Autor: Gustavo Zarpelon Radaelli

Determinação do Carregamento Dinâmico em Mancais de Esfera de Contato Angular

35/2013

CAMPINAS

2013

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

Autor: Gustavo Zarpelon Radaelli

Determinação do Carregamento Dinâmico em Mancais de Esfera de Contato Angular

Orientador: Profa. Dr. Katia Lucchesi Cavalca Dedini

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica, na Área de Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico.

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO GUSTAVO ZARPELON RADAELLI E ORIENTADA PELA PROFA. DRA. KATIA LUCCHESI CAVALCA DEDINI.

Katia Lucchesi Cavalca

ASSINATURA DO ORIENTADOR

CAMPINAS

2013

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Rose Meire da Silva - CRB 8/5974

	Radaelli, Gustavo Zarpelon, 1989-
R116d	Determinação do carregamento dinâmico em mancais de esfera de contato angular / Gustavo Zarpelon Radaelli. – Campinas, SP : [s.n.], 2013.
	Orientador: Katia Lucchesi Cavalca Dedini.
	Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.
	1. Rolamento de esferas. 2. Dinâmica. 3. Cinemática. 4. Mecânica do contato. I. Dedini, Katia Lucchesi Cavalca,1963-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: Evaluation of the dynamic loading in rolling ball-bearings of angular contact
Palavras-chave em inglês:
Ball-bearings
Dynamics
Kinematics
Contact mechanics
Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico
Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica
Banca examinadora:
Katia Lucchesi Cavalca Dedini [Orientador]
Auteliano Antunes dos Santos Junior
Zilda de Castro Silveira
Data de defesa: 22-04-2013
Programa de Pós-Graduação: Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

Determinação do Carregamento Dinâmico em Mancais de Esfera de Contato Angular

Autor: Gustavo Zarpelon Radaelli

Orientador: Profa. Dr. Katia Lucchesi Cavalca Dedini

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:

Katia Lucchesi Cavalca.

Prof[a]. Dr[a]. Katia Lucchesi Cavalca Dedini
Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP/FEM

Prof. Dr. Auteliano Antunes dos Santos Junior
Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP/FEM

Prof[a]. Dr[a]. Zilda de Castro Silveira
Universidade de São Paulo – USP/EESC

Campinas, 22 de abril de 2013.

Dedico este trabalho aos meus familiares, principalmente aos meus pais Paulo e Adriana e ao meu irmão Guilherme, e a todos os meus amigos.

Agradecimentos

Este trabalho não poderia ser terminado sem a ajuda de diversas pessoas às quais presto minha homenagem:

Aos meus pais por todo o apoio que sempre me deram, desde o meu nascimento até o presente momento.

A todos os meus familiares e amigos que sempre me deram força e energia para seguir em frente e não desistir de meus objetivos.

A minha orientadora Professora Doutora Katia Lucchesi Cavalca por me guiar durante todo o desenvolvimento deste trabalho.

A todos os meus colegas de laboratório, que contribuíram diretamente e indiretamente para a conclusão deste trabalho.

A FAPESP pelo financiamento da parte inicial deste trabalho durante a iniciação científica.

É impossível atingir a perfeição,

mas é possível aproximar-se dela.

Telê Santana

Resumo

Os mancais possuem um papel expressivo dentre os componentes de um sistema rotativo, tendo o suporte de um elemento rotativo como sua principal função. Por trabalharem na interface entre elementos fixos e rotativos, os mancais constituem a origem de grande parcela das falhas ocorrentes em um sistema. Dentre estes, os mancais de rolamento de contato angular estão entre os mais utilizados, principalmente pela indústria automobilística. Apesar da ampla gama de aplicações, esses mancais usualmente estão sujeitos a falhas por fadiga de superfície, o que torna imprescindível um estudo aprofundado dos esforços e das velocidades aplicados às esferas e, consequentemente, às pistas interna e externa. A descrição dos esforços e das velocidades nas esferas é um desafio considerável, uma vez que as esferas estão sujeitas a uma lubrificação elastohidrodinâmica, que por sua vez, depende integralmente dos esforços e das velocidades das esferas para ser modelada, gerando assim um processo iterativo. O principal objetivo deste trabalho é analisar o rolamento de esferas de contato angular, com embasamento teórico na literatura clássica para, em seguida, iniciar o equacionamento do equilíbrio de forças nas esferas e no mancal, o qual por sua vez, resulta na força de contato associada à condição de lubrificação. Para tanto, um programa computacional para simulação numérica das análises cinemáticas e dinâmicas foi desenvolvido e seus resultados comparados com a literatura. Após realizar a validação inicial do modelo com a literatura, uma solução mais completa é proposta para reproduzir de uma forma mais detalhada o que se encontra em aplicações práticas. Os resultados encontrados pelas diversas simulações foram condizentes com os resultados encontrados na literatura clássica, atestando que o programa computacional desenvolvido é consistente.

Palavras Chave: Mancais de Elementos Rolantes; Contato Angular; Cinemática; Dinâmica; Velocidades Relativas; Momento Giroscópico.

Abstract

The bearings are of great importance and its major function is to support a rotating element. Due to the mandatory role of these components in the interface between fixed and rotating elements, the bearings are the source of a great percentage of the possible faults on a system. The rolling bearings of angular contact are one of the most utilized, mainly by the automotive industry. In spite of the great applications field, these bearings are usually subject to damage by superficial fatigue, which makes of great significance the detailed study of the efforts and the velocities on the spheres and, consequently, on the external and internal railways. The description of the efforts and velocities acting on the spheres is a considerable challenge, once the spheres are subject to an elastohidrodynamic lubrication that fully depends on the efforts and velocities of the spheres, generating an iterative process. The main objective of this work is to analyze the rolling bearings of angular contact, under theoretical bases, in order to accomplish the forces balance for the balls and for the bearing, which in turn results in the contact forces associated to the lubrication condition. The analysis requires the development of a computational program to numerically simulate the kinematic and dynamic conditions and, then, some of the results can be compared with the literature. After the initial validation of the model with the literature, a more complete solution is proposed to make it closer to practical applications. Results obtained by several simulations are compatible with those found in theoretical bases, attesting that the computational program developed is consistent.

Key Words: Rolling Elements Bearings, Angular Contact, Kinematics, Dynamics, Relative Velocities, Gyroscopic Moment.

Lista de Ilustrações

Lista de Tabelas

Lista de Abreviaturas e Siglas

Letras Latinas

$\boldsymbol{r}$	Raio de osculação	$[mm]$
$\boldsymbol{f}$	Razão de osculação	
$\boldsymbol{d_m}$	Diâmetro primitivo	$[mm]$
$\boldsymbol{D}$	Diâmetro da esfera	$[mm]$
$\boldsymbol{M_g}$	Momento giroscópico	$[N.mm]$
$\boldsymbol{Q}$	Carregamento	$[N]$
$\boldsymbol{K}$	Rigidez	$[N/mm^{1,5}]$
$\boldsymbol{P_d}$	Folga diametral	$[mm]$
$\boldsymbol{F}$	Força externa	$[N]$
$\boldsymbol{\mathcal{M}}$	Momento auxiliar	$[N.mm]$
$\boldsymbol{\mathfrak{M}}$	Momento externo	$[N.mm]$
$\boldsymbol{M}$	Momento externo	$[N.mm]$
$\boldsymbol{Z}$	Número de esferas	
$\boldsymbol{v}$	Velocidade linear	$[mm/s]$
$\boldsymbol{n}$	Rotação	$[rpm]$
$\boldsymbol{m}$	Massa	$[kg]$
$\boldsymbol{a}$	Aceleração	$[mm/s^2]$
$\boldsymbol{H}$	Momento angular	$[kg.m^2/s]$
$\boldsymbol{I}$	Momentos e produtos de inércia	$[kg.m^2]$
$\boldsymbol{A}$	Posição do centro do raio de curvatura	$[mm]$
$\boldsymbol{B}$	Curvatura total do mancal	
$\boldsymbol{X}$	Posição do centro da esfera	$[mm]$
$\boldsymbol{\kappa}$	Razão de elipsidade	
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	Integral de elipse de primeira ordem	
$\boldsymbol{\mathcal{E}}$	Integral de elipse de segunda ordem	
$\boldsymbol{\mathfrak{R}}$	Raio em relação ao centro de curvatura	$[mm]$

Letras Gregas

$\boldsymbol{\alpha}$	Ângulo de contato	$[°]$
$\boldsymbol{\rho}$	Curvatura	$[mm^{-1}]$
$\boldsymbol{\delta}$	Deformação	$[mm]$
$\boldsymbol{\delta}^*$	Deformação do contato adimensional	
$\boldsymbol{\psi}$	Posição angular da esfera (ângulo de Azymuth)	$[°]$
$\boldsymbol{\beta}$	Ângulo de nutação	$[°]$
$\boldsymbol{\omega}$	Velocidade angular	$[rad/s]$
$\boldsymbol{\gamma}$	$D \cos \alpha / d_m$	
$\boldsymbol{\rho}$	Massa específica	$[kg/m^3]$

Subscritos

$\boldsymbol{i}$	Contato da esfera com a pista interna
$\boldsymbol{o}$	Contato da esfera com a pista externa
$\boldsymbol{j}$	Posição da esfera
$\boldsymbol{n}$	Normal ao contato
$\boldsymbol{a}$	Axial
$\boldsymbol{r}$	Radial
$\boldsymbol{y}$	Em relação ao eixo y
$\boldsymbol{z}$	Em relação ao eixo z

Sobrescrito

$\mathbf{0}$	Ângulo Nominal

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Atualmente, o Brasil ocupa uma posição de destaque no cenário mundial em relação à produção e ao desenvolvimento de veículos automotores, ocupando a sexta posição como maior produtor mundial de veículos e o quarto maior mercado interno. Em 2011, segundo ANFAVEA (2012), foram produzidos 3,43 milhões de veículos automotores, representando aproximadamente três quartos da capacidade instalada no país, a qual atinge 4,3 milhões de unidades por ano. A indústria automobilística brasileira exerce grande influência sobre o desenvolvimento econômico e social do país, pois gera 1,5 milhões de empregos diretos e indiretos, além de possuir uma arrecadação tributária de 31,4 bilhões de dólares (2011). Portanto, existe uma demanda latente neste ramo da indústria no que concerne a pesquisa e desenvolvimento, de forma a posicioná-la no contexto mundial em termos de competitividade, qualidade e, sobretudo, inovação tecnológica.

Dentro deste contexto, inclui-se o estudo dos sistemas rotativos e seus componentes fundamentais, como eixos e mancais. Um veículo automotor possui um número expressivo de sistemas rotativos, dentre os quais se destacam o motor e os eixos de transmissão. Os mancais, por sua vez, possuem um papel significativo dentre os componentes de um sistema automotivo, tendo o suporte de elementos rotativos como sua principal função. Por trabalharem na interface entre elementos fixos e rotativos, os mancais podem constituir a origem de grande parcela das falhas ocorrentes em um sistema, ou seja, o melhor entendimento do funcionamento dos mancais pode contribuir para o aperfeiçoamento e para o desenvolvimento de novos projetos, com maior tempo de vida útil e melhor desempenho de suas funções.

Dentre estes elementos, os mancais de rolamento são os mais utilizados pela indústria metalomecânica, principalmente pela automobilística. Estes mancais podem ser utilizados em baixas e altas rotações, de 0 a $50.000\ rpm$ (Schaeffler, HR 1 Catalog), com elevada resistência à temperatura e baixo atrito. Apesar de ampla aplicação prática, o modo de falha crítico destes elementos ainda constitui tema de interesse em pesquisa, pois esses mancais estão sujeitos a falhas por fadiga de superfície, o que torna imprescindível um estudo aprofundado dos esforços no contato de cada esfera com as pistas e das velocidades resultantes nas esferas. A descrição dos esforços e das velocidades nas esferas consiste no maior desafio desta proposta, uma vez que estas estão sujeitas a uma lubrificação elastohidrodinâmica, a qual depende dos esforços e das velocidades para ser modelada, gerando assim um processo iterativo (Nonato, 2007).

Este trabalho tem como objetivo principal desenvolver um modelo dinâmico mais robusto que os atuais, e, desta forma, encontrar as componentes cinemáticas e dinâmicas que estabelecem a lubrificação elastohidrodinâmica no contato entre esfera e pistas, possibilitando um melhor entendimento do funcionamento do mancal.

Para alcançar o objetivo proposto, foi analisado o funcionamento do mancal de esferas de contato angular, tendo como base a literatura clássica sobre o assunto. Primeiramente, foi realizada uma ampla pesquisa bibliográfica a respeito dos mancais de elementos rolantes com ênfase em mancais de esferas de contato angular. Posteriormente foi desenvolvida uma modelagem teórica do mancal com o intuito de caracterizá-lo. Duas análises estáticas do mancal foram propostas para dar início à modelagem, sendo que uma considera que o mancal está submetido a um carregamento puramente radial e a outra, submetido a um carregamento puramente axial. Logo após, foi realizado um estudo cinemático detalhado do mancal, com a finalidade de encontrar as velocidades que caracterizam a força centrípeta e o momento giroscópico, que por sua vez, foram analisados em seguida. Por último, foram desenvolvidas as expressões de equilíbrio de posição e de forças para cada esfera e o equilíbrio de forças no mancal.

Após concluir o equacionamento que descreve o funcionamento do mancal em questão, foi criado um programa computacional para realizar diversas simulações numéricas, as quais foram utilizadas na verificação com resultados encontrados na literatura clássica.

Ao fim do trabalho, foi possível descrever o funcionamento do mancal de esfera de contato angular (contato seco) a partir de cinco graus de liberdade, dando assim um importante passo no avanço das pesquisas sobre o funcionamento deste tipo de mancal e entender melhor como os diversos parâmetros (geometria do mancal e condições de operação) influenciam o desempenho do mancal de contato angular.

2 REVISÃO DA LITERATURA

O uso de mancais com elemento rolante data de muitos séculos. Desde sua confecção com materiais orgânicos, como madeira, a tecnologia utilizada em rolamentos de esferas vem se desenvolvendo intensamente, sendo que, a partir de 1900, iniciou-se um estudo mais aprofundado do funcionamento deste sistema.

Em 1945, Palmgren publicou o livro *Ball and Roller Bearing Engineering*, onde realizou um estudo generalizado dos mancais de rolamento, tendo como ênfase sua aplicação, as principais forças envolvidas, a relação entre cargas e o tempo de vida dos mancais de rolamento. Em *Rolling Bearing Analysis* (Harris, 1991), há uma análise mais aprofundada dos carregamentos presentes no mancal de rolamento, tanto estáticos como dinâmicos, envolvendo forças e momentos.

No artigo *A General Theory for Elastically Constrained Ball and Radial Roller Bearing under Arbitrary Load and Speed Conditions* publicado por A. B. Jones em 1960, Jones faz um estudo minucioso acerca das velocidades e dos esforços a que as esferas do mancal de rolamento estão sujeitas quando o mancal está em operação. Está presente no artigo o desenvolvimento do equacionamento dos equilíbrios de forças e de posição das esferas e do equilíbrio de forças no mancal, incluindo a força centrípeta e o momento giroscópico. No equacionamento apresentado, foi considerado que a pista interna possui cinco graus de liberdade. Também são descritas as velocidades de rotação da esfera e da gaiola para cada esfera, propondo um critério de pista de controle, no qual a esfera possuirá rolamento puro no contato com uma das pistas, ou seja, a esfera não escorregará pela pista de controle. Todo o escorregamento da esfera ocorre na outra pista, que não é a pista de controle.

Em seu artigo *Dynamics of rolling element bearings part III: Ball bearing analysis & part IV: Ball bearing results*, Gupta (1979) apresentou a modelagem de uma esfera genérica, com separador e pistas em um mancal de rolamento de esfera através de equações diferenciais, levando em consideração a interação entre separador e esfera, e pista e separador, sendo que, neste último caso, a interface entre os componentes foi considerada hidrodinâmica. Neste artigo, evidencia-se que uma parcela razoável das falhas ocorridas em um rolamento de esfera esta relacionada com a instabilidade da esfera e/ou do separador. Este estudo demonstrou a existência de uma limitação do mancal, pois, anteriormente, a fadiga (figura 2.1) era considerada a única limitação do rolamento.

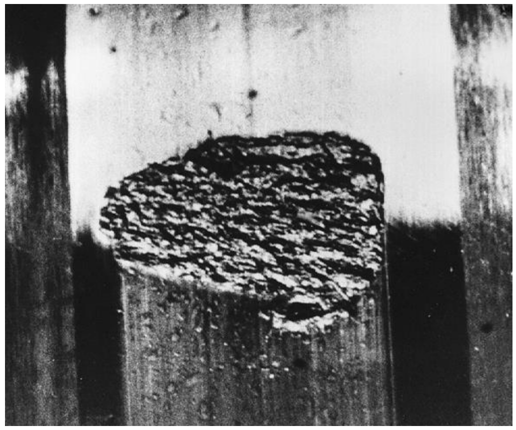


Figura 2.1. Cratera gerada a partir da fadiga da superfície.

Changsen (1991) fez uma análise onde utilizou a teoria de contato de Hertz no estudo do carregamento estático, conseguindo, assim, avaliar a distribuição de carregamento nos elementos de rolamento, além de realizar uma descrição cinemática do rolamento.

Em 1996, Meeks realizou um estudo minucioso sobre a dinâmica envolvida em um rolamento de esferas, no qual desenvolveu um modelo que permitia analisar o material utilizado no mancal, a deformação nos elementos causada pelo carregamento estático, os carregamentos axiais e radiais, o carregamento exercido pela forca centrípeta e os momentos giroscópicos. Nesta pesquisa, Meeks analisou o separador através de seis graus de liberdade e as equações foram desenvolvidas em coordenadas polares. Esta abordagem simplificou os cálculos, ou seja, o mecanismo de resolução do modelo tornou-se mais eficiente. O modelo precedente criado por Walters (1971), e posteriormente modificado por Gupta (1979), utilizava um referencial inercial fixo para o modelo das equações do rolamento, o que resultou num sistema de equações extremamente complexo, dificultando, assim, os cálculos computacionais, isto é, criando a necessidade de excessivas iterações e, consequentemente, a elevada demanda de tempo computacional para completar a análise.

Hagiu (1997) desenvolveu um estudo baseado na rigidez e no amortecimento dos rolamentos de contato angular utilizados em máquinas rotativas de alta rotação. O estudo evidenciou a grande iteratividade entre a dinâmica do mancal, a rigidez elástica do contato de Hertz e o grau de amortecimento do lubrificante.

Em 2002, Liao publicou um estudo sobre um rolamento submetido a altas rotações e aos carregamentos axiais e radiais para analisar as consequências da forca centrípeta. Através da analise dimensional e do equilíbrio de forças, foram determinados outros parâmetros envolvidos na dinâmica do rolamento, concluindo-se que, para evitar o escorregamento, é necessário aumentar a área de contato na direção axial.

Entre 1990 e 1994, Lim publicou *Vibration transmission through rolling element bearings*, um trabalho que está dividido em cinco partes, no qual Lim desenvolve um modelo matemático para descrever mais precisamente o funcionamento dos mancais de esferas e de rolos. No conjunto de artigos Lim propõe que o mancal seja definido por uma matriz de rigidez, a qual possuiria dimensão 6x6. Esta matriz foi então empregada na análise de algumas propriedades nas transmissões de vibrações em um sistema rotativo, devido à propriedade da matriz de rigidez de caracterizar o acoplamento entre o eixo e o mancal.

No artigo *Analysis of time-varying rolling element bearing characteristics* (2005), Liew desenvolve uma nova análise levando em consideração os efeitos da variação de tempo sobre a matriz de rigidez do mancal, expandindo, assim, a formulação da matriz de rigidez proposta por Lim (1990), devido à limitação da desconsideração dos efeitos da variação de tempo que ocorre na formulação de Lim.

Em 2006, Changqing realizou um estudo no qual um rotor era submetido a altas rotações, apoiado sobre rolamentos de esferas, com folga entre pistas e esferas, e ondulações na pista. O estudo mostrou que a folga, a pré-carga e o carregamento influenciam fortemente a estabilidade do sistema.

Em 2006, Harris publicou o livro *Advanced Concepts of Bearing Technology*, onde apresentou uma análise aprofundada sobre a dinâmica e a cinemática do rolamento. O livro destaca-se, principalmente, por detalhar a rotação da esfera normal ao contato (*spinning*), estabelecendo o critério de pista de controle (*raceway control*) proposto por Jones (1960), o efeito de altas rotações, as equações de equilíbrio e os momentos giroscópicos, e, portanto, constitui a base deste trabalho.

Ainda em 2006, Kang publicou os artigos *A Modification of the Jones-Harris Method for Deep-Groove Ball Bearings* (2006a) e *Stiffness determination of angular contact ball bearings by using neural networks* (2006b). No primeiro artigo Kang apresentou um estudo no qual foi realizada uma análise dinâmica do mancal de rolamento a partir do método de

Jones-Harris (MJH), tendo como principal modificação a utilização do método dos elementos finitos (MEF) na obtenção dos fatores e dos expoentes necessários nas relações carregamento-deflexão. Este novo método combinado MJH-MEF se mostrou mais preciso do que o MJH, além de exigir um menor tempo computacional em relação ao MEF. No segundo artigo Kang (2006b) empregou o método das redes neurais com o intuito de encontrar os coeficientes de rigidez de um mancal de esferas de contato angular. Kang concluiu que a determinação destes coeficientes a partir do método das redes neurais demanda pouco tempo computacional em comparação ao MJH.

Em 2008, Nataraj analisou a vibração ocorrida em um mancal de esferas devido à instabilidade da gaiola. Esta instabilidade ocorre quando o mancal opera suportando um eixo desbalanceado. Este estudo enfatizou que o número de esferas do mancal está intimamente relacionado à vibração deste. O acréscimo de esferas no mancal aumenta a sua rigidez, que, por sua vez, reduz drasticamente a vibração do sistema.

Jedrzejewski publicou em 2010 o *artigo Modelling of angular contact ball bearings and axial displacements for high-speed spindles*. Neste artigo Jedrzejewski realizou uma análise dinâmica de um mancal de esferas de contato angular considerando os efeitos da força centrípeta e dos momentos giroscópicos quando este funciona a altas rotações. O objetivo principal do artigo é contribuir para o desenvolvimento de sistemas de alta precisão, nos quais o deslocamento causado pelas deformações do eixo e dos mancais deve ser perfeitamente descrito.

Em sua Dissertação de Mestrado *Análise Dinâmica de Rolamentos de Esfera*, Carvalho (2010) inicia um estudo sobre a distribuição do carregamento nas esferas para diferentes valores de folga, sendo que o mancal está sujeito a uma carga radial pura. Na segunda parte do trabalho, realiza uma análise cinemática da esfera considerando a proposta de pista de controle, e, então, obtém as velocidades de rotação e escorregamento da esfera e das pistas. Por último, Carvalho descreve os efeitos da força centrípeta e do momento giroscópico atuando sobre um mancal radial puro, isto é, com ângulo de contato igual a zero.

Este trabalho promove a continuidade do trabalho desenvolvido por Carvalho (2010), concluindo os estudos estáticos, cinemáticos e dinâmicos do mancal de esfera de contato angular iniciados no mesmo e incluindo novos graus de liberdade ao modelo do mancal.

3 MANCAL DE ROLAMENTO DE ESFERA

O mancal de rolamento de esfera é um conjunto mecânico (Figura 3.1), geralmente formado por uma pista interna, uma pista externa, um conjunto de esferas e um separador (ou porta esferas), conforme descrito em Norton (2008). Os anéis possuem sulcos que servem como guia para o rolamento das esferas, enquanto o separador tem como função manter as esferas igualmente espaçadas entre si. Para a descrição dos efeitos presentes no mancal de rolamento, os quais, por sua vez, atuam no sistema rotativo, é imprescindível uma análise dos quatro elementos presentes neste rolamento e como estes interagem entre si (Carvalho, 2010).

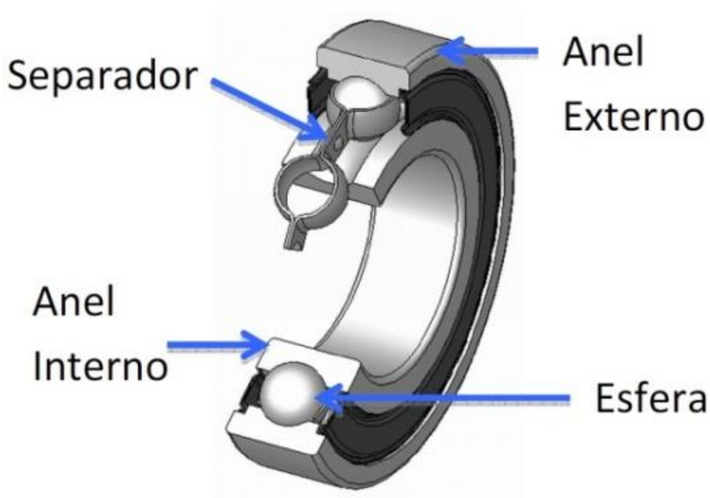


Figura 3.1. Elementos de um rolamento de esferas. (Nonato, 2009)

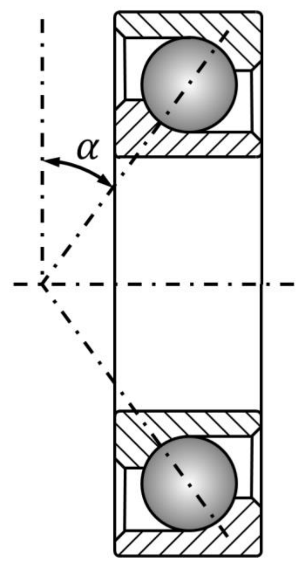


Figura 3.2. Vista em corte de um mancal de esferas de contato angular.

O primeiro registro de uma patente de rolamento de esfera ocorreu no ano de 1869, escrita por Julio Suriray, um mecânico de bicicletas de Paris. O desenvolvimento deste tipo de mancal já atravessava alguns séculos, pois Leonardo da Vinci, em pleno século XVI, desenvolveu e estudou um tipo de mancal rudimentar. Com o passar do tempo, surgiram novos materiais com melhores propriedades mecânicas, como por exemplo, ferro fundido e aço, os quais foram incorporados na produção dos mancais, que anteriormente eram produzidos em madeira ou bronze. O material padrão atualmente utilizado na produção dos mancais de rolamento é o aço cromo, sendo o 52100 o mais difundido entre estes.

Os mancais de esferas de contato angular são utilizados quando há possibilidade de ocorrer um carregamento combinado (radial e axial) no sistema rotativo. Este tipo de mancal pode suportar o carregamento combinado devido ao deslocamento que existe entre as pistas interna e externa na direção do eixo do rolamento. O deslocamento entre as pistas é indicado pelo ângulo de contato (α), definido como o ângulo formado entre a linha que liga os pontos de contato entre a esfera e as pistas no plano radial e a linha perpendicular ao eixo do rolamento (figura 3.2). A capacidade de suportar o carregamento axial é incrementada quanto maior for o ângulo de contato.

É importante ressaltar que o mancal de esferas de contato angular suporta carga axial em apenas uma direção, e, portanto, quando se faz necessário suportar cargas em ambas as direções, deve-se ser utilizados dois ou mais rolamentos de contato angular atuando em direções opostas, de acordo com a figura 3.3.

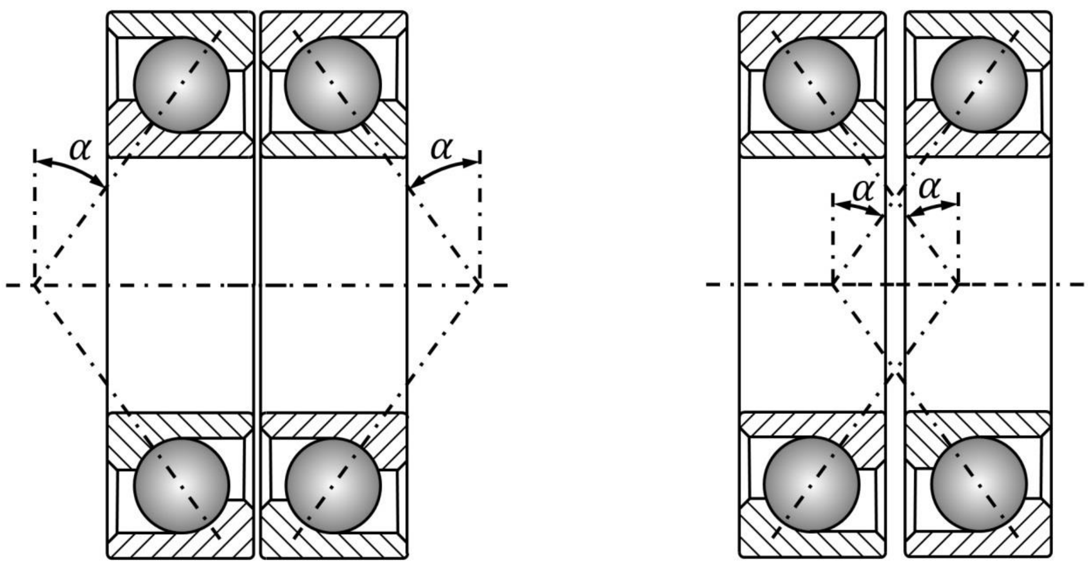


Figura 3.3. Exemplos de montagem de mancais de contato angular em conjunto.

Graças a esta capacidade de suportar carregamentos combinados, os mancais de contato angular são amplamente empregados na indústria automobilística. Em consequência disto, o mancal de contato angular é tema de inúmeros estudos e pesquisas, inclusive deste trabalho.

4 MODELAGEM TEÓRICA

Os mancais de rolamento estão sujeitos à falha por fadiga de superfície devido à pequena área de contato que ocorre entre o elemento rolante e as pistas interna e externa. Este tipo de falha está diretamente relacionado ao carregamento e ao número de ciclos aos quais os elementos do mancal são submetidos. As condições de operação, por sua vez, influenciam a condição de lubrificação entre os elementos rolantes e as pistas. O mancal também pode gerar vibrações e ruídos quando submetido a altas rotações, associados principalmente à condição de lubrificação no mancal. A vibração pode ser considerada como um critério de falha, pois impede o funcionamento normal do sistema rotativo.

Como a principal falha ainda ocorre devido à fadiga de superfície, este trabalho tem enfoque neste critério de falha. Esta falha está relacionada com as altas tensões de cisalhamento que ocorrem no contato e com o número de ciclos a que o sistema está submetido. Estes dois fatores estão diretamente relacionados com a nucleação e a propagação de trincas que, por sua vez, são os responsáveis pela ocorrência da falha por fadiga.

Um fator importante na modelagem de um rolamento de esferas é a lubrificação, que tem como principal função a redução do atrito entre os componentes do rolamento. A lubrificação torna a modelagem ainda mais complexa, pois o filme de óleo presente na superfície de contato entre a pista e a esfera não obedece à teoria de lubrificação hidrodinâmica, devido aos elevados níveis de tensões, gerados pelos esforços aplicados numa pequena área de contato.

Para resolver este problema, utiliza-se a teoria da lubrificação elastohidrodinâmica (EHD). A lubrificação EHD ocorre no contato entre superfícies não conformes (superfícies que possuem diferentes raios de curvatura, isto é, a região de contato não é extensa, tornando o contato praticamente pontual ou linear) como, por exemplo, em pares engrenados, mecanismos camo e seguidor e em mancais de elementos rolantes. Quando o elemento é submetido a uma carga normal ao contato, cria-se uma pequena área de contato devido às deformações elásticas da superfície. Essa pequena área pode, contudo, tornar-se suficientemente ampla a ponto de estabelecer um filme hidrodinâmico de lubrificante no contato, desde que as velocidades das superfícies em contato sejam suficientemente elevadas. Esta condição de lubrificação é chamada de elastohidrodinâmica, que é assim denominada devido à dependência entre as deformações elásticas, as elevadas pressões na superfície de contato e a espessura do filme lubrificante, as quais resultam num significativo aumento da viscosidade do lubrificante. A condição de lubrificação EHD é afetada, principalmente, pela velocidade relativa, pelo raio de curvatura no contato e pela piezo-viscosidade do lubrificante (Nonato, 2009; Nonato e Cavalca, 2010).

Portanto a modelagem do rolamento de esferas engloba as análises estática, cinemática e dinâmica dos componentes do mancal. Estas análises irão determinar as velocidades, as acelerações e os esforços a que estarão submetidos os elementos do mancal. Esta análise tem como finalidade determinar o carregamento associado à condição de lubrificação do mancal, pois, a partir das mesmas será possível caracterizar a lubrificação EHD.

4.1 **Modelo de Contato de Hertz**

A modelagem do rolamento de esferas será iniciada pela análise estática, ou seja, pela determinação da distribuição de carregamento que ocorre entre as esferas, considerando-se que o mancal não está sujeito aos carregamentos dinâmicos. Inicialmente é necessário apresentar a teoria de contato de Hertz, pela qual é possível determinar as rigidezes de contato que serão usadas na determinação do carregamento em cada esfera (Lundberg and Palmgren, 1947).

O modelo de contato de Hertz propõe que a região de contato submetida a um carregamento seja representada por uma elipse e a distribuição de carregamento sobre esta área elíptica tenha forma parabólica. A elipse formada no contato é definida pelos parâmetros a e b (figura 4.1), sendo que a partir destes dois parâmetros é possível encontrar a razão elíptica da área do contato (b/a).

A razão elíptica é definida pelos raios de curvatura no contato entre a esfera e as pistas (interna e externa). No caso do mancal de rolamento de esferas de contato angular, a razão elíptica depende do diâmetro da esfera, do diâmetro primitivo do mancal, do raio de osculação das pistas e do ângulo de contato. Portanto, é necessário realizar um estudo detalhado da geometria do mancal para encontrar os raios de curvatura do contato.

