1 + n q_{22} F_3 \dot{\theta}_1 + n q_{22} F_3 \dot{\theta}_2 \\ & \quad + \frac{1}{2} \gamma n q_{22} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \gamma n q_{22} \dot{\theta}_2^2 + \delta \phi_{21E} F_3 \dot{\theta}_1 + \delta \phi_{21E} F_3 \dot{\theta}_2 \\ & \quad \left. + \beta \phi_{21E} \dot{\theta}_1^2 + \beta \phi_{21E} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \right] s \theta_2 + \\ & + \left[n q_{22} F_7 + n q_{21}^2 F_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \delta \phi_{21E} \phi_{21E}' \dot{q}_{11} + \frac{1}{2} \delta \phi_{21E} F_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \right. \\ & \quad - \frac{1}{2} \gamma n q_{22} \dot{\theta}_1^2 - n q_{22} F_3 \dot{\theta}_1^2 - n q_{22} F_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ & \quad \left. - \delta \phi_{21E} F_1 \dot{\theta}_1^2 - \delta \phi_{21E} F_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \right] c \theta_2 \end{aligned}$$

6ª equação:

$$J_6 \dot{q}_{22} + F_6 \dot{q}_{22} + T_{p,6,6} = 0$$

onde:

$$J_6 = m_2 \dot{\phi}_{21E}^2 + \delta \dot{\phi}_{22E}^2 + \cancel{m_2 \dot{\phi}_{22E}^2} + J_p \dot{\phi}_{22E}^2$$

$$F_6 = 0$$

$$\begin{aligned} T_{p,6,6} = & (m w_{22} + \eta \phi_{22E}) \ddot{\theta}_1 + (m w_{22} + \eta \phi_{22E}) \ddot{\theta}_2 + (\cancel{J_p \dot{\phi}_{21E} \dot{\phi}_{22E}} + \delta \dot{\phi}_{21E} \dot{\phi}_{22E}) \ddot{q}_{21} \\ & - \frac{1}{2} \beta \dot{\phi}_{22E} (2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - 2 k w_{22} \\ & + \left[(\eta q_{22} + \frac{1}{2} \delta \phi_{22E}) F_1 \ddot{\theta}_1 + (2 \eta q_{22} + \frac{3}{2} \delta \phi_{22E}) F_3 \ddot{\theta}_1 - (2 \eta q_{22} - 2 \delta \phi_{22E}) F_3 \ddot{\theta}_2 \right. \\ & \left. + \left(\beta \dot{\phi}_{22E} + \frac{1}{2} \gamma \eta q_{22} \right) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \left(\beta \dot{\phi}_{22E} + \frac{1}{2} \gamma \eta q_{22} \right) \dot{\theta}_2^2 \right] s \theta_2 \\ & + \left[-\frac{1}{2} \gamma \eta q_{22} \ddot{\theta}_1 - \frac{1}{2} \delta \phi_{22E} F_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - (\eta q_{22} + \delta \phi_{22E}) F_1 \dot{\theta}_1^2 \right. \\ & \left. + (\eta q_{22} + \delta \phi_{22E}) F_7 \right] c \theta_2 \end{aligned}$$

B-3 Forma final das equações de movimento com seus coeficientes

$$J_1 \ddot{\theta}_1 + F_1 \dot{\theta}_1 + T_{\text{perturb}_1} = T_1$$

onde:

$$J_1 = A_1 + B_1 + C_1 \sin \theta_2 + D_1 \cos \theta_2 + E_1$$

$$F_1 = H_1 + I_1 \sin \theta_2 + M_1 \cos \theta_2$$

$$\begin{aligned} T_{\text{perturb}_1} = & P_1 \ddot{\theta}_2 + R_{111} \ddot{q}_{11} + R_{112} \ddot{q}_{12} + R_{121} \ddot{q}_{21} + R_{122} \ddot{q}_{22} + S_1 \dot{\theta}_2 - T_1 \dot{\theta}_2^2 + U_1 \cos \theta_2 + V_1 \cos(\theta_2 + \theta_2) - Y_1 \\ & + [a_1 \dot{\theta}_2 - b_1 \dot{\theta}_2 - c_1 \dot{\theta}_2^2 + a_1] \sin \theta_2 + [p_1 \dot{\theta}_2 + r_1 \dot{\theta}_2^2 + s_1 \dot{\theta}_2 + v_1] \cos \theta_2 \end{aligned}$$

