

Este exemplar corresponde à Redação Final da Tese  
defendida por José Antonio Pereira e aprovada pela  
Comissão Julgadora em 26/06/84

Douglas F. Zanfoni

ANALISE TEÓRICO-EXPERIMENTAL DO COMPORTAMENTO

DINÂMICO DE ESTRUTURAS RETICULADAS

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Tese de: Mestrado

Título da Tese: ANÁLISE TEÓRICO-EXPERIMENTAL DO COMPORTAMENTO  
DINÂMICO DE ESTRUTURAS RETICULADAS

Autor: Eng. JOAO ANTONIO PEREIRA

Orientador: Dr. DOUGLAS EDUARDO ZAMPIERI .

Co-orientador: Dr. FERNANDO IGUTI

Aprovado por

Prof. Dr. Douglas Eduardo Zampieri (Presidente)

Prof. Dr. Fernando Iguti

Dr. Sérgio Sartori

Campinas, 26 de junho de 1987

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA MECANICA DE CAMPINAS

TÍTULO: ANÁLISE TEÓRICO-EXPERIMENTAL DO COMPORTAMENTO  
DINÂMICO DE ESTRUTURAS RETICULADAS

AUTOR: Eng. JOAO ANTONIO PEREIRA

ORIENTADORES: Dr. DOUGLAS EDUARDO ZAMPIERI  
Dr. FERNANDO IGUTI

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS -

FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS

ANALISE TEÓRICO-EXPERIMENTAL DO COMPORTAMENTO  
DINAMICO DE ESTRUTURAS RETICULADAS

Eng. JOAO ANTONIO PEREIRA

Trabalho apresentado como parte  
dos requisitos para obtenção do  
Título de Mestre em Engenharia  
Mecânica, pela Comissão de Pós-  
Graduação da Faculdade de Enge-  
nharia de Campinas.

-CAMPINAS-

1987

## AGRADECIMENTOS ...

- ... Aos orientadores  
Prof. Dr. DOUGLAS EDUARDO ZAMPIERI  
Prof. Dr. FERNANDO IGUTI  
que tiveram uma participação efetiva na  
realização deste trabalho, além do apoio e  
incentivo que sempre ofereceram;
- ... a FAPESP, pela assistência financeira;
- ... a JACTO S.A. na pessoa do Dr. SÉRGIO SARTO-  
RI, pelo auxílio e fornecimento da máquina  
para o teste experimental;
- ... aos professores  
JANITO, pelo auxílio computacional;  
RODMAR, pelo auxílio no teste experimental;
- ... aos amigos  
Dana, José Luiz, Kazumi, Luiz de Paula,  
Milton, Renato, Vicente ...
- ... a todas as pessoas do DEPARTAMENTO DE ENGE-  
NHARIA MECÂNICA - GEPRON, que direta ou in-  
diretamente contribuíram para a realização  
deste trabalho.

Aos meus pais JOJO e HELENA  
e minhas irmãs CLEIDE E SÍLVIA

## SIMBOLOGIA

Símbolo	Definição
A	Área.
[a], [b]	Matriz de interpolação a partir de valores nodais do elemento.
[E]	Matriz de estado.
$c_{ij}$	Coefficiente de amortecimento.
$c_j, \beta_j$	Razão de amortecimento.
[C]	Matriz de amortecimento.
$d_j, \Omega_j$	Frequência natural amortecida.
[e]	Vetor deformação unitária.
E	Módulo de elasticidade.
$F_E$	Vetor forças externas.
$F_D$	Vetor forças de amortecimento.
$F_I$	Vetor forças de inércia.
G	Módulo de elasticidade transversal.
[H]	Matriz de receptância do sistema.
$H(i\omega)$	Função de resposta em frequência (analítica).
$H_m(i\omega)$	Função de resposta em frequência (experimental).
i	Inteiro, imaginário.
$I_y, I_z$	Momentos de inércia.
J	Inteiro.
J	Constante torcional.
k	Inteiro.
$k_j$	Rigidez generalizada modal.

$k_{ij}$	Coeficiente de rigidez.
$\bar{k}_{ij}$	Coeficiente de rigidez no sistema de coordenadas global.
[K]	Matriz de rigidez do sistema.
I	Inteiro.
L	Comprimento.
$m_j$	Coeficiente de massa modal.
$m_{ij}$	Coeficiente de massa.
[M]	Matriz de massa do sistema.
n	Inteiro, número de graus de liberdade.
$P(t)$	Vetor forças aplicadas.
$R(t)$	Vetor posição.
s	Complexo conjugado.
t	Tempo.
T	Energia cinética.
U	Energia potencial.
v	Deslocamento generalizado.
V	Vetor deslocamento.
x, y, z	Coordenadas cartesianas.
$x_j$	Coordenada generalizada modal.
$X_T$	Auto vetor, modo próprio.
[Z]	Matriz de rigidez dinâmica do sistema.
$Y_0$	Constante.
Y	Vetor de estado.
$\omega$	Frequência de excitação.
$\omega_r$	Auto valor, frequência natural.
$\omega_n^*$	Frequência natural do sistema (experimental).
W	Função de ponderação.

$W_E$	Trabalho devido às forças externas.
$W_I$	Trabalho devido às forças internas.
$W_{NC}$	Trabalho devido às forças não conservativas.
$W_T$	Trabalho total.
$\alpha_r$	Constante.
$\bar{\psi}^j$	Auto vetor complexo conjugado.
$[\psi]$	Matriz de auto vetores associados aos auto valores $[\Lambda]$ .
$\phi_k^j$	k-ésimo elemento do modo j.
$\phi^j$	Vetor modal.
$[\Phi]$	Matriz modal.
$\epsilon$	Deformação.
$[\Lambda]$	Matriz de auto valores com parte imaginária positiva.
$\partial$	Operador diferencial.
$\rho$	Densidade específica do material.
$\theta$	Ângulo de fase, deflexão.
$\sigma$	Tensão.

**RESUMO**

Apresenta-se, neste trabalho, um estudo teórico-experimental do comportamento dinâmico de uma estrutura reticulada, parte integrante de um Implemento Agrícola. As matrizes de rigidez [K] e massa [M] da estrutura - Braço do Pulverizador Agrícola- são obtidas pelo Método dos Elementos Finitos, utilizando-se um "software" implementado em um microcomputador. A solução do problema de autovalores/autovetores (frequências naturais e modos próprios) é obtida pelo Método Iterativo da Potência. Além disso, os parâmetros modais (frequências naturais, modos próprios e fatores de amortecimento) da estrutura real são estimados, experimentalmente, através de um "software" de Análise Modal. Finalmente, uma comparação entre os resultados obtidos no modelamento teórico e no teste experimental é feita mostrando-se, que as aproximações usadas no modelamento são satisfatórias.

## ABSTRACT

A numerical-experimental investigation of the dynamic behavior of a frame is presented. The stiffness and mass matrices of the structure (Sprayer Booms) are obtained by means of the finite element method, using a software package implemented in a microcomputer. The solution of the eigenvalue/eigenvector problem is given by the power method. The modal parameters (natural frequencies, modes shapes and damping factor) of the real structure are obtained using a software for modal analysis. Results that were obtained in the theoretical modelling are compared with the experimental test showing that the approximations used in the modelling are suitable.

## INDICE

	PÁGINA
SIMBOLOGIA	I
RESUMO	IV
ABSTRACT	V
CAPÍTULO 1- INTRODUÇÃO .....	1
CAPÍTULO 2- PRINCÍPIOS DE ENERGIA EM MECÂNICA ESTRUTURAL ...	7
2.1- Classificação das Estruturas e seus carregamentos .....	7
2.2- Métodos de Discretização .....	8
2.2.1- Massa Concentrada .....	8
2.2.2- Deslocamento Generalizado .....	10
2.2.3- Método dos Elementos Finitos .....	10
2.3- Formulação da Equação do Movimento .....	12
2.3.1- Princípio de D'ALEMBERT .....	12
2.3.2- Princípio do Trabalho Virtual .....	13
2.3.3- Princípio de HAMILTON .....	14
2.3.4- Equação do Movimento de um Sistema Simples .....	15
2.4- Cálculo das Matrizes de Rigidez [K] e massa [M] de uma Estrutura .....	19
2.5- Solução da Equação do Movimento Livre .....	28
2.5.1- Método da Potência .....	28

CAPÍTULO	3- TÉCNICAS EXPERIMENTAIS .....	33
	3.1- Introdução .....	33
	3.2- Tipos de Domínios .....	34
	3.2.1- Domínio do Tempo .....	34
	3.2.2- Domínio da Frequência .....	34
	3.2.2.1- Introdução à Análise Modal .....	37
	3.3- Identificação dos Parâmetros Modais Estru- turais .....	45
	3.4- Parâmetros Modais e Funções de Resposta em Frequência .....	47
	3.5- Identificação dos Parâmetros Modais .....	60
CAPÍTULO	4- MODELAMENTO TEÓRICO E ENSAIO EXPERIMENTAL .....	63
	4.1- Modelo Teórico .....	63
	4.1.1- Modelamento Estrutural .....	65
	4.1.2- Discretização da Estrutura Real .....	66
	4.1.3- Modelo Melhorado .....	71
	4.2- Aspectos Práticos - Teste Experimental .....	74
	4.2.1- Sistema Básico de Medida da Mobilida- de Estrutural .....	75
	4.2.2- Utilização do Software para a Análise do Braço do Pulverizador .....	83
	4.3- Análise de Resultados .....	93
CAPÍTULO	5- CONCLUSÃO e PERSPECTIVAS .....	98
	 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	 100

APÉNDICES

Apéndice I .....	106
Apéndice II .....	111
Apéndice III .....	115

## 1 INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas as indústrias mecânicas tiveram e, ainda, continuam tendo um crescente avanço tecnológico, fazendo com que a qualidade e o desempenho de seus produtos, de forma geral, estejam constantemente sendo melhorados. Entre as várias causas deste avanço, pode-se citar como principais fatores os seguintes:

- A necessidade de se atuar com velocidades de operação mais altas, visando um rendimento melhor;

- A necessidade de se ter uma relação custo/benefício maior, fazendo com que as estruturas sejam mais leves e mais complexas;

- A concorrência direta entre empresas, que exige uma redução de custos sem comprometimento do produto final;

Para manter este avanço, tornou-se necessário, tanto na análise dos projetos já concebidos, como na confecção e/ou otimização de novos projetos, levar-se em conta o comportamento da estrutura mecânica nos casos em que existe solicitação dinâmica;

Com o advento dos computadores pessoais, ferramentas de cálculo de grande capacidade e custo relativamente baixo, métodos tradicionais utilizados na formulação de problemas dinâmicos, tais como o

MÉTODOS DOS ELEMENTOS FINITOS e ANÁLISE MODAL, começaram a ganhar maior popularidade. Pode-se afirmar que estes métodos de análise foram responsáveis, em grande parte, pelo avanço tecno-científico da indústria aeroespacial no tocante a análise de sistemas estruturais.

Hoje em dia é bastante comum que as divisões de pesquisa e desenvolvimento de firmas de porte médio dominem a técnica de análise estrutural pelos métodos acima citados. No Brasil, infelizmente, esta afirmação ainda exclui a área de projetos de máquinas agrícolas, que tem-se mostrado carente em recursos técnicos e humanos. Homem Melo /22/ mostra esta realidade em seu livro "Prioridade Agrícola: Sucesso ou Fracasso?", fazendo uma avaliação da produção agrícola no Brasil e demonstrando que a produção por habitante de alimentos básicos como arroz, feijão, milho, mandioca e batata, sofreu, no período de 1977 a 1984, redução acentuada por razões técnicas e políticas, apesar das grandes dimensões de terras ainda cultiváveis no país. Uma das formas de se aumentar esta produção de alimentos seria a aplicação de grandes investimentos no campo, incluindo-se aí as questões agrárias e a mecanização. Enquanto o problema agrário exige uma atitude política, a mecanização necessita que se tenha no país pessoal especializado em máquinas e implementos agrícolas tanto na indústria como nas instituições de pesquisa.

Do ponto de vista de desempenho de máquinas e implementos agrícolas, algumas tentativas nacionais podem ser aqui citadas, tais como os trabalhos de Segeren /30/, e Mejía /21/ que estudaram o comportamento dinâmico do torque na tomada de potência de um trator e a relação da força de corte e torque em lavouras de cana de açúcar, respectivamente. Ambos os trabalhos, foram desenvolvidos em atividades interdisciplinares entre a Faculdade de Engenharia Agrícola e o Labo-

ratório de Projetos Mecânicos do Departamento de Engenharia Mecânica da UNICAMP.

O estudo que se propõe aqui, entretanto, visa o comportamento dinâmico estrutural, na mesma linha dos trabalhos de Verdonck /36/ e Nation /24/ que estudaram o comportamento dinâmicos de aspergidores.

Neste trabalho apresenta-se, com o apoio da empresa JACTO S.A., um estudo dos problemas dinâmicos de pulverizadores do tipo: "Sprayer Booms". Estes pulverizadores têm, normalmente, uma viga ou estrutura reticulada, que será definida como braço do pulverizador, montada sobre uma suspensão articulada.

A figura 1.1 mostra o pulverizador "COLUMBIA" a ser analisado. Sendo um pulverizador de grande aceitação no mercado interno e externo, ele é constituído dos braços de pulverização, de uma carreta contendo um tanque com capacidade de 2 mil litros, montada diretamente em um eixo com duas rodas, e em operação é acoplada a um trator. Os braços de pulverização, estrutura reticulada, possuem 7,5 metros de envergadura cada e estão montados em uma suspensão que visa absorver parte das excitações transmitidas pelo terreno quando da operação do pulverizador em campo. Ao longo dos braços estão distribuídos os bicos de pulverização. O acionamento do pulverizador é feito através da tomada de potência (TDP) do trator usando-se um eixo cardã.

Como o pulverizador opera em diferentes tipos de solo, ele sofre diferentes níveis de excitação, que podem causar falhas em determinados componentes, como por exemplo: quebra por fadiga dos braços, que estão constantemente submetidos a esforços aleatórios. Outro problema é a deflexão sofrida pelos braços, que acarreta irregularidades na aplicação dos defensivos. A dosagem ideal dos defensivos, de uma maneira geral, possui uma faixa de variação muito estreita e a

aplicação concentrada ou diluída do mesmo afeta diretamente o bom rendimento das colheitas.

Estes problemas são razoavelmente difíceis de serem solucionados, pois os mesmos apresentam-se correlacionados com as características das forças de excitação. Propõe-se como primeiro passo para se estudar estes problemas a determinação das características dinâmicas próprias da estrutura: frequências naturais e modos próprios de vibrar.

Neste trabalho pretende-se não só obter experimentalmente os parâmetros da estrutura como também modelá-la matematicamente utilizando-se o método dos elementos finitos, método este surgido na década de cinquenta no campo da análise estrutural com os trabalhos clássicos de Argyris /01/ e Turner et alii /35/.

Já nos anos sessenta o modelamento por elementos finitos teve um grande crescimento com a introdução de novos elementos (viga, placas, cascas, sólidos, etc.) e, de uma maneira geral, o método foi refinado: discutiu-se quais os tipos de estruturas podiam ser modeladas, que tipos de elementos seriam convenientes no modelamento, como aproximar as várias condições de contorno, etc.. No entanto, as dificuldades com a entrada de dados e qualidade dos processadores, aliadas ao alto custo de processamento, limitavam a aplicação do método.

Nos anos setenta, o surgimento de novos elementos, aliados à melhoria dos algoritmos de solução, bem como a melhoria nos sistemas de pré e pós-processamento de dados, e o barateamento dos computadores conduziram à redução nos custos dos modelamentos por elementos finitos /03/. Desta forma, nestes últimos anos, este método foi amplamente difundido para a análise de sistemas contínuos já que ele proporciona uma boa aproximação dos sistemas reais, sendo conveniente à computação

digital, em função da sua versatilidade, rapidez e eficiência.

As características do sistema e a verificação do modelamento estrutural será feita, utilizando-se o método da Análise Modal, que começou a ganhar popularidade com o advento do "Tracking Filter" usado para a análise das funções de transferência e a implementação do algoritmo da transformada de Fourier rápida que permite medir a resposta em frequência em uma pequena fração de tempo.

O trabalho pretende mostrar o desenvolvimento teórico e experimental dos métodos a serem utilizados no modelamento do braço, aplicando-se a teoria apresentada.

No capítulo dois apresenta-se uma das técnicas do método dos elementos finitos calculando-se as matrizes de massa  $[M]_{EL}$  e rigidez  $[K]_{EL}$  de um elemento de viga, e posteriormente mostra-se como obter as matrizes de rigidez  $[K]$  e massa  $[M]$ , da estrutura completa. A solução do problema de autovalores/autovetores (frequências naturais e modos próprios de vibrar), utilizando-se o método iterativo da potência, também é discutida.

O capítulo três apresenta uma introdução da análise modal, analisando-se uma estrutura simples, viga livre-livre. A formulação detalhada da Análise Modal, inclusive os cuidados a serem tomados também são discutidos.

O modelamento do braço do pulverizador por elementos finitos e a análise modal da estrutura real são apresentados no capítulo quatro. Neste capítulo procede-se, ainda, uma discussão dos resultados em conjunto com um teste de varredura em frequência.

No capítulo cinco comenta-se o trabalho, apresentando-se algumas sugestões para a sua continuação.

Os apêndices I e II apresentam a formulação matemática usada

para o cálculo da Série/Transformada de Fourier, e alguns comentários do programa de Análise Modal, respectivamente. Finalmente no apêndice III mostra-se a listagem dos programas usados no modelamento por elementos finitos.

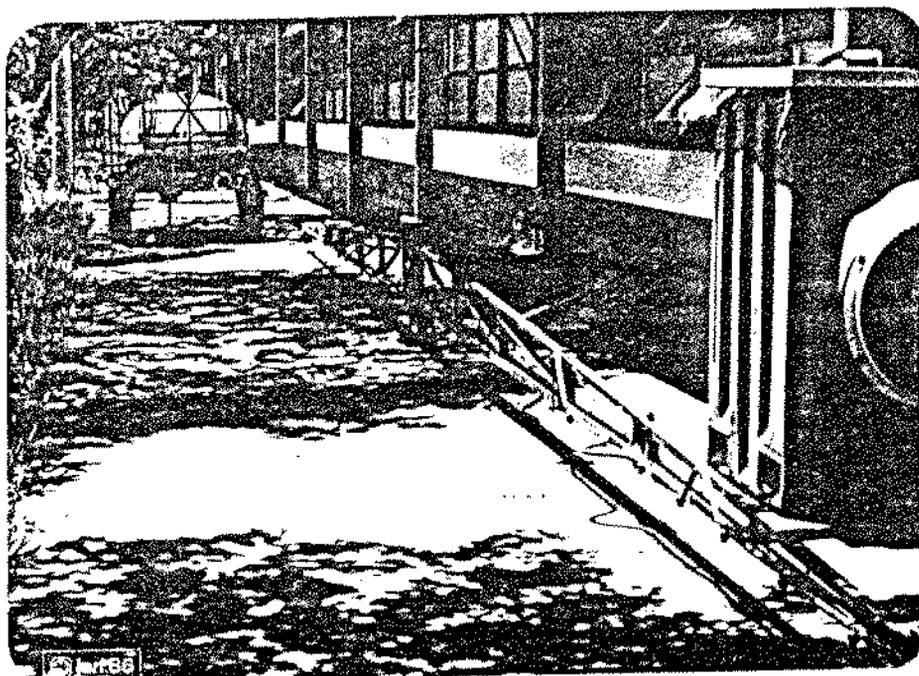


Figura 1.1: Pulverizador COLUMBIA

## 2 PRINCÍPIOS DE ENERGIA EM MECÂNICA ESTRUTURAL

### 2.1 CLASSIFICAÇÃO DAS ESTRUTURAS E SEUS CARREGAMENTOS

As estruturas em engenharia são classificadas a partir de vários critérios. Um destes critérios, talvez o mais comum, é baseado na configuração geométrica de seus elementos e no carregamento da estrutura. Elas podem ainda ser classificadas como lineares ou não lineares dependendo das equações que governam o comportamento destas serem lineares ou não /32/.

Os carregamentos, por sua vez, podem ser classificados como sendo espacialmente discretos ou distribuídos. Em alguns casos, quando a região de aplicação é pequena, o carregamento distribuído é aproximado por um carregamento discreto com boa precisão, só havendo uma pequena diferença nas proximidades do ponto de aplicação da carga.

Dependendo da variação no tempo dos carregamentos pode-se também classificá-los em:

Carregamentos estáticos;

Carregamentos dinâmicos.

Neste trabalho será dada uma maior ênfase aos chamados carre-

gamentos dinâmicos, uma vez que eles induzem vibrações na estrutura e a levam, normalmente, a um estado de tensões e deformações maiores do que os produzidos por um carregamento estático de mesma magnitude /05/.

Duas diferentes aproximações de carregamentos dinâmicos entre outras, podem ser feitas para a avaliação da resposta estrutural:

- considerar-se o carregamento como determinístico;
- considerar-se o carregamento não determinístico.

Os carregamentos determinísticos, que serão abordados neste trabalho, podem ser subdivididos em periódicos e não periódicos. Enquanto os carregamentos periódicos, originados por exemplo de: desbalanceamento mecânico ou magnético podem ser representados como a soma de uma série de componentes harmônicas (série de Fourier), os carregamentos não periódicos podem ser analisados pela transformada de Fourier.

## 2.2 MÉTODOS DE DISCRETIZAÇÃO

### 2.2.1 MASSA CONCENTRADA

Na análise dinâmica de uma estrutura as forças inerciais estão envolvidas diretamente na formulação da equação diferencial do movimento do sistema. No caso da estrutura mostrada na figura 2.1.a a massa está distribuída continuamente ao longo da viga. Desta forma, o deslocamento e suas derivadas devem ser definidos para cada ponto ao longo do eixo longitudinal para que se tenha completa informação sobre as forças inerciais que estão presentes na estrutura, ou seja: a análise deve ser feita em termos de uma equação diferencial parcial. Por outro lado a massa poderá ser concentrada em pontos discretos (figura

2.1.b) e isto simplifica o problema analítico, pois as forças de inércias,  $f_I$ 's, serão desenvolvidas apenas para estes pontos de massas, ou seja, os deslocamentos e as acelerações são definidos apenas para os pontos discretos.

Por exemplo, no sistema mostrado na figura 2.1.b, as massas concentradas estão limitadas a se moverem somente na direção vertical.

Então, o sistema possui 3 graus de liberdade. O número de graus de liberdade de uma estrutura é definido como sendo o menor número de componentes de deslocamentos generalizados linearmente independentes necessário para retratar todos os efeitos das forças agindo sobre uma estrutura. Desta forma, para o caso mais geral onde a estrutura reticulada é deformada no espaço, cada massa possui 6 graus de liberdade e o sistema da figura 2.1.b possui 18 graus de liberdade.

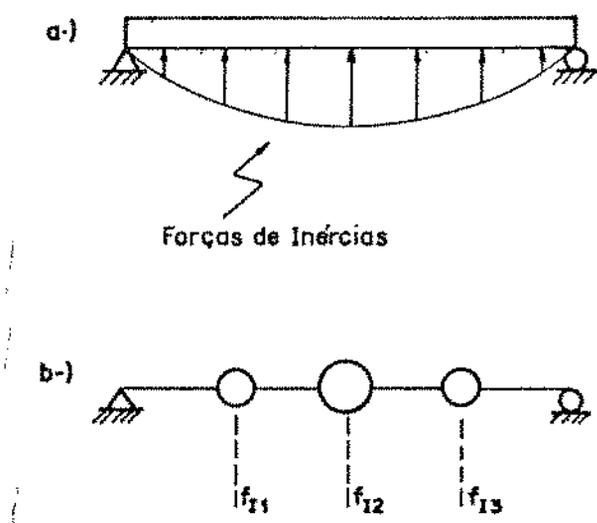


Figura 2.1: a) Viga contínua sob um carregamento dinâmico  
 b) Idealização de massa concentrada

A idealização por massa concentrada dá bons resultados quando a estrutura tem boa parte da massa concentrada em poucos pontos discretos /05/. Sua vantagem reside no fato da matriz da massa  $[M]$  da estrutura ser diagonal, o que acarreta grandes facilidades computacionais.

### 2.2.2 DESLOCAMENTO GENERALIZADO

Em estruturas com massa uniformemente distribuída a redução do número de graus de liberdade do sistema pode ser dada também pelo uso de coordenadas generalizadas. Este procedimento é baseado na suposição de que a deflexão da estrutura pode ser expressa como uma combinação linear de uma série de modos de deslocamentos específicos. Estes modos constituem um tipo específico de componentes de coordenadas generalizadas da estrutura. A formulação completa deste método é mostrada em /05/ e /32/.

### 2.2.3 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Este é um terceiro método usado para expressar os deslocamentos de uma dada estrutura em termos de um número finito de deslocamentos e/ou deflexões nodais.

O primeiro passo para a idealização de elementos finitos é subdividir em um número apropriado de elementos (de mesmo tamanho ou de tamanhos diferentes) a estrutura em análise, onde a conexão (real ou fictícia) entre os elementos é denominada ponto nodal, cujos deslocamentos constituem os deslocamentos nodais da estrutura.

A deflexão completa da estrutura pode ser, então, expressa em função destes deslocamentos e/ou deflexões nodais por meio de um conjunto de funções apropriadas, as chamadas funções de interpolação,

que, em princípio, podem ser quaisquer funções que não causem descontinuidade entre os elementos vizinhos, e satisfaçam as condições de movimento de corpo livre do elemento, imposto pelos deslocamentos nodais correspondentes. A figura 2.2 mostra um exemplo típico, para elementos unidimensionais, da aproximação de elementos finitos onde são mostrados as funções de interpolação associadas com os 2 graus de liberdade do ponto nodal 3. Uma análise mais detalhada do exemplo é mostrada em /05/.

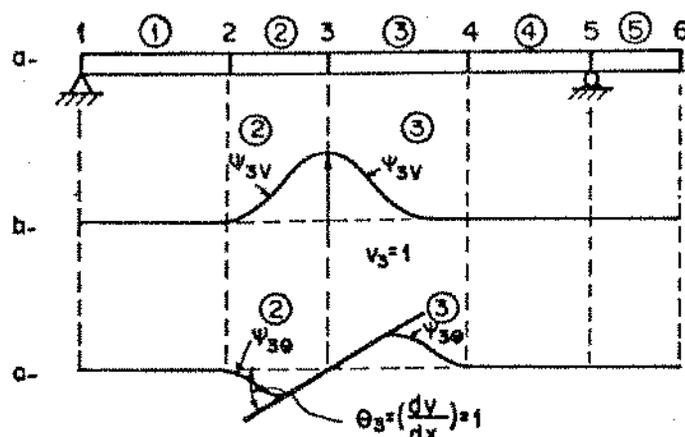


Figura 2.2: a) Elementos discretizados

- b) Deformação associada a um deslocamento nodal
- c) Deformação associada a uma deflexão nodal

A utilização de deslocamentos generalizados em elementos finitos apresenta algumas vantagens:

- O número de deslocamentos nodais desejado é obtido dividindo-se a estrutura em um número de elementos conveniente;

- A função de interpolação escolhida normalmente é a mesma para cada elemento, o que facilita a computação.

Em geral, a aproximação por elementos finitos caracteriza-se por ser um procedimento bastante eficiente para expressar os deslocamentos de qualquer ponto de uma estrutura arbitrária por meio de um conjunto finito de deslocamentos generalizados nodais.

## 2.3 FORMULAÇÃO DA EQUAÇÃO DO MOVIMENTO

Um dos objetivos da análise dinâmica estrutural é a avaliação dos deslocamentos generalizados no domínio do tempo de uma dada estrutura sob os efeitos de um carregamento dinâmico. Em alguns casos, uma análise aproximada envolvendo apenas alguns graus de liberdade é suficientemente precisa para problemas de engenharia. Desta forma, o problema reduz-se à determinação dessas componentes selecionadas de deslocamento.

Embora a equação do movimento de um sistema dinâmico possa, em princípio, ser formulada de várias maneiras para um mesmo problema, existe uma formulação mais conveniente para cada classe de problema.

### 2.3.1 PRINCÍPIO DE D'ALEMBERT

A equação do movimento de um sistema dinâmico é dada pela expressão da segunda lei de Newton :

$$P(t) = d/dt ( [M] \dot{R}(t) ) \quad [2.1.a]$$

onde  $P(t)$  é o vetor resultante das forças aplicadas e  $R(t)$  é o vetor posição da massa  $[M]$ . Para uma vasta classe de problemas, a massa

[M] não varia com o tempo e a equação (2.1.a) é escrita como

$$P(t) = [M] \ddot{R}(t), \quad [2.1.b]$$

onde (.) significa diferenciação com relação ao tempo. A equação (2.1.b) pode ser escrita, ainda, como

$$P(t) - [M] \ddot{R}(t) = 0 \quad [2.1.c]$$

que assume um somatório de forças nulo, se o segundo termo do lado esquerdo da equação 2.1.c é tratado como força. Esta força fictícia é conhecida como força de inércia, e permite estabelecer um estado artificial de equilíbrio. Este estado de equilíbrio que possibilita o tratamento de um problema dinâmico como um problema estático é conhecido como o princípio de D'Alembert que é resumido por Fonseca /13/ como: "O sistema formado pela reunião das forças de inércias e das forças exteriores realizam equilíbrio a cada instante". Este princípio é usado principalmente na formulação da equação do movimento de problemas simples, e sua principal vantagem é tratar o sistema como em equilíbrio estático.

### 2.3.2 PRINCÍPIO DO TRABALHO VIRTUAL

Este método é usado para a formulação da equação de movimento de estruturas complexas, onde o equilíbrio de todas as forças atuando sobre o sistema pode ser difícil de ser expresso matematicamente. O princípio do trabalho virtual pode ser resumido como: "Se um sistema em equilíbrio, sob ação de um conjunto de forças, é submetido a um deslocamento virtual, isto é, algum deslocamento,  $\delta V$ , compatível com

as restrições do sistema, o trabalho total,  $W_T$ , produzido pelas forças,  $F$ , é nulo”:

$$W_T = F \cdot \delta V = 0 \quad [2.2]$$

A maior vantagem do uso desta formulação é que as contribuições do trabalho virtual produzidas pelo deslocamento virtual de cada grau de liberdade são quantidades escalares, as quais são somadas algebricamente.

### 2.3.3 PRINCÍPIO DE HAMILTON

Este princípio é usado principalmente na formulação da equação do movimento de estruturas complexas e, como no princípio do trabalho virtual as dificuldades em se expressar o equilíbrio direto das forças atuantes (quantidades vetoriais) são evitadas utilizando as variações das quantidades escalares, quer sejam energia cinética e potencial. O princípio de Hamilton, é um dos princípios variacionais mais usados e pode ser expresso como: "A variação da energia cinética ( $T$ ) e potencial ( $U$ ) somadas à variação do trabalho ( $W_{nc}$ ) produzido pelas forças não conservativas durante um intervalo de tempo  $t_1$  a  $t_2$  é nulo”.

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - U) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0 \quad [2.3]$$

O princípio de Hamilton também pode ser usado para a formulação de problemas estáticos. Neste caso a energia cinética é nula e a

equação (2.3) reduz-se à,

$$\delta (U - W_{nc}) = 0 \quad [2.4]$$

que é o princípio da mínima energia potencial, amplamente usado em análise estática.