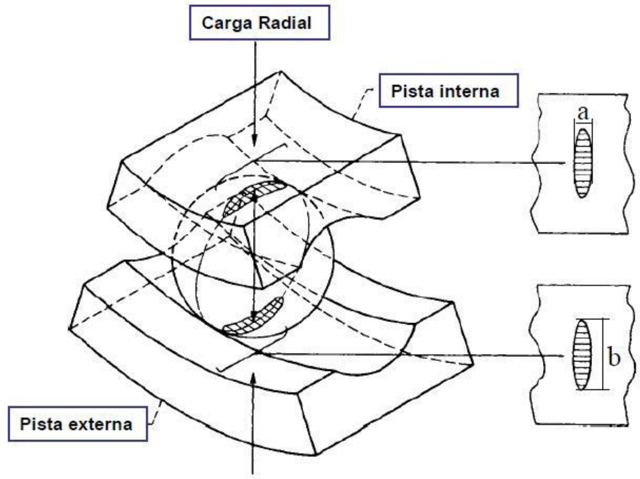


Figura 4.1. Esquema do contato de Hertz. (Nonato, 2009)

A geometria do contato seco (não lubrificado) está demonstrada na figura 4.2, sendo que os raios de curvatura estão referenciados da seguinte maneira: o corpo superior é denotado por I e o corpo inferior por II e os planos principais são definidos por 1 e 2. De acordo com as figuras 4.2 e 4.3, os raios de curvatura do contato entre a pista interna e a esfera de um mancal de contato angular são definidos por:

$$r_{I1} = \frac{1}{2}D \qquad r_{I2} = \frac{1}{2}D \qquad r_{II1} = \frac{1}{2}\left(\frac{d_m}{\cos\alpha} - D\right) \qquad r_{II2} = f_i D \qquad f_i = {}^{r_i}/_{D} \tag{1}$$

onde d_m é o diâmetro primitivo do mancal, α é o ângulo de contato, D é o diâmetro da esfera e r_i é o raio de osculação da pista interna.

Da mesma forma podem-se encontrar os raios de curvatura do contato entre a pista externa e a esfera:

$$r_{I1} = \frac{1}{2}D \qquad r_{I2} = \frac{1}{2}D \qquad r_{II1} = \frac{1}{2}\left(\frac{d_m}{\cos\alpha} + D\right) \qquad r_{II2} = f_o D \qquad f_o = {}^{r_o}/_{D} \tag{2}$$

onde r_o é o raio de osculação da pista externa.

A partir dos raios de curvatura pode-se definir o conceito de curvatura (ρ):

$$\rho = {}^{1}/_{r}$$

Para se realizar posteriormente o cálculo das rigidezes dos contatos, é necessário encontrar o valor da curvatura relativa ($F(\rho)$) para as duas pistas:

$$F(\rho)_{i,o} = \frac{(\rho_{I1} - \rho_{I2}) + (\rho_{II1} - \rho_{II2})}{\sum \rho} \tag{3}$$

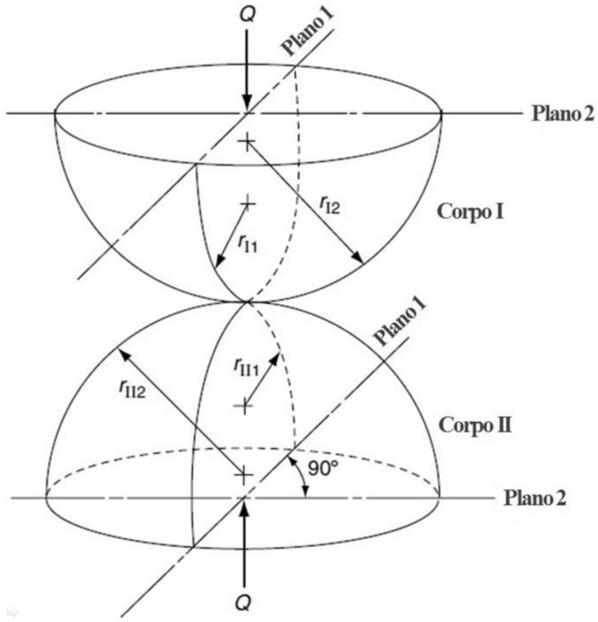


Figura 4.2. Geometria de corpos em contato.

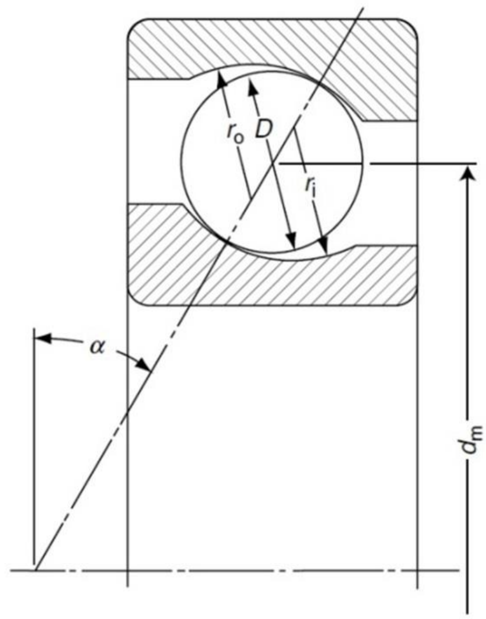


Figura 4.3. Geometria do rolamento.

De acordo Harris (1991), pode-se escrever a razão de elipsidade κ (b/a) em função das integrais de elipse de primeira e segunda ordem e da curvatura relativa para ambas as pistas:

$$\kappa_{i,o} = \sqrt{\frac{\mathcal{E}.\left(F(\rho)+1\right)-2.\mathcal{F}}{\mathcal{E}.\left(F(\rho)-1\right)}} \tag{4}$$

sendo:

$$\mathcal{F}_{i,o} = \int_0^{\pi/2} \left[1-\left(1-\frac{1}{\kappa^2}\right)\,\mathrm{sen}^2\,\phi\right]^{-1/2} d\phi \tag{5}$$

$$\mathcal{E}_{i,o} = \int_0^{\pi/2} \left[1-\left(1-\frac{1}{\kappa^2}\right)\,\mathrm{sen}^2\,\phi\right]^{1/2} d\phi \tag{6}$$

onde $\mathcal{F}$ é a integral de primeira ordem e $\mathcal{E}$ é a integral de segunda ordem e ϕ é o ângulo auxiliar da elipse de contato.

Os valores de κ, $\mathcal{F}$ e $\mathcal{E}$ são encontrados a partir de um processo iterativo, o qual é iniciado por uma estimativa inicial de κ. Sabendo-se que κ igual a 1 equivale a um contato circular, e que, nos mancais de elementos rolantes de esfera, o contato é elíptico devido aos diferentes raios de curvatura entre esfera e pistas, assume-se como valor inicial do processo iterativo $\kappa = 1{,}5$ (o que neste caso garante uma boa convergência do método). Assim, pode-se encontrar o valor estimado de $\mathcal{F}$ e $\mathcal{E}$ usando (5) e (6), e, como consequência, encontra-se um novo valor de κ

através da expressão (4). O processo se repete até encontrar uma diferença entre dois passos consecutivos ($\kappa_{n+1} - \kappa_n$) menor que um erro pré-determinado.

Com o processo iterativo finalizado é possível encontrar, para ambas as pistas, o valor da deformação do contato adimensional (δ^*), que será utilizado posteriormente no cálculo da rigidez do contato entre pista e esfera.

$$\delta^*{}_{i,o} = \frac{2\mathcal{F}}{\pi}\left(\frac{\pi}{2\kappa^2\mathcal{E}}\right)^{1/3} \tag{7}$$

4.2 **Distribuição de Carregamento nas esferas**

A análise estática do mancal de esfera será dividida em duas etapas: carregamento radial puro e carregamento axial puro. Na primeira etapa será realizada uma análise da distribuição de carregamento que ocorre nas esferas quando o mancal está sendo solicitado por uma carga radial pura, obtendo-se assim o valor do deslocamento radial da pista interna (δ_r) e o carregamento máximo a que as esferas estão submetidas (Q_{max}). Na segunda etapa será considerado que a força externa atuando sobre o mancal é puramente axial e aplicada no centro geométrico do mancal. Ao fim da segunda etapa tem-se o valor do deslocamento axial da pista interna (δ_a) e do carregamento distribuído Q, que é igual para todas as esferas.

É relevante esclarecer que Carvalho (2010) desenvolveu apenas a distribuição de carregamento nas esferas quando o mancal está sujeito a uma carga radial pura, ou seja, somente a primeira etapa da análise estática descrita neste trabalho.

4.2.1 **Carregamento Radial**

A distribuição de carregamento nas esferas é determinada através da análise estática de um mancal sujeito a uma força radial (F_r). Esta força radial provoca uma distribuição de carregamento entre as esferas, sendo que o carregamento em cada esfera está relacionado com a posição angular da esfera (ψ), conhecido como ângulo de Azymuth, conforme figura 4.4.

A distribuição de carregamento nas esferas também é influenciada pela força centrípeta (F_c) e pelos momentos giroscópicos (M_g) atuantes sobre o elemento rolante, no caso, as esferas. Nesta etapa do estudo, serão negligenciados os efeitos da força centrípeta e dos momentos giroscópicos, sendo que estes serão abordados na fase seguinte, quando da introdução do contato angular.

Considerando que um mancal de rolamento sempre possui vários elementos rolantes, o sistema estático de um rolamento é caracterizado como um sistema hiperestático, cuja solução necessita das relações carregamento-deflexão para o contato entre as pistas e cada uma das esferas, como pode ser observado nas figuras 4.4 e 4.5.

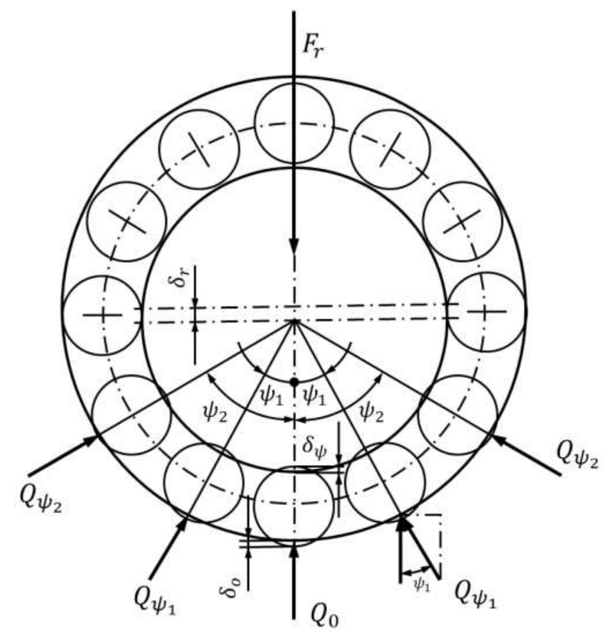


Figura 4.4. Distribuição de carregamento em mancais radiais. (Changsen, 1991)

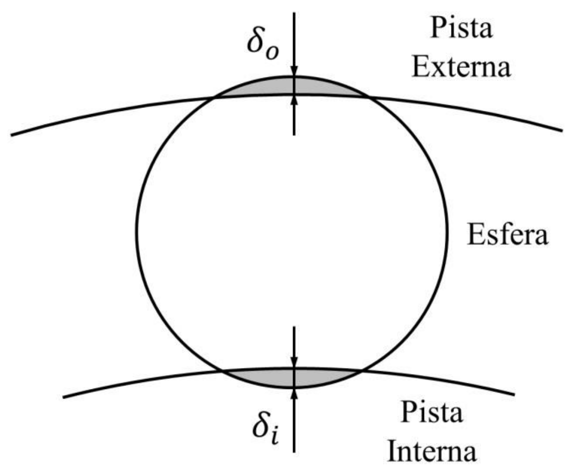


Figura 4.5. Deformação elástica nas pistas interna e externa.

Outro fator importante que deve ser considerado é a presença ou não de folga ou interferência entre as esferas e as pistas, sendo imprescindível na determinação do carregamento das esferas.

Para iniciar a análise da distribuição de carregamento na esfera, é necessário determinar as relações entre carregamento e deformação nos contatos entre pista e esfera. De acordo com Harris (1991), esta relação é equivalente a:

$$Q = K\delta^n \tag{8}$$

onde Q é o carregamento no contato, K é a rigidez do contato e $n = 1{,}5$ para mancal de rolamento de esferas.

A aproximação entre as duas pistas do rolamento é soma das aproximações entre esfera e pistas interna e externa (figura 4.5). Portanto, a deflexão total entre as duas pistas (δ_n) é soma da deformação elástica entre a esfera e a pista interna (δ_i) e da deformação elástica entre a esfera e a pista externa (δ_o):

$$\delta_n = \delta_i + \delta_o \tag{9}$$

Portanto, fazendo uma relação entre (8) e (9), pode-se obter a rigidez equivalente do contato (K_n), definida por:

$$K_n = \left[\frac{1}{(1/K_i)^{1/n} + (1/K_o)^{1/n}}\right]^n \tag{10}$$

onde K_i é a rigidez do contato entre esfera e pista interna e K_o é a rigidez do contato entre esfera e pista externa. Ambas podem ser encontradas a partir da seguinte relação:

$$K_p = 2{,}15.10^5(\Sigma\rho)^{-1/2}(\delta^*)^{-3/2} \tag{11}$$

que é valida para esferas e pistas de aço, sendo $\Sigma\rho$ é a soma das curvaturas do contato e δ^* é a deformação adimensional no contato, obtida pela teoria do contato de Hertz.

Neste ponto do estudo, o valor da rigidez equivalente do contato é aproximado pela equação (11), e, portanto, pode-se iniciar a análise da distribuição de carregamento propriamente dita. De acordo com a figura 4.4, o mancal está carregado por uma força radial F_r, sendo que cada esfera estará sujeita a um carregamento Q_ψ que varia conforme a posição angular ψ da esfera. A deformação total elástica (δ_ψ), para a posição angular ψ, pode ser definida a partir da seguinte expressão:

$$\delta_\psi = \delta_r \cos\psi - \frac{1}{2}P_d \tag{12}$$

onde δ_r é o deslocamento da pista interna na vertical (pista externa é considerada fixa) e P_d é a folga diametral do rolamento.

Após o desenvolvimento matemático da expressão (12), pode-se encontrar a equação (13) que relaciona a deflexão δ_ψ com a deflexão total máxima (δ_{max}) que ocorre quando o ângulo de Azymuth é igual à zero.

$$\delta_\psi = \delta_{max}\left[1 - \frac{1}{2\varepsilon}(1 - \cos\psi)\right] \tag{13}$$

no qual

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{P_d}{2\delta_r}\right) \tag{14}$$

Para avaliar o número de esferas sobre as quais o carregamento está distribuído no mancal, deve-se estimar o valor do ângulo ψ_l, quando a deflexão elástica no contato (δ_ψ) torna-se nula, de acordo com a equação (12):

$$\psi_l = \cos^{-1}\left(\frac{P_d}{2\delta_r}\right) \tag{15}$$

Usando a relação entre carregamento-deslocamento (8) e a equação (13), encontra-se uma expressão que determina o carregamento no elemento rolante para cada posição angular ψ:

$$Q_\psi = Q_{max}\left[1 - \frac{1}{2\varepsilon}(1 - \cos\psi)\right]^n \tag{16}$$

sendo Q_ψ o carregamento na posição angular ψ e Q_{max} o carregamento equivalente à máxima deflexão elástica (δ_{max}).

Aplicando-se a condição de equilíbrio estático no sistema, o carregamento radial deve se equilibrar com as componentes verticais dos carregamentos em cada elemento rolante:

$$F_r = \sum_{\psi=0}^{\psi=\pm\psi_l} Q_{max}\left[1 - \frac{1}{2\varepsilon}(1 - \cos\psi)\right]^n \cos\psi \tag{17}$$

De acordo com a expressão (8), obtém-se uma relação entre o carregamento máximo no elemento rolante (Q_{max}), a deflexão total máxima (δ_{max}) e a rigidez equivalente do elemento rolante:

$$\frac{F_r}{ZJ_r(\varepsilon, \psi_l)} = Q_{max} = K_n\delta_{max}^n = K_n\delta_{\psi=0}^n = K_n\left(\delta_r - \frac{1}{2}P_d\right)^n \tag{18}$$

onde Z é o número de esferas no mancal e J_r é a integral do carregamento radial.

Para resolver este sistema de equações, deve-se iniciar um processo iterativo usando como ponto inicial a expressão (19) como aproximação inicial do carregamento máximo no elemento rolante quando a folga do rolamento é nula (Harris, 2006).

$$Q_{max} = \frac{4{,}37F_r}{Z\cos\alpha} \tag{19}$$

Se houver uma folga nominal entre as esferas e as pistas, utiliza-se a seguinte aproximação:

$$Q_{max} = \frac{5F_r}{Z \cos \alpha} \tag{20}$$

A partir da primeira aproximação de Q_{max}, determina-se o valor de δ_r com a equação (18). Com o valor de δ_r é possível encontrar o valor ε e ψ_l, usando (14) e (15). A partir dos valores encontrados de ε e ψ_l e da expressão (18) obtém-se um novo valor de δ_r. O processo deve se repetir até que a diferença entre dois passos consecutivos seja menor que um erro pré-definido.

4.2.2 **Carregamento Axial**

Assim como no carregamento radial, a distribuição do carregamento axial nas esferas é encontrada a partir de uma análise estática do mancal. Porém, existe uma grande diferença entre os dois tipos de carregamentos, pois, se o carregamento axial for aplicado exatamente no centro geométrico do mancal, o carregamento será igualmente distribuído entre as esferas.

Considerando a projeção das forças no sentido axial devido ao contato angular, encontra-se a distribuição do carregamento:

$$Q = \frac{F_a}{Z \operatorname{sen} \alpha} \tag{21}$$

onde Q é o carregamento em cada esfera, F_a é o carregamento axial aplicado, Z é o número de esferas no mancal e α é o ângulo do contato angular.

É interessante ressaltar que o carregamento aplicado em cada esfera do mancal de contato angular será decomposto em duas componentes: uma radial e uma axial. Quando o carregamento é puramente axial, a soma das componentes axiais de cada esfera será igual ao carregamento externo aplicado, enquanto a soma das componentes radiais será igual a zero, ou seja, as componentes radiais se anulam entre si.

O carregamento axial externo causará uma deflexão normal ao contato (δ_n) ao longo da linha de contato. A partir desta deflexão é possível encontrar a componente axial da deflexão (δ_a), que representa o deslocamento axial da pista interna. Estas deflexões podem ser visualizadas na figura 4.6.

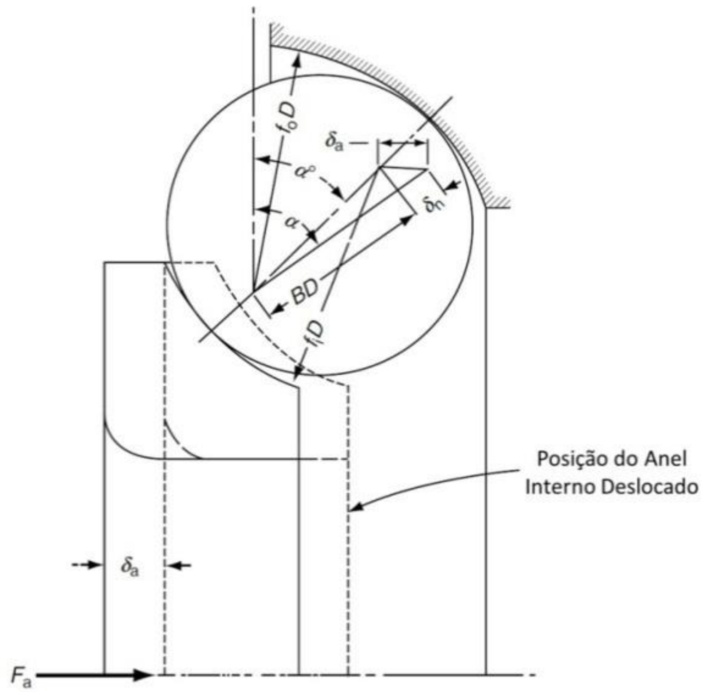


Figura 4.6. Mancal de contato angular sujeito a um carregamento axial. (Harris, 1991)

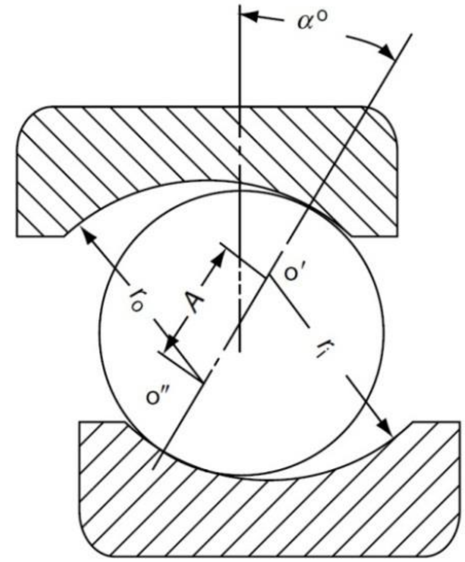


Figura 4.7. Posição dos centros dos raios de curvatura. (Harris, 1991)

Também é possível notar que o carregamento axial acarreta numa alteração do ângulo de contato angular, o qual possuía um valor nominal (α^0) antes do carregamento e após assume um novo valor (α).

De acordo com a figura 4.7, a distância entre os centros dos raios de curvatura da pista interna e da pista externa (A) quando não há carregamento pode ser definida por:

$$A = r_o + r_i - D = (f_0 + f_i - 1)D = BD \tag{22}$$

onde f_0 é igual a r_o/D, f_i é igual a r_i/D e B é igual a $(f_0 + f_i - 1)$ sendo conhecido como curvatura total do mancal.

Relacionando as componentes verticais das distâncias entre os centros dos raios de curvatura das pistas interna e externa antes e após o carregamento, encontra-se:

$$BD\ cos\ \alpha^0 = (BD + \delta_n) \cos \alpha \tag{23}$$

Isolando a componente da deflexão normal ao contato (δ_n), chega-se a:

$$\delta_n = BD \left(\frac{\cos \alpha^0}{\cos \alpha} - 1 \right) \tag{24}$$

Conforme a expressão (8) é possível associar o carregamento Q com a deformação δ_n através da seguinte expressão:

$$Q = K_n \delta_n^{1,5} \tag{25}$$

onde K_n é a rigidez equivalente do contato angular encontrada na seção anterior (4.2.1).

Substituindo a expressão (24) na expressão (25), tem-se:

$$Q = K_n (BD)^{1,5} \left(\frac{\cos \alpha^0}{\cos \alpha} - 1 \right)^{1,5} \tag{26}$$

Igualando o carregamento encontrado na expressão (21) ao carregamento da expressão (26), obtém-se:

$$\frac{F_a}{Z K_n (BD)^{1,5}} = \operatorname{sen} \alpha \left(\frac{\cos \alpha^0}{\cos \alpha} - 1 \right)^{1,5} \tag{27}$$

Para resolver a equação (27), será utilizado o método de Newton-Raphson para uma única equação. O método consiste em realizar sucessivas iterações, obedecendo a seguinte relação:

$$\alpha_{(n+1)} = \alpha_{(n)} - \frac{f\left(\alpha_{(n)}\right)}{f'\left(\alpha_{(n)}\right)} \tag{28}$$

onde $\alpha_{(n)}$ é o n-ésimo ângulo de contato angular da iteração, f é a função que deseja encontrar a solução e f' é a derivada da função f.

Relacionando a expressão (27) com a equação de Newton-Raphson (28):

$$\alpha_{(n+1)} = \alpha_{(n)} + \frac{\dfrac{F_a}{Z K_n (BD)^{1,5}} - \operatorname{sen} \alpha_{(n)} \left(\dfrac{\cos \alpha^0}{\cos \alpha_{(n)}} - 1 \right)^{1,5}}{\cos \alpha_{(n)} \left(\dfrac{\cos \alpha^0}{\cos \alpha_{(n)}} - 1 \right)^{1,5} + 1,5 \operatorname{tg}^2 \alpha_{(n)} \left(\dfrac{\cos \alpha^0}{\cos \alpha_{(n)}} - 1 \right)^{0,5} \cos \alpha^0} \tag{29}$$

Como aproximação inicial do método Newton-Raphson, foi encontrado o carregamento através da equação (21) e substituído na equação (26). Isolando-se o ângulo de contato α, encontrou-se como estimativa inicial:

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{\cos \alpha^0}{\left[\dfrac{Q}{K_n (BD)^{1,5}} \right]^{2/3} + 1} \right) \tag{30}$$

A iteração é iniciada até que se obtenha um erro relativamente pequeno entre dois ângulos consecutivos da iteração. Com o fim da iteração, tem-se o valor do novo ângulo de contato no mancal, e, a partir da expressão (21), é possível encontrar o carregamento em cada esfera.

Porém, ainda é necessário encontrar o valor do deslocamento axial da pista interna (δ_a). O deslocamento da pista interna é encontrado pela diferença entre as componentes horizontais das distâncias entre os centros dos raios de curvatura das pistas interna e externa antes e após o carregamento:

$$\delta_a = (BD + \delta_n)\,\text{sen}\,\alpha - BD\,\text{sen}\,\alpha^0 \tag{31}$$

Substituindo a expressão (24) na expressão (31) e realizando algumas simplificações, encontra-se o valor do deslocamento da pista interna:

$$\delta_a = \frac{BD\,\text{sen}\,(\alpha - \alpha^0)}{\cos\alpha} \tag{32}$$

Finalizadas as análises estáticas do carregamento radial e do carregamento axial, os valores de deslocamentos da pista interna δ_r e δ_a serão utilizados como estimativa inicial na análise dinâmica do mancal, que será discutida mais a frente nas seções 4.6, 4.7 e 4.8.

4.3 **Análise das Velocidades Angulares da Esfera**

O cálculo das velocidades principais de rotação de um rolamento é primordial para o estudo dinâmico do rolamento. Com base nas velocidades do rolamento pode-se encontrar a força centrípeta e os momentos giroscópicos que atuam sobre os elementos rolantes, sendo que estes dois parâmetros interferem na condição dinâmica do rolamento e alteram os valores de carregamento nos contatos, modificando, assim, a condição de lubrificação do mancal.

Outro ponto importante a ser abordado na análise cinemática são as velocidades de escorregamento que ocorrem no contato esfera-pista. Estas velocidades estão intimamente ligadas com a condição de lubrificação, de forma que se torna necessário um estudo detalhado das velocidades na região de contato. Este estudo não é trivial, pois envolve diferentes movimentos. A esfera possui uma velocidade angular em torno do seu próprio eixo e ao mesmo tempo realiza o movimento angular em relação ao eixo do mancal. Como o rolamento possui um movimento angular, a esfera também apresenta uma velocidade normal ao contato, fazendo com que o movimento das esferas do mancal seja definido a partir de seis graus de liberdade (três graus de translação e três de rotação), referenciados em um espaço tridimensional. Neste estudo são utilizados os sistemas de coordenadas representados na figura 4.8.

De acordo com a Figura 4.8, define-se:

xyz – sistema de coordenadas fixo com eixo x coincidente com o eixo de rotação do mancal;

$x'y'z'$ – sistema de coordenadas com x' paralelo a x, que gira em torno do eixo x, fixo à esfera;

ψ – ângulo de posição da esfera no mancal (Azimuth), ou o ângulo entre os eixos z e z';

β – ângulo entre o vetor velocidade de rotação da esfera (ω_R) e o plano $x'y'$;

β' – ângulo entre a projeção de ω_R no plano $x'y'$ e o eixo x' paralelo a x.

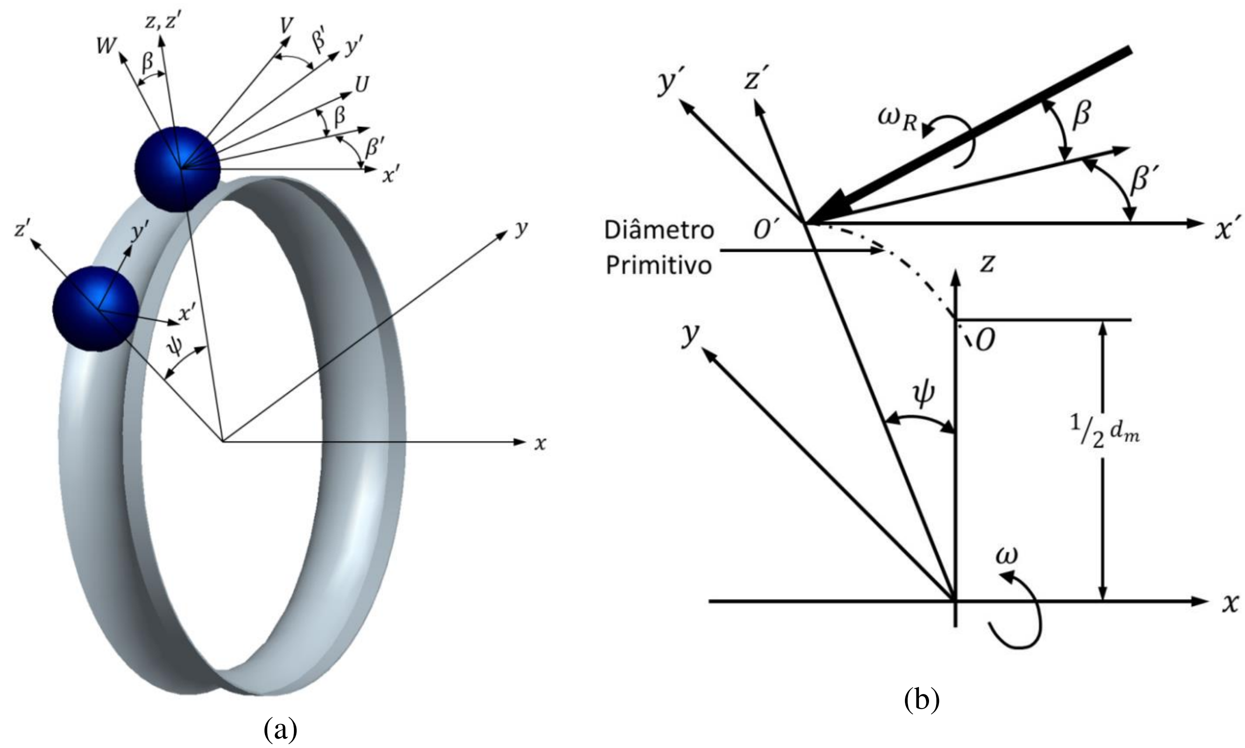


Figura 4.8. Sistemas de referência da esfera: a) conjunto do mancal;

b) detalhe das rotações e dos sistemas auxiliares.

A análise cinemática do rolamento será iniciada encontrando-se as velocidades principais de rotação dos componentes do mancal. As velocidades principais de rotação do rolamento serão resolvidas utilizando basicamente as relações (33) e (34):

$$v = \omega r \tag{33}$$

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} \tag{34}$$

De acordo com a figura 4.9, definem-se as velocidades lineares do contato da esfera com a pista interna (v_i) e com a pista externa (v_o), com base nas velocidades angulares dos mesmos (ω_i e ω_o), considerando que não ocorre escorregamento no contato:

$$v_i = \frac{1}{2}\omega_i(d_m - D\cos\alpha) \tag{35}$$

$$v_o = \frac{1}{2}\omega_o(d_m + D\cos\alpha) \tag{36}$$

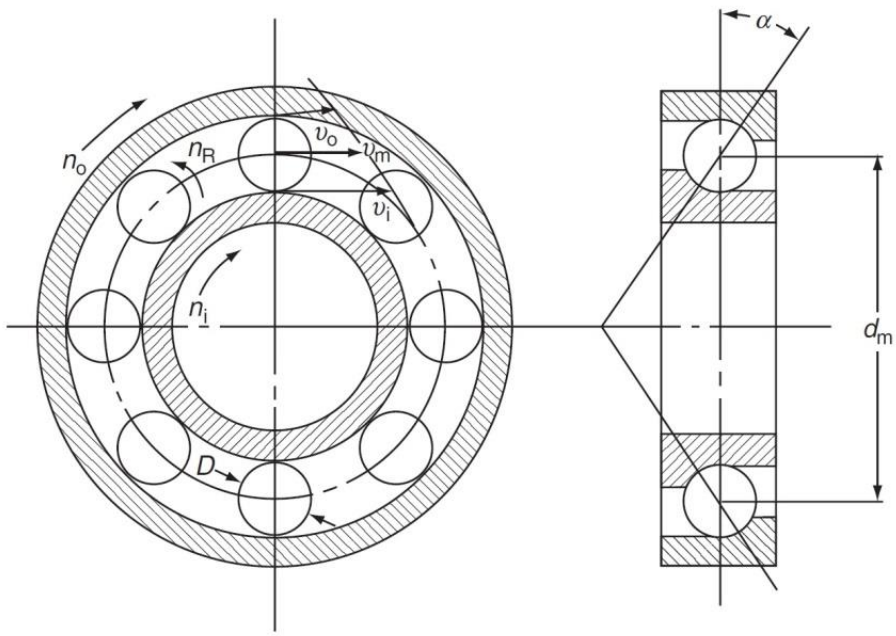


Figura 4.9. Velocidades lineares e angulares do rolamento (Harris, 1991).

Tendo conhecimento das velocidades v_i e v_o, pode-se encontrar a velocidade do separador do rolamento, que é equivalente à velocidade do centro do elemento rolante, ou seja, é igual à velocidade média entre a velocidade do contato com a pista externa e a velocidade do contato com a pista interna:

$$v_m = \frac{1}{2}(v_i + v_o) \tag{37}$$

Utilizando as expressões (33), (34) e (37), encontra-se a velocidade de rotação do separador (n_m) em rotações por minuto:

$$n_m = \frac{1}{2}[n_i(1-\gamma) + n_o(1+\gamma)] \tag{38}$$

onde γ é definido como:

$$\gamma = \frac{D \cos \alpha}{d_m} \tag{39}$$

Para o cálculo de rotação da esfera (n_R), é necessário realizar um desenvolvimento matemático envolvendo as velocidades de rotação do separador em relação à pista interna e à pista externa. Este desenvolvimento matemático está descrito em Carvalho (2010), após o qual se encontra a rotação da esfera (n_R) definida por:

$$n_R = \frac{1}{2}\frac{d_m}{D}(1-\gamma)(1+\gamma)(n_o - n_i) \tag{40}$$

Neste ponto, as velocidades principais de rotação do rolamento já estão definidas. Contudo ainda há uma velocidade muito relevante a ser encontrada, a velocidade de rotação normal à região de contato entre a esfera e as pistas de rolamento, conhecida por *spinning*. Esta velocidade foi experimentalmente observada por Jones (1960), que constitui a base para a análise cinemática do mancal, a qual considera que a rotação normal ao contato na pista externa é nula, estando esta sujeita a rolamento puro da esfera e, portanto, denominada pista de controle (*outer raceway control*).

