

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR LILIANA ROMERO
CUETO E APROVADA
PELA COMISSÃO JULGADORA EM 30.1.07.2007
R. Pavanello
.....
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Análise de Sensibilidade Vibroacústica de Painéis Aeronáuticos Reforçados

Autor: **Liliana Romero Cueto**

Orientador: **Prof. Dr. Renato Pavanello**

05-2008

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

Análise de Sensibilidade Vibroacústica de Painéis Aeronáuticos Reforçados

Autor: **Liliana Romero Cueto**

Orientador: **Prof. Dr. Renato Pavanello**

Curso: Engenharia Mecânica

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Dissertação de Mestrado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2007

S.P. - Brasil

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

F884p Romero Cueto, Liliana
Análise de Sensibilidade Vibroacústica de painéis aeronáuticos
reforçados/ Liliana Romero Cueto
Campinas, SP: [s.n.], 2007.

Orientador: Renato Pavanello
Dissertação(mestrado) - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Análise de sensibilidade. 2. Método de elementos fínitos.
3. Aviões - Estruturas I. Pavanello, Renato. II. Universidade
Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia
Mecânica. III. Título.

Titulo em Inglês: Structural-acoustic sensitivity analysis of reinforced aircraft panels.

Palavras-chave em Inglês: Fluid-structure interaction, Sensitivity analysis, Finite
element methods.

Área de concentração: Mecânica de Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica

Banca examinadora: Armando Miguel Awruch e Euclides de Mesquita Neto.

Data da defesa: 30/07/2007

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADEMICO

Análise de Sensibilidade Vibroacústica de Painéis Aeronáuticos Reforçados

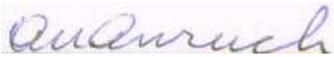
Autor: **Liliana Romero Cueto**

Orientador: **Prof. Dr. Renato Pavanello**

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:



Prof. Dr. Renato Pavanello, Presidente
DMC/FEM/UNICAMP



Prof. Dr. Armando Miguel Awruch
DEC/UFRGS



Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto
DMC/FEM/UNICAMP

Campinas, 30 de julho de 2007.

Dedicatória

Dedico esta dissertação aos meus pais Alurginia Cueto e Cayo Romero e as minhas irmãs Adriana, Heidi e Diana Romero.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer às pessoas e instituições que colaboraram para o sucesso deste trabalho:

- Ao Professor Renato Pavanello, obrigada pela sua dedicação, confiança, comprometimento e apoio nestes dois anos de trabalho.

- À Capes e à Fapesp pelo apoio financeiro durante o desenvolvimento deste trabalho.

- A todos professores, funcionários e alunos de Pós-Graduação do Departamento de Mecânica Computacional da Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, obrigada pela colaboração e atenção dispensadas.

- Às famílias Useche Castillo e Colognesi D'Antonio, minhas famílias substitutas, obrigada pelo carinho, apoio, companhia e paciência durante este tempo aqui no Brasil.

- Aos colegas de laboratório, Ilson (Pepe le Pew), Márcio, Ricardo, Alberto Balestra e Alberto (O aluno), um especial agradecimento pelos momentos de alegria.

*“Nuestra recompensa se encuentra
en el esfuerzo y no en el resultado.
Un esfuerzo total es una victoria completa.”*

Mahatma Gandhi

Resumo

Liliana Margarita Romero Cueto, Análise de Sensibilidade vibroacústica de Painéis Aeronáuticos Reforçados. Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas 2007, 100 p. Dissertação (Mestrado).

O comportamento de sistemas acoplados fluido-estrutura pode ser modificado pela presença de defeitos estruturais. O estudo desta modificações, usando métodos numéricos de simulação, permite aos engenheiros, estimar o novo estado do sistema a partir a avaliação da variação da resposta dinâmica e vibroacústica. Desta forma, a análise de sensibilidade da resposta do sistema, permite verificar a viabilidade da aplicação das técnicas apresentadas, em técnicas de detecção de falhas, controle de ruído e otimização estrutural. Este trabalho apresenta um estudo do comportamento vibroacústico de painéis aeronáuticos reforçados e a análise de sensibilidade da resposta, destes sistemas, na presença de falhas estruturais. É elaborado um modelo estrutural baseado na teoria de cascas e vigas que é acoplado a um meio fluido acústico interior bi e tridimensional. O método de Elementos Finitos é usado para a solução das equações que governam o comportamento acústico-estrutural do sistema acoplado, adotando a formulação não simétrica, com os deslocamentos e pressões como variáveis incógnitas dos domínios estrutural e acústico respectivamente. São apresentadas técnicas analíticas de análise de sensibilidade da resposta em frequência, estrutural e acústica, em relação às modificações estruturais. A precisão numérica dos métodos de sensibilidade, propostas para o caso vibroacústico, é avaliada usando-se a técnica da Diferenças Finitas como referência. Com a finalidade de validar os modelos implementados, são apresentados alguns testes representativos. Na modelagem de painéis aeronáuticos, dois modelos de fuselagem de aeronave são apresentados. São calculadas resposta estrutural e vibroacústica e análise de sensibilidade da resposta para modelos de fuselagem 2D e 3D na presença de

modificações estruturais.

Palavras chaves: Interação Fluido-Estrutura, Análise de Sensibilidade, Método dos Elementos Finitos.

Abstract

Liliana Romero Cueto, *Structural-Acoustic Sensitivity Analysis of Reinforced Aircraft panels*. Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2007, 100 p. Dissertação (Mestrado).

The behavior of coupled fluid-structural systems can be modified due to presence of located structural defects. The study of these modifications, by simulation, using numerical methods, allows engineers to predict the new state of the system from the evaluation of structural and acoustic responses. Sensitivity analysis of acoustic and structural responses, with respect to structural geometry modifications, allow to verify the viability to apply techniques to be presented in this work for damage detection, noise control and structural optimization. In this work a formulation for vibro-acoustic sensitivity analysis of aircraft stiffener panels under structural defects is presented. Shells and beams structural elements for two and three-dimensional models coupled with an interior fluid domain are formulated. The Finite Element Method is used to solve the structural-acoustic coupled governing equations, adopting structural displacements and fluid pressure as variables. Structural and vibro-acoustic sensitivity techniques, with respect to structural modifications are presented. The accuracy of sensitivity methods is estimated using the Finite Difference technique as a reference. Respect to aircraft panels models, two fuselage models are described. Dynamic and Vibro-acoustic response and response sensitivity with respect to structural defects are calculated.

Key words: Fluid-structure interaction, Sensitivity analysis, Finite element methods.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Motivação e relevância	1
1.2	Objetivos e contribuições	2
1.3	Organização do texto	3
2	Revisão bibliográfica	4
2.1	Modelagem vibroacústica de estruturas aeronáuticas	4
2.2	Problemas acoplados, Interação fluido-estrutura	8
2.3	Análise de sensibilidade na resposta em frequência em sistemas acoplados fluido-estrutura	12
3	Modelagem de painéis aeronáuticos reforçados	14
3.1	Modelo dinâmico dos reforçadores	14
3.1.1	Solução das equações de movimento	18
3.1.2	Discretização por elementos finitos	19
3.1.3	Análise dinâmica de reforçadores espaciais	24
3.2	Modelo do revestimento - Placas e Cascas	29
3.2.1	Modelo de placa de Reissner-Mindlin	29
3.2.2	Formulação por Elementos Finitos	36
3.2.3	Elemento de placa de MacNeal	39
3.2.4	Cascas como montagem de elementos planos	47
3.3	Resposta em frequência do sistema estrutural	54

4	Formulação para o problema acoplado fluido-estrutura	56
4.1	Equações de governo do domínio fluido	57
4.2	Elementos finitos para o domínio fluido	61
4.3	Elementos finitos de interface	62
4.4	Solução do sistema acoplado	65
5	Análise de Sensibilidade	69
5.1	Métodos de análise de sensibilidade	69
5.1.1	Método das diferenças finitas	70
5.1.2	Métodos analíticos	70
5.2	Sensibilidade estrutural	72
5.3	Sensibilidade vibroacústica	74
6	Resultados Numéricos	77
6.1	Validação computacional	77
6.1.1	Modelo das componentes estruturais	78
6.1.2	Modelo fluido	81
6.1.3	Modelo acoplado fluido-estrutura	82
6.1.4	Validação dos métodos de análise sensibilidade	86
6.2	Aplicação em fuselagens	89
6.2.1	Modelo bidimensional de fuselagem	90
6.2.2	Modelo tridimensional de fuselagem	99
6.2.3	Modelo acoplado tridimensional de fuselagem	106
7	Conclusões e Sugestões	116
7.1	Conclusões	116
7.2	Sugestões para trabalhos futuros	117

Lista de Figuras

2.1	Componentes primários do Aluminium Testbed Cylinder, adaptado de Grosveld, 1998	6
2.2	Modelo por elementos finitos de cascas e placas, Boily and Charron, 1999 . .	7
2.3	Elementos finitos de 1/4 de fuselagem. a).Elementos estruturais b).Elementos acústicos, adaptado de Herdic, 2005	8
3.1	Painel aeronáutico.	15
3.2	Cinemática da viga de Timoshenko	16
3.3	Elemento de pórtico	20
3.4	Elemento de pórtico no espaço	25
3.5	Carregamentos laterais e componentes das tensões da placa	30
3.6	Forças internas por unidade de comprimento de um elemento diferencial da placa	35
3.7	Corpo genérico tridimensional.	36
3.8	Elemento de 4 nós de placa de MacNeal nas coordenadas isoparamétricas e reais	40
3.9	Elemento de casca sujeito a deslocamentos de membrana e flexão	48
3.10	Elemento de casca nas coordenadas globais	51
4.1	Estrutura elástica contendo fluido	57
4.2	Elemento Hexaédrico de 8 nós	62
4.3	Elementos de interface 2D	63
4.4	Elemento de interface 3D	64
6.1	Geometria e condições de contorno da casca cilíndrica	79

6.2	Primeiras 6 frequências naturais para malha com 64 elementos da casca cilíndrica simplesmente apoiada	80
6.3	Primeiras 6 frequências naturais para malha com 400 elementos da casca cilíndrica simplesmente apoiada	80
6.4	Primeiras 8 frequências naturais de uma cavidade acústica com superfície livre em um dos extremos	82
6.5	Malha problema acoplado fluido-estrutura (placa-cavidade)	83
6.6	Modos estruturais (placa) acoplados do modelo placa-cavidade.	85
6.7	Modos acústicos acoplados do modelo placa-cavidade, plano $y = 0, 3$	86
6.8	Malha para análise de sensibilidade do modelo cavidade retangular	87
6.9	Sensibilidade da resposta acústica à modificação da altura da seção transversal do um elemento estrutural para o problema de caixa bidimensional.	88
6.10	Estrutura <i>monocoque</i> , modelo de fuselagem de aeronaves. adaptado de Grosveld, 1998.	90
6.11	Modelo bidimensional de fuselagem.	91
6.12	Resposta em frequência acústica e modos de vibração; modelo acoplado bidimensional de fuselagem.	92
6.13	Resposta em frequência da parte estrutural e modos de vibração; modelo acoplado bi-dimensional de fuselagem.. . . .	93
6.14	FRF e campo de pressão interna com e sem defeito estrutural. a. Sem defeito, b. Com defeito	95
6.15	FRF e distribuição de deslocamentos na estrutura com e sem defeito estrutural. a. Sem defeito, b. Com defeito	96
6.16	Sensibilidade acústica para diferentes localizações de defeitos do modelo bidimensional de fuselagem.	98
6.17	Distribuição da sensibilidade acústica na presença de um defeito do modelo bidimensional de fuselagem.	99
6.18	Modelo estrutural de fuselagem tridimensional.	100
6.19	Primeiros modos estruturais da fuselagem tridimensional.	102
6.20	Sensibilidade da resposta estrutural.	104

6.21	Localização de defeitos no modelo de fuselagem 3D.	105
6.22	Sensibilidade da resposta estrutural do modelo de fuselagem 3D.	106
6.23	Modelo acoplado de fuselagem.	107
6.24	Resposta vibroacústica do modelo de fuselagem acoplado (82 <i>Hz</i>).	108
6.25	Resposta vibroacústica do modelo de fuselagem acoplado (121.2 <i>Hz</i>).	109
6.26	Localização de defeitos para análise de sensibilidade do modelo de fuselagem acoplado.	110
6.27	Análise de sensibilidade vibroacústica do modelo de fuselagem acoplado para quatro localizações de defeitos estruturais.	111
6.28	Distribuição da sensibilidade estrutural do modelo de fuselagem acoplado (79.9 <i>Hz</i> e 80.7 <i>Hz</i>)	112
6.29	Distribuição da sensibilidade estrutural do modelo de fuselagem acoplado (81.5 <i>Hz</i> e 82.2 <i>Hz</i>)	113
6.30	Distribuição da sensibilidade acústica do modelo de fuselagem acoplado (79.9 <i>Hz</i> e 80.7 <i>Hz</i>)	114
6.31	Distribuição da sensibilidade acústica do modelo de fuselagem acoplado (81.5 <i>Hz</i> e 82.2 <i>Hz</i>)	115

Lista de Tabelas

6.1	Comparação das frequências naturais da casca cilíndrica	81
6.2	Comparação das frequências naturais da cavidade acústica	82
6.3	Propriedades e constantes dos domínios acoplados	83
6.4	Frequências naturais da estrutura desacopladas	84
6.5	Frequências naturais do problema acoplado placa-cavidade	84
6.6	Propriedades e constantes do modelo acoplado viga-cavidade	87
6.7	Propriedades e constantes dos reforçadores e cavernas	89
6.8	Propriedades e constantes do modelo bidimensional de fuselagem	91
6.9	Propriedades e constantes do modelo tridimensional de fuselagem	101
6.10	Frequências naturais do sistema acoplado (Hz)	107

Nomenclatura

Letras Latinas

A - constante de Lamé para os materiais poroelásticos (Teoria de Biot-Allard)

B - coeficiente de Skempton

b - coeficiente de amortecimento viscoso

c - velocidade de propagação do som em um meio

E - módulo de elasticidade ou módulo de rigidez ou módulo de Young

F - força ou cargas

h - porosidade

H - frequência característica viscosa

H' - frequência característica térmica

i - parte imaginária ($\sqrt{-1}$)

N - módulo de cisalhamento ou módulo de elasticidade transversal

p - pressão intersticial da fase fluida

Pr - número de Prandtl

q - fluxo de massa por unidade de área na fronteira S do volume de controle poroelástico

Q - coeficiente de acoplamento entre as equações das fases sólida e fluida

R - módulo de deformação volumétrica do fluido por unidade de porosidade

t - tempo

u - deslocamento da fase estrutural

U - deslocamento da fase fluida

v - velocidade de partícula fluida

X - carga de dissipação viscosa

\dot{w} - velocidade de infiltração

Z - impedância acústica

Letras Gregas

α - absorção acústica

β - constante de Biot

Γ - contorno do domínio poroelástico

γ - constante de propagação da onda acústica

γ - termo de acoplamento entre as fases fluida e estrutural (Teoria de Biot-Allard)

δ - delta de Kronecker

ψ - função de ponderação (Método dos Elementos Finitos)

Λ - comprimento característico viscoso

Λ' - comprimento característico térmico

λ - constante de Lamé para os materiais poroelásticos (Teoria de Biot)

κ - permeabilidade hidráulica

η - viscosidade cinemática do Fluido

ν_b - coeficiente de Poisson drenado

ρ - massa específica de um material

σ - fluxo resistivo

θ - Razão entre os calores específicos do fluido

ξ - dilatação do fluido

Ω - domínio poroelástico

ω - frequência

Termos com Subscritos

c_0 - velocidade de propagação do som no meio acústico

K_b - módulo de deformação volumétrica do material poroelástico no vácuo

K_s - módulo de deformação volumétrica do material elástico no vácuo

K_f - módulo de deformação volumétrica do fluido

P_0 - pressão atmosférica
 Z_n - impedância acústica superficial
 α_∞ - tortuosidade
 δ_v - dimensão da película viscosa
 ν_u - coeficiente de Poisson não drenado
 ρ_s - massa específica da fase sólida
 ρ_f - massa específica da fase fluida
 ρ_0 - massa específica do ar em condições específicas

Termos com Sobrescritos

\tilde{A} - variável complexa e dependente da frequência
 \dot{a} - termo com derivada primeira temporal
 \ddot{a} - termo com derivada segunda temporal
 $\hat{\sigma}^s$ - tensor de tensão da fase estrutural no vácuo
 σ^s - tensor total de tensão da fase estrutural
 σ^f - tensor de tensão da fase fluida
 ε^s - tensor de deformação da fase estrutural
 ε^f - tensor de deformação da fase fluida

Notação indicial

A_{ij} - matriz
 A_i - vetor
 $A_{i,i}$ - divergente de um vetor
 $a_{,j}$ - gradiente de um escalar
 $a_{,jj}$ - laplaciano de um escalar

Siglas

DMC - Departamento de Mecânica Computacional

FRF - Função de resposta em frequência

POO - Programação orientada a objetos

SPL - "Sound Pressure Level" (Nível de Pressão Sonora)

SVL - "Sound Velocity Level" (Nível de Vibração Estrutural)

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação e relevância

O estudo de estruturas aeronáuticas tem sido um importante tópico de pesquisa nos últimos anos. A bases de dados ISI Web of Knowledge registra, nos últimos 10 anos, mais de mil trabalhos desenvolvidos nas áreas de otimização de estruturas aeronáuticas, redução de ruído interior, projeto de componentes, detecção de falhas. Uma das ferramentas mais utilizada, para a abordagem destes problemas, tem sido a modelagem computacional dos fenômenos estudados, mostrando-se desta forma a grande importância desta ferramenta no estudo de estruturas aeronáuticas.

A estrutura de uma aeronave é construída principalmente por painéis aeronáuticos. Estes painéis são geralmente formados por um revestimento e por reforçadores metálicos (Niu, 1988). Um painel que se apresenta trincado ou danificado pode ser recuperado rebitando-se ou colando-se um reparo sobre a região danificada (Duong et al., 2006). Nestas circunstâncias, o comportamento vibroacústico do sistema aeronáutico, cabine-fuselagem por exemplo, pode ser alterado, gerando-se e transmitindo-se ruído interior. O estudo destas alterações, seja pela presença de defeitos seja pela presença de reparos, permite aos engenheiros prever o novo estado do sistema a partir da avaliação (numérica e experimental) de grandezas estruturais e acústicas.

A análise da sensibilidade, definida como a derivada de uma quantidade com relação a um número qualquer de variáveis independentes, permitirá estimar a influência da presença de danos estruturais, no comportamento estrutural e vibroacústico de um sistema.

Assim, o escopo principal desta pesquisa refere-se à simulação do problema acoplado

fluido-estrutura, presente num painel aeronáutico, e a determinação da sua sensibilidade na presença de alterações estruturais.

O problema de interação fluido-estrutura ocorre em várias áreas da engenharia e em boa parte destes problemas o comportamento da estrutura é influenciada significativamente pela presença de fluido. Desta forma a importância do estudo do problema acoplado para esta aplicação torna-se evidente.

1.2 Objetivos e contribuições

O objetivo principal desta dissertação é elaborar uma ferramenta computacional dedicada à análise sensibilidade vibroacústica de painéis aeronáuticos.

Para levar a cabo o objetivo proposto podem-se destacar os seguintes objetivos específicos:

- Elaborar um estudo bibliográfico sobre os tipos, soluções construtivas de estruturas aeronáuticas, mais particularmente, para os painéis aeronáuticos reforçados.
- Implementar e testar elementos de casca fina, com aproximação de alta ordem, e de casca espessa com aproximação de baixa ordem para os deslocamentos.
- Implementar um módulo de análise acústica tridimensional no domínio das baixas frequências, baseada na técnica de elementos finitos, e montar o sistema acoplado vibroacústico.
- Aplicar o modelo numérico em casos de painéis aeronáuticos típicos, usando-se os elementos de casca para a modelagem do revestimento e os de viga para os reforçadores.
- Implementar métodos eficientes de análise de sensibilidade para problemas acoplados fluido-estrutura.
- Efetuar uma análise de sensibilidade vibroacústica à presença de defeitos em regiões localizadas de modelos representativos.

A principal contribuição desta dissertação para o grupo de pesquisa em que se insere, foi a implementação computacional de módulos para solução de problemas acoplados fluido-estrutura para o caso elastodinâmico e o desenvolvimento e implementação de três métodos

diferentes de análise de sensibilidade. Estes módulos serão adicionados ao já existentes no projeto computacional MEFLAB, programa em desenvolvimento no Departamento de Mecânica Computacional da Faculdade de Engenharia Mecânica da UNICAMP.

1.3 Organização do texto

Esta dissertação está dividida em cinco capítulos principais, explicados a seguir:

No capítulo 1 apresenta-se uma descrição da evolução no estudo da modelagem de estruturas aeronáuticas, assim como o estudo do comportamento vibroacústico das mesmas. Também apresenta-se um resumo das principais formulações existentes para análise dinâmica e análise de sensibilidade de problemas acoplados fluido-estrutura.

O capítulo 2 apresenta a descrição da teoria técnica e implementação computacional da modelagem por elementos finitos dos diferentes elementos estruturais que constituem um painel aeronáutico.

O capítulo 3 trata da formulação de problemas acoplados fluido-estrutura, adotando a formulação Lagrangiana Euleriana ($u - p$) para a modelagem dos domínios estrutural e fluido respectivamente e a solução do problema usando o método de Elementos Finitos.

No capítulo 4 são descritos três métodos de análise de sensibilidade (direto, adjunto e das diferenças finitas) e a aplicação destes métodos em problemas dinâmicos e acoplados.

Finalmente no capítulo 5 apresenta-se a metodologia adotada para a validação dos módulos implementados e na segunda parte apresentam-se os resultados obtidos utilizando o software desenvolvido (resposta estrutural, resposta vibroacústica e análise de sensibilidade) em diferentes modelos de fuselagem de aeronaves.

Capítulo 2

Revisão bibliográfica

Neste capítulo será apresentada uma breve síntese bibliográfica sobre o estudo das características vibroacústicas de estruturas aeronáuticas, visando ilustrar apenas os principais tipos de modelos adotados nesta área. O estudo se concentra nos trabalhos relacionados à análise do comportamento vibroacústico de fuselagens, usando o método de elementos finitos como ferramenta para aproximação numérica. Também será apresentada uma revisão da literatura básica sobre modelagem de problemas de interação fluido-estrutura e análise de sensibilidade dos sistemas acoplados.

2.1 Modelagem vibroacústica de estruturas aeronáuticas

Muitos trabalhos têm sido desenvolvidos nos últimos anos com o objetivo de estudar o comportamento estático e dinâmico dos componentes estruturais das aeronaves. Por outro lado, poucos trabalhos significativos dedicados à análise vibroacústica da fuselagem de aeronaves, foram encontrados na literatura. Na seqüência são revisados somente alguns trabalhos considerados representativos destas áreas, com ênfase para os trabalhos que utilizaram o método de elementos finitos.

A análise estrutural de fuselagens de aeronaves está associada com as primeiras contribuições do método dos elementos finitos ocorridas no início da década de 60. Uma breve revisão histórica deste período pode ser encontrada em Cook et al., 1989, e não está incluída nesta revisão.

No início da década de 70, Yurkovich, 1970, analisa o comportamento dinâmico de painéis

planos reforçados usando o método de elementos finitos. O painel é dividido por superfícies retangulares limitadas por reforçadores, simulando a configuração estrutural de aeronaves, em particular o caso das fuselagens. Neste modelo, usam-se elementos de placa triangular de três nós para modelar o revestimento e elementos de viga para os reforçadores com efeitos de flexão, torção e cisalhamento incluídos. Ambas as configurações, painel e viga, possuem nós comuns.

Grosveld, 1998, Buehrle, 2000 e Grosveld, 2002, compararam, com resultados experimentais, os resultados de simulação do comportamento dinâmico estrutural de fuselagem de aeronaves. Os trabalhos foram desenvolvidos sobre dois tipos de estruturas de fuselagem reforçada. O primeiro deles é o ATC (Aluminium Testbed Cylinder), o qual, é modelado acoplando cascas cilíndricas com reforçadores longitudinais, cavernas, placas de fechamento e domos, como mostrado na Figura 2.1. Para a análise da casca são usados elementos quadriláteros de 4 nós. Os reforçadores são modelados com elementos de viga (modelo de Timoshenko) e são acoplados à casca, através da implementação de elementos com a linha neutra deslocada. Foi realizada a predição das frequências naturais de vibração para 6 configurações de montagem dos componentes do cilindro de teste. A segunda estrutura, avaliada por estes autores, é um painel de alumínio reforçado, representativo da construção de aeronaves. Neste caso foram usados três configurações diferentes para a modelagem por elementos finitos. Uma configuração simples, que consiste em modelar os reforçadores usando elementos de viga unidimensionais, acoplados ao painel com deslocamento da linha neutra. Na segunda configuração, modelam-se os reforçadores com elementos de placa lineares bidimensionais. Na terceira configuração, chamada de híbrida, as seções das cavernas com entalhes foram modeladas com elementos de placa e os reforçadores foram modelados com elementos de viga.

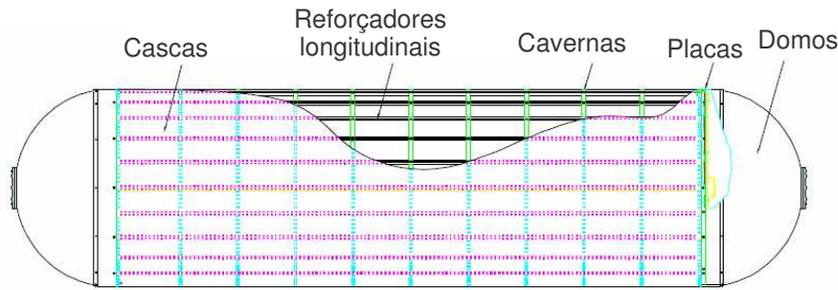


Figura 2.1: Componentes primários do Aluminium Testbed Cylinder, adaptado de Grosveld, 1998

Os trabalhos na área de modelagem vibroacústica de fuselagens são mais recentes. Na década de 90, Boily and Charron, 1999, estudaram o comportamento vibroacústico da fuselagem de uma aeronave modelada por elementos finitos, usando elementos de cascas cilíndricas simples com e sem material visco-elástico associado. No trabalho de Boily and Charron, 1999 a formulação por elementos finitos do problema acoplado acústico estrutural é baseada em aproximação variacional, usando o campo de deslocamento da estrutura e o campo de pressão da cavidade acústica como variáveis do problema. O modelo por elementos finitos contém quatro partes básicas, a casca cilíndrica, duas placas rígidas e a cavidade acústica, como mostra a Figura 2.2. A malha adotada para este modelo é baseado no critério de cinco ou seis elementos lineares por comprimento de onda e o intervalo de frequências de interesse para a análise vibroacústica varia de 80 até 400 Hz . Nota-se neste caso, a dificuldade de representar os fenômenos vibroacústicos em frequências mais elevadas, sendo esta uma das desvantagens do uso do método dos elementos finitos para este tipo de problemas. Pesquisas na área de elementos de alta ordem ou espectrais, tem sido realizadas intensivamente para se disponibilizar parâmetros apropriados para frequências mais altas (Pavanello and Neto, 2000).

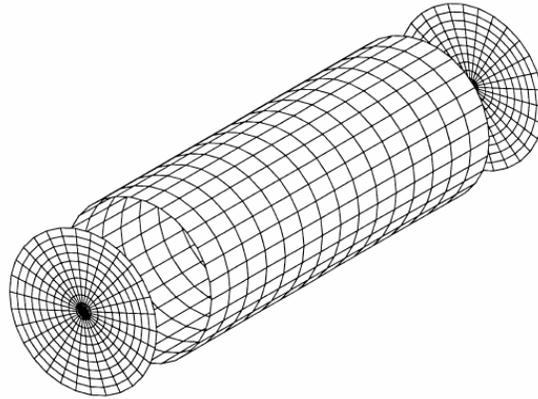


Figura 2.2: Modelo por elementos finitos de cascas e placas, Boily and Charron, 1999

No que se refere à resposta vibroacústica de seções da fuselagem de aeronaves, Herdic, 2005 apresenta um estudo visado a redução de ruído interior. Neste caso, a modelagem é feita usando elementos finitos para modelar os meio estrutural e acústico. Usa-se um código computacional específico denominado SARA-3D, que inclui o cálculo de deslocamentos da estrutura (u) e a pressão do fluido (p) no interior da fuselagem. O revestimento da fuselagem e os reforçadores são modelados com elementos de casca, uma vez que os elementos de viga são inadequados devido à faixa de frequências de trabalho. Pela simetria da estrutura, é modelado só um quarto da fuselagem, como mostrado na Figura 2.3. As placas de fechamento ou revestimento, entre as cavernas e reforçadores, foram modeladas com 6×6 elementos de casca. Usam-se 3 elementos de casca nas cavernas e um elemento de casca nos reforçadores, como pode ser visto no detalhe na Figura 2.3. Os elementos estruturais são acoplados com elementos acústicos no interior e no exterior da fuselagem. A condição de meio externo infinito é aproximada fazendo-se um truncamento na malha com dimensões apropriadas.

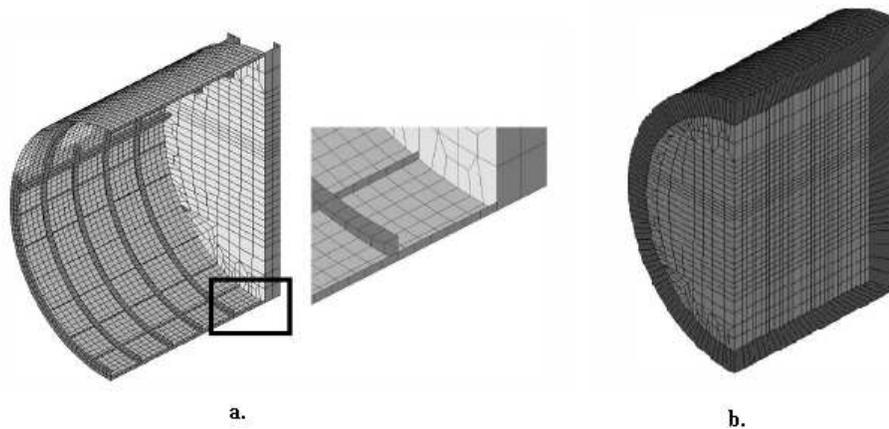


Figura 2.3: Elementos finitos de 1/4 de fuselagem. a).Elementos estruturais b).Elementos acústicos, adaptado de Herdic, 2005

No presente trabalho, as placa de revestimento da fuselagem serão modeladas com elementos de casca e os reforçadores (longarinas e cavernas) modelados com elementos de viga ou casca. O modelo será desenvolvido em um programa dedicado, para permitir a inclusão de novos estudos sobre defeitos e reparos estruturais neste tipo de configuração. Por tanto será necessário especificar e implementar os elementos estruturais de casca e viga tridimensionais e de fluido tridimensional. Um modelo simplificado bidimensional composto de vigas e elementos de fluido acústico também será implementado.

2.2 Problemas acoplados, Interação fluido-estrutural

De uma maneira geral os problemas de acoplamento são aqueles onde dois ou mais campos físicos estão presentes e interagem entre si. Este tipo de problema pode ser classificado em duas categorias (Zienkiewicz, 1984, Poel, 2005):

Classe I ou acoplamento por volume: Contém problemas onde os vários domínios se sobrepõem (total ou parcialmente). O acoplamento ocorre via equações diferenciais e normalmente refere-se a diferentes fenômenos físicos. Um exemplo deste acoplamento ocorre em materiais piezoelétricos, onde os dois campos físicos presentes, elétrico e mecânico, estão

sobrepostos. Outro exemplo típico de acoplamento por volume, encontra-se na modelagem de materiais poroelásticos e poroacústicos, onde uma fase fluida é sobreposta a uma fase sólida representativa do esqueleto elástico do sistema.

Classe II ou acoplamento por superfície: Contém problemas onde o acoplamento ocorre nas interfaces dos domínios, por meio de condições de contorno. O acoplamento deste tipo pode ser visto em problemas de tipo fluido-estrutura (reservatório de líquido, escoamento em torno da fuselagem de um avião, etc.) onde os domínios estão espacialmente separados, mas interagindo pela interface.

O problema acoplado que será desenvolvido nesta pesquisa é da Classe II: interação dinâmica fluido-estrutura. De uma forma geral, a interação está relacionada com o fato de que um meio fluido exerce pressão, através da interface, no meio sólido causando-lhe deslocamentos e deformações, que por sua vez modificam o campo de pressão do fluido. Este tipo de interação origina problemas relacionados às alterações no comportamento vibrocústico de estruturas aeronáuticas.

Inúmeras aplicações envolvem problemas de interação fluido-estrutura: projeto de aeronaves sujeito a carga aerodinâmica, análise de embarcações submetidas a cargas hidrodinâmicas, cálculo de pontes e barragens, análise vibroacústica de veículos e componentes, fadiga sônica, análise biomecânica de sistemas cardiovasculares, excitação acústica em lançadores de satélites, etc.

Devido à complexidade dos fenômenos envolvidos, muitos autores buscaram classificações para os sistemas acoplados fluido-estrutura. Uma classificação possível é feita de acordo com o modelo atribuído ao domínio fluido, à representação estrutural, aos períodos de tempo característicos na interação e às magnitudes dos deslocamentos produzidos. Vários autores adotaram esta classificação: Bettess, 1978, Zienkiewicz and Taylor, 1986, Pavanello, 1991 e Morais, 2000. Nestes trabalhos, foram identificadas três categorias de problemas:

- Problemas com grandes deslocamentos com efeito de compressibilidade irrelevante. São governados basicamente pelas equações do fluido com escoamento viscoso geralmente

incompressível. Exemplos clássicos desta classe de problemas são as oscilações de cabos, pontes suspensas e escoamento entorno de estruturas submarinas. Neste caso os efeitos das ondas de choque são desprezados e o efeito viscoso é o principal desafio da modelagem.

- Problemas de curta duração e pequenos deslocamentos nos fluidos. Problemas onde a interação se dá num curto espaço de tempo e os efeitos de compressibilidade são importantes. As explosões em cavidades, cargas de impacto ou choque entre estruturas e fluido com superfície livre, são casos de problemas dentro desta classificação. Neste caso deve-se superpor os efeitos do escoamento permanente com os efeitos das ondas de choque.
- Problemas com pequenos deslocamentos e no domínio das baixas frequências. Neste caso consideram-se os efeitos lineares, tais como vibrações harmônicas de estruturas flexíveis acopladas a um meio acústico linear (elastoacústica), problemas presentes em estruturas offshores, ventos sob estruturas civis, vibroacústica, entre outros. O estudo desta classe é pré-requisito para o estudo das demais classes de problemas de interação fluido-estrutura. Os problemas de análise em altas frequências e as aplicações para geometrias complexas, o estudo de meios ilimitados, o efeito e caracterização das fontes de origem aeroacústica e o desenvolvimento de métodos particionados eficientes para análise de grandes sistemas, são alguns desafios desta área.