#### 2.3.4 EQUAÇÃO DO MOVIMENTO DE UM SISTEMA SIMPLES

Algumas estruturas podem ser representadas como um sistema de um grau de liberdade onde cada uma das grandezas físicas, assim como as forças externas, são assumidas concentradas em um simples elemento. Se as propriedades do sistema são tais que o movimento pode ser representado por uma única coordenada, muitas vezes é possível obter uma solução exata da equação do movimento desta estrutura. No entanto, se a estrutura possui mais de um grau de liberdade e esta é aproximada para um sistema com um único grau, a solução da equação do movimento será apenas uma aproximação do verdadeiro comportamento dinâmico da estrutura. A qualidade desta aproximação depende de alguns fatores, tais como: geometria do sistema, variação no tempo do carregamento, propriedades de rigidez, massa e outros. A grande desvantagem desta aproximação está na dificuldade de se avaliar a exatidão dos resultados obtidos.

Na maioria dos sistemas, a resposta dinâmica não pode ser obtidas por um modelo simples de um grau de liberdade e o comportamento do sistema deve ser representado em termos de mais de uma componente de deslocamento. A título de ilustração, é feito o desenvolvimento da equação do movimento para um sistema de vários graus de liberdade, quer seja, a viga mostrada na figura 2.3.

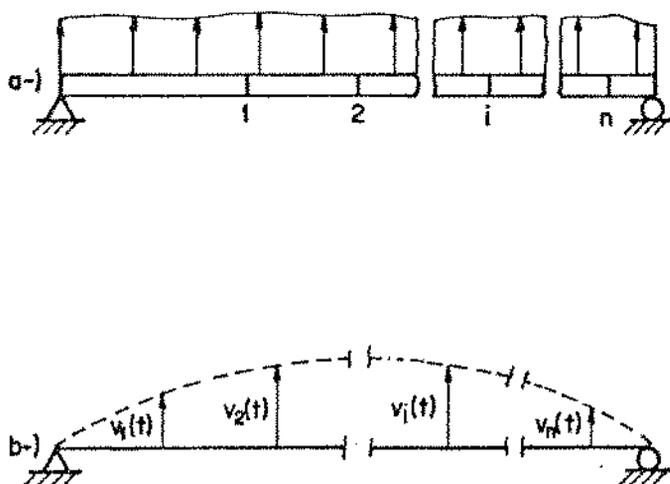


Figura 2.3: a) Discretização da viga

b) Conjunto de componentes de deslocamento

O movimento da estrutura é assumido como definido pelos deslocamentos do conjunto de pontos discretos sob a viga:  $v_1(t)$ ,  $v_2(t)$ , ...,  $v_n(t)$ . Em princípio, estes pontos podem ser localizados arbitrariamente na estrutura; na prática, eles devem ser associados com algumas características físicas ou geométricas para se ter uma boa definição da forma da deflexão. Quanto maior o número de pontos discretos assumidos melhor é a aproximação do verdadeiro comportamento dinâmico da estrutura. Em alguns casos, excelentes resultados são obtidos com dois ou três graus de liberdade apenas.

Por simplicidade a viga da figura 2.3 mostra apenas uma componente de deslocamento associada com cada ponto nodal da viga, porém,

deve-se notar que outras componentes podem ser associadas com cada ponto, como por exemplo, a rotação  $\partial v / \partial x$ .

A equação do movimento do sistema da figura 2.3 é formulada expressando-se o equilíbrio das forças efetivas associadas com cada grau de liberdade. Em geral quatro tipos de forças estão envolvidas no equilíbrio: o carregamento externo  $P(t)$ , as forças elásticas  $F_E$ , as forças inerciais  $F_I$  e as forças dissipativas (amortecimento)  $F_D$ . Para cada um dos vários graus de liberdade, o equilíbrio dinâmico pode ser expresso por:

$$\begin{aligned} f_{1I} + f_{1D} + f_{1E} &= p_1(t), \\ \cdot & \quad \quad \quad \cdot \\ \cdot & \quad \quad \quad \cdot \\ \cdot & \quad \quad \quad \cdot \\ f_{nI} + f_{nD} + f_{nE} &= p_n(t), \end{aligned}$$

Em forma matricial

$$F_I + F_D + F_E = P(t). \quad [2.5]$$

Cada força associada ao movimento é expressa de maneira conveniente em termos de um coeficiente de influência apropriado. Considere-se o ponto  $i$ , as componentes da força elástica atuando neste ponto da estrutura dependem geralmente do deslocamento de todos pontos da estru-

tura. Desta forma:

$$f_{iE} = k_{i1}v_1 + k_{i2}v_2 + \dots + k_{in}v_n,$$

onde  $n$  é o número de graus de liberdade da estrutura. Os coeficientes  $k_{ij}$  são os coeficientes de influência de rigidez definidos como:

$k_{ij}$  = força correspondente à coordenada  $i$  devido um deslocamento unitário na coordenada  $j$ , quando os demais deslocamentos são nulos (vide /29/).

Em forma matricial, a relação das forças elásticas é definida por:

$$F_E = [K] V, \quad [2.6]$$

na qual a matriz dos coeficientes  $[K]$  de ordem  $n \times n$ , é a matriz de rigidez da estrutura e  $V$  é um vetor dos deslocamentos da estrutura.

De maneira semelhante, assumindo-se um tipo de amortecimento viscoso define-se os coeficientes de amortecimento  $c_{ij}$ . Quanto as forças inerciais, estas também são expressas por um coeficiente, o coeficiente de massa  $m_{ij}$  que estabelece a relação entre a aceleração das coordenadas de deslocamento e as forças de inércia resultantes. Desta forma, a equação do movimento, para um sistema com muitos graus de liberdade na forma matricial, pode ser expressa por:

$$[M] \ddot{V} + [C] \dot{V} + [K] V = P(t). \quad [2.7]$$

## 2.4 CALCULO DAS MATRIZES DE RIGIDEZ [K] E MASSA [M] DE UMA ESTRUTURA

Considerando-se que o objetivo deste trabalho é determinar o comportamento dinâmico de estruturas reticuladas, o tipo de elemento mais conveniente para esta classe de estrutura é o elemento de viga.

Desta forma, as matrizes de rigidez [K] e massa [M] são inicialmente determinadas para um elemento de viga sujeito a um carregamento qualquer, cujo esquema, é mostrado na figura 2.4.

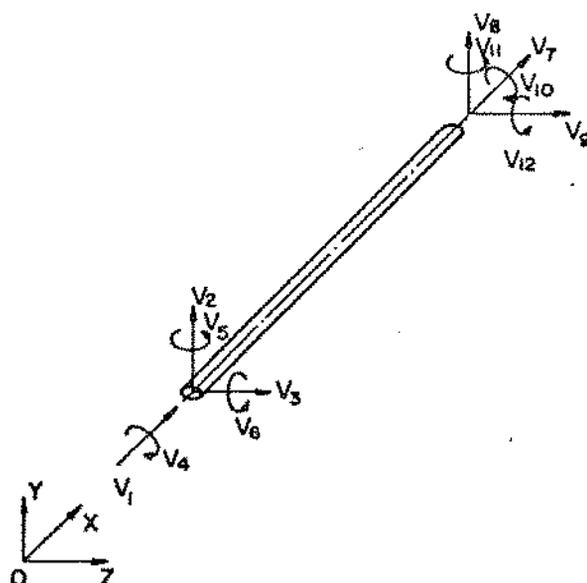


Figura 2.4: Elemento de viga

Em princípio, os coeficientes de rigidez associados aos deslocamentos nodais podem ser obtidos pela aplicação direta da definição. A matriz de rigidez da viga, figura 2.4, é de ordem  $12 \times 12$ . Se a direção dos eixos escolhidos coincide com os eixos principais da seção

transversal da viga, a matriz de rigidez pode ser subdividida em submatrizes de ordem  $2 \times 2$  e  $4 \times 4$ . Desde que os planos fletores  $xy$  e  $xz$  são coincidentes com os eixos principais da seção da viga e, o eixo  $Ox$  coincide com o centróide da mesma, todos os esforços atuando sobre ela podem ser divididos em grupos (esforços fletores, torçores e axiais) que poderão ser analisados independentemente.

A figura 2.5 mostra uma situação particular da viga da figura 2.4 sob solicitação de esforços de flexão apenas e a função deslocamento  $\psi(x)$ . Para vigas sob esforços de flexão, a função de interpolação  $\psi(x)$  deve ser de classe  $C^1$  no mínimo /05/, caso contrário não é possível a formulação clássica por elementos finitos pois a mesma não satisfaria todas as condições de contorno essenciais. O polinômio de Hermite do 3º grau, usado para o caso em análise, satisfaz estas condições /05/, que neste exemplo assume a seguinte forma:

$$\psi_1(x) = 1 - 3(x/L)^2 + 2(x/L)^3,$$

$$\psi_2(x) = x(1 - x/L)^2,$$

$$\psi_3(x) = 3(x/L)^2 - 2(x/L)^3,$$

$$\psi_4(x) = x^2/L(x/L - 1).$$

O deslocamento da viga, figura 2.5 pode, então, ser dado em termos das funções de interpolação:

$$V(x) = \psi_1(x) V_1 + \psi_2(x) V_2 + \dots + \psi_4(x) V_4, \quad [2.8]$$

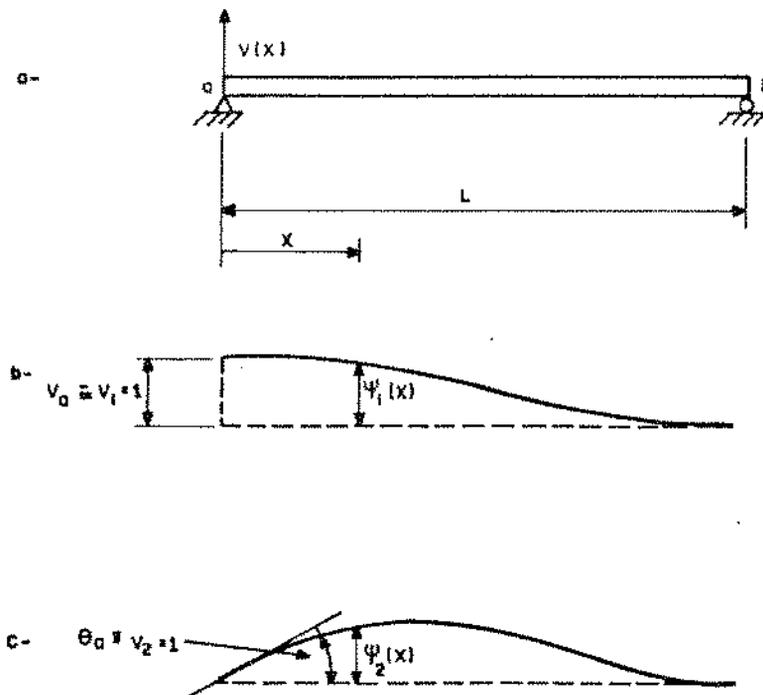


Figura 2.5 : a) Viga sob esforços de flexão

b) Deslocamento devido a um carregamento unitário

c) Deflexão devido a um carregamento unitário

onde os graus de liberdade mostrados são relacionados como segue:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_a \\ \theta_a \\ v_b \\ \theta_b \end{bmatrix}$$

Os coeficientes de rigidez  $k_{ij}$  do elemento podem ser obtidos através do princípio do trabalho virtual. Aplicando-se um deslocamento virtual na extremidade  $a$  do elemento, como mostrado na figura 2.6, e igualando-se o trabalho  $W_E$  produzido pelas forças externas ao trabalho  $W_I$  produzido pelas forças internas tem-se:

$$\delta W_E = \delta W_I, \quad [2.9]$$

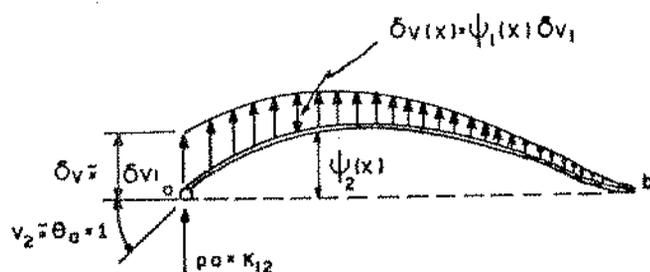


Figura 2.6: Viga sob deslocamento de rotação real e translação virtual

Enquanto o trabalho externo é dado por:

$$\delta W_E = p_a \delta v_a = k_{12} \delta v_1, \quad [2.10]$$

pois  $\delta W_E$  é produzido apenas pelas componentes da força  $p_a$ , já que os deslocamentos virtuais para todas outras componentes nodais são nulos; o trabalho interno,  $\delta W_I$ , é dado pelas deformações virtuais correspondentes aos deslocamentos virtuais sofridos pela viga da figura 2.6, ou seja:

$$\delta W_I = \int_V \sigma \delta \epsilon dV = \int_V (M/I) y \delta(\sigma/E) dV,$$

$$\delta W_I = \int_V (EI/I) \partial^2 / \partial x^2 (v) y \delta(My/EI) dV,$$

$$\delta W_I = E \int_0^L I(x) \psi_2''(x) \psi_1''(x) dx \delta v_1. \quad [2.111]$$

Da equação (2.9) tem-se:

$$K_{12} = E \int_0^L I(x) \psi_1''(x) \psi_2''(x) dx. \quad [2.12]$$

Para a viga em análise,

$$K_{12} = EI \int_0^L (12x/L^3 - 6/L^2)(6x^2/L^2 - 4/L) dx = 6EI/L.$$

Pela análise da equação (2.12) conclui-se que a mesma pode ser generalizada para

$$k_{ij} = \int_0^L E I(x) \psi_i''(x) \psi_j''(x) dx. \quad (i, j=1, 2, \dots, 4) \quad [2.13]$$

Substituindo-se  $\psi_i(x)$ 's e resolvendo-se a integral da equação (2.13), determinam-se todos os coeficientes de rigidez da viga mostrada na figura 2.6 sob flexão (desprezando-se os efeitos da força cortante):

$$[K]_{f_1} = \frac{E I_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & & & \\ 6L & 4L^2 & & \text{sim} \\ -12 & -6L & 12 & \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Os coeficientes de rigidez para os esforços de flexão no plano xz são obtidos por formulação idêntica, ou seja:

$$[K]_{f_2} = \frac{E I_y}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & & & \\ -6L & 4L^2 & & \text{sim} \\ -12 & 6L & 12 & \\ -6L & 2L^2 & 6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Por uma formulação semelhante à desenvolvida anteriormente, determinam-se as expressões para avaliação dos coeficientes de rigidez para esforços de tração/compressão e torção, equações (2.14) e (2.15), respectivamente,

$$K_{T/C} = \int_0^L A(x) E \psi_1'(x) \psi_j'(x) dx, \quad [2.14]$$

$$K_T = \int_0^L J(x) G \psi_1'(x) \psi_j'(x) dx. \quad [2.15]$$

As funções  $\psi(x)$ 's pertinentes as expressões (2.14) e (2.15) são de primeira ordem. Desta forma, as funções de interpolação podem ser de classe  $C^0$ :

$$\psi_1(x) = 1 - x/L,$$

$$\psi_2(x) = x/L.$$



as verdadeiras. No entanto, para análise dinâmica, usando-se as mesmas funções de interpolação, determinam-se apenas valores aproximados dos coeficientes de rigidez, muito embora os resultados para a viga completa sejam muito bons, quando a mesma é dividida em um número suficiente de elementos.

Após os coeficientes de rigidez dos elementos da estrutura terem sido avaliados em um sistema de coordenadas coincidentes com os eixos principais dos elementos (sistema de coordenadas local), estes são transformados para um sistema de coordenadas global; já que as rigidezes dos elementos estruturais devem ser expressas em um sistema de coordenadas comum a toda a estrutura. Após a transformação de coordenadas, a rigidez da estrutura completa é obtida superpondo-se os coeficientes de rigidez de cada elemento convenientemente. Por exemplo:

- Uma estrutura qualquer é dividida em  $n$  elementos e os elementos  $j$ ,  $k$ , e  $l$  estão conectados no mesmo nó  $i$  da estrutura. A rigidez da mesma, naquele ponto, é dada somando-se a rigidez de cada elemento naquele ponto:

$$K_{ii}(\text{estrutura}) = \bar{K}_{ii}(\text{el. } j) + \bar{K}_{ii}(\text{el. } k) + \bar{K}_{ii}(\text{el. } l). \quad [2.16]$$

A barra sobre o símbolo de rigidez de cada elemento, expressão (2.16), indica que eles foram transformados do sistema de coordenadas local para o sistema de coordenadas global.

Os coeficientes de massa são avaliados por uma formulação semelhante à usada na avaliação dos coeficientes de rigidez onde os polinômios de interpolação são os mesmos usados na determinação dos coeficientes de rigidez /29/. A matriz dos coeficientes de massa do elemento de viga da figura 2.4 é dada por:



## 2.5 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DO MOVIMENTO LIVRE

A equação do movimento livre sem amortecimento é dada por

$$[M] \ddot{V} + [K] V = 0 \quad [2.17]$$

A solução desta equação pode ser obtida admitindo-se uma solução harmônica, o que leva a um problema algébrico, explícito de autovalores e autovetores, cuja solução pode ser obtida pelo método iterativo da potência, método de Jacobi, etc., onde os autovalores representam as frequências naturais e os autovetores os modos próprios de vibrar da estrutura /02/, /20/.

Os métodos iterativos da potência direto e inverso são muito usados na solução de problemas de vibração quando existe interesse apenas nas frequências e modos mais baixos ou mais altos. Quando todos os modos são desejados, outros métodos são mais aconselhados pois os mesmos normalmente requerem um número menor de operações aritméticas /34/. Em contrapartida, o processo iterativo tem uma boa convergência se as frequências não estão próximas umas das outras, e é de fácil implementação computacional.

### 2.5.1 MÉTODO DA POTÊNCIA

A solução da equação (2.17) corresponde à solução de um problema de autovalores/autovetores. Desta forma, um autovalor  $\omega_r$ , ( $r=1,2, \dots, n$ ) associado ao autovetor  $X_r$  do sistema satisfaz a mesma:

$$[K] X_r = \omega_r^2 [M] X_r. \quad [2.18]$$

Os autovalores  $\omega_r$  são ordenados de forma que

$$|\omega_r| < |\omega_{r+1}|$$

Sendo  $[K]$  e  $[M]$  reais e simétricas prova-se que os autovalores e os autovetores são reais e que os autovetores são linearmente independentes /20/, se  $[K]$  e/ou  $[M]$  forem positivo-definidas. Desta forma, é possível definir um vetor  $V_0$  do espaço vetorial  $V$  que seja uma combinação linear dos autovetores  $X_r$ .

$$V_0 = \sum_{r=1}^n \alpha_r X_r \quad [2.19]$$

A solução da equação (2.17) é dada, então, por:

- arbitra-se um vetor  $V_0$  a direita da equação e determina-se um vetor  $V_1$  a esquerda. O vetor  $V_1$  é normalizado e substituído a direita da equação e determina-se um vetor  $V_2$  a esquerda da mesma, e assim sucessivamente

$$[K] V_1 = [M] V_0,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$[K] V_{p+1} = [M] V_p.$$

Quando  $p$  tende a infinito  $V_p$  tende ao primeiro modo próprio  $X_1$ , e  $\omega_1$  à primeira frequência natural do sistema. Isto pode ser demonstrado co-

no segue:

-Seja a p-ésima iteração da equação (2.17):

$$[K] V_{p+1} = [M] V_p .$$

Expressando  $V_p$  em função de  $V_0$  :

$$[K] V_1 = [M] V_0 ,$$

$$[K] V_1 = [M] ( \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_n X_n ) ,$$

$$[K] V_1 = \alpha_1 [M] X_1 + \alpha_2 [M] X_2 + \dots + \alpha_n [M] X_n ,$$

$$V_1 = \alpha_1 [K]^{-1} [M] X_1 + \dots + \alpha_n [K]^{-1} [M] X_n ,$$

$$V_1 = ( \alpha_1 / \omega_1^2 ) X_1 + \dots + ( \alpha_n / \omega_n^2 ) X_n .$$

$$[K] V_2 = [M] V_1 ,$$

$$[K] V_2 = [M] ( ( \alpha_1 / \omega_1^2 ) X_1 + ( \alpha_2 / \omega_2^2 ) X_2 + \dots + ( \alpha_n / \omega_n^2 ) X_n ) ,$$

.

.

.

$$V_p = ( \alpha_1 / \omega_1^{2p} ) X_1 + ( \alpha_2 / \omega_2^{2p} ) X_2 + \dots + ( \alpha_n / \omega_n^{2p} ) X_n .$$

Generalizando-se :

$$V_p = \sum_{r=1}^n \frac{\alpha_r}{\omega_r^{2p}} X_r \quad [2.20]$$

Fatorando-se a equação (2.20) tem-se:

$$V_p = (1/\omega_1^{2p}) (\alpha_1 X_1 + \sum_{r=2}^n (\omega_1/\omega_r)^{2p} \alpha_r X_r).$$

Para  $\alpha_1 \neq 0$  e  $p$  suficientemente grande

$$V_p = (1/\omega_1^{2p}) (\alpha_1 X_1 + \epsilon),$$

onde  $\epsilon$  é um vetor que tende ao vetor nulo no limite ( $p \rightarrow \infty$ ), ou seja:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} V_p = (1/\omega_1^{2p}) \alpha_1 X_1. \quad [2.21]$$

Desta forma, a  $p$ -ésima iteração fornece o primeiro autovetor associado ao primeiro autovalor  $\omega_1^2$ . A equação vetorial (2.21) é satisfeita para todas componentes do vetor  $X_1$ . Para o  $i$ -ésimo elemento

tem-se:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} v_{p,i} = (1/\omega_1^{2p}) \alpha_1 x_{1,i}, \quad [2.22]$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} v_{p+1,i} = (1/\omega_1^{2(p+1)}) \alpha_1 x_{1,i}. \quad [2.23]$$

Dividindo-se a expressão (2.22) por (2.23) chega-se ao valor da primeira frequência:

$$\omega_1^2 = \lim_{p \rightarrow \infty} v_{p,i} / v_{p+1,i}.$$

A velocidade de convergência deste método depende basicamente de dois parâmetros:

1 - Quanto maior a magnitude do autovalor dominante com relação ao primeiro autovalor subdominante mais rápida é a convergência;

2 - Quanto maior a magnitude de  $\alpha_1$  com relação a  $\alpha_r$  mais rápida é a convergência.

O cálculo do segundo modo é obtido subtraindo-se do vetor combinação linear dos modos a percentagem do primeiro modo. Isto é feito usando a propriedade de ortogonalidade existente entre os modos /20/.

## 3 TÉCNICAS EXPERIMENTAIS

### 3.1 INTRODUÇÃO

Na análise experimental do comportamento dinâmico de estruturas mecânicas, costuma-se, na grande maioria dos problemas, medir as variáveis de interesse dos sistemas na forma de sinais elétricos e analisá-los como tais. A conversão das variáveis em sinais elétricos é feita através de transdutores. Dentro da área de vibração os mais utilizados são: acelerômetros, células de carga, vibrômetros, sensores de deslocamento.

Uma das vantagens de se transformar as variáveis físicas em sinais elétricos está no fato de alguns instrumentos conseguirem avaliar os sinais elétricos com melhor propriedade. Estes sinais podem ser considerados no domínio do tempo, ou no domínio da frequência, já que estes dois domínios são matematicamente intercambiáveis entre si, e a mudança de um domínio para o outro muitas vezes torna a solução difícil de um problema no domínio do tempo, uma solução muito simples no domínio da frequência.

## 3.2 TIPOS DE DOMÍNIO

### 3.2.1 DOMÍNIO DO TEMPO

O domínio do tempo pode ser definido como o registro da variação de algumas variáveis do sistema real com relação ao tempo. Por exemplo, seja o sinal de excitação de um sistema composto por uma soma de senos, conforme figura 3.1:

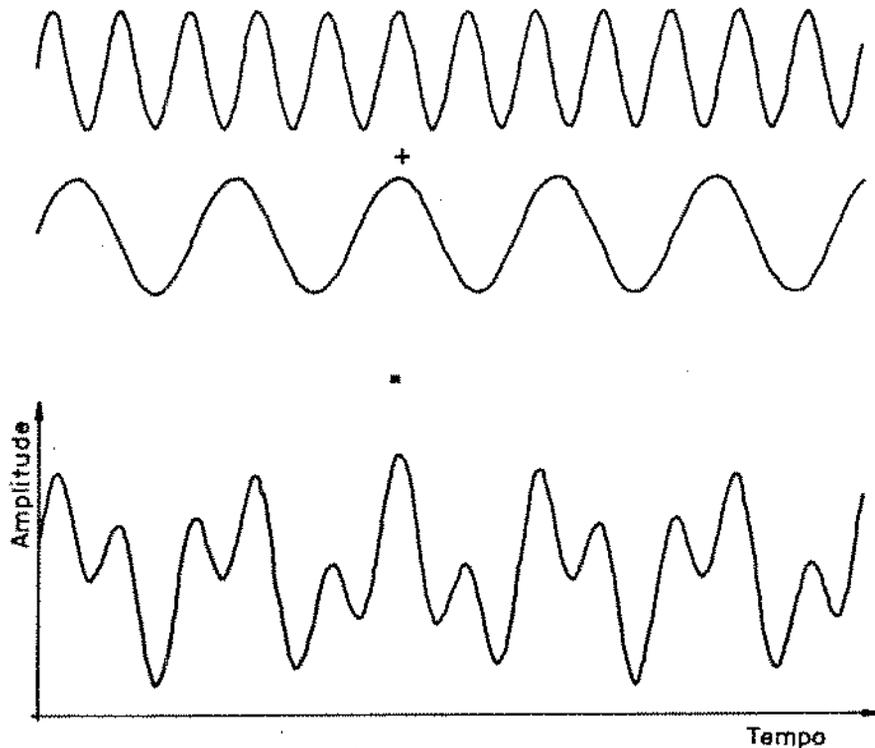


Figura 3.1: Sinal composto por uma soma de senos

### 3.2.2 DOMÍNIO DA FREQUENCIA

Em meados do século passado, o Barão JEAN BAPTISTE JOSEPH FOURIER (matemático francês 1768 - 1830) mostrou que grande parte das formas de ondas (sinais) existentes podia ser representada por uma soma de funções harmônicas. A figura 3.1 mostra como isto se dá, ou se-

Ja, tomando-se a amplitude, frequência e fase de cada onda senoidal corretamente, é possível gerar uma forma de onda (sinal) de forma idêntica ao sinal de interesse para a análise.

O domínio da frequência é comumente definido como sendo o registro da variação de algumas grandezas do sistema em análise com relação à frequência. O gráfico da figura 3.2 mostra o espectro da frequência do sinal gerado pela soma de duas ondas senoidais mostradas anteriormente.

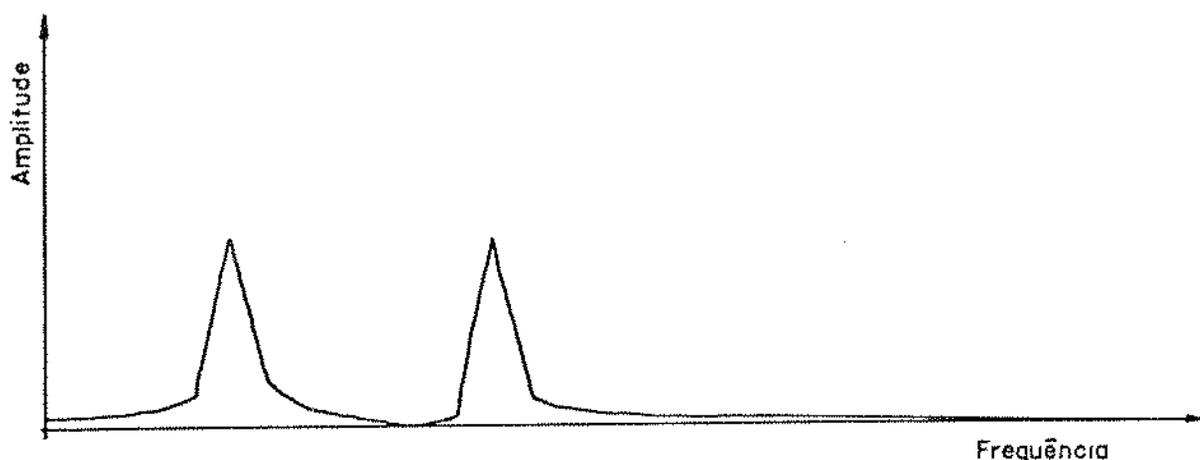


Figura 3.2: Domínio da frequência

O gráfico tridimensional, figura 3.3, mostra a relação existente entre o domínio do tempo e domínio da frequência. A passagem do domínio do tempo para o domínio da frequência é feita através da série de Fourier (sinais periódicos) e transformada de Fourier (sinais não periódicos). Maiores detalhes são apresentados no apêndice I.

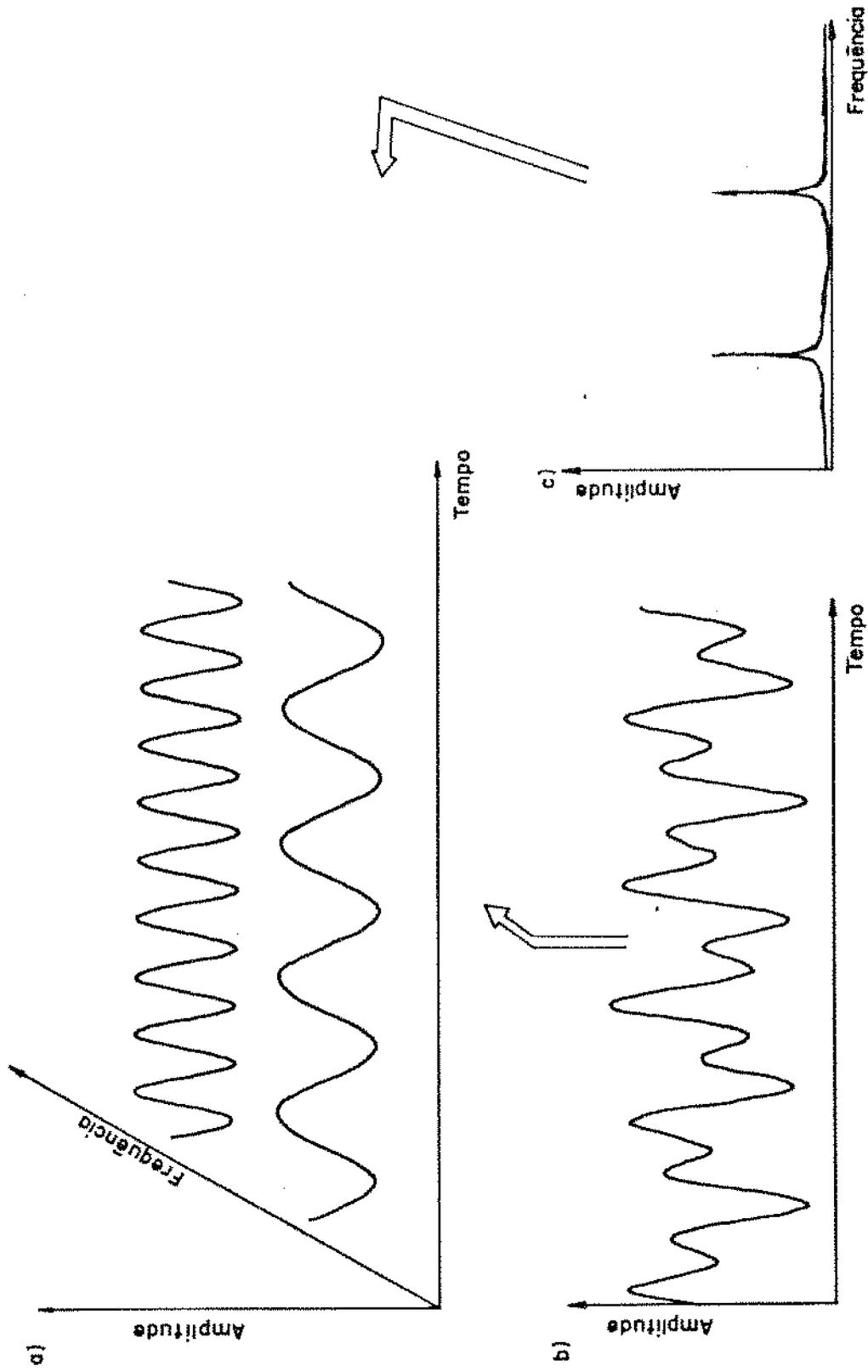


Figura 3.3: a- Relação entre os domínios do tempo e da frequência

b- Domínio do tempo

c- Domínio da frequência

### 3.2.2.1 INTRODUÇÃO A ANÁLISE MODAL

O modelamento do comportamento dinâmico por análise modal é muito conveniente quando há interesse na análise do fenômeno dinâmico das estruturas. Para o entendimento da mesma, seja uma estrutura mecânica simples, viga de aço, livre-livre, mostrada na figura 3.4.

