

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL  
DA TESE DEFENDIDA POR MAURO JORGE

ATALLA E APROVADA PELA  
COMISSÃO JULGADORA EM 30/07/92

          
ORIENTADOR

Determinação de Amortecimento Ótimo  
em Sistemas Mecânicos Rotativos.

21/92

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

**Determinação de Amortecimen-  
to Ótimo em Sistemas Mecânicos  
Rotativos**

por Mauro Jorge Atalla *nr16*

orientador Prof. Dr. Ing. Hans Ingo Weber *t*

Dissertação submetida à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, para preenchimento dos pré-requisitos parciais para obtenção do Título de Mestre em Ciências.

julho de 1992

Universidade Estadual de Campinas  
Faculdade de Engenharia Mecânica

TESE DE: MESTRADO

TÍTULO DA TESE: DETERMINAÇÃO DE AMORTECIMENTO ÓTIMO EM SISTEMAS MECÂNICOS ROTATIVOS.

AUTOR: MAURO JORGE ATALLA.

ORIENTADOR: PROF. DR. ING. HANS INGO WEBER.

APROVADA POR:



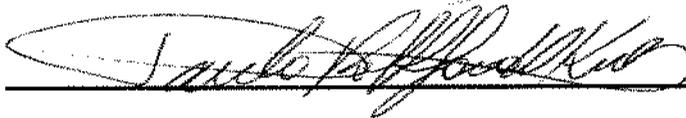
---

PROF. DR. ING. HANS INGO WEBER, PRESIDENTE.



---

PROF. DR. PAULO TADEU DE MELLO LOURENÇÃO.



---

PROF. DR. PAULO ROBERTO GARDEL KURKA.

CAMPINAS, 30 DE JULHO DE 1992.

## Dedicatória

### O vôo

“ GOZA A EUFORIA DO VÔO DO ANJO PERDIDO EM TI.  
NÃO INDAGUES SE NOSSAS ESTRADAS, TEMPO E VENTO  
DESABAM NO ABISMO QUE SABES TU DO FIM ...  
SE TEMES QUE TEU MISTÉRIO SEJA UMA NOITE, ENCHE-O  
DE ESTRELAS.  
CONSERVA A ILUSÃO DE QUE TEU VÔO TE LEVA SEMPRE  
PARA MAIS ALTO.  
NO DESLUMBRAMENTO DA ASCENSÃO SE PRESENTIRES  
QUE AMANHÃ ESTARÁS MUDO, ESGOTA COMO UM PÁSSARO  
AS CANÇÕES QUE TENS NA GARGANTA.  
CANTA, CANTA PARA CONSERVAR A ILUSÃO DE FESTA E  
VITÓRIA.  
TALVEZ AS CANÇÕES ADORMEÇAM AS FERAS QUE ESPERAM  
DEVORAR O PÁSSARO.  
DESDE QUE NASCESTE NÃO ÉS MAIS QUE UM VÔO NO TEM-  
PO RUMO AO CÉU?  
QUE IMPORTA A ROTA, VOA E CANTA ENQUANTO RESISTI-  
REM AS ASAS. ”

MENOTTI DEL PICCHIA.

Aos meus pais, Mauro e Shirley Atalla,  
meus irmãos Márcio Henrique e Miriam  
Paula Atalla, a Liu Hsiang Hui e a Hans  
Ingo Weber. A vocês por serem minha  
fonte de amizade, incentivo, apoio e com-  
preensão.

# Agradecimentos

Ao Prof. Hans Ingo Weber pelo apoio, estímulo, orientação e interesse. E principalmente pela amizade e confiança em mim depositada.

Aos amigos Humberto Camargo Piccoli, Vicente Lopes Jr. e Janito Vaqueiro Ferreira pela ajuda e boa vontade em responder às muitas perguntas.

Aos amigos Milton Dias Jr. e Robson Pederiva pela ajuda e apoio.

Ao amigo Waldemar Scudeller Jr. pela amizade e apoio nestes anos.

Aos amigos Luiz Eduardo Roncato Cordeiro e Mário de Seixas Queiroz pela ajuda com o *scanner*.

A Armando Arruda por ter confeccionado os diagramas desta dissertação.

Ao CT - Centro de Tecnologia que adquiriu o programa "Mathematica" utilizado na execução deste trabalho.

À FAPESP pelo apoio financeiro.

A todos do GEPROM pelo apoio e ajuda.

# Conteúdo

<b>AGRADECIMENTOS</b>	<b>vi</b>
<b>CONTEÚDO</b>	<b>viii</b>
<b>LISTA DE FIGURAS</b>	<b>xi</b>
<b>RESUMO</b>	<b>2</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>4</b>
<b>SIMBOLOGIA UTILIZADA</b>	<b>6</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>9</b>
<b>2 Revisão bibliográfica</b>	<b>12</b>
2.1 Introdução . . . . .	12
2.2 Estudo do trabalho de Wang e Pilkey . . . . .	13
2.2.1 Introdução . . . . .	13
2.2.2 Descrição do método . . . . .	13
2.2.3 Comentários . . . . .	17
2.3 Estudo do trabalho de Kaniathra e Speckhart . . . . .	18
2.3.1 Introdução . . . . .	18
2.3.2 Descrição do método . . . . .	18
2.3.3 Comentários . . . . .	22

2.4	Estudo do trabalho de Ross e Inman . . . . .	22
2.4.1	Introdução . . . . .	22
2.4.2	Solução da resposta transiente . . . . .	22
2.4.3	Solução da envoltória da resposta transiente . . . . .	24
2.4.4	Tempo de decaimento . . . . .	25
2.4.5	Comentários . . . . .	26
2.5	Estudo do trabalho de Müller e Gürgöze . . . . .	26
2.5.1	Introdução . . . . .	26
2.5.2	Descrição do método . . . . .	26
2.5.3	Comentários . . . . .	30
2.6	Método escolhido . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Adaptação do critério escolhido</b>	<b>31</b>
3.1	Introdução . . . . .	31
3.2	Dedução da equação de energia . . . . .	32
3.2.1	Energia cinética . . . . .	32
3.2.2	Energia potencial . . . . .	36
3.3	Considerações sobre a expressão da energia armazenada . . . . .	37
3.4	Descrição do critério . . . . .	45
3.5	Adaptação do critério . . . . .	46
<b>4</b>	<b>Sistemas de 2 e 4 Graus de Liberdade</b>	<b>49</b>
4.1	Giroscópio com 2 G.L. . . . .	49
4.1.1	Introdução . . . . .	49
4.1.2	Desenvolvimento . . . . .	50
4.1.3	Resultados numéricos . . . . .	51
4.1.4	Comparação entre os modelos linear e não linear . . . . .	63
4.2	Rotor vertical bi-apoiado com 4 G.L. . . . .	66

4.2.1	Introdução . . . . .	66
4.2.2	O Modelo matemático . . . . .	66
4.2.3	Formulação do problema de otimização . . . . .	68
4.2.4	Sistema assimétrico . . . . .	71
4.3	Conclusões . . . . .	73
<b>5</b>	<b>Sistema de Seis Graus de Liberdade</b>	<b>75</b>
5.1	Introdução . . . . .	75
5.2	O Modelo matemático . . . . .	77
5.3	Formulação do problema de otimização . . . . .	82
5.4	Conclusões . . . . .	92
<b>6</b>	<b>Conclusões Finais e Próximas Etapas</b>	<b>93</b>
	<b>BIBLIOGRAFIA</b>	<b>95</b>

# Lista de Figuras

2.1	Diagrama de <i>Nyquist</i> - otimização do segundo modo . . . . .	17
3.1	Diagrama esquemático de um disco. . . . .	33
3.2	Variação da velocidade de <i>spin</i> . . . . .	38
3.3	Variação da velocidade de <i>spin</i> - Detalhe . . . . .	39
3.4	Resposta no tempo do modelo não-linear . . . . .	39
3.5	Resposta no tempo do modelo linear . . . . .	40
3.6	Energia total segundo a expressão não-linear da energia . . . . .	41
3.7	Energia de vibração segundo a expressão não-linear da energia . . . . .	41
3.8	Energia total segundo a expressão linearizada da energia . . . . .	42
3.9	Energia de vibração segundo a expressão linearizada da energia . . . . .	42
3.10	Energia total calculada pela expressão (3.20) . . . . .	43
3.11	Energia de vibração calculada pela expressão (3.20) . . . . .	44
3.12	Vista transversal do disco . . . . .	48
4.1	Giroscópio com 2 Graus de Liberdade. . . . .	49
4.2	Funcional $J$ mínimo em função das condições iniciais . . . . .	53
4.3	Relação $J(c > c_{ot})/J(c_{ot})$ . . . . .	54
4.4	Relação $J(c < c_{ot})/J(c_{ot})$ . . . . .	55
4.5	Energia de vibração $E(c_{ot})$ em função do tempo . . . . .	56
4.6	$\int E(c = c_{ot}) dt$ . . . . .	56

4.7	Comparação entre as $\int E(t) dt$ . . . . .	57
4.8	Diferenças entre as integrais . . . . .	58
4.9	Amplitude na direção $y$ . . . . .	59
4.10	Velocidade na direção $y$ . . . . .	60
4.11	Órbitas . . . . .	61
4.12	Diagrama plano-fase na direção $y$ . . . . .	62
4.13	Órbitas - modelo linear . . . . .	63
4.14	Órbitas - modelo não linear . . . . .	64
4.15	Órbitas - modelo linear . . . . .	65
4.16	Órbitas - modelo não linear . . . . .	65
4.17	Diagrama esquemático do sistema de 4 graus de liberdade . . . . .	67
4.18	Variação de $c_{ot}$ em função da velocidade de rotação. . . . .	68
4.19	Variação de $c_{ot}$ em função da rigidez dos mancais . . . . .	69
4.20	Variação de $c_{ot}$ em função da posição do disco . . . . .	70
4.21	Variação de $J_r$ em função do amortecimento . . . . .	71
4.22	Funcional de $J_r$ de otimização . . . . .	72
4.23	Órbita do mancal amortecido . . . . .	73
4.24	Órbita do mancal não amortecido . . . . .	74
5.1	Diagrama da bancada de testes . . . . .	76
5.2	Diagrama esquemático . . . . .	78
5.3	1 <sup>o</sup> modo natural . . . . .	80
5.4	2 <sup>o</sup> modo natural . . . . .	80
5.5	3 <sup>o</sup> modo natural . . . . .	80
5.6	4 <sup>o</sup> modo natural . . . . .	80
5.7	5 <sup>o</sup> modo natural . . . . .	81
5.8	6 <sup>o</sup> modo natural . . . . .	81
5.9	Funcional $J$ do 1 <sup>o</sup> modo . . . . .	83

5.10	Funcional $J$ do 2 <sup>o</sup> modo . . . . .	83
5.11	Funcional $J$ do 3 <sup>o</sup> modo . . . . .	84
5.12	Funcional $J$ do 4 <sup>o</sup> modo . . . . .	84
5.13	Funcional $J$ do 5 <sup>o</sup> modo . . . . .	85
5.14	Funcional $J$ do 6 <sup>o</sup> modo . . . . .	85
5.15	Trajatórias dos autovalores . . . . .	86
5.16	Amplitudes de vibração do mancal na direção $x - C_m = 0$ . . . . .	87
5.17	Órbita do mancal - $C_m = 0$ . . . . .	88
5.18	Órbita do mancal - $C_m = 2800$ . . . . .	88
5.19	Órbita do mancal - $C_m = 4800$ . . . . .	89
5.20	Amplitudes de vibração do disco na direção $x - C_m = 0$ . . . . .	89
5.21	Órbita do disco - $C_m = 0$ . . . . .	90
5.22	Órbita do disco - $C_m = 2800$ . . . . .	90
5.23	Órbita do disco - $C_m = 4800$ . . . . .	91



# Resumo

As máquinas rotativas são submetidas a muitos efeitos dinâmicos. Em certas situações é desejável reduzir os níveis de vibração de uma máquina para que não haja danos na estrutura que a suporta, para melhorar sua performance, ou ainda para reduzir os níveis de ruído.

Este trabalho trata do estudo da introdução de amortecimento passivo em máquinas rotativas com a finalidade de reduzir seus níveis de energia armazenada, e assim reduzir seus níveis de vibração. É feita uma análise dos critérios existentes para sistemas não rotativos e escolhe-se um destes para ser adaptado a sistemas rotativos.

Durante o trabalho procura-se determinar como os parâmetros físicos da estrutura influenciam o valor do amortecimento a ser introduzido, e qual o comportamento do sistema sob o efeito deste amortecimento, através da análise da variação da energia armazenada em função do tempo e da resposta no domínio do tempo. No final é sugerida uma solução para um problema real: um sistema excitado por forças de desbalanceamento.



# Abstract

Rotating machines are subjected to many dynamical effects. In certain situations it is desirable to decrease the level of vibration, so that the structure that supports it will not be damaged, to improve the performance, or to reduce the noise.

This work deals with the study of the introduction of passive damping in rotating machines with the purpose of reducing its energy levels, and therefore decrease its vibration levels. An analysis of the existing criteria for non-rotating machines is done, and then one of these is adapted to rotating systems.

During this work it is determined how the physical parameters of the system affect the value of damping to be introduced and the behaviour of this system under the effect of this damping, by looking at the variation of the stored energy and the response in the time domain. At the end a solution for a real problem is suggested: a system excited by unbalance forces.



# Simbologia Utilizada

- $[M]$  e  $[\tilde{M}]$  - matrizes de massa ou de inércia
- $[C]$  - matriz de amortecimento
- $[G]$  - matriz giroscópica e matriz de posicionamento alterada dos amortecedores
- $[K]$  - matriz de rigidez
- $[U]$  - matriz modal
- $[I]$  - matriz identidade
- $[R]$  - matriz de receptância
- $[D]$  - matriz de amortecimento escrita nas coordenadas modais no sistema não amortecido
- $[\hat{C}]$  - submatriz de  $[C]$  que contém apenas os graus de liberdade onde foram introduzidos amortecedores
- $[L]$  - matriz de posicionamento dos amortecedores
- $[A]$  - matriz de estado e matriz diagonal com as constantes de amortecimento
- $[\Omega^2]$  - matriz diagonal com as frequências naturais do sistema não amortecido
- $[P]$  - matriz solução da equação de Ljapunov
- $[R_\alpha]$ ,  $[R_\beta]$  e  $[R_\gamma]$  - matrizes de rotação em torno dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente
- $[H]$  - matriz do funcional de otimização
- $\{x\}$  - vetor de deslocamentos no referencial inercial
- $\{q\}$  - vetor de deslocamentos modais
- $\{z\}$  - vetor de estado das coordenadas modais no sistema não amortecido
- $\{f(t)\}$  - vetor de forças externas
- $\{u\}$ ,  $\{a\}$ ,  $\{\alpha\}$  e  $\{V\}$  - vetores constantes
- $\{b\}$  - vetor que indica o decaimento da resposta transiente

$\alpha(t), \beta(t), \gamma(t), \varphi_x(t)$  e  $\varphi_y(t)$  - coordenadas de deslocamentos angulares

$x$  e  $y$  - coordenadas de deslocamento linear

$E(t)$  - energia total armazenada no sistema

$E_c(t)$  - energia cinética do sistema

$E_p(t)$  - energia potencial do sistema

$J, J_s, J_t$  e  $J_r$  - funcionais de otimização do amortecimento

$s, \lambda$  e  $\omega$  - autovalores e frequências naturais

$t$  - tempo

$c$  - constante de amortecimento

$\xi$  - coeficiente de amortecimento

$\phi_{i,j}$  - elemento  $i$  do autovetor  $j$

$M_D$  e  $m$  - massa do disco

$M_M$  - massa do mancal

$I_t$  - momento de inércia transversal do disco

$I_p$  - momento de inércia polar do disco

$I$  - momento de inércia de área do eixo

$\Omega$  - velocidade de rotação

$\epsilon$  - distância entre os centros de massa e geométrico do disco

$c_{ot}$  - valor ótimo de amortecimento

$K_x$  e  $K_y$  - constantes de rigidez

$N$  - número de graus de liberdade

$Re(x)$  e  $Im(x)$  - partes real e imaginária de  $x$

$|x|$  - módulo de  $x$

$cov(x)$  - covariância de  $x$

$E_s(x)$  - esperança de  $x$

$Tr([P])$  - traço da matriz  $[P]$

$\max_k [x_k] t$  - elemento de máximo valor de  $x$



# Capítulo 1

## Introdução

O estudo das vibrações mecânicas trata do movimento oscilatório dos sistemas mecânicos e de suas causas e efeitos. Para que um sistema mecânico apresente este movimento oscilatório são necessários no mínimo dois elementos armazenadores de energia - uma massa que armazenará a energia cinética, e um elemento elástico que armazenará a energia potencial. Este sistema oscilatório simples pode também estar sujeito à resistência do ar, ao efeito de forças de atrito, ou sob a ação de amortecedores. Este tipo de resistência ao movimento é chamada de amortecimento, e um sistema sob estas condições é dito um sistema amortecido. Este sistema pode ainda estar sujeito à ação de forças externas periódicas, por exemplo o desbalanceamento de um disco, ou aperiódicas, como por exemplo um choque externo. Este sistema agora sob a ação de uma excitação externa é chamado sistema externamente excitado, e sua resposta à excitação é dita resposta forçada.

Em geral as vibrações mecânicas produzem, ou são acompanhadas de efeitos que podem ser indesejáveis. Exemplos destes efeitos são os ruídos, e as tensões internas ao sistema que podem danificá-lo. Forças de grande magnitude podem ser transmitidas aos suportes ou partes adjacentes da estrutura. Uma estrutura real pode possuir formas de vibrar e disposição de suas partes bastante complicadas. No entanto é quase sempre possível representar a estrutura real por um sistema simplificado, composto de elementos básicos tais como massas, molas e amortecedores. Este sistema é chamado de sistema equivalente. Os valores dos elementos de massa, rigidez e amortecimento equivalentes são calculados por exemplo através de um balanço da energia total do sistema, ou através da análise das forças atuantes nesta estrutura.

A construção destes modelos matemáticos objetiva a análise ou previsão do comportamento dinâmico das estruturas por eles representadas, e é de fundamental importância em várias áreas da engenharia. Nas últimas duas décadas tem-se observado um grande aumento do número de estruturas flexíveis na engenharia. O motivo deste aumento foi a necessidade de se construir estruturas mais leves, principalmente nas indústrias aeroespacial e de automação. No entanto o aumento da flexibilidade destas estruturas torna mais complexa a descrição de seus movimentos. Em geral o que se deseja é o poder de controlar o estado de vibrar destes sistemas de acordo com as necessidades.

No início da década de 70 começaram a surgir trabalhos que procuravam estabelecer critérios pelos quais se determina o quão controlável é um determinado sistema e também como controlá-lo ([1], [2], [3], [4], [5]). Como pode-se notar ao se estudar estes trabalhos, a maioria deles procura controlar a estrutura através da introdução de excitadores externos e de sensores que informam o estado atual da estrutura e realimentam a malha de controle. Existem também trabalhos que objetivam a redução dos níveis de vibração da estrutura, e para isto se utilizam da introdução de amortecedores no sistema ([9], [10], [12], [13]). Esta dissertação situa-se neste último grupo, procurando, através da introdução de amortecedores passivos, reduzir os níveis de vibração de uma máquina rotativa.

O presente trabalho é uma extensão do trabalho que vem sendo realizado pelo Prof. Dr. P. C. Müller e seus assistentes, Dr. Metin Gürgöze e Dr. Joseph Bajkowisk, na Universidade de Wuppertal, Alemanha. O Prof. P. C. Müller iniciou no ano de 1988 um estudo sobre a introdução de amortecimento passivo em sistemas mecânicos não-rotativos. Seu objetivo é estudar como e onde introduzir amortecimento em um sistema de forma que a energia instantânea armazenada no sistema seja a mínima possível. A introdução de amortecimento em um sistema mecânico com a finalidade de reduzir os níveis de vibração ao mínimo no menor espaço de tempo possível, conduz a uma solução trivial que é amortecimento infinito, logo procura-se minimizar a energia armazenada no sistema, e conseqüentemente os níveis de vibração do sistema. Esta dissertação tratará do estudo da introdução de amortecimento passivo em sistemas rotativos, tais como turbinas, com o objetivo de reduzir os seus níveis de vibração através da minimização da energia armazenada no sistema devida aos seus movimentos vibratórios.

Na investigação do comportamento dinâmico de sistemas rotativos depara-se com efeitos giroscópicos que em geral são favoráveis, mas que também podem ser prejudiciais à operação do conjunto eixo/rotor/mancal. A presença do efeito giroscópico faz com que as frequências e os modos naturais da estrutura passem a depender da velocidade de rotação do rotor. Logo é de se esperar que o valor obtido para o amortecimento dependerá desta velocidade de rotação.

Este trabalho é dividido em 4 etapas:

- A primeira, contida no capítulo 2, trata do levantamento bibliográfico e da análise de alguns trabalhos existentes sobre o tema. No final é escolhido o critério a ser adotado.
- Na segunda etapa, contida no capítulo 3, são estudadas as modificações a serem introduzidas no critério escolhido para que este se adapte ao estudo de sistemas rotativos. É dada uma atenção especial na maneira de se escrever a energia armazenada em um sistema rotativo, necessária para a solução do critério escolhido.
- Na terceira etapa, capítulo 4, são analisados modelos simples de sistemas mecânicos com a finalidade de se obter soluções analíticas para o valor do amortecimento a ser introduzido, ou curvas que mostrem a influência de certos parâmetros físicos do sistema sobre este valor de amortecimento.
- Na quarta etapa, descrita no capítulo 5, é estudado um problema real. Uma bancada de testes existente no Departamento de Projeto Mecânico é representada por um modelo de 6 graus de liberdade. Esta bancada de testes atualmente não pode ser colocada a girar em velocidades acima da terceira velocidade crítica devido possivelmente a uma excitação de desbalanceamento. Logo, procura-se determinar o valor ótimo de amortecimento a ser introduzido no mancal desta bancada de forma a minimizar a energia armazenada no terceiro modo natural de vibrar desta estrutura.

Finalmente apresentam-se alguns passos a serem dados no futuro, como extensão deste trabalho.

# Capítulo 2

## Revisão bibliográfica

### 2.1 Introdução

Foram estudados vários trabalhos publicados nas duas últimas décadas sobre o tema em estudo. A maioria enfoca o problema do posicionamento ótimo de amortecimento sob o ponto de vista das técnicas de controle, objetivando a introdução de amortecedores ativos no sistema ([1], [2], [3], [4], [5], [6], [7] e [8]). Estes trabalhos tratam o problema através de critérios que envolvem os parâmetros de controlabilidade e observabilidade do sistema. Desde que o propósito deste trabalho é o de procurar uma solução para o problema de controle dos níveis de vibração de máquinas rotativas através da introdução de amortecedores passivos, esta classe de critérios não será analisada.