$$J_2 \ddot{\theta}_2 + F_2 \dot{\theta}_2 + T_{\text{perturb}_2} = T_2$$

onde:

$$J_2 = A_2 + B_2$$

$$F_2 = H_2$$

$$\begin{aligned} T_{\text{perturb}_2} = & P_2 \ddot{\theta}_1 + R_{221} \ddot{q}_{21} + R_{222} \ddot{q}_{22} + S_2 \dot{\theta}_1 + V_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + Y_2 \\ & + [a_2 \dot{\theta}_1 + b_2 \dot{\theta}_1 + c_2 \dot{\theta}_1^2 - a_2] \sin \theta_2 + [p_2 \dot{\theta}_1 - r_2 \dot{\theta}_1^2 + s_2 \dot{\theta}_1 + v_2] \cos \theta_2 \end{aligned}$$

$$J_3 \ddot{q}_{11} + F_3 \dot{q}_{11} + T_{\text{perturb}_3} = 0$$

onde:

$$J_3 = A_{311}$$

$$F_3 = 0$$

$$\begin{aligned} T_{\text{perturb}_3} = & P_{311} \ddot{\theta}_2 + R_{312} \ddot{q}_{12} - T_{312} \dot{\theta}_1^2 - 2K_{W311} \\ & - \phi_{11E} [a_3 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + b_3 \dot{\theta}_1 + c_3 \dot{\theta}_2 + a_3] \sin \theta_2 + \phi_{11E} [p_3 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + 2a_3 (\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \dot{\theta}_2^2) + \frac{v_3}{f_3}] \cos \theta_2 \end{aligned}$$

$$J_4 \ddot{q}_{12} + F_4 \dot{q}_{12} + T_{\text{perhob4}} = 0$$

onde:

$$J_4 = A_{412}$$

$$F_4 = 0$$

$$T_{\text{perhob4}} = P_{412} \dot{\theta}_1 + R_{411} \ddot{q}_{11} - T_{411} \dot{\theta}_1^2 - 2Kw_{412} \\ - \phi_{12E} \left[a_4 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + b_4 \dot{\theta}_1 + c_4 \dot{\theta}_2 + e_4 \right] \cos \theta_2 + \phi_{12E} \left[r_4 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) - 2Q_4 (\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \dot{\theta}_2^2) + \frac{v_4^2}{4} \right] \cos \theta_2$$

$$J_5 \ddot{q}_{21} + F_5 \dot{q}_{21} + T_{\text{perhob5}} = 0$$

onde:

$$J_5 = A_{521}$$

$$F_5 = 0$$

$$T_{\text{perhob5}} = P_{521} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + R_{522} \ddot{q}_{22} - Z_{521} - 2Kw_{521} \\ + \left[a_{521} \dot{\theta}_1 + b_{521} \dot{\theta}_1 - c_{521} \dot{\theta}_2 + d_{521} (\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1^2) \right] \cos \theta_2 - \left[P_{521} \dot{\theta}_1 + r_{521} \dot{\theta}_1^2 + s_{521} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - v_{521} \right] \cos \theta_2$$

$$J_6 \ddot{q}_{22} + F_6 \dot{q}_{22} + T_{\text{perhob6}} = 0$$

onde

$$J_6 = A_{622}$$

$$F_6 = 0$$

$$T_{\text{perhob6}} = P_{622} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + R_{621} \ddot{q}_{21} - Z_{622} - 2Kw_{622} \\ + \left[a_{622} \dot{\theta}_1 + b_{622} \dot{\theta}_1 - c_{622} \dot{\theta}_2 + d_{622} (\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1^2) \right] \cos \theta_2 - \left[P_{622} \dot{\theta}_1 + r_{622} \dot{\theta}_1^2 + s_{622} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - v_{622} \right] \cos \theta_2$$

