



DANIELA ANDRADE DAMASCENO

Análise Transiente de Sistemas com Interação Solo-Estrutura Através de Técnicas de Acoplamento Iterativo

22/13

**CAMPINAS
2013**



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

DANIELA ANDRADE DAMASCENO

Análise Transiente de Sistemas com Interação Solo-Estrutura Através de Técnicas de Acoplamento Iterativo

Orientador: Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas para obtenção do título de Mestra em Engenharia Mecânica, na Área de Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico.

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO
FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELA
ALUNA DANIELA ANDRADE DAMASCENO E
ORIENTADA PELO PROF. DR. EUCLIDES DE
MESQUITA NETO


.....
ASSINATURA DO ORIENTADOR

**CAMPINAS
2013**

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

D18a Damasceno, Daniela Andrade
Análise transiente de sistemas com interação solo-estrutura através de técnicas de acoplamento iterativo / Daniela Andrade Damasceno. --Campinas, SP: [s.n.], 2013.

Orientador: Euclides de Mesquita Neto.
Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Acoplamentos. 2. Interação solo-estrutura. I. Mesquita Neto, Euclides de, 1956-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Título em Inglês: Transient analysis of systems with soil-structure interaction through iterative coupling techniques

Palavras-chave em Inglês: Coupling, Soil-structure interaction

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Mestra em Engenharia Mecânica

Banca examinadora: Oscar Antonio Braunbeck, Alberto Luiz Serpa

Data da defesa: 27-02-2013

Programa de Pós Graduação: Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

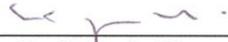
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADEMICO

Análise Transiente de Sistemas com Interação Solo-Estrutura Através de Técnicas de Acoplamento Iterativo

Autor: Daniela Andrade Damasceno

Orientador: Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:



Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto
DMC/FEM/Unicamp



Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa
DMC/FEM/Unicamp



Prof. Dr. Oscar Antonio Braunbeck
FEAGRI/ UNICAMP

Campinas, 27 de fevereiro de 2013.

Dedico este trabalho à minha família, em especial aos meus pais Wilson e Iracema, ao meu namorado Gabriel e aos meus amigos.

Agradecimentos

Este trabalho não poderia ser terminado sem a ajuda de diversas pessoas às quais presto minha homenagem:

Aos meus pais, por me ensinar que para vencer na vida é necessário ser muito forte e lutar sempre com todas minhas forças, e que nunca teria um obstáculo maior que minha vontade de vencer. Agradeço também por eles acreditarem em minha capacidade e pelo incentivo em todos os momentos da minha vida.

Ao meu namorado, por confiar e sempre me apoiar em todas as decisões.

Ao professor Dr. Euclides de Mesquita Neto por ter me aceitado no programa de mestrado e acreditado que eu seria capaz de desenvolver pesquisa junto com seu grupo de trabalho. Agradeço também pela paciência e dedicação com nossa pesquisa.

Aos amigos, pelo apoio, colaboração e principalmente paciência.

Aos funcionários, pela paciência e apoio durante toda pesquisa.

Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, campus Sertãozinho, e ao professor Dr. Whisner Fraga Mamede por terem me apresentado os primeiros caminhos da pesquisa.

A CAPES, pelo apoio financeiro e incentivo a pesquisa.

Supere seus limites

Resumo

Neste trabalho procurou-se desenvolver uma metodologia para análise transiente de sistemas dinâmicos que apresentem acoplamento solo-estrutura. O sistema dinâmico inicialmente é um sistema acoplado, o qual será desacoplado em dois subsistemas. A metodologia desenvolvida é baseada em um método de acoplamento iterativo entre subsistemas, podendo os subsistemas apresentar domínios limitado e ilimitado. Os subsistemas são tratados de forma independente, podendo ser formulados de acordo com as características e necessidades do sistema, seja solo ou estrutura. O sistema dinâmico em análise é um sistema representado por uma fundação com massa, apoiada em um solo modelado como um semi-espaço tridimensional transversalmente isotrópico e viscoelástico. Desacoplando-se o sistema na interface solo-fundação têm-se dois subsistemas, um representado pela fundação com massa, apresentando um domínio limitado, e o outro representando o semi-espaço, apresentando um domínio ilimitado. O subsistema representado pela fundação com massa será formulado pelo Método numérico de Newmark, e o subsistema representado pelo semi-espaço será formulado pela Integral de Convolução, pois a solução em deslocamento está disponível no domínio da frequência, podendo assim utilizar a Transformada Rápida de Fourier para a obtenção da resposta transiente ao impulso do semi-espaço tridimensional.

Palavras Chave: Acoplamento iterativo; interação solo-estrutura, resposta transiente, Método de Newmark, Integral de Convolução, solo, fundação.

Abstract

The aim of this work is to present a methodology for transient analysis of coupled soil-structure systems. The initially coupled system is uncoupled into two subsystems. The methodology is based on a method of iterative coupling between subsystems, in which each subsystem may be a bounded or an unbounded domain. The subsystems are treated independently and may be formulated according to the characteristics and requirements of the system, soil or structure. The system that is studied in the present work comprises a foundation with mass, resting on the surface of a soil, which is modeled as a three-dimensional, viscoelastic, transversely isotropic half-space. The system is divided at the interface between the soil and the foundation. The first subsystem is the bounded domain comprising the foundation with mass, which is solved by Newmark numerical method. The second subsystem consists of the half-space, for which there is a classical solution in the frequency domain. This solution is used together with a convolution integral scheme to obtain the transient solution that is necessary to the present iterative method.

Key Words: Iterative coupling; soil-structure interaction, transient response, Newmark Method, Convolution Integral.

Lista de Ilustrações

1.1: (a) Sistema massa-mola-amortecedor, (b) subsistema 1 de (a), (c) subsistema 2 de (a)	2
1.2: (a) Sistema único estrutura-solo, (b) subsistema 1 de (a), (c) subsistema 2 de (a)	3
1.3: Eliminação de campo aplicado em interação solo-estrutura Jahromi (2009)	4
1.4: Solução particionada aplicado em interação solo-estrutura Jahromi (2009)	5
2.1: Sistema com 1 grau de liberdade	9
2.2: Premissa da aceleração linear do método de Wilson (Rao, 2009)	12
2.3: Deslocamento analítico e numérico para um $\Delta t = 0.1s$	17
2.4: Velocidade analítica e numérica para um $\Delta t = 0.1s$	18
2.5: Aceleração analítica e numérica para um $\Delta t = 0.1s$	18
2.6: Erro Absoluto	19
2.7: Erro Relativo	19
2.8: Membros da família para $n=10$ e $n = 100$	22
2.9: Membros da família para $n=10$ e $n = 100$	23
2.10: Convolução discreta para o primeiro intervalo	24
2.11: Convolução discreta para o segundo intervalo	25
2.12: Convolução discreta para o terceiro intervalo	27
2.13: Função de Força e Resposta analítica e discreta para $\Delta t = 0.1s$ e $\Delta t = 0.01s$	29
2.14: Erros absoluto e relativo	30
2.15: Sistema com 1 grau de liberdade sujeito a um impulso unitário	31
2.16: Resposta ao impulso analítico e numérico para $\Delta t = 0.1s$ e $\Delta t = 0.01s$	33
2.17: Erros absoluto e relativo para $\Delta t = 0.1s$ e $\Delta t = 0.01s$	34
2.18: Excitação Heaviside e trapézio	35
2.19: Comparação das soluções $u_{h-n}^{nu}(t)$ e $u_{h-c}^{nu}(t)$	37
2.20: Erros absoluto e relativo	38
2.21: Comparação das soluções $u_{t-n}^{nu}(t)$ e $u_{t-c}^{nu}(t)$	39
2.22: Erros absoluto e relativo	40
3.1: (a) Sistema Acoplado, (b) subsistema 1 de (a), (c) subsistema 2 de (a)	42
3.2: Deslocamentos obtidos pelo acoplamento iterativo e solução numérica direta	51
3.3: Análise de erro entre os deslocamentos iterativos $u_{12}(t)$ e $u_{21}(t)$	52
3.4: Análise de erro entre $u_1(t)$ numérico e $u_{12}(t)$ iterativo	52
3.5: Velocidade obtida pelo método numérico e iterativo	53
3.6: Ampliação da figura 3.5 até 0.6s	53
3.7: Aceleração obtida pelo método numérico e iterativo	53
3.8: Ampliação da figura 3.7 até 0.6s	53
3.9: Forças de contato	54
3.10: Número de iterações	54

3.11: (a) Sistema com dois graus de liberdade acoplado, (b) e (c) subsistemas de (a)	56
3.12: Deslocamentos obtidos pelo acoplamento iterativo e solução numérica direta	63
3.13: Análise de erro entre os deslocamentos iterativos $u_{22}(t)$ e $u_{21}(t)$	64
3.14: Análise de erro entre $u_2(t)$ numérico e $u_{21}(t)$ iterativo	64
3.15: Velocidade obtida pelo método numérico e iterativo	65
3.16: Aceleração obtida pelo método numérico e iterativo	66
3.17: Ampliação da figura 3.16 até 0.9s	66
3.18: Forças de contato	66
3.19: Número de iterações	67
3.20: (a) Sistema com três graus de liberdade acoplado, (b) e (c) subsistemas de (a)	68
3.21: Deslocamentos obtidos pelo acoplamento iterativo e solução numérica direta	76
3.22: Análise de erro entre os deslocamentos iterativos $u_{22}(t)$ e $u_{21}(t)$	77
3.23: Análise de erro entre $u_2(t)$ numérico e $u_{21}(t)$ iterativo	78
3.24: Velocidade obtida pelo método numérico e iterativo	79
3.25: Ampliação da figura 3.24 até 3s	79
3.26: Aceleração obtida pelo método numérico e iterativo	79
3.27: Ampliação da figura 3.26 até 2s	79
3.28: Forças de contato	80
3.29: Número de iterações	80
3.30: (a) Sistema com um grau de liberdade acoplado, (b) e (c) subsistemas de (a)	81
3.31: Deslocamentos obtidos pelo acoplamento iterativo e solução numérica direta	90
3.32: Análise de erro entre os deslocamentos iterativos $u_{12}(t)$ e $u_{21}(t)$	90
3.33: Análise de erro entre $u_1(t)$ numérico e $u_{12}(t)$ iterativo	91
3.34: Velocidade obtida pelo método numérico e iterativo	92
3.35: Ampliação da figura 3.34 até 0.7s	92
3.36: Aceleração obtida pelo método numérico e iterativo	92
3.37: Ampliação da figura 3.27a até 0.8s	92
3.38: Forças de contato	93
3.39: Número de iterações	93
3.40: Deslocamentos obtidos pelo acoplamento iterativo e solução numérica direta	96
3.41: Análise de erro entre os deslocamentos iterativos $u_{12}(t)$ e $u_{21}(t)$	96
3.42: Análise de erro entre $u_1(t)$ numérico e $u_{12}(t)$ iterativo	97
3.43: Velocidade obtida pelo método numérico e iterativo	98
3.44: Aceleração obtida pelo método numérico e iterativo	98
3.45: Ampliação da figura 3.44 até 0.7s	98
3.46: Forças de contato	99
3.47: Número de iterações	99
3.48: Deslocamentos obtidos pelo acoplamento iterativo e solução numérica direta	102
3.49: Análise de erro entre os deslocamentos iterativos $u_{12}(t)$ e $u_{21}(t)$	102
3.50: Análise de erro entre $u_1(t)$ numérico e $u_{12}(t)$ iterativo	103
3.51: Velocidade obtida pelo método numérico e iterativo	104

3.52: Aceleração obtida pelo método numérico e iterativo	104
3.53: Forças de contato	105
3.54: Número de iterações	105
3.55: Semi-espaco tridimensional com carregamento circular uniformemente distribuído	107
3.56: Módulo de $N_{zs}(\omega)$ no domínio da frequência	108
3.57: Resposta ao impulso	110
3.58: (a) Sistema único estrutura-solo, (b) subsistema 1 de (a), (c) subsistema 2 de (a)	111
3.59: FRF	112
3.60: FRF até 1500 rad/s	112
3.61: Deslocamento no domínio do tempo	113
3.62: Deslocamento no domínio com ampliação até 1s	113
3.63: Forças de contato	117

Lista de Tabelas

2.1: Propriedades do sistema	16
2.2: Propriedades do sistema	16
2.3: Condições iniciais e excitação externa	16
2.4: Parâmetros de Newmark	16
2.5: Solução analítica e numérica	16
2.6: Parâmetros convencionados para convolução discreta	25
2.7: Parâmetros convencionados para convolução discreta	26
2.8: Parâmetros convencionados para convolução discreta	27
2.9: Convolução analítica e discreta	29
2.10: Propriedades do sistema	32
2.11: Propriedades do sistema	32
2.12: Condições iniciais e excitação externa	32
2.13: Parâmetros de Newmark	32
2.14: Solução Analítica e Resposta ao impulso	32
2.15: Propriedades do sistema	35
2.16: Propriedades do sistema	36
2.17: Condições iniciais e excitação externa	36
2.18: Parâmetros de Newmark	36
2.19: Resposta ao impulso obtida numericamente e convolução discreta	36
2.20: Resposta ao impulso obtida numericamente e pela convolução discreta	38
3.1: Propriedades do sistema	50
3.2: Propriedades do sistema	50
3.3: Condições iniciais e excitação externa	50
3.4: Parâmetros de Newmark	51
3.5: Propriedades do sistema	62

3.6: Propriedades do sistema	62
3.7: Condições iniciais e excitação externa	63
3.8: Parâmetros de Newmark	63
3.9: Propriedades do sistema	75
3.10: Propriedades do sistema	75
3.11: Condições iniciais e excitação externa	76
3.12: Parâmetros de Newmark	76
3.13: Propriedades do sistema	88
3.14: Propriedades do sistema	89
3.15: Condições iniciais e excitação externa	89
3.16: Parâmetros de Newmark	89
3.17: Propriedades do sistema	95
3.18: Propriedades do sistema	95
3.19: Condições iniciais e excitação externa	95
3.20: Parâmetros de Newmark	95
3.21: Propriedades do sistema	101
3.22: Propriedades do sistema	101
3.23: Condições iniciais e excitação externa	101
3.24: Parâmetros de Newmark	101
3.25: Parâmetros do solo	107
3.26: Propriedades do sistema	111

Lista de Abreviaturas e Siglas

Letras Latinas

m, m₁, m₁₂, m₂₁ – massa	[Kg]
k, k₁, k₂, k₃, k₄ – Rigidez	[N/m]
c, c₁, c₂, c₃, c₄ – amortecimento	[Kg/s]
F – força	[N]
F₁₂ – força de contato	[N]
F₂₁ – força de contato	[N]
u, u₁, u₂, u₃, u₁₂, u₂₁ – deslocamento	[m]
t – tempo	[s]
m_e – massa da estrutura	[Kg]
h_e – altura estrutura	[m]
S₂ – raio estrutura	[m]
u_e - deslocamento da estrutura	[m]
u_{e12} - deslocamento da estrutura	[m]
u_z - deslocamento do solo	[m]
u_{z21} - deslocamento do solo	[m]
F_s¹ – força de contato	[N]
F_s² – força de contato	[N]
F₀ – amplitude de força	[N]
A_m – Amplitude	[m]
X_m – Amplitude	[m]
τ - instante de tempo	[s]
ū_i - velocidade	[m/s]
ü_i - aceleração	[m/s ²]
Pe – função de excitação	[N]

$\mathbf{c}_{cr}, \mathbf{c}_{cr12}, \mathbf{c}_{cr21}$ - amortecimento crítico	[Kg/s]
$\mathbf{T}_n, \mathbf{T}_{n12}, \mathbf{T}_{n21}$ – período	[s]
\mathbf{g} – aceleração da gravidade	[m/s ²]
\mathbf{t}_{max} – tempo máximo	[s]
\mathbf{h}_n – função Heaviside	[N]
\mathbf{h}_n^1 – função Delta de Dirac	[N]
\mathbf{u}_δ^{nu} – Resposta ao impulso numericamente	[m]
\mathbf{u}_{h-c}^{nu} – solução numérica obtida pela Integral de Convolução	[m]
\mathbf{u}_{h-n}^{nu} – solução numérica quanto excitado pela função Heaviside	[m]
\mathbf{u}_{t-c}^{nu} – solução numérica obtida pela Integral de Convolução	[m]
\mathbf{u}_{t-n}^{nu} – solução numérica quanto excitado pela função trapezoidal	[m]
\mathbf{F}_t – força trapezoidal	[m]
\mathbf{B}_f - fator de porcentagem	[%]
n = constante Delta de Dirac	

.....

Letras Gregas

ω – frequência de excitação	[rad/s]
ω_n – frequência natural	[rad/s]
ω_d – frequência natural amortecida	[rad/s]
ξ – fator de amortecimento	
φ – ângulo de fase	[rad]
θ – ângulo de fase	[rad]
Δt – passo de tempo	[s]
α - constante de integração de Newmark	
β - constante de integração de Newmark	
δ –Delta de Dirac	

.....

Superescritos

- 1** - identificação do subsistema
- 12** - identificação do subsistema
- 21** - identificação do subsistema
- 2** – identificação do subsistema

.....

Subscritos

- e** – coeficiente da massa da estrutura;
- z** – eixo z;
- s** – solo;
- 0** – tempo inicial;
- i** – contador de tempo;

.....

Abreviações

- FEM** – Método dos Elementos Finitos;
- MEC** – Método dos Elementos de Contorno;
- DtN** – Dirichlet Neumann;
- MSP** – Método de Superposição;
- FFT** – Transformada Rápida de Fourier;

.....

Siglas

- N-N** – Newmark - Newmark
- N-C** – Newmark - Convolução

.....

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	REVISÃO DA LITERATURA	3
1.2	OBJETIVO DO TRABALHO	7
1.3	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	8
2	TÉCNICAS DE SOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES	9
2.1	SOLUÇÃO ANALÍTICA DE UM SISTEMA MASSA MOLA-AMORTECEDOR COM 1 GRAU DE LIBERDADE	9
2.2	MÉTODO DE INTEGRAÇÃO DIRETA NEWMARK	11
2.2.1	VALIDAÇÃO	15
2.3	INTEGRAL DE CONVOLUÇÃO	20
2.3.1	IMPULSO UNITÁRIO	21
2.3.2	CONVOLUÇÃO DISCRETA	23
2.4	RESPOSTA AO IMPULSO OBTIDO NUMERICAMENTE	30
2.5	APLICAÇÃO DA RESPOSTA AO IMPULSO OBTIDO NUMERICAMENTE NA CONVOLUÇÃO DISCRETA	34
3	ACOPLAMENTO ITERATIVO	41
3.1	ACOPLAMENTO ITERATIVO NEWMARK-NEWMARK EM UM SISTEMA COM 1 GRAU DE LIBERDADE.	42
3.1.1	VALIDAÇÃO DO ACOPLAMENTO ITERATIVO NEWMARK-NEWMARK COM 1 GRAU DE LIBERDADE	49

3.2	ACOPLAMENTO ITERATIVO NEWMARK-NEWMARK EM UM SISTEMA COM 2 GRAUS DE LIBERDADE	55
3.2.1	VALIDAÇÃO DO ACOPLAMENTO ITERATIVO NEWMARK-NEWMARK COM 2 GRAUS DE LIBERDADE	62
3.3	ACOPLAMENTO ITERATIVO NEWMARK-NEWMARK EM UM SISTEMA COM 3 GRAUS DE LIBERDADE	67
3.3.1	VALIDAÇÃO DO ACOPLAMENTO ITERATIVO NEWMARK-NEWMARK COM 3 GRAUS DE LIBERDADE	75
3.4	ACOPLAMENTO ITERATIVO NEWMARK-CONVOLUÇÃO EM UM SISTEMA COM 1 GRAU DE LIBERDADE COM EXCITAÇÃO DELTA DE DIRAC.	81
3.4.1	VALIDAÇÃO DO ACOPLAMENTO ITERATIVO NEWMARK-CONVOLUÇÃO COM EXCITAÇÃO DELTA DE DIRAC	88
3.4.2	ACOPLAMENTO ITERATIVO NEWMARK-CONVOLUÇÃO EM UM SISTEMA COM 1 GRAU DE LIBERDADE COM EXCITAÇÃO HEAVISIDE.	94
3.4.3	ACOPLAMENTO ITERATIVO NEWMARK-CONVOLUÇÃO EM UM SISTEMA COM 1 GRAU DE LIBERDADE COM EXCITAÇÃO TRAPÉZIO.	100
3.5	SISTEMA ÚNICO SOLO-ESTRUTURA	106
3.5.1	RESPOSTA DO SOLO	106
3.5.2	RESPOSTA ESTACIONÁRIA E TRANSIENTE DE UM SISTEMA FUNDAÇÃO-SOLO: ACOPLAMENTO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA E RESPOSTA TRANSIENTE VIA FFT.	110
4	CONCLUSÕES E DISCUSSÕES	118
	REFERÊNCIAS	119

1 INTRODUÇÃO

Vibrações em estruturas são causadas por forças externas aplicadas à estrutura ou por ondas que se propagam através do solo e colidem com a sua fundação. Estas ondas podem ser devido a um terremoto, tráfego, atividades industriais e obras de construção. A resposta da estrutura pode ser calculada utilizando uma formulação de subdomínio para interação dinâmica solo-estrutura (Schevenels, 2007).

O termo subdomínio será tratado neste trabalho como subsistema. Os subsistemas se originam de um sistema acoplado. O termo sistema acoplado indica um conjunto ou um grupo de subsistemas independentes interagindo entre si. Trabalhar com sistemas acoplados permite obter resposta de sistemas que apresentem interação entre domínios ilimitado e limitado como é o caso da interação solo-estrutura, podendo os subsistemas, ser formulado de acordo com as características e necessidades do sistema, seja solo ou estrutura. Métodos numéricos como Método dos Elementos Finitos, Método dos Elementos de Contorno, técnicas de acoplamento iterativo são utilizados para formular problemas de sistemas acoplados.

Em problemas com interação dinâmica solo-estrutura, o solo por apresentar um domínio ilimitado, costuma ser modelado pelo Método dos Elementos de Contorno (MEC), pelo fato de que é necessário discretizar apenas o contorno do domínio, e do MEC elevar em consideração o amortecimento geométrico associado ao domínio ilimitado. A estrutura apresenta domínio limitado, sendo assim é utilizado o Método dos Elementos Finitos (FEM). A análise via FEM pode ser feita tanto no domínio da frequência como no do tempo. Já a formulação do MEC esta mais desenvolvida no domínio da frequência. Embora existam muitos trabalhos sobre o MEC transiente ele ainda não está maduro para ser incorporado em programas comerciais. Como se verá, o grupo de pesquisa, no qual o presente trabalho está inserido, possui larga experiência na aplicação do MEC no domínio da frequência.

No presente trabalho uma técnica de acoplamento iterativo foi desenvolvida para acoplar tanto sistemas lineares de dimensões finitas, do tipo massa-mola, bem como o acoplamento de sistemas finitos (massa-mola) com sistemas ilimitados (solos).

Um dos sistemas que foi considerado neste trabalho é o sistema massa-mola-amortecedor mostrado na figura 1 (a). Este sistema dividido na massa M_1 formará dois subsistemas como mostrado nas figuras 1 (b) e 1 (c). No caso de dois subsistemas massa-mola (Fig 1b e Fig 1c) as equações diferenciais foram discretizadas através do Método de Newmark e o acoplamento iterativo foi formulado para estes dois sistemas de equações (Newmark-Newmark). Alternativamente um dos subsistemas foi descrito pelas equações discretas de Newmark e o segundo pela técnica da Integral de Convolução. Neste caso o acoplamento iterativo foi entre Newmark e Integral de Convolução. O deslocamento do sistema acoplado, u_1 , será obtido através de um acoplamento iterativo entre dos deslocamentos do subsistema 1, (u_{12}), e do subsistema 2, (u_{21}).

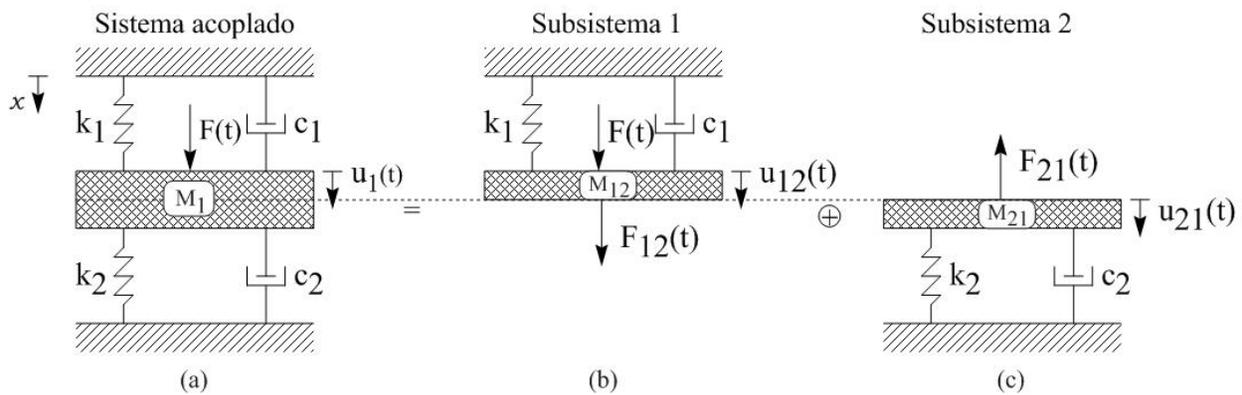


Figura 1.1: (a) Sistema massa-mola-amortecedor, (b) subsistema 1 de (a), (c) subsistema 2 de (a)

O outro sistema que foi considerado neste trabalho é de uma fundação com massa, apoiada em um solo modelado como um semi-espaco tridimensional transversalmente isotrópico viscoelástico como mostrado pela figura 2 (a). Desacoplando o sistema na interface solo fundação, serão formados dois subsistemas como mostrado nas figuras 2 (b) e 2 (c). O subsistema 1 será formulado e resolvido pelo Método de Newmark e o subsistema 2 será formulado e resolvido pela Integral de Convolução.

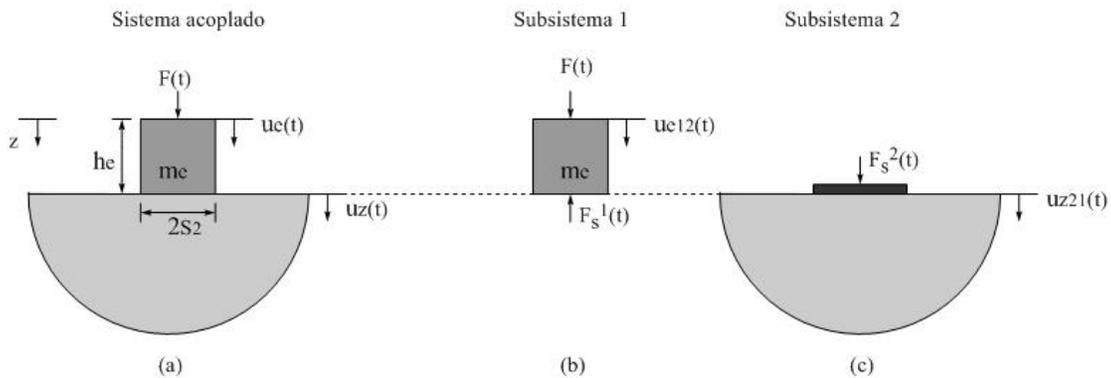


Figura 1.2: (a) Sistema único estrutura-solo, (b) subsistema 1 de (a), (c) subsistema 2 de (a)

Uma das finalidades desta abordagem iterativa é poder tratar o problema de contato não linear na interface solo-estrutura.

Na implementação realizada neste trabalho, somente serão considerados os deslocamentos verticais das estruturas e do solo.

1.1 Revisão bibliográfica

Problemas de interação solo-estrutura são sistemas acoplados, onde o estado de deformação e tensão da estrutura depende das pressões e movimentos do solo, e ao mesmo tempo, as pressões do solo dependem do carregamento e deformações da estrutura. Por conseguinte, tais análises requerem modelagem simultânea da estrutura e do solo, utilizando técnicas precisas e eficientes computacionalmente (Jahromi, 2009).

O solo é modelado em muitos estudos como um meio elástico ou viscoelástico. Outros modelos podem ser encontrados em (Gazetas, 1983). O solo possui inércia, rigidez e amortecimento, podendo se deformar ou deslocar. Considerando que há uma interação solo-estrutura, a estrutura também irá se deformar ou deslocar.

Como descrito por Felippa (1980) há três possíveis abordagens para lidar com problemas com interação solo-estrutura: a) eliminação de campo; b) solução simultânea ou monolítica e c)

solução particionada. Segundo Jahromi (2009) na eliminação de campo, um ou mais subsistemas do problema associado são eliminados utilizando uma técnica de redução simples, e o subsistema restante é considerado sob condições de contorno apropriadas representando o subsistema eliminado, na figura (1.3), tem-se uma demonstração desta técnica.

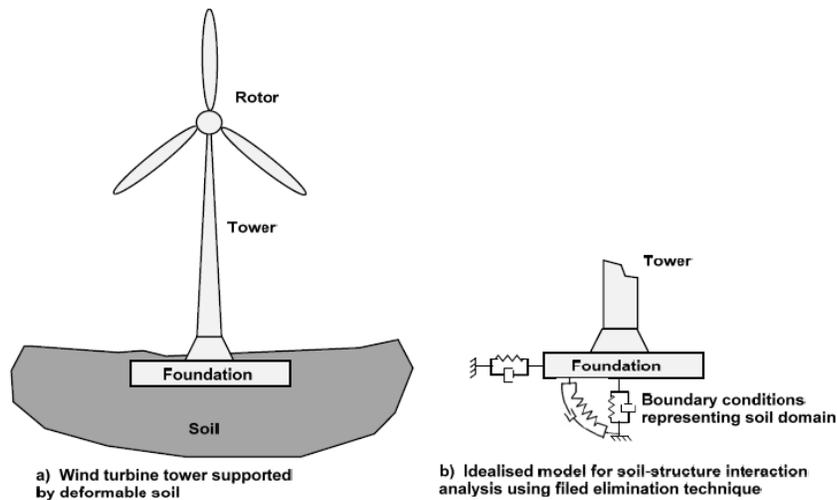


Figura 1.3: Eliminação de campo aplicado em interação solo-estrutura Jahromi (2009)

Na solução monolítica, o sistema é modelado como uma única entidade computacional e a solução do sistema completo do problema acoplado é obtida por uma única técnica de análise. Na solução particionada o problema de interação solo-estrutura é dividido em subsistemas e os mesmos são formulados separadamente, como pode ser observado na figura (1.4). A interação entre os subsistemas é feita através de força e deslocamento. Eles se comunicarão através de técnicas de substituição, atualização e sincronização Jahromi (2009).

As técnicas de acoplamento iterativo podem variar dependendo da interação dos subsistemas e dos métodos numéricos utilizados. Técnicas de acoplamento iterativo possuem algumas vantagens como: possibilitar o uso de códigos computacionais usuais e acoplar subsistemas utilizando métodos numéricos diferentes, os quais serão escolhidos de acordo com as características e necessidades dos sistemas que estão sendo analisados. A desvantagem está na necessidade de se manter a convergência, estabilidade e a precisão do método.

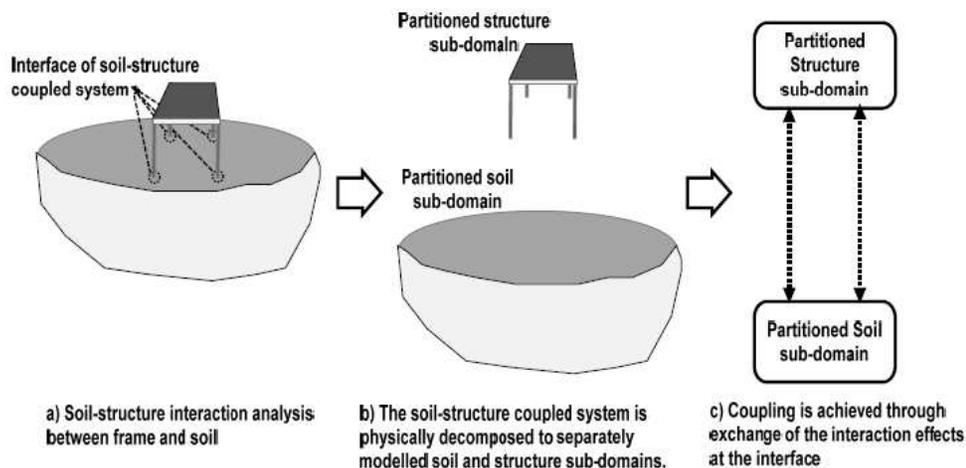


Figura 1.4: Solução particionada aplicado em interação solo-estrutura Jahromi (2009)

Os métodos mais comuns utilizados para modelar domínios limitados e ilimitados é o Método dos Elementos Finitos e o Método dos Elementos de Contorno. O Método dos Elementos Finitos é um dos métodos mais difundidos na engenharia pela facilidade de compreensão de suas formulações matemáticas, permitindo a obtenção de soluções para problemas mais complexos, facilidade na construção de um código computacional, modelagem de geometrias complexas, dentre outras. Mas para modelar problemas tridimensionais ele apresenta dificuldade, pois é necessária uma capacidade de armazenamento e processamento computacional muito grande. Também há algumas dificuldades quando se trata de domínios ilimitados, pois o método é caracterizado pela malha finita, assim quando ocorre o fenômeno de propagação de onda e este fenômeno é modelado por essa malha finita surgem implicações relacionadas com a reflexão de ondas provocadas pelo truncamento da malha, visto que está é uma característica inerente ao método (Sousa, 1999). A descrição das técnicas mais comuns para se modelar domínios ilimitados, tais como incorporação de Elementos Infinitos no MEF, mapeamento Dirichlet-Neumann (DtN) e o MEC, podem ser encontrados em (Mesquita e Pavanello, 2005). No Método dos Elementos de Contorno, se formulado com o estado auxiliar adequado, apenas o contorno precisa ser discretizado e domínios ilimitados podem ser tratados com naturalidade.

O grupo de pesquisa no qual a autora desse trabalho está inserida, tem feito um grande esforço para modelar perfis diferentes de solos, bidimensional e tridimensional, na frequência e no tempo. O primeiro trabalho do grupo foi realizado por (Mesquita, 1989) e consistiu em

desenvolver um estado auxiliar não singular para um semi-espaço bidimensional e tridimensional, no domínio da frequência. Outros trabalhos também realizados no domínio da frequência podem ser encontrados em Pontes (1992) em que foram comparados dois métodos: o Método de Superposição (MSP) e o Método dos Elementos de Contorno, para problemas de interação dinâmica solo-estrutura. No trabalho de Sousa (1992) foi desenvolvida uma análise comparativa entre o Método dos Elementos Finitos, o Método dos Elementos de Contorno e o acoplamento entre os dois métodos aplicados a problemas dinâmicos estacionários entre solo-estrutura. No trabalho de Carvalho (1995) foi realizada uma análise dinâmica da interação solo-fluído-estrutura pelo método direto de Elementos de Contorno, baseada na solução fundamental dos operadores de Laplace e Cauchy/Navier, sendo o solo modelado como um semi-espaço viscoelástico. No trabalho de Romanini (1995) foi desenvolvida uma metodologia para a síntese de funções de influência e Green para solos viscoelásticos lineares que apresentam estratificações horizontais. No trabalho de Barros (1996) foi feita uma revisão e uma implementação numérica do Método dos Elementos Finitos (MEF) no qual foram incluídos os chamados "elementos infinitos" visando a modelagem da condição de radiação de Sommerfeld ou do amortecimento geométrico em meios contínuos (visco-) elastodinâmicos sem regime estacionário e cujos domínios são ilimitados. No trabalho de Barros (1997) foi apresentada a dedução de funções de Green e de influência para cargas dinâmicas harmônicas no tempo, no estado plano de deformação, aplicadas sobre meios elásticos homogêneos transversalmente isotrópicos. No trabalho de Barros (2001) o objetivo era a síntese de Funções de Green e de Influência no domínio da frequência para meios transversalmente isotrópicos viscoelásticos. No trabalho de Carrion (2002) foi apresentada uma formulação e implementação, baseadas no Método dos Elementos de Contorno, para a análise de problemas viscoelásticos estacionários tridimensionais em domínios abertos e fechados. No trabalho de Menoni (2004) foi estudada a formulação e a implementação da versão direta do Método dos Elementos de Contorno (MEC) para tratamento de problemas acústicos bidimensionais estacionários regidos pelo operador diferencial de Helmholtz. No trabalho de Adolph (2006) foi desenvolvida uma formulação para obtenção de Funções de Green e estados auxiliares para os problemas viscoelastodinâmicos tridimensionais. No trabalho de Labaki (2008) foi implementada uma formulação indireta do MEC, utilizando um estado auxiliar viscoelastodinâmico não singular, com o objetivo de analisar problemas de

domínios limitados ou ilimitados, sujeitos a carregamentos estacionários, discretizado somente no contorno por elementos retangulares, constantes e descontínuos. No trabalho de Labaki (2012) foram apresentados novos modelos para descrever o comportamento harmônico de placas rígidas e flexíveis incrustadas em meios estratificados.

Alguns trabalhos também foram desenvolvidos no domínio do tempo como, por exemplo, o trabalho de Daros (1995) onde foi estudada a solução numérica da equação da onda escalar em duas dimensões, usando a chamada representação integral de Volterra. No trabalho de Souza (1999) foi desenvolvida uma formulação para acoplamento do Método dos Elementos Finitos e Elementos de Contorno para solução de problemas dinâmicos transientes em meios viscoelásticos. No trabalho de Adolph (2002) foi desenvolvida uma metodologia para obtenção de Funções de Green e Influência para os problemas viscoelastodinâmico transientes. No trabalho de Thomazo (2004) foi apresentada uma metodologia para a realização de análises dinâmicas estacionárias e transientes em domínios viscoelásticos limitados ou ilimitados, utilizando-se o Método dos Elementos de Contorno.

Dando continuidade à linha de pesquisa no domínio do tempo, neste trabalho o subsistema com domínio limitado será formulado pelo Método de Newmark, pois se trata de um método numérico de discretização no tempo das equações de movimento, e o subsistema com domínio ilimitado será formulado pela Integral de Convolução. Como existem soluções para domínios ilimitados (solos) para uma grande faixa de frequências, é possível através da Transformada Rápida de Fourier (FFT) a obtenção da resposta transiente dos solos a um impulso no tempo. Soluções gerais para quaisquer esforços aplicados do solo podem ser obtidas pela convolução da resposta ao impulso com o esforço geral aplicado.

1.2 Objetivo do trabalho

O objetivo deste trabalho é desenvolver uma metodologia de acoplamento iterativo para análise transiente de sistemas dinâmicos que apresentem acoplamento solo-estrutura. As estruturas são modeladas como sistemas lineares do tipo massa-mola-amortecedor. Para o solo

será considerado o perfil mostrado pela figura 1.2 (a), o qual representa um semi-espaço tridimensional transversalmente isotrópico. A solução em termos de deslocamentos para este perfil de solo foi determinada pelo autor Labaki (2012), e está disponível no domínio da frequência, sendo possível determiná-la para frequências bastante elevadas com precisão. Desta forma é possível utilizar a Transformada Rápida de Fourier (FFT) para a obtenção da resposta transiente ao impulso do perfil de solo descrito.

O presente trabalho visa obter resposta transiente de sistemas solo-estrutura em que as respostas das estruturas são obtidas através de técnicas de integração direta das equações de movimento e os solos através da resposta ao impulso.

1.3 Organização do trabalho

No capítulo 1 apresentaram-se os estudos desenvolvidos sobre iteração solo-estrutura, uma breve revisão bibliográfica e os objetivos do trabalho.

O capítulo 2 descreve a solução de sistemas lineares com o objetivo de desenvolver um método de acoplamento iterativo confiável para os sistemas em análise. Foi discutido e validado o Método de Newmark, e também uma versão da Integral de Convolução na forma discreta.

No capítulo 3 será apresentado o método de acoplamento iterativo Newmark-Newmark, aplicado em sistemas lineares com 1, 2 e 3 graus de liberdade, e o método de acoplamento iterativo Newmark-Convolução, aplicado em sistema com 1 grau de liberdade.

No capítulo 4 apresentam-se as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

2 TÉCNICAS DE SOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

O método de acoplamento iterativo desenvolvido neste trabalho utilizou duas técnicas de solução de sistemas lineares, o Método de Newmark e a Integral de Convolução. Para validar a implementação dos métodos e verificar a precisão dos resultados, foram utilizadas soluções analíticas. A solução analítica apresentada no item (2.1) foi desenvolvida para um sistema com 1 grau de liberdade como mostrado na figura (2.1) com uma força de excitação $F(t)$ harmônica. O mesmo sistema mostrado pela figura (2.1) foi formulado pelo Método de Newmark como apresentado no item (2.2). Foram analisados no item (2.2.1) os erros absoluto e relativo em relação os resultados obtidos pela solução analítica e pelo Método de Newmark.

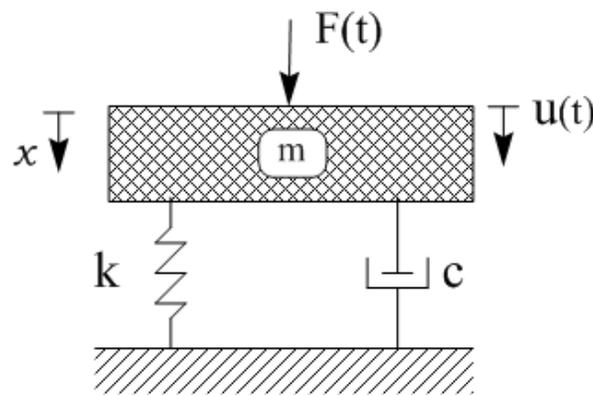


Figura 2.1: Sistema com 1 grau de liberdade

2.1 SOLUÇÃO ANALÍTICA DE UM SISTEMA MASSA MOLA-AMORTECEDOR COM 1 GRAU DE LIBERDADE

Para efeitos de validação dos resultados obtido pela integração numérica, torna-se necessário obter uma solução analítica para analisar a precisão da implementação do método

utilizado. A equação de movimento para o sistema massa-mola-amortecedor com 1 grau de liberdade forçado (Figura 2.1) é dada por:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F(t) \quad (2.1)$$

Os parâmetros c , k e m são respectivamente, o amortecimento, rigidez e massa do sistema. A força externa de excitação é neste caso dada por:

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t) \quad (2.2)$$

O termo F_0 é a amplitude da força e ω é a frequência de excitação. O sistema descrito pela equação (2.1) está sujeito ao deslocamento inicial u_0 e a velocidade inicial \dot{u}_0 . A resposta total do sistema é dada pela soma das soluções homogênea e particular (Inman, 2000):

$$u(t) = Ae^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \phi) + X \cos(\omega t - \theta) \quad (2.3)$$

Os termos da equação (2.3) podem ser calculados conforme mostrado abaixo.