Alguns trabalhos buscam a solução para o problema de otimização de amortecimento através de técnicas aplicáveis tanto aos casos de introdução de amortecimento passivo como o de amortecimento ativo. Estes trabalhos utilizam critérios variados de escolha do ótimo. Wang e Pilkey [9] utilizam um método otimizado de alocação de polos que dispensa a solução do problema de autovalores do sistema amortecido. Kaniathra e Speckhart [10] o fazem pré-estabelecendo os fatores de amortecimento desejados para cada modo natural de vibração, e então resolvem um sistema de equações para as incógnitas de amplitude e posicionamento dos amortecedores. Ross e Inman [11] procuram otimizar o amortecimento através da análise do tempo de decaimento da resposta transiente do sistema. E finalmente, Müller e Gürgöze ([12] e [13]) o fazem através de um critério quadrático de minimização da energia total armazenada no sistema.

O modelamento é sempre feito supondo que o amortecimento seja do tipo viscoso e passivo. No caso de se desejar introduzir amortecedores ativos, pode-se considerar este amortecedor passivo como sendo o conjunto de um sensor de velocidades e um atuador mecânico de atuação característica proporcional às velocidades, o que o torna equivalente

a um amortecedor passivo de características variáveis.

Estes quatro critérios são analisados e comparados a seguir. A menos que se indique, todas as informações mencionadas na descrição de cada método encontram-se no respectivo trabalho publicado, referenciados no final desta dissertação.

## 2.2 Estudo do trabalho de Wang e Pilkey

### 2.2.1 Introdução

Neste trabalho o problema do posicionamento ótimo de amortecedores para o controle ativo de vibrações de estruturas espaciais é investigado. O posicionamento ótimo do amortecedor é definido como sendo a posição onde um fator de amortecimento ( $\xi$ ) máximo pode ser alcançado para um modo de vibrar em particular. É desenvolvida uma formulação que dispensa a solução do problema de autovalores do sistema amortecido e é apresentado um critério de escolha do posicionamento ótimo do amortecimento baseado no estudo do efeito da introdução de amortecimento sobre os autovalores do sistema.

Os amortecedores são considerados como sendo o conjunto de um sensor de deslocamento e um atuador de forças localizados no mesmo lugar. Assumindo que se pode ignorar o comportamento dinâmico do sensor e do atuador, e que a força do atuador é proporcional à velocidade, então não há diferença entre um amortecedor ativo e um passivo.

### 2.2.2 Descrição do método

Assume-se que a estrutura não amortecida pode ser descrita por um modelo discreto de  $N$  graus de liberdade, governado pelo seguinte sistema de equações diferenciais de segunda ordem:

$$[M] \{\ddot{x}\} + [K] \{x\} = \{f(t)\} \quad (2.1)$$

onde:

- $\{x\}$  é o vetor de deslocamento das coordenadas do sistema,
- $[M]$  é a matriz de massa,
- $[K]$  é a matriz de rigidez, e
- $\{f\}$  é o vetor de forças externas.

Para vibrações livres o vetor  $\{f(t)\}$  é nulo.

Suponha agora que  $n_c$  amortecedores ( $n_c \leq N$ ) sejam introduzidos desacoplada-mente em  $n_c$  graus de liberdade. Então a equação para vibrações livres torna-se:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\} \quad (2.2)$$

onde  $[C]$  é a matriz de amortecimento com todos os elementos iguais a zero, exceto os elementos  $C_{j_i, j_i}$  da diagonal que são as constantes dos amortecedores introduzidos nos  $j_i$ -ésimos graus de liberdade.

A solução da equação (2.2) tem a forma geral:

$$\{x\} = \{u\} e^{st} \quad (2.3)$$

onde  $s$  é o autovalor do sistema não amortecido,  $\{u\}$  é um vetor de constantes, e  $t$  é o tempo.

A fim de obter uma formulação eficiente para o problema de autovalores amortecidos, os amortecedores adicionados ao sistema serão tratados como pseudo-forças, ou seja, são deslocados para o lado direito da equação (2.2). Substituindo (2.3) em (2.2) e rearranjando tem-se:

$$\left(s^2 [M] + [K]\right) \{u\} = -s [C] \{u\} \quad (2.4)$$

ou,

$$\{u\} = -s [R] [C] \{u\} \quad (2.5)$$

onde:

$$[R] = \left(s^2 [M] + [K]\right)^{-1}, \quad (2.6)$$

é a matriz de receptância do sistema não amortecido.

Agrupando os termos do vetor  $\{u\}$  e das matrizes  $[C]$  e  $[R]$  referentes ao graus de liberdade onde foram introduzidos os amortecedores obtém-se:

$$\{\hat{u}\} = \begin{Bmatrix} u_{j_1} \\ u_{j_2} \\ \vdots \\ u_{j_{n_c}} \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

$$[\hat{C}] = \begin{bmatrix} c_{j_1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & c_{j_2} & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & c_{j_{n_c}} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

e

$[\hat{R}] = n_c \times n_c$  submatriz de  $[R]$  onde  $\hat{R}_{i,k} = R_{j_i,j_k}$ .

Agora  $\{u\}$ ,  $[C]$  e  $[R]$  são escritas na forma:

$$\begin{aligned} \{u\} &= \begin{Bmatrix} \{\hat{u}\} \\ \{\bar{u}\} \end{Bmatrix} \\ [C] &= \begin{bmatrix} [\hat{C}] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \\ [R] &= \begin{bmatrix} [\hat{R}] & [X] \\ [Y] & [Z] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde  $\{\bar{u}\}$ ,  $[X]$ ,  $[Y]$  e  $[Z]$  são as parcelas do vetor  $\{u\}$  e da matriz  $[R]$  correspondentes aos graus de liberdade onde não foi introduzido amortecimento.

Usando (2.9), (2.5) pode ser reescrita como:

$$\begin{Bmatrix} \{\hat{u}\} \\ \{\bar{u}\} \end{Bmatrix} = -s \begin{bmatrix} [\hat{R}] & [X] \\ [Y] & [Z] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\hat{C}] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\hat{u}\} \\ \{\bar{u}\} \end{Bmatrix}. \quad (2.10)$$

As primeiras  $n_c$  equações de (2.10) são:

$$\{\hat{u}\} = -s[\hat{R}][\hat{C}]\{\hat{u}\}. \quad (2.11)$$

Conseqüentemente a equação característica do sistema é obtida de:

$$\det \left( [I] + s[\hat{R}][\hat{C}] \right) = 0. \quad (2.12)$$

Os elementos da matriz  $[R]$  podem ser calculados usando a sua representação espectral [9], (eq. 2.13).

$$R_{i,k} = \sum_{l=1}^n \frac{\phi_{i,l}\phi_{k,l}}{G_l(s^2 + \omega_l^2)} \quad (2.13)$$

onde:

- $\omega_l$  é a frequência natural do  $l$ -ésimo modo do sistema não amortecido,
- $\phi_{i,l}$  é o elemento  $i$  do autovetor do modo  $l$ , e  $\phi_{k,l}$  é o elemento  $k$  do autovetor do modo  $l$ , e
- $G_l$  é a massa generalizada do  $l$ -ésimo modo =  $\{\phi_l\}^T [M] \{\phi_l\}$ .

Quando o limite superior da somatória ( $n$ ) for igual ao número de graus de liberdade do sistema ( $N$ ), os elementos da matriz  $[R]$  são computados de forma exata por (2.13). Se  $n < N$ , (2.13) fornece uma representação truncada de  $[R]$ .

Para o caso especial de se introduzir apenas um amortecedor no sistema, no grau de liberdade  $j$ , a equação (2.12) se reduz a:

$$(1 + sR_{J,J}c) = 0 \quad (2.14)$$

ou usando a representação espectral de  $R_{j,j}$ :

$$\frac{1}{c} + \sum_{l=1}^N \frac{s\phi_{j,l}^2}{G_l(s^2 + \omega_l^2)} = 0 . \quad (2.15)$$

Para valores dados do amortecimento  $c$ , a equação (2.15) pode ser resolvida para os autovalores  $s$  do sistema agora já amortecido. Para o caso geral de existirem vários amortecedores, a equação (2.12) deve ser resolvida para os autovalores do sistema amortecido.

Resumindo, o método consiste em adicionar um amortecedor por vez em cada grau de liberdade  $j$  e, variando sua intensidade, estudar seu efeito sobre as novas frequências naturais do sistema amortecido, resolvendo a equação (2.15). Como as curvas de fator de amortecimento constante  $\xi$  são retas no diagrama de *Nyquist* [9], pode-se determinar facilmente os pontos de intersecção entre as trajetórias e estas retas. Quando estas retas tangenciam as trajetórias dos autovalores no diagrama de *Nyquist*, de acordo com o critério, o amortecedor estará otimamente localizado e com amplitude também ótima

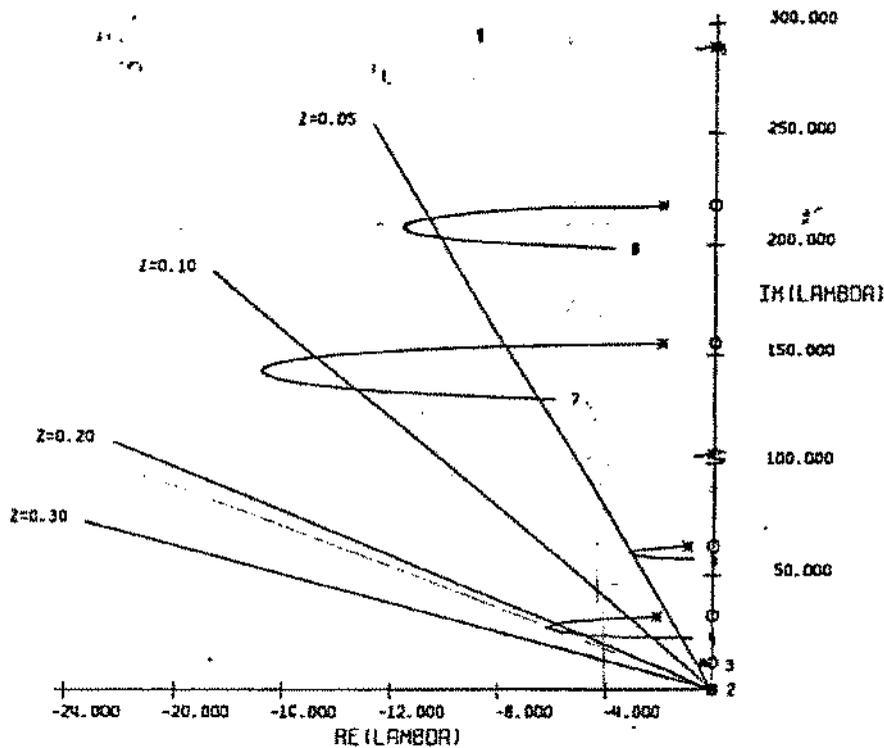


Figura 2.1: Diagrama de *Nyquist* - otimização do segundo modo

para o modo em estudo. Na figura 2.1 encontra-se um exemplo extraído do trabalho de Wang e Pilkey [9] para a otimização do segundo modo de vibrar de uma viga, onde o valor ótimo obtido para o fator de amortecimento é  $\xi = 0.05$ .

### 2.2.3 Comentários

A solução apresentada restringe a solução a sistemas onde se coloque amortecedores de maneira desacoplada nos graus de liberdade, sem levantar a hipótese de um amortecimento que acople alguns graus de liberdade. Este método fornece solução apenas para matrizes de amortecimento diagonais, o que levanta a dúvida sobre a possibilidade da existência de um outro critério que forneça resultados melhores.

Para ser utilizado em sistemas rotativos, o que pode ser feito é a solução do problema de autovalores para vários valores de amortecimento, obter o diagrama das trajetórias das raízes e então usar o método sobre este diagrama.

## 2.3 Estudo do trabalho de Kanianthra e Speckhart

### 2.3.1 Introdução

O método apresentado neste trabalho descreve os procedimentos pelos quais a localização e a amplitude do amortecimento são encontradas para pré-determinados fatores de amortecimento em todos os modos principais.

É sabido que as equações de movimento para sistemas lineares não amortecidos podem ser desacopladas através de uma transformação ortogonal utilizando-se a matriz modal do sistema. Para sistemas amortecidos onde os métodos de análise modal não são facilmente utilizados, é prática comum usar a transformação modal do sistema não amortecido e ignorar os termos de acoplamento do amortecimento [10]. O propósito deste trabalho é o de apresentar um método pelo qual os valores de amortecimento e suas localizações podem ser determinados especificando-se os fatores de amortecimento dos modos principais do sistema não amortecido.

### 2.3.2 Descrição do método

As equações de movimento para vibrações livres de um sistema mecânico com amortecimento viscoso e  $N$  graus de liberdade são (eq. 2.2).

$$[M] \{\ddot{x}\} + [C] \{\dot{x}\} + [K] \{x\} = \{0\}$$

As matrizes de massa, amortecimento e rigidez na equação (2.2), ( $[M]$ ,  $[C]$ ,  $[K]$ ) respectivamente, são simétricas e positiva definidas para um sistema positivo definido ([15], [16]). Desde que a matriz de amortecimento  $[C]$  é real e simétrica, é geralmente possível decompô-la como:

$$[C] = [L][A][L]^T \quad (2.16)$$

onde:

- $[A]$  é uma matriz diagonal contendo os valores desconhecidos das amplitudes dos amortecedores.
- $[L]$  é chamada de matriz de posicionamento, e contém certos parâmetros arbitrariamente escolhidos do posicionamento dos amortecedores.

Seja:

$$\{x\} = [U] \{q\} \text{ e } \{\dot{x}\} = [U] \{\dot{q}\} \quad (2.17)$$

uma transformação que passe as coordenadas  $\{x\}$  da equação (2.2) para as coordenadas principais  $\{q\}$ . Pode ser mostrado que  $[U]$  é a matriz modal, e que tal transformação desacopla as equações do problema de vibração livre não amortecida. Em outras palavras, as matrizes de massa e rigidez generalizadas da equação (2.2) serão diagonalizadas.

Define-se a função de dissipação de energia  $E$  como [10]:

$$E = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j C_{i,j} \dot{x}_i \dot{x}_j = \frac{1}{2} \{\dot{x}\}^T [C] \{\dot{x}\} . \quad (2.18)$$

Seja  $[D]$  a matriz de amortecimento transformada nas coordenadas  $\{q\}$ . A matriz  $[D]$  é diagonal e contém a porcentagem desejada do amortecimento crítico em cada um dos modos principais. Deve-se observar que esta hipótese restringe a solução à matrizes de amortecimento do tipo proporcional.

$$[D] = 2 \begin{bmatrix} m_1 \xi_1 \omega_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & m_n \xi_n \omega_n \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

onde  $m_i$ ,  $\xi_i$  e  $\omega_i$  são respectivamente a massa generalizada, o fator de amortecimento e a frequência natural não amortecida do modo  $i$ .

A função de dissipação de energia nas coordenadas  $\{q\}$  é expressa por:

$$E = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j D_{i,j} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [D] \{\dot{q}\} . \quad (2.20)$$

Como as funções de dissipação de energia das equações (2.18) e (2.20) devem ser iguais,

$$\{\dot{x}\}^T [C] \{\dot{x}\} = \{\dot{q}\}^T [D] \{\dot{q}\} . \quad (2.21)$$

Substituindo (2.16) e (2.17) em (2.21) tem-se:

$$\{\dot{q}\}^T [U]^T [L] [A] [L]^T [U] \{\dot{q}\} = \{\dot{q}\}^T [D] \{\dot{q}\}$$

de onde

$$[U]^T [L] [A] [L]^T [U] = [D] \quad (2.22)$$

ou ainda, considerando (2.16)

$$[C] = [L] [A] [L]^T = [U]^T [D] [U]^{-1} \quad (2.23)$$

onde a matriz de amortecimento  $[C]$  está decomposta segundo a equação (2.16) e a matriz  $[L]$  será uma matriz retangular ou quadrada dependendo do número de amortecedores usados no sistema.

Se  $[L]$  for uma matriz não-singular, então  $[A]$  é obtida pela pré-multiplicação por  $[L]^{-1}$  e pela pós-multiplicação por  $[L]^T$  em ambos os lados da equação (2.23). Logo,

$$[A] = [L]^{-1} [U]^T [D] [U]^{-1} [L]^T . \quad (2.24)$$

A matriz  $[A]$  obtida da equação (2.24), nesta etapa, em geral será uma matriz cheia que é reduzida a uma forma diagonal pelo método descrito a seguir. Se  $[L]$  é uma matriz retangular com posto completo, e  $[L][L]^T$  é regular, a inversa generalizada de Moore-Penrose [10] de  $[L]$  pode ser usada para resolver a equação (2.23) para  $[A]$ , e para este caso:

$$[A] = [L]^T \left( [L] [L]^T \right)^{-1} [U]^T [D] [U]^{-1} \left( [L] [L]^T \right)^{T^{-1}} [L] . \quad (2.25)$$

Para a decomposição da matriz  $[A]$  segundo a equação (2.16) onde  $[A]$  é dita uma matriz diagonal com o número de amortecedores maior que a ordem da matriz  $[C]$ ,  $[L]$  não terá posto completo. Como  $[LL^T]$  poderá ser singular, a equação (2.25) não poderá ser utilizada. No entanto a equação (2.24) ainda pode ser usada desde que o número de coeficientes a ser determinado seja igual à ordem da matriz  $[C]$ . Isto significa que se o número de amortecedores é maior do que o número de graus de liberdade, os amortecedores que excedem a ordem da matriz  $[C]$  devem ser pré-fixados.

Como esta dissertação tem por objetivo procurar soluções simples que alterem o mínimo possível o sistema original, esta possibilidade de existir um número de amortecedores maior que o número de graus de liberdade não será abordada, embora uma solução exista e esteja detalhada neste trabalho em estudo.

A matriz  $[A]$  obtida através da equação (2.24) pode ser uma matriz cheia. Se a matriz  $[A]$  é positiva definida, então ela possui uma única decomposição [10] do tipo :

$$[A] = [L^1] [C^1] [L^1]^T \quad (2.26)$$

onde  $[L^1]$  é uma matriz triangular inferior com diagonal unitária e  $[C^1]$  é uma matriz diagonal. Tal decomposição é conhecida como decomposição de Cholesky [21]. A equação (2.16) pode agora ser escrita como:

$$[C] = [L][A][L]^T = [L][L^1][C^1][L^1]^T[L]^T = [G][C^1][G]^T \quad (2.27)$$

onde  $[G] = [L][L^1]$ .

A matriz  $[G]$  é a matriz de posicionamento modificada. Uma comparação termo a termo entre  $[G]$  e a matriz  $[L]$  inicial leva à determinação do posicionamento dos amortecedores, e a comparação termo a termo entre as matrizes  $[C^1]$  e  $[A]$  leva às amplitudes dos amortecedores.

Resumindo, os passos para a aplicação deste método são:

- 1 - Introduzir o número desejado de amortecedores no sistema e montar a matriz  $[C]$  de amortecimento correspondente, escrevendo-a em função das incógnitas de posicionamento dos amortecedores.
- 2 - Decompor a matriz  $[C]$  segundo a equação (2.16).
- 3 - Resolver o sistema não-amortecido e obter a matriz modal.
- 4 - Determinar a matriz  $[D]$  desejada, e dando valores arbitrários para os parâmetros de posicionamento dos amortecedores, resolver a equação (2.24) para a matriz  $[A]$ .
- 5 - Calcular a decomposição da matriz  $[A]$  segundo a equação (2.25) e calcular a matriz  $[G]$  segundo as equações (2.26) e (2.27).
- 6 - Comparar a matriz  $[G]$  obtida no passo anterior com a matriz  $[L]$  original (com termos algébricos) e determinar o correto posicionamento dos amortecedores. E comparar a matriz  $[C^1]$  com a matriz  $[A]$  e obter as amplitudes dos amortecedores.

### 2.3.3 Comentários

A vantagem deste método é a possibilidade de pré-fixar o fator de amortecimento desejado em cada modo possibilitando o controle de modos específicos. Sua desvantagem é a necessidade de montar a matriz de amortecimento  $[C]$  a partir do posicionamento arbitrário dos amortecedores e realizar sua decomposição segundo a equação (2.16). Como nesta etapa a matriz  $[C]$  contém as incógnitas de posicionamento dos amortecedores, esta decomposição pode não ser tão trivial. O fato de desprezar os termos de acoplamento da matriz de amortecimento  $[D]$  implica em assumir que o amortecimento a ser determinado é do tipo proporcional, o que geralmente não ocorre em sistemas rotativos. E ainda, os valores dos fatores de amortecimento são arbitrários, ou seja, o fator de amortecimento ótimo será encontrado através de um processo iterativo de tentativa e erro.

Este método é de difícil adaptação para sistemas rotativos, já que a matriz giroscópica não pode ser diagonalizada pela transformação modal do sistema não amortecido.

## 2.4 Estudo do trabalho de Ross e Inman

### 2.4.1 Introdução

Neste trabalho é derivada uma expressão para o tempo de decaimento de um sistema sub-amortecido de vários graus de liberdade. Esta expressão é uma generalização da expressão comumente utilizada para sistemas sub-amortecidos de um grau de liberdade.

O tempo de decaimento de um sistema é definido como o tempo necessário para que a envoltória da porção transiente da resposta do sistema caia do valor inicial para uma fração deste valor.

A determinação da expressão para o tempo de decaimento de um sistema de vários graus de liberdade requer três passos. Primeiro, é determinada a expressão da porção transiente da resposta do sistema. Segundo, determina-se a expressão da envoltória da resposta transiente. Finalmente, o tempo de decaimento é calculado a partir da expressão da envoltória da resposta transiente.

### 2.4.2 Solução da resposta transiente

Considere um sistema de vários graus de liberdade definido pela equação diferencial matricial (eq. 2.2):

$$[M] \{\ddot{x}\} + [C] \{\dot{x}\} + [K] \{x\} = \{f(t)\}$$

onde  $[M]$ ,  $[C]$  e  $[K]$  são as matrizes  $N \times N$  de massa, amortecimento e rigidez, respectivamente, e  $\{x\}$ ,  $\{\dot{x}\}$  e  $\{\ddot{x}\}$  são os vetores  $N \times 1$  de deslocamento, velocidade e aceleração respectivamente, e  $\{f(t)\}$  é um vetor de excitação externa  $N \times 1$ . As matrizes  $[M]$ ,  $[C]$  e  $[K]$  na equação (2.2) são positiva definida, positiva semi-definida, e positiva definida, respectivamente. Ainda, o sistema de equações (2.2) é sub-amortecido se a matriz  $2[\tilde{K}]^{\frac{1}{2}} - [\tilde{C}]$  for positiva definida [20], onde  $[\tilde{C}] = [M]^{-\frac{1}{2}} [C] [M]^{-\frac{1}{2}}$ ,  $[\tilde{K}] = [M]^{-\frac{1}{2}} [K] [M]^{-\frac{1}{2}}$  e  $[M]^{-\frac{1}{2}}$  é a matriz inversa da raiz quadrada da matriz  $[M]$ .

A porção transiente da resposta tem a forma:

$$\{x(t)\} = \sum_{j=1}^{2N} C_j \{V_j\} e^{\lambda_j t} \quad (2.28)$$

onde  $C_j$ ,  $\{V_j\}$ , e  $\lambda_j$  são constantes complexas de integração, autovetores e autovalores do sistema, respectivamente.