COEFICIENTES GERAIS

$$\alpha_1 = \frac{1}{3} m_1 L_1^2 + \frac{1}{3} m_2 L_2^2 + m_2 L_1^2$$

$$\alpha_1' = m_p L_1^2 + m_p L_2^2$$

$$\alpha_2 = m_2 L_1 L_2$$

$$\alpha_2' = 2 m_p L_1 L_2$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{3} m_2 L_2^2$$

$$\alpha_3' = m_p L_2^2$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{2} m_1 L_1 g + m_2 L_1 g$$

$$\alpha_4' = m_p L_1 g$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{2} m_2 L_2 g$$

$$\alpha_5' = m_p L_2 g$$

$$A_1^* = \alpha_1 + \alpha_1'$$

$$A_2^* = \alpha_2 + \alpha_2'$$

$$A_3^* = \alpha_3 + \alpha_3'$$

$$A_4^* = \alpha_4 + \alpha_4'$$

$$A_5^* = \alpha_5 + \alpha_5'$$

$$p = m_p L_1$$

$$\psi = m_2 L_2$$

$$\gamma = 2 L_2$$

$$s = m_p$$

$$\eta = m_p L_2$$

$$\alpha = \psi + 2\eta$$

$$\epsilon = (m_2 + m_1 + m_p)$$

$$F_1 = (\phi_{11\epsilon} \ddot{q}_{11} + \phi_{12\epsilon} \ddot{q}_{12})$$

$$F_4 = (\phi_{21\epsilon} \ddot{q}_{21} + \phi_{22\epsilon} \ddot{q}_{22})$$

$$F_7 = (\phi_{11\epsilon} \ddot{q}_{11} + \phi_{12\epsilon} \ddot{q}_{12})$$

$$F_2 = (\phi_{21\epsilon} \ddot{q}_{21} + \phi_{22\epsilon} \ddot{q}_{22})$$

$$F_5 = (n \ddot{q}_{21} \ddot{q}_{21} + n \ddot{q}_{22} \ddot{q}_{22})$$

$$F_8 = (\phi_{21\epsilon} \ddot{q}_{21} + \phi_{22\epsilon} \ddot{q}_{22})$$

$$F_3 = (\phi_{11\epsilon} \ddot{q}_{11} + \phi_{12\epsilon} \ddot{q}_{12})$$

$$F_6 = (n \ddot{q}_{21} \ddot{q}_{21} + n \ddot{q}_{22} \ddot{q}_{22})$$

$$F_9 = (n \ddot{q}_{21} \ddot{q}_{21} + n \ddot{q}_{22} \ddot{q}_{22})$$

COEFICIENTES: 1ª eq. de movimento

$$A_1 = A_1^*$$

$$B_1 = m_j L_1^2$$

$$C_1 = \alpha \bar{F}_1 + 2\beta \bar{F}_2 - \gamma \bar{F}_5$$

$$D_1 = A_2^* + 2(\epsilon \bar{F}_1 \bar{F}_2 + \bar{F}_1 \bar{F}_5)$$

$$E_1 = \epsilon \bar{F}_1^2$$

$$H_1 = \eta \bar{F}_4 + 2\epsilon \bar{F}_1 \bar{F}_3$$

$$I_1 = [3\eta \bar{F}_3 - 2\beta \bar{F}_4 - \gamma \bar{F}_6 - (A_2^* + 2(\epsilon \bar{F}_1 \bar{F}_2 + \bar{F}_1 \bar{F}_5))]\dot{\theta}_1$$