Fator de amortecimento:

$$\xi = \frac{c}{2\sqrt{km}} \quad (2.4)$$

Frequência natural:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.5)$$

Frequência de vibração amortecida:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (2.6)$$

As expressões X , θ , φ e A , são dadas por:

$$X_m = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_n\omega)^2}} \quad (2.7)$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{2\xi\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2} \quad (2.8)$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{\omega_d(u_0 - X_m \cos(\theta))}{\dot{u}_0 + (u_0 - X_m \cos(\theta))\xi\omega_n - \omega X_m \sin(\theta)} \quad (2.9)$$

$$A_m = \frac{u_0 - X_m \cos(\theta)}{\sin(\varphi)} \quad (2.10)$$

2.2 MÉTODO DE INTEGRAÇÃO DIRETA NEWMARK

Em 1959, Nathan Newmark apresentou um método numérico para o cálculo da resposta dinâmica de sistemas lineares e não lineares ficando conhecido como método beta de Newmark. Esse método é baseado na premissa de que a aceleração varia linearmente entre dois instantes de tempo (Rao, 2009). O Método de Wilson parte da mesma hipótese de que a aceleração varia linearmente entre dois instantes de tempo. A dedução das equações de deslocamento, velocidade e aceleração do Método de Newmark podem ser desenvolvidas pelo Método de Wilson como mostrado nas equações seguintes.

Assume-se a aceleração linear do tempo $t_i = i\Delta t$ ao tempo $t_{i+\theta} = t_i + \theta\Delta t$, onde $\theta \geq 1$ (Rao, 2009). Na figura abaixo se tem a premissa de aceleração linear do método de Wilson:

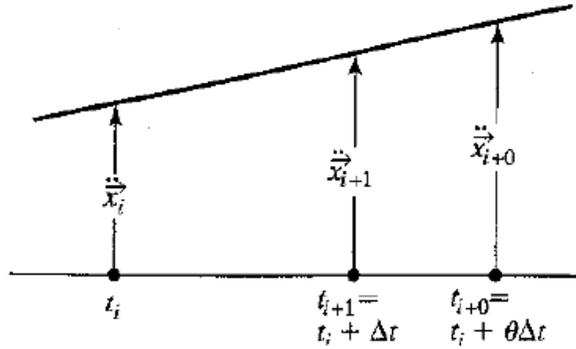


Figura 2.2: Premissa da aceleração linear do método de Wilson (Rao, 2009)

Como foi suposto que $\ddot{u}(t)$ varia linearmente entre t_i em $t_{i+\theta}$, pode-se prever o valor de $\ddot{u}(t)$ em qualquer tempo $t_i + \tau$, $0 \leq \tau \leq \theta \Delta t$ (Rao, 2009). Assim pode-se calcular a velocidade e o deslocamento:

A aceleração é dada por:

$$\ddot{u}(t_i + \tau) = \ddot{u}_i + \frac{\tau}{\theta \Delta t} (\ddot{u}_{i+\theta} - \ddot{u}_i) \quad (2.11)$$

O termo Δt representa o passo de tempo. Integrando a equação (2.11), obtêm-se as equações de velocidade e deslocamento como descritas pelas equações abaixo.

Velocidade:

$$\dot{u}(t_i + \tau) = \dot{u}_i + \ddot{u}_i \tau + \frac{\tau^2}{2\theta \Delta t} (\ddot{u}_{i+\theta} - \ddot{u}_i) \quad (2.12)$$

Deslocamento:

$$u(t_i + \tau) = u_i + \dot{u}_i \tau + \frac{1}{2} \ddot{u}_i \tau^2 + \frac{\tau^3}{6\theta \Delta t} (\ddot{u}_{i+\theta} - \ddot{u}_i) \quad (2.13)$$

As expressões para velocidade e deslocamento no método de Newmark são baseadas nas equações (2.12) e (2.13), como mostradas nas equações abaixo (Rao, 2009).

Velocidade:

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + [(1-\beta)\ddot{u}_i + \beta\ddot{u}_{i+1}]\Delta t \quad (2.14)$$

Deslocamento:

$$u_{i+1} = u_i + \Delta t\dot{u}_i + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \ddot{u}_i + \alpha\ddot{u}_{i+1} \right] \Delta t^2 \quad (2.15)$$

Os parâmetros α e β definem a variação de aceleração ao longo de um intervalo de tempo, e determinam as características de estabilidade e precisão do método (Chopra, 2006). O termo Δt indica o passo de tempo. O Método de Newmark é um método de integração implícito. Este método apresenta a grande vantagem de ser incondicionalmente estável. Para algoritmo incondicionalmente estável o passo de tempo pode ser escolhido sem se preocupar com a estabilidade do problema (HILBER, 1977) podendo usar passos de tempo maior do que o tempo crítico. Para assegurar a precisão e estabilidade do método, os valores inicialmente sugeridos por Newmark para $\alpha = \frac{1}{4}$ e $\beta = \frac{1}{2}$, correspondem a uma hipótese de acelerações constantes ao longo do intervalo Δt de valor igual à média das acelerações nos instantes t e $t+\Delta t$. Para $\alpha = \frac{1}{6}$ e $\beta = \frac{1}{2}$ tem-se a variação linear das acelerações entre aqueles dois instantes genéricos. Para que o método seja incondicionalmente estável é necessário que $\beta \geq 0.5$ e $\alpha \geq 0.25(\beta + 0.5)^2$.

O tempo crítico é definido como:

$$\Delta t_{crit} = \frac{T}{\pi} \quad (2.16)$$

O termo T é o período de tempo do sistema, e é dado por:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} \quad (2.17)$$

O parâmetro ω_n é a frequência natural de um sistema com 1 grau de liberdade.

O método de Newmark será utilizado para resolver sistemas lineares como mostrado pela equação (2.18):

$$m\ddot{u}_{i+1} + c\dot{u}_{i+1} + ku_{i+1} = F_{i+1} \quad (2.18)$$

Os parâmetros m , c e k representam a massa, amortecimento e rigidez do sistema, os termos \ddot{u}_{i+1} , \dot{u}_{i+1} , u_{i+1} e F_{i+1} representam a aceleração, a velocidade, o deslocamento e a força externa. Substituindo as equações (2.14) e (2.15) em (2.18), pode-se obter u_{i+1} .

$$u_{i+1} = \left[\frac{1}{\alpha\Delta t^2} m + \frac{\beta}{\alpha\Delta t} c + k \right]^{-1} \{F_{i+1} + A + B\} \quad (2.19)$$

onde:

$$A = m \left(\frac{1}{\alpha\Delta t^2} u_i + \frac{1}{\alpha\Delta t} \dot{u}_i + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \ddot{u}_i \right) \quad (2.20)$$

$$B = c \left(\frac{\beta}{\alpha\Delta t} u_i + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1 \right) \dot{u}_i + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 2 \right) \frac{\Delta t}{2} \ddot{u}_i \right) \quad (2.21)$$

Para determinar o deslocamento u_{i+1} no instante $(i+1)$ é necessário conhecer a massa, o amortecimento, a rigidez, a força de excitação F_{i+1} no instante $(i+1)$, o deslocamento inicial u_i , a velocidade inicial \dot{u}_i e a aceleração inicial \ddot{u}_i em relação ao instante anterior. A aceleração inicial depende das condições iniciais de força, velocidade e deslocamento, e pode ser calculada pela equação (2.22), sendo que foi desenvolvida pelo Método de Diferença Central, e é dada por:

$$\ddot{u}_0 = m^{-1}(F_0 - c\dot{u}_0 - ku_0) \quad (2.22)$$

A aceleração \ddot{u}_{i+1} pode ser obtida pela equação (2.15) quando escrita em termos de u_{i+1} :

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{1}{\alpha\Delta t^2}(u_{i+1} - u_i) - \frac{1}{\alpha\Delta t}\dot{u}_i - \left(\frac{1}{2\alpha} - 1\right)\ddot{u}_i \quad (2.23)$$

A velocidade \dot{u}_{i+1} pode ser obtida substituindo a equação (2.23) na equação (2.14), e escrevendo a equação obtida em função de u_{i+1} :

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + (1-\beta)\Delta t\ddot{u}_i + \beta\Delta t\ddot{u}_{i+1} \quad (2.24)$$

2.2.1 VALIDAÇÃO

Uma forma de verificar se o algoritmo que será utilizado na elaboração da metodologia apresentada neste trabalho apresenta boa precisão, é comparar seus resultados com a solução analítica. Nesta seção serão comparados e verificados os erros relativos e absolutos entre os deslocamentos obtidos pela solução analítica e pelo Método de Newmark quando aplicado ao sistema apresentado pela figura (2.1). As tabelas abaixo contêm todos os parâmetros necessários para obter a resposta do sistema tanto pelo Método de Newmark com pela solução analítica. A solução analítica apresentada no item 2.1 é a resposta de um sistema sujeito a uma excitação externa harmônica, sendo assim a excitação externa aplicada no Método de Newmark será harmônica também.

Os erros relativo e absoluto foram calculados da seguinte forma:

$$\text{Erro_relativo} = \left| \frac{u_{\text{numérico}}(t) - u_{\text{analítico}}(t)}{u_{\text{analítico}}(t)} \right|$$

$$\text{Erro_absoluto} = |u_{\text{numérico}}(t) - u_{\text{analítico}}(t)|$$

O deslocamento $u_{i+1}(t)$ foi obtido pelo Método de Newmark e $u(t)$ pela solução analítica.

Nas tabelas abaixo estão indicados os valores dos parâmetros utilizados na presente validação.

Tabela 2.1: Propriedades do sistema

Propriedades do sistema		
Massa	Rigidez	Amortecimento
$m = 10 \text{ Kg}$	$k = 30 \text{ N/m}$	$c = 0.01 \text{ Kg/s}$

Tabela 2.2: Propriedades do sistema

Propriedades do sistema			
Δt_{crit}	Frequência natural	Amortecimento crítico	Período
1.15 s	1.732 rad/s	34.64 Kg/s	3.627 s

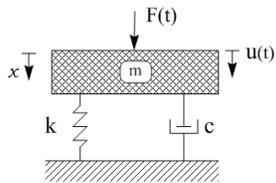
Tabela 2.3: Condições iniciais e excitação externa

Velocidade inicial	Deslocamento inicial	Amplitude	Frequência excitação	Força excitadora
$\dot{u}_0 = 0$	$u_0 = 0$	$F_0 = 1 \text{ N}$	$\omega = 2 \text{ rad/s}$	$F(t) = F_0 \cos(\omega t)$

Tabela 2.4: Parâmetros de Newmark

Passo	Alfa	Beta
$\Delta t = 0.1 \text{ s}$	$\alpha = 0.25$	$\beta = 0.5$

Tabela 2.5: Solução analítica e numérica

Sistema com 1 grau de liberdade	Solução Analítica	Método de Newmark
	$u(t) = A_m e^{-\xi \omega_n t} \text{sen}(\omega_d t + \varphi) + X_m \cos(\omega t - \theta)$	$u_{i+1} = \left[\frac{1}{\alpha \Delta t^2} m + \frac{\beta}{\alpha \Delta t} c + k \right]^{-1} \{F_{i+1} + A + B\}$

Resultados

Na figura (2.3), têm-se os deslocamentos em função do tempo obtido pela solução analítica e pelo Método de Newmark quando submetido a uma excitação harmônica, tal como mostrada na tabela (2.3). Sendo a frequência natural $\omega_n = 1.732$ rad/s e a frequência de excitação $\omega = 2$ rad/s, a resposta do sistema indica que estamos excitando o sistema próximo de sua frequência natural e pode ocorrer um fenômeno conhecido como batimento onde a amplitude aumenta e diminui segundo um padrão regular. As figuras (2.4) e (2.5), apresentam as velocidades e acelerações obtidas pelo Método de Newmark e pela solução analítica. Os erros absoluto e relativo para passos de tempo diferentes estão nas figuras (2.6) e (2.7).

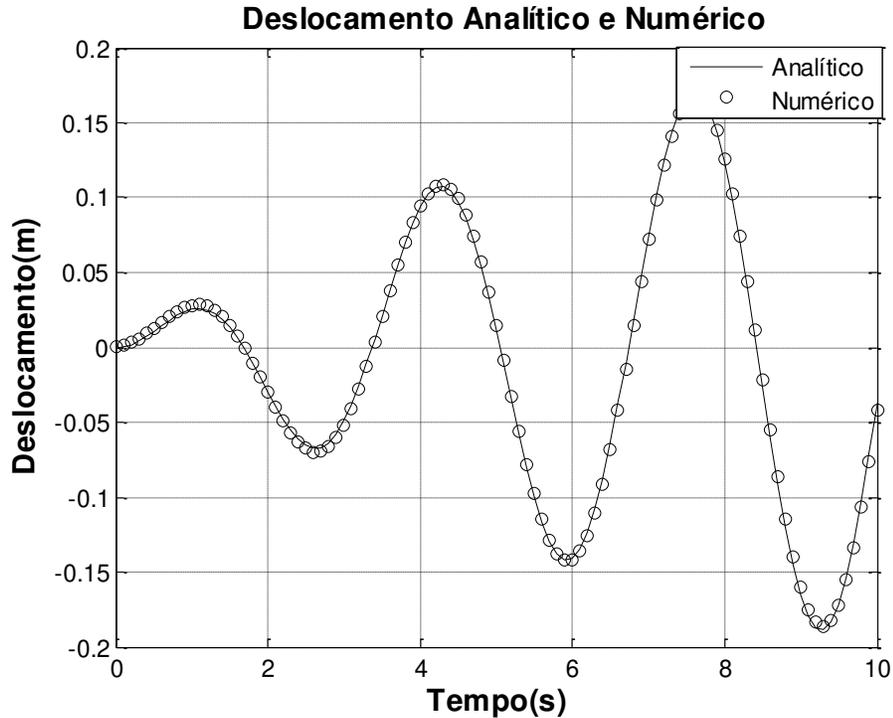


Figura 2.3: Deslocamento analítico e numérico para um $\Delta t = 0.1$ s

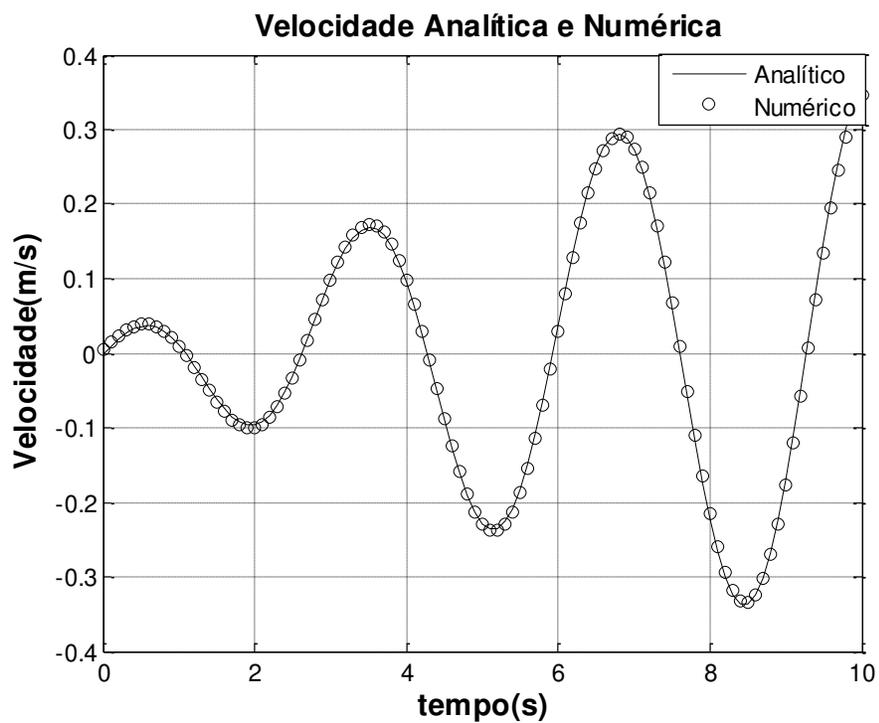


Figura 2.4: Velocidade analítica e numérica para um $\Delta t = 0.1\text{ s}$

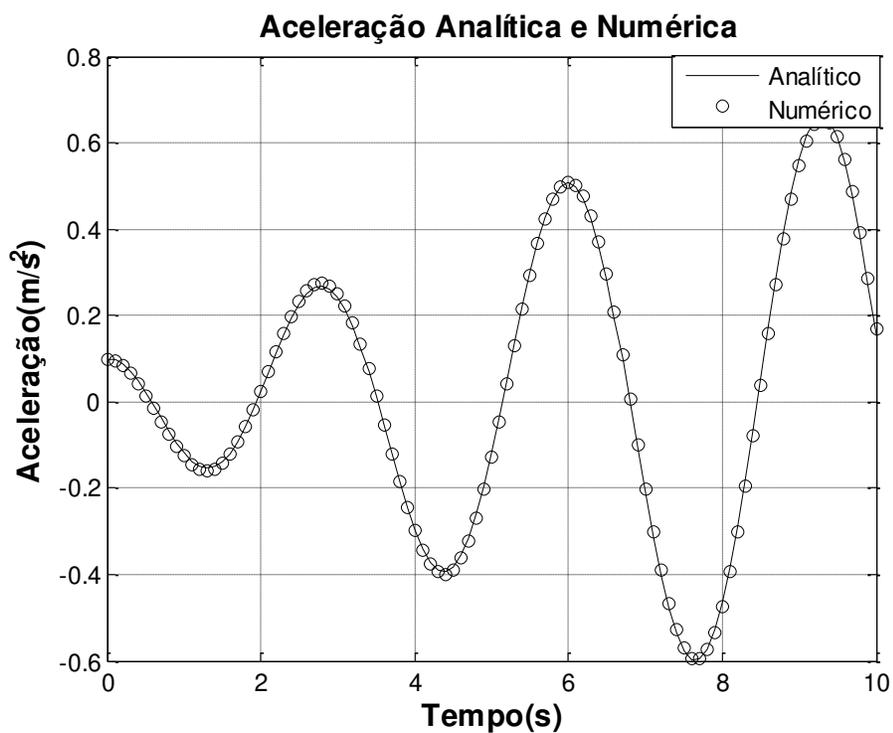


Figura 2.5: Aceleração analítica e numérica para um $\Delta t = 0.1\text{ s}$

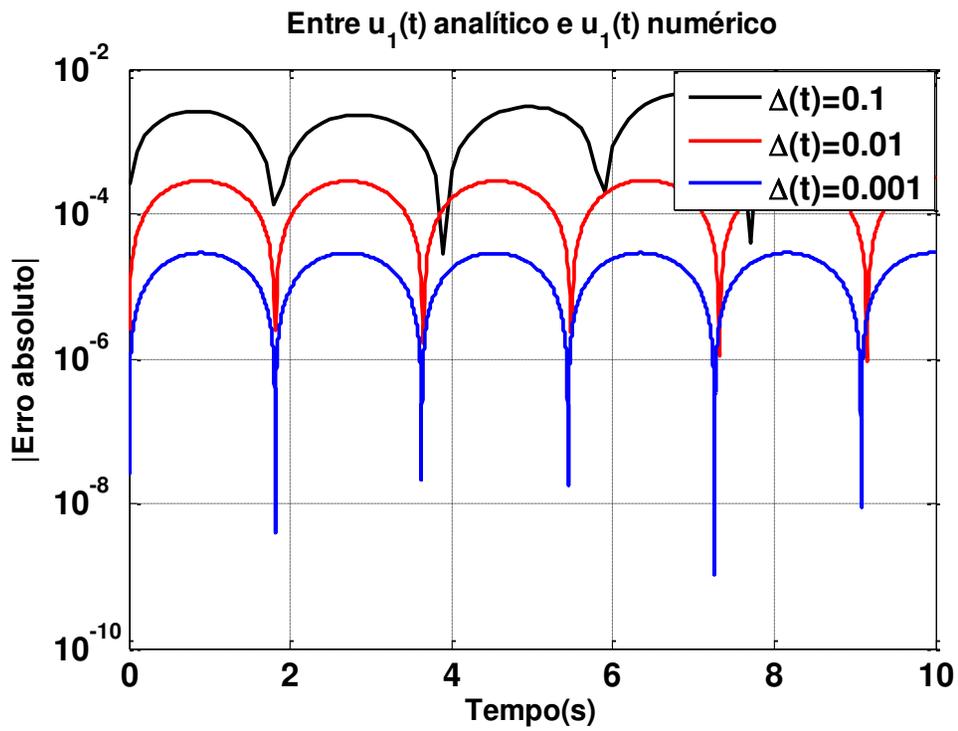


Figura 2.6: Erro Absoluto

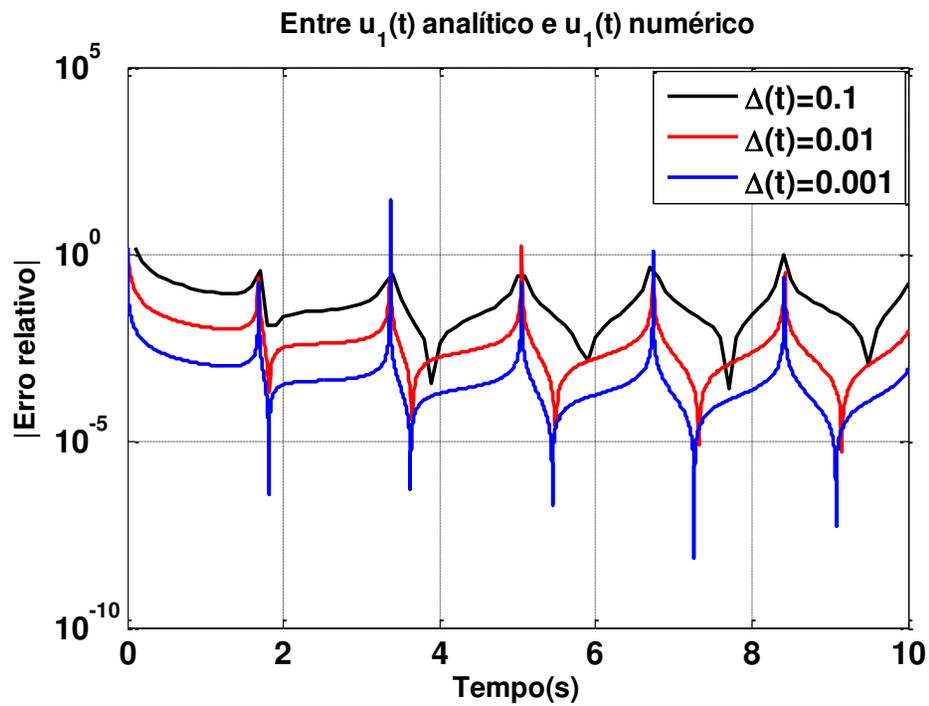


Figura 2.7: Erro Relativo

A partir das respostas obtidas acima, pode-se observar uma diminuição dos erros absoluto e relativo quando se diminui o passo de tempo. Considera-se, em função dos resultados obtidos, que a implementação do Método de Newmark foi validada.

2.3 INTEGRAL DE CONVOLUÇÃO

Uma das possíveis formas de se obter a resposta transiente de sistemas lineares é através da convolução da ‘resposta ao impulso do sistema linear’ com a excitação externa que atua no sistema em análise. A função de resposta ao impulso assume, assim, o papel de uma solução fundamental do sistema, a partir da qual é possível a obtenção da resposta a qualquer excitação externa, via integral de convolução (Cheng, 1972).

No presente trabalho, a importância da obtenção da solução de um sistema linear a partir da convolução da excitação atuante com a resposta ao impulso, está no fato que as respostas dos modelos de solo estão fornecidas como ‘função resposta ao impulso’ (Labaki, 2012).

A resposta transiente de um sistema linear $u(t)$ pode ser obtida a partir da seguinte Integral de Convolução (Cheng, 1972):

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (2.25)$$

Na equação (2.25) $f(\tau)$ é a excitação externa aplicada sobre o sistema e $h(t-\tau)$ é a função de resposta ao impulso do sistema. A integral de convolução pode ser representada por um somatório como mostrada abaixo:

$$u(t) = f(t) * h(t) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_{\tau=0}^t f(\tau)h(t-\tau)\Delta\tau \quad (2.26)$$

2.3.1 IMPULSO UNITÁRIO

Um impulso unitário $f(t)$ pode ser denominado função ou distribuição Delta de Dirac, $\delta(t)$, e para um tempo $t = t_0$ é denotada por $\delta(t - t_0)$. Suas propriedades são (Mesquita, 2007):

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \neq 0 \\ \infty & \text{se } t = 0 \end{cases} \quad (2.27)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (2.28)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = f(t_0) \quad (2.29)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t - t_0) dt = f(t_0) \quad (2.30)$$

Uma forma interessante de se realizar numericamente a distribuição Delta de Dirac é entendê-la como o caso limite de uma família de funções. Começamos definindo uma família de funções, $h_n(t)$, cujo caso limite define a função Degrau Unitário ou função de Heaviside, $H(t)$:

$$H(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(t) \quad (2.31)$$

Por sua vez a família de funções $h_n(t)$ é definida como

$$h_n(t) = \frac{1}{1 + e^{-nt}} \quad (2.32)$$

Pode-se mostrar formalmente que a equação (2.32) se aproxima da função chamada Heaviside à medida que a variável n , que indica os membros da família, cresce. Com esta

formulação alternativa para a função de Heaviside, é possível pensar em sua derivada no sentido generalizado. Derivando a função $h_n(t)$ em relação à variável t :

$$h_n^1(t) = \frac{d}{dt}(h_n(t)) = \frac{ne^{-nt}}{(1+e^{-nt})^2} \quad (2.33)$$

Pode-se verificar que a família de funções $h_n^1(t)$ tem como limite a distribuição Delta de Dirac:

$$\delta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n^1(t) \quad (2.34)$$

A expressão (34) permite formular a distribuição Delta de Dirac como limite de uma família de funções, dada na equação (2.33). O comportamento desta família de funções de $h_n(t)$ e $h_n^1(t)$ está mostrada nas figuras (2.8) e (2.9).

Os membros da função Heaviside para $n = 10$ e $n = 100$ em um intervalo de $-2 < t < 2$, é:

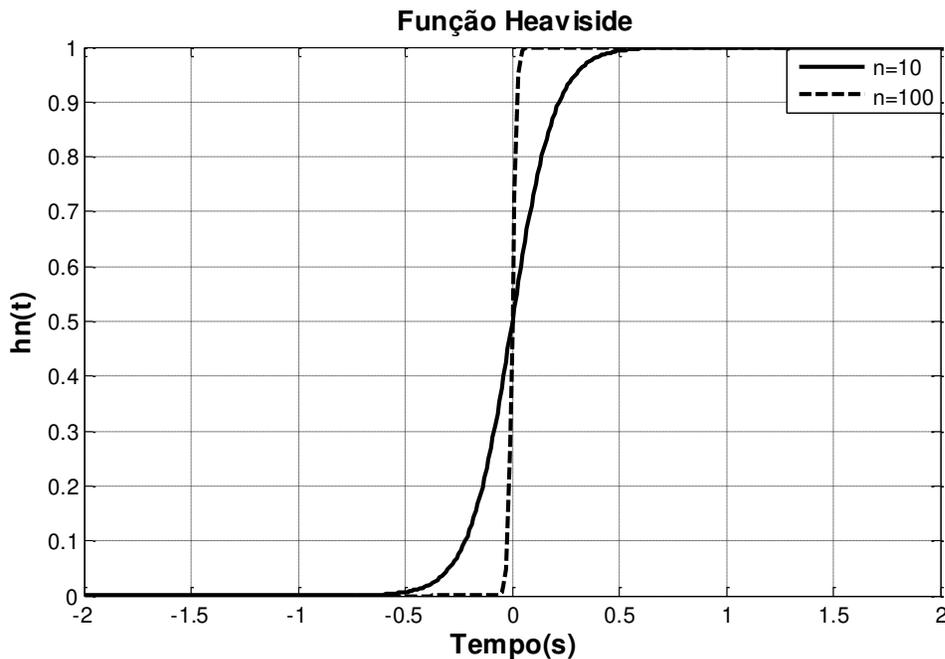


Figura 2.8: Membros da família para $n=10$ e $n = 100$

Membros da função Delta de Dirac para $n = 10$ e $n = 100$ em um intervalo de $-2 < t < 2$, tem-se:

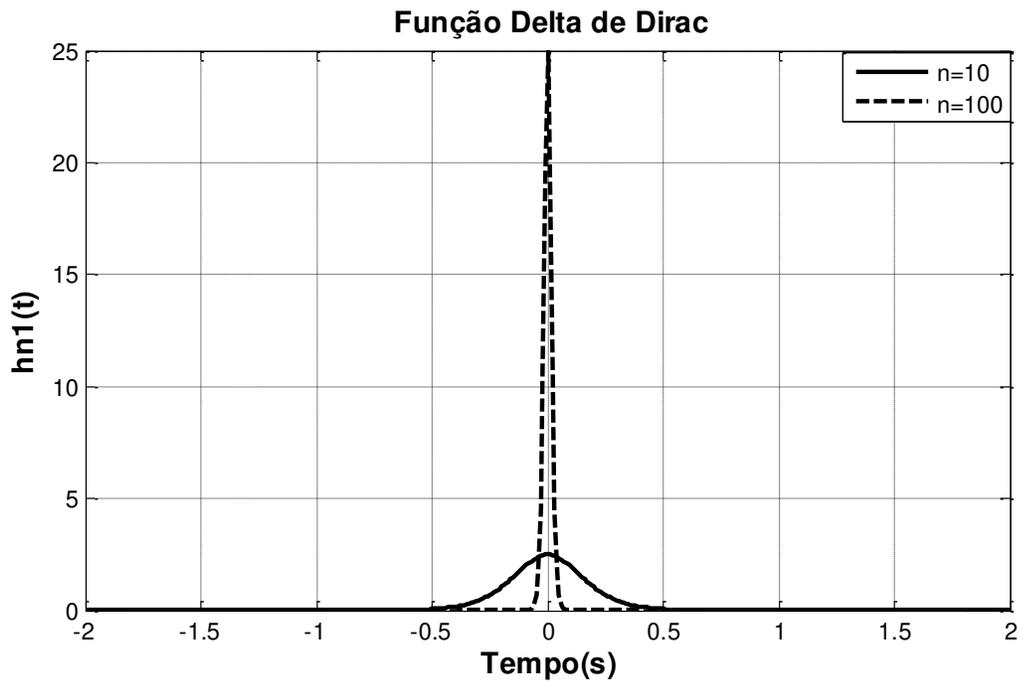


Figura 2.9: Membros da família para $n=10$ e $n = 100$

Esta forma de implementação numérica do Delta de Dirac será usada em conjunto com o integrador de Newmark, para a obtenção numérica de funções de resposta ao impulso em sistemas lineares.

2.3.2 CONVOLUÇÃO DISCRETA

A integral de convolução, como mencionado nos itens anteriores, será utilizada para resolver o subsistema que apresenta domínio ilimitado, pois as respostas dos modelos de solo estão fornecidas como ‘função de resposta ao impulso’. Como o método desenvolvido neste trabalho é um método iterativo, torna-se necessário escrever a integral de convolução na forma discreta.

A integral de convolução é dada por:

$$u(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (2.35)$$

Sendo $h(t) = 0$ para $t < 0$, a equação (2.35) fica:

$$u(t) = \int_0^t f(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (2.36)$$

Na sequência será descrita a obtenção de uma vertente discreta da Integral de Convolução. Para descrever a integral de convolução na forma discreta, para cada intervalo de tempo analisado, as funções $f(\tau)$ e $h(t - \tau)$ receberão um nome específico no ponto onde será feita a convolução. Na implementação do algoritmo da Integral de Convolução a função $f(\tau)$ varia da esquerda para direita e $h(t - \tau)$ varia da direita para esquerda.

Para exemplificar um primeiro intervalo de tempo, na figura (2.10) tem-se a posição de cada função. Assumindo que o intervalo de tempo a ser usado na convolução discreta será de $0 \leq \tau \leq \Delta t$, na tabela (2.6) pode-se encontrar os nomes de cada função e do tempo total em que está sendo feita a análise.

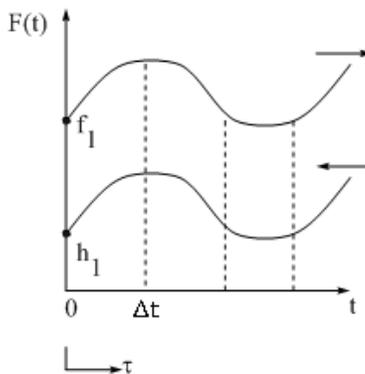


Figura 2.10: Convolução discreta para o primeiro intervalo

Tabela 2.6: Parâmetros convencionados para convolução discreta

Intervalo de tempo	$f(\tau)$	$h(t - \tau)$
$0 \leq \tau \leq \Delta t$	f_1	h_1

Aplicando-se as definições acima na integral de convolução para o primeiro intervalo de tempo tem-se:

$$u(t) = \int_0^t f(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_0^{\Delta t} f(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (2.37)$$

Substituindo-se o intervalo de tempo dado na tabela (2.6) em τ e também pelo nome das funções em cada intervalo, a equação (2.37) fica:

$$u(t) = f(0 \leq \tau \leq \Delta t)h(t - (0 \leq \tau \leq \Delta t)) = f_1 h_1 \quad (2.38)$$

Para exemplificar um segundo intervalo de tempo, na figura (2.11) tem-se a posição de cada função para cada passo de tempo Δt . Assumindo que o intervalo de tempo usado na convolução discreta será de $0 \leq \tau \leq 2\Delta t$, na tabela (2.7) pode-se encontrar os nomes de cada função em cada intervalo de tempo e do tempo total em que está sendo feita a análise.

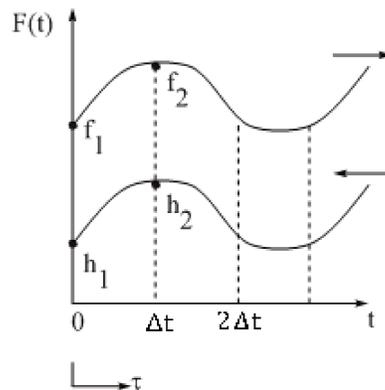


Figura 2.11: Convolução discreta para o segundo intervalo

Tabela 2.7: Parâmetros convencionados para convolução discreta

Intervalo de tempo	$f(\tau)$	$h(t - \tau)$
$0 \leq \tau \leq \Delta t$	f_1	h_2
$\Delta t \leq \tau \leq 2\Delta t$	f_2	h_1

Para resolver a integral de convolução:

$$u(t) = \int_0^t f(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (2.39)$$

Escrevendo a equação (2.39) em cada intervalo de tempo:

$$u(t) = \int_0^{2\Delta t} f(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_0^{\Delta t} f(\tau)h(t-\tau)d\tau + \int_{\Delta t}^{2\Delta t} f(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (2.40)$$

Substituindo os intervalos de tempo dado pela tabela (2.7) na equação (2.40) :

$$u(t) = f(0 \leq \tau \leq \Delta t)h(t-(0 \leq \tau \leq \Delta t)) + f(\Delta t \leq \tau \leq 2\Delta t)h(t-(\Delta t \leq \tau \leq 2\Delta t)) \quad (2.41)$$

Substituindo os nomes das funções em relação a cada intervalo de tempo:

$$u(t) = f_1h_2 + f_2h_1 \quad (2.42)$$

Para exemplificar um terceiro intervalo de tempo, na figura (2.12) tem-se a posição de cada função para cada passo de tempo Δt . Assumindo que o intervalo de tempo a ser realizada a convolução discreta será de $0 \leq \tau \leq 3\Delta t$, na tabela (2.8) pode-se encontrar os nomes de cada função em cada intervalo de tempo e do tempo total em que está sendo feita a análise.

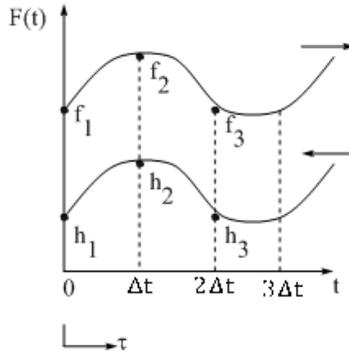


Figura 2.12: Convolução discreta para o terceiro intervalo

Tabela 2.8: Parâmetros convencionados para convolução discreta

Intervalo de tempo	$f(\tau)$	$h(t - \tau)$
$0 \leq \tau \leq \Delta t$	f_1	h_3
$\Delta t \leq \tau \leq 2\Delta t$	f_2	h_2
$2\Delta t \leq \tau \leq 3\Delta t$	f_3	h_1

Resolvendo a integral de convolução tem-se:

$$u(t) = \int_0^t f(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (2.43)$$

Substituindo na equação (2.43) o intervalo de tempo total:

$$u(t) = \int_0^{3\Delta t} f(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (2.44)$$

Substituindo na equação (2.44) os intervalos de tempo:

$$u(t) = \int_0^{\Delta t} f(\tau)h(t-\tau)d\tau + \int_{\Delta t}^{2\Delta t} f(\tau)h(t-\tau)d\tau + \int_{2\Delta t}^{3\Delta t} f(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned}
u(t) = & f(0 \leq \tau \leq \Delta t)h(t-(0 \leq \tau \leq \Delta t)) \\
& + f(\Delta t \leq \tau \leq 2\Delta t)h(t-(\Delta t \leq \tau \leq 2\Delta t)) \\
& + f(2\Delta t \leq \tau \leq 3\Delta t)h(t-(2\Delta t \leq \tau \leq 3\Delta t))
\end{aligned}
\tag{2.46}$$

Substituindo na equação (2.46) os nomes das funções em cada intervalo:

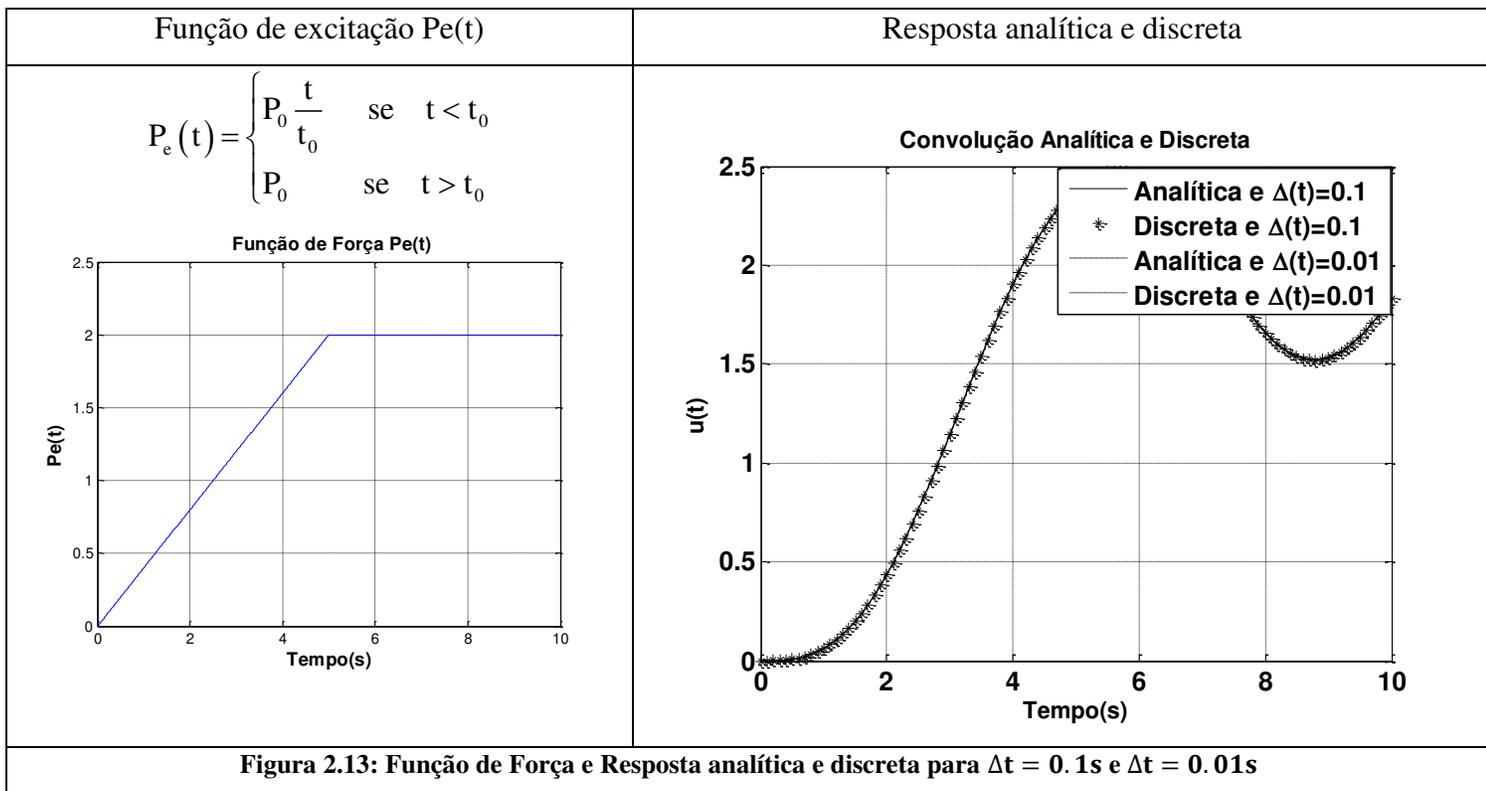
$$u(t) = f_1 h_3 + f_2 h_2 + f_3 h_1 \tag{2.47}$$

Assumindo que $u(t) = 0$ para $t < 0$, A convolução discreta poder ser realizada em um intervalo de tempo $0 \leq \tau \leq n\Delta t$, visto que para obter as funções no tempo atual de análise são necessários os valores das funções dos instantes anteriores. As equações (2.38), (2.42) e (2.47) permitem concluir que a integral de convolução pode ser escrita como um somatório de funções para $n\Delta t$. Pode-se escrever a convolução na forma discreta da seguinte forma:

$$u(t) = \sum_{i=1}^{n-1} [f(i\Delta t)h(t-(i-1)\Delta t)] + f(t)h(\Delta t) \tag{2.48}$$

A formulação mostrada na equação (2.48) e sua implementação numérica foi validada utilizando-se uma expressão analítica. Segundo Przemieniecki (1968) a solução analítica de quando é feita a convolução entre uma função seno, $\text{sen}(\omega(t-\tau))$, e uma função de força, $P_e(\tau)$, está representada pela tabela (2.9) sendo que $P_e(\tau)$ é a função de força mostrada pela figura (2.13).

