



Jorge Luis Suzuki

# **Aplicação do Método dos Elementos Finitos de Alta Ordem $hp$ em Hiperelasticidade com Dano Isotrópico**

32/2013

CAMPINAS  
2013



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

Jorge Luis Suzuki

# **Aplicação do Método dos Elementos Finitos de Alta Ordem $hp$ em Hiperelasticidade com Dano Isotrópico**

Orientador: Dr. Marco Lúcio Bittencourt

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica, na Área de Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO JORGE LUIS SUZUKI, E ORIENTADO PELO PROF. DR. MARCO LÚCIO BITTENCOURT.

A handwritten signature in black ink, reading "Marco Lúcio Bittencourt", is written on a light-colored background. The signature is positioned above a horizontal dotted line.

ASSINATURA DO ORIENTADOR

CAMPINAS  
2013

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura  
Rose Meire da Silva - CRB 8/5974

Su99a Suzuki, Jorge Luis, 1987-  
Aplicação do método dos elementos finitos de alta ordem hp em hiperelasticidade com dano isotrópico / Jorge Luis Suzuki. – Campinas, SP : [s.n.], 2013.

Orientador: Marco Lúcio Bittencourt.  
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Método dos Elementos Finitos. 2. Mecânica do dano contínuo. 3. Deformação e tensão. I. Bittencourt, Marco Lúcio, 1972-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em inglês:** hp-FEM analysis of coupled hyperelasticity and damage

**Palavras-chave em inglês:**

Finite element method

Continuum damage mechanics

Deformations and stresses

**Área de concentração:** Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

**Titulação:** Mestre em Engenharia Mecânica

**Banca examinadora:**

Marco Lúcio Bittencourt [Orientador]

Pablo Andrés Muñoz Rojas

Carlos Henrique Daros

**Data de defesa:** 25-02-2013

**Programa de Pós-Graduação:** Engenharia Mecânica

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**  
**FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**  
**COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**  
**DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO**

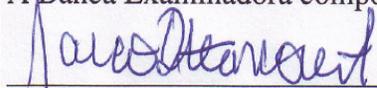
**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO**

# **Aplicação do Método dos Elementos Finitos de Alta Ordem $hp$ em Hiperelasticidade com Dano Isotrópico**

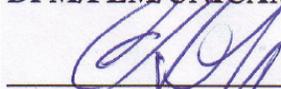
Autor: Jorge Luis Suzuki

Orientador: Dr. Marco Lúcio Bittencourt

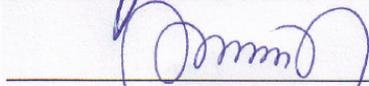
A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:



**Prof. Dr. Marco Lúcio Bittencourt, Presidente**  
**DPM/FEM/UNICAMP**



**Prof. Dr. Carlos Henrique Daros**  
**DMC/FEM/UNICAMP**



**Prof. Dr. Pablo Andrés Muñoz Rojas**  
**DEM/CCT/UDESC**

Campinas, 25 de Fevereiro de 2013.

## **Dedicatória**

Dedico este trabalho à memória de meu avô, Félix Heiden (24/01/1933 - 16/01/2013).

## Agradecimentos

Ao meu orientador, Prof. Dr. Marco Lúcio Bittencourt, pela oportunidade oferecida, dedicação constante, paciência e amizade.

À minha família, pelo apoio incondicional em todos os momentos, pela motivação, ajuda psicológica e muitas vezes financeira.

À minha companheira e namorada, Letícia, que há 5 anos faz parte da minha vida, e que mesmo com barreiras geográficas, não deixou de me apoiar e ter paciência com o meu trabalho.

Aos amigos e ex-companheiros de república Allan Dias e Luan Franchini, por inúmeras discussões produtivas sobre os mais variados temas possíveis e pela amizade prolongada.

Aos amigos, companheiros e ex-companheiros de trabalho Caio Rodrigues, Carlos Mingoto Jr, Fabiano Bargos, Felipe Furlan, Gilberto Valente, Jaime Delgado, Jaime Izuka, Oscar Rojas e Paola Gonzalez, pela convivência diária de trabalho, colaboração e importantes momentos de descontração.

Ao Dr. Alexandre Souto, pela colaboração nos assuntos do olho humano, à doutoranda Yue Yu, da Universidade Brown, pela ajuda no "destravamento", e ao Prof. Dr. Pablo Andrés Muñoz Rojas, por importantes contribuições ao progresso deste trabalho.

Ao órgão financiador CNPq, pelo fundamental apoio financeiro.

*Toda a nossa ciência comparada com a realidade, é primitiva e infantil - e, no entanto, é a coisa mais preciosa que temos.*

---

Albert Einstein

## Resumo

SUZUKI, Jorge Luis. Aplicação do Método dos Elementos Finitos de Alta Ordem em hiperelasticidade com dano isotrópico. 2013. Dissertação (Mestrado). Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Este trabalho apresenta uma implementação em ambiente C++ da teoria do Dano em Meio Contínuo para hiperelasticidade sob regime compressível e quasi-incompressível. Para o caso quasi-incompressível, uma formulação mista ( $u/p$ ) é tratada com um procedimento de projeção local da pressão hidrostática. O dano é um escalar que depende da máxima deformação atingida. Para a validação dos métodos implementados, são realizados estudos de convergência através da imposição de soluções analíticas, variando a ordem de interpolação e o número de elementos. Também é analisado o comportamento da tensão através de ciclos de carregamento, para a observação da perda de rigidez progressiva sob os efeitos de dano. A formulação implementada contorna o problema de travamento de malha, sendo que de maneira geral, solução é melhor aproximada com o aumento do grau polinomial combinado com o aumento do número de elementos.

*Palavras-chave:* Mecânica do Dano em Meio Contínuo, Hiperelasticidade quasi-incompressível, Método dos Elementos Finitos de Alta Ordem.

## Abstract

SUZUKI, Jorge Luis. HP-FEM analysis of coupled hyperelasticity and damage. 2013. Dissertação (Mestrado). Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

The objective of this work is the application of the high-order  $hp$ FEM to the analysis of hyperelastic materials coupled to isotropic damage. A mixed  $(u/p)$  formulation with a pressure projection procedure is used in conjunction with the  $hp$ FEM to overcome the volumetric locking. The isotropic damage model introduces a scalar variable that evolves coupled with the maximum attained strain. It is based on the equivalent stress concept, by applying a reduction factor over the stress tensor. A cyclic loading test was performed to reproduce the Mullins effect. Convergence analyses were made for a compressible and a quasi-incompressible material imposing analytical solutions. Both materials presented a spectral convergence rate for the  $p$  refinement using smooth solutions. In the case of quasi-incompressibility, the material showed locking-free characteristics, but the approximation errors were higher compared to the compressible case.

*Keywords:* High Order Finite Element Method, Mixed Methods, Continuum Damage Mechanics, Volumetric locking.

## Lista de Ilustrações

1.1 Principais partes do olho humano (Frota, 2004). . . . .	1
1.2 Tomografia para medição da espessura de uma retina (Ikuno e Tano, 2009). . . . .	2
2.1 Deformação de um corpo em um meio contínuo (Bittencourt, 1999). . . . .	10
2.2 Vetor de tração em um processo de deformação (Bonet e Wood, 1997). . . . .	13
3.1 Razão $K/G$ em função do coeficiente de Poisson. . . . .	14
3.2 Malha com travamento volumétrico no domínio (Hughes, 2000). . . . .	15
4.1 Efeito Mullins em materiais hiperelásticos (Holzapfel, 2000). . . . .	34
4.2 Definição das tensões equivalentes (Freitas, 2010). . . . .	37
4.3 Superfície de dano contida no espaço das deformações (Holzapfel, 2000). . . . .	38
4.4 Função de evolução do dano em termos da deformação equivalente. . . . .	40
4.5 Derivada da função de evolução do dano em termos da deformação equivalente. . . . .	41
5.1 Geometria hexaédrica utilizada. . . . .	45
5.2 Malhas de elementos hexaédricos utilizadas. (a) 8 elementos, (b) 27 elementos, (c) 64 elementos, (d) 125 elementos. . . . .	45
5.3 Norma do erro nos deslocamentos para pequenas deformações, teste 1. . . . .	47
5.4 Erros nos deslocamentos para grandes deformações, teste 1. . . . .	48
5.5 Geometria deformada com a solução para $u_2$ , teste 1. . . . .	49
5.6 Solução para os deslocamentos $u_1$ , teste 1. . . . .	50
5.7 Solução para os deslocamentos $u_3$ , teste 1. . . . .	51
5.8 Solução para a tensão principal $\sigma_1$ , teste 1. . . . .	51
5.9 Tensão principal $\sigma_1$ na aresta $Y = 0, Z = 0$ , teste 1. . . . .	52
5.10 Efeito Mullins na maior tensão principal $\sigma_1$ em um ponto de Gauss, teste 2. . . . .	53
5.11 Norma $L^2$ do erro em função da ordem de interpolação $O_u$ (a), e em termos do número total de graus de liberdade (b), teste 2. . . . .	54
5.12 Campos de deslocamentos e tensão $\sigma_1$ para um elemento com $O_u = 3$ , teste 2. . . . .	55
5.13 Solução aproximada para a maior tensão principal $\sigma_1$ ao longo da aresta $Y = 0,$ $Z = 0$ , teste 2. . . . .	55
5.14 Solução aproximada para o dano na aresta $Y = 0, Z = 0$ , teste 2. . . . .	56
5.15 Efeito Mullins na maior tensão principal em um ponto de Gauss, teste 3. . . . .	57

5.16 Norma $L^2$ do erro em função do grau polinomial (a), e em termos do número total de graus de liberdade (b), teste 2. . . . .	58
5.17 Solução para a maior tensão principal $\sigma_1$ na aresta $Y = 0, Z = 0$ , teste 3. . . . .	58
5.18 Solução para o dano na aresta $Y = 0, Z = 0$ , teste 3. . . . .	59
5.19 Distribuições da maior tensão principal (a) e dano (b) para o teste 3. . . . .	59

# SUMÁRIO

<b>Lista de Ilustrações</b>	<b>xvii</b>
<b>SUMÁRIO</b>	<b>xxi</b>
<b>1 INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1 Motivação . . . . .	1
1.2 Hiperelasticidade . . . . .	4
1.3 Teorias de Dano Contínuo . . . . .	5
1.4 Método dos Elementos Finitos de Alta Ordem (MEF-AO) . . . . .	6
1.5 Objetivos . . . . .	7
1.6 Organização do texto . . . . .	8
<b>2 MEDIDAS DE DEFORMAÇÃO E TENSÃO</b>	<b>9</b>
2.1 Tensor gradiente de deformação . . . . .	9
2.2 Teorema da decomposição polar . . . . .	10
2.3 Medidas de deformação . . . . .	11
2.3.1 Tensor de deformação de Cauchy-Green . . . . .	11
2.3.2 Tensores de deformação de Hill . . . . .	12
2.4 Medidas de tensão . . . . .	12
2.4.1 Tensão de Cauchy . . . . .	12
2.4.2 Segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff . . . . .	13
<b>3 HIPERELASTICIDADE</b>	<b>14</b>
3.1 Incompressibilidade . . . . .	14
3.2 Travamento volumétrico . . . . .	14
3.3 Descrição material e isotropia . . . . .	17
3.4 Material Neo-Hookeano compressível . . . . .	17
3.5 Material de Mooney-Rivlin . . . . .	18
3.6 Princípio das Potências Virtuais . . . . .	20
3.7 Forma linearizada do Princípio das Potências Virtuais . . . . .	21
3.8 Funções de forma . . . . .	22

3.9	Discretização local em elementos finitos . . . . .	23
3.10	Projeção local da pressão hidrostática . . . . .	24
3.11	Discretização da equação de equilíbrio . . . . .	28
3.12	Discretização da equação de equilíbrio linearizada . . . . .	29
3.13	Equação de Newton-Raphson e procedimento de solução . . . . .	31
<b>4</b>	<b>DANO EM MEIO CONTÍNUO</b>	<b>33</b>
4.1	Natureza física do dano . . . . .	33
4.2	Efeito Mullins em materiais hiperelásticos . . . . .	33
4.3	Modelo de dano hiperelástico isotrópico . . . . .	34
4.3.1	Variável de dano e aspectos termodinâmicos . . . . .	35
4.3.2	Crítério de dano . . . . .	37
4.3.3	Lei de evolução . . . . .	39
4.3.4	Relação constitutiva . . . . .	39
4.3.5	Algoritmo de dano . . . . .	42
<b>5</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>44</b>
5.1	Malhas Utilizadas . . . . .	44
5.2	Teste 1 - Material quasi-incompressível de Mooney-Rivlin . . . . .	46
5.3	Teste 2 - Material Neo-Hookeano compressível com dano . . . . .	52
5.4	Teste 3 - Material de Mooney-Rivlin quasi-incompressível com dano . . . . .	56
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>60</b>
6.1	Trabalhos futuros . . . . .	61
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>62</b>

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Motivação

A Figura 1.1 ilustra as principais partes do olho humano, destacando-se a retina, a coróide, a esclera (esclerótica), a fóvea e o nervo ótico. A retina é a camada mais interna, responsável pela conversão da luz em energia química. Esta ativa o nervo ótico, que conduz as informações para o cérebro. A fóvea, localizada na região central da retina, possibilita uma visão mais precisa para atividades como a leitura. A coróide é situada entre a retina e a esclera, e possui uma rede de vasos sanguíneos que promovem a vascularização da retina. Na parte mais exterior é situada a esclera, constituída de fibras de colágeno, acomodando os tecidos mais internos (Davson e Perkins, 2011).

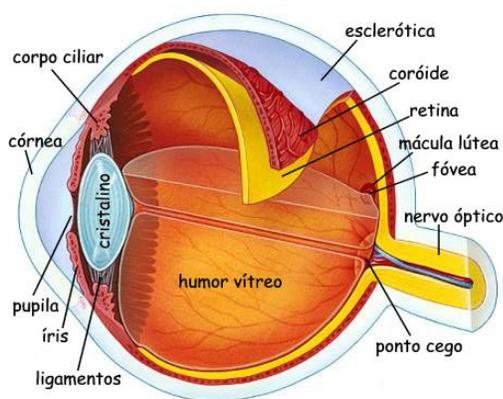


Figura 1.1: Principais partes do olho humano (Frota, 2004).

Os casos de miopia crescem progressivamente no mundo. A alta miopia é uma das principais causas de muitos casos de cegueira em países em desenvolvimento (Shih *et al.*, 2008). No entanto, a sua ocorrência difere dependendo da raça e país considerados (Ikuno e Tano, 2009).

A alta miopia, caracterizada por graus de dioptria  $\geq -6,0D$ , é associada com o alongamento progressivo do globo ocular. Se tal alongamento for excessivo, várias complicações podem ser desenvolvidas. Clinicamente, essas complicações incluem vasos sanguíneos esticados, crescente peripapilar temporal atrófica, inclinação do disco ótico, estafiloma posterior, fissuras (*lacker cracks*) na membrana de Brunch, áreas de atrofia na região pigmentada da retina e na coróide, hemorragia su-

bretinal e neovascularização coroidal (Shih *et al.*, 2008). O impacto da retinopatia miópica na visão é de importante destaque, pois é comumente bilateral e irreversível, além de que frequentemente afeta os indivíduos durante seus anos produtivos (Shih *et al.*, 2008). A maior parte dos estudos realizados relatam que os efeitos posteriores na visão, provocados pela alta miopia, são associados com a neovascularização coroidal. No entanto, há vários tipos de degeneração macular em míopes, variando os prognósticos visuais apresentados (Shih *et al.*, 2008).

Estudos desenvolvidos por Hayashi *et al.* (2010) em 806 olhos de 429 pacientes indicaram que tais complicações, comprometendo a região macular associadas à miopia, tendem a se desenvolver em aproximadamente 40% nos casos de alta miopia (Hayashi *et al.*, 2010). A relação entre a degeneração da retina, de acordo com o comprimento axial do olho em diferentes graus de miopia, também foi estudada por (Martín Sánchez e Roldán Pallarés, 2010), com 200 olhos de 124 pacientes. Concluiu-se que o maior número de casos de degeneração foi encontrado para comprimento axial entre 25-27 mm (entre 3,0-10,0D), e na faixa de 29-30 mm (mais de 15,0D).

A Figura 1.2 apresenta um resultado de exame de tomografia (Ikuno e Tano, 2009), mostrando as diversas camadas da retina, da coróide e da fóvea.

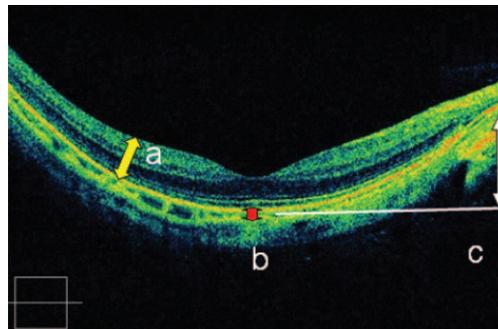


Figura 1.2: Tomografia para medição da espessura de uma retina (Ikuno e Tano, 2009).

A espessura da retina é definida como sendo a distância entre a membrana interna e a linha externa hiper-refrativa do epitélio retinal (RPE) (a), enquanto que a espessura da coróide é definida como a distância entre o RPE e a superfície escleral hiper-refrativa (Ikuno e Tano, 2009). A fóvea pode ser identificada pela Figura 1.1. Com tais considerações, obtiveram-se dados das espessuras da retina e da esclera nas regiões da fóvea, temporal, nasal, superior e inferior (Ikuno e Tano, 2009).

No que se refere a modelos computacionais para análise do olho, alguns trabalhos foram

encontrados. Suas abordagens tangem modelos constitutivos e geométricos, focando a análise de tensões e deformações no olho humano. Estas foram induzidas por variação da pressão intraocular (IOP), ou até mesmo por lesões externas provenientes de impactos (Power *et al.*, 2001; Power, 2001; Genest, 2010; Bendre, 2009; Rangarajan *et al.*, 2001). Um modelo de elementos finitos não-linear para análise do impacto de airbags de helicópteros sobre óculos de visão noturna foi desenvolvido por Power (2001). Outro modelo quantificou o deslocamento relativo entre a fóvea e regiões de neovascularização coroidal em cirurgias de translocamento macular (Tillier *et al.*, 2005). Tal processo cirúrgico é feito a partir do dobramento (*infolding*) da esclera. Estudos em busca da influência da pressão intraocular sobre o nervo ótico também foram efetuados (Norman *et al.*, 2010). O escopo, nesse caso, foi a conexão entre a resposta biomecânica das regiões próximas do nervo ótico com o glaucoma. Outros autores simularam o processo de deformação do cristalino nos processos de acomodação da visão (Liu *et al.*, 2006). Estudos dos efeitos da IOP também foram realizados em olhos de frangos (Genest, 2010), através de miopia induzida com a colocação de óculos translúcidos.

Em relação à retina, efetuou-se o modelamento de um olho humano infantil e foram analisados os efeitos das forças dinâmicas, com o propósito de levantar riscos de hemorragia (Hans *et al.*, 2009). Realizou-se o modelamento da retina, fóvea, esclera, coróide e disco ótico, variando a reologia do material (elástico, bilinear, hiperelástico) e a pressão intraocular (Bendre, 2009). Observou-se a concentração de tensões na região do tecido próxima à borda retina-fóvea, onde comumente ocorre a neovascularização (Quaranta *et al.*, 2000).

Apesar da quantidade de trabalhos desenvolvidos, estes não foram confrontados com casos reais. A importância de tal comparação é a obtenção de resultados confiáveis, que permitam uma extrapolação do modelo, com o intuito de prevenir determinadas patologias. Por exemplo, elevadas solicitações mecânicas na região da fóvea, como relatadas por Bendre (2009), podem levar à degeneração macular. No entanto, não houve simulação do desenvolvimento da degeneração macular em si, mas de suas possíveis causas. De fato, a simulação de tecidos conjuntivos e artérias é complexa, por se tratar de uma composição de estruturas biológicas com reologia ainda não bem caracterizada. No entanto, há patologias que, apesar de envolverem alterações bioquímicas, são essencialmente causadas por esforços mecânicos, ou que podem ser convenientemente simplificadas para um problema puramente mecânico, como o rompimento e o descolamento da retina.

O descolamento de retina é uma séria condição patológica, que pode eventualmente levar à perda total de visão caso não seja tratado imediatamente (Baino, 2010). É classificada em três

tipos, dependendo do mecanismo patogênico envolvido: regmatogênico, tracional e exsudativo. No descolamento regmatogênico, o fluido contido na cavidade vítrea preenche o espaço sub-retinal através de um rompimento por toda a espessura. No tracional, a retina é mecanicamente levantada como resultado dos efeitos de tração no humor vítreo. O caso exsudativo é causado por vazamento de fluido de vasos sanguíneos devido a doenças inflamatórias. O curso do processo de descolamento pode variar, sendo desde pequenos descolamentos localizados auto-regenerativos, até um rápido descolamento total com grande quantidade de rupturas (Baino, 2010).

Em termos de mecânica computacional, o descolamento causado por mecanismos regmatogênico e tracional pode ser simulado, pois os fenômenos envolvidos são predominantemente mecânicos. Portanto, o comportamento mecânico da retina pode ser simulado por ferramentas numéricas e computacionais, como o Método dos Elementos Finitos, aplicado em um modelo clássico de hiperelasticidade. O tratamento da degradação do tecido, ou seja, a perda de rigidez associada, pode ser quantificada através de um parâmetro localizador da Teoria de Dano em Meio Contínuo, indicando as regiões críticas da retina.

## 1.2 Hiperelasticidade

A hiperelasticidade é a extensão do comportamento linear elástico para o campo de grandes deformações. Tal comportamento é usualmente associado aos elastômeros, como a borracha e polímeros vulcanizados. Estes materiais apresentam um alto número de ligações cruzadas de átomos de carbono, possibilitando grandes deformações, com a reorganização das cadeias, tendendo a um alinhamento na direção da força aplicada e possibilitando que o material retorne à configuração inicial após a remoção dos esforços (Callister, 1999). É intrinsicamente ligada à incompressibilidade (preservação do volume no processo de deformação).