$$M_1 = [(3\eta \bar{F}_3 - 2\beta \bar{F}_4 - \gamma \bar{F}_6)\dot{\theta}_1 + 2\epsilon(\bar{F}_1 \bar{F}_4 + \bar{F}_2 \bar{F}_3) + 2(\bar{F}_1 \bar{F}_6 + \bar{F}_3 \bar{F}_5)]$$

$$P_1 = A_3^* + \eta \bar{F}_2$$

$$R_{111} = m w_{11}$$

$$R_{112} = m w_{12}$$

$$R_{121} = m w_{21}$$

$$R_{122} = m w_{22}$$

$$S_1 = \eta \bar{F}_4$$

$$T_1 = \bar{F}_1 \bar{F}_5$$

$$U_1 = A_4^*$$

$$V_1 = A_5^*$$

$$Y_1 = \epsilon \gamma \bar{F}_2$$

$$a_1 = \frac{1}{2} C_4$$

$$b_1 = \beta F_4 + \gamma F_6$$

$$c_1 = \frac{1}{2} (A_2^* + 2\delta F_1 F_2)$$

$$q_1 = \frac{1}{2} \delta (F_1 F_8 - F_3 F_4 - 2 F_2 F_7) - F_5 F_7$$

$$p_1 = c_1$$

$$r_1 = q_1$$

$$s_1 = \frac{1}{2} (\chi F_6 + 3\delta F_1 F_4 + 4 F_1 F_6)$$

$$v_1 = \frac{1}{2} \alpha F_7 + \eta F_8 + F_1 F_7$$

COEFICIENTES 2ª eq. de movimento

$$A_2 = A_3^*$$

$$B_2 = \delta F_2^2$$

$$H_2 = \eta F_4$$

$$P_2 = A_3^* + \eta F_2$$

$$R_{221} = R_{121}$$

$$R_{222} = R_{122}$$

$$S_2 = S_1$$

$$V_2 = V_1$$

$$Y_2 = \eta F_8$$

$$a_2 = a_1$$

$$b_2 = \alpha F_3 - \beta F_4$$

$$c_2 = \frac{1}{2} (A_2^* + 2\delta F_1 F_2 + 2 F_1 F_5)$$

$$e_2 = \delta F_2 F_7 + F_5 F_7$$

$$p_2 = c_2$$

$$r_2 = a_2$$

$$s_2 = \frac{1}{2} (\delta F_1 F_4 + 4\delta F_2 F_3 + 4 F_3 F_5)$$

$$v_2 = \frac{1}{2} \alpha F_7$$

COEFICIENTES 3ª eq. de movimento

$$A_{311} = (m_1 + \epsilon) \phi_{11\epsilon}^2$$

$$P_{311} = (m w_{11} + \frac{1}{2} \epsilon \gamma \phi_{11\epsilon})$$

$$R_{312} = \epsilon \phi_{11\epsilon} \phi_{12\epsilon}$$

$$T_{312} = \epsilon (\phi_{11\epsilon}^2 + \phi_{11\epsilon} \phi_{12\epsilon} q_{12})$$

$$K w_{311} = K w_{111}$$

$$a_3 = F_5 + \delta F_2$$

$$b_3 = 2 F_6 + \frac{3}{2} \delta F_4$$

$$c_3 = 2 F_6 + 2 \delta F_4$$

$$e_3 = \frac{1}{2} \alpha [2\theta_1 \theta_2 + \theta_1^2 + \theta_2^2]$$

$$p_3 = \frac{1}{2} \alpha$$

$$r_3 =$$

$$v_3 = \delta F_6 + F_7$$

COEFICIENTES: 4.ª eq. de mov.

