



Paulo Cesar Marques Doval

Análise de estabilidade de placas de materiais compósitos laminados usando o método dos elementos de contorno

37/2013

CAMPINAS
2013



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

Paulo Cesar Marques Doval

Análise de estabilidade de placas de materiais compósitos laminados usando o método dos elementos de contorno

Orientador: Prof. Dr. Éder Lima de Albuquerque
Coorientador: Prof. Dr. Paulo Sollero

Tese de Doutorado apresentada à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica, na Área de Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico.

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE DEFENDIDA PELO ALUNO PAULO CÉSAR MARQUES DOVAL, E ORIENTADO PELO PROF. DR. ÉDER LIMA DE ALBUQUERQUE

ASSINATURA DO ORIENTADOR

CAMPINAS
2013

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

D75a Doval, Paulo Cesar Marques
Análise de estabilidade de placas de materiais compósitos laminados usando o método dos elementos de contorno / Paulo Cesar Marques Doval. – Campinas, SP: [s.n.], 2013.

Orientador: Éder Lima de Albuquerque.
Coorientador: Paulo Sollero.
Tese de Doutorado - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Métodos de elementos de contorno. 2. Placas (Engenharia). 3. Materiais laminados. 4. Materiais compostos. I. Albuquerque, Éder Lima de, 1972-. II. Sollero, Paulo, 1950-. III. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. IV. Título

Título em Inglês: Stability analysis of composite laminates plates by the boundary element method
Palavras-chave em Inglês: Boundary element methods, Plates (Engineering), Laminated materials, Composite
Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico
Titulação: Doutor em Engenharia Mecânica
Banca Examinadora: Éder Lima de Albuquerque, Leandro Palermo Júnior, Renato Pavanello, Ronaldo Carrion, Luciano Mendes Bezerra
Data da defesa: 27-02-2013
Programa de Pós Graduação: Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

TESE DE DOUTORADO

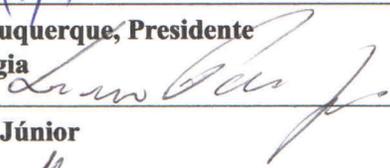
**Análise de estabilidade de placas de
materiais compósitos laminados usando o
método dos elementos de contorno**

Autor: Paulo Cesar Marques Doval
Orientador: Prof. Dr. Éder Lima de Albuquerque
Coorientador: Prof. Dr. Paulo Sollero

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Tese:



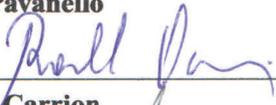
Prof. Dr. Éder Lima de Albuquerque, Presidente
UnB/Faculdade de Tecnologia



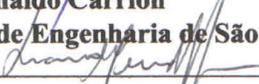
Prof. Dr. Leandro Palermo Júnior
FEC/UNICAMP



Prof. Dr. Renato Pavanello
FEM/UNICAMP



Prof. Dr. Ronaldo Carrion
USP/Escola de Engenharia de São Carlos



Prof. Dr. Luciano Mendes Bezerra
UnB/Faculdade de Tecnologia

Campinas, 27 de fevereiro de 2013.

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais "in memoriam", esposa, filhos e irmãs.

Agradecimentos

Inicialmente, a Deus pela vida.

Aos meus pais Alda e Oswaldo e ao meu tio Salazar, por terem acreditado em mim e nos estudos como uma forma de crescimento e desenvolvimento pessoal.

Ao Professor Éder Lima de Albuquerque, pela dedicação, responsabilidade, resiliência, amizade e compromisso durante esses 4 (quatro) anos de trabalho.

Ao Professor Paulo Sollero, pela dedicação, companheirismo, incentivo e co-orientação.

Ao apoio e incentivo da minha querida mulher Edna, filhos Jean Paulo, Josie e Paula e enteados Gabriel e Rafael.

Aos amigos Dalmo, Adriana e Jorge Luiz pelo companheirismo, amizade e agradáveis momentos de estudo e lazer.

Ao amigo André Pereira pelo incentivo e apoio dados, principalmente, nas etapas que antecederam a minha matrícula na UNICAMP.

Aos amigos do IFMA que acreditaram em mim e contribuíram para o meu afastamento nesse período de estudos.

A todos aqueles que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho e que aqui não foram citados.

A CAPES pelo apoio financeiro durante o desenvolvimento deste trabalho.

A UNICAMP pela excelência em ensino de graduação e pós-graduação, pesquisa e extensão.

*A mente que se abre a uma nova ideia
jamais voltará ao seu Tamanho original.*

Einstein

Resumo

DOVAL, Paulo Cesar Marques. Análise de estabilidade de placas de materiais compósitos laminados usando o método dos elementos de contorno. Campinas, 2013. Tese de Doutorado, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas.

Este trabalho apresenta um método de elementos de contorno para a análise de estabilidade de placas de materiais compósitos laminados. A formulação do método proposto não necessita de discretização do domínio, nem de soluções particulares para a solução do problema. Isto torna a formulação proposta diferente das formulações de elementos de contorno existentes, aplicadas à análise de estabilidade estrutural. O método é aplicado a um problema importante em engenharia computacional, que é a estabilidade de placas de materiais isotrópicos e de compósitos laminados. O desempenho é avaliado através de comparação com os resultados de elementos finitos e resultados analíticos, mostrando boa concordância com os mesmos. No entanto, a vantagem em relação ao método dos elementos finitos, especificamente, em análise de estabilidade de placas de materiais compósito laminados, é que se torna um problema de autovalor com um número reduzido de graus de liberdade, uma vez que somente o contorno e poucos pontos internos são necessários na discretização do problema.

Palavras-chave: Métodos dos elementos de contorno, método da integração radial, placas, materiais compósitos laminados, estabilidade de placas.

Abstract

DOVAL, Paulo Cesar Marques. Stability analysis of composite laminates plates by the boundary element method. Campinas, 2013. Doctoral Thesis, Faculty of Mechanical Engineering, University of Campinas.

This work presents a boundary element method to the analysis of buckling plates. Neither domain discretization, nor particular solutions are necessary in the proposed formulation. This becomes the proposed formulation different from the existent boundary element formulations applied to structural stability analysis. The method is applied to an important problem in computational engineering that is the stability of perforated and non perforated plates of composite laminate materials. The performance is assessed through comparison with finite element results. The proposed formulation agrees quite well with finite element. However, the stability analysis is a much smaller eigenvalue problem if boundary elements are used instead of finite elements, provided that only the boundary and fewer internal points are necessary in the discretization.

Keywords: Boundary element method, radial integration method, composite materials, stability analysis, thin plates.

Lista de Ilustrações

1.1	Evolução do MEC	7
2.1	Placa Fina.	11
2.2	Tensões em um elemento de placa	12
2.3	Forças e momentos em um elemento da placa	13
2.4	Deformação em um elemento da placa.	14
2.5	Posições inicial e final de um elemento de placa.	16
2.6	Canto i do contorno da placa.	26
2.7	Solução fundamental	29
2.8	Domínio bidimensional dividido em elementos de contorno.	31
2.9	Elemento quadrático descontínuo.	32
2.10	Transformação da integral de domínio em integral de contorno.	40
3.1	Placa plana carregada em seu plano médio	44
3.2	Deformação de uma seção no plano xz	44
3.3	Forças, momentos e esforços cortantes no plano	48
3.4	Contração da condição de contorno M_{xy}	54
3.5	Representação do domínio com graus de liberdade.	67
3.6	Modelo de placa sem furo	70
3.7	Discretização do modelo	70
3.8	Modelo de placa com furo	71
3.9	Discretização do modelo	71
3.10	Comparação entre o MEC e o MEF - furo quadrado	73
3.11	Comparação entre o MEC e o MEF - furo retangular	74
3.12	Primeiro modo de flambagem ($c/a = 0,6$)	75
3.13	Primeiro modo de flambagem ($c/a = 0,50$)	75
4.1	Ponto fonte localizado no contorno, circundado por uma região semi-circular.	94
5.1	Configuração geométrica	105
5.2	Modelo de elementos de contorno	106
5.3	Configuração geométrica da placa	108
5.4	Modelo de elementos de contorno (malha 1)	109
5.5	Variação dos valores de K_{cr} com o número de pontos de integração	110

5.6	Configuração geométrica	110
5.7	Modelo de elementos de contorno (28 elementos no contorno externo, 16 elementos no contorno interno e 66 pontos internos)	111
5.8	Eixo da carga perpendicular a maior dimensão do furo	113
5.9	Eixo da carga paralelo a maior dimensão do furo	114
5.10	Vista de perfil do primeiro modo de flambagem com $d/a = 0,50$ e $e/a = 0,20$. . .	115
5.11	Vista de topo do primeiro modo de flambagem com $d/a = 0,50$ e $e/a = 0,20$. . .	115
5.12	Vista de perfil do primeiro modo de flambagem com $c/a = 0,50$ e $f/a = 0,20$. . .	116
5.13	Vista de topo do primeiro modo de flambagem com $c/a = 0,50$ e $f/a = 0,20$. . .	116
A.1	Ponto fonte localizado no contorno, circundado por uma região semi-circular. . . .	133
A.2	Transformação de coordenadas $x_1 - x_2$ para ξ	137
A.3	Tensões no contorno.	140
B.1	Sistema de coordenadas curvilíneas no contorno da placa	146

Lista de Tabelas

3.1	Coeficiente de flambagem K_{cr} para placa sem furo	70
3.2	Coeficiente de flambagem K_{cr} para placa com furo quadrado	71
3.3	Coeficiente de flambagem K_{cr} para placa com furo retangular.	72
5.1	Parâmetro de carga crítica K_{cr} para uma placa anisotrópica sem furo	106
5.2	Parâmetro de carga crítica K_{cr} para a placa de compósito laminado com furo quadrado	107
5.3	Parâmetro de carga crítica ($c/a = 0,25$) - maior dimensão do furo perpendicular ao eixo da carga	112
5.4	Parâmetro de carga crítica para($d/a = 0,25$) - maior dimensão do furo paralela ao eixo da carga	112

SUMÁRIO

Lista de Ilustrações	xvii
Lista de Tabelas	xxi
Lista de Abreviaturas e Siglas	xxiii
SUMÁRIO	xxiii
1 Introdução	1
1.1 Histórico	1
1.2 Estabilidade de placas	1
1.3 Modelos experimental e numérico	3
1.4 Método dos elementos de contorno	6
1.5 Estabilidade de placas usando o método dos elementos de contorno	7
1.6 Descrição do presente trabalho	9
2 Placas de Kirchhoff	11
2.1 Teoria da Flexão em Placas Finas	11
2.2 Relações básicas para placas finas	12
2.3 Transformação de coordenadas para momentos e forças cortantes	19
2.4 Formulação integral	20
2.5 Solução fundamental de deflexão para uma carga pontual	29
2.6 Elementos Quadráticos	30
2.7 Equação matricial	34
2.8 Transformação das integrais de domínio em integrais de contorno	38
3 Estabilidade de placas isotrópicas	43
3.1 Introdução	43
3.2 Teoria Linear	43
3.3 Condições de contorno	52
3.3.1 Condições de contorno fora do plano	52
Extremidades fixas	52

	Extremidades simplesmente apoiadas	52
	Extremidades livres	53
3.4	Formulação do problema	55
	3.4.1 Equações integrais de contorno	56
	3.4.2 Equação matricial do problema	65
3.5	Funções de aproximação	67
3.6	Problema de autovalor	67
3.7	Resultados numéricos	69
	3.7.1 Análise de placas sem furos	69
	3.7.2 Análise de placas com furos	70
3.8	Discussão dos resultados	72
	3.8.1 Placa sem furo	72
	3.8.2 Placa com furo quadrado	72
	3.8.3 Placa com furo retangular	73
3.9	Conclusões	74
4	Método dos elementos de contorno para elasticidade anisotrópica	77
	4.1 Introdução	77
	4.2 Elasticidade anisotrópica	77
	4.3 Formulação integral	85
	4.4 Soluções fundamentais anisotrópicas	89
	4.5 Equações integrais singulares	93
	4.6 Formulação dos elementos de contorno discretizada	95
	4.7 Integração no espaço	96
	4.8 Cálculo dos deslocamentos e densidades de forças em pontos internos	100
5	Estabilidade de placas anisotrópicas	103
	5.1 Introdução	103
	5.2 Formulação do problema	104
	5.3 Resultados numéricos	105
	5.3.1 Placa anisotrópica sem furo	105
	5.3.2 Placa anisotrópica com furo	106
	5.3.3 Sensibilidade do método ao número de pontos de integração	107
	5.3.4 Carga crítica para diferentes posições e razões de aspecto	108
5.4	Discussão dos resultados	113

5.4.1	Eixo da carga perpendicular a maior dimensão do furo	113
5.4.2	Eixo da carga paralelo a maior dimensão do furo	114
5.5	Conclusões	115
6	Conclusões	117
6.1	Considerações finais	117
	REFERÊNCIAS	119
	APÊNDICES	125
A	Formulação de elasticidade plana isotrópica	127
A.1	Equações de Equilíbrio da formulação de elasticidade plana isotrópica	127
A.2	Formulação integral	129
A.3	Soluções fundamentais	132
A.4	Equações integrais singulares	133
A.5	Formulação dos elementos de contorno discretizada	134
A.6	Integração no Espaço	137
A.7	Cálculo dos deslocamentos e tensões em pontos internos	139
A.8	Tensões no contorno	139
B	Carga crítica de flambagem	143
B.1	Introdução	143
B.2	Formulação integral de contorno	143
B.2.1	Contorno completamente restrito	144
B.2.2	Contorno simplesmente apoiado	144
B.2.3	Contorno livre	145
B.3	Problema de autovalor	149
	ÍNDICE	153

1 Introdução

1.1 Histórico

A primeira equação que descreveu satisfatoriamente a flexão de uma placa foi determinada por Navier em 1823, conforme citado em Timoshenko e Gere (1961), com a rigidez à flexão definida em termos de uma única constante elástica e a exigência de três condições de contorno naturais, definidas por Poisson. Foi Kirchhoff (1850), no entanto, que trinta anos mais tarde, estabeleceu as hipóteses fundamentais da teoria de placas finas, a partir da expressão da energia potencial da placa inclinada e aplicando o método do trabalho virtual para obter a equação diferencial de placas, com rigidez à flexão definida em termos do módulo de Young e coeficiente de Poisson. Além disso, ele percebeu que as três condições de contorno naturais propostos por Poisson, eram incompatíveis com a natureza da quarta ordem da equação diferencial e reduziu-as em duas condições de contorno naturais. Esse "paradoxo das condições de contorno de Poisson-Kirchhoff", para usar a expressão de Reissner, só é plenamente entendida quase um século depois (REISSNER, 1944). Em 1883, St-Venant apresentou as equações diferenciais de uma placa plana carregada em compressão no seu próprio plano.

Somente mais tarde, no século XX, as placas finas e o estudo de sua estabilidade elástica ganharam particular interesse em função do uso extensivo de estruturas de paredes finas e do crescimento das indústrias nas áreas de engenharia mecânica, aeronáutica e naval. Embora, mais tarde, muitos trabalhos tenham sido desenvolvidos no estudo de placas finas, as soluções das equações obtidas como resultado dos trabalhos pioneiros descritos acima, mantiveram a sua validade. Assim, a equação de Navier, tal como apresentado por Kirchhoff e as equações de von Karman, ainda são consideradas eficientes e precisas nas teorias de deflexões de placas.

1.2 Estabilidade de placas

Uma placa submetida a cargas no seu plano permanece em estado de equilíbrio estável até que uma carga crítica, chamada de carga de flambagem, seja atingida, na condição de que a carga seja aplicada em incrementos suficientemente pequenos, de modo que quaisquer desvios devido a perturbações dinâmicas sejam amortecidos (BUDIANSKY, 1974). Ao atingir a carga crítica

ocorrem instabilidades que podem, porém, conduzir a um equilíbrio estável depois da flambagem (pós-flambagem). Nesse caso tem-se a presença de grandes deslocamentos - deslocamentos muito maiores que a espessura da placa - e uma análise não linear se faz necessária.

A teoria de placas de Kirchhoff prevê a carga e o modo de flambagem, mas não consegue descrever o caminho de equilíbrio após a flambagem. Por outro lado, a teoria de grandes deflexões e as equações de Von Karman simulam a trajetória de equilíbrio estável e prevê a deformação inicial na pós-flambagem. As duas teorias, no entanto, partem das mesmas hipóteses fundamentais.

Devido à pequena espessura da placa, em relação às suas duas outras dimensões, a análise teórica pode ser reduzida de um problema de valor de contorno elástico tridimensional a um problema de duas dimensões, assumindo distribuições simples de deslocamentos e tensões ao longo da espessura.

A teoria de placas de Kirchhoff é uma extensão em duas dimensões da teoria de viga de Bernoulli, desprezando-se o efeito das deformações por cisalhamento e assumindo que seções planas permanecem planas após a flexão, com o plano médio da placa tomado como neutro. Além disso, as deflexões são assumidas como sendo muito menor do que a espessura, garantindo a aplicação dos princípios da elasticidade linear. Esta teoria resulta em uma equação diferencial de quarta ordem, conhecida como equação de Navier, como função do deslocamento do plano médio. Ela consegue descrever o comportamento de uma grande variedade de condições de carregamento e de geometria.

A flambagem ocorre quando se tem carregamentos de compressão ou cisalhamento aplicados no plano da placa, que induzem, além de deslocamentos no plano (deslocamentos de membrana), deslocamentos devidos à flexão. Ao atingir a carga crítica, se a espessura da placa é muito pequena, a resistência à flexão torna-se desprezível e a rigidez à flexão da placa se aproxima de zero. Deflexões nesse caso, e depois da flambagem em geral, deveriam ser da mesma ordem, se não maior, do que a espessura da placa. Nesse caso, as deformações do plano médio da placa não poderiam ser desprezadas. As equações de Von Karman levam em conta este acoplamento entre flexão e membrana devido às grandes deflexões, assumindo um comportamento não linear da relação deformação-deslocamento.

Embora as teorias de placas de sexta ordem de Reissner (1944) e Mindlin (1951), que levam em conta as deformações de cisalhamento, serem bem mais completas do que as de quarta ordem,

a utilização desta última se justifica em várias aplicações práticas.

1.3 Modelos experimental e numérico

As soluções exatas das equações para pequenos deslocamentos de uma placa carregada em seu próprio plano existem apenas para uma classe muito limitada de condições de carga e de apoio. Soluções aproximadas são usadas na maioria dos casos da análise de estabilidade estrutural de placas. A maneira mais direta de se prever o comportamento de placas é através de modelos experimentais, mas talvez a menos econômica. Somente os experimentos podem confirmar as previsões de resultados analíticos e/ou numéricos e simular o comportamento real de uma placa. No entanto, o alto custo financeiro aliado às dificuldades técnicas, principalmente a simulação das condições de contorno e as técnicas de medição, reduzem o potencial da modelagem experimental, sem, obviamente, torná-los imprescindíveis.

Soluções analíticas aproximadas que descrevem o comportamento de problemas físicos ainda têm sido pesquisadas e utilizadas na prática. Conforme descrito em Timoshenko e Gere (1961), em 1891, Bryan usou o método da energia para encontrar tensões críticas em uma placa simplesmente apoiada e comprimida. Mais tarde, o método de Rayleigh para vibração de sistemas elásticos foi desenvolvido e aplicado a problemas de estabilidade de placas. Alguns resultados foram obtidos para as várias condições de apoio e de carga. Alfutov e Balabukh (1967) propuseram um outro método para a determinação da carga crítica que não requer a determinação da distribuição de tensões de membrana que é substituído, na equação de energia, através de um sistema de tensões estaticamente equivalente. Com as equações acopladas de Von Karman, várias aproximações analíticas também são possíveis em grandes deflexões. Berger (1955) desacoplou estas equações desprezando o segundo invariante das deformações no plano médio. Nowinski e Ohnabe (1958) indicam que esse pressuposto, e os resultados decorrentes, apresentam bons resultados com o contorno fixo, mas se tornam ineficientes caso contrário.

O método das diferenças finitas tem sido aplicado com bastante sucesso para problemas de estabilidade de placas. O método é bastante simples e versátil. Contudo, não é sempre fácil de se programar, e algumas condições de contorno podem ser difíceis de representar. Além disso, problemas sérios de modelagem surgem normalmente em extremidades livres e com a presença de furos. O método dos elementos finitos é hoje a mais popular ferramenta de análise estrutural em

projetos de engenharia. A generalidade dos seus conceitos e a precisão de suas previsões em relação aos métodos anteriores tornaram-no particularmente atraente para os projetistas, engenheiros e pesquisadores. Algumas desvantagens existem, no entanto, e podem trazer problemas graves em muitas aplicações do método: a precisão dos resultados em alguns casos não é muito boa, especialmente em regiões de concentração de tensão; o custo computacional requerido por problemas não lineares e de domínio infinito é muito alto. Além disso, a geração da malha é difícil quando as formas não são as usuais e concentrações de tensões estão presentes como, por exemplo, em problemas de mecânica da fratura.

Potencialmente poderoso e relativamente novo, o método dos elementos de contorno, por outro lado, introduziu dois conceitos úteis no campo da mecânica computacional: o primeiro é que a geometria de um corpo pode ser completamente definida apenas por sua superfície de contorno em vez de seu volume; e, o segundo conceito é que as soluções fundamentais conhecidas para domínios infinitos podem ser usadas para obter resultados altamente precisos para domínios finitos.

Na prática, normalmente, os engenheiros de projeto fazem uso de ensaios dinâmicos ou estáticos e/ou recorrem a métodos numéricos para se prever a estabilidade de um componente ou sistema estrutural como um todo. Entre os vários métodos numéricos existentes, os mais populares são o método das diferenças finitas e o método dos elementos finitos.

Nas soluções baseadas no método das diferenças finitas, a placa é dividida em células compostas por nós nos quais a deflexão w é desconhecida. A diferenciação de w é obtida através de diferenças diretas e a equação diferencial que governa o problema é então satisfeita nesses nós. Um sistema de equações simultâneas é obtido e resolvido para o campo de deflexões nodais. Embora de precisão razoável, o método das diferenças finitas nem sempre é fácil de se programar. Além disso, pode se tornar altamente impreciso quando se tem concentrações de tensão.

O Método dos Elementos Finitos consiste em dividir o domínio de integração do problema em um número discreto de regiões pequenas de dimensões finitas denominadas elementos finitos. A este conjunto de regiões dá-se o nome de malha de elementos finitos. Os elementos são ligados entre si por pontos nodais denominados de nós. Cada elemento tem um número determinado de nós, que podem ser externos, os que materializam a ligação com os demais elementos, ou internos. A localização dos nós nos lados e dentro do elemento pode variar, dependendo do tipo de elemento usado. Ao invés de procurar-se soluções aproximadas tratando-se o problema globalmente, como é feito por métodos aproximados tais como o Método de Rayleigh-Ritz e o de Galerkin, considera-

se cada região ou elemento isoladamente, o que possibilita a escolha de funções mais simples para representar o comportamento aproximado local nesta região. As incógnitas do problema são expressas em função de valores nodais que são relacionadas através de funções de interpolação (polinômios no caso do MEF) válidas para cada região ou elemento. Estes polinômios podem ser de grau 1 ou de ordem superior (quadráticos, cúbicos), o que fornece uma maior flexibilidade ao método.

Na Mecânica das Estruturas as incógnitas são em geral deslocamentos ou tensões, mas em outros problemas de Engenharia podem ser temperaturas, velocidades, pressões, corrente elétrica, etc.

Em função da generalidade de seus conceitos, a precisão dos resultados e os aspectos programáveis, o método se tornou a ferramenta mais comumente utilizada em instituições de ensino, pesquisa e escritórios de engenharia. Aperfeiçoamentos na eficiência computacional e precisão dos resultados ainda são objetos de muitas pesquisas. O método ainda apresenta dificuldades de modelagem de superfícies livres e em locais de concentração de tensão e meios infinitos.

Finalmente, pesquisas experimentais de problemas de estabilidade de placas ainda têm sido bastante expressivas e, se bem projetadas e monitoradas, é contudo a ferramenta de pesquisa mais confiável. Além disso, é possível de se obter: curvas de carregamento; largura efetiva, Hoff (1938) e Winter (1947); flambagem secundária onde transições repentinas para modos mais elevados ocorrem, Stein (1959), Uemura e Byon (1978); efeitos de condições de contorno no plano, Uemura e Byon (1978) e Yamaki (1961); e, efeito de excentricidade de carga, Walker (1964), Rhodes e Harvey (1975). Tais resultados têm servido como base para comparação com métodos analíticos e numéricos.

Os resultados obtidos por métodos experimentais, analíticos e programas de elementos finitos serão usados nesse trabalho para comparação e validação dos resultados obtidos na formulação do método dos elementos de contorno.

Uma vez formulada a teoria de estabilidade de placas como problema de valor de contorno e as equações diferenciais com as correspondentes condições de contorno, essas equações podem ser transformadas em equações integrais e o método dos elementos de contorno pode ser aplicado.

1.4 Método dos elementos de contorno

O método dos elementos de contorno é baseado na solução numérica de equações integrais, em vez das equações diferenciais que governam o problema em consideração. Apenas integrais sobre o contorno devem aparecer nas equações, o que reduz o número de dimensões do problema e leva a um conjunto reduzido de equações e a uma quantidade menor de dados requeridos para a computação. As soluções fundamentais do problema são usadas como funções de ponderação na integração. As condições de contorno são consideradas no processo de solução numérica e nenhuma consideração é feita no interior do domínio do corpo em estudo.

Uma quantidade significativa de trabalhos teóricos com equações integrais que descrevem problemas de estabilidade estática e dinâmica tiveram início no começo do século XX. Foi Fredholm (1903) quem primeiro apresentou as equações integrais de problemas de elasticidade linear. Ele enunciou o problema de existência e unicidade das soluções dessas equações, conhecido como teorema de Fredholm. Uma série de trabalhos de autores russos (KUPRADZE, 1965; MUSKHELISHVILI, 1953; MIKHLINI, 1957; SMIRNOV, 1964), nas décadas de 1950 e 1960, proporcionaram um melhor entendimento dessas equações integrais. Nesses trabalhos os problemas de elasticidade plana foram resolvidos usando as equações integrais singulares e potenciais complexos. O método de solução era indireto, uma vez que as incógnitas do problema não tinha significado físico. Rizzo (1968) e mais tarde Cruse (1969), aplicaram o método direto para os problemas práticos. Depois, Jaswon e Symm (1977) também utilizaram o método indireto, mas com abordagens orientadas para computadores.

A figura 1.1 representa uma evolução cronológica do método dos elementos de contorno (MEC).

No MEC, as integrais de domínio podem aparecer nas equações integrais devido às forças de corpo. Como resultado do esforço de pesquisas para se eliminar as integrais de domínio da equação integral, surgiu o método da reciprocidade dual (MRD), que tem se apresentado como uma das técnicas mais eficientes para transformar as integrais de domínio em integrais de contorno. Tal método foi primeiramente desenvolvido para resolver problemas elastodinâmicos por Brebbia e Nardini (1983) e mais tarde foi aplicado a problemas dependente da variável tempo (WROBEL *et al.*, 1986A,B). Kamiya e Sawaki (1988) propuseram uma solução de reciprocidade dual para problemas de flexão de placas apoiadas em fundações elásticas. Tang (1987) combinou o método

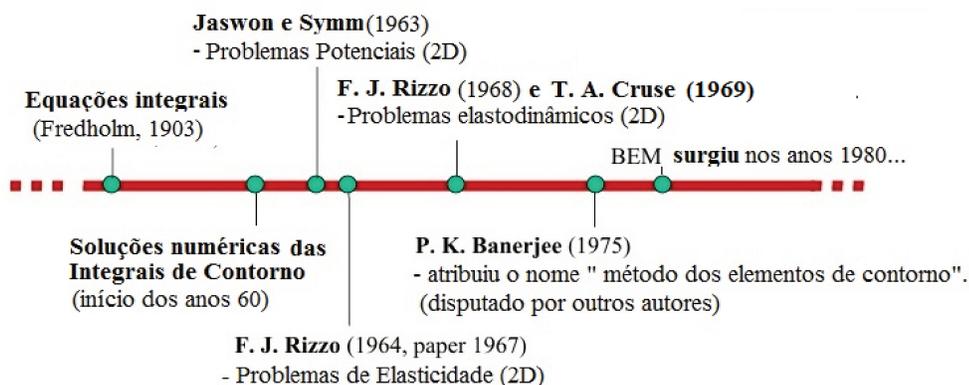


Figura 1.1: Evolução do MEC

com técnicas da série de Fourier para transformar as integrais de domínio de uma série de problemas em integrais de contorno.

A partir do final da década de 90, o Método da Reciprocidade Dual e, posteriormente, o Método da Integração Radial, tiveram grande contribuição com os critérios previstos no trabalho de Partridge (2000) para seleção de funções de aproximação.

A eficiência computacional do método dos elementos de contorno (MEC) está bem consolidada nos dias de hoje, principalmente, devido a redução da ordem do sistema final de equações, da simplicidade da malha e da boa precisão dos resultados para domínios infinitos e regiões de concentração de tensões. Nesses casos, o método tem apresentado grandes vantagens em relação à outras técnicas numéricas. Tem-se uma vasta bibliografia publicada na área (BREBBIA E DOMINGUEZ, 1989; DOMINGUEZ, 1993; KANE, 1993; ALIABADI, 2002; WROBEL E ALIABADI, 2002).

1.5 Estabilidade de placas usando o método dos elementos de contorno

As soluções fundamentais para problemas de estabilidade de placas são difíceis ou até mesmo impossíveis de serem encontradas. É por esse motivo que as soluções fundamentais de flexão de placas são usadas como soluções fundamentais desses problemas. Como consequência, as integrais de domínio aparecem na formulação, o que pode resultar na solução de um problema combinado contorno-domínio. Neste caso, o método retém as suas principais vantagens no que diz respeito à precisão e eficiência computacional, mas perde a sua principal característica que é a inexistência

de integrais de domínio.

A primeira solução integral do problema de flambagem linear de placas é atribuído a Niwa *et al.* (1974). Eles usaram uma aproximação indireta para solução de problemas de flambagem de placas uniformemente carregadas em seu plano. Mais tarde, Bezine (1983), e em seguida, Costa e Brebbia (1985) usaram o método direto para obter a formulação geral do problema. A implementação numérica requer uma discretização do domínio em três curvaturas como incógnita em cada nó do domínio. Syngellakis e Cherukunnath (1987) eliminaram as curvaturas da integral de domínio e apresentaram uma solução que requer um modelo de deflexão no domínio. Alguns trabalhos apresentaram soluções de problemas de grandes deflexões pelo método dos elementos de contorno considerando não-linearidades induzidas principalmente por cargas laterais (KAMIYA E SAWAKI, 1982; KATSIKADELIS E NERANTZAKI, 1985). Tanaka (1983) apresentou uma formulação integral de forma incremental das equações acopladas de Von Karman. Elzein e Syngellakis (1989) consideraram o problema de placas com imperfeições, carregadas no seu próprio plano e usou elementos do domínio (células) de alta ordem para obter as aproximações das curvaturas.

No caso de análise de placas anisotrópicas, algumas aplicações do MEC começaram a surgir na década de 80. Wu e Altiero (1981) apresentaram a solução fundamental anisotrópica para placas numa aplicação do método indireto dos elementos de contorno. A mesma solução fundamental foi usada por Shi e Bezine (1988) e Rajamohan e Raamachandran (1999) na análise de placas anisotrópicas pelo método direto dos elementos de contorno e pelo método de simulação de carga, respectivamente. Na mesma linha dos trabalhos anteriores, Albuquerque *et al.* (2006) apresentaram uma análise de flexão de placas em compósitos laminados.

Atualmente, as duas alternativas para se tratar as integrais de domínio em problemas de estabilidade de placas são o método dos elementos de contorno de reciprocidade dual (BREBBIA E NARDINI, 1983) e o método da integração radial (GAO, 2002; ALBUQUERQUE *et al.*, 2007). Nestas formulações são usadas as soluções fundamentais de placas para uma parte da equação governante do problema, sendo que a parte restante são consideradas forças de corpo. As integrais de domínio provenientes das forças de corpo são transformadas em uma soma de integrais de contorno. A primeira aplicação do método dos elementos de contorno de reciprocidade dual (MRD) para o tratamento de problemas dinâmicos em materiais anisotrópicos foi proposta por Schlar e Partridge (1993) para problemas estacionários tridimensionais e por Albuquerque *et al.* (2002) para problemas transientes bidimensionais. Além destes trabalhos, o MRD também foi usado para análise materiais anisotrópicos por Albuquerque *et al.* (2003a,b, 2004) e Kogl e Gaul (2000, 2003).

1.6 Descrição do presente trabalho

Este trabalho apresenta uma formulação original do método dos elementos de contorno para a análise de estabilidade de placas isotrópicas e anisotrópicas. Na formulação proposta para o método, não se faz necessária a discretização do domínio, como é o caso quando se usa células, nem as soluções particulares das equações diferenciais, como acontece no caso do método da reciprocidade dual. Isto torna a formulação proposta diferente das formulações existentes de elemento de contorno aplicado à análise de estabilidade estrutural. O método é aplicado a um problema importante em engenharia computacional que é a estabilidade de placas perfuradas ou não perfuradas. O desempenho e a precisão dos resultados numéricos apresentados no presente trabalho é analisado pela comparação com resultados experimentais, analíticos e numéricos obtidos na literatura e com resultados numéricos obtidos usando-se o método dos elementos finitos. A formulação do método de elementos de contorno para o caso de análise de estabilidade de placas isotrópicas e anisotrópicas se resume em um problema simples de autovalor e se constitui em grande vantagem se comparada ao método dos elementos finitos. Além disso, somente o contorno e poucos pontos internos são necessários na discretização do problema.