Tecidos biológicos também possuem reologia semelhante. O comportamento hiperelástico também é chamado de *pseudoelástico*, pois deriva do comportamento viscoelástico, porém sem a dependência do tempo. Além disso, o sistema é conservativo, pois não há perda ou ganho de energia.

Os primeiros modelos desenvolvidos foram o *Neo-Hookeano* e o *Mooney-Rivlin*, com a proposta de funções de energia baseadas nos invariantes da deformação (de Souza Neto *et al.*, 2008). O

modelo de Ogden foi desenvolvido em meados da década de 80, baseado nas direções principais, e permite maiores valores de deformação (Ogden, 1997), podendo alcançar até 700% (de Souza Neto *et al.*, 2008). Os desenvolvimentos mais recentes envolvem o material de Fung, que apresentou bom ajuste para tecidos biológicos (Fung, 1993).

Esses materiais começaram a ser amplamente utilizados em conjunto com o Método dos Elementos Finitos (MEF), e várias alternativas foram desenvolvidas para resolver os problemas resultantes da incompressibilidade. A formulação mista ( $u/p$ ) foi introduzida por Sussman e Bathe (1987), fazendo consideração à pressão hidrostática como variável, juntamente com os deslocamentos. Uma contribuição muito importante no que se refere à ordem de interpolação de tais variáveis é a condição *inf-sup*, desenvolvida por Brezzi e Fortin (1991) e amplamente discutida por Bathe (1996).

### 1.3 Teorias de Dano Contínuo

De acordo com Lemaître (1996), o dano nos materiais é um processo físico contínuo, que leva à ruptura dos mesmos. A mecânica do dano é o estudo dos mecanismos envolvidos nessa deterioração, quando os materiais são submetidos a algum tipo de carregamento. A Mecânica do Dano em Meio Contínuo (MDC), de acordo com Freitas (2010), é o ramo da mecânica dos sólidos em meio contínuo, onde é possível formular modelos constitutivos capazes de descrever a degradação interna de sólidos. O conceito de dano foi introduzido através dos trabalhos pioneiros de Kachanov (1958) e Rabotnov (1969). O primeiro trabalho desenvolveu um modelo de dano para materiais carregados uniaxialmente sob fluência através da definição de uma variável escalar. Já Rabotnov (1969) considerou a diminuição da área resistente do material devido à inserção dos defeitos, dando sentido físico à variável de dano, além de introduzir o conceito de *tensões efetivas*, a partir da diminuição da área resistente do material.

No contexto do dano hiperelástico, Mullins (1969) identificou experimentalmente que a borracha sofre um considerável amolecimento, conforme um ciclo de carregamento é aplicado. Este efeito é chamado de Efeito Mullins. O primeiro modelo de dano a introduzir tal efeito foi o de Gurtin-Francis (Gurtin e Francis, 1981), com uma abordagem uniaxial de simples implementação. Uma modificação de tal modelo foi proposta por de Souza Neto *et al.* (1994b), com uma generalização para três dimensões. Outra formulação também foi elaborada por Simo (1987), baseada

no *princípio da equivalência das tensões*, e utilizando uma analogia com a plasticidade para definir uma superfície de descrição do dano. Ainda no mesmo trabalho, o modelo fenomenológico foi estendido para um material viscoelástico.

#### 1.4 Método dos Elementos Finitos de Alta Ordem (MEF-AO)

O MEF-AO é basicamente dividido em duas versões:  $p$  e  $hp$ . Na versão  $p$ , a redução do erro de aproximação é alcançada com o aumento do grau polinomial de interpolação. Esta vertente começou a ser desenvolvida no final da década de 70 (Szabó e Mehta, 1978). Já a versão  $hp$  constitui a combinação do aumento do grau polinomial com o aumento do número de elementos da malha, e foi desenvolvida por Babuška (1988). Essas versões foram estudadas nas duas últimas décadas, e mostraram-se superiores à versão  $h$  em um número significativo de problemas práticos.

A principal característica do MEF-AO é apresentar uma taxa de convergência exponencial para problemas com solução suave, diferente dos métodos de baixa ordem, nos quais o erro diminui com um fator fixo (Yosibash *et al.*, 2007; Karniadakis e Sherwin, 2005). Além disso, pode-se trabalhar com elementos de maior razão de aspecto e problemas de travamento numérico em placas, cascas e materiais quasi-incompressíveis podem ser evitados usando formulações com expansões de ordem adequada (Yu *et al.*, 2012). Por outro lado, têm-se matrizes elementares maiores, mais densas e com maior número de condição.

O MEF-AO tem sido aplicado a muitos problemas transientes, incluindo Mecânica dos Fluidos, Eletromagnetismo, Análise Estrutural, Metalurgia do Pó, plasticidade, contato e indentação em metais (Dong e Yosibashi, 2009; Heisserer *et al.*, 2008; Karniadakis e Sherwin, 2005; Yosibash *et al.*, 2007; Konyukhova e Schweizerhof, 2009).

Recentemente, tem-se tornado comum a simulação de grandes problemas transientes não-lineares (Holzer e Yosibashi, 1996), da ordem de milhões de variáveis e que envolvem modelos mecânicos mais complexos. Nesse contexto, as não-linearidades podem induzir o travamento de solução, a qual tem sido tratada com sucesso pelo MEF-AO (Duster e Rank, 2001; Yosibash *et al.*, 2007; Yu *et al.*, 2012). Também demonstrou-se que o aumento do custo computacional pode ser tratado e convenientemente contornado fazendo uso de computação paralela.

## 1.5 Objetivos

A análise computacional do olho humano é de crescente interesse, e tem sido estudada com maior ênfase desde meados da década de 90. Foram realizados estudos de diversos mecanismos do olho humano, bem como suas interações com a estrutura ocular, gerando novos horizontes no contexto médico. No entanto, ainda há diversos fatores clínicos associados que devem ser estudados para maior compreensão.

O objetivo deste trabalho é implementar um modelo de material hiperelástico quasi-incompressível e efetuar um acoplamento com um modelo de dano 3D. Isto permite a investigação dos efeitos de dano no MEF-AO. Posteriormente, será possível construir um modelo virtual de olho humano com o propósito de simular os efeitos e as patologias de retina causadas pela miopia.

O material quasi-incompressível utilizado foi o de Mooney-Rivlin. Para contornar o problema da incompressibilidade, foi aplicada uma formulação mista no contexto do MEF-AO. Também foi utilizado um material compressível Neo-Hookeano. O modelo de dano foi implementado nos dois materiais, sendo que no caso do material de Mooney-Rivlin o modelo foi desacoplado entre parcelas deviatórica e volumétrica. Testes de validação foram realizados através da imposição de soluções analíticas conhecidas para avaliar o comportamento do erro de aproximação efetuando refinamentos do tipo  $h$ ,  $p$  e  $hp$ .

As implementações computacionais foram feitas no código  $hp^2FEM$  em C++, que vem sendo desenvolvido no grupo de pesquisa do Prof. Dr. Marco Lúcio Bittencourt nos últimos anos, juntamente com uma versão em MATLAB. As bases de interpolação com polinômios de alta ordem foram implementadas no código C++ nos trabalhos de Bargas (2009) e Valente (2012). A formulação de grandes deformações foi inicialmente implementada por Augusto (2012) em MATLAB. Neste trabalho migraram-se para C++ os operadores elementares para grandes deformações, bem como o solver de Newton-Raphson. A classe do material hiperelástico Neo-Hookeano também foi migrada da versão MATLAB, enquanto que do material de Mooney-Rivlin, a migração ocorreu de uma versão anterior em C++ (Silva, 2003).

A principal contribuição deste trabalho para a base de programas foi a implementação do procedimento de projeção da pressão hidrostática apresentado na Seção 3.10, bem como a implementação do modelo de dano apresentado no Capítulo 4, ambos usando o MEF-AO.

## 1.6 Organização do texto

A organização do texto é a seguinte. No capítulo 2 são apresentadas algumas medidas de deformação e tensão utilizadas neste trabalho. O capítulo 3 é focado em hiperelasticidade, com a introdução dos materiais Neo-Hookeano compressível e de Mooney-Rivlin quasi-incompressível. Em seguida, é apresentada a formulação para grandes deformações e quasi-incompressibilidade, utilizando o procedimento de projeção da pressão hidrostática (Chen e Pan, 1996). O capítulo 4 apresenta a formulação de Simo (1987) para o tratamento do dano isotrópico e que descreve o efeito Mullins. Por fim, os resultados obtidos para a validação do código computacional implementado são apresentados, seguidas pelas considerações finais do trabalho.

## 2 MEDIDAS DE DEFORMAÇÃO E TENSÃO

A descrição do movimento em um meio contínuo pode ser feita de duas maneiras (Bittencourt, 1999; Gadala *et al.*, 1984):

- Descrição material: Também conhecida como descrição Lagrangeana, esta fixa o referencial a uma partícula, sendo definida uma configuração de referência em um dado instante de tempo  $t$ .
- Descrição espacial: Também conhecida como Euleriana, é muito utilizada na Mecânica dos Fluidos, sendo o referencial fixo em uma coordenada espacial.

No contexto de aproximação, trata-se a descrição material de três maneiras: Quando o referencial é considerado no instante  $t_0$ , tem-se uma posição inicial  $\mathbf{X}$ , e a descrição é chamada Lagrangeana total. Definindo  $\mathbf{x}$  como sendo a posição ocupada por  $\mathbf{X}$  em um instante  $t$ , caracterizando uma mudança de configuração já convergida, esta é chamada descrição Lagrangeana atualizada. Por último, caso a posição  $\mathbf{x}$  seja tomada em um instante de tempo caracterizando uma mudança de configuração ainda não convergida, tem-se a descrição Lagrangeana corrente.

As descrições Lagrangeana atualizada e corrente são comumente confundidas com a espacial em muitos trabalhos científicos (Gadala *et al.*, 1984). Ao longo deste trabalho, denotam-se grandezas em configuração inicial por letras maiúsculas, e em configuração corrente por letras minúsculas.

### 2.1 Tensor gradiente de deformação

A Figura 2.1 apresenta um corpo em um estado indeformado  $\beta_0$ , com pontos materiais  $P$  e  $Q$  suficientemente próximos. A posição de  $Q$  em relação a  $P$  é dada pelo vetor elementar

$$d\mathbf{X} = \mathbf{X}_Q - \mathbf{X}_P. \quad (2.1)$$

Após uma mudança de configuração, os pontos  $Q$  e  $P$  do corpo em seu estado  $\beta$  são  $q$  e  $p$ , que são relacionados com a configuração inicial através do seguinte mapeamento, dado pela equação

de movimento  $\phi$

$$\mathbf{x}_q = \phi(\mathbf{X}_Q, t), \quad \mathbf{x}_p = \phi(\mathbf{X}_P, t). \quad (2.2)$$

Seu vetor elementar é, por sua vez,

$$d\mathbf{x} = \mathbf{x}_q - \mathbf{x}_p. \quad (2.3)$$

A posição de um ponto material qualquer do corpo no instante de tempo  $t$  pode ser descrita da

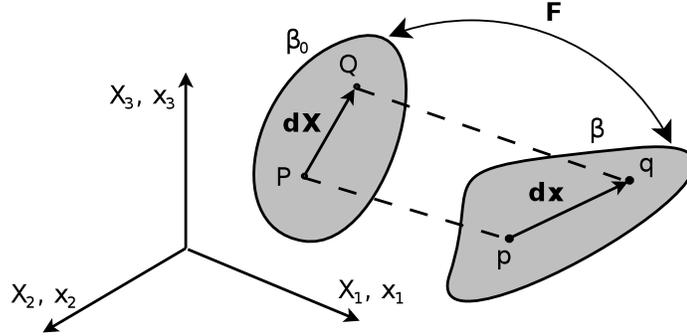


Figura 2.1: Deformação de um corpo em um meio contínuo (Bittencourt, 1999).

seguinte maneira

$$\mathbf{x}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t), \quad (2.4)$$

sendo que  $\mathbf{u}$  é seu vetor deslocamento. Define-se então o tensor gradiente de deformação,

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}, \quad (2.5)$$

que efetua uma transformação da configuração indeformada para a configuração deformada. Tomando o gradiente de (2.4) em relação à coordenada  $\mathbf{X}$  e usando a definição (2.5), tem-se

$$\mathbf{F} = \nabla_0 \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) + \mathbf{I}, \quad (2.6)$$

sendo  $\nabla_0 \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$  o tensor gradiente de deslocamentos e  $\mathbf{I}$  o tensor identidade.

## 2.2 Teorema da decomposição polar

De acordo com Bonet e Wood (1997), o tensor gradiente de deformação apresentado pode ser decomposto de maneira única como o produto de um tensor ortogonal  $\mathbf{R}$ , representando uma rotação de corpo rígido, e um tensor simétrico positivo-definido  $\mathbf{U}$ , que representa uma deformação

pura, de tal forma que

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}. \quad (2.7)$$

$\mathbf{U}$  é um tensor Lagrangeano, pois a deformação é aplicada sobre a configuração original do corpo.

## 2.3 Medidas de deformação

### 2.3.1 Tensor de deformação de Cauchy-Green

O tensor gradiente de deformação pode ser considerado como uma medida de deformação de um corpo. Porém, o mesmo carrega informações de rotação rígida juntamente com os alongamentos, conforme a Equação (2.7). Define-se então o tensor de Cauchy-Green à direita (Bittencourt, 2009),

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{U}^T \mathbf{U}, \quad (2.8)$$

caracterizando uma medida independente da rotação de corpo rígido, pois a matriz  $\mathbf{R}$  é ortogonal, e portanto o produto  $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$  não contribui para o resultado. Os invariantes do tensor  $\mathbf{C}$ , denotados como  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$ , são dados por

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{tr} \mathbf{C}, \\ I_2 &= \text{tr} \mathbf{C}^2 - \text{tr}^2 \mathbf{C}, \\ I_3 &= J^2 = \det \mathbf{C}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Devido à formulação com desacoplamento deviatórico/volumétrico que será apresentada no capítulo 3, define-se a forma deviatórica do gradiente de deformação

$$\bar{\mathbf{F}} = (\det \mathbf{F})^{-1/3} \mathbf{F} = J^{-1/3} \mathbf{F}, \quad (2.10)$$

de tal forma que  $\det(\bar{\mathbf{F}}) = 1$  e  $\mathbf{F} = J^{-1/3} \bar{\mathbf{F}}$ . Portanto, a forma deviatórica do tensor de Cauchy-Green à direita é

$$\bar{\mathbf{C}} = J^{-2/3} \mathbf{C}, \quad (2.11)$$

e dos invariantes

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 &= J^{-2/3} I_1 = I_3^{-1/3} I_1, \\ \bar{I}_2 &= J^{-4/3} I_2 = I_3^{-2/3} I_2. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Lembrando que o terceiro invariante não é apresentado em forma deviatórica, pois é uma grandeza puramente volumétrica.

### 2.3.2 Tensores de deformação de Hill

Os tensores de deformação de Hill são genericamente definidos como

$$\mathbf{E} = \frac{1}{m} (\mathbf{U}^m - \mathbf{I}), \quad (2.13)$$

sendo  $m > 0$ . Aplicando o limite  $m \rightarrow 0$  através da regra de L'Hôpital, tem-se o tensor de deformações logarítmico,

$$\mathbf{E}^{LN} = \log \mathbf{U}, \quad (2.14)$$

também conhecido como natural ou de Hencky. Impondo-se  $m = 1$ , obtém-se o tensor de deformações de Biot,

$$\mathbf{E}^B = \mathbf{U} - \mathbf{I}, \quad (2.15)$$

e com  $m = 2$  o tensor de deformações de Green-Lagrange

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{U}^T \mathbf{U} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (\mathbf{U}^2 - \mathbf{I}), \quad (2.16)$$

onde foi usada a propriedade de simetria de  $\mathbf{U}$ . Considerando o teorema da decomposição polar, a expressão para o tensor de deformações de Green-Lagrange pode ser reescrita na seguinte forma

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}). \quad (2.17)$$

## 2.4 Medidas de tensão

### 2.4.1 Tensão de Cauchy

Conforme Bonet e Wood (1997), considere a Figura 2.2. Tem-se um corpo deformável em um instante de tempo  $t$ , dividido em partes  $R_1$  e  $R_2$ . É necessário avaliar a ação dos esforços aplicados por  $R_1$  sobre  $R_2$ . Para isso, considera-se um elemento de área  $\Delta a$  com normal unitária

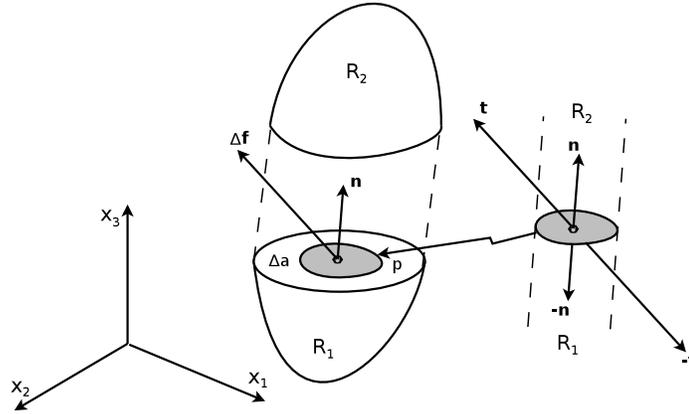


Figura 2.2: Vetor de tração em um processo de deformação (Bonet e Wood, 1997).

$\mathbf{n}$ , na vizinhança do ponto  $p$ . Sendo  $\Delta \mathbf{f}$  a força resultante, tem-se um vetor tração  $\mathbf{t}$  correspondente a  $\mathbf{n}$ , dado por

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta a}. \quad (2.18)$$

Os vetores  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{n}$  devem satisfazer a terceira lei de Newton, e portanto,

$$\mathbf{t}(-\mathbf{n}) = -\mathbf{t}(\mathbf{n}). \quad (2.19)$$

Define-se então o tensor de tensões de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$ , que relaciona  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{n}$ , da seguinte maneira

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}. \quad (2.20)$$

#### 2.4.2 Segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff

O segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff (Bonet e Wood, 1997) é definido por

$$\mathbf{S} = J \mathbf{F}^{-T} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-1}. \quad (2.21)$$

Este tensor é energeticamente conjugado com o tensor de deformações de Green-Lagrange, ou seja, o produto interno entre os mesmos resulta em uma quantidade de trabalho por unidade de volume no estado material. Ambos são tensores Lagrangeanos, pois referem-se à configuração indeformada. Mais detalhes em relação à dedução dos tensores apresentados podem ser encontrados nos trabalhos de Bittencourt (2009), Crisfield (1998) e Bonet e Wood (1997).

### 3 HIPERELASTICIDADE

#### 3.1 Incompressibilidade

O comportamento incompressível é idealizado, referente a materiais que não alteram seu volume quando submetidos a um processo de deformação. No entanto, os materiais em geral permitem uma certa compressibilidade e portanto sofrem pequenas deformações volumétricas, sendo pertinente tratá-los de maneira quasi-incompressível (de Souza Neto *et al.*, 2008). Na elasticidade linear isotrópica, por exemplo, os módulos de cisalhamento e compressibilidade se relacionam da seguinte maneira (Hughes, 2000)

$$\frac{K}{G} = \frac{2(1 + \nu)}{3(1 - 2\nu)}, \quad (3.1)$$

sendo que, quando  $\nu \rightarrow 0,5$ , tem-se  $K/G \rightarrow \infty$ , o que indica maior suscetibilidade a deformações de forma do que de volume. A Figura 3.1 apresenta tal tendência, com o aumento abrupto do termo  $\frac{K}{G}$  à medida que o coeficiente de Poisson se aproxima de 0,5.

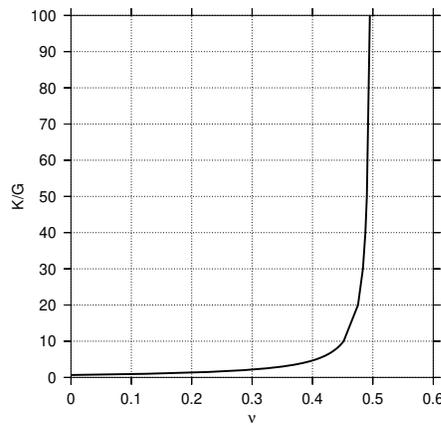


Figura 3.1: Razão  $K/G$  em função do coeficiente de Poisson.

#### 3.2 Travamento volumétrico

Tratando-se da modelagem computacional pelo Método dos Elementos Finitos, o número de restrições internas na incompressibilidade aumenta consideravelmente, tornando o problema de difícil tratamento numérico. As formulações convencionais baseadas nos deslocamentos sofrem um fenômeno numérico chamado de travamento.

Para exemplificar uma situação de travamento no contexto geométrico, considera-se a Figura 3.2, que apresenta uma malha de elementos finitos triangulares lineares. Para a incompressibilidade em elasticidade linear, tem-se para um elemento com domínio  $\Omega_e$  (Hughes, 2000)

$$\int_{\Omega^e} \text{div } \mathbf{u} \, d\Omega^e = 0, \quad (3.2)$$

sendo  $\mathbf{u}$  os deslocamentos nodais. A condição (3.2) impõe que não há variação das áreas dos elementos. Observando-se o elemento 2 em (a), verifica-se que para a conservação da área, a única direção de deslocamento admissível do nó A é a vertical. Já para o elemento 1 em (b), tal deslocamento só é admissível na direção horizontal. Pela continuidade global dos deslocamentos, a única condição admissível para o nó A é  $\mathbf{u}_A \equiv \mathbf{0}$ . Estendendo a análise para os nós adjacentes, verifica-se que o mesmo ocorre para o nó B, bem como para todos os outros nós da malha. No caso quasi-incompressível ocorre o mesmo fenômeno, porém com  $\mathbf{u} \cong \mathbf{0}$ , sendo possível com que a malha deforme, mas ainda com uma forte tendência ao travamento.