Na figura 4.8 são definidos os sistemas de referência inercial (xyz) e os auxiliares ($x'y'z'$ e UVW). O sistema de referência local da esfera UVW é obtido a partir de duas rotações do sistema auxiliar $x'y'z'$, ou seja, realiza-se uma rotação em torno do eixo z', gerando o sistema de coordenadas $U'Vz'$ e, em seguida, uma segunda rotação em torno do eixo V, a qual leva ao sistema UVW. Este sistema é caracterizado pelos ângulos β (nutação no plano UW) e β' (nutação no plano UV). Na Figura 4.8 (b), a rotação própria da esfera é ω_R. As relações entre os sistemas de referências estão apresentadas no conjunto de equações (41).

$$\begin{gathered} x = x' \\ y = \frac{d_m}{2} sen\,\psi + y' \cos\psi + z' sen\,\psi \\ z = \frac{d_m}{2}\cos\psi + y' \operatorname{sen}\psi + z' \cos\psi \end{gathered} \tag{41}$$

O plano auxiliar UVW é criado de tal forma que, para uma esfera com velocidade angular ω_R, coincidente com o eixo U, tem-se $U = \omega_R$, $V = 0$ e $W = 0$. Assim sendo, as equações que definem as velocidades angulares da esfera no sistema local $x'y'z'$ são:

$$\begin{aligned} \omega_{x'} &= \omega_R \cos\beta \cos\beta' \\ \omega_{y'} &= \omega_R \cos\beta \,\mathrm{sen}\,\beta' \\ \omega_{z'} &= \omega_R \,\mathrm{sen}\,\beta \end{aligned} \tag{42}$$

Inicialmente, será aplicado o conceito da pista de controle externa, na qual a velocidade angular normal ao contato é nula, definindo o ângulo β nesta condição (Harris, 2006), assumindo $\beta' = 0$, ou seja, nutação apenas no plano UW para simplificar o problema inicial, facilitando a compreensão do fenômeno em si.

$$\beta = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{d_m \,\mathrm{sen}\,\alpha_o}{D + d_m \cos\alpha_o}\right) = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sen}\,\alpha_o}{\cos\alpha_o + \gamma'}\right) \tag{43}$$

onde $\gamma' = D/d_m$.

Detalhes da dedução da expressão (43) encontram-se em Carvalho (2010).

Como dito anteriormente, quando o mancal estiver em operação, os ângulos de contato entre esfera e pistas interna e externa irão diferir do ângulo de contato nominal. Isto ocorre devido aos efeitos da força centrípeta, dos momentos giroscópicos e do carregamento a qual cada esfera do mancal está submetida. Até este ponto, as expressões da análise cinética foram desenvolvidas tendo como variável principal o ângulo de contato nominal α, que a partir deste momento será indicado por α^o. A alteração no valor dos ângulos de contato torna necessário o desenvolvimento de novas expressões cinemáticas. Os ângulos de contato entre esfera e pista interna (α_i) e entre esfera e pista externa (α_o) serão as variáveis principais destas novas expressões.

Parte do desenvolvimento das expressões cinemáticas está descrita em Carvalho (2010), cuja continuidade é dada no presente trabalho. Nesta dissertação são explicitadas as relações entre as velocidades angulares dos componentes do sistema. No presente trabalho serão utilizadas as relações entre rotação da esfera e rotação da pista externa (ω_R/ω_o) e entre rotação da esfera e rotação da pista interna (ω_R/ω_i). Com o conhecimento destas relações, é possível encontrar os valores de ω_R, ω_i e ω_o utilizando o conceito de velocidade relativa.

No entanto, o tempo computacional necessário para encontrar a solução deste sistema pode ser extremamente oneroso. Desta forma, foram propostas algumas simplificações recomendadas na literatura. A primeira delas foi considerar o ângulo de nutação β' nulo, a segunda foi aproximar o valor dos raios de rolamento puro (${r_o}'$ e ${r_i}'$) para metade do diâmetro da esfera ($D/2$) e a terceira foi fixar uma das pistas, ou seja, apenas uma das pistas rotaciona.

Como resultado das considerações impostas ao modelo e algumas manipulações matemáticas, foi possível encontrar as expressões (44), (45) e (46).

$$\frac{\omega_R}{\omega} = \pm \frac{(\cos\alpha_o + \gamma')(1 - \gamma' \cos\alpha_i)}{\gamma' \cos\beta\,(1 + \cos(\alpha_i - \alpha_o))} \tag{44}$$

onde ω_R é a velocidade angular da esfera, ω é velocidade angular da pista, γ' é igual a D/d_m e o sinal da equação está relacionado a qual pista está rotacionando. Quando a pista interna é estacionária, ω é igual a ω_o e a equação é positiva (sinal superior). Quando a pista externa é estacionária, ω é igual a ω_i e a equação é negativa (sinal inferior).

Ainda foi possível definir as relações entre a velocidade de rotação da esfera em torno do eixo do mancal x (ω_m) e as velocidades de rotação da pista interna e da pista externa:

$$\frac{\omega_m}{\omega_i} = \frac{1 - \gamma' \cos\alpha_i}{1 + \cos(\alpha_i - \alpha_o)} \tag{45}$$

$$\frac{\omega_m}{\omega_o} = \frac{\cos(\alpha_i - \alpha_o) + \gamma' \cos\alpha_i}{1 + \cos(\alpha_i - \alpha_o)} \tag{46}$$

A equação (45) é válida quando a pista externa é estacionária e a pista interna rotaciona com velocidade angular ω_i e a equação (46) é válida quando a pista interna é estacionária e a pista externa rotaciona com velocidade angular ω_o.

O desenvolvimento das equações (44), (45) e (46) é detalhado no APÊNDICE A.

É possível verificar que, quando as esferas estiverem submetidas a carregamentos desiguais, isto é, os ângulos de contato α_i e α_o são distintos para cada esfera, as velocidades angulares da esfera (ω_R) e do centro da esfera em relação ao eixo de rotação do mancal (ω_m) possuirão valores diferentes para cada esfera.

As expressões (44), (45) e (46) serão utilizadas posteriormente no cálculo da força centrípeta e do momento giroscópico.

4.4 **Efeito da Força Centrípeta**

Além das componentes resultantes do carregamento externo, as esferas também estão sujeitas a força centrípeta gerada pela rotação da esfera em torno do eixo de rotação do mancal. O efeito da força centrípeta pode ser negligenciado quando o rolamento está funcionando em baixas rotações, porém, quando o rolamento está operando em altas rotações o estudo da força centrípeta se torna fundamental na análise dos carregamentos no contato esfera-pista. A força centrípeta possui direção radial e atua igualmente sobre todas as esferas.

Para encontrar o valor da força centrípeta é necessário definir alguns conceitos:

$$a_{z'} = \frac{1}{2} d_m \omega_m^2 \quad \Rightarrow \quad F_{z'} = \frac{1}{2} m d_m \omega_m^2 \quad \text{onde} \quad m = \frac{1}{6} \rho \pi D^3$$

onde $a_{z'}$ é a aceleração da esfera no eixo z', $F_{z'}$ é a força resultante devido à aceleração z', m é a massa da esfera e ρ é a massa específica do material utilizado na fabricação da esfera.

A partir destes parâmetros, define-se o valor da força centrípeta:

$$F_c = \frac{1}{12} \rho \pi D^3 d_m \omega_m^2 \tag{47}$$

Substituindo-se ω_m^2 pela identidade $(\omega_m/\omega)^2 \omega^2$, é obtida a seguinte expressão:

$$F_{cj} = \frac{1}{2} \, m d_m \omega^2 \left(\frac{\omega_m}{\omega}\right)_j^2 \tag{48}$$

onde j representa a j-ésima esfera do mancal.

O valor da expressão ω_m/ω é encontrado pela equação (45) ou (46) dependendo de qual pista rotaciona.

A força centrípeta causará efeitos sobre o carregamento no contato esfera-pista. Conforme a figura 4.10, o efeito da força centrípeta irá ocasionar uma diminuição no ângulo de contato entre a esfera e a pista externa, enquanto ocorrerá o aumento do ângulo de contato entre a esfera e a pista interna. Esta mudança ocorre devido ao aumento da deformação na pista externa, criando uma discordância entre os carregamentos no contato da pista interna e pista externa.

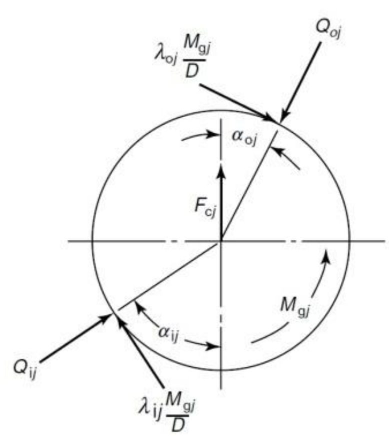


Figura 4.10. Equilíbrio de forças e momentos em altas rotações (Harris, 1991).

4.5 **Introdução dos Momentos Giroscópicos**

Os momentos giroscópicos surgem quando um corpo gira em torno de um eixo que, por sua vez, gira em torno de outro eixo. Nos mancais de contato angular a esfera gira com velocidade angular ω_R sobre o eixo $O'U$ como pode ser verificado na figura 4.8-b, enquanto o centro da esfera (ponto O') gira em torno do eixo x (eixo de rotação do mancal) com velocidade angular ω_m. Portanto o eixo de rotação $O'U$ também rotaciona em torno do eixo x com velocidade ω_m.

Para se definir os momentos giroscópicos atuantes nas esferas do mancal é necessário aplicar a equação de momentos para um movimento tridimensional, ou seja, a esfera deve ser definida como um corpo rígido.

De acordo com Hibbeler (2005) e Merian (2004), o momento angular de certo corpo rígido ($\vec{H}$) segundo um conjunto de eixos x, y e z com orientação arbitrária em relação aos eixos inercias do sistema, pode ser definido pela seguinte integral:

$$\vec{H} = \int \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm \tag{49}$$

onde $\vec{r}$ é o vetor posição da massa diferencial do corpo rígido.

Pode-se expressar a equação (49) em função de x, y e z:

$$H_x\vec{\imath} + H_y\vec{\jmath} + H_z\vec{k} = \int \left(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}\right) \times \left[\left(\omega_x\vec{\imath} + \omega_y\vec{\jmath} + \omega_z\vec{k}\right) \times \left(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}\right)\right] dm \tag{50}$$

Igualando as componentes $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ e $\vec{k}$, e transformando as integrais em momentos e produtos de inércia, chega-se às expressões (51) que definem a quantidade de movimento angular de um corpo rígido em relação a um ponto fixo ao referido corpo.

$$\begin{aligned} H_x &= I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z \\ H_y &= -I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z \\ H_z &= -I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \end{aligned} \tag{51}$$

Orientando-se os eixos x, y e z de maneira a zerar os produtos de inércia, ou seja, os eixos x, y e z se tornam os eixos principais de inércia, as expressões de quantidade de movimento angular se reduzem a:

$$H_x = I_x\omega_x \qquad H_y = I_y\omega_y \qquad H_z = I_z\omega_z \tag{52}$$

onde I_x, I_y e I_z são os momentos principais de inércia.

No caso da esfera, para tornar nulos os produtos de inércia, a origem do referencial xyz deve estar localizada exatamente no centro geométrico da esfera. Quando isto ocorre os momentos principais da esfera I_x, I_y e I_z são equivalentes a um mesmo valor I, pois a esfera é simétrica nas três dimensões.

O valor de I pode ser encontrado na literatura e é apresentado em Carvalho (2010), sendo equivalente a:

$$I = \frac{2}{5}mr^2 \quad ; \quad r = \frac{D}{2} \quad ; \quad m = \frac{4}{3}\pi\rho r^3 \quad \Rightarrow \quad I = \frac{1}{60}\pi\rho D^5 \tag{53}$$

Substituindo a expressão de momento de inércia (53) e as expressões de velocidades angulares da esfera (42) na expressão de quantidade de movimento angular (52), obtém-se:

$$\begin{gathered} H_{x'} = \frac{1}{60}\pi\rho D^5\omega_R \cos\beta \cos\beta' \\ H_{y'} = \frac{1}{60}\pi\rho D^5\omega_R \cos\beta \operatorname{sen}\beta' \\ H_{z'} = \frac{1}{60}\pi\rho D^5\omega_R \operatorname{sen}\beta \end{gathered} \tag{54}$$

No cálculo da equação dos momentos, será necessário ter conhecimento da derivada temporal da quantidade de movimento angular. Após uma breve análise das expressões que definem a quantidade de movimento angular, pode-se concluir que as derivadas temporais das mesmas em cada direção são nulas (velocidade angular de esfera ω_R e ângulos de nutação β e β' são constantes), portanto a derivada temporal da quantidade de movimento angular em relação sistema de coordenadas $x'y'z'$ com origem no centro da esfera é nula.

$$\dot{H}_{x'} = 0 \quad ; \quad \dot{H}_{y'} = 0 \quad ; \quad \dot{H}_{z'} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\dot{\vec{H}}\right)_{x'y'z'} = 0 \tag{55}$$

A equação geral para um movimento de rotação é definida por:

$$\sum \overrightarrow{M_o} = \dot{\overrightarrow{H_o}} \tag{56}$$

A expressão (56) define que a soma dos momentos em relação a um ponto O das forças atuantes sobre um corpo é igual à derivada temporal do momento angular.

No entanto, a equação (56) só pode ser utilizada quando todos os componentes forem determinados a partir de um referencial inercial. No caso da esfera, o momento angular é calculado tendo como referencial móvel um sistema fixo ao centro da esfera, ou seja, a expressão (56) não pode ser aplicada na solução deste caso. Quando isto ocorre deve-se levar em consideração a rotação do sistema de coordenadas local em relação ao referencial inercial. A expressão geral para este tipo de problema é defina por:

$$\sum\overrightarrow{M_o} = \left(\dot{\overrightarrow{H_o}}\right)_{x'y'z'} + \overrightarrow{\omega_m} \times \overrightarrow{H_o} \tag{57}$$

onde $\left(\dot{\overrightarrow{H_o}}\right)_{x'y'z'}$ é a derivada temporal da quantidade de movimento angular em relação ao referencial local $x'y'z'$ e $\overrightarrow{\omega_m}$ é a velocidade angular do referencial local em relação ao referencial inercial, sendo definido como:

$$\overrightarrow{\omega_m} = \overrightarrow{\omega_{m_x}} + \overrightarrow{\omega_{m_y}} + \overrightarrow{\omega_{m_z}} \tag{58}$$

Substituindo a expressão da quantidade de movimento angular (54), a expressão das derivadas temporais (55) e a expressão das velocidades angulares do referencial local (58) na expressão geral (57), tem-se:

$$\begin{aligned}
\sum\overrightarrow{M_x} &= \frac{1}{60}\pi\rho D^5\omega_R \operatorname{sen}\beta \,.\, \omega_{m_y} - \frac{1}{60}\pi\rho D^5\omega_R \cos\beta \operatorname{sen}\beta' \,.\, \omega_{m_z} \\
\sum\overrightarrow{M_y} &= \frac{1}{60}\pi\rho D^5\omega_R \cos\beta \cos\beta' \,.\, \omega_{m_z} - \frac{1}{60}\pi\rho D^5\omega_R \operatorname{sen}\beta \,.\, \omega_{m_x} \\
\sum\overrightarrow{M_z} &= \frac{1}{60}\pi\rho D^5\omega_R \cos\beta \operatorname{sen}\beta' \,.\, \omega_{m_x} - \frac{1}{60}\pi\rho D^5\omega_R \cos\beta \cos\beta' \,.\, \omega_{m_y}
\end{aligned} \tag{59}$$

Como o centro da esfera gira somente em torno do eixo x (eixo de rotação do mancal), ω_{m_y} e ω_{m_z} são nulos e ω_{m_x} é igual à velocidade angular do centro da esfera ω_m definida pelas expressões (34) e (38). Outra simplificação utilizada é considerar o ângulo de nutação β' igual à zero. Estas simplificações reduzem as expressões (59) em:

$$\begin{gathered}
\sum\overrightarrow{M_x} = \sum\overrightarrow{M_z} = 0 \\
\sum\overrightarrow{M_y} = -\frac{1}{60}\pi\rho D^5\omega_R\omega_m \operatorname{sen}\beta
\end{gathered} \tag{60}$$

definindo J como:

$$J = \frac{1}{60}\rho\pi D^5 \tag{61}$$

e substituindo ω_R e ω_m por suas respectivas equivalências $(\omega_R/\omega)\omega$ e $(\omega_m/\omega)\omega$ na equação (60), define-se o momento giroscópico atuante em cada esfera:

$$M_{gj} = J\left(\frac{\omega_R}{\omega}\right)_j \left(\frac{\omega_m}{\omega}\right)_j \omega^2 \operatorname{sen}\beta \tag{62}$$

Percebe-se que o sinal negativo do momento giroscópico $\overrightarrow{M_y}$ da expressão (60) é devido à orientação do sistema de referência utilizado em Harris (1991) e invertido na figura 4.10, e, portanto, é positivo na equação (62).

Observando-se a expressão (62), nota-se que o momento giroscópico varia linearmente com o valor de sen β, ou seja, quanto maior for o valor de β (consequência de um maior ângulo de contato entre esfera e pista externa na equação (43)), maior será o valor do momento giroscópico. Nos mancais puramente radiais ($\alpha^0 = 0$ e, portanto, $\alpha_o = 0$) o valor de β é nulo e consequentemente não há momento giroscópico atuando no sistema.

O momento giroscópico gerado no mancal é totalmente resistido pelas forças de atrito entre a esfera e as pistas interna e externa, e pode ser negligenciado quando o mancal estiver atuando a baixas rotações.

4.6 **Equações de Equilíbrio de Posição e de Forças nas Esferas**

Quando o mancal está operando em altas rotações, os valores da força centrípeta e do momento giroscópico tornam-se suficientemente altos para criar um desequilíbrio de forças nas esferas. Para se reestabelecer o equilíbrio de forças, a esfera se reposiciona (alterando valores de ângulo de contato α_i e α_o e de deformações no contato δ_i e δ_o) de forma a compensar os efeitos da força centrípeta e do momento giroscópico.

O novo equilíbrio é encontrado a partir da relação entre o equilíbrio de posição da esfera e o equilíbrio de esforços aos quais as esferas estão submetidas. Como já foi realizado um estudo detalhado da força centrípeta e dos momentos giroscópicos, é possível realizar uma análise dinâmica completa do sistema.

Para iniciar o desenvolvimento das equações de equilíbrio, é necessário definir a posição angular de cada esfera dentro do mancal. Esta posição está exposta na figura 4.11, sendo que as esferas estão espaçadas por um determinado ângulo $\Delta\psi$, que depende do número de esferas. A j-ésima esfera está localizada sobre o ângulo ψ_j em relação ao eixo vertical.

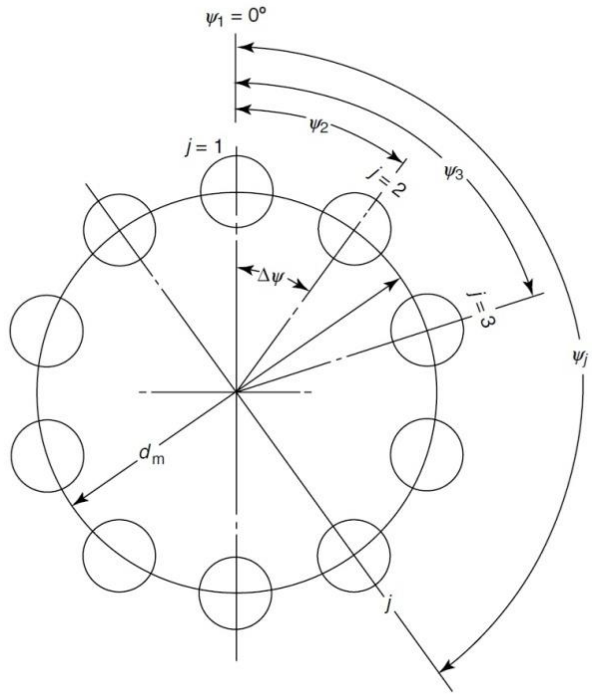


Figura 4.11. Posição angular de cada esfera no plano yz. (Harris, 1991).

$\Delta\psi = 2\pi/Z$ e $\psi_j = \Delta\psi(j-1)$

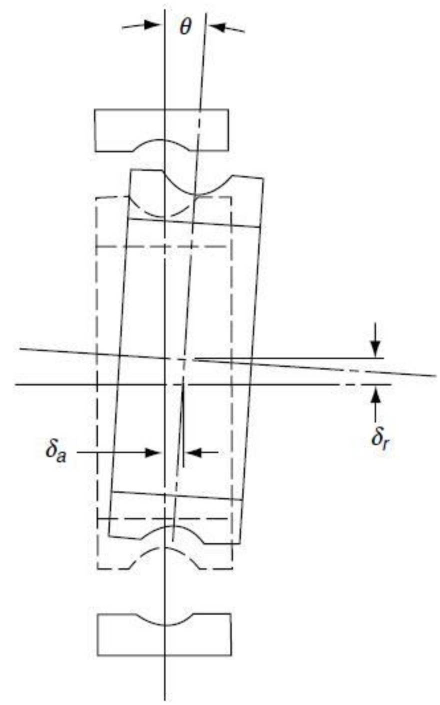
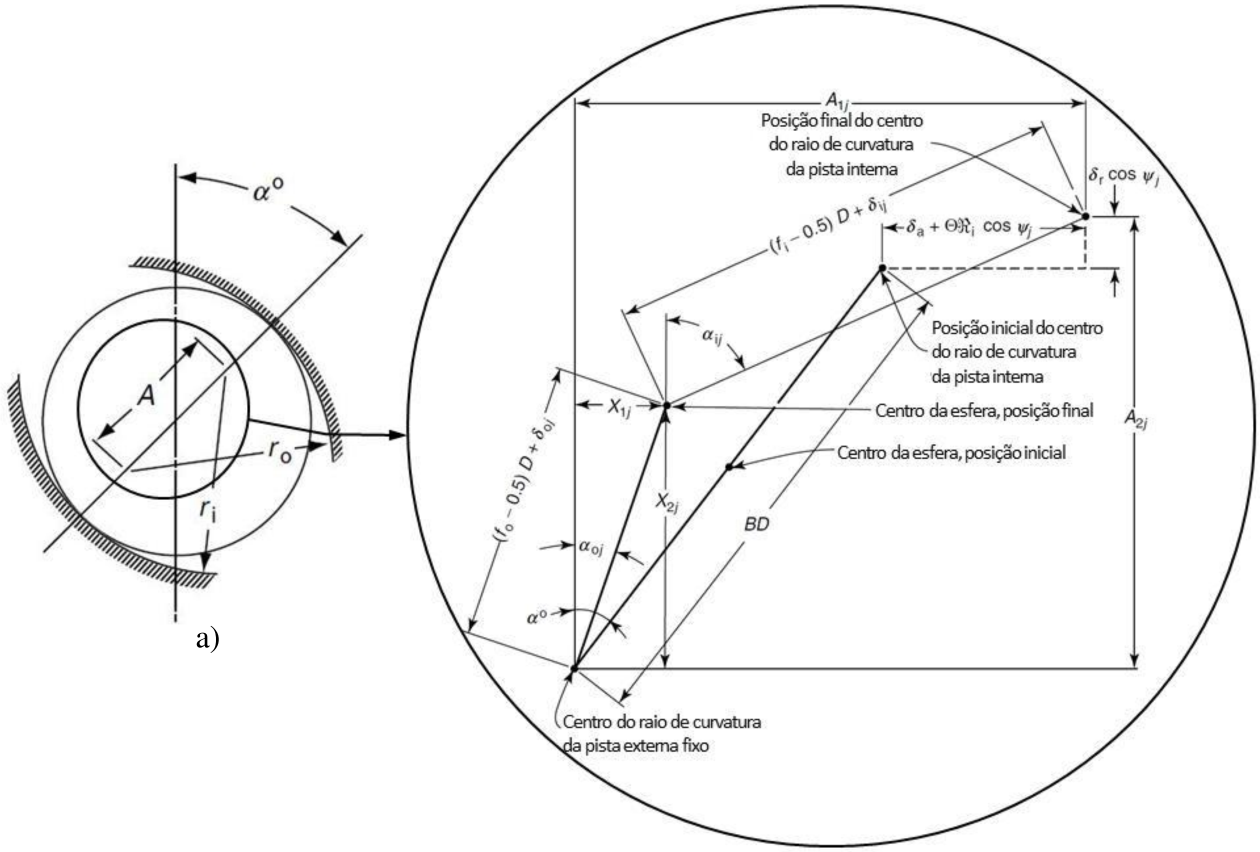


Figura 4.12. Deslocamentos da pista interna (pista externa fixa) devido a um carregamento combinado.

Quando é aplicado um carregamento estático no mancal, haverá uma deformação no contato entre esfera e pista interna (δ_i) e entre esfera e pista externa (δ_o). Estas deformações aumentam a distância entre os centros de curvatura da pista interna e da pista externa com um valor igual a $\delta_i + \delta_o$.

Quando o mancal é submetido a um carregamento estático, o centro da esfera continua posicionado sobre a linha que conecta os dois centros de raio de curvatura, assim como acontece quando não há carregamento. Entretanto quando o mancal estiver em funcionamento (não-estático) a força centrípeta irá alterar os ângulos de contato α_i e α_o e, por consequência, a posição do centro da esfera não estará mais sobre a linha que conecta os centros dos raios de curvatura, como por ser visto na figura 4.13-b.

Na descrição das equações de equilíbrio das esferas, será assumido que a pista externa é fixa, ou seja, seu centro de raio de curvatura permanece fixo, enquanto a pista interna estará sujeita aos deslocamentos mostrados na figura 4.12 e seu centro de raio curvatura está sujeito a um deslocamento idêntico.



a) b)

Figura 4.13. Posição do centro da esfera e dos centros dos raios de curvatura das pistas interna e externa numa posição ψ, com e sem carregamentos aplicados (Harris, 1991):

a) sistema pista interna, esfera e pista externa; b) detalhe da geometria.

De acordo com a figura 4.13-b, é possível definir a distância entre a posição final do centro da esfera e o centro do raio de curvatura da pista externa na posição angular j:

$$\Delta_{oj} = r_o - \frac{D}{2} + \delta_{oj} = (f_o - 0{,}5)D + \delta_{oj} \tag{63}$$

Da mesma forma encontra-se a distância entre a posição final do centro da esfera e o centro do raio de curvatura da pista interna:

$$\Delta_{ij} = r_i - \frac{D}{2} + \delta_{ij} = (f_i - 0{,}5)D + \delta_{ij} \tag{64}$$

onde δ_{oj} e δ_{ij} são as deformações normais ao contato entre a esfera e as pistas externa e interna respectivamente.

Considerando os deslocamentos da pista interna mostrados na figura 4.12, a posição do centro do raio de curvatura da pista interna pode ser determinada a partir das distâncias A_{1j} e A_{2j}

(figura 4.13-b), que tem como referência a posição do centro do raio de curvatura da pista externa. A_{1j} e A_{2j} são definidos pelas seguintes expressões:

$$A_{1j} = BD \text{ sen } \alpha^o + \delta_a + \theta \Re_i \cos \psi_j \tag{65}$$

$$A_{2j} = BD \cos \alpha^o + \delta_r \cos \psi_j \tag{66}$$

onde B é a curvatura total do mancal e é igual a $(f_0 + f_i - 1)$, δ_r é o deslocamento radial da pista interna, δ_a é o deslocamento axial da pista interna, θ é o desalinhamento angular da pista interna, ψ_j é a posição angular de cada esfera e $\Re_i$ é a distância entre o centro geométrico do mancal e o centro do raio de curvatura da pista interna (figura 4.14) e equivale a:

$$\Re_i = \frac{1}{2} d_m + (f_i - 0{,}5) D \cos \alpha^o \tag{67}$$

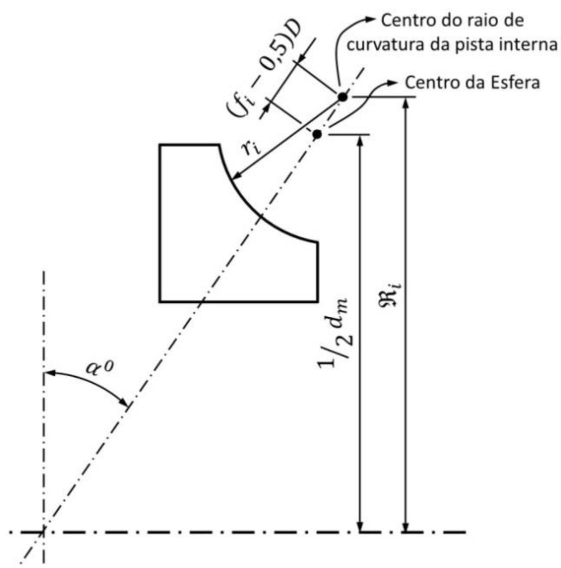


Figura 4.14. Distância entre o centro geométrico do mancal e o centro do raio de curvatura da pista interna ($\Re_i$).

Para determinar a nova posição do centro da esfera será necessário definir duas novas variáveis X_{1j} e X_{2j}. Estas variáveis descrevem a posição do centro da esfera em relação ao ponto fixo no centro do raio de curvatura da pista externa. A partir da figura 4.13-b definem-se as relações geométricas entre as variáveis do sistema e, assim, determinam-se as duas expressões de equilíbrio de posição da esfera:

$$\left(A_{1j} - X_{1j}\right)^2 + \left(A_{2j} - X_{2j}\right)^2 - \left[(f_i - 0{,}5)D + \delta_{ij}\right]^2 = 0 \tag{68}$$

$$X_{1j}^2 + X_{2j}^2 - \left[(f_o - 0{,}5)D + \delta_{oj}\right]^2 = 0 \tag{69}$$

Também pode-se determinar o valor dos ângulos de contato α_{ij} e α_{oj} a partir de relações geométricas representadas na figura 4.13-b:

$$\cos\alpha_{oj} = \frac{X_{2j}}{(f_o - 0{,}5)D + \delta_{oj}} \tag{70}$$

$$\operatorname{sen}\alpha_{oj} = \frac{X_{1j}}{(f_o - 0{,}5)D + \delta_{oj}} \tag{71}$$

$$\cos\alpha_{ij} = \frac{A_{2j} - X_{2j}}{(f_i - 0{,}5)D + \delta_{ij}} \tag{72}$$

$$\operatorname{sen}\alpha_{ij} = \frac{A_{1j} - X_{1j}}{(f_i - 0{,}5)D + \delta_{ij}} \tag{73}$$

Neste ponto já se possui o conhecimento de duas equações de equilíbrio de posição da esfera e se necessita encontrar as expressões que determinam o equilíbrio dinâmico de cada esfera. O equilíbrio dinâmico pode ser determinado a partir do equilíbrio de forças na esfera, as quais estão representadas na figura 4.10. A figura 4.10 mostra o plano que passa pelo centro da esfera e pelo eixo do mancal para uma esfera localizada em determinado ângulo ψ_j. Será considerado que as forças de fricção não-coplanares são insignificantes.

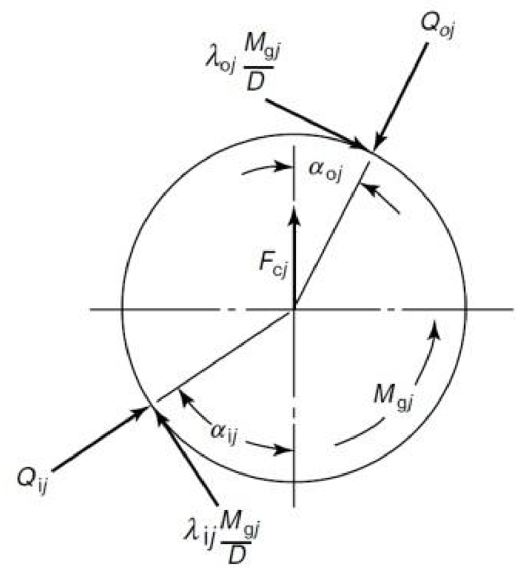


Figura 4.10. Equilíbrio de forças e momentos em altas rotações (Harris, 1991).

Observar-se que a figura 4.10 possui dois termos que ainda não foram citados: λ_{ij} e λ_{oj}. Estes termos estão relacionados ao conceito de pista de controle, e determinam quanto o momento giroscópico é resistido pelo atrito no contato da esfera com a pista interna e quanto é resistido no contato com a pista externa respectivamente. Por esta definição conclui-se que a soma de λ_{ij} e λ_{oj} deve ser igual a 2, sendo que λ_{ij} e λ_{oj} variam de 0 a 2 de forma a compensar o diâmetro da esfera na transformação de momento para força (equações (76) e (77)). Se a velocidade de rotação do mancal for suficiente elevada para o sistema ser aproximado pela condição de *outer raceway control* (a pista de controle é a pista externa), o momento giroscópico é inteiramente resistido pelo atrito entre esfera e pista externa, isto é, λ_{oj} será igual a dois enquanto λ_{ij} será nulo. Caso contrário, o momento giroscópico é igualmente e totalmente resistido pelo atrito nos contatos entre esfera e pistas interna e externa ($\lambda_{oj} = \lambda_{ij} = 1$).

