

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

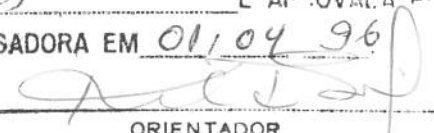
Armazenadores de Calor Latente de Geometria Anular com Aletas Alternadas

Autor : Mônica Maria Gonçalves

Orientador: Kamal Abdel Radi Ismail

26/96

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR Mônica Maria
Gonçalves E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 01/04/96



ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA TÉRMICA E FLUÍDOS

Armazenadores de Calor Latente de Geometria Anular com Aletas

Autor : Mônica Maria Gonçalves

Orientador: Kamal Abdel Radi Ismail

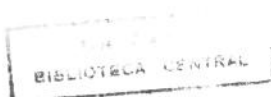
Curso: Engenharia Mecânica.

Área de concentração: Térmica e Fluídos

Tese de Doutorado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Campinas, 01 de abril de 1996

S.P. - Brasil



UNIDADE	BC
N.º CHAMADA	
UNICAMP	
G586a	
V	E
T	28 333
PPLO	667/96
C	D 5
P. CO	28 11,00
DATA	29/08/96
N.º CPD	

CM-00091545-7

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

G586a Gonçalves, Mônica Maria
Armazenadores de calor latente de geometria anular com
aletas / Mônica Maria Gonçalves.--Campinas, SP: [s.n.],
1996.

Orientador: Kamal Abdel Radi Ismail.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas,
Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Calor - Armazenamento. 2. Análise térmica.
I. Ismail, Kamal Abdel Radi. II. Universidade Estadual de
Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA TÉRMICA E FLUÍDOS

Tese de Doutorado

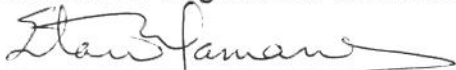
Armazenadores de Calor Latente de
Geometria Anular com Aletas

Autor : Mônica Maria Gonçalves

Orientador: Kamal Abdel Radi Ismail



Prof. Dr. Kamal Abdel Radi Ismail, Presidente
Faculdade de Engenharia Mecânica



Prof. Dr. Eitaro Yamane
Poli - USP



Prof. Dr. Carlos Alberto Carrasco Altemani
Faculdade de Engenharia Mecânica



Prof. Dr. Milton Mori
Faculdade de Engenharia Química



Prof. Dr. Marcelo Moreira Ganzarolli
Faculdade de Engenharia Mecânica

Campinas, 01 de abril de 1996

Dedicatória:

A minha família

Agradecimentos

Ao meu orientador Prof. Kamal Abdel Radi Ismail pela dedicação e o incentivo, para a realização deste trabalho.

Aos colegas de pós-graduação, que sempre me apoiaram, especialmente ao Jorge

Ao desenhista Wilton Furquim pelos seus auxílios gráficos.

A equipe técnica e administrativas do DETF

Em especial ao meu marido Júlio pela paciência e compreensão neste período.

Ao CNPq pelo apoio financeiro recebido.

Sumário

Capítulo 1 - Introdução	1
Capítulo 2 - Revisão da Literatura	4
Capítulo 3 - Análise Téorica	
3.1 Introdução	12
3.2 Modelo para o caso com aleta	13
3.2.1 Modelamento matemático	14
3.3 Modelo para o caso sem aleta	17
3.4 Adimensionalização das equações	18
3.5 Condições de contorno e inicial	20
3.6 Adimensionalização das condições de contorno e inicial	21
3.7 Determinação do coeficiente convectivo de transferência de calor	22
3.8 Acoplamento do problema de mudança de fase ao escoamento dos fluidos	23
3.9 Determinação do calor liberado/absorvido pelo material de mudança de fase	32
3.10 Determinação da efetividade e do NTU	34
Capítulo 4 - Análise Numérica	38
4.1 Introdução	38
4.2 Discretização das equações para armazenadores aletados	39
4.2.1 Volume de controle central (VCC)	39
4.2.2 Volume de controle sul (VCS)	43
4.2.3 Volume de controle norte (VCN)	47
4.2.4 Volume de controle oeste (VCO)	50
4.2.5 Volume de controle leste (VCL)	53
4.2.6 Volume de controle norte e oeste (VCNO)	56
4.2.7 Volume de controle norte e leste (VCNL)	59

4.2.8	Volume de controle sul e leste (VCSL)	62
4.2.9	Volume de controle sul e oeste (VCSO)	66
4.2.10	Avaliação da condutividade térmica na fronteira aleta-material de mudança de fase.	69
4.3	Algoritmo numérico	72
4.4	Escolha do número de pontos da grade	73
4.5	Influência do intervalo de temperatura de mudança de fase	77
4.6	Fluxograma do programa numérico	77
Capítulo 5 - Resultados e Discussões		
5.1	Comparação dos resultados obtidos com resultados existentes na literatura	81
5.1.1	Comparação entre os resultados obtidos com os resultados de SPARROW, RAMSEY e KEMINK (1979)	81
5.1.2	Comparação entre os resultados obtidos com os resultados de SINHA e GUPTA (1982)	83
5.1.3	Comparação entre os resultados obtidos com os resultados de PADMANABHAN E MURTHY (1986)	84
5.2	Análise dos parâmetros	90
5.2.1	Comportamento da frente de solidificação/fusão no armazenador	91
5.2.2	Efeito de R^*	97
5.2.3	Efeito da variação do número de aletas	104
5.2.4	Efeito do comprimento das aletas	108
5.2.5	Efeito da variação do número de Stefan	112
5.2.6	Efeito da variação do número de Reynolds em relação ao fluido interno	115
5.2.7	Efeito da variação do número de Reynolds em relação ao fluido externo	121
5.2.8	Efeito da variação do número de Biot interno	124
5.2.9	Efeito da variação do número de Biot externo	129
5.2.10	Efeito da temperatura do fluido interno	132
5.2.11	Efeito da temperatura do fluido externo	137
Capítulo 5 - Conclusões e Sugestões		142
Referências Bibliográficas		143

Listas de Figuras

2.1	Esquema da unidade armazenadora	11
3.1	Corte do armazenador de calor aletado	13
3.2	Região de simetria no armazenador com aletas	14
3.3	Comportamento das propriedades do material de mudança de fase com a temperatura	17
3.4	Representação do armazenador sem aletas	17
3.5	Região de simetria no armazenador sem aletas	18
3.6	Corte longitudinal da unidade armazenadora	23
3.7	Representação do balanço de energia entre o fluido interno e o MMF	24
3.8	Representação do balanço de energia entre o fluido externo e o MMF	28
4.1	Representação do domínio sub-dividido em volumes de controle	39
4.2	Representação do volume de controle central	40
4.3	Representação do volume de controle sul	43
4.4	Representação do volume de controle norte	47
4.5	Representação do volume de controle oeste	50
4.6	Representação do volume de controle leste	53
4.7	Representação do volume de controle norte e oeste	56
4.8	Representação do volume de controle norte e leste	59
4.9	Representação do volume de controle sul e leste	63
4.10	Representação do volume de controle sul e oeste	66
4.11	Representação da interface aleta-material de mudança de fase	69
4.12	Avaliação do número de pontos na direção axial	74
4.13	Avaliação do número de pontos na direção radial	75
4.14	Avaliação do número de pontos dentro das aletas na direção circunferencial	76

4.15	Avaliação do número de pontos da malha circunferencial na região sem aletas	76
4.16	Avaliação no incremento de tempo.	77
4.17	Influência da faixa de temperatura de mudança de fase sobre a solidificação do material de mudança de fase.	78
5.1	Comparação entre os resultados obtidos com os resultados da literatura para o caso de tubos sem aletas.	82
5.2	Comparação entre os resultados obtidos e o estudo de SINHA E GUPTA (1982) para região anular sem aletas.	84
5.3	Comparação entre os dois caso variando o número de aletas (NA).	86
5.4	Comparação entre os dois caso em função da variação da espessura da aleta.	86
5.5	Esquema de comparação das aletas	87
5.6	Comparação entre os modelos em função do comprimento das aletas.	88
5.7	Comparação entre os modelos variando a relação entre a condutividade térmica do estado inicial e a da aleta ($lb1/lbf$).	88
5.8	Comparação entre os modelos variando a relação entre a difusividade térmica do estado inicial e a da aleta ($a1/af$).	89
5.9	Comparação entre os modelos variando a relação entre a condutividade térmica do estado final e do estado inicial ($lb2/lb1$).	89
5.10	Comparação entre os modelos variando a relação entre a difusividade térmica do estado inicial e o final ($a1/a2$).	90
5.11	Comportamento da frente de solidificação para o caso A.	93
5.12	Comportamento da frente de solidificação para o caso B.	94
5.13	Comportamento da frente de solidificação para o caso C.	94
5.14	Comportamento da frente de fusão para o caso D.	95
5.15	Comportamento da frente de fusão para o caso E.	95
5.16	Comportamento da frente de fusão para o caso F.	96
5.17	Comportamento da fração de massa fundida com o tempo adimensional em função da relação entre os raios (R^*).	97
5.18	Comportamento da efetividade em relação ao fluido interno com o do tempo adimensional em função da relação entre os raios (R^*).	98
5.19	Comportamento da efetividade em relação ao fluido externo com o do tempo adimensional em função da relação entre os raios (R^*).	99
5.20	Comportamento do NTU em relação ao fluido interno com o do tempo adimensional em função da relação entre os raios (R^*).	99
5.21	Comportamento do NTU em relação ao fluido externo com o do tempo adimensional em função da relação entre os raios (R^*).	100
5.22	Comportamento da fração de massa fundida com a relação entre os raios (R^*).	100

5.23	Comportamento da efetividade em relação ao fluido interno com a relação entre os raios (R^*).	101
5.24	Comportamento da efetividade em relação ao fluido externo com a relação entre os raios (R^*).	101
5.25	Comportamento do NTU em relação ao fluido interno com a relação entre os raios (R^*).	102
5.26	Comportamento do NTU em relação ao fluido externo com a relação entre os raios (R^*).	103
5.27	Comportamento da efetividade, NTU e do tempo adimensional necessário para uma fusão completa com a relação entre os raios (R^*).	103
5.28	Comportamento da fração de massa solidificada, efetividade e NTU com o tempo adimensional para uma unidade armazenadora sem aletas.	104
5.29	Comportamento da fração de massa solidificada com o tempo adimensional em função da variação do número de aletas.	105
5.30	Comportamento da fração de massa solidificada, efetividade e NTU com o tempo adimensional para o caso de armazenadores com 2 aletas	106
5.31	Comportamento da fração de massa solidificada com a variação do número de aletas.	106
5.32	Comportamento da efetividade com a variação do número de aletas.	107
5.33	Comportamento do NTU com a variação do número de aletas.	107
5.34	Comportamento da efetividade, NTU e do tempo adimensional para uma solidificação completa em função do número de aletas.	108
5.35	Comportamento da fração de massa fundida com o comprimento das aletas	109
5.36	Comportamento da efetividade em relação ao fluido interno com o comprimento das aletas.	110
5.37	Comportamento da efetividade em relação ao fluido externo com o comprimento das aletas.	110
5.38	Comportamento do NTU em relação ao fluido interno com o comprimento das aletas	111
5.39	Comportamento do NTU em relação ao fluido externo com o comprimento das aletas	111
5.40	Comportamento da fração de massa fundida com o tempo adimensional em função do número de Stefan.	112
5.41	Comportamento do número de Stefan sobre a fração de massa fundida	113
5.42	Comportamento do número de Stefan sobre a efetividade	114
5.43	Comportamento do número de Stefan sobre o NTU	114
5.44	Comportamento da fração de massa fundida, efetividade e NTU com o tempo adimensional para número de Reynolds em relação ao fluido interno igual a 500.	116

5.45	Comportamento da fração de massa fundida, efetividade e NTU com o tempo adimensional para número de Reynolds em relação ao fluido interno igual a 5000.	116
5.46	Comportamento da fração de massa fundida em função do tempo adimensional para diversos número de Reynolds em relação ao fluido interno.	117
5.47	Comportamento da efetividade em função do tempo adimensional para diversos número de Reynolds em relação ao fluido interno.	117
5.48	Comportamento do NTU em função do tempo adimensional para diversos número de Reynolds em relação ao fluido interno.	118
5.49	Comportamento da fração de massa fundida em função do número de Reynolds em relação ao fluido interno.	118
5.50	Comportamento da efetividade em função do número de Reynolds em relação ao fluido interno.	119
5.51	Comportamento do NTU em função do número de Reynolds em relação ao fluido interno.	120
5.52	Comportamento da efetividade, NTU e do tempo adimensional para uma fusão completa em função do número de Reynolds em relação ao fluido interno.	120
5.53	Comportamento da fração de massa fundida, efetividade e do NTU em função do tempo adimensional para fluido externo com número de Reynolds igual a 50.	122
5.54	Comportamento da fração de massa fundida, efetividade e do NTU em função do tempo adimensional para fluido externo com número de Reynolds igual a 500.	122
5.55	Comportamento da fração de massa fundida com o número de Reynolds para o fluido externo.	123
5.56	Comportamento da efetividade com o número de Reynolds para o fluido externo.	123
5.57	Comportamento do NTU com o número de Reynolds para o fluido externo.	124
5.58	Comportamento da fração de massa fundida, efetividade e NTU com o tempo adimensional em relação ao número de Biot para o fluido interno igual a 1.	125
5.59	Comportamento da fração de massa fundida, efetividade e NTU com o tempo adimensional em relação ao número de Biot para o fluido interno igual a 10.	125
5.60	Comportamento da fração de massa fundida, efetividade e NTU com o tempo adimensional em relação ao número de Biot para o fluido interno igual a 50.	126
5.61	Comportamento da fração de massa fundida com o número de Biot para o fluido interno em relação a diversos tempos adimensionais	127
5.62	Comportamento da efetividade com o número de Biot para o fluido interno em relação a diversos tempos adimensionais	127
5.63	Comportamento do NTU com o número de Biot para o fluido interno em relação a diversos tempos adimensionais	128
5.64	Comportamento da efetividade, do NTU e do tempo adimensional de fusão completa com o número de Biot.	128
5.65	Comportamento da fração de massa fundida com o tempo adimensional para diversos número de Biot em relação ao fluido externo	129

5.66	Comportamento do NTU com o tempo adimensional para diversos número de Biot em relação ao fluido externo	130
5.67	Comportamento da efetividade com o tempo adimensional para diversos número de Biot em relação ao fluido externo	130
5.68	Comportamento da fração de massa fundida com número de Biot em relação ao fluido externo para diversos tempos adimensionais.	131
5.69	Comportamento do NTU com número de Biot em relação ao fluido externo para diversos tempos adimensionais.	131
5.70	Comportamento da efetividade com número de Biot em relação ao fluido externo para diversos tempos adimensionais.	132
5.71	Comportamento da fração de massa solidificada com o tempo adimensional em função da variação da temperatura de entrada do fluido interno.	133
5.72	Comportamento da efetividade com o tempo adimensional em função da variação da temperatura de entrada do fluido interno.	134
5.73	Comportamento do NTU com o tempo adimensional em função da variação da temperatura de entrada do fluido interno.	134
5.74	Influência da temperatura do fluido interno na entrada da unidade armazenadora sobre a fração de massa solidificada.	135
5.75	Influência da temperatura do fluido interno na entrada da unidade armazenadora sobre a efetividade.	136
5.76	Influência da temperatura do fluido interno na entrada da unidade armazenadora sobre o NTU.	136
5.77	Comportamento da fração de massa solidificada com o tempo adimensional em função da variação da temperatura de entrada do fluido externo.	138
5.78	Comportamento da efetividade com o tempo adimensional em função da variação da temperatura de entrada do fluido externo.	138
5.79	Comportamento do NTU com o tempo adimensional em função da variação da temperatura de entrada do fluido externo.	139
5.80	Influência da temperatura do fluido externo sobre a fração de massa solidificada.	140
5.81	Influência da temperatura do fluido externo sobre a efetividade.	140
5.82	Influência da temperatura do fluido externo sobre o NTU.	141

Listas de Tabelas

4.1	Propriedades termofísicas dos materiais	73
4.2	Parâmetros operacionais para o estudo da malha	74
4.3	Parâmetros geométricos para estudo da malha	74
5.1	Parâmetros operacionais utilizados nas simulações	91
5.2	Parâmetros geométricos utilizados nas simulações	92

Nomenclatura

Latinas

a	Coeficiente correspondente ao ponto de discretização.	
A	Área da seção	$[m^2]$
Bi	Número de Biot = hr/k .	
c	Calor específico.	$[J/kg\ K]$
$C(T)$	Capacidade térmica por unidade de volume.	$[J/m^3\ K]$
$\bar{C}(T)$	Capacidade térmica por unidade de volume considerando a mudança de fase.	$[J/m^3\ K]$
$\tilde{C}(T)$	Capacidade térmica equivalente adimensional.	
f	Parâmetro usado na coordenada radial.	
F	Fração de massa solidificada	
Fo	Tempo adimensional, número de Fourier = $k_{st}/(C_s(r_c^2 - r_i^2)^{1/2})$	
h	Coeficiente convectivo entre o fluido e do material de mudança de fase.	$[W/m^2\ K]$
g	Parâmetro usado na coordenada circunferencial.	
$H(T)$	Entalpia.	$[J/kg]$
$\bar{H}(T)$	Entalpia por unidade de volume.	$[J/m^3]$
$k(T)$	Condutividade térmica.	$[W/mK]$
$\bar{k}(T)$	Condutividade térmica considerando a mudança de fase	$[W/mK]$.
$\tilde{k}(T)$	Condutividade térmica adimensional.	
L	Calor latente do MMF	$[J/kg]$
m	Parâmetro que varia entre 0 e 1 e fornece a formulação implícita, explícita e a formulação de Crank-Nicolson.	
$\dot{m}$	Fluxo de massa	$[kg/m^2s]$

NTU	Número de unidades de transferência.	
Nu	Número de Nusselt = hd/k	
Pr	Número de Prandtl = $c_p \mu/k$	
$\dot{q}$	Fluxo de calor.	[W/m]
$\dot{q}_{\max}$	Fluxo máximo possível de se transferir ao fluido.	[W/m]
$\bar{q}$	Razão de calor transferido por comprimento	
r	Coordenada adimensional radial do armazenador, raio.	[m]
R	Raio adimensional.	
Re	Número de Reynolds. = $\rho v d/\mu$	
Ste	Número de Stefan = $C_s (T_m^+ - T_{bi}(0))/\lambda$	
t	Tempo.	
T	Temperatura.	[K]
$\bar{u}$	Velocidade. média do fluido.	
v	Velocidade	[m/s]
V	Volume de controle.	
x	Posição ao longo do tubo.	[m]
$\bar{X}$	Parâmetro para determinação do coeficiente convectivo= $(L/D)/(RePr)$	
z	Coordenada axial dimensional.	
Z	Coordenada axial adimensional, comprimento da unidade	[m]

Gregas

δ	Função delta de Dirac.	
$\partial\theta$	Distância entre os pontos nodais na direção circunferencial	
∂R	Distância entre os pontos nodais na direção radial	
Δ	Variação.	
ΔFo	Intervalo do tempo adimensional.	
$\Delta\phi$	Comprimento do volume de controle na direção circunferencial.	
ΔR	Comprimento do volume de controle na direção radial.	
ΔV	Volume de controle.	
ΔT	Metade da faixa de temperatura em que ocorre a mudança de fase.	[K]
ε	Efetividade.	
λ	Calor latente por unidade de volume	[J/m ³]

ϕ	Coordenada circunferencial. ângulo	[rad]
λ	Calor latente por unidade de volume.	
$\eta(u)$	Função de grau unitário.	
θ	Temperatura adimensional.	
ρ	Massa específica.	[kg/m ³]
τ	Tempo adimensional. = Ste.Fo	
μ	Viscosidade cinemática.	[kg/m s]

Superescritos

n	Referente ao parâmetro da equação (3.40)
0	Referente ao tempo anterior.
1	Referente ao tempo atual.
+	Referente à temperatura de mudança de fase superior.
-	Referente à temperatura de mudança de fase inferior.
*	Referente à relativo

Subscritos

a	Referente a aleta.
as	Referente a relação entre a aleta e o MMF no estado sólido.
bi	Referente ao fluido interno.
be	Referente ao fluido externo.
d	Referente ao tubo liso.
e	Referente externo.
e0	Referente ao fluido externo na posição axial x=0.
e,E	Ponto ao leste
f	Referente ao final do processo.
h	Referente ao diâmetro hidráulico.
i	Referente interno.
i0	Referente ao fluido interno na posição axial x=0.
l	Referente ao estado líquido.
ls	Referente a relação entre o líquido e o sólido.
m	Referente a mudança de fase.

n,N	Ponto ao norte
P	Ponto nodal
P0	Ponto nodal no tempo anterior
s	Referente ao estado sólido.
sbi	Referente a relação entre o estado sólido e o fluido escoando no interior do tubo.
sbe	Referente a relação entre o estado sólido e o fluido escoando no exterior do
MMF	
s,S	Ponto ao sul
w,W	Ponto ao oeste
Z	Referente ao fim do armazenador $x = Z$
0	Referente ao início do armazenador $x=0$
1	Referente a adimensionalização do raio relação ao fluido interno
2	Referente a adimensionalização do raio relação ao fluido externo

Abreviações

MMF	Material de Mudança de Fase.
PCM	Phase Change Material.
VCC	Volume de Controle Central.
VCO	Volume de Controle Oeste.
VCL	Volume de Controle Leste.
VCN	Volume de Controle Norte.
VCS	Volume de Controle Sul.
VCNL	Volume de Controle Norte e Leste.
VCNO	Volume de Controle Norte e Oeste.
VCSO	Volume de Controle Sul e Oeste.
VCSL	Volume de Controle Sul e Leste.
VCC	Volume de Controle Central.
VCC	Volume de Controle Central.

Resumo

GONÇALVES, Mônica Maria, *Armazenadores de Calor Latente de Geometria Anular com Aletas*, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1996, 150p. Tese (doutorado)

Pesquisa em armazenamento térmico na forma de calor latente em sistemas com e sem aletas é bastante avançada e muito intensa. A presente pesquisa visa investigar o comportamento térmico e os efeitos dos parâmetros geométricos e operacionais no desempenho de um armazenador de calor latente de geometria cilíndrica anular de aletas alternadas. O modelo matemático é baseado na formulação bidimensional do problema de condução com mudança de fase onde as temperaturas de entrada dos dois fluidos interno e externo são mantidas constantes. A solução numérica é obtida usando o método de volume de controle finito e o esquema ADI. O acoplamento deste problema com os fluidos de trabalho interno e externo é obtido pelo balanço de energia nos respectivos elementos e elementos de mudança de fase, obtendo assim as temperaturas de mistura em função do tempo e da posição. A fração de massa solidificada/fundida, a efetividade e o NTU são analisados em função das variações da geometria e do número de aletas, o espaçamento anular, número de Biot e Stefan, as temperaturas dos fluidos de trabalho e os respectivos números de Reynolds dos fluidos de trabalho.

Palavras Chaves:

Armazenadores aletados, armazenadores de calor latente, análise térmica de armazenador, modelagem de armazenador.

Abstract

GONÇALVES, Mônica Maria, *Armazenadores de Calor Latente de Geometria Anular com Aletas*, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1996, 150p. Tese (doutorado)

Research activities in thermal energy storage in the form of latent heat in storage systems with and without fins are well advanced and intense. The present research project aims to investigate the thermal behavior and the effects of the geometrical and operational parameters on the performance of the latent heat storage units of cylindrical annular model is based upon a two-dimensional formulation of the heat conduction with phase change where the inlet temperatures of the two working fluids are maintained constants. The numerical solution is realized using the finite volume control method and the ADI scheme. The coupling of the above problem with the two working fluids, is obtained by energy balance on the respective fluid elements and the phase change elements, and consequently the fluid bulk temperature is determined in terms of the time and space. The solidified/melt mass fraction, the effectiveness and the NTU are analyzed in terms of the variation in the geometry number of fins, the annular spacing, the Biot and Stefan number, the temperature and the Reynolds numbers of the working fluids.

Key Words:

Finned storage units, latent heat storage units, storage thermal analysis, modeling of storage units.

Capítulo 1

Introdução

Com a conscientização do problema energético ocorreu uma significativa mudança dos conceitos de projetos de unidades armazenadoras de calor e de frio. A importância de armazenamento de energia está relacionada com a não coincidência da demanda e do fornecimento de energia, e tem como finalidade o nivelamento destas curvas.

A acumulação de energia térmica é essencial tanto para as aplicações de aquecimento de água como para o aquecimento ambiental. Também em aplicações ligadas à agricultura ou à produção de calor industrial é necessária a existência de armazenamento. Para algumas aplicações, tais como, a refrigeração do ambiente durante os meses de verão, torna-se vantajosa a possibilidade de armazenar um material a baixa temperatura. Sistemas de armazenamento de frio (ou gelo) permitem a geração noturna de parte da energia a ser usada durante o dia provocando uma sensível redução na demanda de energia no período diurno.

A escolha do material de armazenagem depende do sistema, tendo sido desenvolvidos para aplicações domésticas dispositivos baseados na armazenagem em água ou rocha que são exemplos típicos de materiais que armazenam a energia sob a forma de calor sensível. É o tipo mais comum de armazenadores pois, qualquer material sólido estável térmico e quimicamente, com calor específico relativamente alto e alta densidade pode ser usado como material de armazenamento, mas a sua utilização é limitada pela baixa capacidade calorífica.

O armazenamento térmico de calor latente está associado à mudança de fase de um material, e é uma forma muito atraente de armazenar uma certa quantidade de energia, pois apresenta como vantagem: o calor de fusão/solidificação ser várias vezes maior que o calor

sensível na mesma faixa de temperatura do material, resultando em que a massa e o volume serão menores, e o processo se realiza essencialmente à temperatura constante. Há duas formas de armazenagem por calor latente, a primeira envolve a reação de hidratação e desidratação de sais e a segunda forma envolve o processo de mudança de fase sólido líquido ou o processo de fusão e solidificação.

Exemplo disto está em um sistema usando parafina ou cera requer apenas $\frac{1}{4}$ do volume de um sistema termicamente equivalente empregando água. As desvantagens são devido ao fato que os materiais de armazenamento latente atualmente disponíveis degradam-se com o tempo devendo ser repostos em poucos anos e são mais caros que os materiais empregados no armazenamento de calor sensível. Ainda o uso de materiais de armazenamento de calor latente está ligado a necessidade de se encontrar um com ponto de fusão apropriado.

Para uma operação eficiente do sistema de armazenamento é necessário um bom conhecimento dos processos de troca de calor envolvidos. Isto é essencial para prever com boa precisão o desempenho térmico do sistema e evitar sistemas super-dimensionados. Uma consideração relevante no projeto de armazenador tipo calor latente é a eficácia na utilização no material de mudança de fase, por exemplo, pela otimização de arranjo de canais através dos quais o fluido circula. Também necessita de boas características de troca de calor entre o fluido e o material de mudança de fase para obter desempenho térmico eficiente da unidade de armazenamento.

Os aspectos de troca de calor e de projeto térmico de armazenadores de calor latente são bastante complexos em relação aos armazenadores de calor sensível pelos seguintes motivos:

- 1) A não linearidade do problema por causa do movimento da interface sólido-líquido durante a mudança de fase;
- 2) Falta de informações experimentais em relação ao processo de troca de calor na interface sólido-líquido por causa dos efeitos da convecção natural nesta região;
- 3) Incerteza na avaliação da resistência térmica de contato entre a parede do tanque (ou tubos de escoamento do fluido) e o sólido;
- 4) Mudança de volume com a mudança de fase resultando em espaços vazios que prejudicam o processo de transferência de calor.

O fenômeno de transferência de calor com mudança de fase é acompanhado pela absorção ou liberação de calor na região da interface de mudança de fase, ou seja, na interface que separa a região sólida e a líquida. Esta energia liberada ou absorvida na interface é geralmente transferida por condução, convecção ou ambas. Assim, para resolver o problema de transferência de calor, é necessário determinar o modo e a taxa de movimento da interface com o tempo.

De modo geral, dois modelos são bastante usados na solução de problemas de mudança de fase. No primeiro modelo a substância possui temperatura discreta de mudança de fase com interface nítida. No segundo modelo, a substância sofre mudança de fase numa faixa de temperatura assim apresenta uma região de duas fases. A escolha do modelo depende essencialmente do material de mudança de fase e o tipo de aplicação

Os materiais de mudança de fase disponíveis para armazenamento de energia são classificados em três classes: orgânicos, hidratos de sais e sais fundidos.

Os orgânicos tem como características a propriedade de transferência térmica pobre, baixa densidade, inflamáveis e de alto preço; a parafina é o único orgânico utilizado em larga escala. A parafina consiste de uma mistura de alcanos $\text{CH}_3-(\text{CH}_2)_n-\text{CH}_3$, onde o calor latente é obtido da cristalização da cadeia $-(\text{CH}_2)_n-$. Neste trabalho utilizaremos parafina n-eicosano, e a substância água como meios de armazenamento de calor.

Capítulo 2

Revisão da Literatura

O modelamento matemático de armazenadores de calor latente envolve o problema de mudança de fase, e este é descrito pelos fenômenos de difusão e de continuidade e a solução deste problema é muito difícil pois a interface entre as fase sólida e líquida se move à medida que o calor latente é absorvido ou liberado.

Muitos são os trabalhos que relacionam esta modelagem, formulação e técnicas de solução e foram estudados para várias geometrias, diversos materiais de mudança de fase chegando as soluções exatas para os casos mais simples, soluções semi-analíticas e soluções numéricas para resolver os problemas mais elaborados. Uma revisão desses métodos é apresentada por OZISIK (1980).

Os primeiros trabalhos analíticos relatados na literatura são de LAMÉ & CLAPEYRON (1831), STEFAN (1891) e FRANZ NEUMANN (1860).

Um exemplo de solução exata foi apresentado por SHAMSUNDAR E SPARROW (1974) para uma geometria plana aplicando diferentes condições de contorno.

Entre as soluções numéricas há várias publicações como a apresentada por MURRAY e LANDIS, (1959) onde desenvolvem dois métodos para resolução de problemas de mudança de fase. Em um primeiro método, a malha tem espaçamentos variáveis e no segundo método a rede tem espaçamentos fixos, como restrição aos métodos todo o material deve estar no estado líquido ou sólido, e a espessura do material é finita. O estudo apresenta uma boa descrição do perfil de temperatura desde o início do processo e elimina a necessidade de ajuste em cada

interação para encontrar a posição exata da frente de fusão, e o mecanismo de transferência de calor é só por condução. BONACINA (1975) aplicou o método entálpico para o caso unidimensional, mas o enfoque analítico consiste na aproximação do efeito de calor latente como uma grande capacidade de calor em um pequeno intervalo de temperatura, que resultou em um efeito apreciável sobre os resultados. SHAMSUNDAR E SPARROW (1975) também apresentaram uma solução numérica através de um modelo entálpico para casos gerais multi-dimensionais. O método de solução é aplicado igualmente para substâncias que tem temperaturas discretas de mudanças de fase como para as substâncias que a mudança de fase ocorre em uma faixa de temperatura. Neste trabalho foi aplicado o método de diferenças finitas implícito. O estudo apresentado por SHAMSUNDAR E SRIMIVESAN (1979) mostra a aplicação da regra da similaridade para a solução de problemas de mudança de fase multi-dimensionais. Mostrando que, a contribuição do calor sensível é muito menor que a contribuição devido ao calor latente e a distribuição do fluxo de calor na superfície da substância de mudança de fase é aproximadamente uniforme. Já VOLLER e CROSS (1981) estudaram uma formulação do problema de Stefan por via entálpica. Em outro estudo VOLLER (1983) apresenta uma justificativa teórica para relacionar o valor da entalpia nodal na região discretizada na interface sólido líquido. RAO E SASTRI (1984) apresentaram um método numérico eficiente para problemas de mudança de fase bi-dimensional. O método isola a não linearidade associada com a interface móvel e prediz a posição desta interface, os resultados obtidos foram bastante satisfatórios. VOLLER (1985) apresentou uma discretização alternativa da formulação entálpica pelo desenvolvimento de uma forma de separação do termo do calor sensível e latente. Esta separação também resultou na não linearidade do sistema de equações mas através de um termo fonte isolou-se o calor latente nodal. Apresentou ainda a comparação entre problemas uni e bi-dimensionais indicando boa precisão e redução do tempo computacional. Já HSIAO E CHUNG (1986) mostraram um eficiente algoritmo através da técnica de elementos finitos aplicado ao caso bi-dimensional para o problema de mudança de fase.

Mais recentemente KIM E KAVIANY (1990) apresentaram um método eficiente aplicando diferenças finitas para problemas de mudança de fase com múltiplos contornos móveis para uma fronteira irregular através da transformação das coordenadas para imobilizar a fronteira e preservar as formas conservativas das equações básicas. Este método se mostrou muito flexível e eficiente. MAMPAEY (1990) propôs a utilização da estabilidade do método

ADI para simulações de problemas de solidificação multi-dimensionais. Ele substituiu o cálculo da temperatura explícita pela forma implícita carregando a influência dos elementos adjacentes. Os resultados obtidos indicam que a modificação ADI tornou-se melhor que o ADI original. A prescrição da formulação é em termos do método do volume de controle mostrando concordância quando comparado com dados experimentais. VOLLER (1990) apresentou uma técnica de solução implícita rápida da formulação entálpica para problemas de mudança de fase com condução de calor controlada. Foram examinados três esquemas implícitos e proposto um novo esquema de solução entálpica através do sub ou sobre relaxamento. Estes esquemas foram testados para problemas uni e bi-dimensionais. DATE (1991) mostrou neste trabalho uma formulação entálpica forte para o problema de Stefan e comparou os resultados com a solução exata mostrando boa concordância. LEE E TZONG (1991) propuseram uma formulação entálpica para um material de mudança de fase com temperatura discreta de fusão. O calor latente é separado do calor sensível através de uma variável dependente que é uma função contínua sobre o domínio físico do problema. Dentro do volume de controle, o calor latente é avaliado pela fração da fase líquida de forma a permitir a evolução da quantidade de calor latente. RABIN E KORIN (1993) apresentaram uma técnica numérica para resolver problemas multi-dimensionais de transferência de calor com processos de fusão e solidificação. A técnica proposta compreende em um método entálpico para resolver problemas pelo esquema de diferenças finitas e é capaz de resolver problemas de mudança de fase com condições de contorno de temperatura constante e convecção e/ou radiação. A radiação e convecção como condição de contorno podem ser facilmente combinadas no mesmo problema. Os resultados do esquema são simples e não requer nenhuma iteração no traçamento da localização da interface. Comparando com a solução exata e outros métodos de diferenças finitas, obtêm boa concordância. CLAVIER, CALTAGIRONE E GOBIN (1994) apresentaram um método da malha fixa usando um esquema iterativo implícito atualizado para resolver problemas unidimensionais de mudança de fase. O campo da temperatura foi deduzido pela resolução das equações governantes cuja discretização conduz a um valor da variação descontínua da derivação da temperatura na frente de mudança de fase. A cada iteração uma nova posição da frente móvel é encontrada pela resolução da conservação da energia na interface sólido e líquido.

Alguns trabalhos apresentaram na formulação a ação da convecção natural na parte líquida do material de mudança de fase. SPARROW, PATANKAR, RAMADHYANI (1977)

analisam a fusão do material de mudança de fase com a presença de convecção natural para o caso multi-dimensional, a solução é apresentada por diferenças finitas e o sólido está inicialmente na temperatura de fusão. Em outro trabalho SPARROW, RAMSEY, KEMINK (1979) mostra o congelamento controlado por convecção natural onde o líquido está inicialmente superaquecido ou na temperatura de solidificação, e o material de mudança de fase está ao redor de um cilindro sem aletas. SPARROW, RAMSEY, HARRIS (1981) observam que o surgimento da convecção natural na parte líquida durante o processo de congelamento. Este mecanismo causa o aumento do tempo de descarga do armazenador, mas observou-se que na região de transição a condução domina. SPARROW, LARSON, RAMSEY (1981) realizam um teste com um tubo aletado com quatro aletas, e observam o aparecimento da convecção natural na parte líquida, e esta poderia atrasar ou interromper a solidificação. O uso de aletas atrasa o domínio da convecção natural sobre a condução neste processo. Em outro trabalho SPARROW E CHUCK (1984) apresentam e aplicam um método de solução para resolver problemas de planos ou radiais de fusão com ou sem presença de convecção na interface sólido líquido. A influência da interface convectiva não é sentida no processo de fusão para pequenos intervalos de tempo mas para longos intervalos causa a diminuição da taxa de fusão chegando a interromper a fusão. VOLLER E PRAKASH (1987) propuseram uma formulação entálpica baseada na metodologia da malha fixa para a solução numérica da difusão convectiva controlada na região de transição em problemas de mudança de fase. O aspecto básico do método proposto mostra o comportamento do calor latente e o fluxo na zona de transição sólido líquido, que pode ser arbitrada pela adequação de mudanças nas fontes. CAO E FAGHRI (1990) propõem uma modelagem numérica para o problema de mudança de fase incluindo a ação da convecção natural, através do método de equivalência com relação ao calor específico, e em coordenadas cartesianas. THIART (1990) mostra um esquema em diferenças finitas para resolver problemas de convecção natural através do algoritmo simplex. SCHNEIDER (1990) apresentou um procedimento numérico computacional para o transporte de energia incluindo convecção livre. Neste modelo, a equação da continuidade e do momentum foram resolvidas em conjunto com a equação da energia. A entalpia é incluída no modelamento da não linearidade da interface de mudança de fase e proposto um tratamento desta não linearidade incluindo a movimentação da convecção livre. Um procedimento de acoplamento modificado implícito foi resolvido para a solução do acoplamento da velocidade e da pressão ao problema, a velocidade em todo material de mudança de fase não líquido foi considerada zero. O estudo apresentou concordância entre os

resultados do modelo e resultados experimentais. RAW E LEE (1991) desenvolveram uma formulação numérica baseados na função peso para problemas de mudança de fase com condução e convecção, na qual a fase sólida é considerada como um líquido com viscosidade infinita. Cada um dos tratamentos permite que uma função corrente e a vorticidade possa ser aplicar sobre o domínio físico incluindo a interface sólido-líquido. A predição do perfil da interface são mostrados em função de dados experimentais.

Entre os trabalhos aplicados a armazenadores de calor latente em geometria cilíndrica podemos destacar o trabalho de MENON (1983) que estudou este tipo de armazenador utilizando a parafina VAX como material de mudança de fase. KALTHORI E RAMADHYAM (1985) estudaram a transferência de calor num cilindro vertical com ou sem aletas embebido no material de mudança de fase, observaram o comportamento do calor total liberado ou consumido ao longo do tempo, mantendo a temperatura do sólido abaixo da temperatura de mudança de fase. SASAGUCHI IMURA E FURUSHO (1986) estudaram experimentalmente as características da transferência de calor em um armazenador de calor latente com tubos aletados. Mostrando que o comportamento do fluxo de calor nos tubos aletados é muito maior em relação aos tubos sem aleta. ISMAIL E ALVES (1989) apresentaram os resultados numéricos e experimentais em tubo aletado imerso em material de mudança de fase. Os resultados numéricos e experimentais apresentam boa concordância. Estes resultados mostram o comportamento do número de aletas, espessura das aletas e comprimentos desta, e a razão entre os raios do tubo e do material de mudança de fase. CAO E FAGHRI (1991) simularam numericamente um modelo de armazenadores de calor latente e com convecção forçada. O material de mudança de fase e a transferência de calor por convecção forçada transiente no fluido com baixo número de Prandtl são resolvidas simultaneamente como um problema conjugado. São estudados parâmetros e a otimização do sistema. ISMAIL E GONÇALVES (1992) apresentaram resultados da investigação de uma unidade armazenadora de calor latente vertical aletada, onde parâmetros geométricos e operacionais foram analisados. Em outro trabalho ISMAIL E GONÇALVES (1993) estudaram a performance da unidade em termos da efetividade e do NTU. ISMAIL E MELO (1992) estudaram problemas de fusão ao redor de um cilindro vertical com presença de convecção natural, onde compararam a predição numérica com resultados experimentais. Em outro trabalho ISMAIL E MELO (1992) estenderam seu modelo incluindo os efeitos da variação do número de Stefan na fusão dominada por convecção. Eles usaram a vorticidade e a função corrente para a formulação do

problema. LACROIX (1993) apresentou um modelo teórico que prevê o procedimento transitório de uma unidade casco tubo com material de mudança de fase no casco e o fluido de transferência de calor dentro dos tubos. Os tubos podem ser ou não aletados. O problema de mudança de fase é estudado pelo método de entálpico acoplado ao calor transferido por convecção no fluido e os resultados numéricos são comparados com os resultados experimentais. WATANABE E KANZAWA (1995) usaram a segunda lei da termodinâmica para otimizar um sistema de armazenamento de calor latente com diversos materiais de mudança de fase com diferentes pontos de fusão. O carregamento e o descarregamento e a eficiência da exergia puderam ser avaliadas para diversos pontos de fusão. A distribuição do ponto de fusão tem efeito substancial na eficiência da exergia do sistema. A otimização da distribuição do ponto de fusão dos materiais de mudança de fase estudados foram avaliadas numericamente.

Nos estudos sobre mudança de fase em regiões anulares, o trabalho apresentado por LATIF E WINBAUM (1978) apresenta uma solução através do método da perturbação para fusão e solidificação em região anular. SINHA E GUPTA (1982) apresentaram um modelo para solidificação numa região anular e comparou com estes resultados com dados experimentais. PADMANABHAN E MURTHY (1986) apresentaram uma análise teórica do processo de mudança de fase que ocorre em uma região cilíndrica anular com aletas axiais espaçadas retangular e uniformes, são fixadas em um tubo interno e isotérmico, enquanto o tubo externo é mantido adiabático. Este modelo foi resolvido numericamente por diferenças finitas e detalhes operacionais foram analisados. SPRINGER E OLSON (1992) aplicaram o método de Murray e Landis para o problema bi-dimensional para congelamento assimétrico e fusão de um material entre dois cilindros concêntricos de comprimento finito. Desenvolveram um esquema de diferenças finitas para a solidificação ou fusão assimétrico de materiais contidos entre dois cilindros concêntricos de comprimento finito. O esquema proposto foi aplicado para propriedades térmicas variáveis e para várias condições de contorno. RADHAKRISHNAN E BALAKRISHNAN (1992) apresentaram um estudo sobre fusão e solidificação, através de um material de mudança de fase encapsulado em um tubo com fluido de transferência de calor escoando no anulo do tubo concêntrico. Eles usaram a transformada de Landau para imobilizar a interface móvel. Os parâmetros estudados foram o número de Stefan, o número de Fourier e a razão entre os raios dos tubos concêntricos para permitir a construção de um armazenador térmico.

Em relação ao armazenamento de gelo, podemos destacar o trabalho apresentado por WILDIN E TRUMAN (1989) sobre este tipo de equipamento com estratificação usando modelagem unidimensional, observou neste trabalho a influência do número de Froude na entrada do armazenador como critério para projetar difusores radiais, e a estratificação abaixo de 4°C necessita de uma barreira física para evitar a mistura excessiva. TACKET (1989) apresentou resultados de um projeto terminado em 1987 sobre um prédio de escritórios que utilizam armazenadores de gelo, sistema integrado de recuperação e o conceito de distribuição de ar frio/água. Os resultados obtidos com este projeto foram excelentes em termos econômicos da instalação, custos operacionais e também em relação ao conforto obtido. STEWART JR E DONA (1988) publicaram resultados obtidos durante um projeto de pesquisa e cooperação com a ASHRAE. Nesta investigação publicaram revistas técnicas de fabricação de gelo e possíveis procedimentos alternativos para melhoria destas técnicas visando a sua utilização em bombas de calor e sistemas de armazenamento. AYRES E SCOTT (1989) apresentaram um programa computacional para cálculo e otimização de sistemas de resfriamento com armazenador para prédio com fontes internas de geração térmica. MAC CRACKEN (1989) apresentou um trabalho que relata algumas considerações do projeto de um sistema de formação e armazenamento de gelo com uma mistura glicol. Em outro trabalho apresentou a discussão dos efeitos de carga e descarga na distribuição da temperatura e performance do tanque de armazenamento de gelo. JEKEL, MITCHEL E KLEIN (1993) apresentaram um trabalho que visa o modelamento de armazenadores de frio. O modelo foi desenvolvido para armazenadores na fase de carregamento e descarregamento. O modelo é unidimensional e o problema de mudança de fase é tratado de forma global.

2.1 Objetivo

O objetivo deste trabalho é o desenvolvimento de um modelo matemático e numérico para prever o comportamento da frente de solidificação/fusão em um armazenador de calor/frio com geometria anular e aletas verticais alternadas, como é mostrado na figura (2.1), ou seja, simular os processos de carregamento e descarregamento neste tipo de armazenador.

Para convalidar o modelo proposto, compararemos o modelo com resultados experimentais de outros autores, tanto no processo de fusão como no de solidificação.

Analisaremos o desempenho da unidade armazenadora de calor/frio, principalmente a efetividade, número de unidades de transferência além de avaliar os efeitos da variação da geometria do armazenador, como o número de aletas, comprimento da unidade, comprimento das aletas, e razão dos diâmetros do armazenador, e de parâmetros operacionais como o fluxo de massa, número de Reynolds, número de Stefan, número de Biot, temperatura do fluido de trabalho.

Com os resultados desta análise técnica serão obtidos subsídios para o projeto de armazenadores de calor/frio com este tipo de geometria.

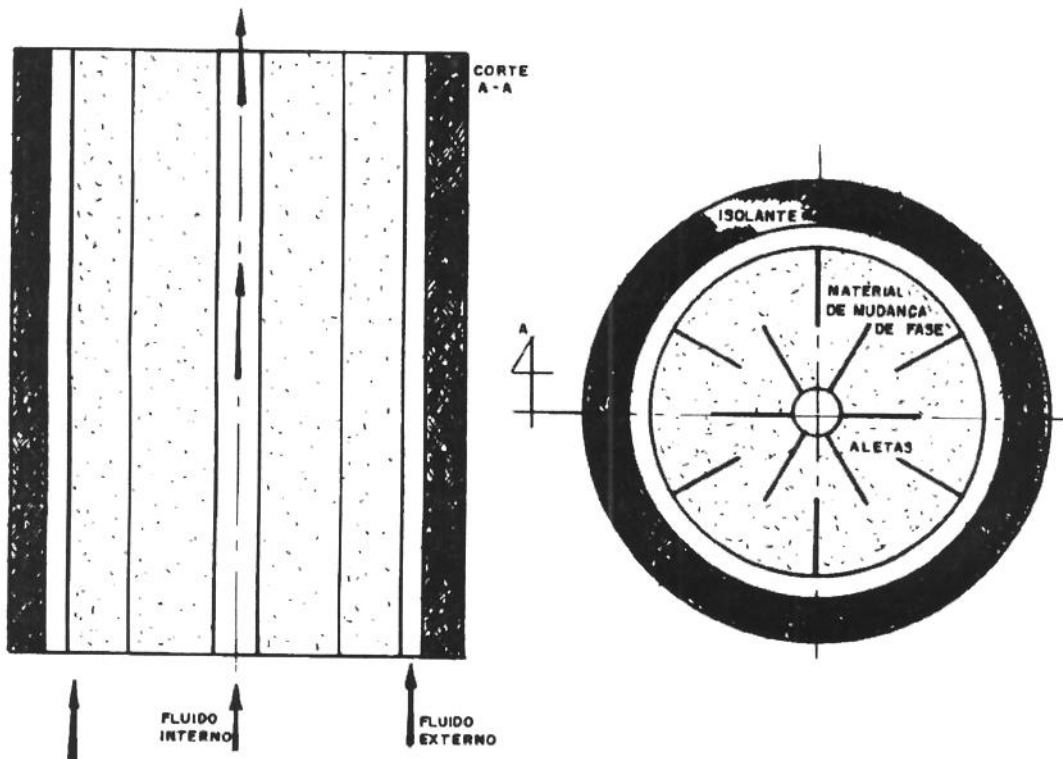


Figura 2.1: Esquema da unidade armazenadora de energia.

Capítulo 3

Análise Teórica

3.1 Introdução

Considerando a configuração da figura (2.1), que representa de forma simplificada a unidade armazenadora estudada. Neste caso, o material de mudança de fase é colocado no espaço anular. O fluido de trabalho interno escoar no interior do tubo interno e o fluido de trabalho externo escoar no espaço anular externo. Aletas alternadas são posicionadas no espaço anular do material de mudança de fase e um isolante térmico envolve na superfície externa do armazenador.

No caso de banco de gelo, o fluido interno (refrigerante secundário) escoar no tubo provocando a solidificação do material de mudança de fase na direção do aumento do raio. Enquanto isto, o fluido externo escoar no espaço anular externo para ser resfriado suficientemente para posterior utilização no resfriamento de ar por exemplo. Nesta aplicação o armazenador é carregado termicamente quando totalmente (quase) sólido e descarregado quando o material de mudança de fase for inteiramente líquido. O processo é o inverso quando o armazenador é usado em aplicação de alta temperatura.

Para efeito da modelagem admitimos as seguintes considerações:

1. Propriedades físicas do material armazenador constantes;
2. Propriedades físicas dos fluidos transportadores de energia constantes em relação a temperatura de mistura;
3. Velocidades dos fluidos constantes;

4. Perfil hidrodinamicamente desenvolvido;
5. Nenhuma transferência de calor pelos lados da unidade de armazenamento;
6. Condutividade térmica finita.
7. Condução axial desprezada.

O modelo é complexo, essencialmente tridimensional e transiente. As equações de movimento no fluido interno e externo são acopladas a equação de energia que é influenciada pela condução de calor.

Adotou-se um esquema onde se pode desacoplar a equação da energia da equação do movimento pela adoção de um perfil uniforme de velocidade nos escoamentos dos refrigerantes. Esta simplificação permite utilizar um modelo bi-dimensional no problema de mudança de fase através de um esquema "passo a passo" ao longo do tubo via balanço local de energia. Este procedimento permitiu uma boa redução no tempo computacional.

3.2 Modelo para o caso com aleta

A figura (3.1) mostra um corte transversal do armazenador de calor com detalhe para a região de simetria. Na figure (3.2) temos a representação detalhada da geometria na região de simetria e nela estão definidos os parâmetros geométricos que são usados no modelamento matemático.