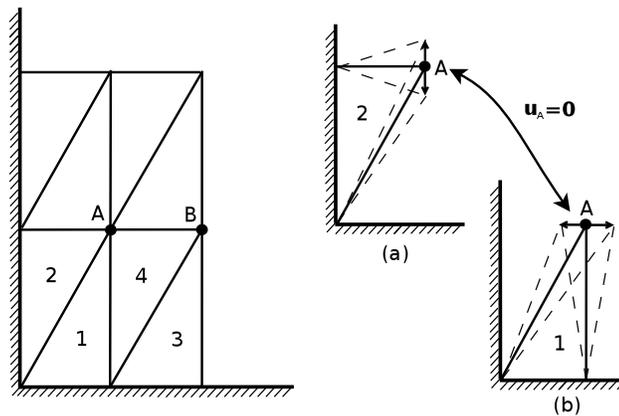


Figura 3.2: Malha com travamento volumétrico no domínio (Hughes, 2000).

Para elementos com tal tendência, podem ocorrer desde erros modestos até grandes erros para a solução dos deslocamentos. No entanto, mesmo que haja uma aproximação razoável para os deslocamentos, a natureza do problema leva a grandes erros nas tensões (Bathe, 1996).

Uma formulação livre de travamento é capaz de estimar os deslocamentos e tensões de maneira precisa, mesmo com a imposição de altos valores para o módulo  $K$  considerado, dando confiabilidade à formulação e ao elemento finito utilizado.

Várias técnicas para contornar o travamento numérico no MEF foram desenvolvidas, desde

a década de 80. No contexto de pequenas deformações, a *integração seletiva* é uma abordagem utilizada em materiais elásticos incompressíveis, cuja idéia é separar o funcional de energia em uma contribuição deviatórica e outra volumétrica, sendo a segunda sub-integrada afim de diminuir a rigidez volumétrica (Hughes, 2000). O método *B-bar* é outra alternativa (Hughes, 2000) e visa a decomposição aditiva da matriz de deformação  $B$  em partes deviatórica e volumétrica. A deformação volumétrica é então projetada em outro espaço de funções de forma.

Tratando-se de grandes deformações, o método *F-bar* (de Souza Neto *et al.*, 1994a) realiza a decomposição multiplicativa do gradiente de deformação em partes deviatórica e volumétrica, de maneira que a parte volumétrica é projetada em outro espaço de funções de forma.

Apesar das técnicas descritas contornarem com sucesso o travamento, necessita-se de uma formulação mais versátil para o MEF de Alta Ordem em hiperelasticidade. O *F-bar*, por exemplo, não possui formulações em alta ordem e o *B-bar* é oneroso para o tratamento de grandes deformações, pois a decomposição é realizada na deformação.

Uma formulação mista ( $u/p$ ) com a projeção da pressão hidrostática  $p$  (Chen e Pan, 1996) é utilizada neste trabalho. A ideia básica é uma decomposição do funcional, novamente, em partes deviatórica e volumétrica. A parte volumétrica contém o termo referente à pressão, que é assumida descontínua na fronteira dos elementos. É realizada uma *condensação estática* e a pressão é projetada localmente em um conjunto de funções de forma com grau de interpolação menor que aquele usado para  $u$ . A principal vantagem deste tratamento é que não é necessário resolver a pressão globalmente, mas sim localmente. Isso facilita a implementação em um código computacional que trata puramente de deslocamentos. O esforço computacional envolvido é menor do que os métodos que tratam a pressão globalmente ( $u/pc$ ), pois o número de graus de liberdade das matrizes globais não aumenta.

Por questões de estabilidade algorítmica, utiliza-se uma relação apropriada entre os graus de interpolação para  $u$  e  $p$  (Yu *et al.*, 2012). Quanto à precisão da solução aproximada pelo Método dos Elementos Finitos, a consistência da formulação, e a alta ordem de interpolação contornam o travamento da solução.

### 3.3 Descrição material e isotropia

Um material isotrópico possui um comportamento constitutivo idêntico em qualquer direção material. Assim, deve-se utilizar uma relação entre a função de energia de deformação  $W$  e  $\mathbf{C}$  que seja independente de qualquer eixo coordenado. Também levando em consideração a homogeneidade do material,  $W$  torna-se função somente dos invariantes de  $\mathbf{C}$ , ou seja,

$$W(\mathbf{C}) = W(I_1, I_2, I_3), \quad (3.3)$$

sendo  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  os invariantes de  $\mathbf{C}$ . A expressão da energia de deformação também pode ser manipulada em função do tensor de deformação  $\mathbf{E}$ , porém os invariantes de  $\mathbf{C}$  devem ser utilizados. O segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff pode ser obtido através da seguinte expressão

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}}. \quad (3.4)$$

Por sua vez, o tensor constitutivo do material é dado por

$$\mathbf{c} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}}. \quad (3.5)$$

### 3.4 Material Neo-Hookeano compressível

De acordo com Belytschko e Liu (2000), o material Neo-Hookeano é uma extensão da lei de Hooke para grandes deformações. Sua função de energia de deformação é

$$W(\mathbf{C}) = \frac{\lambda}{2} (\ln J)^2 - \mu \ln J + \frac{1}{2} \mu (\text{tr} \mathbf{C} - 3), \quad (3.6)$$

sendo  $\lambda$  e  $\mu$  as constantes de Lamé da teoria linear dadas por

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad (3.7)$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}. \quad (3.8)$$

O segundo tensor de Piola-Kirchhoff é expresso por

$$\mathbf{S} = \lambda \ln J \mathbf{C}^{-1} + \mu (\mathbf{I} - \mathbf{C}^{-1}). \quad (3.9)$$

Fazendo uso da Equação (3.5), obtém-se o tensor constitutivo,

$$\mathbf{C} = \lambda \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} + 2(\mu - \lambda \ln J) \mathcal{I}, \quad (3.10)$$

sendo

$$\mathcal{I} = -\frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}}. \quad (3.11)$$

A expressão na forma indicial, na descrição Lagrangeana total, é

$$C_{ijkl} = \lambda C_{ij}^{-1} C_{kl}^{-1} + \mu (C_{ik}^{-1} C_{jl}^{-1} + C_{il}^{-1} C_{kj}^{-1}) \quad (3.12)$$

### 3.5 Material de Mooney-Rivlin

Para o estado puramente incompressível, a função de energia de deformação do material hiperelástico de Mooney-Rivlin é dada por (Crisfield, 1997)

$$W(I_1, I_2) = A_{10}(I_1 - 3) + A_{01}(I_2 - 3), \quad (3.13)$$

sendo  $A_{10}$  e  $A_{01}$  os parâmetros materiais, e  $I_1$  e  $I_2$  o primeiro e o segundo invariantes de  $\mathbf{C}$ , respectivamente. Para consistência com a elasticidade linear, tem-se

$$G = 2(A_{10} + A_{01}). \quad (3.14)$$

Como descrito na Seção 3.1, uma pequena compressibilidade pode ser considerada, e então a Equação (3.13) pode ser reescrita na forma quasi-incompressível como (de Souza Neto *et al.*, 2008)

$$W(I_1, I_2, J) = \bar{W}(I_1, I_2) + \tilde{W}(J), \quad (3.15)$$

com

$$\bar{W}(I_1, I_2) = A_{10}(I_1 J^{-2/3} - 3) + A_{01}(I_2 J^{-4/3} - 3), \quad (3.16)$$

$$\tilde{W}(J) = \frac{K}{2}(J - 1)^2, \quad (3.17)$$

representando as energias de deformação deviatórica e volumétrica, respectivamente. O Jacobiano  $J$  é relacionado com o terceiro invariante de  $\mathbf{C}$  (Equação (2.9)). Esta regularização introduz o módulo de compressibilidade  $K$  à componente volumétrica (de Souza Neto *et al.*, 2008). A relação de  $K$  com outros parâmetros na elasticidade linear é dada pela Equação (3.1). Observa-se na Equação (3.15), que quando  $J = 1$  não há variação de volume e portanto a incompressibilidade é recuperada. A pressão hidrostática é definida como

$$p = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial J}. \quad (3.18)$$

A partir da Equação (3.17), tem-se

$$p = K(J - 1). \quad (3.19)$$

Uma outra relação comumente encontrada na literatura (de Souza Neto *et al.*, 2008) é

$$p = K \ln J, \quad (3.20)$$

que resulta na seguinte energia de deformação volumétrica

$$\tilde{W}(J) = \frac{K}{2}(\ln J)^2. \quad (3.21)$$

No entanto, a formulação adotada neste trabalho exige do material, para a simetria da matriz tangente, que

$$\frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial J^2} = K, \quad (3.22)$$

constituindo uma relação linear entre a pressão hidrostática e o Jacobiano (Chen e Pan, 1996), e portanto a Equação (3.19) será utilizada.

O segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff é obtido através da derivada da função de energia de deformação em relação ao tensor de Cauchy-Green, ou seja,

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= 2A_{10}J^{-2/3}\mathbf{I} + 4A_{01}J^{-4/3}(I_1\mathbf{I} - \mathbf{C}) \\ &+ \left( -\frac{2}{3}A_{10}I_1J^{-2/3} - \frac{4}{3}A_{01}I_2J^{-4/3} + Jp \right) \mathbf{C}^{-1}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

sendo as contribuições deviatórica  $\bar{\mathbf{S}}$  e volumétrica  $\tilde{\mathbf{S}}$  dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{S}} &= 2A_{10}J^{-2/3}\mathbf{I} + 4A_{01}J^{-4/3}(I_1\mathbf{I} - \mathbf{C}) \\ &+ \left(-\frac{2}{3}A_{10}I_1J^{-2/3} - \frac{4}{3}A_{01}I_2J^{-4/3}\right)\mathbf{C}^{-1},\end{aligned}\quad (3.24)$$

$$\tilde{\mathbf{S}} = Jp\mathbf{C}^{-1}.\quad (3.25)$$

É conveniente, para o equacionamento que será apresentado na Seção 3.7, particionar o tensor de elasticidade da seguinte maneira

$$\mathbf{c} = \bar{\mathbf{c}} + \tilde{\mathbf{c}}^1 + \tilde{\mathbf{c}}^2,\quad (3.26)$$

com

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{c}} &= 2\frac{\partial\bar{\mathbf{S}}}{\partial\mathbf{C}}, \\ \tilde{\mathbf{c}}^1 &= 2\frac{\partial(J\mathbf{C}^{-1})}{\partial\mathbf{C}}p, \\ \tilde{\mathbf{c}}^2 &= 2J\mathbf{C}^{-1}\frac{\partial p}{\partial\mathbf{C}}.\end{aligned}\quad (3.27)$$

O termo  $\bar{\mathbf{c}}$  é então puramente dependente dos deslocamentos. Já os termos  $\tilde{\mathbf{c}}^1$  e  $\tilde{\mathbf{c}}^2$  são obtidos através da aplicação da regra da cadeia, sendo que  $\tilde{\mathbf{c}}^2$  acopla a pressão hidrostática aos deslocamentos através de uma derivada.

### 3.6 Princípio das Potências Virtuais

A potência total  $\dot{W}$  para a formulação abordada (Chen e Pan, 1996), na descrição Lagrangeana total é

$$\dot{W} = \dot{W}_{\text{int}} - \dot{W}_{\text{ext}} = \int_{\Omega} \bar{W}d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{W}d\Omega - \dot{W}_{\text{ext}},\quad (3.28)$$

sendo  $\dot{W}_{\text{ext}}$  a potência externa. Os termos referentes à potência interna  $\dot{W}_{\text{int}}$  estão separados em contribuições deviatórica e volumétrica.

A partir da aplicação do Princípio das Potências Virtuais (PPV) à Equação (3.28), em relação ao movimento, tem-se um estado de equilíbrio  $\phi$ , para uma dada velocidade virtual cinematicamente admissível  $\delta\mathbf{v}$ , de tal forma que

$$\delta\dot{W}(\phi, \delta\mathbf{v}) = \delta\dot{W}_{\text{int}} - \delta\dot{W}_{\text{ext}} = 0.\quad (3.29)$$

A potência interna  $\delta\dot{W}_{\text{int}}$  é

$$\delta\dot{W}_{\text{int}} = \int_{\Omega} \bar{\mathbf{S}} : \delta\dot{\mathbf{E}} d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{S}} : \delta\dot{\mathbf{E}} d\Omega, \quad (3.30)$$

e  $\delta\dot{W}_{\text{ext}}$  é a potência externa dada por

$$\delta\dot{W}_{\text{ext}} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \delta\mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{v} d\Gamma, \quad (3.31)$$

sendo  $\mathbf{f}$  as forças de corpo e  $\mathbf{t}$  as forças de superfície.

Para o tratamento da quasi-incompressibilidade, o funcional de potência é perturbado da seguinte maneira (Bonet e Wood, 1997)

$$\dot{W}_1 = \dot{W}_{\text{int}} - \dot{W}_{\text{ext}} - \dot{W}_K = \int_{\Omega} \bar{W} d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{W} d\Omega - W_{\text{ext}} - \int_{\Omega} \frac{1}{2K} p^2 d\Omega, \quad (3.32)$$

sendo que o módulo de compressibilidade  $K$  atua como um parâmetro de penalização, de maneira que  $\dot{W}_1 \rightarrow \dot{W}$  à medida que  $K \rightarrow \infty$ . A derivada direcional do funcional perturbado em relação às pressões admissíveis  $\delta p$  é (Bonet e Wood, 1997; Yu *et al.*, 2012)

$$\int_{\Omega} (J - 1) \delta p d\Omega = \frac{1}{K} \int_{\Omega} p \delta p d\Omega, \quad \forall \delta p \in L^2, \quad (3.33)$$

sendo  $L^2$  o espaço de funções quadraticamente integráveis de Hilbert. Percebe-se que a definição acima leva à Equação 3.19. À medida que  $K$  tende a valores suficientemente altos, tem-se  $J \approx 1$ , ou seja, ocorre a condição de incompressibilidade e tem-se então a definição do funcional misto.

### 3.7 Forma linearizada do Princípio das Potências Virtuais

A forma linearizada do PPV é dada pela derivada direcional de  $\delta\dot{W}$  na direção de  $\delta\mathbf{v}$  para um incremento  $\Delta\mathbf{u}$  (Bonet e Wood, 1997), ou seja,

$$\mathcal{D}\delta\dot{W}(\phi, \delta\mathbf{v})[\Delta\mathbf{u}] = \mathcal{D}\delta\dot{W}_{\text{int}}(\phi, \delta\mathbf{v})[\Delta\mathbf{u}] - \mathcal{D}\delta\dot{W}_{\text{ext}}(\phi, \delta\mathbf{v})[\Delta\mathbf{u}]. \quad (3.34)$$

Como a potência virtual externa é assumida como independente da deformação, tem-se

$$\mathcal{D}\delta\dot{W}_{\text{ext}}(\phi, \delta\mathbf{v})[\Delta\mathbf{u}] = 0. \quad (3.35)$$

Portanto, a forma linearizada da Equação (3.29) é (Bonet e Wood, 1997; Yu *et al.*, 2012)

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\delta\dot{W}(\phi, \delta\mathbf{v})[\Delta\mathbf{u}] &= \int_{\Omega} (\bar{\mathbf{S}} + \tilde{\mathbf{S}}) : [(\nabla_0\Delta\mathbf{u})^T \nabla_0\delta\mathbf{v}] d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} \frac{1}{2} [\mathbf{F}^T(\nabla_0\delta\mathbf{v}) + \mathbf{F}(\nabla_0\delta\mathbf{v})^T]^T : (\bar{\mathbf{c}} + \tilde{\mathbf{c}}) : \frac{1}{2} [\mathbf{F}^T(\nabla_0\Delta\mathbf{u}) + \mathbf{F}(\nabla_0\Delta\mathbf{u})^T] d\Omega. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Fazendo o uso da separação do tensor constitutivo definido nas Equações (3.26) e (3.27), é conveniente reescrever a expressão (3.36) como

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\delta\dot{W}(\phi, \delta\mathbf{v})[\Delta\mathbf{u}] &= \int_{\Omega} (\bar{\mathbf{S}} + \tilde{\mathbf{S}}) : [(\nabla_0\Delta\mathbf{u})^T \nabla_0\delta\mathbf{v}] d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} \frac{1}{2} [\mathbf{F}^T(\nabla_0\delta\mathbf{v}) + \mathbf{F}(\nabla_0\delta\mathbf{v})^T]^T : (\bar{\mathbf{c}} + \tilde{\mathbf{c}}^1) : \frac{1}{2} [\mathbf{F}^T(\nabla_0\Delta\mathbf{u}) + \mathbf{F}(\nabla_0\Delta\mathbf{u})^T] d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} \mathbf{F}^T(\nabla_0\delta\mathbf{v}) + \mathbf{F}(\nabla_0\delta\mathbf{v})^T \right] : J\mathbf{C}^{-1}\Delta p d\Omega. \end{aligned} \quad (3.37)$$

O termo  $\Delta p$  é o incremento de pressão dado por

$$\Delta p = \frac{1}{2} K J \mathbf{C}^{-1} : \left[ \mathbf{F}^T(\nabla_0\Delta\mathbf{u}) + \mathbf{F}(\nabla_0\Delta\mathbf{u})^T \right], \quad (3.38)$$

que surge da derivada direcional do termo  $\frac{\partial p}{\partial \mathbf{E}}$  de  $\tilde{\mathbf{C}}^2$  na direção de  $\Delta\mathbf{u}$ .

### 3.8 Funções de forma

As funções de forma  $N_a(\xi)$  utilizadas para a interpolação das grandezas cinemáticas unidimensionais são construídas em bases nodais com polinômios de Lagrange  $h_i(\xi)$ . Tais funções são associadas a um conjunto de pontos nodais. Nos casos em que as expansões polinomiais são decompostas em modos internos e de fronteira, os pontos nodais devem incluir os pontos extremos do domínio considerado. Ademais, a escolha dos pontos é livre, apesar da escolha dos pontos influir na estabilidade da aproximação e no condicionamento do sistema. O uso de pontos nodais de

Gauss-Lobatto-Legendre produz uma expansão eficiente, sem as oscilações observadas em pontos igualmente espaçados (Karniadakis e Sherwin, 2005).

Dada uma ordem polinomial  $P$ , tem-se  $n = P + 1$  pontos nodais  $\xi_b$  ( $0 \leq b \leq P$ ). Em uma dada direção  $\xi$ , a expressão para os polinômios de Lagrange para um dado ponto  $a$  é,

$$N_a^P(\xi) = h_a^P(\xi) = \frac{\prod_{b=0, b \neq a}^n (\xi - \xi_b)}{\prod_{b=0, b \neq a}^n (\xi_a - \xi_b)}. \quad (3.39)$$

Para elementos hexaédricos, a construção das funções de forma para os  $n = (P + 1)^3$  nós é feita da seguinte maneira (Bittencourt, 2010)

$$N_a(\xi, \eta, \zeta) = h_i^P(\xi)h_j^P(\eta)h_k^P(\zeta), \quad a = 1, \dots, n. \quad (3.40)$$

### 3.9 Discretização local em elementos finitos

Definidas as funções de forma, estas são utilizadas para a interpolação das grandezas cinemáticas e da pressão. Utilizando elementos isoparamétricos, a discretização das coordenadas materiais  $\mathbf{X}$  da configuração inicial da geometria é dada por

$$\mathbf{X} = \sum_{a=1}^n N_a(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{X}_a \text{ ou } \mathbf{X} = \mathbf{N}_a^T \mathbf{X}_a, \quad (3.41)$$

sendo  $n$  o número de nós de um dado elemento e  $\mathbf{X}_a$  as coordenadas nodais na configuração original (indeformada). As coordenadas na configuração atual são interpoladas como

$$\mathbf{x} = \sum_{a=1}^n N_a(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{x}_a \text{ ou } \mathbf{x} = \mathbf{N}_a^T \mathbf{x}_a, \quad (3.42)$$

com  $\mathbf{x}_a$  as coordenadas nodais atualizadas. Os deslocamentos nodais são interpolados da mesma maneira

$$\mathbf{u} = \sum_{a=1}^n N_a(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{u}_a \text{ ou } \mathbf{u} = \mathbf{N}_a^T \mathbf{u}_a, \quad (3.43)$$

As velocidades virtuais são

$$\delta \mathbf{v} = \sum_{a=1}^n N_a(\xi, \eta, \zeta) \delta \mathbf{v}_a \text{ ou } \delta \mathbf{v} = \mathbf{N}_a^T \delta \mathbf{v}_a, \quad (3.44)$$

sendo que  $\delta \mathbf{v}_a$  são as velocidades virtuais nodais. Os incrementos de deslocamento também são interpolados:

$$\Delta \mathbf{u} = \sum_{a=1}^n N_a(\xi, \eta, \zeta) \Delta \mathbf{u}_a \text{ ou } \Delta \mathbf{u} = \mathbf{N}_a^T \Delta \mathbf{u}_a, \quad (3.45)$$

sendo  $\Delta \mathbf{u}_a$  os incrementos de deslocamentos nodais. A forma discretizada do tensor gradiente de deformação é definida a partir da derivada das coordenadas espaciais em relação às coordenadas materiais, de acordo com a Equação (2.5). Logo, a sua forma discreta é

$$\mathbf{F} = \sum_{a=1}^n \mathbf{x}_a \otimes \nabla_0 N_a. \quad (3.46)$$

O tensor de Cauchy-Green à direita, definido na Equação (2.8), possui a seguinte forma discretizada,

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \sum_{a,b=1}^n (\mathbf{x}_a \cdot \mathbf{x}_b) \nabla_0 N_a \otimes \nabla_0 N_b. \quad (3.47)$$

### 3.10 Projeção local da pressão hidrostática

O termo da pressão hidrostática foi introduzido na seção 3.5 como  $p$ . Nesta seção, os termos são denotados no domínio do elemento. Portanto,  $p^e$  é a pressão hidrostática no elemento, e  $p^{e*}$  é a projeção da pressão hidrostática no elemento. É importante também denotar a ordem de interpolação dos deslocamentos como  $O_u$ , com funções de forma  $\mathbf{N}$  associadas. A ordem de interpolação da pressão é  $O_p$ , com funções de forma  $\mathbf{Q}$ . O número de funções de forma para o deslocamento é denotado por  $N_u^e$ , enquanto que o número de funções de forma para a pressão é  $N_p^e$ .