Os carregamentos normais aos contatos (Q_{ij} e Q_{oj}) podem ser definidos a partir da expressão (8):

$$Q_{oj} = K_{oj}\delta_{oj}^{1,5} \tag{74}$$

$$Q_{ij} = K_{ij}\delta_{ij}^{1,5} \tag{75}$$

Analisando a figura 4.10, chega-se às equações de equilíbrio de forças na horizontal (76) e na vertical (77).

$$Q_{ij}\, sen\, \alpha_{ij} - Q_{oj}\, sen\, \alpha_{oj} - \frac{M_{gj}}{D}\left(\lambda_{ij} \cos \alpha_{ij} - \lambda_{oj} \cos \alpha_{oj}\right) = 0 \tag{76}$$

$$Q_{ij} \cos \alpha_{ij} - Q_{oj} \cos \alpha_{oj} + \frac{M_{gj}}{D}\left(\lambda_{ij}\, sen\, \alpha_{ij} - \lambda_{oj}\, sen\, \alpha_{oj}\right) + F_{cj} = 0 \tag{77}$$

Substituindo as expressões (70), (71), (72), (73), (74) e (75) nas expressões (76) e (77), obtêm-se as seguintes expressões:

$$\frac{\frac{\lambda_{oj} M_{gj} X_{2j}}{D} - K_{oj}\delta_{oj}^{1,5} X_{1j}}{(f_o - 0,5)D + \delta_{oj}} + \frac{K_{ij}\delta_{ij}^{1,5}\left(A_{1j} - X_{1j}\right) - \frac{\lambda_{ij} M_{gj}}{D}\left(A_{2j} - X_{2j}\right)}{(f_i - 0,5)D + \delta_{ij}} = 0 \tag{78}$$

$$\frac{K_{oj}\delta_{oj}^{1,5} X_{2j} + \frac{\lambda_{oj} M_{gj} X_{1j}}{D}}{(f_o - 0,5)D + \delta_{oj}} - \frac{K_{ij}\delta_{ij}^{1,5}\left(A_{2j} - X_{2j}\right) + \frac{\lambda_{ij} M_{gj}}{D}\left(A_{1j} - X_{1j}\right)}{(f_i - 0,5)D + \delta_{ij}} - F_{cj} = 0 \tag{79}$$

As expressões (68), (69), (78) e (79) são resolvidas simultaneamente para X_{1j}, X_{2j}, δ_{ij} e δ_{oj}. O valor de entrada da iteração serão os valores de deslocamento radial (δ_r) e axial (δ_a) da pista interna encontrada na análise estática. Porém será necessária a entrada de mais parâmetros como estimativa inicial. Para encontrar uma estimativa inicial de δ_{ij} e δ_{oj}, relaciona-se K_{ij}, K_{oj}, Q_{ij} e Q_{oj} através das expressões (74) e (75). Os valores de K_{ij}, K_{oj}, Q_{ij} e Q_{oj} foram previamente calculados na análise estática do problema. A posição inicial do centro da esfera pode ser usada como estimativa inicial de X_{1j} e X_{2j}, ou seja, $\left(X_{1j}\right)_1 = {}^1\!/_2\, BD \operatorname{sen} \alpha^0$ e $\left(X_{2j}\right)_1 = {}^1\!/_2\, BD \cos \alpha^0$. O desalinhamento angular da pista interna θ é definido como uma entrada invariável no processo iterativo, ou seja, possui um valor constante pré-determinado pelo sistema eixo-mancal. O método utilizado para encontrar a solução do sistema foi o método de Newton-Raphson, descrito no APÊNDICE B deste trabalho.

Os ângulos de contato α_i e α_o podem ser encontrados pelas expressões (70), (71), (72) e (73). Com o conhecimento dos novos ângulos de contato α_i e α_o, é possível encontrar os novos valores da rigidez da pista interna (K_i), da rigidez da pista externa (K_o), da força centrípeta pela expressão (48) e do momento giroscópico pela expressão (62). Estes novos valores são utilizados como entrada de um novo processo de convergência das expressões (68), (69), (78) e (79). Este processo deve se repetir sucessivamente até que um erro pré-estabelecido seja atingido por todas as variáveis do sistema.

As equações dos equilíbrios de posição e de forças nas esferas, desenvolvidas até este ponto, descrevem um mancal de esferas de contato angular. Porém estas mesmas equações podem ser utilizadas na descrição de um mancal radial puro, isto é, um mancal que possui ângulo de contato (α^0) nulo. Quando o mancal analisado possuir esta característica é possível realizar algumas simplificações no equacionamento:

$$A_{1j} = 0; \quad X_{1j} = 0; \quad \alpha_{ij} = 0; \quad \alpha_{oj} = 0; \quad \beta = 0 \Longrightarrow M_{gj} = 0; \quad \delta_a = 0; \quad \theta = 0 \tag{80}$$

A partir das simplificações descritas em (80), as expressões (66), (68), (69), (77) e (79) reduzindo-se às expressões (81), (82), (83), (84) e (85) respectivamente:

$$A_{2j} = BD + \delta_r \cos \psi_j - \frac{P_d}{2} \tag{81}$$

$$A_{2j} - X_{2j} - (f_i - 0{,}5)D - \delta_{ij} = 0 \tag{82}$$

$$X_{2j} - (f_o - 0{,}5)D - \delta_{oj} = 0 \tag{83}$$

$$Q_{ij} - Q_{oj} + F_{cj} = 0 \tag{84}$$

$$\frac{K_{oj}\delta_{oj}^{1,5} X_{2j}}{(f_o - 0{,}5)D + \delta_{oj}} - \frac{K_{ij}\delta_{ij}^{1,5}\left(A_{2j} - X_{2j}\right)}{(f_i - 0{,}5)D + \delta_{ij}} - F_{cj} = 0 \tag{85}$$

Pode-se observar que na expressão (81) ocorre a adição de um novo termo à equação $(-\,P_d/2)$. Este termo equivale à metade da folga diametral do mancal e somente aparece em mancais radiais puros. A folga radial, equivalente à metade da folga diametral, é igualmente subtraída da posição final do centro do raio de curvatura da pista interna (A_{2j}) em todas as esferas.

Resolvendo simultaneamente as expressões (82), (83) e (85), através do Método Newton-Raphson, encontram-se os valores de X_{2j}, δ_{ij} e δ_{oj}. Estes valores serão utilizados na determinação do equilíbrio de forças no mancal, que será tratado na próxima seção.

4.7 **Equações de Equilíbrio de Forças no Mancal**

Neste ponto do trabalho, já é possível encontrar a posição de equilíbrio de cada esfera, os ângulos de contato com as pistas interna e externa e a deformação nos contatos. Agora se torna necessário obter a posição de equilíbrio da pista interna, que pode ser obtida através do equilíbrio de forças às quais a pista interna está submetida.

As expressões que definem o equilíbrio de forças na direção axial e na direção radial são apresentadas nas equações (86) e (87) respectivamente:

$$F_a - \sum_{j=1}^{j=Z} \left(Q_{ij} \operatorname{sen} \alpha_{ij} - \frac{\lambda_{ij} M_{gj}}{D} \cos \alpha_{ij} \right) = 0 \tag{86}$$

$$F_r - \sum_{j=1}^{j=Z} \left(Q_{ij} \cos \alpha_{ij} + \frac{\lambda_{ij} M_{gj}}{D} \operatorname{sen} \alpha_{ij} \right) \cos \psi_j = 0 \tag{87}$$

onde F_a é a força externa aplicada axialmente e F_r é a força externa aplicada radialmente.

Relacionando as expressões (86) e (87) com as (72), (73) e (75), obtêm-se:

$$F_a - \sum_{j=1}^{j=Z} \left(\frac{K_{ij}\left(A_{1j} - X_{1j}\right)\delta_{ij}^{1,5} - \frac{\lambda_{ij} M_{gj}}{D}\left(A_{2j} - X_{2j}\right)}{(f_i - 0{,}5)D + \delta_{ij}} \right) = 0 \tag{88}$$

$$F_r - \sum_{j=1}^{j=Z} \left(\frac{K_{ij}\left(A_{2j} - X_{2j}\right)\delta_{ij}^{1,5} + \frac{\lambda_{ij} M_{gj}}{D}\left(A_{1j} - X_{1j}\right)}{(f_i - 0{,}5)D + \delta_{ij}} \right) \cos \psi_j = 0 \tag{89}$$

O equilíbrio das forças do mancal também é resolvido pelo Método de Newton-Raphson, o qual irá retornar novos valores de δ_r e δ_a, e, portanto, será necessário recalcular as componentes de equilíbrio em cada esfera (A_{1j}, A_{2j}, X_{1j}, X_{2j}, δ_{ij}, δ_{oj}, α_{ij} e α_{oj}). Este procedimento gerará um segundo processo iterativo que terá como saída os valores mais precisos de δ_r e δ_a. O procedimento continua até que um valor de erro pré-definido seja alcançado.

Após o fim do procedimento para encontrar valores precisos de δ_r e δ_a, é possível encontrar o momento externo $\mathfrak{M}$ aplicado sobre o mancal necessário para manter o desalinhamento angular θ. Importante destacar que quando ocorre um carregamento radial no mancal, mesmo que o desalinhamento angular θ seja nulo, é imprescindível que haja um momento externo para manter o mancal alinhado.

Para encontrar o momento $\mathfrak{M}$ aplicado à pista interna do mancal, devem-se analisar as forças aplicadas sobre a pista interna (Q_{ij} e $\lambda_{ij}.M_{gj}/D$) em relação ao eixo y do mancal. Como as distâncias entre o eixo y e o ponto de aplicação das forças decompostas sobre eixo z do mancal são muito pequenas, somente serão considerados os momentos gerados pelas forças decompostas sobre o eixo x.

Como já foi encontrada, neste trabalho, a distância $\mathfrak{R}_i$ entre o eixo x do mancal e o centro do raio de curvatura da pista interna, será utilizado este ponto para se obter o momento gerado pelas forças em relação o eixo y do mancal (figura 4.15). Neste caso, será necessário realizar um deslocamento de forças sobre o eixo criado pelo ângulo de contato α_i e que passa pelo ponto de contato (onde são aplicadas as forças) e o centro do raio de curvatura da pista. Este deslocamento de forças irá gerar um momento $\mathcal{M}$ que será equivalente a:

$$\mathcal{M} = F.d = \frac{\lambda_{ij} M_{gj}}{D}.r_i \tag{90}$$

Como r_i pode ser escrito como $f_i.D$, a expressão (90) se resume a:

$$\mathcal{M} = \lambda_{ij} M_{gj} f_i \tag{91}$$

onde $\mathcal{M}$ é o momento gerado pelo deslocamento das forças e f_i é a razão de osculação da pista interna.

É importante notar que o deslocamento da força Q_{ij} aplicada à pista interna não gera momento, pois está aplicada na mesma direção do deslocamento das forças (figura 4.15).

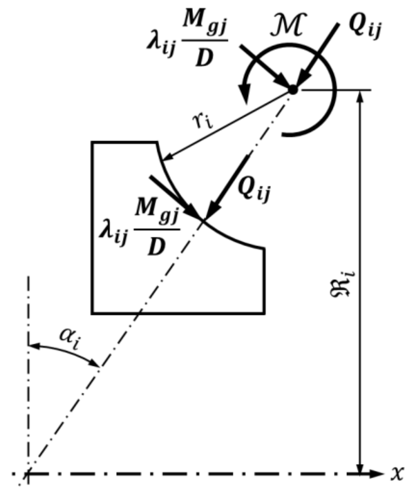


Figura 4.15. Forças e Momentos aplicados sobre a pista interna.

Realizando a decomposição das forças na direção do eixo x do mancal, multiplicando pela distância $\Re_i$ para encontrar o momento gerado, somando o momento $\mathcal{M}$ e levando em conta a posição angular de cada esfera, chega-se a seguinte expressão:

$$\mathfrak{M} - \sum_{j=1}^{j=Z} \left[\left(Q_{ij} \operatorname{sen} \alpha_{ij} - \frac{\lambda_{ij} M_{gj}}{D} \cos \alpha_{ij} \right) \Re_i + \lambda_{ij} M_{gj} f_i \right] \cos \psi_j = 0 \tag{92}$$

onde e ψ_j é a posição angular de cada esfera e $\mathfrak{M}$ é o momento externo aplicado ao mancal na mesma direção do desalinhamento angular θ de acordo com figura 4.12.

Substituindo as expressões (72), (73) e (75) na expressão (92), obtém-se:

$$\mathfrak{M} - \sum_{j=1}^{j=Z} \left(\frac{\left(K_{ij} \left(A_{1j} - X_{1j} \right) \delta_{ij}^{1,5} - \frac{\lambda_{ij} M_{gj}}{D} \left(A_{2j} - X_{2j} \right) \right) \Re_i}{(f_i - 0{,}5) D + \delta_{ij}} + \lambda_{ij} f_i M_{gj} \right) \cos \psi_j = 0 \tag{93}$$

Neste trabalho foi considerado que o desalinhamento angular θ foi um dado invariável do problema e assim ao final do processo foi determinado o valor do momento externo aplicado ao mancal. Porém, é possível realizar o caminho inverso, isto é, dado um momento externo como dado inicial do sistema, o desalinhamento θ é encontrado pelo método de Newton-Raphson, da mesma maneira como foram obtidos os deslocamentos radial (δ_r) e axial (δ_a) da pista interna.

4.8 **Equações de Equilíbrio para 5 Graus de Liberdade**

Nas seções 4.6 e 4.7 foram desenvolvidas as expressões de equilíbrio de posição e de forças da esfera e equilíbrio de forças no mancal considerando apenas 3 graus de liberdade (δ_r, δ_a e θ) para facilitar o entendimento da teoria e simplificar o sistema. Nesta seção será apresentado o equacionamento que define os equilíbrios de posição e de forças nas esferas e equilíbrio de forças na pista interna para um mancal com 5 graus de liberdade (δ_z, δ_y, δ_a, θ_z e θ_y) como pode ser visto na figura 4.17.

Quando o mancal for analisado por 5 graus de liberdade, este poderá estar sujeito às forças e momentos apresentados na figura 4.16. Observa-se que a força radial, antes denominada como F_r, está agora dividida em duas componentes: uma força radial na direção do eixo z (F_z) e uma força radial na direção do eixo y (F_y). O mesmo ocorre com o momento externo $\mathfrak{M}$, que agora é dividido em momento na direção do eixo y (M_y) e em momento na direção do eixo z (M_z).

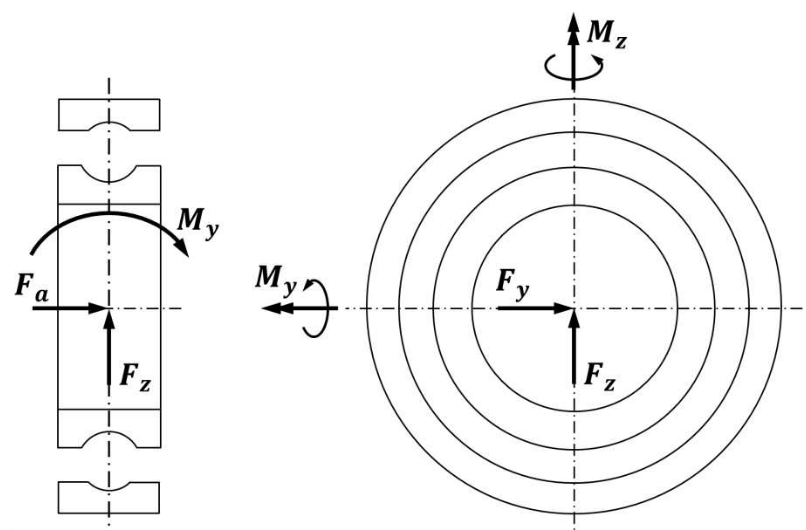


Figura 4.16. Forças e Momentos Externos aplicados sobre o mancal.

Os 5 graus de liberdade da pista interna (δ_z, δ_y, δ_a, θ_z e θ_y) são definidos de acordo com a figura 4.17. Os deslocamentos são referenciados no mesmo sentido das forças e os desalinhamentos angulares, no mesmo sentido dos momentos, os quais são expostos na figura 4.16.

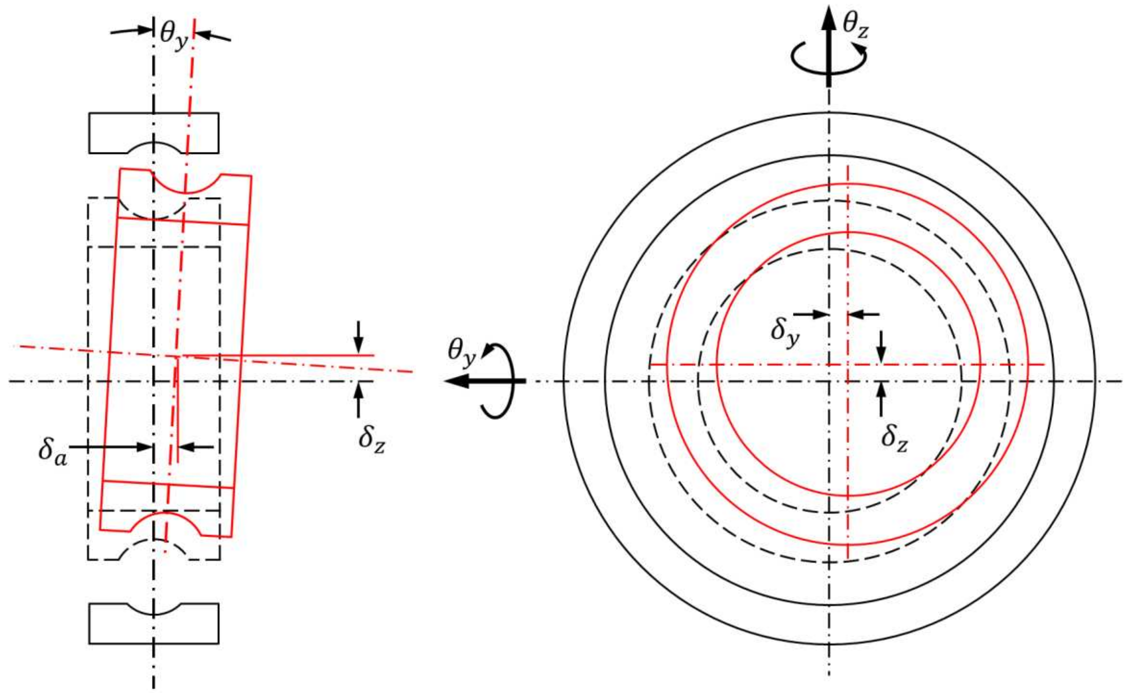


Figura 4.17. Deslocamentos e desalinhamentos angulares da pista interna.

Neste ponto, as expressões (65) e (66), que determinavam a posição final do centro de curvatura da pista interna (A_{1j} e A_{2j}) definidos na figura 4.13-b, devem incluir os novos deslocamentos (δ_z e δ_y) e os novos desalinhamentos angulares (θ_y e θ_z) de cada esfera. Realizando as alterações necessárias, chega-se a:

$$A_{1j} = BD \operatorname{sen} \alpha^o + \delta_a + \theta_y \, \Re_i \cos \psi_j + \theta_z \, \Re_i \operatorname{sen} \psi_j \tag{94}$$

$$A_{2j} = BD \cos \alpha^o + \delta_z \cos \psi_j + \delta_y \operatorname{sen} \psi_j \tag{95}$$

Caso o mancal de esferas seja puramente radial ($\alpha^0 = 0°$) pode-se realizar algumas simplificações (96), além das simplificações definidas em (80), tornando o mancal em um sistema de apenas dois graus de liberdade (δ_z e δ_y).

$$\delta_a = 0; \ \ \theta_y = 0; \ \ \theta_z = 0 \tag{96}$$

Realizando as simplificações descritas em (80) e (96), encontra-se uma nova expressão para a posição final do centro do raio de curvatura da pista interna:

$$A_{2j} = BD + \delta_z \cos \psi_j + \delta_y \operatorname{sen} \psi_j - \frac{P_d}{2} \tag{97}$$

É importante destacar que a posição angular de cada esfera (ψ_j) era definida a partir da primeira esfera ($j = 1$), que estava posicionada exatamente sobre o eixo no qual a força radial era aplicada, como pode ser visto na figura 4.11. Isto ocorria porque as esferas deveriam estar posicionadas simetricamente em relação ao eixo de aplicação da força radial, de forma que a decomposição das forças sobre o eixo perpendicular ao da força radial se anulassem e não gerassem um deslocamento fora do eixo de aplicação da força. Porém, quando o mancal é descrito por 5 graus de liberdade, a posição angular da primeira esfera (ψ_1) não é necessariamente igual a zero e a expressão que define a posição angular de cada esfera é definida na equação (98).

$$\psi_j = \psi_1 + \frac{2\pi(j-1)}{Z} \tag{98}$$

A partir das estimativas encontradas na análise estática do deslocamento axial (δ_a), do deslocamento radial em z (δ_z) e do deslocamento radial em y (δ_y) da pista interna, dos desalinhamentos angulares θ_y e θ_z e das posições A_{1j} e A_{2j}, é possível encontrar os valores de X_{1j}, X_{2j}, δ_{ij} e δ_{oj} da mesma maneira que a questão foi abordada na seção 4.6, isto é, resolvendo simultaneamente as expressões (68), (69), (78) e (79) no caso do mancal de contato angular e as expressões (82), (83) e (85) no caso do mancal radial puro, através do Método Newton-Raphson.

Resolvidos os equilíbrios de posição e de forças em cada esfera, pode-se dar início à solução do equilíbrio de forças da pista interna. As expressões que definem o equilíbrio de forças da pista interna na direção axial, na direção do eixo z e na direção do eixo y são descritas em (99), (100) e (101) respectivamente.

$$F_a - \sum_{j=1}^{j=Z} \left(Q_{ij} \operatorname{sen} \alpha_{ij} - \frac{\lambda_{ij} M_{gj}}{D} \cos \alpha_{ij} \right) = 0 \tag{99}$$

$$F_z - \sum_{j=1}^{j=Z} \left(Q_{ij} \cos \alpha_{ij} + \frac{\lambda_{ij} M_{gj}}{D} \operatorname{sen} \alpha_{ij} \right) \cos \psi_j = 0 \tag{100}$$

$$F_y - \sum_{j=1}^{j=Z} \left(Q_{ij} \cos \alpha_{ij} + \frac{\lambda_{ij} M_{gj}}{D} \operatorname{sen} \alpha_{ij} \right) \operatorname{sen} \psi_j = 0 \tag{101}$$

onde F_a é a carga externa axial, F_z é a carga externa na direção z e F_y é a carga externa na direção y.

Substituindo as expressões (72), (73) e (75) nas expressões (99), (100) e (101), chega-se a:

$$F_a - \sum_{j=1}^{j=Z} \left(\frac{K_{ij}(A_{1j} - X_{1j})\delta_{ij}^{1,5} - \frac{\lambda_{ij} M_{gj}}{D}(A_{2j} - X_{2j})}{(f_i - 0,5)D + \delta_{ij}} \right) = 0 \tag{102}$$

$$F_z - \sum_{j=1}^{j=Z} \left(\frac{K_{ij}\left(A_{2j} - X_{2j}\right)\delta_{ij}^{1,5} + \frac{\lambda_{ij} M_{gj}}{D}\left(A_{1j} - X_{1j}\right)}{(f_i - 0{,}5)D + \delta_{ij}} \right) \cos\psi_j = 0 \tag{103}$$

$$F_y - \sum_{j=1}^{j=Z} \left(\frac{K_{ij}\left(A_{2j} - X_{2j}\right)\delta_{ij}^{1,5} + \frac{\lambda_{ij} M_{gj}}{D}\left(A_{1j} - X_{1j}\right)}{(f_i - 0{,}5)D + \delta_{ij}} \right) \operatorname{sen}\psi_j = 0 \tag{104}$$

Resolvendo simultaneamente as equações (102), (103) e (104) pelo Método Newton-Raphson, obtêm-se valores de δ_a, δ_z e δ_y com aproximação muito boa em relação às forças externas. Em cada passo de iteração do Método Newton-Raphson é necessário encontrar novos valores de X_{1j}, X_{2j}, δ_{ij} e δ_{oj}, ou seja, encontrar o novo equilíbrio de posição e forças da esfera, devido à mudança da posição do centro do raio de curvatura da pista interna (A_{1j} e A_{2j}).

Concluído o processo de convergência das expressões dos equilíbrios citados anteriormente, dá-se início ao cálculo dos momentos aplicados ao mancal necessários para manter os desalinhamentos angulares θ_y e θ_z, mesmo que um ou dois deles sejam nulos. O método utilizado para encontrar as expressões que caracterizam os momentos externos aplicados é igual ao apresentado na seção 4.7. Neste segundo caso haverá uma pequena modificação para encontrar os momentos aplicados em duas direções distintas (M_y e M_z).

$$M_y - \sum_{j=1}^{j=Z} \left(\frac{\left(K_{ij}\left(A_{1j} - X_{1j}\right)\delta_{ij}^{1,5} - \frac{\lambda_{ij} M_{gj}}{D}\left(A_{2j} - X_{2j}\right)\right)\Re_i}{(f_i - 0{,}5)D + \delta_{ij}} + \lambda_{ij} f_i M_{gj} \right) \cos\psi_j = 0 \tag{105}$$

$$M_z - \sum_{j=1}^{j=Z} \left(\frac{\left(K_{ij}\left(A_{1j} - X_{1j}\right)\delta_{ij}^{1,5} - \frac{\lambda_{ij} M_{gj}}{D}\left(A_{2j} - X_{2j}\right)\right)\Re_i}{(f_i - 0{,}5)D + \delta_{ij}} + \lambda_{ij} f_i M_{gj} \right) \operatorname{sen}\psi_j = 0 \tag{106}$$

Assim como no caso de 3 graus de liberdade, o sistema de 5 graus de liberdade empregado no desenvolvimento deste trabalho tem como entrada os dois desalinhamentos angulares da pista interna do mancal (θ_y e θ_z). Entretanto as variáveis θ_y e θ_z podem ser adotadas como incógnitas do sistema e as variáveis de entrada do sistema passam a ser os momentos externos aplicados ao mancal (M_y e M_z).

Na figura 4.18 é apresentado o fluxograma do programa computacional desenvolvido, mostrando de forma resumida cada passo do processo de convergência do equilíbrio de forças no mancal.

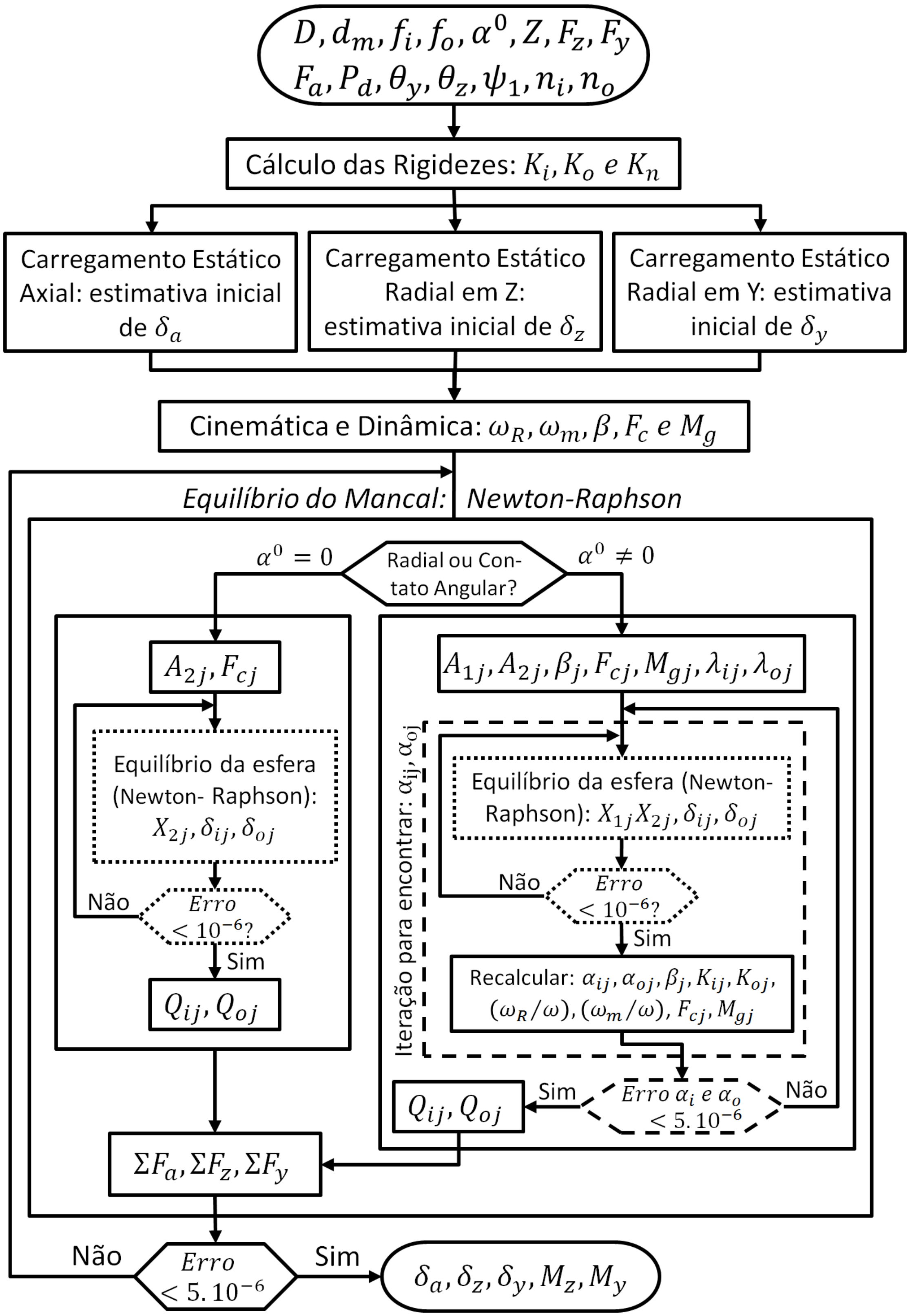


Figura 4.18. Fluxograma do programa computacional.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

A partir do equacionamento proposto neste trabalho, foram realizadas diversas simulações numéricas para compreender melhor o funcionamento dos mancais de esfera. Os resultados apresentados nesta seção foram obtidos a partir da implementação no software Intel Fortran 11.02® e os gráficos foram construídos com o auxílio do software MATLAB® 7.9.

Para obtenção dos resultados foram utilizados os dados de mancais comerciais, sendo os principais deles o rolamento radial 209 e o rolamento radial 218, que possuem características apresentadas nas tabelas 5.1 e 5.2 respectivamente. A escolha destes mancais foi definida de forma que possa haver uma verificação com valores encontrados na literatura.

Tabela 5.1. Características do rolamento radial 209

Z (número de esferas)	9
d_m (diâmetro primitivo)	65 mm
D (diâmetro da esfera)	12,7 mm
f_i (razão de osculação da pista interna)	0,52
f_o (razão de osculação da pista externa)	0,52
P_d (folga diametral)	0,015 mm
α^0 (ângulo de contato nominal)	0^o
ρ (massa específica do material da esfera)	7810 kg/m^3

Tabela 5.2. Características do rolamento radial 218

Z (número de esferas)	16
d_m (diâmetro primitivo)	125,26 mm
D (diâmetro da esfera)	22,23 mm
f_i (razão de osculação da pista interna)	0,5232
f_o (razão de osculação da pista externa)	0,5232
P_d (folga diametral)	0 mm
α^0 (ângulo de contato nominal)	40^o
ρ (massa específica do material da esfera)	7810 kg/m^3

Realizou-se primeiramente uma análise estática do mancal de rolamento radial 209, quando este estava sujeito a um carregamento radial externo equivalente (F_r) de $8900\ N$. Para este carregamento foram realizadas três simulações diferentes: a primeira foi realizada com o valor de folga diametral igual a quatro centésimos de milímetro ($P_d = 0{,}04\ mm$), a segunda foi realizada considerando que o mancal não possui folga ($P_d = 0$) e a terceira foi considerado que o mancal possui uma interferência, ou seja, a folga diametral é negativa ($P_d = -0{,}04\ mm$). Estas simulações têm como objetivo determinar a distribuição do carregamento nas esferas.

Deve-se destacar que os valores de folga analisados não condizem com os rolamentos comerciais, pois o valor de folga igual $0{,}04\ mm$ equivale a mais de duas vezes e meia a folga diametral do mancal comercial. Além disto, não existem no mercado mancais de esferas com folga negativa, ou seja, com interferência. Os valores utilizados na análise estática foram escolhidos de forma a evidenciar os efeitos causados pela folga na distribuição de carregamento aplicado sobre as esferas do mancal.

A distribuição do carregamento nas esferas está representada no gráfico da figura 5.1. Como é possível observar quanto maior for a folga diametral, menor será o ângulo a partir do qual a deflexão elástica no contato torna-se nula (ψ_l), ou seja, o carregamento nas esferas também se torna nulo. Quando a folga é nula o ângulo ψ_l é exatamente $\pm 90^o$, como é possível se verificar pela expressão (15). Outro ponto importante a se observar é que quanto maior é a folga diametral, maior é o valor do carregamento máximo (Q_{max}) que ocorre sobre a esfera posicionada no ângulo de posição (ψ) igual a zero, ou seja, esta esfera estará submetida a um esforço maior. Da mesma forma, quanto maior a folga diametral, menor o número de esferas sujeitas ao carregamento estático.

