

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL
DA TESE DEFENDIDA POR Bento Rodrigues
de Pontes Junior E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 27/02/92.

cos 14/11/92

ORIENTADOR

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Mecânica - UNICAMP
como parte dos requisitos necessários para obtenção do título
de MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA, em 27 de fevereiro de 1992.

"Interação Dinâmica de Estruturas Bidimensionais
com o Solo: uma comparação entre um método semi-
analítico e o Método dos Elementos de Contorno"

Bento Rodrigues de Pontes Junior

12/92

12/92

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA MECANICA

DEPARTAMENTO DE MECANICA COMPUTACIONAL

Tese de : Mestrado

Titulo da Tese: Interação Dinâmica de Estruturas Bidimensionais
com o Solo: uma Comparação entre um método
semi-analítico e o Método dos Elementos de
Contorno.

Autor: Bento Rodrigues de Pontes Junior.

Orientador: Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto

Aprovado por

Euclides de Mesquita Neto

Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto, Presidente.

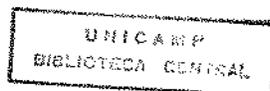
Wilson Sergio Venturini

Prof. Dr. Wilson Sergio Venturini

Fernando Iguti

Prof. Dr. Fernando Iguti

Campinas, 27 de Fevereiro de 1992



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS - UNICAMP
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

"Interação Dinâmica de Estruturas Bidimensionais com o Solo:
uma comparação entre um método semi-analítico e o Método dos
Elementos de Contorno"

Autor: Bento Rodrigues de Pontes Junior

Orientador: Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto

Campinas, Fevereiro de 1992

Agradeço:

- ao professor Dr. Euclides de Mesquita Neto, pela orientação durante a execução deste trabalho, pela amizade e apoio que sempre ofereceu;
- à direção da Faculdade de Engenharia Mecânica da UNICAMP pelas facilidades concedidas;
- à CAPES e FAPESP pelas bolsas de estudo concedidas;
- aos docentes do Departamento de Mecânica Computacional da FEM pela atenção dispensada;
- a todos os colegas pela convivência durante o período;
- aos funcionários da faculdade que colaboraram na realização deste trabalho.

Agradecimento especial:

- aos meus familiares por todo o incentivo;
- à minha noiva Sirlei pela ajuda na confecção deste trabalho e a paciência durante todo o período do curso.

RESUMO

INTERAÇÃO DINÂMICA DE ESTRUTURAS BIDIMENSIONAIS COM O SOLO: UMA COMPARAÇÃO ENTRE UM MÉTODO SEMI-ANALÍTICO E O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Autor: Bento Rodrigues de Pontes Junior

Orientador: Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto
Departamento de Mecânica Computacional, UNICAMP,
13081, Campinas, SP, Brasil

Neste trabalho dois métodos para tratar os fenômenos da interação dinâmica solo-estrutura são comparados, a saber: um Método de Superposição (MSP) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC). As matrizes completas de flexibilidade dinâmica de estruturas bidimensionais de superfície e engastadas, interagindo com o solo em regime estacionário foram obtidas. Apresenta-se uma discussão da importância das variáveis densidade de malha e comprimento do campo discretizado na precisão dos resultados obtidos pelo MEC. A isolação de vibrações provenientes de fundações separadas através de barreiras são apresentadas para mostrar a versatilidade do método dos elementos de contorno perante as chamadas "soluções semi-analíticas" ou método de superposição. Foram também esboçados os principais passos para formulação e implementação do MEC com a utilização de funções de Green.

ABSTRACT

DYNAMIC INTERACTION OF THE BIDIMENSIONAL STRUCTURES THROUGH THE SOIL: A COMPARISON BETWEEN A METHOD SEMI-ANALITICAL AND THE BOUNDARY ELEMENT METHOD

Author: Bento Rodrigues de Pontes Junior

Supervisor: Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto
Departamento de Mecânica Computacional, UNICAMP,
13081, Campinas, SP, Brazil

In this work two methods to treat the dynamic soil-structure interaction phenomena are compared: a Superposition Method (SPM) and the Boundary Element Method (BEM). Complete compliances matrices for the dynamic interaction of bidimensional surface and embedded foundation structures, interacting through the soil in frequency domain are obtained. A discussion on the importance of mesh density and discretized field length in the accuracy of the results obtained by BEM is presented. Vibrations isolation of footings separated by open barriers are presented to illustrate the versatility of the boundary element method compared to the so called "semi-analitical solutions" or superposition method. The main steps for formulation and implementation of the BEM based on a Green's function approach are also described.

ÍNDICE

1.	INTRODUÇÃO	1
1.1.	Método dos Elementos de Contorno Aplicado à Problemas da Elastoestática	3
1.2.	Método dos Elementos de Contorno Aplicado à Problemas da Elastodinâmica	3
1.3.	Método dos Elementos de Contorno Aplicado à Problemas da Interação Dinâmica Solo-Estrutura ..	5
1.4.	Objetivos do trabalho	8
1.5.	Estrutura do trabalho	9
2.	EQUAÇÕES DA (VISCO-) ELASTODINÂMICA LINEAR	11
2.1.	Equações de Campo da Elastodinâmica	11
2.2.	Equações de Campo da Viscoelastodinâmica	12
2.3.	Particularização para o Regime Estacionário ...	14
2.4.	Tipos de Problemas de Valor de Contorno (PVC) da Elastodinâmica	15
3.	EQUAÇÕES INTEGRAIS E FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO (MEC) PARA ELASTODINÂMICA	17
3.1.	Teorema da Reciprocidade Dinâmica	17
3.2.	Equações Integrais de Contorno	18
3.2.1.	Formulação das Equações Integrais para o MEC com base no Teorema da Reciprocidade	18
3.3.	Solução Numérica das Equações Integrais de Contorno - Formulação do MEC	23
3.3.1.	Técnicas de Discretização	23
3.3.2.	Técnicas de Integração	29
3.4.	Alternativas de Formulação do MEC do ponto de vista da Função Ponderadora: Solução Fundamental versus Funções de Green	34
3.4.1.	Funções de Green para o Semi-espaço Viscoelástico Bidimensional no Domínio da Frequência	36

4.	SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE INTERAÇÃO DINÂMICA	
	SOLO-ESTRUTURA (DSSI) ATRAVÉS DO MEC43
4.1.	Equações de Compatibilidade Cinemática e Equilíbrio de Forças para Estruturas Rígidas43
4.2.	Acoplamento das Equações do Sistema Solo-Estrutura46
4.3.	Obtenção da Matriz de Flexibilidade Dinâmica para o Sistema Solo-Estrutura50
4.4.	Solução do Problema da Interação de Estruturas Rígidas com o Solo utilizando Funções de Green52
5.	VALIDAÇÃO E ESTUDOS COMPARATIVOS54
5.1.	Normalização adotada na Apresentação dos Resultados54
5.2.	Validação da Implementação do MEC56
5.3.	Análises do Comportamento do MEC71
5.4.	Aplicações e Comparações do MEC79
6.	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS87
7.	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS89
8.	BIBLIOGRAFIAS97
	APÊNDICE A99

NOTAÇÃO ADOTADA

$(\bar{\quad})$	Grandeza complexa
$(\underline{\quad})$	Grandeza vetorial
$i = \sqrt{-1}$	Unidade imaginária
∇	Operador Nabla
A	Semi-lado da fundação
A_0	Frequência Adimensional
B	Contorno do domínio
c_p, c_s	Velocidades de propagação de ondas de pressão e de cisalhamento no meio contínuo elástico
β	Coefficiente de amortecimento do material
δ_{ij}	Delta de Kronecker
ϵ_{ij}	Tensor de deformações de Cauchy
E	Módulo de elasticidade
f_i, \underline{f}	Vetor forças de corpo
$G = \mu, \lambda$	Constantes de Lamé
k_p, k_s	Números de onda
ν	Coefficiente de Poisson
R	Domínio
ρ	Densidade de massa

σ_{ij}	Tensor de tensões
t_i	Vetor de forças de superfície
t_{ij}^*	Solução fundamental em tensões do espaço elástico completo
u_i	Vetor campo de deslocamentos
u_{ij}^*	Solução fundamental em deslocamentos do espaço elástico completo
V_i	Vetor campo de velocidades
ω	Frequência angular

1. INTRODUÇÃO

Nos primórdios dos projetos e construção de máquinas submetidas a esforços dinâmicos as técnicas de projeto e análise eram restritas à máquina em estudo. Para o suporte ou estrutura de fixação adotavam-se modelos de parâmetros concentrados (massa - mola - amortecedor), onde as molas (elasticidade) e amortecedores (dissipação) estavam com uma de suas extremidades fixas na máquina e a outra num meio com rigidez infinita. Tais modelos aplicados às primeiras máquinas, isto é, para sistemas simples com poucos graus de liberdade eram satisfatórios, mas com o aumento no tamanho, frequência ou precisão de funcionamento as mesmas começaram a exigir métodos de análise mais eficientes para determinação do comportamento dinâmico das suas estruturas de suporte e fundação [01,02].

Para máquinas de maior desempenho (maiores rotações ou precisão) ou de maior porte surgiram problemas de interferência recíproca e também de condições ambientais na vizinhança das instalações. As interferências são causadas por vibrações mecânicas transmitidas entre estruturas de fundações de máquinas, tendo como meio transmissor o solo. Os ambientes de trabalho e residenciais algumas vezes impõem restrições aos níveis de vibrações gerados por máquinas instaladas nas proximidades [02].

No tratamento das novas exigências de projeto, os modelos de parâmetros concentrados passaram a ser obsoletos por apresentarem grandes limitações na descrição dos fenômenos reais de interferência entre estruturas de fundações através do solo e da retirada de energia do sistema máquina-fundação via propagação de ondas pelo solo [02].

A modelagem do solo nas últimas três décadas passou a ser o objetivo de muitos pesquisadores. Inicialmente, métodos analíticos foram criados, mas estes tratavam modelos simplificados pouco realistas [03]. Com o aumento dos recursos computacionais disponíveis, começou-se a estudar os primeiros métodos "semi-analíticos", os quais permitiram o tratamento de modelos mais realistas [02,04,05].

O solo real apresenta um perfil não-homogêneo (camadas e inclusões), sendo um material com propriedades anisotrópicas. Além disso o solo é um meio com propriedades elásticas, inerciais e dissipativas. Para a sua modelagem os métodos analíticos e semi-analíticos adotaram basicamente perfis simplificados e com camadas homogêneas, isotrópicas e horizontais [01,02,06-09]. As fundações tratadas são de superfície ou engastadas com formas circulares, quadradas ou arbitrárias que são suportadas por três tipos de perfis de solo idealizados : o semi-espaço, camadas sobre rocha e camadas sobre o semi-espaço. A denominação semi-espaço para o solo origina-se da sua idealização como um domínio semi-infinito, em função da proporção do tamanho entre as estruturas de fundações e a dimensão do meio de sustentação circundante.

Os métodos numéricos baseados na discretização do domínio, tais como, o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método das Diferenças Finitas (MDF), são capazes de representar perfis de solos com camadas e inclusões mais realistas. Mas em função do domínio discretizado ser de dimensões finitas, por razões práticas, leia-se computacionais, os contornos do domínio geram reflexões de ondas, as quais não ocorrem no problema físico real [02].

O solo apresenta dois distintos fenômenos dissipativos, a saber : um pelo atrito entre os constituintes do solo, denominado amortecimento material ou interno; e outro pela retirada de energia, através da propagação de ondas mecânicas para o infinito sem reflexão, denominado amortecimento geométrico ou por radiação.

O amortecimento geométrico é o fenômeno mais difícil de ser representado pelos métodos de domínio. No caso do MEF pesquisas foram feitas sobre modelos com fronteiras absorvedoras, mas os resultados demonstraram não ser este o melhor dos métodos para este tipo de problema tratado [02,06,08].

Paralelamente ao desenvolvimento do MEF, que se tornou muito popular, desenvolveu-se um método com algumas características de discretização parecidas, mas baseado na solução de problemas a partir da formulação de Equações

Integrais (EI). Tal método recebeu atenção especial para a solução de problemas com domínios infinitos e semi-infinitos. Como o método se baseia na montagem do sistema de equações que envolve basicamente técnicas de integração numérica no contorno do domínio considerado, após a sua popularização adotou-se o nome de Método dos Elementos de Contorno (MEC), tendo como referência pioneira a publicação de Brebbia(1978)[10].

A seguir apresento uma revisão sucinta de vários trabalhos existentes do MEC aplicados às áreas da elastoestática, da elastodinâmica e da interação dinâmica de solo-estrutura. Outros trabalhos que não constam nesta revisão serão referenciados nos próximos capítulos.

1.1. Método dos Elementos de Contorno Aplicado à Problemas de Elastoestática

Um dos primeiros trabalhos utilizando o MEC para resolver problemas de valor de contorno da elastoestática é de Rizzo (1967)[11], o qual apresenta uma formulação bidimensional, linear, com elementos de contorno constantes e integração pela regra de Simpson. Outro trabalho em elastoestática que merece atenção é o de Cruse (1969)[12], uma formulação tri-dimensional, linear, com elementos triangulares planos (constantes). Nesses dois trabalhos foram adotados deslocamentos nulos para alguns pontos no contorno com a finalidade de eliminar da solução o movimento de corpo rígido do caso bidimensional.

1.2. Método dos Elementos de Contorno Aplicado à Elastodinâmica

Os primeiros trabalhos mais citados são os Cruse e Rizzo (1968)[13] e Cruse (1968)[14], que são complementares entre si. A formulação é linear, bidimensional, baseada na solução fundamental de um meio infinito (espaço completo) no domínio da Transformada de Laplace, com posterior inversão numérica da solução para o domínio do tempo. Foram utilizados

elementos constantes e integração pela regra de Simpson. Esses trabalhos fazem parte da tese de doutorado de Cruse.

Manolis e Beskos (1981)[15] trataram o problema da concentração de tensão ao redor de um furo num meio infinito para materiais de comportamento linear elástico e visco-elástico. A solução inicialmente obtida foi no domínio da Transformada de Laplace, com posterior inversão numérica para problemas transientes usando dois métodos : o método de Papoulis [15] e o método de Durbin, que usa o algoritmo da Transformada de Fourier Rápida (FFT) de Cooley e Tukey [15]. Para integração foi adotado a regra da quadratura Gaussiana.

Um estudo comparativo entre as três possíveis formulações do MEC para problemas da elastodinâmica foi realizado por Manolis (1983)[16]. Nesse trabalho foram obtidas soluções diretamente no domínio do tempo e nos domínios da Transformada de Laplace e de Fourier com posterior inversão numérica para o domínio do tempo. Foram comparadas com soluções analíticas do problema de concentração de tensão ao redor de um furo, num meio infinito, por incidência de ondas de compressão, ou seja, um problema bidimensional. Também foi utilizada para a integração a quadratura Gaussiana.

Uma formulação de Equações Integrais de Contorno (EIC) na forma vetorial para problemas tridimensionais de propagação de ondas elásticas sobre (incidente) e a partir (radiação) de obstáculos de formas arbitrárias, pode ser visto no trabalho de Rizzo, Shippy e Rezayat (1985)[17]. São adotados elementos de contorno quadráticos isoparamétricos. Para integração dos elementos singulares utilizou-se um esquema indireto que é baseado na quadratura Gaussiana. No caso de integrações não-singulares também é utilizada a quadratura Gaussiana. São mostrados resultados para incidência em superfícies esféricas e radiação de um cubo.

Rezayat, Shippy e Rizzo (1986)[18] estudaram a solução do MEC para problemas da elastodinâmica bi- (furo) e tridimensional (cavidade esférica) num meio infinito no domínio da frequência com inversão para o domínio do tempo em problemas transientes, visando a verificação das dificuldades e determinação do melhor procedimento para melhorar a precisão da

solução na faixa de médias e altas frequências. Foi estudado também o fenômeno das auto-frequências fictícias para problemas de domínio exterior.

No trabalho de Cruse (1987)[19] encontram-se comentários sobre as aplicações do MEC em problemas da mecânica dos sólidos, para casos lineares e não-lineares. Comparações sobre as vantagens e desvantagens entre o MEC e o MEF são apresentadas.

Uma modificação no MEC padrão é proposta por Achenbach, Kechter e Xu (1988)[20] para problemas de domínio exterior. Tal modificação consiste no deslocamento dos pontos de colocação para pontos não pertencentes ao contorno, ou seja, fora dos elementos de contorno, para eliminar as singularidades nas integrações e melhorar o mal-condicionamento devido ao fenômeno das auto-frequências fictícias. São apresentadas comparações das soluções pelo MEC convencional e o proposto, na solução de problemas de ondas incidentes sobre uma cavidade esférica num meio elástico infinito.

1.3. Método dos Elementos de Contorno Aplicado a Problemas da Interação Dinâmica Solo-Estrutura (DSSI)

O trabalho de Dominguez(1978)[21] é considerado um dos pioneiros na aplicação do MEC em problemas de Interação Dinâmica Solo-Estrutura (Dynamic Soil-Structure Interaction - DSSI). Nesse trabalho foi estudada a rigidez dinâmica de fundações retangulares na superfície ou engastadas no semi-espaço elástico. Foram investigados os efeitos da densidade da malha e as condições de contorno dos tipos relaxadas e não-relaxadas. A formulação é baseada na solução fundamental do espaço completo, tridimensional, no domínio da frequência e utiliza elementos de contorno retangulares constantes, com integração pela quadratura Gaussiana para elementos não-singulares e integração analítica para elementos singulares através de uma expansão em série.

Abascal e Dominguez (1986)[22] desenvolveram um estudo dos efeitos de perfis de solos sedimentares sobre rocha na resposta dinâmica de fundações bidimensionais. A formulação

do MEC é no domínio da frequência para um meio viscoelástico.

Beskos, Dasgupta e Vardoulakis (1986)[23] desenvolveram um estudo bidimensional do problema de isolamento estrutural usando trincheiras para minimizar a influência das vibrações transmitidas pelo solo, adotando modelos linear elástico e viscoelástico, homogêneo e isotrópico. As perturbações originam-se da propagação de ondas de Rayleigh ou ondas geradas por uma fundação rígida na superfície. A formulação do MEC para perturbações harmônicas é no domínio da frequência e para o caso transiente no domínio da Transformada de Laplace com inversão para o tempo.

Um estudo comparativo de formulações do MEC no domínio do tempo, para problemas bidimensionais de interação solo-estrutura é apresentada por Spyrakos e Antes (1986)[24]. Para discretização no espaço e no tempo são adotados elementos constantes para descrever os deslocamentos e trações sobre cada elemento. A integração no tempo é analítica e as integrações espaciais usam a quadratura Gaussiana.

Spyrakos e Beskos(1986)[25] utilizaram o MEF para modelagem da estrutura, a qual foi acoplada com a modelagem do solo pelo MEC, no domínio do tempo, para o caso bidimensional de estruturas flexíveis sem massa na superfície do semi-espaço elástico. Estudos paramétricos examinam os efeitos da razão de rigidez entre o solo e a estrutura, e também os efeitos da distribuição espacial das perturbações dinâmicas (ondas incidentes ou carregamentos externos) na resposta dinâmica da estrutura. São assumidos constantes os deslocamentos e trações sobre cada elemento e passo de tempo.

Uma revisão abrangente sobre as formas e aplicações do MEC existentes para a solução numérica de problemas da elastodinâmica linear bi- e tridimensionais pode ser encontrada no trabalho de Beskos (1987)[26]. Soluções nos domínios do tempo e da frequência são discutidas. Comentários sobre o comportamento dos materiais, tal como a viscoelasticidade, não-homogeneidade, anisotropia e poroelasticidade são feitos resumidamente.

Um trabalho utilizando o conceito de imagem na construção da solução fundamental foi desenvolvido por Kontoni

e Beskos (1987)[27]. Esse conceito elimina a necessidade da discretização da superfície livre do solo. Foram obtidas soluções para o problema bidimensional de um furo no semi-espaço, no domínio da frequência para distúrbios harmônicos e no domínio da Transformada de Laplace com inversão numérica para problemas transientes.

Ahmad e Banerjee (1988)[28] estudaram uma técnica de subestruturação para solução de problemas da interação solo-estrutura, para solo com camadas. Essa técnica permite o tratamento de sólidos de formas e conectividades arbitrárias. Também apresentam um novo tipo de elemento denominado elemento de fechamento para problemas com domínios de extensão infinita. Na formulação do MEC bidimensional utilizaram elementos quadráticos e obtiveram soluções para meios elásticos e viscoelásticos, no domínio da frequência para o caso estacionário. Para problemas transientes foi adotada a solução no domínio da Transformada de Laplace com inversão numérica para o domínio do tempo.

Uma análise tri-dimensional no domínio da frequência de fundações flexíveis engastadas, com modelagem da estrutura da fundação por MEF e do solo pelo MEC foi desenvolvida por Gaitanaros e Karabalis (1988)[29]. Nesse trabalho estudou-se o comportamento de fundações com e sem massa devido a carregamentos oriundos de forças externamente aplicadas ou de ondas incidentes propagando pelo solo. Comparações entre fundações rígidas e flexíveis são apresentadas e também estudos sobre condições de contato soldado ou relaxado na interface solo-estrutura são efetuados.

Um estudo da interação dinâmica entre estruturas rígidas ou flexíveis bidimensionais e o solo, pode ser obtido do trabalho de Antes e Estorff (1989)[30]. São apresentados estudos comparativos considerando-se os parâmetros característicos - efeito de amortecimento, razão da profundidade de engastamento - do sistema solo-estrutura. As soluções utilizadas foram a solução fundamental para o espaço completo, tanto diretamente no domínio do tempo, como nos domínios da frequência (Fourier) e da Transformada de Laplace com posterior inversão numérica.

Uma investigação da resposta dinâmica de fundações rígidas bidimensionais sobre solo viscoelástico e submetida a carregamento vertical harmônico pode ser encontrada no trabalho de Israil e Ahmad (1989)[07]. É estudado o comportamento de três perfis de solo: semi-espaço homogêneo, camada horizontal sobre rocha e camada sobre o semi-espaço. A influência da geometria (razão de engastamento e espessura da camada), propriedades do material (coeficiente de Poisson e amortecimento material) e efeitos do tipo de contato na interface solo-estrutura foram objetos de estudo. Foram adotados elementos quadráticos isoparamétricos e um esquema de integração numérica adaptativa (posições dos pontos de Gauss).

Mohammadi e Karabalis (1990)[31] realizaram estudos comparativos entre as soluções do problema de interação solo-estrutura tri-dimensional via MEC, nos domínios do tempo e das Transformadas de Laplace e de Fourier com inversão para o domínio do tempo. Uma técnica adaptativa de discretização na interface de contato solo-estrutura é analisada, visando a melhor descrição do campo de tensões.

Wang e Banerjee (1990)[32] apresentam uma formulação do MEC tridimensional para problemas estacionários para formas axi-simétricas generalizadas, isto é, corpos com geometria axi-simétrica submetidos a carregamentos não axi-simétricos. A implementação adotou elementos quadráticos de três nós e permite o tratamento de domínios finitos e infinitos. Um esquema de integração indireta do núcleo das tensões sobre elementos singulares usando a quadratura Gaussiana foi adotado. Também são utilizados os elementos de fechamento [28] para eliminar a necessidade da determinação do termo de descontinuidade e de integrais singulares envolvidas no método de integração indireta. São apresentados resultados do problema de interação solo-estrutura axi-simétrica.

1.4. Objetivos do Trabalho

O objetivo principal deste trabalho de mestrado é a implementação de uma técnica numérica eficiente para a modelagem e solução de problemas da elastodinâmica na área da

Interação Dinâmica Solo-Estrutura, para o caso bidimensional no domínio da frequência. O método em questão é o Método dos Elementos de Contorno (MEC). Uma das formas de implementação do MEC é denominada de método direto (MEC-D) e baseia-se na solução fundamental do espaço elástico completo. Esta implementação será comparada com um método semi-analítico e com uma versão implementada do MEC utilizando funções de Green.

Como finalidade destaca-se a determinação das potencialidades das duas possíveis formulações do MEC, buscando a fixação de parâmetros que demonstrem qual das duas formulações é mais vantajosa na classe de problemas da Interação Dinâmica Solo-Estrutura.

As perspectivas de continuidade deste trabalho são o tratamento pelo MEC de múltiplos domínios, as questões de acoplamento do MEC com o Método dos Elementos Finitos (MEF), a extensão para o caso tridimensional e as não-linearidades (condições de contato ou equação constitutiva). A formulação direta no domínio do tempo e a inversão do domínio da frequência para o tempo, para o caso de problemas transientes, também são assuntos importantes a serem estudados.

1.5. Estrutura do trabalho

A seguir, no capítulo 2., serão apresentadas as equações da (visco-)elastodinâmica, uma discussão sobre a particularização para o regime estacionário e uma descrição dos tipos de problemas de valor de contorno da elastodinâmica.

No capítulo 3., a formulação do MEC a partir do Teorema da Reciprocidade Dinâmica utilizando a solução fundamental do espaço completo será apresentada. Na sequência a técnica de solução numérica é discutida. Este capítulo também mostra uma formulação alternativa do MEC a partir de funções de Green do semi-espaço viscoelástico bidimensional no domínio da frequência.

O capítulo 4. contém a formulação para a montagem do sistema que acopla as equações do MEC com as equações de compatibilidade cinemática e de equilíbrio de forças, para obtenção da solução do problema de interação entre estruturas

rígidas com o solo. Serão apresentadas também a forma de obtenção da matriz de flexibilidade dinâmica do sistema solo-estrutura e a solução do problema de interação de estruturas rígidas pelo uso de funções de Green.

Finalmente, no capítulo 5., serão efetuadas comparações de resultados numéricos obtidos pelo MEC do problema de interação solo-estrutura, com o objetivo de validar a implementação. Também serão mostrados resultados de estudos do comportamento do MEC em relação às variáveis, tais como, a densidade de malha, o tamanho do campo discretizado e as propriedades do solo. Resultados de aplicações do MEC na solução de problemas de isolamento de vibrações serão comparados com resultados existentes na literatura [46].

2. EQUAÇÕES DA (VISCO-)ELASTODINÂMICA LINEAR

2.1 Equações de Campo da Elastodinâmica

-Definição do Problema:

A equação do problema elastodinâmico, em termos das componentes do vetor de deslocamentos, u_i , para meio sólido linear elástico, homogêneo e isotrópico, que ocupa uma região regular R (no sentido de Kellogg [33]) com contorno B (superfície) é escrita na forma [09,26,34]:

$$\mu u_{j,ii} + (\lambda + \mu) u_{i,ij} + f_j = \rho u_{j,tt} \quad (2.1)$$

onde f_j é o vetor força de corpo por unidade de volume, μ e λ as constantes de Lamé e ρ a densidade do meio.

A velocidade da onda de pressão (dilatação) c_p e a velocidade da onda de cisalhamento (distorção) c_s do meio contínuo, são :

$$c_p = \sqrt{\frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho}} \quad ; \quad c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad . \quad (2.2)$$

O campo de deslocamentos é denotado da seguinte forma:

$$u_i = u_i(\underline{x}, t) \quad , \quad (2.3)$$

onde \underline{x} é o vetor posição e t o instante de tempo.

As forças de superfície e deslocamentos satisfazem as condições de contorno:

$$\begin{aligned} t_{(n)i}(\underline{x}, t) &= p_i(\underline{x}, t) \quad , & \underline{x} \in B_t \\ u_i(\underline{x}, t) &= q_i(\underline{x}, t) \quad , & \underline{x} \in B_u \end{aligned} \quad (2.4)$$

com $t_{(n)i}$ sendo o vetor forças de superfície, com a forma:

$$t_{(n)i} = \sigma_{ij} n_j \quad (2.5)$$

onde σ_{ij} é o tensor de tensões, n_j é o vetor normal exterior à superfície B . A superfície B é dividida em duas partes, uma submetida à condições de contorno em tensão denotada por B_t e outra submetida à condições de contorno em deslocamentos denotada por B_u , dessa forma temos $B = B_t + B_u$.

São definidas também as condições iniciais do campo de deslocamentos e de velocidades, tal como:

$$u_i(\underline{x}, 0^+) = u_{0i}(\underline{x}), \quad \underline{x} \in R \cup B \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial u_i(\underline{x}, 0^+)}{\partial t} = u_{i,t}(\underline{x}, 0^+) = v_{0i}(\underline{x}), \quad \underline{x} \in R \cup B.$$

A equação constitutiva para o meio contínuo especificado no problema tratado é [09]:

$$\sigma_{ij} = \lambda u_{m,m} \delta_{ij} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (2.7)$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker.

2.2 Equações de Campo da Viscoelastodinâmica

A equação da viscoelastodinâmica tem a seguinte forma [35]

$$\int_{-\infty}^t \mu(t - \tau) \frac{\partial u_{i,jj}}{\partial \tau} d\tau + \int_{-\infty}^t [\lambda(t - \tau) + \mu(t - \tau)] \frac{\partial u_{k,kl}}{\partial \tau} d\tau = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (2.8)$$

onde $\mu(t)$ e $\lambda(t)$ são as constantes de Lamé dependentes do tempo. A solução fundamental no domínio do tempo da equação (2.8) não é conhecida. Em virtude disto a transformação de Fourier é utilizada na equação (2.8) para se obter uma equação na seguinte forma:

$$\mu^*(i\omega) \bar{u}_{1,j} + [\lambda^*(i\omega) + \mu^*(i\omega)] \bar{u}_{k,k1} = -\omega^2 \rho \bar{u}_1 \quad (2.9)$$

com as constantes de Lamé complexas,

$$\begin{aligned} \mu^*(i\omega) &= \mu [1 + i\eta_\mu(\omega)] \quad ; \\ \lambda^*(i\omega) &= \lambda [1 + i\eta_\lambda(\omega)] \quad ; \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde $\eta_\mu(\omega)$ e $\eta_\lambda(\omega)$ são os coeficientes de amortecimento, cuja relação com a frequência ω pode ser obtida experimentalmente ou escolhida a partir de um modelo para o meio viscoelástico, como por exemplo os modelos de Kelvin-Voigt ou de histerese constante. Assim a equação (2.9) pode ser resolvida pelo MEC com base na solução fundamental no domínio da frequência com a adoção das constantes de Lamé complexas.

A afirmação que a introdução das constantes de Lamé complexas fere o princípio da causalidade [34, 35, 36] não é completamente correta. Uma escolha arbitrária de $\eta_\mu(\omega)$ e $\eta_\lambda(\omega)$ pode ferir a causalidade mas, como notou Scalan [37], a adoção dos valores de $\eta_\mu(\omega)$ e $\eta_\lambda(\omega)$ medidos experimentalmente não podem ferir a causalidade uma vez que este é um dos princípios que assumimos para o comportamento da natureza. Assim o problema não é utilizar $\eta_\mu(\omega)$ e $\eta_\lambda(\omega)$ no domínio da frequência e sim qual a função que escolhemos para descreve-las.

Para a modelagem do solo é satisfatório em muitas aplicações a adoção do modelo de material linear elástico, homogêneo e isotrópico. Porém, para modelos mais realistas, faz-se necessário a introdução de um modelo viscoelástico linear. Uma representação do comportamento de material viscoelástico linear assume um amortecimento dependente da frequência, denominado amortecimento viscoso, $c = i\omega q$, onde q é o coeficiente de amortecimento do material. Contudo, verificações experimentais indicam que o mesmo pode permanecer constante em largas faixas de frequência, o que justifica a utilização de um modelo de amortecimento constante em relação a frequência [34] para problemas estacionários, com grande aplicação na área de dinâmica dos solos, denominado

amortecimento histerético. Tal modelo de amortecimento é implementado pela substituição das constantes de Lamé (λ, μ) pelas correspondentes formas complexas no domínio da frequência

$$\lambda^* = \lambda(1 + i2\beta) \quad ; \quad \mu^* = \mu(1 + i2\beta) \quad (2.11)$$

onde agora β é o coeficiente de amortecimento material constante, isto é, independente da frequência [07,23,26,28,34]. Para o caso transiente o uso desse amortecimento não é fisicamente correto [34], pois fere o princípio da causalidade [38].

2.3 Particularização para o Regime Estacionário

Um caso especial de importância prática no qual as forças de corpo e as condições de contorno são harmônicas no tempo com frequência angular ω é denominado regime estacionário. Estas condições surgem após um grande intervalo de tempo, quando pode-se admitir que a parte transiente desaparece da solução, em virtude dos fenômenos de amortecimento sempre presentes em sistemas reais. Com essas simplificações assumidas a variável tempo é eliminada das equações diferenciais do problema. De forma que o problema de valor inicial de contorno (PVIC) é reduzido a um problema de valor de contorno (PVC), isto é, admite-se que os campos iniciais de deslocamentos e velocidades somente afetam a parte transiente da solução [39].

A transformada de Fourier de uma função $f(x,t)$ e sua inversa são definidas, respectivamente por:

$$F(x,\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.12a)$$

$$f(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x,\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.12b)$$

onde ω é a variável da transformação de Fourier, ou seja, a frequência angular.

Pelo uso dessa definição o problema geral da elastodinâmica expresso pela equação de movimento (2.1), suas condições de contorno (2.4) e condições iniciais (2.6), pode ser transformado num problema com relação à variável ω . Então, assumindo condições iniciais nulas, isto é, $u_{0i}(\underline{x}) = v_{0i}(\underline{x}) = 0$, a equação de movimento do problema torna-se [39,40]:

$$\mu^* \bar{u}_{j,11} + (\lambda^* + \mu^*) \bar{u}_{1,1j} + \bar{f}_j = -\omega^2 \rho \bar{u}_j \quad (2.13)$$

As condições de contorno (2.4), são

$$\begin{aligned} \bar{t}_{(n)j}(\underline{x}, \omega) &= \bar{\sigma}_{ij} n_j = \bar{p}_j(\underline{x}, \omega), & \underline{x} \in B_t \\ \bar{u}_j(\underline{x}, \omega) &= \bar{q}_j(\underline{x}, \omega), & \underline{x} \in B_u \end{aligned} \quad (2.14)$$

e a relação constitutiva (2.7), torna-se

$$\bar{\sigma}_{ij} = \lambda^* \bar{u}_{m,m} \delta_{ij} + \mu^* (\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i}) \quad (2.15)$$

As velocidades de propagação de ondas no meio viscoelástico c_p^* e c_s^* são definidas por:

$$c_p^* = \sqrt{\frac{(\lambda^* + 2\mu^*)}{\rho}} \quad ; \quad c_s^* = \sqrt{\frac{\mu^*}{\rho}} \quad (2.16)$$

2.4 Tipos de Problemas de Valor de Contorno (PVC) da Elastodinâmica

Na elastodinâmica existem três tipos de problemas de valor de contorno, que usualmente são classificados da seguinte forma: problemas de valor de contorno em deslocamentos, em tensões e misto. Esta classificação é válida tanto para problemas de domínio interior como exterior. Considerando um domínio R com contorno B podemos definir os três problemas [39,41]:

a) no primeiro problema de valor de contorno são fornecidos os

deslocamentos em todo o contorno B (PVCD), isto é,

$$\bar{u}_i(\underline{x}, \omega) = \bar{q}_i(\underline{x}, \omega) \quad \text{em } \underline{x} \in B.$$

b) no segundo problema de valor de contorno são fornecidas as tensões em todo o contorno B (PVCT), isto é,

$$\bar{t}_{(n)_i}(\underline{x}, \omega) = \bar{\sigma}_{ij} n_j = \bar{p}_i(\underline{x}, \omega) \quad \text{em } \underline{x} \in B.$$

c) e no terceiro problema de valor de contorno são fornecidos os deslocamentos numa parte do contorno B_u e as tensões na parte complementar B_t (PVCM), denotados por

$$\bar{u}_i(\underline{x}, \omega) = \bar{q}_i(\underline{x}, \omega) \quad \text{em } \underline{x} \in B_u$$

e

$$\bar{t}_{(n)_i}(\underline{x}, \omega) = \bar{\sigma}_{ij} n_j = \bar{p}_i(\underline{x}, \omega) \quad \text{em } \underline{x} \in B_t .$$

A modelagem dos problemas da interação dinâmica de estruturas de fundação com o solo geralmente recai em um problema de valor de contorno misto, onde em parte do contorno se conhece as tensões e na parte complementar se prescrevem deslocamentos ou alguma relação cinemática.