O procedimento tradicional para a solução de problemas de sistemas acoplados fluido-estrutura consiste em resolver simultaneamente ou separadamente as equações dos domínios sólidos (Timoshenko and Gere, 1983 e Popov, 1998) e as equações dos domínios fluidos (Lamb, 1945 e Rayleigh, 1945) incluindo os efeitos da interação em cada uma delas, obtendo-se desta forma um sistema acoplado de equações cuja resolução permite obter a solução requerida.

As formulações clássicas desenvolvidas para o estudo do problema acoplado fluido-estrutura podem ser classificadas em três grupos.

- **Formulações vetoriais ou em deslocamentos**, onde se utiliza a formulação Lagrangiana para modelar o fluido e a estrutura. Formulações deste tipo podem ser

encontradas, para diferentes aplicações, em Gladwell and Zimmerman, 1996, Bettess, 1978, Belytschko and Kennedy, 1976, Hamdi et al., 1978, Bathe and Hahn, 1979, Belytschko and Schumann, 1980, Belytschko and Mullen, 1981, Chen and Taylor, 1990. Esta formulação tornou-se muito importante devido à facilidade na implementação pelo método dos elementos finitos. Subseqüentes desenvolvimentos podem ser encontrados em Olson and Bathe, 1985 que relatam algumas desvantagens do método, tais como a pouca precisão e existência de modos espúrios.

- Nas **Formulações escalares ou em pressão** usa-se uma descrição Eulleriana para modelar o fluido, tomando geralmente a pressão hidrostática como a variável que descreve este domínio. Na estrutura utiliza-se a formulação em deslocamentos. Zienkiewicz and Newton, 1969, foram pioneiros nos trabalhos apresentados baseados na formulação em pressão. Nesta investigação, obtiveram um menor número de graus de liberdade em relação à formulação em deslocamentos e um sistema de matrizes não simétricas. Vários autores, Morand and Ohayon, 1979, Hamdi et al., 1978, Olson and Bathe, 1985, Bathe et al., 1995 e Kim and Yung, 1997, aplicaram a formulação pressão-deslocamento à análise de reservatórios de líquidos submetidos a cargas sísmicas. A aplicação ao caso de fluidos compressíveis e incompressíveis foi apresentada por Bermudez e colaboradores (Bermudez, 1998, e Bermudez, 1995).
- No caso da **Formulação em potencial de velocidade** usa-se a função potencial de velocidade como variável auxiliar na descrição Euleriana do fluido. Este método descreve o problema por três variáveis incógnitas (deslocamentos estruturais, pressão e potencial de velocidade) dobrando desta forma o número de graus de liberdade do meio fluido. Everstine, 1981 propôs a utilização exclusiva da função potencial de velocidades como incógnita no domínio fluido, com o objetivo de simetrizar o sistema de equações. Métodos de redução modal para a solução do autoproblema associado foram estudadas por Daniel, 1980 e Sandberg, 1995. Por sua vez, Nitikitpaiboon and Bathe, 1993 propuseram uma formulação em três campos incluindo o potencial de deslocamentos para o fluido. Olson and Bathe, 1985, propuseram uma modificação da formulação clássica pressão-deslocamento, onde utiliza-se o potencial de velocidades e a pressão hidrostática

como variável do fluido. Esta pressão hidrostática assume um valor constante para cada região do domínio (Galli, 1995).

2.3 Análise de sensibilidade na resposta em frequência em sistemas acoplados fluido-estrutura

Quando a resposta dinâmica de um sistema é calculada usando métodos computacionais, existe um requerimento constante de informação em relação as mudanças da resposta devido à variação de parâmetros do sistema. Por isto, surge a necessidade de uma rápida reavaliação dos resultados quando existe este tipo de variações: sendo portanto imprescindível o conhecimento das derivadas ou sensibilidade das funções que definem o comportamento de dito sistema em função das modificações de alguns parâmetros do mesmo. A sensibilidade é encontrada em relação a alterações no projeto ou à presença de defeitos estruturais do sistema. Este último, permite verificar, ao nível da modelagem, a viabilidade da aplicação de modelos computacionais em técnicas de detecção de falhas. Além disso, a análise de sensibilidade é uma ferramenta fundamental para implementação de técnicas de otimização de forma e topologia de sistemas acoplados, assim como nos métodos probabilísticos que incluem as incertezas de parâmetros e modelos de análise.

Existe atualmente uma extensa literatura sobre os aspectos teóricos e técnicos da análise da sensibilidade do projeto estrutural. Algumas destas referências se dedicam diretamente ao tema de detecção de defeitos, entre estas Haug et al., 1986, mas a maioria encontra-se embutida em artigos dedicados à otimização estrutural.

No início dos anos 90, Lamancusa, 1993 e Christense et al., 1995 aproximaram à análise de sensibilidade para problemas acústicos-estruturais usando o método das diferenças finitas global aplicada a uma função objetivo. Este tipo de enfoque é até o presente, usado como solução de referência para validação dos métodos analíticos e semi-analíticos.

Estudos sobre a resposta em frequência e sua sensibilidade em sistemas acoplados acústicos estruturais foram também realizados por Ma and Hagiwara, 1991 e Casas, 1998, sendo proposto um método iterativo que não utiliza a inversa da matriz impedância do sistema acoplado. Isso foi necessário para melhorar o desempenho computacional das análises convencionais, aplicada em sistemas acoplados não simétricos.

Fritze et al., 2005 and Martins, 2002, utilizaram o método da variável adjunta desenvolvida em Haug et al., 1986 e Choi et al., 1997, na busca de um método semi-analítico e computacionalmente mais eficiente, para a análise de sensibilidade das propriedades acústicas de geometrias modeladas por elementos de casca e viga, acoplando os métodos dos elementos finitos e dos elementos de contorno.

Mais recentemente, Barcelos, 2006, apresenta uma aproximação Newton-Krylov para a análise de sensibilidade de sistemas acoplados fluido-estrutura. Com esta estratégia de solução os autores estudam um problema de otimização aeroelástica.

No presente trabalho é feita uma análise de sensibilidade à presença de defeitos ou alterações estruturais, para modelos vibroacústicos acoplados, modelados pelo método dos elementos finitos. Usa-se o método adjunto, o método direto e métodos das diferenças finitas. A formulação não simétrica em deslocamento e pressão é adotada.

Neste trabalho usa-se o método analítico adjunto adaptado ao caso vibroacústico, aplicando-o ao problema de painéis aeronáuticos, buscando-se verificar qual a influência de defeitos localizados (alterações estruturais) sobre o comportamento vibroacústico do sistema.

Capítulo 3

Modelagem de painéis aeronáuticos reforçados

Denomina-se painel aeronáutico à porção da fuselagem cuja topologia seja representativa da solução construtiva adotada para esta parte da aeronave. No desenvolvimento do projeto, os painéis são utilizados para avaliar códigos acústicos-estruturais, técnicas de modelagem, soluções construtivas e metodologias de fabricação inovadoras.

Pode-se modelar um painel aeronáutico, a partir da montagem de seus componentes, tais como, reforçadores, cavernas, e revestimento ou placas de fechamento (Grosveld, 2002, Buehrle, 2000 e Grosveld, 1998).

Neste capítulo apresentam-se os fundamentos da análise, elásto-dinâmica linear, dos componentes estruturais de um painel aeronáutico. A teoria técnica de pórticos, placas e cascas no contexto dos método dos elementos finitos, é apresentada.

3.1 Modelo dinâmico dos reforçadores

A fuselagem é uma estrutura que contém elementos longitudinais (reforçadores), elementos transversais (cavernas) e uma placa de fechamento externa, conforme mostrado na Figura 3.1. Os reforçadores e cavernas são elementos estruturais que podem estar submetidos a esforços de flexão, torção e cargas axiais simultaneamente. A sua modelagem pode ser feita usando-se o modelo de viga de Timoshenko (Timoshenko and Gere, 1990).



Figura 3.1: Painel aeronáutico.

A equação diferencial que governa o problema elasto-dinâmico de uma estrutura unidimensional, sujeita a movimentos axiais e seguindo a teoria técnica de barras com propriedades geométricas e constitutivas constantes, pode ser resumida da seguinte forma:

Achar $u(\mathbf{x}, t)$, tal que, (Craig, 1981):

$$EA \frac{\partial^2 u(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}^2} + \rho A \frac{\partial^2 u(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = p(\mathbf{x}, t) \quad em \quad \Omega_s \quad (3.1)$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &= \bar{u} & em \quad \Gamma_e \\ \frac{\partial \bar{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} &= \frac{F}{EA} & em \quad \Gamma_N \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde, u são os deslocamentos axiais, E o módulo de elasticidade, A área da seção transversal, ρ é a massa específica do material e $p(\mathbf{x}, t)$ é o carregamento distribuído axialmente no eixo coordenado \mathbf{x} , Ω_s é o domínio da barra, Γ_e , Γ_N são os contornos essenciais e naturais respectivamente, e t indica tempo.

Além do movimento axial os reforçadores estão sujeitos a movimentos transversais de flexão. O modelo de viga aqui apresentado esta baseado na teoria de viga de Timoshenko, que é uma extensão do modelo de viga de Euler-Bernoulli incluindo os efeitos de deformação por cisalhamento transversal e inércia de rotação. Neste caso a hipótese de que as seções planas de uma viga, tomadas normalmente ao seu eixo, permanecem planas e normais a linha neutra, após a aplicação do carregamento, não são mais válidas. Para o modelo de Timoshenko, as equações que governam o problema ficam em função das rotações devido ao cisalhamento transversal e as rotações devido à flexão da viga. A Figura 3.2 mostra o modelo cinemático de viga seguindo esta teoria, onde θ é a rotação da seção transversal e γ é a rotação causada pelo cisalhamento.

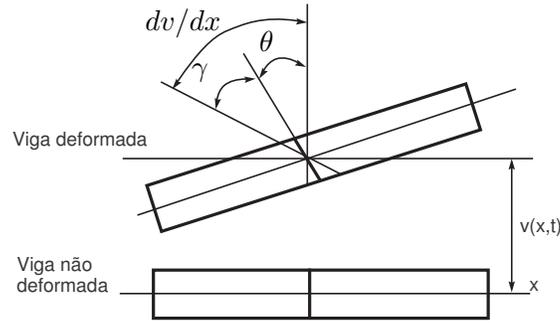


Figura 3.2: Cinemática da viga de Timoshenko

O problema de viga consiste portanto em, (Mindlin, 1951):

Achar $v(\mathbf{x}, t)$ e $\theta(\mathbf{x}, t)$, tal que:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left[GA_s \left(\frac{\partial v(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} - \theta(\mathbf{x}, t) \right) \right] + \rho A \frac{\partial^2 v(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} &= q(\mathbf{x}, t) \quad \text{em } \Omega_s \\ - \left[GA_s \left(\frac{\partial v(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} - \theta(\mathbf{x}, t) \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left[EI \frac{\partial \theta(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \right] + \rho I \frac{\partial^2 \theta(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} &= 0 \quad \text{em } \Omega_s \end{aligned} \quad (3.3)$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} v(\mathbf{x}, t) = \bar{v} \quad ; \quad \theta(\mathbf{x}, t) = \bar{\theta} \quad \text{em } \Gamma_e \\ EI \frac{\partial \theta(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} = M \quad ; \quad GA_s \left[\frac{\partial v(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} - \theta(\mathbf{x}, t) \right] = V \quad \text{em } \Gamma_N \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde, G é o módulo de cisalhamento, A_s é a área efetiva da seção transversal ou área corrigida, $q(\mathbf{x}, t)$ é o carregamento transversal distribuído, I é o momento de inércia da seção transversal, M e V são os momentos fletores e esforço cortantes aplicados no contorno. $v(\mathbf{x}, t)$ é o deslocamento transversal, ρ é a massa específica do material da viga.

O caso anterior, é baseado no modelo de viga de Timoshenko, incluindo-se inércia de rotação. Se os efeitos de cisalhamento e inércia de rotação são desprezados, obtém-se o modelo de viga de Euler, cujo problema pode ser enunciado da seguinte forma:

Achar $v(\mathbf{x}, t)$, tal que, (Mindlin, 1951):

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^2} \left[EI \frac{\partial^2 v(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}^2} \right] + \rho A \frac{\partial^2 v(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = q(\mathbf{x}, t) \quad em \quad \Omega_s \quad (3.5)$$

sujeita a:

$$\begin{aligned} v(\mathbf{x}, t) = \bar{v} \quad ; \quad \theta(\mathbf{x}, t) = \bar{\theta} = \frac{\partial v(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \quad em \quad \Gamma_e \\ EI \frac{\partial^2 v(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}^2} = M; \quad EI \frac{\partial^3 v(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}^3} = V \quad em \quad \Gamma_N \end{aligned} \quad (3.6)$$

Para o caso de viga esbelta, o comportamento dinâmico previsto pelo modelo de Euler é bastante representativo.

O problema das oscilações torcionais das barras é análogo ao caso dos movimentos axiais, e para o caso de seções circulares, tem-se:

Achar $\theta_x(\mathbf{x}, t)$, tal que, (Craig, 1981):

$$GJ \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial \mathbf{x}^2} + \rho I_x \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} = m(\mathbf{x}, t) \quad em \quad \Omega_s \quad (3.7)$$

sujeita a:

$$\begin{aligned} \theta_x = \bar{\theta}_x \quad em \quad \Gamma_e \\ \frac{\partial \bar{\theta}_x}{\partial \mathbf{x}} = \frac{M}{GJ} \quad em \quad \Gamma_N \end{aligned}$$

onde, G é o módulo transversal de elasticidade, J é o momento polar de área equivalente da seção transversal, I_x é o momento de inércia de área normal a direção \mathbf{x} e $m(\mathbf{x}, t)$, é o momento tissor distribuído aplicado na barra.

3.1.1 Solução das equações de movimento

As equações diferenciais anteriormente expostas, podem ser resolvidas utilizando a teoria do Método de Resíduos Ponderados que induz à obtenção de uma aproximação para tais equações. A forma forte para efeitos axiais vem dada por:

$$\int_{\Omega} W_l \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(EA \frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}} \right) + \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - p(\mathbf{x}, t) \right] d\Omega = 0 \quad (3.8)$$

A forma forte para os efeitos de flexão vem dada por:

$$\int_{\Omega} W_l \left[-\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left[GA_s \left(\frac{\partial v}{\partial \mathbf{x}} - \theta \right) \right] + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - q(\mathbf{x}, t) \right] d\Omega = 0 \quad (3.9)$$

$$\int_{\Omega} W_l \left[-\left[GA_s \left(\frac{\partial v}{\partial \mathbf{x}} - \theta \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left[EI \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{x}} \right] + \rho I \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right] d\Omega = 0 \quad (3.10)$$

A forma forte para os efeitos de torção vem dada por:

$$\int_{\Omega} W_l \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(GJ \frac{\partial \theta_x}{\partial \mathbf{x}} \right) + \rho I_z \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} - m(\mathbf{x}, t) \right] d\Omega = 0 \quad (3.11)$$

onde a dependência do tempo e do espaço nas variáveis de estado foi omitida.

Integrando por partes as equações (3.8), (3.9), (3.10) e (3.11) para obter a forma fraca do método de resíduos ponderados e aplicando o método Galerkin, definindo a de ponderação como sendo igual às variações virtuais das variáveis incógnitas (u , v , θ e θ_x), ou seja que, $W_l = \delta u, \delta v, \delta \theta, \delta \theta_x$, e sendo N_l a função de interpolação das variações W_l , tem-se, para de

um segmento de comprimento L , as seguintes equações:

Na direção axial,

$$\int_0^L \frac{dN_l}{dx} EA \frac{du}{dx} dx + \int_0^L N_l \rho A \frac{d^2 u}{dt^2} dx = \int_0^L N_l p(x, t) dx + \left[N_l EA \frac{du}{dx} \right]_0^L \quad (3.12)$$

Efeito de flexão para a viga de Timoshenko,

$$\begin{aligned} \int_0^L N_l \rho A \frac{d^2 v}{dx^2} dx - \int_0^L \frac{dN_l}{dx} GA_s \left[\frac{dv}{dx} - \theta \right] dx - \int_0^L N_l q(x, t) dx \\ - N_l GA_s \left[\frac{dv}{dx} - \theta \right]_0^L = 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \int_0^L N_l \rho I \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} dx + \int_0^L \frac{\partial N_l}{\partial x} EI \frac{\partial \theta}{\partial t} dx - \int_0^L N_l GA_s \left(\frac{\partial v}{\partial t} - \theta \right) dx \\ - N_l EI \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_0^L = 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Efeito de torção,

$$\int_0^L \frac{dN_l}{dx} GJ \frac{du}{dx} dx + \int_0^L N_l \rho I_z \frac{d^2 \theta_x}{dt^2} dx = \int_0^L N_l m(x, t) dx + \left[N_l GJ \frac{d\theta_x}{dx} \right]_0^L \quad (3.15)$$

onde, N_l são as funções de interpolação das variáveis W_l no método de Galerkin. As equações (3.12) a (3.15) representam a forma fraca do problema e constituem a base para a aplicação do método dos elementos finitos.

3.1.2 Discretização por elementos finitos

Considera-se inicialmente a superposição dos problemas de barra e viga no plano, que constitui o modelo denominado de pórtico plano.

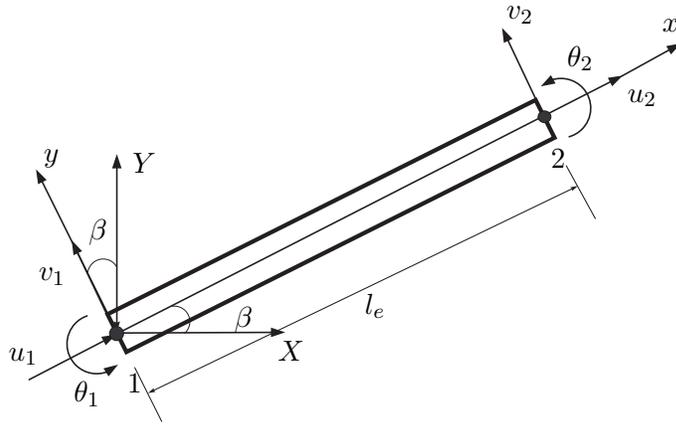


Figura 3.3: Elemento de pórtico

O pórtico plano é dividido em m elementos de comprimento l_e . Cada elemento é delimitado por dois nós e cada um dos quais possui três graus de liberdade, deslocamento axial u , deslocamento transversal v e rotação no plano θ , como mostra a Figura 3.3.

A aproximação para o deslocamento axial, de cada elemento, pode ser calculada usando, como função de interpolação, um polinômio linear da forma,

$$\tilde{u} = [N_1 \quad N_2] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{N}_a \mathbf{u} \rightarrow \frac{d\tilde{u}}{dx} = \frac{d\mathbf{N}_a}{dx} \mathbf{u} = \mathbf{B}_a \mathbf{u} \quad (3.16)$$

onde, \mathbf{u} é o vetor dos deslocamentos nodais e \mathbf{B}_a é a matriz das derivadas das funções de forma \mathbf{N}_a . As funções de forma do elemento de barra são dadas por:

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \frac{x}{l_e} \\ N_2 &= \frac{x}{l_e} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Substituindo a equação (3.16), na equação (3.12), para cada elemento de barra, tem-se a equação de movimento na forma matricial, dada por:

$$\left[\int_0^{l_e} \mathbf{N}_a^T \rho A \mathbf{N}_a dx \right] \ddot{\mathbf{u}} + \left[\int_0^{l_e} \mathbf{B}_a^T E A \mathbf{B}_a dx \right] \mathbf{u} = \int_0^{l_e} \mathbf{N}_a^T \mathbf{p} dx + \mathbf{r}_a \quad (3.18)$$

escrevendo de forma compacta a equação (3.18), tem-se:

$$\mathbf{M}_a \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_a \mathbf{u} = \mathbf{p} + \mathbf{r}_a \quad (3.19)$$

onde, \mathbf{r}_a é a força nodal devido as condições de contorno, \mathbf{p} é o vetor força nodal equivalente devido ao carregamento distribuído. Os dois pontos indicam segunda derivada no tempo.

No caso do elemento de viga de Timoshenko, o deslocamento transversal $v(x, t)$, deve ser aproximado usando polinômios cúbicos na forma,

$$\begin{aligned} \tilde{v} &= [N_{v1} \ N_{v2} \ N_{v3} \ N_{v4}] \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{N}_b \mathbf{v} \rightarrow \frac{d\tilde{v}}{dx} = \frac{d\mathbf{N}_b}{dx} \mathbf{v} = \mathbf{B}_b \mathbf{v} \\ \tilde{\theta} &= [N_{\theta1} \ N_{\theta2} \ N_{\theta3} \ N_{\theta4}] \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{N}_\theta \mathbf{v} \rightarrow \frac{d\tilde{\theta}}{dx} = \frac{d\mathbf{N}_\theta}{dx} \mathbf{v} = \mathbf{B}_\theta \mathbf{v} \\ \tilde{\gamma} &= \frac{d\tilde{v}}{dx} - \tilde{\theta} = \left[\frac{d\mathbf{N}_b}{dx} - \mathbf{N}_\theta \right] \mathbf{v} = \mathbf{B}_s \mathbf{v} \end{aligned} \quad (3.20)$$

onde, \tilde{v} , $\tilde{\theta}$ e $\tilde{\gamma}$ são as aproximações dos deslocamentos, \mathbf{N}_b e \mathbf{N}_θ são as funções de forma e \mathbf{B}_b e \mathbf{B}_θ são as matrizes das derivadas das funções de forma.

Avaliando o polinômio de aproximação, para as condições de fronteira dadas, tem-se as seguintes funções de forma (Cook et al., 1989):

$$\begin{aligned} N_{b1} &= \left[1 - 3 \left(\frac{x}{l_e} \right)^2 + 2 \left(\frac{x}{l_e} \right)^3 + \left(1 - \frac{x}{l_e} \right) \Phi \right] / (1 + \Phi) \\ N_{b2} &= \left[\frac{x}{l_e} - 2 \left(\frac{x}{l_e} \right)^2 + \left(\frac{x}{l_e} \right)^3 + \left(\frac{x}{l_e} - \left(\frac{x}{l_e} \right)^2 \right) \Phi / 2 \right] l_e / (1 + \Phi) \\ N_{b3} &= \left[3 \left(\frac{x}{l_e} \right)^2 - 2 \left(\frac{x}{l_e} \right)^3 + \left(\frac{x}{l_e} \right) \Phi \right] / (1 + \Phi) \\ N_{b4} &= \left[- \left(\frac{x}{l_e} \right)^2 + \left(\frac{x}{l_e} \right)^3 - \left(\frac{x}{l_e} - \left(\frac{x}{l_e} \right)^2 \right) \Phi / 2 \right] l_e / (1 + \Phi) \end{aligned} \quad (3.21)$$

e,

$$\begin{aligned}
N_{\theta 1} &= 6 \left(-\frac{x}{l_e} + \left(\frac{x}{l_e} \right)^2 \right) / l_e (1 + \Phi) \\
N_{\theta 2} &= \left[1 - 4\frac{x}{l_e} + 3 \left(\frac{x}{l_e} \right)^2 + \left(1 - \frac{x}{l_e} \right) \Phi \right] / (1 + \Phi) \\
N_{\theta 3} &= 6 \left(\frac{x}{l_e} - \left(\frac{x}{l_e} \right)^2 \right) / l_e (1 + \Phi) \\
N_{\theta 4} &= \left[-2\frac{x}{l_e} + 3 \left(\frac{x}{l_e} \right)^2 + \frac{x}{l_e} \Phi \right] / (1 + \Phi)
\end{aligned} \tag{3.22}$$

onde,

$$\Phi = \frac{12EI}{GA_s l_e^2}$$

sendo,

$$A_s = \frac{A}{k} \tag{3.23}$$

O coeficiente de cisalhamento k , é um fator de correção devido à hipótese adotada na teoria de Timoshenko, de que o termo γ é constante na seção transversal da viga. Como na verdade a deformação de cisalhamento varia ao longo da seção, γ é uma constante equivalente de deformação correspondente a uma área efetiva A_s , assim a tensão de cisalhamento transversal é definida como:

Substituindo as equações (3.20) nas equações (3.13) e (3.14), para cada elementos de viga, tem-se a equação de movimento na forma matricial, como segue:

$$\left[\int_0^{l_e} \mathbf{N}_b^T \rho A \mathbf{N}_b dx \right] \ddot{\mathbf{v}} + \left[\int_0^{l_e} \mathbf{B}_b^T G A_s \mathbf{B}_s dx \right] \mathbf{v} = \int_0^{l_e} \mathbf{N}_b^T q dx + \mathbf{N}_b^T G A_s \left[\frac{dv}{dx} - \theta \right]_0^{l_e} \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\int_0^{l_e} \mathbf{N}_\theta^T \rho I \mathbf{N}_\theta dx \right] \ddot{\mathbf{v}} + \left[\int_0^{l_e} \mathbf{B}_b^T E I \mathbf{B}_b dx \right] \mathbf{v} - \left[\int_0^{l_e} \mathbf{N}_\theta^T G A_s \mathbf{B}_s dx \right] \mathbf{v} \\
& = \mathbf{N}_\theta^T E I \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_0^{l_e}
\end{aligned} \tag{3.25}$$

que em forma compacta pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\mathbf{M}_t \ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{K}_{s1} \mathbf{v} = \mathbf{q} + \mathbf{r}_s \quad (3.26)$$

$$\mathbf{M}_r \ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{K}_b \mathbf{v} + \mathbf{K}_{s2} \mathbf{v} = \mathbf{r}_b \quad (3.27)$$

Assim, somando-se as contribuições das matrizes de rigidez e massa obtidas nas equações (3.26) e (3.27), tem-se:

$$\mathbf{M}_v = \mathbf{M}_t + \mathbf{M}_r \quad (3.28)$$

$$\mathbf{K}_v = \mathbf{K}_{s1} + \mathbf{K}_{s2} + \mathbf{K}_b$$

onde, \mathbf{M}_v e \mathbf{K}_v são as matrizes de massa e rigidez do elemento de viga, respectivamente, e as matrizes \mathbf{K}_{s1} e \mathbf{K}_{s2} são os termos devido ao efeito de cisalhamento, e \mathbf{K}_b o termo devido a flexão.

Para obter a matrizes de rigidez e de massa no referencial x, y da Figura 3.3, basta superpor as matrizes obtidas para cada caso específico (barra e viga) anteriormente expostos. Desta forma pode-se escrever a equação matricial para o elemento de pórtico da seguinte maneira:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (3.29)$$

com,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_a & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_v \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_a & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_v \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{p} + \mathbf{r}_a + \mathbf{q} + \mathbf{r}_s + \mathbf{r}_b$$

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \end{Bmatrix} \quad i = 1, 2 \quad (3.31)$$

Para que o elemento de pórtico possa ter qualquer orientação no plano, é necessário representar as matrizes das equações (3.30) no sistema de referencia global (X, Y) .

Neste caso, a transformação local global pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C & S & 0 \\ -S & C & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{Bmatrix}_G \rightarrow u = \mathbf{T}\mathbf{u}_G \quad (3.32)$$

onde, \mathbf{u}_G é o vetor de deslocamentos no sistema global (X, Y) .

Aplicando-se a transformação (Equação (3.33)), tem-se:

$$\mathbf{M}_G \ddot{\mathbf{u}}_G + \mathbf{K}_G \mathbf{u}_G = \mathbf{f}_G \quad (3.33)$$

onde, $\mathbf{f}_G = \mathbf{T} \mathbf{f}$ representa o vetor das forças no referencial global, $\mathbf{M}_G = \mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T}$ é a matriz de massa no sistema global e $\mathbf{K}_G = \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T}$ e a matriz de rigidez no sistema global.

3.1.3 Análise dinâmica de reforçadores espaciais

Para modelos tridimensionais da fuselagem, os reforçadores e cavernas podem ser modelados usando elementos de pórtico espaciais de seção transversal uniforme, que podem estar sujeitos a carregamento axial, momento fletor nos dois eixos principais do plano da seção transversal e torção no seu eixo centroidal. A direção positiva destes esforços corresponde à direção positiva dos deslocamentos mostrados na Figura 3.4.

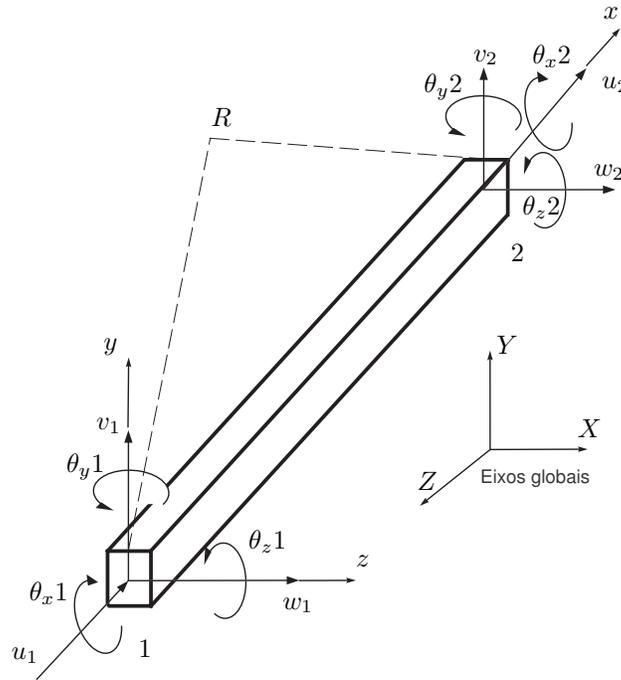


Figura 3.4: Elemento de pórtico no espaço

As matrizes de rigidez e massa do pórtico no espaço são de tamanho 12×12 . Enquanto os planos de flexão xy e xz coincidam com os eixos ortogonais (x,y,z) e o eixo x coincida com o eixo centroidal do pórtico, os esforços podem ser separados em seis grupos: esforço axial seguindo o eixo x , momento de torção no plano de seção transversal, esforços cortantes seguindo os eixos y e z , e momentos fletores nos planos xy e xz . Assim os coeficientes das matrizes de massa e rigidez podem ser obtidos considerando cada tipo de carregamento de forma independente.

Os esforços axiais geram deslocamentos axiais. Neste caso o pórtico comporta-se como uma barra com carregamento axial, governada pela equação (3.1), e os coeficientes das matrizes de massa e rigidez para os graus de liberdade u_1 e u_2 foram definidos para pórticos planos.

Os momentos fletores e esforços cortantes que atuam no plano xy produzem os deslocamentos v_1 , v_2 , θ_{z1} e θ_{z2} . Neste plano de flexão as matrizes de rigidez e massa podem ser avaliadas como mostrado na seção 3.1.2 para vigas planas submetidas à flexão e esforço de cisalhamento, as quais, devem estar expressas em função do momento de inércia I_z e a área

efetiva da seção transversal A_{ys} normais ao eixo z .

De igual forma, os momentos fletores e esforços cortantes que atuam no plano xz produzem os deslocamentos w_1, w_2, θ_{y1} e θ_{y2} e as matrizes de massa e rigidez para este plano de flexão são expressas em função do momento de inércia I_y e a área efetiva da seção transversal A_{zs} normais ao eixo y . Deve ser observado que as direções dos momentos de flexão em xy e xz são contrárias, o que produz alguns coeficientes com sinais diferentes entre um plano e outro.

Finalmente superpondo as equações de flexão de vigas nos plano xy e xz , torção e tensão axial na direção x , para os 12 graus de liberdade do elemento de pórtico, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_a & & & \\ & \mathbf{M}_t & & \\ & & \mathbf{M}_v & \\ & & & \mathbf{M}_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\theta}_x \\ \ddot{\mathbf{v}} \\ \ddot{\mathbf{w}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_a & & & \\ & \mathbf{K}_t & & \\ & & \mathbf{K}_v & \\ & & & \mathbf{K}_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \theta_x \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{m}_x \\ \mathbf{q} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} \quad (3.34)$$

que na forma compacta é dada por:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (3.35)$$

Para que o elemento de pórtico possa ter qualquer orientação no espaço, é necessário representar as matrizes das equações (3.35) no sistema de referência global (X, Y, Z) .

Da Figura 3.4, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \cos \beta_{Xx} \mathbf{i} + \cos \beta_{Yx} \mathbf{j} + \cos \beta_{Zx} \mathbf{k} \\ \mathbf{y} &= \cos \beta_{Xy} \mathbf{i} + \cos \beta_{Yy} \mathbf{j} + \cos \beta_{Zy} \mathbf{k} \\ \mathbf{z} &= \cos \beta_{Xz} \mathbf{i} + \cos \beta_{Yz} \mathbf{j} + \cos \beta_{Zz} \mathbf{k} \end{aligned} \quad (3.36)$$

onde, representando de uma maneira geral, θ_{ab} é o angulo entre os eixos a e b .

Adotando a notação:

$$\begin{aligned} \lambda_u &= \cos \beta_{Xx} & \lambda_v &= \cos \beta_{Xy} & \lambda_w &= \cos \beta_{Xz} \\ \mu_u &= \cos \beta_{Yx} & \mu_v &= \cos \beta_{Yy} & \mu_w &= \cos \beta_{Yz} \\ \nu_u &= \cos \beta_{Zx} & \nu_v &= \cos \beta_{Zy} & \nu_w &= \cos \beta_{Zz} \end{aligned} \quad (3.37)$$

tem-se que a matriz de transformação de coordenadas, formada pelos cossenos diretores, corresponde então a:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \lambda_u & \mu_u & \nu_u \\ \lambda_v & \mu_v & \nu_v \\ \lambda_w & \mu_w & \nu_w \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

É importante observar, como devem ser definidos os eixos que descrevem o elemento, de forma a se obter os termos da matriz de transformação de coordenadas \mathbf{T} de maneira correta, posteriormente. O eixo x deve ser sempre considerado do nó 1 para o nó 2. O eixo y deve coincidir com uma direção principal de inércia da seção do elemento. Neste plano xy define-se então um ponto de referencia R (Figura 3.4), o qual, juntamente com as coordenadas dos nós do elemento, descrevem a posição deste no espaço. Este ponto é necessário uma vez que uma rotação em torno do eixo x , no caso de elementos de seção assimétrica, pode alterar as matrizes elementares.