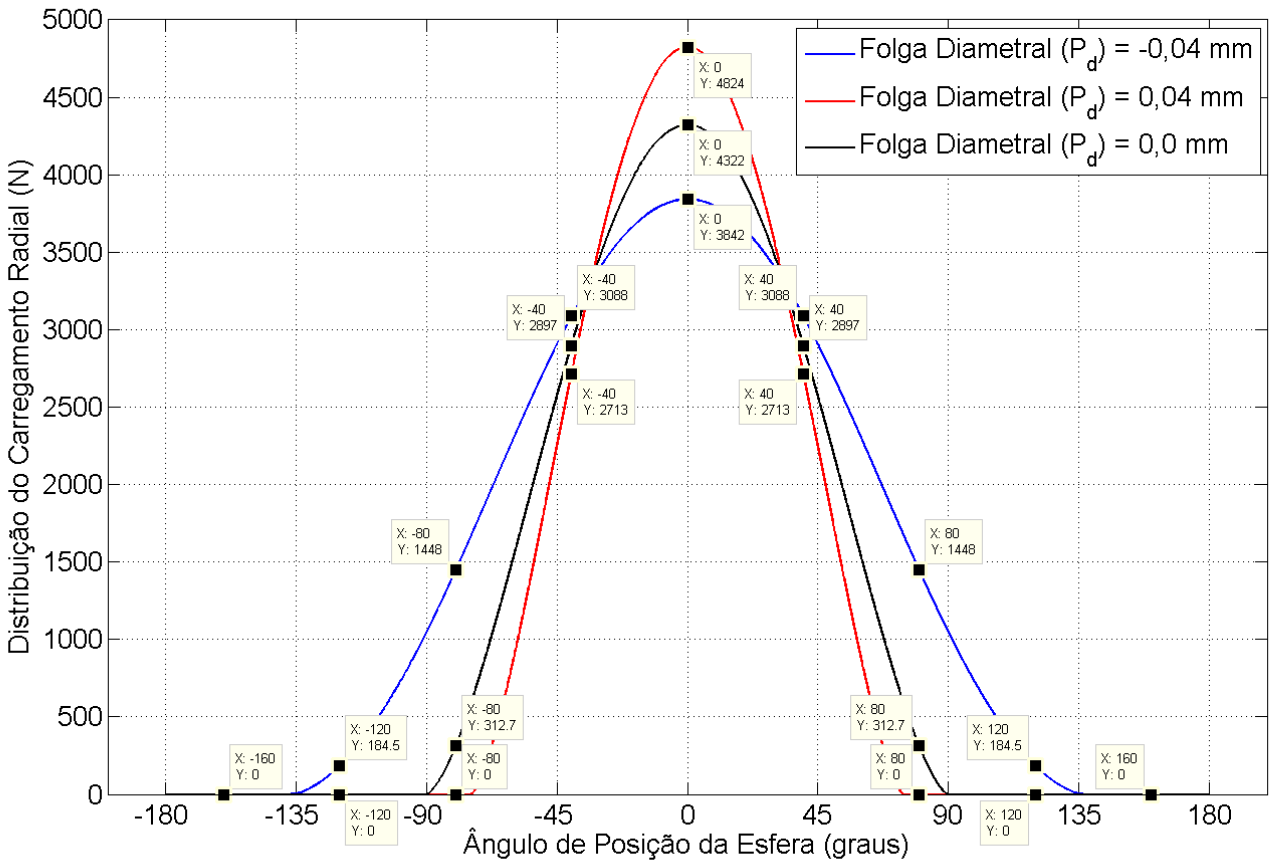


Figura 5.1. Distribuição do carregamento radial vs ângulo de posição da esfera para $P_d = 0\ mm$, $P_d = 0{,}04\ mm$ e $P_d = -0{,}04\ mm$.

Numa segunda análise estática foram realizadas diversas simulações utilizando valores de carregamento radial e axial que variavam de 0 a $45.000\ N$, encontrando-se valores de carregamento máximo nas esferas (Q_{max}), deslocamento radial da pista interna (δ_r) e deslocamento axial da pista interna (δ_a) para cada diferente carregamento. Na análise do carregamento radial foi utilizado o mancal radial 209 e na análise do carregamento axial foi utilizado o mancal radial 218. Os resultados encontrados são apresentados nos gráficos das figuras 5.2, 5.3, 5.4 e 5.5.

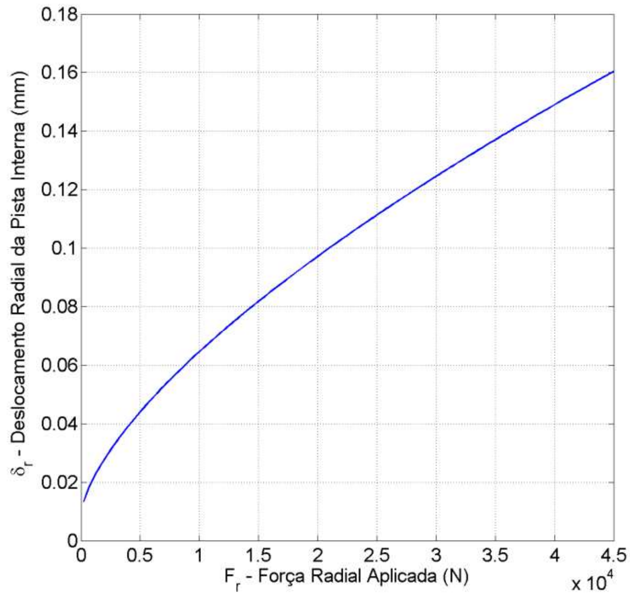


Figura 5.2. Deslocamento radial da pista interna (δ_r) para vários carregamentos radiais.

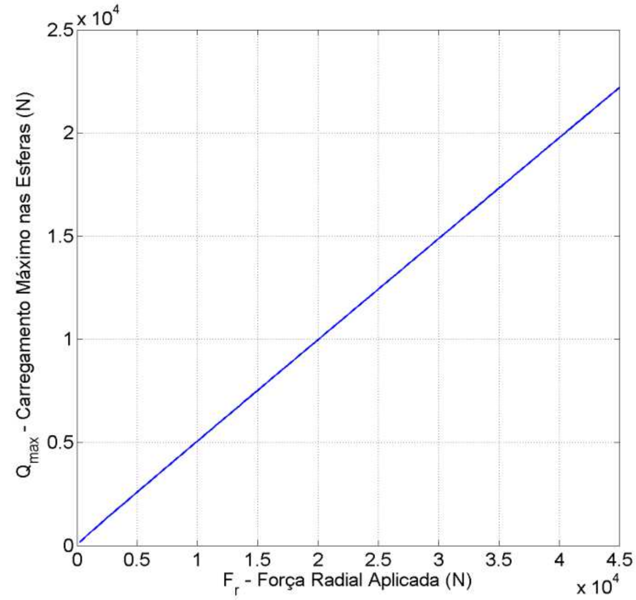


Figura 5.3. Carregamento máximo (Q_{max}) nas esferas para vários carregamentos radiais.

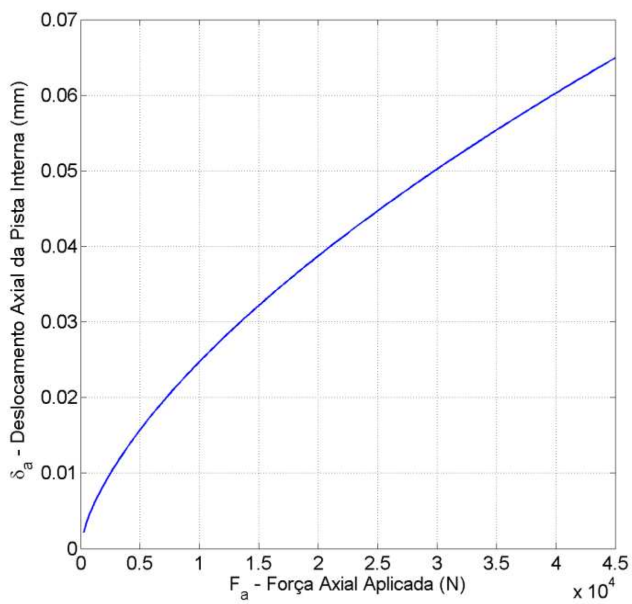


Figura 5.4. Deslocamento axial da pista interna (δ_a) para vários carregamentos axiais.

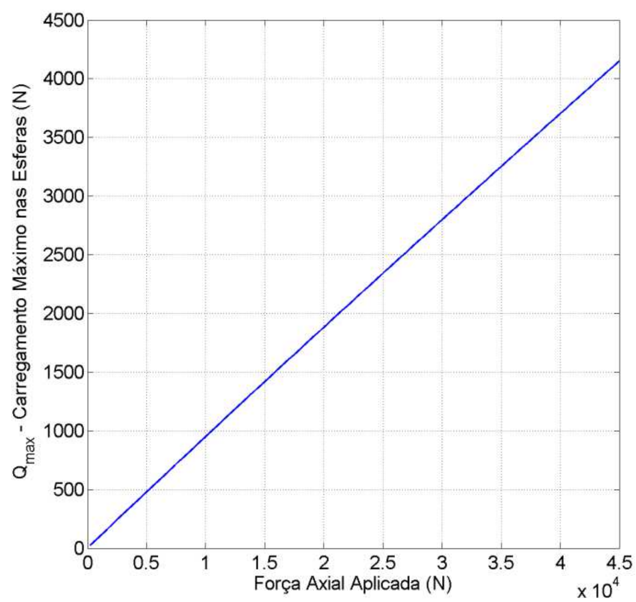


Figura 5.5. Carregamento máximo (Q_{max}) nas esferas para vários carregamentos axiais.

Observando os gráficos encontrados é possível concluir que o carregamento máximo nas esferas, tanto no carregamento axial quanto no carregamento radial, varia linearmente com o carregamento externo aplicado. O mesmo não ocorre com os deslocamentos axiais e radiais da pista interna, pois, de acordo com as figuras 5.2 e 5.4, o aumento do carregamento externo sobre o mancal cria um aumento significativo sobre a rigidez equivalente do mancal, ou seja, quando o mancal está submetido a um carregamento de baixa magnitude, uma pequena variação neste carregamento gera uma grande variação no deslocamento da pista interna e quanto maior for o carregamento aplicado menor será esta variação de deslocamento.

Os resultados das análises estáticas foram comparados com o exemplo resolvido 6.1 do livro *Rolling Bearing Analysis* (Harris, 1991) localizado nas páginas 199, 200 e 201 e com o exemplo resolvido 6.5 localizado nas páginas 208 a 211. A descrição dos exemplos e os resultados encontrados por Harris e pelo programa computacional desenvolvido neste trabalho são apresentados no APÊNDICE C. A partir desta comparação foi possível verificar os valores de curvaturas, curvaturas relativas, rigidezes de contato e distribuição de carregamento.

Realizadas as análises estáticas do trabalho, o estudo foi direcionado para a análise cinemática e dinâmica do mancal. Na análise cinemática foram encontrados valores de rotação da esfera (n_R) e de rotação do separador (n_m) para diferentes valores de ângulo de contato (α) e de rotação do anel interno (n_i), considerando que a rotação do anel externo é nula. As simulações foram realizadas com o ângulo de contato variando entre 0 e 45 graus e com a rotação do anel interno variando entre 0 e $50.000\ rpm$. Os resultados destas simulações estão representados nas figuras 5.6 e 5.7.

Na análise dinâmica foram encontrados valores de força centrípeta (F_c) e momento giroscópico (M_g) atuantes nas esferas variando os mesmos parâmetros da análise cinemática (ângulo de contato e rotação do anel interno) e o resultado está representado nas figuras 5.8 e 5.9.

O mancal utilizado nas análises cinemática e dinâmica citadas acima é o mancal radial 209.

Como se pode observar nas figuras 5.6, 5.7, e 5.8, a rotação da esfera, a rotação do separador e a força centrípeta são fortemente influenciadas pela rotação do anel interno, enquanto o ângulo de contato exerce pouca influência, sendo que surge um aumento discreto nos três parâmetros analisados em relação a este último. De acordo com a figura 5.9, o momento giroscópico é fortemente influenciado por ambos os parâmetros (velocidade de rotação do anel interno e ângulo de contato).

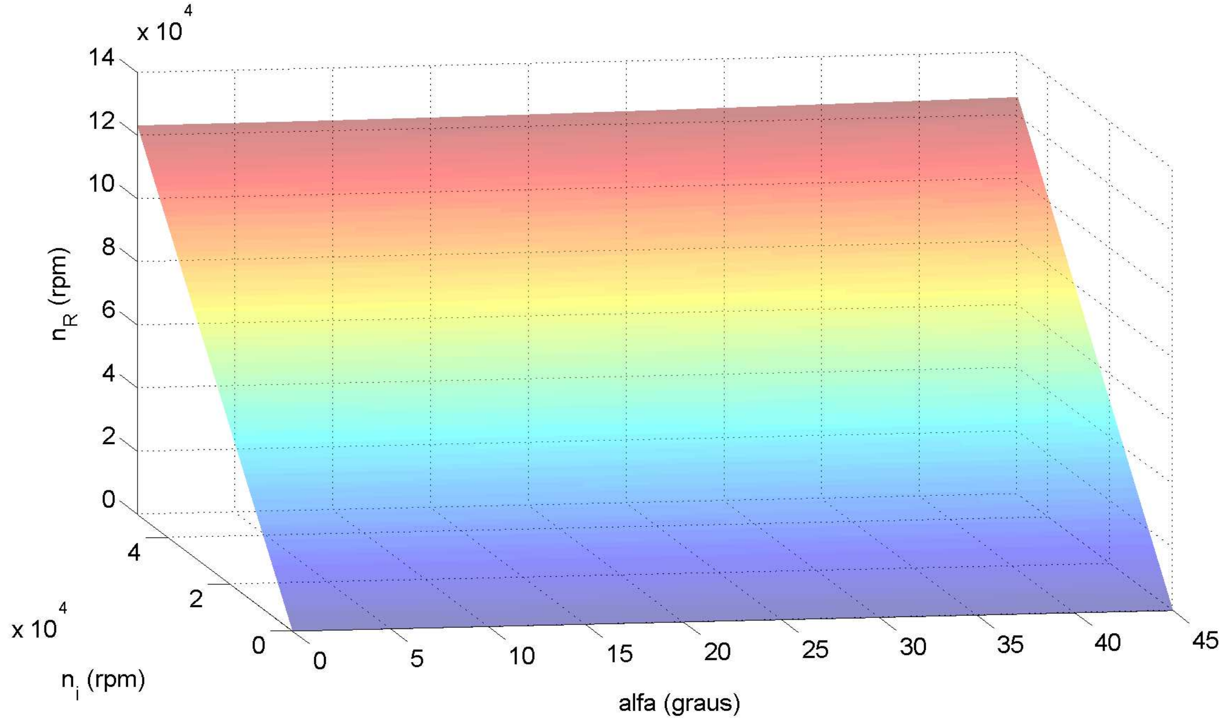


Figura 5.6. Análise Cinemática – Rotação da esfera (n_R).

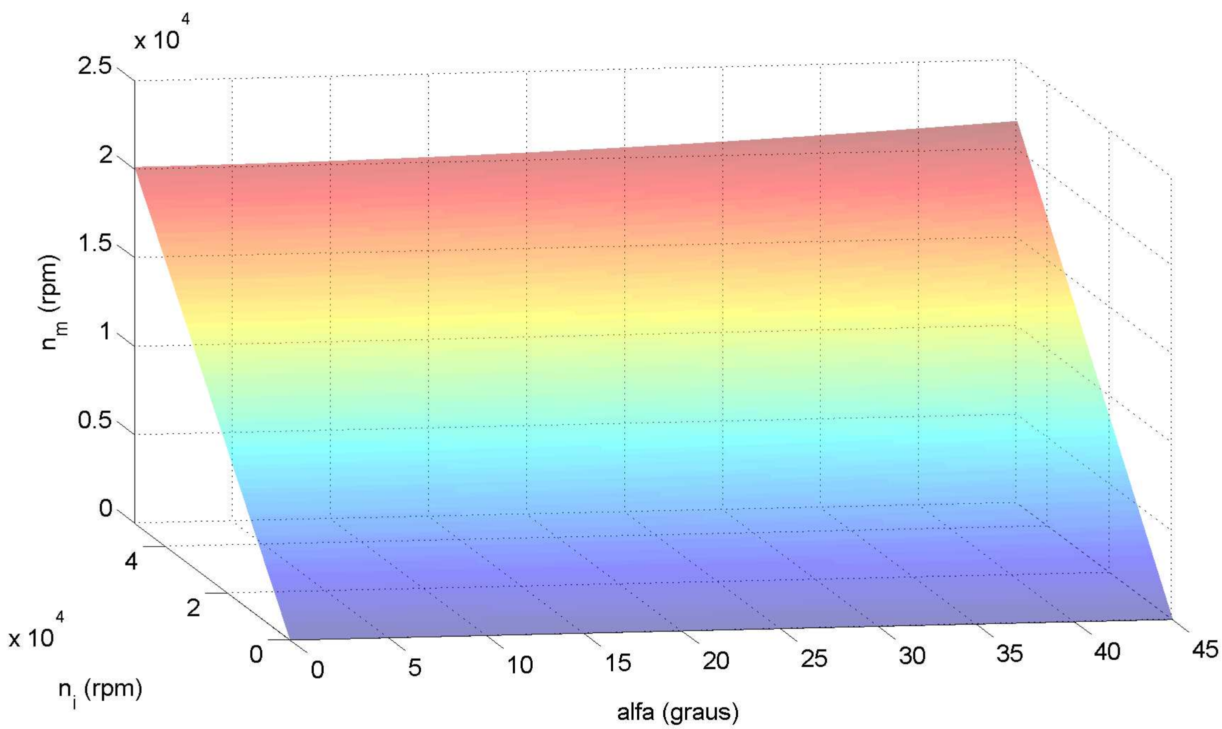


Figura 5.7. Análise Cinemática – Rotação do separador (n_m).

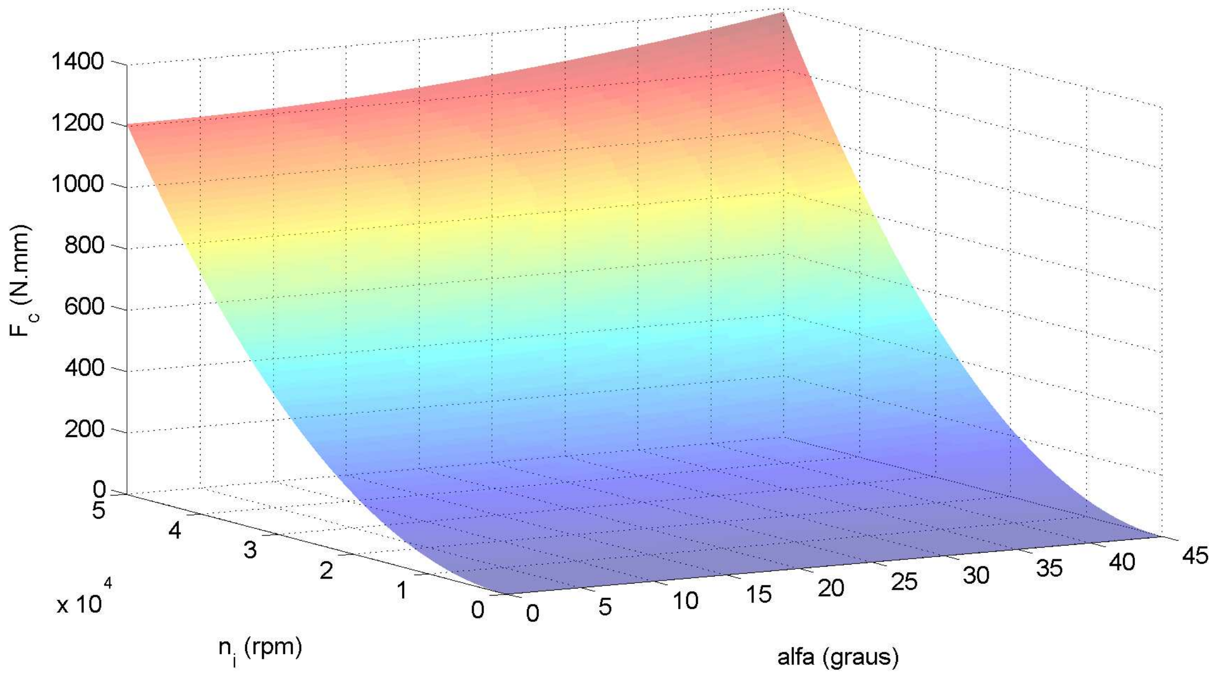


Figura 5.8. Análise dinâmica – Força centrípeta (F_c).

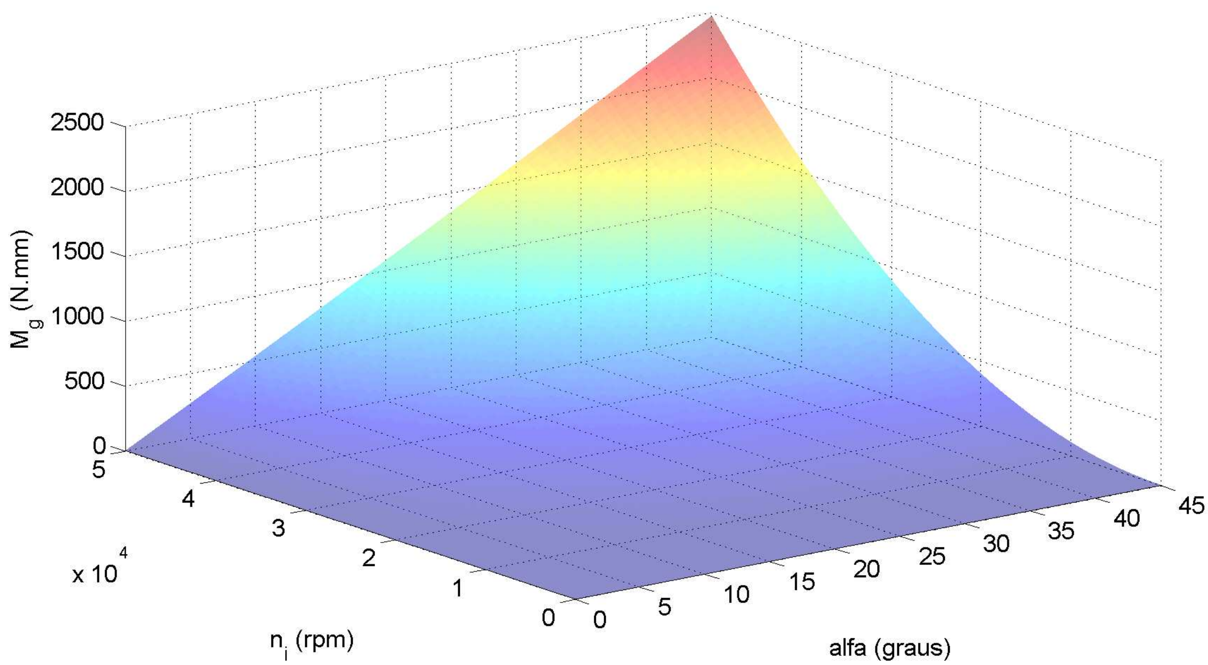


Figura 5.9. Análise dinâmica – Momento Giroscópico (M_g).

A rotação da esfera e a rotação do separador são diretamente proporcionais à velocidade de rotação do anel interno, enquanto os valores da força centrípeta e dos momentos giroscópicos variam parabolicamente em relação à rotação do anel interno, ou seja, se a velocidade de rotação do anel interno dobrar, os valores da força centrípeta e do momento giroscópico serão multiplicados por quatro. Por este motivo, torna-se essencial estudar o efeito destes dois parâmetros quando o mancal está sujeito a altas rotações.

Os resultados encontrados na análise cinemática deste trabalho e as conclusões obtidas a partir deles citadas anteriormente obedecem às mesmas tendências obtidas por Carvalho (2010). Os resultados encontrados por Carvalho (2010) estão expostos no APÊNDICE C deste trabalho.

A partir da teoria apresentada neste trabalho é possível realizar a convergência do equilíbrio de posição e forças em cada esfera e também resolver a iteração completa do mancal para encontrar o equilíbrio de forças no mancal. Em uma primeira etapa, foi realizada uma simulação na qual os dados iniciais (rotação do anel interno e força radial) possuíam valores razoáveis em relação aos parâmetros normais de operação do mancal. A rotação do anel interno foi definida como $6000\ rpm$ e a força radial foi fixada no valor de *30.000 N*. O mancal utilizado nesta etapa do trabalho foi o radial 218, que possui as características apresentadas na tabela 5.2. A posição angular de cada esfera no mancal é definida pela figura 5.10 e os dados encontrados para cada esfera (ângulo de contato e carregamento na pista interna (α_i e Q_i) e ângulo de contato e carregamento na pista externa (α_o e Q_o)) são apresentados na tabela 5.3. Como o mancal possui esferas posicionadas simetricamente em relação ao eixo vertical, pode-se assumir que duas esferas posicionadas nos ângulos $\pm\psi_j$ estão se movimentando a mesma velocidade e sujeitas a um mesmo carregamento.

A estimativa inicial de δ_r utilizada na convergência foi encontrada na análise estática do mancal e equivale a $0{,}0675\ mm$ (figura 5.10). Ao final do processo encontra-se um valor δ_r igual a $0{,}1025\ mm$. A diferença que existe entre o deslocamento radial encontrado pela análise estática e pela análise dinâmica é motivada pelo efeito da força centrípeta. Este efeito empurra as esferas contra a pista externa do mancal e então a pista interna se desloca na direção do carregamento para reequilibrar as forças no mancal.

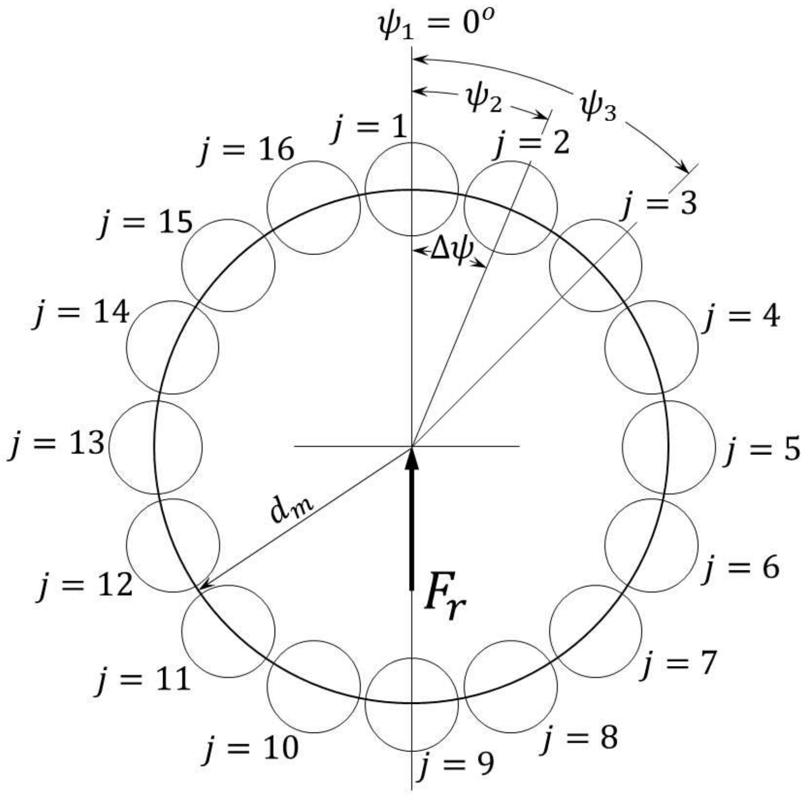


Figura 5.10. Posição angular de cada esfera no mancal radial 218 ($n = 16$).

Tabela 5.3. Parâmetros encontrados para esferas localizadas na posição $\boldsymbol{j}$ de acordo com a figura 5.10 ($\boldsymbol{n_i = 6000\ rpm}$ e $\boldsymbol{F_r = 30.000\ N}$)

$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{\psi_j\ (graus)}$	$\boldsymbol{\alpha_o\ (graus)}$	$\boldsymbol{\alpha_i\ (graus)}$	$\boldsymbol{Q_o\ (N)}$	$\boldsymbol{Q_i\ (N)}$
1	0	36,15	37,06	10758,01	10594,12
2 e 16	$\pm$ 22,5	36,33	37,36	9540,68	9377,13
3 e 15	$\pm$ 45	36,75	38,34	6379,92	6217,39
4 e 14	$\pm$ 67,5	36,62	40,66	2634,84	2473,67
5 e 13	$\pm$ 90	31,25	48,77	716,24	547,64
6 e 12	$\pm$ 112,5	25,78	57,14	501,41	308,88
7 e 11	$\pm$ 135	22,77	62,76	471,31	253,39
8 e 10	$\pm$ 157,5	21,23	66,11	472,38	235,47
9	180	20,76	67,24	475,15	231,21

Numa segunda etapa, foram realizadas diversas simulações variando os dados iniciais (rotação do anel interno variando de $\mathbf{0}$ a $\mathbf{15.000}\, \boldsymbol{rpm}$ e força axial variando de $\mathbf{0}$ a $\mathbf{45.000}\, \boldsymbol{N}$) utilizando o mancal radial 218. Mesmo que os parâmetros sejam iguais para todas as esferas, devido ao carregamento ser axial e aplicado no centro geométrico do mancal, a quantidade de informação obtida a partir destas simulações é volumosa, pois haverá informações sobre um grande número de parâmetros para cada esfera em cada simulação. Em vista disso, serão apresentados apenas os valores encontrados de carregamento no contato entre esferas e pistas interna e externa, ângulo de contato, força centrípeta e momento giroscópico.

Os resultados destas simulações estão apresentados nas figuras 5.11, 5.12, 5.13 e 5.14.

Também foi realizada uma análise de um carregamento combinado, isto é, o mancal está sujeito a um carregamento axial e a um carregamento radial simultaneamente. Nesta análise foi utilizado novamente o mancal radial 218 submetido a um carregamento radial igual a $15.000\ N$, a um carregamento axial igual a $15.000\ N$ e a uma rotação da pista interna de $15.000\ rpm$. Os valores de Q_o, Q_i, α_o e α_i para cada esfera são apresentados nos gráficos das figuras 5.15 e 5.16. Com o intuito de analisar os efeitos gerados pelo momento giroscópico e pela força centrípeta, foram realizadas mais duas análises, sendo que na primeira análise o momento giroscópico foi considerado nulo e na segunda a força centrípeta foi considerada nula. Os resultados destas análises são apresentados nas figuras 5.17 e 5.18 para momento giroscópico nulo e 5.19 e 5.20 para força centrípeta nula.

Em sequência, foi realizado um estudo para um mancal radial 218 submetido a cargas aplicadas nos três eixos (x, y e z). A carga axial, a carga radial na direção do eixo z e a carga radial na direção do eixo y equivalem a $20.000\ N$, $15.000\ N$ e $10.000\ N$ respectivamente. Neste estudo foi considerado que o mancal está operando a uma rotação da pista interna igual a $15.000\ rpm$. Nas figuras 5.21 e 5.22 são mostrados os resultados nos quais a primeira esfera ($j = 1$) está posicionada sobre o eixo z ($\psi_1 = 0°$), e nas figuras 5.23 e 5.24 são expostos os resultados onde a primeira esfera está deslocada de 11^{o}, isto é, $\psi_1 = 11°$, com o objetivo de salientar que o carregamento em cada esfera é afetado pela posição angular da primeira esfera (ψ_1).

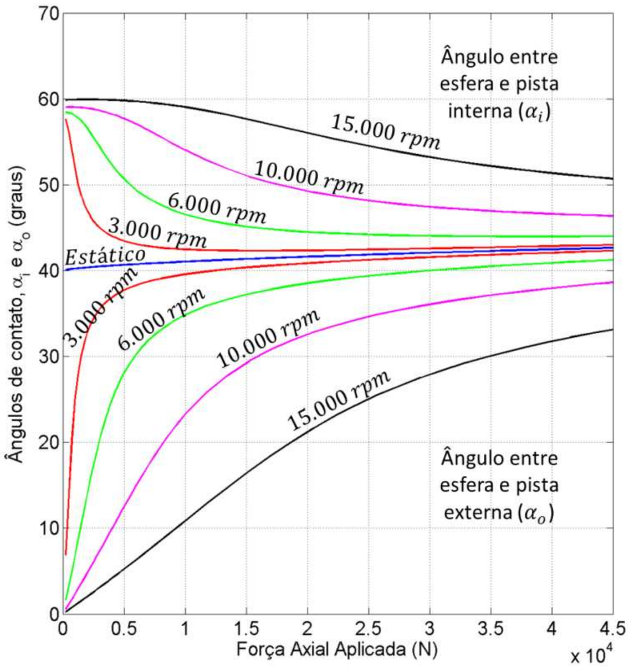


Figura 5.11. Ângulos de contato a_i e a_o versus carregamento axial para várias velocidades de rotação do mancal.

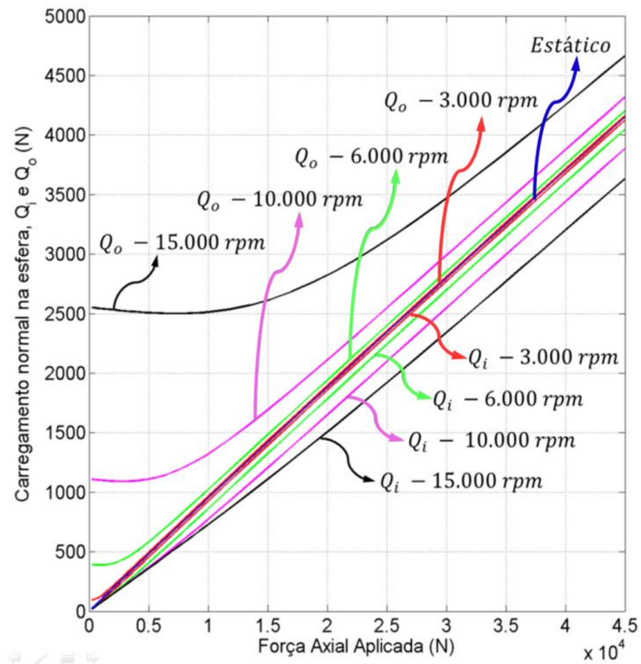


Figura 5.12. Carregamento no contato Q_i e Q_o versus carregamento axial para várias velocidades de rotação do mancal.