3. EQUAÇÕES INTEGRAIS E FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO (MEC) PARA ELASTODINÂMICA

3.1. Teorema da Reciprocidade Dinâmica

O teorema da reciprocidade dinâmica [42] é a base da formulação das equações integrais de contorno (EIC) da elastodinâmica. O mesmo é uma extensão direta do clássico teorema de Betti da elastoestática. Esse teorema estabelece: para dois estados elastodinâmicos distintos $\mathcal{E}[u_1(\underline{x}, t), t_1(\underline{x}, t), f_1(\underline{x}, t)]$ e $\mathcal{E}'[u_1^*(\underline{x}, t), t_1^*(\underline{x}, t), f_1^*(\underline{x}, t)]$, de um domínio R com contorno B , que o trabalho realizado pelas forças do primeiro estado \mathcal{E} sobre os deslocamentos do segundo \mathcal{E}' , é igual ao trabalho realizado pelas forças do segundo estado \mathcal{E}' sobre os deslocamentos do primeiro \mathcal{E} . Este enunciado é baseado no princípio dos trabalhos virtuais. Dessa forma tem-se a seguinte equação integral [39-43]:

$$\int_B t_1(\underline{x}, t) * u_1^*(\underline{x}, t) dB(\underline{x}) + \int_R f_1(\underline{x}, t) * u_1^*(\underline{x}, t) dR(\underline{x}) \\ = \int_B t_1^*(\underline{x}, t) * u_1(\underline{x}, t) dB(\underline{x}) + \int_R f_1^*(\underline{x}, t) * u_1(\underline{x}, t) dR(\underline{x}) ; \quad (3.1)$$

onde $f_1(\underline{x}, t)$ e $f_1^*(\underline{x}, t)$ são as forças de corpo por unidade de volume correspondentes ao primeiro e segundo estados, respectivamente. O símbolo (*) denota a convolução no tempo. Para o caso estacionário a equação (3.1) torna-se uma expressão com apenas integrais espaciais, na forma

$$\int_B \bar{t}_1(\underline{x}, \omega) \bar{u}_1^*(\underline{x}, \omega) dB(\underline{x}) + \int_R \bar{f}_1(\underline{x}, \omega) \bar{u}_1^*(\underline{x}, \omega) dR(\underline{x}) \\ = \int_B \bar{t}_1^*(\underline{x}, \omega) \bar{u}_1(\underline{x}, \omega) dB(\underline{x}) + \int_R \bar{f}_1^*(\underline{x}, \omega) \bar{u}_1(\underline{x}, \omega) dR(\underline{x}) . \quad (3.2)$$

3.2. Equações Integrais de Contorno

3.2.1. Formulação das Equações Integrais para o MEC com base no Teorema da Reciprocidade

Para formular a Equação Integral que dá origem ao MEC usando-se o Teorema da Reciprocidade é necessário conhecer a solução fundamental singular do problema elastodinâmico, a qual corresponde a uma força de corpo harmônica e concentrada, aplicada no ponto $\underline{\xi}$ na direção e_1 , tendo a forma [39,41]

$$\bar{f}_1^*(\underline{x}, \omega) = \bar{f}(\omega) \delta(\underline{x} - \underline{\xi}) e_1 \quad (3.3)$$

onde δ é uma distribuição ou função generalizada conhecida como delta de Dirac e $\bar{f}(\omega) = \exp(i\omega t)$ é sua variação com a frequência ω . O ponto \underline{x} é o ponto de campo e o ponto $\underline{\xi}$ é o ponto de colocação, ambos pontos de um corpo de extensão infinita.

A força de corpo equação (3.3) é substituída na equação (2.13), para obtermos a equação do problema na seguinte forma

$$\mu \bar{u}_{j,11}^* + (\lambda + \mu) \bar{u}_{1,1j}^* + \omega^2 \rho \bar{u}_j^* = -\bar{f}(\omega) \delta(\underline{x} - \underline{\xi}) e_j \quad (3.4)$$

onde \bar{u}_1^* é a solução do problema singular na forma

$$\bar{u}_1^* = \bar{u}_{1j}^* e_j \quad (3.5)$$

onde o tensor deslocamentos de segunda ordem \bar{u}_{1j}^* , é chamado solução fundamental singular das equações da elastodinâmica ou tensor deslocamentos de Stokes.

Substituindo o tensor \bar{u}_{1j}^* na relação constitutiva (2.15) obtem-se a solução fundamental singular em tensões \bar{t}_{1j}^* , completando-se o par $[\bar{u}_{1j}^*, \bar{t}_{1j}^*]$ necessário a formulação integral, o qual será apresentado no apêndice A.

Associando o estado elastodinâmico $[\bar{u}_1(\underline{x}, \omega), \bar{t}_1(\underline{x}, \omega)]$ à solução do problema real (atual) e o estado $[\bar{u}_1^*, \bar{t}_1^*]$ às soluções fundamentais, a substituição na equação (3.2), nos fornece a seguinte equação integral:

$$\int_B \bar{t}_{1j} \bar{u}_{1j}^* e_j dB(\underline{x}) + \int_R \bar{f}_1 \bar{u}_{1j}^* e_j dR(\underline{x})$$

$$= \int_B \bar{t}_{1j}^* e_j \bar{u}_1 dB(\underline{x}) + \int_R \bar{f}_1^* \bar{u}_1 dR(\underline{x}) \quad (3.6)$$

Agora dividindo a equação (3.6) por $f(\omega)$, este termo é eliminado, pois o mesmo também está presente nas soluções fundamentais [08]. Portanto as soluções passaram a ser representadas por

$$\bar{u}_{1j}^* = \bar{u}_{1j} / \bar{f}(\omega) \quad ; \quad \bar{t}_{1j}^* = \bar{t}_{1j} / \bar{f}(\omega) \quad (3.7)$$

Com a operação da equação (3.7), e mais a substituição da equação (3.3) na equação (3.6) com a utilização da propriedade do delta de Kronecker sobre o vetor e_1 ($e_1 = \delta_{1j} e_j$), para se poder eliminar o vetor e_j posteriormente, teremos [41]

$$\int_B \bar{t}_1 \bar{u}_{1j}^* e_j dB(\underline{x}) + \int_R \bar{f}_1(\underline{x}, \omega) \bar{u}_{1j}^* e_j dR(\underline{x})$$

$$= \int_B \bar{t}_{1j}^* e_j \bar{u}_1 dB(\underline{x}) + \int_R \left\{ \delta(\underline{x} - \underline{\xi}) \delta_{1j} e_j \right\} \bar{u}_1 dR(\underline{x}) \quad (3.8)$$

Aplicando a propriedade da função generalizada delta de Dirac

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\underline{x} - \underline{c}) g(\underline{x}) d\underline{x} = g(\underline{c}) \quad (3.9)$$

e eliminando o vetor e_j da equação (3.8), podemos reformular a integral de domínio do lado direito da equação (3.8),

$$\int_R \left\{ \delta(\underline{x}-\underline{\xi}) \delta_{ij} \right\} \bar{u}_i(\underline{x}, \omega) dR(\underline{x}) = \int_R \delta(\underline{x}-\underline{\xi}) \bar{u}_j(\underline{x}, \omega) dR(\underline{x}) = \bar{u}_j(\underline{\xi}, \omega) . \quad (3.10)$$

Deve-se observar na equação (3.10) a operação de permutação dos índices do vetor deslocamentos \bar{u}_i com o delta de Kronecker de forma que $(\delta_{ij} \bar{u}_i = \bar{u}_j)$.

Com a substituição da equação (3.10) na equação (3.8) teremos uma equação integral (EI) que define valores do campo de deslocamentos para pontos do interior do domínio, a partir de integrais de contorno, cujos integrandos são produtos das soluções fundamentais e das grandezas físicas no contorno (deslocamentos e forças de superfície), mais uma integral de domínio das forças de corpo. Tal equação integral tem a seguinte forma [26,41]:

$$\bar{u}_j(\underline{\xi}, \omega) = \int_B \left\{ \bar{t}_{ij} \bar{u}'_{ij} - \bar{t}'_{ij} \bar{u}_i \right\} dB(\underline{x}) + \int_R \bar{F}_i \bar{u}'_{ij} dR(\underline{x}) \quad (3.11)$$

sendo válida para qualquer ponto $\underline{\xi}$ do interior do domínio R .

Para a maioria dos problemas tratados em elastodinâmica são assumidas forças de corpo nulas, assim chegamos a conhecida Equação Integral de Contorno (EIC) para o problema elastodinâmico em regime estacionário [26,41]:

$$\bar{u}_j(\underline{\xi}, \omega) = \int_B \left\{ \bar{t}_{ij} \bar{u}'_{ij} - \bar{t}'_{ij} \bar{u}_i \right\} dB(\underline{x}) \quad (3.12)$$

que é uma forma análoga à Identidade de Somigliana do problema elastoestático.

A equação acima descreve o problema elastodinâmico no domínio da variável frequência ω . A solução no domínio do tempo, para problemas transientes, pode ser obtida pela síntese de Fourier de uma sequência de soluções em vários pontos de frequência.

Para se obter a solução da equação (3.12) é necessário conhecer todos os valores das incógnitas no contorno. Estas são deslocamentos e/ou forças de superfície

que dependendo do tipo de problema de valor de contorno serão conhecidas parcialmente ou totalmente na proposição do problema elastodinâmico a ser resolvido. Na determinação das incógnitas, isto é, as variáveis desconhecidas no contorno, devemos aplicar uma técnica de colocação em pontos do contorno para a equação (3.12), obtendo assim um sistema algébrico que relaciona as incógnitas do contorno. Após a solução do sistema, a equação (3.12) poderá ser usada na determinação dos valores de campo em pontos interiores do domínio.

PONTO NO CONTORNO

Quando o ponto de colocação ξ , ou seja, o ponto onde se está calculando o campo de deslocamentos, se aproxima do contorno do domínio, a equação (3.12) se torna singular e é necessário um procedimento de integração diferente para os seus termos. Tal procedimento consiste em aumentar o domínio através de um hemisfério de raio r_h com centro no ponto de colocação ξ escolhido sobre o contorno B , como mostra a figura 3.1 [10,44].

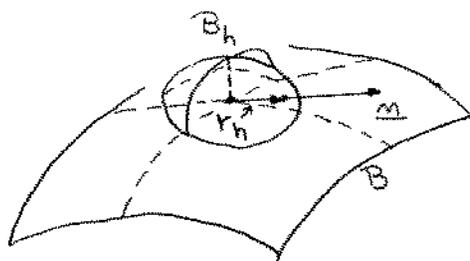


Figura 3.1. Superfície do contorno B com o hemisfério de integração B_h .

Para isso escrevemos em duas partes a integral envolvendo a solução fundamental em tensões da equação (3.12),

$$\int_B \bar{t}'_{ij} \bar{u}_i dB(\underline{x}) = \int_{B_c} \bar{t}'_{ij} \bar{u}_i dB(\underline{x}) + \int_{B_h} \bar{t}'_{ij} \bar{u}_i dB(\underline{x}) \quad (3.13)$$

onde o contorno B é dividido em duas partes, uma sendo o

contorno do hemisfério B_h e a outra parte o contorno complementar B_c . Com a integração sobre o contorno B_h e fazendo o raio r_h tender a zero, teremos [10]

$$\lim_{r_h \rightarrow 0} \left\{ \int_{B_h} \bar{t}'_{ij} \bar{u}_i dB(\underline{x}) \right\} = c_{ij}(\underline{\xi}) \bar{u}_i(\underline{\xi}, \omega) \quad (3.14)$$

O termo $c_{ij}(\underline{\xi})$ que aparece na equação (3.14) é denominado termo livre ou descontinuidade da representação integral no contorno e tem o valor $1/2\delta_{ij}$ para o caso de contorno suave. Este termo pode ser calculado diretamente por características geométricas [45], o que somente é prático para geometrias pouco complexas. Para o caso de geometrias complexas nos cantos são adotados métodos indiretos [17,44].

Agora, para a integral da equação (3.12) envolvendo a solução fundamental em deslocamentos, também escrita em duas partes,

$$\int_B \bar{t}_i \bar{u}'_{ij} dB(\underline{x}) = \int_{B_h} \bar{t}_i \bar{u}'_{ij} dB(\underline{x}) + \int_{B_c} \bar{t}_i \bar{u}'_{ij} dB(\underline{x}) \quad , \quad (3.15)$$

e fazendo-se a integração sobre o hemisfério com o raio tendendo a zero, obtem-se [10]:

$$\lim_{r_h \rightarrow 0} \left\{ \int_{B_h} \bar{t}_i \bar{u}'_{ij} dB(\underline{x}) \right\} = 0 \quad . \quad (3.16)$$

Por substituição de (3.14) na equação (3.13) e também de (3.16) na equação (3.15) e finalmente a substituição das equações (3.13) e (3.15) na equação (3.12), chegamos a Equação Integral de Contorno aplicada a pontos de um contorno suave

$$\frac{1}{2} \bar{u}_j(\underline{\xi}, \omega) = \int_B \left\{ \bar{t}_i \bar{u}'_{ij} - \bar{t}'_{ij} \bar{u}_i \right\} dB(\underline{x}) \quad . \quad (3.17)$$

As demonstrações da equações (3.14) e (3.16) podem

ser encontradas na referência [10], para o caso da elastoestática.

A solução analítica da Equação Integral de Contorno é praticamente impossível, o que dá origem ao tratamento numérico pelo Método dos Elementos de Contorno (MEC), que será descrito na próxima seção [44].

3.3. Solução Numérica das Equações Integrais de Contorno - Formulação do MEC

O problema no domínio da frequência, necessita apenas da discretização espacial, ou seja, a discretização das grandezas geométricas e físicas (deslocamentos e forças de superfície) no contorno. Já o tratamento no domínio do tempo, necessita também da discretização da grandeza tempo. O procedimento numérico descrito abaixo é baseado no trabalho de Cruse [14].

Para o caso bi-dimensional do presente trabalho adotou-se o elemento de contorno do tipo constante para discretizar as grandezas espaciais na implementação numérica. Muitos dos trabalhos existentes na área da DSSI apresentam resultados com base no elemento constante e para uma primeira implementação do método o mesmo possibilita simplificações, que vêm facilitar o entendimento da mesma e a comparação direta dos resultados [06,14,21,22,30,46].

Na próxima seção serão descritas as formulações do MEC para dois tipos de elementos de contorno: o elemento constante e o quadrático.

3.3.1. Técnicas de Discretização

ELEMENTO CONSTANTE

O elemento de contorno constante [44] é caracterizado pelo valor constante das funções que são aproximadas sobre o mesmo, permitindo associar os deslocamentos e forças de superfície ao ponto nodal do elemento.

Pode-se observar na figura (3.2) a representação do

elemento constante e seu sistema de coordenadas locais η , o qual tem um intervalo $[-1,1]$.

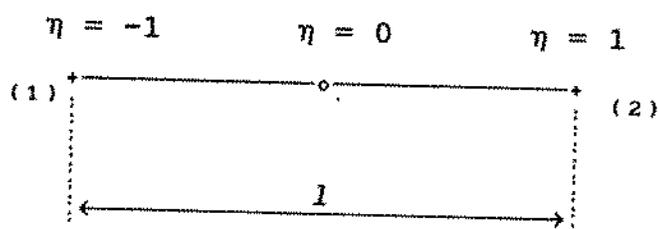


Figura 3.2. Elemento do tipo constante e seu sistema de coordenadas (o ponto nodal, + extremidades)

Com base nesse elemento, a Equação Integral de Contorno (EIC) a equação (3.17) pode ser reescrita na forma de somatória. Onde o índice superior (c) denota o elemento que contém o ponto de colocação $\underline{\xi}$, o índice superior (e) indica a qual elemento se refere o coeficiente obtido por integração das soluções fundamentais sobre o mesmo e M é o número total de elementos de contorno. Assim, teremos a seguinte equação [06, 08]

$$\frac{1}{2} \bar{u}_1^c = \sum_{e=1}^M \left\{ \bar{G}_{1j}^e \bar{t}_j^e - \bar{T}_{1j}^e \bar{u}_j^e \right\}, \quad c = 1, 2, \dots, M \quad (3.18)$$

$i, j = 1, 2$

onde \bar{u}_j^e e \bar{t}_j^e são os vetores deslocamentos e forças de superfície no domínio da transformada de Fourier no elemento (e). Os termos \bar{G}_{1j}^e e \bar{T}_{1j}^e são os coeficientes da EIC, dados por

$$\bar{G}_{1j}^e = \int_{B_e} \bar{u}'_{1j}(\underline{x}, \underline{\xi}, \omega) dB_e(\underline{x}) \quad (3.19a)$$

$$\bar{T}_{1j}^e = \int_{B_e} \bar{t}'_{1j}(\underline{x}, \underline{\xi}, \omega) dB_e(\underline{x}) \quad (3.19b)$$

sendo que \bar{u}_1^c é o vetor deslocamentos no ponto nodal do elemento singular, isto é, o elemento que contém o ponto de colocação $\underline{\xi}$ (ponto singular).

ELEMENTO ISOPARAMÉTRICO QUADRÁTICO

O elemento quadrático [34,41,44] é mais conveniente para aplicações com geometrias arbitrárias, pois o mesmo permite a interpolação da geometria podendo representar superfícies curvas. Além disso, a representação da variação das grandezas de campo (deslocamentos e forças de superfície) sobre o elemento de contorno é mais precisa.

As variáveis deslocamentos \bar{u}_i e forças de superfície \bar{t}_i são escritas em termos das funções de forma, que são funções das coordenadas locais η ,

$$\bar{u}_i(\eta) = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1^{(1)} \\ \bar{u}_2^{(1)} \\ \bar{u}_1^{(2)} \\ \bar{u}_2^{(2)} \\ \bar{u}_1^{(3)} \\ \bar{u}_2^{(3)} \end{Bmatrix} = [N] \bar{u}^j \quad (3.20a)$$

$$\bar{t}_i(\eta) = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{t}_1^{(1)} \\ \bar{t}_2^{(1)} \\ \bar{t}_1^{(2)} \\ \bar{t}_2^{(2)} \\ \bar{t}_1^{(3)} \\ \bar{t}_2^{(3)} \end{Bmatrix} = [N] \bar{t}^j \quad (3.20b)$$

onde as funções de forma são

$$N_1 = 1/2 \eta(\eta-1) \quad ; \quad N_2 = (1-\eta)(1+\eta) \quad ; \quad N_3 = 1/2 \eta(1+\eta) \quad (3.21)$$

e $\bar{u}_k^{(i)}$ e $\bar{t}_k^{(i)}$ são os deslocamentos e forças de superfície, nos nós $i = 1, 2$ e 3 , respectivamente no elemento j , nas coordenadas globais ($k = 1, 2$).

A figura 3.3 representa um esquema do elemento quadrático com seu sistema de coordenadas locais η , com intervalo $[-1,1]$ e a numeração local dos três nós.

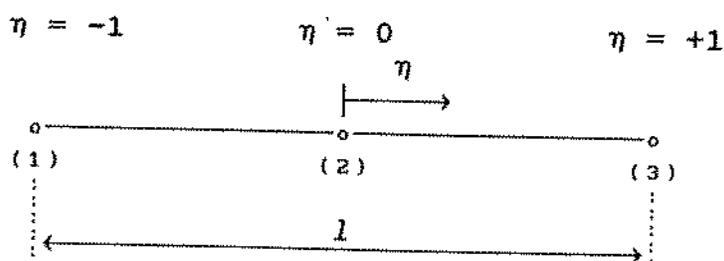


Figura 3.3. Esquema do elemento quadrático (o pontos nodais).

Para o elemento quadrático deve ser considerada a existência de nós em cantos. Nesses nós o deslocamento nodal no elemento j , nó (1), coincide com o deslocamento do nó (3) do elemento $(j-1)$, mas as forças de superfície nodais do nó (1) em j são diferentes das forças de superfície do nó (3) do elemento $(j-1)$. Isto aumenta o número de incógnitas no contorno. Existem quatro situações [44]:

a) Valores conhecidos : forças de superfície antes e depois do nó do canto;

Valor desconhecido : deslocamento.

b) Valores conhecidos : deslocamento e força de superfície antes do canto;

Valor desconhecido : força de superfície depois do nó do canto.

c) Valores conhecidos : deslocamento e força de superfície depois do canto;

Valor desconhecido : força de superfície antes do nó do canto.

d) Valores conhecidos : deslocamento;

Valores desconhecidos : forças de superfície antes e depois do canto.

Para a modelagem da superfície do solo (sem engastamentos) com elementos quadráticos a situação correspondente é a primeira. Onde são conhecidas todas as

forças de superfície antes e depois dos nós das extremidades de cada elemento, em virtude da não existência de cantos, isto é, todos os elementos estão no mesmo plano. Dessa maneira o sistema de equações final corresponde ao sistema da equação (3.18), diferindo apenas na dimensão. Para o caso dos elementos constantes a dimensão coincide com o número de elementos, pois cada elemento possui apenas um nó. No caso dos elementos quadráticos a não ocorrência de cantos implica na igualdade das forças de superfície antes e depois de cada nó da extremidade, o que reduz a dimensão do sistema para $(2NN)$ sendo NN o número de nós, para esse caso.

Com a substituição das equações (3.20) na equação (3.18) teremos

$$\frac{1}{2}\bar{u}_1(\underline{x}, \omega) = \sum_{j=1}^{NN} \int_{B_j} \bar{u}'_{1j}^* [N] dB_j(\underline{x}) \bar{t}^j - \sum_{j=1}^{NN} \int_{B_j} \bar{t}'_{1j}^* [N] dB_j(\underline{x}) \bar{u}^j \quad (3.22)$$

As integrais sobre o contorno $B_j(\underline{x})$ do elemento j precisa de uma transformação para as coordenadas locais η do elemento. Assim as integrais da equação (3.22) ficam na seguinte forma

$$\bar{G}_{1j}^e = \int_{B_j} \bar{u}'_{1j}^* [N] dB_j(\underline{x}) = \int_{-1}^{+1} \bar{u}'_{1j}^* [N] |J| d\eta \quad (3.23)$$

$$\bar{T}_{1j}^e = \int_{B_j} \bar{t}'_{1j}^* [N] dB_j(\underline{x}) = \int_{-1}^{+1} \bar{t}'_{1j}^* [N] |J| d\eta \quad (3.24)$$

Em (3.23) e (3.24) o Jacobiano $|J|$ é dado por:

$$|J| = \frac{dB}{d\eta} = \left\{ \left(\frac{dx_1}{d\eta} \right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\eta} \right)^2 \right\}^{1/2} \quad (3.25)$$

com $(dx_1/d\eta)$ e $(dx_2/d\eta)$ sendo as diferenciações das coordenadas globais - interpoladas pelas funções de forma, equação (3.21)-

em relação a coordenada local η [44].

Após essas considerações podemos escrever a EIC equação (3.18) na forma de somatória para elementos quadráticos

$$\frac{1}{2} \bar{u}_i^e = \sum_{e=1}^N \left\{ \bar{G}_{ij}^e \bar{t}_j^e - \bar{T}_{ij}^e \bar{u}_j^e \right\} \quad \begin{array}{l} c = 1, 2, \dots, NN \\ i = 1, 2 \quad ; \quad j = 1, 6 \end{array} \quad (3.26)$$

onde \bar{u}_j^e (6x1) e \bar{t}_j^e (6x1) são os vetores deslocamentos e forças de superfície no domínio da Transformada de Fourier no elemento (e). Os termos \bar{G}_{ij}^e (2x6) e \bar{T}_{ij}^e (2x6) são os coeficientes da EIC, dados pelas equações (3.23) e (3.24), respectivamente.

As matrizes obtidas das integrações das equações (3.23) e (3.24) são de dimensão (2x6), mas como as forças de superfície no extremo de um elemento coincidem com as forças de superfície do elemento adjacente no nó comum aos dois, pode-se somar os coeficientes de \bar{G}_{ij}^e referentes a esse nó dos elementos adjacentes, e assim a matriz global [G] torna-se quadrada de dimensão 2NN. O mesmo processo ocorre na matriz global [T], pois os deslocamentos em nós comuns a dois elementos são iguais. Com essas considerações a equação (3.26) torna-se

$$(1/2) \{\bar{u}\} = [G] \{\bar{t}\} - [T] \{\bar{u}\} \quad (3.27)$$

onde os vetores $\{\bar{u}\}$ e $\{\bar{t}\}$ são de dimensão (2NNx1).

Para o caso de problemas com estruturas engastadas a presença de cantos exige um tratamento diferente na montagem do sistema de equações. Em virtude da existência de diferentes valores de forças de superfície antes e depois do canto, algumas estratégias são propostas na referência [44], tal como o afastamento do nó do canto, de forma a serem criados dois nós o que permite a montagem de duas equações para cada canto abrangendo todas as incógnitas. Em relação a determinação do termo de descontinuidade c_{ij} , que é função da geometria do canto [44,45] o procedimento do afastamento do nó torna o contorno suave de forma que voltamos a situação anterior onde não existe nós em cantos.

3.3.2. Técnicas de Integração

O comportamento dos integrandos podem ser definidos em singulares e não-singulares. No primeiro, o ponto de colocação ξ coincide com um dos pontos de integração x , ou seja, o mesmo pertence ao elemento que está sendo integrado, fazendo a distância r (raio) tornar-se zero nesse ponto; no segundo, o ponto de colocação não pertence ao elemento e a distância r (raio) nunca é nula.

Para integração sobre elementos não-singulares ($e \neq c$), o elemento não contém o ponto de colocação ξ do contorno. A integração pode ser feita diretamente pela fórmula padrão da quadratura Gaussiana. Já para os elementos singulares, onde ($e = c$), ou seja, aqueles que contém o ponto singular ξ (colocação), a integração é feita com as simplificações indicadas por Mohammadi e Karabalis [31] para o caso de elemento constante e para o caso de elemento quadrático são adotadas as modificações propostas por Manolis e Beskos [34] e as contidas nas referências [17,28,32,40]. Ambos os tratamentos serão descritos a abaixo.

Para o caso bi-dimensional, o núcleo de deslocamentos tem uma singularidade de ordem $\log(r)$ e o de tensões a ordem é $1/r$, quando o raio tende a zero. Devido ao fato da singularidade logarítmica apresentada pelo núcleo de deslocamentos ser integrável, Manolis e Beskos [34] indicam como suficientemente preciso o método da divisão do elemento em subelementos, para posterior integração sobre cada subelemento pela fórmula da quadratura Gaussiana com singularidade logarítmica na origem [47]. No caso do núcleo de tensões, que apresenta singularidade forte, a integral só existe no sentido do valor principal de Cauchy, exigindo uma integração analítica ou um esquema indireto de integração numérica alternativo. Para os termos singulares dos elementos constante (implementado) e quadrático tem-se os seguintes esquemas de integração:

(a) Para o Núcleo $\left\{ \bar{u}'_{1,j}^*(\underline{x}, \underline{\xi}, \omega) \right\}$, do elemento constante

Neste caso, o elemento singular é dividido em dois subelementos, de forma que o ponto de colocação $\underline{\xi}$ (ponto singular) se torne uma das extremidades de cada subelemento. Após a integração, a contribuição de cada subelemento é somada, obtendo-se assim o termo singular $\bar{G}_{1,j}^e$.

A integração numérica é feita usando a fórmula da quadratura Gaussiana com singularidade logarítmica na origem [47], isto é,

$$\int_0^1 f(\eta) \log(1/\eta) d\eta \cong \sum_{k=1}^K f(\eta^k) w^k \quad (3.28)$$

onde η^k são os pontos de integração de Gauss e w^k são os respectivos pesos da quadratura.

(b) Para o Núcleo $\left\{ \bar{t}'_{1,j}^*(\underline{x}, \underline{\xi}, \omega) \right\}$, do elemento constante

A figura (3.4) mostra um elemento constante m na superfície do semi-espaco (solo), onde são definidos seu ponto nodal central (o) com extremidades (+) e o ponto de colocação $\underline{\xi}$. Para o caso singular o ponto de colocação $\underline{\xi}$ coincide com o ponto nodal (o). São especificadas na figura a numeração local dos nós e a orientação do vetor unitário normal exterior a superfície \underline{n} .

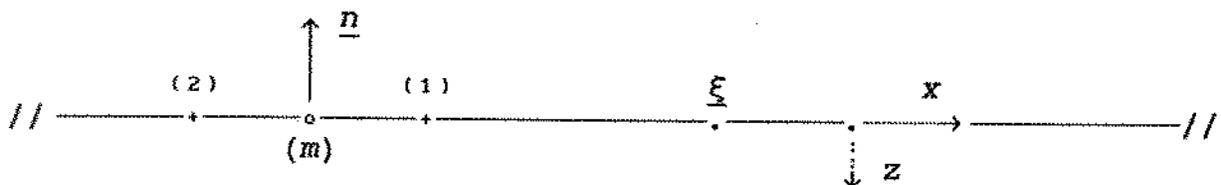


Figura 3.4. Desenho esquemático representando o sistema de coordenadas (z, x) , um elemento constante (m) e o ponto de colocação $\underline{\xi}$.

Conforme as observações feitas no trabalho de Mohammadi e Karabalis [31] e que podem ser verificadas na expressão da solução fundamental em tensões (Apêndice A), a matriz de influência $\bar{T}_{1,j}^e$ (2x2), equação (3.19b), para elementos constantes e pertencentes ao mesmo plano, no caso não-singular será

$$\left[\bar{T}_{1,j}^e \right] = \begin{bmatrix} 0 & \bar{T}_{12} \\ \bar{T}_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

e para o caso singular será nula. Dessa forma, a integração da equação (3.19b) não é necessária para o caso singular. É bom lembrar que a forma da equação (3.29) somente ocorre para o elemento constante, o qual é uma linha reta e possui apenas um nó.

(c) Para o Núcleo $\left\{ \bar{u}_{1,j}^* (\underline{x}, \underline{\xi}, \omega) [N] \right\}$, do elemento quadrático

Para integração sobre o elemento no qual um dos nós coincide com o ponto de colocação, foram adotados três procedimentos, um para cada caso dependendo da posição do ponto de colocação $\underline{\xi}$ [44]:

Caso 1) Ponto de Colocação no Nó (1)

Para esse caso, usou-se mais uma transformação de coordenadas do tipo

$$\alpha = \frac{\eta + 1}{2} . \quad (3.30)$$

Essa transformação, figura (3.5), define sobre o elemento um intervalo [0,1], com o ponto de colocação em $\alpha = 0$. Agora pode-se aplicar a fórmula de quadratura gaussiana com singularidade logarítmica na origem equação (3.28).

Caso 2) Ponto de Colocação no Nó (2)

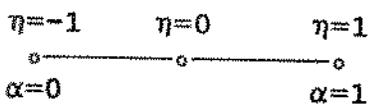
Para integrar sobre esse elemento, a presença de singularidades de ambos os lados do nó central foi contornada por duas transformações de variáveis sobre o intervalo [-1,1]

da coordenada η . A primeira parte do intervalo $[-1,0]$ teve uma mudança de variável ($\alpha' = -\eta$) e na segunda parte $[0,1]$ a mudança foi para ($\alpha = \eta$). Dessa maneira passa-se a ter dois subelementos com singularidade logarítmica na origem, que podem ser integrados pela quadratura gaussiana, equação (3.28).

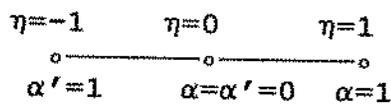
Caso 3) Ponto de Colocação no Nó (3)

Este caso é semelhante ao primeiro, com a seguinte transformação de variável

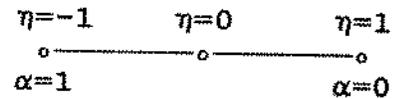
$$\alpha = \frac{1 - \eta}{2} \quad (3.31)$$



Caso (1)



Caso (2)



Caso (3)

Figura 3.5. Sistema de coordenadas locais, para integração sobre elementos quadráticos com singularidade logarítmica.

Este esquema de integração apresentado no item c) também se aplica ao conjunto de considerações do item d) abaixo.

(d) Para o Núcleo $\left\{ \bar{t}'_{1j}^*(\underline{x}, \underline{\xi}, \omega) [N] \right\}$, do elemento quadrático

Os termos da diagonal da matriz de influência $[\bar{T}]$ são constituídos da integral do produto do tensor de tensões \bar{t}'_{1j}^* pela correspondente função de forma N_1 sobre o elemento

singular, mais o termo descontinuidade $c_{1,j}(\underline{\xi}) = (1/2)\delta_{1,j}$, sendo aqui denominados bloco diagonal singular $d_{1,j}^d$ (2x2), para o caso dinâmico. A integral equação (3.24) existe apenas no sentido do valor principal de Cauchy. O índice superior (d) indica o caso dinâmico.

A avaliação do bloco diagonal singular é feita usando um esquema indireto. A idéia básica desse esquema está na descrição do movimento de corpo rígido, para o qual as forças de superfície correspondentes são nulas. Isto permite, escrever o bloco diagonal singular $d_{1,j}^s$ (2x2), onde o índice superior (s) indica o caso estático, a partir dos termos fora-diagonal (não-singulares) do problema estático [34,44].

