

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR Thais Godoy
Vazquez E APROVADA
PELA COMISSÃO JULGADORA EM 26 / 02 / 2008
Marco Bittencourt
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO E REGRAS DE INTEGRAÇÃO TENSORIZÁVEIS PARA O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS DE ALTA ORDEM

Autora: Thais Godoy Vazquez
Orientador: Prof. Dr. Marco Lúcio Bittencourt

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO E REGRAS DE INTEGRAÇÃO TENSORIZÁVEIS PARA O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS DE ALTA ORDEM

Autora: Thais Godoy Vazquez

Orientador: Prof. Dr. Marco Lúcio Bittencourt

Curso: Engenharia Mecânica

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Tese de doutorado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica como requisito para a obtenção do título de Doutora em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2008
S.P. - Brasil

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

V479f Vazquez, Thaís Godoy
Funções de interpolação e regras de integração tensorizáveis
para o método de elementos finitos de alta ordem / Thaís Godoy
Vazquez.--Campinas, SP: [s.n.], 2008.

Orientador: Marco Lúcio Bittencourt.
Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Campinas,
Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Método dos elementos finitos. 2. Análise espectral. 3.
Lagrange, Funções de. 4. Integração numérica. 5. Polinômios
ortogonais. I. Bittencourt, Marco Lúcio. II. Universidade
Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III.
Título.

Titulo em Inglês: Tensor-based interpolation functions and integration rules for the high
order finite elements methods

Palavras-chave em Inglês: Finite elements method, Spectral methods, High-order
methods, Shape functions, Tensorization, Quadrature rules,
Jacobi polynomials

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Doutor em Engenharia Mecânica

Banca examinadora: Renato Pavanello, Clovis Sperb de Barcellos, Bruno Alexandre
Soares da Costa, Philippe Remy Bernard Devloo

Data da defesa: 26/02/2008

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

TESE DE DOUTORADO

**FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO E REGRAS DE
INTEGRAÇÃO TENSORIZÁVEIS PARA O
MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS DE ALTA
ORDEM**

Autora: Thais Godoy Vazquez

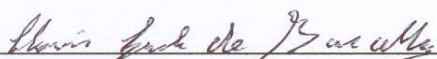
Orientador: Prof. Dr. Marco Lúcio Bittencourt



Prof. Dr. Marco Lúcio Bittencourt, Presidente
DPM/FEM/UNICAMP



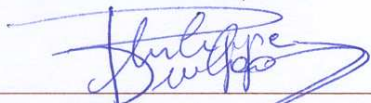
Prof. Dr. Renato Pavanello
DMC/FEM/UNICAMP



Prof. Dr. Clovis Sperb de Barcellos
DEM/UFSC



Prof. Dr. Bruno Alexandre Soares da Costa
Instituto de Matemática/UFRJ



Prof. Dr. Philippe Remy Bernard Devloo
DES/FEC/UNICAMP

Campinas, 26 de Fevereiro de 2008.

Aos meus pais Ramon e Elisabete, e aos meus irmãos Mariana e Ramon, dedico.

Agradecimentos

Ao meu orientador Prof. Dr. Marco Lúcio Bittencourt, pela oportunidade e confiança depositada em mim, sempre disposto a me ajudar, adicionando conhecimentos com muita sabedoria, dedicação, paciência e amizade, tornando possível a realização deste trabalho.

Aos meus adorados pais, Ramon e Elisabete, aos meus irmãos, Mariana e Ramon, ao Gleberson e à Dani, pela amizade e carinho em todos os momentos.

Ao Pedro e à Júlia que, principalmente no finalzinho deste trabalho contribuíram enormemente com a minha felicidade e tranqüilidade.

Em especial, à minha irmã e comadre Mariana, que me acompanha, incentiva e ajuda, sempre.

A todos os professores e funcionários, colegas de pós-graduação, em especial, Ludmila, Rodrigo, Edilson e Fabiano, pela ajuda e companheirismo.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

E, enfim, à Deus, que é o responsável por tudo.

“O gênio é composto por 2% de talento
e de 98% de perseverante aplicação.”

Ludwig Van Beethoven

Resumo

VAZQUEZ, Thais Godoy, *Funções de Interpolação e Regras de Integração Tensorizáveis para o Método de Elementos Finitos de Alta Ordem*, Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2008. 153p. Tese de Doutorado.

Este trabalho tem por objetivo principal o desenvolvimento de funções de interpolação e regras de integração tensorizáveis para o Método dos Elementos Finitos (MEF) de alta ordem *hp*, considerando os sistemas de referências locais dos elementos. Para isso, primeiramente, determinam-se ponderações específicas para as bases de funções de triângulos e tetraedros, formada pelo produto tensorial de polinômios de Jacobi, de forma a se obter melhor esparsidade e condicionamento das matrizes de massa e rigidez dos elementos. Além disso, procuram-se novas funções de base para tornar as matrizes de massa e rigidez mais esparsas possíveis. Em seguida, escolhe-se os pontos de integração que otimizam o custo do cálculo dos coeficientes das matrizes de massa e rigidez usando as regras de quadratura de Gauss-Jacobi, Gauss-Radau-Jacobi e Gauss-Lobatto-Jacobi. Por fim, mostra-se a construção de uma base unidimensional nodal que permite obter uma matriz de rigidez praticamente diagonal para problemas de Poisson unidimensionais. Discute-se ainda extensões para elementos bi e tridimensionais.

Palavras Chave

Método de Elementos Finitos, Métodos Espectrais, Métodos de Alta Ordem, Funções de Base, Tensorização, Regras de Quadratura, Polinômios de Jacobi.

Abstract

VAZQUEZ, Thais Godoy, *Tensor-based Interpolation Functions and Integration Rules for the High Order Finite Elements Methods*, Campinas: Faculty of Mechanical Engineering (FEM), State University of Campinas (UNICAMP), 2008. 153p. Phd Thesis.

The main purpose of this work is the development of tensor-based interpolation functions and integration rules for the *hp* High-order Finite Element Method (FEM), considering the local reference systems of the elements. We first determine specific weights for the shape functions of triangles and tetrahedra, constructed by the tensorial product of Jacobi polynomials, aiming to obtain better sparsity and numerical conditioning for the mass and stiffness matrices of the elements. Moreover, new shape functions are proposed to obtain more sparse mass and stiffness matrices. After that, integration points are chosen that optimize the cost for the calculation of the coefficients of the mass and stiffness matrices using the rules of quadrature of Gauss-Jacobi, Gauss-Radau-Jacobi and Gauss-Lobatto-Jacobi. Finally, we construct an one-dimensional nodal shape function that obtains an almost diagonal stiffness matrix for the 1D Poisson problem. Extensions to two and three-dimensional elements are discussed.

Keywords

Finite Elements Method, Spectral Methods, High-Order Methods, Shape Functions, Tensorization, Quadrature Rules, Jacobi Polynomials.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Motivação	1
1.2	Revisão Bibliográfica	4
1.3	Objetivos	10
1.4	Organização do Texto	11
2	Construção de Funções de Forma para as Versões h e p do MEF usando	
	Produto Tensorial	13
2.1	Construção das Funções de Base Unidimensionais	14
2.1.1	Base Nodal	14
2.1.2	Base Modal	16
2.2	Construção das Funções de Base Bidimensionais - Quadrados e Triângulos	17
2.2.1	Funções de Interpolação para Quadrados	17
2.2.2	Funções de Interpolação para Triângulos	20
2.3	Construção das Funções de Base Tridimensionais - Hexaedros e Tetraedros	27
2.3.1	Funções de Interpolação para Hexaedros	27

2.3.2	Funções de Interpolação para Tetraedros	31
2.4	Continuidade Global C^0 para Quadrados	33
2.5	Funções de Base de Sherwin & Karniadakis	36
2.6	Esparcidade e Condicionamento Numérico das Matrizes Locais	41
2.6.1	Elementos Unidimensionais	41
2.6.2	Quadrados	45
2.6.3	Hexaedros	47
2.6.4	Triângulos	47
2.6.5	Tetraedros	61
3	Integração dos Coeficientes das Matrizes de Massa e Rigidez usando	
	Tensorização e Quadratura de Gauss-Jacobi	74
3.1	Integração das Matrizes Unidimensionais de Massa e Rigidez	75
3.2	Integração da Matriz de Massa e Rigidez Bidimensional - Quadrado	83
3.3	Integração da Matriz de Massa e Rigidez Tridimensional - Hexaedro	92
3.4	Integração da Matriz de Massa e Rigidez Bidimensional - Triângulos	101
3.5	Integração da Matriz de Massa e Rigidez Tridimensional - Tetraedros . . .	108
4	Matrizes de Massa e Rigidez Espectrais	119
4.1	Integração Numérica e Quadratura Gaussiana	119
4.2	Matriz de Massa Espectral Unidimensional	121
4.3	Matriz de Rigidez Espectral Unidimensional	122

4.4	Validação da Base Nodal	127
4.5	Tensorização para Quadrados e Hexaedros	129
4.5.1	Matriz de Massa Unidimensional Espectral Convencional	133
4.5.2	Problema de Auto-valor da Matriz de Massa Unidimensional	134
4.6	Tensorização para Triângulos e Tetraedros	140
5	Conclusões e Trabalhos Futuros	143
	Referências Bibliográficas	149

Lista de Figuras

2.1	Construção tensorial das funções de interpolação para quadrados (Bittencourt, 1991; Vazquez, 2004).	17
2.2	Associação entre entidades topológicas e índices p e q no quadrado. (Vazquez, 2004)	18
2.3	Coordenadas baricêntricas para triângulos (Bittencourt, 1991; Vazquez, 2004).	21
2.4	Triângulo quadrático (Bittencourt, 1991; Vazquez, 2004).	22
2.5	Entidades topológicas do triângulo, índices p , q , r e associação entre entidades e índices.	23
2.6	Triângulos da família nodal lagrangiana (Bittencourt, 1991; Vazquez, 2004).	24
2.7	Malha híbrida.	27
2.8	Construção tensorial das funções de interpolação para hexaedros (Bittencourt, 1991; Vazquez, 2004).	28
2.9	Índices p , q e r e entidades topológicas no hexaedro.	29
2.10	Associação entre os índices p , q e r e as entidades topológicas do hexaedro.	29
2.11	Entidades topológicas para tetraedros, índices p , q , r e s e associação entidades e índices.	31
2.12	Continuidade global C^0 entre as funções.	34
2.13	Continuidade global C^0 usando bases de Lagrange ao longo das arestas comuns para $P = 3$	35
2.14	Triângulo de referência de Sherwin & Karniadakis (Karniadakis e Sherwin, 1999).	37
2.15	Mapeamento de coordenadas do elemento quadrilateral para o elemento triangular (Karniadakis e Sherwin, 1999).	38

2.16	Tetraedro de referência de Sherwin & Karniadakis (Karniadakis e Sherwin, 1999).	39
2.17	Mapeamento de coordenadas do elemento hexaédrico para o elemento tetraédrico (Karniadakis e Sherwin, 1999).	40
2.18	Esparsidade das matrizes de massa e rigidez para os elementos unidimensionais de Jacobi para $P = 10$	43
2.19	Condicionamento numérico das matrizes de massa e rigidez dos elementos unidimensionais com bases de Lagrange e Jacobi.	44
2.20	Esparsidade das matrizes de massa e rigidez dos quadrados de Jacobi para $P = 10$	45
2.21	Condicionamento numérico das matrizes de massa e rigidez dos quadrados com bases de Lagrange e Jacobi.	46
2.22	Esparsidade das matrizes de massa e rigidez dos hexaedros de Jacobi. . . .	47
2.23	Condicionamento numérico das matrizes de massa e rigidez dos hexaedros com bases de Lagrange e Jacobi e $P = 10$	48
2.24	Esparsidade das matrizes de massa dos triângulos usando a Base 1 com diferentes ponderações e $P = 7$ (nz é o número de coeficientes diferente de zero).	52
2.25	Esparsidade das matrizes de massa dos triângulos usando a Base 1 com ponderações $\alpha = 4$ e $\beta = 2$ e $P = 7, 8, 9$	52
2.26	Comparação do número de zeros com o total de coeficientes das matrizes de massa para os triângulos.	53
2.27	Esparsidade das matrizes de massa dos triângulos usando a Base 2 com diferentes ponderações e $P = 7$	54
2.28	Esparsidade das matrizes de massa dos triângulos usando a Base 2 com $\alpha = 6$ e $\beta = 2$ e $P = 7, 8, 9$	54
2.29	Esparsidade das matrizes de rigidez dos triângulos usando a Base 1 com ponderações $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 3$ e $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1$ e $P = 7, 8, 9$	56
2.30	Comparação do número de zeros com o total do número de coeficientes para as matrizes de rigidez dos triângulos.	56
2.31	Esparsidade das matrizes de rigidez dos triângulos usando a Base 2 para diferentes ponderações e $P = 7$	59

2.32	Esparsidade das matrizes de rigidez dos triângulos usando a Base 2 para $\alpha = 5$, $\beta = 1$ e $P = 7$ a $P = 10$	60
2.33	Esparsidade das matrizes de rigidez dos triângulos usando a Base 2 para $\alpha = 7$, $\beta = 1$ e $P = 7$ a $P = 9$	60
2.34	Condicionamento numérico das matrizes de massa e rigidez dos triângulos com bases de Lagrange, Szabó, Carnevali, Webb, Sherwin, Base 1 e Base 2.	62
2.35	Condicionamento numérico das matrizes de massa e rigidez dos triângulos para as bases de Sherwin-Karniadakis, Base 1 ($\alpha = 0$ e $\beta = 2$) e Base 1 usando (2.63) ($\alpha = 0$ e $\beta = 2$).	63
2.36	Esparsidade das matrizes de massa dos tetraedros usando a Base 1 com diferentes ponderações e $P = 5$ (nz é o número de coeficientes diferente de zero).	66
2.37	Esparsidade das matrizes de massa dos tetraedros usando a Base 1 com ponderações $\alpha = 5$ e $\beta = 2$ e $P = 5, 6, 7$	67
2.38	Comparação do número de zeros com o total de coeficientes das matrizes de massa para os tetraedros.	67
2.39	Esparsidade das matrizes de massa dos tetraedros usando a Base 2 com diferentes ponderações e $P = 5$	68
2.40	Esparsidade das matrizes de massa dos tetraedros usando a Base 2 com $\alpha = 5$ e $\beta = 2$ e $P = 5, 6, 7, 8$	69
2.41	Esparsidade das matrizes de rigidez dos tetraedros usando a Base 1 com ponderações $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 4$ e $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1$ e $P = 5, 6, 7$	70
2.42	Esparsidade das matrizes de rigidez dos tetraedros usando a Base 2 com ponderações $\alpha = 4$, $\beta = 1$ e $P = 5$ a 7	70
2.43	Comparação do número de zeros com o total do número de coeficientes para as matrizes de rigidez dos tetraedros.	71
2.44	Condicionamento numérico das matrizes de massa e rigidez dos tetraedros com bases de Lagrange, Szabó, Carnevali, Webb, Sherwin, Base 1 e Base 2.	72
2.45	Condicionamento numérico das matrizes de massa e rigidez dos tetraedros para as bases de Sherwin-Karniadakis, Base 1 ($\alpha = 0$ e $\beta = 2$) e Base 1 com fator 2 (equação 2.63) e ($\alpha = 0$ e $\beta = 2$).	73

3.1	Quantidade de pontos para a integração exata dos coeficientes do bloco das funções internas da matriz de massa unidimensional usando as diferentes regras de quadratura gaussianas.	78
3.2	Quantidade de pontos para a integração exata dos coeficientes do bloco das funções internas da matriz de rigidez unidimensional usando as diferentes regras de quadratura gaussianas.	80
3.3	Perfil de esparsidade da matriz unidimensional cujos coeficientes são dados pela expressão (3.1) e $\alpha = \beta = 1$	81
3.4	Quantidade de pontos para a integração exata dos coeficientes do bloco das funções internas da matriz unidimensional definida em (3.1) usando as diferentes regras de quadratura gaussianas.	82
3.5	Quantidade de pontos para a integração exata dos coeficientes das funções de aresta da matriz de massa bidimensional usando as diferentes regras de quadratura gaussianas.	86
3.6	Quantidade de pontos para a integração exata dos coeficientes do acoplamento das funções de aresta com as funções de face da matriz de massa bidimensional usando as diferentes regras de quadratura gaussianas.	86
3.7	Quantidade de pontos para a integração exata dos coeficientes do bloco das funções internas da matriz de massa bidimensional usando as diferentes regras de quadratura gaussianas.	87
3.8	Quantidade de pontos para a integração exata dos coeficientes do bloco de aresta da matriz de rigidez do quadrado usando as diferentes regras de quadratura gaussianas.	89
3.9	Quantidade de pontos para a integração exata dos coeficientes do bloco aresta-face da matriz de rigidez do quadrado usando as diferentes regras de quadratura gaussianas.	89
3.10	Quantidade de pontos para a integração exata dos coeficientes do bloco interno da matriz de rigidez do quadrado usando as diferentes regras de quadratura gaussianas.	90
3.11	Quantidade de pontos para a integração exata dos coeficientes do bloco aresta da matriz de massa do hexaedro usando as diferentes regras de quadratura gaussianas.	94

3.12	Quantidade de pontos para a integração exata dos coeficientes do bloco aresta-face da matriz de massa do hexaedro usando as diferentes regras de quadratura gaussianas.	94
3.13	Quantidade de pontos para a integração exata dos coeficientes do bloco aresta-corpo da matriz de massa do hexaedro usando as diferentes regras de quadratura gaussianas.	95
3.14	Quantidade de pontos para a integração exata dos coeficientes do bloco face da matriz de massa do hexaedro usando as diferentes regras de quadratura gaussianas.	95
3.15	Quantidade de pontos para a integração exata dos coeficientes do bloco face-corpo da matriz de massa do hexaedro usando as diferentes regras de quadratura gaussianas.	96
3.16	Quantidade de pontos para a integração exata dos coeficientes do bloco corpo da matriz de massa do hexaedro usando as diferentes regras de quadratura gaussianas.	96
3.17	Quantidade de pontos para a integração exata dos coeficientes do bloco aresta da matriz de rigidez do hexaedro usando as diferentes regras de quadratura gaussianas.	98
3.18	Quantidade de pontos para a integração exata dos coeficientes do bloco aresta-face da matriz de rigidez do hexaedro usando as diferentes regras de quadratura gaussianas.	98
3.19	Quantidade de pontos para a integração exata dos coeficientes do bloco aresta-corpo da matriz de rigidez do hexaedro usando as diferentes regras de quadratura gaussianas.	99
3.20	Quantidade de pontos para a integração exata dos coeficientes do bloco face da matriz de rigidez do hexaedro usando as diferentes regras de quadratura gaussianas.	99
3.21	Quantidade de pontos para a integração exata dos coeficientes do bloco face-corpo da matriz de rigidez do hexaedro usando as diferentes regras de quadratura gaussianas.	100
3.22	Quantidade de pontos para a integração exata dos coeficientes do bloco corpo da matriz de rigidez do hexaedro usando as diferentes regras de quadratura gaussianas.	100

3.23	Comparação do número de pontos de integração usando os procedimentos de Bittencourt, Dunavant, Sherwin-Karniadakis e Gauss-Legendre para o cálculo dos coeficientes da matriz de massa em triângulos.	106
3.24	Comparação do número de pontos de integração usando os procedimentos de Bittencourt, Dunavant, Sherwin-Karniadakis e Gauss-Legendre para o cálculo dos coeficientes internos da matriz de rigidez em triângulos.	108
3.25	Comparação do número de pontos de integração usando os procedimentos de Bittencourt, Sherwin-Karniadakis e Gauss-Legendre para o cálculo dos coeficientes da matriz de massa em tetraedros.	116
3.26	Comparação do número de pontos de integração usando os procedimentos de Bittencourt, Sherwin-Karniadakis e Gauss-Legendre para o cálculo dos coeficientes internos da matriz de rigidez em tetraedros	117
4.1	Funções de forma internas para $P = 2$	124
4.2	Funções de forma internas para $P = 3$	124
4.3	Funções de forma internas para $P = 4$	125
4.4	Funções de forma internas para $P = 5$	125
4.5	Perfil de esparsidade para $P = 5$ (nz é o número de coeficientes diferentes de zero).	127
4.6	Erro na norma de energia para $2 \leq P \leq 8$	129
4.7	Condicionamento das matrizes de rigidez usando polinômios de Jacobi e Lagrange, calculadas analiticamente e aproximadas para $2 \leq P \leq 8$	130
4.8	Perfis de esparsidade da matriz de rigidez para quadrados e grau $P = 4$ (nz é o número de coeficientes diferentes de zero).	131
4.9	Perfis de esparsidade das matrizes de massa para os quadrados e grau $P = 4$ (nz é o número de coeficientes diferente de zero).	131
4.10	Condicionamento numérico dos quadrados.	132
4.11	Perfis de esparsidade das matrizes de rigidez para quadrados e hexaedros usando a matriz de massa unidimensional concentrada.	133
4.12	Perfil de esparsidade da matriz de rigidez unidimensional após a transformação usando autovetores da matriz de massa unidimensional para $P = 10$	136

4.13	Número de coeficientes das matrizes de rigidez para quadrados após a transformação usando autovetores da matriz de massa unidimensional.	137
4.14	Condicionamento numérico das matrizes de rigidez para quadrados após a transformação usando autovetores da matriz de massa unidimensional. . .	138
4.15	Perfis de esparsidade das matrizes de rigidez para quadrados com bases de Jacobi usando autovetores da matriz de massa unidimensional.	138
4.16	Número de coeficientes das matrizes de rigidez para hexaedros após a transformação usando autovetores da matriz de massa unidimensional.	139
4.17	Condicionamento das matrizes de rigidez para hexaedros após a transformação usando autovetores da matriz de massa unidimensional.	139
4.18	Perfis de esparsidade das matrizes de rigidez para hexaedros com bases de Jacobi usando autovetores da matriz de massa unidimensional.	140

Lista de Tabelas

2.1	Triângulo quadrático: índices a, b, c, d	22
2.2	Ponderações ótimas para os blocos da matriz de massa dos triângulos usando a Base 1.	51
2.3	Ponderações ótimas para os blocos da matriz de massa dos triângulos usando a Base 2.	51
2.4	Ponderações ótimas para os blocos das matrizes de massa dos tetraedros usando a Base 1.	65
3.1	Ponderações dos pontos e pesos da regra de quadratura e grau da função a ser integrada para o cálculo dos coeficientes da matriz de massa unidimensional.	77
3.2	Ponderações dos pontos e pesos da regra de quadratura e grau da função a ser integrada para o cálculo dos coeficientes da matriz de rigidez unidimensional.	79
3.3	Ponderações para a escolha das raízes dos polinômios de Jacobi que minimizam a quantidade de pontos de integração para o cálculo dos coeficientes dados pela equação (3.1)	81
3.4	Ponderações para a escolha das raízes dos polinômios de Jacobi que minimizam a quantidade de pontos de integração dos coeficientes das matrizes de massa dos quadrados.	84
3.5	Ponderações para a escolha das raízes dos polinômios de Jacobi que minimizam a quantidade de pontos de integração dos coeficientes das matrizes de rigidez dos quadrados.	88
3.6	Expressões para o cálculo da quantidade máxima de pontos para a integração dos coeficientes da matriz de rigidez para os quadrados usando as diferentes regras de quadratura.	88

3.7	Ponderações para a escolha das raízes dos polinômios de Jacobi que minimizam a quantidade de pontos de integração dos coeficientes das matrizes de rigidez do estado plano de tensão.	91
3.8	Expressões para o cálculo da quantidade máxima de pontos para a integração dos coeficientes da matriz do estado plano de tensão usando diferentes regras de quadratura.	92
3.9	Expressões para o cálculo da quantidade máxima de pontos para a integração dos coeficientes da matriz de massa para os hexaedros usando as diferentes regras de quadratura.	93
3.10	Expressões para o cálculo da quantidade máxima de pontos para a integração dos coeficientes da matriz de rigidez para os hexaedros usando as diferentes regras de quadratura.	97

Símbolos

Matrizes e Vetores

- $[H]$ - Matriz quadrada qualquer
- $[I]$ - Matriz Identidade
- J - Matriz do Jacobiano
- $[K]$ - Matriz de rigidez
- $[K_{VV}]$ - Submatriz de rigidez formada pelos coeficientes da funções de vértice
- $[K_{VI}]$ - Submatriz de rigidez formada pelos coeficientes da funções vértice-internas
- $[K_{II}]$ - Submatriz de rigidez formada pelos coeficientes da funções internas
- $[K_{VE}]$ - Submatriz de rigidez formada pelos coeficientes da funções vértice-aresta
- $[K_{VF}]$ - Submatriz de rigidez formada pelos coeficientes da funções vértice-face
- $[K_{VB}]$ - Submatriz de rigidez formada pelos coeficientes da funções vértice-corpo
- $[K_{EE}]$ - Submatriz de rigidez formada pelos coeficientes da funções de aresta
- $[K_{EF}]$ - Submatriz de rigidez formada pelos coeficientes da funções aresta-face
- $[K_{EB}]$ - Submatriz de rigidez formada pelos coeficientes da funções aresta-corpo
- $[K_{FF}]$ - Submatriz de rigidez formada pelos coeficientes da funções de face
- $[K_{FB}]$ - Submatriz de rigidez formada pelos coeficientes da funções face-corpo
- $[K_{BB}]$ - Submatriz de rigidez formada pelos coeficientes da funções de corpo
- $[K_{an}]$ - Matriz de rigidez unidimensional usando as funções propostas na equação (4.4)
e integrada analiticamente

- $[K_{ap}]$ - Matriz de rigidez unidimensional usando as funções propostas na equação (4.4) e aproximada usando quadratura de Gauss-Lobatto-Jacobi nos $P + 1$ pontos de integração
- $[K_{lag}]$ - Matriz de rigidez unidimensional usando polinômios de Jacobi
- $[\hat{K}]$ - Matriz de rigidez na base de autovetores
- $[M]$ - Matriz de massa
- $[M_{VV}]$ - Submatriz de massa formada pelos coeficientes da funções de vértice
- $[M_{VI}]$ - Submatriz de massa formada pelos coeficientes da funções vértice-internas
- $[M_{II}]$ - Submatriz de massa formada pelos coeficientes da funções internas
- $[M_{VE}]$ - Submatriz de massa formada pelos coeficientes da funções vértice-aresta
- $[M_{VF}]$ - Submatriz de massa formada pelos coeficientes da funções vértice-face
- $[M_{VB}]$ - Submatriz de massa formada pelos coeficientes da funções vértice-corpo
- $[M_{EE}]$ - Submatriz de massa formada pelos coeficientes da funções de aresta
- $[M_{EF}]$ - Submatriz de massa formada pelos coeficientes da funções aresta-face
- $[M_{EB}]$ - Submatriz de massa formada pelos coeficientes da funções aresta-corpo
- $[M_{FF}]$ - Submatriz de massa formada pelos coeficientes da funções de face
- $[M_{FB}]$ - Submatriz de massa formada pelos coeficientes da funções face-corpo
- $[M_{BB}]$ - Submatriz de massa formada pelos coeficientes da funções de corpo
- $[\hat{M}]$ - Matriz de massa na base de autovetores
- $[MK]$ - Matriz mista formada pelos coeficientes definidos pela equação (3.1)
- $[N]$ - Matriz composta pelas funções de forma
- $[N_V]$ - Submatriz de $[N]$ composta pelas funções de vértice
- $[N_E]$ - Submatriz de $[N]$ composta pelas funções de aresta
- $[N_F]$ - Submatriz de $[N]$ composta pelas funções de face
- $[N_B]$ - Submatriz de $[N]$ composta pelas funções de corpo
- $[U]$ - Matriz cujas colunas são os autovetores $\{u\}_i$

- $[W_{VV}]$ - Matriz dos respectivos pesos da quadratura de Gauss-Jacobi da submatriz de massa ou rigidez com os coeficientes de vértice
- $[W_{VE}]$ - Matriz dos respectivos pesos da quadratura de Gauss-Jacobi da submatriz de massa ou rigidez com os coeficientes de vértice-aresta
- $[W_{VF}]$ - Matriz dos respectivos pesos da quadratura de Gauss-Jacobi da submatriz de massa ou rigidez com os coeficientes de vértice-face
- $[W_{EE}]$ - Matriz dos respectivos pesos da quadratura de Gauss-Jacobi da submatriz de massa ou rigidez com os coeficientes de aresta
- $[W_{EF}]$ - Matriz dos respectivos pesos da quadratura de Gauss-Jacobi da submatriz de massa ou rigidez com os coeficientes de aresta-face
- $[W_{EB}]$ - Matriz dos respectivos pesos da quadratura de Gauss-Jacobi da submatriz de massa ou rigidez com os coeficientes de aresta-corpo
- $[W_{FF}]$ - Matriz dos respectivos pesos da quadratura de Gauss-Jacobi da submatriz de massa ou rigidez com os coeficientes de face
- $[W_{FB}]$ - Matriz dos respectivos pesos da quadratura de Gauss-Jacobi da submatriz de massa ou rigidez com os coeficientes de face-corpo
- $[W_{BB}]$ - Matriz dos respectivos pesos da quadratura de Gauss-Jacobi da submatriz de massa ou rigidez com os coeficientes de corpo
- $[VV]$ - Submatriz formada pelos coeficientes da funções de vértice
- $[VI]$ - Submatriz formada pelos coeficientes da funções vértice-internas
- $[II]$ - Submatriz formada pelos coeficientes da funções internas
- $[VE]$ - Submatriz formada pelos coeficientes da funções vértice-aresta
- $[VF]$ - Submatriz formada pelos coeficientes da funções vértice-face
- $[VB]$ - Submatriz formada pelos coeficientes da funções vértice-corpo
- $[EE]$ - Submatriz formada pelos coeficientes da funções de aresta
- $[EF]$ - Submatriz formada pelos coeficientes da funções aresta-face
- $[EB]$ - Submatriz formada pelos coeficientes da funções aresta-corpo
- $[FF]$ - Submatriz formada pelos coeficientes da funções de face

$[FB]$	- Submatriz formada pelos coeficientes da funções face-corpo
$[BB]$	- Submatriz formada pelos coeficientes da funções de corpo
$[\Lambda]$	- Matriz diagonal formada pelos autovalores da matriz de massa
f	- Vetor coluna dos termos independentes
$\hat{u}$	- Vetor coluna solução qualquer
$\{u\}_i$	- Autovetores da matriz de massa unidimensional

Outras Notações

A	- Área do elemento
B	- Volume do elemento
cte	- Valor constante
C, D	- Constantes definidas
d_i	- Constantes de Lagrange
E	- Arestas do elemento
F	- Faces do elemento
$g(.)$	- Polinômio dos nós
GJ	- Regra de quadratura de Gauss-Jacobi
GLJ	- Regra de quadratura de Gauss-Lobatto-Jacobi
GRJ	- Regra de quadratura de Gauss-Radau-Jacobi
$h(.), \tilde{h}(.), \hat{h}(.)$	- Função qualquer
i, j, k, l	- Graus de liberdade
I	- Funções internas do elemento
k_{pq}	- Coeficientes da matriz de rigidez unidimensional
k_{ab}	- Coeficientes da matriz de rigidez para o operador de Laplace
k	- Número de condição das matrizes de massa e rigidez
$k_{ap_{ii}}$	- Coeficientes da diagonal da matriz $[K_{ap}]$
$k_{an_{ii}}$	- Coeficientes da diagonal da matriz $[K_{an}]$

$\bar{k}$	- Coeficientes fora da diagonal da matriz $[K_{an}]$
$l_p(\xi_1)$ e $\hat{l}_p(L_1)$	- Polinômios de Lagrange
L_i	- Coordenada natural em $[0, 1]$
L_{ip}	- Pontos na direção L_i
$L_P(\cdot)$	- Polinômios de Legendre de grau P
m	- Grau do integrando dos coeficientes das matrizes de massa ou rigidez
m_{pq}	- Coeficientes da matriz de massa unidimensional
m_{ab}	- Coeficientes da matriz de massa bidimensional e tridimensional
mk_{pq}	- Coeficientes da matriz mista unidimensional
n	- Grau dos polinômios
n_{int}	- Número de pontos de integração da regra de quadratura
n_i	- Número de pontos de integração da regra de quadratura dos coeficientes das matrizes de massa e rigidez
n_i^{max}	- n_i máximo
n_i^{min}	- n_i mínimo
$n!$	- Fatorial de n
$N_p(\cdot)$	- Função de interpolação unidimensional
$N_{p'\xi_i}$	- Derivada da $N_p(\cdot)$ com relação a ξ_i
$N_{p''\xi_i}$	- Derivada segunda da $N_p(\cdot)$ com relação a ξ_i
$N_{pq}(\xi_i)$	- Função de interpolação bidimensional (quadrado)
$N_{pq'\xi_j}$	- Derivada da $N_{pq}(\cdot)$ com relação a ξ_j
$N_{pq''\xi_j}$	- Derivada segunda da $N_{pq}(\cdot)$ com relação a ξ_j
$N_{pqr}(L_i)$	- Função de interpolação bidimensional (triângulo)
$N_{pqr'L_j}$	- Derivada da $N_{pqr}(\cdot)$ com relação a L_j
$N_{pqr''L_j}$	- Derivada segunda da $N_{pqr}(\cdot)$ com relação a L_j
$N_{pqr}(\xi_i)$	- Função de interpolação tridimensional (hexaedro)
$N_{pqr'\xi_j}$	- Derivada da $N_{pqr}(\cdot)$ com relação a ξ_j
$N_{pqr''\xi_j}$	- Derivada segunda da $N_{pqr}(\cdot)$ com relação a ξ_j

$N_{pqrs}(L_i)$	- Função de interpolação tridimensional (tetraedro)
$N_{pqrs'L_j}$	- Derivada da $N_{pqrs}(\cdot)$ com relação a L_j
$N_{pqrs''L_j}$	- Derivada segunda da $N_{pqrs}(\cdot)$ com relação a L_j
p, q, r, s	- Graus de liberdade
P	- Grau das funções de base
P_i	- Grau das funções de base na direção ξ_i ou L_i
$\mathcal{P}_\square$	- Espaço dos polinômios de grau menor ou igual a $\square$
$P_n^{\alpha,\beta}(\cdot)$	- Polinômios de Jacobi de grau n e ponderação α, β
R	- Erro da regra de quadratura
$Re(x)$	- Parte real de x
$sign$	- Sinal de um número
$u(\cdot)$	- Função polinomial qualquer
$u_m(\cdot)$	- Função polinomial de grau m qualquer
V	- Vértices do elemento
w_i	- peso da regra de quadratura (constante)
$w_i^{\alpha,\beta}$	- Pesos da Regra de quadratura de Gauss-Lobatto-Jacobi
α, β	- Coeficientes de ponderação dos polinômios de Jacobi
α_i, β_i	- Coeficientes de ponderação dos polinômios de Jacobi na direção ξ_i ou L_i
Γ	- Função Gamma
δ_{pq}	- Delta de Kronecker
ϵ	- Erro da aproximação polinomial
η_i	- Coordenada local em $[-1, 1]$
η_{ip}	- Pontos na direção η_i
λ_i	- Autovalores da matriz de massa unidimensional
μ	- Conjunto de valores singulares das matrizes de massa e rigidez
$\xi_{1i}^{\alpha,\beta}$	- Pontos de integração de Gauss-Lobatto-Jacobi
ξ_i	- Coordenada local em $[-1, 1]$
ξ_{ip}	- Pontos na direção ξ_i

$\Pi_\square, \hat{\Pi}_\square$ - Função polinomial de grau $\square$
 $\phi_p(\cdot)$ - Função de interpolação unidimensional
 Ω, Ω_i - Elementos da malha

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

Uma forma de se obter soluções aproximadas para Problemas de Valor de Contorno (PVC) lineares ou não-lineares é a utilização do Método dos Elementos Finitos (MEF). A qualidade da aproximação obtida pelo MEF depende do tamanho e da forma dos elementos, das propriedades do espaço de aproximação e regularidade da solução (Nogueira Jr. e Bittencourt, 2002). A versão h do MEF permite melhorar a qualidade da aproximação através do refinamento da malha de elementos. Já na versão p , obtém-se uma melhor qualidade alterando a ordem das funções de interpolação dos elementos. Existe ainda a versão mista hp , que procura alterar simultaneamente o tamanho do elemento e a ordem do polinômio empregando algum critério de refinamento, e a versão r que recoloca os nós da malha de forma a melhorar a qualidade da aproximação.

Do ponto de vista computacional, a escolha da base para o espaço de aproximação influencia a estabilidade e eficiência dos procedimentos numéricos usados para o cálculo da solução aproximada. Em geral, as bases de elementos finitos consistem de funções polinomiais por partes definidas sobre os elementos da partição que interpolam o domínio do problema.

Especificamente, a versão p do MEF tem as seguintes características principais

(Szabó e Babuška, 1991; Karniadakis e Sherwin, 1999): integração numérica de alta ordem; diferenciação numérica; funções de forma apropriadas; mapeamento geométrico para domínios arbitrários; continuidade global entre os elementos; numeração dos graus de liberdade; aplicação das condições de contorno e pós-processamento dos resultados.

As funções de forma p (funções ou modos de base ou modos de interpolação) são associadas às entidades topológicas (vértices, arestas, face e corpo). Em geral, as funções usam polinômios ortogonais unidimensionais de Legendre e Chebyshev (Szabó e Babuška, 1991; Vijayakar et al., 1987). A propriedade hierárquica dos espaços de aproximação p permite que as matrizes locais não sejam totalmente reconstruídas quando se aumenta a ordem polinomial desses espaços.

O MEF na sua versão p se enquadra em uma classe maior dos Métodos Espectrais Polinomiais. Esses métodos têm se tornado bastante importantes em diversas aplicações, tais como aeroacústica, eletromagnetismo, modelagem oceânica, sismologia, turbulência em fluidos, fluidos não-Newtonianos, ótica não linear, dentre outras. Com maior ênfase nos últimos dez anos em problemas dinâmicos do que em problemas estacionários, métodos de alta ordem, em geral, e métodos de bases espectrais, em particular, são potencialmente mais efetivos que discretizações de baixa ordem. Nos últimos anos foram desenvolvidos métodos que se preocupam com geometrias complexas, regularidade finita, métodos de solução eficientes, multi-resolução e simulação em larga-escala.

Neste trabalho, a denominação matrizes espectrais é usada para referenciar matrizes quase diagonais.

Um problema de aproximação pode se tornar equivalente à resolver uma equação matricial da forma $[H]\hat{u} = f$, a qual é resolvida invertendo-se a matriz $[H]$, tal que $\hat{u} = [H]^{-1}f$, onde $[H]$ é uma matriz, $\hat{u}$ o vetor solução e f o vetor dos termos independentes (Karniadakis e Sherwin, 1999). Porém, o custo computacional para inverter sistemas matriciais é muito alto. Portanto, quanto mais próxima de uma matriz diagonal for possível representar o problema, mais fácil será a solução do problema inicial. Também, o condicionamento numérico da matriz $[H]$ está relacionado com a independência linear

da expansão. Quando inverte-se numericamente um sistema matricial, existe um erro associado com a representação exata da matriz, devido ao arredondamento e truncamento. Se a matriz for mal condicionada, o arredondamento e o truncamento pode conduzir a erros muito grandes na solução (Karniadakis e Sherwin, 1999).

Esses aspectos estão intrinsicamente ligados à escolha das funções de interpolação. As propriedades locais das matrizes elementares construídas com as funções selecionadas estarão presentes nas matrizes globais. Assim, a definição adequada da base e suas propriedades são fundamentais nos métodos de alta ordem. Portanto, na próxima seção discutem-se alguns conjuntos de funções de interpolação presentes na literatura.

Um conjunto de funções de forma espectrais, bastante citado na literatura, está baseado nos polinômios de Lagrange de grau P colocados em $(P + 1)$ pontos nodais (Karniadakis e Sherwin, 1999). Esses polinômios obedecem à propriedade de colocação, em que os coeficientes representam a aproximação da solução nos pontos de colocação. Os pontos de colocação são chamados de nós e portanto a expansão usando a base de Lagrange é referenciada como uma expansão nodal. Existem também expansões modais, como por exemplo, um conjunto de funções usando polinômios ortogonais de Jacobi. Com a escolha ótima das ponderações desses polinômios é possível melhorar a esparsidade e o condicionamento das matrizes de massa e rigidez para o problema de Poisson e dinâmica dos fluidos (Karniadakis e Sherwin, 1999).

Expansões espectrais multi-dimensionais em domínios ortogonais (quadrados e cubos) são baseadas em produtos tensoriais de expansões unidimensionais; por exemplo, produtos de polinômios de Lagrange, Chebyshev ou Legendre são escolhas comuns. A interpolação é tipicamente baseada nos pontos que são raízes desses polinômios (pontos de Gauss) ou raízes das derivadas desses polinômios (pontos de Gauss-Lobatto, se os pontos finais do intervalo são incluídos). Esses pontos podem também servir como pontos na quadratura numérica em formulações espectrais de Galerkin (Karniadakis e Sherwin, 1999).

1.2 Revisão Bibliográfica

A revisão bibliográfica a seguir está baseada parcialmente naquela apresentada em (Nogueira Jr., 2002).

Vários conjuntos de funções de forma p estão apresentados na literatura. Peano considerou famílias de funções de interpolação hierárquicas para elementos triangulares de lados retos que podem ser aplicadas para qualquer ordem polinomial (Peano, 1975). Cada novo grau de liberdade para $p \geq 2$ representa a p -ésima derivada da aproximação. As funções são mapeadas diretamente sobre os elementos da malha usando coordenadas baricêntricas.

Katz & Rossow estenderam o trabalho de Peano com a definição de um elemento de referência usando matrizes universais e vetores pré-computados para aumentar a performance computacional (Rossow e Katz, 1993).

Zienkiewicz apresentou funções para elementos hierárquicos quadrilaterais com um bom número de condicionamento das matrizes locais, fácil imposição da continuidade entre os elementos e o uso de estimadores de erro (Zienkiewicz et al., 1981).

As funções hierárquicas clássicas para quadriláteros e hexaedros introduzidas por Szabó & Babuška (Szabó e Babuška, 1991) têm excelente esparsidade e propriedades de condicionamento devido ao uso de polinômios de Legendre e sua natureza tensorial (Edgar e Surana, 1996; Maitre e Pourquier, 1995). Entretanto, as funções para triângulos e tetraedros não têm propriedades similares e há um aumento exponencial do número de condicionamento local com a ordem do elemento p (Carnevali et al., 1993; Adjerid et al., 2001; Nogueira Jr., 2002).

Carnevali introduziu funções de forma hierárquicas para triângulos e tetraedros com a propriedade de que as funções de aresta, face e corpo são ortogonais, no sentido do operador laplaciano, para as mesmas funções com ordens não superiores a $p - 2$, $p - 3$ e $p - 4$, respectivamente (Carnevali et al., 1993). Esse fato resultou em uma matriz de rigidez local com melhor número de condicionamento e esparsidade das matrizes locais comparado às funções definidas em (Szabó e Babuška, 1991).

Sherwin & Karniadakis apresentaram funções de forma hierárquicas para triângulos e tetraedros baseadas em sistemas cartesianos colapsados, produto tensorial, polinômios ortogonais de Jacobi e integração numérica exata usando o produto tensorial da quadratura unidimensional de Gauss-Jacobi (Sherwin e Karniadakis, 1995; Karniadakis e Sherwin, 1999). Os sistemas de coordenadas colapsadas para triângulos e tetraedros são obtidos dos sistemas de coordenadas cartesianas definidos sobre quadriláteros e hexaedros, respectivamente. Tais funções foram aplicadas no estudo de problemas de fluidos definindo os métodos *hp* espectrais (Karniadakis e Sherwin, 1999).

Webb & Abouchakra usaram polinômios de Jacobi para definir funções de forma para o triângulo referência $[0,1]$ 2-simplex (Webb e Abouchakra, 1995). A regra de quadratura definida em (Dunavant, 1985) foi usada. A extensão das funções para tetraedros é apresentada em Abouchakra (Abouchakra, 1996) com o uso de matrizes universais pré-computadas.

Nogueira Jr. & Bittencourt mostraram as vantagens de usar polinômios de Jacobi para melhorar a eficiência computacional e a esparsidade das matrizes locais e globais (Nogueira Jr. e Bittencourt, 2001). Também foi verificado que as funções propostas em Carnevalli (Carnevali et al., 1993) têm um aumento exponencial do número de condição com a ordem do elemento, mas inferior ao verificado nas funções apresentadas em Szabó (Szabó e Babuška, 1991).

Adjerid (Adjerid et al., 2001) propôs novas funções para triângulos e tetraedros com melhor esparsidade e propriedades de condicionamento quando comparadas a Szabó & Carnevalli (Szabó e Babuška, 1991; Carnevali et al., 1993). As funções são baseadas em Szabó (Szabó e Babuška, 1991) e usam a ortogonalização das funções de face (2D) e de face e corpo (3D). A estratégia apresentada é muito similar a que foi usada em Mandel (Mandel, 1990b; Mandel, 1990a) para definir pré-condicionadores para métodos de decomposição de domínios em malhas de hexaedros.

Nogueira Jr. em (Nogueira Jr., 2002) apresentou novos conjuntos de funções baseados em polinômios de Jacobi e tensorização em coordenadas colapsadas. As ponderações

foram obtidas de tal maneira a diagonalizar as funções de face (2D) e de corpo (3D). Além disso, aplicou-se o método *hp* espectral em problemas de elasticidade linear com o uso de métodos iterativos e multigrid *hp*-adaptáveis.

Arnold & Mukherjee apresentaram um algoritmo usando a versão *h* do MEF para resolver um PVC em uma elipse no $\mathbb{R}^3$ (Arnold et al., 2001). O algoritmo usa elementos finitos lineares, estimação do erro, esquema de refinamento da malha baseado na biseção dos tetraedros e uso de métodos multigrid. Mostra-se que a biseção repetida de um tetraedro arbitrário leva a um número finito de tetraedros e que o algoritmo recursivo tem um número finito de passos.

Prabhakar & Reddy exploraram a ortogonalidade das bases modais usadas em modelos *hp* de elementos finitos (Prabhakar e Reddy, 2007). Os coeficientes da matriz são calculados analiticamente sem usar qualquer processo de integração numérica, o que pode ser computacionalmente muito caro. São usadas as propriedades dos polinômios de Jacobi e o MEF por mínimos quadrados. A limitação do procedimento desenvolvido é que só pode ser usado por elementos retangulares.

As bases já mencionadas para triângulos e tetraedros não usam produto tensorial padrão de polinômios unidimensionais definidos em coordenadas baricêntricas. Na definição padrão de produto tensorial, bases unidimensionais para cada direção são multiplicadas termo a termo para construir bases de maior dimensão.

As funções modais para quadriláteros e hexaedros apresentadas em (Karniadakis e Sherwin, 1999) aplicam a definição padrão de produto tensorial. Entretanto, triângulos e tetraedros usam um produto deformado ou generalizado, devido ao uso do sistema de coordenadas colapsadas. As funções de forma para quadriláteros definidos em (Szabó e Babuška, 1991) usam tensorização dos polinômios de Legendre nas direções locais ξ_1 e ξ_2 com funções lineares $(1 \pm \xi_1)$ ou $(1 \pm \xi_2)$.

Em (Bittencourt, 2005), apresentam-se funções de forma modal e nodal para triângulos e tetraedros baseadas no produto tensorial de funções unidimensionais expressas em coordenadas baricêntricas. As funções nodais usam polinômios de Lagrange e são as

funções de forma h padrão apresentadas na literatura (Zienkiewicz e Taylor, 1989; Cook et al., 1991). As bases modais usam polinômios de Jacobi. O procedimento tensorizável para construir os conjuntos de funções modais e nodais é muito simples. As funções modais têm uma continuidade global C^0 automática entre os elementos. Assim, não é necessário um procedimento adicional para impor tal continuidade, como ocorre com as funções de interpolação p presentes na literatura.

Como mencionado, as características de esparsidade e condicionamento numérico das matrizes locais dos elementos são fundamentais para a versão p do MEF. No caso de polinômios de Jacobi, tais características são influenciadas pela correta seleção das ponderações dos polinômios.

Um dos objetivos deste trabalho é dar continuidade aos resultados apresentados em (Bittencourt, 2005), através de um estudo sobre os polinômios de Jacobi, suas propriedades de ortogonalidade e a seleção de suas ponderações para uso nas funções modais na matriz de massa e rigidez dos triângulos e tetraedros.

Sob o ponto de vista de implementação computacional, quanto mais esparsas forem as matrizes de massa e rigidez locais, menor será o número de operações por iteração de um método iterativo de solução. Em (Vazquez, 2004; Bittencourt, 2005), tem-se a construção de funções de forma para as versões h e p do MEF usando produto tensorial para quadrados, triângulos, hexaedros e tetraedros.

A seguir apresenta-se uma breve revisão sobre a aplicação de métodos de alta ordem à problemas estruturais.

Em (Cedric, 2000), foram desenvolvidos procedimentos hp adaptáveis aplicados à problemas de hiperelasticidade tridimensionais.

Arnold, Awanou & Winter constróem subespaços de elementos finitos do espaço de tensores simétricos com divergência quadrado integráveis em um domínio tridimensional (Arnold et al., 2007). Esses espaços podem ser usados para aproximar o campo de tensão da formulação clássica de Hellinger-Reissner das equações de elasticidade, quando espaços de elementos finitos descontínuos padrão são usados para aproximar o campo

dos deslocamentos. Esses espaços de elementos finitos são definidos com respeito a uma triangularização arbitrária simples do domínio, e existe um para cada grau do polinômio usado para os deslocamentos. Para cada grau, isso fornece uma discretização em elementos finitos estável.

Arciniega & Reddy apresentam um modelo computacional de elementos finitos para análise não-linear de estruturas de casca (Arciniega e Reddy, 2007). Uma formulação de elemento finito tensorial é apresentada para descrever um modelo matemático de uma casca de um modo simples e natural, usando coordenadas curvilíneas. Em adição, uma família de elementos de alta ordem com interpolação de Lagrange é usada.

Hang Vu & Deeks mostra que o MEF de contorno escalado é uma recente técnica semi-analítica, cuja versatilidade, exatidão e eficiência não são somente iguais, mas potencialmente melhor que o MEF e o MEF de contorno para certos problemas (Vu e Deeks, 2006). Neste trabalho, investiga-se a possibilidade de usar funções polinomiais de alta ordem para funções de base. Duas técnicas para gerar as funções de base de alta ordem são investigadas. Na primeira, aproximação com elemento espectral, são usadas funções de interpolação de Lagrange. Na segunda, funções de base polinomiais hierárquicas são empregadas para adicionar novos graus de liberdade dentro do domínio, como na versão p do MEF. Os resultados mostram que pode ser vantajoso usar elementos de alta ordem e que altas taxas de convergência podem ser obtidas usando refinamento p ao invés de refinamento h .

Visto que as versões de alta ordem do MEF (versões hp) são razoavelmente bem estabelecidas como métodos altamente eficientes para monitorar e controlar o erro de discretização em problemas lineares, pouco foi feito para explorar seus benefícios na análise estrutural elasto-plástica. Em (Holzer e Yosibash, 1996), discute-se quais aspectos da análise finita elasto-plástica incremental do elemento são particularmente sensíveis às melhorias pela versão p . Estas considerações teóricas são suportadas por diversas experiências numéricas. Primeiramente, estuda-se um exemplo para o qual uma solução analítica está disponível. Demonstra-se que a versão p tem um desempenho muito bom mesmo nos

ciclos de carregamento elasto-plástico e descarregamento, não somente em comparação à versão h tradicional, mas também com respeito à solução exata. Finalmente, um exemplo é apresentado que demonstra como as ferramentas de modelagem oferecidas por técnicas finitas de alta ordem do MEF podem contribuir para melhorar a aproximação de problemas práticos.

Em (Yosibash, 1997), apresenta-se um método novo para a extração exata da tensão nos pontos das soluções de elemento finito, aplicado aos problemas elástico lineares bidimensionais. O método é baseado no Princípio de Energia Complementar aplicado sobre um domínio local na fase do pós-processamento. A formulação detalhada do método é fornecida e experiências numéricas com a versão p do MEF são apresentadas para uma família de soluções exatas, variando o grau de aproximação. Mostra-se que nos limites do domínio, tanto quanto no interior, a tensão exata nos pontos são obtidas e o erro relativo nos pontos de tensão converge com uma taxa tão rapidamente quanto o erro relativo medido na norma da energia ou mais rapidamente. O método conjuntamente com a versão p do MEF é virtualmente independente da relação do Poisson, e é igualmente aplicável aos materiais quasi-incompressíveis.

Cargas seguidoras que dependem das condições de contorno freqüentemente ocorrem em PVCs com deformação finita. Em (Yosibash et al., 2007), para aplicações axisimétricas, têm-se soluções analítica e numérica para um conjunto de problemas em materiais compressíveis Hookeanos. Essas soluções servem como problemas padrão para verificar a exatidão e a eficiência de vários procedimentos baseados no MEF para aplicações com cargas seguidoras. Após isso, a formulação fraca para carga seguidora em domínio 3D é reduzida para um conjunto axissimétrico. O conjunto de soluções axissimétricas é comparado com experimentos numéricos, aoobtidos por um código comercial h . Isso demonstra a eficiência e a exatidão da versão p quando aplicado a problemas com cargas seguidoras e deformações finitas.

Em (Heisser et al., 2007), demonstram-se as propriedades livre de travamentos da formulação da p do MEF para o deslocamento quando aplicados ao material Hookeano

quasi-incompressível sob deformações finitas. Para um problema modelo axissimétrico, têm-se soluções semi-analíticas para um material Hookeano quasi-incompressível para investigar a robustez da versão p com respeito ao travamento volumétrico. Uma solução analítica para o caso incompressível é também derivada para demonstrar a convergência da solução numérica compressível.

Em (Nogueira Jr. e Bittencourt, 2007; Bittencourt et al., 2007b) o método hp espectral, originalmente desenvolvido para fluidos em (Karniadakis e Sherwin, 1999), foi aplicado para problemas elásticos com pequenas e grandes deformações.

1.3 Objetivos

O principal foco deste trabalho é o desenvolvimento de funções de interpolação e regras de integração tensorizáveis para o MEF de alta ordem, considerando os sistemas de referências locais e elementos não distorcidos.

O primeiro objetivo é determinar ponderações específicas para as bases de funções de triângulos e tetraedros, desenvolvidas em (Bittencourt, 2005), de forma a se obter melhor esparsidade e condicionamento das matrizes de massa e rigidez dos elementos. Além disso, propõem-se a manipulação apropriada dos índices que identificam as funções de base de tal maneira que estas bases sejam hierárquicas. Procuram-se novas funções de base para tornar as matrizes de massa e rigidez mais esparsas possíveis.

Outra contribuição foi escolher os pontos de integração que otimizam o custo do cálculo dos coeficientes das matrizes de massa e rigidez usando as regras de quadratura de Gauss-Jacobi, Gauss-Radau-Jacobi e Gauss-Lobatto-Jacobi.

Uma última contribuição está na construção de uma base unidimensional nodal que permite obter uma matriz de rigidez espectral para problemas de Poisson unidimensionais. A tensorização dessa base em quadrados não obtém uma matriz de rigidez diagonal, mas ainda comparável com a de Jacobi em termos do número de condição e esparsidade. Mostra-se como construir a matriz de rigidez em quadrados e hexaedros como a com-

binação dos coeficientes das matrizes unidimensionais de massa, rigidez e mista. A partir daí, identifica-se que a matriz de massa desempenha papel fundamental na diagonalização da matriz de rigidez em quadrados e hexaedros. Propõem-se, então, duas alternativas para diagonalizar a matriz de massa, comparando as suas limitações, vantagens e desvantagens. Os resultados são estendidos para triângulos e tetraedros usando a base de Karniadakis & Sherwin (Karniadakis e Sherwin, 1999).

Para plotar a esparsidade e calcular os condicionamentos das matrizes de massa e rigidez para diferentes bases, implementou-se um código em Matlab baseado no processo de tensorização.

1.4 Organização do Texto

O texto está organizado da seguinte forma: no Capítulo 2, apresentam-se procedimentos uniformes para a construção de funções de forma para as versões h e p do MEF em quadrados, triângulos, hexaedros e tetraedros baseados no produto tensorial unidimensional usando polinômios de Jacobi e Lagrange (Karniadakis e Sherwin, 1999; Vazquez, 2004; Bittencourt et al., 2007a). São usados índices apropriados para denotar o polinômio unidimensional em cada direção da tensorização. A manipulação apropriada dos índices permite obter bases hierárquicas ou não hierárquicas e com continuidade C^0 ou não entre elementos. Para os elementos unidimensionais, quadrados, triângulos, hexaedros e tetraedros, determinam-se as ponderações ótimas dos polinômios de Jacobi (que fornecem ótima esparsidade nas matrizes de massa e rigidez dos elementos), plotam-se os perfis de esparsidade das matrizes de massa e rigidez locais e seus condicionamentos numéricos são calculados. Uma nova base para triângulos e tetraedros é proposta e analisada quanto à esparsidade e condicionamento numérico das matrizes de massa e rigidez.

No Capítulo 4, novas funções de forma nodais unidimensionais são propostas com o objetivo de encontrar uma matriz de rigidez espectral para o problema de Poisson. A base proposta fornece uma matriz de rigidez unidimensional quase diagonal. Apresenta,

ainda, melhor condicionamento do que as matrizes de rigidez obtidas usando as bases de Lagrange e Jacobi. Contudo, a tensorização dessa base não permite obter matrizes de rigidez diagonais para quadrados e hexaedros. Essas matrizes são escritas por combinações das matrizes de massa e rigidez unidimensionais. As matrizes não são diagonais pelo fato que a matriz de massa unidimensional é densa. Duas técnicas para encontrar matrizes diagonais de massa do elemento unidimensional são discutidas e seus efeitos em quadrados e hexaedros analisados. Mostra-se ainda como escrever as matrizes de massa e rigidez de triângulos e tetraedros através de matrizes unidimensionais usando a base de Sherwin e Karniadakis.