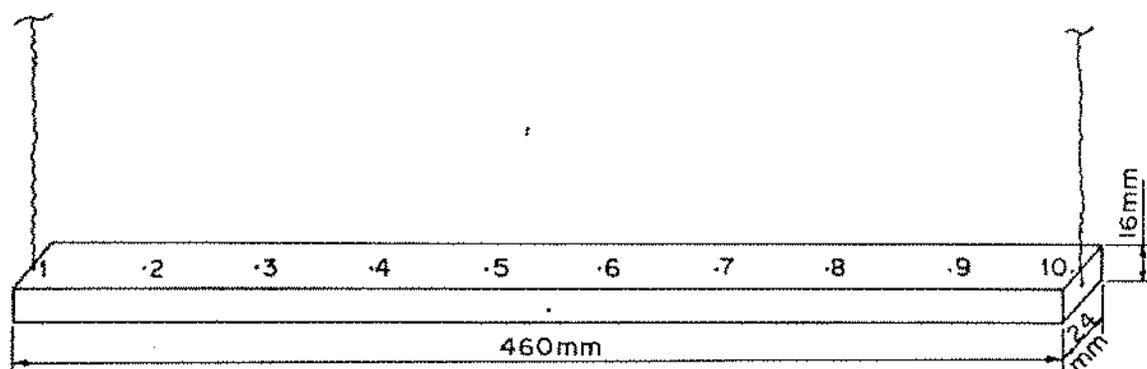


Figura 3.4: Viga livre livre

Excitando-se convenientemente a viga, em qualquer ponto da mesma, observa-se que esta vibra em uma dada frequência que lhe é característica. A figura 3.5 mostra o sinal da resposta da estrutura no domínio do tempo, uma composição de vários senos amortecidos da viga excitada com uma carga impulsiva.

Transformando-se o sinal da resposta da viga, do domínio do tempo para o domínio da frequência, figura 3.6, observa-se a existência de alguns picos de amplitude no espectro do mesmo. Cada um destes picos corresponde a um modo de vibrar da estrutura associado a uma dada frequência. Para a viga em análise o primeiro modo é mostrado na figura 3.7. Já a segunda harmônica é a responsável pelo segundo modo mostrado na figura 3.8.

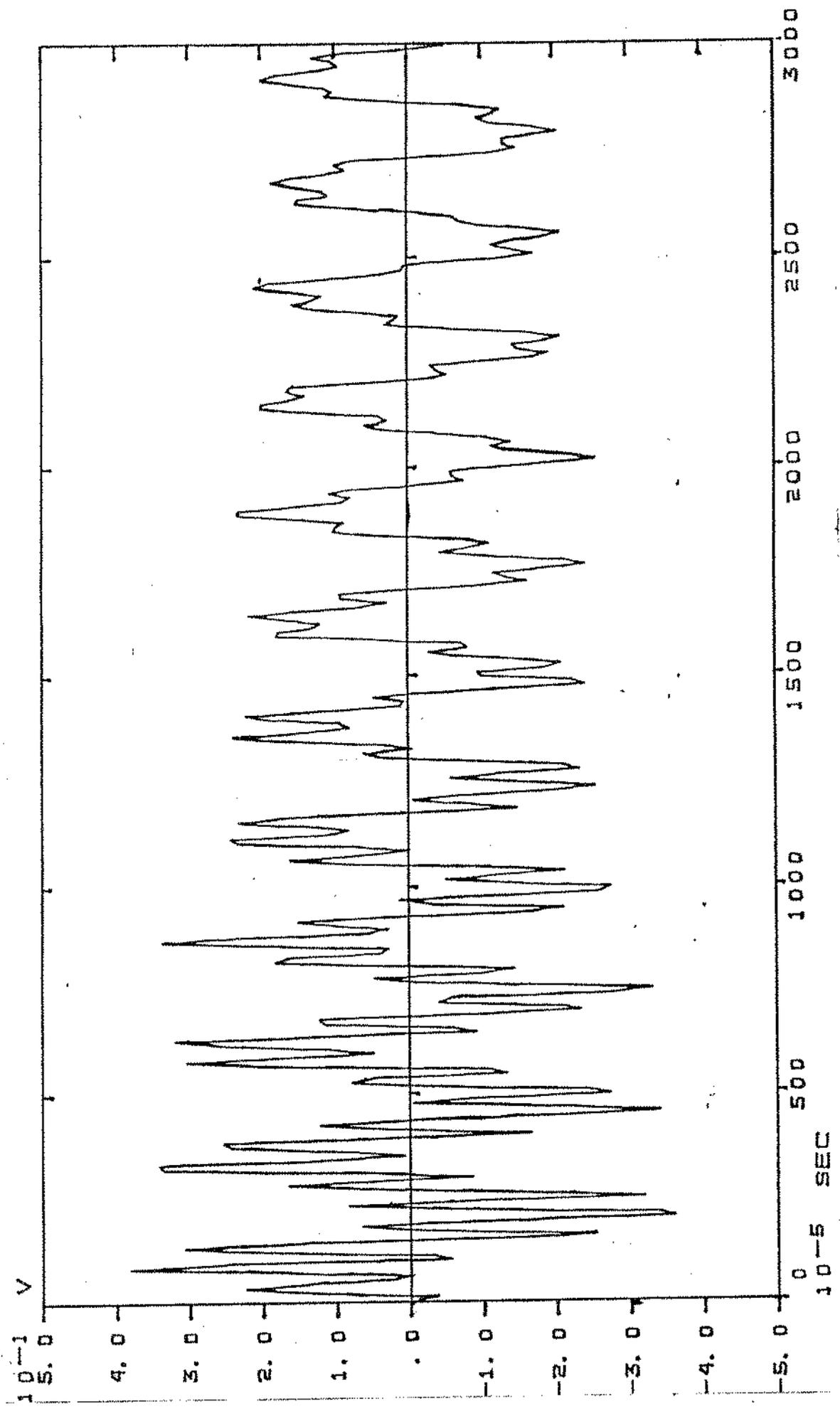


Figura 3.5: Resposta da estrutura a um impulso (domínio do tempo)

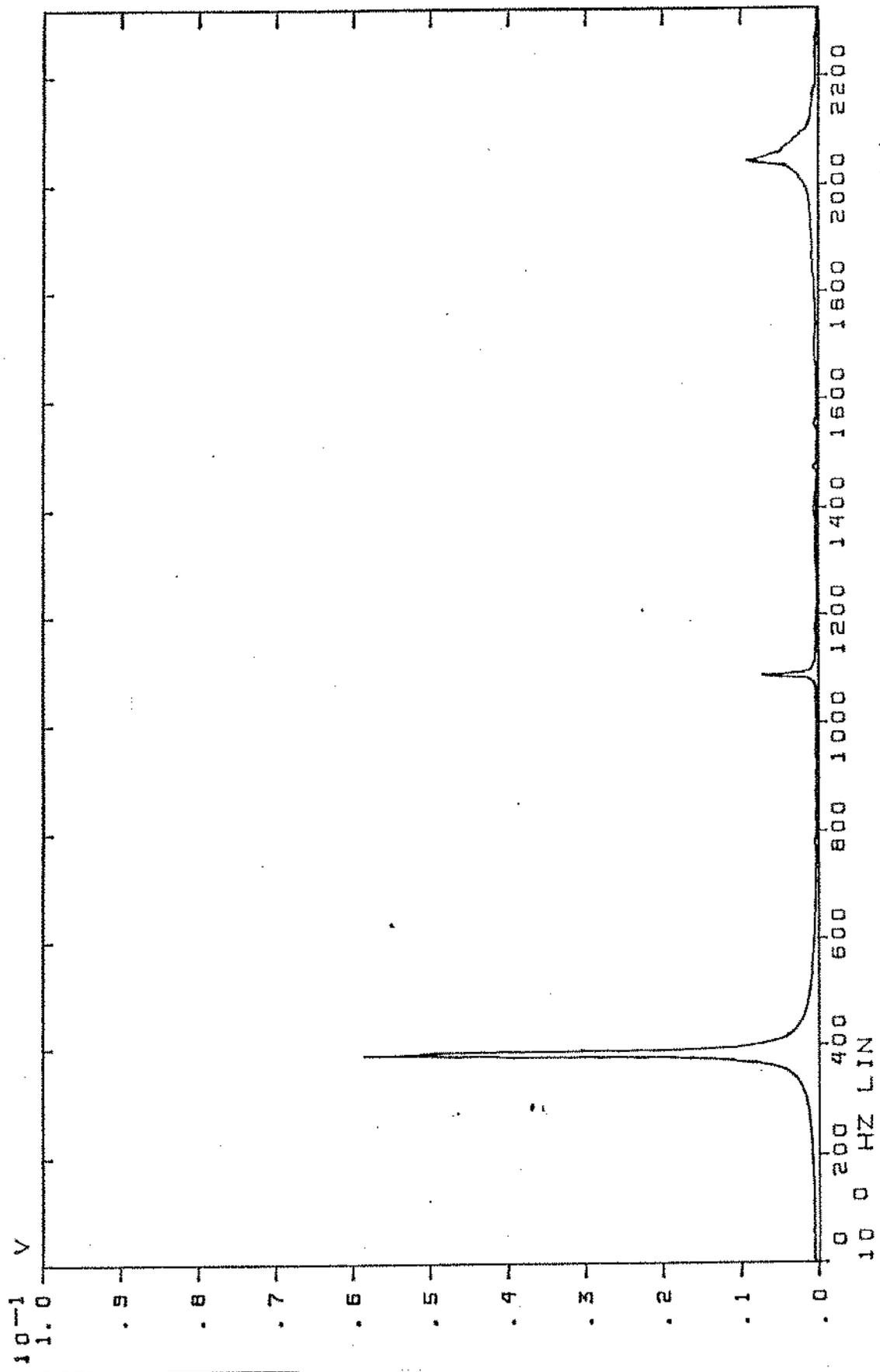


Figura 3.6: Resposta da estrutura a um impulso (domínio da frequência)

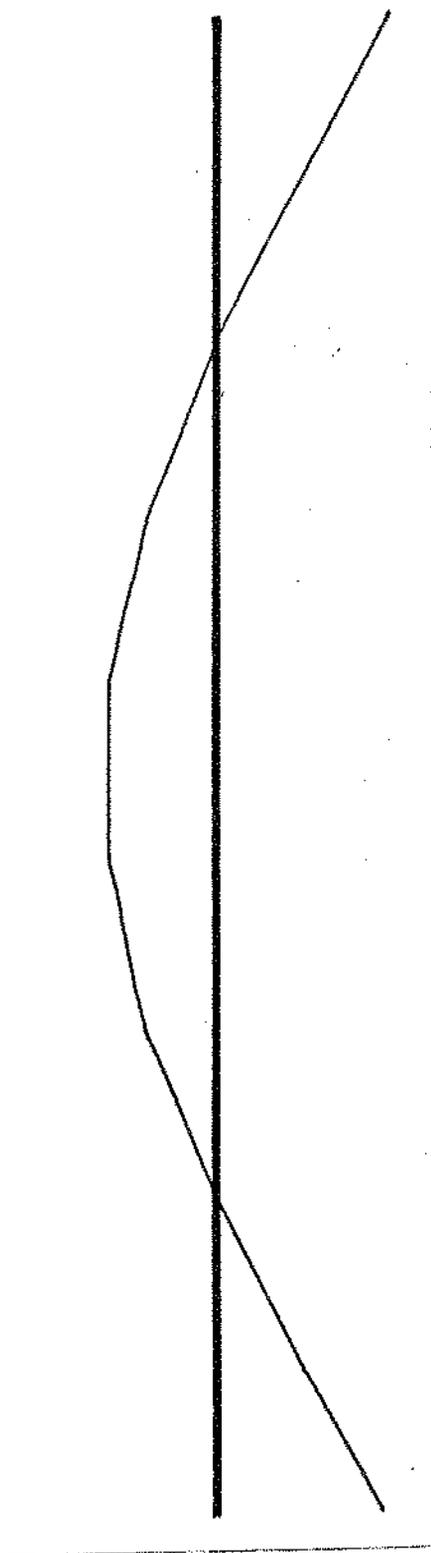


Figura 3.7: Primeiro modo de vibrar

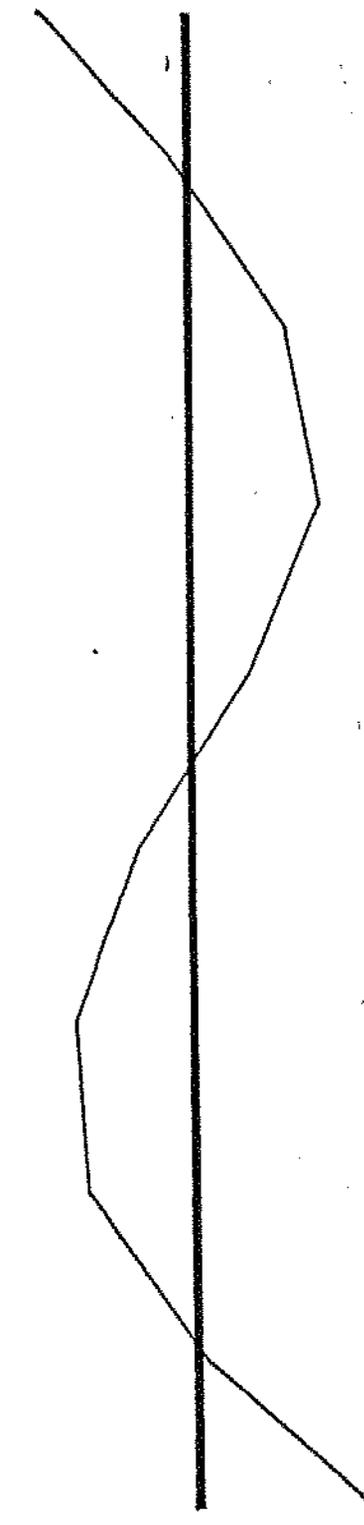


Figura 3.8: Segundo modo de vibrar

Para se determinar a vibração total de uma estrutura, deve-se medir a vibração em vários pontos desta. A figura 3.9 mostra alguns pontos de medidas para a viga e suas respostas em frequência.

Observando-se os picos da função de resposta em frequência (ressonâncias) conclui-se que os mesmos ocorrem todos para as mesmas frequências, independentemente do ponto de excitação (medida). O único parâmetro que varia com o ponto de excitação é a amplitude de ressonância e a fase de cada modo, apesar desta última não estar clara nas figuras.

Experimentalmente dependendo do número de modos desejados e da faixa de frequência, alguns poucos pontos de medida são suficiente para se determinar a forma dos modos de vibrar de uma dada estrutura.

O gráfico tridimensional, figura 3.10, mostra uma relação de coordenadas espaciais que permite visualizar como os modos próprios da estrutura se comportam. O gráfico mostra ao longo do eixo longitudinal da viga os picos de amplitude ressonantes de algumas funções de resposta em frequência para cada ponto. A envoltória dos picos de amplitude das funções de resposta em frequência em cada ressonância fornece a forma de vibrar de cada modo se a estrutura possuir baixa densidade modal. Observa-se que a figura 3.10.c representa exatamente o primeiro modo de vibrar da viga, como já foi mostrado na figura 3.7.

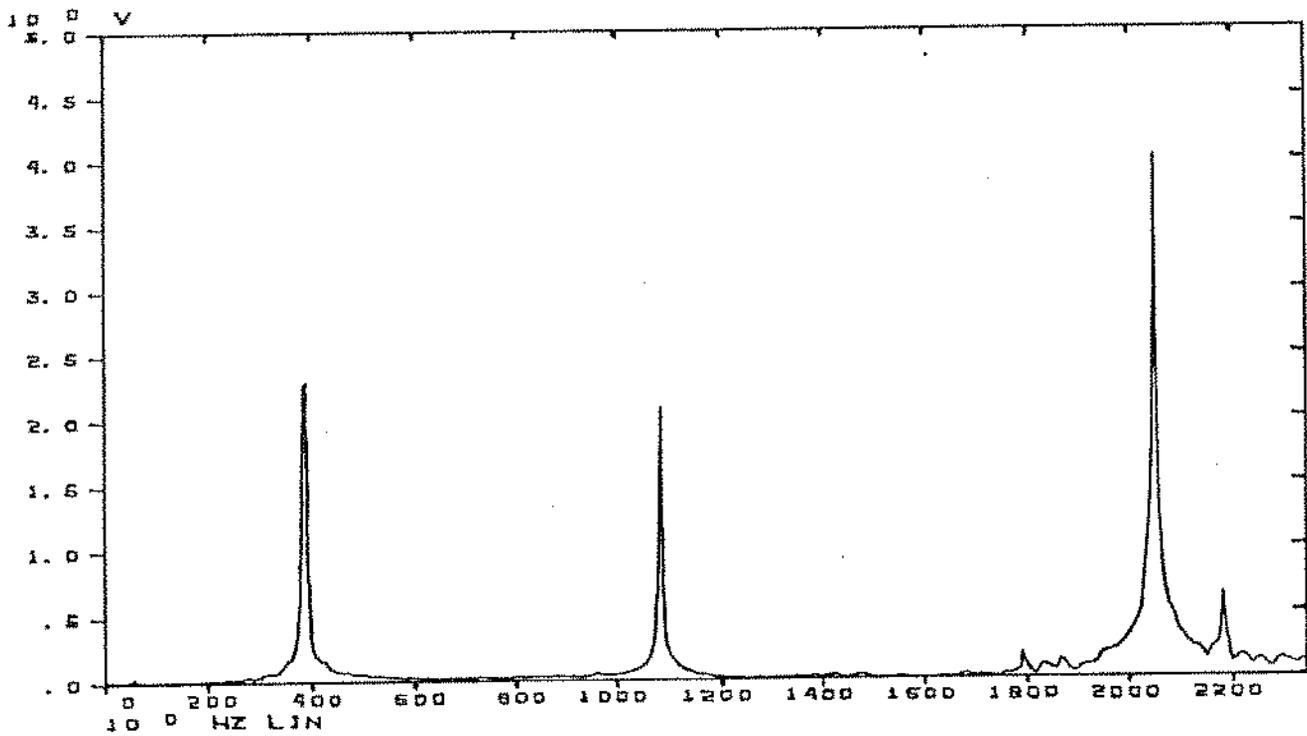
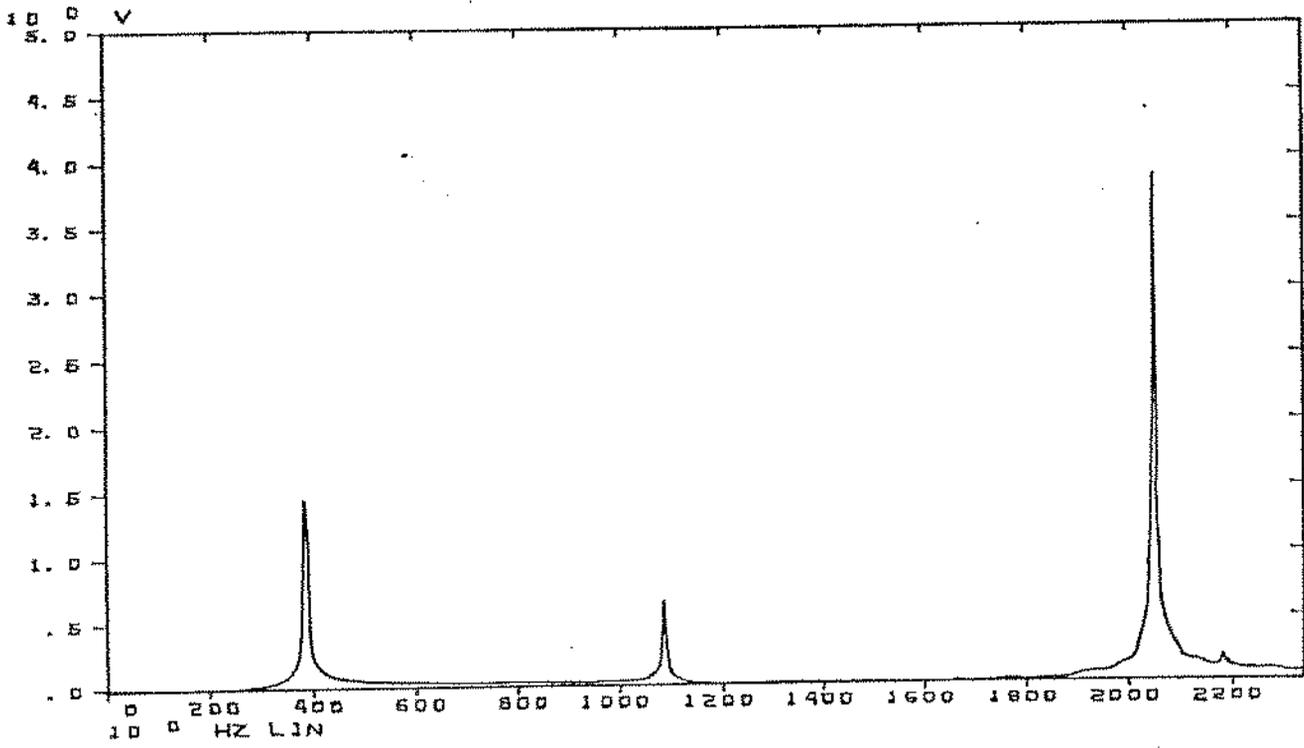


Figura 3.9: a- Função de Resposta em Frequência para a medida 6  
 b- Função de Resposta em Frequência para a medida 10

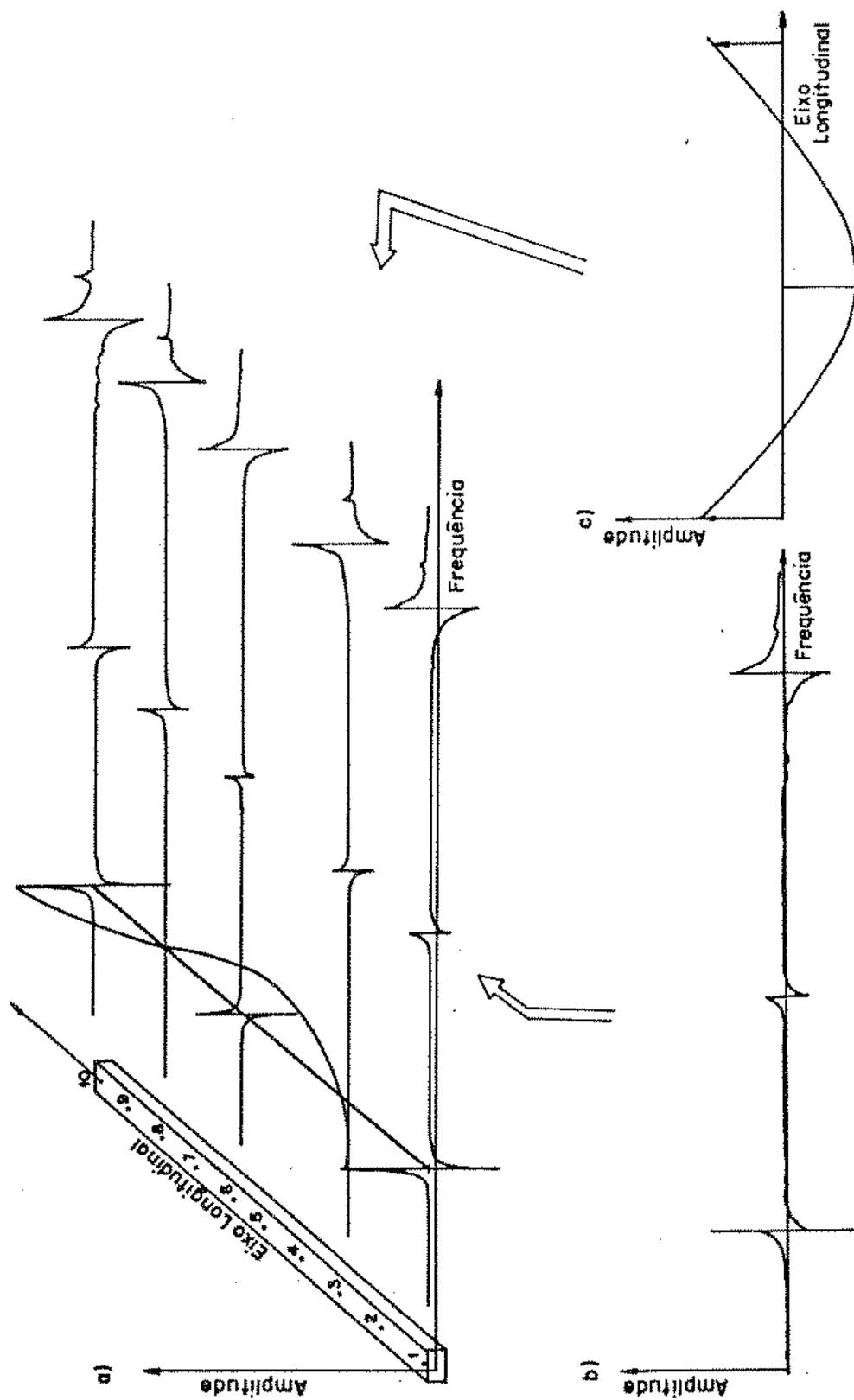


Figura 3.10: a- Gráfico tridimensional mostrando o comportamento dos modos próprios da viga

b- Domínio da Frequência

c- Primeiro modo de vibrar da viga

Um dos objetivos da análise modal é determinar a forma e magnitude da deformação das estruturas em cada modo (frequência) de maneira que estes resultados forneçam os subsídios necessários para a concepção e/ou otimização de projetos.

Por exemplo, a viga em análise tem um deslocamento muito grande no meio quando excitada próximo da primeira ressonância. Isto pode ser concluído visualizando-se os modos de vibrar da mesma. Para reduzir esta amplitude (deslocamento) uma solução seria aumentar o amortecimento do material da viga. Isto acarretaria a redução da amplitude de vibração da mesma.

Salienta-se que na análise modal, não há perda de informações sobre o comportamento da estrutura, e cada modo de vibrar é caracterizado por sua forma, frequência e amortecimento. No entanto, existe um ajuste de curva da resposta em frequência medida experimentalmente à uma função analítica (ver seção 3.4.2) onde os efeitos de ruídos e pequenos erros experimentais existentes nos sinais são minimizados /16/.

A figura 3.11 mostra a função de resposta em frequência medida (a) e a função analítica ajustada (b) para o ponto (4) da viga.

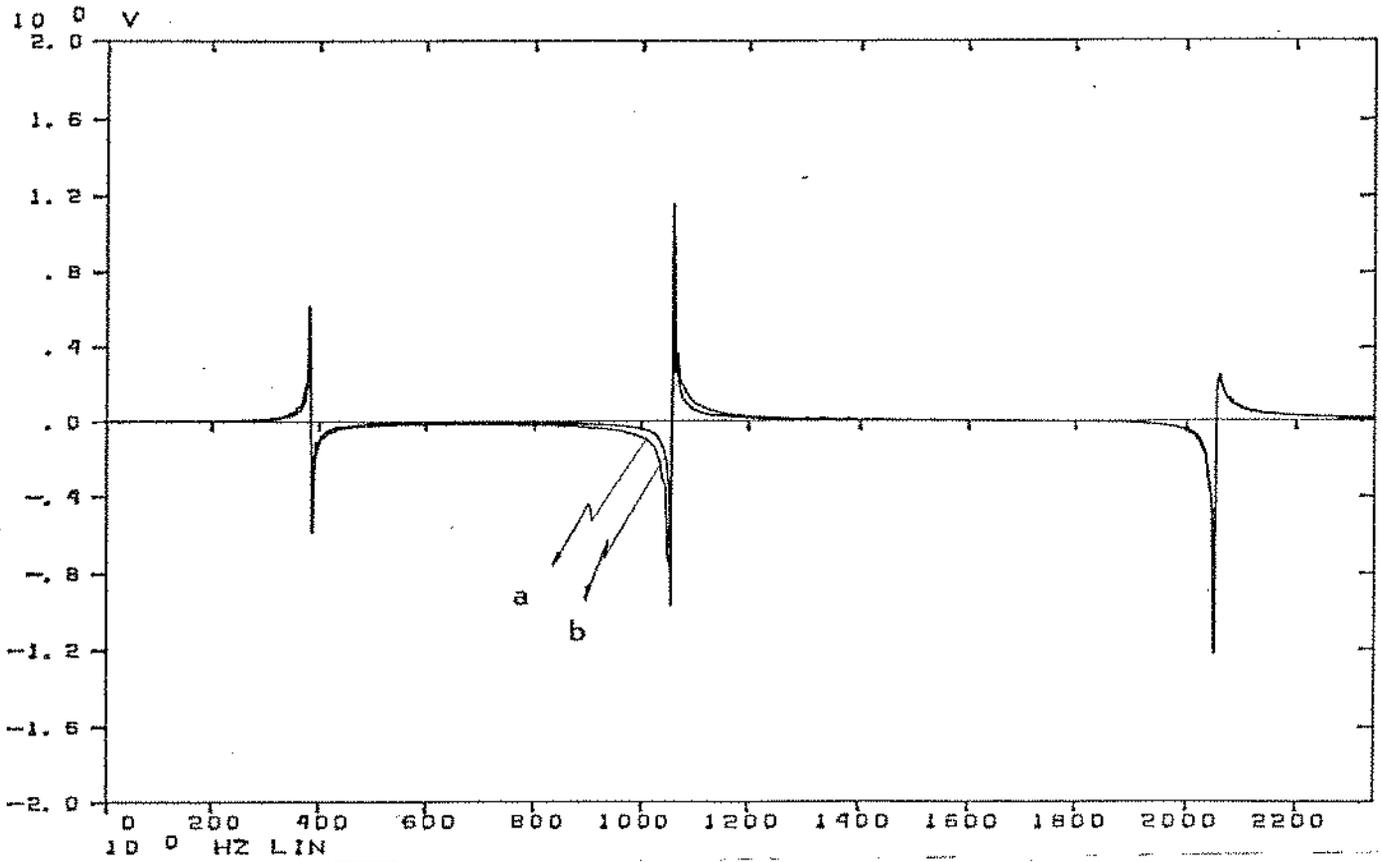


Figura 3.11: a) Sinal medido

b) Sinal ajustado

### 3.3 IDENTIFICAÇÃO DOS PARAMETROS MODAIS ESTRUTURAIS

O fenômeno de vibração é um problema existente nas máquinas e estruturas e pode causar a falha destas. Por isto, as medidas experimentais das características de vibração das máquinas e estruturas estão se tornando cada vez mais importantes. Basicamente existem dois tipos de medidas de vibração:

- a. medida do nível de vibração das estruturas ou de seus componentes quando em operação normal ou em condições severas de operação;
- b. determinação das propriedades de vibração da estrutura ou de seus

componentes em teste de laboratório.