Desde que a equação (2.28) é a solução transiente da resposta sub-amortecida, ela pode ser reescrita na forma:

$$\{x(t)\} = \sum_{k=1}^N \left[ C_k \{V_k\} e^{\lambda_k t} + C_k^* \{V_k^*\} e^{\lambda_k^* t} \right] \quad (2.29)$$

onde \* denota o complexo-conjugado. O  $i$ -ésimo elemento do vetor  $\{x(t)\}$  é determinado aplicando-se a transformação  $x_i(t) = \{u_i\}^T \{x(t)\}$  na equação (2.29), ou

$$x_i(t) = \sum_{k=1}^N \left[ C_k \{u_i\}^T \{V_k\} e^{\lambda_k t} + C_k^* \{u_i\}^T \{V_k^*\} e^{\lambda_k^* t} \right] \quad (2.30)$$

onde  $\{u_i\}^T$  é um vetor unitário unidimensional. O  $i$ -ésimo elemento de  $\{u_i\}^T$  é 1 e os outros elementos são zero. A equação (2.30) ainda pode ser simplificada para:

$$x_i(t) = \sum_{k=1}^N a_{ik} e^{\text{Re}(\lambda_k t)} \sin[\text{Im}(\lambda_k) t + \phi_{ik}] \quad (2.31)$$

onde  $a_{ik}$  e  $\phi_{ik}$  são constantes reais, funções de  $C_k$ ,  $\{u_i\}^T$ ,  $\{V_k\}$ ,  $C_k^*$ ,  $\{V_k^*\}$ .

### 2.4.3 Solução da envoltória da resposta transiente

O objetivo é determinar uma envoltória  $\{x_e(t)\}$  que ofereça um limite superior a  $\{x(t)\}$  e que tenha a forma  $\{\alpha\} e^{\beta t}$ . Removendo o termo em seno da equação(2.31) leva a:

$$x_i(t) \leq \sum_{k=1}^N |a_{ik}| e^{Re(\lambda_k)t}, \quad (2.32)$$

onde  $|\cdot|$  denota o módulo.

Aplicando  $\{x(t)\} = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$  e  $\{a_k\} = [a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{nk}]^T$  na equação (2.32) leva a:

$$\{x(t)\} \leq \sum_{k=1}^N |a_k| e^{Re(\lambda_k)t}, \quad (2.33)$$

onde a desigualdade denota a comparação termo a termo entre os dois lados da equação. E também,  $|a_k|$  é determinado tomando o módulo de cada elemento de  $\{a_k\}$  individualmente. Agora, de acordo com Chen [14], por exemplo, se  $v_1, v_2$  e  $t$  são números reais positivos e  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  são números reais, então

$$v_1 e^{\sigma_1 t} + v_2 e^{\sigma_2 t} \leq (v_1 + v_2) e^{\max(\sigma_1, \sigma_2)t}. \quad (2.34)$$

Aplicando a expressão (2.34) em (2.33) e rearranjando os termos resulta em:

$$\{x(t)\} \leq e^{\max_k [Re(\lambda_k)]t} \sum_{k=1}^n |a_k|, \quad (2.35)$$

onde  $\max_k [\cdot]$  denota o máximo sobre todos os valores de  $k$ , de 1 a  $n$ .

Se existe algum vetor  $\{\alpha\}$  real, positivo e constante, tal que:

$$\sum_{k=1}^n |a_k| \leq |\{\alpha\}|, \quad (2.36)$$

então a equação (2.35) torna-se:

$$\{x(t)\} \leq \{\alpha\} e^{\max_k [Re(\lambda_k)]t}. \quad (2.37)$$

Desde que o lado direito da equação tenha a forma  $\{\alpha\} e^{\beta t}$ , então a envoltória que limita  $\{x(t)\}$  é dada por:

$$\{x_e(t)\} = \{\alpha\} e^{\max_k [Re(\lambda_k)] t} . \quad (2.38)$$

O  $i$ -ésimo elemento do vetor  $\{x_e(t)\}$  é determinado formalmente aplicando-se a transformação  $x_{e_i}(t) = [u_i]^T \{x_e(t)\}$ , ou

$$x_{e_i}(t) = \alpha_i e^{\max_k [Re(\lambda_k)] t} , \quad (2.39)$$

onde  $\alpha_i = [u_i]^T \{\alpha\}$ .

#### 2.4.4 Tempo de decaimento

No tempo inicial,  $t = t_0 = 0$ , a envoltória  $x_{e_i}(t)$  dada pela equação (2.39) tem o valor  $x_{e_i}(t) = \alpha_i$ . O tempo  $t = t_b$  onde a envoltória passa a ser alguma fração  $b_i$  do seu valor inicial, satisfaz:

$$b_i \alpha_i = \alpha_i e^{\max_k [Re(\lambda_k)] t_b} , \quad (2.40)$$

onde  $0 \leq b_i \leq 1$ .

Tipicamente o valor de  $b_i$  é escolhido entre 0.02 e 0.05 [19]. Resolvendo a equação (2.40) para  $t_b$  leva a:

$$t_b = \frac{\ln(b_i)}{\max_k [Re(\lambda_k)]} . \quad (2.41)$$

O tempo de decaimento,  $t_{s_i}$ , é a diferença entre o tempo  $t_b$  dado pela equação (2.41) e o tempo inicial,  $t_0 = 0$ , ou

$$t_{s_i} = \frac{\ln(b_i)}{\max_k [Re(\lambda_k)]} . \quad (2.42)$$

A equação (2.42) define o tempo de decaimento de cada elemento  $x_i(t)$  da resposta transiente  $\{x(t)\}$ . O vetor de tempo de decaimento é obtido da equação (2.42) utilizando  $\{t_s\} = \{t_{s_1}, t_{s_2}, \dots, t_{s_n}\}^T$  e  $\{b\} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}^T$ , ou

$$\{t_s\} = \frac{1}{\max_k [Re(\lambda_k)]} \ln(\{b\}) \quad (2.43)$$

onde  $\ln(\{b\})$  é determinado tomando-se o logaritmo natural de cada elemento separadamente.

### 2.4.5 Comentários

Este método tem por objetivo a minimização das amplitudes de vibração de um sistema mecânico. Para ser utilizado em sistemas com efeito giroscópico, este método requer a solução do problema de autovalores do sistema não amortecido e com efeito giroscópico. Este método deve ser utilizado em sistemas onde uma das variáveis de projeto é o tempo de decaimento da resposta transiente do sistema.

Para se utilizar este método em sistemas com efeito giroscópico não são necessárias alterações.

## 2.5 Estudo do trabalho de Müller e Gürgöze

### 2.5.1 Introdução

Este método consiste em minimizar a integral, do tempo inicial ao infinito, da energia instantânea armazenada em um sistema mecânico. A expressão da energia instantânea é escrita em sua forma quadrática, e o resultado é obtido através da solução de uma equação de Ljapunov.

### 2.5.2 Descrição do método

São considerados sistemas mecânicos que possam ser descritos por equações diferenciais lineares do tipo (eq. 2.2):

$$[M] \{\ddot{x}\} + [C] \{\dot{x}\} + [K] \{x\} = \{0\}$$

onde:

- $[M]$  é a matriz de massa do sistema,
- $[K]$  é a matriz de rigidez,

- $[C]$  é a matriz de amortecimento, simétrica, e
- $\{x\}$  é o vetor das coordenadas que descrevem o movimento.

Supondo que exista uma transformação do tipo  $\{x\} = [U]\{q\}$ , onde  $[U]$  é a matriz modal do sistema não amortecido associado, e substituindo esta transformação em (2.2) obtém-se:

$$[M][U]\{\ddot{q}\} + [C][U]\{\dot{q}\} + [K][U]\{q\} = \{0\} \quad (2.44)$$

Pré-multiplicando (2.44) por  $[U]^T$ , e normalizando pela matriz de massa obtém-se:

$$[I]\{\ddot{q}\} + [D]\{\dot{q}\} + [\Omega^2]\{q\} = \{0\} \quad (2.45)$$

onde:

- $[I]$  é a matriz identidade de ordem  $N$ , onde  $N$  é o número de graus de liberdade;
- $[D] = [U]^T [C] [U]$ , e
- $[\Omega^2]$  é a matriz diagonal com o quadrado das frequências naturais do sistema não amortecido.

A expressão correspondente à energia instantânea do sistema (2.45) pode ser escrita em uma forma quadrática como mostra a equação (2.46), de forma a ser utilizada no processo de solução da equação de Ljapunov.

$$E = \frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} \{\dot{q}\}^T & \{q\}^T \end{matrix} \right\} \begin{bmatrix} [I] & [0] \\ [0] & [\Omega^2] \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \{\dot{q}\} \\ \{q\} \end{matrix} \right\} \quad (2.46)$$

Logo, o método consiste em minimizar a seguinte função:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left\{ \begin{matrix} \{\dot{q}\}^T & \{q\}^T \end{matrix} \right\} \begin{bmatrix} [I] & [0] \\ [0] & [\Omega^2] \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \{\dot{q}\} \\ \{q\} \end{matrix} \right\} dt \longrightarrow \text{mínimo} \quad (2.47)$$

ou,

$$J = \int_0^{\infty} \{z\}^T [Q] \{z\} dt \longrightarrow \text{mínimo} \quad (2.48)$$

onde  $\{z\}$  é o vetor de estado do sistema e  $[Q]$  é a matriz que contém a informação sobre a energia instantânea armazenada no sistema. Otimizar esta função objetivo  $J$  significa procurar um amortecimento tal que a soma das energias instantâneas, do tempo inicial ao infinito, seja a menor possível. Assim garante-se um máximo de energia dissipada.

Supõe-se que a equação (2.48) tenha uma solução do tipo:

$$J = \int_0^t \{z\}^T [Q] \{z\} dt = \{z_0\}^T [P] \{z_0\} - \{z\}^T [P] \{z\} \quad (2.49)$$

onde  $\{z_0\}$  é o vetor de estado inicial do sistema, e  $[P]$  é a matriz solução de uma equação de Ljapunov (eq. 2.51). Derivando ambos os lados de (2.49) em relação ao tempo, obtém-se:

$$\{z\}^T [Q] \{z\} = -\{\dot{z}\}^T [P] \{z\} - \{z\}^T [P] \{\dot{z}\} , \quad (2.50)$$

e substituindo a relação  $\{\dot{z}\} = [A] \{z\}$  (equação de estado, onde  $[A]$  é a matriz de estado) em (2.50) obtém-se uma equação de Ljapunov onde tem-se como incógnita a matriz  $[P]$ .

$$-\{z\}^T [Q] \{z\} = \{z\}^T \left( [A]^T [P] + [P] [A] \right) \{z\} \quad (2.51)$$

ou,

$$-[Q] = [A]^T [P] + [P] [A] . \quad (2.52)$$

A matriz de estado  $[A]$  escrita nas coordenadas modais  $\{q\}$  do sistema não-amortecido pode-ser obtida de (eq. 2.45) como:

$$[A] = \begin{bmatrix} -[D] & -[\Omega^2] \\ [I] & [0] \end{bmatrix} . \quad (2.53)$$

A matriz  $[P]$ , solução deste problema, é dada em função dos termos da matriz  $[D]$ , termos estes que devem ser otimizados.

Como se deseja que este sistema seja estável, o termo  $\{z\}^T [P] \{z\}$  na equação (2.49) tende ao valor zero para um sistema homogêneo, já que as amplitudes  $\{q\}$  tenderão a zero com  $t \rightarrow \infty$ . Logo a solução de (2.49) é:

$$J = \int_0^{\infty} \{z\}^T [Q] \{z\} dt = \{z_0\}^T [P] \{z_0\} \longrightarrow \text{mínimo} \quad (2.54)$$

Logo, deve-se obter uma matriz  $[P]$  tal que a solução de (2.54) seja um mínimo. No entanto esta solução é função das condições iniciais do problema. Os autores deste trabalho exploram duas possibilidades de contornar este problema. A primeira, dita determinística, considera velocidades iniciais nulas, e deslocamentos iniciais

$$\{q_0\} = \left\{ \frac{1}{\omega_i} \right\}, \quad i=1,2,\dots,n \quad (2.55)$$

o que fisicamente significa que cada modo próprio do sistema inicia o movimento com o mesmo nível de energia. A segunda, dita estatística, consiste em tratar o vetor de condições iniciais de maneira estatística, ou seja, atribuindo-lhe um valor médio e uma matriz de covariância. O valor médio,  $E_s(\{q_0\})$ , é zero já que se deseja uma distribuição uniforme das condições iniciais, e sua matriz de covariância  $[Q_s]$  é a matriz identidade para que todas as componentes do vetor de condições iniciais tenham a mesma variância normalizada.

$$E_s(q_0) = 0, \quad cov(q_0) = E_s(\{q_0\} \cdot \{q_0\}^T) = [Q_s] = [I] \quad (2.56)$$

Considerando a natureza estatística de  $\{q_0\}$ , o critério torna-se:

$$J_s = E_s(\{q_0\}^T [P] \{q_0\}) = Tr([P]) \longrightarrow \text{mínimo} \quad (2.57)$$

onde  $Tr([P])$  é o traço da matriz  $[P]$  de Ljapunov.

Os autores ainda fazem uma segunda alteração no critério, passando a otimizar somente a parcela de energia devida à deformação do sistema. Desta forma, o funcional a ser otimizado é:

$$J_t = Tr([K]^{-1} [P_{22}]) \longrightarrow \text{mínimo}. \quad (2.58)$$

onde  $[P_{22}]$  é uma sub-matriz de  $[P]$  (eq. 2.59).

$$[P] = \begin{bmatrix} [P_{11}] & [P_{12}] \\ [P_{21}] & [P_{22}] \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

Os autores do trabalho mostram que este segundo enfoque produz os melhores resultados por ser independente do sistema de coordenadas utilizado na descrição do sistema, e por isto é o critério adotado.

### 2.5.3 Comentários

A vantagem deste método é que não há necessidade de se fazer nenhuma pré-suposição a respeito da matriz de amortecimento  $[C]$  além de sua simetria. Caso seja desejado a matriz pode ser escrita em função de incógnitas de posicionamento, como no método anteriormente analisado, seção 2.4. É interessante notar que de certa forma este trabalho engloba trabalho de Kianthra e Speckhart [10] já que a matriz  $[D]$  (eq. 2.19) é obtida através do processo de otimização, e não precisa ser pré-estabelecida. Este método tem a desvantagem de ser computacionalmente intensivo, já que a solução da equação de Ljapunov deve ser encontrada para cada variação de um parâmetro de amortecimento, a fim de se encontrar o ponto ótimo.

Para se utilizar este método em sistemas com efeito giroscópico deve-se estudar a formulação da equação de energia de um sistema rotativo.

## 2.6 Método escolhido

O método escolhido foi o de Müller e Gürgöze ([12], [13]) por ser o mais abrangente entre os métodos analisados, e por oferecer um enfoque diferente do da minimização das amplitudes de vibração do sistema. Este método não se restringe à otimização de alguns modos de vibrar em particular, embora possa ser utilizado para este fim, possibilitando uma minimização da energia do sistema como um todo.

Resta analisar se o processo de otimização da energia dissipada pelo sistema leva a bons resultados quanto à minimização das amplitudes de vibração, o que na prática é o desejado. No capítulo 5 isto poderá ser verificado para um sistema sujeito a desbalanceamento.

# Capítulo 3

## Adaptação do critério escolhido

### 3.1 Introdução

O método escolhido tem como critério de escolha da matriz ótima de amortecimento a minimização da integral, de zero a infinito, da energia instantânea armazenada no sistema. Logo, a primeira questão a ser respondida é: qual a expressão da energia de um sistema rotativo linear com efeitos giroscópicos que deve ser utilizada neste critério?

Atente-se que particularmente nos problemas correntes de dinâmica de rotação sempre se trabalha com uma linearização de movimentos angulares no espaço, movimentos estes descritos pelas formulações tradicionais para a rotação. Procuramos nos ater àquilo que nos parece mais relevante para os problemas práticos de rotores vibrando em seus mancais, optando portanto pela formulação a partir de rotações infinitesimais, utilizando a seqüência cardânica. As equações de movimento não lineares são então linearizadas para pequenos deslocamentos angulares. Ocorre que neste caso, como trabalhamos com energia, precisamos de alguma maneira encontrar uma expressão equivalente numa forma quadrática que leve às expressões linearizadas da equação de movimento. Esta representação não é únivoca. Neste capítulo portanto é dado enfoque aos aspectos da energia que, pela rotação, estão ligados a esta problemática.

O problema não linear de um sistema rotativo com efeitos giroscópicos é apresentado e a partir das expressões alternativas para a energia instantânea do sistema será formulado o problema de otimização e discutidos alguns aspectos da sua solução.

## 3.2 Dedução da equação de energia

Os elementos básicos de um rotor são o disco, o eixo, os mancais e os selos (estes últimos não são abordados neste trabalho). O disco é considerado um corpo rígido e portanto possui apenas energia cinética, enquanto que o eixo possui tanto energia cinética (não considerada) quanto energia potencial, vinda da sua deformação elástica. As forças devidas aos mancais são usadas para calcular seus trabalhos virtuais, e então as forças correspondentes que atuam sobre o eixo são obtidas.

As equações de Lagrange são aplicadas da seguinte maneira:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} = F_i \quad (1 \leq i \leq N) \quad (3.1)$$

onde  $N$  é o número de graus de liberdade,  $q_i$  são as coordenadas generalizadas, e  $F_i$  são as forças generalizadas, e ainda,  $(\dot{\quad})$  denota a diferenciação em relação ao tempo  $t$ .

Para se levantar as equações de energia de um sistema rotativo será estudado o caso de um giroscópio descrito por um modelo de dois graus de liberdade, como apresentado no capítulo 4.

### 3.2.1 Energia cinética

Neste estudo procura-se dar ênfase apenas àquilo que realmente se apresenta como característica típica de um sistema rotativo, portanto limitar-nos-emos à energia cinética de rotação exemplarmente explicada no caso de um disco axissimétrico cujo centro de massa coincide com o centro de rotação.

Para o cálculo da energia cinética é estudado um disco rígido que possui apenas energia cinética. Este disco pode ser representado pelo corpo 'C' da figura 3.1.

A velocidade angular do disco pode ser composta a partir de 3 rotações infinitesimais ortogonais,  $\dot{\alpha}$ ,  $\dot{\beta}$  e  $\dot{\gamma}$ , definidas de acordo com uma seqüência cardânica de rotação. A energia cinética deste disco pode ser obtida através da expressão geral de cálculo da energia cinética para um corpo rígido (3.2).

$$E_c(t) = \frac{1}{2} \{\omega(t)\}^T [M] \{\omega(t)\} + \frac{1}{2} \{v(t)\}^T [\bar{M}] \{v(t)\} \quad (3.2)$$

onde:

- $\{\omega(t)\}$  é o vetor com as componentes da velocidade angular do disco,

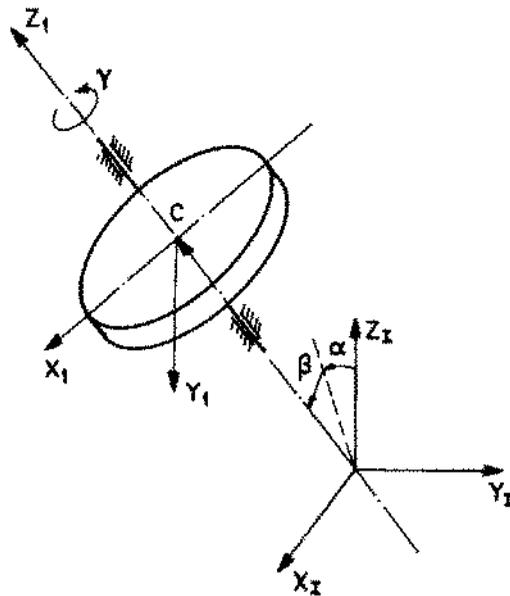


Figura 3.1: Diagrama esquemático de um disco.

- $\{v(t)\}$  é o vetor com as componentes da velocidade translacional do centro de gravidade do disco,
- $[M]$  é o tensor de inércia do disco, e
- $[\bar{M}]$  é a matriz de massa do disco.

Limitar-nos-emos todavia, por ora, apenas à energia de rotação descrita pela parcela:

$$E_{cr}(t) = \frac{1}{2} \{\omega(t)\}^T [M] \{\omega(t)\} . \quad (3.3)$$

A energia cinética de translação é calculada em termos das coordenadas do centro do disco, objeto de graus de liberdade específicos para tanto, e analisados de forma tradicional.

É conveniente descrever o movimento de rotação segundo um referencial que se move solidariamente ao disco e tem origem no ponto 'C'. Escolhe-se este referencial pois nele o tensor de inércia  $[M]$  é constante, diagonal e igual a:

$$[M] = \begin{bmatrix} I_t & 0 & 0 \\ 0 & I_t & 0 \\ 0 & 0 & I_p \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

onde  $I_t$  e  $I_p$  são os momentos de inércia de massa transversal e polar (ou axial) respectivamente. O vetor  $\{\omega\}$  do referencial deve ser calculado a partir de matrizes de rotações elementares. Escolhe-se utilizar os ângulos de *Cardan* porque as rotações deste método são dadas em cada um dos eixos de referência, seqüencialmente em torno dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  e portanto melhor para a linearização. As matrizes destas rotações elementares são:

$$[R_\alpha] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad [R_\beta] = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \quad [R_\gamma] = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

O vetor  $\{\omega\}$  da velocidade angular do referencial solidário ao corpo, e conseqüentemente do próprio corpo escrito neste referencial, é:

$$\{\omega\} = [R_\gamma][R_\beta] \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + [R_\gamma] \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\beta} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{Bmatrix}. \quad (3.6)$$

Substituindo (3.6) em (3.3) obtém-se a expressão da energia cinética do disco, expressão esta não-linear (eq. 3.7).

$$E_{cr}(t) = \frac{I_t \cos^2(\beta(t)) \dot{\alpha}^2(t)}{2} + \frac{I_t \dot{\beta}^2(t)}{2} + \frac{I_p \dot{\gamma}^2(t)}{2} + I_p \sin^2(\beta(t)) \dot{\alpha}(t) \dot{\gamma}(t) + \frac{I_p \sin^2(\beta(t)) \dot{\alpha}^2(t)}{2} \quad (3.7)$$

Esta expressão pode ser escrita em uma forma quadrática, o que leva, após a aplicação de (3.1) a um conjunto de equações de movimento lineares, obtido considerando que o sistema realizará deslocamentos tais que os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  tenham seus senos aproximados pelo valor do ângulo, e que seus cossenos possam ser considerados iguais a um. A velocidade de rotação própria, *spin* ( $\dot{\gamma}(t) = \Omega$ ), é em geral suposta alta o suficiente para que suas variações possam ser desprezadas, isto é obtido ou simplesmente desprezando sua oscilação ou imaginando sobre o eixo  $z$  um torque de compensação que elimine tal flutuação.