Convolução	
Análítica	Discreta
$u(t) = \int_0^t P_e(\tau) \text{sen}(\omega(t - \tau)) d\tau$ $u(t) = \begin{cases} \frac{P_0}{\omega t_0} \left(t - \frac{\text{sen}(\omega t)}{\omega} \right) & \text{se } t < t_0 \\ \frac{P_0}{\omega t_0} \left(t_0 + \frac{\text{sen}(\omega(t - t_0))}{\omega} - \frac{\text{sen}(\omega t)}{\omega} \right) & \text{se } t > t_0 \end{cases}$	$u(t) = \sum_{i=1}^{n-1} [f(i\Delta t)h(t - (i-1)\Delta t)] + f(t)h(\Delta t)$ $f = P_e(\tau)$ $h = \text{sen}(\omega(t - \tau))$



Sendo $P_0 = 2$, $t_0 = 5s$ e $\omega = 1 \text{ rad/s}$.

Na figura (2.13) os gráficos da solução analítica e da convolução discreta estão sobrepostos, para diferentes passos de tempo. A análise dos erros absoluto e relativo é dada pela figura (2.14). Diminuindo o passo de tempo para 0.01s, percebe-se uma diminuição nos erros absoluto e relativo quando comparado com o passo de tempo de 0.1s.

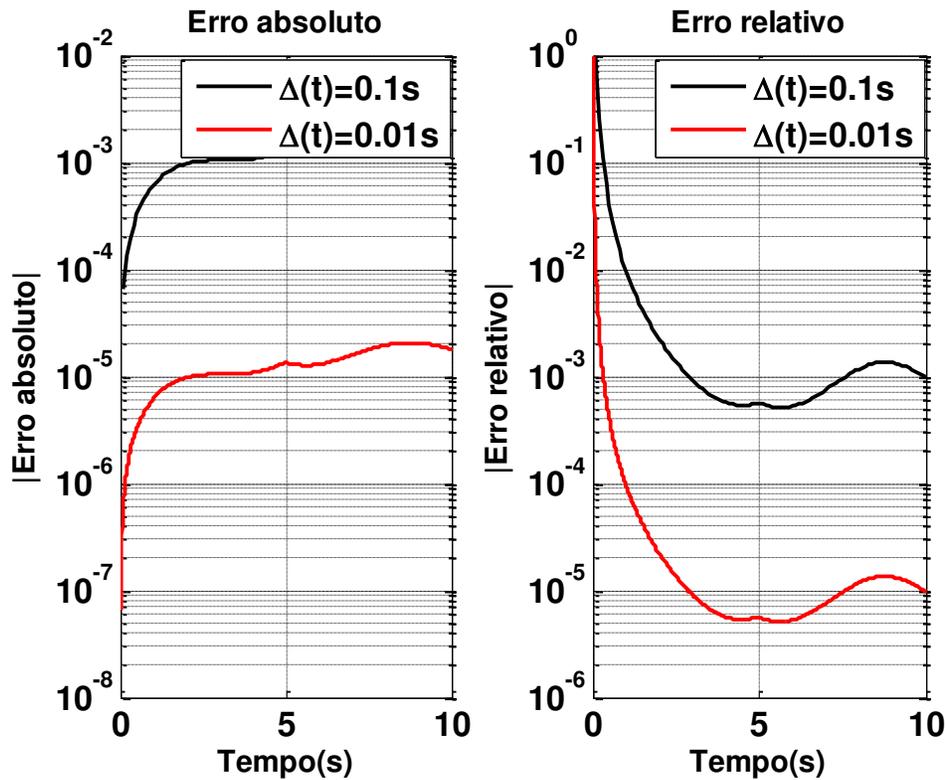


Figura 2.14: Erros absoluto e relativo

Analisando a figura (2.14) pode-se concluir que a convolução descrita pela equação (2.48) apresenta boa solução quando comparada com a solução analítica, sendo possível diminuir o erro com a diminuição do passo de tempo.

2.4 RESPOSTA AO IMPULSO OBTIDA NUMERICAMENTE

O objetivo final do trabalho é acoplar um sistema linear tipo massa-mola-amortecedor, cuja solução é obtida pelo algoritmo de Newmark, com o solo cuja resposta esta formulada em termos de convolução com a resposta ao impulso unitário. Antes de aplicarmos a metodologia ao sistema estrutura-solo, vamos validar este procedimento de acoplamento iterativo entre dois sistemas massa-mola-amortecimento. Para tanto é necessário que estejamos de posse da resposta ao impulso unitário de um sistema massa-mola-amortecedor, obtida numericamente. A obtenção

numérica da resposta ao impulso de um sistema massa-mola-amortecedor é a finalidade desta seção.

Aplicando-se como excitação na equação (2.1) o Delta de Dirac, $F(t)=\hat{F}\delta(t)$ podemos obter a seguinte solução analítica (Inman, 2000).

$$u(t)=u(t, F(t)=\hat{F}\delta(t))=u_s^{an}(t)=\frac{\hat{F}e^{-\zeta\omega_n t}}{m\omega_d}\text{sen}(\omega_d t) \quad (2.49)$$

Na equação (2.49), \hat{F} é a amplitude do impulso unitário, m é a massa do sistema, ζ é o fator de amortecimento, ω_d é a frequência de vibração amortecida, e ω_n é a frequência natural. A resposta ao impulso numérica pode ser obtida quando colocamos na equação (2.1) como excitação uma distribuição $h_n^1(t)$ que tende ao Delta de Dirac e integramos a equação resultante através do algoritmo de Newmark.

$$F(t) = h_n^1(t) = \frac{ne^{-nt}}{(1+e^{-nt})^2}$$

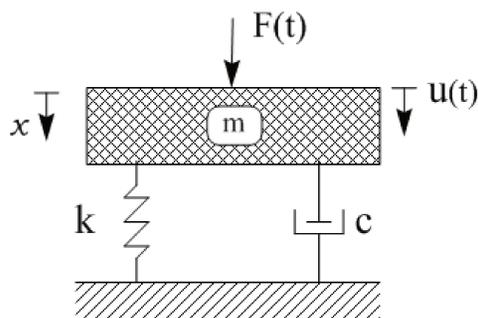


Figura 2.15: Sistema com 1 grau de liberdade sujeito a um impulso unitário

Nas tabelas abaixo podem ser encontrados todos os parâmetros para obter a resposta ao impulso numericamente e analítica.

Tabela 2.10: Propriedades do sistema

Propriedades do sistema		
Massa	Rigidez	Amortecimento
$m = 30 \text{ Kg}$	$k = 15 \text{ N/m}$	$c = 15 \text{ Kg/s}$

Tabela 2.11: Propriedades do sistema

Propriedades do sistema			
Δt_{crit}	Frequência natural	Amortecimento crítico	Período
2.83 s	0.707 rad/s	42.43 Kg/s	8.89 s

Tabela 2.12: Condições iniciais e excitação externa

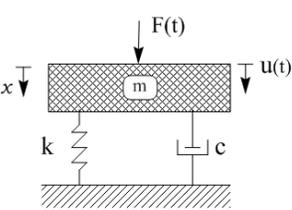
Velocidad e inicial	Deslocamento inicial	Amplitude de força	Força excitadora	Constante 'n' para simulação numérica do Delta Dirac
$\dot{u}_0 = 0$	$u_0 = 0$	$\hat{F} = 1 \text{ N}$	$h_n^1(t)$	$n = 40$

Tabela 2.13: Parâmetros de Newmark

Passo	Alfa	Beta
$\Delta t = 0.1 \text{ s}$	$\alpha = 0.25$	$\beta = 0.5$

A tabela (2.14) contém um breve resumo de como será obtida a resposta ao impulso e validada pela solução analítica.

Tabela 2.14: Solução Analítica e Resposta ao impulso

Sistema com 1 grau de liberdade	Solução Analítica	Método de Newmark-Resposta ao Impulso
	$u_{\delta}^{\text{an}}(t) = \frac{\hat{F} e^{-\zeta \omega_n t}}{m \omega_d} \text{sen}(\omega_d t)$	$u_{\delta}^{\text{nu}}(t) = \left[\frac{1}{\alpha(\Delta t)^2} [m] + \frac{\beta}{\alpha \Delta t} [c] + [k] \right]^{-1} \{h_n^1(t) + A + B\}$ <p>A=equação (20). B=equação (21). F(t) = $h_n^1(t)$.</p>

Na figura (2.16), têm-se a resposta ao impulso obtido pela solução analítica e pelo Método de Newmark, sobrepostos no mesmo gráfico. O passo de tempo adotado é de 0.1s, sendo o Δt_{crit} igual a 2.8284s. Na figura (2.17), têm-se os erros relativo e absoluto entre o Método de Newmark e a solução analítica. Refinando o passo de tempo para 0.01s e aumentando a constante da implementação numérica do Delta de Dirac 'n' para 400, pode-se observar que há uma diminuição dos erros absoluto e relativo comparado com o passo de tempo utilizado anteriormente de 0.1s.

Pode-se concluir com os gráficos abaixo que a resposta ao impulso obtido numericamente apresenta boa precisão, principalmente quando se diminui o passo de tempo e aumenta a constante 'n' que controla a implementação numérica do Delta de Dirac.

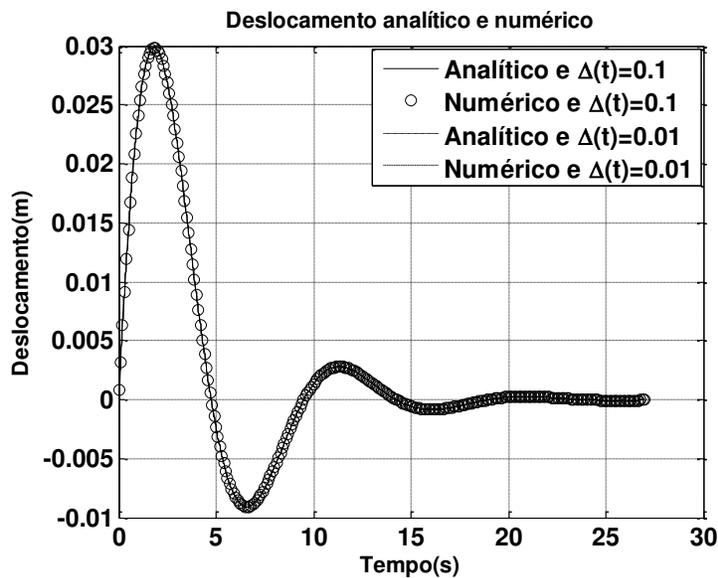


Figura 2.16: Resposta ao impulso analítico e numérico para $\Delta t = 0.1s$ e $\Delta t = 0.01s$

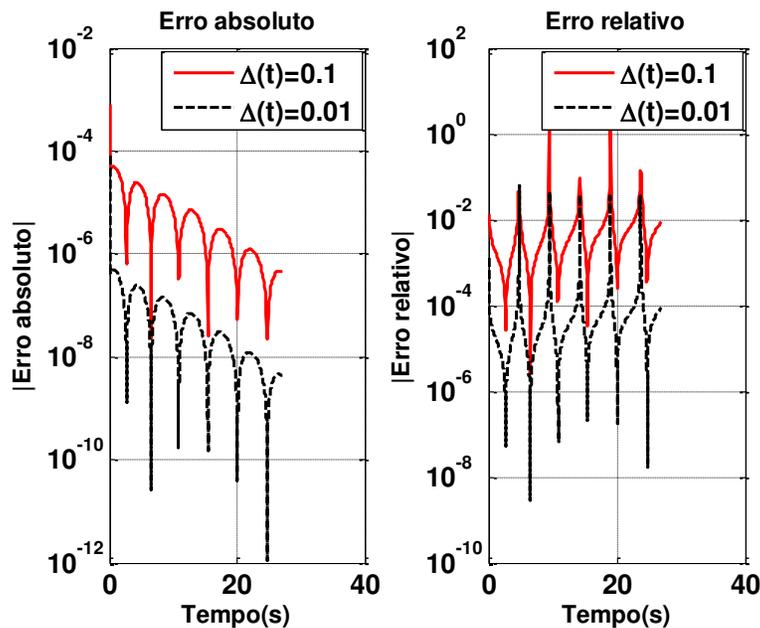


Figura 2.17: Erros absoluto e relativo para $\Delta t = 0.1s$ e $\Delta t = 0.01s$

2.5 APLICAÇÃO DA RESPOSTA AO IMPULSO OBTIDA NUMERICAMENTE NA CONVOLUÇÃO DISCRETA.

Considerando que a implementação dos métodos para se obter numericamente a resposta ao impulso e a convolução discreta estão validadas, duas aplicações serão realizadas utilizando os dois métodos.

Aplicando como excitação a função de Heaviside dada pela equação (2.32), na equação (2.19) que representa a solução do sistema pelo método de Newmark, tem-se a resposta do sistema massa-mola à excitação dada pela função de Heaviside. A resposta ao Heaviside obtida pelo Método de Newmark tem que ser a mesma resposta obtida pela convolução entre a resposta ao impulso obtida numericamente $u_s^{nu}(t)$ com a excitação dada pela equação (2.32).

Para validar o procedimento adotado vamos aplicar outra excitação ao sistema e comparar as respostas como já explicado na primeira resposta obtida colocando-se a excitação diretamente no algoritmo de Newmark, equação (2.19). A segunda resposta é obtida a partir da convolução de

resposta ao impulso do sistema obtida numericamente (ver figura 2.16) com a excitação considerada. A segunda excitação é uma força externa na forma de trapézio (ver figura 2.18) expressa pela equação (2.50).

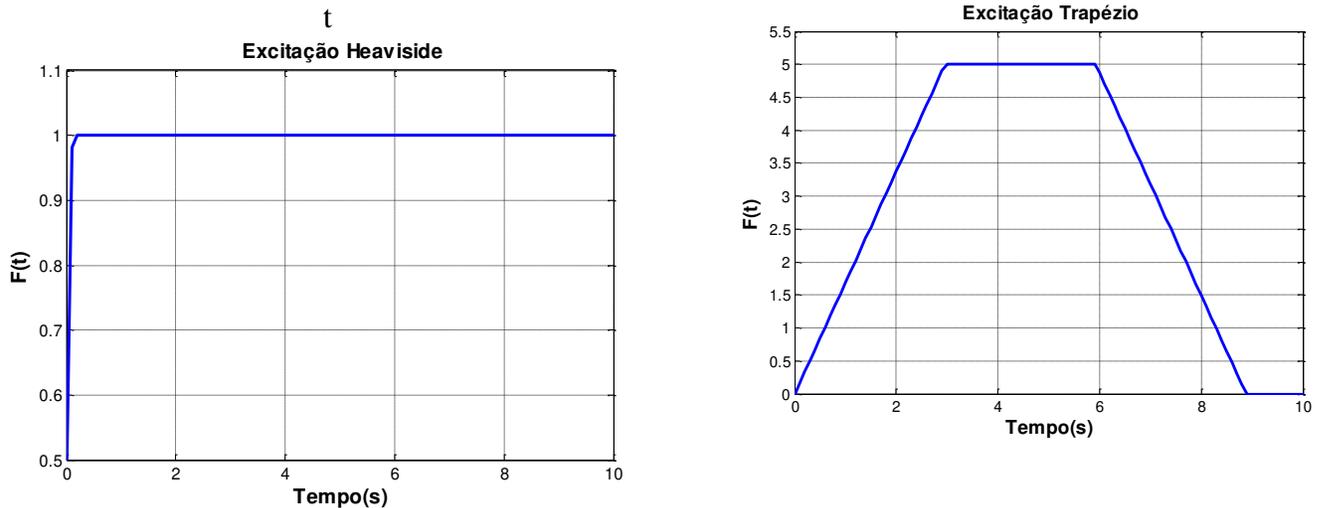


Figura 2.18: Excitação Heaviside e trapézio

$$F_t(t) = \begin{cases} \frac{3a}{T_t} t & \text{se } t \leq \frac{T_t}{3} \quad (t \geq 0) \\ a & \text{se } \frac{T_t}{3} < t < \frac{2T_t}{3} \\ -\frac{3a}{T_t} t + 3a & \text{se } \frac{2T_t}{3} \leq t \leq T_t \\ 0 & \text{se } t > T_t \end{cases} \quad (2.50)$$

O parâmetro T_t é o período do trapézio que é igual ao período do sistema. Para desenvolver as aplicações descritas acima, foram utilizados os parâmetros descritos pelas tabelas (2.15), (2.16), (2.17) e (2.18). A tabela (2.19) apresenta um breve resumo da formulação utilizada para realizar as aplicações.

Tabela 2.15: Propriedades do sistema

Propriedades do sistema		
Massa	Rigidez	Amortecimento
$m = 30 \text{ Kg}$	$k = 15 \text{ N/m}$	$c = 15 \text{ Kg/s}$

Tabela 2.16: Propriedades do sistema

Propriedades do sistema			
Δt_{crit}	Frequência natural	Amortecimento crítico	Período
2.3095s	0.8660 rad/s	34.6410 Kg/s	7.2554s

Tabela 2.17: Condições iniciais e excitação externa

Velocidad e inicial	Deslocamento inicial	Delta de Dirac	Força excitadora	Constante Delta Dirac	Amplitude
$\dot{u}_0 = 0$	$u_0 = 0$	$\frac{ne^{-nt}}{(1 + e^{-nt})^2}$	$h_n(t)$ ou $T(t)$	$n = 40$	$a = 5$

Tabela 2.18: Parâmetros de Newmark

Passo	Alfa	Beta
$\Delta t = 0.1$ s	$\alpha = 0.25$	$\beta = 0.5$

O mesmo passo de tempo é utilizado nos procedimentos a seguir.

Tabela 2.19: Resposta ao impulso obtida numericamente e convolução discreta

Sistema com 1 grau de liberdade	Resposta ao Heaviside	Convolução discreta
<p>Diagrama de um sistema massa-mola-amortecedor. Uma massa m está conectada a uma base fixa por uma mola com constante k e um amortecedor com constante c. Uma força $F(t)$ é aplicada para baixo na massa, causando um deslocamento $u(t)$. O eixo x aponta para baixo.</p>	<p>Resposta ao Heaviside:</p> $u_{h-c}^{nu}(t) = \left[\frac{1}{\alpha(\Delta t)^2} [m] + \frac{\beta}{\alpha\Delta t} [c] + [k] \right]^{-1} \{h_n(t) + A + B\}$ <p>A=equação (20). B=equação (21). F(t) = $h_n(t)$.</p>	<p>Convolução:</p> $u_{h-c}^{nu}(t) = \sum_{i=1}^{n-1} [f(i\Delta t)h(t - (i-1)\Delta t)] + f(t)h(\Delta t)$ <p>$f = h_n(t)$. $h = u_{i+1}$ (resposta ao impulso numericamente)</p> $u_{h-c}^{nu}(t) = \left[\frac{1}{\alpha(\Delta t)^2} [m] + \frac{\beta}{\alpha\Delta t} [c] + [k] \right]^{-1} \{h_n^1(t) + A + B\}$ <p>A=equação (20). B=equação (21).</p>

O deslocamento $u_{h-n}^{nu}(t)$ representa a solução numérica obtida pelo Método de Newmark quando excitado pela função Heaviside. O deslocamento $u_{h-c}^{nu}(t)$ representa a solução numérica obtida pela Integral de Convolução quando excitado pela função Heaviside. O deslocamento $u_g^{nu}(t)$ representa a resposta ao impulso obtida pelo Método de Newmark.

Na figura (2.19) está sendo representada a comparação das respostas obtidas pela convolução discreta e a resposta ao Heaviside obtida pelo Método de Newmark. Os erros absoluto e relativo obtido entre a resposta ao Heaviside e a convolução discreta estão representados pela figura (2.20).

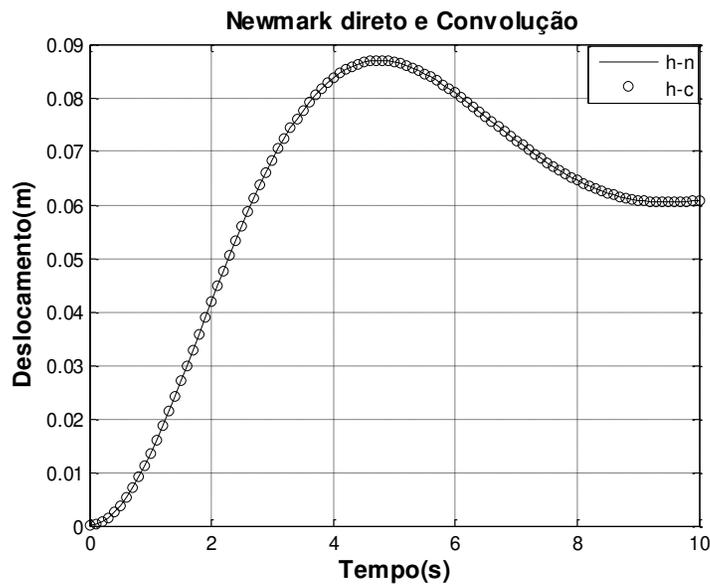


Figura 2.19: Comparação das soluções $u_{h-n}^{nu}(t)$ e $u_{h-c}^{nu}(t)$

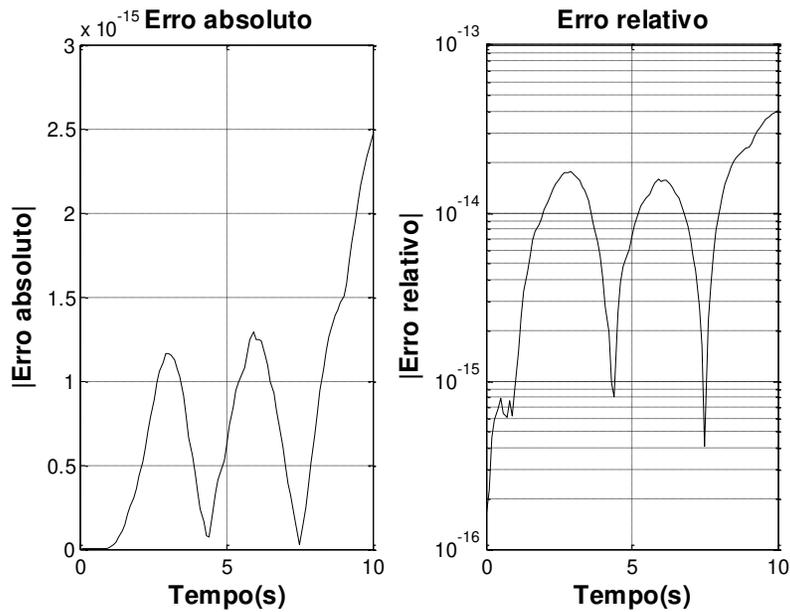
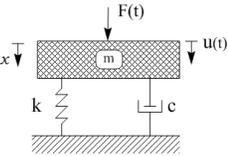


Figura 2.20: Erros absoluto e relativo

Os dois procedimentos utilizados para se obter as respostas à excitação de Heaviside forneceram resultados muito semelhantes, com erros menores que 10^{-14} .

A tabela 2.20 apresenta um breve resumo das formulas utilizadas para obter as respostas pelo método numérico de Newmark e pela convolução discreta. Sendo a força de excitação dada pela equação (2.50).

Tabela 2.20: Resposta ao impulso obtida numericamente e pela convolução discreta

Sistema com 1 grau de liberdade	Resposta ao trapézio	Convolução discreta
	<p>Resposta ao trapézio:</p> $u_{t-n}^{nu}(t) = \left[\frac{1}{\alpha(\Delta t)^2} [m] + \frac{\beta}{\alpha\Delta t} [c] + [k] \right]^{-1} \{F_t(t) + A + B\}$ <p>A=equação (20). B=equação (21). F(t) = F_t(t)</p>	<p>Convolução:</p> $u_{t-c}^{nu}(t) = \sum_{i=1}^{n-1} [f(i\Delta t)h(t - (i-1)\Delta t)] + f(t)h(\Delta t)$ <p>f = F_t(t). h = u_δ^{nu}(t) (resposta ao impulso numericamente)</p> $u_{\delta}^{nu}(t) = \left[\frac{1}{\alpha(\Delta t)^2} [m] + \frac{\beta}{\alpha\Delta t} [c] + [k] \right]^{-1} \{h_n^1(t) + A + B\}$ <p>A=equação (20). B=equação (21).</p>

O deslocamento $u_{t-n}^{nu}(t)$ representa a solução numérica obtida pelo método de Newmark quando excitado pela função trapezoidal. O deslocamento $u_{t-c}^{nu}(t)$ representa a solução numérica obtida pela Integral de Convolução quando excitado pela função trapezoidal. O deslocamento $u_8^{nu}(t)$ representa a resposta ao impulso obtida pelo Método de Newmark.

Na figura (2.21) é representada a comparação das respostas obtidas pela convolução discreta e a resposta ao trapézio obtida pelo Método de Newmark. Os erros absoluto e relativo obtido entre a resposta ao Heaviside e a convolução discreta estão representados pela figura (2.22).

Considera-se, em função dos resultados obtidos, que todas as metodologias básicas que serão utilizadas para o desenvolvimento dos procedimentos de acoplamento iterativo foram validadas.

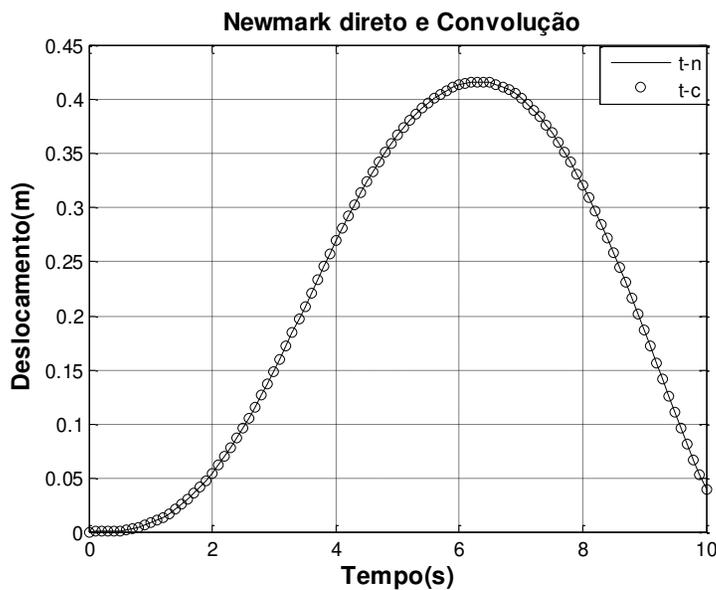


Figura 2.21: Comparação das soluções $u_{t-n}^{nu}(t)$ e $u_{t-c}^{nu}(t)$

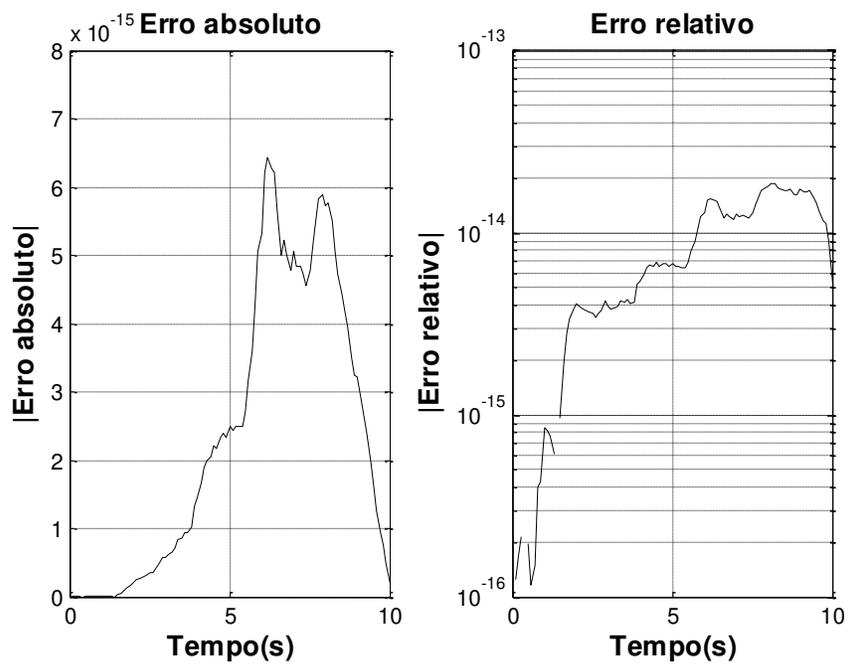


Figura 2.22: Erros absoluto e relativo

3 ACOPLAMENTO ITERATIVO

Neste capítulo será apresentado e validado o algoritmo de acoplamento iterativo em sistemas com 1, 2 e 3 graus de liberdade. A técnica de acoplamento iterativo Newmark-Newmark (N-N) consiste em formular os dois subsistemas pelo Método de Newmark e a técnica de acoplamento iterativo Newmark-Convolução (N-C) consiste em formular um subsistema pelo Método de Newmark e o outro pela Integral de Convolução.

A técnica de acoplamento iterativo N-N foi aplicada em sistemas com 1, 2 e 3 graus de liberdade. O sistema com 1 grau de liberdade foi dividido em dois subsistemas, sendo que cada subsistema terá 1 grau de liberdade. O sistema com 2 graus de liberdade foi dividido em dois subsistemas, sendo um subsistema contém 2 graus de liberdade e o outro 1 grau de liberdade. O sistema com 3 graus de liberdade foi dividido em dois subsistemas, sendo que cada subsistema terá 2 graus de liberdade. A função de excitação Delta de Dirac foi aplicada nos três sistemas como força externa para analisar o acoplamento iterativo.

A técnica de acoplamento iterativo Newmark-Convolução (N-C) foi aplicada no sistema com 1 grau de liberdade. O sistema com 1 grau de liberdade foi dividido em dois subsistemas, sendo que cada subsistema terá 1 grau de liberdade. Para analisar o acoplamento iterativo três diferentes tipos de excitações externas foram aplicados no sistema, o Delta de Dirac, o Heaviside e uma excitação trapezoidal.

Para acoplar os subsistemas, uma metodologia de acoplamento iterativo para análise transiente de sistema com interação solo-estrutura foi desenvolvida. O Método de Newmark foi utilizado para formular o subsistema que representa domínio limitado, e a Integral de Convolução foi utilizada para formular o subsistema que representa domínio ilimitado. O Método de Newmark será utilizado, pois ele é incondicionalmente estável. Segundo Hilber (1977), para um algoritmo incondicionalmente estável, um intervalo de tempo pode ser escolhido independentemente de considerações de estabilidade e, portanto, pode resultar numa economia substancial de esforço computacional, podendo assim usar passos de tempo maiores ou menores do que passo de tempo crítico na implementação do método. A Integral de Convolução foi

utilizada para formular o subsistema que apresenta domínio ilimitado, pois como existem soluções para domínios ilimitados no domínio da frequência, é possível através da Transformada Rápida de Fourier (FFT) a obtenção da resposta transiente dos solos a um impulso no tempo.

Tomando como exemplo a figura (3.1) o método de acoplamento iterativo proposto por este trabalho baseia-se em: na figura (3.1), em (a) tem-se o sistema massa-mola-amortecedor acoplado com massa (m_1) e deslocamento $u_1(t)$, os subsistemas se originarão a partir da divisão da massa do sistema acoplado. Em (b) temos o subsistema 1 com massa (m_{12}), deslocamento $u_{12}(t)$ e força de contato (força arbitrada) $F_{12}(t)$. Em (c) tem-se o subsistema 2 com massa (m_{21}), deslocamento $u_{21}(t)$ e força de contato (força arbitrada) $F_{21}(t)$. Para iniciar a iteração, devem ser arbitrados valores das força de contato. Depois de entrar com os valores das forças de contato, pode-se calcular os deslocamentos dos dois subsistemas e interagir esses deslocamentos de modo que a diferença entre eles seja menor do que o critério de acoplamento adotado.

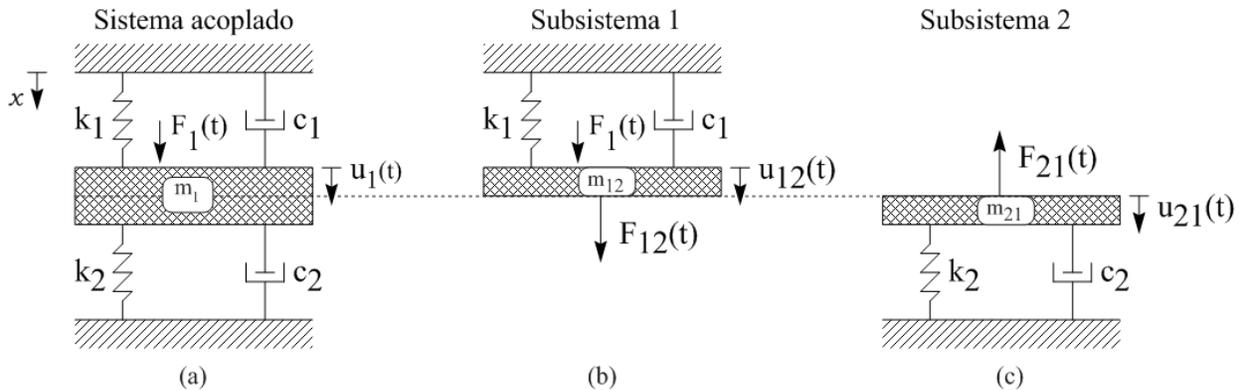


Figura 3.1: (a) Sistema Acoplado, (b) subsistema 1 de (a), (c) subsistema 2 de (a)

Uma das vantagens de trabalhar com subsistemas, está em poder modelar cada subsistema utilizando o método mais adequado.

3.1 ACOPLAMENTO ITERATIVO NEWMARK-NEWMARK EM UM SISTEMA COM 1 GRAU DE LIBERDADE.

Na figura (3.1), (a) representa o sistema acoplado com 1 grau de liberdade. Dividindo-se na massa o sistema acoplado, formam-se os subsistemas (b) e (c) com 1 grau de liberdade cada um. A força $F_1(t)$ é a força externa atuando no sistema acoplado (a), e as forças $F_{12}(t)$ e $F_{21}(t)$ são as forças de contato entre os subsistemas. Após a divisão da massa, a força externa ficará sendo aplicada no subsistema 1. O deslocamento do sistema acoplado é representado por $u_1(t)$, e dos subsistemas são representados por $u_{12}(t)$ e $u_{21}(t)$. A rigidez é representada por k_1 e k_2 e os amortecimentos são representados por c_1 e c_2 . A massa do sistema acoplado é representada por m_1 e dos subsistemas por m_{12} e m_{21} .

Para realização do acoplamento iterativo N-N devem ser arbitradas às forças de contato $F_{12}(t)$ e $F_{21}(t)$ para que os deslocamentos $u_{12}(t)$ e $u_{21}(t)$ dos subsistemas sejam calculados e acoplados iterativamente a fim de retornar ao deslocamento do sistema acoplado $u_1(t)$.

As equações de movimento do sistema (a), e dos subsistemas (b) e (c) da figura (3.1), são:

Sistema acoplado:

$$m_1 \ddot{u}_1 + (c_1 + c_2) \dot{u}_1 + (k_1 + k_2) u_1 = F_1(t) \quad (3.1)$$

Subsistema 1:

$$m_{12} \ddot{u}_{12} + c_1 \dot{u}_{12} + k_1 u_{12} = F_1(t) + F_{12}(t) \quad (3.2)$$

Subsistema 2:

$$m_{21} \ddot{u}_{21} + c_2 \dot{u}_{21} + k_2 u_{21} = -F_{21}(t) \quad (3.3)$$

Forças de contato:

As forças de contato (forças arbitradas) são parâmetros de entrada no acoplamento iterativo. O critério estabelecido para arbitrar o valor inicial das forças de contato é dado pelas equações abaixo.

Considerando que o deslocamento estático é dado por:

$$\mathbf{u}_{\text{est}} = \frac{\mathbf{F}_{\text{est}}}{k} = \frac{mg}{k} \quad (3.4)$$

onde \mathbf{F}_{est} é a força peso, m a massa do sistema e g a aceleração da gravidade. Partindo da definição da frequência natural ω_n^2 , a mesma pode ser escrita da seguinte forma:

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} \quad (3.5)$$

$$\frac{1}{\omega_n^2} = \frac{m}{k} \quad (3.6)$$

Multiplicando a equação (3.6) pela aceleração da gravidade, tem-se:

$$\frac{g}{\omega_n^2} = \frac{mg}{k} \quad (3.7)$$

Substituindo a equação (3.7) na equação (3.4), pode-se concluir que:

$$\mathbf{u}_{\text{est}} = \frac{g}{\omega_n^2} \quad (3.8)$$

A frequência natural utilizada para aplicar na equação (3.8), foi a maior frequência natural calculada entre o sistema acoplado e os subsistemas. Substituindo a equação (3.8) na equação (3.4) encontra-se a força estática. Considerando que a força arbitrada representa apenas uma porcentagem da força estática, pois não é interessante começar com força zero, deve-se multiplicar a equação (3.8) por um fator de porcentagem β_f . Sendo assim a força arbitrada é dada pela equação (3.9).

$$F_{ini} = \beta_f F_{est} = \beta_f k \frac{g}{\omega_n^2} \quad (3.9)$$

Acoplamento iterativo

Para programar o acoplamento iterativo foram utilizados dois ciclos, um em relação ao tempo t , e o outro, chamado de $cont$, em relação ao número de interações realizadas para atingir o critério de acoplamento. Os dois parâmetros são dados por:

$$t = 0 : \Delta t : t_{max}$$

onde Δt é o passo de tempo.

O parâmetro $cont$ vai até um $cont_{max}$ que é o número máximo de iterações realizadas pelo acoplamento iterativo em cada instante de tempo t , $cont = 1 : cont_{max}$.

Para iniciar o acoplamento iterativo, primeiro é feita a leitura das propriedades dos subsistemas, das condições iniciais, dos parâmetros de Newmark, do intervalo de tempo, do contador $cont$ e das forças de contato.

As propriedades do subsistema 1 e as condições iniciais são: massas m_{12} , amortecimento c_1 , rigidez k_1 , força de externa de excitação F_1 que será escrita no algoritmo como F_{i+1}^1 , deslocamento inicial u_i^{12} e velocidade inicial \dot{u}_i^{12} . A partir das propriedades do subsistema e das condições iniciais é possível calcular a aceleração inicial \ddot{u}_i^{12} .

As propriedades do subsistema 2 e as condições iniciais são: massa m_{21} , amortecimento c_2 , rigidez k_2 , deslocamento inicial u_i^{21} e velocidade inicial \dot{u}_i^{21} . A partir das propriedades do subsistema e das condições iniciais é possível calcular a aceleração inicial \ddot{u}_i^{21} .

O índice i e $i+1$ indica em que instante de tempo a variável está sendo calculada. O índice $i+1$ indica o tempo atual e o índice i o instante de tempo anterior ao atual.

As forças de contato F_{12} e F_{21} , que foram escritas no algoritmo como F_{i+1}^{12} e F_{i+1}^{21} , são as forças arbitradas, descrita pela equação (3.9), que são utilizadas para iniciar o acoplamento iterativo.

Passos do acoplamento iterativo

- Leitura das propriedades dos subsistemas, condições iniciais, parâmetros de Newmark e forças de contato (arbitradas);

Após a leitura das variáveis inicia-se um ciclo em relação ao tempo t sendo que o índice i indicará em que instante de tempo cada variável esta sendo calculada, e uma contagem feita pela variável $cont$, então relação ao número de interações feito em cada instante de tempo.

- Cálculo das acelerações iniciais de cada subsistema, \ddot{u}_i^{12} e \ddot{u}_i^{21} ;
- Arbitrar forças de contato F_{i+1}^{12} e F_{i+1}^{21} , e calcular os deslocamentos u_{i+1}^{12} e u_{i+1}^{21} ;
- Verificar se o critério de acoplamento está satisfeito a partir do valor de erro estipulado nos dados de entrada.

Se o critério de acoplamento não for satisfeito os passos descritos dentro do comando enquanto serão realizados até que o critério de acoplamento seja atingido. Se o critério de acoplamento for satisfeito na primeira leitura os passos descritos após o comando “while” (utilizados nas rotinas do Matlab) serão realizados.

Passos dentro do comando “while”

- Média dos deslocamentos u_{i+1}^{12} e u_{i+1}^{21} ;
- Cálculo da aceleração \ddot{u}_{i+1}^{12} , velocidade \dot{u}_{i+1}^{12} e força F_{i+1}^{12} ;
- Cálculo da aceleração \ddot{u}_{i+1}^{21} , velocidade \dot{u}_{i+1}^{21} e força F_{i+1}^{21} ;
- Média das forças F_{i+1}^{12} e F_{i+1}^{21} ;
- Atualização dos deslocamentos u_{i+1}^{12} e u_{i+1}^{21} ;

Passos fora do comando while

- Cálculo da aceleração \ddot{u}_{i+1}^{12} , velocidade \dot{u}_{i+1}^{12} e força F_{i+1}^{12} ;
- Cálculo da aceleração \ddot{u}_{i+1}^{21} , velocidade \dot{u}_{i+1}^{21} e força F_{i+1}^{21} ;
- Média das forças F_{i+1}^{12} e F_{i+1}^{21} ;

- Atualização dos deslocamentos u_{i+1}^{12} e u_{i+1}^{21} ;

O deslocamento atualizado já é o deslocamento da iteração $t + \Delta t$.