O primeiro tipo de medida envolve uma gravação ou uma análise em tempo real dos níveis de vibração a que está submetida uma máquina em operação. Por exemplo : a medida dos níveis de vibração de uma máquina agrícola operando em campo. Neste caso, a máquina ou os componentes desta estão sujeitos a vários tipos simultâneos de excitações e a resposta medida, neste tipo de teste, é uma resposta que leva em consideração todos os tipos de excitações.

No segundo tipo de medida a estrutura em análise vibra de maneira controlada, com uma excitação conhecida. Neste teste é possível medir ambos, a excitação e a resposta e, desta forma, determinar as propriedades de vibração da estrutura em análise, por dois processos distintos:

1. Excitando-se a estrutura em vários pontos simultaneamente com frequências próximas do modo desejado.

2. Excitando-se a estrutura em um único ponto.

O primeiro método consiste basicamente em isolar cada modo de vibrar da estrutura. Isto é feito controlando-se a frequência de excitação e a distribuição das forças de excitação de maneira que a velocidade de diferentes pontos da estrutura estejam em fase ou antifase com as forças de excitação. No entanto, este método não é conveniente no caso de estruturas com os modos fortemente acoplados.

O segundo processo, é um método de fácil implementação onde a estrutura é excitada em um único ponto e a função de resposta é medida para os vários outros pontos da estrutura inclusive o de excitação. A relação em frequência entre a excitação e a resposta da estrutura é feita por mobilidade em deslocamento, velocidade ou aceleração para cada ponto de medida da estrutura.

Recentemente, numerosos trabalhos de análise modal têm sido desenvolvidos no sentido de identificar as características dinâmicas das estruturas. Ewins /12/ mostra alguns destes trabalhos, tanto utilizando o método dos modos isolados como o método proposto no segundo processo descrito acima.

Saliente-se que, para uma frequência de excitação próxima à frequência de ressonância do modo de vibrar isolado, o comportamento das estruturas lineares é similar ao de um sistema com um único grau de liberdade. Desta forma os parâmetros modais (frequência natural, modo próprio e amortecimento) são facilmente estimados. Já quando a estrutura possui duas ou mais frequências de ressonância muito próximas torna-se difícil identificar os modos. Neste caso, Miramand /23/ propõe um método específico para este tipo de problema.

A excitação das estruturas pode se dar por diferentes formas: excitação harmônica, impulsiva, varredura em frequência, etc. /12/.

Neste trabalho será usado apenas o método da excitação impulsiva em um único ponto e a resposta medida nos vários outros. A estimativa dos parâmetros modais é feita através de um ajuste de curvas usando-se o estimador dos mínimos quadrados /15/. A opção por este método deu-se em função do mesmo ser perfeitamente aplicável para o tipo de estrutura que se pretende analisar, e pela disponibilidade de um "FOURIER ANALYSER SYSTEMS HP 5451C" que possui um "software" de análise modal operando com sinal de excitação do tipo impulsivo.

### 3.4 PARÂMETROS MODAIS E FUNÇÃO DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA

O sistema de equações que governa uma dada estrutura linear é dado por um conjunto de equações diferenciais lineares com coeficien-

tes constantes. O amortecimento do sistema pode ser considerado como, viscoso, estrutural, histerético, etc.

A equação do movimento de uma estrutura submetida a uma força de excitação externa considerando-se apenas o amortecimento viscoso é dada pela equação (2.7):

$$[M] \ddot{V} + [C] \dot{V} + [K] V = P. \quad [2.7]$$

O movimento do sistema pode ser descrito através de  $n$  variáveis independentes. Desta forma, o sistema possui  $n$  graus de liberdade onde cada grau de liberdade está associado a um deslocamento linear ou angular  $v_j$  do ponto  $j$ .

Para sistemas conservativos, com forças externas nulas, a equação (2.7) torna-se:

$$[M] \ddot{V} + [K] V = 0. \quad [3.1]$$

Por uma transformação,  $V = [\Phi] X$ , com base nos modos próprios, é possível diagonalizar as matrizes  $[K]$  e  $[M]$  utilizando-se das propriedades de ortogonalidade entre os modos /20/. Os elementos  $x_j$  são as chamadas coordenadas generalizadas modais do sistema e a matriz  $[\Phi]$  de ordem  $n \times n$  é a matriz modal do sistema, onde cada coluna da matriz  $[\Phi]$  é constituída por um vetor modal  $\phi^j$  do sistema. Desta forma, a equação (3.1) torna-se:

$$[M] [\Phi] \ddot{X} + [K] [\Phi] X = 0. \quad [3.2.a]$$

Pré-multiplicando-se a equação (3.2.a) por  $[\phi]^T$  tem-se:

$$[\phi]^T [M] [\phi] \ddot{X} + [\phi]^T [K] [\phi] X = 0, \quad [3.2.b]$$

ou seja /23/,

$$\left[ \begin{matrix} m_j \\ \vdots \\ m_j \end{matrix} \right] \left\{ \ddot{X} \right\} + \left[ \begin{matrix} k_j \\ \vdots \\ k_j \end{matrix} \right] \left\{ X \right\} = 0. \quad [3.2.c]$$

Os parâmetros  $m_j$ ,  $k_j$  ( $j=1,2,\dots,n$ ) são as chamadas massa e rigidez generalizadas modais do sistema, respectivamente. Desta forma, a solução da equação (3.1) em coordenadas modais é obtida resolvendo-se uma simples equação diferencial da forma

$$m_j \ddot{x}_j + k_j x_j = 0. \quad [3.3]$$

Após o sistema ter sido resolvido, em coordenadas generalizadas modais, retorna-se ao sistema de coordenadas físicas através da transformação  $X = [\phi]^{-1} V$ .

Para sistemas não conservativos com forças externas de excitação nulas a equação (2.7) é dada por:

$$[M] \ddot{V} + [C] \dot{V} + [K] V = 0. \quad [3.4]$$

A solução particular da equação (3.4) é assumida ser da forma /23/

$$v = \phi e^{st}, \quad s \text{ complexo.}$$

Substituindo-se  $v$  na equação (3.4) tem-se:

$$(s^2 [M] + s [C] + [K]) \phi = 0. \quad [3.5]$$

A solução da equação (3.5) fornece  $n$  valores complexos de  $s = -\bar{\beta}_j + i\bar{\eta}_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) e  $n$  vetores complexos  $\phi^j$ , onde  $\phi^j$  é o modo natural do sistema dissipativo.

#### a-) MATRIZ [C] $\neq$ DIAGONALIZÁVEL

Quando a matriz [C] pode ser diagonalizada com base nos modos próprios conservativos da estrutura, a solução da equação (3.4) pode ser dada com base nos modos próprios do sistema. Gaughey /14/ mostra que

$$[C] [M]^{-1} [K] = [K] [M]^{-1} [C]$$

é condição necessária e suficiente para que a matriz [C] possa ser diagonalizada. Para este caso o modo próprio do sistema dissipativo pode ser associado ao modo próprio do sistema conservativo e a equação (3.5) pode ser desacoplada na forma /23/

$$s^2 m_j + s c_j + k_j = 0. \quad [3.6]$$

Os parâmetros  $m_j$ ,  $c_j$  e  $k_j$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ) são massa, amortecimento e rigidez generalizados, respectivamente. Para sistemas com amortecimento subcrítico a equação (3.6) possui duas raízes complexas conjugadas, a

saber:

$$\bar{s}_j = -c_j/2m_j + (1 \sqrt{4 k_j m_j - c_j^2})/2m_j, \quad [3.7.a]$$

$$\bar{s} = -c_j/2m_j - (1 \sqrt{4 k_j m_j - c_j^2})/2m_j. \quad [3.7.b]$$

A solução particular da equação (3.4) pode ser dada por:

$$v_j = \phi^j e^{st} = \phi^j e^{-\beta_j t} e^{i\Omega_j t} \quad [3.8]$$

onde

$\beta_j = c_j/2 m_j$  é a razão de amortecimento

e

$\Omega_j = \sqrt{4 k_j m_j - c_j^2}/2 m_j$  é a frequência natural amortecida do sistema.

#### RIGIDEZ DINÂMICA E RECEPTANCIA

Seja um sistema com  $n$  graus de liberdade sob a ação de uma combinação de forças senoidais de mesma frequência  $\omega$ . Para o  $v$ -ésimo grau de liberdade com fase  $\theta_r$ , em notação complexa, tem-se:

$$P(t) = (p_r e^{i(\omega t + \theta)}). \quad [3.9]$$

A resposta deste sistema a um carregamento constante é harmônica e de

mesma frequência  $\omega$  ou seja:

$$V(t) = (v_r e^{i(\omega t + \theta)}). \quad [3.10]$$

Substituindo-se as equações (3.9) e (3.10) em (2.7) tem-se:

$$(-\omega^2[M] + i\omega[C] + [K])V = P. \quad [3.11.a]$$

Em uma notação mais compacta tem-se:

$$[Z]V = P. \quad [3.11.b]$$

A matriz complexa  $[Z]$  é definida como a rigidez dinâmica do sistema e a matriz  $[H] = [Z]^{-1}$  é definida como a receptância. Então, a resposta para o sistema excitado com uma força  $P$  é dado por:

$$V = [H]P. \quad [3.12]$$

Os elementos  $h_{kl}$  da matriz  $[H]$  são calculados invertendo-se a matriz  $[Z]$ , ou seja:

$$h_{kl} = (-1)^{k+l} (\text{cofator}[Z]) / (\det[Z]).$$

Neste caso os elementos  $h_{kl}$  são frações de onde o denominador é um polinômio de ordem  $2n$  e o numerador um polinômio de ordem  $2n-2$  /09/, /28/.

## RECEPTANCIA MODAL

Para uma melhor familiarização com a terminologia empregada considere-se um sistema de dois graus de liberdade. De conformidade com a equação (3.11.a) a equação do movimento do sistema torna-se :

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} + i\omega \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} \quad [3.13]$$

Como a matriz [C] pode ser diagonalizada com base nos modos próprios, usando-se a transformação  $V = [\Phi] X$ , então a equação do movimento do sistema torna-se:

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + i\omega \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_1^1 P_1 + \phi_2^1 P_2 \\ \phi_1^2 P_1 + \phi_2^2 P_2 \end{Bmatrix}, \quad [3.14.a]$$

onde  $\phi_k^j$  k-ésimo elemento do modo j.

Reordenando-se a equação (3.14.a) tem-se:

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 m_1 + i\omega c_1 + k_1 & 0 \\ 0 & -\omega^2 m_2 + i\omega c_2 + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_1^1 & \phi_2^1 \\ \phi_1^2 & \phi_2^2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}. \quad [3.14.b]$$

Pela transformação  $X = [\Phi]^{-1} V$  é possível transformar-se a equação

(3.14.b) para o sistema de coordenadas físicas novamente:

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 m_1 + i\omega c_1 + k_1 & 0 \\ 0 & -\omega^2 m_2 + i\omega c_2 + k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1^1 & \phi_2^1 \\ \phi_1^2 & \phi_2^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1^1 & \phi_2^1 \\ \phi_1^2 & \phi_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}, \quad [3.15.a]$$

$$\begin{bmatrix} \phi_1^1 & \phi_2^1 \\ \phi_1^2 & \phi_2^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega^2 m_1 + i\omega c_1 + k_1 & 0 \\ 0 & -\omega^2 m_2 + i\omega c_2 + k_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \phi_1^1 & \phi_2^1 \\ \phi_1^2 & \phi_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}, \quad [3.15.b]$$

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1^1 & \phi_2^1 \\ \phi_1^2 & \phi_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/(-\omega^2 m_1 + i\omega c_1 + k_1) & 0 \\ 0 & 1/(-\omega^2 m_2 + i\omega c_2 + k_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1^1 & \phi_2^1 \\ \phi_1^2 & \phi_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}, \quad [3.15.c]$$

$$v_1 = \frac{\phi_1^1 \phi_1^1 P_1}{-\omega^2 m_1 + i\omega c_1 + k_1} + \frac{\phi_2^1 \phi_1^1 P_1}{-\omega^2 m_2 + i\omega c_2 + k_2} + \frac{\phi_1^1 \phi_2^1 P_2}{\omega^2 m_1 + i\omega c_1 + k_1} + \frac{\phi_2^1 \phi_2^1 P_2}{\omega^2 m_2 + i\omega c_2 + k_2}, \quad [3.16.a]$$

$$v_2 = \frac{\phi_2^1 \phi_1^1 P_1}{-\omega^2 m_1 + i\omega c_1 + k_1} + \frac{\phi_2^2 \phi_1^1 P_1}{-\omega^2 m_2 + i\omega c_2 + k_2} + \frac{\phi_2^1 \phi_2^1 P_2}{\omega^2 m_1 + i\omega c_1 + k_1} + \frac{\phi_2^2 \phi_2^1 P_2}{\omega^2 m_2 + i\omega c_2 + k_2}. \quad [3.16.b]$$

Desta forma, para uma força de excitação  $p$  no ponto dois (2) a resposta para o ponto um (1) é dada por

$$v_1 = \sum_{j=1}^2 (\phi_1^j \phi_2^j P) / (-\omega^2 m_j + i\omega c_j + k_j). \quad [3.17]$$

Generalizando-se a equação (3.17) para n graus de liberdade tem-se:

$$v_k = \sum_{j=1}^n (\phi_k^j \phi_\ell^j p_\ell) / (-\omega^2 m_j + i\omega c_j + k_j). \quad [3.18]$$

A receptância entre o ponto de excitação  $\ell$  e o ponto de medida  $k$  é dada pela razão de  $v_k$  por  $p_\ell$ , ou seja:

$$h_{k\ell}(i\omega) = v_k / p_\ell = \sum_{j=1}^n (\phi_k^j \phi_\ell^j) / (-\omega^2 m_j + i\omega c_j + k_j). \quad [3.19]$$

#### b-) MATRIZ [C] NÃO É DIAGONALIZAVEL

Quando a matriz [C] não pode ser desacoplada com base nos modos próprios conservativos, existem alguns métodos especiais para se determinar os modos do sistema. Ewins /12/ descreve alguns destes métodos. Duncan propõe um método baseado na formulação de vetor de estado /23/.

Reescrevendo-se equação (2.7) na forma de estado, tem-se:

$$\begin{bmatrix} [C] & [M] \\ [M] & [O] \end{bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dot{V} \\ \ddot{V} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} [K] & [O] \\ [O] & -[M] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V \\ \dot{V} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ O \end{Bmatrix} \quad [3.20.a]$$

A equação (3.20.a) pode ser reescrita na forma compacta

$$[A] \dot{Y} + [B] Y = \bar{P}, \quad [3.20.b]$$

onde

$$Y = \begin{Bmatrix} v \\ \dot{v} \end{Bmatrix}, \quad [A] = \begin{bmatrix} [C] & [M] \\ [M] & [O] \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} [K] & [O] \\ [O] & -[M] \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \bar{P} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Desprezando-se o termo do lado direito da mesma e assumindo-se uma solução da forma  $Y = Y_0 e^{\lambda t}$  para a equação (3.20.b) tem-se:

$$[A] (\lambda Y_0 e^{\lambda t}) + [B] (Y_0 e^{\lambda t}) = 0, \quad [3.21.a]$$

$$([A] \lambda + [B]) Y = 0. \quad [3.21.b]$$

A equação (3.21.b) é um problema padrão de autovalores/autovetores, e como a matriz  $[M]$  é positiva definida, a matriz  $[A]$  é inversível. Desta forma,  $\lambda$  e  $Y$  são soluções do problema de autovalor

$$[E] Y = Y / \lambda, \quad [3.22]$$

onde

$$[E] = -[A]^{-1} [B].$$

Assim, existem  $n$  pares complexos conjugados de autovalores  $\lambda_j$  e  $n$  pares complexos conjugados de autovetores  $\phi^j$  ( $j=1,2,\dots,n$ ) para o sistema de equação (3.22):

$$\lambda_j = c_j + id_j,$$

$$\bar{\lambda}_j = c_j - id_j.$$

O termo  $d_j$  representa a frequência natural amortecida, enquanto o termo  $c_j$  é o coeficiente de amortecimento do sistema.

Prova-se que os autovetores  $\phi^j, \bar{\phi}^j$  são ortogonais em relação às matrizes  $[A]$  e  $[B]$  para autovalores  $\lambda_j$  distintos /20/, sendo possível, então, diagonalizar o sistema de equações (3.20). Como no caso anterior, assumindo-se uma excitação harmônica, obtém-se a solução do problema, primeiramente, em coordenadas generalizadas modais e, posteriormente, é feita a transformação para o sistema de coordenadas físicas.

Para uma força  $\bar{P} = P e^{-i\omega t}$  a equação (3.20.b) torna-se:

$$i\omega [A] Y + [B] Y = \bar{P}, \quad [3.23.a]$$

$$(i\omega [A] + [B]) Y = \bar{P}. \quad [3.23.b]$$

Efetuando-se a transformação  $Y = [\Phi] Z$  tem-se:

$$(i\omega [A] + [B])[\Phi] Z = P. \quad [3.24]$$

Pré-multiplicando-se a equação (3.24) pela matriz  $[\Phi]^T$  tem-se a equação

desacoplada:

$$\left\{ i\omega \begin{bmatrix} a_j \\ \vdots \\ a_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_j \\ \vdots \\ b_j \end{bmatrix} \right\} \{Z\} = \begin{bmatrix} \phi^T \\ \vdots \\ \phi^T \end{bmatrix} \{ \bar{P} \}. \quad [3.25]$$

O vetor Y é obtido a partir da equação (3.25) do seguinte modo:

$$Y = \begin{bmatrix} \phi \\ \vdots \\ \phi \end{bmatrix} \left\{ i\omega \begin{bmatrix} a_j \\ \vdots \\ a_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_j \\ \vdots \\ b_j \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} \phi^T \\ \vdots \\ \phi^T \end{bmatrix} \{ \bar{P} \}. \quad [3.26]$$

Para os sistemas em que a matriz [E] só possui autovalores complexos mostra-se /34/ que a matriz de autovetores [\phi] é da forma:

$$[\phi] = \begin{bmatrix} [\psi] & [\bar{\psi}] \\ \vdots & \vdots \\ [\psi][\Lambda] & [\bar{\psi}][\bar{\Lambda}] \end{bmatrix}.$$

A matriz [\Lambda] é uma matriz diagonal de ordem nxn contendo apenas os autovalores com parte imaginária positiva e [\psi] é uma matriz de ordem nxn contendo os autovetores complexos associados a cada autovalor da matriz [\Lambda].

Desta forma, o vetor resposta,  $(v \hat{v})^T$ , de um sistema de dois

graus de liberdade é dado por:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1^1 & \psi_1^2 & \psi_1^1 & \psi_1^2 \\ \psi_2^1 & \psi_2^2 & \psi_2^1 & \psi_2^2 \\ \lambda_1 \psi_1^1 & \lambda_2 \psi_1^2 & \lambda_1 \psi_1^1 & \lambda_1 \psi_1^2 \\ \lambda_2 \psi_2^1 & \lambda_2 \psi_2^2 & \lambda_2 \psi_2^1 & \lambda_2 \psi_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/(i\omega a_1 + b_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/(i\omega a_2 + b_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/(i\omega a_1 - b_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/(i\omega a_2 - b_2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \psi_1^1 & \psi_1^2 & \psi_1^1 \lambda_1 & \psi_1^2 \lambda_2 \\ \psi_2^1 & \psi_2^2 & \psi_2^1 \lambda_1 & \psi_2^2 \lambda_2 \\ \psi_1^1 & \psi_1^2 & \psi_1^1 \lambda_1 & \psi_1^2 \lambda_2 \\ \psi_2^1 & \psi_2^2 & \psi_2^1 \lambda_1 & \psi_2^2 \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_1 = \frac{\psi_1^1 \psi_1^1 P_1}{i\omega a_1 + b_1} + \frac{\psi_2^2 \psi_1^2 P_1}{i\omega a_2 + b_2} + \frac{\overline{\psi_1^1} \overline{\psi_1^1} P_1}{i\omega \overline{a_1} + \overline{b_1}} + \frac{\overline{\psi_2^2} \overline{\psi_1^2} P_1}{i\omega \overline{a_2} + \overline{b_2}} + \frac{\psi_1^1 \psi_2^1 P_2}{i\omega a_1 + b_1} + \frac{\psi_2^2 \psi_2^2 P_2}{i\omega a_2 + b_2} + \frac{\overline{\psi_1^1} \overline{\psi_2^1} P_2}{i\omega \overline{a_1} + \overline{b_1}} + \frac{\overline{\psi_2^2} \overline{\psi_2^2} P_2}{i\omega \overline{a_2} + \overline{b_2}} \quad [3.27]$$

$$v_2 = \frac{\psi_2^2 \psi_1^2 P_1}{i\omega a_1 + b_1} + \frac{\psi_2^2 \psi_2^2 P_1}{i\omega a_2 + b_2} + \frac{\overline{\psi_2^2} \overline{\psi_1^2} P_1}{i\omega \overline{a_1} + \overline{b_1}} + \frac{\overline{\psi_2^2} \overline{\psi_2^2} P_1}{i\omega \overline{a_2} + \overline{b_2}} + \frac{\psi_2^1 \psi_2^1 P_2}{i\omega a_1 + b_1} + \frac{\psi_2^2 \psi_2^2 P_2}{i\omega a_2 + b_2} + \frac{\overline{\psi_2^1} \overline{\psi_2^1} P_2}{i\omega \overline{a_1} + \overline{b_1}} + \frac{\overline{\psi_2^2} \overline{\psi_2^2} P_2}{i\omega \overline{a_2} + \overline{b_2}} \quad [3.28]$$

Desta forma, para uma força  $p_2$  de excitação no ponto 2, a resposta para o ponto 1 é dada por :

$$v_1 = \sum_{j=1}^n (\psi_1^j \psi_2^j P_2) / (i\omega a_j + b_j) + (\overline{\psi_1^j} \overline{\psi_2^j} P_2) / (i\omega \overline{a_j} + \overline{b_j}) \quad [3.29]$$

Generalizando-se equação (3.28) para  $n$  graus de liberdade tem-se:

$$v_k = \sum_{j=1}^n ( \psi_k^j \psi_\ell^j p_\ell ) / (i\omega a_j + b_j) + ( \bar{\psi}_k^j \bar{\psi}_\ell^j p_\ell ) / (i\omega \bar{a}_j + \bar{b}_j) \quad [3.30]$$

A receptância entre o ponto de excitação  $\ell$  e o ponto de medida  $k$  é dada pela razão de  $v_k$  por  $p_\ell$ , ou seja:

$$h_{k\ell}(i\omega) = v_k/p_\ell = \sum_{j=1}^n ( \psi_k^j \psi_\ell^j ) / (i\omega a_j + b_j) + ( \bar{\psi}_k^j \bar{\psi}_\ell^j ) / (i\omega \bar{a}_j + \bar{b}_j) \quad [3.31]$$

### 3.5 IDENTIFICAÇÃO DOS PARAMETROS MODAIS

Os parâmetros modais podem ser estimados através do estimador dos mínimos quadrados. Neste caso, visa-se estimar os melhores valores dos parâmetros da equação analítica (3.19), (3.31) com relação à função de resposta em frequência  $H_m(i\omega)$  medida no sistema em análise.

Se os parâmetros da função analítica  $H(i\omega)$ , os quais fornecem um melhor ajuste, são  $\omega_n^*$ ,  $\phi_k^j$  e  $\phi_\ell^j$  ( $j=1,2,\dots,n$ ) então é possível escrever uma expressão do erro para cada frequência  $\omega$ :

$$E_k = H(i\omega_n^*, \phi_k^j, \phi_\ell^j) - H_m(i\omega) \quad [3.32]$$

Expressando-se o erro como um escalar tem-se:

$$e_k^2 = \bar{E}_k \cdot E_k = [\bar{H}(i\omega_n^*, \phi_k^j, \phi_\ell^j) - \bar{H}_m(i\omega)] [H(i\omega_n^*, \phi_k^j, \phi_\ell^j) - H_m(i\omega)] \quad [3.33]$$

Como a soma dos erros para todo o intervalo de frequência a ser analisado é dada pela somatória dos erros em cada intervalo, tem-se:

$$\sum_{k=1}^m \omega_k^2 e_k^2 = \sum_{k=1}^m \omega_k^2 [\bar{H}(i\omega_n^*, \phi_k^j, \phi_\ell^j) - \bar{H}_m(i\omega)] [H(i\omega_n^*, \phi_k^j, \phi_\ell^j) - H_m(i\omega)], \quad [3.34]$$

onde  $m$  é número de frequências de ressonância e  $\omega$  é uma função de ponderação aplicada para cada ponto que vai linearizar a função erro /15/.

Os valores ótimos dos parâmetros  $\omega_n^*$ ,  $\phi_k^j$ ,  $\phi_\ell^j$  são estimados minimizando-se a função erro. Isto é feito derivando-se a expressão (3.34) em relação aos parâmetros  $\omega_n^*$ ,  $\phi_k^j$ ,  $\phi_\ell^j$  e igualando-se a zero. Desta forma obtém-se um conjunto de equações com os parâmetros desconhecidos,  $\omega_n^*$ ,  $\phi_k^j$ ,  $\phi_\ell^j$  e, se a função  $H(i\omega)$  é uma função linear de  $\omega_n^*$ ,  $\phi_k^j$ ,  $\phi_\ell^j$  então esta é resolvida, fornecendo a melhor estimativa dos parâmetros  $\omega_n^*$ ,  $\phi_k^j$ ,  $\phi_\ell^j$ . Goyder /15/ mostra a formulação completa para este tipo de ajuste de curvas e um diagrama de blocos mostrando os passos a serem seguidos na estimativa dos parâmetros modais.

A característica fundamental do teste modal é que a matriz  $H(i\omega)$  completa pode ser obtida a partir de uma única linha e/ou coluna desta /31/. Isto pode ser facilmente observado nas equações (3.15) e (3.16). Desta forma, medindo-se uma linha e/ou coluna de  $H_m(i\omega)$  e, fazendo-se o ajuste da função  $h(i\omega)$  à função  $h_m(i\omega)$  estima-se a linha e/ou coluna de  $H(i\omega)$ . A partir da linha e/ou coluna estimada é possível determinar-se a matriz  $H(i\omega)$  completa, utilizando-se da relação

(3.31).

Neste trabalho os parâmetros modais da estrutura são determinados utilizando-se de um "software" de análise modal parte do sistema "FOURIER ANALYSER SYSTEMS HP-5441C". A formulação analítica utilizada no "software" é semelhante à mostrada nos itens anteriores e a estimativa dos parâmetros modais é feita através do estimador de mínimos quadrados. O algoritmo utilizado no sistema é de natureza iterativa, exigindo, assim, uma estimativa inicial dos parâmetros (feita automaticamente pelo sistema ou via terminal). A estimativa inicial da frequência é obtida pela magnitude dos picos da função de resposta em frequência. Já a estimativa inicial do amortecimento e do resíduo é obtida por uma formulação analítica para um sistema com um grau de liberdade. O apêndice II apresenta algumas informações sobre o programa a ser utilizado.

## 4 MODELAGEM TEÓRICA E ENSAIO EXPERIMENTAL

### 4.1 MODELO TEÓRICO

O objetivo do modelamento estrutural idealizado é a obtenção de um modelo matemático da estrutura, considerando-a composta de elementos discretos, o mais equivalente possível à estrutura contínua.

O modelo equivalente é uma aproximação da estrutura real contendo um número finito de graus de liberdade.

Aquelas estruturas já constituídas de elementos discretos conectados entre si, tais como treliças, vigas etc., não apresentam dificuldades na sua representação como modelo discreto. Já nas estruturas contínuas com contornos de geometria complicada, a representação exata do sistema por meios de elementos discretos não é possível de ser obtida. Nestes casos pode-se assumir uma distribuição de deslocamento (Modelos de Deslocamento) ou uma distribuição de tensão (Modelos de Tensão) ou deslocamentos e tensões simultaneamente (Modelos Híbridos e Mistos) nos elementos para se obter o modelo aproximado da estrutura. A distribuição de deslocamento ou tensão nos elementos deve ser tal que, à medida que os

elementos vão se tornando menores, o modelo aproximado tende à representação exata do sistema contínuo.

As propriedades elásticas e inerciais dos elementos e, posteriormente, da estrutura devem ser determinadas previamente, para se proceder a análise estática ou dinâmica do sistema.

A base para a obtenção das propriedades de rigidez e inércia de um elemento estrutural idealizado é a equivalência entre as energias de deformação e cinética do sistema contínuo às do modelo discreto equivalente. Para ilustrar este método tomar-se-á o elemento de viga, figura 2.4, como parte da estrutura complexa mostrada na figura 4.1. Assumindo-se que o comportamento do elemento pode ser representado por 6 deflexões e 6 rotações, como mostrado na figura, então é possível determiná-lo supondo um deslocamento

$$V = (v_x, v_y, v_z)$$

no elemento. O deslocamento,  $V$ , é expresso em termos do deslocamento discreto  $U = (V_1, \dots, V_{12})$  por meio da equação matricial

$$V = [a] U, \quad [4.1]$$

onde  $[a] = [a(x,y,z)]$  é uma matriz, cujos elementos são funções das coordenadas  $(x, y, z)$ .

A energia total de deformação pode ser obtida utilizando-se, convenientemente, a relação tensão-deformação, e a deformação unitárias em cada ponto do sistema:

$$e = [b] U, \quad [4.2]$$

onde  $[b] = [b(x,y,z)]$  é obtida diferenciando-se a equação (4.1) com relação as coordenadas  $x$ ,  $y$ , e  $z$  e combinando-as convenientemente.

Utilizando-se o princípio do trabalho virtual, o princípio de D'Alembert e, igualando-se a energia de deformação ao trabalho virtual obtém-se a equação do movimento do elemento, já deduzida anteriormente na seção 2.3.4:

$$[M] \ddot{V} + [K] V = P . \quad [4.3]$$

A equação (4.3) é a equação do movimento de um elemento idealizado, desconsiderando-se as forças dissipativas. Maiores detalhes da formulação desta equação são fornecidos em /29/.

As matrizes de rigidez  $[K]_{EL}$  e massa  $[M]_{EL}$  para o elemento de viga e, conseqüentemente, a montagem das matrizes de rigidez  $[K]$  e massa  $[M]$  da estrutura complexa formadas pelos elementos conectados e a nomenclatura utilizada no método dos elementos finitos foram apresentadas no capítulo 2.

#### 4.1.1 MODELAMENTO ESTRUTURAL

A formulação matemática desenvolvida nos capítulos precedentes foi voltada para a análise de estruturas reticuladas, estrutura esta que representará o braço do pulverizador mostrado na figura 4.1. Pretende-se estudar seu comportamento dinâmico, através de um modelamento teórico pelo método dos elementos finitos. Posteriormente, será feito um estudo experimental da estrutura real para se avaliar o modelo teórico proposto.

