

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**Análise de Trincas Interfaciais em
Bimateriais Anisotrópicos Usando o
Método dos Elementos de Contorno**

Autora: Seila Vasti Faria de Paiva
Orientador: Prof. Dr. Paulo Sollero

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL**

Análise de Trincas Interfaciais em Bimateriais Anisotrópicos Usando o Método dos Elementos de Contorno

Autora: Seila Vasti Faria de Paiva
Orientador: Prof. Dr. Paulo Sollero

Curso: Engenharia Mecânica
Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Dissertação de mestrado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2006
S.P. – Brasil

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

P166a Paiva, Seila Vasti Faria de
Análise de trincas interfaciais em bímateriais anisotrópicos usando o método dos elementos de contorno / Seila Vasti Faria de Paiva. --Campinas, SP: [s.n.], 2006.

Orientador: Paulo Sollero
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Anisotropia. 2. Materiais compostos. 3. Mecânica da fratura. 4. Método dos elementos de contorno. I. Sollero, Paulo. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Título em Inglês: Analysis of interfacial cracks in anisotropic bimetals using the boundary element method.

Palavras-chave em Inglês: Anisotropic materials, Composite materials, Fracture mechanic, Boundary element methods, Interfacial cracks.

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica

Banca examinadora: Fernando Amorim de Paula e Renato Pavanello.

Data da defesa: 12/12/2006

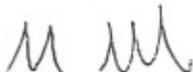
Programa de Pós-Graduação: Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

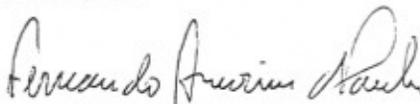
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Análise de Trincas Interfaciais em Bimateriais Anisotrópicos usando o Método dos Elementos de Contorno

Autora: Seila Vasti Faria de Paiva
Orientador: Prof. Dr. Paulo Sollero



Prof. Dr. Paulo Sollero, Presidente
FEM/UNICAMP



Prof. Dr. Fernando Amorim de Paula
DEES/UFMG



Prof. Dr. Renato Pavanello
FEM/UNICAMP

Campinas, 12 de Dezembro de 2006.

Dedicatória:

Dedico este trabalho, com carinho, à meu querido esposo William.

Agradecimentos

Este trabalho não poderia ser terminado sem a ajuda de diversas pessoas e instituições às quais presto minha homenagem:

A DEUS, por guiar os meus caminhos!

Aos meus pais pelo incentivo em todos os momentos da minha vida.

Ao meu querido esposo William, pelo companheirismo, apoio, ajuda e incentivo.

Ao meu orientador, Professor Paulo Sollero, que me mostrou os caminhos a serem seguidos.

Ao Professor M. H. Aliabadi da Queen Mary College, Universidade de Londres, pela acolhida no período em que estive na Inglaterra.

A todos os professores e colegas do Departamento de Mecânica Computacional, que ajudaram de forma direta e indireta na conclusão deste trabalho.

Ao Departamento de Mecânica Computacional pela infra-estrutura fornecida durante a realização deste trabalho.

Ao Departamento de Engenharia da Queen Mary College pelo apoio no período em que estive lá. Em especial à secretária Jean Hefford.

À CAPES pelo apoio financeiro durante o desenvolvimento deste trabalho.

O bom siso te guardará e a inteligência te conservará
Provérbios 2:11

Resumo

Paiva, Seila Vasti Faria de, *Análise de Trincas Interfaciais em Bimateriais Anisotrópicos usando o Método dos Elementos de Contorno*, Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2006 105 p. Dissertação (Mestrado).

Nesta dissertação é apresentada uma análise de problemas da mecânica da fratura elástica linear em estruturas bimateriais anisotrópicas. Utilizando o método dos elementos de contorno é possível calcular os fatores de intensidade de tensão em problemas planos (2D) devido à presença de trincas interfaciais entre as lâminas que compõem o material. A estrutura pode estar submetida à carregamento em modo I ou modo misto. O problema é modelado usando-se a técnica de sub-regiões para descrever cada um dos diferentes subdomínios, representado por cada material. Na interface das sub-regiões, em que o domínio é dividido, são impostas condições de equilíbrio de forças e continuidade de deslocamentos, exceto na região que corresponde à trinca. O comportamento singular apresentado pelo campo de tensões próximo à ponta da trinca é modelado com elementos de ponto a um quarto com singularidade de forças de superfície. São apresentados exemplos numéricos de problemas com carregamentos no plano. Foi também apresentada a análise de convergência de malhas, mostrando uma pequena dependência da discretização mesmo quando malhas pouco refinadas foram usadas. Alguns dos exemplos têm correspondentes na literatura, os quais foram utilizados para comparação com os resultados obtidos. Observou-se uma boa concordância na comparação dos resultados.

Palavras Chave

- Anisotropia, Materiais compostos, Mecânica da fratura, Método dos elementos de contorno.

Abstract

Paiva, Seila Vasti Faria de, *Analysis of Interfacial Cracks In Anisotropic Bimaterials using the Boundary Element Method*, Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2006 105 p. Dissertação (Mestrado).

This thesis presents an analysis of problems of linear elastic fracture mechanics in anisotropic bimaterial structures. Using the boundary element method, it is possible to evaluate stress intensity factors in plane problems (2D) due to the presence of interfacial cracks between the laminae that constitute the material, when the structure is submitted to a mode I or in mixed mode loading. The problem is modeled using the subregion technique to describe each one of the different subdomains, represented by each material. On the interface of subregions, which the domain is divided, conditions of tractions equilibrium and displacements continuity are imposed, except in the corresponding crack region. The singular behavior presented by the stress field near the crack tip is modeled by traction singular quarter point element. Numerical examples of problems with in-plane loading are presented. Mesh convergence analyses are also presented, showing little dependence on the discretization even when coarse meshes were used. Some of these examples have correspondents in literature, that were used for comparisons with the obtained results. A good agreement in the comparisons of results was observed.

Key Words

- Anisotropic materials, Composite materials, Fracture mechanic, Boundary element methods, Interfacial cracks.

Sumário

Lista de figuras	xi
Lista de Tabelas	xii
Introdução.....	1
1.1 Generalidades	1
1.2 Descrição do presente trabalho.....	2
1.3 Revisão Bibliográfica	4
1.4 Realizações e contribuições.....	8
Materiais Compósitos.....	13
2.1 Introdução	13
2.2 Definição e generalidades.....	13
2.3 Classificação dos materiais compósitos.....	15
2.4 Características mais importantes dos materiais compósitos.....	17
2.5 Aplicações.....	18
2.6 Vantagens e desvantagens	19
2.7 Modos de falha e de fratura em materiais compósitos	20
2.7.1 Separação entre fibra e matriz.....	21
2.7.2 Trincamento da matriz	22
2.7.3 Separação de laminas	22
2.7.4 Rompimento das fibras	23
Equações constitutivas e de equilíbrio para materiais anisotrópicos	25
3.1 Introdução	25
3.2 Comportamento mecânico	25
3.3 Elasticidade anisotrópica	28
3.4 Equação constitutiva de uma lâmina	37
Mecânica da Fratura.....	43
4.1 Introdução	43
4.2 Modos de fratura.....	44
4.3 Fratura em material compósito	45
4.4 Mecânica da fratura elástica linear anisotrópica	48
4.5 Fatores de intensidade de tensão	52
Método dos Elementos de Contorno	55
5.1 Introdução	55
5.2 Equações integrais de contorno	56
5.3 Soluções fundamentais anisotrópicas	60
5.4 Elementos de contorno.....	64
5.4.1 Elemento de contorno quadrático contínuo	66
5.4.2 Elemento de ponto a um quarto com singularidade de forças de superfície.....	68
5.4.3 Integração sobre o elemento que contém o ponto fonte.....	73
5.5 Formulação de sub-regiões	79

Resultados Numéricos.....	83
6.1 Introdução	83
6.2 Cálculo do FIT na interface de uma chapa infinita composta por dois materiais quase-isotrópicos.....	84
6.3 Cálculo do FIT na interface de uma chapa finita composta por dois materiais quase-isotrópicos submetidos a tensões normais uniaxiais.	88
6.4 Cálculo do FIT em uma chapa homogênea de largura finita contendo uma trinca central	91
6.5 Fator de intensidade de tensão numa chapa bimaterial anisotrópica infinita com trinca interfacial	94
6.6 Fator de intensidade de tensão numa chapa bimaterial anisotrópica finita com trinca interfacial inclinada.....	97
Conclusões	99
7.1 Conclusões finais	99
7.2 Sugestões para próximos trabalhos.....	100
Referências.....	101

Lista de figuras

Figura 1.1: Exemplo de material analisado com a fomulação isotrópica existente.	8
Figura 1.2: Exemplo de material analisado com a fomulação anisotrópica implementada neste trabalho..	8
Figura 1.3: Diagrama de blocos do programa ELAST_BIMAT para materiais anisotrópicos.....	9
Figura 2.1: Fase contínua (matriz) e descontínua (reforço) em material compósito.	14
Figura 2.2: Classificação dos materiais compósitos.	15
Figura 2.3: Resistência específica de ligas metálicas estruturais e materiais compósitos bidirecionais. ...	17
Figura 2.4: Aplicações de compósitos no B777 e B787.	18
Figura 2.5: Separação entre fibra e matriz em compósito.....	21
Figura 2.6: Trincamento da matriz.....	22
Figura 2.7: Falha de compósito por delaminação.	23
Figura 2.8: Rompimento de fibras.....	24
Figura 3.1: Comportamento mecânico de um material isotrópico.	26
Figura 3.2: Comportamento mecânico de um material anisotrópico.	26
Figura 3.3: Comportamento mecânico de um material ortotrópico.	27
Figura 3.4: Lâmina Ortotrópica.....	37
Figura 3.5: Sistemas de coordenadas da lâmina (x_1x_2) e do laminado $(\bar{x}_1\bar{x}_2)$	41
Figura 4.1: Os três modos primários de carregamento de um corpo trincado.	45
Figura 4.2: Volumes equivalentes.....	46
Figura 4.3: Corpos de prova para ensaio de delaminação conforme ASTM D 5528.	48
Figura 4.4: Deslocamentos e tensões próximos a ponta da trinca	50
Figura 5.1: Ampliação do contorno para determinação do valor principal de Cauchy.....	58
Figura 5.3: Elemento de contorno quadrático isoparamétrico	67
Figura 5.4: (a) Elemento quadrático padrão; (b) Elemento singular de ponto a um quarto.....	69
Figura 5.5: O raio r entre o pontos campo e o ponto fonte é dado por $x - x^*$	73
Figura 5.6: Integração quando o ponto fonte pertence ao elemento.	75
Figura 5.6: Divisão de um domínio em duas sub-regiões	79
Figura 6.1: Placa bimaterial quase-isotrópica infinita com trinca interfacial submetida a tensões normais aplicadas remotamente.	84
Figura 6.2: Malha de elementos de contorno e condições de contorno aplicadas.....	85
Figura 6.3. Chapa bimaterial finita com trinca interfacial central submetida a tensões normais uniaxiais.	89
Figura 6.4. Malha de elementos de contorno e condições de contorno aplicadas.	89
Figura 6.5. Problema físico de uma chapa homogênea de largura finita e comprimento infinito contendo uma trinca central.	92
Figura 6.6. Malha de elementos de contorno e condições de contorno.	93
Figura 6.7: Problema físico de uma chapa bimaterial anisotrópica infinita com uma trinca interfacial submetida a pressão p uniforme.	94
Figura 6.8: Malha de elementos de contorno.....	95
Figura 6.9: Relação entre K_0 , K_I e K_{II} no plano complexo.	96
Figura 6.10: Chapa bimaterial anisotrópica finita com uma trinca interfacial inclinada.....	97
Figura 6.11: Malha de elementos de contorno.....	98

Lista de Tabelas

Tabela 6.1: FIT na interface de uma chapa infinita composta por dois materiais quase isotrópicos.	87
Tabela 6.2. FIT para uma trinca interfacial em uma chapa bimaterial finita.	90
Tabela 6.3: Discretização na interface e na face da trinca.	92
Tabela 6.4: FIT para uma trinca interfacial em uma chapa homogênea de largura finita, sujeita a carregamento uniaxial remoto.	93
Tabela 6.5 FIT normalizado para uma trinca interfacial em um bimaterial anisotrópico infinito.	96
Tabela 6.6 FIT normalizado para uma trinca interfacial inclinada.	98

Capítulo 1

Introdução

1.1 Generalidades

Um material compósito é formado pela associação de dois ou mais materiais quimicamente distintos chamados fases que, quando vistos numa escala macroscópica, apresentam uma interface bem definida entre si.

A utilização de materiais compósitos tem sido alvo de constante evolução nos últimos anos, principalmente devido à vantajosa combinação entre propriedades mecânicas e densidade, o que torna esses materiais mais apropriados para uma vasta gama de usos. Inicialmente, a utilização destes materiais estava restrita à indústria aeroespacial. Atualmente, devido aos avanços tecnológicos, foi possível diminuir os custos de matérias-primas e de processamento e estender a utilização dos compósitos a diversos ramos industriais tais como militar, construção civil, automobilística, eletroeletrônica, marítima e materiais esportivos. Mais recentemente, estes materiais estão sendo utilizados para resolver problemas específicos em alguns novos e importantes nichos, como pôr exemplo, a fabricação de próteses.

Quando comparado com outros materiais utilizados em engenharia, os compósitos são os que apresentam a maior rigidez específica (relação entre rigidez e densidade) e resistência mecânica específica (relação entre resistência mecânica e densidade). Como qualquer outro material de construção mecânica, os compósitos também estão sujeitos aos esforços decorrentes dos carregamentos que lhe são aplicados, às falhas dos processos de fabricação, de envelhecimento e desgaste da estrutura. Se uma estrutura de compósito possuir uma trinca, por

exemplo, sua resistência mecânica será reduzida devido ao aumento expressivo nas tensões e deformações do material perto da ponta da trinca.

Com o aumento do número de projetos com materiais compósitos, surgiu a necessidade de se calcular tensões e deformações em estruturas anisotrópicas. Neste trabalho será considerada uma chapa bimaterial anisotrópica, contendo uma falha decorrente da não adesão perfeita na interface dos dois materiais constituintes. A este tipo de falha chamamos trinca interfacial.

Com o desenvolvimento das indústrias automotiva, aeronáutica, aeroespacial e naval, aumentou-se a preocupação com o estudo de estruturas trincadas. Mesmo com toda a preocupação com a qualidade, a fabricação de um componente mecânico está sujeita a defeitos. Estes defeitos podem estar presentes na matéria-prima utilizada, surgir durante o processo de fabricação ou surgir devido ao sobrecarregamento da estrutura. Depois que os componentes fabricados entram em funcionamento, pode ocorrer a propagação ou crescimento do defeito, o que pode comprometer sua utilização ou até mesmo inutilizá-los. Os problemas de trincas na interface de um compósito constituído de materiais dissimilares têm uma importância muito grande na prática e têm sido analisados por diversos pesquisadores. Mediante estas necessidades, surgiu a grande motivação para a realização deste trabalho.

Os problemas de trincas interfaciais são analisados no escopo da mecânica da fratura, usualmente conduzidos por técnicas experimentais, analíticas ou numéricas. Neste trabalho será utilizada a abordagem numérica pelo Método de Elementos de Contorno (MEC) para a determinação dos Fatores de Intensidade de Tensão (FIT). O MEC é uma técnica numérica moderna que tem crescido consideravelmente nas últimas duas décadas e tem se mostrado um método apropriado para a modelagem de estruturas contendo trincas.

1.2 Descrição do presente trabalho

O objetivo do presente trabalho foi implementar uma formulação de elementos de contorno para análise do fator de intensidade de tensão interfacial em chapas bimateriais anisotrópicas.

A formulação foi implementada em um programa computacional, usando o software Matlab. No programa foi implementada uma formulação do MEC para análise elastoestática em bímateriais anisotrópicos contendo ou não uma trinca na interface. Foram utilizados os elementos quadráticos contínuos, elementos de ponto a um quarto e a técnica de sub-regiões.

O Capítulo 2 apresenta uma definição mais detalhada dos materiais compósitos. Essa definição está relacionada com os materiais constituintes, suas características, classificação quanto ao tipo de reforço, etc. São apresentados as características dos materiais compósitos e seu comportamento mecânico, bem como sua aplicação, vantagens e desvantagens. Os tipos de falhas que podem ocorrer na estrutura dos materiais compósitos também são apresentados.

No Capítulo 3 é feita uma breve introdução ao comportamento mecânico dos materiais anisotrópicos. Em seguida, é feita uma revisão da teoria da elasticidade aplicada a materiais anisotrópicos, com base na teoria da elasticidade linear clássica. Por fim, é mostrada a obtenção das equações constitutivas de uma lâmina.

O Capítulo 4 traz uma síntese da mecânica da fratura onde são apresentados os modos ou modelos de fratura. Com base nestes modelos, são classificados os diversos mecanismos de fratura de materiais compósitos. Também é apresentado um resumo de um teste básico para avaliação da integridade de um compósito. Por fim, é feita uma introdução à mecânica da fratura elástica linear anisotrópica e ao cálculo dos fatores de intensidade de tensão.

O Capítulo 5 apresenta a formulação do MEC para meios anisotrópicos. O elemento de contorno quadrático contínuo e a formulação de sub-regiões. Inicialmente é introduzida a formulação integral de contorno, seguida das soluções fundamentais anisotrópicas. Os tipos de elementos de contorno são apresentados. São detalhados os elementos quadráticos contínuos e os elementos de ponto a um quarto com singularidade de força de superfície. Por fim, é apresentada a formulação de sub-regiões.

No Capítulo 6 são apresentados os resultados numéricos obtidos pela implementação da formulação anisotrópica. Neste trabalho são apresentados cinco problemas que mostram o cálculo do fator de intensidade de tensão em chapas bimateriais isotrópicas e anisotrópicas. Os resultados numéricos são comparados com resultados encontrados na literatura e apresentam uma boa concordância.

Para finalizar, no Capítulo 7 estão as conclusões finais e as sugestões para trabalhos futuros.

1.3 Revisão Bibliográfica

Sih *et al.* (1965) apresentaram uma formulação na qual as equações gerais para os campos de tensão na ponta da trinca em corpos anisotrópicos foram derivadas fazendo uso de uma aproximação de variáveis complexas. Os FIT são definidos e avaliados diretamente a partir das funções de tensão. Também mostraram que a singularidade de tensão presente na ponta da trinca em um corpo anisotrópico é da ordem de $r^{-1/2}$.

Rice e Sih (1965) estudaram problemas planos de trincas em meios dissimilares e apresentaram o método da variável complexa combinada com autofunções de expansão que podem ser aplicadas para formular os problemas de planos elásticos dissimilares acoplados contendo trincas ao longo da interface. Os autores apresentaram soluções em forma fechada para problemas extensionais. Os resultados apresentados por Rice e Sih são também discutidos em conexão com a teoria da fratura de Griffith-Irwin. Esta teoria mostra que os fatores de intensidade de tensão na ponta da trinca podem ser avaliados prontamente para uma função potencial complexa.

Rice (1988) revisou os conceitos da mecânica da fratura elástica linear para trincas na interface entre dois sólidos dissimilares. Mostrou que valores semelhantes do FIT complexo K para dois corpos trincados implicam em estados similares na ponta da trinca. Assim, as condições para o crescimento da trinca podem ser dados em termos do K atingindo um valor crítico representado num plano complexo.

Smith (1988) comparou três métodos para calcular os fatores de intensidade de tensão de valores nodais próximo à ponta da trinca. Dois métodos foram baseados nos deslocamentos e o terceiro foi baseado nos valores de força de superfície. Smith obteve bons resultados usando uma região única para problemas de trinca simétricos. O exemplo de modo misto mostrou que o método de força de superfície é preciso e é menos sensível para a malha local.

Tan e Gao (1990) introduziram os elementos de ponto a um quarto quadráticos na análise de problemas de trincas interfaciais em chapas bimateriais isotrópicas utilizando o método dos elementos de contorno.

Tan e Gao (1992), na seqüência, determinaram os fatores de intensidade de tensão, K_I e K_{II} , para analisar trincas interfaciais em corpos bimateriais axissimétricos e, posteriormente, em componentes ortotrópicos.

Cho *et al.* (1992) propuseram um método para determinar os fatores de intensidade de tensão para uma trinca interfacial em materiais dissimilares anisotrópicos através da extrapolação dos resultados numéricos de tensão ou deslocamentos em pontos distantes da ponta da trinca. Com esta técnica conseguiram evitar tanto os erros numéricos como o problema de singularidade oscilatória. O método proposto pode ser aplicado tanto usando o método dos elementos finitos como o método dos elementos de contorno. Cho *et al.* apresentaram alguns exemplos utilizando o método dos elementos de contorno.

Yuuki e Xu (1994) mostraram a implementação de um programa do método dos elementos de contorno para analisar materiais dissimilares e trincas interfaciais baseado na mecânica da fratura interfacial. Na análise do método dos elementos de contorno com uso da solução de Kelvin tida como a solução fundamental, o domínio é dividido em duas sub-regiões e o contorno de cada região precisa ser discretizado. Quando utilizaram a solução de Hetenyi não foi necessário discretizar a interface, pois esta satisfaz a condição de contorno perfeita para as juntas compostas de dois materiais isotrópicos, desde que a interface seja em linha reta.

Ang *et al.* (1996) mostraram a utilização do método dos elementos de contorno para determinar os fatores de intensidade de tensão e as taxas de liberação de energia de deformação para trincas interfaciais em materiais ortotrópicos.

De Paula e Aliabadi (1997) mostraram que os fatores de intensidade de tensão complexos para trincas interfaciais em bimateriais ortotrópicos são obtidos usando uma integral de contorno independente do caminho e do deslocamento da abertura da trinca. A técnica proposta foi aplicada para trincas interfaciais em materiais dissimilares isotrópicos e ortotrópicos. Foram apresentados diversos exemplos para demonstrar a exatidão do método.

Chen e Hsu (1997) apresentaram soluções analíticas para campos de tensão e deslocamento de duas chapas anisotrópicas semi-infinitas formando um compósito bimaterial com uma trinca interfacial. Entre os vários modelos matemáticos que representam trincas reais, o modelo de trinca onde as duas faces estão no mesmo plano (“thin cut”) é de interesse especial, uma vez que requerem métodos matemáticos simples no seu estudo. Entretanto, este modelo não reflete algumas das propriedades de uma trinca real, em particular as trincas assimétricas. No modelo matemático proposto pelos autores foi levada em conta uma trinca interfacial em forma de bolha, onde as duas faces da trinca são constituídas por curvas e, portanto, não estão no mesmo plano.

Pan e Amadei (1999) apresentaram uma formulação do método de elementos de contorno para a análise de problemas da fratura elástica linear em bimateriais anisotrópicos. Nessa formulação a equação integral de deslocamentos é aplicada apenas no contorno não trincado, e a equação integral de força de superfície é aplicada somente em uma das faces da trinca. A função de Green completa para bimateriais anisotrópicos foi também derivada e implementada na formulação integral de contorno. Com isso, a discretização ao longo da interface pôde ser evitada exceto para a parte correspondente à trinca interfacial. Foi introduzido um elemento especial na ponta da trinca para que o comportamento exato dos campos de tensão e deformação pudesse ser obtido.

Shen *et al.* (1999) mostraram problemas de trincas interfaciais em chapas laminadas anisotrópicas em estado de deformação plana. Assumiu-se que cada lâmina do laminado foi idealmente colada. Todas as lâminas foram consideradas arbitrariamente anisotrópicas, podendo ser analisados problemas com simetria isotrópica, ortotrópica ou transversalmente isotrópica, usando materiais compósitos ou homogêneos.