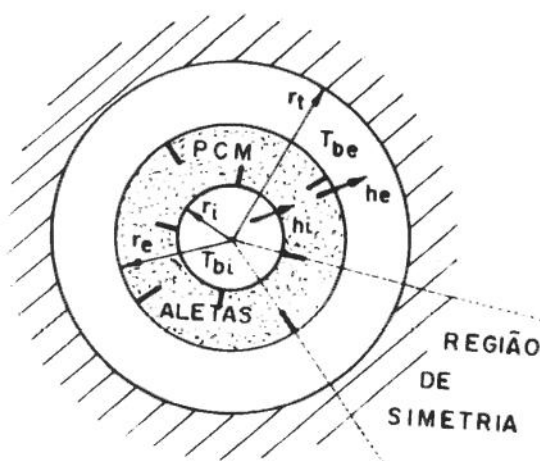


Figura 3.1: Corte do armazenador de calor aletado

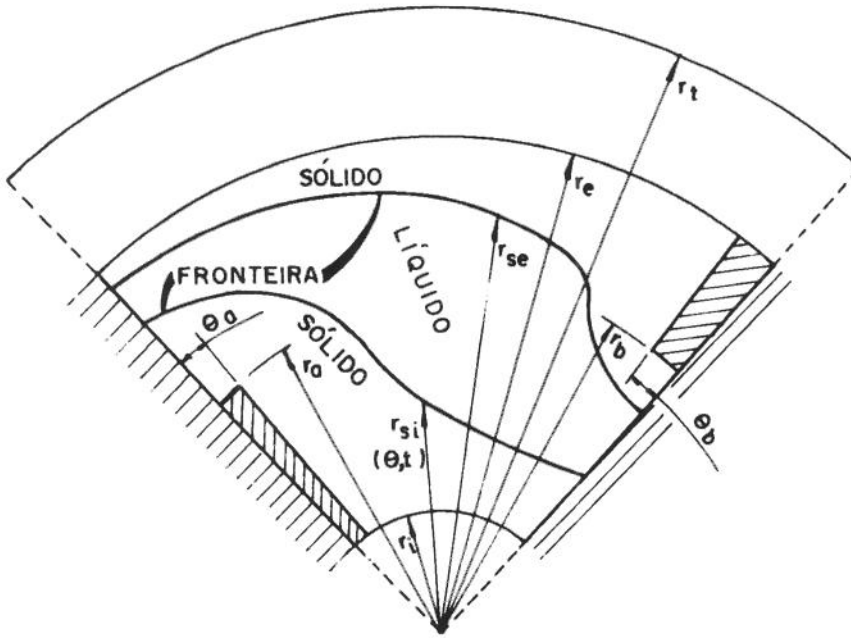


Figura 3.2: Região de simetria no armazenador com aletas

3.2.1 Modelamento matemático

A equação da energia para um problema multidimensional de fusão/solidificação, onde os termos de dissipação viscosa e compressibilidade são nulos; a massa específica é constante, não existe geração interna de calor, pode ser escrita como:

$$\rho \frac{DH(T)}{Dt} = \nabla \cdot (k(T) \cdot \nabla T) \quad (3.1)$$

considerando as velocidades no material de mudança de fase são desprezíveis podemos escrever a equação (3.1) como

$$\frac{\partial \bar{H}(T)}{\partial t} = \nabla \cdot (k(T) \cdot \nabla T) \quad (3.2)$$

onde T é a temperatura, k a condutividade térmica e ρ a massa específica.

A entalpia $\bar{H}(T)$ é dada por unidade de volume no material de mudança de fase e pode ser especificada em função da temperatura como sugere BONACINA (1975) para diferentes aplicações:

$$\bar{H}(T) = \int_{T_m}^T C(T) + \lambda \delta(T - T_m) dT \quad (3.3)$$

onde $C(T)$ é a capacidade térmica por unidade de volume, λ é o calor latente por unidade de volume, $\delta(T - T_m)$ é uma função de Dirac, indicando que na interface sólido-líquido ocorre um “pulo” de magnitude λ . Como a entalpia é uma função da capacidade térmica temos:

$$\bar{C}(T) = \frac{d\bar{H}(T)}{dT} = C(T) + \lambda \delta(T - T_m) \quad (3.4)$$

onde $\bar{C}(T)$ é a capacidade térmica equivalente por unidade de volume.

A equação da energia pode ser escrita como:

$$\bar{C}(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k(T) \cdot \nabla T) \quad (3.5)$$

O comportamento da capacidade térmica equivalente no material de mudança de fase é descrito a seguir:

$$C(T) = \begin{cases} C_s(T) & T < T_m^- = T_m - \Delta T & \text{capacidade termica do sólido} \\ C_l(T) & T > T_m^+ = T_m + \Delta T & \text{capacidade termica do líquido} \end{cases} \quad (3.6)$$

Na região de mudança de fase a capacidade térmica equivalente por unidade de volume será determinada pela integração desta propriedade nesta região como mostra a figura (3.3), simulando o efeito do calor latente.

$$\int_{T_m^-}^{T_m^+} \bar{C}(T) dT = \lambda + \int_{T_m^-}^{T_m} C_s(T) dT + \int_{T_m}^{T_m^+} C_l(T) dT \quad (3.7)$$

resultando:

$$\bar{C}(T) (T_m^+ - T_m^-) = \lambda + C_s(T) (T_m - T_m^-) + C_l(T) (T_m^+ - T_m) \quad (3.8)$$

como $(T_m^+ - T_m^-) = 2(T_m - T_m^-) = 2(T_m^+ - T_m)$; rearranjando a equação acima temos:

$$\begin{aligned}\bar{C}(T) &= \frac{\lambda + C_s(T)(T_m - T_m^-) + C_l(T)(T_m^+ - T_m)}{(T_m^+ - T_m^-)} \\ \bar{C}(T) &= \frac{\lambda}{(T_m^+ - T_m^-)} + \frac{C_s(T)(T_m - T_m^-)}{(T_m^+ - T_m^-)} + \frac{C_l(T)(T_m^+ - T_m)}{(T_m^+ - T_m^-)} \\ \bar{C}(T) &= \frac{\lambda}{(T_m^+ - T_m^-)} + \frac{C_s(T)(T_m - T_m^-)}{2(T_m - T_m^-)} + \frac{C_l(T)(T_m^+ - T_m)}{2(T_m^+ - T_m)} = \frac{\lambda}{(T_m^+ - T_m^-)} + \frac{C_s(T)}{2} + \frac{C_l(T)}{2}\end{aligned}$$

ou

$$\bar{C}(T) = \frac{\lambda}{(T_m^+ - T_m^-)} + \frac{C_s(T) + C_l(T)}{2} \quad (3.9)$$

Assim a capacidade térmica equivalente pode ser escrita como

$$\bar{C}(T) = \begin{cases} C_s(T) & T < T_m^- \\ C_l(T) & T > T_m^+ \\ \frac{\lambda}{2\Delta T} + \frac{C_s(T) + C_l(T)}{2} & T_m^- \leq T \leq T_m^+ \end{cases} \quad (3.10)$$

para todo o processo de mudança de fase.

No tratamento da condutividade térmica, adotando uma forma similar à aplicada a capacidade térmica equivalente teremos o seguinte comportamento da condutividade térmica

$$\bar{k}(T) = \begin{cases} k_s(T) & T < T_m^- \\ k_l(T) & T > T_m^+ \\ k_s(T) + \frac{k_l(T) - k_s(T)}{2\Delta T}(T - T_m^-) & T_m^- \leq T \leq T_m^+ \end{cases} \quad (3.11)$$

Neste estudo considerou-se que o processo de transferência de calor seja dominado por condução, para que não haja atraso no processo de solidificação ou aceleração na fusão por causa da convecção natural. Usando os parâmetros mostrados nas figuras (3.1) e (3.2) temos a equação da energia escrita para todo o processo de mudança de fase como:

$$\bar{C}(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \bar{k}(T) \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\bar{k}(T)}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) \quad (3.12)$$

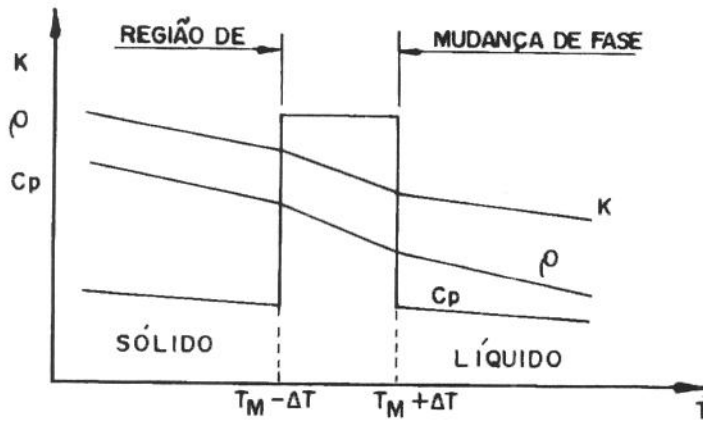


Figura 3.3: Comportamento das propriedades do material de mudança de fase com a temperatura.

Para a solução do problema de condução bi-dimensional na aleta, utiliza-se a equação (3.13), com as propriedades da aleta, representadas por:

$$\begin{aligned}\bar{C}(T) &= \rho_a c_a \\ \bar{k}(T) &= k_a\end{aligned}\quad (3.13)$$

Este é o modelo matemático para a região de mudança de fase para este tipo de armazenadores de calor.

3.3 Modelo para o caso sem aleta

Para o caso da geometria do armazenador de calor sem a presença de aletas temos as figuras (3.4) e (3.5) representando os parâmetros envolvidos no processo.

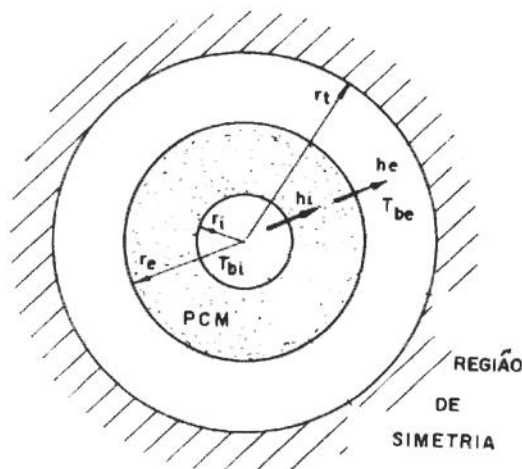


Figura 3.4: Representação do armazenador sem aletas

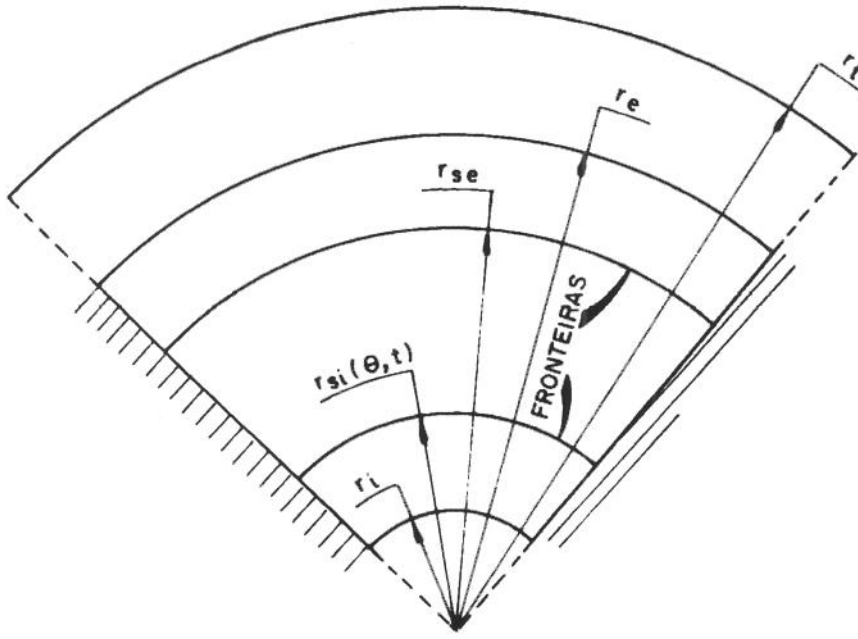


Figura 3.5: Região de simetria no armazenador sem aleta.

Fazendo um modelamento semelhante ao aplicado para o caso com aleta, temos que a equação da energia para o processo de mudança de fase será representada por:

$$\bar{C}(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \bar{k}(T) \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (3.14)$$

onde a capacidade térmica equivalente e a condutividade térmica serão representadas pelas equações (3.11) e (3.12)

3.4 Adimensionalização das equações

Para generalizar a solução do problema, utilizamos as seguintes adimensionalizações para as variáveis apresentadas nas equações diferenciais:

$$\theta = \frac{T - T_m}{T_m} \quad \text{temperatura adimensional} \quad (3.15)$$

$$R = \frac{r}{(r_e^2 - r_i^2)^{1/2}} \quad \text{coordenada radial adimensional} \quad (3.16)$$

$$Fo = \frac{k_s t}{C_s (r_e^2 - r_i^2)} \quad \text{tempo adimensional ou número de Fourier} \quad (3.17)$$

$$\tilde{C} = \frac{\bar{C}}{C_s} \quad \text{capacidade térmica equivalente adimensional} \quad (3.18)$$

$$\tilde{k} = \frac{\bar{k}}{k_s} \quad \text{condutividade térmica adimensional} \quad (3.19)$$

$$C_{as} = \frac{\rho_a c_a}{C_s} \quad \text{capacidade térmica adimensional para aleta} \quad (3.20)$$

$$k_{as} = \frac{k_a}{k_s} \quad \text{condutividade térmica adimensional para aleta} \quad (3.21)$$

$$\text{Ste} = \frac{C_s (T_m^+ - T_{bi}(0))}{\lambda} \quad \text{número de Stefan.} \quad (3.22)$$

A equação (3.11) que representa a capacidade térmica equivalente por volume ficará:

$$\tilde{C}(\theta) = \begin{cases} 1 & \theta < \theta_m^- \\ C_1(\theta) / C_s(\theta) & \theta > \theta_m^+ \\ \frac{1}{\text{Ste}} \left(\frac{\theta_m^+ - \theta_{io}}{\theta_m^+ - \theta_m^-} \right) + \frac{C_s(\theta) + C_1(\theta)}{2C_s} & \theta_m^- \leq \theta \leq \theta_m^+ \end{cases} \quad (3.23)$$

e a condutividade térmica representada pela equação (3.12) ficará:

$$\tilde{k}(\theta) = \begin{cases} 1 & \theta < \theta_m^- \\ k_1(\theta) / k_s(\theta) & \theta > \theta_m^+ \\ 1 + \frac{k_1(\theta) - k_s(\theta)}{2k_s} \left(\frac{\theta - \theta_m^-}{\theta_m^+ - \theta_m^-} \right) & \theta_m^- \leq \theta \leq \theta_m^+ \end{cases} \quad (3.24)$$

Assim, a equação de energia será rescrita como:

Para o caso de cilindro aletado:

$$\tilde{C}(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \text{Fo}} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \tilde{k}(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial R} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\tilde{k}(\theta)}{R} \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right) \quad (3.25)$$

- Para caso de cilindro sem aletas:

$$\tilde{C}(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial Fo} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \tilde{k}(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial R} \right) \quad (3.26)$$

3.5 Condições de contorno e inicial

Tanto a equação (3.12) quanto a equação (3.14) são regidas pelas seguintes condições de contorno:

- Na parede do duto interno o calor é transferido por convecção:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=r_i} = - \frac{h_i}{k_s(T)} [T_{bi}(t) - T(r_i, t)] \quad (3.27)$$

- Em $r = r_e$ o calor é transferido para o segundo fluido por convecção:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=r_e} = - \frac{h_e}{k_s(T)} [T(r_e, t) - T_{be}(t)] \quad (3.28)$$

- Em $\phi = 0$ por simetria:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial \phi} \right|_{\phi=0} = 0 \quad (3.29)$$

- Em $\phi = \phi_e$ por simetria:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial \phi} \right|_{\phi=\phi_e} = 0 \quad (3.30)$$

A condição inicial é especificada conforme o caso:

- Para o caso do material de mudança de fase estar no estado líquido:

$$T(r, \phi, t) \geq T_m^+ = T_m + \Delta T \quad (3.31)$$

- Para o caso do material de mudança de fase estar no estado sólido:

$$T(r, \phi, t) \leq T_m^- = T_m - \Delta T \quad (3.32)$$

3.6 Adimensionalização das condições de contorno e inicial

Utilizando as variáveis adimensionais já definidas (equações 3.15 à 3.22), as condições de contorno podem ser escritas como:

- Na parede do duto interno a condição de contorno fica:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial R} \right|_{R=R_1} = \frac{Bi_i}{R_1} [\theta - \theta_{i0}] \quad (3.33)$$

- Na parede do duto externo a condição de contorno fica:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial R} \right|_{R=R_2} = -\frac{Bi_e}{R_2} [\theta - \theta_{e0}] \quad (3.34)$$

- Em $\phi = 0$ por simetria:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right|_{\phi=0} = 0 \quad (3.35)$$

- Em $\phi = \phi_e$ por simetria:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right|_{\phi=\phi_e} = 0 \quad (3.36)$$

onde:

$$Bi_i = \frac{h_i r_i}{k_s} \quad \text{número de Biot para o tubo interno;}$$

$$Bi_e = \frac{h_e r_e}{k_s} \quad \text{número de Biot para o tubo externo;}$$

$$R_1 = \frac{r_i}{(r_e^2 - r_i^2)^{1/2}} \quad \text{raio interno do material de mudança de fase adimensional;}$$

$$R_2 = \frac{r_{ei}}{(r_e^2 - r_i^2)^{1/2}} \quad \text{raio externo do material de mudança de fase adimensional;}$$

A condição inicial pode ser escrita como:

$$\theta(R, \phi, 0) \geq \frac{T_m^+ - T_m}{T_m} = \theta_m^+ \quad (3.37)$$

quando o material de mudança de fase se encontra no estado líquido; e quando o material de mudança de fase estiver no estado sólido:

$$\theta(R, \phi, 0) \leq \frac{T_m^- - T_m}{T_m} = \theta_m^- \quad (3.38)$$

3.7 Determinação do coeficiente convectivo de transferência de calor

A troca de calor entre o fluido interno e o material de mudança de fase, bem como a troca de calor entre o fluido externo e o material de mudança de fase, ocorre convecção, resultado nas condições de contorno representadas pelas equações (3.27) e (3.28).

Nestas equações aparecem o termo convectivo representado pelo coeficiente convectivo ou coeficiente de película, h_i e h_e respectivamente para os fluidos interno e externo. Os coeficientes de película são, em geral, obtidos por meio de expressões e correlações específicas, que dependem das propriedades termofísicas do fluido e da superfície de troca de calor, assim como de seu movimento.

Para o caso estudado neste trabalho optamos pela utilização da expressão recomendada por DITTUS - BOELTER para escoamento turbulento plenamente desenvolvido em tubos lisos, descrita como:

$$Nu_d = 0,023 Re_d^{0,8} Pr^n \quad (3.39)$$

onde $n = 0,3$ se o fluido interno sofrer resfriamento, e $n = 0,4$ se o fluido interno sofrer aquecimento.

Para o fluido externo, que escoar no anel entre o material de mudança de fase e o tubo externo utilizamos a expressão proposta por SHAH e LONDON (1978), para escoamento em regime turbulento.

$$Nu = 1,490(\overline{X})^{-1/3} - 0,4 \quad 0,0002 < \overline{X} < 0,001 \quad (3.40)$$

$$Nu = 8.235 + 8.68(1000\bar{X})^{-0.506} \exp(-164\bar{X}) \quad \bar{X} > 0,001 \quad (3.41)$$

onde $\bar{X} = \frac{L/D}{RePr}$

Para o escoamento laminar no interior do tubo, segundo KAYS e CRAWFORD (1980) temos:

$$Nu = 4,364 \quad (3.42)$$

Para o escoamento laminar no anulo, segundo KAYS e CRAWFORD (1980), temos:

$$Nu = 5,385 \quad Nu = \frac{h_c d_h}{k_s} \quad (3.43)$$

onde: d_h é o diâmetro hidráulico no anulo = $2(r_e - r_i)$.

3.8 Acoplamento do problema de mudança de fase com o problema do escoamento dos fluidos

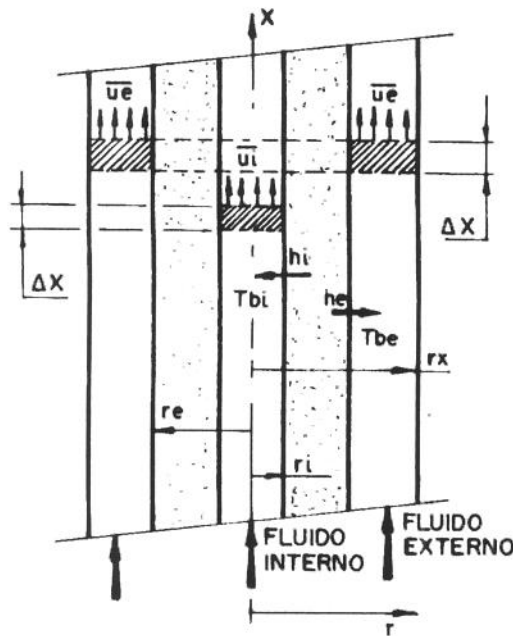


Figura 3.6: Corte longitudinal na unidade armazenadora.

Na figura (3.6) temos um corte longitudinal da unidade armazenadora de anular, mostrando os fluidos de transferência de calor, o material de mudança de fase e as principais variáveis dimensionais.

Em relação ao fluido escoando no interior do tubo interno, sua temperatura não é uniforme numa seção e varia ao longo da direção de escoamento e da direção do fluxo de calor.

O uso da temperatura média de mistura nos permite fazer um balanço de energia. Analisando a figura (3.7), é possível o acoplamento do problema de mudança de fase ao problema do escoamento do fluido, conseguindo o modelo para descrever a unidade armazenadora em investigação. No balanço foi omitido o termo $\partial T_b/\partial t$ porque o tempo de solidificação é muito maior que o tempo que o fluido escoar no armazenado térmico.

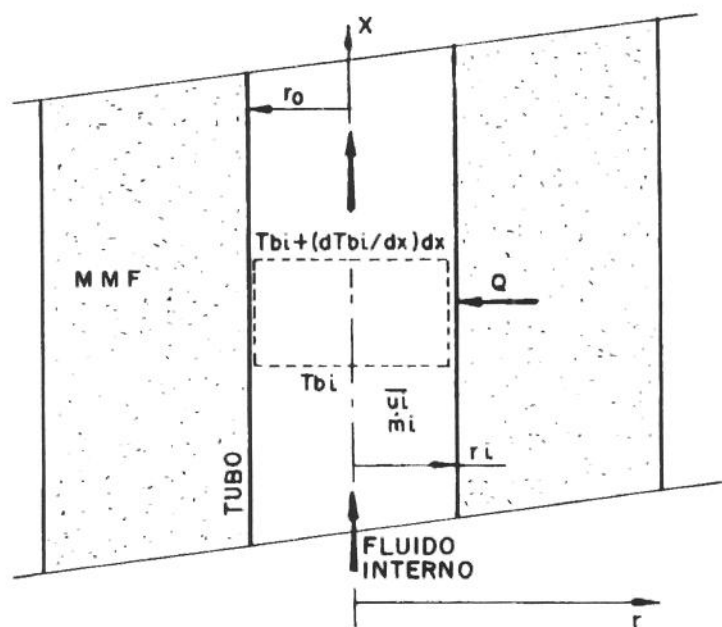


Figura 3.7: Representação do balanço de energia entre o fluido interno e o material de mudança de fase.

Fluxo de calor vindo do fluido interno	-	Fluxo de calor que sai pelas paredes	-	taxa de acumulação de energia pelo fluido	=	Fluxo de calor que sai do fluido interno
--	---	--------------------------------------	---	---	---	--

$$\dot{m}_{bi}c_{bi}T_{bi}\Big|_x - \dot{q}_i dx - \rho_{bi}c_{bi} \frac{\partial T_{bi}}{\partial t} A dx = \dot{m}_{bi}c_{bi} \left(T_{bi}\Big|_x + \frac{dT_{bi}}{dx} dx \right) \quad (3.44)$$

rearranjando:

$$-\dot{q}_i dx - A_i dx \rho_{bi}c_{bi} \frac{\partial T_{bi}}{\partial t} = \dot{m}_{bi}c_{bi} \frac{dT_{bi}}{dx} dx \quad (3.45)$$

ou,

$$\dot{m}_{bi}c_{bi} \frac{dT_{bi}}{dx} = -\dot{q}_i - A_i \rho_{bi}c_{bi} \frac{\partial T_{bi}}{\partial t} \quad (3.46)$$

Considerando regime permanente, assim a equação (3.46) fica:

$$\dot{m}_{bi}c_{bi} \frac{dT_{bi}}{dx} = -\dot{q}_i \quad (3.47)$$

onde:

$$\dot{m}_{bi} = A_i \rho_{bi} v_i = \rho_{bi} \pi r_i^2 \bar{u}_i \quad \text{é a vazão mássica do fluido interno;} \quad (3.48)$$

$$\dot{q}_i = 2\pi r_i k_s \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r_i} \quad \text{é a taxa de transferência do fluido interno para o MMF} \quad (3.49)$$

por unidade de comprimento do tubo

A quantidade máxima de calor possível por unidade de comprimento para transferir ao material de mudança de fase é:

$$\dot{q}_{\max} = U P \Delta T \quad (3.50)$$

onde:

U	Coefficiente global de transferência de calor; [W/m ² K]
P	perímetro de troca de calor [m]
ΔT	diferença de temperatura [K]

como o coeficiente global de transferência de calor (U) é uma combinação entre os coeficientes de película do fluido interno (h_i) e do fluido externo (h_e) além de uma combinação da condutividade térmica do material de mudança de fase (k_s), e tanto o coeficiente de película

do fluido externo e a condutividade térmica do material são desprezíveis em relação ao coeficiente de película interno, a equação (3.50) fica:

$$\dot{q}_{\max} = 2\pi r_i h_i (T_{bi}(t,0) - T_{be}(t,0)) \quad (3.51)$$

O fluxo de calor adimensional para o fluido interno é dado por:

$$\bar{q}_i = \frac{\dot{q}_i}{\dot{q}_{\max}} = \frac{\dot{q}_i}{2\pi r_i h_i (T_{bi}(t,0) - T_{be}(t,0))} \quad (3.52)$$

ou seja, é a razão de calor transferido por comprimento.

Assim, rearranjando a equação (3.47) e combinando com a equação (3.48)

$$\frac{dT_{bi}}{dx} = -\frac{\dot{q}_i}{\dot{m}_{bi} c_{bi}} = -\frac{1}{\rho_{bi} \pi r_i^2 \bar{u}_i} \frac{1}{c_{bi}} \dot{q}_i \quad (3.53)$$

como pelo rearrançamento da equação (3.52),

$$\dot{q}_i = 2\pi r_i h_i (T_{bi0} - T_{be0}) \bar{q}_i \quad (3.54)$$

onde:

$$T_{bi0} = T_{bi}(0)$$

$$T_{be0} = T_{be}(0)$$

a equação (3.53) fica:

$$\frac{dT_{bi}}{dx} = -\frac{2\pi r_i h_i (T_{bi0} - T_{be0})}{\rho_{bi} \pi r_i^2 \bar{u}_i c_{bi}} \bar{q}_i \quad (3.55)$$

ou,

$$\frac{dT_{bi}}{dx} = -\frac{2h_i (T_{bi0} - T_{be0})}{\rho_{bi} r_i \bar{u}_i c_{bi}} \bar{q}_i \quad (3.56)$$

Para fazer o acoplamento, foi considerado a velocidade média no escoamento do fluido interno no duto, definida como:

$$\bar{u}_i = \frac{dx}{dt} \quad (3.57)$$

teremos:

$$\frac{dT_{bi}}{dx} = - \frac{2h_i(T_{bi0} - T_{be0})}{\rho_{bi}r_i c_{bi}} \bar{q}_i \frac{dt}{dx} \quad (3.58)$$

que após ser integrada em relação ao tempo obtemos o perfil de temperatura do fluido interno:

$$T_{bi}(t) = T_{bi0} + (T_{bi0} - T_{be0}) \exp \left[- \frac{2h_i}{\rho_{bi}r_i c_{bi}} \int_0^t \bar{q}_i dt \right] \quad (3.59)$$

Para o estudo do modelo proposto utilizaremos variáveis adimensionais para adimensionalizar a equação (3.58). Assim fazendo uma adimensionalização da capacidade térmica do material de mudança de fase e relação ao fluido interno:

$$C_{sbi} = \frac{C_s}{\rho_{bi} c_{bi}}$$

a equação (3.58) torna-se:

$$\frac{dT_{bi}}{dx} = \frac{-2Bi_i C_{sbi} \bar{q}_i (T_{bi0} - T_{be0})}{R_i^2} \frac{dFo}{dx} \quad (3.60)$$

que pode ser rescrita como:

$$\frac{dT_{bi}}{(T_{bi0} - T_{be0})} = \frac{-2Bi_i C_{sbi} \bar{q}_i dFo}{R_i^2} \quad (3.61)$$

Integrando-a:

$$\theta_i(Fo) = \theta_{i0} + (\theta_{i0} - \theta_{e0}) \exp \left[\frac{-2Bi_i C_{sbi}}{R_i^2} \int_0^{Fo} \bar{q}_i dFo \right] \quad (3.62)$$

onde

rearranjando:

$$+ \dot{q}_e dx - A_e \rho_e c_{be} \frac{\partial T_{be}}{\partial t} dx = \dot{m}_{be} c_{be} \frac{dT_{be}}{dx} dx \quad (3.62)$$

ou,

$$\dot{m}_{be} c_{be} \frac{dT_{be}}{dx} = \dot{q}_e - A_e \rho_e c_{be} \frac{\partial T_{be}}{\partial t} \quad (3.63)$$

Considerando também que o fluido externo escoar em regime permanente, a equação (3.63) fica:

$$\dot{m}_{be} c_{be} \frac{dT_{be}}{dx} = \dot{q}_e \quad (3.64)$$

onde:

$$\dot{m}_{be} = A_i \rho_{bi} v_i = \rho_e \pi (r_i^2 - r_e^2) \bar{u}_e \quad \text{vazão mássica do fluido externo;} \quad (3.65)$$

$$\dot{q}_e = -2\pi r_e k_e \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r_e} \quad \begin{array}{l} \text{é a taxa de transferência de calor do MMF para} \\ \text{o fluido externo por unidade de comprimento;} \end{array} \quad (3.66)$$

O fluxo de calor adimensional para o fluido externo é dado por:

$$\bar{q}_e = \frac{\dot{q}_e}{\dot{q}_{\max}} = \frac{\dot{q}_e}{2\pi r_e h_e (T_{bi0} - T_{be0})} \quad (3.67)$$

Assim, rearranjando a equação (3.64) e combinando com a equação (3.65)

$$\frac{dT_{be}}{dx} = \frac{\dot{q}_e}{\dot{m}_{be} c_{be}} = \frac{1}{\rho_e \pi (r_i^2 - r_e^2) \bar{u}_e} \frac{1}{c_{be}} \dot{q}_e \quad (3.68)$$

e com o rearranjo da equação (3.67),

$$\frac{dT_{be}}{dx} = \frac{2\pi r_e h_e (T_{bi0} - T_{be0})}{\rho_e \pi (r_i^2 - r_e^2) \bar{u}_e} \frac{1}{c_{be}} \bar{q}_e \quad (3.69)$$

ou,

$$\frac{dT_{be}}{dx} = \frac{2r_e h_e (T_{bi0} - T_{be0})}{\rho_e (r_t^2 - r_e^2) \bar{u}_e c_{be}} \bar{q}_e \quad (3.70)$$

Também considerando a velocidade média no escoamento do fluido externo no duto

$$\bar{u}_e = \frac{dx}{dt_e} \quad (3.71)$$

teremos:

$$\frac{dT_{be}}{dx} = \frac{2r_e h_e (T_{bi0} - T_{be0})}{\rho_e (r_t^2 - r_e^2) c_{be}} \bar{q}_e \frac{dt_e}{dx} \quad (3.72)$$

que após ser integrada em relação ao tempo obtemos o perfil de temperatura do fluido externo:

$$T_{be}(t) = T_{be0} + (T_{bi0} - T_{be0}) \exp \left[\frac{2r_e h_e}{\rho_e (r_t^2 - r_e^2) c_{be}} \int_0^t \bar{q}_e dt_e \right] \quad (3.73)$$

Também adimensionalizando a equação (3.72), temos que o tempo que o fluido externo escoar pelo tubo externo na forma adimensionalizada será dada por:

$$Fo_e = \frac{k_s t_e}{C_s (r_t^2 - r_e^2)} \quad (3.74)$$

e a adimensionalização entre a capacidade térmica do material de mudança de fase e o fluido externo:

$$C_{sbe} = \frac{C_s}{\rho_{be} c_{be}} \quad (3.75)$$

a equação (3.72) fica:

$$\frac{dT_{be}}{dx} = 2Bi_e C_{sbe} (T_{bi0} - T_{be0}) \bar{q}_e \frac{dFo_e}{dx} \quad (3.76)$$

Subtraindo (3.60) e (3.76) temos:

$$\frac{dT_{bi}}{dx} - \frac{dT_{be}}{dx} = -2(T_{bi0} - T_{be0}) \left[\frac{Bi_i C_{sbi} \bar{q}_i}{R_1^2} \frac{dFo}{dx} + Bi_e C_{sbe} \bar{q}_e \frac{dFo_e}{dx} \right] \quad (3.77)$$

Relacionado Fo e Fo_e, temos:

$$Fo_e (R_3^2 - R_2^2) = Fo \frac{t_e}{t} \quad (3.78)$$

onde: $R_3 = \frac{r_t}{(r_e^2 - r_i^2)^{1/2}}$ é o raio adimensionalizado em relação tubo externo.

Relacionado a velocidade média dos fluidos temos:

$$\bar{U} = \frac{\bar{u}_e}{\bar{u}_i} = \frac{t}{t_e} \quad (3.79)$$

a equação (3.78) pode ser escrita como:

$$Fo_e (R_3^2 - R_2^2) \bar{U} = Fo \quad (3.80)$$

Portanto,

$$dFo = (R_3^2 - R_2^2) \bar{U} dFo_e \quad (3.81)$$

Rescrevendo a equação (3.77) somente em função de dFo, temos:

$$\frac{dT_{bi}}{dx} - \frac{dT_{be}}{dx} = -2(T_{bi0} - T_{be0}) \left[\frac{Bi_i C_{sbi} \bar{q}_i}{R_1^2} \frac{dFo}{dx} + \frac{Bi_e C_{sbe} \bar{q}_e}{\bar{U} (R_3^2 - R_2^2)} \frac{dFo}{dx} \right] \quad (3.82)$$

Rearranjando obtemos a expressão:

$$\frac{d(T_{bi} - T_{be})}{(T_{bi0} - T_{be0})} = -2 \left[\frac{Bi_i C_{sbi} \bar{q}_i}{R_1^2} + \frac{Bi_e C_{sbe} \bar{q}_e}{\bar{U} (R_3^2 - R_2^2)} \right] dFo \quad (3.83)$$

integrando no respectivo tempo obtém-se:

$$\frac{(T_{bi}(Fo) - T_{be}(Fo))}{(T_{bi0} - T_{be0})} = \exp \left\{ -2 \int_0^{Fo} \left[\frac{Bi_i C_{sbi} \bar{q}_i}{R_1^2} + \frac{Bi_e C_{sbe} \bar{q}_e}{\bar{U}(R_3^2 - R_2^2)} \right] dFo \right\} \quad (3.84)$$

ou,

$$\theta_e(Fo) = \theta_i(Fo) - (\theta_{i0} - \theta_{e0}) \exp \left\{ -2 \int_0^{Fo} \left[\frac{Bi_i C_{sbi} \bar{q}_i}{R_1^2} + \frac{Bi_e C_{sbe} \bar{q}_e}{\bar{U}(R_3^2 - R_2^2)} \right] dFo \right\} \quad (3.85)$$

onde $\theta_e(Fo) = \frac{T_{be}(Fo) - T_m}{T_m}$ é a temperatura adimensionalizada para o fluido externo.

3.9 Determinação do calor liberado (absorvido) pelo material de mudança de fase

As expressões (3.62) e (3.85) fornecem as temperaturas dos fluidos interno e externo respectivamente, mas para determiná-las precisamos calcular o calor que o material de mudança de fase absorve/libera.

Para o fluido interno esta expressão é representada pela equação (3.52) e substituindo o fluxo de calor vindo do fluido interno, representado pela equação (3.49) temos:

$$\bar{q}_i = \frac{\dot{q}_i}{\dot{q}_{\max}} = \frac{\dot{q}_i}{2\pi r_i h_i (T_{bi0} - T_{be0})} = \frac{2\pi r_i k_s \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r_i}}{2\pi r_i h_i (T_{bi0} - T_{be0})} = \frac{k_s}{h_i (T_{bi0} - T_{be0})} \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r_i} \quad (3.86)$$

Substituindo as variáveis adimensionais anteriormente definidas, o fluxo de calor adimensional resultante em relação ao fluido interno ficará:

$$\bar{q}_i = \frac{R_1}{Bi_i} \frac{1}{(\theta_{i0} - \theta_{e0})} \left. \frac{\partial \theta}{\partial R} \right|_{R_1} \quad (3.87)$$

Pela condição de contorno em $r = r_i$ expressa pela equação (3.33) temos que:

$$\bar{q}_i = \frac{R_1}{Bi_i} \frac{1}{(\theta_{i0} - \theta_{e0})} \frac{Bi_i}{R_1} (\theta - \theta_{i0}) = \frac{(\theta - \theta_{i0})}{(\theta_{i0} - \theta_{e0})} \quad (3.88)$$

que é o calor adimensionalizado entrando/saindo com fluido interno

Para o fluido externo, a equação que representa o fluxo de adimensional é a equação (3.67) e substituindo o fluxo de calor vindo do fluido externo mostrado na equação (3.66) temos:

$$\bar{q}_e = \frac{\dot{q}_e}{\dot{q}_{\max}} = \frac{\dot{q}_e}{2\pi r_e h_e (T_{bi0} - T_{be0})} = \frac{-2\pi r_e k_s \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r_e}}{2\pi r_e h_e (T_{bi0} - T_{be0})} = \frac{-k_s}{h_e (T_{bi0} - T_{be0})} \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r_e} \quad (3.89)$$

Substituindo as variáveis adimensionais anteriormente definidas, o fluxo de calor adimensional resultante ficará:

$$\bar{q}_e = -\frac{R_2}{Bi_e} \frac{1}{(\theta_{i0} - \theta_{e0})} \left. \frac{\partial \theta}{\partial R} \right|_{R_2} \quad (3.90)$$

Pela condição de contorno em $r = r_e$ expressa pela equação (3.34) temos que:

$$\bar{q}_e = \frac{R_2}{Bi_e} \frac{1}{(\theta_{i0} - \theta_{e0})} \frac{Bi_e}{R_2} (\theta - \theta_{e0}) = \frac{(\theta - \theta_{e0})}{(\theta_{i0} - \theta_{e0})} \quad (3.91)$$

que é o calor adimensionalizado que entra/sai com fluido externo.

O tempo adimensional pode ser escrito em função das variáveis admitidas para este problema, a equação (3.17) pode ser escrita como:

$$Fo = \frac{R_1 \rho^* z^*}{Pr \cdot Re \cdot \mu^*} \quad (3.92)$$

onde

$$\mu^* = \frac{\mu_b}{\mu_i} \quad \text{viscosidade relativa;}$$

$$\rho^* = \frac{\rho_b}{\rho_s} \quad \text{massa específica relativa;}$$

$$z^* = \frac{z}{(r_e^2 - r_i^2)^{1/2}} \quad \text{distância axial adimensionalizada;}$$

$$Re = \frac{\bar{u}_i \rho_b r_i}{\mu_b} \quad \text{número de Reynolds;}$$

$$Pr = \frac{c_s \mu_l}{k_s} \quad \text{número de Prandtl.}$$

3.10 Determinação da efetividade e do NTU

Segundo SHAMSUNDAR e SRINIVASAN (1980), podemos relacionar o NTU com a fração de massa solidificada partindo do balanço de energia entre o elemento do fluido e o MMF. Para o fluido interno, a equação resultante do balanço de energia é (3.48) que pode ser representada pela equação (3.54) em função do fluxo adimensional de calor, rescrita como:

$$\dot{m}_{bi} c_{bi} \frac{dT_{bi}}{dx} = -\dot{q}_i = -2\pi r_i h_i (T_{bi} - T_{be}) \bar{q}_i \quad (3.93)$$

Escrevendo o fluxo de calor que sai/entra no armazenador em função da fração massa solidificada temos:

$$\dot{q}_i = 2\pi r_i h (T_{bi} - T_{be}) \bar{q}_i = \pi \rho_b L (r_e^2 - r_i^2) \frac{dF}{dt} \quad (3.94)$$

onde L é o calor latente do material de mudança de fase e F a fração de massa solidificada/fundida.

Assim a equação (3.93) pode ser escrita como:

$$\dot{m}_{bi} c_{bi} \frac{dT_{bi}}{dx} = -\dot{q}_i = -\pi \rho_b L (r_e^2 - r_i^2) \frac{dF}{dt} \quad (3.95)$$

Rearranjando a equação (3.94) temos:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{2\pi r_i h (T_{bi} - T_{be})}{\pi \rho_b L (r_e^2 - r_i^2)} \bar{q}_i \quad (3.96)$$

Definindo um novo tempo adimensional como:

$$\tau = \frac{k_s(T_m^+ - T_{bi})}{\rho_b L(r_e^2 - r_i^2)} t = \text{Ste. Fo} \quad (3.97)$$

a equação (3.98) ficará:

$$\frac{dF}{d\tau} = 2\text{Bi}_i \frac{(T_{bi} - T_{be})}{(T_m^+ - T_{bi})} \bar{q}_i = 2\text{Bi}_i \frac{(\theta_{i0} - \theta_{e0})}{(\theta_m^+ - \theta_{e0})} \bar{q}_i \quad (3.98)$$

Retornando a equação (3.95) multiplicando-a e dividindo-a por k , e rearranjando-a temos:

$$\frac{\dot{m}_{bi} c_{bi} k}{\rho_b L(r_e^2 - r_i^2)} \frac{dT_{bi}}{dx} = -\pi k \frac{dF}{dt} \quad (3.99)$$

Integrando-a,

$$\int_0^l -\frac{\dot{m}_{bi} c_{bi} k}{\rho_b L(r_e^2 - r_i^2)} \frac{dT_{bi}}{dx} dt = \int_0^F \pi k dF \quad (3.100)$$

ou,

$$-\dot{m}_{bi} c_{bi} \int_0^l k \frac{dT_{bi}}{dx} \frac{dt}{\rho_b L(r_e^2 - r_i^2)} = \pi k F \quad (3.101)$$

Substituindo o tempo adimensional definido em (3.97):

$$-\dot{m}_{bi} c_{bi} \int_0^{\tau} \frac{dT_{bi}}{(T_m^+ - T_{bi})} \frac{d\tau}{dx} = \pi k F \quad (3.102)$$

Como o tempo de solidificação/fusão é muito maior que o tempo que o fluido leva para percorrer o tubo, e a temperatura do fluido interno T_{bi} não varia somente com o tempo mas também com a posição axial e como a cada instante τ o fluxo de calor $\dot{q}_i$ e F variam com a posição, a equação (3.105) pode ser escrita como:

$$\dot{m}_{bi} c_{bi} \frac{d\tau}{dx} = \pi k F \quad (3.103)$$

Conforme demonstrado por SHAMSUNDAR e SRINIVASAN (1980).

A equação (3.103) pode ser escrita como:

$$\dot{m}_{bi} c_{bi} \frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{d\tau}} = \dot{m}_{bi} c_{bi} \frac{\frac{dF}{dx}}{2Bi_i \frac{(\theta_{i0} - \theta_{e0})}{(\theta_m^+ - \theta_{e0})} \bar{q}_i} = \pi k F \quad (3.104)$$

ou,

$$\frac{dF}{dx} = 2Bi_i \frac{(\theta_{i0} - \theta_{e0})}{(\theta_m^+ - \theta_{e0})} \bar{q}_i \pi k F \frac{1}{\dot{m}_{bi} c_{bi}} \quad (3.105)$$

$$\frac{(\theta_m^+ - \theta_{e0})}{(\theta_{i0} - \theta_{e0})} \frac{dF}{\bar{q}_i F} = \frac{2Bi_i \pi k}{\dot{m}_{bi} c_{bi}} dx \quad (3.106)$$

integrando,

$$\int_{F_0}^{F_z} \frac{(\theta_m^+ - \theta_{e0})}{(\theta_{i0} - \theta_{e0})} \frac{dF}{\bar{q}_i F} = \int_0^Z \frac{2Bi_i \pi k}{\dot{m}_{bi} c_{bi}} dx = \frac{2Bi_i \pi k}{\dot{m}_{bi} c_{bi}} Z \quad (3.107)$$

portanto,

$$\int_{F_0}^{F_z} \frac{(\theta_m^+ - \theta_{e0})}{(\theta_{i0} - \theta_{e0})} \frac{dF}{\bar{q}_i F} = NTU_i \quad (3.108)$$

Como pela definição de efetividade é a razão entre o calor transferido atual e o máximo de calor transferido, temos

$$\epsilon_i = \frac{\dot{m}_{bi} c_{bi} (T_{iz} - T_{i0})}{\dot{m}_{bi} c_{bi} (T_m^+ - T_{i0})} = 1 - \frac{(T_m^+ - T_{iz})}{(T_m^+ - T_{i0})} \quad (3.109)$$

Segundo SHAMSUNDAR e SRINIVASAN (1980) a diferença de temperatura local é proporcional a fração de massa solidificada local, e pode ser escrita como,

$$\epsilon_i = 1 - \frac{F_Z}{F_0} \quad (3.109)$$

Para o fluido externo, seguindo os mesmos procedimentos anteriores chegaremos a uma expressão para o NTU dada por:

$$\int_{F_0}^{F_Z} \frac{(\theta_m^+ - \theta_{e0})}{(\theta_{i0} - \theta_{e0})} \frac{dF}{\bar{q}_e F} = NTU_e \quad (3.110)$$

e a efetividade será:

$$\epsilon_e = 1 - \frac{F_Z}{F_0} \quad (3.111)$$

Capítulo 4

Análise Numérica

4.1 Introdução

Neste capítulo será mostrada a modelagem numérica do problema, com a discretização das equações governantes e das condições de contorno, segundo o método descrito por PATANKAR (1980), dividindo o domínio de interesse em volumes de controle e a cada volume de controle estará associado um ponto nodal. A discretização será obtida pela integração no volume de controle ao redor dos pontos da grade, assim cada volume de controle satisfará o princípio da conservação e dessa forma todo o domínio será satisfeito, transformando equação diferencial que governa todo o problema de mudança de fase em um sistema de equações algébricas. A vantagem da utilização deste método é obter resultados que preservem o modelo físico do problema.

Na figura (4.1), podemos observar que conforme a posição do ponto nodal, este terá um certo volume de controle, representado pelas iniciais deste volume de controle, ou seja, no total temos nove volumes de controle diferentes, dependendo da localização do ponto nodal.

- VCC Volume de Controle Central;
- VCO Volume de Controle Oeste;
- VCL Volume de Controle Leste;
- VCN Volume de Controle Norte;
- VCS Volume de Controle Sul;
- VCSO Volume de Controle Sul e Oeste;
- VCSL Volume de Controle Sul e Leste;

- VCNO Volume de Controle Norte e Oeste;
- VCNL Volume de Controle Norte e Leste.

Cada um dos volumes de controle será estudado separadamente.

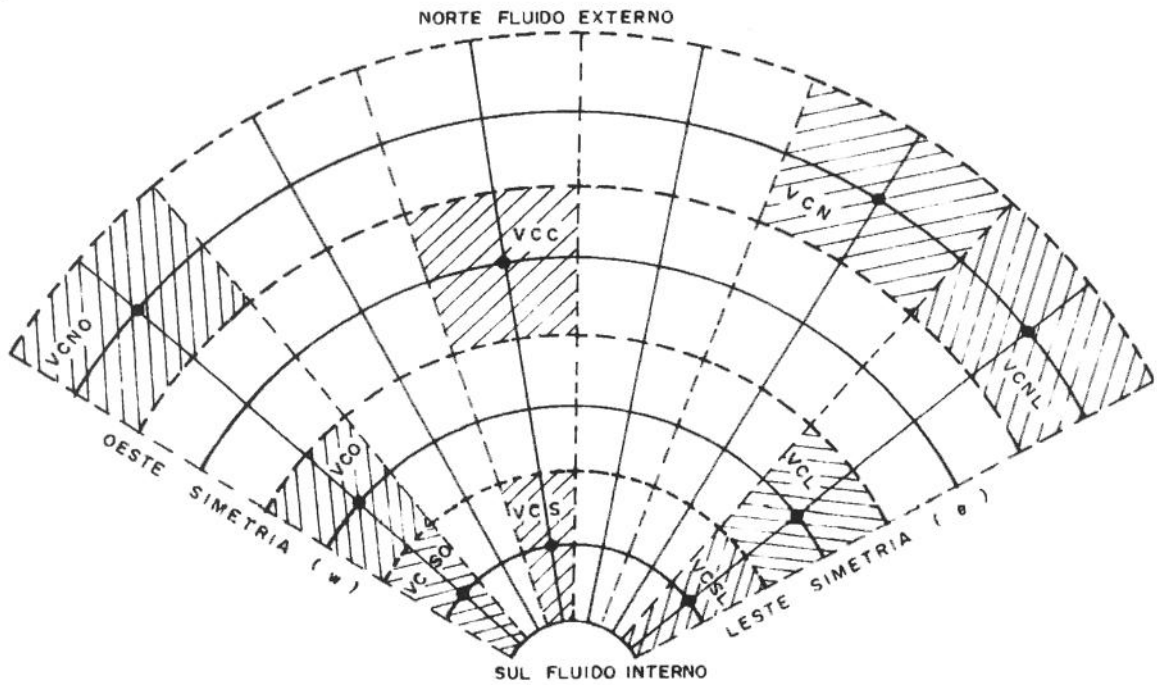


Figura 4.1: Representação do domínio subdividido em volumes de controle.

4.2 Discretização das equações para armazenadores aletados.

No capítulo anterior foi realizada a modelagem teórica do problema, resultando em uma equação diferencial, que exprime o princípio de conservação da energia no material de mudança de fase, e um conjunto de equações diferenciais, que resumem as condições de contorno do problema, que serão discretizadas separadamente a seguir.

4.2.1 Volume de controle central (VCC)

Para um determinado ponto P, associado ao volume de controle central representado pela figura (4.2), temos a equação (3.26) que através de um rearranjo esta pode ser escrita como:

$$\bar{C}(\theta)R \frac{\partial \theta}{\partial Fo} = \frac{\partial}{\partial R} \left(R \bar{k}(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial R} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(R \bar{k}(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right) \quad (4.1)$$

integrando em R e Fo temos a equação:

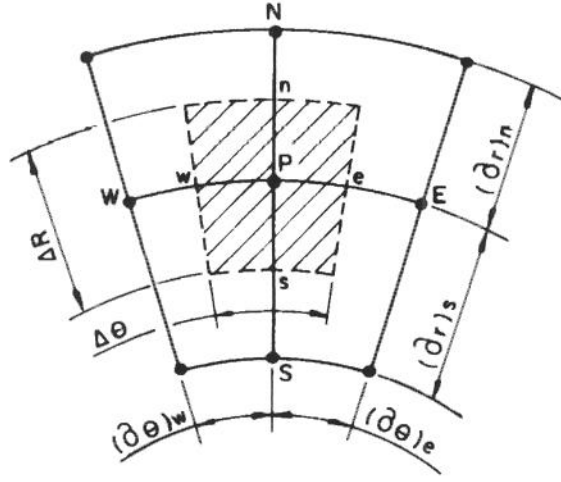


Figura 4.2: Representação do volume de controle central

$$\iiint_{F_o R \phi} \bar{C}(\theta) R \frac{\partial \theta}{\partial F_o} dR d\phi dF_o = \iiint_{F_o R \phi} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \bar{k}(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial R} \right) dR d\phi dF_o + \iiint_{F_o R \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\bar{k}(\theta)}{R} \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right) dR d\phi dF_o \quad (4.2)$$

Resolvendo separadamente a primeira integral, temos que a integração no tempo para esta integral pode ser colocada como função do tempo anterior e do atual que são representados pelos expoentes (0) e (1) respectivamente:

$$\begin{aligned} \iiint_{F_o R \phi} \bar{C}(\theta) R \frac{\partial \theta}{\partial F_o} dR d\phi dF_o &= \int_{F_o}^{F_o + \Delta F_o} \int_w^e \int_s^n \bar{C}(\theta) R \frac{\partial \theta}{\partial F_o} dR d\phi dF_o = \\ &= \bar{C}(\theta) \Delta V \int_{F_o}^{F_o + \Delta F_o} \frac{\partial \theta}{\partial F_o} dF_o = \bar{C}(\theta) \Delta V [\theta_p^1 - \theta_p^0] \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde $\Delta V = R_p \Delta R \Delta \phi$ é o volume de controle central.

