

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Dinâmica Não Linear e Controle de uma Aeronave em Vôo Longitudinal

Autor: Danilo Carlos Pereira
Orientador: Prof. Dr. José Manoel Balthazar
Co-orientador: Prof. Dr. Paulo R. G. Kurka

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETOS MECÂNICOS.**

Título

**Dinâmica Não Linear e Controle de uma
Aeronave em Vôo Longitudinal**

Autor: Danilo Carlos Pereira
Orientador: Prof. Dr. José Manoel Balthazar
Co-orientador: Prof. Dr. Paulo R. G. Kurka

Curso: Engenharia Mecânica
Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projetos Mecânicos

Tese de doutorado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2007
S.P. – Brasil

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

P414d Pereira, Danilo Carlos
Dinâmica não linear e controle de uma aeronave em voo longitudinal / Danilo Carlos Pereira.--Campinas, SP: [s.n.], 2007.

Orientadores: José Manoel Balthazar, Paulo Roberto Gardel Kurka
Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Dinâmica. 2. Aerodinâmica. 3. Controle. 4. Turbulência. 5. Túneis aerodinâmicos. 6. Dinâmica – Teoria não linear. 7. Dinâmica de corpos rígidos. I. Balthazar, José Manoel. II Kurka, Paulo Roberto Gardel. III. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. IV. Título.

Titulo em Inglês: Non linear dynamics and control of an aircraft in longitudinal flight

Palavras-chave em Inglês: Longitudinal non linear flight dynamics, Linear optimal control, Bifurcational analysis, Virtual wind tunnel

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Doutor em Engenharia Mecânica

Banca examinadora: Pablo Siqueira Meirelles, helder Anibal Hermeni, Marat Rafikov, Marcio José Horta Dantas

Data da defesa: 30/07/2007

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Mecânica

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETOS MECÂNICOS**

Dedicatória:

TESE DE DOUTORADO

**Dinâmica Não Linear e Controle de uma
Aeronave em Vôo Longitudinal**

Autor: Danilo Carlos Pereira

Orientador: Prof. Dr. José Manoel Balthazar

Co-orientador: Prof. Dr. Paulo R. G. Kurka

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Tese:

J. M. B.

Prof. Dr. José Manoel Balthazar, Presidente.
Instituição: DPM/FEM/UNICAMP.

Pablo Siqueira Meirelles

Prof. Dr. Pablo Siqueira Meirelles.
Instituição: DMC/FEM/UNICAMP.

Helder Anibal Hermini

Prof. Dr. Helder Anibal Hermini.
Instituição: DPM/FEM/UNICAMP.

Marat Rafikov

Prof. Dr. Marat Rafikov.
Instituição: UNIJUI/Ijuí.

Marcio José Horta Dantas

Prof. Dr. Marcio José Horta Dantas.
Instituição: UFU/Uberlândia.

Campinas, 30 de julho de 2007

200804409

Dedicatória:

Dedico este trabalho a todos àqueles a quem amo, em especial a minha Mãe, meu Pai, minha esposa Érika, minhas irmãs Inaiara e Milena e minha sobrinha Giulia.

Agradecimentos

Este trabalho não poderia ser terminado sem a ajuda de diversas pessoas às quais presto minha homenagem:

Primordialmente a DEUS que é minha força e minha morada.

A minha mãe Neusa, meu pai Antonio, minha esposa Érika, minhas irmãs Inaiara e Milena e minha sobrinha Giulia, pelo incentivo em todos os momentos da minha vida.

Ao meu orientador Prof. Dr. José Manoel Balthazar e sua esposa D^a. Lúcia, que me mostraram os caminhos a serem seguidos.

Ao Prof. Dr. Paulo Roberto Gardel Kurka pelo apoio e pela confiança na realização deste trabalho.

A todos os professores e colegas do departamento, que ajudaram de forma direta e/ou indireta na conclusão deste trabalho, em especial ao amigo Fábio pela ajuda sempre importante.

Ao Prof. Dr. Reyolando Brasil pelo auxílio em momentos importantes.

Agradeço também aos colegas da Unicamp: Cleusa, Denise, Juliana, Girlene e tantos outros colegas que foram sempre atenciosos comigo.

Aos meus sogros Edna e Antenor pelo apoio sempre presente.

Agradeço à FAPESP, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, processo nº 2003/10642-8 pelo apoio fundamental para a elaboração deste trabalho.

Gostaria de agradecer a tantos outros amigos que estiveram ao meu lado e àqueles que torceram por mim. Por esses e outros motivos expresso aqui os meus mais sinceros agradecimentos.

Muito Obrigado.

*O Senhor é meu Pastor e nada
me faltará. Salmos 23:1*

Resumo

PEREIRA, Danilo Carlos; *Dinâmica Não Linear e Controle de uma Aeronave em Vôo Longitudinal*, Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2007. 259 p. Tese (Doutorado)

Neste trabalho analisou-se a dinâmica não linear de uma aeronave em vôo longitudinal. Efetuou-se a análise do comportamento bifurcacional da aeronave F-8 “Cruzader”. Na análise bifurcacional foi estudado o comportamento topológico desta aeronave tomando-se dois parâmetros de controle: a deflexão do profundor e a alteração da massa da referida aeronave. Ante a pesquisa desenvolvida, foi proposto um projeto de controle linear ótimo com o objetivo de estabilizar as oscilações do ângulo de ataque, considerando-se regiões críticas do comportamento não linear da aeronave. Adicionalmente, incluiu-se no modelo matemático a variação da velocidade longitudinal da aeronave, visto tratar-se de simulações numéricas em um túnel de vento virtual.

Palavras Chave

Dinâmica Não Linear de Vôo Longitudinal, Controle Linear Ótimo, Análise Bifurcacional, Túnel de Vento Virtual.

Abstract

PEREIRA, Danilo Carlos Pereira, *Non Linear Dynamics and Control of an Aircraft in Longitudinal Flight*, Campinas, University of Mechanical Engineering, State University of Campinas, 2007, 259 p. (PhD thesis).

In this work it was analyzed the non linear dynamic of an aircraft taken onto longitudinal flight. It was done analysis of the bifurcational behavior of the aircraft F-8 “Cruzader”. In the bifurcational analysis was studied the topological behavior of this aircraft taken into account two parameters of control: the deflection of the elevator and the alteration of the mass of the related aircraft. In the face of the developed research, an optimum linear control project was proposed with the objective of stabilizing the oscillations of the angle-of-attack. Additionally, the variation of the longitudinal speed of the aircraft was included in the mathematic model in order to simulate the oscillatory movement of the aircraft considered, in a tunnel of virtual wind.

Key Words

Longitudinal Non Linear Flight Dynamics, Linear Optimal Control, Bifurcational Analysis, Virtual Wind Tunnel.

Índice:

Lista de Figuras	xii
Lista de Tabelas.....	xx
Nomenclatura	xxi
Capítulo 1	1
Introdução.....	1
1.1 Objetivos da Tese	5
1.2 Descrição dos Capítulos:.....	5
Capítulo 2	8
Conceitos Básicos em Dinâmica e Estabilidade de Aeronaves	8
2.1 Dinâmica de Voo.....	8
2.1.1 Derivada de estabilidade longitudinal.....	22
Capítulo 3	30
Dinâmica não linear	30
3.1 Acoplamento Cruzado Inercial “Cross coupling inercial”	31
3.2 “Wing Rock”	39
3.3 Estol dinâmico:.....	40
3.4 Turbulência Atmosférica.....	43
3.4.1 Rajadas verticais ascendentes e descendentes.....	46
3.4.2 Rajadas tipo cosseno menos um.....	47
3.4.3 Processos Randômicos	51
3.4.4 Resposta da aeronave a rajadas turbulentas	52

Capítulo 4	56
Modelo Matemático e Simulações Numéricas para o Vôo Longitudinal da Aeronave F-8	
“Crusader”.....	56
4.1 Modelagem Matemática e Obtenção das Equações de Movimento Não Lineares	56
4.2 Simulações Numéricas para o Caso Particular da Aeronave F-8.....	64
4.3 Análise de Estabilidade (Bifurcacional).....	68
4.3.1 Histórico no Tempo e Planos de Fase para Valores de δ_e	78
4.3.2 Histórico no Tempo e Planos de Fase para Valores de δ_e dado na Tabela 4.3 para Verificação das Bifurcações.....	84
4.3.3 Efeito da Massa da Aeronave nos Pontos de Equilíbrio:	97
4.4 Conclusões Parciais:.....	118
Capítulo 5	119
Projeto de um Controle Ótimo para o Vôo Longitudinal da Aeronave F-8.....	119
5.1 Projeto de Controle Linear e Não Linear.	119
5.1.1. Modelagem Matemática.....	120
5.1.2. Síntese do Controle.	121
5.1.3 Dedução da Lei de Controle.....	122
5.1.4. Resultados das Simulações Numéricas.	128
5.1.5 Conclusões Parciais:.....	134
5.2 Formulação do Problema de Controle Linear com Retroalimentação	135
5.3. Controle Linear Ótimo para o Modelo adotado de vôo longitudinal	141
5.3.1 Primeiro caso:.....	141
5.3.2 Segundo caso:.....	144
5.3.3 Terceiro caso:	147
5.3.4 Quarto caso:.....	150
5.3.5 Quinto caso:.....	153
5.3.6 Sexto caso:.....	156
5.3.7 Sétimo caso:	157
5.3.8 Oitavo caso:.....	159
5.3.9 Nono caso:.....	161
5.3 Conclusões Parciais.....	162

Capítulo 6	165
Túnel de Vento Virtual.....	165
6.1. Túnel de Vento Virtual para Movimento Longitudinal da Aeronave F-8 “Crusader”.	165
6.2. Equações de Movimento Longitudinal com u não Constante:.....	166
6.3. Rajadas de Vento:.....	175
6.4 Simulações:	179
6.5 Conclusões parciais:.....	181
Capítulo 7	183
Resultados e Discussões	183
7.1 Conclusões	183
7.2 Sugestões para Próximos Trabalhos:	185
Referências Bibliográficas	186
Apêndices	194
Apêndice A: Matcont.	194
A.1: Planos de Fase Para o Ponto Hopf 1:	201
A.2: Planos de Fase Para o Ponto Hopf 2:	203
A.3: Planos de Fase para o Ponto Sela Nó 1.	205
A.4: Planos de Fase para o Ponto Sela Nó 2 da Tabela 4.3.	207
Apêndice B: Sobre o Fenômeno “Flutter”.	209
Apêndice C: Especificações e Imagem do F-8 Crusader:	225
Apêndice D: Expoente de Lyapunov.	230
Apêndice E: Matds	242
Anexos.....	245
Anexo 1 – Súmula Curricular:	245

Lista de Figuras

Figura 2.1: Representação dos eixos coordenados tendo uma aeronave como referência.....	9
Figura 2.2: Representação dos sistemas (superfícies) de controle em uma aeronave.....	11
Figura 2.3: Representação dos sistemas (superfícies) de controle em uma aeronave.....	11
Figura 2.4: Representação dos movimentos realizados por uma aeronave em função de seu sistema de controle.	13
Figura 2.5: superfícies de controle alternativas.....	14
Figura 2.6: Movimentos de uma aeronave.	15
Figura 2.7: Componentes de velocidade u , v , w ao longo dos eixos x , y , z	16
Figura 2.8: Oscilações longitudinais.	18
Figura 2.9: Movimento de “ <i>dutch roll</i> ”.....	19
Figura 2.10: Movimento de “ <i>dutch roll</i> ”.....	20
Figura 2.11: esquema da variação do C_D com o número de Mach.	24
Figura 2.12: esquema de uma aeronave com uma perturbação $\Delta\alpha(t)$	25
Figura 2.13: airframe de um voo curvilíneo.....	28
Figura 3.1: Asa em Estol.	41
Figura 3.2: Situação de Estol.	42
Figura 3.3: Processo envolvendo turbulência.	45
Figura 3.4: Esquema de uma aeronave entrando em uma rajada “cortante”.....	46
Figura 3.5: Esquema de uma aeronave entrando em uma rajada discreta “cosseno menos um”...	48
Figura 3.6: Fator de carregamento em resposta a uma rajada tipo cosseno menos um.	51
Figura 3.7: Fator de carregamento em resposta a uma entrada de rajada.	52
Figura 3.8: Entrada de rajada vertical.	54

Figura 3.9: Função de transferência.	54
Figura 3.10: Distribuição de frequência da aceleração normal.	55
Figura 4.1: modelo dinâmico da aeronave.	59
Figura 4.2: Componentes de velocidade.	60
Figura 4.3: Equilíbrio e soluções periódicas para o sistema (4.14) com $m=m_0$	75
Figura 4.4: Equilíbrio e soluções periódicas para o sistema (4.14) com $m=m_0$ na variável q , com $\theta < 0$	76
Figura 4.5: Repetição do equilíbrio do sistema em θ para $k*2\pi rad$	78
Figura 4.6: Histórico no tempo para o sistema (4.14) com $m=m_0$ e $\delta_e=0,11$	79
Figura 4.7: Plano de Fase q x θ para o sistema (4.14) com $m=m_0$ e $\delta_e=0,11$	79
Figura 4.8: Plano de Fase θ x α para o sistema (4.14) com $m=m_0$ e $\delta_e=0,11$	80
Figura 4.9: Plano de fase q x α para o sistema (4.14) com $m=m_0$ e $\delta_e=0,11$	80
Figura 4.10: Espaço de fase para o sistema (4.14) com $m=m_0$, para o ponto de equilíbrio $(\alpha, \theta, q)=(0,4; -1,5; 0,11)$ e $\delta_e=-0,11$	81
Figura 4.11: Histórico de tempo para o sistema (4.14) com $m=m_0$ e $\delta_e=0,11$	81
Figura 4.12: Plano de Fase q x θ para o sistema (4.14) com $m=m_0$ e $\delta_e=0,11$	82
Figura 4.13: Plano de Fase θ x α para o sistema (4.14) com $m=m_0$ e $\delta_e=0,11$	82
Figura 4.14: Plano de fase q x α para o sistema (4.14) com $m=m_0$ $\theta<0$ e $\delta_e=0,11$	83
Figura 4.15: Espaço de fase para o sistema (4.14) com $m=m_0$, para o ponto de equilíbrio $(\alpha, \theta, q)=(0,45; -1,5; 0,11)$ e $\delta_e=-0,11$	83
Figura 4.14: Histórico de tempo com δ_e variando em torno do valor referente ao ponto Hopf 1 da tabela 4.3.	85
Figura 4.15: Planos de Fase q x α com δ_e variando em torno do valor referente ao ponto Hopf 1 da tabela 4.3.	86
Figura 4.16: Evolução do plano de fase α x q para o sistema (4.14) com $m=m_0$, no ponto Hopf 1.	87
Figura 4.17: Histórico de tempo com δ_e variando em torno do ponto Hopf 2 da tabela 4.3.	88
Figura 4.18: Planos de Fase q x α com δ_e variando em torno do valor referente ao ponto Hopf 2 da tabela 4.3.	89

Figura 4.19: Evolução do plano de fase $\alpha \times q$ para o sistema (4.14) com $m=m_0$, no ponto Hopf 2.	90
Figura 4.20: Histórico de tempo com δ_e variando em torno do ponto Sela nó 1 da tabela 4.3	91
Figura 4.21: Planos de Fase $\alpha \times q$ com δ_e variando em torno do valor referente ao ponto Sela nó 1 da tabela 4.3.	92
Figura 4.22: Evolução do plano de fase $\theta \times \alpha$ e $q \times \alpha$ para o sistema (4.14) com $m=m_0$, no ponto sela nó 1.	93
Figura 4.23: Histórico de tempo com δ_e variando em torno do ponto Sela nó 2 da tabela 4.3	94
Figura 4.24: Planos de Fase $\alpha \times q$ com δ_e variando em torno do valor referente ao ponto Sela nó 2 da tabela 4.3.	95
Figura 4.25: Evolução do plano de fase $q \times \theta$ e $\alpha \times q$ para o sistema (4.14) com $m=m_0$, no ponto sela nó 2.	96
Figura 4.26: Evolução dos pontos limites em relação ao aumento da massa m_0 do sistema (4.14).	97
Figura 4.27: Evolução dos pontos limites em relação ao aumento da massa m_0 do sistema (4.14).	98
Figura 4.28: Evolução dos pontos limites em relação ao aumento da massa $=4.35m_0$.	99
Figura 4.29: Evolução dos pontos limites em relação ao aumento da massa $=4.38m_0$.	99
Figura 3.30: Evolução dos pontos limites em relação ao aumento da massa $=4.47m_0$.	100
Figura 4.31: Evolução dos pontos limites em relação ao aumento da massa $=4.58m_0$.	101
Figura 4.32: Histórico de tempo e planos de fase em relação ao aumento da massa $=4.58m_0$, com $\delta_e = -0.05$.	102
Figura 4.33: Histórico de tempo e planos de fase em relação ao aumento da massa $=4.58m_0$, com $\delta_e = -0.069$.	103
Figura 4.34: Evolução dos pontos limites em relação ao aumento da massa $=4.61m_0$.	104
Figura 4.35: Equilíbrio e soluções periódicas para o sistema (4.14) com $m=5*m_0$.	105
Figura 4.36: Histórico de tempo e plano de fases para o sistema (4.14) com	106
Figura 4.37: Espaço de fases para o sistema (4.14) com $m=5*m_0$	106
Figura 4.38: Histórico de tempo para o sistema (4.14) com $m=5*m_0$ e condições iniciais para o ponto HPF-1 da tabela 4.4.	107

Figura 4.39: Plano de fase q x θ para o sistema (4.14) com $m=5*m_0$ e condições iniciais para o ponto HPF-1 da tabela 4.4.....	108
Figura 4.40: Plano de fase θ x α para o sistema (4.14) com $m=5*m_0$ e condições iniciais para o ponto HPF-1 tabela 4.4.....	108
Figura 4.41: Plano de fase q x α para o sistema (4.14) com $m=5*m_0$ e condições iniciais para HPF-1.....	109
Figura 4.42: Evolução do plano de fase θ x α para o sistema (4.14) com $m=5*m_0$ e condições iniciais para HPF-1.....	109
Figura 4.43: Histórico de tempo para o sistema (4.14) com $m=5*m_0$ e condições iniciais para o ponto HPF-2 da tabela 4.4.....	110
Figura 4.44: Plano de fase q x θ para o sistema (4.14) com $m=5*m_0$ e condições iniciais para HPF-2 da tabela 4.4.....	111
Figura 4.45: Plano de fase θ x α para o sistema (4.14) com $m=5*m_0$ e condições iniciais para HPF-2 da tabela 4.4.....	111
Figura 4.46: Plano de fase q x α para o sistema (4.14) com $m=5*m_0$ e condições iniciais para HPF-2 da tabela 4.4.....	112
Figura 4.47: Evolução do plano de fase θ x α para o sistema (4.14) com $m=5*m_0$ e condições iniciais para HPF-2.....	112
Figura 4.48: Histórico de tempo para o sistema (4.14) com $m=5*m_0$ e condições iniciais para o ponto HPF-3 da tabela 3.4.....	113
Figura 4.49: Plano de fase q x θ para o sistema (4.14) com $m=5*m_0$ e condições iniciais para HPF-3 da tabela 4.4.....	113
Figura 4.50: Plano de fase θ x α para o sistema (4.14) com $m=5*m_0$ e condições iniciais para HPF-3 da tabela 4.4.....	114
Figura 4.51: Plano de fase q x α para o sistema (4.14) com $m=5*m_0$ e condições iniciais para HPF-3.....	114
Figura 4.52: Evolução do plano de fase θ x α para o sistema (4.14) com $m=5*m_0$ e condições iniciais para HPF-3.....	115
Figura 4.53: Histórico de tempo para o sistema (4.14) com $m=5*m_0$ e condições iniciais para HPF-4.....	115

Figura 4.54: Plano de fase q x θ para o sistema (4.14) com $m=5*m_0$ e condições iniciais para HPF-4.	116
Figura 4.55: Plano de fase θ x α para o sistema (4.14) com $m=5*m_0$ e condições iniciais para HPF-4.	116
Figura 4.56: Plano de fase q x α para o sistema (4.14) com $m=5*m_0$ e condições iniciais para HPF-4.	117
Figura 4.57: Evolução do plano de fase θ x α para o sistema (4.14) com $m=5*m_0$ e condições iniciais para HPF-4.	117
Figura 5.1: Sistema sem controle para valores iniciais $\alpha=29.9^\circ$, 30.1° e 33°	129
Figura 5.2: Sistema com controle linear para valores iniciais $\alpha=29.9^\circ$, 30.1° e 33°	129
Figura 5.3: Sistema não linear sem controle para valores iniciais $\alpha=29.9^\circ$, 30.1° e 33°	130
Figura 5.4: Sistema não linear com controle de 2ª ordem para $\alpha=29.9^\circ$, 30.1° e 33°	130
Figura 5.5: Sistema não linear com controle não linear de 2ª ordem para $\alpha=29.9^\circ$, 30.1° e 33° e condição inicial $\theta=0.5$ e $q=0$	131
Figura 5.6: Sistema utilizando controle não linear de 2ª ordem para $\alpha=29.9^\circ$, 30.1° e 33° e condição inicial $\theta = 1$ e $q=0$	131
Figura 5.7: Sistema utilizando controle não linear de 3ª ordem para $\alpha=29.9^\circ$, 30.1° e 33° e condição inicial $\theta = 0$ e $q=0$	132
Figura 5.8: Sistema utilizando controle não linear de 3ª ordem para $\alpha=29.9^\circ$, 30.1° e 33° e condição inicial $\theta = 0.5$ e $q=0$	132
Figura 5.9: Sistema utilizando controle não linear de 3ª ordem para $\alpha=29.9^\circ$, 30.1° e 33° e condição inicial $\theta = 1$ e $q=0$	133
Figura 5.10: Sistema utilizando controle não linear de 2º e 3ª ordem para $\alpha=29.9^\circ$, 30.1° e 33° e condição inicial $\theta = 0,5$ e $q=0$	133
Figura 5.11: Sistema utilizando controle não linear de 2º e 3ª ordem para $\alpha=29.9^\circ$, 30.1° e 33° e condição inicial $\theta = 1$ e $q=0$	134
Figura 5.12: Fluxograma da Síntese do Controle Ótimo.	140
Figura 5.13: Sistema controlado e não controlado para os valores $m = 9773kg$; $\alpha = 0.4rad$; $\theta = -1.5rad$; $q = 0.1$; $\delta_e = -0.11rad$	144

Figura 5.14: Sistema controlado e não controlado para os valores $m = 9773kg; \alpha = 0.4347rad; \theta = 1.4588rad; q = 0; \delta_e = -0.1058rad$	147
Figura 5.15: Sistema controlado e não controlado para os valores $m = 9773kg; \alpha = 0.4360rad; \theta = -1.4773rad; q = 0; \delta_e = -0.1062rad$	150
Figura 5.16: Sistema controlado e não controlado para os valores $m = 9773kg; \alpha = 0.0448rad; \theta = 0rad; q = 0; \delta_e = -0.0090rad$	153
Figura 5.17: Sistema controlado e não controlado para os valores $m = 9773kg; \alpha = 0.4177rad; \theta = 0rad; q = 0; \delta_e = -0.0999rad$	155
Figura 5.18: Sistema controlado e não controlado para os valores $m = 5*9773kg; \alpha = 0.381108rad; \theta = 0.531238rad; q = 0; \delta_e = -0.084208rad$	157
Figura 5.19: Sistema controlado e não controlado para os valores $m = 5*9773kg; \alpha = 0.432570rad; \theta = 01.541697rad; q = 0; \delta_e = -0.105210rad$	159
Figura 5.20: Sistema controlado e não controlado para os valores $m = 5*9773kg; \alpha = 0.374950rad; \theta = -0.498879rad; q = 0; \delta_e = -0.082545rad$	160
Figura 5.21: Sistema controlado e não controlado para os valores $m = 5*9773kg; \alpha = 0.4396rad; \theta = -1.559730rad; q = 0; \delta_e = -0.107098rad$	162
Figura 6.12: Componentes de velocidade.	167
Figura 6.13: Estabilizador horizontal e Esteira da asa na aeronave	170
Figure 6.4: Amplitude dos k harmonicos para 11 harmonicos	178
Figura 6.5: Histórico de tempo de carregamento gerado pela função de densidade espectral (Load Time History Generated by Power Spectral Density Fuction.)	178
Figura 6.5: Histórico de tempo de u	179
Figura 6.6: Histórico de tempo de α	179
Figura 5.7: Histórico de tempo de θ	180
Figure 6.8: Histórico de tempo de q	180
Figura 5.9: Plano de fase u vs α	180
Figura 6.10: Plano de fase α vs q	180
Figura 6.11: Plano de fase u vs. q	181
Figura A-1: Janela principal do MatCont	195

Figura A-2: Janela para se introduzir as equações do sistema.....	196
Figura A-3: Janela para computação orbital.	198
Figura A-4: Janelas numeric e 2D-plot.	199
Figura A-5: Planos de Fase $\alpha \times \theta$ com δ_e variando em torno do valor referente ao ponto Hopf 1 da tabela 4.3	201
Figura A-6: Planos de Fase $\theta \times q$ com δ_e variando em torno do valor referente ao ponto Hopf 1 da tabela 4.3	202
Figura A-7: Planos de Fase $\alpha \times \theta$ com δ_e variando em torno do valor referente ao ponto Hopf 2 da tabela 4.3	203
Figura A-8: Planos de Fase $\theta \times q$ com δ_e variando em torno do valor referente ao ponto Hopf 2 da tabela 4.3.....	204
Figura A-9: Planos de Fase $\alpha \times \theta$ com δ_e variando em torno do valor referente ao ponto Sela nó 1 da tabela 4.3.....	205
Figura A-10: Planos de Fase $\theta \times q$ com δ_e variando em torno do valor referente ao ponto Sela nó 1 da tabela 4.3.....	206
Figura A.11: Planos de Fase $\theta \times q$ com δ_e variando em torno do valor referente ao ponto Sela nó 1 da tabela 4.3.....	207
Figura A.12: Planos de Fase $\theta \times q$ com δ_e variando em torno do valor referente ao ponto Sela nó 1 da tabela 4.3.....	208
Figura B-1: Massa, mola e amortecedor.	214
Figura B-2: Resposta da massa em função da frequência.	215
Figura B 3: Sistema com 2 massas, 2 molas e 2 amortecedores	217
Figura B-4: Resposta de <i>flutter</i> de loop aberto.	221
Figura B 5: Comparação de dois controladores de supressão ativa de <i>flutter</i>	222
Figura B 6: Entrada pre-shaped para supressão de <i>flutter</i> tomando os primeiros seis modos aeroelásticos.	223
Figura B 7: Resposta para a entrada pré-shaped no ponto de <i>flutter de loop aberto</i>	223
Figura C-1: F-8 “Crusader”.....	225
Figura C-2: Vista lateral do F-8 “Crusader”	225
Figura C-3: Especificações técnicas do F-8 Crusader.....	226

Figura C-4: Landing do F-8 Crusader em um Porta-Aviões e a característica do ângulo de ataque variável	227
Figura D.1: Resultado do cálculo do expoente de Lyapunov: $t=10000.0000$ $L1=0.001141$; $L2=0.000635$; $L3=-0.258415$;	234
Figura D.2: Resultado do cálculo do expoente de Lyapunov: $t=10000.0000$ $L1=-0.005045$; $L2=-0.005495$; $L3=-0.038824$;	235
Figura D.3: Resultado do cálculo do expoente de Lyapunov: $t=10000.0000$ $L1=0.000357$; $L2=-0.637377$; $L3=-0.637405$;	236
Figura D.4: Resultado do cálculo do expoente de Lyapunov: $t=10000.0000$ $L1=0.000820$; $L2=-0.000036$; $L3=-0.300787$;	237
Figura D.5: Resultado do cálculo do expoente de Lyapunov: $t=5000.0000$ $L1=0.001254$; $L2=-0.027547$; $L3=-0.057244$;	238
Figura D.6: Resultado do cálculo do expoente de Lyapunov: $t=5000.0000$ $L1=0.001920$; $L2=-0.028823$; $L3=-0.048777$;	239
Figura D.7: Resultado do cálculo do expoente de Lyapunov: $t=5000.0000$ $L1=-0.001018$; $L2=-0.001858$; $L3=-0.015913$;	240
Figura D.8: Resultado do cálculo do expoente de Lyapunov: $t=5000.0000$ $L1=-0.000494$; $L2=-0.001121$; $L3=-0.037673$;	241
Figura E.1: Prompt de comando do MATLAB	242
Figura E.2: Menu de comando do MATDS	243
Figura E.3: Menu de opções para o cálculo do Expoente de Lyapunov	244
Figura E.4: Expoentes de Lyapunov para o sistema de Lorenz com valores de parâmetros: $R=28$; $b=8/3$; $\sigma=10$	244

Lista de Tabelas

Tabela 4.1- Nomenclatura:	58
Tabela 4.2: Dados da aeronave F-8.....	67
Tabela 4.3: Pontos de bifurcação para $m=m_0$	73
Tabela 4.4: Pontos de bifurcação para $m=5*m_0$	105
Tabela 5.1. Valores para $\bar{C}_k$ e $\bar{\omega}_k$	177

Nomenclatura

Letras Latinas

m – massa da aeronave	[kg]
m_0 – massa inicial da aeronave	[kg]
V – velocidade total linear	[m/s]
u – componente de velocidade da aeronave na direção do eixo x	[m/s]
v – componente de velocidade da aeronave na direção do eixo y	[m/s]
w – componente de velocidade da aeronave na direção do eixo z	[m/s]
I_y – momento de inércia da aeronave em relação ao eixo y [kg-m ²]	
L_w – Sustentação da asa	
L_t – Sustentação da cauda	
M_w – momento de asa	
C_{Lw} – Coeficientes de sustentação da asa	
C_{Lt} – Coeficientes de sustentação da cauda	
g – aceleração da gravidade	[10m/s ²]
$\bar{q}$ – pressão dinâmica	[kg/m ²]
S – área superficial da asa	[m ²]
S_t – área superficial do estabilizador horizontal	[m ²]
l – distância entre o centro aerodinâmico da asa e o centro de gravidade da aeronave	[m]
l_t – distância entre o centro aerodinâmico da cauda e o centro de gravidade da aeronave	[m]
c – coeficiente de amortecimento	[kg m ²]

X – componente do vetor força na direção x	
Y – componente do vetor força na direção y	
Z – componente do vetor força na direção z	
L – componente do vetor momento na direção x (<i>rolagem</i>)	
M – componente do vetor momento na direção y (<i>arfagem</i>)	
N – componente do vetor momento na direção z (<i>guinada</i>)	
p – ângulo de rolagem (em torno do eixo x)	[rad]
q – ângulo de arfagem (em torno do eixo y)	[rad]
r – ângulo de guinada (em torno de eixo z)	[rad]
C_x – coeficiente de força axial adimensionalizado	
C_z – coeficiente de força normal adimensionalizado	
C_m – coeficiente de momento de arfagem adimensionalizado, em relação ao c.g.	
c_w – corda da asa de referência	[m ou ft]
d – distância gradiente;	
$S_{\ddot{s}_g}(\omega)$ – Função de densidade espectral de potência;	
S_0 – ruído branco ideal;	
$\bar{C}_k$ – amplitude relacionada ao harmônico k ;	
H – fator não dimensional relacionado com amortecimento;	
R – constante relativa a aceleração	[m/s ²]

.....

Letras Gregas

α – ângulo de ataque	[rad]
α_t – ângulo de ataque do profundor	[rad]
θ – ângulo da arfagem	[rad]
ϵ – ângulo de downwash	[rad]
δ_e – ângulo de deflexão do profundor	[rad]
ρ – densidade atmosférica	[kg/ m ³]

$\bar{\omega}_k$ – frequência natural de excitação ressonante [rad/s]
 ω_g – velocidade de rajada vertical [m/s]
 θ_k – ângulo de fase relacionado ao harmônico k;
 Δ_ω – variação de frequência

.....

Subscritos

e – propriedade avaliada na deflexão do profundor
 0 – valor inicial
 w – relativo à asa da aeronave
 t – relativo à cauda da aeronave

.....

Siglas

FEM – Faculdade de Engenharia Mecânica
DPM – Departamento de Projetos Mecânicos
PSDF – Função de Densidade Espectral de Potência.

.....

Capítulo 1

Introdução

Entre as várias modalidades da dinâmica, tanto da linear como da não linear, destaca-se a abordagem dos problemas de movimentos de veículos através da atmosfera.

Vários trabalhos nesta área foram e ainda continuam sendo estudados e pesquisados, visto que os pioneiros neste ramo foram Lanchester (1908) e Bryan (1911, 1904) sem se desprezar outros.

Deve-se ressaltar, o uso da modelagem matemática como ferramenta importante de trabalho neste ramo (sendo que a própria modelagem matemática já seja por si própria, uma área de pesquisa).

Destaca-se aqui a interdisciplinaridade deste estudo, já que se abordam áreas de conhecimento de mecânica, física, engenharia e matemática, além de outras dependendo do caso, especialmente em análise.

A análise da dinâmica não linear dos modelos matemáticos de aeronaves tem ganhado mais destaque nos últimos tempos, esse estudo situa-se na estimativa dos modelos aerodinâmicos não lineares e na análise dos efeitos de não linearidades específicas nas aeronaves com sistema de controle efetivo. Uma nova técnica que vem sendo ultimamente utilizada inicialmente em 1977

por Mehra *et. al* (1977) para um melhor entendimento da dinâmica não linear de vôo é a análise bifurcacional.

Algumas ferramentas de dinâmica não linear e caos no contexto da dinâmica de aeronaves podem ser citados, como, por exemplo:

i) *Dinâmica não linear e caótica*: onde se tem interesse, principalmente, quando se têm rotas para o caos, e podem-se utilizar alguns algoritmos numéricos, como os expostos por Parker e Chuá (1989), e também técnicas de obtenção formas normais como em Nayfeh (Nayfeh, 1993).

A busca de soluções analíticas (Nayfeh e Mook, 1979) e o desenvolvimento de conceitos para a descrição da dinâmica não linear também são importantes, citam-se, como exemplo, o mapa de Poincaré; os diagramas de bifurcação; análise de estabilidade, a qual é de fundamental importância no estudo de bifurcações; bacias de atração; selas; variedades invariantes (Cooper, 2000); formas normais, estabilidade estrutural (Macmillan e Thompson, 1998); etc. Estes exemplos nos fornecem um caminho visual da descrição da dinâmica.

O estudo de caos homoclínico e seu controle (Lowenberg e Champneys, 1988) também são importantes para o estudo, onde se busca uma adequada alocação de pólos (Ott *et all*, 1990) a fim de se localizar o problema na variedade estável a partir da localização na instável (Lence e Rega, 2003).

ii) *Dinâmica não linear e caótica experimental*: onde os dados são puramente experimentais (obtidos de testes em túneis de vento, por exemplo).

Com a coleta dos dados obtêm-se uma série temporal onde, se tratando de comportamento caótico, é possível fazer-se a associação da série com um atrator, utilizando para isso, por exemplo, a técnica de Takens (Takens 1980) onde a idéia básica é a reconstrução do espaço de estado, sendo necessário o conhecimento da sua dimensão, aí engloba-se o conceito de dimensão de imersão, falsos vizinhos, etc.

Também se destaca, nesta área, a definição dos invariantes dinâmicos, expoentes de Lyapunov e predição numérica para caracterização e análise de séries temporais.

iii) *Dinâmica caótica homoclínica*: onde se buscam rotas homoclínicas para o caos, como, por exemplo, a bifurcação homoclínica que se dá através da quebra transversal das separatrizes e que está associado à existência do mapeamento de ferradura de Smale. Citam-se ainda outros cenários como os de Feigenbaum via duplicação de períodos; cenário de Pomeau-Manneville via intermitência, os cenários associados à bifurcação de Hopf, entre outros.