O cálculo dos coeficientes das matrizes de massa e rigidez construídas a partir das funções nodais e modais definidas no Capítulo 2 pode ser feito usando diferentes regras de quadratura. Tanto para as funções de interpolação nodais, como para as modais, o mesmo processo de integração pode ser aplicado, principalmente a tensorização dos pontos e pesos de integração para elementos bi e tridimensionais. Assim, no Capítulo 3, o processo é aplicado para a matriz toda, no caso das funções nodais, já que essas matrizes são densas e apenas para os coeficientes diferente de zero no caso das funções modais. Faz-se então, um estudo para a escolha dos pontos de integração de forma a diminuir ao máximo o grau do integrando. Determina-se o número mínimo de pontos de integração necessários para a integração exata dos coeficientes, usando as regras de quadratura gaussianas de Gauss-Jacobi (GJ), Gauss-Lobatto-Jacobi (GLJ) e Gauss-Radau-Jacobi (GRJ). Estuda-se primeiramente o caso unidimensional e mostra-se que, para os quadrados e cubos, basta tensorizar os pontos já escolhidos. Um processo análogo é apresentado para triângulos conforme (Bittencourt, 2005) e estendido neste trabalho para tetraedros.

Por fim, no Capítulo 5 são apresentadas as conclusões finais e os possíveis trabalhos futuros.

Capítulo 2

Construção de Funções de Forma para as Versões h e p do MEF usando Produto Tensorial

Este capítulo apresenta inicialmente um resumo de procedimentos uniformes para a construção de funções de forma para as versões h e p do MEF em quadrados, triângulos, hexaedros e tetraedros, baseados no produto tensorial unidimensional usando polinômios de Jacobi e Lagrange conforme (Karniadakis e Sherwin, 1999; Vazquez, 2004; Bittencourt et al., 2007a). São usados índices apropriados para denotar o polinômio unidimensional em cada direção da tensorização. A manipulação apropriada dos índices permite obter bases hierárquicas ou não hierárquicas e com continuidade C^0 ou não entre elementos. Para os elementos unidimensionais, quadrados, triângulos, hexaedros e tetraedros, determinam-se as ponderações ótimas dos polinômios de Jacobi, plotam-se os perfis de esparsidade das matrizes de massa e rigidez locais e seus condicionamentos numéricos são calculados. Uma nova base para triângulos e tetraedros é proposta e analisada quanto à esparsidade e condicionamento numérico das matrizes de massa e rigidez.

As contribuições deste trabalho no presente contexto são a construção das bases hierárquicas, a determinação das ponderações ótimas das funções base de triângulos e

tetraedros, a construção de uma nova base para triângulos e tetraedros, a verificação da continuidade natural em quadrados e hexaedros, o uso de malhas híbridas e os estudos de esparsidade e condicionamento numérico em tetraedros e na matriz de rigidez dos triângulos.

2.1 Construção das Funções de Base Unidimensionais

2.1.1 Base Nodal

Considere o sistema de coordenadas ξ_1 definido no intervalo fechado $[-1, 1]$ e o conjunto de $P_1 + 1$ pontos ξ_{1p} ($p = 0, \dots, P_1$) definidos em ξ_1 . Uma base nodal é formada pelas funções associadas às coordenadas ξ_{1p} . Cada função obedece à propriedade de ser 1 no seu ponto de definição e 0 em todos os outros pontos. O polinômio de Lagrange de grau P_1 associado a cada coordenada ξ_{1p} é dado por (Zienkiewicz e Taylor, 1989; Cook et al., 1991)

$$l_p^{(P_1)}(\xi_1) = \prod_{q=0(p \neq q)}^{P_1} \frac{(\xi_1 - \xi_{1q})}{(\xi_{1p} - \xi_{1q})} \quad (2.1)$$

$$= \frac{(\xi_1 - \xi_{10})(\xi_1 - \xi_{11}) \dots (\xi_1 - \xi_{1_{p-1}})(\xi_1 - \xi_{1_{p+1}}) \dots (\xi_1 - \xi_{1_{P_1}})}{(\xi_{1p} - \xi_{10})(\xi_{1p} - \xi_{11}) \dots (\xi_{1p} - \xi_{1_{p-1}})(\xi_{1p} - \xi_{1_{p+1}}) \dots (\xi_{1p} - \xi_{1_{P_1}})}$$

e $l_p^{(0)}(\xi_1) = 1$. Pela definição anterior, tem-se a propriedade de colocação dos polinômios de Lagrange, ou seja, $l_p^{(P_1)}(\xi_{1q}) = \delta_{pq}$, sendo δ_{pq} o delta de Kronecker.

As funções nodais de interpolação $N_p(\xi_1)$ associadas aos nós p ($p = 0, \dots, P_1$) dos elementos finitos unidimensionais são os próprios polinômios de Lagrange, ou seja, $N_p(\xi_1) = l_p^{(P_1)}(\xi_1)$. A seguinte expressão pode ser empregada para denotar as funções de forma de vértice ($p = 0$ e $p = P_1$) e internas ($0 < p < P_1$)

$$N_p(\xi_1) = \phi_p(\xi_1) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - \xi_1)L_p^{(P_1-1)}(\xi_1) & p = 0 \\ \frac{1}{2}(1 + \xi_1)L_p^{(P_1-1)}(\xi_1) & p = P_1 \\ \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_1)L_p^{(P_1-2)}(\xi_1) & 0 < p < P_1 \end{cases}, \quad (2.2)$$

sendo $L_p^{(P_1-1)}(\xi_1)$ obtido da expressão geral (2.1) dos polinômios de Lagrange fatorando $\frac{1}{2}(1 - \xi_1)$ e $\frac{1}{2}(1 + \xi_1)$, respectivamente, para $p = 0$ e $p = P_1$. Analogamente,

$$L_p^{(P_1-2)}(\xi_1) = -4 \frac{\prod_{q=1, q \neq p}^{P_1-1} (\xi_1 - \xi_{1_q})}{\prod_{q=0, q \neq p}^{P_1} (\xi_{1_p} - \xi_{1_q})}. \quad (2.3)$$

Pode-se também trabalhar com as coordenadas naturais adimensionais (Cook et al., 1991). Nesse caso, as coordenadas naturais de qualquer ponto P são indicadas como (L_1, L_2) , $L_1 + L_2 = 1$ e a coordenada dependente é $L_2 = 1 - L_1$.

Os mapeamentos entre os sistemas local ξ_1 e natural L_1 são dados por

$$L_1(\xi_1) = \frac{1}{2}(1 + \xi_1) \quad \text{e} \quad \xi_1(L_1) = 2L_1 - 1. \quad (2.4)$$

Considerando os $P_1 + 1$ pontos na direção L_1 , a expressão (2.1) para os polinômios de Lagrange é escrita como

$$\begin{aligned} \hat{l}_p^{(P_1)}(L_1) &= \prod_{q=0, q \neq p}^{P_1} \frac{(L_1 - L_{1_q})}{(L_{1_p} - L_{1_q})} \\ &= \frac{(L_1 - L_{1_0}) \dots (L_1 - L_{1_{p-1}})(L_1 - L_{1_{p+1}}) \dots (L_1 - L_{1_{P_1}})}{(L_{1_p} - L_{1_0}) \dots (L_{1_p} - L_{1_{p-1}})(L_{1_p} - L_{1_{p+1}}) \dots (L_{1_p} - L_{1_{P_1}})}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Da mesma maneira, a partir das transformações em (2.4), a equação (2.2) em coordenadas naturais é dada por

$$N_p(L_1) = \phi_p(L_1) = \begin{cases} (1 - L_1)L_p^{(P_1-1)}(L_1) & p = 0 \\ L_1 L_p^{(P_1-1)}(L_1) & p = P_1 \\ (1 - L_1)L_1 L_p^{(P_1-2)}(L_1) & 0 < p < P_1 \end{cases}, \quad (2.6)$$

sendo

$$L_p^{(P_1-2)}(L_1) = -4 \frac{\prod_{q=1, q \neq p}^{P_1-1} (L_1 - L_{1_q})}{\prod_{q=0, q \neq p}^{P_1} (L_{1_p} - L_{1_q})}. \quad (2.7)$$

Devido às definições dos polinômios de Lagrange, dadas em (2.1) e (2.5), as funções de interpolação em (2.2) e (2.6) estão diretamente relacionadas aos nós do elemento, e portanto constituem uma base nodal.

2.1.2 Base Modal

Para bases modais, as funções de forma nodais são usadas apenas nos vértices. As funções de interpolação para elementos a partir do segundo grau não estão associadas às variáveis nodais. Para isso, emprega-se aqui os polinômios ortogonais de Jacobi, devido a sua maior generalidade. Os polinômios de Legendre e Chebyshev são exemplos de casos particulares dos polinômios de Jacobi.

Os polinômios ortogonais de Jacobi unidimensionais de grau n , $P_n^{\alpha,\beta}(\xi_1)$, são uma família de soluções polinomiais para o problema singular de Sturm-Liouville (Karniadakis e Sherwin, 1999)

$$\frac{d}{d\xi_1}[(1-\xi_1)^{1+\alpha}(1+\xi_1)^{1+\beta}\frac{dy(\xi_1)}{d\xi_1}] = -\lambda_n(1-\xi_1)^\alpha(1+\xi_1)^\beta y(\xi_1),$$

$$\lambda_n = n(n+\alpha+\beta+1), \quad y(\xi_1) = P_n^{\alpha,\beta}(\xi_1).$$

Estes polinômios são ortogonais (Chihara, 1978) no intervalo $[-1, 1]$ com respeito à função peso $(1-\xi_1)^\alpha(1+\xi_1)^\beta$, $(\alpha, \beta > -1; \alpha, \beta \in \mathbb{R})$, isto é,

$$\int_{-1}^1 (1-\xi_1)^\alpha(1+\xi_1)^\beta P_n^{\alpha,\beta}(\xi_1) P_m^{\alpha,\beta}(\xi_1) d\xi_1 = C \delta_{nm}, \quad \xi_1 \in [-1, 1], \quad (2.8)$$

sendo $C = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$ uma constante expressa através da função Gama (Γ), dada como a integral de Euler de segunda espécie $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$, $Re(x) > 0$ ou $x > 0$. Para um número inteiro, $\Gamma(n) = n!$.

A relação de ortogonalidade anterior pode ser mapeada para o intervalo $[0, 1]$ de coordenadas naturais L_1 como

$$\int_0^1 (1-L_1)^\alpha L_1^\beta P_n^{\alpha,\beta}(2L_1-1) P_m^{\alpha,\beta}(2L_1-1) dL_1 = D \delta_{nm}, \quad L_1 \in [0, 1] \quad (2.9)$$

e $D = \frac{1}{2^{\alpha+\beta+1}} C$.

A partir das definições anteriores, a base de funções modais podem ser definidas nos sistemas de coordenadas ξ_1 e L_1 de forma análoga às equações (2.2) e (2.6), bastando substituir os polinômios de Lagrange por Jacobi e usar as funções de vértices lineares, ou

seja,

$$N_p(\xi_1) = \phi_p(\xi_1) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - \xi_1) & p = 0 \\ \frac{1}{2}(1 + \xi_1) & p = P_1 \\ \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_1)P_{p-1}^{\alpha,\beta}(\xi_1) & 0 < p < P_1 \end{cases} \quad (2.10)$$

e

$$N_p(L_1) = \phi_p(L_1) = \begin{cases} 1 - L_1 & p = 0 \\ L_1 & p = P_1 \\ (1 - L_1)L_1P_{p-1}^{\alpha,\beta}(2L_1 - 1) & 0 < p < P_1 \end{cases} . \quad (2.11)$$

2.2 Construção das Funções de Base Bidimensionais - Quadrados e Triângulos

2.2.1 Funções de Interpolação para Quadrados

As funções de interpolação nodais e modais para elementos finitos quadrangulares são construídas pelo produto tensorial de funções unidimensionais nas direções ξ_1 e ξ_2 como ilustrado na Figura 2.1 (Szabó e Babuška, 1991; Karniadakis e Sherwin, 1999).

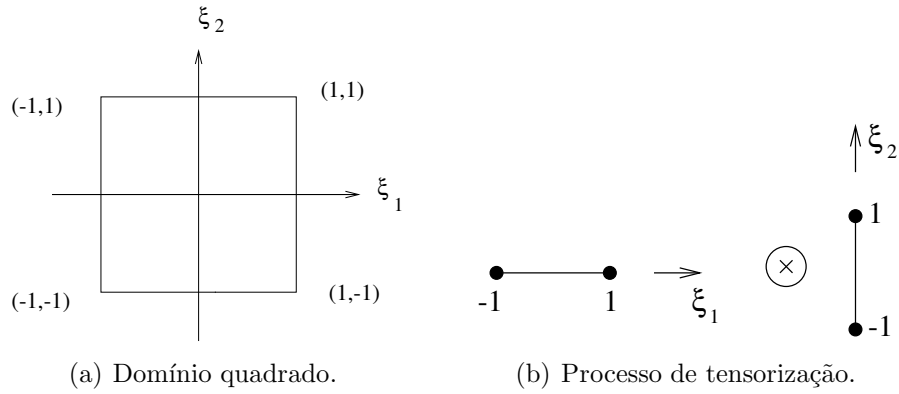


Figura 2.1: Construção tensorial das funções de interpolação para quadrados (Bittencourt, 1991; Vazquez, 2004).

A partir da equação (2.2) e da Figura 2.1, as expressões das funções de interpolação para quadrados podem ser escritas através do seguinte produto tensorial de funções nas

direções ξ_1 e ξ_2

$$N_{pq}(\xi_1, \xi_2) = \phi_p(\xi_1)\phi_q(\xi_2), \quad 0 \leq p \leq P_1 \quad \text{e} \quad 0 \leq q \leq P_2, \quad (2.12)$$

sendo P_1 e P_2 os graus dos polinômios nas direções ξ_1 e ξ_2 , conforme ilustrado na Figura 2.2(a).

De forma análoga ao caso unidimensional, pode-se associar as funções de interpolação às entidades topológicas do elemento que no caso do quadrado são os vértices (V_1, V_2, V_3, V_4) , as arestas (E_1, E_2, E_3, E_4) e a face (F_1) ilustradas na Figura 2.2(b). Os índices p e q da equação (2.12) estão associados às entidades topológicas do quadrado de acordo com a Figura 2.2(c).

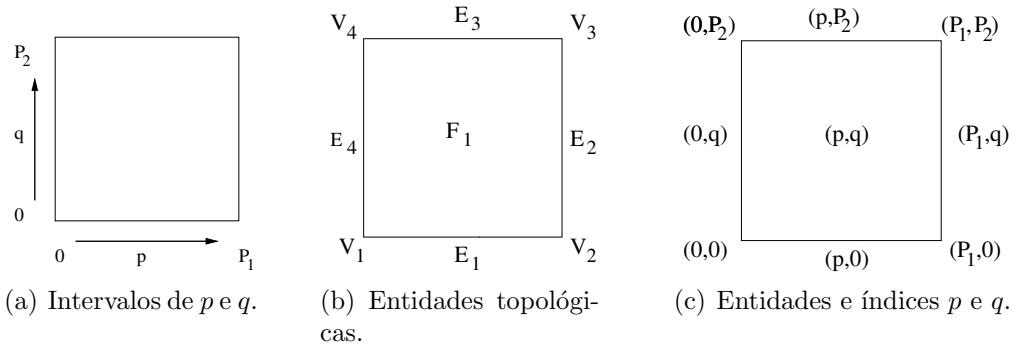


Figura 2.2: Associação entre entidades topológicas e índices p e q no quadrado. (Vazquez, 2004)

A partir daí, as expressões para as funções de interpolação dos vértices V_1, V_2, V_3, V_4 são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} N_{00}(\xi_1, \xi_2) &= \phi_0(\xi_1)\phi_0(\xi_2), \\ N_{P_1 0}(\xi_1, \xi_2) &= \phi_{P_1}(\xi_1)\phi_0(\xi_2), \\ N_{P_1 P_2}(\xi_1, \xi_2) &= \phi_{P_1}(\xi_1)\phi_{P_2}(\xi_2), \\ N_{0 P_2}(\xi_1, \xi_2) &= \phi_0(\xi_1)\phi_{P_2}(\xi_2). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Analogamente, as funções das arestas E_1, E_2, E_3, E_4 com $P_1 = P_2 = P \geq 2$ são,

respectivamente,

$$\begin{aligned}
N_{p0}(\xi_1, \xi_2) &= \phi_p(\xi_1)\phi_0(\xi_2), \quad 0 < p < P_1, \\
N_{P_1q}(\xi_1, \xi_2) &= \phi_{P_1}(\xi_1)\phi_q(\xi_2), \quad 0 < q < P_2, \\
N_{pP_2}(\xi_1, \xi_2) &= \phi_p(\xi_1)\phi_{P_2}(\xi_2), \quad 0 < p < P_1, \\
N_{0q}(\xi_1, \xi_2) &= \phi_0(\xi_1)\phi_q(\xi_2), \quad 0 < q < P_2.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Finalmente, as funções da face F_1 , $P_1 = P_2 = P \geq 3$, são expressas por

$$N_{pq}(\xi_1, \xi_2) = \phi_p(\xi_1)\phi_q(\xi_2). \tag{2.15}$$

A partir do procedimento tensorizável anterior, definem-se as bases nodais e modais para o quadrado.

Bases nodais

A base nodal lagrangiana padrão (Zienkiewicz e Taylor, 1989; Cook et al., 1991; Karniadakis e Sherwin, 1999) para quadrados é obtida substituindo em (2.12) a definição da base unidimensional dada em (2.2).

Como é conhecido (Zienkiewicz e Taylor, 1989; Cook et al., 1991; Karniadakis e Sherwin, 1999), a base nodal de Lagrange gera termos adicionais que não são necessários para garantir que a expansão local seja completa. Para evitar esse fato, trabalha-se com a base nodal de Serendipity, a qual necessita de nós internos no quadrado apenas a partir do quarto grau. Os elementos lineares das famílias de Lagrange e Serendipity são idênticos, assim como as funções de interpolação dos vértices de todos elementos.

As funções de interpolação de aresta para a família Serendipity são determinadas a partir de (2.12), mas substituindo a definição (2.2) por

$$\phi_p(\xi_1) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - \xi_1) & p = 0 \\ \frac{1}{2}(1 + \xi_1) & p = P_1 \\ \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_1)L_p^{(P_1-2)}(\xi_1) & 0 < p < P_1 \end{cases}. \tag{2.16}$$

Para os elementos de Serendipity e $P_1 = P_2 = P \geq 4$, as funções de face são obtidas de (2.12) mas usando a seguinte definição

$$\phi_p(\xi_1) = \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_1)L_p^{(P_1-4)}(\xi_1) \tag{2.17}$$

para $P_1 = P_2 = P > 3$, $1 < p, q < P - 1$ e $p + q \leq P - 2$.

Bases modais

A base modal mais simples para elementos quadrangulares é obtida substituindo a definição (2.10) em termos de polinômios de Jacobi na equação (2.12) (Karniadakis e Sherwin, 1999). As funções de vértice são sempre lineares. Substituindo (2.10) nas expressões (2.14), têm-se as funções de interpolação de aresta

$$\begin{aligned} N_{p0}(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{8}(1 - \xi_1)(1 + \xi_1)(1 - \xi_2)P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\xi_1), \quad 0 < p < P_1, \\ N_{P_1q}(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{8}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2)(1 + \xi_2)P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(\xi_2), \quad 0 < q < P_2, \\ N_{pP_2}(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{8}(1 - \xi_1)(1 + \xi_1)(1 + \xi_2)P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\xi_1), \quad 0 < p < P_1, \\ N_{0q}(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{8}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2)(1 - \xi_2)P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(\xi_2), \quad 0 < q < P_2, \end{aligned} \quad (2.18)$$

sendo (α_1, β_1) e (α_2, β_2) os coeficientes de ponderação nas direções ξ_1 e ξ_2 , respectivamente. Esses coeficientes serão selecionados de forma conveniente para alcançar uma melhor esparsidade das matrizes elementares. A partir de (2.10) e (2.15), obtêm-se as funções de face

$$N_{p,q}(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{16}(1 - \xi_1)(1 + \xi_1)(1 - \xi_2)(1 + \xi_2)P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\xi_1)P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(\xi_2), \quad (2.19)$$

com $0 < p < P_1$ e $0 < q < P_2$. Considerando $P_1 = P_2 = P$, a base hierárquica é obtida com a restrição $p + q \leq P$. A base modal de Serendipity é obtida apenas impondo a restrição $p + q \leq P - 2$ para os modos internos (Karniadakis e Sherwin, 1999).

2.2.2 Funções de Interpolação para Triângulos

As coordenadas naturais, baricênticas ou de área têm sido historicamente empregadas para a construção de funções de interpolação para triângulos, devido principalmente à sua propriedade de simetria rotacional.

As coordenadas baricênticas para triângulos estão ilustradas na Figura 2.3. Dado um triângulo de área A e um ponto qualquer P , definem-se três subtriângulos com áreas A_1 , A_2 e A_3 de tal forma que $A = A_1 + A_2 + A_3$. As coordenadas de área $0 \leq L_i \leq 1$ ($i = 1, 2, 3$) são definidas pela razão entre as áreas dos subtriângulos e do triângulo original

(Zienkiewicz e Taylor, 1989; Cook et al., 1991)(ver Figura 2.3(b))

$$\frac{A_1}{A} + \frac{A_2}{A} + \frac{A_3}{A} = 1 \rightarrow L_1 + L_2 + L_3 = 1. \quad (2.20)$$

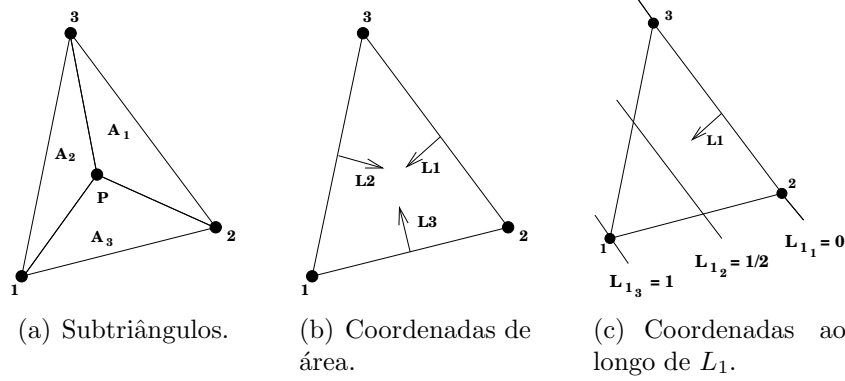


Figura 2.3: Coordenadas baricêntricas para triângulos (Bittencourt, 1991; Vazquez, 2004).

A partir de (2.20), observa-se que uma das coordenadas de área é dependente das outras duas.

Em (Bittencourt, 2005), apresentou-se um procedimento construtivo baseado no produto tensorial de polinômios unidimensionais expressos em coordenadas naturais. Apresenta-se a seguir o procedimento tensorial definido nesse trabalho considerando a base nodal lagrangiana padrão para triângulos (Zienkiewicz e Taylor, 1989; Cook et al., 1991).

As funções de forma nodais para triângulos podem ser escritas como o produto tensorial dos polinômios de Lagrange nas coordenadas L_1 , L_2 e L_3 da seguinte maneira (Bittencourt, 2005)

$$N_a(L_1, L_2, L_3) = \hat{l}_b^{(b-1)}(L_1) \hat{l}_c^{(c-1)}(L_2) \hat{l}_d^{(d-1)}(L_3), \quad (2.21)$$

onde a é o número do nó; b , c e d são os índices das coordenadas nodais nas direções L_1 , L_2 e L_3 , respectivamente, como ilustrado na Figura 2.3(c) para a direção L_1 . Os valores de b , c e d estão no intervalo fechado $[1, P_i + 1]$ e P_i ($i = 1, 2, 3$) denota o grau do polinômio na direção L_i .

Os polinômios de Lagrange indicados na equação anterior são dados por

$$\hat{l}_b^{(b-1)}(L_1) = \frac{(L_1 - L_{1_1})(L_1 - L_{1_2}) \dots (L_1 - L_{1_{b-1}})}{(L_{1_b} - L_{1_1})(L_{1_b} - L_{1_2}) \dots (L_{1_b} - L_{1_{b-1}})},$$

$$\begin{aligned}\hat{l}_c^{(c-1)}(L_2) &= \frac{(L_2 - L_{2_1})(L_2 - L_{2_2}) \dots (L_2 - L_{2_{c-1}})}{(L_{2_c} - L_{2_1})(L_{2_c} - L_{2_2}) \dots (L_{2_c} - L_{2_{c-1}})}, \\ \hat{l}_d^{(d-1)}(L_3) &= \frac{(L_3 - L_{3_1})(L_3 - L_{3_2}) \dots (L_3 - L_{3_{d-1}})}{(L_{3_d} - L_{3_1})(L_{3_d} - L_{3_2}) \dots (L_{3_d} - L_{3_{d-1}})}.\end{aligned}\tag{2.22}$$

Quando comparada à equação (2.5), deve-se observar que os polinômios de Lagrange em (2.22) são truncados nas coordenadas dos números indicados por b , c e d , respectivamente, ao invés de considerar todas as coordenadas $P_i + 1$ em cada direção L_i (ver Figura 2.3(c)). Os graus dos polinômios nas direções L_i não são P_i como seria esperado de (2.5), mas $b - 1$, $c - 1$ e $d - 1$, respectivamente. Esse é o principal ponto usado para obter as funções de forma nodal padrão para triângulos usando produto tensorial (Bittencourt, 2005). Os mesmos polinômios truncados são usados em (Blyth e Pozrikidis, 2005).

A Figura 2.4 e a Tabela 2.1 apresentam os índices a , b , c e d para o triângulo quadrático.

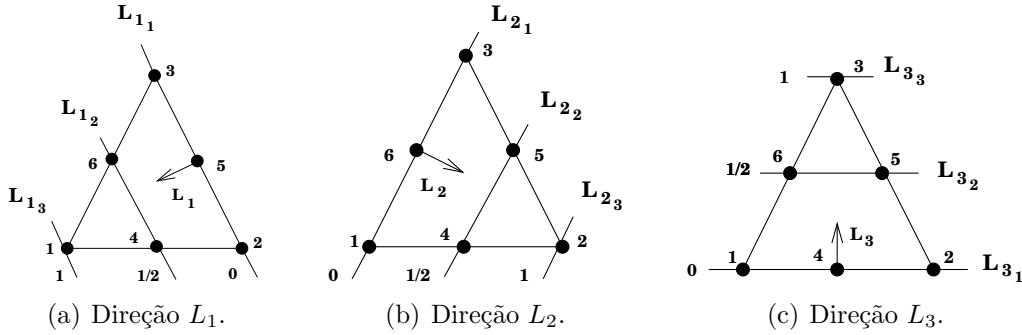


Figura 2.4: Triângulo quadrático (Bittencourt, 1991; Vazquez, 2004).

a	1	2	3	4	5	6
b	3	1	1	2	1	2
c	1	3	1	2	2	1
d	1	1	3	1	2	2

Tabela 2.1: Triângulo quadrático: índices a , b , c e d .

A mesma notação usada para quadrados será empregada para triângulos. Para isso, considere as entidades topológicas do triângulo ilustrado na Figura 2.5(a), que são 3 vértices (V_1, V_2, V_3), 3 arestas (E_1, E_2, E_3) e uma face (F_1). A expressão geral para as

funções de interpolação do triângulo é

$$N_{pqr}(L_1, L_2, L_3) = \phi_p(L_1)\phi_q(L_2)\phi_r(L_3), \quad (2.23)$$

sendo $0 \leq p \leq P_1$, $0 \leq q \leq P_2$ e $0 \leq r \leq P_3$ conforme ilustrado na Figura 2.5(b).

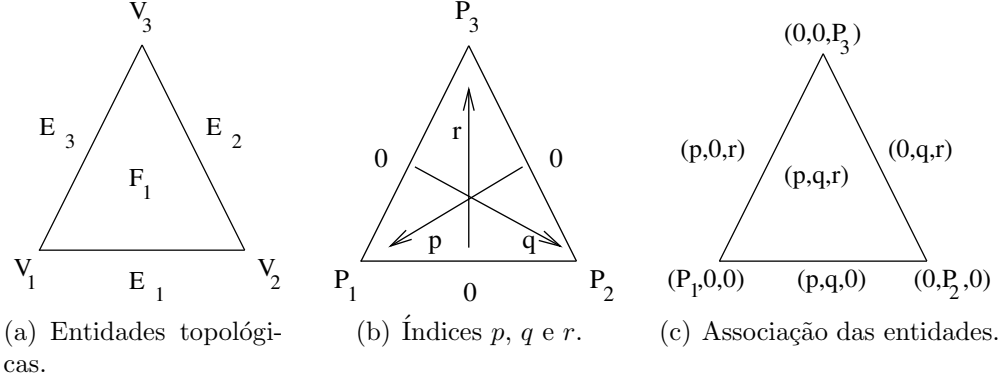


Figura 2.5: Entidades topológicas do triângulo, índices p , q , r e associação entre entidades e índices.

As funções de vértice são obtidas a partir da equação (2.23) e da Figura 2.5 como

$$\begin{aligned} N_{P_1 00}(L_1, L_2, L_3) &= \phi_{P_1}(L_1)\phi_0(L_2)\phi_0(L_3), \\ N_{0P_2 0}(L_1, L_2, L_3) &= \phi_0(L_1)\phi_{P_2}(L_2)\phi_0(L_3), \\ N_{00P_3}(L_1, L_2, L_3) &= \phi_0(L_1)\phi_0(L_2)\phi_{P_3}(L_3). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Da mesma forma, as funções de aresta para $0 < p, q, r < P$ e $P_1 = P_2 = P_3 = P$ são dadas por

$$\begin{aligned} N_{pq0}(L_1, L_2, L_3) &= \phi_p(L_1)\phi_q(L_2)\phi_0(L_3), \\ N_{p0r}(L_1, L_2, L_3) &= \phi_p(L_1)\phi_0(L_2)\phi_r(L_3), \\ N_{0qr}(L_1, L_2, L_3) &= \phi_0(L_1)\phi_q(L_2)\phi_r(L_3). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Finalmente, as funções de face para $0 < p, q, r < P - 1$ são

$$N_{pqr}(L_1, L_2, L_3) = \phi_p(L_1)\phi_q(L_2)\phi_r(L_3). \quad (2.26)$$

A seguir descrevem-se as bases nodais e modais para triângulos empregando a notação anterior. Em ambos os casos, considera-se que $P_1 = P_2 = P_3 = P$ e portanto têm-se 3 funções de vértice, $3(P - 1)$ de aresta e $\frac{1}{2}(P - 1)(P - 2)$ de face. Além disso, as bases são construídas para $p + q + r = P$, significando que as bases não serão hierárquicas,

mas terão uma continuidade C^0 natural (Bittencourt, 2005).

Bases nodais

Considere a seguinte definição

$$\phi_p(L_1) = \begin{cases} 1 & p = 0 \\ L_1 L_p^{(p-1)}(L_1) & 0 < p \leq P_1 \end{cases}, \quad (2.27)$$

com

$$L_p^{(p-1)}(L_1) = -4 \frac{\prod_{q=1}^{p-1} (L_1 - L_{1_q})}{\prod_{q=0}^{p-1} (L_{1_p} - L_{1_q})}. \quad (2.28)$$

Definições análogas são válidas para $\phi_q(L_2)$ e $\phi_r(L_3)$. Empregando a equação (2.27) nas expressões (2.24) a (2.26), define-se a base nodal lagrangiana para triângulos. Os elementos linear, quadrático e cúbico estão ilustrados na Figura 2.6.

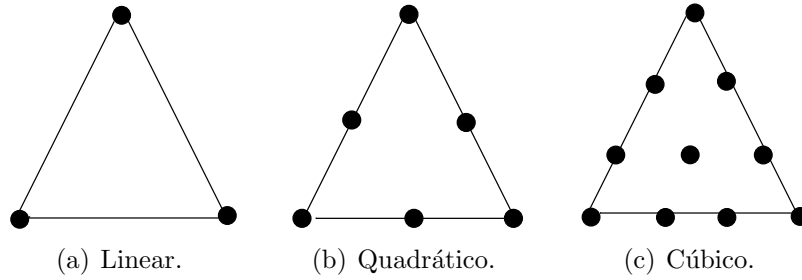


Figura 2.6: Triângulos da família nodal lagrangiana (Bittencourt, 1991; Vazquez, 2004).

Uma outra base para triângulos pode ser obtida considerando a definição

$$\phi_p(L_1) = \begin{cases} 1 & p = 0 \\ L_1 & p = P_1 \\ L_1 L_p^{(p-1)} & 0 < p < P_1 \end{cases}. \quad (2.29)$$

Os elementos obtidos substituindo a definição anterior em (2.24) a (2.26) são os mesmos indicados na Figura 2.6. Mas independente do grau P , as funções de vértice serão sempre lineares.

Bases modais

Considere a definição abaixo, similar a (2.29), mas usando polinômios de Jacobi

$$\phi_p(L_1) = \begin{cases} 1 & p = 0 \\ L_1 & p = P_1 \\ L_1 P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1} (2L_1 - 1) & 0 < p < P_1 \end{cases}. \quad (2.30)$$

Analogamente, para $\phi_q(L_2)$ e $\phi_r(L_3)$. Uma segunda alternativa é redefinir $\phi_r(L_3)$ como

$$\phi_r(L_3) = \begin{cases} 1 & r = 0 \\ L_3 & r = P \\ L_3^r & 0 < r < P \end{cases}. \quad (2.31)$$

Desta forma, retiramos L_3 como termo de ponderação no cálculo dos coeficientes das matrizes de massa e rigidez, o que fornece maior flexibilidade no processo de tensorização.

As definições dadas nas equações (2.27) a (2.31) são usadas apenas no processo de tensorização e não indicam bases usadas na aproximação de problemas unidimensionais.

Tal como as bases nodais de Lagrange, as bases modais para triângulos podem ser definidas usando as equações (2.24) a (2.26). Os modos de vértice, para ambas as definições (2.30) e (2.31), são dados por

$$\begin{aligned} N_{P_1 00}(L_1, L_2, L_3) &= L_1, \\ N_{0P_2 0}(L_1, L_2, L_3) &= L_2, \\ N_{00P_3}(L_1, L_2, L_3) &= L_3. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Os modos de aresta para $P \geq 2$ e $0 < p, q, r < P$, usando a definição (2.30), são

$$\begin{aligned} N_{pq0}(L_1, L_2, L_3) &= L_1 L_2 P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1} (2L_1 - 1) P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2} (2L_2 - 1), \quad p + q = P, \\ N_{p0r}(L_1, L_2, L_3) &= L_1 L_3 P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1} (2L_1 - 1) P_{r-1}^{\alpha_3, \beta_3} (2L_3 - 1), \quad p + r = P, \\ N_{0pr}(L_1, L_2, L_3) &= L_2 L_3 P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2} (2L_2 - 1) P_{r-1}^{\alpha_3, \beta_3} (2L_3 - 1), \quad q + r = P. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Usando a definição (2.31), tem-se

$$\begin{aligned} N_{pq0}(L_1, L_2, L_3) &= L_1 L_2 P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1} (2L_1 - 1) P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2} (2L_2 - 1), \quad p + q = P, \\ N_{p0r}(L_1, L_2, L_3) &= L_1 L_3^r P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1} (2L_1 - 1), \quad p + r = P, \\ N_{0qr}(L_1, L_2, L_3) &= L_2 L_3^r P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2} (2L_2 - 1), \quad q + r = P. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Finalmente, os modos de face para $P \geq 3$, $p + q + r = P$, $0 < p, q, r < P - 1$ e usando a definição (2.30) são

$$N_{pqr}(L_1, L_2, L_3) = L_1 L_2 L_3 P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1} (2L_1 - 1) P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2} (2L_2 - 1) P_{r-1}^{\alpha_3, \beta_3} (2L_3 - 1). \quad (2.35)$$

Analogamente, empregando (2.31), as funções de face são

$$N_{pqr}(L_1, L_2, L_3) = L_1 L_2 L_3^r P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(2L_1 - 1) P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(2L_2 - 1). \quad (2.36)$$

Uma base hierárquica para triângulos é gerada escolhendo as funções que obedecem a condição $p + q + r \leq P$. Para as funções de aresta, consideram-se as seguintes relações para os índices p, q, r em (2.33) e (2.34)

- aresta $pq0$: $r = 0$ e $0 \leq q - p \leq 1$;
- aresta $0qr$: $p = 0$ e $0 \leq r - q \leq 1$;
- aresta $p0r$: $q = 0$ e $0 \leq r - p \leq 1$.

No caso das funções de face, utiliza-se $0 \leq q - p \leq 2$ ou $0 \leq p - q \leq 2$ e $r \geq p$ em (2.35) e (2.36). Neste trabalho, considerou-se $0 \leq q - p \leq 2$ e $r \geq p$.

Assim, por exemplo, para $P = 1$, têm-se apenas funções de vértice; para $P = 2$, têm-se as funções de arestas N_{011} , N_{101} e N_{110} ; para $P = 3$, existem as funções de aresta N_{011} , N_{101} , N_{110} , N_{012} , N_{102} e N_{120} e a função de face N_{111} ; para $P = 4$, as funções de aresta são N_{011} , N_{101} , N_{110} , N_{012} , N_{102} , N_{120} , N_{022} , N_{202} e N_{220} e as de face são N_{111} , N_{121} e N_{112} . Continuando desta maneira, pode-se observar que as funções para o grau $P + 1$ contêm sempre as funções para o grau P , o que caracteriza uma base hierárquica.

Dois polinômios de Jacobi nas funções de arestas do triângulo, como dado em (2.33), não limitam o uso de malhas híbridas de quadrados e triângulos. A Figura 2.7 mostra um exemplo de uma malha simples com um quadrado e um triângulo para $P = 3$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ e $\beta_1 = \beta_2 = 2$. A continuidade C^0 ao longo da aresta comum pode ser observada.

Para isso, mapeiam-se as funções de forma das arestas do triângulo no quadrado. Considere, por exemplo, a primeira expressão da equação (2.33). Na aresta $pq0$, $L_3 = 0$ e $L_2 = 1 - L_1$. Portanto,

$$N_{pq0}(L_1, L_2, L_3) = (1 - L_1) L_1 P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(2L_1 - 1) P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(-(2L_1 - 1)).$$

Usando a segunda transformação em (2.4) ($\xi_1 = 2L_1 - 1$), a expressão anterior pode ser reescrita como

$$N_{pq0}(\xi_1) = (1 - \xi_1)(1 + \xi_1) P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\xi_1) P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(-\xi_1).$$

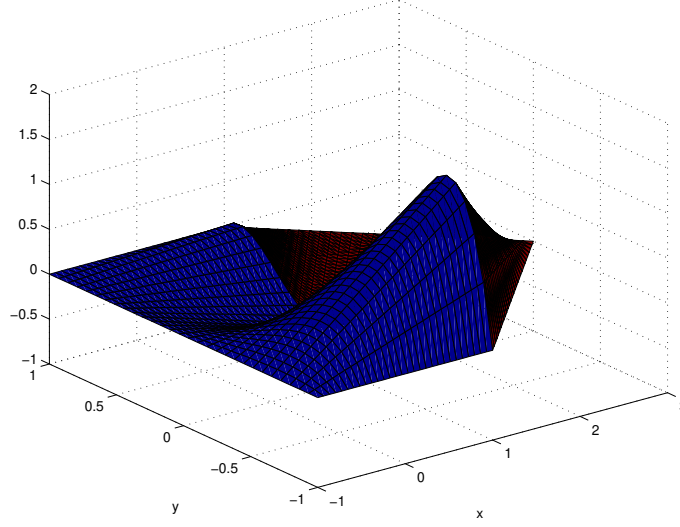


Figura 2.7: Malha híbrida.

Essa equação define um polinômio unidimensional ao longo da aresta do elemento quadrangular, o qual pode ser usado no produto tensorial indicado na equação (2.14), para obter as funções de forma das arestas do quadrado como

$$\begin{aligned}
 N_{p0}(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{8}(1 - \xi_1)(1 + \xi_1)(1 - \xi_2)P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\xi_1)P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(-\xi_1), \\
 N_{P_1q}(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{8}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2)(1 + \xi_2)P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\xi_2)P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(-\xi_2), \\
 N_{pP_2}(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{8}(1 - \xi_1)(1 + \xi_1)(1 + \xi_2)P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\xi_1)P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(-\xi_1), \\
 N_{0q}(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{8}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2)(1 - \xi_2)P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\xi_2)P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(-\xi_2).
 \end{aligned}$$

As expressões anteriores são similares às dadas pela equação (2.18).

2.3 Construção das Funções de Base Tridimensionais - Hexaedros e Tetraedros

2.3.1 Funções de Interpolação para Hexaedros

De forma análoga aos quadrados, as funções de interpolação para hexaedros são construídas através do produto tensorial de polinômios unidimensionais nas direções ξ_1 ,

ξ_2 e ξ_3 conforme ilustrado na Figura 2.8 (Szabó e Babuška, 1991; Karniadakis e Sherwin, 1999).

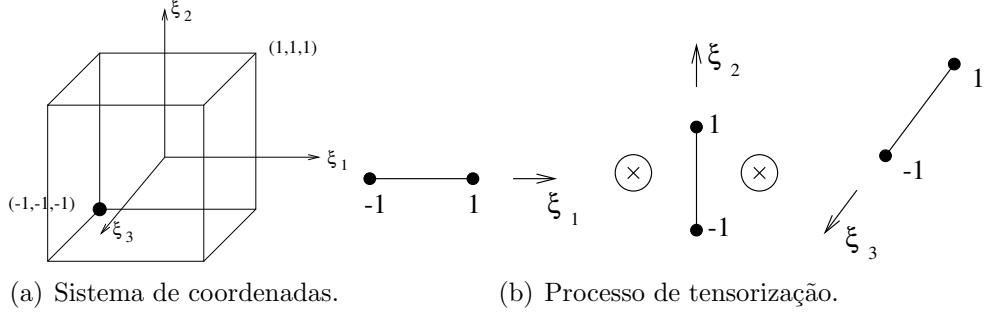


Figura 2.8: Construção tensorial das funções de interpolação para hexaedros (Bittencourt, 1991; Vazquez, 2004).

A expressão geral das funções de interpolação para hexaedros obtida pelo produto tensorial é dada por

$$N_{pqr}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \phi_p(\xi_1)\phi_q(\xi_2)\phi_r(\xi_3), \quad (2.37)$$

com $0 \leq p \leq P_1$, $0 \leq q \leq P_2$ e $0 \leq r \leq P_3$, sendo P_1 , P_2 e P_3 os graus dos polinômios nas direções ξ_1 , ξ_2 e ξ_3 , respectivamente, conforme ilustrado na Figura 2.9(a).

A Figura 2.9(b) ilustra as entidades topológicas do hexaedro, as quais são constituídas de 8 vértices (V_1 a V_8), 12 arestas (E_1 a E_{12}), 6 faces (F_1 a F_6) e um volume (B_1). A Figura 2.10 apresenta a relação entre os índices p , q e r e as entidades topológicas do hexaedro.

A partir da Figura 2.10 e da equação (2.37), as expressões das funções de interpolação dos vértices (V_1 a V_8) são, respectivamente,

$$\begin{aligned} N_{000}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \phi_0(\xi_1)\phi_0(\xi_2)\phi_0(\xi_3), \\ N_{P_1 00}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \phi_{P_1}(\xi_1)\phi_0(\xi_2)\phi_0(\xi_3), \\ N_{P_1 P_2 0}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \phi_{P_1}(\xi_1)\phi_{P_2}(\xi_2)\phi_0(\xi_3), \\ N_{0 P_2 0}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \phi_0(\xi_1)\phi_{P_2}(\xi_2)\phi_0(\xi_3), \\ N_{00 P_3}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \phi_0(\xi_1)\phi_0(\xi_2)\phi_{P_3}(\xi_3), \\ N_{P_1 0 P_3}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \phi_{P_1}(\xi_1)\phi_0(\xi_2)\phi_{P_3}(\xi_3), \end{aligned} \quad (2.38)$$

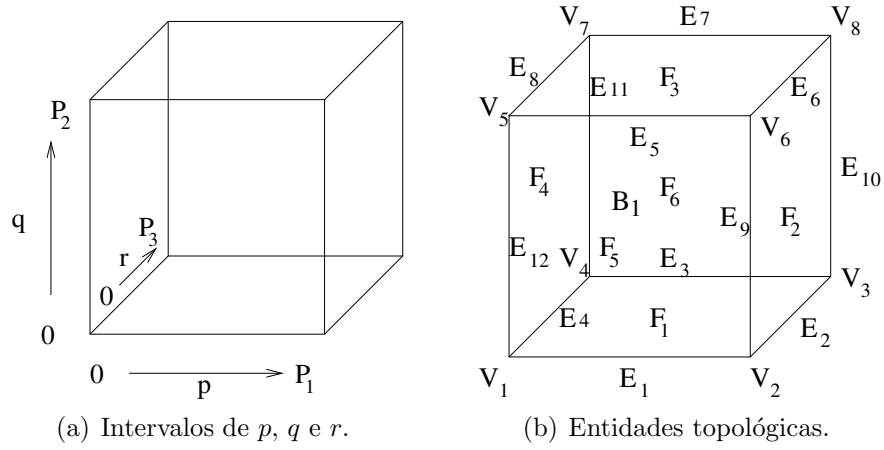


Figura 2.9: Índices p , q e r e entidades topológicas no hexaedro.

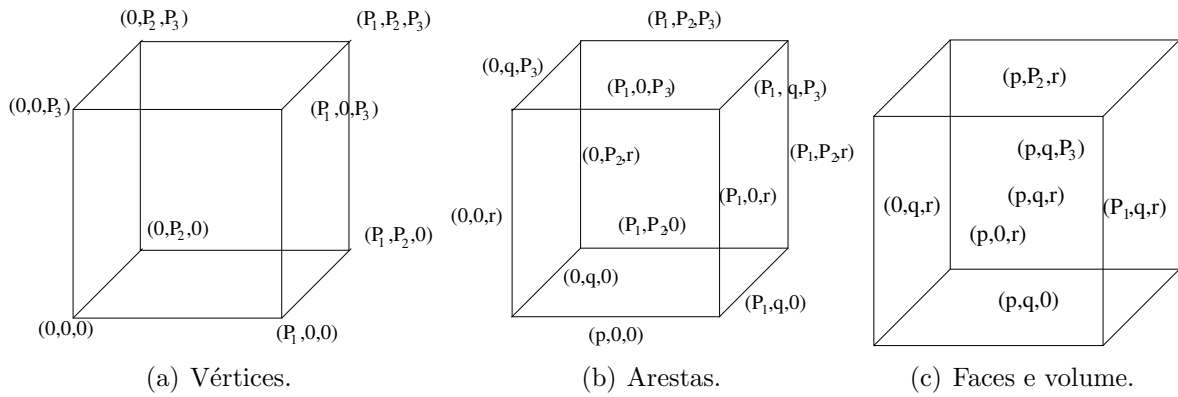


Figura 2.10: Associação entre os índices p , q e r e as entidades topológicas do hexaedro.

$$N_{0P_2P_3}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \phi_0(\xi_1)\phi_{P_2}(\xi_2)\phi_{P_3}(\xi_3),$$

$$N_{P_1P_2P_3}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \phi_{P_1}(\xi_1)\phi_{P_2}(\xi_2)\phi_{P_3}(\xi_3).$$

Analogamente, as funções de aresta são

$$N_{p00}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \phi_p(\xi_1)\phi_0(\xi_2)\phi_0(\xi_3),$$

$$N_{P_1q0}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \phi_{P_1}(\xi_1)\phi_q(\xi_2)\phi_0(\xi_3),$$

$$N_{pP_20}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \phi_p(\xi_1)\phi_{P_2}(\xi_2)\phi_0(\xi_3),$$

$$N_{0q0}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \phi_0(\xi_1)\phi_q(\xi_2)\phi_0(\xi_3)$$

$$N_{0P_2r}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \phi_0(\xi_1)\phi_{P_2}(\xi_2)\phi_r(\xi_3),$$

$$N_{P_1qP_3}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \phi_{P_1}(\xi_1)\phi_q(\xi_2)\phi_{P_3}(\xi_3),$$

$$N_{pP_2P_3}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \phi_p(\xi_1)\phi_{P_2}(\xi_2)\phi_{P_3}(\xi_3), \quad (2.39)$$

$$N_{0qP_3}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \phi_0(\xi_1)\phi_q(\xi_2)\phi_{P_3}(\xi_3),$$

$$N_{P_10r}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \phi_{P_1}(\xi_1)\phi_0(\xi_2)\phi_r(\xi_3),$$

$$N_{P_1P_2r}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \phi_{P_1}(\xi_1)\phi_{P_2}(\xi_2)\phi_r(\xi_3),$$

$$N_{p0P_3}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \phi_p(\xi_1)\phi_0(\xi_2)\phi_{P_3}(\xi_3),$$

$$N_{00r}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \phi_0(\xi_1)\phi_0(\xi_2)\phi_r(\xi_3).$$

com $0 < p < P_1$, $0 < q < P_2$ e $0 < r < P_3$.

As expressões das funções de face são dadas, respectivamente, por

$$N_{pq0}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \phi_p(\xi_1)\phi_q(\xi_2)\phi_0(\xi_3)$$

$$N_{P_1qr}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \phi_{P_1}(\xi_1)\phi_q(\xi_2)\phi_r(\xi_3),$$

$$N_{pqP_3}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \phi_p(\xi_1)\phi_q(\xi_2)\phi_{P_3}(\xi_3),$$

$$N_{0qr}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \phi_0(\xi_1)\phi_q(\xi_2)\phi_r(\xi_3), \quad (2.40)$$

$$N_{p0r}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \phi_p(\xi_1)\phi_0(\xi_2)\phi_r(\xi_3),$$

$$N_{pP_2r}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \phi_p(\xi_1)\phi_{P_2}(\xi_2)\phi_r(\xi_3),$$

Finalmente, a expressão geral da função de volume é

$$N_{pqr}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \phi_p(\xi_1)\phi_q(\xi_2)\phi_r(\xi_3), \quad 0 < p < P_1, \quad 0 < q < P_2, \quad 0 < r < P_3. \quad (2.41)$$

A família lagrangiana de elementos é determinada substituindo (2.2) nas expressões

(2.38) a (2.41). Para o caso $P_1 = P_2 = P_3 = P$, têm-se 8 funções de vértice, $12(P - 1)$ funções de aresta, $6(P - 1)^2$ funções de face e $(P - 1)^3$ funções de volume. O número total de nós é dado pelo produto $(P_1 + 1)(P_2 + 1)(P_3 + 1)$. A família Serendipity é obtida empregando a definição (2.16) nas expressões (2.38) a (2.41).

A base modal apresentada em (Karniadakis e Sherwin, 1999) é obtida substituindo a definição (2.10) nas equações (2.38) a (2.41).

2.3.2 Funções de Interpolação para Tetraedros

Aplica-se o mesmo procedimento tensorizável dos triângulos para os tetraedros. Para isso, utilizam-se as coordenadas baricêntricas de volume L_i ($i = 1, 2, 3, 4$) (Zienkiewicz e Taylor, 1989; Cook et al., 1991) dadas pela relação de volumes dos tetraedros, de tal forma que

$$L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 1. \quad (2.42)$$

As funções de forma nodal e modal para tetraedros podem ser escritas em termos de entidades topológicas como (Bittencourt et al., 2007a)

$$N_{pqrs}(L_1, L_2, L_3, L_4) = \phi_p(L_1)\phi_q(L_2)\phi_r(L_3)\phi_s(L_4), \quad (2.43)$$

sendo $0 \leq p \leq P_1$, $0 \leq q \leq P_2$, $0 \leq r \leq P_3$ e $0 \leq s \leq P_4$ com P_1 , P_2 , P_3 e P_4 os graus dos polinômios nas direções L_1 , L_2 , L_3 e L_4 , respectivamente, conforme mostrado na Figura 2.11(b).

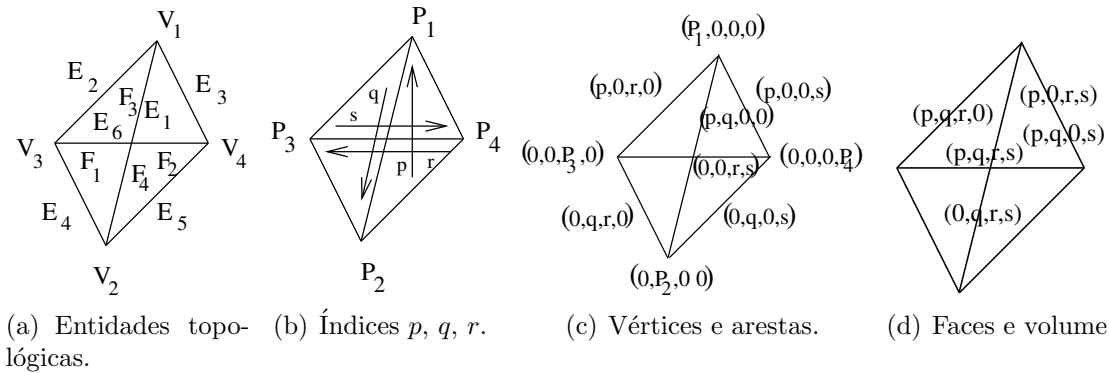


Figura 2.11: Entidades topológicas para tetraedros, índices p, q, r e s e associação entidades e índices.

Considera-se a seguir o caso $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P$, para o qual têm-se 4 funções de vértice, $6(P-1)$ de aresta, $\frac{1}{2}(P-1)(P-2)$ de face e $\frac{1}{6}(P-1)(P-2)(P-3)$ de volume.

Baseado na equação (2.43) e na Figura 2.11, as funções de vértices são obtidas como

$$\begin{aligned} N_{P_1 000}(L_1, L_2, L_3, L_4) &= \phi_{P_1}(L_1)\phi_0(L_2)\phi_0(L_3)\phi_0(L_4), \\ N_{0P_2 00}(L_1, L_2, L_3, L_4) &= \phi_0(L_1)\phi_{P_2}(L_2)\phi_0(L_3)\phi_0(L_4), \\ N_{00P_3 0}(L_1, L_2, L_3, L_4) &= \phi_0(L_1)\phi_0(L_2)\phi_{P_3}(L_3)\phi_0(L_4), \\ N_{000P_4}(L_1, L_2, L_3, L_4) &= \phi_0(L_1)\phi_0(L_2)\phi_0(L_3)\phi_{P_4}(L_4). \end{aligned} \quad (2.44)$$

As funções de aresta para $P \geq 2$ e $0 < p, q, r, s < P$ são

$$\begin{aligned} N_{pq00}(\cdot) &= \phi_p(L_1)\phi_q(L_2)\phi_0(L_3)\phi_0(L_4), \quad p+q=P, \\ N_{p0r0}(\cdot) &= \phi_p(L_1)\phi_0(L_2)\phi_r(L_3)\phi_0(L_4), \quad p+r=P, \\ N_{p00s}(\cdot) &= \phi_p(L_1)\phi_0(L_2)\phi_0(L_3)\phi_s(L_4), \quad p+s=P, \\ N_{0qr0}(\cdot) &= \phi_0(L_1)\phi_q(L_2)\phi_r(L_3)\phi_0(L_4), \quad q+r=P, \\ N_{0q0s}(\cdot) &= \phi_0(L_1)\phi_q(L_2)\phi_0(L_3)\phi_s(L_4), \quad q+s=P, \\ N_{00rs}(\cdot) &= \phi_0(L_1)\phi_0(L_2)\phi_r(L_3)\phi_s(L_4), \quad r+s=P. \end{aligned} \quad (2.45)$$

As funções de face para $P \geq 3$ e $0 < p, q, r, s < P-1$ são dadas por

$$\begin{aligned} N_{pqr0}(\cdot) &= \phi_p(L_1)\phi_q(L_2)\phi_r(L_3)\phi_0(L_4), \quad p+q+r=P, \\ N_{pq0s}(\cdot) &= \phi_p(L_1)\phi_q(L_2)\phi_0(L_3)\phi_s(L_4), \quad p+q+s=P, \\ N_{p0rs}(\cdot) &= \phi_p(L_1)\phi_0(L_2)\phi_r(L_3)\phi_s(L_4), \quad p+r+s=P, \\ N_{0qrs}(\cdot) &= \phi_0(L_1)\phi_q(L_2)\phi_r(L_3)\phi_s(L_4), \quad q+r+s=P. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Enfim, as funções de corpo para $P \geq 4$, $p+q+r+s=P$ e $0 < p, q, r, s < P-2$ são

$$N_{pqrs}(\cdot) = \phi_p(L_1)\phi_q(L_2)\phi_r(L_3)\phi_s(L_4). \quad (2.47)$$

Empregando a definição (2.27) nas expressões (2.44) a (2.47), obtém-se a base nodal lagrangiana padrão encontrada na literatura. Para obter a base modal para tetraedros basta substituir as definições (2.30) e (2.31) nas expressões (2.44) a (2.47). Novamente, essas bases não são hierárquicas devido a condição $p+q+r+s=P$, mas tem uma continuidade natural C^0 (Bittencourt, 2005).

Bases hierárquicas podem ser geradas impondo condições aos índices p, q, r e s . Analogamente aos triângulos, uma base hierárquica para tetraedros é gerada escolhendo as funções que obedecem a condição $p+q+r+s \leq P$. Para as funções de aresta,

consideram-se as seguintes relações para os índices p, q, r, s em (2.45)

- aresta $pq00$: $r = s = 0$ e $0 \leq q - p \leq 1$;
- aresta $p0r0$: $q = s = 0$ e $0 \leq r - p \leq 1$;
- aresta $p00s$: $q = r = 0$ e $0 \leq s - p \leq 1$;
- aresta $0qr0$: $p = s = 0$ e $0 \leq r - q \leq 1$;
- aresta $0q0s$: $p = r = 0$ e $0 \leq s - q \leq 1$;
- aresta $00rs$: $p = q = 0$ e $0 \leq s - r \leq 1$.

Para as funções de face, as condições $s = 0$, $0 \leq q - p \leq 2$ e $r \geq p$ são consideradas em (2.46). Enfim, para as funções de corpo (2.47), escolhem-se as funções nas quais $0 \leq q - p \leq 3$, $r \geq p$ e $s \geq p$.

