

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**Uma Contribuição ao Estudo de  
Não-Linearidades na Modelagem e  
Controle de Manipuladores**

autor: Helder Anibal Hermini  
Orientador: Prof. Dr. João Maurício Rosário

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA  
TESE DEFENDIDA POR Helder Anibal  
Hermini E APROVADA PELA  
**COMISSÃO** JULGADORA EM 11/03/96.

João Maurício Rosário  
ORIENTADOR

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO**

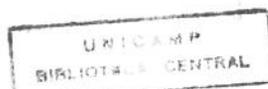
# **Uma Contribuição ao Estudo de Não-Linearidades na Modelagem e Controle de Manipuladores**

Autor: Helder Anibal Hermini  
Orientador: João Maurício Rosário

Curso: Engenharia Mecânica  
Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Dissertação de mestrado apresentado à comissão de Pós- Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica .

Campinas, 1996  
S.P.- Brasil



UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	TUNICAMP
	H428c
V. Ex.	
TIPO BC/	28491
PROC.	667/96
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	11/09/96
N.º CPD	em 000920 45-0

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

H428c Hermini, Helder Anibal  
Uma contribuição ao estudo de não-linearidades na modelagem e controle de manipuladores / Helder Anibal Hermini.--Campinas, SP: [s.n.], 1996.

Orientador: João Maurício Rosário.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Análise funcional não-linear. 2. Servomecanismos  
3. Modelos matemáticos. 4. Métodos de simulação.  
I. Rosário, João Maurício. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

## **Dedicatória:**

Dedico este trabalho à meu pai.

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**Uma Contribuição ao Estudo de  
Não-Linearidades na Modelagem e  
Controle de Manipuladores**

Autor: **Helder Anibal Hermini**  
Orientador: **João Maurício Rosário**



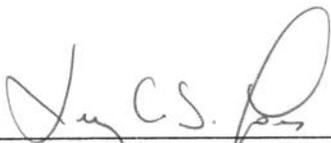
---

**Prof. Dr. João Maurício Rosário , Presidente  
Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP**



---

**Prof. Dr. José Manoel Balthazar  
Universidade Estadual Paulista em Rio Claro - UNESP**



---

**Prof. Dr. Luís Carlos Sandoval Góes  
Instituto de Tecnologia da Aeronáutica - ITA**

Campinas, 11 de março de 1996

## **Agradecimentos**

Este trabalho não poderia ser terminado sem a ajuda de diversas pessoas às quais presto minha homenagem:

A meus pais e irmãos pelo incentivo em todos os momentos da minha vida.

Ao meu orientador Professor João Maurício Rosário, que me mostrou os caminhos a serem seguidos.

Ao grande amigo Professor José Manoel Balthazar pela dedicação e boa vontade dispensadas sem limite em todas as etapas, contribuindo incansavelmente para a realização do trabalho.

Aos amigos Roberto Hideaki Tsumaki e Samuel Corrêa Bueno

A todos os professores e colegas do Departamento de Projeto Mecânico-UNICAMP, que ajudaram de forma direta e indireta na conclusão deste trabalho.

*Os poderes da Mente são como raios dispersos de luz. Concentrados, iluminam.*

*Este é o nosso único meio para alcançar o conhecimento*

## Sumário

<b>Posicionamento do problema.....</b>	<b>1</b>
--	----------

### Capítulo 1

#### Generalidades sobre sistemas não-lineares

1.1 Sistemas de Controle Não-Lineares.....	6
1.2 Abordagens usadas na análise e projeto de sistemas de controle N-L.....	7
1.3 Limitação dos métodos lineares.....	7
1.4 Não-Linearidades mais freqüentemente encontradas em Servo-Sistemas..	11
1.5 Classificação da Não-Linearidade.....	13
1.6 Comentários Finais.....	15

### Capítulo 2

#### Regimes Transitórios de Servo-Mecanismos com Elemento Não Linear

2.1 Regime transitório de um Servo-Sistema com On-Off ideal .....	20
2.2 Regime transitório de um Servo-Sistema com On-Off e Histeresis.....	21
2.3 Regime transitório de um Servo-Sistema com On-Off e Zona Morta.....	22
2.4 Aproximação da Harmônica Equivalente .....	24
2.5 Função de Transferência Generalizada. Casos Particulares.....	26

2.6	Ganho Equivalente de Blocos Não-Lineares Usuais .....	29
2.7	Aproximação da Equivalente Harmônica.....	34
2.8	Estabilidade e Oscilações Livres .....	35
2.8.1	Análise de estabilidade de um Servo-Sistema com On-Off.....	37
2.8.2	Influência do limiar e da histeresis em Servo-Sistemas por On-Off.....	38
2.9	Análise de Plano de Fase.....	41
	de Sistemas de Controle Não-Linear	
2.9.1	Sistemas de Controle com Ganhos Não-Lineares.....	42
2.10	Comentários finais e Conclusões Parciais.....	52

### Capítulo 3

#### Descrição Matemática de Manipuladores Robóticos

3.1	Descrição dos Elementos da Dinâmica de um Manipulador.....	56
3.1.1	Modelo de um Motor Elétrico Corrente contínua C.C. ....	57
3.1.2	Modelagem do Conjunto Mecânico (transmissão+carga) .....	59
3.2	Representação de Sistemas Mecânicos de Segunda Ordem.....	60
3.3	Modelo Dinâmico de um Robô.....	63
3.4	Comentários Finais.....	66

### Capítulo 4

#### Simulação do Modelo do Servo-Mecanismo

4.1	Simulação do Sistema de Segunda Ordem.....	67
	(conjunto motor-transmissão-carregamento)	
	utilizando Controladores Clássicos.	
<b>Caso 1:</b>	Controle Proporcional, $P=30$ ;	70
<b>Conclusões</b>	sobre a ação de controle proporcional.....	72
<b>Caso 2:</b>	Controle Proporcional + Integral, $P=30$ , $I = 1.5$ .....	73
<b>Conclusões</b>	sobre a ação de controle Proporcional + Integral.....	75
<b>Caso 3:</b>	Controle Proporcional + Derivativo, $P=30$ , $D= 1.5$ ;	76

<b>Conclusões</b> sobre a ação de controle Proporcional + Derivativa.....	78
<b>Caso 4:</b> Controle Proporcional + Integral +Derivativo, .....	79
P=30, I=1.5, D=1.5.	
<b>Conclusões</b> sobre a ação de controle Proporcional .....	81
+ Integral +Derivativa	
<b>4.2-</b> Simulação do Sistema de Segunda Ordem.....	82
(conjunto motor-transmissão-carregamento)	
utilizando Controladores Não-Lineares.	
<b>4.2.1 -</b> Controle Não-Linear On-Off.....	84
<b>Caso 1:</b> Controle por Relê (tabela 4.2).....	85
<b>Conclusões</b> sobre a ação de controle On-Off.....	84
<b>4.2.2 -</b> Controle Não-Linear On-Off+Zona Morta.....	87
<b>Caso 2:</b> Controle por Relê com Zona-Morta (tabela 4.2).....	88
<b>Conclusões</b> sobre a ação de controle On-Off + Zona- Morta.....	90
<b>4.2.3 -</b> Controle Não-Linear On-Off+Histeresis.....	90
<b>Caso 3:</b> Controle por Relê com Histeresis (tabela 4.2).....	92
Conclusões sobre a ação de controle On-Off + Histeresis.....	91
<b>4.2.D -</b> Controle Não Linear On-Off + Histeresis +Zona Morta.....	94
<b>Caso 4:</b> Controle por Relê + Histeresis+ Zona-Morta.....	95
Conclusões sobre a ação de controle On-Off+ Histeresis+ Zona-Morta .....	94
<b>4.3 -</b> Conclusões Finais.....	97
 <b>Conclusões e trabalhos futuros</b> .....	98

## **Adendo - Modelagem Matemática de Estruturas de Varredura**

<b>1.</b> Modelagem das Entradas .....	102
<b>2.</b> Modelagem Matemática de uma estrutura de rastreamento .....	103
<b>3.</b> Equações de Estado do motor C.C.....	106
<b>4.</b> Acoplamento do Atuador A Estrutura do Sistema Dinâmico- Caso Geral.....	107
<b>5.</b> Descrição Matemática da Função Forçante.....	111
<b>6.</b> A função Forçante .....	88

7. Sistema Motor-Elo Acoplados .....	93
Conclusões e trabalhos futuros.....	96

<b>Referências Bibliográficas</b> .....	97
---	----

## **Apêndice A**

### **Generalidades Sobre Controladores Lineares**

Desenvolvimento de um Projeto de controle.....	122
Regras de Álgebra e Construção de Diagramas de Blocos.....	123
Modelos Matemáticos de Sistemas Físicos .....	125
Ações de Controle Básicas e Controles Automáticos Industriais.....	126
Ação de Controle de duas posições.....	126
Ação de Controle Proporcional .....	126
Ação de Controle Derivativa .....	127
Ação de Controle Integral.....	128
Ação de Controle Proporcional Mais Integral .....	129
Ação de Controle Proporcional Mais Derivativa .....	130
Ação de Controle Proporcional Mais Derivativa Mais Integral.....	130
Obtenção da Ação de Controle Derivativa e Integral.....	131

## **apêndice B**

### **Descrição Matemática de Manipuladores Mecânicos**

Modelagem Matemática de um Manipulador de N elos.....	132
---	-----

## Lista de figuras

### Posicionamento do Problema

**fig.1** - Agrupamento de todos os elementos lineares.....3  
m um bloco linear e de todos elementos não-lineares em outro .

### Capítulo 1

**fig.1.1** -Um modelo linear ( à esquerda ) negligência.....8  
limiar, que condiciona de fato a precisão estática.

**fig. 1.2** -(a) resposta de uma oscilação harmônica à uma .....9  
experiência inicial : oscilação das amplitudes dependem  
as condições iniciais  
(b) servo-sistema que "pulsa" a tendência transitória  
tendendo na direção de uma oscilação de frequência de  
amplitude fixa.

**fig. 1.3** - dependência do domínio do tempo.....10

**fig. 1.4** - Não linearidades Usuais.....11

<b>fig.1.5</b> - Diagrama funcional geral de servo-sistema.....	13
possuidor de um bloco não linear (de entrada $\varepsilon$ e saída $w$ )	
<b>fig. 1.6</b> - representação pelos modos , ou forma canônica.....	15
de Lur'e (caso dos modos simples, com $m \leq n$ )	
<b>fig.1.7</b> - representação pelos modos.....	16
(caso de um modo $\lambda_i$ múltiplo com $m \leq n$ )	

## Capítulo 2

<b>fig. 2. 1</b> - resposta unitária do bloco linear $q(t) = L^{-1}[L(p)/p]$ .....	19
<b>fig. 2.2</b> - representação da função (2.1) como.....	20
superposição de duas funções degrau	
<b>fig.2.3</b> - resposta de um servo-sistema por .....	21
on-off ideal : oscilação limitada	
<b>fig.2.4</b> - caso onde $q_i(t)$ é um degrau de velocidade.....	22
<b>fig.2.5</b> - resposta de um servo-sistema por on- off com .....	23
histeresis : a histeresis aumentando a amplitude da oscilação limite .	
<b>fig.2.6</b> - resposta de um servo sistema por on-off com zona morta .....	24
<b>fig.2.7</b> - Zona morta eliminando a oscilação limite.....	24
<b>fig.2.8</b> - resposta de um servo-sistema on-off.....	25
com zona morta e histeresis	

<b>fig. 2.9</b> - entrada do bloco não-linear da primeira harmônica.....	26
.de $s(t)$ .A diferença com o caso linear é duplo	
<b>fig.2.10</b> - família de linhas de transferência,em função.....	27
da amplitude de entrada	
<b>fig.2.11</b> - saída em regime permanente $w(t)$ em forma.....	29
de uma função divisora	
<b>fig. 2.12-</b> ganho equivalente real $N(X1) B(x1)$ .....	30
de um elemento de on-off com zona morta $\Delta$	
<b>fig. 2.13</b> - lugar crítico $c(x1) = - 1 /B(x1)$ de um elemento de .....	31
máximos e mínimos com zona morta $\Delta$	
Coordenadas (a) de Nyquist (b) de Black.	
<b>fig.2.14</b> - ganho equivalente real $N(x_1) = B(x_1)$ de.....	31
um elemento por on-off com zona morta $\Delta$ .	
Coordenadas reduzidas : abscissas $x_1 / \Delta$ ;ordenada $B\Delta / M$ .	
<b>fig.2.15</b> - resposta $w(t)$ do relê à uma senóide.....	32
$x = x_1 \text{ sen } \omega t$	
<b>fig. 2.16</b> - ganho complexo equivalente $N(x_1) = B(x_k) \exp [j\Psi(x_1)]$ .....	32
de um elemento com on-off , zona morta $\Delta$ e histeresis $h$ .	
<b>fig.2.17</b> - lugar crítico de um elemento on-off com limiar $\Delta$ e histeresis $h$ .....	33
<b>fig.2.18</b> - Modelo equivalente de um servo-sistema.....	34
<b>fig. 2.19</b> - Critério do reverso para um servo-.....	34
sistema linear de função de transferência em	
malha aberta $KG(p)$ .	

<b>fig.2.20</b> - Oscilação limite estável (a posição do ponto crítico traçada em linha descontínua correspondendo a amplitudes $\varepsilon_1$ da estabilidade .	36
<b>fig.2.21</b> - Andamento de oscilação limite.	36
<b>fig.2.22</b> - limite da estabilidade $C'$ e oscilação limite estável $C''$	36
<b>fig. 2.23</b> - Casos de servo-sistema com e sem limiar.	37
<b>fig. 2.24</b> - Ausência do limiar gera sempre oscilação limitada.	37
<b>fig.2.25(a) e 2.25 (b)</b> - Se houver um limiar, a oscilação limitada desaparece desde que ele exceda um certo valor.	38
<b>fig.2.26</b> - Os retardas aumentando a amplitude e diminuindo a freqüência da oscilação limite	38
<b>fig.2.27</b> - O aumento da folga do limiar elimina a interseção com o lugar crítico, eliminando o fenômeno da oscilação limitada	38
<b>fig. 2.28</b> - A histeresis diminui a freqüência e aumenta a amplitude da oscilação limitada.	39
<b>fig2.29</b> - (a) Sistema não-linear, (b) curva característica de entrada-saída do elemento de ganho não-linear	40
<b>fig. 2.30</b> - Gráficos de plano de fase de sistemas não-lineares. (a) Caso sobre-amortecido ( $m=ke$ ) . (b) caso sub-amortecido	41
<b>fig.2.31</b> - Trajetória correspondente a uma resposta degrau unitário do sistema visto na figura 2.29 (a) .	41

<b>fig.2.32</b> - Curvas típicas de resposta a degrau para o sistema visto na fig. 2.30(a)	42
<b>fig2.33</b> - Diagramas mostrando as localizações dos pontos singulares	42
<b>fig.2.34</b> - Gráficos de plano de fase de sistemas Não-Lineares com entradas em rampa .	43
(a) Caso sobre-amortecido ( $m=ke$ )	
(b) caso sub-amortecido ( $m= e$ )	
<b>fig.2.35</b> - Trajetória correspondente a uma resposta a rampa ( rampa + degrau ) do sistema visto na fig.2.29 (a)	43
<b>fig.2.36</b> - Trajetória correspondendo a uma resposta a rampa do sistema da fig2.29.(a)	43
<b>fig.2.37</b> - Trajetória correspondente a uma resposta a rampa do sistema da fig.2.29 (a)	44
<b>fig2.38 (a)</b> - Sistema de controle não-linear ;	44
(b) curva da característica entrada-saída do elemento não-linear.	
<b>fig.2.39</b> - Trajetória correspondendo a uma resposta a degrau unitário do sistema visto na figura 2.38(a)	45
<b>fig.2.40</b> -Gráfico de plano de fase do sistema visto na fig.2.38 (a) .. $[r(t) = 1.2 t]$	46
<b>fig2.41</b> - Gráfico do plano de fase do sistema visto na fig. 2.38(a) . $[ r(t) = 0.4 t ]$	46

<b>fig.2.42</b> - Gráfico de plano de fase do sistema visto.....	46
na fig. 2.38 (a) . [r(t) = 0.8 t ]	

### Capítulo 3

<b>fig 3.1</b> - Modelo físico de um Manipulador.....	55
<b>fig.3.2</b> - Diagrama básico de controle de um manipulador.....	56
<b>fig.3.3</b> - Acoplamento Motor-Carga.....	60
<b>fig.3.4</b> - Esquema funcional.....	61
<b>fig.3.5</b> - Diagrama de Blocos correpondente(motor-transmissão-carga).....	62
<b>fig.3.6</b> - Representação do sistema motor-transmissão-carga por.....	62
diagramalização Simulink (Matlab)	
<b>fig.3.7</b> - Esquema representativo de um manipulador de dois braços.....	63
<b>fig.3.8</b> - Esquema Global do Sistema Robótico para Manipulador .....	65
de dois graus de Liberdade.	

### Capítulo 4

<b>fig.4.1</b> - Servo-Mecanismo constituído de acionador, .....	68
transmissão e carregamento	
<b>Fig. 4.2(a)</b> - erro (impulsões) × tempo (s).....	70
<b>Fig. 4.2(b)</b> - erro (impulsões) × tempo (s) ao final do regime transitório.....	70
<b>Fig. 4.2(c)</b> - Deslocamento real(impulsões) × tempo (s) .....	70

<b>Fig. 4.2(d)</b> - Deslocamento real(impulsões) × tempo (s) ao final do regime transitório	70
<b>Fig. 4.2(e)</b> - velocidade angular de saída do motor	71
<b>Fig. 4.2(f)</b> - velocidade angular de saída do motor ao final do regime transitório	71
<b>Fig. 4.2(g)</b> - plano de fase velocidade(impulsões/s) × deslocamento real(impulsões)	71
<b>Fig. 4.3(a)</b> - erro (impulsões) × tempo (s)	73
<b>Fig. 4.3(b)</b> - erro (impulsões) × tempo (s) ao final do regime transitório.	73
<b>Fig. 4.3(c)</b> - Deslocamento real(impulsões) × tempo (s)	73
<b>Fig. 4.3(d)</b> - Deslocamento real(impulsões) × tempo (s) ao final do regime transitório	73
<b>Fig. 4.3(e)</b> - velocidade angular de saída do motor	74
<b>Fig. 4.3(f)</b> - velocidade angular de saída do motor ao final do regime transitório	74
<b>Fig. 4.3(g)</b> - plano de fase velocidade(impulsões/s) × deslocamento real(impulsões)	74
<b>Fig. 4.4(a)</b> - erro (impulsões) × tempo (s)	76

<b>Fig. 4.4(b)</b> - erro (impulsões) × ..... tempo (s) ao final do regime transitório	76
<b>Fig. 4.4(c)</b> - Deslocamento real(impulsões) × tempo (s).....	76
<b>Fig. 4.4(d)</b> - Deslocamento real(impulsões) × ..... tempo (s) ao final do regime transitório	76
<b>Fig. 4.4(e)</b> - velocidade angular de saída do motor.....	77
<b>Fig. 4.4(f)</b> - velocidade angular de saída do motor..... ao final do regime transitório	77
<b>Fig. 4.4(g)</b> - plano de fase velocidade(impulsões/s) ..... × deslocamento real(impulsões).	77
<b>Fig. 4.5(a)</b> - erro (impulsões) × tempo (s).....	79
<b>Fig. 4.5(b)</b> - erro (impulsões) × ..... tempo (s) ao final do regime transitório	79
<b>Fig. 4.5(c)</b> - Deslocamento real(impulsões) × ..... tempo (s)	79
<b>Fig. 4.5(d)</b> - Deslocamento real(impulsões) × ..... tempo (s) ao final do regime transitório	79
<b>Fig. 4.5(e)</b> - velocidade angular de saída do motor.....	80
<b>Fig. 4.5(f)</b> - velocidade angular de saída do motor..... ao final do regime transitório	80

<b>Fig. 4.5(g)</b> - plano de fase velocidade(impulsões/s) .....80	80
× deslocamento real(impulsões)	
<b>fig.4.6</b> - Esquema Genérico do sistema de controle Não Linear .....82	82
do sistema de acionamento	
<b>fig. 4.7(a)</b> - perfil de velocidade consignada Onde pode.....83	83
ser observado um período de aceleração, um de velocidade constante e outro de desaceleração	
<b>fig. 4.7(b)</b> - Perfil da trajetória consignada.....83	83
<b>fig.4.8</b> - Ação de controle por Relê.....84	84
<b>Fig. 4.9(a)</b> - erro (impulsões) × tempo (s).....85	85
<b>Fig. 4.9(b)</b> - erro (impulsões) × .....85	85
tempo (s) ao final do regime transitório	
<b>Fig. 4.9(c)</b> - Deslocamento real(impulsões) × tempo (s) .....85	85
<b>Fig. 4.9(d)</b> - Deslocamento real(impulsões) × .....85	85
tempo (s) ao final do regime transitório	
<b>Fig. 4.9(e)</b> - velocidade angular de saída do motor.....86	86
<b>Fig. 4.9(f)</b> - velocidade angular de saída do motor.....86	86
ao final do regime transitório	
<b>Fig. 4.9(g)</b> - plano de fase velocidade(impulsões/s) .....86	86
× deslocamento real(impulsões)	

<b>fig.4.10</b> - Ação de controle por Relê com Zona-Morta.....	87
<b>Fig. 4.11(a)</b> - erro (impulsões) × tempo (s).....	88
<b>Fig. 4.11(b)</b> - erro (impulsões) × ..... tempo (s) ao final do regime transitório	88
<b>Fig. 4.11(c)</b> - Deslocamento real(impulsões) × ..... tempo (s)	88
<b>Fig. 4.11(d)</b> - Deslocamento real(impulsões) × ..... tempo (s) ao final do regime transitório	88
<b>Fig. 4.11(e)</b> - velocidade angular de saída do motor.....	89
<b>Fig. 4.11(f)</b> - velocidade angular de saída do motor..... ao final do regime transitório	89
<b>Fig. 4.11(g)</b> - plano de fase velocidade(impulsões/s) ..... × deslocamento real(impulsões)	89
<b>fig.4.12</b> - Controle on-off+histeresis.....	91
<b>Fig. 4.13(a)</b> - erro (impulsões) × tempo (s).....	92
<b>Fig. 4.13(b)</b> - erro (impulsões) × ..... tempo (s) ao final do regime transitório	92
<b>Fig. 4.13(c)</b> - Deslocamento real(impulsões) × tempo (s).....	92
<b>Fig. 4.13(d)</b> - Deslocamento real(impulsões) × ..... tempo (s) ao final do regime transitório	92

<b>Fig. 4.13(e)</b> - velocidade angular de saída do motor.....	93
<b>Fig. 4.13(f)</b> - velocidade angular de saída do motor..... ao final do regime transitório	93
<b>Fig. 4.13(g)</b> - plano de fase velocidade(impulsões/s) ..... × deslocamento real(impulsões)	93
<b>fig.4.14</b> - Controle on-off +zona-morta +histeresis.....	94
<b>Fig. 4.15(a)</b> - erro (impulsões) × tempo (s).....	95
<b>Fig. 4.15(b)</b> - erro (impulsões) × ..... tempo (s) ao final do regime transitório	95
<b>Fig. 4.15(c)</b> - Deslocamento real(impulsões) × ..... tempo (s)	95
<b>Fig. 4.15(d)</b> - Deslocamento real(impulsões) × ..... tempo (s) ao final do regime transitório	95
<b>Fig. 4.15(e)</b> - velocidade angular de saída do motor.....	96
<b>Fig. 4.15(f)</b> - velocidade angular de saída do motor..... ao final do regime transitório	96
<b>Fig. 4.15(g)</b> - plano de fase velocidade(impulsões/s)..... × deslocamento real(impulsões)	96

## ADENDO

<b>fig.1</b> - Sistema de coordenadas para a estrutura de um atuador flexível.....	100
<b>fig.2</b> - Sistema Linear corrigido por Controlador Não-Linear.....	101
<b>fig.3</b> - Deslocamentos nodais do elo.....	104
<b>fig.4</b> - Diagrama Esquemático Motor-Viga.....	107
<b>fig.5</b> - Sistema de coordenadas para modelo de elementos finitos da viga.....	109
<b>fig.6</b> - forças e torques nodais equivalentes devido..... a força concentrada $P$ aplicada no centro do elo	112
<b>fig.7</b> - forças e torques nodais equivalentes devido..... a distribuição uniforme de carregamento $w_0$	112
<b>fig.8</b> - forças e torques nodais equivalentes..... devido a uma distribuição de carregamento $w_1$ em rampa	113
<b>fig.9</b> - Carga inercial na barra devido a aceleração angular do motor.....	113
<b>fig.10</b> - Inércia do carregamento em um segmento do elo.....	114

## Apêndice A

**fig..1** - Diagrama de blocos de um sistema de controle

## B

**fig. 1** - Esquema simplificado de um robô manipulador genérico

## Lista de Tabelas

3.1	Elementos Componentes do Motor Elétrico c.c.....	58
3.2	Impedâncias Mecânicas do Sistema Robótico.....	59
3.3	Equações e Parâmetros das Articulações.....	64
4.1	Parâmetros do Motor elétrico c.c. utilizado.....	69
4.2	Parâmetros do Relê .....	83
Apêndice 1	Regras de Álgebra de Blocos.....	124

## Resumo

HERMINI, Helder Anibal, *Uma Contribuição ao Estudo de Não-Linearidades na Modelagem e Controle de Manipuladores*, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1996. 123 p. Tese (Mestrado)

Este trabalho analisa a nível teórico e de simulação as Não-Linearidades presentes na modelagem e controle de robôs.

Ao mesmo tempo é apresentado um estudo detalhado sobre sistemas Não-Lineares envolvendo o desenvolvimento de Controladores Não-Lineares para Manipuladores Industriais.

As simulações são realizadas a partir do desenvolvimento do modelo dinâmico de manipuladores de até dois graus de liberdade, considerados rígidos, podendo ser futuramente estendidos a outros graus de liberdade e ao caso de manipuladores flexíveis.

A partir dos resultados apresentados na simulação, pode-se mostrar vantagens e inconvenientes da utilização desses controladores em relação aos controladores tradicionais.

## Abstract

HERMINI, Helder Anibal, *Uma Contribuição ao Estudo de Não-Linearidades na Modelagem e Controle de Manipuladores*, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1996. 123 p. Tese (Mestrado)

This work analyses the theory and simulation of Non-Linearities found in the equations and robots control with one and two degrees of freedom.

Simultaneously it is presented a detailed work on non linear system involving the development of Non Linear Controls for Industrial Manipulators. This process is more advantageous than the classical linear controls.

Extension to other related works including Flexible Manipulators are also suggested

### *Key Words*

-Non-Linear functional analyses, Servomechanism, Mathematical Model, Simulation Method.

## Posicionamento do Problema

Um robô manipulador é um sistema mecânico complexo, com acoplamentos dinâmicos entre as articulações, onde cada grau de liberdade possui um sistema de acionamento [Craig, 1986] (geralmente, motores elétricos, hidráulicos ou pneumáticos) e transdutores de posição (incrementais ou absolutos).

Estes transdutores são dispostos entre o eixo do motor e o eixo de transmissão de cada junta. Em decorrência do seu posicionamento, normalmente eles não são capazes de medir a deformação da estrutura, os atritos e folgas nas juntas [Rosário, 1990].

Atualmente, a exigência do desenvolvimento industrial, exige uma grande flexibilidade do sistema, altas velocidades de operação e a otimização do espaço de trabalho, motivando o desenvolvimento de estudos teóricos considerando os efeitos Não-Lineares em sistemas robóticos, a partir da implementação de modelos matemáticos mais realísticos associados a implementação de controladores eficientes .

Neste estudo, consideramos um manipulador acionado por um motor elétrico de corrente contínua (c.c.), frequentemente utilizados em aplicações industriais, devido principalmente as suas características de propiciar grandes limites de torque e velocidade angular.

O modelo matemático para o sistema robótico foi desenvolvido, considerando-se o manipulador rígido, a partir da implementação dos parâmetros do motor de corrente contínua (c.c.) utilizado e das juntas robóticas podendo-se mostrar as respostas transientes e o funcionamento do sistema com diferentes tipos de controladores Não-Lineares.

Outros trabalhos já foram desenvolvidos dentro do Laboratório de Automação e Robótica da UNICAMP, envolvendo aspectos de modelagem e controle de robôs. Esses trabalhos de pesquisa abordaram métodos de geração de Trajetórias [SÁ, 1996], a extensão de modelagens matemáticas para manipuladores flexíveis [DAVI, 1996], o estudo de controladores eficientes para robôs, e o desenvolvimento de um Sistema Controlador Digital por Modulação de Largura de Pulso [ERVELLA, 1995]. O objetivo final desse conjunto é fomentar as bases de um grupo de pesquisa integrado em Automação e Robótica.

O principal objetivo deste trabalho consiste no desenvolvimento de uma modelagem matemática do servo-sistema robótico, abordando aspectos Não-Linearidades inerentes a este e a simulação de controladores clássicos (P, P.I., P.D., P.I.D.) e de controladores Não-Lineares (on-off, zona-morta e histeresis).

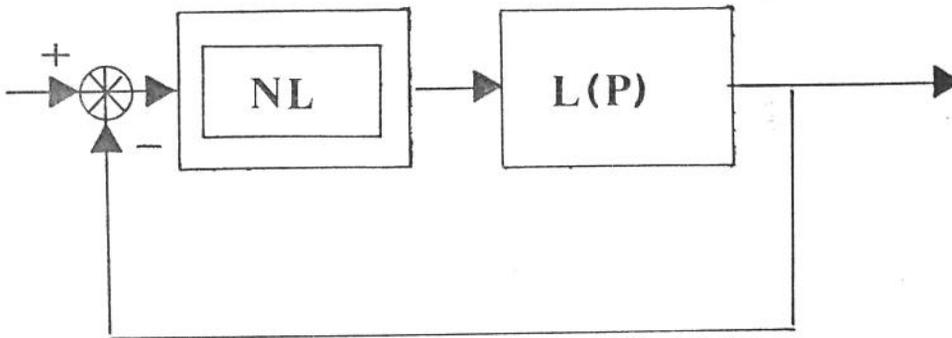
A partir disso, torna-se possível verificarmos a eficiência destes controladores e a possível eliminação de efeitos indesejáveis para o sistema como a oscilação limite e a oscilação perpétua em torno de um valor constante, fenômenos estes que muitas vezes acabam sendo desprezados na abordagem linear do problema [GILLE, 1988].

A partir da análise dos resultados obtidos, é possível estabelecer-se um critério de comparação e desempenho desta técnica de controle em relação aos controladores tradicionalmente utilizados.

Este trabalho é subdividido em cinco capítulos. No capítulo 1 é introduzida a noção das Linearidades e Não-Linearidades que acompanham sistemas físicos reais, pormenorizando a questão do agrupamento entre elas a definição de Não-Linearidades inerentes, contínuas e descontínuas, as quais são a base da escolha para a implementação do algoritmo de controle no sistema .

Neste mesmo capítulo, será mencionada a idéia de como efetuar o agrupamento em um bloco Linear e outro Não-Linear de todos os elementos da malha de controle (conforme figura 1), através da implementação da álgebra de blocos e a inserção de ações de controle Não-Lineares de maior e melhor otimização no comando, como também o efeito da histeresis e a zona morta adicionada a estas, verificando-se a eliminação de efeitos prejudiciais ao sistema

a nível estrutural como a oscilação limite, no processo de correção em controle de realimentação .



onde: **NL**: Controlador Não-Linear,  
**P**: Variável de Laplace

fig. 1 - Agrupamento de todos os elementos lineares em um bloco linear e de todos elementos Não-Lineares em outro.

No capítulo seguinte, abordamos os regimes transitórios para sistemas Não-Lineares com a introdução de blocos Não-Lineares do tipo On-Off, On-Off com Zona-Morta, On-Off com Histeresis, On-Off com Zona-Morta e Histeresis, a partir da análise da resposta do sistema submetido a diferentes entradas.

Ainda é analisado o método da aproximação da equivalente harmônica, enfatizado o desenvolvimento de funções de transferência para sistemas N-L, a partir do estudo da resposta do sistema submetido a uma entrada harmônica (função senoidal).

A partir desta descrição pode ser mostrado que a função de transferência generalizada do bloco NL pode ser representada por uma família de linhas de transferência generalizadas graduadas em função da frequência do sinal da entrada. Ao mesmo tempo, é realizado um estudo analítico dos casos do On-Off, On-Off com Zona Morta, On-Off com Zona Morta e Histeresis a partir da utilização dos diagramas de Nyquist e de Black .

Ainda neste capítulo, é apresentado o método do plano de fase para análise de sistemas N-L, partindo da hipótese de que em sistemas de segunda ordem

com Não-Linearidades, torna-se possível aproximarmos o mesmo por vários Sistemas Lineares, ou seja, o mesmo é dividido em várias sub-regiões, cada uma correspondendo a uma operação linear individual [GILLE, 1988], [OGATA, 1982]. A trajetória composta, que é obtida juntando trajetórias nas fronteiras de cada região de operação, fornece a resposta transitória do sistema Não-Linear.

No capítulo 3 é apresentada a modelagem matemática de um robô manipulador rígido com dois graus de liberdade, e seu sistema de acionamento, que utilizamos no decorrer deste trabalho para validação dos resultados mostrados nos capítulos anteriores

A partir das equações obtidas através das modelagens efetuadas no capítulo precedente, efetuamos no capítulo 4 as simulações do sistema completo em malha fechada, introduzindo controladores clássicos e Não-Lineares descritos nos capítulos anteriores. A partir da análise dos resultados obtidos, podemos confirmar resultados previstos teoricamente.

Finalmente, apresentamos as conclusões e as perspectivas futuras, as quais motivam o desenvolvimento de um estudo preliminar exposto no adendo, que considera a utilização de estruturas flexíveis, e os aspectos Não-Lineares inerentes a mesma [GARCIA, 1990], [SAH, 1990].

Descrevemos a princípio no Adendo as equações do motor elétrico de corrente contínua (C.C.) na forma de estado e posteriormente a modelagem de estruturas de Rastreamento Flexíveis, na qual apresentamos o equacionamento do caso geral para o atuador acoplado ao sistema dinâmico. Aplicamos o método dos elementos finitos [MEIROVITCH, 1986], [ZIENKIEWICZ, 1989] para obtermos as equações que descrevem a dinâmica de uma junta robótica considerada para efeitos de modelagem como uma viga, sendo que a implementação é feita por etapas, a partir da obtenção da matriz inércia elementar, rigidez elementar, para encontrarmos finalmente as matrizes globais da massa e da rigidez. As equações que descrevem o comportamento do atuador e do elo são acoplados, e conseguimos assim as equações de estado que regem o sistema completo.

O modelo matemático generalizado desenvolvido no adendo pode ser utilizado para representar vários tipos de sistemas flexíveis, no futuro, permitindo

assim uma abordagem e resolução mais ampla e precisa de grande gama de problemas em engenharia .

Os apêndices apresentados são compostos basicamente da análise linear [DÁZZO,1971], [OGATA, 1982], a qual cita os principais controladores clássicos a serem utilizadas na simulação, e da modelagem matemática de um robô manipulador de  $n$  elos (caso generalizado), utilizado para a obtenção das equações dinâmicas do manipulador tratado no capítulo 3 .

# Capítulo 1

## Generalidades sobre os sistemas não lineares

Analisamos neste capítulo as Limitações do Tratamento linear de Sistemas, apresentando posteriormente as vantagens do tratamento Não-Linear sobre as mesmas situações impostas. Posteriormente, são apresentadas as Não-Linearidades que acompanham os sistemas físicos, tanto contínuas, quanto descontínuas, com suas possíveis combinações, salientando-se o método de agrupamento de todas estas parcelas em um só bloco Não-Linear representativo.

### 1.1 Sistemas de Controle Não Lineares

Muitos tipos diferentes de não linearidades podem ser encontradas em sistemas de controle reais e podem ser divididas em duas classes, dependendo de serem inerentes ao sistema ou inseridos propositadamente a este.

As não linearidades inerentes são inevitáveis em sistemas de controle. Exemplos de tais não linearidades são

1. saturação
2. zona morta
3. histeresis
4. folga (backlash)
5. atrito estático, atrito de Coulomb, e outros atritos não lineares
6. mola não linear

De uma forma geral, a presença de tais não lineares no sistema de controle afeta prejudicialmente seu desempenho .

Não-Linearidades essenciais ou inseridas são resultantes de uma intenção deliberada de engenho, visando a simplificação da realização, tendo certamente performances particulares, conforme se efetua a implementação do projeto em etapas .

## **1.2 Abordagens usadas na Análise e Projeto de Sistemas de Controle Não-Lineares.**

Uma maneira de se analisar e projetar um grupo particular de sistemas de controle não linear, em que o grau de não linearidade é pequeno, é usar técnicas de linearização e resolver o problema linearizado equivalente obtido.

Um destes métodos seria o da função descritiva, sendo permitido estudar a estabilidade de muitos sistemas de controle não lineares simples do ponto de vista do domínio da frequência.

Este método nos fornece informação sobre a estabilidade para um sistema de qualquer ordem, porém não fornece informação exata sobre as características de resposta temporal. Em muitos caso particulares, estamos antes de mais nada interessados na estabilidade de sistemas de controle não lineares, e soluções analíticas de equações diferenciais não lineares podem ser desnecessárias .

Outras formas de analisar e projetar sistemas de controle não linear, que podem ser altamente Não-Lineares, incluem a solução das equações diferenciais Não-Lineares ou simplificações destas por meio de técnicas de plano de fase .

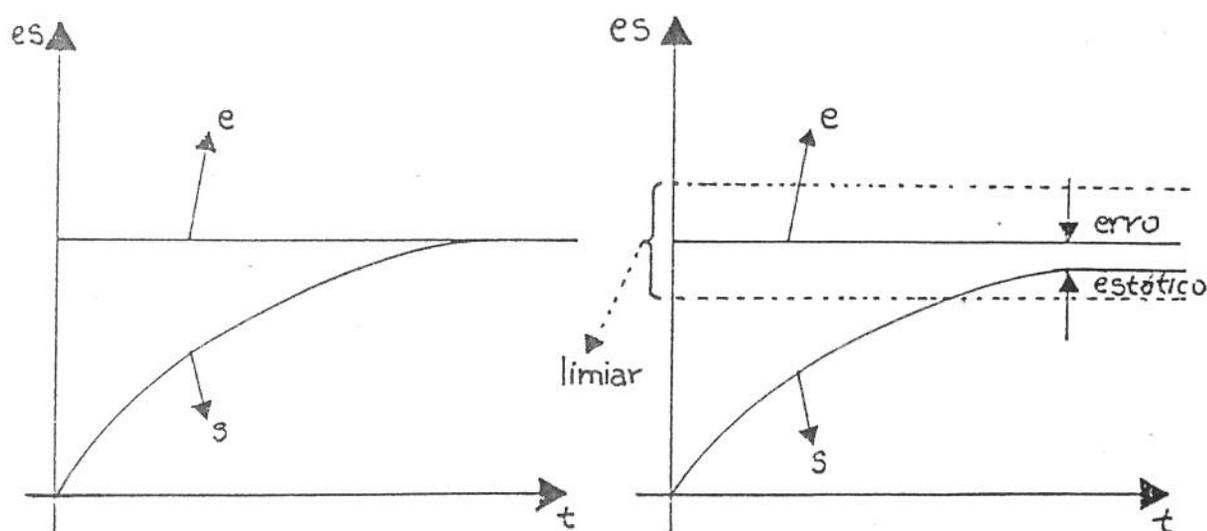
O método do plano de fase fornece informação tanto sobre estabilidade quanto comportamento e resposta temporal, porém é limitado a sistemas de primeira e segunda-ordem.

## **1.3 Limitação dos Métodos Não-Lineares**

Os métodos de estudo de sistemas lineares à partir da noção de funções de transferência e de suas representações (resposta em frequência,

disposição de pólos e zeros) constituem um instrumento extremamente eficaz para o estudo e síntese de alguns Servo-Mecanismos. Com a implementação destes métodos, é possível uma grande otimização, pois, dentro da hipótese da linearidade, com o devido tratamento dos dados de "alguns problemas específicos", possibilita-se a determinação de melhor ajuste de parâmetros relacionados ao projeto, permitindo correções prévias antes de sua implementação física .

Porém, logo que se aplica os métodos lineares na maioria dos sistemas de Servo-Mecanismos, se constata que a representação por um modelo linear se torna incapaz de tratar o problema devido a certos fenômenos, tanto de ordem física, quanto teórica .



onde:  $e$  representa o sinal de entrada e  $s$  representa o sinal de saída

Fig. 1.1 - gráficos  $e, s$   $\times t$ . Um modelo linear (à esquerda) desprezando o limiar, o qual condiciona o fato da precisão estática.

Quando tratado linearmente, o sistema é considerado como estar isento da limitação da precisão devido as imperfeições (diversos limiares : como zonas mortas) dos sistemas .

Se consideramos a questão da qualidade de um comando, este sobretudo será um problema relacionado a precisão, onde necessariamente

temos que concluir que as teorias elaboradas, fundamentadas por um modelo linear, são incapazes de permitir um estudo aprimorado.

De fato, devido a teoria linear indicar uma precisão "infinita", assim simplesmente diremos que a precisão do sistema depende estritamente dos fatores não lineares os quais desprezamos .

Outra questão importante é referente, dentro de certas condições, que um Servo-Mecanismo "pulsa" (oscilação constante com determinada amplitude), dependendo somente do sistema.

Este fenômeno é inexplicável a nível linear. Um sistema linear, em efeito, é geralmente estável (regime transitório amortizado) ou instável (transitório ou as variáveis prementes dos valores que crescem indefinidamente). Só os tipos de sistemas lineares capazes de produzir oscilações de amplitude constante serão um sistema de limite estável, sistema "exatamente oscilatório". O exemplo mais simples de um sistema deste tipo é a oscilação harmônica .

De encontro, um sistema tratado linearmente não é perfeitamente oscilatório, pois ao alterarmos seus parâmetros, o processo de controle pode se tornar estável ou instável, sendo que isto não ocorre quando um Servo-Mecanismo oscila constantemente (pulsa), mesmo havendo pequenas alterações de alguns dos parâmetros, ele continua em regime perfeitamente oscilatório.

Portanto, se torna fácil verificar o quanto um Servo-Mecanismo que oscila constantemente não é nem um pouco assemelhável à um sistema linear em regime "exatamente oscilatório".

Outra observação importante é quanto a questão da amplitude das oscilações de um sistema linear de oscilações exatas que são determinadas pelas condições iniciais a partir do sistema após ter sido abandonado .

Ao contrário da pulsação, esta é uma oscilação de frequência e amplitude fixas adquiridas somente pelas condições iniciais. Este fato é mostrado em evidência na Figura 1.2.

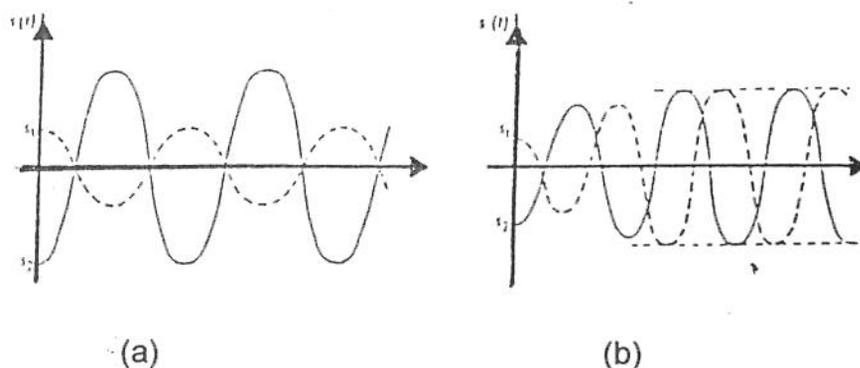


Fig. 1.2 - (a) resposta de uma oscilação harmônica à uma condição dependente dos parâmetros iniciais do experimento.

(b) Servo-Sistema que oscila em torno de um ponto com tendência transitória na direção de uma oscilação de frequência e amplitude fixas.

Logo, o fenômeno da pulsação possui, em matéria de Servo-Sistemas, uma importância considerável .

A questão da precisão estática e da oscilação de pulsação são suficientes para salientar a insuficiência dos modelos lineares em matéria de Servo-Sistemas e a necessidade prática da aplicação da análise Não-Linear para a resolução precisa de problemas reais.

Quando tratamos linearmente os sistemas físicos, representamos matematicamente a estes por equações diferenciais lineares com coeficientes constantes, sendo válido o princípio da superposição enunciado a seguir :

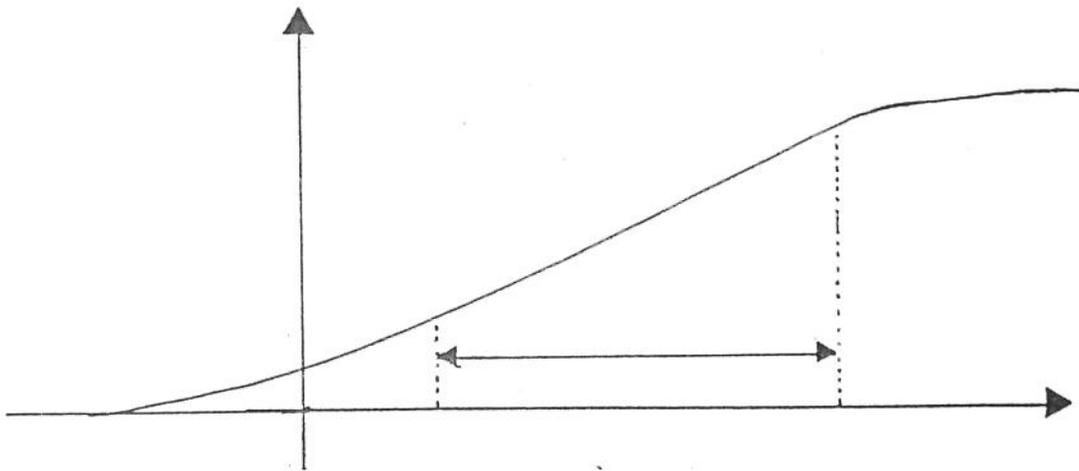
a) Se  $s_1(t)$  e  $s_2(t)$  são as respostas respectivas às entradas (que não são necessariamente aplicadas a mesma região do sistema)  $e_1(t)$  e  $e_2(t)$ , a resposta à entrada  $e_1(t) + e_2(t)$  será  $s_1(t) + s_2(t)$ ; propriedade da adição;

b) No caso de um sistema linear sujeito à uma entrada  $e(t)$  e uma saída  $s(t)$  : se a resposta do sistema à  $e(t)$  é  $s(t)$ , sua resposta à entrada  $Ae(t)$ , com  $A$  sendo uma constante, será  $As(t)$  : proporcionalidade dos efeitos às causas ou homogeneidade.

Os sistemas não lineares, por oposição aos sistemas lineares, são sistemas físicos que não são regidos pelas equações lineares. Ou seja, o princípio da superposição não é aplicável neste caso .

O sistema linear forma um conjunto relativamente homogêneo, a denominação de "sistema Não-Linear " se aplica a sistemas diversos os quais as vezes não tem nenhuma relação em comum.

Na prática, se exigirmos a precisão infinita, teremos que todos os sistemas são Não-Lineares.



Linearidade  
Fig. 1.3 - Dependendo do Domínio do Tempo.

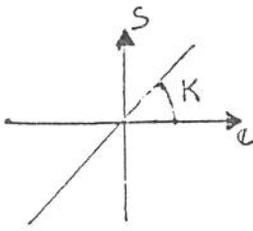
#### 1.4 Não-Linearidades Usuais mais freqüentemente encontradas em Servo-Sistemas

A característica da amplitude da saída versus entrada em regime estático de um sistema perfeitamente linear é retilíneo para todos os valores de amplitude de entrada de zero ao infinito (Fig. 1.4.a), isto exprime a propriedade da homogeneidade e expressa a equação .

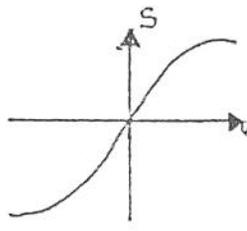
$$s(t) = Ke(t) \quad \text{em regime estático permanente} \quad (1.1)$$

onde K é o ganho estático do bloco.

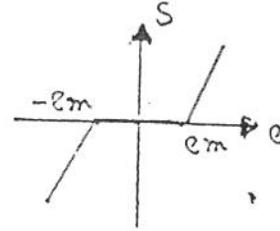
Na realidade, a característica de amplitude de um bloco real não é perfeitamente retilíneo, e sim curva (Fig. 1.4.b).



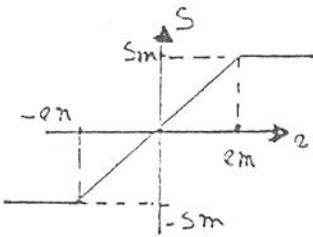
(a) Linearidade Ideal



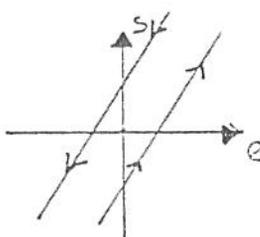
(b) Curva



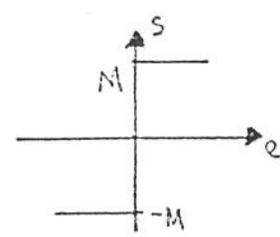
(c) zona morta (limiar)



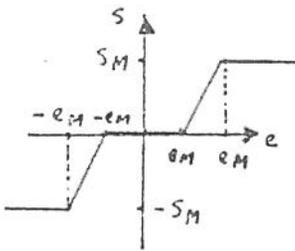
(d) Saturação



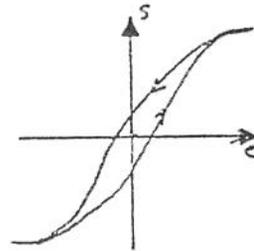
(e) Histeresis



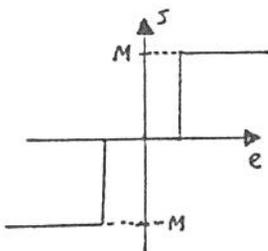
(f) On-off



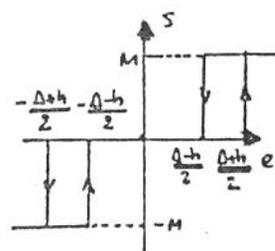
(g) Limiar e Saturação



(h) Curvatura + histeresis



(i) On-off com zona morta



(j) On-Off com zona morta e histeresis

Fig. 1.4 - Não Linearidades Usuais

Além disso, todo sistema físico mesmo reputado como linear, possui um limiar de sensibilidade ou zona morta e uma saturação (Figuras 1.4.c, d).