Para resolver o lado esquerdo da equação (4.2) assumimos que o valor do ponto nodal P prevalece para todo o volume de controle, e ainda que ocorra uma variação linear de θ com R e ϕ e a integração θ no tempo F_o é da seguinte forma:

$$\int_{F_o}^{F_o + \Delta F_o} \theta dF_o = (m\theta^1 + (1-m)\theta^0) \Delta F_o \quad (4.4)$$

onde m representa comportamento da variável θ em função do tempo através de métodos numéricos implícitos ($m=1$) e explícitos ($m=0$),

Assim para resolver este lado da equação (4.2) separamos as duas integrais e as resolvendo-as, sendo que a primeira será uma função R e a segunda em função de ϕ .

A integral em função de R ficará, sendo $m=g$.

$$\begin{aligned}
 \int_{F_o} \int_{R} \int_{\phi} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \bar{k}(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial R} \right) dR d\phi dF_o &= \int_{F_o} \int_s^{\Delta F_o} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \bar{k}(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial R} \right) \Delta \phi dR dF_o = \\
 &= \int_{F_o}^{\Delta F_o} \left(R_n \bar{k}_n(\theta) \frac{(\theta_N - \theta_P)}{(\partial r)_n} - R_s \bar{k}_s(\theta) \frac{(\theta_P - \theta_s)}{(\partial r)_s} \right) \Delta \phi dF_o = \\
 &= \frac{R_n \bar{k}_n(\theta) \Delta \phi \Delta F_o}{(\partial r)_n} [g\theta_N^1 + (1-g)\theta_N^0] + \frac{R_s \bar{k}_s(\theta) \Delta \phi \Delta F_o}{(\partial r)_s} [g\theta_s^1 + (1-g)\theta_s^0] \\
 &\quad - \left[\frac{R_n \bar{k}_n(\theta)}{(\partial r)_n} + \frac{R_s \bar{k}_s(\theta)}{(\partial r)_s} \right] \Delta \phi \Delta F_o [g\theta_P^1 + (1-g)\theta_P^0]
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

E a integral em função de ϕ será, com $m=f$

$$\begin{aligned}
 \int_{F_o} \int_{R} \int_{\phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\bar{k}(\theta)}{R} \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right) dR d\phi dF_o &= \int_{F_o} \int_w^{\Delta F_o} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\bar{k}(\theta)}{R} \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right) \Delta R d\phi dF_o = \\
 &= \int_{F_o}^{\Delta F_o} \left(\frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e} \frac{(\theta_E - \theta_P)}{(\partial \phi)_e} - \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w} \frac{(\theta_P - \theta_w)}{(\partial \phi)_w} \right) \Delta R dF_o = \\
 &= \frac{\bar{k}_e(\theta) \Delta R \Delta F_o}{R_e (\partial \phi)_e} [f\theta_E^1 + (1-f)\theta_E^0] + \frac{\bar{k}_w(\theta) \Delta R \Delta F_o}{R_w (\partial \phi)_w} [f\theta_w^1 + (1-f)\theta_w^0] \\
 &\quad - \left[\frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e (\partial \phi)_e} + \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w (\partial \phi)_w} \right] \Delta R \Delta F_o [f\theta_P^1 + (1-f)\theta_P^0]
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Agrupando todos os termos da equação (4.2) temos:

$$\begin{aligned}
 \bar{C}(\theta) \Delta V [\theta_P^1 - \theta_P^0] &= \frac{R_n \bar{k}_n(\theta) \Delta \phi \Delta F_o}{(\partial r)_n} [g\theta_N^1 + (1-g)\theta_N^0] \\
 &\quad + \frac{R_s \bar{k}_s(\theta) \Delta \phi \Delta F_o}{(\partial r)_s} [g\theta_s^1 + (1-g)\theta_s^0] - \left[\frac{R_n \bar{k}_n(\theta)}{(\partial r)_n} + \frac{R_s \bar{k}_s(\theta)}{(\partial r)_s} \right] \Delta \phi \Delta F_o [g\theta_P^1 + (1-g)\theta_P^0]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e} \frac{\Delta R \Delta Fo}{(\partial \phi)_e} [f\theta_E^1 + (1-f)\theta_E^0] + \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w} \frac{\Delta R \Delta Fo}{(\partial \phi)_w} [f\theta_W^1 + (1-f)\theta_W^0] \\
& - \left[\frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e(\partial \phi)_e} + \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w(\partial \phi)_w} \right] \Delta R \Delta Fo [f\theta_P^1 + (1-f)\theta_P^0]
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Rearranjando,

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{C}(\theta) \Delta V}{\Delta Fo} [\theta_P^1 - \theta_P^0] &= \frac{R_n \bar{k}_n(\theta) \Delta \phi}{(\partial r)_n} [g\theta_N^1 + (1-g)\theta_N^0] + \frac{R_s \bar{k}_s(\theta) \Delta \phi}{(\partial r)_s} [g\theta_S^1 + (1-g)\theta_S^0] \\
& - \left[\frac{R_n \bar{k}_n(\theta)}{(\partial r)_n} + \frac{R_s \bar{k}_s(\theta)}{(\partial r)_s} \right] \Delta \phi [g\theta_P^1 + (1-g)\theta_P^0] + \frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e} \frac{\Delta R}{(\partial \phi)_e} [f\theta_E^1 + (1-f)\theta_E^0] \\
& + \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w} \frac{\Delta R}{(\partial \phi)_w} [f\theta_W^1 + (1-f)\theta_W^0] - \left[\frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e(\partial \phi)_e} + \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w(\partial \phi)_w} \right] \Delta R [f\theta_P^1 + (1-f)\theta_P^0]
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Agrupando os termos:

$$\begin{aligned}
& \theta_P^1 \left[\frac{\bar{C}(\theta) \Delta V}{\Delta Fo} + \left[\frac{R_n \bar{k}_n(\theta)}{(\partial r)_n} + \frac{R_s \bar{k}_s(\theta)}{(\partial r)_s} \right] \Delta \phi g + \left[\frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e(\partial \phi)_e} + \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w(\partial \phi)_w} \right] \Delta R f \right] \\
& - \frac{R_n \bar{k}_n(\theta) \Delta \phi}{(\partial r)_n} g \theta_N^1 - \frac{R_s \bar{k}_s(\theta) \Delta \phi}{(\partial r)_s} g \theta_S^1 - \frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e} \frac{\Delta R}{(\partial \phi)_e} f \theta_E^1 - \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w} \frac{\Delta R}{(\partial \phi)_w} f \theta_W^1 \\
& = \theta_P^0 \left[\frac{\bar{C}(\theta) \Delta V}{\Delta \Gamma} - \left[\frac{R_n \bar{k}_n(\theta)}{(\partial r)_n} + \frac{R_s \bar{k}_s(\theta)}{(\partial r)_s} \right] \Delta \phi (1-g) - \left[\frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e(\partial \phi)_e} + \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w(\partial \phi)_w} \right] \Delta R (1-f) \right] \\
& + \frac{R_n \bar{k}_n(\theta) \Delta \phi}{(\partial r)_n} (1-g) \theta_N^0 + \frac{R_s \bar{k}_s(\theta) \Delta \phi}{(\partial r)_s} (1-g) \theta_S^0 \\
& + \frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e} \frac{\Delta R}{(\partial \phi)_e} (1-f) \theta_E^0 + \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w} \frac{\Delta R}{(\partial \phi)_w} (1-f) \theta_W^0
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Definindo os coeficientes:

$$\begin{aligned}
a_{p0} &= \frac{\bar{C}(\theta) \Delta V}{\Delta \Gamma} & a_N &= \frac{R_n \bar{k}_n(\theta)}{(\partial r)_n} \Delta \phi \\
a_s &= \frac{R_s \bar{k}_s(\theta)}{(\partial r)_s} \Delta \phi & a_E &= \frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e(\partial \phi)_e} \Delta R
\end{aligned}$$

$$a_w = \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w(\partial\phi)_w} \Delta R$$

$$a_p = a_{p0} + g(a_N + a_s) + f(a_E + a_w)$$

Substituindo na equação anterior:

$$\begin{aligned} a_p \theta_p^1 - a_N g \theta_N^1 - a_s g \theta_s^1 - a_E f \theta_E^1 - a_w f \theta_w^1 &= \theta_p^0 [a_{p0} - [a_N + a_s](1-g) - [a_E + a_w](1-f)] \\ &+ a_N(1-g)\theta_N^0 + a_s(1-g)\theta_s^0 + a_E(1-f)\theta_E^0 + a_w(1-f)\theta_w^0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

ou, escrevendo na forma de coeficientes de uma matriz

$$\begin{aligned} A(i,j) &= a_p \theta_p^1 \\ B(i,j) &= a_N g \theta_N^1 + a_E f \theta_E^1 \\ C(i,j) &= a_s g \theta_s^1 + a_w f \theta_w^1 \\ D(i,j) &= \theta_p^0 [a_{p0} - [a_N + a_s](1-g) - [a_E + a_w](1-f)] \\ &+ a_N(1-g)\theta_N^0 + a_s(1-g)\theta_s^0 + a_E(1-f)\theta_E^0 + a_w(1-f)\theta_w^0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

4.2.2 Volume de controle sul (VCS)

O volume de controle sul é mostrado em detalhe na figura (4.3), que tem influência da condição de contorno descrita em (3.34):

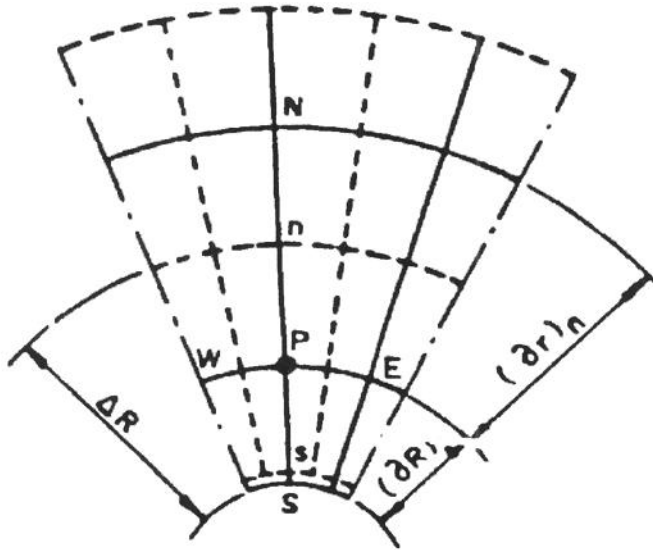


Figura 4.3: Representação do volume de controle sul

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial R} \right|_{R=R_1} = \frac{Bi_i}{R_1} [\theta - \theta_{i0}] \quad (3.33)$$

que quando discretizada resulta em:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial R} \right|_{R=R_1} = \frac{\theta_p - \theta_s}{(\partial r_s)} = \frac{Bi_i}{R_1} (\theta_p - \theta_{i0}) \quad (4.12)$$

Observando a integração neste volume de controle temos uma modificação da equação da conservação (4.2), principalmente no termo variável com R . Assim a integral que varia com o R será discretizada:

$$\begin{aligned} \int_{Fo} \int_{R_1} \int_{\phi} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \bar{k}(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial R} \right) dR d\phi dFo &= \int_{Fo} \int_s^n \frac{\partial}{\partial R} \left(R \bar{k}(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial R} \right) \Delta \phi dR dFo = \\ &= \int_{Fo}^{Fo+\Delta Fo} \left(R_n \bar{k}_n(\theta) \left. \frac{\partial \theta}{\partial R} \right|_n - R_s \bar{k}_s(\theta) \left. \frac{\partial \theta}{\partial R} \right|_s \right) \Delta \phi dFo \\ &= \int_{Fo}^{Fo+\Delta Fo} \left(R_n \bar{k}_n(\theta) \frac{(\theta_n - \theta_p)}{(\partial r)_n} - R_s \bar{k}_s(\theta) \frac{Bi_i}{R_1} (\theta_p - \theta_{i0}) \right) \Delta \phi dFo \\ &= \frac{R_n \bar{k}_n(\theta)}{(\partial r)_n} \Delta \phi \Delta Fo [g\theta_n^1 + (1-g)\theta_n^0] - \frac{R_n \bar{k}_n(\theta)}{(\partial r)_n} \Delta \phi \Delta Fo [g\theta_p^1 + (1-g)\theta_p^0] \\ &\quad - R_s \bar{k}_s(\theta) \frac{Bi_i}{R_1} \Delta \phi \Delta Fo [g\theta_p^1 + (1-g)\theta_p^0] + R_s \bar{k}_s(\theta) \frac{Bi_i}{R_1} \theta_{i0} \Delta \phi \Delta Fo \\ &= \frac{R_n \bar{k}_n(\theta)}{(\partial r)_n} \Delta \phi \Delta Fo [g\theta_n^1 + (1-g)\theta_n^0] \\ &\quad - \left[\frac{R_n \bar{k}_n(\theta)}{(\partial r)_n} + R_s \bar{k}_s(\theta) \frac{Bi_i}{R_1} \right] \Delta \phi \Delta Fo [g\theta_p^1 + (1-g)\theta_p^0] \\ &\quad + R_s \bar{k}_s(\theta) \frac{Bi_i}{R_1} \theta_{i0} \Delta \phi \Delta Fo \end{aligned} \quad (4.13)$$

A primeira integral continuará:

$$\int_{Fo} \int_{R_1} \int_{\phi} \bar{C}(\theta) R \frac{\partial \theta}{\partial Fo} dR d\phi dFo = \bar{C}(\theta) \Delta V [\theta_p^1 - \theta_p^0] \quad (4.3)$$

E a integral em função de ϕ também não se modificará:

$$\begin{aligned}
\iiint_{FoR\phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\bar{k}(\theta)}{R} \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right) dR d\phi dFo &= \frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e} \frac{\Delta R \Delta Fo}{(\partial \phi)_e} [f\theta_E^1 + (1-f)\theta_E^0] \\
&+ \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w} \frac{\Delta R \Delta Fo}{(\partial \phi)_w} [f\theta_W^1 + (1-f)\theta_W^0] \\
&- \left[\frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e(\partial \phi)_e} + \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w(\partial \phi)_w} \right] \Delta R \Delta Fo [f\theta_P^1 + (1-f)\theta_P^0]
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Agrupando as integrais temos:

$$\begin{aligned}
\bar{C}(\theta) \Delta V [\theta_P^1 - \theta_P^0] &= \frac{R_n \bar{k}_n(\theta)}{(\partial r)_n} \Delta \phi \Delta Fo [g\theta_N^1 + (1-g)\theta_N^0] \\
&- \left[\frac{R_n \bar{k}_n(\theta)}{(\partial r)_n} + R_s \bar{k}_s(\theta) \frac{Bi_i}{R_1} \right] \Delta \phi \Delta Fo [g\theta_P^1 + (1-g)\theta_P^0] + R_s \bar{k}_s(\theta) \frac{Bi_i}{R_1} \theta_{i0} \Delta \phi \Delta Fo \\
&+ \frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e} \frac{\Delta R \Delta Fo}{(\partial \phi)_e} [f\theta_E^1 + (1-f)\theta_E^0] + \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w} \frac{\Delta R \Delta Fo}{(\partial \phi)_w} [f\theta_W^1 + (1-f)\theta_W^0] \\
&- \left[\frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e(\partial \phi)_e} + \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w(\partial \phi)_w} \right] \Delta R \Delta Fo [f\theta_P^1 + (1-f)\theta_P^0]
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Rearranjando,

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{C}(\theta) \Delta V}{\Delta Fo} [\theta_P^1 - \theta_P^0] &= \frac{R_n \bar{k}_n(\theta)}{(\partial r)_n} \Delta \phi [g\theta_N^1 + (1-g)\theta_N^0] \\
&- \left[\frac{R_n \bar{k}_n(\theta)}{(\partial r)_n} + R_s \bar{k}_s(\theta) \frac{Bi_i}{R_1} \right] \Delta \phi [g\theta_P^1 + (1-g)\theta_P^0] + R_s \bar{k}_s(\theta) \frac{Bi_i}{R_1} \theta_{i0} \Delta \phi \\
&+ \frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e} \frac{\Delta R}{(\partial \phi)_e} [f\theta_E^1 + (1-f)\theta_E^0] + \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w} \frac{\Delta R}{(\partial \phi)_w} [f\theta_W^1 + (1-f)\theta_W^0] \\
&- \left[\frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e(\partial \phi)_e} + \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w(\partial \phi)_w} \right] \Delta R [f\theta_P^1 + (1-f)\theta_P^0]
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Agrupando os termos:

$$\begin{aligned}
& \theta_P^1 \left[\frac{\bar{C}(\theta) \Delta V}{\Delta F_o} + \left[\frac{R_n \bar{k}_n(\theta)}{(\partial r)_n} + R_s \bar{k}_s(\theta) \frac{Bi_i}{R_1} \right] g \Delta \phi + \left[\frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e (\partial \phi)_e} + \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w (\partial \phi)_w} \right] f \Delta R \right] \\
& - \frac{R_n \bar{k}_n(\theta)}{(\partial r)_n} \Delta \phi g \theta_N^1 - \frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e} \frac{\Delta R}{(\partial \phi)_e} f \theta_E^1 - \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w} \frac{\Delta R}{(\partial \phi)_w} f \theta_W^1 \\
& = \theta_P^0 \left[\frac{\bar{C}(\theta) \Delta V}{\Delta F_o} - \left[\frac{R_n \bar{k}_n(\theta)}{(\partial r)_n} + R_s \bar{k}_s(\theta) \frac{Bi_i}{R_1} \right] (1-g) \Delta \phi \right. \\
& \left. - \left[\frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e (\partial \phi)_e} + \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w (\partial \phi)_w} \right] (1-f) \Delta R \right] + \frac{R_n \bar{k}_n(\theta)}{(\partial r)_n} \Delta \phi (1-g) \theta_N^1 + \frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e} \frac{\Delta R}{(\partial \phi)_e} (1-f) \theta_E^1 \\
& + \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w} \frac{\Delta R}{(\partial \phi)_w} (1-f) \theta_W^1 + R_s \bar{k}_s(\theta) \frac{Bi_i}{R_1} \theta_{i0} \Delta \phi
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Definindo

$$a_s^* = R_s \bar{k}_s(\theta) \frac{Bi_i}{R_1} \Delta \phi$$

e com auxílio da variáveis definidas anteriormente, a equação pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
& (a_{p0} + a_N g + a_E f + a_W f + a_s^* g) \theta_P^1 - a_N g \theta_N^1 - a_E f \theta_E^1 - a_W f \theta_W^1 \\
& = \theta_P^0 \left[a_{p0} - [a_N + a_s^*] (1-g) - [a_E + a_W] (1-f) \right] + a_N (1-g) \theta_N^0 \\
& + a_E (1-f) \theta_E^0 + a_W (1-f) \theta_W^0 + a_s^* \theta_{i0}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

que será a equação discretizada quando $R = R_1$.

Escrevendo a equação (4.17) seguinte na forma:

$$\begin{aligned}
A(i, j) &= (a_{p0} + a_N g + a_E f + a_W f + a_s^* g) \theta_P^1 \\
B(i, j) &= -a_N g \theta_N^1 - a_E f \theta_E^1 \\
C(i, j) &= -a_W f \theta_W^1 \\
D(i, j) &= \theta_P^0 \left[a_{p0} - [a_N + a_s^*] (1-g) - [a_E + a_W] (1-f) \right] + a_N (1-g) \theta_N^0 \\
&+ a_E (1-f) \theta_E^0 + a_W (1-f) \theta_W^0 + a_s^* \theta_{i0}
\end{aligned} \tag{4.18}$$

4.2.3 Volume de controle norte (VCN)

O volume de controle norte é mostrado em detalhe na figura (4.4), que tem influência da condição de contorno da parede do duto externo representada pela equação (3.35):

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial R} \right|_{R=R_2} = -\frac{Bi_e}{R_2} [\theta - \theta_{e0}] \quad (3.35)$$

que quando discretizada resulta em:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial R} \right|_{R=R_2} = \frac{\theta_N - \theta_P}{(\partial r)_n} = -\frac{Bi_e}{R_2} [\theta_P - \theta_{e0}] \quad (4.19)$$

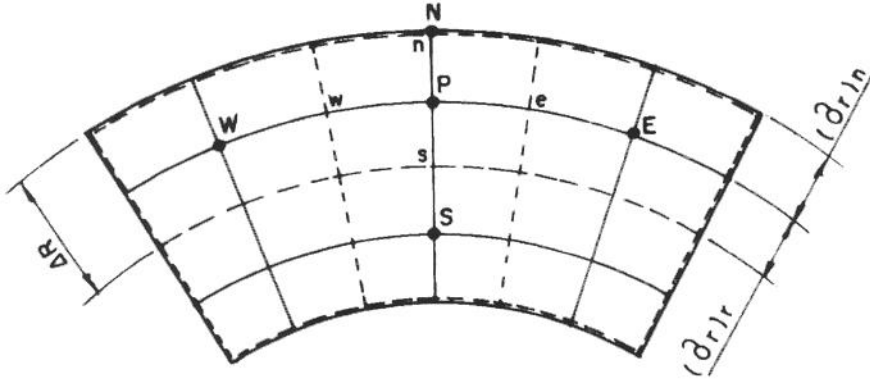


Figura 4.4: Representação do volume de controle norte

Na integração neste volume de controle, temos uma modificação da equação da conservação (4.2), principalmente no termo variável com R . Assim a integral que varia com o R sofrerá uma nova discretização:

$$\begin{aligned} \iiint_{F_o R \phi} \frac{\partial}{\partial R} \left(\bar{R} \bar{k}(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial R} \right) dR d\phi dF_o &= \int_{F_o}^{F_o + \Delta F_o} \int_s^n \frac{\partial}{\partial R} \left(\bar{R} \bar{k}(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial R} \right) \Delta \phi dR dF_o = \\ &= \int_{F_o}^{F_o + \Delta F_o} \left(R_n \bar{k}_n(\theta) \left. \frac{\partial \theta}{\partial R} \right|_n - R_s \bar{k}_s(\theta) \left. \frac{\partial \theta}{\partial R} \right|_s \right) \Delta \phi dF_o \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{Fo}^{Fo+\Delta Fo} \left(R_n \bar{k}_n(\theta) \left(-\frac{Bi_e}{R_2} [\theta_p - \theta_{e0}] \right) - R_s \bar{k}_s(\theta) \frac{(\theta_p - \theta_s)}{(\partial r)_s} \right) \Delta \phi dFo \\
&= - \left[\frac{R_n \bar{k}_n(\theta) Bi_e}{R_2} + \frac{R_s \bar{k}_s(\theta)}{(\partial r)_s} \right] \Delta \phi \Delta Fo [g\theta_p^1 + (1-g)\theta_p^0] \\
&\quad + \frac{R_s \bar{k}_s(\theta) \Delta \phi \Delta Fo}{(\partial r)_s} [g\theta_s^1 + (1-g)\theta_s^0] + R_n \bar{k}_n(\theta) \frac{Bi_e}{R_2} \theta_{e0} \Delta \phi \Delta Fo
\end{aligned} \tag{4.20}$$

A primeira integral continuará:

$$\iiint_{Fo R \phi} \bar{C}(\theta) R \frac{\partial \theta}{\partial Fo} dR d\phi dFo = \bar{C}(\theta) \Delta V [\theta_p^1 - \theta_p^0] \tag{4.3}$$

E a integral em função de ϕ também não se altera:

$$\begin{aligned}
&\iiint_{Fo R \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\bar{k}(\theta)}{R} \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right) dR d\phi dFo = \frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e} \frac{\Delta R \Delta Fo}{(\partial \phi)_e} [f\theta_E^1 + (1-f)\theta_E^0] \\
&\quad + \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w} \frac{\Delta R \Delta Fo}{(\partial \phi)_w} [f\theta_W^1 + (1-f)\theta_W^0] \\
&\quad - \left[\frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e (\partial \phi)_e} + \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w (\partial \phi)_w} \right] \Delta R \Delta Fo [f\theta_p^1 + (1-f)\theta_p^0]
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Agrupando as integrais temos:

$$\begin{aligned}
&\bar{C}(\theta) \Delta V [\theta_p^1 - \theta_p^0] = + \frac{R_s \bar{k}_s(\theta) \Delta \phi \Delta Fo}{(\partial r)_s} [g\theta_s^1 + (1-g)\theta_s^0] \\
&\quad - \left[\frac{R_n \bar{k}_n(\theta) Bi_e}{R_2} + \frac{R_s \bar{k}_s(\theta)}{(\partial r)_s} \right] \Delta \phi \Delta Fo [g\theta_p^1 + (1-g)\theta_p^0] + R_n \bar{k}_n(\theta) \frac{Bi_e}{R_2} \theta_{e0} \Delta \phi \Delta Fo \\
&\quad + \frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e} \frac{\Delta R \Delta Fo}{(\partial \phi)_e} [f\theta_E^1 + (1-f)\theta_E^0] + \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w} \frac{\Delta R \Delta Fo}{(\partial \phi)_w} [f\theta_W^1 + (1-f)\theta_W^0] \\
&\quad - \left[\frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e (\partial \phi)_e} + \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w (\partial \phi)_w} \right] \Delta R \Delta Fo [f\theta_p^1 + (1-f)\theta_p^0]
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Rearranjando,

$$\begin{aligned}
& \frac{\bar{C}(\theta)\Delta V}{\Delta Fo} [\theta_p^1 - \theta_p^0] = + \frac{R_s \bar{k}_s(\theta)\Delta\phi}{(\partial r)_s} [g\theta_s^1 + (1-g)\theta_s^0] \\
& - \left[\frac{R_n \bar{k}_n(\theta)Bi_e}{R_2} + \frac{R_s \bar{k}_s(\theta)}{(\partial r)_s} \right] \Delta\phi [g\theta_p^1 + (1-g)\theta_p^0] + R_n \bar{k}_n(\theta) \frac{Bi_e}{R_2} \theta_{eo} \Delta\phi \\
& \frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e} \frac{\Delta R}{(\partial\phi)_e} [f\theta_E^1 + (1-f)\theta_E^0] + \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w} \frac{\Delta R}{(\partial\phi)_w} [f\theta_W^1 + (1-f)\theta_W^0] \\
& - \left[\frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e(\partial\phi)_e} + \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w(\partial\phi)_w} \right] \Delta R [f\theta_p^1 + (1-f)\theta_p^0]
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Agrupando os termos:

$$\begin{aligned}
& \theta_p^1 \left[\frac{\bar{C}(\theta)\Delta V}{\Delta Fo} + \left[\frac{R_n \bar{k}_n(\theta)Bi_e}{R_2} + \frac{R_s \bar{k}_s(\theta)}{(\partial r)_s} \right] g\Delta\phi + \left[\frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e(\partial\phi)_e} + \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w(\partial\phi)_w} \right] f\Delta R \right] \\
& - \frac{R_s \bar{k}_s(\theta)\Delta\phi}{(\partial r)_s} g\theta_s^1 - \frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e} \frac{\Delta R}{(\partial\phi)_e} f\theta_E^1 - \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w} \frac{\Delta R}{(\partial\phi)_w} f\theta_W^1 \\
& \theta_p^0 \left[\frac{\bar{C}(\theta)\Delta V}{\Delta Fo} - \left[\frac{R_n \bar{k}_n(\theta)Bi_e}{R_2} + \frac{R_s \bar{k}_s(\theta)}{(\partial r)_s} \right] (1-g)\Delta\phi \right. \\
& \left. - \left[\frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e(\partial\phi)_e} + \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w(\partial\phi)_w} \right] (1-f)\Delta R \right] + \frac{R_s \bar{k}_s(\theta)\Delta\phi}{(\partial r)_s} (1-g)\theta_s^0 + \frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e} \frac{\Delta R}{(\partial\phi)_e} (1-f)\theta_E^0 \\
& \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w} \frac{\Delta R}{(\partial\phi)_w} (1-f)\theta_W^0 + R_n \bar{k}_n(\theta) \frac{Bi_e}{R_2} \theta_{eo} \Delta\phi
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Definindo

$$a_N^* = R_n \bar{k}_n(\theta) \frac{Bi_e}{R_2} \Delta\phi$$

e com auxilio da variaveis definidas anteriormente temos:

$$\begin{aligned}
& (a_{p0} + a_N^*g + a_Sg + a_Ef + a_Wf)\theta_p^1 - a_Sg\theta_s^1 - a_Ef\theta_E^1 - a_Wf\theta_W^1 \\
& = \theta_p^0 [a_{p0} - [a_N^* + a_S](1-g) - [a_E + a_W](1-f)] \\
& + a_S(1-g)\theta_s^0 + a_E(1-f)\theta_E^0 + a_W(1-f)\theta_W^0 + a_N^*\theta_{eo}
\end{aligned} \tag{4.24}$$

que será a equação discretizada em $R = R_2$

Escrevendo a equação (4.24) na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 A(i, j) &= (a_{p0} + a_N g + a_E f + a_W f + a_N^* g) \theta_P^1 \\
 B(i, j) &= -a_E f \theta_E^1 \\
 C(i, j) &= -a_S g \theta_S^1 - a_W f \theta_W^1 \\
 D(i, j) &= \theta_P^0 \left[a_{p0} - [a_N^* + a_N](1-g) + [a_E + a_W](1-f) \right] + a_S(1-g) \theta_S^0 \\
 &\quad + a_E(1-f) \theta_E^0 + a_W(1-f) \theta_W^0 + a_N^* \theta_{e0}
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

4.2.4 Volume de controle oeste (VCO)

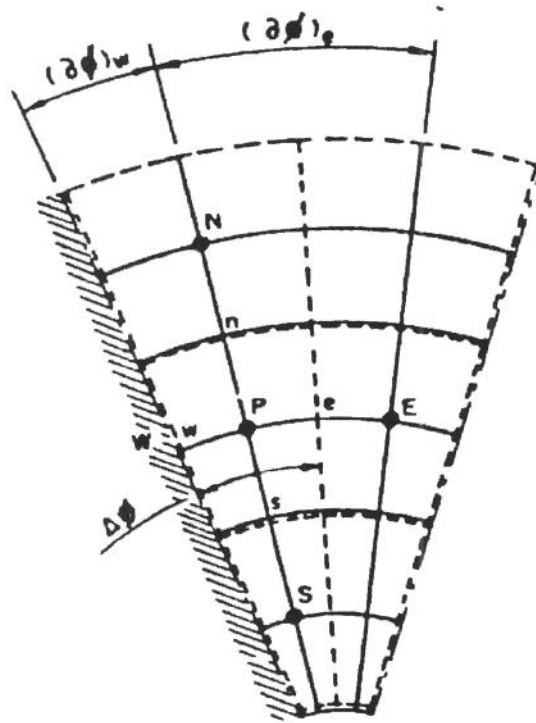


Figura 4.5: Representação do volume de controle oeste

A figura (4.5) mostra em detalhe o contorno oeste, que tem influência da condição de contorno em $\phi = 0$ dada por:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right|_{\phi=0} = 0 \tag{3.36}$$

ou

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right|_{\phi=0} = \frac{\theta_p - \theta_w}{(\partial \theta)_w} = 0 \quad (4.26)$$

Ao fazer a integração sobre este volume de controle, percebemos que somente a integral em função de ϕ sofrerá influência desta condição de contorno, assim resolvendo-a separadamente:

$$\begin{aligned} \iiint_{FoR \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\bar{k}(\theta)}{R} \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right) dR d\phi dFo &= \int_{Fo}^{Fo+\Delta Fo} \int_w^e \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\bar{k}(\theta)}{R} \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right) \Delta R d\phi dFo = \\ &= \int_{Fo}^{Fo+\Delta Fo} \left(\left. \frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e} \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right|_e - \left. \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w} \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right|_w \right) \Delta R dFo = \int_{Fo}^{Fo+\Delta Fo} \left(\frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e} \frac{(\theta_E - \theta_P)}{(\partial \phi)_e} \right) \Delta R dFo \\ &= \frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e} \frac{\Delta R \Delta Fo}{(\partial \phi)_e} [f\theta_E^1 + (1-f)\theta_E^0] - \frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e} \frac{\Delta R \Delta Fo}{(\partial \phi)_e} [f\theta_P^1 + (1-f)\theta_P^0] \end{aligned} \quad (4.27)$$

A primeira integral continuará a mesma:

$$\iiint_{FoR \phi} \bar{C}(\theta) R \frac{\partial \theta}{\partial Fo} dR d\phi dFo = \bar{C}(\theta) \Delta V [\theta_P^1 - \theta_P^0] \quad (4.3)$$

E a integral em função de R também não se modificará:

$$\begin{aligned} \iiint_{FoR \phi} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \bar{k}(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial R} \right) dR d\phi dFo &= \frac{R_n \bar{k}_n(\theta) \Delta \phi \Delta Fo}{(\partial r)_n} [g\theta_N^1 + (1-g)\theta_N^0] \\ &+ \frac{R_s \bar{k}_s(\theta) \Delta \phi \Delta Fo}{(\partial r)_s} [g\theta_s^1 + (1-g)\theta_s^0] - \left[\frac{R_n \bar{k}_n(\theta)}{(\partial r)_n} + \frac{R_s \bar{k}_s(\theta)}{(\partial r)_s} \right] \Delta \phi \Delta Fo [g\theta_P^1 + (1-g)\theta_P^0] \end{aligned} \quad (4.5)$$

Agupando as integrais temos:

$$\begin{aligned} \bar{C}(\theta) \Delta V [\theta_P^1 - \theta_P^0] &= \frac{R_n \bar{k}_n(\theta) \Delta \phi \Delta Fo}{(\partial r)_n} [g\theta_N^1 + (1-g)\theta_N^0] \\ &+ \frac{R_s \bar{k}_s(\theta) \Delta \phi \Delta Fo}{(\partial r)_s} [g\theta_s^1 + (1-g)\theta_s^0] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[\frac{R_n \bar{k}_n(\theta)}{(\partial r)_n} + \frac{R_s \bar{k}_s(\theta)}{(\partial r)_s} \right] \Delta \phi \Delta Fo [g\theta_p^1 + (1-g)\theta_p^0] \\
& \frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e} \frac{\Delta R \Delta Fo}{(\partial \phi)_e} [f\theta_E^1 + (1-f)\theta_E^0] - \frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e} \frac{\Delta R \Delta Fo}{(\partial \phi)_e} [f\theta_p^1 + (1-f)\theta_p^0]
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Rearranjando,

$$\begin{aligned}
& \frac{\bar{C}(\theta) \Delta V}{\Delta Fo} [\theta_p^1 - \theta_p^0] = \frac{R_n \bar{k}_n(\theta) \Delta \phi}{(\partial r)_n} [g\theta_N^1 + (1-g)\theta_N^0] + \frac{R_s \bar{k}_s(\theta) \Delta \phi}{(\partial r)_s} [g\theta_s^1 + (1-g)\theta_s^0] \\
& - \left[\frac{R_n \bar{k}_n(\theta)}{(\partial r)_n} + \frac{R_s \bar{k}_s(\theta)}{(\partial r)_s} \right] \Delta \phi [g\theta_p^1 + (1-g)\theta_p^0] \\
& \frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e} \frac{\Delta R}{(\partial \phi)_e} [f\theta_E^1 + (1-f)\theta_E^0] - \frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e} \frac{\Delta R}{(\partial \phi)_e} [f\theta_p^1 + (1-f)\theta_p^0]
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Agrupando os termos semelhantes temos;

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{\bar{C}(\theta) \Delta V}{\Delta Fo} + \left[\frac{R_n \bar{k}_n(\theta)}{(\partial r)_n} + \frac{R_s \bar{k}_s(\theta)}{(\partial r)_s} \right] g \Delta \phi + \frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e} \frac{\Delta R}{(\partial \phi)_e} f \right] \theta_p^1 \\
& - \frac{R_n \bar{k}_n(\theta) \Delta \phi}{(\partial r)_n} g \theta_N^1 - \frac{R_s \bar{k}_s(\theta) \Delta \phi}{(\partial r)_s} g \theta_s^1 - \frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e} \frac{\Delta R}{(\partial \phi)_e} f \theta_E^1 \\
& \theta_p^0 \left[\frac{\bar{C}(\theta) \Delta V}{\Delta Fo} - \left[\frac{R_n \bar{k}_n(\theta)}{(\partial r)_n} + \frac{R_s \bar{k}_s(\theta)}{(\partial r)_s} \right] (1-g) \Delta \phi - \frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e} \frac{\Delta R}{(\partial \phi)_e} (1-f) \right] \\
& + \frac{R_n \bar{k}_n(\theta) \Delta \phi}{(\partial r)_n} (1-g) \theta_N^0 + \frac{R_s \bar{k}_s(\theta) \Delta \phi}{(\partial r)_s} (1-g) \theta_s^0 + \frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e} \frac{\Delta R}{(\partial \phi)_e} (1-f) \theta_E^0
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Substituindo as variáveis definidas em temos:

$$\begin{aligned}
& (a_{p0} + a_N g + a_s g + a_E f) \theta_p^1 - a_s g \theta_s^1 - a_N g \theta_N^1 - a_E f \theta_E^1 \\
& = \theta_p^0 [a_{p0} - [a_N + a_s](1-g) - a_E(1-f)] + a_s(1-g) \theta_s^0 \\
& + a_N(1-g) \theta_N^0 + a_E(1-f) \theta_E^0
\end{aligned} \tag{4.31}$$

que será a equação discretizada em $\phi=0$.

Rescrevendo a equação (4.31) na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 A(i, j) &= (a_{p0} + a_N g + a_s g + a_E f) \theta_P^1 \\
 B(i, j) &= -a_N g \theta_N^1 - a_E f \theta_E^1 \\
 C(i, j) &= -a_s g \theta_s^1 \\
 D(i, j) &= \theta_P^0 [a_{p0} - [a_N + a_s](1 - g) - a_E(1 - f)] + a_s(1 - g) \theta_s^0 \\
 &\quad + a_N(1 - g) \theta_N^0 + a_E(1 - f) \theta_E^0
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

4.2.5 Volume de controle leste (VCL)

Na figura (4.6) mostra em detalhe o contorno leste, que tem influência da condição de contorno em $\phi = \phi_m$ dada por:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right|_{\phi = \phi_m} = 0 \tag{3.37}$$

ou

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right|_{\phi = \phi_m} \frac{\theta_E - \theta_P}{(\partial \theta)_P} = 0 \tag{4.33}$$

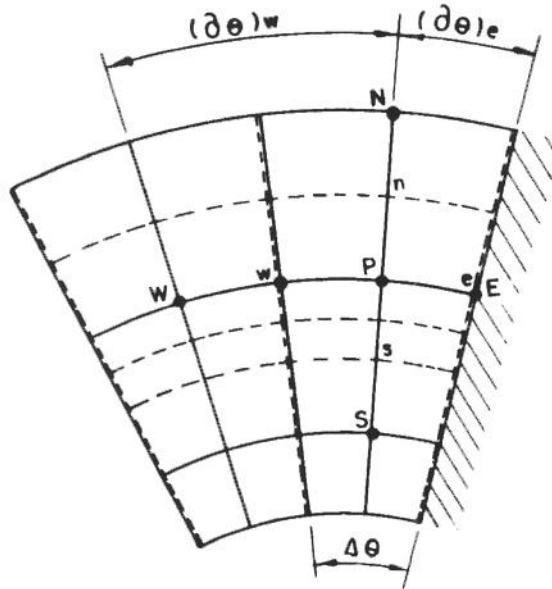


Figura 4.6: Representação do volume de controle leste

Na integração sobre este volume de controle, percebemos que somente a integral em função de ϕ sofrerá influência desta condição de contorno, assim resolvendo-a separadamente:

$$\begin{aligned}
 \int_{Fo} \int_R \int_{\phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\bar{k}(\theta)}{R} \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right) dR d\phi dFo &= \int_{Fo} \int_w^e \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\bar{k}(\theta)}{R} \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right) \Delta R d\phi dFo = \\
 &= \int_{Fo} \left(\frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e} \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \Big|_e - \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w} \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \Big|_w \right) \Delta R dFo = \int_{Fo} \left(- \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w} \frac{(\theta_p - \theta_w)}{(\partial \phi)_w} \right) \Delta R dFo \quad (4.34) \\
 &= \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w} \frac{\Delta R \Delta Fo}{(\partial \phi)_w} [f\theta_w^1 + (1-f)\theta_w^0] - \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w} \frac{\Delta R \Delta Fo}{(\partial \phi)_w} [f\theta_p^1 + (1-f)\theta_p^0]
 \end{aligned}$$

A primeira integral continuará a mesma:

$$\int_{Fo} \int_R \int_{\phi} \bar{C}(\theta) R \frac{\partial \theta}{\partial Fo} dR d\phi dFo = \bar{C}(\theta) \Delta V [\theta_p^1 - \theta_p^0] \quad (4.3)$$

E a integral em função de R também não se modificará:

$$\begin{aligned}
 \int_{Fo} \int_R \int_{\phi} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \bar{k}(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial R} \right) dR d\phi dFo &= \frac{R_n \bar{k}_n(\theta) \Delta \phi \Delta Fo}{(\partial r)_n} [g\theta_n^1 + (1-g)\theta_n^0] \\
 &+ \frac{R_s \bar{k}_s(\theta) \Delta \phi \Delta Fo}{(\partial r)_s} [g\theta_s^1 + (1-g)\theta_s^0] - \left[\frac{R_n \bar{k}_n(\theta)}{(\partial r)_n} + \frac{R_s \bar{k}_s(\theta)}{(\partial r)_s} \right] \Delta \phi \Delta Fo [g\theta_p^1 + (1-g)\theta_p^0] \quad (4.5)
 \end{aligned}$$

Agrupando as integrais temos:

$$\begin{aligned}
 \bar{C}(\theta) \Delta V [\theta_p^1 - \theta_p^0] &= \frac{R_n \bar{k}_n(\theta) \Delta \phi \Delta Fo}{(\partial r)_n} [g\theta_n^1 + (1-g)\theta_n^0] \\
 &+ \frac{R_s \bar{k}_s(\theta) \Delta \phi \Delta Fo}{(\partial r)_s} [g\theta_s^1 + (1-g)\theta_s^0] \\
 &- \left[\frac{R_n \bar{k}_n(\theta)}{(\partial r)_n} + \frac{R_s \bar{k}_s(\theta)}{(\partial r)_s} \right] \Delta \phi \Delta Fo [g\theta_p^1 + (1-g)\theta_p^0] \\
 &\frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w} \frac{\Delta R \Delta Fo}{(\partial \phi)_w} [f\theta_w^1 + (1-f)\theta_w^0] - \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w} \frac{\Delta R \Delta Fo}{(\partial \phi)_w} [f\theta_p^1 + (1-f)\theta_p^0] \quad (4.35)
 \end{aligned}$$

Rearranjando,

$$\begin{aligned}
 \frac{\bar{C}(\theta)\Delta V}{\Delta Fo} [\theta_p^1 - \theta_p^0] &= \frac{R_n \bar{k}_n(\theta)\Delta\phi}{(\partial r)_n} [g\theta_n^1 + (1-g)\theta_n^0] + \frac{R_s \bar{k}_s(\theta)\Delta\phi}{(\partial r)_s} [g\theta_s^1 + (1-g)\theta_s^0] \\
 &- \left[\frac{R_n \bar{k}_n(\theta)}{(\partial r)_n} + \frac{R_s \bar{k}_s(\theta)}{(\partial r)_s} \right] \Delta\phi [g\theta_p^1 + (1-g)\theta_p^0] \\
 &+ \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w} \frac{\Delta R}{(\partial\phi)_w} [f\theta_w^1 + (1-f)\theta_w^0] - \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w} \frac{\Delta R}{(\partial\phi)_w} [f\theta_p^1 + (1-f)\theta_p^0]
 \end{aligned} \quad (4.36)$$

Agrupando os termos semelhantes temos;

$$\begin{aligned}
 &\left[\frac{\bar{C}(\theta)\Delta V}{\Delta Fo} + \left[\frac{R_n \bar{k}_n(\theta)}{(\partial r)_n} + \frac{R_s \bar{k}_s(\theta)}{(\partial r)_s} \right] g\Delta\phi + \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w} \frac{\Delta R}{(\partial\phi)_w} f \right] \theta_p^1 \\
 &- \frac{R_n \bar{k}_n(\theta)\Delta\phi}{(\partial r)_n} g\theta_n^1 - \frac{R_s \bar{k}_s(\theta)\Delta\phi}{(\partial r)_s} g\theta_s^1 - \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w} \frac{\Delta R}{(\partial\phi)_w} f\theta_w^1 \\
 &\theta_p^0 \left[\frac{\bar{C}(\theta)\Delta V}{\Delta Fo} - \left[\frac{R_n \bar{k}_n(\theta)}{(\partial r)_n} + \frac{R_s \bar{k}_s(\theta)}{(\partial r)_s} \right] (1-g)\Delta\phi - \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w} \frac{\Delta R}{(\partial\phi)_w} (1-f) \right] \\
 &+ \frac{R_n \bar{k}_n(\theta)\Delta\phi}{(\partial r)_n} (1-g)\theta_n^0 + \frac{R_s \bar{k}_s(\theta)\Delta\phi}{(\partial r)_s} (1-g)\theta_s^0 + \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w} \frac{\Delta R}{(\partial\phi)_w} (1-f)\theta_w^0
 \end{aligned} \quad (4.37)$$

Substituindo as variáveis definidas em temos:

$$\begin{aligned}
 &(a_{p0} + a_N g + a_s g + a_w f)\theta_p^1 - a_s g\theta_s^1 - a_N g\theta_n^1 - a_w f\theta_w^1 \\
 &= \theta_p^0 [a_{p0} - [a_N + a_s](1-g) - a_w(1-f)] + a_s(1-g)\theta_s^0 \\
 &+ a_N(1-g)\theta_n^0 + a_w(1-f)\theta_w^0
 \end{aligned} \quad (4.38)$$

que será a equação discretizada em $\phi = \phi_m$.

Rescrevendo a equação (4.38) na seguinte forma:

$$A(i, j) = (a_{p0} + a_N g + a_s g + a_w f)\theta_p^1$$

$$B(i, j) = -a_N g\theta_n^1$$

$$C(i, j) = -a_s g\theta_s^1 - a_w f\theta_w^1$$

$$D(i, j) = \theta_P^0 [a_{P0} - [a_N + a_s](1-g) - a_E(1-f)] + a_s(1-g)\theta_s^0 + a_N(1-g)\theta_N^0 + a_E(1-f)\theta_E^0 \quad (4.39)$$

Nos cantos do volume de controle temos duas condições de contorno atuando simultaneamente e são tratadas separadamente:

4.2.6 Volume de controle norte e oeste (VCNO)

Conforme a figura (4.7) temos a atuação de duas condições de contorno sobre este volume de controle que alteraram a equação da conservação descrita em (4.2).

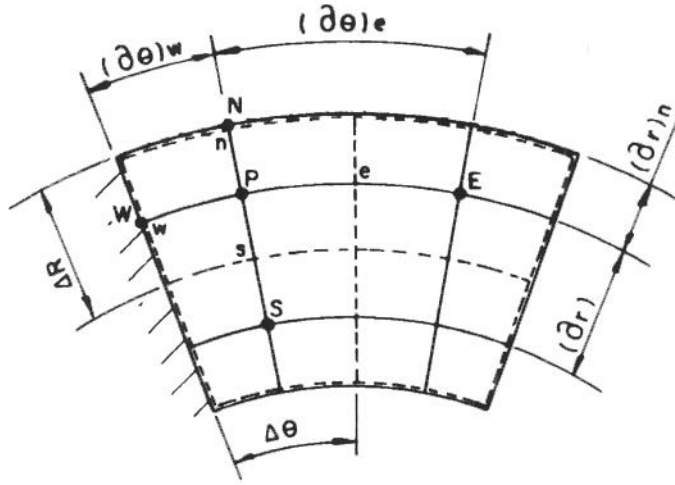


Figura 4.7: Representação do volume de controle norte e oeste

A condição em $R = R_2$, devido troca de calor com o fluido externo representada pela equação (3.35) é:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial R} \right|_{R=R_2} = -\frac{Bi_e}{R_2} [\theta - \theta_{e0}] \quad (3.35)$$

que podem ser discretizada como:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial R} \right|_{R=R_2} = \left. \frac{\partial \theta}{\partial R} \right|_n = -\frac{Bi_e}{R_2} [\theta_P - \theta_{e0}] \quad (4.40)$$

E para a condição em $\phi = 0$, pela simetria do problema, representada pela equação (3.36):

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right|_{\phi=0} = 0 \quad (3.36)$$

que podem ser discretizada como:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right|_{\phi=0} = \left. \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right|_w = 0 \quad (4.41)$$

Assim a integral função de R da equação (4.2) se modificará:

$$\begin{aligned} \iiint_{FoR\phi} \frac{\partial}{\partial R} \left(\bar{R}k(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial R} \right) dR d\phi dFo &= \int_{Fo}^{Fo+\Delta Fo} \int_s^n \frac{\partial}{\partial R} \left(\bar{R}k(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial R} \right) \Delta \phi dR dFo = \\ &= \int_{Fo}^{Fo+\Delta Fo} \left(R_n \bar{k}_n(\theta) \left. \frac{\partial \theta}{\partial R} \right|_n - R_s \bar{k}_s(\theta) \left. \frac{\partial \theta}{\partial R} \right|_s \right) \Delta \phi dFo \\ &= \int_{Fo}^{Fo+\Delta Fo} \left(R_n \bar{k}_n(\theta) \left(-\frac{Bi_e}{R_2} [\theta_p - \theta_{e0}] \right) - R_s \bar{k}_s(\theta) \frac{(\theta_p - \theta_s)}{(\partial r)_s} \right) \Delta \phi dFo \\ &= - \left[\frac{R_n \bar{k}_n(\theta) Bi_e}{R_2} + \frac{R_s \bar{k}_s(\theta)}{(\partial r)_s} \right] \Delta \phi \Delta Fo [g\theta_p^1 + (1-g)\theta_p^0] \\ &\quad + \frac{R_s \bar{k}_s(\theta) \Delta \phi \Delta Fo}{(\partial r)_s} [g\theta_s^1 + (1-g)\theta_s^0] + R_n \bar{k}_n(\theta) \frac{Bi_e}{R_2} \theta_{e0} \Delta \phi \Delta Fo \end{aligned} \quad (4.42)$$

E a integral em função de ϕ também sofrerá modificações:

$$\begin{aligned} \iiint_{FoR\phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\bar{k}(\theta)}{R} \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right) dR d\phi dFo &= \int_{Fo}^{Fo+\Delta Fo} \int_w^e \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\bar{k}(\theta)}{R} \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right) \Delta R d\phi dFo = \\ &= \int_{Fo}^{Fo+\Delta Fo} \left(\frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e} \left. \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right|_e - \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w} \left. \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right|_w \right) \Delta R dFo = \int_{Fo}^{Fo+\Delta Fo} \left(\frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e} \frac{(\theta_e - \theta_p)}{(\partial \phi)_e} \right) \Delta R dFo \\ &= \frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e} \frac{\Delta R \Delta Fo}{(\partial \phi)_e} [f\theta_e^1 + (1-f)\theta_e^0] - \frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e} \frac{\Delta R \Delta Fo}{(\partial \phi)_e} [f\theta_p^1 + (1-f)\theta_p^0] \end{aligned} \quad (4.43)$$

Mas a primeira integral não se modificará:

$$\iiint_{FoR\phi} \bar{C}(\theta) R \frac{\partial \theta}{\partial Fo} dR d\phi dFo = \bar{C}(\theta) \Delta V [\theta_p^1 - \theta_p^0] \quad (4.3)$$

Agrupando as integrais temos:

$$\begin{aligned}
 \bar{C}(\theta)\Delta V[\theta_p^1 - \theta_p^0] = & - \left[\frac{R_n \bar{k}_n(\theta) Bi_e}{R_2} + \frac{R_s \bar{k}_s(\theta)}{(\partial r)_s} \right] \Delta \phi \Delta Fo [g\theta_p^1 + (1-g)\theta_p^0] \\
 & + \frac{R_s \bar{k}_s(\theta) \Delta \phi \Delta Fo}{(\partial r)_s} [g\theta_s^1 + (1-g)\theta_s^0] + R_n \bar{k}_n(\theta) \frac{Bi_e}{R_2} \theta_{eo} \Delta \phi \Delta Fo \\
 & + \frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e} \frac{\Delta R \Delta Fo}{(\partial \phi)_e} [f\theta_E^1 + (1-f)\theta_E^0] - \frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e} \frac{\Delta R \Delta Fo}{(\partial \phi)_e} [f\theta_p^1 + (1-f)\theta_p^0]
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

Rearranjando-a

$$\begin{aligned}
 \frac{\bar{C}(\theta)\Delta V}{\Delta Fo} [\theta_p^1 - \theta_p^0] = & - \left[\frac{R_n \bar{k}_n(\theta) Bi_e}{R_2} + \frac{R_s \bar{k}_s(\theta)}{(\partial r)_s} \right] \Delta \phi [g\theta_p^1 + (1-g)\theta_p^0] \\
 & + \frac{R_s \bar{k}_s(\theta) \Delta \phi}{(\partial r)_s} [g\theta_s^1 + (1-g)\theta_s^0] + R_n \bar{k}_n(\theta) \frac{Bi_e}{R_2} \theta_{eo} \Delta \phi \\
 & + \frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e} \frac{\Delta R}{(\partial \phi)_e} [f\theta_E^1 + (1-f)\theta_E^0] - \frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e} \frac{\Delta R}{(\partial \phi)_e} [f\theta_p^1 + (1-f)\theta_p^0]
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

Agrupando os termos semelhantes temos:

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{\bar{C}(\theta)\Delta V}{\Delta Fo} + \left[\frac{R_n \bar{k}_n(\theta) Bi_e}{R_2} + \frac{R_s \bar{k}_s(\theta)}{(\partial r)_s} \right] g \Delta \phi + \frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e} \frac{\Delta R}{(\partial \phi)_e} f \right] \theta_p^1 \\
 & - \frac{R_s \bar{k}_s(\theta) \Delta \phi}{(\partial r)_s} g \theta_s^1 - \frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e} \frac{\Delta R}{(\partial \phi)_e} f \theta_E^1 \\
 & \theta_p^0 \left[\frac{\bar{C}(\theta)\Delta V}{\Delta Fo} - \left[\frac{R_n \bar{k}_n(\theta) Bi_e}{R_2} + \frac{R_s \bar{k}_s(\theta)}{(\partial r)_s} \right] (1-g) \Delta \phi - \frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e} \frac{\Delta R}{(\partial \phi)_e} (1-f) \right] \\
 & + \frac{R_s \bar{k}_s(\theta) \Delta \phi}{(\partial r)_s} (1-g) \theta_s^0 + \frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e} \frac{\Delta R}{(\partial \phi)_e} (1-f) \theta_E^0 + R_n \bar{k}_n(\theta) \frac{Bi_e}{R_2} \Delta \phi \theta_{eo}
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

Substituindo as variáveis definidas anteriormente temos:

$$(a_{p0} + a_n g + a_s g + a_e f) \theta_p^1 - a_s g \theta_s^1 - a_e f \theta_E^1 =$$

$$\theta_P^0 \left[a_{P0} - [a_N^* + a_s](1-g) - a_E(1-f) \right] + a_s(1-g)\theta_s^0 + a_E(1-f)\theta_E^0 + a_N^*\theta_{e0} \quad (4.48)$$

que será a equação particular para este volume de controle.