Um destaque deve ser feito com relação ao método de Melnikov (1963) que em problemas de flambagem, em ciência da engenharia, desenvolveu um teste para ser usado na detecção da separação transversal de separatrizes em sistemas fracamente perturbados, e esse método veio a ser conhecido como teoria de Melnikov que é hoje amplamente usado em vários problemas.

iv) *Dinâmica de aeronave*: aqui se busca o estudo da dinâmica e o controle de uma aeronave, que é um sistema dinâmico cuja complexidade se expressa numa coletânea de corpos conectados de forma que os movimentos relativos de corpo rígido e elástico possam vir a ocorrer.

Ressalta-se que a dinâmica de voo preocupa-se com o comportamento global de uma aeronave, como por exemplo, estabilidade, controlabilidade, resposta dinâmica, qualidade de controle, etc.

Em relação ao estudo de bifurcações, salienta-se que sistemas dinâmicos são descritos por modelos matemáticos que são funções de um conjunto de parâmetros, denominados parâmetros de controle (μ). Alguns parâmetros, em determinadas situações, podem sofrer uma alteração e uma pequena e repentina mudança no comportamento do sistema em função desta variação e isto é de extrema importância. Assim, as bifurcações são mudanças qualitativas na resposta de um sistema dinâmico devido às variações dos parâmetros de controle. As bifurcações ocorrem quando há uma mudança qualitativa da topologia do retrato de fase em um determinado ponto denominado ponto de bifurcação. Então, bifurcação é a perda de estabilidade estrutural.

As bifurcações podem ser classificadas como sendo contínuas ou descontínuas. Nas bifurcações contínuas o ponto fixo evolui continuamente para outra família de soluções enquanto o parâmetro de controle varia. Nas bifurcações descontínuas o estado do sistema apresenta um salto (jump) quando o parâmetro de controle é variado através dos pontos de bifurcações. Essas bifurcações possuem a característica de levarem o sistema a ter um comportamento oscilatório ou caótico, a menos que sejam aplicados ao sistema controles apropriados.

Destacam-se dois tipos de bifurcações, a serem utilizados no presente trabalho:

1. Bifurcação tipo sela-nó: também conhecida como bifurcação tangente ou bifurcação de dobra, é o mecanismo básico pelo qual um par de pontos de equilíbrio com estabilidades contrárias é criado ou destruído.

2. Bifurcação do tipo Hopf: é uma bifurcação local em que um ponto fixo de um sistema dinâmico perde estabilidade conforme um par de autovalores complexos conjugados passa através do eixo imaginário (tem um autovalor nulo ou puramente imaginário), também dizemos que ocorre uma mudança qualitativa isso ocorre.

Ressalta-se que, quando ocorrem bifurcações do tipo Hopf, espera-se um ciclo limite de amplitude pequena ramificando do ponto fixo. O ciclo limite será orbitalmente estável se o coeficiente de Lyapunov é negativo, e assim a bifurcação é supercrítica. Caso contrário, o ciclo será instável e a bifurcação é subcrítica. Em aeroelasticidade, uma consequência da ocorrência bifurcações do tipo Hopf é conhecida como *Flutter* (Nayfeh e Balachandran, 1994). Neste caso, na simulação numérica, o “Flutter” é causado pela posição de equilíbrio estático, perdendo estabilidade através de uma bifurcação do tipo Hopf supercrítica. No apêndice B, fazem-se alguns comentários sobre a teoria de Flutter, seus aspectos básicos e os diversos tipos freqüentemente, encontrados.

Ressalta-se que apesar das incertezas nos dados aerodinâmicos de uma aeronave, no diagrama de bifurcação os caminhos nos quais os movimentos estáveis se transformam em saltos

(‘Jumps’) para outros movimentos estáveis e reciprocamente, tem o mesmo comportamento do movimento real da aeronave (Planeau e Barthe, 1988). Recentemente o uso do pacote Matcont tem facilitado a obtenção destes diagramas, como pode ser verificado no Apêndice A desta tese.

1.1 Objetivos da Tese

Este trabalho tem como objetivo a análise da dinâmica não linear de uma aeronave em voo longitudinal. Efetuar-se-á a análise do comportamento bifurcacional da aeronave F-8 “*Crusader*”. Na análise bifurcacional estuda-se o comportamento topológico desta aeronave tomando-se dois parâmetros de controle: a deflexão do profundor e a alteração da massa da referida aeronave.

Propôs-se um projeto de controle linear ótimo com o objetivo de estabilizar as oscilações do ângulo de ataque, considerando-se regiões críticas do comportamento não linear da aeronave.

Adicionalmente, incluiu-se no modelo matemático a variação da velocidade longitudinal da aeronave, por tratar-se de simulações numéricas em um túnel de vento virtual.

Importante se faz salientar que esta tese é o primeiro trabalho do grupo de Dinâmica não-linear e controle do prof. Balthazar na sub-área de aerodinâmica

Para atingir os objetivos propostos escreveu-se a tese, como descrita a seguir:

1.2 Descrição dos Capítulos:

Para se completar os estudos efetuados da dinâmica não-linear e controle de uma aeronave em voo longitudinal esta tese será estruturada conforme mostrado a seguir:

Título: *Dinâmica Não-linear e Controle de uma Aeronave em Voo Longitudinal;*

Capítulo 1: *Introdução – Conteúdo Geral, Objetivos e Divisão dos Capítulos;*

Capítulo 2: *Conceitos Básicos em Dinâmica e Estabilidade de Aeronaves*; Neste capítulo introduzem-se alguns princípios básicos de dinâmica de voo bem como algumas definições a fim de familiarizar o leitor com o assunto a ser abordado nesta tese.

Capítulo 3: *Dinâmica Não Linear*; O objetivo deste capítulo é fazer uma introdução sobre alguns conceitos importantes da dinâmica não linear. Serão abordados conceitos como cross coupling, wing rock, estol dinâmico e turbulências atmosféricas.

Capítulo 4: *Modelo Matemático e Simulações Numéricas para o Voo Longitudinal*; Neste capítulo, a análise bifurcacional da dinâmica de voo longitudinal é discutida, enfatizando a influência da deflexão do profundor e da massa da aeronave. O modelo matemático adotado é baseado no trabalho de Garrard (1977). Simulações numéricas serão utilizadas no caso particular aeronave F8. “*Crusader*”.

Capítulo 5: *Projeto de Controle de Voo Longitudinal*; Neste capítulo são aplicadas duas estratégias de um controle ótimo para o movimento longitudinal da aeronave F-8 “*Crusader*”, onde se busca estabilizar as oscilações do ângulo de ataque em valores próximos ao ângulo de estol da aeronave.

Capítulo 6: *Túnel de vento virtual*. Busca-se, nesta etapa, uma modelagem matemática do sistema adicionando-se uma rajada de vento a fim de simular as variações de velocidade da aeronave.

Capítulos 7: Conclusões e Trabalhos Futuros.

Referências: Referências bibliográficas utilizadas para a elaboração deste trabalho.

Apêndices: Complementações acerca do trabalho efetuado e Rotinas computacionais das quais estrutura-se da seguinte forma:

1. Apêndice A: Matcont.
 - 1.1 A.1: Planos de Fase Para o Ponto Hopf 1:

- 1.2 A.2: Planos de Fase Para o Ponto Hopf 2:
- 1.3 A.3: Planos de Fase para o Ponto Sela Nó 1
- 1.4 A.4: Planos de Fase para o Ponto Sela Nó 2 da Tabela 4.3.
- 2. Apêndice B: Sobre o Fenômeno “Flutter”.
- 3. Apêndice C: Especificações e Imagem do F-8 Crusader:
- 4. Apêndice D: Expoente de Lyapunov.
- 5. Apêndice E: Matds.

Anexos: Súmula curricular.

Capítulo 2

Conceitos Básicos em Dinâmica e Estabilidade de Aeronaves

O objetivo deste capítulo é o de familiarizar e apresentar os conceitos e as características básicas de aeronaves, bem como seus movimentos básicos e seu controle. Destacam-se, também, as nomenclaturas usadas na área bem como alguns conceitos básicos de estabilidade de voo.

2.1 Dinâmica de Voo

O estudo da Dinâmica de Voo baseia-se no entendimento de inúmeras disciplinas Físicas que incluem aerodinâmica, propulsão, estruturas, mecânica, mecânica de fluídos e engenharia mecânica.

A seguir, vamos enfocar alguns conceitos referentes à dinâmica de voo, estabelecidos pela *American Nacional Standards Institute (ANSI)* e o *American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA)*.

Começamos com o sistema de coordenadas onde é usado um sistema de coordenadas ortogonais com a origem localizada no centro de gravidade do veículo (c.g.), no caso, o centro de gravidade da aeronave. O sistema de coordenadas é denotado pelas letras x , y e z , (figura 1.1).

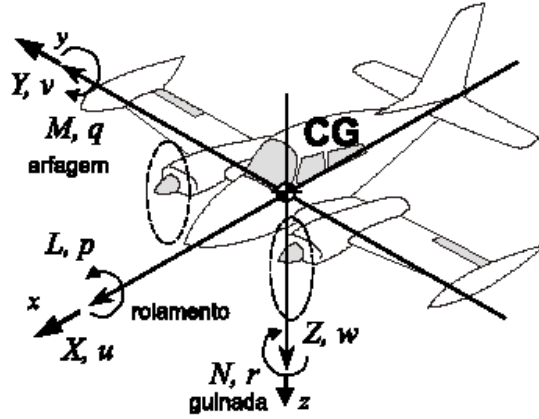


Figura 2.1: Representação dos eixos coordenados tendo uma aeronave como referência.

As forças consideradas para obtenção das equações de movimento serão denotadas por X , Y e Z em correspondência com o sistema de coordenadas. Os termos X , Y e Z podem ser visualizados como componentes do vetor de força total que está atuando no c.g. da aeronave. Se as forças não estão em equilíbrio estático, então os princípios de conservação do movimento linear prevalecerão para descrever as mudanças no comportamento da aeronave.

Da mesma maneira, o vetor momento atua sobre a aeronave em seu c.g., tendo componentes L , M e N atuando no sistema de coordenadas x , y e z . Os termos L , M e N são descritos, respectivamente, como rolagem, arfagem e guinada (roll, pitch e yaw).

Pode-se considerar a velocidade total linear como sendo um vetor V com componentes u , v e w atuando nas direções positivas e x , y e z respectivamente. O vetor de velocidade angular Ω é descrito por componentes p , q e r relativos aos eixos da aeronave. Em notação matricial temos:

$$V = ue_x + ve_y + we_z = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

e,

$$\Omega = pe_x + qe_y + re_z = \begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

onde e_x, e_y e e_z são os versores no sistema de coordenadas x, y e z .

As velocidades definidas são especificadas como condição inicial ou são determinadas analiticamente.

A velocidade pode ser expressa como verdadeira (V_t) ou equivalente (V_e). A relação entre cada uma delas é dada pela expressão da pressão dinâmica:

$$\bar{q} = \frac{1}{2} \rho V_t^2 = \frac{1}{2} \rho_o V_e^2 \quad (2.3)$$

onde: ρ é a densidade atmosférica acima do nível do mar;

ρ_o é a densidade atmosférica ao nível do mar (ideal);

V_t é a velocidade verdadeira (TAS);

V_e é a velocidade equivalente (EAS).

Assim, obtemos:

$$V_t = \sqrt{\frac{\rho_o}{\rho}} V_e \quad (2.4)$$

Como exemplo de sistemas de controle em uma aeronave, tem-se o Aileron, o Profundor e o Leme. Essas superfícies de controle produzem forças aerodinâmicas em decorrência da mudança das características de sua superfície. As figuras a seguir ilustram os sistemas presentes na estrutura de uma aeronave:

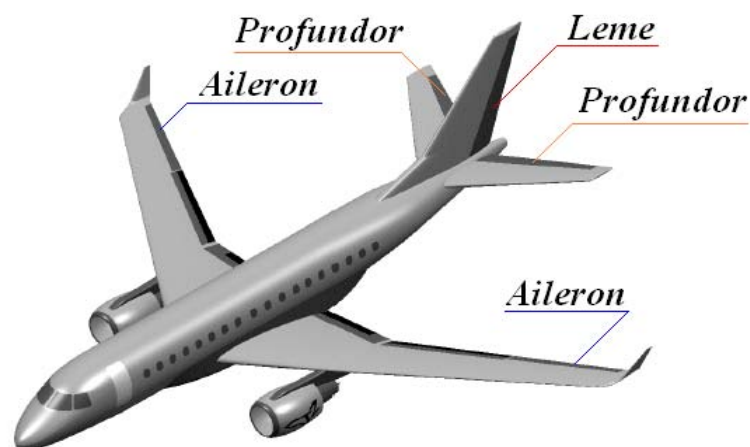


Figura 2.2: Representação dos sistemas (superfícies) de controle em uma aeronave.

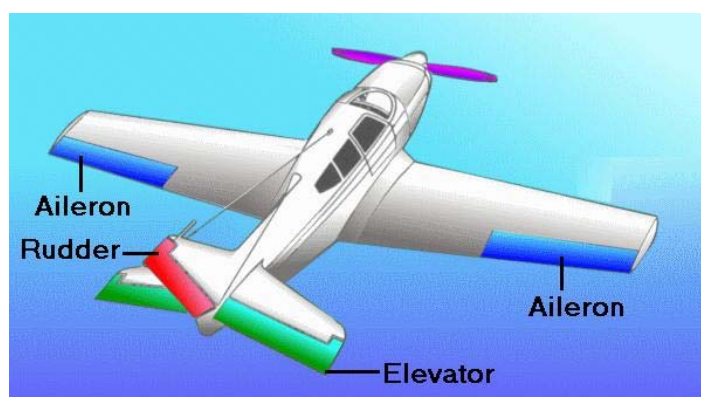


Figura 2.3: Representação dos sistemas (superfícies) de controle em uma aeronave.

Os ailerons (dois), um em cada extremidade de cada asa, são superfícies móveis que controlam movimento sobre o eixo longitudinal. O movimento é de rolamento. Abaixando o aileron em uma asa levanta-se o aileron na outra. A asa com o aileron abaixado sobe por causa de sua superfície de contato com o fluído ter sido aumentada, e a asa com o aileron levantado abaixa por causa de sua sustentação diminuída. Deste modo, o efeito de mudança de um ou outro aileron é ajudado pelo movimento simultâneo e oposto do aileron na outra asa.

Os profundores controlam o movimento do avião sobre seu eixo lateral. Este movimento é chamado de arfagem. Os profundores formam a parte traseira da cauda horizontal e

movimentam-se simultaneamente para cima e para abaixo. Eles são dispositivos articulados presos a uma superfície fixa, ou seja, no estabilizador horizontal. Juntos, o estabilizador horizontal e os profundos formam um aerofólio único. Uma mudança na posição dos profundos modifica a curvatura do aerofólio, que aumenta ou diminui sustentação. Se diminuir a sustentação a cauda abaixa, se aumentar ela sobre ocasionando o movimento de arfagem.

O leme controla movimento do avião sobre seu eixo vertical. Este movimento é chamado de guinada. Como as outras superfícies de controle primário, o leme é uma superfície móvel dobrável a uma superfície fixa que, neste caso, é o estabilizador vertical, ou barbatana. Sua ação parecida a dos profundos, fazendo movimentos diferentes em um avião, no caso, movimentos laterais em vez de movimentos de cima para abaixo e de baixo para cima.

Os ailerons são movimentos controlados pelo manche da aeronave, no caso para a direita ou esquerda; os profundos também, mas leva-se o manche à frente ou para trás; já o leme é controlado pelos pedais da aeronave, para a direita ou esquerda.

Os movimentos efetuados pela aeronave em função desses controles podem ser visualizados na figura a seguir:

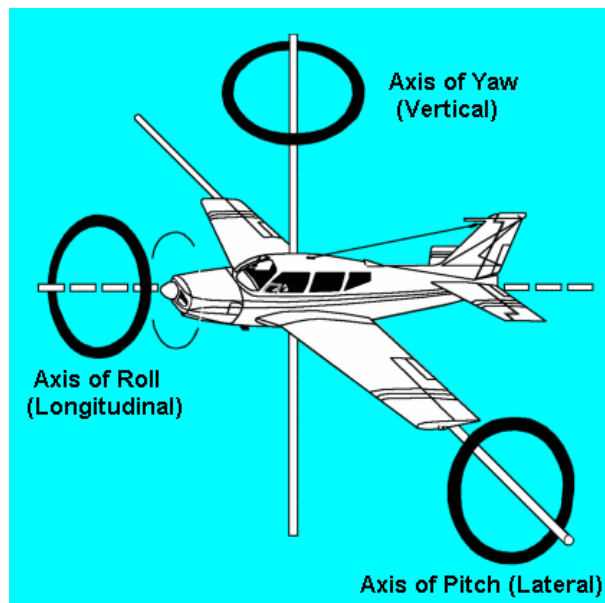


Figura 2.4: Representação dos movimentos realizados por uma aeronave em função de seu sistema de controle.

Além dessas superfícies de controle, outros dispositivos podem existir na aeronave tal que possam estar atuando forças e momentos a fim de influenciar o comportamento da aeronave. Como exemplos podem-se citar:

- 1 – Freios aerodinâmicos ou spoilers montados na fuselagem da aeronave ou em suas asas;
- 2 – Cauda horizontal montada à frente das asas;
- 3 – Asas cambiáveis.

Normalmente, assumimos as superfícies de controle convencionais para a análise da dinâmica de voo. Outras superfícies podem até ser introduzidas, mas como controle alternativo, se necessário. Vemos na próxima figura alguns exemplos de outras superfícies de controle.

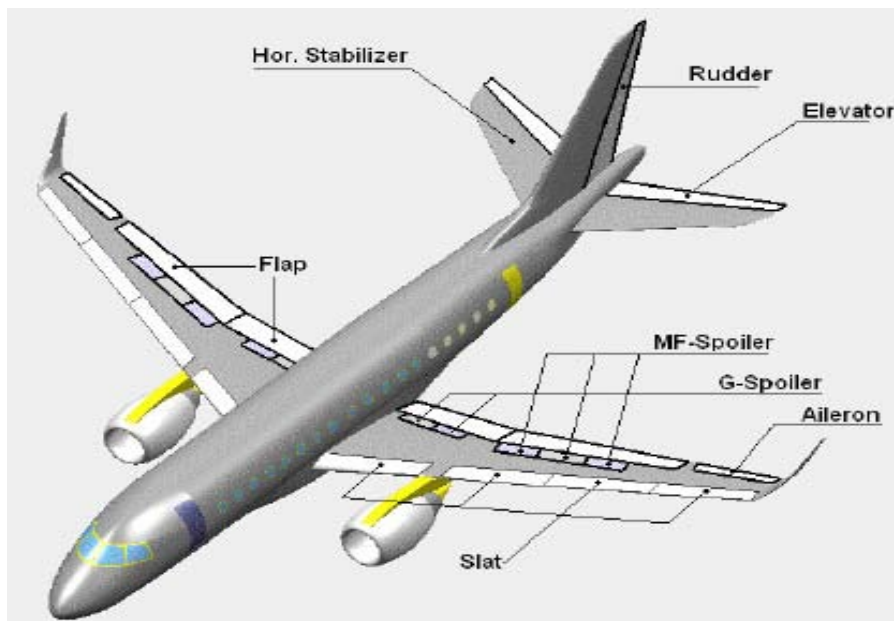


Figura 2.5: superfícies de controle alternativas.

Em relação a superfícies de controle, as descritas anteriormente (Aileron, Profundor e Leme) são básicas para o entendimento do controle de uma aeronave.

Quando falamos em qualidade de voo, buscamos representar a somatória das características que influenciam na facilidade e na precisão com que um piloto consegue executar todas as fases de voo ligadas a uma missão específica da aeronave: turismo, treinamento, acrobacia, transporte, caça, agrícola, etc. A facilidade de controle está ligada aos esforços aplicados nos comandos. A precisão representa a capacidade de iniciar e de terminar as manobras exatamente no ponto em que o piloto deseja. Dessa maneira, a qualidade de voo está intimamente ligada às características de estabilidade e controle do avião.

Os movimentos básicos de uma aeronave podem ser descritos como:

ARFAGEM: movimento longitudinal do avião em relação ao seu eixo transversal; cabrar (puxar o manche para trás e o conseqüente movimento da aeronave) ou picar (manche para frente e o seu respectivo movimento) estão sob o comando primário do profundor.

ROLAGEM: movimento de inclinação lateral em relação ao eixo longitudinal. Comando primário: ailerons que são acionados pelo movimento lateral do manche (manche para a esquerda ou para a direita). Eventualmente podem ser usados spoilers que reduzem a sustentação da asa que se pretende abaixar.

GUINADA: movimento unicamente em torno do eixo vertical. Comando primário: leme de direção, acionado pelos pedais de controle. Na maioria dos aviões, rolamento e guinada atuam acoplados.

A seguir temos a figura que ilustra os movimentos:

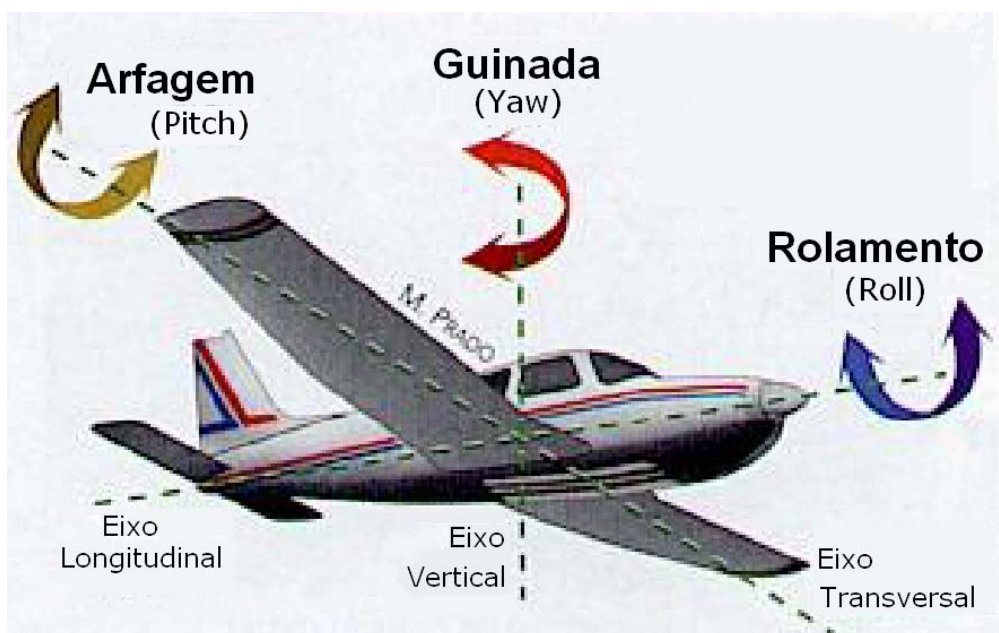


Figura 2.6: Movimentos de uma aeronave.

Já a orientação do vetor velocidade em relação ao sistema de eixos coordenados estabelece dois ângulos de significância na produção das forças aerodinâmicas e momentos, são eles o ângulo de ataque α e o ângulo de derrapagem β .

Considerando a velocidade V do c.g. num determinado instante dada pelas componentes da forma matricial (2.1) vista anteriormente.

Como pode ser visto na figura a seguir, as componentes de velocidade u , v e w ao longo dos eixos x , y e z são dadas por:

$$\begin{aligned} u &= V \cos \beta \cos \alpha \\ v &= V \sin \beta \\ w &= V \cos \beta \sin \alpha \end{aligned} \quad (2.5)$$

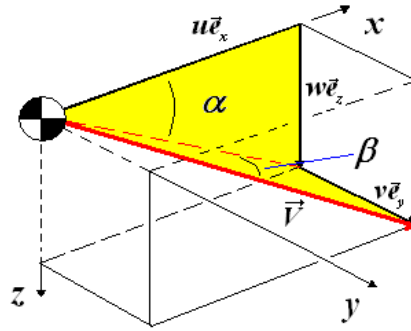


Figura 2.7: Componentes de velocidade u , v , w ao longo dos eixos x , y , z .

onde:

$$V = (u^2 + v^2 + w^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2.6)$$

E os ângulos α e β podem ser identificados como:

$$\begin{aligned} \alpha &= \tan^{-1} \left(\frac{w}{u} \right) \\ \beta &= \sin^{-1} \left(\frac{v}{V} \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Com relação à estabilidade, podemos defini-la com o tipo de reação do avião quando forçado (pelo piloto ou por turbulência) a sair de um estado de equilíbrio em vôo. Pode ser

positiva (tendência a retornar ao estado inicial), neutra (sem reação) ou negativa (quando a tendência é de se afastar ainda mais do estado de equilíbrio).

Existem dois tipos de estabilidade, basicamente podemos citar: a estática e a dinâmica, avaliadas com os comandos fixos ou livres.

ESTABILIDADE ESTÁTICA: é a tendência inicial de reação do avião ao ser perturbado em seu estado de equilíbrio. Avalia-se a estabilidade estática com relação a cada um dos três eixos, sendo desejável que seja neutra em rolamento para facilitar a inclinação do avião.

Quanto à arfagem, a qualidade da estabilidade estática longitudinal pode ser avaliada pelo incremento ou redução das forças no manche, necessárias para segurar o avião em novas velocidades acima e abaixo de uma velocidade estabilizada sem usar o compensador. Essa avaliação é feita com diferentes posições do CG (mais à frente ou mais recuado) e em configurações de cruzeiro e de aproximação (com trem de pouso acionado e flaps).

A estabilidade estática positiva em arfagem é fundamental para o bom controle do avião. Se essa variação de força (gradiente) para manter novas velocidades for muito modesta, a sensibilidade do manche leve pode tornar a pilotagem pouco precisa e trabalhosa. Um manche leve demais, especialmente na condição de CG muito recuado, pode facilitar a tendência à oscilação longitudinal divergente induzida pelo próprio piloto se ele tentar corrigir uma “cabrada” ou “picada” momentânea e pode acabar entrando em fase com as oscilações de arfagem. Esse fenômeno é conhecido como PIO (Pilot Induced Oscillation), condição crítica que já provocou muitos acidentes graves. O caso das asas voadoras Mitchel B-10 é um exemplo (Almeida, 1999).

ESTABILIDADE DINÂMICA: tendência do avião depois de ser alterado o seu estado de equilíbrio (pelo piloto ou por turbulência). Em arfagem pode ser do tipo período curto, com oscilações rápidas de uns dois segundos, geralmente amortecidas imediatamente; ou de período longo, com duração de 20 segundos ou mais por cada ciclo. Esse tipo de oscilação longitudinal é

chamado de fugóide. A oscilação pode ser amortecida em poucos ciclos ou pode até ser divergente, com amplitudes crescentes a cada repetição.

Na figura a seguir temos a representação de uma oscilação normal e uma oscilação tipo fugóide.

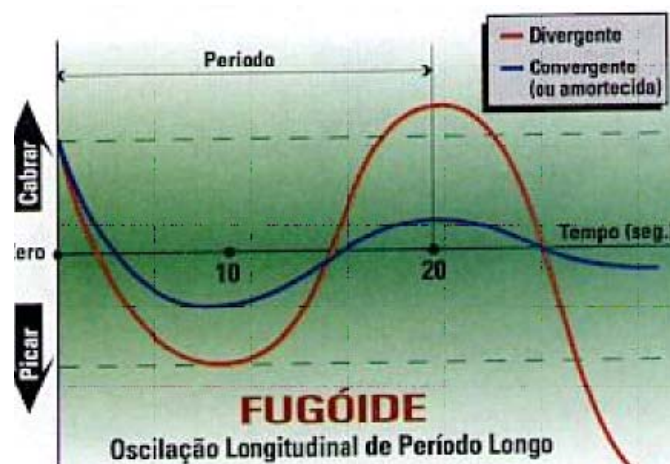


Figura 2.8: Oscilações longitudinais.

Outras duas condições de estabilidade dinâmica envolvendo um acoplamento de guinada e rolamentos devem ser também avaliados: a estabilidade espiral, que é quando o avião é estabilizado numa curva de média inclinação (15° a 20°) e se observa se existe a tendência de ir fechando cada vez mais a curva, o que é indesejável se a razão de afunilamento da espiral resultante for desconfortável para o piloto; e o “*dutch roll*” que é uma oscilação de guinada acoplada a um rolamento. É uma resposta natural do avião a uma “provocação” de guinada (por rajada de vento ou turbulência, por exemplo) e depende de características de cada projeto. Manifesta-se com os comandos livres, podendo ser amortecida sem interferência do piloto num bom projeto, mas pode também perdurar e até ser divergente (tendência a aumentar de amplitude) o que o torna perigoso.

A causa desse comportamento anômalo está ligada a tendência do avião a abaixar a asa quando submetido a uma deflexão de pedal para o lado, derrapando, aliado a uma estabilidade

direcional inadequada e ao dimensionamento da deriva da cauda. Asas enflechadas aumentam esse essa tendência, o que torna mais crítico o “*dutch roll*” no caso de alguns aviões a “jato”.

O nome “*dutch roll*” vem de uma velha gozação dos americanos com os marinheiros holandeses, freqüentemente vistos cambaleando pelo cais com uma garrafa vazia na mão.

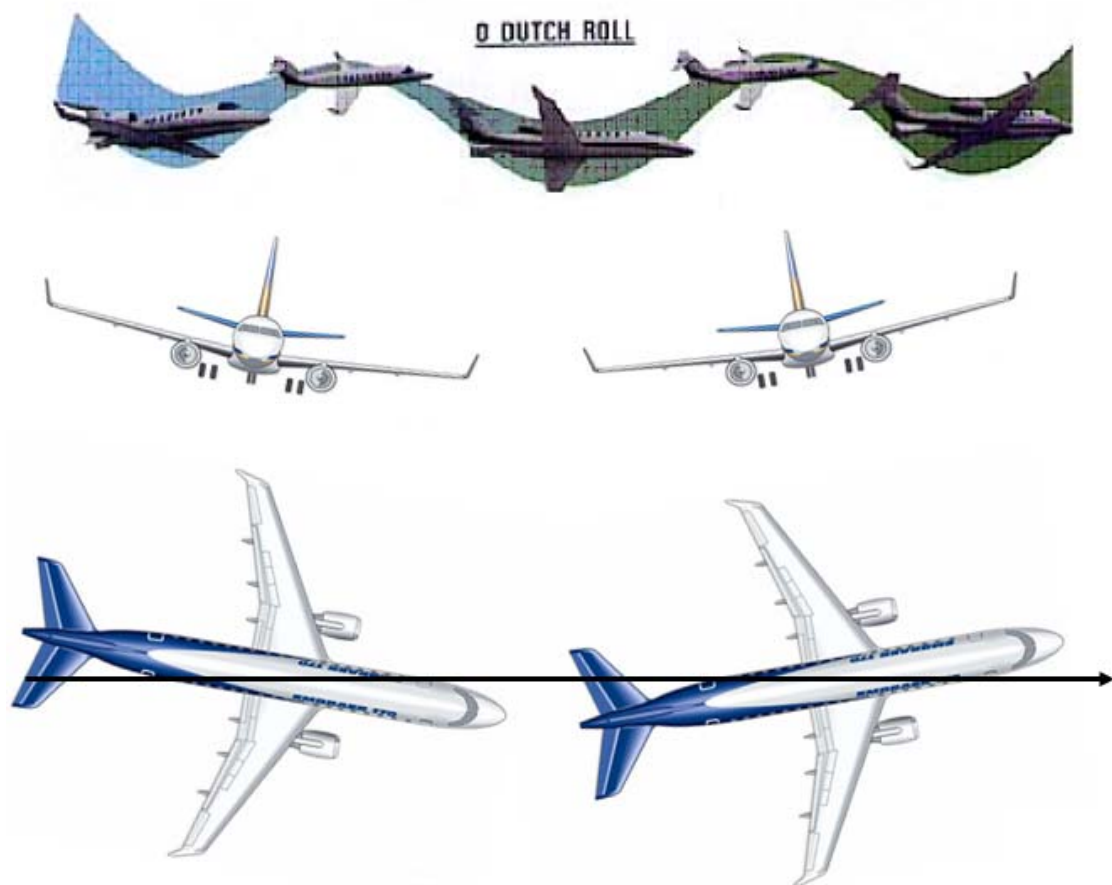


Figura 2.9: Movimento de “*dutch roll*”.

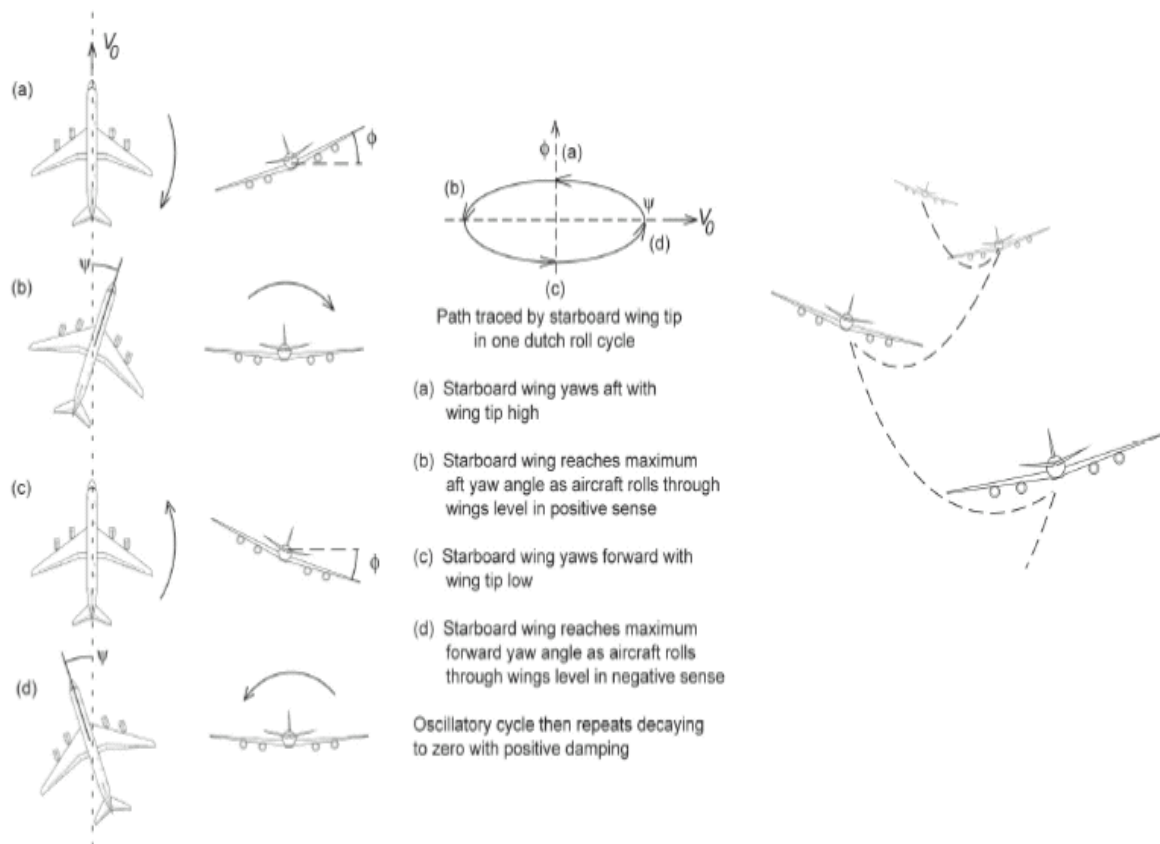


Figura 2.10: Movimento de “dutch roll”.