2.4 Continuidade Global C^0 para Quadrados

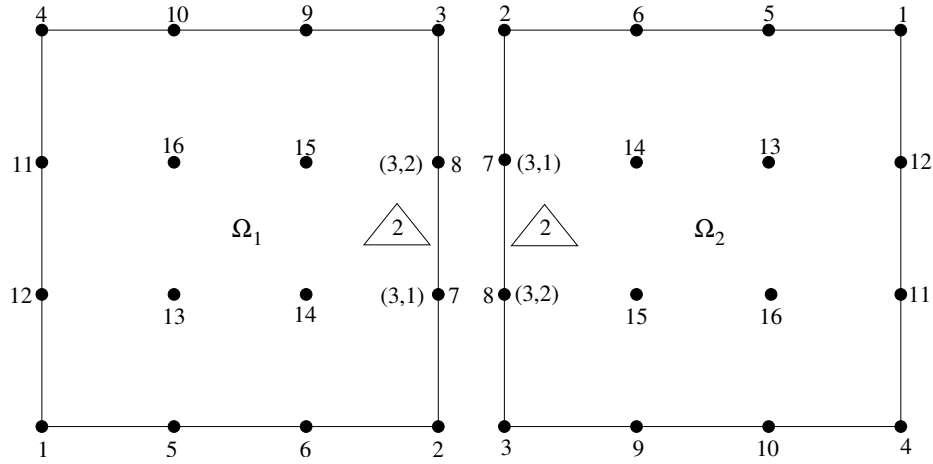
As bases usadas nas expansões locais devem ser tais que, após a montagem da matriz global, ocorra a continuidade C^0 das funções globais de arestas do elemento para problemas $2D$ e em arestas e faces para aplicações $3D$. Todas as bases p apresentadas na literatura requerem, em geral, a multiplicação das funções pares ou ímpares por -1 para garantir a continuidade global C^0 .

Sabe-se que as funções nodais padrão de Lagrange para quadrados, hexaedros, triângulos e tetraedros têm uma continuidade C^0 natural, o que significa que a multiplicação por -1 não é necessária. Esta propriedade pode ser explicada devido à natureza tensorial dessas funções (Bittencourt, 2005).

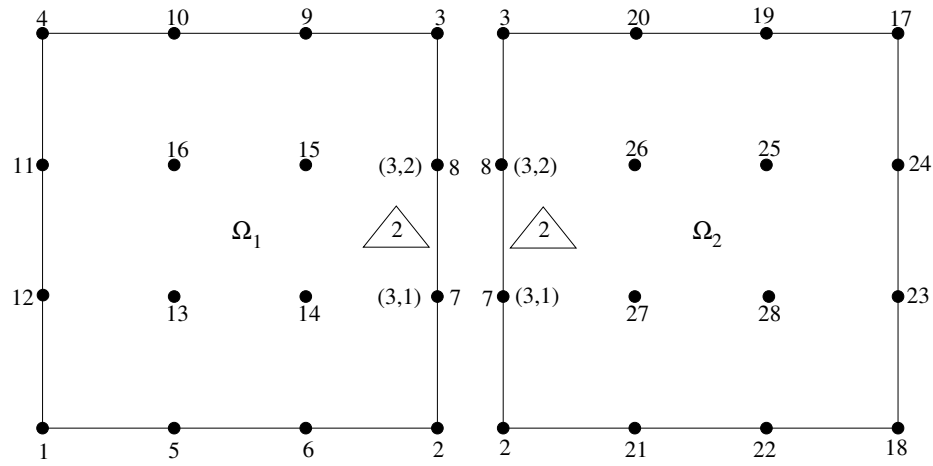
Em (Bittencourt, 2005), mostra-se que o comportamento simétrico dos índices p, q, r e s das bases nodais e modais para triângulos e tetraedros implicam na continuidade global natural C^0 das funções de forma nas arestas ($p + q = P$) e faces ($p + q + r = P$) comum dos elementos que constituem a malha.

Neste trabalho, emprega-se a construção tensorial para explicar o fato que as funções de forma de Lagrange em quadrados apresentam uma continuidade global natural C^0 .

A Figura 2.12 ilustra uma malha com dois quadrados nodais cúbicos Ω_1 e Ω_2 numerados local e globalmente.



(a) Numeração local.



(b) Numeração global.

Figura 2.12: Continuidade global C^0 entre as funções.

Na Figura 2.12(b), pode-se observar que a aresta comum dos quadrados tem a mesma numeração global e conseqüentemente as funções locais contribuem para os mesmos coeficientes globais na aproximação. Observa-se que a aresta comum dos quadrados correspondem à segunda aresta local (ver Figura 2.12(a)). Para $P = 3$, existem duas

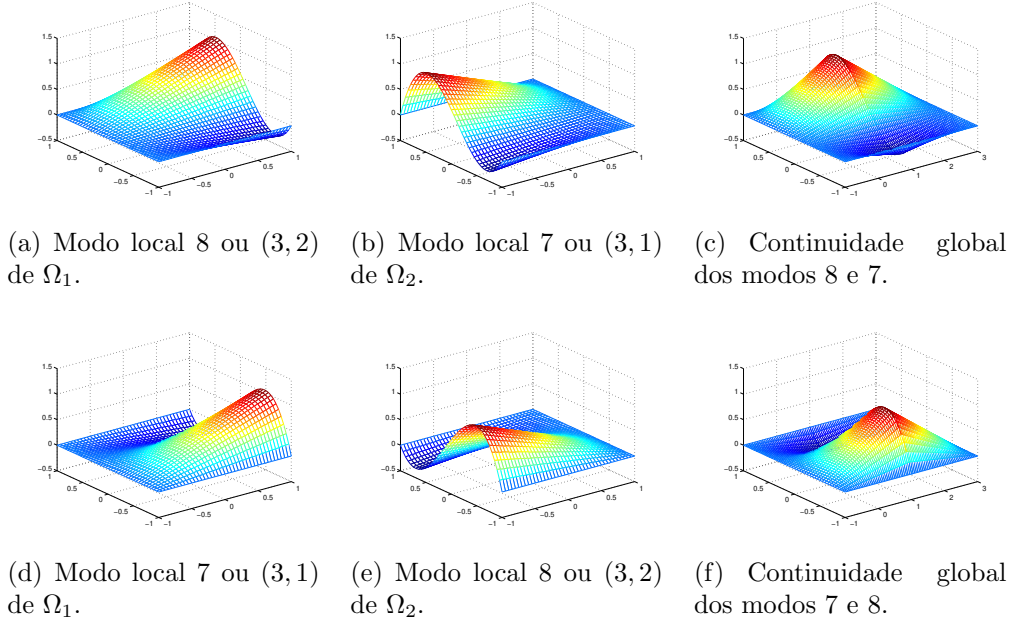


Figura 2.13: Continuidade global C^0 usando bases de Lagrange ao longo das arestas comuns para $P = 3$.

funções para cada aresta. Tomando a aresta comum pq dos dois quadrados, as funções de forma local para cada aresta são

$$(3, 1) \rightarrow p = 3, q = 1 : N_{31}^2(\cdot) = l^{(3)}(\xi_1)l^{(1)}(\xi_2),$$

$$(3, 2) \rightarrow p = 3, q = 2 : N_{32}^2(\cdot) = l^{(3)}(\xi_1)l^{(2)}(\xi_2).$$

A continuidade global C^0 é obtida entre a função local 7 ou (3, 1) do elemento Ω_1 e a função local 8 ou (3, 2) do elemento Ω_2 . Do mesmo modo, existe uma continuidade global entre as funções 8 ou (3, 2) e 7 ou (3, 1) dos elementos Ω_1 e Ω_2 , respectivamente.

As Figuras 2.13(a) a 2.13(c) ilustram, respectivamente, a função local 8 do elemento Ω_1 , a função local 7 do elemento Ω_2 e a continuidade global após o processo de superposição. As Figuras 2.13(d) a 2.13(f) mostram o modo local 7 de Ω_1 e 8 de Ω_2 e a continuidade global, respectivamente.

Por causa da construção tensorial, o índice p da aresta pq é fixo e $0 < q < P$ na mesma aresta. Quando as matrizes do elemento são superpostas a fim de formar a matriz global, os modos locais (p, q^1) de Ω_1 e (p, q^2) de Ω_2 são tais que $q^1 + q^2 = P$. Essa é a

condição principal que garante a continuidade global das funções de forma, como ilustrado na Figura 2.13. O mesmo procedimento se aplica às funções de face dos hexaedros de Lagrange. O mesmo procedimento é válido para as bases modais. Acredita-se que a colagem também ocorrerá nas faces dos elementos tridimensionais.

2.5 Funções de Base de Sherwin & Karniadakis

Essa seção está baseada em (Karniadakis e Sherwin, 1999; Nogueira Jr., 2002).

O conjunto de funções hierárquicas proposto por (Karniadakis e Sherwin, 1999) é definido sobre o triângulo de referência $T^2 = \{(\xi_1, \xi_2) \mid -1 \leq \xi_1, \xi_2; \xi_1 + \xi_2 \leq 0\}$, mapeado a partir do domínio quadrilateral $R^2 = \{(\xi_1, \xi_2) \mid -1 \leq \xi_1, \xi_2 \leq 1\}$ (Figuras 2.14 e 2.15).

A principal característica associada a esse conjunto de funções é a definição do elemento de referência a partir de uma transformação de coordenadas. Isso permite que se escreva as expressões das funções de base sobre o triângulo de forma tensorizada. A Figura 2.15 ilustra o procedimento de construção do domínio triangular T^2 a partir do colapsamento de um dos vértices do domínio quadrilateral R^2 .

As expressões para as funções de base associadas ao elemento de referência triangular colapsado são escritas nas coordenadas tensorizáveis (ξ_1, ξ_2) do quadrado de modo que a aplicação das equações de mapeamento sobre essas coordenadas resulta na obtenção de uma base polinomial em termos das coordenadas (η_1, η_2) (formalmente, tem-se $f(\xi_1, \xi_2) = f(\xi_1(\eta_1, \eta_2), \xi_2(\eta_1, \eta_2))$). Observa-se que (η_1, η_2) denota o sistema de coordenadas local do quadrado após a transformação indicada na Figura 2.15.

Como a mudança de coordenadas $(\xi_1, \xi_2) \mapsto (\eta_1, \eta_2)$ envolve uma transformação racional (ou seja, $\xi_1 = \frac{1+\eta_1}{1-\eta_2} - 1$), a obtenção de uma base polinomial em termos das coordenadas (η_1, η_2) exige a inclusão de termos especiais nas expressões das funções de base locais escritas nas coordenadas (ξ_1, ξ_2) . Essa estratégia garante que a forma polinomial da base seja preservada em ambos os domínios locais, o quadrilateral e o triangular.

Assim, sejam as coordenadas cartesianas (ξ_1, ξ_2) na região quadrilateral limitada por

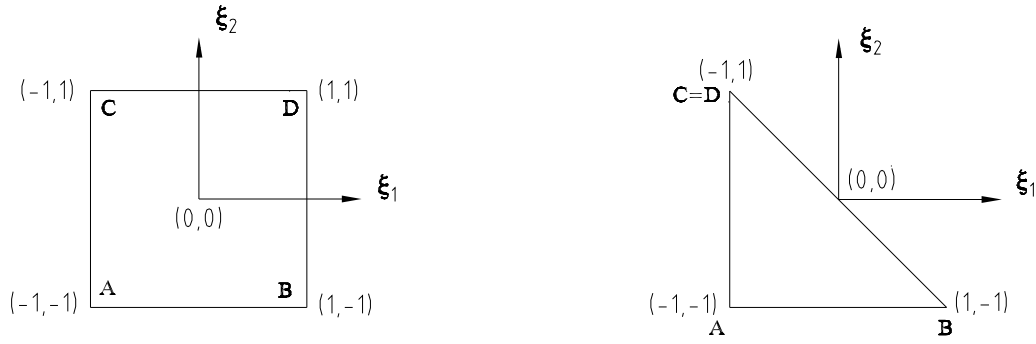


Figura 2.14: Triângulo de referência de Sherwin & Karniadakis (Karniadakis e Sherwin, 1999).

constantes, isto é,

$$R^2 = \{(\xi_1, \xi_2) | -1 \leq \xi_1, \xi_2 \leq 1\}.$$

No caso da região triangular, os limites das coordenadas cartesianas (ξ_1, ξ_2) são dependentes entre si, ou seja

$$T^2 = \{(\xi_1, \xi_2) | -1 \leq \xi_1, \xi_2; \xi_1 + \xi_2 \leq 0\}.$$

Para desenvolver uma base tensorial para triângulos é necessário um novo sistema de coordenadas locais que tem limites constantes independentes e deste modo definir funções unidimensionais, cuja tensorização gera domínios multi-dimensionais.

Um sistema de coordenadas que descreve uma região triangular com limites constantes independentes é definido pela transformação

$$\begin{aligned} \eta_1 &= 2 \frac{(1 + \xi_1)}{(1 - \xi_2)} - 1 \\ \eta_2 &= \xi_2 \end{aligned} \tag{2.48}$$

e tem a transformação inversa

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{(1 + \eta_1)(1 - \eta_2)}{2} - 1 \\ \xi_2 &= \eta_2. \end{aligned} \tag{2.49}$$

Essas coordenadas locais (η_1, η_2) definem a região triangular

$$T^2 = \{(\eta_1, \eta_2) | -1 \leq \eta_1, \eta_2 \leq 1\}.$$

Pode-se interpretar a transformação (2.48) como um mapeamento da região triangular para a quadrangular e por isso chama-se (η_1, η_2) de Sistema de Coordenadas Colapsadas.

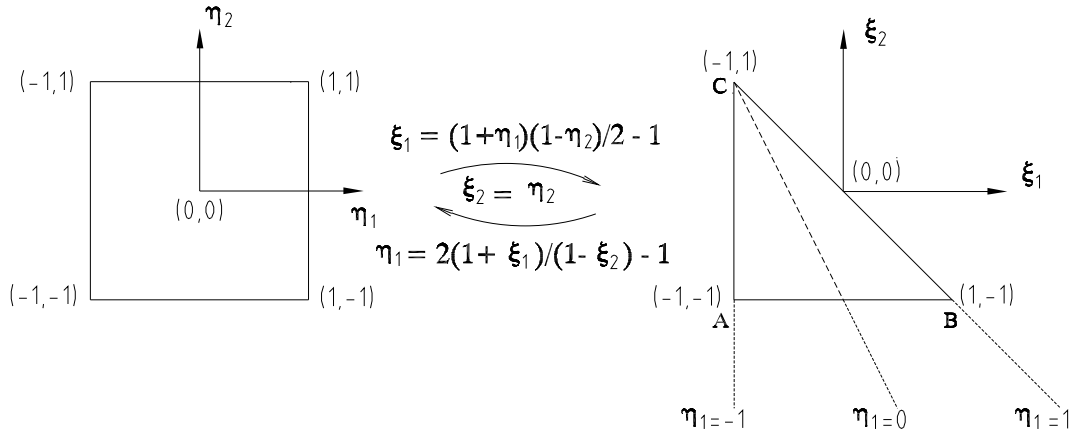


Figura 2.15: Mapeamento de coordenadas do elemento quadrilateral para o elemento triangular (Karniadakis e Sherwin, 1999).

As funções de forma para os tetraedros elaboradas por (Karniadakis e Sherwin, 1999) são definidas sobre o elemento de referência $T^3 = \{(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \mid -1 \leq \eta_1, \eta_2, \eta_3; \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 \leq -1\}$, mapeado a partir do domínio hexaédrico $R^3 = \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mid -1 \leq \xi_1, \xi_2, \xi_3 \leq 1\}$ (Figuras 2.16 e 2.17).

A Figura 2.17 ilustra o procedimento de construção do domínio tetraédrico T^3 , associado às funções hierárquicas desenvolvidas em (Karniadakis e Sherwin, 1999), a partir do domínio hexaédrico R^3 . Diferentemente do caso 2D, observa-se que o mapeamento do elemento de referência hexaédrico para o elemento tetraédrico é realizado em três etapas. Primeiramente, transforma-se o domínio hexaédrico em um domínio prismático. Em seguida, transforma-se este último num domínio com formato piramidal. Finalmente, converte-se o elemento piramidal num elemento de referência tetraédrico. A construção das expressões para as funções de base associadas a esse elemento tetraédrico é feita de forma análoga ao caso do elemento triangular T^2 obtido a partir do elemento quadrilateral R^2 .

Assim, define-se a região

$$T^3 = \{(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \mid -1 \leq \eta_1, \eta_2, \eta_3; \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 \leq 1\}$$

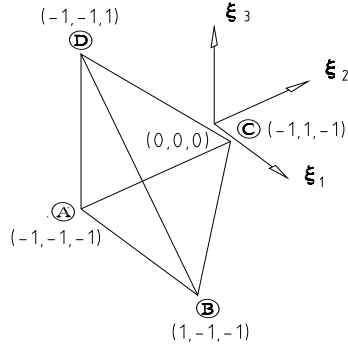


Figura 2.16: Tetraedro de referência de Sherwin & Karniadakis (Karniadakis e Sherwin, 1999).

a qual é mapeada para a região hexaédrica, definindo assim o Sistema de Coordenadas Colapsadas (η_1, η_2, η_3) por

$$\begin{aligned}\eta_1 &= 2 \frac{(1 + \xi_1)}{(-\xi_2 - \xi_3)} - 1, \\ \eta_2 &= 2 \frac{(1 + \xi_2)}{(1 - \xi_3)} - 1, \\ \eta_3 &= \xi_3.\end{aligned}\tag{2.50}$$

Para construir as funções de forma para triângulos e tetraedros usando tensorização, usam-se as seguintes expressões, respectivamente,

$$\begin{aligned}N_{pq}(\xi_1, \xi_2) &= N_{pq}(\eta_1, \eta_2) = \phi_p(\eta_1)\phi_{pq}(\eta_2), \\ N_{pqr}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= N_{pqr}(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \phi_p(\eta_1)\phi_{pq}(\eta_2)\phi_{pqr}(\eta_3).\end{aligned}$$

As funções unidimensionais $\phi_i(z)$, $\phi_{ij}(z)$ e $\phi_{ijk}(z)$, com $0 \leq i, j, k \leq P$, são definidas por

$$\phi_i(z) = \begin{cases} \left(\frac{1-z}{2}\right), & i = 0 \\ \left(\frac{1-z}{2}\right)\left(\frac{1+z}{2}\right)P_{i-1}^{1,1}(z), & 1 \leq i \leq P-1 \\ \left(\frac{1+z}{2}\right), & i = P \end{cases}, \tag{2.51}$$

$$\phi_{ij}(z) = \begin{cases} \phi_j(z), & i = 0, & 0 \leq j \leq P \\ \left(\frac{1-z}{2}\right)^{i+1}, & 0 \leq i \leq P, & j = 0 \\ \left(\frac{1-z}{2}\right)^{i+1}\left(\frac{1+z}{2}\right)P_{j-1}^{2i+1,1}(z), & 1 \leq i \leq P-1, & 1 \leq j \leq P-1 \\ \phi_j(z), & i = P, & 0 \leq j \leq P \end{cases}, \tag{2.52}$$

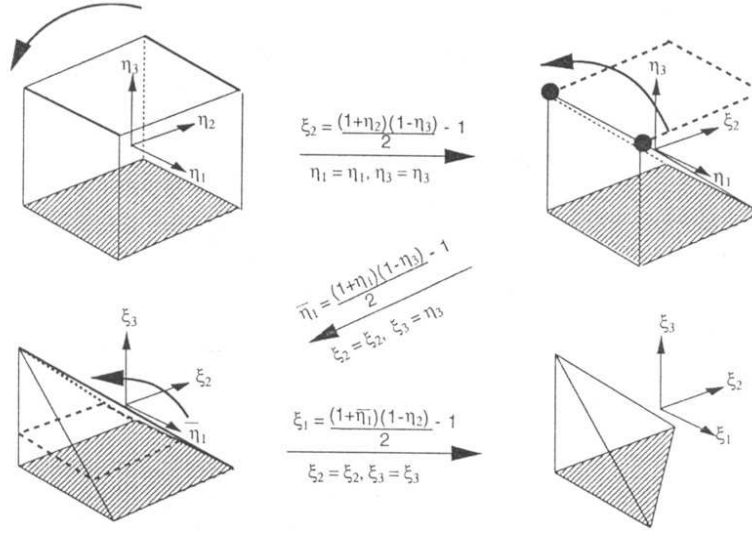


Figura 2.17: Mapeamento de coordenadas do elemento hexaédrico para o elemento tetraédrico (Karniadakis e Sherwin, 1999).

$$\phi_{ijk}(z) = \begin{cases} \phi_{jk}(z), & i = 0, & 0 \leq j \leq P, & 0 \leq k \leq P \\ \phi_{ik}(z), & 0 \leq i \leq P, & j = 0, & 0 \leq k \leq P \\ \left(\frac{1-z}{2}\right)^{i+j+1}, & 1 \leq i \leq P-1, & 1 \leq j \leq P-1 & k = 0 \\ \left(\frac{1-z}{2}\right)^{i+j+1} \left(\frac{1+z}{2}\right) P_{k-1}^{2i+2j+1,1}(z), & 1 \leq i \leq P-1, & 1 \leq j \leq P-1, & 1 \leq k \leq P-1 \\ \phi_{ik}(z), & 0 \leq i \leq P, & j = P, & 0 \leq k \leq P \\ \phi_{jk}(z), & i = P, & 0 \leq j \leq P, & 0 \leq k \leq P \end{cases} \quad (2.53)$$

Para o triângulo da Figura 2.14, têm-se as seguintes funções de vértices

- vértice A:

$$N_{00}(\xi_1, \xi_2) = \phi_0(\eta_1)\phi_{00}(\eta_2) = \left(\frac{1-\eta_1}{2}\right)\left(\frac{1-\eta_2}{2}\right);$$

- vértice B:

$$N_{P0}(\xi_1, \xi_2) = \phi_P(\eta_1)\phi_{P0}(\eta_2) = \left(\frac{1+\eta_1}{2}\right)\left(\frac{1-\eta_2}{2}\right);$$

- vértice C:

$$N_{0P}(\xi_1, \xi_2) + N_{PP}(\xi_1, \xi_2) = \phi_0(\eta_1)\phi_{0P}(\eta_2) + \phi_P(\eta_1)\phi_{PP}(\eta_2) = \left(\frac{1+\eta_2}{2}\right).$$

As funções de aresta, para $1 \leq p, q \leq P - 1$, são expressas como

- aresta AB:

$$N_{p0}(\xi_1, \xi_2) = \phi_p(\eta_1)\phi_{p0}(\eta_2) = \left(\frac{1-\eta_1}{2}\right)\left(\frac{1+\eta_1}{2}\right)P_{p-1}^{1,1}(\eta_1)\left(\frac{1-\eta_2}{2}\right)^{p+1},$$

- aresta AC:

$$N_{0q}(\xi_1, \xi_2) = \phi_0(\eta_1)\phi_{0q}(\eta_2) = \left(\frac{1-\eta_1}{2}\right)\left(\frac{1-\eta_2}{2}\right)\left(\frac{1+\eta_2}{2}\right)P_{q-1}^{1,1}(\eta_2),$$

- aresta BD:

$$N_{Pq}(\xi_1, \xi_2) = \phi_P(\eta_1)\phi_{Pq}(\eta_2) = \left(\frac{1+\eta_1}{2}\right)\left(\frac{1-\eta_2}{2}\right)\left(\frac{1+\eta_2}{2}\right)P_{q-1}^{1,1}(\eta_2),$$

Finalmente, as funções internas para $0 < p, q; p < P; q < P - p$ são

$$\begin{aligned} N_{pq}(\xi_1, \xi_2) &= \phi_p(\eta_1)\phi_{pq}(\eta_2) \\ &= \left(\frac{1-\eta_1}{2}\right)\left(\frac{1+\eta_1}{2}\right)P_{p-1}^{1,1}(\eta_1)\left(\frac{1-\eta_2}{2}\right)^{p+1}\left(\frac{1+\eta_2}{2}\right)P_{q-1}^{2p+1,1}(\eta_2). \end{aligned}$$

2.6 Esparsidade e Condicionamento Numérico das Matrizes Locais

Nesta seção, apresenta-se uma análise dos perfis de esparsidade e do condicionamento numérico local das matrizes de massa e rigidez dos elementos obtidos usando as bases nodais e modais definidas anteriormente. As matrizes de rigidez são obtidas para o operador de Laplace. Os coeficientes das matrizes locais foram calculados usando quadratura gaussiana e o software *MatLab*. A integração no triângulo usa o mapeamento do triângulo para o quadrado e a quadratura de Gauss-Legendre de acordo com (Bittencourt, 2005).

2.6.1 Elementos Unidimensionais

Os coeficientes locais da matriz de massa dos elementos unidimensionais são dados por (Cook et al., 1991; Karniadakis e Sherwin, 1999)

$$m_{pq} = \int_{-1}^1 N_p(\xi_1)N_q(\xi_1)d\xi_1, \quad 0 \leq p, q \leq P_1. \quad (2.54)$$

Os coeficientes da matriz de massa correspondentes aos modos internos empregando polinômios de Jacobi podem ser escritos como

$$m_{pq} = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 (1 - \xi_1)(1 + \xi_1) P_{p-1}^{\alpha, \beta}(\xi_1) \phi_q(\xi_1) d\xi_1. \quad (2.55)$$

O termo $(1 - \xi_1)(1 + \xi_1)$ corresponde à ponderação da relação de ortogonalidade dos polinômios de Jacobi (2.8) com $\alpha = \beta = 1$. Como $\phi_q(\xi_1)$ possui componentes interiores ($0 < q < P_1$), o seu grau é $q + 1$. Assim, a integral anterior é nula quando $p - 1 > q + 1$, o que implica $p > q + 2$. Como a matriz é simétrica, há duas diagonais não-nulas acima e duas abaixo da diagonal principal, tornando assim a matriz de massa interna pentadiagonal (Karniadakis e Sherwin, 1999). Porém, como $\alpha = \beta$, os polinômios de Jacobi de grau par só tem coeficientes diferente de zero para as potências pares (por exemplo, $P_2 = a_0 + a_2 x^2$). Analogamente, para os polinômios de grau ímpar (por exemplo, $P_3 = a_1 x + a_3 x^3$). Logo, para $p = q + 1$ a expressão para o coeficiente da matriz de massa é $m_{q+1, q} = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 (1 - \xi_1^2) P_q^{1,1}(\xi_1) (1 - \xi_1^2) P_{q-1}^{1,1}(\xi_1) d\xi_1 = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 P_{2q-1} d\xi_1 = 0$. Assim, tem-se uma matriz tridiagonal conforme mostra a Figura 2.18(a).

Os coeficientes das matrizes de rigidez dos elementos unidimensionais para o problema de Poisson são dados por (Karniadakis e Sherwin, 1999)

$$k_{pq} = \int_{-1}^1 N_{p, \xi_1}(\xi_1) N_{q, \xi_1}(\xi_1) d\xi_1, \quad \text{com } 0 \leq p, q \leq P_1. \quad (2.56)$$

Os coeficientes correspondentes aos modos internos podem ser escritos, após a integração por partes, como (Karniadakis e Sherwin, 1999)

$$k_{pq} = -\frac{1}{4} \int_{-1}^1 (1 - \xi_1)(1 + \xi_1) P_{p-1}^{\alpha, \beta}(\xi_1) \phi_{q'' \xi_1}(\xi_1) d\xi_1. \quad (2.57)$$

Usando a relação de ortogonalidade dos polinômios de Jacobi (2.9), com $\alpha = \beta = 1$ e observando que $\phi_{q'' \xi_1}(\xi_1)$ é um polinômio de ordem $q - 1$, os coeficientes internos da matriz de rigidez zeram para $p > q$ e $p < q$. Logo, a matriz interna é diagonal (Karniadakis e Sherwin, 1999).

Os números de condição das matrizes de massa e rigidez são calculados por $k = \frac{\max \mu}{\min \mu}$, sendo μ o conjunto de valores singulares das matrizes. Como a matriz de rigidez é semi-definida positiva, $\min \mu$ é o primeiro valor singular diferente de zero (Nogueira Jr., 2002).

Foram determinados os perfis de esparsidade das matrizes de massa e rigidez usando polinômios de Lagrange e Jacobi até o grau 10. Para a base de Lagrange, todos os coeficientes são não-nulos e as matrizes são densas. Os perfis de esparsidade das matrizes de massa e rigidez com polinômios de Jacobi é o mesmo encontrado em (Karniadakis e Sherwin, 1999) e estão ilustrados na Figura 2.18 apenas para $P = 10$ devido à hierarquia das matrizes.

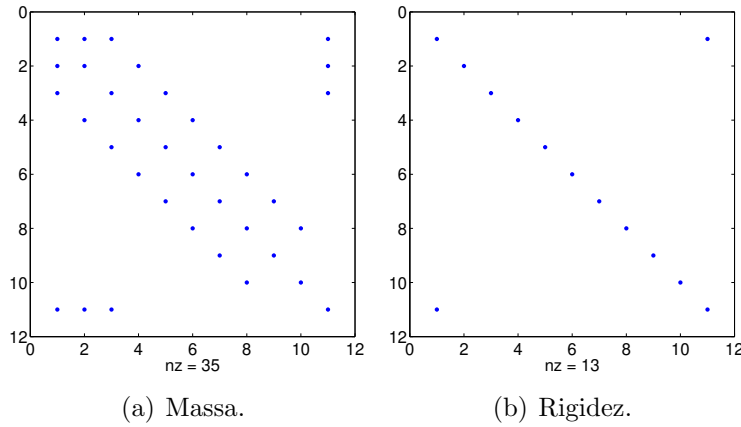
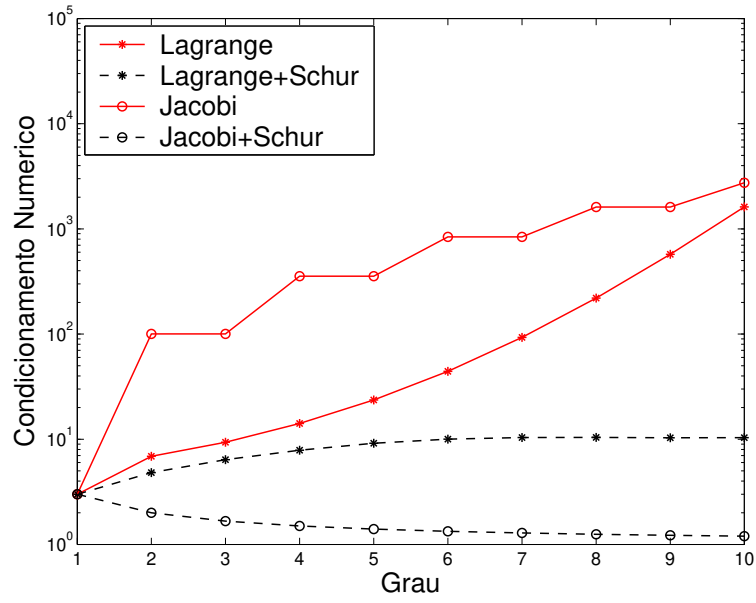


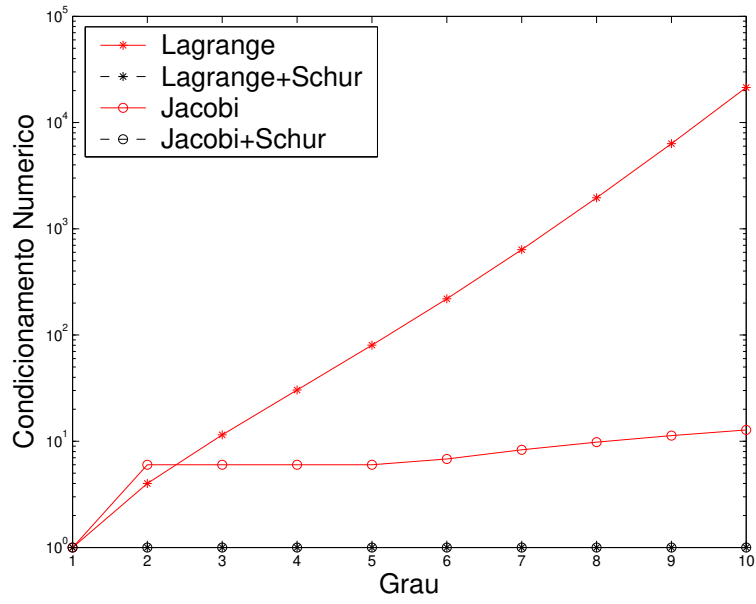
Figura 2.18: Esparsidade das matrizes de massa e rigidez para os elementos unidimensionais de Jacobi para $P = 10$.

O complemento de Schur aplicado à uma matriz simétrica particionada qualquer $[H] = \begin{bmatrix} H_b & H_c \\ H_c & H_i \end{bmatrix}$ transforma a matriz em $[H_{Schur}] = [H_b] - [H_c][H_i]^{-1}[H_c]^T$. Esse procedimento condensa os graus de liberdade internos da matriz do elemento, diminuindo o tamanho da matriz e melhorando o condicionamento numérico.

As Figuras 2.19(a) e 2.19(b) apresentam o comportamento dos números de condição das matrizes de massa e rigidez das bases de Lagrange e Jacobi com e sem a aplicação do complemento de Schur (Karniadakis e Sherwin, 1999). Para as matrizes de massa e rigidez é observado um melhor condicionamento quando usado polinômios de Jacobi e o complemento de Schur.



(a) Matriz de massa.



(b) Matriz de rigidez.

Figura 2.19: Condicionamento numérico das matrizes de massa e rigidez dos elementos unidimensionais com bases de Lagrange e Jacobi.

2.6.2 Quadrados

De forma análoga ao caso unidimensional, os coeficientes das matrizes de massa e rigidez dos quadrados com base de Lagrange são todos não-nulos, ou seja, as matrizes são densas.

As Figuras 2.20(a) e 2.20(b) apresentam os perfis de esparsidade para a base de Jacobi com $P = 10$. Empregaram-se as ponderações $\alpha_1 = \beta_1 = \alpha_2 = \beta_2 = 1$ para obter uma melhor esparsidade das matrizes de massa e rigidez (Karniadakis e Sherwin, 1999).

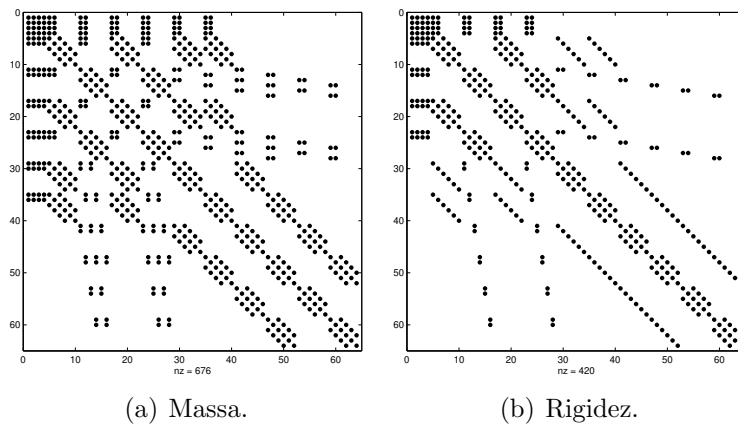
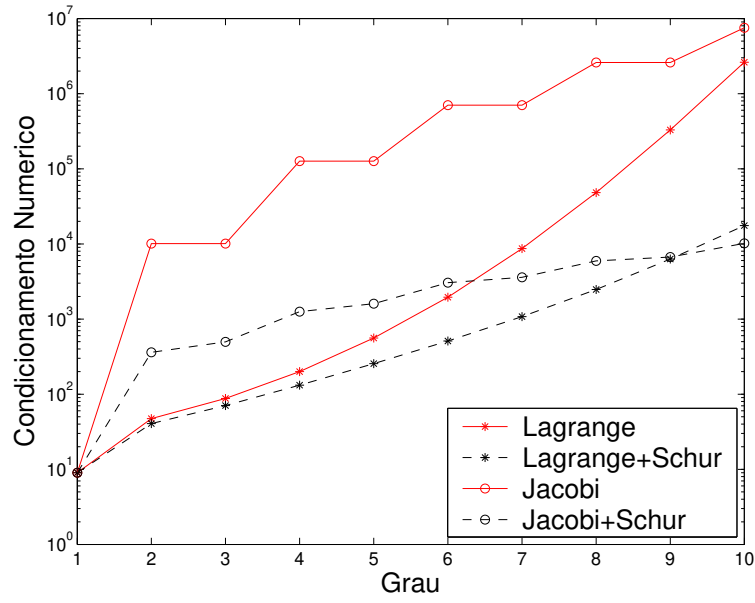


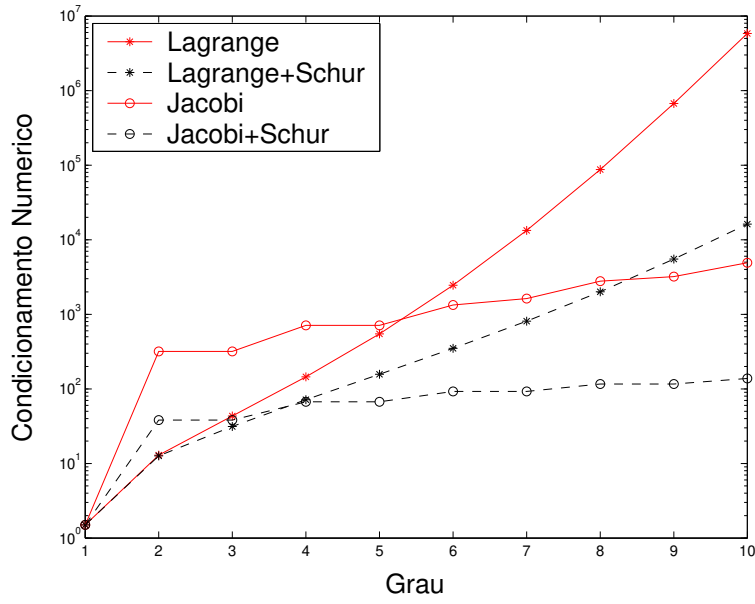
Figura 2.20: Esparsidade das matrizes de massa e rigidez dos quadrados de Jacobi para $P = 10$.

As Figuras 2.21(a) e 2.21(b) apresentam o comportamento dos números de condição das matrizes de massa e rigidez das bases de Lagrange e Jacobi e após a aplicação do complemento de Schur.

Observa-se um melhor condicionamento da matriz de massa com o uso do polinômio de Lagrange e a aplicação do complemento de Schur. Para a matriz de rigidez, o condicionamento é melhor para polinômios de Jacobi com aplicação do complemento de Schur (Figura 2.21(b)).



(a) Massa.



(b) Rigidez.

Figura 2.21: Condicionamento numérico das matrizes de massa e rigidez dos quadrados com bases de Lagrange e Jacobi.

2.6.3 Hexaedros

Novamente, todos os coeficientes das matrizes de massa e rigidez dos hexaedros com base de Lagrange são não-nulos, ou seja, as matrizes são simétricas e densas.

As Figuras 2.22(a) e 2.22(b) apresentam os perfis de esparsidade para a base de Jacobi com $P = 10$. Empregaram-se as ponderações $\alpha_1 = \beta_1 = \alpha_2 = \beta_2 = \alpha_3 = \beta_3 = 1$ para obter uma melhor esparsidade das matrizes de massa e rigidez.

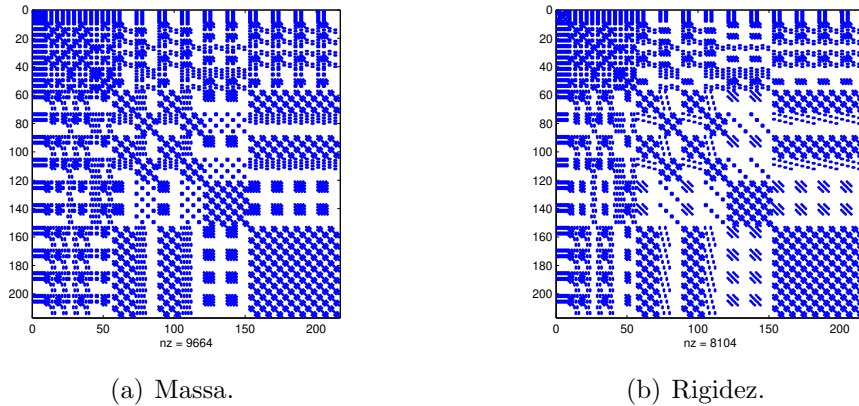


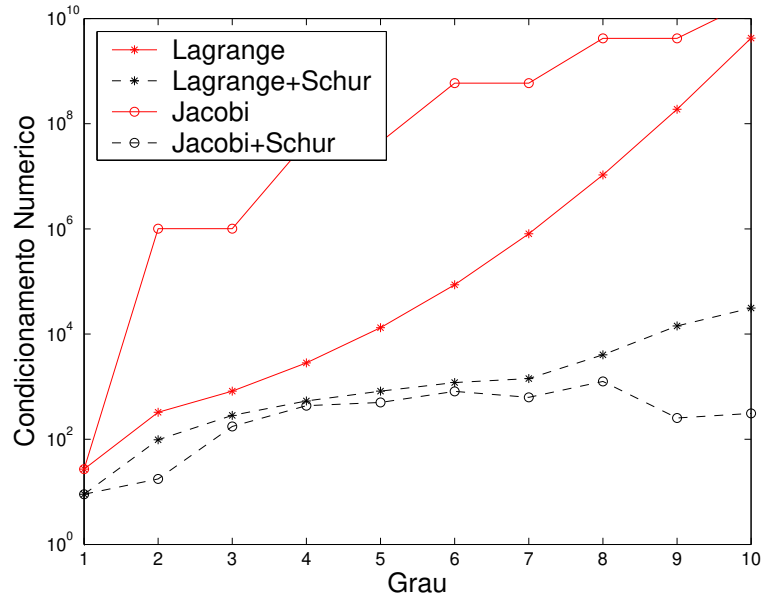
Figura 2.22: Esparsidade das matrizes de massa e rigidez dos hexaedros de Jacobi.

As Figuras 2.23(a) e 2.23(b) apresentam o comportamento dos números de condição das matrizes de massa e rigidez das bases de Lagrange e Jacobi. O condicionamento das matrizes de massa e rigidez usando polinômios de Jacobi com o complemento de Schur é melhor (Figura 2.23). O condicionamento das matrizes originais crescem rapidamente devido ao grande número de funções de volume. Neste caso, é recomendado o uso da família Serendipity.

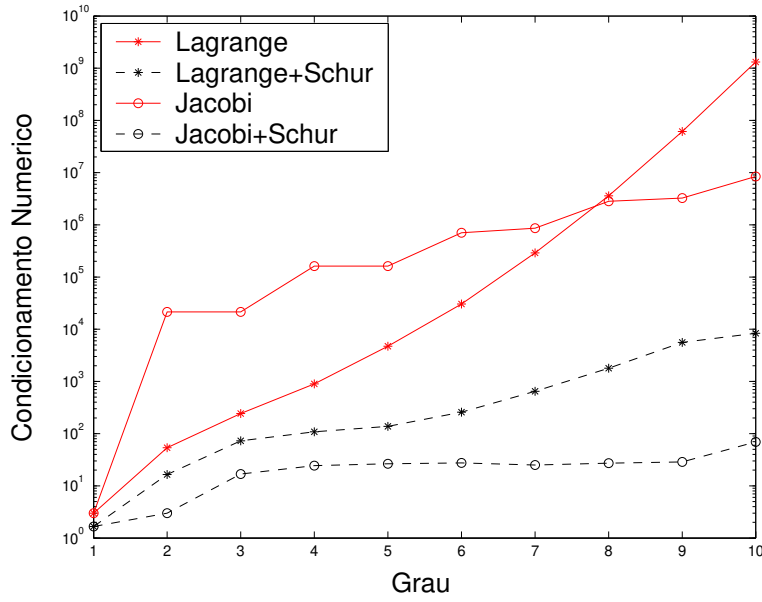
2.6.4 Triângulos

Tal como nos casos anteriores, as matrizes de massa e rigidez usando polinômios de Lagrange são densas.

A seleção das ponderações dos polinômios de Jacobi para as bases modais de triângulos, dadas em (2.30) e (2.31), visando uma melhor esparsidade das matrizes locais, não é



(a) Matriz de Massa.



(b) Matriz de Rigidez.

Figura 2.23: Condicionamento numérico das matrizes de massa e rigidez dos hexaedros com bases de Lagrange e Jacobi e $P = 10$.

trivial, devido à dependência das coordenadas baricêntricas e do limite de integração não fixo. Durante os estudos para a seleção dessas ponderações, foram usadas as bases modais definidas pelas equações (2.30) e (2.31), denominadas daqui em diante como Base 1 e Base 2, respectivamente.

As matrizes de massa e rigidez locais foram particionadas em blocos correspondentes aos vértices (V), arestas (E) e faces (F), ou seja,

$$[M] = \begin{bmatrix} [M_{VV}] & [M_{VE}] & [M_{VF}] \\ [M_{VE}]^T & [M_{EE}] & [M_{EF}] \\ [M_{VF}]^T & [M_{EF}]^T & [M_{FF}] \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [K] = \begin{bmatrix} [K_{VV}] & [K_{VE}] & [K_{VF}] \\ [K_{VE}]^T & [K_{EE}] & [K_{EF}] \\ [K_{VF}]^T & [K_{EF}]^T & [K_{FF}] \end{bmatrix}.$$

Os coeficientes das matrizes de massa são dados por

$$m_{ab} = \int_{\Omega} N_a N_b dA = \int_0^1 \int_0^{1-L_1} N_{pqr} N_{ijk} dL_2 dL_1. \quad (2.58)$$

A expressão geral dos coeficientes da matriz de rigidez local para o operador de Laplace é

$$\begin{aligned} k_{ab} &= \int_{\Omega} (N_{a'_{L1}} N_{b'_{L1}} + N_{a'_{L2}} N_{b'_{L2}}) dA \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-L_1} (N_{pqr'_{L1}} N_{ijk'_{L1}} + N_{pqr'_{L2}} N_{ijk'_{L2}}) dL_2 dL_1. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Integrando a expressão anterior por partes, obtém-se

$$k_{ab} = - \int_{\Omega} N_{ijk} (N_{pqr''_{L1}} + N_{pqr''_{L2}}) d\Omega + \oint_{\Gamma} (N_{pqr'_{L1}} n_{L1} + N_{pqr'_{L2}} n_{L2}) N_{ijk} d\Gamma, \quad (2.60)$$

onde (n_{L1}, n_{L2}) são as componentes do vetor normal nos pontos do contorno do elemento.

Como as funções de face são zero em Γ , a análise das ponderações ótimas para a matriz de rigidez será considerada somente para os blocos que envolvem essas funções, e assim

$$k_{ab} = - \int_{\Omega} N_{ijk} (N_{pqr''_{L1}} + N_{pqr''_{L2}}) d\Omega. \quad (2.61)$$

Já que N_{ijk} depende de polinômios de Jacobi, seleciona-se os monômios $(1 - L_1)$, L_1 , $(1 - L_2)$ e L_2 como pesos da relação de ortogonalidade dos polinômios de Jacobi.

Considerando a Base 1 dada em (2.30), deve ser observado que as expressões para $\phi(\cdot)$ são similares ao longo das direções L_1 , L_2 e L_3 devido à simetria rotacional. Baseado nisso, a escolha da coordenada baricêntrica dependente não influencia o valor das integrais (2.58) e (2.60). Tomando $L_3 = 1 - L_1 - L_2$, os coeficientes do bloco das funções de face

da matriz de massa $[M_{FF}]$ são

$$\begin{aligned}
m_{ab} &= \int_0^1 \int_0^{1-L_1} L_1^2 L_2^2 L_3^2 P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\cdot) P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(\cdot) P_{r-1}^{\alpha_3, \beta_3}(\cdot) \\
&\quad P_{i-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\cdot) P_{j-1}^{\alpha_2, \beta_2}(\cdot) P_{k-1}^{\alpha_3, \beta_3}(\cdot) dL_2 dL_1 \\
&= \int_0^1 L_1^2 P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\cdot) \left(\int_0^{1-L_1} L_2^2 L_3^2 P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(\cdot) P_{r-1}^{\alpha_3, \beta_3}(\cdot) \right. \\
&\quad \left. P_{i-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\cdot) P_{j-1}^{\alpha_2, \beta_2}(\cdot) P_{k-1}^{\alpha_3, \beta_3}(\cdot) dL_2 \right) dL_1 \\
&= \int_0^1 (1-L_1)^5 L_1^2 P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\cdot) \Pi_{q+r+i+j+k-5}(L_1) dL_1,
\end{aligned}$$

onde Π é uma função polinomial de grau indicado.

Assim, usando a relação de ortogonalidade de Jacobi (2.9), a integral anterior é zero se

$$\alpha_1 = 5, \quad \beta_1 = 2 \quad \text{e} \quad p > q + r + i + j + k - 4.$$

Como $p + q + r = P$ e $i + j + k = P$,

$$p > (P - p) + P - 4 \quad \implies \quad p > P - 2.$$

Mas, para as funções de face, $\max p = P - 2$ e assim $\max p > p > P - 2$. Baseado nisso, pode-se concluir que não é possível zerar coeficientes do bloco das funções de face da matriz de massa. O mesmo resultado é válido para $\alpha_2 = 5, \beta_2 = 2$ e $q, i, j > P - 2$.

Foi verificado por testes usando o software *Mathematica* que as ponderações $\alpha_1 = 5, \beta_1 = 3, \alpha_2 = \alpha_3 = 2$ e $\beta_2 = \beta_3 = 2$ zeram alguns coeficientes do bloco face-face, por causa da eliminação do termo constante na integral em L_2 . Contudo, isso é observado somente quando a integral em L_2 é calculada analiticamente. Não foi encontrada uma regra geral para determinar quando o termo constante é eliminado.

A mesma análise foi considerada para os outros blocos da matriz de massa. A Tabela 2.2 resume as ponderações ótimas e as condições a serem satisfeitas pelas funções de forma. Tal como no caso do bloco face-face, não foi possível zerar coeficientes nos blocos $[M_{VV}]$ e $[M_{EE}]$.

Como o bloco aresta-face tem mais coeficientes, as ponderações ótimas para a matriz de massa usando a Base 1 é $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 4$ e $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 2$. Com essa escolha, a

Base 1		
Bloco	$\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$	Índices
$[M_{VE}]$	3, 1, 2, 2	$2i \text{ (ou } 2j) > P, P > 2$
	2, 2, 3, 1	
	3, 1, 3, 1	
$[M_{VF}]$	3, 2, 4, 1	$2i \text{ (ou } 2j) > P, P > 3$
	4, 1, 3, 2	
	4, 1, 4, 1	
$[M_{EF}]$	4, 2, 4, 2	$2p \text{ (ou } 2q) > 2P - 3, P > 3$

Tabela 2.2: Ponderações ótimas para os blocos da matriz de massa dos triângulos usando a Base 1.

Base 2					
Bloco	$\alpha_1,$	$\beta_1,$	$\alpha_2,$	β_2	Indices
$[M_{VE}]$	$(r+2),$	2,	$(r+2),$	1	$2p(2q) > P+3-\alpha, r+2 \geq \alpha$
	$(r+1),$	1,	$(r+1),$	2	$2p(2q) > P+2-\alpha, r+1 \geq \alpha$
$[M_{VF}]$	$(k+2),$	2,	$(k+2),$	2	$2i(2j) > P+2-\alpha, k+2 \geq \alpha$
	$(k+3),$	1,	$(k+3),$	1	$2i(2j) > P+3-\alpha, k+2 \geq \alpha$
$[M_{EE}]$	$(k+2),$	2,	$(k+2),$	2	$2i(2j, 2p, 2q) > 2P+1-\alpha, k+2 \geq \alpha$
	$(k+3),$	1,	$(k+3),$	1	$2p(2q) > 2P+2-\alpha, k+3 \geq \alpha$
$[M_{EF}]$	$(k+3),$	2,	$(k+3),$	2	$2i(2j, 2p, 2q) > 2P+1-\alpha, k+3 \geq \alpha$
	$(k+r+2),$	2,	$(k+r+2),$	2	$2p(2j, 2p, 2q) > 2P+1-\alpha, k+r+2 \geq \alpha$
$[M_{FF}]$	$(k+r+3),$	2,	$(k+r+3),$	2	$2i(2j, 2p, 2q) > 2P+1-\alpha, k+r+3 \geq \alpha$

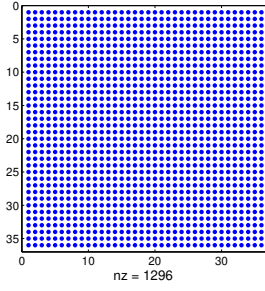
Tabela 2.3: Ponderações ótimas para os blocos da matriz de massa dos triângulos usando a Base 2.

porcentagem mínima de zeros da matriz de massa, obtida por indução, é dada por

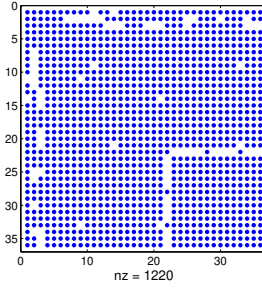
$$\frac{600(P-1)(P-2)}{[3P + \frac{1}{2}(P-1)(P-2)]^2}, \quad \text{para } P \geq 3.$$

A Figura 2.24 mostra os perfis de esparsidade das matrizes de massa para $P = 7$ e diferentes ponderações. Deve ser observado que a melhor esparsidade é quando $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 4$ e $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 2$. A Figura 2.25 ilustra os perfis de esparsidade da matriz de massa para essas ponderações e $P = 7$ a $P = 9$. A Figura 2.26(a) apresenta o número de zeros comparado com o número total de funções para $P = 1, 2, \dots, 10$.

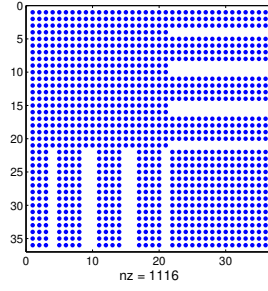
Como pode ser visto na equação (2.31), a Base 2 usa polinômios de Jacobi nas coordenadas L_1 e L_2 . A coordenada baricêntrica dependente que mostrou um melhor perfil de esparsidade foi $L_3 = 1 - L_1 - L_2$. Analogamente à Base 1, a Tabela 2.3 resume



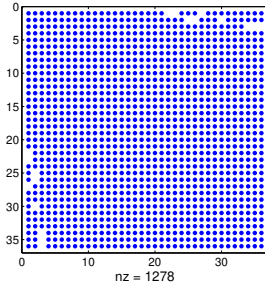
(a) $\alpha = 5, \beta = 2$.



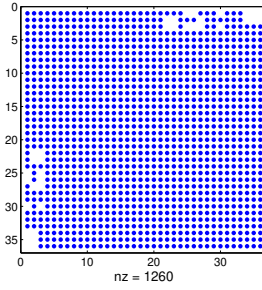
(b) $\alpha_1 = 5, \beta_1 = 3, \alpha_2 = \alpha_3 = 2, \beta_2 = \beta_3 = 2$.



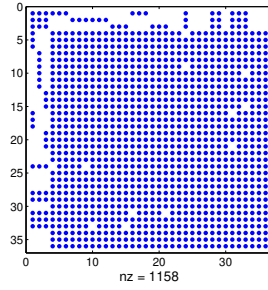
(c) $\alpha = 4, \beta = 2$.



(d) $\alpha = 3, \beta = 2$.

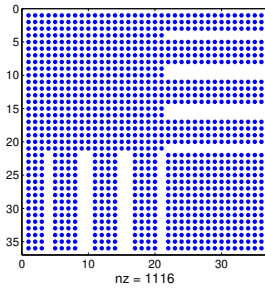


(e) $\alpha = 4, \beta = 1$.

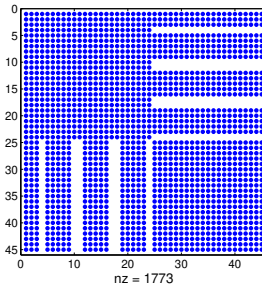


(f) $\alpha = 3, \beta = 1$.

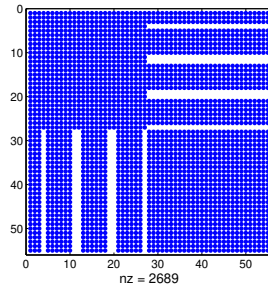
Figura 2.24: Esparsidade das matrizes de massa dos triângulos usando a Base 1 com diferentes ponderações e $P = 7$ (nz é o número de coeficientes diferente de zero).



(a) $P = 7$.



(b) $P = 8$.



(c) $P = 9$.

Figura 2.25: Esparsidade das matrizes de massa dos triângulos usando a Base 1 com ponderações $\alpha = 4$ e $\beta = 2$ e $P = 7, 8, 9$.