O presente trabalho é disposto em 6 capítulos.

No Capítulo 2 é apresentada a teoria da flexão em placas finas (placas de Kirchhoff).

No Capítulo 3 é apresentada a teoria clássica de estabilidade de placas, bem como as equações diferenciais que descrevem o problema de flambagem linear de placas carregadas em seu plano. As soluções desses problemas são formuladas como um problema de valor de contorno, começando pelas hipóteses de Kirchhoff e os problemas de estabilidade de placas isotrópica perfuradas e não perfuradas, bem como são apresentados resultados numéricos obtidos com as rotinas implementadas para diferentes condições de contorno e são feitas comparações com resultados analíticos e numéricos disponíveis em literaturas.

No Capítulo 4 é descrita a formulação do método dos elementos de contorno para elasticidade plana, considerando o material como anisotrópico.

No Capítulo 5 é apresentada uma análise de estabilidade de placas finas anisotrópicas com e sem furo, bem como a sensibilidade do método ao número de pontos de integração, para placas

anisotrópicas com furo. Também é estudado o comportamento dessas placas para diferentes excentricidade do furo. São apresentados os resultados numéricos obtidos com as rotinas implementadas e são feitas comparações com resultados analíticos e numéricos, quando disponíveis em literaturas.

Por fim, no Capítulo 6 são apresentadas as considerações finais e conclusões obtidas através da análise dos resultados apresentados. Também são citados temas do presente trabalho que ainda demandam pesquisa.

2 Placas de Kirchhoff

2.1 Teoria da Flexão em Placas Finas

As placas são elementos estruturais limitados por duas superfícies planas e paralelas Figura 2.1 distanciadas entre si por uma espessura t .

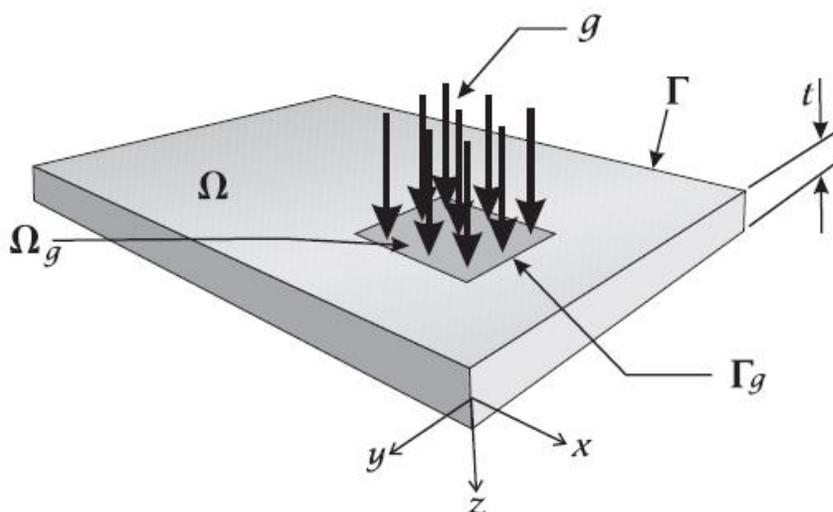


Figura 2.1: Placa Fina.

No caso da dimensão da espessura ser muito menor que as dimensões das superfícies planas limitantes, as placas são designadas por placas finas. O plano equidistante das superfícies planas externas é designado por plano médio da placa. Considerando as propriedades do material, uma placa pode ser anisotrópica, com diferentes propriedades em diferentes direções, ou isotrópica, com propriedades iguais em todas as direções. Dependendo de sua espessura, uma placa pode ser considerada fina ou espessa. Neste capítulo, será desenvolvida a formulação do método dos elementos de contorno para placas finas isotrópicas. A teoria de flexão em placas finas está baseada nos seguintes pressupostos:

1. Os pontos pertencentes à normal ao plano médio da placa antes da deformação permanecem normal à superfície média fletida.
2. A tensão normal σ_z na direção normal ao plano médio é desprezível.

2.2 Relações básicas para placas finas

Considere um elemento de placa seguindo os pressupostos já definidos. A Figura 2.2 mostra este elemento com um estado de tensões agindo nele e uma força distribuída aplicada em sua superfície.

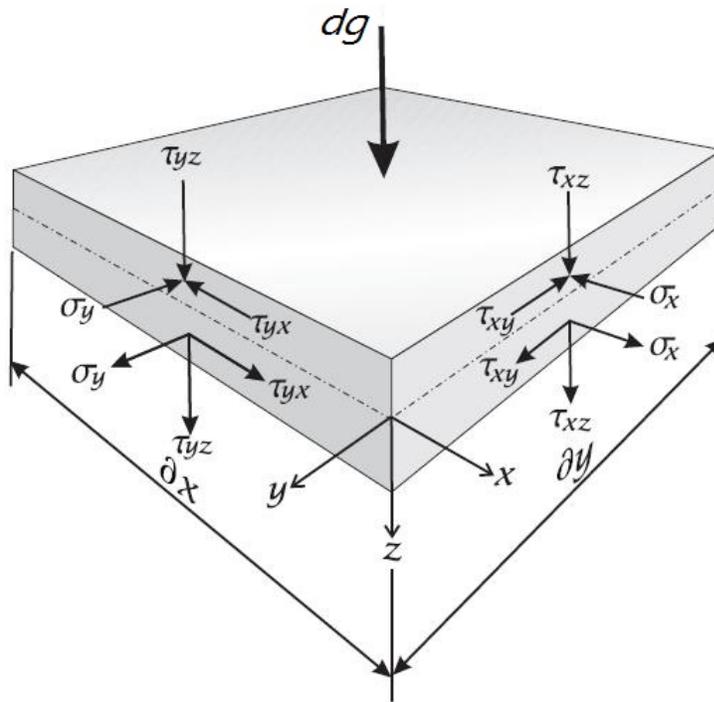


Figura 2.2: Tensões em um elemento de placa

Integrando as componentes de tensão ao longo da espessura da placa podemos definir os momentos e forças (Figura 2.3):

$$m_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz, \quad (2.1)$$

$$m_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z dz, \quad (2.2)$$

$$m_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z dz, \quad (2.3)$$

$$q_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} dz, \quad (2.4)$$

$$q_y = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} dz. \quad (2.5)$$

e

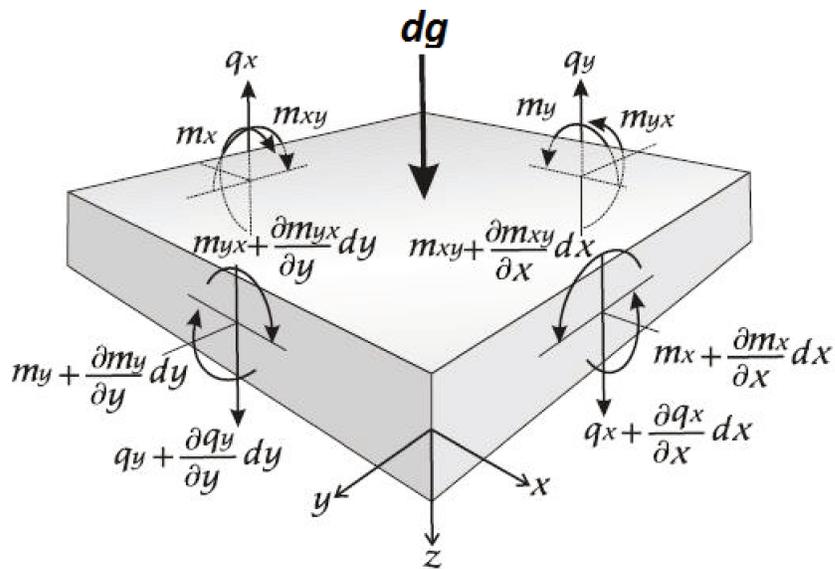


Figura 2.3: Forças e momentos em um elemento da placa

Do equilíbrio de forças e momentos, podemos escrever:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + g = 0, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} - q_x = 0, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} - q_y = 0. \quad (2.8)$$

onde as unidades de força distribuída g é dada em $N.m^{-2}$, o momento m é dado em $N.m$ e o esforço cortante q é dado em N .

Considere as posições inicial e final de um elemento da placa dado por $abcd$ paralelo ao plano médio com lados ab e ad paralelos aos eixos x e y , respectivamente, a uma distância z do plano médio (Figura 2.4).

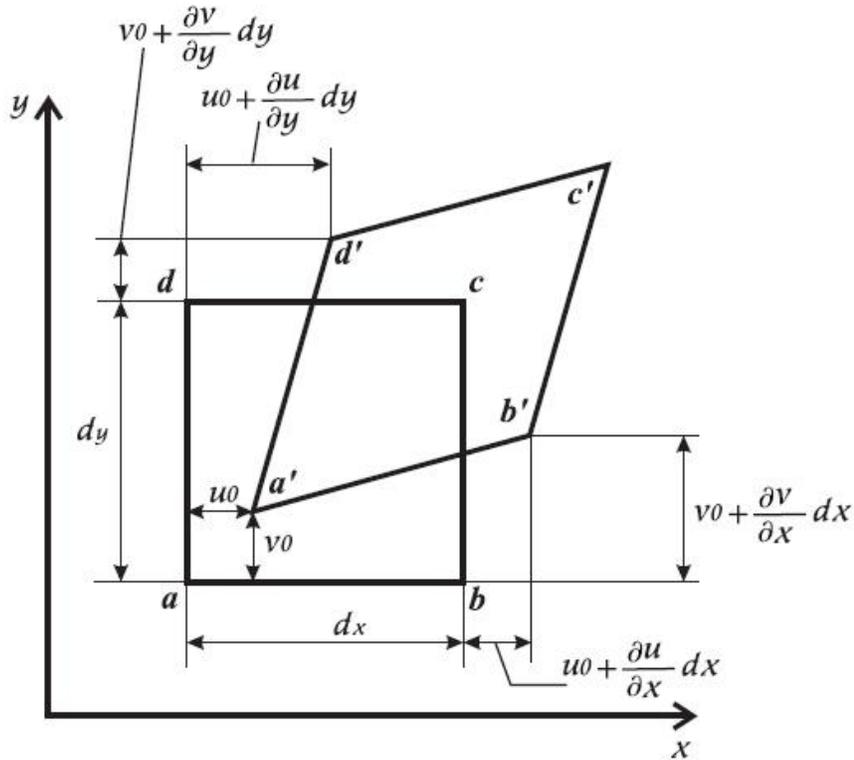


Figura 2.4: Deformação em um elemento da placa.

Assumindo que, durante a flexão da placa, os pontos a , b , c e d , movem-se para a' , b' , c' e d' , chamando as componentes de deslocamento u_0 e v_0 do ponto a nas direções x e y (Figura 2.4), respectivamente, o deslocamento do ponto b na direção x é dado por:

$$b'_x - b_x = u_0 + \frac{\partial u}{\partial x} dx. \quad (2.9)$$

Então, o incremento do comprimento dx na direção x é dado por:

$$\Delta dx = \frac{\partial u}{\partial x} dx, \quad (2.10)$$

e a deformação na direção x é dada por:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (2.11)$$

Da mesma forma, podemos escrever:

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (2.12)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2.13)$$

A Figura 2.5 mostra as posições inicial e final de uma seção da placa, paralela ao plano xz , que contém os pontos a , b , n_1 e n_2 . A rotação do elemento an_1 , inicialmente na posição vertical, é igual a $\frac{\partial w}{\partial x}$ (Figura 2.5). Então, o deslocamento do ponto na direção x , a uma distância z da superfície média pode ser escrita como:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (2.14)$$

Seguindo um procedimento similar, o deslocamento de um ponto na direção y é dado por:

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (2.15)$$

Substituindo as equações (2.14) e (2.15) nas equações (2.11), (2.12) e (2.13) pode-se escrever:

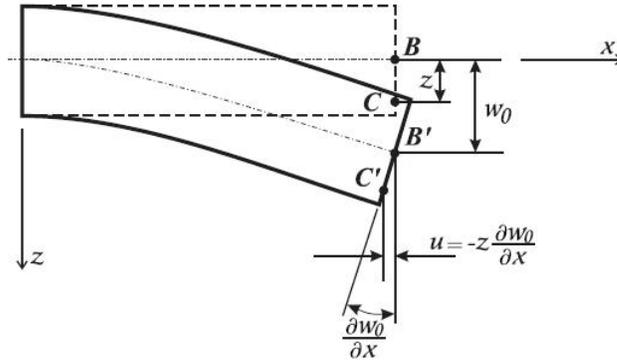


Figura 2.5: Posições inicial e final de um elemento de placa.

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = z \kappa_x, \\
 \varepsilon_y &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = z \kappa_y, \\
 \gamma_{xy} &= -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = z \kappa_{xy}.
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

onde κ_x , κ_y e κ_{xy} são as curvaturas da placa dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \tag{2.17}$$

As tensões nas placas podem ser determinadas a partir da Lei de Hooke:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{E}{1 - \nu} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y), \\
 \sigma_y &= \frac{E}{1 - \nu} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x),
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}.$$

Onde:

E = módulo de elasticidade longitudinal;

ν = coeficiente de Poisson;

G = módulo de elasticidade transversal;

Sendo:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Substituindo-se, nas expressões das componentes de tensão,(2.18), as componentes de deformação (2.16), obtém-se:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) z; \\ \sigma_y &= -\frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) z; \\ \tau_{xy} &= -2G \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z.\end{aligned}\tag{2.19}$$

Substituindo em (2.1), (2.2) e (2.3), os valores das componentes de tensão por suas expressões 2.19, obtém-se:

$$m_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)\tag{2.20}$$

$$m_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (2.21)$$

$$m_{xy} = m_{yx} = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.22)$$

onde $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$

Substituindo as equações (2.20), (2.21) e (2.22) nas equações (2.7) e (2.8), pode-se escrever:

$$q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (2.23)$$

$$q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \quad (2.24)$$

Isolando q_x e q_y nas equações (2.7), (2.8) substituindo seus valores em (2.6), usando as equações (2.20), (2.21), (2.22), tem-se a equação governante de flexão de placas finas, dadas por:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\frac{g}{D} \quad (2.25)$$

que também pode ser dado por:

$$\Delta \Delta(w) = -\frac{g}{D} \quad (2.26)$$

onde:

$$\Delta = \frac{\partial^2()}{\partial x^2} + \frac{\partial^2()}{\partial y^2} \quad (2.27)$$

é o operador laplaciano.

2.3 Transformação de coordenadas para momentos e forças cortantes

As componentes de tensão σ_n e τ_{ns} , tensões normal e cisalhante, respectivamente, estão relacionadas com as tensões σ_x , σ_y e τ_{xy} por:

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha, \quad (2.28)$$

$$\tau_{ns} = (\sigma_y - \sigma_x) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{xy}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha). \quad (2.29)$$

onde α é o ângulo entre os eixos n e x .

As componentes de momento, inicialmente escritas considerando os eixos x e y , podem agora ser reescritas em um sistema de coordenadas genérico n , s (PAIVA, 1987). Os momentos fletores referentes às direções n e s são dados por:

$$m_n = m_x \cos^2 \alpha + m_y \sin^2 \alpha + 2m_{xy} \sin \alpha \cos \alpha, \quad (2.30)$$

$$m_{ns} = (m_y - m_x) \sin \alpha \cos \alpha + m_{xy}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha). \quad (2.31)$$

Similarmente, q_n , a força cisalhante no eixo n , pode ser escrita como:

$$q_n ds = q_x ds \cos \alpha + q_y ds \sin \alpha, \quad (2.32)$$

ou

$$q_n = q_x \cos \alpha + q_y \sin \alpha. \quad (2.33)$$

Com o objetivo de resolver a equação diferencial da placa dada por (2.25), é necessário a imposição das condições de contorno para o deslocamento w e sua derivada $\frac{\partial w}{\partial n}$. Kirchhoff (1950) mostrou que as condições de contorno da força cisalhante q_n e momento volvente m_{ns} podem ser escritas como uma única condição dada por:

$$V_n = q_n + \frac{\partial m_{ns}}{\partial s}. \quad (2.34)$$

A outra condição de carregamento no contorno é o momento m_n .

2.4 Formulação integral

Usando o teorema de Betti (KANE, 1993), podemos relacionar dois estados de tensão-deformação de um material linear como:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega. \quad (2.35)$$

Escrevendo o lado direito da equação (2.35) na notação de von Karman, temos:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Omega} (\sigma_x \varepsilon_x^* + \sigma_y \varepsilon_y^* + \sigma_z \varepsilon_z^* + \tau_{xy} \gamma_{xy}^* + \tau_{xz} \gamma_{xz}^* + \tau_{yz} \gamma_{yz}^*) d\Omega. \quad (2.36)$$

Desconsiderando as tensões normais à superfície média da placa, a equação (2.36) é escrita como:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Omega} (\sigma_x \varepsilon_x^* + \sigma_y \varepsilon_y^* + \tau_{xy} \gamma_{xy}^*) d\Omega. \quad (2.37)$$

Substituindo as equações (2.16) e (2.19) na equação (2.37), pode-se escrever o primeiro termo da integral do lado direito da equação (2.37) como:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma_x \varepsilon_x^* d\Omega = \int_{\Omega} \left[\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} \right. \\ \left. + \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} + 4G \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} z^2 \right] d\Omega. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Integrando (2.38) ao longo da espessura da placa, tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma_x \varepsilon_x^* d\Omega = \left[D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} + D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right. \\ \left. + 2D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} z^2 \right] d\Omega = - \int_{\Omega} \left(m_x \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} + m_y \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} + 2m_{xy} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} \right) d\Omega. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Para obter as equações do método dos elementos de contorno, é necessário transformar as integrais de domínio em integrais de contorno. Considere duas funções $f(x)$ e $g(x)$. A derivada de seu produto pode ser escrita como:

$$\frac{\partial}{\partial x} [f(x)g(x)] = \frac{\partial f(x)}{\partial x} g(x) + \frac{\partial g(x)}{\partial x} f(x). \quad (2.40)$$

Usando a propriedade de derivação (2.40) na equação (2.39), pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} \sigma_x \varepsilon_x^* d\Omega = - \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(m_x \frac{\partial w^*}{\partial x} \right) - \frac{\partial w^*}{\partial x} \frac{\partial m_x}{\partial x} \right] d\Omega. \quad (2.41)$$

Usando o teorema de Green ((KANE, 1993)), a equação (2.41) pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega} \sigma_x \varepsilon_x^* d\Omega = - \int_{\Gamma} m_x \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos \alpha d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{\partial w^*}{\partial x} \frac{\partial m_x}{\partial x} d\Omega. \quad (2.42)$$

Aplicando a propriedade de derivação (2.40) no segundo termo do lado direito da equação (2.42), tem-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_x \varepsilon_x^* d\Omega = - \int_{\Gamma} m_x \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos \alpha d\Gamma + \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(w^* \frac{\partial m_x}{\partial x} \right) - w^* \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} \right] d\Omega. \quad (2.43)$$

Depois, usando o teorema de Green, pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} \sigma_x \varepsilon_x^* d\Omega = \int_{\Gamma} \left(-m_x \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos \alpha + w^* \frac{\partial m_x}{\partial x} \cos \alpha \right) d\Gamma - \int_{\Omega} w^* \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} d\Omega. \quad (2.44)$$

Seguindo um procedimento similar, podemos mostrar que:

$$\int_{\Omega} \sigma_y \varepsilon_y^* d\Omega = \int_{\Gamma} \left(-m_y \frac{\partial w^*}{\partial y} \sin \alpha + w^* \frac{\partial m_y}{\partial y} \sin \alpha \right) d\Gamma - \int_{\Omega} w^* \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} d\Omega, \quad (2.45)$$

e

$$\int_{\Omega} \tau_{xy} \gamma_{xy}^* d\Omega = \int_{\Gamma} \left(-m_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial y} \cos \alpha - m_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial x} \sin \alpha + w^* \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \sin \alpha + w^* \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \cos \alpha \right) d\Gamma - \int_{\Omega} 2w^* \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} d\Omega. \quad (2.46)$$

Assim, a equação (2.37) é escrita como:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = - \int_{\Gamma} \left(m_x \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos \alpha + m_y \frac{\partial w^*}{\partial y} \sin \alpha + m_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial y} \cos \alpha + m_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial x} \sin \alpha \right) d\Gamma + \int_{\Gamma} w^* \left[\left(\cos \alpha \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \right) \left(\sin \alpha \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \right) \right] d\Gamma - \int_{\Omega} w^* \left(\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} \right) d\Omega. \quad (2.47)$$

Substituindo as equações (2.7) e (2.8) e usando a equação (2.33), a equação (2.47) pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = - \int_{\Gamma} \left(m_x \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos \alpha + m_y \frac{\partial w^*}{\partial y} \sin \alpha + m_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial y} \cos \alpha + m_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial x} \sin \alpha \right) d\Gamma + \int_{\Gamma} w^* q_n d\Gamma + \int_{\Omega} g w^* d\Omega. \quad (2.48)$$

Da relação entre dois sistemas de coordenadas (x, y) e (n, s) , tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{\partial w^*}{\partial x} &= \frac{\partial w^*}{\partial n} \cos \alpha - \frac{\partial w^*}{\partial s} \sin \alpha, \\ \frac{\partial w^*}{\partial y} &= \frac{\partial w^*}{\partial n} \sin \alpha + \frac{\partial w^*}{\partial s} \cos \alpha.\end{aligned}\tag{2.49}$$

Substituindo as equações (2.49) na equação (2.48), tem-se:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega &= - \int_{\Gamma} \left[m_x \cos \alpha \left(\frac{\partial w^*}{\partial n} \cos \alpha - \frac{\partial w^*}{\partial s} \sin \alpha \right) + \right. \\ & m_y \sin \alpha \left(\frac{\partial w^*}{\partial n} \sin \alpha + \frac{\partial w^*}{\partial s} \cos \alpha \right) + m_{xy} \cos \alpha \left(\frac{\partial w^*}{\partial n} \sin \alpha + \frac{\partial w^*}{\partial s} \cos \alpha \right) + \\ & \left. m_{xy} \sin \alpha \left(\frac{\partial w^*}{\partial n} \cos \alpha - \frac{\partial w^*}{\partial s} \sin \alpha \right) \right] d\Gamma + \int_{\Gamma} w^* q_n d\Gamma + \int_{\Omega} g w^* d\Omega.\end{aligned}\tag{2.50}$$

Depois de algumas manipulações algébricas, a equação (2.50) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega &= - \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial w^*}{\partial n} (m_x \cos^2 \alpha + m_y \sin^2 \alpha + 2m_{xy} \sin \alpha \cos \alpha) + \right. \\ & \left. \frac{\partial w^*}{\partial s} [m_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + (m_y - m_x) \sin \alpha \cos \alpha] \right\} d\Gamma + \\ & \int_{\Gamma} w^* q_n d\Gamma + \int_{\Omega} g w^* d\Omega.\end{aligned}\tag{2.51}$$

Substituindo as equações (2.30) e (2.31) na equação (2.51), tem-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = - \int_{\Gamma} \left(m_n \frac{\partial w^*}{\partial n} + m_{ns} \frac{\partial w^*}{\partial s} - q_n w^* \right) d\Gamma + \int_{\Omega} g w^* d\Omega.\tag{2.52}$$

Calculando o segundo termo, usando integração por partes, da primeira integral do lado direito da equação (2.52), temos:

$$\int_{\Gamma} m_{ns} \frac{\partial w^*}{\partial s} d\Gamma = m_{ns} w^* \Big|_{\Gamma_1}^{\Gamma_2} - \int_{\Gamma} \frac{\partial m_{ns}}{\partial s} w^* d\Gamma, \quad (2.53)$$

onde Γ_1 e Γ_2 são as coordenadas dos extremos do contorno onde a integração está sendo realizada.

No caso de um contorno fechado sem canto, isto é, a função que descreve a curva de contorno e suas derivadas são contínuas, o primeiro termo do lado direito da equação (2.53) desaparece. No caso onde há cantos, a equação (2.53) pode ser escrita como:

$$\int_{\Gamma} m_{ns} \frac{\partial w^*}{\partial s} d\Gamma = - \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i} w_{c_i}^* - \int_{\Gamma} \frac{\partial m_{ns}}{\partial s} w^* d\Gamma, \quad (2.54)$$

onde

$$R_{c_i} = m_{ns_i}^+ - m_{ns_i}^-, \quad (2.55)$$

e os termos $w_{c_i}^*$, $m_{ns_i}^+$, $m_{ns_i}^-$ são, respectivamente, os valores de deslocamentos e momentos depois e antes do canto i da placa (Figura 2.6), N_c é o número total de cantos no contorno (PAIVA, 1987).

Das equações (2.52) e (2.54), pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Gamma} \left(q_n w^* - m_n \frac{\partial w^*}{\partial n} + \frac{\partial m_{ns}}{\partial s} w^* \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i} w_{c_i}^* + \int_{\Omega} g w^* d\Omega. \quad (2.56)$$

Das equações (2.56) e (2.34), tem-se:

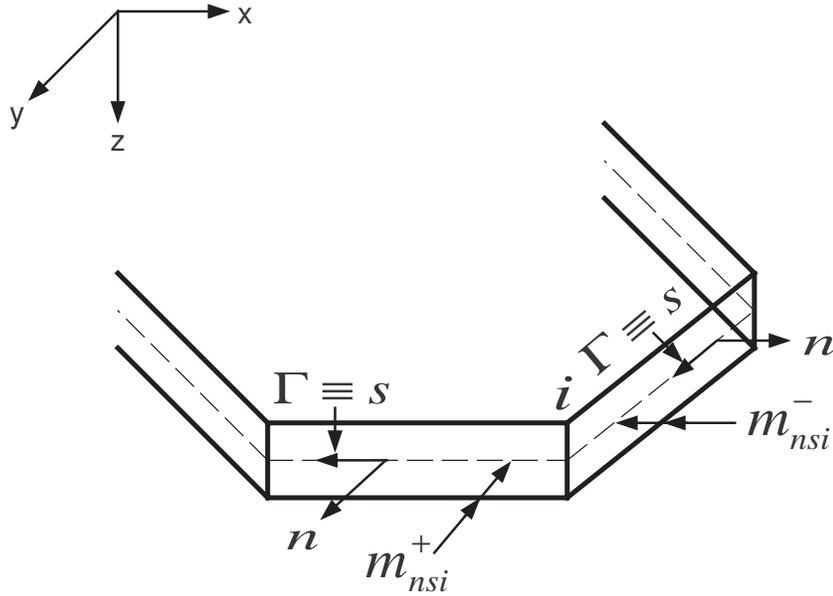


Figura 2.6: Canto i do contorno da placa.

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Gamma} \left(V_n w^* - m_n \frac{\partial w^*}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i} w_{c_i}^* + \int_{\Omega} g w^* d\Omega. \quad (2.57)$$

Seguindo um procedimento similar àquele usado para obter a equação (2.57), o lado esquerdo da equação (2.35) pode ser escrito como:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Gamma} \left(V_n^* w - m_n^* \frac{\partial w}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}^* w_{c_i} + \int_{\Omega} g^* w d\Omega. \quad (2.58)$$

Substituindo as equações (2.57) e (2.58) na equação (2.35), pode-se escrever:

$$\int_{\Gamma} \left(V_n w^* - m_n \frac{\partial w^*}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i} w_{c_i}^* + \int_{\Omega} g w^* d\Omega =$$

$$\int_{\Gamma} \left(V_n^* w - m_n^* \frac{\partial w}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}^* w_{c_i} + \int_{\Omega} g^* w d\Omega. \quad (2.59)$$

A equação (2.59) relaciona dois estados de um material elástico. Para aplicar esta equação para resolver problemas de flexão, precisa-se considerar um dos estados como conhecido e o outro como o estado que queremos analisar. Para obter a equação integral de contorno, o estado conhecido é ajustado para que a integral de domínio dada por 2.60, seja nula:

$$\int_{\Omega} g^* w d\Omega \quad (2.60)$$

Usando as propriedades da função delta de Dirac $\delta(P, Q)$, de forma que $g^* = \delta(P, Q)$, a integral (2.60) é escrita como:

$$\int_{\Omega} \delta(P, Q) w(P) d\Omega(P) = w(Q), \quad (2.61)$$

onde Q é o ponto onde a carga é aplicada, conhecido como ponto fonte, e P é o ponto onde o deslocamento é observado, conhecido como ponto campo. O estado correspondente a um material linear sob carregamento de uma função delta de Dirac é conhecido como um estado fundamental e as variáveis da equação (2.59) relacionadas a este estado (w^* , V_n^* e m_n^*) são conhecidas como soluções fundamentais, as quais são calculadas analiticamente a partir da equação (2.25).

Considerando o estado $*$ como o estado fundamental, a equação (2.59) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
Kw(Q) + \int_{\Gamma} \left[V_n^*(Q, P)w(P) - m_n^*(Q, P)\frac{\partial w(P)}{\partial n} \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}^*(Q, P)w_{c_i}(P) = \\
\int_{\Gamma} \left[V_n(P)w^*(Q, P) - m_n(P)\frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}(P)w_{c_i}^*(Q, P) + \\
\int_{\Omega} b(P)w^*(Q, P)d\Omega. \tag{2.62}
\end{aligned}$$

A equação (2.62) é a equação de placas finas para deslocamentos em pontos do domínio da placa. Esta equação fornece deslocamentos em todos os pontos do domínio da placa a partir das cortantes equivalentes (V_n), momentos de flexão na direção normal (m_n), reação de canto (R_{c_i}), deslocamentos (w) e rotações em relação à normal ($\partial w/\partial n$) conhecidos no contorno.

A constante K é introduzida para se considerar que a função delta de Dirac pode ser aplicada no domínio, no contorno ou fora do domínio. Se a função delta de Dirac é aplicada em um ponto onde o contorno é suave, então $K = 1/2$. As variáveis da equação (2.62) são deslocamentos $w(P)$, rotações $\frac{\partial w(P)}{\partial n}$, momentos $m_n(P)$, e forças $V_n(P)$. Para uma dada condição de contorno, algumas destas variáveis são conhecidas e outras desconhecidas. Para se ter um número de equações igual ao número de variáveis desconhecidas, é necessário escrever a equação integral correspondente a derivada do deslocamento $w(Q)$ em relação ao sistema de coordenadas cartesiano fixo no ponto de origem, isto é, o ponto onde o delta de Dirac do estado fundamental é aplicado. As direções dos eixos deste sistema de coordenadas são coincidentes com as direções normal e a tangente ao contorno no ponto de origem. Para problemas de flexão em placas isotrópicas tem-se que a equação integral de contorno escrita em termos de quatro valores de contorno básicos, isto é, deflexão w , inclinação da normal $\partial w/\partial n$, força cortante V_n e momento fletor m_n . Em um problema bem colocado dois destes quatro valores são incógnitas do problema e dois são condições de contorno conhecidas.

Pode-se verificar que num problema de flexão em placas isotrópicas há sempre duas incógnitas a serem determinadas em qualquer ponto do contorno e conseqüentemente, a solução do problema requer que uma segunda equação seja estabelecida.

A segunda equação integral de contorno é obtida da derivada da equação (2.62) em relação à direção n_1 normal ao contorno no ponto fonte e também corresponde à solução do binário unitário.

Esta equação é dada por:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial w(Q)}{\partial n_1} + \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial V^*}{\partial n_1}(Q, P) w(P) - \frac{\partial m_n^*}{\partial n_1}(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\ & \sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial R_{c_i}^*}{\partial n_1}(Q, P) w_{c_i}(P) = \int_{\Gamma} \left\{ V_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n_1}(Q, P) - m_n(P) \frac{\partial}{\partial n_1} \left[\frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right] \right\} d\Gamma(P) + \\ & \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}(P) \frac{\partial w_{c_i}^*}{\partial n_1}(Q, P) + \int_{\Omega} b(P) \frac{\partial w^*}{\partial n_1}(Q, P) d\Omega. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Encontra-se na literatura formulações de elementos de contorno que usam apenas a equação (2.62). Neste caso, os pontos fontes são os nós do contorno e um número igual de pontos externos ao domínio do problema (RAJAMOHAN E RAAMACHANDRAN, 1999).

2.5 Solução fundamental de deflexão para uma carga pontual

A solução fundamental é a resposta à aplicação de um carregamento unitário pontual em um meio elástico infinito cujas propriedades elásticas são as mesmas do componente que se quer analisar. No caso particular de placas, a solução fundamental é dada pelo deslocamento w em um ponto P qualquer do domínio, chamado de ponto campo, devido à aplicação de uma carga unitária q em um ponto Q qualquer, chamado de ponto fonte (Figura 2.7).

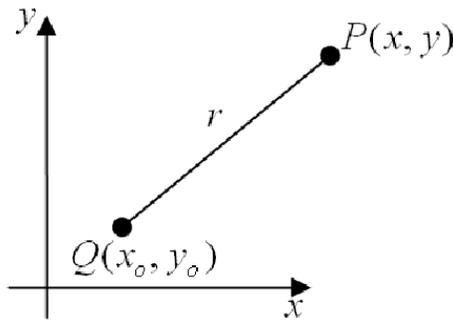


Figura 2.7: Solução fundamental

A solução fundamental do deslocamento transversal de placas fletidas é calculado fazendo o termo não-homogêneo da equação diferencial (2.25) igual a uma força concentrada dada por uma função delta de Dirac $\delta[x - x(q), y - y(q)]$, isto é:

$$\Delta\Delta w^* = \delta[x(p) - x(q), y(p) - y(q)], \quad (2.64)$$

onde Δ é o operador diferencial:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2.65)$$

A solução fundamental do deslocamento transversal é dada por:

$$w^* = \frac{1}{8\pi D} \rho^2 \left(\ln \rho - \frac{1}{2} \right), \quad (2.66)$$

onde

$$\rho = [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{1/2}, \quad (2.67)$$

x e y são as coordenadas do ponto campo P , x_0 e y_0 são as coordenadas do ponto fonte Q ,

2.6 Elementos Quadráticos

Uma vez que é muito difícil encontrar soluções analíticas gerais para as equações integrais de contorno (2.62) e (2.63), torna-se necessário o uso de soluções numéricas. Quando soluções numéricas são usadas, o contorno é aproximado por elementos discretos. Estes elementos discretos são chamados elementos de contorno.