Liu e Xu (2000) utilizaram o método dos elementos de contorno para analisar trincas interfaciais em bimateriais isotrópicos. Também analisaram trincas interfaciais curvas localizadas entre a matriz e a fibra de materiais compósitos reforçados com fibras.

De Paula e Vecci (2002) analisaram o comportamento de trincas interfaciais entre materiais compósitos com propriedades diferentes usando o método dos elementos de contorno. O material compósito considerado é uma estrutura laminada construída pela superposição de lâminas finas, e cada uma delas com fibras em uma direção específica. A consideração de materiais com propriedades diferentes resulta em um fator de intensidade de tensão complexo associado com uma trinca interfacial elástica. O deslocamento relativo entre as faces da trinca, obtidos na análise numérica com o método dos elementos de contorno, é a grandeza básica usada no método de deslocamentos de abertura da trinca para desacoplar os componentes do fator de intensidade de tensão complexo.

Paiva *et al.* (2003) apresentaram um procedimento para análise de problemas da mecânica da fratura elástica linear em chapas bimateriais isotrópicas usando o método dos elementos de contorno. Este procedimento foi estendido, posteriormente, para chapas bimateriais anisotrópicas (Paiva *et al.*, 2004).

Liu *et al.* (2004) apresentaram um outro método para a obtenção do fator de intensidade de tensão em modo misto para trincas interfaciais em uma tira bimaterial infinita, considerando os dois materiais anisotrópicos. Foi desenvolvida uma solução de deslocamentos para a tira infinita anisotrópica bimaterial.

1.4 Realizações e contribuições

Este trabalho segue a linha de pesquisa de análise de trincas em materiais anisotrópicos usando o MEC. Ele dá seqüência ao estudo de trincas interfaciais iniciado com o trabalho de Paiva (2000).

No trabalho anterior foi realizada toda a implementação do MEC para análise de componentes bimateriais, contendo uma trinca na interface entre os dois diferentes materiais isotrópicos (figura 1.1).

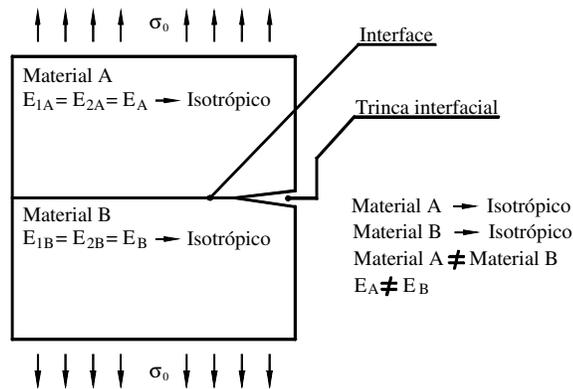


Figura 1.1: Exemplo de material analisado com a formulação isotrópica existente.

Neste trabalho foi estudada toda a formulação anisotrópica com o propósito de estender a formulação anterior para os laminados bimatriciais anisotrópicos (figura 1.2).

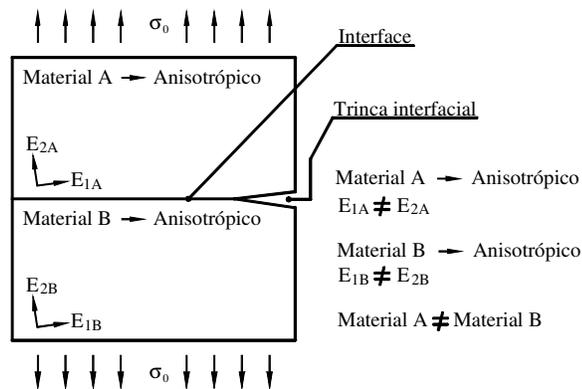


Figura 1.2: Exemplo de material analisado com a formulação anisotrópica implementada neste trabalho.

A implementação computacional foi realizada sobre a implementação anterior, aproveitando a estrutura das funções existentes (entrada de dados, formatação dos dados, esquema de integração, etc), e substituindo as funções de aplicação tipicamente isotrópicas por novas funções anisotrópicas (figura 1.3).

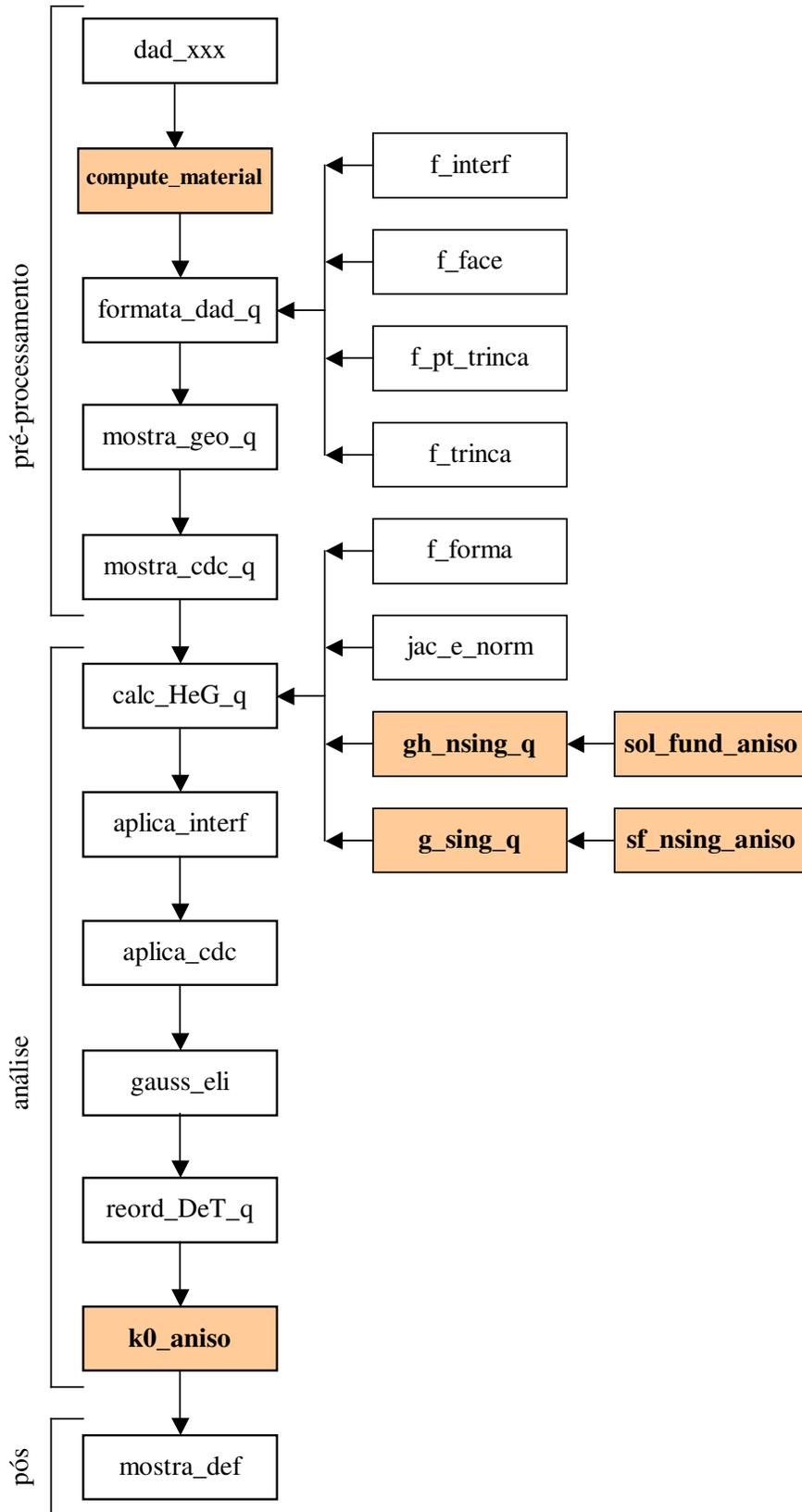


Figura 1.3: Diagrama de blocos do programa ELAST_BIMAT para materiais anisotrópicos.

O programa ELAST_BIMAT pode ser dividido em três módulos básicos: pré-processamento, análise e pós-processamento (figura 1.3). O pré-processamento é constituído de cinco etapas básicas:

- i. Definição dos dados do problema.* Em DAD_XXX os dados de entrada do problema, tais como geometria, malha de elementos de contorno, condições de contorno e discretização são definidos pelo usuário através de um arquivo texto.
- ii. Geração das matrizes das propriedades do material.* Na rotina COMPUTE_MATERIAL são calculadas as propriedades elásticas anisotrópicas de cada material que constitui o componente a ser analisado.
- iii. Formatação dos dados de entrada.* Em FORMATA_DAD_Q os dados de entrada, que tem forma amigável para o usuário, são transformados num novo conjunto de dados definido de forma a ser utilizado de forma mais rápida e eficiente durante a análise. Durante a formatação de dados, F_INTERF automaticamente descobre os elementos que estão na interface, sobre as quais as condições de continuidade de deslocamentos e equilíbrio de forças de superfícies devem ser aplicadas. Ainda nessa etapa, F_PT_TRINCA encontra a ponta da trinca e F_FACE e F_TRINCA estabelecem os parâmetros para aplicação dos 3 elementos de ponto a um quarto na ponta da trinca e para a discretização usando variação incremental do comprimento dos elementos a partir da ponta da trinca. A razão dessa variação incremental pode ser ajustada conforme a necessidade, tendo sido usada nesse trabalho uma razão de 1:2.
- iv. Visualização da geometria.* A geometria do problema e a malha são apresentadas graficamente ao usuário em MOSTRA_GEO_Q.
- v. Visualização das condições de contorno.* As condições de contorno de deslocamentos e forças de superfície impostas são apresentadas graficamente ao usuário em MOSTRA_CDC_Q.

Nesse ponto o pré-processamento está concluído e a análise é iniciada. A análise pode ser dividida nas seis etapas descritas a seguir:

- i. Montagem das matrizes H e G.* Em CALC_HEG_Q são montadas as matrizes de influência **H** e **G**, que descrevem o comportamento do problema em estudo. Para

isso são necessárias as funções de forma calculadas em F_FORMA. Em JAC_E_NORM são calculados o Jacobiano e o vetor normal. GH_NSING_Q é responsável pelo cálculo das integrais h e g , dadas pelo produto entre funções de forma, Jacobianos e soluções fundamentais, quando o ponto fonte não se encontra no elemento sobre o qual a integração está sendo feita. A solução fundamental é calculada em SOL_FUND_ANISO. G_SING_Q é responsável pelo cálculo da integral singular, que ocorre quando o ponto fonte pertence ao elemento que está sendo integrado. Nesse caso a solução fundamental é dividida em duas partes, uma não singular, calculada usando Gauss padrão, e outra singular, calculada usando Gauss logarítmico (Paiva, 2000). SF_NSING_ANISO calcula a parte não singular da solução fundamental.

- ii. ***Aplicação das condições de continuidade de deslocamentos e equilíbrio de forças.*** As condições de continuidade de deslocamentos e equilíbrio de forças na interface são aplicadas em APLICA_INTERF, onde as colunas da matriz **G**, referentes aos elementos da interface, cujas forças de superfícies são desconhecidas, são transferidas para a matriz **H**, sendo obtido o sistema de equações a ser resolvido.
- iii. ***Aplicação das condições de contorno.*** Em APLICA_CDC as condições de contorno do problema são aplicadas através da permutação de colunas entre as matrizes **H** e **G**, gerando como resultado a matriz **A** e o vetor **f** do sistema linear a ser resolvido.
- iv. ***Resolução do sistema linear.*** Em GAUSS_ELI o sistema linear é resolvido através do método da eliminação de Gauss.
- v. ***Reordenação da solução.*** A solução obtida é reordenada em um vetor com os deslocamentos nodais e outro com as forças de superfície em cada elemento, através de REORD_DET_Q.
- vi. ***Cálculo do fator de intensidade de tensão.*** Em K0_aniso é calculado o fator de intensidade de tensão, numericamente e analiticamente, nos casos em que isso seja possível.

Uma vez finalizada a análise, tem-se início o pós-processamento, do qual faz parte a:

Apresentação da geometria deformada. A geometria deformada obtida pela análise de elementos de contorno é apresentada por MOSTRA_DEF. Os deslocamentos nodais são multiplicados por um fator de ampliação e somados às coordenadas nodais iniciais do problema, resultando na posição nodal apresentada para a visualização.

O conjunto de funções implementadas no programa ELAST_BIMAT é mostrado em destaque no diagrama de blocos da figura 1.3.

A grande contribuição deste trabalho foi justamente a implementação destas funções. Isso agregou uma funcionalidade a mais ao programa de análise de trincas interfaciais, tornando-o mais geral que, com isso, pode ser usado para estudar um número maior de problemas. Um dos grandes atrativos é a possibilidade de aplicá-lo na análise de trincas em laminados compósitos, um dos materiais de grande interesse da atualidade.

Capítulo 2

Materiais Compósitos

2.1 Introdução

Este capítulo apresenta uma definição mais detalhada dos materiais compósitos. Essa definição está relacionada com os materiais constituintes, suas características, classificação quanto ao tipo de reforço, etc. São apresentadas as características dos materiais compósitos e seu comportamento mecânico, bem como sua aplicação, vantagens e desvantagens. Os tipos de falhas que podem ocorrer na estrutura dos materiais compósitos também são apresentados.

2.2 Definição e generalidades

Os materiais compósitos não são recentes. Eles são conhecidos desde a antiguidade. Os antigos Chineses, Israelitas e Egípcios já fabricavam materiais compósitos misturando palha em tijolos de argila para melhorar a sua capacidade estrutural.

Um material compósito pode ser definido como qualquer material que apresenta em sua composição dois ou mais materiais ou fases constituintes distintas. Essa definição, a princípio, incluiria uma grande parte dos materiais, tais como aços, ligas metálicas, plásticos e cerâmicos. Por isso, segundo Agarwal e Broutman (1990), consideram-se compósitos apenas os materiais que também atendam aos requisitos abaixo:

- Os constituintes devem apresentar propriedades físicas significativamente diferentes. No caso de compósitos estruturais, a relação entre a resistência mecânica dos constituintes deve ser superior a 5;
- Uma das fases deve estar em forma de fibra, placa ou partícula macroscópica;

- Deve existir uma clara distinção entre as fases e uma interface bem definida;
- A fração volumétrica de cada uma das fases deve ser superior a 10%.

A estrutura do material compósito é geralmente constituída por uma ou mais fases descontínuas imersas em uma fase contínua. A figura 2.1 mostra um material compósito com matriz epóxi reforçada por fibras de vidro, em corte transversal às fibras (fase descontínua). Pode-se distinguir claramente a fase contínua da fase descontínua.

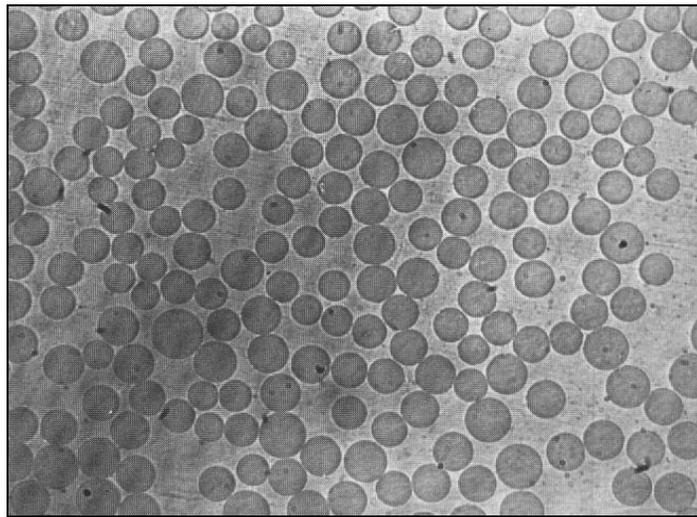


Figura 2.1: Fase contínua (matriz) e descontínua (reforço) em material compósito.

A fase descontínua dos materiais compósitos estruturais apresenta as seguintes características:

- Geralmente é mais resistente e mais dura que a fase contínua e por isso costuma ser chamada de reforço;
- Apresenta alta resistência à tração e alto módulo de elasticidade;
- Tem a função estrutural, ou seja, resistir ao carregamento.

O reforço se apresenta nas formas de fibras longas ou curtas, placas ou partículas de dimensões macroscópicas. Os materiais mais utilizados são vidro, carbono, kevlar e boro.

A fase contínua, chamada de matriz, apresenta as seguintes características:

- É mais dúctil que o reforço;
- Transfere o carregamento para as fibras e suporta carga de compressão e impactos;
- Tem a função de manter as fibras unidas e protegê-las do meio ambiente;
- Assegura a forma final da estrutura.

Os materiais mais utilizados na fabricação das matrizes de materiais compósitos são as resinas epóxi e poliéster.

2.3 Classificação dos materiais compósitos

Os materiais compósitos podem ser classificados de acordo com a forma geométrica de seus reforços, uma vez que estes são os responsáveis pela resistência final do compósito.

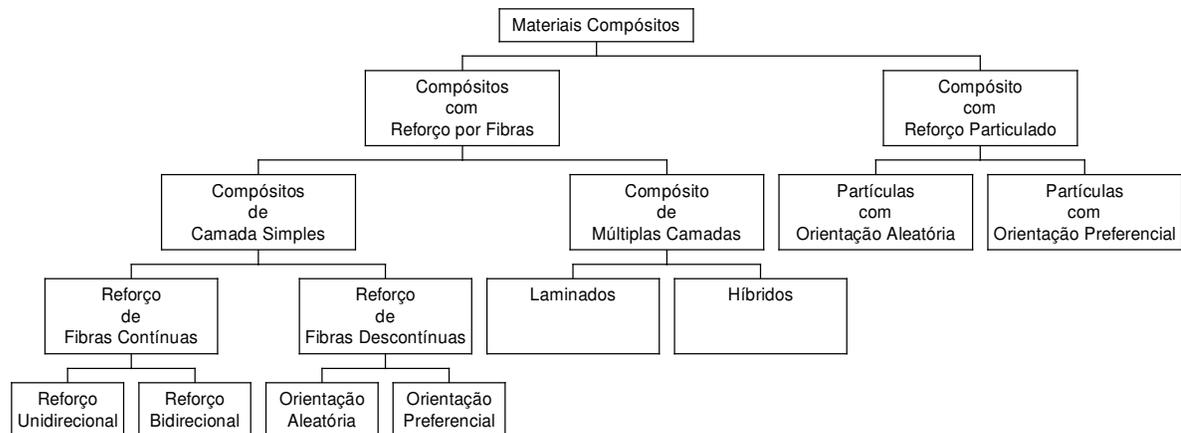


Figura 2.2: Classificação dos materiais compósitos.

A figura 2.2 mostra essa classificação e nota-se que os materiais compósitos dividem-se em dois grandes grupos: os compósitos reforçados por fibras e os compósitos reforçados por partículas. As fibras são caracterizadas por apresentarem um comprimento muito maior que as dimensões transversais, enquanto as partículas apresentam dimensões características com valores próximos. As fibras dividem a carga com a matriz de uma forma muito mais eficiente que as

partículas, e de forma geral, as partículas são eficientes no aumento da rigidez, mas não apresentam boa eficiência no aumento da resistência mecânica.

O material compósito particulado é considerado de orientação preferencial quando as partículas de reforço apresentam uma pequena diferença em uma das dimensões e o processo de fabricação induz uma orientação preferencial dessas dimensões características. Nos outros casos, os compósitos particulados são considerados de orientação aleatória.

Os compósitos reforçados por fibras podem ser classificados como compósitos de camadas simples ou de múltiplas camadas. Os compósitos de camadas simples são constituídos de várias camadas de fibras, todas com a mesma orientação. O compósito apresentado na figura 2.1 é um exemplo deste tipo de material.

Os compósitos de múltiplas camadas, que são os mais empregados em aplicações estruturais, apresentam várias camadas de fibras com orientações variáveis. Estes podem ser classificados como laminados (mesmos materiais constituintes em cada camada) ou híbridos (camadas com materiais diferentes).

As fibras de reforço podem ser contínuas (longas) ou descontínuas (curtas), sendo que a determinação do comprimento da fibra deve ser feita em comparação com as dimensões do compósito. Num compósito de fibras contínuas, pode-se admitir que a carga é diretamente aplicada sobre as fibras, e as fibras paralelas ao carregamento são as estruturas que efetivamente suportam as cargas sobre o material. Quando as fibras estão todas alinhadas em uma só direção, o compósito é classificado como unidirecional. Esse tipo de compósito é bastante resistente na direção das fibras e geralmente fraco na direção perpendicular a elas. Se além da disposição de fibras em uma certa direção, o material apresentar fibras alinhadas em uma segunda direção, o compósito é classificado como bidirecional. O segundo reforço pode ser colocado na direção perpendicular às fibras, reforçando a direção mais fraca do compósito. Dessa forma, o compósito bidirecional apresenta resistências semelhantes em duas direções perpendiculares.

2.4 Características mais importantes dos materiais compósitos

Os materiais compósitos possuem duas características que podem ser consideradas as mais importantes, que são: anisotropia controlável e alta resistência específica. A anisotropia controlável significa que a razão de propriedades em diferentes direções pode ser variada com facilidade. Por exemplo, a razão da resistência longitudinal pela resistência transversal para um compósito bidirecional pode ser alterada, mudando-se a fração volumétrica das fibras em cada direção. Essa característica é importante na aplicação estrutural de materiais compósitos porque possibilita a fabricação de um material com propriedades melhores nas direções em que as solicitações mecânicas serão mais críticas. A resistência específica é uma propriedade dada pela razão entre a resistência mecânica e a densidade de um material.

O gráfico da figura 2.3 mostra que compósitos fibrosos podem apresentar maior resistência específica que ligas metálicas estruturais.

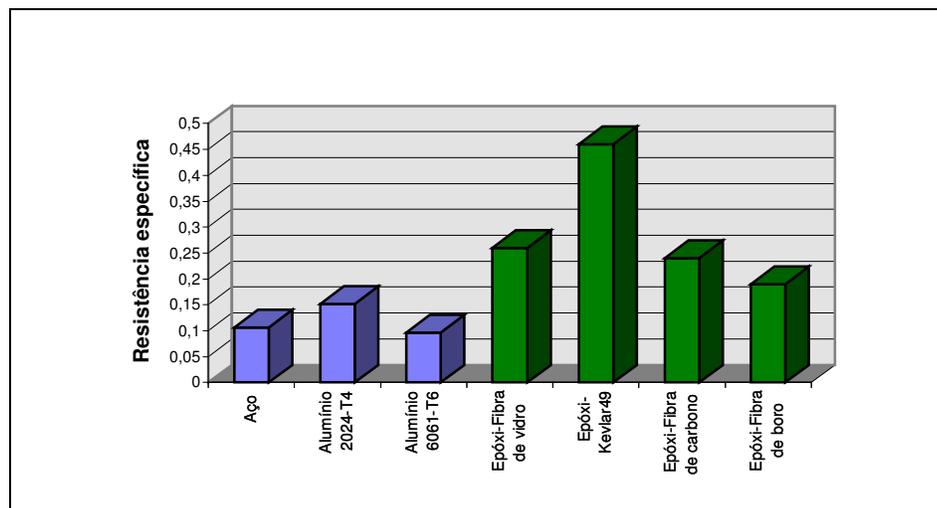


Figura 2.3: Resistência específica de ligas metálicas estruturais e materiais compósitos bidirecionais.

Observa-se que a resistência específica utilizada no gráfico é a razão entre o limite de resistência a tração (σ_u) e a densidade do material.

2.5 Aplicações

Atualmente os compósitos reforçados com fibras são rotineiramente usados nas mais diversas aplicações: aeroespaciais, automobilísticas, na construção civil, em plataformas marítimas, contêineres e tubulações, na fabricação de materiais esportivos e de lazer, na fabricação de artigos de segurança e defesa, de aparelhos eletrônicos e eletrodomésticos.