Rescrevendo a equação (4.48) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} A(i, j) &= (a_{P0} + a_N^*g + a_sg + a_Ef)\theta_P^1 \\ B(i, j) &= -a_Ef\theta_E^1 \\ C(i, j) &= -a_sg\theta_s^1 \\ D(i, j) &= \theta_P^0 \left[a_{P0} - [a_N^* + a_s](1-g) - a_E(1-f) \right] + a_s(1-g)\theta_s^0 \\ &\quad + a_E(1-f)\theta_E^0 + a_N^*\theta_{e0} \end{aligned} \quad (4.49)$$

4.2.7 Volume de controle norte e leste (VCNL)

Observando a figura (4.8) temos que neste volume de controle há a influência de duas condições de contorno portanto a equação de conservação será afetada duplamente, modificando a integral em função de R e em função de ϕ .

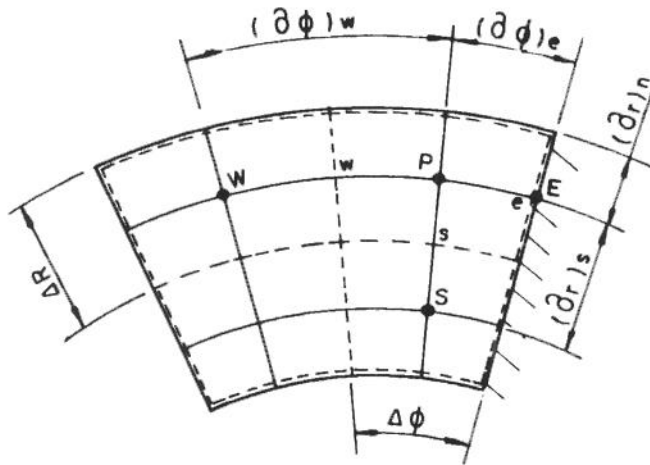


Figura 4.8: Representação do volume de controle norte e leste

No contorno $R = R_2$ temos a condição de contorno de troca de calor com o fluido externo é dada pela equação (3.35)

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial R} \right|_{R=R_2} = -\frac{Bi_e}{R_2} [\theta - \theta_{e0}] \quad (3.35)$$

que podem ser discretizada como:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial R} \right|_{R=R_2} = \left. \frac{\partial \theta}{\partial R} \right|_n = -\frac{Bi_e}{R_2} [\theta_p - \theta_{e0}] \quad (4.50)$$

e em relação ao contorno em $\phi = \phi_m$:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right|_{\phi=\phi_m} = 0 \quad (3.37)$$

que podem ser discretizada como:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right|_{\phi=\phi_m} = \frac{\theta_E - \theta_p}{(\partial \theta)_p} = 0 \quad (4.51)$$

Assim a integral função de R da equação (4.2) se modificará:

$$\begin{aligned} \iiint_{FoR\phi} \frac{\partial}{\partial R} \left(\bar{R} \bar{k}(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial R} \right) dR d\phi dFo &= \int_{Fo}^{Fo+\Delta Fo} \int_s^n \frac{\partial}{\partial R} \left(\bar{R} \bar{k}(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial R} \right) \Delta \phi dR dFo = \\ &= \int_{Fo}^{Fo+\Delta Fo} \left(R_n \bar{k}_n(\theta) \left. \frac{\partial \theta}{\partial R} \right|_n - R_s \bar{k}_s(\theta) \left. \frac{\partial \theta}{\partial R} \right|_s \right) \Delta \phi dFo \\ &= \int_{Fo}^{Fo+\Delta Fo} \left(R_n \bar{k}_n(\theta) \left(-\frac{Bi_e}{R_2} [\theta_p - \theta_{e0}] \right) - R_s \bar{k}_s(\theta) \frac{(\theta_p - \theta_s)}{(\partial r)_s} \right) \Delta \phi dFo \\ &= - \left[\frac{R_n \bar{k}_n(\theta) Bi_e}{R_2} + \frac{R_s \bar{k}_s(\theta)}{(\partial r)_s} \right] \Delta \phi \Delta Fo [g\theta_p^1 + (1-g)\theta_p^0] \\ &+ \frac{R_s \bar{k}_s(\theta) \Delta \phi \Delta Fo}{(\partial r)_s} [g\theta_s^1 + (1-g)\theta_s^0] + R_n \bar{k}_n(\theta) \frac{Bi_e}{R_2} \theta_{e0} \Delta \phi \Delta Fo \end{aligned} \quad (4.52)$$

E a integral em função de ϕ sofrerá influência desta condição de contorno:

$$\iiint_{FoR\phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\bar{k}(\theta)}{R} \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right) dR d\phi dFo = \int_{Fo}^{Fo+\Delta Fo} \int_w^e \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\bar{k}(\theta)}{R} \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right) \Delta R d\phi dFo =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{F_o}^{F_o+\Delta F_o} \left(\left. \frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e} \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right|_e - \left. \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w} \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right|_w \right) \Delta R dF_o = \int_{F_o}^{F_o+\Delta F_o} \left(- \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w} \frac{(\theta_p - \theta_w)}{(\partial \phi)_w} \right) \Delta R dF_o \\
&= \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w} \frac{\Delta R \Delta F_o}{(\partial \phi)_w} [f\theta_w^1 + (1-f)\theta_w^0] - \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w} \frac{\Delta R \Delta F_o}{(\partial \phi)_w} [f\theta_p^1 + (1-f)\theta_p^0]
\end{aligned} \tag{4.53}$$

E a primeira integral não sofre modificação:

$$\int_{\Gamma} \int_R \int_{\phi} \bar{C}(\theta) R \frac{\partial \theta}{\partial \Gamma} dR d\phi d\Gamma = \bar{C}(\theta) \Delta V [\theta_p^1 - \theta_p^0] \tag{4.3}$$

Agrupando as integrais temos:

$$\begin{aligned}
\bar{C}(\theta) \Delta V [\theta_p^1 - \theta_p^0] &= - \left[\frac{R_n \bar{k}_n(\theta) Bi_e}{R_2} + \frac{R_s \bar{k}_s(\theta)}{(\partial r)_s} \right] \Delta \phi \Delta F_o [g\theta_p^1 + (1-g)\theta_p^0] \\
&+ \frac{R_s \bar{k}_s(\theta) \Delta \phi \Delta F_o}{(\partial r)_s} [g\theta_s^1 + (1-g)\theta_s^0] + R_n \bar{k}_n(\theta) \frac{Bi_e}{R_2} \theta_{e0} \Delta \phi \Delta F_o \\
&+ \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w} \frac{\Delta R \Delta F_o}{(\partial \phi)_w} [f\theta_w^1 + (1-f)\theta_w^0] - \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w} \frac{\Delta R \Delta F_o}{(\partial \phi)_w} [f\theta_p^1 + (1-f)\theta_p^0]
\end{aligned} \tag{4.54}$$

Reranjando-a

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{C}(\theta) \Delta V}{\Delta F_o} [\theta_p^1 - \theta_p^0] &= - \left[\frac{R_n \bar{k}_n(\theta) Bi_e}{R_2} + \frac{R_s \bar{k}_s(\theta)}{(\partial r)_s} \right] \Delta \phi [g\theta_p^1 + (1-g)\theta_p^0] \\
&+ \frac{R_s \bar{k}_s(\theta) \Delta \phi}{(\partial r)_s} [g\theta_s^1 + (1-g)\theta_s^0] + R_n \bar{k}_n(\theta) \frac{Bi_e}{R_2} \theta_{e0} \Delta \phi \\
&+ \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w} \frac{\Delta R}{(\partial \phi)_w} [f\theta_w^1 + (1-f)\theta_w^0] - \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w} \frac{\Delta R}{(\partial \phi)_w} [f\theta_p^1 + (1-f)\theta_p^0]
\end{aligned} \tag{4.55}$$

Agrupando os termos semelhantes temos:

$$\left[\frac{\bar{C}(\theta) \Delta V}{\Delta F_o} + \left[\frac{R_n \bar{k}_n(\theta) Bi_e}{R_2} + \frac{R_s \bar{k}_s(\theta)}{(\partial r)_s} \right] g \Delta \phi + \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w} \frac{\Delta R}{(\partial \phi)_w} f \right] \theta_p^1 - \frac{R_s \bar{k}_s(\theta) \Delta \phi}{(\partial r)_s} g \theta_s^1$$

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w} \frac{\Delta R}{(\partial \phi)_w} f \theta_w^1 &= \theta_P^0 \left[\frac{\bar{C}(\theta) \Delta V}{\Delta F_0} - \left[\frac{R_n \bar{k}_n(\theta) Bi_e}{R_2} + \frac{R_s \bar{k}_s(\theta)}{(\partial r)_s} \right] (1-g) \Delta \phi \right. \\
&\quad \left. - \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w} \frac{\Delta R}{(\partial \phi)_w} (1-f) \right] + \frac{R_s \bar{k}_s(\theta) \Delta \phi}{(\partial r)_s} (1-g) \theta_s^0 + \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w} \frac{\Delta R}{(\partial \phi)_w} (1-f) \theta_w^0 \\
&\quad + R_n \bar{k}_n(\theta) \frac{Bi_e}{R_2} \Delta \phi \theta_{e0}
\end{aligned} \tag{4.56}$$

Substituindo as variáveis definidas anteriormente temos:

$$\begin{aligned}
&(a_{p0} + a_N^* g + a_s g + a_w f) \theta_P^1 - a_s g \theta_s^1 - a_w f \theta_w^1 \\
&= \theta_P^0 \left[a_{p0} - [a_N^* + a_s] (1-g) - a_w (1-f) \right] \\
&+ a_s (1-g) \theta_s^0 + a_w (1-f) \theta_w^0 + a_N^* \theta_{e0}
\end{aligned} \tag{4.57}$$

que será a equação particular para este volume de controle.

Rescrevendo a equação (4.57) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
A(i, j) &= (a_{p0} + a_N^* g + a_s g + a_w f) \theta_P^1 \\
B(i, j) &= 0 \\
C(i, j) &= -a_s g \theta_s^1 - a_w f \theta_w^1 \\
D(i, j) &= \theta_P^0 \left[a_{p0} - [a_N^* + a_s] (1-g) - a_w (1-f) \right] + a_s (1-g) \theta_s^0 \\
&\quad + a_w (1-f) \theta_w^0 + a_N^* \theta_{e0}
\end{aligned} \tag{4.58}$$

4.2.8 Volume de controle sul e leste (VCSL)

Na figura (4.9) observamos que neste volume de controle há a influência de duas condições de contorno portanto, a equação de conservação (4.2) sofrerá modificação nas integrais correspondentes a R e ϕ

Em $R = R_1$, ocorre a troca de calor entre o material de mudança de fase e o fluido interno representada pela equação (3.34):

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial R} \right|_{R=R_1} = \frac{Bi_i}{R_1} [\theta - \theta_{i0}] \tag{3.34}$$

que quando discretizada resulta em:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial R} \right|_{R=R_1} = \frac{\theta_P - \theta_S}{(\partial r)_s} = \frac{Bi_1}{R_1} (\theta_P - \theta_{i0}) \quad (4.59)$$

Em $\phi = \phi_m$, temos a condição de simetria, representada pela equação (3.37):

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right|_{\phi=\phi_m} = 0 \quad (3.37)$$

que podem ser discretizada como:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right|_{\phi=\phi_m} = \frac{\theta_E - \theta_P}{(\partial \theta)_e} = 0 \quad (4.60)$$

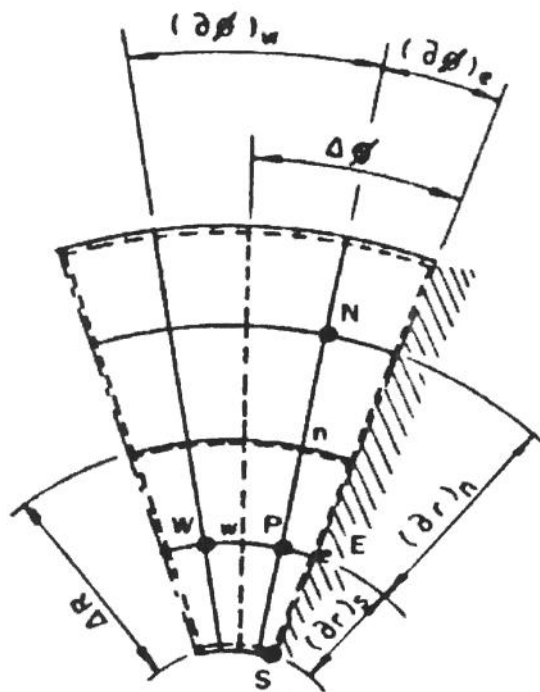


Figura 4.9: Representação do volume de controle sul e leste

Na equação da conservação descrita (4.2) a primeira integral não se modificará:

$$\iiint_{\Gamma R \phi} \bar{C}(\theta) R \frac{\partial \theta}{\partial \Gamma} dR d\phi d\Gamma = \bar{C}(\theta) \Delta V [\theta_p^1 - \theta_p^0] \quad (4.3)$$

Já a integral em função de ϕ sofrerá influência desta condição de contorno em $\phi = \phi_m$:

$$\begin{aligned}
\iiint_{FoR\phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\bar{k}(\theta)}{R} \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right) dR d\phi dFo &= \int_{Fo}^{Fo+\Delta Fo} \int_w \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\bar{k}(\theta)}{R} \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right) \Delta R d\phi dFo = \\
&= \int_{Fo}^{Fo+\Delta Fo} \left(\frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e} \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \Big|_e - \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w} \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \Big|_w \right) \Delta R dFo = \int_{Fo}^{Fo+\Delta Fo} \left(-\frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w} \frac{(\theta_p - \theta_w)}{(\partial \phi)_w} \right) \Delta R dFo \quad (4.61) \\
&= \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w} \frac{\Delta R \Delta Fo}{(\partial \phi)_w} [f\theta_w^1 + (1-f)\theta_w^0] - \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w} \frac{\Delta R \Delta Fo}{(\partial \phi)_w} [f\theta_p^1 + (1-f)\theta_p^0]
\end{aligned}$$

A integral em função de R sofrerá influência da condição de contorno em $R = R_1$ e sofrerá uma nova discretização:

$$\begin{aligned}
\iiint_{FoR\phi} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \bar{k}(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial R} \right) dR d\phi dFo &= \\
\int_{Fo}^{Fo+\Delta Fo} \left(R_n \bar{k}_n(\theta) \frac{(\theta_N - \theta_p)}{(\partial r)_n} - R_s \bar{k}_s(\theta) \frac{Bi_i}{R_1} (\theta_p - \theta_{i0}) \right) \Delta \phi dFo & \\
= \frac{R_n \bar{k}_n(\theta)}{(\partial r)_n} \Delta \phi \Delta Fo [g\theta_N^1 + (1-g)\theta_N^0] & \quad (4.62) \\
- \left[\frac{R_n \bar{k}_n(\theta)}{(\partial r)_n} + R_s \bar{k}_s(\theta) \frac{Bi_i}{R_1} \right] \Delta \phi \Delta Fo [g\theta_p^1 + (1-g)\theta_p^0] & \\
+ R_s \bar{k}_s(\theta) \frac{Bi_i}{R_1} \theta_{i0} \Delta \phi \Delta Fo &
\end{aligned}$$

Agrupando as integrais temos:

$$\begin{aligned}
\bar{C}(\theta) \Delta V [\theta_p^1 - \theta_p^0] &= \frac{R_n \bar{k}_n(\theta)}{(\partial r)_n} \Delta \phi \Delta Fo [g\theta_N^1 + (1-g)\theta_N^0] \\
- \left[\frac{R_n \bar{k}_n(\theta)}{(\partial r)_n} + R_s \bar{k}_s(\theta) \frac{Bi_i}{R_1} \right] \Delta \phi \Delta Fo [g\theta_p^1 + (1-g)\theta_p^0] &+ R_s \bar{k}_s(\theta) \frac{Bi_i}{R_1} \theta_{i0} \Delta \phi \Delta Fo \quad (4.62) \\
+ \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w} \frac{\Delta R \Delta Fo}{(\partial \phi)_w} [f\theta_w^1 + (1-f)\theta_w^0] &- \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w} \frac{\Delta R \Delta Fo}{(\partial \phi)_w} [f\theta_p^1 + (1-f)\theta_p^0]
\end{aligned}$$

Rearranjando,

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{C}(\theta)\Delta V}{\Delta Fo} [\theta_p^1 - \theta_p^0] &= \frac{R_n \bar{k}_n(\theta)}{(\partial r)_n} \Delta \phi [g\theta_N^1 + (1-g)\theta_N^0] \\
&- \left[\frac{R_n \bar{k}_n(\theta)}{(\partial r)_n} + R_s \bar{k}_s(\theta) \frac{Bi_i}{R_1} \right] \Delta \phi [g\theta_p^1 + (1-g)\theta_p^0] + R_s \bar{k}_s(\theta) \frac{Bi_i}{R_1} \theta_{io} \Delta \phi \\
&+ \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w} \frac{\Delta R}{(\partial \phi)_w} [f\theta_w^1 + (1-f)\theta_w^0] - \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w (\partial \phi)_w} \Delta R [f\theta_p^1 + (1-f)\theta_p^0]
\end{aligned} \tag{4.64}$$

Agrupando os termos:

$$\begin{aligned}
&\theta_p^1 \left[\frac{\bar{C}(\theta)\Delta V}{\Delta Fo} + \left[\frac{R_n \bar{k}_n(\theta)}{(\partial r)_n} + R_s \bar{k}_s(\theta) \frac{Bi_i}{R_1} \right] g \Delta \phi + \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w (\partial \phi)_w} f \Delta R \right] \\
&- \frac{R_n \bar{k}_n(\theta)}{(\partial r)_n} \Delta \phi g \theta_N^1 - \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w} \frac{\Delta R}{(\partial \phi)_w} f \theta_w^1 \\
&= \theta_p^0 \left[\frac{\bar{C}(\theta)\Delta V}{\Delta Fo} - \left[\frac{R_n \bar{k}_n(\theta)}{(\partial r)_n} + R_s \bar{k}_s(\theta) \frac{Bi_i}{R_1} \right] (1-g) \Delta \phi - \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w (\partial \phi)_w} (1-f) \Delta R \right] \\
&+ \frac{R_n \bar{k}_n(\theta)}{(\partial r)_n} \Delta \phi (1-g) \theta_N^1 + \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w} \frac{\Delta R}{(\partial \phi)_w} (1-f) \theta_w^1 + R_s \bar{k}_s(\theta) \frac{Bi_i}{R_1} \theta_{io} \Delta \phi
\end{aligned} \tag{4.65}$$

Com auxilio da variaveis definidas anteriormente, a equação (4.65) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
&(a_{p0} + a_N g + a_w f + a_s^* g) \theta_p^1 - a_N g \theta_N^1 - a_w f \theta_w^1 \\
&= \theta_p^0 [a_{p0} - [a_N + a_s^*] (1-g) - a_w (1-f)] + a_N (1-g) \theta_N^0 + a_w (1-f) \theta_w^0 + a_s^* \theta_{io}
\end{aligned} \tag{4.66}$$

que será a equação discretizada quando $R = R_1$.

Escrevendo a equação (4.66) seguinte na forma:

$$\begin{aligned}
A(i, j) &= (a_{p0} + a_N g + a_w f + a_s^* g) \theta_p^1 \\
B(i, j) &= -a_N g \theta_N^1 \\
C(i, j) &= -a_w f \theta_w^1 \\
D(i, j) &= \theta_p^0 [a_{p0} - [a_N + a_s^*] (1-g) - a_w (1-f)] + a_N (1-g) \theta_N^0 \\
&\quad + a_w (1-f) \theta_w^0 + a_s^* \theta_{io}
\end{aligned} \tag{4.67}$$

4.2.9 Volume de controle sul e oeste

Observando a figura (4.10) temos um volume de controle onde há a influência de duas condições de contorno portanto a equação de conservação será afetada duplamente,

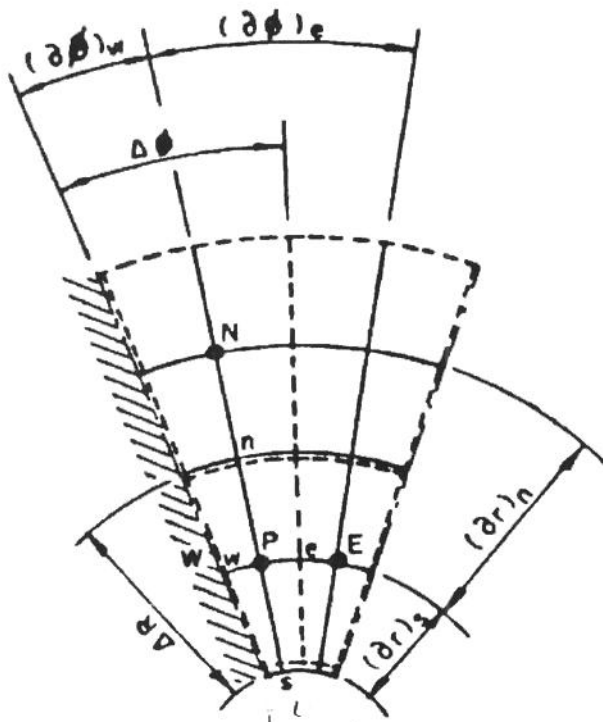


Figura 4.10: Representação do volume de controle sul e oeste.

Em $R = R_1$, ocorre a troca de calor entre o material de mudança de fase e o fluido interno representada pela equação (3.34):

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial R} \right|_{R=R_1} = \frac{Bi_1}{R_1} [\theta - \theta_{i0}] \quad (3.34)$$

que quando discretizada resulta em:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial R} \right|_{R=R_1} = \frac{\theta_p - \theta_s}{(\partial r_s)} = \frac{Bi_1}{R_1} (\theta_p - \theta_{i0}) \quad (4.68)$$

Em $\phi = 0$, temos a condição de simetria, representada pela equação (3.36):

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right|_{\phi=0} = 0 \quad (3.36)$$

que podem ser discretizada como:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right|_{\phi=0} = \left. \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right|_s = \frac{\theta_p - \theta_w}{(\partial \theta)_w} = 0 \quad (4.69)$$

Na equação da conservação descrita (4.2) a primeira integral não se modificará:

$$\iiint_{\Gamma R \phi} \bar{C}(\theta) R \frac{\partial \theta}{\partial \Gamma} dR d\phi d\Gamma = \bar{C}(\theta) \Delta V [\theta_p^1 - \theta_p^0] \quad (4.3)$$

Já a integral em função de ϕ sofrerá influência desta condição de contorno em $\phi = 0$:

$$\begin{aligned} \iiint_{Fo R \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\bar{k}(\theta)}{R} \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right) dR d\phi dFo &= \int_{Fo}^{Fo+\Delta Fo} \int_w \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\bar{k}(\theta)}{R} \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right) \Delta R d\phi dFo = \\ &= \int_{Fo}^{Fo+\Delta Fo} \left(\left. \frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e} \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right|_e - \left. \frac{\bar{k}_w(\theta)}{R_w} \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right|_w \right) \Delta R dFo = \int_{Fo}^{Fo+\Delta Fo} \left(\frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e} \frac{(\theta_E - \theta_P)}{(\partial \phi)_e} \right) \Delta R dFo \\ &= \frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e} \frac{\Delta R \Delta Fo}{(\partial \phi)_e} [f\theta_E^1 + (1-f)\theta_E^0] - \frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e} \frac{\Delta R \Delta Fo}{(\partial \phi)_e} [f\theta_P^1 + (1-f)\theta_P^0] \end{aligned} \quad (4.70)$$

A integral em função de R sofrerá influência da condição de contorno em $R = R_1$ e sofrerá uma nova discretização:

$$\begin{aligned} \iiint_{Fo R \phi} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \bar{k}(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial R} \right) dR d\phi dFo &= \\ \int_{Fo}^{Fo+\Delta Fo} \left(R_n \bar{k}_n(\theta) \frac{(\theta_N - \theta_P)}{(\partial r)_n} - R_s \bar{k}_s(\theta) \frac{Bi_i}{R_1} (\theta_P - \theta_{i0}) \right) \Delta \phi dFo &= \\ = \frac{R_n \bar{k}_n(\theta)}{(\partial r)_n} \Delta \phi \Delta Fo [g\theta_N^1 + (1-g)\theta_N^0] & \\ - \left[\frac{R_n \bar{k}_n(\theta)}{(\partial r)_n} + R_s \bar{k}_s(\theta) \frac{Bi_i}{R_1} \right] \Delta \phi \Delta Fo [g\theta_P^1 + (1-g)\theta_P^0] & \\ + R_s \bar{k}_s(\theta) \frac{Bi_i}{R_1} \theta_{i0} \Delta \phi \Delta Fo & \end{aligned} \quad (4.71)$$

Agrupando as integrais temos:

$$\begin{aligned}
\bar{C}(\theta)\Delta V[\theta_p^1 - \theta_p^0] &= \frac{R_n \bar{k}_n(\theta)}{(\partial r)_n} \Delta\phi \Delta Fo [g\theta_N^1 + (1-g)\theta_N^0] \\
&- \left[\frac{R_n \bar{k}_n(\theta)}{(\partial r)_n} + R_s \bar{k}_s(\theta) \frac{Bi_i}{R_1} \right] \Delta\phi \Delta Fo [g\theta_p^1 + (1-g)\theta_p^0] + R_s \bar{k}_s(\theta) \frac{Bi_i}{R_1} \theta_{io} \Delta\phi \Delta Fo \\
&+ \frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e} \frac{\Delta R \Delta Fo}{(\partial \phi)_e} [f\theta_E^1 + (1-f)\theta_E^0] - \frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e (\partial \phi)_e} \Delta R \Delta Fo [f\theta_p^1 + (1-f)\theta_p^0]
\end{aligned} \tag{4.72}$$

Rearranjando,

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{C}(\theta)\Delta V}{\Delta Fo} [\theta_p^1 - \theta_p^0] &= \frac{R_n \bar{k}_n(\theta)}{(\partial r)_n} \Delta\phi [g\theta_N^1 + (1-g)\theta_N^0] \\
&- \left[\frac{R_n \bar{k}_n(\theta)}{(\partial r)_n} + R_s \bar{k}_s(\theta) \frac{Bi_i}{R_1} \right] \Delta\phi [g\theta_p^1 + (1-g)\theta_p^0] + R_s \bar{k}_s(\theta) \frac{Bi_i}{R_1} \theta_{io} \Delta\phi \\
&+ \frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e} \frac{\Delta R}{(\partial \phi)_e} [f\theta_E^1 + (1-f)\theta_E^0] - \frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e (\partial \phi)_e} \Delta R [f\theta_p^1 + (1-f)\theta_p^0]
\end{aligned} \tag{4.73}$$

Agrupando os termos:

$$\begin{aligned}
\theta_p^1 &\left[\frac{\bar{C}(\theta)\Delta V}{\Delta Fo} + \left[\frac{R_n \bar{k}_n(\theta)}{(\partial r)_n} + R_s \bar{k}_s(\theta) \frac{Bi_i}{R_1} \right] g\Delta\phi + \frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e (\partial \phi)_e} f\Delta R \right] \\
&- \frac{R_n \bar{k}_n(\theta)}{(\partial r)_n} \Delta\phi g\theta_N^1 - \frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e} \frac{\Delta R}{(\partial \phi)_e} f\theta_E^1 \\
&= \theta_p^0 \left[\frac{\bar{C}(\theta)\Delta V}{\Delta Fo} - \left[\frac{R_n \bar{k}_n(\theta)}{(\partial r)_n} + R_s \bar{k}_s(\theta) \frac{Bi_i}{R_1} \right] (1-g)\Delta\phi - \frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e (\partial \phi)_e} (1-f)\Delta R \right] \\
&+ \frac{R_n \bar{k}_n(\theta)}{(\partial r)_n} \Delta\phi (1-g)\theta_N^1 + \frac{\bar{k}_e(\theta)}{R_e} \frac{\Delta R}{(\partial \phi)_e} (1-f)\theta_E^1 + R_s \bar{k}_s(\theta) \frac{Bi_i}{R_1} \theta_{io} \Delta\phi
\end{aligned} \tag{4.74}$$

Com auxilio da variaveis definidas anteriormente, a equação (4.74) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
&(a_{p0} + a_N g + a_E f + a_s g) \theta_p^1 - a_N g \theta_N^1 - a_E f \theta_E^1 \\
&= \theta_p^0 [a_{p0} - [a_N + a_s] (1-g) - a_E (1-f)] + a_N (1-g) \theta_N^0 + a_E (1-f) \theta_E^0 + a_s \theta_{io}
\end{aligned} \tag{4.75}$$

que será a equação discretizada quando $R = R_1$ e $\phi = 0$.

Escrevendo a equação (4.75) seguinte na forma:

$$\begin{aligned}
 A(i, j) &= (a_{p0} + a_N g + a_E f + a_s^* g) \theta_p^1 \\
 B(i, j) &= -a_N g \theta_N^1 - a_E f \theta_E^1 \\
 C(i, j) &= 0 \\
 D(i, j) &= \theta_p^0 \left[a_{p0} - [a_N + a_s^*](1-g) - a_E(1-f) \right] + a_N(1-g) \theta_N^0 \\
 &\quad + a_E(1-f) \theta_E^0 + a_s^* \theta_{i0}
 \end{aligned} \tag{4.76}$$

4.2.10 Avaliação da condutividade térmica na fronteira aleta-material de mudança de fase.

Quando ocorre uma variação brusca das propriedades físicas nas faces dos volumes de controle, segundo PATANKAR (1980), deve-se avaliar a condutividade através de uma análise de paredes composta segundo a figura (4.11)

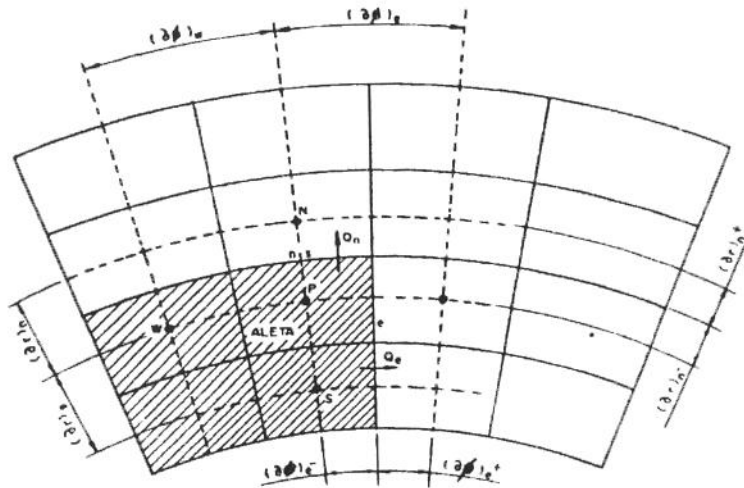


Figura 4.11: Representação da interface aleta-material de mudança de fase

Para o calor saindo no sentido oeste leste temos:

$$Q_e = \frac{\bar{k}_e(\theta) \Delta R}{R_p} \frac{(\theta_p - \theta_e)}{(\partial \phi)_e} \tag{4.77}$$

ou tratando como paredes compostas temos

$$Q_e = \frac{(\theta_p - \theta_e)}{\frac{R_p(\partial\phi)_e^-}{\bar{k}_p(\theta)\Delta R} + \frac{R_p(\partial\phi)_e^+}{\bar{k}_E(\theta)\Delta R}} \quad (4.78)$$

assim a condutividade térmica será:

$$\bar{k}_e(\theta) = \frac{(\partial\phi)_e}{\frac{(\partial\phi)_e^-}{\bar{k}_p(\theta)} + \frac{(\partial\phi)_e^+}{\bar{k}_E(\theta)}} \quad (4.79)$$

Para o calor no sentido leste oeste temos:

$$Q_w = \frac{\bar{k}_w(\theta)\Delta R}{R_p} \frac{(\theta_w - \theta_p)}{(\partial\phi)_w} \quad (4.80)$$

ou tratando como paredes compostas temos

$$Q_w = \frac{(\theta_w - \theta_p)}{\frac{R_p(\partial\phi)_w^-}{\bar{k}_w(\theta)\Delta R} + \frac{R_p(\partial\phi)_w^+}{\bar{k}_p(\theta)\Delta R}} \quad (4.81)$$

assim a condutividade térmica será:

$$\bar{k}_w(\theta) = \frac{(\partial\phi)_w}{\frac{(\partial\phi)_w^-}{\bar{k}_w(\theta)} + \frac{(\partial\phi)_w^+}{\bar{k}_p(\theta)}} \quad (4.82)$$

Para o calor saindo da aleta pela interface no sentido sul norte temos:

$$Q_n = \bar{k}_n(\theta)R_n\Delta\phi \frac{(\theta_p - \theta_n)}{(\partial R)_n} \quad (4.83)$$

ou tratando como paredes compostas temos

$$Q_n = \frac{(\theta_p - \theta_n)}{\frac{R_n - R_p}{\bar{k}_p(\theta) \frac{(R_n - R_p)\Delta\phi}{\ln(R_n/R_p)}} + \frac{R_N - R_n}{\bar{k}_N(\theta) \frac{(R_N - R_n)\Delta\phi}{\ln(R_N/R_n)}}} \quad (4.84)$$

assim a condutividade térmica será:

$$\bar{k}_n(\theta) = \frac{\frac{(\partial R)_n}{R_n}}{\frac{\ln(R_n/R_p)}{\bar{k}_p(\theta)} + \frac{\ln(R_N/R_n)}{\bar{k}_N(\theta)}} \quad (4.85)$$

Para o calor saindo da aleta pela interface no sentido norte sul temos:

$$Q_s = \bar{k}_s(\theta) R_s \Delta\phi \frac{(\theta_s - \theta_p)}{(\partial R)_s} \quad (4.86)$$

ou tratando como paredes compostas temos

$$Q_s = \frac{(\theta_s - \theta_p)}{\frac{R_s - R_s}{\bar{k}_s(\theta) \frac{(R_s - R_s)\Delta\phi}{\ln(R_s/R_s)}} + \frac{R_p - R_s}{\bar{k}_p(\theta) \frac{(R_p - R_s)\Delta\phi}{\ln(R_p/R_s)}}} \quad (4.87)$$

assim a condutividade térmica será:

$$\bar{k}_s(\theta) = \frac{\frac{(\partial R)_s}{R_s}}{\frac{\ln(R_s/R_s)}{\bar{k}_s(\theta)} + \frac{\ln(R_p/R_s)}{\bar{k}_p(\theta)}} \quad (4.88)$$

Na interface leste e norte, o calor tem influencia destas como:

$$\bar{k}_n(\theta) = \frac{\frac{(\partial R)_n}{R_n}}{\frac{\ln(R_n/R_p)}{\bar{k}_p(\theta)} + \frac{\ln(R_N/R_n)}{\bar{k}_N(\theta)}} \quad (4.89)$$

e,

$$\bar{k}_e(\theta) = \frac{(\partial\phi)_e}{\frac{(\partial\phi)_e^-}{\bar{k}_P(\theta)} + \frac{(\partial\phi)_e^+}{\bar{k}_E(\theta)}} \quad (4.90)$$

4.3 Algoritmo numérico

Para a resolução das equações discretizadas na seção anterior optamos pela utilização do algoritmo TDMA (TriDiagonal Matriz Algorithm), com as equações de discretização expressas no formato sugerido por PATANKAR (1980), onde a equação:

$$A(i, j) = B(i, j) + C(i, j) + D(i, j) \quad (4.91)$$

pode ser escrita como:

$$a_P \theta_P = a_E \theta_E + a_W \theta_W + a_N \theta_N + a_S \theta_S + d \quad (4.92)$$

onde:

$$\begin{aligned} A(i, j) &= a_P \theta_P & B(i, j) &= a_E \theta_E + a_N \theta_N \\ C(i, j) &= a_W \theta_W + a_S \theta_S & D(i, j) &= d \end{aligned}$$

que são os termos da discretização para cada volume de controle. Considerando todo o domínio teremos um sistema de equações $m \times n$ que pode ser genericamente escrita como

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ c_2 & a_2 & b_2 & & \\ & c_3 & a_3 & b_3 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c_{m-1} & a_{m-1} & b_{m-1} \\ & & & c_m & a_m \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \vdots \\ \theta_{m-1} \\ \theta_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{m-1} \\ d_m \end{bmatrix}$$

O sistema de equações tem características que o tornam interessante do ponto de vista de implementação computacional:

- usa relativamente pouca memória para armazenar o sistema de equações formado, mesmo para grandes sistemas, uma vez que são necessárias apenas quatro variáveis indexadas para armazenar todo o sistema;
- o algoritmo para solução desse sistema de equações é bastante simples e requer um número reduzido de operação aritméticas, o que diminui o tempo computacional se comparados com outros métodos de solução de sistemas de equações;
- a diminuição do número de operação aritméticas diminui o erro de arredondamento no resultado final.

Esse sistema de equações tem outra particularidade. O termo c_m é nulo quando m é igual ao m inicial e o termo b_m também é nulo quando m é igual ao m final.

Esses fatores são de fundamental importância na escolha de um algoritmo para solução de sistemas de equações, uma vez que o sistema de equações diferenciais a ser resolvido é um sistema não linear o que implica em iterações até chegar ao resultado final com um erro de convergência prefixado.

Além dos métodos de discretização produzirem sistemas de equações algébricas semelhantes, outro fator que determinou a escolha deste método de discretização, ADI, foi o fato do método ser incondicionalmente estável CLARK E HANSEN (1964).

4.4 Escolha do número de pontos da grade

Para otimizar o número de pontos da grade e também o intervalo do tempo várias experiências numéricas foram feitas. Nestes testes numéricos foram utilizados os seguintes dados geométricos e operacionais:

Tabela 4.1: Propriedades termofísicas dos materiais

Propriedades	Unidades	n-Eicosano		Água		Etileno Glicol	Cobre
		Sólido	Líquido	Sólido	Líquido	Líquido	
Temperatura de saturação	K	309,55		273,15-		-	-
Intervalo de mudança de fase	K	0,05		0,05		-	-
Calor latente	kJ/kg	247,30		334,00		-	-
Densidade	kg/m ³	778,00	856,00	920,00	999,80	1080,00	8978
Condutividade térmica	W/m K	0,150	0,150	2,31	0,566	0,425	387,6
Calor específico	kJ/kg K	2,010	2,210	4,217	4,225	3,450	0,419

Tabela 4.2: Parâmetros Operacionais

	Fluido Interno	Fluido Externo
Temperatura na Entrada (K)	283,15	278,15
Velocidade (m/s)	0,50	0,05
Número de Biot	147,67	83,29

Tabela 4.3: Parâmetros Geométricos

Raio do tubo interno (m)	0,01038
Raio interno do tubo externo (m)	0,02060
Raio do tubo externo (m)	0,06575
Comprimento do armazenador (m)	1,00
Número de aletas	4
Espessura das aletas (^o) [graus]	5

Primeiramente fixamos em 20 pontos para a direção radial, 22 pontos na direção circunferencial, através de um processo de marcha o número de pontos na direção axial os resultados obtidos estão mostrados na figura (4.12).

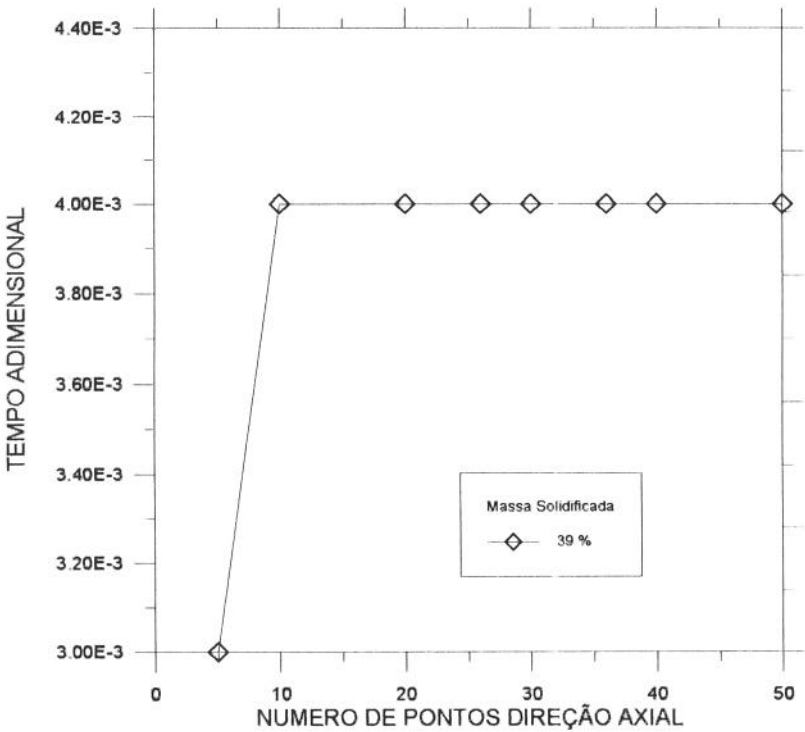


Figura 4.12: Avaliação do número de pontos na direção axial.

Da análise desta figura, verifica-se que valores após 10 pontos apresentam o mesmo tempo adimensional para se obter 39 % de massa solidificada. Portanto o número de pontos escolhidos na direção axial foi 10.

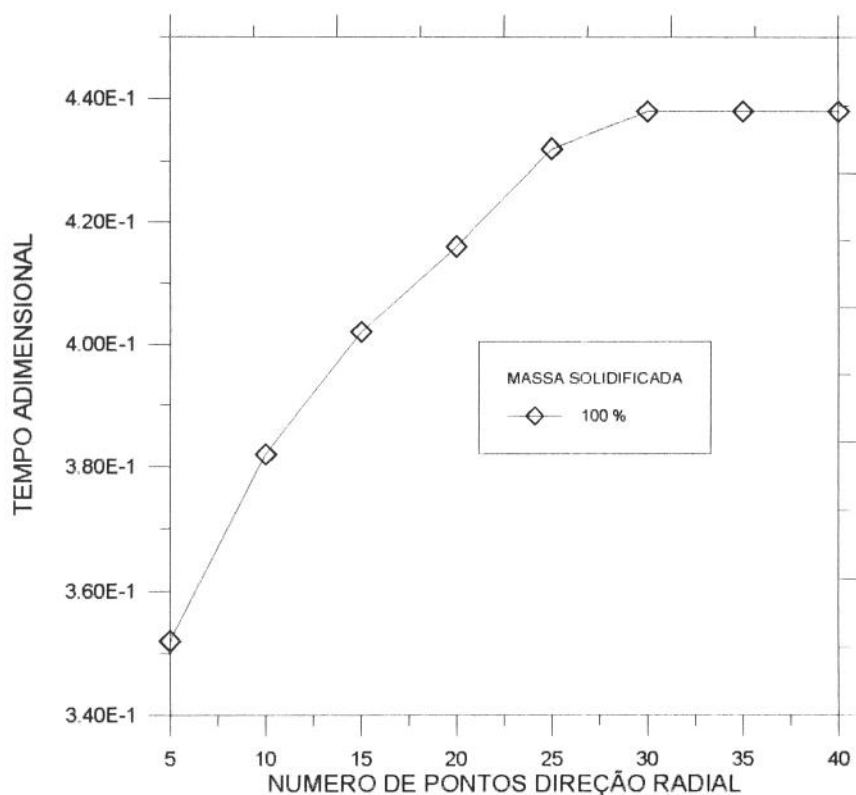


Figura 4.13: Avaliação do número de pontos na direção radial

Na figura (4.13), temos o comportamento do número de pontos na direção radial em função do tempo operacional quando ocorreu a solidificação completa do material de mudança de fase. Para conseguir este resultado fixou-se o número de pontos na direção axial igual a 10; 22 pontos na direção circunferencial. Analisando esta figura notamos que a partir do número de pontos igual a 30 há uma tendência a um valor constante do tempo adimensional, assim o número de pontos escolhido na direção radial foi 30.

Para analisar o número de pontos na direção circunferencial foi analisado separadamente o número de pontos dentro da aleta, por causa considerações vistas na seção (4.2.10) sobre a influência da condutividade térmica na fronteira aleta-MMF. A figura (4.14) mostra o comportamento do número de pontos dentro das aletas, quando a massa solidificada for de 50, 70 e 100%, e podemos verificar que a partir de 4 pontos dentro das aletas há uma tendência constante no tempo adimensional, assim o número de pontos adotado dentro da aleta foi 4.

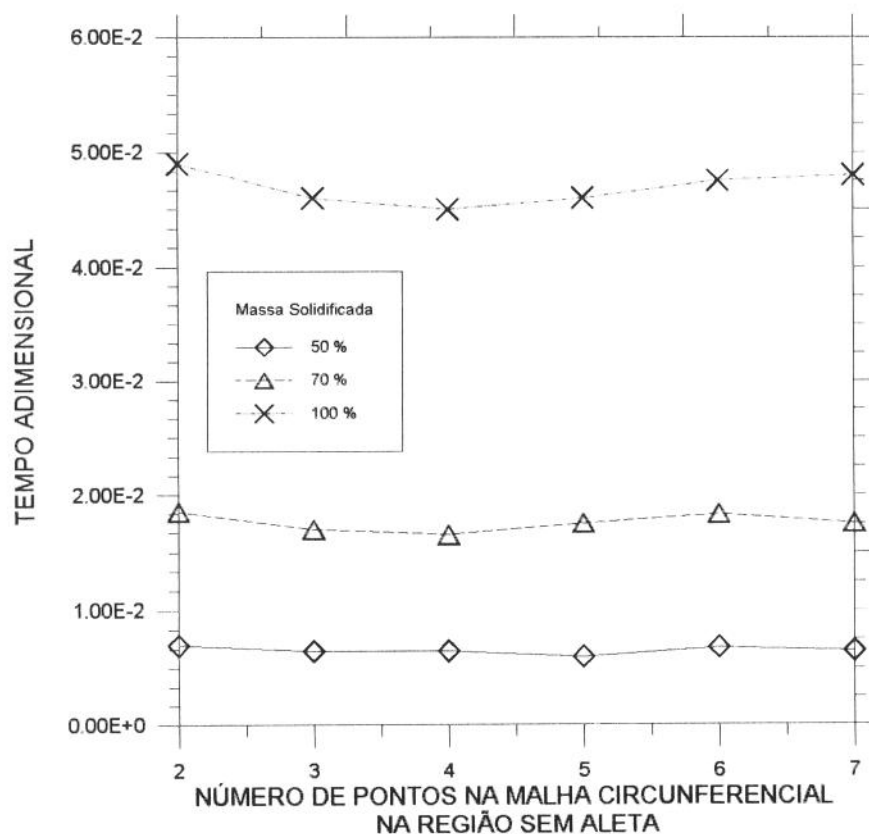


Figura 4.14: Avaliação do número de pontos dentro das aletas na direção circular

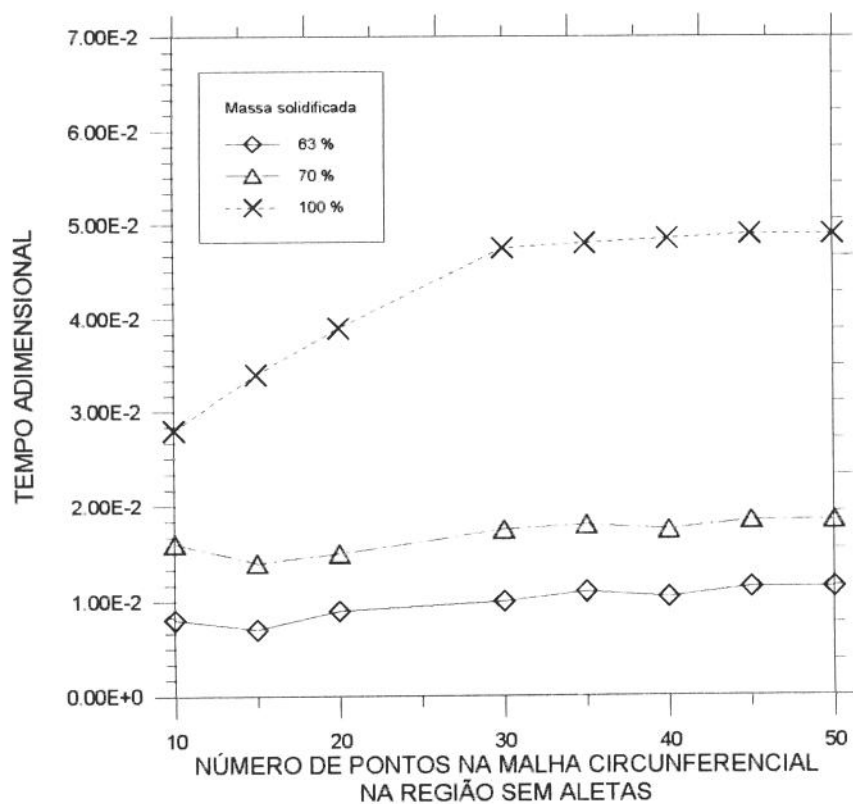


Figura 4.15: Avaliação do número de pontos da malha circular sem aleta

No estudo do número de pontos na direção circunferencial para a região sem aletas, adotamos o número de pontos na direção axial igual a 10, e o número de pontos na direção radial igual a 30. Os resultados obtidos foram plotados na figura (4.15), que ao ser analisado nos levar a escolher 30 pontos nesta direção devido a tendência constante do tempo adimensional.