Considere a Figura 2.8 onde o contorno de uma placa é aproximado por uma série de segmentos (elementos de contorno) Γ_i , cujo número e forma são escolhidos para representá-lo adequadamente.

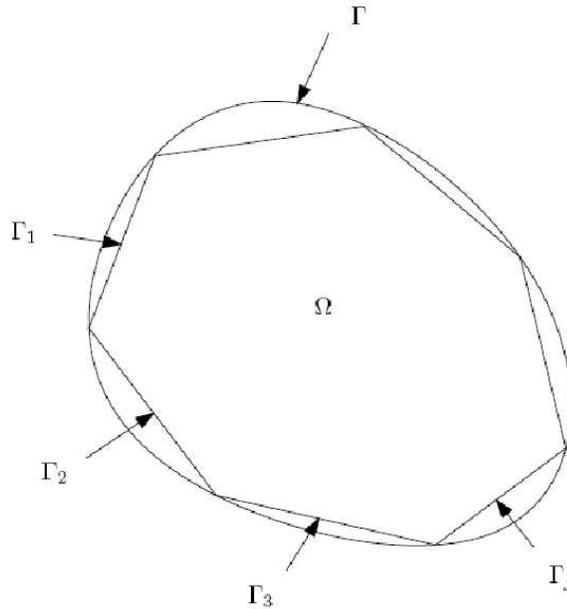


Figura 2.8: Domínio bidimensional dividido em elementos de contorno.

A cada elemento de contorno associam-se um ou mais pontos chamados nós ou pontos nodais e os valores das variáveis associadas a eles são denominados valores nodais. Os deslocamentos e esforços ao longo de cada elemento serão aproximados por funções polinomiais em função das quais é definido o número de pontos nodais do elemento.

Visando aumentar a convergência dos resultados para a formulação apresentada aqui, foram implementados os elementos quadráticos, os quais são os mais simples capazes de representar qualquer contorno curvo. Como a formulação tem integrais com integrandos singulares, estas integrais precisam ser calculadas no sentido de Cauchy, no caso de singularidades fortes, ou no sentido de Hadamard, no caso de hipersingularidades. A integração no sentido de Hadamard requer a continuidade de Holder nos nós. Devido a esse fato, os elementos descontínuos são fortemente indicados. Neste trabalho são usados os elementos quadráticos descontínuos para representar os elementos físicos e os elementos quadráticos contínuos para representar os elementos geométricos.

Nos elementos quadráticos, os deslocamentos e as forças podem ser representados como:

$$\begin{Bmatrix} w \\ \frac{\partial w}{\partial n} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_d^{(1)} & 0 & N_d^{(2)} & 0 & N_d^{(3)} & 0 \\ 0 & N_d^{(1)} & 0 & N_d^{(2)} & 0 & N_d^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w^{(1)} \\ \frac{\partial w}{\partial n}^{(1)} \\ w^{(2)} \\ \frac{\partial w}{\partial n}^{(2)} \\ w^{(3)} \\ \frac{\partial w}{\partial n}^{(3)} \end{Bmatrix} \quad (2.68)$$

$$\begin{Bmatrix} V_n \\ m_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_d^{(1)} & 0 & N_d^{(2)} & 0 & N_d^{(3)} & 0 \\ 0 & N_d^{(1)} & 0 & N_d^{(2)} & 0 & N_d^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_n^{(1)} \\ m_n^{(1)} \\ V_n^{(2)} \\ m_n^{(2)} \\ V_n^{(3)} \\ m_n^{(3)} \end{Bmatrix} \quad (2.69)$$

Nos elementos quadráticos descontínuos os nós são colocados em $\xi = -2/3$, $\xi = 0$ e $\xi = +2/3$, como mostrado na Figura 2.9. As funções de forma são dadas por:

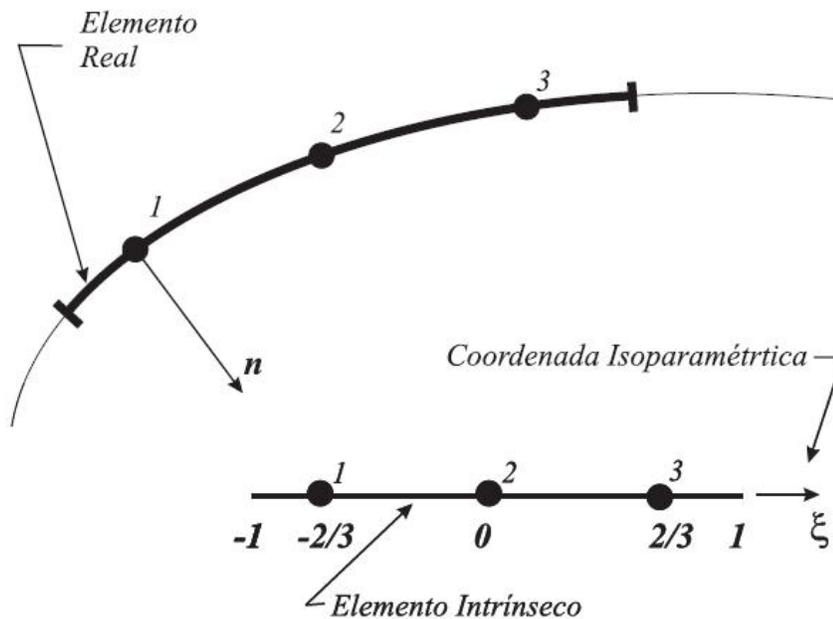


Figura 2.9: Elemento quadrático descontínuo.

$$N_d^{(1)} = \xi \left(\frac{9}{8}\xi - \frac{3}{4} \right); \quad (2.70)$$

$$N_d^{(2)} = \left(1 - \frac{3}{2}\xi \right) \left(1 + \frac{3}{2}\xi \right); \quad (2.71)$$

$$N_d^{(3)} = \xi \left(\frac{9}{8}\xi + \frac{3}{4} \right). \quad (2.72)$$

onde ξ é a coordenada adimensional ao longo do elemento (Figura 2.9).

A geometria do elemento também pode ser considerada como quadrática e é representada por coordenadas nodais na forma:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_c^{(1)} & 0 & N_c^{(2)} & 0 & N_c^{(3)} & 0 \\ 0 & N_c^{(1)} & 0 & N_c^{(2)} & 0 & N_c^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_1^{(2)} \\ x_1^{(3)} \\ x_2^{(1)} \\ x_2^{(2)} \\ x_2^{(3)} \end{Bmatrix} \quad (2.73)$$

porém, utilizando as funções de forma para elementos quadráticos contínuos dadas por:

$$N_c^{(1)} = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1); \quad (2.74)$$

$$N_c^{(2)} = (1 - \xi^2); \quad (2.75)$$

$$N_c^{(3)} = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1). \quad (2.76)$$

2.7 Equação matricial

Com o objetivo de calcular as variáveis de contorno desconhecidas, o contorno Γ é discretizado em N_e elementos de contorno quadráticos e as variáveis de contorno w , $\partial w/\partial n$, m_n e V_n são interpoladas ao longo de cada elemento. Tomando um nó d como o ponto fonte, as equações (2.62) e (2.63) podem ser escritas na forma matricial como:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \begin{pmatrix} w^{(d)} \\ \frac{\partial w}{\partial n_1}(d) \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{N_e} \left(\begin{bmatrix} h_{11}^{(i,d)} & h_{12}^{(i,d)} & h_{13}^{(i,d)} & h_{14}^{(i,d)} & h_{15}^{(i,d)} & h_{16}^{(i,d)} \\ h_{21}^{(i,d)} & h_{22}^{(i,d)} & h_{23}^{(i,d)} & h_{24}^{(i,d)} & h_{25}^{(i,d)} & h_{26}^{(i,d)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w^{(i,1)} \\ \frac{\partial w}{\partial n}(i,1) \\ w^{(i,2)} \\ \frac{\partial w}{\partial n}(i,2) \\ w^{(i,3)} \\ \frac{\partial w}{\partial n}(i,3) \end{pmatrix} \right) = \\
 \sum_{i=1}^{N_e} \left(\begin{bmatrix} g_{11}^{(i,d)} & g_{12}^{(i,d)} & g_{13}^{(i,d)} & g_{14}^{(i,d)} & g_{15}^{(i,d)} & g_{16}^{(i,d)} \\ g_{21}^{(i,d)} & g_{22}^{(i,d)} & g_{23}^{(i,d)} & g_{24}^{(i,d)} & g_{25}^{(i,d)} & g_{26}^{(i,d)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_n^{(i,1)} \\ m_n^{(i,1)} \\ V_n^{(i,2)} \\ m_n^{(i,2)} \\ V_n^{(i,3)} \\ m_n^{(i,3)} \end{pmatrix} \right) + \\
 \sum_{i=1}^{N_c} \left(\begin{pmatrix} R_1^{(i,d)} \\ R_2^{(i,d)} \end{pmatrix} w_c^{(i)} \right) + \sum_{i=1}^{N_c} \left(\begin{pmatrix} c_1^{(i,d)} \\ c_2^{(i,d)} \end{pmatrix} R_c^{(i)} \right) + \begin{pmatrix} P_1^{(d)} \\ P_2^{(d)} \end{pmatrix}. \quad (2.77)
 \end{aligned}$$

Os termos da equação (2.77) são integrais dadas por:

$$h_{11}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N^{(1)} V_n^* d\Gamma, \quad h_{12}^{(i,d)} = - \int_{\Gamma_i} N^{(1)} m_n^* d\Gamma, \quad (2.78)$$

$$h_{13}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N^{(2)} V_n^* d\Gamma, \quad h_{14}^{(i,d)} = - \int_{\Gamma_i} N^{(2)} m_n^* d\Gamma, \quad (2.79)$$

$$h_{15}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N^{(3)} V_n^* d\Gamma, \quad h_{16}^{(i,d)} = - \int_{\Gamma_i} N^{(3)} m_n^* d\Gamma, \quad (2.80)$$

$$h_{21}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N^{(1)} \frac{\partial V_n^*}{\partial n_1} d\Gamma, \quad h_{22}^{(i,d)} = - \int_{\Gamma_i} N^{(1)} \frac{\partial m_n^*}{\partial n_1} d\Gamma, \quad (2.81)$$

$$h_{23}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N^{(2)} \frac{\partial V_n^*}{\partial n_1} d\Gamma, \quad h_{24}^{(i,d)} = - \int_{\Gamma_i} N^{(2)} \frac{\partial m_n^*}{\partial n_1} d\Gamma, \quad (2.82)$$

$$h_{25}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N^{(3)} \frac{\partial V_n^*}{\partial n_1} d\Gamma, \quad h_{26}^{(i,d)} = - \int_{\Gamma_i} N^{(3)} \frac{\partial m_n^*}{\partial n_1} d\Gamma, \quad (2.83)$$

$$g_{11}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N^{(1)} w^* d\Gamma, \quad g_{12}^{(i,d)} = - \int_{\Gamma_i} N^{(1)} \frac{\partial w^*}{\partial n} d\Gamma, \quad (2.84)$$

$$g_{13}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N^{(2)} w^* d\Gamma, \quad g_{14}^{(i,d)} = - \int_{\Gamma_i} N^{(2)} \frac{\partial w^*}{\partial n} d\Gamma, \quad (2.85)$$

$$g_{15}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N^{(3)} w^* d\Gamma, \quad g_{16}^{(i,d)} = - \int_{\Gamma_i} N^{(3)} \frac{\partial w^*}{\partial n} d\Gamma, \quad (2.86)$$

$$g_{21}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N^{(1)} \frac{\partial w^*}{\partial n_1} d\Gamma, \quad g_{22}^{(i,d)} = - \int_{\Gamma_i} N^{(1)} \frac{\partial}{\partial n_1} \frac{\partial m_n^*}{\partial n} d\Gamma, \quad (2.87)$$

$$g_{23}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N^{(2)} \frac{\partial w^*}{\partial n_1} d\Gamma, \quad g_{24}^{(i,d)} = - \int_{\Gamma_i} N^{(2)} \frac{\partial}{\partial n_1} \frac{\partial m_n^*}{\partial n} d\Gamma, \quad (2.88)$$

$$g_{25}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N^{(3)} \frac{\partial w^*}{\partial n_1} d\Gamma, \quad g_{26}^{(i,d)} = - \int_{\Gamma_i} N^{(3)} \frac{\partial}{\partial n_1} \frac{\partial m_n^*}{\partial n} d\Gamma, \quad (2.89)$$

$$c_1^{(i,d)} = w_{ci}^*, \quad c_2^{(i,d)} = \frac{\partial w_{ci}^*}{\partial n_1}, \quad (2.90)$$

$$R_1^{(i,d)} = R_{ci}^*, \quad R_2^{(i,d)} = \frac{\partial R_{ci}^*}{\partial n_1}, \quad (2.91)$$

$$P_1^{(d)} = \int_{\Omega} g w^* d\Omega, \quad P_2^{(d)} = \int_{\Omega} g \frac{\partial w}{\partial n_1} d\Omega. \quad (2.92)$$

sendo o contorno Γ dado por:

$$\Gamma = \sum_{e=1}^{N_e} \Gamma_e, \quad (2.93)$$

onde, N_e é o número de elementos.

O desenvolvimento das integrais ao longo do elemento na equação (2.77) requer o uso do jacobiano, já que as funções de forma são expressas em termos da coordenada adimensional e as integrais são resolvidas ao longo do contorno Γ_e . O jacobiano desta transformação é dado por:

$$J(\xi) = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\xi}\right)^2} = \frac{d\Gamma_e}{d\xi}. \quad (2.94)$$

Assim:

$$d\Gamma_e = J(\xi)d\xi. \quad (2.95)$$

A equação matricial (2.77) tem duas equações e $6N_e + N_c$ variáveis desconhecidas. Para se obter um sistema linear solucionável, o ponto fonte é colocado sucessivamente em cada nó do contorno ($d = 1, \dots, 6N_e$) bem como em cada nó de canto ($d = 6N_e + 1, \dots, 6N_e + N_c$). É importante notar que enquanto ambas as equações, (2.62) e (2.63), são usadas para cada nó de contorno (fornecendo as primeiras $6N_e$ equações), somente a equação (2.62) é usada para cada canto (fornecendo outras N_c equações). Então, a seguinte equação matricial é obtida:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}' & \mathbf{R}' \\ \mathbf{H}'' & \mathbf{R}'' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_{bn} \\ \mathbf{w}_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}' & \mathbf{C}' \\ \mathbf{G}'' & \mathbf{C}'' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{V}_{bn} \\ \mathbf{V}_c \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_{bn} \\ \mathbf{P}_c \end{Bmatrix}, \quad (2.96)$$

onde, \mathbf{w}_{bn} contém o deslocamento transversal e a rotação de cada nó de contorno, \mathbf{V}_{bn} contém a

força cisalhante e o momento torsor de cada nó de contorno, \mathbf{P}_{bn} contém a integral de domínio para cada nó de contorno, \mathbf{w}_c contém o deslocamento transversal de cada canto, \mathbf{V}_c contém a reação de canto para cada canto, \mathbf{P}_c contém a integral de domínio para cada canto. Os termos \mathbf{H}' , \mathbf{C}' , \mathbf{R}' e \mathbf{G}' são matrizes que contém os respectivos termos da equação (2.77) escritos para os N_e nós de contorno. Os termos \mathbf{H}'' , \mathbf{C}'' , \mathbf{R}'' e \mathbf{G}'' são matrizes que contém os respectivos primeiros termos da equação (2.77) escrita para os N_c cantos.

A equação (2.96) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{H}\mathbf{w} = \mathbf{G}\mathbf{V} + \mathbf{P}, \quad (2.97)$$

onde,

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}' & \mathbf{R}' \\ \mathbf{H}'' & \mathbf{R}'' \end{bmatrix}, \quad (2.98)$$

$$\mathbf{w} = \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_{bn} \\ \mathbf{w}_c \end{Bmatrix}, \quad (2.99)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}' & \mathbf{C}' \\ \mathbf{G}'' & \mathbf{C}'' \end{bmatrix}, \quad (2.100)$$

$$\mathbf{V} = \begin{Bmatrix} \mathbf{V}_{bn} \\ \mathbf{V}_c \end{Bmatrix}, \quad (2.101)$$

$$\mathbf{P} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_{bn} \\ \mathbf{P}_c \end{Bmatrix}. \quad (2.102)$$

Para resolver a equação (2.97) é necessário levar em conta as condições de contorno.

2.8 Transformação das integrais de domínio em integrais de contorno

A aplicação do método dos elementos de contorno requer, preferencialmente, que a solução fundamental para o problema em consideração seja conhecida. Essa solução fundamental deve levar em conta todos os termos da equação governante de forma a obter uma formulação onde apenas o contorno é discretizado. Quando isso não for possível, os termos não considerados na obtenção da solução fundamental produzirão integrais de domínio que preferencialmente, devem ser transformadas em integrais de contorno. A primeira alternativa é fazer a transformação exata da integral de domínio em integral de contorno. Porém, isto só é possível quando os termos não considerados são funções apenas da geometria (carregamento distribuído, por exemplo). A segunda alternativa é transferir os efeitos da integral de domínio para o contorno usando-se o método de elementos de contorno de reciprocidade dual ou da integração radial. Estes procedimentos são mais gerais e podem ser empregados para quaisquer termos. No caso deste trabalho, as integrais de domínio provenientes da carga distribuída serão transformadas em integrais de contorno por transformação exata.

Como pode ser observado nas equações (2.62) e (2.63), há integrais de domínio na formulação devido a carga distribuída no domínio e aos termos de inércia. Estas integrais podem ser calculadas por integração direta, através de células, na área Ω_g (veja Figura 2.1). Contudo, a formulação dos elementos de contorno perde seu principal atrativo que é a discretização somente do contorno. Neste trabalho, as integrais de domínio oriundas das cargas distribuídas são transformadas em integrais de contorno por uma transformação exata.

Considere a placa da Figura 2.1 sob um carregamento g aplicado em uma área Ω_g . Assumindo que o carregamento g tem uma distribuição linear ($Ax + By + C$) na área Ω_g , a integral de domínio pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega_g} gw^* d\Omega = \int_{\Omega_g} (Ax + By + C)w^* \rho d\rho d\theta, \quad (2.103)$$

ou

$$\int_{\Omega_g} gw^* d\Omega = \int_{\theta} \int_0^r (Ax + By + C)w^* \rho d\rho d\theta, \quad (2.104)$$

onde, r é o valor de ρ em um ponto do contorno Γ_g .

Definindo F^* como a seguinte integral:

$$F^* = \int_0^r (Ax + By + C)w^* \rho d\rho, \quad (2.105)$$

pode-se escrever:

$$\int_{\Omega_g} gw^* d\Omega = \int_{\theta} F^* d\theta. \quad (2.106)$$

Considerando um ângulo infinitesimal $d\theta$ (Figura 2.10), a relação entre o comprimento do arco $r d\theta$ e o comprimento infinitesimal do contorno $d\Gamma$, pode ser escrito como:

$$\cos \alpha = \frac{r \frac{d\theta}{2}}{\frac{d\Gamma}{2}}, \quad (2.107)$$

ou

$$d\theta = \frac{\cos \alpha}{r} d\Gamma. \quad (2.108)$$

Usando as propriedades do produto interno dos vetores unitários \mathbf{n} e \mathbf{r} , indicados na (Figura 2.10), podemos escrever:

$$d\theta = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r} d\Gamma. \quad (2.109)$$

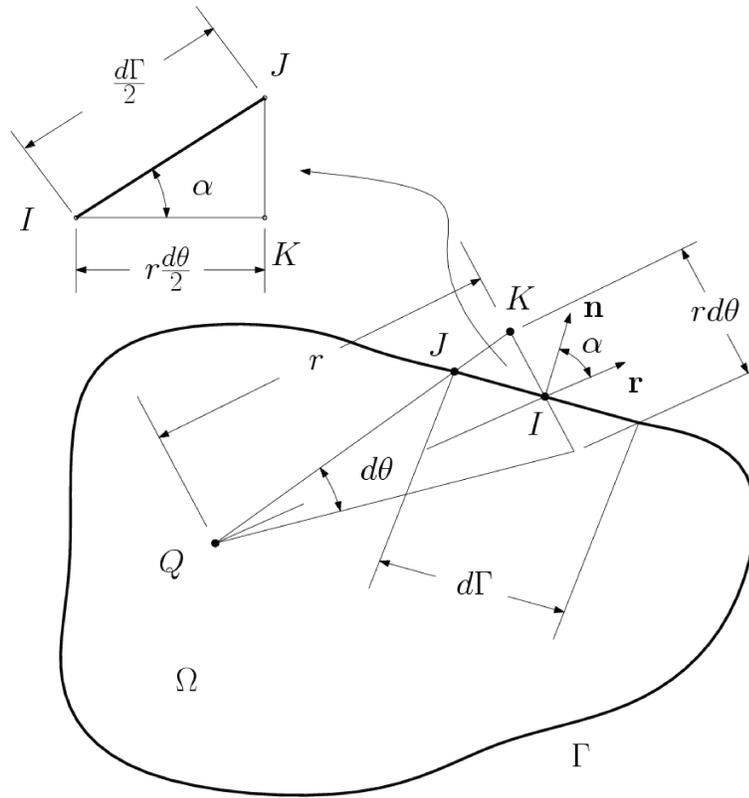


Figura 2.10: Transformação da integral de domínio em integral de contorno.

Finalmente, substituindo a equação (2.109) na equação (2.106), a integral de domínio da equação (2.62) pode ser escrita como uma integral de contorno dada por:

$$\int_{\Omega_g} gw^* d\Omega = \int_{\Gamma_g} \frac{F^*}{r} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} d\Gamma. \quad (2.110)$$

Sabendo que

$$x = \rho \cos \theta \quad (2.111)$$

e

$$y = \rho \sin \theta. \quad (2.112)$$

Seguindo um procedimento similar para obter a equação (2.105), o termo de domínio da equação (2.63) pode ser escrito como:

$$\int_{\Omega_g} g \frac{\partial w^*}{\partial n_1} d\Omega = \int_{\theta} G^* d\theta, \quad (2.113)$$

onde

$$G^* = \int_0^r (Ax + By + C) \frac{\partial w^*}{\partial n_1} \rho d\rho \quad (2.114)$$

Embora neste trabalho as cargas de domínio são consideradas como linearmente distribuídas, o procedimento apresentado nesta seção pode ser estendido para outras cargas de ordem superior.

O último termo da equação (2.63) pode ser transformado de uma integral de domínio para uma integral de contorno, seguindo um processo similar. Então:

$$\int_{\Omega_g} g \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} d\Omega = \int_{\theta} H^* d\theta, \quad (2.115)$$

onde

$$H^* = \int_0^r (Ax + By + C) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} \rho d\rho \quad (2.116)$$

3 Estabilidade de placas isotrópicas

3.1 Introdução

Neste capítulo será descrita a teoria clássica de estabilidade de placas. O comportamento das placas em flambagem será primeiramente apresentado. Também serão apresentadas as equações diferenciais que descrevem o problema de flambagem linear de placas carregadas em seu plano, começando pelas hipóteses de Kirchhoff. Os problemas de estabilidade de placas para pequenas deflexões serão formulados como um problema de valor de contorno. Também será apresentada, uma formulação de elementos de contorno para a análise de estabilidade de placas isotrópicas sem discretização do domínio. O problema clássico de flexão de placas e as formulações de elasticidade plana, conforme visto nos capítulos anteriores, serão utilizados e as integrais de domínio, devidas as forças de corpo não uniformes, serão transformadas em integrais de contorno usando o método de integração radial. As formulações apresentadas não requerem nem a discretização do domínio, nem as soluções particulares do problema em questão. Os resultados numéricos de uma placa fina sem furo e com furo retangular são apresentados para avaliar a precisão do método. Os coeficientes de flambagem, calculados utilizando a formulação proposta, serão comparados com os resultados obtidos pelo Método dos Elementos Finitos implementado no programa ANSYS.

3.2 Teoria Linear

No que se segue, as equações diferenciais que regem o comportamento de uma placa homogênea são estabelecidas assumindo-se que o material é elástico e as relações deformação-deslocamento são lineares. A carga é aplicada nas extremidades da placa, numa direção paralela ao seu próprio plano. Assume-se, também, que não há cargas transversais e os efeitos das forças de corpo e tensões térmicas são desprezíveis.

O sistema de coordenadas adotado é o cartesiano de coordenadas xyz . A placa mostrada na Figura 3.1 tem domínio Ω e superfície de contorno Γ . A dimensão da placa na direção z é a espessura da placa h , considerada pequena comparada às outras duas dimensões. A origem do eixo z é tomado no plano médio indeformado da placa.

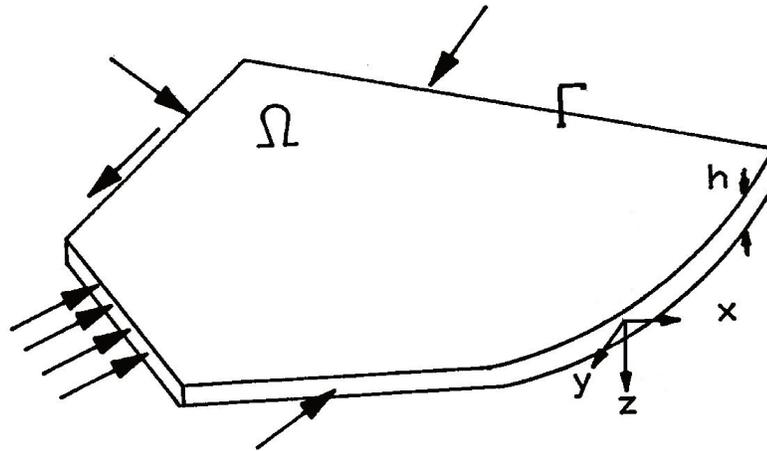


Figura 3.1: Placa plana carregada em seu plano médio

A teoria de placas de Kirchhoff assume que as seções planas permanecem planas após a deformação e as seções originalmente normais ao plano médio indeformado, permanecem normais após a deformação. Distorções devidos a deformações por cisalhamento são desprezadas. Além disso, as tensões normais σ_{zz} e as tensões cisalhantes σ_{zx} e σ_{zy} são consideradas muito pequenas comparadas às outras componentes de tensão. A deflexão transversal w é considerada pequena quando comparada a espessura da placa e as deformações de alongamento no plano médio da placa são também desprezíveis. Assumindo essas hipóteses simplificadoras, pode-se aplicar as relações lineares de deformação e deslocamentos.

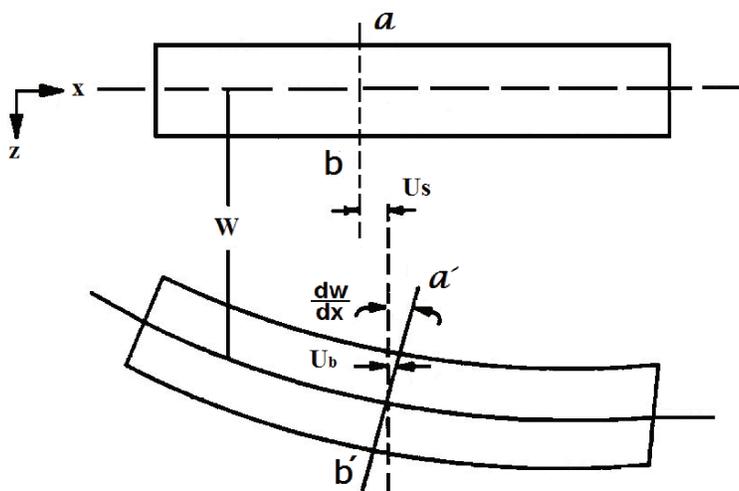


Figura 3.2: Deformação de uma seção no plano xz

A Figura 3.2 mostra um corte da seção da placa no plano xz . As três componentes de deslocamentos u_x , u_y e u_z são aproximadas segundo Timoshenko e Gere (1961) e Dym e Shames (1973). Em função da pequena espessura da placa, u_z é considerado constante ao longo da espessura da placa. Nesse caso, a deflexão w do plano médio da placa descreve o deslocamento u_z :

$$u_z(x, y, z) = w(x, y) \quad (3.1)$$

Dois componentes de deformação u_x e u_y são considerados: os deslocamentos u_{xs} e u_{ys} devidos ao alongamento e u_{xb} e u_{yb} devidos a flexão.

$$\begin{aligned} u_x &= u_{xs} + u_{xb} \\ u_y &= u_{ys} + u_{yb} \end{aligned} \quad (3.2)$$

O efeito do alongamento é devido à ação da carga no plano da placa. Os deslocamentos u_{xs} e u_{ys} podem novamente ser assumidos como constantes ao longo da espessura.

Considerando a ação da flexão e a hipótese de que as seções planas permanecem planas, a linha ab é deformada em $a'b'$, sofrem um translação na vertical e uma rotação. Assim, u_{xb} e u_{yb} podem ser expressas por:

$$\begin{aligned} u_{xb} &= -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \\ u_{yb} &= -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.3)$$

O campo de deslocamento u_x , u_y e u_z pode agora ser descrito em termos dos parâmetros de deformação do plano médio:

$$\begin{aligned}
u_x(x, y, z) &= u_{xs}(x, y) - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \\
u_y(x, y, z) &= u_{ys}(x, y) - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \\
u_z &= w(x, y).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

As equações lineares que relacionam deformação e deslocamentos são dadas por:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} \\
\epsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} \\
\gamma_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Derivando-se duas vezes ϵ_{xx} , ϵ_{yy} e γ_{xy} , respectivamente, em relação a y , x e x e y e combinando essas três equações, obtém-se a seguinte equação diferencial:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0. \tag{3.6}$$

Rearranjando as equações 3.5 e 3.4, obtém-se:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{xx} &= \frac{\partial u_{xs}(x, y)}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} \\
\epsilon_{yy} &= \frac{\partial u_{ys}(x, y)}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \\
\gamma_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{xs}(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial u_{ys}(x, y)}{\partial x} \right) - z \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y}.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

As equações que relacionam tensão e deformação para um corpo elástico isotrópico são dadas pela lei de Hooke. Nas equações que se seguem σ_{zz} , σ_{zx} e σ_{zy} são assumidos como zero e as deformações são dadas por:

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx} &= \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}) \\ \epsilon_{yy} &= \frac{1}{E} (-\nu\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \\ \gamma_{xy} &= \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{xy}.\end{aligned}\tag{3.8}$$

De outra forma, expressando as tensões em termos de deformações, tem-se:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_{xx} + \nu\epsilon_{yy}) \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{1 - \nu^2} (-\nu\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) \\ \sigma_{xy} &= \frac{E}{1 + \nu} \gamma_{xy}.\end{aligned}\tag{3.9}$$

Como no estado plano de tensões, é mais conveniente se trabalhar com tensões resultantes, conforme mostrada na Figura 3.3. As tensões resultantes para o estado generalizado de tensão são obtidas integrando-se ao longo da espessura da placa.

$$\begin{aligned}N_{xx} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} dz \\ N_{yy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} dz \\ N_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} dz.\end{aligned}\tag{3.10}$$

Os esforços cortantes Q_x e Q_y e os momentos fletores M_{xx} , M_{xy} e M_{yy} são definidos como se segue:

$$\begin{aligned}
 Q_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dz \\
 Q_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz} dz
 \end{aligned}
 \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}
 M_{xx} &= \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{xx} dz \\
 M_{yy} &= \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{yy} dz \\
 M_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{xy} dz.
 \end{aligned}
 \tag{3.12}$$

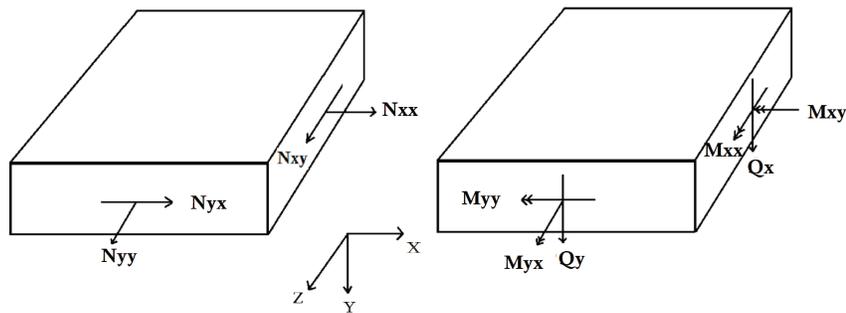


Figura 3.3: Forças, momentos e esforços cortantes no plano

As equações de equilíbrio para um elemento de placa infinitesimal são dadas por:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= 0 \\
\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} &= 0 \\
\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Supondo que σ_{xz} e σ_{yz} são iguais a zero em $z = \pm h/2$ e que não há esforço cortante aplicado na superfície da placa e que σ_{zz} é muito pequena quando comparada com outras tensões, as relações podem ser expressas em termos das forças no plano, integrando as duas primeiras equações da equação 3.13 ao longo da espessura da placa, tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\
\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

As equações 3.14 podem ser usadas para se obter a distribuição de tensões de membrana no domínio da placa. Facilmente demonstra-se que as equações 3.14 são identicamente satisfeita pela seguinte definição devido à Foppl (TIMOSHENKO E GERE, 1961):

$$\begin{aligned}
N_{xx} &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \\
N_{xy} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\
N_{yy} &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Uma vez obtida a equação para as tensões de membrana, vamos manipular a última equação 3.13 para encontrar as relações que descrevem a flexão na placa. Primeiramente, através da combinação da equação 3.12 com a equação 3.7 e 3.9, e escrevendo os momentos de flexão em termos

dos parâmetros de deformação do plano médio da placa. Os termos de alongamentos u_{xs} e u_{ys} desaparecem durante o processo de integração e somente a deflexão w do plano médio da placa, aparece nas expressões finais:

$$\begin{aligned}M_{xx} &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\M_{yy} &= -D \left(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\M_{xy} &= -(1 - \nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\end{aligned}\tag{3.16}$$

onde $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$.