Tendo-se as coordenadas dos nós 1 e 2 no referencial global (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) respectivamente, tem-se que os cossenos diretores do eixo x em relação aos eixos x, y, z globais são definidos por:

$$\lambda_u = \frac{x_1 - x_2}{L_x} \quad \mu_u = \frac{y_1 - y_2}{L_x} \quad \nu_u = \frac{z_1 - z_2}{L_x} \quad (3.39)$$

onde,

$$L_x = [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{1/2} \quad (3.40)$$

Definindo no sistema de referência global as coordenadas do ponto de referencia R como (x_r, y_r, z_r) , pode-se determinar os vetores V_{Ox} e V_{OR} da seguinte forma:

$$\mathbf{v}_{Ox} = \begin{Bmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \\ z_1 - z_2 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{v}_{OR} = \begin{Bmatrix} x_R - x_1 \\ y_R - y_1 \\ z_R - z_1 \end{Bmatrix} \quad (3.41)$$

onde, O indica a origem do referencial elementar, neste caso o nó 1.

Supondo-se que o ponto de referência está no plano xy local, pode-se calcular o vetor V_{Oz} utilizando-se a definição de produto vetorial. Este vetor dará a direção da coordenada z do elemento e é calculado como segue:

$$\mathbf{v}_{Oz} = \mathbf{v}_{Ox} \times \mathbf{V}_{OR} \quad (3.42)$$

Assim, pode-se definir os cossenos diretores dos ângulos formados entre o eixo local z e os globais X, Y, Z , como feito nas equações (3.39) e (3.40).

Finalmente, para determinar os cossenos diretores do eixo y , utiliza-se novamente a definição de produto vetorial, assim:

$$\mathbf{v}_{Oy} = \mathbf{v}_{Oz} \times \mathbf{V}_{Ox} \quad (3.43)$$

Assim, a matriz \mathbf{T}_G que transforma a matriz de rigidez e massa do referencial local para o global é então definida por:

$$\mathbf{T}_G = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{T} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{T} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{T} \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

Com o auxílio da equação (3.35), tendo \mathbf{T}_G definida, obtém-se as matrizes de rigidez e massa descritas no sistema de referência global:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_G &= \mathbf{T}_G^T \mathbf{K} \mathbf{T}_G \\ \mathbf{M}_G &= \mathbf{T}_G^T \mathbf{M} \mathbf{T}_G \end{aligned} \quad (3.45)$$

Este procedimento de transformação e o cálculo das matrizes no referencial global foram implementadas em uma subrotina Fotran90 incorporadas e testada no programa MefLab do Departamento de Mecânica Computacional da Unicamp.

3.2 Modelo do revestimento - Placas e Cascas

Destacam-se na literatura duas teorias clássicas que descrevem a flexão de placas elásticas. A primeira delas é a teoria de placa fina, geralmente atribuída a Kirchhoff (Szilard, 1974), que descreve o comportamento de placas elásticas e homogêneas, inicialmente planas, com espessura pequena quando comparada com outras dimensões. Na teoria clássica de Kirchhoff considera-se que as linhas retas, inicialmente normais à superfície mediana, permanecem retas e normais à superfície mediana. As deformações devido ao cisalhamento são desprezadas. A análise de tensão de uma placa elástica é bem simplificada devido a esta hipótese e a imprecisão desta teoria é mais pronunciada nas regiões próximas às bordas e em volta de furos cujos diâmetros são grandes comparados à espessura da placa.

A formulação de uma nova teoria que acomodasse o efeito da deformação de cisalhamento veio em 1947 com Reissner (Reissner, 1945; Reissner, 1947) e com pequenas modificações por Mindlin (Mindlin, 1951). Esta teoria é conhecida na literatura como a teoria de placa espessa, ou teoria de Reissner-Mindlin. Este modelo estende significativamente o campo de aplicação das teorias de placas e é amplamente utilizada atualmente. A seguir serão revistas as equações básicas da teoria de Reissner-Mindlin com o objetivo de estabelecer uma nomenclatura consistente e fundamentar as discussões na formulação por elementos finitos.

3.2.1 Modelo de placa de Reissner-Mindlin

A placa retangular de espessura h e lados a e b mostrada na Figura 3.5 é referida para um sistema de coordenadas cartesianas (x, y, z) . As forças externas e internas e os componentes da deflexão são considerados positivos na direção positiva dos eixos x, y . As superfícies da placa não estão sujeitas a tensão tangencial ou cisalhamento, mas estão submetidas a pressões normais q_1 e q_2 . Desta forma tem-se, (Bathe, 1982):

$$\begin{aligned}\tau_{xz}|_{z=\pm h/2} &= \tau_{yz}|_{z=\pm h/2} = 0 \\ \sigma_z|_{z=h/2} &= -q_1(x, y, t); \quad \sigma_z|_{z=-h/2} = -q_2(x, y, t)\end{aligned}\tag{3.46}$$

onde, $q_1 - q_2 = p_z$ é o carregamento distribuído externo aplicado e $\sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}$ são componentes do tensor de Cauchy.

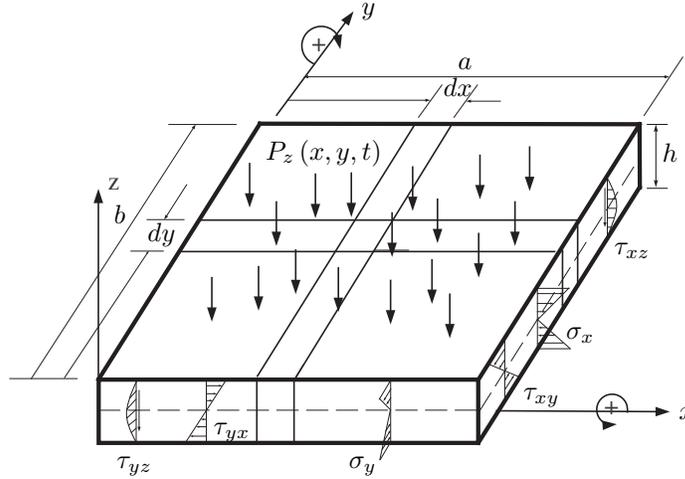


Figura 3.5: Carregamentos laterais e componentes das tensões da placa

A placa pode estar sujeita a esforços externos de flexão, torção e de cisalhamento transversal. Estes podem ser definidos por unidade de comprimento da forma:

$$\begin{aligned} (m_x, m_y, m_{yx}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{yx}) z dz \\ (q_x, q_y) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz \end{aligned} \tag{3.47}$$

onde m_x, m_y e m_{yx} são os esforços internos de flexão e torção, q_x e q_y são os esforços cortantes distribuídos internos e σ_x, σ_y e τ_{xy} são componentes do tensor de tensões de Cauchy.

Definidos os esforços internos e externos atuantes na placa, pode-se estabelecer a relação constitutiva do material.

Relação tensão-deformação (Relação constitutiva)

Considerando a lei de Hooke generalizada, definida na teoria da elasticidade, os seis componentes das tensões podem ser expressas em termos das seis componentes de deformação. Para

o caso da placa, a deformação específica normal na direção z (ϵ_z) é ignorada, sobrando cinco equações para resolver as componentes do tensor de tensões $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{yx}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ em termos de $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{yx}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$, que são os componentes do tensor de deformações.

Substituindo as cinco equações da lei de Hooke nas equações (3.47), e integrando, tem-se:

$$\begin{aligned} m_x &= D(\Gamma_x + \nu\Gamma_y) & ; m_y &= D(\Gamma_y + \nu\Gamma_x) & ; m_{yx} &= \frac{(1-\nu)D}{2}\Gamma_{yx} \\ q_x &= kGh\Gamma_{xz} & ; q_y &= kGh\Gamma_{yz} \end{aligned} \quad (3.48)$$

onde, ν é o coeficiente de Poisson, E é o módulo transversal de elasticidade, h a espessura da placa e k é a constante de cisalhamento. A constante D é a rigidez à flexão é dada por:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (3.49)$$

Os termos Γ_i das equações (3.48), são definidos da seguinte forma (Camargo, 2004):

$$\begin{aligned} (\Gamma_x, \Gamma_y, \Gamma_{yx}) &= \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} (\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{yx})z dz \\ (\Gamma_{xz}, \Gamma_{yz}) &= \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} (\gamma_{xz}, \gamma_{yz}) dz \end{aligned} \quad (3.50)$$

O coeficiente de cisalhamento k na equação (3.48), é o um fator de correção devido à hipóteses adotadas nesta teoria de que o termo Γ_{iz} é constante ao longo da espessura. Esta hipótese cinemática equivale a da teoria de viga de Timoshenko (Timoshenko et al., 1974). Como na verdade a deformação de cisalhamento varia ao longo da secção, Γ_{iz} é uma constante equivalente de deformação correspondente a uma área efetiva A_s , assim a tensão de cisalhamento transversal é definida como:

$$\tau = \frac{V}{A_s} \quad (3.51)$$

onde, $A_s = \frac{A}{k}$ e V é o carregamento transversal. Para o caso de placas planas com seção transversal retangular $k = 6/5$ (Timoshenko and Gere, 1990).

Relação deformação-deslocamento (Modelo cinemático)

Para obter as relações entre as deformações e o campo de deslocamentos da placa, usa-se o modelo cinemático clássico da teoria de elasticidade (tensor de deformações de Green Lagrange), aplicado nas equações (3.50). Desta forma tem-se:

$$\begin{aligned} (\Gamma_x, \Gamma_y, \Gamma_{yx}) &= \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{yx}) z dz = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) z dz \\ (\Gamma_{xz}, \Gamma_{yz}) &= \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} (\gamma_{xz}, \gamma_{yz}) dz = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) dz \end{aligned} \quad (3.52)$$

Uma das hipóteses da teoria de Reissner-Mindlin é que as partículas da placa que originalmente estavam em uma linha reta, que era normal à superfície mediana não deformada, permanecem em uma linha reta durante a deformação, mas esta linha não é necessariamente normal à superfície mediana deformada, como definido para a formulação de viga de Timoshenko na seção (3.1) (Timoshenko et al., 1974). Com esta hipótese, os componentes dos deslocamentos de um ponto de coordenadas x, y, z , para pequenos deslocamentos u, v, w e seguindo a convenção de sinais da Figura 3.5, são:

$$u = z\theta_y(x, y, t); \quad v = -z\theta_x(x, y, t); \quad w = w(x, y, t) \quad (3.53)$$

onde, θ_x e θ_y são os deslocamentos angulares da superfície neutra.

Substituindo as equações (3.53) nas equações (3.52), tem-se a relação das componentes de deformação-deslocamento:

$$\begin{aligned} (\Gamma_x, \Gamma_y, \Gamma_{yx}) &= \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x}, -\frac{\partial \theta_x}{\partial y}, -\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) \\ (\Gamma_{xz}, \Gamma_{yz}) &= \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y, \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x \right) \end{aligned} \quad (3.54)$$

Assume-se que as deformações devido a flexão variam linearmente ao longo da espessura da placa (Bathe, 1982) e são dadas pelas curvaturas da placa definidos em (3.54), o que permite escrever:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ -\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

As deformações devido a esforços de cisalhamento são assumidas constantes ao longo da espessura da placa, na forma:

$$\begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \\ \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

Assim, o estado de tensão da placa corresponde ao caso de estado plano de tensão com $\sigma_z = 0$. Para um material isotrópico tem-se:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = z \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ -\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

$$\begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \\ \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \end{bmatrix}$$

Substituindo os termos na equação (3.48), tem-se os momentos fletores e esforços de cisalhamento da placa, na forma:

$$m_x = D \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} - \nu \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right); \quad m_y = D \left(-\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \nu \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)$$

$$m_{yx} = \frac{(1-\nu)D}{2} \left(-\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) \quad (3.58)$$

$$q_x = kGh \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \right); \quad q_y = kGh \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \right)$$

Assim, através do modelo cinemático, foi possível estabelecer as relações entre momento e curvatura.

Relações de equilíbrio dinâmico

A Figura 3.6, mostra as componentes das forças internas, por unidade de comprimento, de um elemento diferencial de placa, assumindo que a placa esteja sujeita somente a forças p_z . Podem ser usadas as seguintes equações de equilíbrio dinâmico:

$$\sum M_x = I_{rx} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2}; \quad \sum M_y = I_{ry} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2}; \quad \sum F_z = m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.59)$$

onde I_{rx} e I_{ry} são os momentos de inércia de rotação definidos por $\int z^2 dm$ nos planos xz e yz da placa respectivamente. Para uma placa plana $I_{rx} = I_{ry} = \frac{\rho h^3}{12} dx dy$ e $m = \rho h dx dy$ é a massa da placa.

Resolvendo as equações de equilíbrio (3.59), tem-se:

$$\begin{aligned} \sum M_x &= I_{rx} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} \\ &= -\frac{\partial m_y}{\partial y} - \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} - q_y = \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} \\ \sum M_y &= I_{ry} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \\ &= -\frac{\partial m_x}{\partial x} - \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} - q_y = \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \\ \sum F_z &= m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ &= -\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} - p_z = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3.60)$$

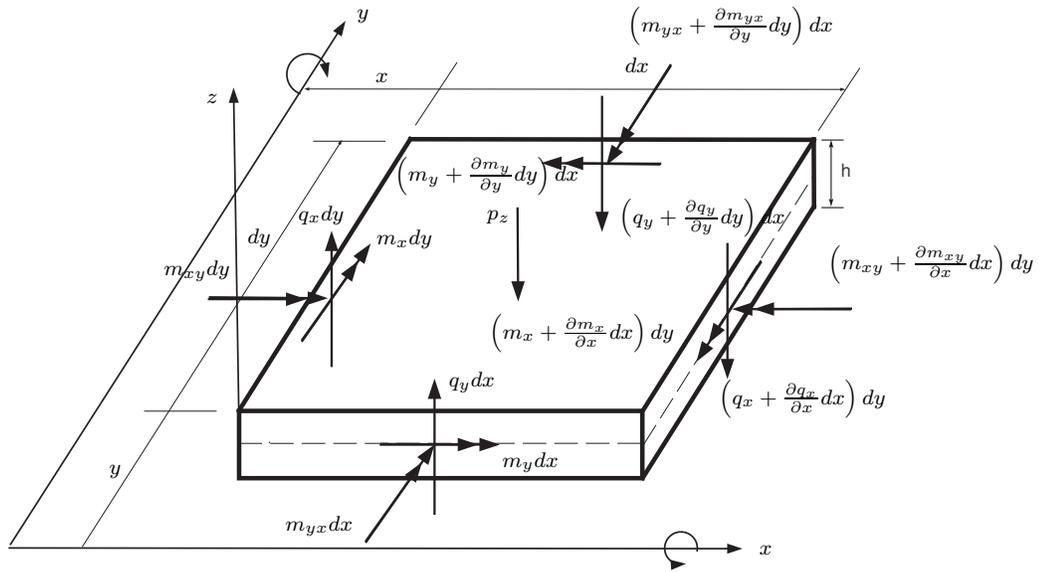


Figura 3.6: Forças internas por unidade de comprimento de um elemento diferencial da placa

Substituindo as equações (3.58) nas equações (3.60), tem-se as equações de movimento em função dos deslocamentos (w, θ_x, θ_y) , definidas por:

$$\begin{aligned} \frac{D}{2} \left[(1 - \nu) \nabla^2 \theta_y + (1 + \nu) \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] - kGh \left(\theta_y + \frac{\partial w}{\partial x} \right) &= \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} \\ \frac{D}{2} \left[(1 - \nu) \nabla^2 \theta_x + (1 + \nu) \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right] - kGh \left(\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) &= \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$kGh (\nabla^2 w + \Phi) + p_z = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$\text{onde, } \Phi = \frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \frac{\partial \theta_x}{\partial y}$$

As equações (3.61) representam o comportamento dinâmico das placas espessas, e seram usadas para a modelagem do elemento de placa escolhido.

Foram definidos neste item, elementos básicos do modelo mecânico; tensões, deformações, deslocamentos, forças e momentos mas as relações correspondentes. Estas premissas serão utilizadas em uma formulação baseada em energia para a dedução dos elementos finitos de placa.

3.2.2 Formulação por Elementos Finitos

Para a solução das equações diferenciais (3.61), uma forma integral representativa do problema de flexão de placa espessa pode ser obtida usando-se o método dos Resíduos Ponderados. De forma alternativa e equivalente, o Princípio dos Trabalhos Virtuais (Craig, 1981), pode ser usado para derivar as equações do problema discretizado por elementos finitos. Considerando-se o equilíbrio de um corpo genérico tridimensional suportado pela área S_u , que impõe os deslocamentos prescritos \mathbf{u}^{Su} e é sujeito a forças \mathbf{f}^{Sf} (força por unidade de área) na área de superfície S_f , como mostrado na Figura 3.7, onde \mathbf{u} é o vetor dos deslocamentos e \mathbf{f} é o vetor de forças. Além disso, o corpo é sujeito a forças de volume \mathbf{f}^B aplicadas externamente e forças concentradas \mathbf{r}_c^i (i denota o ponto de aplicação da carga), definidas na equação abaixo:

$$\mathbf{f}^B = \begin{Bmatrix} f_x^B \\ f_y^B \\ f_z^B \end{Bmatrix} \quad \mathbf{f}^{Sf} = \begin{Bmatrix} f_x^{Sf} \\ f_y^{Sf} \\ f_z^{Sf} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{r}_c^i = \begin{Bmatrix} r_{cx}^i \\ r_{cy}^i \\ r_{cz}^i \end{Bmatrix} \quad (3.62)$$

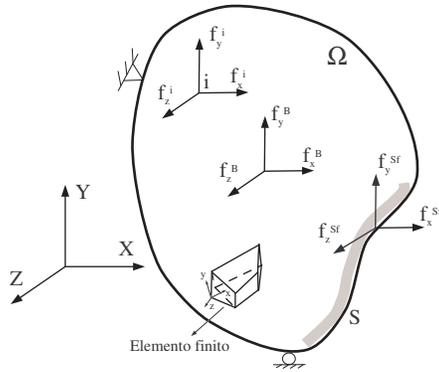


Figura 3.7: Corpo genérico tridimensional.

O Princípio dos Trabalhos Virtuais estabelece que para qualquer deslocamento virtual $\bar{\mathbf{u}}$ de um sistema dinâmico, a soma dos trabalhos virtuais das forças reais W_{FR} e as forças inerciais W_{FI} deve ser igual a zero (Craig, 1981), isto é:

$$\partial W_{FR} + \partial W_{FI} = \partial W_{EXT} + \partial W_{NC} - \partial V + \partial W_{FI} = 0 \quad (3.63)$$

onde, W_{EXT} é o trabalho das forças externas ($\mathbf{f}^{Sf}, \mathbf{f}^B, \mathbf{r}^i$), ∂V é a variação de energia potencial do sistema, W_{NC} é o trabalho das forças não conservativas.

Escrevendo na forma integral a equação (3.63), para o corpo genérico da figura 3.7, tem-se:

$$\int_V \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{f}^B dV + \int_S \overline{(\mathbf{u}^{Sf})^T} \mathbf{f}^{Sf} dS + \sum_i \overline{(\mathbf{u}^i)^T} \mathbf{r}_c^i - \int_V \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \boldsymbol{\sigma} dV + \int_V \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{I} \ddot{\mathbf{u}} dV = 0 \quad (3.64)$$

onde, $\bar{\mathbf{u}}$ é o vetor dos deslocamentos virtuais e $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ é o vetor contendo as variações virtuais dos componentes do tensor das deformações, $\boldsymbol{\sigma}$ é o vetor com as componentes do tensor de tensões e \mathbf{I} é a matriz inercial do sistema.

Na análise de elementos finitos aproxima-se um corpo como um conjunto de elementos finitos interconectados em pontos nodais nas superfícies de cada elemento. Assim a equação (3.64), reescreve-se como a soma das integrais dos volumes e áreas de todos os elementos finitos (e) :

$$\begin{aligned} \sum_e \int_V \overline{(\mathbf{u}^e)^T} \mathbf{f}^{Be} dV^e + \sum_e \int_S \overline{(\mathbf{u}^{Sf e})^T} \mathbf{f}^{Sf e} dS^e + \sum_i \overline{(\mathbf{u}^i)^T} \mathbf{r}_c^i - \sum_e \int_V (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^e)^T \boldsymbol{\sigma}^e dV^e \\ + \sum_e \int_V (\mathbf{u}^e)^T \mathbf{I}^e \ddot{\mathbf{u}} dV^e = 0 \end{aligned} \quad (3.65)$$

Os deslocamentos (u, v, w) medidos em um sistema de coordenadas locais (x, y, z) definido ao nível de elementar são assumidos ser uma função dos deslocamentos nodais dos elementos finitos. Assim, para cada elemento e tem-se:

$$\tilde{\mathbf{u}}^e = \mathbf{N}^e \mathbf{u} \quad (3.66)$$

onde, \mathbf{N}^e é a matriz das funções de interpolação de um elemento e e \mathbf{u} é o vetor de deslocamentos nodais u_i, v_i, w_i dos nós de cada elemento.

Com a hipótese de que os deslocamentos são aproximados conforme a equação (3.66), podem-se avaliar as deformações correspondentes como se segue:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{B}^e \mathbf{u} \quad (3.67)$$

onde, \mathbf{B}^e é a matriz de deslocamentos-deformação, obtida após a derivação e combinação das linhas da matriz \mathbf{N}^e , baseando-se no modelo cinemático específico adotado no item anterior.

Desprezando as tensões iniciais, as tensões no elemento finito são relacionadas com as deformações conforme a seguinte expressão:

$$\sigma^e = \mathbf{D}^e \varepsilon^e \quad (3.68)$$

onde, \mathbf{D}^e é a matriz constitutiva do elemento.

Substituindo as equações (3.66), (3.67), (3.68) na equação (3.65), tem-se:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}^T \left\{ \left[\sum_e \int_V (\mathbf{B}^e)^T \mathbf{D}^e \mathbf{B}^e dV^e \right] \mathbf{u} + \left[\sum_e \int_V (\mathbf{N}^e)^T \mathbf{I}^e \mathbf{N}^e dV^e \right] \ddot{\mathbf{u}} \right\} = \\ \bar{\mathbf{u}}^T \left[\sum_e \int_V (\mathbf{N}^e)^T \mathbf{f}^{Be} dV^e + \sum_e \int_{S_1^e, \dots, S_q^e} (\mathbf{N}^{Sfe})^T \mathbf{f}^{Sfe} dS^e + \mathbf{r}_c \right] \end{aligned} \quad (3.69)$$

onde, as matrizes de interpolação dos deslocamentos de superfície \mathbf{N}^{Sfe} são obtidas das matrizes de interpolação dos deslocamentos \mathbf{N}^e , através da substituição apropriada das coordenadas do elemento da superfície. Este termo permite calcular o campo de forças no elemento que é equivalente ao carregamento externo \mathbf{f}^{sf} . No termo de inércia \mathbf{I}^e indica a matriz com os coeficientes representativos da massa e da inércia de inclinação.

A partir da equação (3.69) podem-se eliminar o termo $(\bar{\mathbf{u}}^T)$ de ambos os lados, e escrever a equação discretizada da seguinte maneira:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{r} \quad (3.70)$$

onde, \mathbf{M} é a matriz de massa global, igual a:

$$\mathbf{M} = \sum_e \int_V (\mathbf{N}^e)^T \mathbf{I}^e \mathbf{N}^e dV^e \quad (3.71)$$

\mathbf{K} é a matriz de rigidez global, igual a:

$$\mathbf{K} = \sum_e \int_V (\mathbf{B}^e)^T \mathbf{D} \mathbf{B}^e dV^e \quad (3.72)$$

e \mathbf{r} é o vetor de carregamento que inclui as forças de corpo do elemento, forças de superfície e forças pontuais. Nota-se que a soma das integrais de volume dos elementos em (3.72 e 3.71), expressa a montagem direta das matrizes de rigidez (\mathbf{K}) e massa (\mathbf{M}) dos elementos \mathbf{K}^e e \mathbf{M}^e para obter as matrizes de rigidez e massa totais do conjunto de elementos, ou a matriz global. Do mesmo jeito, o vetor de força é calculado diretamente, montando-se os vetores de força de corpo de cada elemento. Esta montagem segue a teoria clássica do método dos deslocamentos Bathe, 1982 .

3.2.3 Elemento de placa de MacNeal

O elemento proposto para o desenvolvimento do método de elementos finitos na solução das equações (3.61), é o elemento quadrilátero de 4 nós de placa de MacNeal MacNeal, 1982. A motivação da escolha deste elemento apresenta-se a seguir:

- Por ser um elemento muito utilizado em aplicações práticas, pois suas funções de forma são de baixa ordem, bi-linear para os deslocamentos e linear para as deformações, representa menor custo computacional.
- Utiliza a teoria de Reissner-Mindlin apresentada anteriormente o que proporciona resultados mais confiáveis quando comparado com a teoria de Kirchhoff.
- Apresenta boa performance comparada com os demais elementos desta categoria (Bathe, Belytschko, Hugues) Camargo, 2004.
- Não apresenta problemas de travamento por cisalhamento e modos espúrios de energia nula, em todas as diferentes condições de contorno, espessura e distorção geométrica e atende aos requisitos de compatibilidade Camargo, 2004.

O elemento de 4 nós de placa de MacNeal apresenta três graus de liberdade, sendo eles o deslocamento transversal w e as rotações θ_x e θ_y . Formando um total de 12 graus de liberdade. Por se tratar de elemento de placa, os 4 nós do elemento devem se situar no mesmo plano e podendo assumir qualquer tipo de formato geométrico desde que esta condição seja cumprida. Isto é a distorção no plano é admitida.

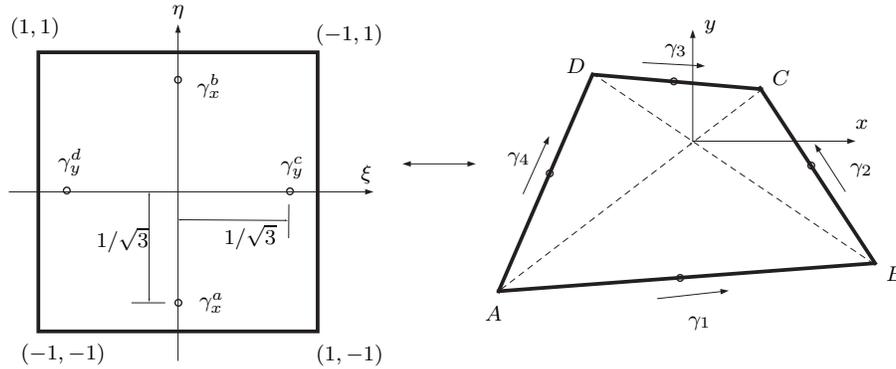


Figura 3.8: Elemento de 4 nós de placa de MacNeal nas coordenadas isoparamétricas e reais

Considerando um elemento de placa de Reissner-Mindlin da Figura 3.8, e sendo p_z o carregamento transversal por unidade de área, a expressão para o princípio dos deslocamentos virtuais da equação (3.69) é:

$$\begin{aligned}
 & \int_A \int_{-h/2}^{h/2} [\bar{\epsilon}_x \quad \bar{\epsilon}_y \quad \bar{\gamma}_{xy}] \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz dA + \int_A \int_{-h/2}^{h/2} [\bar{\gamma}_{xz} \quad \bar{\gamma}_{yz}] \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} dz dA \\
 & + \int_A \int_{-h/2}^{h/2} [\bar{w} \quad \bar{\theta}_x \quad \bar{\theta}_y] \begin{bmatrix} \rho h & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho h^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho h^3}{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{w} \\ \ddot{\theta}_x \\ \ddot{\theta}_y \end{bmatrix} dz dA \\
 & = \int_A [\bar{w} \quad \bar{\theta}_x \quad \bar{\theta}_y] p_z dA
 \end{aligned} \tag{3.73}$$

Substituindo as equações (3.55), (3.56), (3.57), na equação (3.73), tem-se,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + [\mathbf{K}_b + \mathbf{K}_s] \mathbf{u} = \mathbf{r} \tag{3.74}$$

onde,

$$\mathbf{M} = \int_A \mathbf{N}^T \mathbf{I} \mathbf{N} dA \quad (3.75)$$

$$\mathbf{K}_b = \int_A \mathbf{B}_b^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b dA \quad (3.76)$$

$$\mathbf{K}_s = \int_A \mathbf{B}_s^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}_s dA$$

O termo \mathbf{K}_b da equação (3.76), refere-se ao efeito da flexão da matriz de rigidez, onde \mathbf{B}_b é a matriz de deslocamento-deformação devido à flexão, obtida a partir de:

$$\epsilon_b = \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ -\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

sendo,

$$\epsilon_b = \mathbf{B}_b \mathbf{u} \quad (3.78)$$

A interpolação de variáveis (coordenadas e deslocamentos) é feita através da formulação isoparamétrica Cook et al., 1989, tendo no elemento de referência, as coordenadas ξ, η , correspondentes as coordenadas reais x, y do plano da placa, como mostra à Figura 3.8.

Assim, as coordenadas x, y , são interpoladas como função das coordenadas isoparamétricas da forma:

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta) &= \mathbf{N} \mathbf{x} \\ y(\xi, \eta) &= \mathbf{N} \mathbf{y} \end{aligned} \quad (3.79)$$

onde, $\mathbf{x} = \{ x_i \ x_j \ x_k \ x_l \}^T$ e $\mathbf{y} = \{ y_i \ y_j \ y_k \ y_l \}^T$ são os vetores com as coordenadas nodais dos nós no plano da placa, isto é para o referencial local.

Da mesma maneira as rotações θ_x e θ_y são interpoladas na forma da equação (3.66), como segue:

$$\theta_x(\xi, \eta) = \mathbf{N}\theta_x \quad (3.80)$$

onde,

$$\mathbf{N} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] = \left[\frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} \quad \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} \quad \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} \quad \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} \right] \quad (3.81)$$

Derivando as equações (3.80), com relação a x e y , tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \theta_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_i}{\partial y} \end{array} \right\} = \mathbf{J}^{-1} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \theta_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \theta_i}{\partial \eta} \end{array} \right\} \quad (3.82)$$

onde \mathbf{J} é o jacobiano do elemento:

Usando as equações (3.78) até (3.82), O termo \mathbf{K}_b da equação (3.76), pode ser calculado em função das coordenadas isoparamétricas da forma:

$$\mathbf{K}_b = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_b(\xi, \eta)^T \mathbf{C}_b \mathbf{B}_b(\xi, \eta) \det \mathbf{J} \, d\eta d\xi \quad (3.83)$$

O termo \mathbf{K}_s da equação (3.76), refere-se ao efeito de cisalhamento da matriz de rigidez, onde \mathbf{B}_s é a matriz de deslocamento-deformação devido ao cisalhamento. Para calcular esta matriz, MacNeal utiliza um novo método para interpolar as deformações transversais, usando o método de deformação assumida ("Assumed Strain Method") MacNeal, 1982. Nesta formulação as deformações por cisalhamento variam linearmente da forma:

$$\left\{ \begin{array}{c} \gamma_x \\ \gamma_y \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccc} 1 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array} \right\} \quad (3.84)$$

onde, e_i , são os coeficientes na equação de interpolação. A Figura 3.8 mostra a localização das componentes das deformações, γ_k , onde $k = 1, 2, 3, 4$ e indica a maneira na qual os eixos x, y da equação (3.84) são escolhidos. Assim a equação (3.84), pode-se reescrever como:

$$\begin{Bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 1 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{Bmatrix} = \mathbf{Ae} \quad (3.85)$$

Fazendo uso da equação (3.85) e a rotação de coordenadas devido à inclinação dos lados do elemento em relação aos eixos de referência local x, y , o vetor de deformações, também pode ser definido por:

$$\begin{Bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \delta_1 & y_1 \cos \delta_1 & -\text{sen} \delta_1 & -x_1 \text{sen} \delta_1 \\ -\cos \delta_2 & -y_2 \cos \delta_2 & \text{sen} \delta_2 & x_2 \text{sen} \delta_2 \\ \cos \delta_3 & y_3 \cos \delta_3 & -\text{sen} \delta_3 & -x_3 \text{sen} \delta_3 \\ -\cos \delta_4 & -y_4 \cos \delta_4 & \text{sen} \delta_4 & x_4 \text{sen} \delta_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{Bmatrix} = \mathbf{Be} \quad (3.86)$$

onde, δ_i são os ângulos entre o eixo x e os lados AB, BC, CD, DA do elemento respectivamente.

Os componentes das deformações por cisalhamento podem ser relacionados aos deslocamentos e rotações dos nós do elemento através da equação (3.56). Assim, por exemplo, para o lado AB da Figura 3.8, θ_y varia linearmente ao longo deste lado de comprimento l_1 , e pode ser calculado como a média das rotações nodais θ_A e θ_B . Dessa forma a deformação γ_1 pode ser calculada usando a seguinte expressão:

$$\gamma_1 = \frac{\omega_B - \omega_A}{l_1} + \frac{\theta_A + \theta_B}{2} \quad (3.87)$$

Nota-se que as rotações θ_A e θ_B são quantidades vetoriais e devem ser escritas em função das suas componentes referentes aos eixos x, y . Fazendo-se o mesmo procedimento anterior pode-se obter as deformações γ_2, γ_3 e γ_4 dos demais lados do elemento, escrevendo matricialmente, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{Bmatrix} = \mathbf{C}\hat{\mathbf{u}} \quad (3.88)$$

onde,

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} \quad \text{com } i = 1, 2, 3, 4 \quad (3.89)$$

Fazendo uso das equações (3.85),(3.86),(3.88), a matriz de deslocamento-deformação devida ao cisalhamento \mathbf{B}_s é dada por:

$$\mathbf{B}_s = \mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{u} \quad (3.90)$$

e finalmente a matriz de rigidez por cisalhamento é dada por (MacNeal, 1978):

$$\mathbf{K}_s = \mathbf{B}_s^T (\mathbf{Z}_s + \mathbf{Z}_b)^{-1} \mathbf{B}_s \quad (3.91)$$

onde, \mathbf{Z}_s é a matriz de flexibilidade devida ao cisalhamento e \mathbf{Z}_b é a matriz de flexibilidade residual devida à flexão. A matriz \mathbf{Z}_s é calculada como segue:

$$\mathbf{Z}_s = \mathbf{V}_s^{-1} \mathbf{G}_s^{-1} \mathbf{V}_s^{-1} \quad (3.92)$$

onde, \mathbf{V}_s é uma matriz que contém os efeitos de volume dada por:

$$\mathbf{V}_s = \begin{bmatrix} \sqrt{2J_a h_a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2J_b h_b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2J_c h_c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2J_d h_d} \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

Na equação (3.93), J_i é o determinante do jacobiano avaliado no ponto $i = a, b, c, d$ como mostra a Figura 3.8, h_i é a espessura da placa nos nós. A matriz \mathbf{G}_s para materiais isotrópicos, é igual a:

$$\mathbf{G}_s = \begin{bmatrix} G_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_s \end{bmatrix} \rightarrow G_s = \frac{Ehk}{2(1+\nu)} \quad (3.94)$$

A ordem dos termos nas matrizes anteriores é consistente com o arranjo dos pontos de integração da Figura 3.8, e admite um modelo de placa com espessura variável.