Para determinar o incremento do tempo (Δt) analisamos o programa numérico para incrementos de tempo entre 0,00001 à 0,1 e os resultados obtidos foram plotados no figura (4.16); que mostra a partir do incremento de tempo 0,01 a quantidade de massa é a mesma para um determinado tempo adimensional.

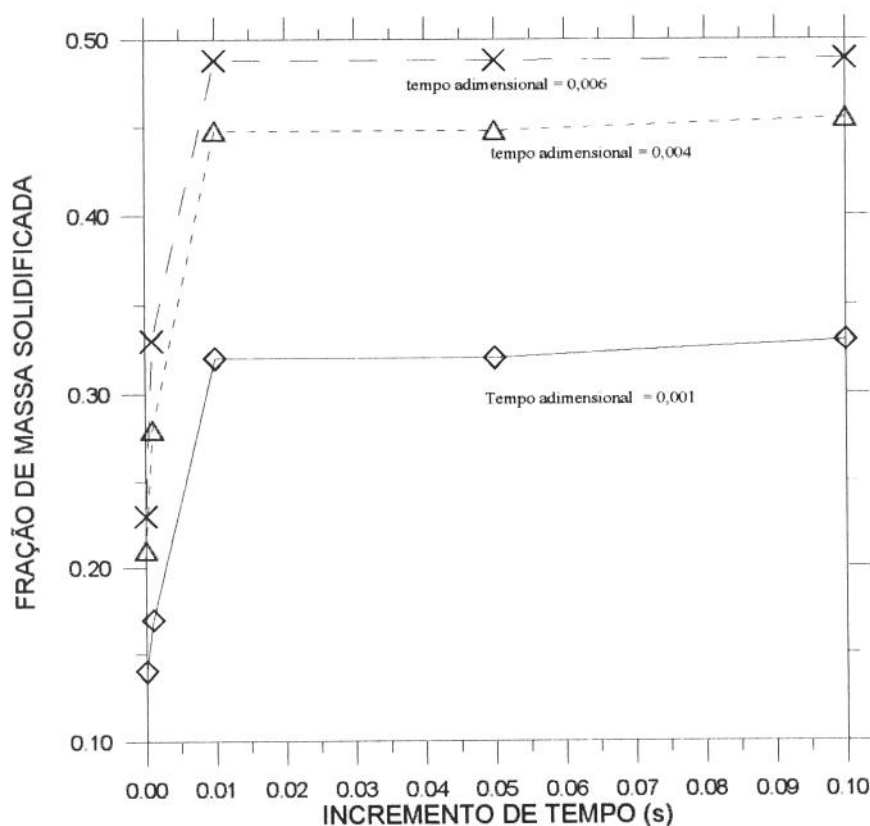


Figura 4.16: Avaliação do incremento de tempo

4.5 Influência do intervalo de temperatura de mudança de fase

No modelo teórico estudado, baseado no método de BONACINA (1975), temos que a mudança de fase ocorre numa faixa/intervalo de temperatura. Analisamos a influência desta faixa/intervalo de temperatura na massa solidificada e obtivemos a figura (4.17) após varias simulações numéricas para diferentes intervalos de temperatura (DELTA).

Analisando esta figura temos que, para um intervalo de 0,5 à 1,0 há uma coincidência dos valores mas o tempo adimensional é maior para uma mesma quantidade de massa solidificada em relação a intervalos entre 0,1 à 0,15. Se diminuirmos muito este intervalo (0,005) o processo de solidificação volta a demorar mais para uma mesma quantidade de massa solidificada, resultando que o valor adotado neste estudo foi de 0,1 o intervalo/faixa de mudança de fase.

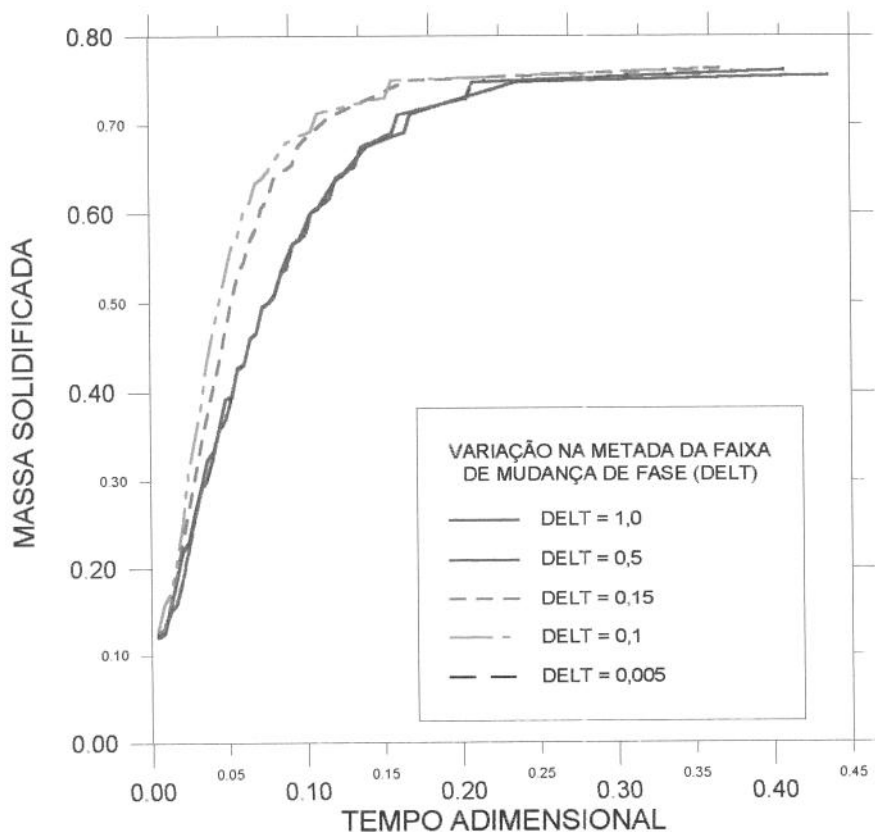
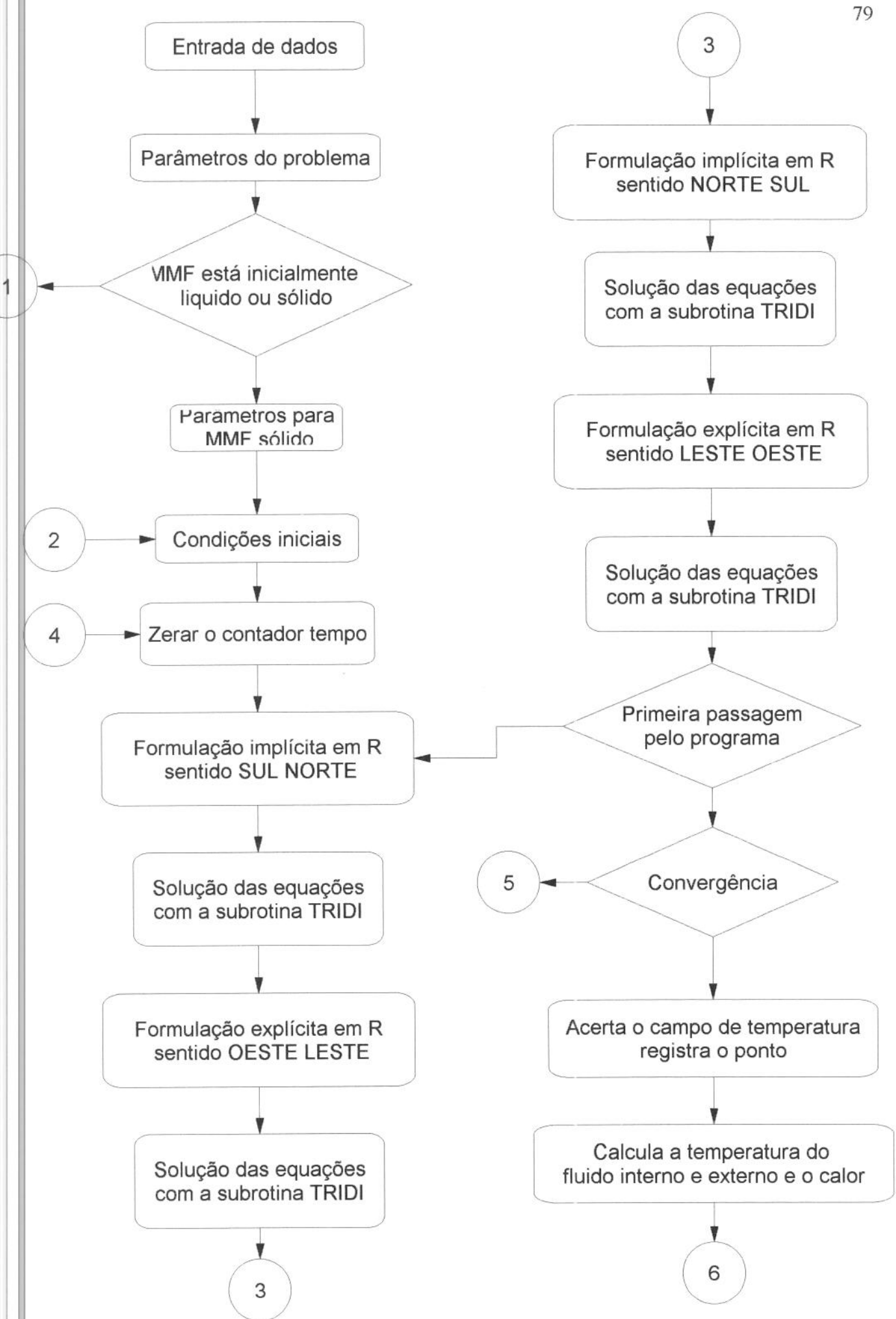


Figura 4.17: Influência da faixa de temperatura de mudança de fase sobre a solidificação do material de mudança de fase.

4.5 Fluxograma do programa numérico

A seguir mostramos o fluxograma numérico adotado para resolução deste problema.





Capítulo 5

Resultados e Discussões

5.1 Comparação dos resultados obtidos com resultados existentes na literatura

No final do capítulo anterior foi estudado o comportamento da malha computacional de modo a obter parâmetros numéricos otimizados que permitem a utilização de micro computador de tipo PC.

Antes de iniciar a obtenção de resultados para o presente estudo é necessário convalidar o modelo analítico/numérico disponíveis na literatura ou então com casos especiais que podem ser do presente modelo. Este estudo e uma revisão bibliográfica mostra que este tipo de configuração não foi estudada e portanto não há dados numéricos ou experimentais. Assim, adotamos a alternativa de reduzir este modelo para casos onde tem disponibilidade de dados de preferência experimentais ou analíticos. Neste caso também não existe soluções analíticas e consequentemente comparamos com resultados experimentais e numéricos.

Inicialmente comparou-se os resultados obtidos, com tubos sem aletas através dos resultados apresentados por SPARROW, RAMSEY E KEMINK (1979) apesar de estudarem a influência da convecção natural sobre a solidificação, depois para o caso de tubos anulares sem aleta através dos resultados apresentados por SINHA E GUPTA (1982) e finalmente com os resultados para o caso de tubos anular aletados apresentado por PADMANABHAM E MURTHY (1986).

5.1.1 Comparação entre os resultados obtidos com os resultados de SPARROW, RAMSEY E KEMINK (1979).

No trabalho de SPARROW, RAMSEY E KEMINK (1979), foi utilizado tubo sem aletas de diâmetro igual a 2,49 cm, imerso no material de mudança de fase (n-eicosano), inicialmente líquido na temperatura de mudança de fase, contido em um cilindro com diâmetro de 15,2 cm e altura de 12 cm. A diferença de temperatura do material de mudança de fase e do tubo foi fixada em $27,8^{\circ}\text{C}$.

Com estes dados e com o programa numérico desenvolvido neste trabalho, adaptado para o caso de tubos sem aletas e considerando apenas a condução de calor no material de mudança de fase, procurando reproduzir as condições do experimento apresentado por SPARROW, RAMSEY E KEMINK (1979) foi obtido a figura (5.1) que demonstra o comportamento da posição radial da frente de solidificação com o tempo.

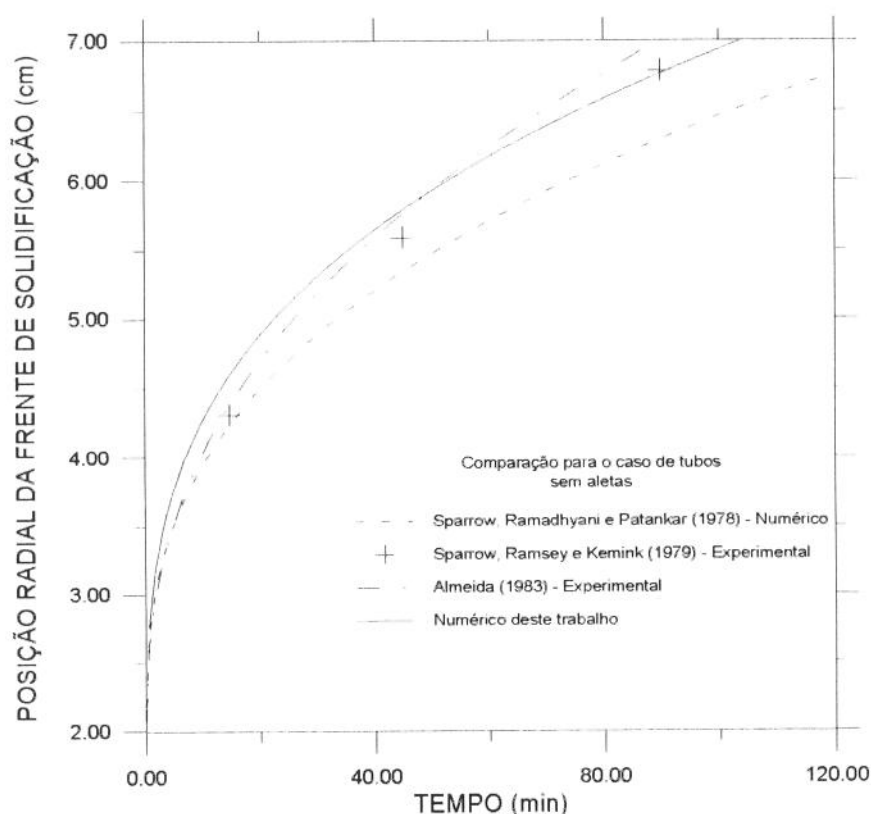


Figura 5.1: Comparação entre os resultados obtidos com os resultados da literatura para o caso de tubos sem aletas.

Nesta figura os resultados obtidos foram comparados também com resultados apresentados por ALMEIDA (1983) e com resultados teóricos apresentados por SPARROW, RAMADHYANI E PATANKAR (1978). Observando os resultados obtidos notamos que há uma concordância com os resultados da literatura principalmente com os resultados experimentais de SPARROW, RAMSEY E KEMINK (1979), no final do processo e a

diferença entre este estudo e os resultados experimentais apresentados por ALMEIDA (1983) e SPARROW, RAMADHYANI E PATANKAR (1978) pode ser atribuída a diferenças no tipo de formulação utilizada e a consideração da influência da convecção natural, assim para o caso de tubos sem aletas os resultados apresentados são satisfatórios.

5.1.2 Comparação entre os resultados obtidos com os resultados por SINHA E GUPTA (1982).

No trabalho apresentado por SINHA E GUPTA (1982) foi estudada a solidificação da região anular concêntrica de um cilindro. O tubo interno considerado no experimento é de cobre com diâmetro externo de 0,0125m e a concentricidade é conseguida por um tubo de vidro de 0,051m de diâmetro interno, ambos com 1m de comprimento. Um refrigerante circula pelo tubo interno mantendo a temperatura abaixo da temperatura de solidificação enquanto que o tubo de vidro é mantido isolado através de lã de vidro e de folhas de alumínio. O material de mudança de fase utilizado foi a água.

Com estas condições e adotando um número de Stefan igual a 0,075 e a temperatura inicial do material de mudança de fase igual a 3°C, processou-se o modelo computacional desenvolvido neste trabalho, considerando a região anular sem aletas. Os resultados desta comparação são mostrados na figura (5.2) em função da posição radial da frente de solidificação adimensionalizada como :

$$X = \frac{r - r_i}{r_e} \quad (5.1)$$

e do tempo adimensionalizado definido por:

$$\tau = \frac{Ste \alpha_s t}{r_e^2} \quad (5.2)$$

onde:

r_i é o raio externo do tubo interno;

r_e é o raio interno do tubo de vidro;

Ste é o número de Stefan;

α_s é a difusividade térmica do material de mudança de fase no estado sólido;

Observando a figura (5.2) notamos que ocorre uma boa concordância entre os resultados apresentados por SINHA E GUPTA (1982) e este estudo, principalmente quanto a forma da curva. A aproximação numérica empregada por SINHA E GUPTA (1982) foi a utilização do método de diferenças finitas reduzindo a um polinômio cubico, também devido a dificuldades do método utilizou-se que no tempo $\tau = 0$, a espessura da camada de sólido é muito pequena, $X = 0,0001$. Para efetuar a comparação a solução obtida por este estudo foi modificada em função da formulação adotada por SINHA E GUPTA (1982).

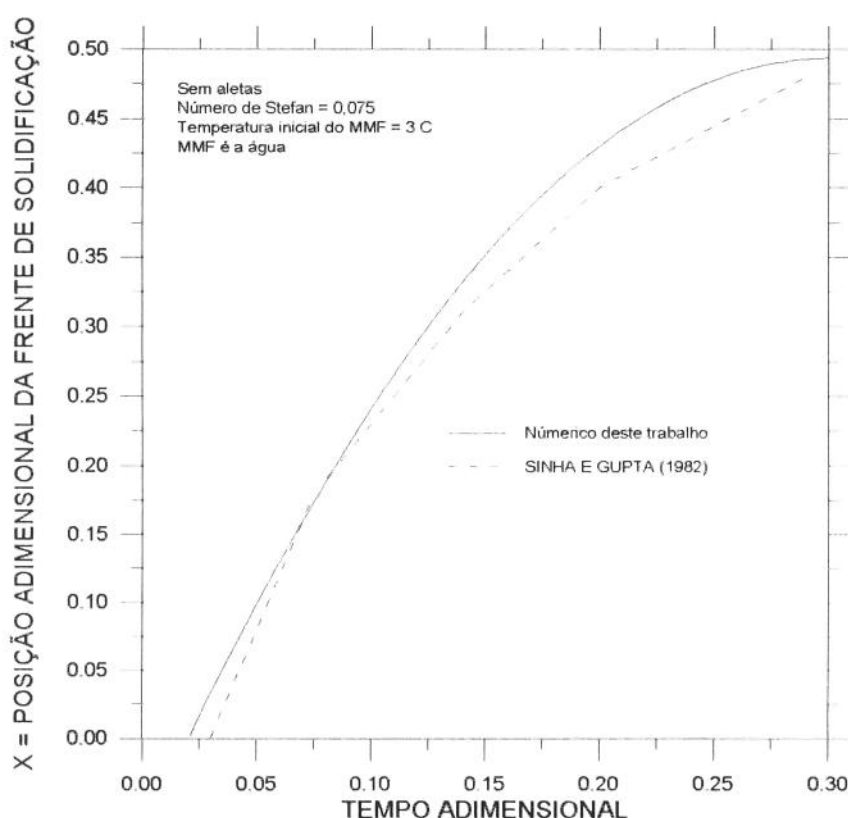


Figura 5.2: Comparação entre os resultados obtidos e o estudo de SINHA E GUPTA (1982), para região anular sem aletas.

5.1.3 Comparação entre os resultados obtidos com os resultados por PADMANABHAN E MURTHY (1986).

Nas figuras (5.3 à 5.10) a seguir temos a comparação entre o presente modelo numérico simplificado e o modelo estudado por PADMANABHAN E MURTHY (1986).

No trabalho apresentado por PADMANABHAN E MURTHY (1986), foi considerado um cilindro anular de espessura constante, a seção interna do anulo é mantida isotérmica e a

externa adiabática. O modelo assume condução de calor e as equações são resolvidas pelo método de diferenças finitas. Chegando a uma expressão para a fração de massa solidificada/fundida em função do tempo de evolução do processo, dada a seguir:

$$VF = 1,1275(FoSteT_f)^{0,624}(NA)^{0,028}(CA)^{-1,385}(W)^{-0,049} \quad (5.3)$$

onde:

VF	fração de massa solidificada/fundida;
Fo	número do Fourier;
Ste	número de Stefan;
T_f	temperatura adimensional = $(T-T_b)/(T_m-T_b)$
NA	número de aletas;
CA	comprimento adimensional das aletas = ca/r_i ;
W	espessura adimensional das aletas = w/r_i .
a_l/a_2	relação entre a difusividade térmica do material de mudança de fase no estado inicial e final.
a_l/af	relação entre a difusividade térmica do material de mudança de fase no estado inicial e a difusividade térmica da aleta.
lb_2/lb_1	relação entre a condutividade térmica do material de mudança de fase no estado final e no estado inicial.
lb_1/lbf	relação entre a condutividade térmica do material de mudança de fase no estado inicial e a condutividade térmica da aleta.

Na figura (5.3) podemos observar a comparação entre este estudo e os resultados obtidos por PADMANABHAN e MURTHY (1986) quando variou-se o número de aletas em função da fração de massa solidificada e o tempo adimensional. Nota-se que ocorre uma boa concordância entre os resultados, mesmo variando o número de aletas.

A figura (5.4) apresenta a comparação entre este estudo e os resultados obtidos por PADMANABHAN e MURTHY (1986) variando a espessura das aletas. Neste estudo as aletas são axiais e circunferencias enquanto que no trabalho de PADMANABHAN e MURTHY (1986) estas são axiais e retangulares, A figura (5.5) mostra o esquema comparativo entre a aleta considerada no estudo de PADMANABHAN e MURTHY (1986) e neste estudo para efeito de comparação. A adimensionalização da espessura das aletas foi

através da relação entre a espessura da aleta e o raio do tubo interno, portanto, quanto maior a espessura adimensionalizada maior a espessura da aleta, o que diminui o espaço com material de mudança de fase, e resulta em um aumento da fração de massa solidificada.

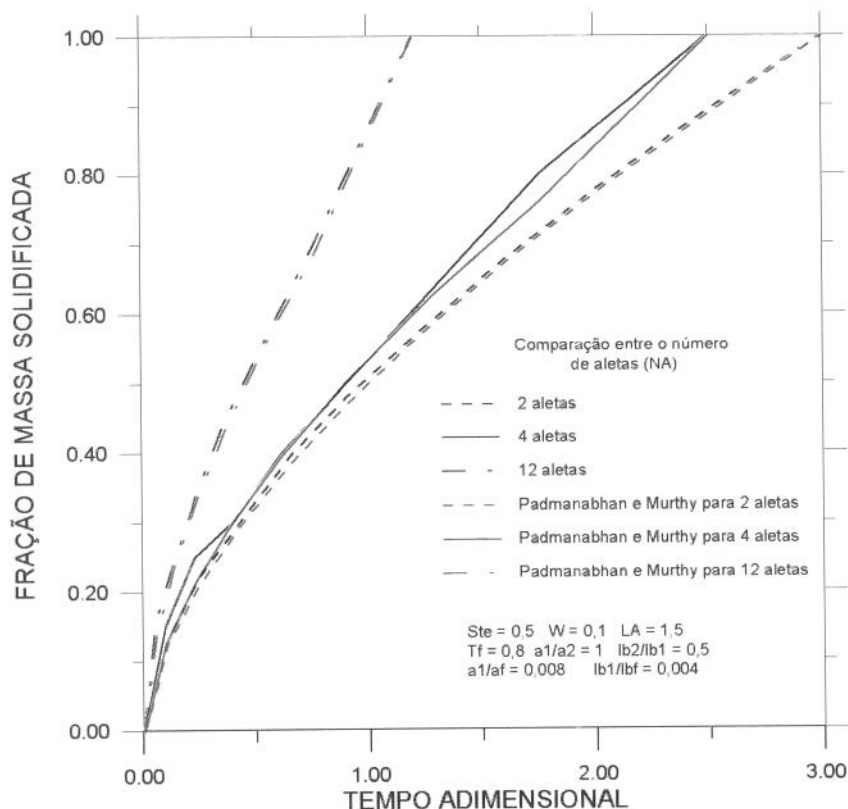


Figura 5.3: Comparação entre os dois casos variando o número de aletas (NA).

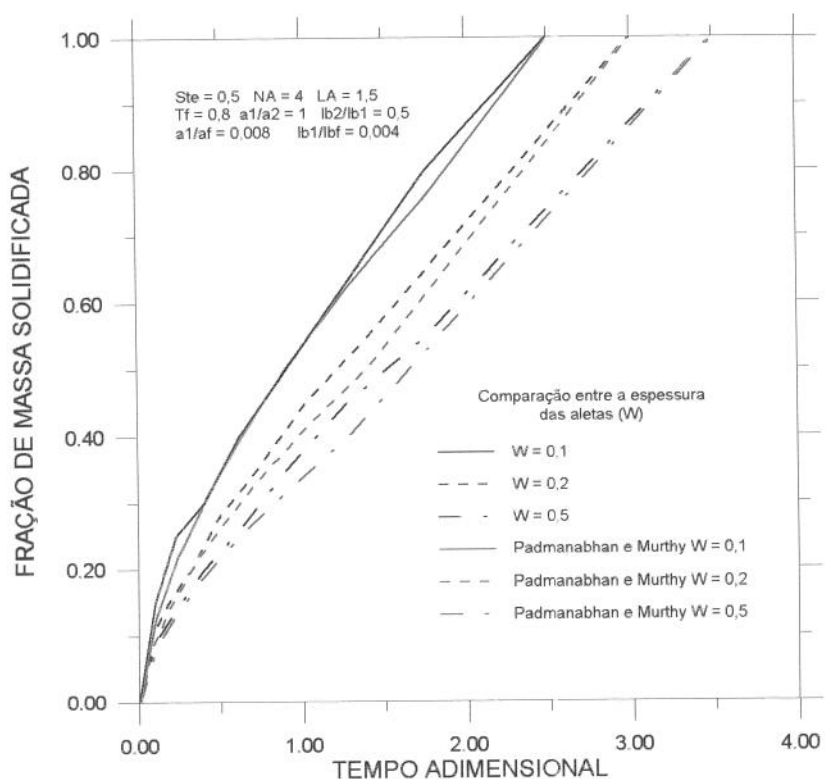


Figura 5.4: Comparação entre os dois casos em função da variação da espessura da aleta.

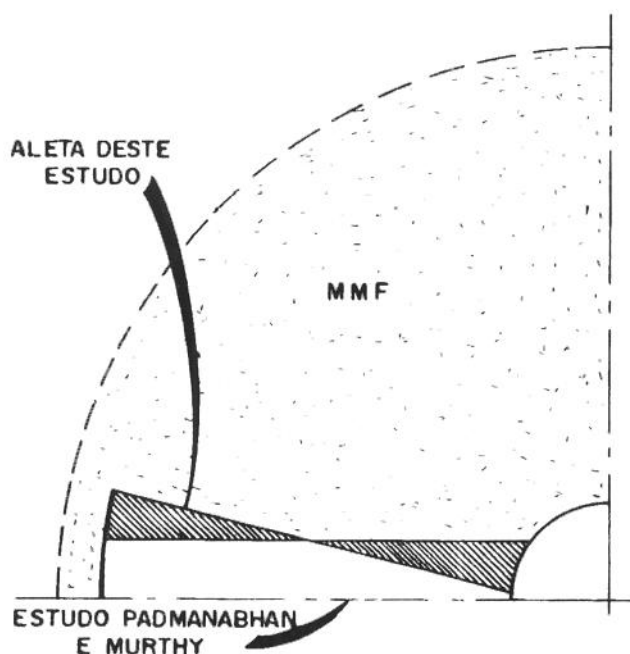


Figura 5.5: Esquema das duas aletas radial e da espessura constante

A figura (5.6) apresenta a comparação entre os estudos quando variamos o comprimento das aletas (CA). Notamos uma boa concordância entre as curvas.

Nas figuras (5.7) à (5.9) mostram a comparação entre propriedades do MMF e da aleta em relação a diversos parâmetro termodinâmicos o material utilizado foi para o MMF a parafina n-eicosane e o tubo e a aleta são de cobre.

Na figura (5.7) temos o efeito da razão entre a condutividade térmica do material de mudança de fase e da aleta. Observamos que este efeito pode ser negligenciado sobre a fração de massa solidificada.

Na figura (5.8) temos o efeito da relação entre a difusividade térmica do material de mudança de fase e da aleta e observamos que sobre a fração de massa solidificada este efeito é desprezível na faixa estudada.

Na figura (5.9) temos a comparação entre a condutividade térmica do material de mudança de fase no estado final em relação ao inicial, e observamos que não há efeito significativo em relação a fração de massa solidificada.

A figura (5.10) observamos que também não há efeito considerável da relação entre a difusividade térmica do material no estado inicial e o estado final.

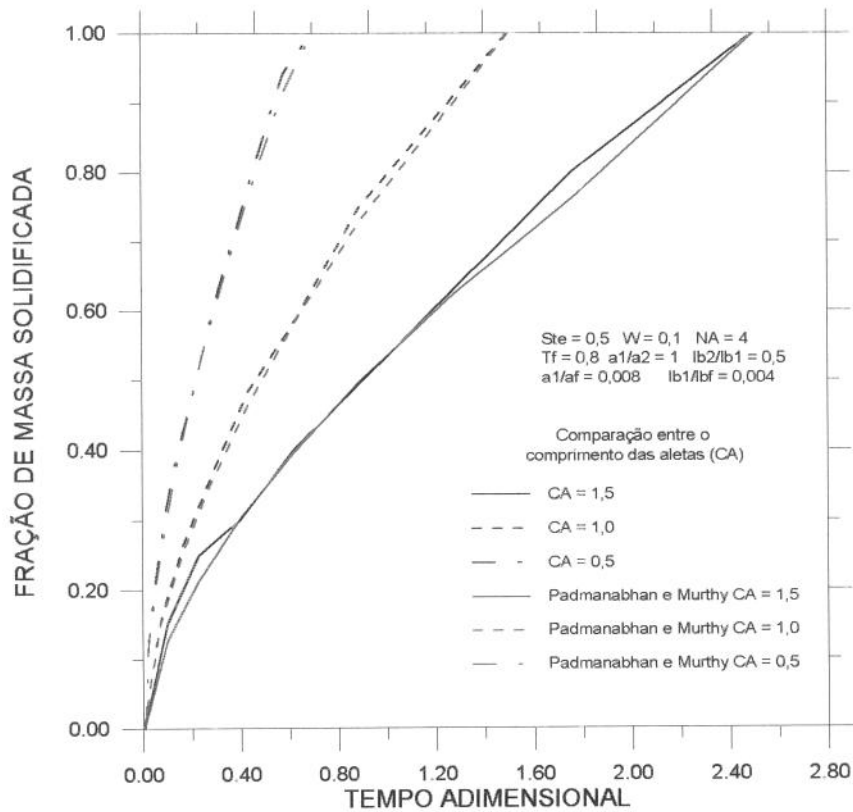


Figura 5.6: Comparação entre os modelos em função do comprimento das aletas.

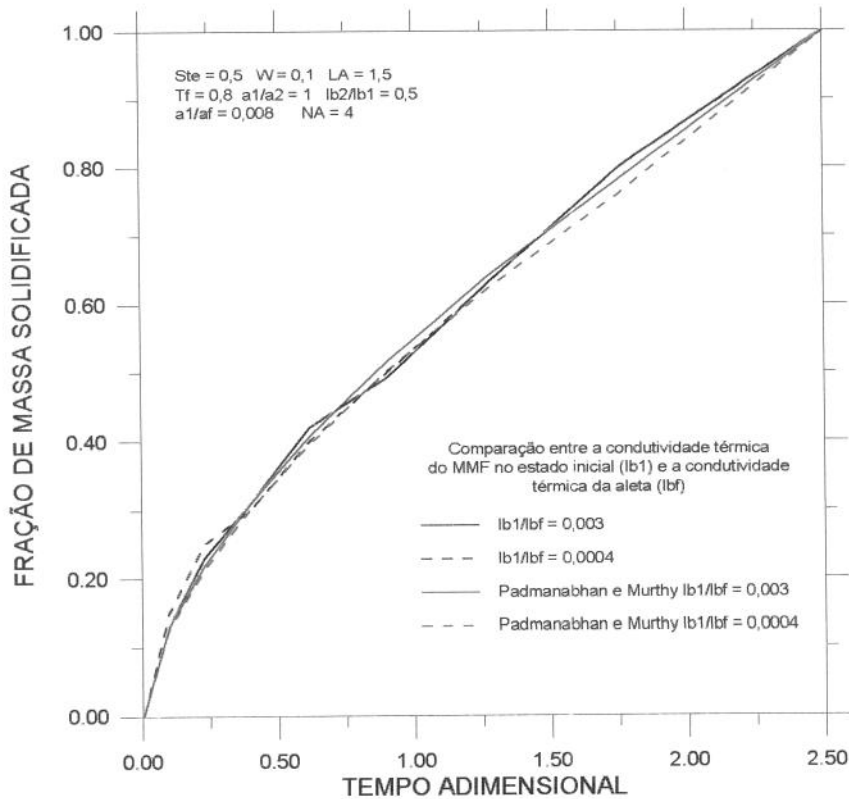


Figura 5.7: Comparação entre os modelos variando a relação entre a condutividade térmica do estado inicial e a da aleta ($l b_1/l b_f$).

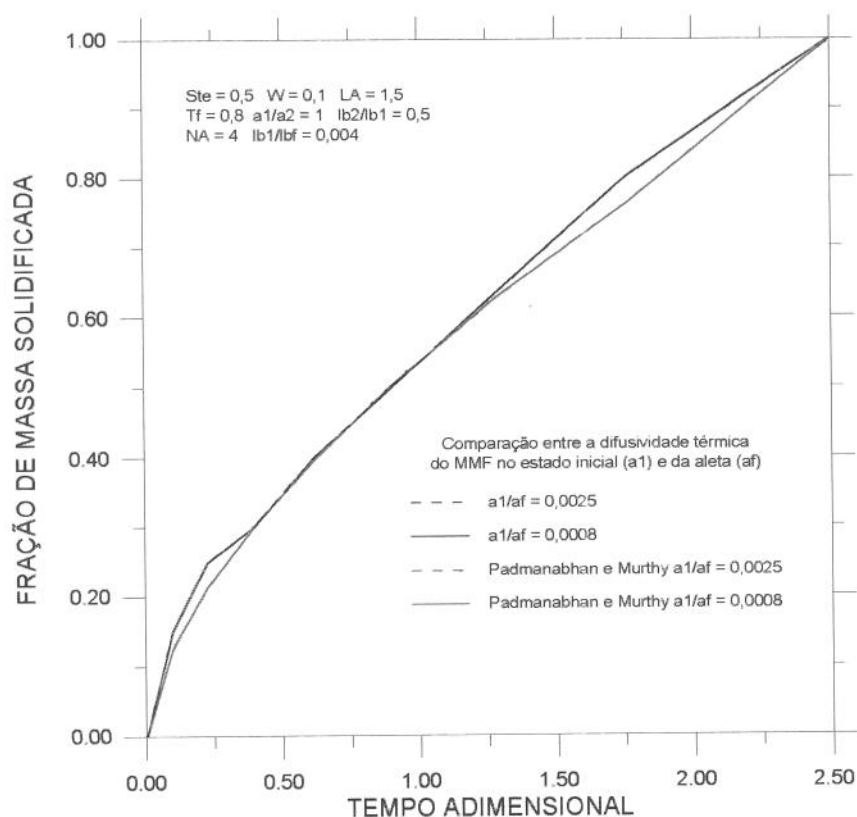


Figura 5.8: Comparação entre os modelos variando a relação entre a difusividade térmica do estado inicial e a da aleta (a_1/a_f).

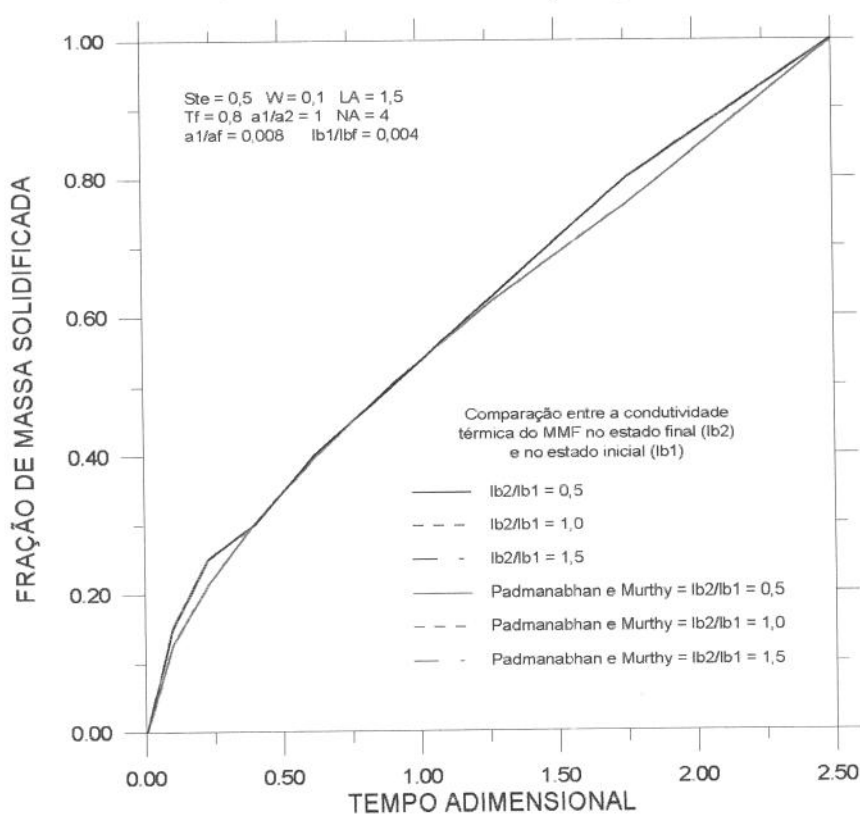


Figura 5.9: Comparação entre os modelos variando a relação entre a condutividade térmica do estado final e do estado inicial (lb_2/lb_1).

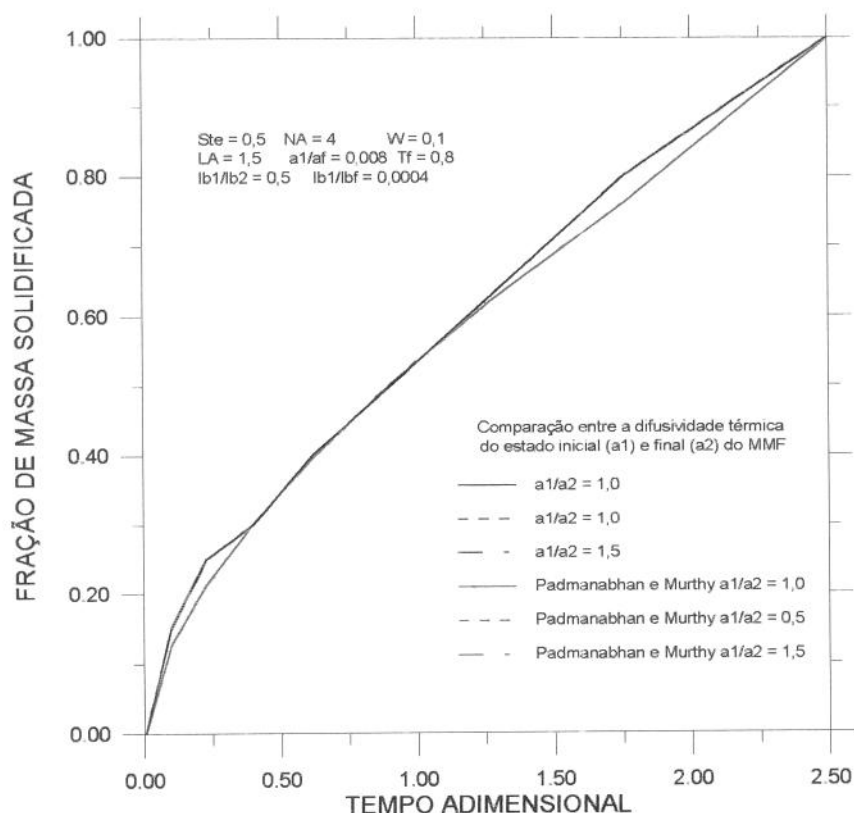


Figura 5.10: Comparação entre os modelos variando a relação entre a difusividade térmica do estado inicial e o final (a_1/a_2).

5.2 Análise dos parâmetros.

Para a análise dos parâmetros geométricos e operacionais do problema de armazenamento de calor latente anular com aletas alternadas, a tabela (4.1) apresenta as propriedades termofísicas dos materiais de mudança de fase, dos tubos e dos fluidos interno e externo que foram utilizados nas simulações.

Foram analisados os efeitos dos seguintes parâmetros:

- comportamento da frente de solidificação/fusão no armazenador;
- efeito de R^* ;
- efeito do número de aletas;
- efeito do comprimento das aletas;
- variação do número de Stefan;
- variação do número de Reynolds em relação ao fluido interno;

- variação do número de Reynolds em relação ao fluido externo;
- variação do número de Biot em relação ao fluido interno;
- variação do número de Biot em relação ao fluido externo;
- influência da temperatura do fluido interno;
- influência da temperatura do fluido externo.

5.2.1 Comportamento da frente de solidificação/fusão no armazenador.

Como no modelo estudado apresentado na figura (2.1), temos a influência de dois fluidos, o interno e o externo, que podem atuar separadamente sobre o material de mudança de fase, assim fizemos o estudo do comportamento da frente de solidificação/fusão para os casos possíveis e os resultados estão apresentados nas figuras (5.11) à (5.17).

Os parâmetros operacionais e geométricos utilizados neste estudo estão representados na tabelas (5.1) e (5.2) respectivamente.

Tabela 5.1: Parâmetros operacionais utilizados nas simulações

	Fluido Interno	Fluido Externo
Número de Reynolds	100	10000
Número de Biot	8,87	188,43

Caso	Temperatura do fluido interno na entrada - T_{bi} ($^{\circ}\text{C}$)	Temperatura do fluido externo na entrada - T_{be} ($^{\circ}\text{C}$)	Temperatura do material de mudança de fase no início do processo ($^{\circ}\text{C}$)	
A	10,00	5,00	36,90	liquido
B	46,40	5,00	36,90	liquido
C	10,00	46,40	36,90	liquido
D	41,40	46,40	35,90	sólido
E	46,40	10,00	35,90	sólido
F	10,00	41,40	35,90	sólido

Tabela 5.2: Parâmetros Geométricos utilizados nas simulações.

Raio do tubo interno - r_i (m)	0,010375
Raio do material de mudança de fase - r_c (m)	0,020600
Raio do tubo externo - r_t (m)	0,065750
Comprimento do tubo - h (m)	1,00
Número de aletas	4
Espessura das aletas ($^{\circ}$)	4,5
Espessura da aleta interna na base (m)	0,00041
Espessura da aleta interna no topo (m)	0,00046
Espessura da aleta externa na base (m)	0,00081
Espessura da aleta externa no topo (m)	0,00077
Raio da aleta interna (m)	0,01174
Raio da aleta externa (m)	0,01958
Espessura das aletas no topo (m)	0,00081
Comprimento das aletas (m)	0,00136

A figura (5.11) mostra o comportamento da frente de solidificação/fusão para o caso A, onde o material de mudança de fase encontra-se na fase líquida e os dois fluidos entram na unidade armazenadora à uma temperatura menor que a temperatura de mudança de fase do MMF, assim ocorre o descarregamento desta unidade, e a presença de duas frentes de solidificação.

A figura (5.12) mostra o comportamento da frente de solidificação para o caso B, onde o material de mudança de fase está inicialmente líquido e o fluido interno está a uma temperatura superior à temperatura de mudança de fase do MMF e o fluido externo entra na unidade armazenadora a uma temperatura inferior, portanto ocorre a formação de uma frente de

solidificação no sentido fluido externo ao interno como pode ser observado nesta figura. Após um intervalo de tempo considerável a frente de solidificação tende a se manter estacionária, ou seja, com uma velocidade muito pequena, devido a influência do fluido interno.

Na figura (5.13) temos o comportamento da frente de solidificação para o caso C, onde o material de mudança de fase está inicialmente líquido e o fluido interno entra na unidade armazenadora a uma temperatura inferior a temperatura do material de mudança de fase. O fluido externo é mantido a uma temperatura superior a temperatura do material de mudança de fase, portanto ocorrerá a formação de uma frente de solidificação no sentido fluido interno para o externo como pode ser observado nesta figura. Também neste caso não ocorreu a solidificação completa devido a influência da temperatura do fluido externo sobre o material de mudança de fase.

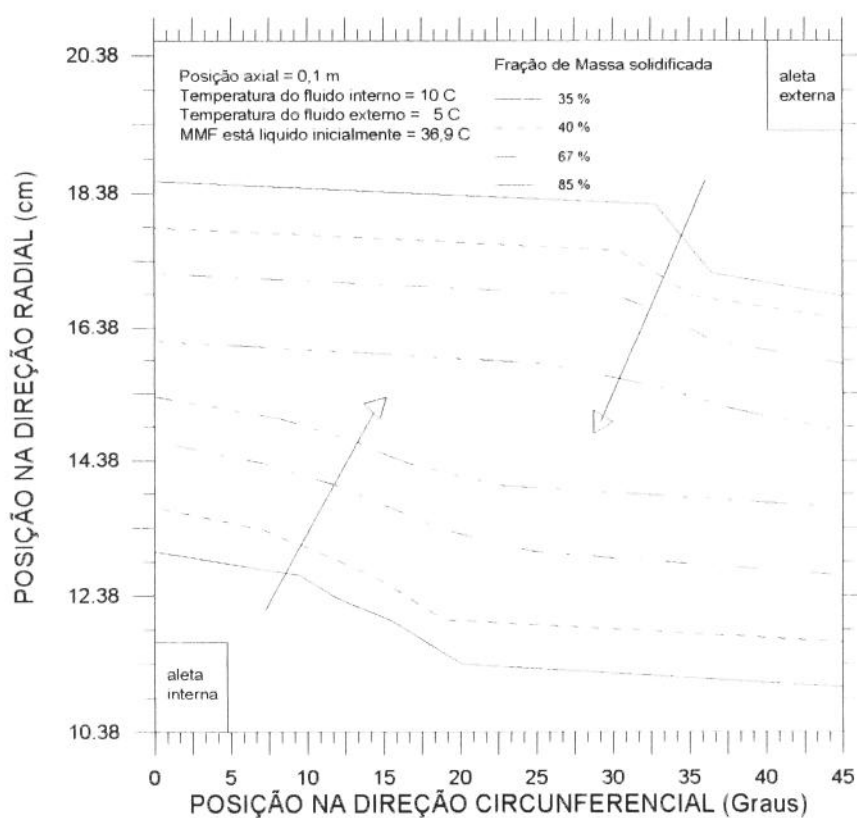


Figura 5.11: Comportamento da frente de solidificação para o caso A.

A figura (5.14) mostra a frente de fusão para o caso D, onde o material de mudança de fase está inicialmente solidificado à uma temperatura abaixo da temperatura de mudança de fase e tanto o fluido interno como o externo entram na unidade armazenadora a temperaturas

superiores a esta temperatura, assim ocorrerá o surgimento de duas frentes de fusão e o carregamento desta unidade.

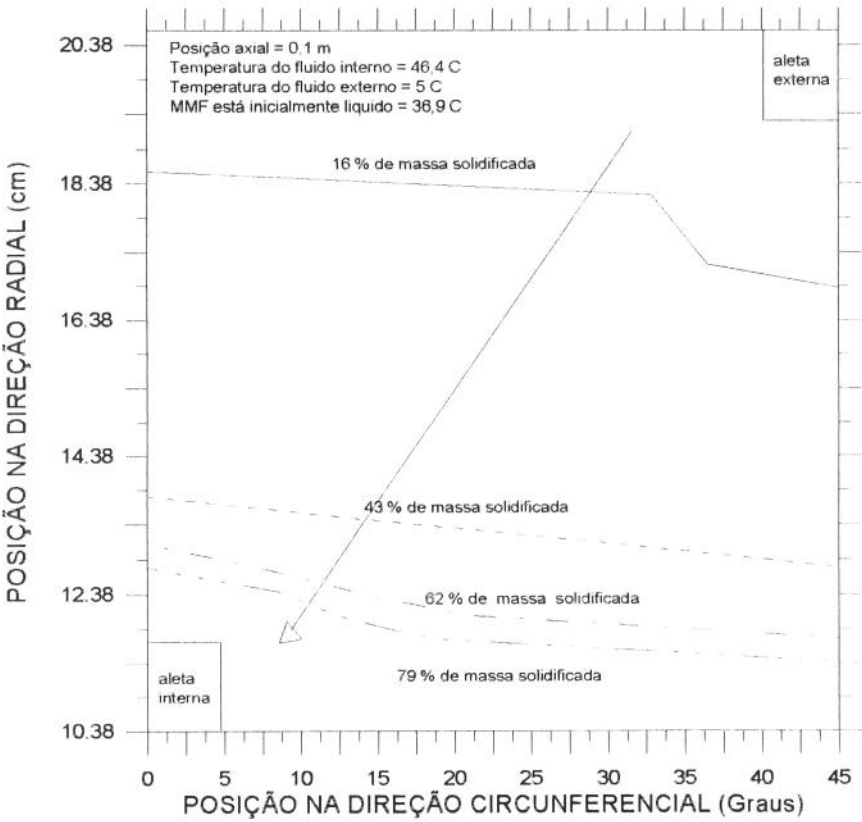


Figura 5.12: Comportamento da frente de solidificação para o caso B.