A “linearização” da expressão (3.7) resulta em:

$$E_{cr}(t) = \frac{I_p \Omega^2}{2} + \frac{I_t \dot{\alpha}^2(t)}{2} + \frac{I_t \dot{\beta}^2(t)}{2} + I_p \Omega \beta(t) \dot{\alpha}(t), \quad (3.8)$$

que contém portanto a energia cinética de rotação, da vibração angular e um termo que dará origem às forças de *Coriolis* ou de acoplamento giroscópico. Utilizando as equações de Lagrange (3.1) sobre expressão (3.7) ou (3.8) resultará nas mesmas equações lineares de movimento. Se definirmos nestas equações um vetor de deslocamentos angulares  $\{x\}^T = \{\alpha \ \beta\}$  observamos que não é possível reduzir (3.8) à forma

$$E_{cr} = \frac{1}{2} \{\dot{x}\}^T [M] \{\dot{x}\}. \quad (3.9)$$

Por outro lado, na análise linear do problema de rotação é comum redigir a expressão da energia de movimento como composta de uma energia cinética propriamente dita e uma energia giroscópica, ou de acoplamento giroscópico. Assim temos

$$E_M = \frac{1}{2} \{\dot{x}\}^T [M] \{\dot{x}\} + \frac{1}{2} \{x\}^T [G] \{x\}. \quad (3.10)$$

A expressão (3.8) pode ser representada desta forma, porém  $[G]$  perde as propriedades de anti-simetria que normalmente são inerentes às matrizes giroscópicas das equações de movimento de sistemas rotativos. O curioso é que se (eq. 3.8) for substituída por outra expressão quadrática (eq. 3.11) que mantém as propriedades de antissimetria da matriz  $[G]$  em (eq. 3.10),

$$\frac{I_p \Omega^2}{2} + \frac{I_t \dot{\alpha}^2(t)}{2} + \frac{I_t \dot{\beta}^2(t)}{2} - \frac{I_p \Omega \beta(t) \dot{\alpha}(t)}{2} + \frac{I_p \Omega \dot{\beta}(t) \alpha(t)}{2}, \quad (3.11)$$

obtem-se pela aplicação de (eq. 3.1) as mesmas equações de movimento linearizadas!

Como neste trabalho se procura apenas saber qual a expressão quadrática da energia que deve ser utilizada como critério, não se efetuará a análise desta falta de unicidade e se utilizará o procedimento pragmatizado na seção 3.3 para obter a resposta desejada.

### 3.2.2 Energia potencial

Utilizando o mesmo enfoque anterior, interessa apenas verificar as especificidades que ocorrem com as coordenadas de rotação, isto é, a energia potencial que é armazenada nos eixos ou nos seus mancais elásticos quando o disco se desloca rotativamente com os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  anteriormente definidos.

Em geral a matriz de rigidez de um eixo, necessária para o cálculo da energia potencial, é obtida através do método dos elementos finitos e deve ser acrescentada àquela que se origina dos mancais. A rigidez do eixo nos pontos de interesse, por exemplo os mancais e os pontos de apoio do disco, é calculada levando-se em conta as deformações e esforços atuantes nestes pontos e as propriedades mecânicas do eixo.

Se nos limitarmos à hipótese supra mencionada, interessa a rigidez no ponto de apoio do disco: a energia potencial devida às coordenadas de rotação resultará, uma vez escrita em uma forma quadrática, na seguinte expressão:

$$E_p(t) = \frac{1}{2} \{x(t)\}^T [K] \{x(t)\} \quad (3.12)$$

onde:

- $[K]$  é a matriz de rigidez do eixo, e
- $\{x(t)\}$  é o vetor com os deslocamentos angulares do disco, sem considerar a deformação torsional.

O vetor  $\{x\}$  é calculado a partir das rotações elementares  $\alpha$  e  $\beta$  escritas em um mesmo referencial, aquele no qual se pretenda representar  $[K]$ . Não se inclui a rotação  $\gamma$  pois não se considerando a vibração torsional ela é apenas o ângulo devido à rotação própria do disco.

Para o sistema de dois graus de liberdade como o analisado no capítulo 4 a expressão obtida é

$$E_p(t) = \frac{k \cos^2(\beta(t)) \alpha^2(t)}{2} + \frac{k \beta^2(t)}{2}, \quad (3.13)$$

e sua “linearização” conduz a:

$$E_p(t) = \frac{k}{2} (\alpha^2(t) + \beta^2(t)) . \quad (3.14)$$

### 3.3 Considerações sobre a expressão da energia armazenada

Considerando que a expressão não-linear da energia armazenada no sistema não é útil ao método proposto de otimização do amortecimento por não ter uma forma quadrática, deve-se procurar uma expressão quadrática para a energia total armazenada no sistema. O primeiro passo portanto é a análise da expressão da energia.

Ao se aproximar uma expressão não-linear pela sua forma linearizada deve-se procurar quantificar o erro cometido em tal aproximação. Ao se “linearizar” a expressão da energia são feitas duas hipóteses. A primeira é que a velocidade de rotação própria, *spin* ( $\dot{\gamma}(t) = \Omega$ ), é alta o suficiente para que suas variações possam ser desprezadas, e esta possa ser considerada constante. A segunda hipótese é que os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  sejam tais que seus senos possam ser aproximados pelo valor do ângulo, e que seus cossenos possam ser considerados iguais a um. Isto significa dizer que estes ângulos são pequenos (entre  $0^\circ$  e  $15^\circ$ ). O primeiro passo é resolver o sistema de equações de movimento, não-linear, obtido através da expressão de Lagrange (3.1) sobre as equações (3.7+3.13 e 3.8+3.14), resultando nas equações (3.15) e (3.16), e comparar os resultados com os obtidos a partir das equações de movimento linearizadas.

$$\begin{aligned}
 (x) \bullet & k \cos^2(\beta(t)) \alpha(t) + I_p \sin(2\beta(t)) \dot{\alpha}(t) \dot{\beta}(t) - I_t \sin(2\beta(t)) \dot{\alpha}(t) \dot{\beta}(t) + \\
 & I_p \cos(\beta(t)) \dot{\beta}(t) \dot{\gamma}(t) + I_t \cos^2(\beta(t)) \ddot{\alpha}(t) + I_p \sin^2(\beta(t)) \ddot{\alpha}(t) + I_p \sin(\beta(t)) \ddot{\gamma}(t) = 0 \\
 (y) \bullet & k \beta(t) - \frac{k \alpha^2(t) \sin(2\beta(t))}{2} - \frac{I_p \sin(2\beta(t)) \dot{\alpha}(t)^2}{2} + \frac{I_t \sin(2\beta(t)) \dot{\alpha}(t)^2}{2} - \\
 & I_p \cos(\beta(t)) \dot{\alpha}(t) \dot{\gamma}(t) + I_t \ddot{\beta}(t) = 0 \\
 (z) \bullet & I_p \cos(\beta(t)) \dot{\alpha}(t) \dot{\beta}(t) + I_p \sin(\beta(t)) \ddot{\alpha}(t) + I_p \ddot{\gamma}(t) = 0
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}
 k \alpha(t) + I_p \Omega \dot{\beta}(t) + I_t \ddot{\alpha}(t) &= 0 \\
 k \beta(t) - I_p \Omega \dot{\alpha}(t) + I_t \ddot{\beta}(t) &= 0
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

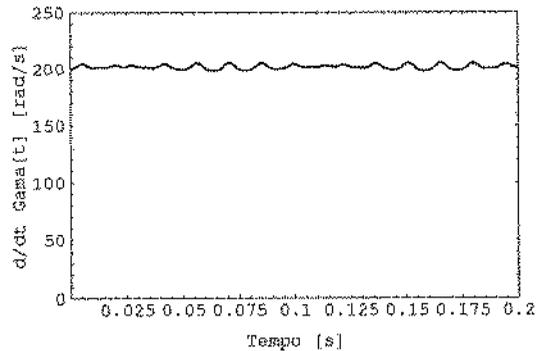


Figura 3.2: Variação da velocidade de *spin*

Para as simulações utilizou-se um giroscópio representado por um modelo de três graus de liberdade ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ) e com disco considerado rígido. Os dados do modelo são:  $\dot{\gamma} = \Omega = 200 \text{ rad/s}$ ,  $I_t = 0.0101 \text{ kg.m}^2$ ,  $I_p = 0.02 \text{ kg.m}^2$  e as constantes de rigidez  $k = 150 \text{ N.m}$ , com condições iniciais  $\alpha(0) = 0.18 \text{ rad}$ ,  $\beta(0) = 0.09 \text{ rad}$ ,  $\dot{\alpha}(0) = 21.9 \text{ rad/s}$ , e  $\dot{\beta} = 11.0 \text{ rad/s}$ .

São resolvidos os problemas não-linear (eq. 3.15) e linear (eq. 3.16) e os resultados são mostrados a seguir.

A velocidade de rotação própria calculada através do modelo não-linear é mostrada na figura 3.2 e sua ampliação (fig. 3.3). Nota-se que a variação em torno do valor inicial, considerado constante no modelo linear, é de aproximadamente 3.0%, e esta variação torna-se cada vez menor com o aumento da velocidade de rotação.

A seguir são comparadas as soluções para os deslocamentos angulares  $\alpha(t)$  obtidas através da solução do problema não-linear (eq. 3.15, fig. 3.4) e linear (eq. 3.16, fig. 3.5). Nota-se que com o decorrer do tempo a defasagem entre as duas respostas deixa de ser desprezível. No entanto esta defasagem é pequena e se torna desprezível com a inclusão de amortecimento, que faz com que estas amplitudes tendam a zero. Logo, conclui-se que para a análise no tempo do sistema, no caso um giroscópio, a linearização produz bons resultados, e que as hipóteses consideradas são válidas.

O segundo passo é analisar o efeito da “linearização” sobre a expressão da energia do sistema, já que esta é a função objetivo do método. A figura (3.6) mostra a energia acumulada em função do tempo de um sistema conservativo, calculada pela

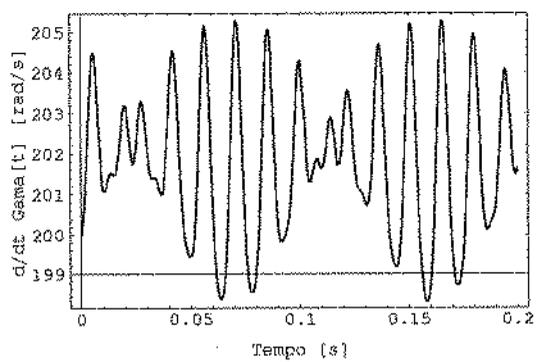
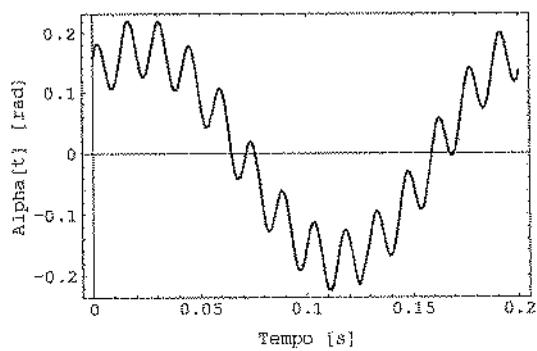
Figura 3.3: Variação da velocidade de *spin* - Detalhe

Figura 3.4: Resposta no tempo do modelo não-linear

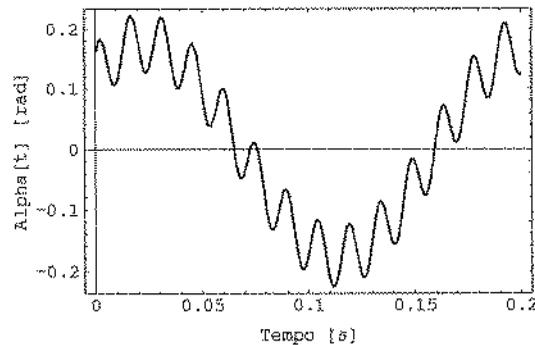


Figura 3.5: Resposta no tempo do modelo linear

expressão não-linear (eq. 3.7 + eq. 3.13). Abaixo é mostrada a parcela da energia devida aos movimentos de vibração ocorridos nas direções transversais a  $\gamma$ , ou seja, é descontada a parcela de energia devida à rotação própria do disco,  $\frac{I_p \dot{\gamma}^2}{2}$ . Esta parcela (fig. 3.7) é a que deve ser minimizada pelo amortecimento a ser introduzido no sistema.

Nas figuras 3.8 e 3.9 está a energia obtida pela expressão “linearizada” da energia. Nota-se que a linearização afeta muito o resultado obtido, principalmente a parcela de energia devida às vibrações ocorridas nas direções ortogonais à da velocidade de *spin* (fig. 3.9). Como pode-se notar, a expressão linearizada da energia é inútil para este trabalho já que a sua variação é grande demais para considerá-la uma expressão com propriedades conservativas.

Como o método escolhido para a otimização do amortecimento de sistemas mecânicos rotativos necessita de uma expressão quadrática para a energia armazenada no sistema, as expressões anteriores (eq. 3.7) e (eq. 3.8) estão descartadas.

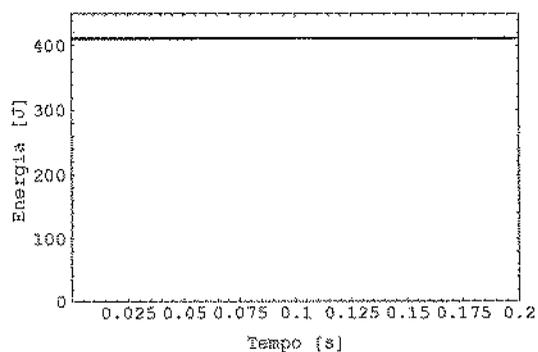


Figura 3.6: Energia total segundo a expressão não-linear da energia

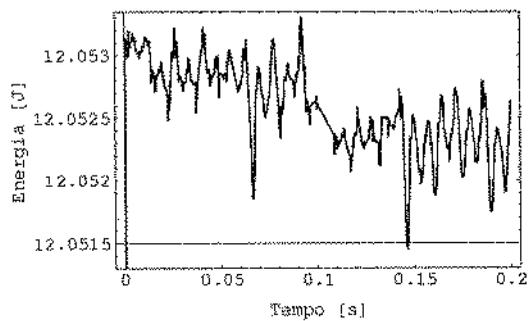


Figura 3.7: Energia de vibração segundo a expressão não-linear da energia

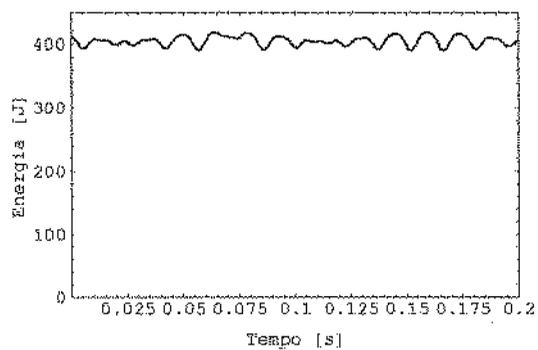


Figura 3.8: Energia total segundo a expressão linearizada da energia

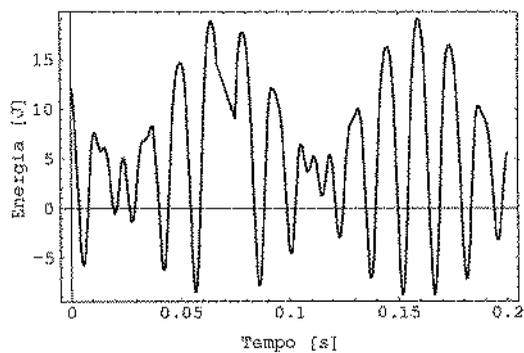


Figura 3.9: Energia de vibração segundo a expressão linearizada da energia

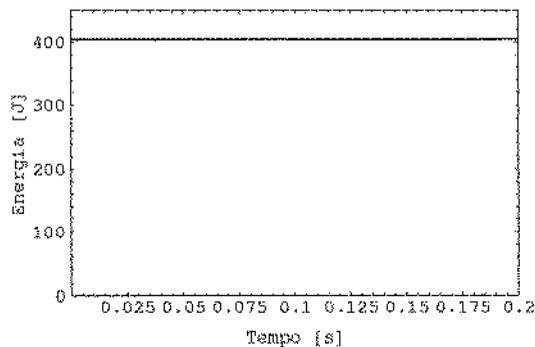


Figura 3.10: Energia total calculada pela expressão (3.20)

Roseau [17] sugere que para sistemas rotativos lineares pode-se desprezar a parcela da energia cinética devida ao efeito de *Coriolis*. Desta forma a energia total é calculada levando-se em conta somente os termos dependentes das matrizes de massa e rigidez, como em um sistema linear não-rotativo. Os diagramas 3.10 e 3.11 mostram os resultados desta aproximação.

Nota-se que o resultado obtido ainda é conservativo, e que o valor obtido para a parcela de energia devida às vibrações ortogonais à direção de  $\gamma$  não corresponde à obtida pela expressão não-linear. Esta diferença corresponde aos termos desprezados no processo de linearização e ao termo  $2I_p\Omega\dot{\alpha}(t)\beta(t)$  que foi desconsiderado. A seguir é mostrado que o cálculo da energia de vibração do sistema calculada por uma expressão que considere apenas as matrizes de massa e rigidez é conservativo. Para um sistema linear de dois graus de liberdade com as seguintes matrizes de massa, giroscópica e de rigidez:

$$[M] = \begin{bmatrix} I_t & 0 \\ 0 & I_t \end{bmatrix} \quad [G] = \begin{bmatrix} 0 & I_p\Omega \\ -I_p\Omega & 0 \end{bmatrix} \quad [K] = \begin{bmatrix} K_x & 0 \\ 0 & K_y \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

a equação de movimento de um sistema rotativo com efeito giroscópico é:

$$[M] \{\ddot{x}\} + [G] \{\dot{x}\} + [K] \{x\} = \{0\}. \quad (3.18)$$

Esta equação é pré-multiplicada por  $\{\dot{x}\}^T$ , obtendo-se:

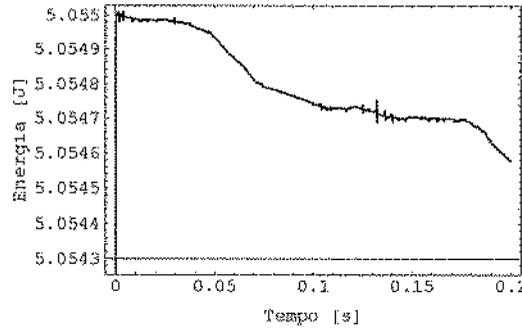


Figura 3.11: Energia de vibração calculada pela expressão (3.20)

$$\{\dot{x}\}^T [M] \{\ddot{x}\} + \{\dot{x}\}^T [G] \{\dot{x}\} + \{\dot{x}\}^T [K] \{x\} = \{0\} . \quad (3.19)$$

Integrando esta expressão em relação ao tempo resulta a expressão da energia de vibração do sistema. No entanto ocorre que a expressão obtida não contém termos dependentes da matriz giroscópica  $[G]$ , como pode ser observado (eq. 3.20).

$$\begin{aligned} \int \left( \{\dot{x}\}^T [M] \{\dot{x}\} + \{\dot{x}\}^T [G] \{\dot{x}\} + \{\dot{x}\}^T [K] \{x\} \right) dt = \\ = \frac{1}{2} \left( K_x \alpha^2(t) + K_y \beta^2(t) \right) + \frac{1}{2} I_t \left( \dot{\alpha}^2(t) + \dot{\beta}^2(t) \right) . \end{aligned} \quad (3.20)$$

Este resultado pode ser explicado porque ao linearizar as equações de movimento surge uma matriz  $[G]$  anti-simétrica, sem características de armazenamento ou de dissipação de energia. A matriz anti-simétrica  $[G]$  tem a função de transferir energia de uma direção de vibração para outra, sem armazená-la ou dissipá-la.

Apesar de não refletir quantitativamente a energia total armazenada no sistema, a expressão (3.20) reflete qualitativamente o que ocorre à energia do sistema. Ao se minimizar esta expressão, de fato, minimiza-se a energia armazenada no sistema descrito pelas equações lineares. Logo a expressão utilizada para o cálculo da energia de vibração do sistema é:

$$E = \frac{1}{2} \{\dot{x}\}^T [M] \{\dot{x}\} + \frac{1}{2} \{x\}^T [K] \{x\} . \quad (3.21)$$

### 3.4 Descrição do critério

Como foi descrito na seção (2.5) este método envolve a minimização de uma função quadrática  $J$  (eq. 2.47) e como foi mostrado na seção (2.5.2) a solução deste problema recai na solução de uma equação de Ljapunov (2.52). A solução deste problema é função das condições iniciais (eq. 2.54), e assim existem várias soluções para este problema. Tratando estas soluções de forma estatística, deseja-se que a equação (2.54) tenha a menor variância possível. Isto significa que os elementos da diagonal de  $[P]$  devem ter o menor valor possível ([13], [15] e [16]). Logo o critério de otimização passa de:

$$J = \int_0^{\infty} \{z\}^T [Q] \{z\} dt = \{z_0\}^T [P] \{z_0\} \longrightarrow \text{mínimo.} \quad (3.22)$$

para:

$$J_s = E_s \left( \{z_0\}^T [P] \{z_0\} \right) = Tr([P]) \longrightarrow \text{mínimo.} \quad (3.23)$$

A partir da análise feita sobre a expressão da energia de um sistema rotativo descrito por equações lineares de movimento conclui-se que a expressão da energia armazenada neste tipo de sistema não possui termos da matriz giroscópica. Desta forma a expressão (3.21) da energia armazenada em um sistema rotativo pode ser escrita como:

$$E = \frac{1}{2} \{\dot{x}\}^T [M] \{\dot{x}\} + \frac{1}{2} \{x\}^T [K] \{x\} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{cc} \{\dot{x}\}^T & \{x\}^T \end{array} \right\} \left[ \begin{array}{cc} [M] & [0] \\ [0] & [K] \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \{\dot{x}\} \\ \{x\} \end{array} \right\} . \quad (3.24)$$

Escrevendo o sistema segundo as coordenadas modais do sistema não rotativo e não amortecido tem-se:

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} \{\dot{x}\}^T & \{x\}^T \end{matrix} \right\} \begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & [K] \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \{\dot{x}\} \\ \{x\} \end{matrix} \right\} = \\
 &\frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} \{\dot{q}\}^T & \{q\}^T \end{matrix} \right\} \begin{bmatrix} [U]^T [M] [U] & [0] \\ [0] & [U]^T [K] [U] \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \{\dot{q}\} \\ \{q\} \end{matrix} \right\} = \quad (3.25) \\
 &\frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} \{\dot{q}\}^T & \{q\}^T \end{matrix} \right\} \begin{bmatrix} [I] & [0] \\ [0] & [\Omega^2] \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \{\dot{q}\} \\ \{q\} \end{matrix} \right\} = \{z\}^T [Q] \{z\} .
 \end{aligned}$$

onde  $[U]$  é a matriz modal do sistema não amortecido e não rotativo e  $[\Omega^2]$  é a matriz diagonal com as frequências naturais ao quadrado deste sistema.