$$A_{412} = (m_1 + \epsilon) \dot{\phi}_{12}^2$$

$$a_4 = a_3$$

$$P_{412} = (nw_{12} + \frac{1}{2} \epsilon \gamma \dot{\phi}_{12})$$

$$b_4 = b_3$$

$$c_4 = c_3$$

$$R_{411} = R_{312}$$

$$e_4 = e_3$$

$$T_{411} = \epsilon (\dot{\phi}_{12}^2 + \phi_{12} \dot{\phi}_{12} \dot{q}_{11})$$

$$p_4 = p_3$$

$$v_4 = v_3$$

$$Kw_{412} = Kw_{122}$$

COEFICIENTES: 5.ª eq. de mov.

$$A_{521} = (m_2 + \delta) \dot{\phi}_{21}^2 + J_p \dot{\phi}_{21}^2$$

$$a_{521} = (nq_{21} + \frac{1}{2} \delta \dot{\phi}_{21}) F_1$$

$$b_{521} = (2nq_{21} + \frac{3}{2} \delta \dot{\phi}_{21}) F_3$$

$$P_{521} = (nw_{21} + \eta \dot{\phi}_{21})$$

$$c_{521} = (2nq_{21} - 2\delta \dot{\phi}_{21}) F_3$$

$$R_{522} = (J_p \dot{\phi}_{21} \dot{\phi}_{22} + \delta \dot{\phi}_{21} \dot{\phi}_{22})$$

$$d_{521} = (\beta \dot{\phi}_{21} + \frac{1}{2} \delta nq_{21})$$

$$Z_{521} = \frac{1}{2} \beta \dot{\phi}_{21} (2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2)$$

$$p_{521} = \frac{1}{2} \delta nq_{21}$$

$$r_{521} = (nq_{21} + \delta \dot{\phi}_{21}) F_1$$

$$Kw_{521} = Kw_{211}$$

$$s_{521} = \frac{1}{2} \delta \dot{\phi}_{21} F_1$$

$$v_{521} = (nq_{21} + \delta \dot{\phi}_{21}) F_7$$

COEFICIENTES: 6.ª eq. de mov.

$$A_{622} = (m_2 + \delta) \dot{\phi}_{22}^2 + J_p \dot{\phi}_{22}^2$$

$$a_{622} = (nq_{22} + \frac{1}{2} \delta \dot{\phi}_{22}) F_1$$

$$b_{622} = (2nq_{22} + \frac{3}{2} \delta \dot{\phi}_{22}) F_3$$

$$P_{622} = (nw_{22} + \eta \dot{\phi}_{22})$$

$$c_{622} = (2nq_{22} - 2\delta \dot{\phi}_{22}) F_3$$

$$R_{621} = (J_p \dot{\phi}_{21} \dot{\phi}_{22} + \delta \dot{\phi}_{21} \dot{\phi}_{22})$$

$$d_{622} = (\beta \dot{\phi}_{22} + \frac{1}{2} \delta nq_{22})$$

$$Z_{622} = \frac{1}{2} \beta \dot{\phi}_{22} (2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2)$$