Multiplicando a equação de equilíbrio na direção x , equação 3.13, por z e integrando ao longo da espessura da placa, obtém-se a seguinte equação (considera-se que nenhuma força cortante é aplicada na superfície da placa).

$$Q_x = \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\tag{3.17}$$

Da mesma forma, para a equação de equilíbrio na direção y , equação 3.13, tem-se:

$$Q_y = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y}\tag{3.18}$$

Então, pode-se combinar as equações 3.17 e 3.18 com a equação 3.16 para expressar Q_x e Q_y como função de w :

$$\begin{aligned}
Q_x &= -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \\
Q_y &= -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right)
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Integrando a terceira equação de equilíbrio 3.13 ao longo da espessura e aplicando as equações 3.17 e 3.18, obtém-se:

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + N_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \tag{3.20}$$

Assim, substituindo as equações 3.16 na equação 3.20, obtém-se a equação conhecida como equação diferencial de Navier, modificada para levar em conta as cargas no plano.

$$D \nabla^4 w = N_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \tag{3.21}$$

A equação 3.21, combinada com as correspondentes condições de contorno, as quais veremos a seguir, pode ser usada para solução de problemas de estabilidade de placas finas.

A carga crítica de flambagem é definida como a menor carga que aplicada a estrutura causa uma configuração de instabilidade em flambagem. O fator de flambagem é definido como um parâmetro adimensional da seguinte forma:

$$\lambda = \frac{a^2}{\pi^2 D} \sigma_{cr}, \tag{3.22}$$

onde a é a largura da placa e σ_{cr} é a tensão crítica resultante.

3.3 Condições de contorno

As equações diferenciais descritas acima não podem ser resolvidas sem se estabelecer as condições de contorno que envolvem o problema. Dois tipos de condições de contorno devem ser consideradas: condições fora do plano e condições no plano.

3.3.1 Condições de contorno fora do plano

As três condições de contorno mais comuns a serem consideradas são: extremidades fixadas; simplesmente apoiadas; e, livres:

Extremidades fixas

Na condição de extremidades fixas, tanto as translações transversais como as rotações em torno dos eixos paralelos às faces, ficam restritas. As condições de contornos, nas extremidades dessa placa, podem ser expressas como:

$$\begin{aligned}w &= 0; \\ \frac{\partial w}{\partial n} &= 0.\end{aligned}\tag{3.23}$$

Extremidades simplesmente apoiadas

Na condição de extremidades simplesmente apoiadas, as translações transversais ficam restritas, mas pode haver rotações em torno dos eixos paralelos às faces. Nesse caso, não pode haver momento de flexão em torno desses eixos. As condições de contornos, nas extremidades de uma placa simplesmente apoiada, podem ser expressas como:

$$M_n = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right) = 0, \quad w = 0; \quad (3.24)$$

onde, D é a constante de rigidez já definida anteriormente.

Como $w = 0$ então $\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} = 0$ e as condições podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} w &= 0; \\ \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} &= 0. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Extremidades livres

As condições de extremidades livres apresentam algumas dificuldades. Intuitivamente, é esperado que a força cisalhante Q_n , o momento fletor M_n e os momentos transversais M_{ns} devam ser zero. Estas condições de contorno foram usadas por Poisson (1829).

Contudo, como as equações diferenciais em w são de quarta ordem, somente duas e não três condições de contorno podem ser encontradas. Essa inconsistência deve-se ao fato de que as seções planas permanecem planas. Kirchhoff (1850) foi o primeiro a perceber essa inconsistência e propôs uma contração das condições de contornos de dois esforços cortantes e o momento transversal em apenas uma condição. A interpretação física de tal contração foi apresentada por Kelvin e Tait (1883).

Uma vista de uma aresta livre, assumida paralela ao eixo y , por uma questão de simplicidade, é mostrada na Figura 3.4. A suposição de que a seção plana permanece plana faz com que a linha ab permaneça reta depois da deformação. A suposição de que as seções normais ao plano médio indeformado, permaneçam normais após a deformação, implica em que a linha ab permaneça perpendicular a linha $a'b'$.

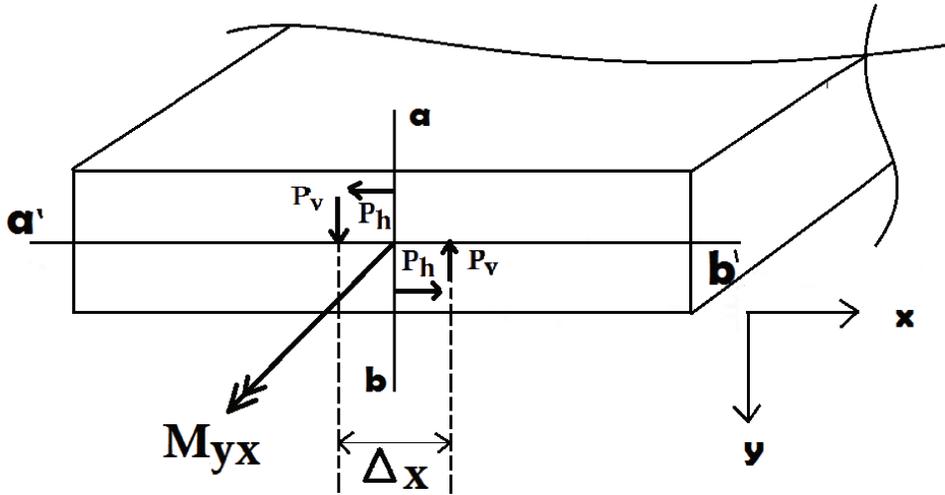


Figura 3.4: Contração da condição de contorno M_{xy}

Como a linha ab não distorce, a distribuição de tensão σ_{xy} é linear e o momento torçor M_{yx} pode ser substituído por um conjugado $\pm P_h$, como representado na Figura 3.4. Além disso, como a linha ab não rotaciona com respeito a linha $a'b'$, é possível substituir $\pm P_h$ por um sistema equivalente de forças verticais P_v atuando em uma distância infinitesimal Δx , onde $P_v = \pm \frac{M_{yx}}{\Delta x}$. Dessa forma, é possível substituir o momento M_{yx} ao longo do comprimento x_0 da superfície. O elemento diferencial ΔP que resulta da aplicação de um binário de força agindo na linha ab será:

$$\Delta P = -\frac{\partial M_{yx}}{\partial x}$$

Somando-se a contribuição de ΔP ao cortante Q e substituindo x e y por uma notação mais geral usando n e s , tem-se:

$$V_n = Q_n - \frac{\partial M_{ns}}{\partial s}$$

Se a força vertical resultante V_n é assumida ser zero, juntamente com o momento fletor M_n ,

as duas condições de contorno, em termos da variável w , podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} M_n &= \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} = 0 \\ V_n &= \frac{\partial^3 w}{\partial n^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial n \partial s^2} = 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

Para uma placa elástica isotrópica temos apenas duas constantes elásticas independentes, a saber: o módulo de Young E e o coeficiente de Poisson ν . A constante de cisalhamento G é determinada a partir de E e ν , como:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (3.27)$$

Nesse caso, o coeficiente de rigidez à flexão é definido por:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu)}. \quad (3.28)$$

3.4 Formulação do problema

Basicamente, o problema clássico de flambagem é um problema geométrico não linear descrito por um conjunto de três equações diferenciais que podem ser desacoplados e linearizados, no caso de cargas críticas elásticas. Na ausência de forças de corpo, as equações que descrevem a flexão de placas são dadas pelas equações 3.14 e 3.21, onde w é o deslocamento na direção normal a superfície da placa; D é a constante de rigidez da placa; N_{ij} são os componentes de tensão; $i, j = 1, 2$ com $1 = x$ e $2 = y$. A mesma notação se aplica a outros índices ao longo deste trabalho.

3.4.1 Equações integrais de contorno

A determinação das resultantes de tensão no plano do domínio é o primeiro passo para a solução do problema de flambagem de placa. A equação integral de contorno no plano para deslocamentos, obtida pela aplicação do teorema da reciprocidade de Green na equação (3.14), é apresentada em várias literatura, como por exemplo, em Aliabadi (2002).

Esta equação é dada por:

$$c_{ij}u_j(Q) + \int_{\Gamma} t_{ik}^*(Q, P)u_k(P)d\Gamma(P) = \int_{\Gamma} u_{ik}^*(Q, P)t_k(P)d\Gamma(P), \quad (3.29)$$

onde $t_i = N_{ij}n_j$ é a força de superfície no contorno da placa no plano $x - y$ e n_j é a normal ao ponto no contorno; P é o ponto campo; Q é o ponto fonte, e os asteriscos denotam as soluções fundamentais. A constante c_{ij} é introduzida a fim de se levar em conta a possibilidade de que o ponto Q pode ser colocado no domínio, no contorno, ou do lado de fora do domínio.

As resultantes de tensão no plano em um ponto $Q \in \Omega$ são escritas como:

$$c_{ik}N_{kj}(Q) + \int_{\Gamma} S_{ikj}^*(Q, P)u_k(P)d\Gamma(P) = \int_{\Gamma} D_{ijk}^*(Q, P)t_k(P)d\Gamma(P), \quad (3.30)$$

onde D_{ikj} e S_{ikj} são combinações lineares das soluções fundamentais da elasticidade plana. Devido às concentrações de tensão na geometria, no caso de placas com furo, as resultantes de tensão são não-uniforme ao longo do domínio.

As equações de flambagem de placa são derivadas das equações de flexão de placa, conforme visto. Os fatores críticos de carga são introduzidos nas equações como fatores de multiplicação de forças de corpo ou cargas transversais. As cargas críticas de flambagem são cargas para as quais as placas sofrem, repentinamente, deformações consideráveis no sentido transversal devido às cargas

aplicadas no plano da placa. A relação entre a carga aplicada e as cargas críticas são dadas pelo fator de carga crítica λ (Apêndice B) pela equação seguinte:

$$N_{ij}^c = \lambda N_{ij} \quad (3.31)$$

onde N_{ij}^c são as tensões críticas resultantes, obtidas quando a carga crítica é aplicada.

A equação integral para a formulação de flambagem de placa, obtidas pela aplicação do teorema da reciprocidade de Green na equação (3.21), é dada por:

$$\begin{aligned} Kw(Q) + \int_{\Gamma} \left[V_n^*(Q, P)w(P) - m_n^*(Q, P)\frac{\partial w(P)}{\partial n} \right] d\Gamma(P) \\ + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}^*(Q, P)w_{c_i}(P) = \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}(P)w_{c_i}^*(Q, P) \\ + \int_{\Gamma} \left[V_n(P)w^*(Q, P) - m_n(P)\frac{\partial w^*(Q, P)}{\partial n} \right] d\Gamma(P) \\ + \lambda \left[\int_{\Omega} w^* \left[\left(N_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right] d\Omega \right], \end{aligned} \quad (3.32)$$

onde $\frac{\partial(\cdot)}{\partial n}$ é a derivada direcional, na direção do vetor \mathbf{n} que é normal ao contorno Γ ; m_n e V_n são, respectivamente, o momento fletor normal e o esforço cortante equivalente de Kirchhoff no contorno Γ ; R_c é a reação nos cantos do contorno; w_{c_i} é o deslocamento transversal dos cantos; λ é o fator de carga crítica; a constante K é introduzida a fim de se levar em conta a possibilidade do ponto Q poder ser colocado no domínio, no contorno, ou fora do domínio. Como na equação anterior, os asteriscos representam as soluções fundamentais do problema proposto.

Como pode ser visto, a equação (3.32) tem uma integral de domínio que contém curvaturas desconhecidas no domínio $w_{,ij}$ dada por:

$$I_d = \int_{\Omega} w^* \left[\left(N_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right] d\Omega. \quad (3.33)$$

Como proposto por Syngellakis e Cherukunnath (1987), tais integrais podem ser transformadas em outras integrais que contenham somente deflexões, em vez de curvaturas. Assim,

$$I_d = \int_{\Omega} \left[w^* \frac{\partial}{\partial x} \left(N_{xx} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + w^* \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{yy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] d\Omega - \int_{\Omega} w^* \left[\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right] d\Omega. \quad (3.34)$$

A segunda integral do lado direito da equação (3.34) é zero devido às equações de equilíbrio (3.14). Assim, a primeira integral pode ser reescrita como:

$$I_d = \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[w^* \left(N_{xx} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[w^* \left(N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{yy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \right\} d\Omega - \int_{\Omega} \left[\frac{\partial w^*}{\partial x} \left(N_{xx} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial w^*}{\partial y} \left(N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{yy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] d\Omega. \quad (3.35)$$

Como proposto por Elzein (1991), a primeira integral da equação (3.35) pode ser transformada em integral de contorno pela aplicação da primeira identidade de Green e a segunda integral pode ser escrita como uma soma de três outras integrais:

$$I_d = \int_{\Gamma} \left[w^* \left(N_{xx} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dx - w^* \left(N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{yy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dy \right] d\Gamma - \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(N_{xx} \frac{\partial w^*}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial y} \right) w \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(N_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial x} + N_{yy} \frac{\partial w^*}{\partial y} \right) w \right] \right\} d\Omega + \int_{\Omega} w \left[\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w^*}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \frac{\partial w^*}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} \frac{\partial w^*}{\partial y} \right] d\Omega + \int_{\Omega} w \left[N_{xx} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} + N_{yy} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right] d\Omega, \quad (3.36)$$

A primeira integral do lado direito da equação (3.36) é uma integral de contorno e pode

ser expressa em termos de trações no contorno t_n e t_s . A segunda integral pode ser transformada em integral de contorno, usando-se a primeira identidade de Green. A terceira integral é zero em função das equações de equilíbrio (3.14). Então, I_d pode ser, finalmente, expressa como uma soma de integrais de contorno e uma integral de domínio da seguinte forma:

$$I_d = I_t + I_{dw}, \quad (3.37)$$

onde

$$I_t = \int_{\Gamma} w^* \left(t_n \frac{\partial w}{\partial n} + t_s \frac{\partial w}{\partial s} \right) d\Gamma = \int_{\Gamma} w^* t_i w_{,i} d\Gamma \quad (3.38)$$

e

$$I_{dw} = \int_{\Omega} w \left[N_{xx} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} + N_{yy} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right] d\Omega = \int_{\Omega} w N_{ij} w_{,ij}^* d\Omega \quad (3.39)$$

Dessa forma, substituindo as equações (3.37), (3.38) e (3.39) na equação (3.32), tem-se:

$$\begin{aligned} Kw(Q) + \int_{\Gamma} \left[V_n^*(Q, P) w(P) - m_n^*(Q, P) \frac{\partial w(P)}{\partial n} \right] d\Gamma(P) \\ + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}^*(Q, P) w_{c_i}(P) = \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}(P) w_{c_i}^*(Q, P) \\ + \int_{\Gamma} \left[V_n(P) w^*(Q, P) - m_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right] d\Gamma(P) \\ + \lambda \left[\int_{\Omega} w N_{ij} w_{,ij}^* d\Omega + \int_{\Gamma} t_i w^* w_{,i} d\Gamma \right]. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Uma segunda integral é necessária a fim de se obter a formulação de elementos de contorno para flambagem de placas. Esta equação é obtida derivando-se a equação (3.40) em relação a di-

reção normal ao ponto fonte Q . Esta equação é dada por:

$$\begin{aligned}
& K \frac{\partial w}{\partial m}(Q) + \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial V_n^*}{\partial m}(Q, P) w(P) - \frac{\partial M_n^*}{\partial m}(Q, P) \frac{\partial w(P)}{\partial n} \right] d\Gamma(P) \\
& + \sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial R_{c_i}^*}{\partial m}(Q, P) w_{c_i}(P) = \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}(P) \frac{\partial w_{c_i}^*}{\partial m}(Q, P) \\
& + \int_{\Gamma} \left[V_n(P) \frac{\partial w^*(Q, P)}{\partial m} - m_n(P) \frac{\partial^2 w^*}{\partial n \partial m}(Q, P) \right] d\Gamma(P) \\
& + \lambda \left[\int_{\Omega} w N_{ij} \frac{\partial w_{,ij}^*}{\partial m} d\Omega + \int_{\Gamma} t_i \frac{\partial w^*}{\partial m} w_{,i} d\Gamma \right], \tag{3.41}
\end{aligned}$$

onde $\frac{\partial(\cdot)}{\partial m}$ é a derivada com relação a direção do vetor \mathbf{m} que é normal ao contorno Γ no ponto fonte Q .

Para se evitar a introdução de derivadas de deslocamentos transversais como incógnita nas equações (3.40) and (3.41), é usada a seguinte aproximação:

$$w_{,i} = \sum_{j=1}^{NNE} [\phi_{j,i} w^{(j)}] \tag{3.42}$$

onde ϕ_j é a função de forma usada na aproximação das variáveis físicas ($w, \frac{\partial w}{\partial n}, V_n, m_n$), NNE é o número de nós no elemento físico, e $w^{(j)}$ é o valor nodal de w no nó j .

Integrais de domínio surgem na formulação devido à contribuição das tensões no plano, na direção para fora do plano. As equações integrais de domínio das equações (3.40) e (3.41) são dadas na forma:

$$I = \int_{\Omega} w v^* d\Omega \tag{3.43}$$

onde

$$v^* = N_{ij}w_{,ij}^* \quad (3.44)$$

para a equação (3.40), e

$$v^* = N_{ij} \frac{\partial w_{,ij}^*}{\partial m} \quad (3.45)$$

para a equação (3.41).

O domínio pode ser discretizado em células como proposto por Syngellakis e Elzein (1994). No entanto, nesse caso, o método dos elementos de contorno perde sua principal característica que é a discretização apenas do contorno.

Para transformar essas integrais em integrais de contorno, é considerado que os deslocamentos transversais w será aproximado sobre o domínio Ω como uma soma de M produtos das funções de aproximação f_m e coeficientes a se determinar γ_m , isto é:

$$w(P) = \sum_{m=1}^M \gamma_m f_m \quad (3.46)$$

para funções de aproximação de base radial somente, ou

$$w(P) = \sum_{m=1}^M \gamma_m f_m + ax + by + c \quad (3.47)$$

com

$$\sum_{m=1}^M \gamma_m x_m = \sum_{m=1}^M \gamma_m y_m = \sum_{m=1}^M \gamma_m = 0 \quad (3.48)$$

para funções de aproximação de base radial combinadas com funções aumentadas por polinômios.

Nesse ponto, considera-se que a força de corpo é aproximada, por conveniência, pela equação (3.46), e a integral de domínio (3.43) pode ser escrita como:

$$I = \int_{\Omega} w(P)v^*(Q, P)d\Omega = \sum_{m=1}^M \gamma_m \int_{\Omega} f_m v^*(Q, P)d\Omega, \quad (3.49)$$

ou

$$I = \sum_{m=1}^M \gamma_m \int_{\Omega} f_m v^*(Q, P)\rho d\rho d\theta, \quad (3.50)$$

ou

$$I = \sum_{m=1}^M \gamma_m \int_{\theta} \int_0^r f_m v^*(Q, P)\rho d\rho d\theta, \quad (3.51)$$

onde r é o valor de ρ em um ponto do contorno Γ .

Definindo-se $F_m(Q)$ como:

$$F_m(Q) = \int_0^r f_m v^*(Q, P)\rho d\rho, \quad (3.52)$$

pode-se escrever:

$$I = \sum_{m=1}^M \gamma_m \int_{\theta} F_m(Q)d\theta. \quad (3.53)$$

Considerando-se um ângulo infinitesimal $d\theta$ da Figura 2.10 e as relações entre o comprimento do arco $r d\theta$ e o comprimento infinitesimal do contorno $d\Gamma$, descritas em 2.8 e usando as propriedades do produto interno dos vetores unitários \mathbf{n} e \mathbf{r} , ambos também representados na Figura 2.10, pode-se escrever:

$$d\theta = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r} d\Gamma. \quad (3.54)$$

Substituindo a equação (3.54) na equação (3.53), a integral de domínio (3.43) pode ser escrita como uma integral dada por:

$$I = \sum_{m=1}^M \gamma_m \int_{\Gamma} \frac{F_m(Q)}{r} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} d\Gamma, \quad (3.55)$$

ou, na forma matricial:

$$I = \left[\int_{\Gamma} \frac{F_1(Q)}{r} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} d\Gamma \quad \int_{\Gamma} \frac{F_2(Q)}{r} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} d\Gamma \quad \dots \quad \int_{\Gamma} \frac{F_M(Q)}{r} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} d\Gamma \right] \begin{Bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_M \end{Bmatrix}. \quad (3.56)$$

Para computar γ_m , é necessário considerar o deslocamento transversal w em M pontos do domínio e do contorno. No caso desse capítulo, esses pontos serão os nós do contorno e alguns pontos internos. Assim, a equação (3.46) pode ser escrita como:

$$\mathbf{w} = \mathbf{F}\boldsymbol{\gamma}, \quad (3.57)$$

e $\boldsymbol{\gamma}$ pode ser tomada como:

$$\gamma = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{b}. \quad (3.58)$$

Substituindo (3.58) na equação (3.56), tem-se:

$$I = \left[\int_{\Gamma} \frac{F_1(Q)}{r} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} d\Gamma \quad \int_{\Gamma} \frac{F_2(Q)}{r} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} d\Gamma \quad \dots \quad \int_{\Gamma} \frac{F_M(Q)}{r} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} d\Gamma \right] \mathbf{F}^{-1}\mathbf{b}. \quad (3.59)$$

Escrevendo a equação (3.59) para todos os pontos fontes, isto é, para todos os nós do contorno e pontos internos, chega-se a seguinte equação matricial:

$$\mathbf{I} = \mathbf{R}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{w} = \mathbf{S}\mathbf{w}, \quad (3.60)$$

onde $\mathbf{S} = \mathbf{R}\mathbf{F}^{-1}$, \mathbf{I} é um vetor que contém o valor de I nos pontos fontes Q , e \mathbf{R} é a matriz que contém os valores das equações integrais (3.59) quando essa equação é escrita para todos os pontos fontes Q .

Dessa forma, precisa-se determinar os valores de N_{ij} em cada ponto de integração. No entanto, tem-se somente os valores de N_{ij} nos nós e pontos internos. Os valores de N_{ij} nos pontos de integração com coordenadas (x, y) é determinado por:

$$N_{ij}(x, y) = \mathbf{f}(x, y)_{1 \times M} \mathbf{F}^{-1}_{M \times M} \mathbf{N}_{ij}_{M \times M}. \quad (3.61)$$

onde $\mathbf{N}_{ij}_{M \times M}$ é a matriz que contém os valores de N_{ij} determinados para todos os nós e pontos internos e M é a soma do número de nós com o número de pontos internos.

3.4.2 Equação matricial do problema

Considerando todas as forças de corpo que aparecem nas equações (3.40) e (3.41), o vetor \mathbf{P} para essas equações é dado por:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{bb}^{p1} & \mathbf{S}_{bi}^{p1} & \mathbf{S}_{bc}^{p1} \\ \mathbf{S}_{bb}^{p2} & \mathbf{S}_{bi}^{p2} & \mathbf{S}_{bc}^{p2} \\ \mathbf{S}_{ib}^{p1} & \mathbf{S}_{ii}^{p2} & \mathbf{S}_{ic}^{p1} \\ \mathbf{S}_{cb}^{p1} & \mathbf{S}_{ci}^{p1} & \mathbf{S}_{cc}^{p1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_b \\ \mathbf{w}_i \\ \mathbf{w}_c \end{Bmatrix} \quad (3.62)$$

onde o índice sobrescrito da matriz \mathbf{S} representa o tipo de equação que está sendo utilizada, $p1$ representa a primeira equação da placa, dada pela equação (3.40) e $p2$ representa a segunda equação da placa, dada pela equação (3.41). Na matriz \mathbf{S} , o primeiro índice subscrito representa a localização dos pontos fontes (b se os pontos fontes estão em uma parte suave da fronteira, i se eles estão no domínio e c se eles estão nos cantos). O segundo índice subscrito mostra onde estão as forças de corpo que são multiplicados pelos termos da matriz \mathbf{S} . Para o segundo índice, as mesmas letras do primeiro índice subscrito são usados e com os mesmos significados. O vetor do lado direito tem valores nodais de \mathbf{w} que representa o deslocamento na direção transversal. Os índices subscritos no vetor do lado direito indicam a localização de nós, onde os deslocamentos são computados (contorno suave, ponto interno, ou canto).

Finalmente, se o contorno Γ é discretizado em elementos de contorno e as equações (3.40) e (3.41) são escritas para todos os pontos fontes, a seguinte equação é obtida:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{bb}^{p1} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_{bc}^{p1} \\ \mathbf{H}_{bb}^{p2} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_{bc}^{p2} \\ \mathbf{H}_{ib}^{p1} & \mathbf{I} & \mathbf{H}_{ic}^{p1} \\ \mathbf{H}_{cb}^{p1} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_{cc}^{p1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_b \\ \mathbf{w}_i \\ \mathbf{w}_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{bb}^{p1} & \mathbf{G}_{bc}^{p1} \\ \mathbf{G}_{bb}^{p2} & \mathbf{G}_{bc}^{p2} \\ \mathbf{G}_{ib}^{p1} & \mathbf{G}_{ic}^{p1} \\ \mathbf{G}_{cb}^{p1} & \mathbf{G}_{cc}^{p1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_b \\ \mathbf{P}_c \end{Bmatrix} \\
& + \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{bb}^{p1} & \mathbf{S}_{bi}^{p1} & \mathbf{S}_{bc}^{p1} \\ \mathbf{S}_{bb}^{p2} & \mathbf{S}_{bi}^{p2} & \mathbf{S}_{bc}^{p2} \\ \mathbf{S}_{ib}^{p1} & \mathbf{S}_{ii}^{p2} & \mathbf{S}_{ic}^{p1} \\ \mathbf{S}_{cb}^{p1} & \mathbf{S}_{ci}^{p1} & \mathbf{S}_{cc}^{p1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_b \\ \mathbf{w}_i \\ \mathbf{w}_c \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.63}$$

onde \mathbf{H} e \mathbf{G} são matrizes de influência do método dos elementos de contorno; o vetor \mathbf{v} contém deslocamentos transversais e rotações dos nós (não somente deslocamentos transversais como o vetor \mathbf{w}). O Vector \mathbf{p} contém as reações nos nós do contorno da equação de placa. As integrais de domínio, devidas à q_i 's são transformadas exatamente em integrais de contorno usando os procedimentos descritos por Albuquerque *et al.* (2006). É importante notar que os termos que vêm da equação (3.38) estão incluídos na matriz \mathbf{H} .

A equação (3.63) pode ser escrita em uma forma mais concisa:

$$\mathbf{Hv} = \mathbf{Gp} + \lambda \mathbf{Sw}. \tag{3.64}$$

Finalmente, colunas de zeros podem ser introduzidas na matriz \mathbf{S} tal que a equação (3.64) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{Hv} = \mathbf{Gp} + \lambda \bar{\mathbf{S}}\mathbf{v} \tag{3.65}$$

onde $\bar{\mathbf{S}}$ é a matriz \mathbf{S} com colunas de zeros nas posições que multiplicam o grau de liberdade de rotação, isto é, a derivada do vetor \mathbf{w} em relação a direção normal ao contorno.

3.5 Funções de aproximação

A função de aproximação usada nesse trabalho é a função de base radial denominada função *spline* de placas, dada por:

$$f_m = R^2 \log(R), \quad (3.66)$$

é usada como uma função de aumento dada pelas equações (3.47) e (3.48). Tem sido demonstrado em muitos trabalhos que essa função produz excelentes resultados em diferentes formulações tais como Partridge (2000); Golberg *et al.* (1999).

3.6 Problema de autovalor

As cargas consideradas nas equações lineares de flambagem são apenas aquelas relacionados com as tensões no plano N_{ij} e forças de superfícies t_i que são multiplicados pelo fator de carga crítica λ . Todos os valores conhecidos de w , $\frac{\partial w}{\partial n}$, M_n , v_n , W_{ci} , R_{ci} (condições de contorno) são tomados como zero. Dividindo-se o contorno em Γ_1 e Γ_2 (Figura 3.5), a equação (3.65) pode ser escrita como:

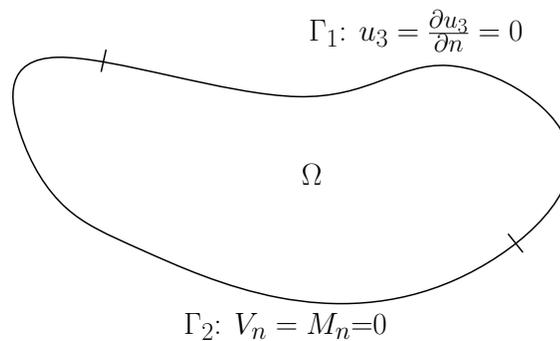


Figura 3.5: Representação do domínio com graus de liberdade.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} \\ \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \end{Bmatrix} \\ = \lambda \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{S}}_{11} & \bar{\mathbf{S}}_{12} \\ \bar{\mathbf{S}}_{21} & \bar{\mathbf{S}}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.67)$$

onde Γ_1 representa a parte do contorno onde os deslocamentos e ou as rotações são zero e Γ_2 representa a parte do contorno onde o momento fletor ou forças de superfícies são zero. Os índices 1 e 2 representam os contornos Γ_1 e Γ_2 , respectivamente.

Como $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ e $\mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$, a equação (3.67) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{12}\mathbf{v}_2 - \mathbf{G}_{11}\mathbf{p}_1 &= \lambda\bar{\mathbf{S}}_{12}\mathbf{v}_2, \\ \mathbf{H}_{22}\mathbf{v}_2 - \mathbf{G}_{21}\mathbf{p}_1 &= \lambda\bar{\mathbf{S}}_{22}\mathbf{v}_2 \end{aligned} \quad (3.68)$$

ou,

$$\hat{\mathbf{H}}\mathbf{v}_2 = \lambda\hat{\mathbf{S}}\mathbf{v}_2, \quad (3.69)$$

onde, $\hat{\mathbf{H}}$ e $\hat{\mathbf{S}}$, são dados por:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{H}} &= \mathbf{H}_{22} - \mathbf{G}_{21}\mathbf{G}_{11}^{-1}\mathbf{H}_{12}, \\ \hat{\mathbf{S}} &= \bar{\mathbf{S}}_{22} - \mathbf{G}_{21}\mathbf{G}_{11}^{-1}\bar{\mathbf{S}}_{12}. \end{aligned} \quad (3.70)$$

A equação matricial (3.69) pode ser reescrita como um problema de autovalor:

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\lambda}\mathbf{v}_2, \quad (3.71)$$

onde,

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{H}}^{-1}\hat{\mathbf{S}}. \quad (3.72)$$

Uma vez que \mathbf{A} é não-simétrica, os autovalores e autovetores da equação (3.71) podem ser encontrados usando-se procedimentos numéricos padrão para matrizes não-simétricas.

3.7 Resultados numéricos

3.7.1 Análise de placas sem furos

A fim de verificar a exatidão do método proposto, uma comparação com os resultados existentes na literatura sobre flambagem de placas retangulares sem furos e com furos será realizada. Os resultados apresentados por Purbolaksono e Aliabadi (2009) e El-Sawy e Nazmy (2001) são usados para avaliar a precisão do método proposto.

Os resultados numéricos são apresentados em termos do parâmetro adimensional de flambagem, definido por:

$$K_{cr} = \frac{N_{cr}a^2}{\pi^2 D} \quad (3.73)$$

onde, N_{cr} é a carga crítica de flambagem e a a dimensão da placa.

Inicialmente, a formulação proposta é aplicada à análise de problemas de flambagem de placas retangulares sem furos submetidas a cargas de compressão (Figura 3.6) com diferentes condições de contorno, tais como: todas as extremidades fixas (CCCC); todas as extremidades

simplesmente apoiadas (SSSS); duas extremidades fixas e duas simplesmente apoiada (CSCS) e (SCSC); duas extremidades simplesmente apoiadas, uma extremidade livre e uma extremidade fixa (FSCS); e, uma extremidade livres e três simplesmente apoiadas (FSSS). A placa retangular sem furo é discretizada em 28 elementos de contorno quadráticos descontínuos e 49 pontos internos ao domínio; a relação entre o comprimento a e a espessura h da placa é de $a/h = 100$.