De outra parte, os fenômenos hereditários do tipo histeresis causam aparecimento de uma característica na forma da curva da Fig. 1.4.e.

Em fim, os sistemas trabalhando por tudo ou nada (on-off) possuem uma característica representada na (Fig. 1.4.f) é definida pela equação :

$$s(t) = M \text{ sinal } e(t) \quad (1.2)$$

onde a função sinal é igual a + 1 para  $e > 0$  e à -1 para  $e < 0$  (idealização de duas posições reais) .

Nós temos cinco tipos fundamentais de Não-Linearidades representadas pelas figuras de 1.4.a à 1.4.f.

Estes cinco tipos de não linearidades não se apresentam esquematizadas comodamente podendo estar associadas de diversas maneiras com inúmeras possibilidades de combinações, o que permite representar todos os tipos de Não-Linearidades possíveis em um sistema físico como:

- a) limiar de saturação, definindo o domínio de linearidade do sistema (Fig. 1.14.g)
- b) curvatura característica com histeresis (Fig. 1. 14.h)
- c) on-off e limiar: idealização de um relê com três posições (Fig. 1.14.i);
- d) on-off, limiar e histeresis (Fig. 1.14.j)

## 1.5 Classificação da Não-Linearidade.

Para a aplicação dos métodos matemáticos é importante distinguir a Não-Linearidade contínua da descontínua, pois, para cada caso temos um tratamento específico, tendo-se um caso distinto do outro .

Assim, para linearidades contínuas, utilizamos os métodos desenvolvidos por Poincarè, e para as Não-Linearidades descontínuas, temos que desenvolver algoritmos especiais, que em muitos casos, tem solução mais simples que as dos métodos utilizados no caso contínuo.

Se o bloco Não-Linear apresenta Não-Linearidade acidental, estudamos a influência desta Não-Linearidade em um sistema linear (exemplo: o efeito da saturação sobre um Servo-Sistema linear).

Se o sistema é de Não-Linearidade essencial é efetuado o estudo do funcionamento dos Servo-Sistemas essencialmente não lineares, sendo que, os dois casos presentes são correlacionados.

O estudo dos Servo-Sistemas com elementos Não-Lineares e lineares em laço fechado representados pela figura 1.5, é caracterizado pelas duas propriedades seguintes :

1) retorno unitário;

2) ramo direto compreendendo em cascata um elemento Não-Linear N e um "bloco " linear representado por uma função de transferência  $L(p)$  que agrupa todos os blocos lineares do sistema .

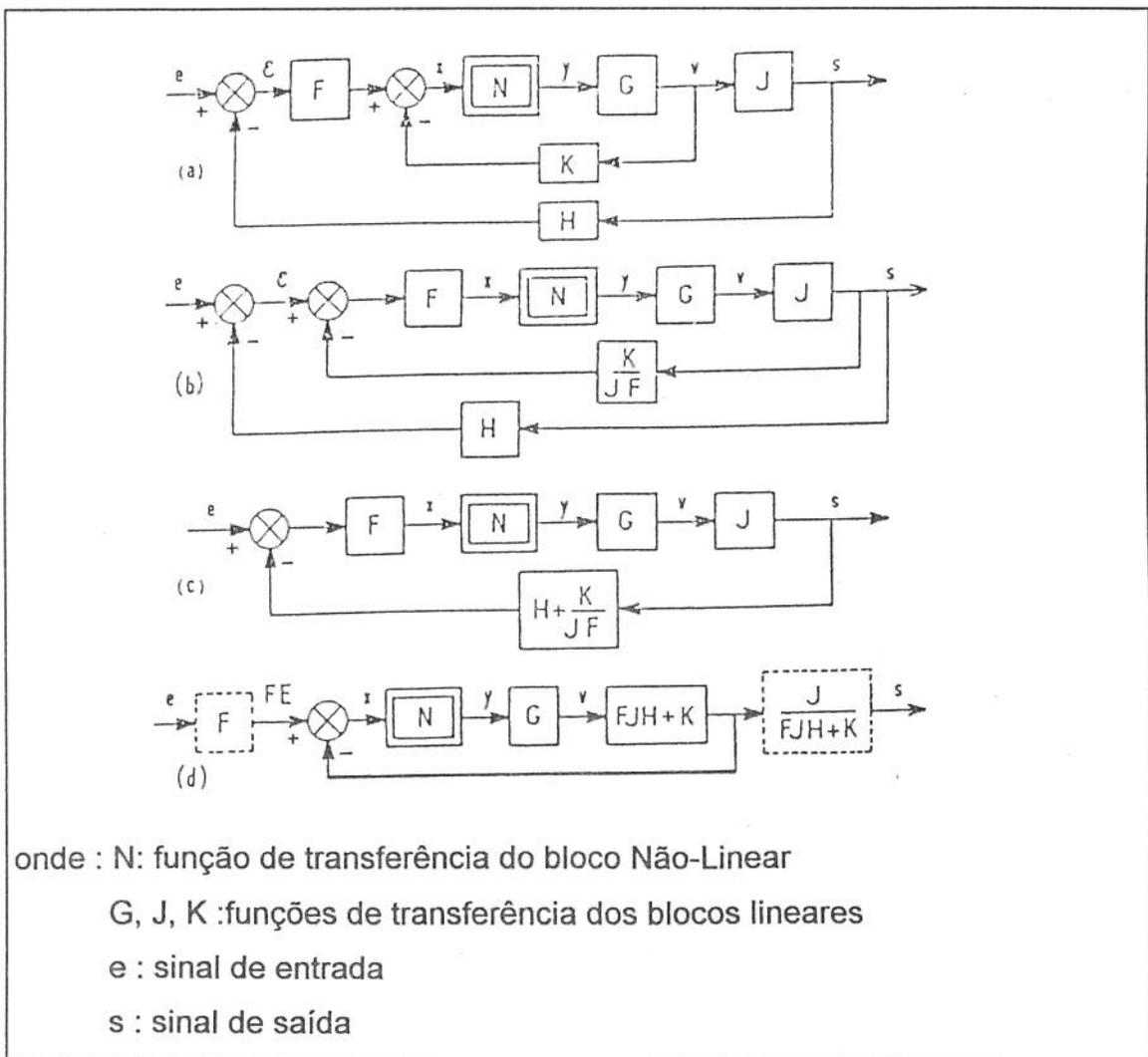


Fig. 1.5 - Diagrama funcional geral de Servo-Sistema possuidor de um bloco Não-Linear (de entrada  $\varepsilon$  e saída  $w$ )

Na Figura 1.5, N é o bloco não linear do sistema real. A função  $L(p)$  agrupa os blocos lineares a uma expressão

$$L(p) = G(FJH + K) \quad (1.3)$$

É conveniente se lembrar que a entrada  $e(t)$  e a saída  $s(t)$  do sistema equivalente representado na figura 1.5 não tem mais a entrada  $e_R(t)$  e a saída  $s_R(t)$  do sistema real, porém, eles são dados pelas relações :

$$E(p) = F. E_R \quad S(p) = (FH + K/J) S_R \quad (1.4)$$

que representa a equação diferencial linear com coeficientes constantes. Em compensação  $\varepsilon$  e  $w$  são a entrada e a saída do bloco não linear.

## 1.6 Comentários Finais

A partir deste capítulo foi possível verificar a necessidade da relevância das Não-Linearidades ao efetuar-se o estudo analítico de Servo-Sistemas, dado a efeitos físicos inerentes aos processos, os quais muitas vezes são inexplicáveis a nível linear.

Concluimos que a linearidade de um sistema é um fator relativo ao domínio do tempo tratado, sendo que se o período do regime transitório é longo, o problema obrigatoriamente deve ser tratado como Não-Linear.

Foi permitido ainda constatar a propriedade do agrupamento de todos os blocos lineares e Não-Lineares em dois blocos resultantes correspondentes, com funções de transferência equivalentes a soma das funções de transferência por álgebra de blocos dos elementos individuais da malha que representa o sistema Global.

## Capítulo 2

### Regimes Transitórios de Servo-Mecanismos com Elemento Não-Linear

Abordaremos neste capítulo os Regimes Transitórios para Sistemas Não-Lineares com a inserção sucessiva ao controlador On-Off do limiar e da histeresis, efetuando-se a análise do sinal de saída devido a estas Não-Linearidades .

A seguir é desenvolvido o método da Aproximação da equivalente harmônica, objetivando o desenvolvimento de funções de transferência para sistemas Não-Lineares, a partir do estudo do sinal de saída devido a inserção de uma entrada harmônica que possui um módulo e de um argumento. A partir desta descrição, é visto que a função de transferência generalizada do bloco N pode ser representada por uma família de linhas de transferência generalizadas graduadas em função da frequência do sinal da entrada .

Para desfechar esta seção, são analisados os casos dos ganhos equivalentes dos blocos Não-Lineares para as condições de funcionalidade da função de transferência quanto a frequência e amplitude do sinal de entrada.

#### 2.1 Regime Transitório de um Servo-Sistema On-Off Ideal (sem zona-morta e histeresis)

Seja um Servo-Sistema por on-off ideal, submetido a uma entrada (comando)  $e(t)$ . A saída  $w(t)$  do elemento on-off é uma sucessão de sinais quadrados. Com efeito, temos que  $w(t) = +M$  para intervalos de tempo onde o erro é positivo, isto é, onde  $e(t) > s(t)$ ; e  $w(t) = -M$  para intervalos de tempo

onde  $e(t) < s(t)$ . A saída  $s(t)$  do Servo-Sistema é a resposta do bloco linear  $L(t)$  sujeito a sucessão de sinais quadrados que constituem  $w(t)$ .

Para deixar mais claro este raciocínio, suponhamos um sistema inicialmente em repouso, e aplicamos a ele uma entrada  $e(t)$  que se inicia com sinal positivo. Ao iniciar, o erro  $\varepsilon(t)$  é positivo, onde  $w(t) = +M$ . A resposta do bloco linear a esta entrada  $Mu(t)$  é a resposta unitária  $q(t)$  multiplicada por  $M$  (conforme fig. 2.1):

$$s(t) = M q(t) u(t) \quad 0 < t < t_1$$

com

$$Lq(t) = \frac{1}{p} L(p) \frac{1}{p} L(p)$$

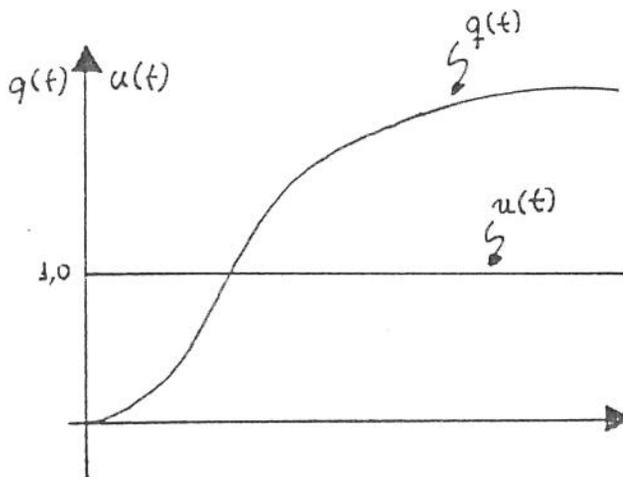


Fig.2.1 - resposta unitária do bloco linear  $q(t) = \mathcal{L}^{-1} [L(p) / p]$

Esta resposta cresce com o tempo e compensará o  $e(t)$  a um certo instante  $t_1$ .

Neste momento, o elemento por on-off comutará [ $w(t) = -M$ ]. Na soma, a saída do relê é a função

$$\begin{cases} w(t) = M & 0 < t < t_1 \\ w(t) = -M & t > t_1 \end{cases} \quad (2.1)$$

que podemos escrever de forma condensada (conforme fig. 2.2)

$$w(t) = Mu(t) - 2Mu(t - t_1)$$

Para a saída, a resposta do sistema será :

$$s(t) = Mq(t)u(t) - 2Mq(t - t_1)u(t - t_1) \quad 0 < t < t_2$$

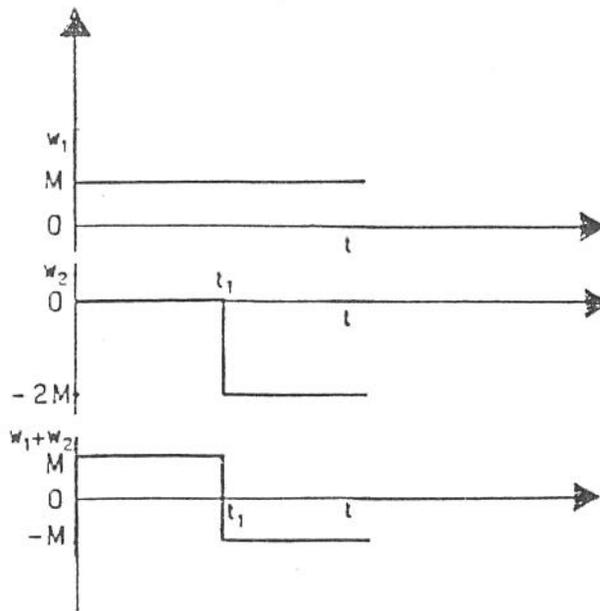


Fig.2.2 representação da função (2.1) como superposição de duas funções degrau

A próxima comutação ocorre no instante  $t = t_2$  onde temos de novo  $s(t)=e(t)$ . A saída do elemento por on-off tem valor  $+M$ .

Vemos assim que a saída do sistema é a resposta do bloco linear  $L(p)$  sujeito ao sinal:

$$w(t) = Mu(t) - 2Mu(t - t_1) + 2Mu(t - t_2) - \dots$$

$$= Mu(t) + 2 \sum_1^n (-1)^k Mu(t - t^k),$$

onde  $t_i, t_2$ , são os instantes de comutação.

A expressão de  $s(t)$  é:

$$s(t) = Mq(t)u(t) - 2Mq(t-t_1)u(t-t_1) + 2Mq(t-t_2)u(t-t_2) - \dots$$

$$= Mq(t)u(t) + 2\sum_1^n (-1)^k Mq(t-t_k)u(t-t_k)$$

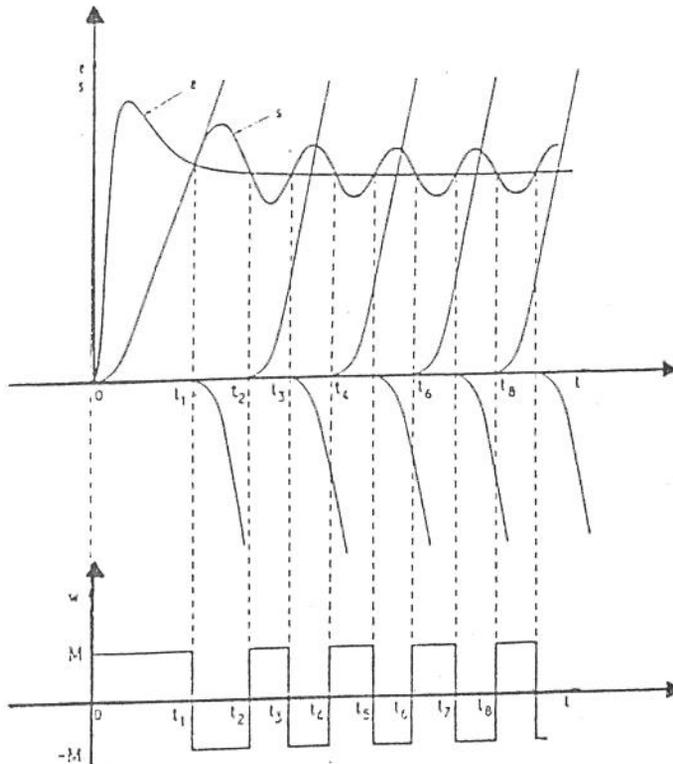
que pode ser escrita da forma

$$s(t) = Mq(t) + 2\sum_1^n (-1)^k Mq(t-t_k) \quad (2.2)$$

Estas considerações permitem traçar por adição gráfica a resposta  $s(t)$  quando se conhece a entrada  $e(t)$ , a resposta unitária  $q(t)$  e o bloco linear.

A figura 2.3 nos mostra o caso onde temos uma entrada que tende rapidamente à um valor final constante.

Constatamos que o regime transitório tende, após qualquer comutação a um regime permanentemente periódico e se fixa com um "valor final"



onde  $e$  é o sinal da entrada,  $s$  é o sinal de saída,  $M$  e  $-M$  sinais de saída do relê

Fig. 2.3 - resposta de um Servo-Sistema ON-OFF ideal : oscilação limite

O sistema oscila indefinidamente em torno de um valor médio. O fenômeno habitual com os sistemas por on-off é chamado por oscilação limitada.

### Observações :

1-O mesmo método se aplica quando o sistema não parte do repouso. Porém, a ele faz anexar um termo suplementar  $s_i(t)$  a  $s(t)$  a fim de ter-se a componente das condições iniciais .

2- Devido a resposta unitária  $q(t)$  ser uma função indefinidamente crescente com os tempo, se torna cômodo se decompor em uma função  $q_i(t)$  que desvia-se infinitamente com o tempo, e uma função  $q_f(t)$  que resta finitamente.

A figura 2.4 mostra o caso onde  $q_i(t)$  é um degrau de velocidade, isto é, onde  $L(t)$  possui uma integração. Depois da primeira comutação onde conforme

$$s(t) = M[q_i(t) + q_f(t)] \quad 0 < t < t_1$$

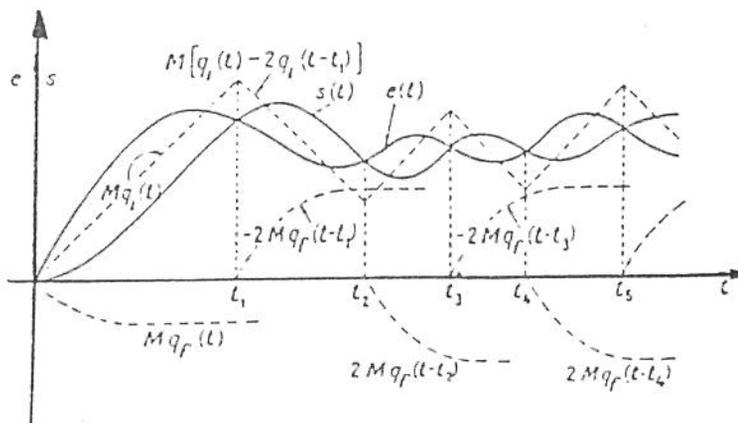


Fig.2.4 Caso onde  $q_i(t)$  é um degrau de velocidade

Após a primeira comutação escrevemos sempre  $q(t-t_1)$  para  $q(t-t_1)$  e  $u(t-t_1)$

$$s(t) = M [q_f(t) - 2q_f(t-t_1) + q_i(t) - 2q_i(t-t_1)]$$

A função  $[q_i(t) - 2q_i(t-t_1)]$  é de inclinação decrescente no intervalo  $(t_1, t_2)$  oposta a de  $q_i(t)$ . A construção gráfica é efetuada com grande facilidade .

## 2.2 Regime Transitório de um Servo-Sistema com On-Off e Histeresis

Devido a histeresis, o mesmo método se aplica somente as comutações de off-on produzindo quando

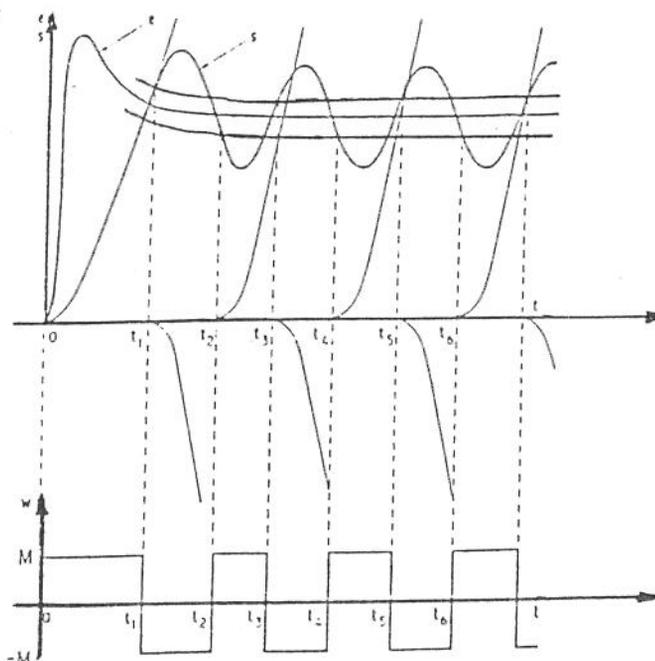
$$e(t) - s(t) = \frac{1}{2}h$$

e as comutações do on-off quando

$$e(t) - s(t) = -\frac{1}{2}h$$

A figura 2.5 é relativa ao mesmo sistema que a figura . 2.3 [mesma função  $L(p)$  e valor de  $M$ ], porém o relê comporta desta vez uma histeresis.

Nota-se sempre que a presença da histeresis aumenta a amplitude e diminui a freqüência da oscilação limite( este resulta é geral )



onde:  $e$  é o sinal da entrada,  $s$  é o sinal de saída e  $M, -M$  são saídas do relê

Fig.2.5 - resposta de um Servo-Sistema por on- off com histeresis : a histeresis aumentando a amplitude da oscilação limite .

### 2.3 - Regime Transitório de um Servo-Sistema com On-Off e Zona Morta .

Supondo a inexistência de histeresis, podemos construir a resposta de maneira análoga. Se  $\Delta$  representa a zona morta, o elemento on-off comutará no instante onde se afasta  $\Delta/2$  ou  $-\Delta/2$ . As comutações são desta vez de quatro formas

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow + \text{ devido } & \varepsilon = \frac{1}{2} \Delta, \quad \frac{d\varepsilon}{dt} > 0 \\ + \rightarrow 0 \text{ devido } & \varepsilon = \frac{1}{2} \Delta, \quad \frac{d\varepsilon}{dt} < 0 \\ 0 \rightarrow - \text{ devido } & \varepsilon = -\frac{1}{2} \Delta, \quad \frac{d\varepsilon}{dt} < 0 \\ - \rightarrow 0 \text{ devido } & \varepsilon = -\frac{1}{2} \Delta, \quad \frac{d\varepsilon}{dt} > 0 \end{aligned}$$

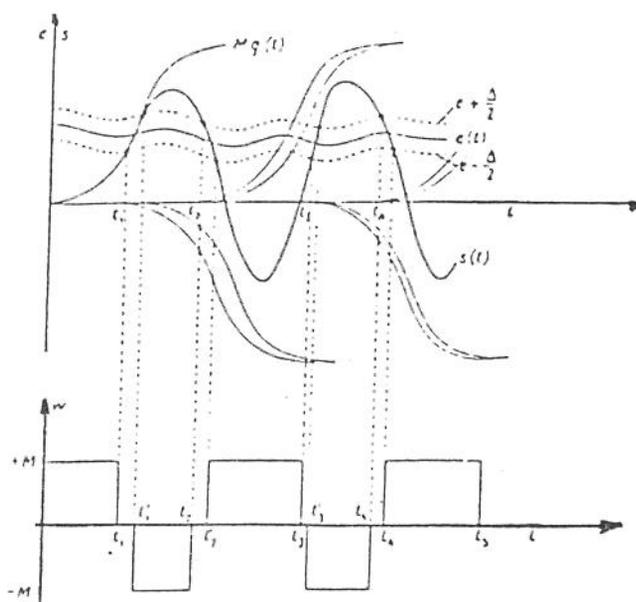
Consideramos para começar uma entrada  $e(t)$  aplicado a um sistema partindo do repouso, e supondo que  $t=0$  se produz uma comutação de 0 à + . Vemos (fig.2.6) que o bloco linear está submetido a entrada.

$$w(t) = M u(t) - M u(t - t_1) - M u(t - t_1') + M u(t - t_2) + \dots \quad (2.3)$$

que é uma função dividida igual alternativamente à  $+M$ ,  $0$  e  $-M$ ; diferente da função dividida em (2.2) . Diante da resposta escrevemos sempre  $q(t - t_i)$  onde se lê  $q(t - t_i) u(t - t_i)$  :

$$s(t) = M q(t) = M q(t - t_1) - M q(t - t_1') + M q(t - t_2) + \dots$$

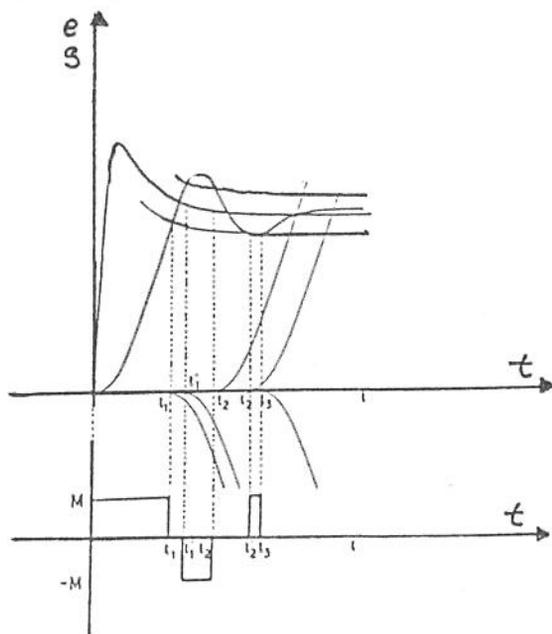
Esta resposta se obtém graficamente a partir de  $e(t)$  conhecendo a resposta unitária  $q(t)$  do bloco linear. A figura 2.6 é relativa aos mesmos sistemas que os das Figuras 2.3 e 2.5, a qual apresenta o sistema por on-off comportando desta vez uma pequena zona morta  $\Delta$ .



onde  $e$  é o sinal da entrada,  $s$  é o sinal de saída,  $M, -M$  são saídas do relê,  $q(t)$  é a resposta unitária

Fig.2.6 - resposta de um servo sistema por on-off com zona morta

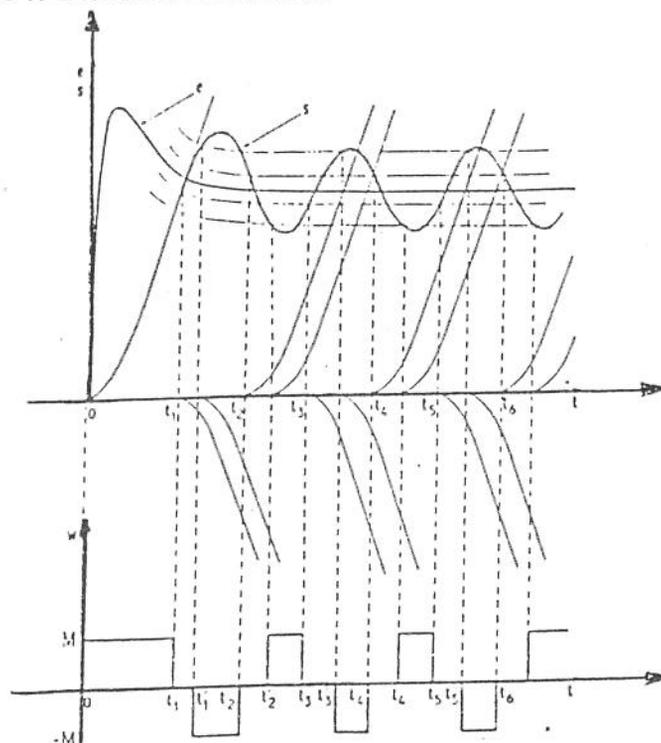
Se a zona morta é grande, a oscilação limitada desaparece : o sistema se estabiliza a um regime permanente interior a zona morta (Fig. 2.7)



onde  $e$  é o sinal da entrada,  $s$  é o sinal de saída,  $M, -M$  são saídas do relê

Fig. 2.7 - Zona morta eliminando a oscilação limite

O método se estende facilmente ao caso onde o elemento on-off possui uma histeresis  $h$  e máximo do limiar.



onde  $e$  é o sinal da entrada,  $s$  é o sinal de saída,  $M, -M$  são saídas do relê

Fig. 2.8 - resposta de um Servo-Sistema on-off com zona morta e histeresis

Podemos interpretar a figura 2.8 de outra maneira. Por comparação com a fig. 2.6 nota-se que a histeresis tem o efeito de aumentar a amplitude da oscilação limite e de diminuir a sua frequência .

#### 2.4 Aproximação da Harmônica Equivalente. Noção de Ganho Equivalente

O método é um ensaio da generalização da noção da função de transferência para o caso de sistemas não lineares.

Para um sistema linear de entrada  $e$  e saída  $s$ , definimos a função de transferencia a partir do sinal senoidal.

$$e = e_0 \text{ sen } \omega t$$

pela relação da amplitude  $A = s_0 / e_0$  e da fase  $\phi$  da resposta

$$s = s_0 \text{sen} (\omega T + \phi)$$

graças a propriedade de linearidade;  $A$  e  $\phi$  são funções da freqüência da entrada, porém não dependem mais de suas amplitudes  $e_0$ : isto permite definir uma função de transferência que está em função somente de  $\omega$ .

Ao estendermos o processo a um sistema não linear, somos conduzidos a estudar a saída devido a uma entrada harmônica .

$$x = s_1 \text{sen } \omega t$$

Esta saída  $s(t)$  será "em geral" periódica porém, não senoidal. Se por uma convenção qualquer, definimos uma função senoidal

$$w(t) = w_1 \text{sen} (\omega t + \Psi)$$

que qualificamos (arbitrariamente) equivalente a função  $s(t)$  , podemos definir para o sistema uma "função de transferencia "equivalente" ou "generalizada".

$$\text{módulo} = \frac{w_1}{x_1}, \quad \text{argumento} = \Psi .$$

Como função senoidal equivalente, fixamos geralmente a primeira harmônica de  $s(t)$  (fig. 2.9)



Fig. - 2.9 entrada no bloco N-L da primeira harmônica de  $s(t)$

A diferença com o caso linear é duplo :

A diferença com o caso linear é duplo:

- 1) Ela é um elemento arbitrário na escolha da senóide equivalente da saída.
- 2) A " função de transferência" obtida não depende somente de  $\omega$ , mas sim também da amplitude da entrada  $x_1$ , pois não há a proporcionalidade dos efeitos a causas como no caso linear :

$$\frac{w_1}{x_1} = B(x_1, \omega)$$

$$\Psi = \Psi(x_1, \omega)$$

Geometricamente, nós temos para um sistema não linear, não mais uma linha de transferência graduada em freqüência, porém uma família de linhas de transferência, em função da amplitude de entrada (fig. 2.10)

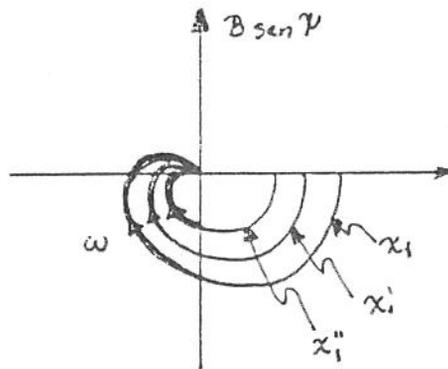


Fig. 2.10 - família de linhas de transferência, em função da amplitude de entrada

A validade prática da aproximação de equivalência harmônica repousa sobre a filtragem de alta freqüência que realiza o estágio de posse de todo o servo-mecanismo.

## 2.5 Função de transferência generalizada. Casos particulares.

### A) Generalidades

Supomos uma função harmônica do tempo

$$x = x_1 \text{ sen } \omega t$$

de período  $T = 2\pi/\omega$  são aplicados na entrada de um bloco não linear  $N$ . Uma vez o regime transitório perfeito, a saída será em geral, um função do tempo de período  $T$ , que pode ser decomposta em série de Fourier.

$$w(t) = w_1 \text{sen}(\omega t + \Psi) + w_2 \text{sen}(2\omega t + \Psi_2) + w_3 \text{sen}(3\omega t + \Psi_3) + \dots$$

De tal modo que nos convém assimilar  $w(t)$  a sua primeira harmônica  $w_1(t) \text{sen}(\omega t + \Psi)$ , a função

$$N(x_1, \omega) = \frac{w_1}{x_1} e^{j\Psi} \quad N(x_1, \omega) = \frac{w_1}{x_1} e^{j\Psi} \quad (2.4)$$

Será considerada como a função de transferência generalizada do bloco  $N$ . Ela possui

- um módulo  $B(x_1, \omega) = w_1 / x_1 \Psi$
- uma fase  $\Psi(x_1, \omega)$

e pode ser representada por uma família de linhas de transferências generalizadas graduadas em  $\omega$ , em razão de um lugar por valor de  $x_1$  (fig.2.10) que pode ser evidentemente expressa pelos diagramas de Nyquist, de Black ou das linhas inversas.

Devido a função de transferência generalizada  $N$  ser função das duas variáveis  $x_1$  e  $\omega$ , sua determinação e sua manipulação se tornam tarefas difíceis. Seria de nosso interesse o caso em que tivéssemos a função em função de uma das variáveis  $x_1$  e  $\omega$ .

O mais importante é o caso onde  $N$ , independe da amplitude da entrada  $x_1$ : há oscilação de uma não linearidade independente de freqüência, chamamos  $N(x_1)$  seu ganho equivalente.

B) ganho equivalente.

O primeiro caso particular de uma importância prática extrema, é o de onde o número complexo  $N$  independente da freqüência e não depende da amplitude  $x_1$ .

$$N(x_1) = B(x_1)e^{j\Psi(x_1)} \quad N(x_1) = B(x_1)e^{j\Psi(x_1)} \quad (2.5)$$

Este é o caso dos elementos não lineares : limiar, saturação, histeresis, on-off e suas combinações, por uma característica que não depende mais do tempo.

Neste caso, chamaremos à função de transferência generalizada  $N(x_1)$  de ganho complexo equivalente do bloco  $N$ ; a família das linhas de transferências generalizadas se reduz a um lugar único graduado em  $x_1$ .

Sendo o bloco  $N$  parte integrante de um Servo-Sistema, e considerando o lugar

$$C(x_1) = -\frac{1}{N(x_1)} \quad (2.6)$$

isto quer dizer que

$$\text{módulo} = \frac{1}{B(x_1)}, \quad \text{argumento} = \pi - \Psi(x_1) \quad (2.7)$$

Este lugar é chamado de lugar crítico do bloco não linear  $N$ .

Assim todos os elementos não lineares (limiar, saturação, histeresis, on-off e suas combinações) definidas no capítulo 1 por uma característica que não depende mais do tempo são (dentro do caso de aproximação enquadrados na aproximação da primeira harmônica) caracterizada por um ganho equivalente ou um lugar crítico.

Devido a um Servo-Sistema compreendo inúmeros blocos lineares e um bloco não linear entrando no caso de um dos tipos precedentes, o sistema é completamente caracterizado pelas funções de transferência dos blocos lineares graduados em freqüências, e por uma linha crítica do bloco não linear, graduados em amplitudes. Fora isto realizamos uma série de separação de variáveis.

Se o sistema é retornado ao esquema da figura 5 do capítulo 1, a função de transferência generalizada, do laço aberto  $S/\epsilon$  aparece como o produto .

$$\frac{S}{\varepsilon}(\varepsilon_1, \omega) = N(\varepsilon_1) \times L(j\omega) \quad \frac{S}{\varepsilon}(\varepsilon_1, \omega) = N(\varepsilon_1) \times L(j\omega) \quad (2.8)$$

de dois fatores onde o primeiro não depende da amplitude e o segundo da frequência

O método de equivalência harmônica é particularmente simples e sobretudo aplicável devido ao bloco linear ter uma característica independente do tempo, isto é, sua função de transferência generalizada se reduz a um ganho equivalente.

## 2.6. Ganho Equivalente de Blocos Não-Lineares Usuais

### 2.6.1 - OnOff

Considerando um elemento on-off (real) desprezando-se a zona morta  $\Delta$  e a histeresis. Quando somamos à uma entrada senoidal  $x_1 \sin \omega t$  (de período  $T = 2\pi/\omega$ ) a saída em regime permanente  $w(t)$  em forma de uma função dividida, representada na figura 2.11 .

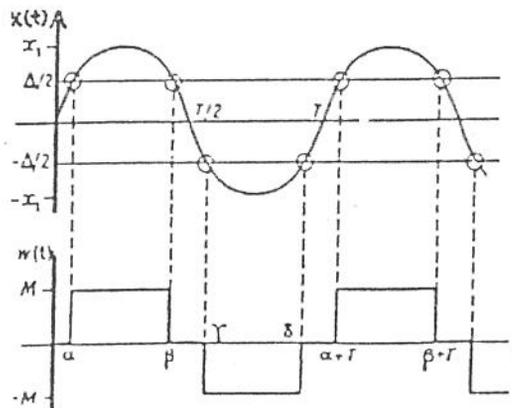


Fig. 2.11 - Saída em regime permanente  $w(t)$  em forma de Função dividida

Se calcularmos a primeira harmônica de  $w(t)$  temos :

a) que está em fase com a entrada :

$$\psi(x_1) = 0 :$$

para entrada, o ganho equivalente é real ;

b) que são amplitudes  $B(x_1)$  e por valores:

$$B(x_1) = \frac{4M}{\pi x_1} \left[ 1 - \left( \frac{\Delta}{2x_1} \right)^2 \right]^{1/2}$$

expressão que é traçada em função de  $x_1$  na figura 2.12 para diversos valores de  $\Delta$ .

Estas curvas são simples de serem interpretadas .O módulo B é nulo para  $x_1 < \Delta/2$ , isto é, a entrada resta ao interior da zona morta, pois desde que  $x_1$  ultrapasse  $\Delta/2$ , o ganho equivalente cresce rapidamente, a saída então está com seu valor máximo M a todos o instantes onde  $x(t)$  ultrapasse  $\Delta/2$ .

Para os três grandes valores de  $x_1$ , ao contrário, a limitação da saída com o valor de saturação M, por maior que seja a entrada, tem-se uma queda da função  $B(x_1)$  que tende a zero. N Notaremos que  $B(x_1)$  admite um máximo igual a  $4M/\pi$  para  $x_1 = 0,707\Delta$ .

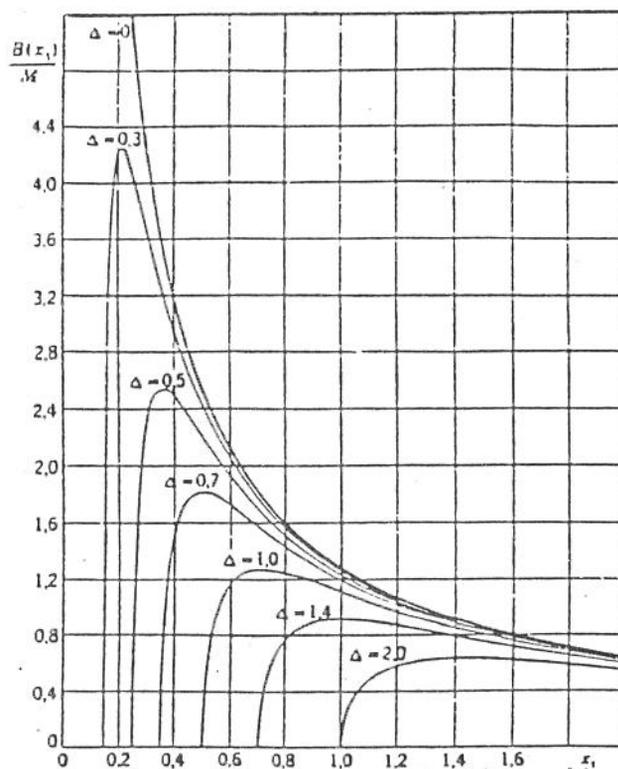


Fig. 2.12 - ganho equivalente real  $N(x_1) B(x_1)$  de um elemento on-off com zona morta  $\Delta$

No caso teórico dos reais sem zona morta, a curva é a hipérbole

$$B(x_1) = \frac{4M}{\pi x_1} \quad (2.9)$$

O valor infinito de  $B(x_1)$  para  $x_1=0$  se aplica pela existência de valores instantâneos de  $w$  iguais a  $M$  onde  $x_1$  é diferente de zero, por menor que seja. Esta hipérbole é o limite das outras curvas devido a  $\Delta$  tender a zero. Mostra-se que todas as curvas são assíntotas para  $x_1$  infinitas.

As regiões críticas devido aos ganhos equivalentes serem reais ( $\Psi = 0$ ), estão no eixo real negativo, graduadas em  $x_1$  de acordo com

$$|C(x_1)| = \frac{1}{B(x_1)} = \frac{\pi x_1}{4M} \left[ 1 - \left( \frac{\Delta}{2x_1} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (2.10)$$



Fig. 2.13 - lugar crítico  $c(x_1) = -1/B(x_1)$  de um elemento de máximo e mínimo com zona morta  $\Delta$  Coordenadas (a) de Nyquist (b) de Black

O ponto crítico  $C(x_1)$  está a menos infinito para  $x_1 < \Delta$ . Ele muda de direção à uma distância mínima de  $x_1 = 0,707 \Delta$  e depois tende de novo ao infinito (fig.2.13(a))

Nas coordenadas de Black, o ponto crítico é portador de uma vertical  $\psi = -180^\circ$ . (fig.2.13(b))

A figura 2.14 representa o ganho equivalente utilizando-se variáveis reduzidas:  $x_1 / \Delta$  em abcissas e  $B\Delta / M$  em ordenadas: ela se aplica a todos os reais desprovidos de histeresis.

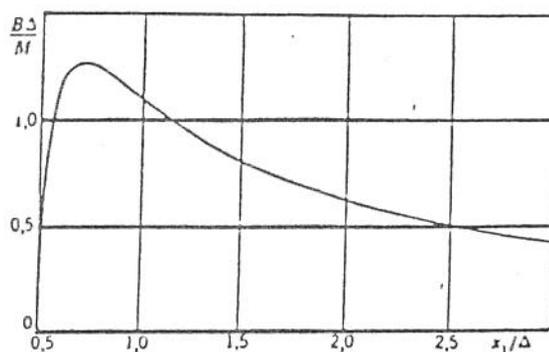


Fig. 2.14 - ganho equivalente real  $N(x_1) = B(x_1)$  de um elemento por on-off com zona morta  $\Delta$ . Coordenadas reduzidas: abcissas  $x_1/\Delta$ ; ordenada  $B\Delta/M$

### 2.6.2 On-Off com Histeresis.

Consideremos agora o caso onde a histeresis do relê não é desprezada.

A resposta  $w(t)$  do relê à uma senóide  $x = x_1 \sin \omega t$  é sempre uma função dividida (fig. 2.15), porém podemos verificar, devido a histeresis, que ela está defasada em relação a entrada (na fig.2.15. o meio do segmento  $\alpha\beta$  está situado a direita do cimo da senóide). Isto torna o ganho equivalente complexo [ $\Psi(x_1) \neq 0$ ] sendo que este novo resultado é obtido devido a presença da histeresis.

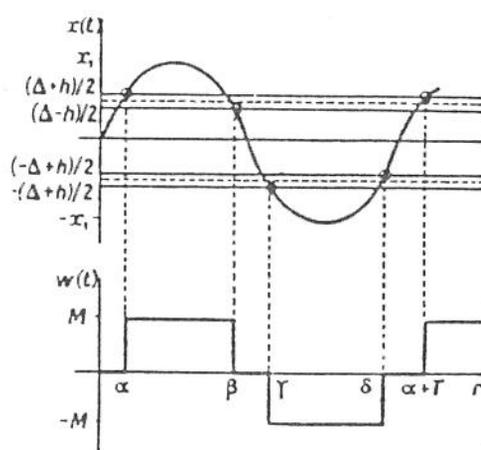


Fig.2.15 - respostas do relê à uma senóide  $x = x_1 \sin \omega t$

O módulo  $B$  e a fase  $\Psi$  do ganho complexo equivalente são representados separadamente na figura 2.16 onde utilizamos as coordenadas

reduzidas ( $x_1/\Delta$  e  $B\Delta/M$ ) Se observarmos que a curva  $h=0$  da figura corresponde ao caso dos reais desprovidos de histeresis (que é idêntico a fig. 2.14), vemos o que a presença de histeresis resulta .

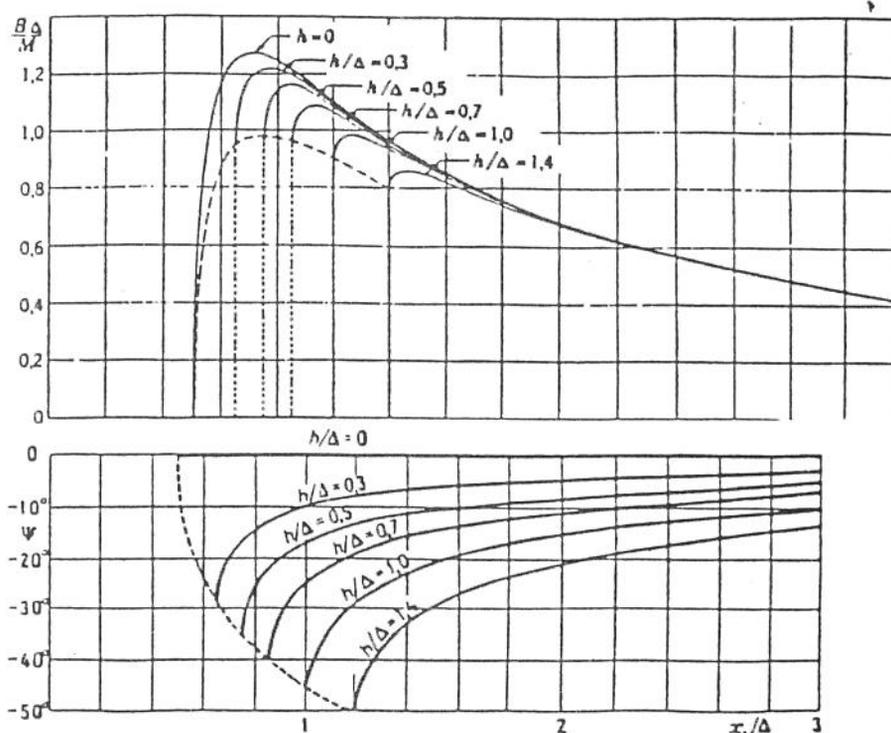


Fig. 2.16 - ganho complexo equivalente  $N(x_1) = B(x_k) \exp [j\Psi(x_1)]$  de um elemento com on-off, zona-morta  $\Delta$  e histeresis  $h$

a) essencialmente, a existência de uma defasagem que, salvo para os três grandes valores de  $h$ , não excede de  $40^\circ$ ;

b) auxilia na diminuição do módulo  $B$

As regiões críticas são traçadas na figura 2.17 na forma de linhas de Black, sempre em coordenadas reduzidas. Onde se vê nitidamente que  $h$  máximo é grande, o lugar crítico de máximo se afasta da região  $h=0$ , que passa pela vertical  $180^\circ$ .

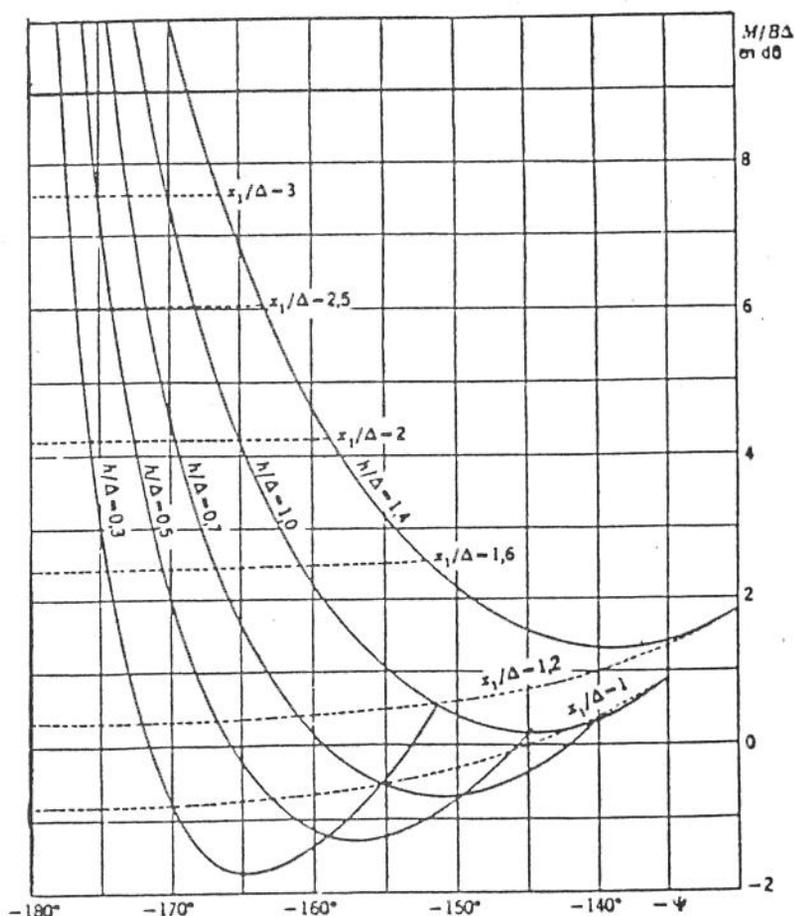
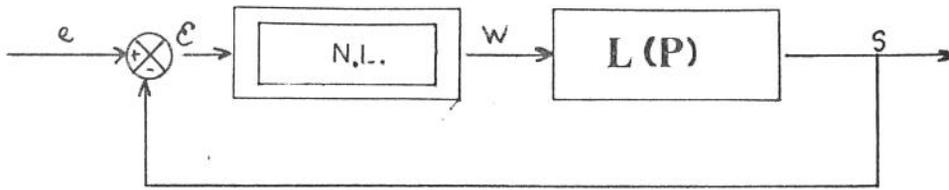


Fig. 2.17 - lugar crítico de um elemento on-off com limiar  $\Delta$  e histeresis  $h$ .

## 2.7 Aproximação da Equivalente Harmônica

Anteriormente, nos foi mostrado como um bloco não linear pode ser representado, no quadro de aproximação de equivalência harmônica, por uma função de transferência generalizada. Se vê em particular porque a não linearidade é independente da frequência, esta função não depende da amplitude da entrada  $x_1$  do bloco não-linear : Isto porque é caracterizado por um ganho equivalente  $N(x_1) = w_1 / x_1$ , que é complexo, se a característica do bloco possui histeresis, ou lugar crítico -  $1 / N(x_1)$ , que está no eixo dos reais na ausência da histeresis

Propõe-se a seguir determinar esta função  $N(x_1)$ .



onde  $N_L$  é a função de transferência do bloco Não-Linear,  $L(p)$  é a função de transferência do bloco Linear,  $p$  é a variável de Laplace

Fig. 2.18 Modelo equivalente de um Servo-Sistema

Estudaremos agora as propriedades de um Servo-Sistema que comporta um bloco não linear no ramo direto.

A análise será feita a partir de um modelo equivalente de um Servo-Sistema com um laço e retorno unitário, onde o erro é a entrada do bloco não linear (fig. 2.18).