Algoritmo 3.1 Acoplamento Iterativo	
Inserir: $m_{12}, m_{21}, c_1, c_2, k_1, k_2, F_1, F_1(t=0), F_{12}, F_{21}, \alpha, \beta, u_i^{12}, \dot{u}_i^{12}, u_i^{21}, \dot{u}_i^{21}, n, erro, \Delta t, t, cont = 1$	
1.	para $i = 1$ até comprimento (t)
2.	$\ddot{u}_i^{12} = m_{12}^{-1} (F_i^1 - c_1 \dot{u}_i^{12} - k_1 u_i^{12})$
3.	$\ddot{u}_i^{21} = m_{21}^{-1} (F_i^1 - c_2 \dot{u}_i^{21} - k_2 u_i^{21})$
4.	$A_{12}(i) = m_{12} \left(\frac{1}{\alpha \Delta t^2} u_i^{12}(i) + \frac{1}{\alpha \Delta t} \dot{u}_i^{12}(i) + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \ddot{u}_i^{12}(i) \right)$ $B_{12}(i) = c_1 \left(\frac{\beta}{\alpha \Delta t} u_i^{12}(i) + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1 \right) \dot{u}_i^{12}(i) + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 2 \right) \frac{\Delta t}{2} \ddot{u}_i^{12}(i) \right)$ $u_{i+1}^{12}(i) = \left[\frac{1}{\alpha \Delta t^2} m_{12} + \frac{\beta}{\alpha \Delta t} c_1 + k_1 \right]^{-1} \{ F_{i+1}^1(i) + F_{i+1}^{12}(i) + A_{12}(i) + B_{12}(i) \}$
5.	$A_{21}(i) = m_{21} \left(\frac{1}{\alpha \Delta t^2} u_i^{21}(i) + \frac{1}{\alpha \Delta t} \dot{u}_i^{21}(i) + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \ddot{u}_i^{21}(i) \right)$ $B_{21}(i) = c_2 \left(\frac{\beta}{\alpha \Delta t} u_i^{21}(i) + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1 \right) \dot{u}_i^{21}(i) + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 2 \right) \frac{\Delta t}{2} \ddot{u}_i^{21}(i) \right)$ $u_{i+1}^{21}(i) = \left[\frac{1}{\alpha \Delta t^2} m_{21} + \frac{\beta}{\alpha \Delta t} c_2 + k_2 \right]^{-1} \{ F_{i+1}^2(i) + A_{21}(i) + B_{21}(i) \}$
6.	while $ u_{i+1}^{12}(i) - u_{i+1}^{21}(i) \geq erro$
7.	cont=cont+1
8.	$u_{i+1}^{12}(i) = u_{i+1}^{21}(i) = \frac{(u_{i+1}^{12}(i) + u_{i+1}^{21}(i))}{2}$
9.	$\ddot{u}_{i+1}^{12}(i) = \frac{1}{\alpha \Delta t^2} (u_{i+1}^{12}(i) - u_i^{12}(i)) - \frac{1}{\alpha \Delta t} \dot{u}_i^{12}(i) - \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \ddot{u}_i^{12}(i)$
10.	$\dot{u}_{i+1}^{12}(i) = u_i^{12}(i) + (1 - \beta) \Delta t \ddot{u}_i^{12}(i) + \beta \Delta t \ddot{u}_{i+1}^{12}(i)$

11.	$F_{i+1}^{12}(\mathbf{i}) = m\ddot{u}_{i+1}^{12}(\mathbf{i}) + c_1\dot{u}_{i+1}^{12}(\mathbf{i}) + k_1u_{i+1}^{12}(\mathbf{i}) - F_{i+1}^1(\mathbf{i})$
12.	$\ddot{u}_{i+1}^{21}(\mathbf{i}) = \frac{1}{\alpha\Delta t^2}(u_{i+1}^{21}(\mathbf{i}) - u_i^{21}(\mathbf{i})) - \frac{1}{\alpha\Delta t}\dot{u}_i^{21}(\mathbf{i}) - \left(\frac{1}{2\alpha} - 1\right)\ddot{u}_i^{21}(\mathbf{i})$
13.	$\dot{u}_{i+1}^{21}(\mathbf{i}) = u_i^{21}(\mathbf{i}) + (1 - \beta)\Delta t\ddot{u}_i^{21}(\mathbf{i}) + \beta\Delta t\dot{u}_{i+1}^{21}(\mathbf{i})$
14.	$F_{i+1}^{21}(\mathbf{i}) = -\left(m\ddot{u}_{i+1}^{21}(\mathbf{i}) + c_2\dot{u}_{i+1}^{21}(\mathbf{i}) + k_2u_{i+1}^{21}(\mathbf{i})\right)$
15.	$F_{i+1}^{12}(\mathbf{i}) = F_{i+1}^{21}(\mathbf{i}) = \frac{F_{i+1}^{12}(\mathbf{i}) + F_{i+1}^{21}(\mathbf{i})}{2}$
16.	$A_{12}(\mathbf{i}) = m_{12}\left(\frac{1}{\alpha\Delta t^2}u_i^{12}(\mathbf{i}) + \frac{1}{\alpha\Delta t}\dot{u}_i^{12}(\mathbf{i}) + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1\right)\ddot{u}_i^{12}(\mathbf{i})\right)$ $B_{12}(\mathbf{i}) = c_1\left(\frac{\beta}{\alpha\Delta t}u_i^{12}(\mathbf{i}) + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1\right)\dot{u}_i^{12}(\mathbf{i}) + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 2\right)\frac{\Delta t}{2}\ddot{u}_i^{12}(\mathbf{i})\right)$ $u_{i+1}^{12}(\mathbf{i}) = \left[\frac{1}{\alpha\Delta t^2}m_{12} + \frac{\beta}{\alpha\Delta t}c_1 + k_1\right]^{-1}\left\{F_{i+1}^1(\mathbf{i}) + F_{i+1}^{12}(\mathbf{i}) + A_{12}(\mathbf{i}) + B_{12}(\mathbf{i})\right\}$
17.	$A_{21}(\mathbf{i}) = m_{21}\left(\frac{1}{\alpha\Delta t^2}u_i^{21}(\mathbf{i}) + \frac{1}{\alpha\Delta t}\dot{u}_i^{21}(\mathbf{i}) + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1\right)\ddot{u}_i^{21}(\mathbf{i})\right)$ $B_{21}(\mathbf{i}) = c_2\left(\frac{\beta}{\alpha\Delta t}u_i^{21}(\mathbf{i}) + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1\right)\dot{u}_i^{21}(\mathbf{i}) + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 2\right)\frac{\Delta t}{2}\ddot{u}_i^{21}(\mathbf{i})\right)$ $u_{i+1}^{21}(\mathbf{i}) = \left[\frac{1}{\alpha\Delta t^2}m_{21} + \frac{\beta}{\alpha\Delta t}c_2 + k_2\right]^{-1}\left\{-F_{i+1}^{21}(\mathbf{i}) + A_{21}(\mathbf{i}) + B_{21}(\mathbf{i})\right\}$
18.	fim while
19.	$\ddot{u}_{i+1}^{12}(\mathbf{i}) = \frac{1}{\alpha\Delta t^2}(u_{i+1}^{12}(\mathbf{i}) - u_i^{12}(\mathbf{i})) - \frac{1}{\alpha\Delta t}\dot{u}_i^{12}(\mathbf{i}) - \left(\frac{1}{2\alpha} - 1\right)\ddot{u}_i^{12}(\mathbf{i})$
20.	$\dot{u}_{i+1}^{12}(\mathbf{i}) = u_i^{12}(\mathbf{i}) + (1 - \beta)\Delta t\ddot{u}_i^{12}(\mathbf{i}) + \beta\Delta t\dot{u}_{i+1}^{12}(\mathbf{i})$
21.	$F_{i+1}^{12}(\mathbf{i}) = m\ddot{u}_{i+1}^{12}(\mathbf{i}) + c_1\dot{u}_{i+1}^{12}(\mathbf{i}) + k_1u_{i+1}^{12}(\mathbf{i}) - F_{i+1}^1(\mathbf{i})$
22.	$\ddot{u}_{i+1}^{21}(\mathbf{i}) = \frac{1}{\alpha\Delta t^2}(u_{i+1}^{21}(\mathbf{i}) - u_i^{21}(\mathbf{i})) - \frac{1}{\alpha\Delta t}\dot{u}_i^{21}(\mathbf{i}) - \left(\frac{1}{2\alpha} - 1\right)\ddot{u}_i^{21}(\mathbf{i})$
23.	$\dot{u}_{i+1}^{21}(\mathbf{i}) = u_i^{21}(\mathbf{i}) + (1 - \beta)\Delta t\ddot{u}_i^{21}(\mathbf{i}) + \beta\Delta t\dot{u}_{i+1}^{21}(\mathbf{i})$

24.	$F_{i+1}^{21}(\mathbf{i}) = -\left(m\ddot{u}_{i+1}^{21}(\mathbf{i}) + c_2\dot{u}_{i+1}^{21}(\mathbf{i}) + k_2u_{i+1}^{21}(\mathbf{i})\right)$
25.	$F_{i+1}^{12}(\mathbf{i}) = F_{i+1}^{21}(\mathbf{i}) = \frac{F_{i+1}^{12}(\mathbf{i}) + F_{i+1}^{21}(\mathbf{i})}{2}$
26.	$A_{12}(\mathbf{i}) = m_{12}\left(\frac{1}{\alpha\Delta t^2}u_i^{12}(\mathbf{i}) + \frac{1}{\alpha\Delta t}\dot{u}_i^{12}(\mathbf{i}) + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1\right)\ddot{u}_i^{12}(\mathbf{i})\right)$ $B_{12}(\mathbf{i}) = c_1\left(\frac{\beta}{\alpha\Delta t}u_i^{12}(\mathbf{i}) + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1\right)\dot{u}_i^{12}(\mathbf{i}) + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 2\right)\frac{\Delta t}{2}\ddot{u}_i^{12}(\mathbf{i})\right)$ $u_{i+1}^{12}(\mathbf{i}) = \left[\frac{1}{\alpha\Delta t^2}m_{12} + \frac{\beta}{\alpha\Delta t}c_1 + k_1\right]^{-1} \left\{F_{i+1}^{12}(\mathbf{i}) + F_{i+1}^{21}(\mathbf{i}) + A_{12}(\mathbf{i}) + B_{12}(\mathbf{i})\right\}$
27.	$A_{21}(\mathbf{i}) = m_{21}\left(\frac{1}{\alpha\Delta t^2}u_i^{21}(\mathbf{i}) + \frac{1}{\alpha\Delta t}\dot{u}_i^{21}(\mathbf{i}) + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1\right)\ddot{u}_i^{21}(\mathbf{i})\right)$ $B_{21}(\mathbf{i}) = c_2\left(\frac{\beta}{\alpha\Delta t}u_i^{21}(\mathbf{i}) + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1\right)\dot{u}_i^{21}(\mathbf{i}) + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 2\right)\frac{\Delta t}{2}\ddot{u}_i^{21}(\mathbf{i})\right)$ $u_{i+1}^{21}(\mathbf{i}) = \left[\frac{1}{\alpha\Delta t^2}m_{21} + \frac{\beta}{\alpha\Delta t}c_2 + k_2\right]^{-1} \left\{-F_{i+1}^{21}(\mathbf{i}) + A_{21}(\mathbf{i}) + B_{21}(\mathbf{i})\right\}$
28.	fim para

A seguir será validado o acoplamento iterativo, aplicando o Método de Newmark no sistema acoplado.

3.1.1 VALIDAÇÃO DO ACOPLAMENTO ITERATIVO N-N COM 1 GRAU DE LIBERDADE

Para validar o acoplamento iterativo entre os deslocamentos $u_{i+1}^{12}(t)$ e $u_{i+1}^{21}(t)$ será aplicado o Método de Newmark no sistema acoplado para comparar os deslocamentos do acoplamento iterativo com o deslocamento $u_1(t)$. Nas tabelas abaixo se pode encontrar todos os parâmetros utilizados para obter a validação do acoplamento iterativo.

Tabela 3.1: Propriedades do sistema

Propriedades do sistema		
Massa	Rigidez	Amortecimento
$m_1 = 12 \text{ Kg}$	$k_1 = 40 \text{ N/m}$	$c_1 = 4.2 \text{ Kg/s}$
$m_{12} = 6 \text{ Kg}$	$k_{12} = 20 \text{ N/m}$	$c_{12} = 2.1 \text{ Kg/s}$
$m_{21} = 6 \text{ Kg}$	$k_{21} = 20 \text{ N/m}$	$c_{21} = 2.1 \text{ Kg/s}$

Tabela 3.2: Propriedades do sistema

Propriedades do sistema			
Passo crítico	Frequência natural	Amortecimento crítico	Período
$\Delta t_{\text{crit}1} = 1.095 \text{ s}$	$\omega_{n1} = 1.8257 \text{ rad/s}$	$C_{\text{cr}1} = 43.8 \text{ Kg/s}$	$T_{n1} = 1.095\pi \text{ s}$
$\Delta t_{\text{crit}12} = 1.095 \text{ s}$	$\omega_{n12} = 1.8257 \text{ rad/s}$	$C_{\text{cr}12} = 30.98 \text{ Kg/s}$	$T_{n12} = 1.095\pi \text{ s}$
$\Delta t_{\text{crit}21} = 1.095 \text{ s}$	$\omega_{n21} = 1.8257 \text{ rad/s}$	$C_{\text{cr}21} = 30.98 \text{ Kg/s}$	$T_{n21} = 1.095\pi \text{ s}$

Tabela 3.3: Condições iniciais e excitação externa

Velocidade inicial	Deslocamento inicial	Força excitadora	Constante 'n' para simulação numérica do Delta Dirac	Força de contato	erro
$\dot{u}_0 = 0$	$u_0 = 0$	Função Delta de Dirac (h_n^1)	$n = 40$	$F_{12} = 0.147 \text{ N}$ $F_{21} = -0.147 \text{ N}$ Para $\beta_f = 5\%$	10^{-9}

Tabela 3.4: Parâmetros de Newmark

Passo	Alfa	Beta
$\Delta t = 0.1 \text{ s}$	$\alpha = 0.25$	$\beta = 0.5$

O passo de tempo adotado foi um décimo menor do que o menor passo de tempo crítico (Δt_{crit}). É considerado como passo de tempo crítico, o menor passo encontrado entre o sistema acoplado e os subsistemas.

Ao longo dos testes de acoplamento iterativo com separação na massa, foi possível verificar que a distribuição de massa entre os sistemas pode ser aleatória, desde que pelo menos uma frequência natural de cada subsistema seja próxima ou a mesma de uma das frequências naturais do sistema acoplado. Sendo assim neste caso a relação utilizada para separar a massa do sistema completo em subsistemas foi:

$$\frac{m_{12}}{m_{21}} = 1$$

A distribuição de massa fora da frequência natural pode ser escolhida desde que cada subsistema tenha o passo de tempo adequado de forma que atinja convergência.

A figura (3.2) representa os deslocamentos $u_{12}(t)$ e $u_{21}(t)$ obtidos pelo acoplamento iterativo e o deslocamento $u_1(t)$ obtido pelo Método Newmark quando aplicado no sistema acoplado.

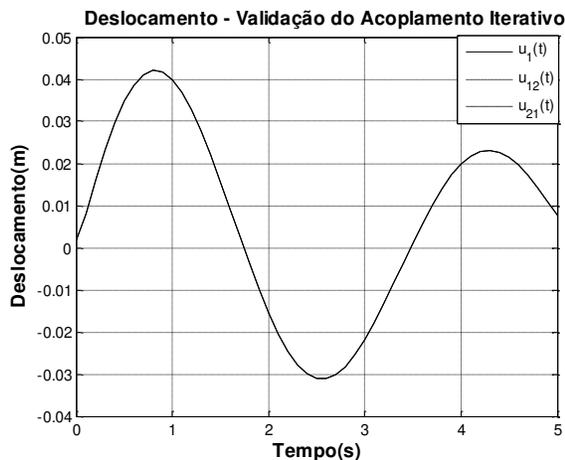


Figura 3.2: Deslocamentos obtidos pelo acoplamento iterativo e solução numérica direta

A figura (3.3) representa as análises de erros relativo e absoluto entre os deslocamentos iterativos $u_{12}(t)$ e $u_{21}(t)$. Eles mostram que satisfaz o critério de acoplamento.

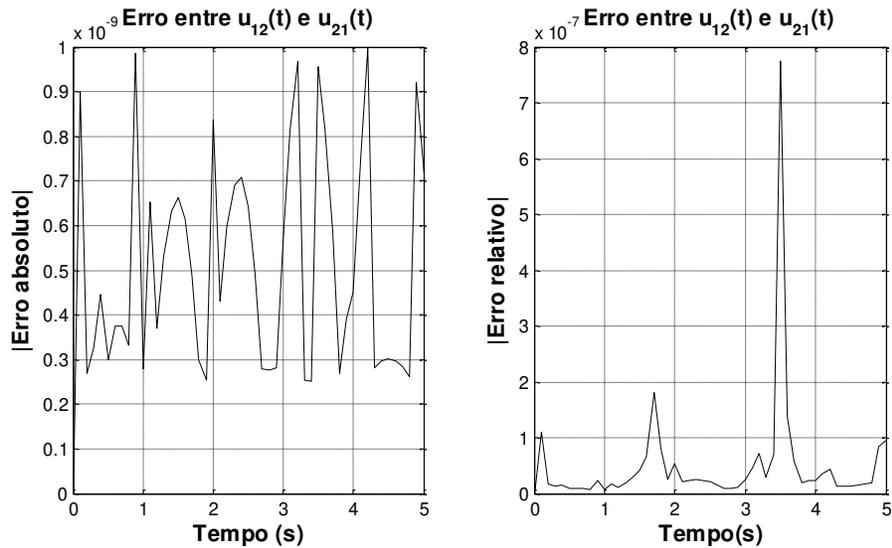


Figura 3.3: Análise de erro entre os deslocamentos iterativos $u_{12}(t)$ e $u_{21}(t)$

A figura (3.4) representa as análises de erros relativo e absoluto entre os deslocamentos $u_1(t)$ acoplado $u_{12}(t)$ iterativo. O erros podem ser menores desde que diminua o passo de tempo.

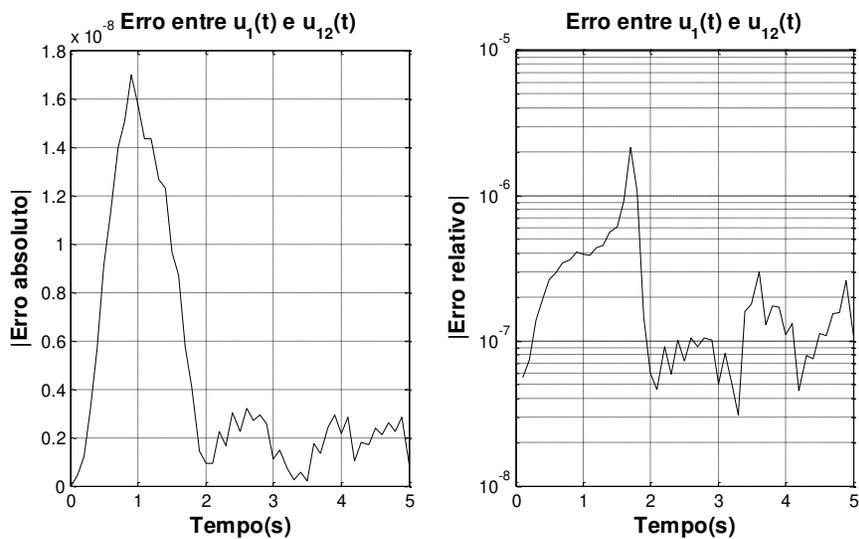


Figura 3.4: Análise de erro entre $u_1(t)$ numérico e $u_{12}(t)$ iterativo

A figura (3.5) representa a velocidade do sistema acoplado $\dot{u}_1(t)$ obtida pelo Método de Newmark e as velocidades dos subsistemas 1 e 2, $\dot{u}_{12}(t)$ e $\dot{u}_{21}(t)$ obtido pelo método iterativo.

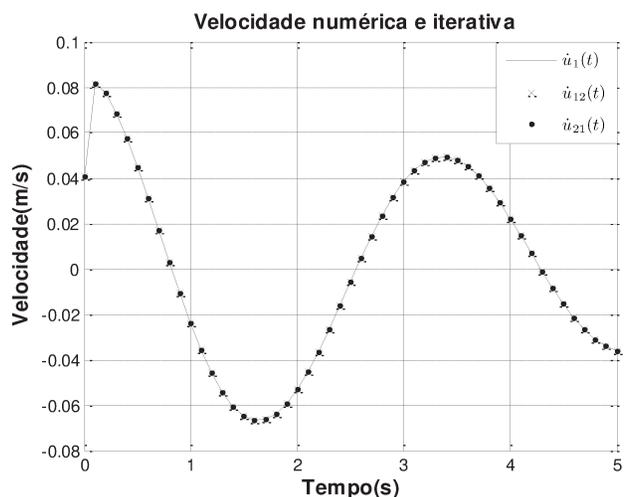


Figura 3.5: Velocidade obtida pelo método numérico e iterativo

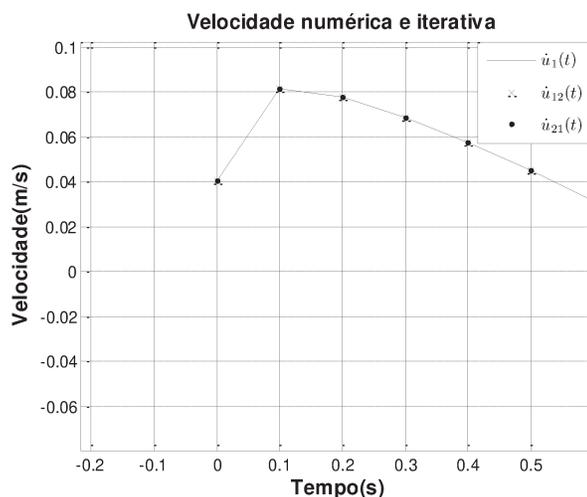


Figura 3.6: Ampliação da figura 3.5 até 0.6s

A figura (3.7) representa a aceleração do sistema acoplado $\ddot{u}_1(t)$ obtida pelo Método de Newmark e as acelerações dos subsistemas 1 e 2, $\ddot{u}_{12}(t)$ e $\ddot{u}_{21}(t)$ obtido pelo método iterativo.

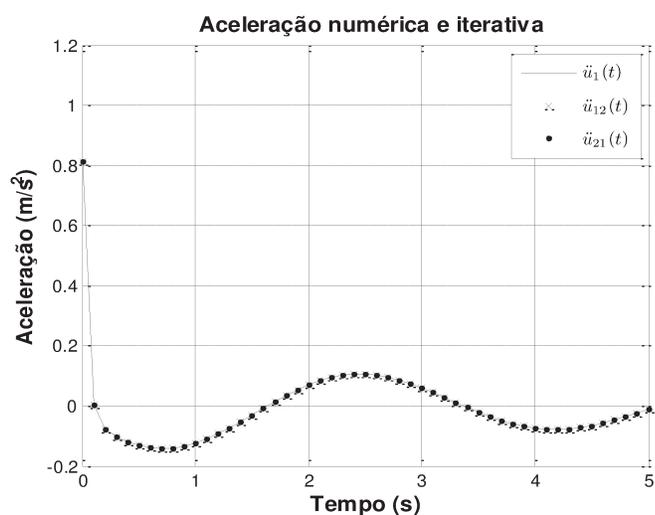


Figura 3.7: Aceleração obtida pelo método numérico e iterativo

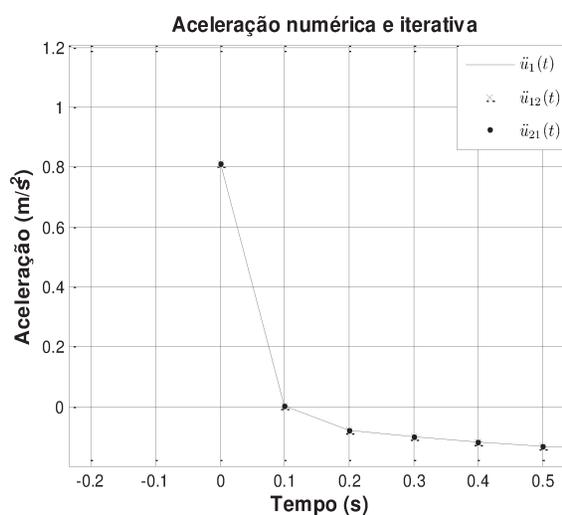


Figura 3.8: Ampliação da figura 3.7 até 0.6s

A figura (3.9) representa a convergência das forças de contato $F_{i+1}^{12}(t)$ e $F_{i+1}^{21}(t)$, e a figura (3.10) representa o número de iterações necessárias para atingir o critério de acoplamento em cada instante de tempo.

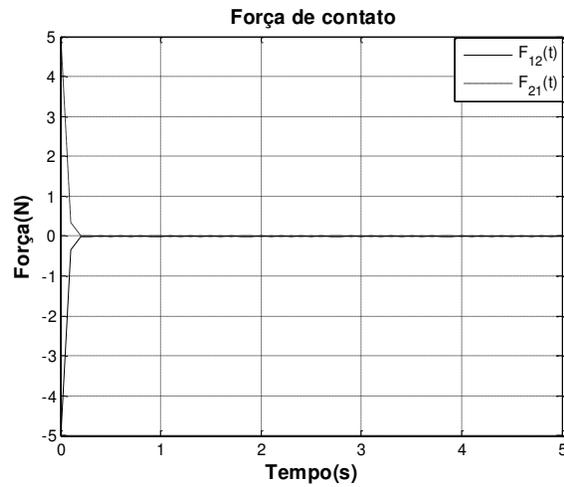


Figura 3.9: Forças de contato

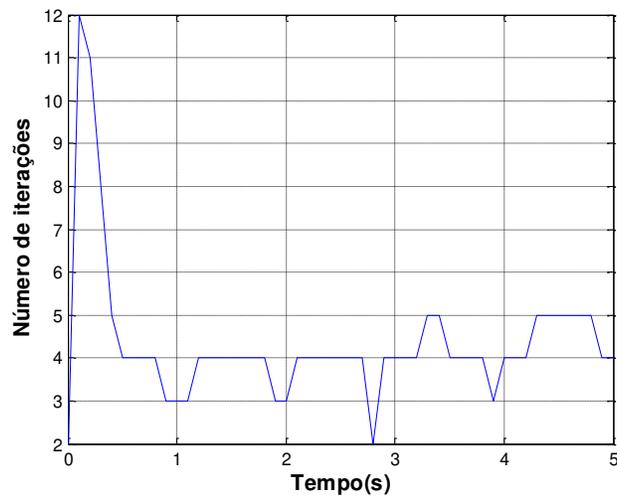


Figura 3.10: Número de iterações

Pode-se concluir em relação ao acoplamento iterativo aplicado em um sistema com 1 grau de liberdade que o método apresentou um erro baixo, da ordem de 10^{-8} . Em relação à figura (3.2) observa-se que o deslocamento decai com o tempo o que é esperado, pois é um sistema

amortecido, e também satisfaz as condições iniciais do problema em que o deslocamento e a velocidade inicial (no instante de tempo igual a zero) são zero e a força inicial diferente de zero. Sendo a velocidade a derivada do deslocamento, quando comparado à figura (3.2) com a figura (3.5) pode-se observar que a velocidade é zero nos pontos de máxima amplitude do deslocamento e quando comparado à figura (3.7) com a figura (3.5) pode-se observar também que a aceleração é a derivada da velocidade. Com a figura (3.9) conclui-se que as forças de contato satisfazem o equilíbrio, isto é, a soma das forças de contato deve ser zero. Pode-se concluir em relação à figura (3.10) que o número de iterações necessárias para atingir o acoplamento nos instantes de tempo iniciais é maior, pois como alguns termos são arbitrados, torna-se necessário realizar mais interações para convergir os valores.

3.2 ACOPLAMENTO ITERATIVO NEWMARK-NEWMARK EM UM SISTEMA COM 2 GRAUS DE LIBERDADE

Na figura (3.11), (a) representa um sistema com 2 graus de liberdade acoplado, o mesmo será dividido na massa m_2 e formará os subsistemas (b) e (c). Sendo (b) um subsistema com dois graus de liberdade e (c) com um grau de liberdade. Aplicando-se o acoplamento iterativo N-N nos subsistemas (b) e (c) os deslocamentos $u_{21}(t)$ e $u_{22}(t)$ retornarão ao deslocamento $u_2(t)$ do sistema acoplado (a). As forças $F_{21}(t)$ e $F_{22}(t)$ são as forças de contato entre os subsistemas, e a força $F_1(t)$ é uma força externa aplicada no primeiro grau de liberdade do sistema acoplado, sendo que quando a massa for dividida, a força $F_1(t)$ permanece na massa m_1 do subsistema 1.

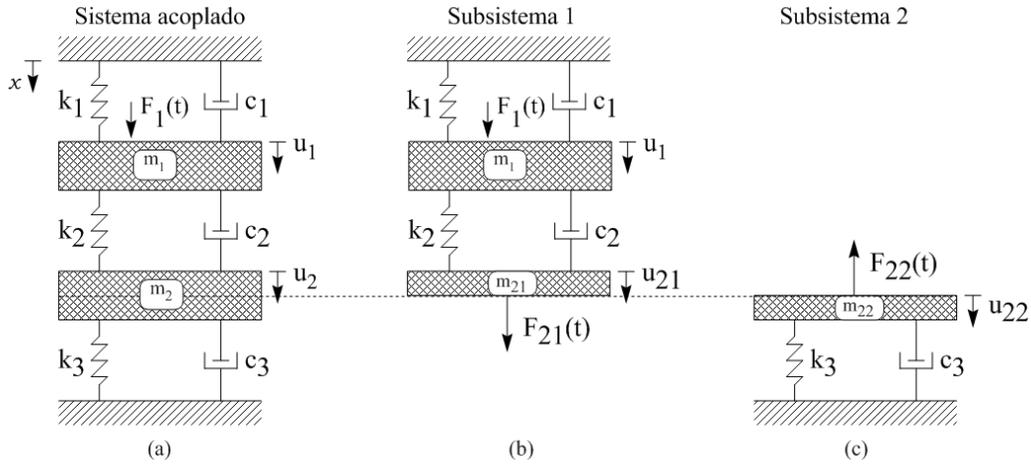


Figura 3.11: (a) Sistema com dois graus de liberdade acoplado, (b) e (c) subsistemas de (a)

As equações de movimento do sistema (a), e os subsistemas (b) e (c) da figura (3.11), são:

Sistema acoplado:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

Subsistema 1:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_{21} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_{21} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_{21} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_{21} \end{Bmatrix} \quad (3.11)$$

Subsistema 2:

$$m_{22} \ddot{u}_{22} + c_3 \dot{u}_{22} + k_3 u_{22} = -F_{22} \quad (3.12)$$

O procedimento do acoplamento iterativo para acoplar os subsistemas da figura (3.11) será o mesmo procedimento fornecido pelo algoritmo (3.1). A grande diferença está nas equações de movimento que foram escritas para um sistema com dois graus de liberdade, e também, as equações de movimento poderiam ser generalizados para n graus de liberdade.

Acoplamento iterativo

Para programar o acoplamento iterativo foram utilizados dois ciclos, um em relação ao tempo t , e o outro, chamado de $cont$, em relação ao número de interação realizada para atingir o critério de acoplamento. Os dois parâmetros são dados por:

$$t = 0 : \Delta t : t_{\max}$$

onde Δt é o passo de tempo.

O parâmetro $cont$ vai até um $cont_{\max}$ que é o número máximo de iterações em cada instante de tempo t , $cont = 1 : cont_{\max}$.

Para iniciar o acoplamento iterativo, primeiro é feita a leitura das propriedades dos subsistemas, das condições iniciais, dos parâmetros de Newmark, do intervalo de tempo, do contador $cont$ e das forças de contato.

As propriedades do subsistema 1 e as condições iniciais são: massas m_1 e m_{12} , amortecimento c_1 e c_2 , rigidez k_1 e k_2 , força de externa de excitação $F_1(t)$ que será escrita no algoritmo como F_{i+1}^1 , deslocamentos iniciais u_i^1 e u_i^{21} , e as velocidades iniciais \dot{u}_i^1 e \dot{u}_i^{21} . A partir das propriedades do subsistema e das condições iniciais é possível calcular o vetor aceleração inicial.

As propriedades do subsistema 2 e as condições iniciais são: massa m_{22} , amortecimento c_3 , rigidez k_3 , deslocamento inicial u_i^{22} e velocidade inicial \dot{u}_i^{22} . A partir das propriedades do subsistema e das condições iniciais é possível calcular a aceleração inicial \ddot{u}_i^{22} .

O índice i e $i+1$ indica em que instante de tempo a variável está sendo calculada. O índice $i+1$ indica o tempo atual e o índice i o instante de tempo anterior ao tempo atual.

As forças de contato $\begin{Bmatrix} 0 \\ F_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}$ e F_{22} , que foram escritas no algoritmo como $\begin{Bmatrix} 0 \\ F_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}$ e F_{i+1}^{22} , são

as forças arbitradas, descrita pela equação (3.9), que são utilizadas para iniciar o acoplamento iterativo.

Passos do acoplamento iterativo

- Leitura das propriedades dos subsistemas, condições iniciais, parâmetros de Newmark e forças de contato (arbitradas);

Após a leitura das variáveis inicia-se um ciclo em relação ao tempo t sendo que o índice i indicará em que instante de tempo cada variável esta sendo calculada, e uma contagem feita pela variável $cont$, então relação ao número de interações feito em cada instante de tempo.

- Calculo das acelerações iniciais de cada subsistema, \ddot{u}_i^{22} e $\begin{Bmatrix} \ddot{u}_i^1 \\ \ddot{u}_i^{21} \end{Bmatrix}$;
- Arbitrar forças de contato F_{i+1}^{22} e $\begin{Bmatrix} 0 \\ F_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}$, e calcular os deslocamentos u_{i+1}^{22} e $\begin{Bmatrix} u_{i+1}^1 \\ u_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}$;
- Verificar se o critério de acoplamento está satisfeito a partir do valor de erro estipulado nos dados de entrada.

Se o critério de acoplamento não for satisfeito os passos descritos dentro do comando enquanto serão realizados até que o critério de acoplamento seja atingido. Se o critério de acoplamento for satisfeito na primeira iteração os passos descritos após o comando “**while**” serão realizados.

Passos dentro do comando “while”

- Média dos deslocamentos u_{i+1}^{22} e u_{i+1}^{21} ;
- Cálculo da aceleração $\begin{Bmatrix} \ddot{u}_{i+1}^1 \\ \ddot{u}_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}$, velocidade $\begin{Bmatrix} \dot{u}_{i+1}^1 \\ \dot{u}_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}$ e força $\begin{Bmatrix} 0 \\ F_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}$;
- Cálculo da aceleração \ddot{u}_{i+1}^{22} , velocidade \dot{u}_{i+1}^{22} e força F_{i+1}^{22} ;
- Média das forças F_{i+1}^{22} e F_{i+1}^{21} ;
- Atualização dos deslocamentos u_{i+1}^{22} e $\begin{Bmatrix} u_{i+1}^1 \\ u_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}$;

Passos fora do comando “while”

- Cálculo da aceleração $\begin{Bmatrix} \ddot{u}_{i+1}^1 \\ \ddot{u}_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}$, velocidade $\begin{Bmatrix} \dot{u}_{i+1}^1 \\ \dot{u}_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}$ e força $\begin{Bmatrix} 0 \\ F_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}$;

- Cálculo da aceleração \ddot{u}_{i+1}^{22} , velocidade \dot{u}_{i+1}^{22} e força F_{i+1}^{22} ;
- Média das forças F_{i+1}^{22} e F_{i+1}^{21} ;
- Atualização dos deslocamentos u_{i+1}^{22} e $\begin{Bmatrix} u_{i+1}^1 \\ u_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}$;

O deslocamento atualizado já é o deslocamento da iteração $t + \Delta t$.

Algoritmo 3.2 Acoplamento Iterativo	
Inserir:	
$m_1, m_{21}, m_{22}, c_1, c_2, c_3, k_1, k_2, k_3, F_1, F_1(t=0), F_{22}, F_{21}, \alpha, \beta, u_i^1, \dot{u}_i^1, u_i^{21}, \dot{u}_i^{21}, u_i^{22}, \dot{u}_i^{22}, n, erro, \Delta t, t, cont = 1$	
1.	para $i = 1$ até comprimento (t)
2.	$\begin{Bmatrix} \ddot{u}_i^1 \\ \ddot{u}_i^{21} \end{Bmatrix}(:, i) = [m]^{-1} \left(\begin{Bmatrix} F_i^1 \\ 0 \end{Bmatrix} - [c] \begin{Bmatrix} \dot{u}_i^1 \\ \dot{u}_i^{21} \end{Bmatrix} - [k] \begin{Bmatrix} u_i^1 \\ u_i^{21} \end{Bmatrix} \right)$
3.	$\ddot{u}_i^{22} = m_{22}^{-1} (F_i^1 - c_2 \dot{u}_i^{22} - k_2 u_i^{22})$
4.	$A_{21}(:, i) = [m] \left(\frac{1}{\alpha \Delta t^2} \begin{Bmatrix} u_i^1 \\ u_i^{21} \end{Bmatrix}(:, i) + \frac{1}{\alpha \Delta t} \begin{Bmatrix} \dot{u}_i^1 \\ \dot{u}_i^{21} \end{Bmatrix}(:, i) + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \begin{Bmatrix} \ddot{u}_i^1 \\ \ddot{u}_i^{21} \end{Bmatrix}(:, i) \right)$ $B_{21}(:, i) = [c] \left(\frac{\beta}{\alpha \Delta t} \begin{Bmatrix} u_i^1 \\ u_i^{21} \end{Bmatrix}(:, i) + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1 \right) \begin{Bmatrix} \dot{u}_i^1 \\ \dot{u}_i^{21} \end{Bmatrix}(:, i) + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 2 \right) \frac{\Delta t}{2} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_i^1 \\ \ddot{u}_i^{21} \end{Bmatrix}(:, i) \right)$ $\begin{Bmatrix} u_{i+1}^1 \\ u_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}(:, i) = \left[\frac{1}{\alpha \Delta t^2} [m] + \frac{\beta}{\alpha \Delta t} [c] + [k] \right]^{-1} \left\{ \begin{Bmatrix} F_{i+1}^1 \\ F_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}(:, i) + A_{21}(:, i) + B_{21}(:, i) \right\}$
5.	$A_{22}(i) = m_{22} \left(\frac{1}{\alpha \Delta t^2} u_i^{22}(i) + \frac{1}{\alpha \Delta t} \dot{u}_i^{22}(i) + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \ddot{u}_i^{22}(i) \right)$ $B_{22}(i) = c_3 \left(\frac{\beta}{\alpha \Delta t} u_i^{22}(i) + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1 \right) \dot{u}_i^{22}(i) + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 2 \right) \frac{\Delta t}{2} \ddot{u}_i^{22}(i) \right)$ $u_{i+1}^{22}(i) = \left[\frac{1}{\alpha \Delta t^2} m_{22} + \frac{\beta}{\alpha \Delta t} c_3 + k_3 \right]^{-1} \left\{ -F_{i+1}^{22}(i) + A_{22}(i) + B_{22}(i) \right\}$

6.	while $\left \mathbf{u}_{i+1}^{21}(\mathbf{i}) - \mathbf{u}_{i+1}^{22}(\mathbf{i}) \right \geq \text{erro}$
7.	cont=cont+1
8.	$\mathbf{u}_{i+1}^{22}(\mathbf{i}) = \mathbf{u}_{i+1}^{21}(\mathbf{i}) = \frac{\left(\mathbf{u}_{i+1}^{22}(\mathbf{i}) + \mathbf{u}_{i+1}^{21}(\mathbf{i}) \right)}{2}$
9.	$\begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_{i+1}^1 \\ \ddot{\mathbf{u}}_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}(:, \mathbf{i}) = \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \left(\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{i+1}^1 \\ \mathbf{u}_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}(:, \mathbf{i}) - \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i^1 \\ \mathbf{u}_i^{21} \end{Bmatrix}(:, \mathbf{i}) \right) - \frac{1}{\alpha \Delta t} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_i^1 \\ \dot{\mathbf{u}}_i^{21} \end{Bmatrix}(:, \mathbf{i}) - \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_i^1 \\ \ddot{\mathbf{u}}_i^{21} \end{Bmatrix}(:, \mathbf{i})$
10.	$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_{i+1}^1 \\ \dot{\mathbf{u}}_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}(:, \mathbf{i}) = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i^1 \\ \mathbf{u}_i^{21} \end{Bmatrix}(:, \mathbf{i}) + (1 - \beta) \Delta t \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_i^1 \\ \ddot{\mathbf{u}}_i^{21} \end{Bmatrix}(:, \mathbf{i}) + \beta \Delta t \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_{i+1}^1 \\ \ddot{\mathbf{u}}_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}(:, \mathbf{i})$
11.	$\begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{F}_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}(:, \mathbf{i}) = [\mathbf{m}] \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_{i+1}^1 \\ \ddot{\mathbf{u}}_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}(:, \mathbf{i}) + [\mathbf{c}] \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_{i+1}^1 \\ \dot{\mathbf{u}}_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}(:, \mathbf{i}) + [\mathbf{k}] \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{i+1}^1 \\ \mathbf{u}_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}(:, \mathbf{i}) - \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{i+1}^1 \\ 0 \end{Bmatrix}(:, \mathbf{i})$
12.	$\ddot{\mathbf{u}}_{i+1}^{22}(\mathbf{i}) = \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \left(\mathbf{u}_{i+1}^{22}(\mathbf{i}) - \mathbf{u}_i^{22}(\mathbf{i}) \right) - \frac{1}{\alpha \Delta t} \dot{\mathbf{u}}_i^{22}(\mathbf{i}) - \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \ddot{\mathbf{u}}_i^{22}(\mathbf{i})$
13.	$\dot{\mathbf{u}}_{i+1}^{22}(\mathbf{i}) = \mathbf{u}_i^{22}(\mathbf{i}) + (1 - \beta) \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_i^{22}(\mathbf{i}) + \beta \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_{i+1}^{22}(\mathbf{i})$
14.	$\mathbf{F}_{i+1}^{22}(\mathbf{i}) = - \left(\mathbf{m}_{22} \ddot{\mathbf{u}}_{i+1}^{22}(\mathbf{i}) + \mathbf{c}_3 \dot{\mathbf{u}}_{i+1}^{22}(\mathbf{i}) + \mathbf{k}_3 \mathbf{u}_{i+1}^{22}(\mathbf{i}) \right)$
15.	$\mathbf{F}_{i+1}^{22}(\mathbf{i}) = \mathbf{F}_{i+1}^{21}(\mathbf{i}) = \frac{\mathbf{F}_{i+1}^{22}(\mathbf{i}) + \mathbf{F}_{i+1}^{21}(\mathbf{i})}{2}$
16.	$\mathbf{A}_{21}(:, \mathbf{i}) = [\mathbf{m}] \left(\frac{1}{\alpha \Delta t^2} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i^1 \\ \mathbf{u}_i^{21} \end{Bmatrix}(:, \mathbf{i}) + \frac{1}{\alpha \Delta t} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_i^1 \\ \dot{\mathbf{u}}_i^{21} \end{Bmatrix}(:, \mathbf{i}) + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_i^1 \\ \ddot{\mathbf{u}}_i^{21} \end{Bmatrix}(:, \mathbf{i}) \right)$ $\mathbf{B}_{21}(:, \mathbf{i}) = [\mathbf{c}] \left(\frac{\beta}{\alpha \Delta t} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i^1 \\ \mathbf{u}_i^{21} \end{Bmatrix}(:, \mathbf{i}) + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1 \right) \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_i^1 \\ \dot{\mathbf{u}}_i^{21} \end{Bmatrix}(:, \mathbf{i}) + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 2 \right) \frac{\Delta t}{2} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_i^1 \\ \ddot{\mathbf{u}}_i^{21} \end{Bmatrix}(:, \mathbf{i}) \right)$ $\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{i+1}^1 \\ \mathbf{u}_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}(:, \mathbf{i}) = \left[\frac{1}{\alpha \Delta t^2} [\mathbf{m}] + \frac{\beta}{\alpha \Delta t} [\mathbf{c}] + [\mathbf{k}] \right]^{-1} \left\{ \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{i+1}^1 \\ \mathbf{F}_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}(:, \mathbf{i}) + \mathbf{A}_{21}(:, \mathbf{i}) + \mathbf{B}_{21}(:, \mathbf{i}) \right\}$
17.	$\mathbf{A}_{22}(\mathbf{i}) = \mathbf{m}_{22} \left(\frac{1}{\alpha \Delta t^2} \mathbf{u}_i^{22}(\mathbf{i}) + \frac{1}{\alpha \Delta t} \dot{\mathbf{u}}_i^{22}(\mathbf{i}) + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \ddot{\mathbf{u}}_i^{22}(\mathbf{i}) \right)$ $\mathbf{B}_{22}(\mathbf{i}) = \mathbf{c}_3 \left(\frac{\beta}{\alpha \Delta t} \mathbf{u}_i^{22}(\mathbf{i}) + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1 \right) \dot{\mathbf{u}}_i^{22}(\mathbf{i}) + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 2 \right) \frac{\Delta t}{2} \ddot{\mathbf{u}}_i^{22}(\mathbf{i}) \right)$