Um exemplo da aplicação de compósitos em aeronaves é mostrado na figura 2.4. A maior parte da estrutura primária do Boeing 787 será fabricada com compósito reforçado com fibras de carbono. Nenhuma outra aeronave usou materiais compósitos em tal escala. Por exemplo, na fabricação do Boeing 777 é empregado cerca de 12% de materiais compósitos e 50% de alumínio. O Boeing 787 conterá apenas 20% da estrutura em alumínio. Os materiais compósitos corresponderão a aproximadamente 100% da superfície do 787 e 50% de todo o material usado na construção da aeronave.



Figura 2.4: Aplicações de compósitos no B777 e B787.

A utilização de materiais compósitos tem crescido muito nos últimos anos devido as suas características de alta resistência mecânica aliada ao baixo peso específico, o que vem ampliando seu campo de aplicação. Além da indústria aeroespacial que foi uma das primeiras a utilizá-los, outra indústria que vem aumentando sua utilização é a automobilística. Já nos anos 50 compósitos de fibra de vidro e epóxi começaram a ser utilizados pela Citroen na fabricação do

D-19 com uma produção anual de 70.000 veículos e também pela General Motors na fabricação do Corvette, com uma produção anual de 10.000 veículos (Nabarrete, 1998).

Nos anos 60 começaram a ser introduzidos os primeiros compósitos em aviões de passageiros. A princípio eram usados compósitos de fibra de vidro em painéis. A partir de 1980 o Airbus A310 passou a utilizar “spoilers”, lemes para estabilizadores verticais e outras partes estruturais fabricados com compósitos reforçados com fibras de carbono que representam cerca de 8% de contribuição no peso estrutural total da aeronave, enquanto no A320 essa contribuição é de 12% chegando a 16% no A340 (Hilgert, 1994).

Na Alemanha já se projetam cabines de locomotivas feitas totalmente de compósito reforçado com fibras de carbono em matriz epóxi, reduzindo seus pesos para cerca de um terço em comparação com as fabricadas em aço.

No Brasil a indústria automobilística faz uso maciço de compósitos na construção de autopeças como pára-choques, capôs, e até cabines para as linhas de ônibus e caminhões. Além das vantagens já citadas em termos de peso e resistência, as cabines de compósitos têm ainda outros pontos positivos: são mais silenciosas que suas concorrentes em aço, graças às melhores propriedades de absorver sons dos materiais compósitos e, ao contrário das fabricadas com aço, não apresentam corrosão.

2.6 Vantagens e desvantagens

Os compósitos reforçados com fibras já têm se firmado como excelentes materiais de construção mecânica. Um exemplo é a substituição das ligas de alumínio convencionais por compósitos reforçados com fibras de carbono, que superam as propriedades mecânicas das ligas de alumínio em cerca de três vezes, em aplicações aeronáuticas. Além disso, a fabricação de qualquer componente em compósito consome muito menos energia que a fabricação do mesmo componente em alumínio uma vez que um quilograma de material compósito requer somente um sétimo da energia necessária para a produção do mesmo componente usando alumínio. Outra

grande vantagem dos compósitos sobre os metais mais comumente utilizados é que estes não sofrem corrosão.

Por outro lado componentes fabricados com compósitos têm alguns inconvenientes: a matéria-prima em si é mais cara que a maioria dos metais comumente utilizados o que eleva o preço do componente; a reparação de peças danificadas é mais difícil; apresentam níveis de qualidade muito baixos ao serem reciclados. Infelizmente, os materiais compósitos, quando danificados, apresentam ainda um outro problema: embora componentes fabricados com compósitos sejam capazes de absorver energias de impacto consideravelmente maiores que similares fabricados com metais, quando falham apresentam uma fratura frágil, isto é, falham sem aviso. Assim, um impacto forte pode separar a matriz da fibra sem produzir sinais externamente visíveis. Isso aponta, posteriormente, para uma falha de um componente aparentemente intacto, ao contrário daqueles fabricados com metais, que ao serem submetidos a impactos se deformam, o que, em termos de segurança, é interessante, pois possibilita a detecção visual da falha.

Um grande problema enfrentado pelas companhias aéreas é a manutenção de suas aeronaves. Embora o material laminado normalmente permaneça não danificado exteriormente, finas camadas se separam umas das outras no interior do material. Granizo ou pássaros batendo contra aeronaves são, algumas vezes, suficientes para iniciar esse processo. Infelizmente, nestes casos, a peça inteira deve ser trocada, encarecendo a manutenção do equipamento. Entretanto a troca da peça é necessária apenas nos casos em que o componente é de muita responsabilidade, pois, pelo lado da indústria automobilística, é muito comum a execução de reparos em partes de componentes com grande sucesso.

2.7 Modos de falha e de fratura em materiais compósitos

Em materiais compósitos reforçados por fibras, que são considerados os mais utilizados em aplicações estruturais, podem surgir falhas internas muito antes de ser possível observar alguma alteração do comportamento ou das características macroscópicas do material. As falhas em compósitos podem ser melhor expressas em termos de danificação sobre uma área ou volume.

Em geral os processos de fratura em compósitos são complexos. Estudos realizados em vários sistemas compósitos têm mostrado que, durante a fratura, diversos mecanismos podem ocorrer simultânea e cumulativamente. Existem quatro modos principais de fratura ou falha que podem ocorrer na estrutura de materiais compósitos:

- Separação entre fibra e matriz (descolamento);
- Trincamento da matriz;
- Separação de lâminas (delaminação);
- Rompimento das fibras.

2.7.1 Separação entre fibra e matriz

Esse modo de falha também é conhecido como descolamento (do inglês “debonding”). Geralmente é provocado por tensões de cisalhamento, que surgem quando a forma de carregamento tende a “puxar” as fibras para fora da matriz. A figura 2.5 mostra esse tipo de falha em um compósito de matriz epóxi reforçado com fibras de vidro. A trinca pode ser evidenciada entre a matriz e duas fibras.

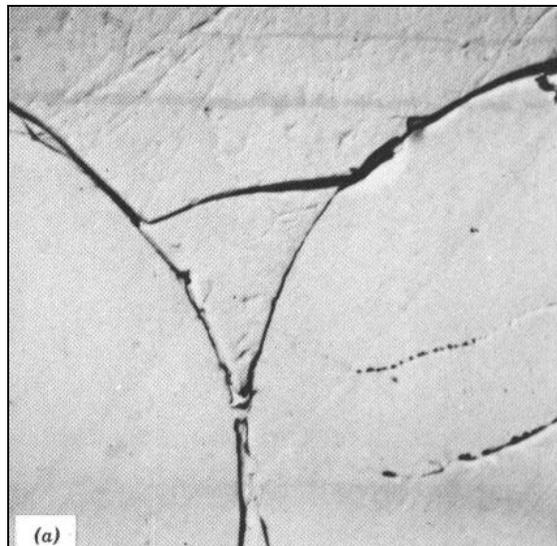


Figura 2.5: Separação entre fibra e matriz em compósito.

2.7.2 Trincamento da matriz

Esse tipo de falha é provocado por carregamentos perpendiculares à direção das fibras de reforço, de forma que uma trinca se propaga entre as fibras, danificando a matriz do material compósito, que é o componente menos resistente. O trincamento da matriz é mostrado na figura 2.6.

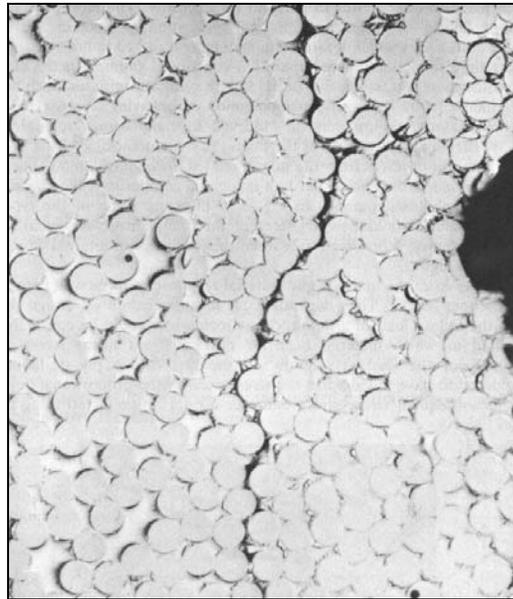


Figura 2.6: Trincamento da matriz.

2.7.3 Separação de laminas

Também conhecido como delaminação, esse modo de falha é o mais crítico existente em materiais compósitos, pois é a falha que exige menor quantidade de energia para ocorrer. Existem vários estudos realizados e algumas normas para a determinação da tenacidade à fratura na delaminação, uma vez que esse modo de falha é um ponto fraco dos materiais compósitos. A delaminação decorre de uma propagação de trinca entre duas lâminas ou camadas de um compósito, provocada por um carregamento excessivo na direção perpendicular às lâminas. A figura 2.7 mostra a delaminação ocorrida em um material compósito de matriz epóxi reforçado por fibras de vidro.

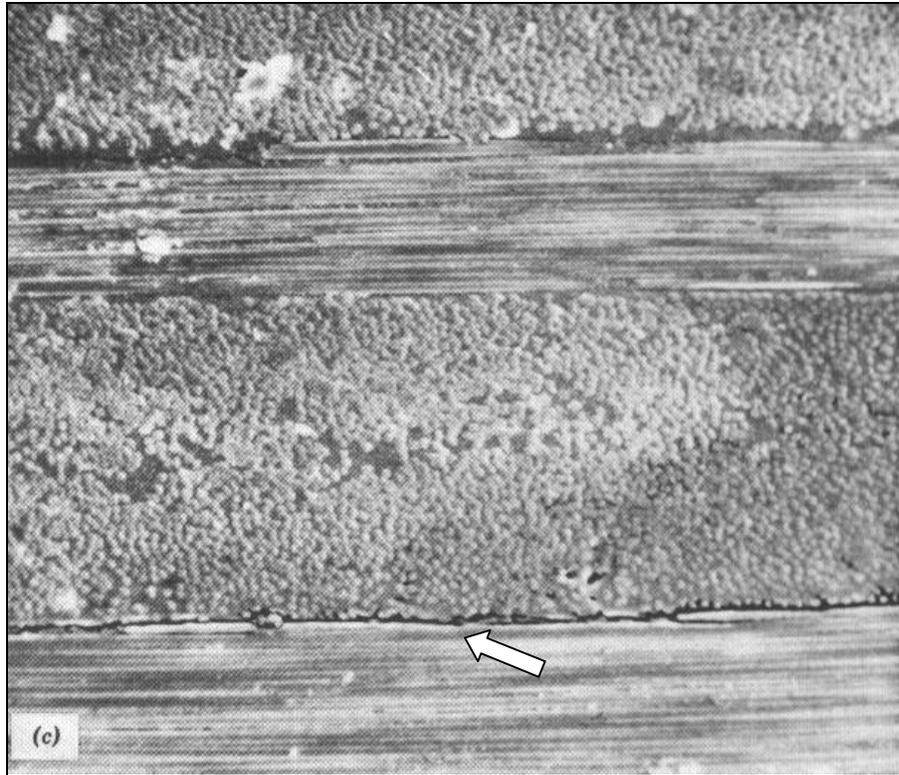


Figura 2.7: Falha de compósito por delaminação.

2.7.4 Rompimento das fibras

Esse modo de falha ocorre pela carga excessiva aplicada na direção das fibras. Após o rompimento das fibras, geralmente ocorre o descolamento entre fibra e matriz. A figura 2.8 mostra a superfície de fratura em um compósito de matriz epóxi reforçado com fibras de vidro, onde podem ser vistas fibras rompidas arrancadas da matriz e cavidades de onde foram arrancadas fibras.

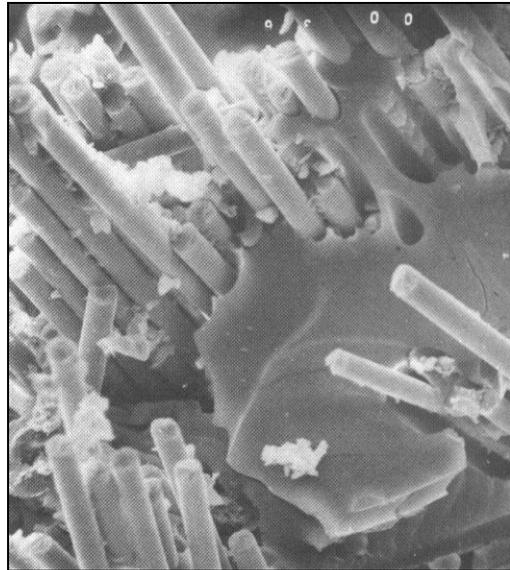


Figura 2.8: Rompimento de fibras.

A resistência à fratura interfacial para materiais compósitos reforçados com fibra é a caracterização da resistência isolada mais importante de seus componentes mecânicos.

Capítulo 3

Equações constitutivas e de equilíbrio para materiais anisotrópicos

3.1 Introdução

Neste capítulo é feita uma breve introdução ao comportamento mecânico dos materiais anisotrópicos. Em seguida, é feita uma revisão da teoria da elasticidade aplicada a materiais anisotrópicos. Este trabalho faz uso da teoria da elasticidade linear clássica, a qual é baseada em duas suposições de linearidade: linearidade física e geométrica. A primeira assume que a equação constitutiva dada pela relação tensão-deformação é linear. A segunda assume que as deformações podem ser representadas linearmente em termos de gradientes de deslocamentos conforme o tensor de deformação infinitesimal de Cauchy. Também é mostrada a obtenção das equações constitutivas de uma lâmina. As formulações matemáticas presentes neste capítulo serão usadas nos capítulos posteriores, quer seja na obtenção da formulação do método dos elementos de contorno, quer seja na comparação com resultados numéricos obtidos a partir das formulações propostas.

3.2 Comportamento mecânico

Uma vez que esta dissertação apresenta análises de problemas envolvendo tanto os materiais com comportamento mecânico isotrópico como aqueles com comportamento mecânico anisotrópico, cabe aqui uma descrição onde fiquem patentes as diferenças básicas entre as propriedades de cada um deles. Essas diferenças podem ser explicadas por meio das suas respostas aos carregamentos de tração e cisalhamento (Staab, 1999).

Considere três corpos de prova, sendo o primeiro fabricado com material isotrópico, o segundo com material ortotrópico e o terceiro com material anisotrópico.

Um carregamento uniaxial em tração no corpo de prova isotrópico causa um alongamento na direção do carregamento e uma contração na direção transversal, enquanto que os ângulos entre dois lados adjacentes não sofrem nenhuma mudança (figura 3.1).

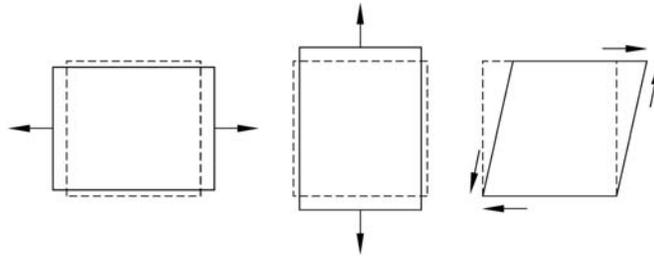


Figura 3.1: Comportamento mecânico de um material isotrópico.

Da mesma forma, a distorção causada por um carregamento de cisalhamento puro altera os ângulos entre lados adjacentes sem causar alteração alguma nos comprimentos. Além disso, quando a direção do carregamento aplicado é alterada, a resposta do material permanece constante. Isto é, carregamentos iguais, aplicados em diferentes direções, causam alterações iguais nos comprimentos e ângulos. Portanto, conclui-se que o comportamento dos materiais isotrópicos é independente da direção do carregamento, que tensões normais causam apenas deformações volumétricas e que tensões de cisalhamento causam apenas deformações geométricas.

No corpo de prova anisotrópico existe, tipicamente, um acoplamento entre alongamento e deformação de cisalhamento, segundo o qual o carregamento uniaxial em tração causa alterações tanto nos comprimentos como nos ângulos (figura 3.2).

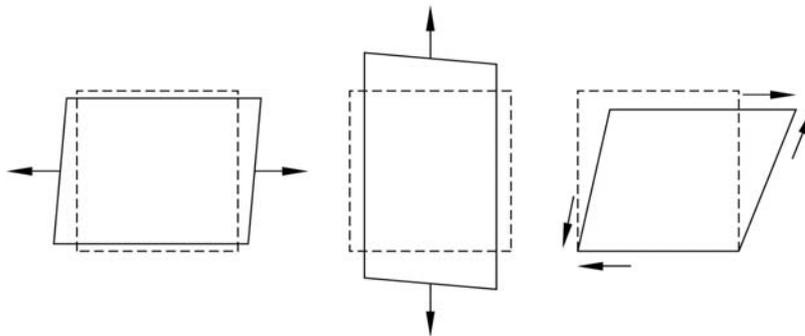


Figura 3.2: Comportamento mecânico de um material anisotrópico.

Da mesma forma, um carregamento de cisalhamento puro também resulta em alterações tanto nas dimensões lineares como nas angulares. Além disso, quando o carregamento é aplicado em diferentes direções seus efeitos são alterações desiguais em comprimentos e ângulos. Ou seja, o comportamento dos materiais anisotrópicos é dependente da direção da aplicação do carregamento.

A resposta de um material ortotrópico em geral, é similar à do material anisotrópico, ou seja, é dependente da direção da aplicação do carregamento. Carregamentos de tração ou de cisalhamento provocarão tanto alterações em comprimentos quanto em ângulos. Entretanto, em casos especiais, quando os carregamentos são aplicados em algumas direções específicas, a resposta do material é similar à dos materiais isotrópicos nos quais tensões normais causam apenas deformações volumétricas e tensões de cisalhamento causam apenas deformações geométricas (figura 3.3). Estas direções com comportamento especial são os eixos de simetria do material.

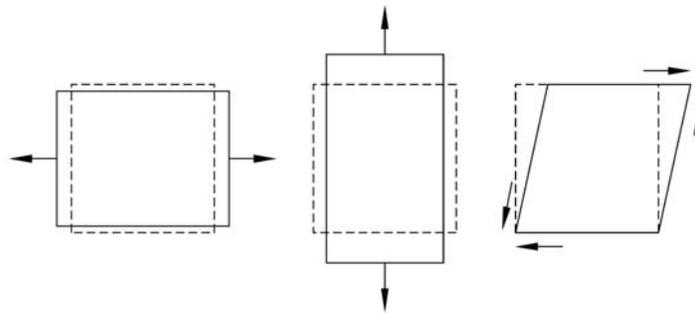


Figura 3.3: Comportamento mecânico de um material ortotrópico.

Os materiais ortotrópicos tridimensionais, geralmente, têm três eixos de simetria perpendiculares entre si. Os compósitos unidirecionais são materiais ortotrópicos nos quais as direções longitudinais e transversais são eixos de simetria. Devido a essa característica os compósitos unidirecionais também são chamados de transversalmente isotrópicos. Em geral os compósitos laminados apresentam comportamento ortotrópico ou anisotrópico.

3.3 Elasticidade anisotrópica

Considerando um elemento infinitesimal dentro de um domínio Ω , o equilíbrio de forças pode ser expresso por

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i - \rho \ddot{u}_i = 0 \quad (3.1)$$

Por sua vez, o equilíbrio de momentos resulta em

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad (3.2)$$

onde σ_{ij} é o tensor de tensões e b_i é o vetor de forças de corpo, \ddot{u}_i é o vetor de acelerações que corresponde a segunda derivada do vetor de deslocamentos u_i em relação ao tempo τ .

O vetor de forças de superfície em um ponto no contorno Γ de um domínio Ω é expresso na forma

$$t_i = \sigma_{ij} n_j, \quad (3.3)$$

onde n_j é o vetor normal do contorno Γ no ponto.

Em elasticidade linear, considerando pequenas deformações, o vetor de deslocamentos e suas derivadas têm componentes com valores da ordem de 10^{-3} . Portanto, considerando pequenas deformações, o tensor de deformação pode ser escrito como

$$\epsilon_{kl} = \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k}) \quad (3.4)$$

Para assegurar a unicidade dos deslocamentos, as componentes do tensor de deformações não podem ser designadas arbitrariamente, devendo satisfazer certas condições de compatibilidade e integrabilidade. A equação de compatibilidade é dada por

$$\epsilon_{ij,kl} + \epsilon_{kl,ij} - \epsilon_{ik,jl} - \epsilon_{jl,ik} = 0 \quad (3.5)$$

que no caso bidimensional é reduzida à forma

$$\epsilon_{11,22} + \epsilon_{22,11} = \epsilon_{12,12} \quad (3.6)$$

No caso de material elástico linear, a relação entre o tensor de tensões com o tensor de deformações é escrita, na sua forma mais geral, como

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}, \quad (3.7)$$

sendo o coeficiente de linearidade C_{ijkl} um tensor de quarta ordem (81 elementos) conhecido como tensor de constantes elásticas. Devido às restrições de simetria tem-se que

$$C_{ijkl} = C_{jikl}, \quad C_{ijkl} = C_{ijlk} \quad (3.8)$$

A condição para a existência de uma função energia de deformação também requer que

$$C_{ijkl} = C_{klji} \quad (3.9)$$

Estas considerações reduzem o número de constantes elásticas de 81 para 21. Como a direção das tensões principais não coincide necessariamente com a direção das deformações principais, apenas 18, das 21 constantes elásticas são independentes (Lekhnitskii, 1963). A equação (3.7) pode ser escrita na forma matricial como

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} \\ C_{1123} & C_{2223} & C_{3323} & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} \\ C_{1113} & C_{2213} & C_{3313} & C_{2313} & C_{1313} & C_{1312} \\ C_{1112} & C_{2212} & C_{3312} & C_{2312} & C_{1312} & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

A equação (3.7) também pode ser escrita na forma

$$\epsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (3.11)$$

onde S_{ijkl} é um tensor de quarta ordem conhecido como tensor de flexibilidade, que, devido às mesmas razões do tensor de constantes elásticas, possui 21 elementos, dos quais apenas 18 são independentes.