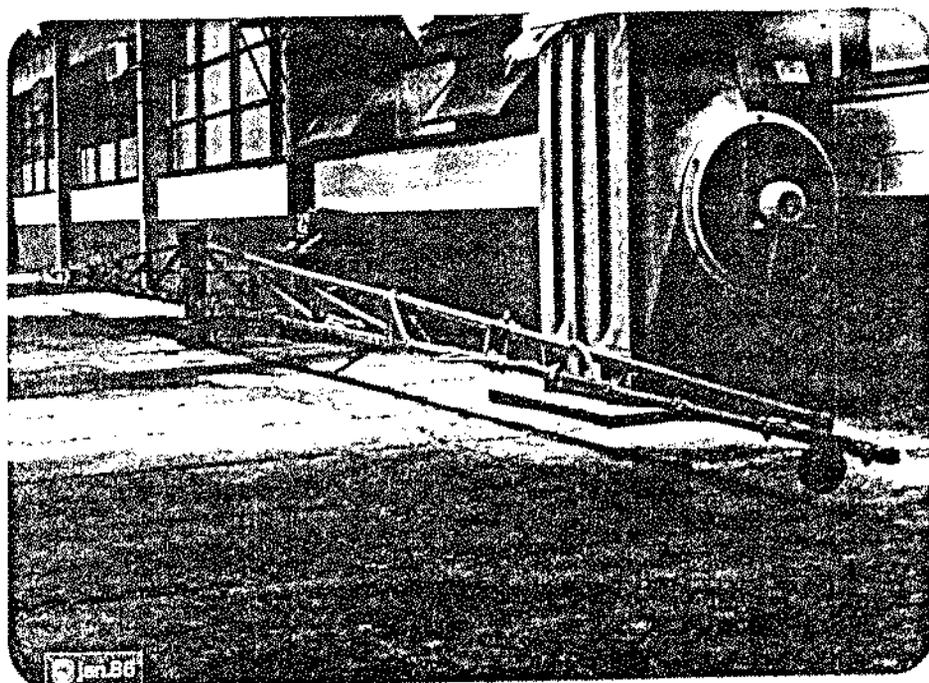


Figura 4.1: Braço do Pulverizador Columbia

Preliminarmente, a estrutura foi aproximada a um modelo discreto composto de elementos de viga. O modelo foi proposto com base nas condições de funcionamento da máquina em campo, ou seja: permitiu-se deslocamento de todos os pontos da estrutura com exceção, dos pontos de conexão entre o braço e a suspensão articulada da carreta.

No modelamento estrutural utilizou-se de um software de elementos finitos constituído de 3 (três) programas base, START, ADINA e EIGENV, vide apêndice III, desenvolvidos no Laboratório de Projetos Mecânicos (GEPROM) da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP).

#### 4.1.2 DISCRETIZAÇÃO DA ESTRUTURA REAL

Na discretização do braço do pulverizador, inicialmente considerou-se (15) nós e (23) elementos de viga numerados conforme mostra a figura 4.2. Os nós foram escolhidos coincidentes com os pontos de conexão entre os elementos. Algumas aproximações foram necessárias para se conseguir representar a estrutura como um conjunto de elementos discretos de viga.

1. Considerou-se os elementos (15) , (17) como elementos de viga;
2. Assumiu-se uma transmissão de movimento nos nós, (8), (9) (10) e (11) como se os vínculos fossem perfeitos;
3. Considerou-se o engaste dos nós (1), (2) como perfeitamente rígido.

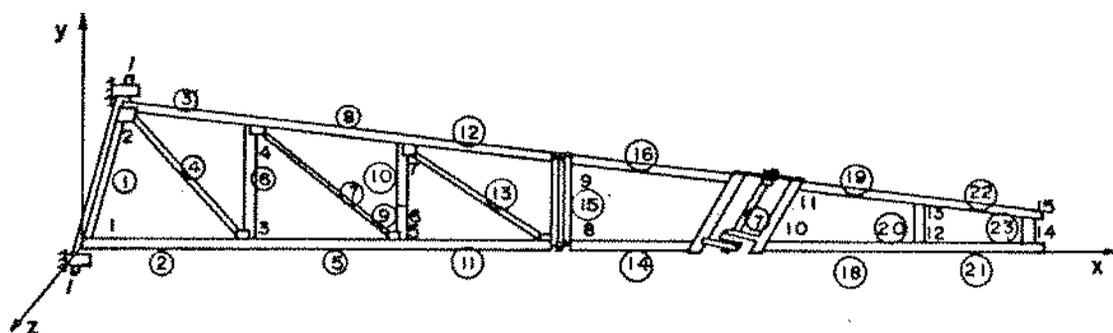


Figura 4.2: Discretização do Braço do Pulverizador  
sem a base de fixação.

Com as hipóteses iniciais acima consideradas, foi possível representar a estrutura contínua por um modelo de elementos discretos

conectados entre si com 90 graus de liberdade. Os graus de liberdade estão associados aos nós dos elementos seguindo a mesma notação utilizada na seção 2.4, onde o nó 1 possui os seis primeiros graus de liberdade da estrutura e assim sucessivamente. Considerando-se que os nós (1), (2) não sofrem deslocamento (condições de contorno Homogêneas) a estrutura fica reduzida a um modelo com 78 graus de liberdade.

Os cálculos das matrizes de rigidez [K] e massa [M] e, posteriormente, das frequências naturais e modos próprios de vibrar da estrutura foram feitos utilizando-se de um micro computador HP 9845A.

A tabela (4.1) mostra as três primeiras frequências naturais da estrutura e seus respectivos vetores modais. As figuras 4.3, 4.4, mostram, respectivamente, o primeiro e segundo modo de vibrar da estrutura. Nesta análise, as frequências mais altas, acima de 30 Hz, não foram computadas visto que a estrutura real não opera com frequências acima desses valores /27/.

I = 1

FREQUENCIA(I):(RAD/S) = 7.81295572647

FREQUENCIA(I):(HZ) = 1.24347052402

MODO PROPRIO =

1.59461116140E-12	5.36613794504E-12	4.76019060022E-02	-5.73377534944E-04
-7.13755662311E-02	9.17153960751E-12	-1.70000811359E-12	5.30487507779E-12
4.72632549312E-02	-1.40224351794E-03	-7.55711607849E-02	9.29336751023E-12
2.94303300940E-12	2.24473165187E-11	.167030406663	1.53232670454E-03
-.122607133644	1.90616000875E-11	1.24457800725E-12	2.24526352127E-11
.167177960571	1.55120856607E-03	-.123311187696	1.87427620129E-11
-2.51758439644E-12	2.24643442903E-11	.167462316709	1.21895235478E-03
-.124692133033	1.93355772447E-11	4.16502075367E-12	5.40225724493E-11
.344009212099	2.06032535201E-03	-.156730200058	3.18470134111E-11
-2.10245011749E-12	5.40230479264E-11	.34445749714	2.04109567507E-03
-.156731365504	2.80091647063E-11	4.03931836099E-12	1.39291915287E-10
.536594474028	2.30480177919E-03	-.175613401721	9.15313092105E-11
1.66977104069E-12	1.40423197174E-10	.546325775296	1.99969027980E-03
-.177643082744	0.89727047700E-11	6.19467206667E-12	2.15336362209E-10
.760051410093	1.30096085147E-03	-.203000446103	2.02418133399E-11
4.63373515961E-12	2.15333974913E-10	.7601640661246	1.32432933048E-03
-.203053154233	2.08594760348E-11	6.59950757857E-12	2.47891961600E-10
.999977960054	1.29015604315E-03	-.200239021052	2.60417658329E-11
6.00111200794E-12	2.47091476403E-10	1	1.02154282096E-03
-.200237957526	2.60160347667E-11		

I = 2

FREQUENCIA(I):(RAD/S) = 36.0130539232

FREQUENCIA(I):(HZ) = 5.73165554769

MODO PROPRIO =

9.92555098403E-04	3.34011472970E-03	.251020574969	-4.52144494064E-03
-.334037912127	5.70876319233E-03	-1.06318063080E-03	.003351777492
2.49843764476	-7.29592375680E-03	-.350166102465	5.78459492913E-03
1.03107165222E-03	1.39721804038E-02	.68623691541	1.10494606765E-03
-.330017716013	1.10647639052E-02	7.74679608205E-04	1.39754909805E-02
.686412574074	2.60492045586E-03	-.33619071224	1.16663148577E-02
-1.56705522100E-03	1.39027792030E-02	.686956717983	1.99204066792E-03
-.33037669826	1.20353060429E-02	2.59249544962E-03	3.36259956902E-02
.973324315605	1.63705197797E-04	-.097147420114	1.90229779365E-02
-1.35845435700E-03	3.36262916576E-02	.973411344073	4.78393541766E-04
-9.73032072305E-02	1.79320902227E-02	3.01220365200E-03	0.67013495005E-02
.903704977732	-3.20549502356E-03	.200865353166	5.69731347037E-02
1.03933497345E-03	.007405510430	.891713919211	2.51305684601E-03
.243910112712	5.53005115842E-02	3.85503736068E-03	.1340347077
.215500097354	1.75970335532E-02	.848117917791	1.25994530240E-02
2.00423632356E-03	.134033301692	.217117301019	1.00731761157E-02
.047472536042	1.29029130139E-02	4.10702521391E-03	.154290912917
-.054547291371	2.03347714607E-02	1	1.62096166037E-02
3.78515149102E-03	.154290611909	-.854030268942	2.79306971995E-02
.999937745000	1.61940984301E-02		

I = 3

FREQUENCIA(I):(RAD/S) = 48.0007578442

FREQUENCIA(I):(HZ) = 7.76815507705

MODO PROPRIO =

6.43267704604E-03	.021647039273	-1.67367653475E-02	3.00506452633E-04
2.22009700133E-02	3.69900769477E-02	-6.89044704913E-03	2.17226247794E-02
-1.66053051951E-02	4.04095500044E-04	2.32728790012E-02	3.74895369509E-02
1.10722263085E-02	9.05526797824E-02	-4.56005910595E-02	-7.34199615817E-05
2.25177033316E-02	7.68947068037E-02	5.02064190612E-03	.090574135300
-4.56202644009E-02	-1.73116889579E-04	2.23430894029E-02	7.56005344195E-02
-1.01559704742E-02	.090621369820	-4.56564276771E-02	-1.32390090279E-04
2.19566305726E-02	7.79999391513E-02	1.68017736013E-02	.217927620746
-6.46874500312E-02	-1.00317451207E-05	6.45515606400E-03	.128471272350
-8.00404361001E-03	.217929530036	-6.46932242698E-02	-3.17462901475E-05
6.46550052243E-03	.116216567400	1.95210718756E-02	.561905110003
-6.00590062037E-02	2.10410220416E-04	-1.33507302040E-02	.369230723546
6.73503369609E-03	.566460726024	-5.92620008035E-02	-1.66952352760E-04
-1.62119106139E-02	.350917050639	2.49094004626E-02	.060669669667
-1.43267579203E-02	-1.16937177520E-03	-5.63647104721E-02	0.16561402007E-02
1.06925246502E-02	.060660000959	-.014420377960	-1.25417904390E-03
-5.63210206160E-02	.004147797313	2.66225154202E-02	1
.056792364674	-1.35130301055E-03	-6.64570505145E-02	.105053340419
2.45312904526E-02	.999990042702	5.67500069590E-02	-1.05600840114E-03
-6.64597135047E-02	.104952776323		

Tabela 4.1: Frequências Naturais e Modos Próprios

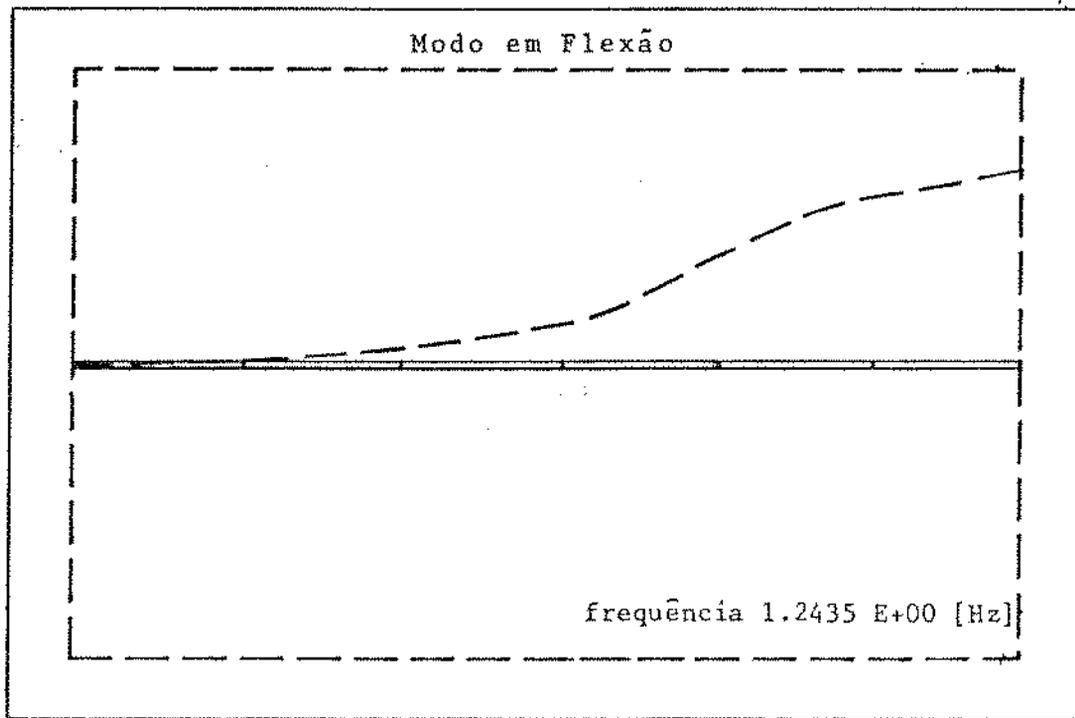


Figura 4.3: Primeiro modo de vibrar da estrutura

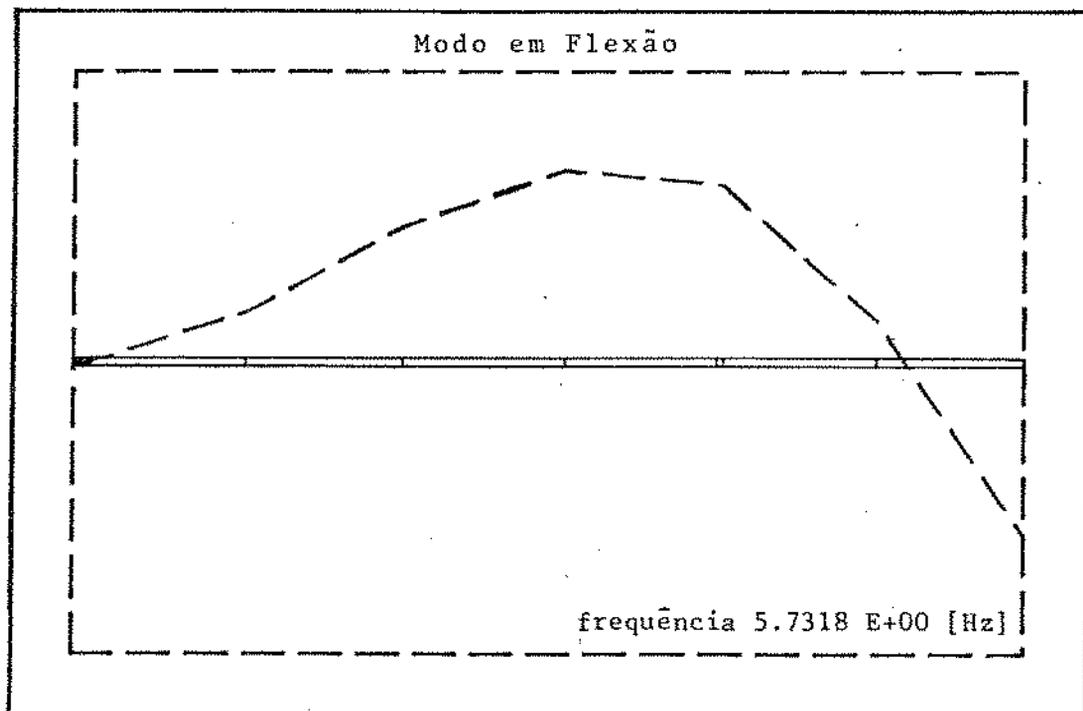


Figura 4.4: Segundo modo de vibrar da estrutura

### 4.1.3 MODELO MELHORADO

Em um segundo passo, o modelo inicial foi aprimorado visando-se com isto uma melhor aproximação do modelo com a estrutura real. Neste novo modelo levou-se em conta a base de fixação da estrutura, isto porque a mesma seria ensaiada experimentalmente nestas condições, ver figura 4.5, e acrescentou-se alguns elementos de massa concentrada

As massas concentradas nos nós (5), (8), (11), (13), (15) e (17) foram consideradas para computar os efeitos das massas dos bicos de pulverização e conexões de soldas que estão distribuídas discretamente ao longo do braço do pulverizador. Um elemento de mola foi, também, acrescentado ao sistema. Este elemento substitui os efeitos da barra de tração (mão francesa) que mantém o braço do pulverizador aberto quando a máquina está em operação, ver figura (4.1).

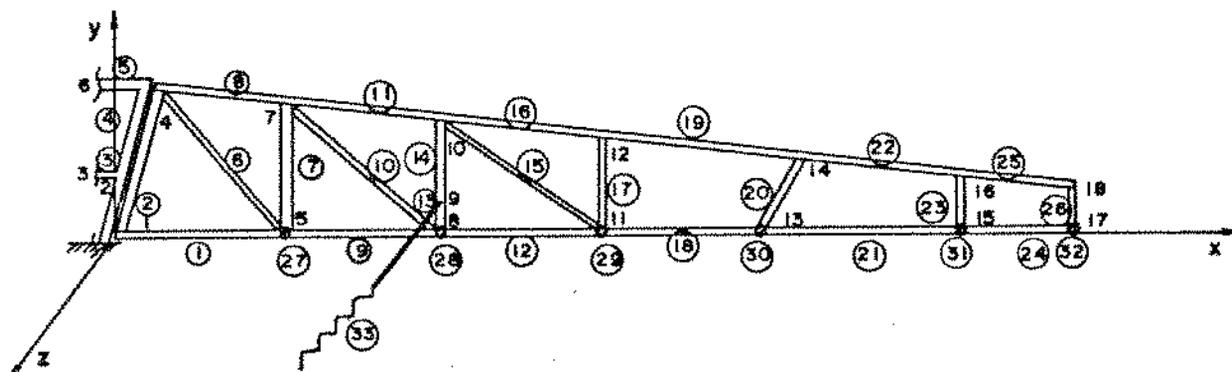


Figura 4.5: Discretização do braço do Pulverizador e da base

Os resultados obtidos para o novo modelo são mostrados a seguir. As três primeiras frequências naturais e os respectivos vetores modais da estrutura estão na tabela (4.2). Já as figuras (4.6), (4.7) mostram, respectivamente, o primeiro e segundo modo de vibrar da estrutura.

I= 1  
 FREQUENCIA(I):(RAD/S)= 8.05098291667  
 FREQUENCIA(I):(HZ)= 1.28135372793  
 MODO PROPRIO =

-3.35319737042E-19	1.37411953143E-19	7.95318702596E-06	1.30909921004E-05
-2.26922939378E-04	3.25313145239E-18	4.79500379787E-20	1.71280620649E-06
-6.69148334509E-19	2.03535042985E-19	2.49028036702E-05	2.27841773236E-05
-3.29895329778E-04	3.02373866892E-18	2.75092233959E-17	2.6465098120E-16
4.39672661404E-02	-3.03528970931E-03	-6.62125667132E-02	2.67360127544E-16
2.96514040664E-19	1.09227309896E-05	-4.90443454727E-17	2.65893835480E-16
4.2729165912E-02	-2.63634756641E-03	-6.99893916333E-02	2.32262901020E-16
4.12968271291E-17	-5.85228926207E-16	.157297277711	-.004545134947
-1.18456020992	2.93797559264E-16	1.49812800127E-17	5.85303407196E-16
.156902445852	-4.00558351792E-03	-1.19068622367	2.92212135355E-16
-4.98798507376E-17	5.85479970002E-16	.156147244367	-3.17454642344E-03
-1.20532039193	3.18140462119E-16	5.27707016180E-17	1.03699326577E-15
.231815611317	-5.11317376139E-03	-1.156401594356	4.01751514212E-16
-3.97950406268E-17	1.03700746026E-15	.330589253346	-5.03942395265E-03
-1.56459839699	3.81436080009E-16	5.97320246119E-17	1.75639964305E-15
543547469861	-5.24135799852E-03	-1.179485210173	4.33986397147E-16
-1.33200970107E-17	1.70137020617E-15	.553403198918	-5.20477804979E-03
-1.179892074602	4.18056999300E-16	6.65289139313E-17	2.37734358714E-15
.758327635610	-6.37683354861E-03	-1.205112753570	4.72277083732E-16
1.15690439560E-17	2.37732959885E-15	.757551977858	-6.43214381906E-03
-1.205206067381	4.77047464825E-16	6.91303256939E-17	3.00710151540E-15
1	-6.70781202508E-03	-1.211218506879	4.60715966921E-16
3.09668674251E-17	3.00709203442E-15	.999556863526	-6.71734728502E-03
-1.211209373309	4.60437327196E-16		

I= 2  
 FREQUENCIA(I):(RAD/S)= 36.4813373258  
 FREQUENCIA(I):(HZ)= 5.00618516599  
 MODO PROPRIO =

-5.39186449157E-06	2.20955270151E-06	7.26222027602E-05	2.00966475669E-04
-1.61498549621E-03	5.23096078963E-05	7.71038480765E-07	2.82101056359E-05
-1.07597518007E-05	3.27279682588E-06	1.97513754469E-04	2.70659278399E-04
-2.31338152472E-03	4.86210248538E-05	4.42342005083E-04	4.25552737229E-03
.243186091008	-1.02460639357E-02	-3.22912270141	4.29908955229E-03
4.76787779093E-06	1.21624248742E-04	-7.08621830625E-04	4.27551191207E-03
.240194372875	-7.20242275472E-03	-3.38597591648	3.73473419665E-03
6.64043512001E-04	9.41034695594E-03	.668249719342	-1.78159254408E-03
-3.36718965979	4.72419739309E-03	2.40895547816E-04	9.41154459311E-03
.668135380773	-8.97767596795E-04	-3.34655887978	4.69870414011E-03
-8.02056563728E-04	9.41438360247E-03	.667758960776	-3.98731096963E-03
-3.29726555165	5.11562568978E-03	8.48540783160E-04	1.66746139587E-02
.961550829732	7.80423475271E-03	-1.07315476683	6.46007223774E-03
-6.39895129327E-04	1.66748422828E-02	.963428889739	7.57468539999E-03
-1.05943887481	6.13340472649E-03	9.60477268096E-04	2.82425035642E-02
.877795909547	.013802008569	.233084277932	6.97840176471E-03
-2.14184106005E-04	2.06440244942E-02	.866864134086	1.47166734952E-02
.241573974196	6.72226070077E-03	1.06964104455E-03	3.02271398198E-02
.256374431851	3.95058262802E-02	.926857547637	7.59410722602E-03
1.86027574333E-04	3.02268184127E-02	.261237806693	4.06720815345E-02
.028675480466	7.67091306028E-03	1.11159978742E-03	4.83535029195E-02
-0.837174218596	4.92251713182E-02	1	7.40820711836E-03
6.26578294131E-04	4.83533504677E-02	-.833913396531	4.94869713916E-02
.999779800006	7.40372681629E-03		

I= 3  
 FREQUENCIA(I):(RAD/S)= 42.6807489261  
 FREQUENCIA(I):(HZ)= 6.79285216645  
 MODO PROPRIO =

-1.11509284042E-04	4.56958145322E-05	-1.52464149495E-06	-4.21912054010E-06
3.39052495082E-05	1.08181630567E-03	1.59458668523E-05	-5.92247217807E-07
-2.22522695373E-04	6.76847927892E-05	-4.14663360022E-06	-5.68226176978E-06
4.85658017180E-05	1.00553262776E-03	9.14808604106E-03	8.00086677345E-02
-5.10548554589E-03	2.15107416382E-04	6.77926908507E-03	8.89095782667E-02
9.06045995201E-05	-2.55339784822E-06	-1.63095077503E-02	8.84219685005E-02
-5.04267694512E-03	1.51208753260E-04	7.10856901538E-03	7.72381310803E-02
.013733100436	.194615620126	-1.40293356207E-02	3.74030258388E-05
7.06912809442E-03	.097701244127	4.98196683970E-03	.194640388492
-1.40269351791E-02	1.88478711918E-05	7.02581632316E-03	9.71740175265E-02
-1.65873518006E-02	.194699103769	-1.40190325598E-02	8.37102113018E-05
6.92232916647E-03	.105796382495	1.75486931032E-02	.344848107211
-2.01070946737E-02	-1.65522019701E-04	2.25299738636E-03	.13360891509
-1.32336871308E-02	.344852827534	-2.02263717908E-02	-1.59024087737E-04
2.22420203371E-03	.126845096142	1.98636541919E-02	.584083920685
-1.04285801088E-02	-2.91442496741E-04	-4.89340654167E-03	.144320500964
-1.004429546839	.592387785055	-1.81822814585E-02	-3.08964066936E-04
-5.07164050995E-03	.139823241232	2.21212731232E-02	.790576432143
-5.30236361708E-03	-8.29391292037E-04	-1.73591724327E-02	.157053920968
3.04724090483E-03	.790569785114	-5.48446605914E-03	-8.53875832158E-04
-1.73973383896E-02	.158640292783	2.29898229312E-02	1
1.75757621756E-02	-1.03344069424E-03	-2.09941512934E-02	.153209316203
1.29582813801E-02	.999996847138	1.75073039817E-02	-1.03893696464E-03
-2.09895300612E-02	.153116658964		

Tabela 4.2: Frequências Naturais e Modos Próprios

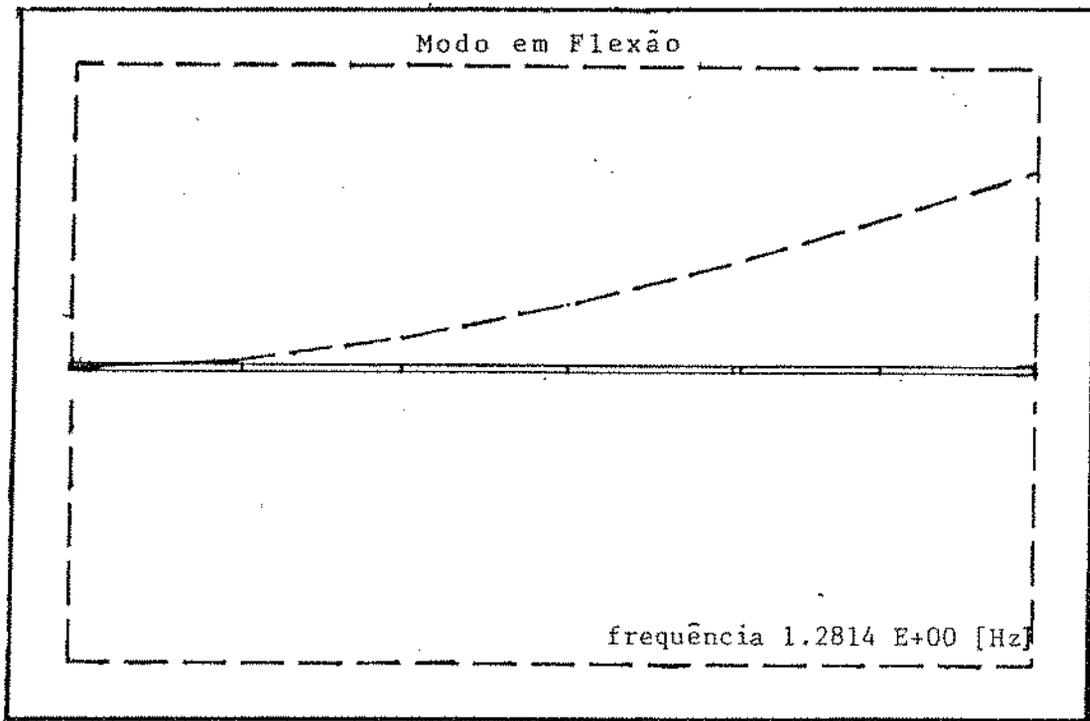


Figura 4.6: Primeiro modo de vibrar da estrutura

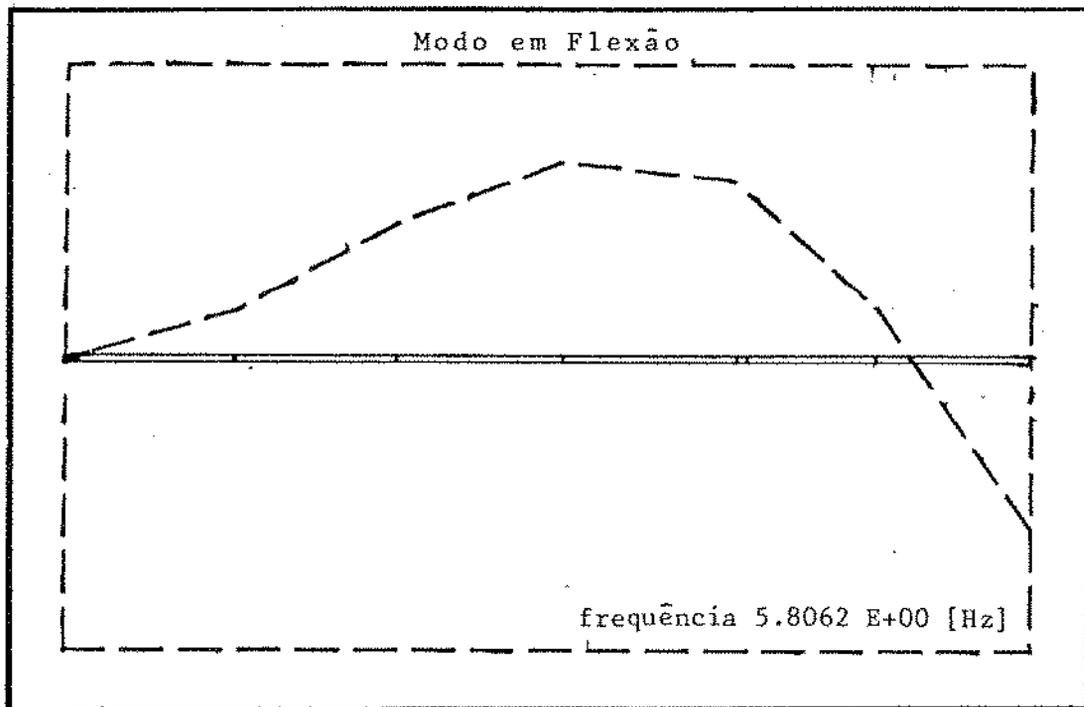


Figura 4.7: Segundo modo de vibrar da estrutura

## 4.2 ASPECTOS PRATICOS - TESTE EXPERIMENTAL

No capítulo três, apresentou-se o desenvolvimento matemático utilizado na análise modal experimental. Já nas seções 4.1.2 e 4.1.3, obteve-se os resultados teóricos do comportamento da estrutura em análise. Estes resultados teóricos, obtidos pelo método dos elementos finitos, caracterizam o comportamento dinâmico teórico da estrutura real, que é avaliado e utilizado no teste modal (na análise experimental da estrutura real). O teste modal da estrutura real servirá para avaliar o modelo teórico proposto e, conseqüentemente, gerar novos subsídios para uma melhor aproximação do modelo proposto com o real.

O teste experimental consiste basicamente na obtenção dos parâmetros modais estruturais através de uma análise modal. O equacionamento matemático para a obtenção dos parâmetros modais foi desenvolvido no capítulo 3, restando a abordagem dos aspectos técnicos e práticos para a obtenção das medidas utilizadas no teste modal.

Na análise modal, como citado anteriormente, há dois tipos básicos de medidas de vibração:

1. Aquele em que mede-se um parâmetro (normalmente o nível da resposta),
2. Aquele em que ambos, entrada (excitação) e saída (resposta) são medidos.

Neste trabalho as medidas serão do segundo tipo em que ambos, resposta e excitação, são medidas simultaneamente. Desta forma, a relação entre eles pode ser utilizada para avaliação das propriedades do sistema diretamente dos parâmetros medidos experimentalmente. Nesta categoria de análise algumas aproximações são usadas /12/, já descritas na seção 3.3, que é referida como "Método de um único Ponto

de Excitação". Neste método, a excitação é feita em um único ponto e as medidas (respostas) são obtidas nos demais pontos, inclusive no ponto de excitação.