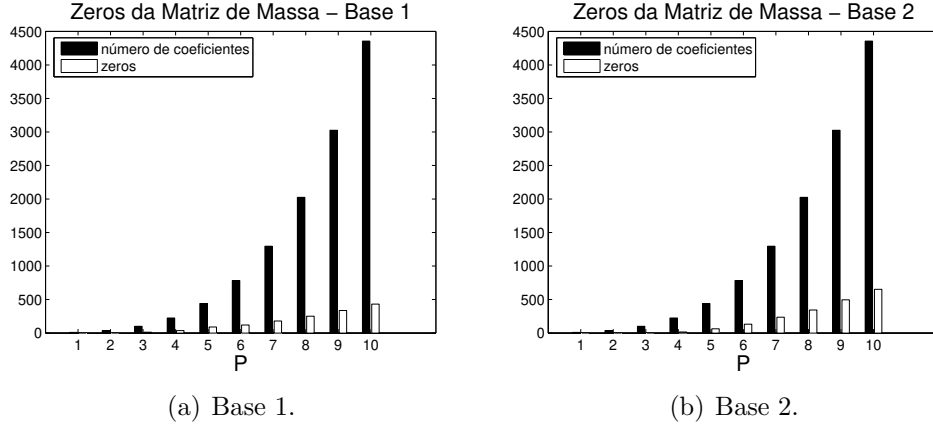


Figura 2.26: Comparação do número de zeros com o total de coeficientes das matrizes de massa para os triângulos.

as ponderações ótimas para os blocos das matrizes de massa. Aqui, os valores de α depende dos índices k e r . Tomando o sub-bloco $[M_{FF}]$, $\alpha = k + r + 3$ e $\beta = 2$, os coeficientes são zero para

$$|p - q| > i + j - 2 + k + r + 3 - \alpha \implies |p - q| > P + r - \alpha + 1. \quad (2.62)$$

A condição (2.62) é equivalente para $2p$ (ou $2i$ ou $2q$ ou $2j$) $> 2P + 1 - \alpha$ e $\alpha \leq k + r + 3$. Contudo, $\max |p - q|$ ocorre quando $r = 1$, p ou $q = 1$ e p ou $q = P - 2$. Assim, $\max |p - q| = P - 3$, e

$$P - 3 > \max |p - q| > P + r - \alpha + 1 \implies P - 3 > P + 2 - \alpha \implies \alpha > 5.$$

Portanto, $\alpha \geq 6$ zera os coeficientes do bloco face-face da matriz de massa para a Base 2. Como $\alpha \leq k + r + 3$, o melhor α é o menor e portanto $\alpha = 6$. A Figura 2.27 mostra os perfis de esparsidade das matrizes de massa para $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 5$ a 7 e $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1$ ou 2 e $P = 7$. De acordo com a Figura 2.27, a ponderação que fornece melhor esparsidade é $\alpha_1 = \alpha_2 = 6$ e $\beta_1 = \beta_2 = 2$. A Figura 2.28 mostra os perfis de esparsidade das matrizes de massa para essas ponderações e $P = 7$ a $P = 9$. A Figura 2.26(b) mostra a quantidade de zeros comparado ao número total de funções. Deve ser observado que a matriz de massa usando a Base 2 tem melhor perfil de esparsidade quando comparado à Base 1, mas a simetria rotacional é perdida.

Considerando a Base 1 e a matriz de rigidez, a segunda derivada das funções de

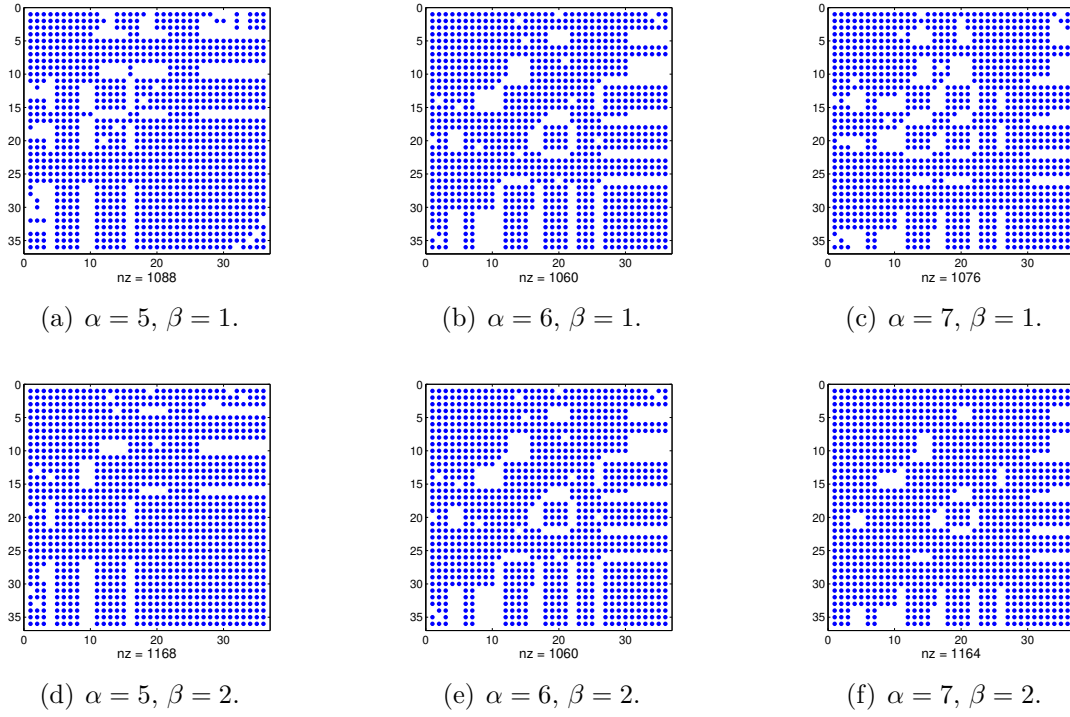


Figura 2.27: Esparsidade das matrizes de massa dos triângulos usando a Base 2 com diferentes ponderações e $P = 7$.

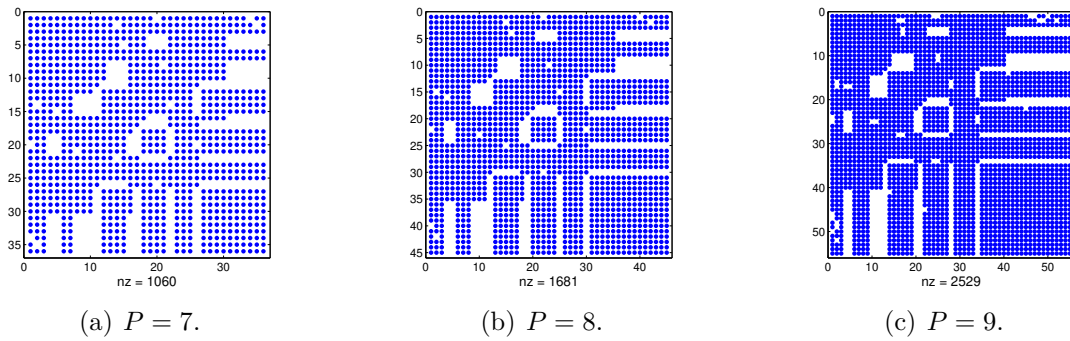


Figura 2.28: Esparsidade das matrizes de massa dos triângulos usando a Base 2 com $\alpha = 6$ e $\beta = 2$ e $P = 7, 8, 9$.

forma usadas em (2.60) são dadas por

$$\begin{aligned}
N_{pq r''_{L_1}} &= L_2 P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(\cdot) \Pi_{r+p-2} \quad \text{e} \quad N_{pq r''_{L_2}} = L_1 P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\cdot) \Pi_{r+q-2}, \\
N_{pq 0''_{L_1}} &= L_2 P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(\cdot) \Pi_{p-2} \quad \text{e} \quad N_{pq 0''_{L_2}} = L_1 P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\cdot) \Pi_{q-2}, \\
N_{0qr''_{L_1}} &= L_2 P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(\cdot) \Pi_{r-2} \quad \text{e} \quad N_{0qr''_{L_2}} = \Pi_{r+q-2}, \\
N_{p0r''_{L_1}} &= \Pi_{r+p-2} \quad \text{e} \quad N_{p0r''_{L_2}} = L_1 P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\cdot) \Pi_{r-2},
\end{aligned}$$

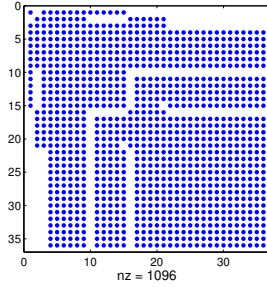
onde Π é uma função polinomial de grau indicado.

Os coeficientes do bloco $[K_{FF}]$ são dados por

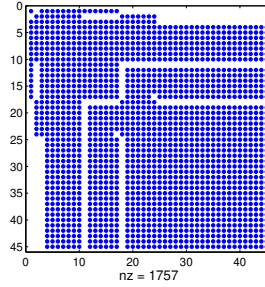
$$\begin{aligned}
k_{ab} &= \int_0^1 \int_0^{1-L_1} L_1 L_2 L_3 P_{i-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\cdot) P_{j-1}^{\alpha_2, \beta_2}(\cdot) P_{k-1}^{\alpha_3, \beta_3}(\cdot) \left(L_2 P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_1}(\cdot) \Pi_{r+p-2} \right. \\
&\quad \left. + L_1 P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\cdot) \Pi_{r+q-2} \right) dL_2 dL_1 \\
&= \int_0^1 L_1 P_{i-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\cdot) \left(\int_0^{1-L_1} L_2 (1 - L_1 - L_2) P_{j-1}^{\alpha_2, \beta_2}(\cdot) P_{k-1}^{\alpha_3, \beta_3}(\cdot) \Pi_{p+q+r-2} dL_2 \right) dL_1 \\
&= \int_0^1 (1 - L_1)^3 L_1 P_{i-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\cdot) \Pi_{j+k+p+q+r-4} dL_1.
\end{aligned}$$

A integral anterior é zero se $\alpha_1 = 3$, $\beta_1 = 1$ e $i > j + k + p + q + r - 3$ ou $p > q + r + i + j + k - 3$. Essas condições são equivalentes a $2i > 2P - 3$ e $2p > 2P - 3$. Como $\max i = \max p = P - 2$, as condições implicam que $4 < 3$ o que é impossível. Portanto, todos os coeficientes do bloco $[K_{FF}]$ são diferentes de zero. Analogamente, a integral também zera se $\alpha_2 = 3$, $\beta_2 = 1$ e $j > i + k + p + q + r - 3$ ou $q > p + r + i + j + k - 3$, mas essas condições não são verificadas ao mesmo tempo na submatriz $[K_{FF}]$. Não foi possível prever os coeficientes que zeram no bloco $[K_{EF}]$. Como a segunda derivada das funções de vértice são zero, todos os coeficientes do bloco $[K_{VF}]$ são zero.

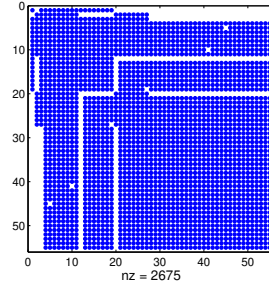
A Figura 2.29 mostra os perfis de esparsidade das matrizes de rigidez para $P = 7$ a $P = 9$ e $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 3$ e $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1$. Alguns coeficientes zeram mesmo para os blocos que não envolvem funções de face, mas a análise foi feita apenas para as funções que envolvem funções de face, pois são zero no contorno do elemento. O comportamento ilustrado na Figura 2.29 em termos dos coeficientes que zeram não é previsto pela análise anterior. A Figura 2.30(a) mostra o número de zeros comparado com o número total de coeficientes da matriz de rigidez usando a Base 1 e ponderações $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 3$ e $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1$.



(a) $P = 7$.

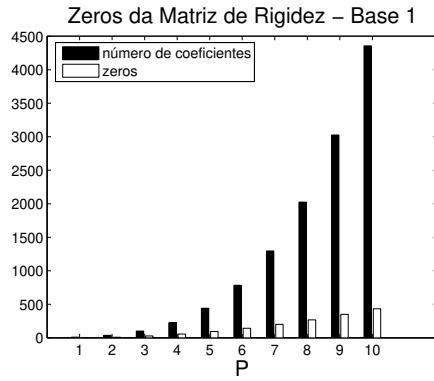


(b) $P = 8$.

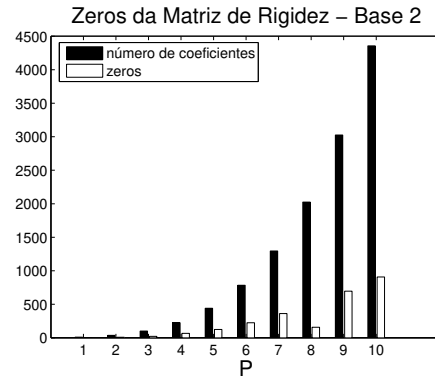


(c) $P = 9$.

Figura 2.29: Esparsidade das matrizes de rigidez dos triângulos usando a Base 1 com ponderações $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 3$ e $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1$ e $P = 7, 8, 9$.



(a) Base 1.



(b) Base 2.

Figura 2.30: Comparação do número de zeros com o total do número de coeficientes para as matrizes de rigidez dos triângulos.

Analogamente, a segunda derivada das funções de forma para a Base 2 são

$$\begin{aligned}
N_{pq r''_{L_1}} &= P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(\cdot)(1 - L_1 - L_2)^{r-2} [L_2(1 - L_1 - L_2)\Pi_{p-1} + L_2 L_1 \hat{\Pi}_{p-1}], \\
N_{pq r''_{L_2}} &= P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\cdot)(1 - L_1 - L_2)^{r-2} [L_1(1 - L_1 - L_2)\Pi_{q-1} + L_2 L_1 \hat{\Pi}_{q-1}], \\
N_{pq 0''_{L_1}} &= L_2 P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(\cdot)\Pi_{p-2} \quad \text{e} \quad N_{pq 0''_{L_2}} = L_1 P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\cdot)\Pi_{q-2}, \\
N_{0qr''_{L_1}} &= (1 - L_1 - L_2)^{r-2} [L_2 \Pi_{q-1} + (1 - L_1 - L_2)^2 \Pi_{q-2} + (1 - L_1 - L_2) \Pi_{q-1}], \\
N_{0qr''_{L_2}} &= (1 - L_1 - L_2)^{r-2} [L_2 \Pi_{q-1} + (1 - L_1 - L_2)^2 \Pi_{q-2} + (1 - L_1 - L_2) \Pi_{q-1}],
\end{aligned}$$

onde Π e $\hat{\Pi}$ são polinômios de grau indicado.

Os coeficientes do bloco $[K_{FF}]$ são dados por

$$\begin{aligned}
k_{ab} &= \int_0^1 \int_0^{1-L_1} L_1 L_2 L_3^k P_{i-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\cdot) P_{j-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\cdot) (1 - L_1 - L_2)^{r-2} \\
&\quad \{ [P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(\cdot) L_2 (1 - L_1 - L_2) \Pi_{p-1} + L_2 L_1 \hat{\Pi}_{p-1}] \\
&\quad + [P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\cdot) L_1 (1 - L_1 - L_2) \Pi_{q-1} + L_2 L_1 \hat{\Pi}_{q-1}] \} dL_2 dL_1 \\
&= \int_0^1 L_1 P_{i-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\cdot) \left(\int_0^{1-L_1} L_2 (1 - L_1 - L_2)^{r+k-2} P_{j-1}^{\alpha_2, \beta_2}(\cdot) \right. \\
&\quad \left. [L_2 (1 - L_1 - L_2) \Pi_{p+q-2} + L_2 L_1 \hat{\Pi}_{p+q-2} + L_1 (1 - L_1 - L_2) \Pi_{p+q-2}] dL_2 \right) dL_1.
\end{aligned}$$

Como os termos $(1-L_1)$ ou $L_2 \in (0, 1-L_1)$ aparecem nas expressões entre parênteses na integral em L_2 , o polinômio que resulta da integração não tem o termo constante.

Assim, a integração em L_2 resulta $(1-L_1)\Pi_{p+q+j-2}$. Portanto,

$$k_{ab} = \int_0^1 (1-L_1)^{r+k+1} L_1 P_{i-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\cdot) \Pi_{p+q+j-2} dL_1.$$

A integral anterior será zero se $\alpha_1 = r + k + 1$, $\beta_1 = 1$, $i > j + p + q - 1 + [r + k + 1 - \alpha_1]$ e $r + k + 1 \geq \alpha_1$. O mesmo ocorre para $p > i + j + q - 1 + [r + k + 1 - \alpha_1]$ e $r + k + 1 \geq \alpha_1$. Analogamente, os coeficientes serão zero se $\alpha_2 = r + k + 1$, $\beta_2 = 1$ e $j > i + p + q - 1 + [r + k + 1 - \alpha_1]$ ou $q > p + i + j - 1 + [r + k + 1 - \alpha_2]$, $r + k + 1 \geq \alpha_1$.

Dessas condições e para $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$

$$|i - j| > p + q + k + r - \alpha \implies |i - j| > P + k - \alpha.$$

Como o termo $(1 - L_1 - L_2)^{r-2}$ aparece na segunda derivada, a melhor opção é $k, r \geq 2$. Baseado nisso, $\max |i - j|$ ocorre quando $k = 2$, i ou $j = 1$ e i ou $j = P - 3$. Baseado nisso, $\max |i - j| = P - 4$ e

$$\max |i - j| > |i - j| > P + k - \alpha \implies P - 4 > P + 2 - \alpha \implies \alpha > 6.$$

A escolha $\alpha \geq 7$ zerará coeficientes do bloco face-face da matriz de rigidez. Como $\alpha \leq k + r + 1$, o menor α é a melhor opção e portanto $\alpha = 7$.

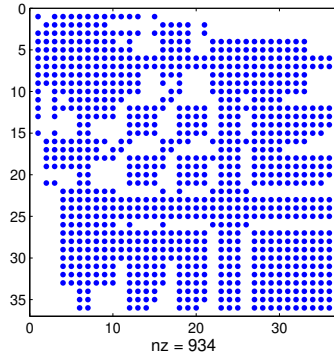
Para o bloco $[K_{EF}]$, os coeficientes zero aparecem quando $\alpha = k + 2$ e $\beta = 1$ para os casos $2i$ (ou $2j$) $> 2P - \alpha$; $\alpha \leq k + 2$ ou $\alpha = k + r + 1$ e $\beta = 1$ para $2i$ (ou $2j$) $> 2P - \alpha$ e $\alpha \leq k + r + 1$; ou quando $\alpha = k + r$ e $\beta = 1$ para $2i$ (ou $2j$) $> 2P - \alpha$ e $\alpha \leq k + r$. Para esse bloco, o melhor α é 5 ou 7, dependendo da aresta considerada. Analogamente à Base 1, o bloco $[K_{VF}]$ é todo zero.

A Figura 2.31 mostra os perfis de esparsidade das matrizes de rigidez para as ponderações $\alpha_1 = \alpha_2 = 5$ a 8 e $\beta_1 = \beta_2 = 1$ para $P = 7$. A partir da análise dos gráficos, como alguns coeficientes não previstos são zerados, foi verificado que $\alpha_1 = \alpha_2 = 5$ e $\beta_1 = \beta_2 = 1$ é a melhor escolha em termos da esparsidade das matrizes.

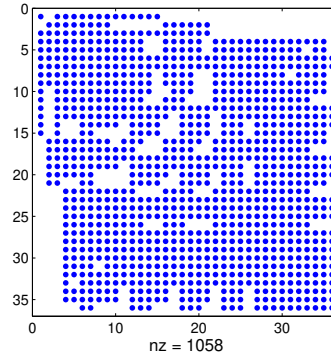
As Figuras 2.32 e 2.33 mostram os perfis de esparsidade das matrizes de rigidez para $\alpha_1 = \alpha_2 = 5$, $\beta_1 = \beta_2 = 1$ e $\alpha_1 = \alpha_2 = 7$ e $\beta_1 = \beta_2 = 1$ para $P = 7$ a $P = 9$, respectivamente.

Esperava-se que a escolha $\alpha = 5$ e $\beta = 1$ zeraria os coeficientes nos quais $2p$ (ou $2q$) $> 2P - 5$ e $k + r \geq 4$. Para $P = 7$, os coeficientes dados pelo produto das funções N_{511} e N_{151} com N_{ijk} , $k \geq 3$ são zero. Mas, além disso, pode ser observado na Figura 2.32(a) que os coeficientes também zeram para N_{ij2} multiplicado por N_{511} e N_{151} . Isso provavelmente ocorreu porque o polinômio Π , que resulta da integração interna, não tem o termo constante, ou seja, $\Pi_{p+q+j-2} = (1 - L_1)\Pi_{p+q+j-3}$, e então $r + k + 2 \geq 5 \Rightarrow k \geq 2$ para $r = 1$. Uma análise similar é válida para a Figura 2.33(a). Assim, é possível prever apenas o número mínimo de coeficientes que zeram. A Figura 2.30(b) mostra o número de zeros que efetivamente aparecem na matriz de rigidez usando Base 2, comparado com o número total de funções para $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 5$ e $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1$.

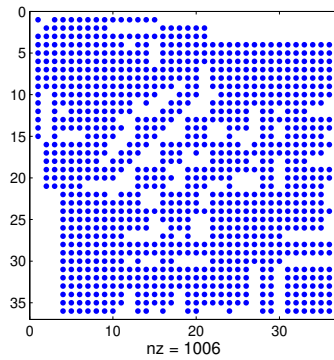
A Figura 2.34 mostra os condicionamentos das Bases 1 e 2 quando comparados com outras bases apresentadas na literatura (Carnevali et al., 1993; Sherwin e Karniadakis, 1995; Szabó e Babuška, 1991; Webb e Abouchakra, 1995) e com a base lagrangiana nodal padrão. A Base 1 é melhor condicionada do que a Base 2 e é bem próxima da base de



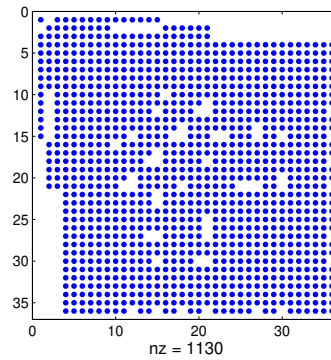
(a) $\alpha = 5, \beta = 1$.



(b) $\alpha = 6, \beta = 1$.

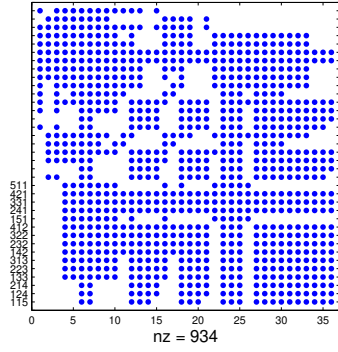


(c) $\alpha = 7, \beta = 1$.

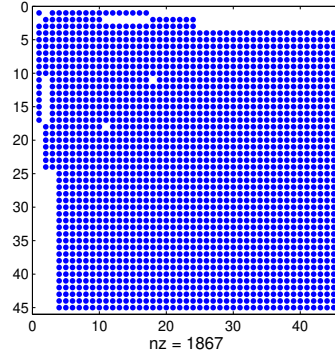


(d) $\alpha = 8, \beta = 1$.

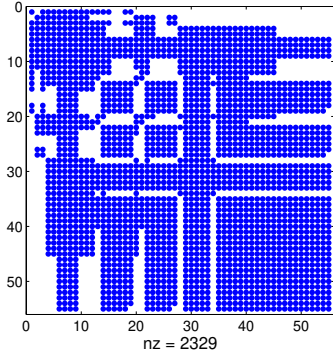
Figura 2.31: Esparsidade das matrizes de rigidez dos triângulos usando a Base 2 para diferentes ponderações e $P = 7$.



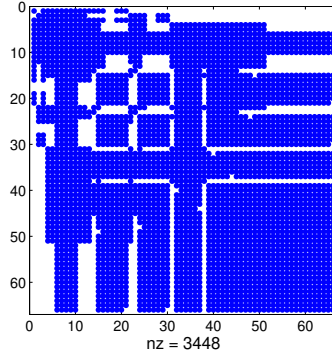
(a) $P = 7$.



(b) $P = 8$.

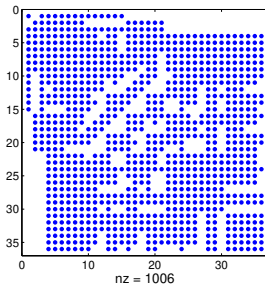


(c) $P = 9$.

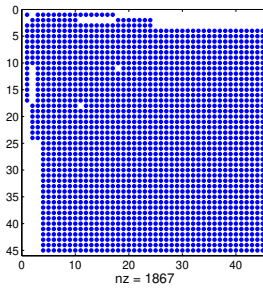


(d) $P = 10$.

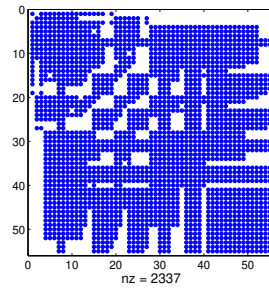
Figura 2.32: Esparsidade das matrizes de rigidez dos triângulos usando a Base 2 para $\alpha = 5$, $\beta = 1$ e $P = 7$ a $P = 10$.



(a) $P = 7$.



(b) $P = 8$.



(c) $P = 9$.

Figura 2.33: Esparsidade das matrizes de rigidez dos triângulos usando a Base 2 para $\alpha = 7$, $\beta = 1$ e $P = 7$ a $P = 9$.

Szabó. Diferente de outros elementos, onde o condicionamento das bases de Lagrange e Jacobi são similares, pode ser verificado que a base triangular de Lagrange é superior a qualquer outra base considerada.

Considere a redefinição da equação (2.30) pela inclusão do fator 2 nos modos internos

$$\phi_p(L_1) = \begin{cases} 1 & p = 0 \\ L_1 & p = P_1 \\ 2L_1 P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1} (2L_1 - 1) & 0 < p < P_1 \end{cases}, \quad (2.63)$$

As ponderações α e β foram varridas de 0 a 10 e o número de condição avaliado para as matrizes de massa e rigidez locais dos triângulos. Foi observado que para $\alpha = \beta$, o condicionamento é muito ruim. A melhor opção foi $\alpha = 0$ e $\beta = 2$. O melhor condicionamento fornecido pelo fator 2 pode ser explicado, pois as funções de aresta e face estão multiplicadas pelos fatores 4 e 8 respectivamente, devido à natureza tensorial, o que fornece melhor condicionamento no bloco face-face. Outros valores, além de 2, foram testados, mas não apresentaram um melhor desempenho em termos de condicionamento.

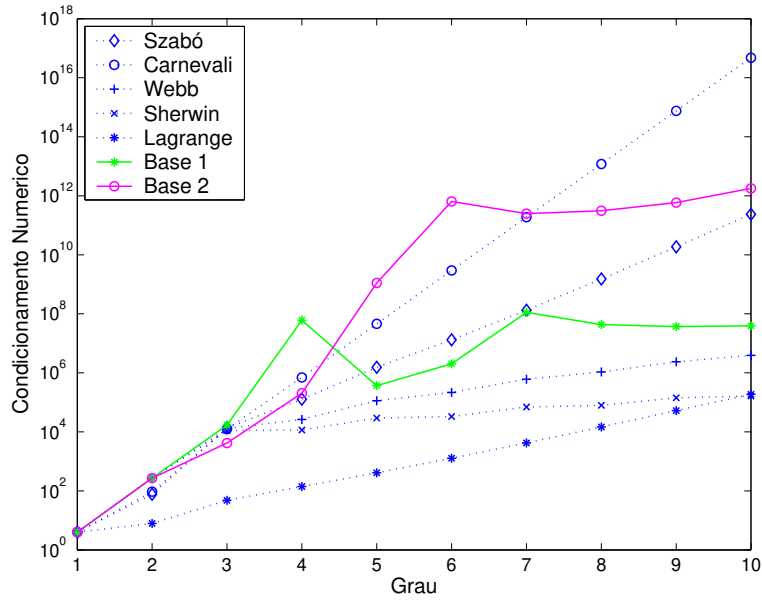
A Figura 2.35 apresenta a comparação dos condicionamentos das Bases 1 e 2, de Sherwin & Karniadakis (Karniadakis e Sherwin, 1999) e de Lagrange para o operador Laplaciano. O comportamento após a aplicação do complemento de Schur nas duas bases também foi considerado.

O comportamento da Base 1 é similar ao comportamento da base de Sherwin-Karniadakis em termos de condicionamento local, mas para a matriz de rigidez a última base é superior para elementos não distorcidos (triângulo equilátero). O condicionamento da Base 1 para graus ímpares cresce notavelmente.

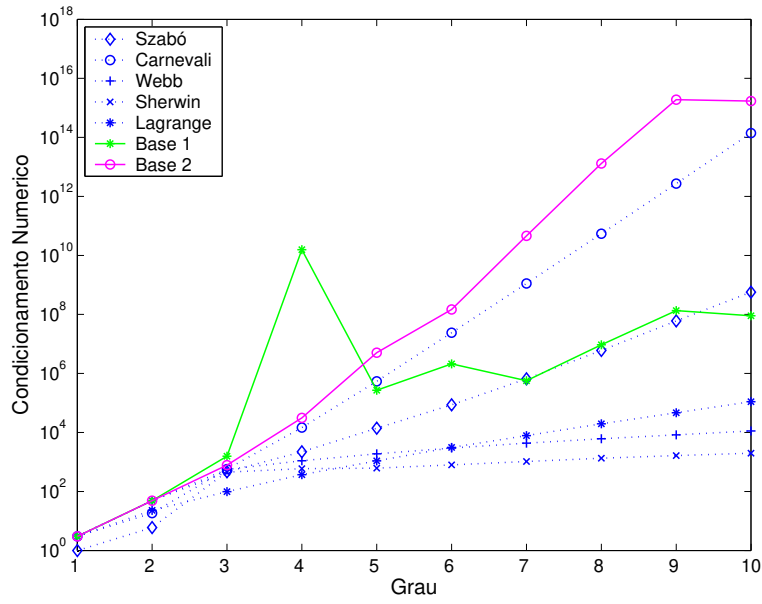
2.6.5 Tetraedros

Da mesma forma, as matrizes de massa e rigidez locais usando polinômios de Lagrange são densas.

Para a seleção das ponderações dos polinômios de Jacobi que fornecem a melhor esparsidade nas matrizes locais, as matrizes de massa e rigidez dos tetraedros foram

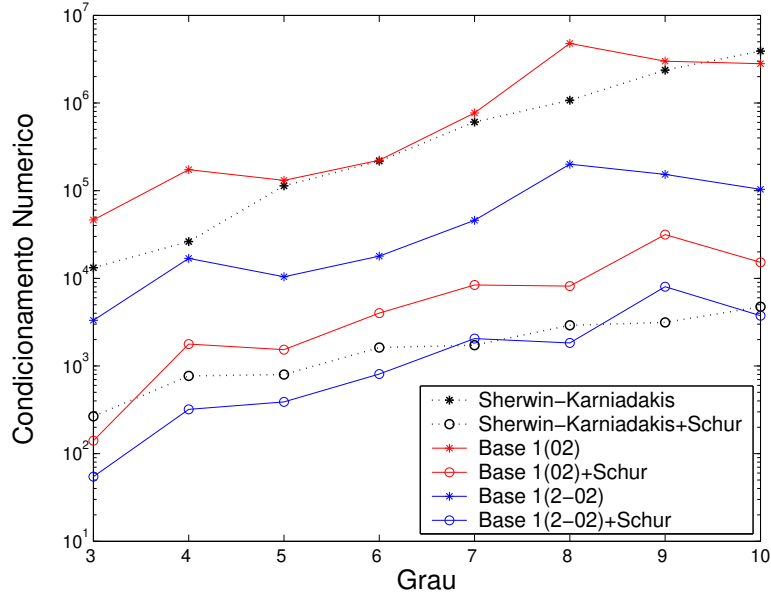


(a) Matriz de massa.

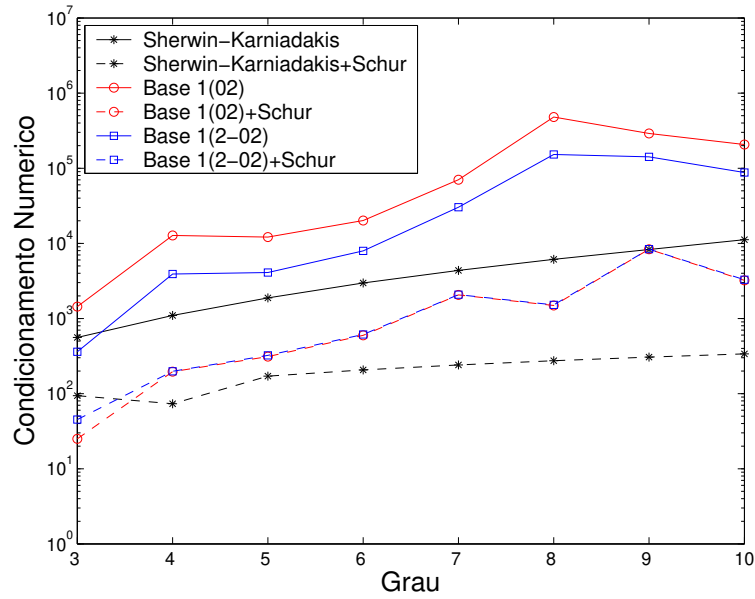


(b) Matriz de rigidez.

Figura 2.34: Condicionamento numérico das matrizes de massa e rigidez dos triângulos com bases de Lagrange, Szabó, Carnevali, Webb, Sherwin, Base 1 e Base 2.



(a) Matriz de Massa.



(b) Matriz de Rigidez.

Figura 2.35: Condicionamento numérico das matrizes de massa e rigidez dos triângulos para as bases de Sherwin-Karniadakis, Base 1 ($\alpha = 0$ e $\beta = 2$) e Base 1 usando (2.63) ($\alpha = 0$ e $\beta = 2$).

particionadas em blocos correspondentes aos vértices (V), arestas (E), faces (F) e corpo (B), ou seja,

$$[M] = \begin{bmatrix} [M_{VV}] & [M_{VE}] & [M_{VF}] & [M_{VB}] \\ [M_{VE}]^T & [M_{EE}] & [M_{EF}] & [M_{EB}] \\ [M_{VF}]^T & [M_{EF}]^T & [M_{FF}] & [M_{FB}] \\ [M_{VB}]^T & [M_{EB}]^T & [M_{FB}]^T & [M_{BB}] \end{bmatrix}$$

e

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{VV}] & [K_{VE}] & [K_{VF}] & [K_{VB}] \\ [K_{VE}]^T & [K_{EE}] & [K_{EF}] & [K_{EB}] \\ [K_{VF}]^T & [K_{EF}]^T & [K_{FF}] & [K_{FB}] \\ [K_{VB}]^T & [K_{EB}]^T & [K_{FB}]^T & [K_{BB}] \end{bmatrix}.$$

Os coeficientes das matrizes de massa são dados por

$$m_{ab} = \int_{\Omega} N_a N_b dB = \int_0^1 \int_0^{1-L_1} \int_0^{1-L_1-L_2} N_{pqrs} N_{ijkl} dL_3 dL_2 dL_1. \quad (2.64)$$

A expressão geral dos coeficientes da matriz de rigidez local para o operador de

Laplace é

$$\begin{aligned} k_{ab} &= \int_{\Omega} (N_{a'_{L1}} N_{b'_{L1}} + N_{a'_{L2}} N_{b'_{L2}} + N_{a'_{L3}} N_{b'_{L3}}) dV \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-L_1} \int_0^{1-L_1-L_2} (N_{pqrs'_{L1}} N_{ijkl'_{L1}} + N_{pqrs'_{L2}} N_{ijkl'_{L2}} + N_{pqrs'_{L3}} N_{ijkl'_{L3}}) dL_3 dL_2 dL_1. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Integrando por partes, obtém-se

$$\begin{aligned} k_{ab} &= - \int_{\Omega} N_{ijkl} (N_{pqrs''_{L1}} + N_{pqrs''_{L2}} + N_{pqrs''_{L3}}) d\Omega \\ &\quad + \oint_{\Gamma} (N_{pqrs'_{L1}} n_{L1} + N_{pqrs'_{L2}} n_{L2} + N_{pqrs'_{L3}} n_{L3}) N_{ijkl} d\Gamma, \end{aligned} \quad (2.66)$$

onde (n_{L1}, n_{L2}, n_{L3}) são as componentes do vetor normal nos pontos o contorno do elemento. Como as funções de corpo são zero em Γ , a análise das ponderações ótima para a matriz de rigidez será considerada somente para os blocos que envolvem essas funções.

Considerando a Base 1, tomando $L_4 = 1 - L_1 - L_2 - L_3$, os coeficientes do bloco das funções de corpo da matriz de massa $[M_{BB}]$ são

$$\begin{aligned} m_{ab} &= \int_0^1 \int_0^{1-L_1} \int_0^{1-L_1-L_2} L_1^2 L_2^2 L_3^2 L_4^2 P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\cdot) P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(\cdot) P_{r-1}^{\alpha_3, \beta_3}(\cdot) P_{s-1}^{\alpha_4, \beta_4}(\cdot) \\ &\quad P_{i-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\cdot) P_{j-1}^{\alpha_2, \beta_2}(\cdot) P_{k-1}^{\alpha_3, \beta_3}(\cdot) P_{l-1}^{\alpha_4, \beta_4}(\cdot) dL_3 dL_2 dL_1 \\ &= \int_0^1 L_1^2 P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\cdot) P_{i-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\cdot) \int_0^{1-L_1} L_2^2 P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(\cdot) P_{j-1}^{\alpha_2, \beta_2}(\cdot) \end{aligned}$$

Base 1		
Bloco	$\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3$	Indices
$[M_{FB}]$	7, 2, 7, 2, 7, 2	$2i$ (ou $2j$ ou $2k$) $> 2P - 5$, $P > 3$
$[M_{EB}]$	6, 2, 6, 2, 6, 2	i (ou j ou k) $> P - 2$, $P > 3$
$[M_{EF}]$	5, 2, 5, 2, 5, 2	$2p$ (ou $2q$ ou $2r$) $> 2P - 3$, $P > 3$

Tabela 2.4: Ponderações ótimas para os blocos das matrizes de massa dos tetraedros usando a Base 1.

$$\begin{aligned}
& \left(\int_0^{1-L_1-L_2} L_3^2 (1-L_1-L_2-L_3)^2 \right. \\
& \quad \left. P_{r-1}^{\alpha_3, \beta_3}(\cdot) P_{k-1}^{\alpha_3, \beta_3}(\cdot) P_{s-1}^{\alpha_4, \beta_4}(\cdot) P_{l-1}^{\alpha_4, \beta_4}(\cdot) dL_3 dL_2 dL_1 \right) \\
&= \int_0^1 L_1^2 P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\cdot) P_{i-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\cdot) \\
& \quad \left(\int_0^{1-L_1} L_2^2 P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(\cdot) P_{j-1}^{\alpha_2, \beta_2}(\cdot) (1-L_1-L_2)^5 \Pi_{r+s+k+l-4} dL_2 \right) dL_1 \\
&= \int_0^1 (1-L_1)^8 L_1^2 P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\cdot) P_{i-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\cdot) \Pi_{q+r+s+j+k+l-6}(L_1) dL_1,
\end{aligned}$$

onde Π é uma função polinomial de grau indicado.

Assim, usando a relação de ortogonalidade de Jacobi (2.9), a integral anterior é zero se

$$\alpha_1 = 8, \quad \beta_1 = 2 \quad \text{e} \quad p > q + r + s + i + j + k + l - 6.$$

Como $p + q + r + s = P$ e $i + j + k + l = P$, tem-se

$$p > (P - p) + P - 6 \quad \implies \quad p > P - 3.$$

Mas, para as funções de corpo, $\max p = P - 3$ e assim $\max p > p > P - 3$. Baseado nisso, pode-se concluir que não é possível zerar coeficientes do bloco das funções de corpo da matriz de massa. O mesmo resultado é válido para $\alpha_2 = 8$, $\beta_2 = 2$, $\alpha_3 = 8$, $\beta_3 = 2$ e $q, r, i, j, k > P - 3$.

A mesma análise foi considerada para os outros blocos da matriz de massa. A Tabela 2.4 resume as ponderações ótimas e as condições a serem satisfeitas pelas funções de forma. Tal como no caso do bloco corpo-corpo, não foi possível zerar coeficientes nos blocos $[M_{FF}]$, $[M_{EE}]$ e $[M_{VV}]$.

A Figura 2.36 mostra os perfis de esparsidade das matrizes de massa para $P = 5$

e diferentes ponderações. Deve ser observado que a melhor esparsidade é quando $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 5$ e $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 2$. A Figura 2.37 ilustra os perfis de esparsidade da matriz de massa para essas ponderações e $P = 5$ a $P = 7$. A Figura 2.38(a) apresenta o número de zeros comparado com o número total de coeficientes para $P = 1, 2, \dots, 7$.

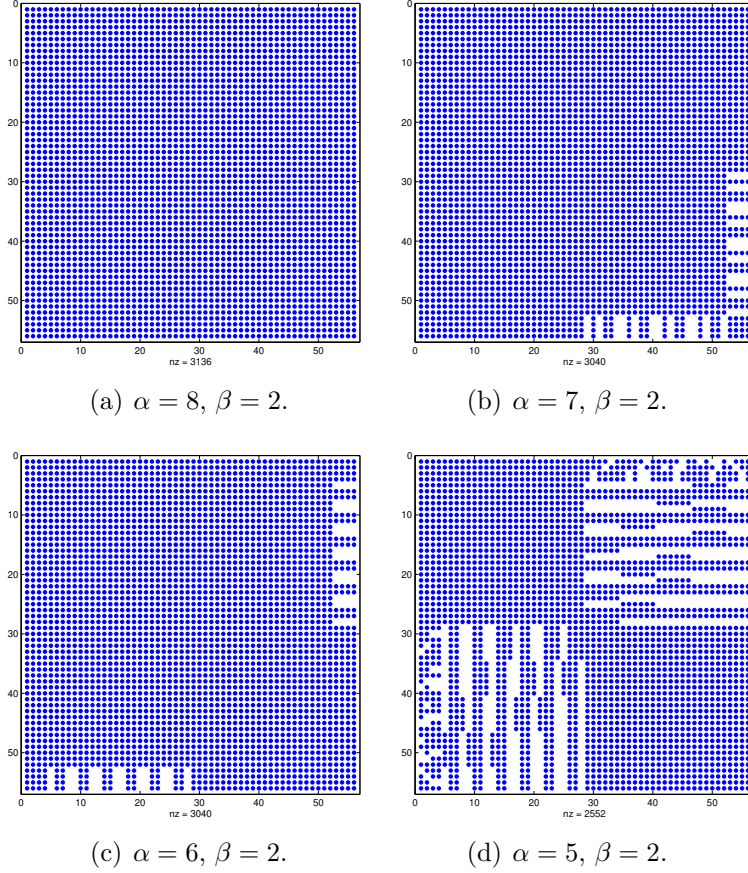


Figura 2.36: Esparsidade das matrizes de massa dos tetraedros usando a Base 1 com diferentes ponderações e $P = 5$ (nz é o número de coeficientes diferente de zero).

Como pode ser visto na equação (2.31), a Base 2 adaptada para o tetraedro usa polinômios de Jacobi nas coordenadas L_1, L_2 e L_3 . A coordenada baricêntrica dependente que mostrou o melhor perfil de esparsidade foi $L_4 = 1 - L_1 - L_2 - L_3$, pois considera-se o termo L_4^r na direção L_4 . Analogamente ao triângulo, os valores de α depende dos índices s e l . Fazendo análise similar e plotando os perfis de esparsidade das matrizes para diferentes valores de α , o melhor valor foi $\alpha = 5$. A Figura 2.39 mostra os perfis

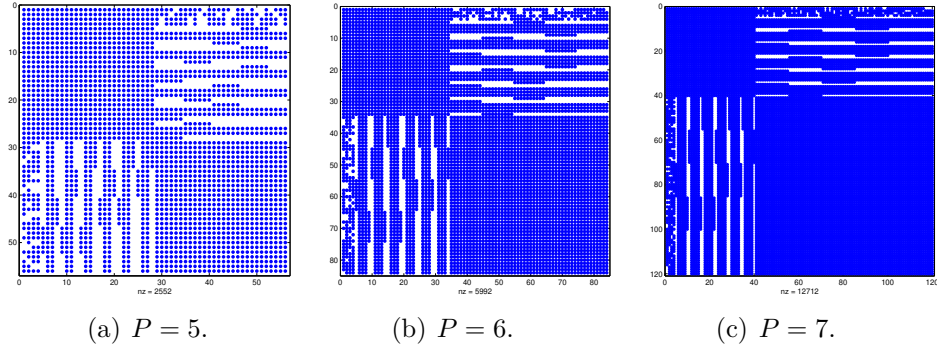


Figura 2.37: Esparsidade das matrizes de massa dos tetraedros usando a Base 1 com ponderações $\alpha = 5$ e $\beta = 2$ e $P = 5, 6, 7$.

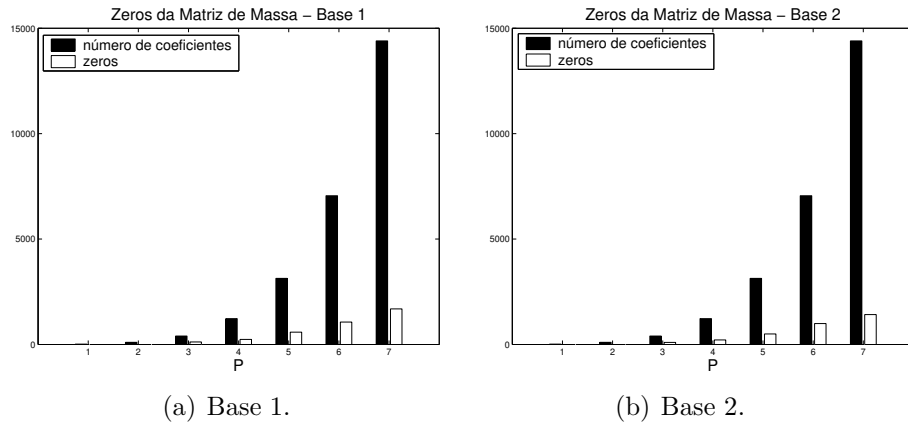


Figura 2.38: Comparação do número de zeros com o total de coeficientes das matrizes de massa para os tetraedros.

de esparsidade das matrizes de massa para $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 5$ a 9 e $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 2$ e $P = 5$. De acordo com a Figura 2.39, a ponderação que fornece melhor esparsidade é $\alpha_1 = \alpha_2 = 5$ e $\beta_1 = \beta_2 = 2$. A Figura 2.40 mostra os perfis de esparsidade das matrizes de massa para essas ponderações e $P = 5$ a $P = 7$. A Figura 2.38(b) mostra a quantidade de zeros comparado ao número total de funções. Deve ser observado que a matriz de massa para os tetraedros usando a Base 1 tem melhor perfil de esparsidade quando comparado à Base 2 e ainda preserva a simetria rotacional.

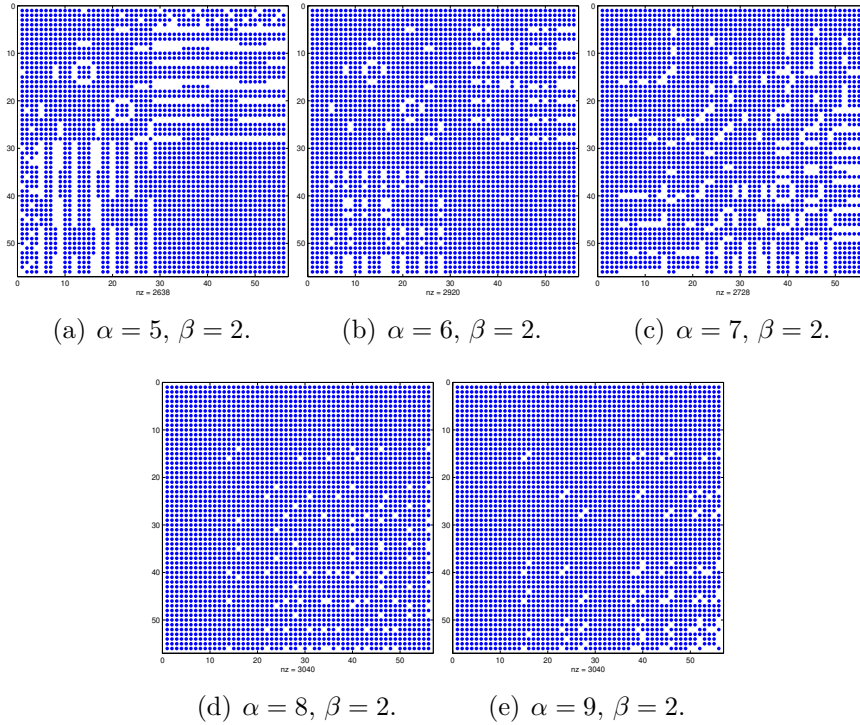
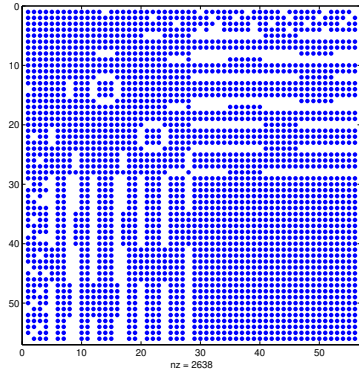


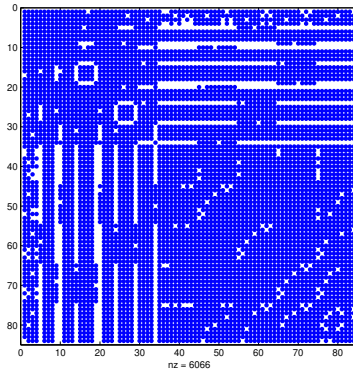
Figura 2.39: Esparsidade das matrizes de massa dos tetraedros usando a Base 2 com diferentes ponderações e $P = 5$.

Fazendo o processo análogo aos triângulos para as matrizes de rigidez dos tetraedros, usando as Bases 1 e 2, a melhor ponderação verificada foi $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 4$ e $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1$.

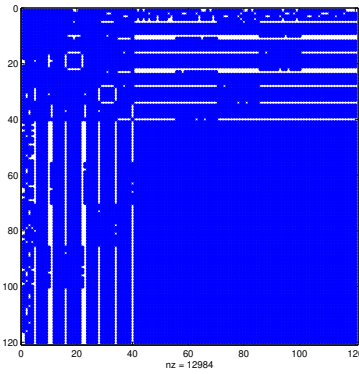
As Figuras 2.41 e 2.42 mostram os perfis de esparsidade das matrizes de rigidez para $P = 5$ a $P = 7$ e $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 4$ e $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1$, para Base 1 e Base 2, respectivamente. A Figura 2.43 mostra o número de zeros comparado com o número



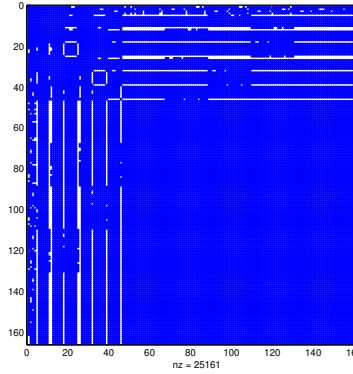
(a) $P = 5$.



(b) $P = 6$.



(c) $P = 7$.



(d) $P = 8$.

Figura 2.40: Esparsidade das matrizes de massa dos tetraedros usando a Base 2 com $\alpha = 5$ e $\beta = 2$ e $P = 5, 6, 7, 8$.

total de coeficientes da matriz de rigidez usando a Base 1 e a Base 2 para as ponderações $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 4$ e $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1$. Deve ser observado que a matriz de rigidez para os tetraedros usando a Base 2 tem melhor perfil de esparsidade quando comparado a Base 1, apesar de perder a simetria rotacional.

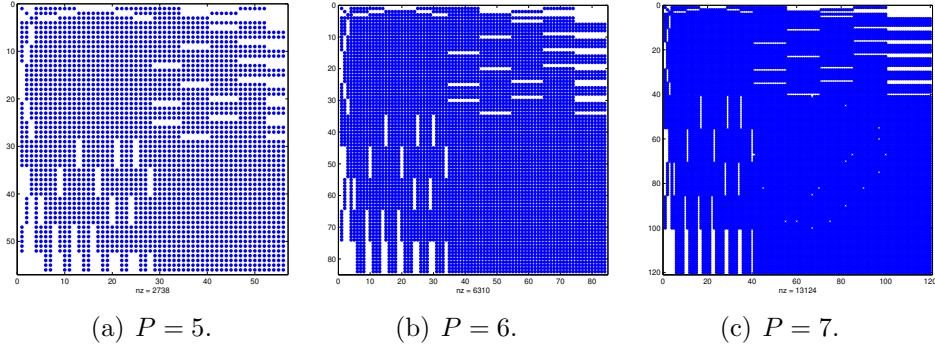


Figura 2.41: Esparsidade das matrizes de rigidez dos tetraedros usando a Base 1 com ponderações $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 4$ e $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1$ e $P = 5, 6, 7$.

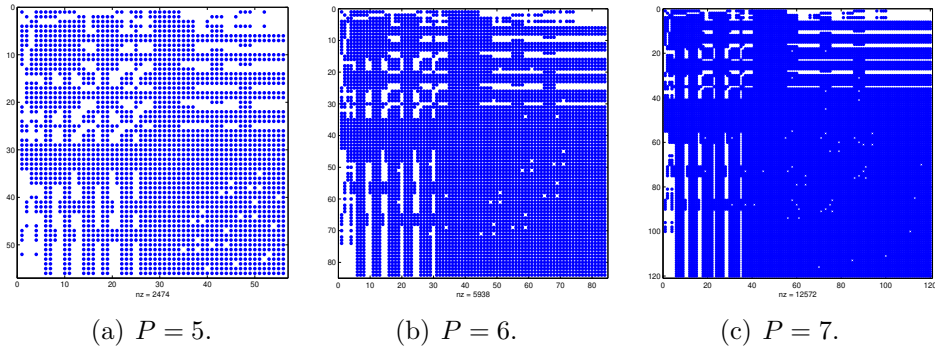


Figura 2.42: Esparsidade das matrizes de rigidez dos tetraedros usando a Base 2 com ponderações $\alpha = 4$, $\beta = 1$ e $P = 5$ a 7.

A Figura 2.44 mostra o condicionamento das Bases 1 e 2 quando comparadas com outras bases apresentadas na literatura (Carnevali et al., 1993; Sherwin e Karniadakis, 1995; Szabó e Babuška, 1991; Webb e Abouchakra, 1995) e com a base lagrangiana nodal padrão. Tal como esperado, a Base 1 é melhor condicionada do que a Base 2 e é bem próxima da base de Szabó. Pode ser verificado que o condicionamento numérico da base de Lagrange é superior a qualquer outra base considerada. O comportamento das Bases

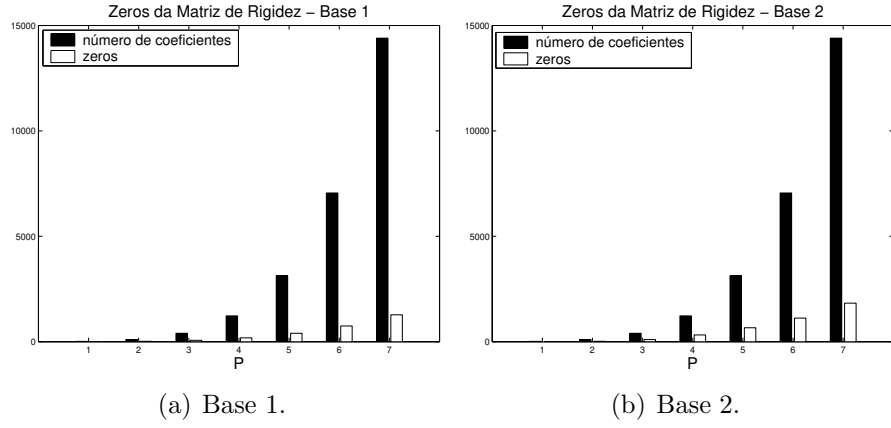
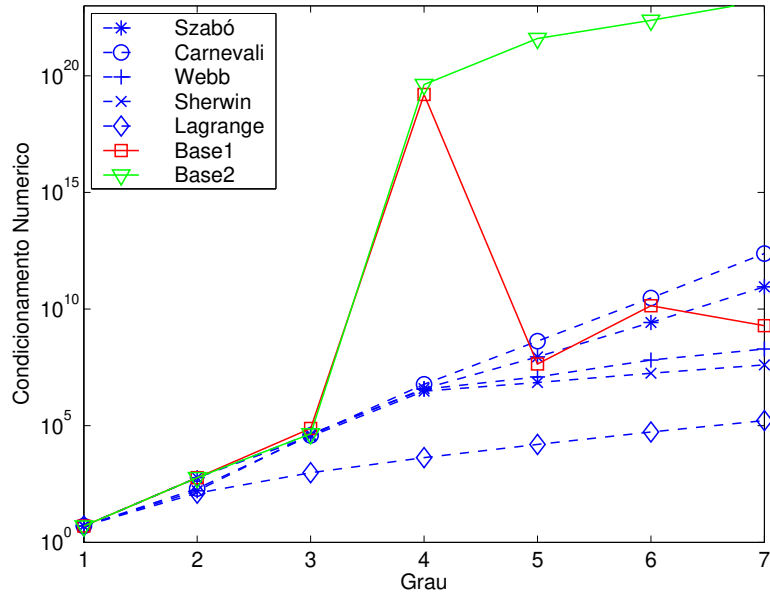


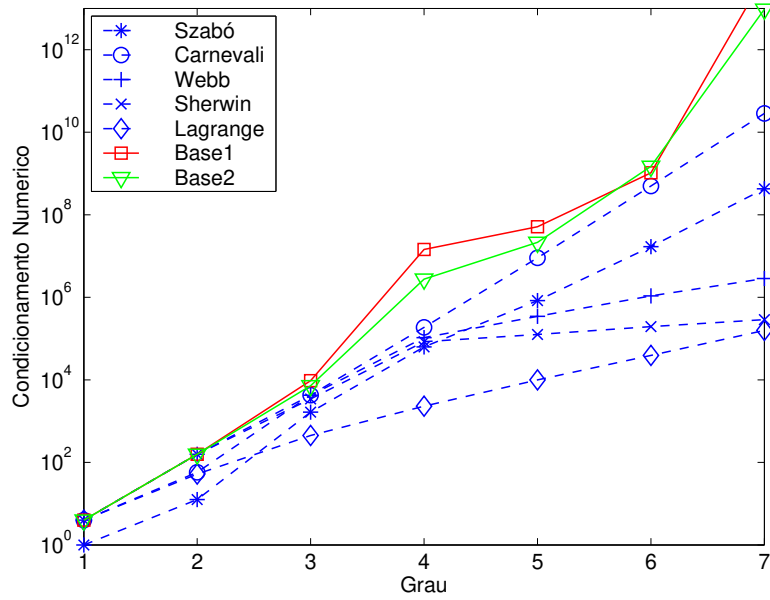
Figura 2.43: Comparação do número de zeros com o total do número de coeficientes para as matrizes de rigidez dos tetraedros.

1 e 2 para a matriz de rigidez são similares ao da base de Carnevali.

Tal como os triângulos, considerando a redefinição da equação (2.30) pela inclusão do fator 2 nos modos internos dado pela equação (2.63), foi observado que para $\alpha = 0$ e $\beta = 2$, o melhor condicionamento é fornecido quando acrescido o fator 2. A Figura 2.45 apresenta a comparação dos condicionamentos da Base 1 e de Sherwin & Karniadakis para as matrizes de massa e rigidez do operador Laplaciano em tetraedros. Com a inclusão do fator 2 e o cálculo do complemento de Schur, a Base 1 mostra-se superior.