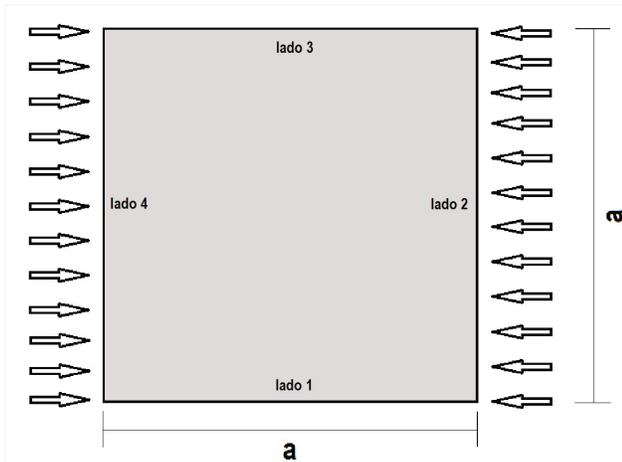


Figura 3.6: Modelo de placa sem furo

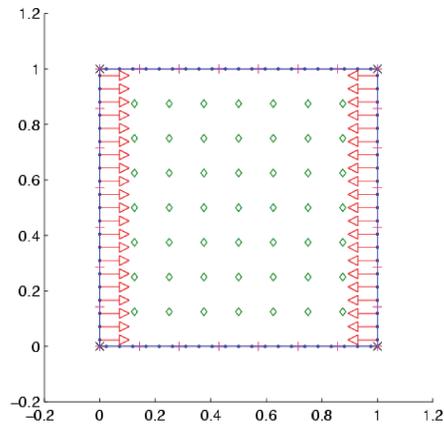


Figura 3.7: Discretização do modelo

Os parâmetros de carga crítica K_{cr} obtidos a partir do método da integração radial (MIR), implementado na formulação de elementos de contorno, para placas sem furo, são apresentados na Tabela 1.

Tabela 3.1: Coeficiente de flambagem K_{cr} para placa sem furo

Caso	Contorno condições	K_{cr} (MEF)	K_{cr} (MRD)	K_{cr} (MIR)	K_{cr} (Analítico)
1	CCCC	10,39	10,14	10,12	10,07
2	SSSS	4,01	4,00	4,02	4,00
3	CSCS	7,80	7,68	7,79	7,69
4	SCSC	6,88	6,78	6,79	6,74
5	FSCS	1,72	1,71	1,74	1,70
6	FSSS	1,42	1,43	1,46	1,44

3.7.2 Análise de placas com furos

A formulação é aplicada à análise de flambagem de placas retangulares com furos e simplesmente apoiadas, sujeitas a cargas compressivas em seu plano, as quais produzem um campo não

uniforme de tensões no domínio. A razão entre o comprimento a e a espessura h da placa é de $a/h = 100$, e a razão entre as dimensões do furo e o comprimento da placa é b/a e c/a (figura 3.8). Na discretização da malha foram utilizados 46 elementos de contorno quadráticos descontínuos, sendo 28 elementos no contorno externo da placa e 18 elementos no contorno interno, na discretização do furo. Os pontos internos foram distribuídos de acordo com a razão de aspecto do furo.

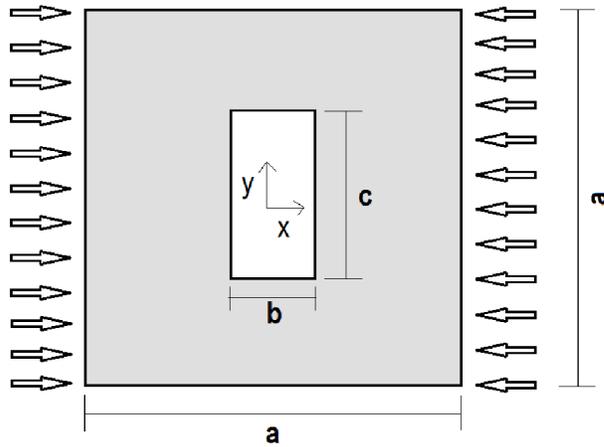


Figura 3.8: Modelo de placa com furo

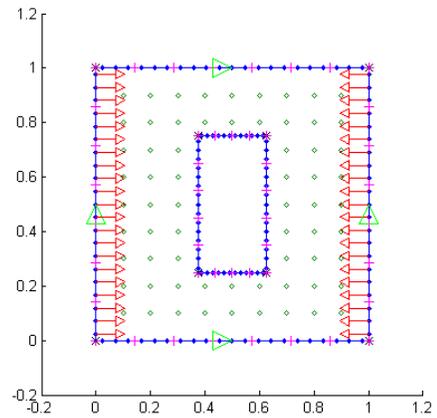


Figura 3.9: Discretização do modelo

Os parâmetros de carga crítica K_{cr} obtidos a partir do método da integração radial (MIR), implementado na formulação de elementos de contorno, para placas com furos, são apresentados nas Tabelas 3.2 e 3.3.

Tabela 3.2: Coeficiente de flambagem K_{cr} para placa com furo quadrado

b/a	c/a	K_{cr} (MEF)	K_{cr} (MEC)	Diferença (%)
0	0	4,00	4,00	0,00
0,10	0,10	3,80	3,76	1,00
0,20	0,20	3,45	3,40	1,45
0,30	0,30	3,20	3,15	1,50
0,40	0,40	3,00	2,91	3,00
0,50	0,50	2,92	2,75	5,80
0,60	0,60	2,87	2,65	7,70
0,70	0,70	2,85	2,60	8,70

Tabela 3.3: Coeficiente de flambagem K_{cr} para placa com furo retangular.

b/a	c/a	K_{cr} (MEF)	K_{cr} (MEC)	Diferença (%)
0	0	4,00	4,00	0,00
0,25	0,10	3,50	3,57	2,00
0,25	0,15	3,35	3,43	2,40
0,25	0,20	3,30	3,38	1,15
0,25	0,25	3,30	3,35	0,90
0,25	0,30	3,35	3,41	1,80
0,25	0,35	3,40	3,50	2,94
0,25	0,40	3,60	3,65	1,39
0,25	0,45	3,82	3,92	2,62
0,25	0,50	4,23	4,35	2,84
0,25	0,55	4,75	4,88	2,74
0,25	0,60	5,60	5,90	5,36

3.8 Discussão dos resultados

3.8.1 Placa sem furo

Como pode ser observado na Tabela 3.1, os resultados obtidos com a formulação do método dos elementos de contorno, usando o método da integração radial (MIR) para transformar as integrais de domínio em integrais de contorno, para o caso de problemas de estabilidade de placas sem furo, apresentam boa concordância com os resultados obtidos em trabalhos de outros pesquisadores que utilizaram o método dos elementos finitos, bem como algumas soluções analíticas disponíveis e reportado em Purbolaksono e Aliabadi (2009).

3.8.2 Placa com furo quadrado

A figura 3.10 apresenta a variação do coeficiente de flambagem (K_{cr}) com a dimensão normalizada do furo (b/a) para uma placa quadrada de dimensão a e com um furo quadrado no centro de dimensão b .

A comparação entre os resultados obtidos com a formulação proposta está em concordância com aqueles apresentados por outros autores que utilizaram o método dos elementos finitos para

o mesmo estudo, como por exemplo, o trabalho de El-Sawy e Nazmy (2001). A concordância é melhor quando a relação b/a é menor ou igual a 0,4. A razão para esta diferença não foi investigada. Uma hipótese é devido ao método dos elementos finitos usar formulações onde o efeito da deformação por cisalhamento é considerado (modelos de placas de Reissner-Mindlin).

É mostrado que para um aumento no tamanho do furo o método proposto é consistente com a previsão de baixos valores para K_{cr} .

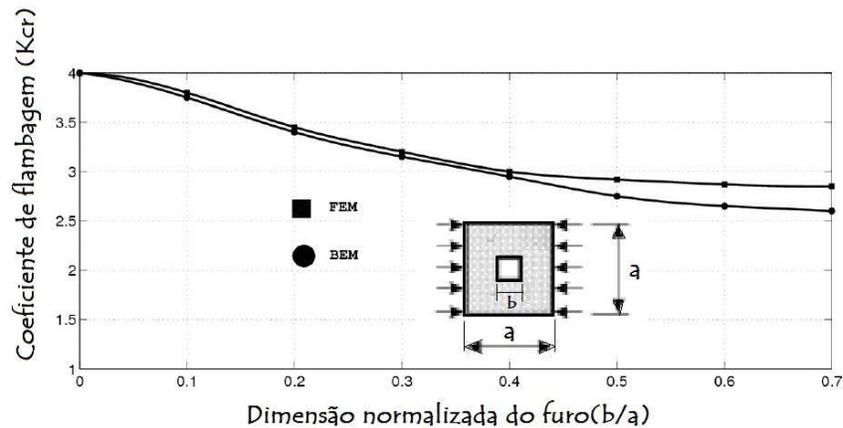


Figura 3.10: Comparação entre o MEC e o MEF - furo quadrado

3.8.3 Placa com furo retangular

A figura 3.11 mostra a variação do coeficiente de flambagem K_{cr} com a dimensão normalizada do furo (c/a), para uma placa quadrada de dimensão a , com um furo retangular central de largura fixa igual a 25% do lado da placa e comprimento variável y .

Como pode ser observado, com furos retangulares com valores de c/a maiores que 0,25, um aumento na maior dimensão do furo, causa um aumento no coeficiente de flambagem. Isso ocorre em função de que o aumento da razão de aspecto da parte da placa, em ambos os lados do furo, faz com que essas partes se tornem dominantes. Os resultados estão de acordo com o previsto em Shakerley e Brown (1996). Tal efeito pode ser percebido na forma do primeiro modo de flambagem, mostrado nas Figuras 3.12 e 3.13.

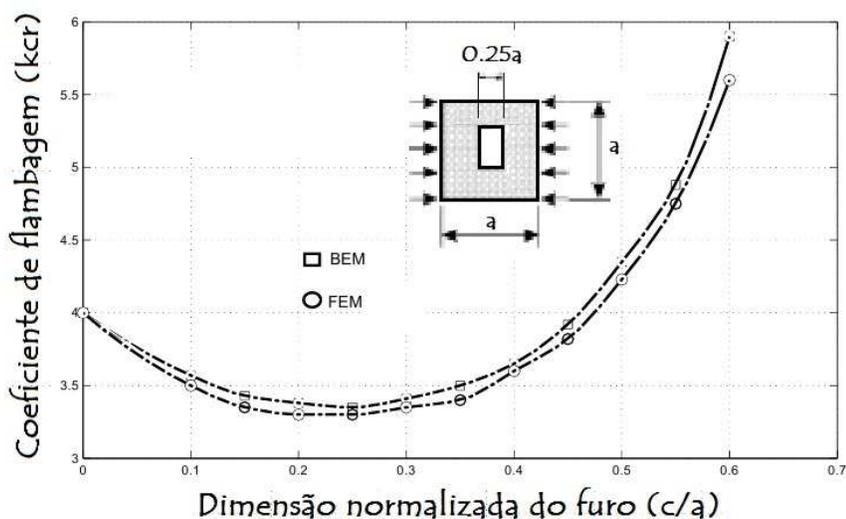


Figura 3.11: Comparação entre o MEC e o MEF - furo retangular

3.9 Conclusões

Nesse capítulo foi apresentada uma formulação do método dos elementos de contorno apenas com a discretização do contorno, para análise de estabilidade de placas retangulares isotrópicas, com campos de tensão uniformes, no caso de placas sem furo, e campos de tensão não-uniformes (concentrações de tensões), no caso de placas com furo. As integrais de domínio foram transformadas em integrais de contorno pelo método da integração radial. Percebe-se que a formulação apresentada possui grandes vantagens sobre o método da reciprocidade dual, uma vez que é muito mais fácil de se implementar numericamente. A formulação apresentou excelentes resultados quando comparada com resultados analíticos e numéricos, utilizando o método dos elementos finitos implementado no programa ANSYS, com elementos do tipo "Shell-4", de seis graus de liberdade por nó e com uma malha composta de elementos com tamanho equivalente a 80 divisões no contorno externo da placa e 50 divisões no contorno do furo.

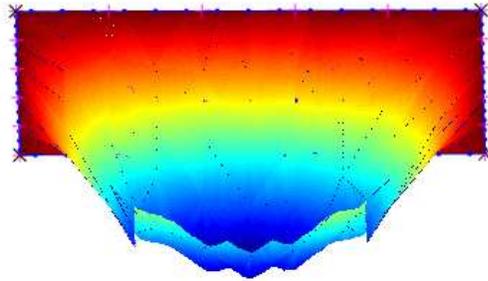


Figura 3.12: Primeiro modo de flambagem ($c/a = 0,6$)

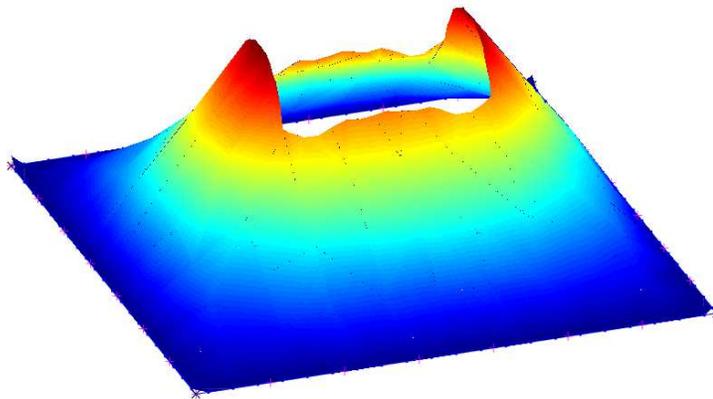


Figura 3.13: Primeiro modo de flambagem ($c/a = 0,50$)

4 Método dos elementos de contorno para elasticidade anisotrópica

4.1 Introdução

Este capítulo descreve a formulação do método dos elementos de contorno para elasticidade plana (formulação de membrana) considerando o material como anisotrópico. Esta formulação já foi apresentada nos trabalhos de Sollero (1994) e Albuquerque (2001). Entretanto, para facilitar a compreensão do texto e homogenizar a nomenclatura utilizada neste trabalho, grande parte da formulação é novamente descrita aqui.

4.2 Elasticidade anisotrópica

Considerando um elemento infinitesimal dentro de um domínio Ω , conforme visto no Capítulo 3, o equilíbrio de forças pode ser expresso por:

$$\sigma_{ij,j} + b'_i = 0. \quad (4.1)$$

Por sua vez, o equilíbrio de momentos resulta em:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad (4.2)$$

onde σ_{ij} é o tensor de tensões e b'_i é o vetor de forças de corpo.

O vetor de forças de superfície t_i em um ponto no contorno Γ de um domínio Ω é expresso na forma:

$$t_i = \sigma_{ij}n_j, \quad (4.3)$$

onde n_j é o vetor normal do contorno Γ no ponto.

Em elasticidade linear, o vetor de deslocamentos e suas derivadas são assumidos como infinitesimais. O tensor de deformação, considerando deslocamentos infinitesimais, pode ser escrito como

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k}) \quad (4.4)$$

Para assegurar a unicidade dos deslocamentos, as componentes do tensor de deformações não podem ser designadas arbitrariamente, devendo satisfazer certas condições de compatibilidade e integrabilidade. A equação de compatibilidade é dada por:

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0 \quad (4.5)$$

que no caso bidimensional é reduzida à forma

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} = \varepsilon_{12,12}. \quad (4.6)$$

No caso de material elástico linear, a relação entre o tensor de tensões com o tensor de deformações é escrita, na sua forma mais geral, como

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (4.7)$$

sendo o coeficiente de linearidade C_{ijkl} um tensor de quarta ordem (81 elementos) conhecido como tensor de constantes elásticas. Devido as restrições de simetria tem-se que

$$C_{ijkl} = C_{jikl}, \quad C_{ijkl} = C_{ijlk}. \quad (4.8)$$

A condição para a existência de uma função energia de deformação também requer que

$$C_{ijkl} = C_{klji} \quad (4.9)$$

Estas considerações reduzem o número de constantes elásticas de 81 para 21. Como a direção das tensões principais não coincidem necessariamente com a direção das deformações principais, apenas 18, das 21 constantes são independentes Lekhnitskii (1963).

Considerando as 21 constantes elásticas, a equação (4.7) pode ser reescrita na forma matricial como

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} \\ C_{1123} & C_{2223} & C_{3323} & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} \\ C_{1113} & C_{2213} & C_{3313} & C_{2313} & C_{1313} & C_{1312} \\ C_{1112} & C_{2212} & C_{3312} & C_{2312} & C_{1312} & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

A equação (4.7) também pode ser expressa na forma

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}\sigma_{kl} \quad (4.11)$$

onde S_{ijkl} é um tensor de quarta ordem conhecido como tensor de flexibilidade, que, devido as mesmas razões do tensor de constantes elásticas, possui 21 elementos, dos quais apenas 18 são independentes.

A equação (4.11) pode ser escrita na forma matricial como

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & 2S_{1123} & 2S_{1113} & 2S_{1112} \\ S_{1122} & S_{2222} & S_{2233} & 2S_{2223} & 2S_{2213} & 2S_{2212} \\ S_{1133} & S_{2233} & S_{3333} & 2S_{3323} & 2S_{3313} & 2S_{3312} \\ 2S_{1123} & 2S_{2223} & 2S_{3323} & 4S_{2323} & 4S_{2313} & 4S_{2312} \\ 2S_{1113} & 2S_{2213} & 2S_{3313} & 4S_{2313} & 4S_{1313} & 4S_{1312} \\ 2S_{1112} & 2S_{2212} & 2S_{3312} & 4S_{2312} & 4S_{1312} & 4S_{1212} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Usando a notação tensorial reduzida, proposta por Lekhnitskii (1963), a equação (4.12) pode ser escrita como

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} & a_{56} \\ a_{16} & a_{26} & a_{36} & a_{46} & a_{56} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

onde

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

e

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

Os coeficientes elásticos podem ser expressos em termos de constantes de engenharia como Lekhnitskii (1963)

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1/E_1 & a_{12} &= \nu_{12}/E_1 = -\nu_{21}/E_2 \\ a_{13} &= -\nu_{31}/E_1 = -\nu_{13}/E_3 & a_{14} &= \eta_{23,1}/E_1 = \eta_{1,23}/G_{23} \\ a_{15} &= \eta_{32,1}/E_1 = \eta_{1,32}/G_{23} & a_{16} &= \eta_{12,1}/E_1 \\ a_{22} &= 1/E_2 & a_{23} &= \nu_{32}/E_2 = -\nu_{23}/E_3 \\ a_{24} &= \eta_{23,1}/E_2 = \nu_{23,3}/G_{23} & a_{25} &= \eta_{31,2}/E_2 = \eta_{2,31}/G_{13} \\ a_{26} &= \eta_{12,2}/E_2 = \eta_{2,12}/G_{12} & a_{33} &= 1/E_3 \\ a_{34} &= \eta_{23,3}/E_3 = \eta_{3,23}/G_{23} & a_{35} &= \eta_{31,1}/E_3 = \eta_{3,31}/G_{13} \\ a_{36} &= \eta_{12,3}/E_3 = \eta_{3,12}/G_{12} & a_{44} &= 1/G_{23} \\ a_{45} &= \zeta_{32,23}/G_{23} = \zeta_{23,31}/G_{13} & a_{46} &= \zeta_{12,23}/G_{23} = \zeta_{23,12}/G_{12} \\ a_{55} &= 1/G_{13} & a_{56} &= \zeta_{12,31}/G_{13} = \zeta_{31,12}/G_{12} \\ a_{66} &= 1/G_{12} \end{aligned} \quad (4.16)$$

onde E_k são os módulos de elasticidade longitudinais, ou módulos de Young, referindo-se aos eixos x_k , G_{ij} são os módulos de elasticidade transversais, ou módulos de Coulomb, para os planos definidos pelos eixos $x_i x_j$. Os coeficientes ν_{ij} são chamados coeficientes de Poisson. As constantes $\eta_{jk,l}$ são denominadas de coeficientes de influência mútua de primeira espécie que caracterizam extensões nas direções dos eixos principais, produzidas por tensões tangenciais agindo nos planos principais. As constantes $\eta_{l,jk}$ são os coeficientes de influência mútua de segunda espécie, que expressam deformações tangenciais nos planos principais, causadas pelas tensões normais atuantes nos planos principais. Por fim, $\zeta_{ij,kl}$ são os coeficientes de Chentsov, que caracterizam as deformações tangenciais em planos paralelos aos planos principais de elasticidade, causadas por tensões

tangenciais que atuam em outros planos, paralelos aos planos principais de elasticidade.

Em estado plano de tensão ($\sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = 0$), um material pode ser descrito usando-se somente seis constantes elásticas independentes. Desta forma, a equação (4.13) pode ser escrita como

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (4.17)$$

Substituindo as equações (4.4), (4.7) na equação (4.1), obtém-se a equação de equilíbrio escrita em função dos deslocamentos

$$C_{ijkl}u_{k,jl} + b_i = 0 \quad (4.18)$$

O tensor tensão pode ser escrito em termos de funções $F(x_1, x_2)$ chamadas funções tensão de Airy (LEKHNITSKII, 1963) dadas por

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= F_{,22} + \mathcal{U} \\ \sigma_{22} &= F_{,11} + \mathcal{U} \\ \sigma_{12} &= -F_{,12}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

onde \mathcal{U} é uma função potencial na qual

$$\mathcal{U}_{,i} = b_i \quad (4.20)$$

Substituindo as equações (4.19) na equação constitutiva (4.17) e então na equação de compatibilidade (4.6), resulta na equação diferencial para funções tensão $F(x_1, x_2)$

$$\begin{aligned}
& a_{11}F_{,2222} - 2a_{16}F_{,1222} + (2a_{12} + a_{66})F_{,1122} - 2a_{26}F_{,1112} + a_{22}F_{,1111} = \\
& -(a_{12} + a_{22})\mathcal{U}_{,11} + (a_{16} + a_{26})\mathcal{U}_{,12} - (-a_{11} + a_{12})\mathcal{U}_{,22}
\end{aligned} \tag{4.21}$$

No caso da ausência de forças de corpo a equação (4.21) pode ser escrita como

$$a_{11}F_{,2222} - 2a_{16}F_{,1222} + (2a_{12} + a_{66})F_{,1122} - 2a_{26}F_{,1112} + a_{22}F_{,1111} = 0 \tag{4.22}$$

Criando o operador diferencial

$$\Delta_k = \frac{\partial}{\partial x_2} - \mu_k \frac{\partial}{\partial x_1} \tag{4.23}$$

aplicando este operador na função tensão $F(x_1, x_2)$ na forma

$$\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4 F = 0 \tag{4.24}$$

e expandindo a equação (4.24) tem-se

$$\begin{aligned}
& F_{,2222} - (\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4) F_{,1222} + (\mu_1 \mu_2 + \mu_1 \mu_3 \mu_1 \mu_4 + \mu_2 \mu_3 + \mu_2 \mu_4 \\
& + \mu_3 \mu_4) F_{,1122} - (\mu_1 \mu_2 \mu_3 + \mu_1 \mu_2 \mu_4 + \mu_1 \mu_3 \mu_4 + \mu_2 \mu_3 \mu_4) F_{,1112} \\
& + (\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4) F_{,1111} = 0
\end{aligned} \tag{4.25}$$

As equações (4.22) e (4.25) serão idênticas se μ_1, μ_2, μ_3 e μ_4 forem raízes da equação

$$a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22} = 0 \tag{4.26}$$

As raízes da equação (4.26) são sempre complexas ou imaginárias puras, ocorrendo aos pares (μ_k e $\bar{\mu}_k$) conforme mostrado por Lekhnitskii (1968).

Criando-se a variável

$$z_j = x_1 + \mu_j x_2 \quad j = 1, 2 \quad (4.27)$$

tem-se que

$$\Delta_j = \frac{\partial}{\partial x_2} - \mu_j \frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{d}{dz_j} \quad (4.28)$$

Exigindo que a função tensão seja real, tem-se

$$F(x_1, x_2) = 2\text{Re}[F_1(z_1) + F_2(z_2)] \quad (4.29)$$

Introduzindo a notação

$$\frac{dF_j(z_j)}{dz_j} = \Psi_j(z_j), \quad (4.30)$$

onde a convenção de soma não é empregada em j , e substituindo a equação (4.29) na equação (4.19), obtém-se as componentes de tensão

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 2\text{Re} \left[\mu_1^2 \Psi_1^{(1)}(z_1) + \mu_2^2 \Psi_2^{(1)}(z_2) \right] \\ \sigma_{22} &= 2\text{Re} \left[\Psi_1^{(1)}(z_1) + \Psi_2^{(1)}(z_2) \right] \\ \sigma_{12} &= -2\text{Re} \left[\mu_1 \Psi_1^{(1)}(z_1) + \mu_2 \Psi_2^{(1)}(z_2) \right] \end{aligned} \quad (4.31)$$

onde $\Psi_j^{(1)}$ representa a primeira derivada de Ψ_j .

Substituindo a equação (4.31) na equação (4.17) e então na equação (4.18), desprezando-se os movimentos de corpos rígidos e integrando, obtém-se

$$\begin{aligned} u_1 &= 2\text{Re} [q_{11}\Psi_1(z_1) + q_{12}\Psi_2(z_2)] \\ u_2 &= 2\text{Re} [q_{21}\Psi_1(z_1) + q_{22}\Psi_2(z_2)] \end{aligned} \quad (4.32)$$

onde

$$q_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11}\mu_j^2 + a_{12} - a_{16}\mu_j \\ a_{12}\mu_j + a_{22}/\mu_j - a_{26} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

é a matriz de parâmetros complexos.

Uma vez que as condições de contorno sejam conhecidas, determina-se a função tensão, dada pelas equações (4.19) com derivadas dadas pela equação (4.30), que satisfaça estas condições, determinando assim os campos de deslocamentos, dados pelas equações (4.32), e tensões, dados pelas equações (4.31).

4.3 Formulação integral

Integrando a equação (4.1) ao longo da espessura do laminado, as tensões σ_{ij} se tornam densidade de força N_{ij} , ou seja:

$$N_{ij,j} + b_i = 0, \quad (4.34)$$

onde b_i representa a densidade de força aplicada ao longo da espessura.

Assumindo-se uma função vetorial contínua u_i^* , que representa o deslocamento de um estado elasto-estático definido sobre um domínio Ω , como sendo uma função peso residual da equação de equilíbrio (4.34), tem-se:

$$\int_{\Omega} N_{ij,j} u_i^* d\Omega + \int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega = 0 \quad (4.35)$$

Pela regra de derivação do produto de duas funções tem-se:

$$(N_{ij} u_i^*)_{,k} = N_{ij,k} u_i^* + N_{ij} u_{i,k}^* \quad (4.36)$$

Pode-se escrever $u_{i,j}^*$ como a soma de um tensor simétrico e um anti-simétrico, da forma

$$u_{i,j}^* = \frac{1}{2}(u_{i,j}^* + u_{j,i}^*) + \frac{1}{2}(u_{i,j}^* - u_{j,i}^*) = \varepsilon_{ij}^* + \omega_{ij}^* \quad (4.37)$$

sendo que ε_{ij}^* e ω_{ij}^* representam os tensores deformação (simétrico) e rotação (anti-simétrico), respectivamente, do estado elástico ” * ”.

Substituindo (4.37) em (4.36) tem-se

$$(N_{ij} u_i^*)_{,j} = N_{ij,j} u_i^* + N_{ij} \varepsilon_{ij}^* + N_{ij} \omega_{ij}^* \quad (4.38)$$

sendo N_{ij} um tensor simétrico. O produto de um tensor simétrico por um anti-simétrico é nulo. Desta forma, a equação (4.38) torna-se

$$N_{ij,j} u_i^* = (N_{ij} u_i^*)_{,j} - N_{ij} \varepsilon_{ij}^* \quad (4.39)$$

Substituindo a equação (4.39) na equação (4.35) tem-se

$$- \int_{\Omega} N_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega + \int_{\Omega} (N_{ij} u_i^*)_{,j} d\Omega + \int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega = 0 \quad (4.40)$$

Pelo teorema de Green tem-se:

$$\int_{\Omega} (N_{ij} u_i^*)_{,j} d\Omega = \int_{\Gamma} (N_{ij} u_i^*) n_j d\Gamma = \int_{\Gamma} t_i u_i^* d\Gamma \quad (4.41)$$

onde

$$t_i = N_{ij} n_j \quad (4.42)$$

Substituindo (4.41) em (4.40), tem-se

$$\int_{\Omega} N_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Gamma} t_i u_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega \quad (4.43)$$

Partindo-se da equação (4.1) como sendo a correspondente ao estado u_i^* e a função de interpolação da equação (4.35) como sendo u_i , obtém-se, de forma análoga a anterior

$$\int_{\Omega} N_{ij}^* \varepsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Gamma} t_i^* u_i d\Gamma + \int_{\Omega} b_i^* u_i d\Omega \quad (4.44)$$

Pelo teorema recíproco dois estados de um mesmo corpo podem ser relacionados por $N_{ij}^* \varepsilon_{ij} = N_{ij} \varepsilon_{ij}^*$. Desta forma, igualando-se as equações (4.44) e (4.43), tem-se

$$\int_{\Gamma} t_i u_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} u_i^* b_i d\Omega = \int_{\Gamma} t_i^* u_i d\Gamma + \int_{\Omega} u_i b_i^* d\Omega \quad (4.45)$$

A equação integral (4.45) relaciona dois estados quaisquer de tensões. Para que se possa tratar problemas de elasticidade em meio contínuo, será adotado que um destes estados é conhecido, e o

outro se deseja determinar. No caso de elementos de contorno, o estado conhecido é o chamado estado fundamental que corresponde a resposta de um corpo infinito a uma carga concentrada unitária em um ponto \mathbf{x}' . A representação matemática de uma carga concentrada unitária é dada pelo delta de Dirac que é definido como

$$\begin{cases} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \infty & \text{se } \mathbf{x} = \mathbf{x}' \\ \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = 0 & \text{se } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}' \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\Omega = 1 \end{cases} \quad (4.46)$$

A razão da escolha do estado fundamental deve-se ao fato que a função delta de Dirac reduz o número de integrais de domínio, pois esta possui a propriedade

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\Omega = f(\mathbf{x}') \quad (4.47)$$

para um dado ponto $\mathbf{x}' \in \Omega$.

Considerando o estado " * " como sendo o estado fundamental de um problema estático livre de forças de corpo ($b_i^* = 0$), a equação (4.45) pode ser escrita como

$$\int_{\Gamma} t_{ik}^* u_i d\Gamma + \int_{\Omega} b_i u_{ik}^* d\Omega = \int_{\Gamma} t_i u_{ik}^* d\Gamma - \int_{\Omega} \delta_{ik} u_i d\Omega \quad (4.48)$$

onde u_{ik}^* e t_{ik}^* representam respectivamente deslocamentos e forças de superfície na direção k , num ponto \mathbf{x} , devido a uma força concentrada unitária aplicada de forma estática num ponto \mathbf{x}' numa direção i . Por serem soluções do estado fundamental, u_{ik}^* e t_{ik}^* são chamadas soluções fundamentais de deslocamentos e forças de superfície, respectivamente.

Devido a propriedade (4.47), a equação (4.48) pode ser escrita como

$$u_k + \int_{\Gamma} t_{ik}^* u_i d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ik}^* t_i d\Gamma - \int_{\Omega} b_i u_{ik}^* d\Omega \quad (4.49)$$

Considerando que as forças de corpo b_i são nulas, pode-se escrever:

$$u_k + \int_{\Gamma} t_{ik}^* u_i d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ik}^* t_i d\Gamma \quad (4.50)$$

4.4 Soluções fundamentais anisotrópicas

Para se obter as soluções fundamentais estáticas para problemas bidimensionais em materiais anisotrópicos, o domínio Ω será mapeado num plano complexo, usando a seguinte mudança de variável

$$\mathbf{z}' = \left\{ \begin{array}{c} z'_1 \\ z'_2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} x'_1 + \mu_1 x'_2 \\ x'_1 + \mu_2 x'_2 \end{array} \right\} \quad (4.51)$$

e

$$\mathbf{z} = \left\{ \begin{array}{c} z_1 \\ z_2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} x_1 + \mu_1 x_2 \\ x_1 + \mu_2 x_2 \end{array} \right\} \quad (4.52)$$

onde μ_k são raízes complexas da equação (4.26), x'_1 e x'_2 são as coordenadas do ponto fonte (ponto de aplicação da carga concentrada unitária) e x_1 e x_2 são as coordenadas do ponto campo (ponto de obtenção da resposta devido a aplicação da carga unitária).

Se for considerado um contorno fechado Γ ao redor do ponto fonte e se forem usadas as forças de superfície definidas pela equação (4.3) e as tensões definidas pela equação (4.7), tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} t_1 d\Gamma &= 2\text{Re}[[\mu_1 \Psi_1 + \mu_2 \Psi_2]], \\ \int_{\Gamma} t_2 d\Gamma &= 2\text{Re}[[\Psi_1 + \Psi_2]] \end{aligned} \quad (4.53)$$

onde os colchetes duplos representam o salto na função para um contorno fechado ao redor do

ponto fonte. Se o contorno Γ engloba \mathbf{z}' , então o resultado das equações (4.53) serão diferentes de zero.

As soluções fundamentais em um plano anisotrópico infinito podem ser encontradas usando-se a função tensão de Airy resultante das forças de superfície fundamentais, dadas pelas equações (4.53), e a equação de equilíbrio de forças (4.1) considerando forças de corpo e efeitos de inércia nulos.