Suporemos o bloco  $N$  independente da frequência e a caracterizaremos por seu ganho equivalente  $N(x_1)$ .

## 2.8 - Estabilidade e Oscilações Livres

Um servo sistema linear de função de transferência em malha aberta  $K.G.(p) = S / \varepsilon$  é estável se o lugar de Nyquist  $K.G.(j.\omega)$ , percorrido em sua frequência crescente conduz à esquerda do ponto crítico -1: no caso o sistema retorna ao seu regime definitivo após uma perturbação.

Ao contrário, se o ponto -1 está a direita do lugar  $K.G.(j.\omega)$ , o sistema é instável e possuidor de oscilações de amplitude que crescem exponencialmente com o tempo. Pode-se dizer, que o sistema é estável ou instável no do lugar  $G(j.\omega)$ , percorrido no sentido da frequência crescente, conduz a esquerda ou a direita do ponto crítico  $-1 / K$  (fig. 2.19).

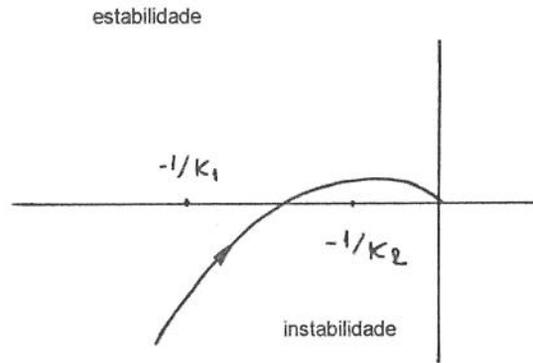


Fig.2.19 - Critério do reverso para um servo sistema linear de função de transferência em malha aberta  $KG(p)$

Esta propriedade pode ser entendida como o caso de um Servo-Sistema que contém um elemento Não-Linear caracterizado por um ganho complexo equivalente  $N(\varepsilon_1)$  fig.2.18 .

Consideremos a função de transferência generalizada em malha-aberta

$$\frac{S}{\varepsilon} = N(\varepsilon_1).L(j\omega)$$

devido a  $\varepsilon_1$  ser constante,  $L(\varepsilon_1)$  é um número fixo (complexo se possui histeresis) e podemos assimilar a um sistema com um servo-mecanismo linear de função de transferência em malha-aberta com  $N(\varepsilon_1)L(p)$ .

O sistema é estável para a amplitude  $\varepsilon_1$ , se o lugar de transferência conduz à esquerda do ponto crítico  $-1$ . E este é instável por  $\varepsilon = \varepsilon_1$  se este conduz a direita .

Enfim, se o ponto crítico está situado sobre o lugar  $L(j\omega)$  em  $\omega = \omega_0$ , o sistema é oscilatório para  $\varepsilon = \varepsilon_1$ , quer dizer que uma vez que amortecida uma oscilação de amplitude  $\varepsilon = \varepsilon_1$  e de frequência  $\omega_0$  pode persistir definitivamente.

Atenta-se novamente que a estabilidade do sistema à amplitude  $\varepsilon_1$ , depende da posição em relação do lugar  $L(j\omega)$  do ponto fixado  $-1/N(\varepsilon_1)$ , isto é, do ponto  $\varepsilon_1$  do lugar crítico.

Este ponto generaliza assim o ponto crítico  $-1/K$  do sistema linear (é precisamente esta propriedade da qual chamamos "ponto crítico" para o lugar

$-1/N$ ) com esta diferença que justifica a histeresis, o ponto crítico  $-1/N$  não mais está sobre o eixo real.

O sistema é estável com amplitude  $\varepsilon_1$  se o lugar  $L(j\omega)$  conduz o ponto  $-1/N(\varepsilon_1)$  à sua esquerda; e é instável se este conduz a sua direita; em fim, ele possui oscilação exata com amplitude  $\varepsilon_1$  se o lugar  $L(j\omega)$  passa precisamente pelo ponto  $\varepsilon_1$  da região crítica.

O lugar crítico se encontra assim dividido em regiões de amplitude de estabilidade e em regiões de amplitude de instabilidade (de acordo com fig. 2.20 e 2.22, onde as zonas de instabilidade do ponto crítico são marcadas em traços descontínuos).

Estas considerações constituem uma base importante para podermos efetuar o processo de estabilização de Servo-Sistemas.

### 2.8.1 Análise de Servo-Sistemas com On-Off

Seja um Servo-Sistema por on-off com função de transferência  $L(p)$  regular o qual é um bloco que possui um limiar  $\Delta$  e uma histeresis  $h$  como Não-Linearidades.

A figura 2.20 mostra o lugar de transferência  $L(j\omega)$  e o ponto crítico  $-1/N(\varepsilon_1)$ . Tem-se o ponto da oscilação limitada, constituindo uma das inconveniências principais dos servo sistemas por on-off.

A possibilidade de oscilação diminui a precisão; e no caso de atingirmos uma oscilação de alta intensidade, podemos gerar o dano estrutural do objeto de controle.

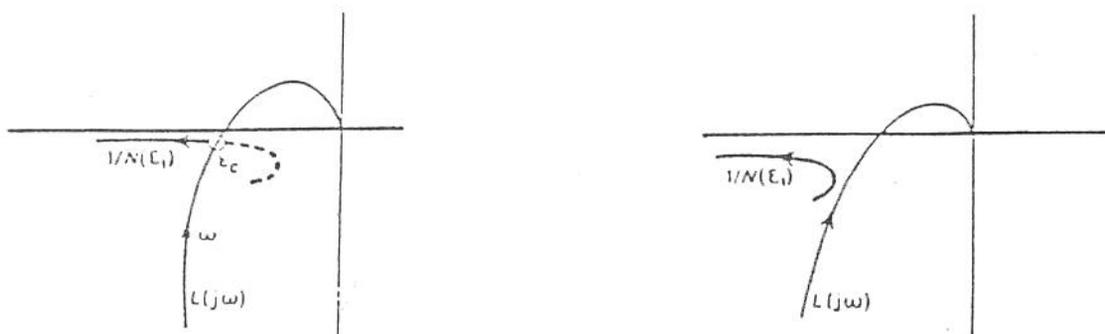


fig.2.20 - Oscilação limite estável (a posição do ponto crítico traçada em linha descontínua correspondendo a amplitudes  $\varepsilon_1$  da estabilidade

fig.2.21 - Andamento de oscilação limite

A fig. 2.21 se deduz da fig. 2.20 pela implementação da zona morta  $\Delta$ , que tem por efeito alterar a posição do lugar crítico. Assim, o sistema é sempre estável : A argumentação da zona morta faz desaparecer a oscilação limitada ,porém, este efeito é pago por uma diminuição da precisão, crescente em proporção ao aumento do limiar .

A fig.2.22 introduz uma nova noção. Tem-se duas interseções, do lugar de transferência  $L(j\omega)$  e do ponto crítico:  $C'$  e  $C''$ , com as amplitudes  $\varepsilon'_c$  e  $\varepsilon''_c$  e frequências  $\omega'_c$  e  $\omega''_c$  respectivamente . Vemos que  $C''$  corresponde a uma oscilação limite estável. Porém, o caso é diferente em  $C'$  .

Em efeito, o sistema é estável para  $\varepsilon_1 < \varepsilon'_c$  e instável para  $\varepsilon_1 > \varepsilon'_c$  : Isto vem dizer que o sistema reage diferentemente para as pequenas e para as grandes perturbações: os primeiros são amortecidos e o sistema vai ao repouso, os segundos conduzem às oscilações limite  $C''$  .

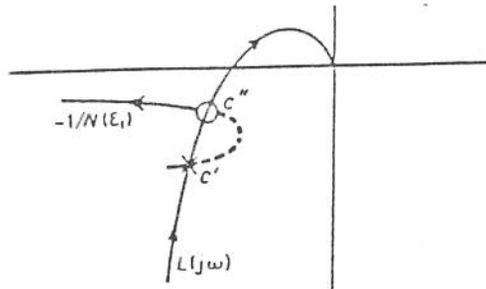


Fig 2.22 - limite da estabilidade  $C'$  e oscilação limite estável  $C''$

Notamos que na ausência da histeresis, as oscilações limite ocorrem sempre a uma frequência para a fase de  $L(j\omega)$  estando em  $-180^\circ$ .

### 2.8.2 Influencia do Limiar, Retardadores e Histeresis no caso dos Servo-Sistemas por reguladores OnOff

Seja um Servo-Sistema por on-off onde a parte linear é caracterizada por uma função de transferência  $L(p)$  do tipo regular .

$$L(p) = \frac{K}{p(1+T_p)(1+T'_p)}$$

onde  $T$  pode esquematizar o retardamento do bloco Não-Linear



Fig.2.23 - Casos de Servo-Sistemas com e sem limiar

**Caso I : Histeresis  $h$  e retardo  $T'$  desprezível.** Se a folga é um limiar , não teremos oscilações limite (Fig.2.23 (a)) . Se o limiar é desprezado (on-off ideal) podemos dizer que há uma interseção com a origem (Fig.2.23 (b)), isto é, uma oscilação limitada de freqüência muito grande e de amplitude fraca.

**Caso II. : Influência de um retardador .** O lugar de transferência ocupa sempre o eixo real negativo. Na ausência do limiar há sempre uma oscilação limitada (fig. 2.24) que se produz à freqüência pela soma das defasagens dos blocos lineares sendo iguais a  $180^\circ$  . São amplitudes lidas sobre a graduação da região crítica .

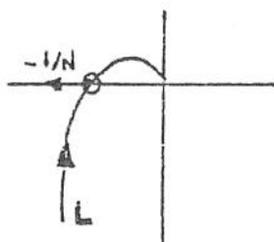


Fig.2.24 - Ausência do limiar gera sempre oscilação limitada

As duas quantidades - freqüência e amplitude de oscilação limite permitem estudar o efeito dos diversos parâmetros. Se houver um limiar, a oscilação limite desaparece desde que ele exceda um certo valor (fig.2.25(a) e 2.25 (b)) .

Se o limiar é inferior a este valor crítico, vemos que o retardamento é maior, a freqüência é menor e a amplitude da oscilação limite é maior (fig.2.26)

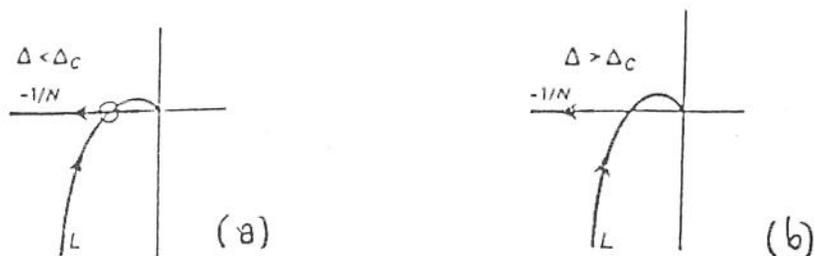


Fig.2.25 (a), (b) - presença do limiar faz oscilação limite desaparecer desde que ela ele exceda determinado valor

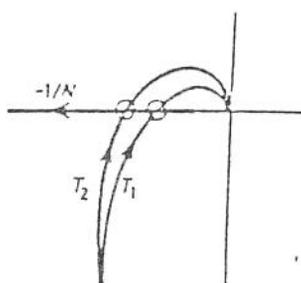


Fig. 2.26 - Os retardos aumentam a amplitude e diminuem a frequência da oscilação limite

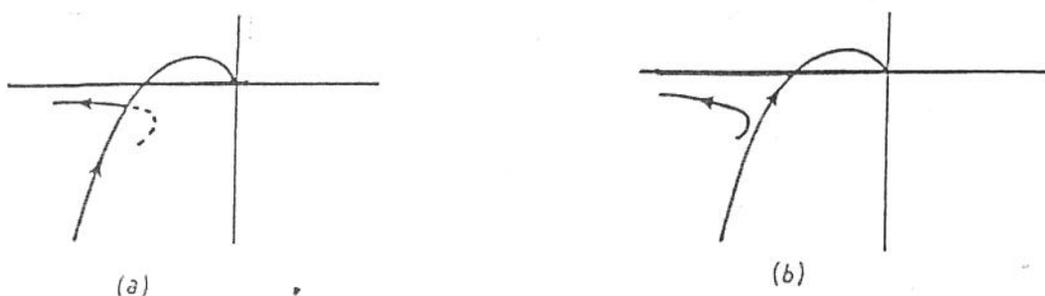


Fig.2.27 - O aumento da folga do limiar elimina a interseção com o lugar crítico, eliminando o fenômeno da oscilação limitada.

**Caso III. - Histeresis.** Esta faz o ganho equivalente ser complexo, sendo que o lugar crítico não é mais situado no eixo real negativo. Sua interseção com o lugar  $L(j\omega)$  nos dá a oscilação limite. Esta pode ser suprimida ao aumentar o limiar da folga ao descrever um certo valor crítico (fig. 2.27).

A histeresis diminui a frequência da oscilação limite, e geralmente aumenta sua amplitude (Fig 2.28). Seu efeito é agora quantitativamente, o mesmo que a do limiar do retardo

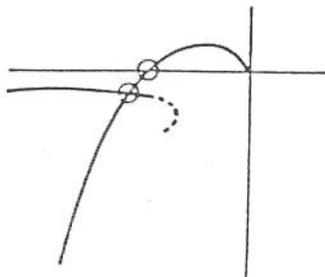


Fig.2.28 - O histeresis diminui a frequência e aumentando a amplitude da oscilação limitada

## 2.9.Análise de Plano de Fase de Sistemas de Controle Não-Lineares

Em sistemas de segunda ordem com não linearidades dependentes de sinal, é possível aproximar o sistema por vários sistemas lineares por trechos. O plano de fase inteiro é dividido em várias sub-regiões, cada uma correspondendo a uma operação linear individual. Há um ponto singular para cada região, embora ele possa estar localizado fora daquela região particular .

Se o ponto singular está dentro de sua sub-região, então ele é chamado de um ponto singular real . Mas , se o ponto singular está fora da sub-região a que ele pertence e ,portanto, nunca pode ser alcançado pelas suas próprias trajetórias, ele é chamado de um ponto singular virtual. Um sistema de segunda ordem com não linearidade dependente de sinal pode ter apenas um ponto singular real .

Todas as regiões adjacentes a uma região com um ponto singular real terão pontos singulares virtuais . A localização e natureza de cada ponto singular são determinadas a partir da equação diferencial que governa a dada sub-região o gráfico de plano de fase de cada sub-região é o de um sistema

linear. A trajetória composta, que é obtida juntando trajetórias nas fronteiras de cada região de operação, fornece a resposta transitória do sistema não linear .

### 2.9.1 Sistemas de Controle com Ganhos Não-Lineares

Considere o sistema não linear visto na Fig.2.29(a). O bloco chamado GN é o elemento de ganho não linear. A curva característica de entrada-saída deste elemento é vista na fig. 2.29(b). O ganho do elemento é unitário ou  $k$ , sempre que a magnitude do sinal de erro  $e$  é maior do que ou menor do que  $e_0$ , respectivamente. Ou seja ,

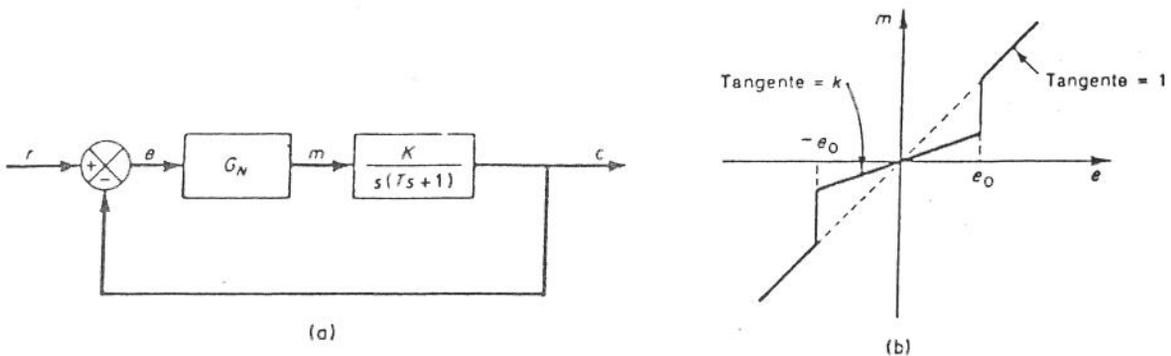


Fig.2.29 - (a) Sistema Não-Linear,

(b) curva característica de entrada-saída do elemento de ganho Não-Linear

O sistema tem um ganho grande para sinais de erro grandes e tem um ganho pequeno para sinais de erro pequenos. O chaveamento do ganho pode ser conseguido usando-se um dispositivo de chaveamento que muda o ganho do amplificador abruptamente de um valor para outro . Para valores pequenos de  $e$  , o sistema apresenta uma resposta lenta , e para grandes erros , uma resposta rápida . Esta característica pode ser desejável para sistemas sujeitos a ruídos de baixa amplitude e alta freqüência uma vez que sinais de ruídos indesejáveis serão suprimidos substancialmente, enquanto que sinais de comando podem ser transmitidos de modo satisfatório .

Como este sistema é linear por trechos, é possível obter trajetórias para este sistema combinando as trajetórias de dois sistemas lineares .

Neste exemplo, supomos que o sistema está inicialmente em repouso . A equação diferencial relacionando as variáveis  $c$  e  $m$  é

$$T\ddot{c} + \dot{c} = km \quad (3.1)$$

Como  $e = r - c$ , esta última equação pode ser escrita como

$$T\ddot{e} + \dot{e} + km = T\ddot{r} + \dot{r} \quad (3.2)$$

Dois tipos de entradas serão consideradas aqui , a entrada em degrau e a entrada em rampa(ou rampa mais degrau) .

Para entradas em degrau. Como para entradas em degrau  $r'' = r' = 0$  para  $t > 0$ , a equação (3.2) se torna

$$T\ddot{e} + \dot{e} + k_m = 0 \quad p/ t > 0 \quad (3.3)$$

Das equações (3.1), (3.2) e (3.3), obtemos as duas equações seguintes:

$$\begin{aligned} T\ddot{e} + \dot{e} + K_e = 0 \quad p/ |e| > e_0 & \quad T\ddot{e} + \dot{e} + K_e = 0 \quad p/ |e| > e_0 \\ T\ddot{e} + \dot{e} + kK_e = 0 \quad p/ |e| < e_0 & \quad T\ddot{e} + \dot{e} + kK_e = 0 \quad p/ |e| < e_0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Para se obter a trajetória do sinal de erro, os pontos singulares do sistema devem ser inicialmente determinados . Os pontos singulares estão onde  $e' = e'' = 0$ . Está claro, a partir das equações (3.4) e (3.5), que a origem (0,0) é o ponto singular para o sistema representado por estas duas equações.

Na análise que se segue será suposto que as raízes da equação característica correspondendo à equação (3.4) , são complexos conjugados e estão no semi plano esquerdo do plano complexo . Portanto, a natureza do ponto singular (0,0), neste caso é aquela de um foco estável .

O valor de  $k$  é o suposto tal que o coeficiente de amortecimento da equação característica correspondendo a eq. (3.5) é igual a 1 . Então, a resposta é sub-amortecida para erros grandes e criticamente amortecida para erros pequenos. Se a relação entre  $m$  e  $e$  fosse dada ou por  $n = k.e$  ou  $m = e$  para todas as magnitude do sinal de erro , então o gráfico de plano de fase teria o aspecto visto na figura 2.30 (a) ou aquele visto na fig. 2.30 (b) .

A figura 2.31 mostra a trajetória do sinal de erro do sistema visto na figura 3.1(a), com as constantes do sistema sendo  $T=1$ ,  $K=-4$ ,  $k= 0,0625$ , e  $e_0=0,2$ . Supõe-se que a entrada do sistema é um degrau unitário. Como visto na fig. 2.31, o plano de fase está dividido em três regiões . Na região limitada pelas linhas  $e=e_0$  e  $e=-e_0$  , ocorre uma operação linear representada pela eq.(3.5).

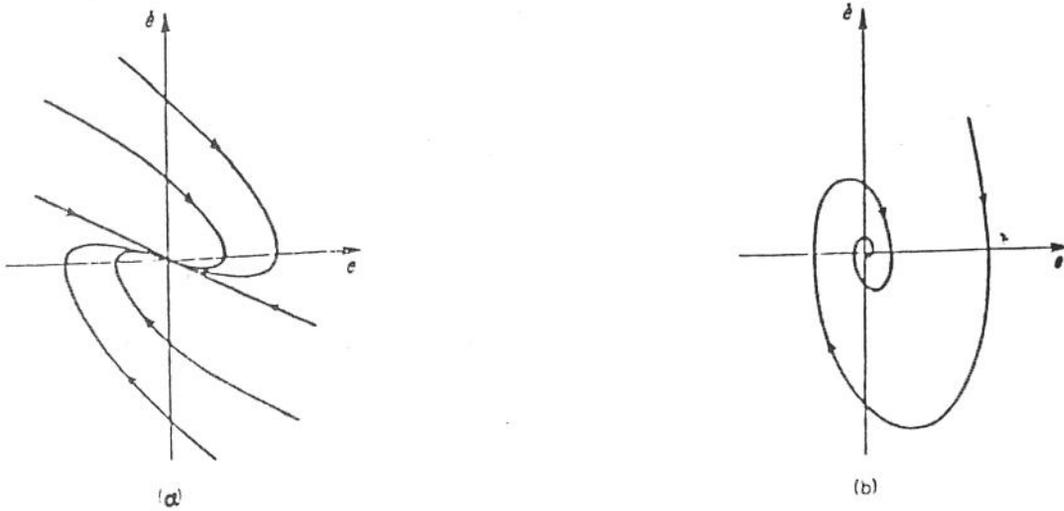


Fig2.30- Gráficos de plano de fase de sistemas Não-Lineares.

(a) Caso sobre-amortecido ( $m=ke$ )

(b) caso sub-amortecido

Fora desta região, ocorrerá a outra operação linear. Correspondendo à eq. (3.4). Na figura 2.31, a trajetória começando no ponto A, que é determinada pelas condições iniciais  $e(0) = 1$ ,  $e'(0) = 0$ , tende a convergir para o foco estável (coordenadas  $(0,0)$ ). A operação do sistema é chaveada no ponto B, entretanto, onde a trajetória intercepta a linha de fronteira  $e=e_0$ . Neste ponto, a trajetória é conectada a uma trajetória pertencendo ao ponto singular da região adjacente e passando por este ponto.

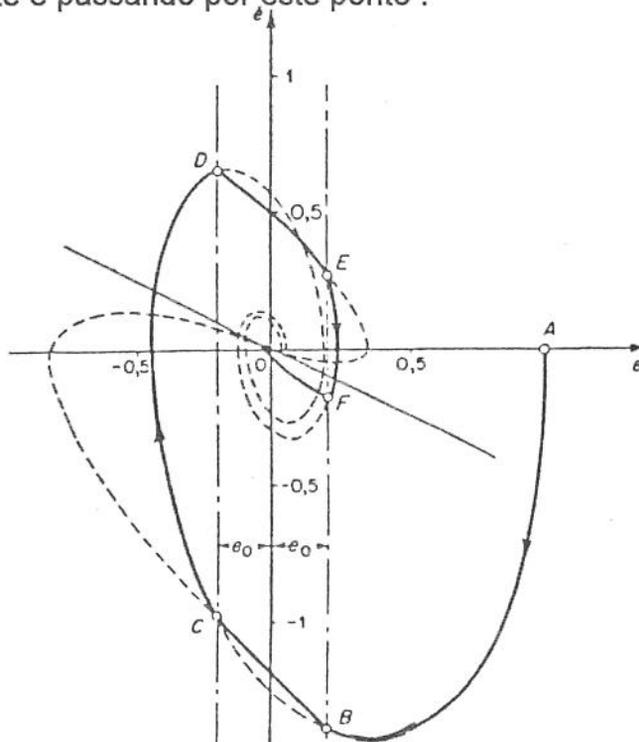


Fig. 2.31- Trajetória correspondente a uma resposta degrau unitário do sistema visto na figura 2.29(a).

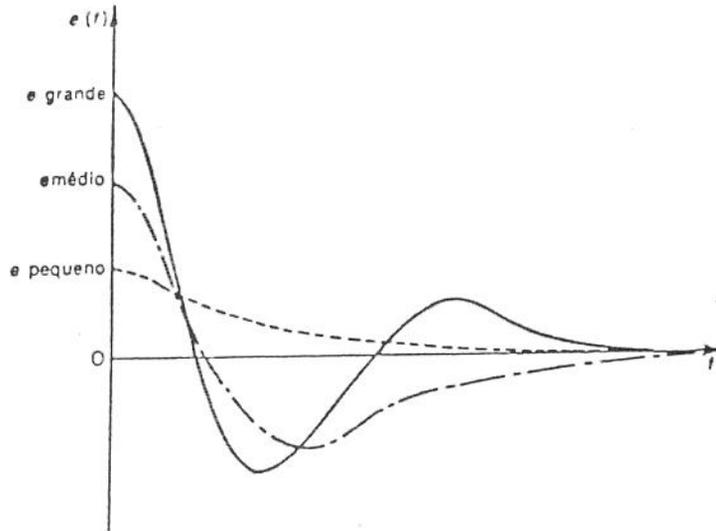


Fig. 2.32- Curvas típicas de resposta a degrau para o sistema visto na Fig.2.30(a)

de entrada

$$r(t) = R + Vt \quad (3.5)$$

A eq.(3.4) se torna

$$T\ddot{e} + \dot{e} + K_m e = V \quad p/ t > 0 \quad (3.6)$$

Das eqs. (3.1) e (3.6), obtemos para  $t > 0$

$$T\ddot{e} + \dot{e} + K_e e = V \quad p/ |e| > e_0 \quad (3.7)$$

$$T\ddot{e} + \dot{e} + K_k e = V \quad p/ |e| < e_0 \quad (3.8)$$

O ponto singular correspondente a equação (3.7) é  $(V/K, 0)$  que é suposto ser um foco estável, e o correspondente a eq. (3.8) é  $(V/K_k, 0)$  que se acredita ser um nó estável.

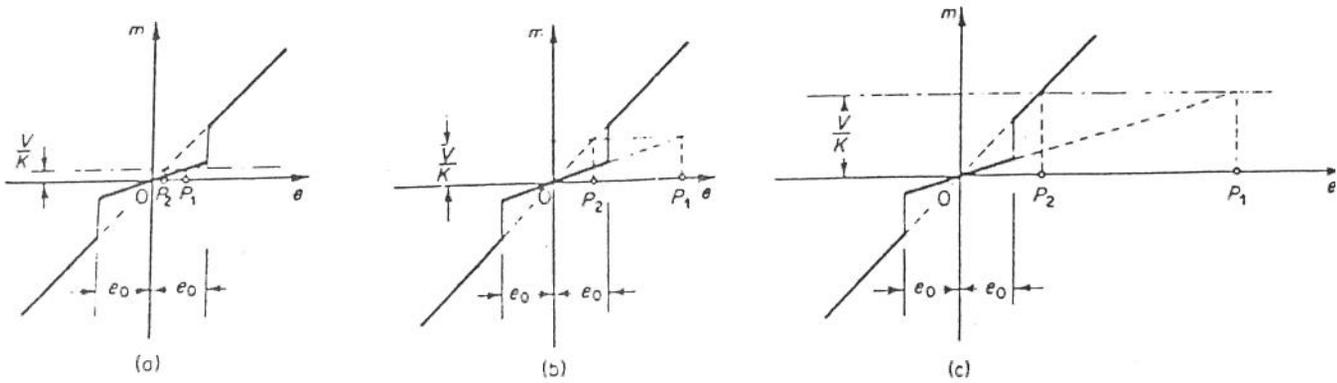


Fig.2.33-Diagramas mostrando as localizações dos pontos singulares .

A figura 2.35 mostra a trajetória de sinal de erro para o caso  $V < Ke_0$  (os valores numéricos usados para este exemplo são  $T=1$ ,  $K=4$ , e  $k = 0,0625$ , e  $e_0=0,2$ ,  $R=0,3$ , e  $V = 0,04$ ). O ponto de partida A da trajetória é determinado pelas condições iniciais  $e_0 = R = 0,3$  e  $e'(0) = V=0,04$ . A trajetória partindo do ponto A tende a convergir para o foco estável  $P_2$ . Tão logo a trajetória alcance o ponto B, entretanto, a operação do sistema é chaveada, e a trajetória começa a convergir para o no estável  $P_1$ . Em regime permanente, o sistema tem um erro cuja a magnitude é  $O P_1$ .

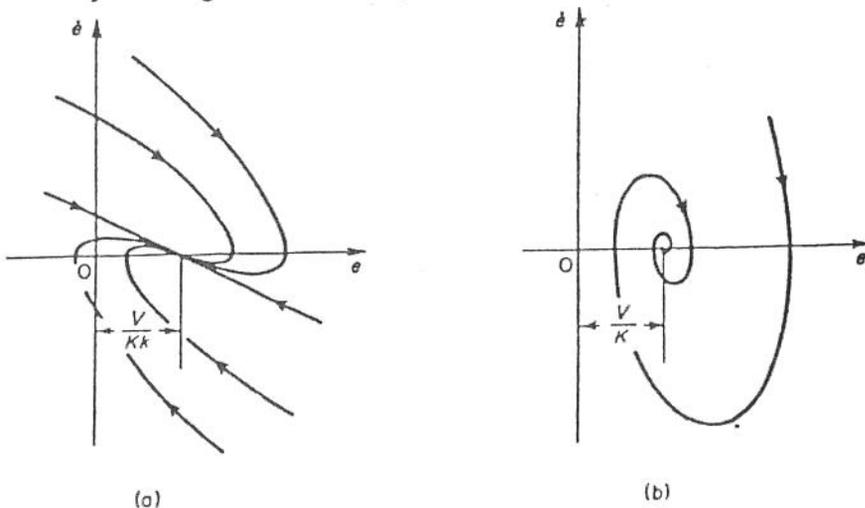


Fig.2.34-Gráficos de plano de fase de sistemas Não-Lineares com entradas em rampa. (a) Caso sobre-amortecido ( $m=ke$ ).  
(b) caso sub-amortecido ( $m=e$ )

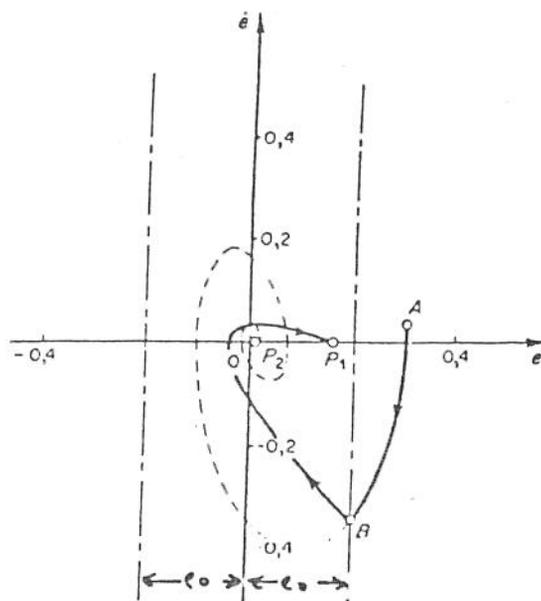


Fig.2.35 - Trajetória correspondente a uma resposta a rampa (rampa+degrau) do sistema visto na fig. 2.29(a).

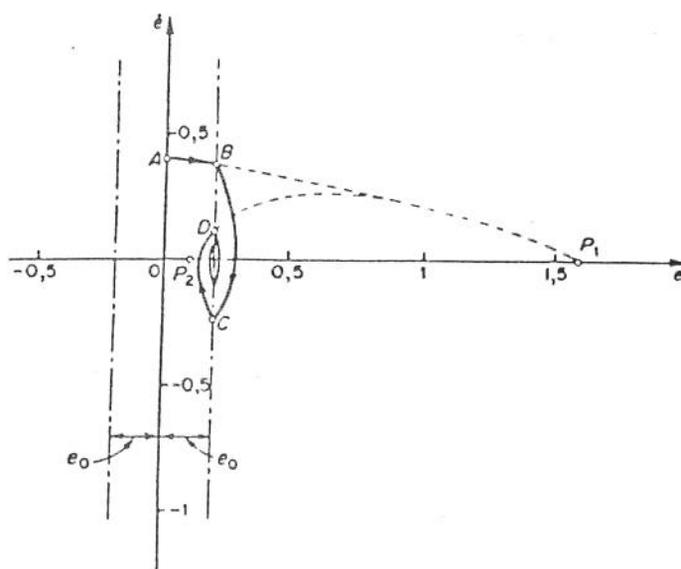


Fig.2.36 - Trajetória correspondendo a uma resposta a rampa do sistema da Fig.2.29(a)

A figura 2.36 mostra a trajetória do sinal de erro quando  $Ke_0 < V < Ke_0$  (na figura 2.36, as constantes do sistema são  $T=1$ ,  $K=4$ ,  $k=0,0625$ ,  $e_0=0,2$ . a entrada é  $r(t) = Vt = 0,4t$ ). A trajetória começa no ponto a que corresponde as condições iniciais  $e_0=0$  e  $e'_0=0,4$ , e tende a convergir para nó estável  $P_1(1,6; 0)$  o chaveamento na operação ocorre no ponto B, e então a trajetória tende a convergir para o foco estável  $P_2(0,1; 0)$  o sistema novamente chaveia no

ponto C e a trajetória tende a convergir para o nó estável  $P_1$ . Um outro chaveamento ocorre na operação do sistema do ponto D. O mesmo processo continua até que a trajetória converge para o ponto onde  $e=e_0$ , e  $e'=0$ . Pode-se ver, na fig. 2.36 que a medida que a trajetória se aproxima do ponto singular  $(e_0,0)$  o sinal de erro exibe pequenas oscilações e a magnitude do erro estacionário se torna  $e_0$ .

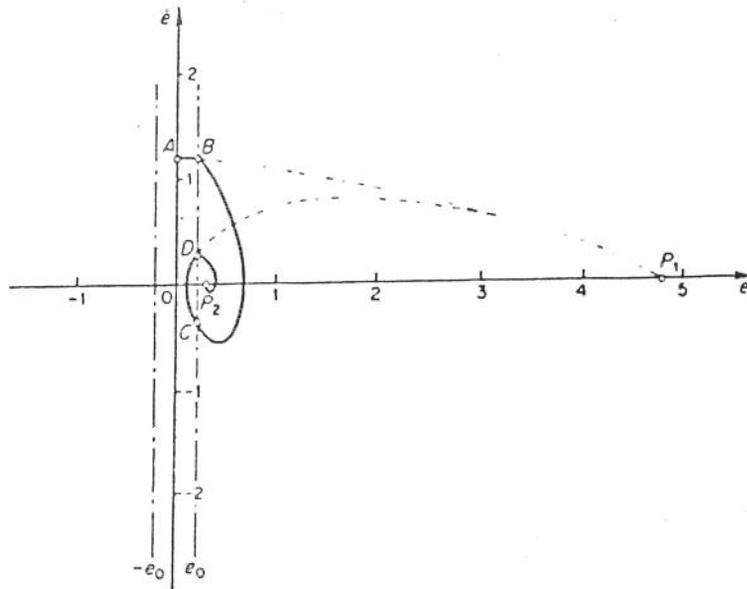


Fig.2.37 - Trajetória correspondente a uma resposta a rampa do sistema da fig.2.29 (a)

A operação estacionária do sistema depende da construção física do elemento de ganho não linear. Se o chaveamento de uma operação linear para outra envolve algum atraso, a resposta do sistema apresentará um ciclo limite em torno do ponto  $(e_0, 0)$ . Se o chaveamento ocorre instantaneamente, o sistema, em regime estacionário, apresenta uma espécie de oscilação tudo ou nada (on-off).

A figura 2.37 mostra a trajetória do sinal de erro para o caso em que  $V > K e_0$  [ A entrada é  $r(t) = Vt = 1,2t$  ]. A trajetória partindo do ponto A, com o ponto correspondendo à condição inicial, tende a convergir para o foco estável  $T_1, (4,8 ; 0)$ . Entretanto, as operações do sistema é chaveada no ponto B, e a trajetória tende a convergir para o foco estável  $P_2, (0,3 ; 0)$ . A operação é novamente chaveada no ponto C, e depois no ponto D, e finalmente a trajetória converge para o foco estável  $P_2$ . à medida que a trajetória se aproxima da vizinhança do ponto  $P_2$ , o sinal de erro apresenta pequenas

oscilações, que irão decair para o 0. Em regime estacionário, a magnitude do erro é  $OP_2$ .

A análise feita até agora ilustrou que os tipos de resposta de sistema não lineares são dependentes da entrada. Por exemplo, para uma pequena entrada em degrau, a resposta não apresenta sobre-sinal. Para uma entrada em degrau grande, a resposta é oscilatória. Para uma entrada em rampa de pequena amplitude, a resposta é aperiódica, enquanto que uma entrada em rampa de amplitude grande a resposta é oscilatória.

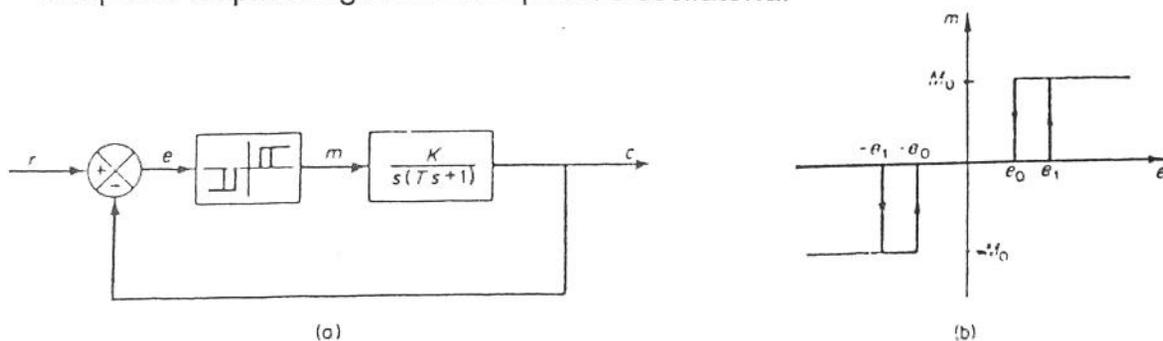


Fig.2.38 - (a) Sistema de controle não-linear ;

(b) curva da característica entrada-saída do elemento não-linear

A condição ligado para a condição desligado. Determine o comportamento de resposta a degrau e a rampa para este sistema. Supõe-se que as constantes do sistema são  $T=1$ ,  $K=4$ ,  $e_0=0,1$ ,  $e_1=0,2$  e  $M_0=0,2$ .

A equação para este sistema é

$$T\ddot{e} + \dot{e} + Km = T\ddot{r} + \dot{r}$$

Para  $\dot{e} > 0$ , temos

$$\begin{aligned} m &= M_0 && \text{para } e > e_1 \\ m &= 0 && \text{para } e_1 > e > -e_0 \\ m &= -M_0 && \text{para } e < -e_0 \end{aligned}$$

Para  $\dot{e} < 0$ , temos

$$\begin{aligned} m &= M_0 && \text{para } e > e_0 \\ m &= 0 && \text{para } e_0 > e > -e_1 \end{aligned}$$

$$m=-M \quad \text{para } e < -e_1$$

Para entradas em degrau: A trajetória deste sistema com uma entrada degrau unitário é vista na figura 2.39. A resposta mostra um ciclo limite em regime estacionário. Portanto, a oscilação na saída do sistema continua indefinidamente.

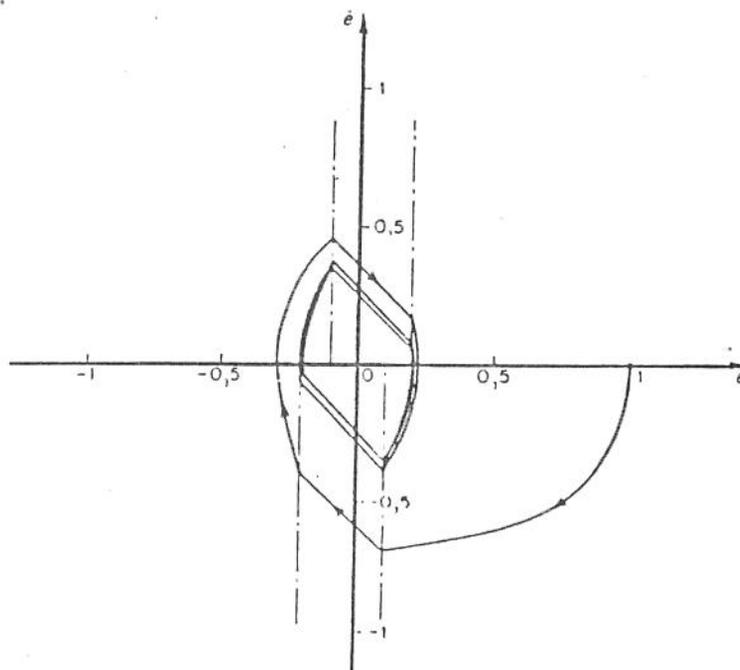


Fig.2.39 - Trajetória correspondendo a uma resposta a degrau unitário do sistema visto na figura 2.38(a)

Para entradas em Rampa: Para uma entrada em rampa  $r(t) = Vt$ , a equação do sistema se torna

$$T\ddot{e} + \dot{e} + Km = V T\ddot{e} + \dot{e} + Km = V$$

Investigaremos agora a resposta para a entrada em rampa para três casos diferentes .

Caso I ( $V > KM0$ ): Um gráfico de plano de fase para o caso em que  $V=1,2$  é visto na figura 2.40. A trajetória partindo do ponto O, por exemplo, seguirá o caminho ABCD . A trajetória é assintótica à reta  $e'=0,4$ . O erro tende a infinito quando o tempo aumenta indefinidamente.

Caso II. ( $V < KM0$ ): Um gráfico de plano de fase para o caso em que  $V=0,4$  é visto na figura 2.41. A trajetória partindo do ponto A segue o caminho ABCDEF e converge para um ciclo limite. A oscilação de saída continua indefinidamente.

Caso III. ( $V=KM0$ ): UM gráfico de plano de fase para o caso em que  $V=0,5$  é visto na figura 2.40. A trajetória partindo do ponto A segue o caminho ABCD. A trajetória converge para o ponto D. Em regime estacionário, o sistema terá um erro estacionário igual a OD.

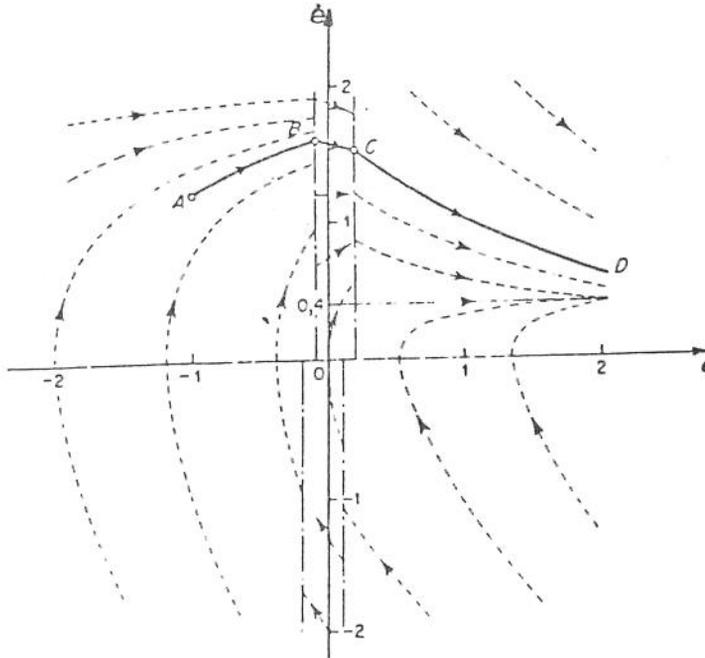


Fig.2.40 - Gráfico de plano de fase do sistema visto na Fig.2.38 (a). [ $r(t) = 1.2t$ ]

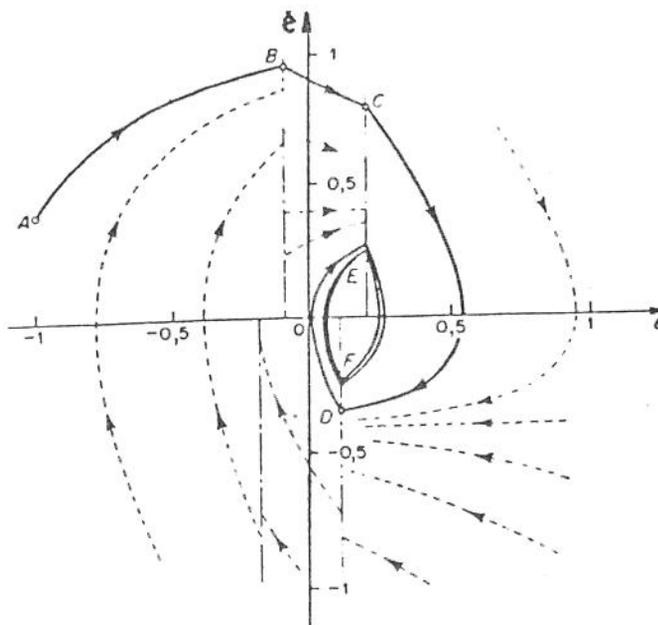


Fig.2.41 - Gráfico do plano de fase do sistema visto na fig. 2.38(a). [ $r(t) = 0.4t$ ]

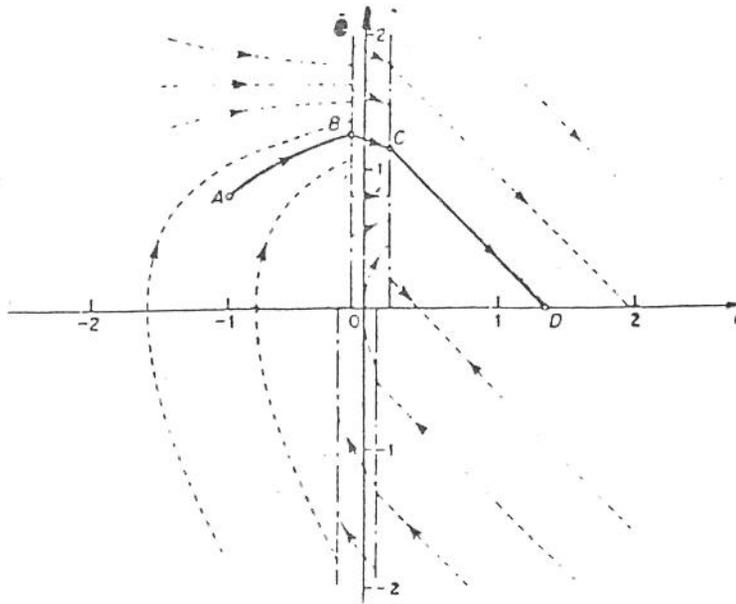


Fig.2.42 - Gráfico de plano de fase do sistema visto na fig. 2.38 (a) .  $[r(t) = 0.8t]$

## 2.10 Comentário finais, conclusões parciais

A partir deste capítulo, foi possível se observar o regime transitório de Servo-Sistemas regulados por ações de controle Não-Lineares, verificando o efeito da histeresis e do limiar quando inseridos no relê.

Outra contribuição importante, está relacionada a questão da aproximação da harmônica equivalente, permitindo a partir desta ferramenta a obtenção de funções de transferência generalizadas para sistemas portadores de Não-Linearidades.

Foi apresentada a discussão do ganho equivalente de blocos Não-Lineares usuais, efetuando-se a investigação da estabilidade dos sistemas através do exame dos diagramas de Black e Nyquist, constatando a partir destes o efeito do limiar eliminando a oscilação limitada e da histeresis aumentando a amplitude e reduzindo a freqüência da pulsação.

Para desfechar o presente capítulo, quanto a análise de planos de fase, foi mostrado que é possível estabelecer todas as características quantitativas das trajetórias examinando o campo de direções definido pelas equações diferenciais em um número suficientemente grande de pontos no plano de fase. Pode-se fazer com que a precisão de tal gráfico seja tão boa quanto desejada, dentro de certos limites.

Embora a análise gráfica do plano de fase seja limitada a sistemas de segunda ordem, os conceitos de análise de plano de fase podem ser estendidos para sistemas de ordem superior. Em virtude das dificuldades de trabalhar graficamente em espaço tridimensional e da impossibilidade de visualizar trajetórias em espaços  $n$ -dimensionais se  $n > 3$ , torna-se necessário utilizar-se outros métodos.

## Capítulo 3

### Descrição Matemática de Manipuladores Robóticos

O comportamento dinâmico de um sistema robótico é descrito pelas equações dinâmicas que são constituídas por expressões complexas e Não-Lineares. Elas expressam a forma de como a energia externa aplicada ao servo-mecanismo é trocada entre seus armazenadores. As respostas do sistema a forças nele aplicadas descrevem seu comportamento dinâmico, que obviamente está em função de sua estrutura, a qual é definida pelas constantes de massa, inércia, rigidez, comprimento e outros parâmetros.

Um atuador usado em estruturas pode ser rotacional ou linear e pode incluir transmissões, caixas de engrenagens e articulações.

Os mecanismos de transmissão podem também ser modelados no sistema dinâmico adicionando-se variáveis de estado apropriadas para o atuador. Sendo assim, para simplificar o trabalho, a dinâmica da transmissão não é incluída nela e o acionamento é tratado como um corpo rígido com inércia.

Iniciaremos o capítulo pela apresentação dos elementos da cadeia cinemática e em seguida o estabelecimento analítico das diversas funções de transferência, iniciando-se pelo acionador elétrico, do conjunto mecânico (transmissão+carga), finalizando o capítulo com a modelagem dinâmica de um robô de duas juntas.

As equações do movimento são obtidas a partir das leis da mecânica tanto Newtoniana quanto Lagrangeana, desenvolvidas no apêndice. Apesar dos princípios elementares serem exatamente os mesmos, os diferentes formalismos tratam o estudo do manipulador de formas particulares, cada um possibilitando a elaboração de uma equação de movimento particular, com características peculiares.

Neste capítulo utilizamos o método de Euler-Lagrange para o estudo da dinâmica do sistema, sendo que este possibilita a dedução de um conjunto de equações Não-Lineares de segunda ordem acopladas que, desprezando-se o efeito do controlador e atuador representam matricialmente o sistema. Além disto, este enfoque possibilita encontrar matrizes que representam os termos envolvidos no movimento do processo como termos inerciais, centrípetos e de Coriolis causados pela velocidade das juntas e os termos devido a ação da gravidade .

Para uma melhor compreensão do ponto de vista de controle, consideraremos o modelo de uma junta robótica como um pêndulo em equilíbrio instável. O método clássico para estabilizá-lo consiste na aplicação ao sistema de uma ação proporcional ao desvio em relação ao valor da posição.