Considera-se a aproximação de  $p^e(\mathbf{X})$ , nas coordenadas da configuração indeformada, pelo Método dos Mínimos Quadrados, a partir da combinação linear de uma sequência de funções,  $\mathbf{Q} = \{Q_1(\mathbf{X}), Q_2(\mathbf{X}), \dots, Q_n(\mathbf{X})\}$  em  $L^2$ . Portanto, deseja-se determinar  $\mathbf{p}^e = [p_1^e, p_2^e, \dots, p_n^e]$  que minimiza

$$\phi(\mathbf{p}^e) = \|p^e - \mathbf{Q}\mathbf{p}^e\|_{L^2(\Omega^e)}^2. \quad (3.48)$$

O termo  $p^e - \mathbf{Q}\mathbf{p}^e$  é definido como um resíduo  $R$

$$R = p^e - \mathbf{Q}\mathbf{p}^e. \quad (3.49)$$

Dessa maneira, com o uso do Método dos Mínimos Quadrados, tem-se o seguinte problema de projeção

$$\frac{\partial ||R||^2}{\partial \mathbf{p}^e} = \int_{\Omega^e} \frac{\partial R^2}{\partial \mathbf{p}^e} d\Omega^e = 0. \quad (3.50)$$

Aplicando a derivada no resíduo, chega-se a

$$2 \int_{\Omega^e} (-\mathbf{Q}^T p^e + \mathbf{Q}^T \mathbf{Q}\mathbf{p}^e) d\Omega^e = 0, \quad (3.51)$$

que resulta na seguinte equação matricial,

$$\mathbf{M}^e \mathbf{p}^e = \mathbf{F}^e, \quad (3.52)$$

sendo  $\mathbf{M}^e$  a matriz de projeção elementar e  $\mathbf{F}^e$  o vetor de força elementar, definidos, respectivamente por

$$\mathbf{M}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} d\Omega^e, \quad (3.53)$$

$$\mathbf{F}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{Q}^T p^e d\Omega^e. \quad (3.54)$$

Por fim, realiza-se o produto entre os coeficientes  $\mathbf{p}^e$  obtidos e as funções de forma avaliadas nos pontos de integração, para obter a pressão projetada nos pontos de integração do elemento:

$$p^{e*} = \mathbf{Q}\mathbf{p}^e = \mathbf{Q} (\mathbf{M}^e)^{-1} \mathbf{F}^e. \quad (3.55)$$

A matriz elementar de projeção, também conhecida na literatura como matriz de massa (Karniadakis e Sherwin, 2005), possui dimensão  $N_p^e \times N_p^e$ :

$$\mathbf{M}_p^e = \begin{bmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1N_p^e} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{N_p^e 1} & \cdots & m_{N_p^e N_p^e} \end{bmatrix}, \quad m_{ij} = \int_{\Omega^e} Q_i Q_j d\Omega^e. \quad (3.56)$$

O vetor de força possui dimensão  $N_p^e$  e é dado por

$$\begin{aligned}\mathbf{F}^e &= \left[ \int_{\Omega^e} Q_1 p^e d\Omega^e, \int_{\Omega^e} Q_2 p^e d\Omega^e, \dots, \int_{\Omega^e} Q_{N_p^e} p^e d\Omega^e \right] \\ &= K \left[ \int_{\Omega^e} Q_1 (J-1) d\Omega^e, \int_{\Omega^e} Q_2 (J-1) d\Omega^e, \dots, \int_{\Omega^e} Q_{N_p^e} (J-1) d\Omega^e \right].\end{aligned}\quad (3.57)$$

Da mesma maneira, deve-se também projetar o incremento da pressão hidrostática  $\Delta p$ , definida na Equação (3.38). Portanto, deve-se minimizar

$$\phi(\Delta \mathbf{p}^e) = \|\Delta p^e - \mathbf{Q} \Delta \mathbf{p}^e\|_{L_2(\Omega^e)}^2. \quad (3.58)$$

Aplicando o problema de projeção da Equação (3.50) para  $\Delta \mathbf{p}^e$ , tem-se

$$2 \int_{\Omega^e} \left( -K J \mathbf{Q}^T \mathbf{C}^{-1} \frac{1}{2} \left[ \mathbf{F}^T (\nabla_0 \Delta \mathbf{u}) + \mathbf{F} (\nabla_0 \Delta \mathbf{u})^T \right] + \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \Delta \mathbf{p}^e \right) d\Omega^e = 0, \quad (3.59)$$

resultando em

$$-K \mathbf{K}_p^e + \mathbf{M}^e \Delta \mathbf{p}^e = 0, \quad (3.60)$$

e, portanto,

$$\Delta \mathbf{p}^e = (\mathbf{M}^e)^{-1} \mathbf{K}_p^e \Delta \mathbf{u}^e, \quad (3.61)$$

sendo

$$\mathbf{K}_p^e = \int_{\Omega^e} J \mathbf{Q}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B}_{NL} d\Omega^e. \quad (3.62)$$

O termo  $\mathbf{B}_{NL}$  refere-se à matriz de deformação não-linear de Green dada por

$$\mathbf{B}_{NL} = \frac{1}{2} \left[ \mathbf{F}^T (\nabla_0 \Delta \mathbf{u}) + \mathbf{F} (\nabla_0 \Delta \mathbf{u})^T \right], \quad (3.63)$$

com a seguinte forma matricial para um estado geral de tensões

$$[\mathbf{B}_{NL}^e] = \begin{bmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,3} & \cdots & \cdots & b_{1,3 \times N_u^e} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{6,1} & \cdots & b_{6,3} & \cdots & \cdots & b_{6,3 \times N_u^e} \end{bmatrix}. \quad (3.64)$$

Em notação indicial,

$$b_{ij} = \frac{1}{2} (C_{ij} - \delta_{ij}), \quad (3.65)$$

$$C_{ij} = F_{ki} F_{kj}, \quad (3.66)$$

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}. \quad (3.67)$$

A matriz  $\mathbf{B}_{NL}$  possui, neste caso 6 linhas devido ao uso da notação de Voigt, bem como  $3 \times N_u^e$  colunas, de acordo com o número de funções de forma para a interpolação dos deslocamentos utilizado. A matriz  $\mathbf{K}_p^e$  possui ordem  $3N_u^e \times N_p^e$ , organizada em  $N_u^e \times N_p^e$  blocos, sendo cada bloco uma matriz  $3 \times 1$   $(K_p^e)_{ij}$  ( $i = 1, \dots, N_u^e, j = 1, \dots, N_p^e$ ):

$$\mathbf{K}_p^e = \begin{bmatrix} (K_p^e)_{1,1} & \cdots & (K_p^e)_{1,N_p^e} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (K_p^e)_{3 \times N_u^e,1} & \cdots & (K_p^e)_{3 \times N_u^e,N_p^e} \end{bmatrix}, \quad (3.68)$$

$$(K_p^e)_{ij,m} = \sum_{k,l=1}^3 \int_{\Omega^e} J Q_j \mathbf{C}_{kl}^{-1} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial N_i}{\partial X_k} \mathbf{F}_{ml} + \mathbf{F}_{mk} \frac{\partial N_i}{\partial X_l} \right) d\Omega^e, \quad m = 1, 2, 3. \quad (3.69)$$

Realizando o produto entre as funções de forma  $\mathbf{Q}$  para a pressão em um dado ponto de integração e os coeficientes  $\Delta \mathbf{p}^e$  obtidos, tem-se o incremento da projeção da pressão no elemento, ou seja

$$\Delta p^{e*} = K \mathbf{Q} (\mathbf{M}^e)^{-1} (\mathbf{K}_p^e)^T \Delta \mathbf{u}^e. \quad (3.70)$$

O Algoritmo 3.1 apresenta o procedimento computacional da projeção da pressão hidrostática  $p^{e*}$ .

---

**Algoritmo 3.1** Procedimento de projeção da pressão hidrostática no elemento.

---

1. Calcular a pressão acoplada aos deslocamentos  $p^e$  (Equação 3.19) em todos os pontos de Gauss;
  2. Montar a matriz de projeção  $\mathbf{M}^e$  do elemento, com o grau de interpolação da pressão  $O_p$ ;
  3. Montar o vetor  $\mathbf{F}^e$  do elemento, também com grau  $O_p$ ;
  4. Resolver o sistema linear (3.52) para encontrar os coeficientes  $\mathbf{p}^e$ ;
  5. Resolver o produto  $\mathbf{Q}\mathbf{p}^e$  para encontrar a pressão projetada nos pontos de Gauss.
-

### 3.11 Discretização da equação de equilíbrio

Lembrando a Equação (3.29), que representa a potência virtual total realizada por uma força residual  $\mathbf{r}$ , tem-se

$$\delta\dot{W}(\phi, \delta\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \delta\mathbf{v} \, d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{v} \, d\Gamma. \quad (3.71)$$

Introduzindo a discretização definida na Seção 3.9, pode-se reescrever a expressão (3.71) para um elemento como

$$\delta\dot{W}(\phi, \mathbf{N}\delta\mathbf{v}_a) = \delta\mathbf{v}_a^T (\mathbf{f}_{int}^e - \mathbf{f}_{ext}^e) = 0. \quad (3.72)$$

Como a equação do PPV deve ser satisfeita para qualquer velocidade virtual nodal cinematicamente admissível  $\delta\mathbf{v}_a$ , os termos de equilíbrio discretizados são expressos por uma força residual elementar  $\mathbf{R}^e$  dada por

$$\mathbf{R}^e = \mathbf{f}_{int}^e - \mathbf{f}_{ext}^e. \quad (3.73)$$

O termo  $\mathbf{f}_{int}^e$  é a força interna elementar discretizada,

$$\mathbf{f}_{int}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_{NL}^T (\bar{\mathbf{S}}_v + \tilde{\mathbf{S}}_v) \, d\Omega, \quad (3.74)$$

e  $\mathbf{f}_{ext}^e$  é a força externa elementar discretizada, dada por

$$\mathbf{f}_{ext}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}\mathbf{f} \, d\Omega + \int_{\Gamma^e} \mathbf{N}\mathbf{t} \, d\Gamma. \quad (3.75)$$

Os termos  $\bar{\mathbf{S}}_v$  e  $\tilde{\mathbf{S}}_v$  são as formas vetoriais deviatórica e volumétrica da tensão, respectivamente, escritas em notação de Voigt como

$$\bar{\mathbf{S}}_v = \left[ \bar{S}_{11} \ \bar{S}_{22} \ \bar{S}_{33} \ \bar{S}_{12} \ \bar{S}_{13} \ \bar{S}_{23} \right]^T, \quad (3.76)$$

$$\tilde{\mathbf{S}}_v = \left[ \tilde{S}_{11} \ \tilde{S}_{22} \ \tilde{S}_{33} \ \tilde{S}_{12} \ \tilde{S}_{13} \ \tilde{S}_{23} \right]^T. \quad (3.77)$$

### 3.12 Discretização da equação de equilíbrio linearizada

A aplicação da discretização elementar na forma linearizada das potências virtuais (Equação (3.34)) resulta em

$$\mathcal{D}\delta\dot{W}^e(\phi, \mathbf{N}\delta\mathbf{v}_a) [\mathbf{N}\Delta\mathbf{u}_a] = \delta\mathbf{v}_a^T \mathbf{K}_t^e \Delta\mathbf{u}_a, \quad (3.78)$$

sendo  $\mathbf{K}_t^e$  a matriz de rigidez tangente do elemento dada por

$$\mathbf{K}_t^e = \bar{\mathbf{K}}^e + \tilde{\mathbf{K}}^e + \tilde{\mathbf{K}}^{e*}, \quad (3.79)$$

com as seguintes matrizes

$$\bar{\mathbf{K}}^e = \int_{\Omega^e} (\mathbf{B}_\sigma^T \bar{\mathbf{T}} \mathbf{B}_\sigma + \mathbf{B}_{\text{NL}}^T \bar{\mathbf{D}} \mathbf{B}_{\text{NL}}) d\Omega^e, \quad (3.80)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}^e = \int_{\Omega^e} (\mathbf{B}_\sigma^T \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{B}_\sigma + \mathbf{B}_{\text{NL}}^T \tilde{\mathbf{D}}^1 \mathbf{B}_{\text{NL}}) d\Omega^e, \quad (3.81)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}^{e*} = K (\mathbf{K}_p^e)^T (\mathbf{M}^e)^{-1} (\mathbf{K}_p^e). \quad (3.82)$$

Deve-se observar que a matriz  $\tilde{\mathbf{K}}^{e*}$  é simétrica, e possui tamanho  $3N_u^e \times 3N_u^e$ , para um problema 3D. Os termos  $\bar{\mathbf{D}}$  e  $\tilde{\mathbf{D}}^1$  são as formas matriciais de  $\bar{\mathcal{C}}$  e  $\tilde{\mathcal{C}}^1$ , respectivamente. Sua forma na notação de Voigt para um estado geral de tensões produz a seguinte matriz de ordem 6x6

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_{1111} & \mathcal{C}_{1122} & \mathcal{C}_{1133} & \mathcal{C}_{1112} & \mathcal{C}_{1113} & \mathcal{C}_{1123} \\ & \mathcal{C}_{2222} & \mathcal{C}_{2233} & \mathcal{C}_{2212} & \mathcal{C}_{2213} & \mathcal{C}_{2223} \\ & & \mathcal{C}_{3333} & \mathcal{C}_{3312} & \mathcal{C}_{3313} & \mathcal{C}_{3323} \\ & & & \mathcal{C}_{1212} & \mathcal{C}_{1213} & \mathcal{C}_{1223} \\ \text{sim.} & & & & \mathcal{C}_{1313} & \mathcal{C}_{1323} \\ & & & & & \mathcal{C}_{2323} \end{bmatrix}. \quad (3.83)$$

A matriz  $\mathbf{B}_\sigma$  opera os tensores de tensão, constituindo o termo de rigidez geométrica de dimensão 9x9. Logo,

$$\mathbf{B}_\sigma = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial X_1} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial X_1} & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial N_{N_u^e}}{\partial X_1} & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial X_2} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial X_2} & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial N_{N_u^e}}{\partial X_2} & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial X_3} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial X_3} & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial N_{N_u^e}}{\partial X_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial X_1} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial X_1} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_{N_u^e}}{\partial X_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial X_2} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial X_2} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_{N_u^e}}{\partial X_2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial X_3} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial X_3} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_{N_u^e}}{\partial X_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial X_1} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial X_1} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_{N_u^e}}{\partial X_1} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial X_2} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial X_2} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_{N_u^e}}{\partial X_2} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial X_3} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial X_3} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_{N_u^e}}{\partial X_3} \end{bmatrix}. \quad (3.84)$$

Já as matrizes  $\bar{\mathbf{T}}$  e  $\tilde{\mathbf{T}}$  são dadas pelo produto de Kroenecker entre as matrizes de tensões e identidade como

$$\bar{\mathbf{T}} = \bar{\mathbf{S}} \otimes \mathbf{I}, \quad (3.85)$$

$$\tilde{\mathbf{T}} = \tilde{\mathbf{S}} \otimes \mathbf{I}. \quad (3.86)$$

Para um estado geral de tensões, tais matrizes possuem dimensão 9x9 e podem ser denotadas como

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ \text{sim.} & & & & & & & S_{22} & S_{23} \\ & & & & & & & & S_{33} \end{bmatrix}. \quad (3.87)$$

### 3.13 Equação de Newton-Raphson e procedimento de solução

Considerando uma solução teste  $\phi_k$  (Bonet e Wood, 1997), a equação de Newton-Raphson é dada por

$$\mathcal{D}\delta\dot{W}(\phi_k, \delta\mathbf{v})[\Delta\mathbf{u}] = -\delta\dot{W}(\phi_k, \delta\mathbf{v}). \quad (3.88)$$

Na forma discretizada, tem-se

$$\delta\mathbf{v}_g^T \mathbf{K}_g^t \Delta\mathbf{u}_g = -\delta\mathbf{v}_g^T \mathbf{R}_g. \quad (3.89)$$

Como as velocidades virtuais são arbitrárias, tem-se a forma final incremental

$$\mathbf{K}_g^t \Delta\mathbf{u}_g = -\mathbf{R}_g, \quad (3.90)$$

sendo que  $\mathbf{K}_g^t$  é a matriz rigidez tangente global do sistema, e  $\mathbf{R}_g$  o vetor de força residual global. Os termos  $\delta\mathbf{v}_g$  e  $\Delta\mathbf{u}_g$  são as velocidades virtuais globais e incrementos de deslocamento globais, respectivamente.

O método de solução de Newton-Raphson é utilizado para resolver a forma incremental da Equação (3.90). De acordo com Bonet e Wood (1997), é possível obter uma solução direta para os deslocamentos a partir de um determinado valor de força externa aplicada. No entanto, se os deslocamentos forem muito grandes, pode haver dificuldades de convergência. Portanto, é conveniente considerar

$$\mathbf{f}_{\text{ext}} = \sum_{i=1}^l \Delta\mathbf{f}_{\text{ext}}^i, \quad (3.91)$$

sendo  $\Delta\mathbf{f}_{\text{ext}}$  um dado incremento da força externa, e  $l$  o número total de incrementos de carga. Quanto maior for  $l$ , mais fácil se torna a convergência, sendo que no caso de problemas de hiperelasticidade a solução final é independente da maneira como tais incrementos são aplicados. O Algoritmo 3.2 apresenta o procedimento de Newton-Raphson para um dado passo de carregamento.

---

**Algoritmo 3.2** Procedimento de Newton-Raphson para um dado passo de carregamento.

---

1. Baseado em  $\mathbf{u}$  conhecido para a iteração  $k$ , efetuar o procedimento da projeção da pressão apresentado no Algoritmo 3.1;
  2. Atualizar as tensões  $\tilde{\mathbf{S}}$ , bem como a parte volumétrica do tensor de elasticidade  $\tilde{\mathbf{C}}^1$  com a pressão projetada  $\mathbf{p}^{e*}$ ;
  3. Atualizar as matrizes de rigidez (Equações (3.80), (3.81), (3.82)), e a força interna do elemento (Equação (3.74));
  4. Montar a matriz de rigidez global e o vetor resíduo global, e resolver a Equação (3.90) para  $\Delta \mathbf{u}_g^k$ , fazendo uso de um método de solução para sistema linear;
  5. Atualizar os deslocamentos:  $\mathbf{u}_g^{k+1} = \mathbf{u}_g^k + \Delta \mathbf{u}_g^k$ ;
  6. Verificar o critério de convergência. Caso seja satisfeito, incrementar o passo de carregamento. Caso contrário, retornar ao passo 1.
-

## 4 DANO EM MEIO CONTÍNUO

Este capítulo descreve alguns aspectos da natureza do dano. Em seguida, é introduzido o efeito Mullins e apresentada a formulação de dano hiperelástico com a sua lei de evolução e a relação constitutiva. Por fim, são apresentadas as equações na forma algorítmica, para a atualização consistente das tensões com as equações constitutivas.

### 4.1 Natureza física do dano

De acordo com Lemaître (1996), a natureza do dano é distinta entre diferentes materiais. Nos polímeros e borrachas, o dano ocorre devido à quebra de ligações entre as longas cadeias moleculares. Nos materiais compostos laminados, o dano é caracterizado pela delaminação, que é a perda de adesão entre a fibra e a matriz.

Muitos tecidos conjuntivos são arranjos de maneira semelhante aos materiais compostos, e os mecanismos de dano ainda não são bem conhecidos. No entanto, sabe-se que em ligamentos, o dano ocorre a partir da plastificação e do rompimento de componentes fibrosos, bem como pela degradação biomecânica da matriz extracelular devido à liberação de protease (que realiza a quebra de ligações proteicas), associada com a necrose (Provenzano *et al.*, 2002).

Nas cerâmicas, ocorre a perda de coesão entre as inclusões e a matriz na escala micrométrica. De maneira semelhante, no concreto há perda de coesão entre os agregados e o cimento, sendo um fator importante a quantidade de água utilizada. Nos metais dúteis o dano é caracterizado pelo nucleamento de microtrincas decorrente do acúmulo de discordâncias no processo de deformação plástica (Lemaître, 1996). Por fim, na madeira, o ponto fraco onde ocorre o dano é na junção da celulose, sendo que o mesmo se propaga na interface das fibras.

### 4.2 Efeito Mullins em materiais hiperelásticos

Quando elastômeros e tecidos biológicos em geral são carregados, os mesmos sofrem um efeito de amolecimento chamado efeito Mullins (Holzapfel, 2000). Considere a Figura 4.1, que

representa hipoteticamente um ensaio uniaxial cíclico. O processo inicia-se a partir de um estado indeformado 0 e segue o caminho A. O descarregamento no ponto 1 leva ao caminho B, retornando ao ponto 0<sup>1</sup>. A área entre as curvas A e B representa a dissipação envolvida no processo. Se o carregamento for reaplicado, o caminho agora passará por B e D. Da mesma maneira, o caminho C é a curva resultante, caso o descarregamento seja efetuado no ponto 2, resultando em maior degradação interna do material.

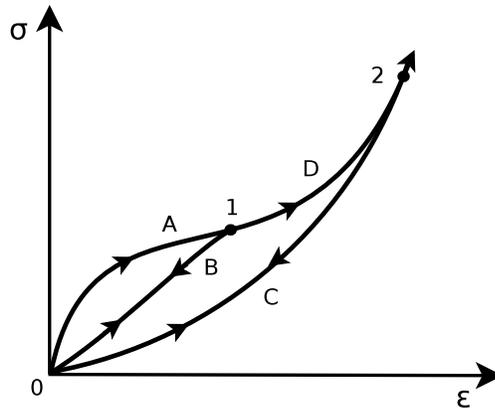


Figura 4.1: Efeito Mullins em materiais hiperelásticos (Holzapfel, 2000).