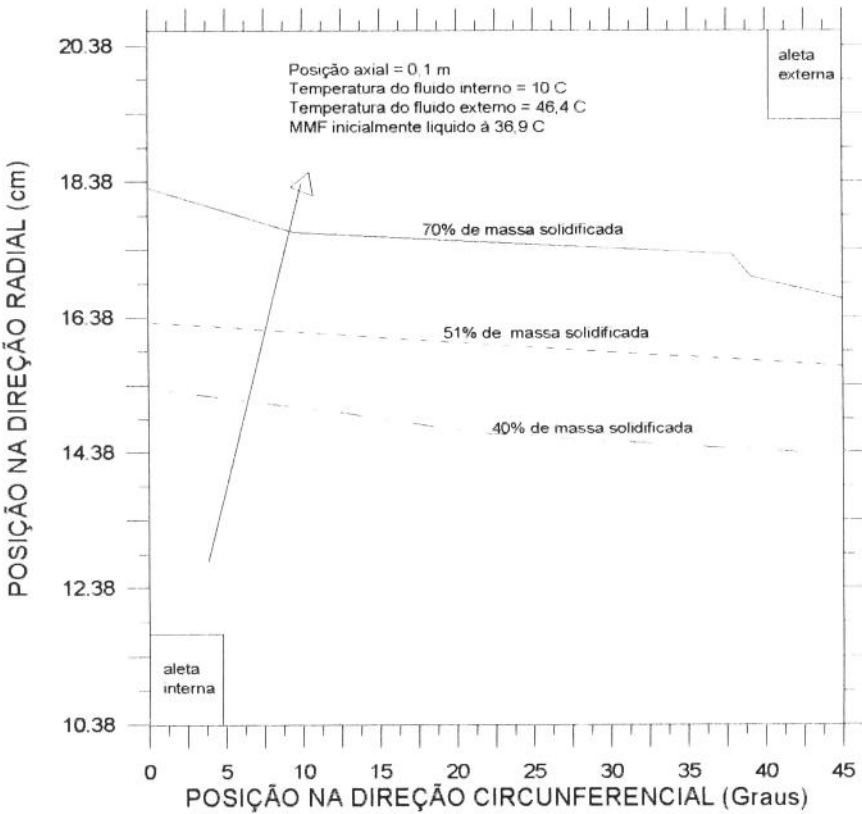


Figura 5.13: Comportamento da frente de solidificação para o caso C.

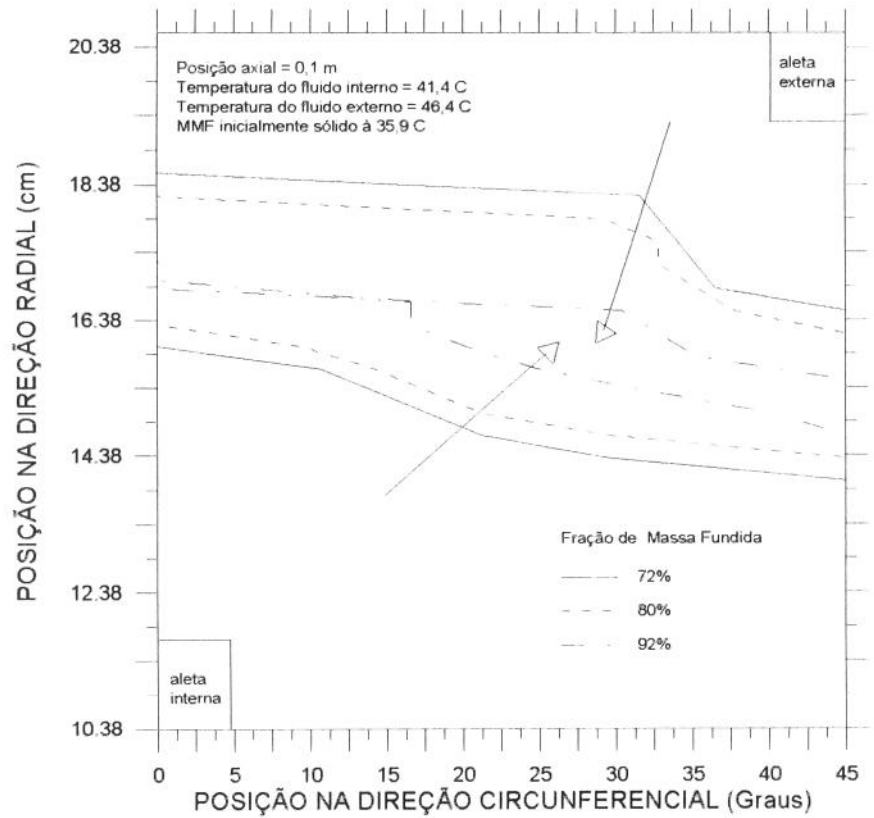


Figura 5.14: Comportamento da frente de fusão para o caso D.

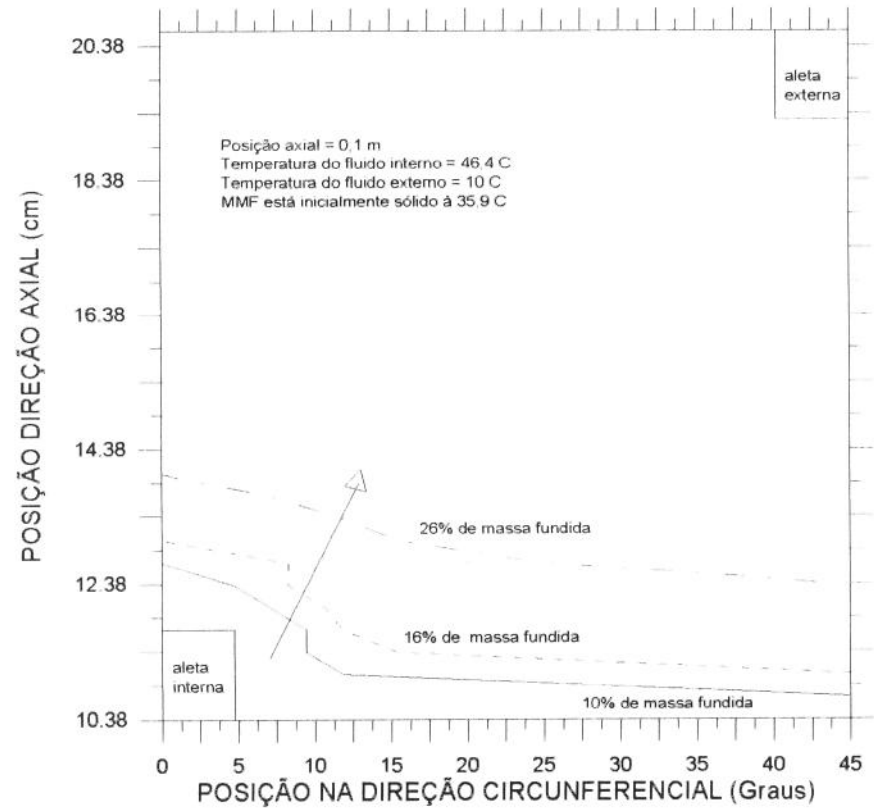


Figura 5.15: Comportamento da frente de fusão para o caso E.

Na figura (5.15) temos o comportamento da frente de fusão para o caso E, onde ocorre o carregamento de unidade armazenadora devido ao fluido interno entrar nesta unidade a uma temperatura superior a temperatura de mudança de fase, ou seja, ocorre a formação de uma frente de fusão no sentido fluido interno para o fluido externo, e devido o fluido externo se manter a uma temperatura inferior a temperatura de mudança de fase do MMF esta frente tende a se manter estacionária após um intervalo de tempo considerável.

O ultimo caso estudado sobre o comportamento da frente de fusão, que é o caso F, é mostrado na figura (5.16), o material de mudança de fase encontra-se inicialmente no estado sólido e o fluido interno é mantido a uma temperatura inferior à temperatura de mudança de fase. O fluido externo atua sobre o material de mudança de fase devido este entrar na unidade a uma temperatura superior a temperatura de mudança de fase do MMF, causando o surgimento de um frente de fusão, ou seja, causando o carregamento da unidade armazenadora.

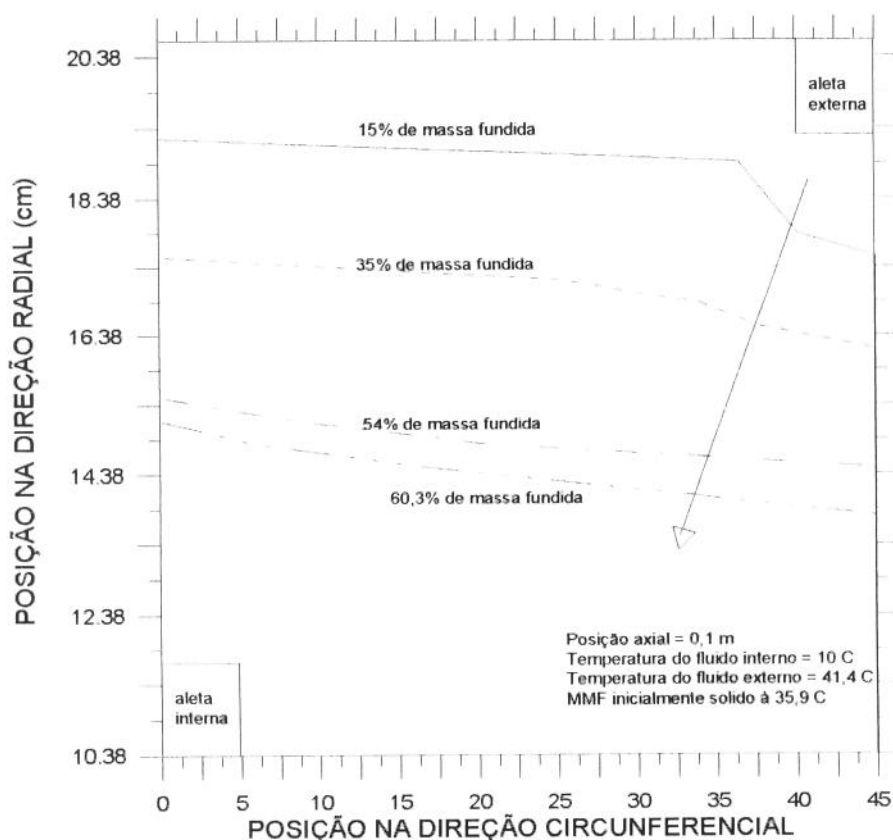


Figura 5.16: Comportamento da frente de fusão para o caso F.

5.2.2 Efeito de R^* .

R^* é definido como:

$$R^* = \frac{r_e - r_i}{r_i} \quad (5.4)$$

Para investigar o efeito da variação de R^* , testes numéricos foram feitos para $R^* = 1, 2, 3$ e 4, ou seja, quando $R^* = 1$ significa que $r_e = 2r_i$, assim, fixamos o raio do tubo interno (r_i) conforme a tabela (5.2) e variamos o raio do material de mudança de fase (r_e), fixamos ainda o raio do tubo externo (r_i) com 6 vezes o raio do tubo interno. Outros dados utilizados estão descritos na tabela (5.2). Os dados operacionais foram fornecidos na tabela (5.1), sendo que as condições de temperatura do fluido interno e externo na entrada da unidade armazenadora são representados pelo caso E, do comportamento da frente de fusão.

A figura (5.17) mostra a variação da fração de massa fundida para vários R^* , em função do tempo adimensional. Como é de esperar a medida que aumenta R^* a fração de massa fundida diminui, pois aumenta a resistência térmica ao longo do caminho de troca de calor.

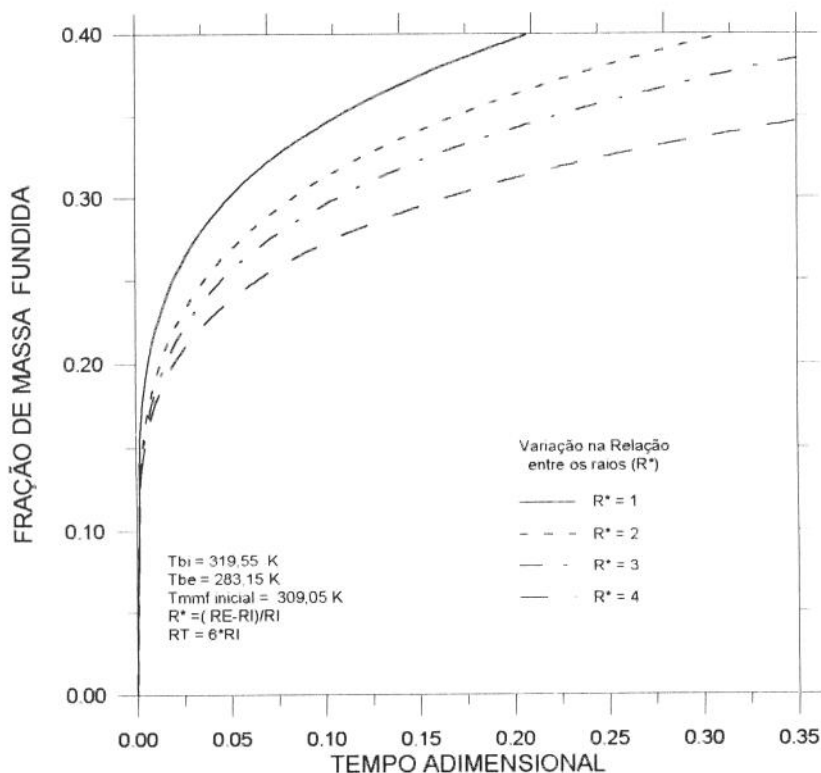


Figura 5.17: Comportamento da fração de massa fundida com o tempo adimensional em função da relação entre os raios (R^*).

As efetividades em relação ao fluido interno e ao externo podem ser vistas nas figuras (5.18) e (5.19) para vários valores de R^* . Após um período inicial as efetividades atingem valores quase constantes mas em patamares diferentes conforme os valores de R^* .

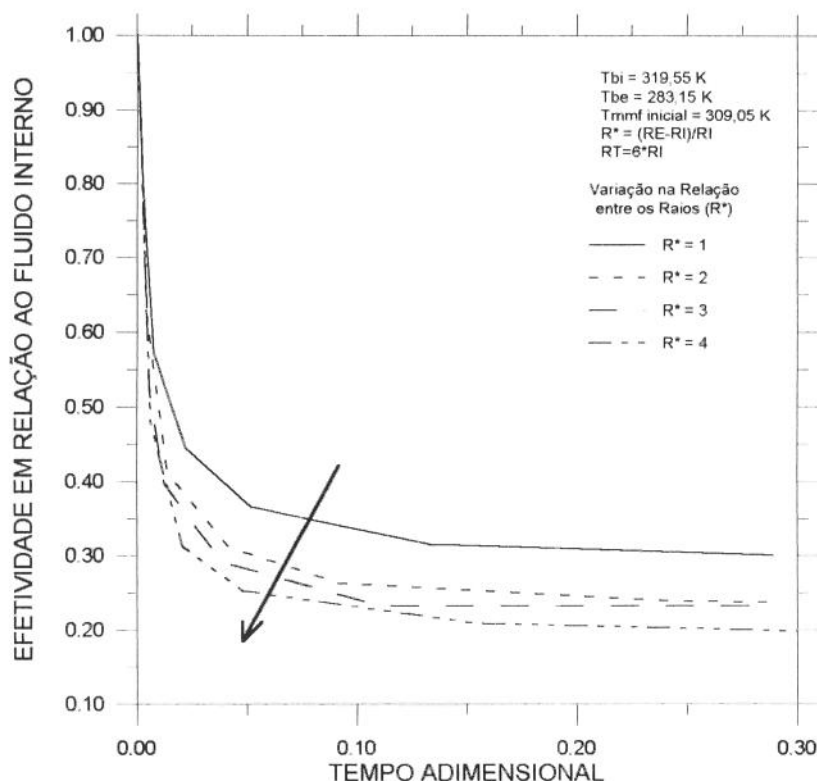


Figura 5.18: Comportamento da efetividade em relação ao fluido interno com o tempo adimensional em função da relação entre os raios (R^*).

O efeito da variação de R^* sobre os valores de NTU em relação ao fluido interno e externo são mostrados nas figuras (5.20) e (5.21). Após os intervalos iniciais os valores de NTU atingem valores relativamente constantes.

As figuras (5.22) à (5.26) apresentam resumos dos testes feitos para investigar a influência de R^* . Como pode ser verificado na figura (5.22), a fração da massa fundida tem uma queda quase linear com o aumento do parâmetro R^* , isto pode ser explicado devido ao aumento da resistência térmica. A figura (5.23) mostra o comportamento da efetividade em relação ao fluido interno indicando uma redução desta com o aumento de R^* . Isto pode ser explicado pelo fato que a efetividade é proporcional a fração da massa fundida (solidificação) e que diminui com o aumento de R^* , e conseqüentemente também a efetividade. O mesmo pode ser observado para a efetividade em relação ao fluido externo como mostra a figura (5.24).

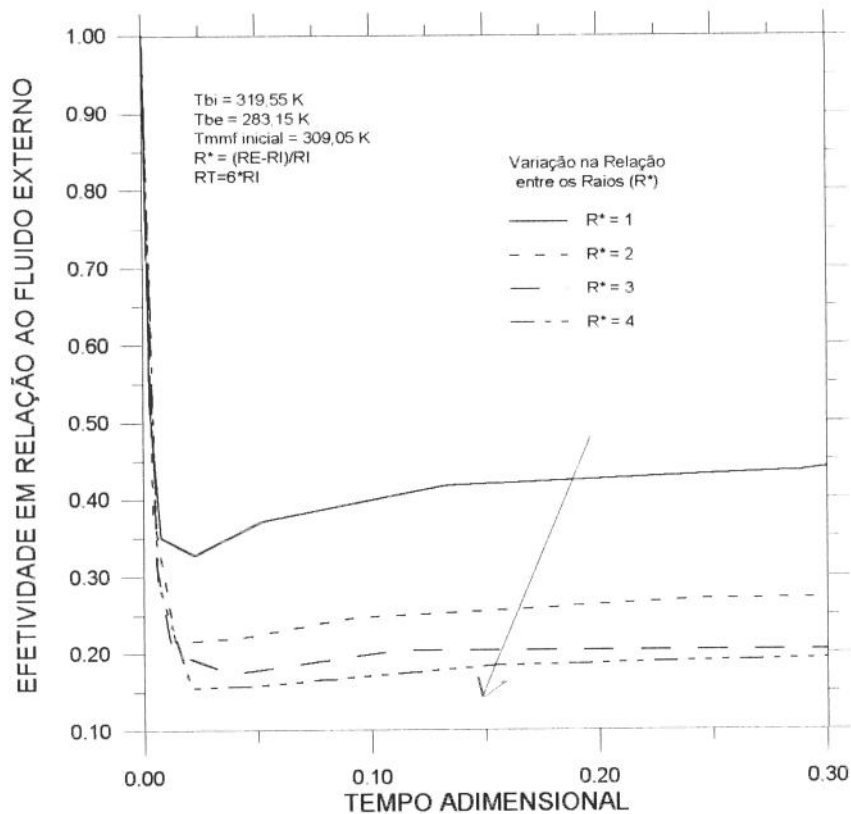


Figura 5.19: Comportamento da efetividade em relação ao fluido externo com o do tempo adimensional em função da relação entre os raios (R^*).

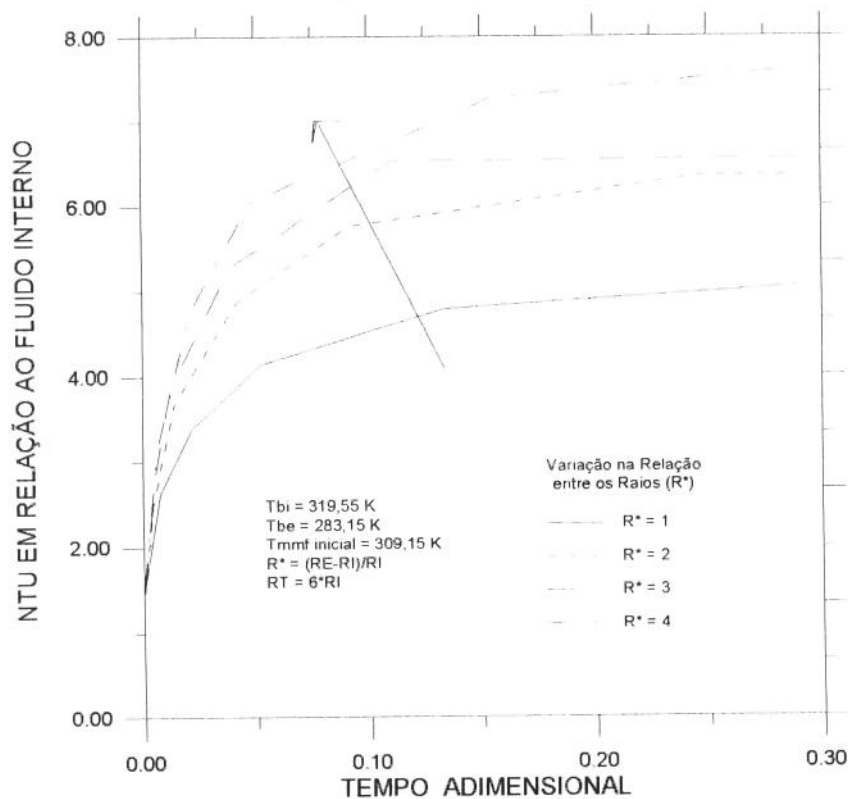


Figura 5.20: Comportamento do NTU em relação ao fluido interno com o tempo adimensional em função da relação entre os raios (R^*).

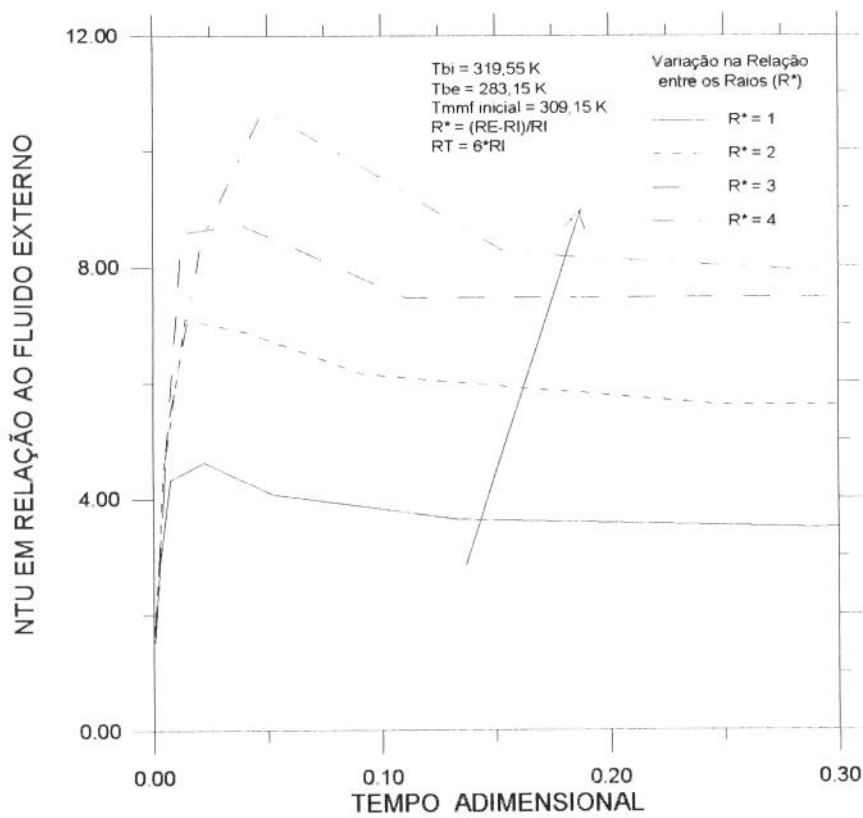


Figura 5.21: Comportamento do NTU em relação ao fluido externo com o tempo adimensional em função da relação entre os raios (R^*).

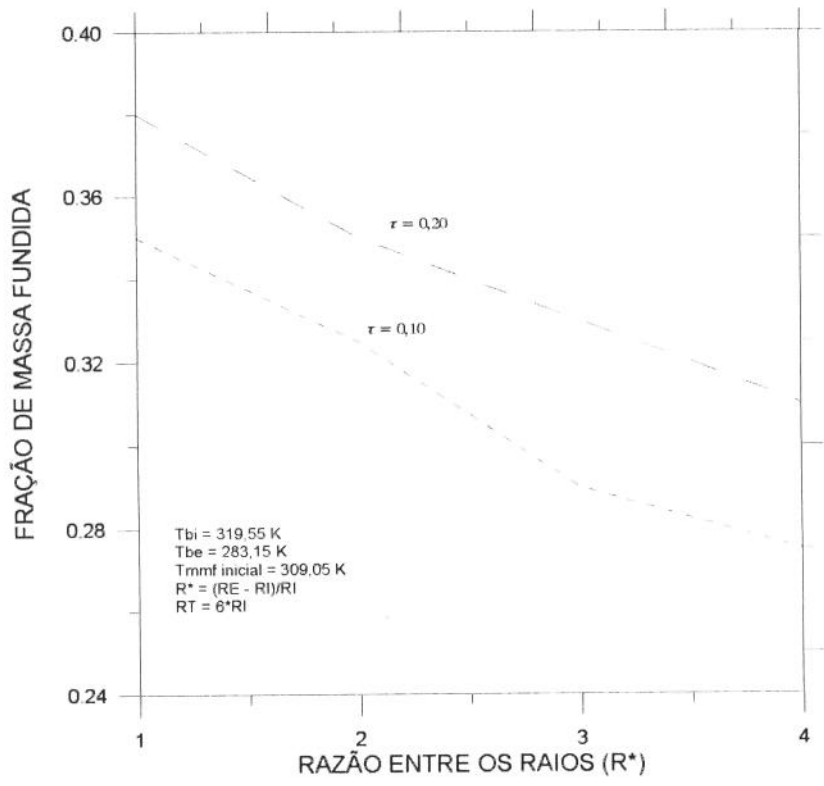


Figura 5.22: Comportamento da fração de massa fundida com a relação entre os raios (R^*).

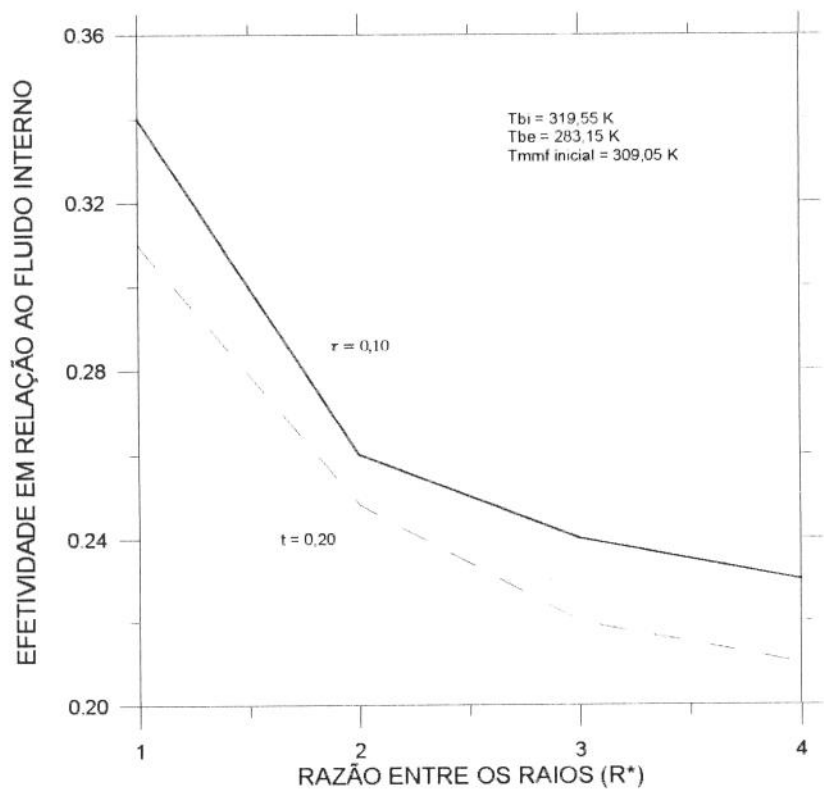


Figura 5.23: Comportamento da efetividade em relação ao fluido interno com a relação entre os raios (R^*).

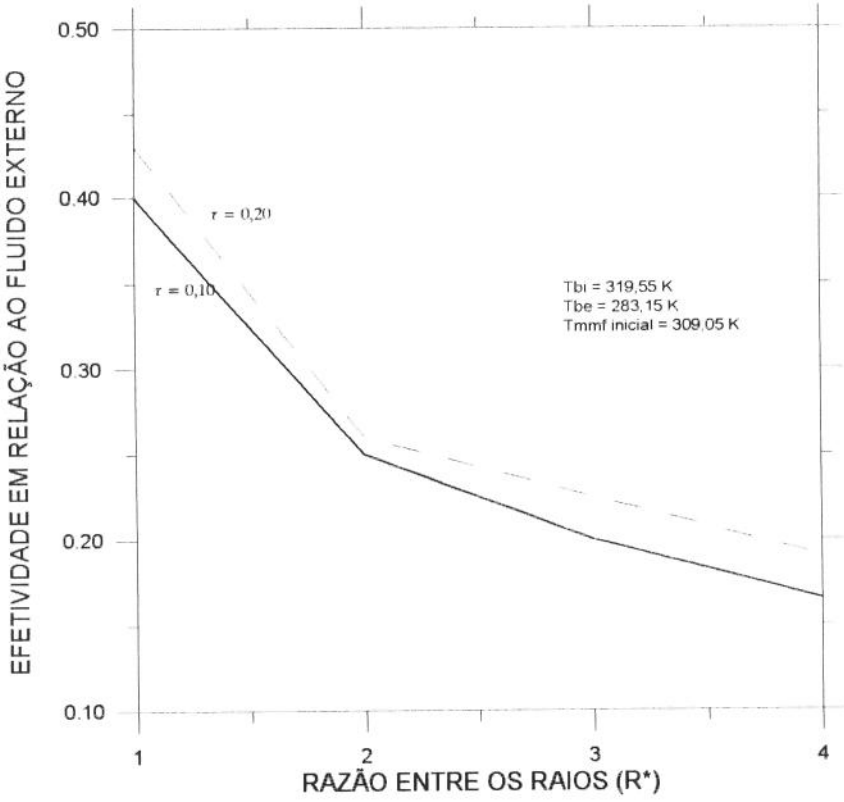


Figura 5.24: Comportamento da efetividade em relação ao fluido externo com a relação entre os raios (R^*).

O NTU para os fluidos interno e externo, são mostrados nas figuras (5.25) e (5.26). em função do aumento de R^* . Os valores de NTU aumentam com o valor de R^* , isto pode ser explicado pela quantidade de massa solidificada ser maior com o aumento de R^* .

A figura (5.27) mostra o comportamento da efetividade, NTU e do tempo adimensional necessário para uma fusão completa do material de mudança de fase, ou seja, o carregamento da unidade armazenadora em função do R^* . Observamos que o tempo adimensional para uma fusão completa e o NTU aumentam com o aumento de R^* , já a efetividade diminui com este aumento.

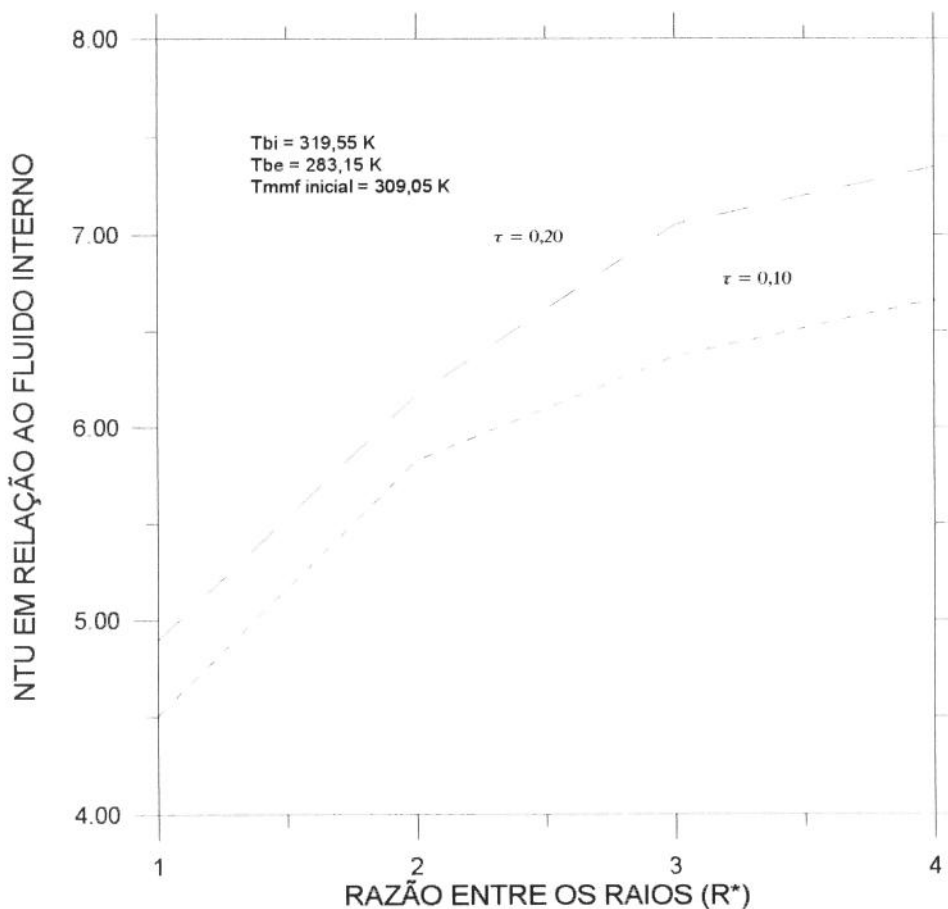


Figura 5.25: Comportamento do NTU em relação ao fluido interno com a relação entre os raios (R^*).

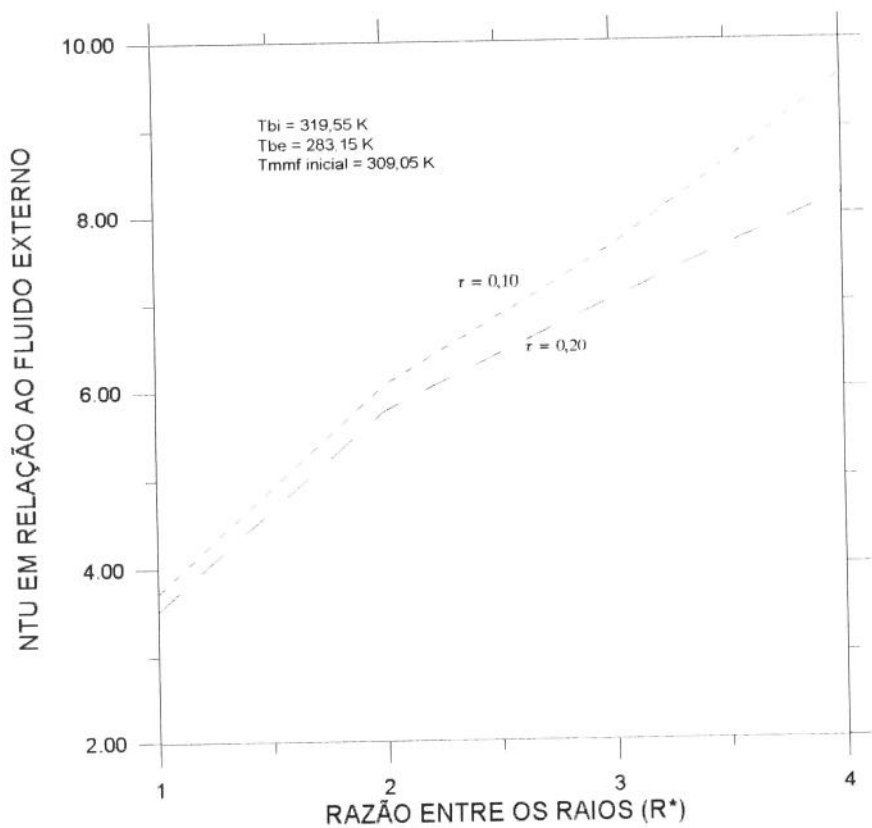


Figura 5.26: Comportamento do NTU em relação ao fluido externo com a relação entre os raios (R^*).

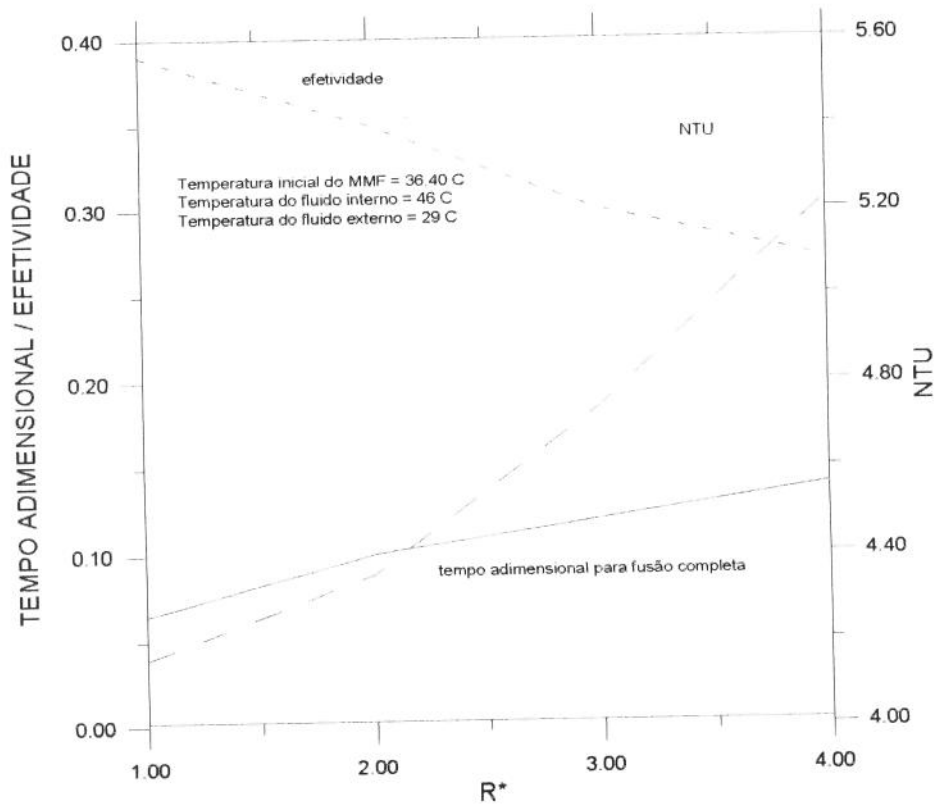


Figura 5.27: Comportamento da efetividade, NTU e do tempo adimensional necessário para uma fusão completa com da relação entre os raios (R^*).

5.2.3 Efeito da variação do número de aletas

Neste trabalho, foi estudados a influência das aletas na unidade armazenadora e comparado este resultado com o caso da unidade sem aletas. Os parâmetros geométricos são os mesmos descritos na tabela (5.2) e os parâmetros operacionais foram mostrados na tabela (5.1) sendo que as temperaturas do fluido interno e externo são para o caso A.

Na figura (5.28) temos o comportamento da fração de massa solidificada, efetividade e do NTU para uma unidade armazenadora sem aletas.

Considerando uma unidade armazenadora aletada, variou-se o número de aletas internas e externas de 2 à 10, sendo que a utilização de aletas causa o aumento da taxa de calor e portanto, a fração de massa solidificada/fundida.

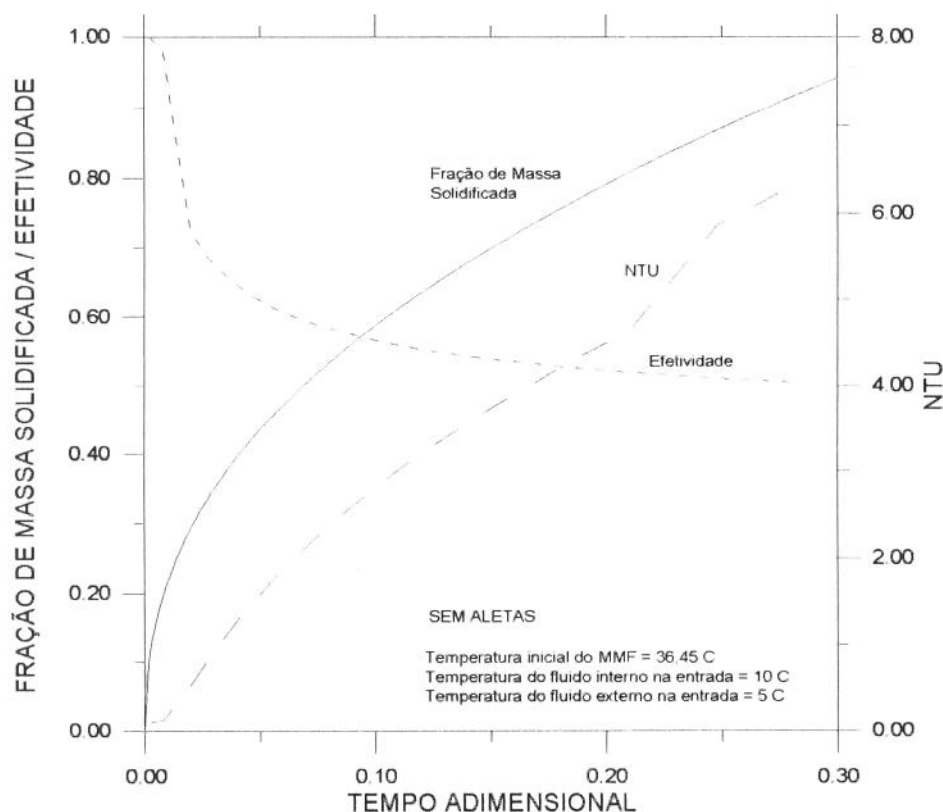


Figura 5.28: Comportamento da fração de massa solidificada, efetividade e NTU com o tempo adimensional para uma unidade armazenadora sem aletas.

Na figura (5.29) é mostrado o comportamento da fração da massa fundida em função do número de aletas. Como pode ser verificado o aumento do número de aletas aumenta a fração de massa fundida em relação ao caso sem aletas, isto pode ser explicado pela penetração da aleta no material de mudança de fase provocando maior troca de calor e

portanto menor tempo de solidificação/fusão para uma certa massa de material de mudança de fase.

O comportamento da fração de massa solidificada, efetividade e do NTU para o caso de uma unidade armazenadora com 2 aletas internas e 2 aletas externas é mostrado na figura (5.30).

As figuras (5.31), (5.32) e (5.33) mostram a fração de massa solidificada, a efetividade e o NTU em função do número de aletas para vários intervalos de tempo e podemos verificar que a fração de massa solidificada aumenta com o aumento do número de aletas, a efetividade decresce com o aumento do número de aletas e o NTU aumenta com o aumento do número de aletas.

A figura (5.34) mostra o comportamento da efetividade, do NTU e do tempo para uma solidificação completa em função do número de aletas, onde podemos observar que o tempo diminui, a efetividade decresce e o NTU aumenta devido a maior troca de calor que ocorre com o aumento no número de aletas.

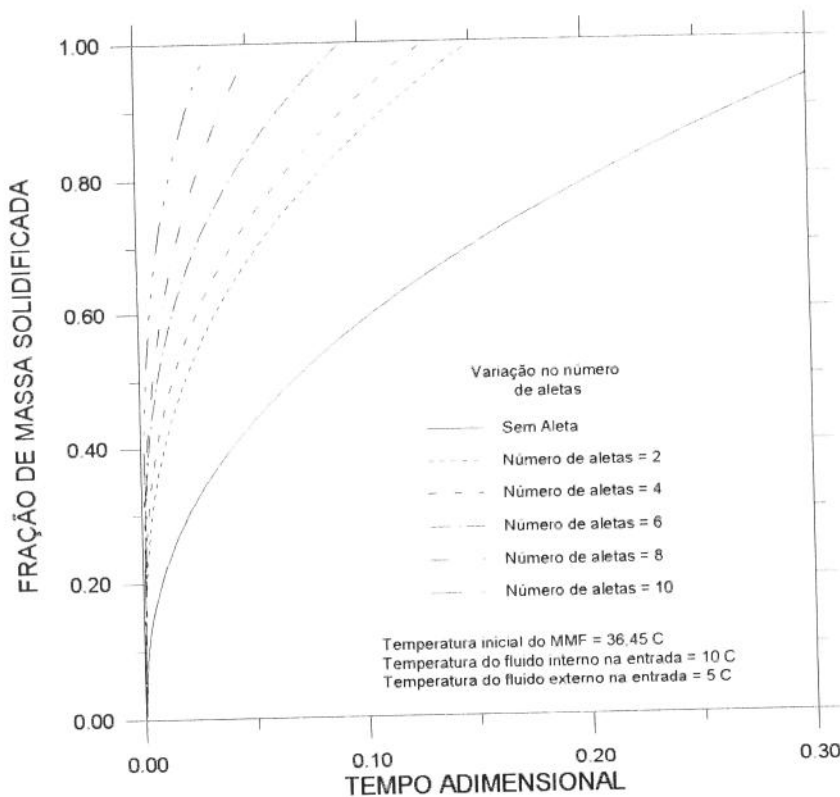


Figura 5.29: Comportamento da fração de massa solidificada com o tempo adimensional em função da variação do número de aletas

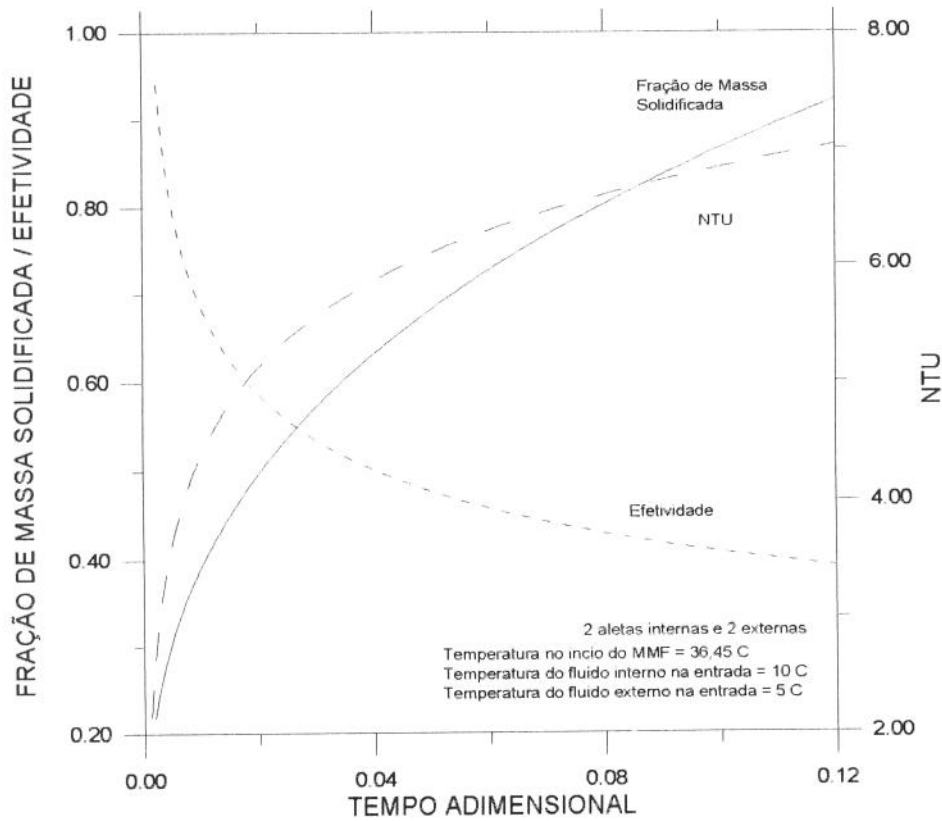


Figura 5.30: Comportamento da fração de massa solidificada, efetividade e NTU com o tempo adimensional para o caso de armazenadores com 2 aletas.