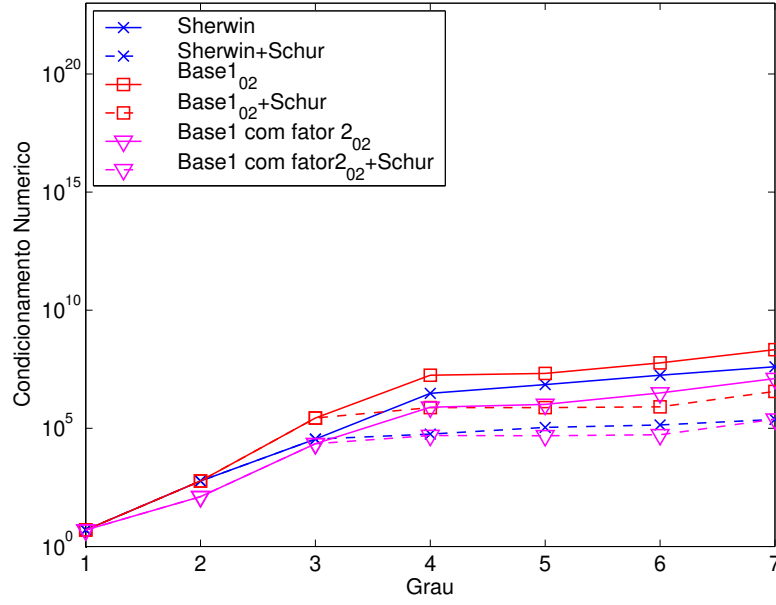


(a) Matriz de massa.

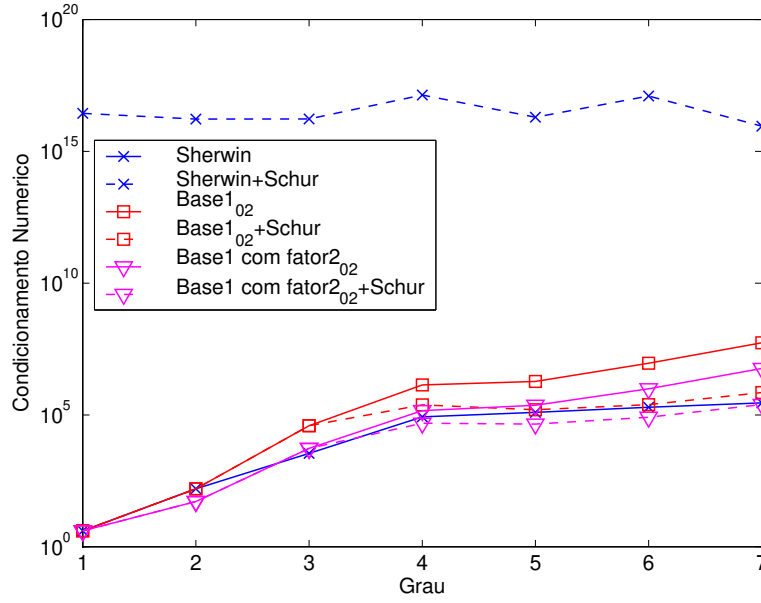


(b) Matriz de rigidez.

Figura 2.44: Condicionamento numérico das matrizes de massa e rigidez dos tetraedros com bases de Lagrange, Szabó, Carnevali, Webb, Sherwin, Base 1 e Base 2.



(a) Matriz de Massa.



(b) Matriz de Rigidez.

Figura 2.45: Condicionamento numérico das matrizes de massa e rigidez dos tetraedros para as bases de Sherwin-Karniadakis, Base 1 ($\alpha = 0$ e $\beta = 2$) e Base 1 com fator 2 (equação 2.63) e ($\alpha = 0$ e $\beta = 2$).

Capítulo 3

Integração dos Coeficientes das Matrizes de Massa e Rigidez usando Tensorização e Quadratura de Gauss-Jacobi

O cálculo dos coeficientes das matrizes de massa e rigidez construídas a partir das funções nodais e modais definidas no Capítulo 2 pode ser feito usando diferentes regras de quadratura. Tanto para as funções de interpolação nodais, como para as modais, o mesmo processo de integração pode ser aplicado, principalmente a tensorização dos pontos e pesos de integração para elementos bi e tridimensionais. No caso das funções nodais, o processo é aplicado para a matriz toda, já que essas matrizes são densas. Já para as funções modais, apenas os coeficientes diferente de zero são calculados.

Neste capítulo é feito um estudo para a escolha dos pontos de integração de forma a diminuir ao máximo o grau do integrando. Determina-se o número mínimo de pontos necessários para a integração exata dos coeficientes, usando as regras de quadratura gaussianas de Gauss-Jacobi (GJ), Gauss-Lobatto-Jacobi (GLJ) e Gauss-Radau-Jacobi (GRJ).

Estuda-se, primeiramente, o caso unidimensional. Feito isso, mostra-se que, para

quadrados e cubos, basta tensorizar os pontos já escolhidos. Um processo análogo é apresentado para a matriz de rigidez de triângulos conforme (Bittencourt, 2005) e estendido neste trabalho para tetraedros.

3.1 Integração das Matrizes Unidimensionais de Massa e Rigidez

Foi visto no Capítulo 2 que para as funções modais definidas em (2.10) e ponderações $\alpha = \beta = 1$, a matriz de massa unidimensional interna é tridiagonal. Assim, para os termos da matriz que são diferentes de zero, pode-se escolher os pontos de integração que minimizam a quantidade de pontos necessários para a integração consistente, usando as diferentes regras de quadratura gaussianas.

A integração numérica usando as regras de quadratura gaussianas é dada por (Karniadakis e Sherwin, 1999)

$$\int_{-1}^1 (1 - \xi_1)^\alpha (1 + \xi_1)^\beta u_m(\xi_1) d\xi_1 = \sum_{i=1}^{n_{int}} w_i^{\alpha,\beta} u_m(\xi_{1_i}^{\alpha,\beta}),$$

onde $u_m(\xi_1)$ é um polinômio qualquer de grau m , $\xi_{1_i}^{\alpha,\beta}$ são as raízes dos polinômios de Jacobi de grau apropriado para cada regra de quadratura, $w_i^{\alpha,\beta}$ são os pesos correspondentes e n_{int} é o número de pontos de integração. Para a regra de Gauss-Jacobi (GJ) são necessários $[(m+1)/2]$ pontos de integração, ou seja, $n_{int} = [(m+1)/2]$ e $\xi_{1_i}^{\alpha,\beta}$ são as raízes de $P_{n_{int}}^{\alpha,\beta}(\xi_1)$. Similarmente, para Gauss-Radau-Jacobi (GRJ), como um ponto de integração é fixo, $n_{int} = [(m+2)/2]$ e $\xi_{1_i}^{\alpha,\beta}$ são as raízes de $P_{n_{int}-1}^{\alpha,\beta+1}(\xi_1)$ mais o ponto -1 . Finalmente, para Gauss-Lobatto-Jacobi (GLJ), como dois pontos de integração são fixos, $n_{int} = [(m+3)/2]$ e $\xi_{1_i}^{\alpha,\beta}$ são as raízes de $P_{n_{int}-2}^{\alpha+1,\beta+1}(\xi_1)$ mais os pontos -1 e 1 . A notação $[\cdot]$ representa o maior inteiro. A quadratura de Gauss-Legendre é um caso particular das quadraturas de GJ, GLJ e GRJ para $\alpha = \beta = 0$.

Considerou-se a matriz de massa particionada em blocos, representados pelas funções

de vértice (V) e internas (I) da seguinte maneira

$$[M] = \begin{bmatrix} [M_{VV}] & [M_{VI}] \\ [M_{VI}]^T & [M_{II}] \end{bmatrix}.$$

Os coeficientes locais do bloco $[M_{VV}]$ das funções de vértice podem ser integrados numericamente como

$$\begin{aligned} m_{11} &= \int_{-1}^1 N_0(\xi_1) N_0(\xi_1) d\xi_1 = \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{2}(1 - \xi_1) \right]^2 d\xi_1 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n_{int}} w_i^{2,0}, \\ m_{12} &= \int_{-1}^1 N_0(\xi_1) N_P(\xi_1) d\xi_1 = \int_{-1}^1 \frac{1}{2}(1 - \xi_1) \frac{1}{2}(1 + \xi_1) d\xi_1 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n_{int}} w_i^{1,1}, \\ m_{22} &= \int_{-1}^1 N_P(\xi_1) N_P(\xi_1) d\xi_1 = \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{2}(1 + \xi_1) \right]^2 d\xi_1 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n_{int}} w_i^{0,2}. \end{aligned}$$

Desta forma, $(1 - \xi_1)^2$, $(1 - \xi_1)(1 + \xi_1)$ e $(1 + \xi_1)^2$ são tratados através das ponderações $w_i^{2,0}$, $w_i^{1,1}$ e $w_i^{0,2}$, respectivamente, e o grau a ser integrado nesses coeficientes é zero.

Para o bloco do acoplamento vértice-interna, os coeficientes só são diferentes de zero com $\alpha = \beta = 1$ para $p = 1, 2$. Por exemplo, o coeficiente

$$m_{1p} = \int_{-1}^1 N_0(\xi_1) N_p(\xi_1) d\xi_1 = \int_{-1}^1 \frac{1}{2}(1 - \xi_1) \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_1) P_{p-1}^{1,1}(\xi_1) d\xi_1$$

é nulo, usando a propriedade dos polinômios ortogonais de Jacobi, sempre que $p - 1 > 1$, ou seja, $p > 2$. Logo,

$$\begin{aligned} m_{1(p+2)} &= \int_{-1}^1 N_0(\xi_1) N_p(\xi_1) d\xi_1 = \int_{-1}^1 \frac{1}{8}(1 - \xi_1)^2(1 + \xi_1) P_{p-1}^{1,1}(\xi_1) d\xi_1 \\ &= \frac{1}{8} \sum_{i=1}^{n_{int}} w_i^{2,1} P_{p-1}^{1,1}(\xi_{1_i}^{2,1}), \\ m_{2(p+2)} &= \int_{-1}^1 N_P(\xi_1) N_p(\xi_1) d\xi_1 = \int_{-1}^1 \frac{1}{8}(1 - \xi_1)(1 + \xi_1)^2 P_{p-1}^{1,1}(\xi_1) d\xi_1 \\ &= \frac{1}{8} \sum_{i=1}^{n_{int}} w_i^{1,2} P_{p-1}^{1,1}(\xi_{1_i}^{1,2}). \end{aligned}$$

Como em ambos os coeficientes, as ponderações do integrando foram absorvidas pelos pesos, para $p = 1$ o grau é zero e para $p = 2$ (o que só ocorre para $P \geq 3$) o grau é 1.

Finalmente, para o bloco $[M_{II}]$ das funções internas, os coeficientes não-nulos para $\alpha = \beta = 1$ são aqueles nos quais $i = p$ ($P \geq 2$) e $i = p + 2$ ($P \geq 3$). Portanto, para um coeficiente genérico desse bloco, tem-se

$$m_{(i+2)(p+2)} = \int_{-1}^1 N_i(\xi_1) N_p(\xi_1) d\xi_1 = \int_{-1}^1 \frac{1}{16}(1 - \xi_1)^2(1 + \xi_1)^2 P_{i-1}^{1,1}(\xi_1) P_{p-1}^{1,1}(\xi_1) d\xi_1$$

Tabela 3.1: Ponderações dos pontos e pesos da regra de quadratura e grau da função a ser integrada para o cálculo dos coeficientes da matriz de massa unidimensional.

Bloco	Coeficiente	α	β	m
[VV]	$N_0 N_0$	2	0	0
	$N_P N_P$	0	2	0
	$N_0 N_P$	1	1	0
[VI]	$N_0 N_p$	2	1	0 ($p = 1, P \geq 2$)
				1 ($p = 2, P \geq 3$)
	$N_P N_p$	1	2	0 ($p = 1, P \geq 2$)
				1 ($p = 2, P \geq 3$)
[II]	$N_i N_p$	2	2	$2p - 2$ ($i = p, P \geq 2$)
				$2p$ ($i = p + 2, P \geq 3$)

$$= \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{n_{int}} w_i^{2,2} P_{i-1}^{1,1}(\xi_{1_i}^{2,2}) P_{p-1}^{1,1}(\xi_{1_i}^{2,2}).$$

O grau a ser integrado é $2p - 2$ para $i = p$ ($P \geq 2$) e $2p$ para $i = p + 2$ ($P \geq 3$).

A Tabela 3.1 apresenta as ponderações α e β dos pontos e pesos da regra de quadratura que minimizam o grau da função a ser integrada. A quantidade de pontos é calculada, então, de acordo com a regra de quadratura escolhida, sendo $[(m+1)/2]$, $[(m+2)/2]$ e $[(m+3)/2]$ pontos de integração necessários para as regras de GJ, GRJ e GLJ, respectivamente.

Para a integração exata dos coeficientes do bloco das funções de vértice, basta 1 ponto usando-se as regras de quadratura de GJ ou GRJ e 2 pontos para GLJ. Para o bloco dos acoplamentos das funções de vértice com as funções internas, precisa-se de, no máximo, 1 ponto para GJ e 2 pontos para GRJ ou GLJ. Já para o bloco das funções internas, como $1 \leq i, p \leq P - 1$, faz-se a seguinte análise de acordo com a Tabela 3.1

$$\max(2p - 2) = 2 \max(p) - 2 = 2P - 4, \quad P \geq 2$$

e

$$\max(2p) = 2 \max(p) = 2P - 2, \quad P \geq 3.$$

Portanto, $\max(m) = 2P - 2$. Assim, para as funções internas, a quantidade máxima de pontos de integração é $[(2P - 1)/2]$, P e $[(2P + 1)/2]$, respectivamente, para GJ, GRJ e GLJ.

A Figura 3.1 mostra a quantidade de pontos para a integração exata dos coeficientes do bloco das funções internas da matriz de massa unidimensional usando as diferentes regras de quadratura gaussianas com as ponderações de acordo com a Tabela 3.1. Conforme esperado, pode-se observar que, com as ponderações empregadas, a quantidade de pontos para cada quadratura é sempre menor que a respectiva regra de Gauss-Legendre.

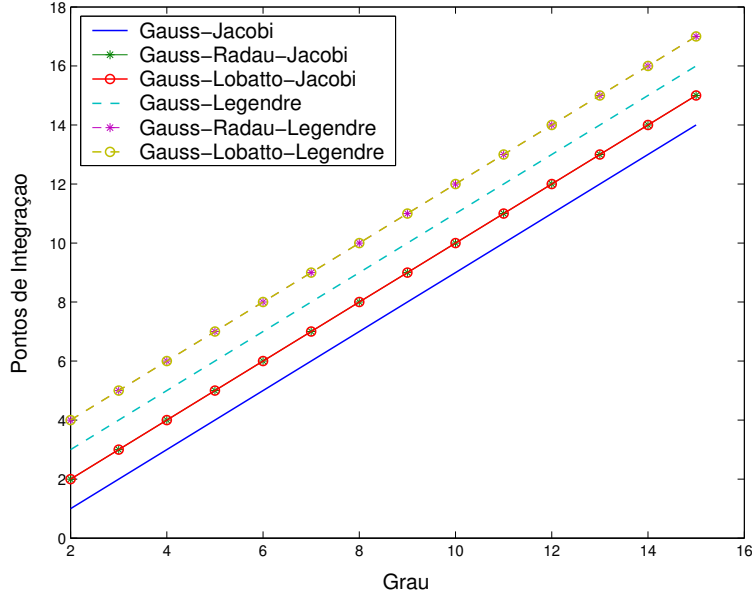


Figura 3.1: Quantidade de pontos para a integração exata dos coeficientes do bloco das funções internas da matriz de massa unidimensional usando as diferentes regras de quadratura gaussianas.

A matriz de rigidez unidimensional para o operador de Laplace usando as funções de forma modais dadas em (2.10) e $\alpha = \beta = 1$ é praticamente diagonal. Os coeficientes do bloco vértice-interna zeram, independente da ponderação, conforme a equação (4.8).

Novamente, para os termos da matriz que são diferentes de zero, pode-se escolher os pontos de integração que minimizam a quantidade de pontos necessários para a integração.

Por exemplo, os coeficientes locais do bloco das funções de vértice são integrados como

$$k_{11} = \int_{-1}^1 N'_0(\xi_1) N'_0(\xi_1) d\xi_1 = \int_{-1}^1 \left(-\frac{1}{2}\right)^2 d\xi_1 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n_{int}} w_i^{0,0},$$

$$k_{12} = \int_{-1}^1 N'_0(\xi_1) N'_P(\xi_1) d\xi_1 = \int_{-1}^1 \left(-\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) d\xi_1 = -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n_{int}} w_i^{0,0},$$

Tabela 3.2: Ponderações dos pontos e pesos da regra de quadratura e grau da função a ser integrada para o cálculo dos coeficientes da matriz de rigidez unidimensional.

Bloco	Coeficientes	α	β	m
[VV]	$N'_0 N'_0$	0	0	0
	$N'_P N'_P$	0	0	0
	$N'_0 N'_P$	0	0	0
[II]	$N_i N''_p$	1	1	$2p - 2$ ($i = p, P \geq 2$)

$$k_{22} = \int_{-1}^1 N'_P(\xi_1) N'_P(\xi_1) d\xi_1 = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 d\xi_1 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n_{int}} w_i^{0,0}.$$

Para as funções internas, os coeficientes não nulos para $\alpha = \beta = 1$ são aqueles nos quais $i = p$ ($P \geq 2$). Portanto,

$$\begin{aligned} k_{(i+2)(p+2)} &= \int_{-1}^1 N_i(\xi_1) N''_p(\xi_1) d\xi_1 = \int_{-1}^1 \frac{1}{4} (1 - \xi_1)(1 + \xi_1) P_{i-1}^{1,1}(\xi_1) \Pi_{p-1}(\xi_1) d\xi_1 \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n_{int}} w_i^{1,1} P_{i-1}^{1,1}(\xi_{1_i}^{1,1}) \Pi_{p-1}(\xi_{1_i}^{1,1}), \end{aligned}$$

onde $\Pi_{p-1}(\xi_1)$ é um polinômio qualquer de grau $p - 1$ e o grau a ser integrado é $2p - 2$ para $i = p$ ($P \geq 2$).

A Tabela 3.2 apresenta as ponderações α e β dos pontos e pesos da regra de quadratura que minimizam o grau do integrando.

Para a integração exata dos coeficientes do bloco das funções de vértice, basta 1 ponto para GJ ou GRJ e 2 pontos para GLJ. Para o bloco das funções internas, como $1 \leq i, p \leq P - 1$, tem-se

$$\max(2p - 2) = 2 \max(p) - 2 = 2P - 4, \quad P \geq 2.$$

Assim, para as funções internas, a quantidade máxima de pontos de integração é $[(2P - 3)/2]$, $(P - 1)$ e $[(2P - 1)/2]$, para GJ, GRJ e GLJ, respectivamente, conforme ilustrado na Figura 3.2.

Seja agora a matriz unidimensional constituída pelo produto da função i pela derivada da função p , cujos coeficientes são calculados por

$$mk_{ip} = \int_{-1}^1 N_i(\xi_1) N'_p(\xi_1) d\xi_1, \quad (3.1)$$

com $0 \leq i, p \leq P$.

Os coeficientes correspondentes aos modos internos empregando polinômios de Ja-

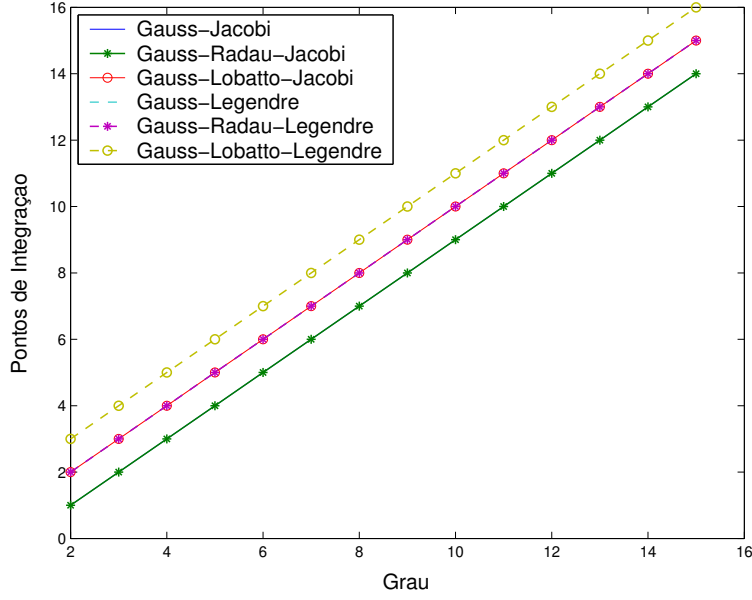


Figura 3.2: Quantidade de pontos para a integração exata dos coeficientes do bloco das funções internas da matriz de rigidez unidimensional usando as diferentes regras de quadratura gaussianas.

cobi podem ser escritos como

$$\begin{aligned}
 mk_{(i+2)(p+2)} &= \int_{-1}^1 N_i(\xi_1) N'_p(\xi_1) d\xi_1 \\
 &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 (1 - \xi_1)(1 + \xi_1) P_{i-1}^{1,1}(\xi_1) \Pi_p(\xi_1) d\xi_1.
 \end{aligned}$$

O termo $(1 - \xi_1)(1 + \xi_1)$ corresponde às funções peso da relação de ortogonalidade dos polinômios de Jacobi (2.8) com $\alpha = \beta = 1$. Como $\Pi_p(\xi_1)$ é um polinômio qualquer de grau p , a integral anterior zera quando $i - 1 > p$, o que implica $i > p + 1$. Como a matriz é simétrica, há uma diagonal não-nula acima e uma abaixo da diagonal principal, tornando assim a matriz interna tridiagonal. Porém, observou-se que a integral também zera para $i = p$. Neste caso, como $\alpha = \beta$, tem-se a integral da multiplicação de dois polinômios de graus consecutivos num intervalo simétrico, ou seja, um polinômio que só tem coeficientes pares e outro que só tem coeficientes ímpares, o que resulta num polinômio que só tem coeficientes pares, como mostra a Figura 3.3.

As ponderações que minimizam a quantidade de pontos necessários para a integração dos coeficientes diferentes de zero estão mostradas na Tabela 3.3

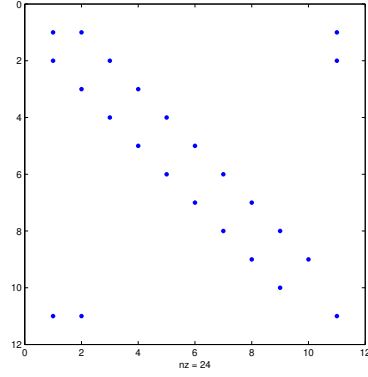


Figura 3.3: Perfil de esparsidade da matriz unidimensional cujos coeficientes são dados pela expressão (3.1) e $\alpha = \beta = 1$.

Tabela 3.3: Ponderações para a escolha das raízes dos polinômios de Jacobi que minimizam a quantidade de pontos de integração para o cálculo dos coeficientes dados pela equação (3.1)

Bloco	Coeficientes	α	β	m
[VV]	$N_0 N'_0$	1	0	0
	$N_P N'_P$	0	1	0
	$N_0 N'_P$	0	0	1
[VI]	$N_0 N'_p$	1	0	p
	$N_P N'_p$	0	1	p
[II]	$N_i N'_p$	1	1	$2p - 1$ ($i = p + 1, P \geq 3$)

Para a integração exata dos coeficientes locais do bloco das funções de vértice basta 1 ponto para GJ e 2 pontos para GRJ ou GLJ. Para o bloco dos acoplamentos das funções de vértice e interna, como $1 \leq i, p \leq P - 1$, precisa-se de, no máximo, $\lceil P/2 \rceil$ pontos para GJ, $\lceil (P + 1)/2 \rceil$ pontos para GRJ e $\lceil (P + 2)/2 \rceil$ pontos para GLJ. Já para o bloco das funções internas, o grau do integrando é

$$\max(2p - 1) = 2 \max(p) - 1 = 2P - 3, \quad P \geq 3.$$

Assim, para as funções internas, a quantidade máxima de pontos de integração é $(P - 1)$, $\lceil (2P - 1)/2 \rceil$ e P , para GJ, GRJ e GLJ, respectivamente, conforme a Figura 3.4.

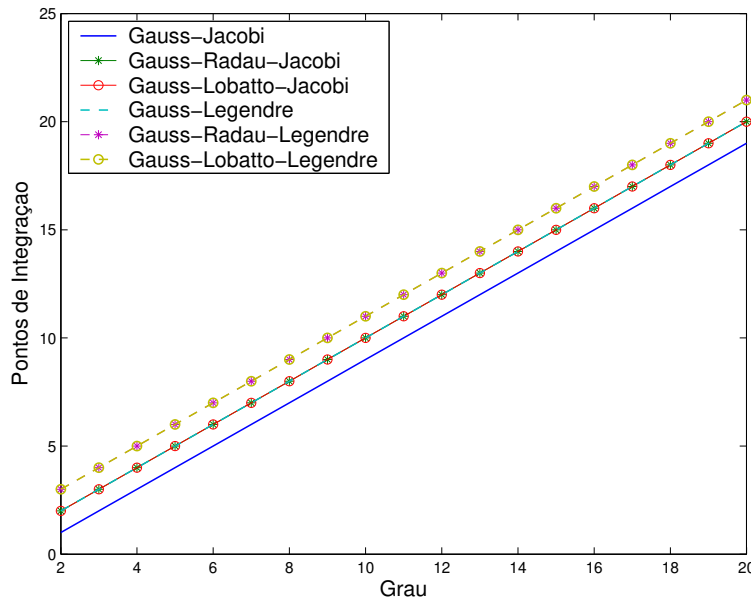


Figura 3.4: Quantidade de pontos para a integração exata dos coeficientes do bloco das funções internas da matriz unidimensional definida em (3.1) usando as diferentes regras de quadratura gaussianas.

3.2 Integração da Matriz de Massa e Rigidez Bidimensional - Quadrado

A expressão para o cálculo dos coeficientes locais da matriz de massa do quadrado é dada por

$$m_{ab} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_a(\xi_1, \xi_2) N_b(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2,$$

com $N_a(\xi_1, \xi_2) = N_i(\xi_1)N_j(\xi_2)$ e $N_b(\xi_1, \xi_2) = N_p(\xi_1)N_q(\xi_2)$, $0 \leq i, j, p, q \leq P$. A relação anterior pode ser escrita em função das matrizes de massa unidimensionais como

$$m_{ab} = \underbrace{\int_{-1}^1 N_i(\xi_1) N_p(\xi_1) d\xi_1}_{m_{\xi_1}} \underbrace{\int_{-1}^1 N_j(\xi_2) N_q(\xi_2) d\xi_2}_{m_{\xi_2}} = m_{ip}^{1D} m_{jq}^{1D}.$$

Da mesma forma que o caso unidimensional, particiona-se a matriz de massa em blocos relativos às funções de vértice, aresta, face e acoplamentos como

$$[M] = \begin{bmatrix} [M_{VV}] & [M_{VE}] & [M_{VF}] \\ [M_{VE}]^T & [M_{EE}] & [M_{EF}] \\ [M_{VF}]^T & [M_{EF}]^T & [M_{FF}] \end{bmatrix}.$$

A partir daí, selecionam-se as ponderações dos pontos de integração para minimizar o grau das funções em cada direção, conforme a Tabela 3.4. Observa-se que nesta tabela e nas demais apresentadas no decorrer deste Capítulo, P indica o grau ao longo de uma das direções de tensorização.

Para a integração exata dos coeficientes do bloco das funções de vértice, basta 1 ponto para a regra de quadratura de GJ ou GRJ e 4 pontos para a regra de quadratura de GLJ. Para o bloco dos acoplamentos das funções de vértice com as funções de aresta, precisa-se de 1 ponto para GJ, 2 pontos para GRJ e 4 pontos para GLJ. Para o bloco vértice-face, 1 ponto para GJ e 4 pontos para GRJ ou GLJ. Para o bloco das funções de aresta, são necessários, no máximo, $[(2P-1)/2]$, P e $2[(2P+1)/2]$ pontos para GJ, GRJ e GLJ, respectivamente, conforme mostra a Figura 3.5. Para o bloco aresta-face, são necessários, no máximo, $[(2P-1)/2]$, $2P$ e $2[(2P+1)/2]$ pontos para GJ, GRJ e GLJ, respectivamente, conforme ilustra a Figura 3.6. Para o bloco das funções internas, como

Tabela 3.4: Ponderações para a escolha das raízes dos polinômios de Jacobi que minimizam a quantidade de pontos de integração dos coeficientes das matrizes de massa dos quadrados.

Bloco	Coeficientes	Combinações 1D	α_1	β_1	α_2	β_2	m_{ξ_1}	m_{ξ_2}
[VV]	$N_{00}N_{00}$	$m_{00}m_{00}$	2	0	2	0	0	0
	$N_{00}N_{PP}$	$m_{0P}m_{0P}$	1	1	1	1	0	0
	$N_{00}N_{0P}$	$m_{00}m_{0P}$	2	0	1	1	0	0
	$N_{00}N_{P0}$	$m_{0P}m_{00}$	1	1	2	0	0	0
	$N_{PP}N_{PP}$	$m_{PP}m_{PP}$	0	2	0	2	0	0
	$N_{PP}N_{0P}$	$m_{P0}m_{PP}$	1	1	0	2	0	0
	$N_{PP}N_{P0}$	$m_{PP}m_{P0}$	0	2	1	1	0	0
	$N_{0P}N_{0P}$	$m_{00}m_{PP}$	2	0	0	2	0	0
	$N_{0P}N_{P0}$	$m_{0P}m_{P0}$	1	1	1	1	0	0
	$N_{P0}N_{P0}$	$m_{PP}m_{00}$	0	2	2	0	0	0
[VE]	$N_{00}N_{0q}$	$m_{00}m_{0q}$	2	0	2	1	0	0 ($q = 1, P \geq 2$) 1 ($q = 2, P \geq 3$)
	$N_{00}N_{p0}$	$m_{0p}m_{00}$	2	1	2	0	0 ($p = 1, P \geq 2$) 1 ($p = 2, P \geq 3$)	0
	$N_{00}N_{Pq}$	$m_{0P}m_{0q}$	1	1	2	1	0	0 ($q = 1, P \geq 2$) 1 ($q = 2, P \geq 3$)
	$N_{00}N_{pP}$	$m_{0p}m_{0P}$	2	1	1	1	0 ($p = 1, P \geq 2$) 1 ($p = 2, P \geq 3$)	0
	$N_{PP}N_{0q}$	$m_{P0}m_{Pq}$	1	1	1	2	0	0 ($q = 1, P \geq 2$) 1 ($q = 2, P \geq 3$)
	$N_{PP}N_{p0}$	$m_{Pp}m_{P0}$	1	2	1	1	0 ($p = 1, P \geq 2$) 1 ($p = 2, P \geq 3$)	0
	$N_{PP}N_{Pq}$	$m_{PP}m_{Pq}$	0	2	1	2	0	0 ($q = 1, P \geq 2$) 1 ($q = 2, P \geq 3$)
	$N_{PP}N_{pP}$	$m_{Pp}m_{PP}$	1	2	0	2	0 ($p = 1, P \geq 2$) 1 ($p = 2, P \geq 3$)	0
	$N_{0P}N_{Pq}$	$m_{0P}m_{Pq}$	1	1	1	2	0	0 ($q = 1, P \geq 2$) 1 ($q = 2, P \geq 3$)
	$N_{0P}N_{pP}$	$m_{0p}m_{PP}$	2	1	0	2	0 ($p = 1, P \geq 2$) 1 ($p = 2, P \geq 3$)	0
	$N_{P0}N_{Pq}$	$m_{PP}m_{0q}$	0	2	2	1	0	0 ($q = 1, P \geq 2$) 1 ($q = 2, P \geq 3$)
	$N_{P0}N_{pP}$	$m_{Pp}m_{0P}$	1	2	1	1	0 ($p = 1, P \geq 2$) 1 ($p = 2, P \geq 3$)	0

Bloco	Coefficientes	Combinações 1D	α_1	β_1	α_2	β_2	m_{ξ_1}	m_{ξ_2}
[VF]	$N_{00}N_{pq}$	$m_{0p}m_{0q}$	2	1	2	1	0 ($p=1, P \geq 2$) 1 ($p=2, P \geq 3$)	0 ($q=1, P \geq 2$) 1 ($q=2, P \geq 3$)
	$N_{PP}N_{pq}$	$m_{Pp}m_{Pq}$	1	2	1	2	0 ($p=1, P \geq 2$) 1 ($p=2, P \geq 3$)	0 ($q=1, P \geq 2$) 1 ($q=2, P \geq 3$)
	$N_{0P}N_{pq}$	$m_{0p}m_{Pq}$	2	1	1	2	0 ($p=1, P \geq 2$) 1 ($p=2, P \geq 3$)	0 ($q=1, P \geq 2$) 1 ($q=2, P \geq 3$)
	$N_{P0}N_{pq}$	$m_{Pp}m_{0q}$	1	2	2	1	0 ($p=1, P \geq 2$) 1 ($p=2, P \geq 3$)	0 ($q=1, P \geq 2$) 1 ($q=2, P \geq 3$)
[EE]	$N_{0j}N_{0q}$	$m_{00}m_{jq}$	2	0	2	2	0	2q-2 ($j=q, P \geq 2$) 2q ($j=q+2, P \geq 3$)
	$N_{0j}N_{p0}$	$m_{0p}m_{j0}$	2	1	2	1	0 ($p=1, P \geq 2$) 1 ($p=2, P \geq 3$)	0 ($q=1, P \geq 2$) 1 ($q=2, P \geq 3$)
	$N_{0j}N_{Pq}$	$m_{0P}m_{jq}$	1	1	2	2	0	2q-2 ($j=q, P \geq 2$) 2q ($j=q+2, P \geq 3$)
	$N_{0j}N_{pP}$	$m_{0p}m_{jP}$	2	1	1	2	0 ($p=1, P \geq 2$) 1 ($p=2, P \geq 3$)	0 ($q=1, P \geq 2$) 1 ($q=2, P \geq 3$)
	$N_{i0}N_{p0}$	$m_{ip}m_{00}$	2	2	2	0	2p-2 ($i=p, P \geq 2$) 2p ($i=p+2, P \geq 3$)	0
	$N_{i0}N_{Pq}$	$m_{0p}m_{jP}$	1	2	2	1	0 ($p=1, P \geq 2$) 1 ($p=2, P \geq 3$)	0 ($q=1, P \geq 2$) 1 ($q=2, P \geq 3$)
	$N_{i0}N_{pP}$	$m_{ip}m_{0P}$	2	2	1	1	2p-2 ($i=p, P \geq 2$) 2p ($i=p+2, P \geq 3$)	0
	$N_{Pj}N_{Pq}$	$m_{PP}m_{jq}$	0	2	2	2	0	2q-2 ($j=q, P \geq 2$) 2q ($j=q+2, P \geq 3$)
	$N_{Pj}N_{pP}$	$m_{Pp}m_{jP}$	1	2	1	2	0 ($p=1, P \geq 2$) 1 ($p=2, P \geq 3$)	0 ($q=1, P \geq 2$) 1 ($q=2, P \geq 3$)
	$N_{iP}N_{pP}$	$m_{ip}m_{PP}$	2	2	0	2	2p-2 ($i=p, P \geq 2$) 2p ($i=p+2, P \geq 3$)	0
[EF]	$N_{0j}N_{pq}$	$m_{0p}m_{jq}$	2	1	2	2	0 ($p=1, P \geq 2$) 1 ($p=2, P \geq 3$)	2q-2 ($j=q, P \geq 2$) 2q ($j=q+2, P \geq 3$)
	$N_{i0}N_{pq}$	$m_{ip}m_{0q}$	2	2	2	1	2p-2 ($i=p, P \geq 2$) 2p ($i=p+2, P \geq 3$)	0 ($q=1, P \geq 2$) 1 ($q=2, P \geq 3$)
	$N_{Pj}N_{pq}$	$m_{Pp}m_{jq}$	1	2	2	2	0 ($p=1, P \geq 2$) 1 ($p=2, P \geq 3$)	2q-2 ($j=q, P \geq 2$) 2q ($j=q+2, P \geq 3$)
	$N_{iP}N_{pq}$	$m_{ip}m_{Pq}$	2	2	1	2	2p-2 ($i=p, P \geq 2$) 2p ($i=p+2, P \geq 3$)	0 ($q=1, P \geq 2$) 1 ($q=2, P \geq 3$)
[FF]	$N_{ij}N_{pq}$	$m_{ip}m_{jq}$	2	2	2	2	2p-2 ($i=p, P \geq 2$) 2p ($i=p+2, P \geq 3$)	2q-2 ($j=q, P \geq 2$) 2q ($j=q+2, P \geq 3$)

$1 \leq i, p \leq P-1$, tem-se

$$\max(2p) = 2 \max(p) = 2P - 2, \quad P \geq 2.$$

Portanto, o número máximo de pontos de integração é $(P-1)^2$, $[(2P-1)^2/4]$ e P^2 , respectivamente, para GJ, GRJ e GLJ. Assim, para as funções internas, a quantidade máxima de pontos de integração varia conforme a Figura 3.7.

A expressão para o cálculo dos coeficientes da matriz de rigidez do problema de Poisson para os quadrados é dada por

$$k_{ab} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \nabla N_a(\xi_1, \xi_2) \cdot \nabla N_b(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2,$$

com $N_a(\xi_1, \xi_2) = N_i(\xi_1)N_j(\xi_2)$ e $N_b(\xi_1, \xi_2) = N_p(\xi_1)N_q(\xi_2)$, $0 \leq i, j, p, q \leq P$. Portanto, em função dos coeficientes das matrizes de massa e rigidez unidimensionais tem-se

$$\begin{aligned}
k_{ab} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(N_{a'\xi_1}(\xi_1, \xi_2) N_{b'\xi_1}(\xi_1, \xi_2) + N_{a'\xi_2}(\xi_1, \xi_2) N_{b'\xi_2}(\xi_1, \xi_2) \right) d\xi_1 d\xi_2 \\
&= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(N_j(\xi_2) N_q(\xi_2) N_{i'\xi_1}(\xi_1) N_{p'\xi_1}(\xi_1) + N_i(\xi_1) N_p(\xi_1) N_{j'\xi_2}(\xi_2) N_{q'\xi_2}(\xi_2) \right) d\xi_1 d\xi_2 \\
&= m_{jq}^{1D} k_{ip}^{1D} + m_{ip}^{1D} k_{jq}^{1D}.
\end{aligned}$$

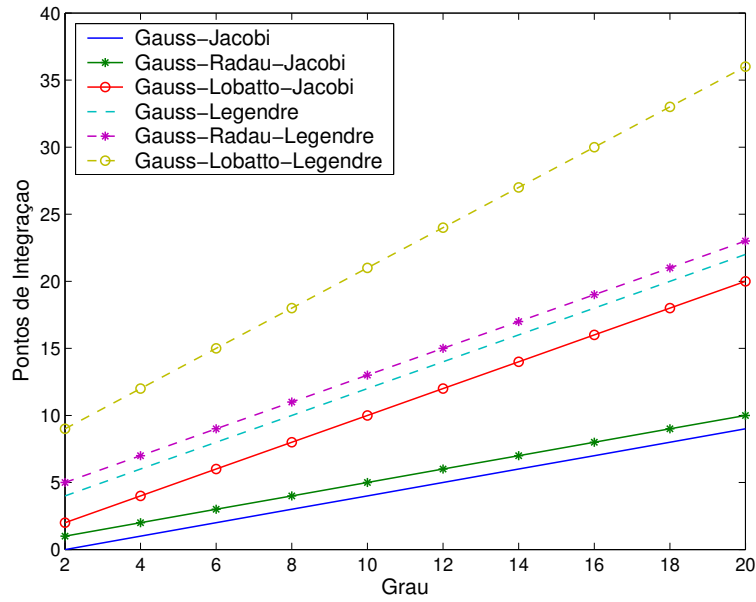


Figura 3.5: Quantidade de pontos para a integração exata dos coeficientes das funções de aresta da matriz de massa bidimensional usando as diferentes regras de quadratura gaussianas.

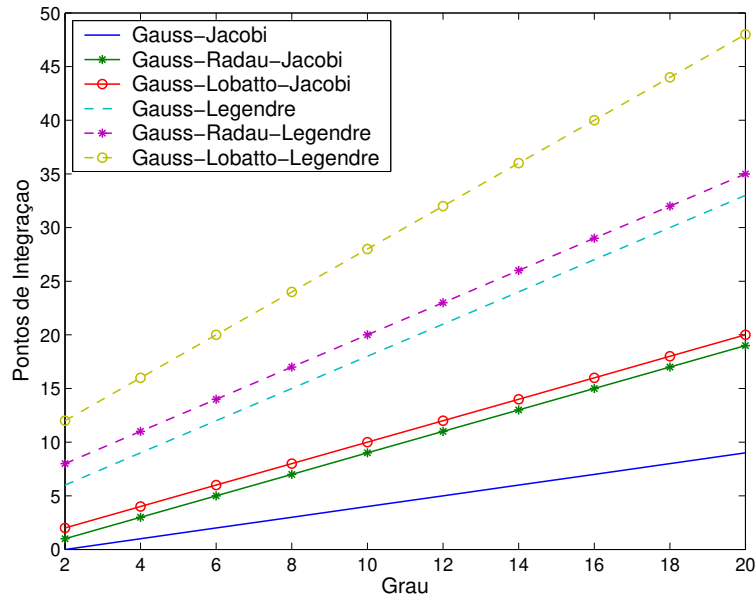


Figura 3.6: Quantidade de pontos para a integração exata dos coeficientes do acoplamento das funções de aresta com as funções de face da matriz de massa bidimensional usando as diferentes regras de quadratura gaussianas.

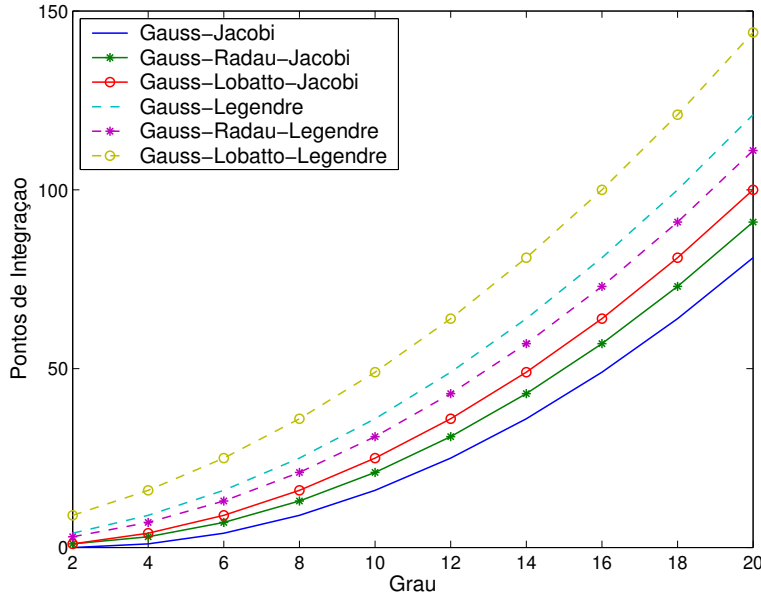


Figura 3.7: Quantidade de pontos para a integração exata dos coeficientes do bloco das funções internas da matriz de massa bidimensional usando as diferentes regras de quadratura gaussianas.

Novamente, para os coeficientes diferente de zero, selecionaram-se as ponderações dos pontos de integração para minimizar o grau das funções em cada direção. Porém, como a expressão dos coeficientes da matriz de rigidez é a soma da matriz de massa em uma direção multiplicada pela matriz de rigidez na outra direção e vice-versa, selecionou-se a ponderação que vale para a massa e a rigidez ao mesmo tempo e apurou-se o grau que sobrou em cada direção.

No bloco das funções de vértice a ponderação deve ser $\alpha_1 = \beta_1 = \alpha_2 = \beta_2 = 0$ e sobra grau 2 em cada direção.

Para os blocos vértice-aresta, aresta, aresta-face e face, as ponderações são mostradas na Tabela 3.5 e a quantidade de pontos para a integração exata nas Figuras 3.8 a 3.10.

As expressões para o cálculo da quantidade mínima de pontos necessários para a integração exata dos coeficientes de cada bloco da matriz de rigidez usando tipos diferentes de regras de quadratura está organizado na Tabela 3.6.

Tabela 3.5: Ponderações para a escolha das raízes dos polinômios de Jacobi que minimizam a quantidade de pontos de integração dos coeficientes das matrizes de rigidez dos quadrados.

Bloco	Coeficientes	Combinações 1D	α_1	β_1	α_2	β_2
[VE]	$\nabla N_{00} \nabla N_{0q}$	$k_{00} m_{0q}$	0	0	2	1
	$\nabla N_{00} \nabla N_{p0}$	$m_{0p} k_{00}$	2	1	0	0
	$\nabla N_{00} \nabla N_{Pq}$	$k_{0P} m_{0q}$	0	0	2	1
	$\nabla N_{00} \nabla N_{pP}$	$m_{0p} k_{0P}$	2	1	0	0
	$\nabla N_{PP} \nabla N_{0q}$	$k_{P0} m_{Pq}$	0	0	1	2
	$\nabla N_{PP} \nabla N_{p0}$	$m_{Pp} k_{P0}$	1	2	0	0
	$\nabla N_{PP} \nabla N_{Pq}$	$k_{PP} m_{Pq}$	0	0	1	2
	$\nabla N_{PP} \nabla N_{pP}$	$m_{Pp} k_{PP}$	1	2	0	0
	$\nabla N_{0P} \nabla N_{Pq}$	$k_{0P} m_{Pq}$	0	0	1	2
	$\nabla N_{0P} \nabla N_{pP}$	$m_{0p} k_{PP}$	2	1	0	0
	$\nabla N_{P0} \nabla N_{Pq}$	$k_{PP} m_{0q}$	0	0	2	1
	$\nabla N_{P0} \nabla N_{pP}$	$m_{Pp} k_{0P}$	1	2	0	0
[EE]	$\nabla N_{0j} \nabla N_{0q}$	$m_{00} k_{jq} + k_{00} m_{jq}$	0	0	1	1
	$\nabla N_{0j} \nabla N_{Pq}$	$m_{0P} k_{jq} + k_{0P} m_{jq}$	0	0	1	1
	$\nabla N_{i0} \nabla N_{p0}$	$m_{ip} k_{00} + k_{ip} m_{00}$	1	1	0	0
	$\nabla N_{i0} \nabla N_{pP}$	$m_{ip} k_{0P} + k_{ip} m_{0P}$	1	1	0	0
	$\nabla N_{Pj} \nabla N_{Pq}$	$m_{PP} k_{jq} + k_{PP} m_{jq}$	0	0	1	1
	$\nabla N_{iP} \nabla N_{pP}$	$m_{ip} k_{PP} + k_{ip} m_{PP}$	1	1	0	0
[EF]	$\nabla N_{0j} \nabla N_{pq}$	$m_{0p} k_{jq}$	2	1	1	1
	$\nabla N_{i0} \nabla N_{pq}$	$k_{ip} m_{0q}$	1	1	2	1
	$\nabla N_{Pj} \nabla N_{pq}$	$m_{Pp} k_{jq}$	1	2	1	1
	$\nabla N_{iP} \nabla N_{pq}$	$k_{ip} m_{Pq}$	1	1	1	2
[FF]	$\nabla N_{ij} \nabla N_{pq}$	$m_{ip} k_{jq} + k_{ip} m_{jq}$	1	1	1	1

Bloco	GJ	GRJ	GLJ
[VV]	4	4	9
[VE]	1	2	4
[EE]	$2[(2P+1)/2]$	$2(P+1)$	$3[(2P+3)/2]$
[EF]	$[(2P-3)/2]$	$2(P-1)$	$2[(2P-1)/2]$
[FF]	$[(2P-3)/2]^2$	$(P-1)^2$	$[(2P-1)/2]^2$

Tabela 3.6: Expressões para o cálculo da quantidade máxima de pontos para a integração dos coeficientes da matriz de rigidez para os quadrados usando as diferentes regras de quadratura.

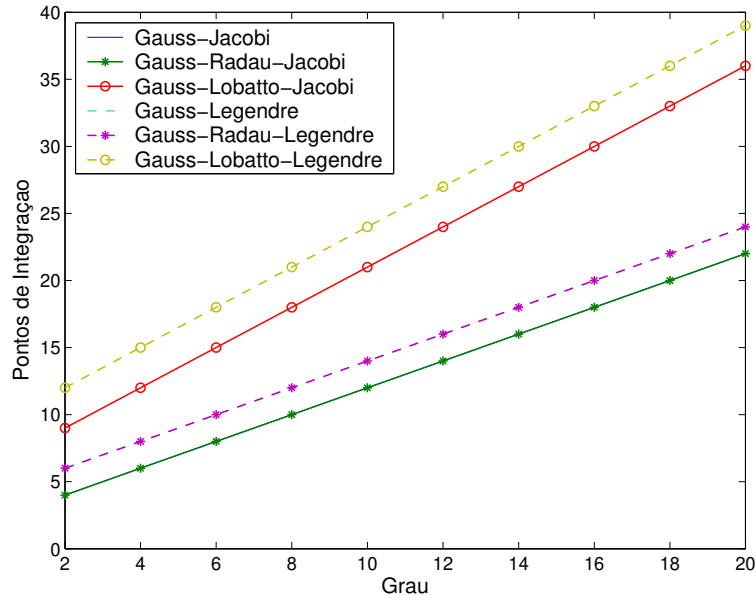


Figura 3.8: Quantidade de pontos para a integração exata dos coeficientes do bloco de aresta da matriz de rigidez do quadrado usando as diferentes regras de quadratura gaussianas.

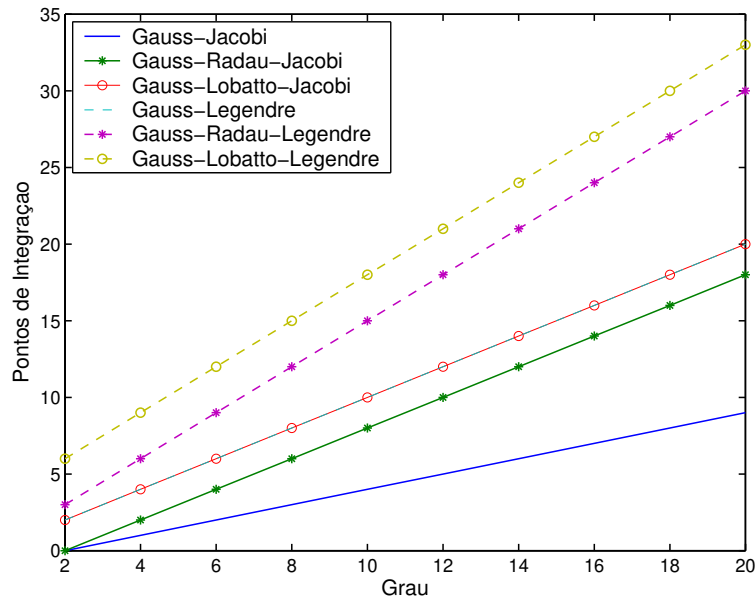


Figura 3.9: Quantidade de pontos para a integração exata dos coeficientes do bloco aresta-face da matriz de rigidez do quadrado usando as diferentes regras de quadratura gaussianas.

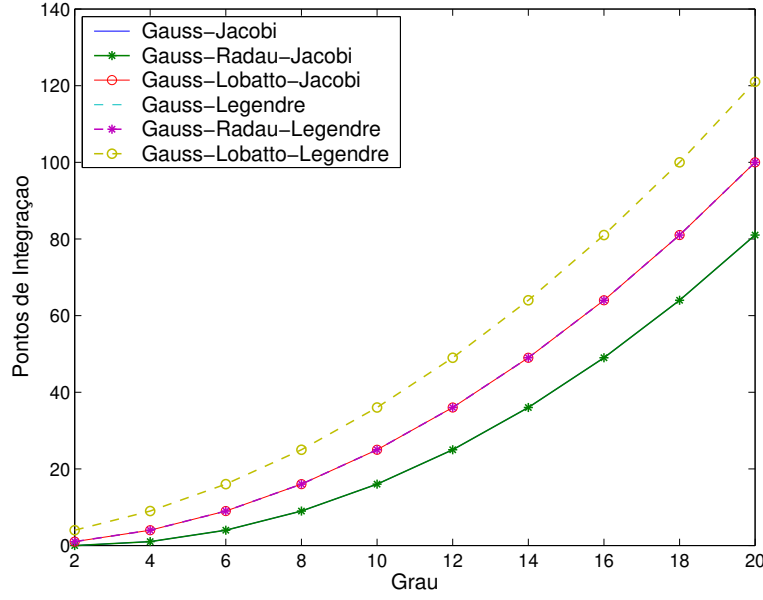


Figura 3.10: Quantidade de pontos para a integração exata dos coeficientes do bloco interno da matriz de rigidez do quadrado usando as diferentes regras de quadratura gaussianas.

Para a matriz de rigidez no caso do elemento de estado plano de tensão, a expressão para o cálculo dos seus coeficientes pode ser escrita em função dos coeficientes das matrizes de massa, rigidez e mista unidimensionais, dada pela equação (3.1), como

$$\begin{aligned}
 k_{ab} &= \\
 cte &\begin{bmatrix} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (N_{a'\xi_1} N_{b'\xi_1} + \frac{1-\mu}{2} N_{a'\xi_2} N_{b'\xi_2}) d\xi_1 d\xi_2 & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mu N_{a'\xi_1} N_{b'\xi_2} + \frac{1-\mu}{2} N_{a'\xi_2} N_{b'\xi_1}) d\xi_1 d\xi_2 \\ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mu N_{a'\xi_2} N_{b'\xi_1} + \frac{1-\mu}{2} N_{a'\xi_1} N_{b'\xi_2}) d\xi_1 d\xi_2 & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (N_{a'\xi_2} N_{b'\xi_2} + \frac{1-\mu}{2} N_{a'\xi_1} N_{b'\xi_1}) d\xi_1 d\xi_2 \end{bmatrix} \\
 &= cte \begin{bmatrix} m_{qj}^{1D} k_{pi}^{1D} + \frac{1-\mu}{2} m_{pi}^{1D} k_{qj}^{1D} & \mu m k_{pi}^{1D} m k_{qj}^{1D} + \frac{1-\mu}{2} m k_{qj}^{1D} m k_{pi}^{1D} \\ \mu m k_{qj}^{1D} m k_{pi}^{1D} + \frac{1-\mu}{2} m k_{pi}^{1D} m k_{qj}^{1D} & m_{pi}^{1D} k_{qj}^{1D} + \frac{1-\mu}{2} m_{qj}^{1D} k_{pi}^{1D} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Escolhendo, para cada k_{ab} , α e β que satisfaçam a matriz toda, para o bloco das funções de vértice, as ponderações devem ser $\alpha_1 = \beta_1 = \alpha_2 = \beta_2 = 0$ e sobra, no máximo, dois graus em cada direção. Para os blocos das funções de aresta e das funções internas, mantêm-se as mesmas escolhas que o operador laplaciano. A Tabela 3.7 expõe as escolhas para os acoplamentos vértice-aresta, vértice-face e aresta-face.

Tabela 3.7: Ponderações para a escolha das raízes dos polinômios de Jacobi que minimizam a quantidade de pontos de integração dos coeficientes das matrizes de rigidez do estado plano de tensão.

Bloco	Coefficientes	α_1	β_1	α_2	β_2
[VE]	$N_{00} N_{0q}$	0	0	1	0
	$N_{00} N_{p0}$	1	0	0	0
	$N_{00} N_{Pq}$	0	0	1	0
	$N_{00} N_{pP}$	1	0	0	0
	$N_{PP} N_{0q}$	0	0	0	1
	$N_{PP} N_{p0}$	0	1	0	0
	$N_{PP} N_{Pq}$	0	0	0	1
	$N_{PP} N_{pP}$	0	1	0	0
	$N_{0P} N_{Pq}$	0	0	0	1
	$N_{0P} N_{pP}$	1	0	0	0
	$N_{P0} N_{Pq}$	0	0	1	0
	$N_{P0} N_{pP}$	0	1	0	0
[VF]	$N_{00} N_{pq}$	1	0	1	0
	$N_{PP} N_{pq}$	0	1	0	1
	$N_{0P} N_{pq}$	1	0	0	1
	$N_{P0} N_{pq}$	0	1	1	0
[EF]	$N_{0j} N_{pq}$	1	0	1	1
	$N_{i0} N_{pq}$	1	1	1	0
	$N_{Pj} N_{pq}$	0	1	1	1
	$N_{iP} N_{pq}$	1	1	0	1

	GJ	GRJ	GLJ
$[VV]$	4	4	9
$[VE]$	$[P/2]$	$2[(P+1)/2]$	$2[(P+2)/2]$
$[VF]$	$[P/2][P/2]$	$[(P+1)/2][(P+1)/2]$	$[(P+2)/2][(P+2)/2]$
$[EE]$	$2[(2P+1)/2]$	$2(P+1)$	$3[(2P+3)/2]$
$[EF]$	$[P/2](P-1)$	$[(P+1)/2][(2P-1)/2]$	$[(P+2)/2]P$
$[FF]$	$[(2P-3)/2]^2$	$(P-1)^2$	$[(2P-1)/2]^2$

Tabela 3.8: Expressões para o cálculo da quantidade máxima de pontos para a integração dos coeficientes da matriz do estado plano de tensão usando diferentes regras de quadratura.

As expressões para o cálculo da quantidade máxima de pontos necessários para a integração exata dos coeficientes de cada bloco da matriz de rigidez usando tipos diferentes de regras de quadratura está organizado na Tabela 3.8.