A equação (3.11) pode ser escrita na forma matricial como

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & 2S_{1123} & 2S_{1113} & 2S_{1112} \\ S_{1122} & S_{2222} & S_{2233} & 2S_{2223} & 2S_{2213} & 2S_{2212} \\ S_{1133} & S_{2233} & S_{3333} & 2S_{3323} & 2S_{3313} & 2S_{3312} \\ 2S_{1123} & 2S_{2223} & 2S_{3323} & 4S_{2323} & 4S_{2313} & 4S_{2312} \\ 2S_{1113} & 2S_{2213} & 2S_{3313} & 4S_{2313} & 4S_{1313} & 4S_{1312} \\ 2S_{1112} & 2S_{2212} & 2S_{3312} & 4S_{2312} & 4S_{1312} & 4S_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

Usando a notação tensorial reduzida, proposta por Lekhnitskii (1963), a equação (3.12) pode ser escrita como

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} & a_{56} \\ a_{16} & a_{26} & a_{36} & a_{46} & a_{56} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

onde

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

e

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

Os coeficientes elásticos podem ser expressos em termos de constantes de engenharia como (Lekhnitskii, 1963)

$$\begin{aligned}
a_{11} &= 1/E_1 & a_{12} &= \nu_{12}/E_1 = -\nu_{21}/E_2 \\
a_{13} &= -\nu_{31}/E_1 = -\nu_{13}/E_3 & a_{14} &= \eta_{23,1}/E_1 = \eta_{1,23}/G_{23} \\
a_{15} &= \eta_{32,1}/E_1 = \eta_{1,32}/G_{23} & a_{16} &= \eta_{12,1}/E_1 \\
a_{22} &= 1/E_2 & a_{23} &= \nu_{32}/E_2 = -\nu_{23}/E_3 \\
a_{24} &= \eta_{23,1}/E_2 = \nu_{23,3}/G_{23} & a_{25} &= \eta_{31,2}/E_2 = \eta_{2,31}/G_{13} \\
a_{26} &= \eta_{12,2}/E_2 = \eta_{2,12}/G_{12} & a_{33} &= 1/E_3 \\
a_{34} &= \eta_{23,3}/E_3 = \eta_{3,23}/G_{23} & a_{35} &= \eta_{31,1}/E_3 = \eta_{3,31}/G_{13} \\
a_{36} &= \eta_{12,3}/E_3 = \eta_{3,12}/G_{12} & a_{44} &= 1/G_{23} \\
a_{45} &= \zeta_{32,23}/G_{23} = \zeta_{23,31}/G_{13} & a_{46} &= \zeta_{12,23}/G_{23} = \zeta_{23,12}/G_{12} \\
a_{55} &= 1/G_{13} & a_{56} &= \zeta_{12,31}/G_{13} = \zeta_{31,12}/G_{12} \\
a_{66} &= 1/G_{12} & &
\end{aligned} \tag{3.16}$$

onde E_k são os módulos de elasticidade longitudinais, ou módulos de Young, referindo-se aos eixos x_k , G_{ij} são os módulos de elasticidade transversais, ou módulos de Coulomb, para os planos definidos pelos eixos $x_i x_j$. Os coeficientes ν_{ij} são chamados coeficientes de Poisson. As constantes $\eta_{jk,l}$ são denominadas de coeficientes de influência mútua de primeira espécie que caracterizam extensões nas direções dos eixos principais, produzidas por tensões tangenciais agindo nos planos principais. As constantes $\eta_{l,jk}$ são os coeficientes de influência mútua de segunda espécie, que expressam deformações tangenciais nos planos principais, causadas pelas tensões normais atuantes nos planos principais. Por fim, $\zeta_{ij,kl}$ são os coeficientes de Chentsov, que caracterizam as deformações tangenciais em planos paralelos aos planos principais de

elasticidade, causadas por tensões tangenciais que atuam em planos outros, paralelos aos planos principais de elasticidade.

Em estado plano de tensão ($\sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = 0$), um material pode ser descrito usando-se somente seis constantes elásticas independentes. Desta forma, a equação (3.13) pode ser escrita assim

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

Em estado plano de deformação ($\sigma_3 = -1/a_{33}(a_{13}\sigma_1 + a_{23}\sigma_2 + a_{36}\sigma_6), \sigma_4 = \sigma_5 = \epsilon_3 = 0$) a equação (3.13) pode ser escrita como

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{16} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \beta_{26} \\ \beta_{16} & \beta_{26} & \beta_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

onde

$$\beta_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i3}a_{j3}}{a_{33}} \quad (i, j=1, 2, 6) \quad (3.19)$$

Substituindo as equações (3.4), (3.7) na equação (3.1), obtém-se a equação de equilíbrio escrita em função dos deslocamentos

$$C_{ijkl} u_{k,jl} + p_i = 0 \quad (3.20)$$

onde

$$p_i = \rho(b_i - \ddot{u}_i) \quad (3.21)$$

é o termo que contém todas as forças de volume.

O tensor tensão pode ser escrito em termos de funções $F(x_1, x_2)$ chamadas funções tensão de Airy (Lekhnitskii, 1963) dadas por

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= F_{,22} + U \\ \sigma_{22} &= F_{,11} + U \\ \sigma_{12} &= -F_{,12}\end{aligned}\tag{3.22}$$

onde U é uma função potencial na qual

$$U_{,i} = p_i\tag{3.23}$$

Substituindo as equações (3.22) na equação constitutiva (3.17) e então na equação de compatibilidade (3.6), resulta na equação diferencial para funções tensão $F(x_1, x_2)$

$$\begin{aligned}a_{11}F_{,2222} - 2a_{16}F_{,1222} + (2a_{12} + a_{66})F_{,1122} - 2a_{26}F_{,1112} + a_{22}F_{,1111} = \\ -(a_{12} + a_{22})U_{,11} + (a_{16} + a_{26})U_{,12} - (-a_{11} + a_{12})U_{,22}\end{aligned}\tag{3.24}$$

No caso da ausência de forças de corpo a equação (3.24) pode ser escrita como

$$a_{11}F_{,2222} - 2a_{16}F_{,1222} + (2a_{12} + a_{66})F_{,1122} - 2a_{26}F_{,1112} + a_{22}F_{,1111} = 0\tag{3.25}$$

Criando o operador diferencial

$$\Delta_k = \frac{\partial}{\partial x_2} - \mu_k \frac{\partial}{\partial x_1}\tag{3.26}$$

e aplicando este operador na função tensão $F(x_1, x_2)$ na forma

$$\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4 F = 0\tag{3.27}$$

e expandindo a equação (3.27) tem-se

$$F_{,2222} - (\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4)F_{,1222} + (\mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3\mu_1\mu_4 + \mu_2\mu_3 + \mu_2\mu_4 + \mu_3\mu_4)F_{,1122} - (\mu_1\mu_2\mu_3 + \mu_1\mu_2\mu_4 + \mu_1\mu_3\mu_4 + \mu_2\mu_3\mu_4)F_{,1112} + (\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4)F_{,1111} = 0 \quad (3.28)$$

As equações (3.25) e (3.28) serão idênticas se μ_1, μ_2, μ_3 e μ_4 forem raízes da equação

$$a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22} = 0 \quad (3.29)$$

As raízes da equação (3.29) são sempre complexas ou imaginárias puras, ocorrendo aos pares $(\mu_k \text{ e } \bar{\mu}_k)$ conforme mostrado por Lekhnitskii (1968).

Criando-se a variável

$$z_k = x_1 + \mu_k x_2 \quad k=1, 2 \quad (3.30)$$

tem-se que

$$\Delta_k = \frac{\partial}{\partial x_2} - \mu_k \frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{d}{dz_k} \quad (3.31)$$

Exigindo que a função tensão seja real, tem-se

$$F(x_1, x_2) = 2 \operatorname{Re}[F_1(z_1) + F_2(z_2)] \quad (3.32)$$

Introduzindo a notação

$$\frac{dF_k(z_k)}{dz_k} = \Psi_k(z_k), \quad (3.33)$$

onde a convenção de soma não é empregada em k , e substituindo a equação (3.32) na equação (3.22), obtém-se as componentes de tensão

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 2\operatorname{Re}\left[\mu_1^2\Psi_1^{(1)}(z_1) + \mu_2^2\Psi_2^{(1)}(z_2)\right] \\ \sigma_{22} &= 2\operatorname{Re}\left[\Psi_1^{(1)}(z_1) + \Psi_2^{(1)}(z_2)\right] \\ \sigma_{12} &= -2\operatorname{Re}\left[\mu_1\Psi_1^{(1)}(z_1) + \mu_2\Psi_2^{(1)}(z_2)\right] \end{aligned} \quad (3.34)$$

onde $\Psi_k^{(1)}$ representa a primeira derivada de Ψ_k .

Substituindo a equação (3.34) na equação (3.17) e então na equação (3.20), desprezando-se os movimentos de corpos rígidos e integrando, obtém-se

$$\begin{aligned} u_1 &= 2\operatorname{Re}[q_{11}\Psi_1(z_1) + q_{12}\Psi_2(z_2)] \\ u_2 &= 2\operatorname{Re}[q_{21}\Psi_1(z_1) + q_{22}\Psi_2(z_2)] \end{aligned} \quad (3.35)$$

onde

$$q_{ik} = \begin{bmatrix} a_{11}\mu_k^2 + a_{12} - a_{16}\mu_k \\ a_{12}\mu_k + a_{22} / \mu_k - a_{26} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

é a matriz de parâmetros complexos.

Uma vez que as condições de contorno sejam conhecidas, determina-se a função tensão, dada pelas equações (3.22) com derivadas dadas pela equação (3.33), que satisfaça estas

condições, determinando assim os campos de deslocamentos, dados pelas equações (3.35), e tensões, dados pelas equações (3.34).

3.4 Equação constitutiva de uma lâmina

Se for considerada apenas uma lâmina, na qual as fibras imersas numa matriz estão alinhadas unidirecionalmente (figura 3.4), esta lâmina é ortotrópica e sua relação tensão deformação é dada por

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 2Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.37)$$

onde Q_{ij} são as componentes do tensor de rigidez, ou seja

$$Q = [Q_{ij}] = [a_{ij}]^{-1} \quad (3.38)$$

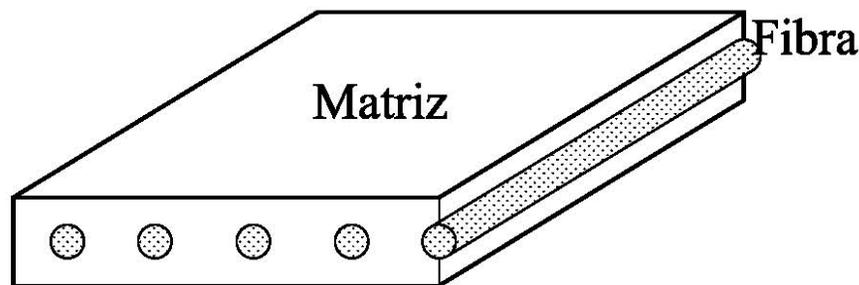


Figura 3.4: Lâmina Ortotrópica.

Em termos das constantes de engenharia, as componentes do tensor de rigidez podem ser escritas como

$$\begin{aligned}
 Q_{11} &= E_1 / (1 - \nu_{12}\nu_{21}) & Q_{22} &= E_2 / (1 - \nu_{12}\nu_{21}) \\
 Q_{66} &= G_{12} & Q_{16} &= Q_{26} = 0 \\
 Q_{12} &= \nu_{21}E_1 / (1 - \nu_{12}\nu_{21}) = \nu_{12}E_2 / (1 - \nu_{12}\nu_{21})
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

Sendo a lâmina ortotrópica, esta fica completamente caracterizada com quatro constantes elásticas: os módulos de elasticidade longitudinais E_1 e E_2 nas direções 1 e 2, respectivamente, o módulo de elasticidade transversal G_{12} e a razão de Poisson ν_{12} . A quinta constante elástica, ν_{21} pode ser determinada pela relação constitutiva, devido à simetria da matriz Q

$$\nu_{21}E_1 = \nu_{12}E_2 \tag{3.40}$$

Muitas vezes os eixos principais da lâmina (x_1x_2) não são coincidentes com os eixos do laminado ($\bar{x}_1\bar{x}_2$). Quando isto ocorre, a relação constitutiva para cada lâmina individual deve ser transformada para o eixo de referência do laminado (figura 3.5) para então se determinar a relação constitutiva. Para que esta transformação seja feita, basta que os tensores de tensão e deformação sejam multiplicados pela matriz de transformação, ou seja

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{T} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \tag{3.41}$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon'_{11} \\ \epsilon'_{22} \\ \epsilon'_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{T} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \end{Bmatrix} \tag{3.42}$$

onde σ'_{ij} e ε'_{ij} são tensores de tensão e deformação, respectivamente, escritos no sistema de referência do laminado, σ_{ij} e ε_{ij} são os mesmos tensores escritos no sistema de referência da lâmina e \mathbf{T} é a matriz de transformação dada por

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

sendo

$$m = \cos \theta \quad (3.44)$$

$$n = \sin \theta \quad (3.45)$$

A matriz inversa \mathbf{T}^{-1} pode ser obtida pela substituição do ângulo positivo θ , conforme figura 3.5, pelo ângulo negativo $-\theta$. A equação constitutiva pode ser escrita na forma

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Q} (\mathbf{T}^{-1})' \begin{Bmatrix} \varepsilon'_{11} \\ \varepsilon'_{22} \\ \varepsilon'_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.46)$$

onde $(\mathbf{T}^{-1})'$ representa a matriz transposta da matriz inversa de \mathbf{T} e

$$\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}(-\theta) = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & -2mn \\ n^2 & m^2 & 2mn \\ mn & -mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

multiplicando-se as matrizes da equação (3.46) tem-se

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon'_{11} \\ \varepsilon'_{22} \\ \varepsilon'_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.48)$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \\ \bar{Q}_{12} &= Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66} \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\sin^2 \theta + \cos^4 \theta) \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) (\sin^3 \theta \cos \theta) \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) (\sin \theta \cos^3 \theta) \end{aligned} \quad (3.49)$$

A matriz $\bar{\mathbf{Q}}$ é completamente preenchida sendo que das seis constantes elásticas que governam o comportamento da lâmina, duas, \bar{Q}_{16} e \bar{Q}_{26} , são combinações lineares das outras quatro. No sistema de coordenadas transformado, a lâmina é dita geralmente ortotrópica, e a matriz $\bar{\mathbf{Q}}$ é parecida com a matriz \mathbf{Q} dos materiais totalmente anisotrópicos ($\bar{Q}_{16} \neq 0, \bar{Q}_{26} \neq 0$). Quando se tem $Q_{16} = Q_{26} = 0$ diz-se que o material é especialmente ortotrópico.

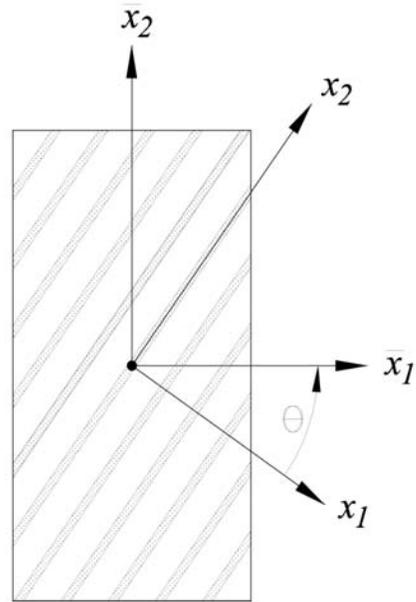


Figura 3.5: Sistemas de coordenadas da lâmina (x_1, x_2) e do laminado (\bar{x}_1, \bar{x}_2) .

Capítulo 4

Mecânica da Fratura

4.1 Introdução

A fratura em materiais sólidos estruturais, tais como madeiras, metais ou compósitos é geralmente iniciada por alguma falha do tipo trinca ou entalhe, a qual é causadora de altas tensões em seu entorno. A ocorrência de trincas em peças ou componentes gera elevados custos, pois sua presença aumenta o tempo e os esforços despendidos na manutenção e reparo de componentes, e que, se negligenciada, pode levar à fratura do componente e conseqüentemente a falha da estrutura, que pode até colocar em risco vidas humanas.

Uma vez que é quase impossível estar livre da ocorrência de trincas, é interessante estudar seus mecanismos e propor procedimentos para quantificar e prever o comportamento de estruturas trincadas sob condições de trabalho. As trincas podem estar presentes como pequenas falhas no estágio de manufatura do material, podem surgir durante a fabricação do componente ou podem ser resultado de danificações por fadiga, impacto, corrosão, etc., da estrutura final.

Normas e procedimentos sistemáticos para caracterizar trincas e seus efeitos e para prever se, e quando, elas poderão comprometer a segurança durante a vida operacional da estrutura são objetivos de estudo de um ramo da engenharia, chamado mecânica da fratura que tem surgido como valiosa ferramenta para análises de projetos e para estabelecer níveis de tolerância aos danos e defeitos presentes no material. A presença de uma trinca em uma estrutura normalmente induz altas concentrações de tensão na ponta da trinca. A mecânica da fratura provê meios pelos quais o campo de tensões na ponta da trinca, bem como as deformações elásticas podem ser

caracterizadas. Sua principal função é a caracterização e predição do fator de intensidade de tensão.

A mecânica da fratura pode ser dividida, basicamente, em cinco categorias de acordo com as características do material estudado. Os materiais que apresentam comportamento linear elástico, não dependente do tempo, nos quais as deformações plásticas na ponta da trinca são tão pequenas quando comparadas com as dimensões da trinca que podem ser desprezadas, são estudados no âmbito da Mecânica da Fratura Elástica Linear (MFEL). Os materiais que apresentam comportamento não dependente do tempo, nos quais as deformações plásticas já não podem ser desconsideradas são objetos de estudo da Mecânica da Fratura Elastoplástica (MFEP). Os materiais que apresentam comportamento dependente do tempo podem ser enquadrados na Mecânica da Fratura Dinâmica, Mecânica da Fratura Viscoelástica ou na Mecânica da Fratura Viscoplastica.

O enunciado fundamental da Mecânica da Fratura Elástica Linear postula que o comportamento da trinca (quando ocorrerá o crescimento instável da trinca) é determinado, unicamente, pelo valor do fator de intensidade de tensão. No caso de carregamento cíclico, o fator de intensidade de tensão indica o quão rápido será esse crescimento. Na mecânica da fratura elástica linear as deformações não elásticas na vizinhança da ponta da trinca devidas à concentração de tensão são consideradas pequenas quando comparadas com o comprimento da trinca e outras dimensões características (Banerjee, 1994).

4.2 Modos de fratura

A modelagem do comportamento da ponta da trinca faz uso de três modelos primários de deformação de corpos trincados de acordo com o tipo do carregamento aplicado ao componente. Estes três modelos são caracterizados por três movimentos cinemáticos independentes das superfícies inferiores e superiores da trinca uma em relação a outra e são mostrados na figura 4.1. Eles são referenciados como modo de abertura, modo de tração ou modo I, quando as duas superfícies são separadas por forças que as puxam em sentidos contrários devido à tensão normal;

modo de escorregamento, modo de cisalhamento no plano ou modo II, quando uma das superfícies da trinca escorrega sobre a outra ao longo da linha da trinca (direção x_1) devido às tensões no plano e modo de rasgamento, modo de cisalhamento fora do plano ou modo III, quando uma das superfícies da trinca escorrega sobre a outra em direção perpendicular a linha da trinca (direção x_3) devido aos esforços cortantes (Hertzberg, 1996).

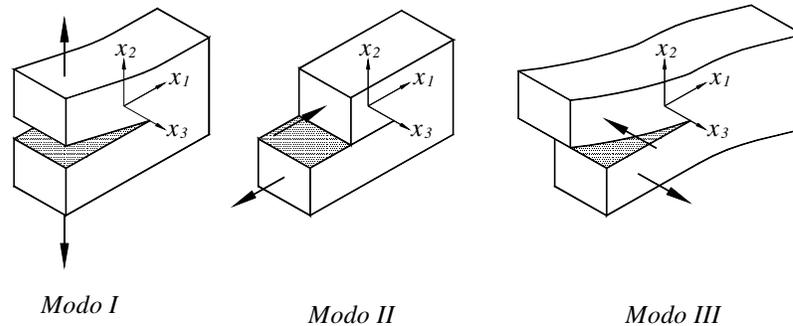


Figura 4.1: Os três modos primários de carregamento de um corpo trincado.

Diz-se que um problema de fratura é plano se os deslocamentos e trações forem funções apenas de x_1 e x_2 . O problema é dito em modo misto quando estão presentes mais de um modo de carregamento. Neste trabalho serão tratados apenas problemas planos e, quando for dito em modo misto, significa que o carregamento possui modos I e II. O modo III não será considerado neste trabalho.

4.3 Fratura em material compósito

O objetivo da análise dos mecanismos de fratura é a predição do carregamento crítico para o início do crescimento de uma fratura em um corpo contendo uma trinca de um certo tamanho e sob um conjunto de cargas aplicadas. Nos materiais compósitos a aplicação dos mecanismos de fratura tem esbarrado em muitas dificuldades. Isto acontece porque a fratura nestes materiais é fortemente dependente da ordem de laminação, orientação das lâminas e relações constitutivas (Kim e Dharan, 1989).

A resistência do material compósito depende do estado de tensão-deformação-danificação que é caracterizado pela fração das fibras rompidas (razão entre o número de elementos rompidos pelo total dos elementos estruturais) e pelo comprimento relativo (razão entre o comprimento médio dos descolamentos pelo comprimento total das fibras) em um volume V definido. Por exemplo, o compósito danificado da figura (4.2.a) e o volume com partes eliminadas da figura (4.2.b) são equivalentes.

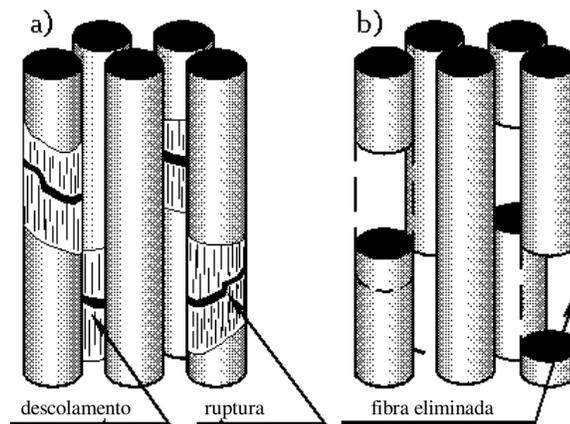


Figura 4.2: Volumes equivalentes

Os compósitos laminados de fibra de alta resistência e rigidez com matrizes de polímeros de alta dureza, por exemplo, são superiores aos metais tradicionais em muitos aspectos, principalmente devido às suas características de alta resistência e rigidez específica. Estas características têm considerável interesse comercial desde que ofereçam uma vantagem de peso considerável sobre os materiais convencionais, o que é um resultado muito natural numa estrutura na qual estas propriedades estão disponíveis no plano do laminado. Porém o mesmo não ocorre nas outras direções, para as quais a resistência e rigidez caem a valores próximos às características da matriz. No projeto de estruturas é conveniente, e muito interessante, explorar estas propriedades no plano em que estão disponíveis. Entretanto, o maior problema destes materiais é que algumas formas de carregamento induzem falhas de delaminação entre as camadas do material, e descolamento entre a fibra e a matriz, que são freqüentemente os fatores limitantes da estrutura (Williams, 1987). Uma das grandes desvantagens dos compósitos laminados é exatamente essa tendência à delaminação. Em compósitos formados por matrizes frágeis a delaminação pode se propagar ainda mais rapidamente quando comparada com trincas

perpendiculares ao plano do laminado. A nucleação e crescimento da delaminação pode reduzir consideravelmente a rigidez e a tensão de compressão dos compósitos.

Uma maneira de aumentar a resistência à delaminação dos compósitos é aumentar a resistência da matriz. Entretanto isto pouco contribui para um aumento da resistência se a adesão entre as fibras e a matriz não é muito boa, pois a resistência à fratura interlaminar é altamente dependente deste fator. Assim algumas formas alternativas de aumentar a resistência à fratura interlaminar são: aumentar a adesão por meio de um tratamento superficial da fibra por meio de alterações químicas e modificação da secção da fibra de cilíndrica para triangular, quadrada, hexagonal ou até em forma de estrela, com o objetivo de se ter uma maior área de contato entre as fibras e a matriz (Sih, 1987). Em condições de carregamento de tração transversal, por exemplo, a qualidade da interface fibra-matriz pode influenciar o surgimento e propagação de trincas de delaminação. Um exemplo são os compósitos de fibras naturais em matrizes sintéticas que normalmente apresentam um tratamento químico superficial que é incompatível com uma boa adesão. Alterações na superfície da fibra podem ser feitas para melhorar esta situação, porém há restrições de ordem econômica que não podem ser desprezadas. É necessário que isso seja considerado no desenvolvimento de uma nova estrutura, uma vez que é muito comum a falha na interface fibra-matriz, isto é, quando a fibra impregnada em uma resina não se rompe mas simplesmente se descola da matriz e desliza para fora do envelope adesivo (Allan, 1986).

A delaminação geralmente ocorre nas regiões com maiores concentrações de resinas, entre as camadas de um laminado e podem surgir como defeitos de fabricação ou podem ser criadas devido a coalescência de pequenos vazios na interface, ou devido a impactos de objetos estranhos durante a vida do componente, ou devido a campos de tensões peculiares próximos a descontinuidades geométricas da peça como arestas livres, furos, degraus, trincas transversais ou juntas coladas (MIL-HDBK-17, 1997).