Conhecido o conceito de estabilidade, compreensão dos termos arfagem (pitch), rolagem (roll) e guinada (yaw), o que eles causam na aeronave e pelo que são causados, vamos agora usar princípios aerodinâmicos elementares e nos familiarizar com o significado físico de derivada de estabilidade, as quais serão utilizadas neste trabalho

Mas antes, as derivadas da estabilidade, para serem usadas nas equações de movimento, devem ter como base coeficientes adimensionalizados. Assim, eles podem ser definidos como:

$$C_x = \frac{X_{força}}{QS} = (\text{positivo, na direção do eixo x positivamente}).$$

$$C_y = \frac{Y_{força}}{QS} = (\text{positivo, no sentido positivo do eixo y}).$$

$$C_z = \frac{Z_{força}}{QS} = (\text{positivo, no sentido positivo do eixo } z).$$

$$C_l = \frac{\text{momento de rolagem}, L}{QSb} = (\text{positivo, asa direita para baixo}).$$

$$C_m = \frac{\text{momento de arfagem}, L}{QSb} = (\text{positivo, proa para cima}).$$

$$C_n = \frac{\text{momento de guinada}, L}{QSb} = (\text{positivo, proa para direita}).$$

onde:

Q = pressão aerodinâmica = $0,5\rho(u^2+v^2+w^2) = 0,5\gamma\rho M^2$;

ρ = densidade do ar em uma altitude específica;

p = pressão estática em uma altitude específica;

M = número de Mach da aeronave;

γ = razão de calor específico, normalmente 1,4 para o ar;

S = área da asa de referência;

b = envergadura de referência;

C = corda da asa de referência.

Comumente, dois outros coeficientes de força adimensionalizados são usados na aerodinâmica e na análise de performance. São eles: o coeficiente de empuxo da aeronave e o coeficiente de arrasto.

Note que o uso do termo L para denotar a força de empuxo não deve ser confundido com a notação de L para indicar o momento de rolagem.

São eles:

$$C_L = \frac{\text{força de empuxo}}{QS} = \begin{pmatrix} \text{positivo à popa, para cima e} \\ \text{normal ao vetor velocidade} \end{pmatrix}.$$

$$C_D = \frac{\text{força de arrasto}}{QS} = \begin{pmatrix} \text{positivo, oposto e} \\ \text{paralelo ao vetor velocidade} \end{pmatrix}.$$

2.1.1 Derivada de estabilidade longitudinal

Derivadas de estabilidade longitudinais são aplicadas em relação a movimentos longitudinais, incluindo funções dependentes de pequenas perturbações do eixo de velocidade, $u(t)/V$; a velocidade normal $\alpha(t) = \omega(t)/V$; termos de amortecimento $\dot{\alpha}$ e $\dot{\theta}(=q)$; e o controle de deflexão longitudinal δ , que freqüentemente será subscrito pela letra e ou s , dependendo se o controle é feito por um flap ou uma superfície completa, respectivamente. No caso deste trabalho será subscrito pela letra e .

2.1.1.1 Derivadas em u/V :

A presença do termo Q ou $\bar{q}$ (pressão aerodinâmica) nas expressões de derivadas de estabilidade se faz com que seja conveniente considerar estas derivadas na forma de X_u , Z_u e M_u , como:

$$\begin{aligned} X_u &= \frac{S}{mV} \frac{\partial(QC_x)}{\partial(u/V)}, & Z_u &= \frac{S}{mV} \frac{\partial(QC_z)}{\partial(u/V)} \\ M_u &= \frac{S}{I_v V} \frac{\partial(QC_m)}{\partial(u/V)} \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde:

S = área da asa de referência, ft^2 ;

c_w = corda da asa de referência, ft ;

m = massa de airframe (W/g), slugs;

I_y = momento de inércia no eixo de arfagem, slug.ft²;

u = perturbação na velocidade axial, ft.s⁻¹;

V = velocidade de escoamento do ar, ft.s⁻¹;

Q ou $\bar{q}$ = pressão dinâmica, lb.ft⁻²;

C_x = coeficiente de força axial adimensionalizado;

C_z = coeficiente de força normal adimensionalizado;

C_m = coeficiente de momento de arfagem adimensionalizado, em relação ao c.g.

A dependência da pressão dinâmica na perturbação de velocidade pode ser expressa como:

$$Q = 0,5\rho V^2 \left[1 + \left(\frac{u}{V} \right)^2 \right] = Q_0 \left[1 + 2 \left(\frac{u}{V} \right) + \left(\frac{u}{V} \right)^2 \right] \quad (2.9)$$

onde Q_0 é o valor inicial de ajuste da pressão dinâmica.

Em uma forma linearizada de pequenas perturbações, Q (2.9) se torna:

$$Q = Q_0 [1 + 2(u/V)] \quad (2.10)$$

Podemos assumir que $C_x = -C_D$. Completando a linearização e assumindo que X_u é dependente de Q e C_x , temos:

$$X_u = -\frac{Q_0 S}{mV} \left[2C_D + \frac{\partial C_D}{\partial (u/V)} \right] \quad (2.11)$$

O segundo termo na expressão acima (2.11) reflete a derivada parcial do coeficiente de arrasto adimensionado em relação à velocidade do ar. Sem compressibilidade este termo

desaparece, entretanto, por causa do número de Mach dado por $M=V/a$, onde a é a velocidade do som, a segunda expressão se torna:

$$\left[\frac{\partial C_D}{\partial (u/V)} \right] \left(\frac{a}{a} \right) = M \frac{\partial C_D}{\partial M} \quad (2.12)$$

Em vôos subsônicos de baixa altitude, a taxa de mudança C_D da aeronave em α constante é bastante pequena. A figura a seguir mostra um número de Mach crítico correspondendo a $M=M_{CR}$ quando $\frac{\partial C_D}{\partial M} = +0,1$.

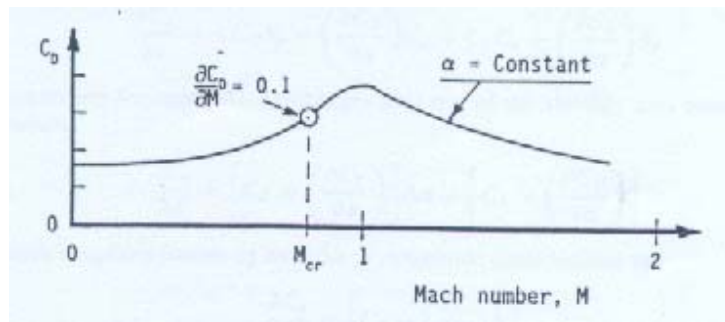


Figura 2.11: esquema da variação do C_D com o número de Mach.

substituindo (2.12) em (2.11), obteremos que:

$$X_u = -\frac{QS}{mV} \left[2C_D + \frac{\partial C_D}{\partial M} \right] \quad (2.13)$$

Analogamente deduzimos, se for feita a suposição que $C_Z = -C_L$, que a derivada Z_u é:

$$Z_u = -\frac{QS}{mV} \left[2C_L + \frac{\partial C_L}{\partial M} \right] \quad (2.14)$$

E a derivada de M_u é:

$$M_u = + \frac{QS_c}{I_y V} M \frac{\partial C_m}{\partial M} \quad (2.15)$$

2.1.1.2 Derivadas em relação a α

As derivadas dimensionais X_α , Z_α e M_α surgem das derivadas parciais de coeficientes correspondentes adimensionalizados como:

$$\begin{aligned} X_\alpha &= \frac{QS}{m} \frac{\partial C_x}{\partial \alpha}, & Z_\alpha &= \frac{QS}{m} \frac{\partial C_z}{\partial \alpha} \\ M_\alpha &= \frac{QS_c}{I_y} \frac{\partial C_m}{\partial \alpha} \end{aligned} \quad (2.16)$$

A figura a seguir mostra uma aeronave com perturbação no ângulo de ataque, $\Delta\alpha(t)$, em relação ao ângulo de ajuste inicial α_T .

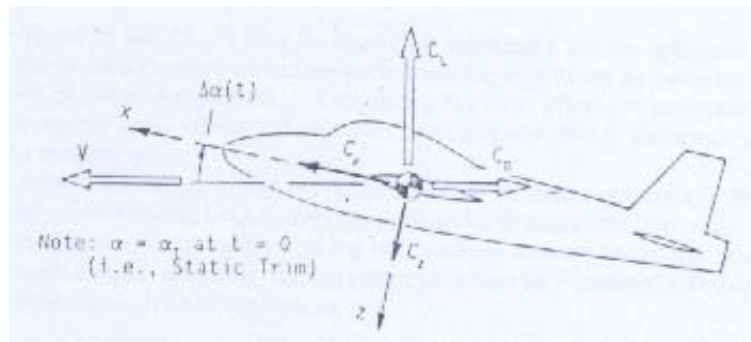


Figura 2.12: esquema de uma aeronave com uma perturbação $\Delta\alpha(t)$.

O vetor de velocidade é inicialmente alinhado com os eixos da aeronave antes do começo da perturbação $\Delta\alpha(t)$, em outras palavras, $\alpha = \alpha_T + \Delta\alpha(t)$, onde α_T é a medida do ângulo de ataque de uma determinada aeronave. Os coeficientes de força normal e axial, C_z e C_x , respectivamente, permanecem presos ao eixo da fuselagem durante o movimento e C_x é alinhado com o vetor de vento V, antes do início do movimento na condição inicial de ajuste.

Tomando-se os valores C_L e C_D , aplicados em $\alpha = \alpha_T + \Delta\alpha(t)$, usando funções trigonométricas convenientes tipo $C_\alpha = \cos \Delta\alpha(t)$ e $S_\alpha = \sin \Delta\alpha(t)$, fazendo mudança de coordenadas (Schmidt, 1998) e considerando $\Delta\alpha$ como termo de perturbação, podemos definir uma matriz de transformação da forma:

$$\begin{Bmatrix} C_x \\ C_z \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} C_\alpha & -S_\alpha \\ S_\alpha & C_\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_D \\ C_L \end{Bmatrix} = -[T_\alpha] \begin{Bmatrix} C_D \\ C_L \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

onde C_x pode ser identificado como:

$$C_x = -C_D C_\alpha + C_L S_\alpha \quad (2.18)$$

Considerando a derivada parcial de C_x em relação a $\Delta\alpha$ temos:

$$\frac{\partial C_x}{\partial \alpha} = C_D S_\alpha - \left(\frac{\partial C_D}{\partial \alpha} \right) C_\alpha + C_L C_\alpha + \left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right) S_\alpha \quad (2.19)$$

Após fazermos uma linearização e algumas simplificações obtemos:

$$X_\alpha = \frac{QS}{m} \left[C_L - \frac{\partial C_D}{\partial \alpha} \right] \quad (2.20)$$

A segunda linha da matriz (2.17) também nos dá uma expressão para C_z como uma transformação ortogonal de C_D e C_L :

$$C_z = -C_D S_\alpha - C_L C_\alpha \quad (2.21)$$

e assim:

$$Z_\alpha = -\frac{QS}{m} \left[C_D + \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right] \quad (2.22)$$

2.1.1.3 Derivadas em relação à taxa de arfagem q

A taxa de variação de arfagem, $q=d\theta/dt$, produz força e momento. A força axial devido à taxa normalmente é desprezível e por esse motivo não aparece nas derivadas de estabilidade. As derivadas da taxa são consideradas como sendo amortecimento porque estas condições nas equações de movimentos são dissipativas e reduzem as oscilações de movimento por sua capacidade de absorver energia. As derivadas da taxa de arfagem são definidas como:

$$\begin{aligned} X_\alpha &= -\frac{QS}{m} \left(\frac{c}{2V} \right) C_{D_q} = 0 \text{ (por suposição),} \\ Z_\alpha &= -\frac{QS}{m} \left(\frac{c}{2V} \right) C_{L_q} \\ M_\alpha &= \frac{QS_c}{I_y} \left(\frac{c}{2V} \right) C_{M_q} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Por convenção, as derivadas parciais amortecidas adimensionalizadas são:

$$\begin{aligned} C_{D_q} &= \frac{\partial C_D}{\partial (qc/2V)} \\ C_{L_q} &= \frac{\partial C_L}{\partial (qc/2V)} \quad , \quad C_{m_q} = \frac{\partial C_m}{\partial (qc/2V)} \end{aligned} \quad (2.24)$$

onde a taxa de arfagem adimensionalizada $qc/2V$ representa q sendo normalizado por $2V/c$.

As derivadas parciais em relação à taxa de arfagem q podem ser visualizadas considerando uma aeronave em velocidade constante em um vôo curvilíneo sobre um centro de rotação como mostrado na figura a seguir.

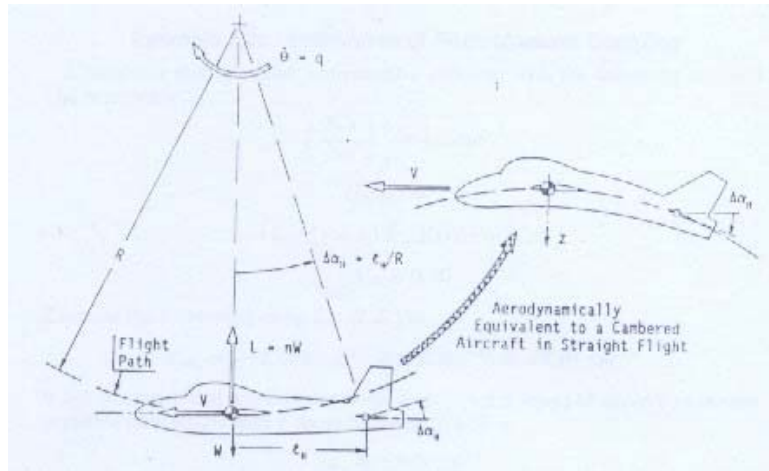


Figura 2.13: airframe de um vôo curvilíneo.

É bem conhecido em aerodinâmica que um veículo em regime de vôo curvilíneo é equivalente aerodinamicamente a um veículo de perfil curvado em vôo retilíneo (Schmidt, 1998). A validade deste conceito pode ser verificada ao se observar que as condições de superfície limite para a corrente de ar sobre ambas as fuselagens são idênticas, rendendo, assim, soluções aerodinâmicas idênticas. A fonte principal em fornecer a arfagem para o modelo surge do ângulo de fluxo induzido na cauda horizontal causando uma mudança na sustentação da aeronave e no momento de arfagem.

Nota-se na figura que a velocidade está relacionada à taxa de arfagem por $V = qR$. E a mudança da incidência na cauda de um valor positivo q é:

$$\Delta\alpha_H = \ell_H / R = \ell_H q / V \quad (2.25)$$

2.1.1.4 Derivadas em relação ao ângulo de ataque α

A mudança da velocidade de perturbação vertical, $d\alpha/dt$, produzem amortecimentos aerodinâmicos com efeitos primários, sendo o desenvolvimento dos termos da força normal e do momento de arfagem. As derivadas são definidas por:

$$\begin{aligned} X_{\dot{\alpha}} &= -\frac{QS}{m} \left(\frac{c}{2V} \right) C_{D_{\dot{\alpha}}} = 0 \text{ (por suposição),} \\ Z_{\dot{\alpha}} &= -\frac{QS}{m} \left(\frac{c}{2V} \right) C_{L_{\dot{\alpha}}} \\ M_{\dot{\alpha}} &= \frac{QS_c}{I_y} \left(\frac{c}{2V} \right) C_{M_{\dot{\alpha}}} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Por convenção, as derivadas parciais amortecidas adimensionalizadas são:

$$\begin{aligned} C_{D_{\dot{\alpha}}} &= \frac{\partial C_D}{\partial (\dot{\alpha}c/2V)} \\ C_{L_{\dot{\alpha}}} &= \frac{\partial C_L}{\partial (\dot{\alpha}c/2V)} \quad , \quad C_{M_{\dot{\alpha}}} = \frac{\partial C_m}{\partial (\dot{\alpha}c/2V)} \end{aligned} \quad (2.27)$$

onde a taxa do ângulo de ataque adimensionalizada $\dot{\alpha}c_w/2V$ representa α sendo normalizado por $2V/c$.

Outras derivadas de estabilidade estão presentes no sistema da dinâmica de vôo de uma aeronave onde se citam as derivadas de estabilidades direcionais laterais que se aplicam a movimentos laterais direcionais envolvendo movimentos de guinada e rolagem, onde se incluem as derivadas em relação à β , derivadas em relação à taxa de guinada r e derivadas em relação à taxa de rolagem p , mas esses tipos de derivadas não serão usados neste trabalhos, ficando elas para uma seqüência desta pesquisa (Schmidt, 1998).

Capítulo 3

Dinâmica não linear

Quando do primeiro vôo da humanidade, os estudos sobre dinâmica de vôo de aeronaves ainda eram muito pobres e os primeiros veículos aéreos tinham características de estabilidade estática pobres. Com o passar do tempo, a busca de aeronaves de maior performance e de maior entendimento e maior segurança do vôo fez com que muitos estudos nesta área surgissem. E isso fez surgir novos conceitos em mecânica de vôo que conseqüentemente vieram apresentar características não lineares como alguns fenômenos relativos ao vôo.

Assim, o estudo de alguns desses fenômenos torna-se importante para o desenvolvimento deste trabalho, onde, o objetivo deste capítulo é fazer uma introdução sobre alguns conceitos importantes da dinâmica não linear, bem como algumas simulações a fim de exemplificar alguns conceitos. Para isso, este capítulo será dividido na seguinte ordem:

2.1 Acoplamento Cruzado (Cross coupling)

2.2 Wing Rock

2.3 Estol dinâmico

2.4 Turbulência atmosférica

3.1 Acoplamento Cruzado Inercial “Cross coupling inercial”

Com a evolução de projetos de novas aeronaves de alto desempenho, as asas se tornaram mais finas e as massas acabaram por serem mais concentradas na fuselagem das aeronaves. Dessa forma, o momento de inércia de rolagem I_x tende a diminuir em relação aos momentos de inércia de arfagem e guinada que tendem a aumentar, respectivamente, I_y e I_z .

Essa tendência da busca por designers de aeronaves de alta performance permitiu a junção de equações de movimento direcionais laterais e longitudinais.

As relações entre forças externas e momentos e as leis de conservação de momentos são dados pelas expressões:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_x \dot{p} - I_{xz} \dot{r} \\ I_y \dot{q} \\ I_z \dot{r} - I_{xz} \dot{p} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} qr(I_z - I_y) - pqI_{xz} \\ pr(I_x - I_z) + (p^2 - r^2)I_{xz} \\ pq(I_y - I_x) + qrI_{xz} \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

Considerando os termos sublinhados, que são as diferenças inerciais na equação, temos que eles aumentarão em magnitude conforme I_x se torna proporcionalmente pequeno. As não linearidades sublinhadas são de pequena importância em baixas taxas de rolagem.

Temos, também, que as equações relativas a forças aerodinâmicas em relação aos princípios de conservação de momento linear em um corpo orientado podem ser descritas por:

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} = mV \begin{Bmatrix} \frac{d(u/V)}{dt} \\ \frac{d\beta}{dt} \\ \frac{d\alpha}{dt} \end{Bmatrix} + mV \begin{Bmatrix} q\alpha - r\beta \\ r - p\alpha \\ p\beta - q \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

As velocidades de perturbação são definidas por $u(t)/V$ na direção x , $\beta(t)=v(t)/V$ na direção lateral y e $\alpha(t)=w(t)/V$ na direção vertical z . As taxas de perturbações angulares são definidas como p , q e r agindo nas direções x , y e z respectivamente

Vamos assumir algumas simplificações em relação às equações de força e de momento, mas sem alterar as características de cross coupling inercial, que serão preservadas. São elas:

- 1) O eixo da fuselagem da aeronave é o eixo principal, i.e., $I_{xz}=0$.
- 2) A velocidade V de escoamento da aeronave é constante durante a rolagem.
- 3) A taxa de rolagem p é constante em p_0 durante a análise de estabilidade.

A seguir, redeclaramos as equações de equilíbrio, sujeitas às suposições de 1 a 3, (usando a notação de derivada dimensional). Assumiremos, também, que a análise de estabilidade será considerada sob a forma de um *loop-aberto*; i.e., nenhuma derivada de controle será incluída. Assim, teremos quatro relações:

- 1) Para a força normal, definimos $Z_w=Z_\alpha / V$ e descartamos as derivadas $Z_{\dot{\alpha}}$ e $Z_{\dot{q}}$ e assim:

$$\dot{\alpha} = Z_w \alpha + q - p_0 \beta \quad (3.3)$$

- 2) Para o momento de arfagem, definimos $\mu_I=(I_z - I_x)/I_y$. Então:

$$-M_{\dot{\alpha}} \dot{\alpha} + \dot{q} = M_{\alpha} \alpha + M_q q + p_0 \mu_I r \quad (3.4)$$

- 3) Para a força lateral, definimos $Y_v=Y_\beta/V$ e negligencia-se as derivadas $Y_{\dot{p}}$ e $Y_{\dot{r}}$. A equação de força lateral, então será:

$$\dot{\beta} = p_0 \alpha + Y_v \beta - r \quad (3.5)$$

4) Para o momento de guinada, definimos $\mu_2 = (I_x - I_y)/I_z$. Conseqüentemente:

$$\dot{r} = p_0 \mu_2 q + N_\beta \beta + N_r r \quad (3.6)$$

Assim, as quatro equações anteriores (3.3) – (3.6) podem ser expressas sob a forma matricial como:

$$[I_n] \{\dot{x}\} = [A_n] \{x\} \quad (3.7)$$

Onde podemos simplificar a equação para:

$$\{\dot{x}\} = [A] \{x\} \quad (3.8)$$

onde $[A] = [I_n]^{-1} [A_n]$.

Considerando que o vetor x é definido como:

$$\{x\} = [\alpha \quad q \quad \beta \quad r]^T \quad (3.9)$$

A matriz de inércia toma a forma de:

$$[I_n] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -M_\alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Considerando que a matriz da planta original é:

$$[A_n] = \begin{bmatrix} Z_w & 1 & -p_0 & 0 \\ M_\alpha & M_q & 0 & p_0\mu_1 \\ p_0 & 0 & Y_v & -1 \\ 0 & p_0\mu_2 & N_\beta & N_r \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

temos que, conseqüentemente, a matriz $[A]$ na equação (3.8) será:

$$[A] = \begin{bmatrix} Z_w & 1 & -p_0 & 0 \\ M'_\alpha & M'_q & -p_0M_{\dot{\alpha}} & p_0\mu_1 \\ p_0 & 0 & Y_v & -1 \\ 0 & p_0\mu_2 & N_\beta & N_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(1,1) & A(1,2) \\ A(2,1) & A(2,2) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

onde:

$$M'_\alpha = M_\alpha + Z_w M_{\dot{\alpha}} \quad \text{e} \quad M'_q = M_q + M_{\dot{\alpha}}$$

A forma particionada da matriz faz com que seja claro que quando $p_0=0$, $A(1,2)=A(2,1)=0$, e a equação matricial se desacopla dentro das aproximações para os modos de *Dutch-roll* com período curto longitudinal e direcional lateral. Também, se a taxa de rolagem o p_0 for dependente do tempo quantitativamente, as equações seriam não-lineares devido à presença de termos como $p(t)r(t)$ e $p(t)q(t)$, que causariam um problema muito mais difícil para se resolver e entender.

A equação característica para o sistema de acoplamento inercial pode ser obtida considerando:

$$|\lambda I - A| = \lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \quad (3.13)$$

e, expandindo a equação característica temos:

$$a_0 = -p_0^4 \mu_1 \mu_2 + p_0^2 (M_q N_r - \mu_1 N_\beta - \mu_2 M_\alpha) - N_\beta M_\alpha \quad (3.14)$$

Como exemplo de aplicação considera-se a aeronave A4-D operando em $M=0.9$, $h=35.000\text{ft}$, condição 6, segundo tabela (Schmidt, 1998). Usando-se a aproximação de acoplamento cruzado inercial pode-se estimar os modos quando $p_0=0$ e determinar qual aproximação modal está sujeita a uma instabilidade em relação ao acoplamento cruzado inercial.

Assim, quando $p_0=0$ a matriz assume a forma particionada como anteriormente, com elementos sendo:

$$A(1,1) = \begin{bmatrix} -0.6700 & 1.0000 \\ -14.7300 & -1.2650 \end{bmatrix}$$

e

$$A(2,2) = \begin{bmatrix} -0.1600 & -1.0000 \\ 19.6500 & -0.4280 \end{bmatrix}$$

E, usando o *Matlab* pode-se calcular os modos, i.e., os modos de períodos curtos através do comando *eig(A)*:

$p_0=0$

Malfader=-0.389

Mu1=0.821

Mu2=-0.611

$A = [-0.670, 1, -p_0, 0; -14.73, -1.265, -p_0 * \text{Malfader}, p_0 * \text{Mu1}; p_0, 0, -0.16, -1; 0, p_0 * \text{Mu2}, 19.65, -0.428]$

$A11 = [A(1,1), A(1,2); A(2,1), A(2,2)]$

$A12 = [A(1,3), A(1,4); A(2,3), A(2,4)]$

$A21 = [A(3,1), A(3,2); A(4,1), A(4,2)]$

$A22 = [A(3,3), A(3,4); A(4,3), A(4,4)]$

$P = \text{poly}(A)$

R=roots(P)

disp(R)

eig(A)

Obtém-se assim:

$$\lambda_1 = -0.9675 + 3.8264i$$

$$\lambda_2 = -0.9675 - 3.8264i$$

$$\lambda_3 = -0.2940 + 4.4308i$$

$$\lambda_4 = -0.2940 - 4.4308i$$

A função eig(A) no matlab é usada para encontrarmos os modos, ou seja, o modo de período curto. Assim:

$$\begin{Bmatrix} \alpha \\ q \\ \beta \\ r \end{Bmatrix}_{sp} = \begin{Bmatrix} 1 \angle 0.0 \text{ deg} \\ 3.838 \angle 94.5 \text{ deg} \\ 0.0 \\ 0.0 \end{Bmatrix}$$

Considerando que a forma do modo de Dutch-roll é:

$$\begin{Bmatrix} \alpha \\ q \\ \beta \\ r \end{Bmatrix}_{DR} = \begin{Bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 1 \angle 0.0 \text{ deg} \\ 4.432 \angle -88.3 \text{ deg} \end{Bmatrix}$$

Quando $p_0 = 1.0 \text{ rad/s}$, os autovalores serão:

$$\lambda_1 = -0.5265 + 4.9860i$$

$$\lambda_2 = -0.5265 - 4.9860i$$

$$\lambda_3 = -0.7350 + 3.2727i$$

$$\lambda_4 = -0.7350 - 3.2727i$$

E o modo acoplado de período curto correspondendo à λ_1 é:

$$\begin{Bmatrix} \alpha \\ q \\ \beta \\ r \end{Bmatrix}_{sp} = \begin{Bmatrix} 1 \angle 0.0 \text{ deg} \\ 3.827 \angle 94.4 \text{ deg} \\ 0.588 \angle 112.5 \text{ deg} \\ 2.849 \angle 21.6 \text{ deg} \end{Bmatrix}$$

e a forma do modo de Dutch-roll acoplado correspondendo à λ_3 :

$$\begin{Bmatrix} \alpha \\ q \\ \beta \\ r \end{Bmatrix}_{DR} = \begin{Bmatrix} 0.776 \angle 11.8 \text{ deg} \\ 2.951 \angle -153.2 \text{ deg} \\ 1.0 \angle 0.0 \text{ deg} \\ 4.266 \angle -88.9 \text{ deg} \end{Bmatrix}$$

A comparação das formas dos modos com e sem acoplamento revela que para $p_0 = 1.0 \text{ rad/s}$, os modos individuais não mudaram significativamente; entretanto, os componentes β e r apareceram fortemente no modo acoplado de curto período considerando que os componentes α e q eram claramente evidentes no modo de acoplamento no *Dutch-roll*.

A equação polinomial a_0 pode ser investigada para verificarmos se uma instabilidade pode ocorrer. Substituindo a derivada de estabilidade dimensional apropriada na equação:

$$a_0 = -p_0^4 \mu_1 \mu_2 + p_0^2 (M_q N_r - \mu_1 N_\beta - \mu_2 M_\alpha) - N_\beta M_\alpha$$

obtemos:

$$a_0 = 0.5018p_0^4 - 24.92p_0^2 + 294.6 = 0$$

com uma solução:

$$p_0^2 = 19.39 \quad \text{e} \quad 30.27 \text{rad}^2 / \text{s}^2$$

ou,

$$p_0 = \begin{cases} \pm 4.40 \text{rad} / \text{s} & (\pm 252.3 \text{deg} / \text{s}) \\ \pm 5.50 \text{rad} / \text{s} & (\pm 315.3 \text{deg} / \text{s}) \end{cases}$$

O programa no Matlab segue abaixo:

```
%primeira e segunda parte, basta variar p0
p0=0
Malfader=-0.389
Mu1=0.821
Mu2=-0.611
A=[-0.670,1,-p0,0;-14.73,-1.265,-p0*Malfader,p0*Mu1;p0,0,-0.16,-1;0,p0*Mu2,19.65,-0.428]
A11=[A(1,1),A(1,2);A(2,1),A(2,2)]
A12=[A(1,3),A(1,4);A(2,3),A(2,4)]
A21=[A(3,1),A(3,2);A(4,1),A(4,2)]
A22=[A(3,3),A(3,4);A(4,3),A(4,4)]
P=poly(A)
R=roots(P)
disp(R)
eig(A)
%terceira parte
```

a0=[0.5018 0 -24.92 0 294.6]

root(a0)

3.2 “Wing Rock”

O termo “Wing Rock”, como já visto anteriormente, é uma expressão coloquial que descreve um movimento de vibração auto induzido em uma aeronave em relação ao seu eixo longitudinal (o eixo de rolagem). O fenômeno de “Wing Rock” já foi observado em um grande número de aeronaves incluindo o A-4, F-4, T-38, F-5, F-14, F-15, F-18 e outros (Schmidt, 1998). Este fenômeno está presente, freqüentemente, quando se opera a aeronave em altos ângulos de ataque e próximas à velocidade de estol (normalmente em situações de pouso e decolagem).

As equações de movimento estão nos eixos de estabilidade e incluem aerodinâmica linear com termos de acoplamento inercial. A aerodinâmica lateral direcional é descrita pela equação:

$$\{\dot{x}\}_{LD} = [A]_{LD} \{x\}_{LD} \quad (3.15)$$

onde:

$$[A]_{LD} = \begin{bmatrix} Y_{\beta}/V & Y_p/V & (g/V)\cos\theta_0 & (Y_r-V)/V \\ L_{\beta}' & L_p' & 0 & L_r' \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ N_{\beta}' & N_p' & 0 & N_r' \end{bmatrix}$$

e,

$$\{x\}_{LD} = [\beta \quad p \quad \phi \quad r]^T$$

O sistema longitudinal somente incluirá as aproximações modais para períodos curtos na suposição de que a velocidade do ar permanece constante durante a oscilação de “*Wing Rock*”. A forma homogênea da equação linearizada para períodos curtos é:

$$\{\dot{x}\}_{sp} = [A]_{sp} \{x\}_{sp} \quad (3.16)$$

onde,

$$[A]_{sp} = \begin{bmatrix} Z_\alpha / V & 1 \\ M'_\alpha & M'_q \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} \{x\}_{sp} &= [\alpha \quad q]^T \\ M'_\alpha &= M_\alpha + M_{\dot{\alpha}} Z_\alpha / V \\ M'_q &= M_q + M_{\dot{q}} \end{aligned}$$

e o vetor de estado para o sistema não linear é:

$$\{x\}_{NL} = [\beta \quad p \quad \Phi \quad r \quad \alpha \quad q \quad \Theta]^T$$

3.3 Estol dinâmico:

É um fenômeno que afeta aerofólios, asas e rotores em fluxos instáveis. Isto se dá devido às mudanças, periódicas ou não, do escoamento e/ou ângulo de ataque. Em turbinas de vento ele é o resultado da turbulência atmosférica. As características aerodinâmicas são afetadas em uma extensão que são dependentes das frequências das mudanças de sua amplitude e do ponto de operação.

Outros fatores que afetam o estol dinâmico são os números de Reynolds e de Mach e a forma geométrica do corpo em questão. Existem outros fatores secundários que produzem o estol dinâmico, como os efeitos de vórtices, por exemplo. A seguir temos um exemplo de uma asa sujeita a um estol dinâmico.

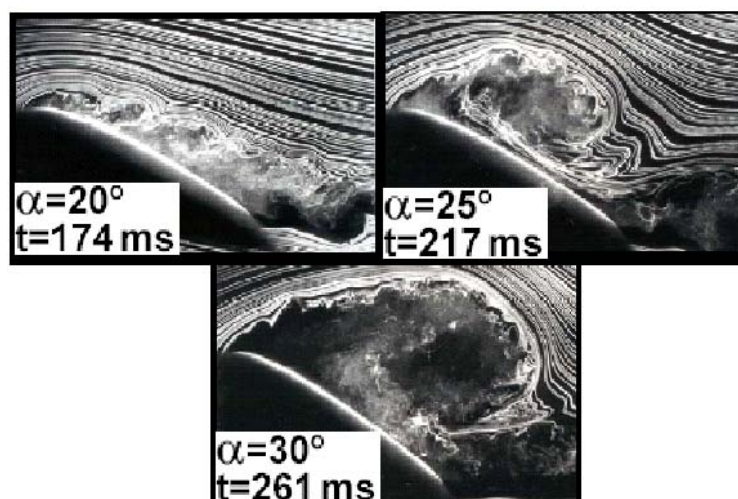


Figura 3.1: Asa em Estol.

Na figura a seguir é mostrada uma situação de estol de uma aeronave conforme aumenta-se o ângulo de ataque.

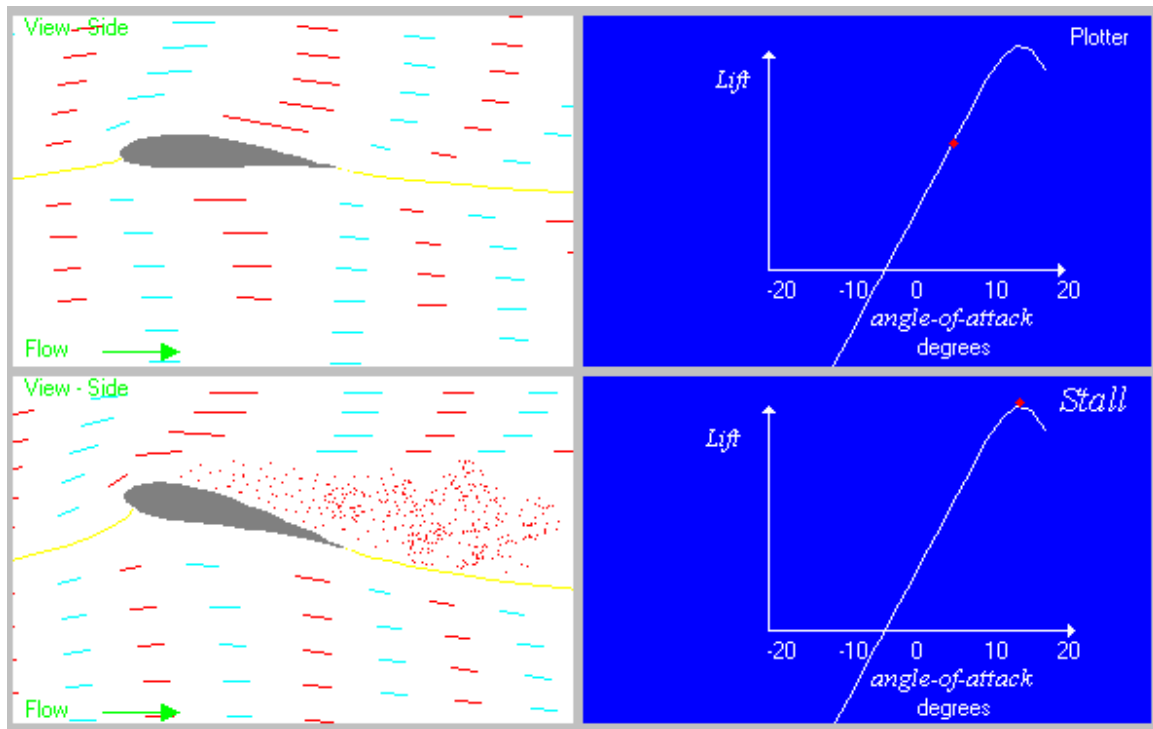


Figura 3.2: Situação de Estol.