	$\mathbf{u}_{i+1}^{22}(\mathbf{i}) = \left[\frac{1}{\alpha \Delta t^2} \mathbf{m}_{22} + \frac{\beta}{\alpha \Delta t} \mathbf{c}_3 + \mathbf{k}_3 \right]^{-1} \left\{ -\mathbf{F}_{i+1}^{22}(\mathbf{i}) + \mathbf{A}_{22}(\mathbf{i}) + \mathbf{B}_{22}(\mathbf{i}) \right\}$
18.	fim while
19.	$\begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_{i+1}^1 \\ \ddot{\mathbf{u}}_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}(:, \mathbf{i}) = \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \left(\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{i+1}^1 \\ \mathbf{u}_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}(:, \mathbf{i}) - \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i^1 \\ \mathbf{u}_i^{21} \end{Bmatrix}(:, \mathbf{i}) \right) - \frac{1}{\alpha \Delta t} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_i^1 \\ \dot{\mathbf{u}}_i^{21} \end{Bmatrix}(:, \mathbf{i}) - \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_i^1 \\ \ddot{\mathbf{u}}_i^{21} \end{Bmatrix}(:, \mathbf{i})$
20.	$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_{i+1}^1 \\ \dot{\mathbf{u}}_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}(:, \mathbf{i}) = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i^1 \\ \mathbf{u}_i^{21} \end{Bmatrix}(:, \mathbf{i}) + (1 - \beta) \Delta t \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_i^1 \\ \dot{\mathbf{u}}_i^{21} \end{Bmatrix}(:, \mathbf{i}) + \beta \Delta t \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_{i+1}^1 \\ \ddot{\mathbf{u}}_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}(:, \mathbf{i})$
21.	$\begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{F}_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}(:, \mathbf{i}) = [\mathbf{m}] \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_{i+1}^1 \\ \ddot{\mathbf{u}}_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}(:, \mathbf{i}) + [\mathbf{c}] \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_{i+1}^1 \\ \dot{\mathbf{u}}_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}(:, \mathbf{i}) + [\mathbf{k}] \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{i+1}^1 \\ \mathbf{u}_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}(:, \mathbf{i}) - \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{i+1}^1 \\ 0 \end{Bmatrix}(:, \mathbf{i})$
22.	$\ddot{\mathbf{u}}_{i+1}^{22}(\mathbf{i}) = \frac{1}{\alpha \Delta t^2} (\mathbf{u}_{i+1}^{22}(\mathbf{i}) - \mathbf{u}_i^{22}(\mathbf{i})) - \frac{1}{\alpha \Delta t} \dot{\mathbf{u}}_i^{22}(\mathbf{i}) - \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \ddot{\mathbf{u}}_i^{22}(\mathbf{i})$
23.	$\dot{\mathbf{u}}_{i+1}^{22}(\mathbf{i}) = \mathbf{u}_i^{22}(\mathbf{i}) + (1 - \beta) \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_i^{22}(\mathbf{i}) + \beta \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_{i+1}^{22}(\mathbf{i})$
24.	$\mathbf{F}_{i+1}^{22}(\mathbf{i}) = -(\mathbf{m}_{22} \ddot{\mathbf{u}}_{i+1}^{22}(\mathbf{i}) + \mathbf{c}_3 \dot{\mathbf{u}}_{i+1}^{22}(\mathbf{i}) + \mathbf{k}_3 \mathbf{u}_{i+1}^{22}(\mathbf{i}))$
25.	$\mathbf{F}_{i+1}^{22}(\mathbf{i}) = \mathbf{F}_{i+1}^{21}(\mathbf{i}) = \frac{\mathbf{F}_{i+1}^{22}(\mathbf{i}) + \mathbf{F}_{i+1}^{21}(\mathbf{i})}{2}$
26.	$\mathbf{A}_{21}(:, \mathbf{i}) = [\mathbf{m}] \left(\frac{1}{\alpha \Delta t^2} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i^1 \\ \mathbf{u}_i^{21} \end{Bmatrix}(:, \mathbf{i}) + \frac{1}{\alpha \Delta t} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_i^1 \\ \dot{\mathbf{u}}_i^{21} \end{Bmatrix}(:, \mathbf{i}) + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_i^1 \\ \ddot{\mathbf{u}}_i^{21} \end{Bmatrix}(:, \mathbf{i}) \right)$ $\mathbf{B}_{21}(:, \mathbf{i}) = [\mathbf{c}] \left(\frac{\beta}{\alpha \Delta t} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i^1 \\ \mathbf{u}_i^{21} \end{Bmatrix}(:, \mathbf{i}) + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1 \right) \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_i^1 \\ \dot{\mathbf{u}}_i^{21} \end{Bmatrix}(:, \mathbf{i}) + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 2 \right) \frac{\Delta t}{2} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_i^1 \\ \ddot{\mathbf{u}}_i^{21} \end{Bmatrix}(:, \mathbf{i}) \right)$ $\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{i+1}^1 \\ \mathbf{u}_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}(:, \mathbf{i}) = \left[\frac{1}{\alpha \Delta t^2} [\mathbf{m}] + \frac{\beta}{\alpha \Delta t} [\mathbf{c}] + [\mathbf{k}] \right]^{-1} \left\{ \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{i+1}^1 \\ \mathbf{F}_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}(:, \mathbf{i}) + \mathbf{A}_{21}(:, \mathbf{i}) + \mathbf{B}_{21}(:, \mathbf{i}) \right\}$
27.	$\mathbf{A}_{22}(\mathbf{i}) = \mathbf{m}_{22} \left(\frac{1}{\alpha \Delta t^2} \mathbf{u}_i^{22}(\mathbf{i}) + \frac{1}{\alpha \Delta t} \dot{\mathbf{u}}_i^{22}(\mathbf{i}) + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \ddot{\mathbf{u}}_i^{22}(\mathbf{i}) \right)$ $\mathbf{B}_{22}(\mathbf{i}) = \mathbf{c}_3 \left(\frac{\beta}{\alpha \Delta t} \mathbf{u}_i^{22}(\mathbf{i}) + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1 \right) \dot{\mathbf{u}}_i^{22}(\mathbf{i}) + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 2 \right) \frac{\Delta t}{2} \ddot{\mathbf{u}}_i^{22}(\mathbf{i}) \right)$ $\mathbf{u}_{i+1}^{22}(\mathbf{i}) = \left[\frac{1}{\alpha \Delta t^2} \mathbf{m}_{22} + \frac{\beta}{\alpha \Delta t} \mathbf{c}_3 + \mathbf{k}_3 \right]^{-1} \left\{ -\mathbf{F}_{i+1}^{22}(\mathbf{i}) + \mathbf{A}_{22}(\mathbf{i}) + \mathbf{B}_{22}(\mathbf{i}) \right\}$

28.	fim para
-----	----------

A seguir será validado o acoplamento iterativo, aplicando o Método de Newmark no sistema acoplado.

3.2.1 VALIDAÇÃO DO ACOPLAMENTO ITERATIVO N-N COM 2 GRAUS DE LIBERDADE

Para validar o acoplamento iterativo entre os deslocamentos $u_{i+1}^{22}(t)$ e $u_{i+1}^{21}(t)$ será aplicado o Método de Newmark no sistema acoplado para comparar os deslocamentos do acoplamento iterativo com o deslocamento $u_2(t)$. Nas tabelas abaixo se pode encontrar todos os parâmetros utilizados para obter a validação do acoplamento iterativo.

Tabela 3.5: Propriedades do sistema

Propriedades do sistema		
Massa	Rigidez	Amortecimento
$m_1 = 0.6 \text{ Kg}$	$k_1 = 3 \text{ N/m}$	$c_1 = 1 \text{ Kg/s}$
$m_{12} = 1 \text{ Kg}$	$k_2 = 3 \text{ N/m}$	$c_2 = 0.8 \text{ Kg/s}$
$m_{21} = 5 \text{ Kg}$	$k_3 = 4 \text{ N/m}$	$c_{21} = 0.8 \text{ Kg/s}$

Tabela 3.6: Propriedades do sistema

Propriedades do sistema acoplado e dos subsistemas			
	Frequência natural:	Período:	Passo crítico:
Sistema Acoplado	$\omega_1 = 2.3597 \text{ rad/s}$ $\omega_2 = 0.7737 \text{ rad/s}$	$T_1 = 2.6627 \text{ s}$ $T_2 = 8.1206 \text{ s}$	$\Delta t_{crit1} = 0.8476 \text{ s}$ $\Delta t_{crit2} = 2.5849 \text{ s}$
Subsistema 1	$\omega_1 = 0.7713 \text{ rad/s}$ $\omega_2 = 2.8992 \text{ rad/s}$	$T_1 = 8.1464 \text{ s}$ $T_2 = 2.1672 \text{ s}$	$\Delta t_{crit1} = 2.5931 \text{ s}$ $\Delta t_{crit2} = 0.6899 \text{ s}$

Subsistema 2	$\omega_1 = 0.7746 \text{ rad/s}$	$T_1 = 8.1116 \text{ s}$	$\Delta t_{crit1} = 2.5820 \text{ s}$
---------------------	-----------------------------------	--------------------------	---------------------------------------

Tabela 3.7: Condições iniciais e excitação externa

Velocidade inicial	Deslocamento inicial	Força excitadora	Constante 'n' para simulação numérica do Delta Dirac	Força de contato	erro
$\dot{u}_0 = 0$	$u_0 = 0$	Função Delta de Dirac (h_n^1)	$n = 40$	$F_{21} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.8245 \end{Bmatrix} \text{ N}$ $F_{22} = -0.8245 \text{ N}$ Para $\beta_f = 5\%$	10^{-9}

Tabela 3.8: Parâmetros de Newmark

Passo	Alfa	Beta
$\Delta t = 0.01 \text{ s}$	$\alpha = 0.25$	$\beta = 0.5$

A figura (3.12) representa os deslocamentos $u_{22}(t)$ e $u_{21}(t)$ obtidos pelo acoplamento iterativo e o deslocamento $u_2(t)$ obtido pelo Método Newmark quando aplicado no sistema acoplado.

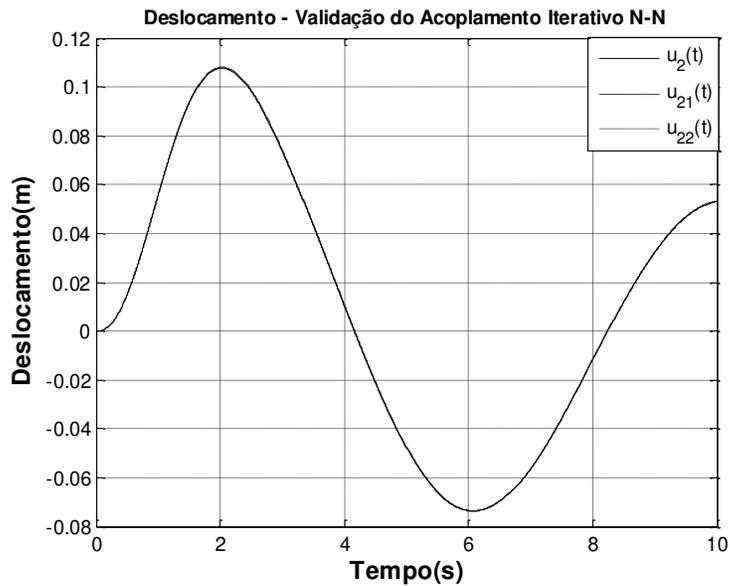


Figura 3.12: Deslocamentos obtidos pelo acoplamento iterativo e solução numérica direta

A figura (3.13) representa as análises de erros relativo e absoluto entre os deslocamentos iterativos $u_{21}(t)$ e $u_{22}(t)$. Ela mostra que o critério de acoplamento é satisfeito.

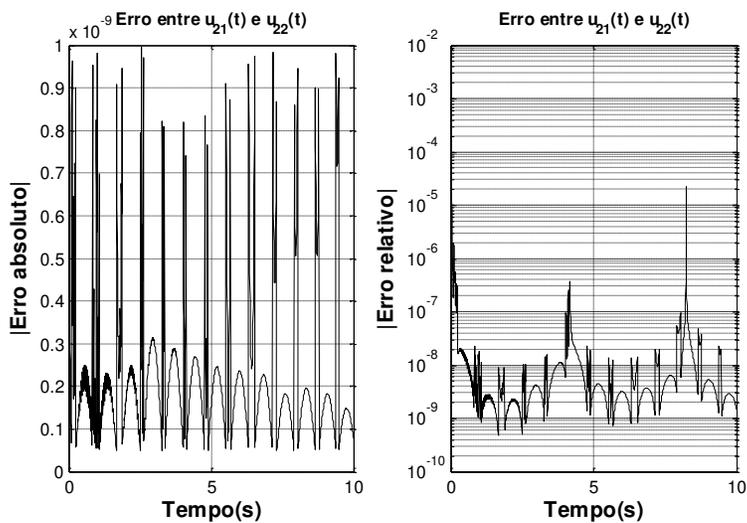


Figura 3.13: Análise de erro entre os deslocamentos iterativos $u_{22}(t)$ e $u_{21}(t)$

A figura (3.14) representa as análises de erros relativo e absoluto entre os deslocamentos $u_2(t)$ numérico $u_{21}(t)$ iterativo. O erros podem ser menores desde que diminua o passo de tempo.

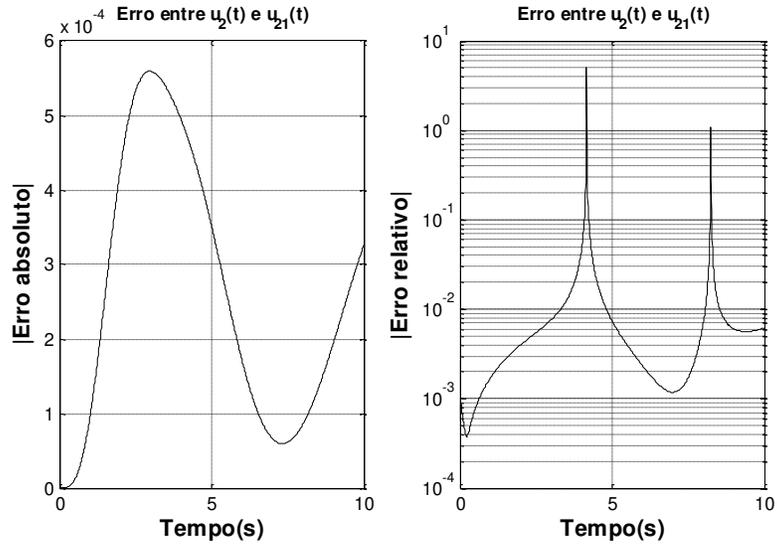


Figura 3.14: Análise de erro entre $u_2(t)$ numérico e $u_{21}(t)$ iterativo

A figura (3.15) representa o vetor de velocidade do sistema acoplado $\begin{Bmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \end{Bmatrix}$ obtido pelo Método de Newmark e o vetor de velocidade do subsistemas 1, $\begin{Bmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_{21}(t) \end{Bmatrix}$, obtido pelo método iterativo.

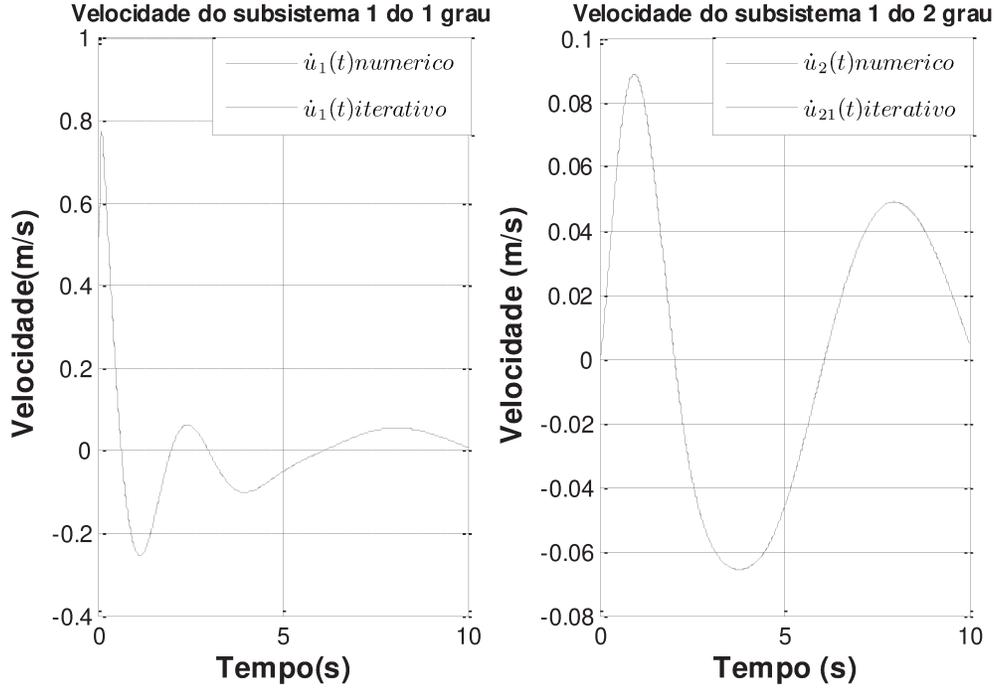


Figura 3.15: Velocidade obtida pelo método numérico e iterativo

A figura (3.16) representa o vetor de aceleração do sistema acoplado $\begin{Bmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \end{Bmatrix}$ obtido pelo Método de Newmark e o vetor de aceleração do subsistemas 1, $\begin{Bmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_{21}(t) \end{Bmatrix}$ obtido pelo método iterativo.

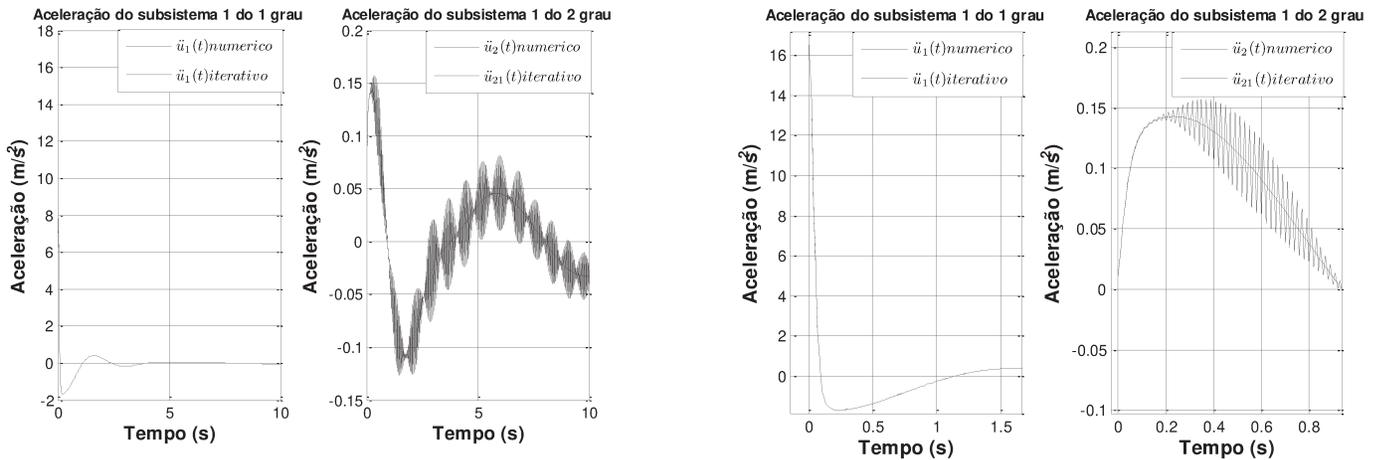


Figura 3.16: Aceleração obtida pelo método numérico e iterativo

Figura 3.17: Ampliação da figura 3.16 até 0.9s

A figura (3.18) representa a convergência das forças de contato $F_{i+1}^{22}(t)$ e $F_{i+1}^{21}(t)$ e a figura (3.19) representa o número de iterações necessárias para atingir o critério de acoplamento em cada instante de tempo.

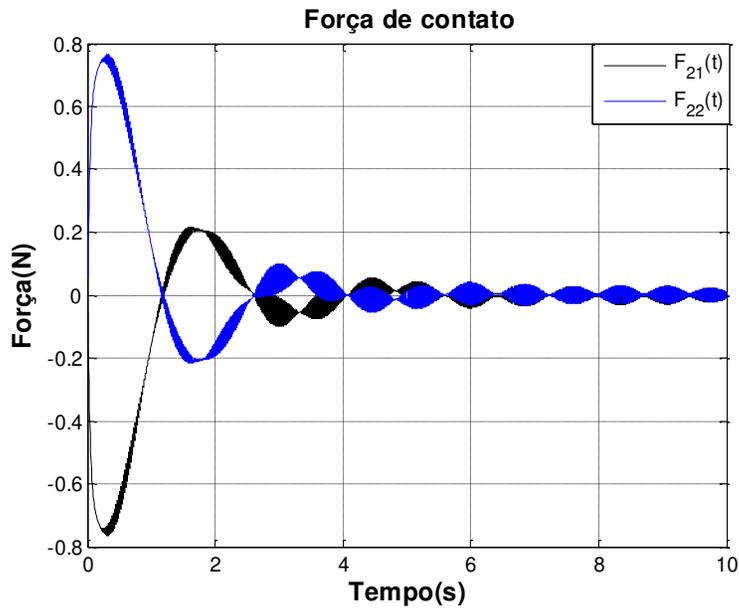


Figura 3.18: Forças de contato

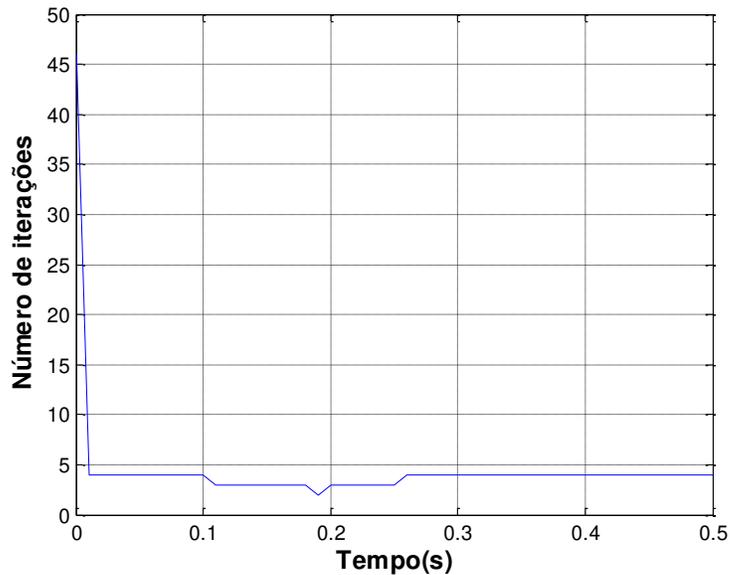


Figura 3.19: Número de iterações

Pode-se concluir em relação ao acoplamento iterativo aplicado em um sistema com 2 graus de liberdade que o método apresentou um erro baixo, da ordem de 10^{-4} . Em relação à figura (3.12) observa-se que o deslocamento decai com o tempo o que é esperado, pois é um sistema amortecido, e também satisfaz as condições iniciais do problema em que o deslocamento e a velocidade inicial (no instante de tempo igual a zero) são zero. Sendo a velocidade a derivada do deslocamento, quando comparado à figura (3.12) com a figura (3.15) pode-se observar que a velocidade é zero nos pontos de máxima amplitude do deslocamento e quando comparado à figura (3.16) com a figura (3.15) pode-se observar também que a aceleração é a derivada da velocidade. Com a figura (3.18) conclui-se que as forças de contato satisfazem o equilíbrio, isto é, a soma das forças de contato deve ser zero. Pode-se concluir em relação à figura (3.19) que o número de iterações necessárias para atingir o acoplamento nos instantes de tempo iniciais é maior, pois como alguns termos são arbitrados, torna-se necessário realizar mais interações para convergir os valores.

3.3 ACOPLAMENTO ITERATIVO NEWMARK-NEWMARK EM UM SISTEMA COM 3 GRAUS DE LIBERDADE

A figura (3.20), (a) representa um sistema com 3 graus de liberdade acoplado, (b) e (c) representam os subsistemas de (a). O sistema acoplado (a) foi dividido na massa m_2 formando dois subsistemas com dois graus de liberdade cada um. Aplicando o acoplamento iterativo Newmark-Newmark nos subsistemas (b) e (c) os deslocamentos $u_{21}(t)$ e $u_{22}(t)$ retornarão ao deslocamento u_2 do sistema acoplado (a). As forças $F_{21}(t)$ e $F_{22}(t)$ são as forças de contato entre os subsistemas, e a força $F_1(t)$ é força externa atuando na massa m_1 tanto no sistema acoplado como no subsistema 1.

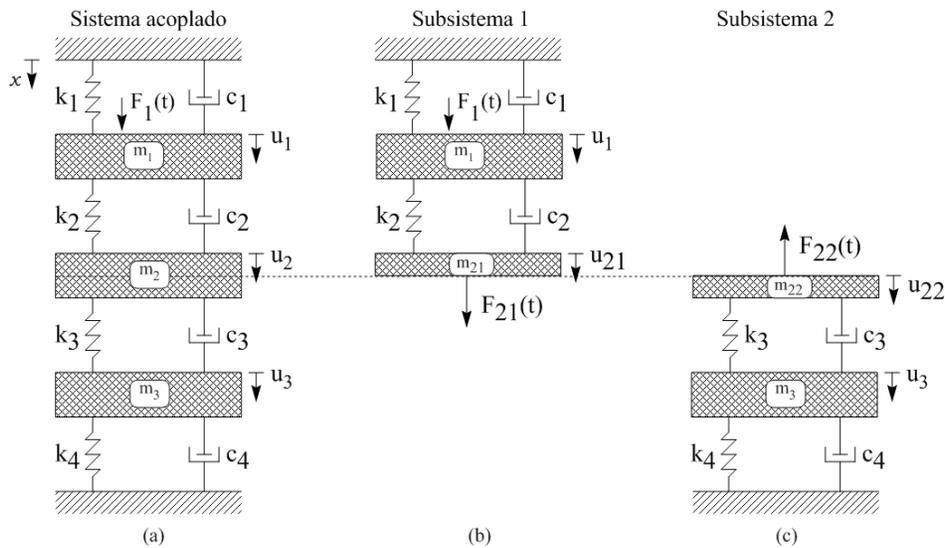


Figura 3.20: (a) Sistema com três graus de liberdade acoplado, (b) e (c) subsistemas de (a)

As equações de movimento do sistema (a), e os subsistemas (b) e (c) da figura (3.15), são:

- **Sistema acoplado:**

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

- **Subsistema 1:**

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_{21} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_{21} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_{21} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_{21} \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

- **Subsistema 2:**

$$\begin{bmatrix} m_{22} & 0 \\ 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_{22} \\ \ddot{u}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_3 & -c_3 \\ -c_3 & c_3 + c_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_{22} \\ \dot{u}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_3 & -k_3 \\ -k_3 & k_3 + k_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{22} \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F_{22} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

O procedimento do acoplamento iterativo para acoplar os subsistemas da figura (3.15) será o mesmo procedimento fornecido pelos algoritmos (3.1) e (3.2).. A grande diferença está nas equações de movimento que agora contém dois graus de liberdade para cada subsistema. Pode – se concluir que e as equações de movimento podem ser generalizadas para n graus de liberdade em ambos os subsistemas.

Acoplamento iterativo

Para programar o acoplamento iterativo foram utilizados dois ciclos, um em relação ao tempo t, e o outro, chamado de cont, em relação ao número de interação realizada para atingir o critério de acoplamento. Os dois parâmetros são dados por:

$$t = 0 : \Delta t : t_{\max}$$

onde Δt é o passo de tempo.

O parâmetro vai até um cont_{\max} que é o número máximo de iterações em cada instante de tempo t, $\text{cont} = 1 : \text{cont}_{\max}$.

Para iniciar o acoplamento iterativo, primeiro é feita a leitura das propriedades dos subsistemas, das condições iniciais, dos parâmetros de Newmark, do intervalo de tempo, do contador cont e das forças de contato.

As propriedades do subsistema 1 e as condições iniciais são: as massas m_1 e m_{21} , amortecimentos c_1 e c_2 , rigidez k_1 e k_2 , força de externa de excitação $F_1(t)$ que será escrita no algoritmo como F_{i+1}^1 , deslocamentos iniciais u_i^1 e u_i^{21} , e as velocidades iniciais \dot{u}_i^1 e \dot{u}_i^{21} . A

partir das propriedades do subsistema e das condições iniciais é possível calcular o vetor aceleração inicial.

As propriedades do subsistema 2 e as condições iniciais são: as massa m_{22} e m_3 , amortecimentos c_3 e c_4 , rigidez k_3 e k_4 , deslocamentos iniciais u_i^{22} e u_i^3 , e as velocidades iniciais \dot{u}_i^{22} e \dot{u}_i^3 . A partir das propriedades do subsistema e das condições iniciais é possível calcular o vetor aceleração inicial.

O índice i e $i+1$ indica em que instante de tempo a variável está sendo calculada. O índice $i+1$ indica o tempo atual e o índice i o instante de tempo anterior ao atual.

As forças de contato $\begin{Bmatrix} 0 \\ F_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}$ e $\begin{Bmatrix} F_{i+1}^{22} \\ 0 \end{Bmatrix}$, são as forças arbitradas, descrita pela equação (3.9),

que são utilizadas para iniciar o acoplamento iterativo.

Passos do acoplamento iterativo

- Leitura das propriedades dos subsistemas, condições iniciais, parâmetros de Newmark e forças de contato (arbitradas);

Após a leitura das variáveis inicia-se um loop em relação ao tempo t sendo que o índice i indicará em que instante de tempo cada variável esta sendo calculada, e uma contagem feita pela variável $cont$, então relação ao número de interações feito em cada instante de tempo.

- Calculo das acelerações iniciais de cada subsistema, $\begin{Bmatrix} \ddot{u}_i^{22} \\ \ddot{u}_i^3 \end{Bmatrix}$ e $\begin{Bmatrix} \dot{u}_i^1 \\ \dot{u}_i^{21} \end{Bmatrix}$;
- Arbitrar forças de contato $\begin{Bmatrix} F_{i+1}^{22} \\ 0 \end{Bmatrix}$ e $\begin{Bmatrix} 0 \\ F_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}$, e calcular os deslocamentos $\begin{Bmatrix} u_{i+1}^{22} \\ u_{i+1}^3 \end{Bmatrix}$ e $\begin{Bmatrix} u_{i+1}^1 \\ u_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}$.
- Verificar se o critério de acoplamento está satisfeito a partir do valor de erro estipulado nos dados de entrada.

Se o critério de acoplamento não for satisfeito os passos descritos dentro do comando enquanto serão realizados até que o critério de acoplamento seja atingido. Se o critério de acoplamento for satisfeito na primeira iteração os passos descritos após o comando “**while**” serão realizados.

Passos dentro do comando “while”

- Média dos deslocamentos u_{i+1}^{22} e u_{i+1}^{21} ;
- Cálculo da aceleração $\begin{Bmatrix} \ddot{u}_{i+1}^1 \\ \ddot{u}_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}$, velocidade $\begin{Bmatrix} \dot{u}_{i+1}^1 \\ \dot{u}_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}$ e força $\begin{Bmatrix} 0 \\ F_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}$;
- Cálculo da aceleração $\begin{Bmatrix} \ddot{u}_{i+1}^{22} \\ \ddot{u}_{i+1}^3 \end{Bmatrix}$, velocidade $\begin{Bmatrix} \dot{u}_{i+1}^{22} \\ \dot{u}_{i+1}^3 \end{Bmatrix}$ e força $\begin{Bmatrix} F_{i+1}^{22} \\ 0 \end{Bmatrix}$;
- Média das forças F_{i+1}^{22} e F_{i+1}^{21} ;
- Atualização dos deslocamentos $\begin{Bmatrix} u_{i+1}^{22} \\ u_{i+1}^3 \end{Bmatrix}$ e $\begin{Bmatrix} u_{i+1}^1 \\ u_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}$;

Passos fora do comando “while”

- Cálculo da aceleração $\begin{Bmatrix} \ddot{u}_{i+1}^1 \\ \ddot{u}_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}$, velocidade $\begin{Bmatrix} \dot{u}_{i+1}^1 \\ \dot{u}_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}$ e força $\begin{Bmatrix} 0 \\ F_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}$;
- Cálculo da aceleração $\begin{Bmatrix} \ddot{u}_{i+1}^{22} \\ \ddot{u}_{i+1}^3 \end{Bmatrix}$, velocidade $\begin{Bmatrix} \dot{u}_{i+1}^{22} \\ \dot{u}_{i+1}^3 \end{Bmatrix}$ e força $\begin{Bmatrix} F_{i+1}^{22} \\ 0 \end{Bmatrix}$;
- Média das forças F_{i+1}^{22} e F_{i+1}^{21} ;
- Atualização dos deslocamentos $\begin{Bmatrix} u_{i+1}^{22} \\ u_{i+1}^3 \end{Bmatrix}$ e $\begin{Bmatrix} u_{i+1}^1 \\ u_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}$;

O deslocamento atualizado já é o deslocamento da iteração $t + \Delta t$.

Algoritmo 3.3 Acoplamento Iterativo

Inserir: $m_1, m_{21}, m_{22}, m_3, c_1, c_2, c_3, c_4, k_1, k_2, k_3, k_4, F_1, F_1(t=0), F_{22}, F_{21}, \alpha, \beta, u_i^1, \dot{u}_i^1, u_i^{21}, \dot{u}_i^{21}, u_i^{22}, \dot{u}_i^{22}, u_i^3, \dot{u}_i^3, n, erro, \Delta t, t, cont = 1$	
1.	para $i = 1$ até comprimento (t)
2.	$\begin{Bmatrix} \ddot{u}_i^1 \\ \ddot{u}_i^{21} \end{Bmatrix}(:, i) = [m]^{-1} \left(\begin{Bmatrix} F_i^1 \\ 0 \end{Bmatrix} - [c] \begin{Bmatrix} \dot{u}_i^1 \\ \dot{u}_i^{21} \end{Bmatrix} - [k] \begin{Bmatrix} u_i^1 \\ u_i^{21} \end{Bmatrix} \right)$
3.	$\begin{Bmatrix} \ddot{u}_i^{22} \\ \ddot{u}_i^3 \end{Bmatrix}(:, i) = [m]^{-1} \left(\begin{Bmatrix} F_i^1 \\ 0 \end{Bmatrix} - [c] \begin{Bmatrix} \dot{u}_i^{22} \\ \dot{u}_i^3 \end{Bmatrix} - [k] \begin{Bmatrix} u_i^{22} \\ u_i^3 \end{Bmatrix} \right)$
4.	$A_{21}(:, i) = [m] \left(\frac{1}{\alpha \Delta t^2} \begin{Bmatrix} u_i^1 \\ u_i^{21} \end{Bmatrix}(:, i) + \frac{1}{\alpha \Delta t} \begin{Bmatrix} \dot{u}_i^1 \\ \dot{u}_i^{21} \end{Bmatrix}(:, i) + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \begin{Bmatrix} \ddot{u}_i^1 \\ \ddot{u}_i^{21} \end{Bmatrix}(:, i) \right)$ $B_{21}(:, i) = [c] \left(\frac{\beta}{\alpha \Delta t} \begin{Bmatrix} u_i^1 \\ u_i^{21} \end{Bmatrix}(:, i) + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1 \right) \begin{Bmatrix} \dot{u}_i^1 \\ \dot{u}_i^{21} \end{Bmatrix}(:, i) + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 2 \right) \frac{\Delta t}{2} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_i^1 \\ \ddot{u}_i^{21} \end{Bmatrix}(:, i) \right)$ $\begin{Bmatrix} u_{i+1}^1 \\ u_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}(:, i) = \left[\frac{1}{\alpha \Delta t^2} [m] + \frac{\beta}{\alpha \Delta t} [c] + [k] \right]^{-1} \left\{ \begin{Bmatrix} F_{i+1}^1 \\ F_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}(:, i) + A_{21}(:, i) + B_{21}(:, i) \right\}$
5.	$A_{22}(:, i) = [m] \left(\frac{1}{\alpha \Delta t^2} \begin{Bmatrix} u_i^{22} \\ u_i^3 \end{Bmatrix}(:, i) + \frac{1}{\alpha \Delta t} \begin{Bmatrix} \dot{u}_i^{22} \\ \dot{u}_i^3 \end{Bmatrix}(:, i) + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \begin{Bmatrix} \ddot{u}_i^{22} \\ \ddot{u}_i^3 \end{Bmatrix}(:, i) \right)$ $B_{22}(:, i) = [c] \left(\frac{\beta}{\alpha \Delta t} \begin{Bmatrix} u_i^{22} \\ u_i^3 \end{Bmatrix}(:, i) + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1 \right) \begin{Bmatrix} \dot{u}_i^{22} \\ \dot{u}_i^3 \end{Bmatrix}(:, i) + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 2 \right) \frac{\Delta t}{2} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_i^{22} \\ \ddot{u}_i^3 \end{Bmatrix}(:, i) \right)$ $\begin{Bmatrix} u_{i+1}^{22} \\ u_{i+1}^3 \end{Bmatrix}(:, i) = \left[\frac{1}{\alpha \Delta t^2} [m] + \frac{\beta}{\alpha \Delta t} [c] + [k] \right]^{-1} \left\{ \begin{Bmatrix} F_{i+1}^{22} \\ 0 \end{Bmatrix}(:, i) + A_{22}(:, i) + B_{22}(:, i) \right\}$
6.	while $ u_{i+1}^{21}(i) - u_{i+1}^{22}(i) \geq erro$
7.	cont=cont+1
8.	$u_{i+1}^{22}(i) = u_{i+1}^{21}(i) = \frac{(u_{i+1}^{22}(i) + u_{i+1}^{21}(i))}{2}$
9.	$\begin{Bmatrix} \dot{u}_{i+1}^1 \\ \dot{u}_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}(:, i) = \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \left(\begin{Bmatrix} u_{i+1}^1 \\ u_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}(:, i) - \begin{Bmatrix} u_i^1 \\ u_i^{21} \end{Bmatrix}(:, i) \right) - \frac{1}{\alpha \Delta t} \begin{Bmatrix} \dot{u}_i^1 \\ \dot{u}_i^{21} \end{Bmatrix}(:, i) - \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \begin{Bmatrix} \ddot{u}_i^1 \\ \ddot{u}_i^{21} \end{Bmatrix}(:, i)$
10.	$\begin{Bmatrix} \dot{u}_{i+1}^1 \\ \dot{u}_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}(:, i) = \begin{Bmatrix} u_i^1 \\ u_i^{21} \end{Bmatrix}(:, i) + (1 - \beta) \Delta t \begin{Bmatrix} \ddot{u}_i^1 \\ \ddot{u}_i^{21} \end{Bmatrix}(:, i) + \beta \Delta t \begin{Bmatrix} \dot{u}_{i+1}^1 \\ \dot{u}_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}(:, i)$