A função tensão de Airy para um ponto carregado na direção x_i pode ser representada por Ψ_{ik} . Como as equações integrais de contorno (4.53) possuem sinais opostos à carga aplicada, ela pode ser expressa para um ponto fonte como

$$\begin{aligned} 2\text{Re}[[\mu_1\Psi_{i1} + \mu_2\Psi_{i2}]] &= -\delta_{i1}, \\ 2\text{Re}[[\Psi_{i1} + \Psi_{i2}]] &= \delta_{i2}. \end{aligned} \tag{4.54}$$

As equações (4.54) podem ser satisfeitas para qualquer contorno fechado \mathbf{z}' , tomando

$$\Psi_{ik} = A_{ik} \ln(\mathbf{z} - \mathbf{z}') \tag{4.55}$$

onde A_{ik} são constantes complexas. Usando propriedades de funções complexas, pode ser mostrado que para qualquer contorno fechando o ponto \mathbf{z}'

$$\ln(\mathbf{z} - \mathbf{z}') = 2\pi i. \tag{4.56}$$

Usando as equações (4.54), (4.55) e (4.56), podem ser obtidas duas equações para as constantes desconhecidas A_{ik}

$$A_{i1} - \bar{A}_{i1} + A_{i2} - \bar{A}_{i2} = \delta_{i2}/(2\pi i)$$

$$\mu_1 A_{i1} - \bar{\mu}_1 \bar{A}_{i1} + \mu_2 A_{i2} - \bar{\mu}_2 \bar{A}_{i2} = -\delta_{i1}/(2\pi i) \quad (4.57)$$

As duas outras equações necessárias para se determinar A_{ik} resultam da exigência que os deslocamentos tenham valores únicos, ou seja

$$[[u_i]] = 0 \quad (4.58)$$

Usando as equações de deslocamentos (4.32), a equação (4.55) e a equação (4.56), a equação (4.58) pode ser expandida como

$$q_{11}A_{i1} - \bar{q}_{11}\bar{A}_{i1} + q_{12}A_{i2} - \bar{q}_{12}\bar{A}_{i2} = 0$$

$$q_{21}A_{i1} - \bar{q}_{21}\bar{A}_{i1} + q_{22}A_{i2} - \bar{q}_{22}\bar{A}_{i2} = 0 \quad (4.59)$$

Escrevendo as equações (4.57) e (4.59) na forma matricial, tem-se

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ \mu_1 & -\bar{\mu}_1 & \mu_2 & -\bar{\mu}_2 \\ q_{11} & -\bar{q}_{11} & q_{12} & -\bar{q}_{12} \\ q_{21} & -\bar{q}_{21} & q_{22} & -\bar{q}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{j1} \\ \bar{A}_{j1} \\ A_{j2} \\ \bar{A}_{j2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_{j2}/(2\pi i) \\ -\delta_{j1}/(2\pi i) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.60)$$

que é suficiente para se encontrar as constantes complexas A_{ik} . No caso de materiais isotrópicos a equação característica (4.26) se torna biquadrada com duas raízes iguais a i e duas iguais a $-i$. Estes valores tornam o sistema de equações (4.60) singular. Por causa disso não é possível o uso de materiais isotrópicos para comparar esta formulação com a formulação isotrópica que utiliza a solução fundamental de Kelvin. Para fazer esta comparação serão usados materiais quase-isotrópicos, ou

seja

$$E_2 = E_1 + \epsilon \cong E \quad (4.61)$$

sendo que

$$\epsilon \leq 10^{-2} E_1 \quad (4.62)$$

e

$$G_{12} = \frac{E_1}{2(1 + \nu_{12})} \quad (4.63)$$

As soluções fundamentais para deslocamentos são obtidas inserindo a função tensão dada pela equação (4.31) nas equações de deslocamentos (4.32). Desta forma, tem-se

$$u_{ji}^*(\mathbf{z}', \mathbf{z}) = 2\text{Re}[q_{i1}A_{j1} \ln(z_1 - z'_1) + q_{i2}A_{j2} \ln(z_2 - z'_2)]. \quad (4.64)$$

Similarmente, as soluções fundamentais para forças de superfície são obtida pela substituição da equação (4.55) nas equações de tensão (4.31) e usando a equação (4.3)

$$t_{ij}^*(\mathbf{z}', \mathbf{z}) = 2\text{Re} \left[\frac{1}{(z_1 - z'_1)} g_{i1}(\mu_1 n_1 - n_2) A_{j1} + \frac{1}{(z_2 - z'_2)} g_{i2}(\mu_2 n_1 - n_2) A_{j2} \right] \quad (4.65)$$

onde

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

e n_k são as componentes do vetor normal externo.

Note que tanto a solução fundamental de deslocamentos quanto a de forças de superfície são singulares quando o ponto fonte tende ao ponto campo. No caso da solução fundamental de deslocamentos a singularidade é fraca ($\ln r$). Já no caso da solução fundamental de forças de superfície tem-se uma singularidade forte ($1/r$). As formas como estas singularidades serão tratadas é mostrada na seção 4.7.

4.5 Equações integrais singulares

A equação integral (4.50) foi escrita para um ponto do interior do domínio. Uma vez que o ponto fonte é interno, a equação contém apenas integrandos regulares. Considere agora o limite da transição quando o ponto fonte tende ao contorno. Esta operação pode ser implementada colocando o ponto fonte no contorno e diminuindo o domínio do problema por uma região semi-circular, com contorno Γ_ϵ^* e raio ϵ , centrado no ponto fonte, conforme mostrado na Figura A.1. Com esta configuração, o contorno completo é dividido em duas partes, na forma

$$\Gamma = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\Gamma - \Gamma_\epsilon + \Gamma_\epsilon^*) \quad (4.67)$$

onde ϵ é o raio do semi-círculo de centro no ponto fonte, pertencendo ao contorno Γ . A equação (4.50) é, então, reescrita como:

$$u_l + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon + \Gamma_\epsilon^*} t_{li}^* u_i d\Gamma = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon + \Gamma_\epsilon^*} u_{li}^* t_i d\Gamma \quad (4.68)$$

A integral do lado direito da equação (4.68) contém um integrando de singularidade fraca da ordem $\ln(1/r)$ e é integrável como uma integral imprópria. A integral do lado esquerdo tem uma singularidade forte, de ordem $1/r$, que pode ser regularizada com o primeiro termo da expansão de Taylor em torno do ponto fonte, ou seja

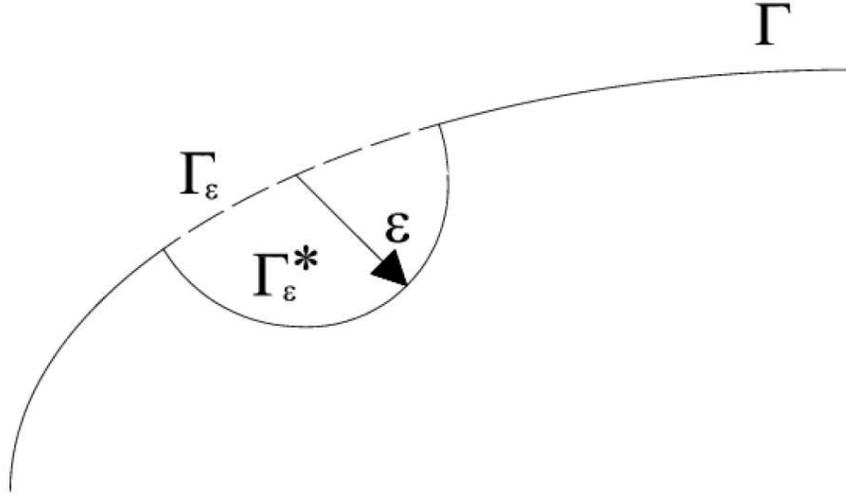


Figura 4.1: Ponto fonte localizado no contorno, circundado por uma região semi-circular.

$$\begin{aligned}
 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon + \Gamma_\epsilon^*} t_{li}^* u_i(\mathbf{z}) d\Gamma &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon^*} t_{li}^* [u_i(\mathbf{z}) - u_i(\mathbf{z}')] d\Gamma + \\
 &u_i(\mathbf{z}') \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon^*} t_{li}^* d\Gamma + \\
 &\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon} t_{li}^* u_i(\mathbf{z}) d\Gamma \tag{4.69}
 \end{aligned}$$

Assumindo que os deslocamentos são contínuos no ponto fonte, o primeiro termo do lado direito da equação (4.69) é integrável e desaparece no processo de limite. O segundo termo da equação representa um salto nos deslocamentos dado por $A_{ij}(\mathbf{z}')u_j(\mathbf{z}')$, no qual $A_{ij}(\mathbf{z}')$ é uma constante que depende da geometria local e das constantes elásticas. Finalmente, o terceiro termo do lado direito da equação resulta numa integral imprópria que é calculada no sentido do valor principal de Cauchy. Portanto, quando $\epsilon \rightarrow 0$, o ponto fonte tende ao contorno e, no limite, a

equação (4.68) pode ser escrita na forma

$$c_{li}u_i + \int t_{li}^* u_i d\Gamma = \int_{\Gamma} u_i^* t_i d\Gamma \quad (4.70)$$

onde \int representa integral no sentido do valor principal de Cauchy e o coeficiente $c_{li}(\mathbf{z}')$ é dado por $\delta_{ij} + A_{ij}(\mathbf{z}')$, no qual δ_{ij} representa o delta de Kronecker.

4.6 Formulação dos elementos de contorno discretizada

Para se obter a solução do problema elasto-estático, o contorno é dividido em elementos de contorno. Nesta etapa do trabalho, serão utilizados apenas elementos quadráticos (3 nós por elementos) descontínuos (elementos cujos nós das extremidades não são compartilhados com os elementos vizinhos).

Nesta formulação será mais conveniente trabalhar com vetores do que usar notação indicial. Desta forma tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \phi \mathbf{u}^{(i)} \\ \mathbf{t} &= \phi \mathbf{t}^{(i)} \end{aligned} \quad (4.71)$$

sendo que as variáveis em negrito representam vetores de dimensões $2N$, onde N é o número de nós, $\mathbf{u}^{(i)}$ e $\mathbf{t}^{(i)}$ representam os valores nodais dos deslocamentos e forças de superfícies, respectivamente, ϕ é o vetor de funções de forma, \mathbf{u} e \mathbf{t} representam os deslocamentos e tensões ao longo do elemento, respectivamente.

Considere que o domínio tenha sido dividido em NE elementos de contorno. Substituindo as equações (4.71) na equação (4.70), tem-se

$$\mathbf{c}^l \mathbf{u}^l + \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{T} \phi d\Gamma \right\} \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{U} \phi d\Omega \right\} \mathbf{t}^j \quad (4.72)$$

Chamando

$$\int_{\Gamma} \mathbf{U} \phi d\Gamma = \mathbf{G} \quad (4.73)$$

e

$$\int_{\Gamma_j} \mathbf{T} \phi d\Gamma = \mathbf{H} \quad (4.74)$$

tem-se

$$\sum_{j=1}^N H^{lj} u^j = \sum_{j=1}^N G^{lj} t^j \quad (4.75)$$

ou, na forma matricial

$$\mathbf{H} \mathbf{u} = \mathbf{G} \mathbf{t} \quad (4.76)$$

4.7 Integração no espaço

As funções de interpolação no espaço utilizada neste trabalho (funções de forma) são as funções de forma quadráticas. Essas funções permitem o modelamento de elementos curvos e são especialmente indicadas para problemas onde se tem altos gradientes.

Os deslocamentos e as forças de superfícies são representados em um elemento quadrático descontínuo como:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_d^{(1)} & 0 & \phi_d^{(2)} & 0 & \phi_d^{(3)} & 0 \\ 0 & \phi_d^{(1)} & 0 & \phi_d^{(2)} & 0 & \phi_d^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \\ u_1^{(3)} \\ u_2^{(3)} \end{Bmatrix} = \phi \mathbf{u}^{(n)} \quad (4.77)$$

$$\mathbf{t} = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_d^{(1)} & 0 & \phi_d^{(2)} & 0 & \phi_d^{(3)} & 0 \\ 0 & \phi_d^{(1)} & 0 & \phi_d^{(2)} & 0 & \phi_d^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1^{(1)} \\ t_2^{(1)} \\ t_1^{(2)} \\ t_2^{(2)} \\ t_1^{(3)} \\ t_2^{(3)} \end{Bmatrix} = \phi \mathbf{t}^{(n)} \quad (4.78)$$

onde $u_i^{(n)}$ e $t_i^{(n)}$ são os valores nodais de deslocamentos e forças de superfícies, respectivamente, e $\phi^{(i)}$ são as funções de forma quadráticas descontínuas já definidas no capítulo 3 como:

$$\phi_d^{(1)} = \xi \left(\frac{9}{8}\xi - \frac{3}{4} \right); \quad (4.79)$$

$$\phi_d^{(2)} = \left(1 - \frac{3}{2}\xi \right) \left(1 + \frac{3}{2}\xi \right); \quad (4.80)$$

$$\phi_d^{(3)} = \xi \left(\frac{9}{8}\xi + \frac{3}{4} \right). \quad (4.81)$$

onde ξ é a coordenada adimensional ao longo do elemento.

A geometria do elemento também pode ser considerada como quadrática e é representada por coordenadas nodais na forma:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_c^{(1)} & 0 & \phi_c^{(2)} & 0 & \phi_c^{(3)} & 0 \\ 0 & \phi_c^{(1)} & 0 & \phi_c^{(2)} & 0 & \phi_c^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_1^{(2)} \\ x_1^{(3)} \\ x_2^{(1)} \\ x_2^{(2)} \\ x_2^{(3)} \end{Bmatrix} = \phi_{\mathbf{x}^{(n)}} \quad (4.82)$$

porém, utilizando as funções de forma para elementos quadráticos contínuos dadas por:

$$\phi_c^{(1)} = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1); \quad (4.83)$$

$$\phi_c^{(2)} = (1 - \xi^2); \quad (4.84)$$

$$\phi_c^{(3)} = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1). \quad (4.85)$$

onde ξ representa uma coordenada adimensional ao longo do elemento.

Desta forma, as integrais de contorno podem ser escritas como:

$$H^{(j)} = \int_{\Gamma_j} t_{lk}^* \phi^{(j)} d\Gamma = \int_{-1}^1 t_{lk}^* \phi^{(j)} |J| d\xi \quad (4.86)$$

$$G^{(j)} = \int_{\Gamma_j} u_{lk}^* \phi^{(j)} d\Gamma = \int_{-1}^1 u_{lk}^* \phi^{(j)} |J| d\xi \quad (4.87)$$

onde $|J|$ representa o módulo do Jacobiano da transformação $(x_1, x_2) \rightarrow \xi$, e é dado por Brebbia e Dominguez (1989) e Kane (1993):

$$|J| = \frac{d\Gamma}{d\xi} = \left\{ \left(\frac{dx_1}{d\xi} \right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\xi} \right)^2 \right\}^{1/2} \quad (4.88)$$

onde $dx_1/d\xi$ e $dx_2/d\xi$ são obtidos derivando-se as equações (4.82) em relação a ξ .

Integrais singulares da ordem $0(\ln r)$ podem ser avaliadas eficientemente pela quadratura de Gauss com uma transformação de variáveis cúbica, conforme proposto por Telles (1987), que cancela exatamente a singularidade logarítmica. Uma outra possibilidade é o uso da quadratura logarítmica de Gauss, apresentada por Stroud e Secrest (1966). De acordo com este método, os termos incluindo singularidades logarítmicas podem ser integrados por:

$$I = \int_0^1 \ln \left(\frac{1}{\xi} \right) f(\xi) d\xi \cong \sum_{i=1}^N w_i f(\xi_i), \quad (4.89)$$

onde N é o número de pontos de Gauss. A coordenada do ponto de integração ξ_i e o fator peso w_i podem ser encontrados nas literaturas Stroud e Secrest (1966) e Brebbia e Dominguez (1989).

Neste trabalho, os termos não singulares das matrizes \mathbf{H} e \mathbf{G} são integrados utilizando-se quadratura de Gauss padrão com 10 pontos de integração. Os termos singulares de \mathbf{G} são do tipo $\ln(r)$ sendo integrados usando quadratura logarítmica de Gauss com 10 pontos de integração. Já os termos singulares de \mathbf{H} são do tipo $1/r$ e precisam ser calculados no sentido do valor principal de Cauchy. Uma maneira bastante simples de se tratar esta singularidade é através de considerações de corpos rígidos, tal como descrito em Brebbia e Dominguez (1989). Assumindo que um corpo rígido tenha todos os seus pontos do contorno deslocados de um valor unitário e que não existam forças de corpo ($b_i = 0$) na direção de um dos eixos de coordenadas, as forças de superfície em qualquer ponto do contorno deste corpo deve ser zero. Desta forma, a equação (4.76) torna-se

$$\mathbf{H}\mathbf{v}^q = 0 \quad (4.90)$$

onde \mathbf{v}^q é um vetor que para todos os nós tem deslocamentos unitários ao longo da direção q e zero na outra direção. Para satisfazer a equação (4.90) tem-se

$$H_{ii} = - \sum_{j=1}^N H_{ij} \quad j \neq i \quad (4.91)$$

sendo j par ou ímpar.

O termo da diagonal da matriz \mathbf{H} é igual a soma de todos os outros termos fora da diagonal correspondentes ao grau de liberdade em consideração.

4.8 Cálculo dos deslocamentos e densidades de forças em pontos internos

O tensor de tensões para um ponto no interior do domínio Ω , obtido derivando-se a equação (4.49) neste ponto e aplicando-se a lei de Hooke, pode ser escrito como

$$N_{ik} + \int_{\Gamma} S_{jik} u_j d\Gamma = \int_{\Gamma} D_{jik} t_j d\Gamma \quad (4.92)$$

onde S_{kij} e D_{kij} são combinações lineares das derivadas de T_{ij} e U_{ij} , respectivamente.

O tensor S_{kij} é dado por

$$\begin{Bmatrix} S_{11j} \\ S_{22j} \\ S_{21j} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_{1j,1}^* \\ t_{2j,2}^* \\ \frac{1}{2} (t_{1j,2}^* + t_{2j,1}^*) \end{Bmatrix} \quad (4.93)$$

onde $j = 1, 2$. As derivadas de t_{ij}^* são obtidas pela equação

$$t_{ij,k}^* = -2\text{Re} \left[\frac{1}{(z_1 - z_1')^2} R_{k1} q_{j1} (\mu_1 n_1 - n_2) A_{i1} + \frac{1}{(z_2 - z_2')^2} R_{k2} q_{j2} (\mu_2 n_1 - n_2) A_{i2} \right] \quad (4.94)$$

onde

$$R_{kl} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{bmatrix} \quad (4.95)$$

Da mesma forma D_{kij} pode ser calculado como

$$\begin{Bmatrix} D_{11j} \\ D_{22j} \\ D_{21j} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1j,1}^* \\ u_{2j,2}^* \\ \frac{1}{2}(u_{1j,2}^* + u_{2j,1}^*) \end{Bmatrix} \quad (4.96)$$

sendo que as derivadas de u_{ij}^* são dadas por

$$u_{ij,k}^* = 2\text{Re} \left[\frac{1}{z_1 - z_1'} R_{k1} q_{j1} A_{i1} + \frac{1}{z_2 - z_2'} R_{k2} q_{j2} A_{i2} \right] \quad (4.97)$$

5 Estabilidade de placas anisotrópicas

5.1 Introdução

Um entendimento sobre a estabilidade de componentes estruturais submetidos à cargas compressivas tornou-se particularmente importante com o advento de materiais compósitos de alta resistência utilizados como componentes de grandes projetos estruturais de engenharia. Tal fato resultou em componentes mais otimizados do que aqueles utilizados anteriormente em projetos de engenharia. A análise flambagem de painéis em compressão em materiais compósitos também é particularmente importante em estruturas aeronáuticas, espaciais, navais e automobilísticas. É comum em estruturas aeronáuticas e espaciais se fazer pequenos furos em placas para permitir a passagem de cabeamento e roteamento através deles e, normalmente, a colocação preferida não é central. Os furos são normalmente circulares de forma a minimizar problemas de concentração de tensão resultante, mas, por vezes, é necessário fazer furos retangulares com cantos vivos ou arredondados.

Placas estruturais construídas com esses tipos de materiais, bem como membros delgados, podem falhar quando submetidos a cargas de compressão em seu plano. Em alguns casos, estas falhas não são, por compressão direta, mas por deformação lateral. Este trabalho apresenta uma formulação de elementos de contorno para investigar o aparecimento de instabilidade de placas quadradas perfuradas de compósitos laminados, com extremidades simplesmente apoiadas e submetidas a compressão axial. As tensões causadas pelas cargas externas são calculados pela formulação de elasticidade plana anisotrópica do método dos elementos de contorno, conforme apresentada no Capítulo 4. Estas tensões são introduzidas como forças de corpo na formulação clássica de placas. As integrais de domínio, devidas às forças de corpo, são transformadas em integrais de contorno usando o *método de integração radial*, apresentado no Capítulo 3.

A formulação do método dos elementos de contorno para elasticidade plana anisotrópica foi desenvolvido por Sollero (1994) para problemas de mecânica da fratura e elasto-estático e estendida a outros problemas na pesquisa de Albuquerque (2001). A formulação de elementos de contorno para a teoria clássica de placas anisotrópicas foi desenvolvida por Albuquerque *et al.* (2006), e estendido a outros problemas no trabalho de Reis *et al.* (2011). A formulação para a análise da estabilidade de placas finas de compósito laminado com furo foi desenvolvida por Doval *et al.*

(2011).

A principal contribuição deste capítulo é analisar o efeito da razão de aspecto e da excentricidade de furos na análise de estabilidade de placas finas de compósito laminado sujeitas a cargas no seu plano, utilizando o método da integração radial nas formulações de elementos de contorno.

Uma outra contribuição importante, é o estudo feito para avaliar a sensibilidade do método de integração radial em relação ao número de pontos de integração para a formulação de placas finas de compósito laminado, com um furo quadrado central a placa. O foco principal desta análise é um estudo sobre o número de pontos de integração necessários para se obter resultados com boa precisão para a formulação proposta.

Alguns exemplos numéricos são analisados e as cargas críticas, modos de flambagem e coeficientes de flambagem são calculados para várias razões de aspecto e excentricidades do furo.

5.2 Formulação do problema

Basicamente, o problema clássico de estabilidade de placas é um problema geométrico não linear descrito por um conjunto de três equações diferenciais que podem ser desacopladas e linearizadas, no caso de cargas críticas elásticas. Das equações de equilíbrio, vistas nos Capítulos 3 e 4, deduz-se a equação diferencial que representa o deslocamento na direção transversal ao seu plano. Essa equação é dada por:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(x, y), \quad (5.1)$$

onde: w é o deslocamento nas direções x e y ; w representa o deslocamento na direção normal ao plano da placa; $q(x, y)$ é a força de corpo; D_{11} , D_{22} , D_{66} , D_{12} , D_{16} , e D_{26} são os coeficientes de rigidez em flexão para uma placa anisotrópica.

A formulação do problema de elasticidade anisotrópica encontra-se detalhada no Capítulo 4.

5.3 Resultados numéricos

5.3.1 Placa anisotrópica sem furo

Esse caso foi considerado apenas para validar o método proposto para análise de estabilidade de placas anisotrópicas, considerando os resultados analíticos disponíveis em Lekhnitskii (1968) e numéricos, usando o método dos elementos de contorno com células, disponíveis em Shi e Bezzine (1990). Fez-se uma análise de uma placa fina quadrada de grafite/epoxi, com as seguintes propriedades: razão entre o comprimento a e a espessura h da placa igual a $a/h = 100$; módulos de elasticidade $E_1 = 181 \text{ GPa}$ and $E_2 = 10,3 \text{ GPa}$; coeficiente de Poisson $\nu_{12} = 0,28$; módulo de cisalhamento $G_{12} = 7,17 \text{ GPa}$. As análises foram feitas nas condições de contorno de extremidades simplesmente apoiadas (SSSS), duas apoiadas e duas fixas (CSCS) e extremidades totalmente fixas (CCCC) e para diferentes condições de cargas distribuída em duas extremidades opostas nas direções x e y . A malha de elementos de contorno usada nesse caso é constituída de 28 elementos quadráticos descontínuos no contorno e quarenta e nove pontos internos distribuídos uniformemente. As figuras 5.1 e 5.2 mostram a configuração geométrica e o modelo de elementos de contorno da placa, respectivamente. Os resultados são apresentados na Tabela ??.

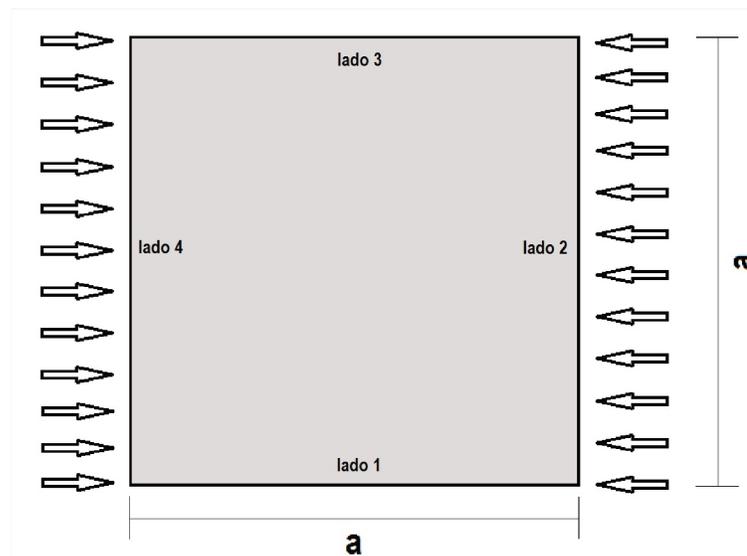


Figura 5.1: Configuração geométrica

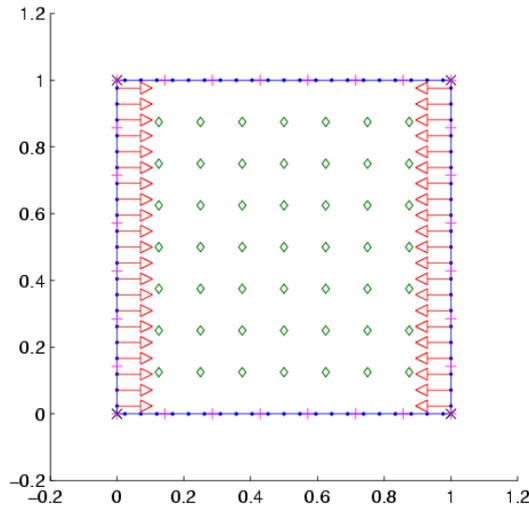


Figura 5.2: Modelo de elementos de contorno

Tabela 5.1: Parâmetro de carga crítica K_{cr} para uma placa anisotrópica sem furo

Caso	Condições de contorno	Carga	K_{cr} (RIM)	K_{cr} (SHI, 90)	K_{cr} (Analítico)
1	SSSS	$N_1 = -1$	130,82	–	129,78
2	SSSS	$N_2 = -1$	71,53	71,36	69,46
3	CCCC	$N_1 = -1$	493,70	481,21	–
4	CCCC	$N_2 = -1$	168,37	168,16	–
5	CSCS	$N_1 = -1$	161,47	163,24	162,03
7	CSCS	$N_2 = -1$	146,47	143,89	141,33
8	SSSS	$N_{12} = -1$	417,44	–	–

5.3.2 Placa anisotrópica com furo

Aqui é considerada uma placa perfurada do mesmo material (grafite/epóxi) e, portanto, com as mesmas propriedades físicas, também submetida a uma carga compressiva distribuída em extremidades opostas. Foram analisadas várias condições de posicionamento do furo na placa, bem como sua razão de aspecto.

Antes da análise das condições de posicionamento e razão de aspecto do furo, foi feito um estudo para avaliar a sensibilidade do método de integração radial em relação ao número de pontos de integração para a formulação de finas placas perfuradas de compósito laminado, com um furo

quadrado central a placa. O foco principal desta análise é um estudo sobre o número de pontos de integração que são necessários para obter resultados com boa precisão para a formulação proposta.

Os resultados numéricos são apresentados nas seções subsequentes em termos do parâmetro de carga crítica K_{cr} dado pela equação:

$$K_{cr} = \frac{N_{cr}a^2}{D_3} \quad (5.2)$$

onde, N_{cr} é a carga crítica, a é o comprimento da placa e D_3 é a rigidez em flexão da placa ($D_3 = D_{12} + 2D_{66}$).

5.3.3 Sensibilidade do método ao número de pontos de integração

Para esse estudo são usadas três malhas distintas com elementos de contornos quadráticos descontínuos, a saber: malha 1, tem 12 elementos no contorno externo e 12 elementos no contorno interno (furo); malha 2, com 20 elementos no contorno externo e 12 no contorno interno; e, malha 3, com 28 elementos no contorno externo e 12 no contorno interno. Todas as malhas tiveram 48 pontos internos, uniformemente distribuídos. As figuras 5.3 e 5.4 apresentam um esquema da configuração geométrica da placa e do modelo de elementos de contorno.

Os resultados para o parâmetro de carga crítica de flambagem em função da malha e do número de pontos de integração são mostrados na Tabela 5.2

Tabela 5.2: Parâmetro de carga crítica K_{cr} para a placa de compósito laminado com furo quadrado

Malha	Pontos de integração							
	4	8	12	16	20	24	26	30
1	25.89	116.85	144.66	134.59	125.11	118.25	118.25	118.25
2	61.43	100.28	113.58	110.22	114.66	114.66	114.66	114.66
3	67.88	96.08	101.55	107.18	112.02	112.20	112.20	112.20

A figura 5.5 ilustra a sensibilidade do método com os números de pontos de integração e refinamento da malha.

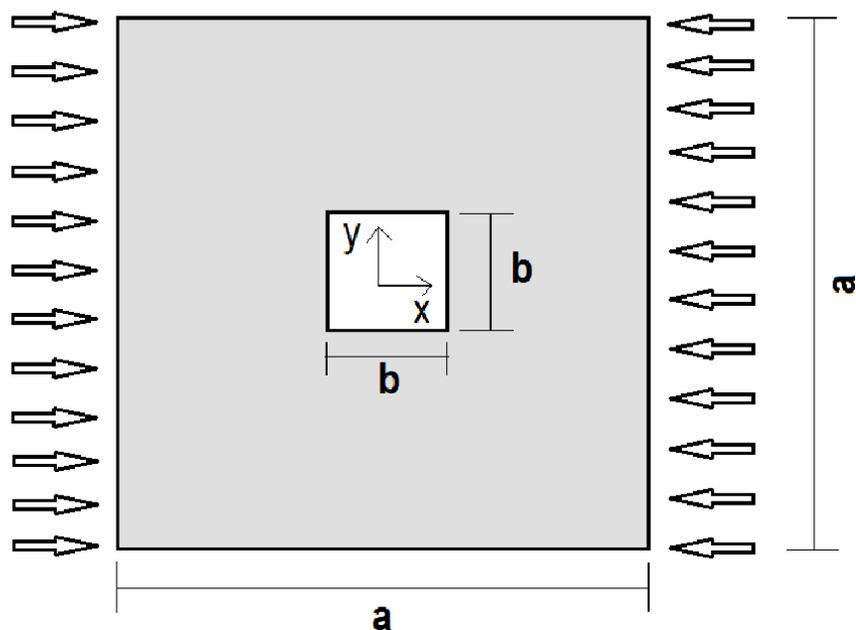


Figura 5.3: Configuração geométrica da placa

Como pode ser observado na Tabela 5.2 e Figura 5.5, os resultados obtidos a partir da formulação proposta, convergem com os resultados apresentados por Doval *et al.* (2011), a medida que se aumenta o refinamento da malha; portanto, nas futuras análises será utilizada a malha 3 com 24 pontos de integração na formulação do método.

5.3.4 Carga crítica para diferentes posições e razões de aspecto

Nesse item, foram analisadas várias condições de posicionamento do furo na placa, bem como sua razão de aspecto. A malha de elementos de contorno usada nesse caso é constituída de 44 elementos quadráticos descontínuos, sendo 28 elementos de igual comprimento no contorno externo e 16 elementos no contorno do furo. As Figuras 5.6 e 5.7 apresentam, respectivamente, a configuração geométrica da placa e um modelo de malha de elementos de contorno utilizada.