Para a versão estática da equação (3.18) onde o vetor deslocamento unitário $\{u\} = 1$ e o vetor de forças de superfície $\{t\} = 0$ são adotados, a equação associada ao movimento de corpo rígido fica na forma

$$c_{1,j}(\underline{\xi}) + \sum_{e=1}^M \sum_{k=1}^K \int_{B_e} t_{1,j}^s(\underline{x}, \underline{\xi}) N_k dB_e(\underline{x}) = 0, \quad K = 3 \quad (3.32)$$

onde M é o número de elementos e K o número de funções de forma do elemento quadrático. Como exemplo, assumimos que o nó (1) do elemento $e=1$ é singular, assim pode-se definir o bloco diagonal singular estático $d_{1,j}^s$ (2x2), em função da somatória dos blocos fora da diagonal (não-singulares), tal como

$$d_{1,j}^s = c_{1,j} + \int_{B_1} t_{1,j}^s(\underline{x}, \underline{\xi}) N_1 dB_1(\underline{x}) = - \sum_{k=2}^K \int_{B_1} t_{1,j}^s(\underline{x}, \underline{\xi}) N_k dB_1(\underline{x}) - \sum_{e=2}^M \sum_{k=1}^K \int_{B_e} t_{1,j}^s(\underline{x}, \underline{\xi}) N_k dB_e(\underline{x}) \quad (3.33)$$

$$K = 3$$

onde B_1 denota o contorno relativo ao elemento (1).

O bloco singular dinâmico $d_{1,j}^d$ para o nó (1) do elemento $e=1$, é definido como

$$d_{ij}^d = c_{ij} + \int_{B_1} \bar{t}'_{ij}{}^*(\underline{x}, \underline{\xi}, \omega) N_1 dB_1(\underline{x}) \quad (3.34)$$

Eliminando o termo de descontinuidade c_{ij} , entre as equações (3.33) e (3.34), temos

$$d_{ij}^d = d_{ij}^s + \int_{B_1} \left\{ \bar{t}'_{ij}{}^*(\underline{x}, \underline{\xi}, \omega) - t_{ij}^s(\underline{x}, \underline{\xi}) \right\} N_1 dB_1(\underline{x}) \quad (3.35)$$

Agora, a partir da equação (3.35) o bloco diagonal singular d_{ij}^d pode ser avaliado numericamente pela fórmula padrão da quadratura Gaussiana, pois o integrando $\{\bar{t}'_{ij}{}^* - t_{ij}^s\} N_1$ é não-singular [34, 40, 41].

3.4. Alternativas de Formulação do MEC do ponto de vista da Função Ponderadora: Solução Fundamental versus Funções de Green

A formulação apresentada até o presente momento para o tratamento da interação dinâmica entre estruturas de fundação e o solo estava baseado no que convencionalmente chama-se Método dos Elementos de Contorno Direto (MECD). Esta variante do MEC é a mais utilizada para o tratamento de problemas da DSSI.

Revisemos rapidamente os principais passos do MECD aplicado à DSSI. O ponto de partida é uma relação de reciprocidade entre dois estados elastodinâmicos. Para chegarmos ao sistema de equações integrais, que será discretizado em uma etapa posterior, escolhemos um estado elastodinâmico particular. Este estado particular que chamamos de solução fundamental, contém os tensores de Stokes de deslocamentos, de tensões e deformações para o caso de uma força de corpo (excitação) concentrada (delta de Dirac) aplicado em um ponto $\underline{\xi}$ e na direção de um vetor cartesiano \underline{e} .

Uma característica chave da chamada solução

fundamental é que ela não obedece nenhuma condição de contorno, e vale dizer que na sua obtenção não foram prescritas quaisquer condições de contorno.

Um problema típico da DSSI é, entretanto, um problema de valor de contorno misto. No caso, temos além das equações de Navier, condições de contorno prescritas tanto em termos de tensões (tractions) como também em termos de deslocamentos.

A essência do tratamento do problema da DSSI pelo MECD consiste na criação de superfícies onde se impõe as condições de contorno do problema em questão. Nestas superfícies - vale dizer contornos - é que se aplica a relação de reciprocidade dinâmica entre um estado caracterizado pela solução fundamental (nenhuma condição de contorno prescrita) e o estado atual, associado ao problema da DSSI em questão.

Nos problemas da DSSI o solo é geralmente um meio ilimitado. Ilimitado no sentido de ser muito maior que as estruturas em questão, e também no sentido de que as perturbações que nele se propagam não são refletidas e conseqüentemente carregam consigo energia em forma de ondas. Esse fenômeno, que recebe o nome de amortecimento geométrico, já foi descrito neste trabalho.

O ponto de maior interesse neste tópico é a questão ligada à modelagem da superfície do solo (do contorno). Para meios ilimitados, falando de forma rigorosa, será necessário descrever ou discretizar uma superfície ilimitada para se testar a questão pelo MECD [31]. Na prática porém é feita mais uma aproximação ao se truncar a superfície do solo que está sendo discretizada. O quanto de superfície que deverá ou não ser discretizada para se obter resultados pelo MECD ainda será discutido no presente trabalho.

É importante salientar que ao se discretizar uma superfície além daquela associada à interface solo-estrutura, estar-se-a aumentando tanto o trabalho computacional de integração sobre os núcleos da solução fundamental (Stokes), como também aumentando o tamanho do sistema algébrico resultante. Este procedimento tem como limites a memória de acesso aleatório - RAM - do sistema computacional e o tempo de processamento necessário à solução do problema.

Existe uma forma alternativa de se tratar problemas da DSSI e que somente exige a discretização da interface solo-fundação. Esta alternativa é baseada no conceito de função de Green e está na base dos trabalhos de Gaul [49], Mesquita [05], Triantafyllidis [50,51] e Wolf [52,53,54,55].

Wolf [53,55] chega mesmo a associar o tratamento das equações integrais, oriundas da formulação da DSSI, através de funções de Green ao Método dos Elementos de Contorno Indireto (MECI). O que geralmente tem sido chamado de MECI está associado a grandezas, variáveis, que não tem necessariamente um sentido físico imediato [56]. Já no caso de equações integrais obtidas a partir das funções de Green trabalha-se com grandezas físicas tais como tensões e deslocamentos.

Um dos objetivos iniciais do presente trabalho era o de fazer uma comparação crítica entre as duas abordagens: uma baseada na solução fundamental e outra baseada nas funções de Green. De certa forma pretendia-se discutir se é razoável investir trabalho na síntese de funções de Green.

3.4.1. Funções de Green para o Semi-espço Viscoelástico Bidimensional no Domínio da Frequência.

As funções (tensores) de Green que estamos procurando são soluções de um problema da elastodinâmica de segundo tipo, ou seja, um problema de valor de contorno em tensões [39], tal como mostrado na figura 3.6.

Considere-se um semi-espço viscoelástico submetido à seguinte distribuição de tensões \underline{t}_0 , na sua superfície dada por

$$\underline{t}_0(\underline{\xi}_1, \underline{\xi}_2 = 0) = \underline{t}_0 \delta(\underline{\xi}) \quad (3.36)$$

onde

$$\underline{t}_0 = t_{0z} \underline{e}_z + t_{0x} \underline{e}_x \quad (3.37)$$

e $\delta(\underline{\xi})$ é o delta de Dirac.

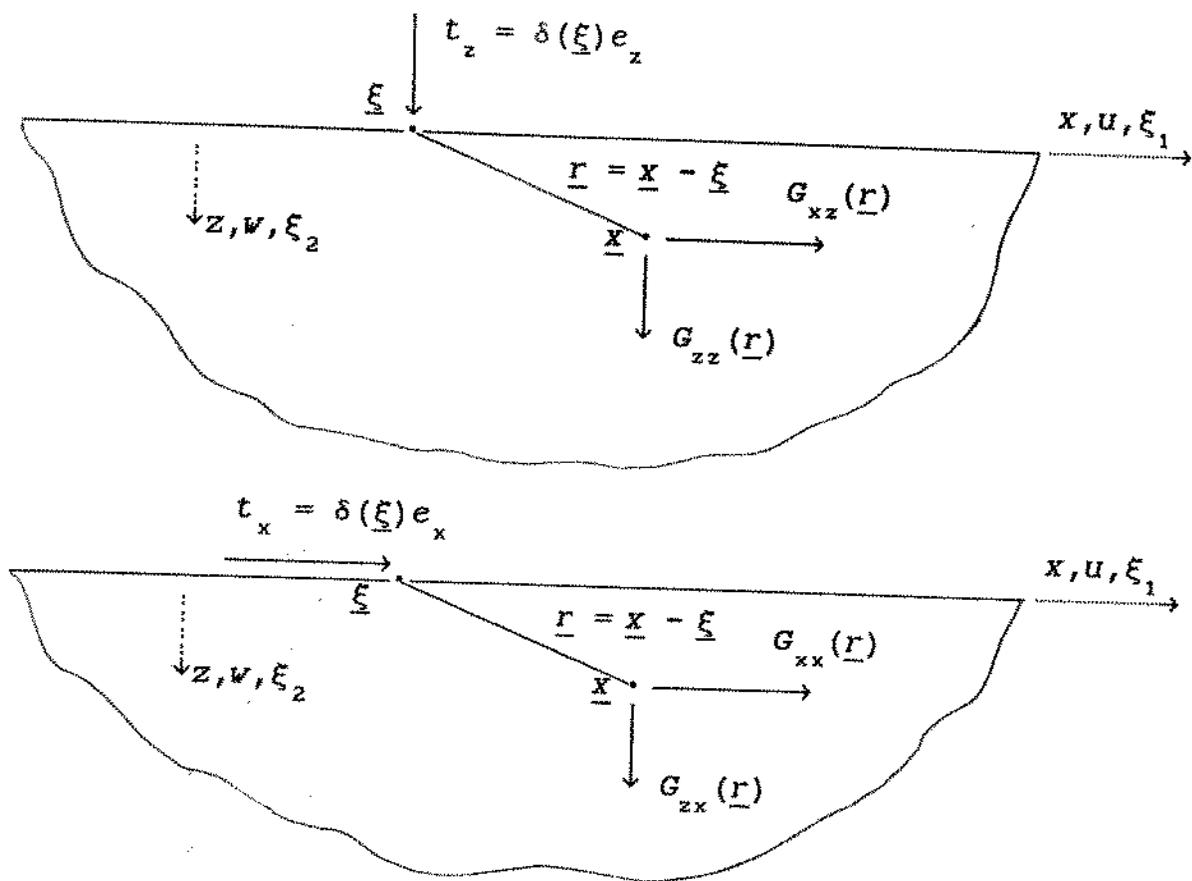


Figura 3.6. Definição dos tensores de Green.

O campo de deslocamentos $\underline{u}_g(\underline{x}) = u_{gx}(\underline{x})e_x + u_{gz}(\underline{x})e_z$ no interior e na superfície do semi-espaco será dado por:

$$\underline{u}_g(\underline{x}) = \underline{G}(\underline{x} - \underline{\xi}) t_o(\underline{\xi}) \quad (3.38)$$

onde

$$\underline{G}(\underline{x} - \underline{\xi}) = \begin{bmatrix} G_{xx} & G_{xz} \\ G_{zx} & G_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

são as componentes do tensor de Green.

Uma vez de posse dos tensores de Green $G_{ij}(\underline{x})$ o campo de deslocamentos no semi-espaco $\underline{u}(\underline{x})$ devido a uma distribuição qualquer de tensões na sua superfície $\underline{t}'(\underline{\xi})$ será obtida por superposição [51,57]

$$\underline{u}(x) = \int_a^b \underline{G}(x - \xi) \underline{t}'(\xi) d\xi . \quad (3.40)$$

A figura 3.7, abaixo, ilustra o significado da equação (3.40).

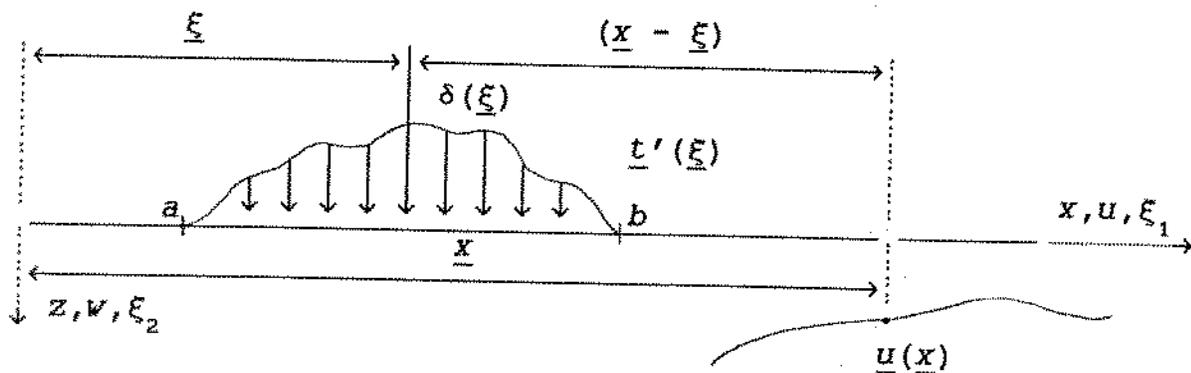


Figura 3.7. Campo de deslocamentos $\underline{u}(x)$ devido a uma distribuição de tensões $\underline{t}'(\xi)$ por superposição das funções de Green.

Para o caso da interação de uma estrutura rígida de superfície com o solo, a distribuição de tensões $\underline{t}'(\xi)$ da equação (3.40) é desconhecida, enquanto que o campo de deslocamentos $\underline{u}(x)$ deve ser compatível com o deslocamento da interface solo-fundação.

O tratamento do problema da interação dinâmica de estruturas (rígidas) com o solo, descrito pela equação integral (3.40) exige tanto a obtenção da função (tensores) de Green para o semi-espço viscoelástico como a solução desta mesma equação integral.

Embora originalmente fosse prevista a síntese das funções de Green no presente trabalho a tarefa mostrou-se por demais complexa e está sendo tratada no âmbito de outra pesquisa [58]. Aqui vamos utilizar resultados parciais do trabalho acima mencionado.

A solução da equação integral (3.40) obedece aos seguintes passos:

a) assume-se uma distribuição para as tensões na interface solo-fundação como sendo dada por

$$\underline{t}'(\underline{\xi}) = [\underline{N}]\{t'\} \quad (3.41)$$

onde \underline{N} é uma matriz que contém funções de interpolação e $\{t'\}$ um vetor contendo os valores nodais. Este tipo de procedimento é padrão tanto no MEF quanto no MEC.

A substituição da equação (3.41) na equação (3.40) fornece

$$\underline{u}(\underline{x}) = \int_a^b \underline{G}(\underline{x} - \underline{\xi}) \underline{N}(\underline{\xi}) d\underline{\xi} \{t'\} \quad (3.42)$$

ou

$$\underline{u}(\underline{x}) = [\underline{G}_{IF}]\{t'\} \quad (3.43)$$

onde

$$\underline{G}_{IF} = \int_a^b \underline{G}(\underline{x} - \underline{\xi}) \underline{N}(\underline{\xi}) d\underline{\xi} \quad (3.44)$$

é uma matriz de funções de influência obtida pela integração das funções de Green ponderadas pelas funções de forma da distribuição de tensões na interface solo-fundação.

Se fizermos \underline{x} coincidir com os pontos nodais da distribuição de tensões a equação (3.43) torna-se

$$\{u\} = [\underline{G}_{IF}]\{t'\} \quad (3.45)$$

Esta relação é uma típica expressão entre tensões $\{t'\}$ e deslocamentos $\{u\}$ nos nós escolhidos. Esta relação entre tensões e deslocamentos na superfície do semi-espaço será utilizada no capítulo 4 para o tratamento de interação de estruturas rígidas com o solo.

TENSORES DE GREEN

Com a finalidade de mostrarmos que a abordagem

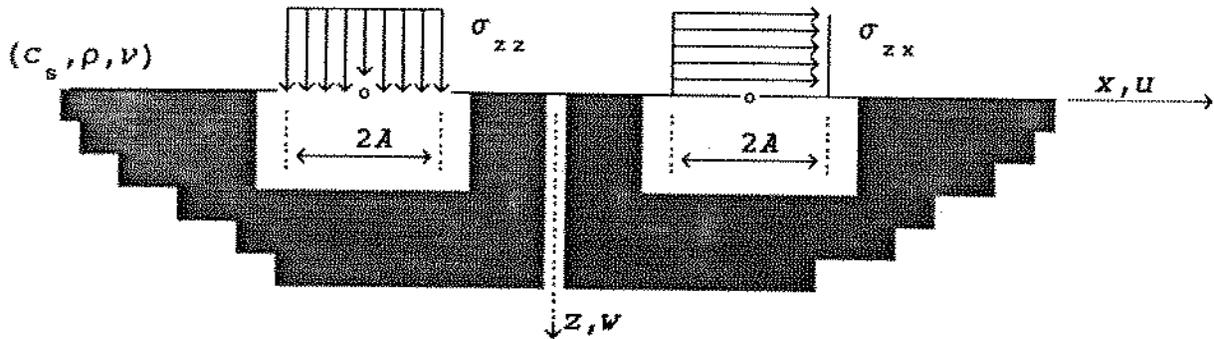
baseada em funções de Green nos leva a resultados corretos, vamos efetuar uma comparação entre a solução de um problema de valor de contorno em tensão usando-se uma técnica descrita por Mesquita [05] e a solução por integração dos tensores de Green.

O problema a ser resolvido consiste na determinação do campo de deslocamentos $\bar{w}_z(\underline{x})$ gerado por uma distribuição espacial constante de tensões $\sigma_{zz}(\underline{x})$ de largura $2A$, ver figura (3.8).

Mostra-se [58] que a componente vertical do campo de deslocamentos \bar{w}_z é determinado por

$$\bar{w}_z(\underline{x}) = \frac{\sigma_{zz0}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{H}_{wz}(\beta) \exp(ix\beta) d\beta \quad (3.46)$$

onde $\bar{H}_{wz}(\beta)$ é uma função de flexibilidade.



$$\bar{\sigma}_{zz}(\underline{x}, t) = \sigma_{zz}(\underline{x}) \exp(i\omega t) \quad \sigma_{zz}(\underline{x}) = \begin{cases} \sigma_{zz0} & |\underline{x}| < A \\ 0 & |\underline{x}| > A \end{cases}$$

Figura 3.8. Problema de valor de contorno em tensão na superfície do semi-espaço

$$\bar{H}_{wz}(\beta) = \frac{[\beta^2 - K_p^{*2}]^{1/2} K_s^2}{G^* \text{Fray}(\beta)} \quad (3.47)$$

Na equação (3.46) a variável de integração β é um número de onda. As demais grandezas são definidas por:

$$\text{Fray}(\beta) = [2\beta^2 - K_s^{*2}]^2 - 4\beta^2 [\beta^2 - K_p^{*2}]^{1/2} [\beta^2 - K_s^{*2}]^{1/2} \quad (3.48)$$

$$K_p^{*2} = \frac{\omega^2}{c_p^2(1+\eta_p)} \quad (3.49)$$

$$K_s^{*2} = \frac{\omega^2}{c_s^2(1+\eta_s)} \quad (3.50)$$

$$G^* = G(1 + i\eta_s) \quad , \quad (3.51)$$

onde:

c_s = velocidade de propagação da onda de cisalhamento no meio;

c_p = velocidade de propagação da onda de dilatação no meio;

ω = frequência circular (temporal);

η_p, η_s = coeficientes de amortecimento, associados aos fenômenos de propagação de ondas de dilatação e distorção no contínuo viscoelástico;

G = módulo de elasticidade transversal;

A figura (3.9) mostra uma comparação entre a componente vertical, \bar{w}_z , do campo de deslocamentos obtida pelo chamado método "semi-analítico" [05] e a obtida pelas funções de Green. Os resultados mostram uma excelente concordância.

Para uma excitação de amplitude unitária $\sigma_{zzo} = 1$ temos que as componentes do campo de deslocamento $\bar{w}_z (\sigma_{zzo} = 1)$ tornam-se as funções de influência E_{wz} . Estas funções de influência são a essência do método chamado "semi-analítico".

Como foi mostrado, para uma distribuição constante de tensões, as funções de influência obtidas pela integração das funções de Green, G_{IFZZ} da equação(3.44), coincidem com E_{wz} do método "semi-analítico" [05].

Assim conclui-se que os resultados apresentados em [05] coincidem com aqueles obtidos com as funções de Green, onde assumiu-se uma distribuição constante em elementos (subdomínios) da interface solo-estrutura.

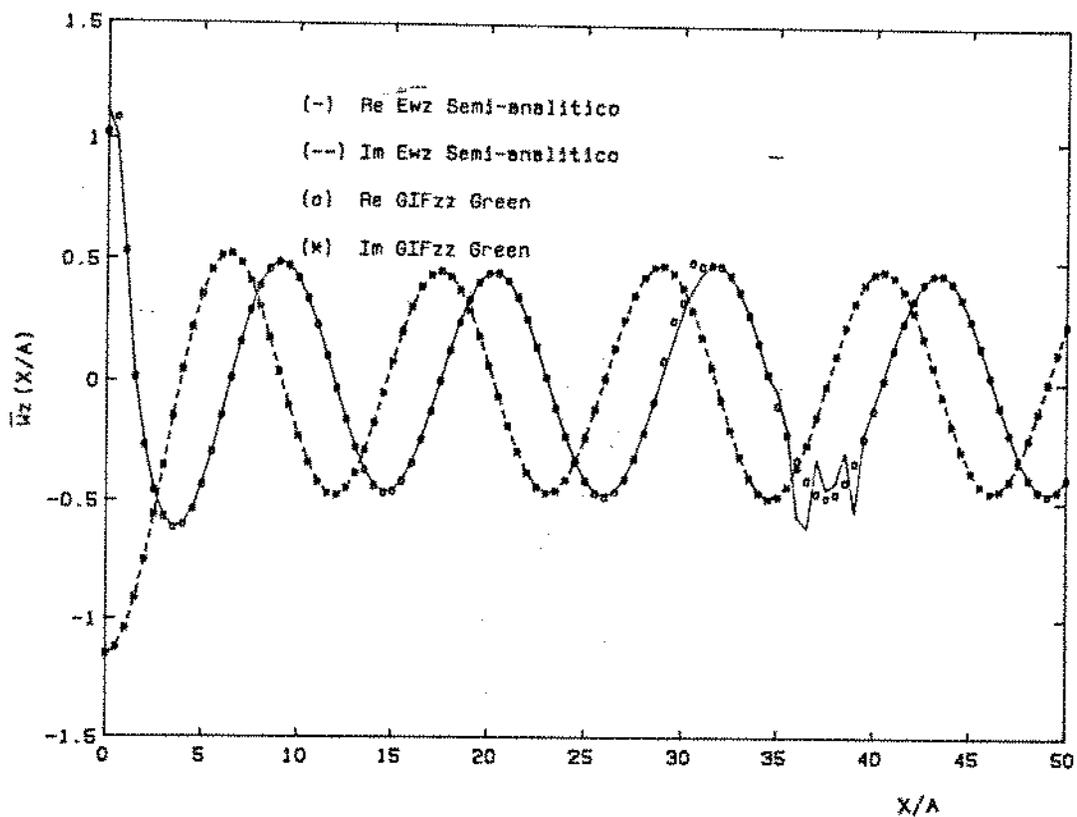


Figura 3.9. Comparação entre as soluções pelo método semi-analítico e pelas funções de Green ($A_0 = 0,5$; $\nu = 0,25$; $\eta = 0,01$).

Na sequência deste trabalho comparar-se-á os resultados obtidos pelo MEC-Direto com aqueles obtidos por [05]. A vantagem da formulação baseada nas funções de Green é que ela permite uma escolha mais ampla das funções de forma para aproximar a distribuição de tensões na interface solo-estrutura. Seria razoável imaginar que uma aproximação linear ou quadrática produziria uma melhor aproximação destas tensões e conseqüentemente dos deslocamentos das fundações.

4. SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE INTERAÇÃO DINÂMICA SOLO-ESTRUTURA (DSSI) ATRAVÉS DO MEC

Na solução de problemas de Interação Dinâmica Solo-Estrutura em razão dos módulos de elasticidade do aço ou concreto - materiais normalmente utilizados na construção das estruturas - serem elevados em relação às propriedades do solo, justifica-se a aproximação implícita na hipótese de estrutura rígida.

O tratamento de estruturas flexíveis interagindo com o solo é possível através do MEC com implementação para múltiplos domínios. Esta implementação modela a estrutura e o solo com propriedades elásticas, dissipativas e inerciais distintas. Para o tratamento de estruturas flexíveis a alternativa mais empregada é a técnica de acoplamento MEC-MEF, na qual o solo é modelado pelo MEC e a estrutura pelo MEF [48].

Na próxima seção será apresentada a formulação para o caso da interação entre o solo e estruturas rígidas de superfície ou engastadas.

4.1. Equações de Compatibilidade Cinemática e Equilíbrio de Forças para Estruturas Rígidas

Após a discretização das equações de integrais de contorno, mais dois sistemas de equações complementares são necessárias para a solução de um problema da interação dinâmica solo-estrutura rígida [06,08,09].

Estas equações são : as de compatibilidade cinemática e as de equilíbrio de forças, as quais são escritas em termos de deslocamentos e forças de superfície, respectivamente, na interface de contato solo-estrutura. A formulação se baseia no esquema esboçado na figura (4.1), na qual (z,x) são os eixos de coordenadas.

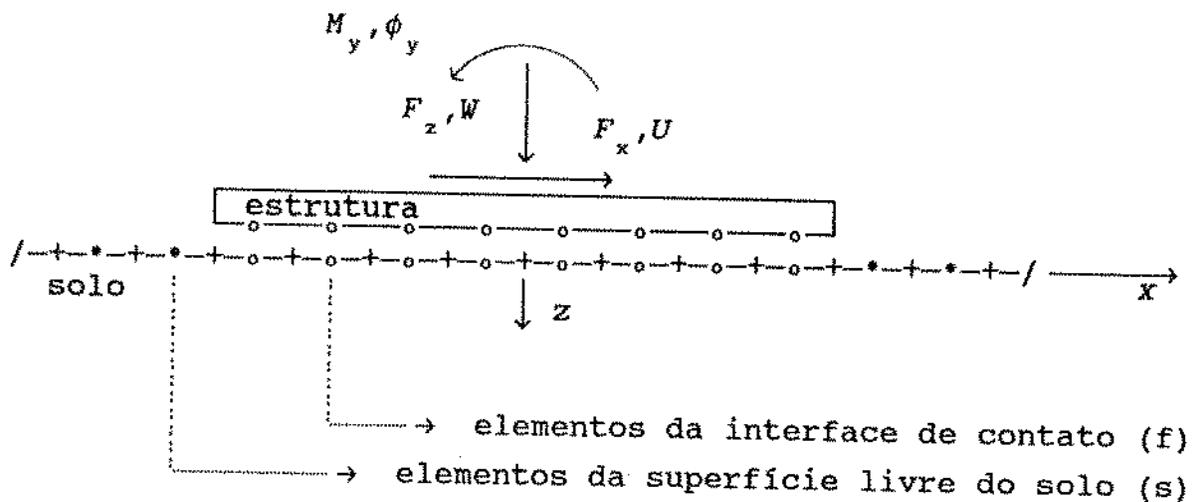


Figura 4.1. Desenho esquemático do arranjo solo-estrutura, onde (o) são os pontos nodais na interface de contato e (*) são os pontos nodais da superfície livre do solo.

Assumindo a não ocorrência de separação ou deslizeamento entre o solo e a estrutura, ou seja, condições de "contato soldado" (bonded contact), um sistema de equações de compatibilidade cinemática para movimento de corpo rígido pode ser escrito como

$$\{\bar{u}_f\} = [S]\{\bar{D}\} \quad (4.1)$$

onde $\{\bar{u}_f\}$ é o vetor dos $(2M \times 1)$ deslocamentos de pontos nodais nos elementos que discretizam a interface solo-estrutura. M é o número de nós, que para o caso de elementos constantes, coincide com o número de elementos na interface. O vetor de deslocamentos de corpo rígido $\{\bar{D}\}$ (3×1) é dado por:

$$\{\bar{D}\} = \{W \quad U \quad \phi_y\}^T; \quad (4.2)$$

com W e U sendo os deslocamentos e ϕ_y as pequenas rotações linearizadas de corpo rígido, apresentados pela estrutura (veja figura 4.1).

A matriz de transformação $[S]$ $(2M \times 3)$ é montada a partir das M submatrizes $[S^m]$ (2×3) . Estas matrizes expressam o vetor de deslocamentos no ponto nodal m ($m=1,2,\dots,M$) devido a um movimento de corpo rígido unitário. Elas podem ser escritas na forma

$$[S^m] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & (X^E - x^m) \\ 0 & 1 & (-Z^E + z^m) \end{bmatrix}; \quad (4.3)$$

onde (z^m, x^m) são as coordenadas do ponto nodal m e (Z^E, X^E) são as coordenadas do ponto de referência dos movimentos de corpo rígido da estrutura E . O ponto de referência (Z^E, X^E) de uma estrutura E é sempre considerado o ponto central em relação a superfície do solo.

O vetor de carregamentos aplicados externamente $\{\bar{F}\} = \{F_z, F_x, M_y\}^T$ consiste das forças F_z e F_x , e do momento M_y , e pode ser relacionado com as tensões de contato $\{\bar{t}_f\}$ aplicadas na interface solo-estrutura através da equação

$$\{\bar{F}\} = [Eq] \{\bar{t}_f\}. \quad (4.4)$$

A equação (4.4) representa o equilíbrio dinâmico de forças para uma estrutura rígida e sem massa. A matriz de transformação $[Eq]$ ($3 \times 2M$) é montada, para o elemento constante, a partir de M submatrizes $[Eq^m]$ dadas por

$$[Eq^m] = A_m [S^m]^T \quad (4.5)$$

com A_m sendo a área do elemento correspondente ao ponto nodal m .

Para o caso de elemento quadrático devem ser obtidas as forças concentradas equivalentes nos pontos nodais, isto é, uma ponderação deve ser realizada para determinar as contribuições de cada nó. Este é um procedimento normalmente utilizado no Método dos Elementos Finitos e é expressado da seguinte forma, a partir da equação (3.20b):

$$\{\bar{f}q_1^{e(j)}\} = \int_{-1}^{+1} [N]^T \bar{t}_1^e(\eta) |J^e| d\eta = \int_{-1}^{+1} [N]^T \left\{ [N] \bar{t}_1^{e(j)} \right\} |J^e| d\eta, \quad (4.6)$$

de forma reduzida pode-se escrever

$$\{\bar{f}q_1^{e(j)}\} = [Nq^e] \{\bar{t}_1^{e(j)}\} \quad (4.7)$$

onde $\bar{f}q_1^{e(j)}$ é a componente do vetor de forças equivalentes do elemento (e), relativo ao nó (j) e a coordenada global i. A matriz de transformação $[Nq^e]$ relaciona as forças de superfície nodais $\{\bar{t}_1^{e(j)}\}$ às forças concentradas equivalentes $\{\bar{f}q_1^{e(j)}\}$.

A matriz $[Nq^e]$ (6x6) para o elemento (e), é definida da seguinte forma:

$$[Nq^e] = \int_{-1}^{+1} [N]^T [N] |J^e| d\eta ; \quad (4.8a)$$

$$[Nq^e] = |J^e| \begin{bmatrix} 2/15 & 0 & 1/15 & 0 & -1/30 & 0 \\ & 2/15 & 0 & 1/15 & 0 & -1/30 \\ & & 8/15 & 0 & 1/15 & 0 \\ & & & 8/15 & 0 & 1/15 \\ & & & & 2/15 & 0 \\ & & & & & 2/15 \end{bmatrix} \quad (4.8b)$$

(simétrica)

A partir da equação (4.8a) têm-se a matriz de transformação $[Nq^e]$, equação (4.8b). Para obter a matriz de equilíbrio $[Eq^m]$, equação (4.5), é necessário multiplicar as submatrizes \bar{G}_{ij}^e , equação (3.23), por $[Nq^e]^{-1}$ para transformar as forças de superfície em forças concentradas equivalentes, eliminando dos cálculos a área do elemento. Dessa forma para o elemento quadrático temos $[Eq^m] = [S^m]^T$.

Esta formulação, para um problema bi-dimensional, é equivalente para aplicação no domínio do tempo ou da frequência. A extensão para o caso tridimensional é praticamente direta, pela adição dos termos referentes a terceira dimensão.

4.2. Acoplamento das Equações do Sistema Solo-Estrutura

Escrevendo a EIC equação (3.17) para todos os pontos nodais do contorno, monta-se um sistema de (2M) equações

algébricas, que na forma matricial, será

$$(0.5) \{\bar{u}\} = [\bar{G}]\{\bar{t}\} - [\bar{T}]\{\bar{u}\} \quad (4.9)$$

A solução desse sistema para um dado valor do parâmetro frequência ω , exige o conhecimento de $(2M)$ condições de contorno em deslocamentos ou em forças de superfície, podendo ainda ser o caso misto, no qual numa parte do contorno são conhecidos os deslocamentos e em outra as forças de superfície. Adotando-se o índice (s) para denotar os elementos da superfície livre do solo e o índice (f) para os elementos da interface de contato solo-estrutura rígida, conforme mostra a figura (4.1). A equação (4.9) é reescrita na forma particionada, como

$$(0,5) \begin{Bmatrix} \bar{u}_s \\ \bar{u}_f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\bar{G}_{ss}] & [\bar{G}_{sf}] \\ [\bar{G}_{fs}] & [\bar{G}_{ff}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{t}_s \\ \bar{t}_f \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} [\bar{T}_{ss}] & [\bar{T}_{sf}] \\ [\bar{T}_{fs}] & [\bar{T}_{ff}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_s \\ \bar{u}_f \end{Bmatrix} \quad (4.10)$$

Para obter a solução do problema da interação solo-estrutura rígida, é necessário acoplar a equação (4.10) com os dois sistemas de equações apresentados na seção 4.1, equações (4.1) e (4.4), ou sejam, as equações de compatibilidade e equilíbrio de forças para uma estrutura rígida sem massa (corpo rígido), com base nos valores nodais na interface de contato.

Fazendo-se a suposição da completa continuidade de deslocamentos e forças de superfície entre as duas subestruturas, ou seja, o solo denotado por subestrutura (1) e a estrutura rígida por subestrutura (2), têm-se as chamadas condições de contato soldado, na interface solo-estrutura. Esta condição implica que não ocorra separação e/ou deslizamento na interface em questão. A condição de continuidade de deslocamentos na interface é expressa por

$$u_1(\underline{x}, t) = u_2(\underline{x}, t) \quad (4.11)$$

Analogamente, o equilíbrio de forças é expressado por

$$t_1(\underline{x}, t) = -t_2(\underline{x}, t) \quad (4.12)$$

O sistema de equações integrais de contorno (EIC), equação (4.10), pode ser reescrita na forma

$$\begin{bmatrix} [\bar{G}_{ss}] & [\bar{G}_{sf}] \\ [\bar{G}_{fs}] & [\bar{G}_{ff}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{t}_s \\ \bar{t}_f \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} [\bar{T}'_{ss}] & [\bar{T}'_{sf}] \\ [\bar{T}'_{fs}] & [\bar{T}'_{ff}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_s \\ \bar{u}_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.13)$$

onde os termos da diagonal da matriz $[T']$ são $(\bar{T}'_{ii} = \bar{T}_{ii} + 0,5\delta_{ij})$.