11.	$\begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}(:,i) = [\mathbf{m}] \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_{i+1}^1 \\ \ddot{\mathbf{u}}_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}(:,i) + [\mathbf{c}] \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_{i+1}^1 \\ \dot{\mathbf{u}}_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}(:,i) + [\mathbf{k}] \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{i+1}^1 \\ \mathbf{u}_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}(:,i) - \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{i+1}^1 \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}(:,i)$
12.	$\begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_{i+1}^{22} \\ \ddot{\mathbf{u}}_{i+1}^3 \end{Bmatrix}(:,i) = \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \left(\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{i+1}^{22} \\ \mathbf{u}_{i+1}^3 \end{Bmatrix}(:,i) - \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i^{22} \\ \mathbf{u}_i^3 \end{Bmatrix}(:,i) \right) - \frac{1}{\alpha \Delta t} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_i^{22} \\ \dot{\mathbf{u}}_i^3 \end{Bmatrix}(:,i) - \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_i^{22} \\ \ddot{\mathbf{u}}_i^3 \end{Bmatrix}(:,i)$
13.	$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_{i+1}^{22} \\ \dot{\mathbf{u}}_{i+1}^3 \end{Bmatrix}(:,i) = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i^{22} \\ \mathbf{u}_i^3 \end{Bmatrix}(:,i) + (1-\beta)\Delta t \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_i^{22} \\ \ddot{\mathbf{u}}_i^3 \end{Bmatrix}(:,i) + \beta\Delta t \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_{i+1}^{22} \\ \ddot{\mathbf{u}}_{i+1}^3 \end{Bmatrix}(:,i)$
14.	$\begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{i+1}^{22} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}(:,i) = - \left([\mathbf{m}] \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_{i+1}^{22} \\ \ddot{\mathbf{u}}_{i+1}^3 \end{Bmatrix}(:,i) + [\mathbf{c}] \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_{i+1}^{22} \\ \dot{\mathbf{u}}_{i+1}^3 \end{Bmatrix}(:,i) + [\mathbf{k}] \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{i+1}^{22} \\ \mathbf{u}_{i+1}^3 \end{Bmatrix}(:,i) \right)$
15.	$\mathbf{F}_{i+1}^{22}(\mathbf{i}) = \mathbf{F}_{i+1}^{21}(\mathbf{i}) = \frac{\mathbf{F}_{i+1}^{22}(\mathbf{i}) + \mathbf{F}_{i+1}^{21}(\mathbf{i})}{2}$
16.	$\begin{aligned} \mathbf{A}_{21}(:,i) &= [\mathbf{m}] \left(\frac{1}{\alpha \Delta t^2} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i^1 \\ \mathbf{u}_i^{21} \end{Bmatrix}(:,i) + \frac{1}{\alpha \Delta t} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_i^1 \\ \dot{\mathbf{u}}_i^{21} \end{Bmatrix}(:,i) + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_i^1 \\ \ddot{\mathbf{u}}_i^{21} \end{Bmatrix}(:,i) \right) \\ \mathbf{B}_{21}(:,i) &= [\mathbf{c}] \left(\frac{\beta}{\alpha \Delta t} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i^1 \\ \mathbf{u}_i^{21} \end{Bmatrix}(:,i) + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1 \right) \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_i^1 \\ \dot{\mathbf{u}}_i^{21} \end{Bmatrix}(:,i) + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 2 \right) \frac{\Delta t}{2} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_i^1 \\ \ddot{\mathbf{u}}_i^{21} \end{Bmatrix}(:,i) \right) \\ \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{i+1}^1 \\ \mathbf{u}_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}(:,i) &= \left[\frac{1}{\alpha \Delta t^2} [\mathbf{m}] + \frac{\beta}{\alpha \Delta t} [\mathbf{c}] + [\mathbf{k}] \right]^{-1} \left\{ \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{i+1}^1 \\ \mathbf{F}_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}(:,i) + \mathbf{A}_{21}(:,i) + \mathbf{B}_{21}(:,i) \right\} \end{aligned}$
17.	$\begin{aligned} \mathbf{A}_{22}(:,i) &= [\mathbf{m}] \left(\frac{1}{\alpha \Delta t^2} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i^{22} \\ \mathbf{u}_i^3 \end{Bmatrix}(:,i) + \frac{1}{\alpha \Delta t} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_i^{22} \\ \dot{\mathbf{u}}_i^3 \end{Bmatrix}(:,i) + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_i^{22} \\ \ddot{\mathbf{u}}_i^3 \end{Bmatrix}(:,i) \right) \\ \mathbf{B}_{22}(:,i) &= [\mathbf{c}] \left(\frac{\beta}{\alpha \Delta t} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i^{22} \\ \mathbf{u}_i^3 \end{Bmatrix}(:,i) + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1 \right) \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_i^{22} \\ \dot{\mathbf{u}}_i^3 \end{Bmatrix}(:,i) + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 2 \right) \frac{\Delta t}{2} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_i^{22} \\ \ddot{\mathbf{u}}_i^3 \end{Bmatrix}(:,i) \right) \\ \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{i+1}^{22} \\ \mathbf{u}_{i+1}^3 \end{Bmatrix}(:,i) &= \left[\frac{1}{\alpha \Delta t^2} [\mathbf{m}] + \frac{\beta}{\alpha \Delta t} [\mathbf{c}] + [\mathbf{k}] \right]^{-1} \left\{ \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{i+1}^{22} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}(:,i) + \mathbf{A}_{22}(:,i) + \mathbf{B}_{22}(:,i) \right\} \end{aligned}$
18.	fim while
19.	$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_{i+1}^1 \\ \dot{\mathbf{u}}_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}(:,i) = \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \left(\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{i+1}^1 \\ \mathbf{u}_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}(:,i) - \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i^1 \\ \mathbf{u}_i^{21} \end{Bmatrix}(:,i) \right) - \frac{1}{\alpha \Delta t} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_i^1 \\ \dot{\mathbf{u}}_i^{21} \end{Bmatrix}(:,i) - \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_i^1 \\ \ddot{\mathbf{u}}_i^{21} \end{Bmatrix}(:,i)$
20.	$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_{i+1}^1 \\ \dot{\mathbf{u}}_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}(:,i) = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i^1 \\ \mathbf{u}_i^{21} \end{Bmatrix}(:,i) + (1-\beta)\Delta t \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_i^1 \\ \ddot{\mathbf{u}}_i^{21} \end{Bmatrix}(:,i) + \beta\Delta t \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_{i+1}^1 \\ \ddot{\mathbf{u}}_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}(:,i)$

21.	$\begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{F}_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}(:,i) = [\mathbf{m}] \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_{i+1}^1 \\ \ddot{\mathbf{u}}_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}(:,i) + [\mathbf{c}] \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_{i+1}^1 \\ \dot{\mathbf{u}}_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}(:,i) + [\mathbf{k}] \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{i+1}^1 \\ \mathbf{u}_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}(:,i) - \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{i+1}^1 \\ 0 \end{Bmatrix}(:,i)$
22.	$\begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_{i+1}^{22} \\ \ddot{\mathbf{u}}_{i+1}^3 \end{Bmatrix}(:,i) = \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \left(\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{i+1}^{22} \\ \mathbf{u}_{i+1}^3 \end{Bmatrix}(:,i) - \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i^{22} \\ \mathbf{u}_i^3 \end{Bmatrix}(:,i) \right) - \frac{1}{\alpha \Delta t} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_i^{22} \\ \dot{\mathbf{u}}_i^3 \end{Bmatrix}(:,i) - \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_i^{22} \\ \ddot{\mathbf{u}}_i^3 \end{Bmatrix}(:,i)$
23.	$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_{i+1}^{22} \\ \dot{\mathbf{u}}_{i+1}^3 \end{Bmatrix}(:,i) = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i^{22} \\ \mathbf{u}_i^3 \end{Bmatrix}(:,i) + (1 - \beta) \Delta t \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_i^{22} \\ \ddot{\mathbf{u}}_i^3 \end{Bmatrix}(:,i) + \beta \Delta t \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_{i+1}^{22} \\ \ddot{\mathbf{u}}_{i+1}^3 \end{Bmatrix}(:,i)$
24.	$\begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{i+1}^{22} \\ 0 \end{Bmatrix}(:,i) = - \left([\mathbf{m}] \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_{i+1}^{22} \\ \ddot{\mathbf{u}}_{i+1}^3 \end{Bmatrix}(:,i) + [\mathbf{c}] \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_{i+1}^{22} \\ \dot{\mathbf{u}}_{i+1}^3 \end{Bmatrix}(:,i) + [\mathbf{k}] \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{i+1}^{22} \\ \mathbf{u}_{i+1}^3 \end{Bmatrix}(:,i) \right)$
25.	$\mathbf{F}_{i+1}^{22}(\mathbf{i}) = \mathbf{F}_{i+1}^{21}(\mathbf{i}) = \frac{\mathbf{F}_{i+1}^{22}(\mathbf{i}) + \mathbf{F}_{i+1}^{21}(\mathbf{i})}{2}$
26.	$\mathbf{A}_{21}(:,i) = [\mathbf{m}] \left(\frac{1}{\alpha \Delta t^2} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i^1 \\ \mathbf{u}_i^{21} \end{Bmatrix}(:,i) + \frac{1}{\alpha \Delta t} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_i^1 \\ \dot{\mathbf{u}}_i^{21} \end{Bmatrix}(:,i) + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_i^1 \\ \ddot{\mathbf{u}}_i^{21} \end{Bmatrix}(:,i) \right)$ $\mathbf{B}_{21}(:,i) = [\mathbf{c}] \left(\frac{\beta}{\alpha \Delta t} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i^1 \\ \mathbf{u}_i^{21} \end{Bmatrix}(:,i) + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1 \right) \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_i^1 \\ \dot{\mathbf{u}}_i^{21} \end{Bmatrix}(:,i) + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 2 \right) \frac{\Delta t}{2} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_i^1 \\ \ddot{\mathbf{u}}_i^{21} \end{Bmatrix}(:,i) \right)$ $\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{i+1}^1 \\ \mathbf{u}_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}(:,i) = \left[\frac{1}{\alpha \Delta t^2} [\mathbf{m}] + \frac{\beta}{\alpha \Delta t} [\mathbf{c}] + [\mathbf{k}] \right]^{-1} \left\{ \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{i+1}^1 \\ \mathbf{F}_{i+1}^{21} \end{Bmatrix}(:,i) + \mathbf{A}_{21}(:,i) + \mathbf{B}_{21}(:,i) \right\}$
27.	$\mathbf{A}_{22}(:,i) = [\mathbf{m}] \left(\frac{1}{\alpha \Delta t^2} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i^{22} \\ \mathbf{u}_i^3 \end{Bmatrix}(:,i) + \frac{1}{\alpha \Delta t} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_i^{22} \\ \dot{\mathbf{u}}_i^3 \end{Bmatrix}(:,i) + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_i^{22} \\ \ddot{\mathbf{u}}_i^3 \end{Bmatrix}(:,i) \right)$ $\mathbf{B}_{22}(:,i) = [\mathbf{c}] \left(\frac{\beta}{\alpha \Delta t} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i^{22} \\ \mathbf{u}_i^3 \end{Bmatrix}(:,i) + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1 \right) \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_i^{22} \\ \dot{\mathbf{u}}_i^3 \end{Bmatrix}(:,i) + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 2 \right) \frac{\Delta t}{2} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_i^{22} \\ \ddot{\mathbf{u}}_i^3 \end{Bmatrix}(:,i) \right)$ $\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{i+1}^{22} \\ \mathbf{u}_{i+1}^3 \end{Bmatrix}(:,i) = \left[\frac{1}{\alpha \Delta t^2} [\mathbf{m}] + \frac{\beta}{\alpha \Delta t} [\mathbf{c}] + [\mathbf{k}] \right]^{-1} \left\{ \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{i+1}^{22} \\ 0 \end{Bmatrix}(:,i) + \mathbf{A}_{22}(:,i) + \mathbf{B}_{22}(:,i) \right\}$
28.	fim para

A seguir será validado o acoplamento iterativo, aplicando o Método de Newmark no sistema acoplado.

3.3.1 VALIDAÇÃO DO ACOPLAMENTO ITERATIVO N-N COM 3 GRAUS DE LIBERDADE

Para validar o acoplamento iterativo entre os deslocamentos $u_{i+1}^{22}(t)$ e $u_{i+1}^{21}(t)$ será aplicado o Método de Newmark no sistema acoplado para comparar os deslocamentos do acoplamento iterativo com o deslocamento $u_2(t)$. Nas tabelas abaixo se pode encontrar todos os parâmetros utilizados para obter a validação do acoplamento iterativo.

Tabela 3.9: Propriedades do sistema

Propriedades do sistema		
Massa	Rigidez	Amortecimento
$m_1 = 0.6 \text{ Kg}$	$k_1 = 1 \text{ N/m}$	$c_1 = 1 \text{ Kg/s}$
$m_{12} = 1 \text{ Kg}$	$k_2 = 0.8 \text{ N/m}$	$c_2 = 4 \text{ Kg/s}$
$m_{21} = 0.6 \text{ Kg}$	$k_3 = 1 \text{ N/m}$	$c_3 = 3 \text{ Kg/s}$
$m_3 = 0.6 \text{ Kg}$	$k_4 = 0.8 \text{ N/m}$	$c_4 = 1 \text{ Kg/s}$

Tabela 3.10: Propriedades do sistema

Propriedades do sistema			
	Frequência natural:	Período:	Passo crítico:
Sistema Acoplado	$\omega_1 = 0.7713 \text{ rad/s}$ $\omega_2 = 2.0917 \text{ rad/s}$ $\omega_3 = 2.8992 \text{ rad/s}$	$T_1 = 8.1464 \text{ s}$ $T_2 = 3.0039 \text{ s}$ $T_3 = 2.1672 \text{ s}$	$\Delta t_{crit1} = 2.5931 \text{ s}$ $\Delta t_{crit2} = 0.9562 \text{ s}$ $\Delta t_{crit3} = 0.6899 \text{ s}$
Subsistema 1	$\omega_1 = 0.7713 \text{ rad/s}$ $\omega_2 = 2.8992 \text{ rad/s}$	$T_1 = 8.1464 \text{ s}$ $T_2 = 2.1672 \text{ s}$	$\Delta t_{crit1} = 2.5931 \text{ s}$ $\Delta t_{crit2} = 0.6899 \text{ s}$
Subsistema 2	$\omega_1 = 0.7713 \text{ rad/s}$ $\omega_2 = 2.8992 \text{ rad/s}$	$T_1 = 8.1464 \text{ s}$ $T_2 = 2.1672 \text{ s}$	$\Delta t_{crit1} = 2.5931 \text{ s}$ $\Delta t_{crit2} = 0.6899 \text{ s}$

Tabela 3.11: Condições iniciais e excitação externa

Velocidade inicial	Deslocamento inicial	Força excitadora	Constante 'n' para simulação numérica do Delta Dirac	Força de contato	erro
$\dot{u}_0 = 0$	$u_0 = 0$	Função Delta de Dirac (h_n^1)	$n = 40$	$F_{21} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.8245 \end{Bmatrix} \text{ N}$ $F_{22} = - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.8245 \end{Bmatrix} \text{ N}$	10^{-9}

Tabela 3.12: Parâmetros de Newmark

Passo	Alfa	Beta
$\Delta t = 0.011 \text{ s}$	$\alpha = 0.25$	$\beta = 0.5$

A figura (3.21) representa os deslocamentos $u_{22}(t)$ e $u_{21}(t)$ obtidos pelo acoplamento iterativo e o deslocamento $u_2(t)$ obtido pelo Método Newmark quando aplicado no sistema acoplado.

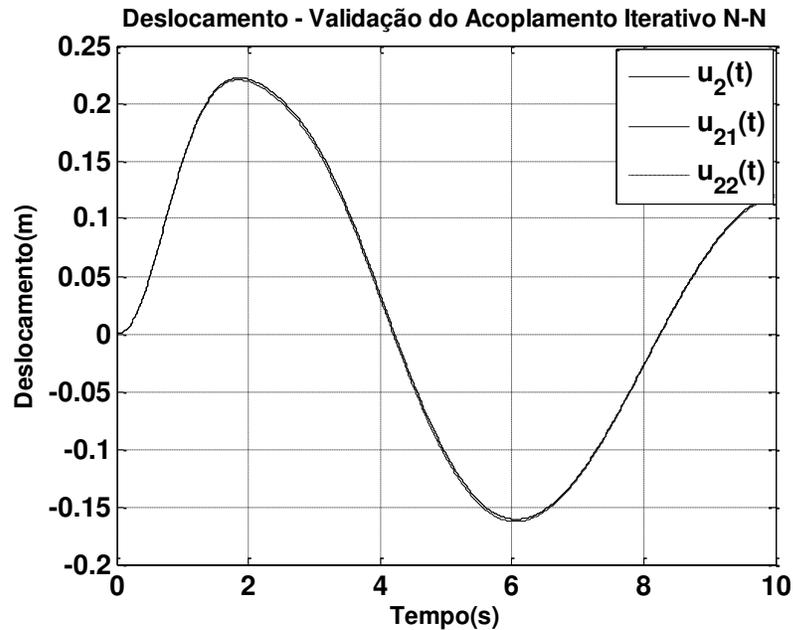


Figura 3.21: Deslocamentos obtidos pelo acoplamento iterativo e solução numérica direta

A figura (3.22) representa as análises de erros relativo e absoluto entre os deslocamentos iterativos $u_{21}(t)$ e $u_{22}(t)$.

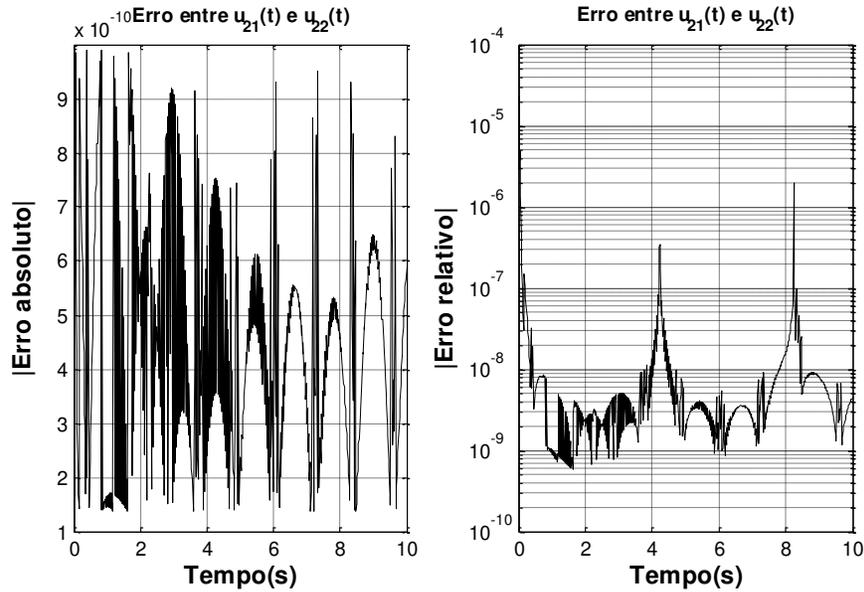


Figura 3.22: Análise de erro entre os deslocamentos iterativos $u_{22}(t)$ e $u_{21}(t)$

A figura (3.23) representa as análises de erros relativo e absoluto entre os deslocamentos $u_2(t)$ numérico $u_{21}(t)$ iterativo. O erros podem ser menores desde que diminua o passo de tempo.

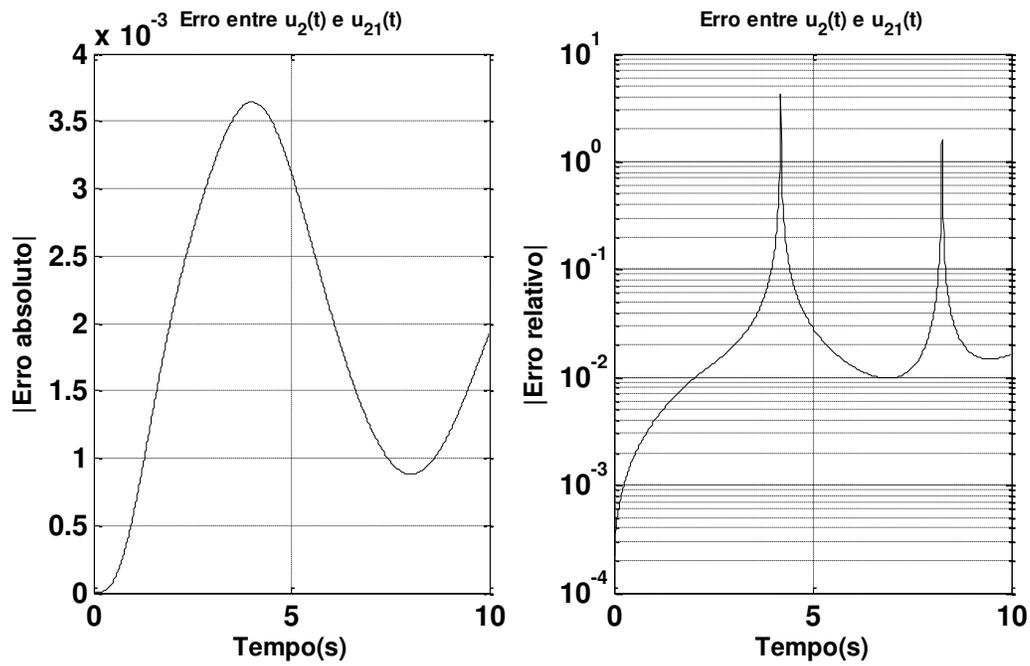


Figura 3.23: Análise de erro entre $u_2(t)$ numérico e $u_{21}(t)$ iterativo

A figura (3.24) representa o vetor de velocidade do sistema acoplado $\begin{Bmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \end{Bmatrix}$ obtido pelo Método de Newmark e o vetor de velocidade do subsistemas 1, $\begin{Bmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_{21}(t) \end{Bmatrix}$ obtido pelo método iterativo.

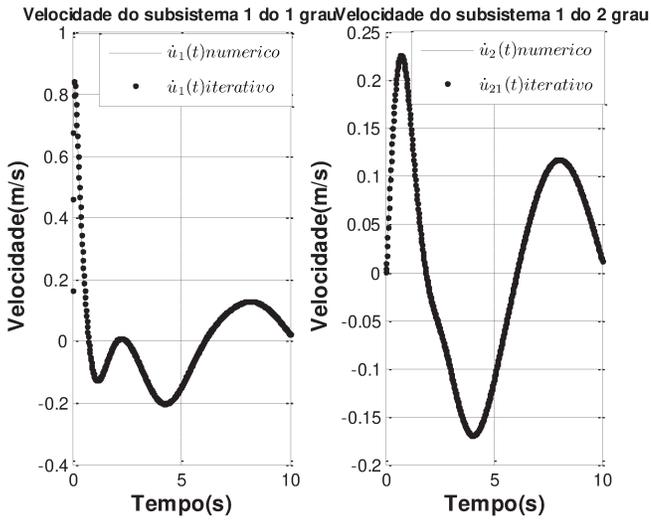


Figura 3.24: Velocidade obtida pelo método numérico e iterativo

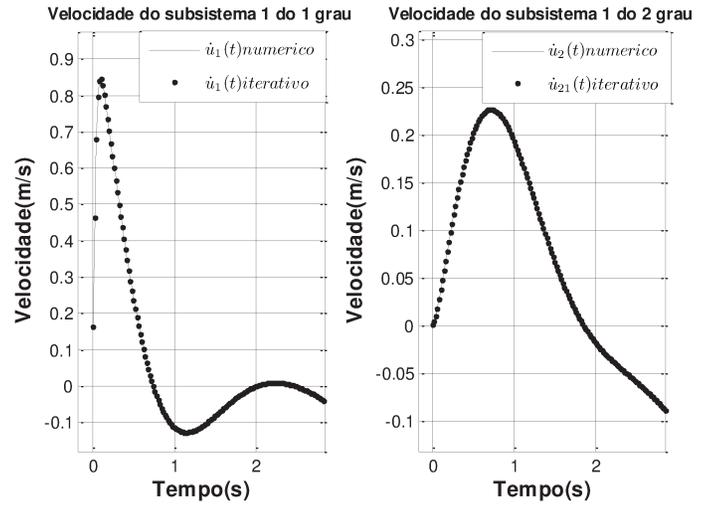


Figura 3.25: Ampliação da figura 3.24 até 3s

A figura (3.26) representa o vetor de aceleração do sistema acoplado $\begin{Bmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \end{Bmatrix}$ obtida pelo

Método de Newmark e o vetor de aceleração do subsistemas 1, $\begin{Bmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_{21}(t) \end{Bmatrix}$ obtido pelo método iterativo.

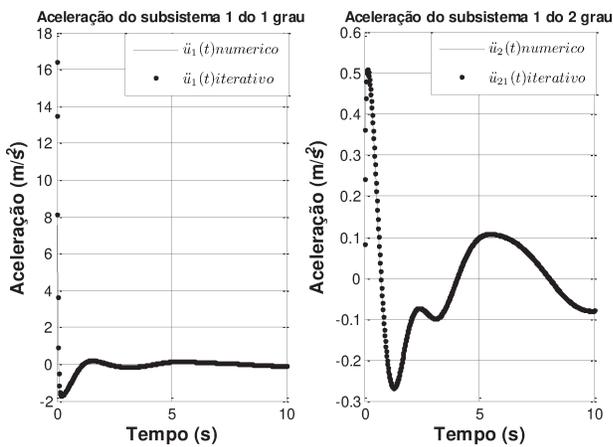


Figura 3.26: Aceleração obtida pelo método numérico e iterativo

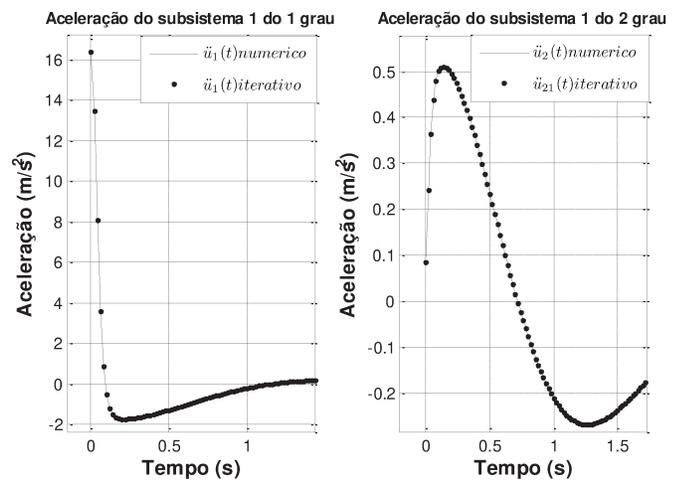


Figura 3.27: Ampliação da figura 3.26 até 2s

A figura (3.28) representa a convergência das forças de contato $F_{i+1}^{22}(t)$ e $F_{i+1}^{21}(t)$. e a figura (3.29) representa o número de iterações necessárias para atingir o critério de acoplamento em cada instante de tempo.

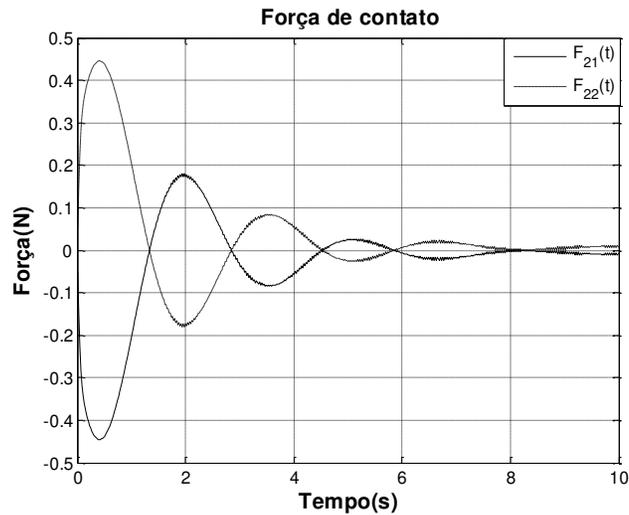


Figura 3.28: Forças de contato

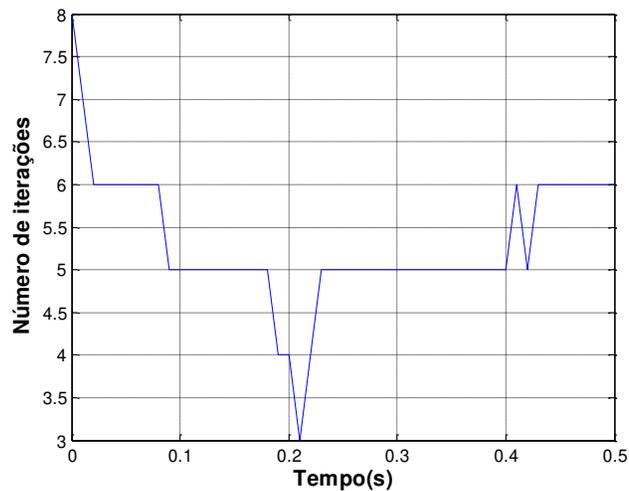


Figura 3.29: Número de iterações

Pode-se concluir em relação ao acoplamento iterativo aplicado em um sistema com 3 graus de liberdade que o método apresentou um erro baixo, da ordem de 10^{-3} . Em relação à figura

(3.21) observa-se que o deslocamento decai com o tempo o que é esperado, pois é um sistema amortecido, e também satisfaz as condições iniciais do problema em que o deslocamento e a velocidade inicial (no instante de tempo igual a zero) são zero. Sendo a velocidade a derivada do deslocamento, quando comparado à figura (3.21) com a figura (3.24) pode-se observar que a velocidade é zero nos pontos de máxima amplitude do deslocamento e quando comparado à figura (3.24) com a figura (3.26) pode-se observar também que a aceleração é a derivada da velocidade. Com a figura (3.28) conclui-se que as forças de contato satisfazem o equilíbrio, isto é, a soma das forças de contato deve ser zero. Pode-se concluir em relação à figura (3.29) que o número de iterações necessárias para atingir o acoplamento nos instantes de tempo iniciais é maior, pois como alguns termos são arbitrados, torna-se necessário realizar mais interações para convergir os valores.

3.4 ACOPLAMENTO ITERATIVO NEWMARK-CONVOLUÇÃO EM UM SISTEMA COM 1 GRAU DE LIBERDADE COM EXCITAÇÃO DELTA DE DIRAC.

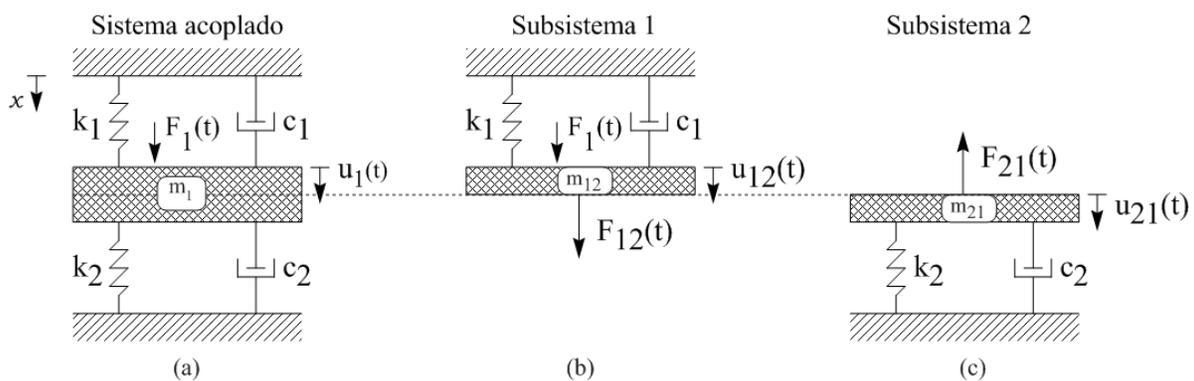


Figura 3.30: (a) Sistema com um grau de liberdade acoplado, (b) e (c) subsistemas de (a)

Na figura (3.30), (a) representa o sistema acoplado com 1 grau de liberdade. Dividindo-se a massa do sistema acoplado, formam-se os subsistemas (b) e (c) com 1 grau de liberdade cada um. A força $F_1(t)$ é a força externa atuando no sistema acoplado (a), e as forças $F_{12}(t)$ e $F_{21}(t)$ são as forças de contato entre os subsistemas. Após a divisão da massa a força externa ficará sendo aplicada no subsistema 1. O deslocamento do sistema acoplado é representado por u_1 , e dos subsistemas são representados por $u_{12}(t)$ e $u_{21}(t)$. A rigidez é representada por k_1 e k_2 e o amortecimento é representado por c_1 e c_2 . A massa do sistema acoplado é representada por m_1 e dos subsistemas por m_{12} e m_{21} .

Para realização do acoplamento iterativo N-C devem ser arbitradas as forças de contato $F_{12}(t)$ e $F_{21}(t)$ para que os deslocamentos $u_{12}(t)$ e $u_{21}(t)$ dos subsistemas sejam calculados e acoplados iterativamente a fim de retornar ao deslocamento do sistema acoplado $u_1(t)$. A Integral de convolução será aplicada no subsistema 2. Para isso será utilizado a resposta ao impulso obtido numericamente como apresentado anteriormente e será feita a convolução entre a resposta ao impulso numericamente com a força arbitrada $F_{21}(t)$.

As equações de movimento do sistema (a), e os subsistemas (b) e (c) da figura (3.22), são apresentadas a seguir.

Sistema acoplado:

$$m_1 \ddot{u}_1 + (c_1 + c_2) \dot{u}_1 + (k_1 + k_2) u_1 = F_1(t) \quad (3.16)$$

Subsistema 1:

$$m_{12} \ddot{u}_{12} + c_1 \dot{u}_{12} + k_1 u_{12} = F_1(t) + F_{12}(t) \quad (3.17)$$

Subsistema 2

$$m_{21} \ddot{u}_{21} + c_2 \dot{u}_{21} + k_2 u_{21} = -F_{21}(t) \quad (3.18)$$

A equação (3.18) dará origem à função de resposta ao impulso obtida numericamente que será aplicada na integral de convolução para construção do método de acoplamento iterativo. Particularizando a força $F_{21}(t)$ para o Delta de Dirac tem-se:

$$F_{21}(t) = \delta(t) \quad (3.19)$$

$$u_{21}(t) = u_{\delta 21}(t) \quad (3.20)$$

Utilizando a implementação numérica do Delta de Dirac $h_n^1(t)$

$$\delta(t) \cong h_n^1(t) \quad (3.21)$$

$$F_{21}(t) \cong h_n^1(t) \quad (3.22)$$

$$u_{21}(t) = u_{\delta 21}^{nu}(t) \quad (3.23)$$

A resposta ao impulso numérica pode ser obtida pela seguinte equação:

$$m_{21} \ddot{u}_{\delta 21}^{nu} + c_2 \dot{u}_{\delta 21}^{nu} + k_2 u_{\delta 21}^{nu} = h_n^1(t) \quad (3.24)$$

A solução do subsistema 2 para o caso de uma força de contato arbitrária $F_{21}(t)$ via integral de convolução é:

$$u_{21}(t) = \int_{-\infty}^t u_{\delta 21}^{nu}(t - \tau) F_{21}(\tau) d\tau \quad (3.25)$$

Esta expressão pode ser discretizada para um intervalo de tempo $3 \Delta t$:

Sendo $t = n\Delta t$, para $n = 3$, $t = 3\Delta t$.

$$u_{21}(3\Delta t) = \left[F_{21}(1\Delta t)u_{\delta 21}^{nu}(3\Delta t) + F_{21}(2\Delta t)u_{\delta 21}^{nu}(2\Delta t) \right] + F_{21}(3\Delta t)u_{\delta 21}^{nu}(\Delta t) \quad (3.26)$$

Nesta expressão (3.26) se entrarmos com o deslocamento atual $u_{21}(t = 3\Delta t)$ pode-se obter a força atual $F_{21}(t = 3\Delta t)$, sendo assim, a equação (3.26) pode ser aplicada a uma estratégia de acoplamento iterativo e pode ser facilmente generalizado para um tempo t arbitrário.

Acoplamento iterativo

Para programar o acoplamento iterativo foram utilizados dois ciclos, um em relação ao tempo t , e o outro, chamado de $cont$, em relação ao número de interação realizado para atingir o critério de acoplamento. Os dois parâmetros são dados por:

$$t = 0 : \Delta t : t_{\max}$$

onde Δt é o passo de tempo.

O parâmetro $cont$ vai até um $cont_{\max}$ que é o número máximo de iterações em cada instante de tempo t , $cont = 1 : cont_{\max}$.

Para iniciar o acoplamento iterativo, primeiro é feita a leitura das propriedades dos subsistemas, das condições iniciais, dos parâmetros de Newmark, do intervalo de tempo, do contador $cont$ e das forças de contato.

As propriedades do subsistema 1 e as condições iniciais são: massas m_{12} , amortecimento c_1 , rigidez k_1 , força de externa de excitação $F_1(t)$ que será escrita no algoritmo como F_{i+1}^1 , deslocamento inicial u_i^{12} e velocidade inicial \dot{u}_i^{12} . A partir das propriedades do subsistema e das condições iniciais é possível calcular a aceleração inicial \ddot{u}_i^{12} .

As propriedades do subsistema 2 e as condições iniciais são: massa m_{21} , amortecimento c_2 , rigidez k_2 , deslocamento inicial u_i^{21} e velocidade inicial \dot{u}_i^{21} . A partir das propriedades do subsistema e das condições iniciais é possível calcular a aceleração inicial \ddot{u}_i^{21} .

O índice i e $i+1$ indica em que instante de tempo a variável está sendo calculada. O índice $i+1$ indica o tempo atual e o índice i o instante de tempo anterior ao atual.

As forças de contato $F_{12}(t)$ e $F_{21}(t)$, que foram escritas no algoritmo como F_{i+1}^{12} e F_{i+1}^{21} , são as forças arbitradas, descritas pela equação (3.9), que são utilizadas para iniciar o acoplamento iterativo.

Passos do acoplamento iterativo

- Leitura das propriedades dos subsistemas, condições iniciais, parâmetros de Newmark e forças de contato (arbitradas);

Após a leitura das variáveis inicia-se um loop em relação ao tempo t sendo que o índice i indicará em que instante de tempo cada variável está sendo calculada, e uma contagem feita pela variável $cont$, então relação ao número de interações feito em cada instante de tempo.

- Cálculo das acelerações iniciais de cada subsistema, \ddot{u}_i^{12} e \ddot{u}_i^{21} ;
- Arbitrar forças de contato F_{i+1}^{12} e F_{i+1}^{21} , e calcular os deslocamentos u_{i+1}^{12} e u_{i+1}^{21} ;
- Verificar se o critério de acoplamento está satisfeito a partir do valor de erro estipulado nos dados de entrada.

Se o critério de acoplamento não for satisfeito os passos descritos dentro do comando enquanto serão realizados até que o critério de acoplamento seja atingido. Se o critério de acoplamento for satisfeito na primeira iteração os passos descritos após o comando “while” serão realizados.

Passos dentro do comando “while”

- Média dos deslocamentos u_{i+1}^{12} e u_{i+1}^{21} ;
- Cálculo da aceleração \ddot{u}_{i+1}^{12} , velocidade \dot{u}_{i+1}^{12} e força F_{i+1}^{12} ;
- Cálculo da aceleração \ddot{u}_{i+1}^{21} , velocidade \dot{u}_{i+1}^{21} e força F_{i+1}^{21} ;
- Média das forças F_{i+1}^{12} e F_{i+1}^{21} ;
- Atualização dos deslocamentos u_{i+1}^{12} e u_{i+1}^{21} ;

Passos fora do comando “while”

- Cálculo da aceleração \ddot{u}_{i+1}^{12} , velocidade \dot{u}_{i+1}^{12} e força F_{i+1}^{12} ;
- Cálculo da aceleração \ddot{u}_{i+1}^{21} , velocidade \dot{u}_{i+1}^{21} e força F_{i+1}^{21} ;
- Média das forças F_{i+1}^{12} e F_{i+1}^{21} ;
- Atualização dos deslocamentos u_{i+1}^{12} e u_{i+1}^{21} ;

O deslocamento atualizado já é o deslocamento da iteração $t + \Delta t$.

Algoritmo 3.4 Acoplamento Iterativo	
Inserir: $m_{12}, m_{21}, c_1, c_2, k_1, k_2, F_1, F_1(t=0), F_{12}, F_{21}, \alpha, \beta, u_i^{12}, \dot{u}_i^{12}, u_i^{21}, \dot{u}_i^{21}, n, erro, \Delta t, t, cont = 1$	
1.	para $i = 1$ até comprimento (t)
2.	$\ddot{u}_i^{12} = m_{12}^{-1} (F_i^1 - c_1 \dot{u}_i^{12} - k_1 u_i^{12})$
3.	$A_{12}(i) = m_{12} \left(\frac{1}{\alpha \Delta t^2} u_i^{12}(i) + \frac{1}{\alpha \Delta t} \dot{u}_i^{12}(i) + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \ddot{u}_i^{12}(i) \right)$ $B_{12}(i) = c_1 \left(\frac{\beta}{\alpha \Delta t} u_i^{12}(i) + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1 \right) \dot{u}_i^{12}(i) + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 2 \right) \frac{\Delta t}{2} \ddot{u}_i^{12}(i) \right)$ $u_{i+1}^{12}(i) = \left[\frac{1}{\alpha \Delta t^2} m_{12} + \frac{\beta}{\alpha \Delta t} c_1 + k_1 \right]^{-1} \left\{ F_{i+1}^1(i) + F_{i+1}^{12}(i) + A_{12}(i) + B_{12}(i) \right\}$
4.	$u_{i+1}^{21}(i) = \sum_{i=1}^{n-1} [F_{21}(i \Delta t) u_{\delta 21}^{nu}(t - (n+1-i)\Delta t)] + F_{i+1}^{21}(i) u_{\delta 21}^{nu}(\Delta t)$
5.	while $ u_{i+1}^{12}(i) - u_{i+1}^{21}(i) \geq erro$
6.	cont=cont+1
7.	$u_{i+1}^{12}(i) = u_{i+1}^{21}(i) = \frac{(u_{i+1}^{12}(i) + u_{i+1}^{21}(i))}{2}$
8.	$\ddot{u}_{i+1}^{12}(i) = \frac{1}{\alpha \Delta t^2} (u_{i+1}^{12}(i) - u_i^{12}(i)) - \frac{1}{\alpha \Delta t} \dot{u}_i^{12}(i) - \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \ddot{u}_i^{12}(i)$

9.	$\dot{u}_{i+1}^{12}(\mathbf{i}) = u_i^{12}(\mathbf{i}) + (1 - \beta)\Delta t \ddot{u}_i^{12}(\mathbf{i}) + \beta \Delta t \ddot{u}_{i+1}^{12}(\mathbf{i})$
10.	$F_{i+1}^{12}(\mathbf{i}) = m \ddot{u}_{i+1}^{12}(\mathbf{i}) + c_1 \dot{u}_{i+1}^{12}(\mathbf{i}) + k_1 u_{i+1}^{12}(\mathbf{i}) - F_{i+1}^1(\mathbf{i})$
11.	$F_{i+1}^{21}(\mathbf{i}) = \frac{\left(u_{i+1}^{21} - \sum_{i=1}^{n-1} [F_{21}(i\Delta t)u(t - (n+1-i)\Delta t)] \right)}{u(1)}$
12.	$F_{i+1}^{12}(\mathbf{i}) = F_{i+1}^{21}(\mathbf{i}) = \frac{F_{i+1}^{12}(\mathbf{i}) + F_{i+1}^{21}(\mathbf{i})}{2}$
13.	$A_{12}(\mathbf{i}) = m_{12} \left(\frac{1}{\alpha \Delta t^2} u_i^{12}(\mathbf{i}) + \frac{1}{\alpha \Delta t} \dot{u}_i^{12}(\mathbf{i}) + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \ddot{u}_i^{12}(\mathbf{i}) \right)$ $B_{12}(\mathbf{i}) = c_1 \left(\frac{\beta}{\alpha \Delta t} u_i^{12}(\mathbf{i}) + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1 \right) \dot{u}_i^{12}(\mathbf{i}) + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 2 \right) \frac{\Delta t}{2} \ddot{u}_i^{12}(\mathbf{i}) \right)$ $u_{i+1}^{12}(\mathbf{i}) = \left[\frac{1}{\alpha \Delta t^2} m_{12} + \frac{\beta}{\alpha \Delta t} c_1 + k_1 \right]^{-1} \{ F_{i+1}^1(\mathbf{i}) + F_{i+1}^{12}(\mathbf{i}) + A_{12}(\mathbf{i}) + B_{12}(\mathbf{i}) \}$
14.	$u_{i+1}^{21}(\mathbf{i}) = \sum_{i=1}^{n-1} [F_{21}(i\Delta t)u_{\delta 21}^{nu}(t - (n+1-i)\Delta t)] + F_{i+1}^{21}(\mathbf{i})u_{\delta 21}^{nu}(\Delta t)$
15.	fim while
16.	$\ddot{u}_{i+1}^{12}(\mathbf{i}) = \frac{1}{\alpha \Delta t^2} (u_{i+1}^{12}(\mathbf{i}) - u_i^{12}(\mathbf{i})) - \frac{1}{\alpha \Delta t} \dot{u}_i^{12}(\mathbf{i}) - \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \ddot{u}_i^{12}(\mathbf{i})$
17.	$\dot{u}_{i+1}^{12}(\mathbf{i}) = u_i^{12}(\mathbf{i}) + (1 - \beta)\Delta t \ddot{u}_i^{12}(\mathbf{i}) + \beta \Delta t \ddot{u}_{i+1}^{12}(\mathbf{i})$
18.	$F_{i+1}^{12}(\mathbf{i}) = m \ddot{u}_{i+1}^{12}(\mathbf{i}) + c_1 \dot{u}_{i+1}^{12}(\mathbf{i}) + k_1 u_{i+1}^{12}(\mathbf{i}) - F_{i+1}^1(\mathbf{i})$
19.	$F_{i+1}^{21}(\mathbf{i}) = \frac{\left(u_{i+1}^{21} - \sum_{i=1}^{n-1} [F_{21}(i\Delta t)u(t - (n+1-i)\Delta t)] \right)}{u(1)}$
20.	$F_{i+1}^{12}(\mathbf{i}) = F_{i+1}^{21}(\mathbf{i}) = \frac{F_{i+1}^{12}(\mathbf{i}) + F_{i+1}^{21}(\mathbf{i})}{2}$
21.	$A_{12}(\mathbf{i}) = m_{12} \left(\frac{1}{\alpha \Delta t^2} u_i^{12}(\mathbf{i}) + \frac{1}{\alpha \Delta t} \dot{u}_i^{12}(\mathbf{i}) + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \ddot{u}_i^{12}(\mathbf{i}) \right)$

	$B_{12}(i) = c_1 \left(\frac{\beta}{\alpha \Delta t} u_i^{12}(i) + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1 \right) \dot{u}_i^{12}(i) + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 2 \right) \frac{\Delta t}{2} \ddot{u}_i^{12}(i) \right)$ $u_{i+1}^{12}(i) = \left[\frac{1}{\alpha \Delta t^2} m_{12} + \frac{\beta}{\alpha \Delta t} c_1 + k_1 \right]^{-1} \left\{ F_{i+1}^1(i) + F_{i+1}^{12}(i) + A_{12}(i) + B_{12}(i) \right\}$
22.	$u_{i+1}^{21}(i) = \sum_{i=1}^{n-1} \left[F_{21}(i \Delta t) u_{\delta 21}^{nu}(t - (n+1-i)\Delta t) \right] + F_{i+1}^{21}(i) u_{\delta 21}^{nu}(\Delta t)$
23.	fim para

A seguir será validado o acoplamento iterativo, aplicando o Método de Newmark no sistema acoplado.