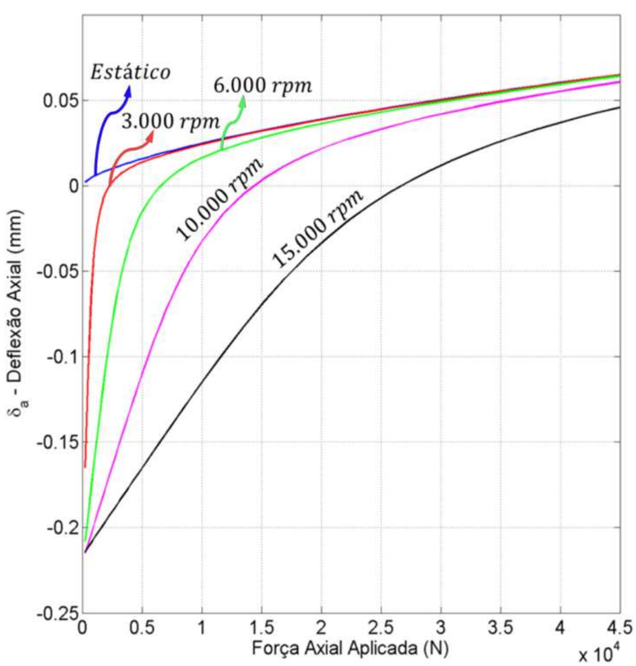


Figura 5.13. Deslocamento axial da pista interna (δ_a) versus carregamento axial para várias velocidades de rotação do mancal.

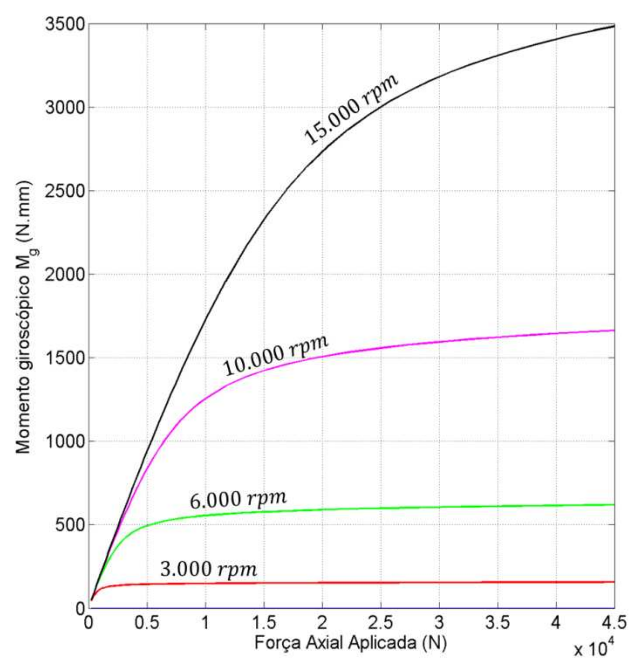


Figura 5.14. Momento giroscópico M_g versus carregamento axial para várias velocidades de rotação do mancal.

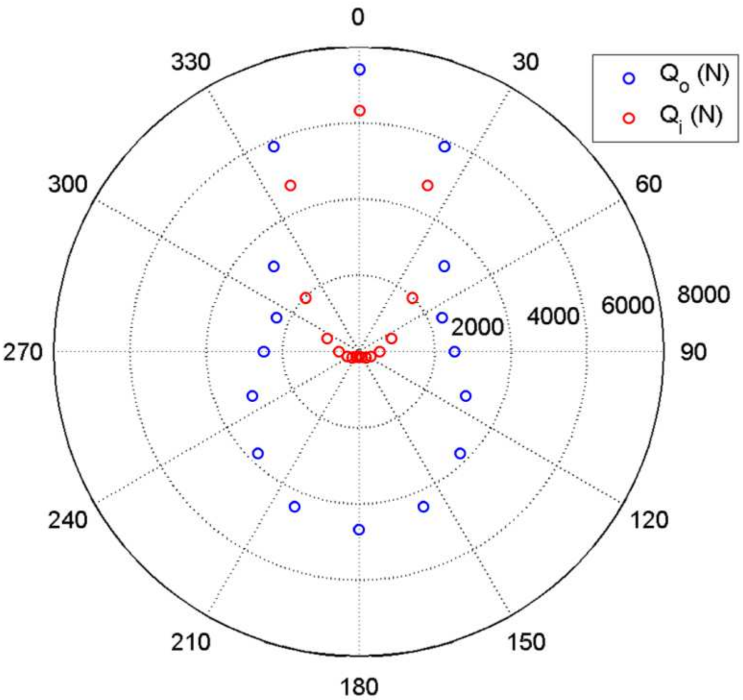


Figura 5.15. Valores de carregamento nas pistas externa (Q_o) e interna (Q_i) para diferentes posições (ψ) de cada esfera. $F_a = 15\ kN$, $F_z = 15\ kN$, $n_i = 15.000\ rpm$.

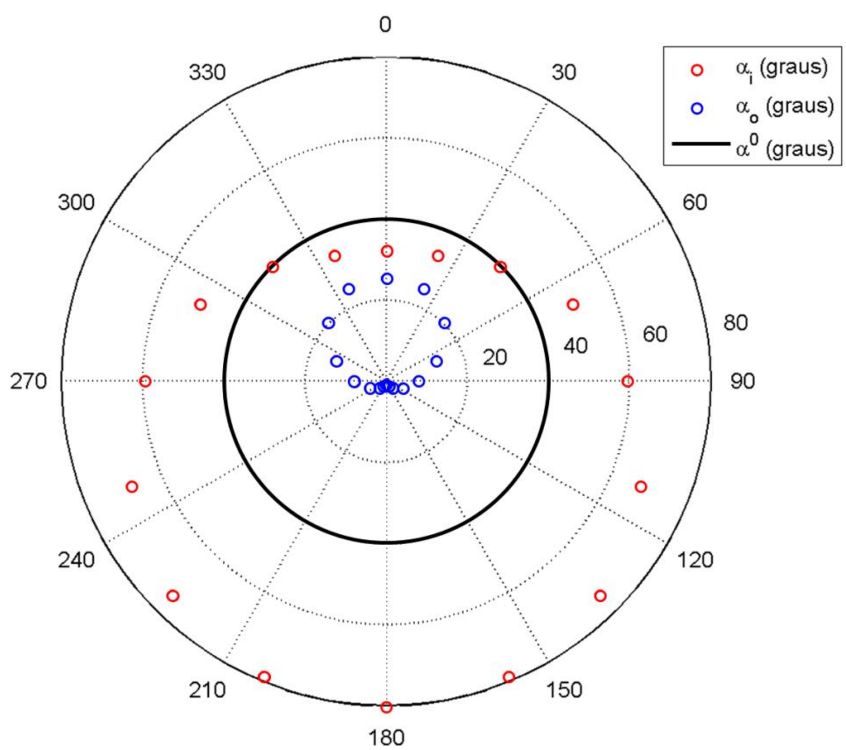


Figura 5.16. Valores de ângulos de contato das pistas externa (α_o) e interna (α_i) para diferentes posições (ψ) de cada esfera. $F_a = 15\ kN$, $F_z = 15\ kN$, $n_i = 15.000\ rpm$.

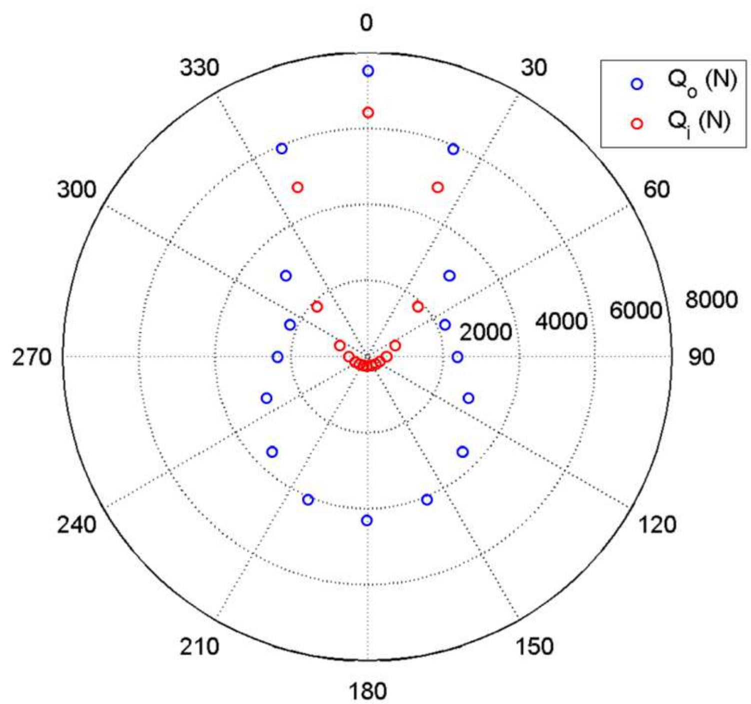


Figura 5.17. Valores de carregamento nas pistas externa (Q_o) e interna (Q_i) para diferentes posições (ψ) de cada esfera com momento giroscópico igual a zero.

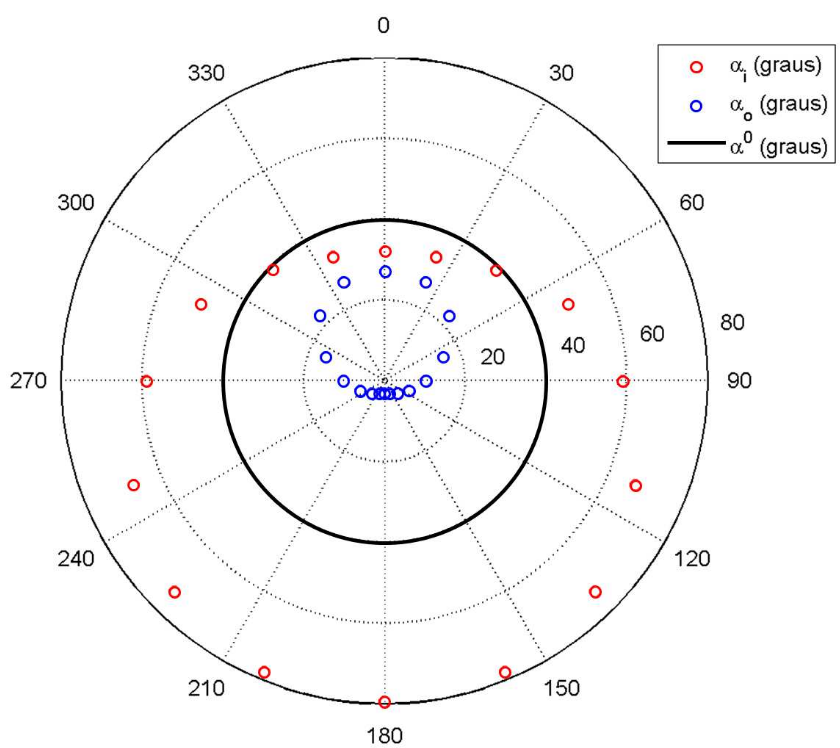


Figura 5.18. Valores de ângulos de contato das pistas externa (α_o) e interna (α_i) para diferentes posições (ψ) de cada esfera com momento giroscópico igual a zero.

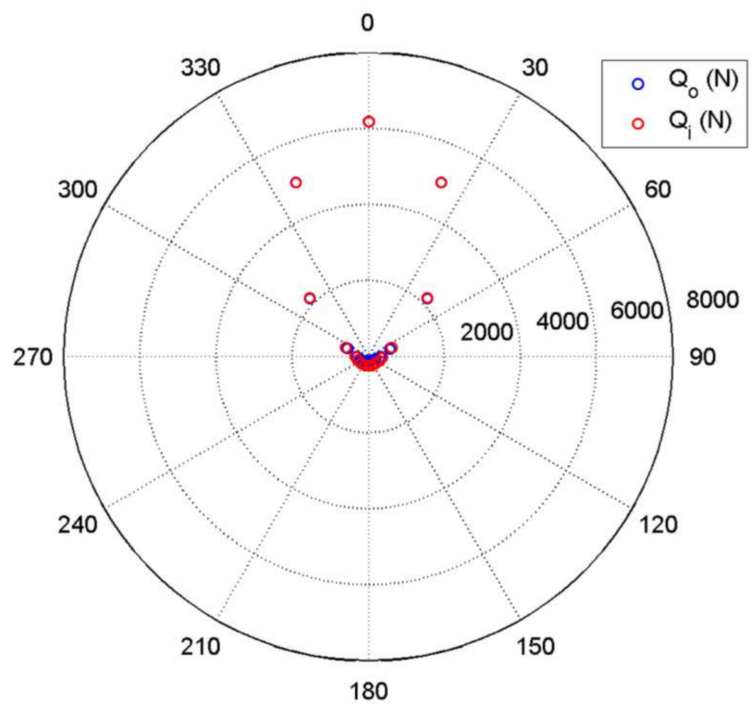


Figura 5.19. Valores de carregamento nas pistas externa (Q_o) e interna (Q_i) para diferentes posições (ψ) de cada esfera com força centrípeta igual a zero.

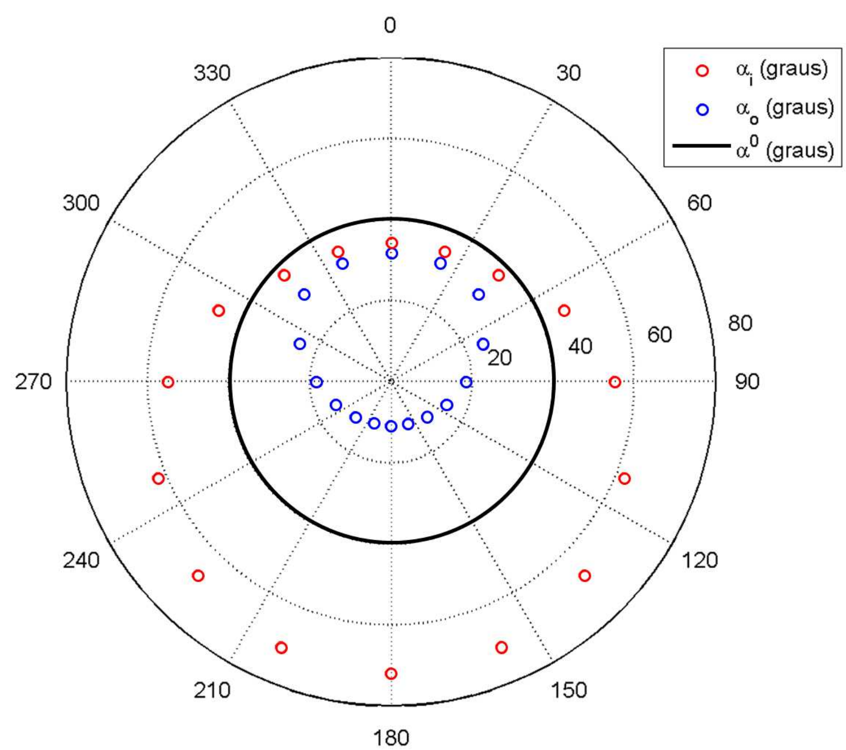


Figura 5.20. Valores de ângulos de contato das pistas externa (α_o) e interna (α_i) para diferentes posições (ψ) de cada esfera com força centrípeta igual a zero.

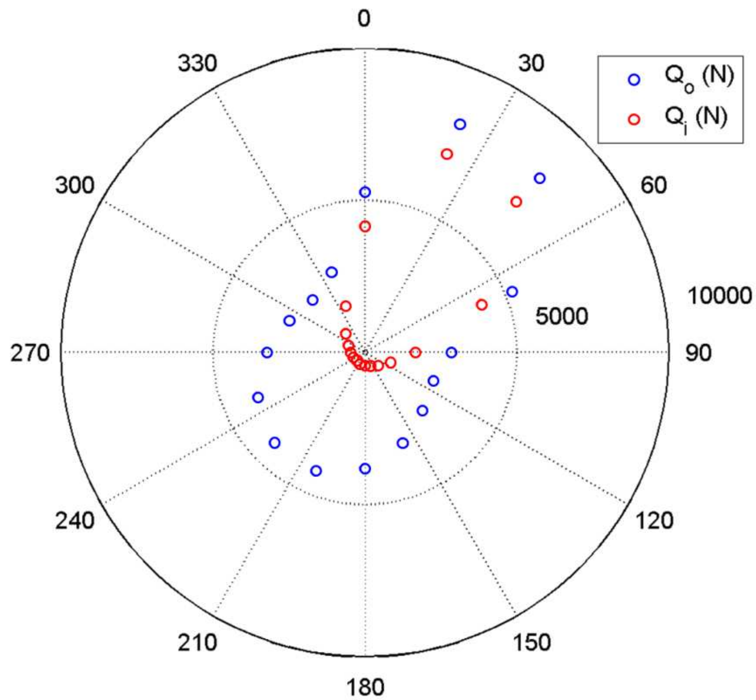


Figura 5.21. Valores de carregamento nas pistas externa (Q_o) e interna (Q_i) para diferentes posições (ψ) de cada esfera. $F_a = 20\ kN$, $F_z = 15\ kN$, $F_y = 10\ kN$, $n_i = 15.000\ rpm$, $\psi_1 = 0°$.

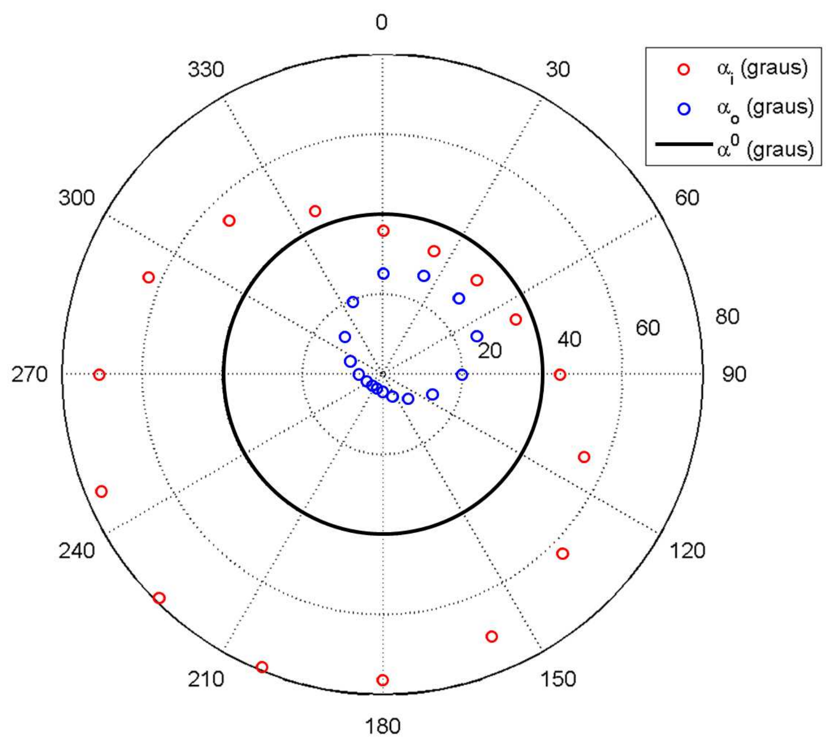


Figura 5.22. Valores de ângulos de contato das pistas externa (α_o) e interna (α_i) para diferentes posições (ψ) de cada esfera. $F_a = 20\ kN$, $F_z = 15\ kN$, $F_y = 10\ kN$, $n_i = 15.000\ rpm$, $\psi_1 = 0°$.

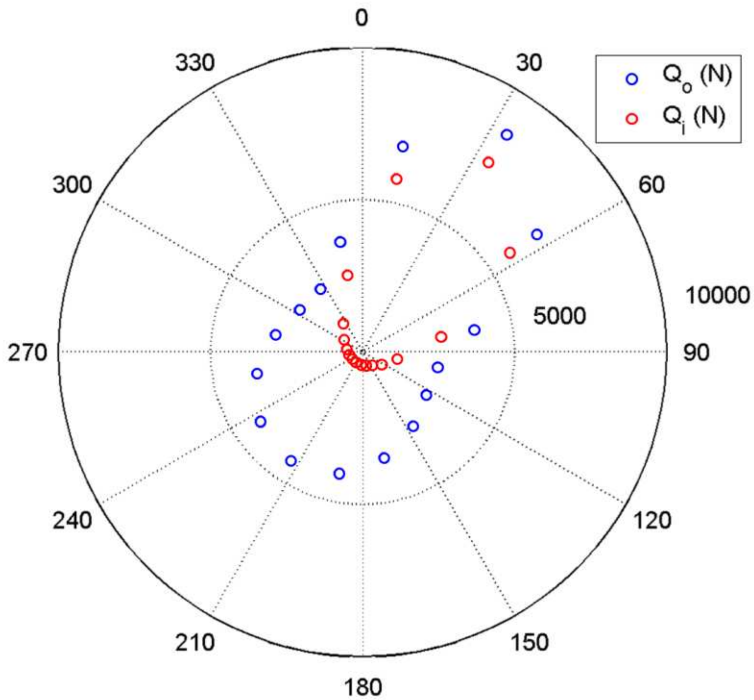


Figura 5.23. Valores de carregamento nas pistas externa (Q_o) e interna (Q_i) para diferentes posições (ψ) de cada esfera. $F_a = 20\ kN$, $F_z = 15\ kN$, $F_y = 10\ kN$, $n_i = 15.000\ rpm$, $\psi_1 = 11°$.

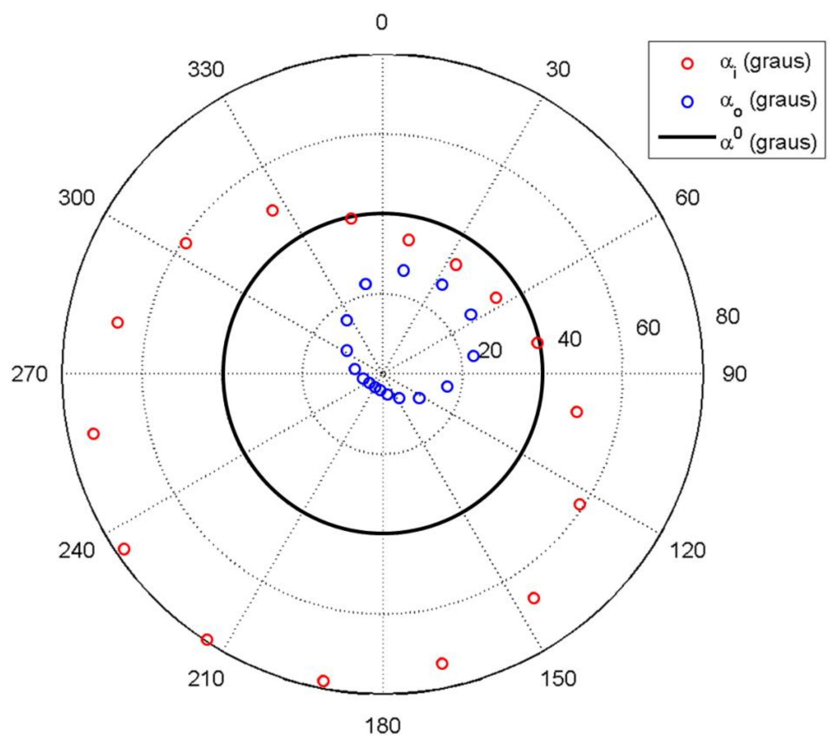


Figura 5.24. Valores de ângulos de contato das pistas externa (α_o) e interna (α_i) para diferentes posições (ψ) de cada esfera. $F_a = 20\ kN$, $F_z = 15\ kN$, $F_y = 10\ kN$, $n_i = 15.000\ rpm$, $\psi_1 = 11°$.

Pode-se verificar através dos gráficos representados nas figuras 5.11, 5.12, 5.13 e 5.14 que o aumento na velocidade de rotação da pista interna, gera um maior momento giroscópico. Este acréscimo no valor do momento giroscópico, mais a elevação da força centrípeta, causa um aumento no ângulo de contato com a pista interna (α_i) e um decréscimo no ângulo de contato com a pista externa (α_o) como era esperado. Também há um aumento no carregamento no contato com a pista externa (Q_o) devido à necessidade de uma maior resistência aos efeitos da força centrípeta e momento giroscópico.

Outra verificação possível é que o aumento da força axial aplicada ao rolamento faz com que o carregamento total em cada esfera se aproxime do valor estático (figuras 5.11 e 5.12).

Observando a figura 5.13, percebe-se que quando o rolamento opera a altas rotações e submetido a pequenos carregamentos axiais, o deslocamento da pista interna chega a ser negativo, pois os esforços criados pela força centrípeta e pelo momento giroscópico são maiores do que os criados pelo próprio carregamento axial aplicado ao mancal.

Os resultados apresentados nas figuras 5.11, 5.12, 5.13 e 5.14 ficaram muito próximos aos valores obtidos em Harris (1991). Os resultados encontrados por Harris são expostos no APÊNDICE C deste trabalho.

Quando se analisam as figuras 5.15 e 5.16, veem-se claramente os efeitos da força centrípeta e do momento giroscópico no mancal. As esferas posicionadas próximas ao ângulo $\psi = 0°$ são responsáveis por resistir o carregamento radial aplicado ao mancal. Porém as esferas posicionadas no lado oposto do mancal estão sujeitas somente à força centrípeta e ao momento giroscópico, ou seja, os efeitos destas duas componentes gera um grande aumento no valor do ângulo de contato entre esfera e pista interna e uma grande redução no ângulo de contato ângulo entre esfera e pista externa, quase tendendo a zero.

Analisando os gráficos das figuras 5.17 e 5.18, nos quais o momento giroscópico foi considerado nulo, percebe-se que os resultados encontrados são muito parecidos com os resultados apresentados nas figuras 5.15 e 5.16, mostrando assim que o momento giroscópico não representa o fator de maior influência no equilíbrio do mancal.

O mesmo não acontece quando a força centrípeta é considerada nula (figuras 5.19 e 5.20). A influência da força centrípeta é evidenciada na comparação entre as figuras 5.15 e 5.16; e as figuras 5.19 e 5.20, onde se percebe uma clara diferença entre os resultados encontrados. Conclui-se que o fator que gera desigualdades entre os carregamentos nos contatos entre esfera e pistas internas e externas é principalmente o efeito da força centrípeta, pois desconsiderando os efeitos da força centrípeta, os carregamentos no contato da pista interna (Q_{ij}) e da pista externa (Q_{oj}) são praticamente iguais.

Quando se analisam os resultados apresentados nas figuras 5.21, 5.22, 5.23 e 5.24, percebe-se que estes possuem as mesmas tendências dos resultados das figuras 5.15 e 5.16, a não ser pelo fato do carregamento radial equivalente não estar posicionado sobre o eixo z, causando certa defasagem angular dos resultados de carregamentos e ângulos de cada esfera.

Comparando as figuras 5.21 e 5.22 com as figuras 5.23 e 5.24, constata-se que os carregamentos aplicados a cada esfera são influenciados diretamente pela posição angular da primeira esfera, ou seja, quando o mancal estiver em funcionamento, será necessário recalcular o equilíbrio de forças no mancal para cada instante de tempo.

Com o objetivo de determinar a influência do carregamento axial e da rotação da pista interna sobre o deslocamento radial da pista interna, foram realizadas duas novas análises. Na primeira, um mancal radial 218 é submetido a uma carga radial igual a $20.000\,N$, a uma rotação da pista interna de $10.000\,rpm$ e uma carga axial que variou de $16.000\,N$ a $80.000\,N$, sendo que, para cada carga axial aplicada, foi calculado o deslocamento radial da pista interna. O resultado desta primeira análise é apresentado na figura 5.25. Na segunda análise foi utilizado novamente um mancal radial 218, porém ao invés de se variar a carga axial aplicada, a qual foi fixada em $20.000\,N$, houve uma variação na rotação da pista interna de $100\,rpm$ até $15.000\,rpm$, além de manter o carregamento radial igual $20.000\,N$. O resultado da segunda análise é exposto na figura 5.26.

É possível concluir a partir da figura 5.25 que o deslocamento radial do eixo é fortemente influenciado pela carga axial aplicada, sendo que o aumento da força axial de $20.000\,N$ para $80.000\,N$ reduz o valor do deslocamento radial em aproximadamente 80%. Este efeito é interessante, pois, quando for necessário inserir um mancal em um sistema que deve ser o mais preciso possível, o rolamento pode ser pré-carregado axialmente para que haja um aumento na rigidez radial do mancal.

Analisando a figura 5.26, nota-se que o deslocamento radial da pista interna é influenciado pela rotação da mesma, porém esta influência não é tão forte quanto a influencia do carregamento axial visto na análise anterior. Isto ocorre devido ao efeito da força centrípeta, que empurra as esferas contra a pista externa, obrigando a pista interna a se deslocar ainda mais para equilibrar as forças aplicadas a ela.

Durante a simulação computacional desta última análise, foi possível constatar que quanto maior era a rotação da pista interna, maior era o tempo necessário para o processo convergir. Este aumento no tempo de convergência advém do fato de a solução final procurada se localizar cada vez mais distante da estimativa inicial, a qual é obtida na análise estática do mancal.

Por último, serão analisados os efeitos causados pelo desalinhamento angular da pista interna. Para iniciar este último estudo, procurou-se na literatura por valores de desalinhamentos angulares que poderiam ser utilizados nas simulações.

Para se evidenciar os efeitos provocados pelo desalinhamento angular, foram realizadas simulações com desalinhamentos pouco maiores que o desalinhamento limite encontrado em Norton (2004), onde, de acordo com os valores fornecidos por *FAG Bearings Corp*, o desalinhamento limite dos mancais de contato angular com ângulo de contato entre $15°$ e $40°$ é aproximadamente $0°2'$ $(0{,}033°)$.

Foram efetuadas três simulações distintas, sendo que na primeira haveria um desalinhamento angular $\theta_y = 0{,}05°$, na segunda a pista interna estaria alinhada ($\theta_y = 0°$) e na terceira haveria um desalinhamento negativo $\theta_y = -0{,}05°$. Nas três simulações o mancal estava sujeito a uma carga axial igual a $20.000\,N$, a uma carga radial na direção do eixo z igual a $15.000\,N$, operando a uma velocidade de $10.000\,rpm$. Os resultados das três simulações são apresentados nas figuras 5.27, 5.28, 5.29, 5.30, 5.31 e 5.32 e na tabela 5.4.

Tabela 5.4. Valores de deslocamento axial (δ_a), deslocamento radial (δ_z) e momento externo aplicado ao mancal (M_y) para diferentes valores de desalinhamento (θ_y).

Paramêtros	$\theta_y = 0,05°$	$\theta_y = 0°$	$\theta_y = -0,05°$
$\delta_a\ (mm)$	$-0{,}0471$	$-0{,}0370$	$-0{,}0290$
$\delta_z\ (mm)$	$0{,}0671$	$0{,}0989$	$0{,}1294$
$M_y\ (N.m)$	$769{,}43$	$656{,}54$	$542{,}85$

Observando as figuras 5.27 a 5.32, vê-se que o desalinhamento angular da pista interna influencia fracamente os carregamentos e os ângulos dos contatos entre esfera e pistas. Porém ao analisar os resultados dispostos na tabela 5.4, observa-se claramente que o desalinhamento angular θ_y possui forte influência sobre parâmetros responsáveis por definir o equilíbrio de forças no mancal (δ_a e δ_z). É possível ver que o desalinhamento altera o momento externo aplicado ao mancal (M_y). Também é possível verificar que, mesmo quando o desalinhamento é igual a zero, surge um momento externo, devido ao desbalanceamento das forças radiais.

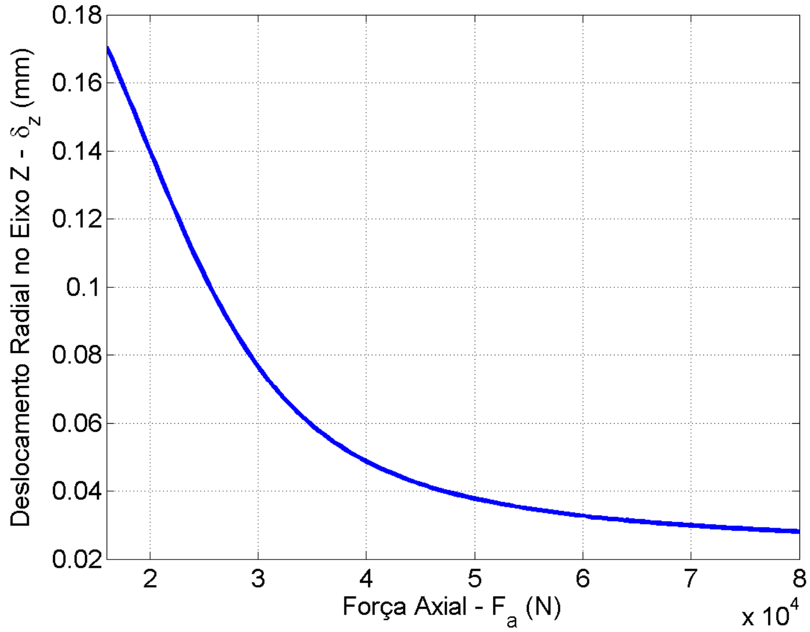


Figura 5.25. Deslocamento radial no eixo Z (δ_z) para diversos valores de carregamento axial (F_a). $F_z = 20\ kN, n_i = 10.000\ rpm.$

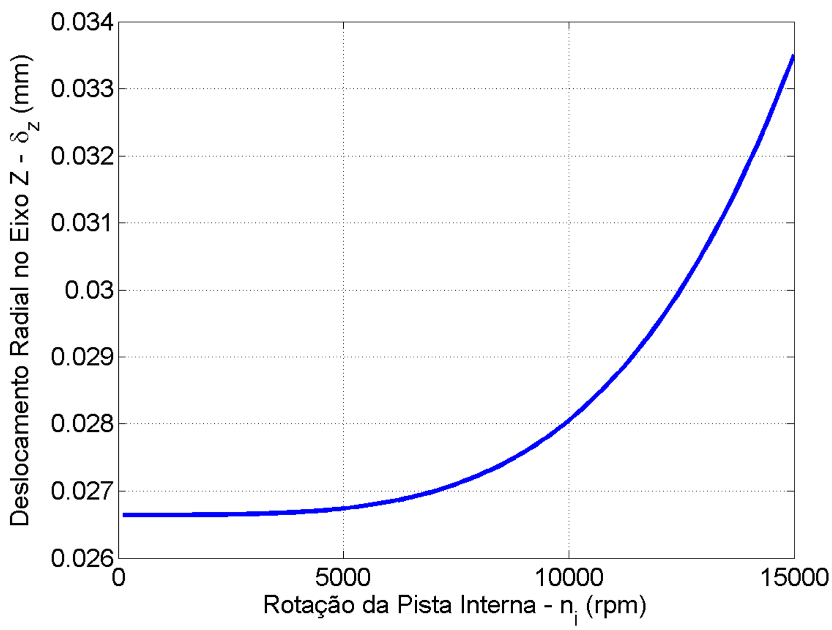


Figura 5.26. Deslocamento radial no eixo Z (δ_z) para diversos valores de rotação da pista interna (n_i). $F_z = 20\ kN, F_a = 20\ kN.$

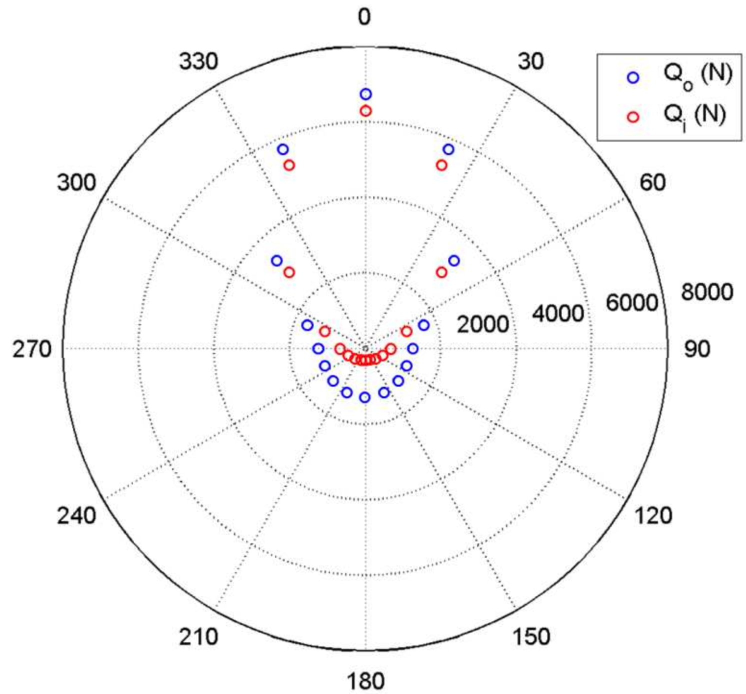


Figura 5.27. Valores de carregamento nas pistas externa (Q_o) e interna (Q_i) para diferentes posições (ψ) de cada esfera. $F_a = 20\ kN$, $F_z = 15\ kN$, $n_i = 10.000\ rpm$, $\theta_y = 0{,}05°$.