A equação de compatibilidade de movimento de corpo rígido, equação (4.1), pode ser reescrita na forma

$$[I]\{\bar{u}_f\} - [S]\{\bar{D}\} = \{0\} \quad (4.14)$$

onde $[I]$ é a matriz identidade. Finalmente com a EIC, equação (4.13), mais as equações (4.11), (4.12), (4.14), (4.4) e as condições de contorno na superfície livre do solo, onde as forças de superfície são nulas, $\{\bar{t}_s\}=0$, pode se montar o seguinte sistema de equações do acoplamento entre solo e estrutura rígida

$$\begin{bmatrix} [\bar{G}_{sf}] & -[\bar{T}'_{ss}] & -[\bar{T}'_{sf}] & [0] \\ [\bar{G}_{ff}] & -[\bar{T}'_{fs}] & -[\bar{T}'_{ff}] & [0] \\ [0] & [0] & [I] & -[S] \\ -[Eq] & [0] & [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\bar{t}_f\} \\ \{\bar{u}_s\} \\ \{\bar{u}_f\} \\ \{\bar{D}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \\ \{0\} \\ \{\bar{F}\} \end{Bmatrix} \quad (4.15)$$

Com a solução do sistema equação (4.15) para um dado tipo de excitação (força vertical F_z , força horizontal F_x ou um momento M_y) definidos no vetor de carregamentos externos $\{\bar{F}\}$, teremos como resposta do sistema as forças de superfície nodais na interface $\{\bar{t}_f\}$, os deslocamentos nodais na superfície livre do solo $\{\bar{u}_s\}$, os deslocamentos nodais na interface $\{\bar{u}_f\}$ e os deslocamentos de corpo rígido da estrutura $\{\bar{D}\}$ para uma dada frequência ω .

ARRANJO COM DUAS ESTRUTURAS RÍGIDAS

Para arranjos com duas ou mais estruturas rígidas, algumas alterações são necessárias nas equações de compatibilidade e equilíbrio. Como exemplo discutiremos o caso de duas estruturas rígidas na superfície do solo, sendo N_1 o número de nós na interface da estrutura E1 e N_2 o número de nós na interface da estrutura E2.

O vetor de deslocamentos de corpo rígido $\{\bar{D}\}$ tem dimensão (6×1) e a seguinte forma

$$\{\bar{D}\} = \{W^{E1} \ U^{E1} \ \phi_y^{E1} \ W^{E2} \ U^{E2} \ \phi_y^{E2}\}^T; \quad (4.16)$$

com W^{Ej} , U^{Ej} e ϕ_y^{Ej} sendo os deslocamentos e pequenas rotações linearizadas de corpo rígido, respectivamente, apresentados pelas estruturas E1 e E2.

A matriz de transformação global $[S]$ $(2M \times 6)$ é montada a partir das M submatrizes $[S^m]$ (2×3) , com $M=N_1+N_2$. A matriz $[S]$ para duas estruturas tem a seguinte forma

$$[S] = \begin{bmatrix} [S]^{E1} & [0] \\ [0] & [S]^{E2} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

onde $[S]^{E1}$ e $[S]^{E2}$ são as matrizes relativas a estrutura E1 e E2, respectivamente.

O vetor de carregamentos aplicados externamente para duas estruturas é

$$\{\bar{F}\} = \{F_z^{E1} \ F_x^{E1} \ M_y^{E1} \ F_z^{E2} \ F_x^{E2} \ M_y^{E2}\}^T, \quad (4.18)$$

que consiste das forças F_z^{Ej} , F_x^{Ej} e dos momentos M_y^{Ej} , nas estruturas E1 e E2. Obedecendo a seguinte relação de equilíbrio:

$$\{\bar{F}\} = [Eq]\{\bar{t}_r\}, \quad (4.19)$$

onde

$$\{\bar{L}_f\} = \{\bar{t}_f^{E1} \quad \bar{t}_f^{E2}\}^T, \quad (4.20)$$

é o vetor de forças de superfície nodais nas interfaces de contato solo-estrutura.

A montagem da matriz [Eq] a partir da matriz [S], para esse caso é idêntica ao caso de uma estrutura. O sistema da equação (4.15) permanece o mesmo, apenas com um aumento do número de incógnitas.

A formulação apresentada nesta seção toma como exemplo o caso de duas estruturas, mas pode ser generalizada para o caso de "n" estruturas interagindo com o solo.

4.3. Obtenção da Matriz de Flexibilidade Dinâmica para o Sistema Solo-Estrutura

Na dinâmica de máquinas é interessante a obtenção da matriz de flexibilidade \bar{C} para determinar o comportamento do sistema solo-estrutura. Esta matriz \bar{C} associa deslocamentos $\{\bar{D}\}$ da estrutura sem massa aos esforços externos $\{\bar{F}\}$ a ela aplicados,

$$\{\bar{D}\} = [\bar{C}]\{\bar{F}\} \quad (4.21)$$

A equação (4.21) pode ser escrita explicitando todos os termos na forma adimensionalizada, a seguir [03,05]

$$\frac{1}{\pi\mu} \begin{bmatrix} \bar{C}_{wz} & \bar{C}_{wx} & \bar{C}_{wMy} \\ \bar{C}_{uz} & \bar{C}_{ux} & \bar{C}_{uMy} \\ \bar{C}_{\phi yz} & \bar{C}_{\phi yx} & \bar{C}_{\phi yMy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_z \\ F_x \\ M_y / A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} W \\ U \\ \phi_y A \end{Bmatrix} \quad (4.22)$$

onde A é o semi-lado da estrutura, que é definido na figura (4.2) abaixo. Neste ponto é bom salientar que o tratamento adotado para as estruturas rígidas de superfície assume um espessura h desprezível, isto é, o ponto de aplicação do carregamento externo está na superfície, como pode ser verificado na figura (4.2).

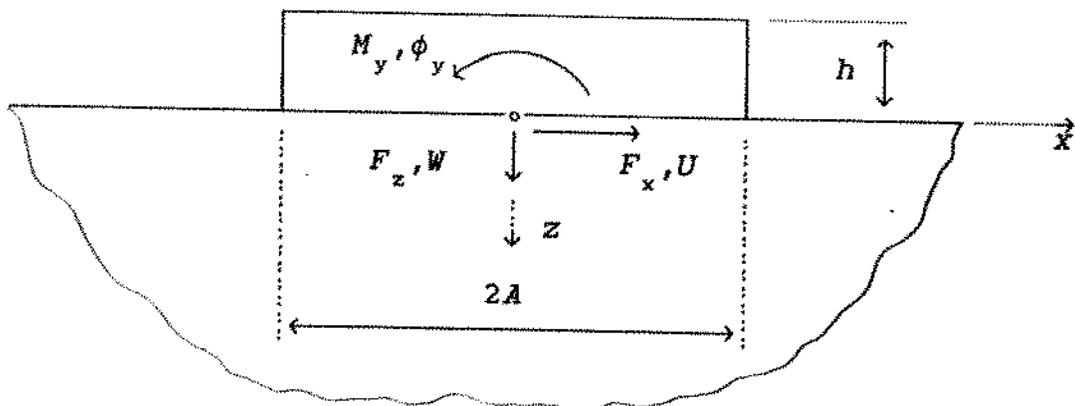


Figura 4.2. Arranjo solo-estrutura rígida com os deslocamentos de corpo rígido, os carregamentos e o sistema de coordenadas.

Se resolvermos o sistema (4.15) repetidas vezes para vetores de carregamento $\{\bar{F}\}$, assumindo valores unitários para os esforços externos $\{F_1\}=(1,0,0)^T$; $\{F_2\}=(0,1,0)^T$ e $\{F_3\}=(0,0,1)^T$, poderemos associar os respectivos vetores de deslocamentos de corpo rígido $\{\bar{D}_1\}$; $\{\bar{D}_2\}$ e $\{\bar{D}_3\}$ às colunas de uma matriz de flexibilidade dinâmica $\underline{\bar{C}}$, tal como

$$[\underline{\bar{C}}] = [\{\bar{D}_1\} , \{\bar{D}_2\} , \{\bar{D}_3\}] . \quad (4.23)$$

A matriz de flexibilidade dinâmica $\underline{\bar{C}}$, equação (4.23), apresenta uma dependência funcional das seguintes grandezas, a saber

$$\underline{\bar{C}} = \underline{\bar{C}}(\omega, \rho, \lambda, \mu, \nu, \beta, E/A) \quad (4.24)$$

onde E/A é o fator de engastamento para o caso de estruturas engastadas, como é mostrado na figura (4.3).

MATRIZ DE RIGIDEZ

A forma de montar o sistema global de equações, equação (4.15), é uma maneira alternativa em relação a proposta pela maioria dos pesquisadores [02, 07-09, 29]. Nesses

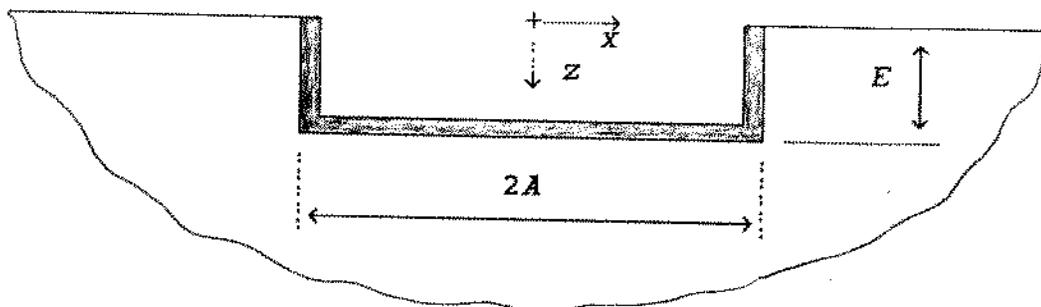


Figura 4.3. Esquema de uma estrutura engastada no solo.
Ponto de referência da estrutura (+).

trabalhos após eliminar alguns termos da equação (4.15) por substituições chega-se a um sistema reduzido, tal como

$$\{\bar{F}\} = [\bar{K}(\omega)]\{\bar{D}\} \quad , \quad (4.25)$$

onde $[\bar{K}(\omega)]$ (3x3) é a matriz de rigidez dinâmica (impedância) de estruturas rígidas na superfície do solo, ou seja, a equação (4.25) é uma relação força-deslocamento.

Para chegar a equação (4.25) são necessárias muitas operações de multiplicação e inversão de matrizes. Tal forma da equação (4.25) apresenta a desvantagem de introduzir mais erros numéricos e de não deixar explícitas muitas variáveis importantes para análise, tal como as forças de superfície na interface $\{\bar{t}_f\}$ e o campo de deslocamentos na superfície livre do solo $\{\bar{u}_s\}$.

4.4. Solução do Problema de Interação de Estruturas Rígidas com o Solo utilizando funções de Green

A interação de estruturas rígidas com o solo é feita utilizando-se a relação (3.45) em conjunto com as equações de compatibilidade cinemática equação (4.1) e de equilíbrio de forças equação (4.4). Pode-se então sintetizar um sistema de equações algébricas que relacionam as forças externas $\{\bar{F}\}$ e deslocamentos de corpo rígido da fundação $\{\bar{D}\}$, às forças de superfície na interface solo-fundação,

$$\begin{bmatrix} \underline{\bar{G}}_{11} & \underline{\bar{S}} \\ \underline{\bar{E}q} & \underline{\bar{M}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\bar{U}}' \\ \underline{\bar{D}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{0} \\ \underline{\bar{F}} \end{Bmatrix}. \quad (4.26)$$

Tal sistema é análogo ao da equação (4.15). Em vez dos elementos contendo os núcleos da solução fundamental (tensores de Stokes) temos os núcleos da função de Green (tensores de Green), apresentados no capítulo 3.

5. VALIDAÇÃO E ESTUDOS COMPARATIVOS

5.1. Normalização adotada na Apresentação dos Resultados

Com a finalidade de possibilitar comparações (quando não existir outra indicação), as propriedades assumidas para o solo são: módulo de cisalhamento μ (μ) = $G = 1 \text{ N/m}^2$ e densidade de massa $\rho = 1 \text{ Kg/m}^3$. O coeficiente de Poisson ν (ν) e o coeficiente de amortecimento β (β) serão indicados na apresentação dos resultados de cada caso.

A flexibilidade dinâmica para excitação vertical F_z , resume-se apenas a um termo, pois os demais termos da primeira coluna da matriz \bar{C} relacionados ao acoplamento de movimentos, equação (4.22), são nulos ($\bar{C}_{uz} = \bar{C}_{\phi_{yz}} = 0$). Tal termo é definido como

$$\bar{C}_{wz}(A_0) = \frac{\pi\mu W}{2A\bar{\sigma}_{zz}} ; \quad (5.1)$$

onde $\bar{\sigma}_{zz} = (F_z/2A)$ é a tensão normal média na interface solo-estrutura, W é o deslocamento de corpo rígido da estrutura na direção vertical e

$$A_0 = \frac{\omega A}{c_s} \quad (5.2)$$

é a frequência de excitação adimensional A_0 , sendo ω a frequência de excitação externa e $c_s = (\mu/\rho)^{1/2}$ é a velocidade da onda de cisalhamento do meio contínuo elástico.

Entre os casos de excitação horizontal F_x e de excitação por um momento M_y , surgem termos de acoplamento de movimentos, ou seja, para um dado deslocamento horizontal U gerado por uma excitação horizontal F_x , ocorre um deslocamento de rotação ϕ_y associado e para um deslocamento de rotação ϕ_y gerado por uma excitação de momento M_y , ocorre um deslocamento horizontal U associado. Esse acoplamento é descrito pelo teorema da reciprocidade [42] e leva às seguintes relações

força-deslocamento [03], tendo em vista que os outros termos de acoplamento de movimentos da matriz de flexibilidade dinâmica \bar{C} , equação (4.22), são nulos ($\bar{C}_{wx} = \bar{C}_{wMy} = 0$), temos:

$$\frac{1}{\pi\mu} \begin{bmatrix} \bar{C}_{ux}(A_0) & \bar{C}_{uMy}(A_0) \\ \bar{C}_{\phi_{yx}}(A_0) & \bar{C}_{\phi_{yMy}}(A_0) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_x \\ M_y/A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U \\ \phi_y A \end{Bmatrix}, \quad (5.3)$$

onde a flexibilidade horizontal \bar{C}_{ux} é definida por

$$\bar{C}_{ux}(A_0) = \frac{\pi\mu U}{2A\bar{\sigma}_{zx}}, \quad (5.4)$$

sendo $\bar{\sigma}_{zx} = (F_x/2A)$ a tensão de cisalhamento média na interface solo estrutura e U é o deslocamento de corpo rígido da estrutura na direção horizontal. A flexibilidade ligando momento ao deslocamento angular em torno do eixo y (rocking) é definida por:

$$\bar{C}_{\phi_{yMy}}(A_0) = \frac{\pi\mu A\phi_y}{(M_y/A)}, \quad (5.5)$$

onde ϕ_y é a rotação de corpo rígido da estrutura em torno do eixo y .

Os termos $\bar{C}_{uMy}(A_0)$ e $\bar{C}_{\phi_{yx}}(A_0)$, são os termos de acoplamento (coupling) entre o deslocamento horizontal e a rotação da estrutura em torno do eixo y . Esses termos são adimensionalizados da mesma maneira que \bar{C}_{ux} e $\bar{C}_{\phi_{yMy}}$, respectivamente. Agora associando as equações (5.1) e (5.3), podemos reescrever a equação (4.22) na seguinte forma

$$\frac{1}{\pi\mu} \begin{bmatrix} \bar{C}_{wz} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{C}_{ux} & \bar{C}_{uMy} \\ 0 & \bar{C}_{\phi_{yx}} & \bar{C}_{\phi_{yMy}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_z \\ F_x \\ M_y/A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} W \\ U \\ \phi_y A \end{Bmatrix}, \quad (5.6)$$

a qual apresenta a matriz de flexibilidade dinâmica \bar{C} obtida

nos resultados apresentados na próxima seção.

A figura (5.1) mostra a definição do Comprimento de Contorno Discretizado (CCD), os pontos nodais (o) dos elementos constantes e suas extremidades (+) na superfície do solo. A cota $2A$ é a largura da fundação.

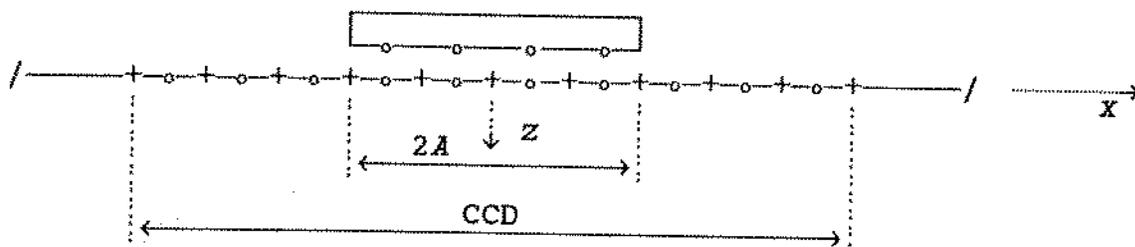


Figura 5.1. Esquema de fundação de superfície mostrando a região discretizada e os elementos constantes.

Na próxima seção serão apresentados resultados obtidos pelo MEC com elementos constantes, para efeito de validar a implementação e mostrar comparações e aplicações do método implementado.

5.2. Validação da Implementação do MEC

PRIMEIRA VALIDAÇÃO

Para validação do MEC implementado com base na solução fundamental do espaço completo (MEC-SF) é aqui apresentada uma comparação com resultados analíticos obtidos por Luco e Westmann [03]. Também será apresentada uma comparação com o trabalho semi-analítico de Mesquita usando o Método da Superposição (MSP) [05].

As figuras (5.2) mostram os termos da matriz de flexibilidade dinâmica \bar{C} para uma estrutura rígida sem massa, em função do parâmetro de frequência adimensional A_0 .

O Comprimento de Contorno Discretizado (CCD), o Número de Elementos constantes na Fundação (NEF) e o Número Total de Elementos (NTE) são definidos nas figuras (5.2). Nessa comparação a discretização do MEC-SF se limita a interface solo-estrutura.

A parte real de \bar{C}_{wz} , figura (5.2a), apresenta uma

diferença significativa em relação as soluções obtidas pelos trabalhos de Luco e Westmann [03] e de Mesquita [05]. Esta diferença é provavelmente função da discretização adotada e da dificuldade do MEC-SF para modelar o contínuo incompressível, isto é, um solo com coeficiente de Poisson $\nu = 0,5$. Os trabalhos [03] e [05] permitem a suposição de um meio incompressível, mas o MEC-SF não se aplica a este caso, pois a onda de dilatação c_p tenderia ao infinito. Para contornar essa dificuldade foi adotado para a solução do MEC-SF uma aproximação, isto é, um coeficiente de Poisson $\nu=0,4999$.

Os outros termos da matriz de flexibilidade apresentam diferenças em relação aos trabalhos [03] e [05]. As maiores diferenças estão nos termos de rotação, figura (5.2c) e de acoplamento, figuras (5.2d) e (5.2e). No geral a tendência das curvas é a mesma, mas os termos de acoplamento que são iguais nos trabalhos [03] e [05], neste trabalho com MEC-SF não coincidem. Tal fato é também observado por Mohammadi & Karabalis [31] para o caso tridimensional.

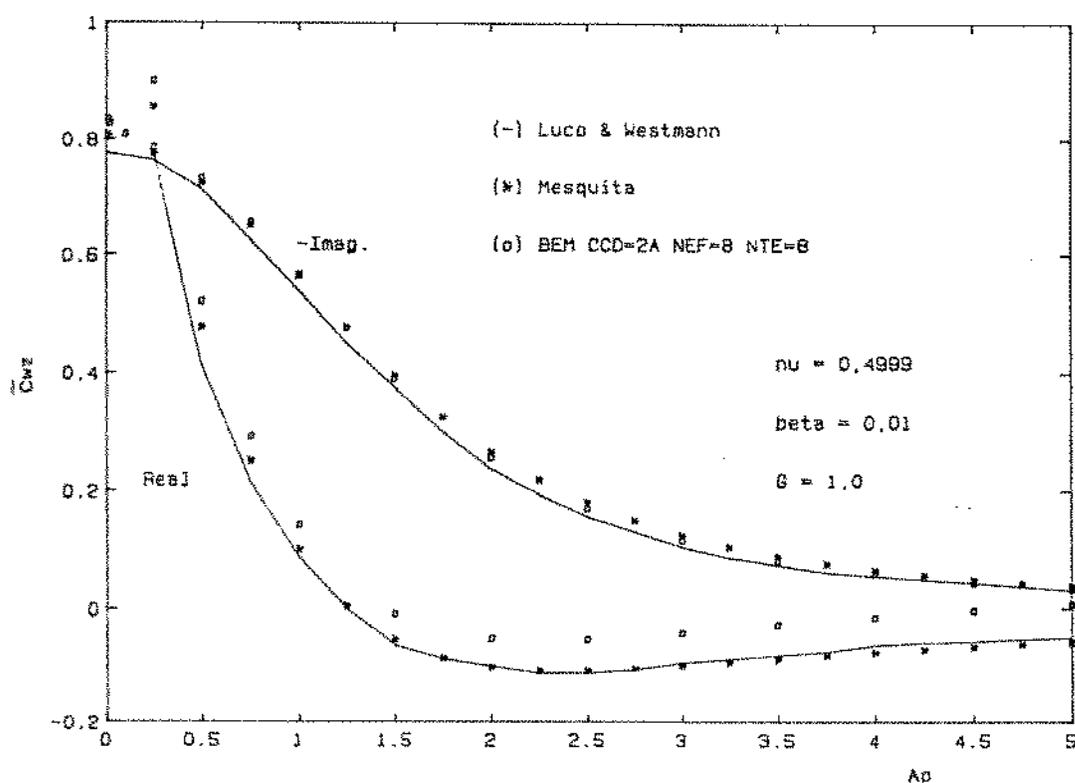


Figura 5.2a. Flexibilidade Dinâmica Vertical Complexa $\bar{C}_{wz}(A_0)$ de uma fundação de superfície rígida e sem massa.

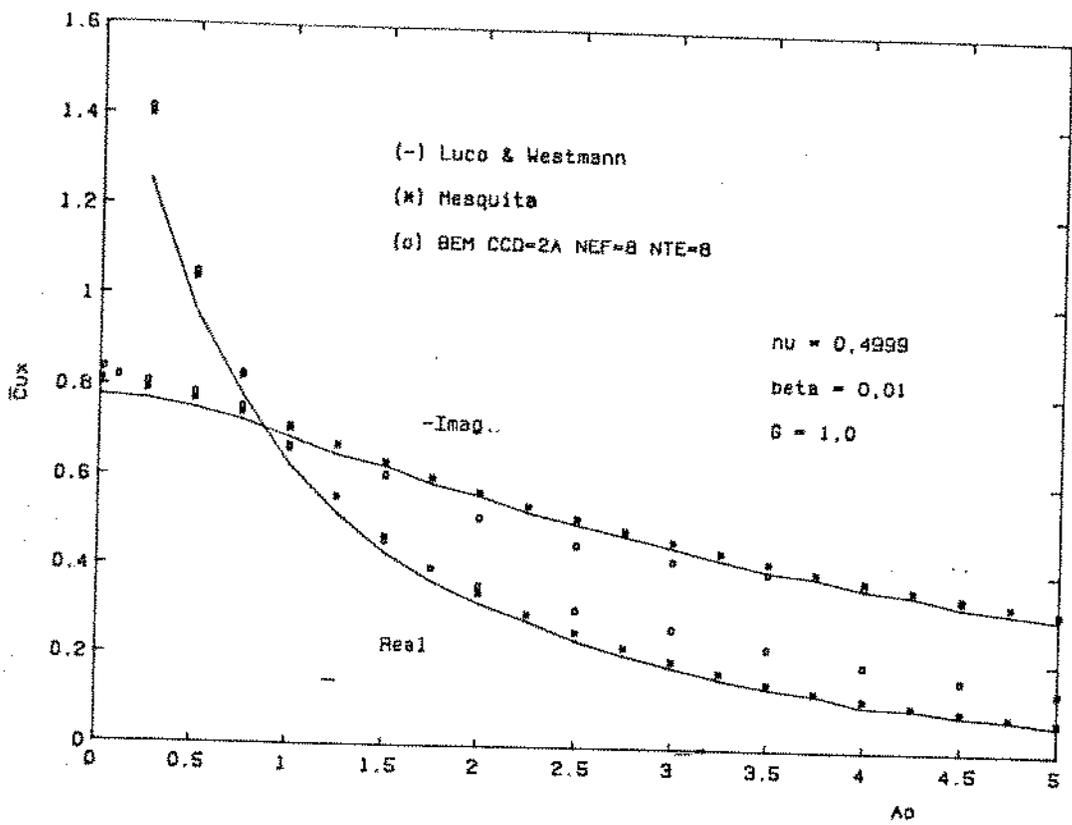


Figura 5.2b. Flexibilidade Dinâmica Horizontal $\bar{C}_{ux}(A_0)$.

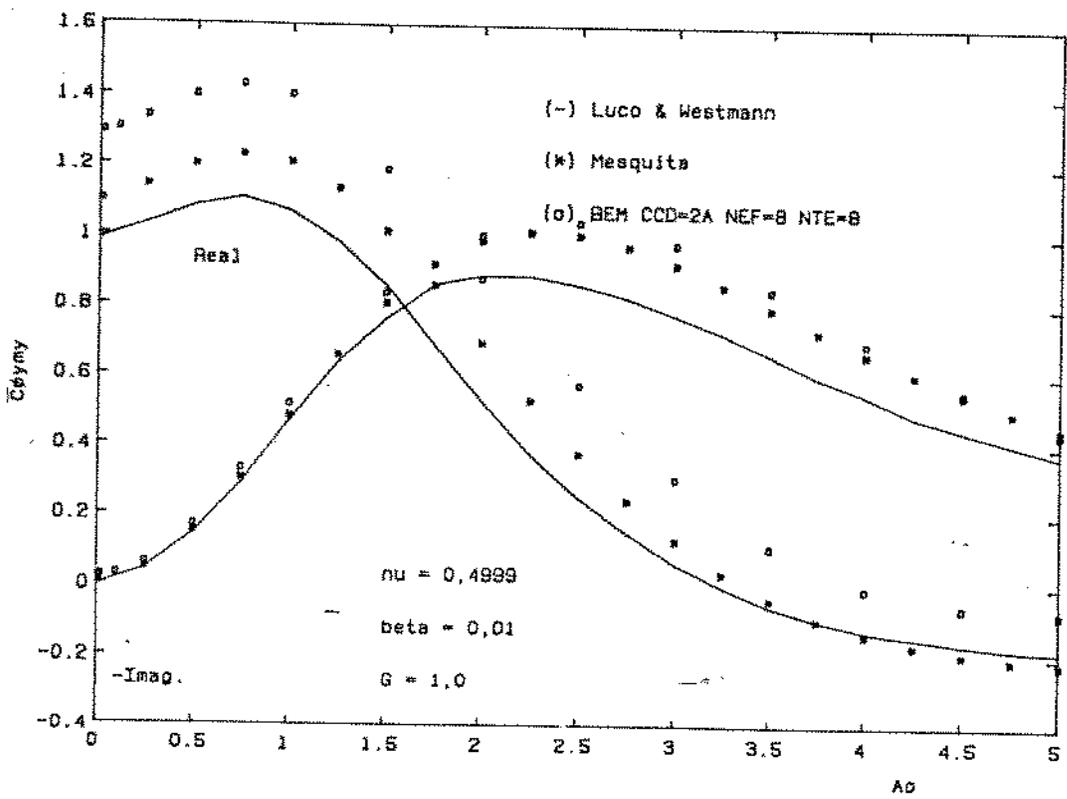


Figura 5.2c. Flexibilidade Dinâmica de Rotação $\bar{C}_{\phi_yMy}(A_0)$.

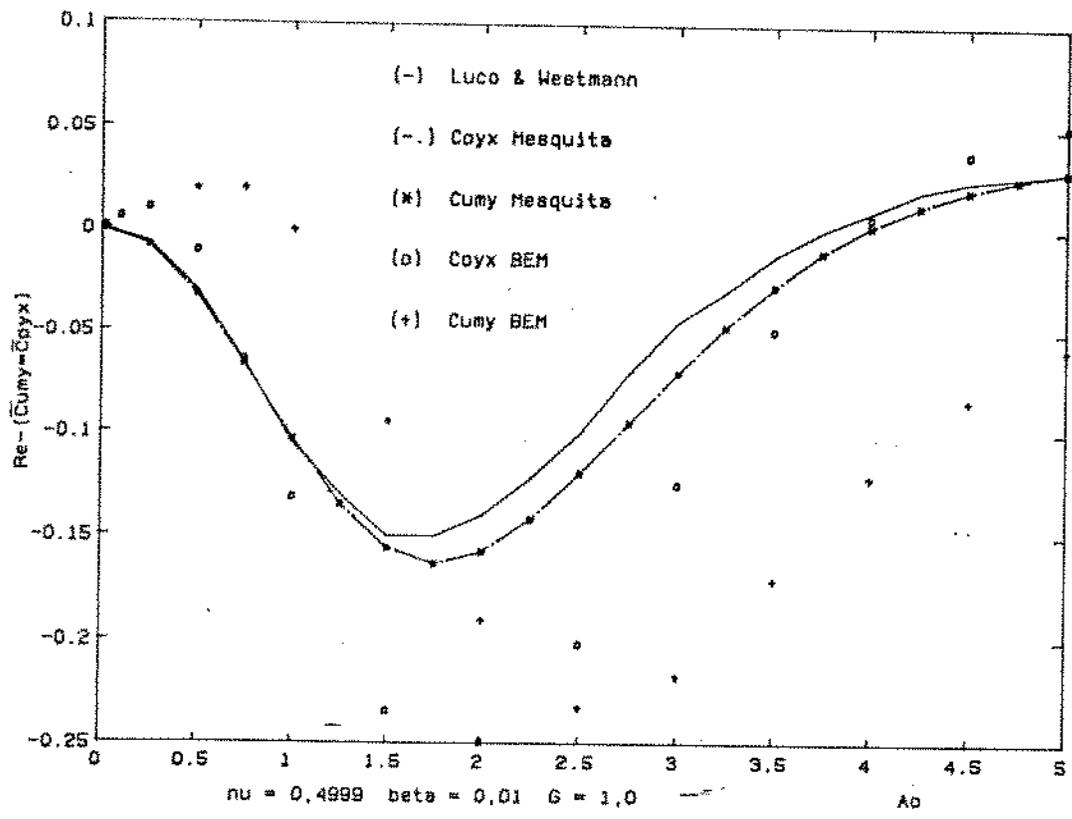


Figura 5.2d. Parte Real dos Termos de Acoplamento.

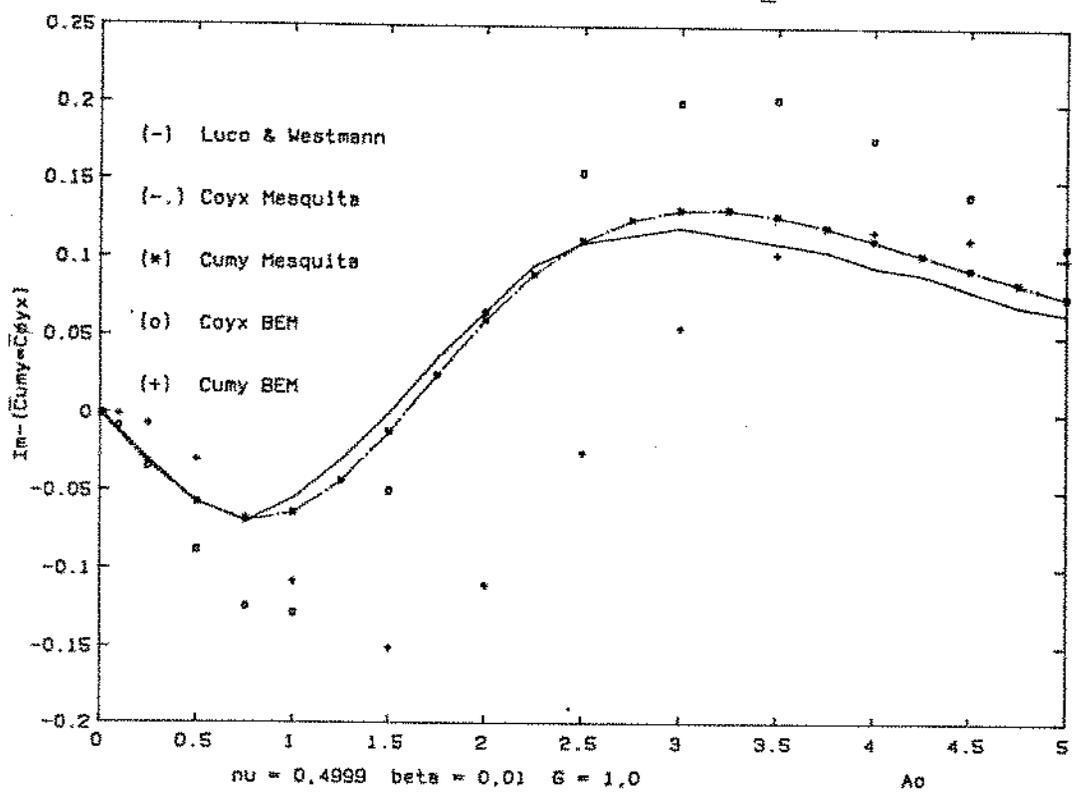


Figura 5.2e. Parte Imag. dos Termos de Acoplamento.

SEGUNDA VALIDAÇÃO

Uma das principais diferenças entre o MSP e o MEC-SF é o tamanho da superfície de contorno discretizada necessária para a obtenção da solução. O MSP satisfaz a condição de contorno de forças de superfície nulas na superfície livre do solo (semi-espaço). O MEC-SF necessita, *a priori*, de uma discretização em todo o contorno, o que na prática não é feito para domínios ilimitados. Normalmente é criada uma superfície livre de forças de superfície para o problema de interação solo-estrutura e trunca-se a mesma a uma certa distância da fundação.

Para investigar a influência da superfície discretizada no MEC-SF é apresentado nas figuras (5.4) os termos da matriz de flexibilidade para vários valores de CCD e NTE, com oito elementos na interface solo-estrutura, isto é, $NEF = 8$. Os resultados também são comparados com o MSP. Os resultados demonstraram pouca influência em relação ao comprimento discretizado CCD.

Pode-se observar na figura (5.4a) que a flexibilidade \bar{C}_{wz} obtida através do MEC está apresentando uma melhor concordância com o MSP, para a mesma discretização da comparação anterior (CCD=2A, NEF=8, NTE=8). Notando-se que o valor do coeficiente de Poisson agora é $\nu=0,25$, pode-se concluir que o coeficiente de Poisson influe sobre a solução do MEC-SF, quando o solo aproxima-se do meio incompressível.