No trabalho de Müller e Gürgöze é considerada apenas a sub-matriz  $[P_{22}]$  no processo de otimização (eq. 2.58). Isto significa que no processo de otimização é considerada apenas a energia inicial de deformação, sendo desprezada a parcela de energia cinética. Esta dissertação considera tanto a energia potencial inicial quanto a cinética.

### 3.5 Adaptação do critério

Deseja-se um critério de otimização do funcional  $J$  (eq. 2.54) tal que este otimize os termos da matriz  $[P]$  e que não dependa das condições iniciais. Para tanto imagina-se estas condições iniciais estatisticamente distribuídas em uma hipersfera de raio unitário” este é o significado físico de (eq. 2.56). Isto corresponde a ter-se que avaliar por uma mesma medida condições iniciais de deslocamento e de velocidade. Como os sistemas mecânicos oscilatórios não perturbados obedecem à relação (escritas em coordenadas modais)  $\{\dot{q}\} = [\Lambda] \{q\}$ , que é a equação de estado de um sistema mecânico descrito em suas coordenadas modais, assume-se que as velocidades modais iniciais  $\{\dot{q}_0\}$  possam (embora evidentemente sejam grandezas independentes) para efeito de metrificação serem aproximadas por:

$$\dot{q}_{0i} = \lambda_i q_{0i} , \quad (3.26)$$

ou,

$$\{\dot{q}_0\} = [\Lambda] \{q_0\} , \quad (3.27)$$

onde  $\lambda$  são os autovalores do sistema.

A equação (3.22) pode ser escrita explicitando as submatrizes de  $[P]$ :

$$J = \left\{ \begin{matrix} \{\dot{q}_0\}^T & \{q_0\}^T \end{matrix} \right\} \left[ \begin{matrix} [P_{11}] & [P_{12}] \\ [P_{21}] & [P_{22}] \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} \{\dot{q}_0\} \\ \{q_0\} \end{matrix} \right\}. \quad (3.28)$$

Substituindo a expressão (3.27) em (3.28) e expandindo obtém-se a nova expressão do funcional de otimização:

$$J_r = \{q_0\}^T ([\Lambda][P_{11}][\Lambda] + [\Lambda][P_{12}] + [P_{21}][\Lambda] + [P_{22}]) \{q_0\} = \{q_0\}^T [H] \{q_0\}. \quad (3.29)$$

Supondo que as condições iniciais de deslocamento sejam arbitrárias, mas tenham valor médio zero, pode-se utilizar o critério da minimização do traço da matriz  $[H]$  da equação anterior (eq. 3.30). Logo, o funcional  $J_r$  pode ser agora escrito como:

$$J_r = Tr([H]) \rightarrow \text{mínimo}. \quad (3.30)$$

Ao combinar as submatrizes de  $[P]$  em uma só matriz, e ao se calcular o traço desta matriz, surge o problema de como tratar grandezas de unidades diferentes, angulares e translacionais. Os termos destas sub-matrizes correspondentes aos deslocamentos angulares têm dimensão  $N.m.s$  e os de translação  $N.s$ . A fim de que grandezas de rotação e translação sejam corretamente balanceadas (caso contrário,  $1 \text{ rad}$  teria a mesma importância de  $1 \text{ m}$ ), divide-se os termos correspondentes às coordenadas de rotação por uma dimensão característica do disco. Através da figura (3.12) pode-se ver que um bom parâmetro é o raio do disco, já que a sua projeção na direção axial tem a mesma ordem de grandeza dos deslocamentos de translação do disco.

Tendo em vista as adaptações e hipóteses utilizadas conclui-se que o valor obtido por este processo de otimização será um indicativo da região onde se encontra o ponto ótimo.

Geralmente o que se deseja é que um dado sistema mecânico tenha suas amplitudes de vibração reduzidas. Na prática pode-se introduzir amortecimento no sistema apenas através de alguns pontos, em geral nos mancais. Isto torna a matriz de amortecimento bem esparsa, o que é importante para este método já que para a procura do ponto ótimo deve-se primeiro variar um parâmetro, resolver a equação de Ljapunov e então calcular o funcional. Este processo pode ser bastante otimizado através da implementação de algoritmos especiais para a solução da equação de Ljapunov [18]

Existe também a possibilidade de se desejar reduzir os níveis de energia de um modo em particular. Neste caso a solução é mais simples, já que pode-se utilizar a

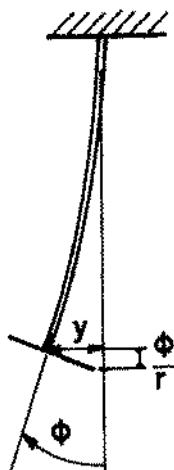


Figura 3.12: Vista transversal do disco

expressão do funcional  $J$  (eq. 3.28). A solução é obtida atribuindo ao sistema condições iniciais tais que o sistema vibre apenas no modo desejado, ou seja, usando o autovetor do modo em estudo como sendo o vetor de condições iniciais.

No capítulo seguinte resolve-se dois problemas, um de 2 e outro de 4 graus de liberdade, a fim de se ter uma idéia dos parâmetros que influenciam a escolha do amortecimento ótimo. No capítulo 5, é resolvido um problema de 6 graus de liberdade, correspondente a uma bancada de ensaios existente no Departamento de Projeto Mecânico da Faculdade de Engenharia Mecânica, e é analisado o comportamento do método para um sistema excitado por desbalanceamento.

# Capítulo 4

## Sistemas de 2 e 4 Graus de Liberdade

### 4.1 Giroscópio com 2 G.L.

#### 4.1.1 Introdução

Primeiramente foi escolhido um sistema simples para testar os critérios escolhidos e poder visualizar melhor os resultados. Trata-se de um giroscópio representado por um modelo de dois graus de liberdade (fig. 4.1), simétrico, onde se utilizou o método de condensação em coordenadas complexas. Esta transformação faz com que trabalhem com matrizes adjuntas (complexo-conjugadas das transpostas) e não apenas com matrizes transpostas. As molas e os amortecedores são posicionados entre o anel externo e o quadro, e entre os dois anéis. Este modelo foi escolhido por envolver apenas variáveis de rotação, evidenciando a influência do efeito giroscópico sobre a escolha do amortecimento.

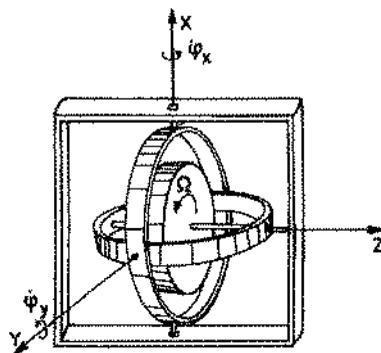


Figura 4.1: Giroscópio com 2 Graus de Liberdade.

### 4.1.2 Desenvolvimento

O sistema escolhido é descrito pelo seguinte sistema de equações, em coordenadas inerciais:

$$\begin{bmatrix} I_t & 0 \\ 0 & I_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\varphi}_x \\ \ddot{\varphi}_y \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I_p \Omega \\ -I_p \Omega & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\varphi}_x \\ \dot{\varphi}_y \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_t & 0 \\ 0 & k_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (4.1)$$

onde  $I_t$  é o momento de inércia transversal,  $I_p$  é o momento de inércia polar,  $k_t$  é a constante de rigidez angular,  $\Omega$  é a velocidade de rotação do disco, suposta constante, e  $\varphi_x, \varphi_y$  são as coordenadas que descrevem os movimentos de vibração nas direções  $x$  e  $y$ .

Fazendo a substituição:

$$\varphi_x + i\varphi_y = \varphi \quad (4.2)$$

a equação (4.1) torna-se:

$$I_t \ddot{\varphi} - iI_p \Omega \dot{\varphi} + k_t \varphi = 0, \quad (4.3)$$

e introduzindo o termo de amortecimento,

$$I_t \ddot{\varphi} + (c - iI_p \Omega) \dot{\varphi} + k_t \varphi = 0. \quad (4.4)$$

Dividindo a equação (4.4) por  $I_t$  tem-se:

$$\ddot{\varphi} + (\tilde{c} - i\beta\Omega) \dot{\varphi} + W^2 \varphi = 0. \quad (4.5)$$

onde  $\beta$  é a relação entre os momentos de massa  $I_p$  e  $I_t$ ,  $W^2$  é a frequência natural ao quadrado do sistema não amortecido ( $W^2 = \sqrt{\frac{k_t}{I_t}}$ ) e  $\tilde{c} = \frac{c}{I_t}$ .

Deseja-se introduzir um amortecedor  $c$  tal que a soma das quantidades instantâneas de energia armazenada no sistema, do tempo inicial ao infinito, seja a menor possível, de acordo com o critério adotado de minizar o funcional  $J_r$ . A expressão da energia armazenada neste sistema é:

$$E = \{z\}^T [Q] \{z\} = \begin{Bmatrix} \dot{\varphi} & \varphi \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{W^2}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\varphi} \\ \varphi \end{Bmatrix}. \quad (4.6)$$

O passo seguinte é resolver a equação de Ljapunov (eq. 2.52) para este sistema:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{W^2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\tilde{c} + i\beta\Omega) & 1 \\ -W^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(\tilde{c} - i\beta\Omega) & -W^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

Resolvendo a expressão acima para  $[P]$ , obtém-se:

$$[P] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\tilde{c}} & \frac{\tilde{c} - i\beta\Omega}{4\tilde{c}} \\ \frac{\tilde{c} + i\beta\Omega}{4\tilde{c}} & \frac{\tilde{c}^2 + 2W^2 + \beta^2\Omega^2}{4\tilde{c}} \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

É interessante notar que a matriz  $[P]$  não é simétrica. Para matrizes  $[Q]$  e  $[A]$  reais, se a matriz  $[Q]$  é simétrica a matriz  $[P]$  também o é ([15] e [16]). Neste caso, onde a matriz  $[A]$  é complexa, embora a matriz  $[Q]$  seja simétrica, a matriz  $[P]$  não o é. A matriz  $[P]$  é uma matriz Hermitiana, ou seja, é composta por uma parte real simétrica e uma parte imaginária anti-simétrica:

$$[P] = [P_r] + i[P_i] \quad (4.9)$$

onde a matriz  $[P_r]$  é simétrica e a matriz  $[P_i]$  é anti-simétrica.

Resolvendo a equação (3.30), de otimização do traço da matrix  $[H]$  obtém-se para o amortecimento ótimo:

$$\tilde{c}_{ot} = \sqrt{4W^2 + \beta^2\Omega^2} \quad (4.10)$$

e,

$$c_{ot} = I_t \sqrt{4W^2 + \beta^2\Omega^2}. \quad (4.11)$$

### 4.1.3 Resultados numéricos

Os resultados podem ser visualizados a seguir para um sistema com as seguintes constantes físicas:

- $I_t = 0.0101 \text{ kg.m}^2$
- $\beta = \frac{I_p}{I_t} = 1.97$
- $k_t = 150 \text{ N.m}$

- $\Omega = 200 \text{ rad/s}$
- $c_{ot} = 468 \text{ N.s/m}$
- $\alpha(0) = 0.18 \text{ rad}$
- $\beta(0) = 0.09 \text{ rad}$
- $\dot{\alpha}(0) = 21.9 \text{ rad/s}$
- $\dot{\beta} = 11.0 \text{ rad/s}$

Obs: Como o *software* gráfico não possui o alfabeto grego, as variáveis  $\varphi_x$  e  $\varphi_y$  são representadas por  $Fix(t)$  e  $Fi_y(t)$ , e as integrais da energia com relação ao tempo para valores de amortecimento  $c = c_{ot}$ ,  $c < c_{ot}$  e  $c > c_{ot}$  são representadas respectivamente por  $intot$ ,  $intme$  e  $intma$ .

As três figuras a seguir mostram a variação do funcional  $J$  ótimo em função das condições iniciais da direção 'x' (direção 'y' fixa), e as relações entre os funcionais obtidos para valores de amortecimento 20% maior e 20% menor do que o valor ótimo e o funcional obtido com o valor ótimo de amortecimento.

O primeiro gráfico 4.2 descreve a solução da equação (2.54) para o caso da introdução do amortecimento ótimo (eq. 4.10) no sistema. O gráfico mostra a solução para valores de condições iniciais na faixa de 30% abaixo da prevista pela equação (3.26) até 30% acima.

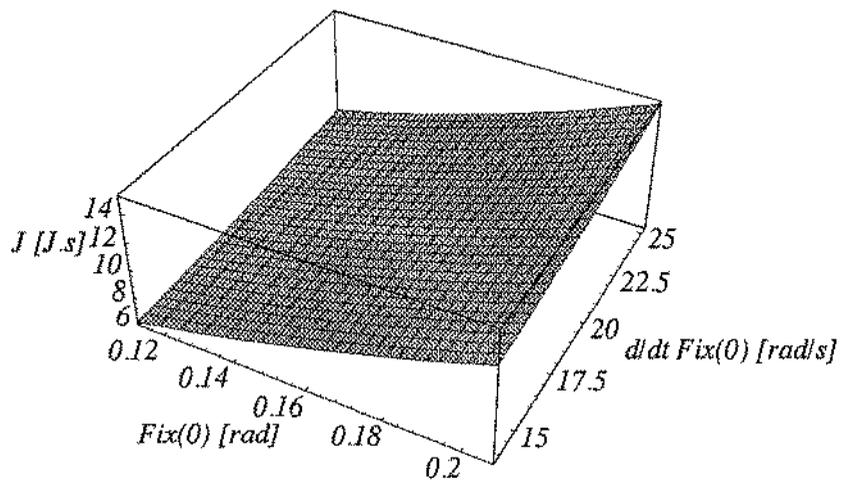


Figura 4.2: Funcional  $J$  mínimo em função das condições iniciais

No gráfico fig. 4.3 é mostrada a relação entre o funcional  $J$  do sistema com um amortecimento 20% maior do que o ótimo e o funcional  $J$  do sistema com amortecimento ótimo. Pode-se notar que esta relação é quase sempre maior do que a unidade, na faixa de condições iniciais considerada, mostrando que o aumento de amortecimento além do ótimo não diminui o funcional  $J$  do sistema.

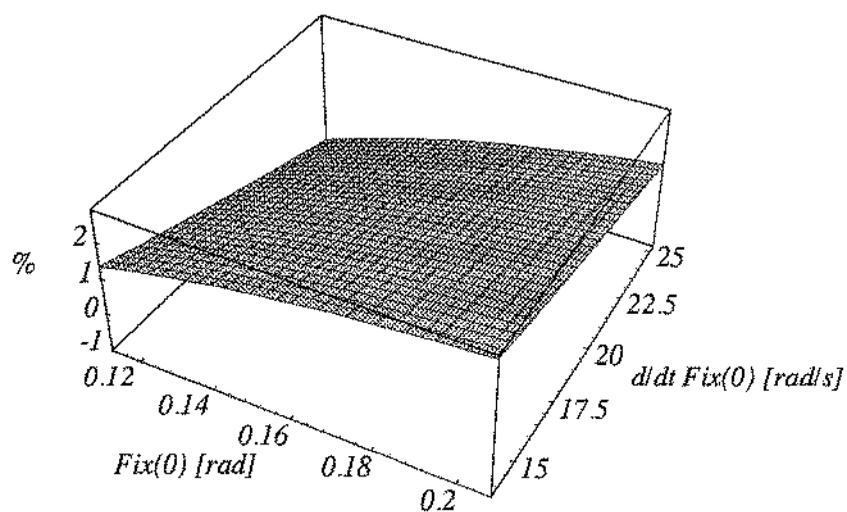


Figura 4.3: Relação  $J(c > c_{ot})/J(c_{ot})$

A figura 4.4 mostra a relação entre o funcional  $J$  do sistema com um amortecimento 20% menor do que o ótimo e o funcional  $J$  do sistema com amortecimento ótimo. Pode-se notar que esta relação também é sempre maior do que a unidade, na faixa de condições iniciais considerada, mostrando que a solução encontrada é realmente ótima.

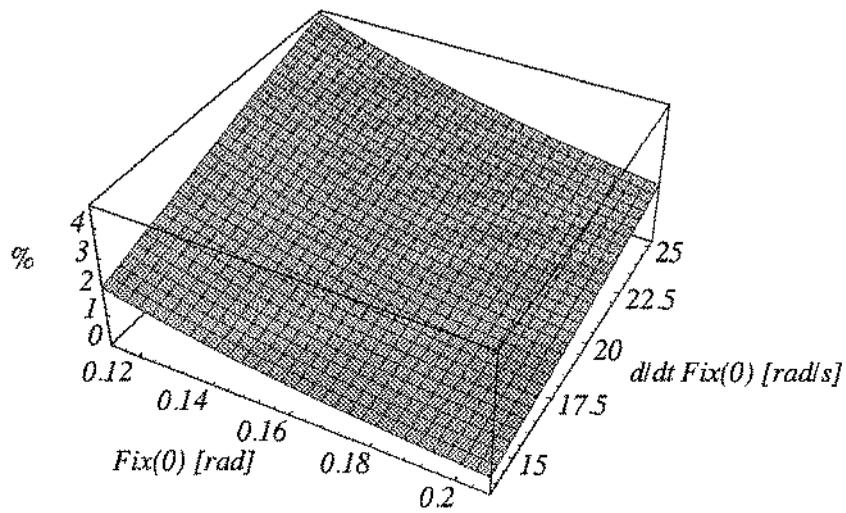


Figura 4.4: Relação  $J(c < c_{ot})/J(c_{ot})$

Na figura 4.5 mostra-se a variação da energia em função do tempo, e na figura 4.6 a integral desta em relação ao tempo.

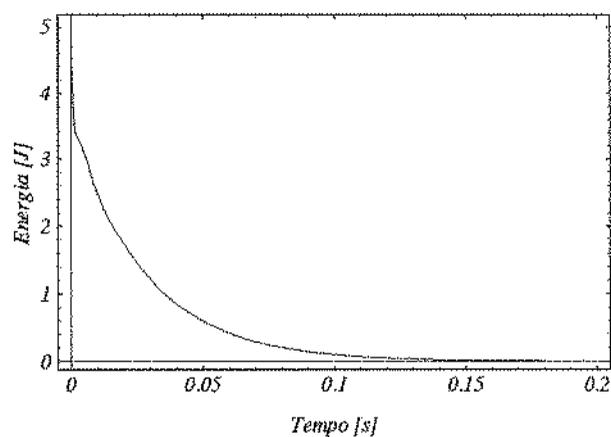


Figura 4.5: Energia de vibração  $E(c_{ot})$  em função do tempo

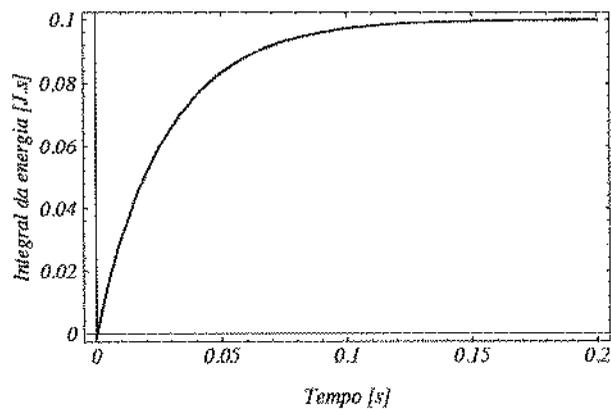


Figura 4.6:  $\int E(c = c_{ot}) dt$

A figura (4.7) mostra a integral da energia para o valor ótimo de amortecimento e para os valores 20% acima e abaixo deste. A figura (4.8) mostra as razões  $J(c > c_{ot})/J(c = c_{ot})$  e  $J(c < c_{ot})/J(c = c_{ot})$ .

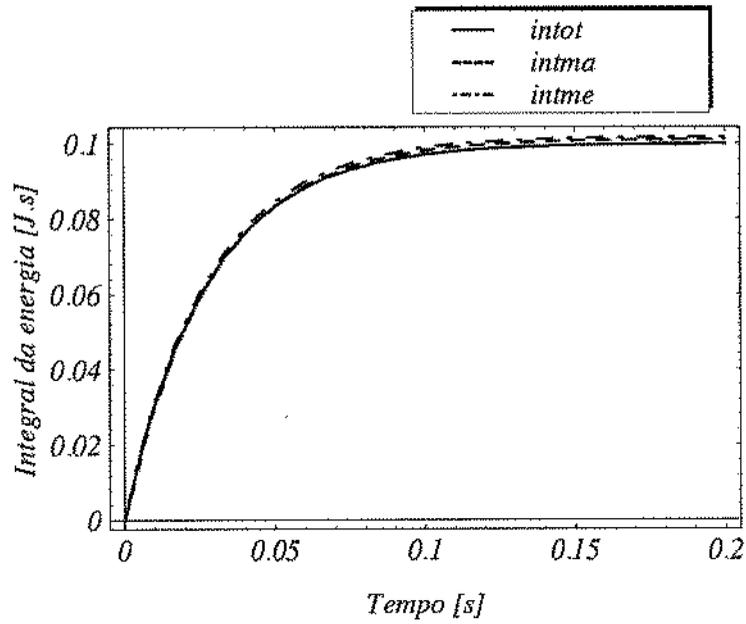


Figura 4.7: Comparação entre as  $\int E(t) dt$

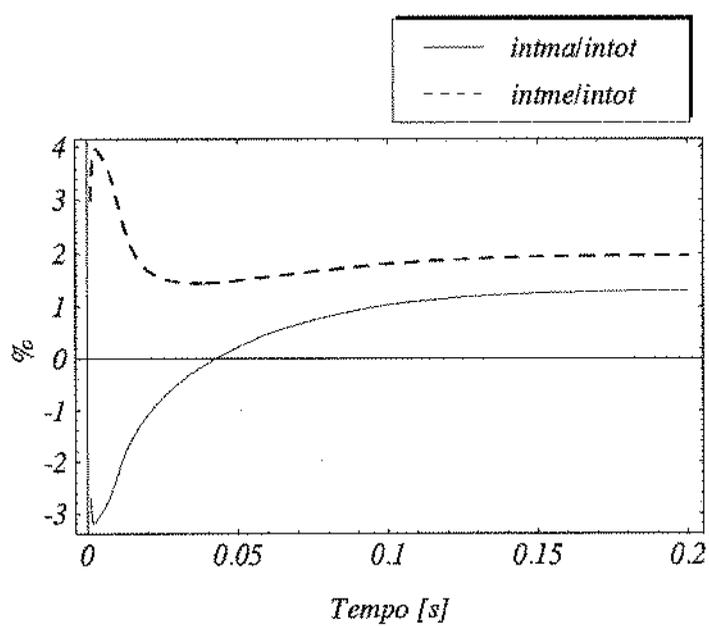


Figura 4.8: Diferenças entre as integrais

A seguir compara-se as, velocidades, deslocamentos e órbitas dos casos de amortecimento ótimo, 20% maior e 20% menor. As curvas sólidas de maior amplitude nas figuras (4.9, 4.10, 4.11) correspondem ao caso de amortecimento nulo, e estão incluídas para comparação.