As componentes u e w do vetor velocidade podem ser expressos como:

$$u = VC_{\alpha} \quad \text{e} \quad w = VS_{\alpha} \quad (3.17)$$

que, em vôo em guinada nos dá:

$$V = [u^2 + w^2]^{1/2} \quad (3.18)$$

As derivadas no tempo de u e w podem ser combinadas para obter:

$$\dot{\alpha} = -\frac{\dot{u}}{V} S_{\alpha} + \frac{\dot{w}}{V} C_{\alpha} \quad (3.19)$$

Considerando o equilíbrio de forças usando componentes de aceleração podemos expressar:

$$\dot{u} = \frac{T}{m} + \frac{QS}{m} [C_L S_\alpha - C_D C_\alpha] - g S_\theta - w \dot{\theta} \quad (3.20)$$

$$\dot{w} = -\frac{QS}{m} [C_L S_\alpha + C_D S_\alpha] + g C_\theta + u \dot{\theta} \quad (3.21)$$

Combinando as equações (3.20) e (3.21) na equação (3.19) e simplificando temos:

$$\dot{\alpha} = -\frac{T}{mV} S_\alpha - \frac{QS}{mV} C_L + \frac{g}{V} C_{(\theta-\alpha)} + \dot{\theta} \quad (3.22)$$

A aceleração angular de arfagem é:

$$\ddot{\theta} = \frac{QSc}{I_y} \left[(C_m)_{cg} + \frac{c}{2V} (C_{m_q} \dot{\theta} + C_{m_\alpha} \dot{\alpha}) \right] \quad (3.23)$$

E as equações de estado não-lineares:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{T}{mV} \sin(x_1) - \frac{QS}{mV} C_L + \frac{g}{V} \cos(x_3 - x_1) + x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{QSc}{I_y} \left[C_m + \frac{c}{2V} (C_{m_q} x_2 + C_{m_\alpha} \dot{x}_1) \right] \\ \dot{x}_3 &= x_2 \\ \dot{x}_4 &= \frac{T}{m} + \frac{QS}{m} [C_L \sin(x_1) - C_D \cos(x_1)] - g \sin(x_3) - x_2 x_5 \\ \dot{x}_5 &= -\frac{QS}{m} [C_L \cos(x_1) - C_D \sin(x_1)] - g \cos(x_3) + x_2 x_4 \end{aligned} \quad (3.24)$$

Com estas cinco relações (3.24) podemos modelar uma condição de estol.

3.4 Turbulência Atmosférica

A dinâmica de uma aeronave é muito importante para se determinar a resposta a uma determinada entrada no controle de pilotagem. Entretanto, para uma análise mais realista devemos levar em consideração os efeitos de influências externas (turbulências atmosféricas e/ou rajadas de vento) que podem atuar ou influenciar, tanto na resposta dinâmica da aeronave como também em seu design estrutural.

Alguns autores, como Hoblit, por exemplo, ao lidar com o efeito de entradas de rajadas na resposta de aeronave e de cargas, descrevem algumas das muitas fontes de turbulência atmosférica em graus de severidade como, por exemplo:

- 1) *turbulência severa* – que é normalmente relacionada uma tempestade como um temporal, por exemplo;
- 2) *turbulência menos severa* – é aquela que surge devido à presença de nuvens de tipo *cumulus*;
- 3) *turbulência de céu limpo*, normalmente muito menos severas.

Em relação às fontes, podemos citar wind shear, rajadas de fluxo, vento sobre e entre montanhas, correntes térmicas convectivas, encontradas em vôos ao entardecer, principalmente em regiões desertas, etc.

Uma visão do problema de turbulência é mostrada na figura a seguir, num diagrama de bloco que ilustra o processo e os passos que são usados nesse tipo de modelagem:

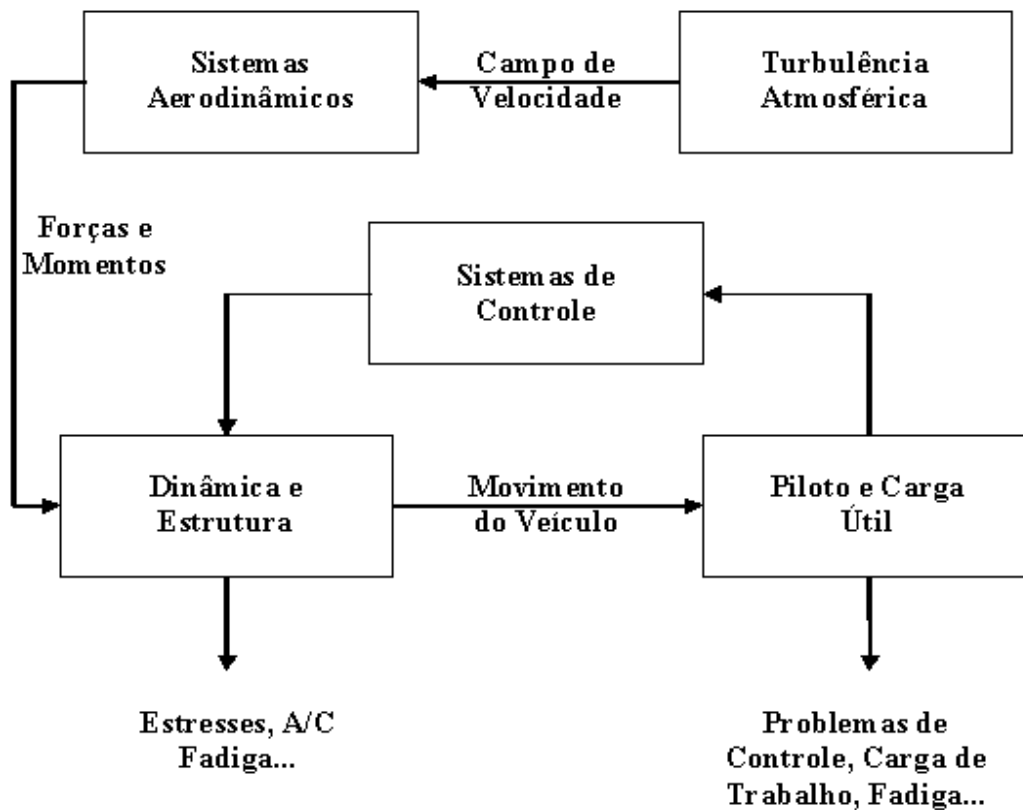


Figura 3.3: Processo envolvendo turbulência.

O produto da turbulência atmosférica, o campo de velocidade, será considerado como estagnado no espaço momentaneamente enquanto a aeronave transita na região. O campo de velocidade, quando entra nesse estado, será modelado por uma forma determinística e por uma forma randômica.

A interação do sistema aerodinâmico da aeronave com o campo de velocidade resultará em forças e momentos, que por sua vez causará uma resposta dinâmica na estrutura. Em relação ao diagrama percebe-se que o movimento do veículo gera influência sobre o piloto, tripulação, passageiros (caras úteis), etc. e também gerando uma demanda na manutenção do controle de voo com subseqüentes efeitos de fadiga da estrutura.

3.4.1 Rajadas verticais ascendentes e descendentes

Esse tipo de rajada pode ocorrer quando uma aeronave passa sobre ou nas cercanias do cume de uma montanha. Outra fonte para esse tipo de rajada é quando em vôo de baixa altitude sobre uma região agrícola com variações nas superfícies do terreno.

A figura a seguir mostra uma aeronave quando em um regime ideal de rajada ascendente.

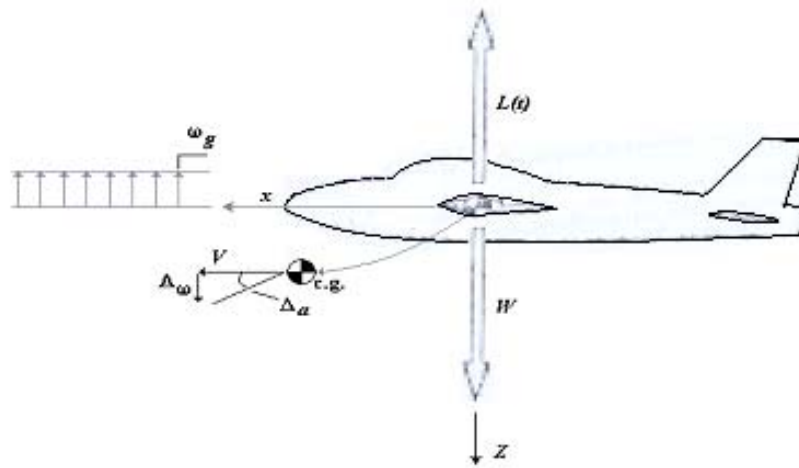


Figura 3.4: Esquema de uma aeronave entrando em uma rajada “cortante”.

A fim de que o problema seja tratável, algumas considerações devem ser feitas, são elas:

- 1) Este tipo de rajada é bi-dimensional, i.e., a rajada não varia na direção do movimento da aeronave (spanwise);
- 2) A resposta dinâmica é somente na direção vertical, conseqüentemente, o movimento de arfagem da aeronave será desconsiderado;
- 3) Será usada Aerodinâmica *quase-steady*, o que implica que a aerodinâmica instável será desconsiderada,

Pela figura 3.4, temos que:

$$W - L(t) = \frac{W}{g} \frac{d\Delta\omega}{dt} \quad (3.25)$$

onde:

L = forças aerodinâmicas, $L_0 + \Delta L(t)$;

$\Delta\omega$ = velocidade vertical da aeronave, + é para baixo;

ω_g = velocidade de rajada vertical, positiva para cima;

W = peso da aeronave;

g = constante gravitacional.

Em um nível de vôo estável, anterior ao encontro da rajada, a equação (3.25) fica:

$$W - L_0 = 0 \quad (3.26)$$

Enquanto que em um vôo instável a equação (3.25) fica:

$$W - L_0 - \Delta L(t) = \frac{W}{g} \frac{d\Delta\omega}{dt} \quad (3.27)$$

Que, quando simplificado temos:

$$(\Delta n_z)_{\max} = C_{L_\alpha} \frac{\rho V}{2} \frac{\omega_g}{(W/S)} \quad (3.28)$$

3.4.2 Rajadas tipo cosseno menos um

A rajada vertical ascendente ideal é um tipo muito severo de um perfil de velocidade que raramente na natureza. Mas, ao invés disso, uma rajada discreta pode ser modelada praticamente

por uma entrada de rampa que alcança um valor máximo em uma determinada distância, distância esta conhecida como a distância gradiente.

A rajada tipo cosseno menos um pode ser exemplificada na figura a seguir:

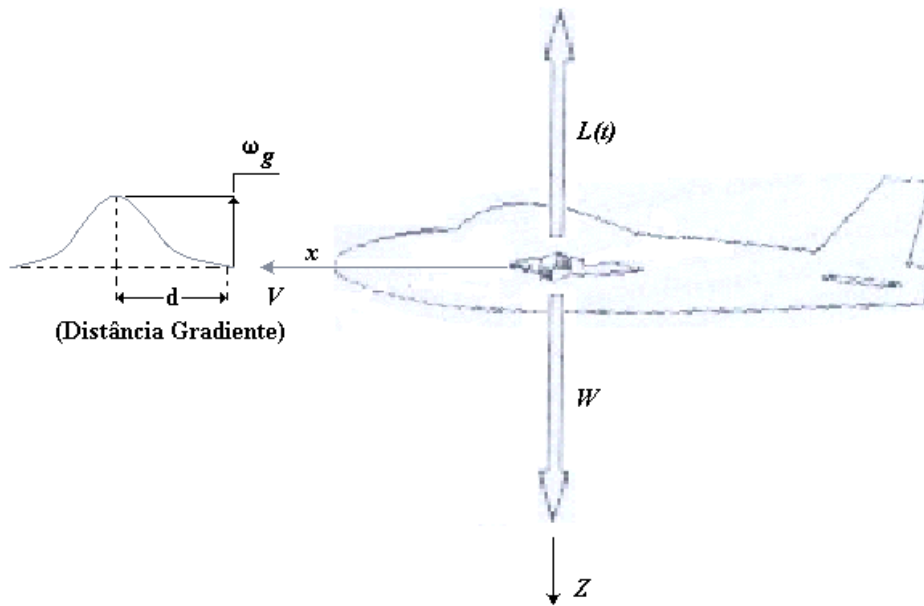


Figura 3.5: Esquema de uma aeronave entrando em uma rajada discreta “cosseno menos um”.

A equação da velocidade vertical é definida por:

$$\Delta\omega_g = -\frac{\omega_g}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi x}{d} \right) \quad (3.29)$$

onde:

d = distância gradiente;

ω_g = magnitude da velocidade vertical de rajada.

Assumimos que a aeronave encontra a rajada num tempo igual a zero. Depois disso, a distância viajada dentro da rajada corresponde a $x=Vt$. A equação de resposta vertical é:

$$\lambda_t \Delta \dot{\omega} + \Delta \omega = \Delta \omega_g = \frac{\omega_g}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi x}{d} \right) \quad (3.30)$$

onde:

λ_t = constante de tempo;

$\omega = \pi V/d \text{ Rad/s}$

A solução da equação (3.30) pode ser expressa em uma forma integral como:

$$\Delta \omega(t) = -\frac{\omega_g \omega}{2} \int_0^t \left[1 - e^{-(t-\tau)/\lambda} \right] \sin \omega \tau d\tau \quad \text{para } 0 \leq t \leq 2\pi / \omega \quad (3.31)$$

que pode ser integrado para dar a solução de:

$$\Delta \omega(t) = -\frac{\omega_g}{2g} \left[(1 - \cos \omega t) - \frac{1}{1 + (\omega \lambda)^{-2}} \left(e^{-t/\lambda} + \frac{1}{\omega \lambda} \sin \omega t - \cos \omega t \right) \right] \quad (3.32)$$

Esta equação (3.32) é válida enquanto perdurar a rajada tipo cosseno menos um. O fator máximo de carregamento aerodinâmico é:

$$\Delta n_z(t) = \frac{\omega_g}{2g} \left[\omega \sin \omega t + \frac{1}{1 + (\omega \lambda)^{-2}} \left(\frac{1}{\lambda} e^{-t/\lambda} - \frac{1}{\lambda} \cos \omega t - \omega \sin \omega t \right) \right] \quad (3.33)$$

e irá ocorrer próximo ao tempo que atinge o pico da rajada.

Como exemplo, podemos estimar o fator de carregamento de resposta para a aeronave Lockheed em um encontro com uma rajada tipo um menos cosseno. Assumindo que $h=20000\text{ft}$, $w_g=50\text{fps}$ no $V_C=778\text{ fps}$

1) Determinando as constantes usadas na análise:

$$\omega = \frac{\pi V}{d} = 17.890 \text{ rad / s}$$

$$e$$

$$\lambda = \frac{(W / S)}{C_{l_a}} \frac{2}{\rho V g} = 0.753 \text{ s}$$

Substituindo os valores no programa do matlab:

```
w=17.890;%frequencia, omega
wg=68.5;
g=32.174;
K=0.5*wg/g;
for i=1:101
    t(i)=(0.351/100)*(i-1);
    N(i)=0.09750*sin(w*t(i));
    N(i)=N(i)+1.3168*(exp(-1.324*t(i))-cos(w*t(i)));
    n(i)=K*N(i);
end
plot(t,n)
```

Temos:

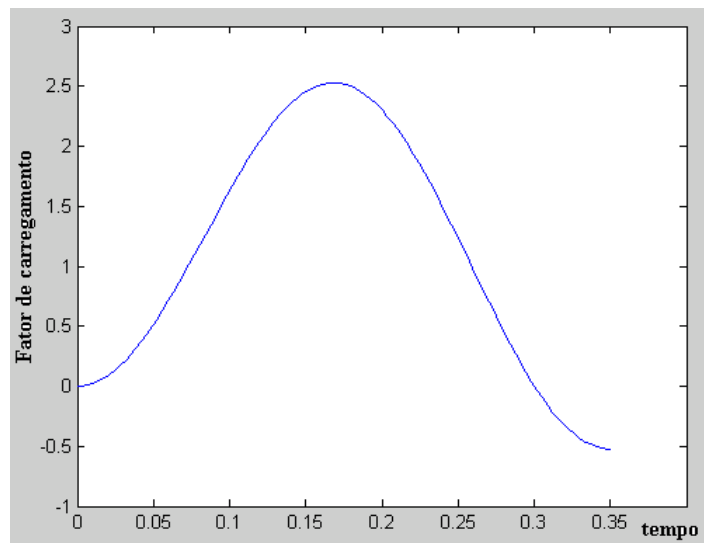


Figura 3.6: Fator de carregamento em resposta a uma rajada tipo cosseno menos um.

A resposta do fator de carregamento mostrado na figura acima tem valor máximo em 2.525g ocorrendo em $t = 0.168s$.

3.4.3 Processos Randômicos

A turbulência atmosférica, embora modelada aproximadamente por considerações de rajadas verticais discretas, é na realidade um processo randômico. A análise destes efeitos envolve a teoria harmônica generalizada da matemática combinada com métodos de espectros de potência.

Para a estimação da resposta desse tipo de rajada na aeronave é necessária a aplicação de alguns princípios de processos randômica. Uma função randômica é caracterizada pelo fato de que o passado conhecido não permite nenhuma previsão em algum evento futuro.

O desenvolvimento de um processo randômico inclui: conceitos de probabilidade; PDF; momentos de PDF, onde o primeiro momento é a média e o segundo é a média ao quadrado; variância; distribuição de probabilidade Gaussiana (normal); funções estacionárias; espectro de potência, funções de autocorrelação e modelos de turbulência tipo *Dryden*, entre outros.

3.4.4 Resposta da aeronave a rajadas turbulentas

A resposta normal do fator de carregamento para uma rajada turbulenta pode ser encontrada por uma série de aplicações de modelos de funções de transferência de Dryden (Schmidt, 1998) de rajadas vertical.

O modelo de rajada vertical de Dryden (Schmidt, 1998) pode ser expresso como uma função de transferência reconhecendo que:

$$\phi_{\omega_g}(\omega) = |G_{\omega_g}(\omega)|^2 \sigma_{\omega}^2 \quad (3.34)$$

onde,

$$G_{\omega_g}(\omega) = G_{\omega_g}(s) \Big|_{s=i\omega}$$

Esta afirmação pode ser ilustrada pelo diagrama de bloco a seguir:

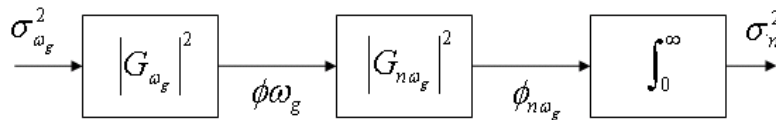


Figura 3.7: Fator de carregamento em resposta a uma entrada de rajada.

Assim, a saída da densidade de potencia espectral é dada por:

$$\phi_n(\omega) = \phi_{\omega_g}(\omega) \phi_{n\omega_g}(\omega) \quad (3.35)$$

O valor esperado para o fator de carregamento normal é obtido pela integração da saída da densidade de potencia espectral. Assim temos:

$$E(n_z^2) = \int_0^\infty \phi_n(\omega) d\omega \quad (3.36)$$

Por exemplo, usando a aproximação da função de transferência para determinar o valor esperado da aceleração normal quando a aeronave Lockheed Jetstar (Schmidt, 1998) encontra uma rajada de turbulência vertical.

1) As constantes de turbulência para o modelo Dryden de rajada vertical são dadas como:

$$\begin{aligned} K &= (3V / \pi L_2)^{1/2} = 0.6516 s^{-1/2} \\ \theta &= V / \sqrt{3} L_2 = 0.2567 s^{-1} \\ \lambda &= V / L_2 = 0.4446 s^{-1} \end{aligned}$$

Que estabelece a função de transferência de rajada vertical:

$$G_{\omega_g}(s) = (0.6516) \frac{(s + 0.2567)}{(s^2 + 0.8892s + 0.1977)}$$

Usando o matlab para a obtenção da função de transferência seguido de uma análise numérica temos:

$$\begin{aligned} \sigma_\omega^2 &= 0.9894 ft^2 - s^{-2} \\ \sigma_n^2 &= 0.4435 ft^2 - s^{-4} \end{aligned}$$

e, usando o Matlab novamente, encontramos que $\sigma_n = 0.6660 ft \cdot s^{-2}$ em relação a rajada $\sigma_w = 0.995 ft \cdot s^{-1}$. A resposta de aceleração final em relação a $\sigma_w = 0.995 ft \cdot s^{-1}$ é $\sigma_n = 13.390 ft \cdot s^{-2}$ (0.416g).

A figura a seguir é uma representação espectral para o modelo de rajada vertical Dryden quando normalizado para uma área unitária.

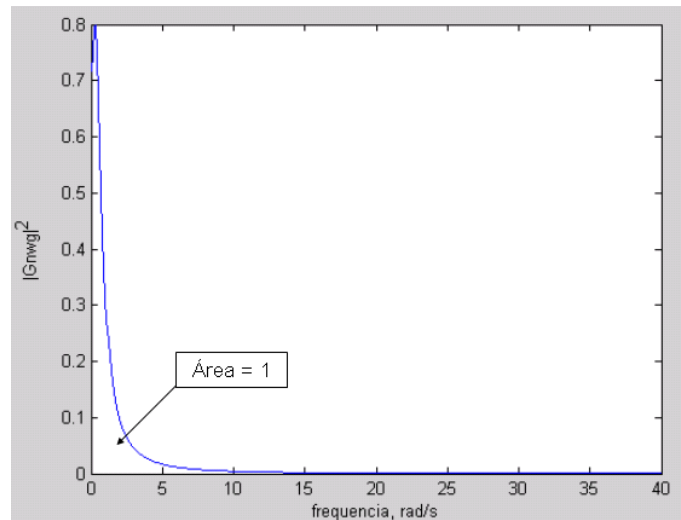


Figura 3.8: Entrada de rajada vertical.

A figura abaixo representa a entrada da rajada vertical relativa a função de transferência de fator de carregamento normal, com um valor de resposta de pico na vizinhança de $w = 4$ rad/s.

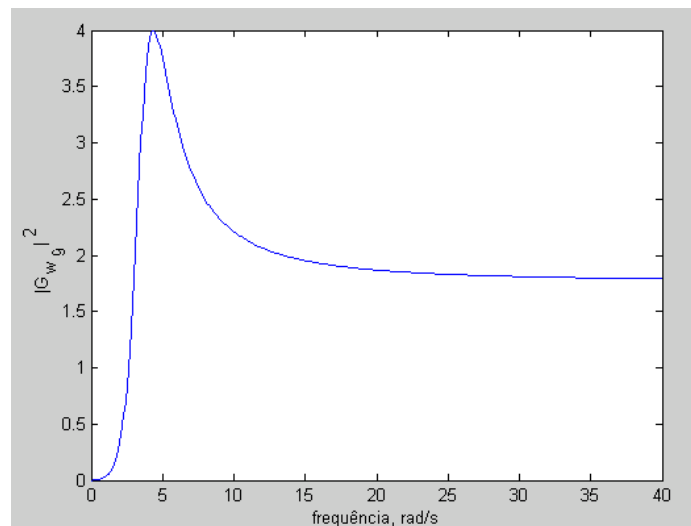


Figura 3.9: Função de transferência.

E, a seguir, temos o produto de $|G_{wg}(w)|^2$ e $|G_{nw}(w)|^2$, e representa a distribuição de frequência da aceleração normal da aeronave.

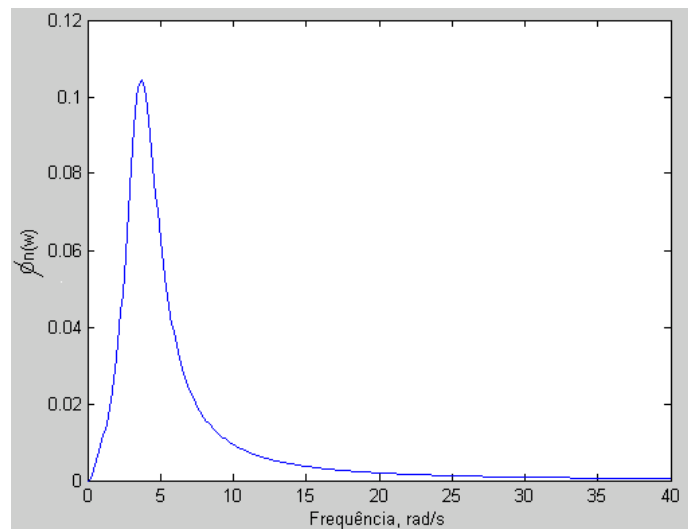


Figura 3.10: Distribuição de frequência da aceleração normal.

Assim, pode-se ter uma idéia de como funciona a modelagem de uma rajada na dinâmica de voo.

Capítulo 4

Modelo Matemático e Simulações Numéricas para o Vôo Longitudinal da Aeronave F-8 “Crusader”:

Neste capítulo enfatiza-se o estudo da dinâmica de vôo longitudinal cujo modelo foi proposto por Liaw (2001). Utilizando-se como parâmetro de controle a deflexão do profundor e, a massa da aeronave. Com a variação dos parâmetros de controle, busca-se identificar e descrever as relações entre o comportamento da aeronave e o fenômeno de bifurcação, exemplificada no caso da aeronave F-8 “*Crusader*” proposto por Garrard (1977), com arrasto desprezado. Para facilidade de exposição apresentam-se os seguintes sub-itens:

- 4.1 Modelagem Matemática e Obtenção das Equações de Movimento Não Lineares.
- 4.2 Simulações Numéricas para o Caso Particular da Aeronave F-8.
- 4.3 Análise de Estabilidade (Bifurcacional).

4.1 Modelagem Matemática e Obtenção das Equações de Movimento Não Lineares

Sabe-se que um modelo matemático para a dinâmica de uma aeronave é extremamente importante no estudo de sua dinâmica e controle.

Uma aeronave é um sistema dinâmico cuja complexidade se expressa numa coletânea de corpos conectados de forma que os movimentos relativos de corpo rígido e elástico possam vir a ocorrer.

Ressalta-se que o estudo da dinâmica de vôo (ou estabilidade e controle de uma aeronave) preocupa-se com o comportamento dinâmico global de uma aeronave:

- **Estabilidade,**
- **Controlabilidade,**
- **Resposta dinâmica,**
- **Qualidades de controle, etc.**

Entretanto a análise da dinâmica de vôo requer um modelo compreensivo da aeronave. Este modelo deve ser válido para todas as combinações de ângulo-de-ataque, número de “Mach”, “g” e altitude na qual a aeronave opera. Este espaço “operacional” é chamado de Nível de vôo da aeronave.

No modelo matemático de uma aeronave estão as equações de movimento de corpo rígido. Considerando-se uma aeronave como rígida, o modelo matemático tem seis graus de liberdade, dando origem a um problema dinâmico de 12 equações de primeira ordem. Quatro destes estados (a posição de espaço da aeronave e seu ângulo de “heading”) não tem efeito no comportamento dinâmico de interesse.

Dinamicistas de vôo distinguem entre vários sistemas de eixos, podendo ser conduzido a várias possíveis combinações diferentes de variáveis de estados. Neste trabalho, utilizam-se apenas as equações de movimento longitudinal, as quais serão alvos de nossos estudos. O modelo de dinâmica de vôo longitudinal utilizado aqui segue o modelo matemático de Garrard (1977).

Considerando o sistema de coordenadas para dinâmica de vôo longitudinal retratado em Garrard (1977), suponha que o arrasto é pequeno comparado com a força de sustentação e o peso

da aeronave e que isso será desconsiderado nesta análise. O sistema de coordenadas usado e as forças consideradas são mostrados na figura 4.1, a seguir. Como já dito anteriormente, o arrasto será desconsiderado e a sustentação será separada em duas componentes: de asa e de cauda (Etkin, 1972). Obs.: A nomenclatura usada é dada pela tabela 1 a seguir:

Tabela 4.1- Nomenclatura:

L_w, C_{Li}	= coeficientes de força de sustentação da asa e da cauda respectivamente;
$C_{L_w}^i, C_{L_t}^i$	= coeficientes aproximados da força de sustentação da asa e da cauda respectivamente;
$c\theta$	= momento de amortecimento;
$f^{(n,0)}(x,y)$	= n-ésima derivada de f em relação a x;
$f^{(0,n)}(x,y)$	= n-ésima derivada de f em relação a y;
$f'(x)$	= derivada da função f em x;
g	= constante gravitacional;
I_x, I_y, I_z	= momento de inércia nos eixos x, y e z respectivamente;
L_w, L_t	= forças de sustentação da asa e da cauda respectivamente;
l	= distância entre o centro aerodinâmico da asa e o centro de gravidade da aeronave;
l_t	= distância entre o centro aerodinâmico da cauda e o centro de gravidade da aeronave;
M_w	= momento de arfagem de asa;
m	= massa da aeronave;
p, q, r	= taxa de rolagem, arfagem e guinada, respectivamente;
$\bar{q}$	= pressão dinâmica;
S, S_t	= área da asa e do estabilizador horizontal, respectivamente;
u, v, w	= componentes de velocidade nas direções x, y e z respectivamente;
α, α_t	= ângulo de ataque da asa e da cauda respectivamente;
δ_e	= ângulo de deflexão do profundor;
θ	= ângulo de arfagem;

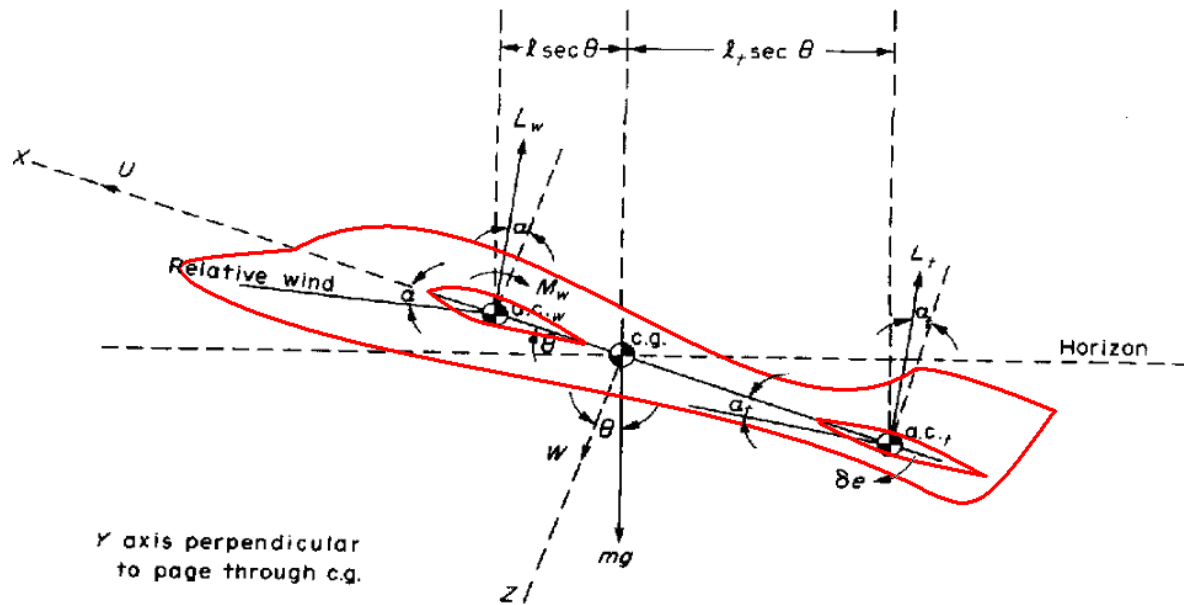


Figura 4.1: modelo dinâmico da aeronave.

As equações básicas de movimento para dinâmica longitudinal, com arrasto considerado como sendo muito pequeno em relação ao empuxo e ao peso (e por isso desconsiderado), são dadas por:

$$m(\dot{u} + w\dot{\theta}) = -mg \sin \theta + L_w \sin \alpha + L_t \sin \alpha_t \quad (4.1)$$

$$m(\dot{w} - u\dot{\theta}) = mg \cos \theta - L_w \cos \alpha - L_t \cos \alpha_t \quad (4.2)$$

$$I_y \ddot{\theta} = M_w + lL_w \cos \alpha - l_t L_t \cos \alpha_t - c\dot{\theta} \quad (4.3)$$

sendo que elas podem ser reescritas em apenas três equações de movimento longitudinal.

Suponha que as forças de sustentação da cauda e da asa são dadas por $L_w = C_{L_w} \bar{q} S$ e $L_t = C_{L_t} \bar{q} S_t$ respectivamente.

A figura 4.2, a seguir, exhibe as componentes de velocidade u , v e w ao longo dos eixos x , y e z e suas relações

$$u = V \cos \beta \cos \alpha$$

$$v = V \sin \beta$$

$$w = V \cos \beta \sin \alpha$$

$$V = (u^2 + v^2 + w^2)^{\frac{1}{2}}$$

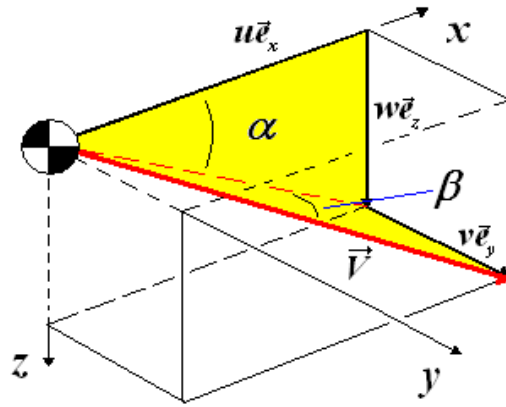


Figura 4.2: Componentes de velocidade.

Usando-se

$$w = u \tan \alpha \text{ e}$$

$$\dot{w} = \dot{u} \tan \alpha + u \dot{\alpha} \sec^2 \alpha ,$$

podem-se reescrever as equações (4.1), (4.2) e (4.3), da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -u\dot{\theta} \tan \alpha - g \sin \theta + (L_w/m) \sin \alpha + (L_t/m) \sin \alpha_t \\ \dot{\alpha} &= \dot{\theta} \cos^2 \alpha + (g/u) \cos^2 \alpha \cos \theta - L_w/(um) \cos^3 \alpha - \\ &\quad - L_t/(um) \cos^2 \alpha \cos^2 \alpha_t - (\dot{u}/u) \sin \alpha \cos \alpha \\ \ddot{\theta} &= M_w/I_y + (lL_w/I_y) \cos \alpha - (l_t L_t/I_y) \cos \alpha_t - (c/I_y) \dot{\theta} \end{aligned} \tag{4.4}$$

onde, substituindo $\dot{u} = -u\dot{\theta} \tan \alpha - g \sin \theta + (L_w/m) \sin \alpha + (L_t/m) \sin \alpha_t$ na equação (4.4) obtém-se:

$$\begin{aligned}
\dot{u} &= -u\dot{\theta} \tan \alpha - g \sin \theta + (L_w/m) \sin \alpha + (L_t/m) \sin \alpha_t \\
\dot{\alpha} &= \dot{\theta} \sin^2 \alpha + (g/u) \sin \theta \sin \alpha \cos \alpha - L_w/(um) \sin^2 \alpha \cos \alpha - \\
&\quad - L_t/(um) \sin \alpha \cos \alpha \sin \alpha_t + \dot{\theta} \cos^2 \alpha + (g/u) \cos^2 \alpha \cos \theta - \\
&\quad - L_w/(um) \cos^3 \alpha - L_t/(um) \cos^2 \alpha \cos^2 \alpha_t \\
\ddot{\theta} &= M_w/I_y + (lL_w/I_y) \cos \alpha - (l_t L_t/I_y) \cos \alpha_t - (c/I_y) \dot{\theta}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

O sistema (4.5), logo acima, representa um modelo de dinâmica de voo longitudinal de quarta ordem, no qual, os estados são $(u, \alpha, \theta, \dot{\theta})$.