O pêndulo tem uma faixa de tolerância de erro em torno da posição de equilíbrio, a qual é denominada zona morta. Quando o erro ultrapassa a este limiar, o acionador desenvolve uma ação de torque contrária para compensar o desvio.

Devido ao caráter no ponto de equilíbrio ser instável, é importante notar que ao ser implementada uma ação de controle por relê, este tende a permanecer em regime oscilatório constante na região do ponto final

Na Figura 3.1 representamos o modelo físico, sendo importante salientar que quanto maior for a largura da zona morta, menor será a amplitude da oscilação final, podendo conforme for até desaparecer.

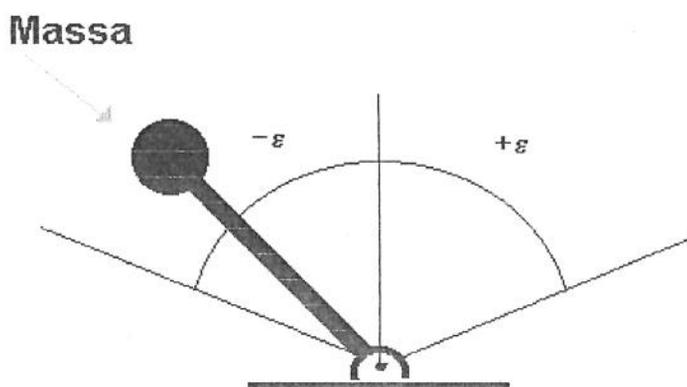


Fig. 3.1 - Modelo físico de um Manipulador

### 3.1 Descrição dos Elementos da Dinâmica de um Manipulador

A figura 3.2 representa a estrutura de uma cadeia cinemática de uma articulação de um robô.

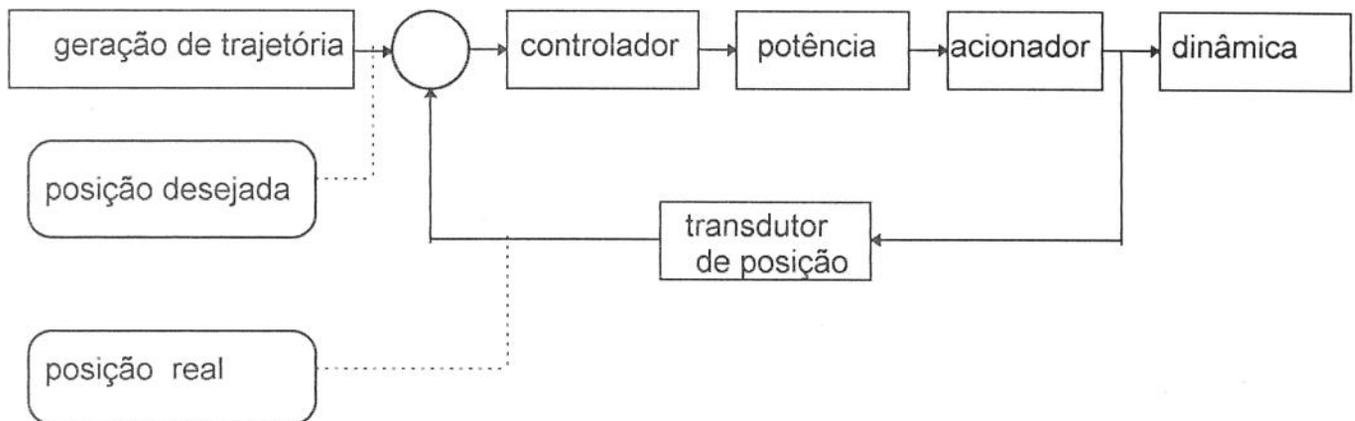


fig. 3.2 - Diagrama básico de controle de um manipulador

Para o caso genérico de manipuladores, temos que a estrutura básica para cada braço é constituído pelos elementos esquematizados na fig. 3.2, sendo que na entrada da malha, temos o bloco responsável pela geração da trajetórias, sendo que em geral, é utilizado um perfil de velocidade trapezoidal[Craig,1986]. Este sinal de referência é comparado com o sinal que realimenta o sistema na caixa de soma, decodificado por um transdutor de posição o qual traz a informação do posicionamento atual do servo-mecanismo, e é comparado com o sinal consignado pelo gerenciador, fornecendo o sinal do erro. Este sinal resultante, pode ser tratado ao passar pelo bloco controlador, o qual vai gerar a ação corretora, com o propósito de reduzir o grau de desvio do desejado com o real.

O sinal que sai do bloco controlador, geralmente tem intensidade de corrente elétrica muito pequena, sendo que antes de ir ao bloco acionador, é amplificado e dimensionado de modos que fique compatível ao tipo do sistema de acionamento utilizado.

O bloco acionador, no caso do manipulador tratado neste trabalho, é constituído de um motor elétrico de corrente contínua c.c. controlado por armadura acoplado a uma caixa de redução por engrenagens, alterando o torque e a velocidade angular que sai do motor.

Na redução é acoplada a parte do carregamento do manipulador, a qual é constituída pelo braço e o conjunto ferramenta terminal e a massa presa a esta

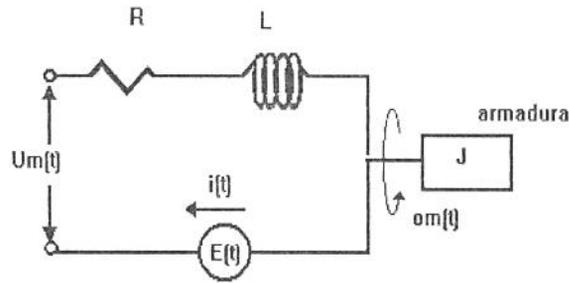
A carga é constituída fundamentalmente pelas inércias em movimento. Nota-se que a carga é variável: em efeito, as inércias em movimento dependem da posição do robô a cada instante.

A seguir, são apresentadas para cada da malha de controle do manipulador os respectivos esquemas, equações dinâmicas, funções de transferência e a representação por blocos, efetuando-se a seguir o acoplamento de todas as partes no diagrama genérico.

### **3.1.1 Modelo de um Motor Elétrico de Corrente Contínua c.c.**

Na tabela 3.1 Apresentamos para o sistema do motor elétrico de corrente contínua (c.c.) controlado por armadura em A seu esquema representativo, em B as equações dinâmicas referêntes às partes elétrica e mecânica, em C a função de Transferência resultante do agrupamento de todos os blocos da malha do motor, e em D a respectiva representação por diagrama de blocos em simbologia Simulink (Matlab).

TABELA 3.1. A. Esquema do Motor Elétrico (C.C.)



## B. Equações

$$U_m(t) = R_a I(t) + K_g w(t) + L_a \frac{dI(t)}{dt} \quad (3.1)$$

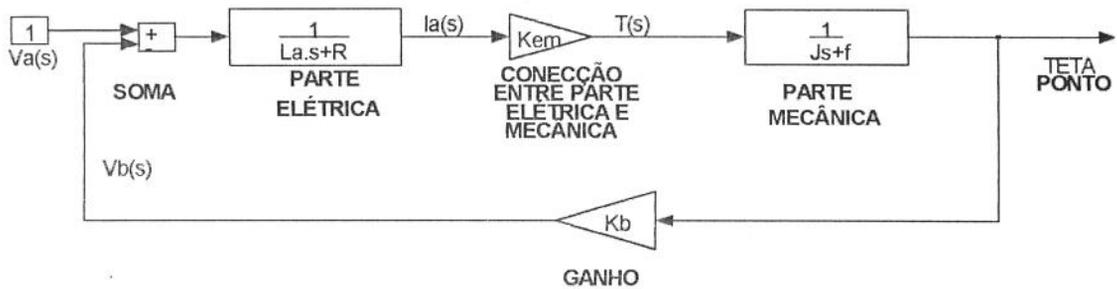
onde

$$J \frac{dw(t)}{dt} = -fw(t) + K_m I(t) - \tau(t) \quad (3.2)$$

 $K_m$  = constante de torque $R_a$  = resistência da armadura $L_a$  = indutância da Armadura (desprezível) $f$  = coeficiente de atrito viscoso, efetivo (rotor e carga) $K_g$  = constante de força contra-eletromotrizC. Função de Transferência  $G(p)$ 

$$G(p) = \frac{w(p)}{U(p)} = \frac{\frac{K_g}{fR_a + K_m K_g}}{\frac{L}{fR_a + cK_g} p^2 + \frac{R_a(J + fl / R_a)}{fR_a + K_m K_g} p + 1} \quad (3.3)$$

## D. Diagramatização em software Matlab(Simulink)

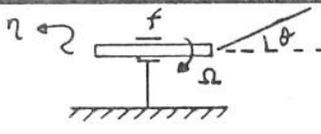
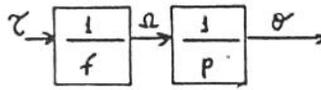
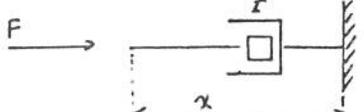
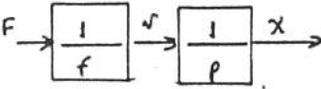


### 3.3.2 Modelagem do Conjunto Mecânico (transmissão+Carga)

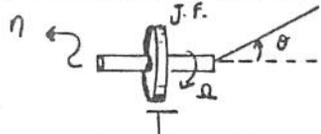
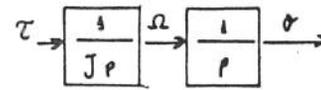
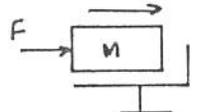
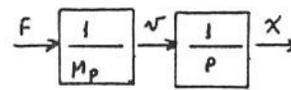
A seguir, na tabela 3.2 mostramos a impedância mecânica dos diferentes constituintes mecânicos do servo-sistema.

Tabela 3.2 :

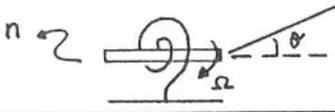
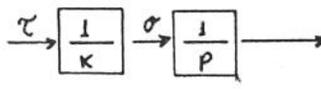
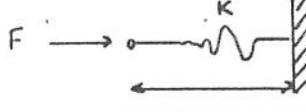
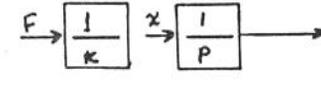
#### Atrito

REPRESENTAÇÃO	EQUAÇÃO	ESQUEMA-BLOCOS
	$\tau = f\Omega = f \frac{d\theta}{dt}$	
	$F = fv = f \frac{dx}{dt}$	

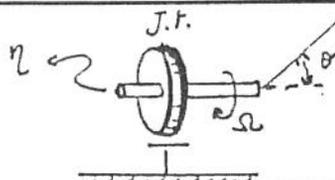
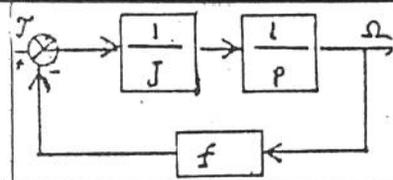
#### Inércia

	$\tau = \frac{d\Omega}{dt} = J \frac{d^2\theta}{dt^2}$	
	$F = M \frac{dv}{dt} = M \frac{d^2x}{dt^2}$	

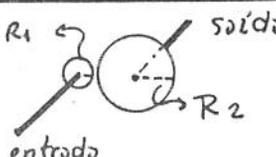
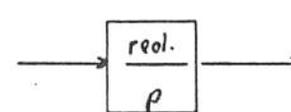
#### Elasticidade

	$\tau = k\theta = k \int \Omega dt$	
	$F = Kx = K \int v dt$	

#### Carga Mecânica

	$\begin{aligned} \tau &= J \frac{d\Omega}{dt} + f\Omega \\ &= J \frac{d^2\theta}{dt^2} + f \frac{d\theta}{dt} \end{aligned}$	
---	--	--

#### Redutor

	$\frac{\omega_s}{\omega_e} = \frac{R_1}{R_2}$	
---	---	--

Devido muitos blocos mecânicos serem montados em série, cada um deles transmite ao seguinte uma força onde o acoplamento igual ao que existe entre suas duas ligações, de saída que admite-se totalmente ser igual a soma das admitâncias dos constituintes. Inversamente, por uma montagem paralela, os terminais comuns com a mesma velocidade, e a impedância total é igual a soma das impedâncias elementares.

### 3.2 Representação de Sistemas Mecânicos de Segunda Ordem

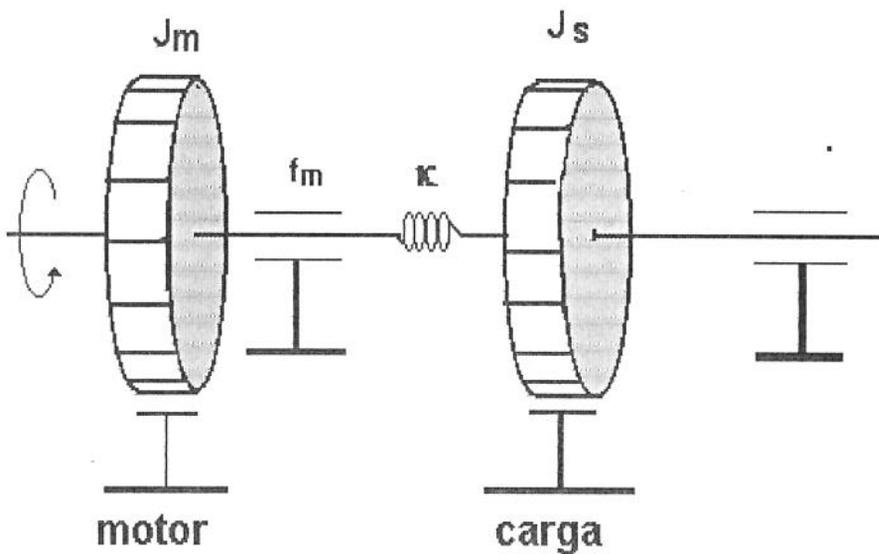
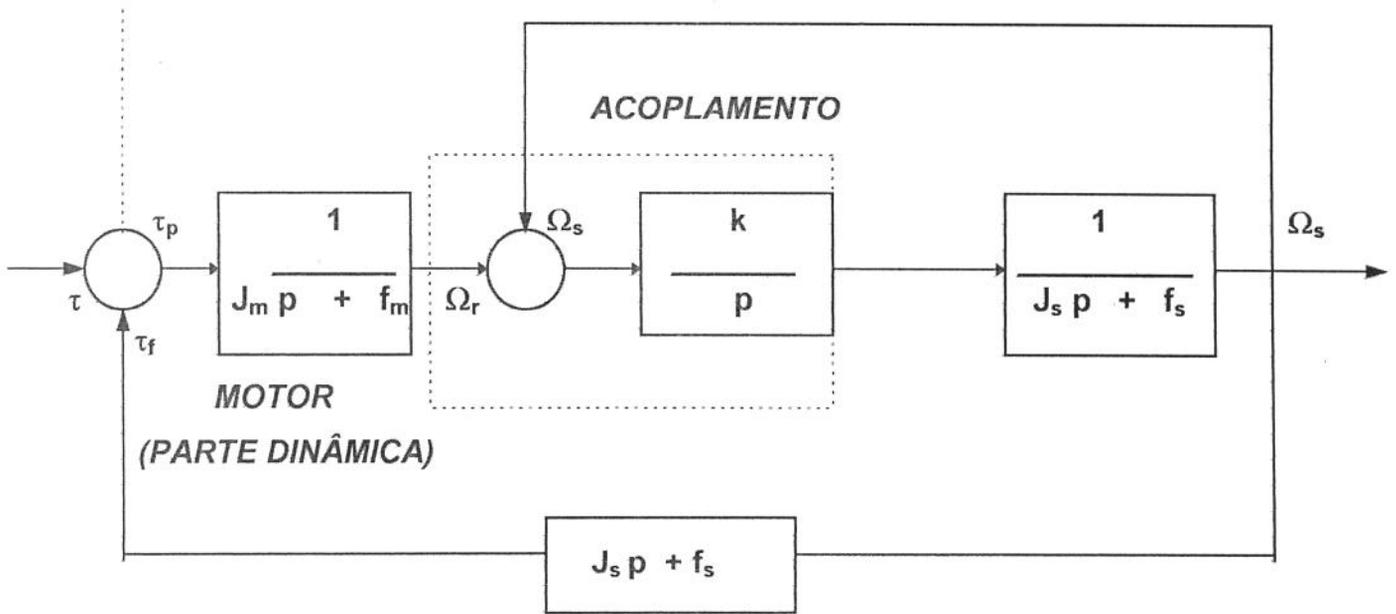


Fig.3.3 Acoplamento motor-Carga

O sistema apresentado na figura 3.3 corresponde a um motor com inércia  $J_m$ , à um atrito viscoso  $f_m$ , uma carga de inércia  $J_s$  e um atrito  $f_s$  por intermédio de um eixo de rigidez  $K$ . Este esquema constitui uma primeira aproximação das condições que imperam devido a ligação entre um motor e sua carga não pode ser considerado como perfeitamente rígido. O esquema funcional do referente sistema é mostrado na figura 3.4.



com

$\tau_1$  Acoplamento elástico transmitido pela rigidez

$\tau_p$  Acoplamento de perturbação (influência de outros eixos)

fig. 3.4 Esquema funcional

A equação dinâmica que rege o sistema é dada por:

$$\tau = \tau_p + \left\{ (J_s p + f_s) + (J_m p + f_m) \left( 1 + \frac{p}{k} (J_s p + f_s) \right) \right\} \Omega_s \quad (3.4)$$

sendo que ela engloba todos os fatores inerentes ao processo

Para o sistema completo (motor+transmissão+carga), temos o diagrama de blocos representado na figura 3.5, cujas funções de transferência são especificados nas tabelas apresentadas na seção 3.1 e 3.2 do corrente capítulo.

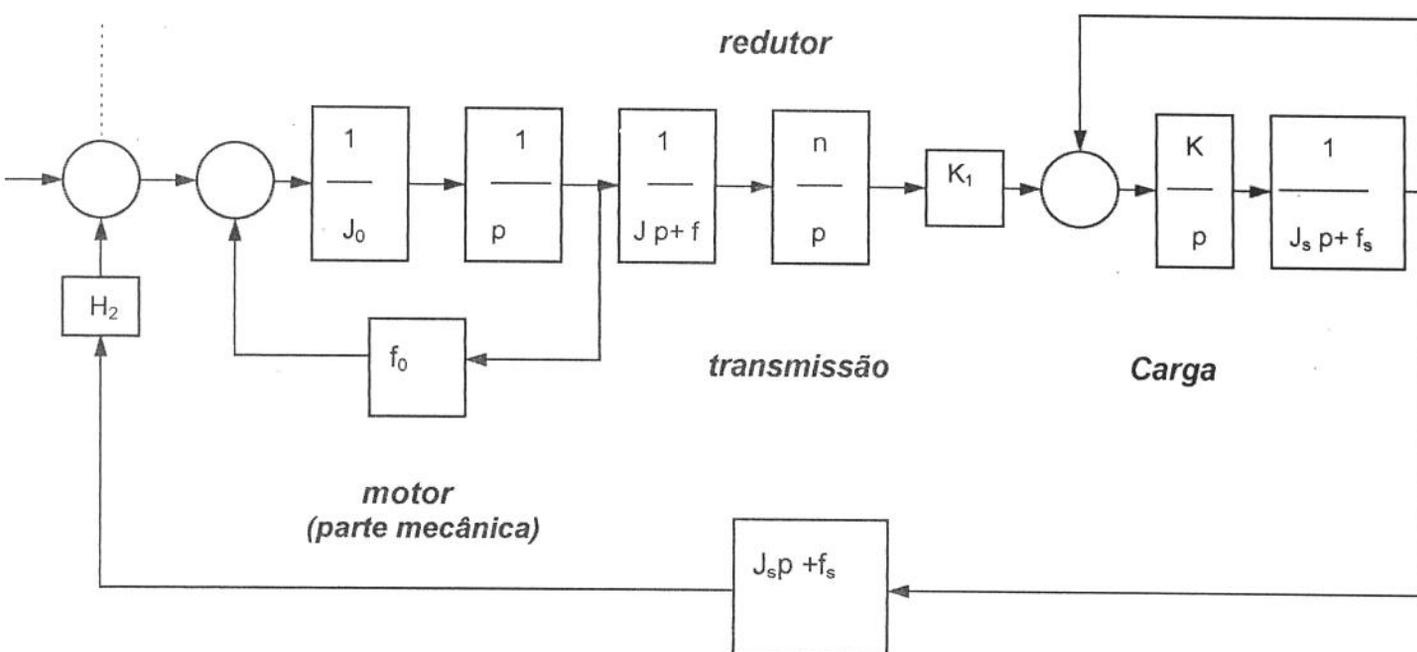


Fig.3.5 - Diagrama de blocos correspondente(motor-transmissão-carga)

Na figura 3.6, é exposta a mesma planta que a da figura anterior na forma diagramalizada SIMULINK (MATLAB), sendo que as malhas do motor e do acoplamento mais carga são iconizadas em blocos representativos, os quais quando acessados, especificam todas as características e parâmetros de cada subsistema do processo.

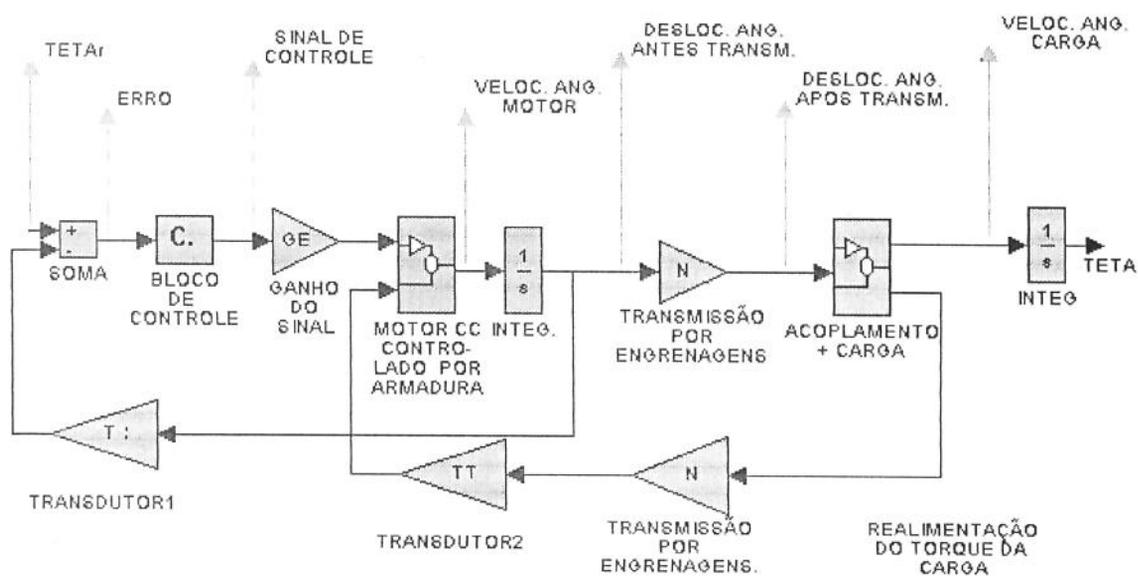


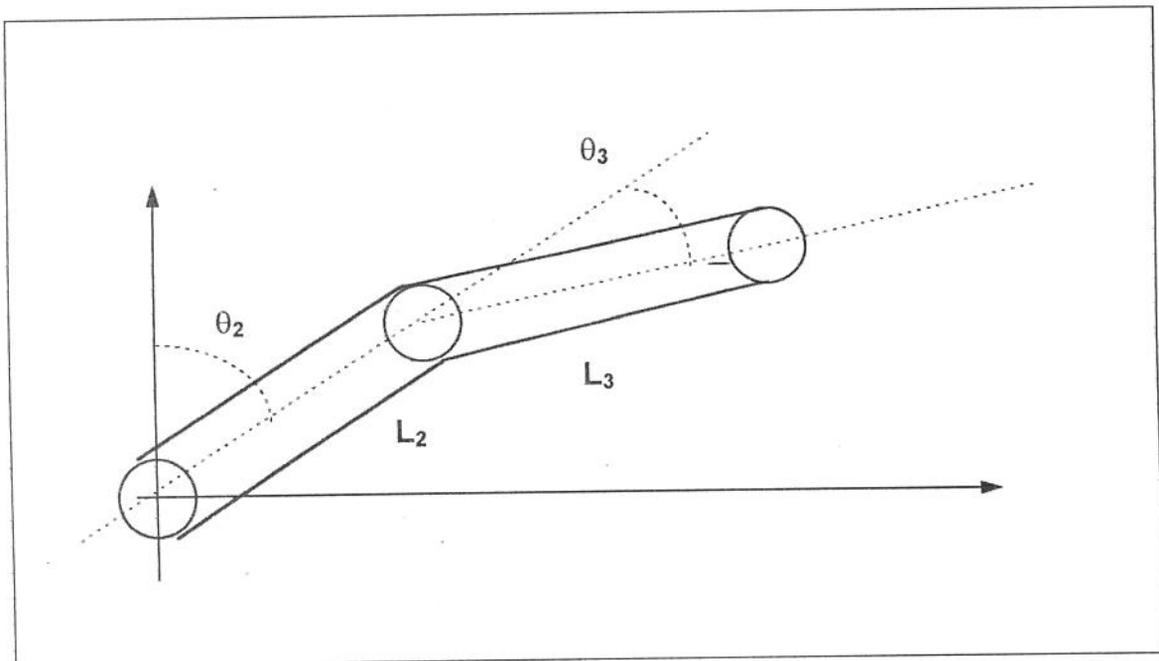
fig. 3.6 - Representação do sistema motor-transmissão-carga por diagramalização em Simulink (Matlab).

### 3.3 Modelo Dinâmico de um Robô

Utilizando-se do tratamento desenvolvido no apêndice B pela aplicação do método de Euler-Lagrange, apresentamos a seguir as equações dinâmicas de segunda ordem acopladas que regem um manipulador de dois graus de liberdade, levando-se em consideração os fatores envolvidos no movimento como termos inerciais, centrípetos e de Coriolis causados pela velocidade das juntas e os termos devido a ação gravitacional.

Para efeitos de equacionamento, o manipulador é considerado rígido, sendo desprezados por decorrência, possíveis efeitos de torção e flexão da estrutura.

A representação de dois graus de liberdade é mostrado na figura 3.7, e a tabela 3.3 mostra as equações das articulações obtidas através de Newton-Euler (apêndice B)



onde

- $L_3$  : Comprimento do braço 3
- $\theta_2$  : deslocamento angular do braço 2
- $\theta_3$  : deslocamento angular do braço 3
- $L_2$  : Comprimento do braço 2

Fig.3.7 - Esquema representativo de um Manipulador de dois braços

tabela 3.3 :  
(a) Equações das Articulações

$$\text{ELO 2 : } \tau_2 = J_{22}\ddot{\theta}_2 + J_{23}\ddot{\theta}_3 + N_2(\theta, \dot{\theta}) + G_2(\theta)$$

$$\text{ELO 3 : } \tau_3 = J_{32}\ddot{\theta}_2 + J_{33}\ddot{\theta}_3 + N_3(\theta, \dot{\theta}) + G_3(\theta)$$

(b) Parâmetros das equações

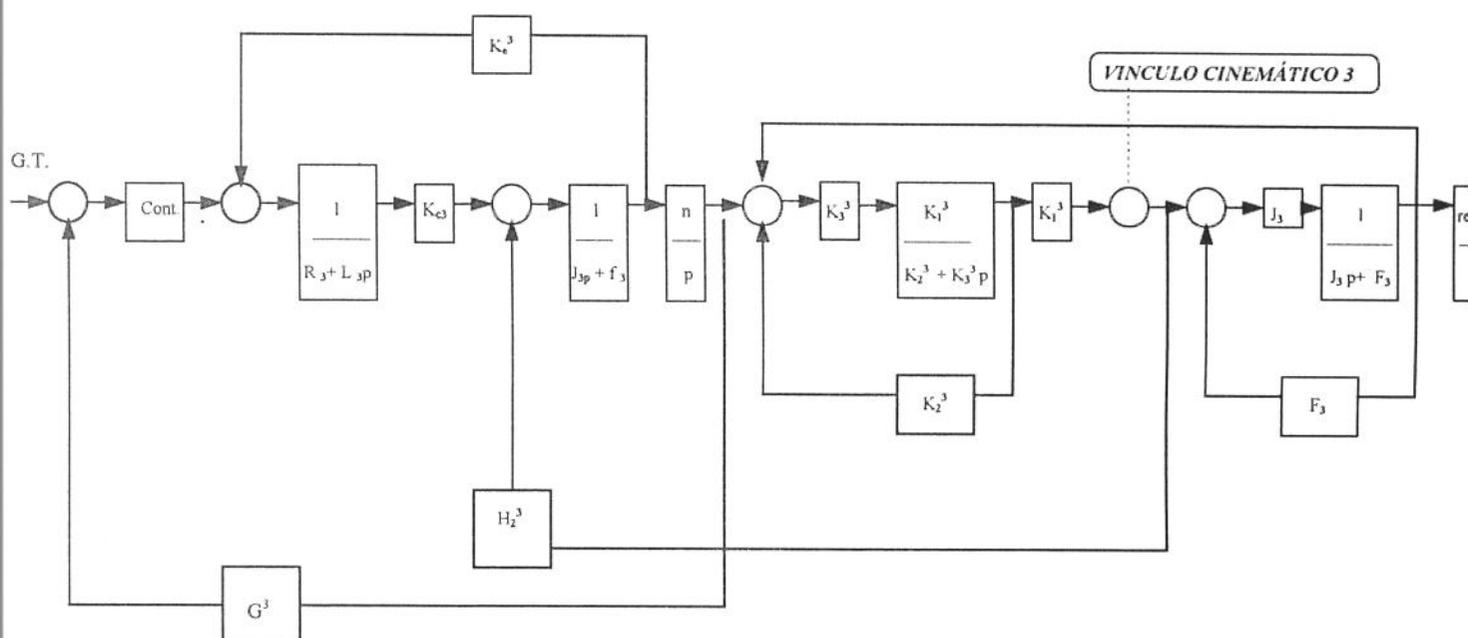
$J_{22} = m_3L_2^2 + \frac{m_3L_3^2}{3} + \frac{m_2L_2^2}{3} + m_3L_2L_3 \cos\theta_3$	$N_2(\theta, \dot{\theta}) = -m_3L_2L_3 \sin\theta_3 \left( \dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 + \frac{\dot{\theta}_3^2}{2} \right)$
$J_{23} = \frac{m_3L_3^2}{3} + \frac{m_3L_2L_3}{2} \cos\theta_3$	$N_3(\theta, \dot{\theta}) = m_3L_2L_3 \sin\theta \frac{\dot{\theta}_2^2}{2}$
$J_{32} = J_{23}$	$G_2(\theta) = -\frac{1}{2}m_2L_2g + m_3L_2g \sin\theta_2 - \frac{1}{2}m_3L_3g \sin(\theta_2 + \theta_3)$
$J_{33} = \frac{m_3L_3^2}{3}$	$G_3(\theta) = -\frac{1}{2}m_3L_3g \sin(\theta_2 + \theta_3)$

onde

$\theta_1, \theta_2, \theta_3$	posições angulares
$\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3$	velocidades angulares
$\ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2, \ddot{\theta}_3$	acelerações angulares
$L_2, L_3$	comprimento dos elos

A partir dessas equações torna-se possível simularmos o modelo descrito pela figura 3.7, onde os blocos de controle mostrados na figura foram abordados anteriormente no capítulo 2

## Junta 3



## Junta 2

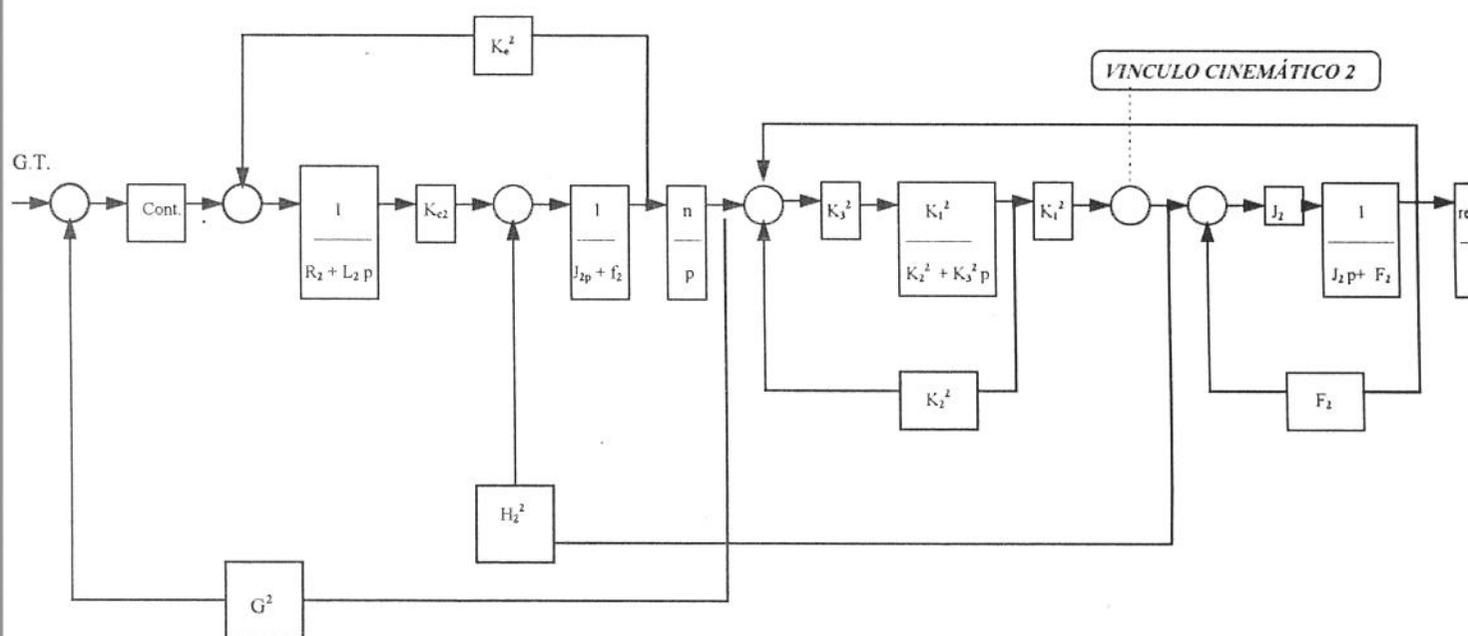


fig. 3.8 - Esquema Global do Sistema Robótico para Manipulador de Dois Graus de Liberdade.

### 3.4- comentários Finais

Este capítulo tratou de forma objetiva o estudo da dinâmica de manipuladores, iniciando pelo tratamento físico modelatório, apresentando a seguir a estruturação básica de um sistema de controle descrevendo todas as funções dos diversos setores, efetuando a seguir o desenvolvimento das equações e funções de transferência que regem a estes, acoplando-os a seguir no diagrama de controle global

Para o desenvolvimento das equações relativas a dinâmica do manipulador, foi utilizado o formalismo de Lagrange, o qual possibilita a dedução de um conjunto de equações Não-Lineares de segunda ordem acopladas que, desprezando--se o efeito do controlador e atuador, representam matricialmente o sistema. Além disso,, este enfoque possibilita encontrar matrizes que representam os termos envolvidos no movimento do processo como termos inerciais, centrípetos e de Coriolis causados pela velocidade das juntas e os termos devido a ação da gravidade.

## Capítulo 4

### Simulação do Modelo do Servo-Mecanismo

A partir da dinâmica do robô em estudo com a inserção a princípio dos controladores lineares P, I, D, PI, PD, PID e posteriormente dos controladores Não-Lineares em ordem crescente de implementação do On-Off, da Zona Morta e da Histeresis no sistema de segunda ordem desenvolvido no capítulo anterior, efetuaremos as simulações dos processos sujeitos a estas ações controladoras, verificando-se o efeito dos respectivos reguladores.

São expostos os diagramas de bloco dos sistemas com as devidas ações de controle e a seguir as respectivas simulações para cada situação, apresentando o perfil do deslocamento, da velocidade e do plano de fase  $(\theta, \delta\theta/\delta t)$ , efetuando-se a seguir as análises dos sinais resultantes .

A partir do resultado obtido, efetuamos a comparação dos resultados obtidos como postulado previsto a nível teórico, levando-nos às conclusões que fecham à esta seção .

#### **4.1 - Simulação do Sistema de Segunda Ordem (conjunto motor-transmissão-carregamento) utilizando Controladores Clássicos.**

Utilizando-se da modelagem matemática de um manipulador de dois graus de liberdade descrita no capítulo precedente e considerando uma das juntas amarradas, acabamos incorrendo no caso do modelo do manipulador de um grau de liberdade do qual efetuamos a seguir as respectivas simulações do erro obtido da comparação do deslocamento real com o deslocamento setado, do deslocamento real, do perfil da velocidade angular que sai do acionador elétrico, quando a malha esta sujeita a ação de controladores Proporcional, Derivativo, Integrativo e suas combinações, na seguinte ordem de precedência:

Caso 1:  $P=30$ ;

Caso 2:  $P=30, I = 1.5$ ;

Caso 3:  $P=30, D= 1.5$ ;

Caso 4:  $P=30, I = 1.5, D= 1.5$ ;

sendo efetuado posteriormente a análise comparativa do desempenho dos controladores a partir das curvas gráficas obtidas.

Para esta simulação, temos o servo-mecânismo descrito na figura 4.1, cujos parâmetros dos componentes do sistema são especificados na tabela 4.1

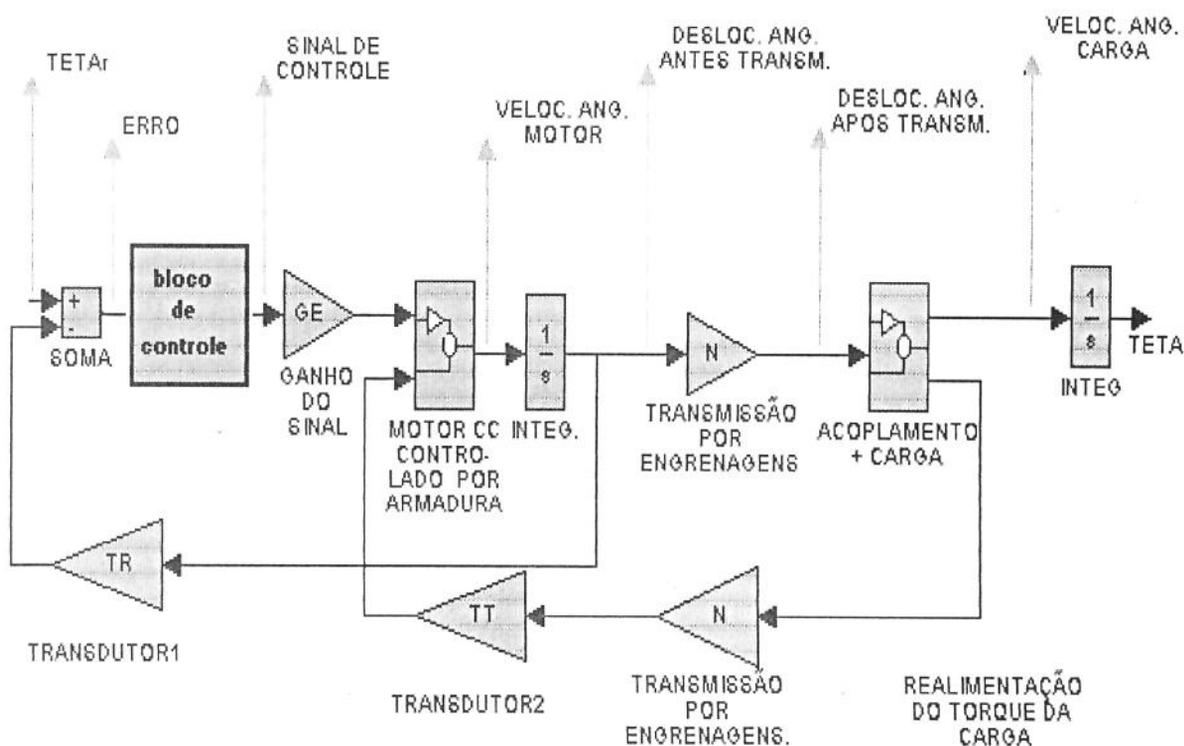


fig. 4.1 - Servo-Mecanismo constituído de acionador, transmissão e carregamento

Tabela 4.1

PARÂMETROS UTILIZADOS PARA A SIMULAÇÃO
<p>—</p> <p><b>MOTOR CORRENTE CONTÍNUA (C.C.)</b></p> <p>TENSÃO MÁXIMA : 30 V  CORRENTE MÁXIMA : 2 A  TORQUE MÁXIMO : 0.1 NM  <math>L_A = 6.00E-3</math> ;  <math>R_A = 3.00</math> ;  <math>K_M = 5.00E-2</math> ;  <math>B_M = 3.50E-5</math> ;  <math>K_B = 5.00E-2</math> ;  <math>J_M = 4.00E-5</math> ;</p>
<p><b>RELAÇÃO DE TRANSMISSÃO</b></p> <p><math>N = 1/67.5</math> ;</p>
<p><b>ACOPLAMENTO + CARGA ( EQ = EIXO + CARGA )</b></p> <p><math>K = 0.01</math> ;  <math>J_{EQ} = 0.45</math> ;  <math>B_{EQ} = 5E-4</math> ;  <math>J = J_M + J_{EQ} * N</math> ;  <math>B = B_M + B_{EQ} * N</math> ;</p>
<p><b>GERADOR DE TRAJETÓRIA</b></p> <p><math>T = [ 0 ]</math> ;  FOR I=1:300    <math>TAUX = [ 1 ]</math> ;    <math>T = [ T TAUX ]</math> ;  END  <math>U = [ 0 \ 0.125 \ 0.250 \ 0.375 \ 0.5 \ 0.625 \ 0.75 \ 0.875 \ ONES(SIZE(1:41)) \ 0.875 \ 0.75 \ 0.625 \ 0.5 \ 0.375 \ 0.250 \ 0.125 \ ZEROS(SIZE(1:245)) ]</math> ;  <math>W = [ T ; U ]</math> ;</p>
<p><b>GANHO DO TRANSDUTOR E FATOR DE CONVERSÃO</b></p> <p><math>TR = 0.005</math> ;  <math>CONV = 1024 / (2 * PI)</math> ;</p>

### Caso 1: Controle Proporcional, $P=30$ ;

Fig. 4.2(c) - Deslocamento real(impulsões)  $\times$  tempo (s)

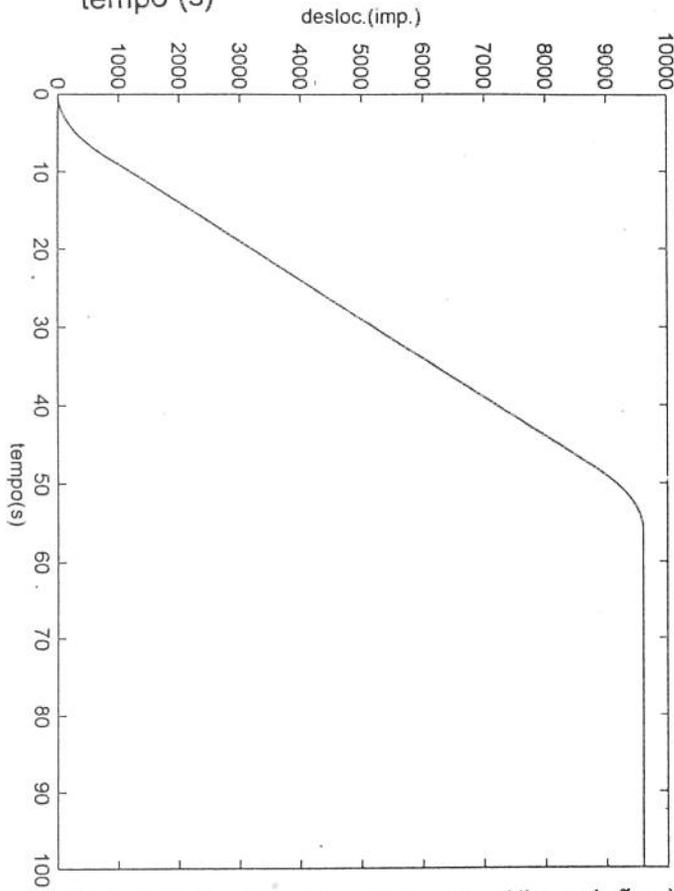


Fig. 4.2(a) - erro (impulsões)  $\times$  tempo (s)

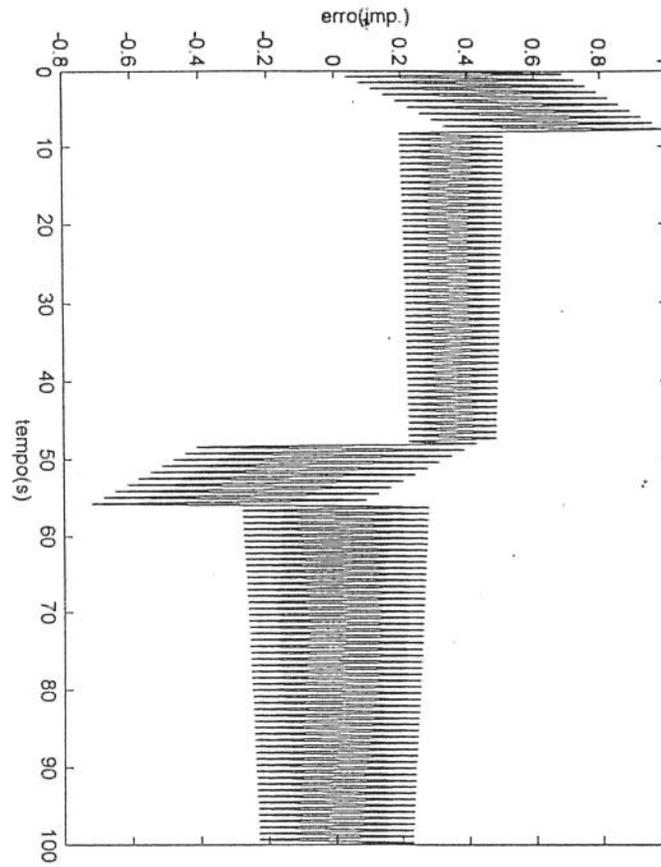


Fig. 4.2(d) - Deslocamento real(impulsões)  $\times$  tempo (s) ao final do regime transitório

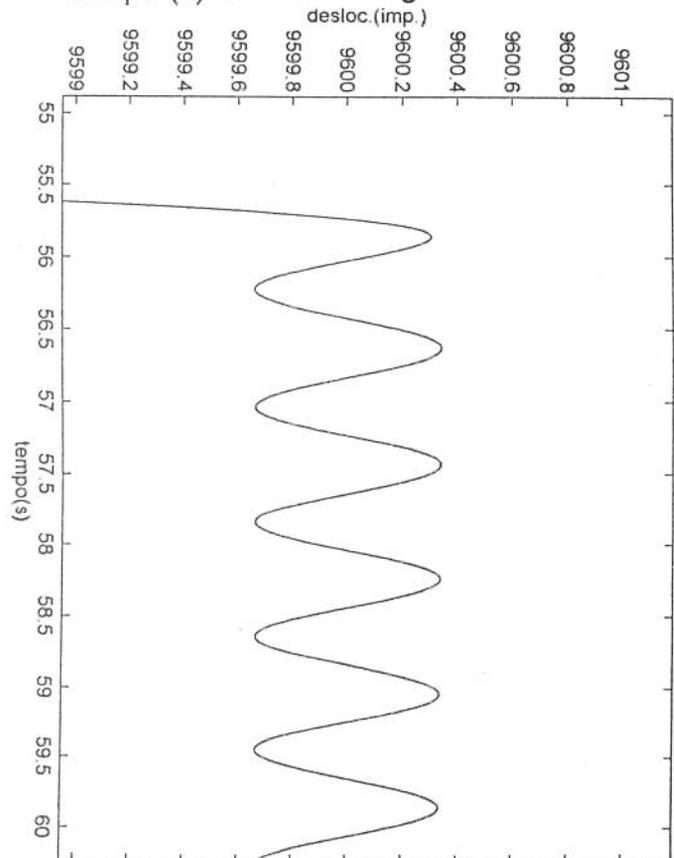


Fig. 4.2(b) - erro (impulsões)  $\times$  tempo (s) ao final do regime transitório

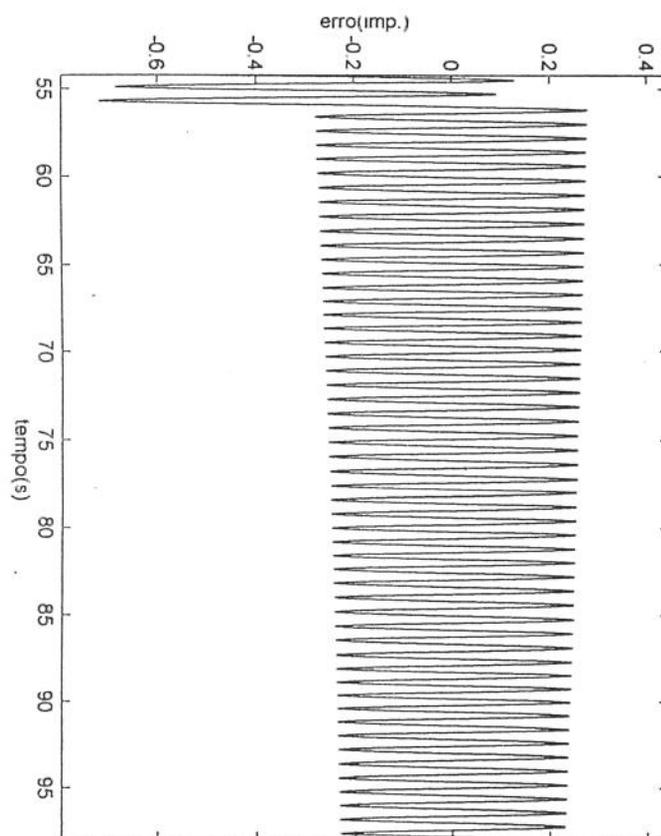


Fig. 4.2(g)- plano de fase velocidade(impulsões/s)  
× deslocamento real(impulsões)

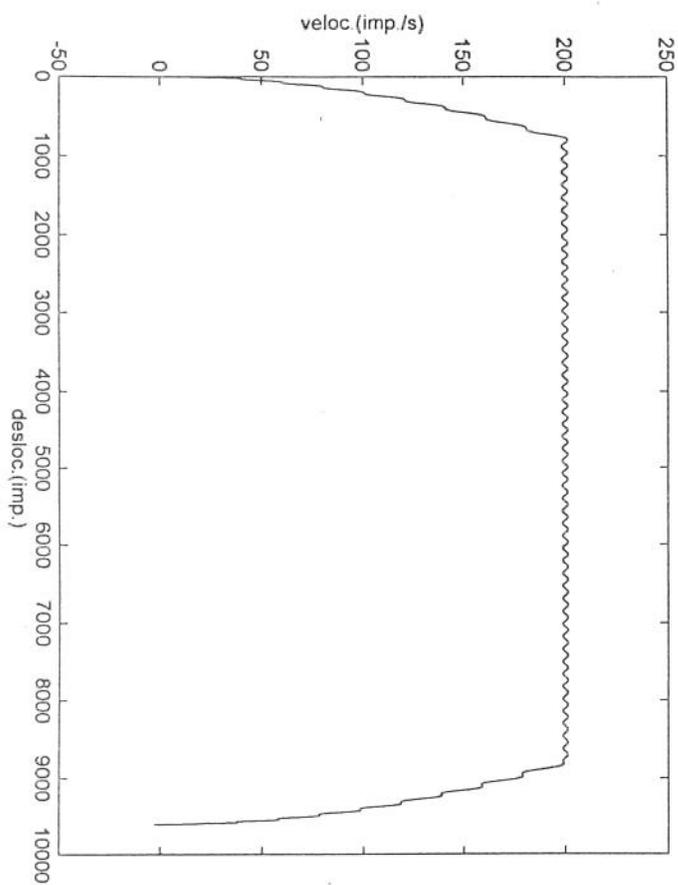


Fig. 4.2(f) - velocidade angular de saída do motor ao final do regime transitório

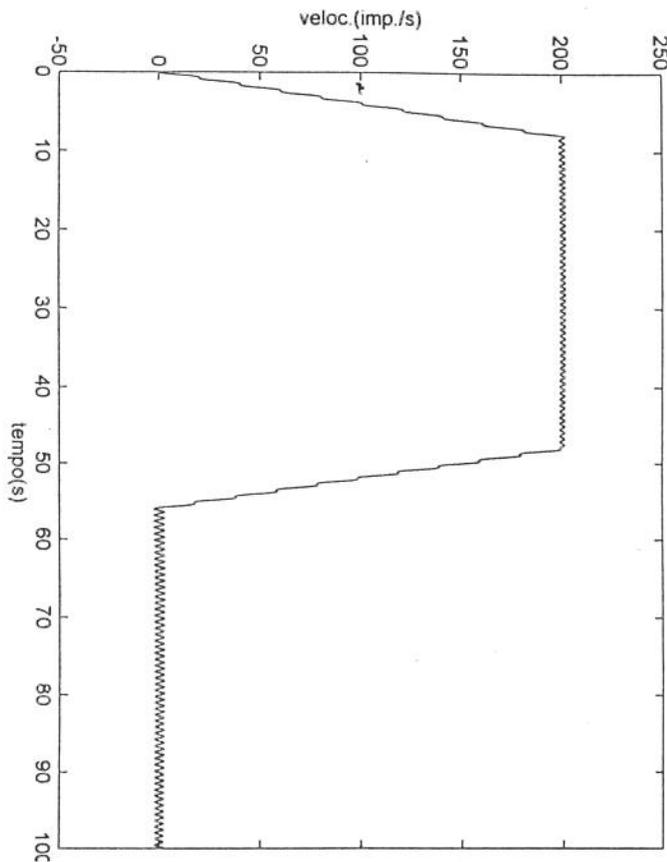
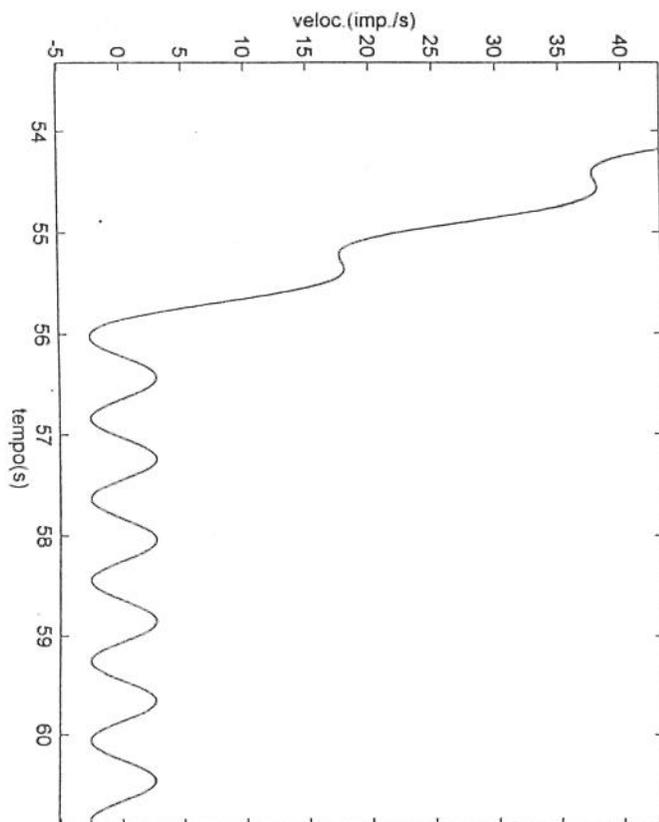


Fig. 4.2(e) - velocidade angular de saída do motor



## Conclusões sobre a ação de controle proporcional

**Erro:** (fig.(s) 4.2(a) e 4.2(b)). O erro tem regime de caráter oscilatório amortecido durante e ao final do regime transitório com amplitude de onda decrescente na região da coordenada consignada.