A matriz de flexibilidade residual de flexão, para materiais isotrópicos, é dada por:

$$\mathbf{Z}_b = \frac{1}{12AE_{11}I_0} \begin{bmatrix} (1+a)\Delta x^2 & (1-a)\Delta x^2 & 0 & 0 \\ (1-a)\Delta x^2 & (1+a)\Delta x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1+b)\Delta y^2 & (1-b)\Delta y^2 \\ 0 & 0 & (1-b)\Delta y^2 & (1+b)\Delta y^2 \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

onde, $A = \Delta_x \Delta_y$ é a área da superfície do elemento, $I_0 = h^3/12$ é o momento de inércia de flexão por unidade de largura; $\Delta_x = 0.5(x_2 + x_3 - x_1 - x_4)$, $\Delta_y = 0.5(y_3 + y_4 - y_1 - y_2)$ e E_{11} é o termo da diagonal na matriz de elasticidade definido na equação (3.57). Os coeficientes a e b foram obtidos através de experimentação numérica (MacNeal, 1978):

$$a = \frac{\epsilon}{\epsilon + (1-\epsilon)\frac{\Delta x^2}{\Delta y^2}}, \quad b = \frac{\epsilon}{\epsilon + (1-\epsilon)\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}} \quad (3.96)$$

Sendo $\epsilon = 0.04$ um parâmetro livre.

A matriz de massa \mathbf{M} definida na equação (3.75), pode ser calculada em função das coordenadas isoparamétricas da forma:

$$\mathbf{M} = \int_{\eta} \int_{\xi} \mathbf{N}(\xi, \eta)^T I \mathbf{N}(\xi, \eta) \det(\mathbf{J}) d\eta d\xi \quad (3.97)$$

Agrupando as linhas da matriz das funções de formas de acordo com a disposição dos graus de liberdade no vetor \mathbf{u} , a equação (3.97) pode ter o seguinte arranjo:

$$\mathbf{M} = \int_{\eta} \int_{\xi} \mathbf{N}^T \begin{bmatrix} \rho h & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho h^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho h^3}{12} \end{bmatrix} \mathbf{N} \det \mathbf{J} d\eta d\xi \quad (3.98)$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}^T = \{ w_1 \theta_{x1} \theta_{y1} w_2 \theta_{x2} \theta_{y2} w_3 \theta_{x3} \theta_{y3} w_4 \theta_{x4} \theta_{y4} \}$$

Desta forma foi possível acrescentar ao modelo implementado por Camargo, 2004, na linguagem de programação C++, o efeito dinâmico da placa e reestruturar a implementação com base na linguagem Fortran90. Esta foi uma das contribuições deste programa de mestrado, para o grupo do Departamento de Mecânica Computacional da Unicamp.

3.2.4 Cascas como montagem de elementos planos

Uma casca é uma estrutura que pode ser derivada de uma placa formada por um plano médio curvo. A tensão resultante, paralela ao plano médio da placa/casca, tem agora componente normal à superfície, a qual suporta a maior parte da carga. Uma estrutura de casca suporta carregamento em todas as direções, momentos fletores e momentos torsões. Derivar em detalhes as equações de governo de um a casca curva e aplicar o método usual, em elementos finitos, definindo as funções de forma e substituindo dentro da equação constitutiva, apresenta muitas dificuldades. Por esta causa existem variadas alternativas para a formulação deste tipo de estruturas (Zienkiewicz and Taylor, 1986).

As estruturas de casca, montadas a partir de elementos planos, têm sido muito usadas para a modelagem por elementos finitos de fuselagem de aeronaves (Liu and Quek, 2003). Um procedimento bastante adotado, para superposição de placas, será apresentado neste trabalho para um elemento de casca quadrilátero de quatro nós. O procedimento consiste em dividir a estrutura de casca (curva) em diferentes elementos retos, superpondo os efeitos de membrana (tensão plana) com a flexão de placas. A curvatura da casca será feita mudando a orientação dos elementos no espaço, conseqüentemente se a curvatura da estrutura for muito grande será necessária uma quantidade maior de elementos.

A Figura 3.9, mostra os efeitos de tensão plana e efeitos de flexão que atuam simultaneamente no elemento de casca nas coordenadas locais x, y, z .

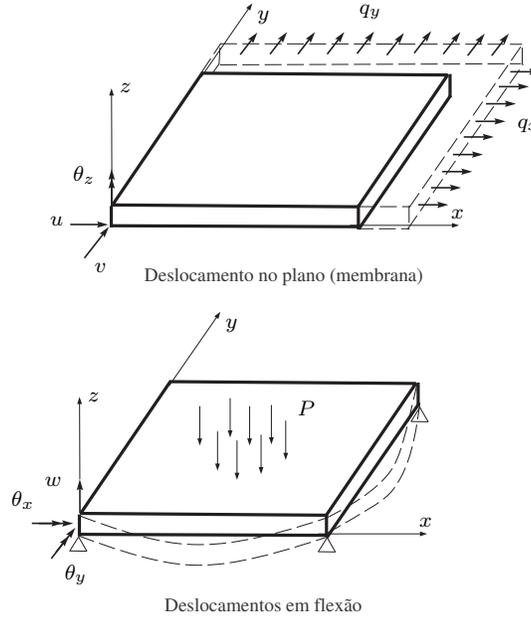


Figura 3.9: Elemento de casca sujeito a deslocamentos de membrana e flexão

O primeiro elemento mostrado na Figura 3.9, possui comportamento de membrana, já que só suporta carregamento no plano x, y . Assim o comportamento dinâmico é descrito em termos dos deslocamentos u e v em cada um dos nós do elemento, da forma:

$$\mathbf{M}^m \ddot{\mathbf{u}}^m + \mathbf{K}^m \mathbf{u}^m = \mathbf{f}^m \quad (3.99)$$

com,

$$\mathbf{u}_i^m = \left\{ \begin{array}{c} u_i \\ v_i \end{array} \right\} \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (3.100)$$

Para que este elemento possa ter a forma de um quadrilátero arbitraria, é necessário transformar as coordenadas x, y em coordenadas isoparametricas planas ξ, η . Para um elemento de quatro nós, estes eixos passam através do ponto médio dos lados opostos e devem ser ortogonais e não paralelos aos eixos x, y . Assim os lados do elemento estão em $\xi = \pm 1$ e $\eta = \pm 1$. Desta forma as coordenadas x e y são interpoladas por:

$$\begin{aligned}
x &= \sum N_i x_i \\
y &= \sum N_i y_i
\end{aligned} \tag{3.101}$$

onde,

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta) & N_2 &= \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta) \\
N_3 &= \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 + \eta) & N_4 &= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 + \eta)
\end{aligned} \tag{3.102}$$

Os deslocamentos u e v também podem ser interpolados usando as funções de formas N_i da equação (3.102), da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
u &= \mathbf{N} \mathbf{u} \\
v &= \mathbf{N} \mathbf{v}
\end{aligned} \tag{3.103}$$

As matrizes de rigidez e massa para este tipo de elemento, representadas na equação (3.99), serão calculadas usando as funções de forma da equação (3.102) (N_i) e as derivadas destas com relação as coordenadas isoparametricas ξ, η , assim:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}^m &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 t \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta \\
\mathbf{M}^m &= \rho \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 t \mathbf{N}^T \mathbf{N} \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{3.104}$$

onde,

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &= \mathbf{J}^{-1} \mathbf{D}_v \\
\mathbf{J} &= \begin{bmatrix} \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, 3, 4 \\
\mathbf{D}_v &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.105}$$

\mathbf{J} é chamada de matriz Jacobiana, \mathbf{D} é a matriz constitutiva que é função das propriedades do material, no estado plano de tensão para materiais isotrópicos Cook et al., 1989, \mathbf{D}_v é a matriz das derivadas das funções de forma no referencial local, h é a espessura do elemento.

Quando a flexão de placas é considerada, é avaliado o campo de deslocamentos w , θ_x e θ_y . O comportamento dos elementos de placa foi descrito na seção (3.2) e é dado por:

$$\mathbf{M}^p \ddot{\mathbf{u}}^p + \mathbf{K}^p \mathbf{u}^p = \mathbf{f}^p \quad (3.106)$$

com,

$$\mathbf{u}_i^p = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} \quad (3.107)$$

As letras m e p significam, matrizes ou vetores do elemento de membrana e placa respectivamente.

Combinando as duas equações, pode-se obter as equações de movimento para cada elemento de casca, da forma:

$$\mathbf{M}^c \ddot{\mathbf{u}}^c + \mathbf{K}^c \mathbf{u}^c = \mathbf{f}^c \quad (3.108)$$

onde,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^c &= \begin{bmatrix} \mathbf{M}^m & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}^p & 0 \\ 0 & 0 & m\mathbf{I} \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}^c &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}^m & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}^p & 0 \\ 0 & 0 & k\mathbf{I} \end{bmatrix} \\ \mathbf{u}_i^c &= \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ \theta_{zi} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.109)$$

Na equação (3.109), são incluídas as rotações do plano do elemento θ_z através dos termos m e k . Estes coeficientes são definidos como a milésima parte do menor valor do elemento da diagonal das matrizes de massa e rigidez respectivamente Bathe, 1982. Este valor é obtido por experimentação numérica e conduz a boas aproximações (Zienkiewicz and Taylor, 1986 e Bathe, 1982).

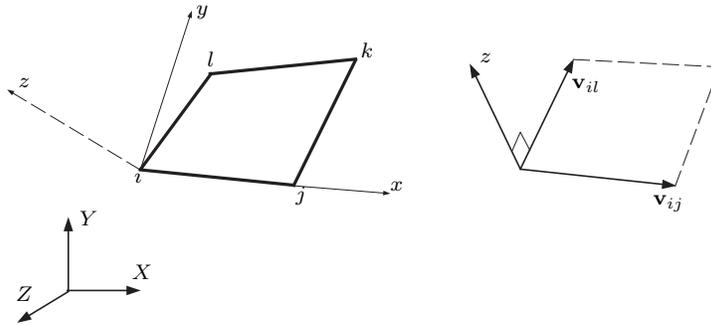


Figura 3.10: Elemento de casca nas coordenadas globais

As matrizes derivadas anteriormente usam um sistema de coordenadas locais x, y, z . Será necessário transformar as coordenadas locais nas coordenadas globais X, Y, Z , comuns para todos os elementos, para assim montar apropriadamente todas as matrizes. Os dois sistemas de coordenadas são mostrados na Figura 3.10. As forças e os deslocamentos de um elemento transformam-se das coordenadas globais em coordenadas locais através da matriz \mathbf{T} , da forma:

$$\mathbf{u}^c = \mathbf{T}\mathbf{u}_G^c \tag{3.110}$$

$$\mathbf{f}^c = \mathbf{T}\mathbf{f}_G^c$$

Para o elemento quadrilátero de 4 nós, a matriz \mathbf{T} , é dada por:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{L} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad (3.111)$$

Com, λ matriz dos cossenos diretores dos ângulos entre os dois sistemas de referência, definida na seção (3.1.3), da forma:

$$\lambda = \begin{bmatrix} \cos_{xX} & \cos_{xY} & \cos_{xZ} \\ \cos_{yX} & \cos_{yY} & \cos_{yZ} \\ \cos_{zX} & \cos_{zY} & \cos_{zZ} \end{bmatrix} \quad (3.112)$$

Pela regra da ortogonalidade vista na seção (3.1.3) , as matrizes de rigidez e massa de cada elemento de placa expressas nas coordenadas globais, ficam:

$$\mathbf{K}_G^c = \mathbf{T}^T \mathbf{K}^c \mathbf{T} \quad (3.113)$$

$$\mathbf{M}_G^c = \mathbf{T}^T \mathbf{M}^c \mathbf{T}$$

Para calcular as matrizes \mathbf{M}^m , \mathbf{M}^p , \mathbf{K}^m , \mathbf{K}^p , é necessário transformar as coordenadas globais de cada um dos nós dos elementos de casca em coordenadas locais (transformação inversa), tendo em vista que estas matrizes foram definidas para nós localizados no mesmo plano, tanto para a flexão de placas como para a deformação de membrana. Esta transformação pode ser feita usando a matriz dos cossenos diretores da equação (3.112), da forma:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} \quad (3.114)$$

Uma vez que as matrizes de rigidez e massa de flexão e membrana sejam calculadas, estas devem ser montadas na forma da equação (3.110) e transformadas para o sistema de coordenadas global, comum para todos os elementos. Os resultados dos deslocamentos calculados também são referidos ao sistema global.

Os cossenos diretores da matriz λ da equação (3.112). Deve ser determinada para todos os elementos usando o método de transformação de coordenadas visto na seção (3.1.3).

Tendo-se as coordenadas dos nós i e j no referencial global (X_i, Y_i, Z_i) e (X_j, Y_j, Z_j) respectivamente, visto na Figura 3.10, tem-se que os cossenos diretores do eixo x em relação aos eixos X, Y, Z globais são definidos por:

$$\cos_{xX} = \frac{X_i - X_j}{L_x} \quad \cos_{xY} = \frac{Y_i - Y_j}{L_x} \quad \cos_{xZ} = \frac{Z_i - Z_j}{L_x} \quad (3.115)$$

onde,

$$L_x = [(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2 + (Z_i - Z_j)^2]^{1/2} \quad (3.116)$$

Agora a direção z no referencial local do elemento, estará definida usando a definição do produto vetorial da forma:

$$\mathbf{v}_z = \mathbf{v}_{ij} \times \mathbf{v}_{il} \quad (3.117)$$

onde,

$$\mathbf{v}_{ij} = \begin{Bmatrix} X_i - X_j \\ Y_i - Y_j \\ Z_i - Z_j \end{Bmatrix} \quad \mathbf{v}_{il} = \begin{Bmatrix} X_i - X_l \\ Y_i - Y_l \\ Z_i - Z_l \end{Bmatrix} \quad (3.118)$$

E os cossenos diretores da direção z , ficam:

$$\begin{Bmatrix} \cos_{zX} \\ \cos_{zY} \\ \cos_{zZ} \end{Bmatrix} = \frac{1}{L_z} \mathbf{v}_z \quad (3.119)$$

Da mesma forma, usando-se também o produto vetorial, entre o vetor na direção x local e o vetor obtido na equação (3.117), tem-se um vetor que define a direção y do elemento e o seu correspondente vetor unitário, definindo assim os cossenos diretores do mesmo.

$$\mathbf{v}_y = \mathbf{v}_z \times \mathbf{v}_{ij} \quad (3.120)$$

$$\begin{Bmatrix} \cos_{yX} \\ \cos_{yY} \\ \cos_{yZ} \end{Bmatrix} = \frac{1}{L_y} \mathbf{v}_y \quad (3.121)$$

Com esta metodologia, pode-se definir a matriz \mathbf{L} da equação (3.111), e por conseguinte calcular a transformação do sistema local para o sistema global do elemento. Esta foi outra contribuição feita neste trabalho no âmbito do grupo do Departamento de Mecânica Computacional. A implementação foi efetuada em FORTRAN90, e uma metodologia de validação rigorosa foi efetuada para testar e consolidar a implementação efetuada.

3.3 Resposta em frequência do sistema estrutural

Para resolver o problema dinâmico estrutural no domínio das frequências, usa-se o método direto convencional, que consiste em resolver as equações matriciais, obtidas nas seções anteriores, para cada frequência de excitação. O problema de pequenas oscilações harmônicas forçadas é considerado sendo o vetor de excitação \mathbf{f} , que representam as forças harmônicas nodais atuando na estrutura, que produzem uma resposta também harmônica da forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= |\mathbf{f}| e^{j\omega t} \\ \mathbf{u} &= |\mathbf{u}| e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (3.122)$$

onde, $|\mathbf{f}|$ é a amplitude da força de excitação \mathbf{f} , $|\mathbf{u}|$ é a amplitude da resposta \mathbf{u} , ω a frequência de excitação e j é o termo imaginário.

Substituindo a equação (3.122) na equação do movimento, tem-se:

$$\begin{aligned} (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) |\mathbf{u}| &= |\mathbf{f}| \\ \mathbf{Z} |\mathbf{u}| &= |\mathbf{f}| \end{aligned} \quad (3.123)$$

sendo \mathbf{Z} a matriz de impedância do sistema. Resolvendo diretamente a equação (3.123) para uma frequência dada, tem-se a Resposta em Frequência Direta, obtida por:

$$|\mathbf{u}| = \mathbf{Z}^{-1} |\mathbf{f}| \quad (3.124)$$

que deve ser resolvido para cada frequência, gerando assim as curvas de resposta em frequência do sistema. Há formas mais otimizadas para solução da equação (3.123), tais como as técnicas de redução modal para sistemas acoplados, que não serão estudadas neste trabalho, pois na seqüência serão usados elementos do tipo espectral para modelagem de materiais porosos, cujas expressões não permitem reduções modais de forma convencional. Outra alternativa é o uso de métodos particionados (Larbi et al., 2005), que ainda não estão consolidados para este tipo de problema, gerando oscilações espúrias nos resultados.

Capítulo 4

Formulação para o problema acoplado fluido-estrutura

O procedimento tradicional para a solução de problemas de sistemas acoplados fluido-estrutura consiste em resolver simultaneamente as equações que modelam os domínios sólidos e as equações dos domínios fluidos, incluindo-se os efeitos da interação. Este acoplamento permite obter um sistema de equações cuja resolução conduz aos campos de deslocamentos e de pressões das fases sólidas e fluida respectivamente.

O tipo de formulação adotado neste trabalho para a solução do sistema acoplado fluido-estrutura é a formulação em pressão (Zienkiewicz and Newton, 1969, Morand and Ohayon, 1979, Hamdi et al., 1978, Goransson, 1988) na qual usa-se uma descrição Euleriana para o modelamento do domínio fluido, e uma descrição Lagrangiana para o domínio sólido, descrita nas seções anteriores.

Nesta aplicação a estrutura é, por hipótese, constituída de material elástico linear, isotrópico e homogêneo. O fluido é considerado ideal, sem viscosidade e isotrópico, onde a pressão e densidade variam ao redor de valores de equilíbrio. A influência dos termos convectivos na equação de governo são desprezíveis e é considerado um fluido não rotacional.

A formulação para o problema mostrado na Figura 4.1 é descrita pelas seguintes equações (Morand and Ohayon, 1995).

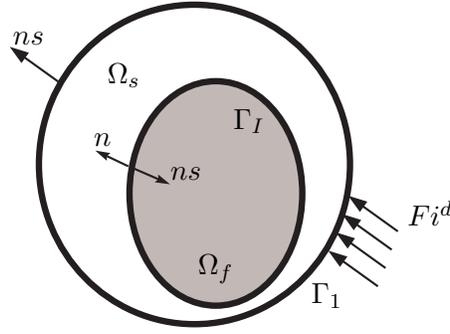


Figura 4.1: Estrutura elástica contendo fluido

$$\sigma_{ij,j}(u) + \omega^2 \rho_s u_i = 0 \quad \text{em } \Omega_s \quad (4.1)$$

$$\sigma_{ij}(u) n_j^S = F_i^d \quad \text{sobre } \Gamma_1 \quad (4.2)$$

$$\sigma_{ij}(u) n_j^S = p n_i \quad \text{sobre } \Gamma_I \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \omega^2 \rho_f u \cdot n \quad \text{sobre } \Gamma_I \quad (4.4)$$

$$\nabla^2 p - \frac{\omega^2}{c^2} p = 0 \quad \text{em } \Omega_f \quad (4.5)$$

onde, a equação (4.1) é a equação elastodinâmica do domínio sólido; a equação (4.2) são as condições de contorno na superfície do domínio estrutural, onde são aplicadas as forças F_i^d ; (4.3) são as condições de contorno resultantes da ação das forças de pressão exercidas pelo fluido sobre a estrutura na interface Γ_I , n representa o vetor unitário normal ao fluido; as equações (4.4) e (4.5) são respectivamente as condições de contorno para o fluido na interface Γ_I e a equação de Helmholtz que governa o comportamento para um domínio fluido. AS equações 4.1, 4.2 e 4.3 foram particularizadas nas seções anteriores para os casos da viga e da casca, e não são discutidas nesta seção.

4.1 Equações de governo do domínio fluido

A equação de governo para o domínio fluido é ser definida pela equação (4.6) e conduz ao modelo clássico da onda acústica, que é particularmente adaptado para o caso de pequenos

movimentos do fluido entorno de uma posição de estado de equilíbrio. Esta equação é definida para pressões variando no tempo e no espaço.

$$\nabla^2 p(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{c^2} \ddot{p}(\mathbf{x}, t) = f_v \quad \text{em } \Omega_f \quad (4.6)$$

onde, $p(\mathbf{x}, t)$ é o campo escalar de pressões hidrostáticas definido como função da posição e o tempo, c a velocidade de propagação do som no fluido, f_v são as forças de volume (ou de superfície em problemas bi-dimensionais) e \mathbf{x} é o vetor posição, ou seja, $\mathbf{x}(x, y, z)$.

A equação 4.6 pode ser resolvida escrevendo o problema na forma diferencial e aplicando o método dos Resíduos Ponderados, definido na seção (3) para o domínio estrutural. Nesta forma a equação integral da equação (4.6) está dado pela seguinte expressão:

$$\int_{\Omega_f} W_l R d\Omega = \int_{\Omega_f} W_l (\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \ddot{p} - f_v) d\Omega = 0 \quad (4.7)$$

Na forma integral definida pela equação (4.7), p deve ser duas vezes derivável e satisfazer a condição de contorno dada pela equação (4.5) e as condições de superfície livre (SL) ($p = 0$) e superfície de parede rígida (PR) ($\frac{\partial p}{\partial n} = 0$) presentes quando o fluido é exterior.

Integrando por partes a equação (4.7), tem-se a forma fraca da formulação integral, dada por:

$$\int_{\Omega_f} \nabla W_l \nabla p d\Omega + \frac{1}{c^2} \int_{\Omega_f} W_l \ddot{p} d\Omega = \int_{\Gamma_f} W_l \frac{\partial p}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Omega_f} W_l f_v d\Omega \quad (4.8)$$

A integral de superfície (Γ_f) na equação (4.8) está relacionada com todas as condições de contorno do domínio fluido, incluindo-se: superfície livre, parede rígida, interface fluido estrutura, influência de ondas de superfície, condição de radiação de Sommerfield para fluido infinito, entre outras (Galli, 1995). Para esta aplicação não serão levadas em conta as condições de ondas de superfície e fluido infinito. Desta forma a equação integral na forma fraca para o domínio fluido é dada pela equação (4.9):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_f} \nabla W_l \nabla p d\Omega + \frac{1}{c^2} \int_{\Omega_f} W_l \ddot{p} d\Omega &= \int_{\Gamma_{PR}} W_l \frac{\partial p}{\partial n} d\Gamma \\ + \int_{\Gamma_{SL}} W_l \frac{\partial p}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_I} W_l \frac{\partial p}{\partial n} d\Gamma &- \int_{\Omega_f} W_l f_v d\Omega \end{aligned} \quad (4.9)$$

Aplicando-se as condições de superfície livre (SL) e parede rígida (PR) e interface , tem-se:

$$\int_{\Omega_f} \nabla W_l \nabla p d\Omega + \frac{1}{c^2} \int_{\Omega_f} W_l \ddot{p} d\Omega = -\rho_f \int_{\Gamma_I} W_l \vec{n} \ddot{u} d\Gamma - \int_{\Omega_f} W_l f_v d\Omega \quad (4.10)$$

Usando-se o método de Galerkin, admite-se a função de ponderação como sendo igual à variação da incógnita (p), ou seja $W_l = \delta p$.

Discretizando o domínio fluido pelo método dos elementos finitos e usando a aproximação polinomial clássica da variável incógnita para cada um dos elementos, tem-se:

$$p = \mathbf{N}_f \mathbf{p} \quad (4.11)$$

$$\ddot{p} = \mathbf{N}_f \ddot{\mathbf{p}} \quad (4.12)$$

$$\delta p = \mathbf{N}_f \delta \mathbf{p} \quad (4.13)$$

$$\nabla p = \mathbf{B}_f \mathbf{p} \quad (4.14)$$

onde, \mathbf{N}_f é o vetor das funções de forma do fluido, \mathbf{B}_f contém as derivadas de \mathbf{N}_f e \mathbf{p} é o vetor das pressões nodais do elemento.

Assim, substituindo as equações (4.11), (4.12), (4.13) e (4.14) na equação (4.10), tem-se a partir da contribuição de cada elemento a seguinte expressão:

$$\sum_{e=1}^N \left\{ \begin{array}{l} \left(\int_{\Omega_f} \mathbf{B}_f^T \mathbf{B}_f d\Omega \right) \mathbf{p} + \left(\frac{1}{c^2} \int_{\Omega_f} \mathbf{N}_f^T \mathbf{N}_f d\Omega \right) \ddot{\mathbf{p}} \\ - \left(-\rho_f \int_{\Gamma_I} \mathbf{N}_f^T \vec{n} \mathbf{N}_s d\Gamma \right) \ddot{\mathbf{u}} - \int_{\Omega_f} \mathbf{N}_f^T f_v d\Omega \end{array} \right\} \delta \mathbf{p} = 0 \quad (4.15)$$

onde, N é o número de elementos finitos.

A equação (4.15) pode ser escrita na forma matricial, como segue:

$$\mathbf{M}_f \ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{K}_f \mathbf{p} = -\rho_f \mathbf{L}^T \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{f}_f \quad (4.16)$$

onde, \mathbf{M}_f é a matriz de Inércia do fluido, \mathbf{K}_f é a matriz volumétrica, correspondente à matriz cinética do fluido e \mathbf{L}^T é a matriz de acoplamento.

O acoplamento entre o fluido e a estrutura é descrito pela condição de contorno dada pela equação (4.4), a qual levou-nos à definição da matriz de acoplamento \mathbf{L}^T que garante a compatibilidade cinemática na direção normal à interface. Assim o efeito da distribuição de pressões do fluido sobre a superfície de interface pode ser aproximada como:

$$\mathbf{F}_I = \int_{\Gamma_I} \mathbf{N}_s^T p d\Gamma = \left(\int_{\Gamma_I} \mathbf{N}_s^T \vec{n} \mathbf{N}_f d\Gamma \right) \mathbf{p} \quad (4.17)$$

onde, a matriz de acoplamento é definida pela seguinte equação:

$$\mathbf{L} = \int_{\Gamma_I} \mathbf{N}_s^T \vec{n} \mathbf{N}_f d\Gamma \quad (4.18)$$

onde, \vec{n} indica a direção normal exterior ao domínio fluido.

Assim, o termo \mathbf{F}_I é adicionado à equação da estrutura (equação(3.35))da forma:

$$\mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_s \mathbf{u} = \mathbf{L} \mathbf{p} + \mathbf{f}_s \quad (4.19)$$

Colocando as equações (4.19) e (4.16) em uma forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_s & 0 \\ \rho_f \mathbf{L}^T & \mathbf{M}_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\mathbf{p}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_s & -\mathbf{L} \\ 0 & \mathbf{K}_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_s \\ \mathbf{f}_p \end{Bmatrix} \quad (4.20)$$

ou na forma compacta:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_{fs} + \mathbf{K} \mathbf{u}_{fs} = \mathbf{f}_{fs} \quad (4.21)$$

Com esta formulação em pressão para sistemas acoplados fluido-estrutura, chega-se a matrizes não simétricas definidas pela equação (4.20) o que constitui uma desvantagem do ponto de vista de eficiência computacional na resolução do problema.

A vantagem desta formulação em pressão é a necessidade de um menor número de graus de liberdade para se modelar o domínio fluido (Galli, 1995). Por exemplo na aplicação tridimensional de casca acopladas com fluidos, serão necessárias seis graus de liberdade para a estrutura e só um grau de liberdade para o fluido (pressão).

Esta formulação pode ser aplicada em problema de vibrações harmônicas de sistemas acoplados (vibroacústica), e para problemas de estruturas submersas em meio fluido sem escoamento (Interação fluido-estrutura).

4.2 Elementos finitos para o domínio fluido

Para a modelagem o domínio fluido, na análise do problema acoplado fluido-estrutura, foram usados elementos isoparamétricos planos e tridimensionais do tipo Lagrange clássicos . Estes elementos são muito versáteis para este tipo de aplicação.

Usando-se as coordenadas de referencia isoparamétricas tridimensionais(ξ, η, ζ) as matrizes de cada elemento fluido (equação (4.16)), podem ser escritas em função destas coordenadas como se mostra nas equações (4.22) e (4.23). Este método gera funções de forma para aproximar tanto as coordenadas retangulares quanto a variável incógnita (p) e a forma geral das matrizes do problema é dado por.

$$\mathbf{K}_f^e = \int_{\Omega_f^e} \mathbf{B}_f^T \mathbf{B}_f d\Omega = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_f(\xi, \eta, \zeta)^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{B}_f(\xi, \eta, \zeta) \det(J) d\xi d\eta d\zeta \quad (4.22)$$

$$\mathbf{M}_f^e = \int_{\Omega_f^e} \mathbf{B}_f^T \mathbf{B}_f d\Omega = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_f(\xi, \eta, \zeta)^T \mathbf{B}_f(\xi, \eta, \zeta) \det(J) d\xi d\eta d\zeta \quad (4.23)$$

onde, \mathbf{J} é a matriz Jacobiana é dada pela equação (4.24), \mathbf{Q} é igual à inversa de \mathbf{J} :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

O elemento isoparamétrico plano usado nesta aplicação é definido pela aproximação apresentada na equação (3.102). Para o caso tridimensional foram implementados elementos hexaédricos de 8 nós, com aproximação tri-linear para as coordenadas e a pressão. Este elemento é mostrado na Figura 4.2 e as funções de forma são definidas na equação (4.25).

$$\begin{aligned}
N_{f1} &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta) & N_{f5} &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta) \\
N_{f2} &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta) & N_{f6} &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta) \\
N_{f3} &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta) & N_{f7} &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta) \\
N_{f4} &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta) & N_{f8} &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta)
\end{aligned} \tag{4.25}$$

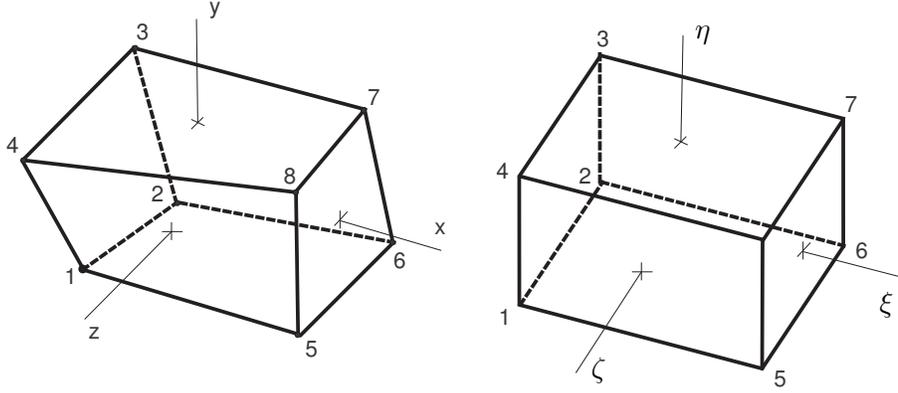


Figura 4.2: Elemento Hexaédrico de 8 nós

4.3 Elementos finitos de interface

A ligação entre os domínios fluido e estrutural no problema acoplado é feita através da matriz de interface \mathbf{L}^T (equação (4.18)). Assim aplicando-se o método de elementos finitos, é necessária a discretização de um domínio de interface, independente dos domínio fluido e estrutural (Pavanello, 1991), e a definição das matrizes elementares de acoplamento dadas pela seguinte equação:

$$\mathbf{L}^{Te} = \int_{\Omega_f^e} \mathbf{N}_f^T \vec{n} \mathbf{N}_s d\Omega \tag{4.26}$$

onde, \mathbf{N}_f e \mathbf{N}_s são os vetores das funções do fluido e da estrutura respectivamente e \vec{n} indica a direção normal exterior ao domínio fluido.

Nesta metodologia de acoplamento deseja-se garantir a continuidade cinemática dos domínios fazendo que os nós de cada elemento de interface coincidam com os nós dos elementos do

fluido e da estrutura em dita interface. Assim para a análise bidimensional são usados elementos lineares de dois nós ou elementos quadriláteros de quatro nós, acoplados aos elementos quadriláteros do fluido e lineares da estrutura. Estes elementos estão representado na Figura 4.3, e desenvolvidos em Goransson, 1988:

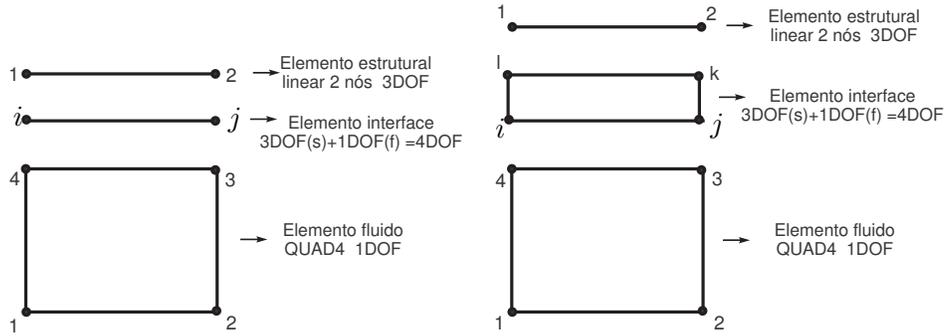


Figura 4.3: Elementos de interface 2D

Para o problema tridimensional de acoplamento de placas e cascas com fluido, usa-se o elemento de interface mostrado na Figura 4.4. A espessura deste elemento é igual a espessura da placa e cada nó deste possui inicialmente os graus de liberdade estruturais mais o grau de liberdade de pressão. Na implementação os nós dos elementos estruturais são gerados a partir dos elementos de interface e os graus de liberdade são trasladados, desta forma os elementos de interface ficaram só com um grau de liberdade de pressão por nó. Este procedimento permite levar em conta a influência da variação de espessura da casca sobre o acoplamento fluido-estrutura.