Do ponto de vista experimental, os pontos onde são feitas as medidas podem ser quaisquer pontos ao longo da estrutura, no entanto estes pontos de medidas ou excitação devem ser convenientemente escolhidos. A medida da excitação e resposta para os pontos escolhidos é normalmente referida como medida de inércia (/10/, /11/, /12/ e /19/).

#### 4.2.1 SISTEMA BÁSICO DE MEDIDA DA MOBILIDADE ESTRUTURAL

Experimentalmente, as medidas de mobilidade envolvem algumas variantes específicas:

- Mecanismo de excitação;
- Sistema transdutor (medição dos vários parâmetros de interesse),  
e ;
- Um analisador (obtenção e processamento das informações desejadas).

A figura 4.8 mostra o esquema da montagem dos equipamentos utilizados no sistema de medida, incluindo-se a estrutura.

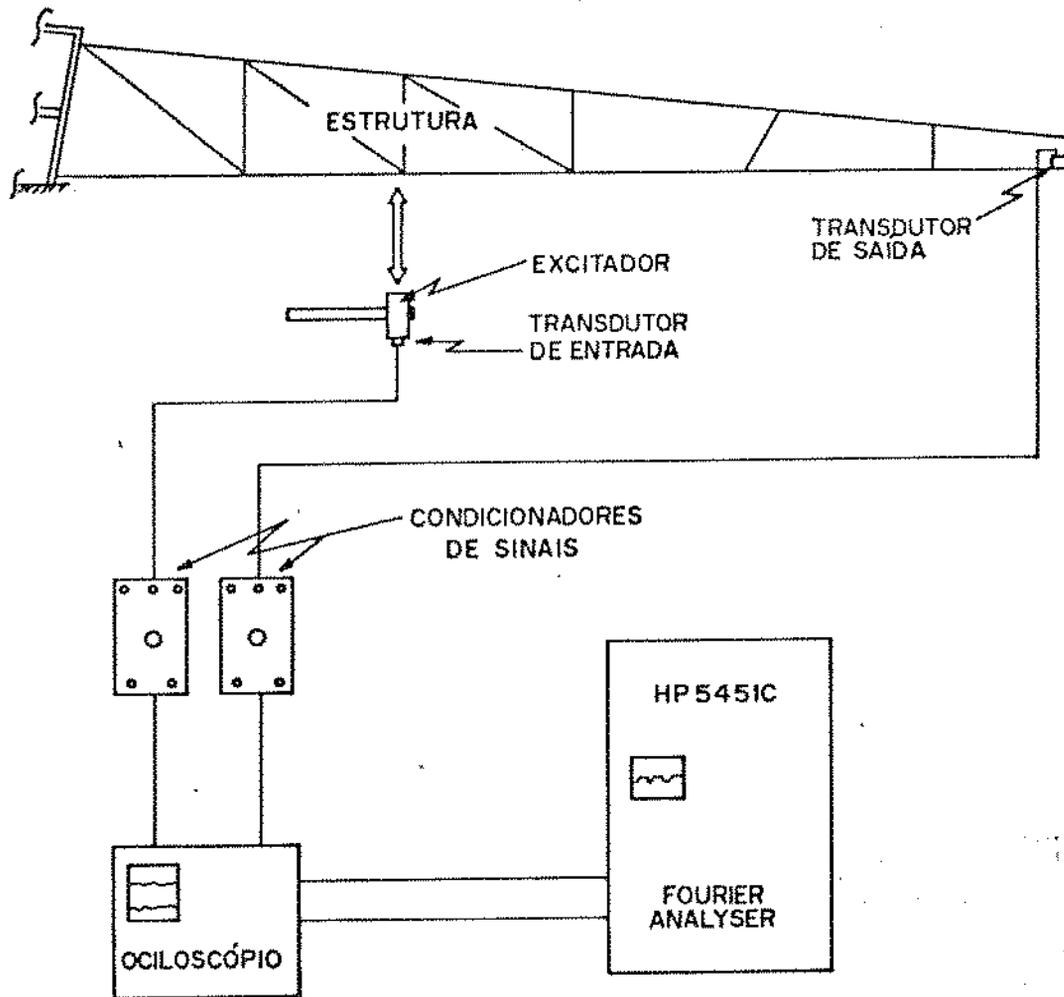


Figura 4.8: Esquema dos equipamentos utilizados no teste experimental

Os principais itens da cadeia de medição são discutidos a seguir.

#### a. MECANISMO DE EXCITAÇÃO

No ensaio experimental utilizou-se um sinal do tipo impulsivo. O mecanismo de excitação utilizado foi um martelo instrumentado impactando a estrutura. A escolha deste tipo de excitação deu-se pe-

los motivos expostos na seção 3.2 no entanto, é interessante descrever sobre a escolha do "martelo mais adequado" para a excitação da estrutura em análise.

A colisão de dois corpos rígidos origina uma onda de tensão causada pelo impacto inicial, a qual propaga com uma velocidade finita do ponto de contato entre os corpos para o meio, e este fenômeno produz uma vibração na estrutura. O tratamento matemático para este problema envolve sofisticados métodos analíticos de análise de propagação de onda, além de ser de difícil implementação. R. J. Thornhill et alii /33/ faz uma análise aproximada para este problema. A teoria utilizada é linear e a estrutura impactada é caracterizada pela medida da função de resposta em frequência para os pontos de impacto. Neste trabalho Thornhill estuda a relação existente entre a massa de impacto (martelo) e a massa da estrutura além da relação entre a rigidez do martelo e a rigidez da estrutura estabelecendo as condições ótimas para cada caso.

Na escolha do martelo para o teste não foi feito um modelamento teórico estabelecendo a relação ótima entre a rigidez de impacto e a rigidez da estrutura, no entanto, utilizou-se os resultados obtidos por Thornhill para estabelecer uma relação ótima de massa e rigidez entre o martelo e a estrutura através de um método empírico. Nesta etapa do trabalho diversos tipos de material foram utilizados para teste. O gráfico 4.9 mostra a resposta para o contato entre duas superfícies de aço e o gráfico 4.10 entre uma superfície de borracha com uma superfície de aço, respectivamente.

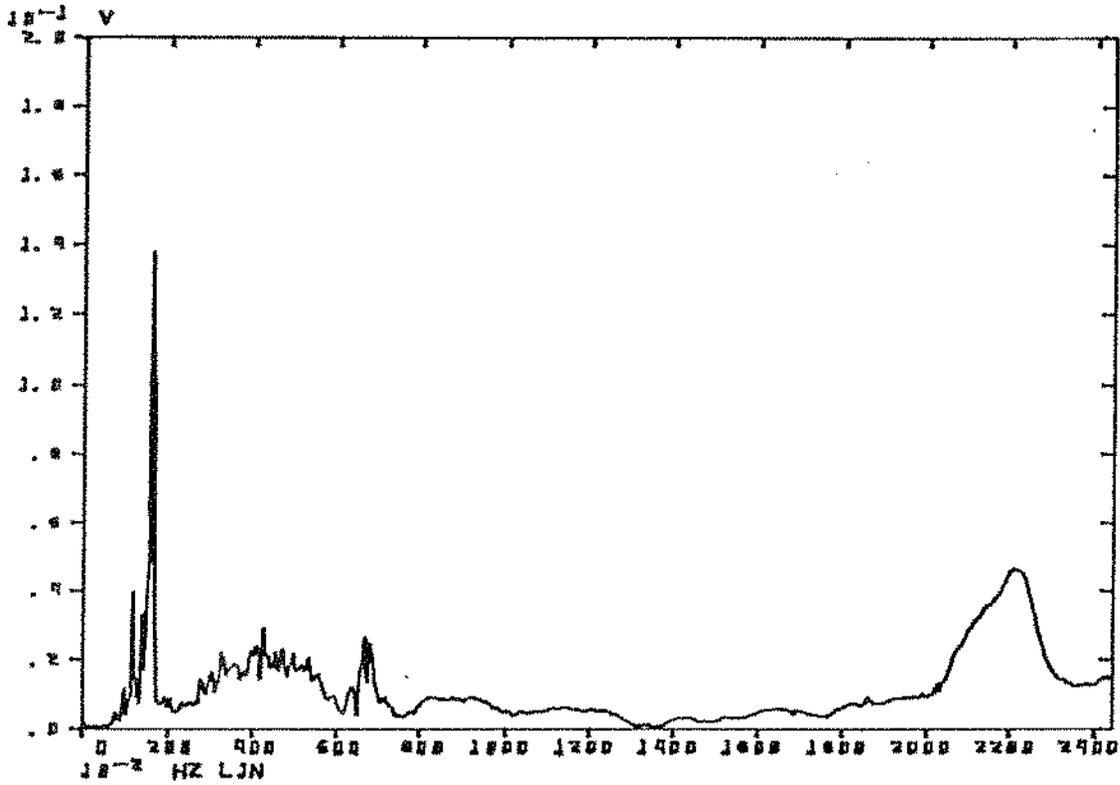


Figura 4.9: Função de Resposta em Frequência (contato aço/aço)

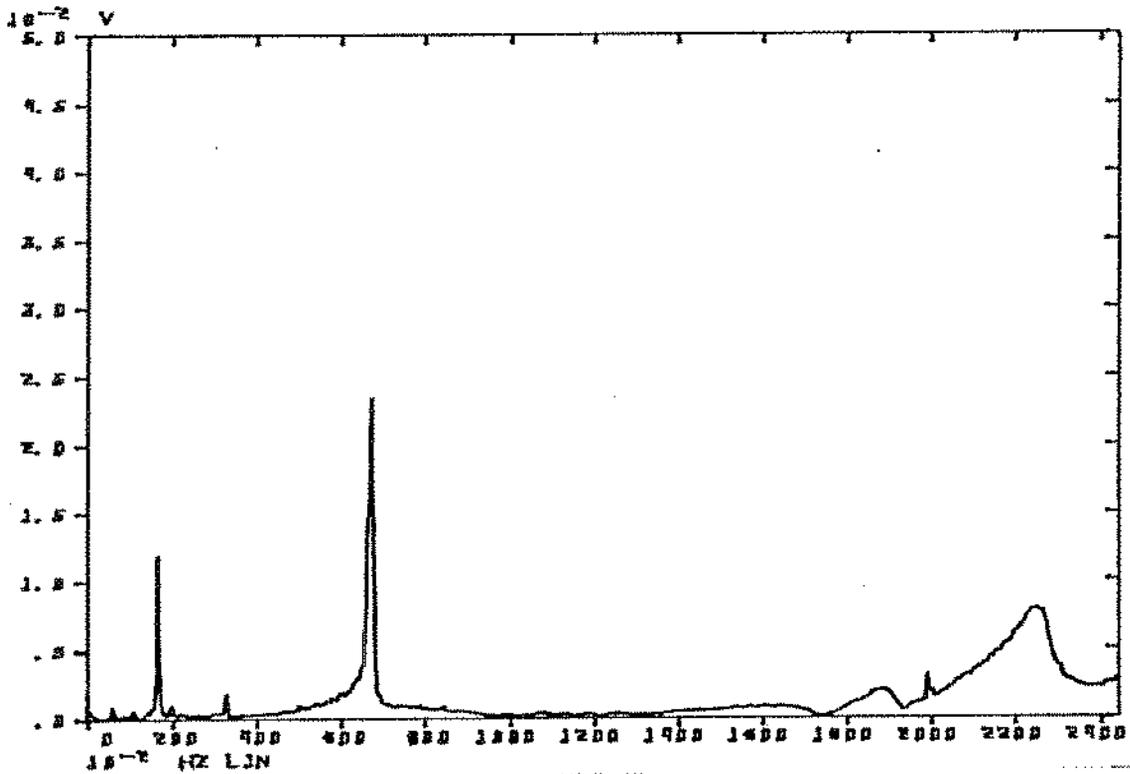


Figura 4.10: Função de Resposta em Frequência (contato borracha/aço)

O gráfico 4.10, como se pode observar, é a que representa a função de resposta com menor nível de ruído e excitando preferencialmente as baixas frequências, ou seja: o martelo adequado para este caso. Na escolha do material da ponta do martelo, além das propriedades físicas já citadas, levou-se em conta também a geometria da mesma.

O martelo para excitar a estrutura é de aço com uma massa de 0.5 Kg e uma ponta de borracha conforme mostrado na figura 4.11. A pessoa que excita a estrutura deve conhecer os pontos convenientes para bater, direção de excitação, além de saber, é claro, a melhor maneira de fazê-la. Estes requisitos foram conseguidos avaliando-se o modelo teórico da estrutura, braço do pulverizador e da experiência adquirida através de testes experimentais em estruturas simples.

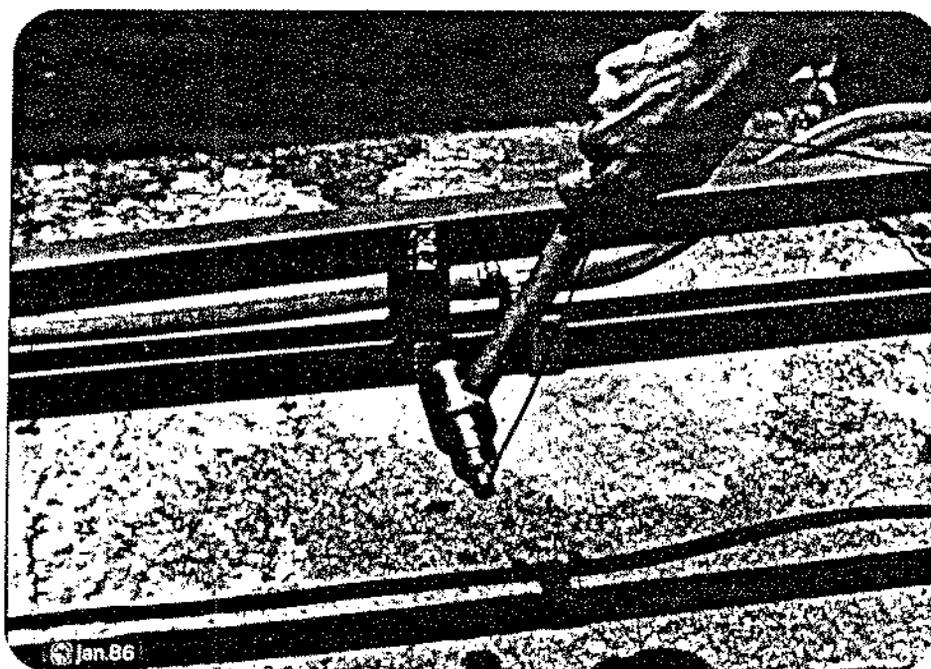


Figura 4.11: Martelo instrumentado.

## b. TRANSDUTOR

Existe uma grande variedade de aparelhos e equipamentos para a avaliação das forças de excitação e resposta de interesse das máquinas e equipamentos. Na sua grande maioria estes equipamentos utilizam transdutores piezoelétricos. No caso em análise, os transdutores do tipo acelerômetro não interferem na massa da estrutura, podendo ser utilizados sem maiores problemas.

A escolha do tipo de transdutor gerou algumas dificuldades, no tocante à faixa de frequência, já que os acelerômetros trabalham normalmente com frequências altas. Este entrave foi contornado com o uso de acelerômetros inerciais, do tipo 4380 da Bruel & Kjaer, indicados para medidas de frequência de 0.1 Hz a 10 KHz, figura 4.12-c.

## c. AMPLIFICADOR - CONDICIONADOR

A escolha destes aparelhos está fortemente relacionada à escolha do tipo de transdutor utilizado, e deve atender aos requisitos do mesmo. Como a faixa de frequência é inferior a 100 hz utilizou-se um condicionador "Conditioning Amplifier Type 2626" da Bruel & Kjaer que permite analisar frequências nesta faixa sem maiores problemas.

## d. ANALISADOR

Ele tem a finalidade de medir os vários sinais captados pelos transdutores para com isto avaliar os níveis das forças de excitação e resposta da estrutura. Eles são de vários tipos e a escolha de um ou de outro está relacionada com o tipo de excitação a ser usada. Os dois tipos mais comuns de analisadores são: "Fourier Analyser" e "Frequency Response Analysers". No entanto, as mesmas funções de resposta podem ser conseguidas com um filtro de banda estreita regulável,

um voltímetro, um medidor de fase além, é claro, de uma grande disponibilidade de tempo e paciência.

No ensaio do braço do pulverizador, utilizou-se um "FOURIER ANALYSER SYSTEMS HP 5451C", figura 4.12-d.

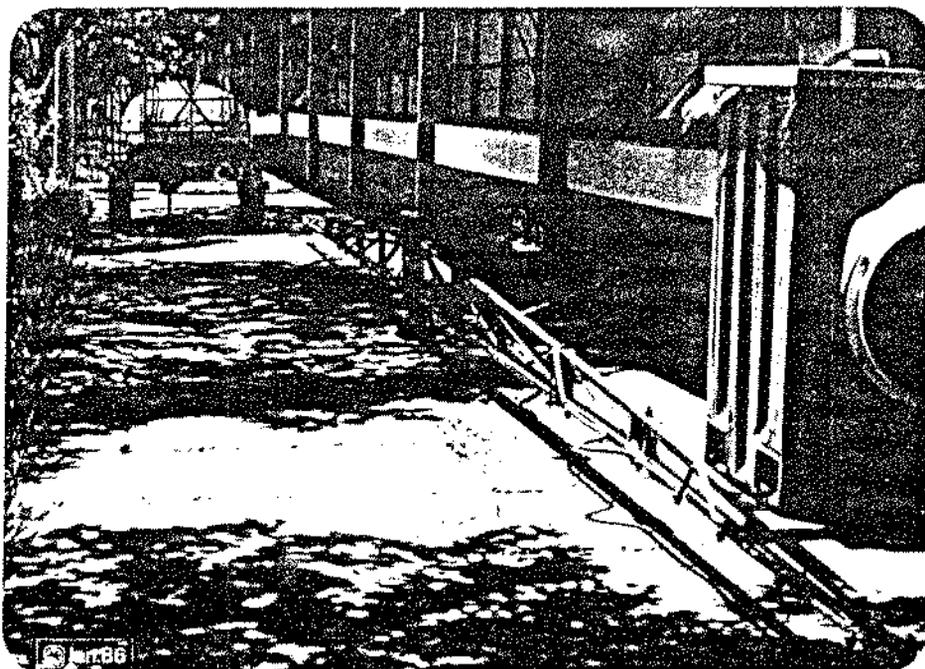


Figura 4.12: a- Braço do Pulverizador mostrando as barras de tração

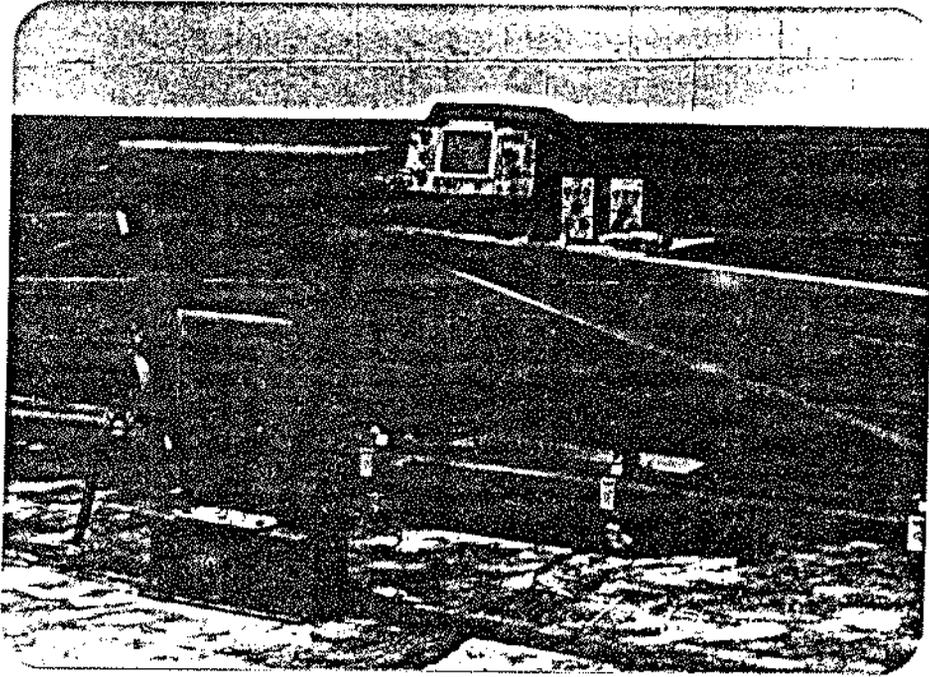


Figura 4.12: b- Detalhes da fixação dos braços e instrumentos usados

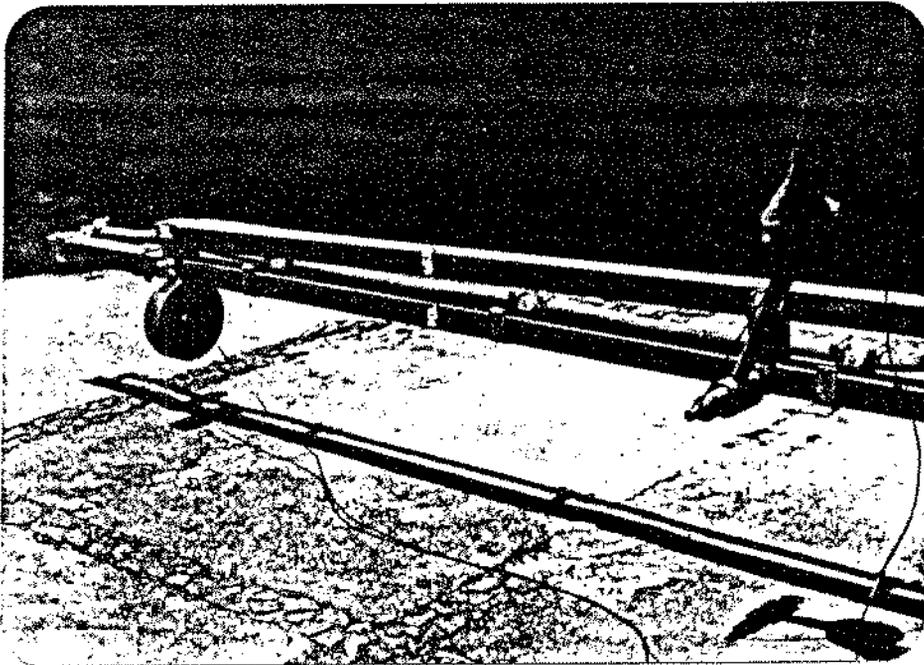


Figura 4.12: c- Detalhes dos acelerômetros e martelo

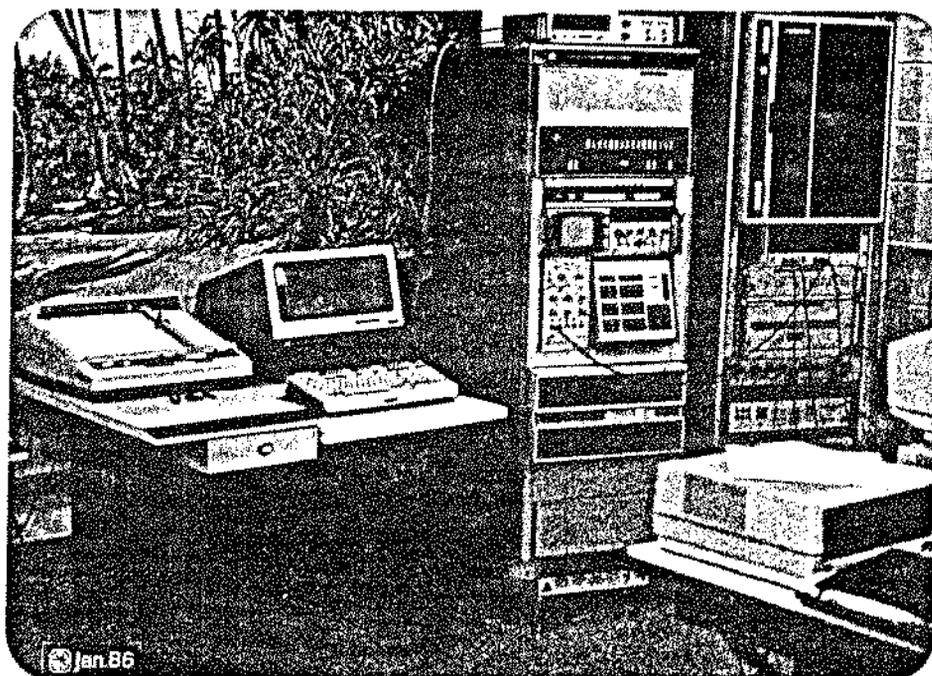


Figura 4.12: d- Sistema "5451C FOURIER ANALYSER"

#### 4.2.2 UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE PARA A ANÁLISE DO BRAÇO DO PULVERIZADOR

Os pontos de excitação da estrutura foram escolhidos coincidentes com os nós, figura 4.2, e o ponto de captação da resposta foi escolhido como sendo o nó (14) da figura 4.2, tendo em vista ser este ponto da estrutura o que apresenta maior deslocamento quando a mesma está vibrando. Isto pode ser observado analisando-se os modos obtidos teoricamente (gráficos 4.3, 4.4, 4.6 e 4.7).

A partir das condições e considerações feitas nos itens anteriores passou-se para as medidas das funções de resposta em frequência. O sinal de excitação, impulso, foi ajustado para excitar os modos de baixa frequência e as respostas foram mantidas em níveis adequados.

Os gráficos, figuras (4.13) e (4.14), mostram o sinal de excitação da estrutura (impulso) aplicado no nó (5) e seu espectro, respectivamente.

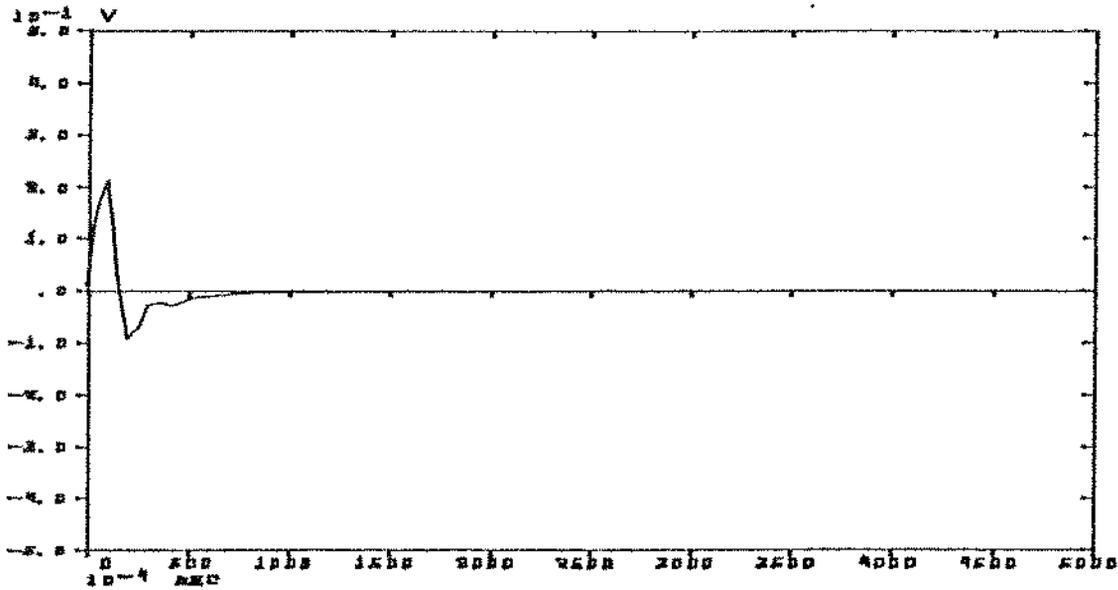


Figura 4.13: Sinal de excitação da estrutura (impulso)

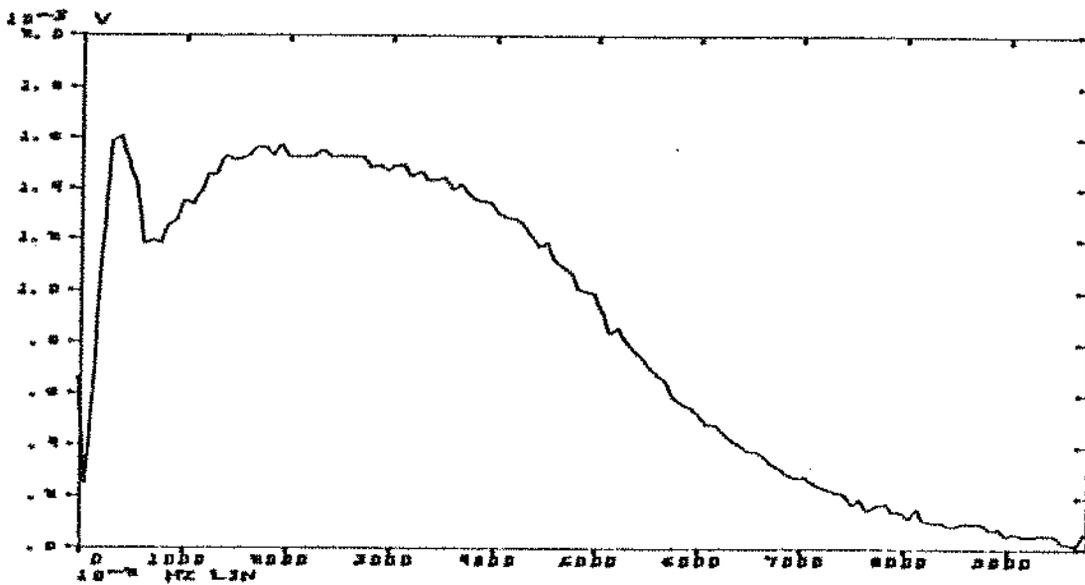


Figura 4.14: Espectro do sinal de excitação

As funções de resposta em frequência da estrutura para os pontos de excitação (2), (3) são mostradas nos gráficos 4.15, 4.16, com excitação e resposta medidas na direção horizontal. Já os gráficos 4.17, 4.18 mostram as funções de resposta em frequência para os mesmos pontos de medidas, com excitação e resposta medidas na direção vertical.

O gráfico tridimensional, figura 4.19, mostra a relação entre as várias funções de respostas em frequência para o braço do pulverizador, excitação e resposta na direção vertical.

Feitas todas as medidas, passou-se para a fase de análise dos parâmetros medidos, terceiro passo do programa de análise modal. Nesta etapa surgiram algumas dificuldades, isto pela própria complexidade e versatilidade do programa já citado anteriormente, ou seja:

- definir a melhor resposta para ajustar as funções analíticas;
- ajustar o nível de ruído "threshold" do sinal;
- analisar a função erro .

O gráfico, figura 4.20, mostra as curvas das funções de resposta em frequência medida (a) e ajustada (b) para o ponto de medida, nó (2) . Neste caso, a excitação e resposta foram medidas na direção horizontal.

O gráfico 4.21 mostra as funções de resposta em frequência medida (a) e ajustada (b) para o mesmo ponto de medida anterior, sendo a excitação e a resposta medidas na direção vertical.