Em relação as três discretizações, os termos de acoplamento para o caso com apenas discretização na interface, isto é, com CCD = 2A, apresentam um afastamento total, tanto das outras soluções do MEC-SF, como também do MSP [05]. Aqui também pode-se verificar a dificuldade do MEC-SF representar os termos de acoplamento, pois como na validação anterior os mesmos não coincidem entre si.

As discretizações adotadas nas soluções do MEC-SF para os resultados das figuras (5.4) são mostradas esquematicamente na figura (5.3).

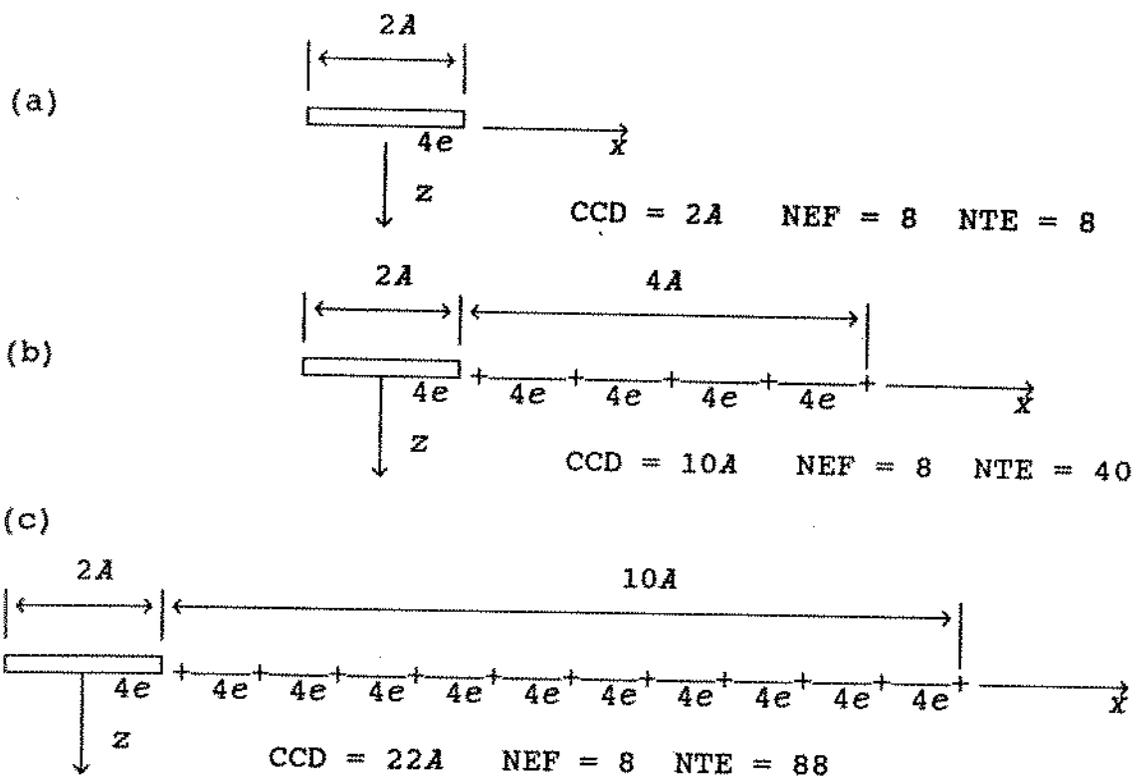


Figura. 5.3. Discretizações com 8 elementos na interface. Somente um lado da superfície livre é mostrado. (e = número de elementos por unidade de comprimento)

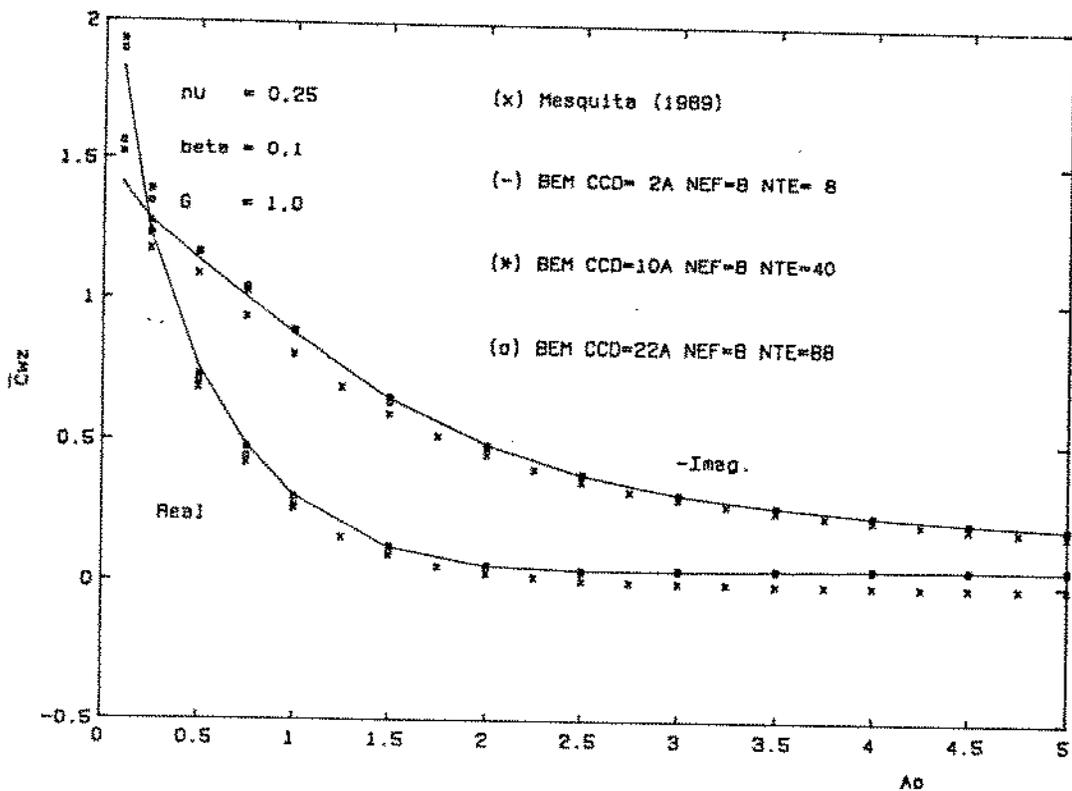


Figura 5.4a. Flexibilidade Dinâmica Vertical Complexa $\bar{C}_{wz}(A_0)$ de uma fundação de superfície rígida e sem massa.

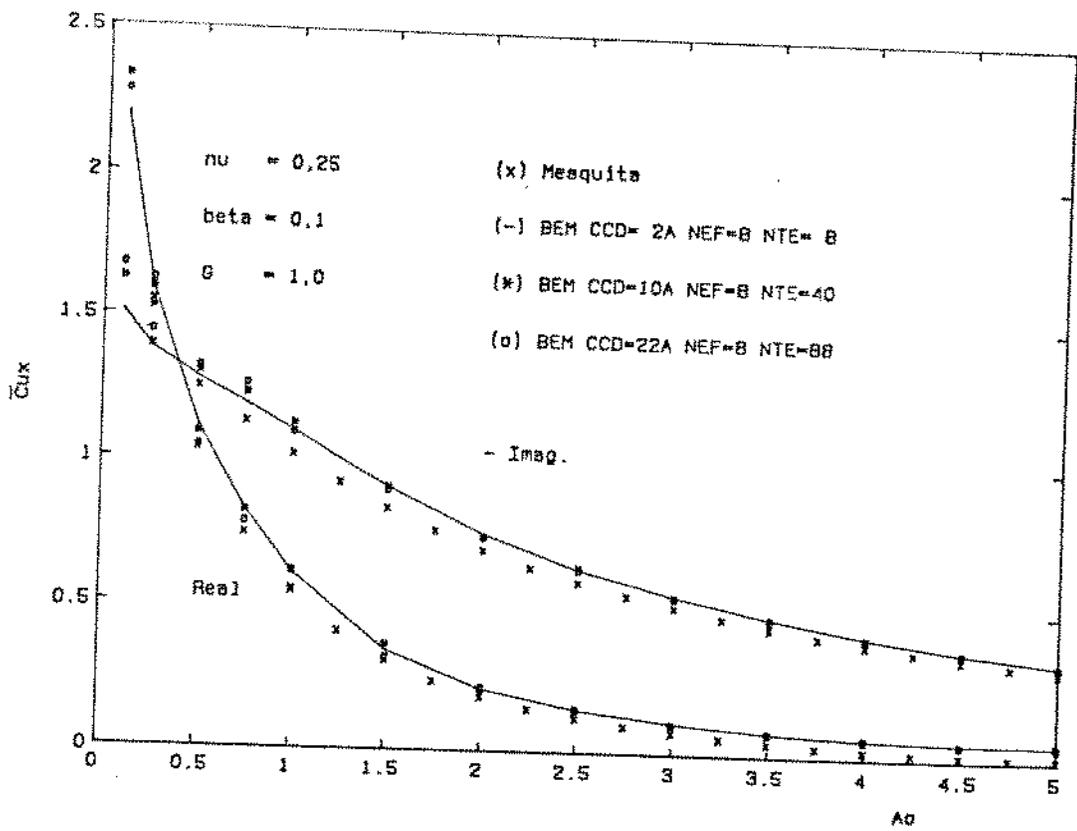


Figura 5.4b. Flexibilidade Dinâmica Horizontal $\bar{C}_{ux}(A_0)$.

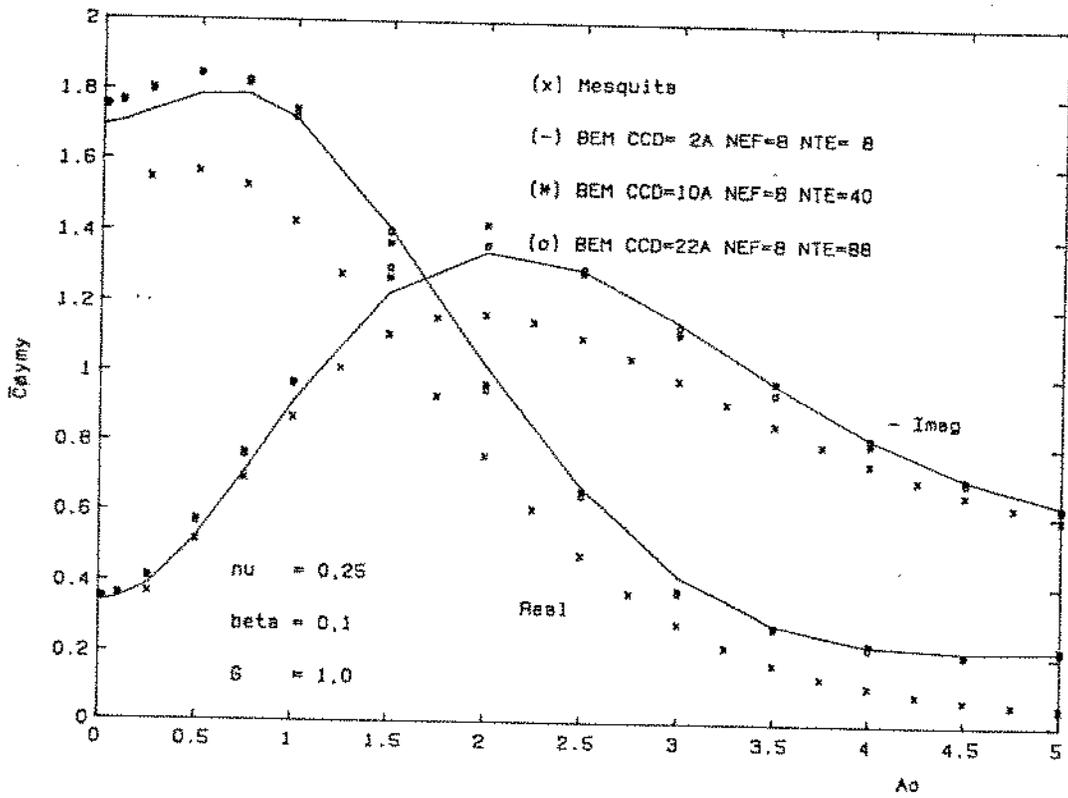


Figura 5.4c. Flexibilidade Dinâmica de Rotação $\bar{C}_{\phi_y My}(A_0)$.

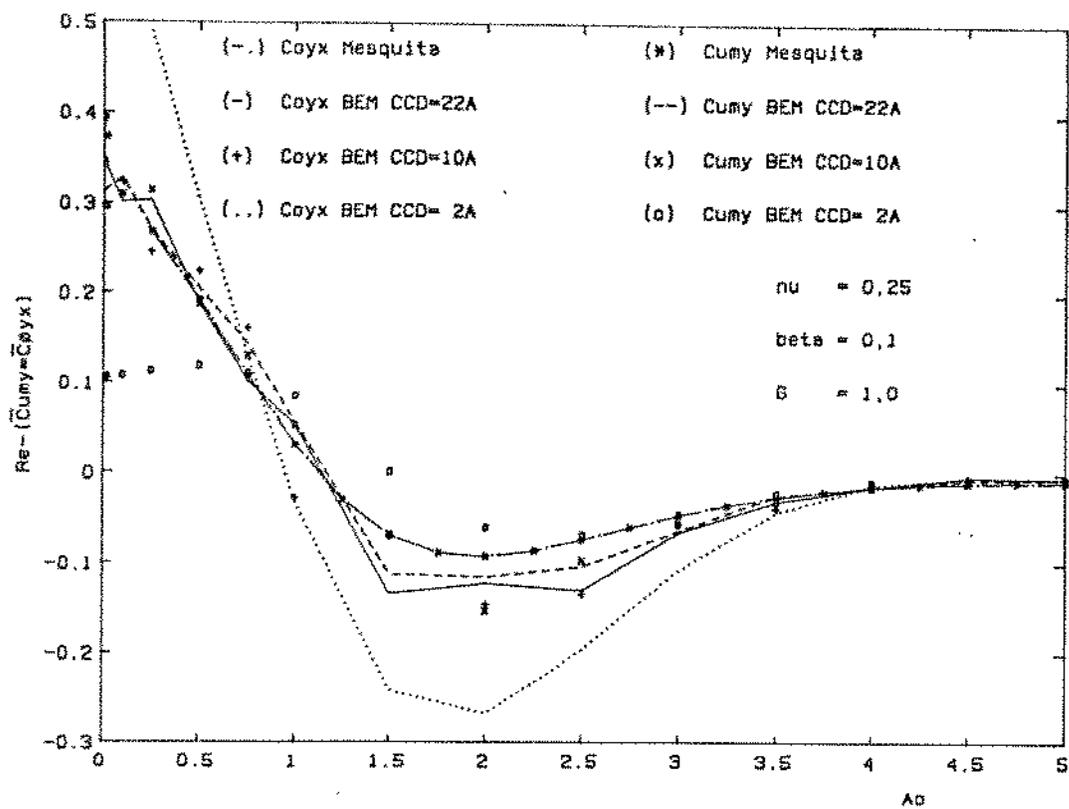


Figura 5.4d. Parte Real dos Termos de Acoplamento.

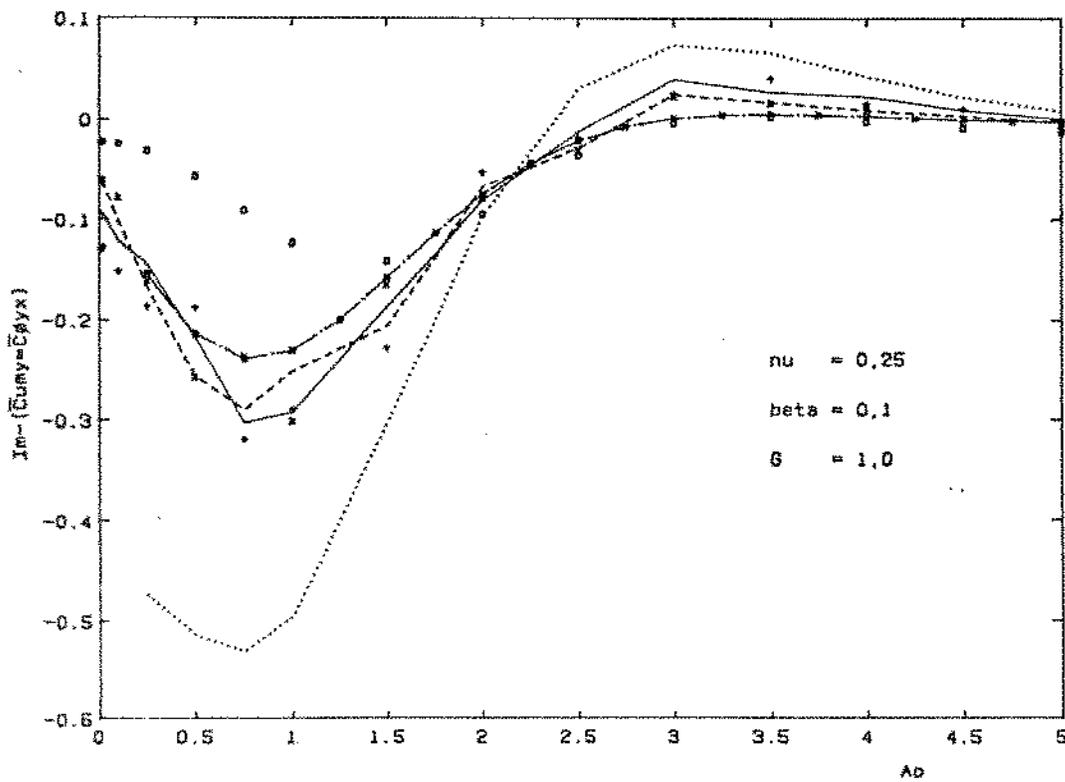


Figura 5.4e. Parte Imag. dos Termos de Acoplamento.

TERCEIRA VALIDAÇÃO

Para validação do MEC-SF implementado os resultados do campo de deslocamento de uma fundação de superfície com excitação vertical são comparados com os resultados obtidos pelo MSP [05]. A discretização adotada tem os seguintes valores: $CCD = 42A$, $NEF = 10$ e $NTE = 132$. Nas figuras (5.5) as linhas representam a solução do MSP [05] e os pontos o MEC-SF.

Pela observação das figuras (5.5a) e (5.5b) pode ser verificada uma boa associação dos resultados, sendo destacada apenas uma diferença na amplitude de deslocamento da parte real da componente vertical \bar{C}_{wz} na região correspondente a fundação.

QUARTA VALIDAÇÃO

Uma comparação entre os campos de deslocamentos na superfície para o caso de duas fundações de superfície, sendo uma excitada, é mostrada nas figuras (5.6), (5.7) e (5.8), para os casos de excitação vertical, horizontal e por momento, respectivamente. A discretização adotada tem os seguintes valores: $CCD = 21A$, $NEF = 10$ para cada fundação, $NTE = 105$ e a distância de centro a centro entre as fundações é $A_{12} = 5/A$. As linhas representam o MSP e os pontos o MEC-SF.

A perfeita representação do campo de deslocamento é importante na análise da interação solo-estrutura nos casos de determinação da interferência entre fundações de máquinas. Para isto é importante esta validação do MEC-SF pela comparação com o MSP [05]. Observando-se todas as componentes do campo apresentadas nas figuras (5.6), (5.7) e (5.8), pode-se verificar a boa concordância dos resultados do MEC-SF.

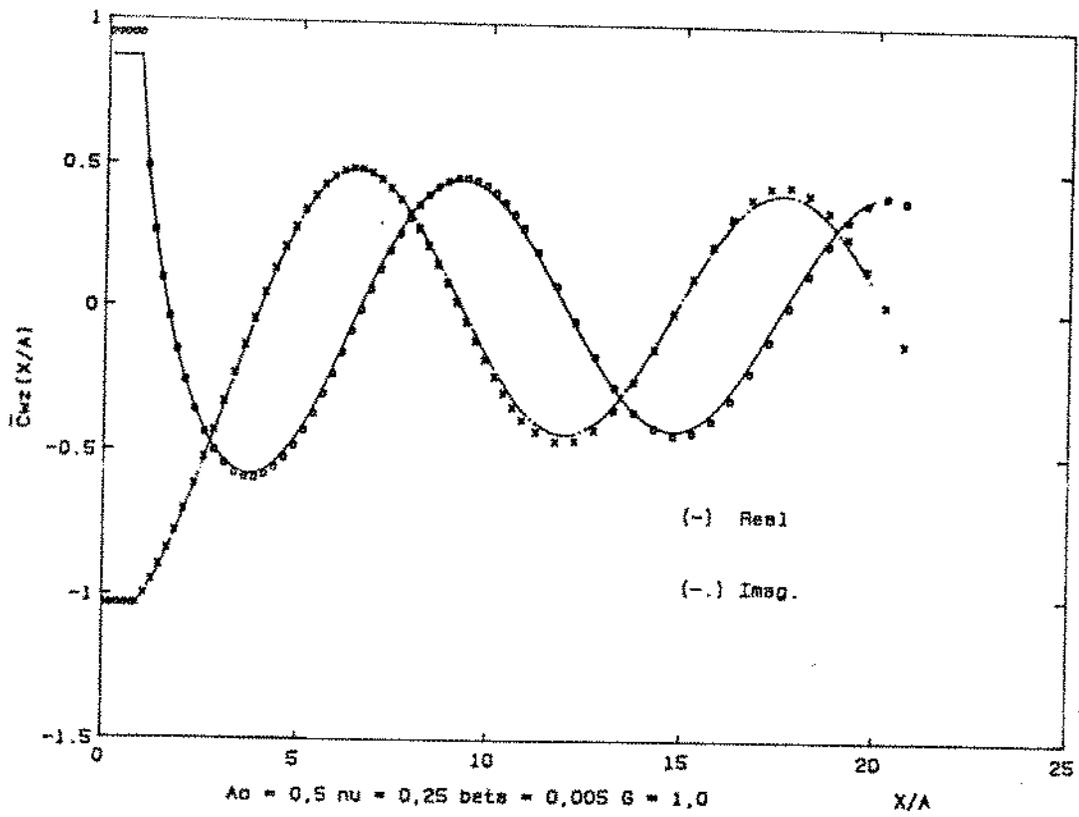


Figura 5.5a. Campo de Deslocamentos $\bar{C}_{wz}(X/A)$, para uma fundação de superfície rígida e sem massa.

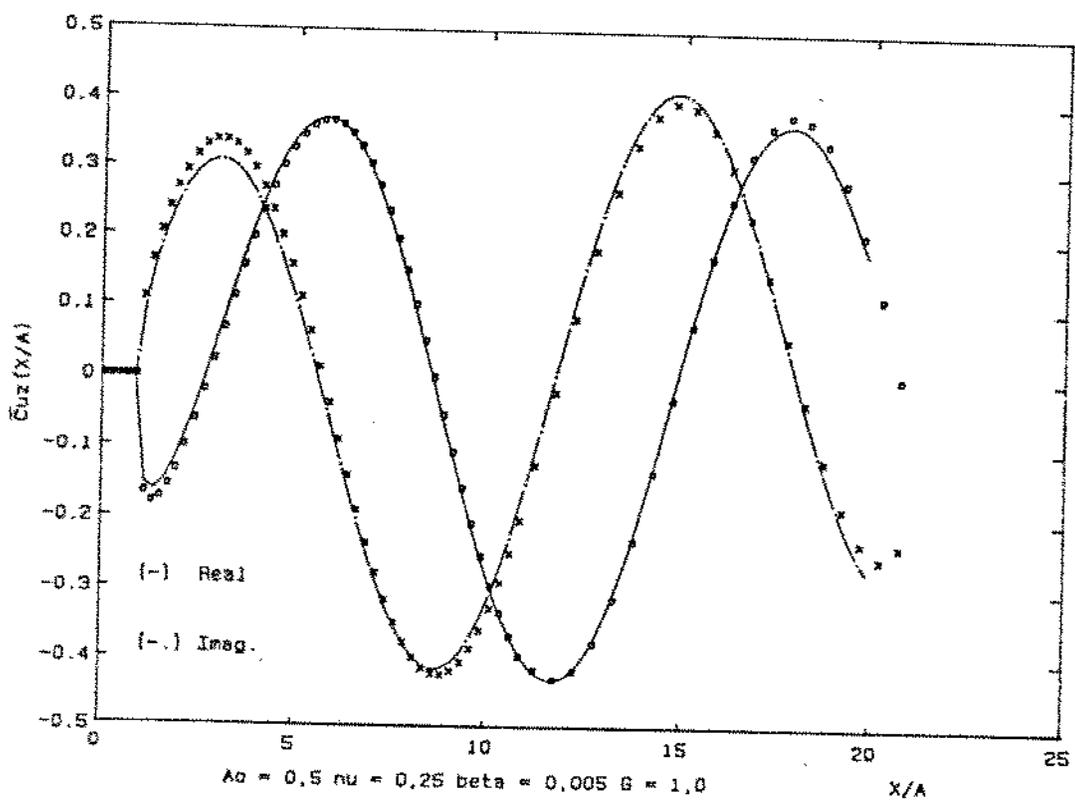


Figura 5.5b. Campo de Deslocamentos $\bar{C}_{uz}(X/A)$.

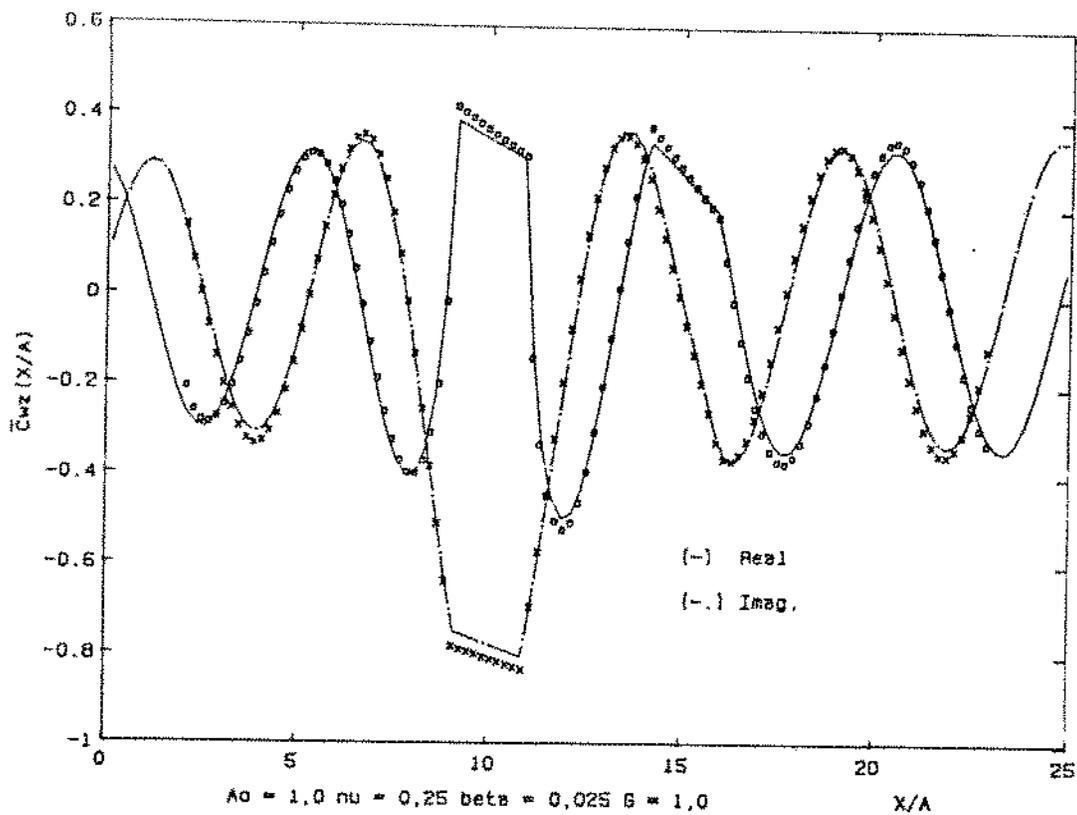


Figura 5.6a. Campo de Deslocamentos $\bar{C}_{wz}(X/A)$, para duas fundações de superfície rígidas e sem massa.

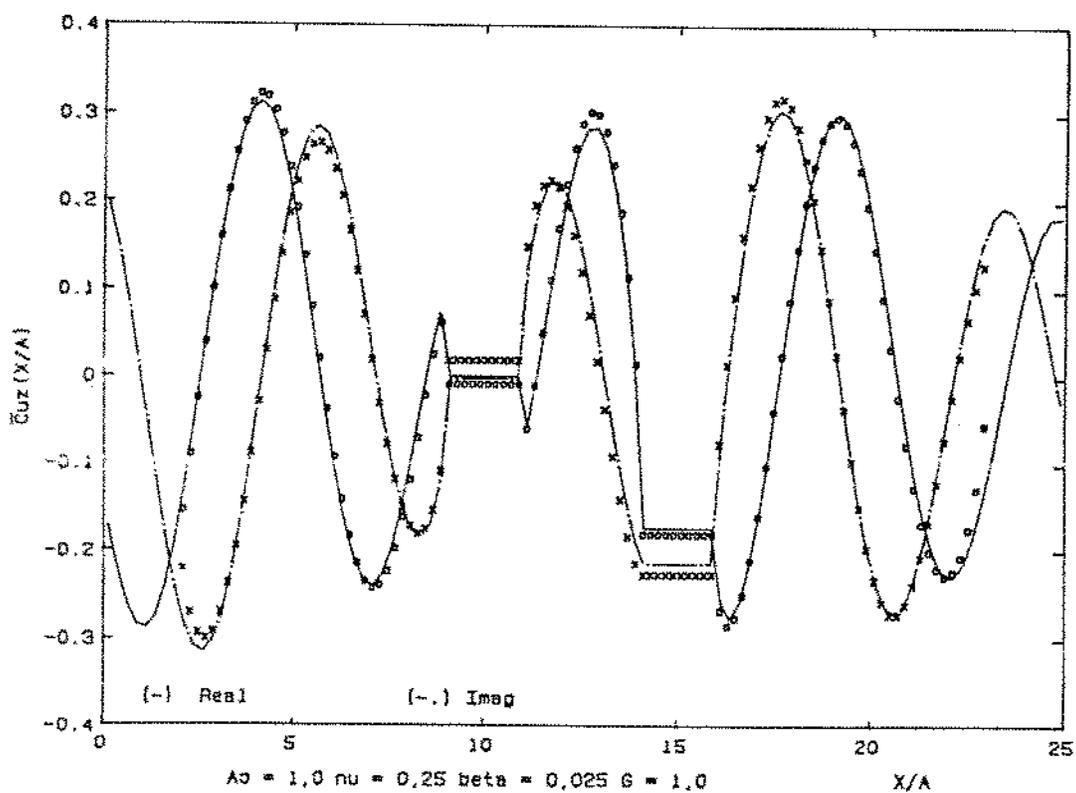


Figura 5.6b. Campo de Deslocamentos $\bar{C}_{uz}(X/A)$.

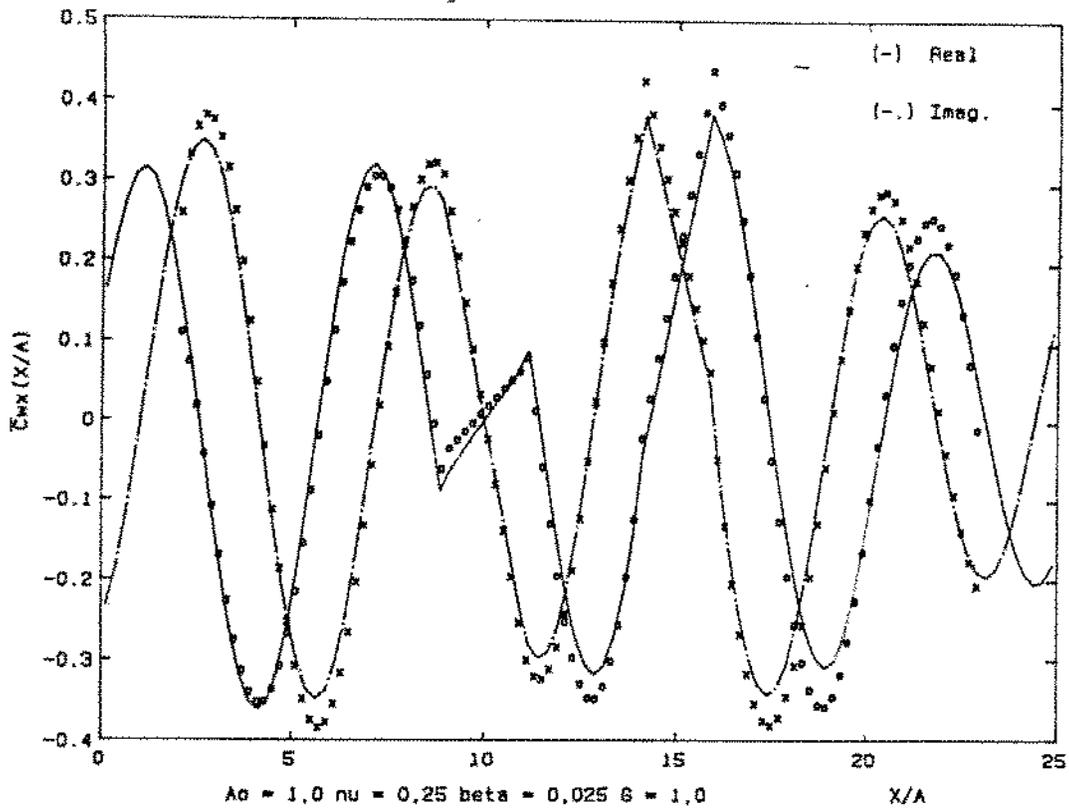


Figura 5.7a. Campo de Deslocamentos $\bar{C}_{wx}(X/A)$, para duas fundações de superfície rígidas e sem massa.