A partir da descrição da Figura 4.1, verifica-se que para um dado nível de deformação, a tensão nos caminhos B e C é menor do que no caminho de carregamento primário A-D. De maneira geral, o *efeito Mullins* é caracterizado pela redução da rigidez do material submetido à deformação, sendo que tal redução depende somente da máxima deformação atingida (Holzapfel, 2000). Após vários ciclos de carregamento, o material encontra-se "condicionado", pois o contínuo amolecimento causado pelos ciclos de carregamento leva a um estado saturado, ou seja, em regime permanente, as curvas de tensão do material quase coincidem.

### 4.3 Modelo de dano hiperelástico isotrópico

O desenvolvimento fenomenológico aqui apresentado é baseado em Simo (1987). Outros detalhes sobre esta formulação são encontrados nos trabalhos de Holzapfel (2000) e Chagnon *et al.* (2004).

<sup>1</sup>Em casos práticos, ocorrem pequenas tensões residuais, e portanto as curvas de descarregamento não retornam completamente ao ponto 0, ocorrendo uma histerese. No entanto, os modelos idealizados não consideram tais tensões, nem efeitos de temperatura e de viscosidade.

### 4.3.1 Variável de dano e aspectos termodinâmicos

Considere um material, caracterizado por uma energia de deformação deviatórica  $\bar{W}^D(\mathbf{E})$ , submetido a um processo de deformação com dano. O ponto de partida consiste em definir uma função de energia de deformação modificada,

$$\bar{W}^D(\mathbf{E}, D) = (1 - D) \bar{W}(\mathbf{E}), \quad (4.1)$$

aplicada em  $\bar{W}$ , pois o dano é uma grandeza deviatórica<sup>2</sup>. O termo  $(1 - D)$  é o parâmetro de redução de energia introduzido por Kachanov (1958), e  $D$  uma variável escalar de dano (devido à isotropia), definida por

$$0 \leq D \leq 1. \quad (4.2)$$

$D = 0$  caracteriza um material ainda virgem e  $D = 1$  um valor máximo de dano, quando uma região do corpo está totalmente danificada e ocorre a separação do material. Tal valor máximo caracteriza uma energia de deformação  $\bar{W}^D = 0$ . Deve-se constatar que  $D = 1$  não é necessariamente um valor de dano crítico  $D_c$ . Tal valor crítico varia entre diversos tipos de materiais aplicados em problemas de engenharia, para diferentes abordagens da teoria de dano contínuo. A presente abordagem possui as seguintes características:

- O dano evolui isotropicamente, e é somente função da máxima deformação equivalente atingida até o presente instante de tempo;
- A evolução do dano é um processo irreversível, e não depende das condições de carregamento. Logo, os esforços compressivos danificam o material tanto quando os esforços trativos;
- A degradação do material ocorre gradativamente, eventualmente atingindo um estado de saturação. No limiar da saturação pode ser definido um dano crítico  $D_c$  do material, caracterizando a ruptura.

---

<sup>2</sup>No caso de modelos com acoplamento entre as partes deviatórica e volumétrica, como o Neo-Hookeano compressível, o fator de redução  $(1 - D)$  da Equação (4.1) é aplicado sobre  $\bar{W}$ , ao invés de  $\bar{W}$

Em relação aos aspectos termodinâmicos (de Souza Neto *et al.*, 2008), considere o primeiro princípio da termodinâmica, expresso matematicamente pela seguinte equação

$$\rho \dot{e} = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}}, \quad (4.3)$$

descrevendo, para a abordagem em questão, que a taxa de energia interna ( $\dot{e}$ ) por unidade de volume deve ser igual à potência devido às tensões. O segundo princípio postula a questão da irreversibilidade da produção de entropia ( $s$ ), dada pela seguinte inequação

$$\rho \dot{s} \geq 0. \quad (4.4)$$

É introduzido um termo de energia livre de Helmholtz por unidade de massa  $\psi$ , que relaciona a energia interna com a entropia da seguinte maneira:

$$\psi = e - \theta s, \quad (4.5)$$

sendo  $\theta$  a temperatura. Para combinar as Equações (4.4) e (4.5), leva-se em conta que a energia de deformação e a energia livre de Helmholtz se relacionam da seguinte maneira

$$\bar{W}^D = \rho \psi, \quad (4.6)$$

chegando-se à inequação de Clausius-Duhem

$$\mathbf{S}^D : \dot{\mathbf{E}} - \dot{W}^D \geq 0. \quad (4.7)$$

O termo do lado esquerdo da equação representa a energia dissipada por unidade de volume. Os efeitos de temperatura e fluxo de calor não são considerados. A taxa de energia interna é obtida através da aplicação da regra da cadeia

$$\dot{W}^D = \frac{\partial \bar{W}^D(D, \mathbf{E})}{\partial D} \dot{D} + \frac{\partial \bar{W}^D(D, \mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} : \dot{\mathbf{E}}. \quad (4.8)$$

Substituindo a Equação (4.8) em (4.7), obtém-se

$$- \frac{\partial \bar{W}^D(\mathbf{E}, D)}{\partial D} \dot{D} \equiv \bar{W}(\mathbf{E}) \dot{D} \geq 0, \quad (4.9)$$

$$\bar{\mathbf{S}}^D = (1 - D) \frac{\partial \bar{W}(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}}. \quad (4.10)$$

A Equação (4.9) expressa a natureza dissipativa do dano, e  $\bar{W}(\mathbf{E})$  é termodinamicamente conjugada com  $\dot{D}$ , pois  $\partial \bar{W}^D / \partial D \equiv -\bar{W}(\mathbf{E})$ . A Equação (4.10) é também conhecida como tensão aparente, que surge do conceito de tensões equivalentes, introduzido primeiramente por Kachanov (1958), e ilustrado na Figura 4.2 para um caso uniaxial. Um corpo danificado no estado (a) com tensão inicial  $\bar{\sigma}$  e área inicial  $A$  é considerado no estado equivalente (b), com os defeitos removidos, constituindo uma área efetiva  $A^D$  com tensão efetiva  $\bar{\sigma}_{eff}^D$ , dada por

$$\bar{\sigma}_{eff}^D = \frac{\bar{\sigma}}{(1 - D)}. \quad (4.11)$$

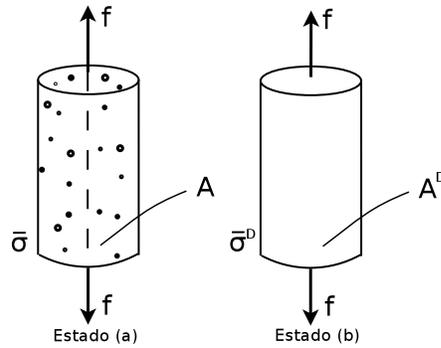


Figura 4.2: Definição das tensões equivalentes (Freitas, 2010).

### 4.3.2 Critério de dano

É utilizada uma medida de deformação equivalente  $\zeta_s$ , que se relaciona com a energia de deformação elástica através de

$$\frac{\zeta_s^2}{2} = \bar{W}(\mathbf{E}(t)), \quad (4.12)$$

$$\zeta_s = \sqrt{2\bar{W}(\mathbf{E}(t))}, \quad (4.13)$$

sendo  $\mathbf{E}(t)$  o tensor de deformação de Green-Lagrange em um pseudo-tempo  $t$  qualquer do processo de deformação. Define-se  $\zeta_t^m$  como o máximo valor de  $\zeta_t$  até o tempo  $t$ , ou seja,

$$\zeta_t^m = \max_{t \in (-\infty, t]} \sqrt{2\bar{W}(\mathbf{E}(t))}. \quad (4.14)$$

Logo, tem-se a máxima energia de deformação atingida até o presente momento  $t$  do processo de deformação considerado. A avaliação do dano é feita a partir da seguinte função de dano

$$\chi(\mathbf{E}(t), \zeta_t^m) = \sqrt{2\bar{W}(\mathbf{E}(t))} - \zeta_t^m \leq 0, \quad (4.15)$$

que define uma superfície de dano ilustrada pela Figura 4.3. Tal superfície cresce isotropicamente com a deformação. A derivada da função de superfície de dano (Equação (4.15)) em termos de taxa

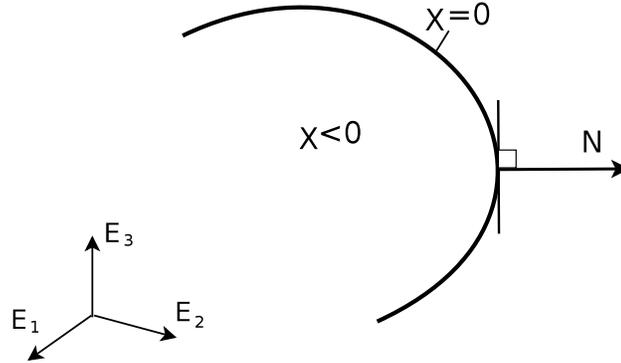


Figura 4.3: Superfície de dano contida no espaço das deformações (Holzapfel, 2000).

é

$$\dot{\chi} = \frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{E}} : \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{N} : \dot{\mathbf{E}}, \quad (4.16)$$

sendo  $\mathbf{N}$  a normal à superfície de dano

$$\frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{E}} = \bar{\mathbf{S}} \left( \frac{1}{\zeta_s} - \frac{1}{\zeta_t^m} \right). \quad (4.17)$$

Para um estado particular de deformação, têm-se 4 possíveis situações:

- O estado de deformação não é máximo, e a inequação  $\chi < 0$  é satisfeita (sem evolução do dano);
- O estado de deformação é máximo ( $\chi = 0$ ) e está em uma direção de descarregamento, proveniente de um estado danificado ( $\mathbf{N} : \dot{\mathbf{E}} < 0$ );
- O estado de deformação é máximo ( $\chi = 0$ ) e está em uma direção neutra ( $\mathbf{N} : \dot{\mathbf{E}} = 0$ );
- O estado de deformação é máximo ( $\chi = 0$ ) e está em uma direção de carregamento de um estado danificado ( $\mathbf{N} : \dot{\mathbf{E}} > 0$ ).

Os três primeiros casos correspondem à situações físicas nas quais o dano não evolui, e o último caso representa uma nova deformação máxima, de maneira que o parâmetro de dano aumenta. Portanto, se  $\chi > 0$ , tem-se um estado fora da superfície de dano, que não está definido pelas Equações (4.15) e (4.17). Isto significa que está ocorrendo uma evolução de dano, e a superfície deve ser regularizada, para que a relação  $\chi = 0$  seja satisfeita.

### 4.3.3 Lei de evolução

A seguinte lei é utilizada para a evolução do dano ao longo do tempo

$$\dot{D} = \begin{cases} \bar{h}(\zeta) \dot{\zeta} & \text{se } \chi = 0 \text{ e } \mathbf{N} : \dot{\mathbf{E}} > 0, \\ 0 & \text{senão} \end{cases} \quad (4.18)$$

sendo que  $\bar{h}(\zeta) = -d\bar{g}(\zeta)/d\zeta$  é a derivada de uma função de caráter exponencial  $\bar{g}(\zeta)$ , introduzida inicialmente por Simo (1987) para polímeros elastoméricos altamente preenchidos, dada por

$$\bar{g}(\zeta) = \beta + (1 - \beta) \frac{1 - e^{-\zeta/\alpha}}{\zeta/\alpha}, \quad (4.19)$$

sendo  $\beta \in [0, 1]$  e  $\alpha \in [0, \infty)$  parâmetros dependentes do material a ser utilizado. A notação de taxa apresentada na Equação (4.18) refere-se a um *pseudo-tempo*, pois indica uma dependência do histórico de deformações. O gráfico de  $\bar{g}$  é ilustrado na Figura 4.4, com variação dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ . Verifica-se que o valor assintótico da função é regido por  $\beta$ , sendo o parâmetro responsável pelo limite de saturação do dano. Já o parâmetro  $\alpha$  influencia na taxa de crescimento da curva até o valor assintótico de  $\beta$  (Figura 4.5). De maneira geral, quanto menor o valor de  $\beta$ , maior o valor de saturação de dano e maior a perda de rigidez do material. Quanto menor o valor de  $\alpha$ , maior é a taxa de crescimento de  $\bar{g}$ .

### 4.3.4 Relação constitutiva

Fazendo a consideração de que  $\bar{h}(D, \zeta_t)$  independe do dano, pode-se reescrever a expressão (4.10) como

$$\bar{\mathbf{S}}^D(t) = \bar{g}(\zeta_t^m) \frac{\partial \bar{W}(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}}, \quad (4.20)$$

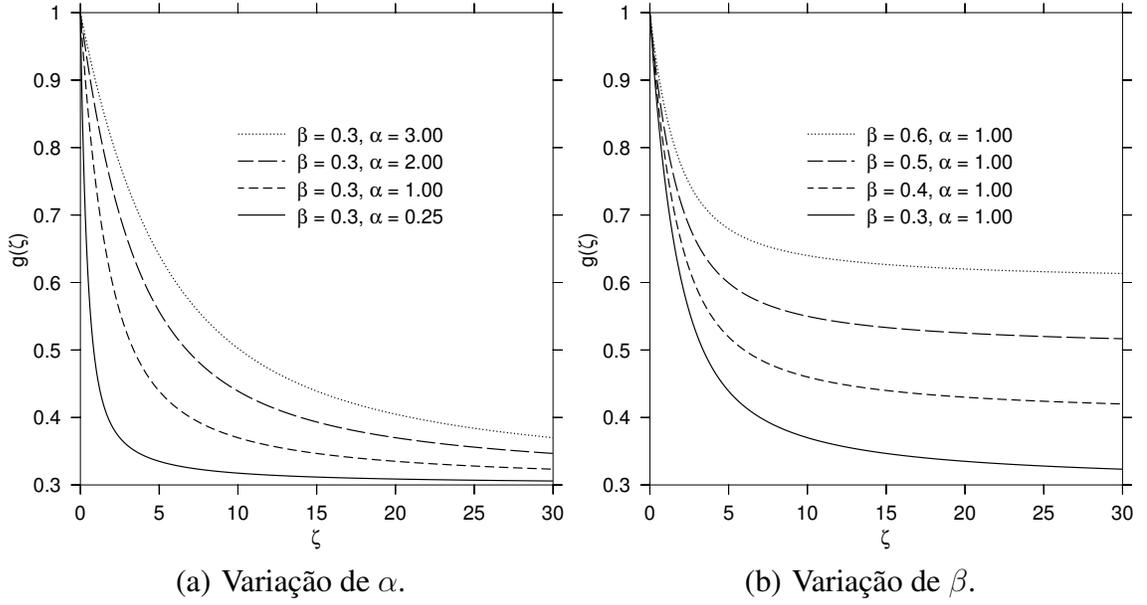


Figura 4.4: Função de evolução do dano em termos da deformação equivalente.

e considerando a Equação (4.24), relaciona-se o fator de redução de tensões com a função de evolução de dano da seguinte maneira,

$$(1 - D) = \bar{g}(\zeta_t^m). \quad (4.21)$$

Fazendo o uso da regra da cadeia em termos de taxa temporal

$$\dot{\mathbf{S}}^D = \frac{\partial \bar{\mathbf{S}}^D}{\partial \mathbf{E}} : \dot{\mathbf{E}} \quad (4.22)$$

e aplicando a regra do produto

$$\dot{\mathbf{S}}^D = \left( \bar{g}(\zeta_t^m) \frac{\partial^2 \bar{W}(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}^2} + \frac{\partial \bar{g}(\zeta_t^m)}{\partial \zeta_t^m} \frac{\partial \zeta_t^m}{\partial \mathbf{E}} \otimes \frac{\partial \bar{W}(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} \right) : \dot{\mathbf{E}}, \quad (4.23)$$

obtém-se a relação constitutiva para o modelo de dano

$$\dot{\mathbf{S}}^D(t) = \begin{cases} \left[ \bar{g}(\zeta_t^m) \bar{\mathbf{C}} + \frac{\bar{g}'(\zeta_t^m)}{\bar{g}(\zeta_t^m)} \bar{\mathbf{S}} \otimes \bar{\mathbf{S}} \right] : \dot{\mathbf{E}}, & \text{se } \chi = 0 \text{ e } \mathbf{N} : \dot{\mathbf{E}} > 0 \\ \bar{g}(\zeta_t^m) \bar{\mathbf{C}} : \dot{\mathbf{E}}, & \text{senão.} \end{cases} \quad (4.24)$$

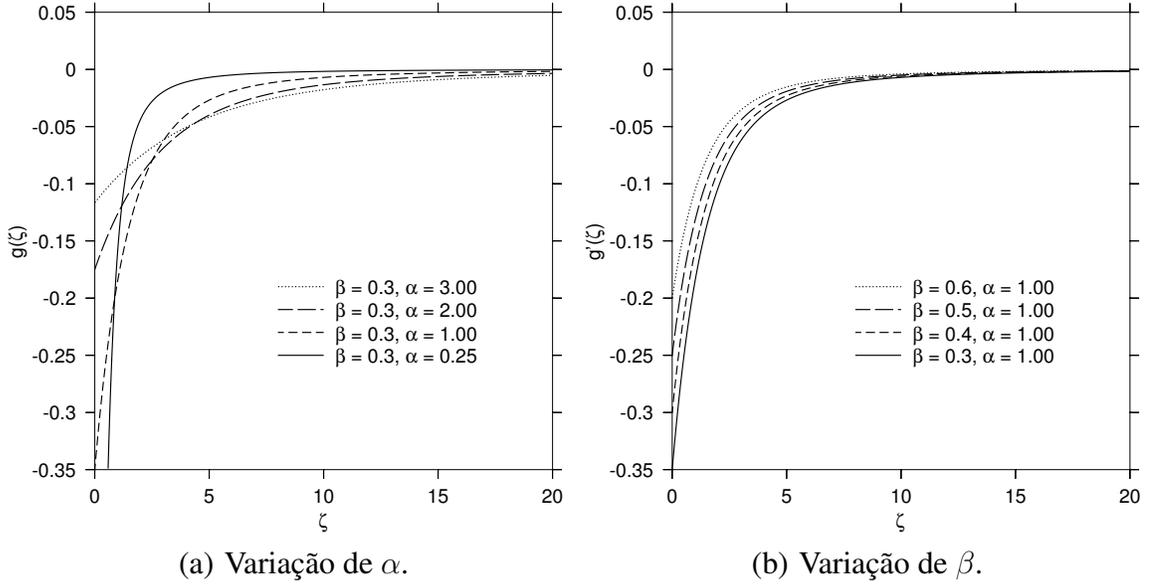


Figura 4.5: Derivada da função de evolução do dano em termos da deformação equivalente.

sendo

$$\bar{g}'(\zeta) = (1 - \beta) \left[ \frac{e^{-\zeta/\alpha}}{\zeta} - \frac{\alpha}{\zeta^2} (1 - e^{-\zeta/\alpha}) \right]. \quad (4.25)$$

Ao comparar as Equações (4.15), (4.24) e (4.18), percebe-se que quando não há evolução de dano, utiliza-se a função de redução  $\bar{g}$  com a máxima deformação atingida  $\zeta_t^m$ , aplicada ao termo constitutivo  $\bar{\mathcal{C}}$ . Já quando ocorre a evolução do dano, deve-se aplicar a função derivada  $\bar{h} = \bar{g}'$  como fator de redução nas tensões.

O módulo tangente algorítmico que resulta da Equação (4.24) é simétrico. O produto de Kroenecker que surge entre as tensões é escrito na forma matricial através da notação de Voigt, e é dado pela seguinte matriz 6x6 para um estado geral de tensões

$$\bar{\mathbf{S}} \otimes \bar{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11}\bar{S}_{11} & \bar{S}_{11}\bar{S}_{22} & \bar{S}_{11}\bar{S}_{33} & \bar{S}_{11}\bar{S}_{12} & \bar{S}_{11}\bar{S}_{13} & \bar{S}_{11}\bar{S}_{23} \\ & \bar{S}_{22}\bar{S}_{22} & \bar{S}_{22}\bar{S}_{33} & \bar{S}_{22}\bar{S}_{12} & \bar{S}_{22}\bar{S}_{13} & \bar{S}_{22}\bar{S}_{23} \\ & & \bar{S}_{33}\bar{S}_{33} & \bar{S}_{33}\bar{S}_{12} & \bar{S}_{33}\bar{S}_{13} & \bar{S}_{33}\bar{S}_{23} \\ & & & \bar{S}_{12}\bar{S}_{12} & \bar{S}_{12}\bar{S}_{13} & \bar{S}_{12}\bar{S}_{23} \\ & & & & \bar{S}_{13}\bar{S}_{13} & \bar{S}_{13}\bar{S}_{23} \\ & & & & & \bar{S}_{23}\bar{S}_{23} \end{bmatrix}. \quad (4.26)$$

sim.

### 4.3.5 Algoritmo de dano

Um algoritmo de dano com as equações devidamente atualizadas é necessário para a correta atualização das tensões e da variável de dano, bem como para ter consistência algorítmica no método de Newton-Raphson. Este procedimento foi verificado comparando o módulo tangente implementado com o obtido pela aplicação de diferenças finitas no vetor de força interna, e levou à taxas de convergência quadráticas no método de Newton-Raphson.

As equações de acoplamento do dano são descritas para um intervalo de tempo  $[t_n, t_{n+1}]$ , e considera-se que o material é carregado ou descarregado monotonicamente em tal intervalo. São apresentadas a seguir as equações na forma algorítmica, com desacoplamento deviatórico/volumétrico. Estas equações também são válidas para materiais compressíveis, porém os tensores são calculados com as expressões acopladas.