3.4.1 VALIDAÇÃO DO ACOPLAMENTO ITERATIVO N-C COM EXCITAÇÃO DELTA DE DIRAC

Para validar o acoplamento iterativo N-C entre os deslocamentos $u_{i+1}^{12}(t)$ e $u_{i+1}^{21}(t)$ será aplicado o Método de Newmark no sistema acoplado para comparar os deslocamentos do acoplamento iterativo com o deslocamento $u_1(t)$. Nas tabelas abaixo se pode encontrar todos os parâmetros utilizados para obter a validação do acoplamento iterativo.

Tabela 3.13: Propriedades do sistema

Propriedades do sistema		
Massa	Rigidez	Amortecimento
$m_1 = 45 \text{ Kg}$	$k_1 = 45 \text{ N/m}$	$c_1 = 45 \text{ Kg/s}$
$m_{12} = 15 \text{ Kg}$	$k_{12} = 15 \text{ N/m}$	$c_{12} = 15 \text{ Kg/s}$
$m_{21} = 30 \text{ Kg}$	$k_{21} = 30 \text{ N/m}$	$c_{21} = 30 \text{ Kg/s}$

Tabela 3.14: Propriedades do sistema

Propriedades do sistema			
	Frequência natural:	Período:	Passo crítico:
Sistema Acoplado	1 rad/s	2π s	2 s
Subsistema 1	1 rad/s	2π s	2 s

Tabela 3.15: Condições iniciais e excitação externa

Velocidade inicial	Deslocamento inicial	Força excitadora	Constante 'n' para simulação numérica do Delta Dirac	Força de contato	erro
$\dot{u}_0 = 0$	$u_0 = 0$	Função Delta de Dirac (h_n^1)	$n = 40$	$F_{12} = 0.1635$ N $F_{21} = -0.1635$ N	10^{-9}

Tabela 3.16: Parâmetros de Newmark

Passo	Alfa	Beta
$\Delta t = 0.1$ s	$\alpha = 0.25$	$\beta = 0.5$

A figura (3.31) representa os deslocamentos $u_{12}(t)$ e $u_{21}(t)$ obtidos pelo acoplamento iterativo e o deslocamento $u_1(t)$ obtido pelo Método de Newmark quando aplicado no sistema acoplado.

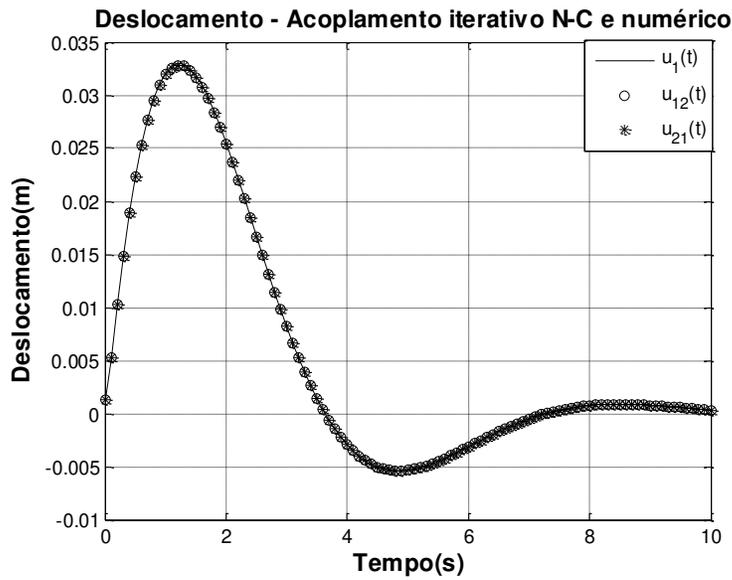


Figura 3.31: Deslocamentos obtidos pelo acoplamento iterativo e solução numérica direta

A figura (3.32) representa as análises de erros relativo e absoluto entre os deslocamentos iterativos $u_{12}(t)$ e $u_{21}(t)$.

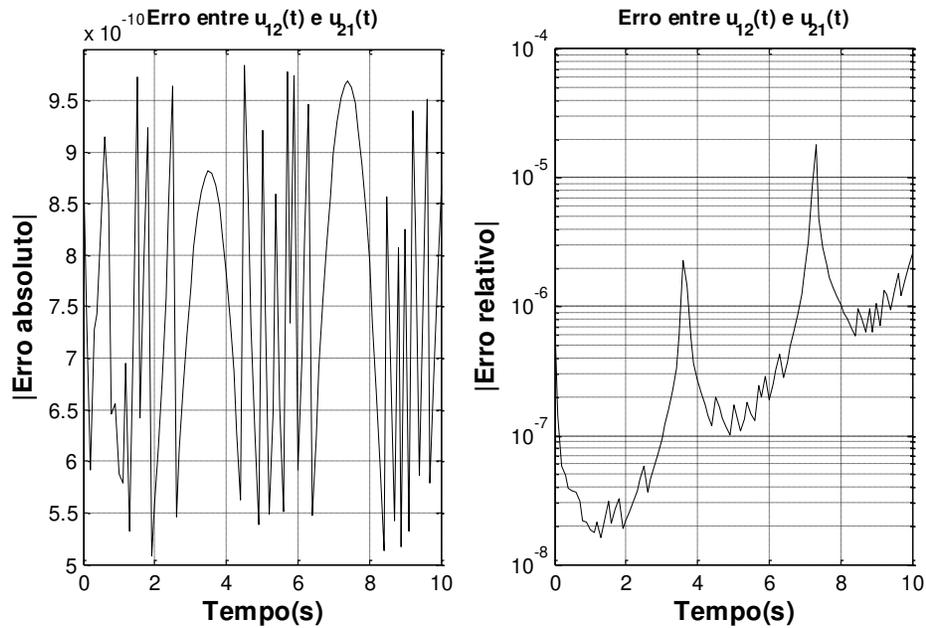


Figura 3.32: Análise de erro entre os deslocamentos iterativos $u_{12}(t)$ e $u_{21}(t)$

A figura (3.33) representa as análises de erros relativo e absoluto entre os deslocamentos $u_1(t)$ numérico e $u_{12}(t)$ iterativo. O erro pode ser menor desde que diminua o passo de tempo.

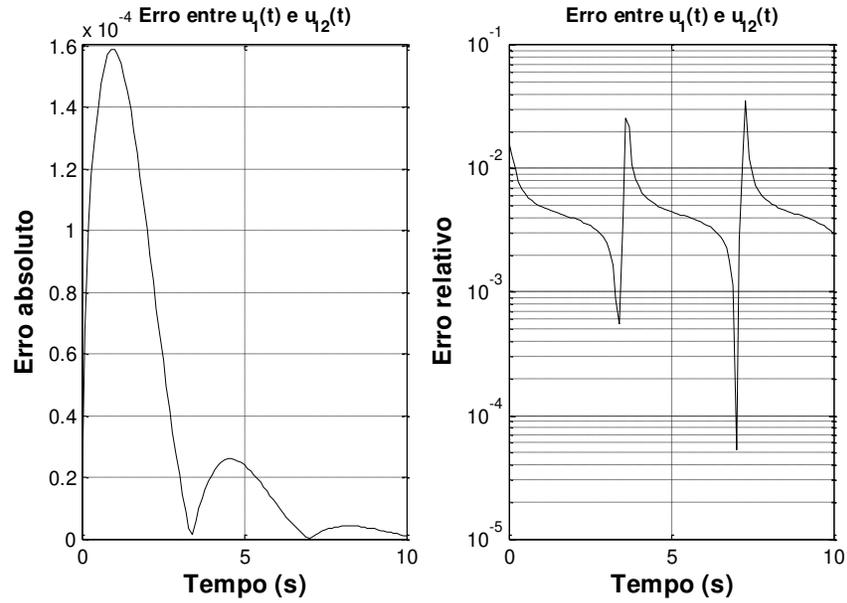


Figura 3.33: Análise de erro entre $u_1(t)$ numérico e $u_{12}(t)$ iterativo

A figura (3.34) representa a velocidade do sistema acoplado \dot{u}_1 obtida pelo Método de Newmark e as velocidades do subsistema 1, \dot{u}_{12} , obtida pelo método iterativo.

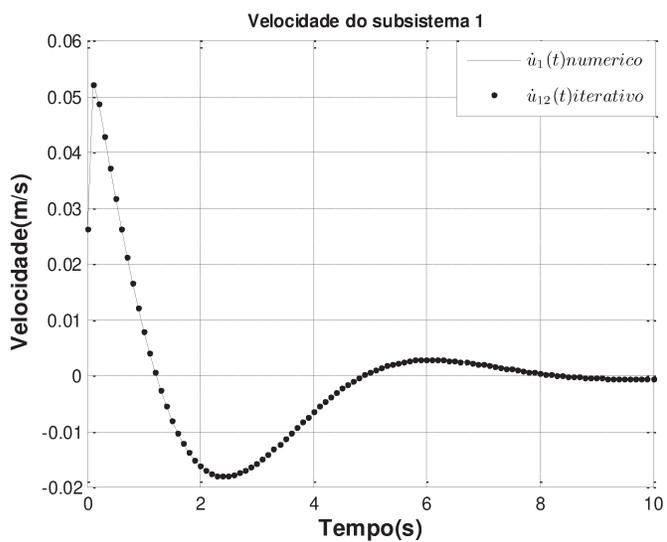


Figura 3.34: Velocidade obtida pelo método numérico e iterativo

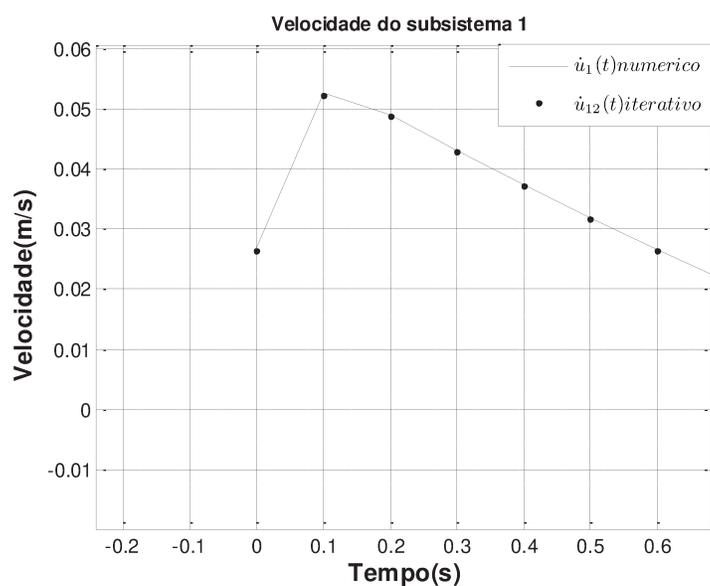


Figura 3.35: Ampliação da figura 3.34 até 0.7s

A figura (3.36) representa a aceleração do sistema acoplado \ddot{u}_1 obtida pelo Método de Newmark e a aceleração do subsistema 1, \ddot{u}_{12} , obtido pelo método iterativo.

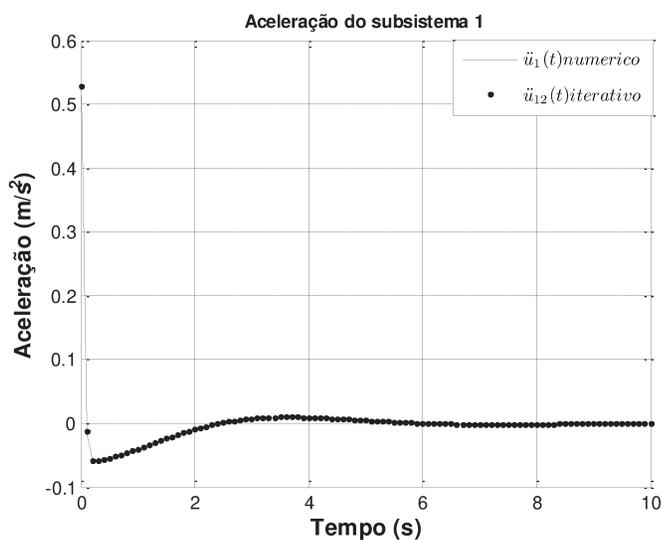


Figura 3.36: Aceleração obtida pelo método numérico e iterativo

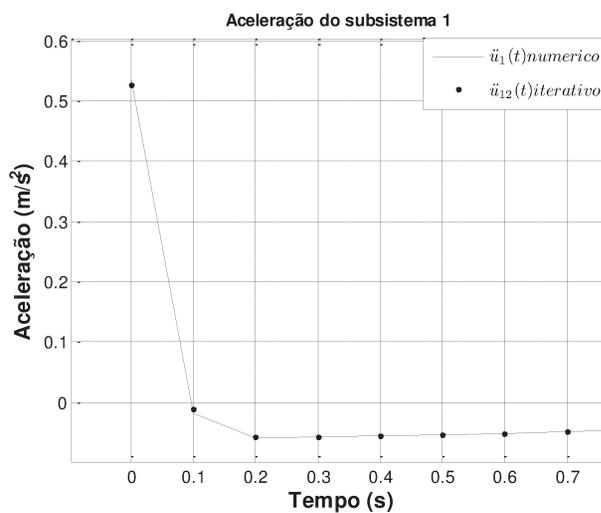


Figura 3.37: Ampliação da figura 3.27a até 0.8s

A figura (3.38) representa a convergência das forças de contato $F_{i+1}^{12}(t)$ e $F_{i+1}^{21}(t)$ e a figura (3.39) representa o número de iterações necessárias para atingir o critério de acoplamento em cada instante de tempo.

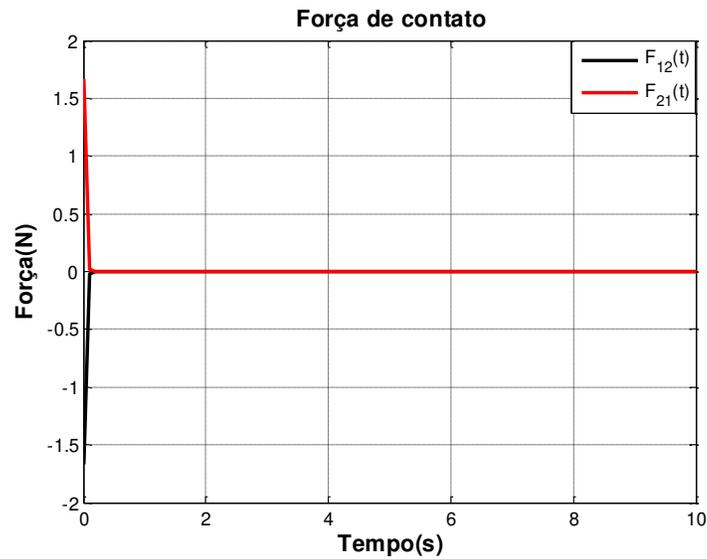


Figura 3.38: Forças de contato

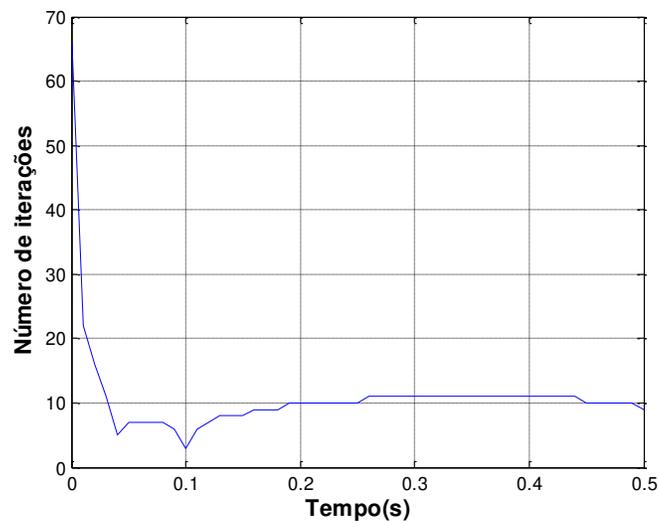


Figura 3.39: Número de iterações

Pode-se concluir em relação ao acoplamento iterativo aplicado em um sistema com 1 grau de liberdade que o método apresentou um erro baixo, da ordem de 10^{-4} . Em relação à figura (3.31) observa-se que o deslocamento decai com o tempo o que é esperado, pois é um sistema amortecido, e também satisfaz as condições iniciais do problema em que o deslocamento e a velocidade inicial (no instante de tempo igual a zero) são zero. Sendo a velocidade a derivada do deslocamento, quando comparado à figura (3.31) com a figura (3.34) pode-se observar que a velocidade é zero nos pontos de máxima amplitude do deslocamento e quando comparado à figura (3.34) com a figura (3.36) pode-se observar também que a aceleração é a derivada da velocidade. Com a figura (3.38) conclui-se que as forças de contato satisfazem o equilíbrio, isto é, a soma das forças de contato deve ser zero. Pode-se concluir em relação à figura (3.39) que o número de iterações necessárias para atingir o acoplamento nos instantes de tempo iniciais é maior, pois como alguns termos são arbitrados, torna-se necessário realizar mais interações para convergir os valores.

3.4.2 ACOPLAMENTO ITERATIVO NEWMARK-CONVOLUÇÃO EM UM SISTEMA COM 1 GRAU DE LIBERDADE COM EXCITAÇÃO HEAVISIDE.

Mudando a função de excitação Delta de Dirac para a função de excitação Heaviside, e utilizando os parâmetros descritos pelas tabelas abaixo, que são os mesmo utilizados no item anterior e aplicando no algoritmo 3.4, tem-se as seguintes respostas:

Tabela 3.17: Propriedades do sistema

Propriedades do sistema		
Massa	Rigidez	Amortecimento
$m_1 = 45 \text{ Kg}$	$k_1 = 45 \text{ N/m}$	$c_1 = 45 \text{ Kg/s}$
$m_{12} = 15 \text{ Kg}$	$k_{12} = 15 \text{ N/m}$	$c_{12} = 15 \text{ Kg/s}$
$m_{21} = 30 \text{ Kg}$	$k_{21} = 30 \text{ N/m}$	$c_{21} = 30 \text{ Kg/s}$

Tabela 3.18: Propriedades do sistema

Propriedades do sistema			
	Frequência natural:	Período:	Passo crítico:
Sistema Acoplado	1 rad/s	$2\pi \text{ s}$	2 s
Subsistema 1	1 rad/s	$2\pi \text{ s}$	2 s

Tabela 3.19: Condições iniciais e excitação externa

Velocidade inicial	Deslocamento inicial	Força excitadora	Constante 'n' para simulação numérica do Heaviside	Força de contato	erro
$\dot{u}_0 = 0$	$u_0 = 0$	Função Heaviside (h_n)	$n = 40$	$F_{12} = 0.1635 \text{ N}$ $F_{21} = -0.1635 \text{ N}$ Para $\beta_f = 5\%$	10^{-9}

Tabela 3.20: Parâmetros de Newmark

Passo	Alfa	Beta
$\Delta t = 0.1 \text{ s}$	$\alpha = 0.25$	$\beta = 0.5$

A figura (3.40) representa os deslocamentos $u_{12}(t)$ e $u_{21}(t)$ obtidos pelo acoplamento iterativo e o deslocamento $u_1(t)$ obtido pelo Método Newmark quando aplicado no sistema acoplado.

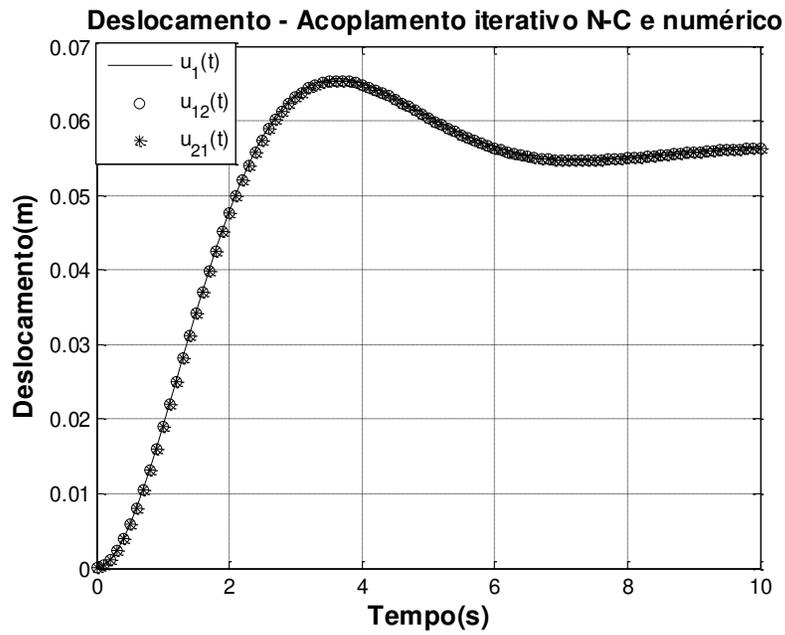


Figura 3.40: Deslocamentos obtidos pelo acoplamento iterativo e solução numérica direta

A figura (3.41) representa as análises de erros relativo e absoluto entre os deslocamentos iterativos $u_{12}(t)$ e $u_{21}(t)$.

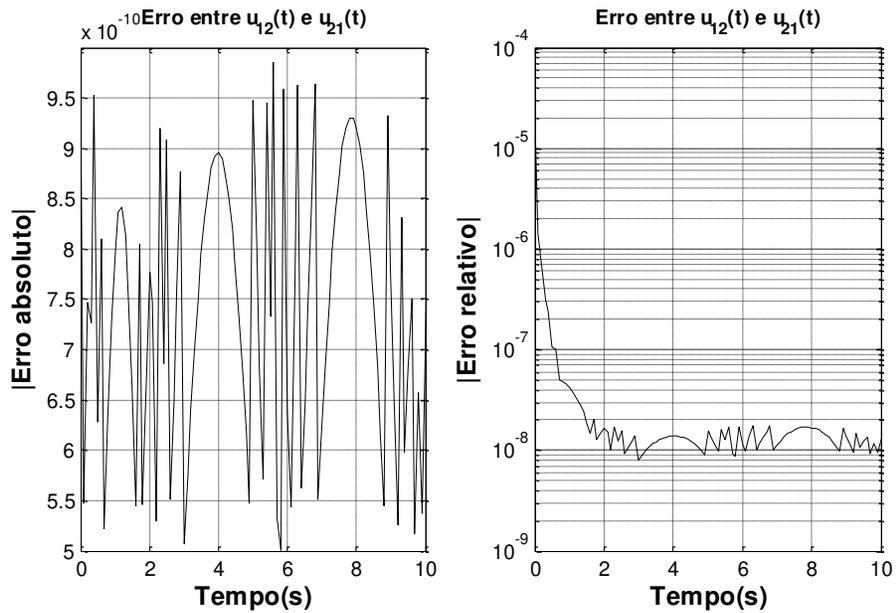


Figura 3.41: Análise de erro entre os deslocamentos iterativos $u_{12}(t)$ e $u_{21}(t)$

A figura (3.42) representa as análises de erros relativo e absoluto entre os deslocamentos $u_1(t)$ numérico e $u_{12}(t)$ iterativo. O erro pode ser menor desde que diminua o passo de tempo.

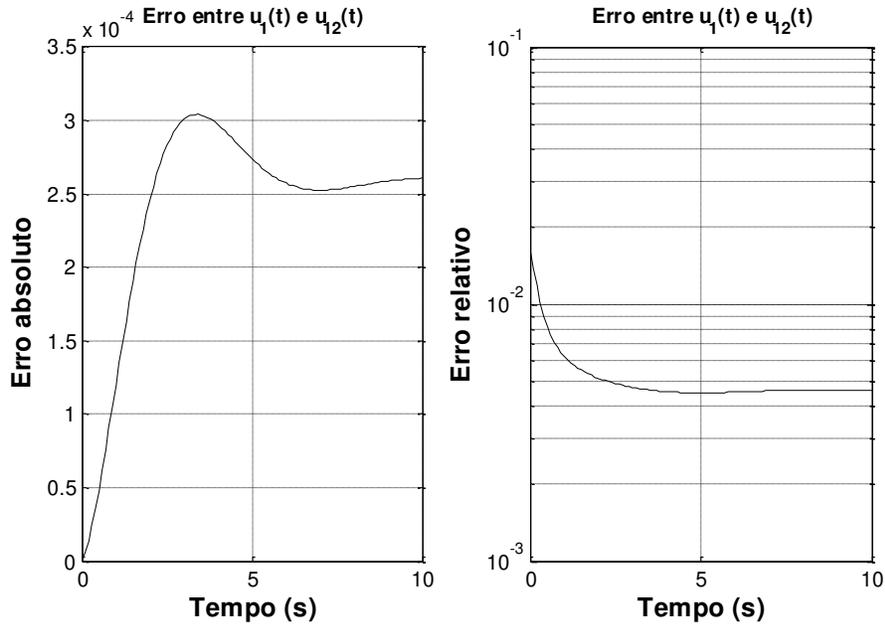


Figura 3.42: Análise de erro entre $u_1(t)$ numérico e $u_{12}(t)$ iterativo

A figura (3.43) representa a velocidade do sistema acoplado $\dot{u}_1(t)$ obtida pelo Método de Newmark e a velocidade do subsistema 1, $\dot{u}_{12}(t)$, obtido pelo método iterativo.

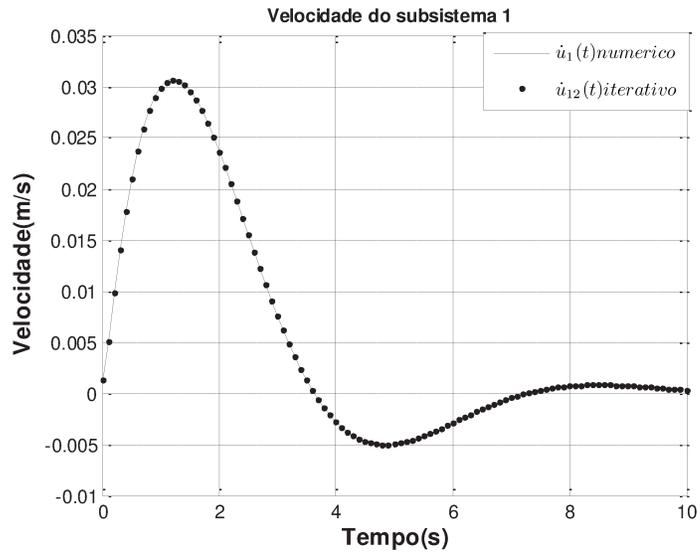


Figura 3.43: Velocidade obtida pelo método numérico e iterativo

A figura (3.44) representa a aceleração do sistema acoplado \ddot{u}_1 obtida pelo Método de Newmark e a aceleração do subsistema 1, \ddot{u}_{12} , obtido pelo método iterativo.

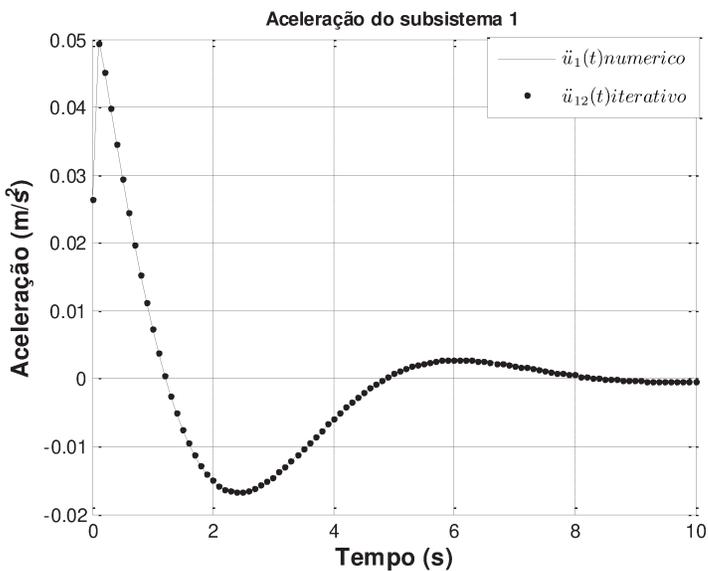


Figura 3.44: Aceleração obtida pelo método numérico e iterativo

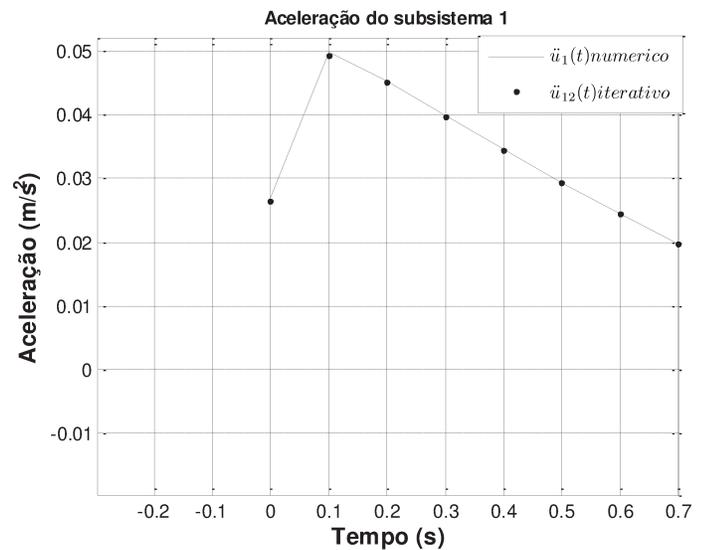


Figura 3.45: Ampliação da figura 3.44 até 0.7s

A figura (3.46) representa a convergência das forças de contato $F_{i+1}^{12}(t)$ e $F_{i+1}^{21}(t)$ e a figura (3.47) representa o número de iterações necessárias para atingir o critério de acoplamento em cada instante de tempo.

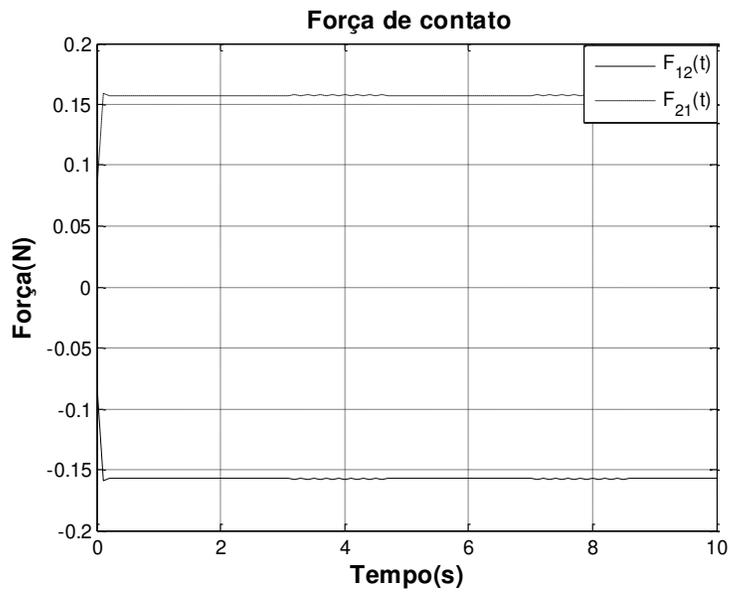


Figura 3.46: Forças de contato

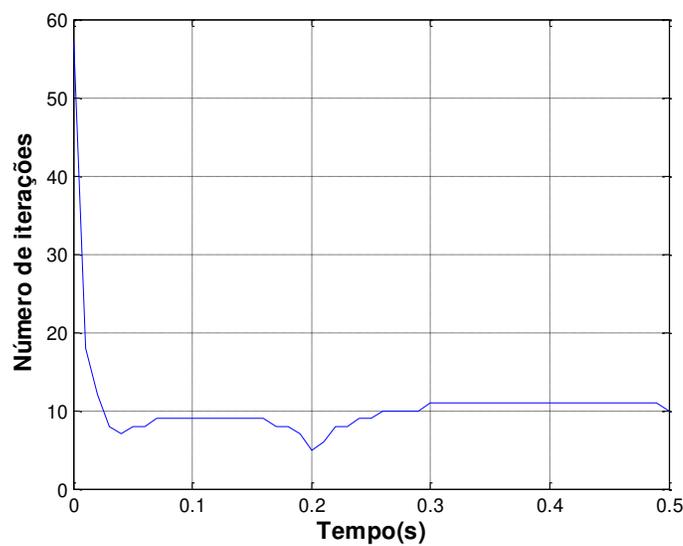


Figura 3.47: Número de iterações

Pode-se concluir em relação ao acoplamento iterativo aplicado em um sistema com 1 grau de liberdade que o método apresentou um erro baixo, da ordem de 10^{-4} . Em relação à figura (3.40) observa-se que o deslocamento decai com o tempo o que é esperado, pois é um sistema amortecido, e também satisfaz as condições iniciais do problema em que o deslocamento e a velocidade inicial (no instante de tempo igual a zero) são zero. Sendo a velocidade a derivada do deslocamento, quando comparado à figura (3.40) com a figura (3.43) pode-se observar que a velocidade é zero nos pontos de máxima amplitude do deslocamento e quando comparado à figura (3.43) com a figura (3.44) pode-se observar também que a aceleração é a derivada da velocidade. Com a figura (3.46) conclui-se que as forças de contato satisfazem o equilíbrio, isto é, a soma das forças de contato deve ser zero. Pode-se concluir em relação à figura (3.47) que o número de iterações necessárias para atingir o acoplamento nos instantes de tempo iniciais é maior, pois como alguns termos são arbitrados, torna-se necessário realizar mais interações para convergir os valores.

3.4.3 ACOPLAMENTO ITERATIVO NEWMARK-CONVOLUÇÃO EM UM SISTEMA COM 1 GRAU DE LIBERDADE COM EXCITAÇÃO TRAPÉZIO

Mudando a função de excitação Heaviside para excitação trapezoidal, e utilizando os parâmetros descritos pelas tabelas abaixo, que são os mesmo utilizados no item anterior e aplicando o algoritmo 3.4, tem-se as seguintes respostas:

Tabela 3.21: Propriedades do sistema

Propriedades do sistema		
Massa	Rigidez	Amortecimento
$m_1 = 45 \text{ Kg}$	$k_1 = 45 \text{ N/m}$	$c_1 = 45 \text{ Kg/s}$
$m_{12} = 15 \text{ Kg}$	$k_{12} = 15 \text{ N/m}$	$c_{12} = 15 \text{ Kg/s}$
$m_{21} = 30 \text{ Kg}$	$k_{21} = 30 \text{ N/m}$	$c_{21} = 30 \text{ Kg/s}$

Tabela 3.22: Propriedades do sistema

Propriedades do sistema			
	Frequência natural:	Período:	Passo crítico:
Sistema Acoplado	1 rad/s	$2\pi \text{ s}$	2 s
Subsistema 1	1 rad/s	$2\pi \text{ s}$	2 s

Tabela 3.23: Condições iniciais e excitação externa

Velocidade inicial	Deslocamento inicial	Força excitadora	Força de contato	erro
$\dot{u}_0 = 0$	$u_0 = 0$	Trapezoidal (F_t)	$F_{12} = 0.1635 \text{ N}$ $F_{21} = -0.1635 \text{ N}$ Para $\beta_f = 5\%$	10^{-9}

Tabela 3.24: Parâmetros de Newmark

Passo	Alfa	Beta
$\Delta t = 0.1 \text{ s}$	$\alpha = 0.25$	$\beta = 0.5$

A figura (3.48) representa os deslocamentos $u_{12}(t)$ e $u_{21}(t)$ obtidos pelo acoplamento iterativo e o deslocamento $u_1(t)$ obtido pelo Método Newmark quando aplicado no sistema acoplado.

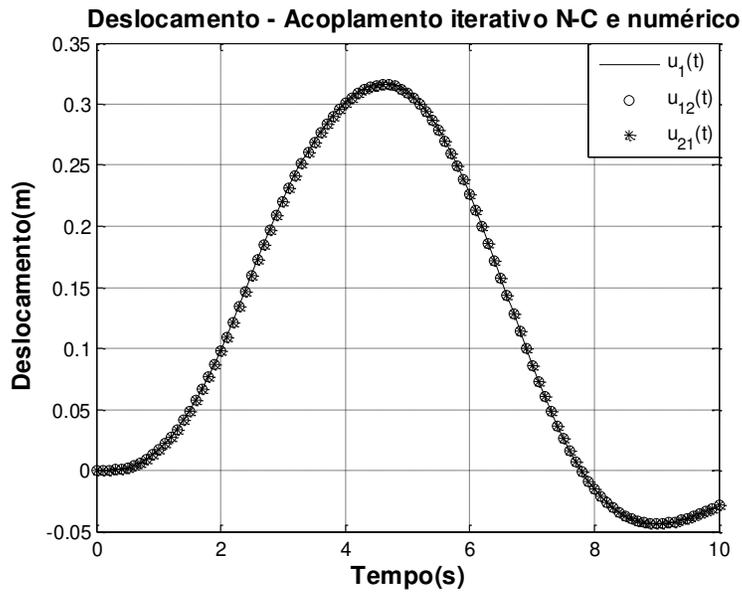


Figura 3.48: Deslocamentos obtidos pelo acoplamento iterativo e solução numérica direta

A figura (3.49) representa as análises de erros relativo e absoluto entre os deslocamentos iterativos $u_{12}(t)$ e $u_{21}(t)$.

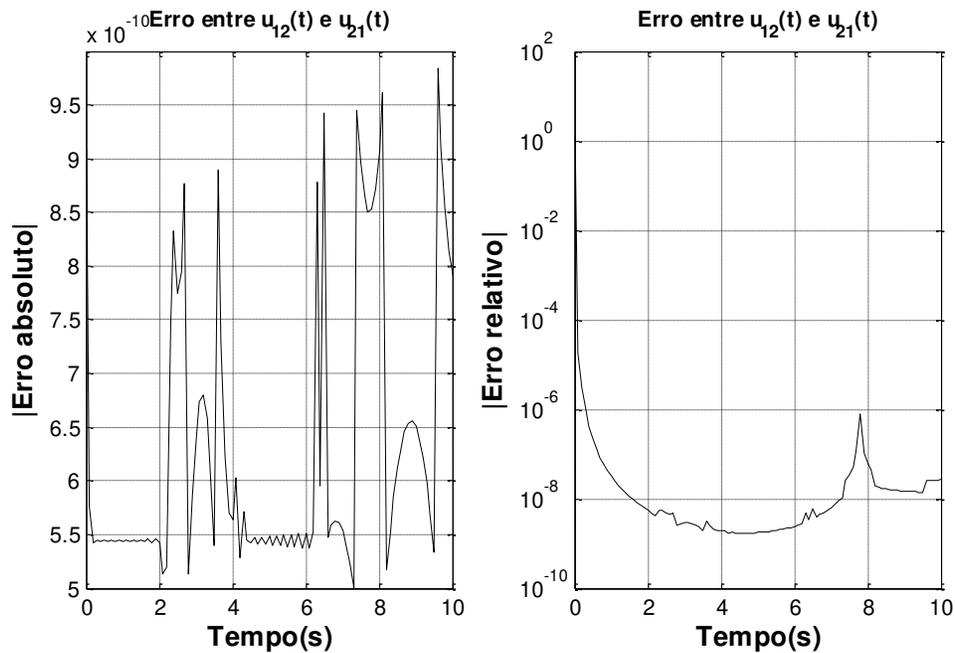


Figura 3.49: Análise de erro entre os deslocamentos iterativos $u_{12}(t)$ e $u_{21}(t)$

A figura (3.50) representa as análises de erros relativo e absoluto entre os deslocamentos $u_1(t)$ numérico $u_{12}(t)$ iterativo. O erros podem ser menores desde que diminua o passo de tempo.