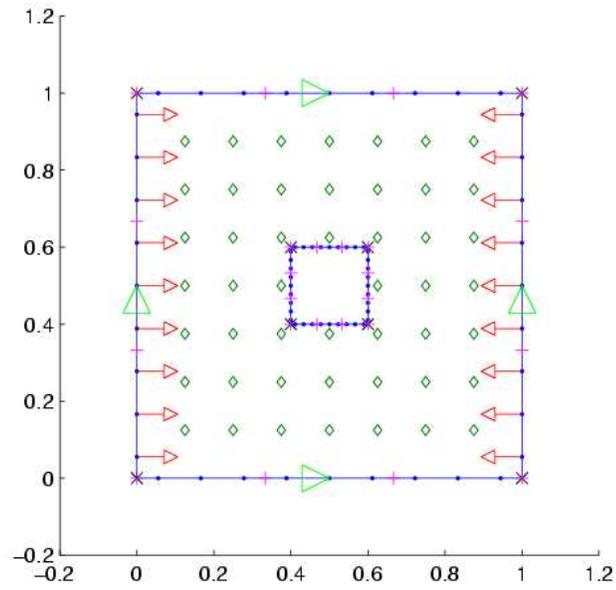


Figura 5.4: Modelo de elementos de contorno (malha 1)

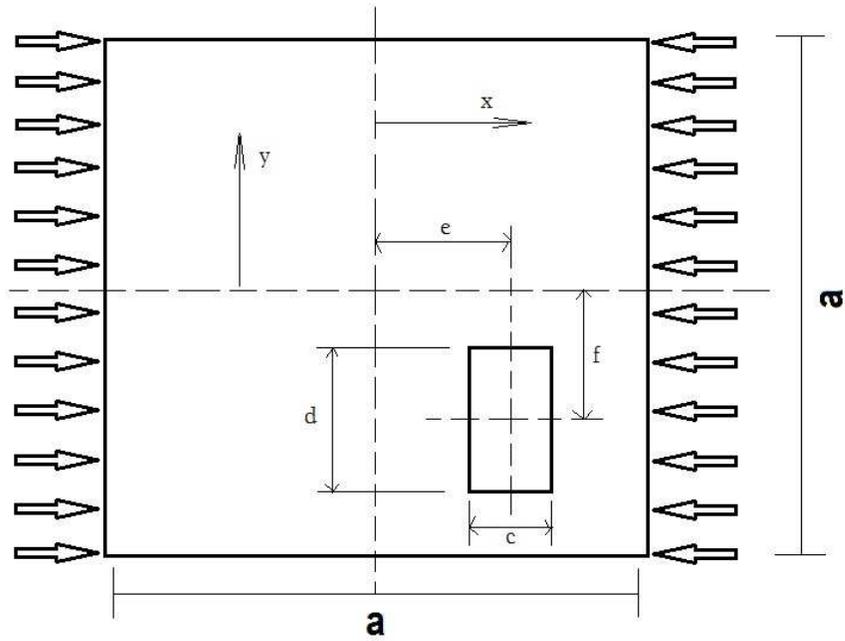


Figura 5.6: Configuração geométrica

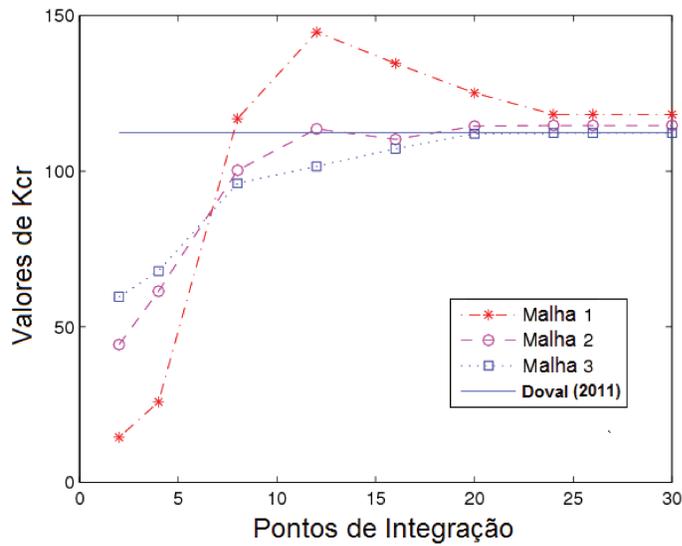


Figura 5.5: Variação dos valores de K_{cr} com o número de pontos de integração

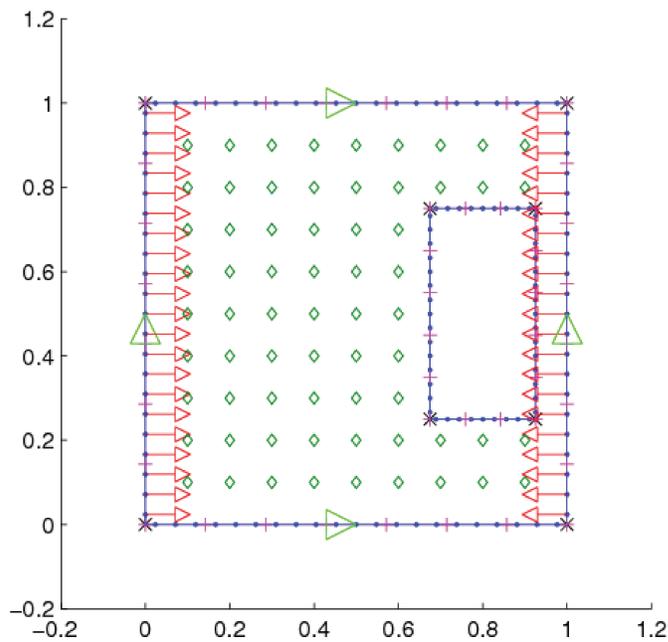


Figura 5.7: Modelo de elementos de contorno (28 elementos no contorno externo, 16 elementos no contorno interno e 66 pontos internos)

Os resultados apresentados nas Tabelas 5.3 e 5.4, referem-se às análises de flambagem de

uma placa anisotrópica quadrada com um furo retangular em diferentes posições no interior da mesma. As análises foram realizadas usando o método da integração radial nas formulações de elementos de contorno. Na tabela 5.3, as razões d/a e e/a variam de acordo com o posicionamento da placa e as outras duas razões valem $c/a = 0,25$ e $f/a = 0$. Já na Tabela 5.4 as razões c/a e f/a variam de acordo com o posicionamento da placa e as outras duas razões valem $d/a = 0,25$ e $e/a = 0$.

Tabela 5.3: Parâmetro de carga crítica ($c/a = 0,25$) - maior dimensão do furo perpendicular ao eixo da carga

Razão d/a	Razão e/a	K_{cr}
0,25	0,00	112,32
0,25	0,10	112,61
0,25	0,20	114,88
0,25	0,30	115,08
0,30	0,00	102,94
0,30	0,10	96,33
0,30	0,20	90,11
0,30	0,30	98,20
0,40	0,00	95,44
0,40	0,10	93,07
0,40	0,20	87,94
0,40	0,30	81,62
0,50	0,00	83,69
0,50	0,10	64,45
0,50	0,20	54,78
0,50	0,30	40,66
0,60	0,00	72,54
0,60	0,10	60,80
0,60	0,20	52,70
0,60	0,30	37,90

Tabela 5.4: Parâmetro de carga crítica para ($d/a = 0,25$) - maior dimensão do furo paralela ao eixo da carga

Razão c/a	Razão f/a	K_{cr}
0,25	0,00	112,32
0,25	0,10	102,84
0,25	0,20	104,72
0,25	0,30	129,58
0,30	0,00	102,94
0,30	0,10	104,02
0,30	0,20	106,10
0,30	0,30	112,81
0,40	0,00	95,43
0,40	0,10	89,91
0,40	0,20	84,29
0,40	0,30	97,02
0,50	0,00	83,69
0,50	0,10	89,91
0,50	0,20	88,03
0,50	0,30	94,16
0,60	0,00	72,55
0,60	0,10	84,78
0,60	0,20	86,26
0,60	0,30	91,79

Com base nos resultados mostrados nas figuras 5.8 e 5.9, é importante observar que o comportamento das placas anisotrópicas é bastante diferente do comportamento das placas isotrópicas analisadas no Capítulo 3 e também apresentado por Brown *et al.* (1986), El-Sawy e Nazmy (2001) e Shakerley e Brown (1996), principalmente, para furos retangulares centrais, com o carregamento perpendicular a maior dimensão do furo. Percebe-se que para as mesmas condições geométricas, de carregamento e apoio, os valores do coeficiente da carga de flambagem das placas anisotrópicas são, consideravelmente, mais elevados do que aqueles das placas isotrópicas.

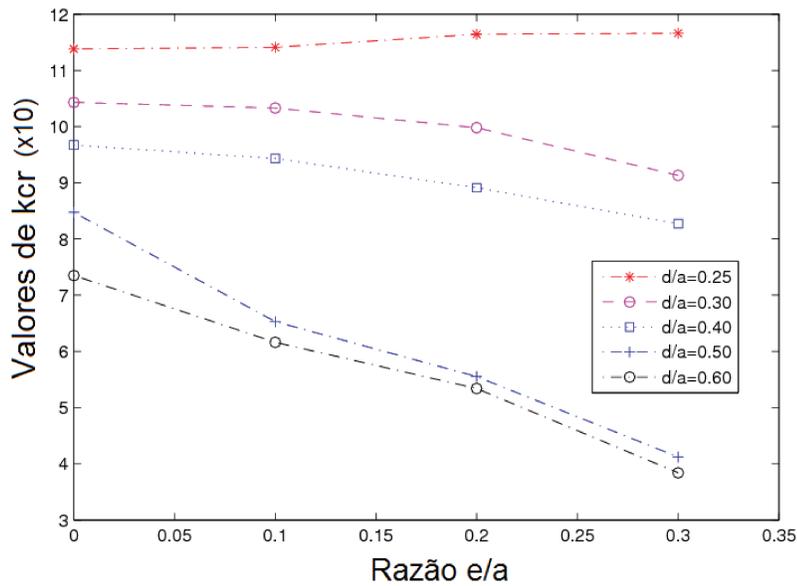


Figura 5.8: Eixo da carga perpendicular a maior dimensão do furo

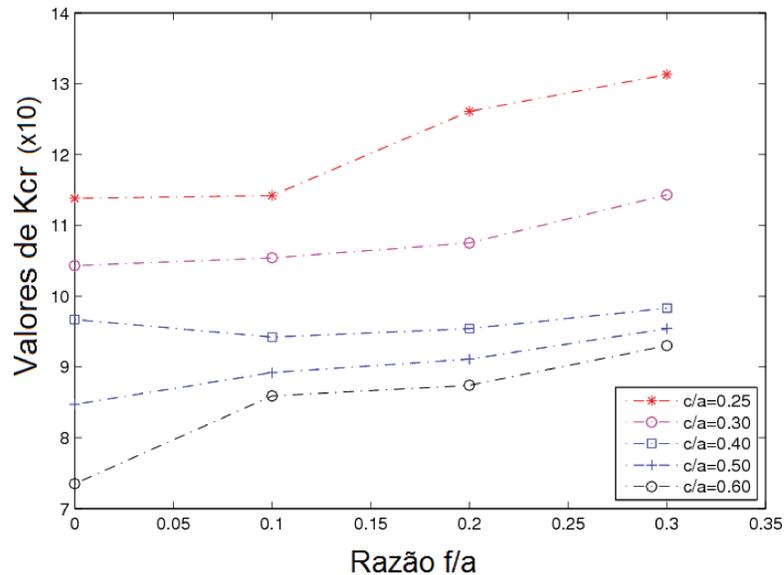


Figura 5.9: Eixo da carga paralelo a maior dimensão do furo

5.4 Discussão dos resultados

5.4.1 Eixo da carga perpendicular a maior dimensão do furo

Os resultados apresentados na Tabela 5.3 e Figura 5.8 mostram que à medida que a excentricidade da perfuração a partir do eixo central aumenta, uma diminuição do fator de carga de flambagem é observado. À medida que a perfuração se aproxima do centro da placa, no entanto, um aumento do fator de carga de flambagem é observado.

A medida que a menor dimensão da perfuração aumenta, o fator de carga de flambagem diminui. O aumento da razão de aspecto da parte da placa de ambos os lados do furo, teoricamente, deveria diminuir a carga de flambagem, isso está consistente com os resultados. Com o aumento da maior dimensão do furo, este efeito é mais pronunciado, e pode ser esperado uma vez que proporção irá tornar-se maior.

Com uma perfuração central, um aumento da maior dimensão da perfuração faz com que o coeficiente de carga de flambagem diminua, diferentemente do que ocorre com as placas isotrópi-

cas. Temos o mesmo comportamento quando a perfuração é posicionado excentricamente, o fator de carga de flambagem diminui com o aumento da maior dimensão.

As figura 5.10 e 5.11 mostram o primeiro mode de flambagem de uma furo descentralizado com carregamento perpendicular a maior dimensão do furo.



Figura 5.10: Vista de perfil do primeiro modo de flambagem com $d/a = 0,50$ e $e/a = 0,20$. Figura 5.11: Vista de topo do primeiro modo de flambagem com $d/a = 0,50$ e $e/a = 0,20$.

5.4.2 Eixo da carga paralelo a maior dimensão do furo

Os resultados apresentados na Tabela 5.4 e Figura 5.9 mostram que, quando a maior dimensão do furo é paralelo ao eixo da carga, o comportamento do primeiro modo de flambagem é bastante diferente daquele quando o eixo de carga é perpendicular a maior dimensão do furo, descrito acima. A carga aplicada à placa é predominantemente conduzida pela grande quantidade de material remanescente, e o efeito de condições de contorno é predominante maior.

A medida que a excentricidade da perfuração aumenta, uma diminuição no fator de carga de flambagem é observado. Para altas excentricidades de perfuração, a placa pode ser considerada como uma faixa larga e outra estreita. A placa do lado estreito não flamba tão facilmente como a placa lateral larga, pois a tensão de compressão tende a ser conduzida pelo lado mais largo da placa. Esta combinação pode causar a falha global da placa em fatores de carga de flambagem mais baixos. À medida que a perfuração é movida para o centro, a carga torna-se mais uniformemente

distribuída e a carga de flambagem do material aumenta de cada lado.

As figura 5.12 e 5.13 mostram o primeiro modo de flambagem de uma furo descentralizado com carregamento paralelo a maior dimensão do furo.



Figura 5.12: Vista de perfil do primeiro modo de flambagem com $c/a = 0,50$ e $f/a = 0,20$.
Figura 5.13: Vista de topo do primeiro modo de flambagem com $c/a = 0,50$ e $f/a = 0,20$.

5.5 Conclusões

Este capítulo apresenta uma análise do desempenho do método da integração radial, considerando sua precisão, quando utilizado numa formulação de elementos de contorno para a análise de instabilidade de placas de compósitos laminados com campos de tensão não-uniformes. As integrais de domínio são transformadas em integrais de contorno pelo método de integração radial.

Este resultado faz com que este método seja muito apropriado para o tratamento desses tipos de problemas, apesar do custo computacional, em função do número de pontos de integração necessários, ser elevado. As vantagens inerentes ao método, quando comparado com o método dos elementos de contorno de reciprocidade dual e com células, são: não é necessário se calcular soluções particulares nem tampouco se discretizar o domínio em células e é fácil de ser implementado.

6 Conclusões

6.1 Considerações finais

Este trabalho apresentou uma formulação do método dos elementos de contorno para análise de problemas de estabilidade de placas finas isotrópicas e anisotrópicas de materiais compósitos. As formulações do método dos elementos de contorno para a análise de problemas de estabilidade de placas de materiais isotrópicos e anisotrópicos foram obtidas usando soluções fundamentais da elasticidade plana e a teoria de Kirchhoff.

Inicialmente, resolve-se o problema de elasticidade plana, calculando os deslocamentos e as forças de superfície. Então, calculam-se as densidades de força, a partir dos deslocamentos e forças de superfícies. Estas densidades de forças são então consideradas na formulação de estabilidade de placas finas.

As várias integrais de domínio presentes na formulação de estabilidade de placas são transformadas em integrais de contorno usando o método da integração radial. O problema é transformado em um problema de autovalor e autovetor, onde os autovalores do sistema estão relacionados à carga crítica, enquanto que os autovetores representam os modos de flambagem.

O uso do método da integração radial em problemas de flambagem de placas finas de compósito laminados representa uma das principais contribuições deste trabalho.

Pode-se perceber que quando se analisa placas com furos, os resultados são satisfatórios, porém, um número elevado de pontos de integração e pontos interno são necessários. Nesse caso, o custo computacional do método é alto em decorrência do número de integrais numéricas que precisam ser calculadas, bem como do grande número de pontos de integração.

Mesmo possuindo um número elevado integrações a serem feitas, em função do tipo de problema analisado, o método da integração radial mostrou-se bastante adequado, principalmente para problemas de estabilidade de placas anisotrópicas com furo, pois além de permitir que as funções de aproximação sejam escolhidas livremente, não há a necessidade de se calcular as soluções particulares, o que em alguns casos de placas finas anisotrópicas pode ser muito difícil ou até mesmo

impossível de se determinar.

Como propostas para trabalhos futuros sugere-se, a extensão do método para problemas não-lineares (grandes deflexões), a problemas de estabilidade de perfis em I, T ou H, com almas vazadas e o desenvolvimento de procedimentos para tornar menor o custo computacional do método da integração radial.

REFERÊNCIAS

ALBUQUERQUE, E. L. **Numerical analysis of dynamic anisotropic problems using the boundary element method.** July 2001. Tese (Doutorado). Unicamp, Dept. Mec. Comput., in Portuguese.

ALBUQUERQUE, E.L.; SOLLERO, P. e ALIABADI, M.H. The boundary element method applied to time dependent problems in anisotropic materials. **International Journal of Solids and Structures**, v. 39, 1405–1422, 2002.

ALBUQUERQUE, E.L.; SOLLERO, P. e ALIABADI, M.H. Dual boundary element method for anisotropic dynamic fracture mechanics. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 59, 1187–1205, 2004.

ALBUQUERQUE, E.L.; SOLLERO, P. e FEDELINSKI, P. Dual reciprocity boundary element method in laplace domain applied to anisotropic dynamic crack problems. **Computers and Structures**, v. 81, 1703–1713, 2003a.

ALBUQUERQUE, E.L.; SOLLERO, P. e FEDELINSKI, P. Free vibration analysis of anisotropic material structures using the boundary element method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 27, 977–985, 2003b.

ALBUQUERQUE, E.L.; SOLLERO, P. e PAIVA, W.P. The radial integration method applied to dynamic problems of anisotropic plates. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, v. 23, 805–818, 2007.

ALBUQUERQUE, E.L.; SOLLERO, P.; VENTURINI, W. e ALIABADI, M.H. Boundary element analysis of anisotropic kirchhoff plates. **International Journal of Solids and Structures**, v. 43, 4029–4046, 2006.

ALFUTOV, N.A. e BALABUKH, L.I. On the possibility of solving plate stability problem without a preliminary determination of initial state of stress. **PMM**, v. 31, n. 2, 716–722, 1967.

ALIABADI, M.H. **Boundary element method, the application in solids and structures**. John Wiley and Sons Ltd, New York, 2002.

BERGER, H.M. A new approach to an analysis of large deflection of plates. **J. Appl. mech.**, v. 22, 465, 1955.

BEZINE, G. Etude du flambage des plaques minces par la methode des equations integrales de frontiere. In Pluralis, editor, **IIIe Congres International sur les methode numeriques**, pp. 723–729. Paris - France, jul 1983.

BREBBIA, C. e DOMINGUEZ, J. **Boundary Element an Introductory Course**. Computation Mechanics Publications, Southampton, Boston, second ed., 1989.

BREBBIA, C.A. e NARDINI, D. Dynamic analisys in solid mechanics by a alternative boundary element procedure. **Int. J. Soil Dynamics and earthquake Eng**, v. 2, 228, 1983.

BROWN, C.J.; YETTRAM, A.L. e BURNETT, M. Stability of plates with rectangular holes. **Journal of structural engineering.**, v. 113, 1111–1116, 1986.

BUDIANSKY, C.A. Theory of buckling and pos-buckling behaviour of elastic structures. **Advances inApplied Mech.**, v. 14, 1–65, 1974.

COSTA, J.A. e BREBBIA, C.A. Elastic buckling of plates using the boundary element method. In S. Verlag, editor, **Proceedings of 7th International Conference on Boundary Element Method**, pp. 429–442. Villa Olmo - Italy, jul 1985.

CRUSE, T.A. Numerical solutions in the dimensional elastostatic. **Int. J. of Solids and Structures**, v. 5, 1259–1274, 1969.

DOMINGUEZ, J. **Boundary elements in dynamics**. Computational Mechanics Publication, Southampton, Boston, 1993.

DOVAL, P.C.M.; ALBUQUERQUE, E.L. e SOLLERO, P. Stability analysis of composite laminate plates under non-uniform stress fields by the boundary element method. In **XI International Conference on Boundary Element and Meshless Techniques**. July 2011.

EL-SAWY, K.M. e NAZMY, A.S. Effect of aspect ratio on the elastic buckling of uniaxially loaded plates with eccentric holes. **Thin-walled structures**, v. 39, n. 12, 983–998, 2001.

ELZEIN, A. **Plate stability by boundary element method**. Springer-Verlag, Heidelberg-Berlin, 1991.

ELZEIN, A. e SYNGELLAKIS, S. High-order elements for the boundary element method stability analysis of imperfect plates. In **Proceedings of the 11th International Conference on Boundary Element Methods**. July 1989.

FREDHOLM, I. Sur une classe d'équations fonctionnelles. **Acta Math.**, v. 27, 365–390, 1903.

GAO, X. The radial integration method for evaluation of domain integrals with boundary only discretization. **Engn. Analysis with Boundary Elements**, v. 26, 905–916, 2002.

GOLBERG, M.A.; CHEN, C.S. e BOWMAN, H. Some recent results and proposals for the use of radial basis functions in the bem. **Engineering Analysis with Boundary Element**, v. 23, 285–296, 1999.

JASWON, M.A. e SYMM, G.T. **Integral equation methods in potential theory and elastostatics**. Academic Press, London, 1977.

KAMIYA, N. e SAWAKI, Y. An integral equation approach to finite deflection of elastic plates. **J. Non-Linear Mechanics**, v. 17, 187–194, 1982.

KAMIYA, N. e SAWAKI, Y. The plate bending analysis by the dual-reciprocity boundary elements. **Engineering Analysis**, v. 5, 36–40, 1988.

KANE, J.H. **Boundary Element Analysis in Engineering Continuum Mechanics**. Prentice Hall, New Jersey, 1993.

KATSIKADELIS, J.T. e NERANTZAKI, M.S. Large deflection of thin plates by the boundary element method. In W.S. Johnson, editor, **Delamination and debonding of Materials**, pp. 5–34. ASTM STP 876, Philadelphia, 1985.

KIRCHHOFF, G. On the equilibrium and motion of an elastic plate. **J. Math.**, v. 40, 51–58, 1950. In German.

KOGL, M. e GAUL, L. A 3-d boundary element method for dynamic analysis of anisotropic elastic solids. **CMES - Computational Modelling in Engineering and Science**, v. 1, 27–43, 2000.

KOGL, M. e GAUL, L. Free vibration analysis of anisotropic solids with the boundary element method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 27, 107–114, 2003.

KUPRADZE, O.D. **Potential methods in the theory of elasticity**. Daniel Davey and Co., New York, 1965.

LEKHNITSKII, S.G. **Theory of elasticity of an anisotropic elastic body**. Holden-Day, San Francisco, 1963.

LEKHNITSKII, S.G. **Anisotropic plates**. Gordon and Breach, New York, 1968.

MIKHLINI, S.G. **Integral equations**. Pergamon Press, New York, 1957.

MINDLIN, R.D. Influence of rotary inertia and shear on flexural motion of isotropic elastic plates. **J. Appl. Mech.**, v. 18, 31–38, 1951.

MUSKHELISHVILI, N.I. **Some basic problems of the mathematical theory of elasticity.** P. Nordhoff Ltd, Groningen, 1953.

NIWA, Y.; KOBAYASHI, S. e FUKUI, T. An application of the integral equation method to plate bending. Relatório técnico, Faculty of Engineering - Kyoto University, Kyoto - Japan, 1974.

NOWINSKI, D.L. e OHNABE, H. On certain inconsistencies in berger equations for large deflections of elastic plates. **Int. J. Mech. Sc.**, v. 14, 165, 1958.

PAIVA, J. B. **Boundary element formulation for plate bending and its application in engineering.** 1987. Tese (Doutorado). University of São Paulo, São Carlos School of Engineering, in Portuguese.

PARTRIDGE, P.W. Towards criteria for selection approximation functions in the dual reciprocity method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 24, 519–529, 2000.

PURBOLAKSONO, J. e ALIABADI, M.H. Application of drbem for evaluating buckling problems of perforated thin plates. **European Journal of Scientific Research**, v. 31, 398–408, 2009.

RAJAMOHAN, C. e RAAMACHANDRAN, J. Bending of anisotropic plates by charge simulation method. **Advances in Engn. Software**, v. 30, 369–373, 1999.

REIS, A.; ALBUQUERQUE, E.L.; TORSANI, F.L.; PALERMO, L. e SOLLERO, P. Computation of moments and stresses in laminated composite plates by the boundary element method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 35, 105–113, 2011.

REISSNER, E. On the theory of bending of eleastic plates. **J. Math. and Phys.**, v. 23, 184, 1944.

RIZZO, F.J. An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics. **Quart. Appl. Math.**, v. 25, 41–52, 1968.

SHAKERLEY, T.M. e BROWN, C.J. Elastic buckling of plates with eccentrically positioned rectangular perforations. **Int. journal mech. sci.**, v. 38, 825–838, 1996.

SHI, G. e BEZINE, G. A general boundary integral formulation for the anisotropic plate bending problems. **J. Composite Materials**, v. 22, 694–716, 1988.

SHI, G. e BEZINE, G. Buckling analysis of orthotropic plates by boundary element method. **Mechanics Research Communications**, v. 26, 1351–1370, 1990.

SMIRNOV, V.J. **Integral equation and partial differential equations**. Addison-Wesley, London, 1964.

SOLLERO, P. **Fracture mechanics analysis of anisotropic laminates by the boundary element method**. 1994. Tese (Doutorado). Wessex Institute of Technology.

STROUD, A.H. e SECREST, D. **Gaussian Quadrature Formulas**. Prentice Hall, New Jersey, 1966.

SYNGELLAKIS, S. e CHERUKUNNATH, N. A boundary element solution of the plate buckling problem. **Engineering Analysis**, v. 4, 75–81, 1987.

SYNGELLAKIS, S. e CHERUKUNNATH, N. Boundary element analysis of symmetrically laminated plates. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 28, 1005–1016, 2004.

SYNGELLAKIS, S. e ELZEIN, E. Plate buckling loads by the boundary element method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 37, 1763–1778, 1994.

TANAKA, M. Integral equation approach to small and large displacements of thin elastic plates. In **Boundary Element in Engineering**. 1983.

TANG, W. **A generalised approach for transformig domain integrals into boundary element**

method. 1987. Tese (Doutorado). Computational Mechanics Institute.

TELLES, J.C.F. A self-adaptive co-ordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 24, 959–973, 1987.

TIMOSHENKO, S. e GERE, J.M. **Theory of Elastic Stability**. McGraw-Hill, New York, second ed., 1961.

WROBEL, L.C. e ALIABADI, M. **The boundary element method**. Wiley, Chichester, 2002.

WROBEL, L.C.; BREBBIA, C.A. e NARDINI, D. **The dual-reciprocity boundary element formulation for transient heat conduction**. Springer Verlag, London, 1986a.

WROBEL, L.C.; TELLES, J.C.F. e BREBBIA, C.A. A dual-reciprocity boundary element formulation for axisymmetric diffusion problems. In **Proc. 8th Int. Conf. on BEM**. 1986b.

WU, B.C. e ALTIERO, N.J. A new numerical method for the analysis of anisotropic thin plate bending problems. **Computer Meth. in Appl. Mechanics and Engineering**, v. 25, 343–353, 1981.

APÊNDICE A Formulação de elasticidade plana isotrópica

A.1 Equações de Equilíbrio da formulação de elasticidade plana isotrópica

Considere um elemento infinitesimal como mostrado na Figura 2.2, obtido a partir de um domínio Ω submetido a um carregamento genérico. Nesse caso, o equilíbrio de forças pode ser escrito como:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_x = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b_y = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + b_z = 0 \quad (\text{A.3})$$

que também pode ser escrita como:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0. \quad (\text{A.4})$$

Por sua vez, do equilíbrio de momentos resulta que

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad (\text{A.5})$$

onde, σ_{ij} é o tensor de tensões e b_i é o vetor de forças de corpo.

O vetor de forças de superfície t_i (Vetor de Cauchy) em um ponto no contorno Γ de um domínio Ω é expresso na forma

$$t_i = \sigma_{ij}n_j, \quad (\text{A.6})$$

onde, n_j é o vetor normal do contorno Γ no ponto.

Em elasticidade linear, o vetor de deslocamentos e suas derivadas são assumidos como infinitesimais. O tensor de deformação pode ser escrito como:

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k}) \quad (\text{A.7})$$

Para assegurar a unicidade dos deslocamentos, as componentes do tensor de deformações não podem ser designadas arbitrariamente, devendo satisfazer certas condições de compatibilidade e integrabilidade. A equação de compatibilidade é dada por:

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0 \quad (\text{A.8})$$

, que no caso bidimensional é reduzida à forma

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} = \varepsilon_{12,12}. \quad (\text{A.9})$$

No caso de material elástico linear, a relação entre o tensor de tensões com o tensor de deformações é escrita, na sua forma mais geral, como:

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ji} \quad (\text{A.10})$$

onde,

$$\mu = \frac{E}{(1 + \nu)} \quad (\text{A.11})$$

e

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)}(1 - 2\nu) \quad (\text{A.12})$$

A.2 Formulação integral

Assumindo-se uma função vetorial contínua u_i^* , que representa o deslocamento de um estado elasto-estático definido sobre um domínio Ω , como sendo uma função peso da equação de equilíbrio (A.4), tem-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,j} u_i^* d\Omega + \int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega = 0 \quad (\text{A.13})$$

Pela regra de derivação do produto de duas funções tem-se:

$$(\sigma_{ij} u_i^*)_{,k} = \sigma_{ij,k} u_i^* + \sigma_{ij} u_{i,k}^* \quad (\text{A.14})$$

Pode-se escrever $u_{i,j}^*$ como a soma de um tensor simétrico e um anti-simétrico, da forma

$$u_{i,j}^* = \frac{1}{2}(u_{i,j}^* + u_{j,i}^*) + \frac{1}{2}(u_{i,j}^* - u_{j,i}^*) = \varepsilon_{ij}^* + \omega_{ij}^* \quad (\text{A.15})$$

sendo que ε_{ij}^* e ω_{ij}^* representam os tensores de deformação (simétrico) e rotação (anti-simétrico), respectivamente, do estado elástico ” * ”.

Substituindo (A.15) em (A.14) tem-se

$$(\sigma_{ij} u_i^*)_{,j} = \sigma_{ij,j} u_i^* + \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* + \sigma_{ij} \omega_{ij}^* \quad (\text{A.16})$$

sendo σ_{ij} um tensor simétrico. O produto de um tensor simétrico por um anti-simétrico é nulo.

Desta forma, a equação (A.16) torna-se

$$\sigma_{ij,j}u_i^* = (\sigma_{ij}u_i^*)_{,j} - \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^* \quad (\text{A.17})$$

Substituindo a equação (A.17) na equação (A.13) tem-se

$$- \int_{\Omega} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^* d\Omega + \int_{\Omega} (\sigma_{ij}u_i^*)_{,j} d\Omega + \int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega = 0 \quad (\text{A.18})$$

Pelo teorema de Green tem-se:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij}u_i^*)_{,j} d\Omega = \int_{\Gamma} (\sigma_{ij}u_i^*) n_j d\Gamma = \int_{\Gamma} t_i u_i^* d\Gamma \quad (\text{A.19})$$

onde

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \quad (\text{A.20})$$

Substituindo (A.19) em (A.18), tem-se

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Gamma} t_i u_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega \quad (\text{A.21})$$

Se partirmos da equação (A.4) como sendo a correspondente ao estado u_i^* e a função de interpolação da equação (A.13) como sendo u_i , obtém-se, de forma análoga a anterior

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Gamma} t_i^* u_i d\Gamma + \int_{\Omega} b_i^* u_i d\Omega \quad (\text{A.22})$$

Pelo Teorema Betti dois estados de um mesmo material podem ser relacionados por $\sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} =$

$\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^*$. Desta forma, igualando-se as equações (A.22) e (A.21), tem-se

$$\int_{\Gamma} t_i u_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} u_i^* b_i d\Omega = \int_{\Gamma} t_i^* u_i d\Gamma + \int_{\Omega} u_i b_i^* d\Omega \quad (\text{A.23})$$

A equação integral (A.23) relaciona dois estados quaisquer de tensões. Para que se possa tratar problemas de elasticidade em meio contínuo, será adotado que um destes estados é conhecido, e o outro se deseja determinar. No caso de elementos de contorno, o estado conhecido é o chamado estado fundamental que corresponde a resposta de um corpo infinito a uma carga concentrada unitária em um ponto \mathbf{x}' . A representação matemática de uma carga concentrada unitária é dada pelo delta de Dirac que é definido como

$$\begin{cases} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \infty & \text{se } \mathbf{x} = \mathbf{x}' \\ \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = 0 & \text{se } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}' \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\Omega = 1 \end{cases} \quad (\text{A.24})$$

A razão da escolha do estado fundamental deve-se ao fato que a função delta de Dirac reduz o número de integrais de domínio, pois esta possui a propriedade

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\Omega = f(\mathbf{x}') \quad (\text{A.25})$$

para um dado ponto $\mathbf{x}' \in \Omega$.

Considerando o estado " * " como sendo o estado fundamental de um problema estático livre de forças de corpo ($b_i^* = 0$), a equação (A.23) pode ser escrita como

$$\int_{\Gamma} T_{ik} u_i d\Gamma + \int_{\Omega} b_i U_{ik} d\Omega = \int_{\Gamma} t_i U_{ik} d\Gamma - \int_{\Omega} \delta_{ik} u_i d\Omega \quad (\text{A.26})$$

onde U_{ik} e T_{ik} representam respectivamente deslocamentos e forças de superfície na direção k , num ponto \mathbf{x} , devido a uma força concentrada unitária aplicada de forma estática num ponto \mathbf{x}' numa direção i . Por serem soluções do estado fundamental, U_{ik} e T_{ik} são chamadas soluções fundamentais de deslocamentos e forças de superfície, respectivamente.

Devido a propriedade (A.25), a equação (A.26) pode ser escrita como

$$u_k + \int_{\Gamma} T_{ik} u_i d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ik} t_i d\Gamma - \int_{\Omega} b_i U_{ik} d\Omega \quad (\text{A.27})$$

Esta equação também é conhecida como Identidade de Somigliana e permite obter os valores dos deslocamentos u em qualquer ponto P do domínio Ω do problema, considerando-se que os valores de deslocamentos u_i e forças de superfície t_i no contorno da geometria e as forças de corpo b_i são conhecidos.