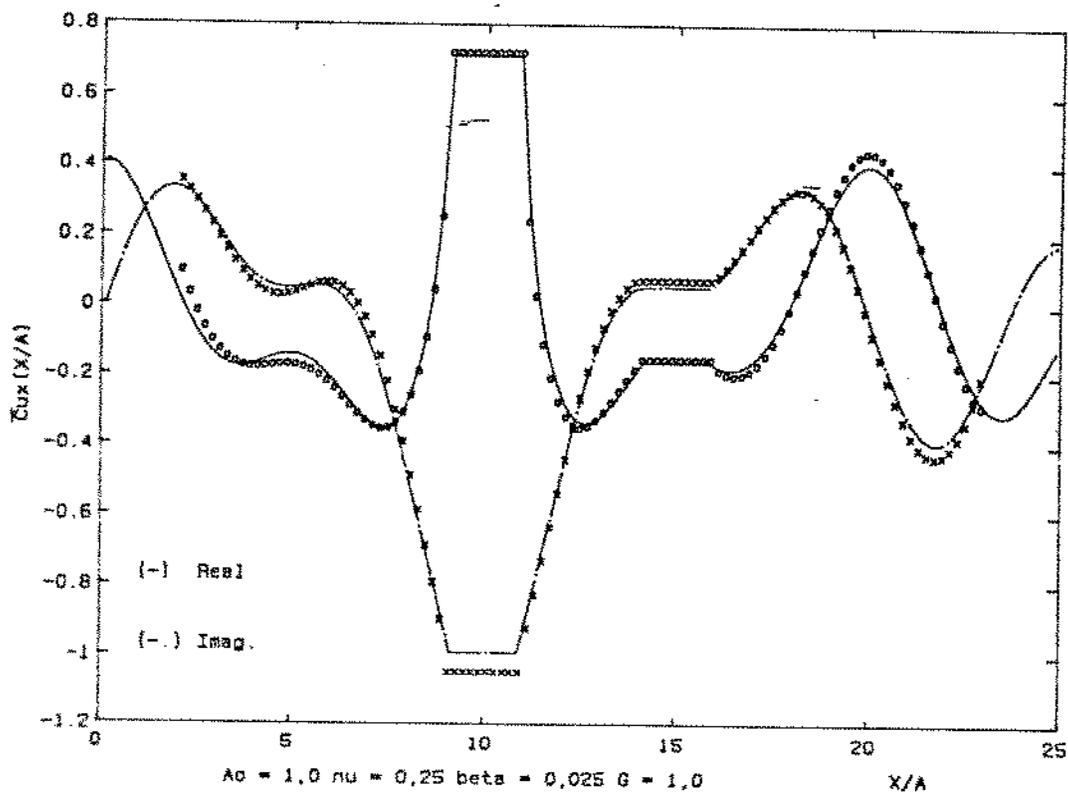


Figura 5.7b. Campo de Deslocamentos $\bar{C}_{ux}(X/A)$.

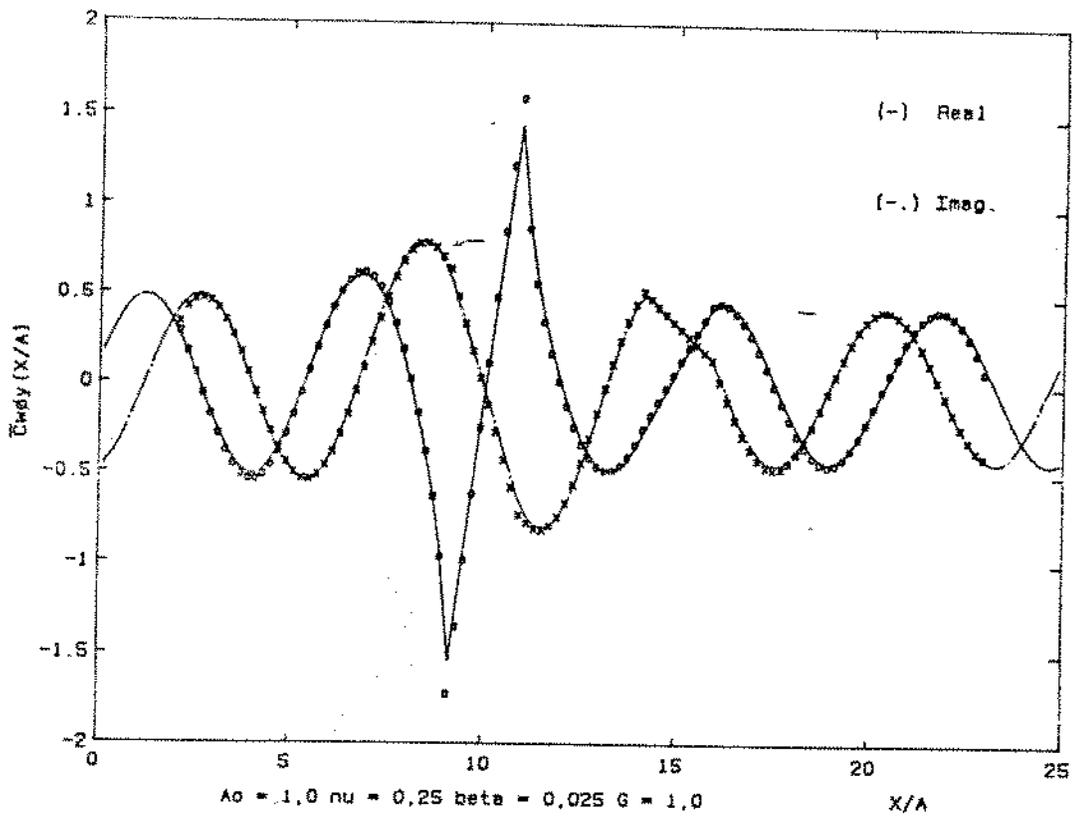


Figura 5.8a. Campo de Deslocamentos $\bar{C}_{w\phi_y}(X/A)$, para duas fundações de superfície rígidas e sem massa.

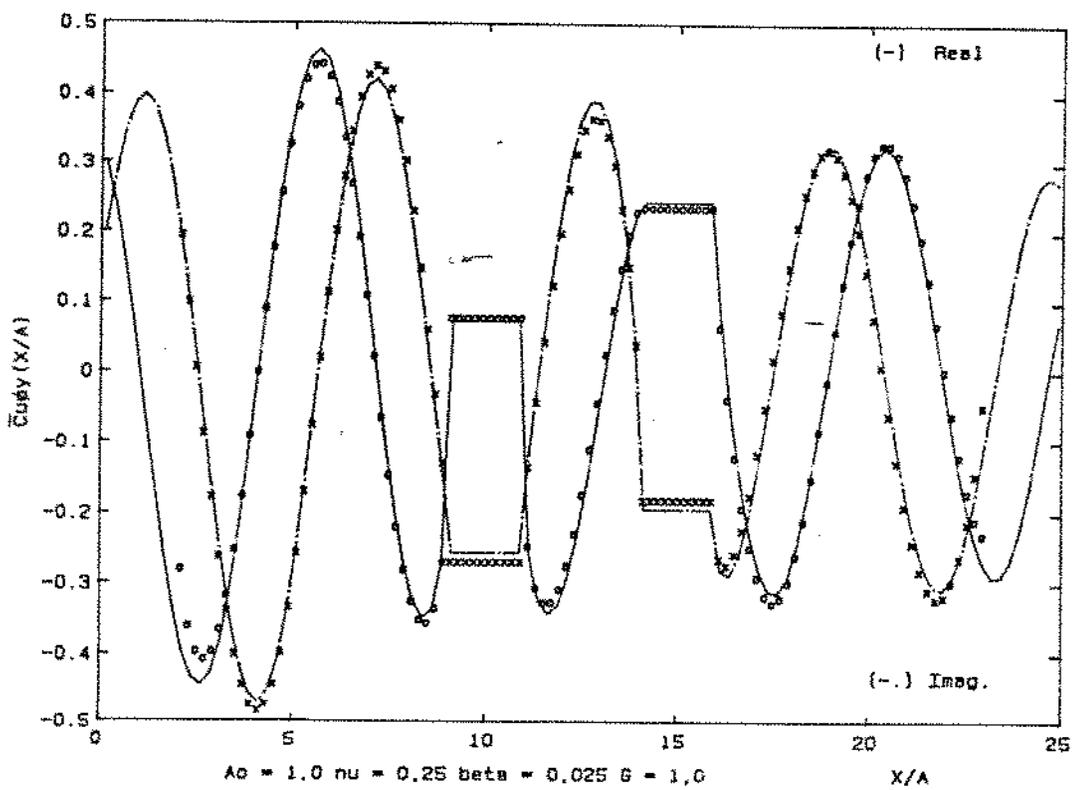


Figura 5.8b. Campo de Deslocamentos $\bar{C}_{u\phi_y}(X/A)$.

QUINTA VALIDAÇÃO

Uma comparação entre as flexibilidades verticais de uma fundação engastada, com fator de engastamento $E/A = 2$ (E =profundidade de engastamento) obtida por Israíl & Ahmad [07] com o MEC-SF utilizando elementos quadráticos e o presente trabalho que utiliza elementos constantes é mostrada nas figuras (5.9). Os resultados do MEC-SF foram obtidos para três discretizações, a saber: a primeira com $CCD = 36A$, $NEF = 24$ e $NTE = 120$; a segunda com $CCD = 16A$, $NEF = 24$ e $NTE = 80$; e a terceira com $CCD = 6A$, $NEF = 48$ e $NTE = 64$.

Observando a figura (5.9a) pode-se verificar um afastamento entre as soluções do presente trabalho e a solução de Israíl & Ahmad [07]. Na figura (5.9b) são apresentados os módulos e as soluções agora parecem estar mais próximas. Acreditamos que esta diferença seja função dos tipos de elementos, ou seja, constante para o presente trabalho e quadrático no de Israíl & Ahmad [07].

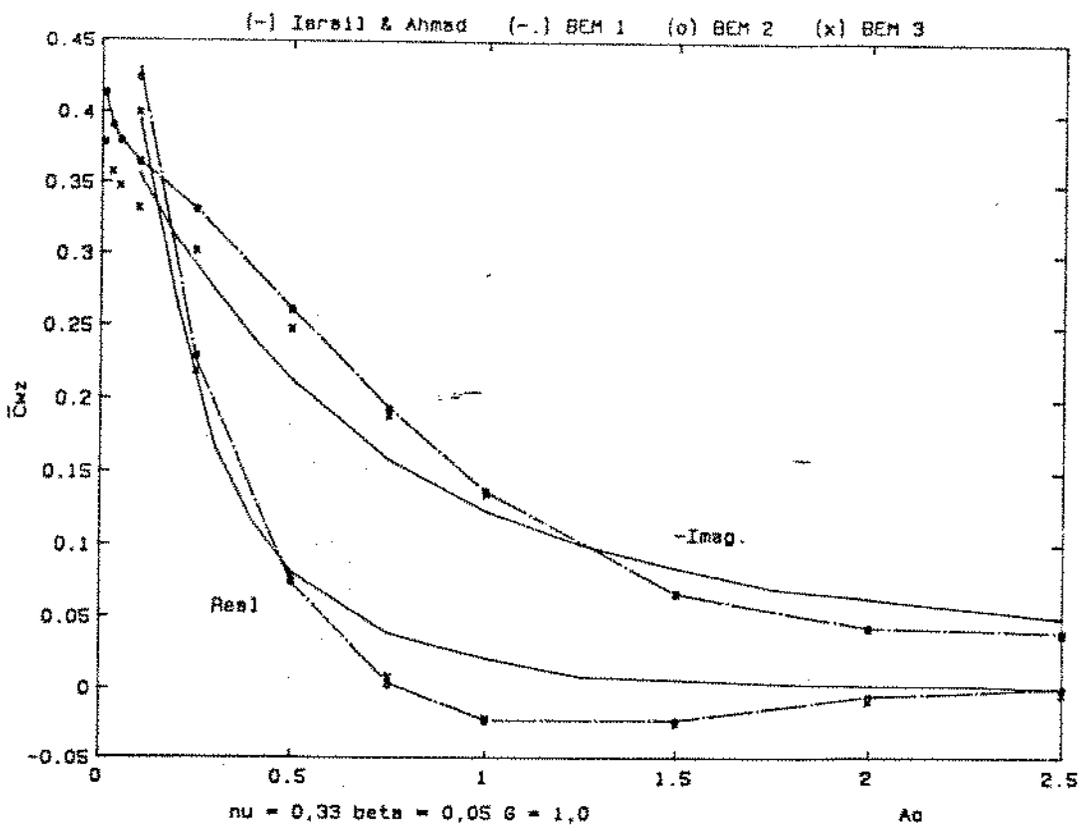


Figura 5.9a. Flexibilidade Dinâmica Vertical Complexa $\bar{C}_{wz}(A_0)$, para uma fundação engastada rígida e sem massa.

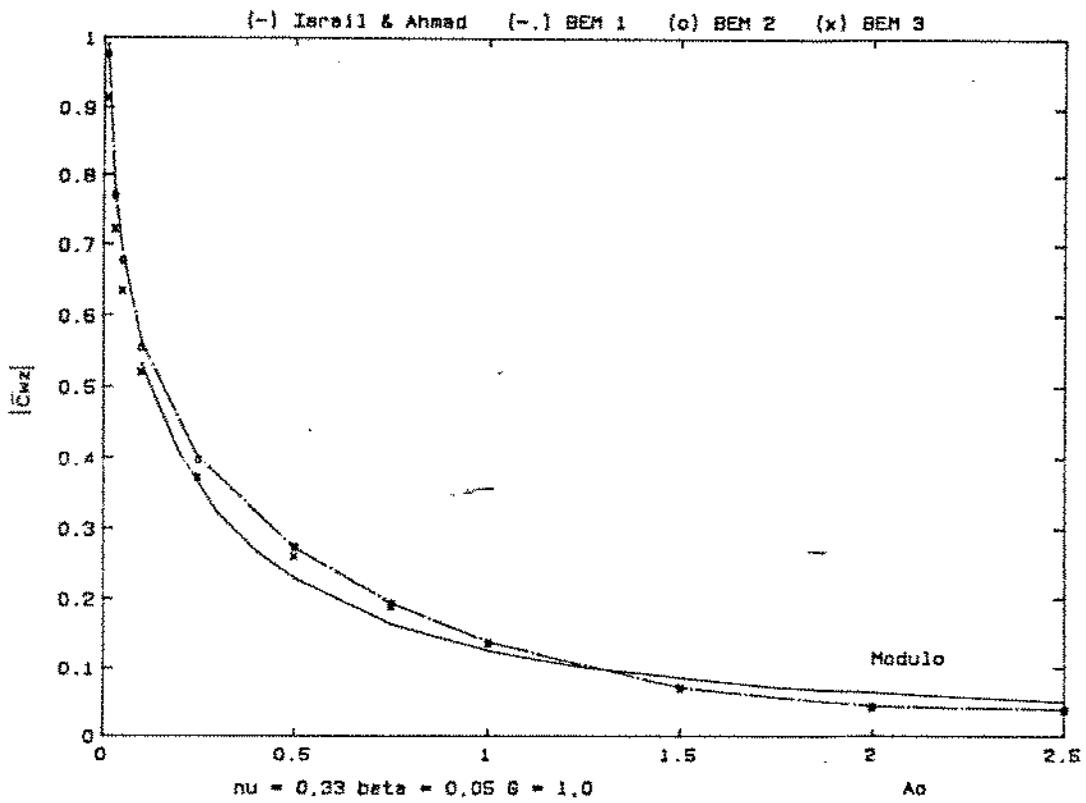


Figura 5.9b. Flexibilidade Dinâmica Vertical Complexa $\bar{C}_{wz}(A_0)$.

5.3. Análises do Comportamento do MEC

PRIMEIRA ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DO MEC-SF

O efeito da densidade da discretização na interface solo-estrutura sobre os termos da matriz de flexibilidade \bar{C} , equação (5.6), de uma fundação de superfície é mostrado nas figuras (5.10).

As figuras (5.10) apresentam as curvas para três discretizações (NEF = 8 , 10 e 20). É interessante notar que foi mantido constante o comprimento de contorno discretizado CCD=22A. Através destas curvas pode se verificar a rápida convergência da solução com o aumento da densidade. A flexibilidade de rotação $\bar{C}_{\phi_y \phi_y}$, figura (5.10c), e os termos de acoplamento \bar{C}_{uMy} e $\bar{C}_{\phi_y x}$, figuras (5.10d) e (5.10e), demonstraram uma maior sensibilidade em relação a densidade da discretização na interface solo-estrutura. Tal sensibilidade pode ser atribuída a melhor representação do campo de tensões na interface que é conseguida com o aumento da densidade da discretização.

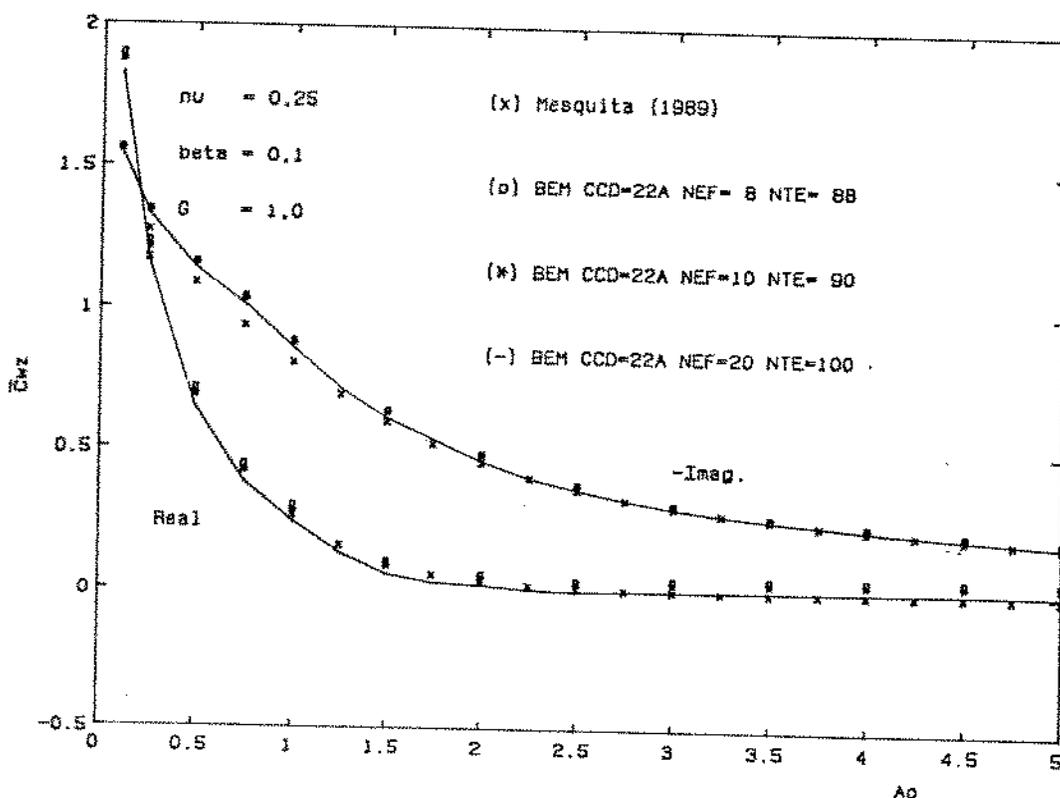


Figura 5.10a. Flexibilidade Dinâmica Vertical Complexa $\bar{C}_{wz}(A_0)$ de uma fundação de superfície rígida e sem massa.

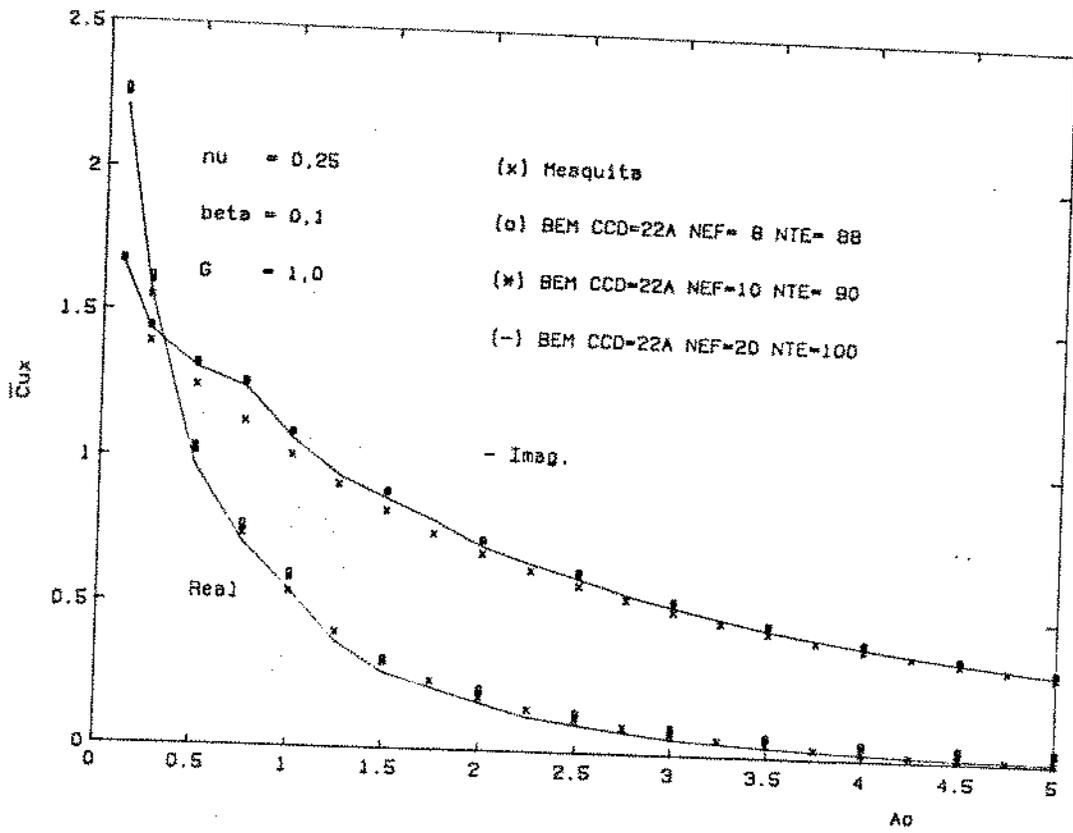


Figura 5.10b. Flexibilidade Dinâmica Horizontal $\bar{C}_{ux}(A_0)$.

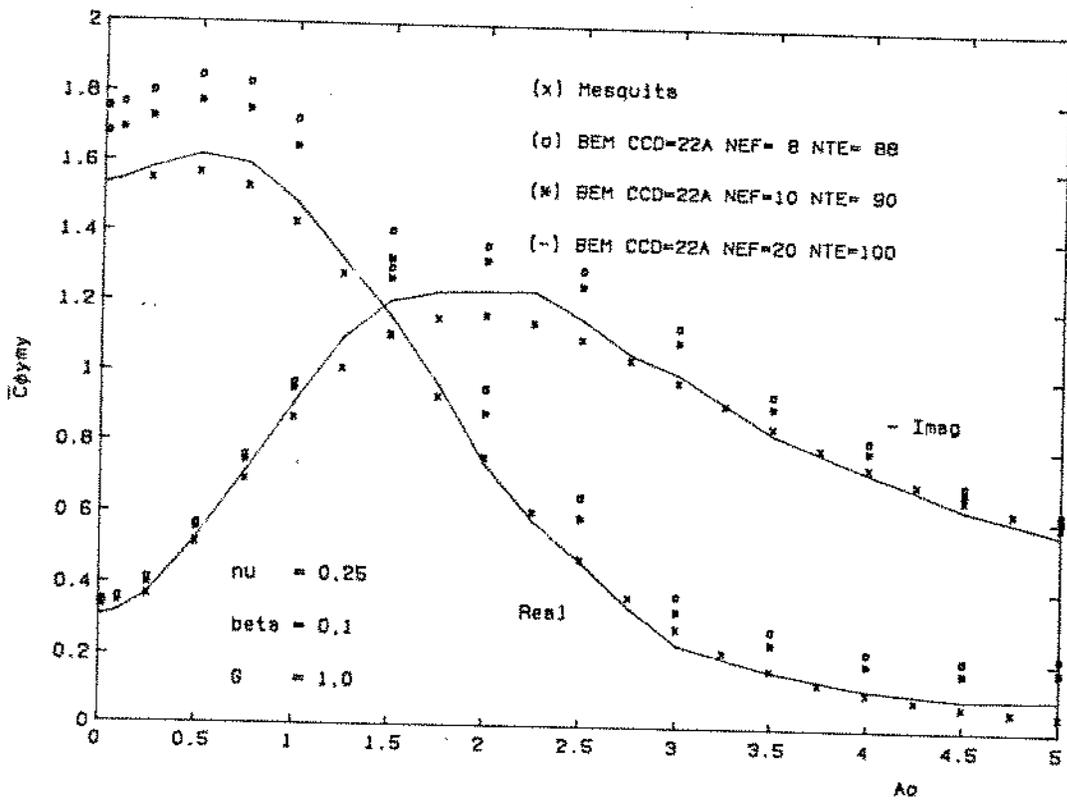


Figura 5.10c. Flexibilidade Dinâmica de Rotação $\bar{C}_{\phi_{yy}}(A_0)$.

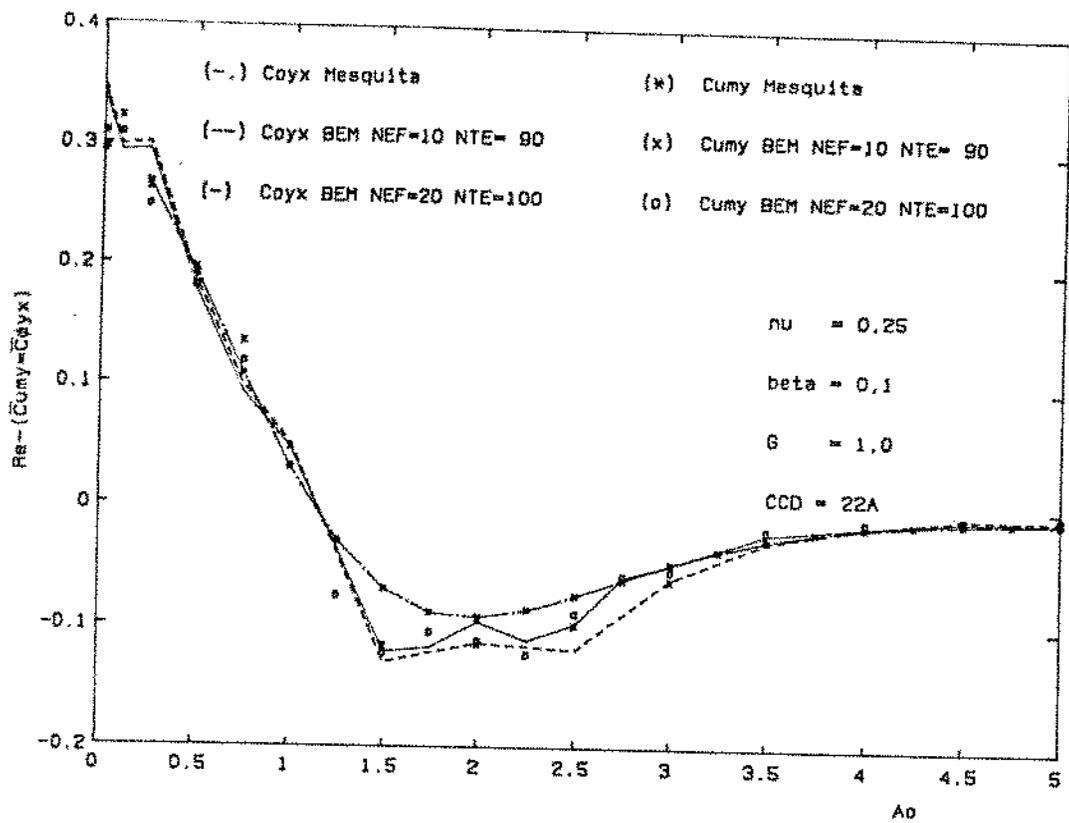


Figura 5.10d. Parte Real dos Termos de Acoplamento.

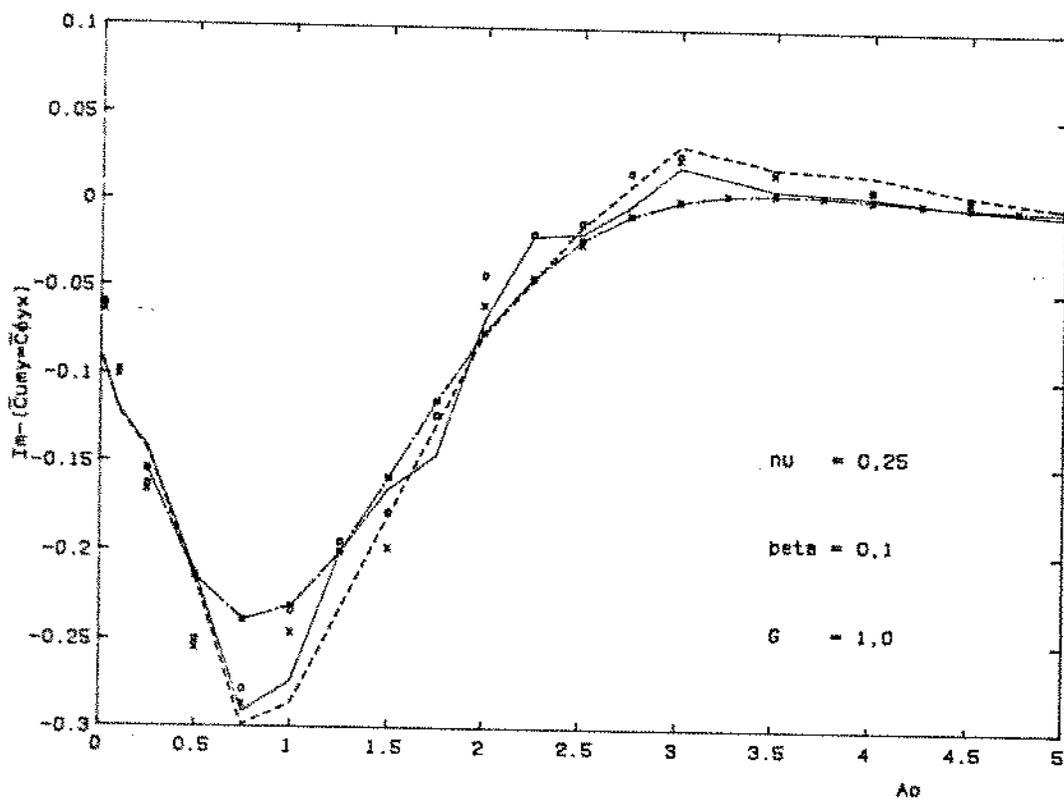


Figura 5.10e. Parte Imag. dos Termos de Acoplamento.

SEGUNDA ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DO MEC-SF

O efeito do tamanho da discretização sobre a resposta da fundação de superfície e do campo de deslocamento é mostrado nas figuras (5.11), (5.12). As figuras (5.11) apresentam as curvas para duas discretizações: uma com $CCD = 22A$, $NEF = 10$ e $NTE = 92$; e a outra com $CCD = 42A$, $NEF = 10$ e $NTE = 132$. As figuras (5.12) apresentam as curvas para duas discretizações: uma com $CCD = 22A$, $NEF = 20$ e $NTE = 102$; a outra com $CCD = 42A$, $NEF = 20$ e $NTE = 142$.

Pode-se observar para $NEF = 10$, figuras (5.11), que a variação de CCD alterou de forma significativa o campo, principalmente a componente \bar{C}_{uz} . Os deslocamentos de corpo rígido da fundação foram pouco influenciados. As mesmas observações se aplicam para as soluções com $NEF = 20$, figuras (5.12).

TERCEIRA ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DO MEC-SF

O efeito do número de elementos na interface solo-estrutura NEF sobre a resposta da fundação de superfície e do campo de deslocamento é mostrado nas figuras (5.13), (5.14). As figuras (5.13) apresentam as curvas para duas discretizações: uma com $CCD = 22A$, $NEF = 10$ e $NTE = 92$; e a outra com $CCD = 22A$, $NEF = 20$ e $NTE = 102$. As figuras (5.14) apresentam as curvas para duas discretizações: uma com $CCD = 42A$, $NEF = 10$ e $NTE = 132$; a outra com $CCD = 42A$, $NEF = 20$ e $NTE = 142$.

Pode-se observar que para $CCD=22A$, figuras (5.13), onde os pontos representam a solução para $NEF = 10$ e as linhas contínuas a solução para $NEF = 20$, a variação de NEF influe de forma significativa nos deslocamentos verticais de corpo rígido da fundação. Os campos na superfície livre do solo praticamente não se alteram. As mesmas observações se aplicam para as soluções com $CCD = 42A$, figuras (5.14).

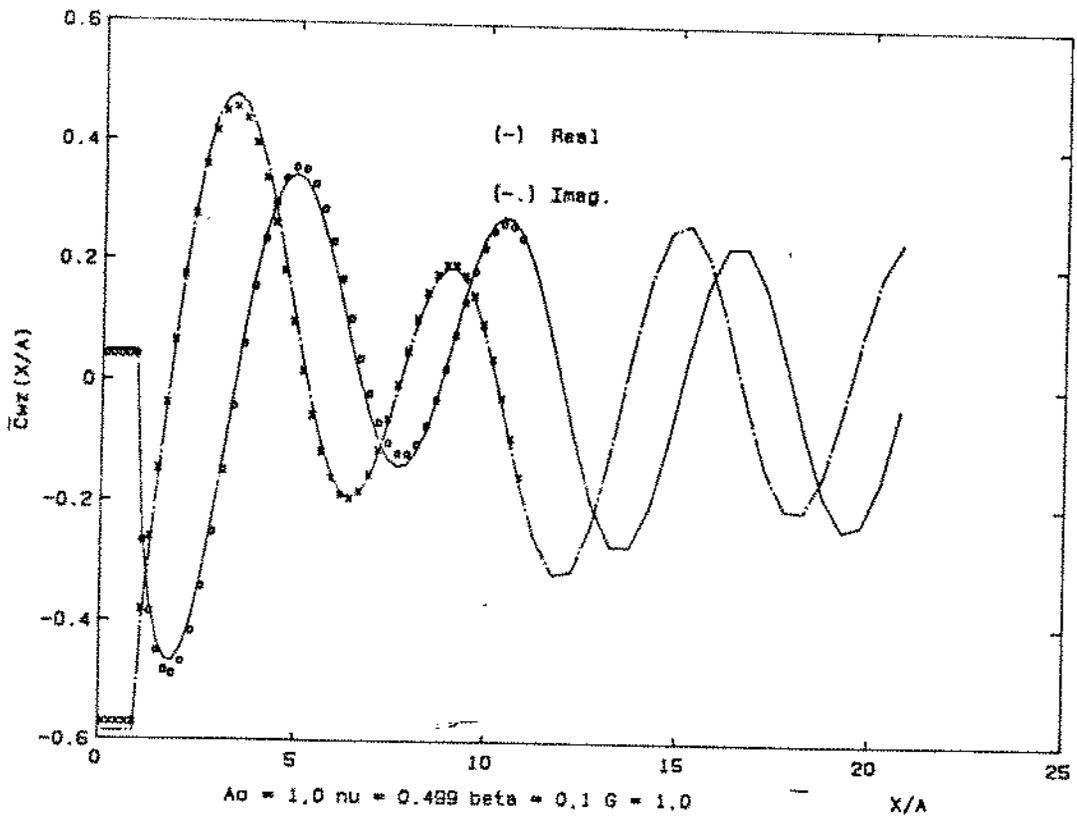


Figura 5.11a. Campo de Deslocamentos $\bar{C}_{wz}(X/A)$, para uma fundação de superfície rígida e sem massa.