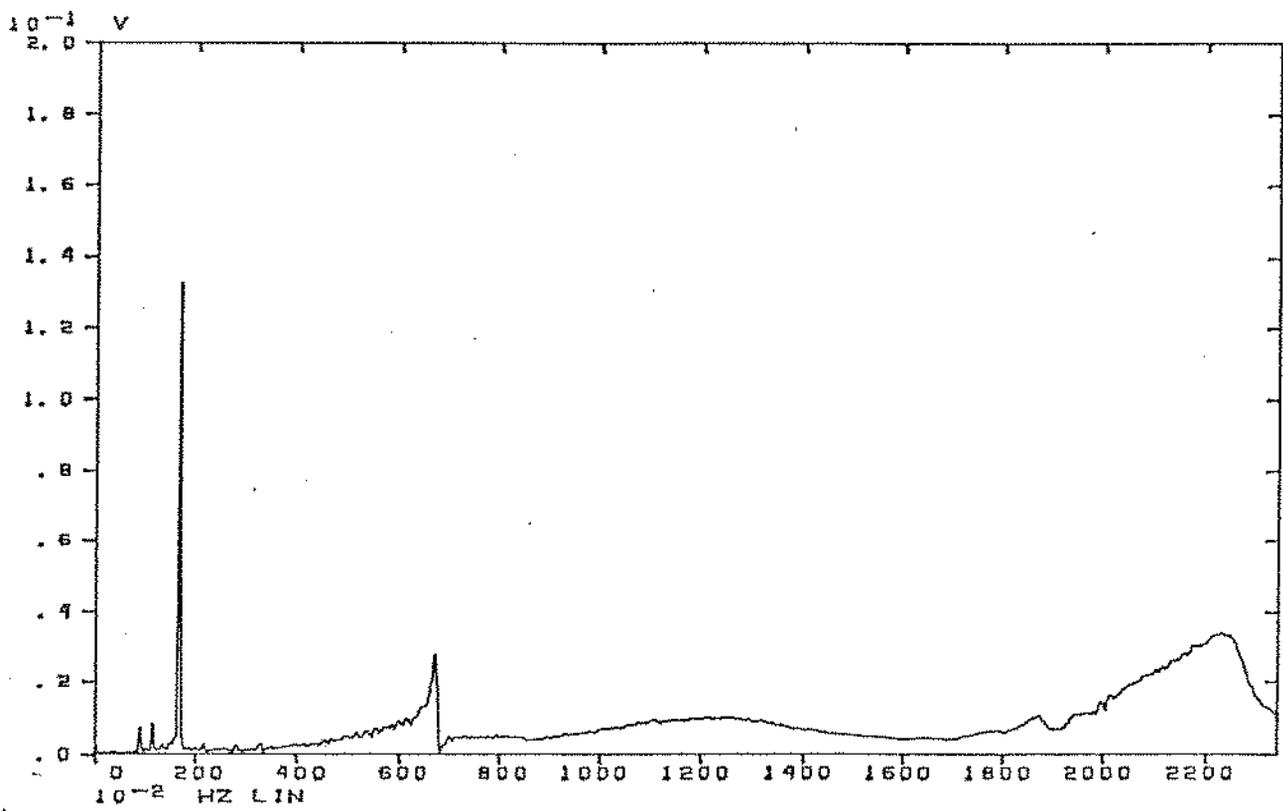


Figura 4.15: F. R. F. medida na direção horizontal (ponto 2)

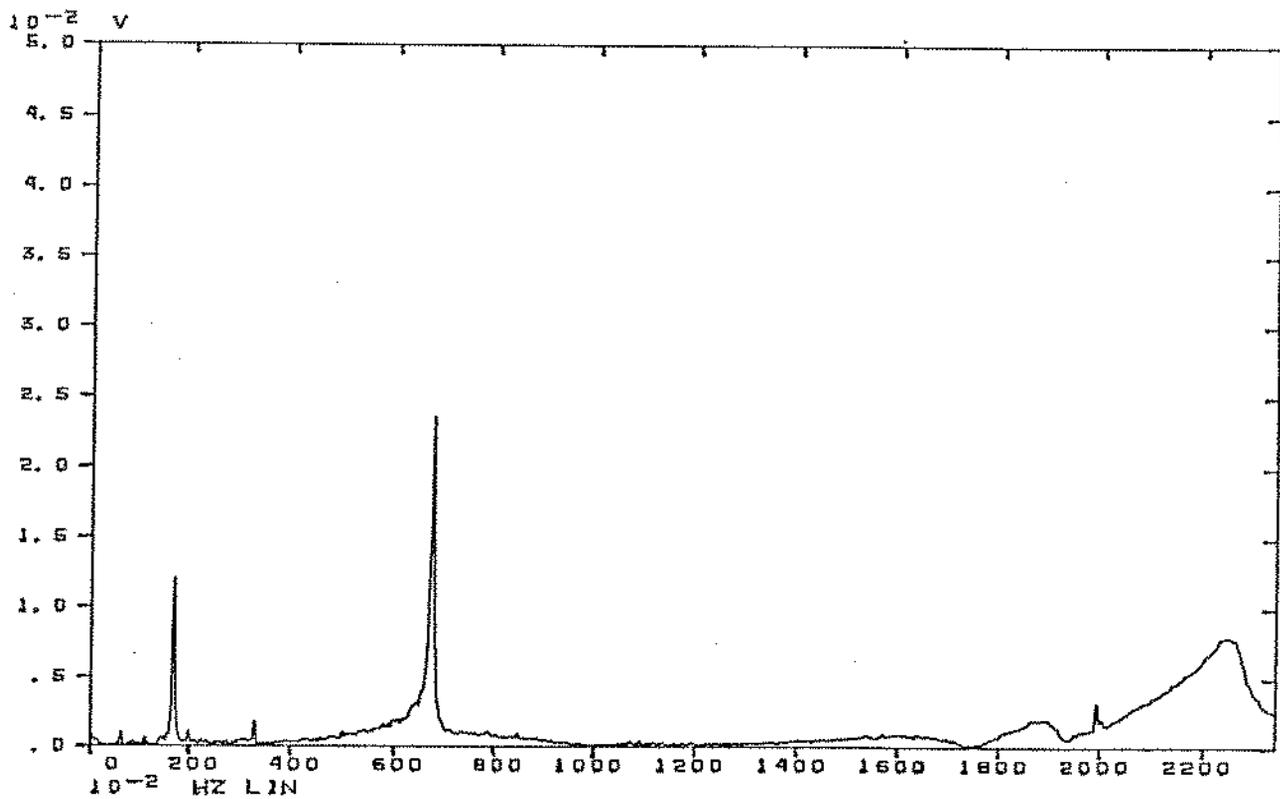


Figura 4.16: F. R. F. medida na direção horizontal (ponto 3)

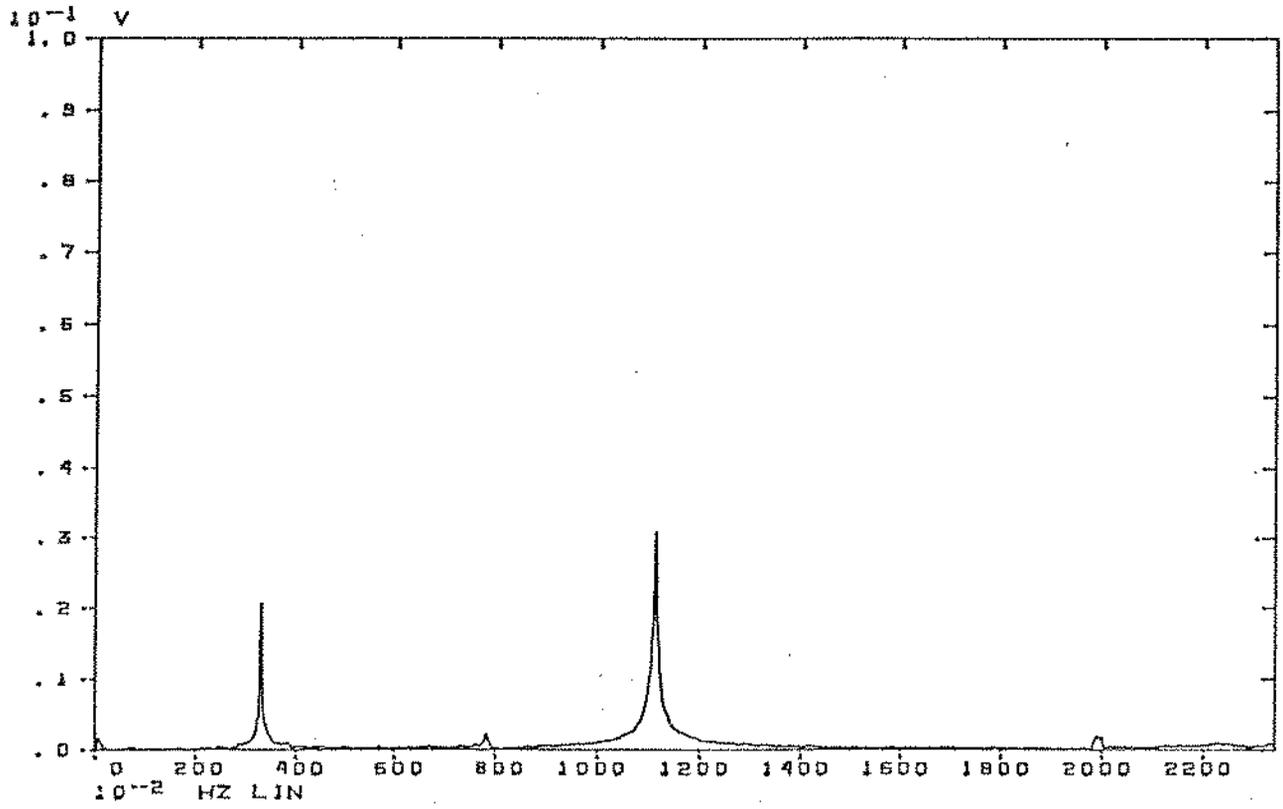


Figura 4.17: F. R. F. medida na direção vertical (ponto 2)

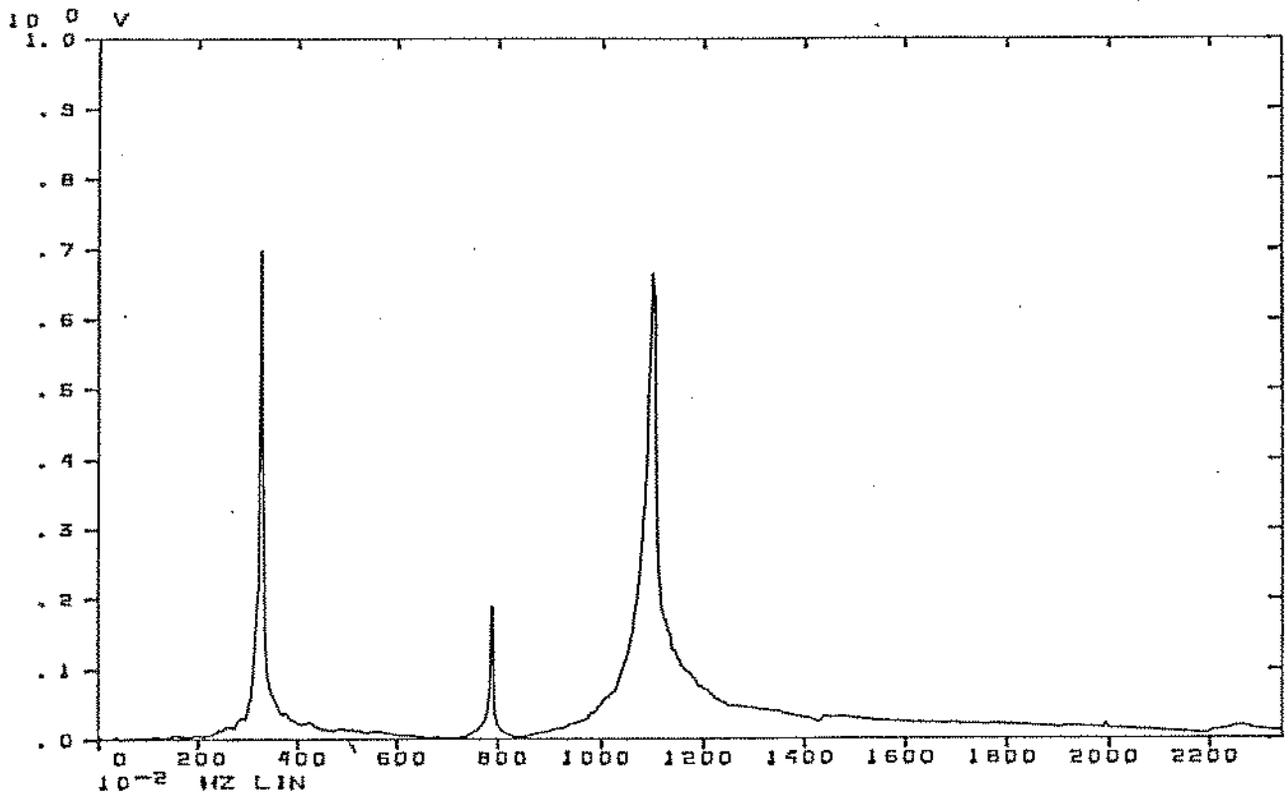


Figura 4.18: F. R. F. medida na direção vertical (ponto 3)

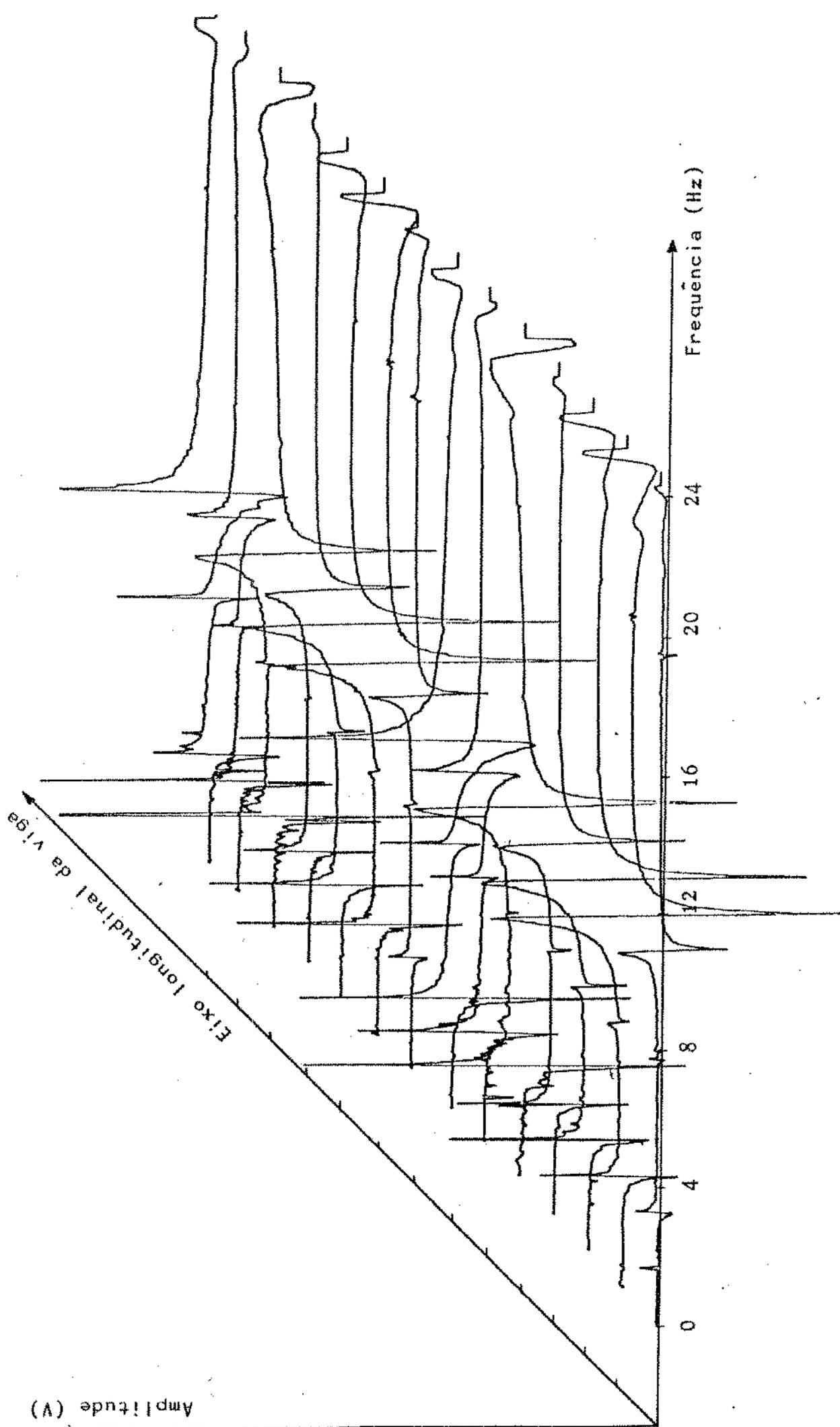


Figura 4.19: Relação entre as Funções de Respostas em Frequência medidas na direção vertical

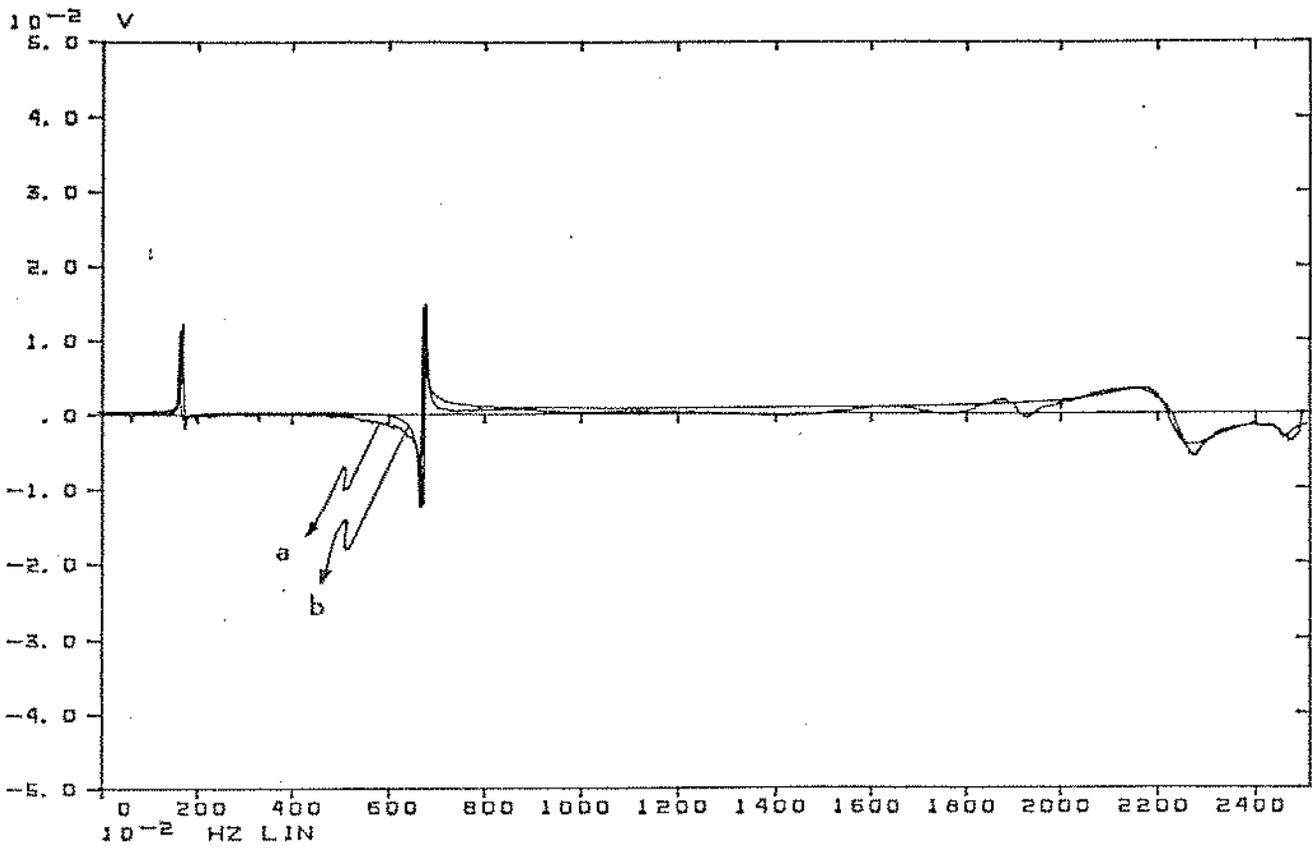


Figura 4.20: a - Sinal medido na direção horizontal  
b - Sinal ajustado

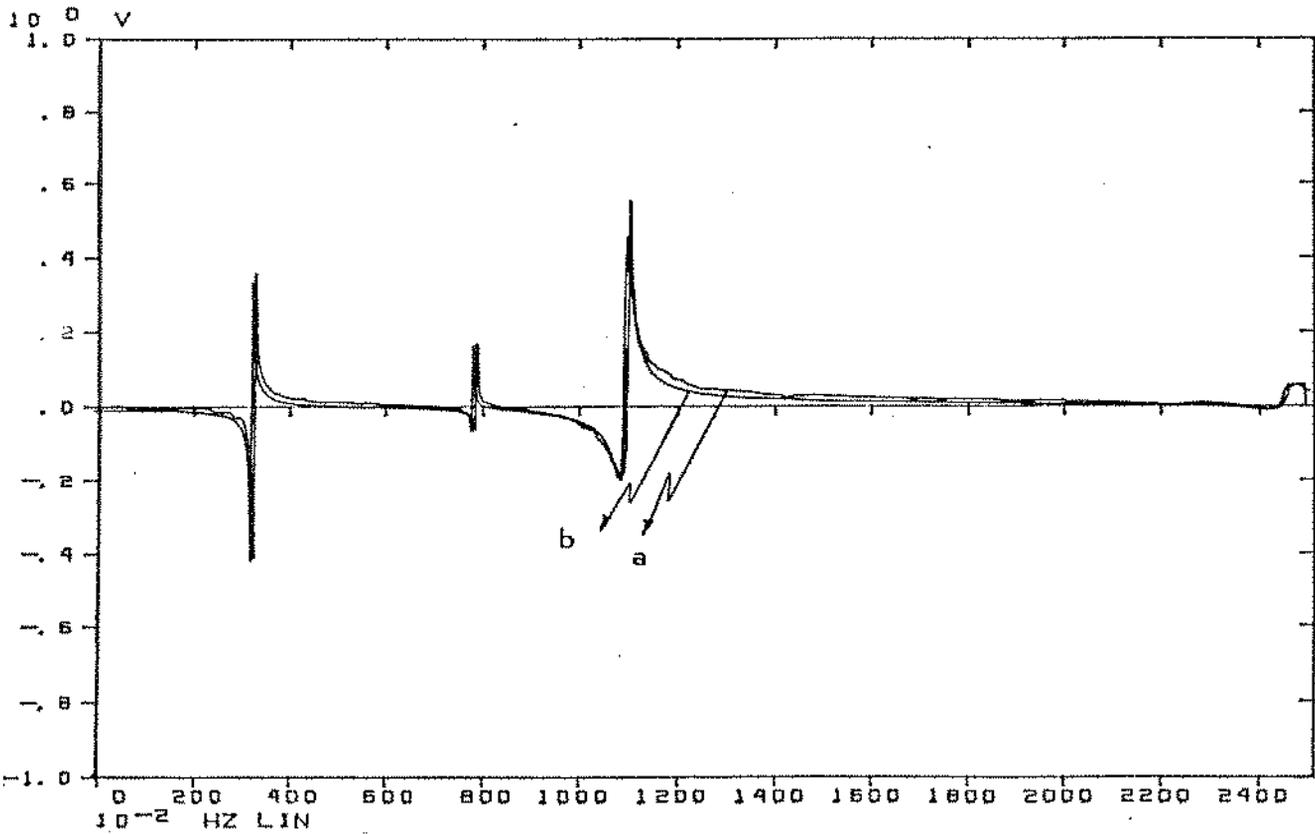


Figura 4.21: a - Sinal medido na direção vertical  
b - Sinal ajustado

O quarto passo do programa permitiu estimar a frequência natural e fator de amortecimento, tabela 4.3.

Modo	direção horizontal		direção vertical	
	freq. [Hz]	fator de amort. [/]	freq. [Hz]	fator de amort. [/]
1	1.6	.62	3.2	.33
2	6.4	.16	7.8	.70
3	18.3	1.30	11.8	.78
4	22.1	2.70	24.3	2.28

Tabela 4.3: Resultados da análise modal.

No último passo do programa é possível visualizar-se na tela a animação dos modos de vibrar da estrutura. As figuras 4.22 e 4.23 mostram o primeiro modo de vibrar da estrutura observado do plano horizontal e de um ponto qualquer do espaço.

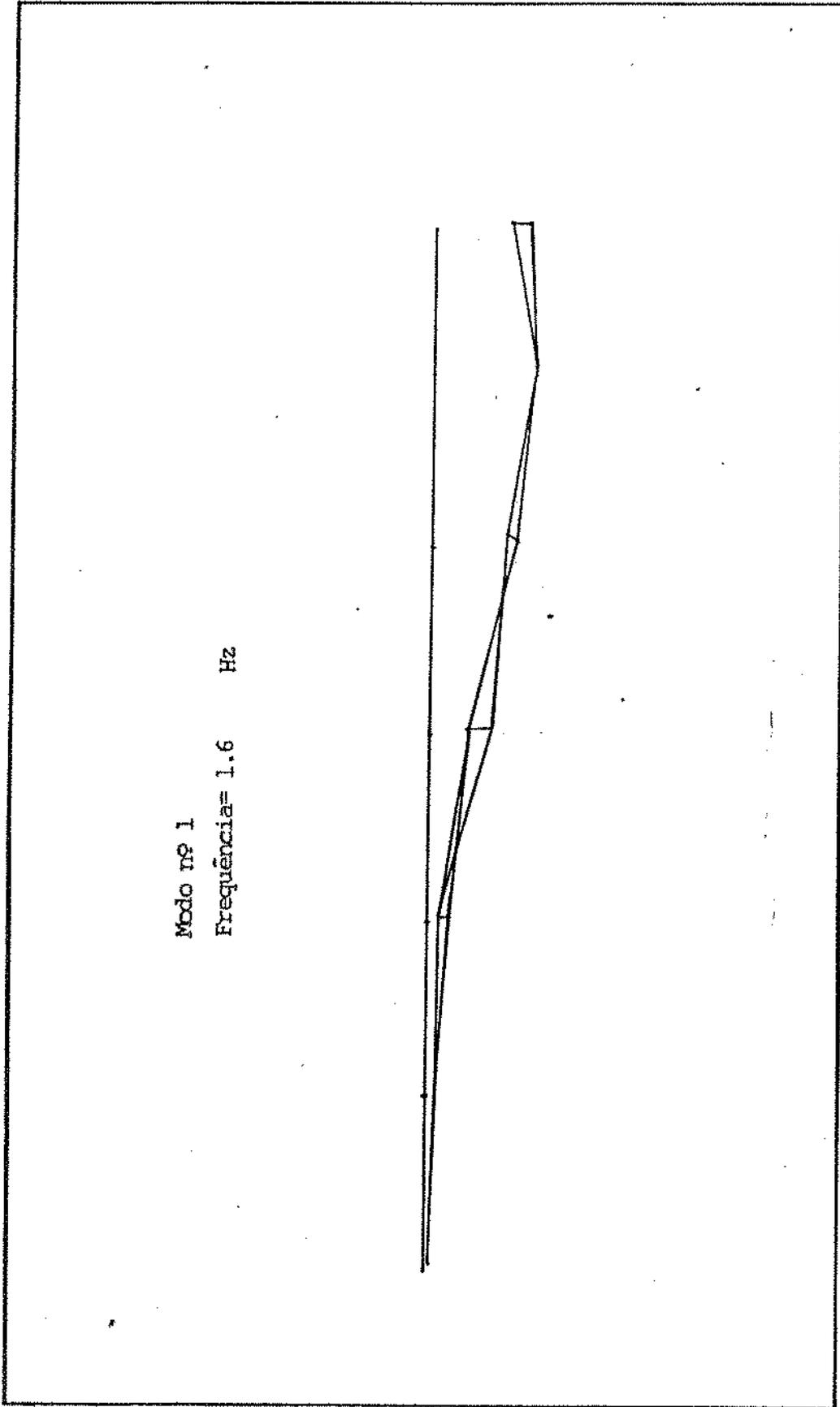


Figura 4.22: Primeiro modo - plano xy

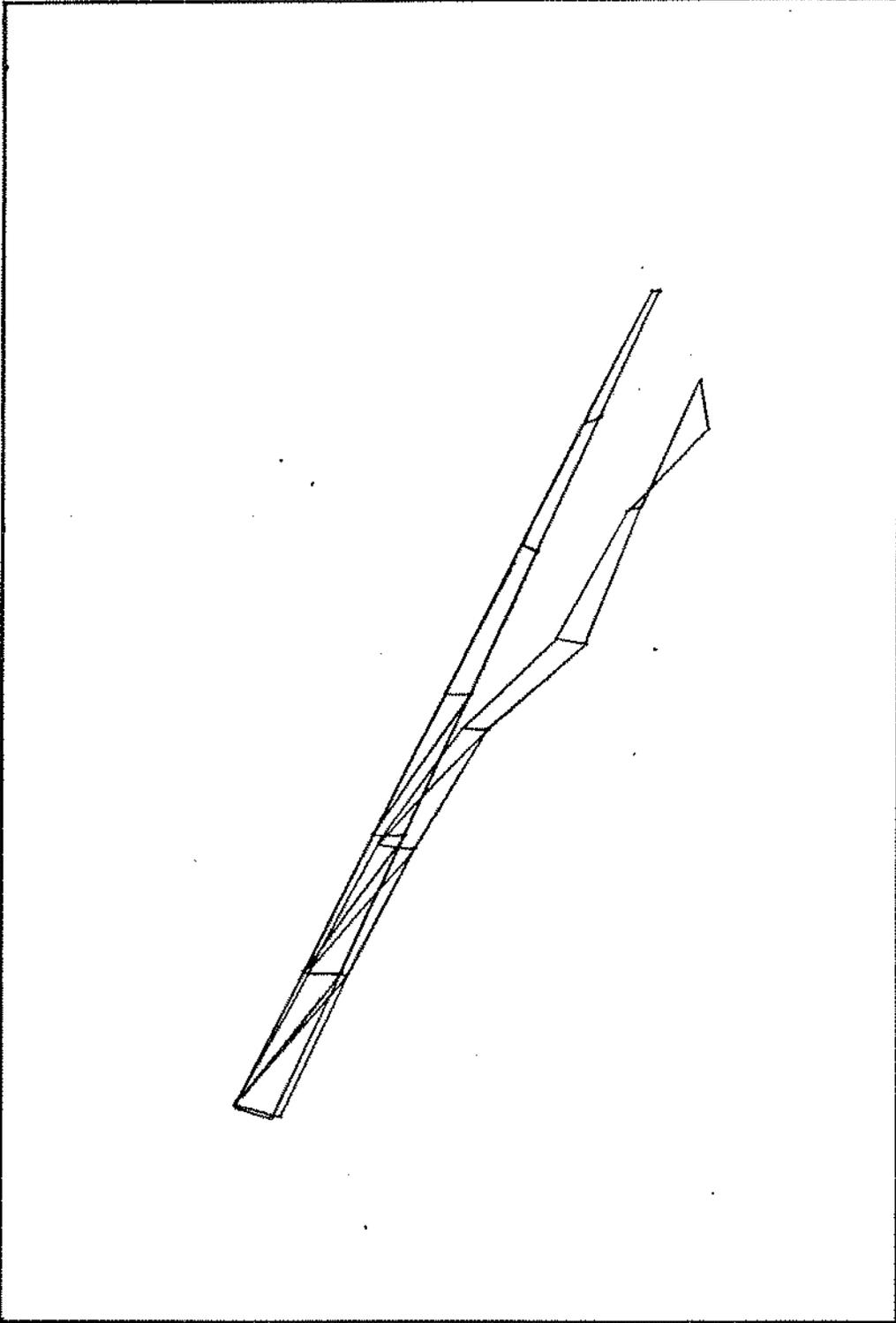


Figura 4.23: Primeiro modo - vista de um ponto do espaço

### 4.3 ANÁLISE DE RESULTADOS

Os resultados obtidos no modelamento teórico, por elementos finitos, tabelas 4.1 e 4.2, mostraram-se bastante razoáveis, no aspecto qualitativo. Isto pode ser observado analisando-se os modos próprios de vibrar da estrutura (braço do pulverizador), figuras 4.3, 4.4, 4.5 e 4.7, os quais mostram os modos de vibrar de uma viga em balanço /07/. Outro aspecto que vem reforçar a qualidade destes resultados são os planos de vibração da estrutura, plano xz (de menor rigidez) para o primeiro e segundo modo, e plano xy (de maior rigidez) para o terceiro modo. Já no aspecto quantitativo, estes estão sujeitos a algumas distorções, visto que a estrutura possui amortecimento não computado nos cálculos teóricos. Além disso, os pontos de fixação da estrutura, nós (1) e (2), não são perfeitamente rígidos como considerados, e a distribuição de massa na estrutura não é uniforme. Finalmente, ressalte-se a incerteza nos cálculos das propriedades geométricas dos elementos, visto que alguns destes possuem geometria irregular e foram aproximados por elementos com geometria regular. Este tipo de aproximação é evidenciado nos elementos (15) e (17), da figura 4.2, os quais foram aproximados por elementos de viga simples.