**Deslocamento:**(fig.(s) 4.2(c) e 4.2(d)). O deslocamento até a região da coordenada setada se faz em aproximadamente 55,5 segundos. O sistema tem oscilação permanente de amplitude constante ao final do deslocamento.

**Velocidade:** (fig.(s) 4.2(e) e 4.2(f)). O perfil da velocidade demonstra o caráter oscilatório do controle proporcional, podendo-se verificar o fenômeno ondulatório perpétuo ao final da ação

**Plano de fase:** (fig. 4.2(g)) O plano de fase da velocidade contra o deslocamento demonstra o caráter oscilatório tanto durante, quanto ao final do regime transitório do sistema sobre o efeito do controle proporcional, o qual apenas tem a função de amplificar o sinal do erro obtido do somatório do deslocamento gerênciado com o deslocamento real.

**Caso 2: Controle Proporcional + Integral,  $P=30$ ,  $I = 1.5$ ;**

Fig. 4.3(c) - Deslocamento real(impulsões) × tempo (s)

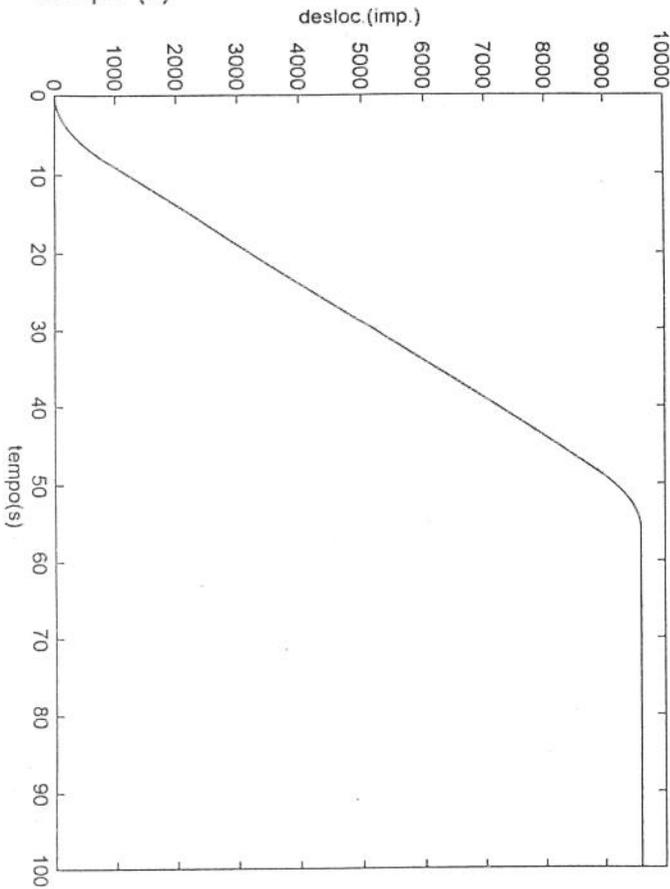


Fig. 4.3(a) - erro (impulsões) × tempo (s)

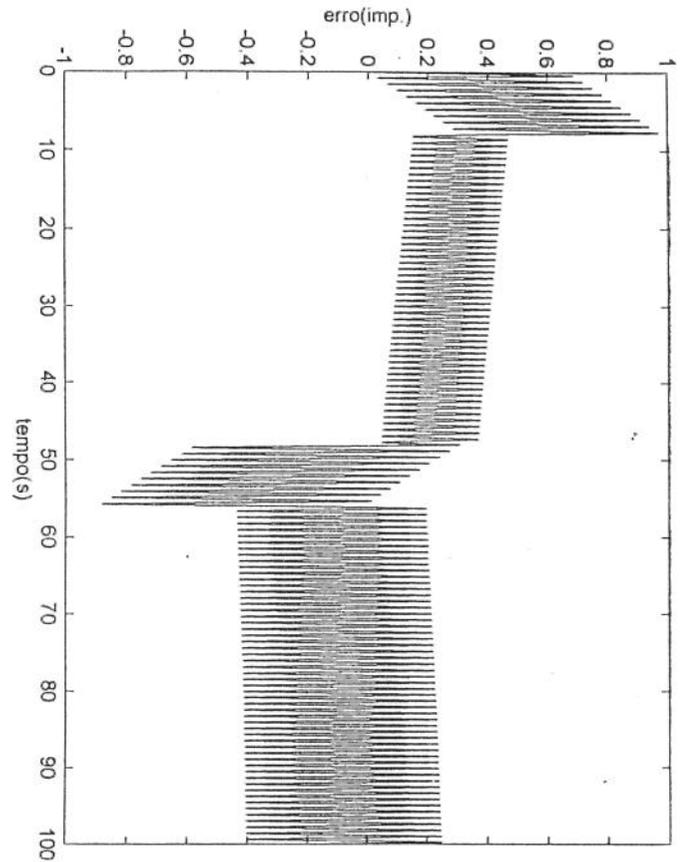


Fig. 4.3(d) - Deslocamento real(impulsões) × tempo (s) ao final do regime transitório

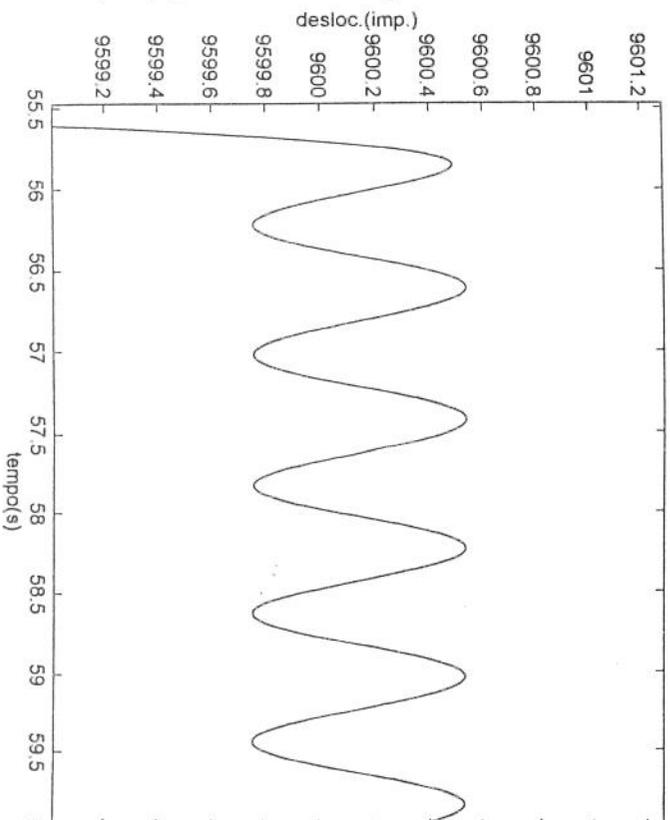


Fig. 4.3(b) - erro (impulsões) × tempo (s) ao final do regime transitório

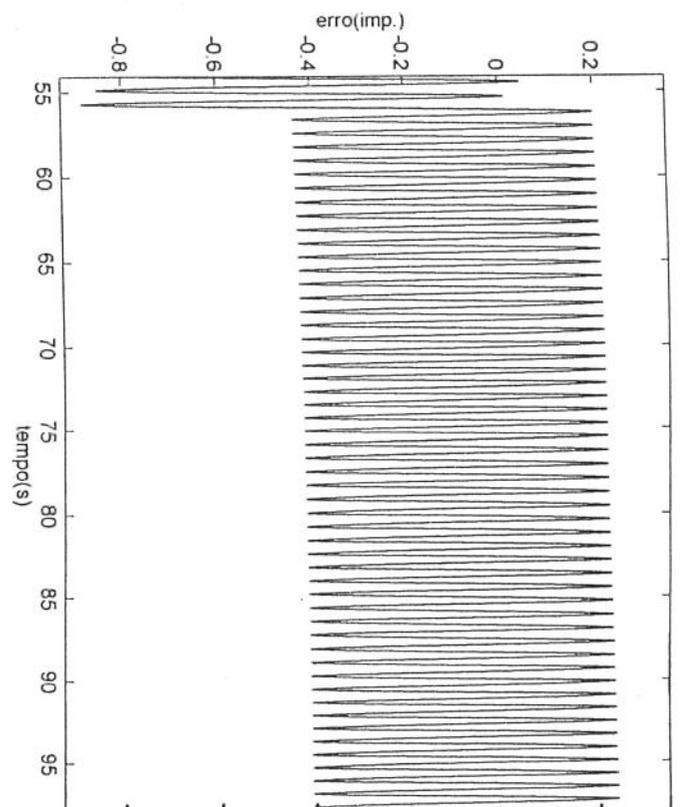


Fig. 4.3(g)-plano de fase velocidade(impulsões/s  
 × deslocamento real(impulsões)

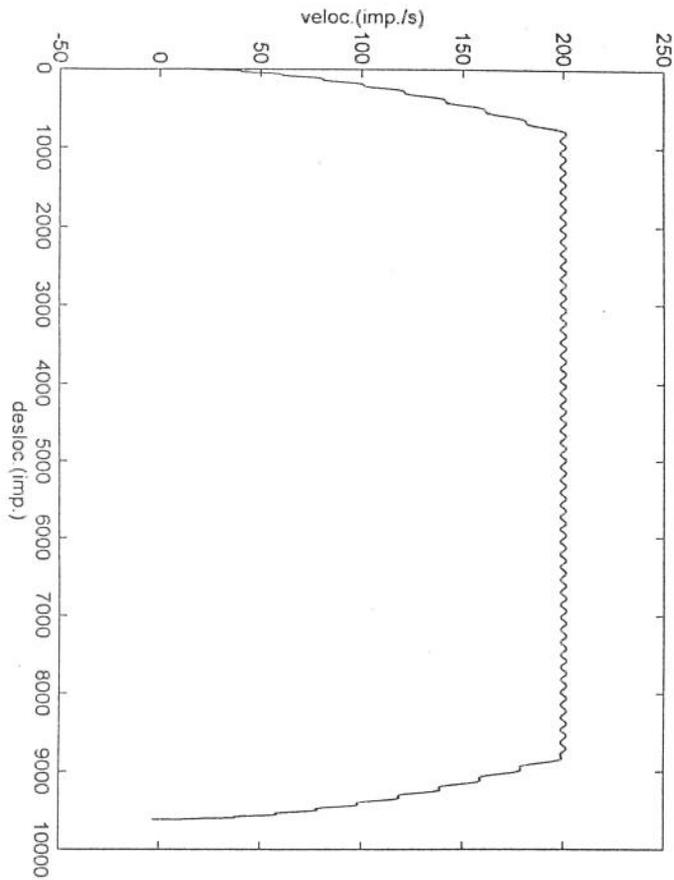


Fig. 4.3(e) - velocidade angular de saída do motor

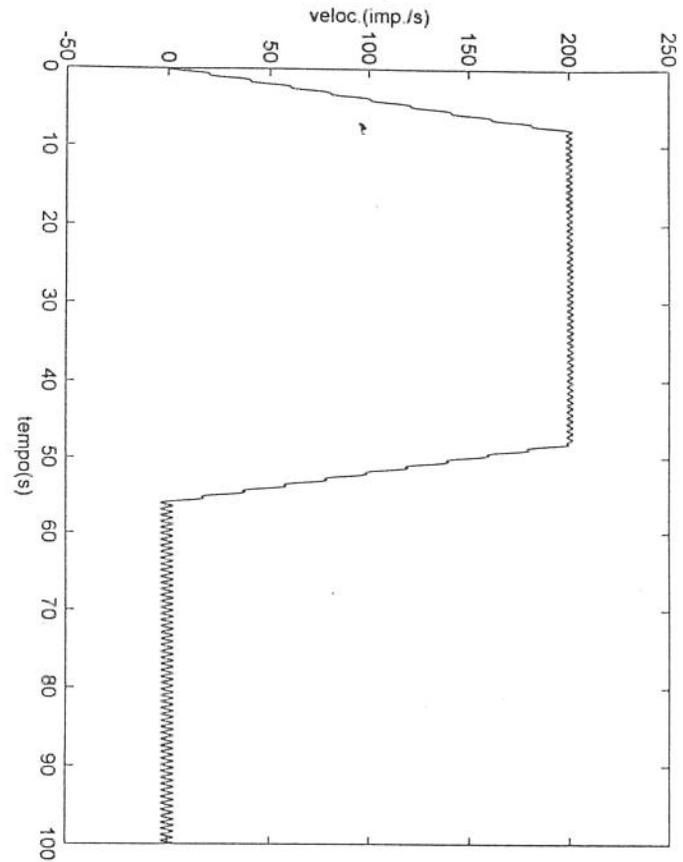
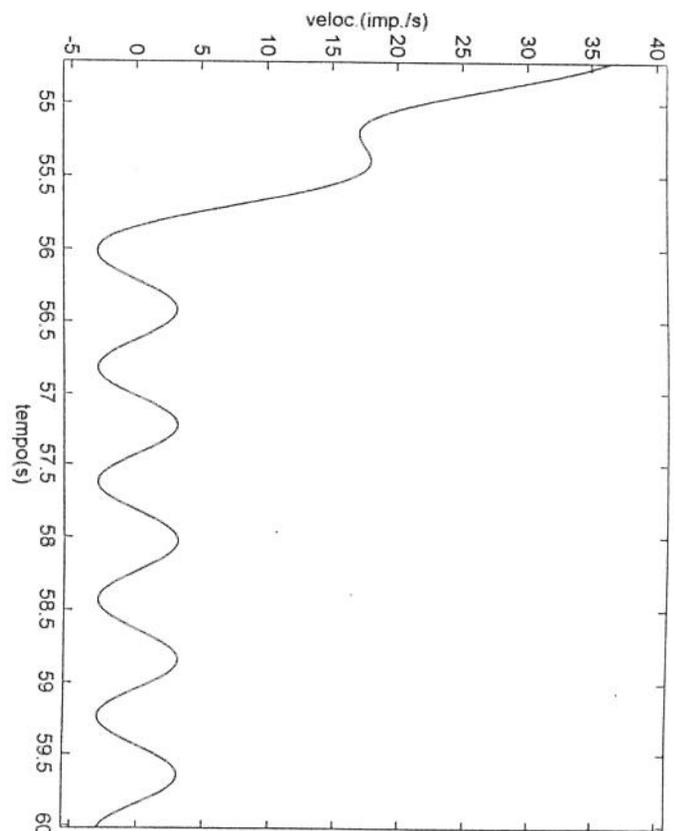


Fig. 4.3(f) - velocidade angular de saída do motor ao final do regime transitório



## Conclusões sobre a ação de controle Proporcional + Integral

**Erro:** (fig.(s) 4.3(a) e 4.3(b)). O erro tem caráter ondulatório durante o período de trânsito, sendo que ao seu final assume caráter ondulatório constante com amplitude fixa .

**Deslocamento:** (fig.(s) 4.3(c) e 4.3(d)). O deslocamento até a região da coordenada setada se faz em aproximadamente 55,5 segundos, porém o sistema tem a amplitude da oscilação permanente aumentada, e conseqüentemente, ocorre a redução da frequência da vibração ao final do deslocamento.

**Velocidade:** (fig.(s) 4.3(e) e 4.3(f)). O perfil de velocidade é oscilatório em todas as etapas do perfil da velocidade imposto, podendo ser verificado o aumento da amplitude de onda e conseqüente redução de frequência da oscilação.

**Plano de fase:** (fig. 4.3(g)). O plano de fase da velocidade contra o deslocamento demonstra o caráter oscilatório tanto durante, quanto ao final do regime transitório do sistema sobre o efeito do controle Proporcional + Integral, podendo ser verificado em comparação com o caso anterior que a ação integrativa gerou o aumento da amplitude de onda e conseqüente redução da frequência de oscilação, em todas as fases do processo de controle.

### Caso 3: Controle Proporcional + Derivativo, $P=30$ , $D= 1.5$ ;

Fig. 4.4(c) - Deslocamento real(impulsões)  $\times$  tempo (s)

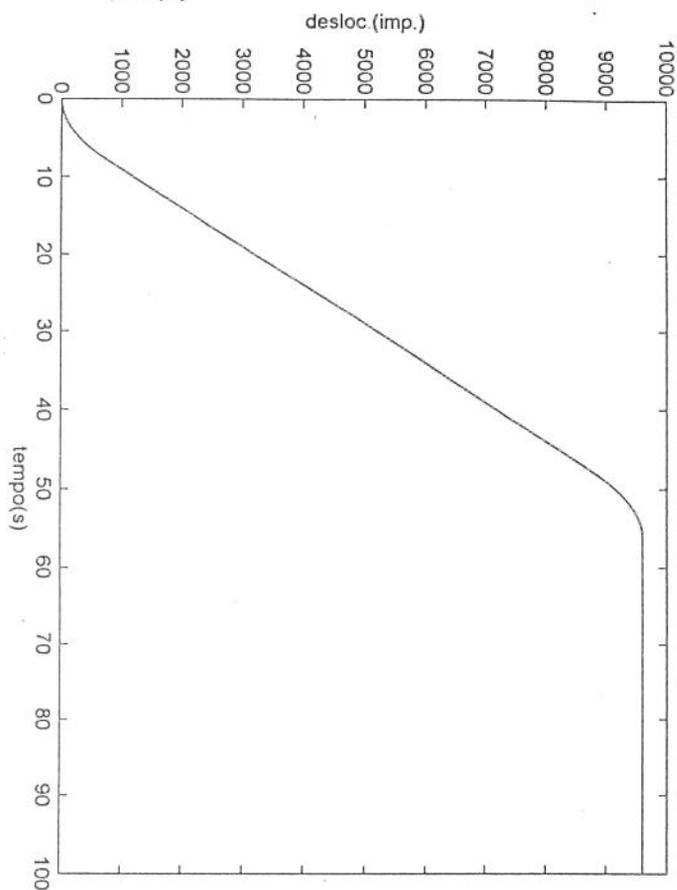


Fig. 4.4(a) - erro (impulsões)  $\times$  tempo (s)

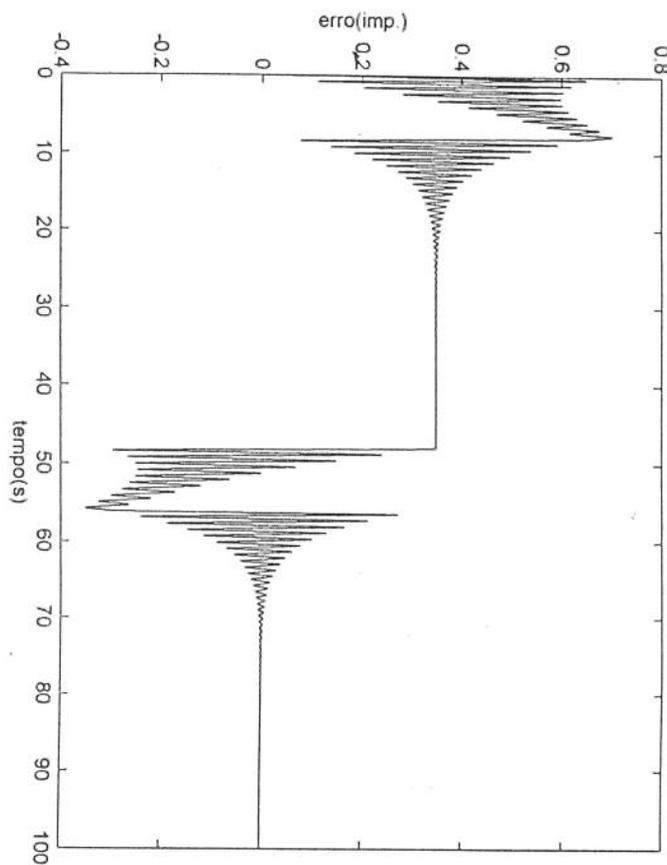


Fig. 4.4(d) - Deslocamento real(impulsões)  $\times$  tempo (s) ao final do regime transitório

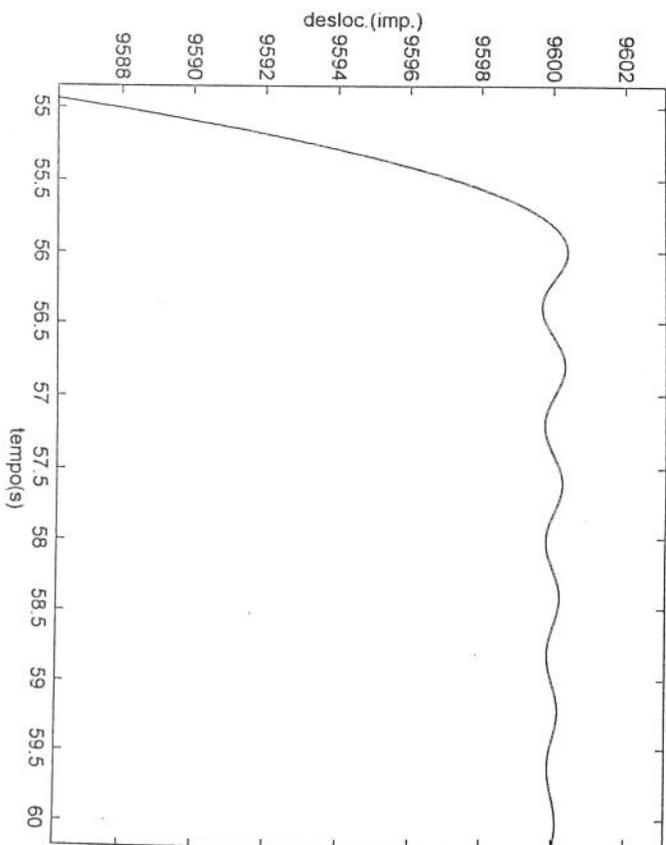


Fig. 4.4(b) - erro (impulsões)  $\times$  tempo (s) ao final do regime transitório

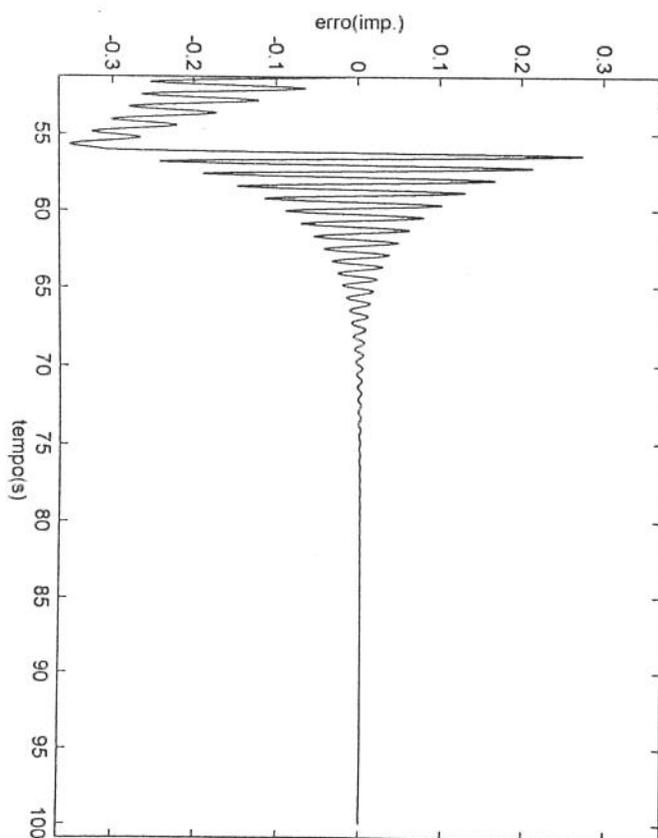


Fig. 4.4(g)-plano de fase velocidade(impulsões/s  
× deslocamento real(impulsões)

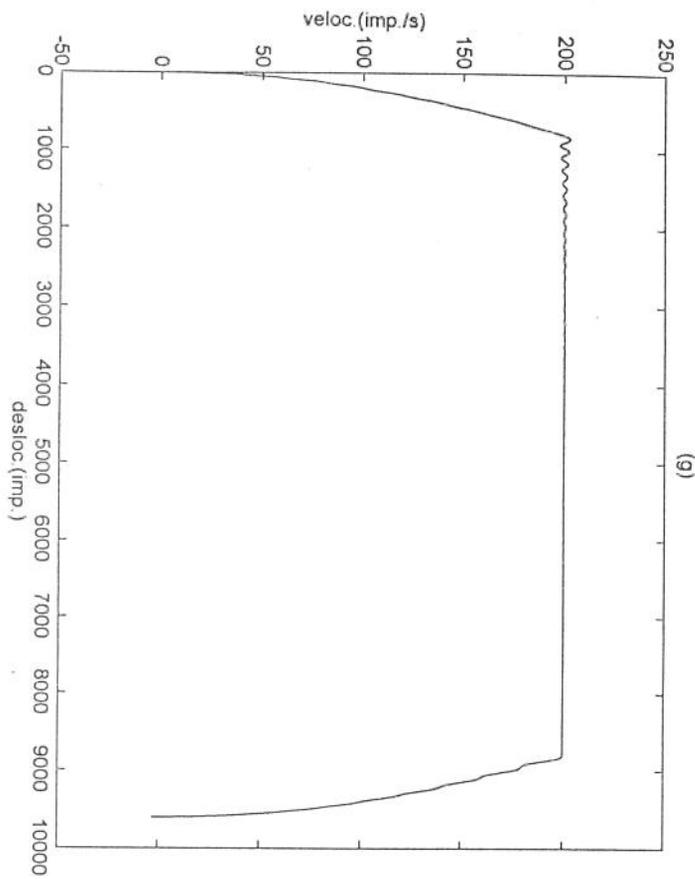


Fig. 4.4(e) - velocidade angular de saída do motor

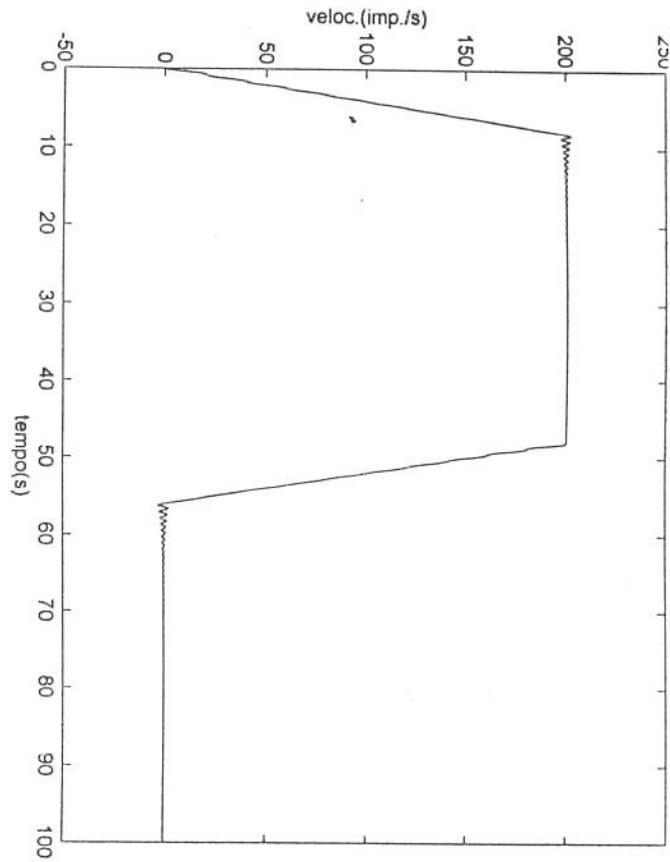
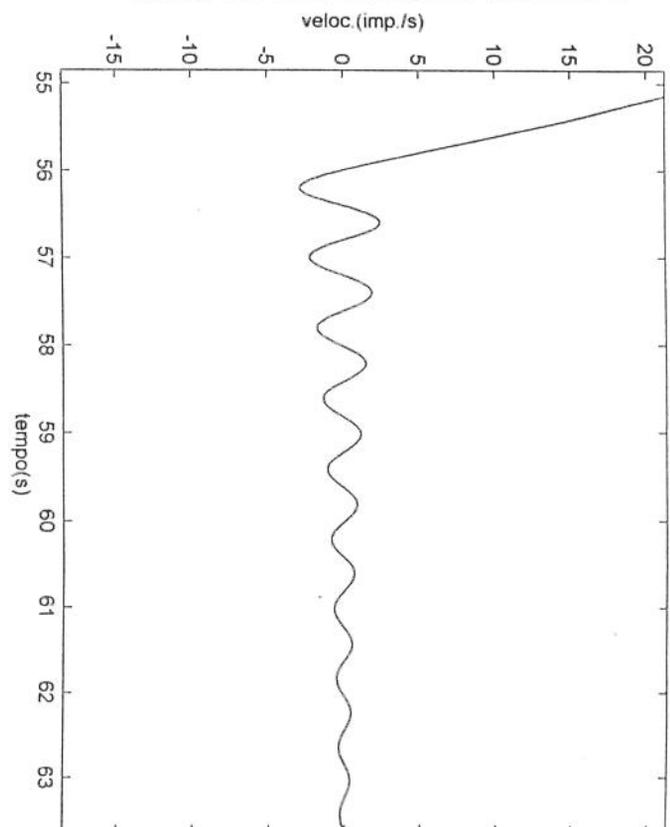


Fig. 4.4(f) - velocidade angular de saída do motor ao final do regime transitório



## Conclusões sobre a ação de controle Proporcional + Derivativa

**Erro:** (fig.(s) 4.4(a) e 4.4(b)). O erro tem regime de caráter oscilatório amortecido a cada nova etapa de tempo relacionado ao perfil de trajetória imposto ao servo-mecânismo, ocorrendo a estabilização ao final de cada fase, sendo obtido erro nulo certo tempo após o término do regime transitório .

**Deslocamento:** (fig.(s) 4.4(c) e 4.4(d)). O deslocamento até a região da coordenada setada se faz em aproximadamente 55,5 segundos. O sistema tem oscilação amortecida ao final do deslocamento, ocorrendo a redução da amplitude de onda, aumento de frequência e posterior estabilização do servo-Mecânismo após decorrido algum tempo do final do trânsito até a região de coordenada designada .

**Velocidade:** (fig.(s) 4.4(e) e 4.4(f)). Pode-se verificar nas fases relacionadas aos períodos de velocidade constante a ocorrência de regime ondulatório amortecido, havendo a estabilização logo nos períodos iniciais.

**Plano de fase:** (fig. 4.4(g)). O plano de fase da velocidade contra o deslocamento demonstra o caráter oscilatório amortecido tanto durante, quanto ao final do regime transitório do processo sobre o efeito do controle Proporcional+Derivativo, nos levando a concluir que o caráter Derivativo gera o amortecimento da oscilação, aumento a frequência da vibração e estabilização ao final da operação .

### CASO 4: Controle Proporcional + Integral + Derivativo, $P=30$ , $I=1.5$ , $D=1.5$ ;

Fig. 4.5(c) - Deslocamento real(impulsões) × tempo (s)

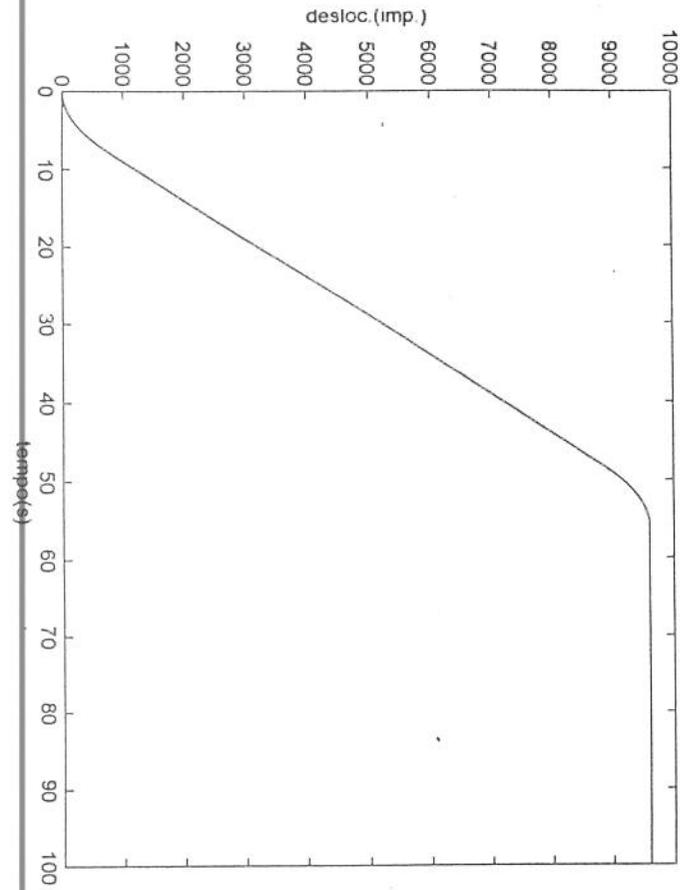


Fig. 4.5(a) - erro (impulsões) × tempo (s)

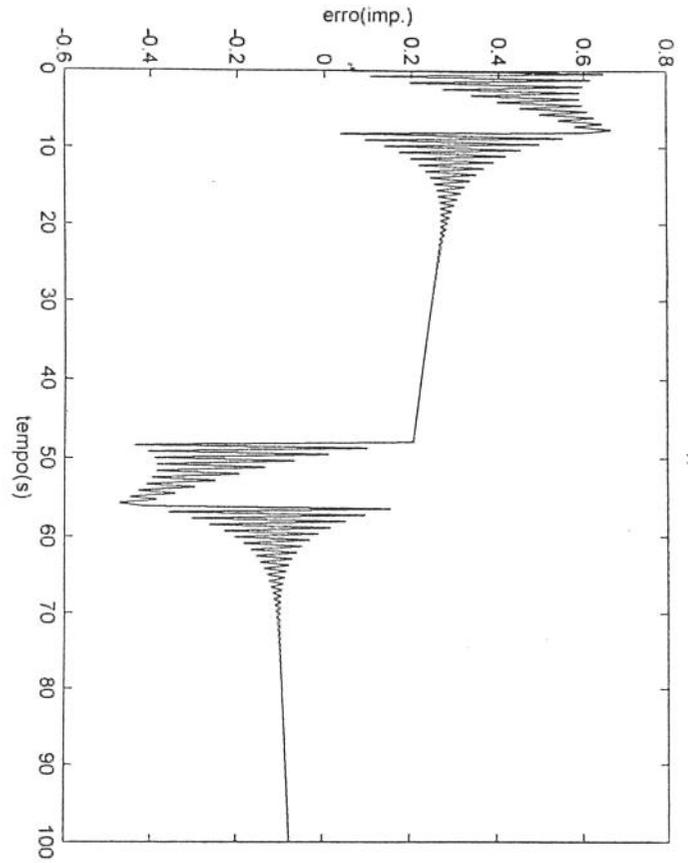


Fig. 4.5(d) - Deslocamento real(impulsões) × tempo (s) ao final do regime transitório

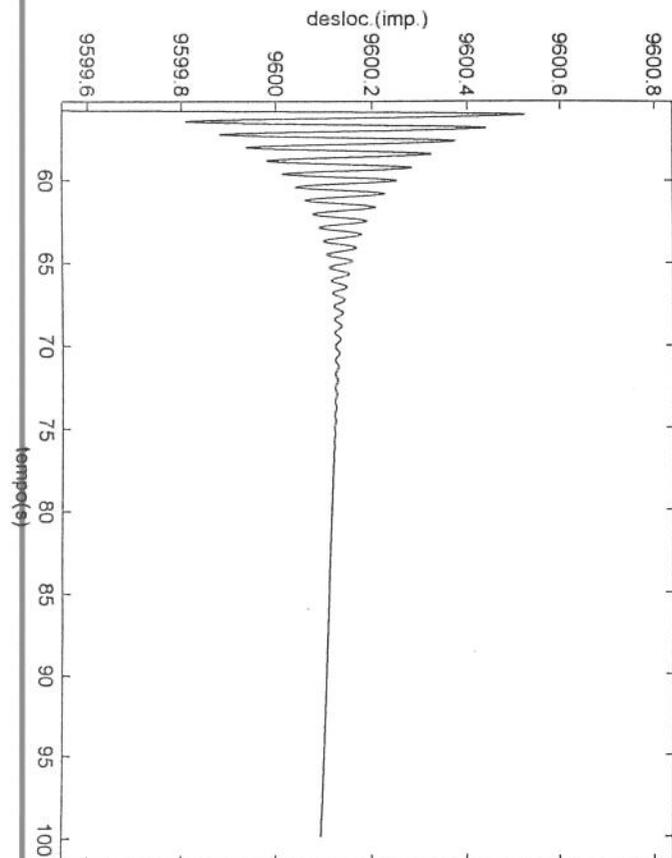


Fig. 4.5(b) - erro (impulsões) × tempo (s) ao final do regime transitório

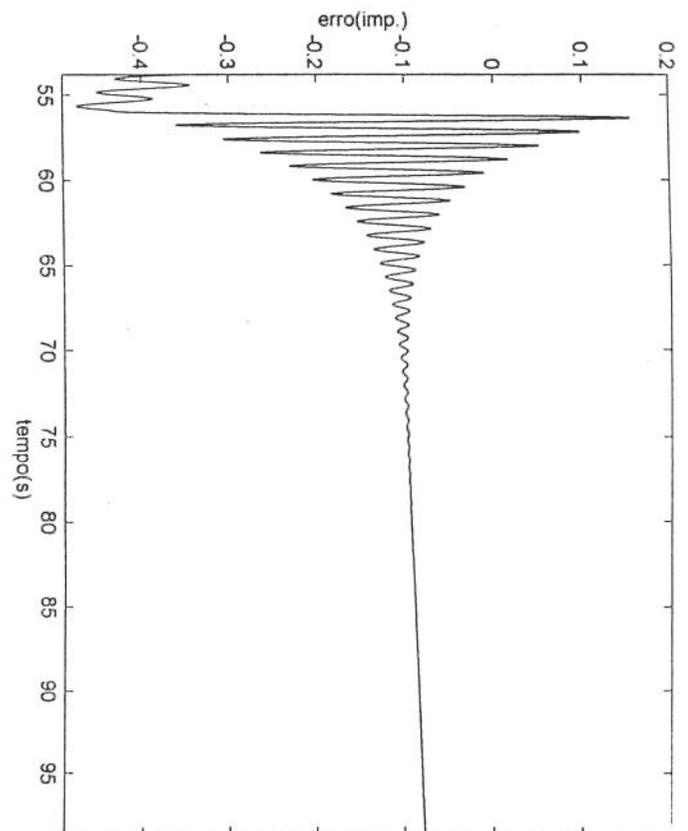


Fig. 4.5(g)- plano de fase velocidade(impulsões/s) × deslocamento real(impulsões)

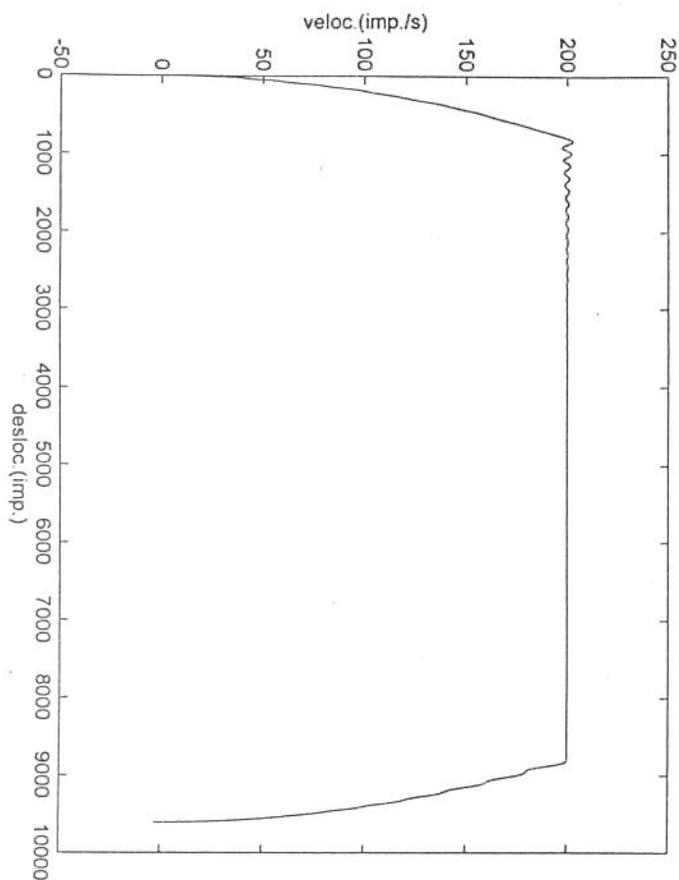


Fig. 4.5(e) - velocidade angular de saída do motor

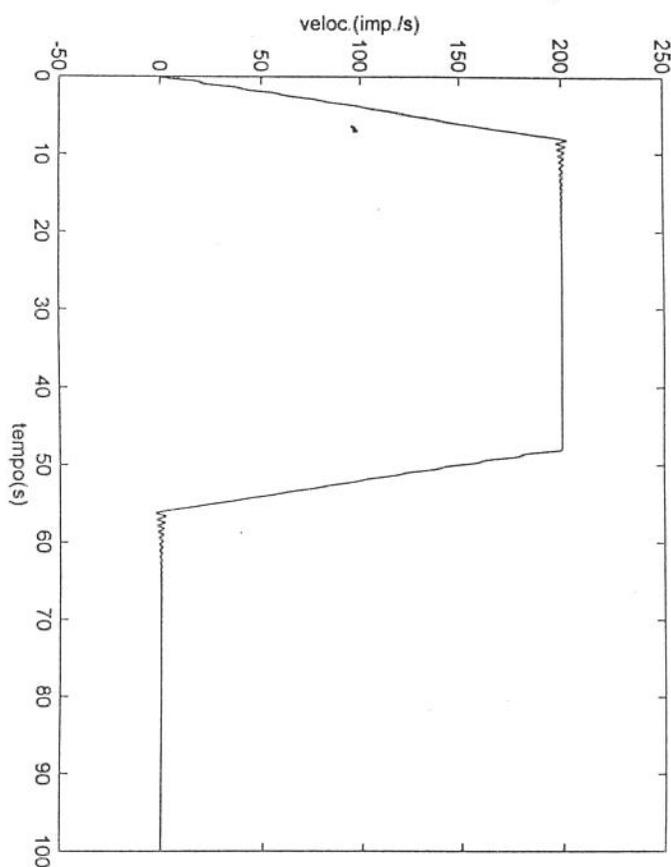
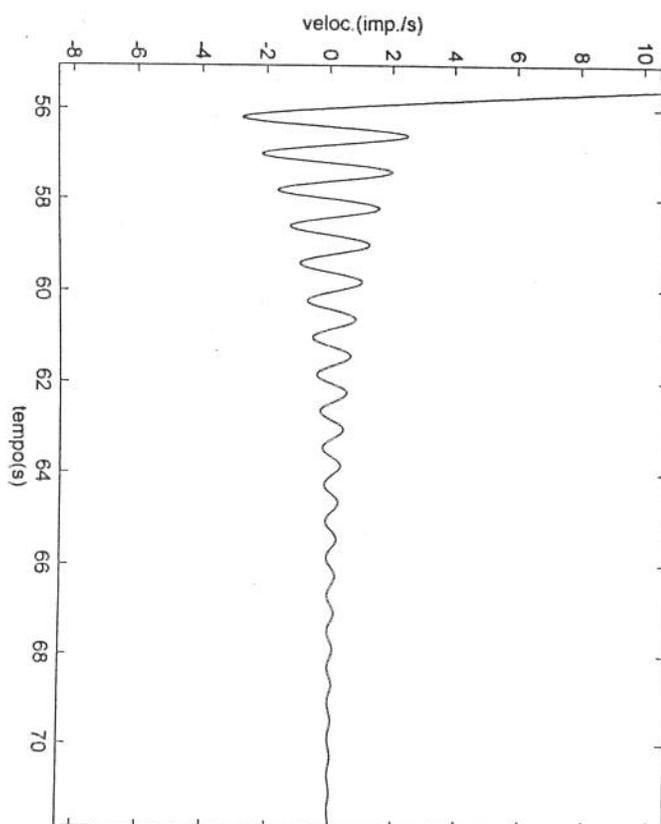


Fig. 4.5(f) - velocidade angular de saída do motor ao final do regime transitório



## Conclusões sobre a ação de controle Proporcional + Integral +Derivativa

**Erro:** (fig.(s) 4.5(a) e 4.5(b)). O erro tem regime de caráter oscilatório amortecido a cada nova etapa de tempo relacionado ao perfil de trajetória imposto ao servo-mecânismo, ocorrendo a estabilização ao final de cada etapa, sendo obtido erro nulo após certo tempo do término do regime transitório .

**Deslocamento:** (fig.(s) 4.5(c) e 4.5(d)). O deslocamento até a região da coordenada setada se faz em aproximadamente 50 segundos. Para o controlador PID, o tempo de estabilização é curto, em comparação com P, PI, PD, devido ao caráter integrativo, e pequena amplitude de oscilação devido a presença do caráter derivativo. O sistema tem oscilação amortecida ao final do deslocamento, ocorrendo a redução da amplitude de onda, aumento de frequência e posterior estabilização do servo-Mecânismo após decorrido algum tempo do final do trânsito até a região de coordenada destinada .