Tanto a delaminação quanto o descolamento podem ser vistos como trincas interfaciais, a primeira como trinca na interface entre duas lâminas e o segundo como trinca na interface fibra-matriz. A resistência à fratura interfacial para materiais compósitos reforçados com fibra é a caracterização da resistência isolada mais importante de seus comportamentos mecânicos.

A qualidade da interface fibra-matriz influencia o surgimento e propagação de trincas de delaminação. A resistência ao crescimento da trinca tem sido caracterizado pela tenacidade à fratura ou pela taxa crítica de liberação de energia, sob modos I, II, III e condições de carregamento em que estes aparecem combinados. As condições de carregamento em modo I são usadas como um teste básico para avaliar as propriedades de adesão fibra-matriz. Uma viga engastada é um dos tipos de corpos de prova mais usados para a determinação da taxa crítica de liberação de energia G_{Ic} devido à sua geometria simples e apresentar um crescimento de trinca estável em carregamento sob controle de deslocamento (Ricards *et al.*, 1996). A figura 4.3 mostra um corpo de prova proposto pela ASTM (D5528) para o ensaio de uma viga engastada em modo I.

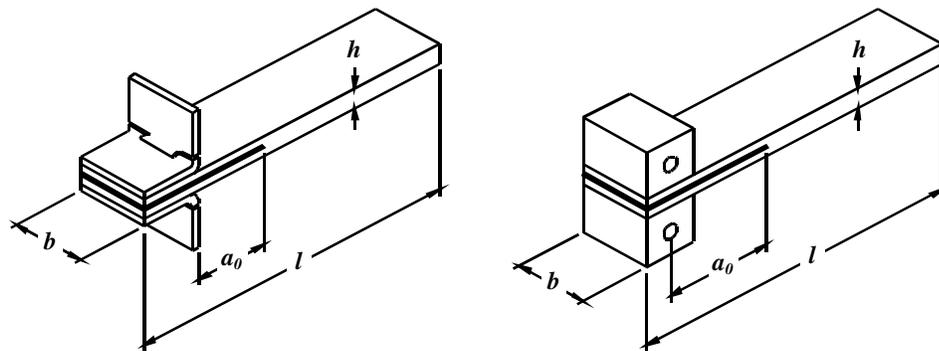


Figura 4.3: Corpos de prova para ensaio de delaminação conforme ASTM D 5528.

Uma trinca interlaminar inicial é introduzida em uma chapa de compósito laminado unidirecional colocando-se um filme de material antiaderente de espessura de 40 μm entre as camadas (Ricards *et al.*, 1996). Na figura 4.3, a_0 é o comprimento do filme usado para introduzir a pré-trinca de delaminação em modo I. b , h , l e outras dimensões são dadas pela norma. Dois blocos de alumínio são colados em cada lado do laminado em direção paralela à trinca por meio dos quais a carga é aplicada.

4.4 Mecânica da fratura elástica linear anisotrópica

Um dos principais objetivos da mecânica da fratura é a determinação dos campos de deslocamentos e tensões na ponta da trinca. Estes campos podem ser determinados analiticamente

através da escolha de funções tensões complexas que satisfaçam as descontinuidades impostas pela trinca. Sih *et al.* (1965) propuseram as seguintes funções tensões

$$\Psi(z_j)^{(1)} = \frac{\varphi(z_j)^{(1)}}{\sqrt{z_j - z_0}} + \varphi(z_j)^{(2)} \quad (j=1, 2) \quad (4.1)$$

onde $\varphi(z_j)^{(1)}$ são funções do tipo

$$\varphi(z_j)^{(l)} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{jn}^l (z_j - z_0)^n \quad (l=1, 2; j=1, 2) \quad (4.2)$$

Escrevendo em coordenadas polares, tem-se

$$z_j - z_0 = r e^{i\theta} \quad (4.3)$$

onde r é a distância radial da ponta da trinca e θ ângulo entre o vetor e a borda da trinca (figura 4.4). Substituindo as equações (4.3) e (4.2) na equação (4.1) as funções tensões podem ser aproximadas por

$$\Psi(z_j)^{(1)} = \frac{\lambda_{jo}^{(1)}}{\sqrt{r(\cos \theta + \mu_j \operatorname{sen} \theta)}} + \theta(r^{1/2}) \quad (4.4)$$

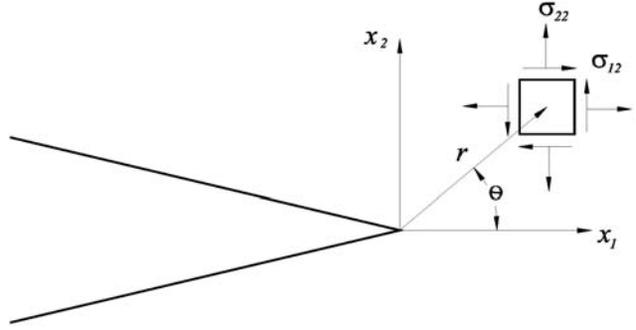


Figura 4.4: Deslocamentos e tensões próximos a ponta da trinca

Os termos em r de ordem maior devem ser desconsiderados quando r se torna pequeno se comparado com as outras dimensões do problema.

As constantes $\lambda_{j0}^{(1)}$ são definidas como

$$\begin{aligned}\lambda_{10}^{(1)} &= \frac{-\mu_2}{2\sqrt{2\pi(\mu_1 - \mu_2)}} \left(K_I + \frac{K_{II}}{\mu_2} \right) \\ \lambda_{20}^{(1)} &= \frac{\mu_1}{2\sqrt{2\pi(\mu_1 - \mu_2)}} \left(K_I + \frac{K_{II}}{\mu_1} \right)\end{aligned}\quad (4.5)$$

Por sua vez, se a equação (4.4) com os coeficientes dados pelas equações (4.5) forem introduzidos na equação (3.34), as tensões devidas a um carregamento simétrico (modo I) podem ser escritas como

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^I &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \left(\frac{\mu_2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} - \frac{\mu_1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} \right) \right] \\ \sigma_{22}^I &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left(\frac{\mu_1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} - \frac{\mu_2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} \right) \right] \\ \sigma_{12}^I &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \left(\frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} - \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} \right) \right]\end{aligned}\quad (4.6)$$

e os deslocamentos correspondentes são dados por

$$\begin{aligned}
 u_1^I &= K_I \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left(\mu_1 q_{12} \sqrt{\cos \theta + \mu_2 \operatorname{sen} \theta} - \mu_2 q_{11} \sqrt{\cos \theta + \mu_1 \operatorname{sen} \theta} \right) \right] \\
 u_2^I &= K_I \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left(\mu_1 q_{22} \sqrt{\cos \theta + \mu_2 \operatorname{sen} \theta} - \mu_2 q_{21} \sqrt{\cos \theta + \mu_1 \operatorname{sen} \theta} \right) \right] \quad (4.7)
 \end{aligned}$$

Para um carregamento anti-simétrico (modo II) as tensões, obtidas da mesma forma que para um carregamento simétrico, são dadas por

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11}^II &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left(\frac{\mu_2^2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \operatorname{sen} \theta}} - \frac{\mu_1^2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \operatorname{sen} \theta}} \right) \right] \\
 \sigma_{22}^II &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left(\frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \operatorname{sen} \theta}} - \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \operatorname{sen} \theta}} \right) \right] \quad (4.8) \\
 \sigma_{12}^II &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left(\frac{\mu_1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \operatorname{sen} \theta}} - \frac{\mu_2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \operatorname{sen} \theta}} \right) \right]
 \end{aligned}$$

e os deslocamentos são dados por

$$\begin{aligned}
 u_1^{II} &= K_{II} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left(q_{12} \sqrt{\cos \theta + \mu_2 \operatorname{sen} \theta} - q_{11} \sqrt{\cos \theta + \mu_1 \operatorname{sen} \theta} \right) \right] \\
 u_2^{II} &= K_{II} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left(q_{22} \sqrt{\cos \theta + \mu_2 \operatorname{sen} \theta} - q_{21} \sqrt{\cos \theta + \mu_1 \operatorname{sen} \theta} \right) \right] \quad (4.9)
 \end{aligned}$$

Usando-se superposição, os estados gerais de tensão e deslocamento próximo à ponta da trinca podem ser considerados como uma soma de componentes dos modos I e II, ou seja,

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^I + \sigma_{ij}^{II} \quad (4.10)$$

Da mesma forma, os deslocamentos são dados por

$$u_j = u_j^I + u_j^{II} \quad (4.11)$$

Pode-se notar que a singularidade das tensões é da ordem de $1/\sqrt{r}$ e que a distribuição de tensão é função das propriedades do material.

4.5 Fatores de intensidade de tensão

Os fatores de intensidade de tensão são os coeficientes das parcelas singulares das tensões na ponta da trinca e podem ser definidos em modo *I* como

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{22} (\theta=0) \quad (4.12)$$

e similarmente para modo *II* como

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{12} (\theta=0) \quad (4.13)$$

Alternativamente, os fatores de intensidade de tensão podem ser definidos em termos das funções de variáveis complexas. No limite quando z_k se aproxima de $z_{k0} = x_{10} + \mu_k x_{20}$, onde x_{10} e x_{20} são as coordenadas da ponta da trinca, os fatores de intensidade de tensão podem ser dados por

$$\begin{aligned}
K_I &= 2\sqrt{2\pi} \left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2} \right) \lim_{z_1 \rightarrow z_{10}} (z_1 - z_{10})^{1/2} \Psi_1(z_1) \\
K_{II} &= 2\sqrt{2\pi} \left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2} \right) \lim_{z_2 \rightarrow z_{20}} (z_2 - z_{20})^{1/2} \Psi_2(z_2)
\end{aligned} \tag{4.14}$$

onde as funções $\Psi_k(z_k)$ são dadas pela equação (3.34).

A amplitude dos campos de tensões ao redor da ponta da trinca é diretamente proporcional aos fatores de intensidade de tensão.

Capítulo 5

Método dos Elementos de Contorno

5.1 Introdução

O método dos elementos de contorno vem sendo desenvolvido já há várias décadas e através dos anos vem se consolidando como uma ferramenta de análise computacional extremamente útil em várias disciplinas de engenharia. Sua aplicação em mecânica da fratura tem sido objeto de estudos desde o início dos anos 70. Esta trajetória pode ser vista em Aliabadi (1997) e Cruse (1998).

Este capítulo apresenta a formulação básica do método dos elementos de contorno no campo das aplicações elásticas anisotrópicas lineares bidimensionais. Inicialmente será obtida a solução fundamental. Em seguida o teorema de Betti será usado para obter a identidade do Somigliana e, a partir desta, a equação integral de contorno. Para resolver a equação integral de contorno, obtida pela formulação do método de elementos de contorno direto, o contorno é discretizado em elementos quadráticos contínuos e o sistema de equações lineares resultante é resolvido para forças de superfícies e deslocamentos em cada um dos nós destes elementos. É mostrada como a integração numérica é realizada, tanto nos casos em que as integrais são regulares como nos casos em que possuem uma singularidade fraca. O método das sub-regiões é apresentado. Finalmente, a formulação para o cálculo do FIT, usando elementos de ponto a um quarto com singularidade de força de superfície é mostrado.

5.2 Equações integrais de contorno

A solução de uma equação integral de contorno é o objetivo do método dos elementos de contorno. A identidade de Somigliana é um método de formulação de equações integrais de contorno obtida a partir do teorema de Betti para problemas de elasticidade (Kane, 1994). O teorema de Betti declara que o trabalho que um conjunto de forças de superfície t_i e forças de corpo, em equilíbrio, aplicadas em um sistema, exerce nos deslocamentos de um segundo sistema u_i^* , é igual ao trabalho que as forças de superfície t_i^* e forças de corpo deste segundo sistema exerce nos deslocamentos u_i do primeiro. O símbolo (*) denota o segundo sistema (Kane, 1994).

A partir da relação tensão-deformação tem-se

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* - \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} = 0. \quad (5.1)$$

Devido aos tensores de tensões serem simétricos, implica que

$$\sigma_{ij} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} - \sigma_{ij}^* \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0 \quad (5.2)$$

e por estarem em equilíbrio,

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = \frac{\partial \sigma_{ij}^*}{\partial x_i} = 0. \quad (5.3)$$

Das equações (5.2) e (5.3) pode-se obter

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} u_i^* - \sigma_{ij}^* u_i) = 0 \quad (5.4)$$

e a integração sobre todo o corpo resulta em

$$\int \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} u_i^* - \sigma_{ij}^* u_i) \partial \Omega = 0. \quad (5.5)$$

Usando o teorema da divergência de Gauss, na ausência de forças de corpo, a seguinte integral sobre o contorno Γ pode ser obtida

$$\int_{\Gamma} (\sigma_{ij} u_i^* - \sigma_{ij}^* u_i) n_j dS = \int_{\Gamma} (t_i u_i^* - t_i^* u_i) d\Gamma = 0 \quad (5.6)$$

que é conhecida como teorema recíproco de Betti, onde Γ é o contorno do corpo.

A identidade de Somigliana é um método de formulação de equações integrais de contorno obtida a partir do teorema de Betti para problemas de elasticidade (Kane, 1994) dada por

$$u_i(x^*) + \int_{\Gamma} T_{ij}(x^*, x) u_j(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} U_{ij}(x^*, x) t_j(x) d\Gamma(x). \quad (5.7)$$

O primeiro sistema será tomado como aquele a ser resolvido e o segundo como aquele cuja solução é conhecida. Uma solução conhecida é a solução de Kelvin para meios infinitos, a qual é singular. O campo de deslocamento $u_i^*(x)$, devido a uma carga pontual concentrada $e_j^*(x^*)$ é dado por

$$u_i^*(x) = U_{ij}(x, x^*) e_j^*(x^*) \quad (5.8)$$

sendo U_{ij} a solução fundamental dada pela equação (5.33).

A força de superfície correspondente à carga pontual é dada por

$$t_i^*(x) = T_{ij}(x, x^*) e_j^*(x^*) \quad (5.9)$$

sendo T_{ij} dado pela equação (5.34).

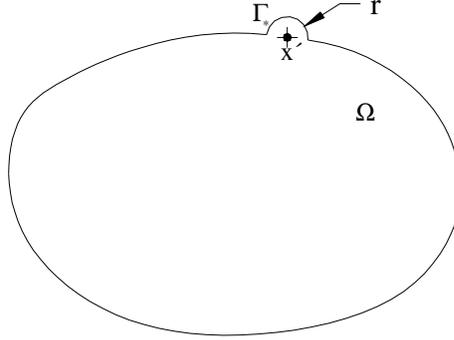


Figura 5.1: Ampliação do contorno para determinação do valor principal de Cauchy.

Substituindo as equações (U_{ij}) e (T_{ij}) na equação (5.6), particularizada para um ponto pertencente ao contorno, resulta

$$\int_{\Gamma^*} (t_i U_{ij} e_j^* - u_i T_{ij} e_j^*) d\Gamma = 0 \quad (5.10)$$

para x^* no domínio Ω , onde Γ^* é igual ao contorno Γ menos a calota de raio r , devido a ampliação do contorno para determinação do valor principal de Cauchy, mostrada na figura 5.1. A equação (5.10) também pode ser escrita da seguinte forma

$$\left[\int_{\Gamma^*} (t_i U_{ij} - u_i T_{ij}) d\Gamma \right] e_j^* = 0 \quad (5.11)$$

e como e_j^* são vetores base, em qualquer sistema de coordenadas, e podem assumir quaisquer valores, para que a equação (5.11) seja verdadeira (igual a zero) a expressão entre colchetes deve ser zero. Então

$$\int_{\Gamma^*} (t_i U_{ij} - u_i T_{ij}) d\Gamma = 0 \quad (5.12)$$

Considerando a ampliação do contorno para determinação do valor principal de Cauchy, mostrada na figura 5.1, a equação (5.12) toma a seguinte forma

$$-u_i(x^*) + \int_{\Gamma^*} [t_i(x)U_{ij}(x, x^*) - u_i(x)T_{ij}(x, x^*)] d\Gamma(x) = 0. \quad (5.13)$$

A equação (5.13) é aplicada para pontos localizados no interior do corpo. Assumindo que este ponto tende para o contorno tem-se uma contribuição extra c_{ij} , na integração da matriz T_{ij} , que para pontos sobre um contorno suave vale

$$c_{ij} = \frac{1}{2} \delta_{ij} \quad (5.14)$$

e a equação (5.13) pode ser escrita como

$$-c_{ij}(x^*)u_i(x^*) + \int_{\Gamma^*} [t_i(x)U_{ij}(x, x^*) - u_i(x)T_{ij}(x, x^*)] d\Gamma(x) = 0 \quad (5.15)$$

Uma solução analítica para a equação (5.15) dificilmente será encontrada e uma solução numérica se faz necessária. Para isso o contorno Γ é dividido em n elementos de contorno Γ_e e a equação (5.15) pode ser escrita como

$$-c_{ij}(x^*)u_i(x^*) + \sum_{e=1}^n \int_{\Gamma_e} [t_i(x)U_{ij}(x, x^*) - u_i(x)T_{ij}(x, x^*)] d\Gamma(x) = 0. \quad (5.16)$$

A equação (5.16) é aplicada em cada um dos nós do contorno de tal forma que é gerado um sistema linear de equações algébricas

$$\mathbf{Hu} = \mathbf{Gt} \quad (5.17)$$

onde as matrizes \mathbf{H} e \mathbf{G} contêm as integrais das soluções fundamentais de forças de superfície T_{ij} e de deslocamentos U_{ij} , combinadas com as funções de interpolação do elemento e os vetores \mathbf{t} e \mathbf{u} contêm todas as forças de superfícies e deslocamentos, conhecidos ou não. Através de algumas manipulações algébricas podemos isolar as incógnitas em um vetor \mathbf{f} de forma que o sistema (5.16) possa ser representado por

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{f} \quad (5.18)$$

onde uma única solução pode ser obtida.

5.3 Soluções fundamentais anisotrópicas

Para se obter as soluções fundamentais estáticas para problemas bidimensionais em materiais anisotrópicos, o domínio Ω será mapeado num plano complexo, usando a seguinte mudança de variável

$$z' = \begin{Bmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x'_1 + \mu_1 x'_2 \\ x'_1 + \mu_2 x'_2 \end{Bmatrix} \quad (5.19)$$

e

$$z = \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 + \mu_1 x_2 \\ x_1 + \mu_2 x_2 \end{Bmatrix} \quad (5.20)$$

onde μ_k são raízes complexas da equação (3.29), x'_1 e x'_2 são as coordenadas do ponto fonte (ponto de aplicação da carga concentrada unitária) e x_1 e x_2 são as coordenadas do ponto campo (ponto de obtenção da resposta devido a aplicação da carga unitária).

Se for considerado um contorno fechado Γ ao redor do ponto fonte e se forem usadas as forças de superfície definidas pela equação (3.3) e as tensões definidas pela equação (3.34), tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} t_1 d\Gamma &= 2 \operatorname{Re} \left[\mu_1 \Psi_1 + \mu_2 \Psi_2 \right], \\ \int_{\Gamma} t_2 d\Gamma &= 2 \operatorname{Re} \left[\Psi_1 + \Psi_2 \right] \end{aligned} \quad (5.21)$$

onde os colchetes duplos representam o salto na função para um contorno fechado ao redor do ponto fonte.

As soluções fundamentais em um plano anisotrópico infinito podem ser encontradas usando-se a função tensão de Airy resultante das forças de superfície fundamentais, dadas pelas equações (5.21) e a equação de equilíbrio de forças (3.1), considerando forças de corpo e efeitos de inércia nulos.

A função tensão de Airy para um ponto carregado na direção x_i , pode ser representada por Ψ_{ik} . Como as equações integrais de contorno (5.15) possuem sinais opostos à carga aplicada, ela pode ser expressa para um ponto fonte como

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \left[\mu_1 \Psi_{i1} + \mu_2 \Psi_{i2} \right] &= -\delta_{i1}, \\ 2 \operatorname{Re} \left[\Psi_{i1} + \Psi_{i2} \right] &= \delta_{i2} \end{aligned} \quad (5.22)$$

As equações (5.22) podem ser satisfeitas para qualquer contorno fechado z' , tomando

$$\Psi_{ik} = A_{ik} \ln(z - z') \quad (5.23)$$

onde A_{ik} são constantes complexas. Usando propriedades de funções complexas, pode ser mostrado que para qualquer contorno fechando o ponto z'

$$\ln(z - z') = 2\pi i \quad (5.24)$$

Usando as equações (5.22), (5.23) e (5.24) podem ser obtidas duas equações para as constantes desconhecidas A_{ik}

$$\begin{aligned} A_{i1} - \bar{A}_{i1} + A_{i2} - \bar{A}_{i2} &= \delta_{i2} / (2\pi i) \\ \mu_1 A_{i1} - \bar{\mu}_1 \bar{A}_{i1} + \mu_2 A_{i2} - \bar{\mu}_2 \bar{A}_{i2} &= -\delta_{i1} / (2\pi i) \end{aligned} \quad (5.25)$$

As duas outras equações necessárias para se determinar A_{ik} resultam da exigência que os deslocamentos tenham valores únicos, ou seja

$$[|u_i|]=0 \quad (5.26)$$

Usando as equações de deslocamentos (3.35), a equação (5.23) e a equação (5.24), como a equação (5.26) pode ser expandida como

$$\begin{aligned} q_{11} A_{i1} - \bar{q}_{11} \bar{A}_{i1} + q_{12} A_{i2} - \bar{q}_{12} \bar{A}_{i2} &= 0 \\ q_{21} A_{i1} - \bar{q}_{21} \bar{A}_{i1} + q_{22} A_{i2} - \bar{q}_{22} \bar{A}_{i2} &= 0 \end{aligned} \quad (5.27)$$

Escrevendo as equações (5.25) e (5.26) de forma matricial, tem-se

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ \mu_1 & -\bar{\mu}_1 & \mu_2 & -\bar{\mu}_2 \\ q_{11} & -\bar{q}_{11} & q_{12} & -\bar{q}_{12} \\ q_{21} & -\bar{q}_{21} & q_{22} & -\bar{q}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{j1} \\ \bar{A}_{j1} \\ A_{j2} \\ \bar{A}_{j2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_{j2} / (2\pi i) \\ -\delta_{j1} / (2\pi i) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.28)$$

que é suficiente para se encontrar as constantes complexas A_{ik} . No caso de materiais isotrópicos a equação característica

$$a_{11} \mu^4 - 2a_{16} \mu^3 + (2a_{12} + a_{66}) \mu^2 - 2a_{26} \mu + a_{22} = 0 \quad (5.29)$$

se torna biquadrada com duas raízes iguais a i e duas iguais a $-i$. Estes valores tornam o sistema de equações (5.27) singular. Por causa disso não é possível o uso de materiais isotrópicos para comparar esta formulação com a formulação isotrópica que utiliza a solução fundamental de Kelvin. Para fazer esta comparação serão usados materiais quase-isotrópicos, ou seja,

$$E_2 = E_1 + \epsilon \cong E \quad (5.30)$$

sendo que

$$\epsilon \leq 10^{-2} E_1 \quad (5.31)$$

e

$$G_{12} = \frac{E_1}{2(1+\nu_{12})} \quad (5.32)$$

As soluções fundamentais para deslocamentos são obtidas inserindo a função tensão dada pela equação (5.23) nas equações de deslocamentos (3.35). Assim, tem-se

$$U_{ji}(z', z) = 2 \operatorname{Re} \left[q_{i1} A_{j1} \ln(z_1 - z'_1) + q_{i2} A_{j2} \ln(z_2 - z'_2) \right] \quad (5.33)$$

Similarmente, as soluções fundamentais para forças de superfície são obtidas pela substituição da equação (5.23) nas equações de tensão (3.34) e usando a equação (3.3)

$$T_{ij}(z', z) = 2 \operatorname{Re} \left[\frac{1}{(z_1 - z'_1)} g_{i1} (\mu_1 n_1 - n_2) A_{j1} + \frac{1}{(z_2 - z'_2)} g_{i2} (\mu_2 n_1 - n_2) A_{j2} \right] \quad (5.34)$$

onde

$$[g_{ji}] = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

e n_k são as componentes do vetor normal externo.