3.3 Integração da Matriz de Massa e Rigidez Tridimensional - Hexaedro

A expressão para o cálculo dos coeficientes locais da matriz de massa para o hexaedro é dada por

$$m_{ab} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_a(\xi_1, \xi_2, \xi_3) N_b(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3,$$

com $N_a(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = N_i(\xi_1)N_j(\xi_2)N_k(\xi_3)$ e $N_b(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = N_p(\xi_1)N_q(\xi_2)N_r(\xi_3)$, $0 \leq i, j, k, p, q, r \leq P$. A expressão anterior pode ser escrita em função das matrizes de massa unidimensionais como

$$m_{ab} = \int_{-1}^1 N_i(\xi_1)N_p(\xi_1)d\xi_1 \int_{-1}^1 N_j(\xi_2)N_q(\xi_2)d\xi_2 \int_{-1}^1 N_k(\xi_3)N_r(\xi_3)d\xi_3 = m_{ip}m_{jq}m_{kr}.$$

Da mesma forma que o caso unidimensional, particiona-se a matriz de massa em blocos como

$$[M] = \begin{bmatrix} [M_{VV}] & [M_{VE}] & [M_{VF}] & [M_{VB}] \\ [M_{VE}]^T & [M_{EE}] & [M_{EF}] & [M_{EB}] \\ [M_{VF}]^T & [M_{EF}]^T & [M_{FF}] & [M_{FB}] \\ [M_{VB}]^T & [M_{EB}]^T & [M_{FB}]^T & [M_{BB}] \end{bmatrix},$$

Tabela 3.9: Expressões para o cálculo da quantidade máxima de pontos para a integração dos coeficientes da matriz de massa para os hexaedros usando as diferentes regras de quadratura.

Blocos	Combinações 1D	GJ	GRJ	GLJ
[VV]	$m_v m_v m_v$	$[\frac{1}{2}][\frac{1}{2}][\frac{1}{2}]$	$[1][1][1]$	$[\frac{3}{2}][\frac{3}{2}][\frac{3}{2}]$
[VE]	$m_v m_v m_e$	$[\frac{1}{2}][\frac{1}{2}][1]$	$[1][1][\frac{3}{2}]$	$[\frac{3}{2}][\frac{3}{2}][2]$
[VF]	$m_v m_e m_e$	$[\frac{1}{2}][1][1]$	$[1][\frac{3}{2}][\frac{3}{2}]$	$[\frac{3}{2}][2][2]$
[VB]	$m_e m_e m_e$	$[1][1][1]$	$[\frac{3}{2}][\frac{3}{2}][\frac{3}{2}]$	$[2][2][2]$
[EE]	$m_e m_e m_f$ ou $m_v m_e m_e$	$[\frac{1}{2}][\frac{1}{2}][\frac{(2P-3)}{2}]$	$[1][1][P-1]$	$[\frac{3}{2}][\frac{3}{2}][\frac{2P-1}{2}]$
[EF]	$m_v m_e m_f$	$[\frac{1}{2}][1][\frac{(2P-3)}{2}]$	$[1][\frac{3}{2}][P-1]$	$[\frac{3}{2}][2][\frac{2P-1}{2}]$
[EB]	$m_e m_e m_f$	$[1][1][\frac{(2P-3)}{2}]$	$[\frac{3}{2}][\frac{3}{2}][P-1]$	$[2][2][\frac{2P-1}{2}]$
[FF]	$m_e m_f m_e$ ou $m_f m_f m_v$	$[\frac{(2P-3)}{2}]^2[\frac{1}{2}]$	$[P-1]^2[1]$	$[\frac{2P-1}{2}]^2[\frac{3}{2}]$
[FB]	$m_e m_f m_f$	$[1][\frac{(2P-3)}{2}]^2$	$[\frac{3}{2}][P-1]^2$	$[2][\frac{2P-1}{2}]^2$
[BB]	$m_f m_f m_f$	$[\frac{(2P-3)}{2}]^3$	$[P-1]^3$	$[\frac{2P-1}{2}]^3$

para a escolha das ponderações dos pontos de integração que minimizam os graus dos integrandos em cada direção, dos coeficientes diferentes de zero. Para este estudo, basta observar as escolhas das matrizes unidimensionais conforme as composições mostradas na Tabela 3.9.

A quantidade de pontos de integração necessários para a integração exata dos coeficientes dos blocos da matriz de massa, de acordo com o grau, está organizado na Tabela 3.9 e ilustrado nas Figuras 3.11 a 3.16.

Para a matriz de rigidez do problema de Poisson em hexaedros, a expressão para o cálculo dos seus coeficientes é

$$k_{ab} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \nabla N_a(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \cdot \nabla N_b(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3,$$

com $N_a(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = N_i(\xi_1)N_j(\xi_2)N_k(\xi_3)$ e $N_b(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = N_p(\xi_1)N_q(\xi_2)N_r(\xi_3)$, $0 \leq i, j, k, p, q, r \leq$

P . Em termos das matrizes 1D, tem-se

$$\begin{aligned}
k_{ab} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (N_{a'\xi_1}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)N_{b'\xi_1}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + N_{a'\xi_2}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)N_{b'\xi_2}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\
&\quad + N_{a'\xi_3}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)N_{b'\xi_3}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \\
&= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (N_j(\xi_2)N_q(\xi_2)N_k(\xi_3)N_r(\xi_3)N_{i'\xi_1}(\xi_1)N_{p'\xi_1}(\xi_1) \\
&\quad + N_i(\xi_1)N_p(\xi_1)N_k(\xi_3)N_r(\xi_3)N_{j'\xi_2}(\xi_2)N_{q'\xi_2}(\xi_2)
\end{aligned}$$

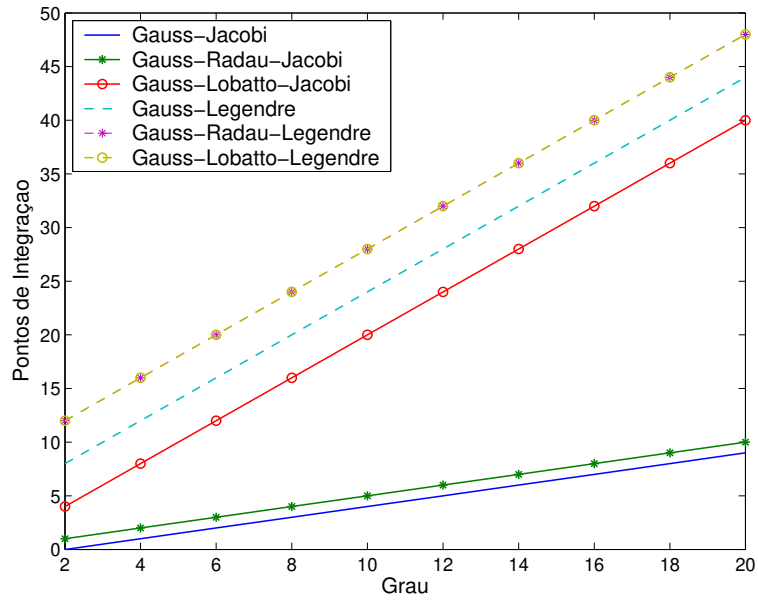


Figura 3.11: Quantidade de pontos para a integração exata dos coeficientes do bloco aresta da matriz de massa do hexaedro usando as diferentes regras de quadratura gaussianas.

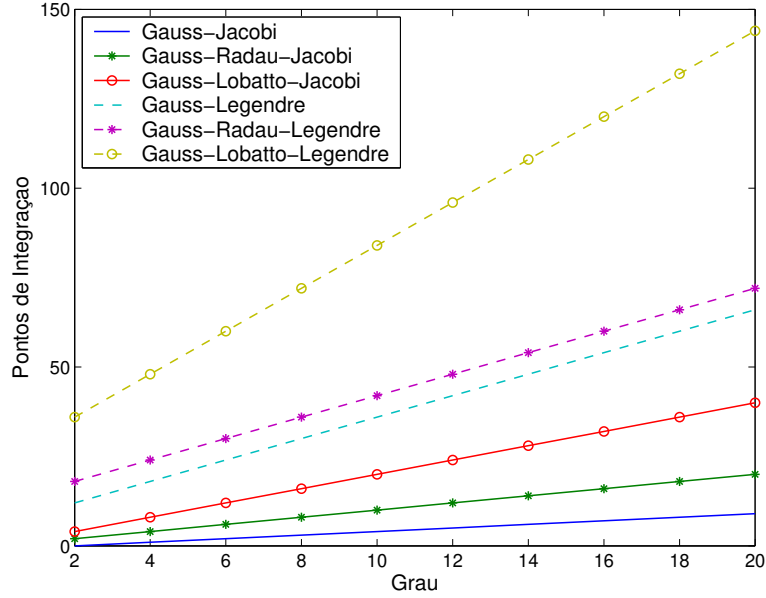


Figura 3.12: Quantidade de pontos para a integração exata dos coeficientes do bloco aresta-face da matriz de massa do hexaedro usando as diferentes regras de quadratura gaussianas.

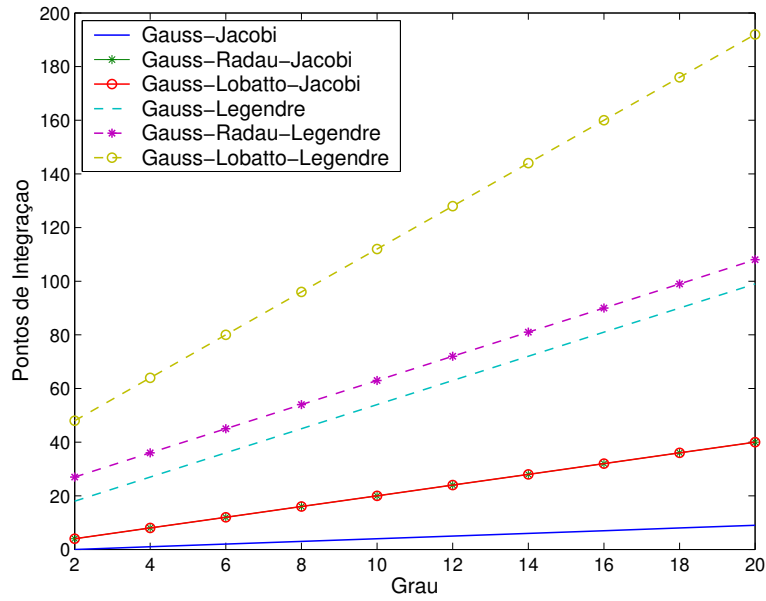


Figura 3.13: Quantidade de pontos para a integração exata dos coeficientes do bloco aresta-corpo da matriz de massa do hexaedro usando as diferentes regras de quadratura gaussianas.

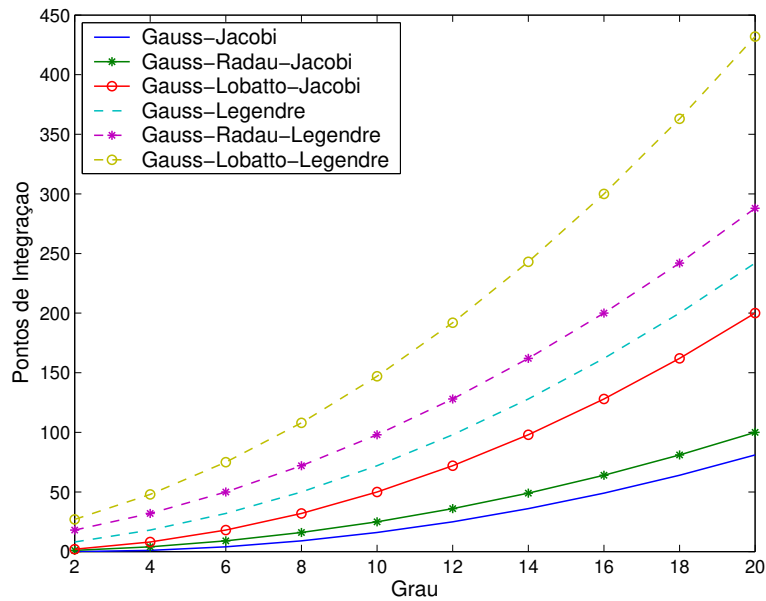


Figura 3.14: Quantidade de pontos para a integração exata dos coeficientes do bloco face da matriz de massa do hexaedro usando as diferentes regras de quadratura gaussianas.

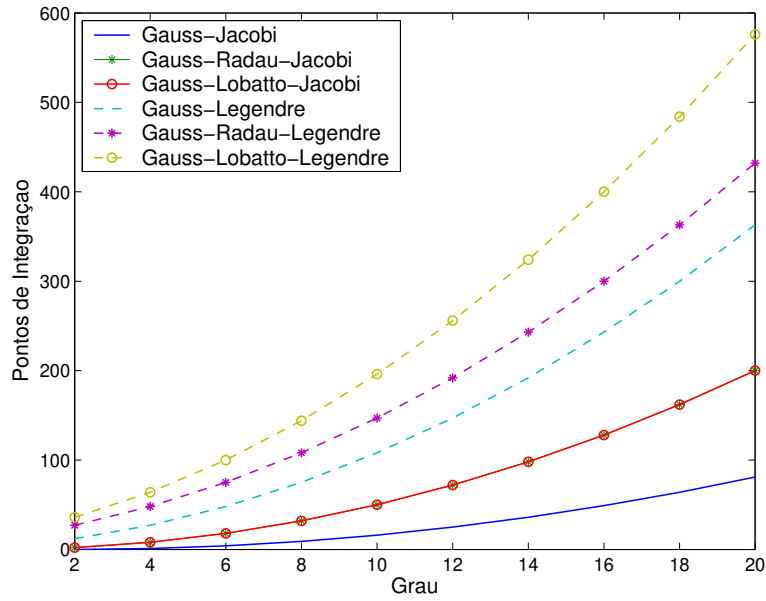


Figura 3.15: Quantidade de pontos para a integração exata dos coeficientes do bloco face-corpo da matriz de massa do hexaedro usando as diferentes regras de quadratura gaussianas.

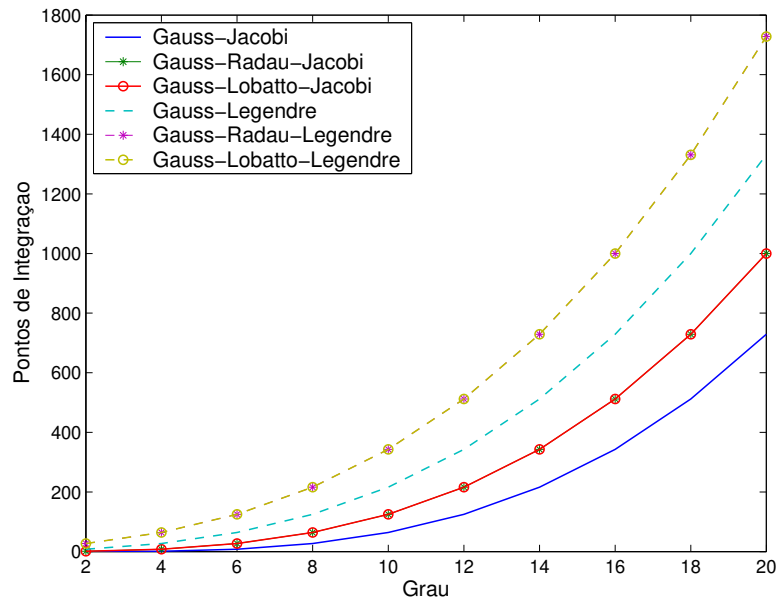


Figura 3.16: Quantidade de pontos para a integração exata dos coeficientes do bloco corpo da matriz de massa do hexaedro usando as diferentes regras de quadratura gaussianas.

Tabela 3.10: Expressões para o cálculo da quantidade máxima de pontos para a integração dos coeficientes da matriz de rigidez para os hexaedros usando as diferentes regras de quadratura.

Bloco	GJ	GRJ	GLJ
[VV]	$[3/2][3/2][1/2]$	$[2][2][1]$	$[5/2][5/2][3/2]$
[VE]	$[1/2][3/2][2]$	$[1][3/2][2]$	$[3/2][5/2][7/2]$
[VF]	$[1/2][5/2][5/2]$	$[1][3][3]$	$[3/2][7/2][7/2]$
[EE]	$[3/2][3/2][(2P+3)/2]$	$[2][2][P+2]$	$[5/2][5/2][(2P+5)/2]$
[EF]	$[3/2][5/2][(2P+3)/2]$	$[2][3][P+2]$	$[5/2][7/2][(2P+5)/2]$
[EB]	$[3/2][3/2][(2P-3)/2]$	$[2][2][P-1]$	$[5/2][5/2][(2P-1)/2]$
[FF]	$[(2P+3)/2][(2P+3)/2][3/2]$	$[P+2][P+2][2]$	$[(2P+5)/2][(2P+5)/2][5/2]$
[FB]	$[3/2][(2P-3)/2][P]$	$[2][P-1][P+1]$	$[5/2][(2P-1)/2][(2P+3)/2]$
[BB]	$[(2P-3)/2][(2P+1)/2][(2P+1)/2]$	$[P-1][P+1][P+1]$	$[(2P-1)/2][(2P+3)/2][(2P+3)/2]$

$$\begin{aligned}
& + N_i(\xi_1)N_p(\xi_1)N_j(\xi_2)N_q(\xi_2)N_{r'\xi_3}(\xi_3)N_{k'\xi_3}(\xi_3) \Big) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \\
& = m_{jq}^{1D} m_{rk}^{1D} k_{ip}^{1D} + m_{ip}^{1D} m_{rk}^{1D} k_{jq}^{1D} + m_{ip}^{1D} m_{jq}^{1D} k_{rk}^{1D}.
\end{aligned}$$

Para a análise das melhores ponderações e dos graus de integração de acordo com a regra de quadratura escolhida, particionou-se a matriz em blocos tal como efetuado para a matriz de massa.

O número de pontos de integração, de acordo com a regra de quadratura escolhida, para cada bloco, pode ser calculado de acordo com as expressões mostradas na Tabela 3.10 e ilustrados nas Figuras 3.17 a 3.22.

Tal como os quadrados, observando as matrizes unidimensionais, pode-se escolher as melhores ponderações para otimizar a quantidade de pontos de integração da matriz de rigidez do estado geral de tensão como

$$[k_{ab}] = cte \begin{bmatrix} k_{ab}(1,1) & k_{ab}(1,2) & k_{ab}(1,3) \\ k_{ab}(1,2)^T & k_{ab}(2,2) & k_{ab}(2,3) \\ k_{ab}(1,3)^T & k_{ab}(2,3)^T & k_{ab}(3,3) \end{bmatrix},$$

onde

$$\begin{aligned}
k_{ab}(1,1) &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left((1-\mu)N_{a'\xi_1}N_{b'\xi_1} + \frac{1-2\mu}{2}N_{a'\xi_2}N_{b'\xi_2} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1-2\mu}{2}N_{a'\xi_3}N_{b'\xi_3} \right) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \\
&= (1-\mu)k_{ip}^{1D} m_{jq}^{1D} m_{kr}^{1D} + \frac{1-2\mu}{2} m_{ip}^{1D} k_{jq}^{1D} m_{kr}^{1D} + \frac{1-2\mu}{2} m_{ip}^{1D} m_{jq}^{1D} k_{kr}^{1D},
\end{aligned}$$

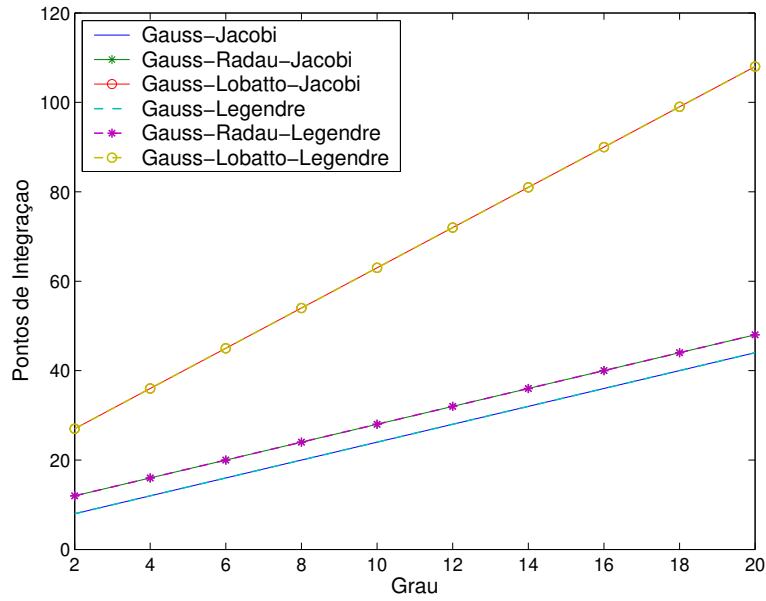


Figura 3.17: Quantidade de pontos para a integração exata dos coeficientes do bloco aresta da matriz de rigidez do hexaedro usando as diferentes regras de quadratura gaussianas.

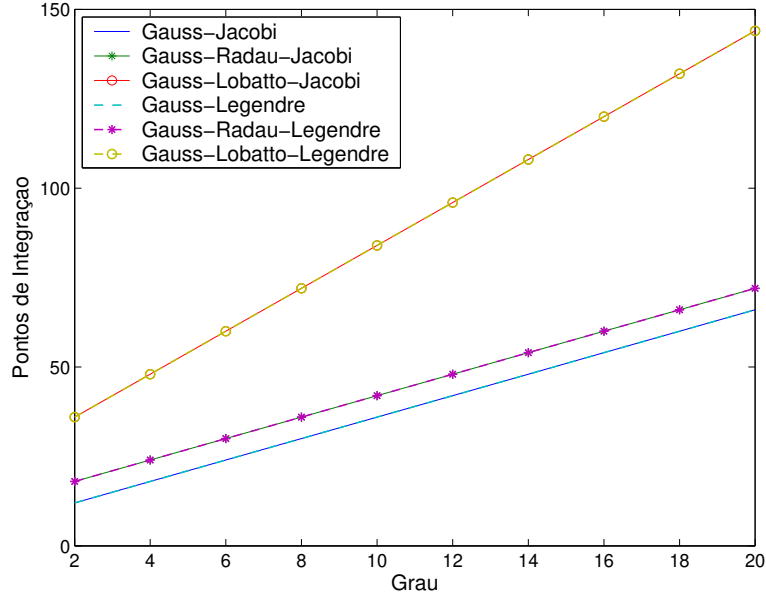


Figura 3.18: Quantidade de pontos para a integração exata dos coeficientes do bloco aresta-face da matriz de rigidez do hexaedro usando as diferentes regras de quadratura gaussianas.

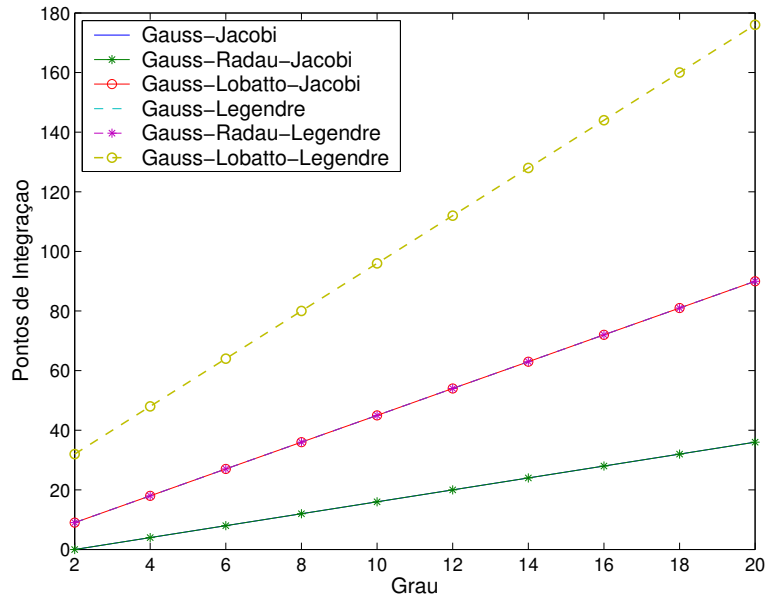


Figura 3.19: Quantidade de pontos para a integração exata dos coeficientes do bloco aresta-corpo da matriz de rigidez do hexaedro usando as diferentes regras de quadratura gaussianas.

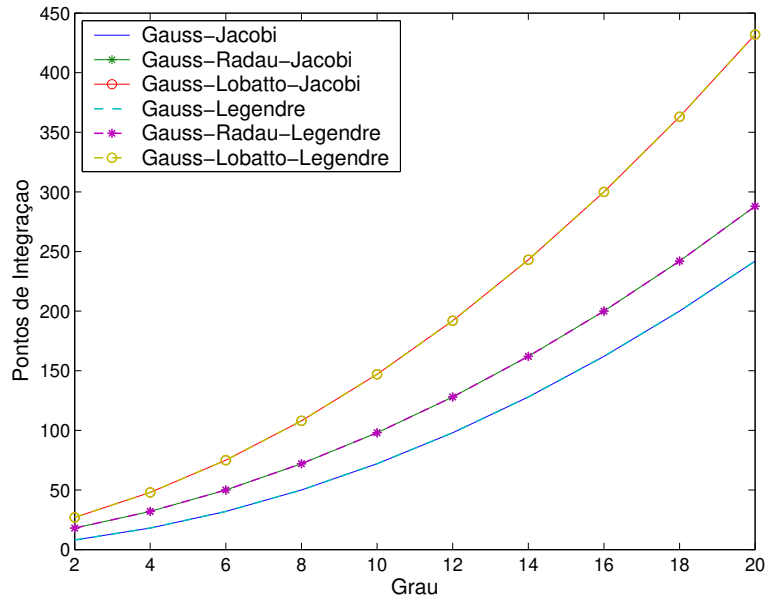


Figura 3.20: Quantidade de pontos para a integração exata dos coeficientes do bloco face da matriz de rigidez do hexaedro usando as diferentes regras de quadratura gaussianas.

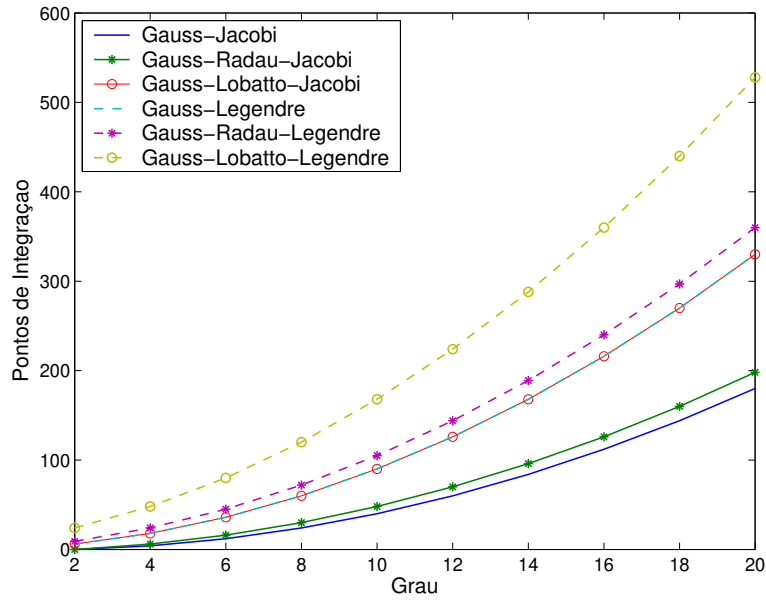


Figura 3.21: Quantidade de pontos para a integração exata dos coeficientes do bloco face-corpo da matriz de rigidez do hexaedro usando as diferentes regras de quadratura gaussianas.

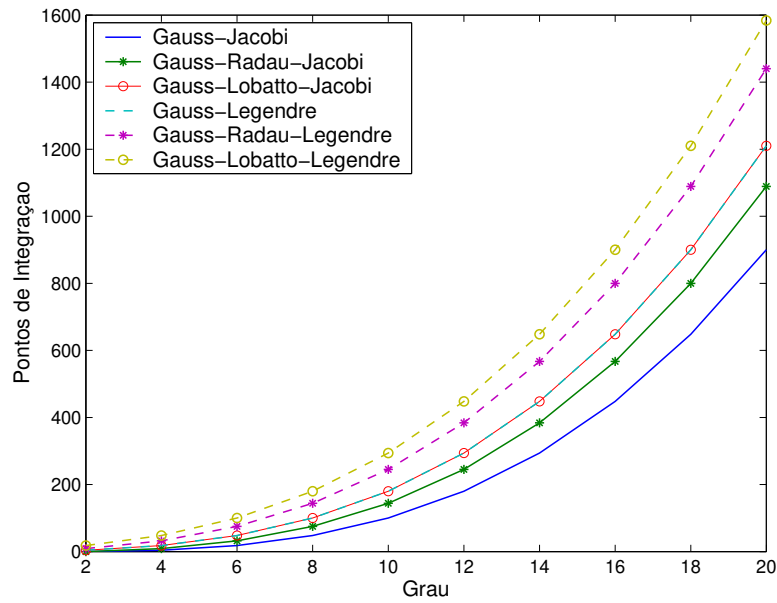


Figura 3.22: Quantidade de pontos para a integração exata dos coeficientes do bloco corpo da matriz de rigidez do hexaedro usando as diferentes regras de quadratura gaussianas.

$$\begin{aligned}
k_{ab}(1, 2) &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mu N_{a'\xi_1} N_{b'\xi_2} + \frac{1-2\mu}{2} N_{a'\xi_2} N_{b'\xi_1}) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \\
&= \mu m k_{pi}^{1D} m k_{jq}^{1D} m_{kr}^{1D} + \frac{1-2\mu}{2} m k_{ip}^{1D} m k_{qj}^{1D} m_{kr}^{1D}, \\
k_{ab}(1, 3) &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mu N_{a'\xi_1} N_{b'\xi_3} + \frac{1-2\mu}{2} N_{a'\xi_3} N_{b'\xi_1}) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \\
&= \mu m k_{ip}^{1D} m_{jq}^{1D} m_{kr}^{1D} + \frac{1-2\mu}{2} m k_{ip}^{1D} m_{jq}^{1D} m k_{kr}^{1D}, \\
k_{ab}(2, 2) &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 ((1-\mu) N_{a'\xi_2} N_{b'\xi_2} + \frac{1-2\mu}{2} N_{a'\xi_1} N_{b'\xi_1} \\
&\quad + \frac{1-2\mu}{2} N_{a'\xi_3} N_{b'\xi_3}) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \\
&= (1-\mu) m_{ip}^{1D} k_{jq}^{1D} m_{kr}^{1D} + \frac{1-2\mu}{2} k_{ip}^{1D} m_{jq}^{1D} m_{kr}^{1D} + \frac{1-2\mu}{2} m_{ip}^{1D} m_{jq}^{1D} k_{kr}^{1D}, \\
k_{ab}(2, 3) &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mu N_{a'\xi_2} N_{b'\xi_3} + \frac{1-2\mu}{2} N_{a'\xi_3} N_{b'\xi_2}) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \\
&= \mu m_{ip}^{1D} m k_{qj}^{1D} m_{kr}^{1D} + \frac{1-2\mu}{2} m_{ip}^{1D} m k_{jq}^{1D} m k_{rk}^{1D} + \frac{1-2\mu}{2} m_{ip}^{1D} m_{jq}^{1D} k_{kr}^{1D}, \\
k_{ab}(3, 3) &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 ((1-\mu) N_{a'\xi_3} N_{b'\xi_3} + \frac{1-2\mu}{2} N_{a'\xi_1} N_{b'\xi_1} \\
&\quad + \frac{1-2\mu}{2} N_{a'\xi_2} N_{b'\xi_2}) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \\
&= (1-\mu) m_{ip}^{1D} m_{jq}^{1D} k_{kr}^{1D} + \frac{1-2\mu}{2} k_{ip}^{1D} m_{jq}^{1D} m_{kr}^{1D} + \frac{1-2\mu}{2} m_{ip}^{1D} k_{jq}^{1D} m_{kr}^{1D}.
\end{aligned}$$

Tal como o quadrado, como cada coeficiente pode ser escrito pela combinação dos coeficientes das matrizes unidimensionais, basta observar as ponderações unidimensionais.

3.4 Integração da Matriz de Massa e Rigidez Bidimensional - Triângulos

Nessa seção, apresenta-se a aplicação da quadratura de Gauss-Jacobi no caso de triângulos, conforme originalmente introduzido em (Bittencourt, 2005), para a matriz de massa. Posteriormente, estende-se a metodologia para a matriz de rigidez do problema de Poisson. A tensorização dos pontos é feita através do mapeamento bidirecional.

A integração da função $h(L_1, L_2, L_3)$ sobre a área A do triângulo de lados retos é

dada por (Zienkiewicz e Taylor, 1989; Cook et al., 1991)

$$\int_A h(L_1, L_2, L_3) dA = 2A \int_0^1 \int_0^{1-L_2} h(L_1, L_2, L_3) dL_3 dL_2 = \int_A \tilde{h}(L_2, L_3) dA, \quad (3.2)$$

onde $dA = (2A)dL_2dL_3$ e $L_1 = 1 - L_2 - L_3$.

A integração numérica da equação anterior usando a regra de quadratura de Gauss-Legendre é expressa por (Zienkiewicz e Taylor, 1989; Cook et al., 1991)

$$2A \int_A \tilde{h}(L_2, L_3) dA = 2A \sum_{i=1}^{n_{int}} w_i \tilde{h}(L_{2i}, L_{3i}), \quad (3.3)$$

onde n_{int} , (L_{2i}, L_{3i}) e w_i são, respectivamente, o número, as coordenadas e os pesos dos pontos de integração.

A proposta em (Bittencourt, 2005) foi definir uma regra de integração tensorial para os triângulos usando o mapeamento bidirecional e a quadratura de Gauss-Jacobi. O mapeamento do triângulo para o quadrado é dado por (Dunavant, 1985; Karniadakis e Sherwin, 1999)

$$\begin{cases} L_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi_1), \\ L_3 = \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2), \\ L_1 = 1 - L_2 - L_3 = \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2). \end{cases} \quad (3.4)$$

O Jacobiano do mapeamento é $\frac{1}{8}(1 - \xi_1)$.

Usando esse mapeamento, a integral na equação (3.2) pode ser reescrita como

$$2A \int_0^1 \int_0^{1-L_2} \tilde{h}(L_2, L_3) dL_3 dL_2 = \frac{A}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \hat{h}(\xi_1, \xi_2)(1 - \xi_1) d\xi_1 d\xi_2$$

e a integração numérica é

$$\frac{A}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \hat{h}(\xi_1, \xi_2)(1 - \xi_1) d\xi_1 d\xi_2 = \frac{A}{4} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} w_i w_j (1 - \xi_{1i}) \hat{h}(\xi_{1i}, \xi_{2j}), \quad (3.5)$$

onde n_1 e n_2 são o número de pontos de integração nas direções ξ_1 e ξ_2 , (ξ_{1i}, ξ_{2j}) são as coordenadas e w_i e w_j são os respectivos pesos.

Para $\alpha = 1$ e $\beta = 0$, é possível incluir o Jacobiano $(1 - \xi_1)$ do mapeamento bidirecional no termo que representa o peso para a integração numérica da equação (3.5). Portanto, as quadraturas de Gauss-Jacobi e Gauss-Legendre podem ser usadas nas direções ξ_1 e ξ_2 , respectivamente, como

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \hat{h}(\xi_1, \xi_2)(1 - \xi_1) d\xi_1 d\xi_2 = \frac{A}{4} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} w_i^{1,0} w_j^{0,0} \hat{h}(\xi_{1i}, \xi_{2j}). \quad (3.6)$$

Baseado na relação anterior, não é necessário considerar o jacobiano $(1 - \xi_1)$ para deter-

minar o grau do integrando na direção ξ_1 , pois o mesmo está incluído no peso $w_i^{1,0}$.

As funções de face de Jacobi definidas para triângulos no Capítulo 2 são dadas por

$$\begin{aligned} N_{pqr}(L_1, L_2, L_3) &= \phi_p(L_1)\phi_q(L_2)\phi_r(L_3) \\ &= L_1 L_2 L_3 P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(2L_1 - 1) P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(2L_2 - 1) P_{r-1}^{\alpha_3, \beta_3}(2L_3 - 1). \end{aligned}$$

Lembrando a relação de ortogonalidade dos polinômios de Jacobi dada em (2.9), conclui-se que os coeficientes L_1 , L_2 e L_3 são os termos que representam os pesos da quadratura de Gauss-Jacobi. Baseado nisso, os pesos α_i e β_i podem ser selecionados apropriadamente para diminuir o número de pontos de integração necessários para calcular os coeficientes das matrizes de massa e rigidez locais.

Considere, por exemplo o produto das funções de vértices $N_2 = L_2$ e $N_3 = L_3$.

Aplicando o mapeamento bidirecional e a quadratura de Gauss-Jacobi vem que

$$\int_A L_2 L_3 dA = \frac{A}{32} \left(\int_{-1}^1 (1 - \xi_1)^2 (1 + \xi_1) d\xi_1 \right) \left(\int_{-1}^1 (1 + \xi_2) d\xi_2 \right) = \frac{A}{32} w_i^{2,1} w_j^{0,1} = \frac{A}{12}.$$

Os termos $(1 - \xi_1)^2 (1 + \xi_1)$ e $(1 + \xi_2)$ representam os pesos da relação de ortogonalidade (2.9) da quadratura de Gauss-Jacobi e podem ser escritos como $w_i^{2,1}$ e $w_j^{0,1}$, respectivamente. Portanto, o valor exato da integral é obtido usando apenas os pesos $w_i^{2,1}$ e $w_j^{0,1}$, ao invés de 3 pontos de integração da regra de quadratura de Gauss apresentada em (Zienkiewicz e Taylor, 1989; Cook et al., 1991).

O procedimento anterior foi considerado em (Bittencourt, 2005) para a matriz de massa dos triângulos. As funções de forma modais dos triângulos podem ser expressas usando as matrizes

$$[N] = \begin{bmatrix} [N_V]_{1 \times 3} & [N_E]_{1 \times 3(P-1)} & [N_F]_{1 \times \frac{1}{2}(P-1)(P-2)} \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

onde $[N_V]$, $[N_E]$ e $[N_F]$ são sub-matrizes com as funções de vértices, arestas e faces, respectivamente,

Em termos das variáveis ξ_1 e ξ_2 , as sub-matrizes anteriores são dadas, respectivamente, por

$$[N_V] = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2) & \frac{1}{2}(1 + \xi_1) & \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2) \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

$$[N_E]^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{8}(1-\xi_1)(1+\xi_1)(1-\xi_2)P_{p-1}^{\alpha_1,\beta_1}(\frac{1}{2}(1-\xi_1)(1-\xi_2)-1)P_{q-1}^{\alpha_2,\beta_2}(\xi_1) \\ \frac{1}{8}(1-\xi_1)(1+\xi_1)(1+\xi_2)P_{q-1}^{\alpha_2,\beta_2}(\xi_1)P_{r-1}^{\alpha_3,\beta_3}(\frac{1}{2}(1-\xi_1)(1+\xi_2)-1) \\ \frac{1}{16}(1-\xi_1)^2(1-\xi_2)(1+\xi_2)P_{p-1}^{\alpha_1,\beta_1}(\frac{1}{2}(1-\xi_1)(1-\xi_2)-1)P_{r-1}^{\alpha_3,\beta_3}(\frac{1}{2}(1-\xi_1)(1+\xi_2)-1) \end{bmatrix}, (3.9)$$

$$[N_F] = \begin{bmatrix} \frac{1}{32}(1-\xi_1)^2(1+\xi_1)(1-\xi_2)(1+\xi_2) \times \\ P_{p-1}^{\alpha_1,\beta_1}(\frac{1}{2}(1-\xi_1)(1-\xi_2)-1)P_{q-1}^{\alpha_2,\beta_2}(\xi_1)P_{r-1}^{\alpha_3,\beta_3}(\frac{1}{2}(1-\xi_1)(1+\xi_2)-1) \end{bmatrix}. (3.10)$$

Baseado nesta notação, a matriz de massa pode ser escrita da seguinte forma

$$[M] = \int_A \begin{bmatrix} [N_V]^T [N_V] & [N_V]^T [N_E] & [N_V]^T [N_F] \\ [N_E]^T [N_V] & [N_E]^T [N_E] & [N_E]^T [N_F] \\ [N_F]^T [N_V] & [N_F]^T [N_E] & [N_F]^T [N_F] \end{bmatrix} dA. (3.11)$$

Substituindo (3.8) a (3.10) em (3.11) e desenvolvendo os produtos indicados, os pesos da quadratura de Gauss-Jacobi são distribuídos nas sub-matrizes de massa como

$$[W_{VV}] = \begin{bmatrix} 1, 0, 0 & 0, 1, 0 & 0, 0, 1 \\ w_i^{3,0} w_j^{2,0} & w_i^{2,1} w_j^{1,0} & w_i^{3,0} w_j^{1,1} \\ w_i^{2,1} w_j^{1,0} & w_i^{1,2} w_j^{0,0} & w_i^{2,1} w_j^{0,1} \\ w_i^{3,0} w_j^{1,1} & w_i^{2,1} w_j^{0,1} & w_i^{3,0} w_j^{0,2} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1, 0, 0 \\ 0, 1, 0 \\ 0, 0, 1 \end{matrix}, (3.12)$$

$$[W_{VE}] = \begin{bmatrix} i, j, 0 & 0, j, k & i, 0, k \\ w_i^{3,1} w_j^{2,0} & w_i^{3,1} w_j^{1,1} & w_i^{4,0} w_j^{2,1} \\ w_i^{2,2} w_j^{1,0} & w_i^{2,2} w_j^{0,1} & w_i^{3,1} w_j^{1,1} \\ w_i^{3,1} w_j^{1,1} & w_i^{3,1} w_j^{0,2} & w_i^{4,0} w_j^{1,2} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1, 0, 0 \\ 0, 1, 0 \\ 0, 0, 1 \end{matrix}, (3.13)$$

$$[W_{EE}] = \begin{bmatrix} i, j, 0 & 0, j, k & i, 0, k \\ w_i^{3,1} w_j^{2,0} & w_i^{3,2} w_j^{1,1} & w_i^{4,1} w_j^{2,1} \\ w_i^{3,2} w_j^{1,1} & w_i^{3,2} w_j^{0,2} & w_i^{3,1} w_j^{1,1} \\ w_i^{4,1} w_j^{2,1} & w_i^{3,1} w_j^{1,1} & w_i^{5,0} w_j^{2,2} \end{bmatrix} \begin{matrix} p, q, 0 \\ 0, q, r \\ p, 0, r \end{matrix}, (3.14)$$

$$[W_{VF}] = \begin{bmatrix} i, j, k \\ w_i^{4,1} w_j^{2,1} \\ w_i^{3,2} w_j^{1,1} \\ w_i^{4,1} w_j^{1,2} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1, 0, 0 \\ 0, 1, 0 \\ 0, 0, 1 \end{matrix}, (3.15)$$

$$[W_{EF}] = \begin{bmatrix} i, j, k \\ w_i^{4,2} w_j^{2,1} \\ w_i^{4,2} w_j^{1,2} \\ w_i^{5,1} w_j^{2,2} \end{bmatrix} \begin{matrix} p, q, 0 \\ 0, q, r \\ p, 0, r \end{matrix}, \quad (3.16)$$

$$[W_{FF}] = \begin{bmatrix} i, j, k \\ w_i^{5,2} w_j^{2,2} \end{bmatrix} p, q, r. \quad (3.17)$$

onde os índices p, q, r e i, j, k são aqueles usados nas equações (3.8) a (3.10).

As expressões para determinar o número mínimo de pontos de integração dos coeficientes da matriz de massa são

$$n_1 = \frac{1}{2} [\text{sign}(p)(p-1) + \text{sign}(q)(q-1) + \text{sign}(r)(r-1) + \text{sign}(i)(i-1) + \text{sign}(j)(j-1) + \text{sign}(k)(k-1) + 1], \quad (3.18)$$

$$n_2 = \frac{1}{2} [\text{sign}(p)(p-1) + \text{sign}(r)(r-1) + \text{sign}(i)(i-1) + \text{sign}(k)(k-1) + 1].$$

onde a função sign é definida por

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}. \quad (3.19)$$

Os pesos usados para o cálculo das raízes dos polinômios de Jacobi $P_{n_1}^{\alpha_1, \beta_1}(\xi_1)$ $P_{n_2}^{\alpha_2, \beta_2}(\xi_2)$ são dados pela seguinte expressão geral

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \text{sign}(p) + \text{sign}(i) + \text{sign}(r) + \text{sign}(k) + 1, \\ \alpha_2 &= \text{sign}(q) + \text{sign}(j), \\ \beta_1 &= \text{sign}(p) + \text{sign}(i), \\ \beta_2 &= \text{sign}(r) + \text{sign}(k). \end{aligned} \quad (3.20)$$

onde 1 foi adicionado em α_1 para representar o Jacobiano do mapeamento bidirecional.

A Figura 3.23 ilustra o número de pontos para a integração exata dos coeficientes da sub-matriz $[M_{FF}]$ baseado na regra de Gauss-Jacobi apresentada (Bittencourt_{Max} e Bittencourt_{Min}), Gauss-Legendre, no procedimento de Dunavant (Dunavant, 1985) e conforme (Karniadakis e Sherwin, 1999), sendo este último procedimento válido apenas para as funções dadas na Seção 2.5. O grau do integrando para o procedimento de Dunavant

é $2P$ para $P \geq 3$. Para Gauss-Jacobi, o grau em ξ_1 é $2P - 6$. Como a expressão para L_2 dada em (3.4) não contém ξ_2 , o número máximo de pontos na direção ξ_2 pode ser determinado de (3.18) quando $q = j = 1$, ou seja,

$$2n_2 - 1 = (2P - 6) - (q + j - 2) \rightarrow n_2^{\max} = \frac{1}{2}(2P - 5).$$

O número mínimo de pontos é encontrado quando $q = j = P - 2$. Assim,

$$n_2^{\min} = 1.$$

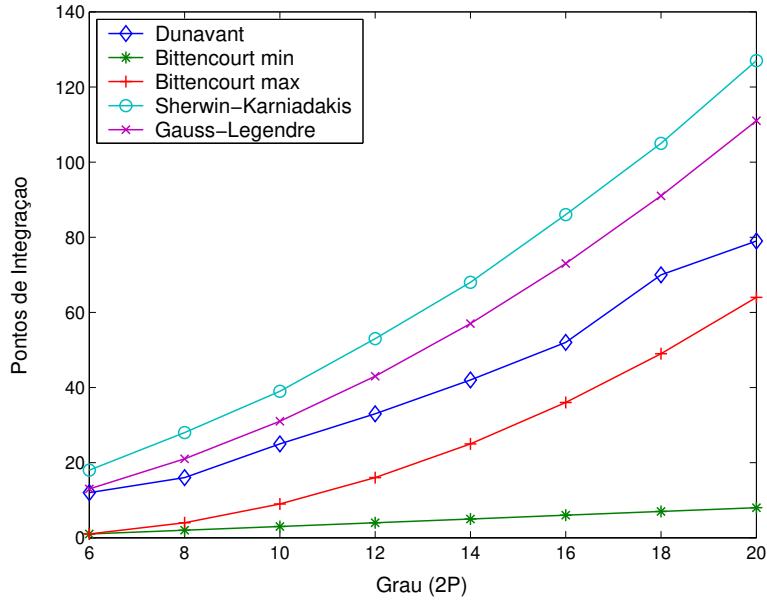


Figura 3.23: Comparação do número de pontos de integração usando os procedimentos de Bittencourt, Dunavant, Sherwin-Karniadakis e Gauss-Legendre para o cálculo dos coeficientes da matriz de massa em triângulos.

Uma alternativa para uniformizar os pesos escolhidos foi fixar as ponderações que atendessem a todo o bloco. Para isso, deve-se acrescentar graus variados ao integrando, mas no máximo 4. Assim, para cada bloco, pode-se escolher os pesos seguintes e aumentar

4 graus nas direções ξ_1 e ξ_2 . Logo,

$$\begin{aligned} W_{VV} &= w_i^{1,0} w_j^{0,0}, \\ W_{VE} &= w_i^{2,0} w_j^{0,0}, \\ W_{VF} &= w_i^{3,1} w_j^{1,1}, \\ W_{EE} &= w_i^{3,0} w_j^{0,0}, \\ W_{EF} &= w_i^{4,1} w_j^{1,1}, \\ W_{FF} &= w_i^{5,2} w_j^{2,2}. \end{aligned}$$

Já para a matriz de rigidez do problema de Poisson em triângulos, o procedimento só é eficiente para o bloco das funções internas, pois pode-se usar a expressão

$$k_{ab} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_{ijk} [N_{pqr''\xi_1} + N_{pqr''\xi_2}] |J| d\xi_1 d\xi_2 \quad (3.21)$$

já que os termos do contorno zeram.

Assim, os pesos para as funções de face ficam

$$[W_{FF}] = \begin{matrix} i, j, k \\ \left[w_i^{3,1} w_j^{1,1} \right] \end{matrix} \quad p, q, r. \quad (3.22)$$

As expressões para determinar o número mínimo de pontos de integração dos coeficientes da matriz de rigidez são

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{1}{2} [\text{sign}(p)(p-1) + \text{sign}(q)(q-1) + \text{sign}(r)(r-1) + \\ &\quad \text{sign}(i)(i-1) + \text{sign}(j)(j-1) + \text{sign}(k)(k-1) + 4], \\ n_2 &= \frac{1}{2} [\text{sign}(p)(p-1) + \text{sign}(r)(r-1) + \text{sign}(i)(i-1) + \text{sign}(k)(k-1) + 3]. \end{aligned} \quad (3.23)$$

A Figura 3.24 ilustra o número de pontos de integração para a integração exata dos coeficientes da sub-matriz $[K_{FF}]$ baseado na regra de Gauss-Jacobi apresentada. Para Gauss-Jacobi, o grau em ξ_1 é $2P-3$, para $P \geq 3$. Como a expressão para L_2 dada em (3.4) não contém ξ_2 , o número máximo de pontos na direção ξ_2 pode ser determinado de (3.24) quando $q = j = 1$, ou seja,

$$2n_2 - 1 = 2P - 4 \rightarrow n_2^{\max} = \frac{1}{2}(2P - 3).$$

O número mínimo de pontos é encontrado quando $q = j = P - 2$. Assim

$$n_2^{\min} = 2.$$

Os pesos $w_i^{3,1} w_j^{1,1}$ também valem para o cálculo dos coeficientes internos da matriz de estado plano de tensão. Por exemplo, de forma análoga à equação (3.21), tem-se a

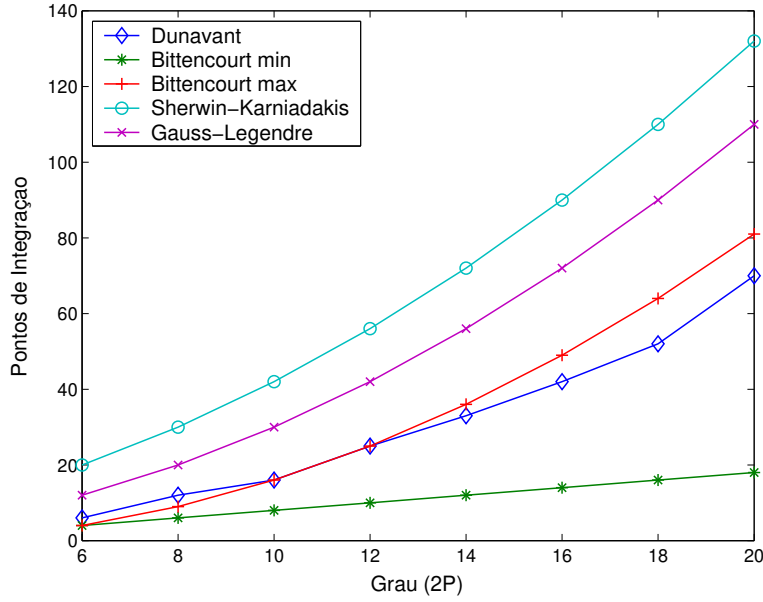


Figura 3.24: Comparação do número de pontos de integração usando os procedimentos de Bittencourt, Dunavant, Sherwin-Karniadakis e Gauss-Legendre para o cálculo dos coeficientes internos da matriz de rigidez em triângulos.

seguir a expressão para o coeficiente $k_{ab}(1, 2)$ após a integração por partes

$$k_{ab}(1, 2) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 -N_a(\mu N_{b''\xi_2} + \frac{1-\mu}{2} N_{b''\xi_1}) \frac{1}{8} (1 - \xi_1) d\xi_1 d\xi_2.$$

3.5 Integração da Matriz de Massa e Rigidez Tridimensional - Tetraedros

A integração da função $h(L_1, L_2, L_3, L_4)$ sobre o volume V no tetraedro é dada por (Zienkiewicz e Taylor, 1989; Cook et al., 1991)

$$\begin{aligned} \int_B h(L_1, L_2, L_3, L_4) dV &= \int_0^1 \int_0^{1-L_4} \int_0^{1-L_3-L_4} h(L_1, L_2, L_3, L_4) dL_2 dL_3 dL_4 \\ &= 8V \int_B \tilde{h}(L_2, L_3, L_4) dV, \end{aligned}$$

onde $dV = 8V dL_2 dL_3 dL_4$, $L_1 = 1 - L_2 - L_3 - L_4$ e assume-se que o tetraedro tem os lados retos.

A equação anterior calculada usando a fórmula de quadratura de Gauss-Legendre é

expressa por (Zienkiewicz e Taylor, 1989; Cook et al., 1991)

$$8V \int_B \tilde{h}(L_2, L_3, L_4) dV = 8V \sum_{i=1}^{n_{int}} w_i \tilde{h}(L_{2i}, L_{3i}, L_{4i}), \quad (3.24)$$

onde n_{int} , (L_{2i}, L_{3i}, L_{4i}) e w_i são, respectivamente, o número, as coordenadas e os pesos dos pontos de integração.

A proposta aqui é definir uma regra de integração tensorial para o tetraedro usando mapeamento tridirecional e quadratura de Gauss-Jacobi. O mapeamento do tetraedro para o hexaedro é dado por (Karniadakis e Sherwin, 1999)

$$\begin{cases} L_4 = \frac{1}{2}(1 + \xi_3), \\ L_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi_2)(1 - \xi_3), \\ L_2 = \frac{1}{8}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2)(1 - \xi_3), \\ L_1 = 1 - L_2 - L_3 - L_4 = \frac{1}{8}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2)(1 - \xi_3). \end{cases} \quad (3.25)$$

O Jacobiano da transformação é expresso por $\frac{1}{64}(1 - \xi_2)(1 - \xi_3)^2$.

Usando o mapeamento, a integral na equação (3.24) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} 8V \int_0^1 \int_0^{1-L_4} \int_0^{1-L_3-L_4} \tilde{h}(L_2, L_3, L_4) dL_2 dL_3 dL_4 = \\ 8V \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \hat{h}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) (1 - \xi_2)(1 - \xi_3)^2 d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Sua integração numérica é

$$\begin{aligned} 8V \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \hat{h}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) (1 - \xi_2)(1 - \xi_3)^2 d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = \\ 8V \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{k=1}^{n_3} w_i w_j w_k (1 - \xi_{2j})(1 - \xi_{3k})^2 \hat{h}(\xi_{1i}, \xi_{2j}, \xi_{3k}), \end{aligned} \quad (3.27)$$

onde n_1 , n_2 e n_3 são o número de pontos de integração nas direções ξ_1 , ξ_2 e ξ_3 , respectivamente, $(\xi_{1i}, \xi_{2j}, \xi_{3k})$ são as coordenadas e w_i , w_j e w_k são os respectivos pesos.

Para $\alpha_2 = 1$, $\beta_2 = 0$, $\alpha_3 = 2$ e $\beta_3 = 0$ é possível incluir o jacobiano $(1 - \xi_2)(1 - \xi_3)^2$ do mapeamento tridirecional no termo que representa o peso da integração numérica da equação (3.26). Portanto, as quadraturas de Gauss-Legendre ($\alpha = 0, \beta = 0$), Gauss-Jacobi ($\alpha = 1, \beta = 0$) e Gauss-Jacobi ($\alpha = 2, \beta = 0$) podem ser usadas nas direções ξ_1 , ξ_2 e ξ_3 , respectivamente, ou seja,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \hat{h}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) (1 - \xi_2)(1 - \xi_3)^2 d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = \\ 8V \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{k=1}^{n_3} w_i^{0,0} w_j^{1,0} w_k^{2,0} \hat{h}(\xi_{1i}, \xi_{2j}, \xi_{3k}). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Baseado na relação anterior, não é necessário considerar o jacobiano $(1 - \xi_2)(1 - \xi_3)^2$ para determinar o grau do integrando nas direções ξ_2 e ξ_3 porque o jacobiano é apresentado como pesos $w_j^{1,0}$ e $w_k^{2,0}$.

O procedimento anterior será estendido para o cálculo dos coeficientes da matriz de massa do tetraedro. As funções de forma modal para o tetraedro podem ser expressas pelas matrizes

$$[N] = \begin{bmatrix} [N_V]_{1 \times 4} & [N_E]_{4 \times 6(P-1)} & [N_F]_{1 \times \frac{1}{2}(P-1)(P-2)} & [N_B]_{1 \times \frac{1}{6}(P-1)(P-2)(P-3)} \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

onde $[N_V]$, $[N_E]$, $[N_F]$ e $[N_B]$ são sub-matrizes com as funções de forma de vértice, aresta, face e corpo, respectivamente.