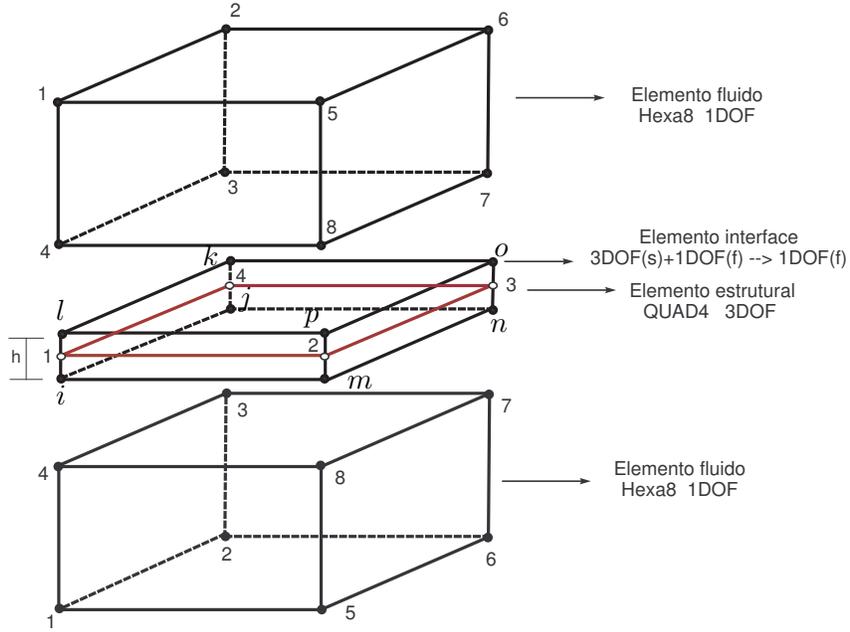


Figura 4.4: Elemento de interface 3D

Para calcular a equação de interface, usando elementos tridimensionais, foram escolhidas uma série de funções de forma para cada grau de liberdade e usadas as funções isoparamétricas. Como primeira aproximação foram acoplados só os graus de liberdade de translação para definir a força que a estrutura exerce sobre o fluido, usando as seguintes funções de forma:

$$\mathbf{L}^{Te} = \int_{\Omega_I^e} \mathbf{N}_f^T \vec{n} \mathbf{N}_s \det(J) d\xi d\eta d\zeta$$

$$\mathbf{N}_f = \{ N_{f4} \quad N_{f8} \quad N_{f7} \quad N_{f3} \}$$

$$\mathbf{N}_s = \{ N_{s1} \quad 0 \quad 0 \quad N_{s2} \quad 0 \quad 0 \quad N_{s3} \quad 0 \quad 0 \quad N_{s4} \quad 0 \quad 0 \}$$
(4.27)

onde $N_{f3}, N_{f4}, N_{f7}, N_{f8}$, são definidas na equação (4.25) e $N_{s1}, N_{s2}, N_{s3}, N_{s4}$, definidas na equação (3.102).

Em uma segunda aproximação, para o cálculo das matrizes de interface, foram acoplados os graus de liberdade de translação e rotação da estrutura para o fluido, através de uma

aproximação cúbica para os graus de liberdade da estrutura e aproximação trilinear para os graus de liberdade do fluido. Desta forma as funções de forma para calcular a matriz de interface são dadas por:

$$\begin{aligned}
N_{s1} &= \frac{1}{4} - \frac{3}{8}\xi - \frac{3}{8}\eta + \frac{1}{2}\xi\eta + \frac{1}{8}\xi^3 + \frac{1}{8}\eta^3 - \frac{1}{8}\xi^3\eta - \frac{1}{8}\xi\eta^3 \\
N_{s2} &= -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\xi + \frac{1}{8}\eta + \frac{1}{8}\xi^2 - \frac{1}{8}\eta\xi - \frac{1}{8}\xi^3 - \frac{1}{8}\xi^2\eta + \frac{1}{8}\xi^3\eta \\
N_{s3} &= \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi - \frac{1}{8}\eta + \frac{1}{8}\xi\eta - \frac{1}{8}\eta^2 + \frac{1}{8}\xi\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^3 - \frac{1}{8}\xi\eta^3 \\
N_{s4} &= \frac{1}{4} + \frac{3}{8}\xi - \frac{3}{8}\eta - \frac{1}{2}\xi\eta - \frac{1}{8}\xi^3 + \frac{1}{8}\eta^3 + \frac{1}{8}\xi^3\eta + \frac{1}{8}\xi\eta^3 \\
N_{s5} &= \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\xi - \frac{1}{8}\eta - \frac{1}{8}\xi^2 - \frac{1}{8}\eta\xi - \frac{1}{8}\xi^3 + \frac{1}{8}\xi^2\eta + \frac{1}{8}\xi^3\eta \\
N_{s6} &= \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\xi - \frac{1}{8}\eta - \frac{1}{8}\xi\eta - \frac{1}{8}\eta^2 + \frac{1}{8}\xi\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^3 + \frac{1}{8}\xi\eta^3 \\
N_{s7} &= \frac{1}{4} + \frac{3}{8}\xi + \frac{3}{8}\eta + \frac{1}{2}\xi\eta - \frac{1}{8}\xi^3 - \frac{1}{8}\eta^3 - \frac{1}{8}\xi^3\eta - \frac{1}{8}\xi\eta^3 \\
N_{s8} &= \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\xi + \frac{1}{8}\eta - \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\eta\xi - \frac{1}{8}\xi^3 - \frac{1}{8}\xi^2\eta - \frac{1}{8}\xi^3\eta \\
N_{s9} &= -\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi - \frac{1}{8}\eta - \frac{1}{8}\xi\eta + \frac{1}{8}\eta^2 + \frac{1}{8}\xi\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^3 + \frac{1}{8}\xi\eta^3 \\
N_{s10} &= \frac{1}{4} - \frac{3}{8}\xi + \frac{3}{8}\eta - \frac{1}{2}\xi\eta + \frac{1}{8}\xi^3 - \frac{1}{8}\eta^3 + \frac{1}{8}\xi^3\eta + \frac{1}{8}\xi\eta^3 \\
N_{s11} &= -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\xi - \frac{1}{8}\eta + \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\eta\xi - \frac{1}{8}\xi^3 + \frac{1}{8}\xi^2\eta - \frac{1}{8}\xi^3\eta \\
N_{s12} &= -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\xi - \frac{1}{8}\eta + \frac{1}{8}\xi\eta + \frac{1}{8}\eta^2 - \frac{1}{8}\xi\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^3 - \frac{1}{8}\xi\eta^3
\end{aligned} \tag{4.28}$$

e as funções de forma adotadas para o fluido são as usadas na primeira aproximação (equação (4.27)). As duas aproximações foram testadas e os resultados são apresentados no capítulo 6.

4.4 Solução do sistema acoplado

Neste trabalho usa-se o método direto convencional para calcular a resposta em frequência do sistema acoplado fluido-estrutura (Direct Frequency Response). Este método consiste em resolver o sistema acoplado (equação (4.20) e (4.21)), para cada frequência de excitação. O problema de pequenas oscilações harmônicas forçadas é considerado sendo o vetor de

excitação \mathbf{f} , que representam as forças harmônicas nodais atuando no sistema, que produzem uma resposta também harmônica da forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_{f_s} &= |\mathbf{f}_{f_s}| e^{j\omega t} \\ \mathbf{u}_{f_s} &= |\mathbf{u}_{f_s}| e^{j\omega t}\end{aligned}\tag{4.29}$$

onde, $|\mathbf{f}_{f_s}|$ é a amplitude da força de excitação \mathbf{f}_{f_s} , $|\mathbf{u}|$ é a amplitude da resposta \mathbf{u}_{f_s} e ω a frequência de excitação.

Substituindo a equação (4.29) no sistema acoplado (equação (4.21)), tem-se:

$$\begin{aligned}(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})|\mathbf{u}_{f_s}| &= |\mathbf{f}_{f_s}| \\ \mathbf{Z}|\mathbf{u}_{f_s}| &= |\mathbf{f}_{f_s}|\end{aligned}\tag{4.30}$$

sendo \mathbf{Z} a matriz de impedância ou matriz dinâmica do sistema acoplado, expressa como:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_s & \mathbf{Z}_{sf} \\ \mathbf{Z}_{fs} & \mathbf{Z}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_s - \omega^2\mathbf{M}_s & \mathbf{K}_{fs} \\ -\omega^2\mathbf{M}_{fs} & \mathbf{K}_f - \omega^2\mathbf{M}_f \end{bmatrix}\tag{4.31}$$

Resolvendo diretamente a equação (4.30) para uma frequência dada, tem-se a Resposta em Frequência Direta, obtida por:

$$|\mathbf{u}_{f_s}| = \mathbf{Z}^{-1} |\mathbf{f}_{f_s}|\tag{4.32}$$

No caso da formulação adotada para o sistema acoplado fluido-estrutura, a matriz de impedância é não simétrica, por tanto a determinação da resposta em frequência direta, usando-se esta técnica analítica convencional, pode resultar numa baixa eficiência computacional. Para reduzir este inconveniente usa-se o método direto com a técnica de matrizes esparsas, devido ao grande numero de valores nulos nas matrizes do sistema, de maneira que seja possível economizar um espaço significativo de memória se apenas os termos diferentes de zero forem armazenados.

Existem outros métodos para resolver o sistema acoplado com maior eficiência computacional, tais como os métodos iterativos (Ma and Hagiwara, 1991), que consideram as matrizes

de impedância dos sistemas estrutural e fluidos de forma desacoplada, não sendo necessária a triangularização da matriz de impedância do sistema como um todo. Os métodos particionados sofrem problemas de convergência em valores próximos as ressonâncias e ainda estão sendo desenvolvidos.

O método iterativo trabalha com a matriz de impedância desacoplada. Denota-se por \mathbf{Z}_s e \mathbf{Z}_f como sendo as matrizes de impedância da estrutura e do domínio fluido, e \mathbf{Z}_{sf} e \mathbf{Z}_{fs} como as matrizes de impedância do acoplamento. A resposta em frequência $|\mathbf{u}_{fs}|$ pode ser dividida na resposta estrutural $|\mathbf{u}_s|$ e na resposta do domínio fluido $|\mathbf{p}|$. Assim, o algoritmo iterativo para o cálculo aproximado da resposta em frequência, utilizando a impedância desacoplada, pode ser descrito na seguinte sequência de passos:

- Determinar as matrizes \mathbf{B}_{fs} e \mathbf{B}_{sf} , definidas por:

$$\mathbf{B}_{fs} = -\mathbf{Z}_f^{-1}\mathbf{Z}_{fs} \quad (4.33)$$

$$\mathbf{B}_{sf} = -\mathbf{Z}_s^{-1}\mathbf{Z}_{sf} \quad (4.34)$$

- Calcular um valor de partida da resposta estrutural, $\mathbf{u}_s^{(0)}$, e da resposta no domínio fluido, $\mathbf{p}^{(0)}$, usando-se:

$$\mathbf{u}_s^{(0)} = \mathbf{Z}_s^{-1}\mathbf{f}_s \quad (4.35)$$

$$\mathbf{p}^{(0)} = \mathbf{B}_{fs}\mathbf{u}_s^{(0)} \quad (4.36)$$

- Resolver as seguintes expressões iterativas para obter as m-ésimas soluções aproximadas da resposta estrutural, $\mathbf{u}_s^{(m)}$, e da resposta no domínio fluido, $\mathbf{p}^{(m)}$, expressas por:

$$\mathbf{u}_s^{(m)} = \mathbf{u}_s^{(0)} + \mathbf{B}_{sf}\mathbf{p}^{(m-1)}, (m= 1, 2, \dots) \quad (4.37)$$

$$\mathbf{p}^{(m)} = \mathbf{B}_{fs}\mathbf{u}_s^{(m)}, (m= 1, 2, \dots) \quad (4.38)$$

Sendo N_s o número de graus de liberdade da estrutura e N_f o número de graus de liberdade do domínio fluido, o número total das equações do sistema acoplado N é dado pela soma de $N_s + N_f$. Sabe-se que resolver a equação acoplada para uma ordem N grande tem maior custo computacional que solucionar as equações de dois sistemas com ordens menores, N_s e N_f . Além disso, na resolução com as matrizes \mathbf{Z}_s e \mathbf{Z}_f , pode-se utilizar a simetria e a banda destas matrizes, obtendo-se um ganho computacional considerável. As duas estratégias, direta e iterativa foram implementadas e exploradas neste trabalho.

Capítulo 5

Análise de Sensibilidade

5.1 Métodos de análise de sensibilidade

A análise de sensibilidade consiste em calcular as derivadas de uma ou várias funções objetivo em função de um número de variáveis independentes. Quando a resposta dinâmica de um sistema é calculada usando métodos computacionais, existe um requerimento constante de informação em relação às mudanças da resposta devido à variação de parâmetros do sistema. Por isto, surge a necessidade de uma rápida reavaliação dos resultados quando existe este tipo de variações; sendo portanto imprescindível o conhecimento da sensibilidade das funções que definem o comportamento do dito sistema em função das modificações de alguns parâmetros do mesmo. A sensibilidade é encontrada em relação a alterações no projeto ou à presença de defeitos estruturais, este último, permitirá verificar a viabilidade da aplicação de modelos computacionais em técnicas de detecção de falhas. Outra aplicação importante da análise de sensibilidade é em algoritmos de otimização, onde a função objetivo é calculada através da aplicação de métodos numéricos. Existem vários métodos para calcular a sensibilidade, cada um deles com características e méritos diferentes. A escolha do método depende principalmente da precisão, a eficiência computacional e a facilidade para incrementar o número de variáveis independentes. Os fatores que afetam a escolha do método incluem: a relação entre o número de funções objetivo e o número de variáveis independentes, a importância da eficiência computacional, e o esforço humano requerido para a implementação (Haug et al., 1986, Martins, 2002).

Os métodos de sensibilidade usados neste trabalho serão apresentados a seguir.

5.1.1 Método das diferenças finitas

O método das diferenças finitas é geralmente utilizado para calcular a sensibilidade em sistemas de pequeno porte, ou onde esta operação não for repetida muitas vezes. Embora esta aproximação não seja exata nem computacionalmente eficiente, a maior vantagem deste método reside na fácil implementação. Toda aproximação por diferenças finitas pode ser derivada pelo truncamento de uma série de Taylor expandida. A primeira derivada pode ser aproximada como a diferença para frente, definida por:

$$\frac{df(x_n)}{dx_n} = \frac{f(x_n + \delta) - f(x_n)}{\delta} + O(\delta) \quad (5.1)$$

onde, δ é o intervalo da diferença finita ou o passo, $O(\delta)$ é o erro de truncamento e neste caso é uma aproximação de primeira ordem. É desejável escolher um pequeno tamanho de passo para minimizar o erro de truncamento, mas devem ser evitados valores muito pequenos que levem ao cancelamento da diferença. Neste contexto a precisão do método está fortemente associado aos erros de truncamento e a precisão em ponto flutuante adotada para os cálculos.

O custo da análise de sensibilidade usando diferenças finitas é proporcional ao número de variáveis de entrada, ou seja, f deve ser calculada para cada x_n , onde n é o número de variáveis independentes. Usando a diferença para frente o custo será de $N_x + 1$ vezes o custo do cálculo de f . Sendo N_x o número de variáveis.

Vários esquemas com atraso, avanço e diferentes mínimos de pontos podem ser usados e foram amplamente estudados na literatura (Klossterman, 1950).

5.1.2 Métodos analíticos

Para análise de sensibilidade os métodos analíticos, tais como o método adjunto e o método direto, são mais precisos e eficientes. No entanto é necessário o conhecimento das equações diferenciais e o algoritmo usado na resolução, para derivar e implementar as correspondentes equações na análise de sensibilidade. O método adjunto é atrativo quando o custo para calcular a derivada de uma função dada é independente do número de variáveis de entrada x_n . Portanto, se o número de variáveis independentes é maior que o número de funções a serem derivadas (funções objetivo), o método adjunto é mais eficiente. Por outro lado, se

o número de funções é maior que o número de variáveis de projeto o método direto será a melhor escolha.

O objetivo principal do método é calcular a sensibilidade de uma função de interesse com respeito a um número de variáveis de entrada. Esta função de interesse pode ser uma função objetivo ou a própria resposta de um sistema, que depende não somente das variáveis de entrada x_n , mas também do estado físico do sistema y_i . Genericamente, indica-se a função objetivo por $f(x_n, y_i)$.

As equações diferenciais que representam o comportamento de um sistema, podem depender explicitamente de x_n , na forma :

$$R_k(x_n, y_i(x_n)) = 0 \quad (5.2)$$

onde, R_k representa o resíduo da equação diferencial, $i = 1, 2, 3, \dots, N_R$ número de graus de liberdade do sistema e $n = 1, 2, 3, \dots, N_x$ o número de variáveis de entrada ou variáveis independentes.

Resolvendo-se as equações diferenciais, determina-se o vetor de estado y_i , o qual depende implicitamente de x_n e usando-se a regra da cadeia pode-se escrever a sensibilidade total de f com relação a x_n , da forma:

$$\frac{df(x_n, y_i(x_n))}{dx_n} = \frac{\partial f}{\partial x_n} + \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dx_n} \quad (5.3)$$

Da mesma forma, sempre que as equações diferenciais forem satisfeitas, a derivada total do resíduo da equação (5.2), deve ser igual a zero. Expandindo a derivada total das equações que governam o sistema com relação a as variáveis de projeto, tem-se:

$$\frac{dR_k(x_n, y_i(x_n))}{dx_n} = \frac{\partial R_k}{\partial x_n} + \frac{\partial R_k}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dx_n} = 0 \quad (5.4)$$

Da equação (5.4) pode-se calcular a derivada total das variáveis de estado com relação às variáveis independentes, da forma:

$$-\frac{\partial R_k}{\partial x_n} = \frac{\partial R_k}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dx_n} \quad (5.5)$$

Usando-se a equação (5.5), o método analítico direto consiste em calcular a derivada total das variáveis de estado com respeito aos parâmetros de entrada $\frac{dy_i}{dx_n}$ e substituí-la na equação (5.3) para calcular a sensibilidade das funções objetivo f , descrito na seguinte equação:

$$\frac{df(x_n, y_i(x_n))}{dx_n} = \frac{\partial f}{\partial x_n} - \frac{\partial f}{\partial y_i} \left(\frac{\partial R_k}{\partial y_i} \right)^{-1} \frac{\partial R_k}{\partial x_n} \quad (5.6)$$

Nota-se que resolvendo a sensibilidade usando este método requer-se a solução da equação (5.5) para cada variável x_n . Assim, se o número de variáveis x_n é muito grande, torna-se computacionalmente caro o cálculo de sensibilidade, fazendo-se necessário calcular a inversa da matriz $\frac{\partial R_k}{\partial y_i}$ para cada x_n .

Por outro lado, a equação (5.6), pode-se ser escrita como função de uma variável auxiliar, chamada vetor adjunto Ψ_k , onde a matriz $\frac{\partial R_k}{\partial y_i}$ só deve ser avaliada uma única vez para qualquer número de variáveis x_n , na forma:

$$\frac{\partial R_k}{\partial y_i} \Psi_k = - \frac{\partial f}{\partial y_i} \quad (5.7)$$

Desta forma, o vetor adjunto é substituído na equação (5.3) para a avaliação da sensibilidade, como mostra a equação (5.8).

$$\frac{df(x_n, y_i(x_n))}{dx_n} = \frac{\partial f}{\partial x_n} + \Psi_k \frac{\partial R_k}{\partial x_n} \quad (5.8)$$

Nota-se que o vetor Ψ_k , deve ser calculado para cada função objetivo f . Desta forma, se o problema necessitar da avaliação de um grande número de funções objetivo, este método não é vantajoso.

5.2 Sensibilidade estrutural

Nesta seção será analisada a sensibilidade das funções que definem o comportamento dinâmico do sistema estrutural da fuselagem, em função das modificações de alguns parâmetros do mesmo. Para esta aplicação a função objetivo f consiste na resposta estrutural de um grau de liberdade especificado da estrutura (u_i) com relação as modificações estruturais x_n

(espessura de revestimento, altura de reforçadores, etc). O resíduo da equação que governa o comportamento dinâmico do domínio estrutural (equação (3.123)) é dado pela equação (5.9), em função das variáveis de estado $|\mathbf{u}|$, que incluem os graus de liberdade nodais dos elementos estruturais.

$$R_s = \mathbf{Z} |\mathbf{u}| - |\mathbf{f}| \quad (5.9)$$

Substituindo a equação (5.9) na equação (5.5), e avaliando as derivadas parciais de R_s em relação a $|\mathbf{u}|$ e x_n , é possível obter a derivada total ou sensibilidade da resposta de todo o sistema, $|\mathbf{u}|$, com relação as variáveis x_n , através do método direto, da forma:

$$\frac{d|\mathbf{u}|}{dx_n} = -\mathbf{Z}^{-1} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x_n} |\mathbf{u}| \quad (5.10)$$

onde, $|\mathbf{f}|$ não varia com x_n .

Assim, o segundo termo do lado direito da equação (5.10) deverá ser avaliado para cada variável estrutural x_n . O termo $\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x_n}$ da equação (5.10), representa a derivada da matriz dinâmica em relação às variáveis estruturais que pode ser calculada na forma analítica como segue:

$$\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x_n} = \mathbf{Z}' = \mathbf{K}' - \omega^2 \mathbf{M}' \quad (5.11)$$

onde, \mathbf{K}' e \mathbf{M}' são as derivadas analíticas das matrizes de rigidez e massa respectivamente em relação a x_n , calculadas para cada elemento estrutural, e ω é a frequência.

Com a finalidade de calcular a sensibilidade da resposta estrutural do sistema através do método adjunto, se faz necessário a definição da função objetivo como sendo a resposta pontual de um nó do sistema u_i , devido a que o termo $\frac{d|\mathbf{u}|}{dx_n}$ não está explícito na definição de sensibilidade deste método (equação (5.8)).

Assim, substituído R_s na equação (5.8), tem-se a sensibilidade da resposta de um nó da estrutura u_i , em relação as variáveis x_n , como segue:

$$\frac{du_i}{dx_n} = \frac{\partial u_i}{\partial x_n} + \Psi_{\mathbf{k}} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x_n} |\mathbf{u}| \quad (5.12)$$

onde, o vetor adjunto $\Psi_{\mathbf{k}}$ da equação (5.7), neste caso é avaliado para:

$$\frac{\partial R_k}{\partial |\mathbf{u}|} \Psi_{\mathbf{k}} = -\frac{\partial u_i}{\partial |\mathbf{u}|} \quad (5.13)$$

ou,

$$\mathbf{Z} \Psi_{\mathbf{k}} = -\frac{\partial u_i}{\partial |\mathbf{u}|} \quad (5.14)$$

O termo $\frac{\partial u_i}{\partial x_n}$ da equação (5.12), representa a derivada parcial da resposta de um nó do sistema estrutural, em relação as variáveis x_n .

Nota-se que a equação (5.13) não depende das variáveis x_n , mas depende do número de funções objetivos ou o número de sensibilidades requeridas, o que conduz a um custo computacional menor quando tem-se um x_n elevado comparado com o número de u_i a serem calculados.

Pode-se concluir que para avaliar a sensibilidade da resposta estrutural de um número de variáveis x_n maior que o número de funções objetivo (número de respostas u_i), o método adjunto torna-se mais eficiente.

5.3 Sensibilidade vibroacústica

A análise de sensibilidade vibroacústica envolve a avaliação da resposta do problema acoplado fluido-estrutura, na presença de uma alteração estrutural. Pretende-se avaliar as possibilidades de detecção de falhas em estruturas (trincas, falha em prendedores, etc) a partir da modificação da resposta estrutural e acústica devido à existência das falhas e dos reparos. As falhas e os reparos estruturais serão representados, neste trabalho, por uma alteração local de rigidez e massa.

O objetivo nesta análise será calcular a sensibilidade da resposta vibroacústica em frequência $|\mathbf{u}_{f_s}|$, dada na equação (4.32), em relação as variáveis x_n .

O resíduo R_{fs} da equação que governa o problema dinâmico acoplado é dado por:

$$\begin{aligned} R_{fs} &= (\mathbf{K}_{fs} - \omega^2 \mathbf{M}_{fs}) |\mathbf{u}_{fs}| - |\mathbf{f}_{fs}| \\ R_{fs} &= \mathbf{Z} |\mathbf{u}_{fs}| - |\mathbf{f}_{fs}| \end{aligned} \quad (5.15)$$

Substituindo a equação (5.15) na equação (5.6), e avaliando as derivadas parciais de R_{fs} em relação a $|\mathbf{u}_{fs_i}|$ e x_n , a sensibilidade da resposta total do sistema acoplado $|\mathbf{u}_{fs_i}|$ com relação as variáveis x_n , é definida diretamente pela seguinte expressão:

$$\frac{d|\mathbf{u}_{fs}|}{dx_n} = -\mathbf{Z}^{-1} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x_n} |\mathbf{u}_{fs}| \quad (5.16)$$

Desta forma, usando o método direto (equação (5.5)), é possível calcular de forma análoga a aplicada para a equação (5.10), com diferença na derivada na matriz de impedancia ($\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x_n}$), que para o problema acoplado é definida por:

$$\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x_n} = \mathbf{Z}' = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}'_s & \mathbf{Z}'_{sf} \\ \mathbf{Z}'_{fs} & \mathbf{Z}'_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}'_s - \omega^2 \mathbf{M}'_s & \mathbf{K}'_{fs} \\ -\omega^2 \mathbf{M}'_{fs} & \mathbf{K}'_f - \omega^2 \mathbf{M}'_f \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

onde, \mathbf{Z}'_s , \mathbf{Z}'_f , \mathbf{Z}'_{fs} e \mathbf{Z}'_{sf} são as derivadas analíticas das matrizes de impedância dos domínios estrutural e fluido e a interface respectivamente, em relação as variáveis estruturais x_n . A dependência destas matrizes, com relação as variáveis de projeto (área da seção transversal do elemento, espessura de placas, etc) encontra-se implícitamente definida através das equações de estado da mecânica vistas nos capítulos (3) e (4).

Por outro lado, aplicando o método adjunto para calcular a sensibilidade da resposta de um nó estrutural ou acústico, tem-se uma expressão análoga à equação (5.12):

$$\frac{du_{fsi}}{dx_n} = \frac{\partial u_{fsi}}{\partial x_n} + \Psi_{\mathbf{k}} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x_n} |\mathbf{u}_{fs}| \quad (5.18)$$

onde, $\Psi_{\mathbf{k}}$ é o vetor adjunto do sistema acoplado e u_{fsi} é a resposta estrutural ou acústica do nó i .

As expressões (5.16) e (5.18) foram implementadas na linguagem Fortran, para calcular a sensibilidade da resposta vibroacústica em problemas acoplados fluido-estrutura, adotando x_n como parâmetros dos elementos de casca (espessura), placa (espessura) e viga (altura da seção transversal). Neste trabalho aplicação o termo da derivada parcial da função objetivo com relação as variáveis estruturais foi considerada nula, ou seja, para $\frac{\partial u_i}{\partial x_n} = 0$ em (5.12).

Capítulo 6

Resultados Numéricos

A primeira parte de este capítulo tem o objetivo de validar as implementações computacionais desenvolvidas. Apresenta-se uma análise dos testes numéricos realizados nas diferentes estruturas previamente estudadas, com a finalidade de validar as implementações computacionais para o cálculo da resposta dinâmica e vibroacústica. Também é feita uma comparação dos métodos analíticos de análise de sensibilidade com o método das diferenças finitas, da resposta vibroacústica de um sistema acoplado.

Na segunda parte, apresenta-se a aplicação dos módulos implementados, tais como: resposta estrutural, resposta vibroacústica e análise de sensibilidade, em diferentes modelos de fuselagem de aeronaves.

Esta implementação foi desenvolvida, através da realização de módulos na linguagem de programação FORTRAN90, que foram incorporadas na base de rotinas já existentes no projeto computacional MEFLAB, programa em desenvolvimento no Departamento de Mecânica Computacional da Faculdade de Engenharia Mecânica da UNICAMP. Este software está sendo utilizado atualmente na realização de teses e dissertações no Departamento. O ambiente gráfico deste programa foi desenvolvido no programa comercial GID, que é uma plataforma flexível para pre e pos-processamento de aplicações baseadas em métodos de domínio tais como o método Elementos Finitos.

6.1 Validação computacional

Na sequência serão apresentados os exemplos usados para validação da metodologia utilizada. Na primeira parte serão analisados os testes para os elementos estruturais implementados,

seguindo com a validação do modelo do fluido. Também é feita uma comparação de um problema acoplado fluido-estrutura com trabalhos existentes. Finalmente os métodos de análise de sensibilidade analíticos são comparados com o método das diferenças finitas para um problema acoplado bidimensional.

6.1.1 Modelo das componentes estruturais

A validade das rotinas desenvolvidas no programa MEFLAB para o caso das componentes estruturais foi constatada através de testes realizados sobre elementos de vigas, placas e cascas, cuja teoria foi apresentada no capítulo 3. Estes testes consistiram em submeter os elementos a várias configurações geométricas e de carga possíveis para os tipos de estruturas que cada um deles pode ser submetido. As respostas estruturais foram comparadas com as obtidas no programa comercial para modelagem por elementos finitos ANSYS (ANSYS, 1990).

Para o caso do elemento de pórtico (viga), foi calculada a resposta harmônica, no plano e no espaço, sujeitas a carregamento de tração, flexão e torção. Todas as respostas coincidiram com as obtidas usando o programa ANSYS. Como estes resultados são clássicos e conhecidos, os mesmos não foram incluídos neste texto. Já que foram testadas várias configurações, foi possível concluir que a implementação dos modelos de viga de Euler e Timoshenko estão corretas para os casos dinâmicos.

Por outro lado, os modelos de placa e casca, foram testado através do caso de casca cilíndrica no espaço. Este teste serviu para avaliar tanto a performance do elemento com formas geométricas irregulares como a convergência deste em função do refinamento da malha. Na Figura 6.1 mostra-se a geometria e as condições de contorno adotadas.

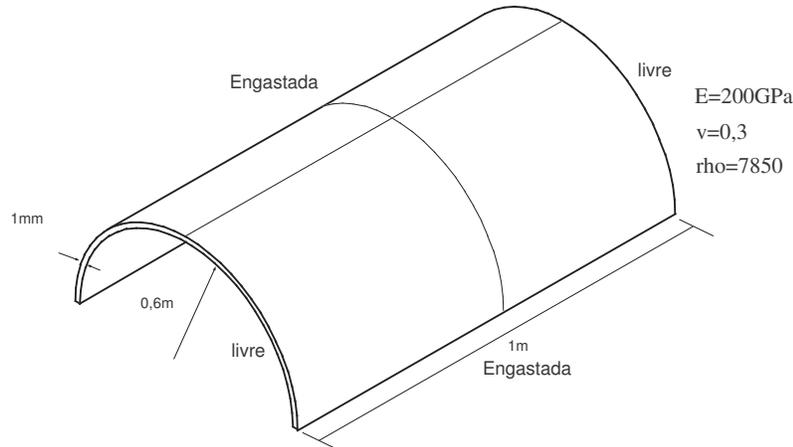


Figura 6.1: Geometria e condições de contorno da casca cilíndrica

Nas Figuras 6.2 e 6.3, mostra-se uma comparação entre os valores das seis primeiras frequências naturais da casca cilíndrica para malhas com 64 (8 elementos na direção longitudinal x8 elementos na direção circunferencial) e 400 elementos (20 elementos na direção longitudinal x20 elementos na direção circunferencial) respectivamente, calculadas usando MEFLAB para o modelo de placa fina de Kirchhoff (K) e MEFLAB para o modelo de placa espessa de Reissner-Mindlin (R), comparadas com as frequências obtidas no programa ANSYS calculadas para uma malha refinada de 1600 (40 elementos na direção longitudinal x40 elementos na direção circunferencial) elementos SHELL63. Nota-se que para esta aplicação de casca fina (1mm) o modelo de Kirchhoff produz resultados mais próximos aos obtidos com ANSYS do que os obtidos usando casca espessa. Estas diferenças são diminuídas com o refinamento da malha, como mostram as figuras 6.2 e 6.3.

No programa MEFLAB os valores das frequências naturais, são aproximados a partir da avaliação da resposta dinâmica. Esta avaliação é feita usando-se uma estratégia de passo variável, onde é feito um refinamento do passo de frequência em termos das ressonância.

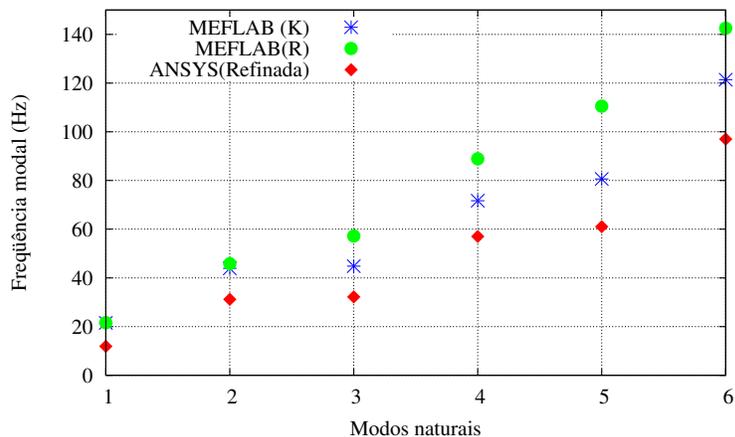


Figura 6.2: Primeiras 6 frequências naturais para malha com 64 elementos da casca cilíndrica simplesmente apoiada

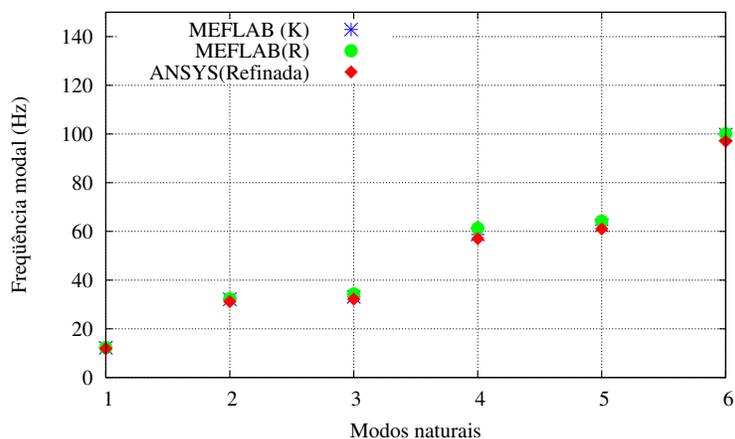


Figura 6.3: Primeiras 6 frequências naturais para malha com 400 elementos da casca cilíndrica simplesmente apoiada

A Tabela 6.1 mostra os valores de frequências naturais calculadas da casca cilíndrica usando o MEFLAB com modelos de Kirchhoff (K) e Reissner (R). Comparando-se os valores calculados, com os obtidos pelo programa ANSYS para uma malha de 1600 elementos, refinada e convergida, tiveram-se valores máximos de erros relativos de 3.3% usando elementos de casca fina e 7.5% usando elementos de casca espessa, para a malha de 400 elementos. Estes erros serão diminuídos com o refinamento da malha para o cálculo da resposta usando o MEFLAB. Nota-se que as diferenças nos valores entre as frequências calculadas com

a malha de 64 elementos são muito grandes quando comparadas com a resposta da malha refinada (ANSYS) o que significa que 64 elementos de casca são poucos para modelar este sistema. Isto se mostra com os valores calculados no ANSYS para esta malha na quarta coluna da Tabela 6.1.