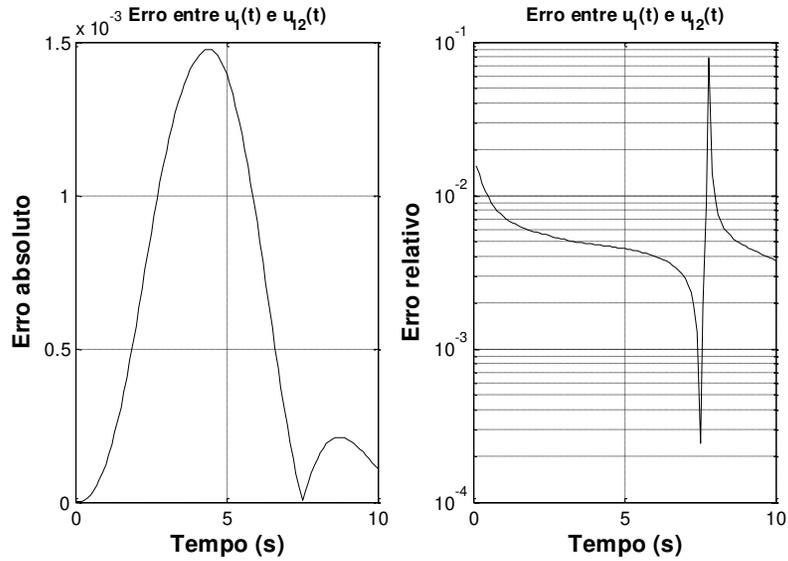


Figura 3.50: Análise de erro entre $u_1(t)$ numérico e $u_{12}(t)$ iterativo

A figura (3.51) representa a velocidade do sistema acoplado \dot{u}_1 obtida pelo Método de Newmark e a velocidade do subsistema 1, \dot{u}_{12} , obtido pelo método iterativo.

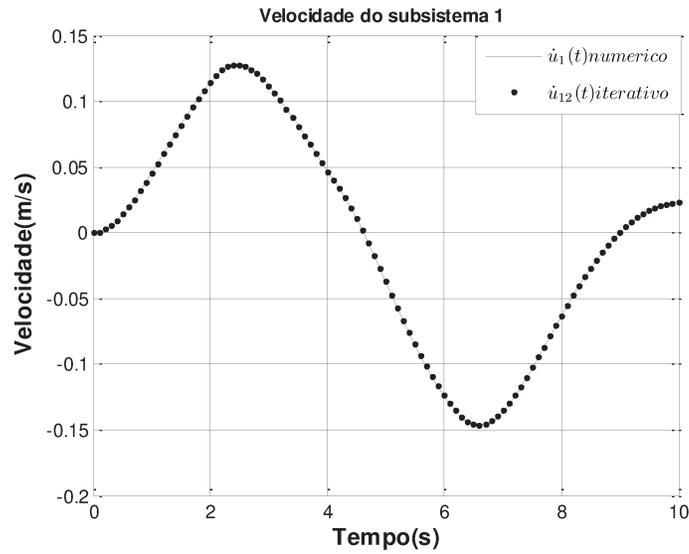


Figura 3.51: Velocidade obtida pelo método numérico e iterativo

A figura (3.52) representa a aceleração do sistema acoplado \ddot{u}_1 obtida pelo Método de Newmark e a aceleração do subsistema 1, \ddot{u}_{12} , obtido pelo método iterativo.

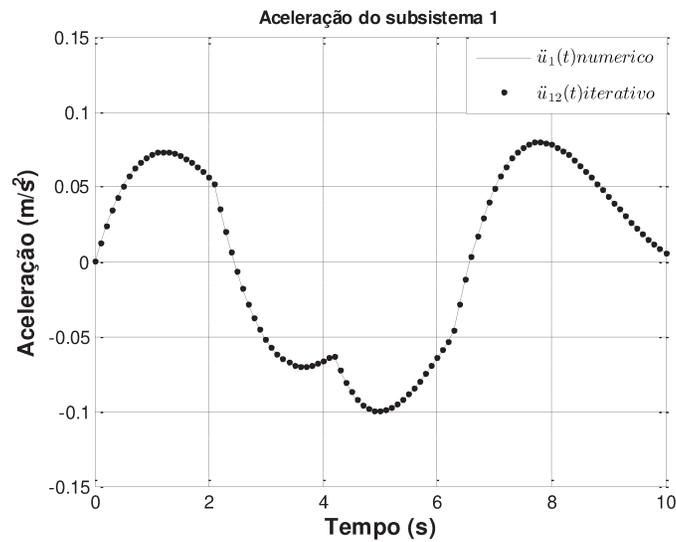


Figura 3.52: Aceleração obtida pelo método numérico e iterativo

A figura (3.53) representa a convergência das forças de contato $F_{i+1}^{12}(t)$ e $F_{i+1}^{21}(t)$ e a figura (3.54) representa o número de iterações necessárias para atingir o critério de acoplamento em cada instante de tempo.

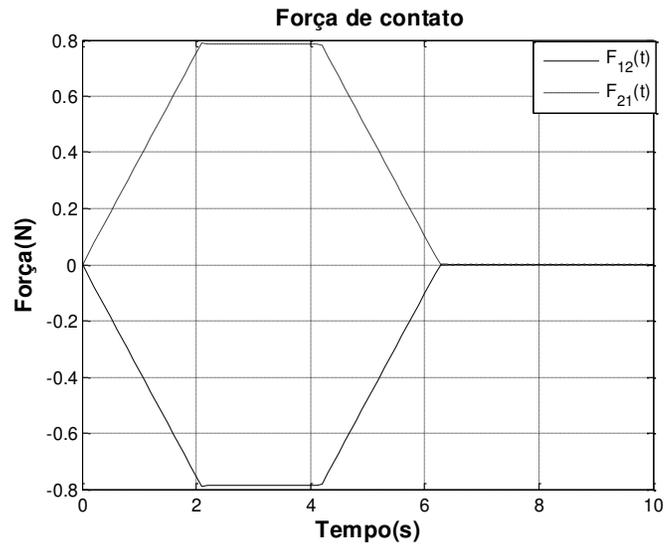


Figura 3.53: Forças de contato

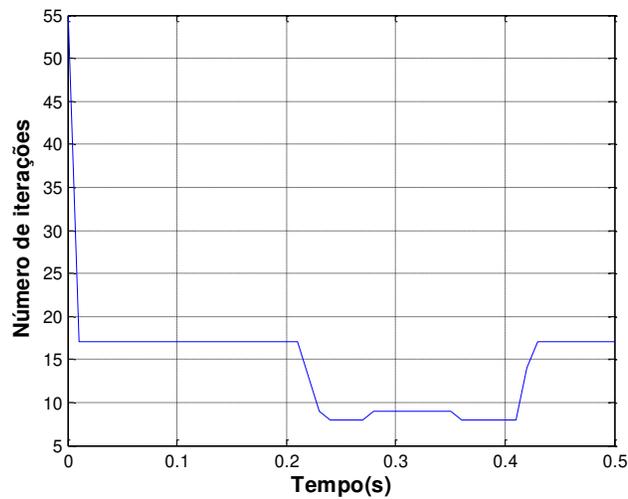


Figura 3.54: Número de iterações

Pode-se concluir em relação ao acoplamento iterativo aplicado em um sistema com 1 grau de liberdade que o método apresentou um erro da ordem de 10^{-3} . Em relação à figura (3.48) observa-se que o deslocamento decai com o tempo o que é esperado, pois é um sistema amortecido, e também satisfaz as condições iniciais do problema em que o deslocamento e a velocidade inicial (no instante de tempo igual a zero) são zero. Sendo a velocidade a derivada do deslocamento, quando comparado à figura (3.48) com a figura (3.51) pode-se observar que a velocidade é zero nos pontos de máxima amplitude do deslocamento e quando comparado à figura (3.51) com a figura (3.52) pode-se observar também que a aceleração é a derivada da velocidade. Na figura (3.52) pode-se observar alguns picos, os quais estão relacionados com a forças de contato. Os instantes de tempo de 2.1s, 4.2s e 6.3s na figura (3.53) correspondem aos picos na figura (3.52). Com a figura (3.53) conclui-se que as forças de contato satisfazem o equilíbrio, isto é, a soma das forças de contato deve ser zero. Pode-se concluir em relação à figura (3.54) que o número de iterações necessárias para atingir o acoplamento nos instantes de tempo iniciais é maior, pois como alguns termos são arbitrados, torna-se necessário realizar mais interações para convergir os valores.

3.5 SISTEMA ÚNICO SOLO-ESTRUTURA

3.5.1 RESPOSTA DO SOLO

Um dos objetivos do desenvolvimento do método de acoplamento iterativo é acoplar modelos de solo já estudados pelo grupo de pesquisa no qual a autora deste trabalho está inserida, com estruturas sujeitas a qualquer excitação externa transiente. Um dos modelos a ser analisado será um semi-espaço tridimensional transversalmente isotrópico viscoelástico submetido a um

carregamento harmônico circular vertical axissimétrico uniformemente distribuído como mostrado abaixo pela figura (3.55).

Este modelo de solo foi estudado por Labaki (2012). Os resultados de respostas em deslocamento do solo aqui utilizados foram os obtidos e validados por Labaki (2012).

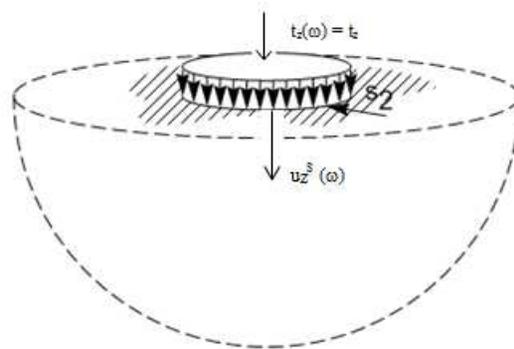


Figura 3.55: semi-espaço tridimensional com carregamento circular uniformemente distribuído

Considera-se um semi-espaço, viscoelástico transversalmente isotrópico, caso axissimétrico, solicitado por uma tensão constante t_z para todos os valores de frequência. Os parâmetros físicos do solo utilizados são dados na tabela 3.3.1.

Tabela 3.25: Parâmetros do solo

C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{33}	C_{44}	η	ρ	ω_i	ω_f	$\Delta\omega$	S_2
60e6 (Pa)	20e6 (Pa)	20e6 (Pa)	60e6 (Pa)	20e6 (Pa)	0.2 Kg/s	1700 Kg/m ³	1 (rad/s)	16384 (rad/s)	1 (rad/s)	0.8 (m)

Os parâmetros C_{11} , C_{12} , C_{13} , C_{33} e C_{44} são constantes elásticas, η é o amortecimento, ρ é a densidade, ω_i é a frequência inicial, ω_f é a frequência final, $\Delta\omega$ é o incremento e S_2 é o raio. Para estes parâmetros as velocidades de propagação, respectivamente, das ondas de compressão (c_p), de cisalhamento (c_s) e Rayleigh (c_r) são:

$$c_p = 187.87 \text{ m/s}$$

$$c_s = 108.46 \text{ m/s}$$

$$c_r = 121.46 \text{ m/s}$$

A resposta estacionária do solo $u_z^S(\omega)$ é uma função complexa que é função da frequência e que se for normalizada pela excitação $t_z(\omega)$, S_2 e E fornece uma função de flexibilidade $N_Z^S(\omega)$:

$$N_Z^S(\omega) = \frac{u_z^S(\omega)}{ES_2} = \text{Real}(N_Z^S(\omega)) + i\text{Imag}(N_Z^S(\omega)) \quad (3.31)$$

O módulo da impedância do solo $N_Z^S(\omega)$ pode ser visto na figura (3.56). Como se pode perceber o algoritmo constituinte para a solução do solo é robusto e fornece soluções para frequências bastante elevadas. Neste caso a frequência máxima foi $\omega_{\max} = 16384$, o número de pontos de frequência calculado foi $N_{pt} = 16384$ resultando em um passo de frequência $\Delta\omega = 1$ (Labaki, 2012).

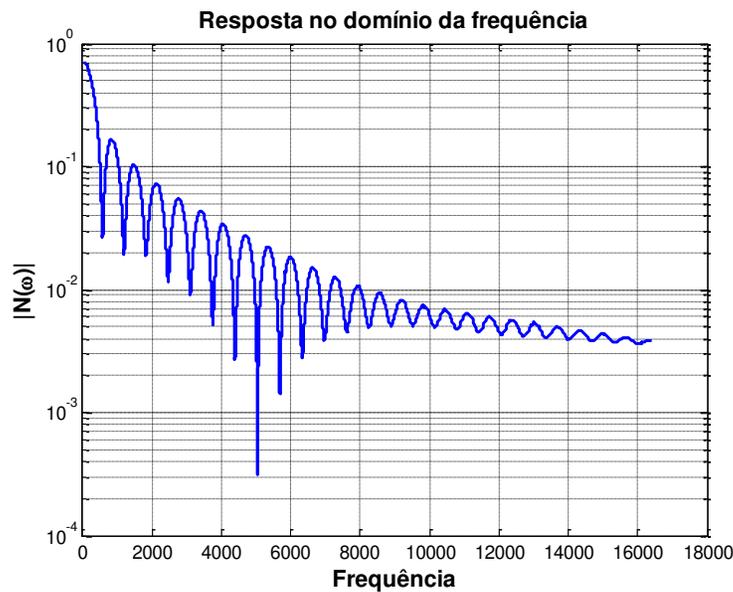


Figura 3.56: Módulo de $N_Z^S(\omega)$ no domínio da frequência

É possível utilizar o algoritmo da FFT sobre respostas do tipo da mostrada na figura (3.56) para se obter a função de resposta ao impulso. A figura (3.57) mostra a típica função de resposta ao impulso do solo. Ela descreve o deslocamento do ponto central da carga circular na superfície do semi-espaço $u_z^S(x=y=z=0)$.

Para a determinação desta resposta transiente foi utilizado o número de ponto $N_{pt} = 16384$ na FFT, resultando em um período máximo $T_{max} = 6.28$ segundos e um passo de tempo $\Delta t = 3.835^{-4}$.

O sinal, a resposta mostrada na figura (3.43) foi submetida a um tratamento, tal como já descrito (Adolph, Mesquita e Romanini, 2001).

Observe-se que a parte principal da dinâmica da resposta ocorre até 0.03s.

Esta função de resposta ao impulso é uma propriedade ou solução fundamental para este tipo de solo e ela será utilizada em todos os procedimentos de acoplamento iterativo com o solo, no presente trabalho.

Algumas informações podem ser obtidas no gráfico da figura (3.57). O ponto central ($x=y=z=0$) se desloca inicialmente com a maior velocidade de onda que é $c_p=187.87$ m/s. Quando as forças externas e as forças elásticas de restauro encontram um equilíbrio a resposta atinge um nível quase constante. Simultaneamente, no tempo inicial $t=0$, a descontinuidade de tensões associada à extremidade da área de carregamento ($x=y=S_2, z=0$) causa o surgimento de um trem de ondas de compressão, cisalhamento e Rayleigh que se movimenta em direção ao ponto central onde estamos determinando a resposta.

Os tempos para que estas frentes de onda atinjam o ponto central são respectivamente $T_p(c_p) = 0.0043s$, $T_s(c_s) = 0.0073s$ e $T_r(c_r) = 0.008s$.

As chegadas das frentes de onda podem ser claramente, identificadas na resposta. Elas estão marcadas na figura, sendo a reta em vermelho representa T_p , a reta em azul representa T_s e a reta em roxo representa T_r .

Depois da passagem das frentes de onda o deslocamento decaí monotonicamente até a posição inicial não perturbada.

Funções de resposta ao impulso para outros perfis de solo podem, e foram obtidos de forma semelhante.

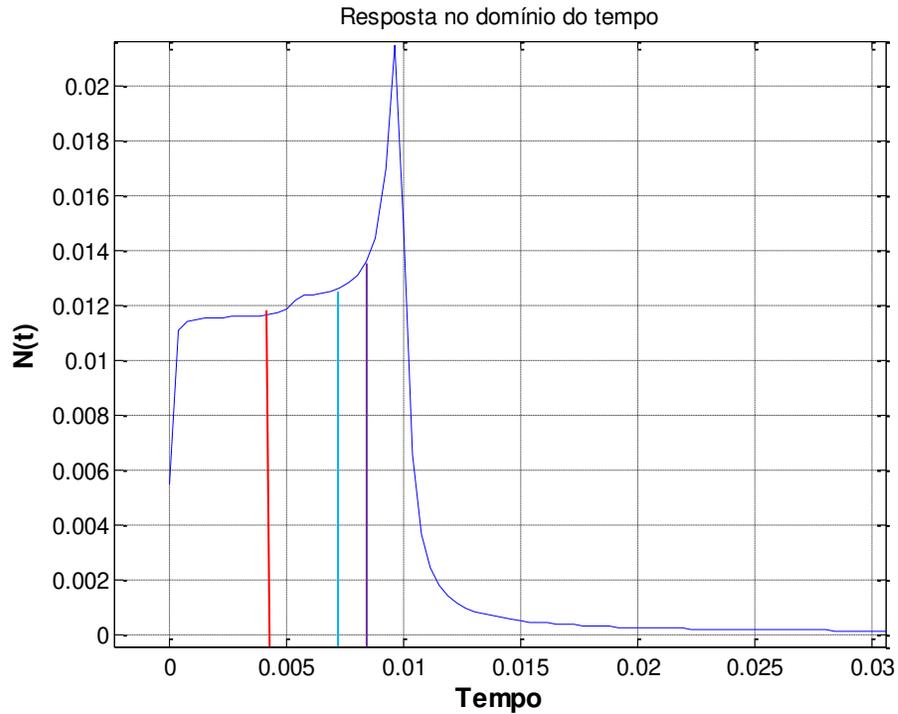


Figura 3.57: Resposta ao impulso

3.5.2 RESPOSTA ESTACIONÁRIA E TRANSIENTE DE UM SISTEMA FUNDAÇÃO-SOLO: ACOPLAMENTO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA E RESPOSTA TRANSIENTE VIA FFT

A figura (3.58) mostra o sistema que agora será analisado. Trata-se da resposta vertical de uma fundação assentada sobre o semi-espaço. A fundação está excitada por uma força externa $F(t)$. Quando se referir ao solo o eixo de coordenada será chamado de z e não de x .

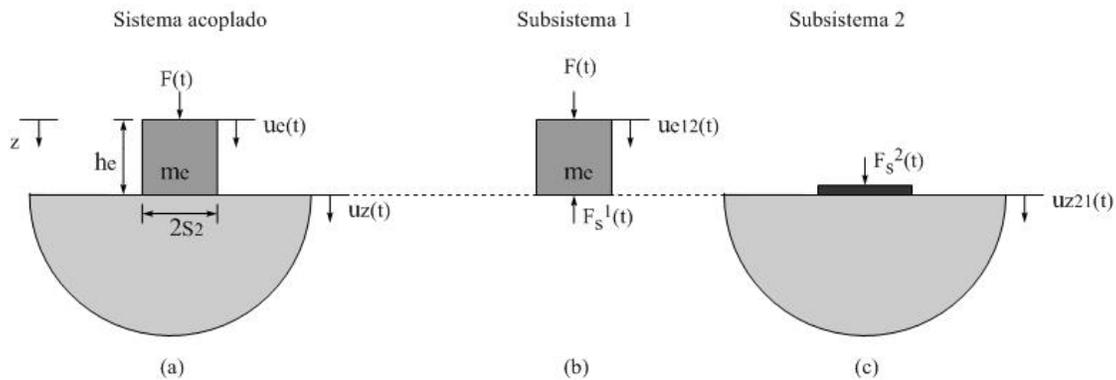


Figura 3.58: (a) Sistema único estrutura-solo, (b) subsistema 1 de (a), (c) subsistema 2 de (a)

Será desenvolvido um equacionamento para um acoplamento no domínio da frequência, dando origem a função de resposta em frequência do sistema fundação massa-solo. Esta resposta em frequência poderá gerar uma resposta ao impulso do sistema total $F(t) = \delta(t)$ (fundação-solo) via FFT, esta é uma característica do sistema que poderá ser utilizada para gerar, via Integral de Convolução, a resposta transiente do sistema solo-fundação a uma força externa transiente genérica $F(t)$.

A resposta em frequência do sistema acoplado será calculada da seguinte forma:

$$u_z^s(\omega) = \frac{F}{-\omega^2 m_e + i\omega c + k} \quad (3.32)$$

O parâmetro m_e é a massa da estrutura, c o amortecimento, k a rigidez e F a função de excitação. As figuras (3.59), (3.60), (3.61) e (3.62) representam o deslocamento do sistema no domínio da frequência e do tempo.

Tabela 3.26: Propriedades do sistema

m_e	F
$5.4 \cdot 10^3 / 5 \text{ Kg}$	1 N

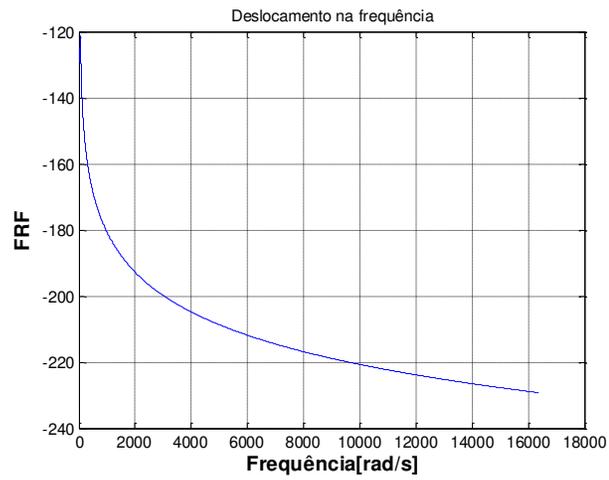


Figura 3.59: FRF

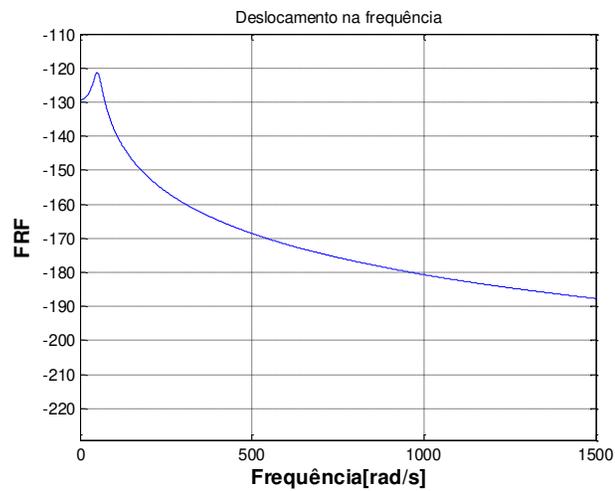


Figura 3.60: FRF até 1500 rad/s

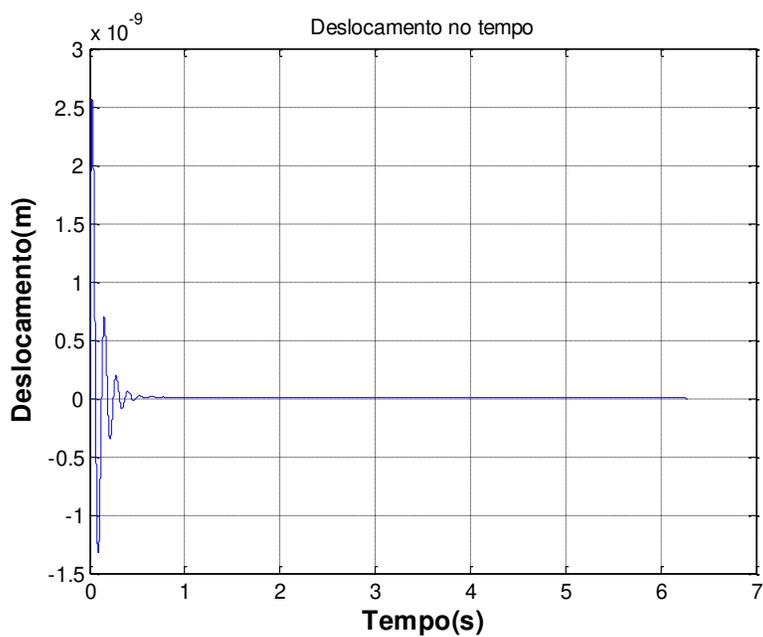


Figura 3.61: Deslocamento no domínio do tempo

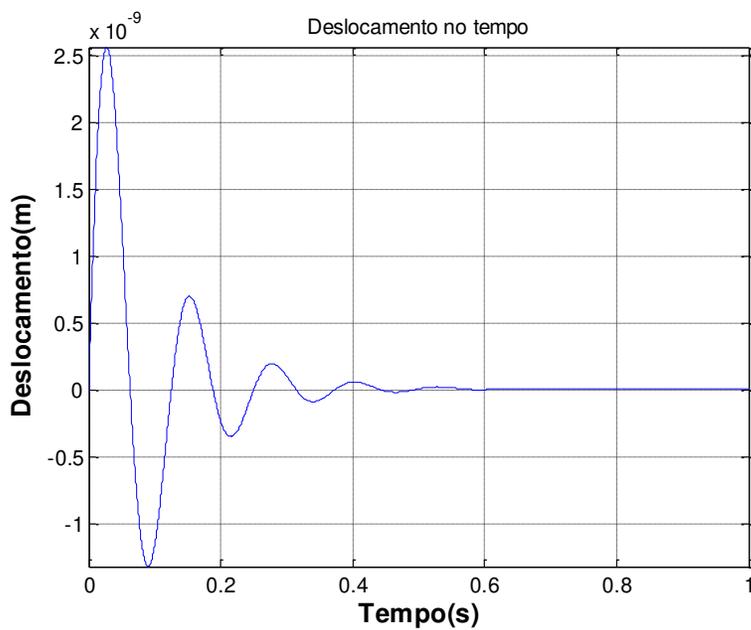


Figura 3.62: Deslocamento no domínio com ampliação até 1s

A equação de movimento da estrutura representada pelo subsistema 1 é dada a seguir:

Estrutura:

$$F_{\text{ext}}(\omega) - F_s^1(\omega) = m_e \ddot{u}_e(\omega) \quad (3.33)$$

$$F_{\text{ext}}(\omega) - F_s^1(\omega) = -\omega^2 m_e u_e(\omega) \quad (3.34)$$

$$F_s^1(\omega) = F_{\text{ext}}(\omega) + \omega^2 m_e u_e(\omega) \quad (3.35)$$

A equação de movimento do solo representado pelo subsistema 2 é dada pela equação (3.36).

Solo

O deslocamento é dado por:

$$u_z^s(\omega) = \frac{F_s^2 N_z(\omega)}{S_2 E} \quad (3.36)$$

Sendo s_2 o raio da superfície carregada, e E o módulo de elasticidade.

A força de contato $F_s^2(\omega)$ pode ser determinada por:

$$F_s^2(\omega) = \frac{u_z^s(\omega) S_2 E}{N_z^s(\omega)} \quad (3.37)$$

Sendo $N_z^s(\omega)$ uma flexibilidade complexa que pode ser dividida em suas componentes real e imaginária:

$$N_z^s(\omega) = \text{Re} - N_z^s(\omega) + i \text{Im} - N_z^s(\omega) \quad (3.38)$$

Definindo uma impedância dinâmica $S_z^s(\omega)$ como o inverso da flexibilidade:

$$S_z^s(\omega) = \frac{1}{N_z^s(\omega)} \quad (3.39)$$

Podemos ainda expressar $S_z^s(\omega)$ como:

$$S_Z^s(\omega) = \frac{1}{N_Z^s(\omega)} = \frac{\text{Re}-N_Z^s(\omega)+i \text{Im}-N_Z^s(\omega)}{[\text{Re}-N_Z^s(\omega)+i \text{Im}-N_Z^s(\omega)]^2+[\text{Re}-N_Z^s(\omega)+i \text{Im}-N_Z^s(\omega)]^2} \quad (3.40)$$

Introduzindo as condições de acoplamento na interface entre o solo e a estrutura (fundação), que dizem respeito à compatibilidade cinemática:

$$u_Z^s(\omega) = u_e \quad (3.41)$$

E equilíbrio

$$-F_s^1(\omega) = F_s^2(\omega) \quad (3.42)$$

E substituindo as equações (3.35) e (3.37) em (3.42) tem-se:

$$-F_{\text{ext}}(\omega) - \omega^2 m_e u_e(\omega) + \frac{u_Z^s(\omega) S_2 E}{N_Z^s(\omega)} = 0 \quad (3.43)$$

$$F_{\text{ext}}(\omega) = u_e(\omega) \left(-\omega^2 m_e + S_2 E \frac{1}{N_Z^s(\omega)} \right) \quad (3.44)$$

ou

$$F_{\text{ext}}(\omega) = u_e(\omega) \left(-\omega^2 m_e + S_2 E S_Z^s(\omega) \right) \quad (3.45)$$

ou ainda

$$F_{\text{ext}}(\omega) = u_e(\omega) \left(-\omega^2 m_e + S_2 E \frac{\text{Re}-N_Z^s(\omega)+i \text{Im}-N_Z^s(\omega)}{[\text{Re}-N_Z^s(\omega)+i \text{Im}-N_Z^s(\omega)]^2+[\text{Re}-N_Z^s(\omega)+i \text{Im}-N_Z^s(\omega)]^2} \right) \quad (3.46)$$

Que pode ser reescrito como:

$$F_{\text{ext}}(\omega) = u_e(\omega) \left(-\omega^2 m_e + S_2 E \frac{\text{Re}-N_Z^s(\omega)}{[\text{Re}-N_Z^s(\omega)+i \text{Im}-N_Z^s(\omega)]^2+[\text{Re}-N_Z^s(\omega)+i \text{Im}-N_Z^s(\omega)]^2} - \frac{i \text{Im}-N_Z^s(\omega)}{[\text{Re}-N_Z^s(\omega)+i \text{Im}-N_Z^s(\omega)]^2+[\text{Re}-N_Z^s(\omega)+i \text{Im}-N_Z^s(\omega)]^2} \right) \quad (3.47)$$

Sendo

$$N_z^n(\omega) = \frac{\frac{\text{Re}-N_z^s(\omega)}{[\text{Re}-N_z^s(\omega)+i \text{Im}-N_z^s(\omega)]^2+[\text{Re}-N_z^s(\omega)+i \text{Im}-N_z^s(\omega)]^2}}{i \text{Im}-N_z^s(\omega)}}{[\text{Re}-N_z^s(\omega)+i \text{Im}-N_z^s(\omega)]^2+[\text{Re}-N_z^s(\omega)+i \text{Im}-N_z^s(\omega)]^2}} \quad (3.48)$$

$$N_z^{se}(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 m_e + S_2 E N_z^n(\omega)} \quad (3.49)$$

$$u_e(\omega) = F_{\text{ext}}(\omega) N_z^{se}(\omega) = \frac{F_{\text{ext}}(\omega)}{S_z^{se}(\omega)} \quad (3.50)$$

A expressão (3.50) fornece uma relação entre a força externa aplicada na estrutura/fundação $F_{\text{ext}}(\omega)$ e o deslocamento da fundação/estrutura $u_e(\omega)$, levando em consideração a influência do solo. Esta relação define a função de flexibilidade do sistema solo-estrutura $N_z^{se}(\omega)$ ou sua impedância $S_z^{se}(\omega)$.

As figuras (3.59) e (3.60) mostram o módulo da impedância $S_z^{se}(\omega)$ calculada para os parâmetros indicados na tabela (3.32). Esta é uma típica função de resposta em frequência do sistema solo-fundação. Note-se que existe uma ressonância no sistema, apesar da influência do solo no sistema.

Resposta transiente ao impulso

A aplicação da FFT à impedância $S_z^{se}(\omega)$ irá fornecer a resposta do sistema estrutura-solo a uma excitação externa na forma de Delta de Dirac ou impulso unitário. A resposta obtida será a resposta transiente ao impulso $S_{\delta-z}^{se}(t)$ do sistema solo-fundação.

A figura (3.61) mostra a resposta ao impulso. Deve-se perceber o caráter oscilatório da resposta. Esta função pode ser utilizada, via Integral de Convolução, para obtenção da resposta transiente do sistema solo-fundação a uma excitação mais geral $F_{\text{ext}}(\omega)$.

$$u_z^{se}(t) = \int_{-\infty}^t S_{\delta-z}^{se}(t-\tau) F_{\text{ext}}(\tau) d\tau \quad (3.51)$$

Forças de contato na interface solo-fundação

As equações (3.35) e (3.37) permitem a obtenção das forças de contato $F_s^2(\omega)$, na interface solo-fundação para toda a faixa de frequência analisada e mostrada na figura (3.45).

A figura (3.63) mostra respectivamente as força de contato na interface solo-fundação, no domínio do tempo.

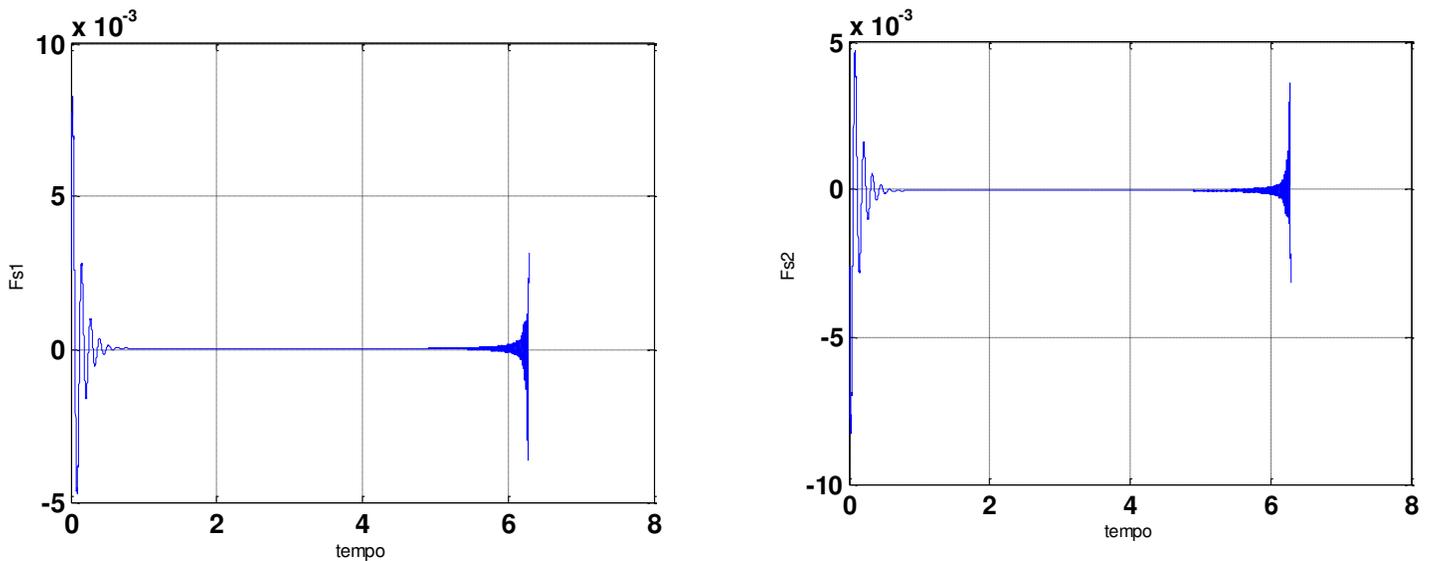


Figura 3.63: Forças de contato

Se aplicarmos a FFT a estas funções de contato $F_s^2(\omega)$, obtemos a força $F_s^2(t)$ transiente que atuará no solo quando da aplicação do Delta de Dirac como força externa atuando na fundação.

Esta forma de se obter a resposta transiente do sistema solo fundação é correta. Mas ela considera que existe contato perfeito entre a fundação e o solo.

Uma análise que possibilite o tratamento da condição de contato não-linear deve ser realizada no domínio do tempo, a partir do acoplamento iterativo dos sistemas analisados no domínio do tempo.

4 CONCLUSÕES E DISCUSSÕES

Pode-se concluir em relação ao trabalho desenvolvido que:

- Construiu-se elementos necessários para realização de um algoritmo de acoplamento iterativo no domínio do tempo.
- Sistemas descritos por duas formulações foram acopladas. Primeiro os dois subsistemas eram discretizados pelo integrador de Newmark. A segunda formulação acoplava sistemas discretos por Newmark com sistema descrito por uma versão discreta da Integral de Convolução.
- Estas metodologias foram implementadas e validadas para dois subsistemas do tipo massa-mola-amortecimento. Neste caso os resultados foram muito precisos, mostrando a adequação das metodologias.
- Para validação o acoplamento do sistema tipo solo-estrutura foi realizado no domínio da frequência.
- Para o acoplamento iterativo entre solo e fundação, sendo ambos os sistemas descritos por equações no domínio do tempo, as respostas obtidas indicam a necessidade de se aprimorar a análise, em particular o tratamento da resposta ao impulso do solo.

Perspectivas de trabalho futuro:

- Aplicar o método de acoplamento iterativo em um sistema solo-fundação para obter a resposta transiente do sistema acoplado.
- Trabalhar com múltiplos passos de tempo.
- Aplicar a metodologia desenvolvida para mais de um grau de liberdade na interface
- E trabalhar com contato não linear.

Referências

- ADOLPH, M. **Soluções Transientes de Problemas Visco-Elastodinâmicos em Meios Ilimitados Através da Transformada de Fourier Rápida - FFT.** 2002. 188p. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Departamento de Mecânica Computacional Campinas.
- ADOLPH, M. **Síntese de funções de Green e estados auxiliares visco-elastodinâmicos em meios tridimensionais ilimitados com auxílio da transformada de Radon.** 2006. 324p. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade de Campinas, Brasil, Campinas.
- BARROS, P. L. A. **Elastodinâmica de meios transversalmente isotrópicos: Funções de Green e o método dos Elementos de contorno na análise de interação solo-estrutura.** 1997. 321p. Tese (Doutorado)- Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas. Campinas.
- BARROS, R. M. **Elementos Infinitos para tratamento de problemas da viscoelastodinâmica estacionária pelo Método dos Elementos Finitos.** 1996. 213p. Dissertação (Mestrado)- Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade de Campinas, Brasil, Campinas.
- BARROS, R. M. **Funções de Green e de Influência para Meios Visco-Elásticos Transversalmente Isotrópicos no Domínio da Frequência.** 2001. 262p. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade de Campinas, Brasil, Campinas.
- CARRION, R., **Uma implementação do método dos elementos de contorno para problemas viscoelastodinâmicos estacionários tridimensionais em domínio aberto e fechado.** 2002. 211p. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade de Campinas, Brasil, Campinas.
- CARVALHO, E. R. **Análise dinâmica de sistemas solo-fluido-estrutura pelo método de elementos de contorno.** 1995. 204p. Tese (doutorado)-Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas. Campinas.
- CHENG, K.D. **Analysis of linear systems.** Massachusetts: Addison-Wesley, 1972. 431p.

CHOPRA, A. K. **Dynamics of structures**. New Jersey: Prentice Hall, 2006. 912p.

DAROS, C. H. **Solução transiente da equação da onda escalar pelo Método dos Elementos de Contorno: integração direta no tempo**. 1995. 125p. Dissertação (Mestrado)-Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas. Campinas.

FELIPPA, C.A.; PARK, K.C. Ataggered transient Analysis procedures for coupled mechanical systems: formulation. **J. Appl. Mech**, v.24, n.1, p. 61-111, 1980.

GAZETAS, G. Analysis of machine foundation vibrations: state of the art. **Soil dyn. Earthquake eng**. v.2, n.1, p. 2-42, 1983.

HILBER, H. M.; HUGHES T. J. R.; TAYLOR R. L. improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. **Earthquake eng. struct. Dyn**. v.5, n.3, p.283-292, 1977.

INMAN, D.J. **Engineering vibration**. New Jersey: Prentice-Hall, 2000. 621p.

JAHROMI, Z.Z.H. **Partitioned analysis of nonlinear soil structure interaction**. 2009. 331p. Tese (Doutorado)- Department of civil and environmental engineering, Imperial College London, London.

LABAKI, J. **Uma implementação do Método dos Elementos de Contorno indireto baseada em uma solução viscoelastodinâmica estacionária não-singular**. 2008. 131p. Dissertação (Mestrado)- Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade de Campinas, Brasil, Campinas.

LABAKI, J. **Vibração de placas flexíveis e rígidas em meios estratificados transversalmente isotrópicos**. 2012. 150p. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade de Campinas, Brasil, Campinas.

MENONI, J., A. **Formulação e implementação da versão direta do Método dos Elementos de Contorno para tratamento de problemas acústicos estacionários bidimensionais diretos e inversos**. 2004. 253p. Tese (Doutorado)-Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

MESQUITA, E. N. **Resistência dos materiais I notas de aula**. Campinas: Unicamp, 2007. 243p.

MESQUITA, E. N. PAVANELLO, R. Numerical methods for the dynamics of unbounded domains. **Comput. Appl. Math.** v.24, n.1, 1-26, 2005.

MESQUITA, E. N. **Zur Dynamischen Wechselwirkung von Fundamenten auf dem Viskoelastischen Halbraum**. 1989. Tese (Doutorado) — Hamburgo.

MESQUITA, E.;ROMANINI, E.;ADOLPH, M. A methodology to determine the transient response of structures interacting with visco-elastic soils using the FFT algorithm.**CILAMCE-XXII Congresso Íberolatino-americano de Métodos Computacionais para Engenharia**, v. 1, p. 1-23, 2001.

PONTES, JR., B. R. **Interação dinâmica de estruturas bidimensionais sobre o solo: uma comparação entre um método semi-analítico e o método dos elementos de contorno**. 1992. 110p. Dissertação (Mestrado)-Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

PRZEMIENIECKI, J.S. **Theory of matrix structural analysis**. New York: McGraw-Hill, 1968. 468p.

RAO, S.S. **Vibrações mecânicas**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2009. 448p.

ROMANINI, E. **Síntese de funções de influencia e Green para o tratamento de interação dinâmica solo-estrutura através de equações integrais de contorno**. 1995. 207p. Tese (Doutorado)-Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

SCHEVENELS, M. **The impact of uncertain dynamic soil characteristics on the prediction of ground vibrations**. 2007. Tese (Doutorado) – Faculteit ingenieurswetenschappen, Katholieke Universiteit Leuven, Leuven.

SOUSA, E. A. C., **Acoplamento do método dos elementos finitos e elementos de contorno para tratamento de problemas estacionários da elastodinâmica**. 1992. 114p. Dissertação (Mestrado)-Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

SOUSA, E. A. C. Métodos dos elementos finitos e elementos de contorno aplicados a problemas visco-elastodinâmico transientes: pré-requisitos para o acoplamento. 1999. 250p. Tese (Doutorado)- Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

SOUSA, E. A. C. Métodos dos Elementos Finitos e Elementos de Contorno Aplicados a Problemas Visco-elastodinâmicos Transientes: Pré-requisitos para o Acoplamento. 1999. 250p. Tese (Doutorado)—Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

THOMAZO, L.H. Formulação do Método dos Elementos de Contorno Indireto para Resposta Transiente em Meios Visco-Elásticos 2D. 2004. 144p. Dissertação (Mestrado)- Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.