Nota-se que tanto a solução fundamental de deslocamento quanto a de forças de superfície são singulares quando o ponto fonte tende ao ponto campo. No caso da solução fundamental de

deslocamentos a singularidade é fraca ($\ln r$). Já no caso da solução fundamental de forças de superfície tem-se uma singularidade forte ($1/r$).

5.4 Elementos de contorno

Uma vez que é muito difícil encontrar soluções analíticas gerais para as equações integrais de contorno, torna-se necessário o uso de soluções numéricas. Quando soluções numéricas são usadas, o contorno é aproximado por elementos discretos. Estes elementos discretos são chamados elementos de contorno. A geometria destes elementos é descrita por funções conhecidas, sobre os quais as equações integrais de contorno são facilmente calculadas, de maneira que seja obtido um sistema de equações a partir do qual os valores de contorno desconhecidos são encontrados.

A cada elemento de contorno associam-se um ou mais pontos chamados “nós” ou “pontos nodais” e os valores das variáveis associados a eles são denominados “valores nodais”. Os deslocamentos e esforços ao longo de cada elemento serão agora aproximados por funções polinomiais em função das quais é definido o número de pontos nodais do elemento. As funções geralmente utilizadas são a constante, a linear e a quadrática, o que implica em elementos com um, dois ou três pontos nodais, respectivamente. Na figura (5.2) está indicada a aproximação do deslocamento w sobre um elemento usando as funções já mencionadas.

No elemento constante, como é necessário apenas um parâmetro para definir a função de aproximação, o ponto nodal é, geralmente, colocado no meio do elemento. No elemento linear já é necessária a definição de dois pontos nodais, que podem ser colocados nas extremidades do elemento, caracterizando o elemento linear contínuo. Caso alguns desses pontos nodais seja definido no interior do elemento, fica caracterizado o elemento linear descontínuo, figura (5.2). No elemento quadrático, são necessários três nós, pois são três os parâmetros que definem uma função quadrática. No elemento quadrático contínuo, dois desses pontos estão localizados nas extremidades do elemento. O terceiro ponto está localizado no centro do elemento. No elemento quadrático descontínuo, os pontos das extremidades são deslocados para pontos localizados no interior do elemento.

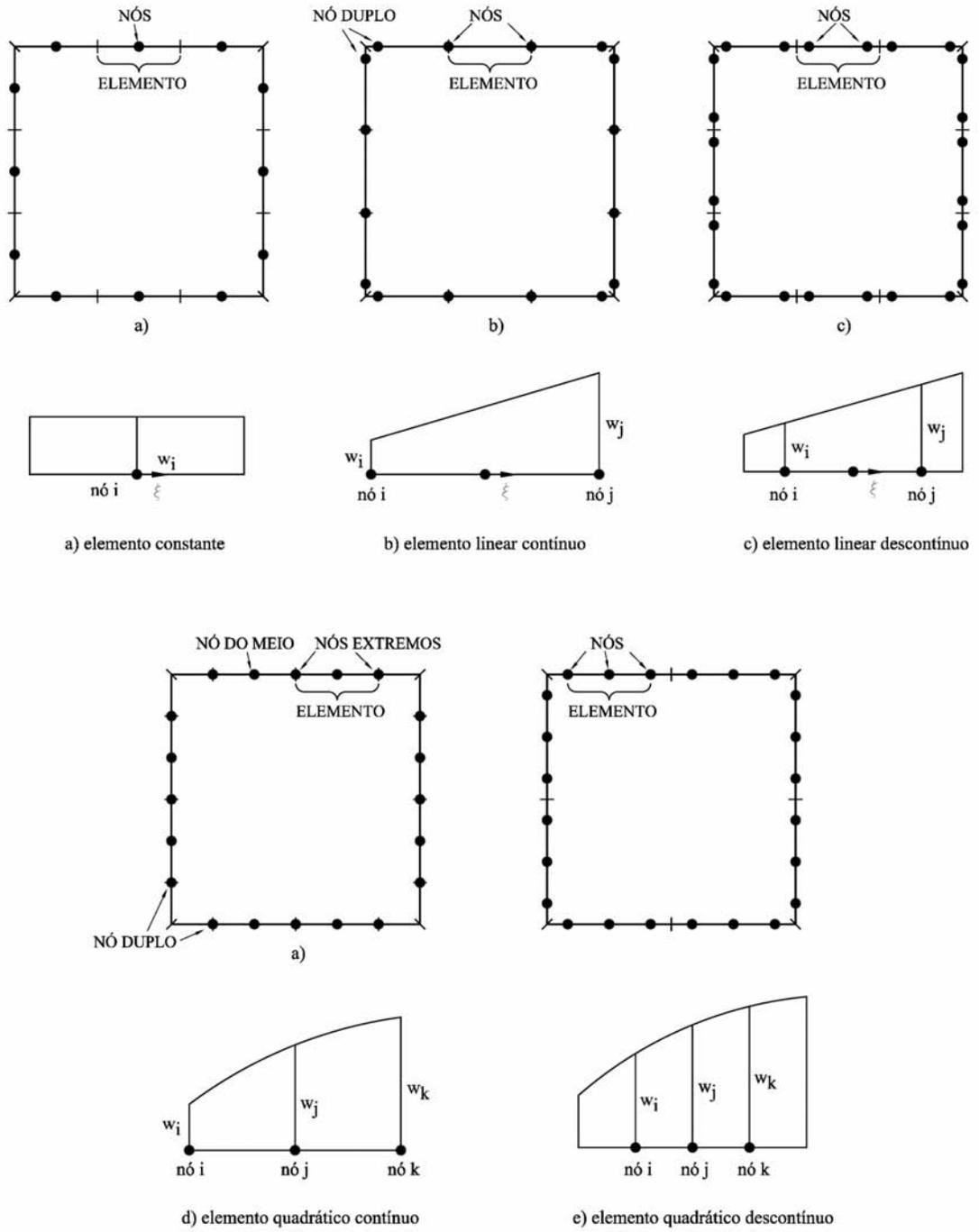


Figura 5.2: Aproximação da variável *de contorno* w por funções polinomiais.

Elementos constantes, lineares e quadráticos são os tipos de elementos de contorno mais usados em aplicações de elasticidade. A principal limitação do uso de elementos constantes e lineares é que eles não representam muito bem geometrias curvas. Neste trabalho serão apenas utilizados elementos de contorno quadráticos contínuos, pois estes, além de poderem representar mais facilmente contornos curvos, ainda interpolam melhor altos gradientes de deslocamentos, forças de superfície e tensões, o que é bastante desejável na modelagem de problemas de fratura.

5.4.1 Elemento de contorno quadrático contínuo

Os elementos de contorno quadrático contínuos são versáteis e eficientes para modelar contornos curvos. Os vetores de forças de superfície e deslocamentos nodais, \mathbf{t} e \mathbf{u} , respectivamente, para um elemento quadrático contínuo podem ser dados por

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} N_c^1 & 0 & N_c^2 & 0 & N_c^3 & 0 \\ 0 & N_c^1 & 0 & N_c^2 & 0 & N_c^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_1^3 \\ u_2^3 \end{Bmatrix} \quad (5.36)$$

e

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} N_c^1 & 0 & N_c^2 & 0 & N_c^3 & 0 \\ 0 & N_c^1 & 0 & N_c^2 & 0 & N_c^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1^1 \\ t_2^1 \\ t_1^2 \\ t_2^2 \\ t_1^3 \\ t_2^3 \end{Bmatrix} \quad (5.37)$$

O elemento de contorno quadrático contínuo tem todos os valores associados a ele, simbolizados por v . Esses valores incluem coordenadas geométricas x_i , os seis componentes dos deslocamentos u_i e os seis componentes das forças de superfícies t_i .

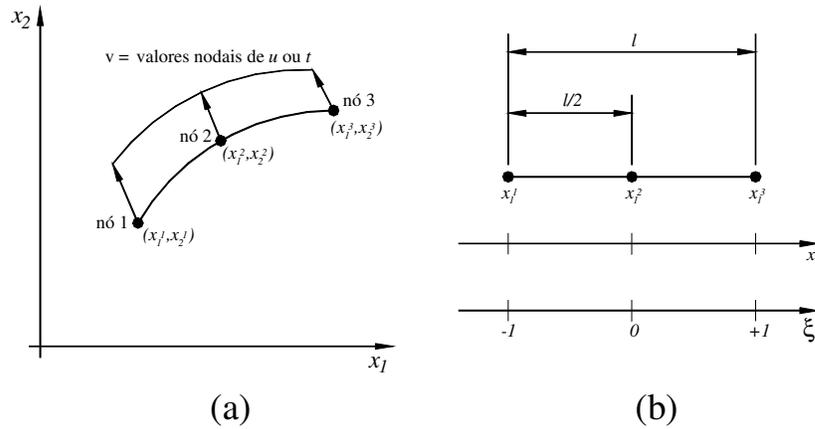


Figura 5.3: Elemento de contorno quadrático isoparamétrico

A variação da resposta entre os nós é descrita usando-se funções de interpolações polinomiais dadas por

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{2} \xi (\xi - 1) \\
 N_2 &= 1 - \xi^2 \\
 N_3 &= \frac{1}{2} \xi (\xi + 1)
 \end{aligned}
 \tag{5.38}$$

onde ξ é a coordenada homogênea ao longo do elemento.

A avaliação das integrais ao longo da equação de contorno requer o uso de um jacobiano dado por

$$J(\xi) = \left| \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi} \right)^2} \right| = \frac{d \Gamma_e}{d \xi}
 \tag{5.39}$$

assim,

$$d \Gamma_e = J(\xi) d \xi
 \tag{5.40}$$

Fazendo algumas substituições chegamos à equação integral de contorno

$$-c_{ij}u_i + \sum_{e=1}^n \int_{\Gamma_e} \left[U_{ij}(\xi', x(\xi)) N_c^e(\xi) t_i^e - T_{ij}(\xi', x(\xi)) N_c^e(\xi) u_i^e \right] J(\xi) d(\xi) = 0 \quad (5.41)$$

As integrais sobre o elemento na equação integral de contorno podem ser avaliadas pelo esquema de quadratura de Gauss unidimensional padrão. Os termos singulares do tipo $\ln(r)$ são integrados usando quadratura logarítmica de Gauss. Os termos singulares do tipo $1/r$ são calculados no sentido do valor principal de Cauchy. A equação integral de contorno é aplicada seqüencialmente para cada nó.

5.4.2 Elemento de ponto a um quarto com singularidade de forças de superfície

O campo de tensões próximo à ponta da trinca apresenta um comportamento do tipo $1/\sqrt{r}$, com uma singularidade na ponta da trinca. A menos que se faça o uso de uma malha bastante refinada, este tipo de comportamento não pode ser modelado com o uso de elementos quadráticos padrões. Porém, se os campos de deslocamentos e forças de superfície forem interpolados com funções de forma que já apresentam o seu tipo de comportamento, uma boa modelagem é obtida, mesmo com uma malha pouco refinada.

Muitos tipos de elementos foram propostos para a modelagem de problemas de fratura, conforme pode ser visto em Aliabadi e Rooke (1991). Conforme mostrado por Martínez e Domínguez (1984) para problemas simétricos e por Smith (1988) para problemas com carregamento em modo misto, o elemento de ponto a um quarto com singularidade de forças de superfície apresenta pouca dependência da discretização utilizada, o que não ocorre com outros tipos de elementos, analisados por esses autores. Neste trabalho foi utilizado o elemento de ponto a um quarto com singularidade de forças de superfície, cuja formulação será apresentada a seguir.

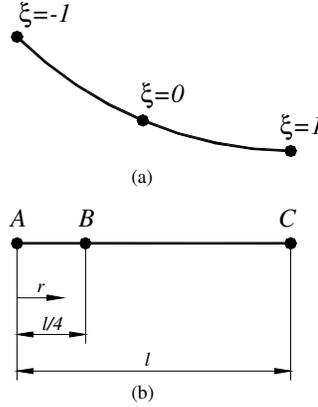


Figura 5.4: (a) Elemento quadrático padrão; (b) Elemento singular de ponto a um quarto.

Se um elemento quadrático padrão tem a geometria retilínea e o ponto central colocado a um quarto de seu comprimento l , uma relação simples entre r e ξ pode ser encontrada. Considerando que r pode ser representado por

$$r = N_1 r_1 + N_2 r_2 + N_3 r_3 \quad (5.42)$$

sendo N_1 , N_2 e N_3 dados pelas funções de forma (5.38), pode-se escrever as seguintes relações

$$r = \frac{1}{2} \xi(\xi - 1)l + (1 - \xi^2)\frac{1}{4}l + \frac{1}{2} \xi(\xi + 1)l = (1 + \xi)(1 - \xi)\frac{1}{4}l + (\xi + 1)\frac{1}{2} \xi l$$

$$\frac{r}{l} = (1 + \xi) \left[(1 - \xi)\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \xi \right] = (1 + \xi) \left(\frac{1}{4} - \frac{\xi}{4} + \frac{\xi}{2} \right) = (1 + \xi) \left(\frac{1}{4} + \frac{\xi}{4} \right) = \frac{(1 + \xi)^2}{4}$$

$$(1 + \xi)^2 = \frac{4r}{l} \rightarrow 1 + \xi = \sqrt{\frac{4r}{l}} \quad (5.43)$$

das quais se obtém a seguinte equação:

$$\xi = 2\sqrt{\frac{r}{l}} - 1 \quad (5.44)$$

Substituindo a equação anterior na primeira função de forma N_1 , tem-se

$$\begin{aligned}
 N_1 = \frac{\xi^2 - \xi}{2} &= \frac{\left(2\sqrt{\frac{r}{l}} - 1\right)^2 - \left(2\sqrt{\frac{r}{l}} - 1\right)}{2} = \\
 &= \frac{4\frac{r}{l} - 4\sqrt{\frac{r}{l}} + 1 - 2\sqrt{\frac{r}{l}} + 1}{2} = \frac{4\frac{r}{l} - 6\sqrt{\frac{r}{l}} + 2}{2}
 \end{aligned} \tag{5.45}$$

que resulta em

$$\bar{N}_1 = 2\frac{r}{l} - 3\sqrt{\frac{r}{l}} + 1 \tag{5.46}$$

Da mesma maneira, a função de forma N_2 pode ser obtida de

$$N_2 = 1 - \xi^2 = -4\frac{r}{l} + 4\sqrt{\frac{r}{l}}. \tag{5.47}$$

Assim,

$$\bar{N}_2 = -4\frac{r}{l} + 4\sqrt{\frac{r}{l}} \tag{5.48}$$

Fazendo a substituição na função de forma N_3 ,

$$\begin{aligned}
 N_3 = \frac{\xi^2 + \xi}{2} &= \frac{\left(2\sqrt{\frac{r}{l}} - 1\right)^2 + \left(2\sqrt{\frac{r}{l}} - 1\right)}{2} = \\
 &= \frac{4\frac{r}{l} - 4\sqrt{\frac{r}{l}} + 2\sqrt{\frac{r}{l}}}{2} = \frac{4\frac{r}{l} - 2\sqrt{\frac{r}{l}}}{2}
 \end{aligned} \tag{5.49}$$

chega-se a

$$\bar{N}_3 = 2\frac{r}{l} - \sqrt{\frac{r}{l}} . \quad (5.50)$$

Para maior clareza, as três funções de forma dadas pelas equações (5.46) a (5.48) e (5.50), modificadas para incluir a singularidade \sqrt{r} , obtidas para elementos de ponto a um quarto, são mostradas a seguir:

$$\bar{N}_1 = 2\frac{r}{l} - 3\sqrt{\frac{r}{l}} + 1 \quad (5.51)$$

$$\bar{N}_2 = -4\frac{r}{l} + 4\sqrt{\frac{r}{l}} \quad (5.52)$$

$$\bar{N}_3 = 2\frac{r}{l} - \sqrt{\frac{r}{l}} \quad (5.53)$$

As forças de superfície t_i podem ser dadas por

$$t_i = \bar{N}_1 t_A + \bar{N}_2 t_B + \bar{N}_3 t_C . \quad (5.54)$$

Substituindo as funções de forma, conforme mostrado a seguir,

$$t_i = \left(2\frac{r}{l} - 3\sqrt{\frac{r}{l}} + 1 \right) t_A + \left(-4\frac{r}{l} + 4\sqrt{\frac{r}{l}} \right) t_B + \left(2\frac{r}{l} - \sqrt{\frac{r}{l}} \right) t_C \quad (5.55)$$

$$t_i = 2\frac{r}{l} t_A - 3\sqrt{\frac{r}{l}} t_A + t_A - 4\frac{r}{l} t_B + 4\sqrt{\frac{r}{l}} t_B + 2\frac{r}{l} t_C - \sqrt{\frac{r}{l}} t_C \quad (5.56)$$

$$t_i = t_A - 3\sqrt{\frac{r}{l}}t_A + 4\sqrt{\frac{r}{l}}t_B - \sqrt{\frac{r}{l}}t_C + 2\frac{r}{l}t_A + -4\frac{r}{l}t_B + 2\frac{r}{l}t_C \quad (5.57)$$

chega-se a

$$t_i = a_1 + a_2\sqrt{\frac{r}{l}} + a_3\frac{r}{l} \quad (5.58)$$

onde os termos independentes são substituídos por a_1 , os termos em função de $\sqrt{r/l}$ por a_2 e os termos em função de r/l por a_3 , dados por:

$$\begin{aligned} a_1 &= t_A \\ a_2 &= -3t_A + 4t_B - t_C \\ a_3 &= 2t_A + -4t_B + 2t_C \end{aligned} \quad (5.59)$$

Ao usar elementos de ponto a um quarto com singularidade de forças de superfície na ponta da trinca, tanto as forças de superfícies quanto os deslocamentos serão corretamente representados.

Os fatores de intensidade de tensão podem ser calculados de várias maneiras, sendo a mais direta usando os valores nodais de forças de superfície. Relacionando a equação (5.58) com as equações dos campos de tensões na ponta da trinca interfacial, a seguinte equação pode ser obtida

$$K_0 = \frac{\sqrt{2\pi l}}{\cosh(\pi\epsilon)} \sqrt{(\bar{t}_1^A)^2 + (\bar{t}_2^A)^2} \quad (5.60)$$

5.4.3 Integração sobre o elemento que contém o ponto fonte

As soluções fundamentais dadas pelas equações (5.33) e (5.34) são dadas em função do raio r (figura 5.5) entre o ponto fonte e o ponto campo.

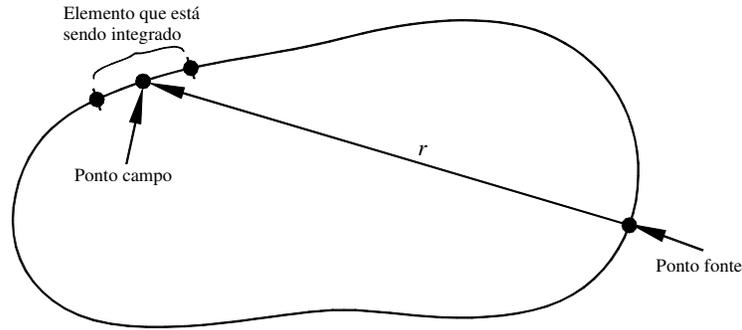


Figura 5.5: O raio r entre o pontos campo e o ponto fonte é dado por $x - x^*$.

Observa-se uma condição singular quando o ponto fonte e o ponto campo estão no mesmo elemento. Na matriz \mathbf{H} isso é resolvido de forma relativamente simples, aplicando-se a consideração de corpo rígido. Assumindo um deslocamento de corpo rígido unitário na direção de um dos eixos do sistema de coordenadas cartesianas, as forças de superfície devem ser zero:

$$\mathbf{H}\mathbf{I}^q = \mathbf{0} \quad (5.61)$$

sendo \mathbf{I} um vetor de deslocamentos unitários na direção q e zero nas demais. Então se pode ter

$$\mathbf{H}^{ii} = -\sum_{j=1}^N \mathbf{H}^{ij} \quad (5.62)$$

o qual resulta na diagonal da matriz \mathbf{H} . Na equação anterior os índices não implicam em soma.

O tratamento da singularidade da matriz \mathbf{G} é mais complexo. Na integração numérica observa-se que o raio apresenta uma parte singular e uma parte não singular, sendo que no primeiro caso usa-se Gauss logarítmico e no segundo usa-se quadratura de Gauss padrão. O

desmembramento do raio em parte singular e não singular é mostrada a seguir. A solução fundamental de deslocamentos dada por (5.33) é singular quando r tende a zero, sendo r dado por

$$r = \sqrt{(x - x^*)^2 + (y - y^*)^2} \quad (5.63)$$

Os pontos de integração (pontos de Gauss) x e y sobre o elemento são dados por

$$x = x_1 N_1 + x_2 N_2 + x_3 N_3 \quad (5.64)$$

$$y = y_1 N_1 + y_2 N_2 + y_3 N_3 \quad (5.65)$$

sendo x_1, x_2 e x_3 e y_1, y_2 e y_3 as coordenadas dos nós do elemento.

Substituindo as funções de forma em (5.64) resulta em

$$x = \frac{1}{2} \xi^2 x_1 - \frac{1}{2} \xi x_1 + x_2 - \xi^2 x_2 + \frac{1}{2} \xi^2 x_3 + \frac{1}{2} \xi x_3 \quad (5.66)$$

Colocando os termos comuns em evidência, a equação (5.66) pode ser reescrita para os pontos fonte e campo

$$x = \frac{\xi^2}{2} (x_1 - 2x_2 + x_3) + \frac{\xi}{2} (x_3 - x_1) + x_2 \quad (5.67)$$

$$x^* = \frac{\xi_0^2}{2} (x_1 - 2x_2 + x_3) + \frac{\xi_0}{2} (x_3 - x_1) + x_2 \quad (5.68)$$

O raio r , dado por $x - x^*$, é então calculado:

$$x - x^* = \left[\frac{\xi^2}{2}(x_1 - 2x_2 + x_3) + \frac{\xi}{2}(x_3 - x_1) + x_2 \right] - \left[\frac{\xi_0^2}{2}(x_1 - 2x_2 + x_3) + \frac{\xi_0}{2}(x_3 - x_1) + x_2 \right] \quad (5.69)$$

$$x - x^* = \frac{\xi^2}{2}(x_1 - 2x_2 + x_3) - \frac{\xi_0^2}{2}(x_1 - 2x_2 + x_3) + \frac{\xi}{2}(x_3 - x_1) - \frac{\xi_0}{2}(x_3 - x_1) + x_2 - x_2 \quad (5.70)$$

colocando em evidencia e usando fatoração, chega-se a:

$$x - x^* = \frac{1}{2}(\xi - \xi_0) [(\xi + \xi_0)(x_1 - 2x_2 + x_3) + x_3 - x_1] \quad (5.71)$$

Usando o elemento quadrático padrão, que tem o nó central exatamente no meio do elemento, tem se

$$x_2 = x_1 + \frac{l}{2} \quad (5.72)$$

$$x_3 = x_1 + l$$

conforme pode ser visto na figura 5.6

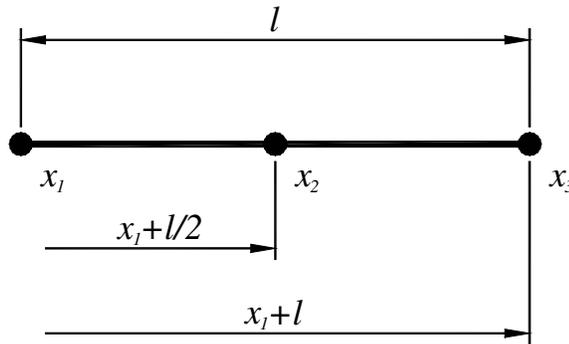


Figura 5.6: Integração quando o ponto fonte pertence ao elemento.