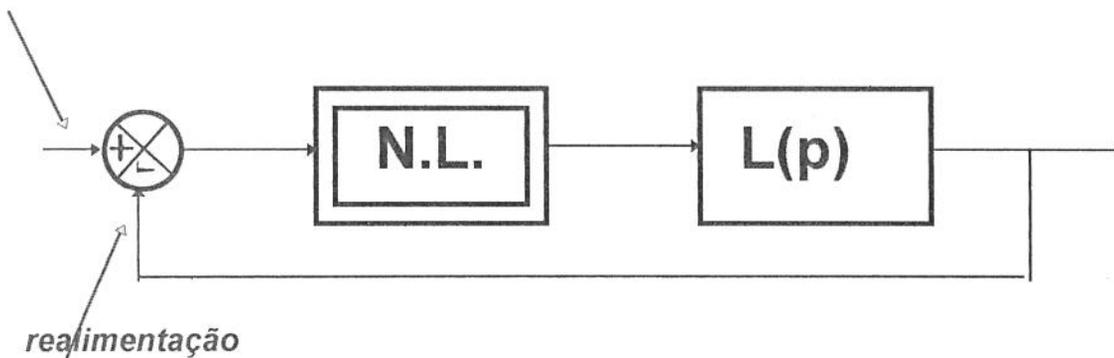
**Velocidade:** (fig.(s) 4.5(e) e 4.5(f)). Devido ao fator Integrativo, pode-se verificar que o amortecimento de onda a cada etapa do perfil da velocidade angular se procede a uma frequência menor que a do caso precedente (controle P.D.).

**Plano de fase:** (fig. 4.5(g)). O plano de fase da velocidade contra o deslocamento demonstra o caráter oscilatório amortecido tanto durante, quanto ao final do regime transitório do sistema sobre o efeito do controle proporcional+integral +derivativo, porém a estabilização ocorre em um tempo menor ao PID com relação ao PD, devido a inserção do caráter integral .

#### 4.2- Simulação do Sistema de Segunda Ordem (conjunto motor-transmissão-carregamento) utilizando Controladores Não-Lineares.

A ação controladora Não-Linear inserida em todos os casos obedece ao princípio esquematizado na figura 4.6, onde o bloco  $L(p)$  representa a função de transferência resultante da somatória das funções de transferência dos blocos constituintes da malha do servo-mecânismo e o bloco Não-Linear representa a ação de controle Não-Linear aplicada ao sistema .

*comando de entrada*



onde  $L(p)$  é a função de Transferência do Sistema Linear e NL representa o controle Não-Linear a ser utilizado

Fig. 4.6 - Esquema Genérico do sistema de controle Não Linear do sistema de acionamento

Utilizando-se da mesma modelagem matemática que a aplicada na simulação do servo-mecânismo sob o efeito dos controladores lineares, substituindo os parâmetros das variáveis do esquema 4.1 pelos valores numéricos das tabelas 4.1 e 4.2 efetuamos a seguir as respectivas simulações do erro obtido, do deslocamento real , do perfil da velocidade angular que sai do acionador elétrico, do plano de fase da velocidade  $\times$  deslocamento quando a malha esta sujeita a ação de controladores Não-Lineares Relê, Histeresis, Zona-Morta, e suas combinações, na seguinte ordem de precedência:

Caso 1: Controle por Relê

Caso 2: Controle por Relê com Zona-Morta

Caso 3: Controle por Relê com Histeresis

Caso 4: Controle por Relê + Histeresis+ Zona-Morta

tabela 4.2

PARÂMETROS DO RELÊ	
<b>GANHO DO ERRO</b> GE = 30 ;	
<b>INTERVALO DA ZONA-MORTA</b> ZM = 1.5 ;	
<b>LARGURA DA HISTERESIS</b> B= 1.5 ;	

O perfil de velocidade descrito pela figura 4.7(a), após integrado, fornece o sinal da trajetória 4.7 (b) que é consignada à caixa de soma, na qual é comparada com o sinal que realimenta o sistema com informação da posição real, fornecendo o desvio ou erro do deslocamento desejado em relação ao deslocamento obtido. Este sinal será a entrada do bloco controlador Não-Linear o qual no caso é um Relê, como mostrado na figura 4.8.

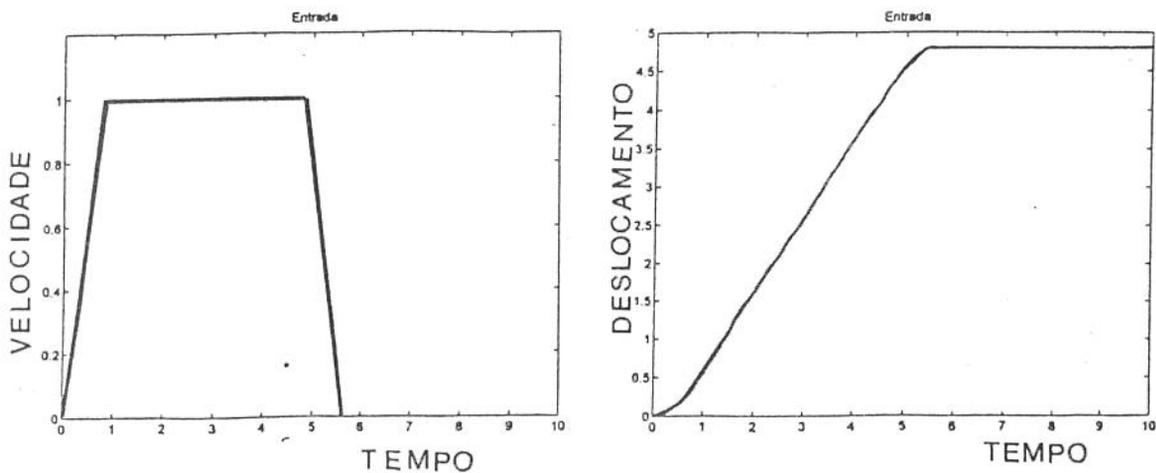


fig. 4.7(a) - perfil de velocidade consignada Onde pode ser observado um período de aceleração, um de velocidade constante e outro de desaceleração

fig. 4.7(b) - Perfil da trajetória consignada

### 4.2.1 - Controle Não-Linear On-Off

Inicialmente, inserimos um controlador On-Off, isento de qualquer outro fenômeno Não-Linear no processo a ser regulado (fig. 4.8).

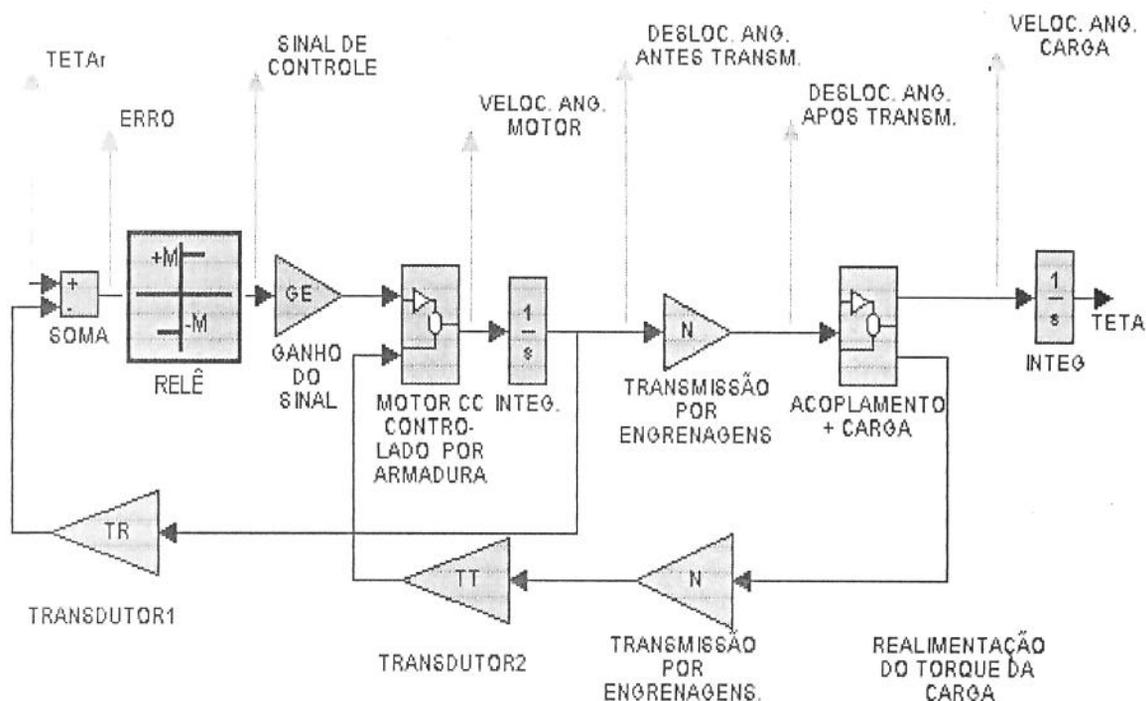


figura 4.8- Ação de controle por Relê

#### Conclusões sobre a ação de controle On-Off.

**Erro:** (fig.(s) 4.9(a) e 4.9(b)). O erro tem caráter oscilatório durante todo o processo, assumindo uma faixa de erro de amplitude fixa ao final do regime transitório.

**Deslocamento:** (fig.(s) 4.9(c) e 4.9(d)). O deslocamento até a região da coordenada setada se faz em aproximadamente 55,5 segundos. O sistema tem oscilação permanente de amplitude constante ao final do deslocamento (fenômeno da oscilação perpétua).

### Caso 1: Controle por Relê (tabela 4.2)

Fig. 4.11(c) - Deslocamento real(impulsões) × tempo (s)

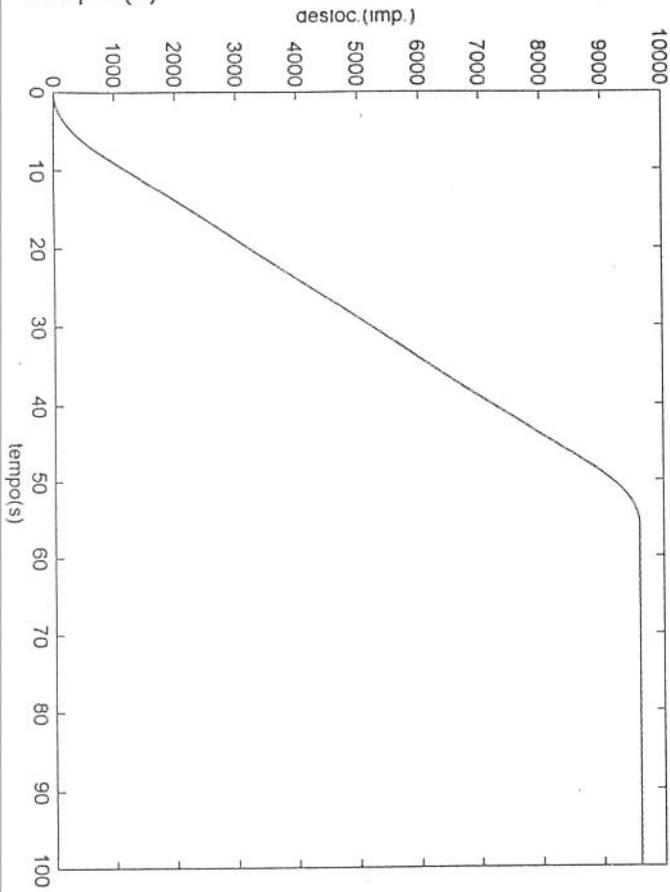


Fig. 4.11(a) - erro (impulsões) × tempo (s)

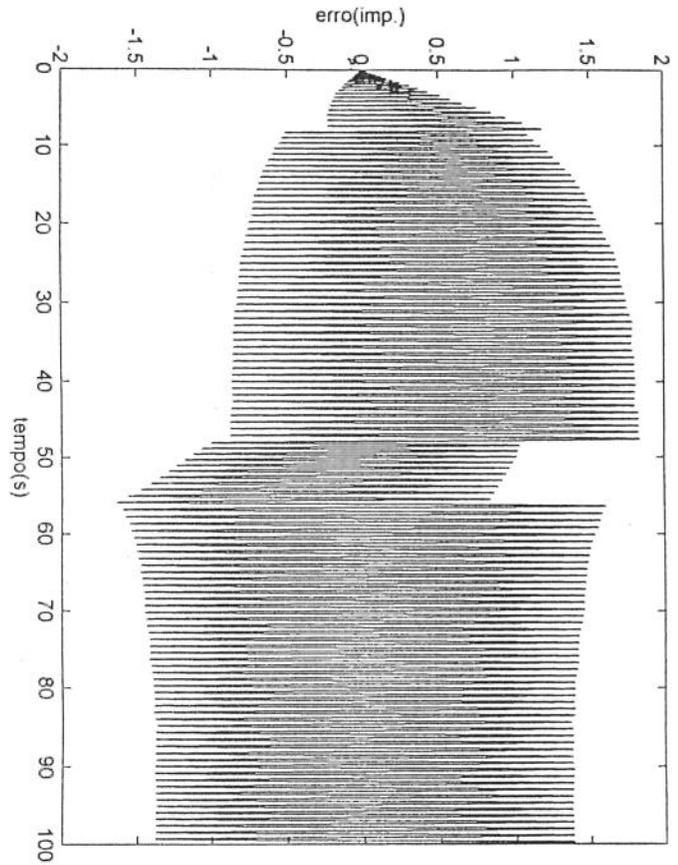


Fig. 4.11(d) - Deslocamento real(impulsões) × tempo (s) ao final do regime transitório

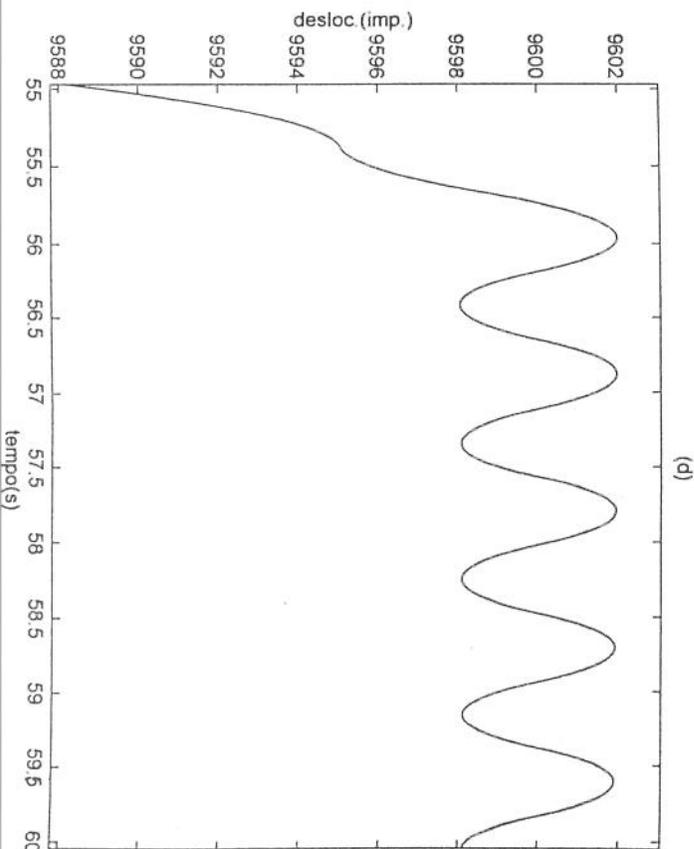


Fig. 4.11(b) - erro (impulsões) × tempo (s) ao final do regime transitório

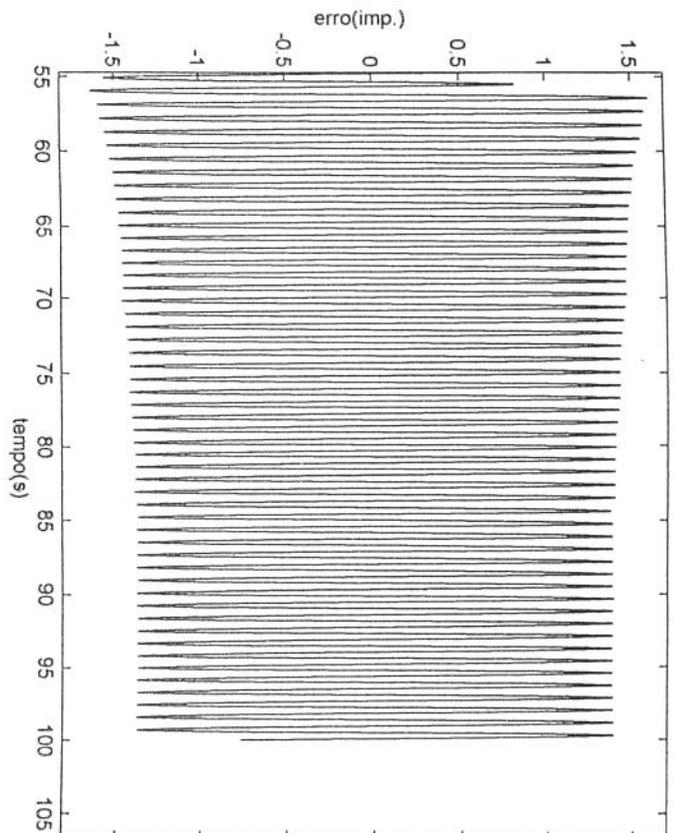


Fig. 4.11(g)- plano de fase velocidade(impulsões × deslocamento real(impulsões)

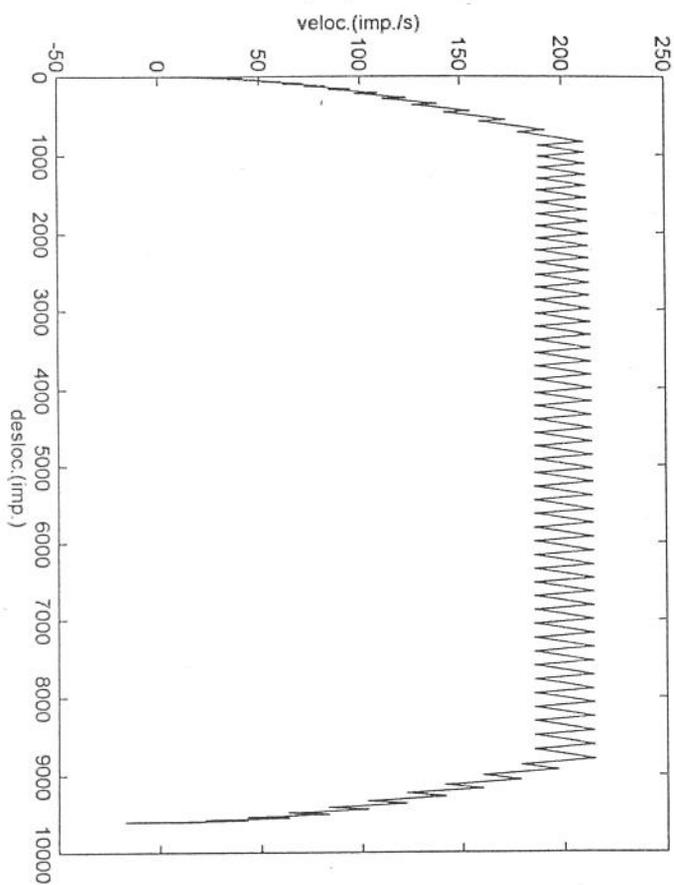


Fig. 4.11(e) - velocidade angular de saída do motor

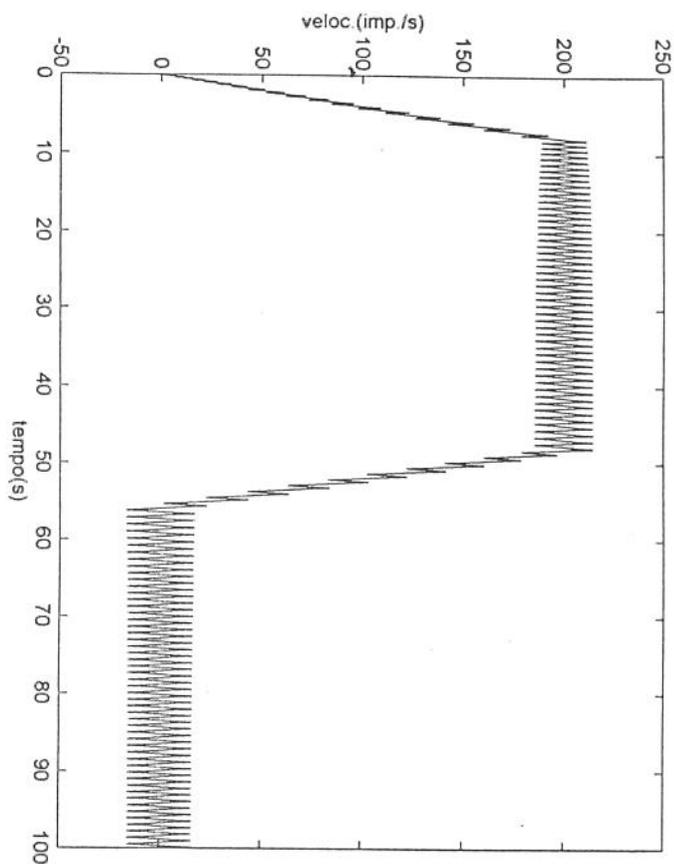
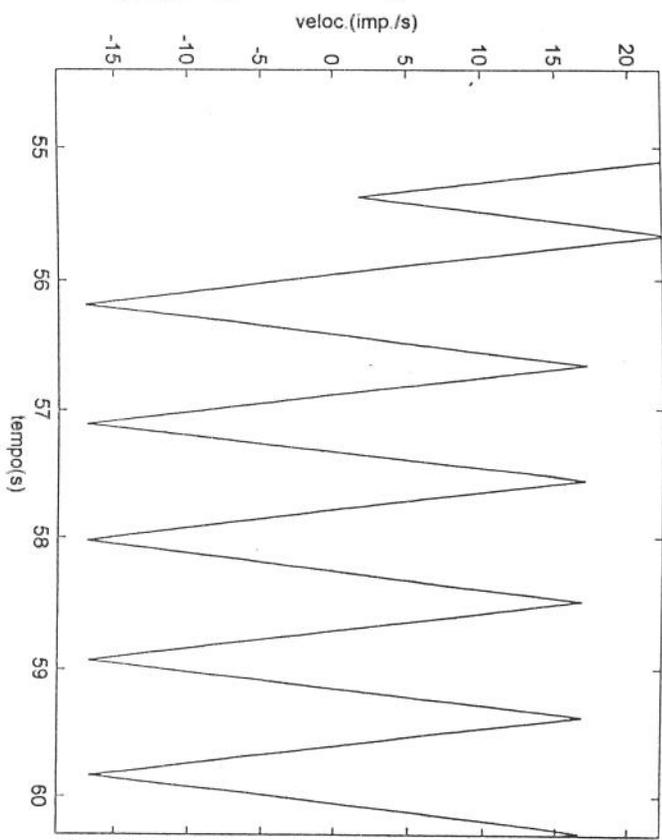


Fig. 4.11(f) - velocidade angular de saída do motor ao final do regime transitório



**Velocidade:** (fig.(s) 4.9(e) e 4.9(f)). O perfil da velocidade angular real de saída do motor é desenvolvido com dada faixa de oscilação dentro da região do perfil da velocidade angular que foi designada para o sistema, sendo que o sistema permanece vibrando perpétuamente mesmo depois do processo de trânsito ter sido consumado .

**Plano de fase:** (fig. 4.9(g)). O plano de fase da velocidade contra o deslocamento demonstra o caráter oscilatório tanto durante, quanto ao final do regime transitório do sistema pode-se observar que no término do processo, não ocorre a estabilização do sistema, ocorrendo oscilando permanentemente.

#### 4.2.2 - Controle Não-Linear On-Off+Zona Morta

Inserimos a seguir ao relê do caso 1 uma Zona-Morta proporcional a largura da faixa de erro ao final do regime transitório do caso precedente.

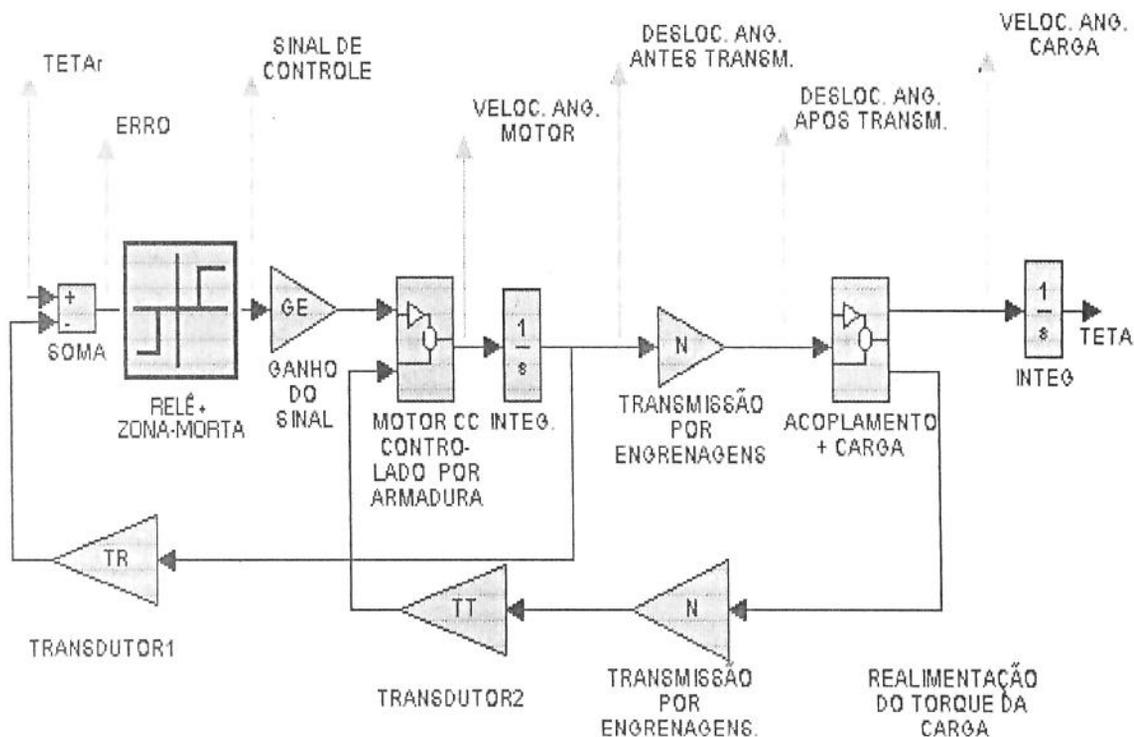


Fig.4.10 - Ação de controle por Relê com Zona-Morta

## Caso 2: Controle por Relê com Zona-Morta (tabela 4.2)

Fig. 4.9(c) - Deslocamento real(impulsões)  $\times$  tempo (s)

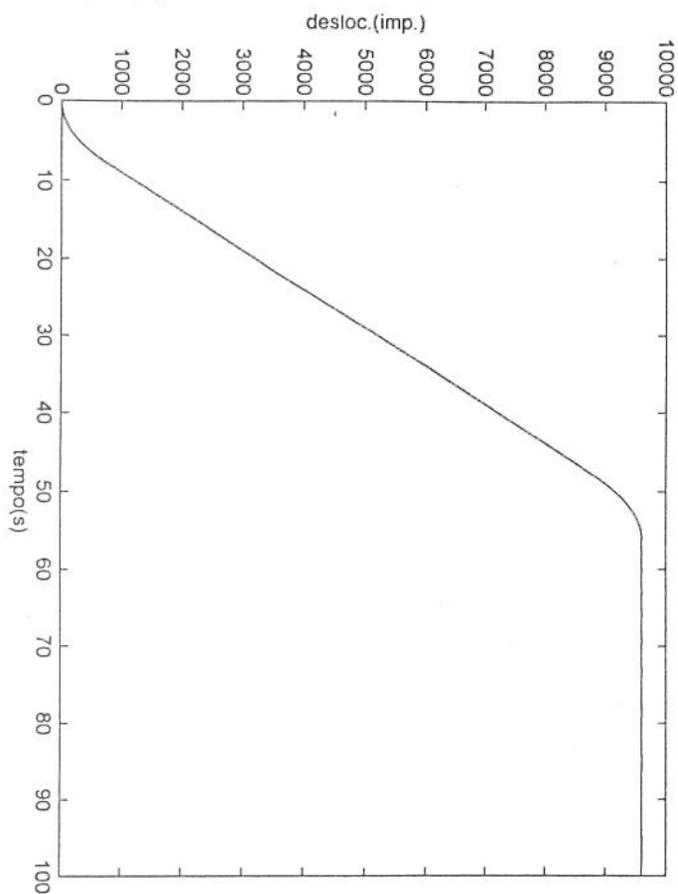


Fig. 4.9(d) - Deslocamento real(impulsões)  $\times$  tempo (s) ao final do regime transitório

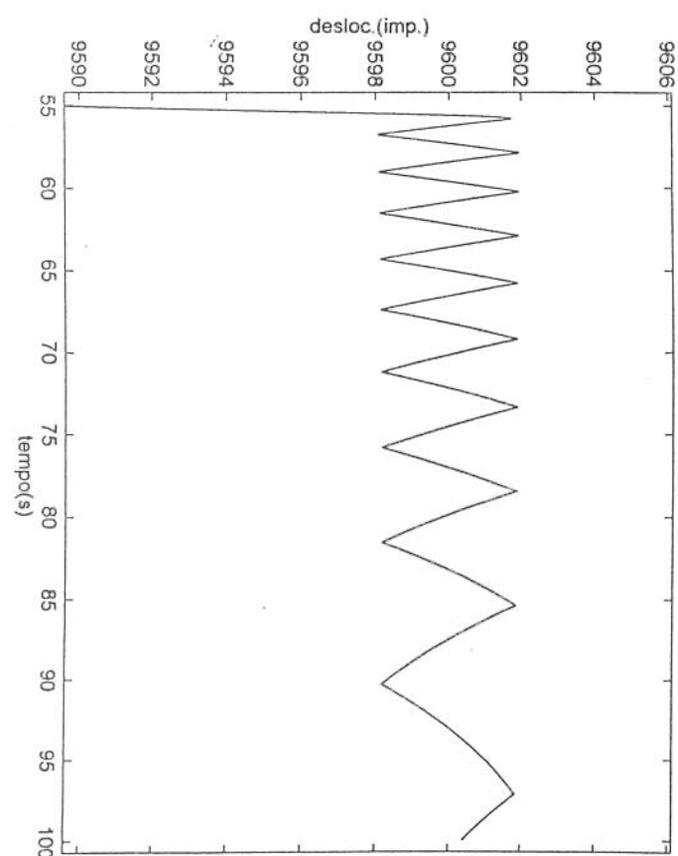


Fig. 4.9(a) - erro (impulsões)  $\times$  tempo (s)

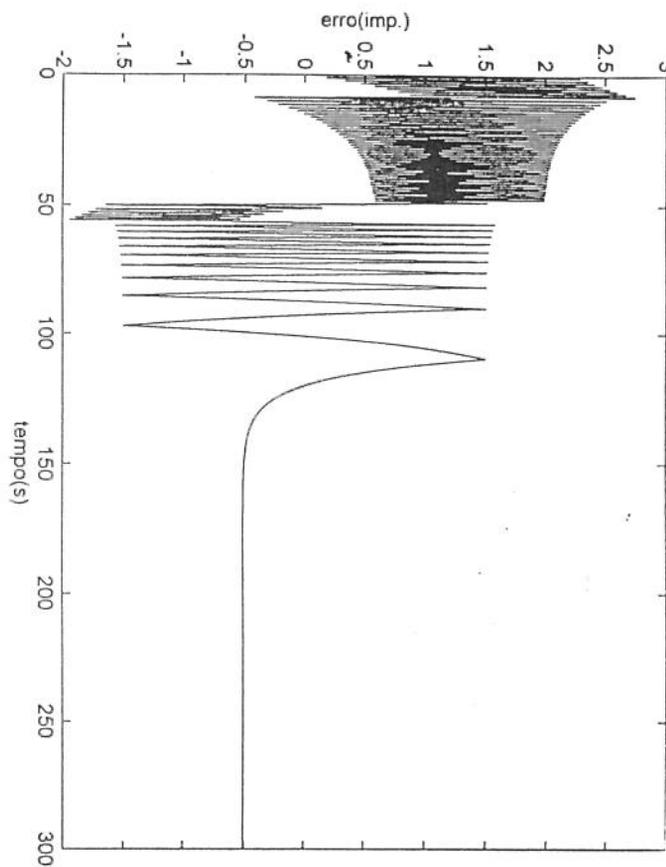


Fig. 4.9(b) - erro (impulsões)  $\times$  tempo (s) ao final do regime transitório

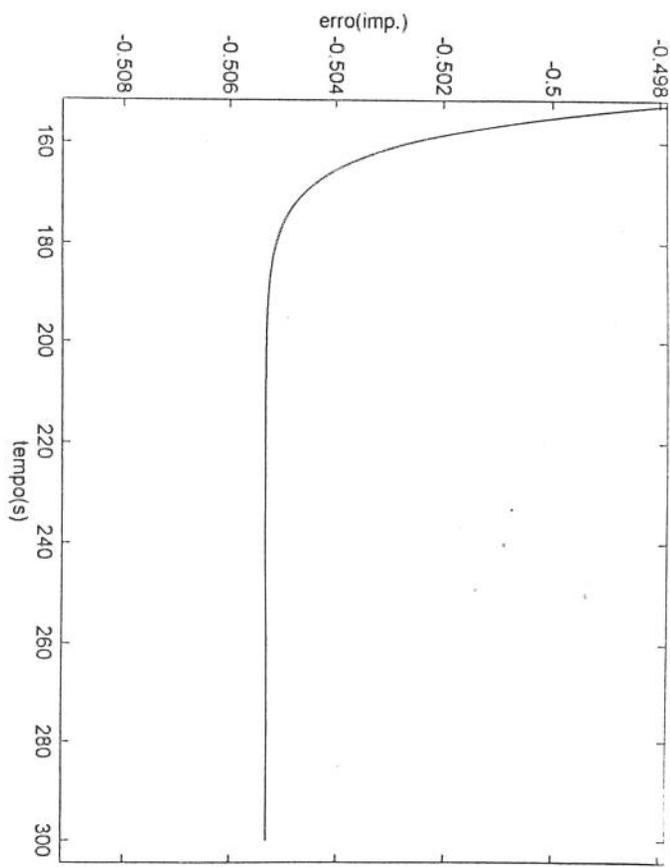


Fig. 4.9(g)- plano de fase velocidade(impulsões/s) × deslocamento real(impulsões)

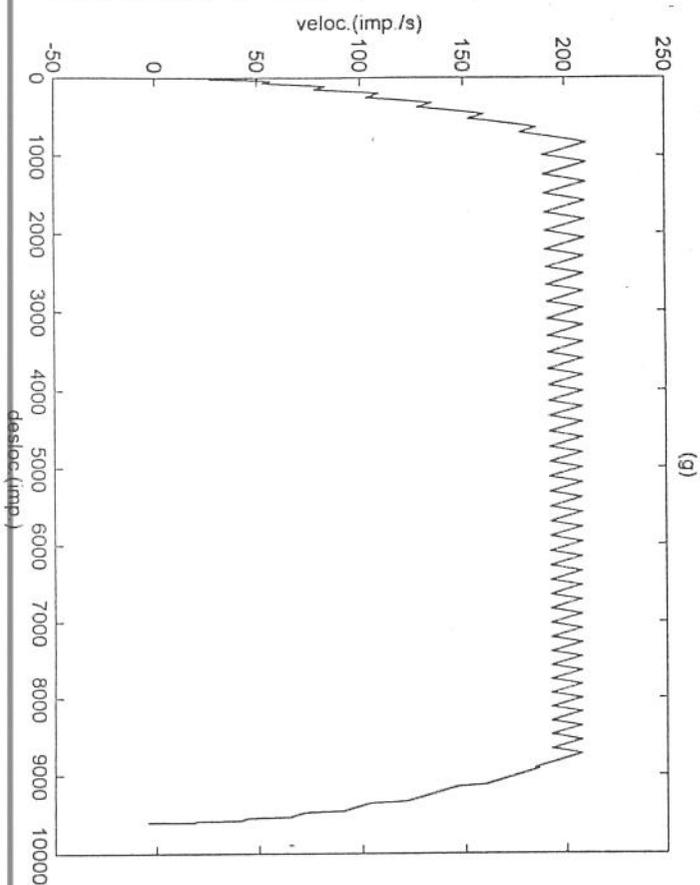


Fig. 4.9(e) - velocidade angular de saída do motor

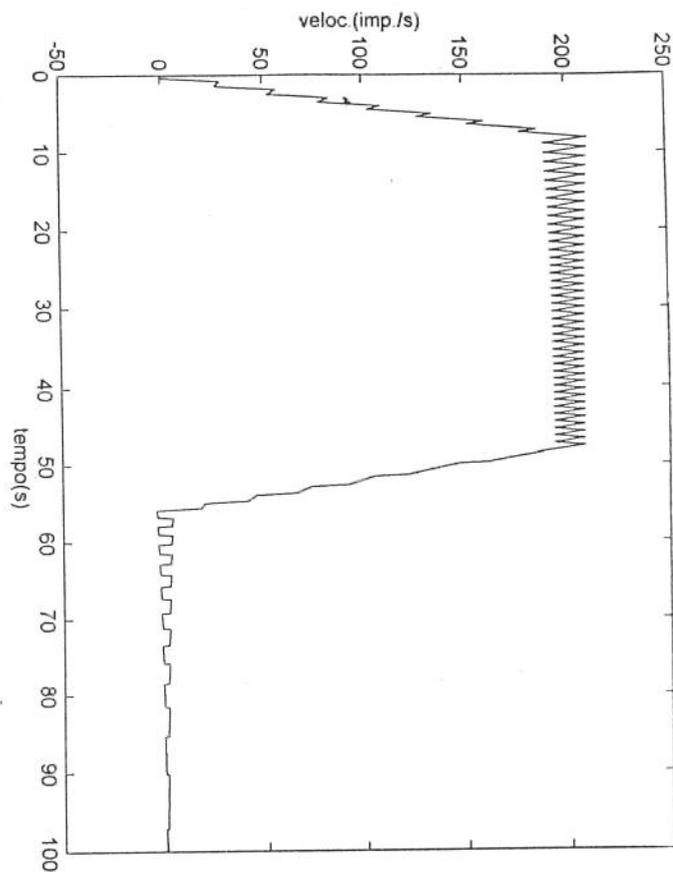
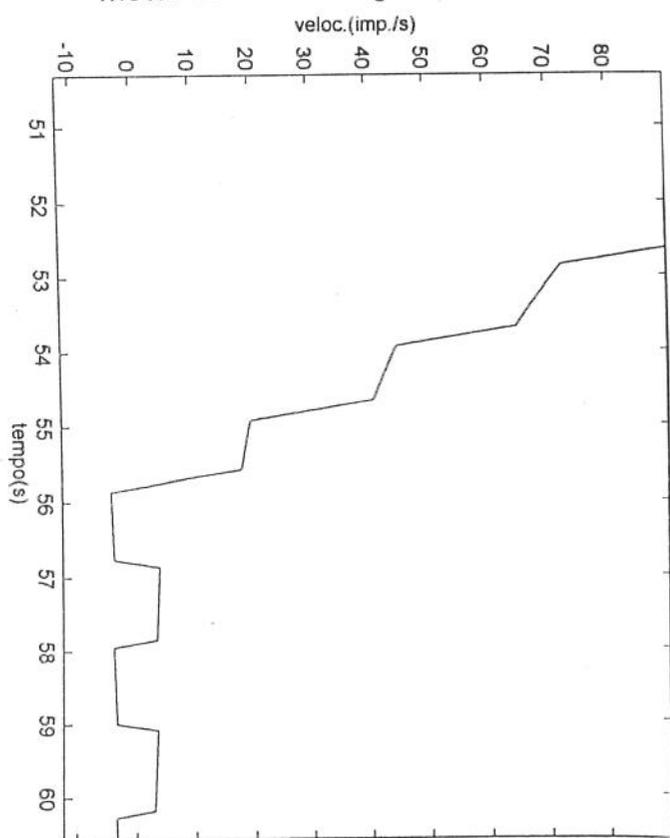


Fig. 4.9(f) - velocidade angular de saída do motor ao final do regime transitório



## Conclusões sobre a ação de controle On-Off + Zona- Morta.

**Erro:** (fig.(s) 4.11(a) e 4.11 (b)). O erro tem caráter ondulatório amortecido durante todo o processo, sendo que o fenômeno da oscilação perpétua em torno do ponto consignado tende a desaparecer. A posição final tem imprecisão em razão direta com a largura da Zona-Morta., ou seja, o servo mecanismo se estabiliza a uma determinada posição com pequeno desvio com relação ao ponto designado pelo gerenciador.

**Deslocamento:** (fig.(s) 4.11(c) e 4.11 (d)). O deslocamento até a região da coordenada setada se faz em aproximadamente 55.5 segundos, O sistema para de vibrar ao final do deslocamento , ocorrendo estabilização.

**Velocidade:** (fig.(s) 4.11(e) e 4.11 (f)). Ao analisarmos o período de velocidade constante, podemos notar o decaimento da amplitude da oscilação ao longo do tempo. Após o período de desaceleração, é verificado tanto um decaimento da amplitude do pulso, quanto o aumento de sua largura, até obter-se estabilidade do sistema.

**Plano de fase:** (fig. 4.11(g)). O plano de fase da velocidade contra o deslocamento demonstra o amortecimento da oscilação e a estabilização completa do servo-sistema ao final do regime transitório.

### 4.2.3- Controle Não-Linear On-Off+Histeresis.

Como próxima etapa, anexamos a Histeresis ao Relê conforme Fig.4.12, verificando o efeito desta como agente compensador no servo-mecanismo.

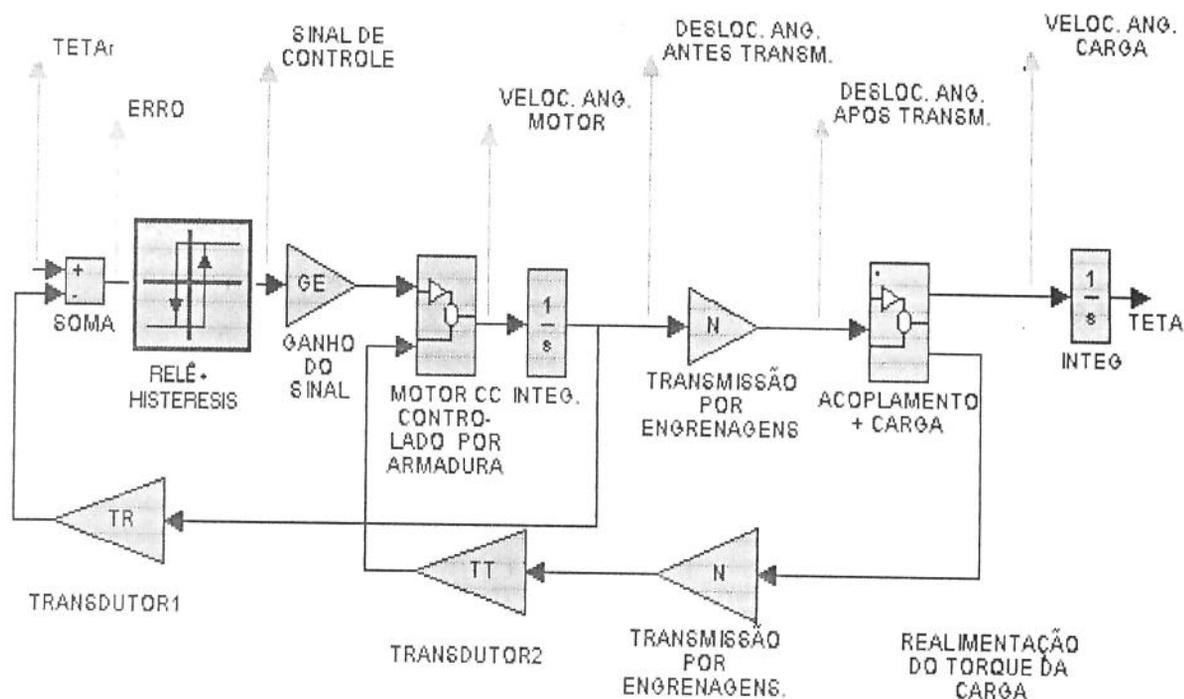


Fig.4.12 - Controle on-off+histeresis

### Conclusões sobre a ação de controle On-Off + Histeresis.

**Erro:** (fig.(s) 4.13(a) e 4.13(b)). O erro tem caráter oscilatório durante todo o processo, assumindo uma faixa de erro de amplitude aumentada com relação ao caso do on-off ideal.

**Deslocamento:** (fig.(s) 4.13(c) e 4.13(d)). O trajeto até a região da coordenada setada se faz em aproximadamente 55,5 segundos. O sistema tem oscilação permanente de amplitude constante ao final do trânsito (fenômeno da oscilação perpétua), porém, a amplitude de onda é maior que o caso do on-off ideal, conseqüentemente, há a redução de frequência da vibração.

**Velocidade:** (fig.(s) 4.13(e) e 4.13(f)). Comparando com o caso do relê ideal, podemos constatar o aumento da amplitude da vibração, tanto no trânsito, quanto no término do processo.

**Plano de fase:** (fig. 4.13(g)). O plano de fase da velocidade contra o deslocamento demonstra o caráter oscilatório tanto durante, quanto ao final do regime transitório do sistema pode-se observar que no término do processo.