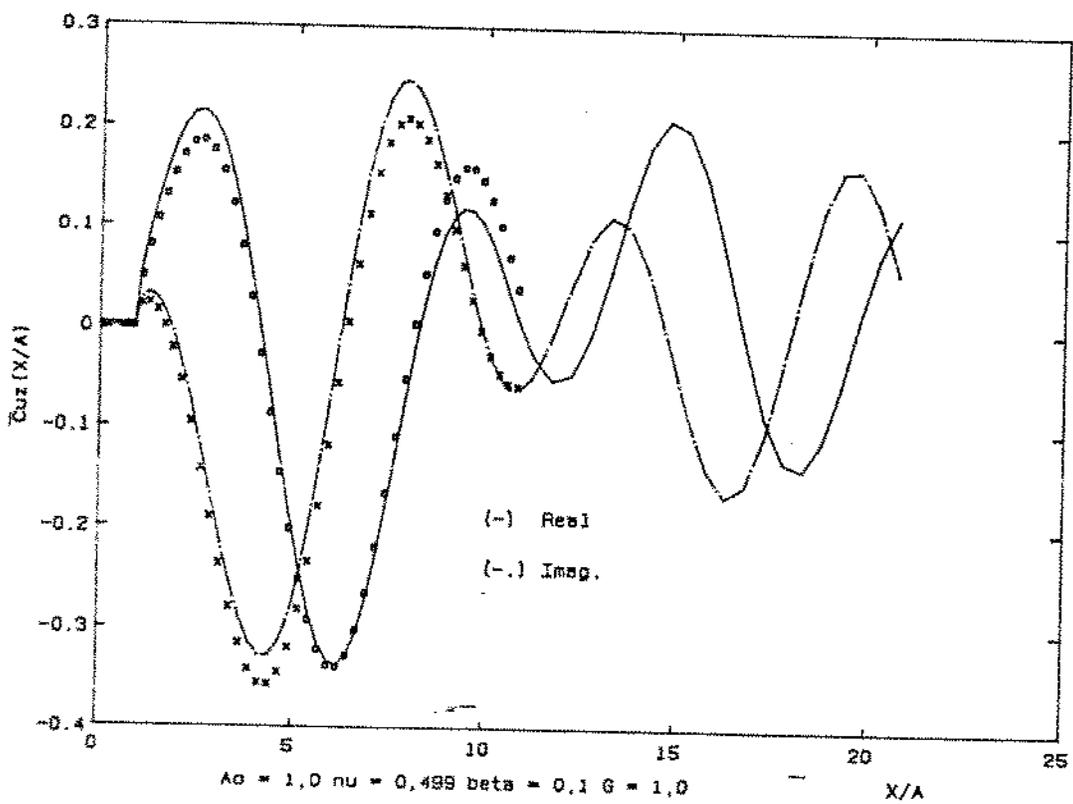


Figura 5.11b. Campo de Deslocamentos $\bar{C}_{uz}(X/A)$.

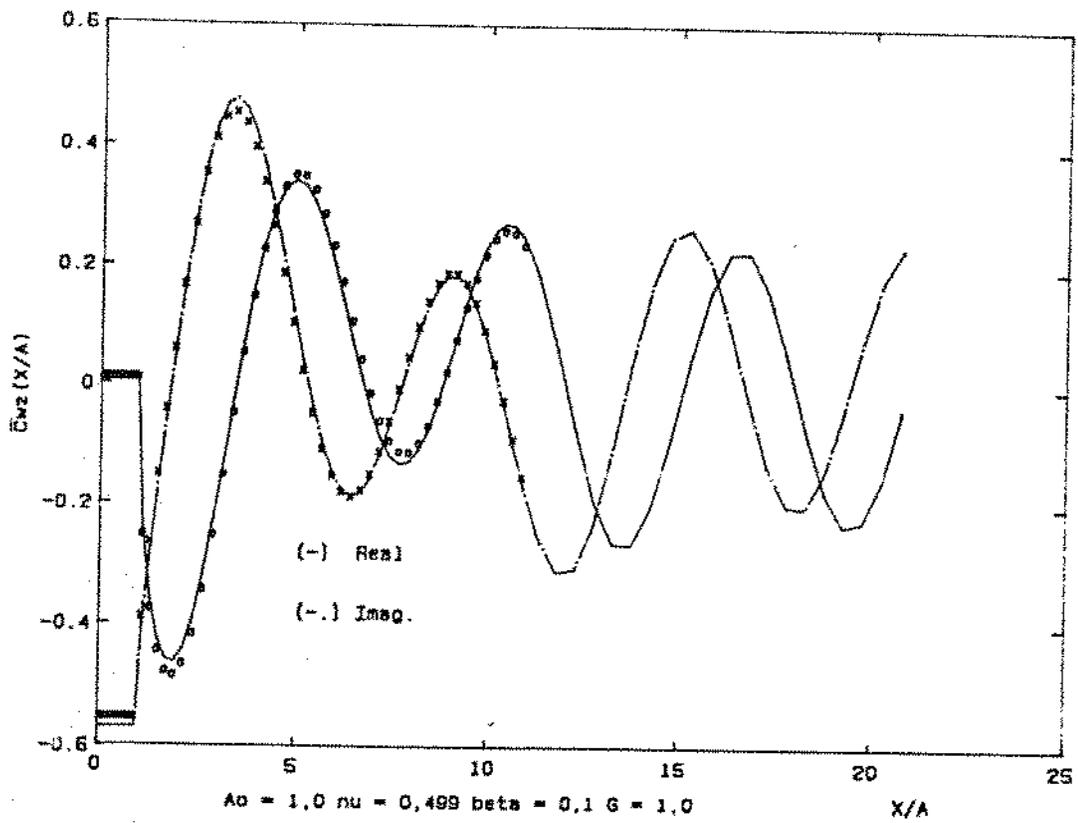


Figura 5.12a. Campo de Deslocamentos $\bar{C}_{wz}(X/A)$, para uma fundação de superfície rígida e sem massa.

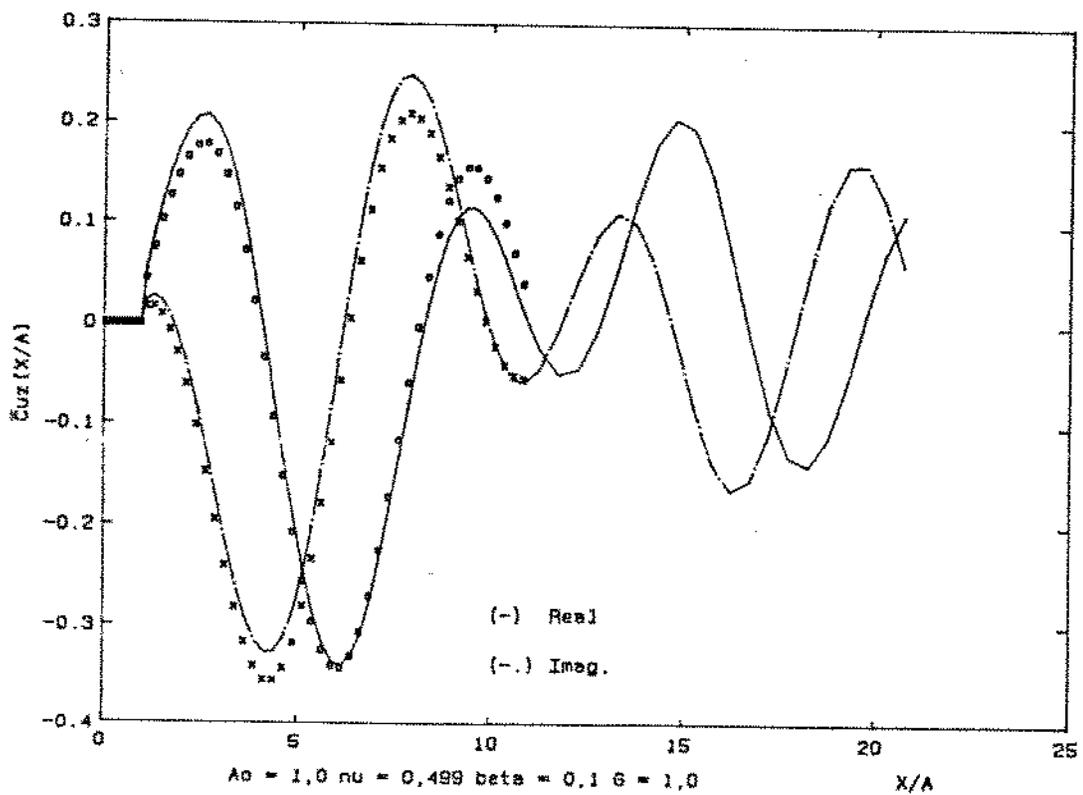


Figura 5.12b. Campo de Deslocamentos $\bar{C}_{uz}(X/A)$.

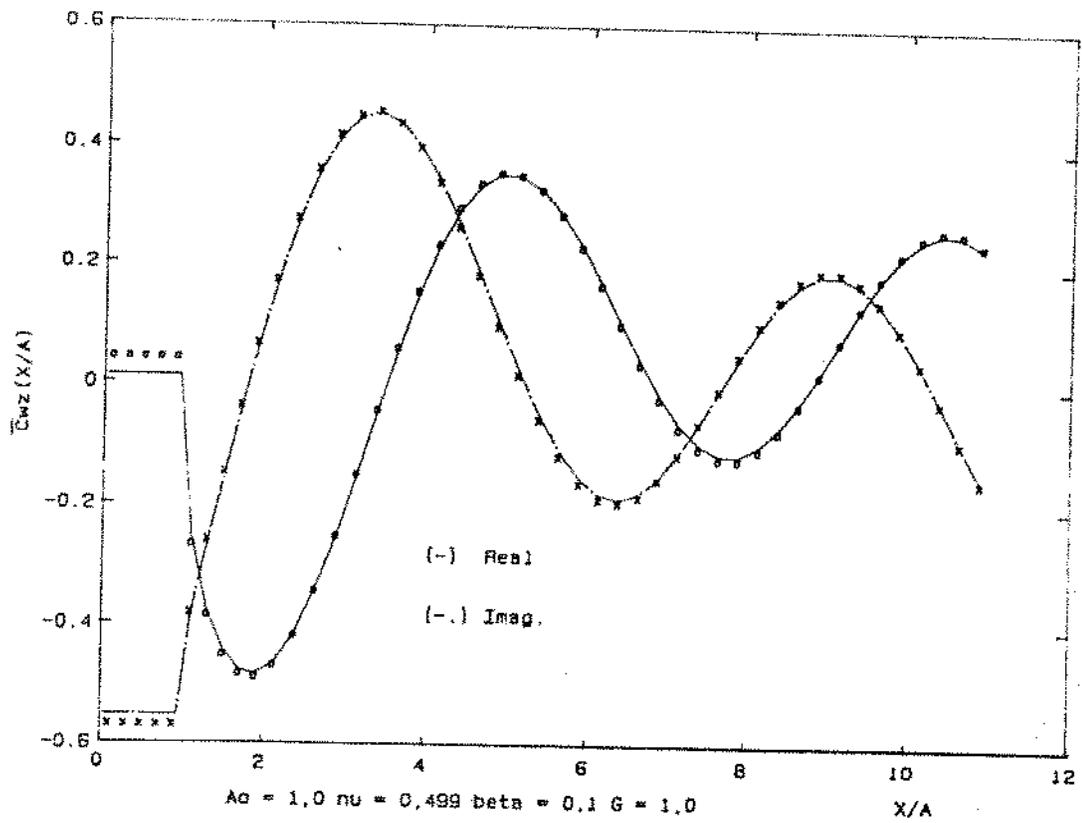


Figura 5.13a. Campo de Deslocamentos $\bar{C}_{wz}(X/A)$, para uma fundação de superfície rígida e sem massa.

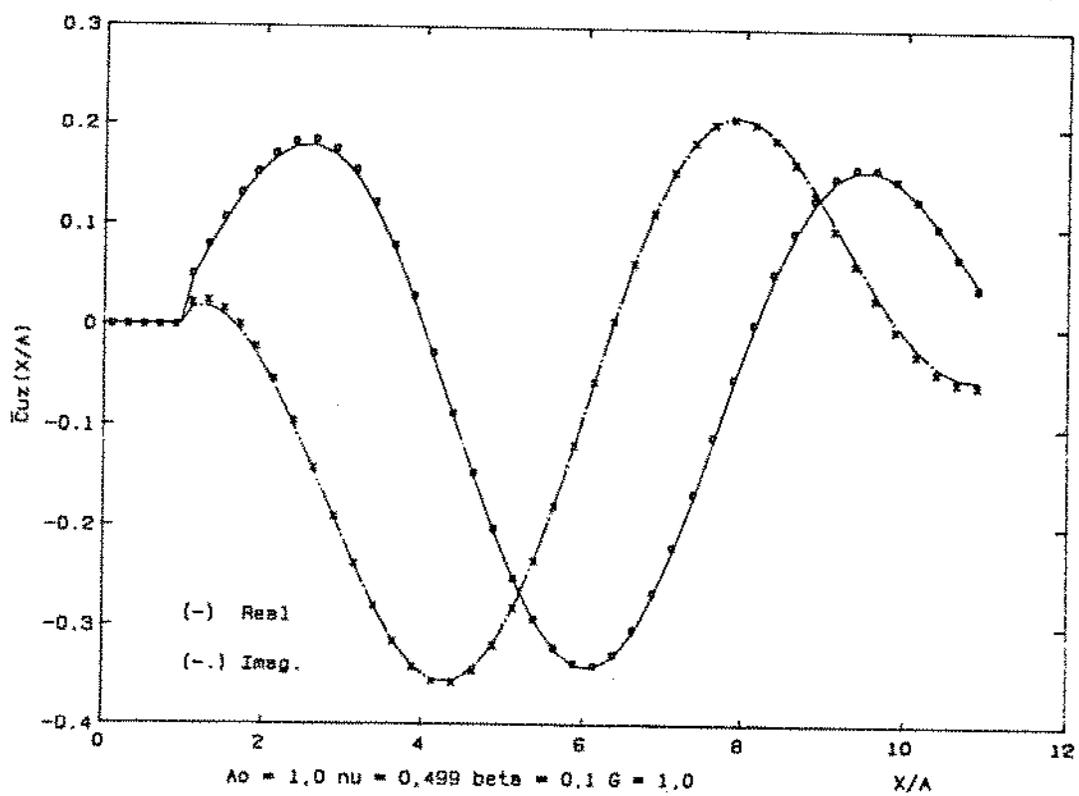


Figura 5.13b. Campo de Deslocamentos $\bar{C}_{uz}(X/A)$.

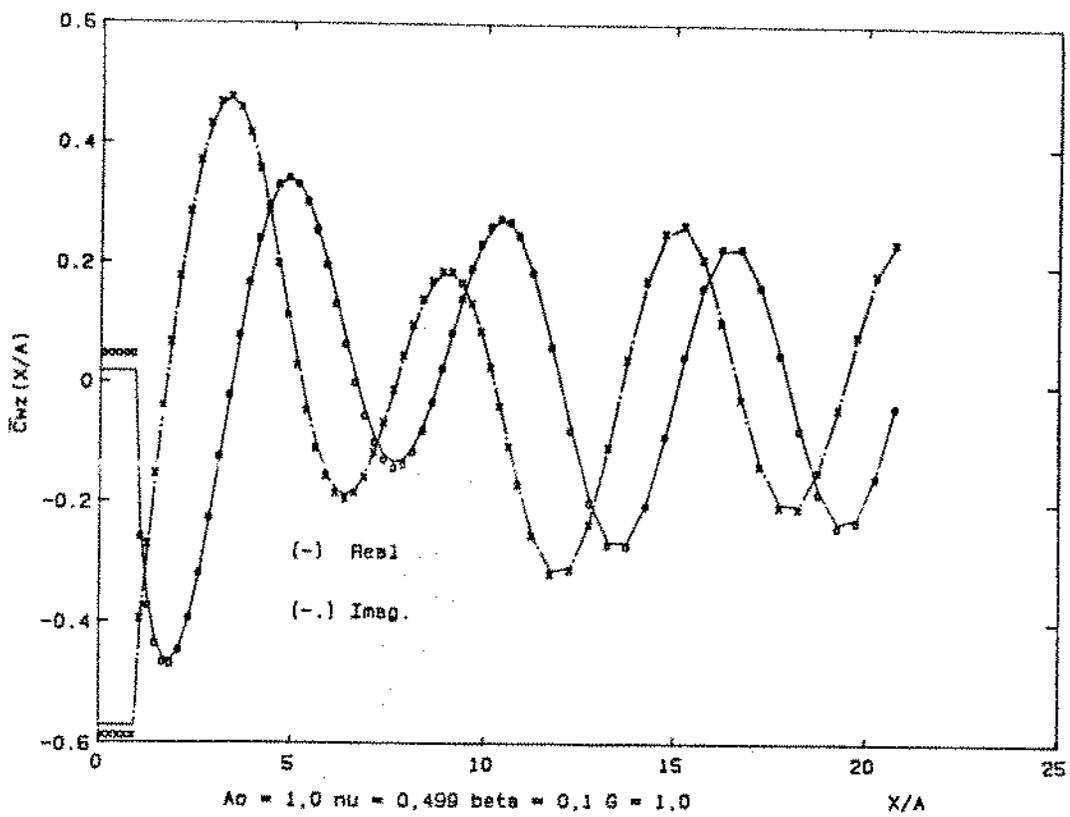


Figura 5.14a. Campo de Deslocamentos $\bar{C}_{wz}(X/A)$, para uma fundação de superfície rígida e sem massa.

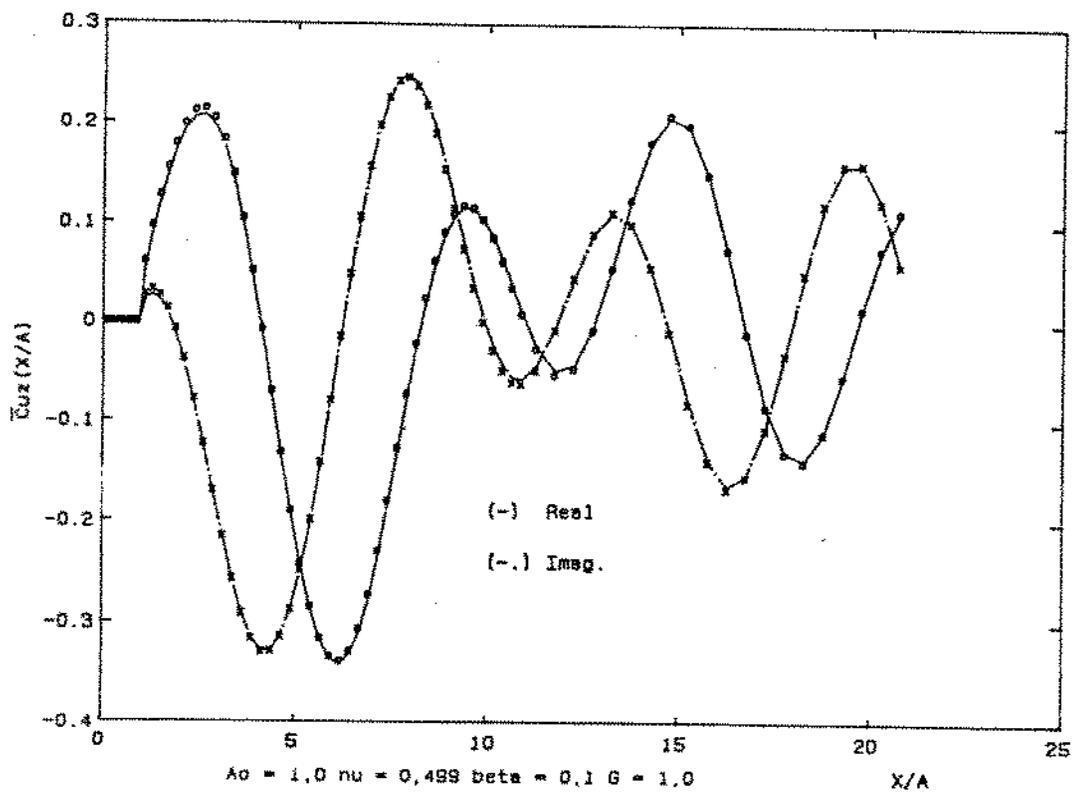


Figura 5.14b. Campo de Deslocamentos $\bar{C}_{uz}(X/A)$.

5.4. Aplicações e Comparações do MEC

PRIMEIRA COMPARAÇÃO/APLICAÇÃO

Como exemplo de aplicação da implementação do MEC-SF nas figuras (5.16) e (5.17) os resultados do problema de isolamento de vibrações, para o caso de uma fundação excitada verticalmente tendo nas proximidades uma trincheira em V , são comparados com os resultados do trabalho de Triantafyllidis & Dasgupta [46], obtidos também pelo MEC-SF com elementos constantes.

A figura (5.15) mostra um esquema do problema tratado com as dimensões normalizadas pelo comprimento de onda de Rayleigh L_R e a discretização adotada.

O deslocamento vertical e horizontal do campo na superfície, com e sem trincheira, são normalizados pelo deslocamento vertical de corpo rígido da fundação do caso sem trincheira. A posição na superfície é normalizada pelo comprimento de onda de Rayleigh L_R . Nas figuras (5.16a) e (5.16b), o campo vertical e o horizontal, respectivamente, para o caso sem trincheira, nas proximidades da fundação apresentam uma boa concordância com a solução de Triantafyllidis & Dasgupta [46]. Para a solução com trincheira, figuras (5.17a) e (5.17b), os campos vertical e horizontal apresentam uma tendência geral boa entre as duas soluções. Uma observação importante é que as curvas deste trabalho incluem os pontos no interior da trincheira, por isso existem saltos na região sobre a trincheira. Na solução da referência [46] foram subtraídos os deslocamentos na trincheira.

Em relação a aplicação do MEC-SF na determinação do comportamento do sistema solo-estrutura, para levantamento de parâmetros que possibilitem a orientação de trabalhos de isolamento de vibrações pela utilização de trincheiras, as soluções obtidas indicam a diminuição das amplitudes do campo do lado direito da trincheira e um aumento do outro lado. Portanto pode-se observar nas figuras (5.16) e (5.17), de forma qualitativa, a eficiência da presença da trincheira no isolamento de vibrações.

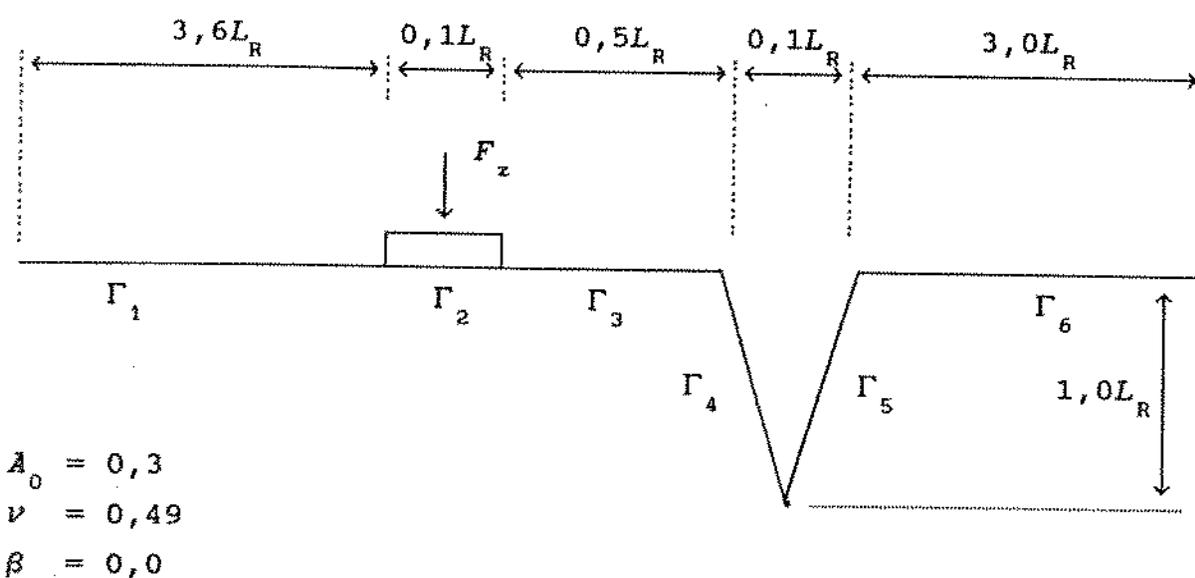


Figura 5.15. Isolamento de vibrações usando uma trincheira em "V" aberta. Número de elementos constantes em cada região do contorno: $\Gamma_1 = 35$, $\Gamma_2 = \Gamma_3 = 5$, $\Gamma_4 = \Gamma_5 = 10$ e $\Gamma_6 = 30$.

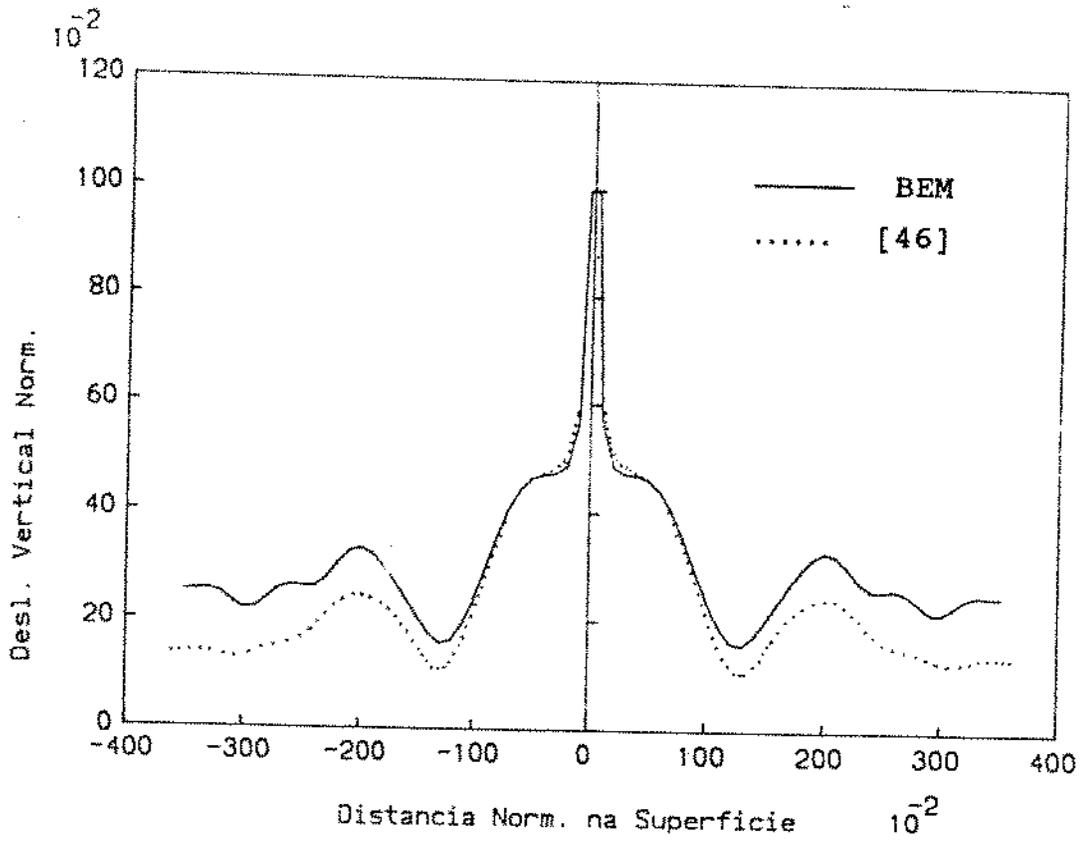


Figura 5.16a. Deslocamento Vertical na Superfície do Solo sem Trincheira.

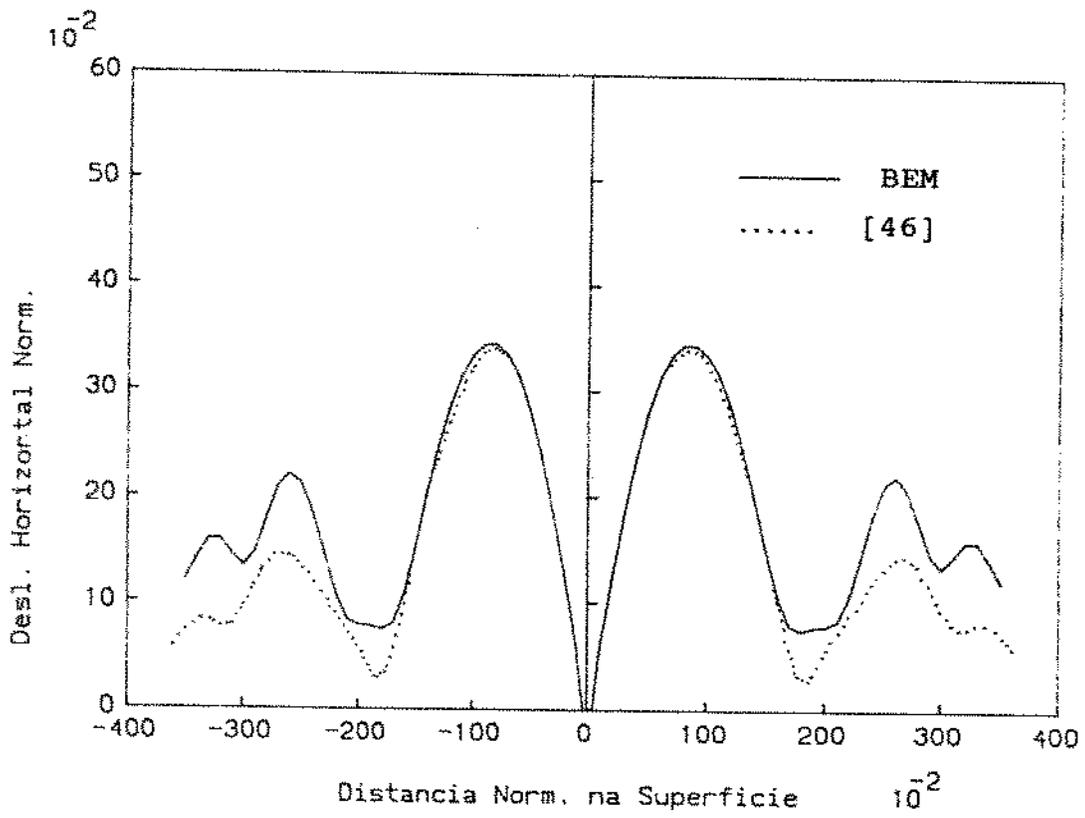


Figura 5.16b. Deslocamento Horizontal na Superfície do Solo sem Trincheira.

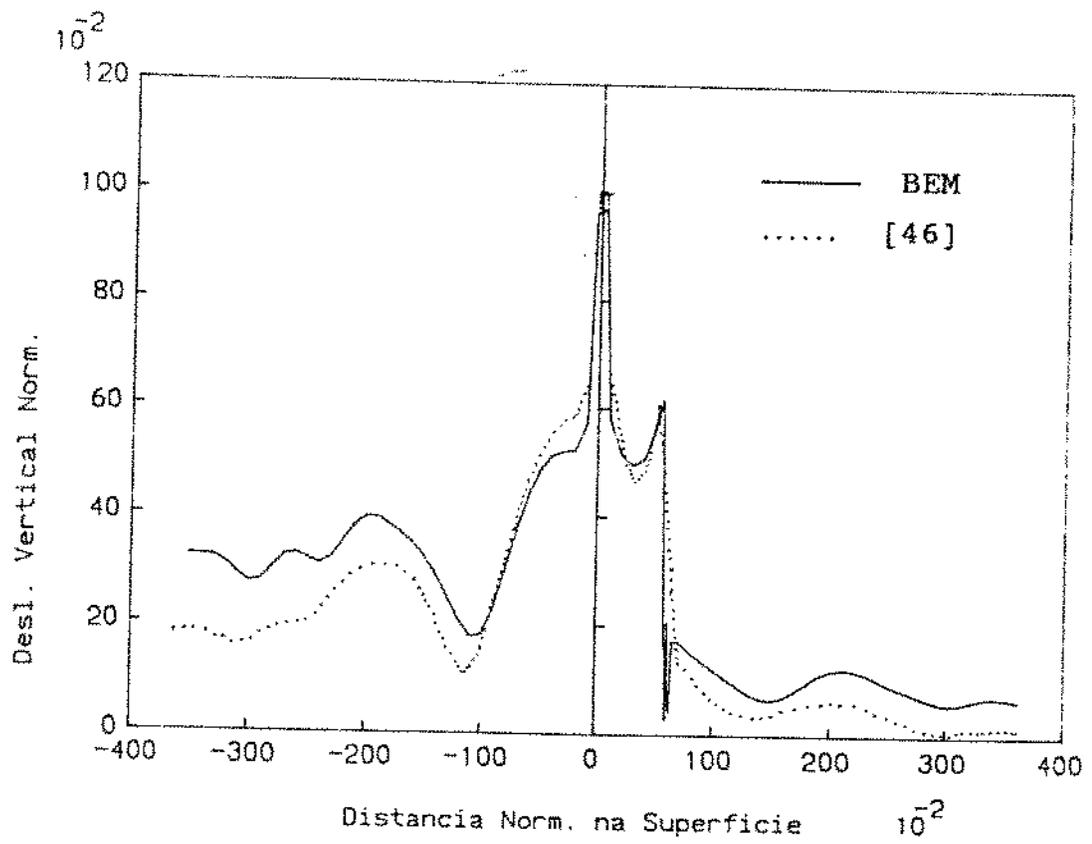


Figura 5.17a. Deslocamento Vertical na Superfície do Solo com Trincheira.

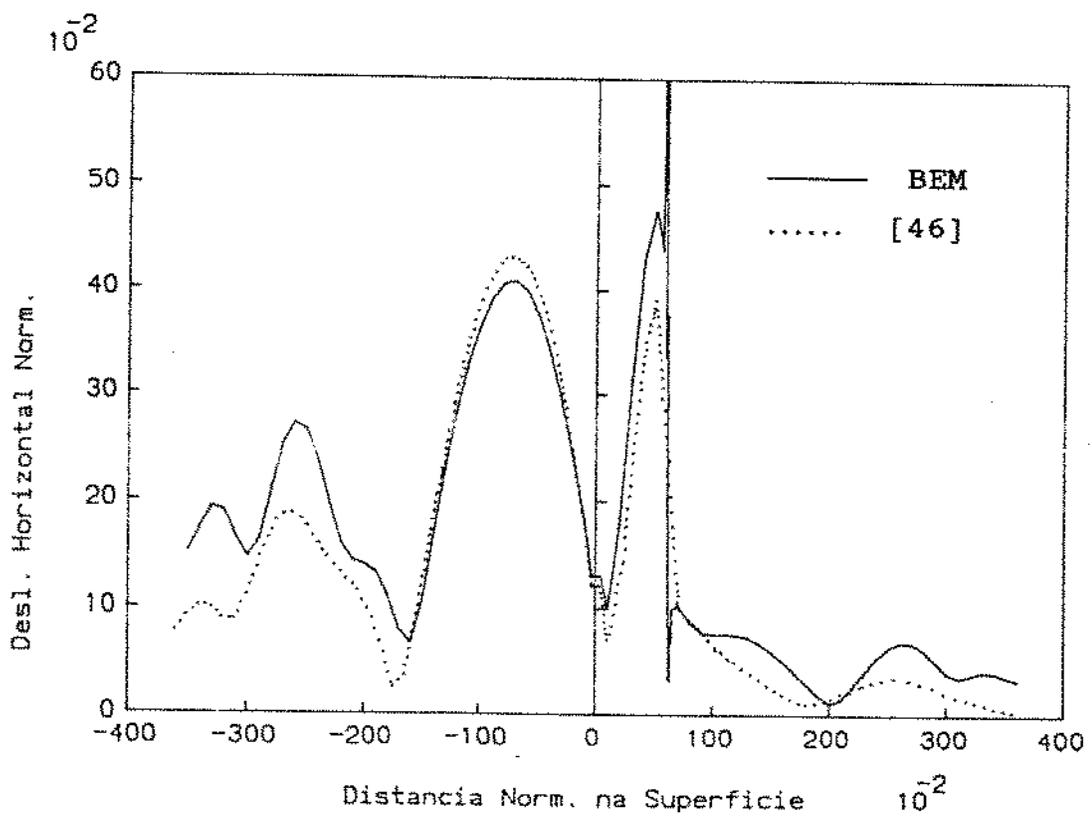


Figura 5.17b. Deslocamento Horizontal na Superfície do Solo com Trincheira.