Reescrevendo a equação (5.71) em termos de x_1

$$x - x^* = \frac{1}{2}(\xi - \xi_0) \left[(\xi + \xi_0) \left(x_1 - 2x_1 - 2\frac{l}{2} + x_1 + l \right) + x_1 + l - x_1 \right] \quad (5.73)$$

obtém-se

$$x - x^* = \frac{1}{2}(\xi - \xi_0)l \quad (5.74)$$

Assim, se o elemento quadrático for o padrão, tem-se

$$(\xi + \xi_0)(x_1 - 2x_2 + x_3) + x_3 - x_1 = l_x, \quad (5.75)$$

ou seja, independentemente das coordenadas x_1 , x_2 e x_3 e de qual seja o ponto fonte, esta parte é sempre igual ao comprimento do elemento na direção x . Da mesma forma,

$$y - y^* = \frac{1}{2}(\xi - \xi_0) [(\xi + \xi_0)(y_1 - 2y_2 + y_3) + y_3 - y_1] \quad (5.76)$$

com

$$(\xi + \xi_0)(y_1 - 2y_2 + y_3) + y_3 - y_1 = l_y \quad (5.77)$$

para elementos quadráticos padrões.

Voltando à equação (5.63), r pode ser deduzido conforme segue

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\left(\frac{\xi - \xi_0}{2}l_x\right)^2 + \left(\frac{\xi - \xi_0}{2}l_y\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\xi - \xi_0}{2}\right)^2 l_x^2 + \left(\frac{\xi - \xi_0}{2}\right)^2 l_y^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{\xi - \xi_0}{2}\right)^2 (l_x^2 + l_y^2)} = \frac{\xi - \xi_0}{2} \underbrace{\sqrt{l_x^2 + l_y^2}}_{=l} = \underbrace{\frac{\xi - \xi_0}{2}}_{\text{parte singular}} \cdot \underbrace{l}_{\text{parte não singular}} \end{aligned} \quad (5.78)$$

Escrevendo a equação anterior na forma geral, tem-se:

$$\ln(r) = \ln \sqrt{\left(\frac{\xi - \xi_0}{2}\right)^2 \left\{ [(\xi + \xi_0)(x_1 - 2x_2 + x_3) + x_3 - x_1]^2 + [(\xi + \xi_0)(y_1 - 2y_2 + y_3) + y_3 - y_1]^2 \right\}} \quad (5.79)$$

ou

$$\ln(r) = \ln\left(\frac{\xi - \xi_0}{2}\right) + \ln \sqrt{[(\xi + \xi_0)(x_1 - 2x_2 + x_3) + x_3 - x_1]^2 + [(\xi + \xi_0)(y_1 - 2y_2 + y_3) + y_3 - y_1]^2} \quad (5.80)$$

Na equação anterior a primeira parcela é a parte onde a singularidade deve ser tratada. A segunda possui valor constante e igual ao comprimento do elemento, conforme já demonstrado, para o elemento quadrático padrão adotado. Obviamente a segunda parcela nunca é singular, pois o comprimento do elemento é sempre maior que zero.

A integração logarítmica da parte singular é dada por

$$\int_0^1 \ln\left(\frac{1}{x}\right) f(x) \partial x \cong \sum_{i=1}^n f(x_i) w_i \quad (5.81).$$

Uma vez que os limites da integral da parte singular é de -1 a 1 e na integração logarítmica é de 0 a 1, uma transformação de coordenadas se faz necessária.

$$\int_{-1}^1 \ln\left(\frac{\xi - \xi_0}{2}\right) \partial \xi \rightarrow \int_0^1 \ln(n) |J| \partial \eta \quad (5.82)$$

Conforme a localização do ponto fonte, ξ_0 recebe os seguintes valores:

$\xi_0 = -1$ quando o ponto fonte é o primeiro nó do elemento;

$\xi_0 = 0$ quando o ponto fonte é o segundo nó do elemento;

$\xi_0 = 1$ quando o ponto fonte é o terceiro nó do elemento.

Quando o ponto fonte é o primeiro nó

$$\eta = \frac{\xi - \xi_0}{2} = \frac{\xi - (-1)}{2} = \frac{\xi + 1}{2} \rightarrow \xi = 2\eta - 1 \quad (5.83)$$

e

$$\eta = \frac{\xi}{2} + \frac{1}{2}, \quad \partial \eta = \frac{\partial \xi}{2} \rightarrow \partial \xi = 2 \partial \eta \rightarrow J = 2. \quad (5.84)$$

Quando o ponto fonte é o segundo nó, a integral é dividida em duas partes, uma do primeiro ao segundo nó e outra do segundo ao terceiro

$$GW = \int_{nó1}^{nó3} N u^* |J| \partial \xi = \int_{nó1}^{nó2} N u^* |J| \partial \xi + \int_{nó2}^{nó3} N u^* |J| \partial \xi \quad (5.85)$$

de maneira que

$$\begin{aligned} \eta_1 &= -\xi \rightarrow \partial \eta_1 = -\partial \xi \rightarrow J_1 = -1 \\ \eta_2 &= 0 \\ \eta_3 &= \xi \rightarrow \partial \eta_3 = \partial \xi \rightarrow J_3 = 1. \end{aligned} \quad (5.86)$$

Finalmente, quando o ponto de colocação é o terceiro nó,

$$\eta = \frac{\xi - 1}{2} = \xi = 2\eta + 1 \quad (5.87)$$

e

$$\eta = \frac{\xi}{2} - \frac{1}{2}, \quad \partial \eta = \frac{\partial \xi}{2} \rightarrow \partial \xi = 2 \partial \eta \rightarrow J = 2. \quad (5.88)$$

5.5 Formulação de sub-regiões

A análise estrutural pelo método dos elementos de contorno algumas vezes requer que o domínio seja dividido/particionado em mais de uma região. Isso pode ocorrer devido à presença de trincas na estrutura, ou devido à existência de diferentes materiais no domínio, como na análise de interface de chapas laminadas. A derivação da formulação de multidomínio ou sub-regiões é uma extensão direta dos procedimentos de elementos de contorno descritas nas seções anteriores (Sollero, 1994).

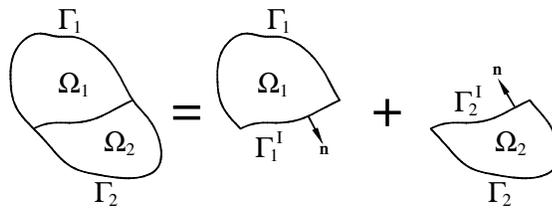


Figura 5.6: Divisão de um domínio em duas sub-regiões

Considere por simplicidade que o corpo é particionado em duas sub-regiões Ω_1 e Ω_2 (os sobrescritos indicam a sub-região e não implicam em soma) separados por uma interface I como mostrado na figura 5.6. Os deslocamentos \mathbf{u}^I e as forças de superfície \mathbf{t}^I no contorno I^I de cada subdomínio devem satisfazer a continuidade dos deslocamentos e as condições de equilíbrio das forças de superfície que podem ser expressas como

$$\mathbf{u}_1^I(x) = \mathbf{u}_2^I(x) \equiv \mathbf{u}^I \quad (5.89)$$

e

$$\mathbf{t}_1^I(x) = -\mathbf{t}_2^I(x) \equiv \mathbf{t}^I \quad (5.90)$$

onde \mathbf{u}^I e \mathbf{t}^I são somente incógnitas ao longo da interface I .

O sistema de equações (5.17) quando aplicado à sub-região 1 resulta em

$$[\mathbf{H}_1 \quad \mathbf{H}_1^I] \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_1^I \end{Bmatrix} = [\mathbf{G}_1 \quad \mathbf{G}_1^I] \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_1^I \end{Bmatrix} \quad (5.91)$$

e quando aplicado à sub-região 2, resulta em

$$[\mathbf{H}_2 \quad \mathbf{H}_2^I] \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_2^I \end{Bmatrix} = [\mathbf{G}_2 \quad \mathbf{G}_2^I] \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{t}_2^I \end{Bmatrix} \quad (5.92)$$

Combinando as equações anteriores, pode-se obter o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_1^I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}_2^I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_1^I \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_2^I \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_1^I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{G}_2 & \mathbf{G}_2^I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_1^I \\ \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{t}_2^I \end{Bmatrix} \quad (5.93)$$

impondo a compatibilidade de deslocamentos e o equilíbrio de forças de superfície, temos:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_1^I & 0 \\ 0 & \mathbf{H}_2^I & \mathbf{H}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_1^I \\ \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_1^I & 0 \\ 0 & -\mathbf{G}_2^I & \mathbf{G}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_1^I \\ \mathbf{t}_2 \end{Bmatrix} \quad (5.94)$$

Sendo desconhecidos os deslocamentos e as forças de superfície na interface, o sistema resultante pode ser reordenado conforme mostrado a seguir

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_1^I & -\mathbf{G}_1^I & 0 \\ 0 & \mathbf{H}_2^I & \mathbf{G}_2^I & \mathbf{H}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_1^I \\ \mathbf{t}_1^I \\ \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{G}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \end{Bmatrix} \quad (5.95)$$

Finalmente após a substituição das condições de contorno, o sistema resultante pode ser reordenado como dado.

$$\bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{G}} \bar{\mathbf{t}} \quad (5.96)$$

Convém salientar que, embora a formulação de sub-regiões seja bem simples, a implementação é bem complexa. Uma rotina de formatação prévia de dados muito bem planejada se faz necessária, sem a qual a implementação pode se tornar quase impossível.

Capítulo 6

Resultados Numéricos

6.1 Introdução

Neste capítulo serão mostrados alguns exemplos da aplicação da formulação desenvolvida e descrita nos capítulos anteriores. O objetivo dos exemplos é demonstrar a aplicabilidade do método e assegurar que seus resultados estão em boa concordância com resultados da literatura.

As simulações de materiais quase-isotrópicos utilizaram a formulação anisotrópica, apresentada neste trabalho, com o objetivo de comparar os resultados com exemplos de materiais isotrópicos disponíveis na literatura.

O primeiro exemplo mostra os fatores de intensidade de tensão na interface de uma chapa infinita composta por dois materiais quase-isotrópicos. A solução isotrópica deste problema possui solução analítica, apresentada por Rice e Sih (1965) e pode-se comparar com os resultados obtidos numericamente.

O segundo exemplo trata de uma chapa finita composta por dois materiais quase isotrópicos submetidos à tensões normais uniaxiais com trinca interfacial na qual os resultados numéricos são comparados com resultados obtidos por Tan e Gao (1990).

O terceiro exemplo mostra a análise dos fatores de intensidade de tensão em uma chapa homogênea quase-isotrópica de largura finita e comprimento infinito, contendo uma trinca central. Os resultados deste exemplo são comparados com resultados apresentados por Isida (1971).

O quarto exemplo trata do cálculo do FIT em uma chapa bimaterial anisotrópica infinita com trinca interfacial submetida à pressão uniforme. Os resultados numéricos obtidos neste exemplo foram comparados com resultados obtidos por Pan e Amadei (1999) e apresentaram uma boa aproximação.

6.2 Cálculo do FIT na interface de uma chapa infinita composta por dois materiais quase-isotrópicos

O objetivo deste exemplo é, partindo de um problema mais simples (dois materiais isotrópicos), checar a implementação das funções anisotrópicas, através da comparação com os resultados já estabelecidos e encontrados na literatura.

A figura 6.1 mostra o primeiro problema analisado, qual seja, o de uma chapa bimaterial quase-isotrópica infinita com uma trinca interfacial de comprimento $2a$, submetida à tensões normais aplicadas remotamente.

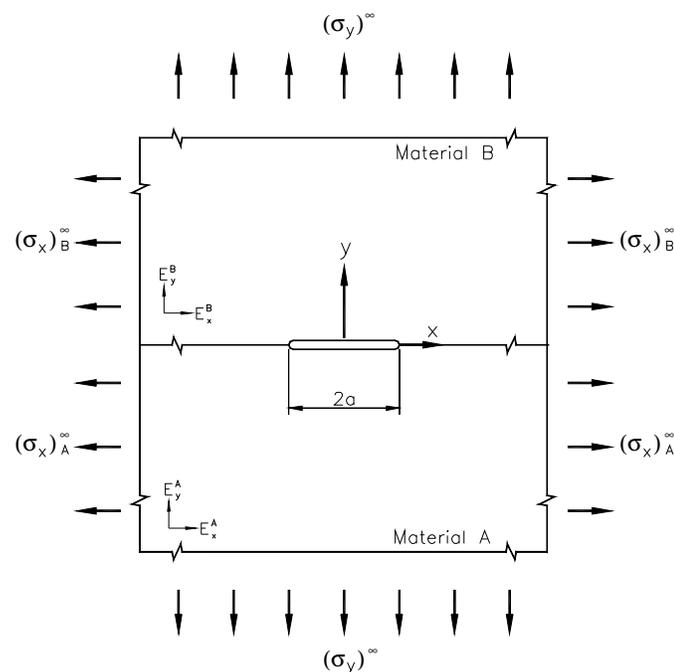


Figura 6.1:Placa bimaterial quase-isotrópica infinita com trinca interfacial submetida a tensões normais aplicadas remotamente.

O modelo do MEC, entretanto considera uma chapa bimaterial finita, porém suas dimensões de largura e comprimento foram consideradas 20 vezes maiores que o tamanho da trinca. Portanto os efeitos de contorno finito podem ser considerados como insignificantes.

O problema foi analisado sob condições de estado plano de deformação. Além disso, conforme a figura 6.1 a tensão $(\sigma_x)_B^\infty$ foi dada por:

$$(\sigma_x)_B^\infty = \frac{E_B}{E_A} (\sigma_x)_A^\infty + \left[\nu_B - \frac{E_B}{E_A} \nu_A \right] (\sigma_y)^\infty \quad (6.1)$$

onde E_A , E_B , ν_A e ν_B são os módulos de elasticidade e coeficientes de Poisson dos materiais A e B , respectivamente. Isso garante as condições de continuidade para as deformações ϵ_{xx} ao longo da interface do bimaterial.

A malha de elementos de contorno aplicada para este problema é mostrada na figura 6.2, onde somente metade do problema físico foi modelada devido à simetria. Um total de 33 elementos de contorno e 66 nós foram usados para representar as duas sub-regiões com as respectivas propriedades de material.

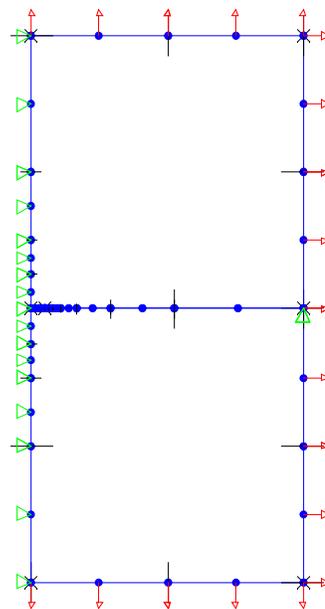


Figura 6.2: Malha de elementos de contorno e condições de contorno aplicadas.

Foram considerados quatro diferentes valores de relação E_B/E_A , que são 1, 5, 20 e 100. Os coeficientes de Poisson ν_A e ν_B entretanto foram considerados sempre o mesmo, como 0,3.

A solução exata para este problema foi dada por Rice e Sih (1965). O fator de intensidade de tensão K_0 foi obtido pelo MEC a partir das forças de superfície calculadas no nó da ponta da trinca do elemento de ponto a um quarto usando-se a equação

$$K_0 = \frac{\sqrt{2\pi l}}{\cosh(\pi\epsilon)} \sqrt{(\bar{t}_1^A)^2 + (\bar{t}_2^A)^2} \quad (6.2)$$

A relação entre o comprimento do elemento de ponto a um quarto e o comprimento da trinca, dado por l/a , foi variado de 0,006 a 0,15, dependendo da relação E_B/E_A . Para E_B/E_A igual a 1, l/a foi variado de 0,02 a 0,15. Quando E_B/E_A igual a 5, l/a foi variado de 0,01 a 0,15. Para $E_B/E_A = 20$ ou 100, l/a foi variado de 0,006 a 0,15.

A tabela 6.1 apresenta os valores dos FIT normalizados, K_0/\bar{K} , onde $\bar{K} = (\sigma_y)^\infty \sqrt{\pi a}$, obtidos pelo MEC. Também são listadas as soluções exatas (Rice e Sih, 1965) e as soluções numéricas usando a formulação isotrópica do MEC (Paiva, 2000), respectivamente.

Tabela 6.1: FIT na interface de uma chapa infinita composta por dois materiais quase isotrópicos.

$\frac{E_B}{E_A}$	$\frac{l}{a}$	<i>Exata</i> <i>Rice e Sih (1965)</i>	<i>Isotrópica</i> <i>Paiva (2000)</i>	<i>Anisotrópica</i> <i>(presente)</i>	<i>Erro</i> $\Delta\%$
1	0,15	1,000	1,0025	1,0094	0,93748
	0,10		1,0007	1,0079	0,78648
	0,08		0,9992	1,0070	0,70128
	0,06		0,9960	1,0056	0,56380
	0,04		0,9942	1,0024	0,23887
	0,02		1,0044	0,9889	-1,1102
5	0,15	0,989	0,9981	1,0300	4,1451
	0,10		0,9965	1,0288	4,0214
	0,08		0,9950	1,0281	3,9486
	0,06		0,9919	1,0268	3,8250
	0,04		0,9897	1,0238	3,5176
	0,02		0,9999	1,0107	2,1942
20	0,01	0,980	---	0,9807	-0,8381
	0,15		0,9891	1,0452	6,6508
	0,10		0,9876	1,0442	6,5480
	0,08		0,9862	1,0436	6,4852
	0,06		0,9832	1,0425	6,3741
	0,04		0,9806	1,0396	6,0845
	0,02		0,9906	1,0270	4,7935
	0,01		---	0,9973	1,7681
	0,008		---	0,9833	0,3405
0,006	---	0,9622	-1,8118		
100	0,15	0,976	0,9838	1,0504	7,6246
	0,10		0,9823	1,0495	7,5291
	0,08		0,9810	1,0489	7,4701
	0,06		0,9781	1,0479	7,3637
	0,04		0,9754	1,0451	7,0813
	0,02		0,9853	1,0327	5,8044
	0,01		---	1,0032	2,7842
	0,008		---	0,9892	1,3531
	0,006		---	0,9681	-0,8076

Como pode ser visto, a formulação anisotrópica MEC implementada apresenta resultados muito bons. À medida que a relação l/a diminui, os erros tendem a apresentar valores abaixo de 1%. Conforme a relação E_B/E_A aumenta, a relação l/a deve ser reduzida para que se obtenham melhores resultados.

6.3 Cálculo do FIT na interface de uma chapa finita composta por dois materiais quase-isotrópicos submetidos a tensões normais uniaxiais.

O objetivo deste exemplo é simplesmente criar uma lista de resultados obtidos com a presente formulação, uma vez que não foram encontradas soluções exata ou analítica na literatura consultada, que pudesse ser usada para comparação.

O exemplo foi proposto por Tan e Gao (1990), que criaram a lista de resultados mostrada na tabela 6.2, usando a formulação isotrópica. Neste trabalho foi acrescentada mais uma coluna à tabela original, onde são mostrados os resultados dos mesmos exemplos usando a formulação anisotrópica.

A figura 6.3 mostra o problema de uma chapa bimaterial quase-isotrópica de dimensões finitas contendo uma trinca interfacial central, de comprimento $2a$, submetida à tensões normais uniaxiais. Os materiais da chapa analisada neste exemplo são considerados dissimilares, com relações E_B/E_A variando de 1 a 100, com coeficientes de Poisson $\nu_A = \nu_B = 0,3$. Foi considerada uma geometria onde as dimensões de largura e comprimento seguem a relação $h/b=1$. Os valores do FIT, estudados em função do tamanho da trinca, seguem as seguintes relações entre o comprimento da trinca e a largura da chapa: $a/b=0.1, 0.2, 0.3 e 0.4$. Foi assumido estado plano de tensão.

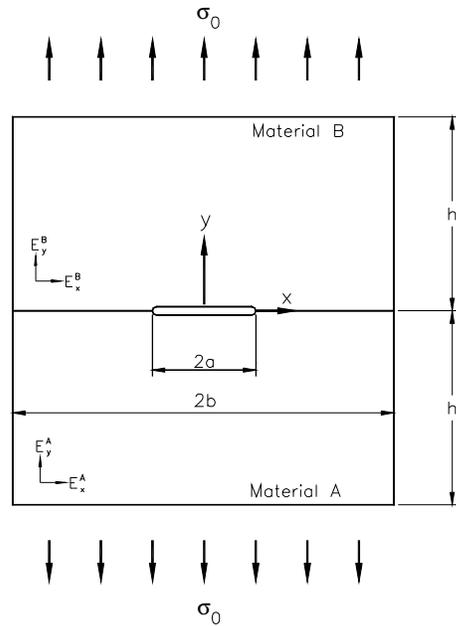


Figura 6.3. Chapa bimaterial finita com trinca interfacial central submetida a tensões normais uniaxiais.

Devido à simetria apenas metade do problema físico foi considerada. A malha empregada é composta por 18 elementos de contorno em cada sub-região conforme mostra a figura 6.4. Três diferentes relações de E_B/E_A foram consideradas. O comprimento l do elemento de ponto a um quarto foi considerado igual a 0,1.

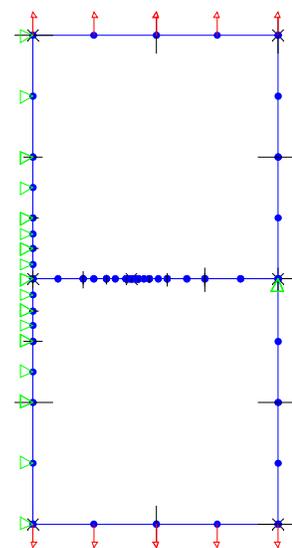


Figura 6.4. Malha de elementos de contorno e condições de contorno aplicadas.

A tabela 6.2 apresenta os resultados do FIT normalizado K_0/\bar{K} onde, $\bar{K} = \sigma_0 \sqrt{\pi a}$, obtidos neste trabalho, juntamente com os obtidos por Tan e Gao (1990). Em ambos os casos foram usados elementos de ponto a um quarto com singularidade de força de superfície.

Tabela 6.2. FIT para uma trinca interfacial em uma chapa bimaterial finita.

$\frac{a}{b}$	$\frac{E_B}{E_A}$	$\frac{l}{a}$	$\left(\frac{K_0}{\bar{K}}\right)_{(Tan\ e\ Gao, 1990)}$	$\left(\frac{K_0}{\bar{K}}\right)_{presente}$
0,1	1	0,10	1,019	1,0149
		0,06	1,012	0,9989
	10	0,10	1,013	0,9830
		0,06	1,006	0,9687
	100	0,10	0,991	0,9537
		0,06	0,984	0,9404
0,2	1	0,10	1,053	1,0647
		0,06	1,046	1,0596
	10	0,10	1,039	1,0266
		0,06	1,033	1,0223
	100	0,10	1,014	0,9935
		0,06	1,007	0,9895
0,3	1	0,10	1,102	1,1337
		0,06	1,102	1,1313
	10	0,10	1,076	1,0857
		0,06	1,070	1,0839
	100	0,10	1,046	1,0465
		0,06	1,039	1,0449
0,4	1	0,10	1,173	1,2267
		0,06	1,166	1,2250
	10	0,10	1,130	1,1653
		0,06	1,123	1,1641
	100	0,10	1,092	1,1180
		0,06	1,085	1,1170

Não foi encontrada solução analítica ou exata para este problema na literatura consultada, razão pela qual julgou-se melhor não calcular os erros relativos, uma vez que os dados disponíveis para comparação são também numéricos. Entretanto, comparando-se os resultados obtidos por meio da formulação anisotrópica implementada no presente trabalho com os resultados de Tan e Gao (1990), obtidos com a formulação isotrópica, observa-se que eles estão bem próximos sendo considerados aceitáveis.