Assumindo-se que a aeronave voa em velocidade constante, isto é, $\dot{u} = 0$, as equações governantes do movimento podem ser apresentadas como sendo um sistema dinâmico de terceira ordem da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\dot{\alpha} &= q \cos^2 \alpha + (g/u) \cos^2 \alpha \cos \theta - L_w/(uw) \cos^3 \alpha - \\
&\quad - L_t/(um) \cos^2 \alpha \cos \alpha_t \\
\dot{\theta} &= q \\
\dot{q} &= M_w/I_y + (lL_w/I_y) \cos \alpha - (l_t L_t/I_y) \cos \alpha_t - (c/I_y) q
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Assume-se, também que a força de sustentação da asa L_w é uma função do ângulo de ataque α e, a força de sustentação da cauda L_t é uma função de α e do ângulo de deflexão do profundor δ_e .

Supõe-se ainda que o momento de arfagem da asa M_w seja uma função de α e o ângulo de ataque da cauda α_t uma função de α e δ_e .

Logo se obtém que:

$$L_w := L_w(\alpha), L_t := L_t(\alpha, \delta_e), M_w := M_w(\alpha) \text{ e } \alpha_t := \alpha_t(\alpha, \delta_e)$$

E o novo sistema dinâmico é dado por:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= q \cos^2 \alpha + (g/u) \cos^2 \alpha \cos \theta - L_w(\alpha)/(um) \cos^3 \alpha - \\ &\quad - L_t(\alpha, \delta_e)/(um) \cos^2 \alpha \cos \alpha_t(\alpha, \delta_e) \\ \dot{\theta} &= q \\ \dot{q} &= M_w(\alpha)/I_y + [lL_w(\alpha)/I_y] \cos \alpha - [l_t L_t(\alpha, \delta_e)/I_y] \times \\ &\quad \times \cos \alpha_t(\alpha, \delta_e) - (c/I_y) q \end{aligned} \quad (4.7)$$

Considera-se que $x^0 = [\alpha^0, \theta^0, q^0]^T$ é um ponto de equilíbrio do sistema (4.7) de terceira ordem em um dado valor de δ_e , por exemplo, $\delta_e = \delta_e^0$.

De acordo com a definição de ponto de equilíbrio, tem-se que $q^0 = 0$ além de que as seguintes condições devem ser satisfeitas:

$$(a) \quad -L_w(\alpha^0) \cos \alpha^0 + mg \cos \theta^0 - L_t(\alpha^0, \delta_e^0) \cos \alpha_t(\alpha^0, \delta_e^0) = 0$$

ou

$$(a') \quad \cos^2 \alpha^0 = 0$$

$$(b) \quad M_w(\alpha^0) + lL_w(\alpha^0) \cos \alpha^0 - l_t L_t(\alpha^0, \delta_e^0) \cos \alpha_t(\alpha^0, \delta_e^0) = 0$$

Tomando-se, inicialmente, o caso em que $\cos^2 \alpha^0 = 0$, tem-se que $\alpha^0 = n\pi + (\pi/2)$ para $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Considerando-se que uma aeronave não pode facilmente manter um alto ângulo de ataque em vôo, será considerado apenas o caso (a) do sistema (4.8).

Referindo-se à equação (b) do sistema (4.8) logo acima, pode-se reescrever equação (a) de (4.8) como sendo:

$$M_w(\alpha^0) + (l + L_t)L_w(\alpha^0)\cos\alpha^0 = l_t mg \cos\theta^0 \quad (4.9)$$

A equação (b) de (4.8) e a equação (4.9) representam a relação entre α^0 , δ_e^0 e θ^0 .

A solução de α^0 pode ser obtida da equação (b) de (4.8), para um dado δ_e^0 enquanto que a equação (4.9) dá a solução de θ^0 .

Logo, tem-se as seguintes observações em relação às equações (b) e (4.9):

- **Observação 1:** Em geral, $M_w(\alpha^0)$ é um valor não negativo. Então a equação (4.9) não tem solução para alguns valores de θ^0 se $(l + l_t)L_w(\alpha^0) > l_t mg$.
- **Observação 2:** Como a função cosseno é par, $-\theta^0$ é também solução da equação (4.9) se θ^0 for solução para um dado valor de α^0 .

Das **observações 1 e 2**, deduz-se que o número de pontos de equilíbrio das equações do sistema (4.7) podem ser zero, um ou dois para um dado $\delta_e = \delta_e^0$ em um intervalo fixo de θ^0 , de tamanho 2π .

Especificamente, o sistema (4.7) terá somente um ponto de equilíbrio em $\theta^0 = 0$ no intervalo $\theta^0 \in (-\pi, \pi)$, se existir.

Assim, tem-se que o sistema (4.5) pode ter uma *bifurcação tipo sela-nó* em $x^0 = [\alpha^0, \theta^0, 0]^T$ se x^0 for um ponto de equilíbrio do sistema.

4.2 Simulações Numéricas para o Caso Particular da Aeronave F-8.

Para efeito de aplicação, utiliza-se uma aeronave do tipo F-8 Crusader, pois se trata de uma aeronave, que teve a sua história operacional estendendo-se por quase meio século de operação, servindo duas marinhas e uma força aérea (Marinha dos Estados Unidos da América, Marinha Francesa e Força Aérea das Filipinas).

O desenvolvimento do F-8 Crusader, deu-se na década de 50, quando a aviação evoluía rapidamente. Nessa altura um projeto que surgisse teria que ser de ótima qualidade para poder competir com as novas aeronaves de então.

O F-8 é caracterizado pela sua fuselagem alongada e com asa em delta sobre a fuselagem.

Usando inicialmente um motor J57, o mesmo do F-100, e com a vantagem de poder operar embarcado (pouso e decolagem em porta-aviões), o F-8 era bem superior a este último, tendo sido, inclusive, o primeiro caça a chegar à velocidade de Mach 1.7.

No ano de 1957 a primeira versão do Crusader (F-8A) já estava em operação.

Em 1966, realizou-se uma extensa reforma estrutural, com o objetivo principal de capacitá-los a pousar em pequenos porta-aviões (sendo necessário, em alguns casos, a reduzir em 28 km/h a velocidade de pouso).

No período de 1966 a 1971, foram modernizadas 446 unidades, sendo estas operadas a partir dos porta-aviões norte-americanos até fins da década de 70.

Esta aeronave foi utilizada por muitos anos e, dessa forma, muitos estudos foram feitos.

Em levantamento bibliográfico efetuado encontraram-se artigos científicos referentes à aeronave F-8. Dentre os autores estudados podem-se destacar Garrard (1977) e Liaw (2001, 2003, 2003), que estudaram a dinâmica de vôo e controle da aeronave.

No Apêndice D têm-se algumas características técnicas da aeronave, sua foto e a representação de seus componentes estruturais

A seguir, obtém-se o modelo de terceira ordem da dinâmica de vôo longitudinal da aeronave F-8, proposta por Garrard (1977).

Para análise qualitativa da dinâmica deste modelo, estuda-se a estabilidade local e as bifurcações da dinâmica de vôo. Completa-se este estudo considerando o efeito da massa da aeronave na estabilidade do sistema sobre a existência de pontos de equilíbrio.

Em 1977, duas funções polinomiais cúbicas foram propostas (Garrard, 1977) para se aproximar o coeficiente de sustentação da asa e da cauda. Essas funções são dadas por:

$$L_w = \bar{q} S C_{L_w} = \bar{q} S (C_{L_w}^0 + C_{L_w}^1 \alpha - C_{L_w}^2 \alpha^3) \quad (4.10)$$

$$L_t = \bar{q} S_t C_{L_t} = \bar{q} S_t (C_{L_t}^0 + C_{L_t}^1 \alpha_t - C_{L_t}^2 \alpha_t^3 + a_e \delta_e) \quad (4.11)$$

onde

- $C_{L_w}^0$, $C_{L_w}^1$, $C_{L_w}^2$, $C_{L_t}^0$, $C_{L_t}^1$ e $C_{L_t}^2$ São constantes e dependem individualmente da aeronave dada,
- δ_e representa o ângulo de deflexão da cauda horizontal medida à direita do eixo x , e a_e é a aproximação linear do efeito de δ_e sobre C_{L_t} .

Visto que a cauda horizontal do F-8 está dentro da esteira da asa, o ângulo de “*downwash*” ϵ foi incluído na determinação do ângulo de ataque da cauda.

Obs: O ângulo de downwash é definido como o ângulo formado entre a direção do fluxo de ar que entra na asa e pela direção do fluxo no momento que sai da asa (ver capítulo 6, figura 6.13).

Quando se considera uma aproximação linear de $\epsilon = a_{\epsilon}\alpha$, o ângulo de ataque da cauda é dado por:

$$\alpha_t = \alpha - \epsilon + \delta_e = (1 - a_{\epsilon})\alpha + \delta_e \quad (4.12)$$

Como representado por Liaw (2001), a aproximação do coeficiente de força de sustentação da asa proposta por Abed e Lee (1990) é mais realístico nas regiões de estol e pós-estol do que na equação (4.10).

Desta forma, o coeficiente de sustentação da asa (Etkin, 1972) é dado por:

$$L_w = \bar{q}S(C_{L_w}^0 + C_{L_w}^1 \alpha - C_{L_w}^2 \alpha^3).W \quad (4.13)$$

Onde

$$W = \{1 / [1 + (\alpha / 0.41)^{60}]\}.$$

Para os ensaios numéricos, utilizam-se os parâmetros da aeronave F-8 e assume-se que a aeronave se encontra em regime de vôo em uma velocidade constante de $u=845,6 \text{ ft/s}$ em uma altitude de 30.000 ft .

Considera-se a massa m inicial $m_0 = 9773\text{kg}$ (667,7 slugs). Usam-se também os valores descritos pela tabela 4.2.

Adotam-se também os valores de

$$\{g=32,174 \text{ ft/s}^2, \bar{q}=0, 5\rho(u^2+v^2+w^2)=0,5 \gamma p M^2, \}$$

onde:

p é a pressão estática,

M é o número de Mach e

γ é normalmente 1,4 para o ar.

Tabela 4.2: Dados da aeronave F-8.

$C_{L_w}^0 = C_{L_t}^0$	$= 0$
$C_{L_w}^1 = C_{L_t}^1$	$= 4.0$
$C_{L_w}^2 = C_{L_t}^2$	$= 12$
a_e	$= 0.1$
S	$= 375 \text{ ft}^2 (33.75 \text{ m}^2)$
S_t	$= 93.4 \text{ ft}^2 (8.41 \text{ m}^2)$
m	$= 667.7 \text{ slugs} (9773 \text{ kg})$
a_ε	$= 0.75$
ε	$= 0$
$C_{m_{a.c.}}$	$= 0$
$\bar{c}$	$= 11.78 \text{ ft} (3.53 \text{ m})$
I_y	$= 96800 \text{ slug ft}^2 (127512 \text{ kg-m}^2)$
l	$= 0.189 \text{ ft} (0.06 \text{ m})$
l_t	$= 16.7 \text{ ft} (5.01 \text{ m})$

Para fins de simplificação, e sem que ocorra perda de generalidade, quando se assume que momento de inércia I_y é proporcional a m , as equações de movimento (4.6) tornam-se:

$$\begin{aligned}
\dot{\alpha} &= q \cos^2 \alpha + 0.0381 \cos^2 \alpha \cos \theta - (1/m)(564.434\alpha - 1693.301\alpha^3) \cos^3 \alpha \cdot W - \\
&- (1/m)(35.145\alpha - 6.560\alpha^3 + 144.096\delta_e - 79.077\alpha^2\delta_e - 316.309\alpha\delta_e^2 - \\
&- 421.745\delta_e^3) \times \cos^2 \alpha \cos(0.25\alpha + \delta_e) \\
\dot{\theta} &= q \\
\dot{q} &= -(1/m)264.409q + (1/m)(622.222\alpha - 1866.667\alpha^3) \cos \alpha \cdot W - \\
&- (1/m)(3423.386\alpha - 641.885\alpha^3 + 14035.883\delta_e - 7702.619\alpha^2\delta_e - 30810.476\alpha\delta_e^2 - \\
&- 41080.634\delta_e^3) \times \cos(0.25\alpha + \delta_e)
\end{aligned} \tag{4.14}$$

onde

m denota a massa da aeronave e δ_e o parâmetro de controle cuja variação possibilitará o estudo de possíveis bifurcações do sistema considerado.

Nota-se que o termo W pode ser obtido através da simplificação da expressão:

$$W = \{1/[1 + (\alpha/0.41)^{60}]\}.$$

A seguir efetua-se o estudo da estabilidade do sistema considerado.

4.3 Análise de Estabilidade (Bifurcacional).

Para se realizar as simulações numéricas, utilizou-se o integrador ODE 45, de passo variável do e, um toolbox MATLAB[®] chamado MATCONT. MATCONT é um “toolbox” gráfico do software para a MATLAB[®] e, está disponível gratuitamente para download em: <http://allserv.UGent.be/~ajdhooge>.

Esclarece-se que este “toolbox” permite o cálculo de curvas de equilíbrio, pontos limite, pontos de Hopf, ciclos limite, etc. No Apêndice A tem-se um exemplo de funcionamento desse software.

Como uma primeira etapa, para o estudo desse tópico, considera-se δ_e como um primeiro parâmetro de bifurcação com uma variação de δ_e intervalo $(-0,2 ; 0)$, escolhendo a massa $m=m_0$, onde $m_0=667.7 \text{ slugs}$ como no artigo de Garrard (1977)

Usando-se o MatCont do software MATLAB[®], efetuam-se as simulações numérico-computacionais. Posteriormente, para completar esta pesquisa, considera-se também a variação da massa da aeronave como um segundo parâmetro de bifurcação, cujos resultados serão exibidos na seqüência.

Deve se observar que α deve ter uma variação entre 0 e $\pi/2$, pois uma aeronave não pode facilmente manter um alto ângulo de ataque durante o voo.

A seguir, calcula-se a matriz das derivadas parciais do sistema, ou seja, obtém-se a matriz Jacobiana.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 1 \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

cujos elementos a_{ij} são dados pelas expressões a seguir:

$$\begin{aligned}
a_{11} = & \frac{1,02594 \times 10^{25} \alpha^{59} (564,434\alpha - 1693,3\alpha^3) \cos^3(\alpha)}{m(1 + 1,70989 \times 10^{23} \alpha^{60})^2} - \\
& - \frac{(564,434 - 5079,9\alpha^2) \cos^3(\alpha)}{m(1 + 1,70989 \times 10^{23} \alpha^{60})} - \frac{1}{m} [(35,145 - 19,68\alpha^2 - \\
& - 158,154\alpha\delta_e - 316,309\delta_e^2) \cos^2(\alpha) \cos(0,25\alpha + \delta_e)] - \\
& - 2q \cos(\alpha) \sin(\alpha) + \frac{3(564,434\alpha - 1693,3\alpha^3) \cos^2(\alpha) \sin(\alpha)}{m(1 + 1,70989 \times 10^{23} \alpha^{60})} + \\
& + \frac{1}{m} [2(35,145\alpha - 6,56\alpha^3 + 144,096\delta_e - 79,077\alpha^2\delta_e - 316,309\alpha\delta_e^2 - \\
& - 421,745\delta_e^3) \cos(\alpha) \cos(0,25\alpha + \delta_e) \sin(\alpha)] - \\
& - 0,0762 \cos(\alpha) \cos(\theta) \sin(\alpha) + \frac{1}{m} [0,25(35,145\alpha - 6,56\alpha^3 + \\
& + 144,096\delta_e - 79,077\alpha^2\delta_e - 316,309\alpha\delta_e^2 - \\
& - 421,745\delta_e^3) \cos^2(\alpha) \sin(0,25\alpha + \delta_e)] \\
a_{12} = & -0,0381 \cos^2(\alpha) \sin(\theta) \\
a_{13} = & \cos^2(\alpha) \\
a_{31} = & - \frac{1,02594 \times 10^{25} \alpha^{59} (622,222\alpha - 1866,67\alpha^3) \cos(\alpha)}{m(1 + 1,70989 \times 10^{23} \alpha^{60})^2} + \\
& + \frac{(622,222 - 5600\alpha^2) \cos(\alpha)}{m(1 + 1,70989 \times 10^{23} \alpha^{60})} - \frac{1}{m} [(3423,39 - 1925,66\alpha^2 - 15405,2\alpha\delta_e - \\
& - 30810,5\delta_e^2) \cos(0,25\alpha + \delta_e)] - \frac{(622,222\alpha - 1866,67\alpha^3) \sin(\alpha)}{m(1 + 1,70989 \times 10^{23} \alpha^{60})} + \\
& + \frac{1}{m} [0,25(3423,39\alpha - 641,885\alpha^3 + 14035,9\delta_e - 7702,62\alpha^2\delta_e - \\
& - 30810,5\alpha\delta_e^2 - 41080,6\delta_e^3) \sin(0,25\alpha + \delta_e)] \\
a_{33} = & - \frac{264,409}{m}
\end{aligned}$$

Calculando as derivadas parciais e a matriz Jacobiana, determina-se o seu polinômio característico, associado, isto é,

$$\det[A - \lambda I] = 0 \quad (4.16)$$

ou

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ 0 & -\lambda & 1 \\ a_{31} & 0 & a_{33} - \lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (4.17)$$

cujo polinômio característico tem a seguinte forma:

$$-\lambda^3 + a_{33}\lambda^2 + a_{11}\lambda^2 - a_{11}a_{33}\lambda + a_{13}a_{31}\lambda + a_{12}a_{31} = 0 \quad (4.18)$$

ou,

$$\lambda^3 + (-a_{11} - a_{33})\lambda^2 + (a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31})\lambda + (-a_{12}a_{31}) = 0 \quad (4.19)$$

Utilizando-se do critério de Routh–Hurwitz (Meirovitch, 1970) tem-se:

$$\Delta_1 = (-a_{11} - a_{33}) = -(a_{11} + a_{33}) \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \det \begin{bmatrix} (-a_{11} - a_{33}) & 1 \\ (-a_{12}a_{31}) & (a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) \end{bmatrix} = \\ &= -(a_{11} + a_{33})(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) + (a_{12}a_{31}) \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned}\Delta_3 &= -(a_{12}a_{31})\Delta_2 = \\ &= -(a_{12}a_{31})\left[-(a_{11} + a_{33})(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) + (a_{12}a_{31})\right]\end{aligned}\quad (4.22)$$

O critério de Routh–Hurwitz fornece uma condição necessária e suficiente para que todas as raízes λ_j do polinômio característico tenham parte real negativa, Isto é, todos os determinantes Δ_m devem ser positivos.

Desta forma, obtêm-se três condições para que um ponto de equilíbrio $x^0 = [\alpha^0, \theta^0, 0]$, para um δ_e fixo, seja assintoticamente estável. A Seguir, citam-se estas condições:

$$-(a_{11} + a_{33}) > 0 \quad (4.23)$$

$$-(a_{11} + a_{33})(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) + (a_{12}a_{31}) > 0 \quad (4.24)$$

$$-(a_{12}a_{31}) > 0 \quad (4.25)$$

Da equação (4.25) verifica-se que a estabilidade do ponto de equilíbrio $x^0 = [\alpha^0, \theta^0, 0]^T$ do sistema depende do sinal de θ^0 no intervalo $(-\pi, \pi)$ e, sendo assim, as equações (4.23) e (4.24) são satisfeitas.

Logo, x^0 é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável para $\theta^0 > 0$ e instável para $\theta^0 < 0$ se $a_{31} > 0$. Caso $a_{31} < 0$ temos instável para $\theta^0 > 0$ e estável para $\theta^0 < 0$.

A seguir, analisam-se os pontos de equilíbrio da equação (3.12), fazendo $m = m_0$, onde $m_0 = 667.7$ slugs e, escolhendo $\delta_e = -0.1058$. Assim, obtêm-se os valores numéricos: $\alpha = 0.434683$, $\theta = 1.45895$ e $q = 0$.

Calculando-se os autovalores nos pontos de equilíbrio associados à matriz Jacobiana do sistema (4.14), nota-se que ele apresenta duas bifurcações subcríticas de Hopf e, duas bifurcações estacionárias tipo sela-nó (LIAW, 2001).

A localização desses pontos é mostrada na tabela abaixo:

Tabela 4.3: Pontos de bifurcação para $m=m_0$.

Ponto	δ_e (rad)	α (rad)	Θ (rad)	q (rad/s)
Hopf 1	-0,1058	0,4347	1,4588	0,0
Hopf 2	-0,1062	0,4360	-1,4773	0,0
Sela-nó 1	-0,0090	0,0448	0,0	0,0
Sela-nó 2	-0,0999	0,4177	0,0	0,0

Utilizando-se o pacote (MATCONT) (DHOOGHE, 2003), calcula-se a estabilidade dos pontos de equilíbrio do sistema (3.14). Os resultados obtidos através do uso MATLAB (MATCONT) são exibidos, logo a seguir:

```

first point found
tangent vector to first point found
label = LP, x = ( 9.584657 -0.000000 0.000000 -2.337113 )
a=1.361167e-002
label = H , x = ( 0.435988 -1.479882 0.000000 -0.106154 )
First Lyapunov coefficient = 3.419961e+002
label = LP, x = ( 0.417532 -0.000000 0.000000 -0.099809 )
a=1.287518e-002
Closed curve detected at step 252

elapsed time = 2.3 secs
npoints curve = 252

```

e,

tangent vector to first point found

label = H , x = (0.434651 1.461365 0.000000 -0.105791)

First Lyapunov coefficient = 3.780144e+002

label = LP, x = (0.417532 -0.000000 0.000000 -0.099809)

a=-1.287518e-002

label = H , x = (0.435988 -1.479882 0.000000 -0.106154)

First Lyapunov coefficient = 3.419961e+002

label = LP, x = (9.584657 -0.000000 0.000000 -2.337113)

a=-1.361168e-002

label = LP, x = (0.046078 0.000000 -0.000000 -0.009211)

a=1.312189e-002

Closed curve detected at step 254

Como o parâmetro α oscila entre $-\pi/2$ e $\pi/2$, excluí-se os pontos em que $|\alpha| > \pi/2$.

Assim, com os dados obtidos, tem-se que:

label = H , x = (0.435988 -1.479882 0.000000 -0.106154)

label = H , x = (0.434651 1.461365 0.000000 -0.105791)

O que significa que se tem uma bifurcação de Hopf subcrítica no ponto x_0 para os valores iniciais de α , θ e q obtidos. Com isso, existe um par de autovalores complexos-conjugados com $\text{Re}(\lambda_{1,2}) \approx 0$ de acordo com os valores de parâmetro. ($\delta = -0.106154$ e $\delta = 0.105791$).

O primeiro coeficiente de Lyapunov é positivo (First Lyapunov coefficient = 3.419961e+002). Isto significa que aí existe um ciclo limite instável, bifurcando do equilíbrio.

Têm-se ainda dois pontos de sela nó encontrados, são eles:

label = LP, x = (0.417532 -0.000000 0.000000 -0.099809)

a=1.287518e-002

label = LP, x = (0.046078 0.000000 -0.000000 -0.009211)

a=1.312189e-002

Cujos valores estão de acordo com a tabela 4.3.

A seguir, computa-se o diagrama de bifurcação para os estados α , θ e q e então compará-los com os resultados obtidos na literatura.

As figuras 4.3 e 4.4, dadas a seguir, obtidas pelo pacote **MATCONT**, ilustram os pontos de equilíbrio e as soluções periódicas que emergem dos pontos de bifurcação para a variação do parâmetro de controle δ_e no intervalo $[-0,2; 0]$. Também se verifica que as figura 12, 13, 14, 15 e 16 (calculadas, usando-se o MATLAB) estão em total concordância com resultados que foram obtidos na literatura (CHERNG, 2001).

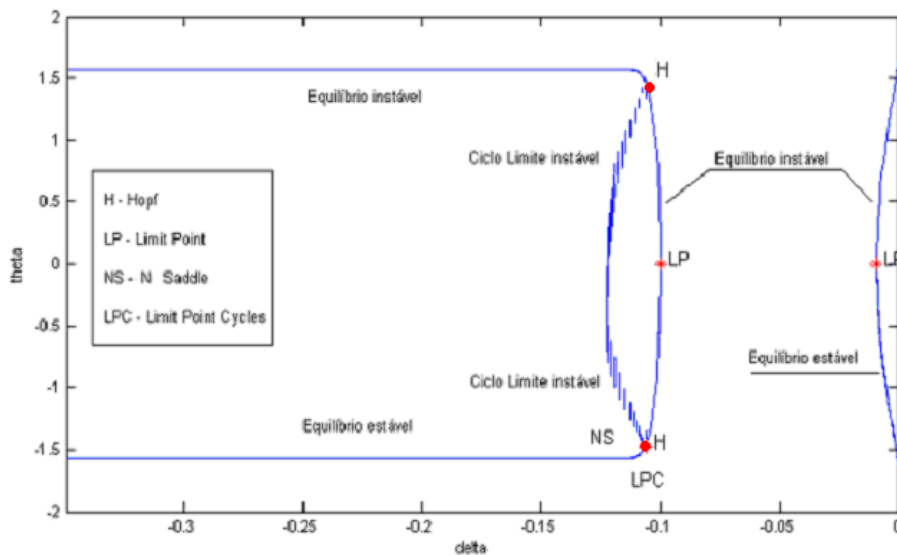


Figura 4.3: Equilíbrio e soluções periódicas para o sistema (4.14) com $m=m_0$.

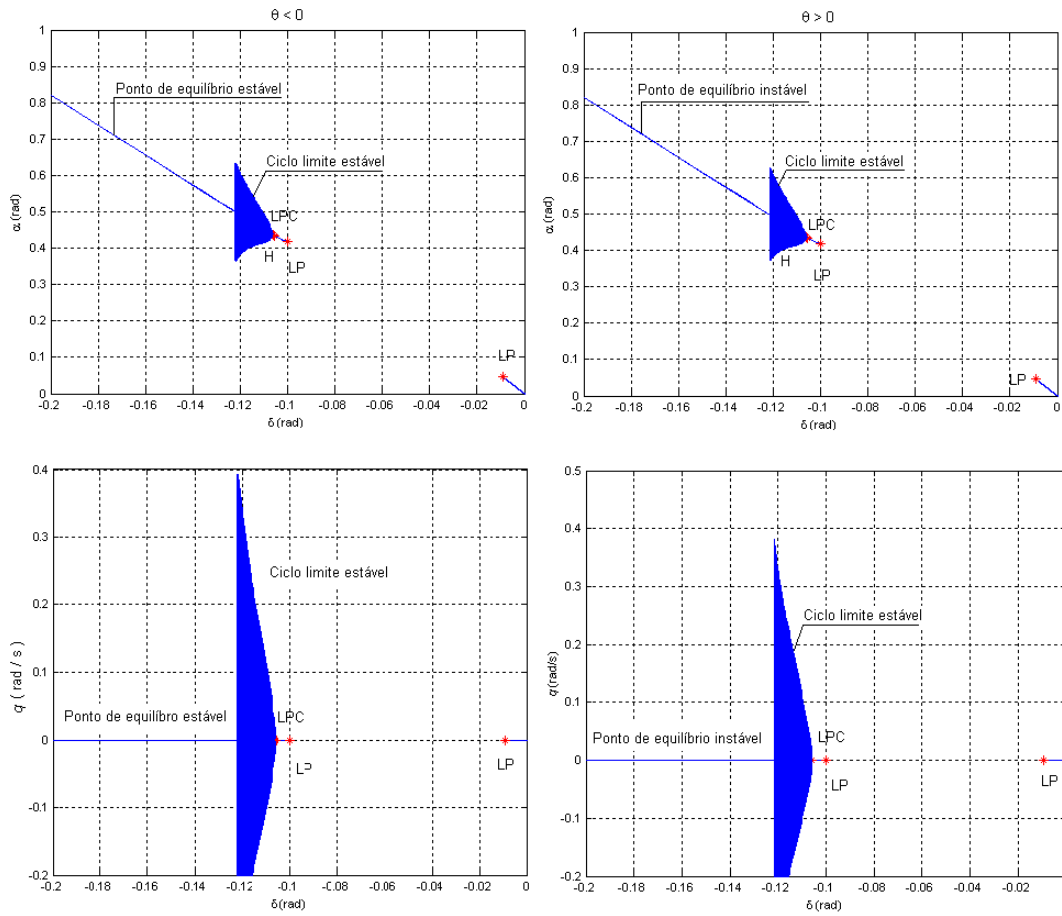


Figura 4.4: Equilíbrio e soluções periódicas para o sistema (4.14) com $m=m_0$ na variável q , com $\theta < 0$.

Da análise das figuras 4.3 e 4.4, podem-se inferir algumas observações:

- 1) Não existe ponto de equilíbrio entre dois pontos limite, isto é, para $\delta_e \in (-0,0999; -0,0090)$.
- 2) O equilíbrio de α e q para $\theta < 0$ são os mesmos pra $\theta > 0$, mas com estabilidades reversas.

3) Na ocorrência da bifurcação de Hopf do sistema temos $a_{12}a_{31}$ e $a_{11}+a_{33}$ com o mesmo sinal.

4) A estabilidade de um dos três autovalores do sistema (4.14) depende do ângulo de arfagem θ_0 inicial.

De acordo com a equação do polinômio característico (4.19) do sistema a estabilidade do equilíbrio do sistema depende do valor de a_{12} . Para o sistema (4.14) tem-se o valor de $a_{12} = -0,03808 \cos^2 \alpha^0 \sin \theta^0$, e, como seno é uma função ímpar o valor de θ^0 determinará o sinal de a_{12} e, a estabilidade de um autovalor do sistema (4.14).

Pode-se visualizar através da figura 4.3, a existência de um salto de transição no intervalo $\delta_e = (-0,099; -0,0090)$, onde o equilíbrio do sistema desaparece. Na dinâmica longitudinal aqui discutida, esse salto significa que os estados α , θ e q são divergentes na região descontínua do equilíbrio do sistema. E esta característica também se refere ao fenômeno de estol, o qual implica que os estados do sistema exibem um salto na dinâmica de voo de uma determinada aeronave (Carrol, 1982).

Adicionalmente, a figura 4.4 mostra a propriedade de que o ângulo de ataque é limitado em torno de 0,01 rad em a aeronave pode perder estabilidade conforme a deflexão δ_e do profundor varia ao manter um alto ângulo de ataque. Através das simulações numéricas efetuadas, mais adiante, vê-se que o ângulo de ataque poderá ser aumentado, sem que ocorra perda da estabilidade com a variação do ângulo δ_e e, também da massa m da aeronave. Através das simulações também se notam que o equilíbrio do sistema é periódico no estado θ , com período de 2π , como mostra a figura 4.5 abaixo:

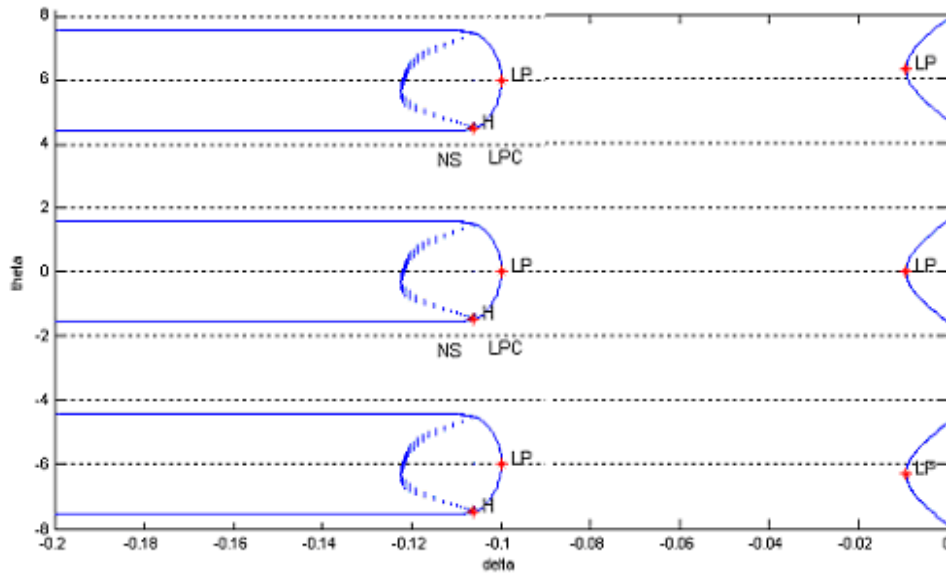


Figura 4.5: Repetição do equilíbrio do sistema em θ para $k*2\pi rad$.

A seguir, exibe-se o histórico de tempo e os planos de fase para explicitação e comprovação da existência das diversas mudanças na estabilidade do sistema (4.14)

4.3.1 Histórico no Tempo e Planos de Fase para Valores de δ_e .

As figuras a seguir, mostram a existência de pontos de equilíbrio estável no sistema. Verificam-se também existência de pontos de equilíbrio estável do sistema (4.14) para $\delta_e=0,11$.

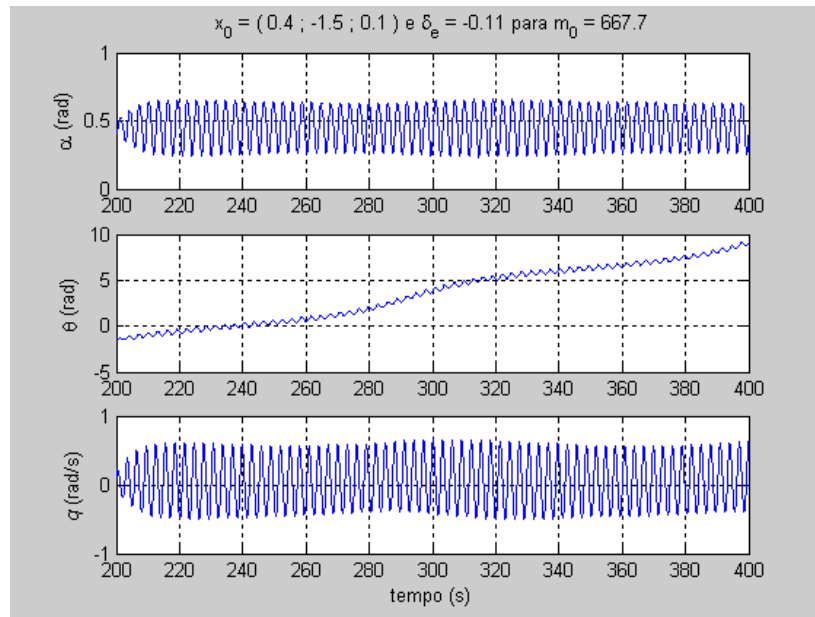


Figura 4.6: Histórico no tempo para o sistema (4.14)
com $m=m_0$ e $\delta_e=0,11$.

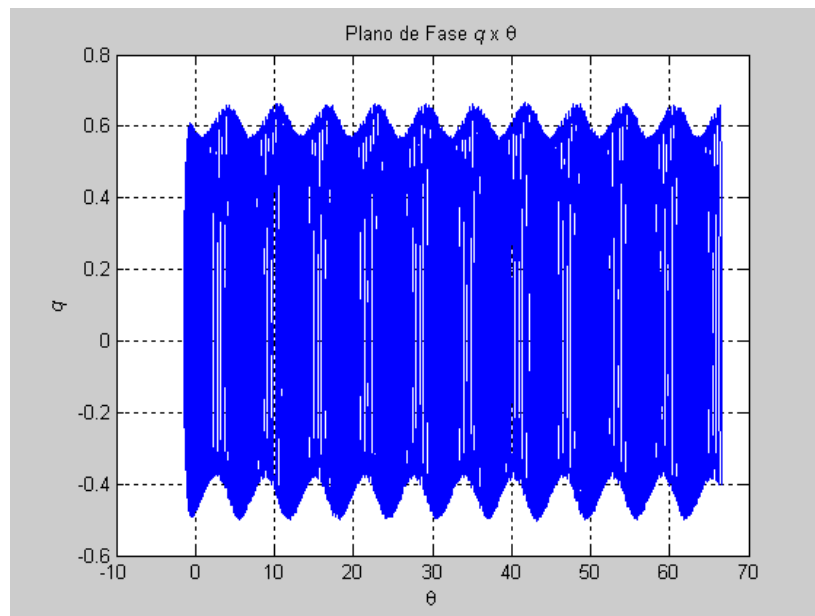


Figura 4.7: Plano de Fase $q \times \theta$ para o sistema (4.14)
com $m=m_0$ e $\delta_e=0,11$.