- Tensor deviatórico de Cauchy-Green à direita

$$\bar{\mathbf{C}}_{n+1} = \det F_{n+1}^{-2/3} \mathbf{C}_{n+1}. \quad (4.27)$$

- Invariantes de  $\bar{\mathbf{C}}_{n+1}$

$$\bar{I}_{1,n+1} = J^{-2/3} I_{1,n+1}, \quad \bar{I}_{2,n+1} = J^{-4/3} I_{2,n+1}. \quad (4.28)$$

- Deformação equivalente

$$\zeta_{n+1} = \sqrt{2\bar{W}_{n+1}}. \quad (4.29)$$

- Superfície de dano

$$\chi_{n+1} = \zeta_{n+1} - \zeta_n^m \leq 0. \quad (4.30)$$

- Funções de evolução do dano

$$\bar{g}_{n+1}(\zeta_{n+1}) = \beta + (1 - \beta) \frac{1 - e^{-\zeta_{n+1}/\alpha}}{\zeta_{n+1}/\alpha}, \quad (4.31)$$

$$\bar{g}'_{n+1}(\zeta_{n+1}) = (1 - \beta) \left[ \frac{e^{-\zeta_{n+1}/\alpha}}{\zeta_{n+1}} - \frac{\alpha}{\zeta_{n+1}^2} (1 - e^{-\zeta_{n+1}/\alpha}) \right]. \quad (4.32)$$

- Variável de dano

$$D_{n+1} = 1 - \bar{g}_{n+1}. \quad (4.33)$$

- Segundo tensor de Piola-Kirchhoff

$$\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D = \bar{g}_{n+1} \bar{\mathbf{S}}_{n+1} \quad (4.34)$$

- Módulo tangente, sem evolução do dano

$$\bar{\mathbf{D}}_{n+1}^{ed} = \bar{g}_{n+1} \bar{\mathbf{D}}_{n+1} \quad (4.35)$$

- Módulo tangente, com evolução do dano

$$\bar{\mathbf{D}}_{n+1}^{ed} = \bar{g}_{n+1} \bar{\mathbf{D}}_{n+1} + \frac{\bar{g}'_{n+1}}{(\zeta_t^m)} \bar{\mathbf{S}}_{n+1} \otimes \bar{\mathbf{S}}_{n+1} \quad (4.36)$$

O Algoritmo 4.1 apresenta os passos do procedimento de atualização das tensões e dos termos constitutivos.

---

**Algoritmo 4.1** Atualização de tensões e do módulo tangente elástico com dano.

---

1. Dados  $\mathbf{F}_{n+1}$ ,  $\zeta_t^m$ ,  $\bar{g}_n$  e  $D_n$  (estado inicial ou último passo de carga), calcular  $\bar{\mathbf{C}}_{n+1}$  e seus invariantes.
2. Calcular a energia de deformação deviatórica  $\bar{W}_{n+1}$ ;
3. Calcular a deformação equivalente  $\zeta_{n+1}$  e a superfície de dano  $\chi_{n+1}$ .

Se  $\chi_{n+1} \leq 0$  Então

*Passo sem evolução de dano:*

$$\bar{g}_{n+1} = \bar{g}_n$$

$$\bar{\mathbf{D}}_{n+1}^{ed} = \bar{g}_{n+1} \bar{\mathbf{D}}_{n+1}$$

Senão

$$\zeta_{n+1}^t = \zeta_{n+1}$$

Calcular  $\bar{g}_{n+1}$ ,  $\bar{g}'_{n+1}$  e  $\bar{\mathbf{S}}_{n+1}$ , e  $\bar{\mathbf{D}}_{n+1}^{ed}$

4. Atualizar as tensões  $\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D$
-

## 5 RESULTADOS

A formulação apresentada no capítulo 3 foi implementada em C++ no código de Elementos Finitos de Alta Ordem  $hp^2FEM$ , que faz uso de Programação Orientada a Objeto (Valente, 2012). São realizados 3 testes a partir da imposição de soluções analíticas conhecidas. As soluções são construídas a partir equação de balanço de momento linear

$$-\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} - \rho \mathbf{f} = 0, \quad (5.1)$$

sem considerações dinâmicas. Através da imposição de um campo de deslocamentos  $\mathbf{u}$ , é possível obter as medidas de deformação, e fazendo o uso da relação constitutiva, calcular as tensões. Com o uso da Equação (5.1), as forças de corpo  $\mathbf{f}$  e o campo de tração  $\mathbf{t}$  (do termo da divergência das tensões) são obtidos.

O teste 1 tem como objetivo validar a implementação para tratamento de quasi-incompressibilidade, conforme descrito no capítulo 3. O teste 2 objetiva a captura do efeito Mullins, bem como a validação de um material Neo-Hookeano compressível com dano (Capítulo 4). Já o teste 3 estende a aplicação do dano ao material quasi-incompressível de Mooney-Rivlin.

Todos os testes utilizaram funções de forma da família de Lagrange, bem como pontos de integração de Gauss-Legendre e pontos de colocação de Gauss-Lobatto-Legendre.

### 5.1 Malhas Utilizadas

Todos os testes utilizaram um domínio hexaédrico, definido em  $0 < X, Y, Z < 1 \text{ m}$  e ilustrado na Figura 5.1, com a face  $X = 0$  engastada. A geometria é discretizada fazendo o uso de diversas malhas com elementos finitos hexaédricos, ilustradas na Figura 5.2. Nos casos de refino  $p$ , utilizou-se somente um elemento (Figura 5.1). Para os problemas de quasi-incompressibilidade, o refino  $h$  é feito com graus de interpolação dos deslocamentos  $O_u = 2$  e 3. Nos problemas compressíveis, onde não é considerada a pressão hidrostática  $p$  na formulação, o refino  $h$  é efetuado com interpolação linear dos deslocamentos.

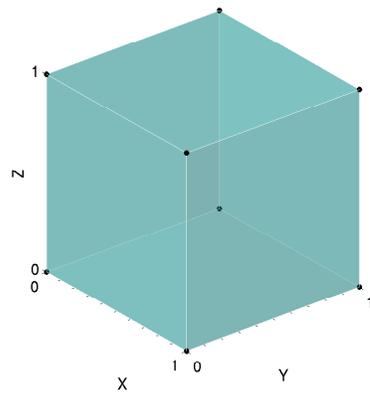


Figura 5.1: Geometria hexaédrica utilizada.

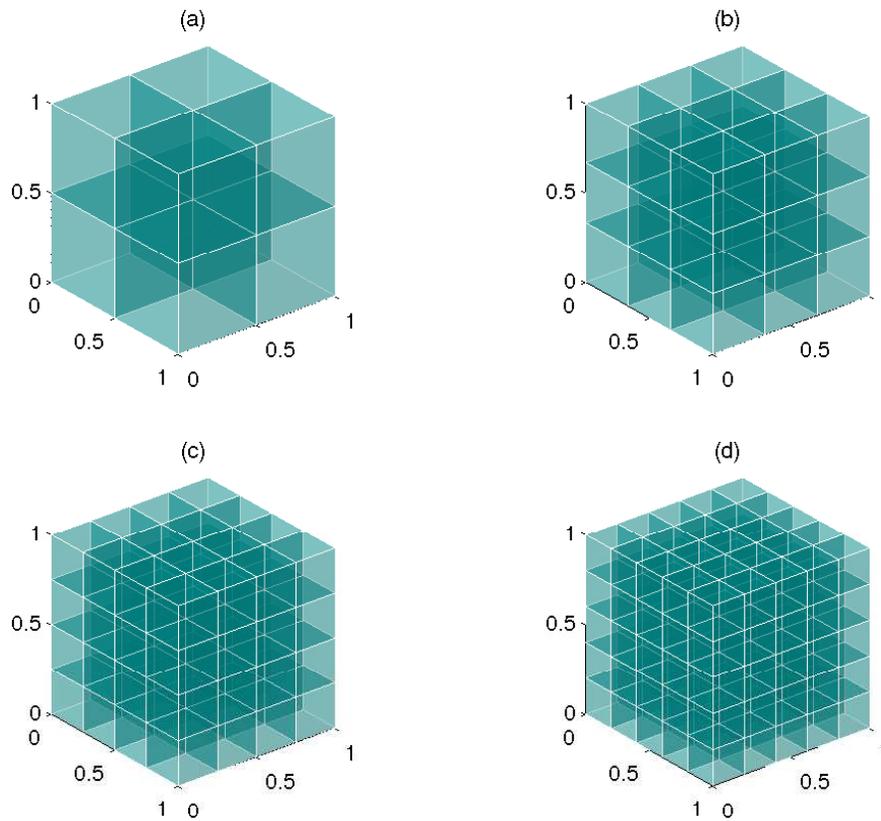


Figura 5.2: Malhas de elementos hexaédricos utilizadas. (a) 8 elementos, (b) 27 elementos, (c) 64 elementos, (d) 125 elementos.

## 5.2 Teste 1 - Material quasi-incompressível de Mooney-Rivlin

O propósito deste teste é a validação da implementação do problema de quasi-incompressibilidade. O teste de validação foi efetuado com o seguinte esquema de interpolação

$$O_p = O_u - 1, \quad (5.2)$$

sendo  $O_u$  e  $O_p$  as ordens de interpolação dos deslocamentos e da pressão, respectivamente. Esta relação possui a melhor estabilidade algorítmica, independente da ordem de interpolação dos deslocamentos (Yu *et al.*, 2012).

A seguinte solução suave é considerada

$$\begin{aligned} u_1 &= 0, \\ u_2 &= A \sin(BX), \\ u_3 &= 0, \end{aligned} \quad (5.3)$$

com as seguintes propriedades materiais:

$$A_{10} = A_{01} = 1,0 \text{ Pa}, \quad K = 1,0 \times 10^3 \text{ Pa}.$$

A partir da solução imposta, calcula-se a medida de deformação e com a equação constitutiva determina-se  $\sigma$ . Substituindo  $\sigma$  em (5.1), determinam-se as forças de corpo

$$\begin{cases} f_1 = -\frac{2A^2B^3 \sin(2BX)(2A_{01}+A_{10})}{3} \\ f_2 = 2AB^2 \sin(BX) (A_{01} + A_{10}) . \\ f_3 = 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

Substituindo  $\sigma$  na expressão das condições de contorno em termos do vetor tensão  $\mathbf{t} = \sigma \mathbf{n}$ , determinam-se as trações superficiais correspondentes, ou seja,

$$\begin{cases} t_1 = n_1 \left[ \frac{2A^2B^2 \cos(BX)^2(2A_{01}+A_{10})}{3} \right] - n_2 [2AB \cos(BX) (A_{01} + A_{10})] \\ t_2 = n_2 \left[ \frac{2A^2B^2 \cos(BX)^2(2A_{01}+A_{10})}{3} \right] \\ \quad - n_1 AB \cos(BX) \left[ 2(A_{01} + A_{10}) + \left( \frac{2A^2B^2 \cos(BX)^2(2A_{01}+A_{10})}{3} \right) \right] \\ t_3 = 0, \end{cases} \quad (5.5)$$

A relação entre as propriedades resulta em um coeficiente de Poisson de aproximadamente 0,4996. A primeira etapa do teste consiste em validar a implementação para pequenos deslocamentos, fazendo

$$A = 0,0001 \text{ m}, B = 1,$$

que caracteriza  $u_2 \approx 0,000084 \text{ m}$  em  $X = 0 \text{ m}$ . Para verificar a convergência com refino  $p$ , utiliza-se uma malha de 1 elemento, variando o grau polinomial de 2 a 9. As normas  $L^2$  e  $L^\infty$  do erro são calculadas em todo o domínio, respectivamente, como

$$E_{L^2} = \sqrt{\int_{\Omega} (u_{analitico} - u_{aprox})^2 d\Omega}, \quad (5.6)$$

$$E_{L^\infty} = \max |u_{analitico} - u_{aprox}|, \quad (5.7)$$

sendo  $u_{analitico}$  a solução analítica e  $u_{aprox}$  a solução aproximada para os deslocamentos. A Figura 5.3 apresenta os erros obtidos em ambas as normas para cada direção dos graus de liberdade. Percebe-se uma diminuição abrupta do erro, que se torna praticamente nulo a partir do grau de interpolação 8.

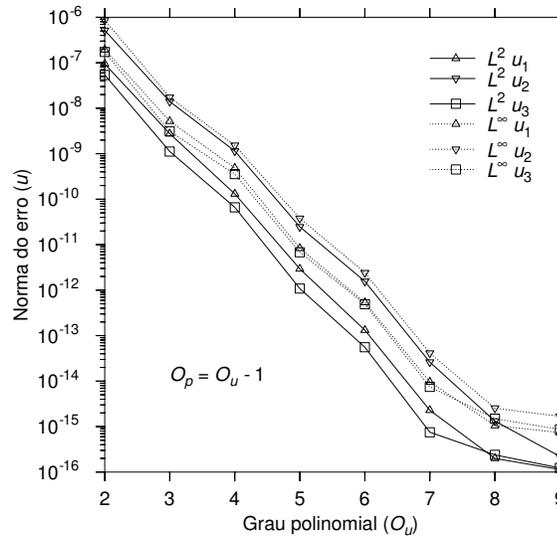


Figura 5.3: Norma do erro nos deslocamentos para pequenas deformações, teste 1.

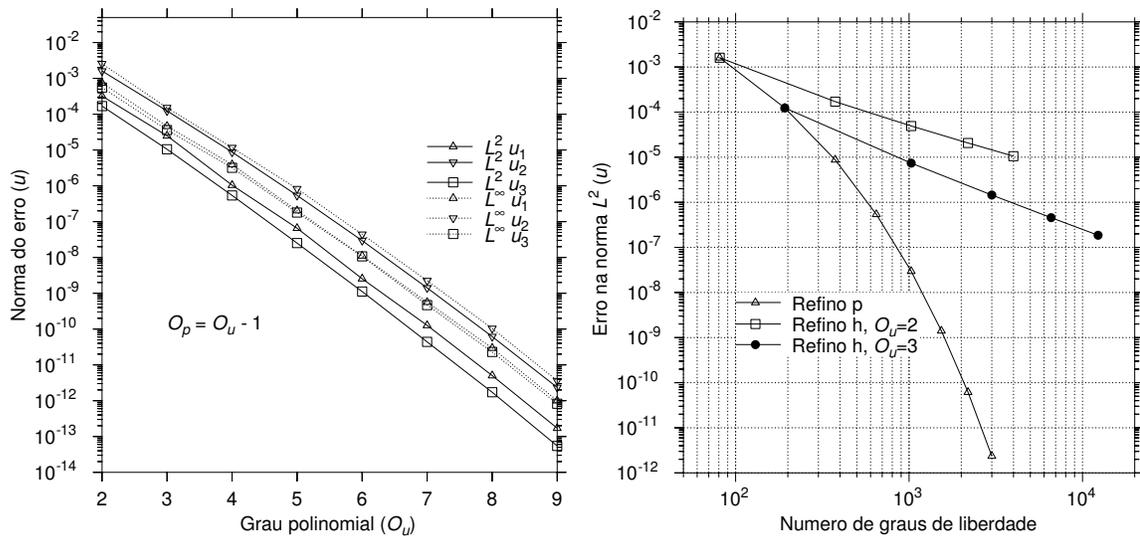
A seguir, as mesmas propriedades materiais são utilizadas para validar o problema com gran-

des deformações, mas mudando os parâmetros da Equação (5.3) para

$$A = 0,1 \text{ m}^{-1}, B = \frac{\pi}{2},$$

caracterizando um deslocamento  $u_2 \approx 0,1 \text{ m}$  em  $X = 1 \text{ m}$ . O método incremental apresentado na Equação (3.91) foi utilizado, com o carregamento total dividido em 10 passos iguais.

Foi efetuado um refino  $h$  com malhas de 1, 8, 27, 64 e 125 elementos hexaédricos e ordem de interpolação dos deslocamentos  $O_u = 2$ . O refino  $p$  foi realizado com uma malha de um elemento, variando  $O_u$  de 2 a 9. A Figura 5.4(a) apresenta os resultados das normas dos erros para os deslocamentos. A Figura 5.4(b) apresenta uma comparação entre os erros para  $u_2$ , efetuando refinamentos  $p$  e  $h$ . No caso do refino  $h$ , são utilizados graus de interpolação 2 e 3 para o deslocamento. Percebe-se uma natureza algébrica de convergência para os refinamentos  $h$ , sendo que a ordem de grandeza do erro é muito maior comparada com os resultados obtidos para o refino  $p$ , para um mesmo número de graus de liberdade. Tal comportamento é de fato esperado para problemas com solução suave (Yu *et al.*, 2012; Szabó e Babuška, 1991; Karniadakis e Sherwin, 2005).



(a) Normas  $L^2$  e  $L^\infty$  do erro para  $u_1, u_2, u_3$ . (b) Norma  $L^2$  do erro para  $u_2$ , refinamentos  $h$  e  $p$ .

Figura 5.4: Erros nos deslocamentos para grandes deformações, teste 1.

O campo de deslocamentos  $u_2$  é ilustrado na Figura 5.5, com a geometria deformada em

escala 3:1. Voltando à Equação (5.3), verifica-se que as soluções analíticas impostas para  $u_1$  e  $u_3$  são nulas. Portanto, a solução aproximada nessas direções já caracteriza uma diferença entre os deslocamentos para cada coordenada do domínio. As Figuras 5.6 e 5.7 ilustram essa diferença para  $u_1$  e  $u_3$ , respectivamente. Há bastante oscilações para (a), que efetua refino  $p$  com 1 elemento. As maiores diferenças estão presentes nas arestas, onde os deslocamentos são maiores. Já para os casos (b) e (c), com 8 e 27 elementos, respectivamente, as diferenças foram maiores nas arestas e vértices dos elementos. O caso (d), para 125 elementos, foi o que apresentou as menores oscilações.

As tensões foram recuperadas nos nós dos elementos a partir do valor médio das áreas dos elementos vizinhos. A maior tensão principal  $\sigma_1$  foi calculada e comparada com a solução analítica. A Figura 5.8 apresenta o campo de tensões no domínio com um elemento e  $O_u = 4$ . Já a Figura 5.9 apresenta o perfil das tensões ao longo de  $X$ , para a aresta  $Y = 0, Z = 0$ . No caso do refino  $p$  com um elemento, houve boa aproximação com  $O_u = 5$ . Com 27 elementos já houve boa aproximação com  $O_u = 3$ , indicando que os efeitos de malha também devem ser considerados.

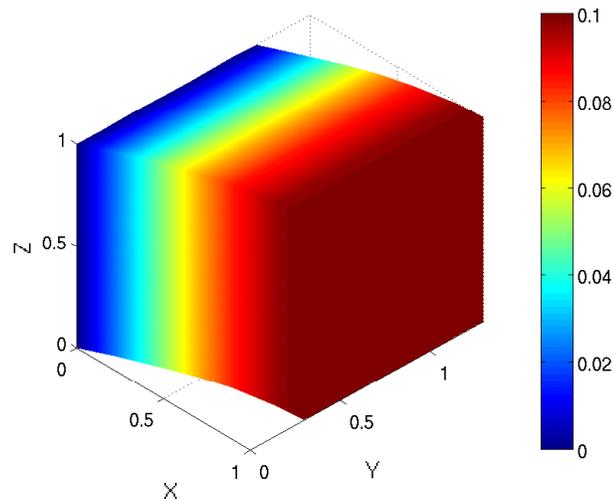
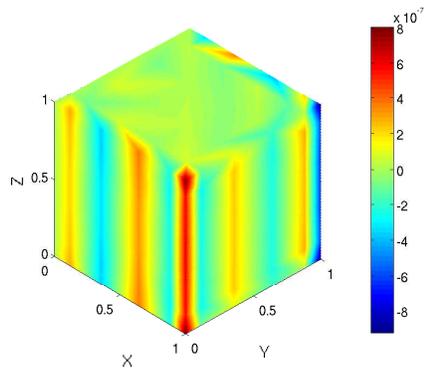
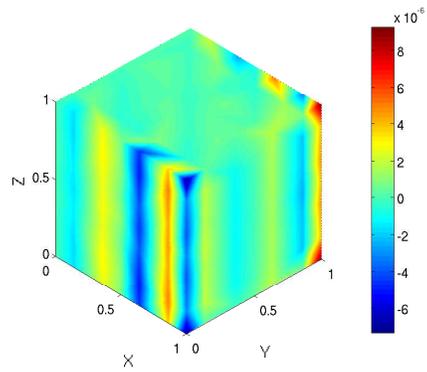


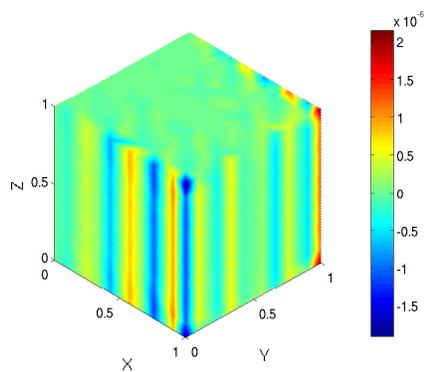
Figura 5.5: Geometria deformada com a solução para  $u_2$ , teste 1.



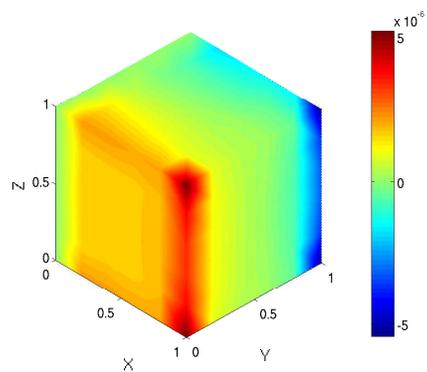
(a) 1 elemento,  $O_u = 5$ .



(b) 8 elementos,  $O_u = 3$ .



(c) 27 elementos,  $O_u = 3$ .



(d) 125 elementos,  $O_u = 2$ .

Figura 5.6: Solução para os deslocamentos  $u_1$ , teste 1.