SEGUNDA APLICAÇÃO

Como exemplo de aplicação do MEC-SF implementado, nas figuras (5.19) e (5.20) são apresentados os resultados do campo de deslocamento na superfície, para o arranjo de duas fundações e uma trincheira aberta, sendo uma fundação excitada verticalmente. A figura (5.18) mostra a geometria e a discretização adotada, com as dimensões normalizadas pelo comprimento da onda de Rayleigh L_R .

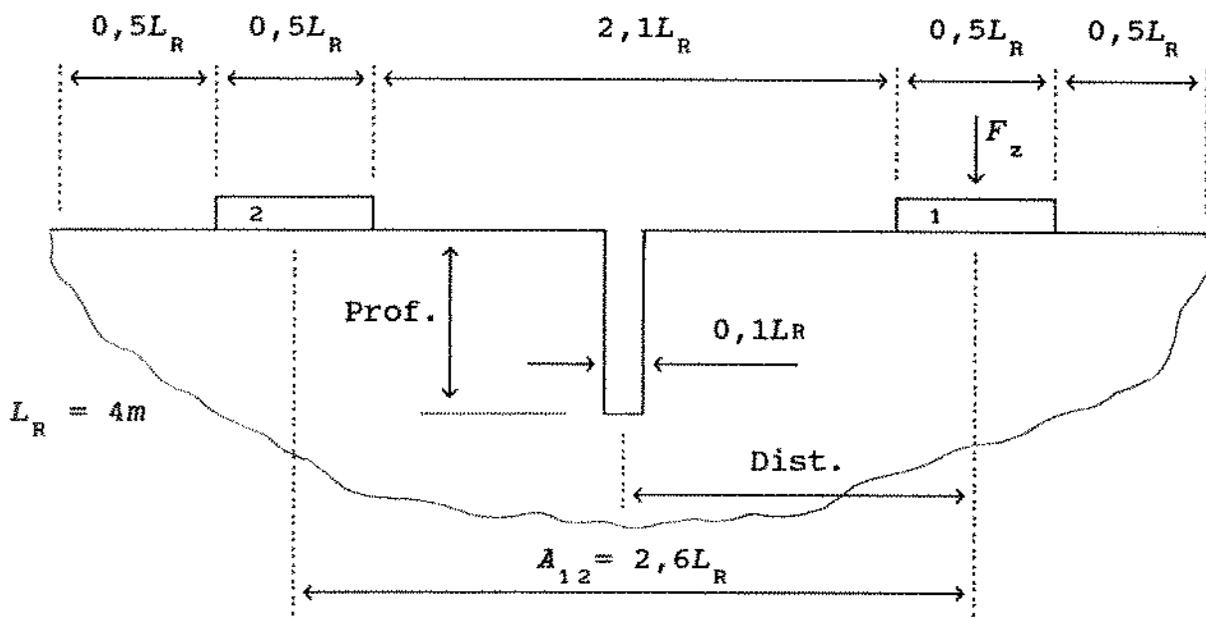


Figura 5.18. Arranjo de duas fundações de superfície e uma trincheira aberta. (Tamanho dos Elementos Constantes = $L_R/10$)

Nas figuras (5.19) pode ser observada a influência da posição da trincheira (Profundidade = $1/2L_R$) em relação a fundação ativa, isto é, a fundação excitada. O deslocamento vertical da fundação passiva, figura (5.19a), diminui quando a trincheira aproxima-se da fundação passiva, isto é, a fundação sem carregamento. Nessa mesma figura pode ser também observada a influência da presença da trincheira sobre o comportamento da fundação ativa.

O deslocamento horizontal, figura (5.19b), da fundação passiva é sempre maior com a presença da trincheira e diminui com a aproximação da mesma.

Uma análise sobre o efeito da profundidade da trincheira é apresentada nas figuras (5.20) para uma trincheira numa distância de $5,2/A$ da fundação ativa, isto é, no centro em relação às duas fundações. Como pode ser observado nas figuras (5.20) os deslocamentos vertical e horizontal da fundação passiva diminuem com o aumento da profundidade da trincheira, com exceção do deslocamento horizontal para uma trincheira com $\text{prof.} = 0,5L_R$.

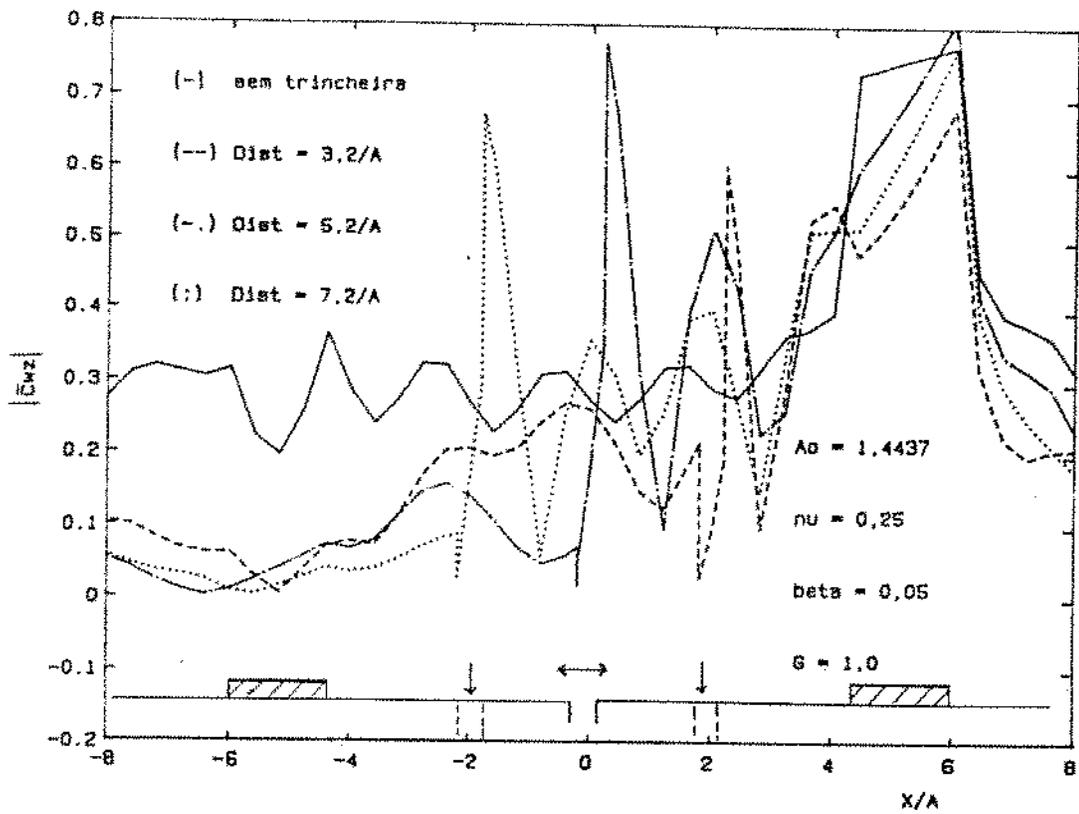


Figura 5.19a. Deslocamento Vertical na Superfície do Solo.

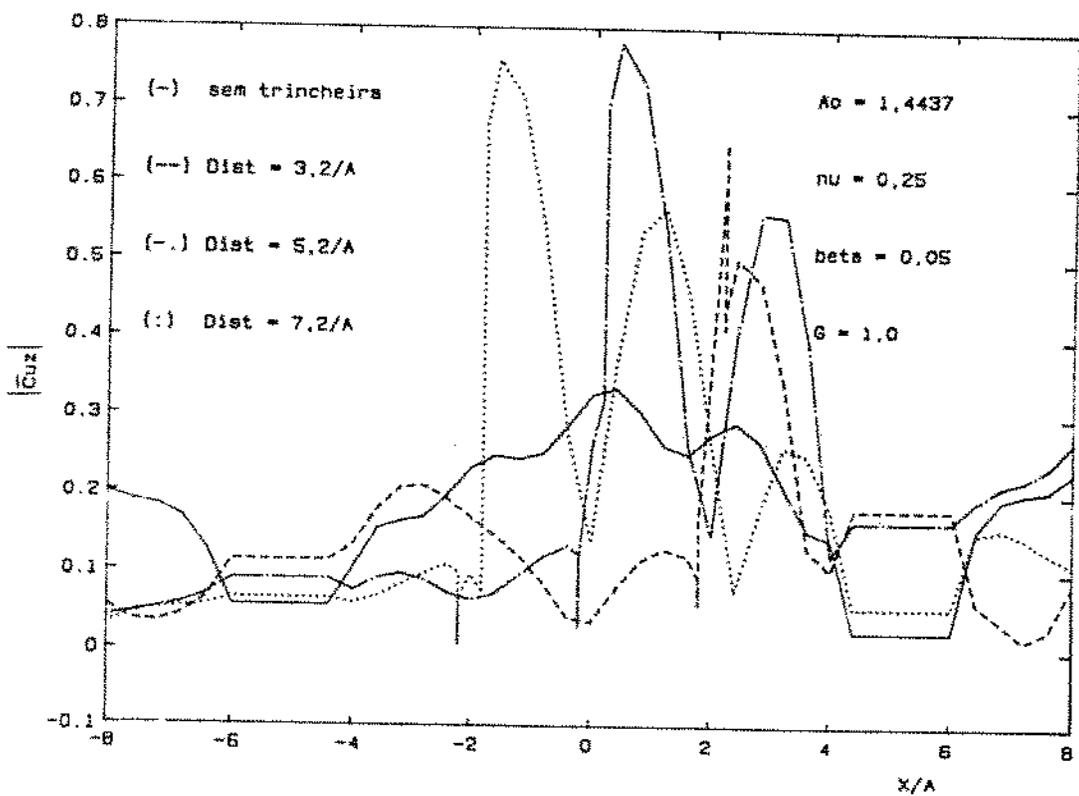


Figura 5.19b. Deslocamento Horizontal na Superfície do Solo.

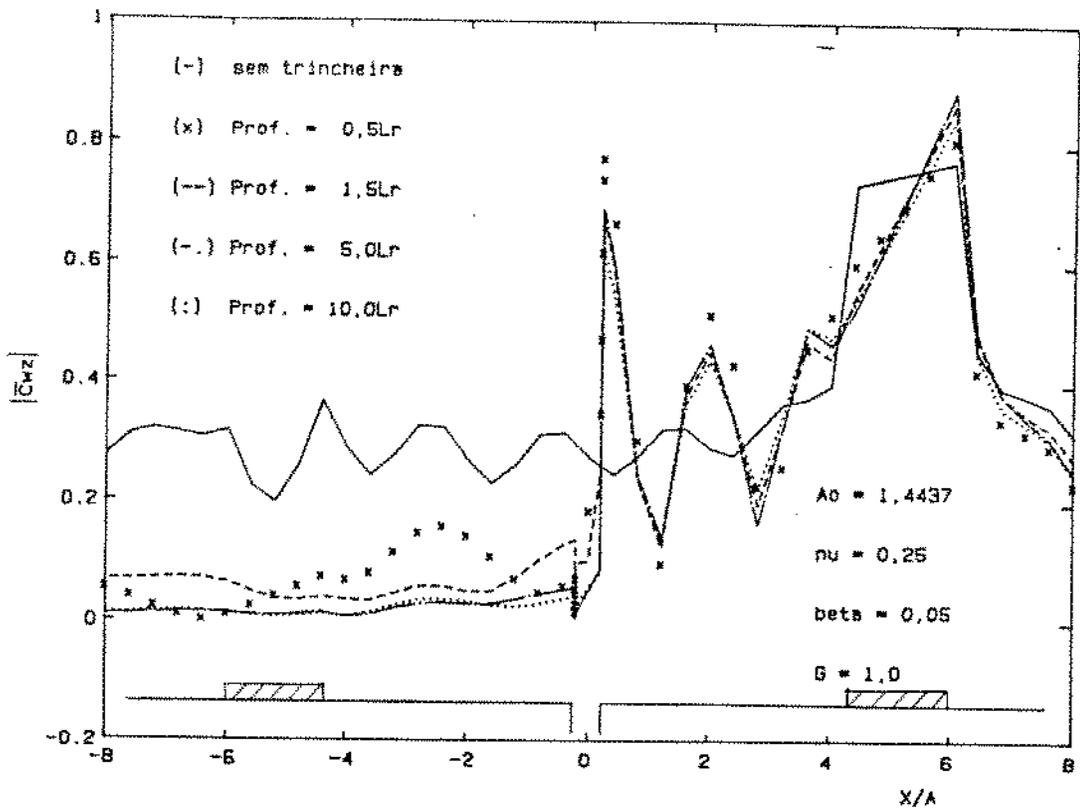


Figura 5.20a. Deslocamento Vertical na Superfície do Solo.

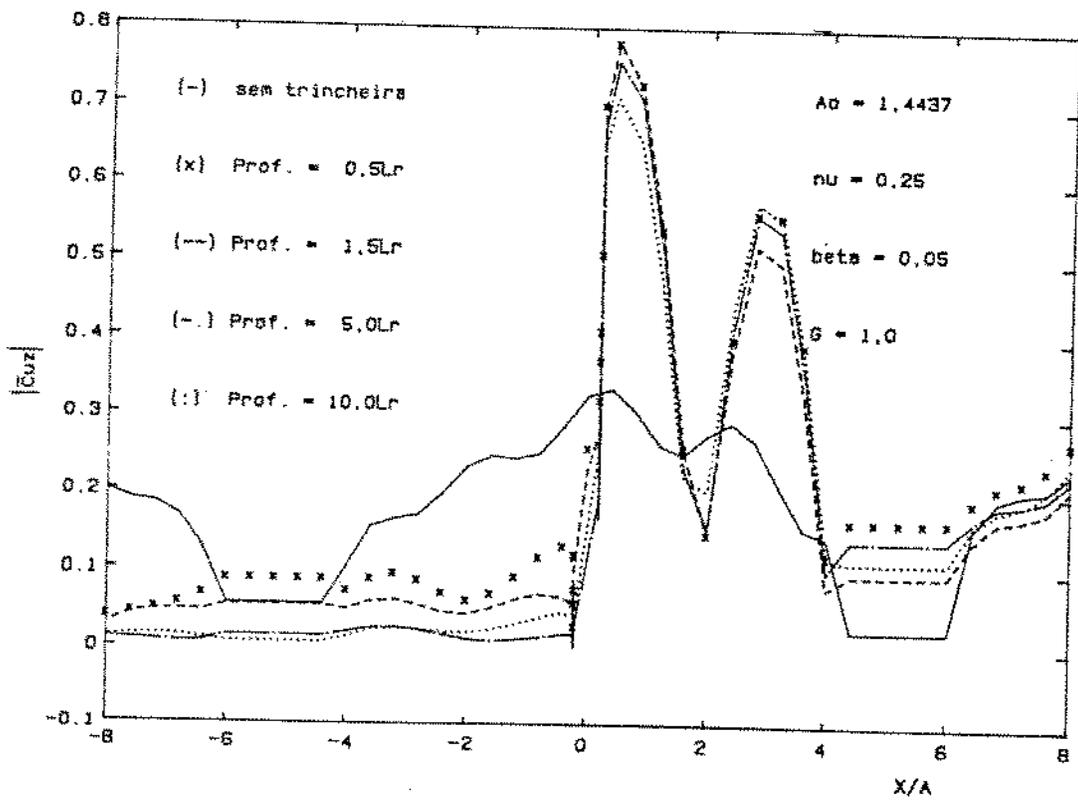


Figura 5.20b. Deslocamento Horizontal na Superfície do Solo.

6. CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

No presente trabalho foi formulado o Método dos Elementos de Contorno (MEC) em sua versão direta para elementos quadráticos e constantes com a utilização da solução fundamental do espaço viscoelastodinâmico bidimensional estacionário. A implementação numérica restringiu-se ao caso dos elementos constantes. Através da incorporação das condições de compatibilidade cinemática e equilíbrio de forças foi possível modelar a interação dinâmica de estruturas bidimensionais rígidas de superfície e engastadas com o solo. O amortecimento material do contínuo viscoelástico foi incorporado através de constantes de Lamé complexas. Foram também esboçados os principais passos para formulação e implementação do MEC com a utilização de funções de Green.

Matrizes completas de flexibilidade dinâmica de fundações de superfície e engastadas foram utilizadas para validar a implementação do MEC aqui realizada. Apresentou-se uma discussão da importância das variáveis densidade de malha e comprimento do campo discretizado na precisão dos resultados obtidos pelo MEC. A isolação de vibrações proveniente de fundações através de barreiras foram apresentadas para mostrar a versatilidade do método dos elementos de contorno perante as chamadas "soluções semi-analíticas" ou método de superposição (MSP).

Fica evidente, após se observar os resultados, que o MEC na solução de problemas de interação solo-estrutura é mais sensível em relação a densidade da malha na interface solo-estrutura do que em relação ao tamanho do campo discretizado. Essa sensibilidade influe diretamente na resposta obtida em deslocamentos da fundação, tal efeito pode ser atribuído a representação do campo de tensões na interface solo-estrutura. Outra questão em destaque é a dificuldade do MEC em modelar o meio incompressível como mencionado anteriormente na apresentação dos resultados.

As funções de Green obtidas a partir do MSP, mostraram-se muito precisas quando comparadas com o próprio MSP. A técnica de utilização do MEC com funções de Green

simplifica a discretização, mas o trabalho de integração envolvido na síntese das funções de Green é uma questão a ser melhor estudada, pois é custoso e apresentou alguns pontos que não convergiram.

Este trabalho atingiu satisfatoriamente os objetivos iniciais que foram a implementação de uma técnica numérica para tratar problemas da Interação Dinâmica Solo-Estrutura e estudar as alternativas de formulação do MEC. A partir deste ponto abriram-se novas perspectivas de estudo, tais como a extensão e aprimoramento deste trabalho para tratar de problemas com múltiplos domínios e não-linearidades. A formulação de múltiplos domínios possibilita a solução de problemas com estruturas flexíveis e solos estratificados (camadas). O acoplamento dos métodos MEC-MEF e a formulação para problemas transientes também são assuntos de interesse.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [01] Richart, F.E.; Hall, J.R. and Woods, R.D.: *Vibrations of Soil and Foundations*, Prentice-Hall, 1970
- [02] Gazetas, G.: *Analysis of Machine Foundation Vibrations: State of the Art*. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 1983, Vol. 2, No. 1, 2-42
- [03] Luco, J.E. and Westmann, R.A.: *Dynamic Response of a Rigid Footing Bonded to an Elastic Half Space*. *Trans. ASME, Journal of Applied Mechanics*, 39 (1972) 527-534
- [04] Mesquita Neto, E.: *Acoplamento Dinâmico de Fundações através do Solo considerando-se as Tensões Tangenciais na Interface Solo/Fundação*. IX Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Florianópolis, 1987, 481-484
- [05] Mesquita Neto, E.: *Zur dynamischen Wechselwirkung von Fundamenten auf dem viskoelastischen Halbraum*. VDI. *Fortschritt-Berichte, Reihe 11: Schwingungstechnik*, Nr. 120, VDI Verlag, Duesseldorf, 1989
- [06] Dominguez, J. and Abascal, R.: *Dynamic of Foundations - Cap. 2 - Topics in Boundary Element Research - Edited by C. A. Brebbia - Vol. 4 - Applications in Geomechanics - Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 1987*
- [07] Israil, A.S.M. and Ahmad, S.: *Dynamic Vertical Compliance of Strip Foundations in Layered Soils*. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 18 (1989), 933-950

- [08] Karabalis, D. L. and Beskos, D. E.: *Dynamic Soil-Structure Interaction - Cap.11 - Boundary Element Methods in Mechanics* - Edited by D. E. Beskos, Elsevier Science Publishers B. V., 1987
- [09] Karabalis, D.L. and Beskos, D.E.: *Three-Dimensional Soil-Structure Interaction by Boundary Element Methods - Cap. 1 - Topics in Boundary Element Research* - Edited by C. A. Brebbia - Vol. 4 - *Applications in Geomechanics* - Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 1987
- [10] Brebbia, C.A.: *The Boundary Element Method for Engineers*, Pentech Press, London, Computational Mechanics Publications, Boston, 1978.
- [11] Rizzo, F.J. : *An Integral Equation Approach to Boundary Value Problems of Classical Elastostatics*. *Quartely Applied Mathematics*, 25 (1967) , 83-95
- [12] Cruse, T. A.: *Numerical Solutions in Three Dimensional Elastostatics*. *Int. Journal Solids and Structures*, 5 (1969) , 1259-1274
- [13] Cruse, T. A. and Rizzo, F. J.: *A Direct Formulation and Numerical Solution of the General Transient Elastodynamic Problem I*. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 22 (1968) , 244-259
- [14] Cruse, T. A.: *A Direct Formulation and Numerical Solution of the General Transient Elastodynamic Problem II*. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 22 (1968) , 341-355
- [15] Manolis, G.D. and Beskos, D.E. : *Dynamic Stress Concentration Studies by Boundary Integrals and Laplace Transform*. *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, 17 (1981) , 573-599

- [16] Manolis, G.D.: *A Comparative Study on Three Boundary Element Method Approaches to Problems in Elastodynamics*. *Int. Journal Numerical and Methods in Engineering*, 19 (1983) , 73-91
- [17] Rizzo, F.J.; Shippy, D.J. and Rezayat, M.: *A Boundary Integral Equation Method for Radiation and Scattering of Elastic Waves in Three Dimensions*. *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21 (1985), 115-129
- [18] Rezayat, M.; Shippy, D.J. and Rizzo, F.J.: *On Time-Harmonic Elastic-Wave Analysis by The Boundary Element Method for Moderate to High Frequencies*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 55 (1986) , 349-367
- [19] Cruse, T.A.: *Recent Advances in Boundary Element Analysis Methods*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 62 (1987) , 227-244
- [20] Achenbach, J.D.; Kechter, G.E. and Xu, Y.-L.: *Off-Boundary Approach to the Boundary Element Method*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 70 (1988) , 191-201
- [21] Dominguez, J.: *Dynamic Stiffness of Rectangular Foundations*, Report R78-20, M.I.T., 1978
- [22] Abascal, R. and Dominguez, J.: *Vibrations of Footings on Zoned Viscoelastic Soils*. *Journal of Engineering Mechanics*, 112 (1986) , No. 5, 433-447
- [23] Beskos, D.E.; Dasgupta, B. and Vardoulakis, I.G. : *Vibration Isolation using Open or Filled Trenches - Part I: 2D Homogeneous Soil*. *Computational Mechanics* 1 (1986) , 43-63

- [24] Spyrakos, C.C. and Antes, H.: *Time Domain Boundary Element Method Approaches in Elastodynamics : a Comparative Study*. Computers & Structures, Vol. 24 (1986) , No. 4, 529-535
- [25] Spyrakos, C.C. and Beskos, D.E.: *Dynamic Response of Flexible Strip-Foundations by Boundary and Finite Elements*. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 5 (1986) , No.2, 84-96
- [26] Beskos, D.E.: *Boundary Element Methods in Dynamic Analysis*. Applied Mechanics Reviews, 40, 1 (1987), 1-23
- [27] Kontoni, D.-P.N. and Beskos, D.E. : *Uniform Half-Plane Elastodynamic Problems by an Approximate Boundary Element Method*. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 6 (1987) , No. 4, 227-238
- [28] Ahmad, S. and Banerjee, P.K.: *Multi-Domain BEM for Two-Dimensional Problems of Elastodynamics*. Int. Journal for Numerical Methods in Engineering, 26 (1988) , 891-911
- [29] Gaitanaros, A. P. and Karabalis, D. L.: *Dynamic Analysis of 3-D Flexible Embedded Foundations by a Frequency Domain BEM-FEM*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics , 16 (1988), 653-674
- [30] Antes, H. and Estorff, O.von: *Dynamic Response Analysis of Rigid Foundations and of Elastic Structures by Boundary Element Procedures*. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 8 (1989) , No. 2, 68-74

- [31] Mohammadi, M. and Karabalis, D.L. : 3-D Soil-Structure Interaction Analysis by BEM: Comparison Studies and Computational Aspects. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 9 (1990), No. 2, 96-108
- [32] Wang, H. and Banerjee, P.K.: Generalized Axisymmetric Elastodynamic Analysis by Boundary Element Method. Int. Journal for Numerical Methods in Engineering, 30 (1990) , 115-131
- [33] Kellogg, O.D. : Foundations of Potential Theory, Springer-Verlag, New York, 1929
- [34] Manolis, G.D. and Beskos, D.E.: Boundary Element Methods in Elastodynamics, Unwin Hyman, London, 1988
- [35] Christensen, R.M.: Theory of Viscoelasticity, Academic Press, New York, 1982
- [36] Crandall, S.H.: The Role of Damping in Vibration Theory. Journal of Sound and Vibration, 11 (1970), 3-18
- [37] Scaln, R.H.: Linear Damping Models and Causality in Vibrations. Journal of Sound and Vibration, 13 (1970), 499-509
- [38] Gaul, L., Bohlen, S., Kempfle, S.: Transient and Forced Oscillations of Systems with Constant Hysteretic Damping. Mechanics Research Communications, 12 (1985), 187-201
- [39] Eringen, A. C. and Suhubi, E. S.: Elastodynamics - Vol. II - Linear Theory, Academic Press, New York, 1975

- [40] Banerjee, K.; Ahmad, S. and Manolis, G.D.: *Advanced Elastodynamic Analysis - Cap. 5 - Boundary Element Methods in Mechanics* - Edited by D. E. Beskos, Elsevier Science Publishers B. V., 1987
- [41] Banerjee, P.K. and Butterfield, R.: *Boundary Elements Methods in Engineering Science*, McGraw-Hill, London, 1981
- [42] Graffi, D.: *Sui Teoremi dei Reciprocità nei Fenomeni dipendenti dal tempo*. *Ann. Math.*, 18 (1939), No. 4, 173-200
- [43] Fung, Y. C.: *Foundations of Solid Mechanics*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1965
- [44] Brebbia, C.A. and Dominguez, J.: *Boundary Elements An Introductory Course*, Computational Mechanics Publications, Boston, 1989
- [45] Hartmann, F.: *Computing the C-Matrix in non-Smooth Boundary Points*, *New Developments in Boundary Element Methods - Proc. of the Second Int. Seminar*, Ed. C. A. Brebbia - Univ. Southampton, UK., March 1980, 367-379
- [46] Triantafyllidis, Th. and Dasgupta, B.: *The Causality of the Boundary Element Method in Elastodynamics*. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 9 (1990) , No. 2, 78-84
- [47] Stroud, A.H. and Secrest, D.: *Gaussian Quadrature Formulas*. Prentice-Hall, New York, 1966
- [48] Beer, G.: *Implementation of Combined BEM-FEM Analyses with Applications in Geomechanics*. in *Developments in BEM*, Vol. 4, Eds. Banerjee, P.K. and Watson, J.O., Elsevier (1986), 191-225

- [49] Gaul, L.: Zur Berechnung der Vertikal- und Kippschwingungen eines starren Fundamentes auf Viskoelastischem Halbraum. Diss. TU Hannover, 1976
- [50] Triantafyllidis, Th.: An Analytical Method to determine the Subsoil Coupling between Rigid Strip Foundations Bounded to the Surface of an Half-Space Subjected to Harmonic Excitation (in German). Ingenieur Archiv, 52 (1982), 145-157
- [51] Triantafyllidis, Th. and Neidhart, Th.: Diffraction effects between Foundations due to incident Rayleigh Waves. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 18 (1989), 815-835
- [52] Wolf, J.P. and Darbre, G.R.: Dynamic- Stiffness Matrix of Soil by the Boundary-Element Method : Conceptual Aspects. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 12 (1984), 385-400
- [53] Wolf, J.P. and Darbre, G.R.: Dynamic- Stiffness Matrix of Soil by the Boundary-Element Method : Embedded Foundation. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 12 (1984), 401-416
- [54] Wolf, J.P. and Oberhuber, P.: Non-linear Soil-Structure Interaction Analysis using Green's Function of Soil in the Time Domain. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 13 (1985), 213-223
- [55] Wolf, J.P. and Darbre, G.R.: Dynamic-Stiffness Matrix of Embedded and Pile Foundations by Indirect Boundary-Element Method. Nuclear Engineering and Design, 80 (1984), 331-342

- [56] Crouch, S.L. and Starfield, A.M.: *Boundary Element Methods in Solid Mechanics*, George Allen & Unwin, London, 1983
- [57] Wylie, C.R.: *Advanced Engineering Mathematics*, McGraw Hill, Tokyo, 1975
- [58] Mesquita Neto, E.: *Projeto de Pesquisa sobre Problemas da Elastodinâmica - FAPESP, trabalho em andamento*
- [59] Bowman, F.: *Introduction to Bessel Functions*, Dover Publications Inc., New York, 1958
- [60] Press, W.H.; Flannery, B.P.; Teukolsky, S.A. and Vetterling, W.T.: *Numerical Recipes - The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, Cambridge, 1986

8. BIBLIOGRAFIAS

- [01] Al-Hussaini, T.M. and Ahmad, S.: *Design of Wave Barriers for Reduction of Horizontal Ground Vibration*. Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, Geotechnical Engineering Division, 117, 4 (APR. 1991)
- [02] Vable, M.: *Importance and Use of Rigid Body Mode in Boundary Element Method*. Int. Journal for Numerical Methods in Engineering, 29 (1990), 453-472
- [03] Banerjee, P.K. and Mamoon, S.M.: *A Fundamental Solution due to a Periodic Point Force in the Interior of an Elastic Half-Space*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 19 (1990), 91-105
- [04] Jun, L.; Beer, G. and Meek, J. L.: *Efficient Evaluation Of Integrals of Order $1/r$, $1/r^2$, $1/r^3$ using Gauss Quadrature*. Engineering Analysis, 2 (1985), No. 3, 118-123
- [05] Estorff, O.von; Pais, L.A. and Kausel, E.: *Some Observations on Time Domain and Frequency Domain Boundary Elements*. Int. Journal for Numerical Methods in Engineering, 29 (1990), 785-800
- [06] Gasch, R.; Maurer, J. and Sarfeld, W.: *Soil Influence on Unbalance Response and Stability of a Simple Rotor-Foundation System*. Journal of Sound and Vibration, 93(4) (1984), 549-566
- [07] Rizzo, F.J.: *The Finite and Boundary Element Methods: one View of their Foundations*. IUTAM Symposium San Antonio, Texas, 1987, Th.A.Cruise (editor), 351-358

- [08] Rizzo, F.J. and Shippy, D.J.: *An Advanced Boundary Integral Equation Method for Three-Dimensional Thermoelasticity*. *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, 11 (1977) , 1753-1768
- [09] Spyrakos, C.C. and Beskos. D.E.: *Dynamic Response of Strip Foundations by a Time-Domain BEM*. *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, 23 (1986) , 157-165

Soluções Fundamentais (tensores de Stokes)

O ponto \underline{x} é o ponto de campo e o ponto $\underline{\xi}$ é o ponto de colocação. A figura (A.1) apresenta a configuração de uma região infinita com esses pontos. No ponto de colocação é aplicada a força concentrada e o ponto de campo é o receptor da excitação (receiver). O vetor raio $\underline{r} = \underline{x} - \underline{\xi}$ define os dois pontos no espaço.

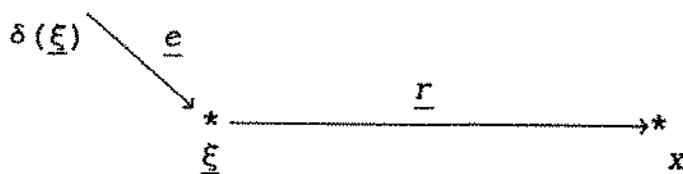


Figura A.1. Definição do ponto de colocação $\underline{\xi}$ e do ponto de campo \underline{x} .

A solução fundamental singular das equações da elastodinâmica ou tensor de deslocamentos de Stokes, para o problema bidimensional estacionário é dado por [13,14,34,39,44]

$$\bar{u}_{i,j}^*(\underline{x}, \underline{\xi}, \omega) = \frac{\bar{f}(\omega)}{2\pi\rho c_s^2} (\psi \delta_{ij} - \chi r_{,i} r_{,j}) , \quad (A.1)$$

onde as funções ψ e χ são as seguintes

$$\psi = K_0 \left(\frac{i\omega r}{c_s} \right) + \frac{c_s}{i\omega r} \left[K_1 \left(\frac{i\omega r}{c_s} \right) - \frac{c_s}{c_p} K_1 \left(\frac{i\omega r}{c_p} \right) \right] ; \quad (A.2)$$

$$\chi = K_2 \left(\frac{i\omega r}{c_s} \right) - \frac{c_s^2}{c_p^2} K_2 \left(\frac{i\omega r}{c_p} \right) ; \quad (A.3)$$

onde $i = \sqrt{-1}$, e K_0, K_1, K_2 são as funções de Bessel modificadas de segundo tipo e ordens 0, 1 e 2, respectivamente [59,60].

O tensor de trações \bar{t}_{ij}^* é obtido a partir da relação constitutiva equação (2.7), com a introdução do tensor de deslocamentos \bar{u}_{ij}^* , equação (A.1), de forma que

$$\bar{t}_{ij}^* = \frac{1}{2\pi} \left\{ \left(\frac{d\psi}{dr} - \frac{1}{r} \chi \right) \left(\delta_{ij} \frac{\partial r}{\partial n} + r_{,i} n_j \right) - \frac{2}{r} \chi \left(n_i r_{,j} - 2 r_{,i} r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n} \right) - 2 \frac{d\chi}{dr} r_{,i} r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n} + \left(\frac{c_p^2}{c_s^2} - 2 \right) \left(\frac{d\psi}{dr} - \frac{d\chi}{dr} - \frac{1}{r} \chi \right) r_{,j} n_i \right\} .$$

(A.4)