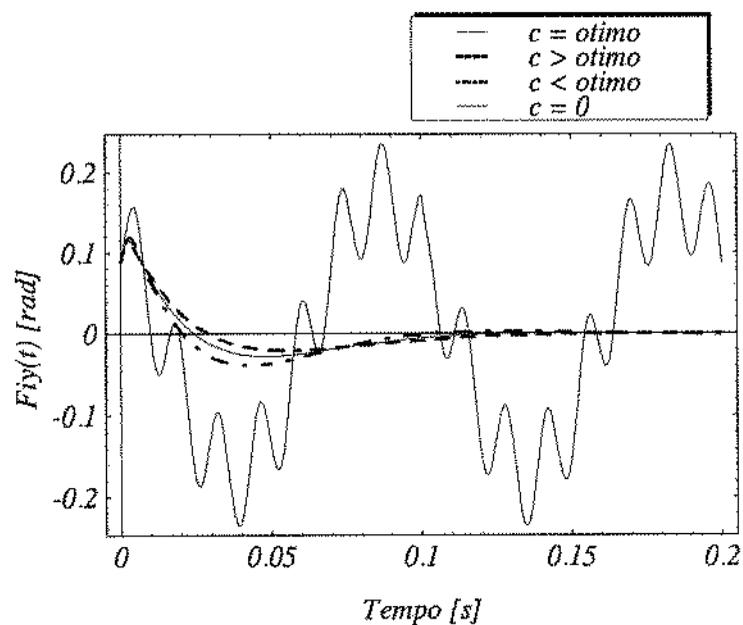


Figura 4.9: Amplitude na direção  $y$

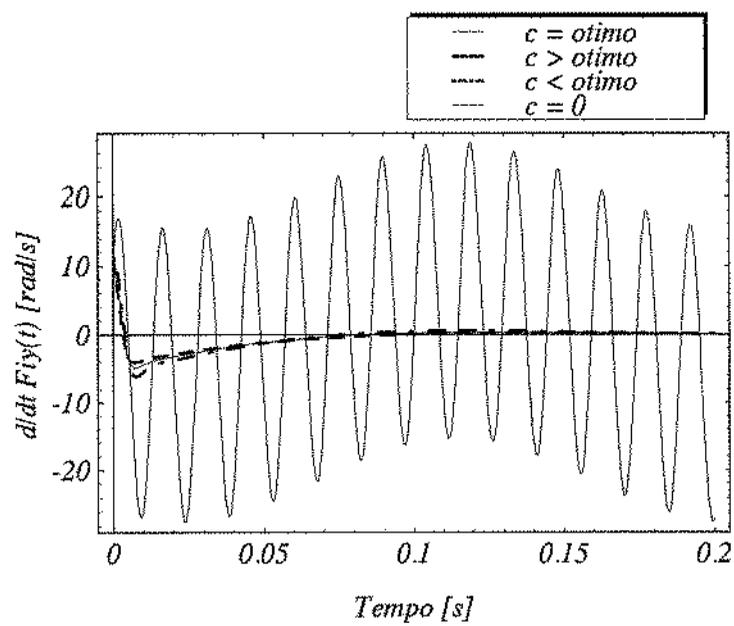


Figura 4.10: Velocidade na direção  $y$

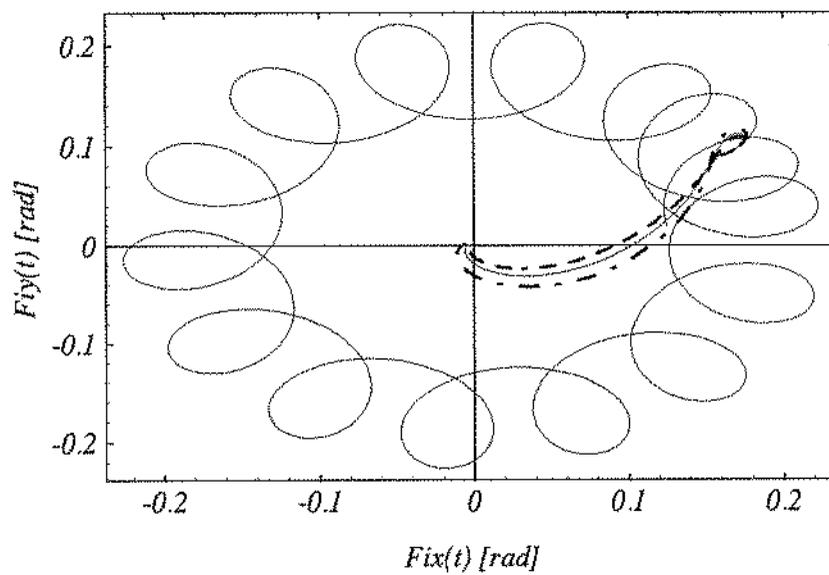


Figura 4.11: Órbitas

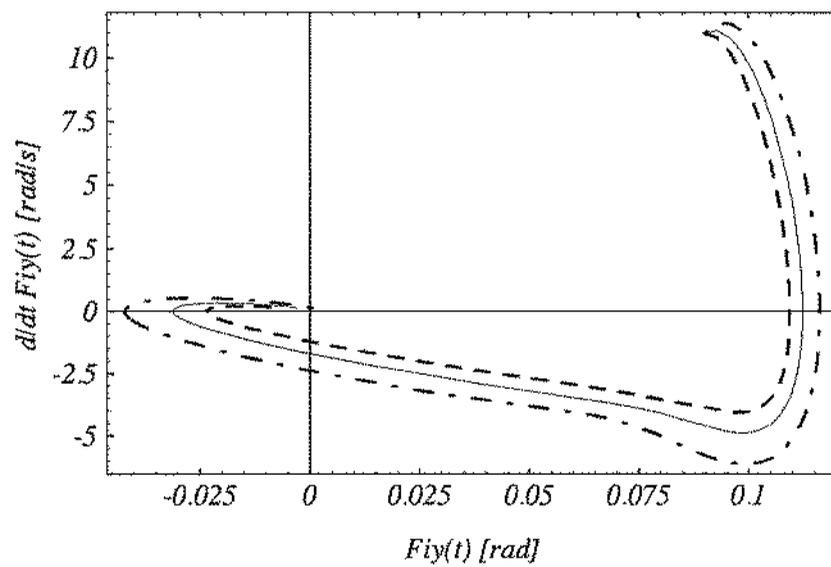


Figura 4.12: Diagrama plano-fase na direção  $y$

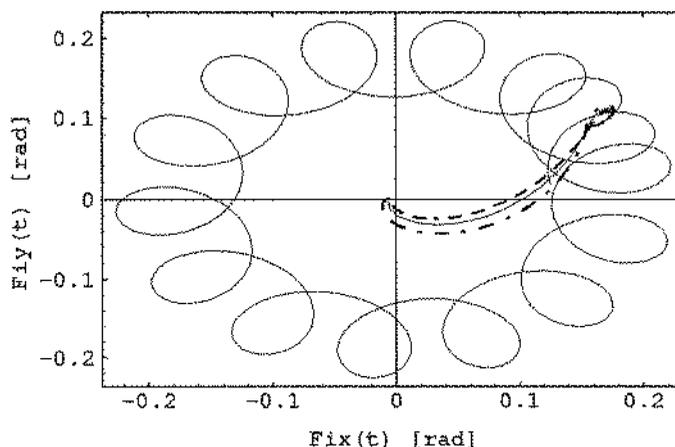


Figura 4.13: Órbitas - modelo linear

#### 4.1.4 Comparação entre os modelos linear e não linear

O critério de otimização escolhido assume que se possa escrever a equação da energia de vibração do sistema segundo a forma mostrada na equação (3.25), e que a estrutura possa ser representada por um modelo linear. É interessante então comparar o efeito do amortecimento ótimo obtido sobre o modelo não linear desta estrutura. Para esta comparação foram utilizadas as equações de movimento não lineares do giroscópio apresentadas na seção anterior. A estas equações foram acrescentados os termos devidos ao efeito do amortecimento obtidos da mesma forma que as equações (3.15). Para visualizar os resultados foram traçadas as órbitas para valores de amortecimento  $c = c_{ot}$ ,  $c = 1.2 c_{ot}$ , e  $c = 0.8 c_{ot}$ , respectivamente linhas sólidas, tracejadas e traço-ponto, dos modelos linear e não linear.

Inicialmente são dadas condições iniciais dentro da faixa onde a linearização foi considerada válida, entre  $0^\circ$  e  $15^\circ$ , figuras 4.13 e 4.14.

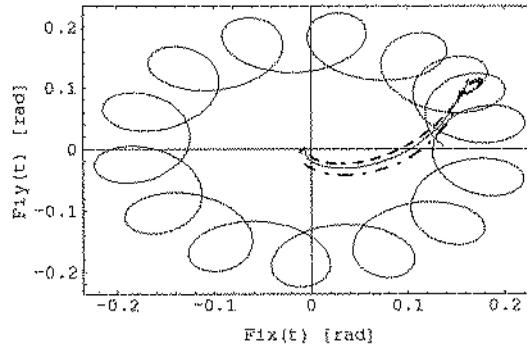


Figura 4.14: Órbitas - modelo não linear

Agora são dadas condições iniciais fora da faixa de linearização. O deslocamento angular inicial é de  $37^\circ$  para  $\varphi_x$  e  $22^\circ$  para  $\varphi_y$  (figs. 4.15 e 4.16).

Analisando estes diagramas conclui-se que a principal diferença entre os resultados obtidos através das simulações linear e não-linear é a defasagem existente entre a resposta destes dois modelos no caso de amortecimento nulo. Pode-se notar que o número de períodos de precessão é o mesmo nos dois modelos, apesar da defasagem existente entre os resultados. Com a inclusão do amortecimento esta defasagem torna-se desprezível mostrando que a utilização do modelo linear de uma estrutura não conduz a grandes erros no processo de otimização de amortecimento.

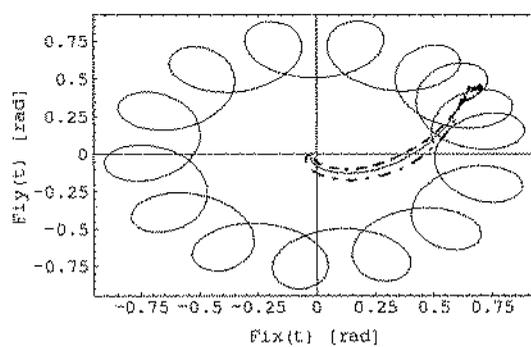


Figura 4.15: Órbitas - modelo linear

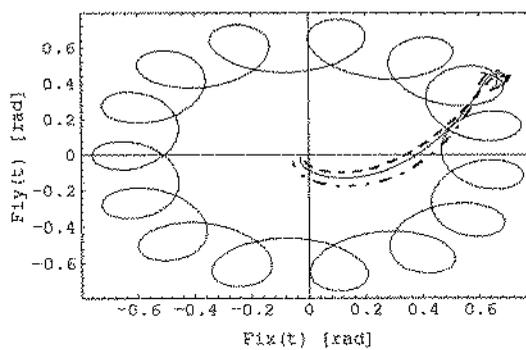


Figura 4.16: Órbitas - modelo não linear

## 4.2 Rotor vertical bi-apoiado com 4 G.L.

### 4.2.1 Introdução

Após ter-se estudado um sistema simples de 2 graus de liberdade estuda-se agora um sistema de 4 graus de liberdade, representado por um rotor vertical bi-apoiado. Este rotor possui rigidez  $k$  nas duas direções, nos dois mancais, um disco posicionado a ' $l_1$ ' metros do mancal 'A' e a ' $l_2$ ' metros do mancal 'B' (fig. 4.17).

O objetivo da análise deste sistema é verificar como os parâmetros de rigidez, velocidade de rotação e posicionamento do disco influenciam o valor do amortecimento. Esta análise é feita numericamente apenas pois já para um sistema de 4 graus de liberdade, ainda que simétrico, as expressões obtidas para a matriz  $[P]$  são muito complexas, e a expressão para o traço da matriz  $[H]$  (eq. 3.29) é ainda mais complexa, além de ser de quarto grau em  $c$ , o que torna as suas soluções analíticas muito extensas e de difícil análise. Logo, com o estudo deste tipo de sistemas pretende-se correlacionar a variação dos parâmetros físicos do sistema com a variação do valor ótimo do amortecimento. E finalmente é analisado o caso de se introduz amortecimento em apenas um mancal. Isto pode ser desejável quando, devido à assimetria do posicionamento do disco sobre o eixo e à excitação de desbalanceamento, apenas um dos mancais apresentar amplitudes de vibração acima do desejável. É verificado como este amortecimento atuará sobre o sistema em relação à redução das vibrações através das órbitas de vibração nos mancais.

### 4.2.2 O Modelo matemático

O modelo mostrado na figura 4.17 é descrito pelo seguinte sistema de equações, condensado em notação complexa, descrito a partir de um sistema referencial localizado no centro do disco:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{\varphi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2c & -ic(l_1 - l_2) \\ ic(l_1 - l_2) & c(l_1^2 + l_2^2) - iI_p\Omega \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -ik(l_1 - l_2) \\ ik(l_1 - l_2) & k(l_1^2 + l_2^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (4.12)$$

onde  $z = x + iy$  e  $\varphi = \varphi_y - i\varphi_x$ . Este sistema pode ainda ser descrito através dos deslocamentos dos mancais (fig. 4.17):

$$\begin{bmatrix} \frac{I_1+l_2^2 m}{(l_1+l_2)^2} & \frac{-I_1+l_1 l_2 m}{(l_1+l_2)^2} \\ \frac{-I_1+l_1 l_2 m}{(l_1+l_2)^2} & \frac{I_1+l_1^2 m}{(l_1+l_2)^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{z}_a \\ \ddot{z}_b \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c - \frac{i I_t \Omega}{(l_1+l_2)^2} & \frac{i I_p \Omega}{(l_1+l_2)^2} \\ \frac{i I_p \Omega}{(l_1+l_2)^2} & c - \frac{i I_t \Omega}{(l_1+l_2)^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{z}_a \\ \dot{z}_b \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_a \\ z_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.13)$$

onde  $z_a = x_a + iy_a$  e  $z_b = x_b + iy_b$ .

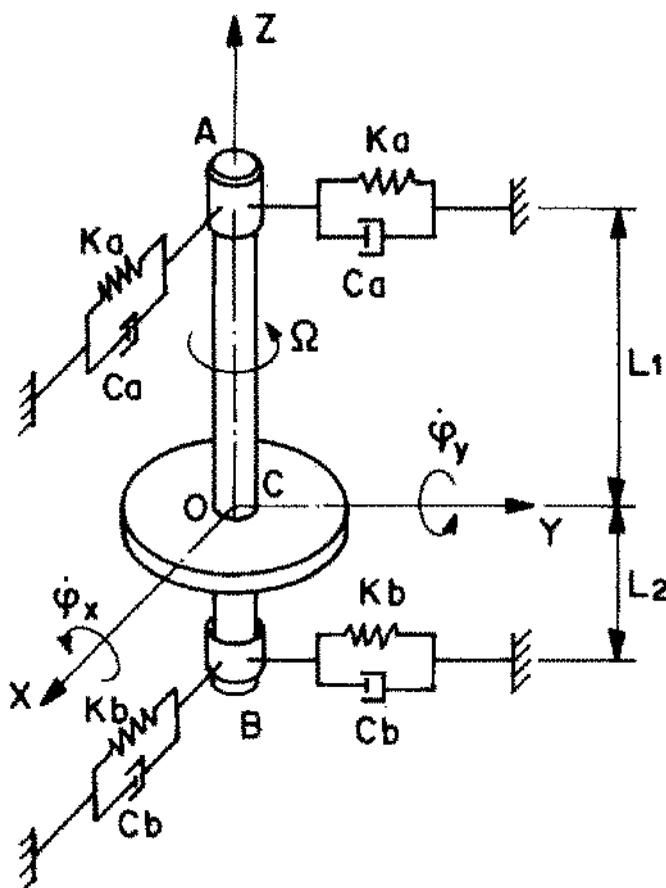


Figura 4.17: Diagrama esquemático do sistema de 4 graus de liberdade

Para este sistema as constantes físicas são:

$$m = 2 \text{ kg},$$

$$I_t = 0.00285 \text{ kg.m}^2,$$

$$I_p = 0.00563 \text{ kg.m}^2,$$

$$\Omega = 1250 \text{ rad/s},$$

$$k = 50000 \text{ N/m},$$

$$l_1 = 0.15 \text{ m},$$

$$l_2 = 0.25 \text{ m},$$

$$\text{raio do disco} = 0.075 \text{ m}, \text{ e}$$

$$\text{espessura do disco} = 0.015 \text{ m}.$$

### 4.2.3 Formulação do problema de otimização

Para que se possa analisar a influência de um determinado parâmetro do modelo são fixados todos os parâmetros exceto o que é analisado. Então resolve-se o problema de otimização para vários valores deste parâmetro.

Inicialmente estuda-se o efeito da variação da velocidade de rotação sobre o valor do amortecimento. Como nota-se na figura (4.18), um aumento da rotação provoca um aumento do valor do amortecimento ótimo, em uma proporção exponencial de equação:

$$c_{ot} = 100.30e^{2.8410^{-4} \Omega} \quad (4.14)$$

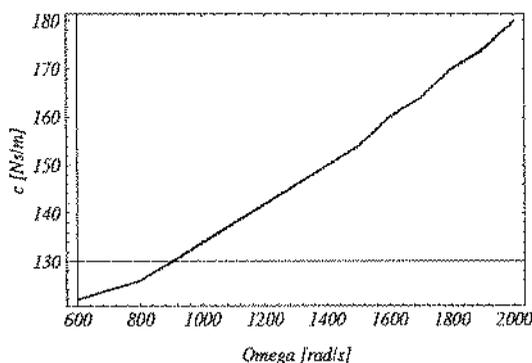


Figura 4.18: Variação de  $c_{ot}$  em função da velocidade de rotação.

O estudo da variação do amortecimento ótimo em função do aumento da rigidez dos mancais revela a mesma tendência observada para a variação da velocidade de rotação, com uma curva que se aproxima mais de uma forma polinomial:

$$c_{ot} = 5.403k^{0.304} \quad (4.15)$$

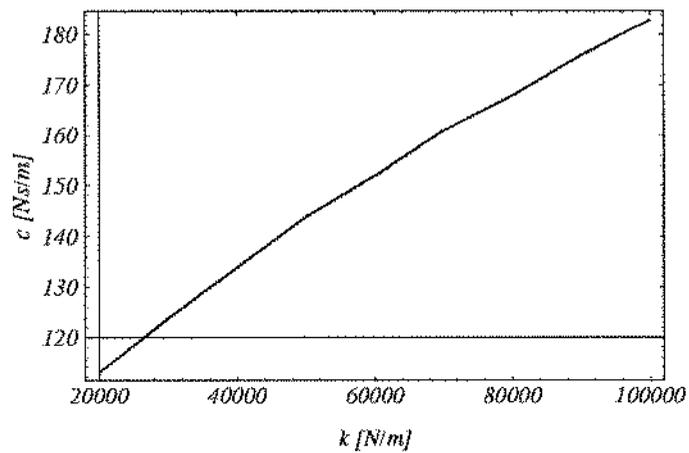


Figura 4.19: Variação de  $c_{ot}$  em função da rigidez dos mancais

A variação do amortecimento em função da posição do disco é tal que quanto mais o disco se aproxima da posição média do eixo, maior o valor do amortecimento. Esta variação tem uma forma aproximadamente logarítmica:

$$c_{ot} = 169.04 + 13.53 \ln(l_1) \quad (4.16)$$

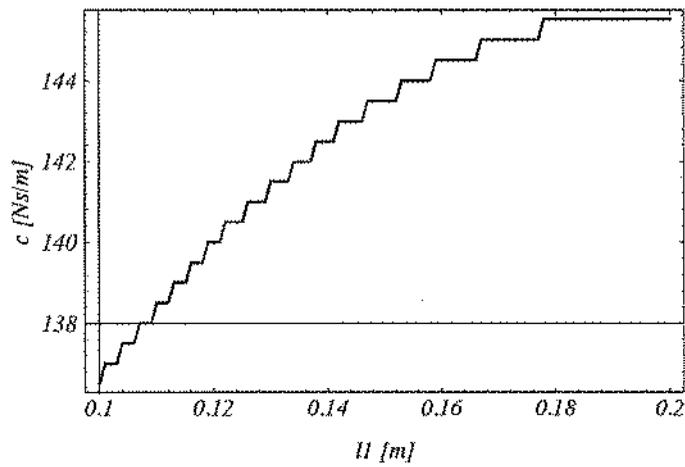


Figura 4.20: Variação de  $c_{ot}$  em função da posição do disco

Para o sistema descrito no início desta seção, a curva do funcional de otimização em função do amortecimento é mostrada na figura 4.21. Nota-se que a partir do resultado obtido para dois valores próximos de amortecimento tem-se a direção da busca do valor ótimo, já que esta curva não possui pontos de mínimo local.

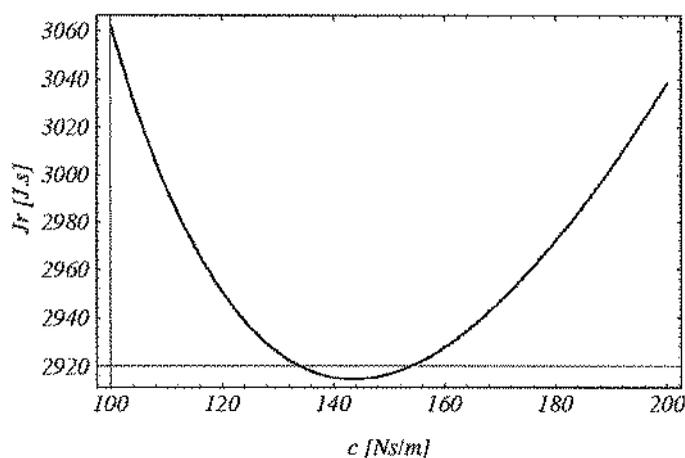


Figura 4.21: Variação de  $J_r$  em função do amortecimento

#### 4.2.4 Sistema assimétrico

Os sistemas do tipo estudado nesta seção podem apresentar níveis de vibração acima do desejável em apenas um dos mancais. Isto pode ser provocado pelo posicionamento não equidistante do disco em relação aos mancais e por uma excitação de desbalanceamento, por exemplo. Neste caso é interessante introduzir amortecimento em apenas um dos mancais. É analisada a resposta deste sistema (rotor vertical bi-apoiado) quando da introdução de apenas um amortecedor, no mancal 'B' (fig. 4.17).

Inicialmente escreve-se as equações de movimento do sistema com amortecimento apenas no mancal 'B' (eq. 4.17).