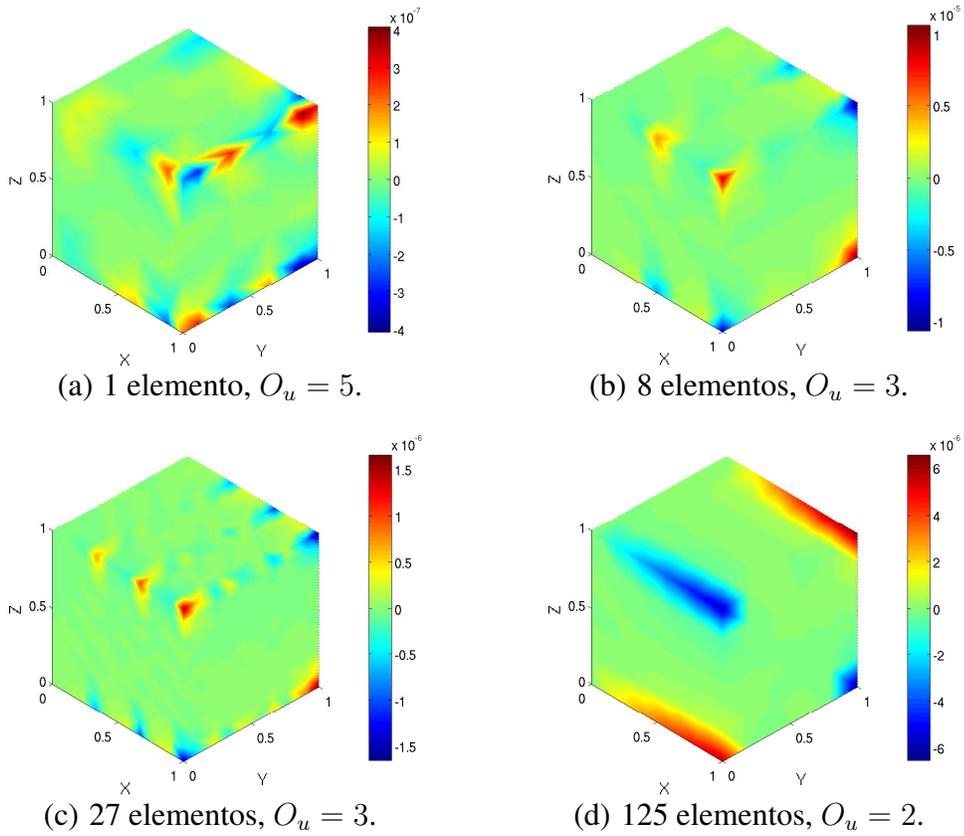


Figura 5.7: Solução para os deslocamentos  $u_3$ , teste 1.

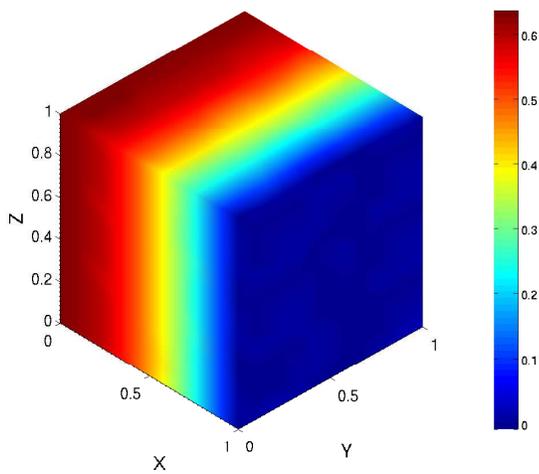


Figura 5.8: Solução para a tensão principal  $\sigma_1$ , teste 1.

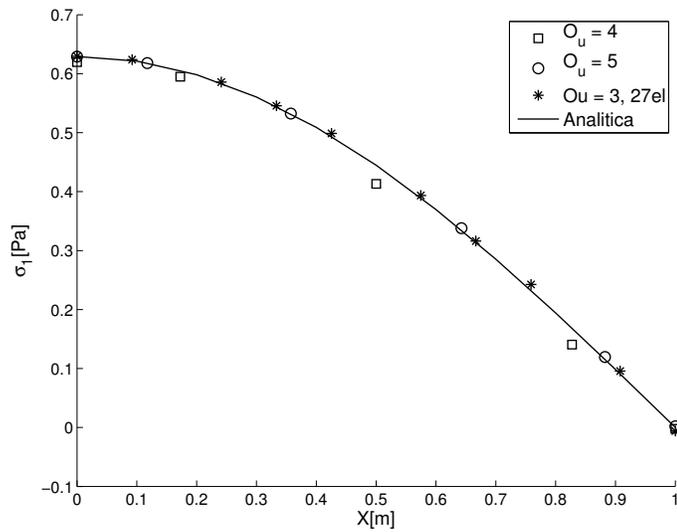


Figura 5.9: Tensão principal  $\sigma_1$  na aresta  $Y = 0, Z = 0$ , teste 1.

### 5.3 Teste 2 - Material Neo-Hookeano compressível com dano

O objetivo deste teste é identificar o efeito Mullins em um material Neo-Hookeano compressível, bem como aspectos de convergência com a inserção do dano. Conforme descrito na seção 4.2, o efeito Mullins é caracterizado pela perda de rigidez progressiva do material, conforme os carregamentos aumentam e novos valores de deformação máxima são atingidos. Para tal, a mesma geometria da Figura 5.1 é utilizada, sendo a face  $X = 0$  engastada.

Para o teste do efeito Mullins, três ciclos de carga/descarga de  $t_1 = 35, 50, 75 Pa$  são aplicados na face  $X = 1$ . As propriedades materiais são

$$E = 1000 Pa, \nu = 0,3, \alpha = 0,5, \beta = 0,3. \quad (5.8)$$

Utiliza-se uma malha com um elemento e ordem de interpolação  $O_u = 1$  e a maior tensão principal é analisada em um dado ponto de integração. A Figura 5.10(a) apresenta a maior tensão principal para o segundo tensor de Piola-Kirchhoff e relação à maior deformação principal de Green-Lagrange. Já a Figura 5.10(b) apresenta a maior tensão principal de Cauchy em relação à maior deformação principal de Almansi. Observa-se uma perda progressiva de rigidez, que é evidente nas curvas de descarregamento. Além disso, a linha primária de carregamento é a mesma para os três

ciclos, uma vez que o dano depende somente da máxima deformação atingida.

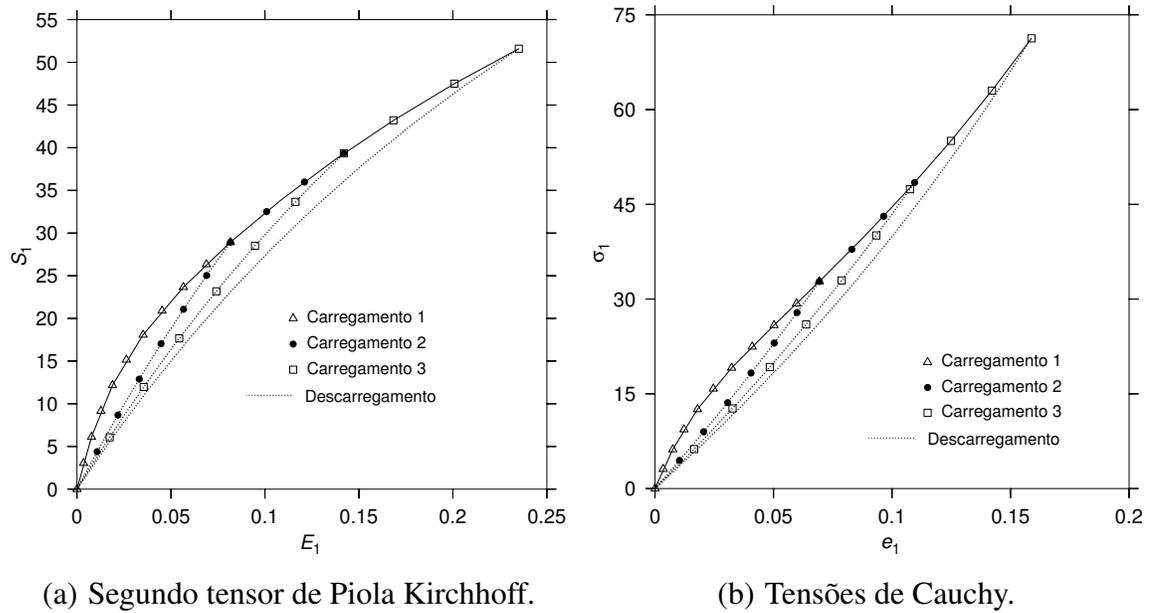


Figura 5.10: Efeito Mullins na maior tensão principal  $\sigma_1$  em um ponto de Gauss, teste 2.

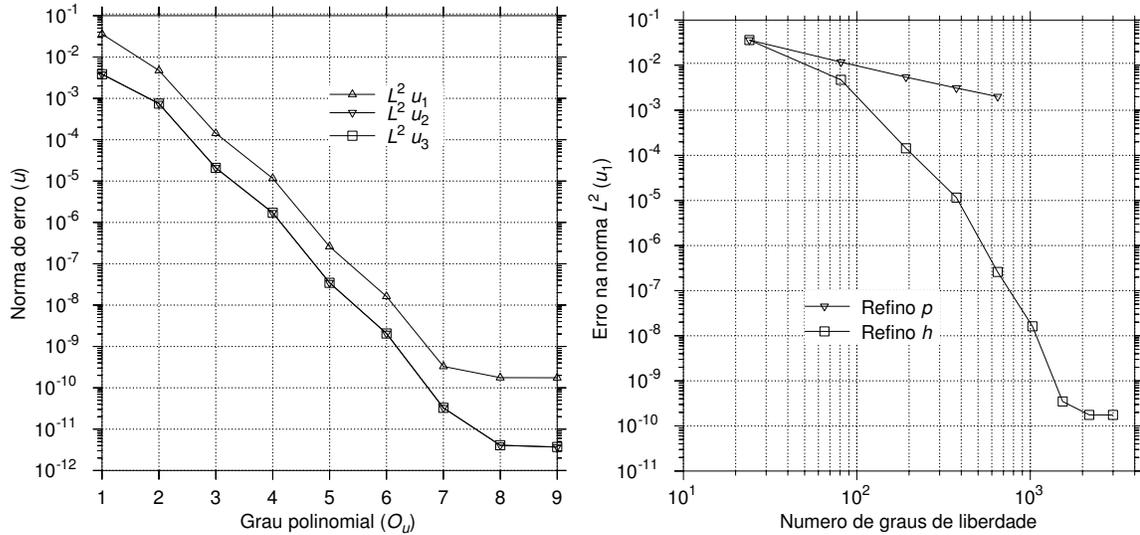
Em seguida, para verificar a convergência com o aumento da ordem polinomial, é utilizada uma solução analítica, obtida através da Equação (5.1), inserindo o dano na relação constitutiva, sob a condição de que o carregamento é aplicado monotonicamente. A solução definida para este teste é

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \sin(X), \\
 u_2 &= 0, \\
 u_3 &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{5.9}$$

que é suave e caracteriza um deslocamento  $u_1 \approx 0,84 \text{ m}$  em  $X = 1 \text{ m}$ . Da mesma maneira que no teste 1, sabe-se *a priori* que para soluções suaves o refino  $p$  acarreta em uma queda exponencial do erro, e o refino  $h$  uma diminuição algébrica. As cargas de corpo, bem como o campo de tração não são apresentados aqui, devido ao tamanho excessivo das expressões obtidas. Os parâmetros de dano utilizados são,

$$\alpha = 1,0, \beta = 0,3.
 \tag{5.10}$$

A Figura 5.11(a) apresenta os resultados para a norma  $L^2$  do erro nos deslocamentos em todo o domínio. Percebe-se que a inserção do dano para a solução (5.9) não alterou a natureza da convergência com o aumento do grau polinomial, mantendo sua característica espectral, com oscilações para  $O_u > 7$ . A Figura 5.11(b) apresenta um comparativo entre os refinamentos  $h$  e  $p$ . No caso do refino  $h$ , utilizaram-se as malhas com 8, 27, 64 e 125 elementos da Figura 5.2. Para o refino  $p$ , foi utilizada a malha com um elemento da Figura 5.1.



(a) Norma do erro para  $u_1, u_2, u_3$ .

(b) Norma do Erro para  $u_1$ , com refinamentos  $h$  e  $p$ .

Figura 5.11: Norma  $L^2$  do erro em função da ordem de interpolação  $O_u$  (a), e em termos do número total de graus de liberdade (b), teste 2.

O campo de deslocamentos e da maior tensão principal  $\sigma_1$  são ilustrados na Figura 5.12. As tensões e o dano foram recuperadas nos nós a partir do procedimento de ponderação de áreas dos elementos vizinhos. Foi efetuado um refinamento  $p$  com um elemento, analisando o comportamento de  $\sigma_1$  e do dano na aresta  $Y = 0, Z = 0$ . Os resultados são ilustrados na Figuras 5.13 e 5.14, comparando-se a solução analítica com a solução aproximada nos nós de uma malha com um elemento, para as ordens de interpolação 3, 4 e 5. Verifica-se que houve boa concordância dos resultados em relação à solução analítica.

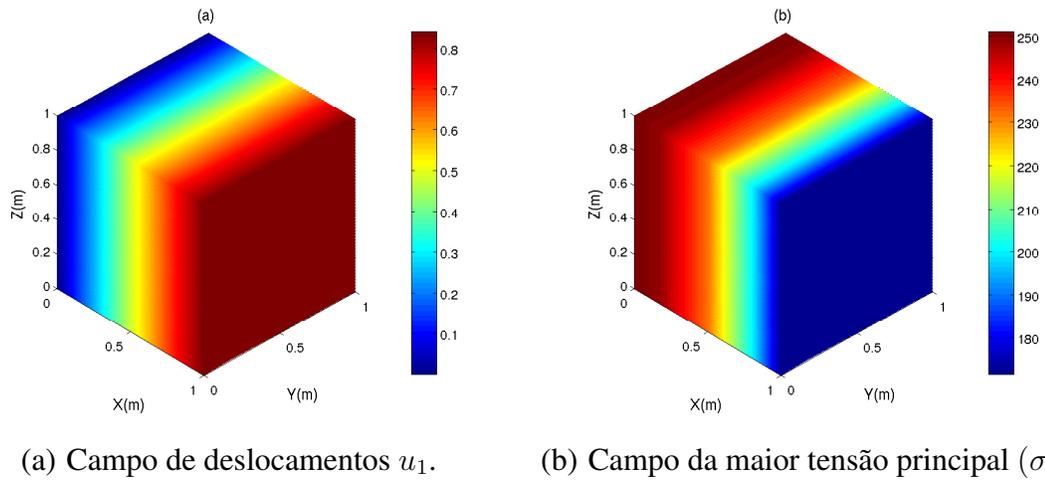


Figura 5.12: Campos de deslocamentos e tensão  $\sigma_1$  para um elemento com  $O_u = 3$ , teste 2.

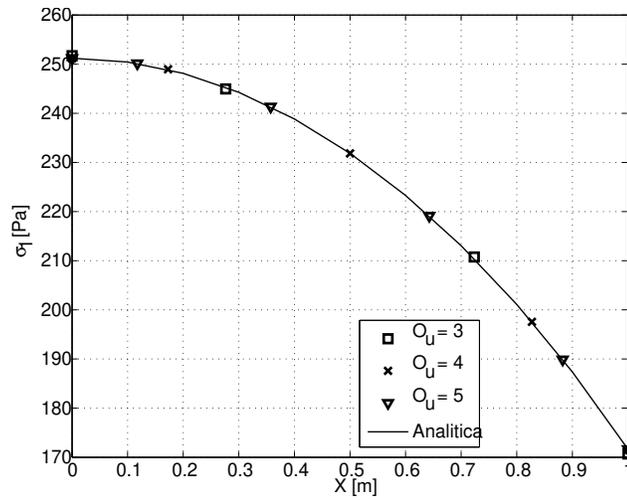


Figura 5.13: Solução aproximada para a maior tensão principal  $\sigma_1$  ao longo da aresta  $Y = 0, Z = 0$ , teste 2.

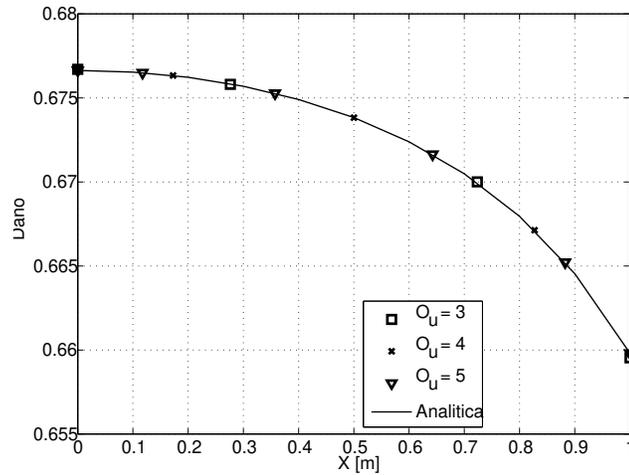


Figura 5.14: Solução aproximada para o dano na aresta  $Y = 0, Z = 0$ , teste 2.

#### 5.4 Teste 3 - Material de Mooney-Rivlin quasi-incompressível com dano

A primeira etapa deste teste consiste em reproduzir o efeito Mullins, seguindo o mesmo procedimento do teste 2, com  $t_1 = 1, 2, 3 Pa$  aplicados na face  $X = 1$ . As propriedades materiais e de dano são

$$A_{10} = A_{01} = 1,0 Pa, K = 1,0 \times 10^3 Pa, \alpha = 1,0, \beta = 0,3. \quad (5.11)$$

Utiliza-se uma malha com um elemento e ordem de interpolação dos deslocamentos  $O_u = 3$ , sendo a tensão principal  $\sigma_1$  analisada em um dado ponto de integração. A Figura 5.15(a) apresenta a maior tensão principal para o segundo tensor de Piola-Kirchhoff em relação à maior deformação principal de Green-Lagrange. Já a Figura 5.15(b) apresenta a maior tensão principal de Cauchy em relação à maior deformação principal de Almansi. Observa-se um comportamento de redução das tensões semelhante ao teste 2.

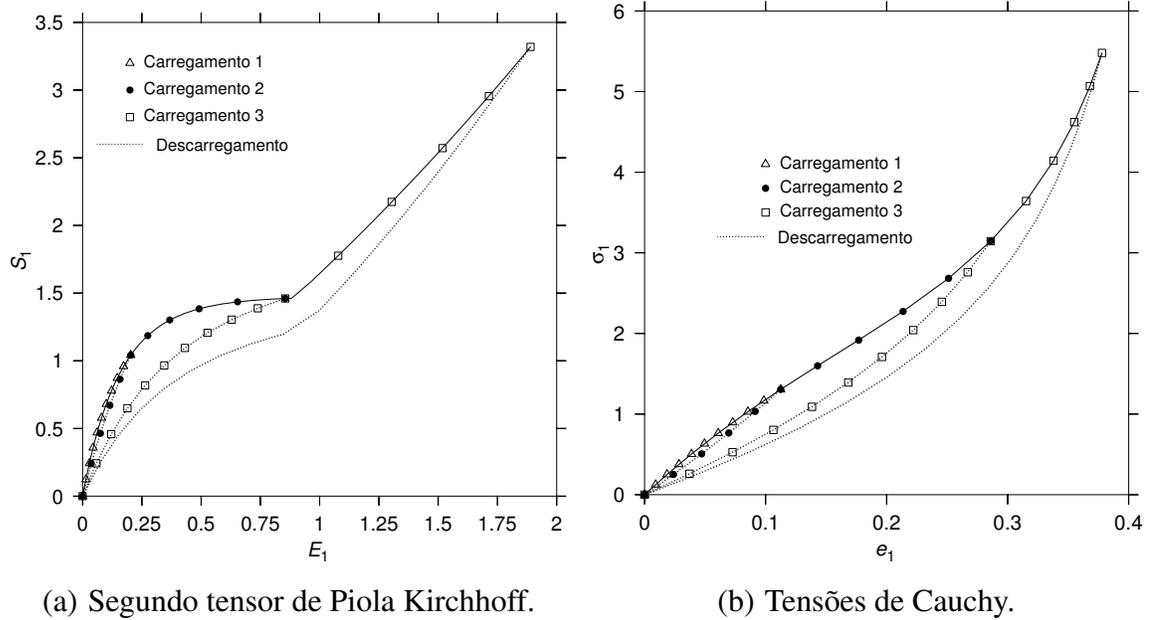


Figura 5.15: Efeito Mullins na maior tensão principal em um ponto de Gauss, teste 3.

A próxima etapa consiste em uma análise de convergência com os efeitos de incompressibilidade e dano. O esquema de interpolação da pressão e dos deslocamentos da Equação (5.2) foi utilizado. A mesma solução suave da Equação (5.3) é imposta, com

$$A = 0,25m, B = 1,0,$$

caracterizando um deslocamento  $u_2 \approx 0,21$  em  $X = 1$ . Os carregamentos não são apresentados, devido ao tamanho das expressões obtidas. Foram efetuados 10 passos de carregamento. As propriedades materiais e de dano são as mesmas da Equação 5.11.