Em termos das variáveis ξ_1 , ξ_2 e ξ_3 , as sub-matrizes anteriores são dadas, respectivamente, por

$$[N_V]^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{8}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2)(1 - \xi_3) \\ \frac{1}{8}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2)(1 - \xi_3) \\ \frac{1}{4}(1 + \xi_2)(1 - \xi_3) \\ \frac{1}{2}(1 + \xi_3) \end{bmatrix}, \quad (3.30)$$

$$[N_E]^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{64}(1 - \xi_1)(1 + \xi_1)(1 - \xi_2)^2(1 - \xi_3)^2 P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ \frac{1}{32}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2)(1 + \xi_2)(1 - \xi_3)^2 P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) P_{r-1}^{\alpha_3, \beta_3}(\xi_2, \xi_3) \\ \frac{1}{16}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2)(1 - \xi_3)(1 + \xi_3) P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) P_{s-1}^{\alpha_4, \beta_4}(\xi_3) \\ \frac{1}{32}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2)(1 + \xi_2)(1 - \xi_3)^2 P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) P_{r-1}^{\alpha_3, \beta_3}(\xi_2, \xi_3) \\ \frac{1}{16}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2)(1 - \xi_3)(1 + \xi_3) P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) P_{s-1}^{\alpha_4, \beta_4}(\xi_3) \\ \frac{1}{8}(1 + \xi_2)(1 - \xi_3)(1 + \xi_3) P_{r-1}^{\alpha_3, \beta_3}(\xi_2, \xi_3) P_{s-1}^{\alpha_4, \beta_4}(\xi_3) \end{bmatrix}, \quad (3.31)$$

$$[N_F]^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{256}(1-\xi_1)(1+\xi_1)(1-\xi_2)^2(1+\xi_2)(1-\xi_3)^3 P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) P_{r-1}^{\alpha_3, \beta_3}(\xi_2, \xi_3) \\ \frac{1}{128}(1-\xi_1)(1+\xi_1)(1-\xi_2)^2(1-\xi_3)^2(1+\xi_3) P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) P_{s-1}^{\alpha_4, \beta_4}(\xi_3) \\ \frac{1}{64}(1-\xi_1)(1-\xi_2)(1+\xi_2)(1-\xi_3)^2(1+\xi_3) P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ P_{r-1}^{\alpha_3, \beta_3}(\xi_2, \xi_3) P_{s-1}^{\alpha_4, \beta_4}(\xi_3) \\ \frac{1}{64}(1+\xi_1)(1-\xi_2)(1+\xi_2)(1-\xi_3)^2(1+\xi_3) P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ P_{r-1}^{\alpha_3, \beta_3}(\xi_2, \xi_3) P_{s-1}^{\alpha_4, \beta_4}(\xi_3) \end{bmatrix}, \quad (3.32)$$

$$[N_B] = \begin{bmatrix} \frac{1}{512}(1-\xi_1)(1+\xi_1)(1-\xi_2)^2(1+\xi_2)(1-\xi_3)^3(1+\xi_3) P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) P_{r-1}^{\alpha_3, \beta_3}(\xi_2, \xi_3) P_{s-1}^{\alpha_4, \beta_4}(\xi_3) \end{bmatrix}. \quad (3.33)$$

Baseado nesta notação, a matriz de massa pode ser escrita da forma geral como

$$[M] = \int_V \begin{bmatrix} [N_V]^T [N_V] & [N_V]^T [N_E] & [N_V]^T [N_F] & [N_V]^T [N_B] \\ [N_E]^T [N_V] & [N_E]^T [N_E] & [N_E]^T [N_F] & [N_E]^T [N_B] \\ [N_F]^T [N_V] & [N_F]^T [N_E] & [N_F]^T [N_F] & [N_F]^T [N_B] \\ [N_B]^T [N_V] & [N_B]^T [N_E] & [N_B]^T [N_F] & [N_B]^T [N_B] \end{bmatrix} dV. \quad (3.34)$$

Substituindo (3.30) a (3.33) em (3.34) e desenvolvendo os produtos indicados, os pesos da quadratura de Gauss-Jacobi são distribuídos nas sub-matrizes de massa como

$$[W_{VV}] = \begin{bmatrix} w_i^{2,0} w_j^{3,0} w_k^{4,0} & w_i^{1,1} w_j^{3,0} w_k^{4,0} & w_i^{1,0} w_j^{2,1} w_k^{4,0} & w_i^{1,0} w_j^{2,0} w_k^{3,1} \\ w_i^{1,1} w_j^{3,0} w_k^{4,0} & w_i^{0,2} w_j^{3,0} w_k^{4,0} & w_i^{0,1} w_j^{2,1} w_k^{4,0} & w_i^{0,1} w_j^{2,0} w_k^{3,1} \\ w_i^{1,0} w_j^{2,1} w_k^{4,0} & w_i^{0,1} w_j^{2,1} w_k^{4,0} & w_i^{0,0} w_j^{1,2} w_k^{4,0} & w_i^{0,0} w_j^{1,1} w_k^{3,1} \\ w_i^{1,0} w_j^{2,0} w_k^{3,1} & w_i^{0,1} w_j^{2,0} w_k^{3,1} & w_i^{0,0} w_j^{1,1} w_k^{3,1} & w_i^{0,0} w_j^{1,0} w_k^{2,2} \end{bmatrix}, \quad (3.35)$$

$$[W_{VE}] = \begin{bmatrix} w_i^{2,1} w_j^{4,0} w_k^{5,0} & w_i^{2,0} w_j^{3,1} w_k^{5,0} & w_i^{2,0} w_j^{3,0} w_k^{4,1} & w_i^{1,1} w_j^{3,1} w_k^{5,0} & w_i^{1,1} w_j^{3,0} w_k^{4,1} & w_i^{1,0} w_j^{2,1} w_k^{4,1} \\ w_i^{1,2} w_j^{4,0} w_k^{5,0} & w_i^{1,1} w_j^{3,1} w_k^{5,0} & w_i^{1,1} w_j^{3,0} w_k^{4,1} & w_i^{0,2} w_j^{3,1} w_k^{5,0} & w_i^{0,2} w_j^{3,0} w_k^{4,1} & w_i^{0,1} w_j^{2,1} w_k^{4,1} \\ w_i^{1,1} w_j^{3,1} w_k^{5,0} & w_i^{1,0} w_j^{2,2} w_k^{5,0} & w_i^{1,0} w_j^{2,1} w_k^{4,1} & w_i^{0,1} w_j^{2,2} w_k^{5,0} & w_i^{0,1} w_j^{2,1} w_k^{4,1} & w_i^{0,0} w_j^{1,2} w_k^{4,1} \\ w_i^{1,1} w_j^{3,0} w_k^{4,1} & w_i^{1,0} w_j^{2,1} w_k^{4,1} & w_i^{1,0} w_j^{2,0} w_k^{3,2} & w_i^{0,1} w_j^{2,1} w_k^{4,1} & w_i^{0,1} w_j^{2,0} w_k^{3,2} & w_i^{0,0} w_j^{1,1} w_k^{3,2} \end{bmatrix}, \quad (3.36)$$

$$[W_{VF}] = \begin{bmatrix} w_i^{2,1} w_j^{4,1} w_k^{6,0} & w_i^{2,1} w_j^{4,0} w_k^{6,1} & w_i^{2,0} w_j^{3,1} w_k^{5,0} & w_i^{1,1} w_j^{3,1} w_k^{5,1} \\ w_i^{1,2} w_j^{4,1} w_k^{6,0} & w_i^{1,2} w_j^{3,0} w_k^{6,1} & w_i^{1,1} w_j^{3,1} w_k^{5,0} & w_i^{0,2} w_j^{3,1} w_k^{5,1} \\ w_i^{1,1} w_j^{3,2} w_k^{6,0} & w_i^{1,1} w_j^{3,1} w_k^{6,1} & w_i^{1,0} w_j^{2,2} w_k^{5,0} & w_i^{0,1} w_j^{2,2} w_k^{5,1} \\ w_i^{1,1} w_j^{3,1} w_k^{5,1} & w_i^{1,1} w_j^{3,0} w_k^{5,2} & w_i^{1,0} w_j^{2,1} w_k^{4,1} & w_i^{0,1} w_j^{2,1} w_k^{5,2} \end{bmatrix}, \quad (3.37)$$

$$[W_{VB}] = \begin{bmatrix} w_i^{2,1} w_j^{4,1} w_k^{6,0} \\ w_i^{1,2} w_j^{4,1} w_k^{6,0} \\ w_i^{1,1} w_j^{3,2} w_k^{6,0} \\ w_i^{1,1} w_j^{3,1} w_k^{5,1} \end{bmatrix}, \quad (3.38)$$

$$[W_{EE}] = \begin{bmatrix} w_i^{2,2} w_j^{5,0} w_k^{6,0} & w_i^{2,1} w_j^{4,1} w_k^{6,0} & w_i^{2,1} w_j^{4,0} w_k^{5,1} & w_i^{1,2} w_j^{4,1} w_k^{6,0} & w_i^{1,2} w_j^{4,0} w_k^{5,1} & w_i^{1,1} w_j^{3,1} w_k^{5,1} \\ w_i^{2,1} w_j^{4,1} w_k^{6,0} & w_i^{2,0} w_j^{3,2} w_k^{6,0} & w_i^{2,0} w_j^{3,1} w_k^{5,1} & w_i^{1,1} w_j^{3,2} w_k^{6,0} & w_i^{1,1} w_j^{3,1} w_k^{5,1} & w_i^{1,0} w_j^{2,2} w_k^{5,1} \\ w_i^{2,1} w_j^{4,0} w_k^{5,1} & w_i^{2,0} w_j^{3,1} w_k^{5,1} & w_i^{2,0} w_j^{3,0} w_k^{4,2} & w_i^{1,1} w_j^{3,1} w_k^{5,1} & w_i^{1,1} w_j^{3,0} w_k^{4,2} & w_i^{1,0} w_j^{2,1} w_k^{4,2} \\ w_i^{1,2} w_j^{4,1} w_k^{6,0} & w_i^{1,1} w_j^{3,2} w_k^{6,0} & w_i^{1,1} w_j^{3,1} w_k^{5,1} & w_i^{0,2} w_j^{3,2} w_k^{6,0} & w_i^{0,2} w_j^{3,1} w_k^{5,1} & w_i^{0,1} w_j^{2,2} w_k^{5,1} \\ w_i^{1,2} w_j^{4,0} w_k^{5,1} & w_i^{1,1} w_j^{3,1} w_k^{5,1} & w_i^{1,1} w_j^{3,0} w_k^{4,2} & w_i^{0,2} w_j^{3,1} w_k^{5,1} & w_i^{0,2} w_j^{3,0} w_k^{4,2} & w_i^{0,1} w_j^{2,1} w_k^{4,2} \\ w_i^{1,1} w_j^{3,1} w_k^{5,1} & w_i^{1,0} w_j^{2,2} w_k^{5,1} & w_i^{1,0} w_j^{2,1} w_k^{4,2} & w_i^{0,1} w_j^{2,2} w_k^{5,1} & w_i^{0,1} w_j^{2,1} w_k^{4,2} & w_i^{0,0} w_j^{1,2} w_k^{4,2} \end{bmatrix}, \quad (3.39)$$

$$[W_{EF}] = \begin{bmatrix} w_i^{2,2} w_j^{5,1} w_k^{7,0} & w_i^{2,2} w_j^{5,0} w_k^{7,1} & w_i^{2,1} w_j^{4,1} w_k^{6,0} & w_i^{1,2} w_j^{4,1} w_k^{6,1} \\ w_i^{2,1} w_j^{4,2} w_k^{7,0} & w_i^{2,1} w_j^{4,1} w_k^{7,1} & w_i^{2,0} w_j^{3,2} w_k^{6,0} & w_i^{1,1} w_j^{3,2} w_k^{6,1} \\ w_i^{2,1} w_j^{4,1} w_k^{6,1} & w_i^{2,1} w_j^{4,0} w_k^{6,2} & w_i^{2,0} w_j^{3,1} w_k^{5,1} & w_i^{1,1} w_j^{3,1} w_k^{5,2} \\ w_i^{1,2} w_j^{4,2} w_k^{7,0} & w_i^{1,2} w_j^{4,1} w_k^{7,1} & w_i^{1,1} w_j^{3,2} w_k^{6,0} & w_i^{0,2} w_j^{3,2} w_k^{6,1} \\ w_i^{1,2} w_j^{4,1} w_k^{6,1} & w_i^{1,2} w_j^{4,0} w_k^{6,2} & w_i^{1,1} w_j^{3,1} w_k^{5,1} & w_i^{0,2} w_j^{3,1} w_k^{5,2} \\ w_i^{1,1} w_j^{3,2} w_k^{6,1} & w_i^{1,1} w_j^{3,1} w_k^{6,2} & w_i^{1,0} w_j^{2,2} w_k^{5,1} & w_i^{0,1} w_j^{2,2} w_k^{5,2} \end{bmatrix}, \quad (3.40)$$

$$[W_{EB}] = \begin{bmatrix} w_i^{2,2} w_j^{5,1} w_k^{7,1} \\ w_i^{2,1} w_j^{4,2} w_k^{7,1} \\ w_i^{2,1} w_j^{4,1} w_k^{6,2} \\ w_i^{1,2} w_j^{4,2} w_k^{7,1} \\ w_i^{1,2} w_j^{4,1} w_k^{6,2} \\ w_i^{1,1} w_j^{3,2} w_k^{6,2} \end{bmatrix}, \quad (3.41)$$

$$[W_{FF}] = \begin{bmatrix} w_i^{2,2} w_j^{5,2} w_k^{8,0} & w_i^{2,2} w_j^{5,1} w_k^{8,1} & w_i^{2,1} w_j^{4,2} w_k^{7,1} & w_i^{1,2} w_j^{4,2} w_k^{7,1} \\ w_i^{2,2} w_j^{5,1} w_k^{8,1} & w_i^{2,2} w_j^{4,0} w_k^{8,2} & w_i^{2,1} w_j^{4,1} w_k^{7,2} & w_i^{1,2} w_j^{4,1} w_k^{7,2} \\ w_i^{2,1} w_j^{4,2} w_k^{7,0} & w_i^{2,1} w_j^{4,1} w_k^{7,1} & w_i^{2,0} w_j^{3,2} w_k^{6,2} & w_i^{1,1} w_j^{3,2} w_k^{6,1} \\ w_i^{1,2} w_j^{4,2} w_k^{7,1} & w_i^{1,2} w_j^{4,1} w_k^{7,2} & w_i^{1,1} w_j^{3,2} w_k^{6,2} & w_i^{0,2} w_j^{3,2} w_k^{6,2} \end{bmatrix}, \quad (3.42)$$

$$[W_{FB}] = \begin{bmatrix} w_i^{2,2} w_j^{5,2} w_k^{8,1} \\ w_i^{2,2} w_j^{5,1} w_k^{8,2} \\ w_i^{2,1} w_j^{4,2} w_k^{7,1} \\ w_i^{1,2} w_j^{4,2} w_k^{7,2} \end{bmatrix}, \quad (3.43)$$

$$[W_{BB}] = \begin{bmatrix} w_i^{2,2} w_j^{5,2} w_k^{8,2} \end{bmatrix}. \quad (3.44)$$

As expressões para determinar o número mínimo de pontos para a integração numérica exata dos coeficientes da matriz de massa são

$$n_1 = \frac{1}{2} [\text{sign}(p)(p-1) + \text{sign}(q)(q-1) + \text{sign}(i)(i-1) + \text{sign}(j)(j-1) + 1],$$

$$\begin{aligned}
n_2 &= \frac{1}{2} [\text{sign}(p)(p-1) + \text{sign}(q)(q-1) + \text{sign}(r)(r-1) + \text{sign}(i)(i-1) + \text{sign}(j)(j-1) \\
&\quad + \text{sign}(k)(k-1) + 1] \\
n_3 &= \frac{1}{2} [\text{sign}(p)(p-1) + \text{sign}(q)(q-1) + \text{sign}(r)(r-1) + \text{sign}(s)(s-1) + \\
&\quad \text{sign}(i)(i-1) + \text{sign}(j)(j-1) + \text{sign}(k)(k-1) + \text{sign}(l)(l-1) + 1].
\end{aligned}$$

Os pesos usados para o cálculo das raízes dos polinômios de Jacobi $P_{n_1}^{\alpha_1, \beta_1}(\xi_1)$, $P_{n_2}^{\alpha_2, \beta_2}(\xi_2)$ e $P_{n_3}^{\alpha_3, \beta_3}(\xi_3)$ são dados por

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \text{sign}(p) + \text{sign}(i), \\
\alpha_2 &= \text{sign}(p) + \text{sign}(i) + \text{sign}(q) + \text{sign}(j) + 1, \\
\alpha_3 &= \text{sign}(p) + \text{sign}(i) + \text{sign}(q) + \text{sign}(j) + \text{sign}(r) + \text{sign}(k) + 2, \\
\beta_1 &= \text{sign}(q) + \text{sign}(j), \\
\beta_2 &= \text{sign}(r) + \text{sign}(k), \\
\beta_3 &= \text{sign}(s) + \text{sign}(l),
\end{aligned} \tag{3.45}$$

onde 1 e 2 são adicionados em α_2 e α_3 respectivamente, incluindo assim, o jacobiano do mapeamento tridirecional.

Uma alternativa para uniformizar os pesos escolhidos foi fixar ponderações que atendessem a todo o bloco. Porém, isso fez com que fosse necessário acrescentar graus variados ao integrando, mas no máximo 4. Assim, para cada bloco, pode-se escolher os pesos abaixo e aumentar 4 graus nas direções ξ_1 , ξ_2 e ξ_3 , ou seja,

$$\begin{aligned}
W_{VV} &= w_i^{0,0} w_j^{1,0} w_k^{2,0}, \\
W_{VE} &= w_i^{0,0} w_j^{2,0} w_k^{3,0}, \\
W_{VF} &= w_i^{0,0} w_j^{2,0} w_k^{4,0}, \\
W_{VB} &= w_i^{1,1} w_j^{3,1} w_k^{5,0}, \\
W_{EE} &= w_i^{0,0} w_j^{2,0} w_k^{4,0}, \\
W_{EF} &= w_i^{0,0} w_j^{3,0} w_k^{5,0}, \\
W_{EB} &= w_i^{1,1} w_j^{3,1} w_k^{6,1}, \\
W_{FF} &= w_i^{0,0} w_j^{3,0} w_k^{6,0}, \\
W_{FB} &= w_i^{1,1} w_j^{4,1} w_k^{7,1}, \\
W_{BB} &= w_i^{2,2} w_j^{5,2} w_k^{8,2}.
\end{aligned}$$

A Figura 3.25 ilustra o número de pontos para a integração exata dos coeficientes da sub-

matrix $[M_{BB}]$ baseado na regra de quadratura de Gauss-Jacobi para as funções de Bittencourt, Sherwin & Karniadakis e Gauss-Legendre. Para Gauss-Jacobi, o grau em ξ_3 é $2P-8$. O número máximo de pontos na direção ξ_2 pode ser determinado de (3.45) quando $l = s = 1$, isto é,

$$2n_2^{\max} - 1 = (2P - 8) \rightarrow n_2^{\max} = \frac{1}{2}(2P - 7).$$

O número mínimo de pontos é encontrado quando $l = s = P - 3$. Portanto,

$$n_2^{\min} = 1.$$

Também, o número máximo de pontos na direção ξ_1 pode ser determinado de (3.45) quando $r = s = k = l = 1$, isto é,

$$2n_1^{\max} - 1 = (2P - 8) \rightarrow n_1^{\max} = \frac{1}{2}(2P - 7).$$

O número mínimo de pontos é encontrado quando $r = k = P - 3$ e $s = l = 1$ ou vice-versa. Portanto,

$$n_1^{\min} = 1.$$

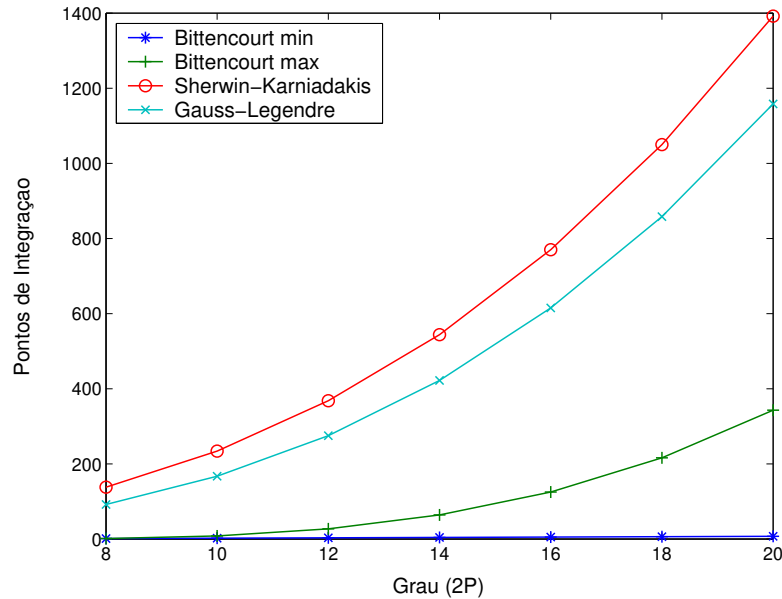


Figura 3.25: Comparação do número de pontos de integração usando os procedimentos de Bittencourt, Sherwin-Karniadakis e Gauss-Legendre para o cálculo dos coeficientes da matriz de massa em tetraedros.

Já para a matriz de rigidez dos tetraedros, o procedimento só é eficiente para o bloco das funções internas, pois pode-se usar a expressão

$$k_{ab} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_{ijkl} [N_{pqrs''\xi_1} + N_{pqrs''\xi_2} + N_{pqrs''\xi_3}] |J| d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (3.46)$$

para o operador Laplaciano, já que os termos do contorno zeram.

Assim, os pesos para as funções de corpo ficam

$$[W_{BB}] = \begin{matrix} i, j, k, l \\ \begin{bmatrix} w_i^{1,1} w_j^{3,1} w_k^{6,1} \end{bmatrix} & p, q, r, s. \end{matrix} \quad (3.47)$$

As expressões para determinar o número mínimo de pontos de integração dos coeficientes da matriz de rigidez são

$$n_1 = \frac{1}{2} [\text{sign}(p)(p-1) + \text{sign}(q)(q-1) + \text{sign}(i)(i-1) + \text{sign}(j)(j-1) + 3]. \quad (3.48)$$

$$n_2 = \frac{1}{2} [\text{sign}(p)(p-1) + \text{sign}(q)(q-1) + \text{sign}(r)(r-1) + \text{sign}(i)(i-1) + \text{sign}(j)(j-1) + \text{sign}(k)(k-1) + 4], \quad (3.49)$$

$$n_3 = \frac{1}{2} [\text{sign}(p)(p-1) + \text{sign}(q)(q-1) + \text{sign}(r)(r-1) + \text{sign}(s)(s-1) + \text{sign}(i)(i-1) + \text{sign}(j)(j-1) + \text{sign}(k)(k-1) + \text{sign}(l)(l-1) + 4]. \quad (3.50)$$

A Figura 3.26 ilustra o número de pontos de integração para a integração exata dos coeficientes da sub-matriz $[K_{BB}]$ baseado na regra de Gauss-Jacobi apresentada para as funções de Bittencourt, Sherwin & Karniadakis e Gauss-Legendre.

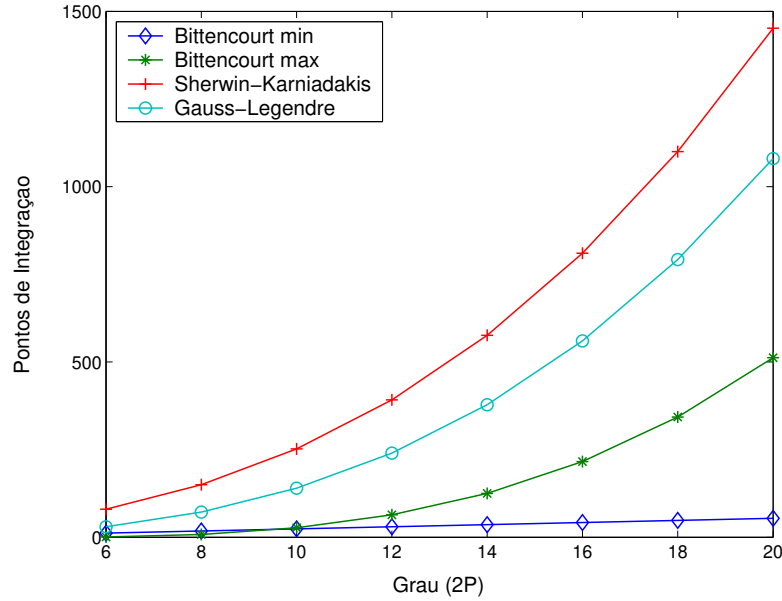


Figura 3.26: Comparação do número de pontos de integração usando os procedimentos de Bittencourt, Sherwin-Karniadakis e Gauss-Legendre para o cálculo dos coeficientes internos da matriz de rigidez em tetraedros

Os pesos $w_i^{1,1} w_j^{3,1} w_k^{6,1}$ também valem para a matriz do estado geral de tensão pois, por

exemplo, para o coeficiente

$$\begin{aligned} k_{ab}(1, 2) &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mu N_{a'\xi_1} N_{b'\xi_2} + \frac{1-2\mu}{2} N_{a'\xi_2} N_{b'\xi_1}) |J| d\xi_3 d\xi_2 d\xi_1 \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_a \Pi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \frac{1}{64} (1-\xi_2)(1-\xi_3)^2 d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3, \end{aligned}$$

onde $\Pi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ é um polinômio qualquer.

Desta forma, a quantidade máxima de pontos necessários para a integração exata dos coeficientes selecionando as ponderações dos polinômios de Jacobi sempre é menor que a quantidade de pontos de integração necessários usando Gauss-Legendre ou a base de Sherwin-Karniadakis (para triângulos e tetraedros). É apenas comparável com os pontos de Dunavant, no caso da matriz de rigidez dos triângulos. No entanto, o procedimento de Dunavant não é tensorizável. Como o número de pontos de integração consistente para graus mais altos cresce rapidamente, torna-se interessante analisar o efeito da subintegração em problemas com solução analítica.

Capítulo 4

Matrizes de Massa e Rigidez Espectrais

Neste capítulo, novas funções de forma nodais unidimensionais são propostas com o objetivo de encontrar uma matriz de rigidez espectral para o problema de Poisson. A base proposta fornece uma matriz de rigidez unidimensional quase diagonal. Apresenta, ainda, melhor condicionamento do que as matrizes de rigidez obtidas usando as bases de Lagrange e Jacobi.

A tensorização dessa base não permite obter matrizes de rigidez diagonais para quadrados e hexaedros. Essas matrizes são escritas por combinações das matrizes de massa e rigidez unidimensionais. As matrizes não são diagonais pelo fato que a matriz de massa unidimensional é densa. Duas técnicas para encontrar matrizes diagonais de massa do elemento unidimensional são discutidas e seus efeitos em quadrados e hexaedros analisados. Mostra-se ainda como escrever as matrizes de massa e rigidez de triângulos e tetraedros através de matrizes unidimensionais usando a base de Sherwin e Karniadakis.

4.1 Integração Numérica e Quadratura Gaussiana

A integral da função polinomial $u(\xi_1)$, $\xi_1 \in [-1, 1]$, dada por $\int_{-1}^1 u(\xi_1) d\xi_1$, pode ser determinada exatamente usando integração numérica baseada nas regras de quadraturas (Karniadakis

e Sherwin, 1999)

$$\int_{-1}^1 u(\xi_1) d\xi_1 = \sum_{i=0}^P w_i u(\xi_{1_i}),$$

onde w_i são constantes específicas ou pesos e ξ_{1_i} são $P + 1$ pontos distintos no intervalo $[-1, 1]$.

Na quadratura gaussiana, o integrando $u(\xi_1)$ é aproximado por um polinômio de Lagrange usando $P + 1$ pontos ξ_{1_i} da seguinte maneira (Karniadakis e Sherwin, 1999)

$$u(\xi_1) = \sum_{i=0}^P u(\xi_{1_i}) l_i(\xi_1) + \epsilon(u),$$

onde $l_i(\xi_1)$ são os polinômios de Lagrange e $\epsilon(u)$ é o erro da aproximação.

Assim,

$$\int_{-1}^1 u(\xi_1) d\xi_1 = \sum_{i=0}^P w_i u(\xi_{1_i}) + R(u),$$

onde

$$w_i = \int_{-1}^1 l_i(\xi_1) d\xi_1 \quad \text{e} \quad R(u) = \int_{-1}^1 \epsilon(u) d\xi_1.$$

Como a equação para w_i define a expressão para o cálculo dos pesos em termos da integração dos polinômios de Lagrange, é necessário conhecer os pontos ξ_{1_i} . Como $u(\xi_1)$ é representado por um polinômio de grau P , a integração será exata se $u(\xi_1)$ for um polinômio de grau menor ou igual a P . Assim, pode-se escolher os pontos ξ_{1_i} igualmente espaçados no intervalo $[-1, 1]$ ou outros pontos que forneçam a integração exata para polinômios de ordem maior que P .

Existem diferentes tipos de regras de quadratura de Gauss, tal como a quadratura de Gauss-Lobatto-Jacobi, a qual usa os polinômios de Lagrange de grau P colocados nas seguintes $(P + 1)$ raízes (Karniadakis e Sherwin, 1999)

$$\xi_{1_i}^{\alpha, \beta} = \begin{cases} -1 & i = 0 \\ \xi_{i-1, P-1}^{\alpha+1, \beta+1} & i = 1, 2, \dots, P-1 \\ 1 & i = P \end{cases} \quad (4.1)$$

Os pontos $\xi_{i-1, P-1}^{\alpha+1, \beta+1}$ são os zeros dos polinômios de Jacobi com ponderações $\alpha + 1$ e $\beta + 1$, denotado por $P_{P-1}^{\alpha+1, \beta+1}(\xi_1)$.

A regra de quadratura de Gauss-Lobatto-Jacobi é, então, dada por

$$\int_{-1}^1 (1 - \xi_1)^\alpha (1 + \xi_1)^\beta u(\xi_1) d\xi_1 = \sum_{i=0}^P w_i^{\alpha, \beta} u(\xi_{1_i}^{\alpha, \beta}) + R(u), \quad (4.2)$$

onde $u(\xi_1)$ é uma função polinomial, $R(u)$ é o erro cometido na aproximação e os pesos correspondentes são

$$w_i^{\alpha,\beta} = \begin{cases} (\beta + 1)C_{0,P-1}^{\alpha,\beta} & i = 0 \\ C_{i,P-1}^{\alpha,\beta} & i = 1, 2, \dots, P-1 \\ (\alpha + 1)C_{P,P-1}^{\alpha,\beta} & i = P \end{cases},$$

$$C_{i,P-1}^{\alpha,\beta} = \frac{2^{\alpha+\beta+1}(\alpha + P)!(\beta + P)!}{PP!(\alpha + \beta + P + 1)![P_P^{\alpha,\beta}(\xi_{1_i}^{\alpha,\beta})]^2}.$$

4.2 Matriz de Massa Espectral Unidimensional

Conforme descrito em (Patera, 1984; Karniadakis e Sherwin, 1999), uma classe de elementos nodais, conhecidos como elementos espectrais, usa os polinômios de Lagrange de grau P colocados nos pontos $\xi_{1_i}^{\alpha,\beta}$ dados por (4.1).

A matriz de massa é cheia avaliando-se o produto interno exato. Se, contudo, usa-se a regra de quadratura de Gauss-Lobatto-Jacobi com pontos de integração ξ_{1_i} iguais aos pontos de colocação no qual a expansão foi definida, a matriz de massa torna-se diagonal, ou seja, os seus coeficientes obedecem a propriedade de colocação (Karniadakis e Sherwin, 1999)

$$m_{pq} = \sum_{i=0}^P w_i N_p(\xi_{1_i}) N_q(\xi_{1_i}) = \sum_{i=0}^P w_i \delta_{pi} \delta_{qi} = w_p \delta_{pq}. \quad (4.3)$$

Pode ser observado que $R(u) = 0$ em (4.2) se $u(\xi_1) \in \mathbb{P}_{2(n_{int})-3} = \mathbb{P}_{2P-1}([-1, 1])$. Se w_i são os pesos da regra de quadratura para $(P + 2)$ pontos, então a integração é exata, mas a ortogonalidade não é preservada. O erro cometido quando essa redução é usada na ordem da regra de quadratura é consistente com o erro da aproximação da expansão, isto é, o erro na aproximação da função usando a expansão polinomial é da mesma ordem que o erro da integração Gaussiana com um ponto a menos do que o necessário para a integração exata (Canuto e Quarteroni, 1982). Os elementos da diagonal da matriz de massa espectral usando a regra de quadratura são iguais à soma dos elementos das linhas respectivas da matriz de massa usando integração exata. A expressão (4.3) representa uma ortogonalidade discreta das funções de interpolação nodais.

Os pontos de colocação e integração $\xi_{1_i}^{0,0}$ são selecionados por apresentar melhor aproximação na quadratura numérica (Karniadakis e Sherwin, 1999). Para verificar este fato, os

polinômios de Lagrange podem ser escritos como

$$l_i(\xi_1) = \frac{g(\xi_1)}{g'(\xi_{1_i})(\xi_1 - \xi_{1_i})}, \quad 0 \leq i \leq P,$$

onde $g(\xi_1)$ é o polinômio dos nós.

Escolhe-se $g(\xi_1)$ em termos da derivada do polinômio de Legendre $L_P(\xi_1) = P_P^{0,0}(\xi_1)$ como $g(\xi_1) = (\xi_1 - 1)(\xi_1 + 1)[L_P(\xi_1)]'$. A relação anterior pode ser escrita como $g(\xi_1) = (\xi_1 - 1)(\xi_1 + 1)\frac{1}{2}(P + 1)P_{P-1}^{1,1}(\xi_1)$ e a sua derivada no ponto ξ_{1_i} é $g'(\xi_{1_i}) = -P(P + 1)L_P(\xi_{1_i})$.

Dessa maneira, o polinômio de Lagrange é expresso como

$$l_i(\xi_1) = \frac{(\xi_1 - 1)(\xi_1 + 1)[L_P(\xi_1)]'}{-P(P + 1)L_P(\xi_{1_i})(\xi_1 - \xi_{1_i})}.$$

Portanto, pode-se considerar uma base de elementos espectrais como a base de polinômios de Lagrange colocados nos pontos nodais que são as raízes do polinômio $g(\xi_1) = (1 - \xi_1)(1 + \xi_1)P_{P-1}^{1,1}(\xi_1)$, que é exatamente a definição dada em (4.1) para $\alpha = \beta = 0$.

4.3 Matriz de Rigidez Espectral Unidimensional

O objetivo inicial foi encontrar funções de forma que fornecessem, ao mesmo tempo, matrizes de massa e rigidez quase diagonais. A primeira idéia foi dobrar o grau de todos os monômios do polinômio de Lagrange e, desta forma, ter o polinômio e sua derivada nas mesmas raízes. O problema deste procedimento foi aumentar muito o grau da função de forma e não ter pontos suficientes para a integração numérica por colocação.

Para o grau 4, até foi possível encontrar funções internas que tivessem as mesmas raízes que as suas respectivas derivadas. Tomando os pontos de colocação internos ξ_{1_1} , ξ_{1_2} e ξ_{1_3} , consideraram-se as seguintes expressões

$$\begin{aligned} N_1(\xi_1) &= (\xi_1 - \xi_{1_2})^3(\xi_1 - \xi_{1_3}) + (\xi_1 - \xi_{1_2})(\xi_1 - \xi_{1_3})^3 \\ &\quad - \frac{1}{4}(\xi_1 - \xi_{1_2})^4 - \frac{1}{4}(\xi_1 - \xi_{1_3})^4 + \frac{1}{4}(\xi_{1_2} - \xi_{1_3})^4, \\ N_2(\xi_1) &= (\xi_1 - \xi_{1_1})^3(\xi_1 - \xi_{1_3}) + (\xi_1 - \xi_{1_1})(\xi_1 - \xi_{1_3})^3 \\ &\quad - \frac{1}{4}(\xi_1 - \xi_{1_1})^4 - \frac{1}{4}(\xi_1 - \xi_{1_3})^4 + \frac{1}{4}(\xi_{1_1} - \xi_{1_3})^4, \\ N_3(\xi_1) &= (\xi_1 - \xi_{1_1})^3(\xi_1 - \xi_{1_2}) + (\xi_1 - \xi_{1_1})(\xi_1 - \xi_{1_2})^3 \\ &\quad - \frac{1}{4}(\xi_1 - \xi_{1_1})^4 - \frac{1}{4}(\xi_1 - \xi_{1_2})^4 + \frac{1}{4}(\xi_{1_1} - \xi_{1_2})^4. \end{aligned}$$

Mas não foi possível estender as funções anteriores para os todos graus. Além disso, ainda

precisava-se garantir que as funções internas fossem zero nos dois extremos (para eliminar o termo do contorno quando se aplica a forma fraca na matriz de rigidez) e que as funções de vértice fossem unitárias no seu ponto de colocação (o primeiro vértice igual a 1 no primeiro ponto de integração e o último vértice igual a 1 no último ponto de integração), para garantir a continuidade C^0 dos elementos.

Para construir uma matriz de rigidez espectral nodal similar à matriz de massa, o seguinte conjunto de funções é definido

$$N_p(\xi_1) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - \xi_1), & p = 0 \\ (1 - \xi_1)\phi_p(\xi_1), & 1 \leq p \leq P + 1 \\ \frac{1}{2}(1 + \xi_1), & p = P + 2 \end{cases} \quad (4.4)$$

com

$$\begin{aligned} \phi_1(\xi_1) &= 8 \left((\xi_1 - \xi_{1_P})^2 (\xi_1 - \xi_{1_1}) (\xi_1 - \xi_{1_2}) \dots (\xi_1 - \xi_{1_{P-1}}) \right. \\ &\quad + \sum_{i=3}^{P+1} (-1)^i \frac{2}{i!} (\xi_1 - \xi_{1_P})^i \frac{d^{i-2}}{d\xi_1} ((\xi_1 - \xi_{1_1}) (\xi_1 - \xi_{1_2}) \dots (\xi_1 - \xi_{1_{P-1}})) \\ &\quad - (-1 - \xi_{1_P})^2 (-1 - \xi_{1_1}) (-1 - \xi_{1_2}) \dots (-1 - \xi_{1_{P-1}}) \\ &\quad \left. - \sum_{i=3}^{P+1} (-1)^i \frac{2}{i!} (-1 - \xi_{1_P})^i \frac{d^{i-2}}{d\xi_1} ((\xi_1 - \xi_{1_1}) (\xi_1 - \xi_{1_2}) \dots (\xi_1 - \xi_{1_{P-1}}))_{\xi_1=-1} \right) \end{aligned} \quad (4.5)$$

e para $2 < p < P + 1$

$$\begin{aligned} \phi_p(\xi_1) &= 8 \left((\xi_1 - \xi_{1_0})^2 \frac{(\xi_1 - \xi_{1_1}) (\xi_1 - \xi_{1_2}) \dots (\xi_1 - \xi_{1_P})}{(\xi_1 - \xi_{1_{p-1}})} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=3}^{P+1} (-1)^i \frac{2}{i!} (\xi_1 - \xi_{1_0})^i \frac{d^{i-2}}{d\xi_1} \left(\frac{(\xi_1 - \xi_{1_1}) (\xi_1 - \xi_{1_2}) \dots (\xi_1 - \xi_{1_P})}{(\xi_1 - \xi_{1_{p-1}})} \right) \right). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Essa escolha garante que as funções de vértice são lineares e as funções internas zeram para $\xi_{1_0} = -1$ e $\xi_{1_P} = 1$. Em adição, a continuidade C^0 entre os elementos é preservada. As Figuras 4.1 a 4.4 ilustram as funções de forma internas $N_p(\xi_1)$ para $P = 2$ a 5.

Observe que, por exemplo, para $P = 4$, são necessárias 7 funções de forma para completar o espaço, já que o grau das funções é 6. Assim, têm-se sempre $P + 3$ funções de interpolação. A constante 8 em (4.5) foi obtida por experimentação e usada apenas para melhorar o condicionamento numérico da matriz de rigidez obtida usando a base definida.

As funções $N_p(\xi_1)$ indicadas em (4.5) e (4.6) são tais que as suas derivadas $N'_p(\xi_1)$ têm a propriedade de colocação. Para exemplificar, considere $P = 4$ e os pontos de colocação $\xi_{1_0} = -1$,

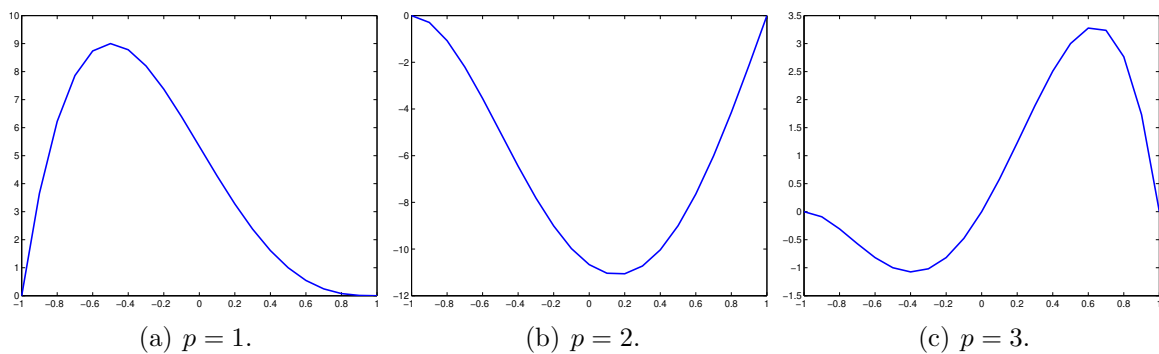


Figura 4.1: Funções de forma internas para $P = 2$.

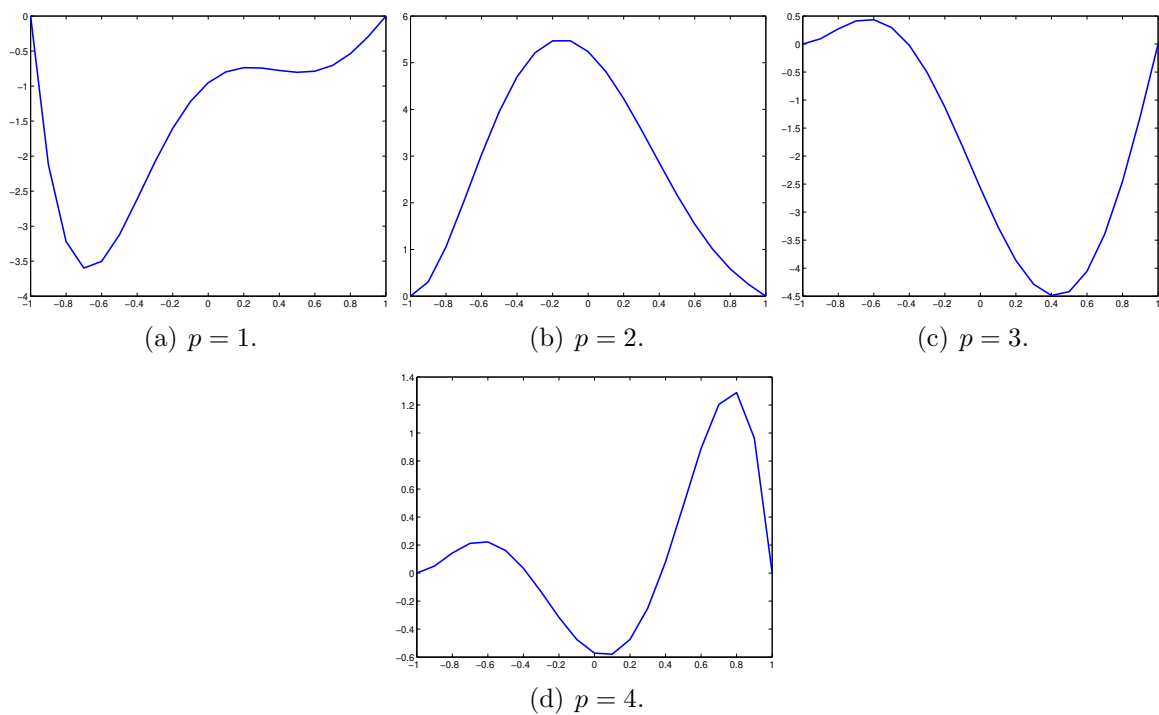


Figura 4.2: Funções de forma internas para $P = 3$.

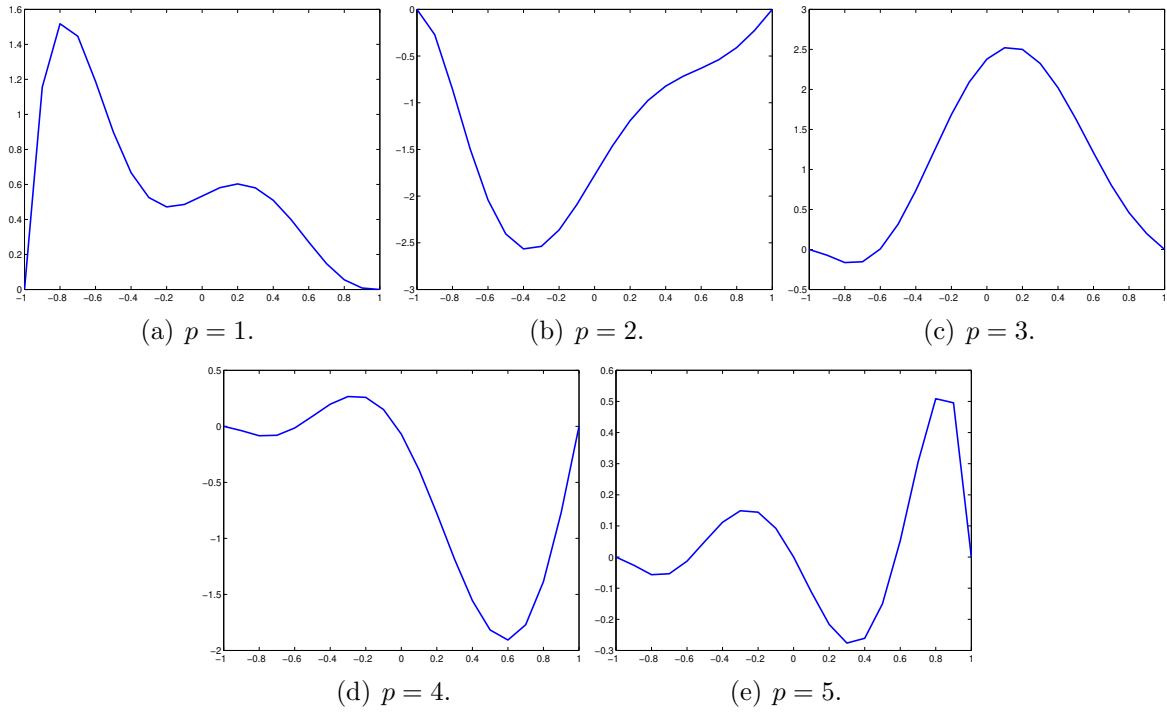


Figura 4.3: Funções de forma internas para $P = 4$.

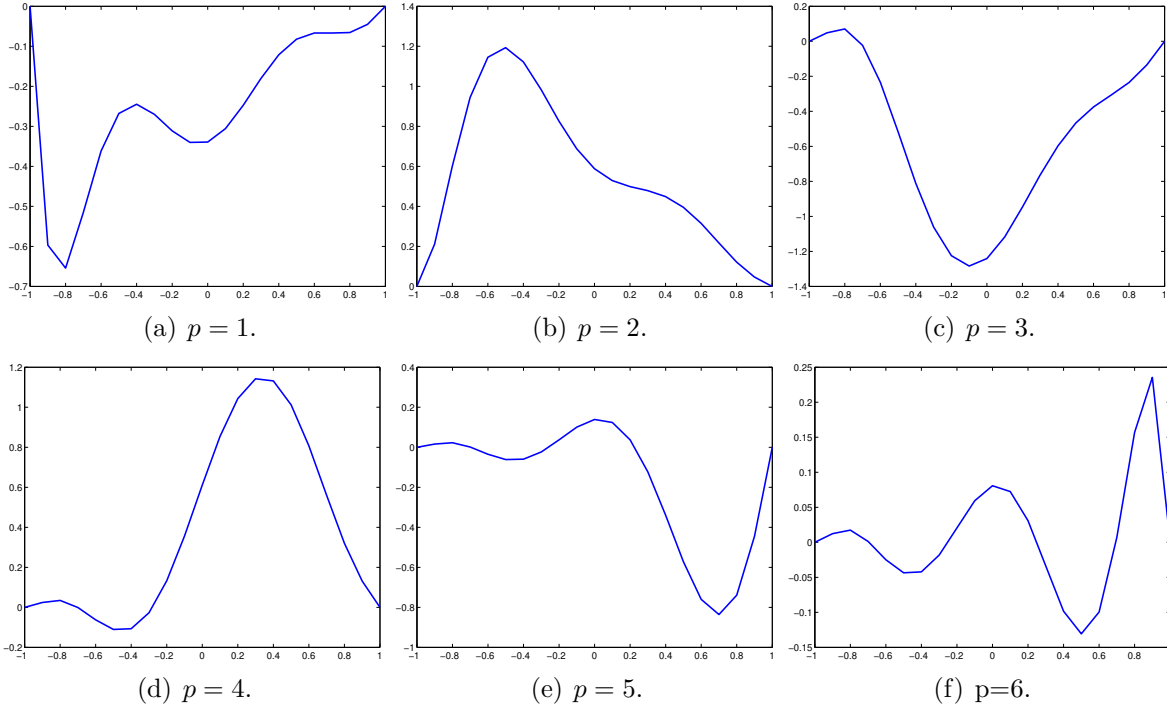


Figura 4.4: Funções de forma internas para $P = 5$.

$\xi_{11}, \xi_{12}, \xi_{13}$ e $\xi_{14} = 1$. As expressões das derivadas $\phi'_p(\xi_1)$ são

$$\phi'_1(\xi_1) = 16(\xi_1 - \xi_{14})(\xi_1 - \xi_{11})(\xi_1 - \xi_{12})(\xi_1 - \xi_{13}),$$

$$\phi'_2(\xi_1) = 16(\xi_1 - \xi_{10})(\xi_1 - \xi_{12})(\xi_1 - \xi_{13})(\xi_1 - \xi_{14}),$$

$$\phi'_3(\xi_1) = 16(\xi_1 - \xi_{10})(\xi_1 - \xi_{11})(\xi_1 - \xi_{13})(\xi_1 - \xi_{14}),$$

$$\phi'_4(\xi_1) = 16(\xi_1 - \xi_{10})(\xi_1 - \xi_{11})(\xi_1 - \xi_{12})(\xi_1 - \xi_{14}),$$

$$\phi'_5(\xi_1) = 16(\xi_1 - \xi_{10})(\xi_1 - \xi_{11})(\xi_1 - \xi_{12})(\xi_1 - \xi_{13}),$$

as quais correspondem aos polinômios de Lagrange, a menos de uma constante.

Para o bloco das funções internas na matriz de rigidez, a expressão dos coeficientes será

$$\begin{aligned} k_{pq} &= \int_{-1}^1 N'_p(\xi_1) N'_q(\xi_1) d\xi_1 \\ &= 64 \int_{-1}^1 [(1 - \xi_1)\phi'_p(\xi_1) - \phi_p(\xi_1)][(1 - \xi_1)\phi'_q(\xi_1) - \phi_q(\xi_1)] d\xi_1 \\ &= 64 \int_{-1}^1 [(1 - \xi_1)^2 \phi'_p(\xi_1) \phi'_q(\xi_1) - (1 - \xi_1) \phi'_p(\xi_1) \phi_q(\xi_1) \\ &\quad - (1 - \xi_1) \phi_p(\xi_1) \phi'_q(\xi_1) + \phi_p(\xi_1) \phi_q(\xi_1)] d\xi_1. \end{aligned}$$

Após a integração por partes em $(1 - \xi_1)\phi'_p(\xi_1)\phi_q(\xi_1)$, conclui-se que

$$k_{pq} = 64 \int_{-1}^1 (1 - \xi_1)^2 \phi'_p(\xi_1) \phi'_q(\xi_1) d\xi_1. \quad (4.7)$$

Escolhendo-se como pontos de colocação e integração os $P + 1$ zeros de Gauss-Lobatto-Jacobi para $\alpha = 2$ e $\beta = 0$, a integral anterior pode ser aproximada por

$$k_{pq} = 64 \sum_{i=0}^P \phi'_p(\xi_{1_i}^{2,0}) \phi'_q(\xi_{1_i}^{2,0}) w_i^{2,0} = 64 \delta_{pq} w_{p-1}^{2,0},$$

onde a propriedade de colocação das derivadas $N'_p(\xi_1)$ foi usada. Baseado nisso, o bloco interno da matriz de rigidez será diagonal. O erro cometido na integração será da mesma ordem que o erro da aproximação da função polinomial. Observe que o termo $(1 - \xi_1)^2$ corresponde à função de ponderação da quadratura (4.2) e não precisa ser integrado explicitamente tomando-se $\alpha = 2$ e $\beta = 0$.

Os coeficientes do bloco das funções de vértice da matriz de rigidez são iguais a $\pm \frac{1}{2}$. Já os coeficientes do bloco de acoplamento vértice-interno zeram naturalmente integrando-se por partes, pois

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 N'_p(\xi_1) N'_q(\xi_1) d\xi_1 &= \pm \frac{8}{2} \int_{-1}^1 [(1 - \xi_1)\phi'_q(\xi_1) - \phi_q(\xi_1)] d\xi_1 \\ &= \pm 4 \left[\int_{-1}^1 (1 - \xi_1) \phi'_q(\xi_1) d\xi_1 - \int_{-1}^1 \phi_q(\xi_1) d\xi_1 \right] \\ &= \pm 4 \left[(1 - \xi_1) \phi_q(\xi_1) \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (-\phi_q(\xi_1)) d\xi_1 - \int_{-1}^1 \phi_q(\xi_1) d\xi_1 \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

4.4 Validação da Base Nodal

Considere o problema de Poisson unidimensional

$$\frac{d^2 u(\xi_1)}{d\xi_1^2} = \xi_1^{P-2}, \quad \xi_1 \in [-1, 1], \quad P = 2, 3, \dots, 8, \quad (4.9)$$

com as condições de contorno homogêneas $u(-1) = u(1) = 0$. A solução analítica é

$$u(\xi_1) = \frac{1}{P(P-1)} \xi_1^P + c_1 \xi_1 + c_2, \quad (4.10)$$

onde $c_1 = 0$, $c_2 = -\frac{1}{P(P-1)}$ para P par e $c_1 = -\frac{1}{P(P-1)}$, $c_2 = 0$ para P ímpar.

O problema anterior foi resolvido usando polinômios de Lagrange integrados analiticamente e as funções propostas integradas analiticamente e por colocação com $(P+1)$ pontos de integração. As respectivas matrizes de rigidez do elemento são denotadas por $[K_{lag}]$, $[K_{an}]$ e $[K_{ap}]$, respectivamente.

Os perfis de esparsidade da matriz de rigidez para as funções de forma propostas, integrada nos pontos de colocação, têm a mesma característica (para qualquer grau P), como ilustrado na Figura 4.5 para $P = 5$. Esse é o mesmo perfil de esparsidade da matriz de rigidez unidimensional empregando polinômios de Jacobi e ilustrado na Figura 2.18(b).

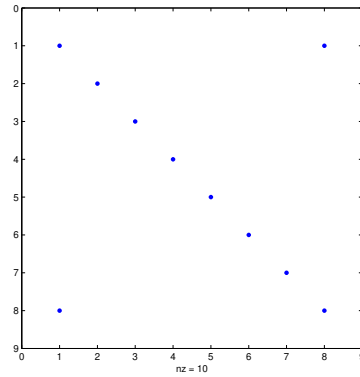


Figura 4.5: Perfil de esparsidade para $P = 5$ (nz é o número de coeficientes diferentes de zero).

As matrizes de rigidez para $P = 4$, integradas analiticamente e nos $(P + 1)$ pontos de colocação são, respectivamente,

$$[K_{an}] = \begin{pmatrix} 0,5000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & -0,5000 \\ 0,0000 & 18,9137 & -1,8914 & -1,8914 & -1,8914 & -1,8914 & 0,0000 \\ 0,0000 & -1,8914 & 18,9137 & -1,8914 & -1,8914 & -1,8914 & 0,0000 \\ 0,0000 & -1,8914 & -1,8914 & 18,9137 & -1,8914 & -1,8914 & 0,0000 \\ 0,0000 & -1,8914 & -1,8914 & -1,8914 & 18,9137 & -1,8914 & 0,0000 \\ 0,0000 & -1,8914 & -1,8914 & -1,8914 & -1,8914 & 5,0437 & 0,0000 \\ -0,5000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,5000 \end{pmatrix},$$

$$[K_{ap}] = \begin{pmatrix} 0,5000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & -0,5000 \\ 0,0000 & 20,8051 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 20,8051 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 20,8051 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 20,8051 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 6,9350 & 0,0000 \\ -0,5000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,5000 \end{pmatrix}.$$

Observe que os coeficientes fora da diagonal principal relacionados às funções internas da matriz $[K_{an}]$ são iguais. Nesse caso, esse valor é $\bar{k} = -1,8914$. Pode ser verificado que os coeficientes do bloco interno da matriz $[K_{ap}]$ são dados pela seguinte expressão

$$k_{ap_{ii}} = k_{an_{ii}} + |\bar{k}|.$$

O erro na norma de energia entre a solução exata u e aproximada u_{ap} calculado para $P = 2$ até $P = 8$ está mostrado na Figura 4.6. Observe que para $P = 4$ o erro será exatamente igual a zero. Este comportamento não era esperado pois, apesar que para cada grau a solução exata está contida no espaço de aproximação, a integração numérica com 1 ponto a menos que o necessário para a integração exata induz aos erros ilustrados na Figura 4.6.

Os números de condição das matrizes de rigidez são calculados por $k = \frac{\max \mu}{\min \mu}$, sendo μ o conjunto de valores singulares das matrizes. Como a matriz de rigidez é semi-definida positiva, $\min \mu$ é o primeiro valor singular diferente de zero.