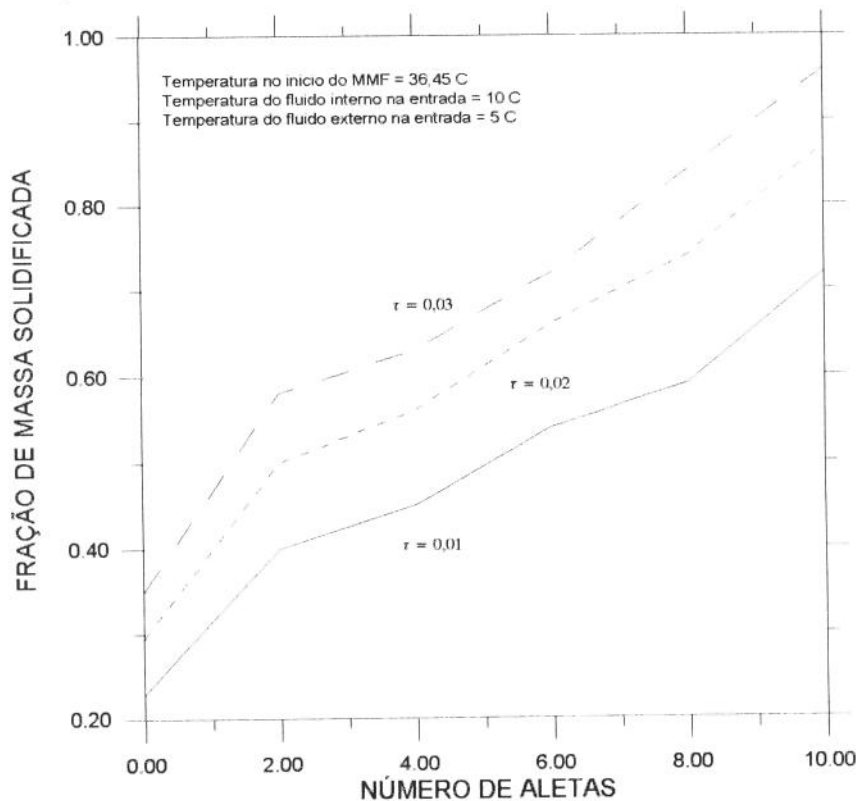


Figura 5.31: Comportamento da fração de massa solidificada com a variação do número de aletas

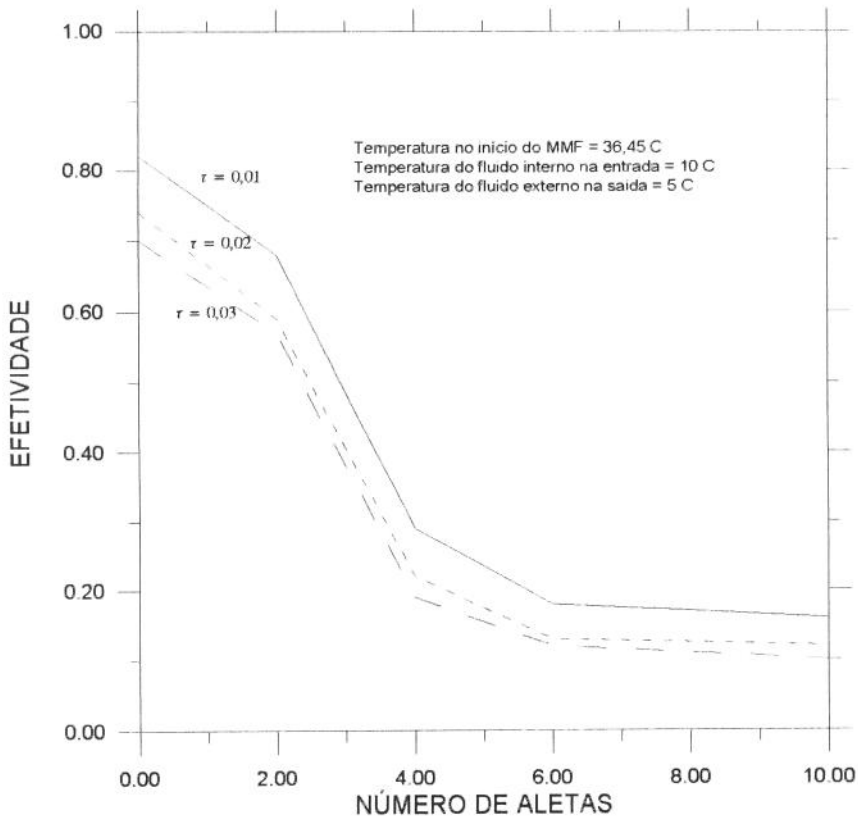


Figura 5.32: Comportamento da efetividade com a variação do número de aletas

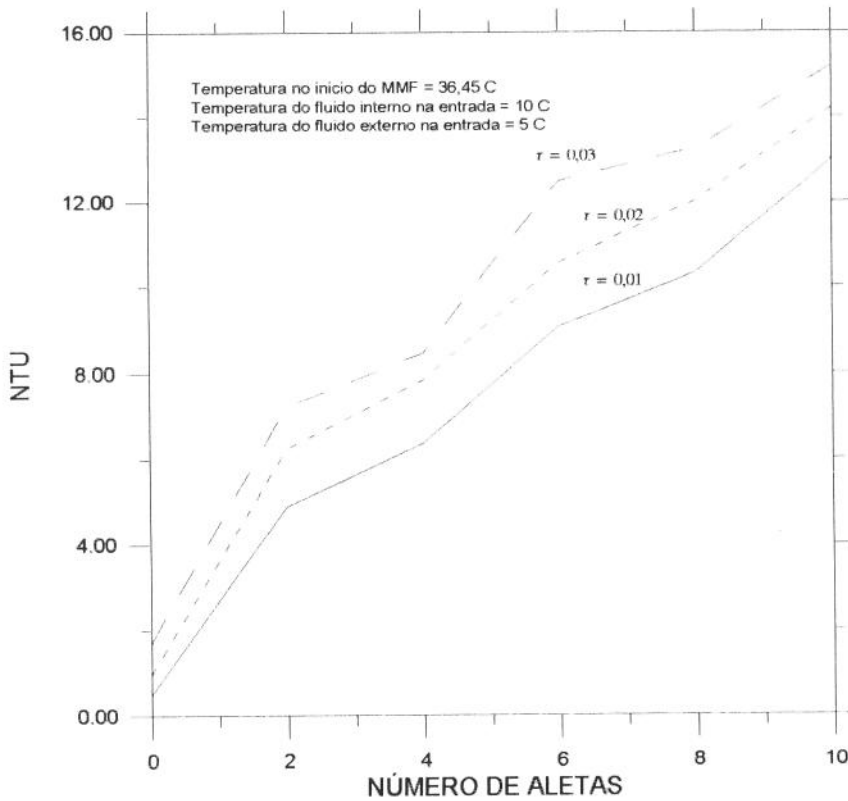


Figura 5.33: Comportamento do NTU com a variação do número de aletas

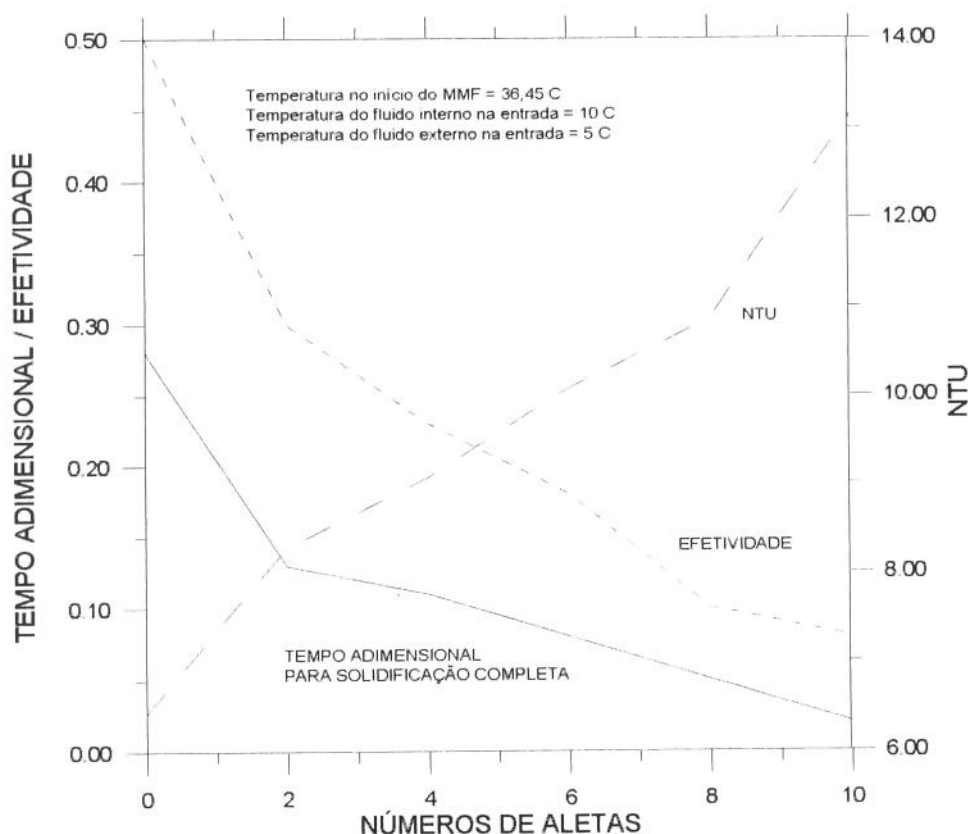


Figura 5.34: Comportamento da efetividade, NTU e do tempo adimensional para uma solidificação completa em função do número de aletas.

5.2.4 Efeito do comprimento das aletas.

A unidade armazenadora estudada possui aletas internas e externas. Neste trabalho considerou-se que as aletas internas tem as mesmas dimensões das externas, ou seja, a mesma espessura de 5° e o mesmo comprimento definido com a diferença entre o raio externo da aleta e o raio da base.

Utilizando os parâmetros operacionais descritos na tabela (5.1) para o caso E, e os parâmetros geométricos descritos na tabela (5.2), somente variando o comprimento das aletas obtivemos as curvas (5.35) à (5.39), que mostram a influência deste sobre a geometria da unidade armazenadora.

A figura (5.35) mostra a influência do comprimento da aleta na fração de massa fundida para diversos tempos adimensionais. Observamos que o aumento do comprimento da aleta causa o aumento da fração de massa fundida, pois aumenta a área de troca térmica. Notamos que mesmo aumentando comprimento da aleta para diferentes tempos adimensionais a fração de massa é a mesma.

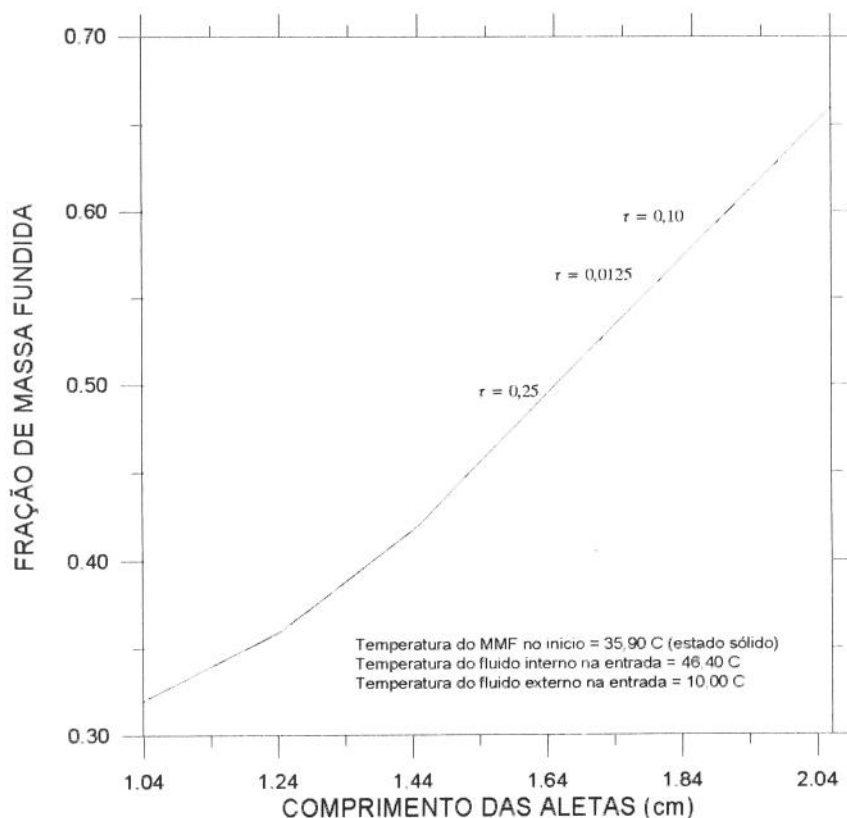


Figura 5.35: Comportamento da fração de massa fundida com o comprimento das aletas

Na figura (5.36) observamos que a efetividade em relação ao fluido interno tende a diminuir com o aumento do comprimento da aleta. Já a figura (5.37) mostra que a efetividade em relação ao fluido externo tende a aumentar, devido a presença do fluido externo ser mais sentida com o aumento do comprimento da aleta, e nas condições operacionais estudadas o fluido externo encontra-se a uma temperatura menor que a temperatura de fusão do material mudança de fase, resfriando este material, dificultando a mudança de fase do material.

A influência do comprimento da aleta sobre o NTU em relação ao fluido interno pode ser observada na figura (5.38) para diversos tempo adimensionais. Nesta figura temos que o NTU tende a aumentar com o aumento do comprimento das aletas. A figura (5.39) mostra a influência do comprimento da aleta em relação ao NTU para o fluido externo e observamos que este tende a diminuir do comprimento da aleta, devido a ação do fluido externo sobre o material de mudança de fase.

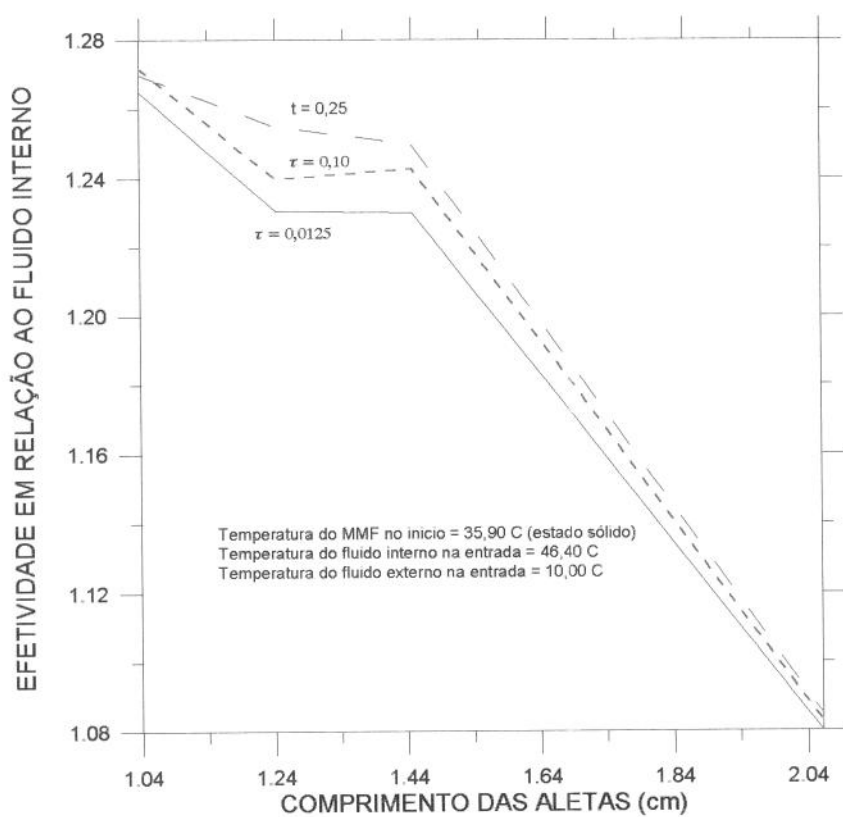


Figura 5.36: Comportamento da efetividade em relação ao fluido interno com o comprimento das aletas.

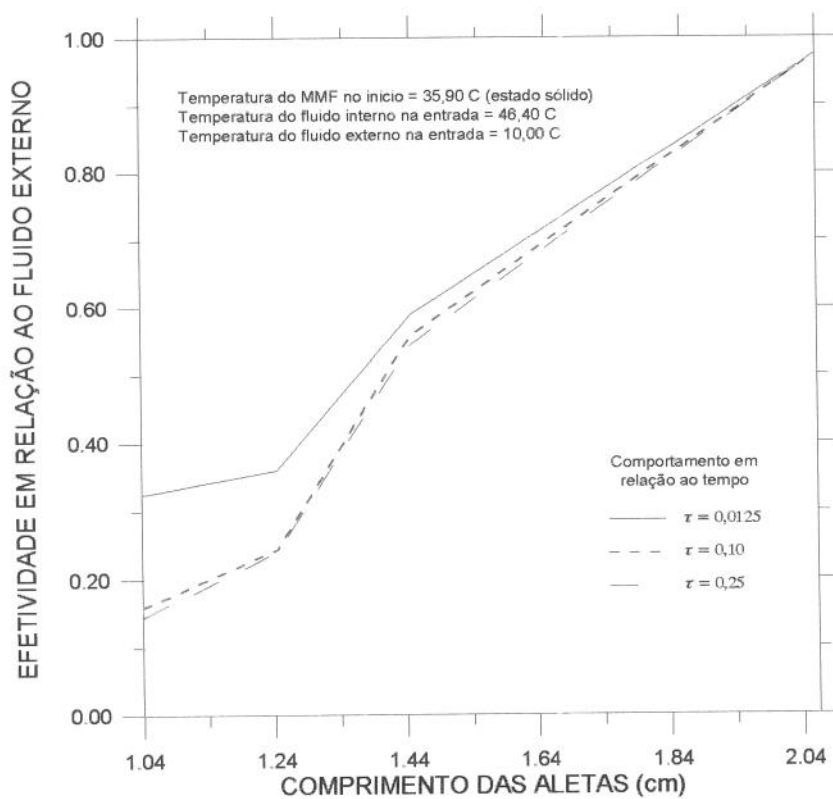


Figura 5.37: Comportamento da efetividade em relação ao fluido externo com o comprimento das aletas.

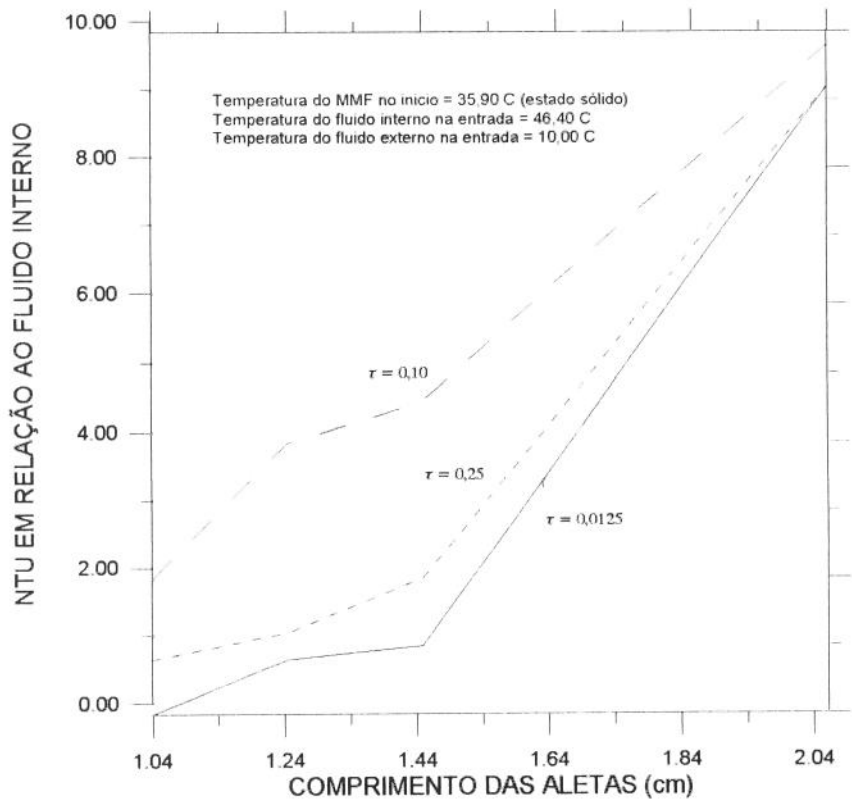


Figura 5.38: Comportamento do NTU em relação ao fluido interno com o comprimento das aletas.

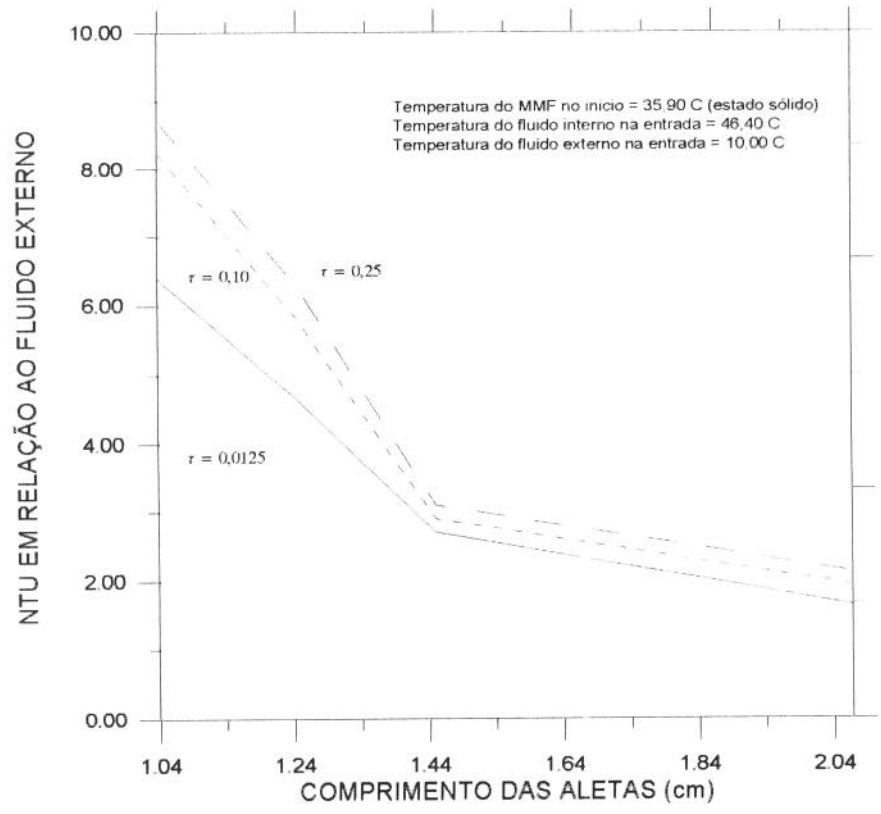


Figura 5.39: Comportamento do NTU em relação ao fluido externo com o comprimento das aletas.

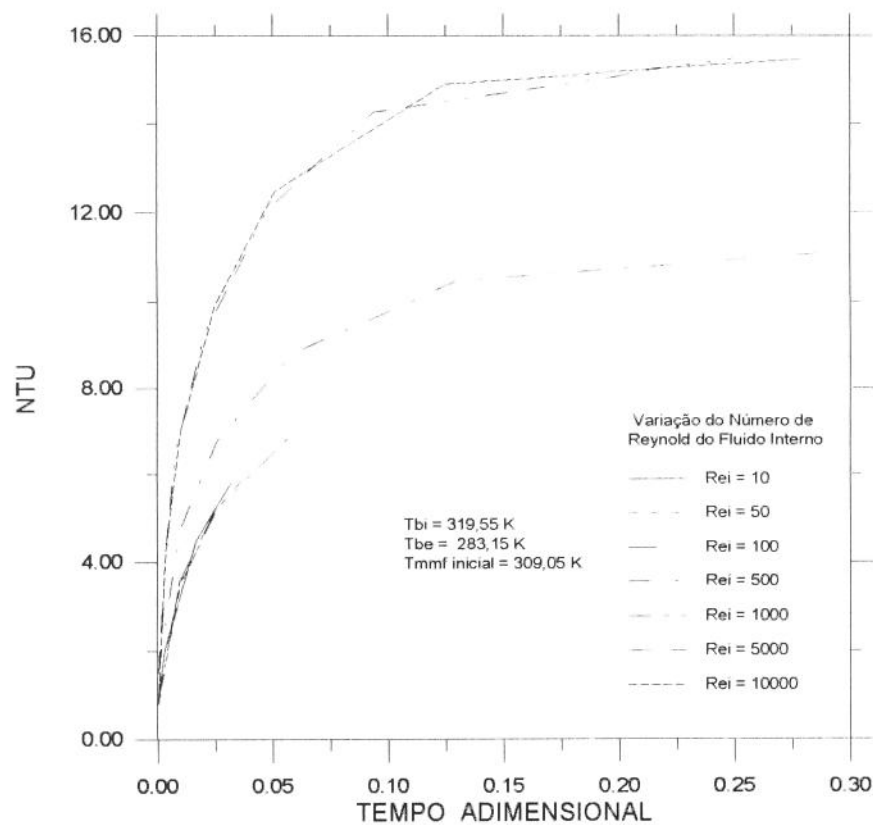


Figura 5.48: Comportamento do NTU em função do tempo adimensional para diversos número de Reynolds em relação ao fluido interno.

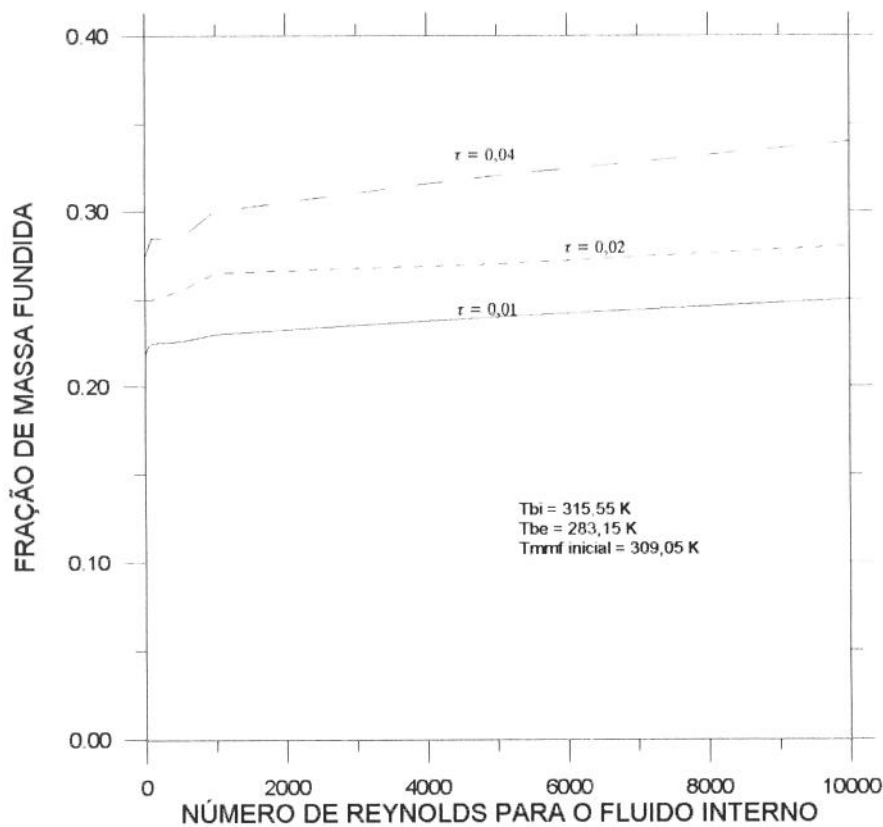


Figura 5.49: Comportamento da fração de massa fundida em função do número de Reynolds em relação ao fluido interno.

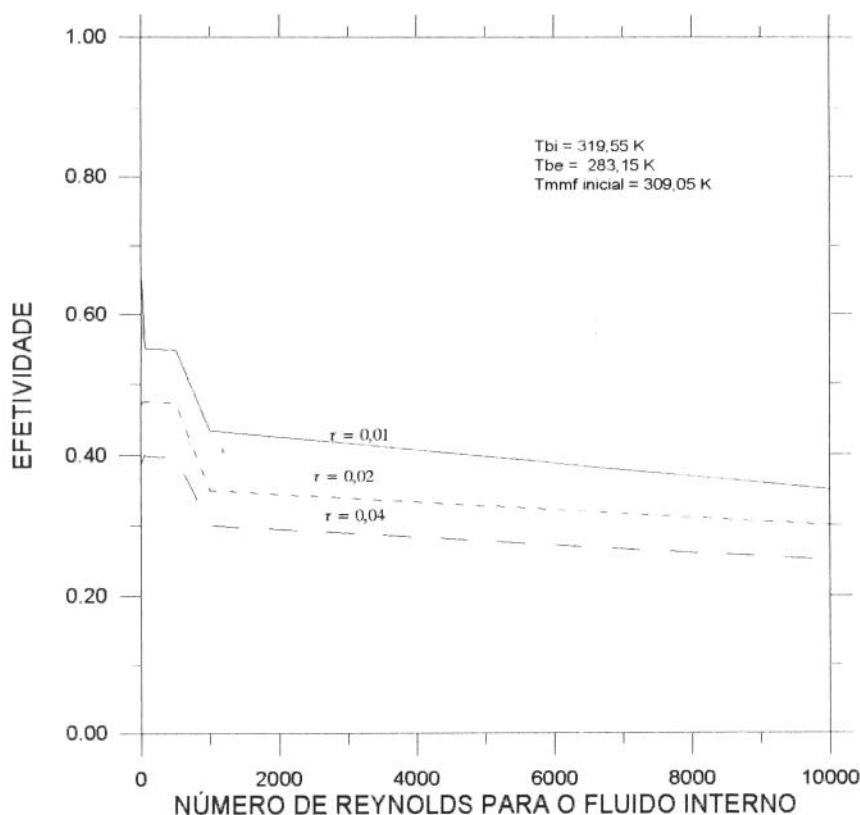


Figura 5.50: Comportamento da efetividade em função do número de Reynolds em relação ao fluido interno.

A figura (5.51) mostra a influência do número de Reynolds para o fluido interno sobre o NTU e observamos que há uma tendência crescente do NTU com o número de Reynold.

A figura (5.52) mostra o comportamento da efetividade, NTU e do tempo adimensional para uma fusão completa, observamos que em relação ao tempo adimensional para a fusão completa há uma tendência decrescente com o aumento do número de Reynold, e a partir de Reynolds 1000 esta tendência suaviza até permanecer constante. Quanto a efetividade está também decresce com o número de Reynold. Já o NTU aumenta conforme o aumento do número de Reynolds mas, para regime laminar há uma tendência constante do NTU para uma fusão completa do material de mudança de fase. Para realizar estes testes a temperatura do fluido externo na entrada da unidade armazenadora foi considerada igual a 29°C .

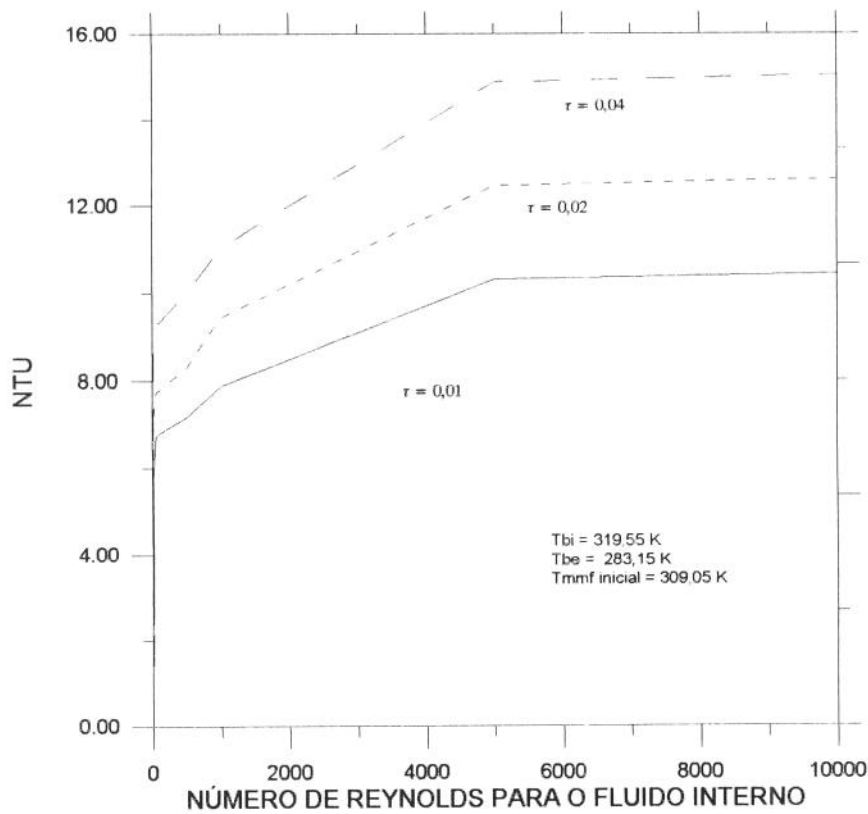


Figura 5.51: Comportamento do NTU em função do número de Reynolds em relação ao fluido interno.

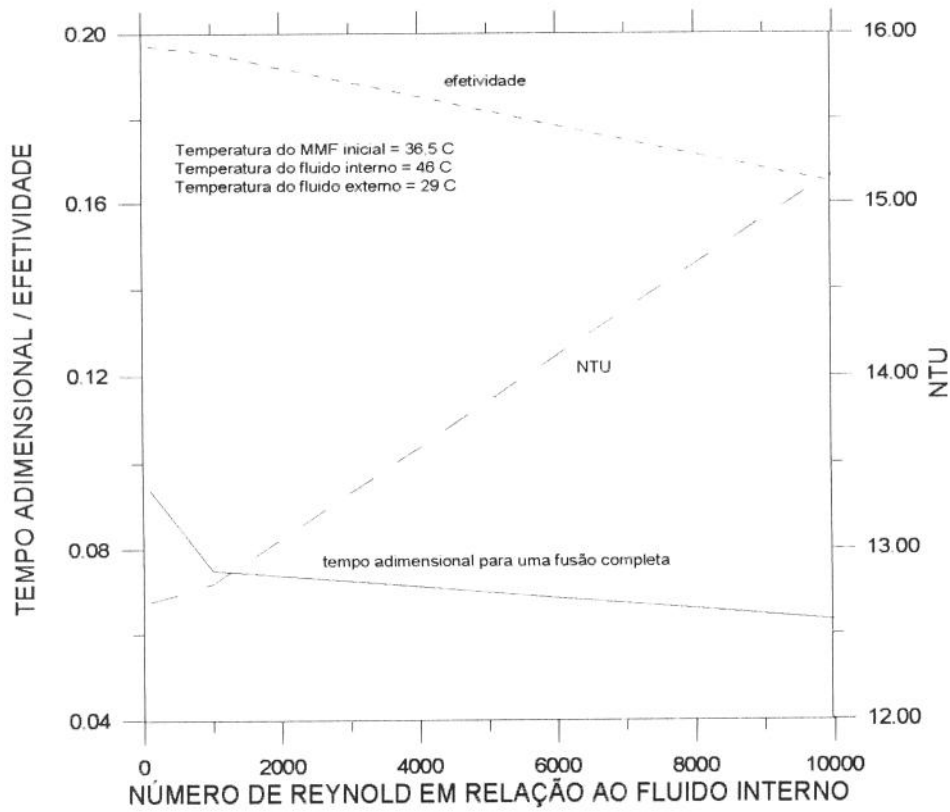


Figura 5.52: Comportamento da efetividade, NTU e do tempo adimensional para uma fusão completa em função do número de Reynold.

5.2.7 Efeito da variação do número de Reynolds baseado no fluido externo.

A influência do número de Reynolds relacionado ao fluido externo sobre a unidade armazenadora também foi estudada e pode ser observada nas figuras (5.53) à (5.57). Os dados utilizados para este estudo estão presentes nas tabelas (5.1) e (5.2), sendo que o caso estudado é o caso E, onde o material de mudança de fase encontra-se sólido e o fluido interno entra na unidade armazenadora a uma temperatura superior a temperatura de fusão do material, portanto ocorre o descarregamento da unidade. O número de Reynolds para o fluido externo foi variado de 10 até 1000.

Nas figuras (5.53) e (5.54) mostram o comportamento da fração de massa fundida, efetividade e do NTU para o caso de número de Reynolds em relação ao fluido externo igual a 50 e 500 respectivamente. Nestas figuras observamos que a efetividade aumentou com o tempo e o NTU diminuiu com o tempo, isto pode ser explicado pelo fato que o fluido externo está a uma temperatura inferior a temperatura de fusão do material, assim causando uma resistência a fusão do material. Observamos ainda que esta tendência é notada principalmente para número de Reynolds altos.

Nas figuras (5.55) à (5.7) temos o comportamento da fração de massa fundida, efetividade e do NTU em função do número de Reynolds para o fluido externo.

A figura (5.55) mostra que para valores baixos de Reynold, há uma diferença sensível na fração de massa fundida, depois existe ainda esta diferença mas é menos significativa. Notamos ainda que há um aumento da fração de massa fundida com o número de Reynold.

Na figura (5.56) temos o comportamento da efetividade, e observamos que esta aumentou com o número de Reynolds e com o tempo adimensional.

A figura (5.57) mostra o comportamento do número de unidades de transferência (NTU) em relação ao número de Reynold. Observamos que para Reynolds baixo ocorre uma queda acentuada do valor do NTU depois este tende a se estabilizar.

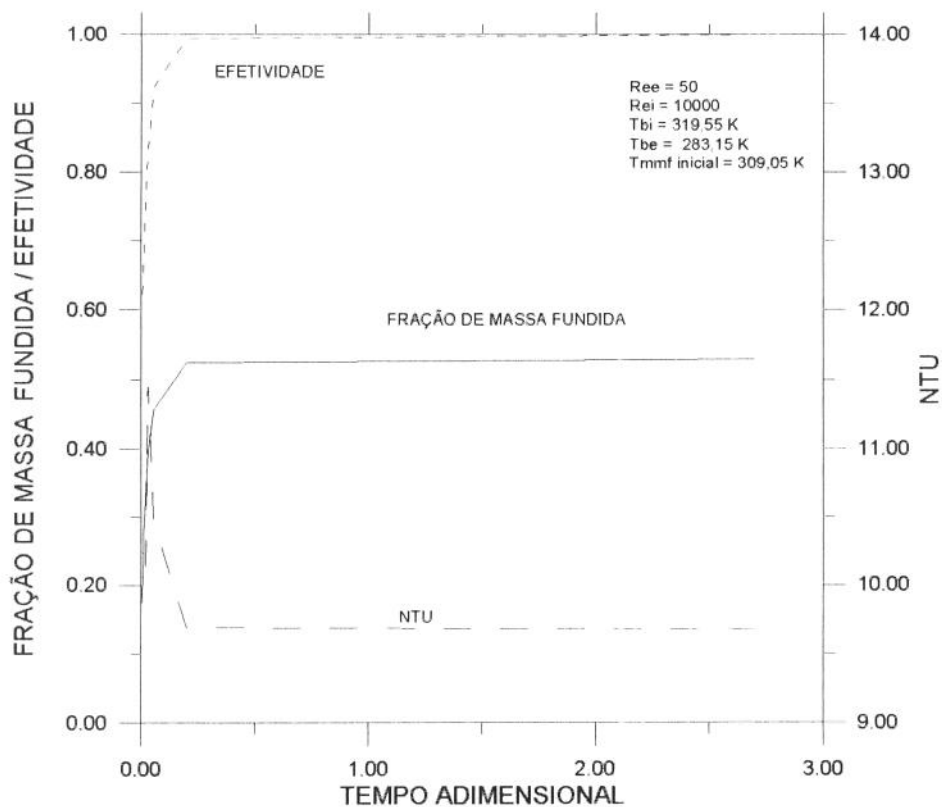


Figura 5.53: Comportamento da fração de massa fundida, efetividade e do NTU em função do tempo adimensional para fluido externo com número de Reynolds igual a 50.

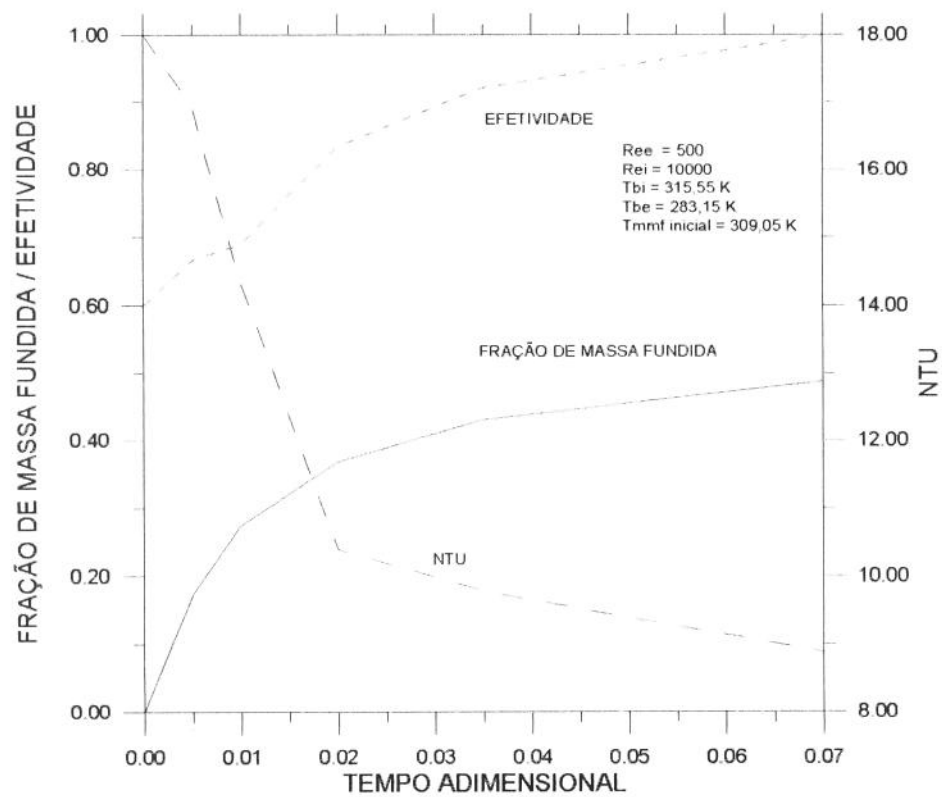


Figura 5.54: Comportamento da fração de massa fundida, efetividade e do NTU em função do tempo adimensional para fluido externo com número de Reynolds igual a 500.

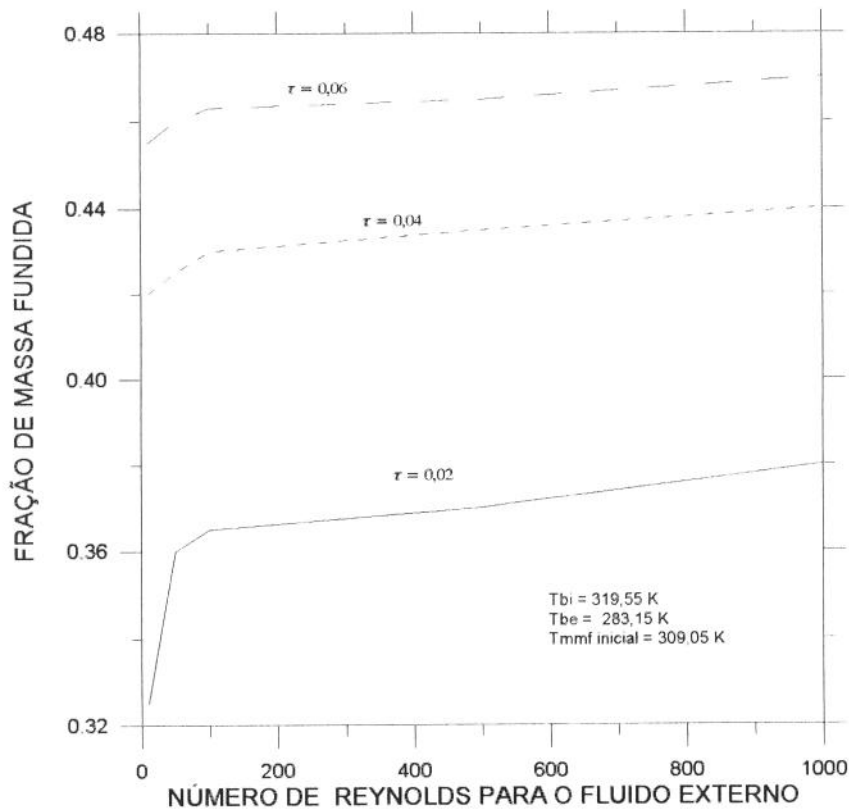


Figura 5.55: Comportamento da fração de massa fundida com o número de Reynolds para o fluido externo.

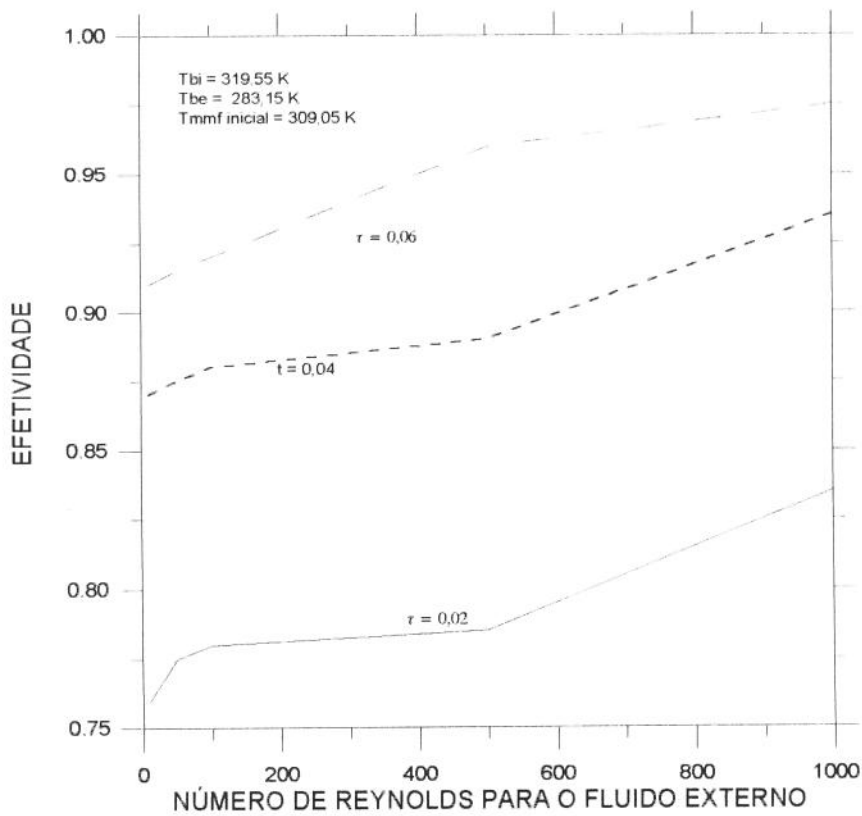


Figura 5.56: Comportamento da efetividade com o número de Reynolds para o fluido externo.

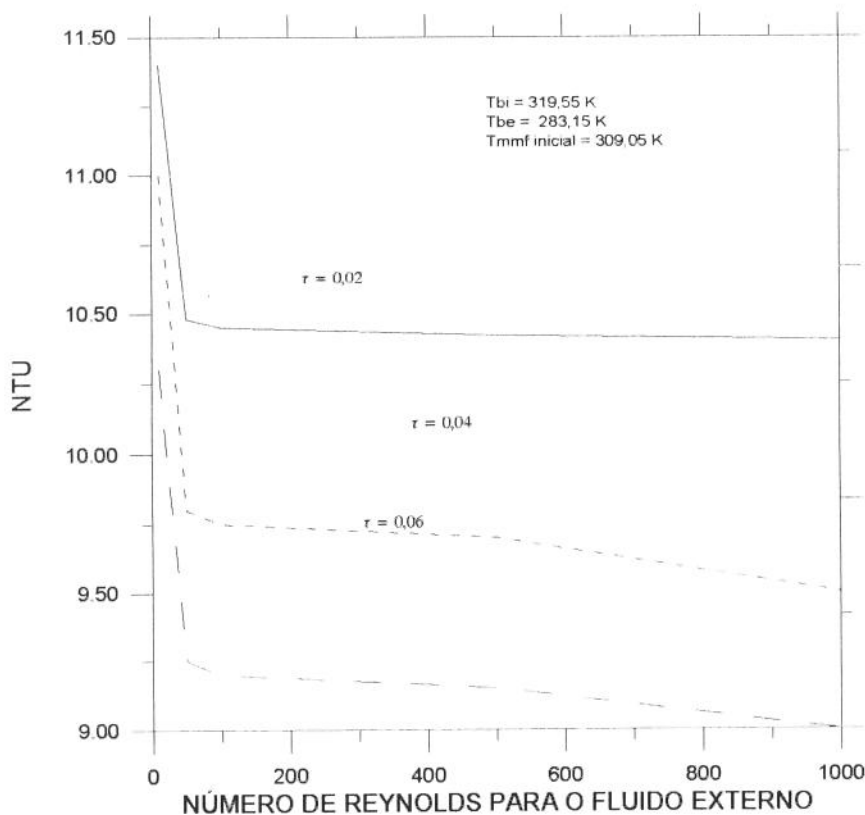


Figura 5.57: Comportamento do NTU com o número de Reynolds para o fluido externo.

5.2.8 Efeito da variação do número de Biot interno.

Como o número de Biot relaciona a influência das resistências devido a convecção e a condução de calor é muito importante saber qual é o comportamento deste em uma unidade armazenadora.

O efeito da variação do número de Biot baseado no fluido interno foi estudada variando seu valor entre 0,5 à 50. As condições geométricas e operacionais são mostradas nas tabelas (5.1) e (5.2), sendo que o caso estudado é o E, onde o material de mudança de fase encontra-se sólido e o fluido interno entra na unidade armazenadora a uma temperatura superior a temperatura de fusão do material.

As figuras (5.58) à (5.60) mostram alguns resultados ilustrando os efeitos da variação de Biot sobre a fração da massa fundida, efetividade e NTU.

Observamos que as tendências das curvas são as esperadas, pois a efetividade e o NTU estão relacionados ao fluido interno, portanto a efetividade decresce com o tempo e o NTU aumenta com o tempo.

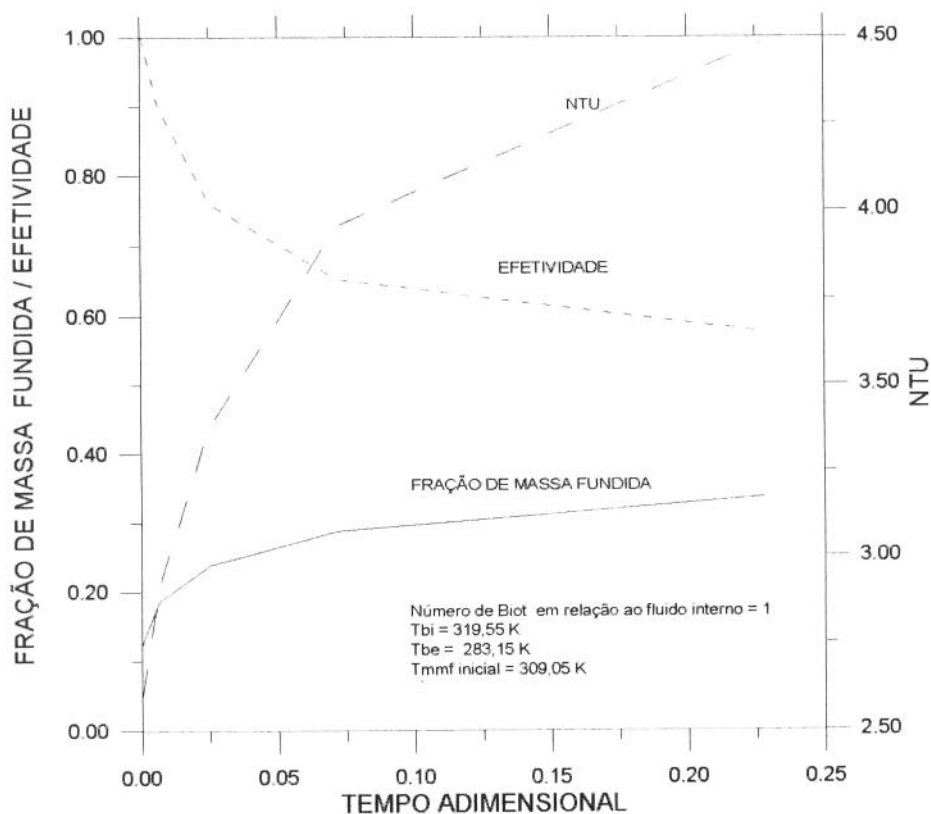


Figura 5.58: Comportamento da fração de massa fundida, efetividade e NTU com o tempo adimensional em relação ao número de Biot para o fluido interno igual a 1.

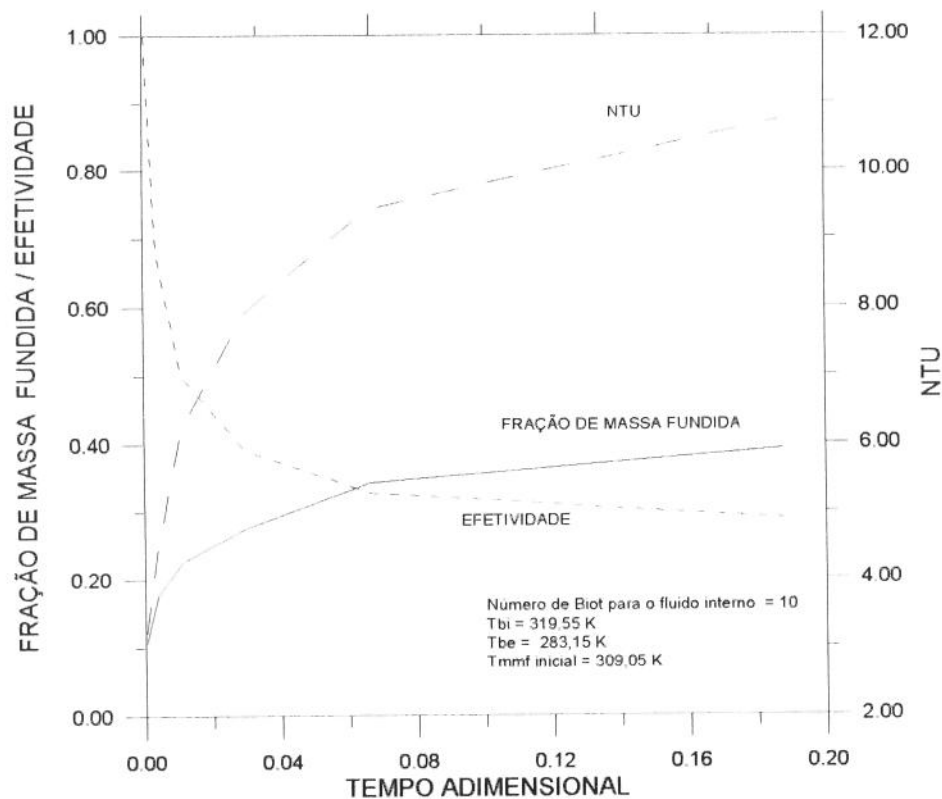


Figura 5.59: Comportamento da fração de massa fundida, efetividade e NTU com o tempo adimensional em relação ao número de Biot para o fluido interno igual a 10.