$$p_{622} = \frac{1}{2} \delta nq_{22}$$

$$r_{622} = (nq_{22} + \delta \dot{\phi}_{22}) F_1$$

$$Kw_{622} = Kw_{222}$$

$$s_{622} = \frac{1}{2} \delta \dot{\phi}_{22} F_1$$

$$v_{622} = (nq_{22} + \delta \dot{\phi}_{22}) F_7$$

Anexo C : Apresentação da forma de trabalho com o software Simulink

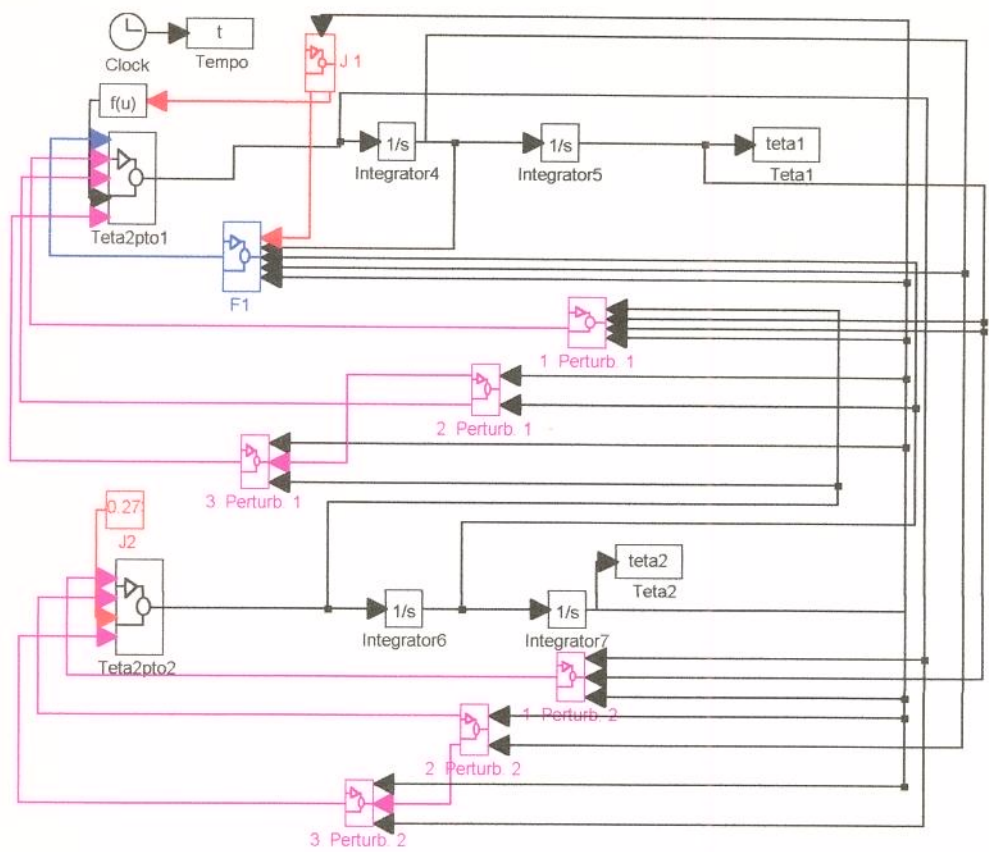
Introdução

O objetivo deste anexo é apresentar a maneira com a qual se trabalhou com software SIMULINK durante as simulações que forneceram os resultados mostrados no capítulo 4.

É apresentado uma única situação de simulação, pois todas as outras têm características similares, sendo apenas acrescentado ou retirado alguns blocos, dependendo da situação a ser simulada pois os blocos representam termos matemáticos das equações de movimento.

A situação que foi escolhida para ser mostrada é aquela em que o sistema está acoplado com carga na extremidade e o manipulador considerado rígido. É importante notar que como as equações do sistema flexível foram escritas como uma extensão do modelo rígido, o seu diagrama de blocos deve ter acrescentados os termos devido as contribuições de flexibilidade.

Assim sendo, a folha seguinte mostra o diagrama de blocos compactado responsável pela simulação das equações de movimento da situação escolhida para ser mostrada. As demais folhas trazem o que se encontra dentro de cada bloco compactado.