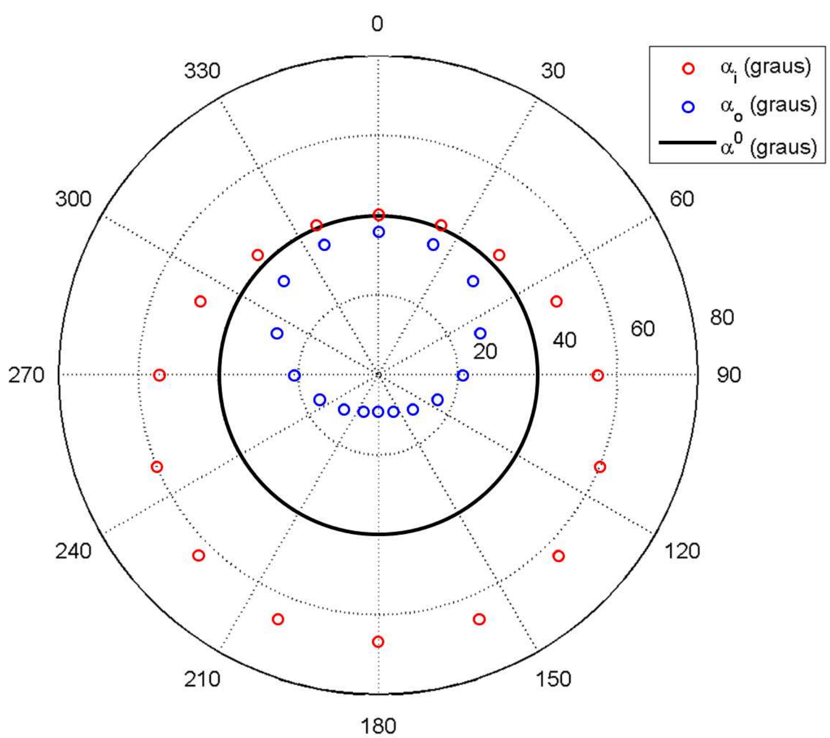


Figura 5.28. Valores de ângulos de contato das pistas externa (α_o) e interna (α_i) para diferentes posições (ψ) de cada esfera. $F_a = 20\ kN$, $F_z = 15\ kN$, $n_i = 10.000\ rpm$, $\theta_y = 0{,}05°$.

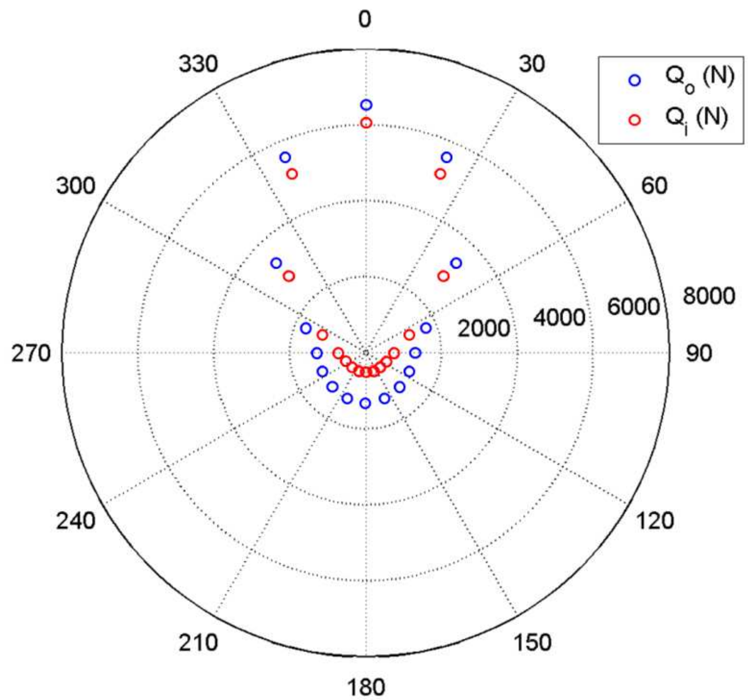


Figura 5.29. Valores de carregamento nas pistas externa (Q_o) e interna (Q_i) para diferentes posições (ψ) de cada esfera. $F_a = 20\ kN$, $F_z = 15\ kN$, $n_i = 10.000\ rpm$, $\theta_y = 0°$.

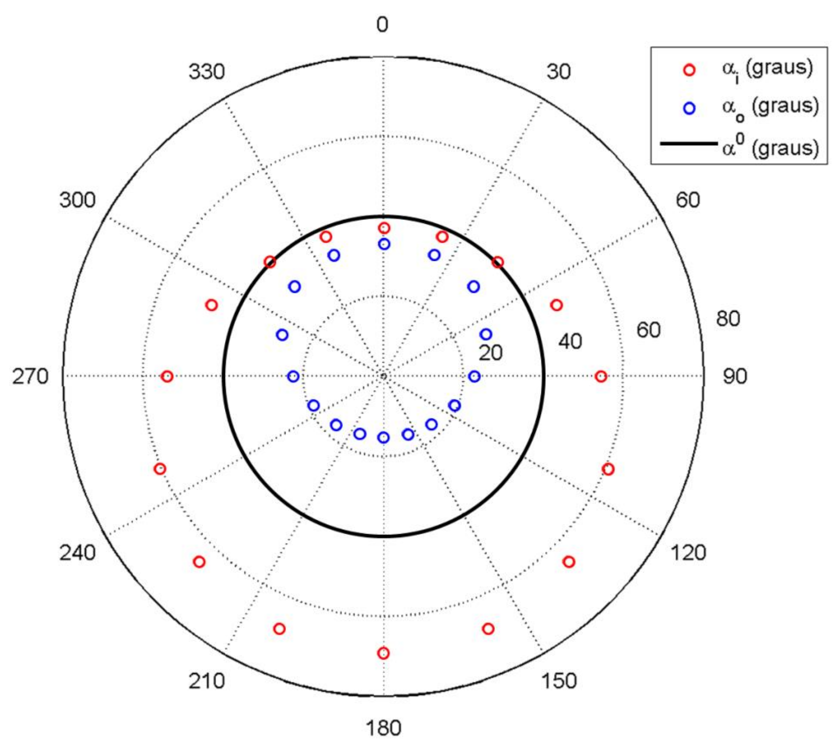


Figura 5.30. Valores de ângulos de contato das pistas externa (α_o) e interna (α_i) para diferentes posições (ψ) de cada esfera. $F_a = 20\ kN$, $F_z = 15\ kN$, $n_i = 10.000\ rpm$, $\theta_y = 0°$.

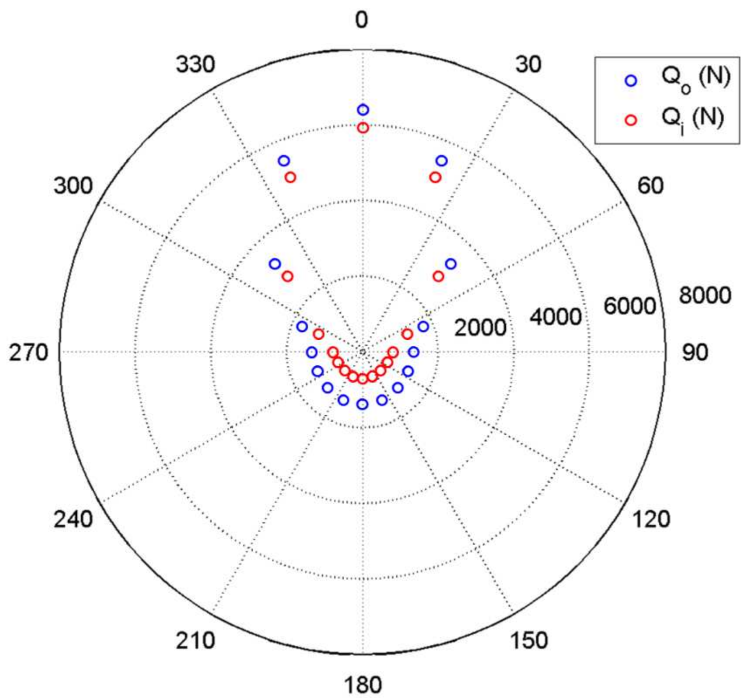


Figura 5.31. Valores de carregamento nas pistas externa (Q_o) e interna (Q_i) para diferentes posições (ψ) de cada esfera. $F_a = 20\ kN$, $F_z = 15\ kN$, $n_i = 10.000\ rpm$, $\theta_y = -0{,}05°$.

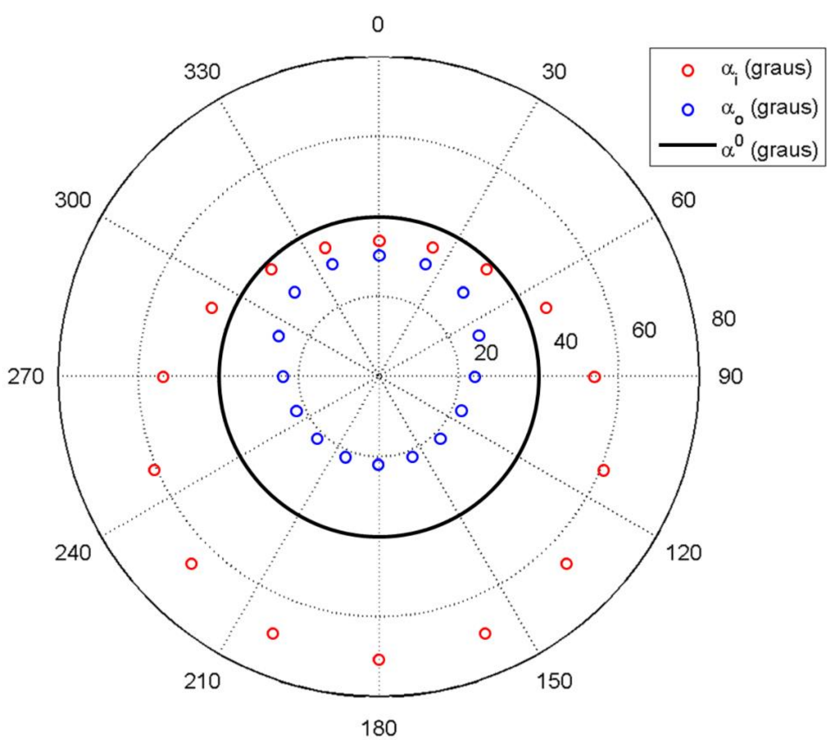


Figura 5.32. Valores de ângulos de contato das pistas externa (α_o) e interna (α_i) para diferentes posições (ψ) de cada esfera. $F_a = 20\ kN$, $F_z = 15\ kN$, $n_i = 10.000\ rpm$, $\theta_y = -0{,}05°$.

6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA PRÓXIMOS TRABALHOS

Quando os mancais de rolamento estão submetidos a um carregamento radial externo, ocorre uma distribuição de carregamento entre os elementos rolantes. Esta distribuição é obtida a partir da relação carregamento-deflexão no contato entre elementos rolantes e pistas (interna e externa). Através dos resultados da análise da distribuição de carregamento foi possível concluir que quanto maior é a folga entre esferas e pistas (interna e externa), menor é o número de esferas carregadas e maior é o esforço máximo a que as esferas estão submetidas. Também foi possível concluir, que tanto no carregamento axial quanto no carregamento radial, o aumento no valor da força externa aplicada, gera um aumento na rigidez equivalente do mancal.

Os resultados obtidos na análise cinemática e na análise dinâmica mostraram que a rotação do anel interno (considerando a rotação do anel externo nula) exerce forte influência sobre a rotação da esfera, a rotação do separador, força centrípeta e momento giroscópico, sendo que as duas primeiras são diretamente proporcionais enquanto a variação da força centrípeta e do momento giroscópico equivalem ao quadrado da variação da rotação do anel interno, confirmando as expectativas. Verificou-se também que o ângulo de contato do mancal exerce pequena influência sobre os três primeiros parâmetros estudados, enquanto que este possui uma forte influencia sobre o momento giroscópico gerado em cada esfera.

A análise do equilíbrio de posição e forças em cada esfera possibilitou verificar que os ângulos de contato e o carregamento normal ao contato são influenciados pela velocidade angular de rotação do mancal, e que esta influência é causada pelos efeitos da força centrípeta e do momento giroscópico. Estes efeitos são mais acentuados quando o mancal está operando com uma pequena força axial, pois os carregamentos gerados pela força centrípeta e pelo momento giroscópico são responsáveis por uma grande parcela do carregamento total. Constatou-se também que grande parte dos efeitos gerados pelas forças dinâmicas são provocados pela força centrípeta, enquanto o momento giroscópico é responsável por um pequena parcela. Outro fator relevante a ser considerado é a mudança da posição angular de cada esfera quando o mancal estiver em funcionamento, pois será necessário encontrar um novo equilíbrio do mancal para cada instante de tempo.

Conclui-se também que o deslocamento radial da pista interna é influenciado pela velocidade de rotação do mancal e pela força axial externa aplicada, mesmo quando o carregamento radial é mantido constante. O aumento da rotação da pista interna gera um aumento no deslocamento radial da mesma, enquanto o aumento da força axial gera o efeito inverso, ou seja, resulta numa redução no deslocamento radial da pista interna.

Por último, foi possível verificar que o desalinhamento angular da pista interna possui uma pequena influência sobre os carregamentos e ângulos de contato entre esferas e pistas. Contudo, o desalinhamento angular exerce forte influência sobre os deslocamentos da pista interna e sobre os momentos externos aplicados ao mancal.

É interessante ressaltar que o estudo desenvolvido neste trabalho conclui uma importante etapa da análise do funcionamento do mancal, principalmente devido ao desenvolvimento das expressões que definem o carregamento e o equilíbrio dinâmico dos mancais de esferas de contato angular. O programa computacional criado durante a elaboração deste trabalho pode ser utilizado na determinação dos equilíbrios de posição e de forças das esferas e do equilíbrio de força no mancal, encontrando-se assim as velocidades e os carregamentos aplicados às esferas.

Para dar continuidade ao trabalho desenvolvido até este ponto, sugere-se que novas pesquisas sejam realizadas tendo como tema as seguintes propostas:

— Concluir o desenvolvimento da análise cinemática do mancal sem utilizar as simplificações utilizadas durante este trabalho (pista externa de controle, raio de rolamento puro igual à metade do diâmetro da esfera e ângulo β' igual a zero) e;

— Inserir o efeito do filme lubrificante do contato elastohidrodinâmico, como presente em tais mancais, no equilíbrio de forças dos elementos rolantes.

Referências

Carvalho, R.V., **Análise Dinâmica de Rolamentos de Esfera.** 2010. Dissertação de Mestrado Acadêmico – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Changqing, B., Dynamic model of ball bearings with internal clearance and waviness. **Journal of Sound and Vibration,** Vol. 294, p. 23–48. 2006.

Changsen, W., **Analysis of Rolling Element Bearings**. Londres: Mechanical Engineering Publications LTD., 1991. 411p.

Doughty, S., **Mechanics of Machines**. New York: John Wiley and Sons Inc., 1988. 467p.

Gupta, P.K., Dynamics of rolling element bearings part III: Ball bearing analysis & part IV: Ball bearing results. **ASME Journal of Lubrication Technology**, Vol.101, p. 311-326. 1979.

Hagiu, G.D., Dynamic characteristics of high speed angular contact ball bearings. **Wear**. Vol. 211. p. 22-29. 1997.

Harris, T.A. and Kotzalas M.N., **Advanced Concepts of Bearing Technology**. 5ª ed., Florida-USA: CRC Press, 2006. 342p

Harris, T.A., **Rolling Bearing Analysis.** New York: John Wiley & Sons, 1991. 1011p.

Hibbeler, R. C. **Dinâmica: mecânica para engenharia**, 10ª ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2005. 540p.

Jedrzejewski, J., Modelling of angular contact ball bearings and axial displacements for high-speed spindles, **CIRP Annals - Manufacturing Technology**, Vol. 59, p. 377-382. 2010.

Jones, A.B., A General Theory for Elastically Constrained Ball and Radial Roller Bearing under Arbitrary Load and Speed Conditions, **Journal of Basic Engineering, Trans. ASME,** Vol.82, 1960.

Kang, Y., A Modification of the Jones-Harris Method for Deep-Groove Ball Bearings, **Tribology International**, Vol. 39, p. 1413-1420. 2006a.

Kang, Y., Stiffness determination of angular contact ball bearings by using neural networks, **Tribology International**, Vol. 39, p. 461-469. 2006b.

Liao, N. T., Ball bearing skidding under radial and axial loads, **Mechanism and Machine Theory.** Vol. 37, p. 91-13. 2002.

Lim, T.C. and Singh, R., Vibration transmission through rolling element bearings, part I: bearing stiffness formulation, **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 139, p. 179-199. 1990.

Lim, T.C. and Singh, R., Vibration transmission through rolling element bearings, part II: system studies, **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 139, p. 201-225. 1990.

Lim, T.C. and Singh, R., Vibration transmission through rolling element bearings, part III: geared rotor system studies, **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 151, p. 31-54. 1991.

Lim, T.C. and Singh, R., Vibration transmission through rolling element bearings, part IV: statistical energyanaly sis, **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 153, p. 37-50. 1992.

Lim, T.C. and Singh, R., Vibration transmission through rolling element bearings, part V: effect of distributed contact load on roller bearing stiffness matrix, **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 169, p. 547-553. 1994.

Liew, H. V. and Lim, T.C., Analysis of time-varying rolling element bearing characteristics, **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 283, p. 1163-1179, 2005.

Lundberg, G. and Palmgren, A., Dynamic Capacity of Rolling Bearings, **Acta Polytechnica Mechanical Engineering Series**, Vol. 1, Nº 3. 1947 and Vol. 2, Nº 4. 1952.

Meeks, C. R. and Tran, L., Ball bearing dynamic analysis using computer methods-part I: Analysis, **ASME Journal of Tribology**, Vol. 118, p.52-58. 1996.

Merian, J.L. and Kraige, L.G., **Mecânica Dinâmica**. 5ª edição, Rio de Janeiro: LTC, 2004. 648p.

Nataraj, C., The effect of bearing cage run-out on the nonlinear dynamics of a rotating shaft, **Nonlinear Science and Numerical Simulation**, Vol. 13, p. 822-838. 2008.

Nonato, F. and Cavalca, K.L., On the non-linear dynamic behavior of elastohydrodynamic lubricated point contact, **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 329, p. 4656-4671. 2010.

Nonato, F., **Modelo dinâmico para o contato em mancais de elementos rolantes sujeito a lubrificação elastohidrodinâmica**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2009.

Nonato, F., **Avaliação do Problema de Lubrificação Elastohidrodinâmica EHD para Mancal de Elemento Rolante Tipo Esferas**. Monografia (Trabalho de Graduação) - Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2007.

Norton, R.L., **Design of Machinery – An introduction to the sysnthesis and analysis of mechanisms and machines**, 4th edition, New York: McGraw-Hill, 2008. 825p.

Norton, R.L., **Projeto de Máquinas: uma abordagem integrada**. Tradução: João Batista de Aguiar, et al. 2ª edição, Porto Alegre: Bookman, 2004. 931p.

Palmgren, A., **Ball and Roller Bearing Engineering**. Philadelphia: PA, 1945. 270p.

Walters, C.T., The dynamics of ball bearings, **ASME Journal of Lubrication Technology**, Vol. 93, p. 1-10. 1971.

Associação Nacional dos Fabricantes de Veículos Automotores ANFAVEA, **Anuário da Indústria Automobilística Brasileira – 2012**. São Paulo: Ipsis, 2012. 155 p.

Intel Fortran *Language Reference*, Intel Corporation, 2003.

Schaeffler Technologies GmbH & Co. KG, **HR 1 Catalog**: Rolling Bearings. 2010.

APÊNDICE A – Desenvolvimento das Equações Cinemáticas

Em sua dissertação de mestrado, Carvalho (2010) desenvolveu até certo ponto as expressões cinemáticas que caracterizam o mancal de esferas de contato angular durante o seu funcionamento. Neste trabalho será dado sequência ao desenvolvimento das expressões iniciado por Carvalho (2010) com o objetivo de encontrar expressões simplificadas para as relações ω_R/ω e ω_m/ω, que são utilizadas diretamente no cálculo da força centrípeta e do momento giroscópico.

Em Carvalho (2010), têm-se as seguintes expressões:

$$\frac{\omega_R}{\omega_o} = \frac{(d_m/2) + r_o' \cos\alpha_o}{r_o'(\cos\beta \cos\beta' \cos\alpha_o + \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\alpha_o)} \tag{1}$$

$$\frac{\omega_R}{\omega_i} = \frac{-(d_m/2) + r_i' \cos\alpha_i}{r_i'(\cos\beta \cos\beta' \cos\alpha_i + \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\alpha_i)} \tag{2}$$

onde ω_R é a velocidade angular da esfera, ω_o é a velocidade angular da pista externa, ω_i é a velocidade angular da pista interna, r_i' é o raio de rolamento puro no contato entre esfera e pista interna e r_o' é o raio de rolamento puro no contato entre esfera e pista externa. A partir das expressões (1) e (2) encontrados em Carvalho (2010), pode-se dar continuidade ao desenvolvimento das expressões cinemáticas do mancal de esferas neste trabalho.

Dividindo a expressão (1) por (2) tem-se:

$$\frac{\omega_i}{\omega_o} = -\frac{r_i'}{r_o'} \cdot \frac{(d_m/2) + r_o' \cos\alpha_o}{(d_m/2) - r_i' \cos\alpha_i} \cdot \frac{(\cos\beta \cos\beta' \cos\alpha_i + \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\alpha_i)}{(\cos\beta \cos\beta' \cos\alpha_o + \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\alpha_o)} \tag{3}$$

Utilizando a variável auxiliar X para auxiliar os cálculos, chega-se a:

$$X = \frac{r_i'}{r_o'} \cdot \frac{(d_m/2) + r_o' \cos\alpha_o}{(d_m/2) - r_i' \cos\alpha_i} \cdot \frac{(\cos\beta \cos\beta' \cos\alpha_i + \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\alpha_i)}{(\cos\beta \cos\beta' \cos\alpha_o + \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\alpha_o)} \Longrightarrow \frac{\omega_i}{\omega_o} = -X \tag{4}$$

Todas as expressões cinemáticas encontradas até este ponto foram obtidas considerando que a esfera estava fixa no espaço. Porém, a partir de agora, ao invés de fixar o centro da esfera, será fixado a pista externa ou a pista interna. Fixando primeiramente a pista externa, o centro da esfera irá orbitar em torno do ponto O fixado no contato entre esfera e pista externa com uma velocidade angular $\omega_m = -\omega_o$. Portanto a velocidade angular absoluta da pista interna será igual a:

$$\omega = \omega_i + \omega_m \tag{5}$$

A partir de (5), é possível encontrar as relações apresentadas em (6) e (7).

$$\omega_o = \omega_i - \omega \tag{6}$$

$$\omega_i = \omega_o + \omega \tag{7}$$

Unindo a expressão (6) e (7) à expressão (4), obtêm-se as expressões (8) e (9) respectivamente.

$$\frac{\omega_i}{\omega_i - \omega} = -X \Rightarrow \omega_i(1+X) = X\omega \Rightarrow \omega_i = \frac{\omega}{1 + {}^{1}/_{X}} \tag{8}$$

$$\frac{\omega_o + \omega}{\omega_o} = -X \Rightarrow \omega = -\omega_o - X\omega_o \Rightarrow \omega_o = \frac{-\omega}{1+X} \tag{9}$$

Portanto ω_i e ω_o podem ser encontrados a partir de (4), (8) e (9) e serão equivalentes a:

$$\omega_i = \frac{\omega}{1 + \frac{r_o'}{r_i'} \cdot \frac{(d_m/2) - r_i' \cos\alpha_i}{(d_m/2) + r_o' \cos\alpha_o} \cdot \frac{(\cos\beta \cos\beta' \cos\alpha_o + \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\alpha_o)}{(\cos\beta \cos\beta' \cos\alpha_i + \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\alpha_i)}} \tag{10}$$

$$\omega_o = \frac{-\omega}{1 + \frac{r_i'}{r_o'} \cdot \frac{(d_m/2) + r_o' \cos\alpha_o}{(d_m/2) - r_i' \cos\alpha_i} \cdot \frac{(\cos\beta \cos\beta' \cos\alpha_i + \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\alpha_i)}{(\cos\beta \cos\beta' \cos\alpha_o + \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\alpha_o)}} \tag{11}$$

Para encontrar a expressão que define ω_R, será utilizado uma segunda variável auxiliar (Y). Define-se então:

$$\frac{\omega_R}{\omega_i} = Y \Rightarrow \omega_R = Y\omega_i \tag{12}$$

onde Y é igual a:

$$Y = \frac{-(d_m/2) + r_i' \cos\alpha_i}{r_i'(\cos\beta \cos\beta' \cos\alpha_i + \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\alpha_i)} \tag{13}$$

Substituindo a expressão (8) em (12), chega-se a:

$$\omega_R = \frac{Y\omega}{1 + {}^{1}/_{X}} = \frac{\omega}{{}^{1}/_{Y} + {}^{1}/_{XY}} \tag{14}$$

Sabendo que X é definido pela expressão (4) e que Y está descrito em (13), encontra-se que o valor de ω_R é igual a:

$$\omega_R = \frac{-\omega}{\frac{r_i'(\cos\beta \cos\beta' \cos\alpha_i + \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\alpha_i)}{(d_m/2) - r_i' \cos\alpha_i} + \frac{r_o'(\cos\beta \cos\beta' \cos\alpha_o + \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\alpha_o)}{(d_m/2) + r_o' \cos\alpha_o}} \tag{15}$$

Realizando algumas simplificações descritas em (16) na expressão (15), chega-se à expressão (17).

$$r'_o = r'_i = {}^{D}/_{2}; \quad \gamma' = {}^{D}/_{d_m}; \quad \beta' = 0 \Rightarrow \cos\beta' = 1 \tag{16}$$

$$\frac{\omega_R}{\omega} = \frac{-1}{\frac{D}{2}\cdot\frac{a}{(d_m/2)+(D/2)\cos\alpha_o} + \frac{D}{2}\cdot\frac{b}{(d_m/2)-(D/2)\cos\alpha_i}} \tag{17}$$

onde:

$$a = \cos\beta\cos\alpha_o + \operatorname{sen}\beta\ \operatorname{sen}\alpha_o \tag{18}$$

$$b = \cos\beta\cos\alpha_i + \operatorname{sen}\beta\ \operatorname{sen}\alpha_i \tag{19}$$

Multiplicando a e b por $\cos\beta/\cos\beta$, têm-se:

$$a = \cos\beta\left[\cos\alpha_o + \frac{\operatorname{sen}\beta\ \operatorname{sen}\alpha_o}{\cos\beta}\right] = \cos\beta\,(\cos\alpha_o + \operatorname{tg}\beta\ \operatorname{sen}\alpha_o) \tag{20}$$

$$b = \cos\beta\left[\cos\alpha_i + \frac{\operatorname{sen}\beta\ \operatorname{sen}\alpha_i}{\cos\beta}\right] = \cos\beta\,(\cos\alpha_i + \operatorname{tg}\beta\ \operatorname{sen}\alpha_i) \tag{21}$$

Dando continuidade à simplificação da expressão (17):

$$\frac{\omega_R}{\omega} = -\left(\frac{\gamma' a}{1+\gamma'\cos\alpha_o} + \frac{\gamma' b}{1-\gamma'\cos\alpha_i}\right)^{-1} = -\left[\left(\frac{a}{1+\gamma'\cos\alpha_o} + \frac{b}{1-\gamma'\cos\alpha_i}\right)\gamma'\right]^{-1} \tag{22}$$

Substituindo as equações (20) e (21) em (22), finalmente chega-se a:

$$\frac{\omega_R}{\omega} = \frac{-1}{\gamma'\cos\beta\left(\frac{\cos\alpha_o + \operatorname{tg}\beta\ \operatorname{sen}\alpha_o}{1+\gamma'\cos\alpha_o} + \frac{\cos\alpha_i + \operatorname{tg}\beta\ \operatorname{sen}\alpha_i}{1-\gamma'\cos\alpha_i}\right)} \tag{23}$$

Em Carvalho (2010) é detalhada a expressão que define o valor de $\operatorname{tg}\beta$, que é igual a:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{sen}\alpha_o}{\cos\alpha_o + \gamma'} \tag{24}$$

Substituindo a expressão (24) em (23), chega-se finalmente à expressão simplificada (28) que define o valor de ω_R/ω, quando somente a pista interna rotaciona, isto é, a pista externa é mantida estática.

$$\frac{\omega_R}{\omega} = \frac{-1}{\gamma'\cos\beta\left[\frac{\cos^2\alpha_o + \operatorname{sen}^2\alpha_o + \gamma'\cos\alpha_o}{(1+\gamma'\cos\alpha_o)(\cos\alpha_o+\gamma')} + \frac{\cos\alpha_i\cos\alpha_o + \operatorname{sen}\alpha_i\ \operatorname{sen}\alpha_o + \gamma'\cos\alpha_i}{(1-\gamma'\cos\alpha_i)(\cos\alpha_o+\gamma')}\right]} \tag{25}$$

$$\frac{\omega_R}{\omega} = \frac{-1}{\frac{\gamma'\cos\beta}{(\cos\alpha_o+\gamma')}\left[1 + \frac{\cos(\alpha_i-\alpha_o) + \gamma'\cos\alpha_i}{(1-\gamma'\cos\alpha_i)}\right]} \tag{26}$$

$$\frac{\omega_R}{\omega} = \frac{-1}{\frac{\gamma' \cos\beta}{(\cos\alpha_o + \gamma')}\left[\frac{1 + \cos(\alpha_i - \alpha_o)}{(1 - \gamma' \cos\alpha_i)}\right]} \tag{27}$$

$$\frac{\omega_R}{\omega} = -\frac{(\cos\alpha_o + \gamma')(1 - \gamma' \cos\alpha_i)}{\gamma' \cos\beta\,(1 + \cos(\alpha_i - \alpha_o))} \tag{28}$$

Lembrando que $\omega_m = -\omega_o$, é possível caracterizar a relação ω_m/ω a partir da equação (11). Realizando algumas simplificações matemáticas, chega-se à expressão final (35).

$$\frac{\omega_m}{\omega} = \frac{1}{1 + \frac{(d_m/2) + (D/2)\cos\alpha_o}{(d_m/2) - (D/2)\cos\alpha_i} \cdot \frac{(\cos\beta\cos\alpha_i + \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\alpha_i)}{(\cos\beta\cos\alpha_o + \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\alpha_o)}} \tag{29}$$

$$\frac{\omega_m}{\omega} = \left[1 + \frac{1 + \gamma' \cos\alpha_o}{1 - \gamma' \cos\alpha_i} \cdot \frac{\cos\alpha_i + \operatorname{tg}\beta\operatorname{sen}\alpha_i}{\cos\alpha_o + \operatorname{tg}\beta\operatorname{sen}\alpha_o}\right]^{-1} \tag{30}$$

$$\frac{\omega_m}{\omega} = \left[1 + \frac{1 + \gamma' \cos\alpha_o}{1 - \gamma' \cos\alpha_i} \cdot \frac{\cos\alpha_i + \left(\operatorname{sen}\alpha_o / \cos\alpha_o + \gamma'\right)\operatorname{sen}\alpha_i}{\cos\alpha_o + \left(\operatorname{sen}\alpha_o / \cos\alpha_o + \gamma'\right)\operatorname{sen}\alpha_o}\right]^{-1} \tag{31}$$

$$\frac{\omega_m}{\omega} = \left[1 + \frac{1 + \gamma' \cos\alpha_o}{1 - \gamma' \cos\alpha_i} \cdot \frac{\cos\alpha_i\cos\alpha_o + \operatorname{sen}\alpha_i\operatorname{sen}\alpha_o + \gamma' \cos\alpha_i}{\cos^2\alpha_o + \operatorname{sen}^2\alpha_o + \gamma' \cos\alpha_o}\right]^{-1} \tag{32}$$

$$\frac{\omega_m}{\omega} = \left[1 + \frac{1 + \gamma' \cos\alpha_o}{1 - \gamma' \cos\alpha_i} \cdot \frac{\cos(\alpha_i - \alpha_o) + \gamma' \cos\alpha_i}{1 + \gamma' \cos\alpha_o}\right]^{-1} \tag{33}$$

$$\frac{\omega_m}{\omega} = \left[\frac{1 - \gamma' \cos\alpha_i + \cos(\alpha_i - \alpha_o) + \gamma' \cos\alpha_i}{1 - \gamma' \cos\alpha_i}\right]^{-1} \tag{34}$$

$$\frac{\omega_m}{\omega} = \frac{1 - \gamma' \cos\alpha_i}{1 + \cos(\alpha_i - \alpha_o)} \tag{35}$$

Finalizado o estudo do primeiro caso, onde a pista interna rotacional e a pista externa é mantida estática, pode-se dar início ao estudo do segundo caso, no qual a pista interna é mantida fixa no espaço e, portanto, a velocidade de rotação do centro da esfera será igual a $\omega_m = -\omega_i$ e a velocidade angular absoluta da pista externa será $\omega = \omega_o + \omega_m$.