Tabela 6.1: Comparação das frequências naturais da casca cilíndrica

Modo	64 elementos			400 elementos		ANSYS
	MefLab(K)	MefLab(R)	ANSYS	MefLab(K)	MefLab(R)	refinada
1	21, 5	21, 6	20, 6	12, 2	12, 3	11, 8
2	43, 9	45, 8	41, 6	32, 1	32, 4	31, 2
3	44, 8	57, 2	43, 0	33, 1	34, 3	32, 2
4	71, 7	88, 9	67, 7	58, 7	61, 3	57, 0
5	80, 6	110, 5	75, 3	62, 5	64, 2	60, 8
6	121, 4	142, 5	112, 0	99, 8	100, 1	97, 0

6.1.2 Modelo fluido

Os resultados obtidos no MefLab, na modelagem do domínio fluido com elementos hexaédricos de 8 nós (H8), foram comparados com resultados obtidos analiticamente (Blevins, 1995) e com ANSYS. O problema testado consiste em uma cavidade acústica de dimensões $4 \times 4 \times 10$ em m , com condição de superfície livre (pressão zero) em um dos extremos. O fluido é o ar com velocidade de propagação do som igual a 343 m/s e a cavidade foi discretizada em 512 elementos (H8). A figura 6.4 e a Tabela 6.2 mostram as primeiras oito frequências naturais calculadas para este problema. Nota-se dos resultados mostrados a correspondência satisfatória entre os resultados numéricos e analíticos.

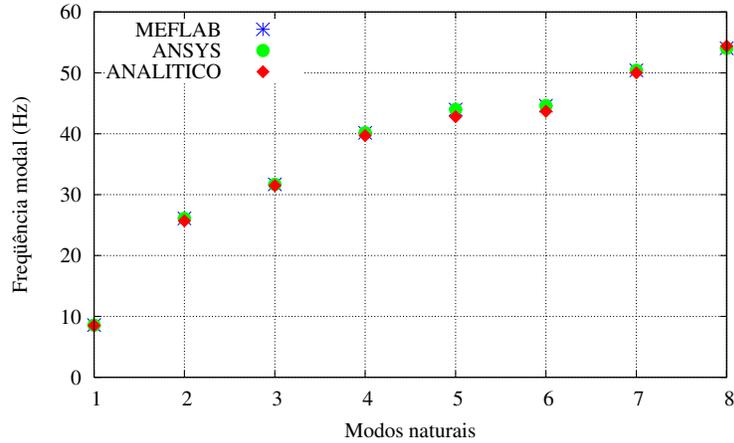


Figura 6.4: Primeiras 8 frequências naturais de uma cavidade acústica com superfície livre em um dos extremos

Tabela 6.2: Comparação das frequências naturais da cavidade acústica

MODO	MefLab	ANSYS	ANALITICO
1	8,5	8,5	8,5
2	26,1	26,1	25,7
3	31,6	31,6	31,5
4	40,1	40,1	39,7
5	44,0	44,0	43,0
6	44,6	44,6	43,7
7	50,4	50,4	50,0
8	54,0	54,0	54,4

Usando a malha de fluido anterior o valor máximo de erro relativo para oito frequências analisadas foi de 2.7% entre os valores das frequências obtidas usando MefLab e as obtidas analiticamente. Os resultados obtidos no MefLab são idênticos aos obtidos pelo programa ANSYS.

6.1.3 Modelo acoplado fluido-estrutura

Com o propósito de validar os modelos e métodos de solução implementados para problemas acoplados fluido-estrutura foram analisados e comparados os resultados obtidos usando MefLab, para o problema tridimensional mostrado na Figura 6.5.

Este problema é descrito por Pavanello, 1991 e consiste em uma placa fina, engastada em uma das extremidades, submersa em um reservatório de água. A Figura 6.5 mostra o

modelo por elementos finitos utilizado e a tabela 6.3 descreve as dimensões e características dos domínios acoplados.

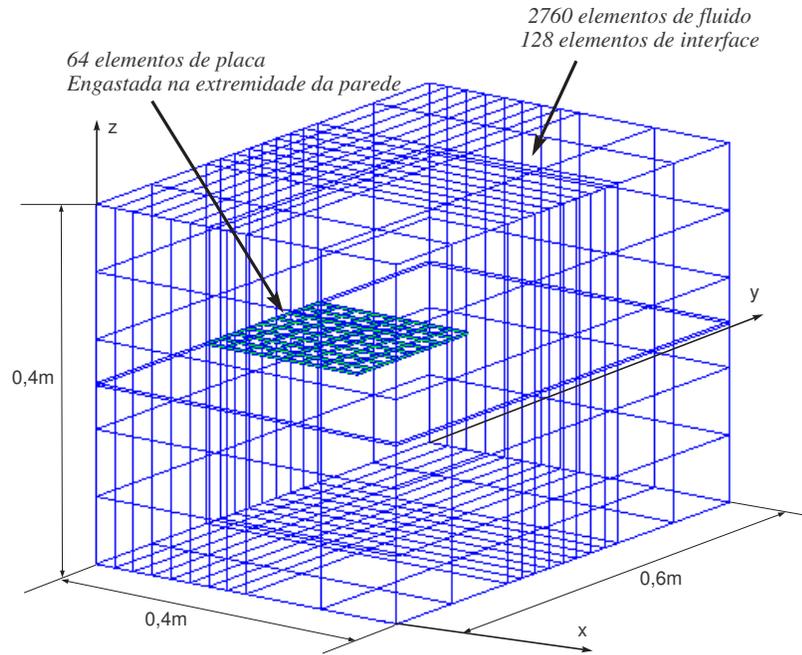


Figura 6.5: Malha problema acoplado fluido-estrutura (placa-cavidade)

Tabela 6.3: Propriedades e constantes dos domínios acoplados

Característica	Estrutura	Fluido
Dimensões	$A = 0,2 \times 0,2 \text{ m}^2$, $h = 2,9 \times 10^{-3} \text{ m}$	$V = 0,4 \times 0,6 \times 0,4 \text{ m}^3$
Módulo de Young	200 GPa	—
Densidade	7860 kg/m ³	1000 kg/m ³
Poisson	0,3	—
Velocidade do som	—	1540 m/s

O modelo tridimensional consiste em 64 (8x8) elementos de placa de Kirchhoff ou Reissner, 128 elementos de interface e 2760 elementos hexaédricos para modelar o fluido. Os resultados obtidos com o programa MefLab para as frequências naturais e modos de vibração são comparados com os resultados numéricos e experimentais obtidos em Pavanello, 1991.

Observa-se nas tabelas 6.4 e 6.5 os valores das 5 primeiras frequências naturais do problema. Na Tabela 6.4 mostra-se o resultado para da placa desacoplada, usando os diferentes modelos de placa implementados e os obtidos experimentalmente em Pavanello, 1991. Na

Tabela 6.5 são comparados os resultados para a placa submersa na água, usando-se as diferentes técnicas de implementação, explicadas na seção 4, para acoplamento dos graus de liberdade de translação e de translação e rotação para o segundo e uma placa modelada com a teoria de Kirchhoff. Mostra-se nesta última tabela os resultados para duas condições de contorno diferentes para o domínio fluido, respectivamente por:

- C1 = Parede rígida em $x = 0, 0, 4$; $y = 0, 0, 6$ e $z = 0$; $p=0$ em $z = 0, 4$.
- C2 = Parede rígida em $x = 0$ e $z = 0$; $p=0$ em $x = 0, 4$; $y = 0, 0, 6$ e $z = 0, 4$.

Tabela 6.4: Freqüências naturais da estrutura desacopladas

MODO	Freqüências Secas			
	MEDIDO	ANALÍTICO	MefLab (Kirch)	MefLab (Reiss)
1	60, 4	61, 5	61, 2	61, 2
2	146, 0	150, 2	149, 8	150, 0
3	369, 0	377, 5	376, 2	376, 2
4	484, 0	481, 4	478, 2	480, 0
5	536, 0	547, 9	545, 4	548, 0

Tabela 6.5: Freqüências naturais do problema acoplado placa-cavidade

MODO	Freqüências Acopladas				
	MEDIDO	MefLab(C2)	MefLab(rot)(C2)	MefLab(C1)	MefLab(rot)(C1)
1	27, 9 – 29, 7	31, 8	32, 0	32, 8	31, 8
2	82, 6	96, 6	94, 7	99, 6	94, 8
3	194, 0	217, 1	204, 5	221, 6	203, 9
4	292, 0	336, 6	290, 3	345, 8	290, 4
5	321, 0	375, 0	307, 0	383, 5	307, 1

Nota-se na Tabela 6.5 a variação dos resultados devido à mudança das condições de contorno. Desta forma, as diferenças entre os valores de freqüências medidos e os obtidos numericamente podem ser causadas pela escolha de condições de contornos diferentes as usadas no trabalho de Pavanello, 1991. Como o objetivo principal deste trabalho é calcular a sensibilidade vibroacústica, este tipo de problemas acoplados fluido-estrutura não foi estudado com detalhe, e se faz indispensável uma comparação experimental dos resultados obtidos com o MefLab. O principal objetivo com este tópico é o de realizar o modelo acoplado como ferramenta necessária para a análise de sensibilidade.

Observa-se nas figuras 6.6 e 6.7 as formas dos primeiros 3 modos acoplados estruturais e em pressão, para as condições de contorno C1, encontrando correspondência com os perfis dos modos estruturais obtidos por Pavanello, 1991.

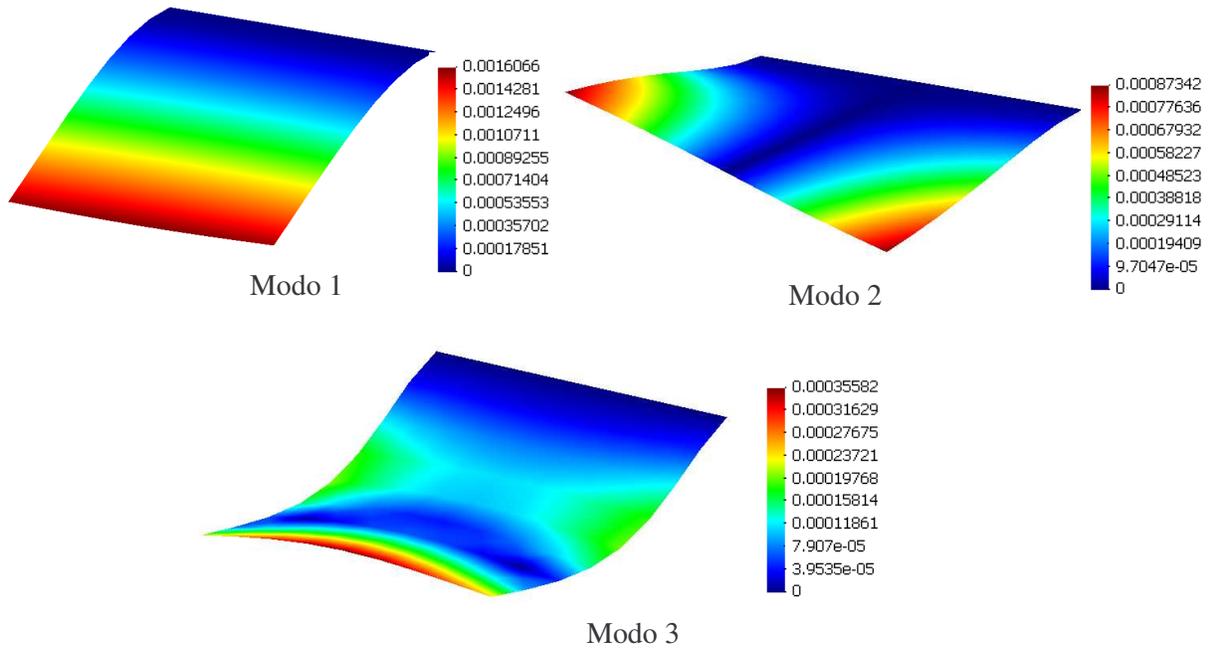


Figura 6.6: Modos estruturais (placa) acoplados do modelo placa-cavidade.

A Figura 6.7 mostra a distribuição das pressões para um plano de corte da cavidade em $y = 0, 3$.

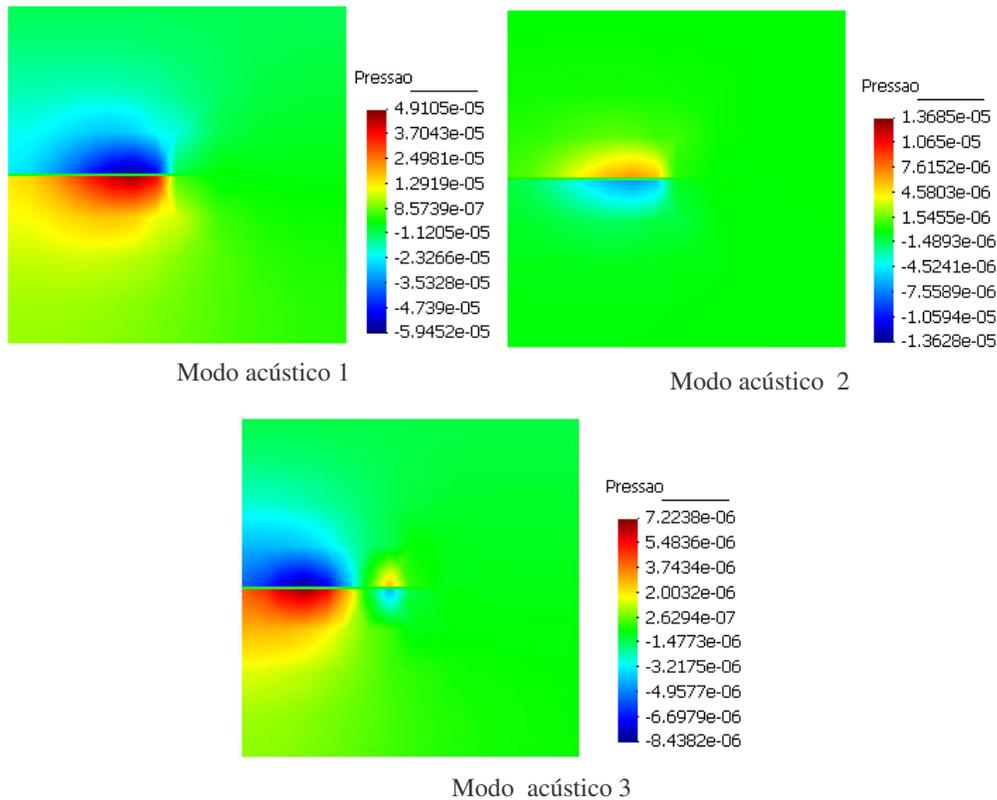


Figura 6.7: Modos acústicos acoplados do modelo placa-cavidade, plano $y = 0, 3$.

6.1.4 Validação dos métodos de análise sensibilidade

Para verificar a validade da análise de sensibilidade, comparam-se os resultados semi-analíticos (direto e adjunto) com os resultados obtidos pelo método das diferenças finitas (método iterativo). O problema usado para esta análise é mostrado na Figura 6.8 e consiste em uma cavidade acústica retangular bidimensional com o lado superior flexível modelada como viga de seção transversal retangular, simplesmente apoiada de $2m$ de comprimento. O domínio fluido é água, e são adotadas condições de contorno de parede rígida no fundo e nas laterais da cavidade. A malha adotada para este caso é mostrada na Figura 6.8 e as dimensões e propriedades assumidas são mostradas na Tabela 6.6.

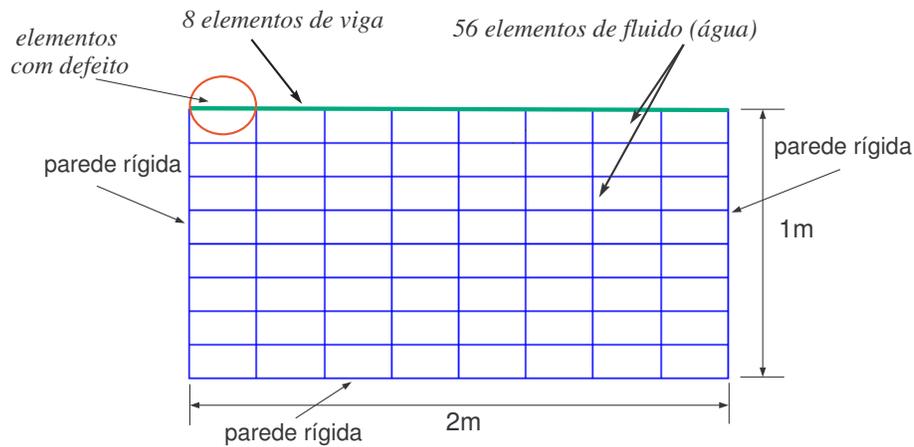


Figura 6.8: Malha para análise de sensibilidade do modelo cavidade retangular

Tabela 6.6: Propriedades e constantes do modelo acoplado viga-cavidade

Característica	Estrutura	Fluido(água)
Aérea seção	$1,6e - 5 \text{ m}^2$	—
Momento Inércia I_z	$8,53e - 11 \text{ m}^4$	—
Módulo de Young	$200e9 \text{ Pa}$	—
Densidade	7850 kg/m^3	1000 kg/m^3
Poisson	0,3	—
Velocidade do som	—	1500 m/s

Usando as rotinas implementadas no MefLab, foram calculadas a sensibilidade da resposta em frequência acústica na presença de um defeito estrutural. A função de sensibilidade foi avaliada para um nó específico, variando-se as frequências de análise entre 1 e 8 Hz, que é uma faixa que inclui três ressonâncias do sistema acoplado. O defeito estrutural consiste na alteração da altura da seção transversal do elementos de viga marcado com circulo na Figura 6.8. A Figura 6.9 mostra as funções sensibilidade calculadas usando os métodos analíticos e das diferenças finitas.

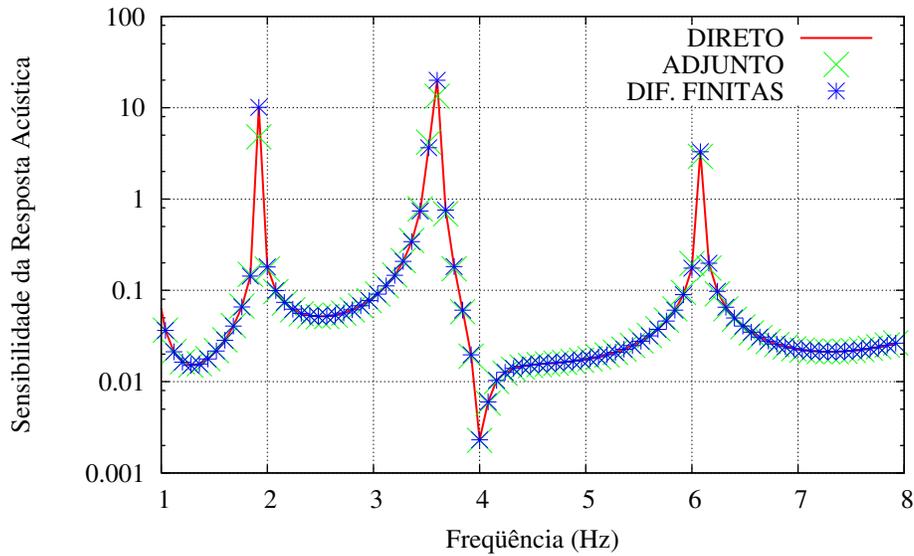


Figura 6.9: Sensibilidade da resposta acústica à modificação da altura da seção transversal do um elemento estrutural para o problema de caixa bidimensional.

Observa-se uma boa concordância entre os resultados analíticos e aqueles obtidos por diferenças finitas. No cálculo de diferenças finitas adotou-se uma variação de altura da seção transversal da viga com defeito de 1%, o que se mostrou suficientemente pequeno para a convergência desta técnica, sem demonstrar instabilidade numérica devido aos erros de truncamento.

Os testes preliminares mostraram que as implementações baseadas nos métodos semi-analíticos fornecem bons resultados quando comparados com a técnica de diferenças finitas. Isso demonstra a precisão dos métodos e a validação das implementações efetuadas.

Uma análise do custo computacional relativo dos métodos semi-analíticos e das diferenças finitas foi efetuado, mostrando-se na Tabela 6.7 os tempos de processamento dos métodos semi-analíticos, relativos aos tempos usados como o método das diferenças finitas (tempo-diferenças finitas/tempo-métodos semi-analíticos) usados para calcular a sensibilidade acústica do problema da cavidade bidimensional mostrada na Figura 6.8, variando-se o número de funções objetivo f (resposta acústica) e o número de variáveis independentes n (número de elementos de viga com variação na altura da seção).

Tabela 6.7: Propriedades e constantes dos reforçadores e cavernas

Método	$f = 1$ e $n = 1$	$f = 10$ e $n = 1$	$f = 1$ e $n = 8$
Diferencias finitas	1	0,16	0,26
Direto	1	1	0,153
Adjunto	1	0,125	1

Note-se na tabela 6.7 que os métodos semi-analíticos tiveram maior eficiência computacional para todos os casos analisados. Também nota-se que para um número maior de funções objetivo, o método direto apresenta menor custo computacional. Por outro lado, se o número de variáveis x_n aumenta, o método adjunto é a melhor escolha para este caso. Um estudo mais específico do custo computacional, para malhas de diferentes ordens deve ser realizado, para confirmar a tendência encontrada no caso anterior.

6.2 Aplicação em fuselagens

A fuselagem de uma aeronave é formada por uma casca reforçada, referida como uma construção *monocoque* (Niu, 1988). Uma casca puramente monocoque é um tubo simples não reforçado cuja eficiência estrutural é baixa. Para suportar o revestimento, geralmente com espessura, bem fina, é necessário incluir reforçadores longitudinais e transversais no sistema.

Assim, uma fuselagem é uma estrutura que contém elementos de reforço longitudinais (reforçadores), elementos transversais (cavernas) e placas de fechamento externas. Os elementos longitudinais suportam a maior parte dos momentos fletores e forças axiais resultantes. A placa de fechamento da fuselagem suporta o cisalhamento resultante das forças transversais e torcionais e a pressão de cabina. As cavernas (*frames*) servem primeiramente para manter a forma da fuselagem, para reduzir o comprimento livre dos reforçadores e prevenir a instabilidade da estrutura. O carregamento se distribui nos reforçadores e no revestimento, e como consequência, as estruturas resultantes são construções leves.

Estes sistemas são muito eficientes para resistir às cargas de tração e cisalhamento no plano da casca, e deve ser reforçado para que os membros longitudinais e transversais suportem cargas de compressão e cargas normais ao plano da casca. As estruturas *monocoque* (Figura 6.10) são usadas como elemento representativo de uma fuselagem aeronáutica e se aplicam

ao estudo de falhas localizadas, para avaliação de flexibilidade no projeto, estudos sobre o controle de ruído interior, avaliação de novas técnicas de fabricação, estudo de propagação de trincas e tolerância ao dano.



Figura 6.10: Estrutura *monocoque*, modelo de fuselagem de aeronaves. adaptado de Grosveld, 1998.

Apresenta-se a seguir as características e propriedades dos modelos de fuselagem de aeronaves analisados ao longo desta seção, restringindo-se às estruturas do tipo *monocoque*, conforme ao descrito anteriormente.

6.2.1 Modelo bidimensional de fuselagem

Um modelo simplificado de fuselagem referente ao corte transversal, proposto por Sandberg and Goransson, 1988, com cavidade acústica interior é mostrado na Figura 6.11. A placa de fechamento externa da fuselagem é modelada com elementos de viga de Timoshenko e a cavidade acústica com elementos quadrilaterais analisados no capítulo 4, tanto para a interface quanto para o resto do fluido. O modelo contém 156 elementos estruturais, e 528 elementos para o fluido. As características e propriedades do modelo são mostradas na Tabela 6.8.

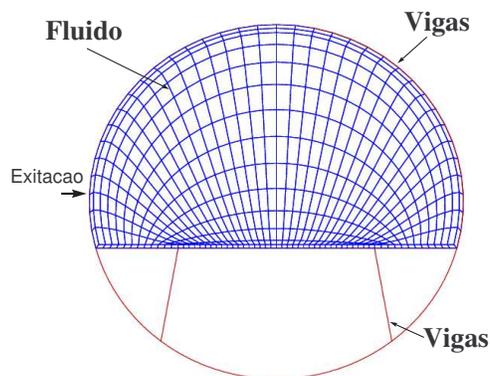
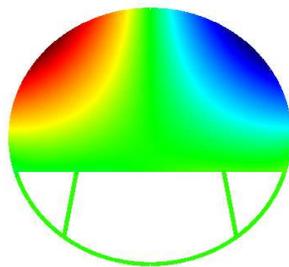
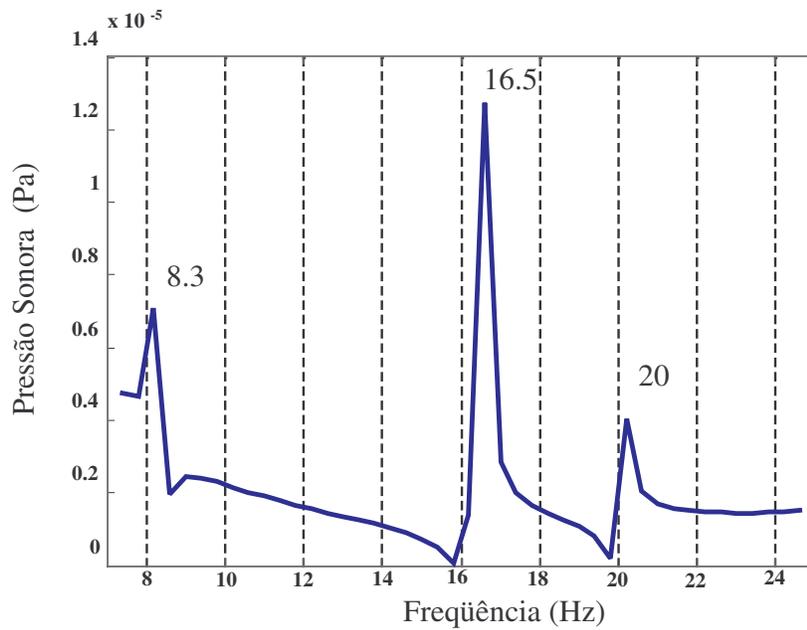


Figura 6.11: Modelo bidimensional de fuselagem.

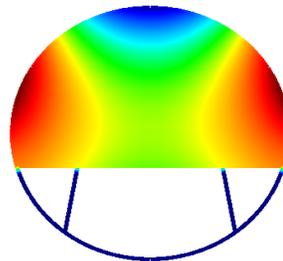
Tabela 6.8: Propriedades e constantes do modelo bidimensional de fuselagem

Característica	Estrutura	Fluido
Espessura do revestimento	$0,01\ m$	—
Aérea seção	$0,01\ m^2$	—
Momento Inércia I_z	$8,33e-8\ m^4$	—
Módulo de Young	$70e9\ Pa$	—
Densidade	$2700\ kg/m^3$	$1,2\ kg/m^3$
Poisson	$0,3$	—
Velocidade do som	—	$343\ m/s$

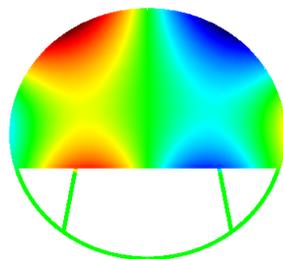
Nas figuras 6.12 e 6.13 são representadas a resposta em frequência acústica e estrutural respectivamente para o modelo considerando uma força pontual de excitação aplicada em um nó estrutural. Assim como a resposta para os três primeiros modos operacionais de vibração, acústicos e estruturais.



1º modo (8.3 Hz)



2º modo (16.5 Hz)

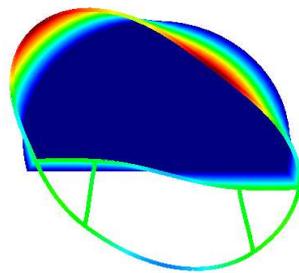
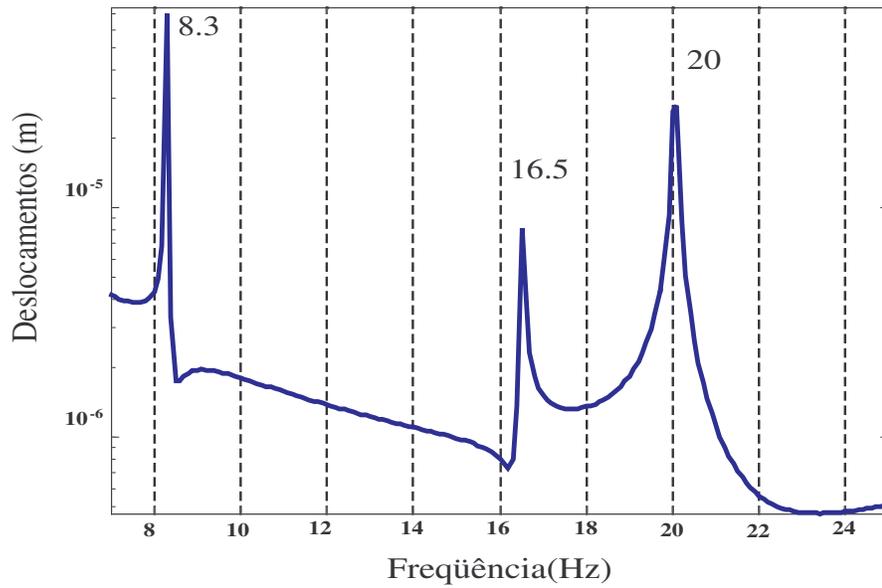


3º modo (20 Hz)

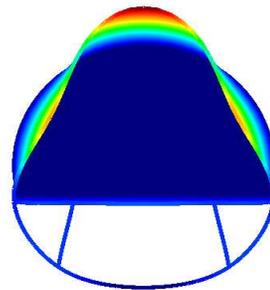
Figura 6.12: Resposta em frequência acústica e modos de vibração; modelo acoplado bi-dimensional de fuselagem.

Os mapas de cores da Figura 6.12 representam o campo escalar de pressão no interior da fuselagem, onde a cor azul representa os valores mínimos de pressão relativa calculados e a

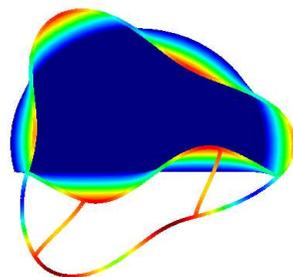
cor vermelha os valores máximos.



1º modo (8.3 Hz)



2º modo (16.5 Hz)

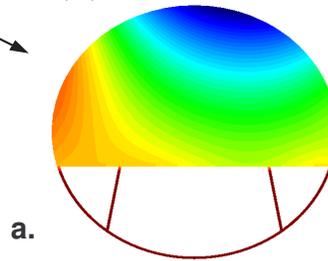
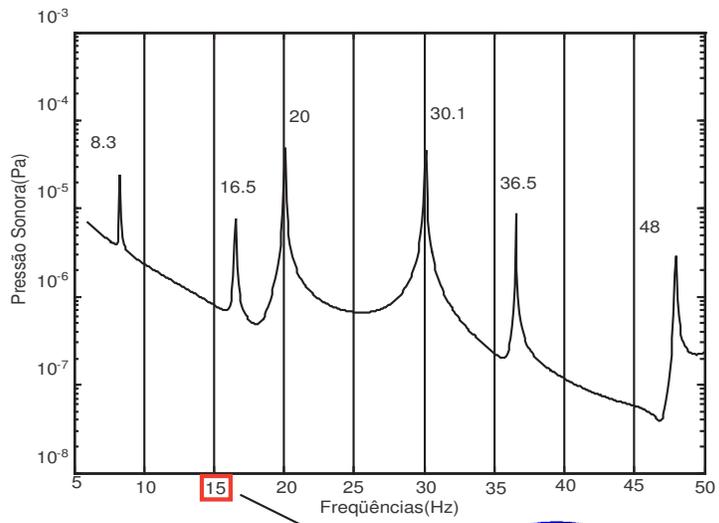


3º modo (20 Hz)

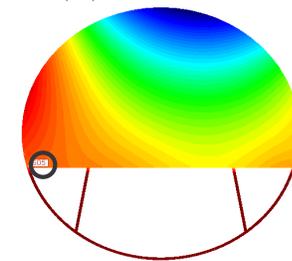
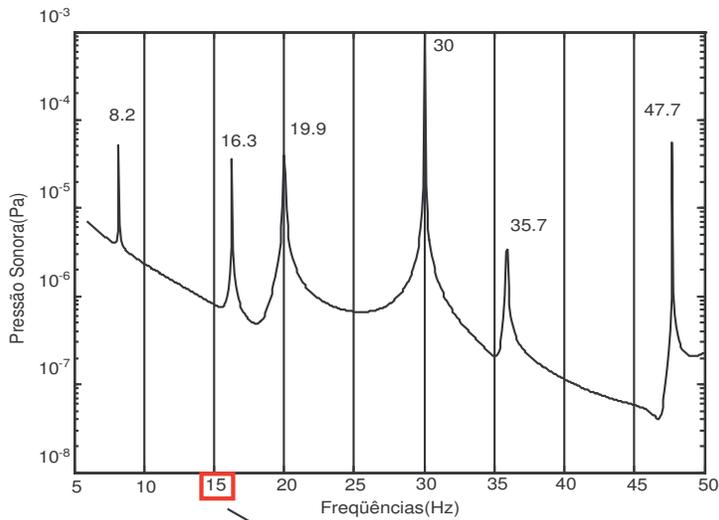
Figura 6.13: Resposta em frequência da parte estrutural e modos de vibração; modelo acoplado bi-dimensional de fuselagem..

Os três primeiros modos operacionais do modelo acoplado foram calculados para 8.3 Hz , 16.5 Hz e 20 Hz respectivamente, e aparecem nas mesmas frequências tanto no domínio fluido (Figura 6.12) como no domínio estrutural (Figura 6.13). Nota-se ainda uma correlação entre os valores máximos dos nós dos modos operacionais obtidos para o fluido e para estrutura, evidenciando o acoplamento fluido-estrutura.