Os condicionamentos numéricos das matrizes de rigidez obtidas com as funções propostas, integradas analiticamente e por colocação, polinômios de Lagrange e Jacobi com $\alpha = \beta = 1$,

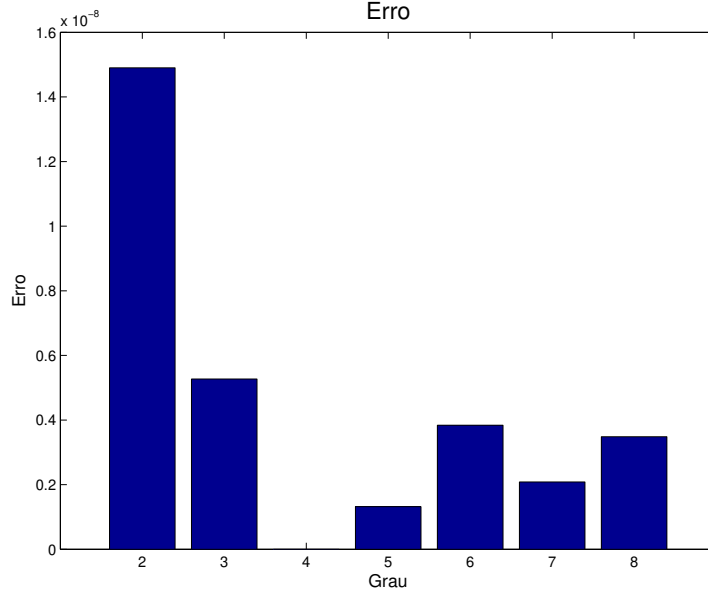


Figura 4.6: Erro na norma de energia para $2 \leq P \leq 8$.

são mostrados na Figura 4.7. Observa-se que as matrizes obtidas com as funções propostas apresentam um melhor condicionamento com relação às outras bases.

4.5 Tensorização para Quadrados e Hexaedros

O resultado anterior não se estendeu para o bloco das funções internas da matriz de rigidez de quadrados.

Como visto no Capítulo 2, as funções no quadrado $N_{pq}(\xi_1, \xi_2)$ e $N_{rs}(\xi_1, \xi_2)$ são obtidas pelo produto tensorial usual de funções unidimensionais, isto é, $N_{pq}(\xi_1, \xi_2) = N_p(\xi_1)N_q(\xi_2)$ e $N_{rs}(\xi_1, \xi_2) = N_r(\xi_1)N_s(\xi_2)$. Portanto, os coeficientes da matriz de rigidez para o problema de Poisson nos elementos quadrangulares são dados por

$$\begin{aligned}
 k_{pq} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \nabla N_{pq}(\xi_1, \xi_2) \cdot \nabla N_{rs}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \\
 &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(N_q(\xi_2)N_s(\xi_2)N_{p'\xi_1}N_{r'\xi_1} + N_p(\xi_1)N_r(\xi_1)N_{q'\xi_2}N_{s'\xi_2} \right) d\xi_1 d\xi_2 \\
 &= \int_{-1}^1 N_q(\xi_2)N_s(\xi_2) d\xi_2 \int_{-1}^1 N_{p'\xi_1}N_{r'\xi_1} d\xi_1 \\
 &\quad + \int_{-1}^1 N_p(\xi_1)N_r(\xi_1) d\xi_1 \int_{-1}^1 N_{q'\xi_2}N_{s'\xi_2} d\xi_2
 \end{aligned}$$

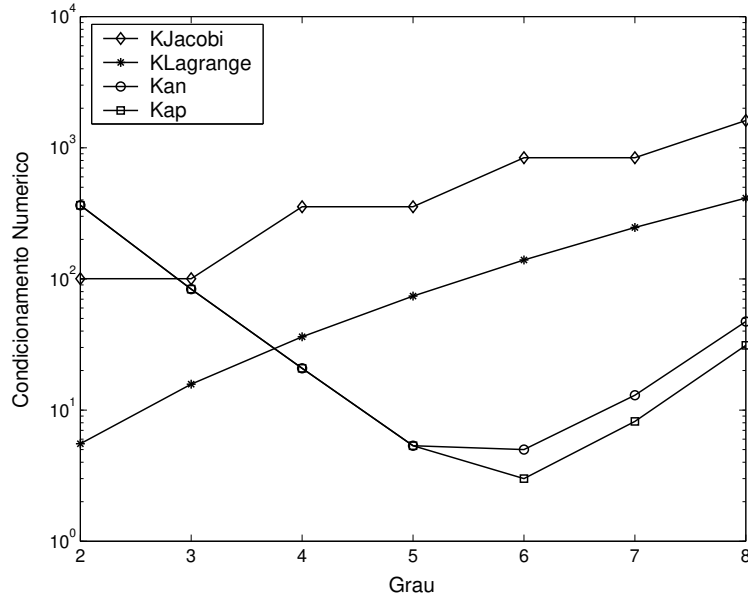


Figura 4.7: Condicionamento das matrizes de rigidez usando polinômios de Jacobi e Lagrange, calculadas analiticamente e aproximadas para $2 \leq P \leq 8$.

$$= m_{qs}^{1D}(\xi_2)k_{pr}^{1D}(\xi_1) + m_{pr}^{1D}(\xi_1)k_{qs}^{1D}(\xi_2). \quad (4.11)$$

A propriedade de colocação será preservada somente quando $p \neq r$ e $q \neq s$ simultaneamente. Isso acontece somente para alguns coeficientes do bloco interno da matriz de rigidez, como ilustrado na Figura 4.8(a) para $P = 4$. Esse perfil pode ser comparado com a esparsidade do bloco interno da matriz de rigidez obtida usando polinômios de Jacobi com $\alpha = \beta = 1$ na Figura 4.8(b).

A Figura 4.9 mostra os perfis de esparsidade para as matrizes de massa usando as funções propostas e polinômios de Jacobi com $\alpha = \beta = 1$. Como esperado, a matriz de massa é cheia. Já a Figura 4.10 ilustra o condicionamento numérico das matrizes de massa e rigidez dos quadrados com e sem a aplicação do complemento de Schur. Observa-se que as funções propostas tem um condicionamento numérico similar às bases de Jacobi. Apesar disso, as matrizes obtidas com os polinômios de Jacobi são mais esparsas e a base proposta, no caso dos quadrados, não é vantajosa, a não ser pela maior simplicidade do cálculo dos coeficientes das matrizes de rigidez.

Como indicado na equação (4.11), os coeficientes da matriz de rigidez para os quadrados pode ser calculada usando os coeficientes das matrizes de massa e rigidez unidimensionais. Neste caso, o perfil não-diagonal da matriz de rigidez dos quadrados é devido ao perfil cheio da matriz

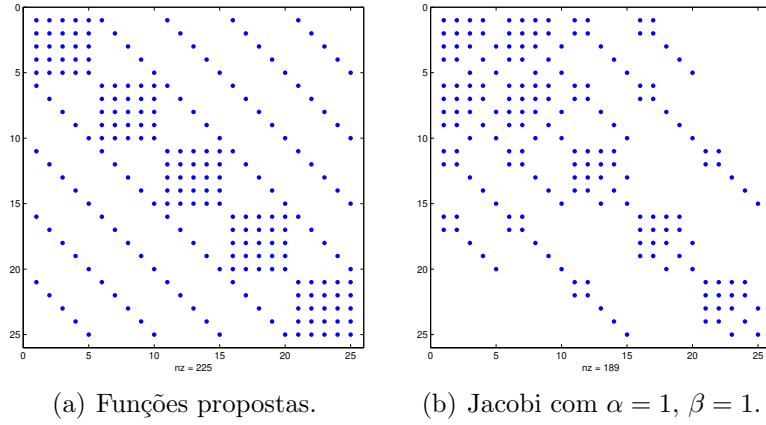


Figura 4.8: Perfis de esparsidade da matriz de rigidez para quadrados e grau $P = 4$ (nz é o número de coeficientes diferentes de zero).

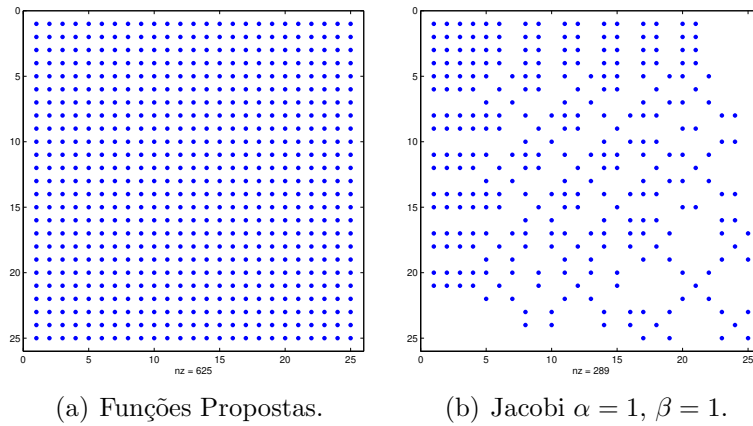
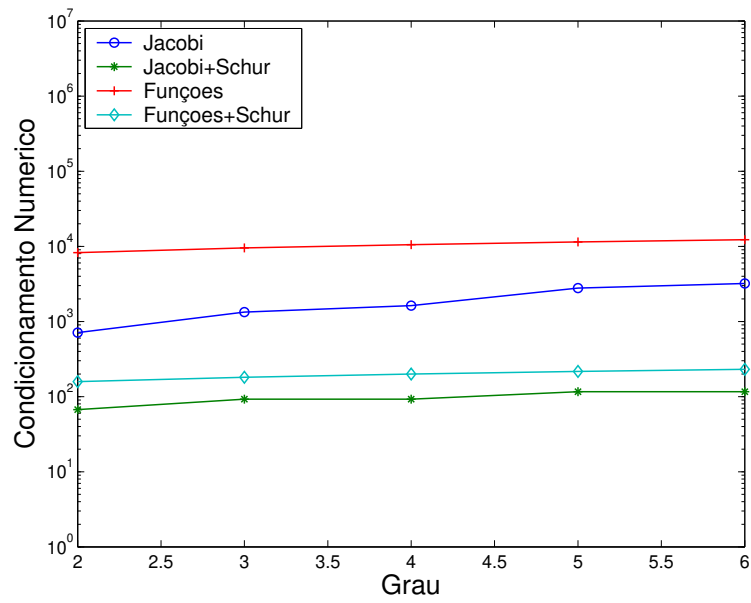
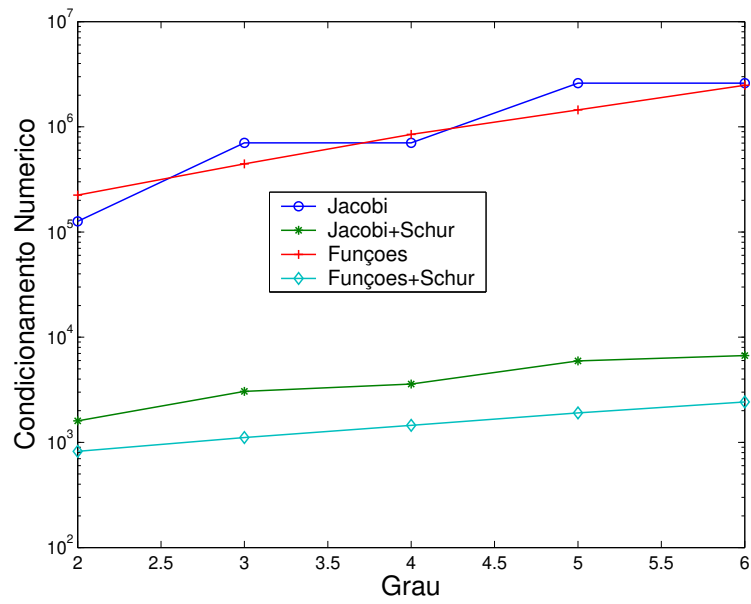


Figura 4.9: Perfis de esparsidade das matrizes de massa para os quadrados e grau $P = 4$ (nz é o número de coeficientes diferente de zero).



(a) Rigidez.



(b) Massa.

Figura 4.10: Condicionamento numérico dos quadrados.

de massa unidimensional. A seguir, discutem-se duas estratégias para construir matrizes de massa diagonais.

4.5.1 Matriz de Massa Unidimensional Espectral Convencional

Para tornar a parte interna da matriz de massa unidimensional diagonal, concentrou-se os elementos da diagonal escrevendo-os como o somatório dos elementos da respectiva linha da matriz interna de massa unidimensional original. Os coeficientes do bloco vértice-interno foram zerados e os coeficientes relacionados com as funções de vértice foram mantidos.

Desta maneira, obtiveram-se os perfis de esparsidade para as matrizes de rigidez para quadrados e hexaedros conforme ilustrado na Figura 4.11 para $P = 4$.

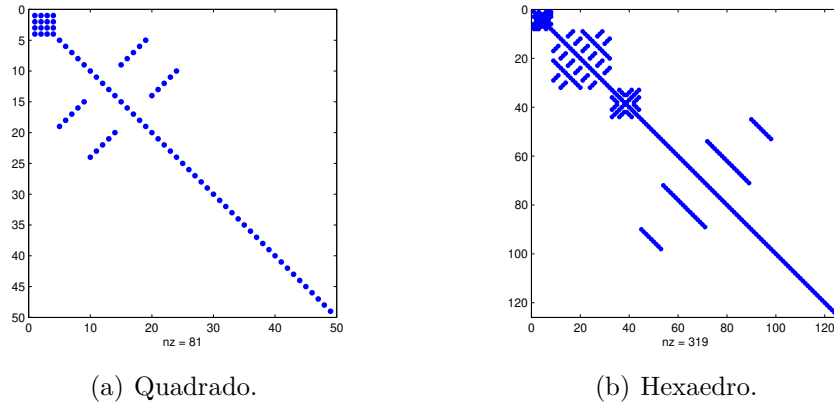


Figura 4.11: Perfis de esparsidade das matrizes de rigidez para quadrados e hexaedros usando a matriz de massa unidimensional concentrada.

Para o problema de Poisson homogêneo em um único elemento local

$$\Delta u(\xi_1, \xi_2) = f,$$

considerou-se a solução analítica $u(\xi_1, \xi_2) = (1 - \xi_1)(1 + \xi_1)(1 - \xi_2)(1 + \xi_2)$. A solução aproximada fornecida pela matriz de rigidez para quadrados usando massa e rigidez unidimensionais diagonais foi satisfatório, com erro na norma de energia de 10^{-7} . Contudo, a solução aproximada foi correta somente com condições de contorno homogêneas. Testes com outras condições de contorno não apresentaram o mesmo comportamento.

Além disso, as funções originais $N_p(\xi_1)$ dadas pelas equações (4.5) e (4.6) foram normal-

izadas pelas constantes de Lagrange $d_1, d_2, \dots, d_{P+1}$ onde

$$\begin{aligned} d_1 &= [2(\xi_1 - \xi_{1_P})(\xi_1 - \xi_{1_1})(\xi_1 - \xi_{1_2}) \dots (\xi_1 - \xi_{1_{P-1}})]_{\xi_1=\xi_{1_0}} \\ d_p &= [2(\xi_1 - \xi_{1_0}) \frac{(\xi_1 - \xi_{1_1})(\xi_1 - \xi_{1_2}) \dots (\xi_1 - \xi_{1_P})}{(\xi_1 - \xi_{1_{p-1}})}]_{\xi_1=\xi_{1_{p-1}}}, \quad 2 < p \leq P+1. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Neste caso, escolheu-se ainda $d_{P+1} = 6$.

4.5.2 Problema de Auto-valor da Matriz de Massa Unidimensional

No caso anterior, apesar da esparsidade obtida nas matrizes de rigidez para quadrados e hexaedros, a concentração da massa unidimensional não resolve o problema de projeção unidimensional. Assim, uma segunda alternativa é escrever as matrizes de massa e rigidez na base de autovetores da matriz de massa. Desta forma, a matriz de massa torna-se diagonal (espectral) e resolve o problema de projeção unidimensional. Além disso, para os casos bi e tridimensionais basta tensorizar os autovetores unidimensionais.

Considere então a matriz de massa de um elemento unidimensional

$$[M^{1D}] = \int_{-1}^1 [N]^T [N] |J| d\xi_1.$$

Para um elemento reto, o Jacobiano é constante e a expressão anterior pode ser reescrita como

$$[M^{1D}] = \left(\int_{-1}^1 [N]^T [N] d\xi_1 \right) |J|.$$

Calcula-se, então, o problema de autovalor da matriz de massa local

$$[M^{1D}]\{u\}_i = \lambda_i \{u\}_i.$$

Sendo $[U]$ a matriz cujas colunas são os autovetores da matriz de massa e $[\Lambda]$ a matriz diagonal formada pelos respectivos autovalores, a matriz de massa espectral unidimensional é

$$[\hat{M}^{1D}] = [U]^T [M^{1D}] [U] = [\Lambda] \quad [U]^T [U] = [I].$$

Analogamente, a matriz de rigidez local expressa na base dos autovetores da matriz de massa local é dada por

$$[\hat{K}^{1D}] = [U]^T [K^{1D}] [U],$$

Com esse procedimento, a matriz de massa unidimensional tornou-se diagonal e a matriz de rigidez unidimensional apresentou novos coeficientes não-nulos como mostrado na Figura 4.12.

Dessa maneira, todos os elementos da malha estão representados na mesma base de au-

tovetores da matriz de massa local e o jacobiano funciona apenas como um fator de escala.

Para as funções nodais propostas anteriormente foi feita a normalização das funções internas no sentido de tornar os coeficientes internos da matriz de rigidez iguais a 1. Pela característica de colocação das derivadas dessas funções, basta dividir as funções internas pelas constantes de Lagrange e depois por $\sqrt{w_{p-1}^{2,0}}$. Feito isso, escreve-se as matrizes de massa e rigidez na base de autovetores da matriz de massa local. Por exemplo, para $P = 3$ têm-se, respectivamente, as seguintes matrizes de rigidez unidimensionais para as funções não normalizadas, não normalizadas transformada na base de autovetores da matriz de massa e normalizada transformada na base de autovetores da matriz de massa

$$[K] = \begin{bmatrix} 0,5000 & -0,5000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ -0,5000 & 0,5000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 83,5918 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 83,5918 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 83,5918 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 27,8639 \end{bmatrix},$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 10,9938 & 0,8994 & -14,3894 & -9,5742 & 9,3576 & -1,2113 \\ 0,8994 & 5,0049 & -1,2648 & -13,7612 & 3,3808 & 12,2387 \\ -14,3894 & -1,2648 & 29,6800 & 18,6300 & 10,0567 & -1,7021 \\ -9,5742 & -13,7612 & 18,6300 & 71,4140 & -1,4622 & 2,6863 \\ 9,3576 & 3,3808 & 10,0567 & -1,4622 & 80,9324 & -0,1189 \\ -1,2113 & 12,2387 & -1,7021 & 2,6863 & -0,1189 & 81,6143 \end{bmatrix},$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 1,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,8822 & 0,0000 & -0,1340 & 0,0000 & -0,2932 \\ 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & -0,1340 & 0,0000 & 0,8477 & 0,0000 & -0,3334 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & -0,2932 & 0,0000 & -0,3334 & 0,0000 & 0,2701 \end{bmatrix}.$$

Observa-se que a normalização resultou em uma matriz de rigidez mais esparsa.

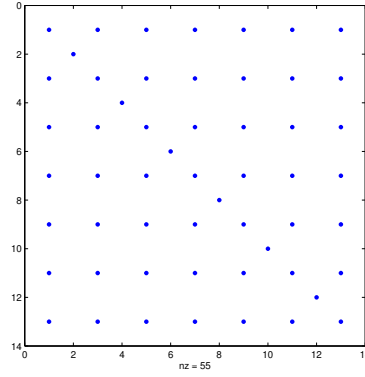


Figura 4.12: Perfil de esparsidade da matriz de rigidez unidimensional após a transformação usando autovetores da matriz de massa unidimensional para $P = 10$.

O mesmo procedimento foi aplicado para a base unidimensional de Jacobi. Analogamente, para $P = 3$ obtiveram-se, respectivamente, as seguintes matrizes

$$[K] = \begin{bmatrix} 0,5000 & -0,5000 & 0,0000 & 0,0000 \\ -0,5000 & 0,5000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,1667 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,4000 \end{bmatrix},$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 0,1577 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0376 \\ 0,0000 & 0,4472 & 0,1615 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,1615 & 0,9528 & 0,0000 \\ 0,0376 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0089 \end{bmatrix},$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 1,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,7305 & 0,0000 & 0,4437 \\ 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,4437 & 0,0000 & 0,2695 \end{bmatrix}.$$

Novamente, com a normalização obteve-se uma melhor esparsidade na matriz de rigidez unidimensional.

Uma vantagem deste procedimento é que, como pode-se escrever $[M^{2D}]$, $[K^{2D}]$, $[M^{3D}]$ e $[K^{3D}]$ dependendo das matrizes de massa e rigidez unidimensionais, uma vez encontrados os

autovalores e autovetores da matriz de massa unidimensional, basta tensorizá-los para encontrar as respectivas matrizes para quadrados e hexaedros.

Os números de coeficientes, condicionamentos numéricos e perfis de esparsidade para quadrados e hexaedros estão mostrados nas Figuras 4.13 a 4.18. Observa-se que as matrizes obtidas pelas funções propostas normalizadas na base de autovetores apresenta a mesma esparsidade que as matrizes usando as funções de Jacobi normalizadas na base de autovetores. Os condicionamentos numéricos também estão muito próximos. Para os quadrados, após o grau 11, a função de Jacobi fornece melhor esparsidade, mas para hexaedros as funções transformadas pelos auto-vetores são mais eficientes.

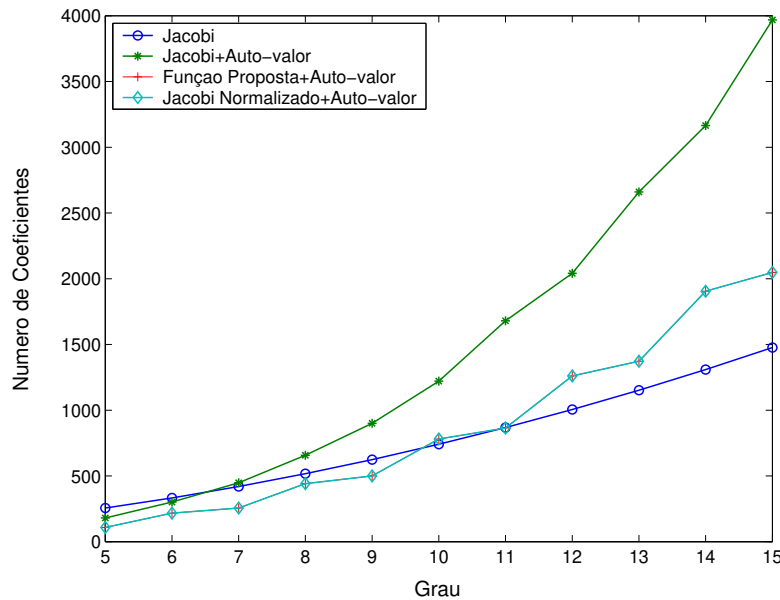


Figura 4.13: Número de coeficientes das matrizes de rigidez para quadrados após a transformação usando autovetores da matriz de massa unidimensional.

Um estudo mais aprofundado requer a análise da consideração do jacobiano constante do elemento na matriz de massa comparando os seus valores mínimo e máximo nos pontos de integração. Outro aspecto a ser considerado é que as condições de contorno devem ser tratadas como equações de restrição.

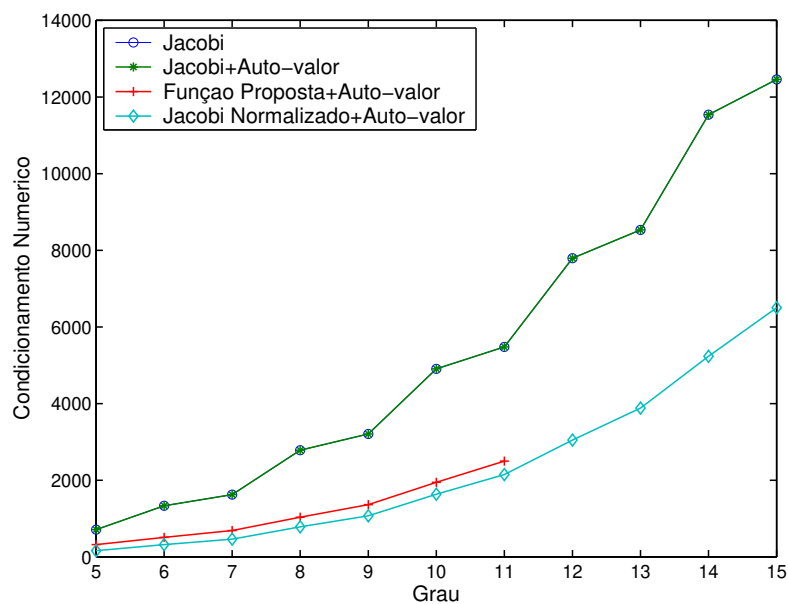
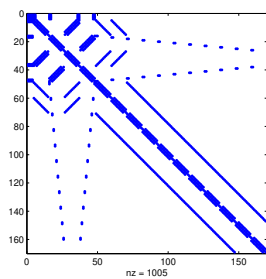
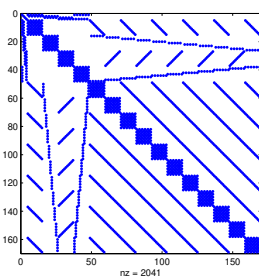


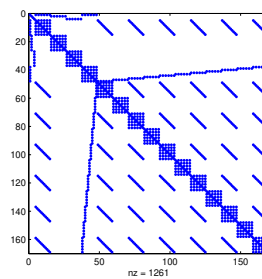
Figura 4.14: Condicionamento numérico das matrizes de rigidez para quadrados após a transformação usando autovetores da matriz de massa unidimensional.



(a) Jacobi.



(b) Jacobi transformada.



(c) Jacobi normalizada transformada = Funções propostas normalizada transformada.

Figura 4.15: Perfis de esparsidade das matrizes de rigidez para quadrados com bases de Jacobi usando autovetores da matriz de massa unidimensional.

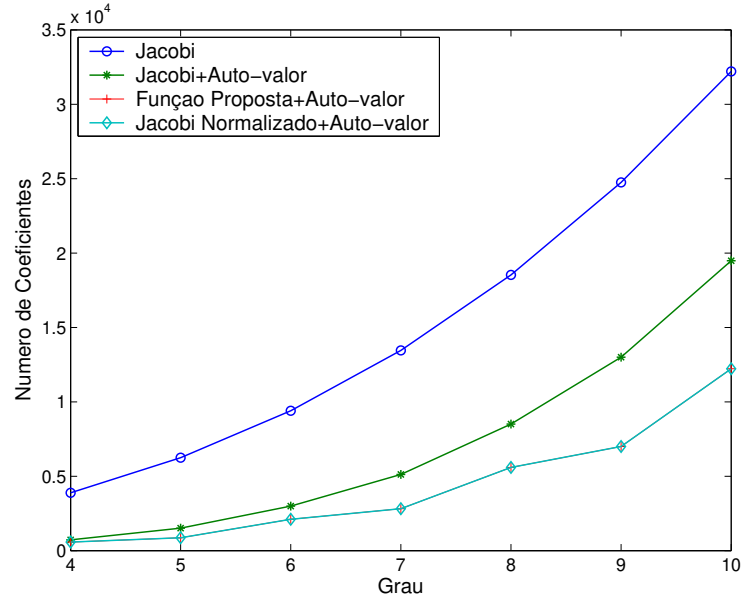


Figura 4.16: Número de coeficientes das matrizes de rigidez para hexaedros após a transformação usando autovetores da matriz de massa unidimensional.

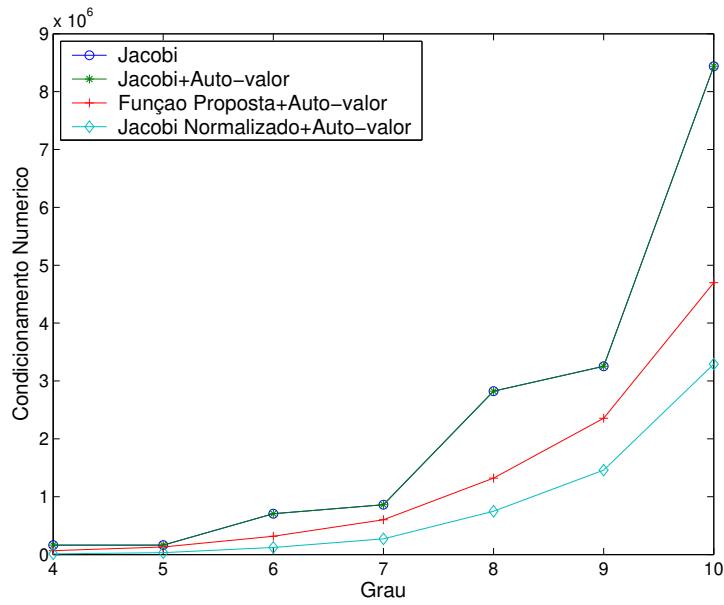


Figura 4.17: Condicionamento das matrizes de rigidez para hexaedros após a transformação usando autovetores da matriz de massa unidimensional.

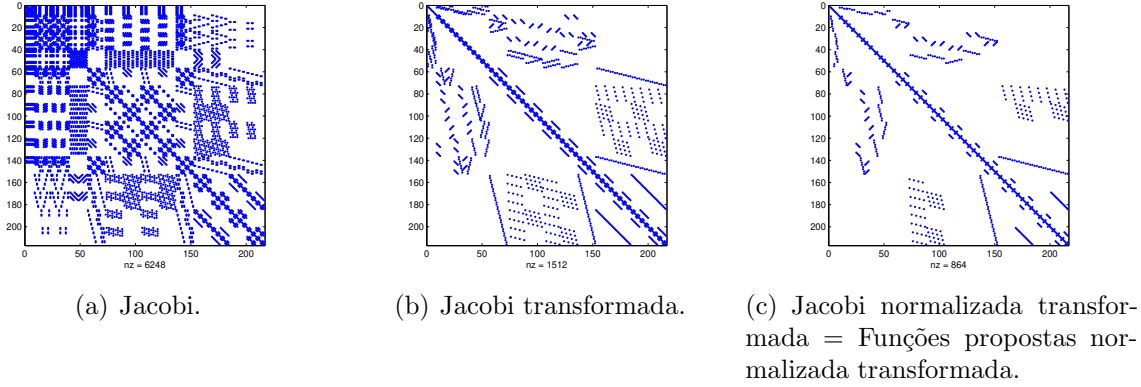


Figura 4.18: Perfis de esparsidade das matrizes de rigidez para hexaedros com bases de Jacobi usando autovetores da matriz de massa unidimensional.

4.6 Tensorização para Triângulos e Tetraedros

As funções de base de Sherwin & Karniadakis apresentadas no Capítulo 2 são usadas aqui para escrever as matrizes de massa e rigidez de triângulos e tetraedros como a combinação de matrizes unidimensionais, de forma análoga ao caso de quadrados e hexaedros.

Desta forma, pode-se construir os vetores unidimensionais

$$[N(\eta_1)] = \begin{bmatrix} \phi_0(\eta_1) \\ \phi_P(\eta_1) \\ \phi_p(\eta_1) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [N(\eta_2)] = \begin{bmatrix} \phi_{00}(\eta_2) \\ \phi_{P0}(\eta_2) \\ \phi_{0P}(\eta_2) \\ \phi_{p0}(\eta_2) \\ \phi_{oq}(\eta_2) \\ \phi_{Pq}(\eta_2) \\ \phi_{pq}(\eta_2) \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

Considerando $N_a(\xi_1, \xi_2) = N_{pq}(\xi_1, \xi_2)$ e $N_b(\xi_1, \xi_2) = N_{ij}(\xi_1, \xi_2)$, a expressão para o cálculo dos coeficientes da matriz de massa do elemento fica

$$\begin{aligned} m_{ab} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^{-\xi_2} N_a(\xi_1, \xi_2) N_b(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^{-\xi_2} N_{pq} N_{ij} d\xi_1 d\xi_2 \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \phi_p(\eta_1) \phi_{pq}(\eta_2) \phi_i(\eta_1) \phi_{ij}(\eta_2) |J| d\eta_1 d\eta_2, \end{aligned}$$

onde o jacobiano da transformação é dado por $|J| = \frac{(1 - \eta_2)}{2}$.

Assim,

$$\begin{aligned}
m_{ab} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \phi_p(\eta_1) \phi_{pq}(\eta_2) \phi_i(\eta_1) \phi_{ij}(\eta_2) \frac{(1-\eta_2)}{2} d\eta_1 d\eta_2 \\
&= \int_{-1}^1 \phi_p(\eta_1) \phi_i(\eta_1) d\eta_1 \int_{-1}^1 \phi_{pq}(\eta_2) \phi_{ij}(\eta_2) \frac{(1-\eta_2)}{2} d\eta_2 \\
&= \int_{-1}^1 [N(\eta_1)]^T [N(\eta_1)] d\eta_1 \int_{-1}^1 [N(\eta_2)]^T [N(\eta_2)] \frac{(1-\eta_2)}{2} d\eta_2 \\
&= m_{pi}^{1D}(\eta_1) m_{pqij}^{1D}(\eta_2).
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Logo, pode-se escrever os coeficientes da matriz de massa para os triângulos como a multiplicação dos respectivos coeficientes das matrizes de massa unidimensionais definidas.

Os coeficientes da matriz de rigidez dos triângulos para o problema de Poisson ficam

$$\begin{aligned}
k_{ab} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^{-\xi_2} \nabla N_a(\xi_1, \xi_2) \cdot \nabla N_b(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \\
&= \int_{-1}^1 \int_{-1}^{-\xi_2} \nabla N_{pq}(\xi_1, \xi_2) \cdot \nabla N_{ij}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \\
&= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \nabla N_{pq}(\eta_1, \eta_2) \cdot \nabla N_{ij}(\eta_1, \eta_2) \frac{(1-\eta_2)}{2} d\eta_1 d\eta_2.
\end{aligned}$$

Observe que

$$\nabla N_{pq}(\eta_1, \eta_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{pq}(\eta_1, \eta_2)}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial N_{pq}(\eta_1, \eta_2)}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{pq}(\eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial N_{pq}(\eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_2} \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial N_{pq}(\eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial N_{pq}(\eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_2} \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi_2} \end{bmatrix}$$

e análogo para $\nabla N_{ij}(\eta_1, \eta_2)$.

Assim,

$$\begin{aligned}
k_{ab} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\left(\phi'_p(\eta_1) \phi_{pq}(\eta_2) \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_1} + \phi_p(\eta_1) \phi'_{pq}(\eta_2) \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi_1} \right) \left(\phi'_i(\eta_1) \phi_{ij}(\eta_2) \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_1} + \phi_i(\eta_1) \phi'_{ij}(\eta_2) \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi_1} \right) \right. \\
&\quad + \left. \left(\phi'_p(\eta_1) \phi_{pq}(\eta_2) \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_2} + \phi_p(\eta_1) \phi'_{pq}(\eta_2) \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi_2} \right) \left(\phi'_i(\eta_1) \phi_{ij}(\eta_2) \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_2} + \phi_i(\eta_1) \phi'_{ij}(\eta_2) \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi_2} \right) \right] \\
&\quad \frac{(1-\eta_2)}{2} d\eta_1 d\eta_2.
\end{aligned}$$

Mas,

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_1} = \frac{2}{1-\eta_2}, \quad \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_2} = \frac{1+\eta_1}{1-\eta_2}, \quad \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi_1} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi_2} = 1.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
k_{ab} &= \int_{-1}^1 \phi'_p(\eta_1) \phi'_i(\eta_1) d\eta_1 \int_{-1}^1 \phi_{pq}(\eta_2) \phi_{ij}(\eta_2) \frac{2}{(1-\eta_2)} d\eta_2 \\
&\quad + \int_{-1}^1 \phi'_p(\eta_1) \phi'_i(\eta_1) (1+\eta_1)^2 d\eta_1 \int_{-1}^1 \phi_{pq}(\eta_2) \phi_{ij}(\eta_2) \frac{1}{2(1-\eta_2)} d\eta_2 \\
&\quad + \int_{-1}^1 \phi'_p(\eta_1) \phi_i(\eta_1) \frac{(1+\eta_1)}{2} d\eta_1 \int_{-1}^1 \phi_{pq}(\eta_2) \phi'_{ij}(\eta_2) d\eta_2 \\
&\quad + \int_{-1}^1 \phi_p(\eta_1) \phi'_i(\eta_1) \frac{(1+\eta_1)}{2} d\eta_1 \int_{-1}^1 \phi'_{pq}(\eta_2) \phi_{ij}(\eta_2) d\eta_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{-1}^1 \phi_p(\eta_1) \phi_i(\eta_1) d\eta_1 \int_{-1}^1 \phi'_{pq}(\eta_2) \phi'_{ij}(\eta_2) \frac{(1-\eta_1)}{2} d\eta_2 \\
& = \int_{-1}^1 [N'(\eta_1)][N'(\eta_1)]^T d\eta_1 \int_{-1}^1 [N(\eta_2)][N(\eta_2)]^T \frac{2}{(1-\eta_2)} d\eta_2 \\
& + \int_{-1}^1 [N'(\eta_1)][N'(\eta_1)]^T (1+\eta_1)^2 d\eta_1 \int_{-1}^1 [N(\eta_2)][N(\eta_2)]^T \frac{1}{2(1-\eta_2)} d\eta_2 \\
& + \int_{-1}^1 [N'(\eta_1)][N(\eta_1)]^T \frac{(1+\eta_1)}{2} d\eta_1 \int_{-1}^1 [N(\eta_2)][N'(\eta_2)]^T d\eta_2 \\
& + \int_{-1}^1 [N(\eta_1)][N'(\eta_1)]^T \frac{(1+\eta_1)}{2} d\eta_1 \int_{-1}^1 [N'(\eta_2)][N(\eta_2)]^T d\eta_2 \\
& + \int_{-1}^1 [N(\eta_1)][N(\eta_1)]^T d\eta_1 \int_{-1}^1 [N'(\eta_2)][N'(\eta_2)]^T \frac{(1-\eta_2)}{2} d\eta_2 \\
& = k_{pi}^{1D}(\eta_1) m_{pqij}^{1Da}(\eta_2) + k_{pi}^{1Da}(\eta_1) \frac{1}{4} m_{pqij}^{1Da}(\eta_2) + m k_{pi}^{1Da}(\eta_1) m k_{pqij}^{1Da}(\eta_2) \\
& + m k_{pi}^{1Db}(\eta_1) m k_{pqij}^{1Db}(\eta_2) + m_{pi}^{1D}(\eta_1) k_{pqij}^{1D}(\eta_2).
\end{aligned}$$

Assim, pode-se escrever os coeficientes da matriz de rigidez para os triângulos como a multiplicação dos respectivos coeficientes das matrizes de massa, rigidez e mista unidimensionais.

De forma análogo ao caso dos triângulos, é possível escrever os coeficientes das matrizes de massa e rigidez do problema de Poisson para os tetraedros como combinação linear dos coeficientes das matrizes unidimensionais.

A partir do processo anterior, procurou-se então calcular os autovalores das matrizes de massa obtidas em (4.14). Enquanto os autovalores da matriz de massa na direção η_1 foram todos positivos, muitos dos autovalores da matriz de massa em η_2 resultaram zero, mostrando que a mesma não é positiva-definida. Esse fato limitou o cálculo dos autovalores da matriz de massa do triângulo a partir dos autovalores das matrizes unidimensionais, como no caso do quadrado. Esse fato ainda merece maior investigação.

Capítulo 5

Conclusões e Trabalhos Futuros

No decorrer dos estudos da primeira parte do trabalho, onde são apresentados procedimentos uniformes para a construção de funções de forma do MEF baseados no produto tensorial unidimensional, observou-se a facilidade do cálculo dos coeficientes das matrizes de massa e rigidez usando a tensorização das funções unidimensionais. Para tanto, usou-se programas desenvolvidos no software *Mathematica* (Nogueira Jr. e Bittencourt, 2002) e desenvolveu-se um código em Matlab usando a tensorização, de forma a facilitar muito os testes com outras funções de forma unidimensionais, no sentido de esparsidade e condicionamento numérico das matrizes de massa e rigidez para o operador laplaciano.

Observou-se também que com a manipulação apropriada dos índices que denotam os polinômios unidimensionais em cada direção da tensorização, obtém-se bases hierárquicas ou não hierárquicas e com continuidade C^0 ou não entre elementos. Sabe-se que as funções nodais padrão de Lagrange para quadrados, hexaedros, triângulos e tetraedros têm uma continuidade C^0 natural, o que significa que a multiplicação por -1 não é necessária. Esta propriedade pode ser explicada devido à natureza tensorial dessas funções (Bittencourt, 2005). Mostra-se que o comportamento simétrico dos índices p, q, r e s das bases nodais e modais para triângulos e tetraedros implicam na continuidade global natural C^0 das funções de forma nas arestas ($p + q = P$) e faces ($p + q + r = P$) comum dos elementos que constituem a malha.

Para os elementos unidimensionais, quadrados e hexaedros, dentre as bases testadas, inclusive variando apenas as ponderações dos polinômios de Jacobi, a que apresentou melhor esparsidade e condicionamento numérico foi a base de Jacobi com $\alpha = \beta = 1$. Já para triângulos

e tetraedros, por causa da coordenada dependente e do limite de integração não-fixo, uma nova base foi proposta e analisada quanto à esparsidade e condicionamento numérico das matrizes de massa e rigidez locais. Assim, foram feitas tabelas com as ponderações dos polinômios de Jacobi que fornecem melhor esparsidade para cada bloco das matrizes. Na Base 1, que é a base de Jacobi, a ponderação que fornece melhor esparsidade é $\alpha = 4$ e $\beta = 2$ (triângulos) e $\alpha = 5$ e $\beta = 2$ (tetraedros) para a matriz de massa, $\alpha = 3$ e $\beta = 1$ (triângulos) e $\alpha = 4$ e $\beta = 1$ (tetraedros) para a matriz de rigidez usando o operador laplaciano. Na Base 2, que é a nova base proposta, que tem um monômio em uma direção e polinômios de Jacobi nas outras direções, a ponderação que fornece melhor esparsidade é $\alpha = 6$ e $\beta = 2$ (triângulos) e $\alpha = 5$ e $\beta = 2$ (tetraedros) para a matriz de massa, $\alpha = 5$ e $\beta = 1$ (triângulos) e $\alpha = 4$ e $\beta = 1$ (tetraedros) para a matriz de rigidez usando o operador laplaciano. Com essas ponderações, mesmo que em alguns casos as matrizes usando a Base 2 ficaram mais esparsas que as matrizes usando a Base 1, a simetria rotacional é perdida, o que impede que apenas uma parte dos coeficientes sejam calculados. Na análise do condicionamento numérico dessas matrizes, acrescentou um fator 2 conforme mostrado na equação (2.63) e varreu-se as ponderações α e β de 0 a 10. O melhor resultado apareceu para $\alpha = 0$ e $\beta = 2$. Para os condicionamentos numéricos também foram analisados os números após a aplicação do complemento de Schur nas matrizes de massa e rigidez.

Usando os programas construídos em Matlab, observou-se uma eficiência muito grande no cálculo dos coeficientes das matrizes de massa e rigidez quando usam-se diferentes regras de quadratura ao invés do cálculo da integral analítica. Tanto para as funções de interpolação nodais, como para as modais, o mesmo processo de integração pode ser aplicado, principalmente a tensorização dos pontos e pesos de integração para elementos bi e tridimensionais. Assim, o processo foi aplicado para a matriz toda, no caso das funções nodais, já que essas matrizes são densas e apenas para os coeficientes diferentes de zero no caso das funções modais.

Foi feito um estudo para a escolha dos pontos de integração ótimos de forma a diminuir ao máximo o grau do integrando. Determina-se o número mínimo de pontos de integração necessários para a integração exata dos coeficientes, usando as regras de quadratura gaussianas de Gauss-Jacobi (GJ), Gauss-Lobatto-Jacobi (GLJ) e Gauss-Radau-Jacobi (GRJ). Estudou-se primeiramente o caso unidimensional, introduzindo uma matriz chamada de mista, já que seus coeficientes são calculados usando as funções de forma e suas respectivas derivadas.

A seguir, mostrou-se que, para os quadrados e cubos, as matrizes de massa, de rigidez para o operador laplaciano e de rigidez para o estado plano e geral de tensão, basta tensorizar os pontos já escolhidos. Um processo análogo foi apresentado para triângulos conforme originalmente introduzido em (Bittencourt, 2005) para a matriz de massa e estendido para a matriz de rigidez do problema de Poisson, para a matriz de massa e rigidez dos tetraedros. A tensorização dos pontos foi feita através do mapeamento bidirecional e uma alternativa para uniformizar os pesos escolhidos foi fixar ponderações que atendessem a todo o bloco. Desta forma, a quantidade máxima de pontos necessários para a integração exata dos coeficientes selecionando as ponderações dos polinômios de Jacobi sempre é menor que a quantidade de pontos de integração necessários usando Gauss-Legendre ou a base de Sherwin-Karniadakis. É apenas comparável com os pontos de Dunavant, no caso da matriz de rigidez dos triângulos. No entanto, o procedimento de Dunavant não é tensorizável. Como o número de pontos de integração consistente para graus mais altos cresce rapidamente, torna-se interessante analisar o efeito da subintegração em problemas com solução analítica.

Uma outra idéia foi encontrar funções de forma que fornecessem, ao mesmo tempo, as matrizes de massa e rigidez quase diagonais. A primeira idéia foi dobrar o grau de todos os monômios do polinômio de Lagrange e, desta forma, ter o polinômio e sua derivada nas mesmas raízes. Contudo, o problema deste procedimento foi aumentar muito o grau da função de forma e não ter pontos suficientes para a integração numérica por colocação. Para o grau fixo 4, até foi possível encontrar funções internas que tivessem as mesmas raízes que as suas respectivas derivadas, mas não foi possível estendê-lo para os próximos graus.

Além disso, ainda precisava-se garantir que as funções internas fossem zero nos dois extremos (para eliminar o termo do contorno quando se aplica a forma fraca na matriz de rigidez) e que as funções de vértice fossem unitárias no seu ponto de colocação (o primeiro vértice igual a 1 no primeiro ponto de integração e o último vértice igual a 1 no último ponto de integração), para garantir a continuidade C^0 dos elementos.

Assim, para construir uma matriz de rigidez espectral para o problema de Poisson nodal similar à matriz de massa proposta por (Karniadakis e Sherwin, 1999), novas funções de forma nodais unidimensionais são propostas. Para o grau P , a base proposta é composta por $P + 3$ funções de interpolação de grau $P + 2$ cada uma, de forma a completar o espaço. As funções

$N_p(\xi_1)$, indicadas em (4.5), são tais que as derivadas $N'_p(\xi_1)$ das funções internas tenham a propriedade de colocação.

Essas funções fornecem uma matriz de rigidez unidimensional quase diagonal. Apresentam, ainda, melhor condicionamento do que as matrizes de rigidez obtidas usando as bases de Lagrange e Jacobi. Mostrou-se neste trabalho que, para construir matrizes locais de massa e rigidez bi e tridimensionais basta tensorizar as matrizes unidimensionais. Contudo, a tensorização dessas matrizes não permitiu obter matrizes de rigidez diagonais para quadrados e hexaedros. As matrizes não são diagonais pelo fato que a matriz de massa unidimensional é densa.

Duas técnicas para encontrar matrizes diagonais de massa do elemento unidimensional são discutidas. A primeira delas apresenta uma maneira de concentrar a massa unidimensional e, apesar da simplicidade de cálculo, quando testada na solução do problema de Poisson para quadrados, a solução aproximada foi satisfatória, mas apenas para problemas com condições de contorno homogêneas.

Em outro processo para tornar a matriz de massa unidimensional quase diagonal escreveu-se as matrizes de massa e rigidez na base de autovetores da matriz de massa local. Nesse caso, considera-se o Jacobiano do elemento constante. Dessa maneira, todos os elementos da malha estão representados na mesma base de autovetores da matriz de massa local e o jacobiano funciona apenas como um fator de escala. Com esse procedimento, a matriz de massa unidimensional tornou-se diagonal e a matriz de rigidez unidimensional apresentou novos coeficientes não-nulos. Contudo, as matrizes de rigidez para quadrados e hexaedros ficaram mais esparsas. Outra vantagem deste procedimento é que, como pode-se escrever $[M^{2D}]$, $[K^{2D}]$, $[M^{3D}]$ e $[K^{3D}]$ dependendo das matrizes de massa e rigidez unidimensionais, uma vez encontrados os autovetores e autovetores da matriz de massa unidimensional, basta tensorizá-los para encontrar as respectivas matrizes para quadrados e hexaedros.

Um estudo mais aprofundado requer a análise da contribuição do jacobiano do elemento na matriz de massa de tal forma a uniformizá-lo de acordo com seu valor mínimo e máximo. Outro aspecto a ser considerado é que as condições de contorno devem ser tratadas como equações de restrição.

O mesmo procedimento foi aplicado para a base de Jacobi. Os perfis de esparsidade e

condicionamentos numéricos foram analisados e observou-se, então, que as matrizes obtidas pelas funções propostas normalizadas na base de autovetores apresenta a mesma esparsidade que as matrizes usando as funções de Jacobi normalizadas na base de autovetores. Os condicionamentos numéricos também estão muito próximos.

Por causa do acoplamento das coordenadas baricêntricas das funções de base para triângulos e tetraedros (Base 1 e 2), é possível tensorizar as funções, mas não as matrizes de massa e rigidez. Assim, mostra-se como escrever as matrizes de massa e rigidez de triângulos e tetraedros através de matrizes unidimensionais usando a base de Sherwin e Karniadakis, que usa coordenadas colapsadas. A partir disso, procurou-se então calcular os autovalores das matrizes de massa unidimensionais. Enquanto os autovalores da matriz de massa na direção η_1 foram todos positivos, muitos dos autovalores da matriz de massa em η_2 resultaram zero, mostrando que a mesma não é positiva-definida. Esse fato limitou o cálculo dos autovalores da matriz de massa do triângulo a partir dos autovalores das matrizes unidimensionais, como no caso do quadrado. Esse fato ainda merece maior investigação.

A partir deste trabalho pretende-se: continuar os testes para encontrar uma forma eficiente de diagonalizar as matrizes de massa unidimensionais; encontrar uma base para triângulos e tetraedros nas quais as matrizes bi e tridimensionais possam ser construídas pela tensorização das matrizes unidimensionais positivas-definidas; aplicar as equações de restrição ao problema de Poisson a nível de elemento; estudar a influência do jacobiano constante do elemento nas matrizes unidimensionais; aplicar as técnicas apresentadas na solução de problemas usando métodos iterativos, incluindo o caso de elementos distorcidos.

Ainda como continuação deste trabalho é sugerida a aplicação das bases propostas em problemas de Poisson e elasticidade lineares e não-lineares usando os códigos construídos em MatLab.

A partir das referências citadas na seção 1.2, comprova-se que os métodos de alta ordem podem ser empregados com sucesso em problemas estruturais não-lineares. Em geral, empregam-se funções de interpolação baseados em polinômios de Jacobi, sendo Legendre e Chebyshev casos particulares. Uma das desvantagens apontadas para os métodos de alta ordem está na maior densidade das matrizes locais e um condicionamento numérico inferior quando comparado com as respectivas matrizes de baixa ordem. Mas mesmo assim, a efetividade dos métodos de alta

ordem tem se mostrado superior mesmo em termos de eficiência computacional.

O uso adequado das ponderações dos polinômios de Jacobi permite a obtenção de matrizes de massa e rigidez esparsas. Neste trabalho, procurou-se ir mais adiante, obtendo-se matrizes de massa e rigidez mais esparsas. Foi possível mostrar ainda que as matrizes elementares 2D e 3D podem ser obtidas pela combinação dos coeficientes das matrizes unidimensionais. Isso simplifica bastante a complexidade dos códigos e do cálculo do problema de autovalor das matrizes locais. Procedimentos eficientes de integração numérica foram também desenvolvidos.

Referências Bibliográficas

- Abouchakra, R. Hierarchal tetrahedral elements using orthogonal polynomials. In: *1996 Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering (CCECE'96)*, v. 18, p. 525–528, Calgary. part 2 (of 2), 1996.
- Adjerid, S., Aiffa, M. , Flaherty, J. Hierarchical finite element bases for triangular and tetrahedral elements. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 190p.2925–2941, 2001.
- Arciniega, R. A., Reddy, J. N. Tensor-based finite element formulation for geometrically nonlinear analysis of shell structures. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 196p.1048–1073, 2007.
- Arnold, D. N., Awanou, G. , Winther, R. Finite elements for symmetric tensors in three dimensions. *Mathematics of Computation*, (Submitted), 2007.
- Arnold, D. N., Mukherjee, A. , Pouly, L. Locally adapted tetrahedral meshes using bisection. *Journal of Scientific Computing*, v. 22p.431–448, 2001.
- Bittencourt, M. Fully tensorial nodal and modal shape functions for triangles and tetrahedra. *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 63, n.2, p.1530–1558, 2005.
- Bittencourt, M., Vazquez, M. G. , Vazquez, T. G. Construction of shape functions for the h – and p – versions of the fem using tensorial product. *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 71, n.5, p.529–563, 2007a.
- Bittencourt, M., Vazquez, T. , Jr., A. N. High-order finite elements applied to structural elastic problems. In: *MecSol 2007 - Solid Mechanics in Brazil*, São Paulo. Associação Brasileira de Ciências Mecânicas, 2007b.
- Bittencourt, M. L. *Introdução ao Método de Elementos Finitos Aplicado à Análise Estrutural*. Edição Preliminar, Campinas, 1991.
- Blyth, M. G., Pozrikidis, C. A lobatto interpolation grid over the triangle. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 2005.

- Canuto, C., Quarteroni, A. Approximation results for orthogonal polynomials in sobolev spaces. *Math. Comput.*, 1982.
- Carnevali, P., Morris, R. B., Tsuji, Y. , Taylor, G. New basis functions and computational procedures for p -version finite element analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 36p.3759–3779, 1993.
- Cedric, M. *Um Sistema de Refinamento h e p Adaptativo Utilizando Elementos Finitos Hierárquicos Multidimensionais*. Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2000., Tese (Doutorado).
- Chihara, T. S. *An Introduction to Orthogonal Polynomials*. Mathematics and its Applications Series. Gordon and Breach - Science Publishers, New York, 1978.
- Cook, R., Malkus, D. , Plesha, M. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, USA, third ed., 1991.
- Dunavant, D. A. High degree efficient symmetrical gaussian quadrature rules for the triangle. *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, v. 21p.1129–1148, 1985.
- Edgar, N. B., Surana, K. S. On the conditioning number and the selection criteria for p -version approximation functions. *Computers & Structures*, v. 60, n.4, p.521–530, 1996.
- Heisser, U., Hartmann, S., Düster, A. , Yosibash, Z. On volumetric locking-free behavior of p -version finite elements under finite deformation. *Commun. Numer. Engng.*, (in press), 2007.
- Holzer, S. M., Yosibash, Z. The p -version of the finite element method in incremental elasto=plastic analysis. *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 39, 1996.
- Nogueira Jr., A. *Formulação p Do Método de Elementos Finitos Em Problemas de Elasticidade Linear e Não-Linear Com Malhas 3D Não-Estruturadas e Em Métodos Multigrid Algébricos*. Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2002., Tese (Doutorado).

- Nogueira Jr., A., Bittencourt, M. Hierarchical basis functions for the p -version of the finite element method (in portuguese). *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, v. 17, n.1, p.37–59, 2001.
- Nogueira Jr., A., Bittencourt, M. Algebraic multigrid schemes for the p -version of the finite element method applied to 3D elliptical problems. In: *Proceedings of the 5th World Congress on Computational Mechanics (WCCM V)*, Vienna - Austria. Technical University of Vienna and IACM, 2002.
- Nogueira Jr., A., Bittencourt, M. Spectral/ hp finite elements applied to linear and non-linear structural elastic problems. *Latin American Journal of Solids and Structures*, , n.4, p.61–85, 2007.
- Karniadakis, G. E., Sherwin, S. J. *Spectral/ hp Element Methods for CFD*. Oxford University Press, Oxford, 1999.
- Maitre, J., Pourquier, O. About the conditioning of matrices in the p -version of the finite element method for second order elliptic problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 63p.341–348, 1995.
- Mandel, J. Hierarchical preconditioning and partial orthogonalization for the p -version finite element method. In: Chan, T., Glowinski, R. , Windlund, O., (Eds.), *Proceedings of the 3th International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, p. 141–156, Huston, Texas. SIAM, 1990a.
- Mandel, J. Two-level domain decomposition preconditioning for the p -version finite element method in three dimensions. *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, v. 29p.1095–1108, 1990b.
- Patera, A. A spectral method for fluid dynamics: Laminar flow in a channel expansion. *Journal of Computational Physics*, v. 54p.468, 1984.
- Peano, A. *Hierarchies of conforming finite elements*. Washington University - St. Louis, 1975., Dissertação (Mestrado).
- Prabhakar, V., Reddy, J. N. Orthogonality of modal basis in hp finite element models. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, v. 54p.1291–1312, 2007.

- Rossow, M., Katz, I. Hierarchical finite elements and precomputed arrays. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, v. 12p.977–999, 1993.
- Sherwin, S. J., Karniadakis, G. A new triangular and tetrahedral basis for high-order (hp) finite element methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 38p.3775–3802, 1995.
- Szabó, B. A., Babuška, I. *Finite Element Analysis*. Wiley Interscience, New York, 1991.
- Vazquez, M. *Construção de funções de interpolação para as versões h e p do MEF através de produto tensorial*. Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2004., Dissertação (Mestrado).
- Vazquez, T. *Funções de Base e Regras de Integração Tensorizáveis para o MEF de Alta Ordem*. Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2008., Tese (Doutorado).
- Vijayakar, S., Busby, H. , Houser, D. Finite element analysis of quasi-prismatic bodies using Chebyshev polynomials. *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, v. 24p.1461–1477, 1987.
- Vu, T. H., Deeks, A. J. Use of higher-order shape functions in the scaled boundary finite element method. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, v. 65p.1714–1733, 2006.
- Webb, J. P., Abouchakra, R. Hierarchical triangular elements using orthogonal polynomials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 38p.245–257, 1995.
- Yosibash, Z. Finite element stress extraction by the complementary energy principle. *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 40, 1997.
- Yosibash, Z., Hartmann, S., Heisser, U., Düster, A., Rank, E. , Szanto, M. Axisymmetric pressure boundary loading for finite deformation analysis using p-fem. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 196, 2007.
- Zienkiewicz, O., Kelly, D., de S.R. Gago, J. , Babuška, I. Hierarchical finite element approaches, error estimates and adaptive refinement. In: *MAFELAP*, p. 313–346, Brunel University, 1981.

Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L. *The Finite Element Method*, v. 1. McGraw-Hill International Editions, fourth ed., 1989.