Considerando que as forças de corpo b_i são nulas, pode-se escrever:

$$u_k + \int_{\Gamma} T_{ik} u_i d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ik} t_i d\Gamma \quad (\text{A.28})$$

A.3 Soluções fundamentais

Para um estado plano de tensões as soluções fundamentais para os deslocamentos e forças de superfícies são dadas, respectivamente, por:

$$U_{ij}(X, x) = \frac{1}{8\pi\mu}(1 - \nu)(3 - 4\nu) \log \frac{1}{R} \delta_{ij} + R_{,i} R_{,j} \quad (\text{A.29})$$

$$T_{ij}(X, x) = \frac{-1}{4\pi(1 - \nu)R} [(1 - 2\nu)\delta_{ij} + 2R_{,i} R_{,j}] \frac{\partial R}{\partial n} - (1 - 2\nu)(R_{,i} n_i - R_{,j} n_j) \quad (\text{A.30})$$

Note que tanto a solução fundamental de deslocamentos quanto a de forças de superfície são singulares quando o ponto fonte tende ao ponto campo. No caso da solução fundamental de deslocamentos a singularidade é fraca ($\ln r$). Já no caso da solução fundamental de forças de super-

fície tem-se uma singularidade forte ($1/r$). As formas como estas singularidades serão tratadas é mostrada na seção A.6.

A.4 Equações integrais singulares

A equação integral (A.28) foi escrita para um ponto do interior do domínio. Uma vez que o ponto fonte é interno, a equação contém apenas integrandos regulares. Considere agora o limite da transição quando o ponto fonte tende ao contorno. Esta operação pode ser implementada colocando o ponto fonte no contorno e diminuindo o domínio do problema por uma região semi-circular, com contorno Γ_ϵ^* e raio ϵ , centrado no ponto fonte, conforme mostrado na Figura A.1. Com esta configuração, o contorno completo é dividido em duas partes, na forma

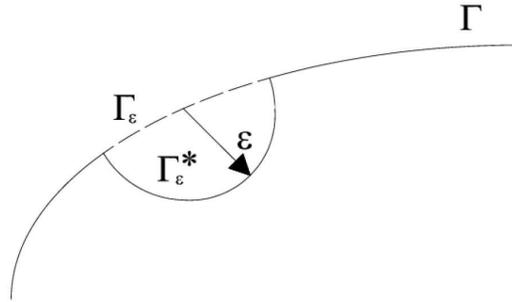


Figura A.1: Ponto fonte localizado no contorno, circundado por uma região semi-circular.

$$\Gamma = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\Gamma - \Gamma_\epsilon + \Gamma_\epsilon^*) \quad (\text{A.31})$$

onde ϵ é o raio do semi-círculo de centro no ponto fonte, pertencendo ao contorno Γ (Figura A.1). A equação (A.28) é, então, reescrita como:

$$u_l + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon + \Gamma_\epsilon^*} T_{li} u_i d\Gamma = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon + \Gamma_\epsilon^*} U_{li} t_i d\Gamma \quad (\text{A.32})$$

A integral do lado direito da equação (A.32) contém um integrando de singularidade fraca da ordem $\ln(1/r)$ e é integrável como uma integral imprópria. A integral do lado esquerdo tem uma singularidade forte, de ordem $1/r$, que pode ser regularizada com o primeiro termo da expansão de Taylor em torno do ponto fonte, ou seja

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon + \Gamma_\epsilon^*} T_{li} u_i(\mathbf{z}) d\Gamma &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon^*} T_{li} [u_i(\mathbf{z}) - u_i(\mathbf{z}')] d\Gamma + \\ &u_i(\mathbf{z}') \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon^*} T_{li} d\Gamma + \\ &\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon} T_{li} u_i(\mathbf{z}) d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Assumindo que os deslocamentos são contínuos no ponto fonte, o primeiro termo do lado direito da equação (A.33) é integrável e desaparece no processo de limite. O segundo termo da equação representa um salto nos deslocamentos dado por $A_{ij}(\mathbf{z}')u_j(\mathbf{z}')$, no qual $A_{ij}(\mathbf{z}')$ é uma constante que depende da geometria local e das constantes elásticas. Finalmente, o terceiro termo do lado direito da equação resulta numa integral imprópria que é calculada no sentido do valor principal de Cauchy. Portanto, quando $\epsilon \rightarrow 0$, o ponto fonte tende ao contorno e, no limite, a equação (A.32) pode ser escrita na forma

$$c_{li}u_i + \int T_{li}u_i d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{li}t_i d\Gamma \quad (\text{A.34})$$

onde \int representa integral no sentido do valor principal de Cauchy e o coeficiente $c_{li}(\mathbf{z}')$ é dado por $\delta_{ij} + A_{ij}(\mathbf{z}')$, no qual δ_{ij} representa o delta de Kronecker.

A.5 Formulação dos elementos de contorno discretizada

Para se obter a solução do problema elasto-estático, o contorno é dividido em elementos de contorno. Neste trabalho, serão utilizados apenas elementos quadráticos (3 nós por elementos)

descontínuos (elementos cujos nós da extremidades não são compartilhados com os elementos vizinhos).

As funções de interpolação no espaço utilizada neste trabalho (funções de forma) são as funções de forma quadráticas. Funções de forma quadrática permitem a modelagem de elementos curvos e são especialmente indicados para problemas onde se tem altos gradientes.

Os deslocamentos e as forças de superfícies são representados em um elemento quadrático padrão como:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N^{(1)} & 0 & N^{(2)} & 0 & N^{(3)} & 0 \\ 0 & N^{(1)} & 0 & N^{(2)} & 0 & N^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \\ u_1^{(3)} \\ u_2^{(3)} \end{Bmatrix} = \mathbf{N}\mathbf{u}^{(n)} \quad (\text{A.35})$$

$$\mathbf{t} = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N^{(1)} & 0 & N^{(2)} & 0 & N^{(3)} & 0 \\ 0 & N^{(1)} & 0 & N^{(2)} & 0 & N^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1^{(1)} \\ t_2^{(1)} \\ t_1^{(2)} \\ t_2^{(2)} \\ t_1^{(3)} \\ t_2^{(3)} \end{Bmatrix} = \mathbf{N}\mathbf{t}^{(n)} \quad (\text{A.36})$$

onde $u_i^{(n)}$ e $t_i^{(n)}$ são os valores nodais de deslocamentos e forças de superfícies, respectivamente, e $N^{(i)}$ são as funções de forma quadráticas definidas por:

$$N^{(1)} = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1) \quad (\text{A.37})$$

$$N^{(2)} = 1 - \xi^2 \quad (\text{A.38})$$

$$N^{(3)} = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1) \quad (\text{A.39})$$

onde ξ representa uma coordenada adimensional ao longo do elemento (Figura A.2).

Considere que o domínio tenha sido dividido em NE elementos de contorno. Substituindo as equações (A.35) e (A.36) na equação (A.34), tem-se

$$\mathbf{c}^l \mathbf{u}^l + \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{T} \mathbf{N} d\Gamma \right\} \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{U} \mathbf{N} d\Omega \right\} \mathbf{t}^j \quad (\text{A.40})$$

Chamando

$$\int_{\Gamma_j} \mathbf{U} \mathbf{N} d\Gamma = \mathbf{g} \quad (\text{A.41})$$

e

$$\int_{\Gamma_j} \mathbf{T} \mathbf{N} d\Gamma = \mathbf{h} \quad (\text{A.42})$$

tem-se

$$\sum_{j=1}^N H^{lj} \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^N G^{lj} \mathbf{t}^j \quad (\text{A.43})$$

ou, na forma matricial

$$\mathbf{Hu} = \mathbf{Gt} \quad (\text{A.44})$$

Aplicando as condições de contorno, obtém-se;

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (\text{A.45})$$

A.6 Integração no Espaço

A geometria do elemento pode também ser considerada quadrática (elementos isoparamétricos) e, neste caso, ser representada pelas coordenadas nodais e as funções de forma $N^{(i)}$, ou seja (Figura A.2):

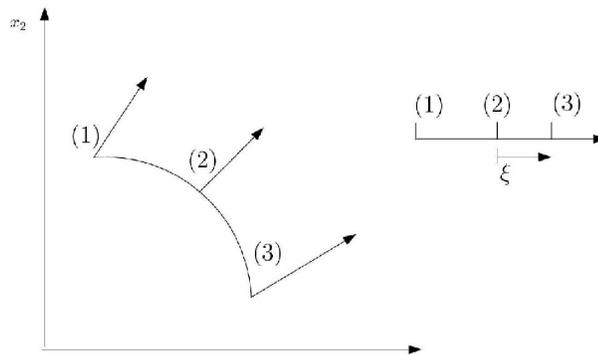


Figura A.2: Transformação de coordenadas $x_1 - x_2$ para ξ .

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N^{(1)} & 0 & N^{(2)} & 0 & N^{(3)} & 0 \\ 0 & N^{(1)} & 0 & N^{(2)} & 0 & N^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \end{Bmatrix} = \mathbf{N}\mathbf{x}^{(n)} \quad (\text{A.46})$$

Desta forma, as integrais de contorno podem ser escritas como:

$$H^{(j)} = \oint_{\Gamma_j} T_{lk} N^{(j)} d\Gamma = \int_{-1}^1 T_{lk} N^{(j)} |J| d\xi \quad (\text{A.47})$$

$$G^{(j)} = \int_{\Gamma_j} U_{lk} N^{(j)} d\Gamma = \int_{-1}^1 U_{lk} N^{(j)} |J| d\xi \quad (\text{A.48})$$

onde $|J|$ representa o módulo do Jacobiano da transformação $(x_1, x_2) \rightarrow \xi$:

$$|J| = \frac{d\Gamma}{d\xi} = \left\{ \left(\frac{dx_1}{d\xi} \right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\xi} \right)^2 \right\}^{1/2} \quad (\text{A.49})$$

onde $dx_1/d\xi$ e $dx_2/d\xi$ são obtidos derivando-se as equações (A.46) em relação a ξ .

Integrais singulares da ordem $0(\ln r)$ podem ser avaliadas eficientemente pela quadratura de Gauss com uma transformação de variáveis cúbica, conforme proposto por Telles (1987), que cancela exatamente a singularidade logarítmica. Uma outra possibilidade é o uso da quadratura logarítmica de Gauss, apresentada por Stroud e Secrest (1966). De acordo com este método, os termos incluindo singularidades logarítmicas podem ser integrados por

$$I = \int_0^1 \ln \left(\frac{1}{\xi} \right) f(\xi) d\xi \cong \sum_{i=1}^N w_i f(\xi) , \quad (\text{A.50})$$

onde N é o número de pontos de Gauss.

Neste trabalho, os termos não singulares das matrizes \mathbf{H} e \mathbf{G} são integrados utilizando-se quadratura de Gauss. Os termos singulares de \mathbf{G} são do tipo $\ln(r)$ sendo integrados usando quadratura logarítmica de Gauss. Já os termos singulares de \mathbf{H} são do tipo $1/r$ e precisam ser calculados no sentido do valor principal de Cauchy. Uma maneira bastante simples de se tratar esta singularidade é através de considerações de corpos rígidos. Assumindo que um corpo rígido tenha

todos os seus pontos do contorno deslocados de um valor unitário e que não existam forças de corpo ($b_i = 0$) na direção de um dos eixos de coordenadas, as forças de superfície em qualquer ponto do contorno deste corpo deve ser zero. Desta forma, a equação (A.44) torna-se

$$\mathbf{H}\mathbf{v}^q = 0 \quad (\text{A.51})$$

onde \mathbf{v}^q é um vetor que para todos os nós tem deslocamentos unitários ao longo da direção q e zero na outra direção. Para satisfazer a equação (A.51) tem-se

$$H_{ii} = - \sum_{j=1}^N H_{ij} \quad j \neq i \quad (\text{A.52})$$

sendo j par ou ímpar.

O termo da diagonal da matriz \mathbf{H} é igual a soma de todos os outros termos fora da diagonal correspondentes ao grau de liberdade em consideração.

A.7 Cálculo dos deslocamentos e tensões em pontos internos

O tensor de tensões para um ponto no interior do domínio Ω , obtido derivando-se a equação (A.27) neste ponto e aplicando-se a lei de Hooke, pode ser escrito como

$$\sigma_{ik} + \int_{\Gamma} S_{jik} u_j d\Gamma = \int_{\Gamma} D_{jik} t_j d\Gamma \quad (\text{A.53})$$

onde S_{kij} e D_{kij} são combinações lineares das derivadas de T_{ij} e U_{ij} , respectivamente.

A.8 Tensões no contorno

Para se calcular o tensor de tensões em um dado nó do contorno, considere um nó em que as direções dos vetores tangente e normal ao contorno não coincidam com as direções dos eixos ge-

ométricos (Figura A.3). Neste nó é criado um novo sistema de referência $x'_1x'_2$ possuindo direções que coincidam com os vetores tangente e normal ao contorno neste nó. Escrevendo os deslocamentos e as forças de superfícies neste sistema local tem-se

$$\begin{aligned} u'_i &= l_{ij}u_j \\ t'_i &= l_{ij}t_j \end{aligned} \tag{A.54}$$

onde l_{ij} são os cossenos diretores.

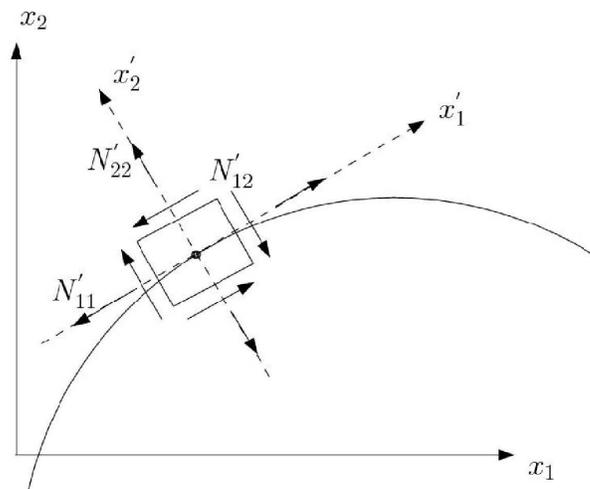


Figura A.3: Tensões no contorno.

No sistema local tem-se a seguinte relação

$$\begin{aligned} \sigma'_{22} &= t'_2 \\ \sigma'_{12} &= t'_1 \end{aligned} \tag{A.55}$$

A deformação ε'_{11} pode ser calculada, sabendo que

$$\begin{aligned}
\varepsilon'_{11} &= \frac{1}{2}(u'_{1,1} + u'_{1,1}) = u'_{1,1} \\
u'_{1,1} &= \frac{du'_1}{dx'_1} = \frac{du'_1}{d\xi} \frac{d\xi}{dx'_1}
\end{aligned} \tag{A.56}$$

Usando geometria diferencial na equação (A.56), pode-se notar que a direção local x'_1 é tangente ao comprimento infinitesimal de arco ds dado por

$$\begin{aligned}
ds &= \sqrt{dx'^2_1 + dx'^2_2} = \sqrt{\left(\frac{dx'_1}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dx'_2}{d\xi}\right)^2} d\xi \\
\frac{ds}{d\xi} &= J
\end{aligned} \tag{A.57}$$

Um pequeno movimento ao longo de s corresponde a um pequeno movimento em x'_1 . Isto permite com que x'_1 na equação (A.56) seja substituído pela equação (A.57), ou seja,

$$\begin{aligned}
\varepsilon'_{11} &= \frac{du'_1}{d\xi} \frac{d\xi}{ds} \\
\varepsilon'_{11} &= \frac{du'_1}{d\xi} J^{-1}
\end{aligned} \tag{A.58}$$

Sendo

$$\begin{aligned}
u_1 &= \sum_{i=1}^3 N^{(i)} u_1^{(i)} \\
\frac{du_1}{d\xi} &= \sum_{n=1}^3 \frac{dN^{(i)}}{d\xi} u_1^{(i)}
\end{aligned} \tag{A.59}$$

onde $N^{(i)}$ são as funções de forma. Pode-se então obter a deformação

$$\varepsilon'_{11} = \sum_{n=1}^3 \frac{dN^{(i)}}{d\xi} u_1^{(i)} J^{-1} \quad (\text{A.60})$$

Das relações tensão-deformação, para um estado geral de tensões, tem-se

$$\begin{pmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{33} \\ \sigma'_{12} \\ \sigma'_{13} \\ \sigma'_{23} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} B'_{11} & B'_{12} & B'_{13} & B'_{14} & B'_{15} & B'_{16} \\ B'_{21} & B'_{22} & B'_{23} & B'_{24} & B'_{25} & B'_{26} \\ B'_{31} & B'_{32} & B'_{33} & B'_{34} & B'_{35} & B'_{36} \\ B'_{41} & B'_{42} & B'_{43} & B'_{44} & B'_{45} & B'_{46} \\ B'_{51} & B'_{52} & B'_{53} & B'_{54} & B'_{55} & B'_{56} \\ B'_{61} & B'_{62} & B'_{63} & B'_{64} & B'_{65} & B'_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon'_{11} \\ \varepsilon'_{22} \\ \varepsilon'_{33} \\ \varepsilon'_{12} \\ \varepsilon'_{13} \\ \varepsilon'_{23} \end{pmatrix} \quad (\text{A.61})$$

onde B'_{ij} são as componentes da matriz de rigidez escritas no referencial local.

Na equação (A.61), para um estado plano de tensões, tem-se três incógnitas $\sigma'_{11}, \varepsilon'_{22}, \varepsilon'_{12}$, que agora podem então ser determinadas.

Por último, as densidades de força tem que ser escritas no referencial global x_1x_2 , ou seja

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \begin{pmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{12} \end{pmatrix} \quad (\text{A.62})$$

onde \mathbf{T} é a matriz de transformação de coordenadas.

APÊNDICE B Carga crítica de flambagem

B.1 Introdução

A carga crítica de flambagem é aquela na qual uma placa sofre deformações repentinas consideráveis. Ela pode ser obtida a partir da solução de um problema de valor de contorno, na forma da equação diferencial 3.21, sujeita às condições de contorno descritas na seção 3.3. A formulação integral deste problema não é um problema puramente de autovalor. Uma vez as integrais de domínio contém tensões no plano, essas não podem ser facilmente reduzidas a integrais de contorno. No entanto, a solução do problema de flambagem por elementos de contorno torna-se eficiente em função da precisão inerente do método. Além disso, a técnica do método da integração radial, usado para transformar as integrais de domínio em integrais de contorno sem necessidade de discretização do domínio, tem apresentado excelentes resultados, principalmente em problemas de estabilidade de placas anisotrópicas. Neste capítulo, contudo, apresentar-se-á uma solução de elementos de contorno direta com discretização do contorno e domínio. Um sistema de equações algébricas de problema de auto valor é resolvido e o valor mínimo do fator de carga λ_b , isto é, o fator de carga de flambagem, bem como o modo de flambagem correspondente (fundamental) serão obtidos.

B.2 Formulação integral de contorno

A equação de Navier descrita no Capítulo 3 será reescrita com as correspondentes condições de contorno:

$$D\nabla^4 w = \lambda_b L(N_{\alpha\beta}, w, \alpha\beta) \quad (\text{B.1})$$

onde

$$L(N_{\alpha\beta}, w, \alpha\beta) = N_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

N_{xx} , N_{xy} e N_{yy} são as correspondentes tensões de membrana relativas às trações no contorno T_n e T_s e λ_b é o fator de carga.

As seguintes condições de contorno devem ser satisfeitas:

B.2.1 Contorno completamente restrito

Na condição de extremidades fixas, tanto as translações laterais como as rotações em torno dos eixos paralelos às faces, ficam restritas. As condições de contornos, nesse caso, podem ser expressas como:

$$\begin{aligned} w &= 0; \\ \frac{\partial w}{\partial n} &= 0. \end{aligned} \tag{B.2}$$

B.2.2 Contorno simplesmente apoiado

Na condição de extremidades simplesmente apoiadas as translações laterais ficam restritas, mas pode haver rotações em torno dos eixos paralelos às faces. Nesse caso, pode haver momento de flexão em torno desses eixos. As condições de contornos, nesse caso, podem ser expressas como:

$$\begin{aligned} w &= 0; \\ \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} &= 0 \end{aligned} \tag{B.3}$$

B.2.3 Contorno livre

As condições de contorno de extremidades livres é representada pelas equações diferenciais:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} &= 0 \\ \frac{\partial^3 w}{\partial n^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial n \partial s^2} &= 0\end{aligned}\tag{B.4}$$

O termo $w_{,\alpha\beta}$ representa a derivada parcial de w em relação a β e α , simultaneamente.

A equação integral de contorno pode ser deduzida a partir das seguintes soluções fundamentais:

$$u_1(Q) = \frac{r^2}{8\pi} \ln r\tag{B.5}$$

$$u_2(Q) = \frac{r}{8\pi} (2 \ln r + 1) \cos \alpha\tag{B.6}$$

onde r é a distância entre o ponto fonte P e o ponto campo Q e α o ângulo entre o vetor r e uma direção arbitrária, usualmente tomada como a direção normal ao contorno no ponto P , conforme representado na figura B.1.

u_1 e u_2 possuem a seguinte propriedade;

$$\nabla^4 u = \delta_P\tag{B.7}$$

onde δ_P é a função delta de Dirac, definida como:

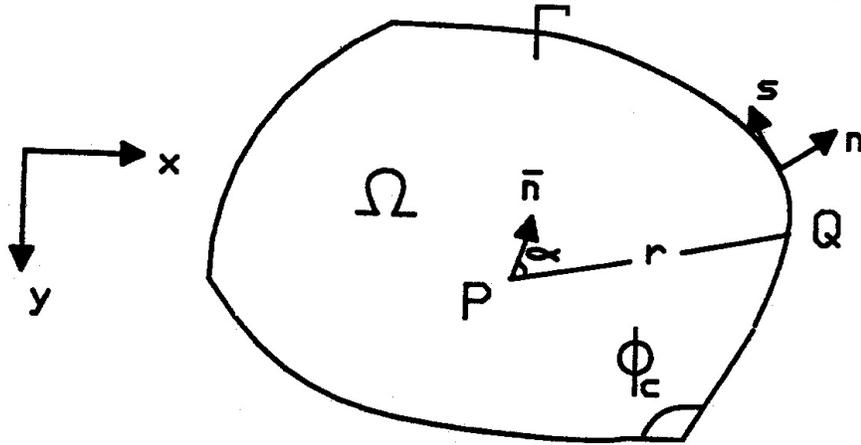


Figura B.1: Sistema de coordenadas curvilíneas no contorno da placa

$$\delta_P(Q) = \begin{cases} 0 & \text{se } P \neq Q \\ 1 & \text{se } P = Q \end{cases}$$

As soluções fundamentais u_1 e u_2 definidas na equação B.6, utilizadas na formulação do problema de tensões planas é dividida pela rigidez em flexão da placa e será usada aqui nesse capítulo novamente. Como foi definida, u_1 é proporcional a deflexão do ponto campo Q de uma placa infinita sujeita a flexão, devida a ação de uma força transversal unitária concentrada no ponto P e u_2 é proporcional a deflexão do ponto Q devido a um momento unitário no ponto P em torno do eixo que faz um ângulo α com a direção PQ , como representado na figura B.1 Timoshenko e Gere (1961).

Multiplicando a equação B.1 pela função por u (u_1 ou u_2) e integrando sobre o domínio Ω , tem-se:

$$\int_{\Omega} u D \nabla^4 w d\Omega = \lambda_b \int_{\Omega} u L(N_{\alpha\beta}, w_{,\alpha\beta}) d\Omega \quad (\text{B.8})$$

A identidade de Rayleigh-Green para placas, levando em conta as discontinuidades nos cantos da placa pode ser escrita como:

$$D \int_{\Omega} (u \nabla^4 w - w \nabla^4 u) d\Omega = \int_{\Gamma} \left[V_n(u)w - M_n(u) \frac{\partial u}{\partial n} M_n(w) - u \nabla n(w) \right] d\Gamma$$

$$+ \sum_{N_c}^{i=1} [w (M_{ns}|_{-}^{+}) - u (|M|_{ns}(w)|_{-}^{+})]$$

onde:

V_n : esforço cortante equivalente; M_n : momento fletor; M_{ns} : momento torçor; N_c : número de cantos; e, $f|_{-}^{+}$: descontinuidade dos cantos.

Combinando as equações B.9 e B.4, usando as propriedades da função delta de Dirac expressa na equação B.7, obtém-se:

$$cZ(w) + \lambda_b I_d = I_d + J_b \quad (\text{B.9})$$

onde:

$$I_d = \int_{\Omega} u L(N_{\alpha\beta}, w, \alpha\beta) d\Omega$$

$$I_b = \int_{\Gamma} \left[V_n(u)w - M_n(u) \frac{\partial u}{\partial n} M_n(w) - u \nabla n(w) \right] d\Gamma$$

$$J_b = \sum_{N_c}^{i=1} [w (M_{ns}|_{-}^{+}) - u (|M|_{ns}(w)|_{-}^{+})]$$

As definições de c e Z foram dadas na seção 3.2.

A integral de domínio I_d B.9 contém curvaturas $d^2w/d\alpha d\beta$ que são incógnitas na formulação. O trabalho de Syngellakis e Cherukunnath (2004) transformou a integral de domínio I_d em outra integral de domínio que contém deflexões desconhecidas ao invés de curvaturas, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
I_d &= \int_{\Omega} \left[w^* \frac{\partial}{\partial x} \left(N_{xx} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + w^* \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{yy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] d\Omega \\
&\quad - \int_{\Omega} w^* \left[\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \right] d\Omega \quad (\text{B.10})
\end{aligned}$$

A segunda integral do lado direito desaparece aplicando as equações de equilíbrio (3.14). A primeira integral pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
I_d &= \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[w^* \left(N_{xx} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[w^* \left(N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{yy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \right\} d\Omega \\
&\quad - \int_{\Omega} \left[\frac{\partial w^*}{\partial x} \left(N_{xx} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial w^*}{\partial y} \left(N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{yy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] d\Omega \quad (\text{B.11})
\end{aligned}$$

Ao aplicar a primeira identidade de Green, a primeira integral pode ser transformado em uma integral de contorno. A segunda integral pode ser reescrita como a soma de outras três integrais de domínio:

$$\begin{aligned}
I_d &= \int_{\Gamma} \left[w^* \left(N_{xx} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dx - w^* \left(N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{yy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dy \right] d\Gamma \\
&\quad - \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(N_{xx} \frac{\partial w^*}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial y} \right) w \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(N_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial x} + N_{yy} \frac{\partial w^*}{\partial y} \right) w \right] \right\} d\Omega \\
&\quad + \int_{\Omega} w \left[\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \right] d\Omega \\
&\quad + \int_{\Omega} w \left[N_{xx} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} + N_{yy} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right] d\Omega \quad (\text{B.12})
\end{aligned}$$

A primeira integral do lado direito da equação (B.12) é uma integral de contorno que pode ser expressa em termos de forças de superfície no contorno T_n e T_s . A segunda integral pode ser transformada em integral de contorno usando a primeira identidade de Green. Finalmente, a terceira integral desaparece por causa das equações de equilíbrio (3.14). Desta forma, I_d é finalmente

expressa como a soma de uma integral de contorno e outra de domínio, ou seja:

$$I_d = I_t + I_{dw} \quad (\text{B.13})$$

onde

$$I_t = \int_{\Gamma} \left[w^* \left(T_n \frac{\partial w}{\partial n} + T_s \frac{\partial w}{\partial s} \right) - w \left(T_n \frac{\partial w^*}{\partial n} + T_s \frac{\partial w^*}{\partial s} \right) \right] d\Gamma \quad (\text{B.14})$$

$$I_{dw} = \int_{\Omega} w \left[N_{xx} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} + N_{yy} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right] d\Omega \quad (\text{B.15})$$

A equação B.9 pode ser reescrita como:

$$cZ(w) + \lambda I_t + \lambda I_{dw} = I_d + J_b \quad (\text{B.16})$$

B.3 Problema de autovalor

O método da integração gaussiana será adotado para avaliar as integrais de contorno I_b e I_t e a integral de domínio I_{dw} , utilizando, respectivamente, N_{gb} e N_{gd} pontos de Gauss. As formas discretizadas das equações I_b e I_t e I_{dw} são:

$$I_b = \sum_{i=1}^{N_{be}} |J| \sum_{j=1}^{N_{gb}} (w_g)_j \left\{ [V_n(u)]_j \sum_{k=1}^{N_{ne}} \phi_k w_k - [M_n(u)]_j \sum_{k=1}^{N_{ne}} \phi_k \left[\frac{\partial w}{\partial n} \right]_k \right. \\ \left. + \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right]_j \sum_{k=1}^{N_{ne}} \phi_k [M_n(w)]_k - u_j \sum_{k=1}^{N_{ne}} \phi_k [V_n(w)]_k \right\}$$

$$I_t = \sum_{i=1}^{N_{be}} |J| \sum_{j=1}^{N_{gb}} (w_g)_j \left\{ - \left[T_n \frac{\partial u}{\partial n} + T_s \frac{\partial u}{\partial s} \right]_j \sum_{k=1}^{N_{ne}} \phi_k w_k \right. \\ \left. + [uT_n]_j \sum_{k=1}^{N_{ne}} \phi_k \left[\frac{\partial w}{\partial n} \right]_k + [uT_s]_j \sum_{k=1}^{N_{ne}} \frac{\partial \phi_k}{\partial s} w_k \right\} \quad (\text{B.17})$$

$$I_{dw} = \sum_{i=1}^{N_{be}} |J| \sum_{j=1}^{N_{gb}} \left((w_g)_j \left(N_{xx} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + N_{yy} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_j \sum_{k=1}^{N_{ne}} \phi_k w_k \right) \quad (\text{B.18})$$

A notação $[E]_j$ indica o valor de E no ponto de Gauss j e $(w_g)_j$ o peso correspondente. Nas integrais I_t e I_b , N_{ne} representa o número de nós por elemento no contorno, exceto para superfícies livres, onde w e $\frac{\partial w}{\partial n}$ são calculadas usando o modelo de domínio. Na integral I_{dw} , N_{ne} representa o número de nós no domínio. As singularidades ocorrem quando o ponto fonte está colocado dentro do elemento a ser integrado. Tais integrais são avaliadas analiticamente.

Se o ponto fonte é colocado nos nós do contorno, duas equações com u_1 e u_2 podem ser usadas para cada nó. Um sistema de N_{eb} equações é obtido, onde $N_{eb} = 4(N_{be} - N_{fe})$ para o caso de elemento de contorno linear descontínuo e, $N_{eb} = 2(N_{be} - N_{fe})$, no caso de elemento constante, onde N_{fe} é o número de elementos na superfície livre. O sistema de equações pode ser escrito como:

$$([B_5] + \lambda [B_6]) \{b_w\} = ([D_1] + \lambda [D_2]) \{w\} \quad (\text{B.19})$$

onde $\{b_w\}$ é um vetor que contém N_{eb} termos desconhecidos no contorno, tais como, $\frac{\partial w}{\partial n}$, $M_n(w)$ ou $V_n(w)$ e $\{w\}$ é um vetor que contém as deflexões do domínio para N_{dn} nós do domínio. O vetor $[B_5]$ de ordem $N_{eb} \times N_{eb}$ resulta da integral I_b e do termo $cZ(w)$, quando este não é zero. O vetor $[B_6]$ de ordem $N_{eb} \times N_{eb}$ resulta da integral I_t . Contudo, os termos de I_t e I_b que contém as variáveis w e $\frac{\partial w}{\partial n}$ sobre uma superfície livre, contribuem na formação da matriz $[D_1]$ e $[D_2]$ de ordem $N_{eb} \times N_{dn}$, em vez de $[B_1]$ e $[B_2]$, visto que essas duas variáveis são escritas em termos do

domínio. $[D_1]$ contém somente essas contribuições e é identicamente nula quando a placa não tem superfícies livres. $[D_2]$ contém as contribuições das integrais I_t e I_{dw} .

As equações B.19 representam um sistema de N_{eb} equações com $N_{eb} + N_{dn}$ incógnitas, além do parâmetro desconhecido λ . Esse sistema não pode ser resolvido sem que se estabeleça um número adicional de equações equivalentes a N_{dn} . Essas equações podem ser obtidas ao se colocar o ponto fonte P sobre os N_{dn} nós do domínio e escrevendo a equação B.16 com $u = u_1$. Assim, um outro sistema de N_{dn} equações é então obtido:

$$([B_7] + \lambda [B_8]) \{b_w\} = ([D_3] + \lambda [D_4]) \{w\} \quad (\text{B.20})$$

As matrizes $[B_7]$, $[B_8]$, $[D_3]$ e $[D_4]$ são obtidas da mesma forma que as matrizes $[B_5]$, $[B_6]$, $[D_1]$ e $[D_2]$, respectivamente, exceto o termo $cZ(w) = w_p$ que contribui para a matriz $[D_3]$ e não para a matriz $[B_7]$, em função do ponto fonte estar no domínio e não no contorno.

As equações B.19 e B.20 podem agora serem transformada em um problema de autovalor, com $N_{eb} \times N_{dn}$ equações com λ como incógnita:

$$[C] \{U\} = c \{U\} \quad (\text{B.21})$$

onde

$$c = \frac{1}{\lambda} \quad (\text{B.22})$$

$$\{U\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{b}_w \\ \mathbf{w} \end{array} \right\} \quad (\text{B.23})$$

$$[C] = [A]^{-1} [B]$$

$$[A] = \begin{bmatrix} [\mathbf{B}_5] & -[\mathbf{D}_1] \\ [\mathbf{B}_7] & -[\mathbf{H}_3] \end{bmatrix} \quad (\text{B.24})$$

$$[B] = \begin{bmatrix} -[\mathbf{B}_6] & [\mathbf{D}_2] \\ -[\mathbf{B}_8] & [\mathbf{D}_4] \end{bmatrix} \quad (\text{B.25})$$

O sistema de equações B.21 representa uma forma clássica de um problema de autovalor.