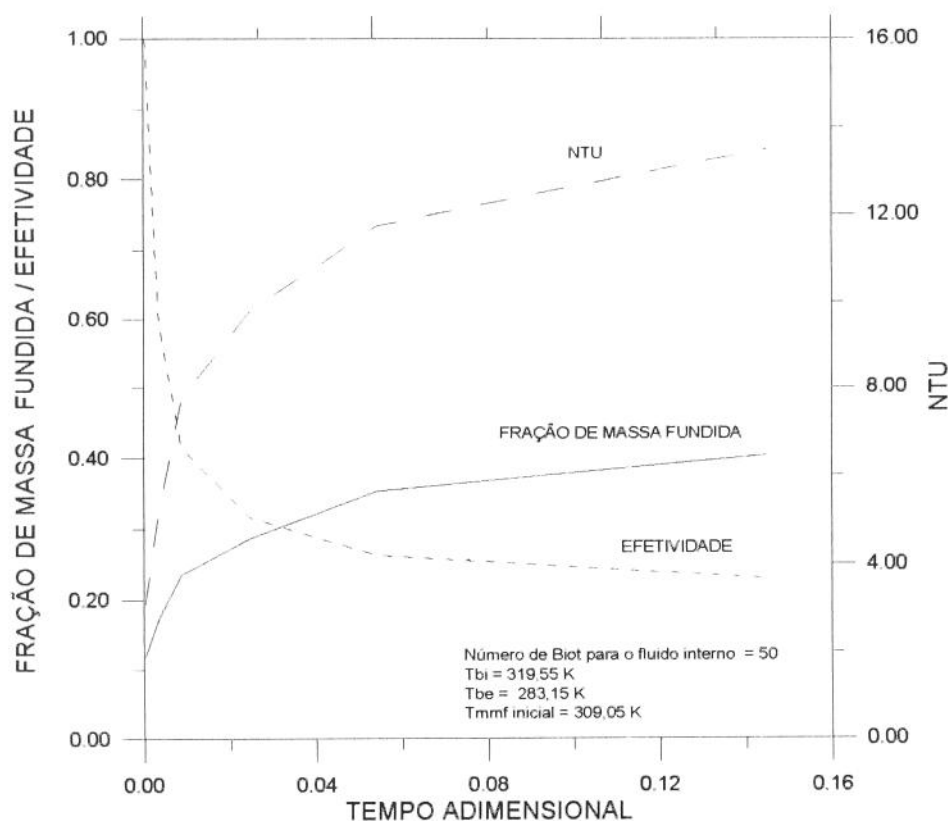


Figura 5.60: Comportamento da fração de massa fundida, efetividade e NTU com o tempo adimensional em relação ao número de Biot para o fluido interno igual a 50.

A figura (5.61) mostra a variação da fração de massa fundida em função da variação do número de Biot. Como pode ser verificado, na faixa de baixo número de Biot, o aumento no seu valor produz aumento correspondente na fração da massa fundida. Após um certo valor a variação causada pelo aumento no número de Biot é muito pequena.

A figura (5.62) mostra o comportamento da efetividade em relação ao número de Biot, podemos observar que esta tende a diminuir com o aumento do Biot, após um determinado valor de Biot a efetividade tende a um valor constante.

Na figura (5.63) temos o comportamento do NTU em relação ao número de Biot, observamos que este tende a aumentar inicialmente com o número de Biot e também se estabilizando após um certo número de Biot.

Na figura (5.64) temos o comportamento da efetividade, do NTU e do tempo adimensional para uma fusão completa do material, notamos que o tempo de fusão tende a diminuir com o aumento do Biot, a efetividade também e o NTU tende a aumentar com o número de Biot.

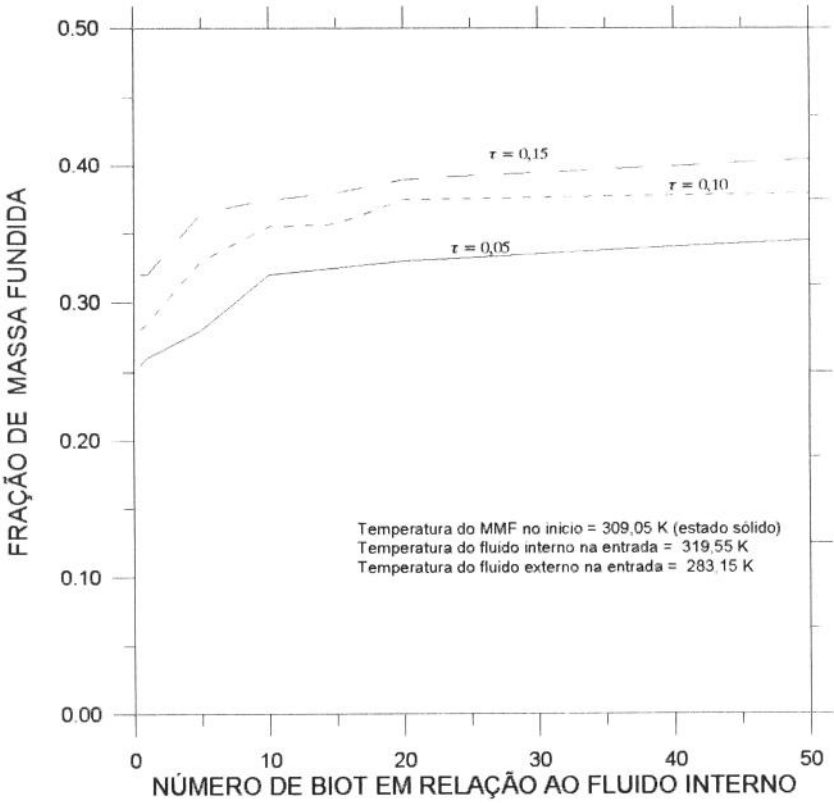


Figura 5.61: Comportamento da fração de massa fundida com o número de Biot para o fluido interno em relação a diversos tempos adimensionais.

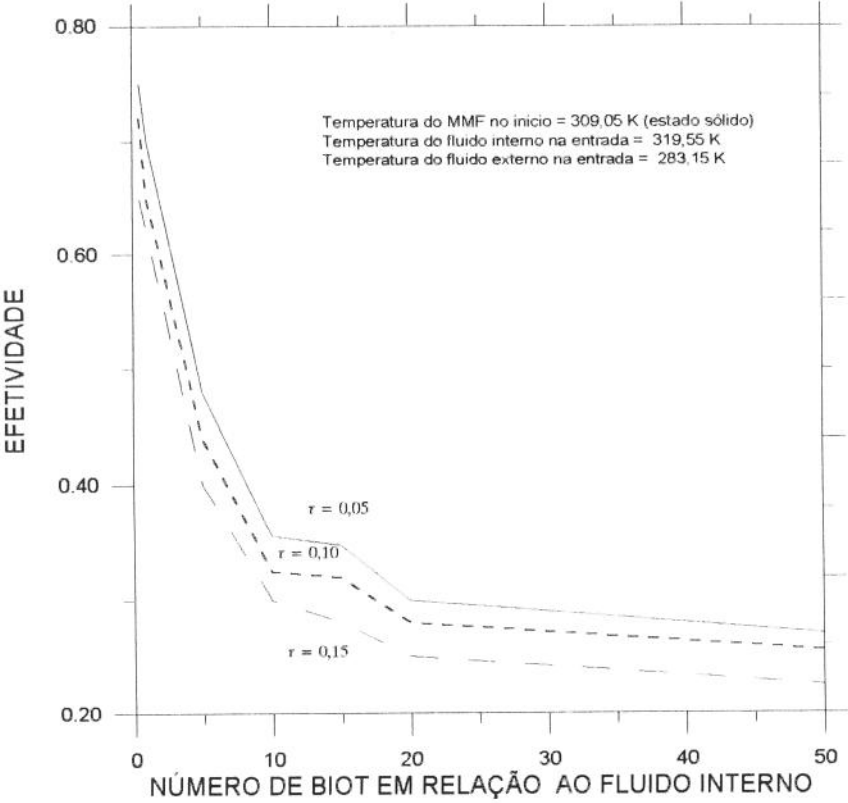


Figura 5.62: Comportamento da efetividade com o número de Biot para o fluido interno em relação a diversos tempos adimensionais.

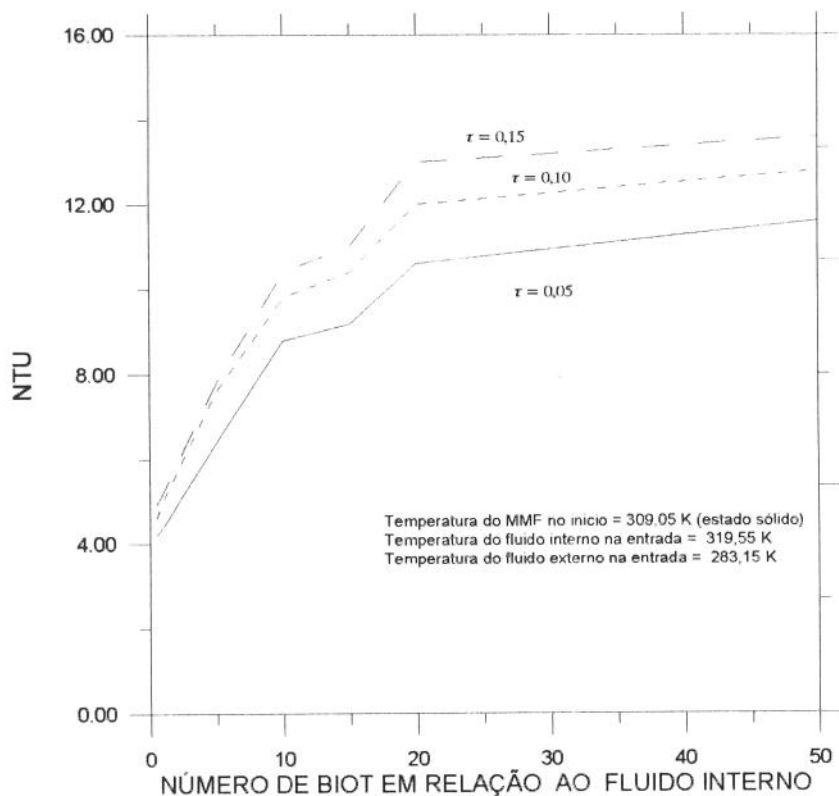


Figura 5.63: Comportamento do NTU com o número de Biot para o fluido interno em relação a diversos tempos adimensionais.

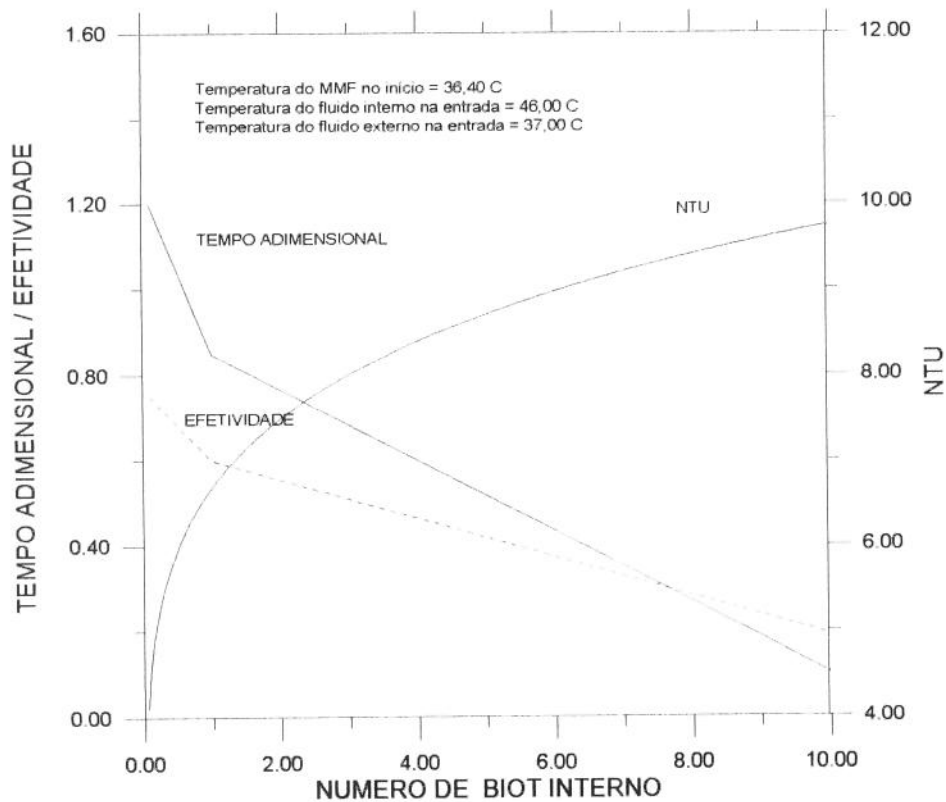


Figura 5.64: Comportamento da efetividade, do NTU e do tempo adimensional de fusão completa com o número de Biot.

5.2.9 Efeito da variação do número de Biot externo.

Em relação ao fluido externo também foi estudado a influência do número de Biot sobre a unidade armazenadora, nas mesmas condições que no caso anterior, variando o número de Biot externo entre 0,01 à 50.

A figura (5.65) mostra o comportamento da fração de massa fundida em função do tempo adimensional para os diversos números de Biot externo e foi verificado que este não influencia a fração de massa fundida.

Em relação ao NTU, a figura (5.66) mostra que ocorre uma pequena variação deste em função do número de Biot e em relação a efetividade, a figura (5.67), mostra que também ocorre uma pequena variação dos valores da efetividade com a variação do número de Biot externo.

Na figuras (5.68) à (5.70) temos os resumos dos resultados confirmando de forma clara esta conclusão.

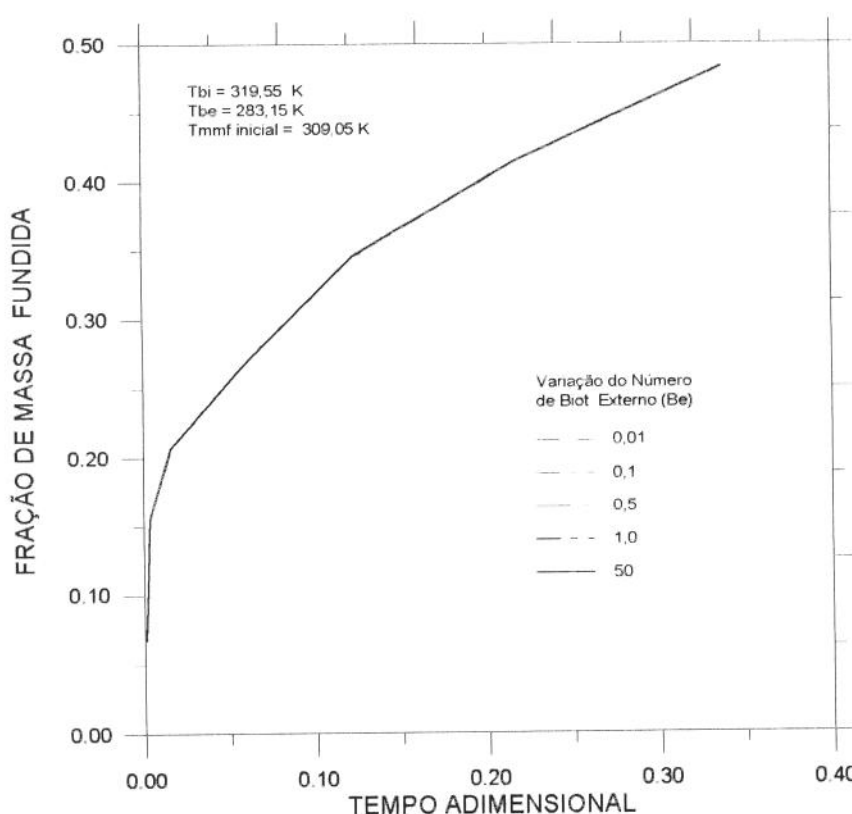


Figura 5.65: Comportamento da fração de massa fundida com o tempo adimensional para diversos número de Biot em relação ao fluido externo.

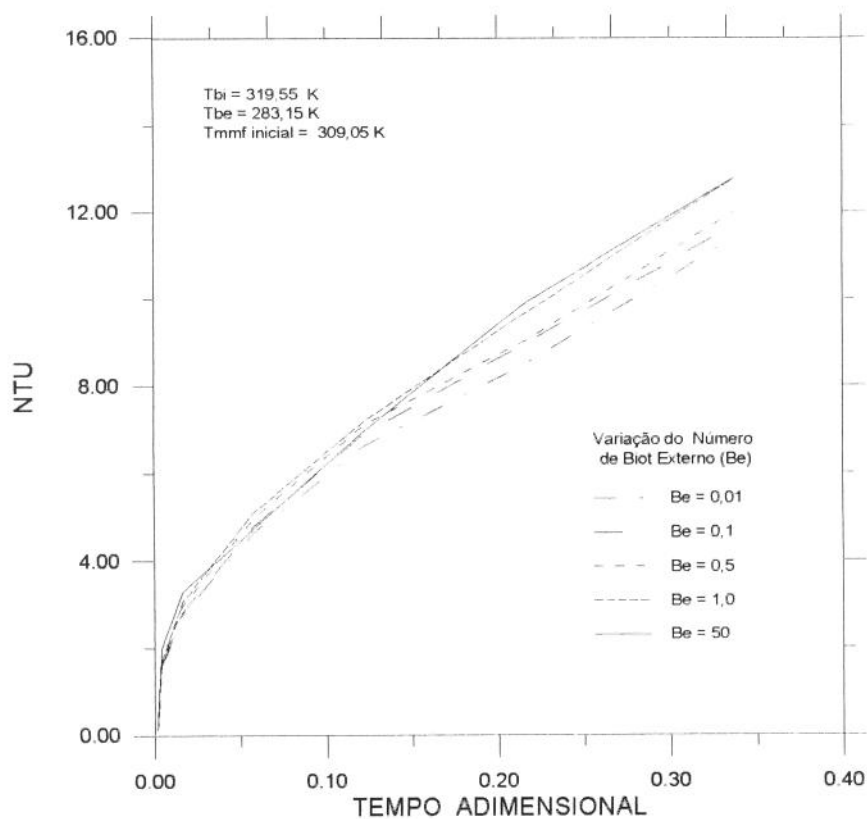


Figura 5.66: Comportamento do NTU com o tempo adimensional para diversos número de Biot em relação ao fluido externo.

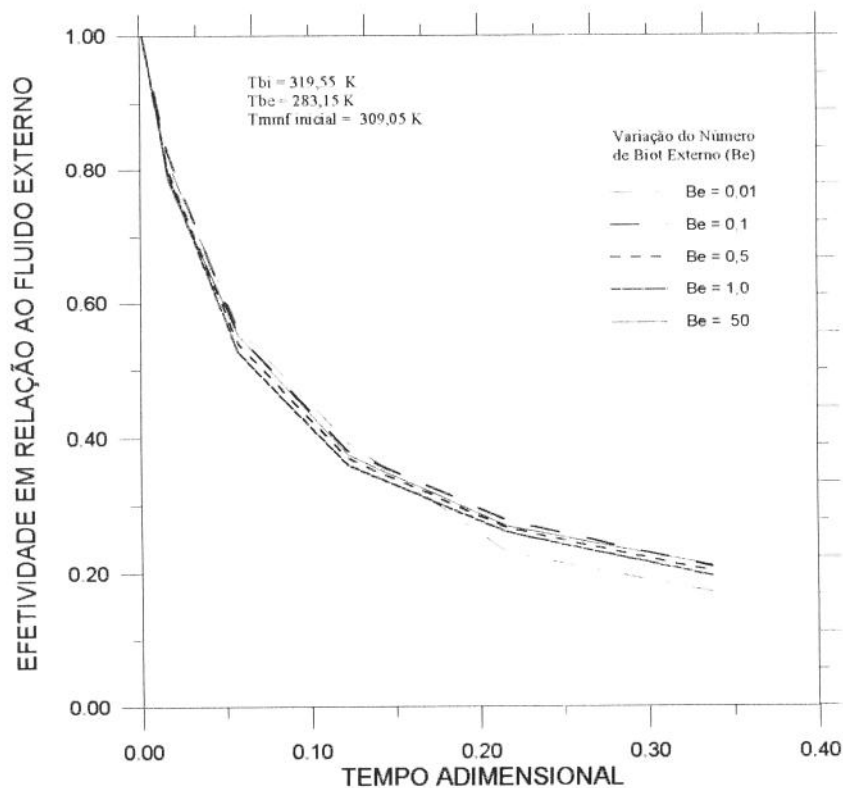


Figura 5.67: Comportamento da efetividade com o tempo adimensional para diversos número de Biot em relação ao fluido externo.

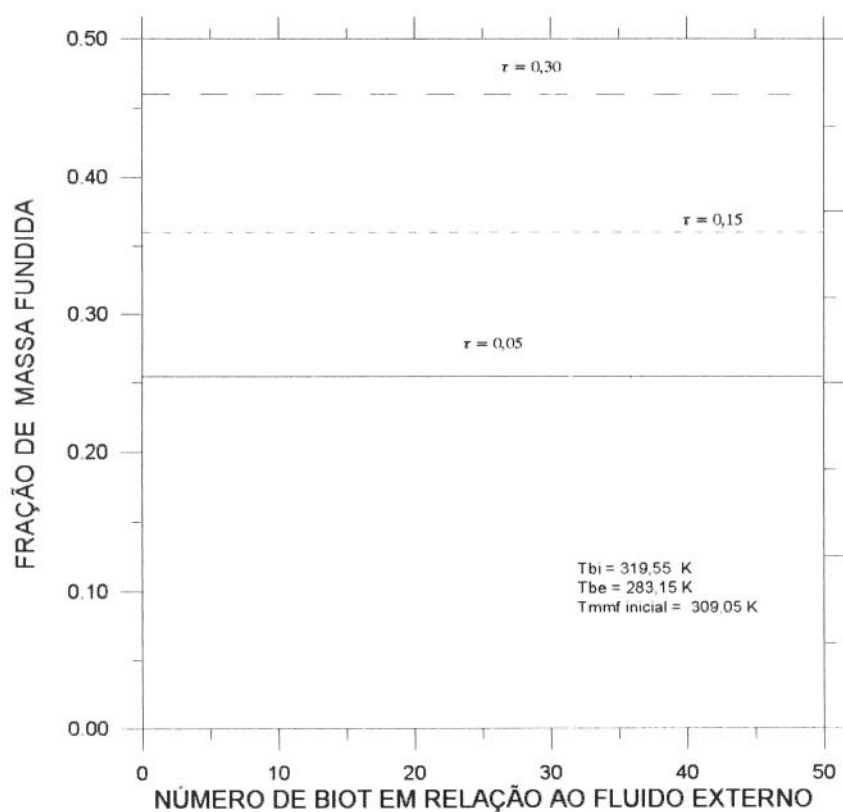


Figura 5.68: Comportamento da fração de massa fundida com número de Biot em relação ao fluido externo para diversos tempos adimensionais.

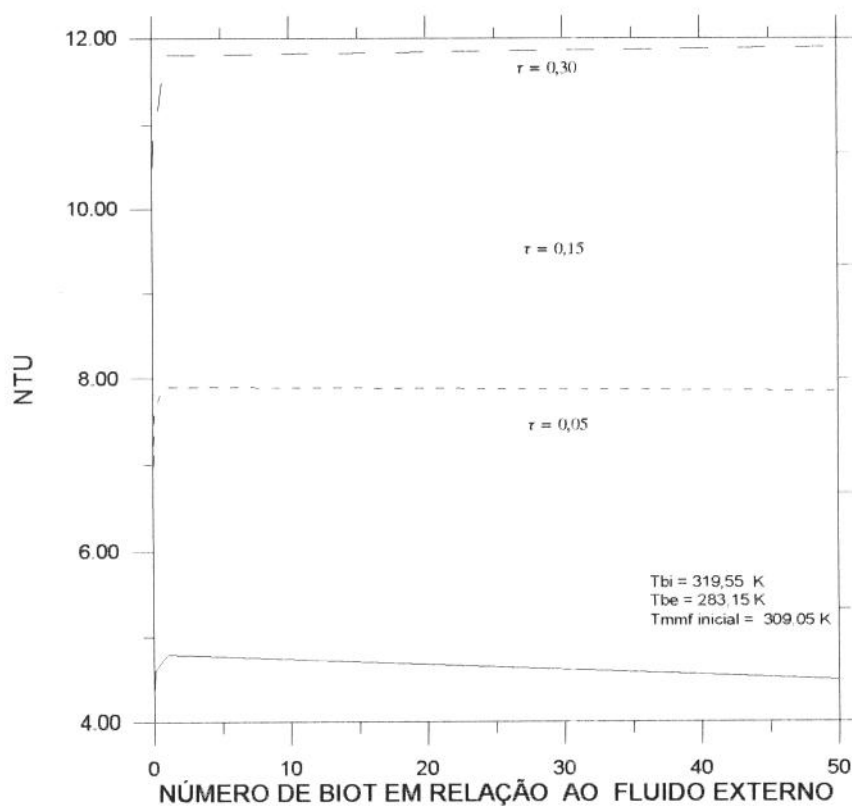


Figura 5.69: Comportamento do NTU com número de Biot em relação ao fluido externo para diversos tempos adimensionais.

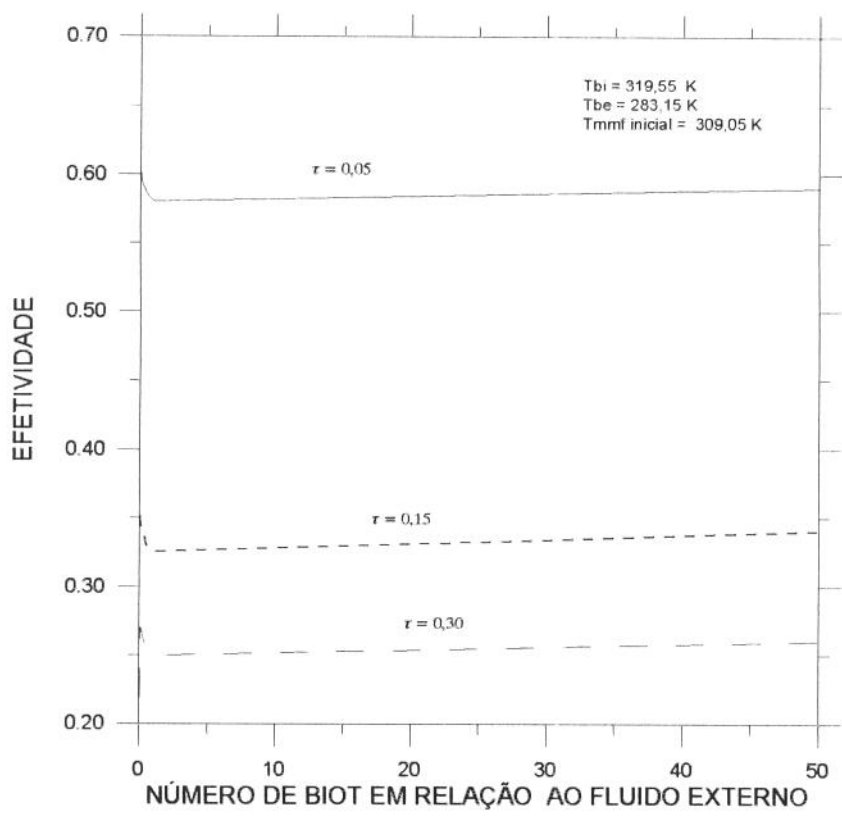


Figura 5.70: Comportamento da efetividade com número de Biot em relação ao fluido externo para diversos tempos adimensionais.

5.2.10 Efeito da temperatura do fluido interno

Estudamos também o efeito da temperatura do fluido interno sobre a unidade armazenadora com ou sem aletas, neste caso o material de mudança de fase utilizado foi a água e os fluidos internos e externos utilizados foi o etileno glicol, cujas as propriedades termofísicas são encontradas na tabela (4.1).

Considerou-se que o material de mudança de fase estava inicialmente líquido à 0,05°C e o fluido interno entra da unidade armazenadora em uma temperatura abaixo da temperatura de congelamento, causando o descarregamento da unidade armazenadora, enquanto o fluido externo é mantido na temperatura de 0,10°C. Foram analisados três condições de temperatura do fluido interno: -5°C, -10°C e -15°C. As condições geométricas são mostradas na tabela (5.2), enquanto as condições operacionais foram:

	Fluido interno	Fluido externo
Número de Reynold	100	10000
Número de Biot	0.2237	45.675

Na figura (5.74) temos o comportamento da fração de massa solidificada em relação a temperatura de entrada do fluido interno. Observamos que para o caso de unidade sem aletas a diferença de temperatura entre o material de mudança de fase e o fluido interno influencia pouco sobre a fração de massa solidificada. Já para o caso de unidade com aletas esta influência é maior.

A figura (5.75) mostra a influência da temperatura do fluido interno sobre a efetividade, podemos observar que para a unidade sem aleta, não ocorre variação sensível da efetividade com a temperatura do fluido interno, para a unidade aletada ocorre uma pequena queda da efetividade com a diminuição da diferença entre a temperatura do material de mudança de fase e a temperatura do fluido interno.

Já a figura (5.76) temos o efeito da temperatura do fluido interno sobre o NTU, observamos que para a unidade com aletas ocorre uma diminuição do NTU com a diminuição da diferença de temperatura entre o material armazenador e o fluido interno, enquanto para a unidade sem aletas ocorre uma diminuição do NTU até quando a temperatura do fluido interno for de -10°C , depois o NTU tende a permanecer constante.

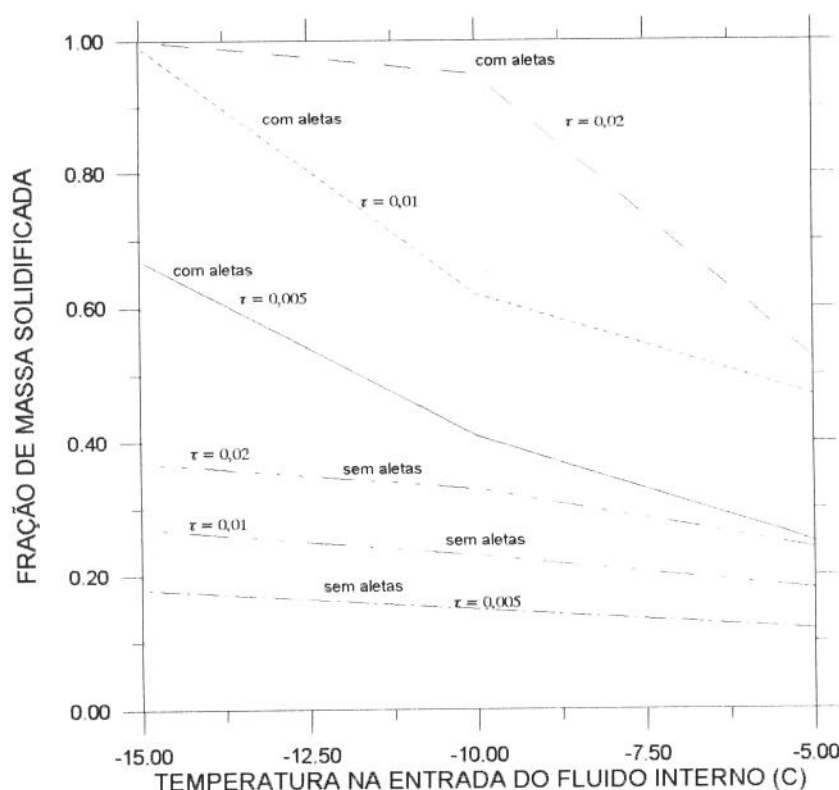


Figura 5.74: Influência da temperatura do fluido interno na entrada da unidade armazenadora sobre a fração de massa solidificada.

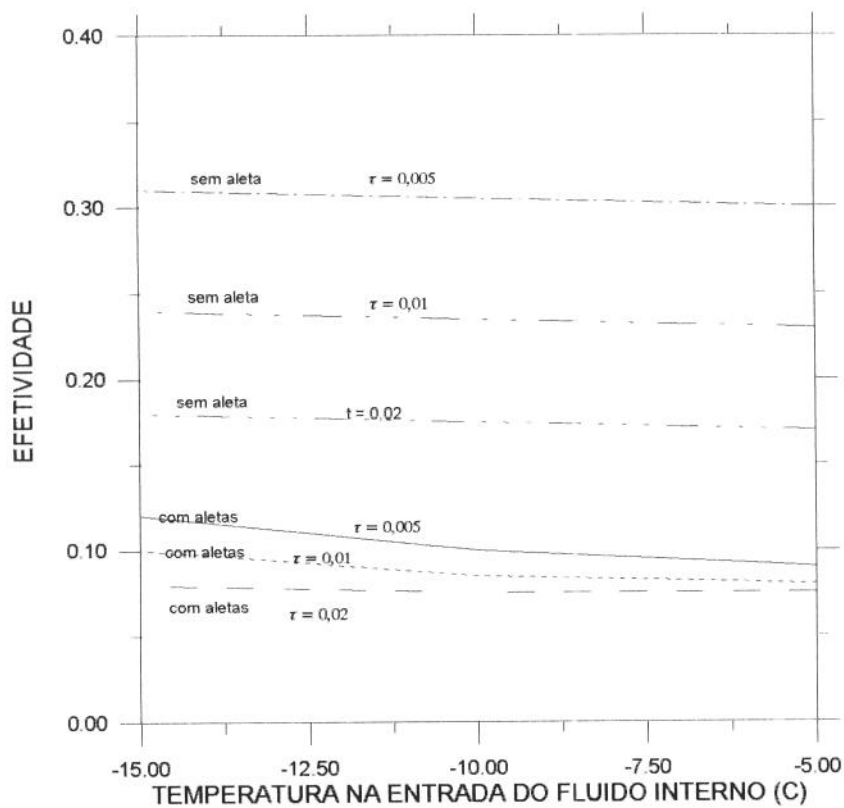


Figura 5.75: Influência da temperatura do fluido interno na entrada da unidade armazenadora sobre a efetividade.

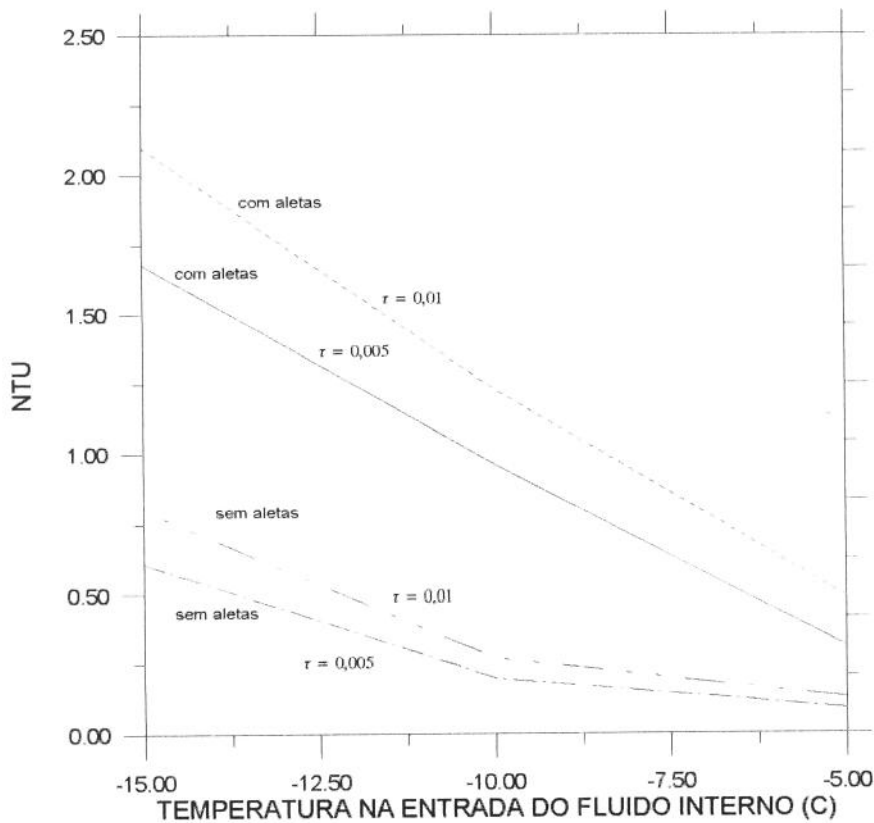


Figura 5.76: Influência da temperatura do fluido interno na entrada da unidade armazenadora sobre o NTU.

5.2.11 Efeito da temperatura do fluido externo

Analizamos também a influência da temperatura do fluido externo sobre a unidade armazenadora com ou sem aletas, também neste caso o material de mudança de fase utilizado foi a água e os fluidos internos e externos utilizados foi o etileno glicol, cujas as propriedades termofísicas são encontradas na tabela (4.1).

Considerou-se que o material de mudança de fase estava inicialmente sólido à $-0,05^{\circ}\text{C}$ e o fluido interno entra na unidade armazenadora a uma temperatura de $-0,10^{\circ}\text{C}$, o fluido externo será responsável pelo carregamento da unidade através de entrada na unidade a temperaturas de 10°C , 15°C e 20°C . As condições geométricas são mostradas na tabela (5.2), enquanto as condições operacionais adotadas são:

	Fluido interno	Fluido externo
Número de Reynold	10000	100
Número de Biot	119.802	0.525

Na figura (5.77) temos o comportamento da fração de massa solidificada em relação ao tempo adimensional em função da temperatura do fluido externo para o caso de unidade armazenadora com e sem aletas. Podemos verificar que aumentado a diferença de temperatura entre o fluido externo e o material de mudança de fase aumenta a fração de material fundido.

O comportamento da efetividade em relação ao tempo adimensional pode ser verificado na figura (5.78), onde notamos que tanto para o caso sem aletas como no caso com aletas não há uma variação sensível da efetividade com a temperatura do fluido externo.

A figura (5.79) mostra o comportamento do NTU com o tempo adimensional em função da temperatura do fluido externo. Notamos que o NTU para o caso sem aletas é maior que para o caso com aletas, e que o NTU diminui com o aumento da diferença entre a temperatura do fluido externo e do material de mudança de fase.

Capítulo 6

Conclusões e Sugestões

A modelagem proposta para representar o armazenador de calor latente anular com aletas alternadas mostrou ser adequada e os aspectos numéricos do programa incluindo a técnica, otimização das grades espaciais e do tempo mostram boa concordância com os resultados obtidos por outros autores tanto experimentais como numéricos.

Fatores de maior influência no projeto e no desempenho do armazenador foram analisados e discutidos. Em relação aos parâmetros geométricos, a geometria das aletas como número, comprimento e o espaço para colocar o material de mudança de fase foram analisados mostrando seus efeitos sobre a fração de massa solidificada (fundida), a efetividade e o NTU. Os parâmetros operacionais como o número de Biot, número de Reynolds, o número de Stefan além das temperaturas de entrada dos fluidos de trabalho interno e externo foram também investigados. Os casos de armazenamento de calor e frio foram também estudados permitindo a obtenção de dados que facilitam o projeto e dimensionamento deste tipo de armazenador.

Como continuação deste trabalho pretende-se elaborar um código computacional que permita a utilização dos resultados deste programa para projetos de engenharia ou prever o desempenho de unidades operantes deste tipo de armazenador. E a consolidação com resultados experimentais

Referências Bibliográficas

- ALMEIDA, E.M. Solução numérica do problema de solidificação controlada por condução de calor em torno de tubos cilíndricos com aletas cilíndricas. Dissertação de mestrado, 1982.
- ARPACI, V.S. *Conduction heat transfer*, Addison-Wesley Publishing company Reading, Massachusetts, 1966.
- AYRES, J.M., LAU, H., SCOTT, J.R. Sizing of thermal storage systems for buildings with time of use electric rates, *ASHRAE Transactions*, p.347-359, 1989.
- BIRD, R.B. STEWART, W.E. AND LIGHTFOOT, E.N. *Transport Phenomena*, New York, John Wiley & Sons, 1980.
- BONACINA, C; COMINI, G; FASANO, A AND PRIMICERIO, M. Numerical solution of phase change problems, *International Journal Heat and Mass Transfer*, v.16, p.1825-1832, 1973.
- CAO, Y.; FAGHRI, A. Numerical analysis of phase change problems including natural convection, *Transactions of ASME - Journal Heat Transfer*, v.112, p.812-816, 1990.

- CAO, Y.; FAGHRI, A. Performance characteristics of a thermal energy storage module: A transient PCM/forced convection conjugate analysis, *International Journal Heat Mass Transfer*, v.34, n.1, p.93-101, 1991.
- CLAVIER, L, ARQUIS, E., CALTAGIRONE, J. P. A fixed grid method for the numerical solution of phase change problems, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, v.37, p 4247-4261, 1994
- DATE, A. W. A strong enthalpy formulation for the stefan problem, *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, v.34, p 2231-2235. 1991.
- GRIGGS, E.I. HUMPHRIES, W.R. *A design handbook for change thermal control and energy storage devices*, NASA Technical Paper TP 1074, NTIS:N78 15434, 1977.
- ISMAIL, K.A.R. AND ALVES, C.L. Numerical solutions of finned geometries immersed in phase-change material, ASME 26th National Heat Transfer Conference, Philadelphia, U.S.A., v.109, p.31-36, 1989.
- ISMAIL, K.A.R, GONÇALVES, M.M. Analysis of axially finned phase change material storage unit, *Proceedings of the 2nd World Renewable Energy Congress* , Reading, U.K. , p.1041-1045, 1992.
- ISMAIL, K.A.R, MELO, C.A. Fusion of pcm around a vertical cylinder in the presence of natural convection, *Proceedings of the Second Int. Conference on Advanced Computational Methods in Heat Transfer*, vol II, p.75-89, Computational Mechanics Publications, Elsevier, Applied Science, Italy, 1992.

- ISMAIL, K.A.R, GONÇALVES, M.M. Effectiveness NTU performance of finned PCM storage units, *Proceedings of the Moving Boundary Problems 93*, p.279-286, Computational Mechanics Publications, 1993.
- HSIAO, J.S. CHUNG, B.T.F. An efficient algorithm for finite element solution to two dimension heat transfer with melting and freenzing. *Transactions of ASME - Journal Heat Transfer*, v.108, n.2, p.462-464, 1986.
- HUMPHRIES, W.R. *Performance of finned thermal capacitor*-NASA Technical Note TND 7690, 1974.
- JEKEL, T.B., MITCHEL, J.W., KLEIN, S.A. Modelling of ice storage tanks, *ASHRAE Transactions Symposium*, p.1016-1024, 1993.
- KALTHORI, B.; RAMADHYAM, S. Studies on heat transfer from a vertical cylinder with or with out fins, embedded in a solid phase change medium, *Transactions of ASME - Journal Heat Transfer*, v.107, p.44-51, 1985.
- KAYS, W.M., CRAWFORD, M.E. *Convective heat and mass transfer*, 2^a ed., McGraw-Hill, New York, 1980.
- KIM, C.J; KAVIANY M. A numerical method for phase change problem, *International Journal Heat Mass Transfer*, v.33, p.2721-2734, 1990.
- LACROIX, M. Study of the heat transfer behavior of a latent heat thermal energy storage unit with a finned tube, *Int. J. Heat Mass Transfer*, v.36, p.2083-2092, 1993.
- LAMÉ, G., CLAPEYRON, B.P. Mémoire sur la solidification par refroidissement d'un globe solide, *Ann. Chem. Phys.*, v.47, p.250-256, 1831.

LATIF, M. J., WINBAUM, S. Perturbation solutions for melting or freezing in annular regions initially not at the fusion temperature, *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, v.21 p 581-591, 1978.

LANE, G.A. Solar heat storage: latent heat materials

LEE, S. L., TZONG, R. Y. An enthalpy formulation for phase change problems with a large thermal diffusivity jump across the interface, *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, v.34, p 1491-1502. 1991.

MAC CRACKEN, C.D., Design considerations for modular glycol ice storage systems, *ASHRAE Transactions*, p.374-386. 1989.

MAMPAEY, F. A stable alternating direction method for simulating multi-dimensional solidification problems, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, v.30, p 711-728, 1990.

MENON, A S.; WEBER, M. E.; AND MUJUNDAR A S.; Dynamics of energy storage for paraffin Wax in cylindrical container.; *Can. J. Chem. Eng.*, v.61, p.647-653, 1983.

Metal properties, ASME Handbook, Mc Graw Hill, 1954.

MURRAY, W. D. E LANDIS, F. Numerical and machine solution of transient heat conduction problem involving melting or freezing; *Transactions of ASME Journal of Heat Transfer*, p.106-112, 1959.

OZISIK, M.M. *Heat Conduction*, New York, John Wiley and Sons, 1980.

- PADMANABHAM, P. V.; MURTHY, M.V. Outward phase change in a cylindrical annulus with axial fins on the inner tube; *International Journal Heat Mass Transfer* v.29, n.12, p.1855-1868, 1986.
- PATANKAR, S.V. *Numerical heat transfer and fluid flow*. Hemisphere Publishing Corporation, 1980.
- RAO, P. R., SASTRI, V. M. K. Efficient numerical method for two-dimensional phase change problems, *Int. J. Heat Mass Transfer*, v.27, n^o11, p 2084-2084, 1984.
- RABIN, Y., KORIN, E. An efficient numerical solution for the multidimensional solidification (or melting) problem using a microcomputer, *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, v.36, p 673-683, 1993.
- RAW, W. Y., LEE, S. L. Application of weighting function scheme on convection-conduction phase change problems, *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, v.34, n.6 p 1503-1513, 1991.
- RIEGER, H., PROJAHN U. AND BEER H. Analysis of the heat transport mechanism during melting around a horizontal circular cylinder; *International Journal Heat Mass Transfer*, v.25, p.137-147, 1982.
- RIEMANN, G.F.B., WEBER, H. *Die partiellen differentialgleichungen der mathematischen physik*, 5a. ed., v.2, p.121, 1912.
- RADHAKRISHAN, K.B.; BALAKRISHNAN, A.R. Heat storage analysis of the thermal energy storage using phase change materials, *Heat Recovery Systems & CHP*, v.12, n.5, p.427-435, 1992.

- SASAGUCH, K., IMURA, H. E FURUSHO, H. Heat transfer characteristics of a latent storage units with a finned tube; *Bull. JSME*, v.29, n.255, p.2978, 1986.
- SCHMIDT, F.W., SZEGO, J. Trasient response of solid sensible heat thermal storage units- single fluid, *Journal of Heat Transfer*, p.471-477, ago, 1976
- SCHNEIDER, G. E. Computation of solid/liquid phase change including free convection - comparison with data, *J. Thermophysics*, v.4, n.3, p 366-373. 1990.
- SHAH, R.K., LONDON,A.L. Laminar flow forced convection in duct, Suplement 1 in *Advances in Heat Transfer*, 1978.
- SHAMSUNDAR, N. E SPARROW, E.M. Storage of thermal energy by solid-liquid phase change - temperarute drop and heat flux. *ASME Journal of Heat Transfer; Technical Briefs*, p.541-543, 1974.
- SHAMSUNDAR, N. E SPARROW, E.M. Analysis os multidimensional conduction phase change via the enthalpy method. *Transactions of ASME Journal of Heat Transfer*, v.97, p.333-340, 1975.
- SHAMSUNDAR, N; SRIMIVESAN R. a new similarity method for analysis of multi-dimensional solidification, *Journal of Heat Transfer*, v.101, p 585-591, 1979.
- SHAMSUNDAR, N; SRIMIVESAN R. Effectiveness NTU charts for heat recovery from latent heat storage units; *Journal Solar Engineering*, v.192, p.263-271, 1980.
- SPARROW, E. M., PATANKAR, S.V. E RAMADHYANI, S. Analysis of melting in the presence of natural convection in the melt region; *Transactions of ASME - Journal Heat Transfer*, v.99, p.520-526, 1977.

- SPARROW, E. M., RAMADHYANI, S. E PATANKAR, S.V. Effect of subcooling on cylindrical melting; *Transactions of ASME - Journal Heat Transfer*, v.100, p.395-402, 1978.
- SPARROW, RAMSEY J.W, E KEMINK, R.G. Freezing controlled by natural convection; *Transactions of ASME - Journal Heat Transfer*, v.101, p.578-584, 1979.
- SPARROW, E. M., RAMSEY J.W E HARRIS, J.S. The transition from natural convection-controlled freezing to conduction-controlled freezing; *Transactions of ASME - Journal Heat Transfer*, v.103, p.7-12, 1981.
- SPARROW, E. M., LARSON, E.D. E RAMSEY J.W. Freezing on a finned tube for eiher conduction-controlled on natural convection controlled heat transfer; *International Journal Heat Mass Transfer*, v.24, p.273-284, 1981.
- SPARROW, E. M., CHUCK, W. Planar or Radial Freezing with Solid-Solid Transitions and Convective Heating at the Solid-Liquid Interface, *Numerical Heat Transfer*, v.7, p 17-38, 1984.
- STEFAN, J. *Ann. Phys. Chemie*, v.42, p.269-286, 1891.
- STEWART Jr, W.E., DONA, C.L.G. Development of improved ice-making techniques for storage heat pumps, *ASHRAE Transactions*, part 2, v.94, p.419-431, 1988.
- SINHA, T. K. GUPTA, J.P. Solidification in an annulus, *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, v.25, p 1771-1773, 1982.
- TACKET, R.K. Case study: office building uses ice storage, heat recovery and cold air distribution, *ASHRAE Transactions*, part 1, v.05, p.1113-1121, 1989.

- THIART, G.D. Improved finite-difference scheme for the solution of convection-diffusion problem with the simplex algorithm; *Numerical Heat Transfer*, v.18, p.81-85, 1990.
- VOLLER, V. CROSS, M. Accurate solution of moving boundary using the enthalpy method; *International Journal Heat Mass Transfer*, v.24, p.545-556, 1981.
- VOLLER, V.R. Interpretation of the Enthalpy in a Discretised Multidimensional Region Undergoing a Melting/Freezing Phase Change, *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, v.10, pp 323-328, 1983
- VOLLER, V.R. Implicit finite-difference solutions of the enthalpy formulation of Stefan problems. *IMA Journal of Numerical Analysis*, v.5 p.201-214, 1985.
- VOLLER, V. R., PRAKASH, C. A fixed grid numerical modelling methodology for convection-diffusion mush region phase-change problems, *Int. J. Heat Mass Transfer*, v.30, n.8 p 1709-1719, 1987.
- VOLLER, V. R., Fast Implicit Finite Difference Method for the Analysis of Phase Change Problems, *Numerical Heat Transfer*, part. B, v.17, p 155-169. 1990.
- WATANABE, T., KANZAWA, A. second law optimization of a latent heat storage systems with pcms having different melting points, *Heat Recovery Systems & CHP*, v.15, n.7, p.641-653, 1995.
- WILDIN, M.W., TRUMAN, C.R. Performance of stratified vertical cylindrical thermal storage tanks, part I: scale model tanks, *ASHRAE Transactions*, part.1, v.95, p.1086-1095, 1989.

ZABARAS., An analysis of inverse heat transfer problems with phase change using in integral method; *Transactions of ASME Journal of Heat Transfer*, v.110, p.554-561, 1988.