### Caso 3: Controle por Relê com Histeresis (tabela 4.2)

Fig. 4.13(c) - Deslocamento real(impulsões)  $\times$  tempo (s)

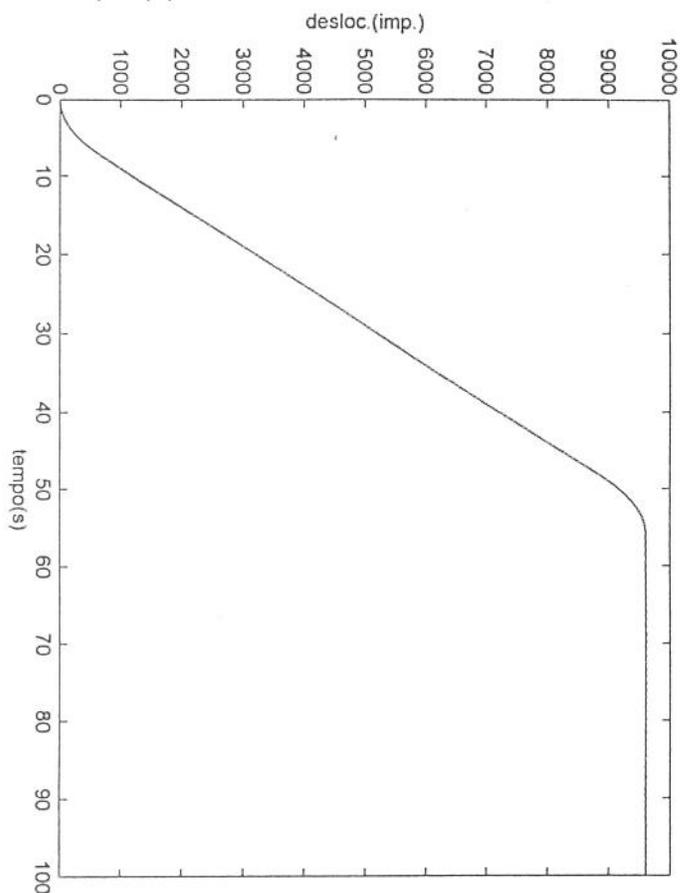


Fig. 4.13(a) - erro (impulsões)  $\times$  tempo (s)

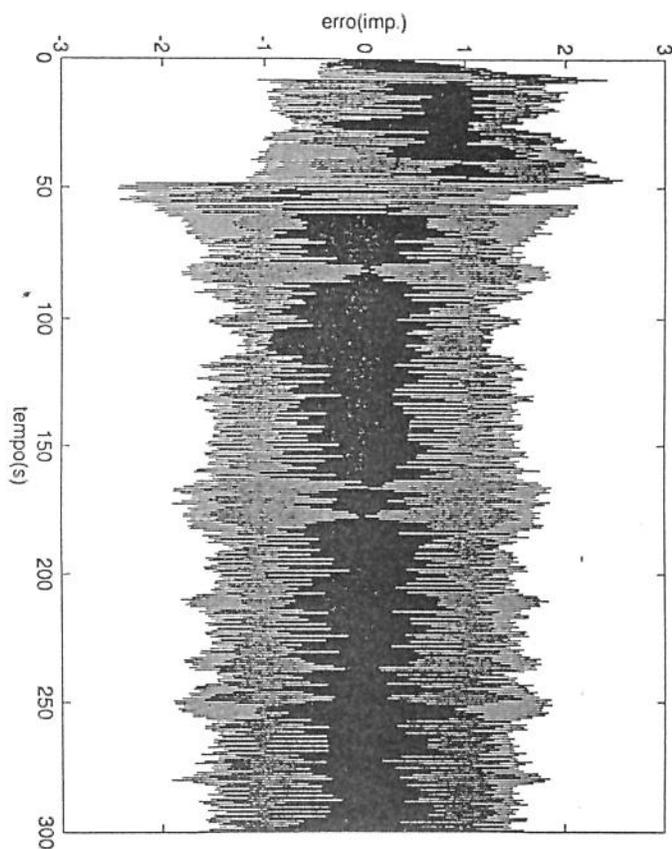


Fig. 4.13(d) - Deslocamento real(impulsões)  $\times$  tempo (s) ao final do regime transitório

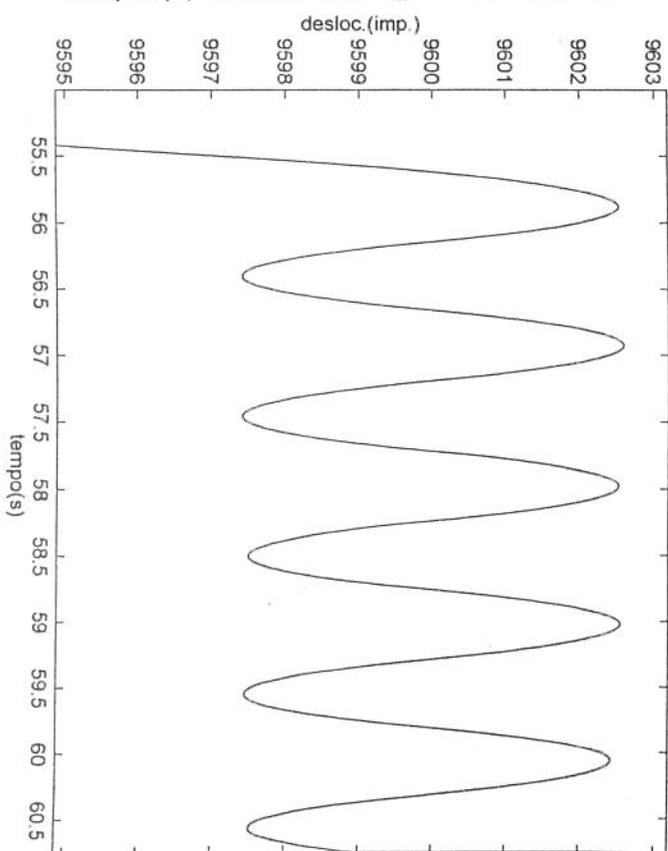


Fig. 4.13(b) - erro (impulsões)  $\times$  tempo (s) ao final do regime transitório

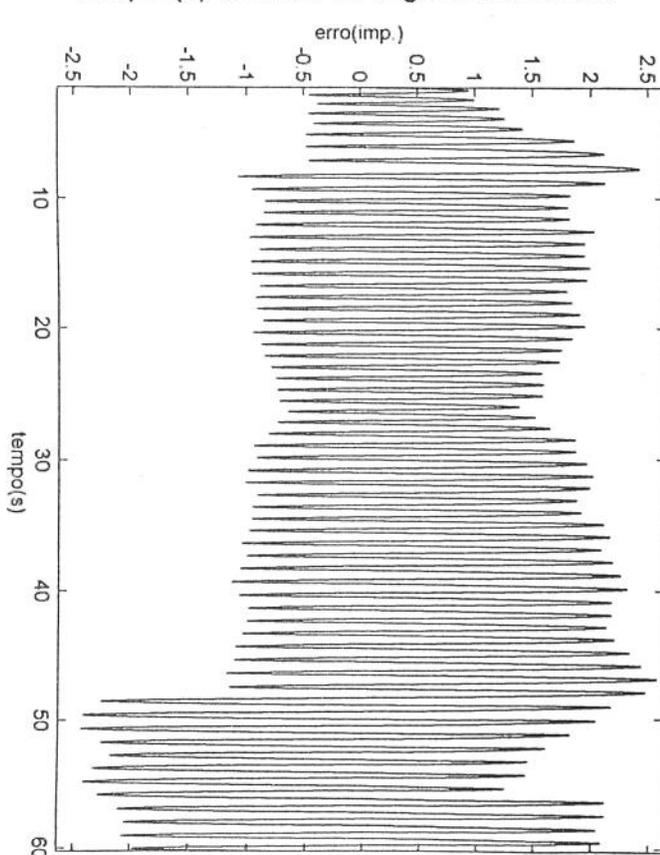


Fig. 4.13(g)- plano de fase velocidade(impulsões  
× deslocamento real(impulsões)

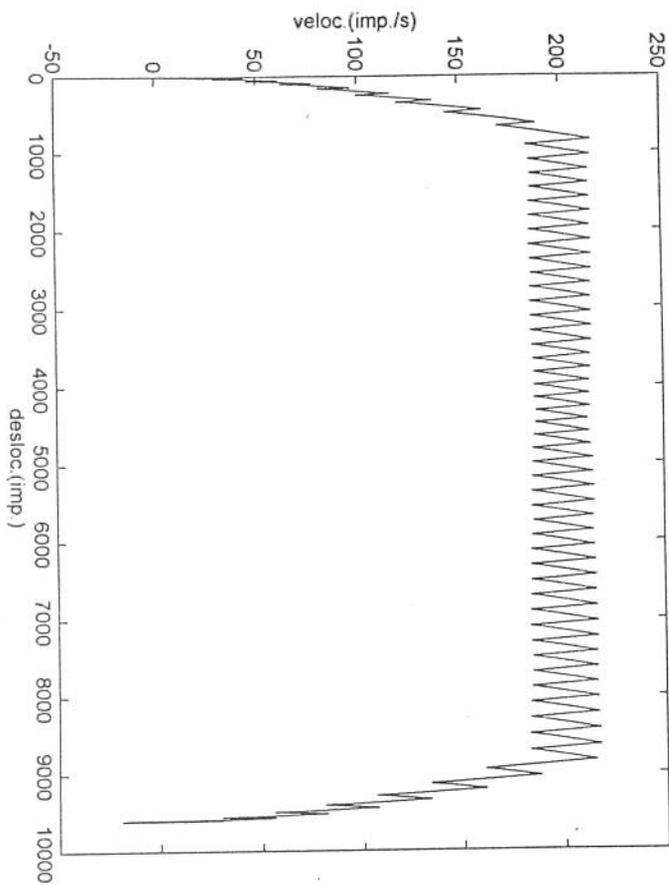


Fig. 4.13(e) - velocidade angular de saída do motor

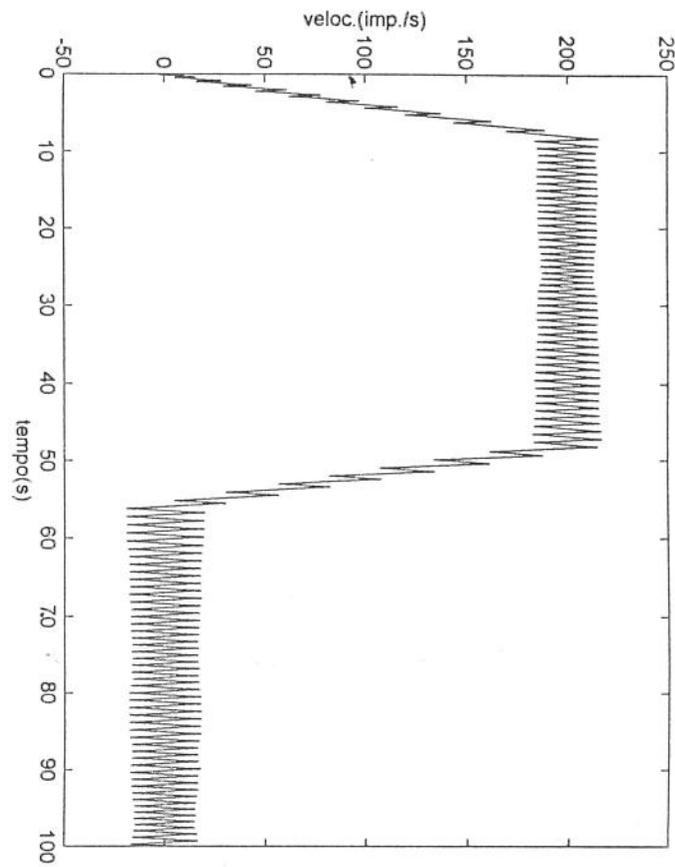
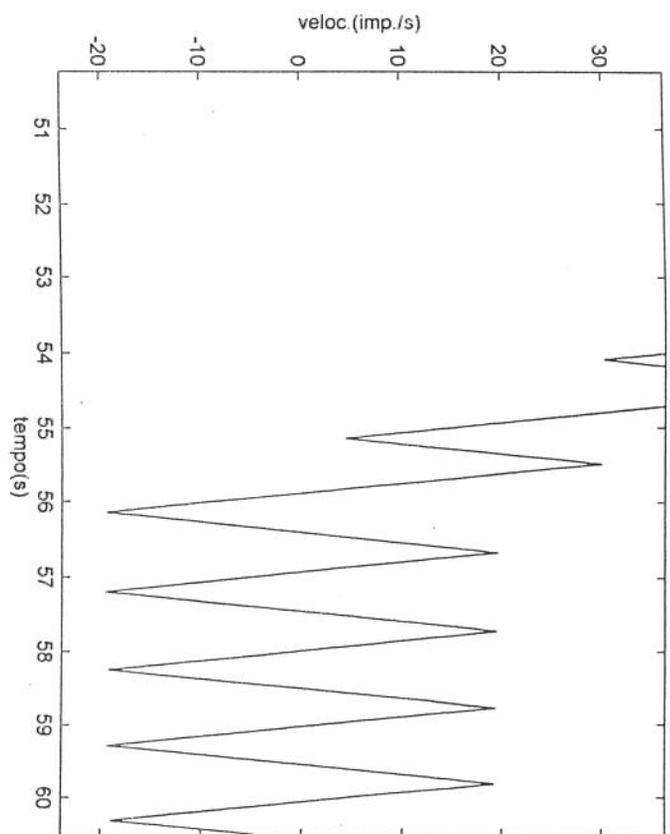


Fig. 4.13(f) - velocidade angular de saída do motor ao final do regime transitório



#### 4.2.D - Controle Não Linear On-Off + Histeresis +Zona Morta

Finalizando as simulações, adicionamos ao Relê a Zona-Morta e a Histeresis em conjunto (Fig. 4.14), verificando a seguir os efeitos das respectivas inserções ao Sistema de Controle do Servo-Mecanismo.

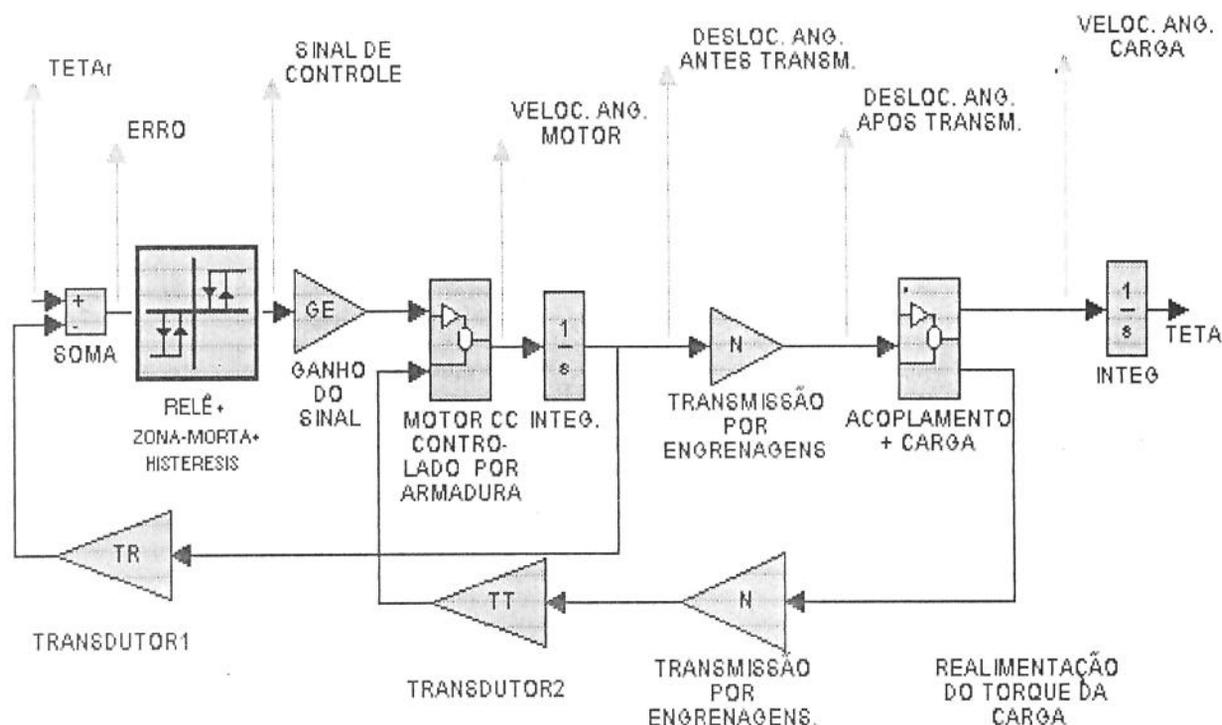


Fig. 4.14 - Controle On-Off+Zona Morta+Histeresis

#### Conclusões sobre a ação de controle On-Off+ Histeresis+ Zona-Morta .

**Erro:** (fig.(s) 4.15(a) e 4.15(b)). O erro tem caráter oscilatório durante todo o processo, assumindo uma faixa de erro constante ao final do regime transitório com amplitude de onda e frequência reduzidas com relação aos casos do relê e o relê associado a histeresis.

**Deslocamento:** (fig.(s) 4.15(c) e 4.15(d)). O sistema tem oscilação permanente de amplitude constante ao final do deslocamento (fenômeno da oscilação perpétua), onde podemos concluir que a presença da zona-morta na ação de controle gerou a redução do caráter oscilatório.

**Caso 4: Controle por Relê + Histeresis+ Zona-Morta**

Fig. 4.15(c) - Deslocamento real(impulsões) × tempo (s)

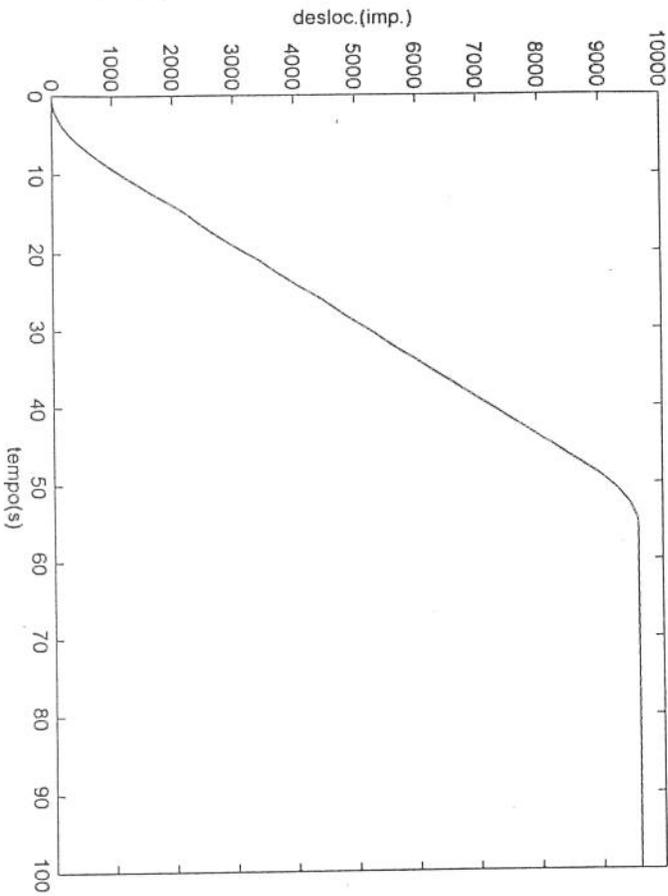


Fig. 4.15(a) - erro (impulsões) × tempo (s)

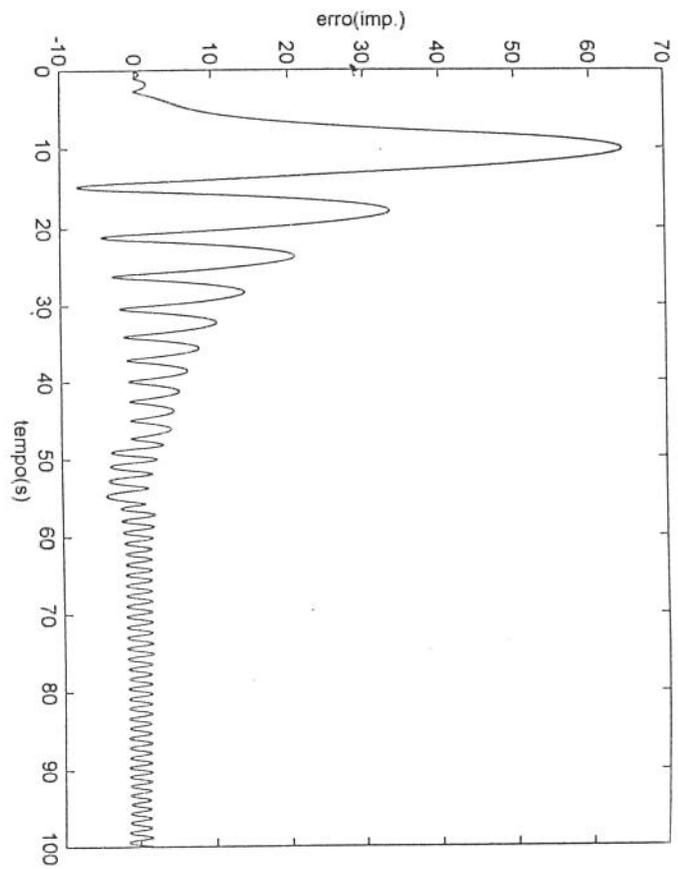


Fig. 4.15(d) - Deslocamento real(impulsões) × tempo (s) ao final do regime transitório

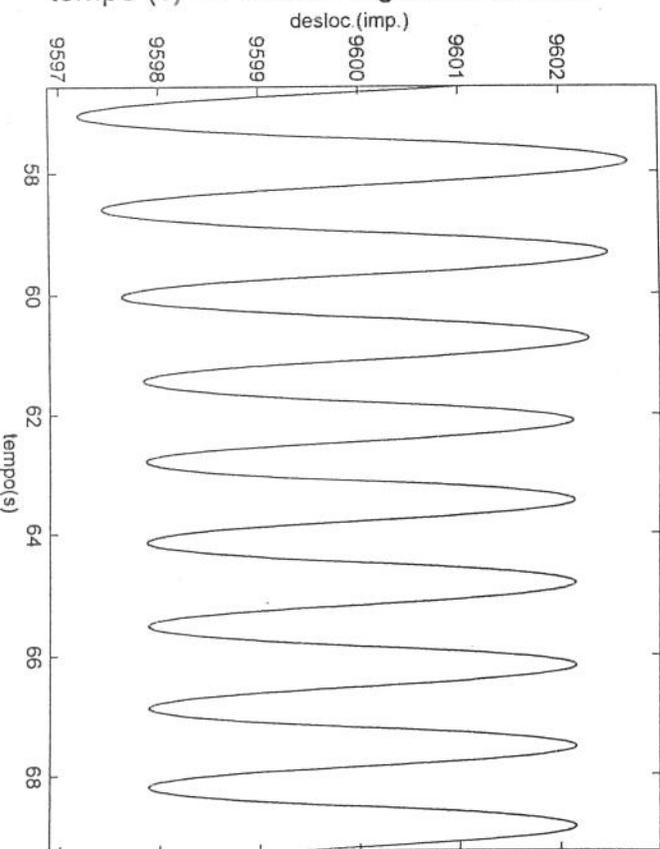


Fig. 4.15(b) - erro (impulsões) × tempo (s) ao final do regime transitório

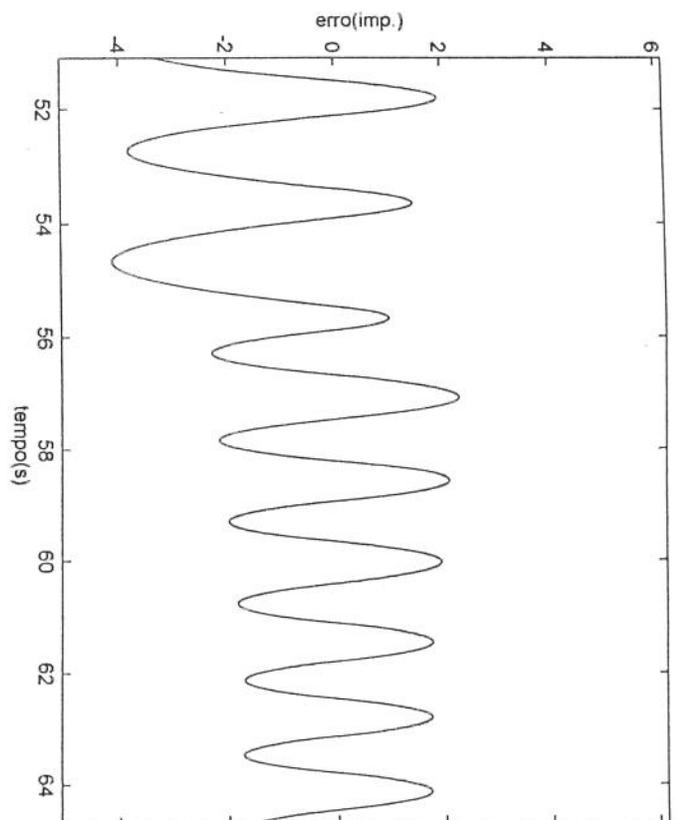


Fig. 4.15(g)-plano de fase velocidade(impulsões/ × deslocamento real(impulsões)

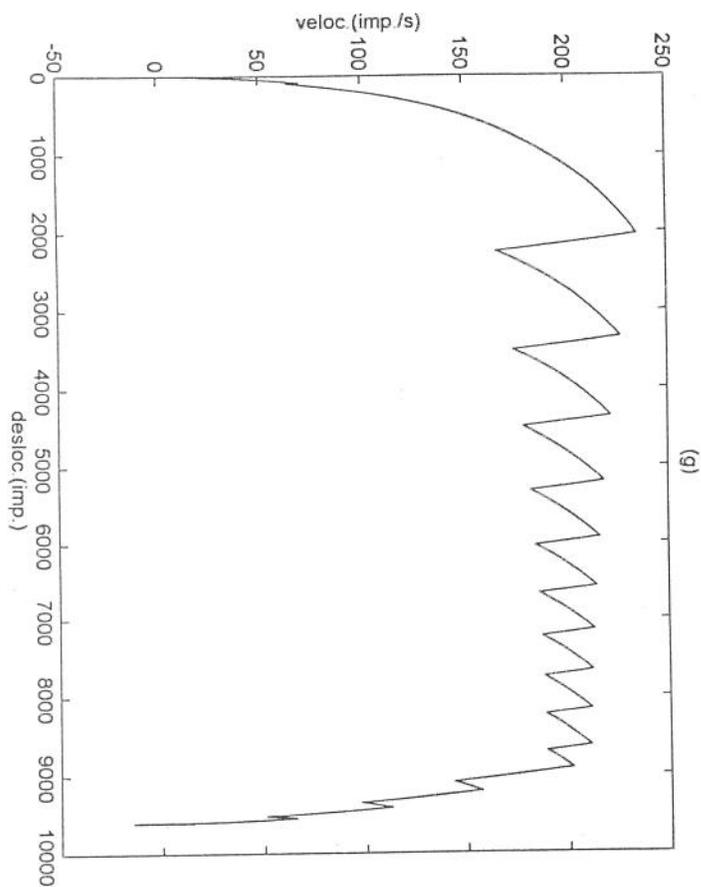


Fig. 4.15(e) - velocidade angular de saída do motor

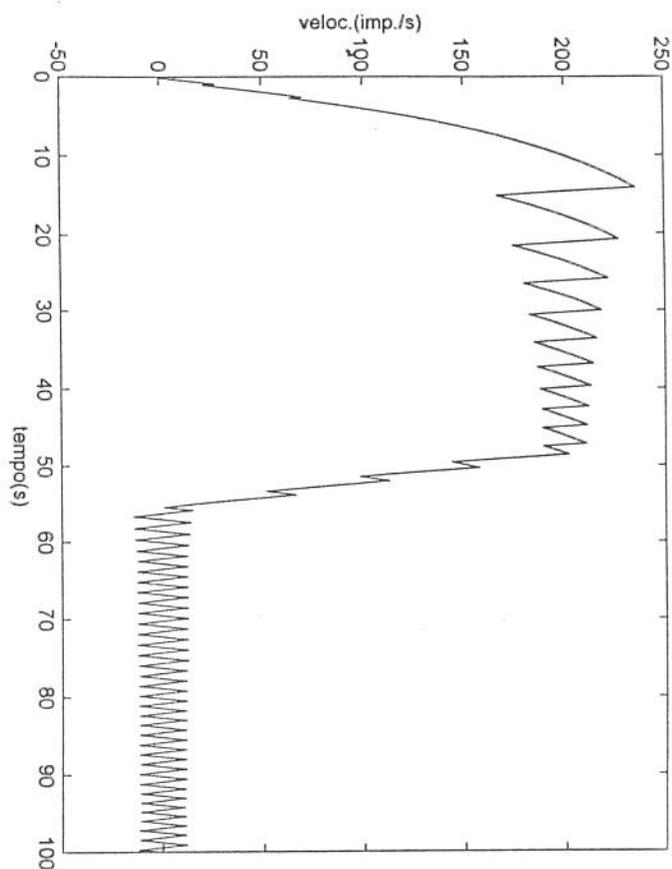
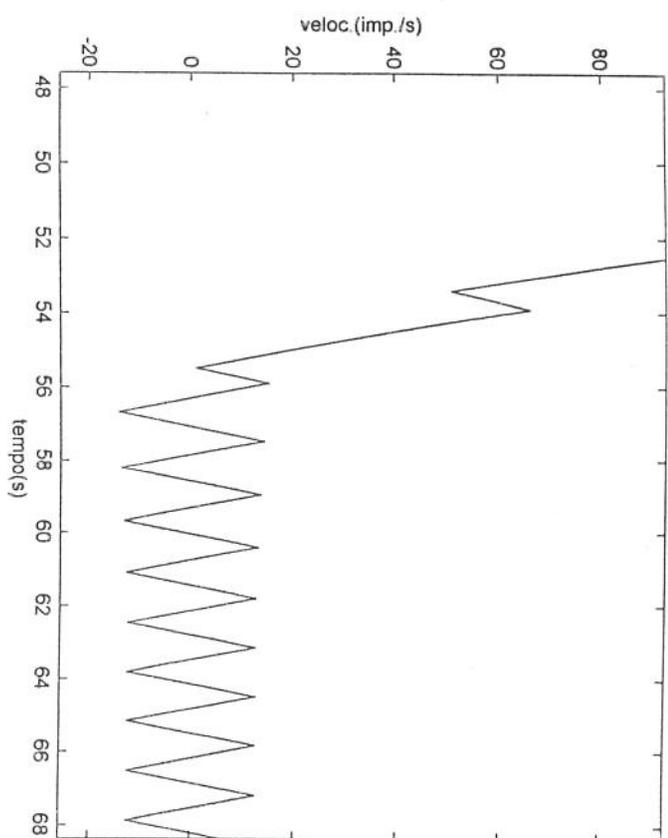


Fig. 4.15(f) - velocidade angular de saída do motor ao final do regime transitório



**Velocidade:** (fig.(s) 4.15(e) e 4.15(f)). comparando os gráficos das figuras 4.(e) e 4.(f), concluímos que há redução da amplitude da faixa de oscilação de sua amplitude no final do regime transitório

**Plano de fase:** (fig.(s) 4.15(a)). O plano de fase da velocidade contra o deslocamento demonstra o caráter oscilatório amortecido tanto durante, quanto ao final do regime transitório do sistema pode-se observar que no término do processo, não ocorre a estabilização do sistema, ocorrendo oscilando permanentemente.

### 4.3 - Conclusões Finais

Conseguimos a partir das simulações efetuadas neste capítulo comprovar os resultados positivos das ações controladoras Não-Lineares sobre as Lineares previstos anteriormente a nível teórico, pois foram verificados.

A partir das simulações efetuadas neste capítulo, foi possível verificar o efeito de ações de controle lineares (P.I.D.) e Não-Lineares, podendo-se constatar as características peculiares a cada uma, como o caso do controle do Servo-Sistema por Relê, o qual acarreta o fenômeno da oscilação Limite, podendo este ser alterado pela inserção da Histeresis a qual aumenta a amplitude e reduz a frequência da oscilação em torno de um determinado valor médio, e a redução ou até a eliminação do caráter oscilatório do processo com a variação de uma Zona-Morta quando esta implementada ao Servo-Sistema.

Ao compararmos as ações controladoras lineares com Não-Lineares, podemos efetuar uma analogia entre os controladores estudados, sendo que o on-off tem efeito equivalente ao proporcional, a zona-morta do derivativo e a histeresis do integrativo, porém com a vantagem da simplificação de implementação através de programação em PAL, permitindo flexibilidade e otimização de controle.

## Conclusões e Trabalhos Futuros

O principal objetivo deste trabalho consistiu no desenvolvimento de uma modelagem matemática do servo-sistema robótico, abordando aspectos Não-Linearidades inerentes a este e a simulação de controladores clássicos (P, P.I., P.D., P.I.D.) e de controladores Não-Lineares (On-Off, Zona-Morta e Histeresis).

A partir disso, tornou-se possível verificarmos a eficiência destes controladores e a possível eliminação de efeitos indesejáveis para o sistema como a oscilação limite e a oscilação perpétua em torno de um valor constante, fenômenos estes que muitas vezes acabam sendo desprezados na abordagem linear do problema.

A princípio, desenvolveu-se toda teoria introdutória no estudo de Não-Linearidades, demonstrando-se a necessidade de sua utilização quando nos referimos a análise precisa de fenômenos físicos a nível de servo-mecanismos.

A partir da simulação do modelo de um robô com dois graus de liberdade, acionado por motores de corrente contínua, mostrou-se que o sistema submetido a diferentes entradas (perfil de velocidade, função degrau), apresenta vantagens e desvantagens quando corrigidos por controladores Não-Lineares em relação aos tradicionais

O presente trabalho serviu para, além de testar o controle de servo-mecanismos, desenvolver toda uma estrutura para trabalhos experimentais voltados para a área de robótica. Nas etapas que levaram até o controle efetivo conseguimos várias conclusões a respeito de técnicas para estudo teórico experimental de sistemas de controle para robôs industriais, viabilizando a implementação de Controle Lógico, o qual possui baixo custo de implementação e excelente grau de precisão.

Foi confirmado a nível de simulação os efeitos previstos teoricamente das ações de controle por On-Off, podendo se verificar que com a alteração dos parâmetros das Não-Linearidades acopladas a este, é possível alterar o caráter oscilatório ao atingir-se o ponto de equilíbrio.

Como perspectiva futura, prioriza-se dar continuidade nesta linha de pesquisa iniciada neste trabalho, desenvolvendo o Tratamento, com o objetivo da utilização de Controladores Não-Lineares em estruturas Flexíveis de rastreamento efetuando-se as simulações do sistema já modelado matematicamente, e a seguir a montagem do experimento proposto em laboratório do controle lógico de um manipulador flexível de uma junta.

## Adendo

### Modelagem Matemática de uma Estrutura de Rastreamento

Um movimento de rastreamento ("slewing Motion") consiste da rotação de uma estrutura que no caso em discussão consiste de um elo em torno de um ponto. Neste caso um motor elétrico c.c. é usado para mover um elo em torno do eixo do motor com o objetivo de orientar o componente deste elo numa nova direção. (fig.1). A figura ilustra as coordenadas usada na definição das equações do movimento de uma estrutura flexível sujeita à movimento de rastreamento de um ângulo  $\theta(t)$ . A deflexão do elo é definida relativas aos movimentos relativos  $\theta$ . O torque causando o movimento atua na elo (fig. 1). O elo de comprimento  $l$  deforma-se e roda no plano  $xy$ . Só pequenos deslocamentos relativos a  $x$  é considerado.

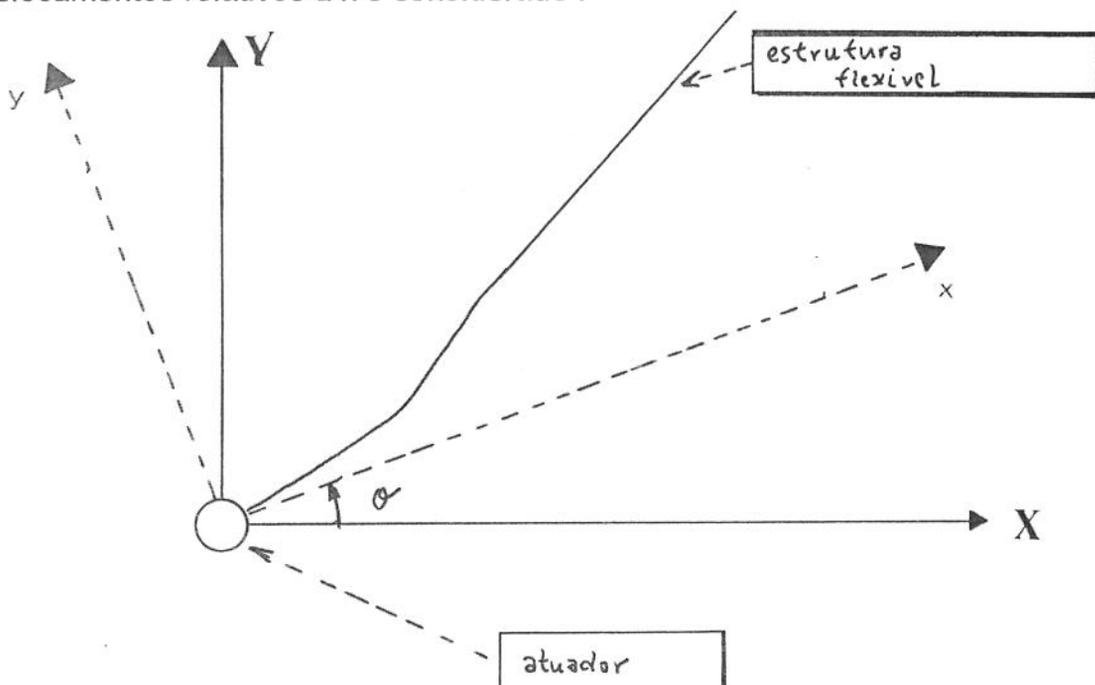


fig.1 - Sistema de coordenadas para a estrutura de um atuador flexível

Existe um domínio bem amplo de aplicações para estruturas de rastreamentos de robôs industriais à grandes antenas espaciais flexíveis .

Neste estudo, consideramos a estrutura Linear, sendo que para posterior controle do sistema de acionamento em trabalhos futuros, serão aplicados controladores Não-Lineares, sendo que o sistema pode ser representado pela figura 2.

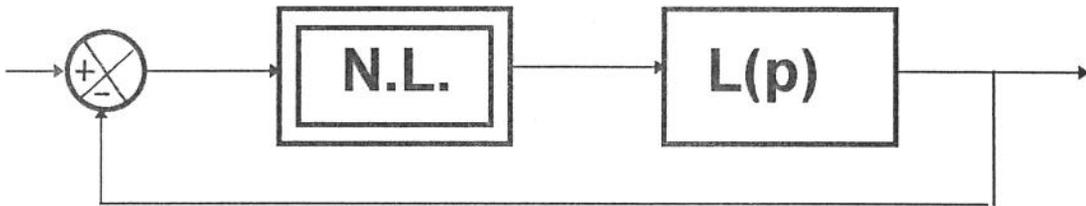


Fig.2 - Sistema Linear corrigido por Controlador Não-Linear

O motor c.c. usado nesse modelo tem a representação usual e o elo é representado por um modelo de elemento finito. Os dois sistemas de coordenadas como mostrado na figura é usado no modelo. A coordenada global  $\theta$  representa a posição rotacional do motor e as coordenadas  $xy$  seguem o movimento de corpo rígido do movimento do elo que é sempre alinhado com a coordenada global  $\theta$ . Desde que o motor será acelerado ou desacelerado com qualquer voltagem de entrada, as coordenadas locais tornam-se um sistema de coordenadas inerciais e não rodam com uma velocidade fixa. O acoplamento entre os dois subsistemas é definido pela interação do torque e a aceleração angular do sistema. Com este sistema de coordenadas o movimento de corpo rígido do elo flexível é extraído e eliminadas as dificuldades que teríamos por elementos finitos. O elo é engastado na árvore do motor e ele fornece condições de contorno nas coordenadas locais, entretanto, do ponto de vista das coordenadas globais, o elo flexível não tem comportamento de engastamento, pois a árvore do motor é livre para rodar. A interação entre o motor e o elo torna-se extremamente importante porque ela determina a condição efetiva do elo, isto é, o comportamento dinâmico do sistema acoplado

## 1 - Modelagem das Entradas

O comportamento temporal de um sistema robótico é descrito pelas equações dinâmicas que são constituídas por expressões matemáticas. Elas expressam a forma de como a energia externa aplicada ao servo-mecânismo é trocada entre seus armazenadores. As respostas do sistema a forças nele aplicadas descrevem seu comportamento dinâmico, que obviamente está em função de sua estrutura, a qual é definida pelas constantes de massa, inércia, rigidez, comprimento e muitos outros parâmetros.

Um atuador usado em estruturas pode ser rotacional ou linear e pode incluir transmissões, caixas de engrenagem e articulações.

Os mecanismos de transmissão podem ser modelados no sistema dinâmico adicionando-se variáveis de estado apropriadas para o atuador. Sendo assim, para simplificar o trabalho, a dinâmica de transmissão não é incluída nela e o acionamento é tratado como um corpo rígido com inércia.

Assume-se que a saída do atuador é sua aceleração angular e este tem duas entradas de forma explícita e implícita respectivamente.

A entrada explícita representa o sinal que aciona o atuador, por exemplo, a voltagem de entrada para o motor de corrente contínua. As vezes a entrada implícita representa a reação devido a carga da estrutura, que age na haste atuadora na forma de torque.

Em uma posição exclusiva do atuador, ambas as entradas devem ser consideradas como entrada externas, sendo assim, como nós acoplamos o atuador e a estrutura de carregamento, a reação interna para o sistema pode ser incluída na variável de estado.

Para o n-ésimo atuador linear, ambas as entradas são consideradas em um modelo expressas como

$$\dot{X}_a = A_a X_a + B_a U_a$$

onde

$X_a$  :vetor de estado  $n \times 1$

$U_a$  : $[u_a M_L]^T$  com entrada implícita  $M_L$  e entrada explícita  $u_a$  .

$A_a$  : matriz estado

$B_a$  : matriz de influência da entrada

As equações de estado também podem ser expressas como

$$\dot{X}_a = A_a X_a + B_a U_a$$

As equações também podem ser expressas como

$$x = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_{i1} u_a + b_{i2} M_L \quad i = 1..n$$

onde  $a_{ij}$  e  $b_{ij}$  são os  $ij$ -ésimos elementos de  $A_a$  e  $B_a$ ,  $u_a$  é uma entrada explícita como uma tensão aplicada as armaduras de um motor C.C. e  $M_L$  é o torque gerado pela vibração da estrutura e pode ser obtida do modelo matemático estrutural para uma estrutura simples, podendo este ter grande complexidade.

O método dos elementos finitos oferece uma ferramenta adequada para a solução deste tipo de problema. O MEF é baseado no modelo de discretização, como será exposto a seguir

## 2 - Modelagem Matemática de uma Estrutura de Rastreamento

As vantagens do uso do MEF para a estrutura é que uma vez os pontos nodais e a geometria terem sido especificadas, as matrizes massa e rigidez podem ser obtidas. Com esta capacidade, o MEF é o mais aceitável método para estruturas complexas. Muitos atuadores podem ser representados convenientemente por equações de estado, em particular, equações de estado invariantes com o tempo. Não Linearidades podem ser manipuladas quer por linearização da equação ou usando as equações de estado não lineares diretamente. Este estudo é restrito a análise linear e envolve o domínio de frequência e o domínio do tempo concernentes .

Para uma estrutura simples, como um elo, o modelo matemático pode ser facilmente expresso como uma equação diferencial. Quando uma a estrutura for mais complexa, por exemplo, quando composta de diferentes materiais, tem forma complexa ou condições de limite descontínuo, se torna difícil a obtenção

de um modelo matemático puro através da resolução por método analítico. O método dos elementos finitos oferece uma boa ferramenta para resolver o

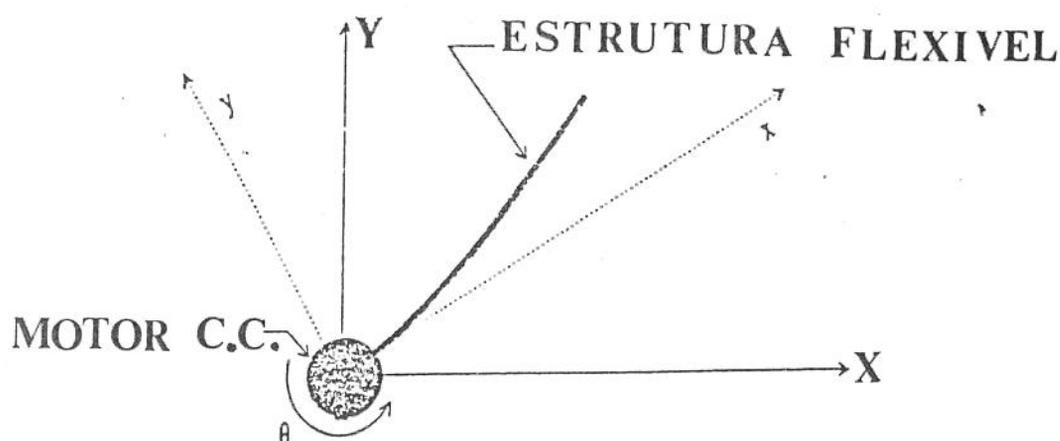


fig. 3 -

problema. Baseado na discretização do modelo e na propriedade da continuidade de pedaços discretos, o MEF pode ser aplicado não somente a análise de estruturas, mas também a transferidores de calor ou mecânica dos fluídos. Devido a sua flexibilidade, a estrutura da carga em estudo é modelada pelo MEF.

Denominando M, C e K como matrizes ( $m \times m$ ) inércia, amortecimento, e rigidez da estrutura acionada e F a função forçante aplicada aos nós, o graus de liberdade m governando a equação para a estrutura são

$$M\ddot{Y} + C\dot{Y} + KY = F \quad (2.1)$$

onde Y é o vetor deslocamento  $m \times 1$ .

A função forçante pode ser decomposta em duas partes, carga inercial  $F_i$  e carga externa  $F_e$ . Devido a aceleração angular do atuador e a inércia da estrutura, é distribuída uma força ao longo da estrutura. Esta carga é proporcional a aceleração angular do atuador, e pode ser expressa na forma de

$$F_i = -\ddot{\theta} \hat{F}_i$$

onde a carga inercial depende da configuração da estrutura. O sinal de menos indica que esta força está em direção oposta a da aceleração angular. Todas as outras cargas são consideradas como cargas externas, que precisam ser consideradas separadamente.  $F_i$  contém as forças nodais equivalentes e

torques necessários para manter o deslocamento e a declividade idêntica nos pontos nodais indicam para uma situação estática. Se nenhuma carga externa é aplicada a estrutura, a carga inercial resultante pelo movimento das coordenadas do atuador é composto somente por funções forçantes que iniciam as vibrações da estrutura.

Condições limite são consideradas antes que se inicie a computação. Os deslocamentos nodais correspondentes as condições limite fixadas são removidas pelo modelo assim, somente os deslocamentos desconhecidos são obstáculos nas equações, que sabemos funções forçantes. Depois do campo de deslocamentos é obtido, as forças de reação fixadas sobre os nós são calculadas por comparação.

Assumindo que a estrutura da carga é presa com braçadeira, na haste do atuador, os DOFs do ponto nodal preso a haste deve ser removido. Admitindo o nó  $i$  ser o nó sobre a haste do atuador, todos DOFs dos nós  $i$  são reduzidos, assim o sistema de equações pode ser rearranjado e particionado como

$$\begin{bmatrix} M_{r1} & M_{r2} \\ M_{s1} & M_{s2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{Y}_r \\ \ddot{Y}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{r1} & C_{r2} \\ C_{s1} & C_{s2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{Y}_r \\ \dot{Y}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{r1} & K_{r2} \\ K_{s1} & K_{s2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_r \\ Y_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_r \\ F_s \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

desta forma o vetor  $Y_r$  ( $m_r \times 1$ ) contém todos os nós  $i$ , que são reduzidos a zero, e o vetor  $Y_s$  ( $m_s \times 1$ ) é o campo de deslocamento desconhecido. O vetor  $F_s$  é a função forçante conhecida e  $F_r$  representa as forças de reação na interface do atuador. Para encontrar o deslocamento desconhecido, necessitamos somente resolver a equação abaixo para  $Y_s$

$$M_{s1} \ddot{Y}_r + M_{s2} \ddot{Y}_s + C_{s1} \dot{Y}_r + C_{s2} \dot{Y}_s + K_{s1} Y_r + K_{s2} Y_s = F_s$$

ou

(2.3)

$$M_{s2} \ddot{Y}_s + C_{s2} \dot{Y}_s + K_{s2} Y_s = F_s$$

desde que  $Y_r$  e suas derivadas temporais são zero por causa das restrições. Uma vez  $Y_s$ ,  $\dot{Y}_s$ ,  $\ddot{Y}_s$ , sendo obtidas, as forças de reação podem ser calculadas por

$$F_r = M_{r2}\ddot{Y}_s + C_{r2}\dot{Y}_s + K_{r2}Y_s \quad (2.4)$$

O vetor  $F_r$  contém as forças de reação no atuador incluindo o torque de reação  $R_t$  que interagem com o atuador. Esta porção pode ser expressa como

$$R_t = M_r\ddot{Y}_s + C_r\dot{Y}_s + K_r Y_s \quad (2.5)$$

onde  $M_r, C_r$  e  $K_r$  são submatrizes de  $M_{r2}, C_{r2}$ , e  $K_{r2}$  matrizes indicadas em (2.2)

A solução para  $Y_s, \dot{Y}_s, \ddot{Y}_s$  resulta-se por (2.3)

### 3 - Equações de Estado do Motor elétrico de corrente contínua c.c.

Apresentamos nesta secção as equações de estado do motor elétrico de corrente de corrente contínua c.c. tratado no capítulo 4.

Combinando as equações(3.1) e (3.2) do capítulo 3, um motor c.c. pode ser descrito na forma de equação de estado como

$$\dot{X}_a(t) = A_a X_a(t) + B_a U_a(t) \quad (3.1)$$

onde  $X_a(t) = [i_a(t) \ \omega(t) \ \theta(t)]^T$  e  $U_a(t) = [v_a \ T_L]^T$ ,

$$A_a = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_g}{L_a} & 0 \\ \frac{K_m}{J_m} & -\frac{B_m}{J_m} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$B_a = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J_m} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

onde

$K_m \Rightarrow$  constante de torque

$L_a \Rightarrow$  indutância

$v_a(t) \Rightarrow$  voltagem de entrada do terminal

$R_a \Rightarrow$  resistência elétrica da armadura

$e_b(t) \Rightarrow$  força contra-eletromotriz,

$K_g \Rightarrow$  constante de força contra-eletromotriz

- $\omega$   $\Rightarrow$  velocidade angular do motor  
 $J_m$   $\Rightarrow$  momento de inércia do rotor  
 $T_L(t)$   $\Rightarrow$  torque de carga  
 $B_m$   $\Rightarrow$  coeficiente de fricção viscosa .

#### 4 Acoplamento do Atuador a Estrutura do Sistema Dinâmico-Caso Geral

Considerando uma viga flexível acionada por um motor c.c através de um conjunto de engrenagens com razão de velocidade  $r$  como mostrada na figura 4

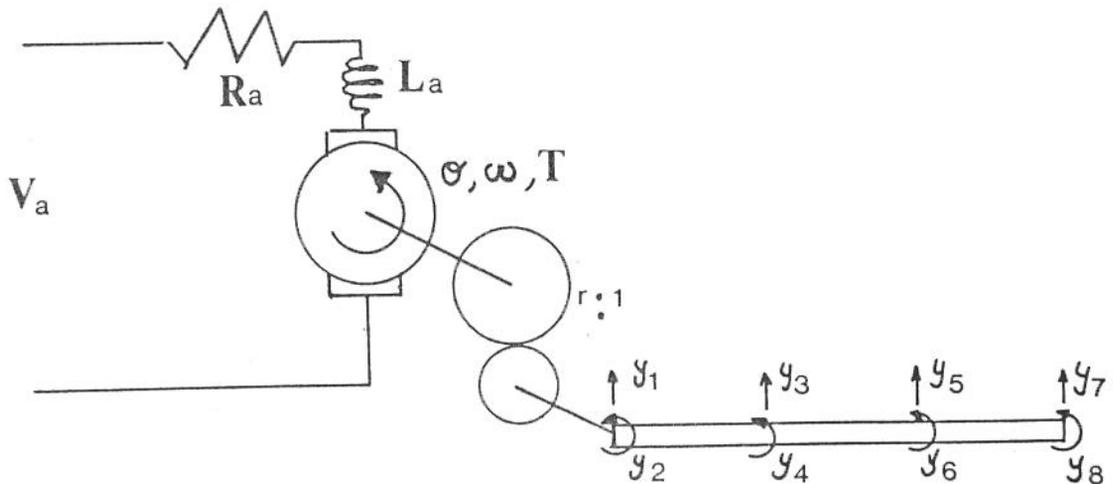


Fig.4 - Diagrama Esquemático do Sistema Motor-Viga

Dois sistemas de coordenadas são usados no modelo. O primeiro é o sistema de coordenadas para o motor c.c., que é um sistema de coordenadas angulares. O segundo são as coordenadas nodais da viga que são definidas com respeito ao movimento do corpo rígido desta e são alinhadas com as coordenadas angulares do motor. O sistema de coordenadas descreve o movimento do motor e da viga como mostrado na figura 1

Definindo o sistema de coordenadas como descrito na figura 1, o movimento do corpo rígido da viga é obtido. As condições de contorno da viga neste sistema de coordenada local pode ser legitimamente especificado como engastado na haste do motor. Deve ser notado que a condição de contorno "engastado-livre" é visto a partir das coordenadas locais, isto é, se uma câmara é montada rigidamente na haste do motor e aponta para a extremidade da viga, o movimento engastado-livre deve ser observado.

De acordo com a secção precedente, um motor c.c. é um dispositivo eletro-mecânico que pode ser expresso por um conjunto de equações de estado linearizadas, incluindo seus componentes elétricos e mecânicos como

$$L_a \frac{di}{dt} = V - iR_a - K_g \omega \quad (4.1)$$

$$J_m \frac{d\omega}{dt} = K_m i - B_m \omega - T(t) \quad (4.2)$$

onde  $T(t)$  é o torque de reação ou carregamento devido a vibração da viga.

A representação por método dos elementos finitos para a viga com  $n$  elementos é descrita na figura 5 e as equações governantes são

$$M\ddot{Y} + KY = F \quad (4.3)$$

onde  $M$  e  $K$  são matrizes de inércia e rigidez  $(2n+2) \times (2n+2)$ , e  $F$  o vetor de excitação  $(2n+2) \times 1$ . A função forçante pode ser dividida em duas partes. A primeira parte é devido a aceleração angular do motor e a inércia da viga, e pode ser chamada Função Forçante Implícita. Outras forças e torques externamente aplicados não relacionados a ação do motor são funções forçantes explícitas, porém não são consideradas especificamente nesta discussão.

As condições de contorno da viga nas coordenadas locais da viga são

$$y(t,0) = y_x(t,0) = 0$$

ou, na representação por MEF,

$$y_1(t) = y_2(t) = 0$$

Devido as condições de contorno, podemos reduzir o tamanho do modelo particionando as matrizes  $M$  e  $K$  como

$$M = \begin{bmatrix} M_{r1} & M_{r2} \\ M_{s1} & M_{s2} \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} K_{r1} & K_{r2} \\ K_{s1} & K_{s2} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

onde  $M_{r1}$  e  $K_{r1}$  são matrizes  $2 \times 2$ , enquanto  $M_{s2}$  e  $K_{s2}$  são matrizes  $2n \times 2n$ .

$Y$  também é particionado como  $Y = [Y_r^T \ Y_s^T]^T$  onde

$$Y_r = [y_1 \ y_2]^T \quad e \quad Y_s = [y_3 \ y_4 \ \dots \ y_{2n+2}]_{2n \times 1}^T$$

Visto que  $Y_r$  é definido pelas condições de contorno (4.4), somente  $Y_s$  é desconhecido e as equações dinâmicas para a viga se reduzem a

$$M_{s2}\ddot{Y}_s + K_{s2}Y_s = F_s \quad (4.6)$$

onde  $F_s$  é o sub-vetor correspondente de  $F$ .