As modificações estruturais, como aumento ou redução na altura da seção da viga por exemplo, causam mudanças na resposta vibroacústica do sistema estudado. Mostra-se nas figuras 6.14 e 6.15 as mudanças na função da resposta em frequência (FRF) acústica e estrutural devido a diminuição de 50% do valor da altura da seção transversal da viga marcada com um círculo nestas figuras. Nota-se a variação nos valores das frequências para as máximas amplitudes e a mudança no campo de pressão (6.14) e distribuição dos deslocamentos (6.15) para a frequência específica de 15 Hz .



a.



b.

Figura 6.14: FRF e campo de pressão interna com e sem defeito estrutural. a. Sem defeito, b. Com defeito

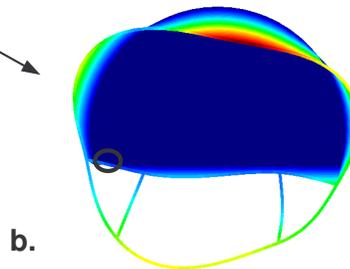
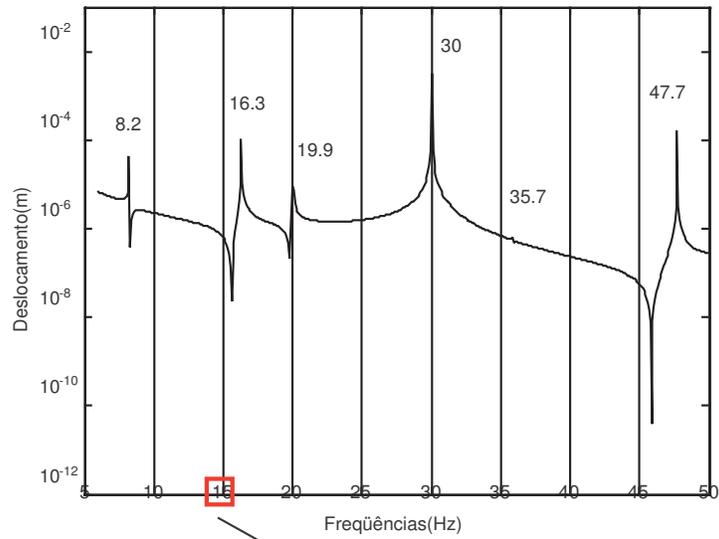
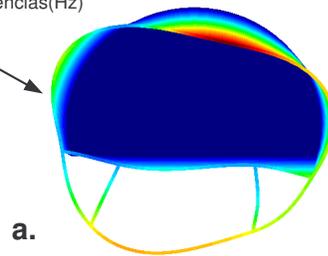
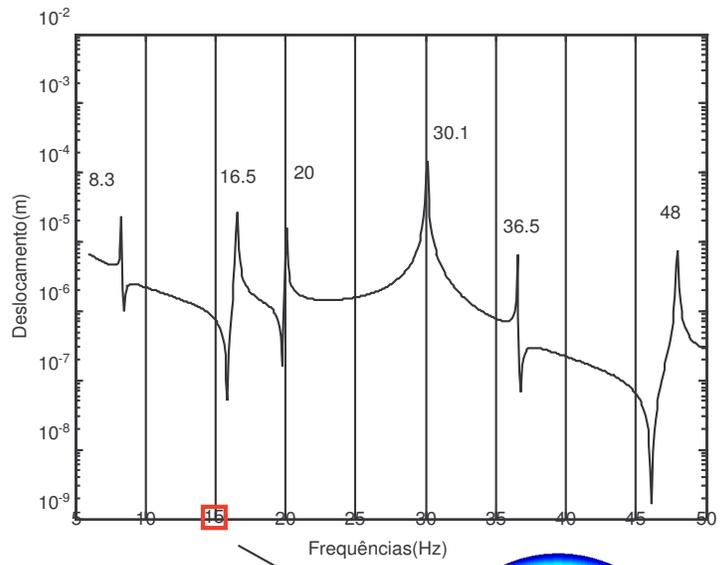


Figura 6.15: FRF e distribuição de deslocamentos na estrutura com e sem defeito estrutural. **a.**Sem defeito, **b.** Com defeito

Os resultados mostram que a análise direta da resposta, não permite estimar facilmente a influência dos defeitos, que alteram pouco a resposta do sistema.

Com a finalidade de descrever as alterações do comportamento do sistema, de uma forma mais objetiva, na presença de defeitos estruturais, foi desenvolvido o módulo de análise de sensibilidade da resposta, para o caso do modelo bidimensional de fuselagem. Desta forma, na Figura 6.16 apresenta-se a sensibilidade da resposta acústica de um nó do domínio fluido, cuja localização está demarcada com um quadro, sobre a malha da Figura 6.16. Neste caso, as curvas de sensibilidade são avaliadas na faixa de baixas frequências, para diferentes localizações de defeitos. O eixo de localização do defeito da Figura 6.16 representa o número de identificação do elemento de viga que possui o defeito. Com este resultado é possível determinar a localização do defeito que produz a maior sensibilidade na resposta de um determinado ponto acústico.

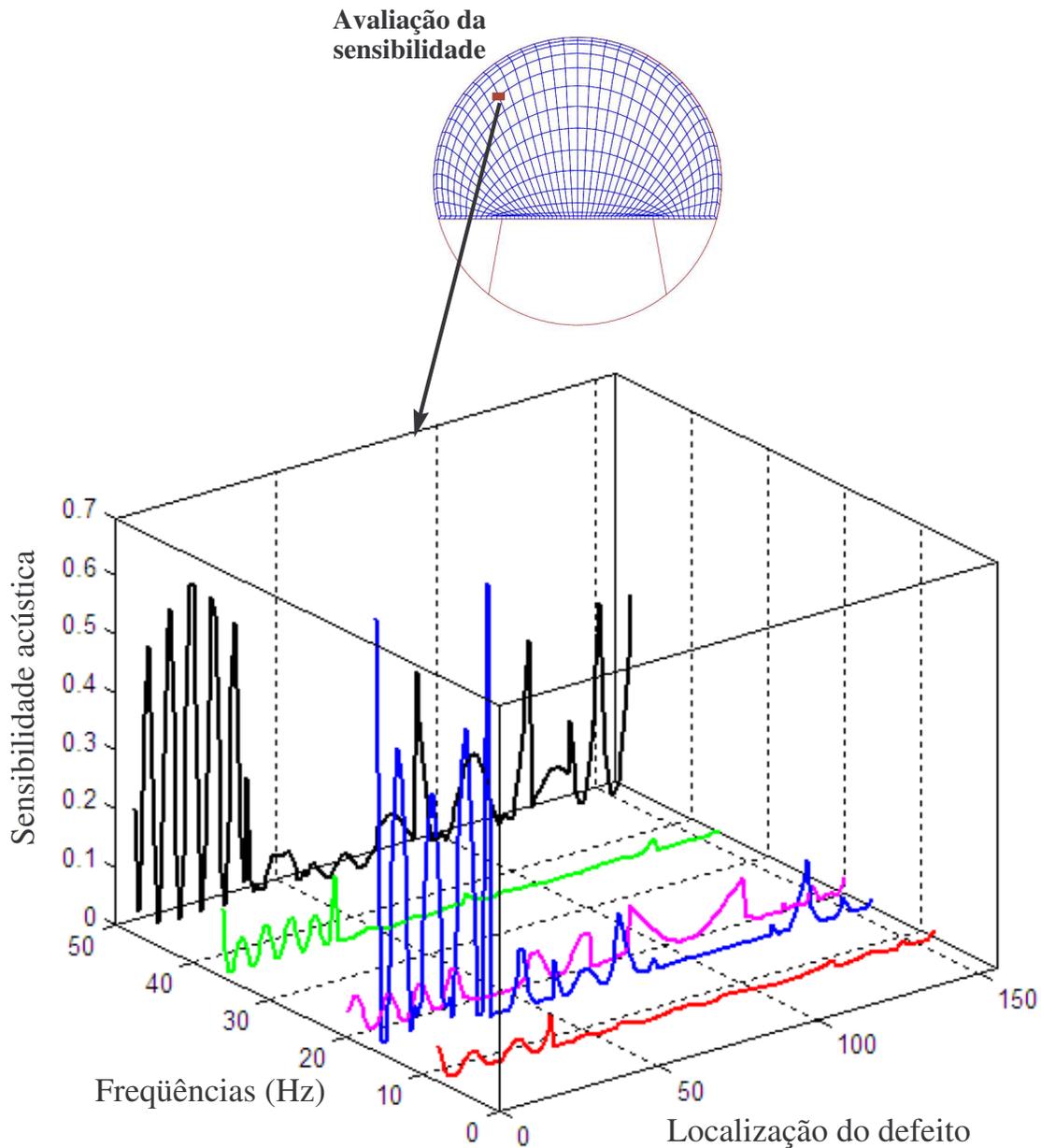


Figura 6.16: Sensibilidade acústica para diferentes localizações de defeitos do modelo bidimensional de fuselagem.

Por outro lado, também é possível calcular a distribuição de sensibilidade da resposta acústica do modelo, na presença de um único defeito, conforme mostrado na Figura 6.17, para diferentes frequências de excitação. Com este resultado é possível avaliar a influência da localização de um defeito na estrutura, sobre a distribuição da função de sensibilidade do

sistema.

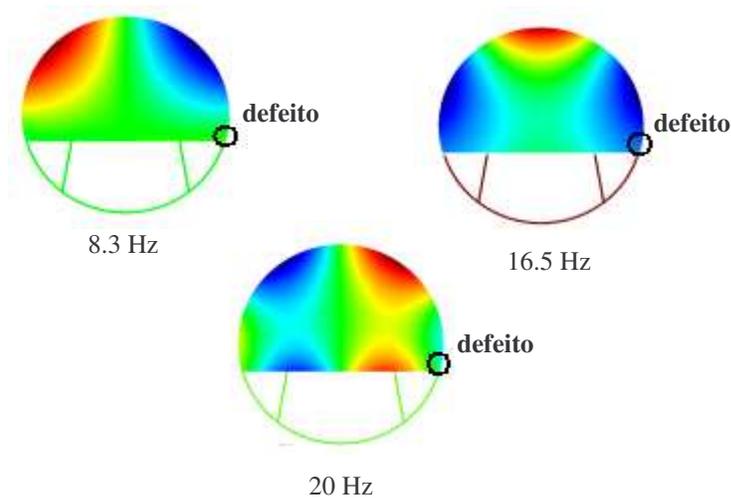


Figura 6.17: Distribuição da sensibilidade acústica na presença de um defeito do modelo bidimensional de fuselagem.

Nota-se, que a distribuição da sensibilidade acústica deste modelo possui a forma da distribuição de pressão, mostrada na Figura 6.12. Isto evidencia o fato de que próximo as frequências de ressonância, a distribuição da função de sensibilidade é próxima da forma do modo operacional.

6.2.2 Modelo tridimensional de fuselagem

O primeiro modelo tridimensional de fuselagem analisado, consiste em um monocoque de 1.2 *m* de raio e 3.6 *m* de comprimento, mostrado na Figura 6.18.a, cujo revestimento é modelado com elementos de casca e os reforçadores e cavernas com elementos de viga. A malha de elementos finitos é mostrada na Figura 6.18.b, e as propriedades e dimensões são descritas na Tabela 6.9. As características e condições de contorno adotadas no modelo são consistentes com modelos de fuselagem já estudados (Grosveld, 2002). Assim, as condições de contorno assumidas para este problema consistem na restrições de translação e rotação nos extremos do cilindro.

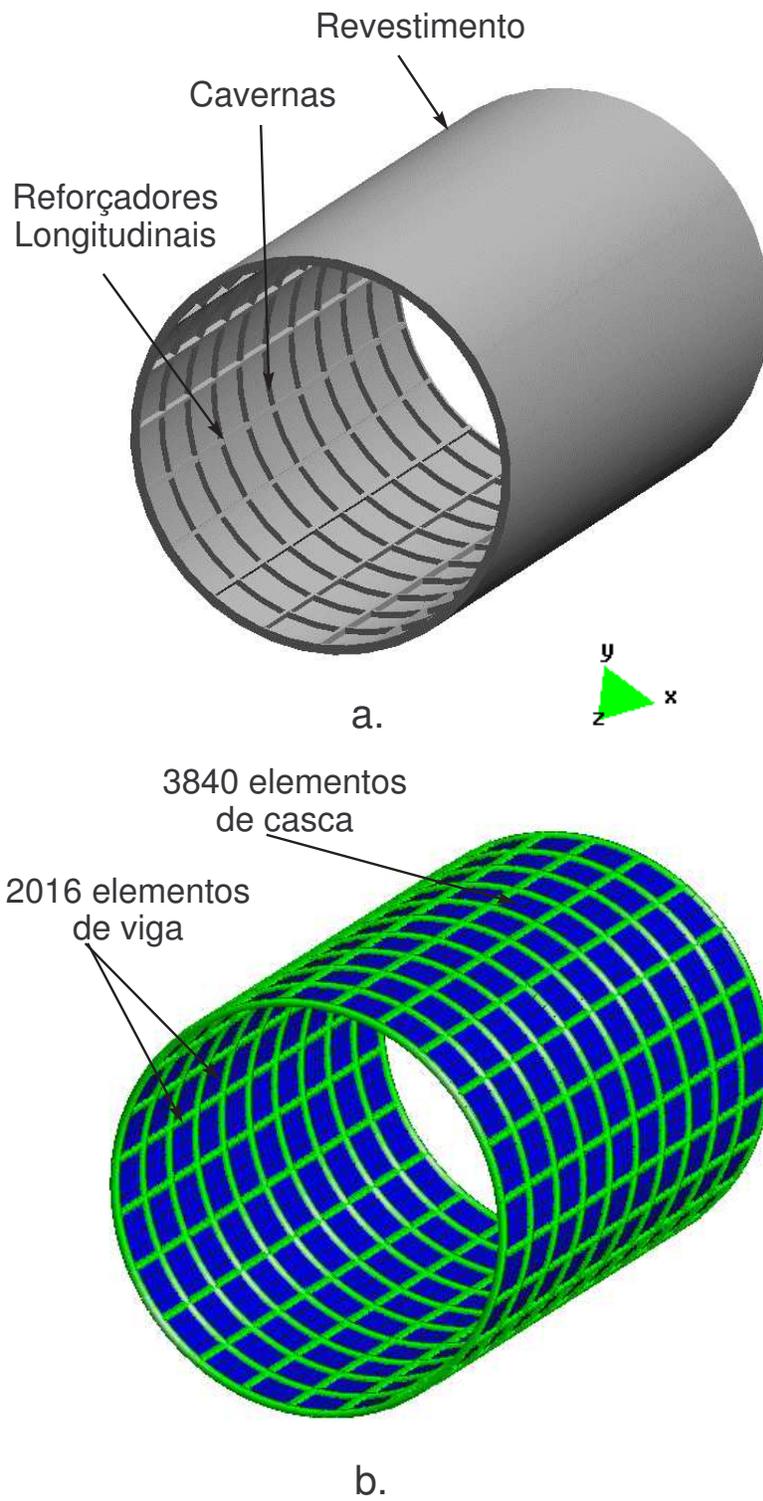


Figura 6.18: Modelo estrutural de fuselagem tridimensional.

Na tabela 6.9 as variáveis k_{ci} com $i = x, y, z$ são os coeficientes de cisalhamento nas direções especificadas da viga. Estes coeficientes depende do tipo de seção transversal das vigas que modelam os reforçadores. Neste modelo de fuselagem os reforçadores longitudinais forma modelados por vigas de seção transversal em T e as cavernas com vigas de seção transversal tipo caixão.

Tabela 6.9: Propriedades e constantes do modelo tridimensional de fuselagem

Característica	Estrutura	Fluido
Aérea seção reforçadores	$9,68 \times 10^{-5} \text{ m}^2$	—
I_{zz} reforçadores	$1,45 \times 10^{-8} \text{ m}^4$	—
I_{yy} reforçadores	$1,05 \times 10^{-8} \text{ m}^4$	—
I_{xx} reforçadores	$2,5 \times 10^{-8} \text{ m}^4$	—
k_{cz} reforçadores	2,38	—
k_{cy} reforçadores	4,01	—
Aérea seção cavernas	$2,27 \times 10^{-4} \text{ m}^2$	—
I_{zz} cavernas	$7,24 \times 10^{-8} \text{ m}^3$	—
I_{yy} cavernas	$7,24 \times 10^{-8} \text{ m}^3$	—
I_{xx} cavernas	$1,45 \times 10^{-7} \text{ m}^3$	—
k_{cz} cavernas	1	—
k_{cy} cavernas	1	—
Módulo de Young	$69e9 \text{ Pa}$	—
Densidade	2710 kg/m^3	$1,2 \text{ kg/m}^3$
Poisson	0,3	—
Velocidade do som	—	343 m/s

A Figura 6.19 mostra a resposta estrutural do modelo tridimensional de fuselagem nas frequências de 93.9 Hz , 101.7 Hz , 214.2 Hz , as quais correspondem as três primeiras frequências naturais, que foram encontradas entre 0 e 220 Hz .

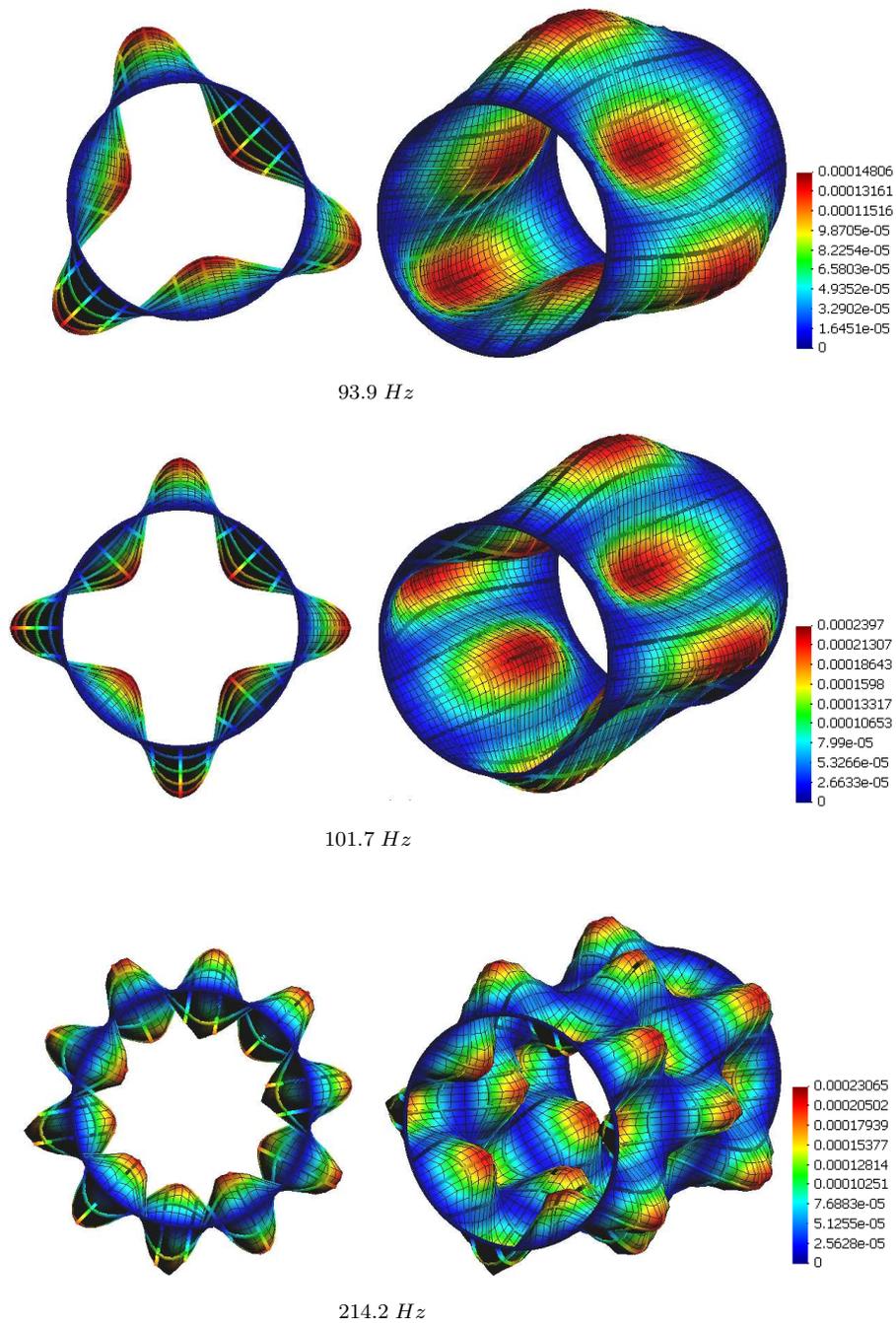


Figura 6.19: Primeiros modos estruturais da fuselagem tridimensional.

Usando-se os métodos de sensibilidade é possível calcular a sensibilidade da resposta do sistema na presença de algum defeito na estrutura. A Figura 6.20 mostra a distribuição de sensibilidade da resposta estrutural (deslocamentos) a um defeito localizado no elemento de

casca marcado com círculo. Este defeito consiste na variação da espessura de um elemento de casca, marcado com círculo na Figura 6.20.

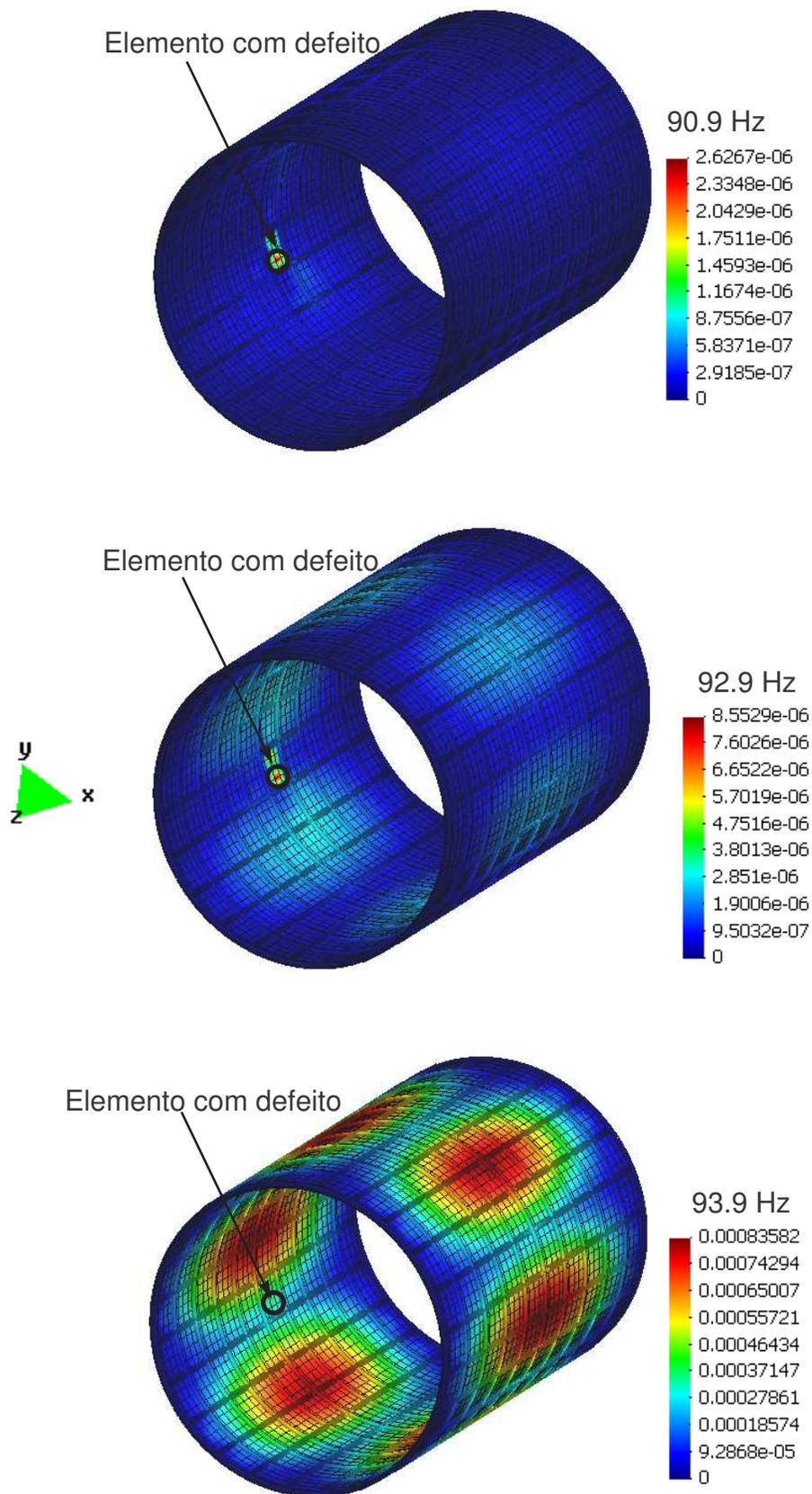


Figura 6.20: Sensibilidade da resposta estrutural.

São avaliadas a sensibilidade dos deslocamentos, para as frequências de 90.9 Hz , 92.5 Hz e 93.9 Hz . Nota-se para frequências diferentes da primeira frequência de 93.9 Hz , os maiores valores de sensibilidade são obtidos nas proximidades do elemento que possui o defeito. Por outro lado, quando a frequência é muito próxima de uma frequência natural a distribuição de sensibilidade é similar à distribuição do modo estrutural mostrado na Figura 6.19.

A Figura 6.22 mostra a sensibilidade da resposta estrutural do ponto marcado na Figura 6.21, na presença de defeitos localizados em quatro elementos distintos, na faixa de frequências de $0 - 200 \text{ Hz}$, para o modelo estrutural de fuselagem tridimensional.

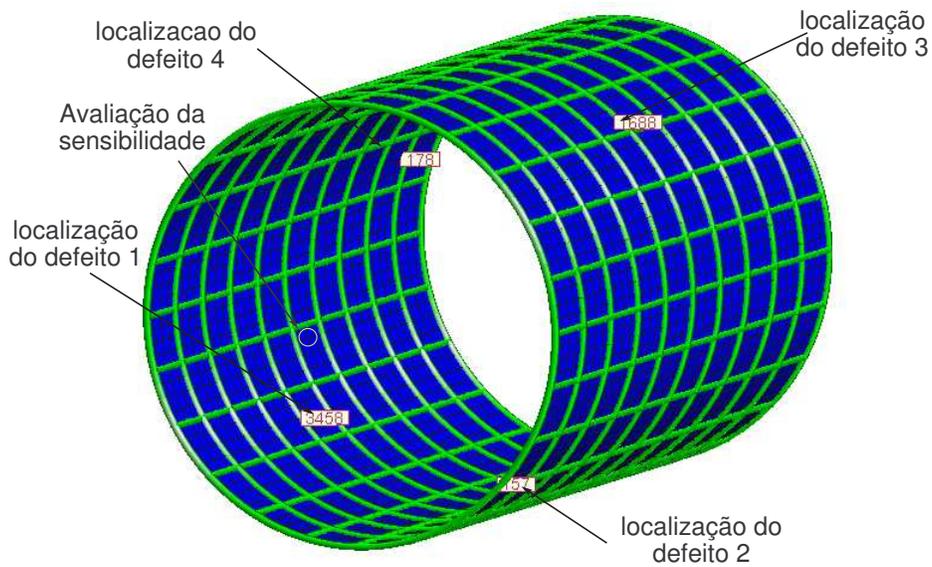


Figura 6.21: Localização de defeitos no modelo de fuselagem 3D.

Nota-se que a variação na amplitude da sensibilidade depende tanto do valor da frequência quanto da localização do defeito. Com a finalidade de estimar qual localização de defeito gera maior sensibilidade da resposta estrutural, é necessário o refinamento no valor das frequências (Δf). Mostrou-se este resultado como exemplo de aplicação dos módulos implementados para análise de sensibilidade.

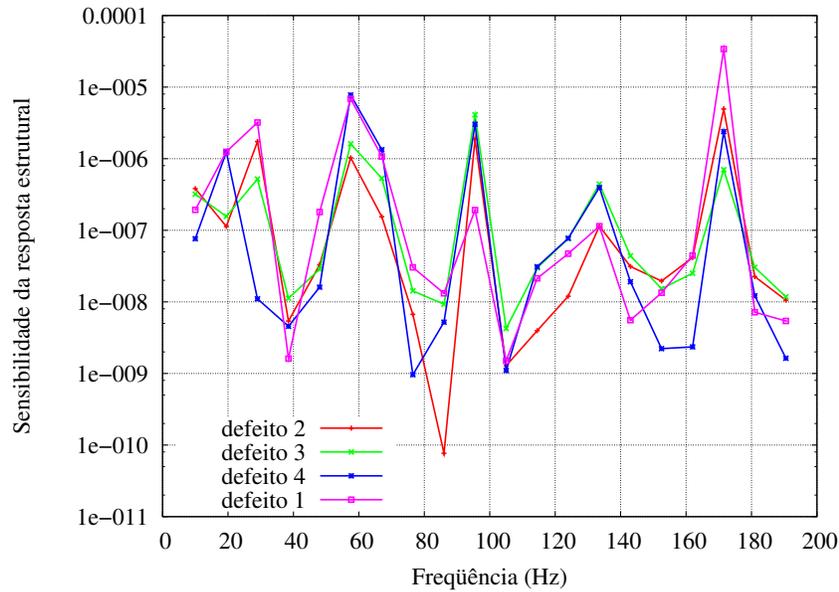


Figura 6.22: Sensibilidade da resposta estrutural do modelo de fuselagem 3D.

6.2.3 Modelo acoplado tridimensional de fuselagem

Este segundo modelo de fuselagem é desenvolvido com a finalidade de calcular a resposta vibroacústica do sistema acoplado (estrutura-ar interior). O modelo mostrado na Figura 6.23 consiste em um cilindro de 1.2 m de raio e 3.6 m de comprimento modelado com elementos de casca, reforçado com 6 cavernas, e 8 reforçadores longitudinais, modelados com elementos de viga, cujas propriedades são mostradas na Tabela 6.9. Os deslocamentos das cavernas externas foram fixadas, com vetor nulo, e um carregamento unitário pontual (mostrado na Figura 6.23) foi aplicado com a finalidade de calcular as funções de resposta em frequência e determinar na seqüência as frequências naturais e os modos operacionais, acoplados, de vibração.

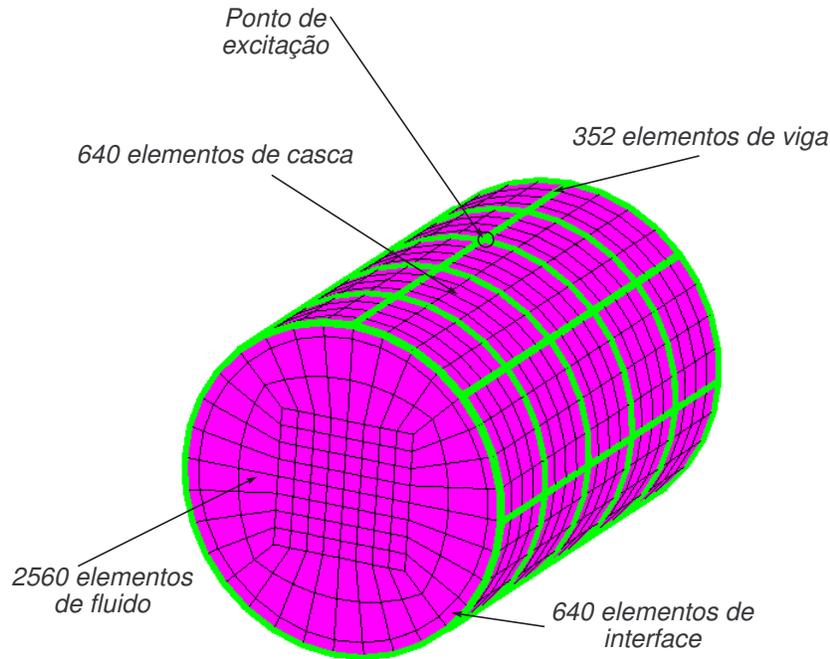


Figura 6.23: Modelo acoplado de fuselagem.

A Tabela 6.10 mostra os valores das primeiras 6 freqüência naturais dos domínios estrutural e acústico desacoplados, isto é, empregando a formulação apresentada nas seções (3) e (4.1) respectivamente. Ainda na Tabela 6.10 mostram-se os valores das primeiras 6 freqüências da estrutura casca-reforçadores acoplada com ar interior, implementando a formulação estudada na seção (4.4).

Tabela 6.10: Freqüências naturais do sistema acoplado (Hz)

MODO	ESTRUTURA	FLUIDO INTERIOR	SISTEMA ACOPLADO
1	102,2	84,2	82,0
2	124,6	140,4	93,8
3	145,6	167,0	95,2
4	163,2	169,8	121,2
5	167,2	177,4	145,2
6	168,6	194,0	158,4

As figuras 6.24 e 6.25 mostram a resposta vibroacústica do sistema acoplado, para as freqüência de 82 Hz e 121.2 Hz .

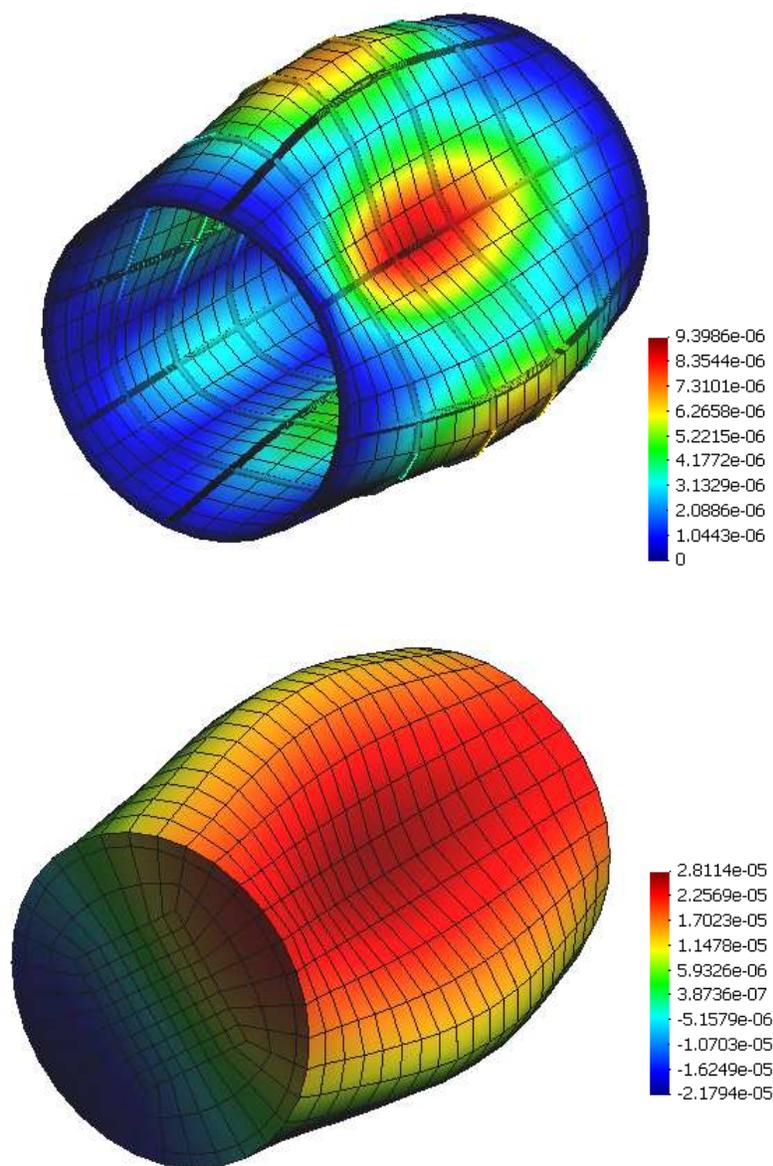


Figura 6.24: Resposta vibroacústica do modelo de fuselagem acoplado (82 Hz).