Os resultados experimentais obtidos por Análise Modal, levando-se em conta o amortecimento da estrutura conforme exposto no item 3.4, mostrados na tabela 4.3 e gráficos das figura 4.22, 4.23, foram bastante animadores, pois estes confirmaram de certa maneira os resultados teóricos obtidos.

Saliente-se que o aspecto qualitativo dos resultados experimentais são de boa qualidade. Isto pode ser confirmado com um ensaio de varredura em frequência realizado utilizando-se um excitador hi-

draúlico.

Os braços do pulverizador foram montados sobre um pistão hidráulico, como mostrado na figura 4.24, e a excitação, assim como a medida da resposta do sistema, foram feitas na direção vertical. A faixa de varredura usada foi de 1 a 30 Hz.

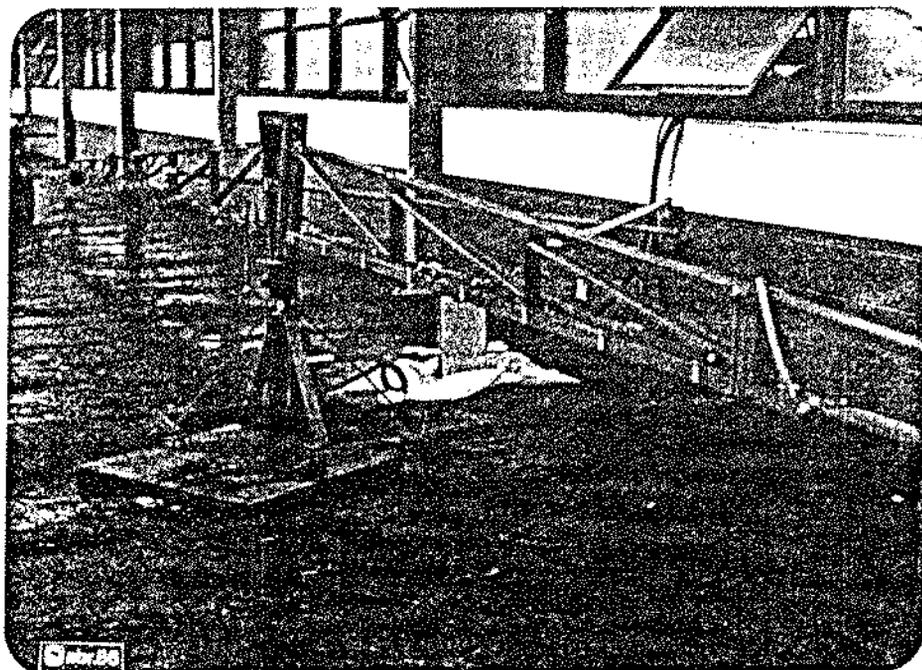


Figura 4.24: Pistão Hidráulico - Sistema MTS.

O gráfico da figura 4.25 mostra a função de resposta em frequência obtida por análise modal e pelo teste de varredura em frequência. Como se pode observar as frequências de ressonância obtidas pelos dois métodos estão próximas. Estes resultados podem ser comparados levando-se em conta as condições de contorno da estrutura.

A tabela 4.4 mostra os resultados obtidos no modelamento por Elementos Finitos, Análise Modal e no Teste de Varredura em Frequência.

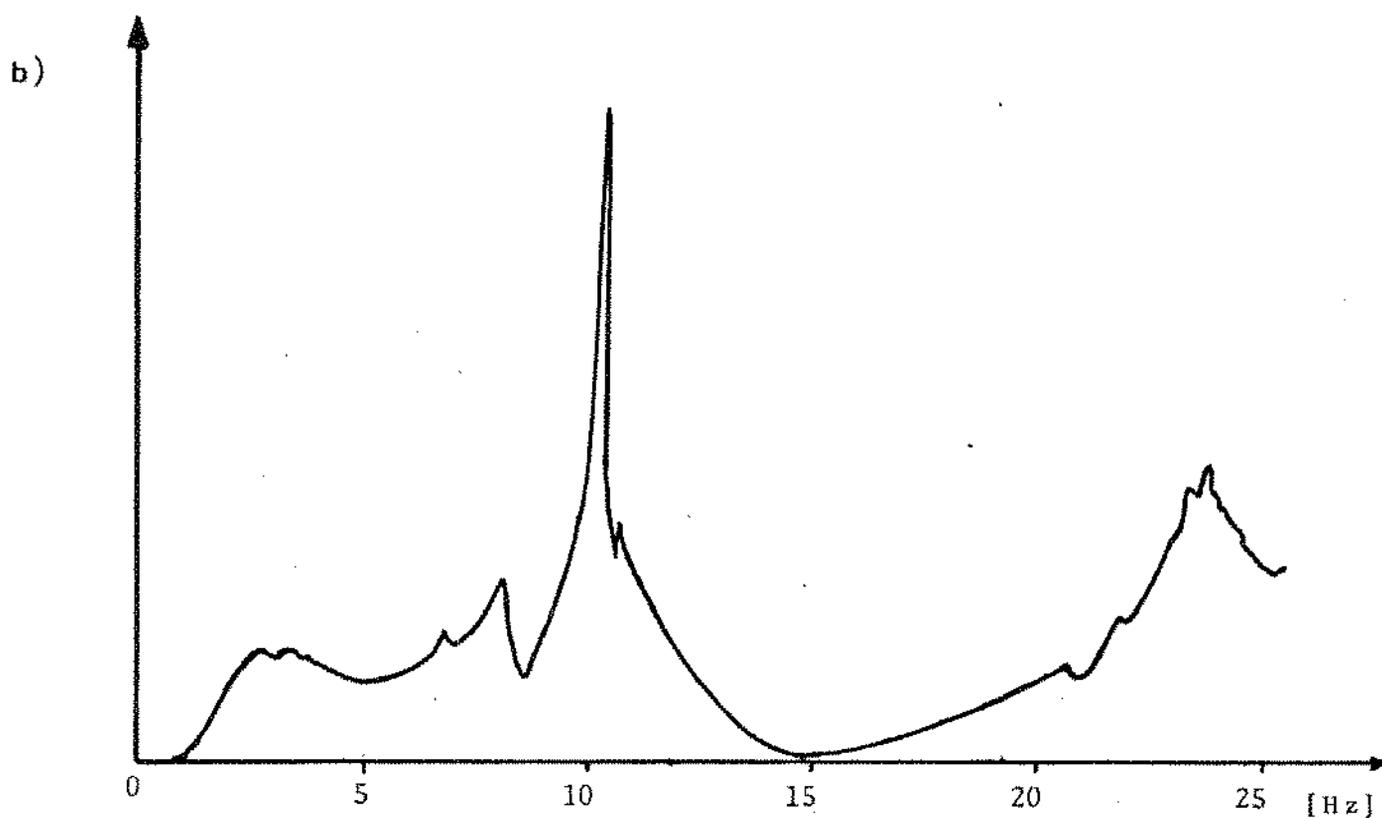
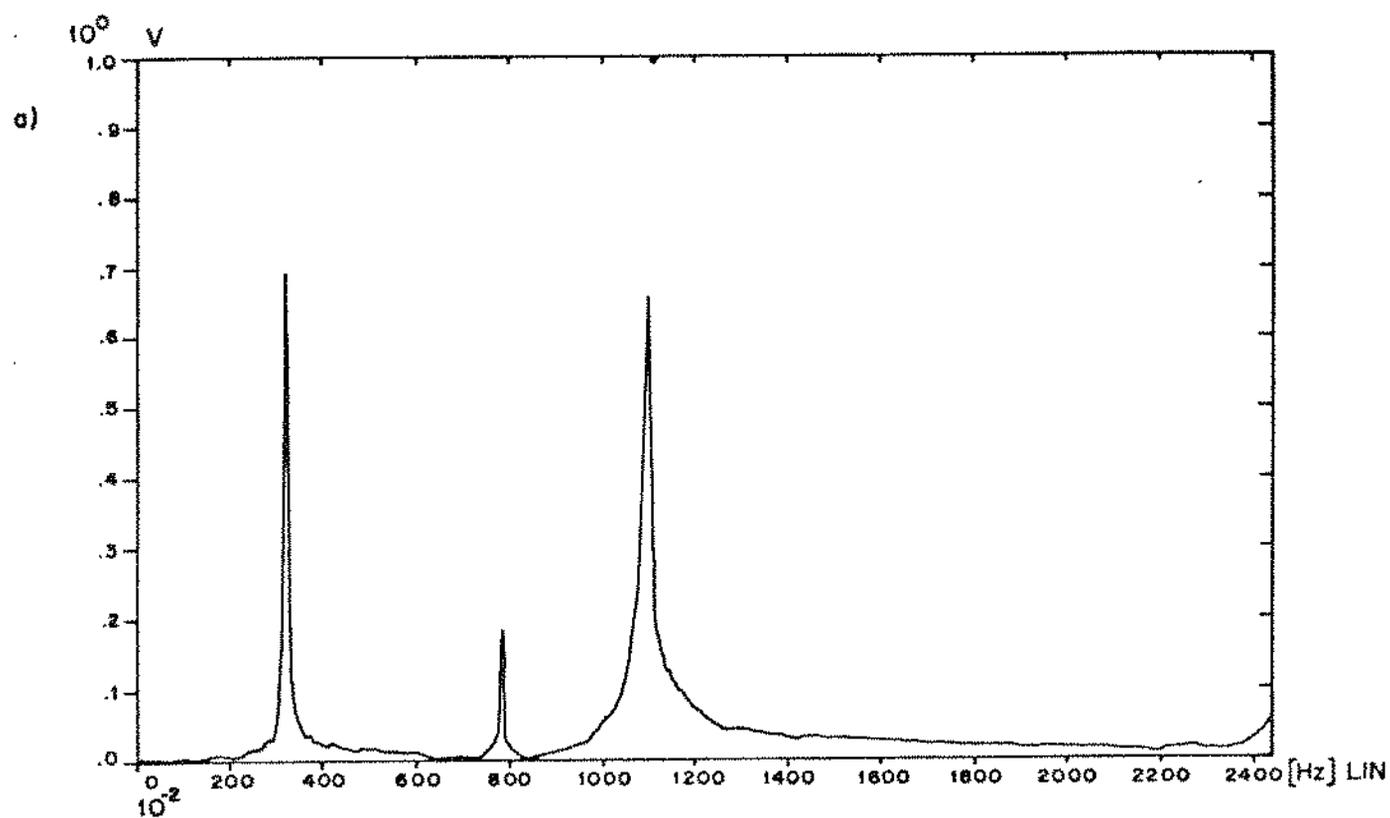


Figura 4.25: a- F. R. F. obtida por análise modal

b- F. R. F. obtida por varredura em frequência

Modos	Elementos Finitos sem amortecimento		Análise Modal (horizontal) com amortecimento		Análise Modal (vertical) com amortecimento		Varredura em Frequência (vertical) f [hz]
	(hor.) f [hz]	(vert.) f [hz]	f [hz]	fat. amort. [%]	f [hz]	fat. amort. [%]	
1	1.3	-	1.6	.62	3.2	.33	3.3
2	5.8	6.8	6.4	.16	7.8	.70	7.8
3	14.4	9.2	18.3	1.30	11.8	.78	10.5
4	-	25.4	22.1	2.70	24.3	2.28	23.5

Tabela 4.4: Resultados obtidos pelos vários métodos de análise

As diferenças existentes entre os resultados estão associadas, não só com os motivos expostos anteriormente, condição de fixação, aproximação de geometria, problemas de ajuste de curvas, mas principalmente, com as características físico/geométricas da própria estrutura pois esta não apresenta um comportamento perfeitamente linear e os modos de vibrar são espaciais, ou seja, a estrutura não vibra em planos independentes. Isto fica claro, observando-se o primeiro modo de vibrar da estrutura, figura 4.22, onde a estrutura vibra no plano xz mas apresenta uma pequena torção.

Os modos de vibrar não planares, devem ser associados ao fato da estrutura real possuir um amortecedor no braço de tração, que não foi modelado. Este talvez seja um dos principais motivos pelo fato das frequências horizontais teóricas serem aproximadas por baixo em relação às frequências naturais obtidas experimentalmente. Um estudo detalhado deste fenômeno é apresentado em /26/, /37/.

## 5 CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS

Neste trabalho estudou-se preliminarmente o comportamento dinâmico de máquinas e implementos agrícolas, tentando-se, também, nor-tear os caminhos para a análise dinâmica de estruturas do tipo reticu-ladas: vigas, pórticos, grelhas e treliças. Estas estruturas podem ser analisadas de "maneira iterativa" objetivando-se, com isto, uma me-lhoria final do sistema em análise. No item 4.1.3 observa-se que os modos de vibrar da estrutura em análise aparentam ser mais realísticos no modelo melhorado, além das frequências naturais calculadas estarem mais próximas das frequências obtidas experimentalmente.

A nível nacional, quase não se tem visto trabalhos direcio-nados para a análise de máquinas e equipamentos agrícolas. Desta for-ma, espera-se que este trabalho seja uma pequena contribuição nesta área.

Como perspectivas futuras espera-se determinar os níveis de tensões que atuam nos elementos e, assim, definir os elementos mais solicitados para uma possível reavaliação do projeto, visando com isto um melhor desempenho do pulverizador em campo.

Apresentam-se as seguintes sugestões para a continuidade des-

te trabalho:

a) Proceder o levantamento do solo das regiões onde o Pulverizador vai operar, obtendo-se um "espectro do terreno" para que se possa estabelecer a interação entre o terreno e o pulverizador e, desta forma, obter as informações necessárias a respeito das frequências e níveis de excitação do mesmo;

b) Como uma etapa seguinte, proceder a otimização da estrutura, ou seja, estabelecer as características mecânicas ótimas de determinados componentes, melhorando, assim, seu funcionamento e, principalmente, reduzir os níveis de deformação dos braços, já que as grandes deformações são responsáveis, entre outros fatores, pela deposição não uniforme da solução água/inseticida (fungicida) sobre as culturas e, essa deposição irregular leva à concentração ou à diluição da solução aplicada em determinadas áreas da cultura, afetando assim o bom rendimento das colheitas;

c) Efetuar um estudo cinemático e dinâmico entre a carreta e a estrutura dos braços, estabelecendo a suspensão adequada para a diminuição da transmissão dos esforços para a estrutura;

d) Estudo dinâmico da carreta com amortecedores passivos e/ou ativos para verificar a diminuição da transmissão da excitação.

## 6 BIBLIOGRAFIA

- [1] ARGYRIS, H. J. - "Energy Theorems and Structural Analysis",  
Aircraft Engineering, vol. XXVII, (1954).
- [2] BATHE, J.; WILSON, E. L. - "Numerical Methods in Finite Element  
Analysis", Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs; New Jersey,  
(1976).
- [3] BROWN, D. L. - "Modal Analysis - Past, Present and Future",  
Proceedings of the 1st International Modal Analysis Conferen-  
ce e Exhibit, Orlando, Florida, (1982).
- [4] CHURCHILL, R. V. - "Fourier Series and Boundary Value Problems"  
McGraw-Hill, Book Company, New York, (1941).
- [5] CLOUGH, R. W.; PENZIEN, J. - "Dynamics of Structures", McGraw-  
Hill Book Company, New York, (1974).

- [6] COURANT, R. - "Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibration", Bulletin American Mathematical Society, vol. 49, (1943).
- [7] DEN HARTOG, J. P. - "Vibração nos Sistemas Mecânicos", Edgard Blucher, Ed. da Universidade de São Paulo, (1972).
- [8] DOEBELIN, E. O. - "System Modeling and Response", John Wiley & Sons Inc., (1980).
- [9] EWINS, D. J. - "Measurement and Application of Mechanical Impedance Data - Introduction and Ground Rules", Journal of the Society of Environmental Engineers, (1975).
- [10] EWINS, D. J. - "Measurement and Application of Mechanical Impedance Data - Measurement Techniques", Journal of the Society of Environmental Engineers, (1976).
- [11] EWINS, D. J. - "Measurement and Application of Mechanical Impedance Data - Interpretation and Application of Measured Data", Journal of the Society of Environmental Engineers, (1976).
- [12] EWINS, D. J. - "Modal Testing: Theory and Practice", John Wiley & Sons Inc., New York, (1984).
- [13] FONSECA, A. - "Curso de Mecânica", Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. (1975).

- [14] GAUGHEY, T. K.; O'KELLY, M. E. J. - "Classical Normal Modes in Damped Linear Dynamic Systems", Journal of Applied Mechanics vol. 32, (1965).
- [15] GOYDER, H. G. D. - "Methods and Application of Structural Modelling from Measured Structural Frequency Response Data", Journal of Sound Vibration, (1980).
- [16] HEWLETT PARCKARD. - "Fundamental of Signal Analysis - Application Note 243".
- [17] HEWLETT PACKARD. - "Modal Analysis Option 402 - 5451C FOURIER ANALYZER SYSTEMS".
- [18] IGUTI, F. - "Estabilidade de Vibrações de Placas por um Modelo Misto de Elementos Finitos", Dissertação de Mestrado apresentada ao Departamento de Estrutura do Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, (1974).
- [19] MASSOUD, M. - "Impedance Methods for Machine Analysis: Modal Parameters Extraction Techniques", The Shock and Vibration Digest.
- [20] MEIROVITCH, L. - "Computational Methods in Structural Dynamics", Sijthoff e Noordhoff International Publisher B. V., (1980).

- [21] MEJÍA, F. A. - "Análise de Torque e Vibrações Torcionais de Equipamentos para o Cultivo Mínimo de Cana de Açúcar", Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia de Alimentos - UNICAMP, (1983).
- [22] MELO, F. H. - "Prioridade Agrícola: Sucesso ou Fracasso?", Estudos Econômicos - FIPE/Pioneira, (1985).
- [23] MIRAMAND, N.; et alii, - "Identification of Structural Modal Parameters by Dynamic Test at a Single Point", Bulletin of Shock and Vibration, (1975).
- [24] NATION, H. J. - "The Dynamic Behavior of Field Sprayer Booms", Journal of Agricultural Engineering Research, (1982).
- [25] NEWLAND, D. E. - "Random Vibration and Spectral Analysis", Longman Group Limited, (1975).
- [26] PAVANELLO, R. - "Estudo do Comportamento Dinâmico de Hidrogeradores", Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia de Campinas - UNICAMP, (1985).
- [27] PEREIRA, J. A.; IGUTI, F.; ZAMPIERI, D. E. - "Análise do Comportamento dinâmico de Estruturas Reticuladas", VI Seminário ADUNESP/GUARATINGUETA, (1985).
- [28] PIPES, L. A.; HOUANESSIA, S. A. - "Matrix Computer Methods in Engineering" John Wiley & Sons, (1969).

- [29] PREZEMINIECKI, J. S. - "Theory of Matrix Structural Analysis", McGraw-Hill Book Company, New York, (1968).
- [30] SEGEREN, . C. A. - "Análise de Cargas Dinâmicas Torcionais em Enxada Rotativa Acionada por Trator", Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia de Alimentos - UNICAMP, (1982).
- [31] SILVA, C. W., - "Hardware and Software Selection for Experimental Modal Analysis, The Shock and Vibration Digest.
- [32] TAUCHERT, T. R. - "Energy Principles in Structural Mechanics", McGraw-Hill Kogakusha, Ltd. Tokio, (1974).
- [33] THORNHILL, R. J.; SMITH, C. C. - "Impact Force Prediction Using Measured Frequency Response Functions", Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, vol. 105, (1983).
- [34] TIMOSHENKO, S.; YONG, D. H. - "Vibration Problems in Engineering", John Wiley & Sons, New York, (1974).
- [35] TURNER, M. J., et alii, - "Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures", Journal of the Aeronautical Sciences, vol. 23, (1956).
- [36] VERDONCK, E.; et alii, - "Modelling the Dynamic Behavior of Sprayer Booms", American Society of Agricultural Engineers, Hyatt Regency, Chicago, Illinois, (1983).

- [37] VIERCK, R. K. - "Vibration Analysis", International Textbook Company, (1969).

## APÊNDICE I

### 1.1 Série de Fourier

Todo sinal periódico  $x(t)$  que satisfaça as condições de Dirichlet, ou seja:

$$\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)| dt < \infty ;$$

- . número finito de discontinuidade em um período  $T$ ;
- . número finito de máximos e mínimos locais em um período  $T$ ;

pode ser expandido em uma série trigonométrica infinita, a chamada série de Fourier.

$$x(t) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)] \quad [1.1]$$

onde  $\omega_0 = 2\pi/T$ , e os termos  $a_n$  e  $b_n$  são obtidos utilizando-se das seguintes propriedades trigonométricas

$$1. \int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_0 t) \sin(n\omega_0 t) dt, \quad \begin{aligned} &= 0 && m \neq n \\ &= \pi/\omega_0 && m = n \end{aligned}$$

$$2. \int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega_0 t) \sin(n\omega_0 t) dt, \quad \begin{aligned} &= 0 && m \neq n \\ &= \pi/\omega_0 && m = n \end{aligned}$$

$$3. \int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_0 t) \sin(n\omega_0 t) dt. \quad = 0 \quad m \neq n$$

$$= 0 \quad m = n$$

Multiplicando-se a expressão (1.1) por  $\sin(n\omega_0 t)$  e integrando-se no período,  $-T/2$  a  $T/2$ , tem-se:

$$\int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(n\omega_0 t) dt =$$

$$\frac{a_0}{2} \int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega_0 t) + \left[ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) \right] \sin(m\omega_0 t) dt;$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(n\omega_0 t) dt = b_n \int_{-T/2}^{T/2} \sin(n\omega_0 t) \sin(n\omega_0 t) dt;$$

$$b_n = 2/T \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(n\omega_0 t) dt; \quad n = 1, 2, \dots, n \quad [1.2]$$

analogamente

$$a_n = 2/T \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad n = 0, 1, \dots, n \quad [1.3]$$

As expressões (1.2) e (1.3) são as chamadas fórmulas de Euler ou Euler-Fourier.

Na análise de sinais é conveniente formular a série de Fourier na forma exponencial. Como  $e^{\pm in\omega_0 t}$  pode ser representado por

$$e^{\pm in\omega_0 t} = \cos(n\omega_0 t) \pm i \sin(n\omega_0 t) \quad , \quad i = \sqrt{-1}$$

é possível escrever a expressão (1.1) na forma

$$a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) = (a_n - b_n)/2 e^{in\omega_0 t} + (a_n + b_n)/2 e^{-in\omega_0 t}$$

Seja

$$(a_n - ib_n)/2 = \alpha_n \quad , \quad (a_n + ib_n)/2 = \alpha_{-n} \quad e \quad a_0/2 = \alpha_0$$

e rearranjando-se as expressões  $x(t)$  e  $\alpha_n$  , tem-se:

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{in\omega_0 t} \quad , \quad [1.4]$$

$$\alpha_n = 1/T \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-in\omega_0 t} dt. \quad [1.5]$$

A equação (1.5) pode ser interpretada como a transformada do sinal periódico,  $x(t)$ , do domínio do tempo para o domínio da frequência (série de Fourier ou espectro de frequência), enquanto a equação (1.4) transforma o sinal do domínio da frequência para o domínio do tempo.

A representação gráfica da série de Fourier é o chamado espectro de frequência de raias. Para construir o espectro associa-se a cada coeficiente  $a_n$  a frequência  $(n\omega_0)$  correspondente ao termo da série.

## 1.2 TRANSFORMADA DE FOURIER

A transformada de Fourier pode ser considerada como um "limite formal" da série de Fourier quando o período  $T$  tende a infinito /25/. Substituindo-se a equação (1.5) em (1.4) tem-se:

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-in\omega_0 t} dt \right] e^{in\omega_0 t};$$

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \Delta\omega \left[ \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-in\omega_0 t} dt \right] e^{in\omega_0 t}. \quad [1.6]$$

No limite, quando  $T \rightarrow \infty$  a equação (1.6) pode ser escrita como:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-in\omega_0 t} dt \right] e^{in\omega_0 t} d\omega. \quad [1.7]$$

Analisando-se a equação (1.7) conclui-se que esta, assim como

a série de Fourier, possui um par de transformadas

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{in\omega_0 t} d\omega, \quad [1.8]$$

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-in\omega_0 t} dt. \quad [1.9]$$

A equação (1.8) é a chamada transformada de Fourier direta e a equação (1.9) é a transformada de Fourier inversa.

O desenvolvimento matemático detalhado pode ser encontrado em Churchill /04/.

## APÊNDICE II

### II.1 INFORMAÇÕES SOBRE O PROGRAMA UTILIZADO

A análise modal é feita com base na função de transferência entre a excitação do sistema ou entrada e a resposta da estrutura ou saída. A função de transferência pode ser obtida corretamente com o sistema "5451C FOURIER ANALYSER", e, a partir da função de transferência estimada é perfeitamente possível estimar os parâmetros modais do sistema com uma boa precisão. Deve-se ressaltar ainda, que o sistema apresenta resultados numéricos bastante precisos, quando os dados analisados descrevem um movimento de estruturas lineares e, que esta precisão dos resultados depende, basicamente, da experiência do usuário no manuseio do programa, principalmente, no passo de identificação.

O "software" de análise modal é subdividido em cinco (5) segmentos operacionais: Setup, Measurement, Modal Identification, Print e Display. A figura II.1 mostra o diagrama de fluxo dos vários passos do programa.

No Setup step, o usuário entra com os dados que descreveram um dado experimento. Estes dados são: o número de funções de transferência que será medido, endereçamento para armazenamento das mesmas na unidade de disco do sistema, tamanho do bloco (128, 256, 512, 1024, 2048 e 4096), "display" da função de transferência (escala linear ou logarítmica), sensibilidade dos transdutores e ganho dos amplificadores.

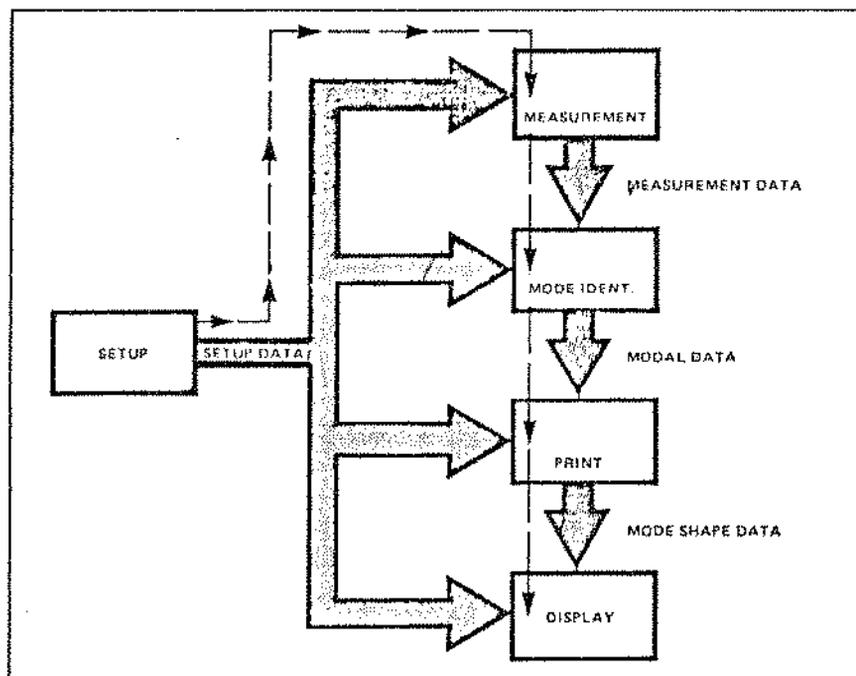


Figura II.1: Diagrama de fluxo dos vários passos do programa de Análise Modal

No Measurement step, é feita a aquisição das funções de transferência. A configuração do programa permite fazer dois tipos de excitação: impulsiva ou aleatória. Neste passo, os dados medidos por outros métodos (varredura em seno, pseudo aleatório) que estão armazenados no disco do sistema podem entrar no programa de análise modal.

No terceiro passo Mode Identification step os parâmetros das funções de transferência são identificados através de um ajuste de curvas, no caso, pelos mínimos quadrados. Este passo permite uma gama enorme de controle do processo de identificação. Esta flexibilidade no controle do processo exige do usuário experiência e habilidade no ajuste das curvas.

Após terminado o Mode Identification step, passa-se para o Print step o qual permite registrar os resultados no console.

Por último o Display step mostra a forma dos modos em uma tela animada. Os modos podem ser representados em um sistema de coordenadas retangulares ou cilíndricas.

## 11.2 RESOLUÇÃO DO SISTEMA

A convergência do algoritmo na identificação dos parâmetros depende primeiramente do espaçamento existente entre os modos próximos e do valor dos seus respectivos amortecimentos.

Se o amortecimento, que determina a largura das curvas de ressonância, é suficientemente pequeno entre dois modos próximos, o sistema pode identificá-los quando suas frequências centrais estão separadas apenas por dois pontos de dados. Isto pode ser observado na figura 11.2.

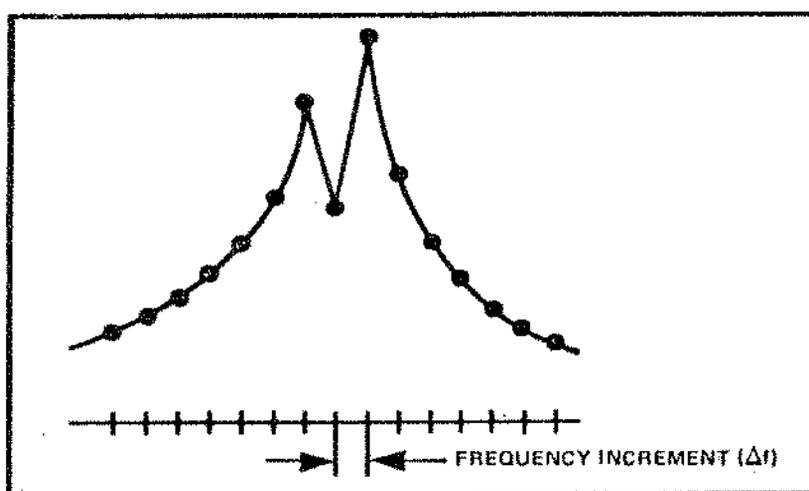


Figura 11.2; Resolução do Sistema.

Quando o amortecimento aumenta é necessário que os modos es-

tenham mais distantes em frequência para que o sistema identifique-os e em alguns casos torna-se impossível dizer quantos modos estão contribuindo para um pico de ressonância /17/.