Como $\omega_o = \omega + \omega_i$, $\omega_i = \omega_o - \omega$ e $\frac{\omega_i}{\omega_o} = -X$ (4), tem-se:

$$\frac{\omega_i}{\omega_i + \omega} = -X \Rightarrow \omega_i(1 + X) = -X\omega \Rightarrow \omega_i = \frac{-\omega}{1 + 1/X} \tag{36}$$

$$\frac{\omega_o - \omega}{\omega_o} = -X \Rightarrow \omega = \omega_o + X\omega_o \Rightarrow \frac{\omega}{1 + X} \tag{37}$$

Substituindo a expressão de X (4) nas equações (36) e (37), obtêm-se as expressões (38) e (39) que definem ω_i e ω_o respectivamente.

$$\omega_i = \frac{-\omega}{1 + \frac{r_o'}{r_i'} . \frac{(d_m/2) - r_i' \cos \alpha_i}{(d_m/2) + r_o' \cos \alpha_o} . \frac{(\cos \beta \cos \beta' \cos \alpha_o + \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \alpha_o)}{(\cos \beta \cos \beta' \cos \alpha_i + \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \alpha_i)}} \tag{38}$$

$$\omega_o = \frac{\omega}{1 + \frac{r_i'}{r_o'} . \frac{(d_m/2) + r_o' \cos \alpha_o}{(d_m/2) - r_i' \cos \alpha_i} . \frac{(\cos \beta \cos \beta' \cos \alpha_i + \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \alpha_i)}{(\cos \beta \cos \beta' \cos \alpha_o + \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \alpha_o)}} \tag{39}$$

Utilizando a mesma variável auxiliar Y (13) usada no primeiro caso, a relação entre ω_R e ω_i (12) e a expressão (36), é possível encontrar a expressão de ω_R para o segundo caso:

$$\omega_R = \frac{-Y\omega}{1 + {}^1\!/_X} = \frac{-\omega}{{}^1\!/_Y + {}^1\!/_{XY}} \tag{40}$$

Sabendo-se que X e Y são iguais nos dois casos e comparando as expressões (14) e (40), conclui-se que a velocidade de rotação da esfera (ω_R) para o segundo caso, terá o mesmo módulo de ω_R encontrado no primeiro passo, porém com o sinal invertido. Portanto a relação ω_R/ω para o segundo caso é definida na expressão (41).

$$\frac{\omega_R}{\omega} = -\frac{(\cos \alpha_o + \gamma')(1 - \gamma' \cos \alpha_i)}{\gamma' \cos \beta \,(1 + \cos(\alpha_i - \alpha_o))} \tag{41}$$

Para finalizar o estudo cinemático do mancal, necessita-se encontrar a expressão que define a relação ω_R/ω para o segundo caso. Recordando que para o segundo caso o módulo de rotação do centro da esfera é igual ao da rotação da pista interna, porém com o sentido invertido ($\omega_m = -\omega_i$), utilizando esta definição na expressão na equação (38) e realizando algumas simplificações matemáticas, chega-se a expressão final (48) que caracteriza a relação ω_m/ω para o segundo caso (pista externa gira enquanto a pista interna permanece estática).

$$\frac{\omega_m}{\omega} = \frac{1}{1 + \frac{(d_m/2) - (D/2) \cos \alpha_i}{(d_m/2) + (D/2) \cos \alpha_o} . \frac{(\cos \beta \cos \alpha_o + \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \alpha_o)}{(\cos \beta \cos \alpha_i + \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \alpha_i)}} \tag{42}$$

$$\frac{\omega_m}{\omega} = \left[1 + \frac{1 - \gamma' \cos \alpha_i}{1 + \gamma' \cos \alpha_o} . \frac{(\cos \alpha_o + \operatorname{tg} \beta \operatorname{sen} \alpha_o)}{(\cos \alpha_i + \operatorname{tg} \beta \operatorname{sen} \alpha_i)}\right]^{-1} \tag{43}$$

$$\frac{\omega_m}{\omega} = \left[1 + \frac{1 - \gamma' \cos \alpha_i}{1 + \gamma' \cos \alpha_o} . \frac{\left(\cos \alpha_o + \left({}^{\operatorname{sen} \alpha_o}\!/_{\cos \alpha_o + \gamma'}\right) \operatorname{sen} \alpha_o\right)}{\left(\cos \alpha_i + \left({}^{\operatorname{sen} \alpha_o}\!/_{\cos \alpha_o + \gamma'}\right) \operatorname{sen} \alpha_i\right)}\right]^{-1} \tag{44}$$

$$\frac{\omega_m}{\omega} = \left[1 + \frac{1 - \gamma' \cos\alpha_i}{1 + \gamma' \cos\alpha_o} . \frac{\cos^2\alpha_o + \operatorname{sen}^2\alpha_o + \gamma' \cos\alpha_o}{\cos(\alpha_i - \alpha_o) + \gamma' \cos\alpha_i}\right]^{-1} \tag{45}$$

$$\frac{\omega_m}{\omega} = \left[1 + \frac{1 - \gamma' \cos\alpha_i}{\cos(\alpha_i - \alpha_o) + \gamma' \cos\alpha_i}\right]^{-1} \tag{46}$$

$$\frac{\omega_m}{\omega} = \left[\frac{\cos(\alpha_i - \alpha_o) + \gamma' \cos\alpha_i + 1 - \gamma' \cos\alpha_i}{\cos(\alpha_i - \alpha_o) + \gamma' \cos\alpha_i}\right]^{-1} \tag{47}$$

$$\frac{\omega_m}{\omega} = \frac{\cos(\alpha_i - \alpha_o) + \gamma' \cos\alpha_i}{1 + \cos(\alpha_i - \alpha_o)} \tag{48}$$

Finalizada a análise cinemática do mancal, tem-se condições de obter o valor das relações ω_R/ω e ω_R/ω necessárias para o cálculo da força centrípeta e do momento giroscópico atuando em cada esfera, tornando possível a continuidade do trabalho.

APÊNDICE B – Método Newton-Raphson

O método de solução Newton-Raphson é utilizado na solução de sistemas de equações não lineares, sendo que as soluções são obtidas através de um processo iterativo (Doughty, 1988).

Inicialmente, deve-se estimar um valor inicial para as variáveis do problema (incógnitas) de forma a possibilitar o inicio das iterações. Esta estimativa inicial exerce elevada influência sobre o processo iterativo, pois quanto melhor for esta estimativa inicial, mais rápido será o processo de convergência para uma solução satisfatória.

A partir desta primeira estimativa a função é aproximada por uma reta tangente, obtida pelo ponto escolhido como estimativa inicial e pela derivada da função neste ponto. A intercepção desta reta tangente com o eixo das abscissas x, geralmente constitui uma melhor aproximação para solução do problema, se comparada à estimativa precedente (Figura B.1). O processo deve se repetir sucessivamente até atingir um critério de convergência preestabelecido.

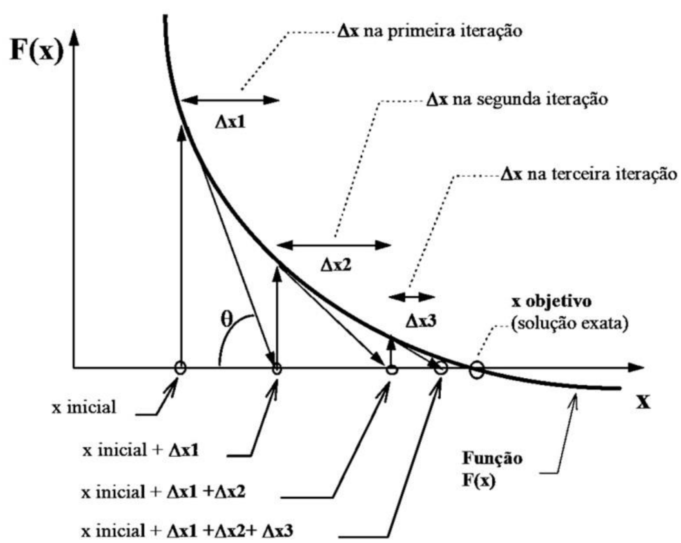


Figura B.1. Processo de convergência por Newton-Raphson.

Apesar de este método ser muito eficiente, não há garantia de que ele irá convergir, principalmente se a estimativa inicial não estiver suficientemente próxima à solução real.

Supõe-se que se dispõe do sistema de equações (1), do qual se deseja obter a solução.

$$\begin{matrix} f_1(q_1, q_2, \ldots, q_m, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ f_2(q_1, q_2, \ldots, q_m, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ f_n(q_1, q_2, \ldots, q_m, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{matrix} \tag{1}$$

Os valores q_1, q_2, ... são variáveis conhecidas, enquanto x_1, x_2,... são variáveis de valor desconhecido, as quais se almeja determinar. Com as equações do sistema definidas desta maneira, pode-se criar o vetor $\boldsymbol{B}$ (vetor de resíduo):

$$\begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ f_n(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \end{bmatrix} = \boldsymbol{B} \tag{2}$$

Para encontrar as retas tangentes do sistema, é necessário calcular as derivadas parciais de primeira ordem (Matriz Jacobiana $\boldsymbol{A}$) das funções (1).

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \boldsymbol{A} \tag{3}$$

O vetor de erro é denominado $\boldsymbol{X}$, e pode ser definido por:

$$\begin{Bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{Bmatrix} = \boldsymbol{X} \tag{4}$$

$$\begin{Bmatrix} x_{1,i+1} \\ x_{n,i+1} \\ \vdots \\ x_{n,i+1} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} x_{1,i} \\ x_{2,i} \\ \vdots \\ x_{n,i} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{Bmatrix} \tag{5}$$

O vetor $\boldsymbol{X}$ é obtido pela solução do seguinte sistema linear:

$$\boldsymbol{AX} = -\boldsymbol{B} \tag{6}$$

A partir das soluções encontradas em (6), consegue-se encontrar uma nova estimativa (5). Então o processo se repete até atingir um ou mais dos critérios listados abaixo:

- Um valor de resíduo suficientemente pequeno a ponto de ser considerado aproximadamente zero;
- Um valor de erro tão pequeno que não mais altera significativamente o resultado;
- Um número máximo admissível de iterações é excedido, indicando que o processo não convergiu ou convergiu muito lentamente.

APÊNDICE C – Resultados Encontrados na Literatura

Em Harris (1991) há um exemplo resolvido, no qual é realizada uma análise estática de um mancal puramente radial sujeito a uma carga radial. O enunciado do exemplo resolvido é apresentado abaixo:

Exemplo Resolvido 6.1: Determinar o carregamento em cada esfera de um mancal de esferas radial 209 sujeito a uma carga radial igual a 8.900 N. As características do mancal radial 209 são expostas na tabela 5.1. Os resultados encontrados por Harris e os resultados obtidos neste trabalho são apresentados na tabela C.1.

Analisando a tabela C.1, vê-se que os valores encontrados nos diferentes trabalhos são muito semelhantes, sendo que a diferença máxima entre os parâmetros obtidos foi de 0,8%.

No mesmo livro (Harris, 1991), há um exemplo resolvido, onde um mancal de contato angular 218 está sujeito a uma carga puramente axial aplicada no centro geométrico do mancal. Este exemplo também é resolvido através da análise estática do mancal. O enunciado deste exemplo é citado abaixo:

Exemplo Resolvido 6.5: Determinar o ângulo de contato, carregamento normal nas esferas e o deslocamento axial da pista interna de um mancal de contato angular 218 sujeito a um carregamento axial externo igual a 17.800 N. As características do mancal radial 218 são expostas na tabela 5.2. Os resultados encontrados por Harris e os resultados obtidos neste trabalho são apresentados na tabela C.2.

Observando os dados encontrados em Harris e neste trabalho para o exemplo resolvido 6.5 (tabela C.2), constata-se que os resultados obtidos em ambos os trabalhos possuem uma pequena diferença entre si, sendo que a maior equivale a 7%. Esta diferença ocorre devido ao pequeno número de iterações (apenas três) que Harris emprega na solução do problema.

Nas figuras C.1, C.2, C.3 e C.4 são mostrados os resultados encontrados por Carvalho (2010) de rotação da esfera, rotação da gaiola, força centrípeta e momento giroscópico para diferentes valores de ângulo de contato e de rotação de pista interna. Verifica-se que a tendências observadas nos resultados de Carvalho (2010) são as mesmas encontradas neste trabalho (figuras 5.6, 5.7, 5.8 e 5.9).

Tabela C.1. Resultados do Exemplo Resolvido 6.1.			
Parâmetro	**Harris**	**Este trabalho**	**Diferença**
$\Sigma\,\rho_i\ (mm^{-1})$	0,202	0,2018	0,1%
$F(\rho_i)$	0,9399	0,93996	0,01%
$\Sigma\,\rho_o\ (mm^{-1})$	0,138	0,1378	0,15%
$F(\rho_o)$	0,912	0,9121	0,01%
δ_i^*	0,602	0,6032	0,2%
δ_o^*	0,658	0,66	0,3%
$K_i\ (N/mm^{1,5})$	$1{,}0260.10^6$	$1{,}0217.10^6$	0,4%
$K_o\ (N/mm^{1,5})$	$1{,}0890.10^6$	$1{,}0802.10^6$	0,8%
$K_n\ (N/mm^{1,5})$	$3{,}7350.10^5$	$3{,}7132.10^5$	0,6%
$F_r\ (N)$	8900	8900	0%
ε	0,438	0,4379	0,02%
$J_r(\varepsilon,\psi_l)$	0,218	0,2188	0,4%
$\delta_r\ (mm)$	0,06041	0,060418	0,01%
$Q_{max}\ (N)$	4536	4520	0,4%
$Q_{0^\circ}\ (N)$	4536	4520	0,4%
$Q_{\pm 40^\circ}\ (N)$	2846	2836	0,4%
$Q_{\pm 80^\circ}\ (N)$	61	60,76	0,4%
$Q_{\pm 120^\circ}\ (N)$	0	0	0%
$Q_{\pm 160^\circ}\ (N)$	0	0	0%

Tabela C.2. Resultados do Exemplo Resolvido 6.5.			
Parâmetro	**Harris**	**Este trabalho**	**Diferença**
$\alpha^0\ (rad)$	0,6981	0,6981	0%
$\alpha^0\ (^\circ)$	40	40	0%
$F_a\ (N)$	17800	17800	0%
$\delta_a\ (mm)$	0,0386	0,03593	7%
$\alpha\ (rad)$	0,7260	0,7242	0,25%
$\alpha\ (^\circ)$	41,597	41,494	0,25%
$Q\ (N)$	1676	1679,1	0,2%

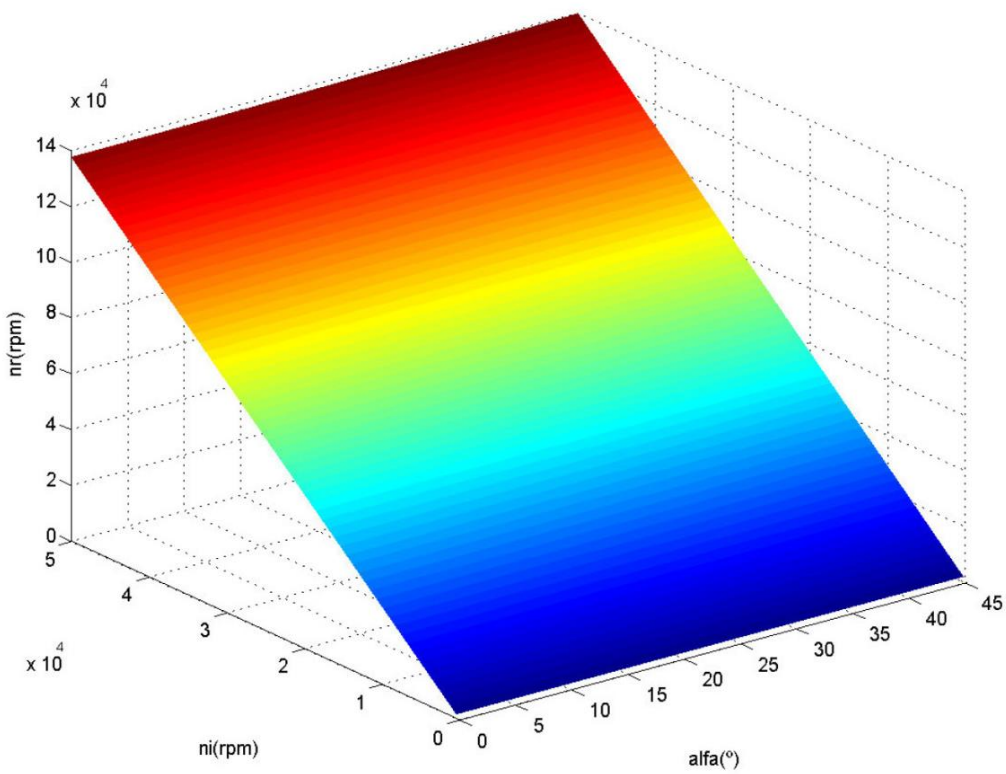


Figura C.1. Análise Cinemática – Rotação da esfera (n_R). (Carvalho, 2010).

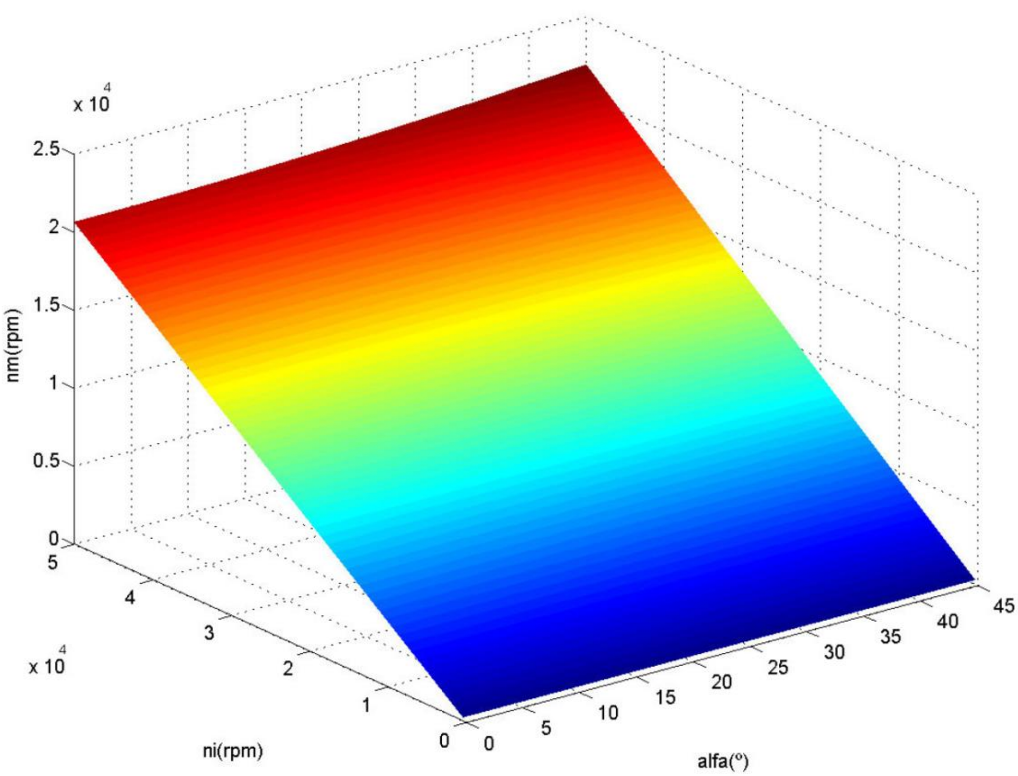


Figura C.2. Análise Cinemática – Rotação do separador (n_m). (Carvalho, 2010).

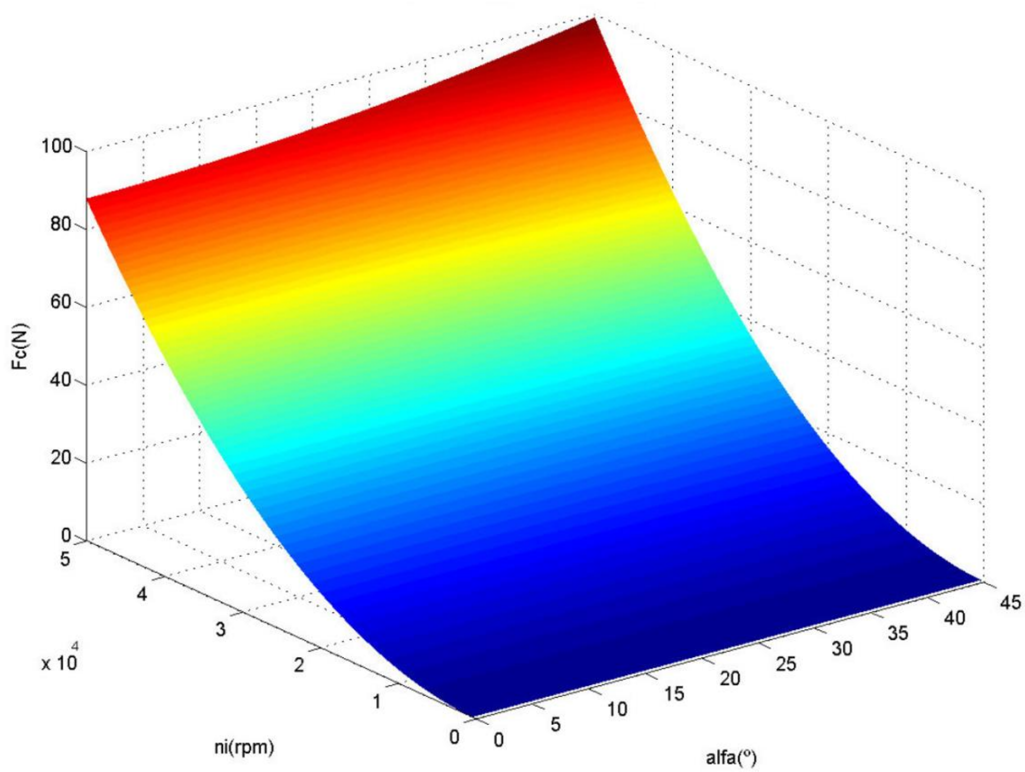


Figura C.3. Análise dinâmica – Força centrípeta (F_c). (Carvalho, 2010).

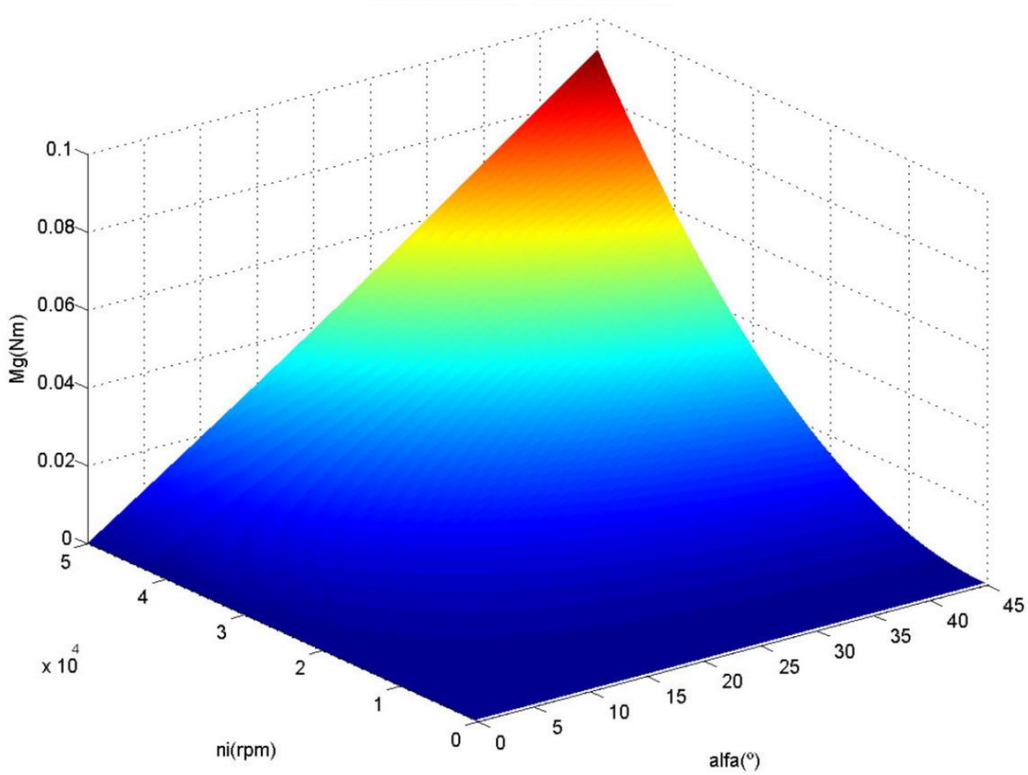


Figura C.4. Análise dinâmica – Momento Giroscópico (M_g). (Carvalho, 2010).

Para ilustrar algumas análises dinâmicas de um mancal em operação, Harris propõe o seguinte exemplo:

Exemplo Resolvido 8.1: Determinar α_i, α_o, Q_i, Q_o, δ_a e M_g de um mancal de contato angular 218 operando sobre diversos carregamentos axiais (entre 0 e 45.000 N) e com velocidades de rotação de 3.000, 6.000, 10.000 e 15.000 rpm, incluindo também o mancal submetido a um carregamento estático. As características do mancal radial 218 são expostas na tabela 5.2.

Os resultados encontrados por Harris são apresentados nas figuras C.5, C.6, C.7 e C.8.

Pode-se ver claramente que os gráficos obtidos por Harris são muito similares aos apresentados neste trabalho (figuras 5.11, 5.12, 5.13 e 5.14).

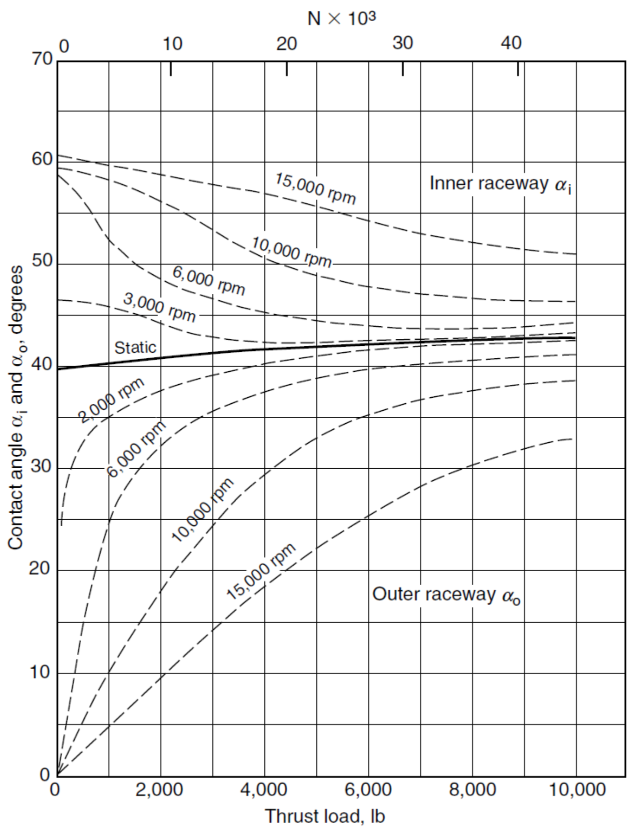


Figura C.5. Ângulos de contato a_i e a_o versus carregamento axial para várias velocidades de rotação do mancal (Harris, 1991).

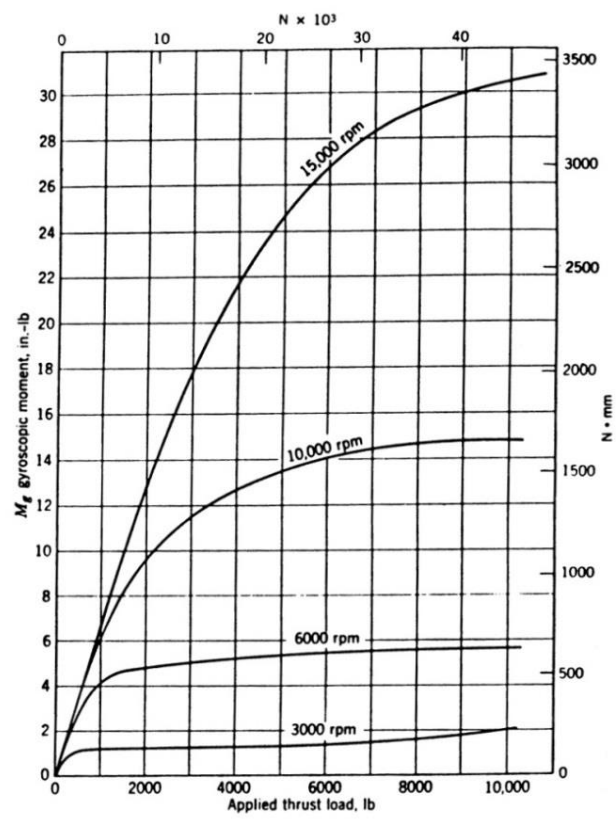


Figura C.6. Momento giroscópico M_g versus carregamento axial para várias velocidades de rotação do mancal (Harris, 1991).

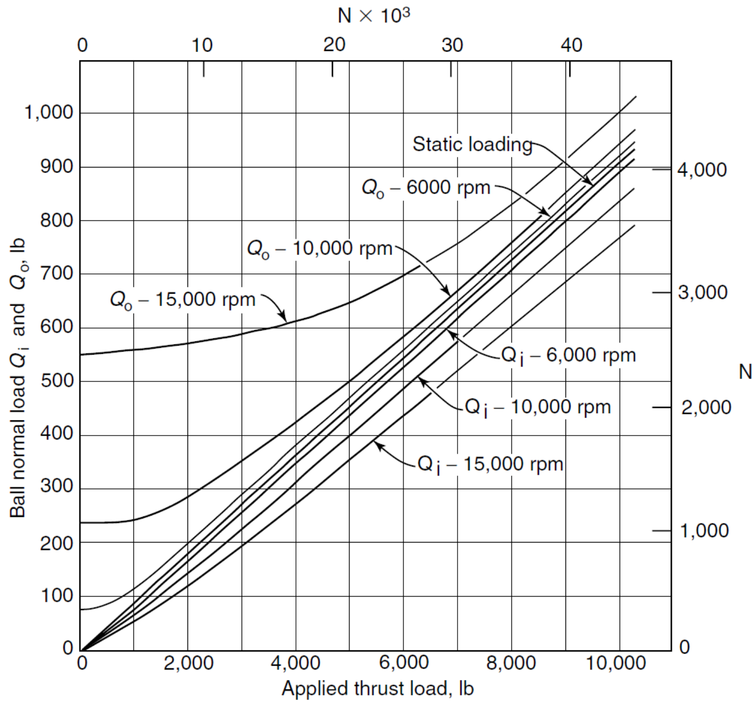


Figura C.7. Carregamento no contato Q_i e Q_o versus carregamento axial para várias velocidades de rotação do mancal (Harris, 1991).

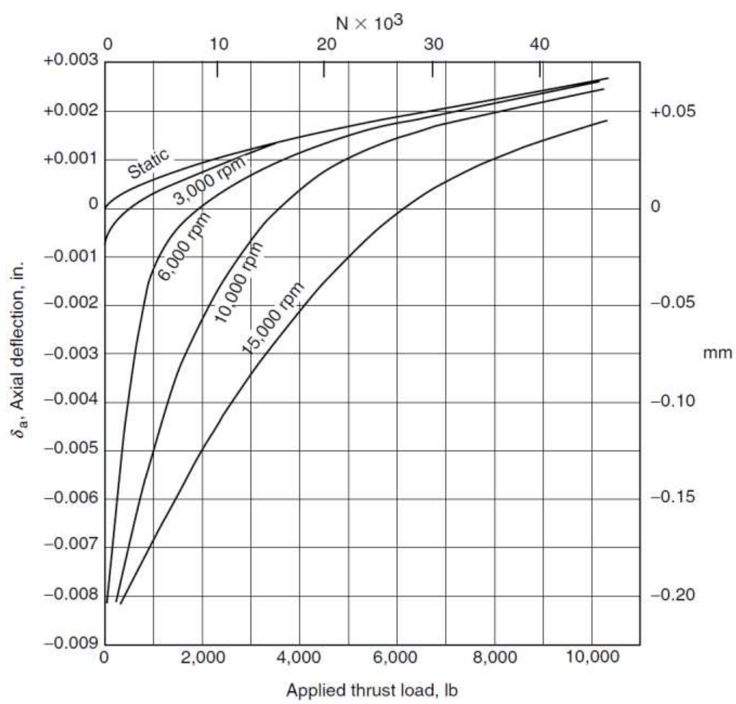


Figura C.8. Deslocamento axial da pista interna (δ_a) versus carregamento axial para várias velocidades de rotação do mancal (Harris, 1991).