A força de reação  $R_f$  e o torque de reação  $R_t$  no nodo 1 são obtidos calculando

$$\begin{bmatrix} R_f \\ R_t \end{bmatrix} = M_{r2}\ddot{Y}_s + K_{r2}Y_s \quad (4.7)$$

Desde que exatamente o movimento de flexão é considerado, somente o torque deve reagir com o motor e

$$R_t = M_r\ddot{Y}_s + K_rY_s \quad (4.8)$$

onde  $M_r$  e  $K_r$  são submatrizes de  $M_{r2}$  e  $K_{r2}$  correspondendo a  $y_2$ . O torque efetivo transmitido ao motor pelas engrenagens é

$$T(t) = r \cdot R_t(t) \quad (4.9)$$



fig.5 - Sistema de coordenadas para modelo de elementos finitos da viga

Substituindo (4.9) em (4.2) obtemos

$$J_m \frac{d\omega}{dt} = K_m i - B_m \omega - r(M_r\ddot{Y}_s + K_rY_s) \quad (4.10)$$

Também, rearranjando (4.6) resulta em

$$\ddot{Y}_s = M_{s2}^{-1}F_s - M_{s2}^{-1}K_{s2}Y_s$$

Assume-se que somente a Função Forçante Implícita devido a aceleração angular existe no sistema, e que desta maneira as funções forçantes são proporcionais a aceleração angular do motor .

Assim a força implícita  $F_s = -r\hat{F}_s \frac{d\omega}{dt}$  onde  $\hat{F}_s$  depende somente das dimensões da barra e das propriedades do material. Isto pode ser obtido diretamente pela descrição da viga com algum conhecimento do motor c.c.. Combinando (4.10) e (4.11) temos

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{K_m}{J_c}i - \frac{B_m}{J_c}\omega - \frac{r}{J_c}(-M_r M_{s2}^{-1}K_{s2} + K_r)Y_s$$

(4.12)

onde

$$J_c = J_m - r^2 M_r M_{s2}^{-1} \hat{F}_s$$

Definindo as variáveis de estado para a viga como  $X_1=Y_s$  e  $X_2 = \dot{X}_1 = \dot{Y}_s$  e substituindo estas definições de (4.12) em (4.11), a equação derivada (4.11) torna-se

$$\dot{X}_2 = -M_{s2}^{-1}\tilde{F}_{is} \frac{rK_m}{J_c}i + M_{s2}^{-1}\tilde{F}_{is} \frac{rB_m}{J_c}\omega + \left[ -M_{s2}^{-1}K_{s2} + \frac{r^2}{J_c} M_{s2}^{-1}\tilde{F}_{is}(-M_r M_{s2}^{-1}K_{s2} + K_r) \right] X_1$$

(4.13)

Combinando (4.1), (4.12) e (4.13) juntamente com  $\dot{X}_1 = X_2$ , podemos representar o sistema na forma de equação de Estado

$$\dot{X} = AX + BU$$

(4.14)

onde

$$X = \left[ \omega \quad i \quad X_1^T \quad X_2^T \right]^T$$

$$U = v_a$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{B_m}{J_c} & \frac{K_m}{J_c} & -\frac{r}{J_c}(-M_r M_{s2}^{-1} K_{s2} + K_r) & 0 \\ \frac{K_g}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ M_{s2}^{-1} \tilde{F}_{is} \frac{r B_m}{J_c} & -M_{s2}^{-1} \tilde{F}_{is} \frac{r K_m}{J_c} & \left( -M_{s2}^{-1} K_{s2} + \frac{r^2}{J_c} M_{s2}^{-1} \tilde{F}_{is} (-M_r M_{s2}^{-1} K_{s2} + K_r) \right) & 0 \end{bmatrix}$$

(4.15)

e

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ L_a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

As equações acima representam as características dinâmicas de uma interação do sistema motor-viga flexível. Em sistemas contendo diferentes tipos de atuadores ou estruturas mais complexas, uma aproximação similar pode ser aplicada ao modelo. Os parâmetros do motor e da viga são espalhados ao longo da matriz A, estes termos representam as interações entre o motor e a viga.

## 5 : Descrição Matemática da Função Forçante

A função forçante pode ser particionada em dois termos, a inércia da carga  $F_i$  e a carga externa  $F_e$ . Estas forças podem ser distribuídas ou concentradas. De qualquer forma, elas devem ser convertidas para as forças nodais em ordem para se usadas no modelo MEF. As forças nodais na forma equivalente fazem os deslocamentos linear e angular no fim dos elementos

corresponderem ao valor que necessariamente resulta com as forças originalmente aplicadas. Por exemplo, na figura 6, uma força pontual é aplicada no centro de um elemento da barra. Usando as equações de equilíbrio das forças e momentos e restringendo os deslocamentos nodais para iguais os valores devido a força central, produz as forças e momentos equivalentes mostrados na parte de baixo da figura.

Outros exemplos são mostrados na figura 7, onde uma distribuição uniforme de cargas é considerada e na figura 8 onde uma carga aumentando é mostrada. A carga inercial atuando em uma barra simples resultante de uma aceleração angular é mostrada na figura 9. A carga por unidade de comprimento é calculada como

$$w(x) = \rho A \times \theta_b \quad (5.1)$$

onde  $\theta_b$  é a aceleração angular do elo.

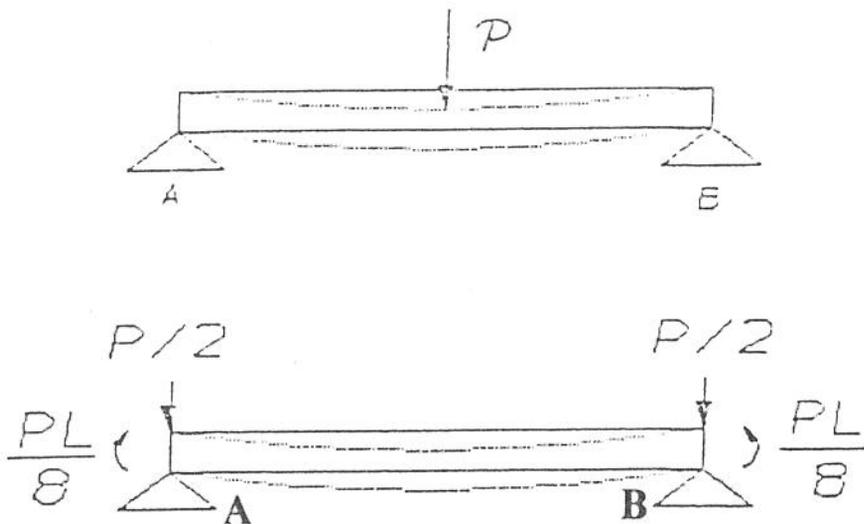


fig .6 - forças e torque nodais equivalentes devido a força concentrada P aplicada no centro do elo

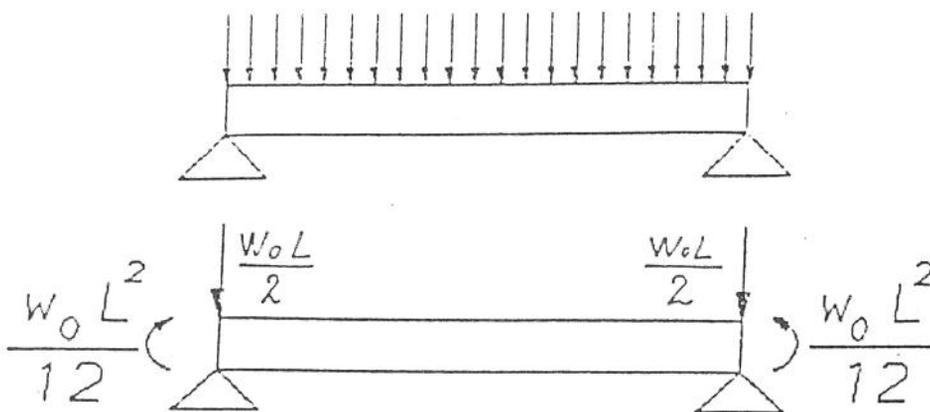


fig.7 - forças e torques nodais equivalentes devido a distribuição uniforme de carregamento  $w_0$

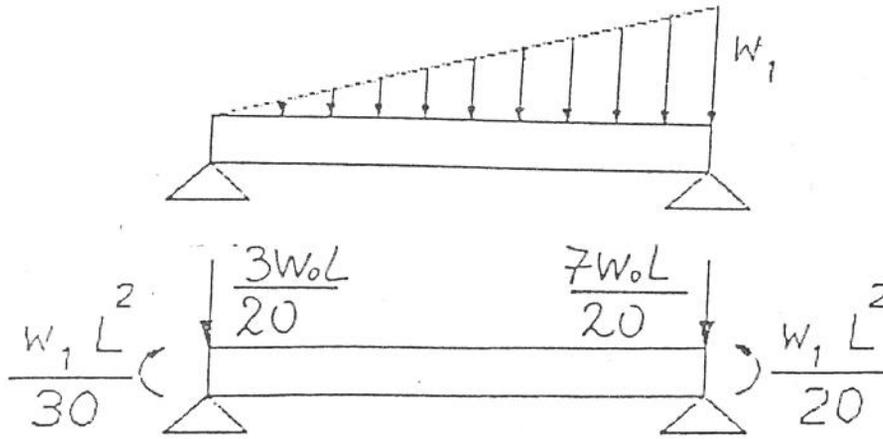


fig.8 - forças e torques nodais equivalentes devido a uma distribuição de carregamento  $w_1$  em rampa

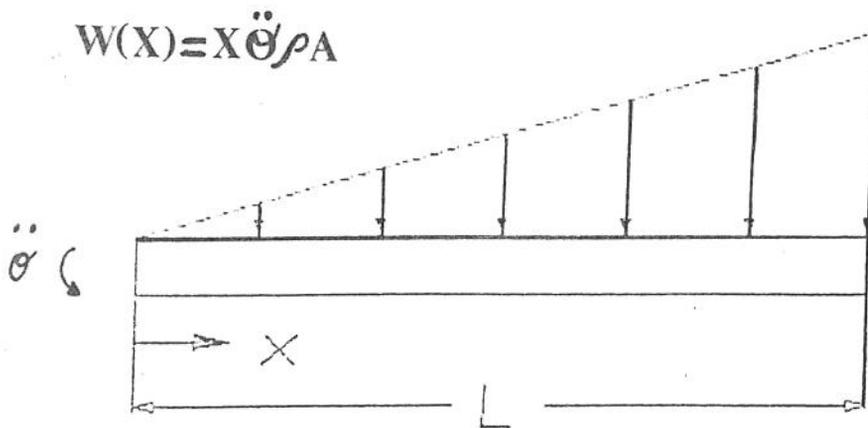


fig9 - Carga inercial na barra devido a aceleração angular do motor

Para o  $j$ -ésimo elemento,  $jL/n \geq x \geq (j-1)L/n$  e nós podemos determinar

$$w_0 = \rho A h \frac{j-1}{n} \ddot{\theta}_b$$

e

$$w_1 = \rho A \frac{j}{n} h \ddot{\theta}_b - \rho A \frac{j-1}{n} h \ddot{\theta}_b$$

$$= \rho A \frac{h}{n} \ddot{\theta}_b$$

como mostrado na fig.10

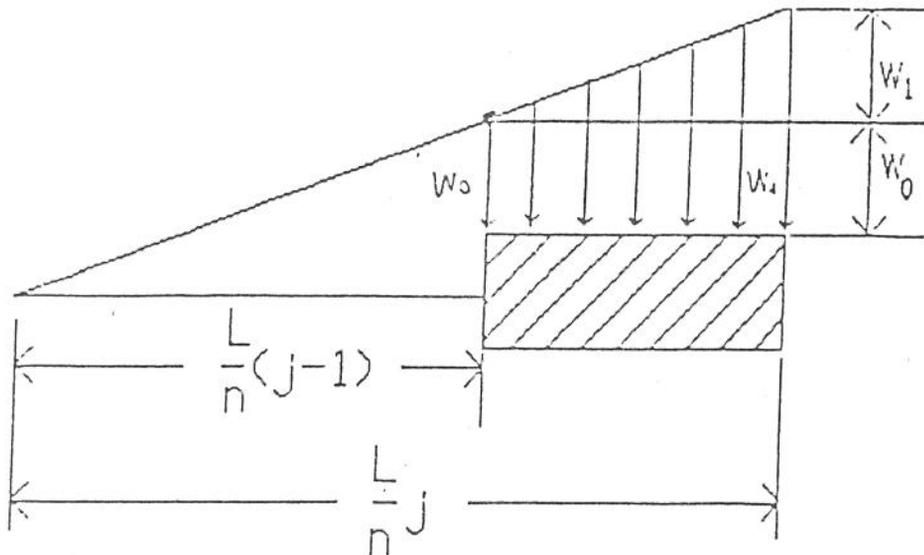


fig. 10 Inércia do carregamento em um segmento do elo

Pela figura 7, as forças e torques equivalentes devido a  $w_0$  são

$$F_{j+1}^0 = F_j^0 = -\frac{w_0 h}{2n} = \frac{j-1}{2n^2} \rho A h^2 \ddot{\theta}_b \quad (5.2)$$

$$T_{j+1}^0 = -T_j^0 = \frac{w_0 h^2}{12n^2} = \frac{j-1}{12n^3} \rho A h^3 \ddot{\theta}_b \quad (5.3)$$

Também, pela figura 8, as forças e torques nodais equivalentes devido a  $w_1$  são

$$F_j^1 = -\frac{3}{20n} w_1 h = -\frac{3}{20n^2} \rho A h^2 \ddot{\theta}_b \quad (5.4.a)$$

$$F_{j+1}^1 = -\frac{7}{20n} w_1 h = -\frac{7}{20n^2} \rho A h^2 \ddot{\theta}_b \quad (5.4.b)$$

$$T_j^1 = -\frac{w_1 h^2}{30n^2} = -\frac{1}{30n^3} \rho A h^3 \ddot{\theta}_b \quad (5.4.c)$$

$$T_{j+1}^1 = \frac{w_1 h^2}{20n^2} = \frac{1}{20n^3} \rho A h^3 \ddot{\theta}_b \quad (5.4.d)$$

As forças e torques nodais globais devido a inércia do elemento  $j$  podem ser assim calculados pela soma das forças e torques componentes acima como sendo :

$$F_j = F_j^1 + F_j^0 = -\ddot{\theta}_b \left( \frac{3}{20n^2} + \frac{j-1}{2n^2} \right) \rho A h^2$$

(5.5.a)

$$T_j = T_j^1 + T_j^0 = -\ddot{\theta}_b \left( \frac{1}{30n^3} + \frac{j-1}{12n^3} \right) \rho A h^3$$

(5.5.b)

$$F_{j+1} = F_{j+1}^1 + F_{j+1}^0 = -\ddot{\theta}_b \left( \frac{7}{20n^2} + \frac{j-1}{2n^2} \right) \rho A h^2$$

(5.5.c)

$$T_{j+1} = T_{j+1}^1 + T_{j+1}^0 = \ddot{\theta}_b \left( \frac{1}{20n^3} + \frac{j-1}{12n^3} \right) \rho A h^3$$

(5.5.d)

A função forçante devido a inércia pode ser obtida inserindo-se as forças e torques nodais devido a cada elemento em conjunto, de acordo com as regras do equacionamento diferencial dos nodos, isto é :

$$F_i = \begin{bmatrix} 0 & -\ddot{\theta}_b \frac{3}{20n^2} \rho A h^2 \\ 0 & -\ddot{\theta}_b \frac{1}{30n^3} \rho A h^3 \\ -\ddot{\theta}_b \frac{7}{20n^2} \rho A h^2 & -\ddot{\theta}_b \left( \frac{3}{20n^2} + \frac{1}{2n^2} \right) \rho A h^2 \\ \ddot{\theta}_b \frac{1}{20n^3} \rho A h^3 & -\ddot{\theta}_b \left( \frac{1}{12n^3} + \frac{1}{30n^3} \right) \rho A h^3 \\ \dots & \dots \\ -\ddot{\theta}_b \left( \frac{7}{20n^2} + \frac{n-2}{2n^2} \right) \rho A h^2 & -\ddot{\theta}_b \left( \frac{3}{20n^2} + \frac{n-1}{2n^2} \right) \rho A h^2 \\ \ddot{\theta}_b \left( \frac{1}{20n^3} + \frac{n-2}{12n^3} \right) \rho A h^3 & -\ddot{\theta}_b \left( \frac{n-1}{12n^3} + \frac{1}{30n^3} \right) \rho A h^3 \\ -\ddot{\theta}_b \left( \frac{7}{20n^2} + \frac{n-1}{2n^2} \right) \rho A h^2 & -\ddot{\theta}_b \left( \frac{3}{20n^2} + \frac{n}{2n^2} \right) \rho A h^2 \\ \ddot{\theta}_b \left( \frac{1}{20n^3} + \frac{n-1}{12n^3} \right) \rho A h^3 & -\ddot{\theta}_b \left( \frac{n}{12n^3} + \frac{1}{30n^3} \right) \rho A h^3 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Nota-se que  $F_i$  é proporcional a  $\ddot{\theta}_b$ , e se nós extraímos  $\ddot{\theta}_b$  de  $F_i$ , deixamos assim  $\tilde{F}_i$  ser um vetor dependente em  $A, h$ , a densidade do elo e a localização do ponto nodal  $j$ .

$$\tilde{F}_i = \frac{F_i}{\ddot{\theta}_b} = \begin{bmatrix} 0 & +\frac{3}{20n^2}\rho Ah^2 \\ 0 & +\frac{1}{30n^3}\rho Ah^3 \\ \frac{7}{20n}\rho Ah^2 & +\left(\frac{3}{20n^2} + \frac{1}{2n^2}\right)\rho Ah^2 \\ -\frac{1}{20n}\rho Ah^3 & +\left(\frac{1}{12n^3} + \frac{1}{30n^3}\right)\rho Ah^3 \\ \left(\frac{7}{20n^3} + \frac{n-2}{2n^2}\right)\rho Ah^2 & +\left(\frac{3}{20n^2} + \frac{n-1}{2n^2}\right)\rho Ah^2 \\ -\left(\frac{1}{20n^3} + \frac{n-2}{12n^3}\right)\rho Ah^3 & +\left(\frac{n-1}{12n^3} + \frac{1}{30n^3}\right)\rho Ah^3 \\ \left(\frac{7}{20n^2} + \frac{n-1}{2n^2}\right)\rho Ah^2 & +\left(\frac{3}{20n^2} + \frac{n}{2n^2}\right)\rho Ah^2 \\ -\left(\frac{1}{20n^3} + \frac{n-1}{12n^3}\right)\rho Ah^3 & +\left(\frac{n}{12n^3} + \frac{1}{30n^3}\right)\rho Ah^3 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Uma vez que a estrutura do elo é determinado,  $\tilde{F}_i$  torna-se fixo para efeitos de cálculo. O vetor  $\tilde{F}_i$  pode ser também caracterizado como uma propriedade do sistema similar a rigidez  $K$  ou a matriz inércia  $M$ .

Todas as outras cargas são consideradas como carregamentos externos. Neste estudo de sistema motor-elos, forças e torques externos não são aplicados, assim  $F_e = 0$ .

## CONCLUSÃO FINAL

Após estudarmos todo tratamento de modelagem matemática para a estrutura de rastreamento generalizada, obtendo as equações na forma de estado que descrevem o sistema, verificamos que o caso estudado é o caso geral para projeto de estruturas de robôs, pois leva em conta todos os parâmetros e efeitos envolvidos no processo.

Como próxima etapa, serão efetuadas simulações do sistema, alterando-se as razões de transmissão entre o acionamento e o elo, analisando-se os modos de vibrar da estrutura, e a partir disto, inserir ação controladora lógica digital, utilizando-se da contribuição teórica adquirida com o presente trabalho.

## Referências Bibliográficas

1. CANNON, R.H., SCHMITZ. *Initial Experiments on the End-point Control of a Flexible One-Link Robot*. The International Journal of Robotics Research, v.3, n. 3, 1984.
2. CRAIG, J.J. *Introduction to Robotics. Mechanics and control* Addison- Wesley Publishing Company. NY, USA, 1986
3. D'AZZO, J.J., HOUPIS, C.H. *Análise e Projeto de Sistemas de Controle Lineares*. Editora Guanabara, 1971.
4. DAVI S.J. *Estudo Analítico de Manipuladores Flexíveis.*, UNICAMP, Tese em andamento (Mestrado)
5. ERVELLA, C. *Controle Digital de Manipuladores Industriais*. UNICAMP, Campinas, Brasil, 1995. 75p. Tese (Mestrado)
6. GARCIA, E., INMAN, D.J. *Modeling of a slewing Control of a Flexible Structure*. J.Guidance, v.14, p. 736-742, 1990.
7. GILLE, J.C., DECAUNE, P., PÉLEGRIN, M. *Systems Asservis Non Lineaires*. Dunos, 5<sup>a</sup>. édition, France, 1988.

8. HAROKOPOS, E.G., MAYNE, R.R.W. *Motor Characteristics in the control of a Compliant Load*. J. Guidance, v.9, n.1, jan-Fev., 1986.
9. HAMILTON, J., LEE, G.K.F., JUANG, J.N. *A single-Axis testbed for Slewing Control Experiments*. American Control Conference, p.1733-1737 .
10. KUO, C.B. *Automatic Control Systems*. Prentice Hall do Brasil, 1967.
11. *Matlab for Windows User's Guide* .
12. MEIROVITCH, L. *Elements of Vibration Analysis*. McGraw Hill, 1986 .
13. MIRANDA, M.F. *Controle de um Servomecanismo por um Microcomputador Dedicado: Uma Contribuição ao Estudo de Controladores para Robôs Industriais*. UNICAMP, Campinas, Brasil, 1992. 141 p. Tese (Mestrado)
14. MULLER, P.C., SCHIEHLEN, W.O. *Linear Vibrations*. Martinus Nijhoff Publishees, 1985.
15. OGATA, K. *Engenharia de Controle Moderno*. Prentice Hall do Brasil, 1982.
16. PAUL, R.P. *Robot Manipulator : Mathematics, Programming and Control*. MIT Press., Cambridge, MADD., 1980 .
17. ROSÁRIO, J.M. *Etude de Faisabilité d' une Commande de Type Non-Lineaire pour un Robot Manipulateurs*. PHD Thesis, Ecole Centrale des Arts et Manufactures, Paris, France, 1990 .
18. ROSÁRIO, J.M. *Utilização de Controladores Não-Lineares em Robôs Industriais*, Anais 1º Workshop Brasileiro em Fenômenos Não-Lineares, Caóticos e Estocásticos, Nov. 1993, p. 27-33, 1993.

19. ROSÁRIO, J.M., PALHARES, A.G.B., ZAMPIERI, D.E. *Determinação das Regiões Instáveis de um Sistema de Transmissão com Engrenagens Planetárias, Controladas por MLP*. 4º Congresso Brasileiro de Automática, UNICAMP, Campinas, 1982.
20. ROSÁRIO, J.M.; PALHARES, A.G.B.; ZAMPIERI, D.E. *Simulação Experimental de um Controlador de Velocidade para um Modelo de Veículo Híbrido*. 8º COBEM, ITA, S.J. Campos, 1985 .
21. SÁ, C. S. *Estudo Analítico de Geração de Trajetórias de trajetórias em Processos de Automação.*, UNICAMP, Campinas, Brasil. Tese em andamento (Mestrado).
22. SAH, J.J. *On the interaction Between Actuator and Slewing Structure*. PHD Thesis, State University of New York at Buffalo, USA, 1990 .
23. SAH, J.J., LIN J.S., CRASSIDIS, MAYNE R. W. *Dynamic Interaction in a Slewing Motor-Beam System. Closed Loop Control.*, *Vibration and Control of Mechanical Systems*, ASME, v. 61, p. 257-263, 1993.
24. *Simulink for Windows User's Guide*.
25. ZIENKIEWICZ, O.C., TAYLOR, R.L., *The Finit Element Method*. fourth edition, v.1 Basic Formulation and Linear Problems, Mcgraw Hill, 1989 .
26. WIT, C.C., DUPONT, P, ARMSTRONG-HÉLOUVRY, B, *Friction in servo machines : Analysis and control methods*. *Appl Mech Rev* v. 47, n.7, julho 1994 .

## Apêndice A

### Generalidades sobre Controladores Lineares .

Qualquer sistema de controle deve ser estável tanto. Além da estabilidade absoluta, um sistema de controle deve possuir uma estabilidade relativa razoável; isto é , a velocidade de resposta deve ser razoavelmente rápida e esta resposta deve ter um amortecimento razoável.

Um sistema de controle também deve ser capaz de reduzir erros a zero ou a algum valor pequeno tolerável. A figura A.1 representa um diagrama de blocos de um sistema de controle. O controlador produz sinais de controle baseado nas variáveis de entrada de referência e nas variáveis de saída. Nas situações práticas sempre haverá alguns distúrbios agindo na planta. Estes podem ser de origem externa ou interna e aleatórios ou previsíveis.

O controlador deve levar em consideração quaisquer distúrbios que possam afetar as variáveis de saída.

Para determinar o sinal de controle ótimo é necessário definir o índice de desempenho. Este índice é uma medida quantitativa do desempenho, medindo o desvio em relação ao desempenho ideal. A especificação do sinal de controle durante o intervalo de tempo de operação é denominado a lei do controle. Matematicamente, o problema do controle básico é determinar a lei de controle ótimo

Para sistemas relativamente simples, a lei de controle pode ser obtida analiticamente. Para sistemas complexos pode ser necessário gerar uma lei de controle ótimo com um computador digital on-line..

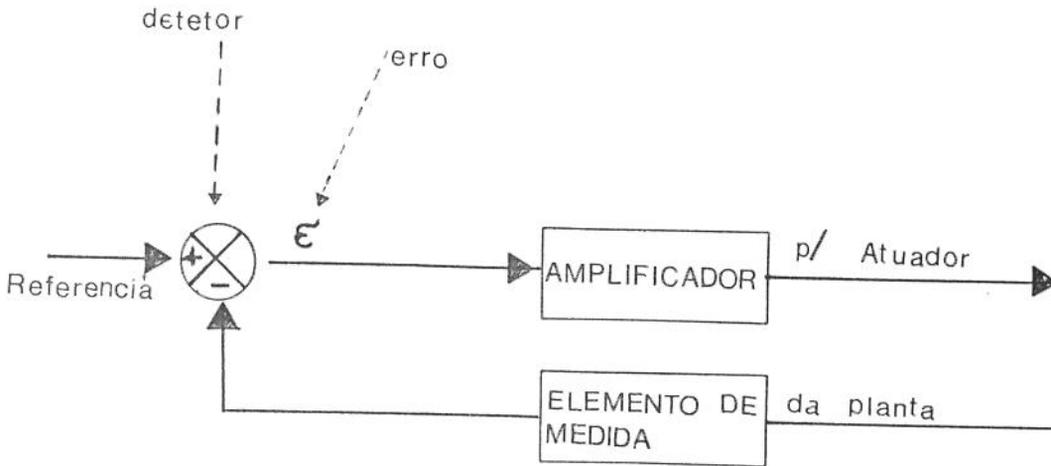


fig.A.1 - Diagrama de blocos de um sistema de controle

### Desenvolvimento de um Projeto de Controle.

Efetua-se o conhecimento das especificações ou índice de desempenho, a dinâmica da planta dos componentes; este último envolve parâmetros do projeto. São aplicadas posteriormente técnicas de síntese, em conjunto com outras técnicas a fim de elaborar um modelo matemático do sistema. Uma vez formulado o problema do projeto em termos deste modelo, é desenvolvido um projeto matemático que fornece a solução da versão matemática do problema do projeto. (Neste estágio é importante a simulação do modelo matemático em um computador.

É importante notar que a teoria de controle ótimo é muito útil neste estágio de projeto porque fornece o limite superior do desempenho do sistema para um dado índice de desempenho.)

Após haver sido completado o projeto matemático, é efetuada a simulação do modelo em um computador, a fim de testar o comportamento do sistema resultante em resposta a vários sinais e distúrbios.

Estes procedimentos são efetuados por repetidas vezes até que obtemos um refinamento satisfatório do sistema, obtendo-se assim o protótipo que representa o modelo matemático com precisão matemática.

## Regras de Álgebra e Construção de Diagramas de Blocos

Para desenhar o diagrama de blocos de um sistema, escreve-se primeiro as equações que descrevem o comportamento dinâmico de cada componente, tomando as transformadas de Laplace das equações, admitindo condições iniciais nulas, e representamos cada equação transformada de Laplace individualmente na forma de bloco. Finalmente, monta-se os elementos em um diagrama de blocos completo .

Este diagrama de blocos obtido pode ser reduzido, observando-se que é importante notar que blocos podem ser conectados em série somente se a saída de um bloco não é afetada pelo bloco seguinte. Se houver qualquer efeito de carregamento entre os componentes, é necessário combinar estes componentes na forma de um bloco simples. Em outras palavras, um único bloco representará as duas partes .

Qualquer número de blocos em cascata representando componentes sem efeito de carga podem ser substituídos por um único bloco cuja função de transferência é simplesmente o produto das funções de transferência dos blocos individuais.

Um diagrama de blocos complicado envolvendo muitos laços de re alimentação pode ser simplificado por um rearranjo passo a passo, usando regras da álgebra de diagrama de blocos .Algumas destas importantes regras são fornecidas na tabela A.1 . Elas são obtidas escrevendo-se a, mesma equação de uma maneira diferente.

A simplificação do diagrama de blocos por rearranjos e substituições reduz consideravelmente o trabalho necessário na análise matemática subsequente.

Deve ser notado, entretanto, que conforme o diagrama de blocos é simplificado, os novos blocos tornam-se mais complexos devido à geração de novos pólos e zeros .

Na simplificação de um diagrama de blocos, deve-se lembrar que :

1. O produto das funções de transferência no sentido direto deve permanecer o mesmo.
2. O produto das funções de transferência em um laço deve permanecer o mesmo.

Uma regra geral para simplificar um diagrama de blocos é mover os pontos de junção e pontos de soma, permutar pontos de soma e, então, reduzir laços de realimentação internos.

## tabela A1 - Regras de Álgebra de Diagrama de Blocos

	Diagramas de blocos originais	Diagramas de blocos equivalentes		
1			8	
2			9	
3			10	
4			11	
5			12	
6			13	
7				

## Modelos Matemáticos de Sistemas Físicos

A descrição matemática das características dinâmicas de um sistema é denominado modelo matemático. O primeiro passo na análise de um sistema dinâmico é obter seu modelo. Uma vez obtido o modelo matemático de um sistema, várias ferramentas analíticas ou por computador podem ser utilizadas para fins de análise e síntese.

Sistemas dinâmicos que são lineares e compostos de componentes com parâmetros concentrados e invariáveis no tempo podem ser descritos por equações diferenciais invariáveis no tempo. Estes sinais são denominados sistemas lineares invariáveis no tempo (a coeficiente - constante linear). Os sistemas que são representados por equações diferenciais cujos coeficientes são funções de tempo são denominados sistemas variáveis no tempo.

A **função de transferência** de um sistema linear invariante no tempo é definida como sendo a relação da transformada de Laplace da saída (função resposta ) para a transformada de Laplace da entrada (função excitação), considerando-se nula todas as condições iniciais

$$\text{função de transferência} \quad G(s) = \frac{Y_{(s)}}{X_{(s)}}$$

A **função de transferência** é uma expressão relacionando a saída a entrada de um sistema linear invariável no tempo em termos dos parâmetros do sistema e é uma propriedade do próprio sistema, independente da entrada ou função de excitação. A função de transferência inclui as unidades necessárias para relacionar a entrada com a saída; entretanto, não fornece qualquer informação relativa à estrutura física do sistema (As funções de transferência de muitos sistemas físicos diferentes podem ser idênticas.)

### **Ações de Controle Básicas e Controladores Automáticos Industriais**

Um controlador automático compara o valor real da saída do processo com o valor desejado, determina o desvio, e produz um sinal de controle que reduz o desvio a um valor nulo ou muito pequeno. A maneira pela qual o controlador automático produz o sinal de controle é denominada ação de controle .

O controlador deve detectar o sinal de erro atuante, que é normalmente de baixo nível de potência, e amplificá-lo a um nível suficientemente alto. Portanto, é necessário um amplificador. A saída do controlador automático é ligada a um dispositivo de potência, tal como um motor .

### **Ação de Controle de Duas Posições ou Liga-Desliga (ON-OFF).**

Neste caso, o elemento atuante possui apenas duas posições fixas que são , em muitos casos, simplesmente ligado e desligado.

Considerando o sinal de saída do controlador(t) e o sinal erro atuante e(t). Em controle de duas posições, o sinal m(t) permanece ou em valor máximo ou em valor mínimo, dependendo de o sinal erro atuante ser positivo ou negativo, de maneira que

$$m(t) = M_1 \text{ para } e(t) > 0$$

$$= M_2 \text{ para } e(t) < 0$$

onde  $M_1$  e  $M_2$  são constantes. O valor mínimo  $M_2$  usualmente ou é zero ou  $-M_1$ .

### **Ação de Controle Proporcional.**

Para um controlador com ação de **controle proporcional**, a relação entre a saída do controlador m (t) e o sinal erro atuante e(t) é

$$m(t) = K_p e(t)$$

ou, em transformada de Laplace,

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K_p$$

onde  $K_p$  é denominado sensibilidade proporcional ou ganho .

Independentemente do mecanismo real, ou da forma da potência de operação, o controlador proporcional é essencialmente um amplificador com um ganho ajustável.

### **Ação de Controle Derivativa**

A ação de controle derivativa, quando adicionada a um controlador proporcional, possibilita um meio de obter um controlador com alta

sensibilidade. Uma vantagem em usar ação de controle derivativa é que ela responde à taxa de variação do erro atuante e pode produzir uma correção significativa antes de o valor do erro atuante tornara-se demasiadamente grande. O controle derivativo, portanto, antecipa o erro atuante e inicia uma ação corretiva mais cedo, tendendo a aumentar a estabilidade do sistema.

Embora o controle derivativo não afete diretamente o erro em regime estacionário, ele introduz amortecimento no sistema e portanto permite o uso de um valor maior de ganho  $K$ , o que resulta em uma melhoria na precisão em regime estacionário.

Devido ao fato de o controle derivativo operar sobre a taxa de variação do erro atuante e não sobre o próprio erro atuante, este modo nunca é usado sozinho. É sempre utilizado em combinação com a ação proporcional ou ação proporcional-mais-integral.

### Ação de Controle Integral

Em um controlador com a ação de controle integral, o valor da saída do controlador  $m(t)$  é variado em uma taxa proporcional ao sinal erro atuante  $e(t)$ . Isto é,

$$\frac{dm(t)}{dt} = K_i e(t)$$

ou

$$m(t) = K_i \int_0^t e(t) dt$$

onde  $K_i$  é uma constante ajustável. A função de transferência do controlador integral é

$$\frac{M(s)}{E(s)} = \frac{K_i}{s}$$

Se o valor de  $e(t)$  é dobrado, então o valor de  $m(t)$  varia duas vezes mais rápido. Para erro atuante nulo, o valor de  $m(t)$  permanece estacionário. A ação de controle integral é muitas vezes denominada controle de restabelecimento (reset).

No controle proporcional de um processo cuja função de transferência não possui um integrador  $1/s$ , há um erro em regime estacionário, ou desajuste, na resposta à entrada do degrau. Este desajuste pode ser eliminado se for incluída no controlador uma ação de controle integral.

No controle integral de um processo, o sinal de controle, o sinal de saída do controlador, em qualquer instante, é igual a área sob a curva do sinal do erro atuante até aquele instante.

O sinal de controle  $m(t)$  pode possuir um valor não nulo quando o sinal de erro  $e(t)$  é nulo. Isto é impossível no caso do controlador proporcional desde que um sinal de controle não nulo necessita de um sinal de erro atuante não nulo. (Um sinal de erro atuante não nulo em regime estacionário significa que há um desajuste.).

Note que a ação de controle integral, embora remova o desajuste ou erro em regime estacionário, pode resultar em uma resposta oscilatória com amplitude ligeiramente decrescente ou mesmo com amplitude crescente, ambas usualmente indesejáveis.

### Ação de Controle Proporcional Mais Integral

A ação de controle de um controlador proporcional-mais-integral é definida pela seguinte equação :

$$m(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt$$

ou a função de transferência do controlador é

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} \right)$$

onde  $K_p$  representa a sensibilidade proporcional ou ganho e  $T_i$  representa o tempo integral. Tanto  $K_p$  como o em tempo integral  $t_i$  são ajustáveis. O tempo integral ajusta a ação de controle integral, enquanto uma mudança no valor de  $K_p$  afeta tanto a parte proporcional como a parte integral da ação de controle. O inverso do tempo integral  $T_i$  é denominado taxa de restabelecimento (reset). A taxa de restabelecimento é o número de vezes pôr minuto que a parte proporcional da ação de controle é duplicada. A taxa de restabelecimento é medida em termos de repetições por minuto.

### Ação de Controle Proporcional Mais Derivativa

Sendo definida pela equação :

$$m(t) = K_p e(t) + K_p T_d \frac{de(t)}{dt}$$

e a função transferência

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K_p (1 + T_d s)$$

onde  $K_p$  representa a sensibilidade proporcional e  $T_d$  representa o tempo derivativo. Tanto a sensibilidade proporcional como o tempo derivativo são ajustáveis. A ação de controle derivativa, algumas vezes denomina controle de taxa, é onde a magnitude de saída do controlador é proporcional a taxa de variação do sinal do erro atuante. O tempo derivativo  $T_d$  é o intervalo de tempo pelo qual a ação da taxa avança o efeito da ação de controle proporcional. A ação de controle derivativa tem um caráter antecipatório. De fato, entretanto, a ação de controle derivativa nunca pode antecipar uma ação de controle que ainda não ocorreu.

Enquanto a ação de controle derivativa possui a vantagem de ser antecipatória, tem as desvantagens de amplificar os sinais de ruído e causar um efeito de saturação no atuador. É importante notar que a ação de controle

derivativa nunca pode ser usada sozinha porque esta ação somente é efetiva durante os intervalos de tempo correspondentes a transitórios .

### Ação de Controle Proporcional mais Derivativo mais Integral

A combinação da ação de controle proporcional, ação de controle derivativa e ação de controle integral é denominada ação de controle proporcional- mais- derivativa-mais- integral. Esta ação combinada possui as vantagens de cada uma das três ações de controle individuais. A equação de um controlador com esta ação combinada é dada por

$$m(t) = K_p e(t) + K_p T_d \frac{de(t)}{dt} + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt$$

ou a função de transferência é

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K_p (1 + T_d s) + \frac{1}{T_i s}$$

onde  $K_p$  representa a sensibilidade proporcional,  $T_d$  representa o tempo derivativo e  $T_i$  representa o tempo integral.

### Obtenção de Ação de Controle Derivativa e Integral

O princípio básico para gerar uma ação de controle desejada é inserir o inverso da função de transferência desejada no ramo de realimentação .

A função de transferência em malha-fechada desta ação de controle é :

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Se  $|G(s).H(s)| \gg 1$  , então  $C(s) / R(s)$  pode modificar para

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{H(s)}$$

Portanto, se for desejada uma ação de controle proporcional-mais-derivativa-, inserimos um elemento possuindo a função de transferência  $1/(T_s + 1)$  no ramo de realimentação

## apêndice B

### Descrição Matemática de Manipuladores Mecânicos. Modelagem Matemática de um Manipulador de N elos

Neste apêndice, enfocamos o método de Euler-Lagrange para o estudo da dinâmica do sistema, sendo que o este estudo possibilita a dedução de um conjunto de equações não-lineares de segunda ordem acopladas que, desprezando-se o efeito do controlador e do atuador, representam o sistema matricialmente. Além do mais, este enfoque possibilita encontrar matrizes que representam os termos envolvidos no movimento como termos inerciais, centrípetos e de Coriolis causados pela velocidade das juntas e os termos devido a ação gravitacional.

A figura 1 mostra um esquema simplificado de um robô manipulador com um ponto genérico  $i$  no elo  $i$

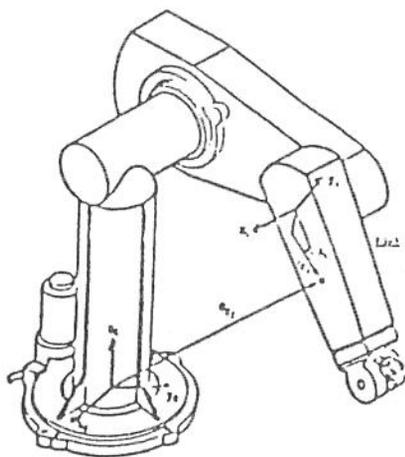


fig. 1- Esquema simplificado de um robô manipulador genérico

Seja  ${}^i r_i$  um ponto em repouso na junta  $i$  e a expressão nas coordenadas homogêneas do  $i$ -ésimo elo, isto é :

$${}^i r_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{bmatrix} = (xyz1)^T \quad (1)$$

Seja  ${}^0 r_i$  a representação do ponto  ${}^i r_i$  em relação ao sistema de coordenadas da base . Seja  ${}^{i-1} A_i$  a matriz de transformação de coordenadas que relaciona o sistema de coordenadas do elo-1 e seja  ${}^0 A_i$  a matriz de transformação de coordenadas que relaciona o  $i$ -ésimo sistema de coordenadas ( fixo no elo  $i$ ) com o sistema de coordenadas da base . Assim  ${}^0 r_i$  é relacionado com o ponto  ${}^i r_i$  por:

$${}^0 r_i = {}^0 A_i r_i \quad (2)$$

onde

$${}^0 A_i = {}^0 A_1 {}^1 A_2 \dots {}^{i-1} A_i \quad (3)$$

Sendo a forma da matriz  $A$  para juntas de revolução :

$${}^{i-1} A_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Desde que o ponto  ${}^i r_i$  está em repouso no elo  $i$ , e assumindo um movimento de corpo rígido , todos os pontos do elo terão velocidade nula em relação ao sistema de coordenadas do elo  $i$ . A velocidade do ponto  ${}^i r_i$  em relação ao sistema de coordenadas da base é :

$$\begin{aligned}
{}^0v_i &= v_i = \frac{d}{dt}({}^0r_i) = \frac{d}{dt}({}^0A_i^t r_i) \\
&= {}^0\dot{A}_1^1 A_2 \dots {}^{i-1} A_i^i r_i + {}^0A_1^1 \dot{A}_2 \dots {}^{i-1} A_i^i r_i + \dots + {}^0A_1 \dots \\
&\quad + {}^0A_1 \dots {}^{i-1} \dot{A}_i^i r_i + {}^0A_i^i \dot{r}_i \\
&= \left( \sum_{j=1}^i \frac{\partial {}^0A_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) {}^i r_i
\end{aligned} \tag{5}$$

A expressão acima é obtida porque  ${}^i r_i = 0$ . Segundo Fu, a derivada de  ${}^0A_i$ , com respeito a  $q_j$  pode ser facilmente calculada com a introdução de uma matriz definida como :

$$Q_i = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

para juntas de revolução.

Assim temos :

$$\frac{\partial {}^0A_i}{\partial q_i} = Q_i^{i-1} A_i \tag{7}$$

que pode ser escrita como:

$$U_{ij} = \begin{cases} {}^0A_{j-1} Q_j^{j-1} A_i & \text{para } j \leq i \\ 0 & \text{para } j > i \end{cases} \tag{8}$$

onde

$$U_{ij} = \frac{\partial {}^0A_i}{\partial q_j} \tag{9}$$

Usando esta notação a velocidade pode ser expressa como :

$$v_i = \left( \sum_{j=1}^i U_{ij} \dot{q}_j \right) {}^i r_i \tag{10}$$

## Cálculo da Energia Cinética do Manipulador

Seja a energia cinética de uma partícula de massa diferencial  $dm$  no elo  $i$  dada por :

$$\begin{aligned} dK_i &= \left(\frac{1}{2}\right)(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)dm \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)Tr(v_i v_i^T)dm \end{aligned} \quad (11)$$

onde  $Tr$  é o traço de matriz.

Substituindo a expressão de  $v_i$  na equação da energia cinética teremos a expressão geral dada por :

$$dK_i = \left(\frac{1}{2}\right)Tr \left[ \sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i U_{ip} \left( {}^i r_i dm \left( {}^i r_i \right)^T \right) U_{ip}^T \dot{q}_p \dot{q}_r \right] \quad (12)$$

A matriz  $U_{ij}$  expressa a taxa de variação dos pontos  ${}^i r_i$  no elo  $i$  em relação a coordenada da base quando  $q_j$  varia . Ela é constante para todos os pontos do elo  $i$  e independente da distribuição de massa do elo  $i$ . Além disso,  $\dot{q}_i$  é independente da distribuição de massa do elo  $i$ , assim, somando todas as energias cinéticas de todos os elos e colocando a integral dentro do parêntesis, teremos:

$$K_I = \int Dk_I = \left(\frac{1}{2}\right)Tr \left[ \sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i U_{ip}^T \left( \int {}^i r_i \left( {}^i r_i \right)^T dm \right) U_{ip} \dot{q}_p \dot{q}_r \right] \quad (13)$$

A integral dentro do parêntesis é a inércia de todos os pontos do elo  $i$  e é chamada de matriz de inércia , que pode ser escrita como :

$$J_i = \begin{bmatrix} \left(-I_{ixx} + I_{iyy} + I_{izz}\right) / 2 & I_{ixy} & I_{iyz} & m_i \bar{x}_i \\ I_{ixy} & \left(I_{ixx} - I_{iyy} + I_{izz}\right) / 2 & I_{iyz} & m_i \bar{y}_i \\ I_{ixz} & I_{iyz} & \left(I_{ixx} + I_{iyy} - I_{izz}\right) / 2 & m_i \bar{z}_i \\ m_i \bar{x}_i & m_i \bar{y}_i & m_i \bar{z}_i & m_i \end{bmatrix} \quad (14)$$

Assim a expressão da energia cinética total para o robô de  $n$  graus de liberdade é :

$$\begin{aligned}
 K &= \left(\frac{1}{2}\right) \sum_{i=1}^n \text{Tr} \left[ \sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i U_{ip} J_i U_{ir}^T \dot{q}_p \dot{q}_r \right] \\
 &= \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i \text{Tr} (U_{ip} J_i U_{ir}^T \dot{q}_p \dot{q}_r) \right)
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

### Cálculo da Energia Potencial do Manipulador

Para o cálculo da energia potencial do robô partimos da expressão da energia potencial de cada elo,  $P_i$

$$P_i = -m_i g^0 \bar{r}_i = -m_i g \left( {}^0 A_i^T \bar{r}_i \right) \tag{16}$$

para  $i = 1, 2, \dots$

onde  $g(g_x \ g_y \ g_z)^T$  é o vetor coluna da aceleração da gravidade expresso nas coordenadas de base e  ${}^i \bar{r}_i$  é o vetor que indica a posição do centro de massa do elo  $i$  a partir da  $i$ -ésima coordenada .

Logo a energia total é dada por :

$$P = \sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^n -m_i \left( {}^0 A_i^T \bar{r}_i \right) \tag{17}$$

### Equações de movimento do Manipulador

Apartir das expressões da energia cinética e potencial podemos calcular a lagrangeana do sistema, que é definida por :

$$L = K - P \tag{18}$$

onde L é a Lagrangeana, K é a energia cinética e P é a energia potencial. Assim, utilizando-se as equações 15 e 17 temos a lagrangeana dada por

$$L = \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \text{Tr} \left( U_{ij} J_i U_{ik}^T \dot{q}_k \dot{q}_r \right) \right) + \left( \sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^n g m_i \left( {}^0 A_i^T r_i \right) \right) \quad (19)$$

Aplicando a formulação de Lagrange na equação acima, obteremos o valor do torque generalizado,  $\tau_i$  aplicado a cada junta i

$$\tau_i = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

$$\tau_i = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j \text{Tr} \left( U_{jk} J_j U_{ji}^T \ddot{q}_k \right) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j \sum_{m=1}^j \text{Tr} \left( U_{jkm} J_j U_{ji}^T \dot{q}_k \dot{q}_m \right) - \sum_{j=1}^n \left( -m_j g U_{ji}^T r_i \right) \quad (20)$$

para  $i=1,2,\dots,n$ .

A equação acima pode ser escrita numa forma mais compacta :

$$\tau_i = \sum_{k=1}^n D_{ik} \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n D_{ikm} \dot{q}_k \dot{q}_m + D_i \quad (21)$$

Ou, na forma matricial ;

$$\tau(t) = D(q(t)) \ddot{q}(t) + d(q(t), \dot{q}(t)) + G(q(t)) \quad (22)$$

Assim obtemos uma equação para o movimento do robô que é da forma :

$$\tau_i = D(\theta) \ddot{\theta} + N(\theta, \dot{\theta}) + G(\theta) \quad (23)$$

Cada termo desta equação pode ser assim identificado :

$\tau(t)$  = vetor (nx1) dos torques generalizados aplicados nas juntas , isto é ;

$$\tau(t) = (\tau_1(t), \tau_2(t), \dots, \tau_n(t))^T \quad (24)$$

$q(t)$  = vetor (nx1) das variáveis de posição das juntas, isto é :

$$q(t) = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t))_{\tau} \quad (25)$$

$\dot{q}(t)$  = vetor (nx1) da velocidades das juntas , isto é :

$$\dot{q}(t) = ( \dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots, \dot{q}_n(t) )_{\tau} \quad (26)$$

$\ddot{q}(t)$  = vetor (nx1) das acelerações das juntas, isto é :

$$\ddot{q}(t) = ( \ddot{q}_1(t), \ddot{q}_2(t), \dots, \ddot{q}_n(t) )_{\tau} \quad (27)$$

$D(q)$  = matriz das inércias das juntas , cujos elementos são

$$D_{ij} = \sum_{j=\max(i,k)}^i Tr(U_{jk} J_j U_{jk}^T), \quad i, k = 1, 2, \dots, n \quad (28)$$

$d(\theta, \dot{\theta})$  = vetor (nx1) que representa as forças de Coriolis e Centrífugas cujos elementos são :

$$d_i = \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n d_{ikm} \dot{\theta}_k \dot{\theta}_m \quad i, k = 1, 2, \dots, n \quad \text{onde} \quad (29)$$

$$d_{ikm} = \sum_{j=\max(i,k,m)}^n Tr(U_{jkm} J_j U_{ji}^T) \quad i, k, m = 1, 2, \dots, n$$

$G(q)$  = vetor (nx1) dos termos das forças gravitacionais cujos elementos são :

$$G_i = \sum_{j=1}^n -m_j g U_{ji}^T \bar{r}_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (30)$$