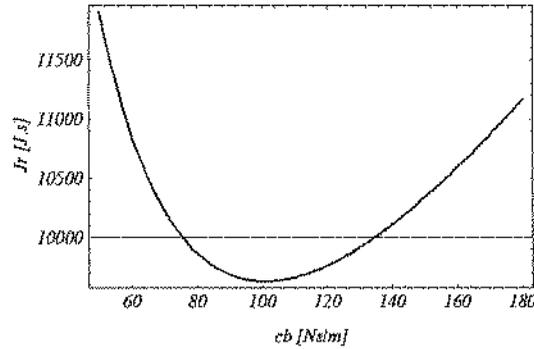


Figura 4.22: Funcional de  $J_r$  de otimização

$$\begin{bmatrix} \frac{I_t + l_2^2 m}{(l_1 + l_2)^2} & \frac{-I_t + l_1 l_2 m}{(l_1 + l_2)^2} \\ \frac{-I_t + l_1 l_2 m}{(l_1 + l_2)^2} & \frac{I_t + l_1^2 m}{(l_1 + l_2)^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{z}_a \\ \ddot{z}_b \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{i I_t \Omega}{(l_1 + l_2)^2} & \frac{i I_p \Omega}{(l_1 + l_2)^2} \\ \frac{i I_p \Omega}{(l_1 + l_2)^2} & c - \frac{i I_p \Omega}{(l_1 + l_2)^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{z}_a \\ \dot{z}_b \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_a \\ z_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.17)$$

O próximo passo é resolver a equação de Ljapunov (2.52) para obter a matriz  $[P]$  solução. A partir da matriz  $[P]$  obtida no passo anterior soluciona-se a equação de otimização do traço da matrix  $[H]$ . A variação do funcional  $J_r$  de otimização em função do valor de amortecimento introduzido no mancal 'B' é mostrada na figura 4.22.

Analisando a figura 4.22 nota-se que o valor ótimo de amortecimento é menor do que o anteriormente obtido e que os valores do funcional são maiores do que os obtidos anteriormente. A explicação é que com a introdução de apenas um amortecedor uma menor quantidade de energia poderá ser retirada do sistema, implicando em níveis maiores de energia armazenada. No entanto o fato de se introduzir apenas um amortecedor no sistema não implica necessariamente em um valor maior do amortecimento ótimo, como pode ser verificado.

Os resultados obtidos pela introdução do valor ótimo de amortecimento são mostrados nas figuras 4.23 e 4.24 para um sistema homogêneo e com as seguintes condições iniciais:

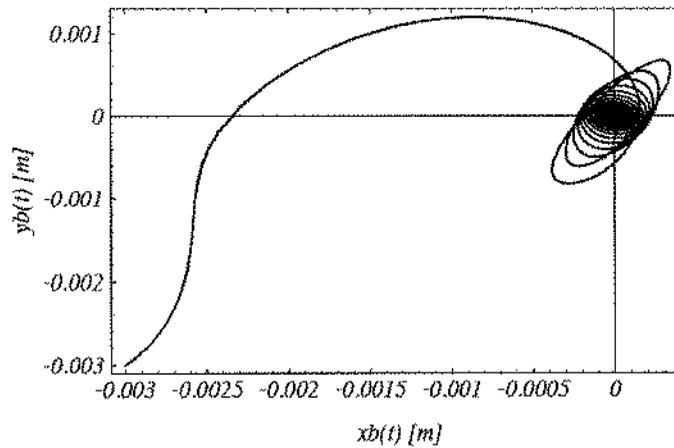


Figura 4.23: Órbita do mancal amortecido

$$x_a(0) = 0.003 \text{ m}$$

$$y_a(0) = 0.003 \text{ m}$$

$$x_b(0) = -0.003 \text{ m}$$

$$y_b(0) = -0.003 \text{ m}$$

$$\dot{x}_a(0) = \dot{x}_b(0) = \dot{y}_a(0) = \dot{y}_b(0) = 0$$

e tempo de simulação de 1 s.

Como pode-se notar, os resultados obtidos são bons, mostrando que o valor ótimo obtido para o amortecimento do sistema, através do critério de minimização da energia, produz bons resultados de redução de vibrações.

### 4.3 Conclusões

Neste capítulo pode-se verificar como certos parâmetros físicos de uma estrutura influenciam o valor do amortecimento a ser introduzido. De maneira geral, o aumento das frequências naturais do sistema não amortecido, e da sua rotação provocam um aumento do valor do amortecimento ótimo.

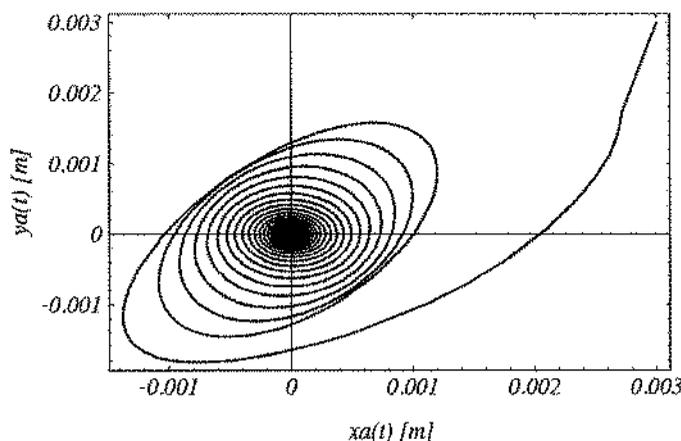


Figura 4.24: Órbita do mancal não amortecido

Comparou-se as órbitas, diagramas plano-fase e curvas de energia de sistemas com constantes de amortecimento próximas da ótima. Nota-se que um valor de amortecimento maior que o ótimo resulta um funcional de energia menor no início mas com o tempo seu valor aumenta além do ótimo (fig. 4.8). A diminuição da órbita proporcionada pelo aumento do amortecimento não é muito significativa, mostrando que o valor obtido pelo critério de otimização produz boa redução dos níveis de vibração.

Constatou-se também que o valor ótimo obtido através do modelo linear é válido para a representação não linear de um mesmo sistema (figs. 4.15 e 4.16). Isto significa que para efeito de otimização do amortecimento pode-se realizar esta otimização sobre o modelo linear desta estrutura, e depois aplicá-lo ao modelo não linear.

E finalmente, pode-se verificar no sistema de 4 graus de liberdade que, mesmo com a introdução de um único amortecedor em um dos mancais, o resultado obtido é bom, como pode-se verificar nas figuras 4.23 e 4.24. Este fato é explicado pois o processo de otimização já considera que o sistema possui apenas um amortecedor.

# Capítulo 5

## Sistema de Seis Graus de Liberdade

### 5.1 Introdução

No capítulo anterior foi mostrado como determinar o amortecimento ótimo de um sistema mecânico rotativo de maneira a minimizar a energia total armazenada neste sistema. Foi mostrado também que o aumento da rigidez e da velocidade de rotação elevam o valor do amortecimento ótimo. Neste capítulo procura-se mostrar os resultados da otimização do amortecimento quando se objetiva minimizar a energia de apenas alguns modos de interesse. Será estudado um modelo de seis graus de liberdade que representa uma aproximação inicial do sistema real - uma bancada de testes (fig. 5.1 [22]) existente no Departamento de Projeto Mecânico.

O objetivo desta etapa da dissertação é verificar o comportamento do critério quando este é aplicado a um sistema excitado, no caso uma excitação de desbalanceamento. Atualmente a bancada de testes em questão não pode ser colocada em velocidades de rotação próximas ao seu terceiro modo natural de vibrar. É feito o cálculo do amortecimento que deve ser introduzido no mancal, local de melhor acesso, para que o terceiro modo de vibrar tenha sua energia armazenada minimizada, e então são analisados os resultados desta otimização.

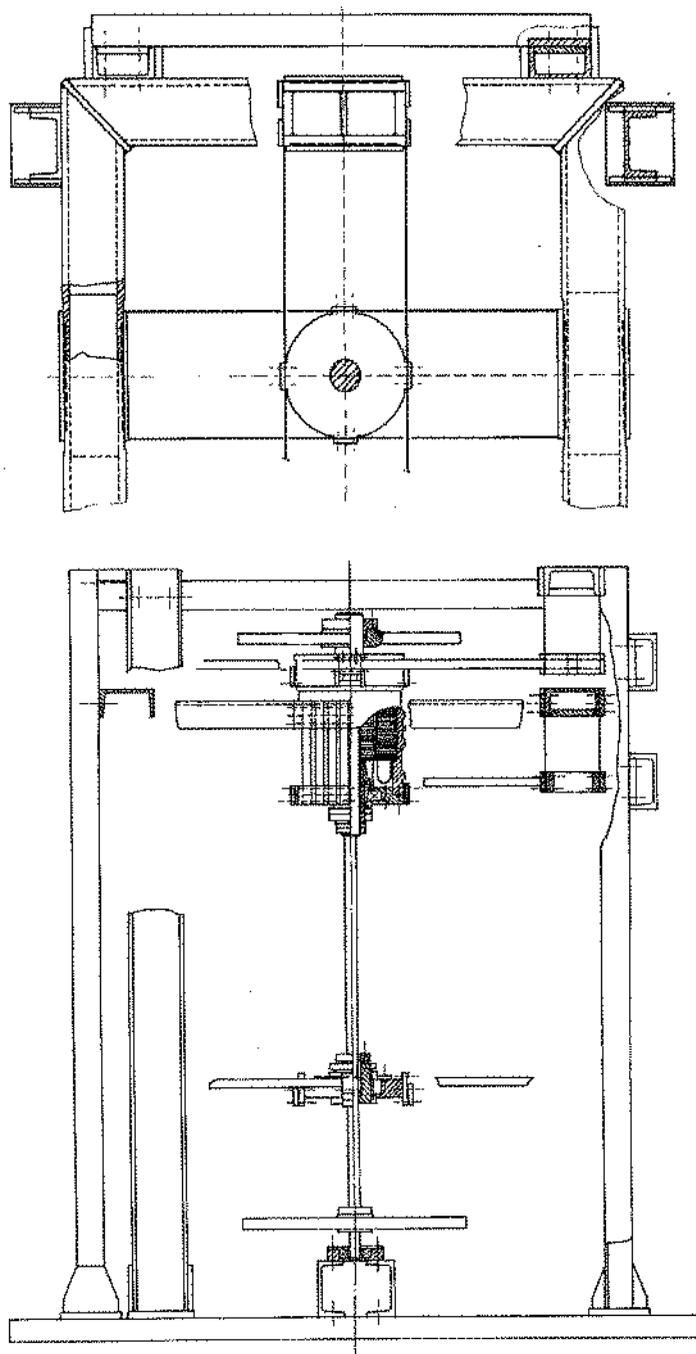


Figura 5.1: Diagrama da bancada de testes

## 5.2 O Modelo matemático

A bancada de testes em estudo é aqui descrita pelo modelo matemático segundo a figura 5.2:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} M_m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_m \\ \ddot{x}_d \\ \ddot{\varphi}_y \\ \ddot{y}_m \\ \ddot{y}_d \\ \ddot{\varphi}_x \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I_p \Omega \\ 0 & 0 & 0 & C_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_p \Omega & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_m \\ \dot{x}_d \\ \dot{\varphi}_y \\ \dot{y}_m \\ \dot{y}_d \\ \dot{\varphi}_x \end{Bmatrix} + \\
 & + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & 0 & 0 & 0 \\ K_{12} & K_{22} & K_{23} & 0 & 0 & 0 \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{11} & K_{12} & -K_{13} \\ 0 & 0 & 0 & K_{12} & K_{22} & -K_{23} \\ 0 & 0 & 0 & -K_{13} & -K_{23} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_m \\ x_d \\ \varphi_y \\ y_m \\ y_d \\ \varphi_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ M_d \varepsilon \Omega^2 \cos \Omega t \\ 0 \\ 0 \\ M_d \varepsilon \Omega^2 \sin \Omega t \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.1)
 \end{aligned}$$

onde:

$M_m$  é a massa do mancal,

$M_d$  é a massa do disco inferior,

$I_t = \frac{M_d(3r_d^2 + e_d^2)}{12}$  é o momento de inércia transversal do disco,

$I_p = \frac{M_d r_d^2}{2}$  é o momento de inércia polar do disco,

$\Omega$  é a velocidade de rotação própria do disco,

$\varepsilon$  é a distância entre o centro geométrico e o centro de gravidade do disco,

$x_m, y_m, x_d$  e  $y_d$  são respectivamente os deslocamentos nas direções  $x$  e  $y$  do mancal e do disco, e  $\varphi_x$  e  $\varphi_y$  são as rotações do disco em torno dos eixos  $x$  e  $y$  respectivamente.

$$K_{11} = \frac{12EI}{l_1^3} + \frac{12EI}{l_2^3} + K,$$

$$K_{12} = -\frac{12EI}{l_2^3},$$

$$K_{13} = -K_{23} = \frac{6EI}{l_2^2},$$

$$K_{22} = \frac{12EI}{l_2^3},$$

$$K_{33} = \frac{4EI}{l_2},$$

$$K_x = K_y = K,$$

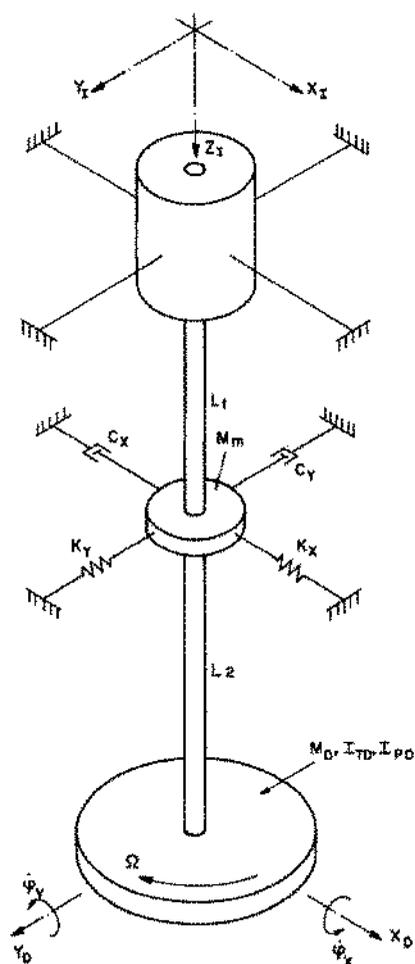


Figura 5.2: Diagrama esquemático

$$C_x = C_y = C_m, \text{ e}$$

$I = \frac{\pi d^4}{64}$  é o momento de inércia de área do eixo.

Os valores das constantes do problema são:

$$M_m = 15 \text{ kg},$$

$$M_d = 10 \text{ kg},$$

$$I_t = 0.25 \text{ kg.m}^2,$$

$$I_p = 0.50 \text{ kg.m}^2,$$

$$r_d = 0.316 \text{ m},$$

$$l_1 = 0.40 \text{ m},$$

$$l_2 = 0.40 \text{ m},$$

$$\varepsilon = 2 \times 10^{-4} \text{ m (estimado)},$$

$$E = 2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2,$$

$$I = 7.2 \times 10^{-9} \text{ m}^4, \text{ e}$$

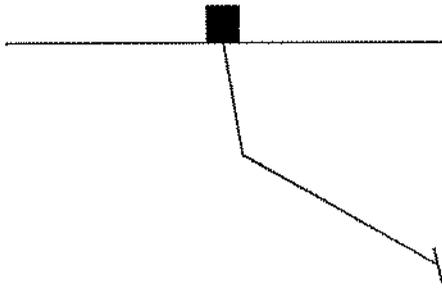
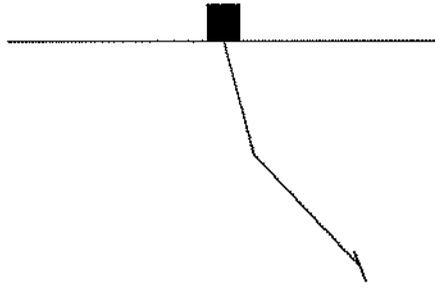
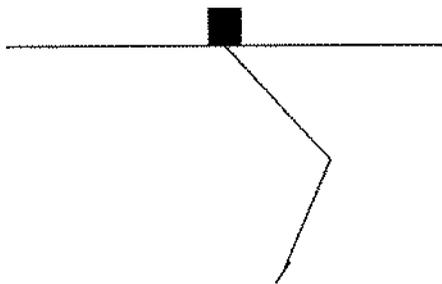
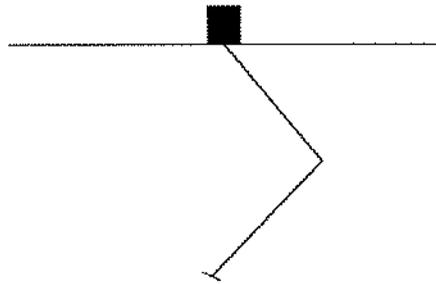
$$\Omega = 110 \text{ rad/s}.$$

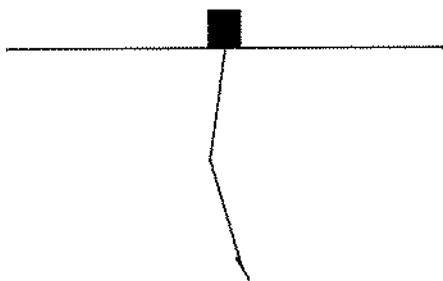
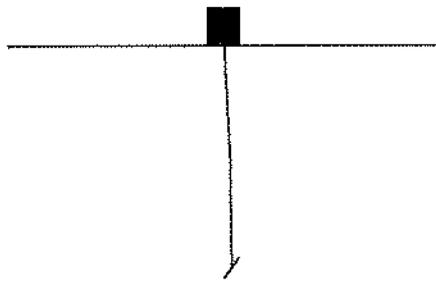
Inicialmente determinam-se as frequências e modos naturais desta estrutura. Resolvendo o problema de autovalores e autovetores obtém-se as seguintes frequências naturais:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 45.8 \text{ rad/s} & \omega_2 &= 89.0 \text{ rad/s} \\ \omega_3 &= 133.9 \text{ rad/s} & \omega_4 &= 188.5 \text{ rad/s} \\ \omega_5 &= 299.1 \text{ rad/s} & \omega_6 &= 421.2 \text{ rad/s} \end{aligned} \quad (5.2)$$

e os respectivos modos naturais, figuras 5.3, 5.4, 5.5, 5.6, 5.7 e 5.8. As representações são esquemáticas, unindo-se simplesmente por retas os dois pontos ressaltados e indicando-se a posição angular do disco. Não se procura representar o eixo, engastado como é suposto nos seus dois extremos.

Analisando os modos naturais de vibrar da estrutura nota-se que os 1<sup>o</sup> e 2<sup>o</sup> modos são basicamente de translação da extremidade do eixo, que os 3<sup>o</sup> e 4<sup>o</sup> modos são de translação do mancal, e que os 5<sup>o</sup> e 6<sup>o</sup> modos são de rotação do disco. Os modos ocorrem aos pares correspondendo à abertura giroscópica dos autovalores no diagrama de Campbell, representando um deles a precessão direta e o outro de precessão retrógrada. Portanto, introduzir amortecimento no mancal é mais efetivo nos modos de translação do mancal, ou seja, nos modos 3<sup>o</sup> e 4<sup>o</sup>. Para os demais modos é de se esperar que o valor de amortecimento a ser introduzido seja alto, já que os deslocamentos do mancal são pequenos comparados aos demais deslocamentos do sistema.

Figura 5.3: 1<sup>o</sup> modo naturalFigura 5.4: 2<sup>o</sup> modo naturalFigura 5.5: 3<sup>o</sup> modo naturalFigura 5.6: 4<sup>o</sup> modo natural

Figura 5.7: 5<sup>o</sup> modo naturalFigura 5.8: 6<sup>o</sup> modo natural

### 5.3 Formulação do problema de otimização

O método de otimização consiste na solução de uma equação de Ljapunov, como já foi explicado em 2.5.2, equação (2.52).

$$-[Q] = [A]^T [P] + [P] [A]$$

O funcional a ser otimizado é dado por (2.54):

$$J = \int_0^{\infty} \{z\}^T [Q] \{z\} dt = \{z_0\}^T [P] \{z_0\} \longrightarrow \text{mínimo}$$

onde o vetor  $\{z_0\}$  é vetor de estado inicial do sistema.

Como já foi mencionado no item 2.5.2 esta solução depende das condições iniciais. Quando é desejado a otimização de um modo em particular, não é necessário utilizar as hipóteses sobre as condições iniciais consideradas na equação (3.26) e nem resolver a equação de minimização do traço da matriz  $[H]$  (3.30). Ao se fixar o vetor de estado inicial do sistema  $\{z_0\}$  como sendo o autovetor de um modo em particular, obtém-se o amortecimento ótimo para este modo em questão, já que este procedimento equivale a posicionar o sistema na forma deste modo em estudo.

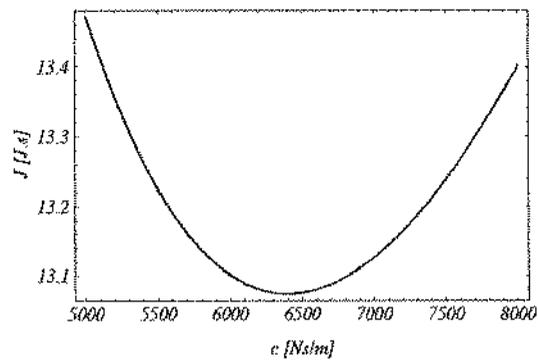
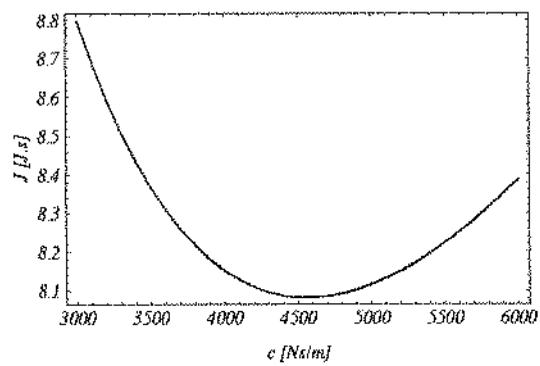
O processo de otimização para um dos modos do sistema é mais direto, não necessitando de hipóteses sobre as condições iniciais do sistema (eq. 3.26). Logo, a solução do problema vem da procura por um mínimo valor para a solução da equação (2.52), através da solução da equação (2.54) para diferentes valores de  $C_m$ .

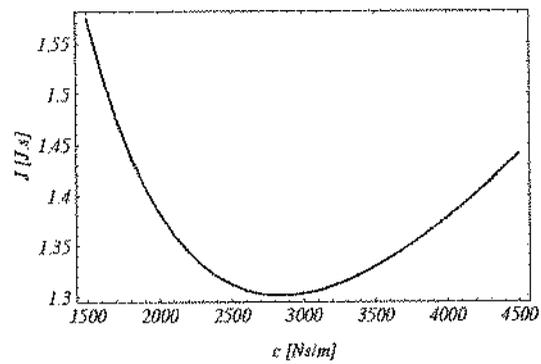
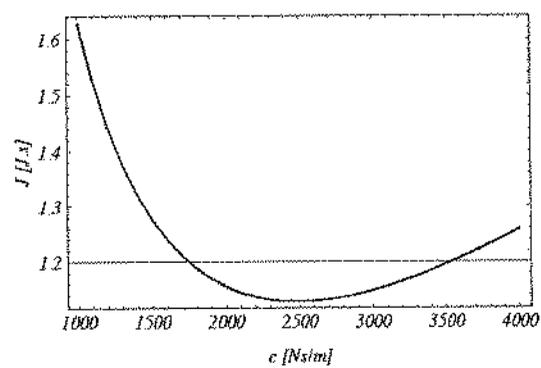
Este problema foi resolvido para cada modo natural de vibrar do sistema, e os resultados são mostrados a seguir, para a rotação máxima que se pode atingir com segurança atualmente, velocidade esta entre a segunda e terceira frequências naturais,  $\Omega = 110 \text{ rad/s}$ .