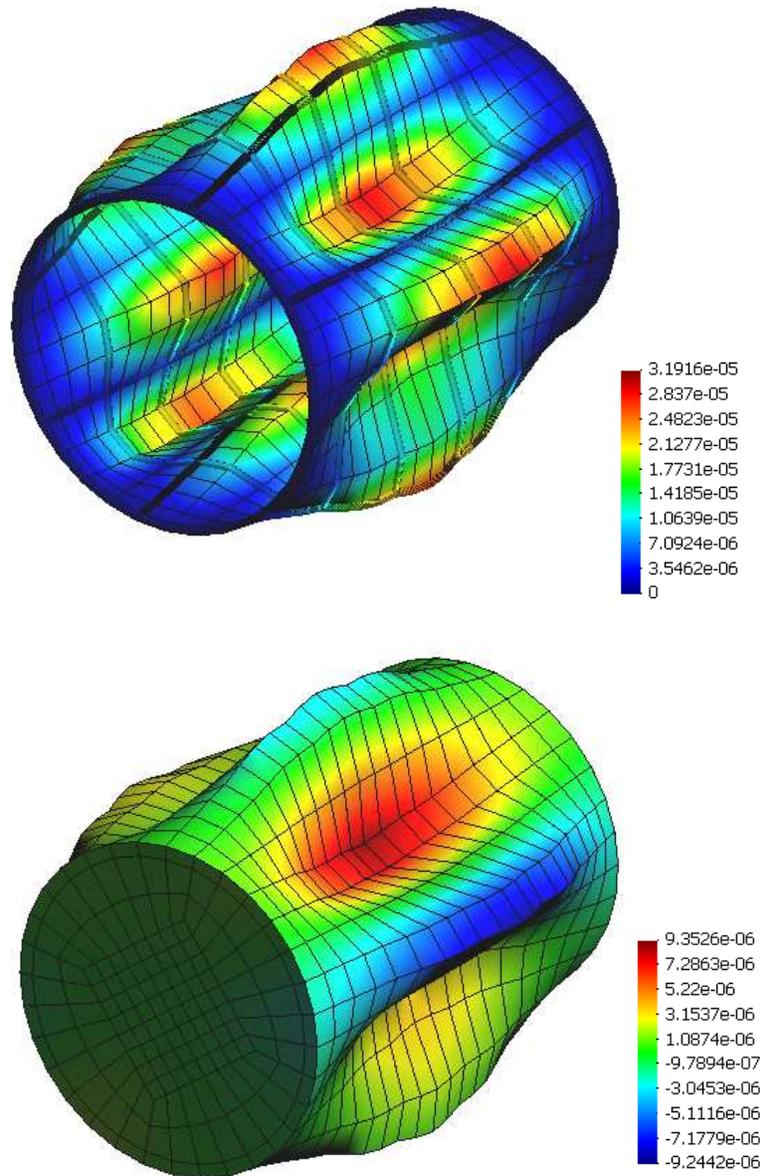


Figura 6.25: Resposta vibroacústica do modelo de fuselagem acoplado (121.2 Hz).

Fazendo-se uma análise de sensibilidade da resposta vibroacústica para um nó acústico do sistema de fuselagem acoplado, na presença de quatro localizações diferentes de defeitos estruturais, como mostrado na Figura 6.26, é obtida a magnitude da sensibilidade vibroacústica na presença de cada defeito, avaliada na faixa de frequências de 74 e 90 Hz , como mostrada na Figura 6.27. Nota-se na Figura 6.27 a tendência a encontrar maiores valores de sensibilidade

próximos à primeira frequência de ressonância do sistema acoplado (82 Hz).

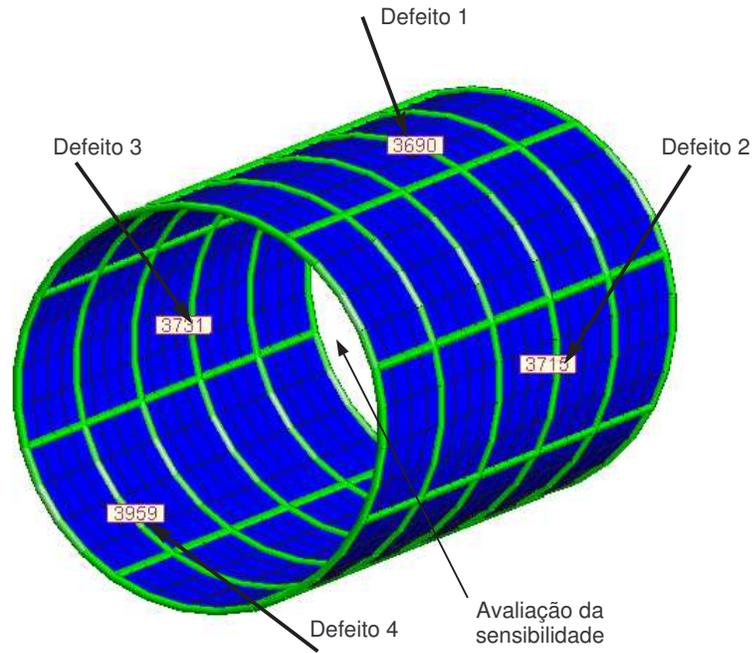


Figura 6.26: Localização de defeitos para análise de sensibilidade do modelo de fuselagem acoplado.

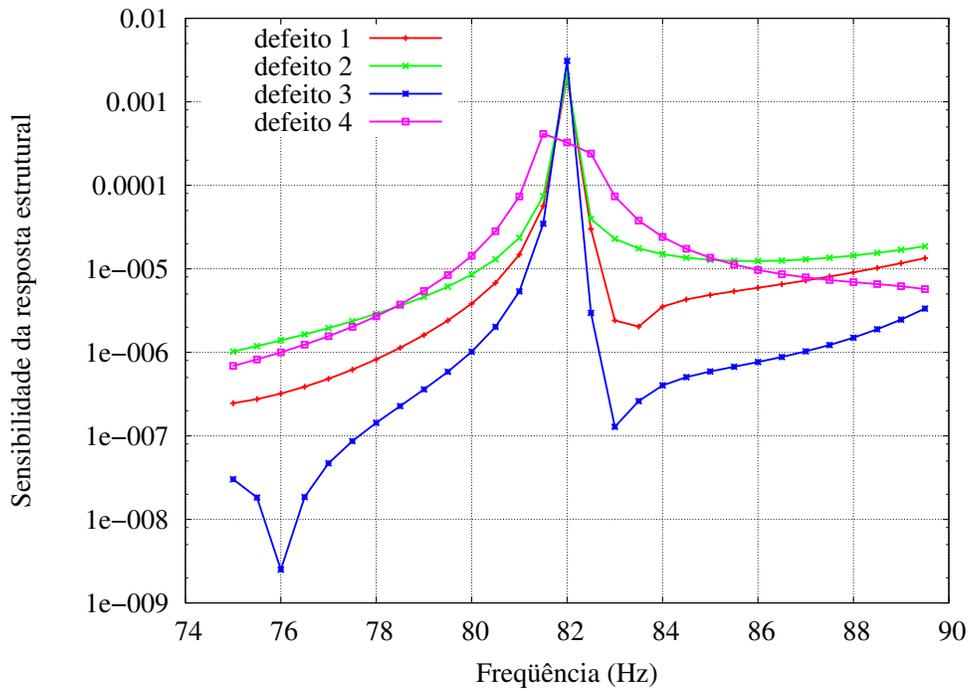


Figura 6.27: Análise de sensibilidade vibroacústica do modelo de fuselagem acoplado para quatro localizações de defeitos estruturais.

As Figuras 6.28 e 6.29 mostram a distribuição de sensibilidade da resposta estrutural (deslocamentos) na presença de um defeito na localização 1 nas frequências de 79.9 Hz e 80.7 Hz , respectivamente. Este defeito consiste na variação da espessura de um elemento de casca marcado.

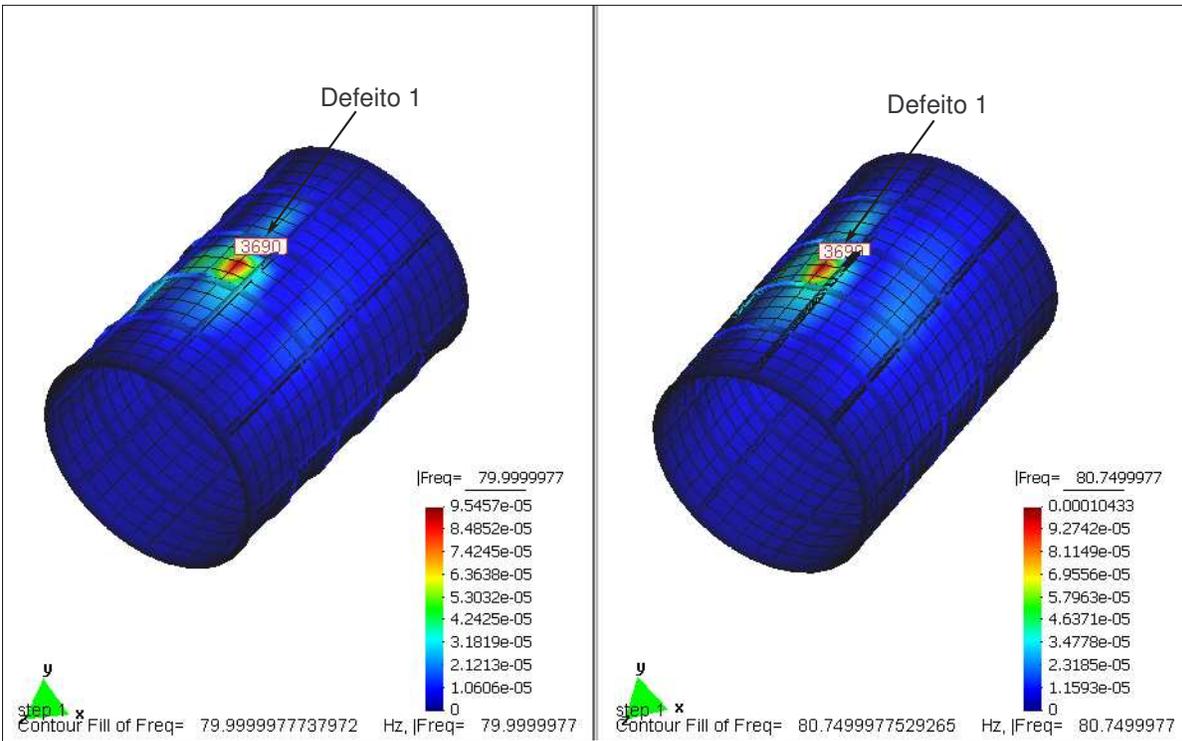


Figura 6.28: Distribuição da sensibilidade estrutural do modelo de fuselagem acoplado (79.9 Hz e 80.7 Hz)

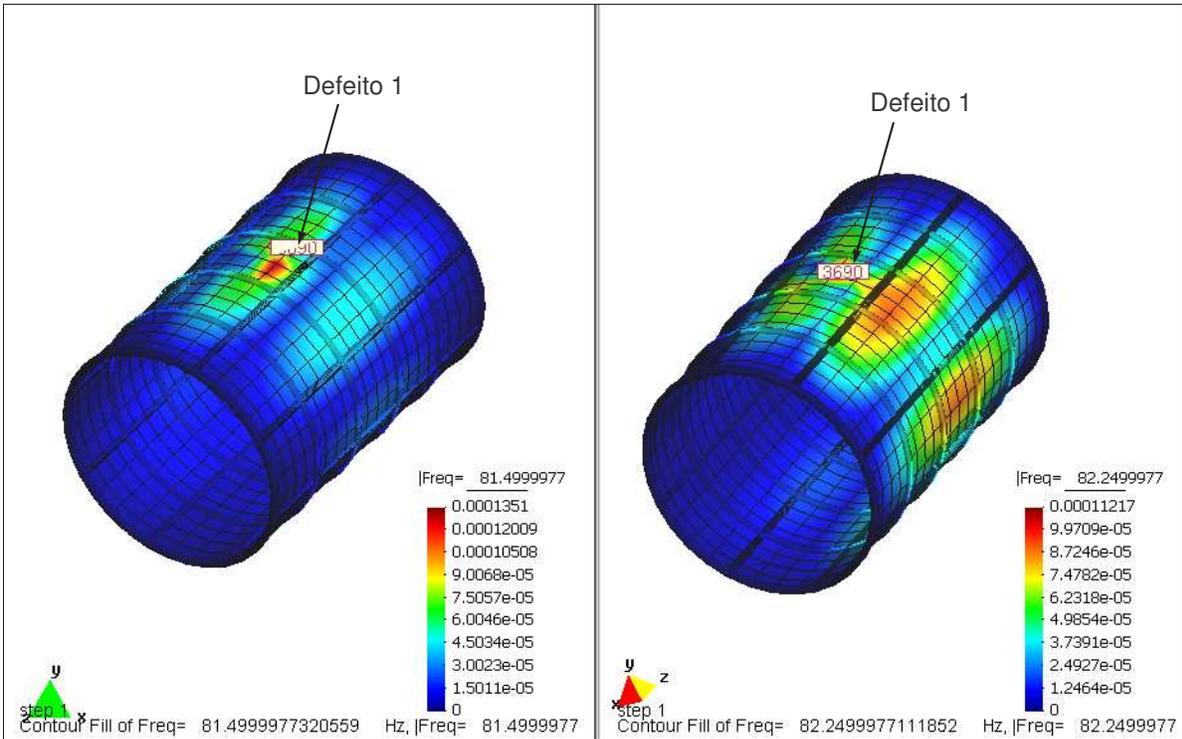


Figura 6.29: Distribuição da sensibilidade estrutural do modelo de fuselagem acoplado (81.5 Hz e 82.2 Hz)

Nota-se nas Figuras 6.28, 6.30, 6.31 e 6.29 a correspondência na distribuição da sensibilidade estrutural do sistema acoplado, com a sensibilidade obtida no modelo só estrutural de fuselagem. Isto é, os maiores valores de sensibilidade são obtidos nas proximidades do elemento que possui o defeito para frequências afastadas da frequência natural e quando a frequência é muito próxima de uma frequência natural a distribuição de sensibilidade é similar à distribuição de deslocamentos e pressões.

As Figuras 6.30 e 6.31 mostram a distribuição de sensibilidade da resposta acústica (pressões) na presença de um defeito na localização 1 nas frequências de 79.9 Hz e 80.7 Hz, respectivamente. Este defeito consiste na variação da espessura de um elemento de casca marcado.

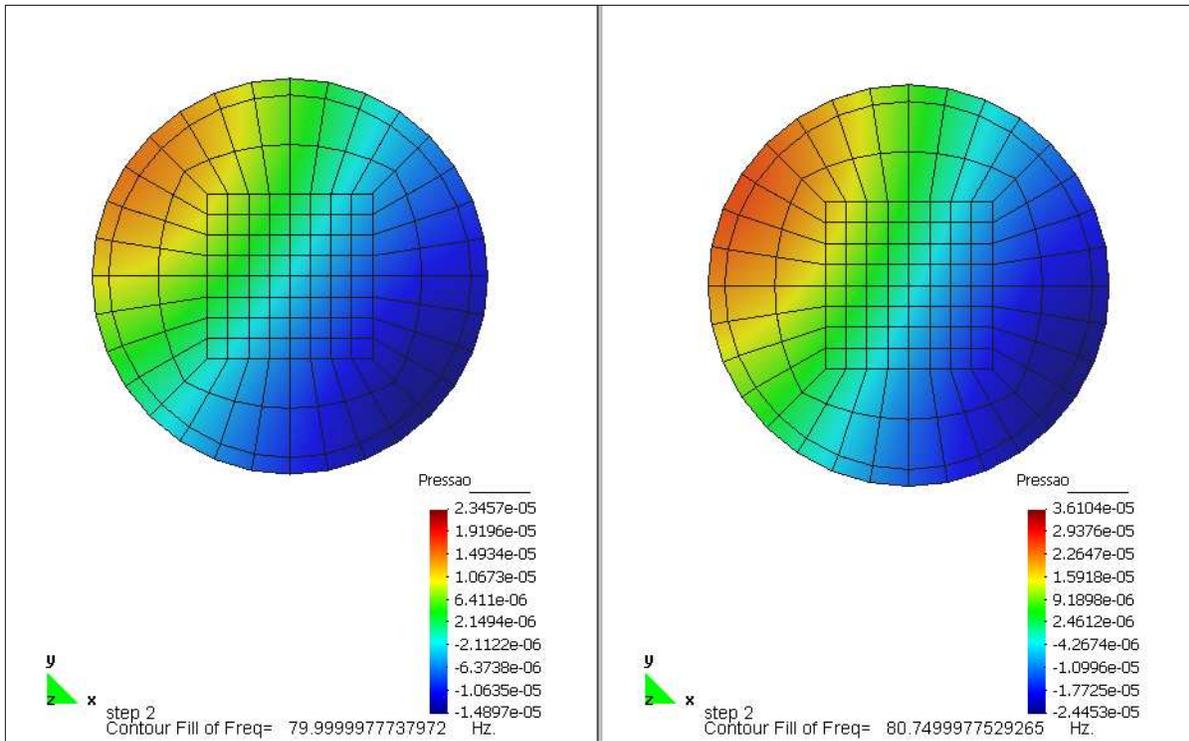


Figura 6.30: Distribuição da sensibilidade acústica do modelo de fuselagem acoplado (79.9 Hz e 80.7 Hz)

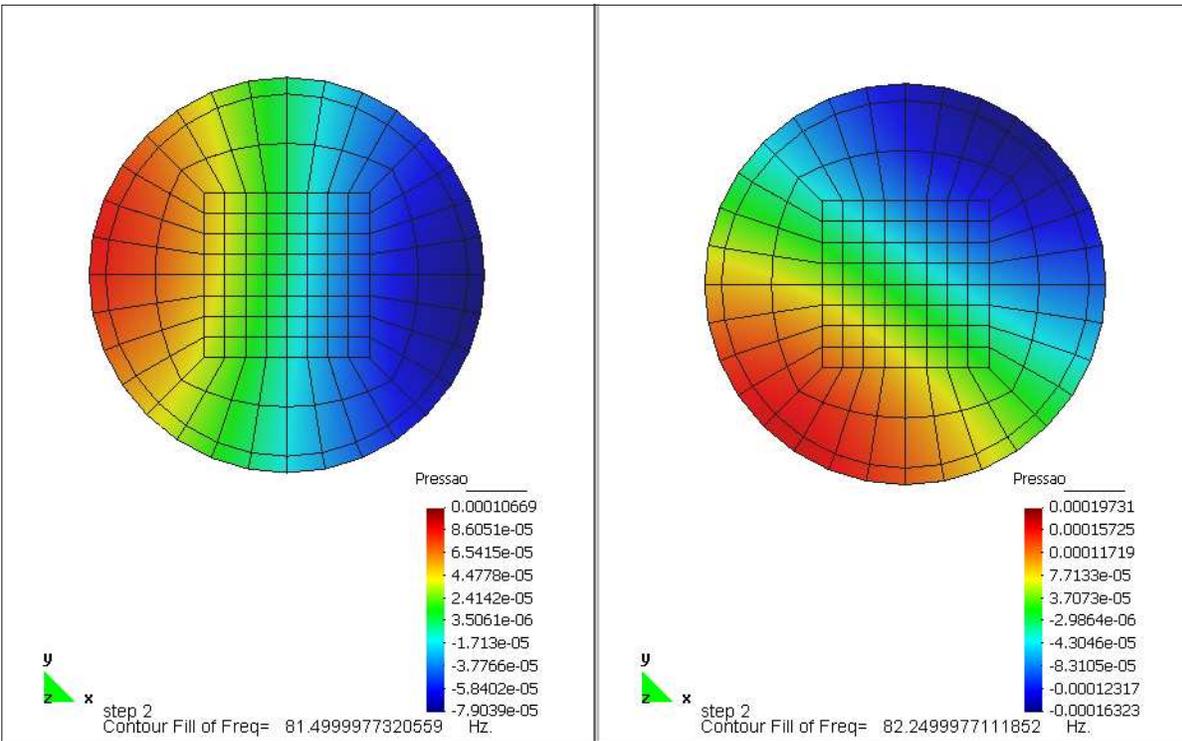


Figura 6.31: Distribuição da sensibilidade acústica do modelo de fuselagem acoplado (81.5 Hz e 82.2 Hz)

Capítulo 7

Conclusões e Sugestões

Neste capítulo são apresentadas as conclusões e discussões pertinentes ao desenvolvimento desta dissertação. Ao final do capítulo são feitas algumas sugestões de trabalhos futuros para um maior aprofundamento em alguns tópicos estudados.

7.1 Conclusões

Os resultados obtidos mostraram que existem mudanças no comportamento estrutural e acústico de um sistema acoplado fluido-estrutura sujeito a modificações em algum parâmetro estrutural.

O método numérico de Elementos Finitos, aplicado às formulações em deslocamentos e pressões ($u - p$), constitui uma ferramenta útil para a análise de sensibilidade vibroacústica de painéis aeronáuticos. Os deslocamentos de casca e viga tridimensionais foram estudados e implementados em um programa dedicado à análise estrutural usando o Método dos Elementos Finitos, que foi testado e validado no âmbito deste trabalho. Para o módulo de acoplamento fluido-estrutura usou-se a estratégia de interface conforme com a continuidade modal, o que permite obter bons resultados para o caso acoplado. Do ponto de vista de análise de vibroacústica de painéis reforçados, o simulador gerado é relativamente geral, restando a implementação de elementos de viga com seções não simétricas, para representar os reforçadores.

Usando-se o procedimento de análise de sensibilidade, apresentado nesta dissertação, é possível conhecer as mudanças na resposta de um sistema acoplado acústico-estrutural, produzidas pela presença de defeitos estruturais.

O método adjunto para análise de sensibilidade torna-se mais eficiente quando o número de defeitos localizados é maior que o número de funções objetivo ou sensibilidades a ser avaliadas. O método direto de análise de sensibilidade é mais aplicado para o caso de desejar avaliar varias funções objetivo, considerando poucos defeitos estruturais.

O procedimento para análise de sensibilidade apresentado, pode ser aplicado para detecção de falhas estruturais, através das diferenças na resposta vibroacústica, obtidas de forma experimental e numérica.

A implementação, usando a linguagem Fortran90, foi baseada em módulos de resolução baseados em matrizes esparsas, que permite a solução de problemas com um número considerável de graus de liberdade com boa eficiência computacional. As estratégias baseadas em matrizes não simétricas demandam muito esforço computacional em termos de memória e CPU, acarretando dezenas de horas para a solução de um problema de análise de sensibilidade de um sistema acoplado em uma faixa relativamente limitada de frequências.

7.2 Sugestões para trabalhos futuros

Para trabalhos futuros sugere-se a implementação de modelos de painéis aeronáuticos mais completos, incluindo-se os efeitos de amortecimento, através da modelagem de materiais poro-absorvedores e viscoelásticos, além de inclusão dos modelos de defeitos estruturais e de reparos, tipicamente encontrados neste tipo de estruturas.

Particularmente para a modelagem de estruturas aeronáuticas reparadas, podem-se desenvolver módulos para modelar os mecanismos de fixação cola-rebite e a modelagem de materiais compósitos na confecção de reparos estruturais.

Outros métodos de resolução, computacionalmente mais eficientes, como os métodos particionados para análise de problemas acoplados, podem ser usados para calcular resposta acústico-estrutural e análise de sensibilidade. Nesta linha de pesquisa duas vertentes podem ser encaminhadas: o uso de técnicas de redução modal e o uso de técnicas particionadas no domínio do tempo e da frequência.

A implementação aqui desenvolvida deverá ser validada com resultados experimentais em modelos representativos de painéis aeronáuticos, incluindo-se defeitos e reparos estruturais colados e rebitados.

Referências

- ANSYS, I. (1990). *ANSYS user's manual, Volumes I and II*.
- Barcelos, M. (2006). A schur-newton-krylov solver for steady-state aeroelastic analysis and design sensitivity analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics Engineering*, 195:2050–2069.
- Bathe, K. and Hahn, W. (1979). Transient analysis of fluid-structure systems. *Computers and structures*, 10:383–391.
- Bathe, K., Zhnag, H., and Wang, M. (1995). Finite-element analysis of incompressible and compressible fluid-flows with free surfaces and structural interactions. *Computers and structures*, 56(2-3):193–213.
- Bathe, K. J. (1982). *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- Belytschko, T. and Kennedy, J. (1976). Fluid-structure finite-element method for analysis of reactor safety problems. *Nuclear engineering and design*, 38:71–81.
- Belytschko, T. and Mullen, R. (1981). Two-dimensional fluid-structure impact computations with regularization. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 27:139–154.
- Belytschko, T. and Schumann, U. (1980). Fluid-structure interactions in light water-reactor systems. *Nuclear engineering and design*, 60:173–195.
- Bermudez, A. (1995). Finite-element vibration analysis of fluid-solid systems without spurious modes. *Siam journal on numerical analysis*, 32(4):1280–1295.

- Bermudez, A. (1998). Finite element analysis of compressible and incompressible fluid-solid systems. *Mathematics of computation*, 67:111–136.
- Bettess, P. (1978). Fluid-structure dynamics interaction and wave forces. an introduction to numerical treatment. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 13:1–16.
- Blevins, R. D. (1995). *Formulas for Natural Frequency And Mode Shape*. Krieger Publishing Company, Florida.
- Boily, S. and Charron, F. (1999). The vibroacoustic response of a cylindrical shell structure with viscoelastic and poroelastic materials. *Applied Acoustics*, 58:131–152.
- Buehrle, R. (2000). Finite element model development and validation for aircraft fuselage structures. In *18th International Modal Analysis Conference San Antonio, Texas*.
- Camargo, J. R. (2004). Análise comparativa e de desempenho de elementos finitos de placa. Master's thesis, Unicamp.
- Casas, W. J. P. (1998). *Concepção ótima de Sistemas Elasto-Acústicos Interiores Acoplados*. PhD thesis, Unicamp.
- Chen, H. C. and Taylor, R. L. (1990). Vibration analysis of fluid solid systems using a finite-element displacement formulation. *International journal for numerical methods in engineering*, 29:683–698.
- Choi, K., Shim, I., and Wang, S. (1997). Design sensitivity analysis of structure-induced noise and vibration. *Journal of vibration and acoustics*, 119:173–179.
- Christense, S., Sorokin, S., and Olhoff, N. (1995). On analysis and optimization in structural acoustics, part i: Problem formulation and solution techniques. *Structural optimization*, 16:83–95.
- Cook, R., Malkus, D., and Plesha, M. (1989). *Concepts and applications of finite element analysis*. John Wiley and Sons, New York.

- Craig, R. (1981). *Structural Dynamics*. John Wiley and Sons, New York.
- Daniel, W. J. (1980). Modal methods in finite-element fluid-structure eigenvalue problems. *International journal for numerical methods in engineering*, 15:1161–1175.
- Duong, C., Verhoeven, S., and Guijt, C. (2006). Analytical and experimental study of load attractions and fatigue crack growths in two-sided bonded repairs. *Composite structures*, 73(4):394–402.
- Everstine, G. (1981). A symmetric potential formulation for fluid-structure interaction. *Journal of sound and vibration*, 79:157–160.
- Fritze, D., Marburg, S., and Hardtke, H. (2005). Fem-bem coupling and structural-acoustic sensitivity analysis for shell geometries. *Computers and structures*, 83:143–154.
- Galli, L. A. (1995). Estudo do comportamento dinâmico de sistemas acoplados fluido estrutura utilizando-se uma formulação simétrica em potenciais de velocidade. Master's thesis, Universidade estadual de Campinas.
- Gladwell, G. M. and Zimmerman, G. (1996). On energy and complementary energy formulations of acoustic and structural vibration problems. *Journal of sound and vibration*, 3(3):233.
- Goransson, P. (1988). A symmetric finite element formulation for acoustic fluid-structure interaction analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 123(3):507–515.
- Grosveld, F. (1998). Structural normal mode analysis of the aluminum testbed cylinder (atc). In *AIAA Paper 98-1949, Proceedings of the 39th AIAA/ASME/ASCE Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, Long Beach, CA*.
- Grosveld, F. (2002). Finite element modeling of the nasa langley aluminium tested cylinder. In *8th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Breckenridge, Colorado*.
- Hamdi, M., Ousset, Y., and Verchery, G. (1978). A displacement method for the analysis of vibrations of coupled fluid-structure systems. *International journal for numerical methods in engineering*, 13:139–150.

- Haug, E., Choi, K., and Komkov, V. (1986). *Design sensitivity analysis of structural systems*. Academic Press, Inc, London.
- Herdic, P. C. (2005). The vibro-acoustic response and analysis of a full-scale aircraft fuselage section for interior noise reduction. *Journal of Acoustical Society of America*, 117:3667–3678.
- Kim, Y. S. and Yung, C. B. (1997). A spurious free four-node displacement-based fluid element for fluidstructure interaction analysis. *Engineering structures*, 19:665–678.
- Klossterman, H. (1950). Derivatives and finite differences. *Duke Mathematical Journal*, 17(2):169–186.
- Lamancusa, J. S. (1993). Numerical optimization techniques for structural-acoustic design of rectangular panels. *Computers and structures*, 48(40):661–675.
- Lamb, H. (1945). *Hydrodynamics*. Dover, London.
- Larbi, W., Deu, J., and Ohayon, R. (2005). A new finite element formulation for internal acoustic problems with dissipative walls. *International journal for numerical methods in engineering*, 68(3):381–399.
- Liu, G. R. and Quek, S. S. (2003). *The Finite Element Method: A practical course*. Butterworth-Heinemann, London.
- Ma, Z. D. and Hagiwara, I. (1991). I. sensitivity analysis methods for coupled acoustic-structural systems, part ii: Direct frequency response and its sensitivities. *AIAA Journal*, 29(11):1796–1801.
- MacNeal, R. H. (1978). A simple quadrilateral shell element. *Computers and Structures*, 8:175–183.
- MacNeal, R. H. (1982). Derivation of element stiffness matrices by assumed strain distributions. *Nuclear Engineering and Design*, 70:3–12.
- Martins, J. R. (2002). *A Coupled-Adjoint Method For High-Fidelity Aero-Structural Optimization*. PhD thesis, Stanford University, USA.

- Mindlin, R. D. (1951). Influence of rotatory inertia and shear on flexural motion of isotropic elastic plates. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 18:31–38.
- Morais, M. G. D. (2000). Modelagens numéricas pelo método dos elementos finitos em problemas de interação fluido-estrutura. Master’s thesis, Universidade de Brasília.
- Morand, H. and Ohayon, R. (1979). Substructure variational analysis of the vibrations of coupled fluid-structure systems. finite element results. *International journal of numerical methods in engineering*, 14:741–755.
- Morand, H. and Ohayon, R. (1995). *Fluid structure Interaction*. Wiley.
- Nitikitpaiboon, C. and Bathe, K. (1993). An arbitrary lagrangian-eulerian velocity potential formulation for fluid-structure. *Computers and structures*, 47(4-5):871–891.
- Niu, M. C. Y. (1988). *Airframe structural desing*. Connmilit Press Ltd, Hong Kong.
- Olson, L. and Bathe, K. (1985). An infinite element for analysis of transient fluid-structure interaction. *Journal of engineering with computers*, 2:319–329.
- Pavanello, R. (1991). *Contribuition à l’étude hydroélastique des structures à symmétrie cyclique*. PhD thesis, INSA Lyon.
- Pavanello, R. and Neto, E. M. (2000). Dynamic behavior of frame structures by boundary integral procedures. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 24:3399–406.
- Poel, C. V. D. (2005). *Modelagens numéricas de problemas de domínios acoplados para aplicação em microsistemas eletromecânicos*. PhD thesis, Unicamp.
- Popov, E. P. (1998). *Engineering Mechanics of Solids*. Prentice-Hall International.
- Rayleigh, W. J. (1945). *The theory of sound*,. Dover, New York.
- Reissner, E. (1945). The effect of transverse shear deformation on the bending elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 67:A69–A77.
- Reissner, E. (1947). On bending of elastic plates. *Quarterly of Applied Mathematics*, 5:55–68.

- Sandberg, G. (1995). A new strategy for solving fluid-structure problems. *International journal for numerical methods in engineering*, 38(3):357–370.
- Sandberg, G. and Goransson, P. (1988). A symmetric finite element formulation for acoustic fluid-structure interaction analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 123(3):507–515.
- Szilard, R. (1974). *Theory and Analysis of Plates: Classical and Numerical Methods*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- Timoshenko, S. and Gere, J. (1983). *Mecânica dos Sólidos*. livros técnicos e científicos, Rio de Janeiro.
- Timoshenko, S., Young, D. H., and Weaver, W. (1974). *Vibration Problems in Engineering*. John Wiley, fourth edition, New York.
- Timoshenko, S. P. and Gere, J. M. (1990). *Mecánica de materiales*. Grupo Editorial Ibero América.
- Yurkovich, R. (1970). Dynamic analysis of stiffened panel structures. *Journal Of Aircraft*, 8:149–155.
- Zienkiewicz, O. C. (1984). Coupled problems and their numerical solution. *Numerical Methods in Coupled Systems*, pages 35–58.
- Zienkiewicz, O. C. and Newton, R. E. (1969). Coupled vibrations of a compressible fluid. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1:359–379.
- Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. H. (1986). *The Finite Element Method*. MacGraw-Hill, New York.