6.4 Cálculo do FIT em uma chapa homogênea de largura finita contendo uma trinca central

O objetivo deste exemplo é verificar a influência das condições de contorno no cálculo do FIT de acordo com a relação entre o tamanho da trinca e a largura da peça, conforme a trinca se aproxima do contorno da peça.

Neste exemplo é analisado o problema de uma chapa homogênea de comprimento infinito e largura finita contendo uma trinca central, de comprimento $2a$. A tira está sujeita à tensões normais uniaxiais aplicadas remotamente (figura 6.5). Foi considerado estado plano de deformação.

O modelo do MEC, entretanto, considera uma tira finita, com uma relação entre a largura e o comprimento igual a 4. Os efeitos de contorno finito foram considerados como insignificantes para essa relação.

Os resultados numéricos obtidos na análise, utilizando a formulação anisotrópica, são comparados com os resultados obtidos por Isida (1971) através de uma expansão em série de potência com 36 termos.

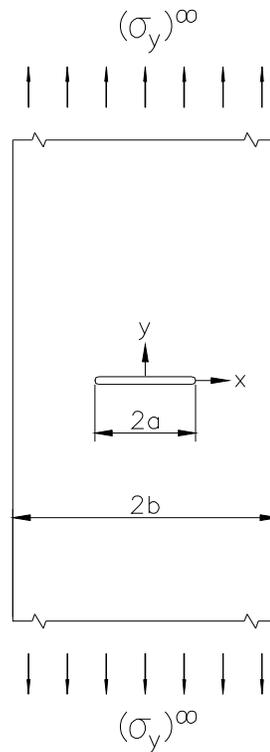


Figura 6.5. Problema físico de uma chapa homogênea de largura finita e comprimento infinito contendo uma trinca central.

Devido à simetria somente metade do problema físico foi modelada. A figura 6.6 mostra a malha de elementos de contorno utilizada e também as condições de contorno e simetria consideradas. A tabela 6.3 traz o número de elementos usados na interface e nas faces da trinca em cada uma das relações a/b verificadas. O restante da malha não foi alterado.

Tabela 6.3: Discretização na interface e na face da trinca.

Relação a/b	Elementos na interface	Elementos na face da trinca
0,1	6	5
0,2 a 0,5	5	4
0,6 a 0,8	3	4

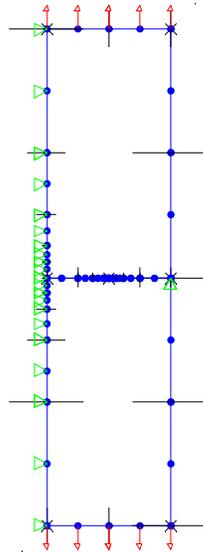


Figura 6.6. Malha de elementos de contorno e condições de contorno.

A tabela 6.4 apresenta os valores normalizados dos FIT $(K_0/\bar{K})_I$, sendo \bar{K} dado por

$$\bar{K}_I = \sigma \sqrt{\pi a} f(a/b) \quad (6.3)$$

conforme expansão em série de potências de $(a/b)^2$ usando 36 termos, apresentado por Isida (1971).

Tabela 6.4: FIT para uma trinca interfacial em uma chapa homogênea de largura finita, sujeita a carregamento uniaxial remoto.

a/b	$K_{(Isida,1971)}$	$K_{(Paiva,2000)}$	$K_{pre\ sente\ trabalho}$	Erro $\Delta\%$
0,1	25,2167	25,4321	25.2449	0,1119
0,2	36,3211	36,6269	36.4120	0,2503
0,3	45,9212	46,2735	46.2057	0,6197
0,4	55,6171	55,9213	55.9070	0,5213
0,5	66,5144	66,6209	66.6226	0,1627
0,6	80,0221	79,6439	79.4661	-0,6948
0,7	98,6962	96,9942	97.3246	-1,3897
0,8	128,7510	124,8905	125.5916	-2,4539

Uma análise dos dados apresentados na tabela 6.4 mostra que os resultados obtidos apresentam, quase sempre, erros menores que 1%, exceto para as relações $a/b = 0,7$ e $0,8$. O aumento do erro neste caso é devido à diminuição das relações entre a largura e o comprimento da chapa, em comparação com o comprimento trinca. Assim, conclui-se que a formulação anisotrópica implementada está correta e pode ser aplicada também na análise de problemas isotrópicos.

6.5 Fator de intensidade de tensão numa chapa bimaterial anisotrópica infinita com trinca interfacial

O objetivo deste exemplo é apresentar um legítimo problema de trinca interfacial em componentes bimateriais anisotrópicos. Esta análise apresenta o problema de uma trinca interfacial em uma chapa bimaterial anisotrópica sob uma pressão uniforme p (Figura 6.7).

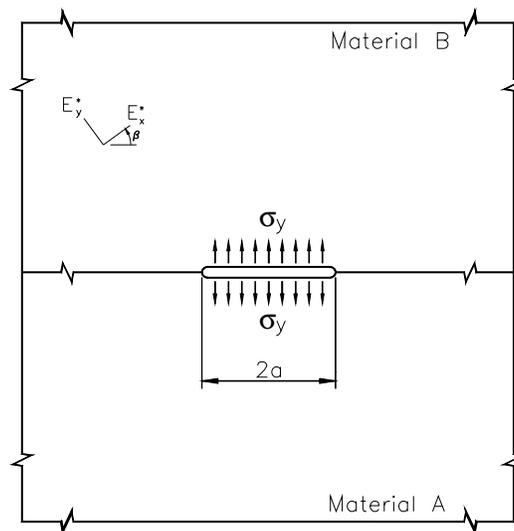


Figura 6.7: Problema físico de uma chapa bimaterial anisotrópica infinita com uma trinca interfacial submetida a pressão p uniforme.

Foi assumido estado plano de tensão. A figura 6.8 mostra a malha de elementos de contorno usada. Vinte e quatro elementos de contorno quadráticos foram usados para discretizar o sistema bimaterial.

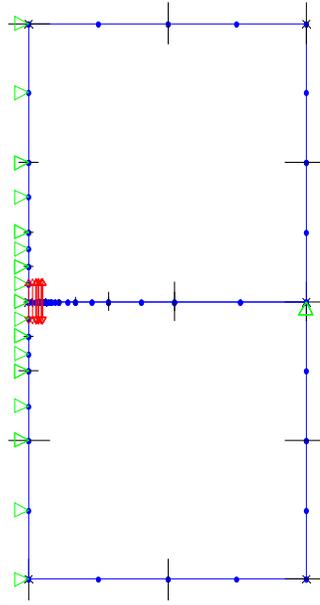


Figura 6.8: Malha de elementos de contorno

As propriedades elásticas anisotrópicas do material (A) foram assumidas como as de um compósito fibra-de-vidro/epóxi com $E_1 = 48.26 \text{ GPa}$, $E_2 = 17.24 \text{ GPa}$, $G_{12} = 6.89 \text{ GPa}$ e $\nu_{12} = 0.29$. Para o material (B) foi usado um compósito de fibra-de-grafite/epóxi com $E_1 = 144.8 \text{ GPa}$, $E_2 = 11.7 \text{ GPa}$, $G_{12} = 9.66 \text{ GPa}$ e $\nu_{12} = 0.21$.

O eixo E_1 do sistema de coordenadas do material (A) foi considerado coincidente com a direção horizontal (i.e. $\alpha_1 = 0$). O eixo E_1 do sistema de coordenadas do material (B) faz um ângulo α_2 com relação à direção horizontal.

O FIT interfacial na ponta da trinca foi calculado pelo presente método. Os resultados dos FIT normalizados para condições de estado plano de tensão são listados na tabela 6.5 e comparados com os resultados numéricos apresentados por Pan and Amadei (1999), e apresentam uma boa aproximação. Exemplos semelhantes também foram apresentados anteriormente por Tan *et al.* (1992).

Uma vez que os trabalhos de Tan *et al.* (1992) e Pan and Amadei (1999) apresentam os valores de K_I e K_{II} desacoplados, K_0 pode ser obtido a partir do plano complexo (figura 6.9).

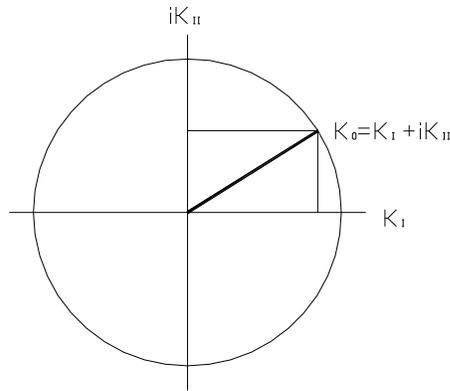


Figura 6.9: Relação entre K_0 , K_I e K_{II} no plano complexo.

Considerando-se $i = \sqrt{-1}$, tem-se

$$K_0 = \sqrt{(K_I)^2 + (iK_{II})^2} \quad (6.4)$$

Tabela 6.5 FIT normalizado para uma trinca interfacial em um bimaterial anisotrópico infinito.

α_2	$K_0 = \sqrt{(K_I)^2 + (iK_{II})^2}$	$K_n = K_0 / \bar{K}_{PRESENTE}$	Erro(%)
0	0,9993	1.0198	2,0545
30	0,9962	0.9941	0,2097
45	0,9960	0.9856	1,0434
60	0,9967	0.9873	0,9409
90	0,9997	1.0109	1,1252

Analisando a tabela 6.5 verifica-se que foram obtidos resultados muito bons, com erros da ordem de 1%. Se for levado em conta o número de elementos usados, verifica-se que a formulação foi implementada corretamente e que com um pequeno refinamento da malha os resultados melhoram sensivelmente.

6.6 Fator de intensidade de tensão numa chapa bimaterial anisotrópica finita com trinca interfacial inclinada

Este exemplo tem o objetivo de apresentar um novo problema, o qual não tem paralelo na literatura consultada. Os resultados foram colocados à disposição para que futuros trabalhos tenham um ponto de partida para comparações. Esta análise apresenta o problema de uma trinca interfacial inclinada em uma chapa bimaterial anisotrópica finita, submetida a tensões normais.

As propriedades elásticas anisotrópicas dos materiais são as mesmas do problema anterior. Para o material (A) foi assumido um compósito fibra-de-vidro/epóxi com $E_1 = 48.26 \text{ GPa}$, $E_2 = 17.24 \text{ GPa}$, $G_{12} = 6.89 \text{ GPa}$ e $\nu_{12} = 0.29$. Para o material (B) foi usado um compósito de fibra-de-grafite/epóxi com $E_1 = 144.8 \text{ GPa}$, $E_2 = 11.7 \text{ GPa}$, $G_{12} = 9.66 \text{ GPa}$ e $\nu_{12} = 0.21$. Os eixos dos sistemas de coordenadas dos materiais foram considerados coincidentes com a direção horizontal.

Foi assumido estado plano de tensão. A figura 6.10 mostra o problema físico. Neste caso foi considerada uma relação $a/b' = 0,2$, conforme figura 6.10.

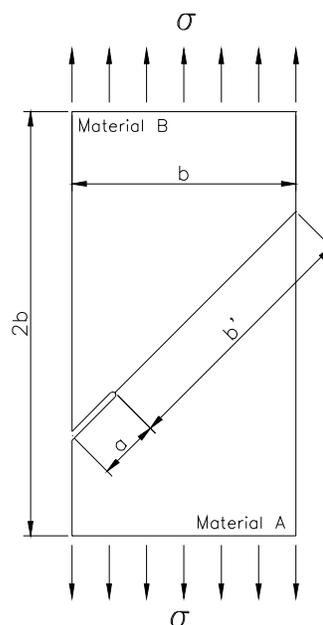


Figura 6.10: Chapa bimaterial anisotrópica finita com uma trinca interfacial inclinada.

A figura 6.11 mostra a malha de elementos de contorno usada. Trinta e seis elementos de contorno quadráticos foram usados para discretizar o sistema bimaterial.

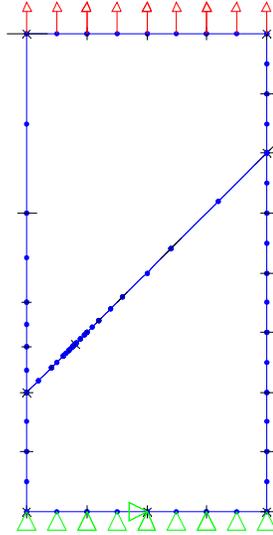


Figura 6.11: Malha de elementos de contorno

O FIT interfacial na ponta da trinca foi calculado pelo presente método. Este exemplo não consta da literatura consultada e não pode ter seus resultados comparados. Portanto, os resultados dos FIT normalizados para condições de estado plano de deformação são apenas listados na tabela 6.6, para três relações l/a .

Tabela 6.6 FIT normalizado para uma trinca interfacial inclinada.

l/a	$K_n = K_0 / \bar{K}_{PRESENTE}$
0,125	0.9829
0,088	0.9865
0,044	0.9872

Observando a tabela 6.6 verifica-se que os resultados obtidos indicam uma boa estabilidade numérica, embora não haja dados, analíticos ou numéricos, encontrados na literatura, para comparação.

Capítulo 7

Conclusões

7.1 Conclusões finais

Neste trabalho foi proposto um procedimento para o cálculo dos fatores de intensidade de tensão para trincas interfaciais em corpos bimateriais compostos por diferentes materiais anisotrópicos. O procedimento baseia-se no método dos elementos de contorno e faz uso da técnica de sub-regiões para modelar cada um dos diferentes materiais que compõem o corpo.

Os fatores de intensidade de tensão foram calculados a partir dos valores de forças de superfície nodais obtidos através de elementos de ponto a um quarto com singularidade de forças de superfície, por ser um elemento que descreve o comportamento $1/\sqrt{r}$ verificado na ponta da trinca. Dessa forma a superfície da trinca pode ser modelada com uma malha relativamente grosseira. Os estudos de convergência de malha mostram que os resultados são pouco dependentes da discretização.

No caso da modelagem de chapas infinitas pode ser mostrado que modelando-se uma chapa cujas dimensões são cerca de 20 vezes o comprimento da trinca, consegue-se uma boa concordância com os resultados analíticos para chapa infinitas apresentados na literatura.

Em problemas sem restrições de deslocamentos há a necessidade de restringir os deslocamentos em alguns nós para se evitar movimentos de corpo rígido do modelo. Deve ser tomado um cuidado especial para que estas restrições não influenciem os resultados obtidos, procurando aplicá-las de acordo com as condições de simetria dos problemas.

Tanto o cálculo do fator de intensidade de tensão em modo I como em modo misto mostraram boa concordância com os resultados disponíveis na literatura. De acordo com os resultados mostrados neste trabalho pode-se concluir que a abordagem utilizada é adequada para o tratamento de problemas de meios bimateriais contendo trincas interfaciais, podendo os materiais serem iguais ou mesmo terem uma diferença bastante acentuada entre as suas constantes elásticas.

Pode-se dizer que a abordagem adotada apresenta-se como bastante vantajosa no que diz respeito ao tempo de processamento e memória requerida, embora esses fatores não fossem tão importantes nos problemas aqui tratados devido às suas simplicidades. Dois fatos justificam estas vantagens: o método dos elementos de contorno necessita de discretização apenas no contorno e na interface dos materiais e bons resultados podem ser obtidos mesmo quando uma malha bastante grosseira for utilizada, conforme mostrado no presente trabalho.

7.2 Sugestões para próximos trabalhos

Como propostas para futuros trabalhos nesta linha de pesquisa sugere-se:

- estender a aplicação do programa para estudos de propagação de trincas interfaciais;
- estender a aplicação do programa para problemas de dinâmica através do uso de formulações de elementos de contorno para elastodinâmica;
- estender a aplicação do programa para problemas tridimensionais;
- implementar condições de compatibilidade na interface que permitam representar a presença de adesivos na interface.

O programa pode ter suas capacidades estendidas mediante:

- implementação de rotina de formatação de dados que contemple geometrias curvas;
- implementação de um esquema de discretização variável incremental mais eficiente (baseado numa progressão, por exemplo);
- conversão do código para programação orientada a objeto.

Referências

Agarwal, B. D., Broutman, L. J. (1990) “*Analysis and performance of fiber composites*”, 2ª edição, A Wiley-Interscience publication, New York.

Allan, G. G. (1986) “*Modification of fiber surfaces*”, Composites Systems From Natural And Synthetic Polymers – Material Science Monographs nº 36 pg. 47-58.

Aliabadi, M. H.; Rooke, D. P. (1991) “*Numerical fracture mechanics*”, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Aliabadi, M. H. (1997) “*A new generation of boundary element methods in fracture mechanics*”, International Journal of Fracture nº 86 pg. 91-125.

Ang, H. E., Torrance, J. E., Tan, C. L. (1996) “*Boundary element analysis of orthotropic delamination specimens with interface cracks*”, Engineering Fracture Mechanics, 54(5): 601-615.

Banerjee, P. K. (1994) “*The Boundary Element Methods in Engineering*”, McGraw-Hill Book Company, Ind., England.

Chen, C. H., Hsu, J. (1997) “*The stress intensity factors of regularly perturbed-interface cracks of anisotropic bimetals*”, International Journal of Solids Structures, 34(10):1235-1253.

Cho, S. B., Lee, K. R., Choy, Y. S., Yuuki, R. (1992) “*Determination of stress intensity factors and boundary element analysis for interface cracks in dissimilar anisotropic materials*”, Engineering Fracture Mechanics, 43(4):603-614.

Cruse, T. A. (1998) “*Boundary element analysis in computational fracture mechanics*”, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

De Paula, F. A., Aliabadi, M. H. (1997) “*Boundary element analysis of interface cracks in dissimilar orthotropic materials using a path independent contour integral*”, Boundary Element XIX. Southampton, UK: Computational Mechanics Publications, 1:359-366.

De Paula, F. A., Vecchi, M. A. M. (2002) “*Interface cracks analysis in laminated composite materials using boundary elements*”, Proc. of the XXIII Ibero Latin American Congress on Computational Methods for Engineering, Giulianova, 1:1-9.

Hertzberg, R. W. (1996) “*Deformation and fracture mechanics of engineering materials*”, John Wiley & Sons Inc, New York.

Hilgert, R. (1994) “*Lightweight engineering for aerospace*”, High Tech Report, Daimler Benz, Stuttgart, n° 4, pg. 48-57.

Isida, M. (1971) “*Effect of width and length on stress intensity factors of internally cracked plates under various boundary conditions*”, International Journal of Fracture Mechanics, 7:301-316.

Kane, J. A. (1994) “*Boundary element analysis in engineering continuum mechanics*”, Prentice Hall, New Jersey.

Kim, W. C., Dharan, K. H. (1989) “*A fracture control plan for composite structures*”, Engineering Fracture Mechanics vol. 34 n° 2 pg. 305-324.

Lekhnitskii, S. G. (1963) “*Theory of elasticity of anisotropic elastic body*”, Holden-Day, San Francisco.

Lekhnitskii, S. G. (1968) “*Anisotropic Plates*”, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 2nd edition.

Liu, L., Kardomateas, G. A., Holmes, J. W. (2004) “Mixed-mode stress intensity factors for a crack in an anisotropic bi-material strip”, *International Journal of Solids and Structures*, 41:3095-3107.

Liu, Y. J., Xu, N. (2000) “*Modeling of interface cracks in fiber-reinforced composites with the presence of interphases using the boundary element method*”, *Mechanics of Materials*, 32:769-783.

Martínez, J.; Domínguez, J. (1984) “*Short communication on the use of quarter-point boundary elements for stress intensity factor computations*”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* vol. 20 pg. 1941-1950.

MIL-HDBK-17-1E (1997) US Department of Defense (DOD), US Federal Aviation Administration (FAA) “*Guidelines for Characterization of Structural Materials*” vol. 1 cap. 6 pg. 6.65.

Nabarrete, A. (1998) “*Materiais compostos aplicados a componentes automotivos*”, *Revista Pesquisa & Tecnologia – FEI*, nº 17, pg. 3-10.

Paiva, W. P. (2000) “*Análise de problemas de trincas interfaciais usando o método dos elementos de contorno*”, Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 86p, dissertação de mestrado.

Paiva, S. V. F., Sollero, P., Paiva, W. P. (2003) “*Analysis of interfacial crack in bimaterial laminates using boundary element method*”, 17th International Congress of Mechanical Engineering, pages CD-ROM. São Paulo, BRA, nov 2003.

Paiva, S. V. F., Sollero, P., Aliabadi, M. H., Paiva, W. P. (2004) “*Analysis of interface crack problems in dissimilar anisotropic media using the boundary element method*”, International Conference on Computational & Experimental Engineering and Sciences – ICCES 04, pages CD-ROM. Madeira, Portugal, jul 2004.

Pan, E., Amadei, B. (1999) “*Boundary element analysis of fracture mechanics in anisotropic bimaterials*”, Engineering Analysis with Boundary Elements, 23:683-691.

Ricards, R. et al. (1996) “Mode I, mode II and mixed mode I/II interlaminar fracture toughness of GFRP influenced by fiber surface treatment”, Mechanics of Composite Materials, Vol. 32, n° 5, pg. 439-462.

Rice, J. R., Sih, G. C. (1965) “*Plane problems of cracks in dissimilar media*”, Journal of Applied Mechanics, 32:418-423.

Rice, J. R. (1988) “*Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks*”, Journal of Applied Mechanics, 55:98-103.

Shen, S., Kuang, Z. B., Hu, S. (1999) “*On interface crack in laminated anisotropic medium*”, International Journal of Solids and Structures, 36:4251-4268.

Sih, G. C., Paris, P. C., Irwin, G. R. (1965) “*On cracks in rectilinearly anisotropic bodies*”, International Journal of Fracture Mechanics, 3:189-203.

Sih, G. C. (1987) “Microstructure and damage dependence of advanced composite material behavior”, Composite Material Response: Constitutive Relations and Damage Mechanisms pg. 1-23.

Smith, R. N. L. (1988) “*The solution of mixed-mode fracture problems using the boundary element method*”, Engineering Analysis, June 1988, 5(2):75-80.

Sollero, P. (1994) "*Fracture mechanics analysis of anisotropic laminates by the boundary element method*", Ph. D. Thesis, Wessex Institute of Technology.

Staab, G. H. (1999) "*Laminar composites*", Butterworth Henemann, Boston.

Tan, C. L., Gao, Y. L. (1990) "*Treatment of bimaterial interface crack problems using the boundary element method*", Engineering Fracture Mechanics, 36(6):919-932.

Tan, C. L., Gao, Y. L. (1992) "*Boundary integral equation fracture mechanics analysis of plane orthotropic bodies*", International Journal of Fracture, 53:343-365.

Tan, C. L., Gao, Y. L., Afagh, F. F. (1992) "*Boundary element analysis of interface cracks between dissimilar anisotropic materials*", Int. J. Solids Structures, 29: 3201-3220.

Williams, J. G. (1987) "*Fracture tests for mixed mode failure of composites laminates*", Composite Material Response: Constitutive Relations and Damage Mechanisms pg. 61-70.

Yuuki, R., Xu, J. Q. (1994) "*Boundary element analysis of dissimilar materials and interface crack*", Computational Mechanics, 14:116-127.