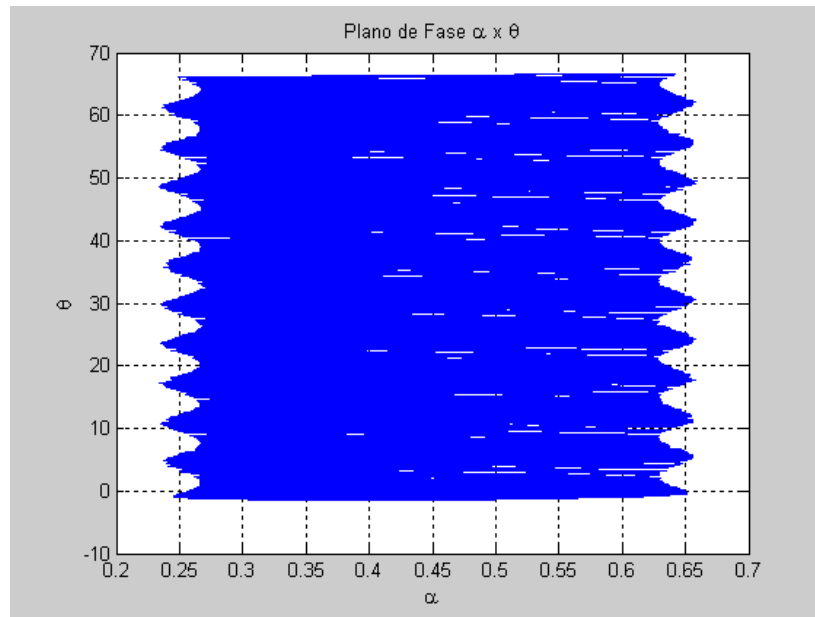


Figura 4.8: Plano de Fase $\theta \times \alpha$ para o sistema (4.14)
com $m=m_0$ e $\delta_e=0,11$.

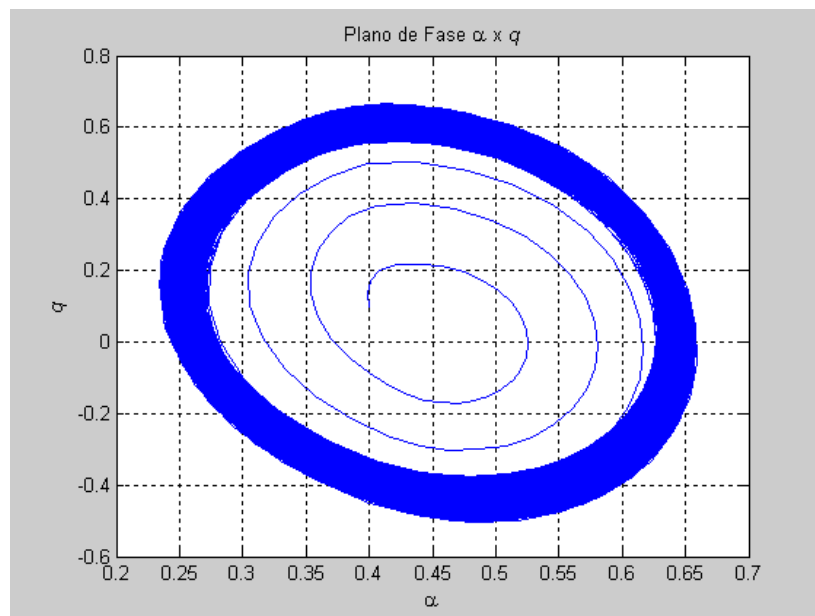


Figura 4.9: Plano de fase $q \times \alpha$ para o sistema (4.14)
com $m=m_0$ e $\delta_e=0,11$.

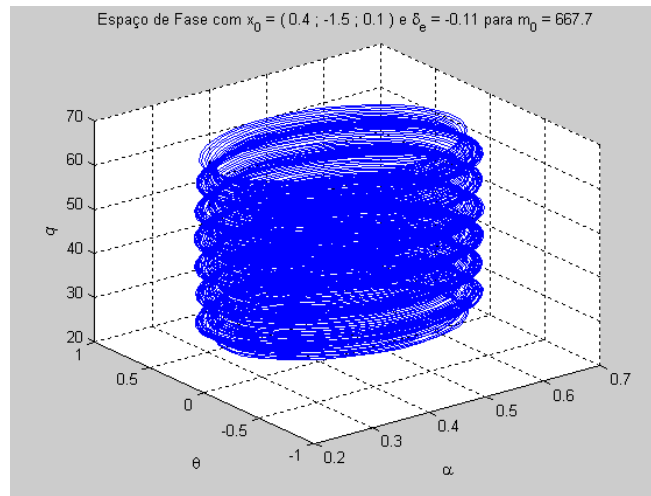


Figura 4.10: Espaço de fase para o sistema (4.14) com $m=m_0$, para o ponto de equilíbrio $(\alpha, \theta, q)=(0,4; -1,5; 0,11)$ e $\delta_e=-0,11$.

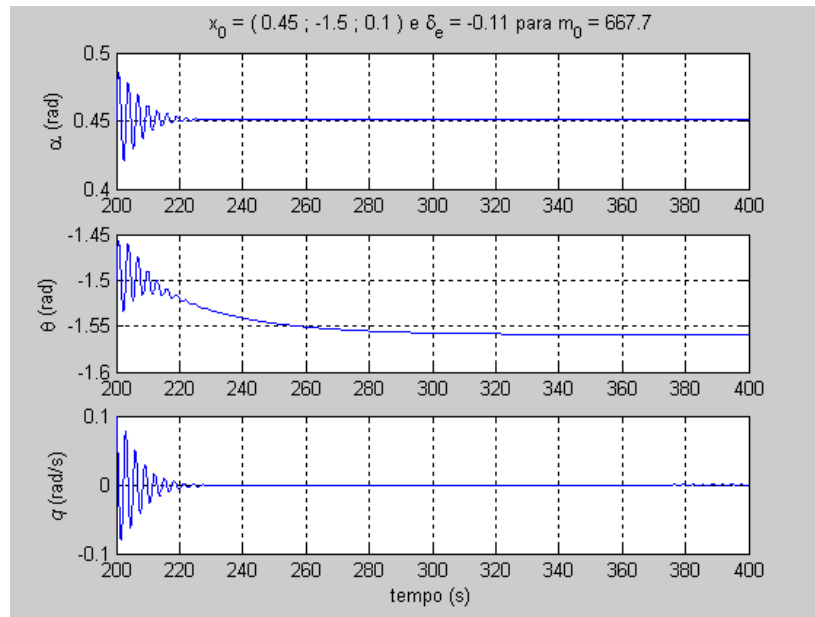


Figura 4.11: Histórico de tempo para o sistema (4.14) com $m=m_0$ e $\delta_e=0,11$.

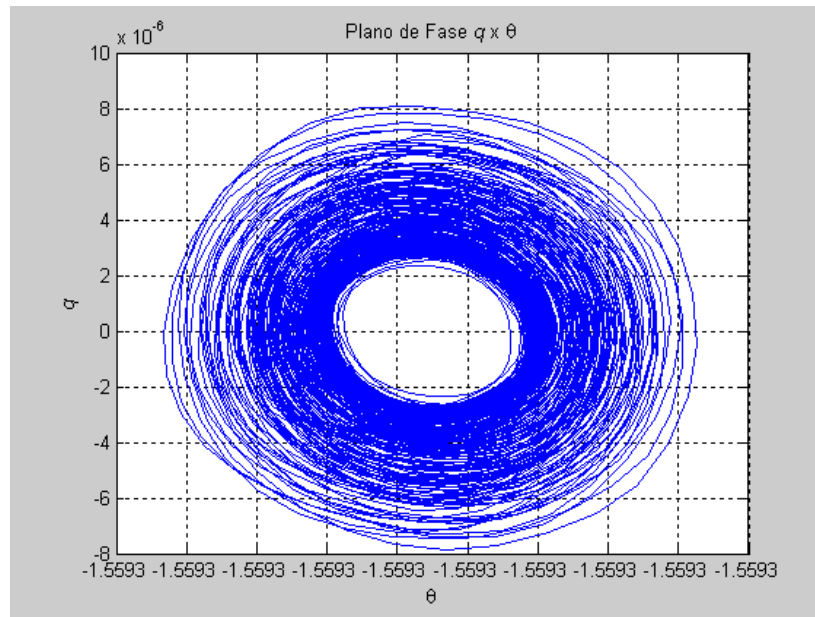


Figura 4.12: Plano de Fase $q \times \theta$ para o sistema (4.14) com $m=m_0$ e $\delta_e=0,11$.

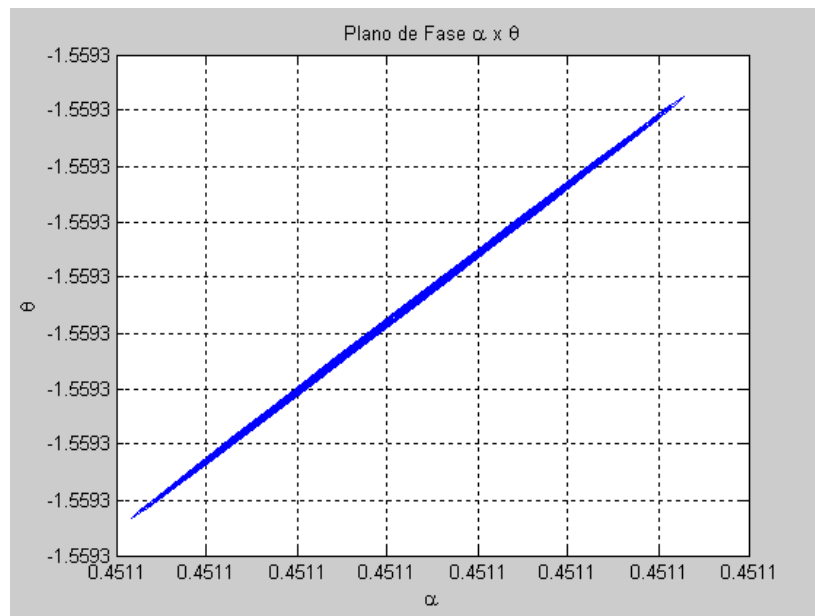
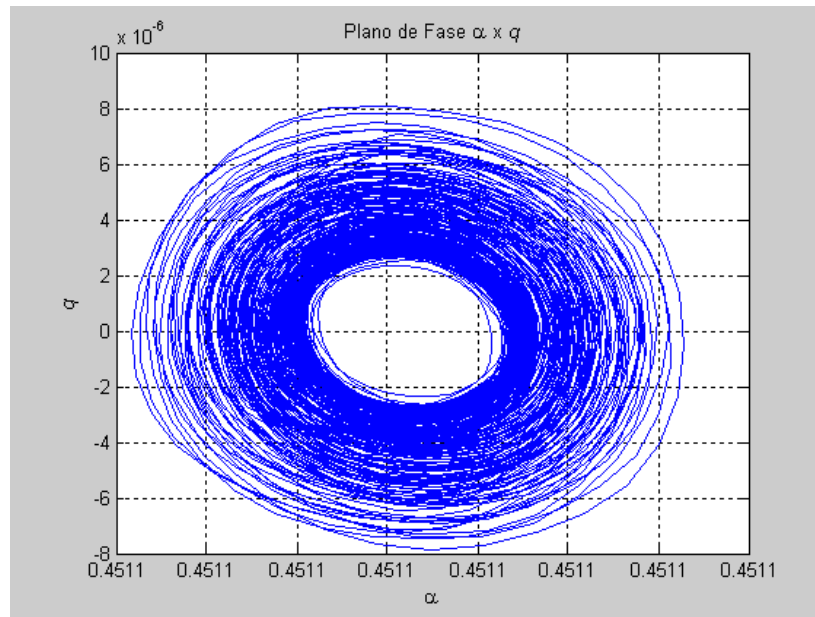
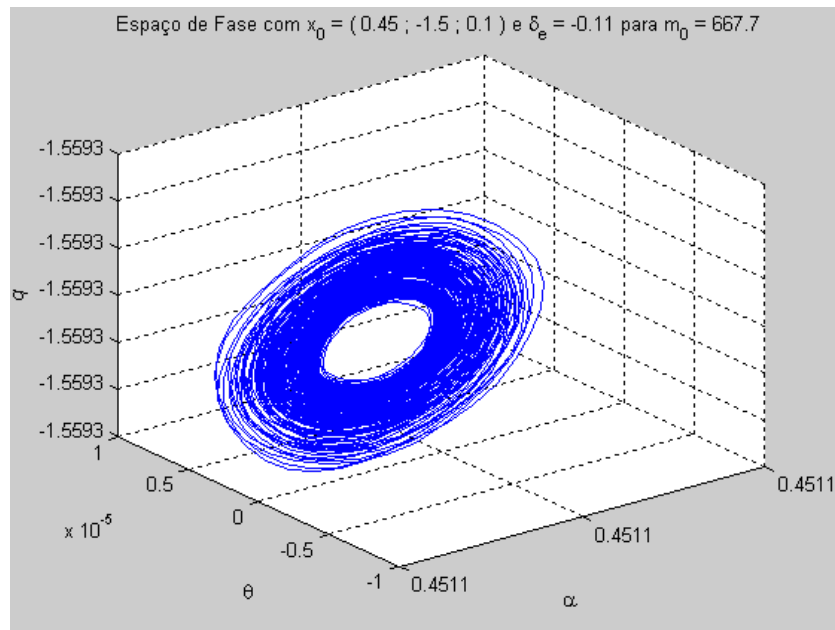


Figura 4.13: Plano de Fase $\theta \times \alpha$ para o sistema (4.14) com $m=m_0$ e $\delta_e=0,11$.



**Figura 4.14: Plano de fase $q \times \alpha$ para o sistema (4.14)
com $m=m_0$ $\theta < 0$ e $\delta_e = 0,11$.**



**Figura 4.15: Espaço de fase para o sistema (4.14)
com $m=m_0$, para o ponto de equilíbrio $(\alpha, \theta, q) = (0,45 ; -1,5 ; 0,11)$ e $\delta_e = -0.11$**

4.3.2 Histórico no Tempo e Planos de Fase para Valores de δ_c dado na Tabela 4.3 para Verificação das Bifurcações.

A partir de agora, analisam-se o comportamento do histórico de tempo e, do plano de fase em cada ponto de bifurcação.

Além disso, observam-se o comportamento do plano de fase e, do histórico de tempo num momento imediatamente anterior e posterior ao instante da ocorrência da bifurcação, pois quando há uma bifurcação, temos uma mudança qualitativa no retrato de fase do sistema. A partir daí, vamos variar o parâmetro de controle δ_c , com o objetivo de verificação do comportamento do equilíbrio do sistema à medida que parâmetro de controle δ_c for variando.

Para as condições iniciais da bifurcação de Hopf e sela-nó da tabela 4.3 obtém-se o histórico de tempo, e os planos de fase. Também será exibida a evolução do plano de fase para cada ponto da tabela 4.3, com o objetivo de verificação de uma mudança qualitativa no plano de fase como dito anteriormente. As figuras a seguir exibem estas propriedades.

Simulações numéricas para o ponto Hopf 1 dado na tabela 4.3:

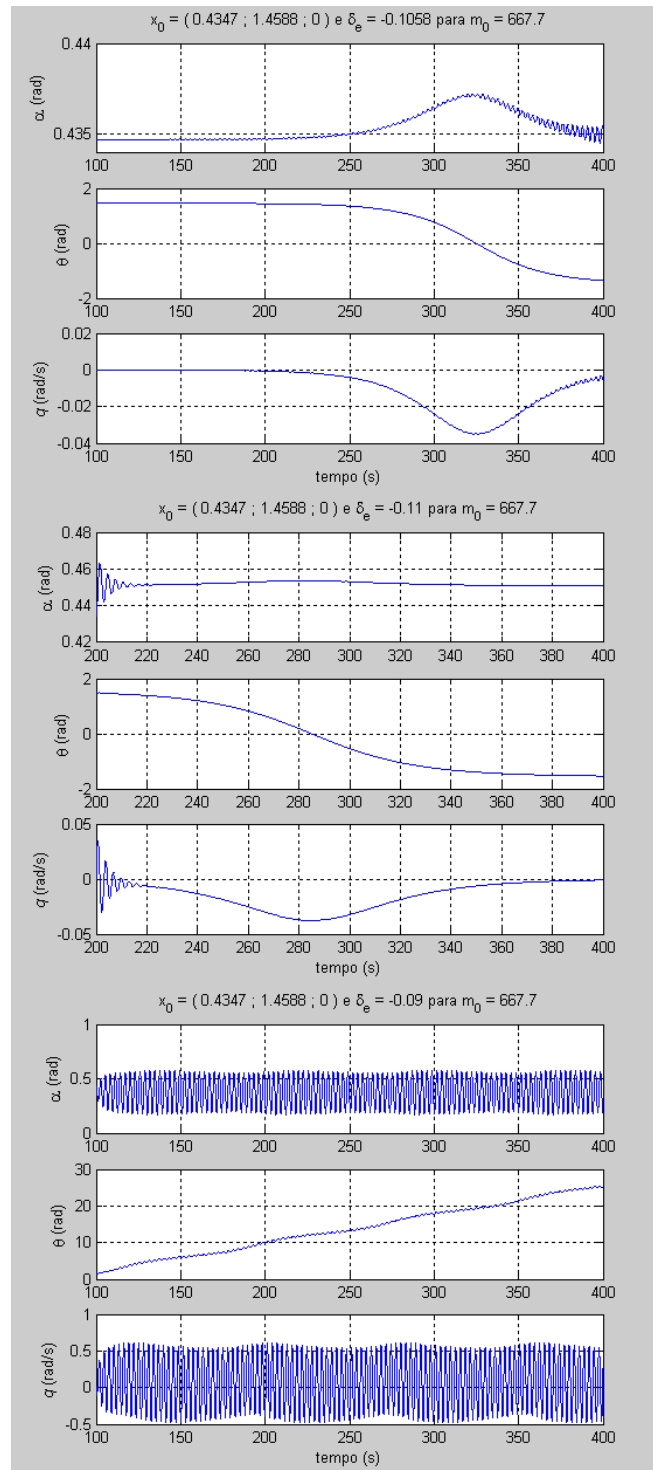


Figura 4.14: Histórico de tempo com δ_e variando em torno do valor referente ao ponto Hopf 1 da tabela 4.3

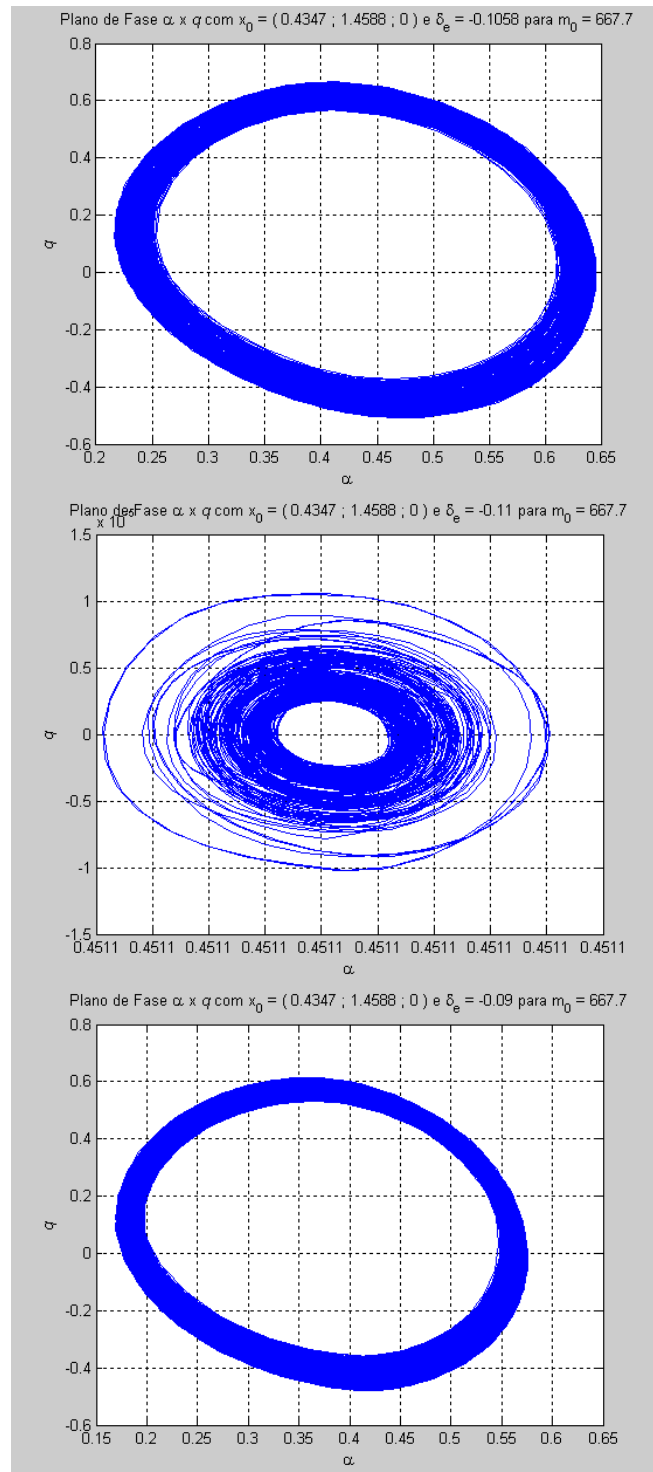


Figura 4.15: Planos de Fase $q \times \alpha$ com δ_e variando em torno do valor referente ao ponto Hopf 1 da tabela 4.3

Na figura a seguir têm-se evolução do plano de fase $\alpha \times q$ conforme a variação de δ_e .

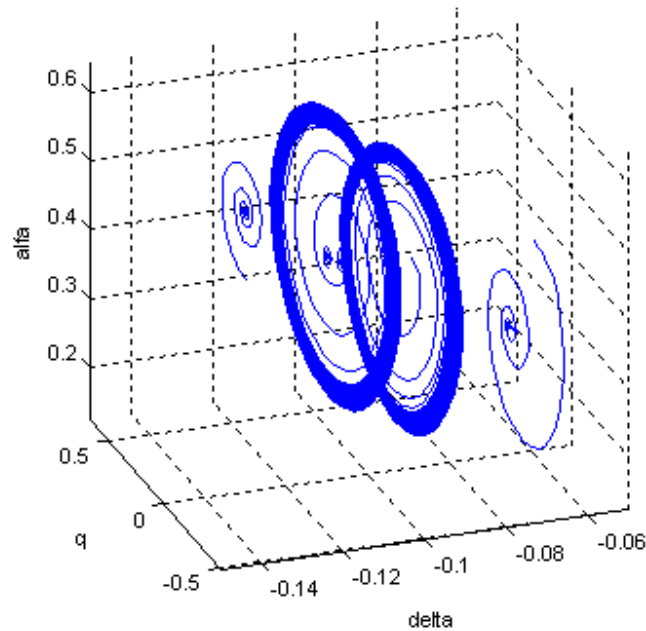


Figura 4.16: Evolução do plano de fase $\alpha \times q$ para o sistema (4.14) com $m=m_0$, no ponto Hopf 1.

Na figura logo acima, se pode perceber a mudança qualitativa no retrato de fase à medida que o parâmetro δ_e passa pelo ponto onde ocorre à bifurcação de Hopf.

A mudança qualitativa no retrato de fase é uma característica da presença de bifurcação.

No apêndice A.1 pode-se verificar as figuras referentes aos outros planos de fase calculados no ponto Hopf 1 da tabela 4.3.

A seguir, apresenta-se uma simulação numérica, para o ponto Hopf 2 da tabela 4.3:

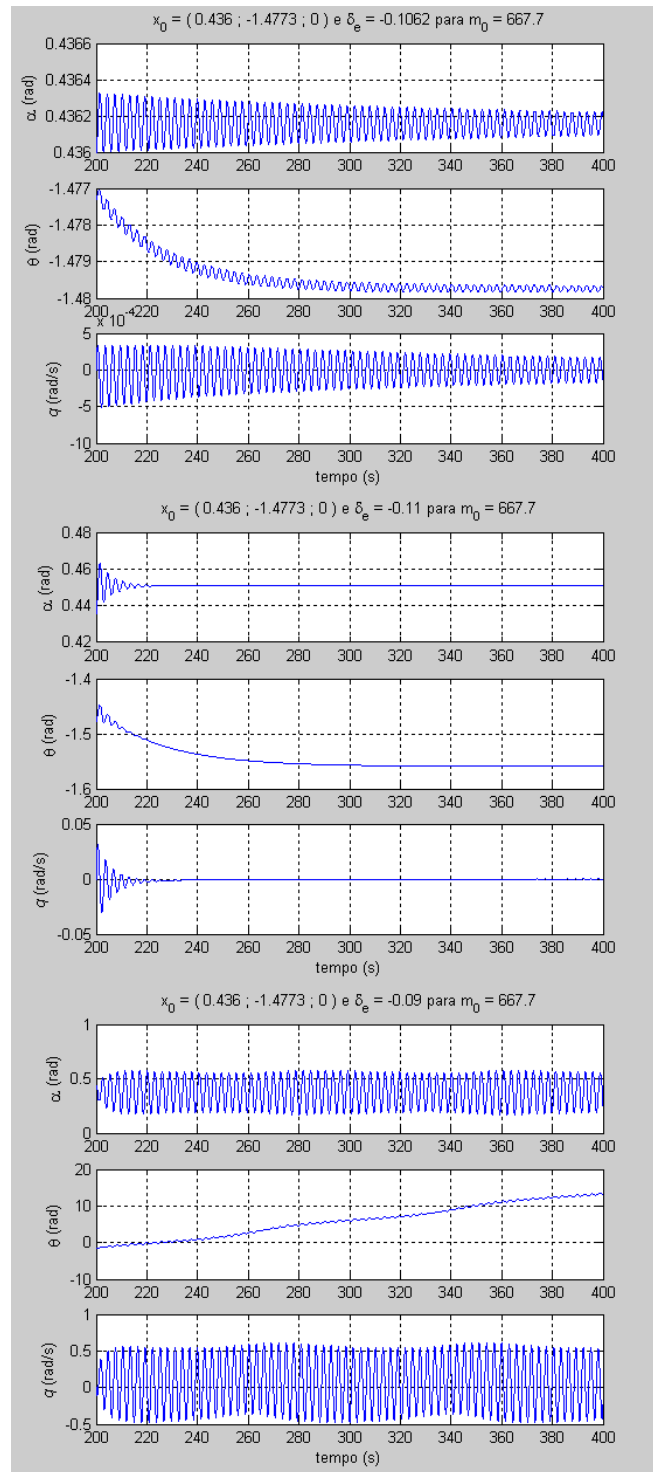


Figura 4.17: Histórico de tempo com δ_e variando em torno do ponto Hopf 2 da tabela 4.3

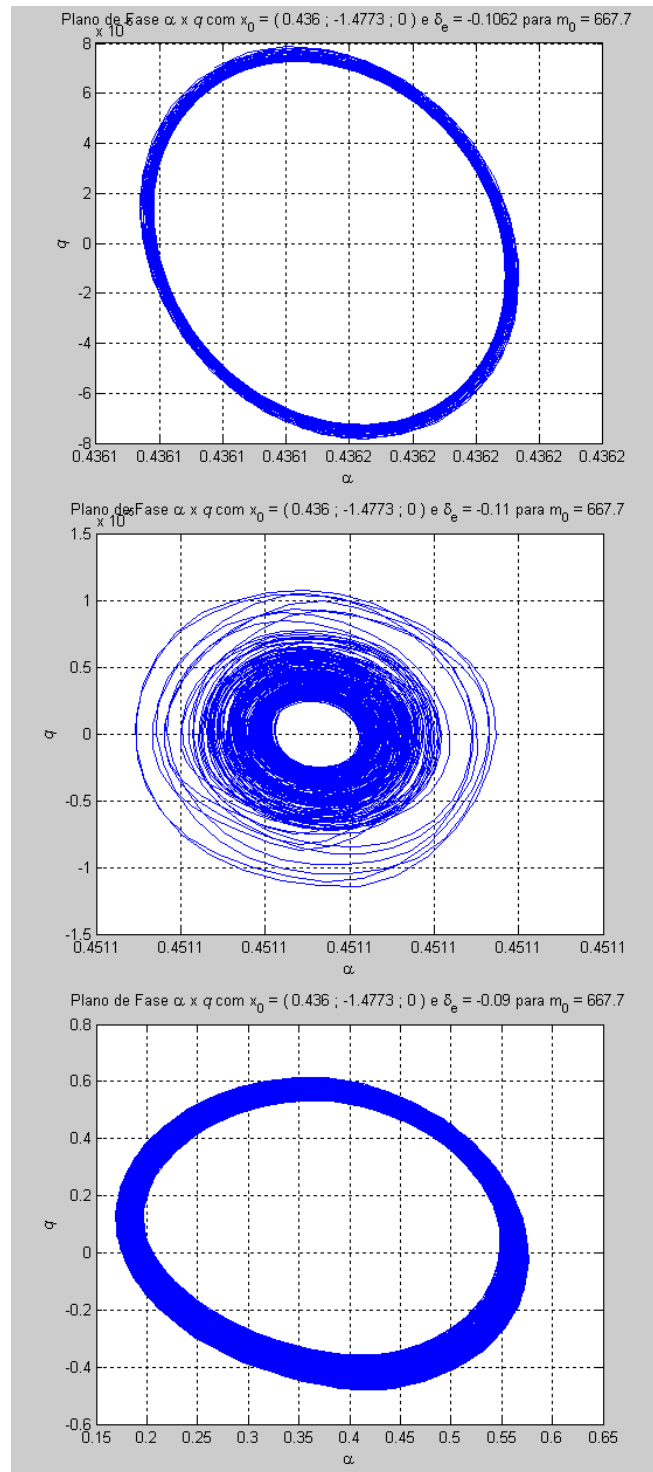


Figura 4.18: Planos de Fase $q \times \alpha$ com δ_e variando em torno do valor referente ao ponto Hopf 2 da tabela 4.3

Na figura a seguir, exibe-se a evolução do plano de fase $\alpha \times q$ conforme a variação de δ_e pelo ponto Hopf 2 da tabela 4.3.

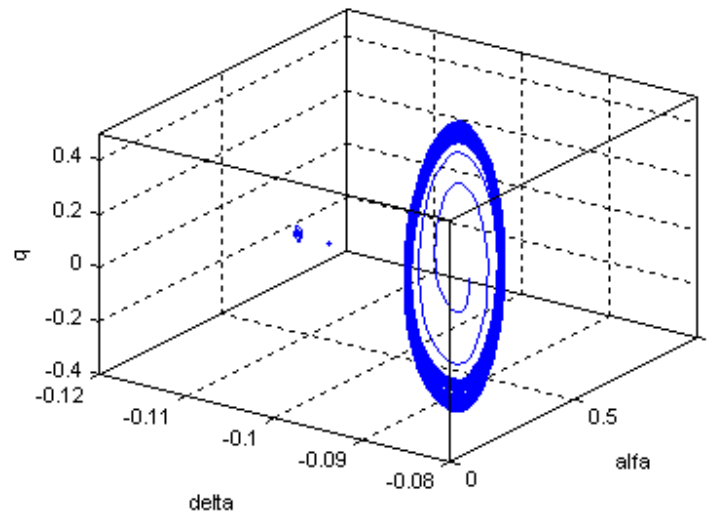


Figura 4.19: Evolução do plano de fase $\alpha \times q$ para o sistema (4.14) com $m=m_0$, no ponto Hopf 2.

Na figura acima se pode perceber a mudança qualitativa no retrato de fase, pois à medida que o parâmetro δ_e passa pelo ponto, onde ocorre a bifurcação de Hopf.

A mudança qualitativa no retrato de fase é uma característica da presença de bifurcação.

Apresentam-se no apêndice A.2, as figuras referentes aos outros planos de fase, calculados no ponto Hopf 2 da tabela 4.3.

A seguir faz-se a simulação numérica, para o ponto Sela nó 1, exibido na da tabela 4.3:

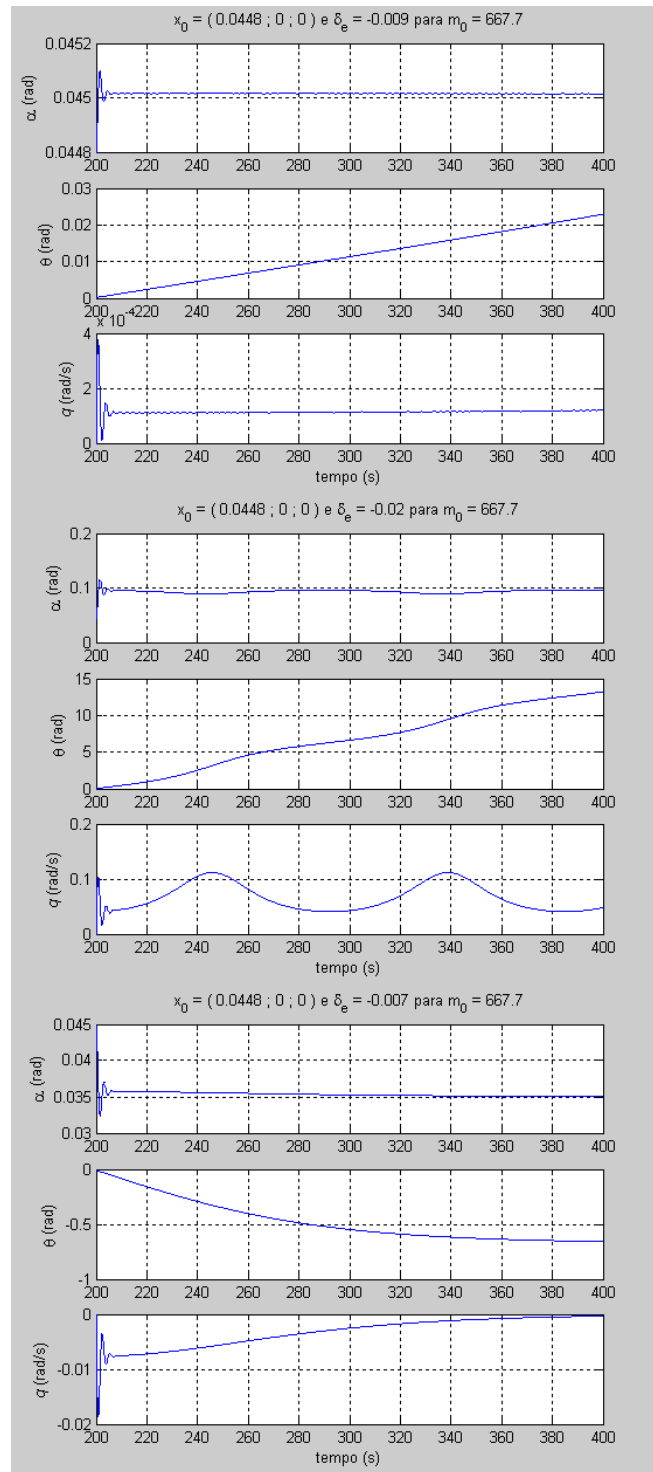


Figura 4.20: Histórico de tempo com δ_e variando em torno do ponto Sela nó 1 da tabela 4.3

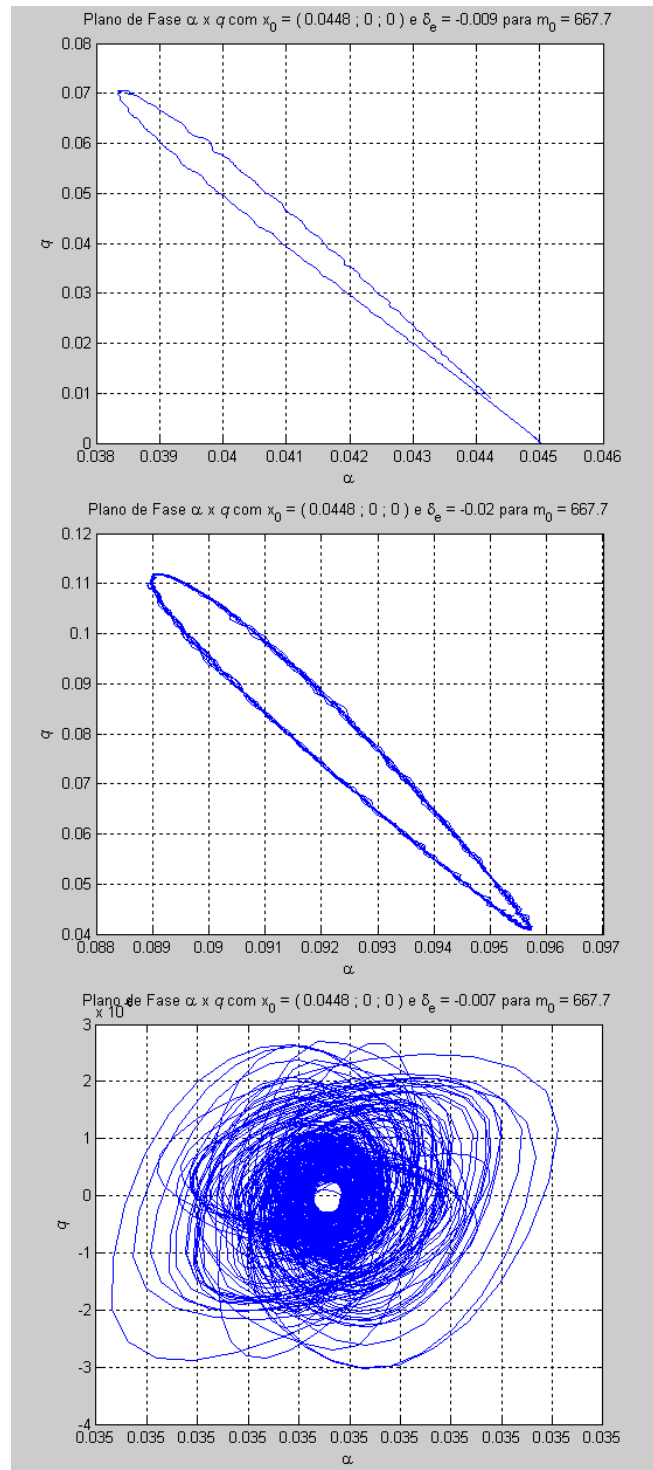


Figura 4.21: Planos de Fase $\alpha \times q$ com δ_e variando em torno do valor referente ao ponto Sela nó 1 da tabela 4.3

Na figura a seguir, apresenta-se a evolução do plano de fase $\alpha \times q$ conforme a variação de δ_e pelo ponto Sela nó 1 da tabela 4.3.