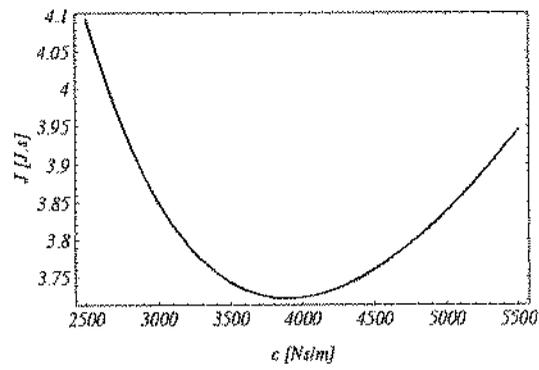
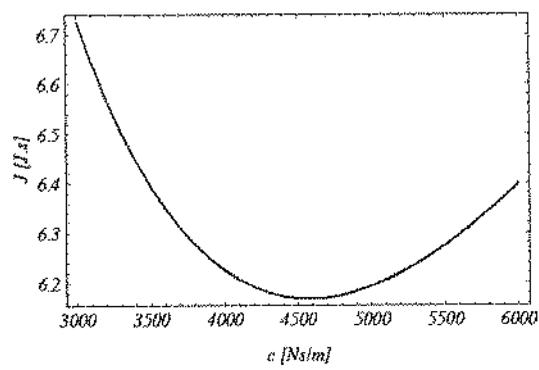
Os valores de amortecimento ótimo obtidos para cada modo são:

$$\begin{aligned} C_{m_1} &= 6400 \text{ N.m/s} & C_{m_2} &= 4600 \text{ N.m/s} \\ C_{m_3} &= 2800 \text{ N.m/s} & C_{m_4} &= 2500 \text{ N.m/s} \\ C_{m_5} &= 3900 \text{ N.m/s} & C_{m_6} &= 4600 \text{ N.m/s} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Como era esperado, para os modos que não envolvem deslocamentos do mancal da ordem de grandeza dos demais deslocamentos do sistema, o valor do amortecimento a ser introduzido é alto, e mesmo assim o funcional  $J$  possui valores altos comparados aos obtidos para os demais modos. Para o terceiro modo, o valor do amortecimento a ser

Figura 5.9: Funcional  $J$  do 1<sup>o</sup> modoFigura 5.10: Funcional  $J$  do 2<sup>o</sup> modo

Figura 5.11: Funcional  $J$  do 3<sup>o</sup> modoFigura 5.12: Funcional  $J$  do 4<sup>o</sup> modo

Figura 5.13: Funcional  $J$  do 5<sup>o</sup> modoFigura 5.14: Funcional  $J$  do 6<sup>o</sup> modo

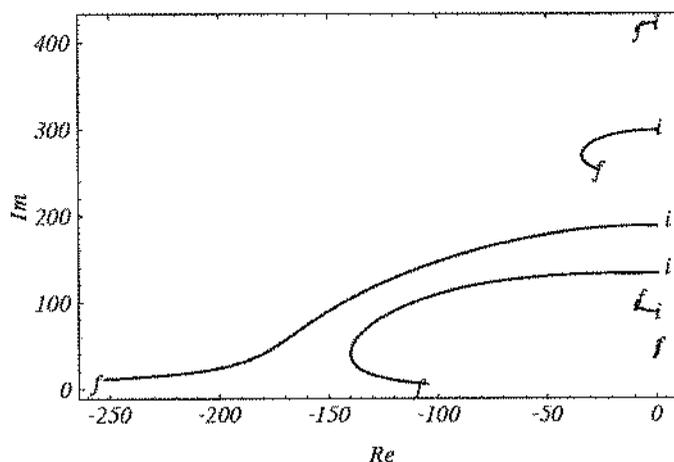


Figura 5.15: Trajetórias dos autovalores

introduzido é  $C_m = 2800 N.s/m$ . Com a introdução deste amortecimento no sistema os autovalores passam a ser os seguintes:

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= -0.1 + 45.8i \text{ rad/s} & \lambda_2 &= -8.5 + 87.0i \text{ rad/s} \\
 \lambda_3 &= -60.7 + 127.8i \text{ rad/s} & \lambda_4 &= -78.8 + 162.8i \text{ rad/s} \\
 \lambda_5 &= -31.4 + 280.2i \text{ rad/s} & \lambda_6 &= -7.1 + 417.6i \text{ rad/s}
 \end{aligned}
 \tag{5.4}$$

Pode-se notar que o amortecimento obtido não altera muito as frequências naturais do sistema.

Com a finalidade de visualizar os efeitos da introdução de amortecimento sobre os modos do sistema, é traçado o diagrama do lugar das raízes (fig. 5.15), o qual mostra as trajetórias dos autovalores em função do aumento de amortecimento. Neste diagrama o valor do amortecimento situa-se no intervalo de 0 a  $6000 N.s/m$ , indicados respectivamente pelas letras ' $\psi$ ' e ' $f$ '.

Pode-se notar que a introdução do amortecimento no mancal pouco afeta os primeiro, segundo, quinto e sexto modos, enquanto que afeta bastante os terceiro e quarto modos, como foi previsto ao se analisar os autovetores deste sistema (fig. 5.15).

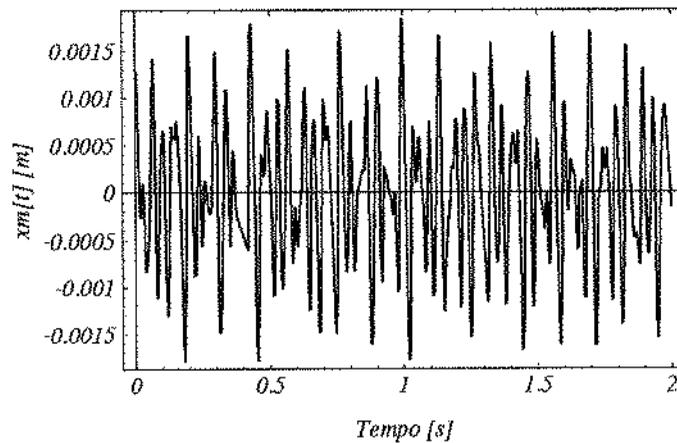


Figura 5.16: Amplitudes de vibração do mancal na direção  $x$  -  $C_m = 0$

A seguir a resposta do sistema em estudo é obtida para três situações diferentes, todas considerando a excitação de desbalanceamento:

- Sem amortecimento (figs. 5.16 e 5.20),
- Com o amortecimento  $C_m = 2800 \text{ N.s/m}$  obtido pelo critério de minimização da energia de vibração, aplicado ao terceiro modo da estrutura (figs. 5.18 e 5.22), e
- Com um amortecimento maior do que o obtido pelo critério de otimização,  $C_m = 4800 \text{ N.s/m}$  (figs. 5.19 e 5.23).

As condições iniciais utilizadas para as simulações são tais que o sistema vibre no terceiro modo, a fim de verificar os resultados obtidos pela otimização. São mostrados os diagramas das órbitas do mancal e do disco para comparação dos resultados..

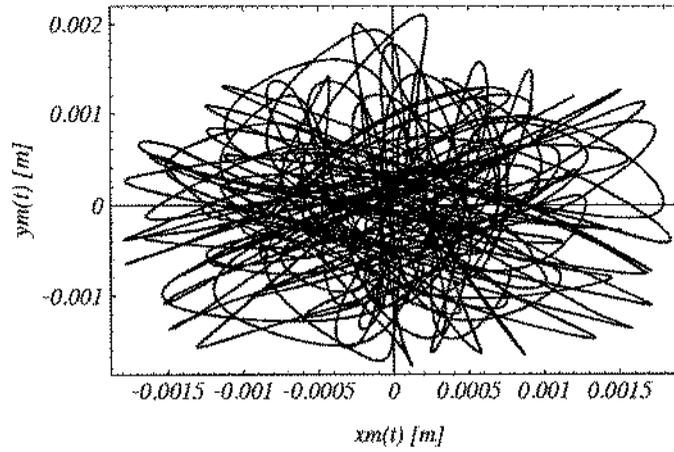


Figura 5.17: Órbita do mancal -  $C_m = 0$

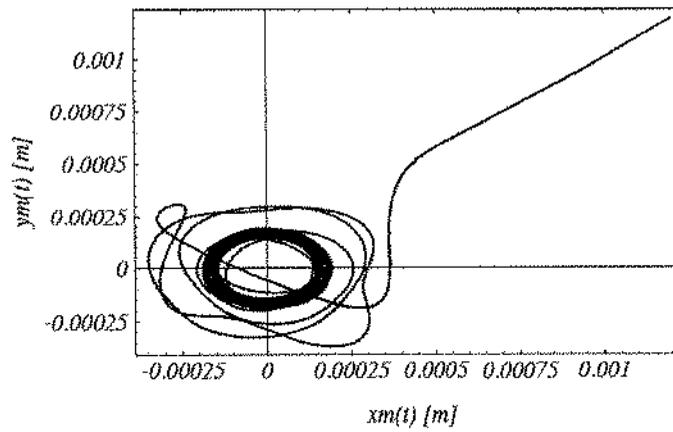


Figura 5.18: Órbita do mancal -  $C_m = 2800$

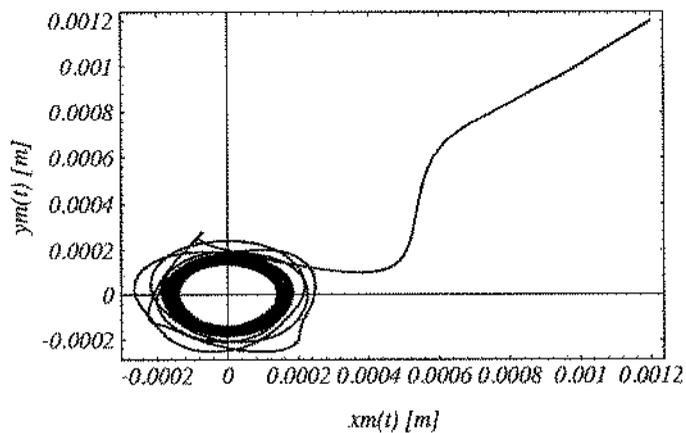


Figura 5.19: Órbita do mancal -  $C_m = 4800$

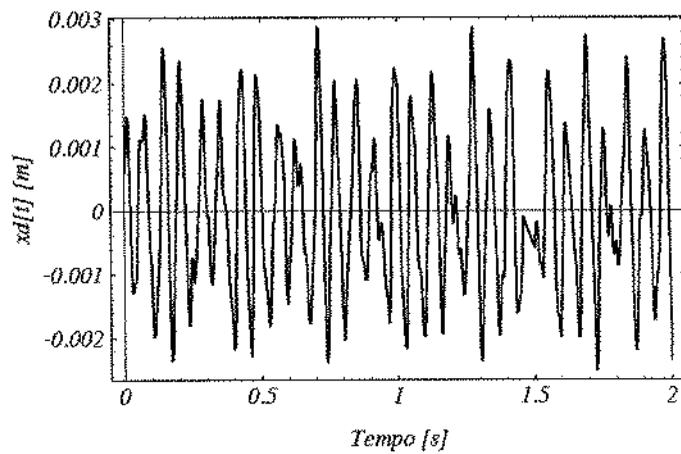


Figura 5.20: Amplitudes de vibração do disco na direção  $x$  -  $C_m = 0$

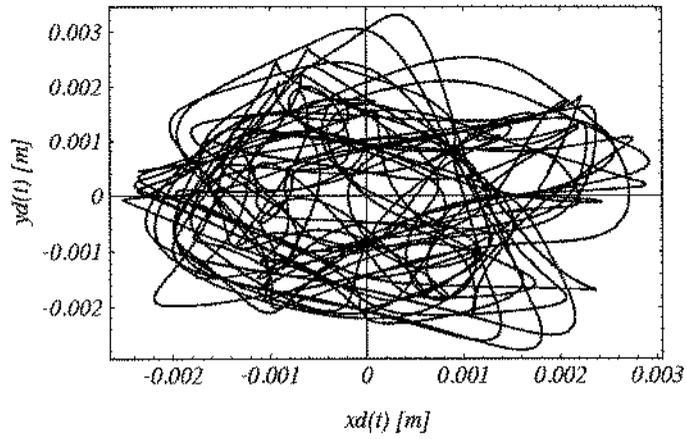


Figura 5.21: Órbita do disco -  $C_m = 0$

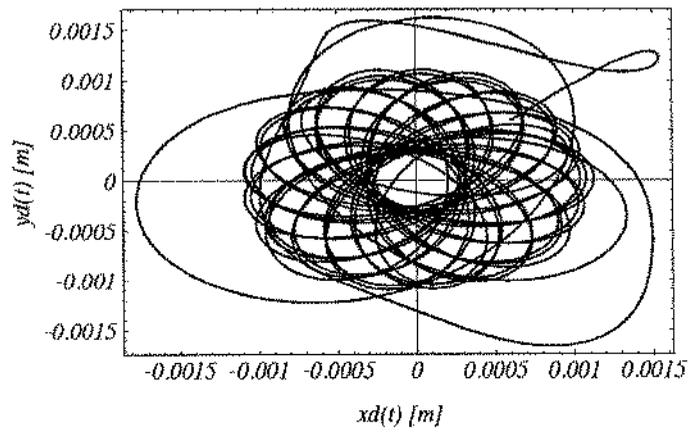


Figura 5.22: Órbita do disco -  $C_m = 2800$

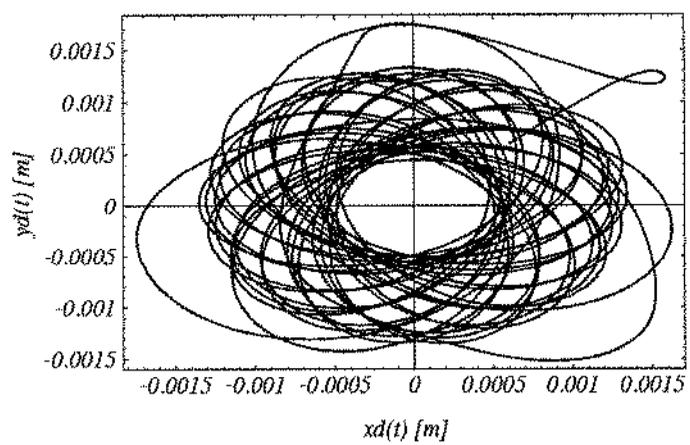


Figura 5.23: Órbita do disco -  $C_m = 4800$

## 5.4 Conclusões

Nota-se que a introdução de amortecimento no mancal do sistema produz bons resultados em relação à minimização das amplitudes de vibração do sistema, principalmente as do próprio mancal.

A introdução de um amortecimento maior do que o obtido pelo critério de otimização não implica necessariamente em uma redução dos níveis de vibração do disco e do mancal. Como pode-se notar, o valor de  $C_m = 4800 \text{ N.s/m}$  resulta em níveis de vibração ligeiramente menores no mancal, enquanto que maiores no disco.

Em ambos os casos, os níveis de vibração são muito reduzidos no mancal, e são reduzidos a aproximadamente à metade do valor inicial no disco, comparados ao sistema não-amortecido. Logo, a introdução de amortecimento no mancal leva a uma boa redução dos níveis de vibração do sistema como um todo e pode fazer com que a bancada de testes passe pela sua terceira frequência natural.

## Capítulo 6

### Conclusões Finais e Próximas Etapas

Nesta dissertação são analisados quatro diferentes critérios de otimização do amortecimento de estruturas não rotativas. Escolheu-se utilizar o critério da minimização da energia armazenada em um sistema como critério de otimização do amortecimento em sistemas rotativos. Para a adaptação deste critério foi necessária uma análise das expressões não lineares e “linearizadas” da energia armazenada em um sistema rotativo. Nesta análise deparou-se com questões a respeito da melhor maneira de se expressar a energia armazenada em um sistema rotativo descrito por equações de movimento lineares, já que não existe uma única expressão. Decidiu-se por uma das formas de se escrever esta energia (eq. 3.21) pois esta forma escolhida apresenta características conservativas, e porque mostrou resultados coerentes ao ser utilizada no processo de otimização do amortecimento. Estudou-se o comportamento de alguns sistemas mecânicos rotativos sob a ação de amortecimento. Conclui-se que os resultados obtidos pelo processo de otimização do amortecimento são bons, reduzindo os níveis de vibração do sistema de maneira satisfatória. Foram estudados também as diferenças existentes entre as respostas dos modelos linear e não linear de uma mesma estrutura e verificou-se que o processo de otimização pode ser realizado sobre o modelo linear. Finalmente estudou-se um problema real, onde procura-se encontrar uma solução para o problema de grandes amplitudes de vibração devidas a uma excitação de desbalanceamento de uma bancada de testes. Novamente os resultados obtidos são bons.

Com o presente estudo teórico conclui-se que a otimização do parâmetro de amortecimento em sistemas rotativos tendo como objetivo a minimização da energia armazenada no sistema produz bons resultados. No entanto é necessária uma verificação experimental dos resultados aqui obtidos, e a realização de um experimento que possa analisar, por exemplo, se a introdução do amortecimento sugerido no capítulo anterior possibilita a passagem pela 3<sup>a</sup> frequência natural da bancada de testes (fig. 5.1).

Um experimento interessante seria o de se posicionar um atuador magnético de maneira a atuar sobre o mancal intermediário da bancada de testes, e de forma que o controle deste atuador seja proporcional às velocidades de vibração do mancal. O amortecimento ótimo seria determinado em tempo real e então poderia ser verificado o comportamento do sistema durante acelerações e desacelerações.

Deve-se pesquisar a possibilidade do uso de critérios de busca do valor ótimo do amortecimento através de técnicas de análise do gradiente da função de otimização a fim de reduzir o tempo de cálculo.

Deve-se também realizar um estudo teórico mais aprofundado a respeito da formulação da energia armazenada em sistemas rotativos, para que se tenha um maior embasamento teórico.

Uma outra linha de pesquisa é a de estudar a otimização do amortecimento com a finalidade de minimizar a energia armazenada no sistema, mas com o objetivo de se realizar um controle ativo da estrutura.

#### SEGUNDO AXIOMA DE VAIL

“ A QUANTIDADE DE TRABALHO A SER FEITO AUMENTA PROPORCIONALMENTE À QUANTIDADE DE TRABALHO JÁ REALIZADO.”

FRASE EXTRAÍDA DO SOFTWARE FORTUNE.

# BIBLIOGRAFIA

- [1] **Lückel, J.** - Die aktive Dämpfung von Vertikal schwingungen bei Kraftfahrzeugen - Publicação Interna - T. U. München, 1972.
- [2] **Müller, Peter C. & Weber, Hans I.** - Analysis and optimization of certain qualities of controllability and observability for linear dynamical systems, Proc. 2<sup>nd</sup> IFAC Symposium on Multivariable Technical Control Systems, Düsseldorf, 1971.
- [3] **Brommundt, E.** - Stabilitätsaussagen mit Hilfe von Energieausdrücken bei einem Turborotor mit Kreiseinfluß - Ing. Arch. 42 , S. 208-214, 1973.
- [4] **Müller, Peter C. & Lückel, J.** - Optimal Feedback System Design with Disturbance Rejection - Problems of Control and Information Theory Vol. 6 pp. 211-227, 1977.
- [5] **Lückel, J. & Müller, Peter C.** - Verallgemeinerte Störgrößenaufschaltung bei unvollständigen Zustandskompensation am Beispiel einem aktiven Federung, Regelungstechnik 27 heft 9 pp. 281-288, 1979.
- [6] **Schulz, G. & Heibold, G.** - Integrated actuator/sensor positioning and feedback design for large flexible structures, AIAA Guidance and Control Conference, 1982.
- [7] **DeCaro, Sandra M. & Inman, Daniel J.** - Stable eigenvalue placement by constrained optimization, Dynamics and Stability of Systems, Vol. 5 Nº 4, 1990.
- [8] **Lourenção, P. T. M.** - Otimização do Posicionamento de Sensores e Atuadores Visando a Obtenção de Modelos Reduzidos para a Síntese de Reguladores Ótimos em Controle de Estruturas Flexíveis, Tese de Doutorado - INPE, 1988.
- [9] **Wang, B. P. & Pilkey, W. D.** - Optimal damper location in the vibration control of large space structures. Proc. AIAA Symposium on Dynamics and Control of Large Flexible Spacecraft pp. 379-392, Virginia Polytechnic Institute, Blacksburg, Va., USA, 1981.
- [10] **Kaniantira, J. N. & Speckhart, F. H.** - A technique for determining damping values and damper locations in multidegree-of-freedom systems, Journal of Engineering for Industry - Transactions of the ASME pp.1-6, 1975.

- [11] **Ross, A. D. S. & Inman, D. J.** - Settling time of underdamped linear lumped parameter systems, *Journal of Sound and Vibrations*, 1990, 140(1) pag. 117-127.
- [12] **Gürgöze, M. / Bajkowski, J. / Müller, Peter C.** - Optimale Positionierung von Dämpfern, Stellgliedern und Sensoren in Mehrkörpersystemen, Bergische Universität Gesamthochschule Wuppertal, 1990.
- [13] **Müller, Peter C. & Gürgöze, M.** - Optimale Dämpfungsstärke eines viskosen Dämpfers bei einem Schwingungssystem, Kurzvortrag bei GAMM-Tagung 1990, Hannover.
- [14] **Chen, C. T.** - *Linear System Theory and Design*, CBS College Publishing, 1984.
- [15] **Müller, Peter C. & Schiehlen, Werner O.** - *Lineare Schwingungen*, Akademische Verlagsgesellschaft, 1976.
- [16] **Müller, Peter C.** - *Stabilität und Matrizen*, Springer Verl., 1977.
- [17] **Roseau, M.** - *Vibrations des Systèmes Mécaniques - Méthodes analytiques et applications* - Masson - 1984.
- [18] **Chen, C. F.** - A Note on Expanding  $P.A + A^T.P = -Q$  - *IEEE Transactions on Automatic Control*, February 1968, pag. 122-123.
- [19] **Kuo, B. C.** - *Automatic Control Systems (5<sup>th</sup> edition)*, Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, 1987.
- [20] **Inman, D. J. & Andry, A. N. Jr.** - Some results on the nature of eigenvalues of discrete damped linear systems, *Journal of Applied Mechanics* 47, 1980, pag. 927-930.
- [21] **Stewart, G. W.** - *Introduction to Matrix Computations*, Academic Press Inc., New York, 1973.
- [22] **Dana, S. S.** - *Análise Dinâmica de Rotores com Eixo Vertical* - Tese de Doutorado - Faculdade de Engenharia Mecânica - UNICAMP, 1987.
- [23] **Wolfram, Stephen** - *Mathematica - A System for Doing Mathematics by Computer*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1991.