É realizado um refino  $h$  com malhas de 1, 8, 27, 64 e 125 elementos hexaédricos da Figura 5.2, considerando uma ordem de interpolação  $O_u = 2$ . Dois refinamentos  $p$  foram efetuados. O primeiro utilizou uma malha com um elemento, variando a ordem  $O_u$  dos deslocamentos de 2 até 9, e conseqüentemente a ordem  $O_p$  da pressão de 1 até 8. O segundo refinamento  $p$  é feito com uma malha de 8 elementos, com  $O_u$  de 2 até 6 e  $O_p$  de 1 até 5. A Figura 5.16 apresenta os resultados obtidos para a norma do erro em todo o domínio. Observa-se que para o problema considerado, a inclusão do dano não dificultou a convergência dos deslocamentos, em relação ao teste 1. A norma

$L^2$  do erro estagnou em torno de  $10^{-10}$  para os refinamentos do tipo  $p$ . As Figuras 5.17 e 5.18

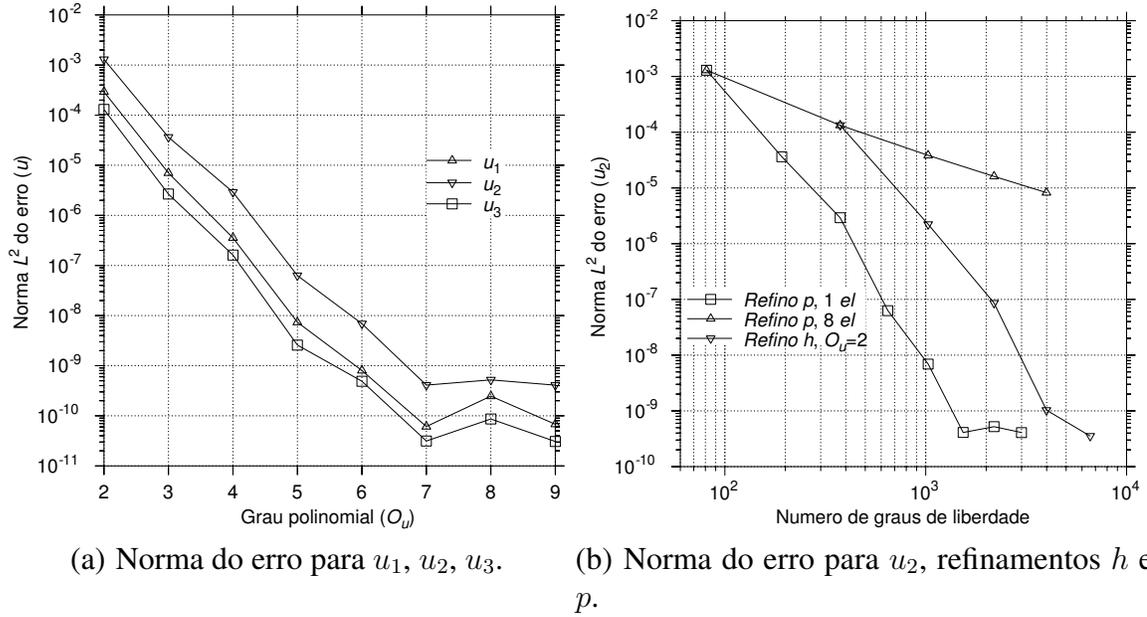


Figura 5.16: Norma  $L^2$  do erro em função do grau polinomial (a), e em termos do número total de graus de liberdade (b), teste 2.

apresentam as distribuições da maior tensão principal e do dano, respectivamente, nos nós da aresta  $Y = 0, Z = 0$ . De maneira geral, a inclusão do dano dificultou a convergência da tensão, com aproximações não tão boas se comparado com o teste 1. Já a solução para o dano teve melhor aproximação com a solução analítica.

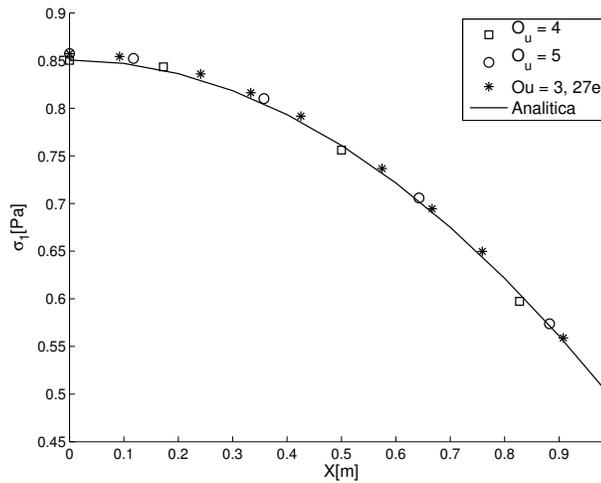


Figura 5.17: Solução para a maior tensão principal  $\sigma_1$  na aresta  $Y = 0, Z = 0$ , teste 3.

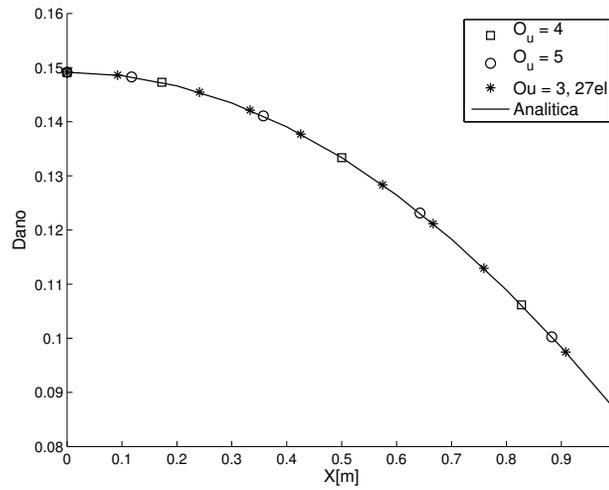


Figura 5.18: Solução para o dano na aresta  $Y = 0, Z = 0$ , teste 3.

As distribuições da tensão  $\sigma_1$  e do dano no domínio analisado são apresentadas na Figura 5.19, para uma malha de 27 elementos e  $O_u = 3$ .

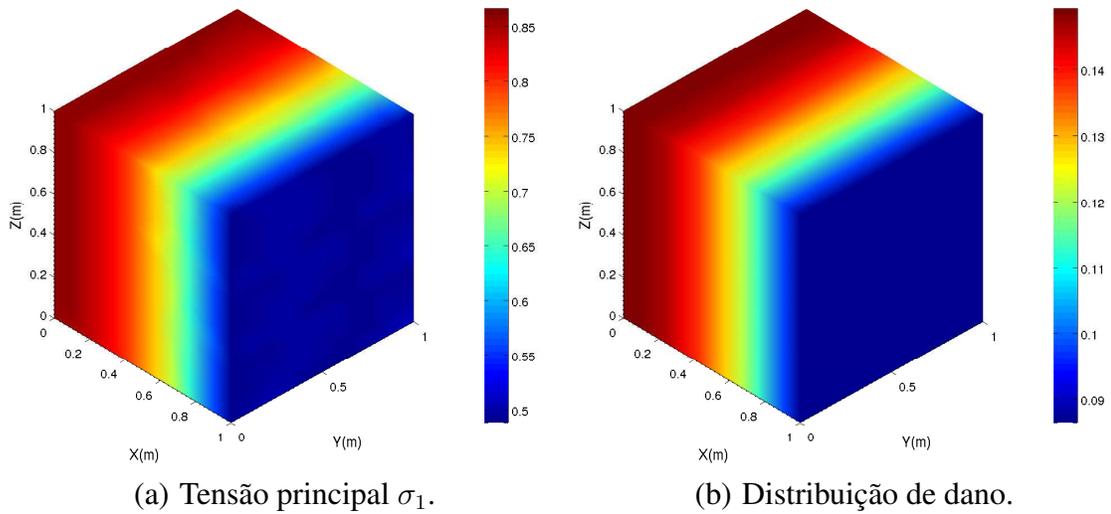


Figura 5.19: Distribuições da maior tensão principal (a) e dano (b) para o teste 3.

## 6 CONCLUSÃO

Um modelo hiperelástico quasi-incompressível de Mooney-Rivlin foi apresentado, implementado em um código de Elementos Finitos de Alta Ordem e validado. O modelo de dano isotrópico 3D também foi implementado, validado em um material Neo-Hookeano compressível, e no material quasi-incompressível de Mooney-Rivlin.

De maneira geral, a imposição do efeito de quasi-incompressibilidade não prejudicou o travamento dos deslocamentos, mas levou a erros maiores para as tensões nodais se comparado a um problema de hiperelasticidade compressível.

A implementação do dano no material Neo-Hookeano compressível possibilitou uma ótima convergência dos deslocamentos, tensões e dano com o aumento da ordem de interpolação. Além disso, o efeito Mullins foi reproduzido com sucesso, indicando perdas de rigidez sucessivas com o aumento dos carregamentos, sendo a dependência dada pela máxima deformação atingida.

A inclusão dos efeitos de dano em quasi-incompressibilidade também possibilitou a reprodução do efeito Mullins, e levou a boa convergência do erro nos deslocamentos e sem travamento de malha. Em relação ao dano, houve boa aproximação com a solução analítica, da mesma maneira que no teste do material compressível. Novamente, os erros de aproximação para as tensões foram os maiores, devido ao efeito de quasi-incompressibilidade.

Um fator importante a ser considerado é a análise do mesmos exemplos, porém testando funções hierárquicas de Jacobi. Para tal, algumas implementações no  $hp^2 FEM$  ainda devem ser feitas no contexto do mapeamento da geometria em grandes deformações, utilizando bases ortogonais.

As dificuldades de convergência do solver de Newton-Raphson para grandes deformações em quasi-incompressibilidade foram contornadas com o particionamento dos carregamentos externos, e foi possível obter uma taxa de convergência quadrática. No entanto, deve-se ter o devido cuidado com o tamanho dos incrementos, pois estes devem ser suficientemente pequenos para que não ocorram oscilações significativas na solução.

Em relação ao dano, o modelo fenomenológico apresentado prevê dois mecanismos de danificação observados experimentalmente: A perda progressiva da rigidez com dependência na máxima

deformação atingida e a saturação da variável de dano. Para estimar um possível estado crítico, deve-se ter um valor limite de dano inferior ao limite imposto pelo parâmetro  $\beta$ .

As formulações apresentadas neste trabalho também foram recentemente implementadas em contexto 2D, em estado plano de deformações, mas ainda devem ser realizados testes de validação.

## 6.1 Trabalhos futuros

Há diversas atividades que podem ser desenvolvidas a partir do trabalho realizado. Primeiramente, serão testados problemas clássicos da literatura (placa fina com furo, placa sob extensão). Em seguida, a implementação de um modelo axisimétrico para grandes deformações, bem como um carregamento dependente da deformação.

O código terá então capacidade de reproduzir alguns exemplos em elementos finitos do olho humano (Bendre, 2009). Isso possibilitará, com a consideração do dano, que os parâmetros sejam calibrados previamente através de dados de ensaios uniaxiais com retinas porcinas, disponíveis na literatura (Bendre, 2009), e então com dados de comprimento axial e espessura de retina, provenientes de pacientes humanos. Nesta etapa do projeto haverá uma parceria com o Dr. Alexandre Souto, que fornecerá os dados de tomografias necessários. A possibilidade de obtenção de dados experimentais com o uso de olhos de indivíduos *post-mortem* também não é descartada. Com a devida calibração, os efeitos de degradação da retina poderão ser reproduzidos computacionalmente, auxiliando o diagnóstico prévio de casos em alto risco de descolamento de retina.

Em termos de desempenho computacional, tem-se como foco um trabalho conjunto no grupo de pesquisa para a paralelização do  $hp^2FEM$  em MPI, bem como outras técnicas, como a montagem das matrizes elementares através de produto tensorial (Vasquez, 2004). Resultados positivos foram obtidos no trabalho de Valente (2012) para matrizes de massa estruturadas e não-estruturadas. Durante o curso de mestrado do autor deste trabalho, foram realizadas implementações de matrizes de rigidez lineares 2D e 3D, para malhas estruturadas e não-estruturadas através do mesmo procedimento. Tem-se também, portanto, a intenção de estender a formulação para as matrizes de rigidez não-lineares apresentadas na formulação deste trabalho.

## REFERÊNCIAS

- AUGUSTO, Rodrigo Alves. **Arquitetura orientada por objetos para o MEF de alta ordem com aplicações em mecânica estrutural**. 2012. Tese (Doutorado). Universidade Estadual de Campinas.
- BABUŠKA, I. **The p and h-p versions of the finite element method: the state of the art**. 1988.
- BAINO, F. Scleral buckling biomaterials and implants for retinal detachment surgery. **Medical Engineering and Physics**, v. 32, 945–956, 2010.
- BARGOS, Fabiano Fernandes. **Implementação de Elementos Finitos de Alta Ordem baseado em Produto Tensorial**. 2009. Dissertação (Mestrado). Universidade Estadual de Campinas.
- BATHE, K. **Finite element procedures**. Prentice Hall, 1996. ISBN 9780133014587.
- BELYTSCHKO, T. e LIU, W.K., M.B. **Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures**. Wiley, 2000.
- BENDRE, A. **Finite element analysis and preliminary experiments to study the effects of high myopia in macular degeneration**. Northeastern University, 2009.
- BITTENCOURT, E. **Tratamento de problemas não lineares na mecânica dos sólidos**. PPGEC-UFRGS, 1999.
- BITTENCOURT, M. **Mecânica do contínuo aplicada: Fundamentos e ilustrações utilizando o programa MATLAB**. Universidade Estadual de Campinas, 2009.

BITTENCOURT, M. **Análise Computacional de Estruturas**. Universidade Estadual de Campinas, 2010.

BONET, J. e WOOD, R. **Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis**. Cambridge University Press, 1997. ISBN 9780521572729.

BREZZI, F. e FORTIN, M. **Mixed and hybrid finite elements methods**. Springer series in computational mathematics. Springer-Verlag, 1991. ISBN 9780387975825.

CALLISTER, W. **Material Science and Engineering: An Introduction**. John Wiley & Sons Incorporated, 1999. ISBN 9780471352433.

CHAGNON, G.; VERRON, E.; GORNET, L.; MARCKMANN, G. e CHARRIER, P. On the relevance of continuum damage mechanics as applied to the mullins effect in elastomers. **JOURNAL OF THE MECHANICS AND PHYSICS OF SOLIDS**, v. 52, 1627–1650, 2004.

CHEN, J.S. e PAN, C. A pressure projection method for nearly incompressible rubber hyperelasticity, part i: Theory. **Journal of Applied Mechanics**, v. 63, n. 4, 862–868, 1996.

CRISFIELD, A. **Non-linear finite element analysis of solids and structures**. N. v. 2 in Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. Wiley, 1997. ISBN 9780471956495.

CRISFIELD, A. **Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Essentials**. Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. John Wiley & Sons, 1998. ISBN 9780471970590.

DAVSON, H. e PERKINS, E. **Human Eye**. Encyclopedia Britannica Online, 2011.

DE SOUZA NETO, E.; PERIĆ, D.; DUTKO, M. e OWEN, D. Design of simple low order finite elements for large strain analysis of nearly incompressible solids. **International Journal of Solids and Structures**, v. 33, n. 20-22, 3277 – 3296, 1994a.

DE SOUZA NETO, E.; PERIĆ, D.; DUTKO, M. e OWEN, D. A phenomenological three-dimensional rate-independent continuum damage model for highly filled polymers: formulation and computational aspects. **J. Mech. Phys. Solids**, v. 42, n. 10, 1533 – 1550, 1994b.

DE SOUZA NETO, E.; PERIC, D. e OWEN, D. **Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications**. John Wiley & Sons, 2008. ISBN 9781119964544.

DONG, S. e YOSIBASHI, Z. A parallel spectral element method for dynamic three-dimensional nonlinear elasticity problems. **Computers and Structures**, v. 87, 59–72, 2009.

DUSTER, A. e RANK, E. The p-version of the finite element method compared to an adaptive h-version for the deformation theory of plasticity. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, 1925–1935, 2001.

FREITAS, A. **Modelagem da evolução do dano ortotrópico acoplado à elastoplasticidade em metais**. Universidade Federal de Santa Catarina, 2010.

FROTA, P. **O olho humano e defeitos de visão**. 2004.

**URL:** <http://profs.ccems.pt/PaulaFrota/olho.htm>

FUNG, Y.C. **Biomechanics: Mechanical Properties of Living Tissues**. Springer-Verlag, New York, 1993.

GADALA, M.; DOKAINISH, M. e ORAVAS, G.A. **Formulation Methods of Geometric and Material Nonlinearity Problems**, v. 20. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1984.

GENEST, R. **Effect of Intraocular Pressure on Chick Eye Geometry, Finite Element Modelling and Myopia**. University of Waterloo, 2010.

GURTIN, M.E. e FRANCIS, E.C. Simple rate-independent model for damage. **J. Spacecraft**, , n. 18, 285–286, 1981.

HANS, S.; BAWAB, S. e WOODHOUSE, M. **A finite element infant eye model to investigate retinal forces in shaken baby syndrome.** 247. Springer-Verlag, 2009.

HAYASHI, K.; OHNO-MATSUI, K.; SHIMADA, N.; MORIYAMA, M.; KOJIMA, A.; HAYASHI, W.; YASUZUMI, K.; NAGAOKA, N.; SAKA, N.; YOSHIDA, T.; TOKORO, T. e MOCHIZUKI, M. Long-term pattern of progression of myopic maculopathy: A natural history study. **Ophthalmology**, v. 117, n. 8, 1595 – 1611.e4, 2010.

HEISSERER, U.; HARTMANN, S.; DÜSTER, A.; YOSIBASH, Z.; BIER, W. e RANK, E. p-fem for finite deformation powder compaction. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, v. 197, 727–740, 2008.

HOLZAPFEL, G. **Nonlinear solid mechanics: a continuum approach for engineering.** Wiley, 2000. ISBN 9780471823193.

HOLZER, S. e YOSIBASHI, Z. The p-version of the finite element method in incremental elastoplastic analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering.**, v. 39, 1859–1878, 1996.

HUGHES, T. **The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis.** Dover Civil and Mechanical Engineering Series. Dover Publications, 2000. ISBN 9780486411811.

IKUNO, Y. e TANO, Y. **Retinal and Choroidal Biometry in Highly Myopic Eyes with Spectral-Domain Optical Coherence Tomography**, v. 50. Investigative Ophthalmology and Visual Science, 2009.

KACHANOV, L. **Time rupture process under creep conditions.** Izv Akad Nauk SSR, 1958.

KARNIADAKIS, G. e SHERWIN, S. **Spectral/hp Element Methods for Computational Fluid Dynamics.** Numerical Mathematics and Scientific Computation. Oxford University Press, USA, 2005. ISBN 9780198528692.

KONYUKHOVA, A. e SCHWEIZERHOF, K. Incorporation of contact for high-order finite elements in covariant form. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 198, 1213–1223, 2009.

LEMAÎTRE, J. **A course on damage mechanics**. Springer, 1996. ISBN 9783540609803.

LIU, Z.; WANG, B.; XU, X. e WANG, C. A study for accommodating the human crystalline lens by finite element simulation. **Computerized Medical Imaging and Graphics**, v. 30, n. 6-7, 371 – 376, 2006. <ce:title>Medical Imaging and Telemedicine</ce:title>.

MARTÍN SÁNCHEZ, M. e ROLDÁN PALLARÉS, M. **Myopia: frequency of lattice degeneration and axial length**. 45. Can J Ophthalmol, 2010.

MULLINS, L. Softening of rubber by deformation. **Rubb. Chem. Technol**, , n. 42, 339 – 351, 1969.

NORMAN, R.; FLANAGAN, J.; SIGAL, I.; RAUSCH, M. e TERTINEGG, I. **Finite element modelling of the human sclera: Influence on optic nerve head biomechanics and connections with glaucoma**. Experimental eye Research, 2010.

OGDEN, R. **Non-Linear Elastic Deformations**. Dover Civil and Mechanical Engineering Series. Dover Publications, 1997. ISBN 9780486696485.

POWER, E. **A nonlinear finite element model of the human eye to investigate ocular injuries from night vision goggles**. Virginia tech, 2001.

POWER, E.; STITZEL, J.; WEST, R.; HERRING, I. e DUMA, S. **A nonlinear finite element model of the human eye for large deformation loading**. Virginia tech, 2001.

PROVENZANO, P.; HEISEY, D.; HAYASHI, K.; LAKES, R. e VANDERBY, R. Subfailure damage in ligament: a structural and cellular evaluation. **JOURNAL OF APPLIED PHYSIOLOGY**, v. 92, n. 1, 362–371, JAN 2002.

QUARANTA, M.; BRINDEAU, C.; COSCAS, G. e SOUBRANE, G. **Multiple choroidal neovascularizations at the border of a myopic posterior macular staphyloma.** 238. Graefe's archive for clinical and experimental ophtalmol, 2000.

RABOTNOV, Y. **Creep problems in structural members.** North-Holland, 1969.

RANGARAJAN, N.; KAMALAKKANNAN, S.; HASIJA, V.; SHAMS, T.; JENNY, C.; SERBANESCU, I.; HO, J.; RUSINEK, M. e LEVIN, A. **Finite element model of ocular injury in abusive head trauma,** v. 13. Journal of AAPOS, 2001.

SHIH, Y.F.; HO, T.C.; HSIAO, C. e LIN, L.K. **Visual outcomes for high myopic patients with or without myopic maculopathy: a 10 year follow up study.** 90. Br J Ophthalmol, 2008.

SILVA, Cláudio Alessandro de Carvalho. **Análise de sensibilidade, algoritmos de otimização e orientação por objetos em hiperelasticidade não-linear.** 2003. Tese (Doutorado). Universidade Estadual de Campinas.

SIMO, J. On a fully 3-dimensional finite strain viscoelastic damage model - formulation and computational aspects. **Computer methods in applied mechanics and engineering,** v. 60, n. 2, 153 – 173, 1987.

SUSSMAN, T. e BATHE, K.J. A finite element formulation for nonlinear incompressible elastic and inelastic analysis. **Computers and Structures,** v. 26, n. 1-2, 357 – 409, 1987.

SZABÓ, B. e BABUŠKA, I. **Finite Element Analysis.** John Wiley and Sons, 1991.

SZABÓ, B. e MEHTA, A. p convergent finite element approximations in fracture mechanics. **International Journal for Numerical Methods in Engineering,** v. 12, 551–560, 1978.

TILLIER, Y.; FALCOT, C.; PACCINI, A.; CAPUTO, G. e CHENOT, J.L. 3d finite element modelling of macular translocation. **International Congress Series,** v. 1281, n. 0, 467 – 472, 2005. CARS 2005: Computer Assisted Radiology and Surgery Proceedings of the 19th International Con-

gress and Exhibition.

VALENTE, Gilberto Luis da Costa. **hp2FEM : uma arquitetura de software p não-uniforme para o método de elementos finitos de alta ordem**. 2012. Dissertação (Mestrado). Universidade Estadual de Campinas.

VASQUEZ, Mariana Godoy. **Construção de funções de interpolação para as versões h e p do MEF através de produto tensorial**. 2004. Tese (Doutorado). Universidade Estadual de Campinas.

YOSIBASH, Z.; HARTMANN, S.; HEISSER, U.; DSTER, A.; RANK, E. e SZANTO, M. Axisymmetric pressure boundary loading for finite deformation analysis using p-fem. **Comput. Methods Appl. Mech. Engng**, v. 196, 1261–1277, 2007.

YU, Y.; BAEK, H.; BITTENCOURT, M.L. e KARNIADAKIS, G.E. Mixed spectral/hp element formulation for nonlinear elasticity. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 213-216, n. 0, 42 – 57, 2012.