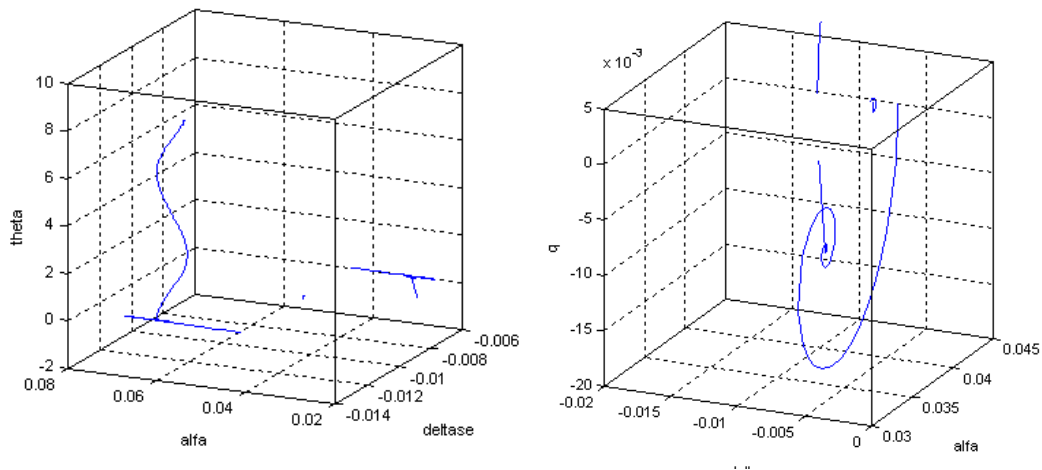


Figura 4.22: Evolução do plano de fase $\theta \times \alpha$ e $q \times \alpha$ para o sistema (4.14) com $m=m_0$, no ponto sela nó 1.

Na figura acima se pode perceber a mudança qualitativa no retrato de fase, à medida que o parâmetro δ_e passa pelo ponto onde ocorre à bifurcação.

A mudança qualitativa no retrato de fase é uma característica da presença de bifurcação.

Na figura, logo acima foi calculado a evolução de dois planos de fase (fase $\theta \times \alpha$ e $q \times \alpha$) para melhor visualização das mudanças qualitativas no equilíbrio das soluções.

No apêndice A.3, exibem-se as figuras referentes aos outros planos de fase calculados no ponto Sela nó 1 da tabela 4.3.

A partir de agora, exibem-se as simulações numéricas, para o ponto Sela nó 2:

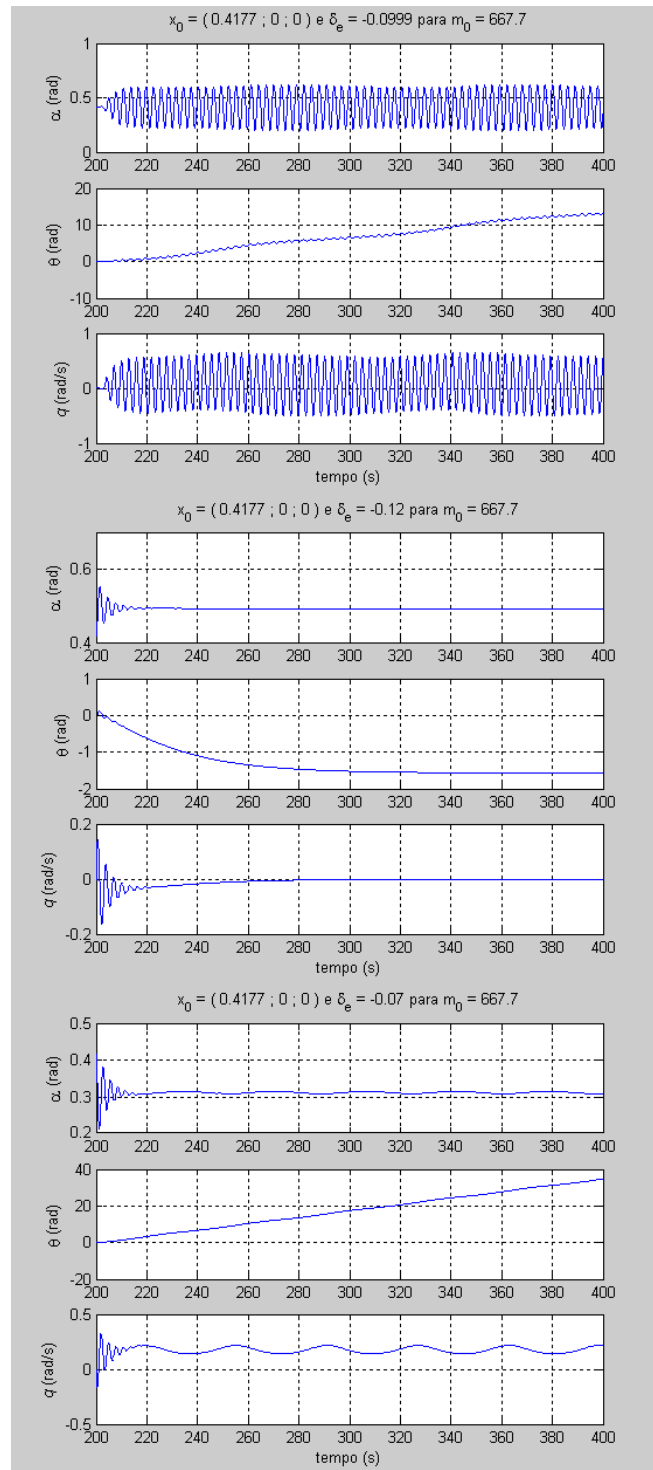


Figura 4.23: Histórico de tempo com δ_e variando em torno do ponto Sela nó 2 da tabela 4.3

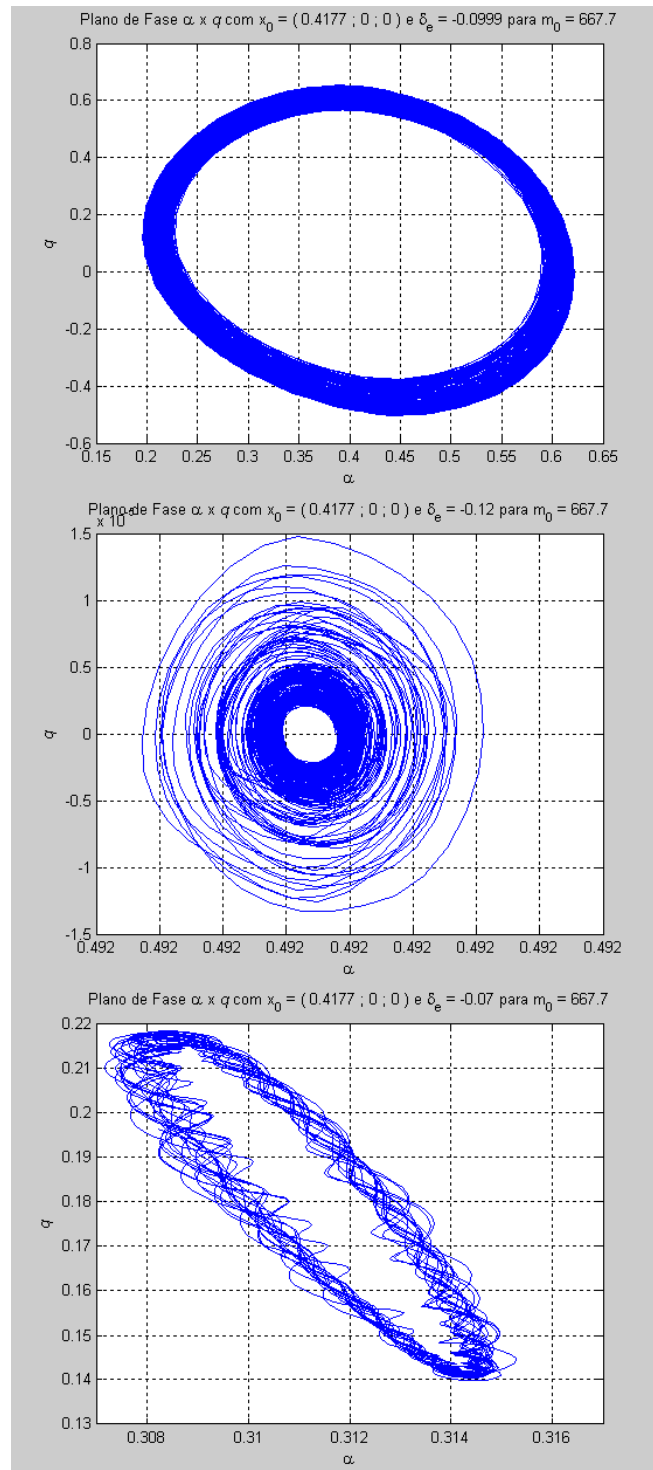


Figura 4.24: Planos de Fase $\alpha \times q$ com δ_e variando em torno do valor referente ao ponto Sela nó 2 da tabela 4.3

Nas figuras exibidas a seguir têm-se a evolução do plano de fase $\alpha \times q$ considerando-se a variação de δ_e pelo ponto Sela nó 2 da tabela 4.3.

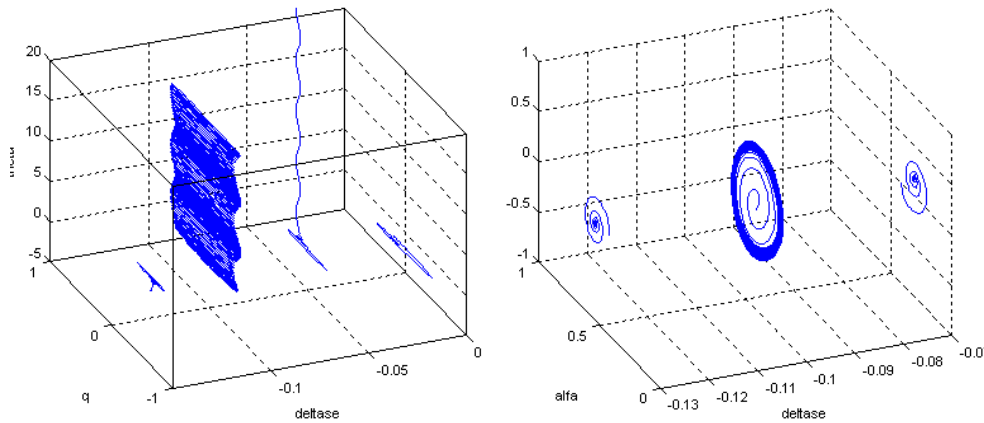


Figura 4.25: Evolução do plano de fase $q \times \theta$ e $\alpha \times q$ para o sistema (4.14) com $m=m_0$, no ponto sela nó 2.

Na figura exibida acima, pode-se perceber a mudança qualitativa no retrato de fase à medida que o parâmetro δ_e passa pelo ponto onde ocorre à bifurcação. A mudança qualitativa no retrato de fase é uma característica da presença de bifurcação. Na figura acima foi calculado a evolução de dois planos de fase (fase $\theta \times \alpha$ e $q \times \alpha$) para melhor visualização das mudanças qualitativas no equilíbrio das soluções. No apêndice A.4 exibem-se as figuras, referentes aos outros planos de fase calculados no ponto Sela nó 2, mostrado na tabela 4.3.

De acordo com a pesquisa efetuada nesta tese percebe-se, pela evolução dos planos de fase, que realmente houve uma mudança nos planos de fase conforme δ_e cruzava os pontos de bifurcação, o que condiz com a teoria estudada.

A seguir, para se verificar a ocorrência de bifurcação, toma-se mais um parâmetro para bifurcação. Considera-se esse novo parâmetro como sendo a massa da aeronave.

4.3.3 Efeito da Massa da Aeronave nos Pontos de Equilíbrio:

Como visto anteriormente, existe um salto na região de estabilidade do sistema. Uma maneira de se tentar resolver esse problema é alterando-se a massa m da aeronave, o que afetará, então, a existência dos pontos de equilíbrio. *Dessa maneira pode-se tratar a massa m da aeronave como um segundo parâmetro de bifurcação.* Após algumas simulações numéricas, tomando-se diferentes valores de m , verificamos que dois pontos limites do sistema ficam cada vez mais perto entre si a medida que a massa é aumentada, até o momento em que o salto desaparece.

As figuras 4.26 e 4.27 a seguir ilustram o comportamento dos pontos limites à medida que a massa vai aumentando.

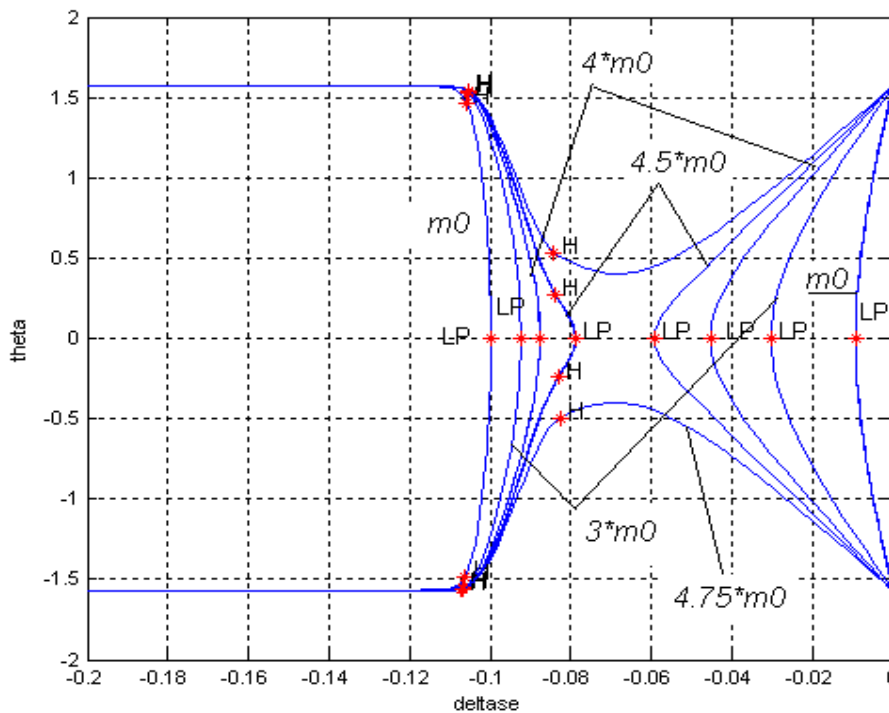


Figura 4.26: Evolução dos pontos limites em relação ao aumento da massa m_0 do sistema (4.14).

Como observado, não somente os pontos limites são movidos, mas também os pontos de bifurcação são rearranjados. *Além disso, quando a massa for suficientemente grande, dois novos pontos de bifurcação aparecerão.*

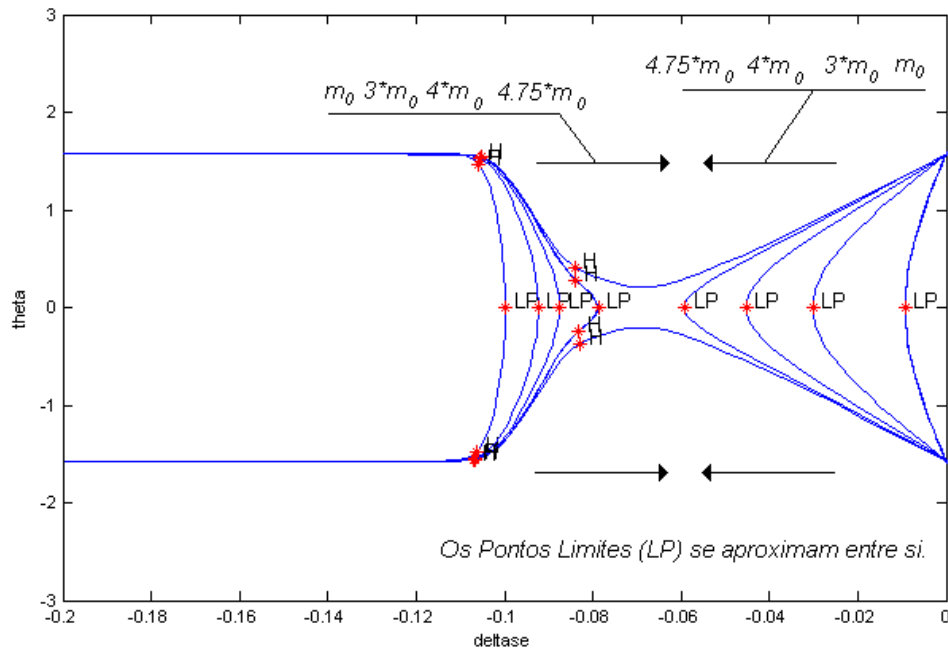


Figura 4.27: Evolução dos pontos limites em relação ao aumento da massa m_0 do sistema (4.14).

Nas figuras 4.28, 4.29 e 4.30, exibidas a seguir, observam-se a evolução do ponto limite (LP) esquerdo. Notamos que à medida que a massa é aumentada dois novos pontos de bifurcação de Hopf (H) próximos ao ponto limite (LP) aparecem.

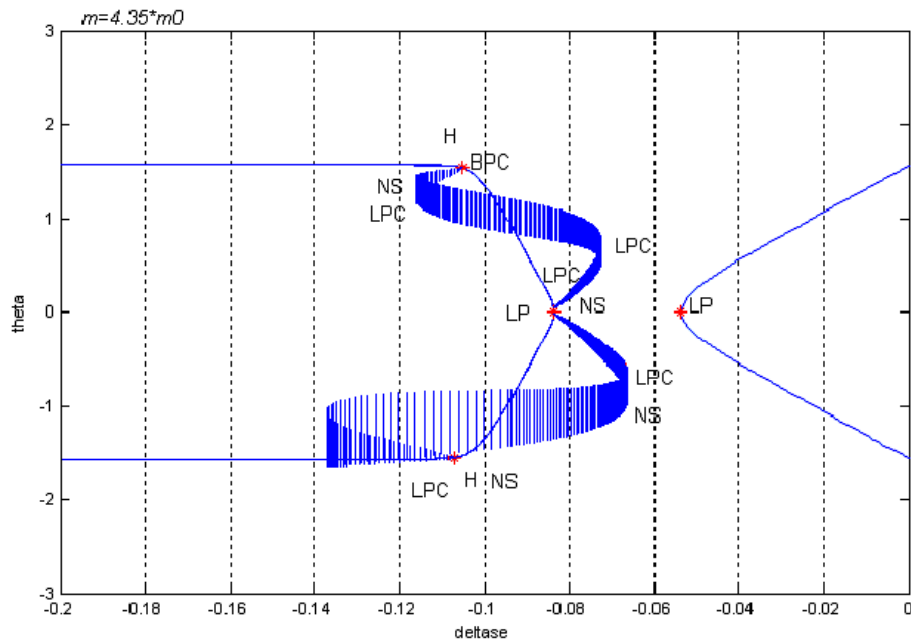


Figura 4.28: Evolução dos pontos limites em relação ao aumento da massa $=4.35m_0$.

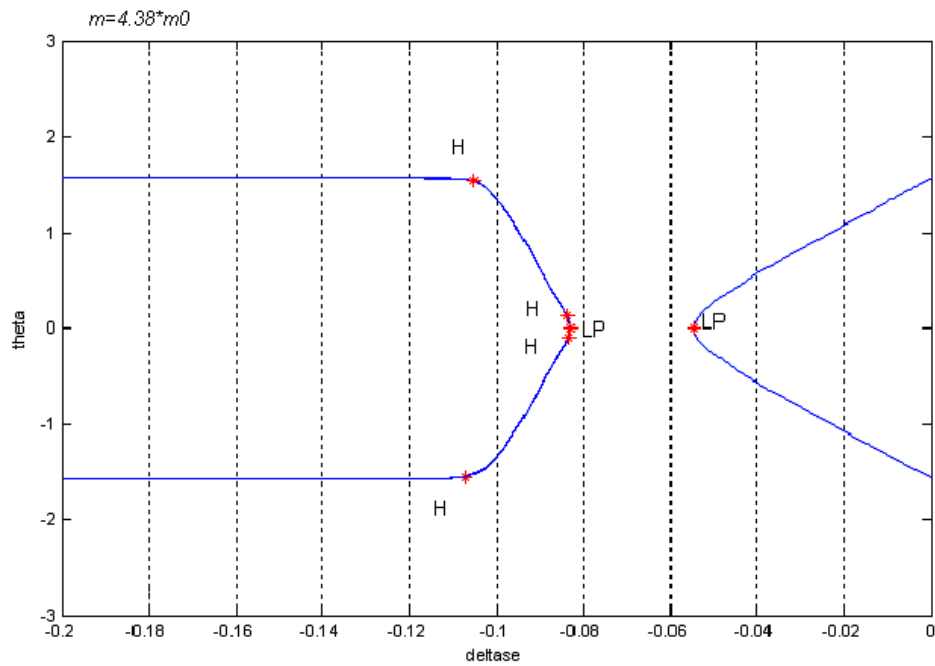


Figura 4.29: Evolução dos pontos limites em relação ao aumento da massa $=4.38m_0$.

Na figura abaixo, apresenta-se o diagrama de bifurcação para a condição $m=4.47*m_0$. Neste diagrama são observados dois pares de bifurcação de Hopf e uma duplicação de ciclo

limite que, em um dos lados se torna estável. Conforme o valor da massa m aumenta o ponto limite (LP) esquerdo se torna um ponto de bifurcação sela-nó para valores de $m > 4.35$.

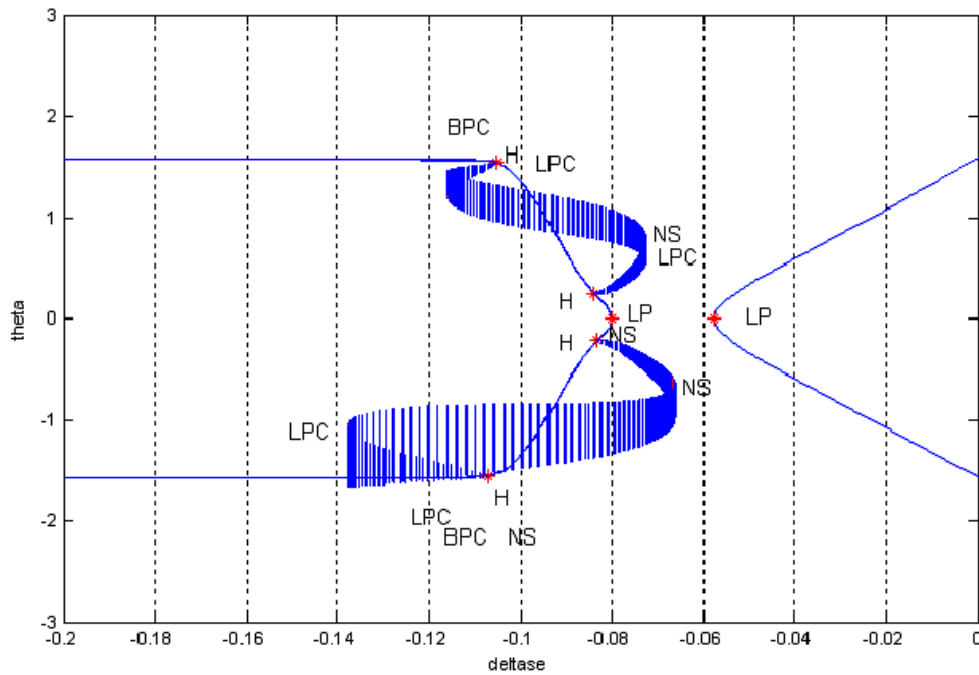
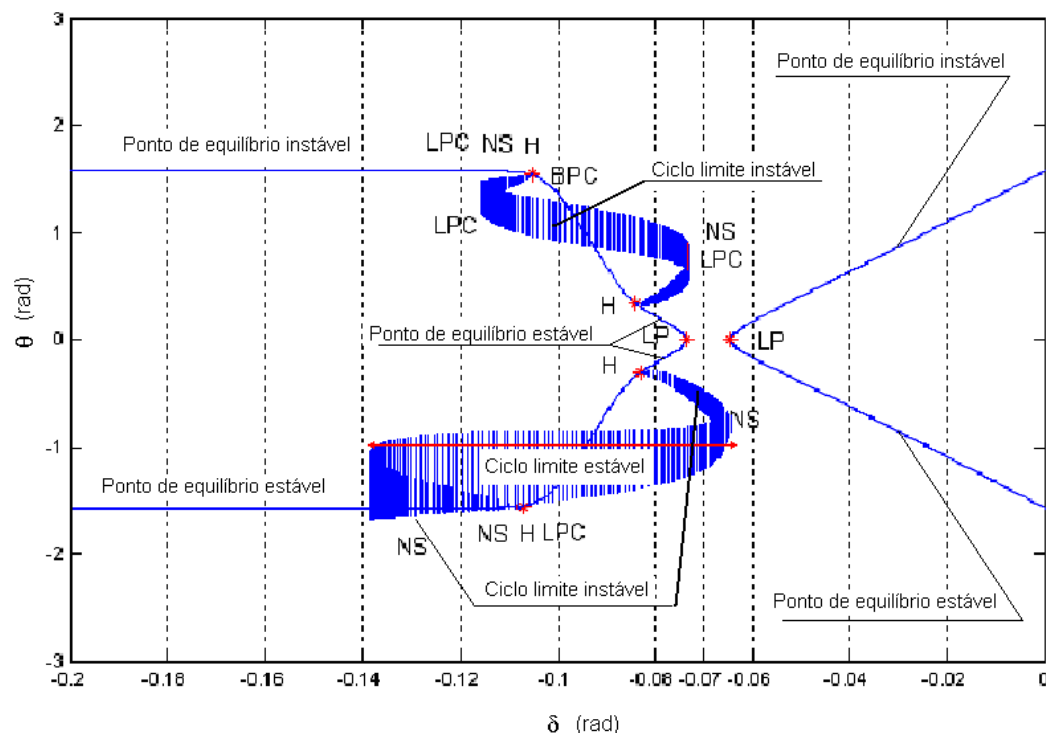


Figura 3.30: Evolução dos pontos limites em relação ao aumento da massa $=4.47m_0$.

Fazendo-se $m=4.58*m_0$, obtém-se um novo diagrama, como ilustrado na figura 3.31 a seguir:



É interessante notar na figura 4.31 que, apesar de ainda existir uma descontinuidade no intervalo de δ_e , um ciclo limite estável atravessa essa descontinuidade dos pontos de equilíbrio quando a massa $m=4.58*m_0$.

Este fato pode fornecer uma solução para se conectar o comportamento de salto entre os dois pontos de bifurcação sela-nó, esquerdo e direito, conforme δ_c varia.

Em tal caso, o ângulo de ataque pode ser alterado mudando o valor de δ_e , mas, entretanto deve-se notar que não existe nenhum ponto de equilíbrio estável entre os dois pontos Hopf, para ângulos de arfagem θ negativos. Realmente, pois conforme δ_e vai diminuindo a partir do zero, os estados primeiramente permanecem em pontos de equilíbrio estável, e então salta para um ciclo limite estável quando δ_e cruzar o primeiro valor crítico no qual ocorre a bifurcação. Conforme o parâmetro δ_e continua a diminuir, a oscilação do sistema continua até δ_e atravessar o segundo

ponto crítico. Quando isso ocorrer os estados irão convergir para um equilíbrio estável novamente, e então o ângulo de ataque poderá ser aumentado eficientemente através do controle da deflexão de δ_e .

As figuras 4.32 e 4.33, a seguir, mostram o histórico de tempo e plano de fases para o sistema antes e depois do parâmetro δ_e atravessar o ponto de bifurcação sela-nó.

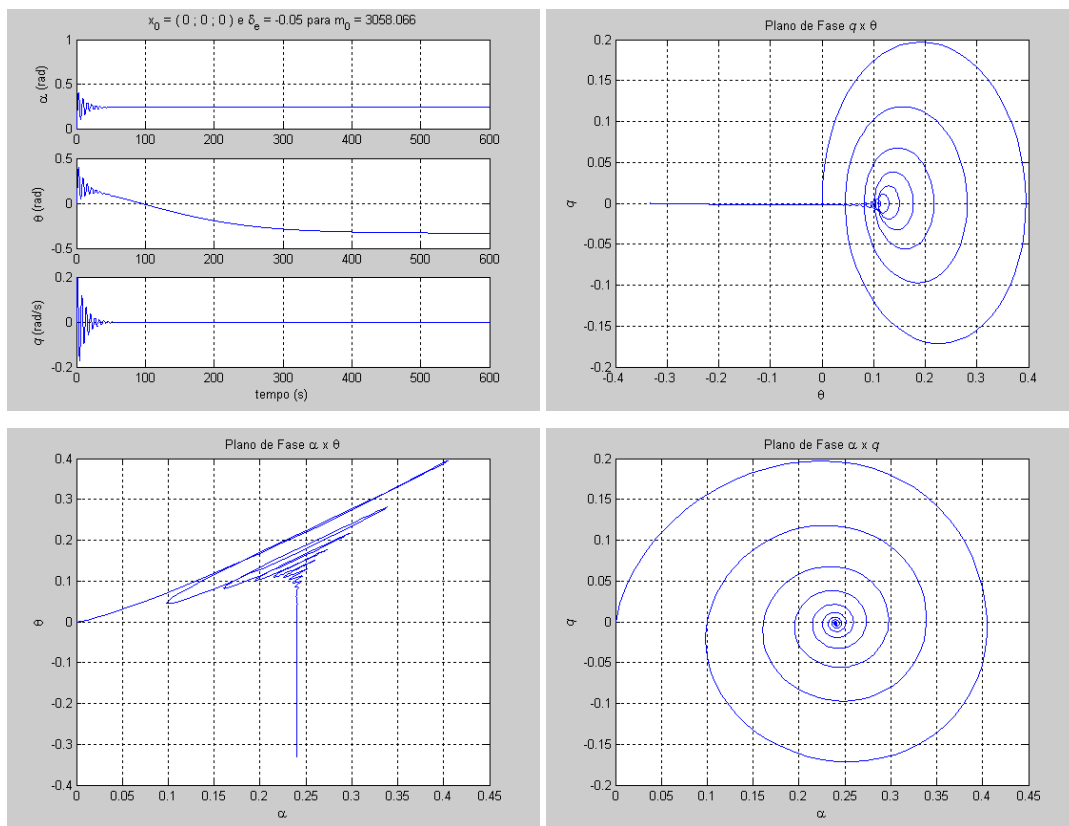


Figura 4.32: Histórico de tempo e planos de fase em relação ao aumento da massa $=4.58m_0$, com $\delta_e = -0.05$.

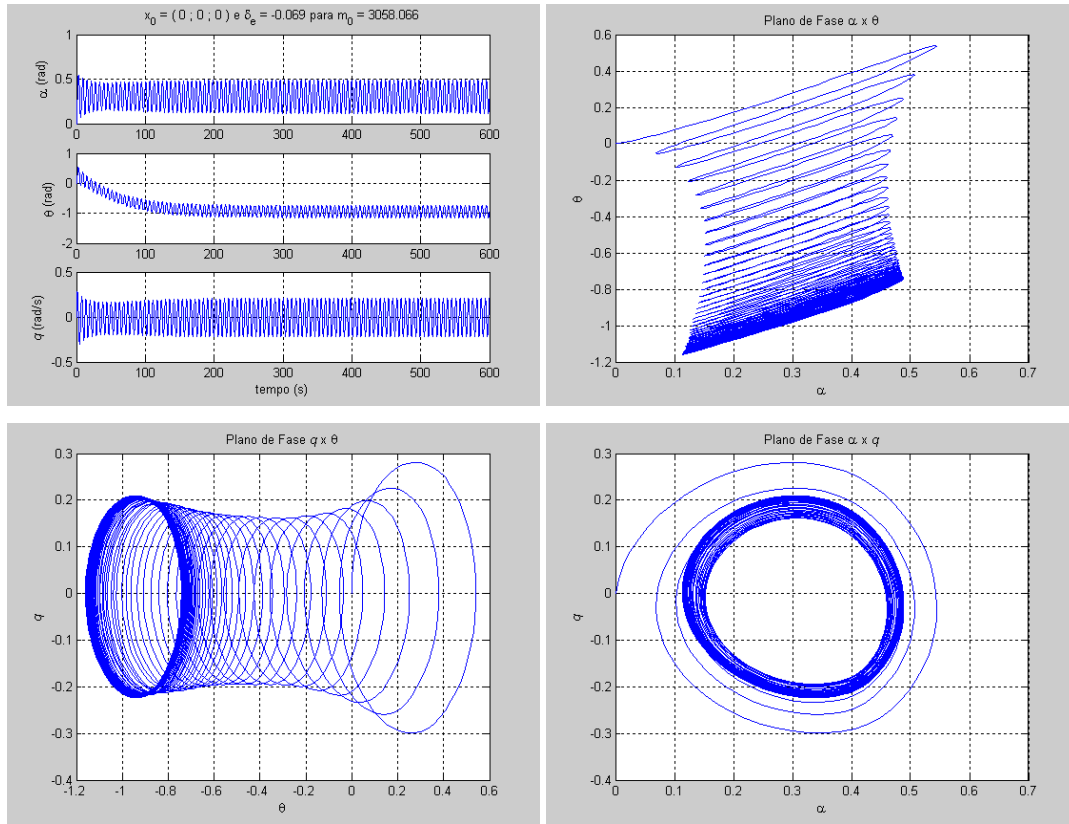


Figura 4.33: Histórico de tempo e planos de fase em relação ao aumento da massa $=4.58m_0$, com $\delta_e = -0.069$.