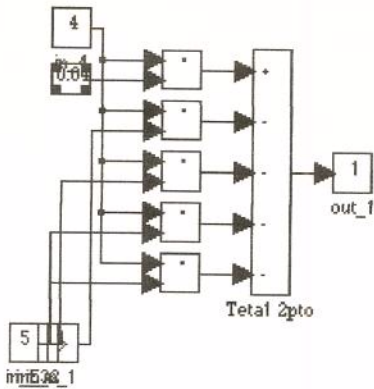


Figura C-1: Teta2pto1

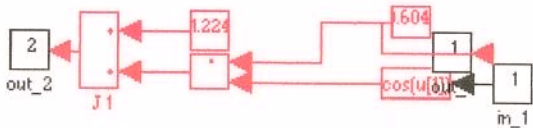


Figura C-2: Coeficiente J₁

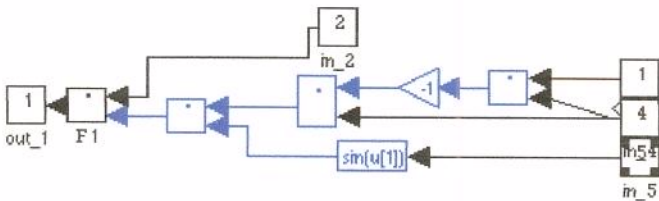


Figura C-3: Coeficiente F₁

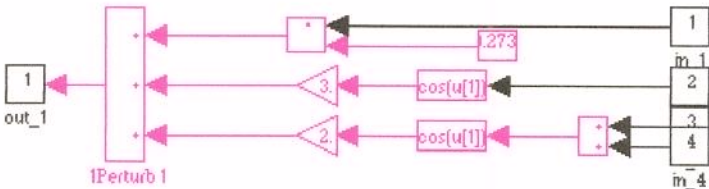


Figura C-4: Termo 1Perturb.1

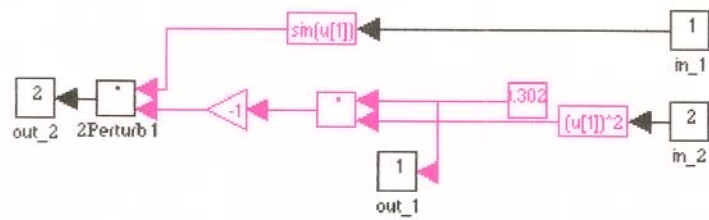


Figura C-5: Termo 2Perturb.1

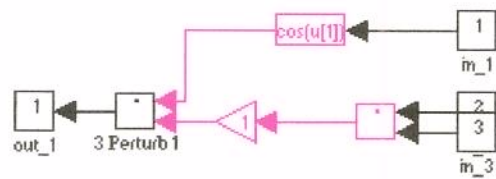


Figura C-6: Termo 3Perturb.1

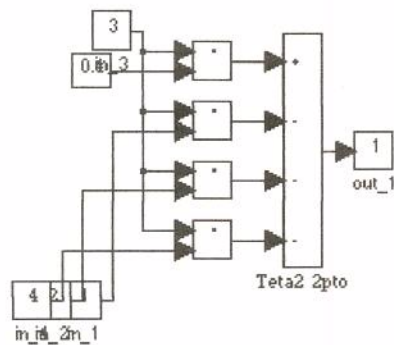


Figura C-7: Teta2pto2

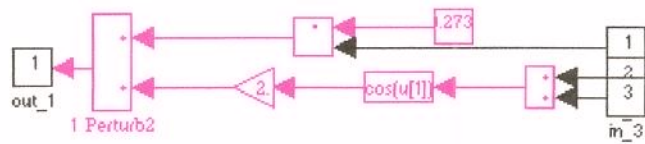


Figura C-8: Termo 1Perturb.2

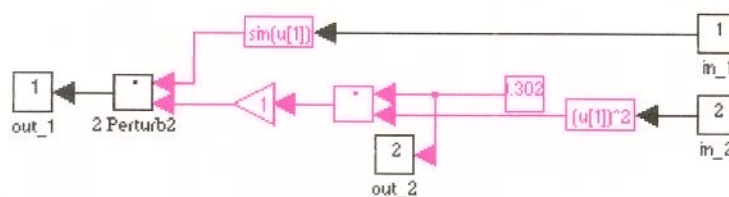


Figura C-9: Termo 2Perturb.2

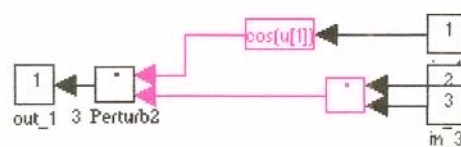


Figura C-10: Termo 3Perturb.2