Na figura 4.32 vê-se que o sistema converge para um ponto de equilíbrio estável enquanto que, na figura 4.33, o sistema converge para um ciclo limite estável.

A figura 4.34, a seguir ilustra o desaparecimento da descontinuidade do equilíbrio do sistema quando o parâmetro de massa varia para $m=4.61*m_0$.

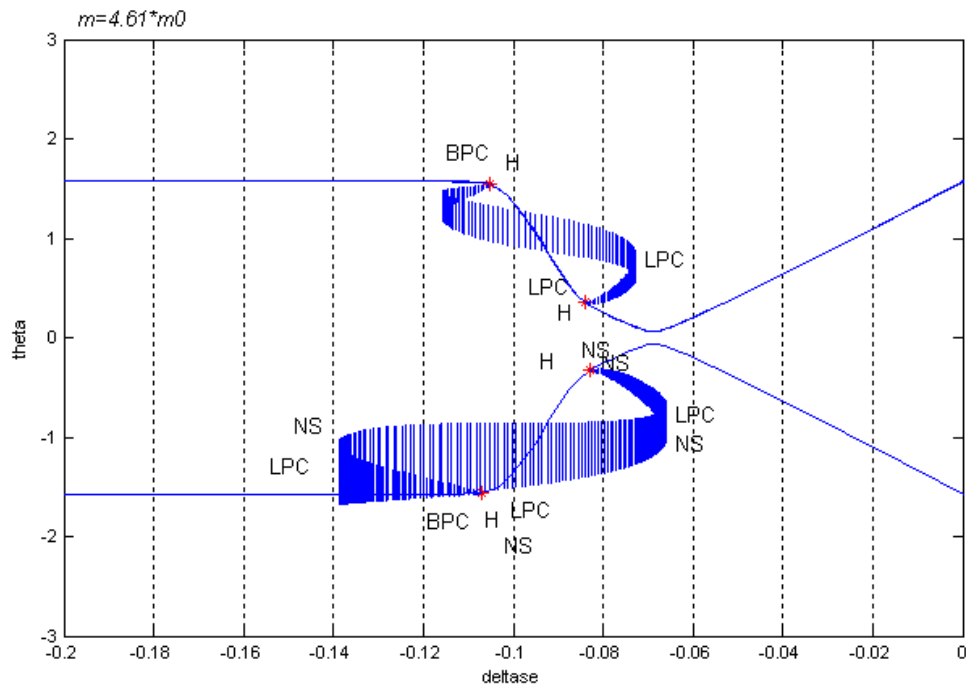


Figura 4.34: Evolução dos pontos limites em relação ao aumento da massa $=4.61m_0$.

Ressalta-se que na figura 4.34, os dois pontos sela-nó desaparecem enquanto que dois pares de bifurcação de Hopf permanecem (Cherng, 2003).

Para se analisar o comportamento qualitativo da dinâmica longitudinal de uma aeronave, as características e a existência dos pontos de equilíbrio são muito importantes. E, dessa forma, verificando-se que o aumento da massa m do sistema (4.14) como, por exemplo, para $m=5*m_0$, leva a continuidade do equilíbrio do sistema para todo $\delta_e \in [-0,2 ; 0]$ como representado na figura a seguir.

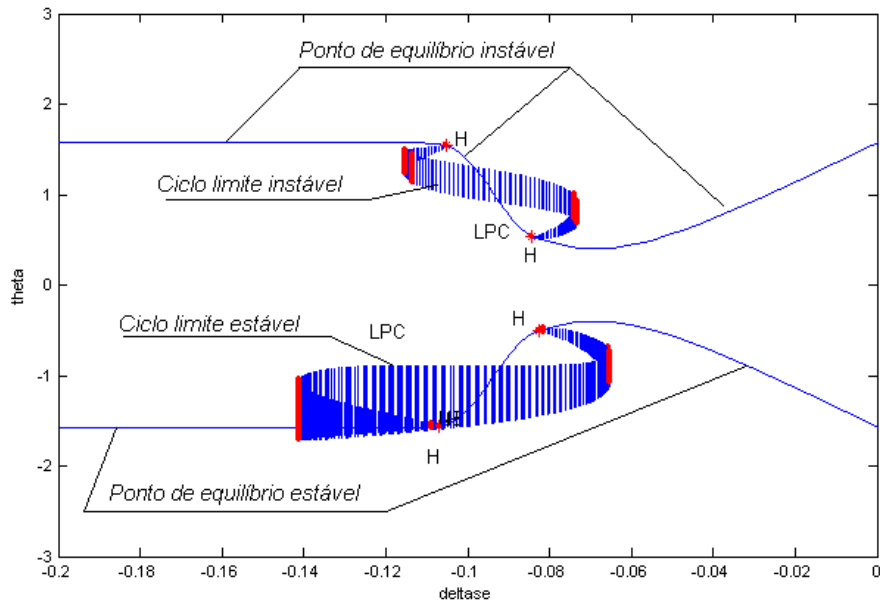


Figura 4.35: Equilíbrio e soluções periódicas para o sistema (4.14) com $m=5*m_0$

Observa-se ainda, que o sistema modificado tem dois pares de bifurcações de Hopf subcríticas. As localizações das bifurcações são dadas na tabela a seguir.

Tabela 4.4: Pontos de bifurcação para $m=5*m_0$.

<i>Pontos</i>	<i>α (rad)</i>	<i>θ (rad)</i>	<i>q (rad)</i>	<i>δ (rad/s)</i>
HPF-1	0.381108	0.531238	0	-0.084208
HPF-2	0.432570	1.541697	0	-0.105210
HPF-3	0.374950	-0.498879	0	-0.082545
HPF-4	0.439561	-1.559730	0	-0.107098

Na figura 4.35 tem-se que os pontos de equilíbrio do sistema modificado com $m=5*m_0$ são estáveis para $\theta < 0$, com exceção dos pontos entre as bifurcações de Hopf HPF-3 e HPF-4 dadas pela tabela 4. Da mesma forma, todos os pontos de equilíbrio são instáveis para $\theta > 0$. Além disso, as soluções periódicas que emergem das bifurcações de Hopf HPF-3 e HPF-4 para $\theta < 0$ são observadas como sendo ciclos limites estáveis. A figura 4.36 a seguir mostra o

histórico de tempo para o sistema com $m=5*m_0$, $\delta_e = -0,0842$ e condições iniciais $\alpha=0,6$; $\theta=-0,86$ e $q=0,28$.

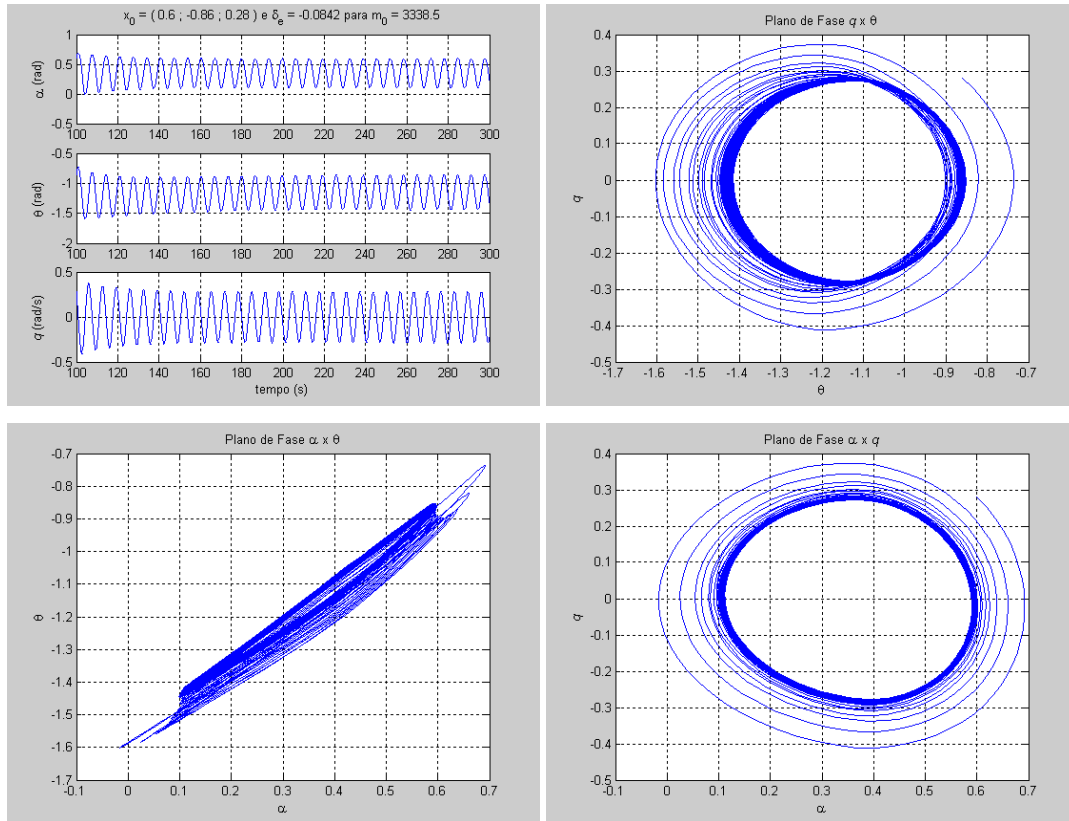


Figura 4.36: Histórico de tempo e plano de fases para o sistema (4.14) com

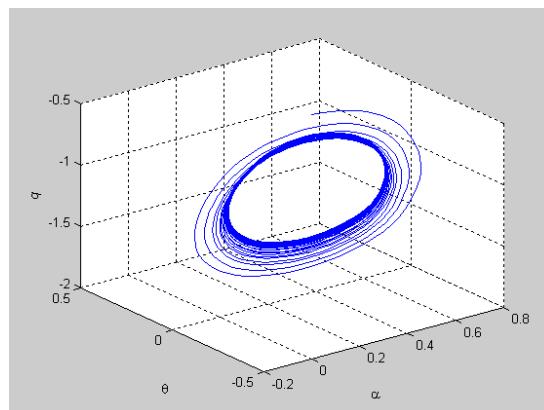


Figura 4.37: Espaço de fases para o sistema (4.14) com $m=5*m_0$.

Este resultado mostra que em $\delta_e = -0,0842$ e condições iniciais $\alpha=0,6$; $\theta = -0,86$ e $q=0,28$ existe um ciclo limite estável entre dois pontos de bifurcação para $\theta < 0$.

O histórico de tempo e o plano de fase para cada ponto da bifurcação de Hopf da tabela 4.4 são mostrados nas figuras a seguir.

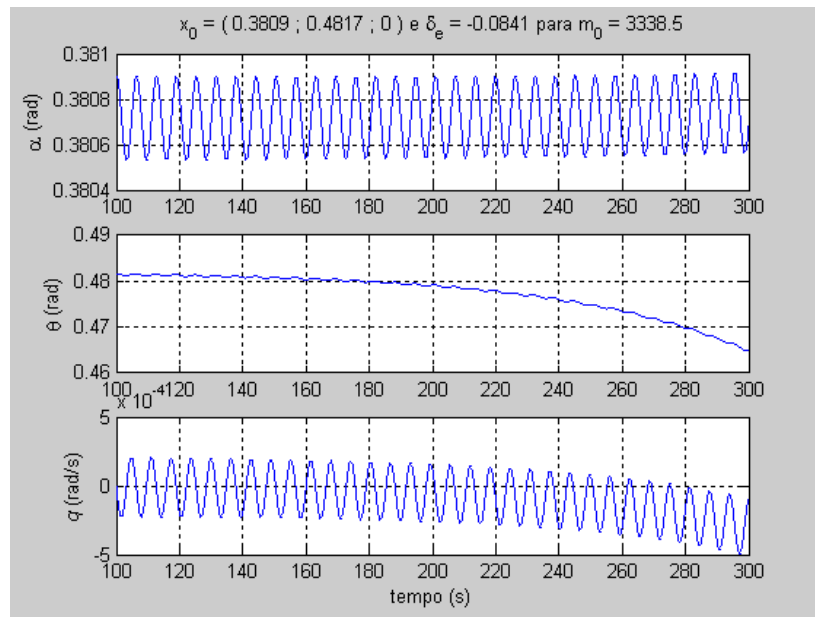


Figura 4.38: Histórico de tempo para o sistema (4.14) com $m=5*m_0$ e condições iniciais para o ponto HPF-1 da tabela 4.4.

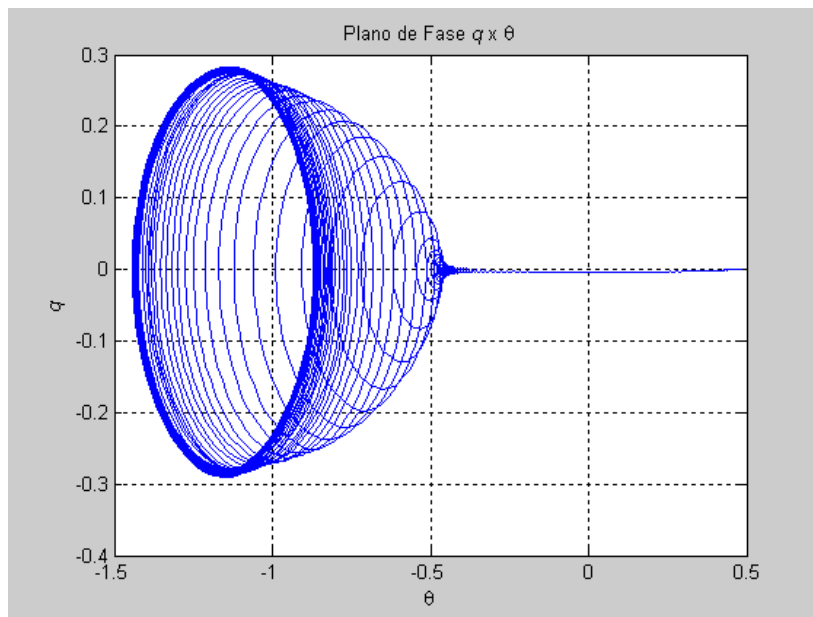


Figura 4.39: Plano de fase $q \times \theta$ para o sistema (4.14) com $m=5*m_0$ e condições iniciais para o ponto HPF-1 da tabela 4.4.

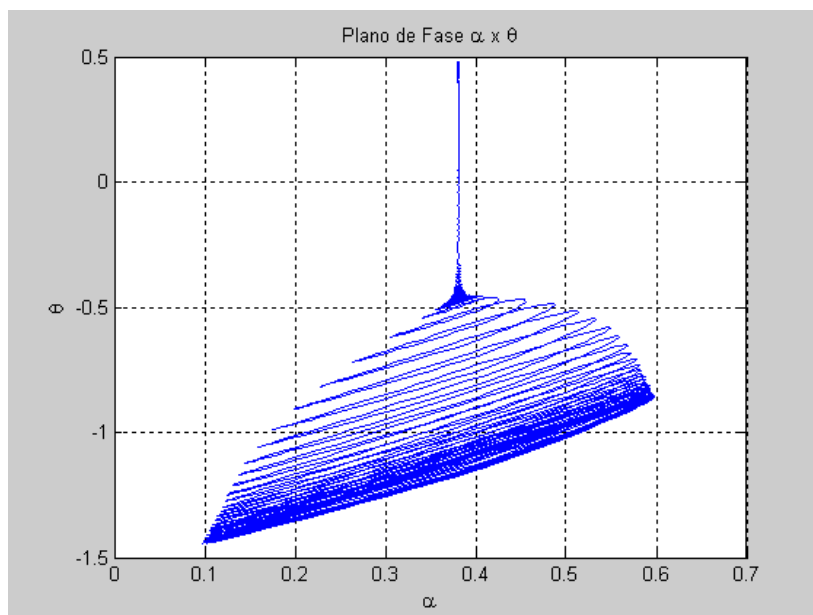


Figura 4.40: Plano de fase $\theta \times \alpha$ para o sistema (4.14) com $m=5*m_0$ e condições iniciais para o ponto HPF-1 tabela 4.4.

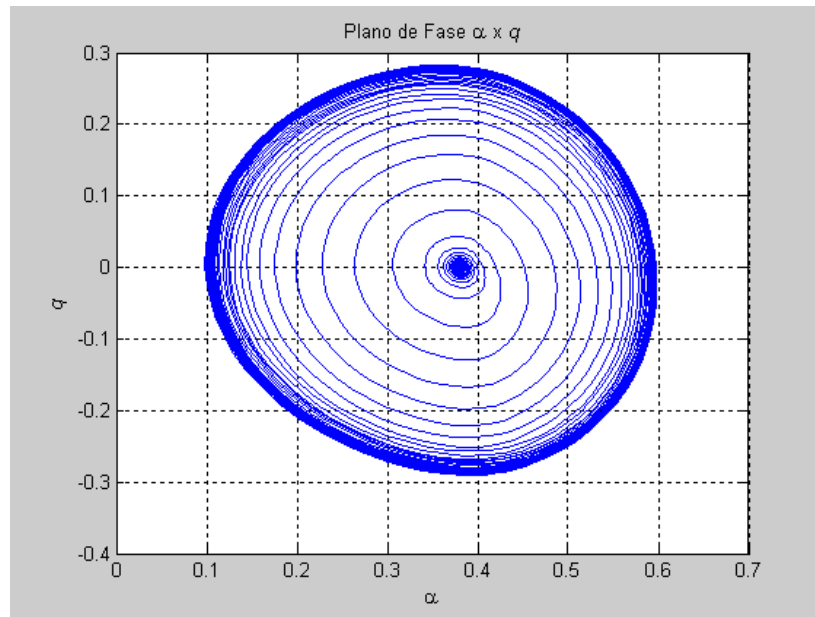


Figura 4.41: Plano de fase $q \times \alpha$ para o sistema (4.14) com $m=5*m_0$ e condições iniciais para HPF-1.

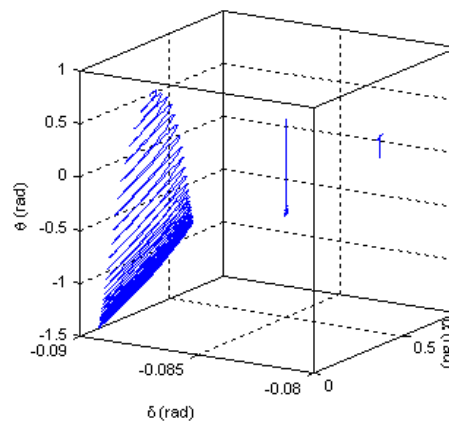


Figura 4.42: Evolução do plano de fase $\theta \times \alpha$ para o sistema (4.14) com $m=5*m_0$ e condições iniciais para HPF-1.

Na figura 4.43 se pode perceber a mudança qualitativa no retrato de fase a medida que o parâmetro δ_e passa pelo ponto onde ocorre a bifurcação. A mudança qualitativa no retrato de fase é uma característica da presença de bifurcação. Na figura 4.42 acima foi calculado a evolução dos

planos de fase ($\theta \times \alpha$) para melhor visualização das mudanças qualitativas no equilíbrio das soluções.

A seguir, mostram-se os resultados das simulações numéricas, para o ponto HPF- 2:

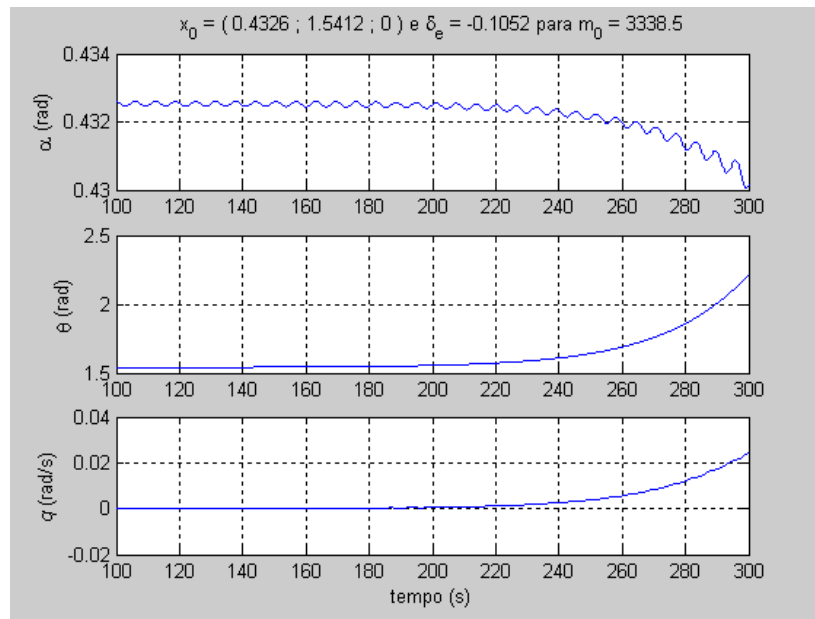


Figura 4.43: Histórico de tempo para o sistema (4.14) com $m=5*m_0$ e condições iniciais para o ponto HPF-2 da tabela 4.4.

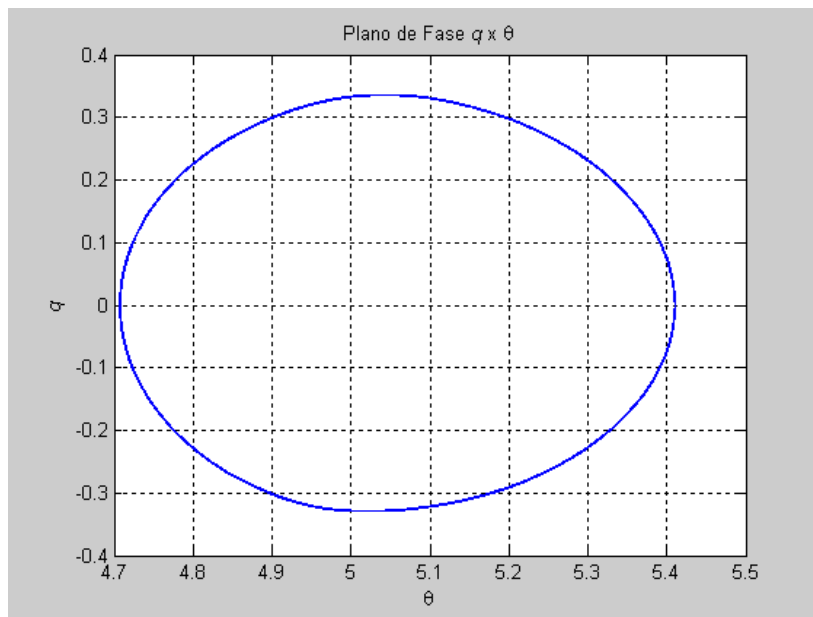


Figura 4.44: Plano de fase $q \times \theta$ para o sistema (4.14) com $m=5*m_0$ e condições iniciais para HPF-2 da tabela 4.4.

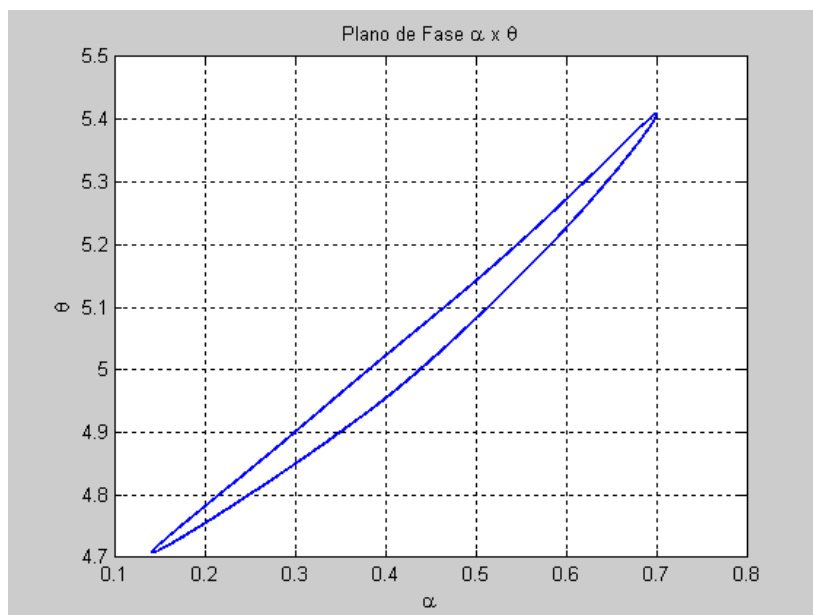


Figura 4.45: Plano de fase $\theta \times \alpha$ para o sistema (4.14) com $m=5*m_0$ e condições iniciais para HPF-2 da tabela 4.4.

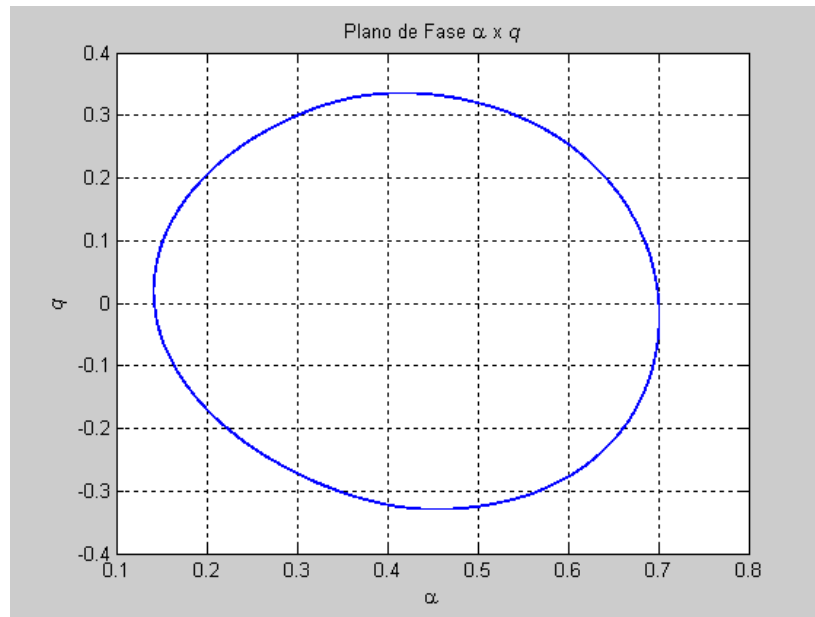


Figura 4.46: Plano de fase $q \times \alpha$ para o sistema (4.14) com $m=5*m_0$ e condições iniciais para HPF-2 da tabela 4.4.

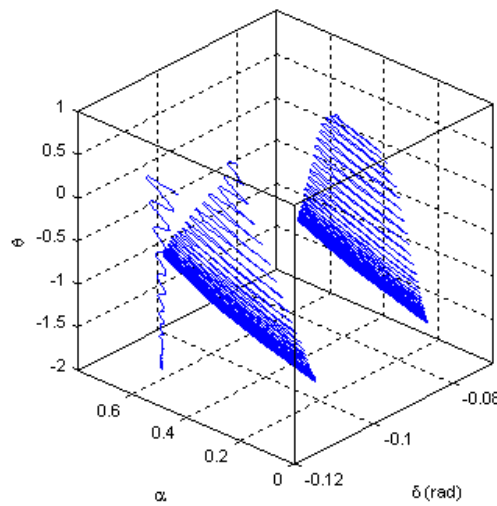


Figura 4.47: Evolução do plano de fase $\theta \times \alpha$ para o sistema (4.14) com $m=5*m_0$ e condições iniciais para HPF-2.

A seguir, exibem-se os resultados da simulação numérica, para o ponto HPF-3:

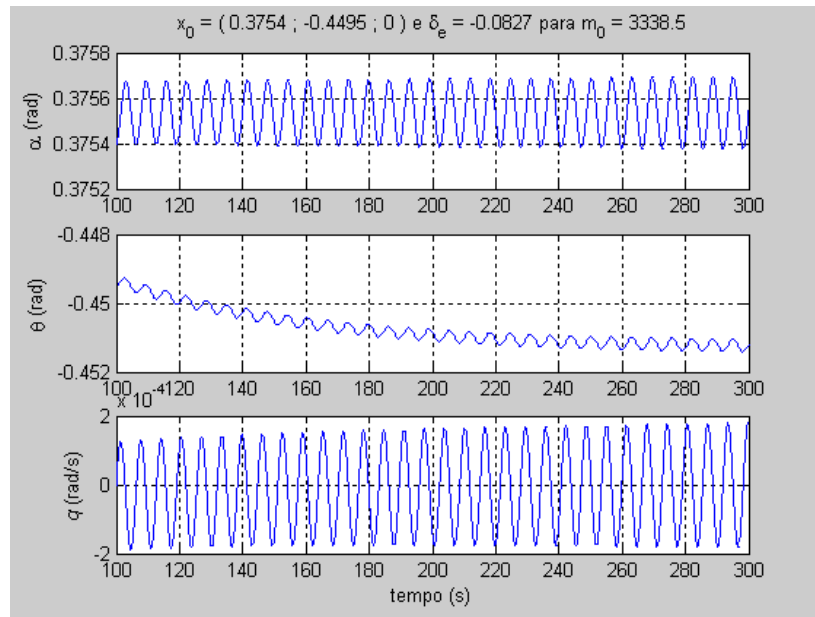


Figura 4.48: Histórico de tempo para o sistema (4.14) com $m=5*m_0$ e condições iniciais para o ponto HPF-3 da tabela 3.4.

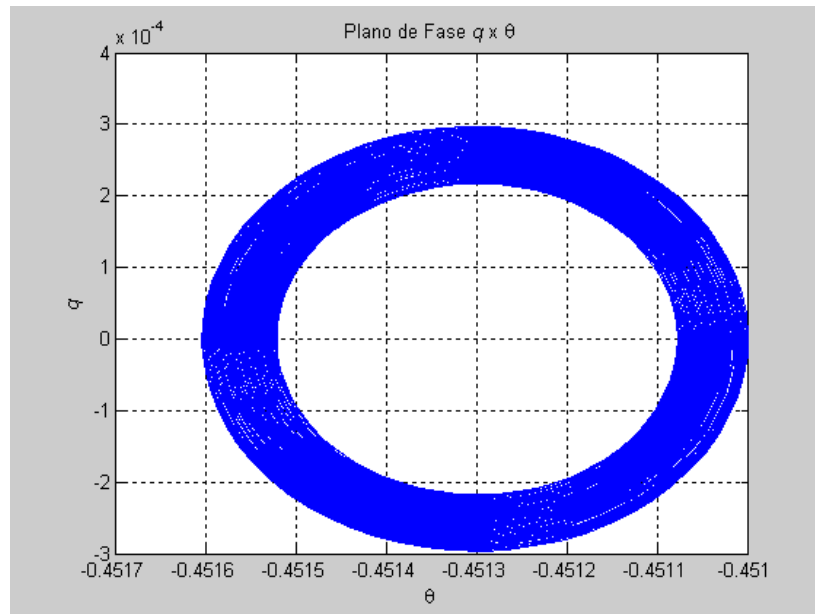


Figura 4.49: Plano de fase $q \times \theta$ para o sistema (4.14) com $m=5*m_0$ e condições iniciais para HPF-3 da tabela 4.4.

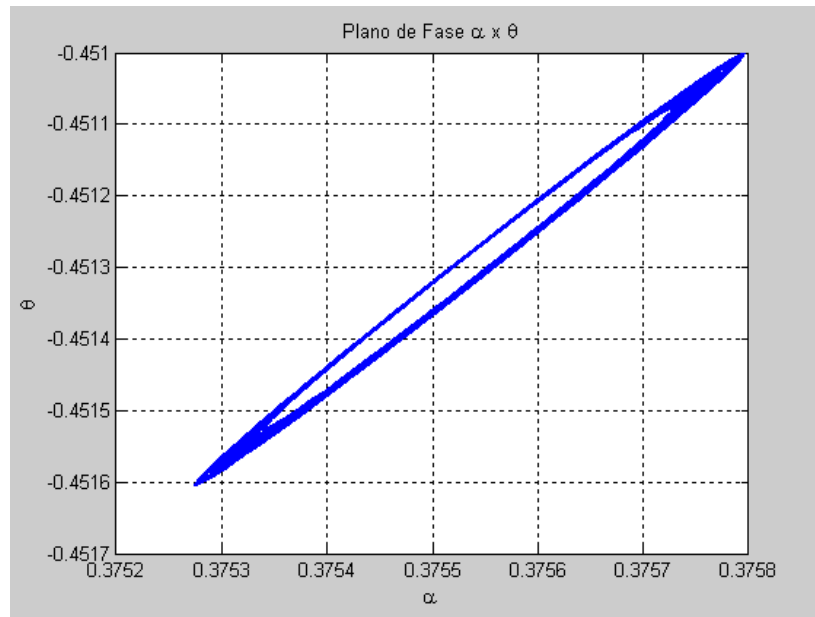


Figura 4.50: Plano de fase $\theta \times \alpha$ para o sistema (4.14) com $m=5*m_0$ e condições iniciais para HPF-3 da tabela 4.4.

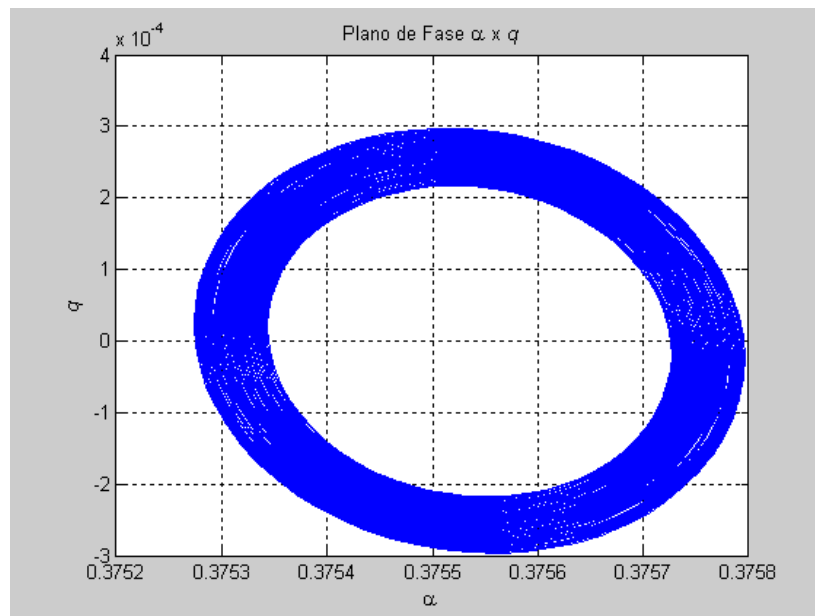


Figura 4.51: Plano de fase $q \times \alpha$ para o sistema (4.14) com $m=5*m_0$ e condições iniciais para HPF-3.

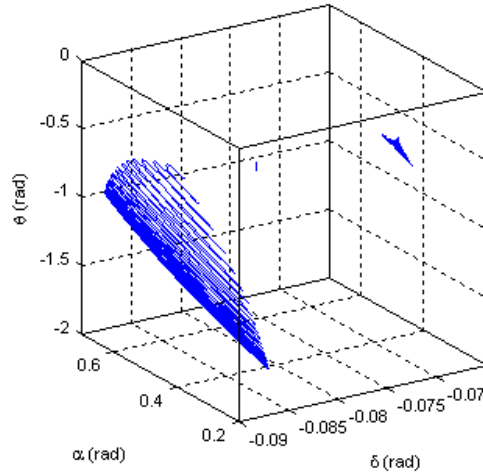


Figura 4.52: Evolução do plano de fase $\theta \times \alpha$ para o sistema (4.14) com $m=5*m_0$ e condições iniciais para HPF-3.

A seguir, exibem-se as simulações numéricas, para o ponto HPF-4:

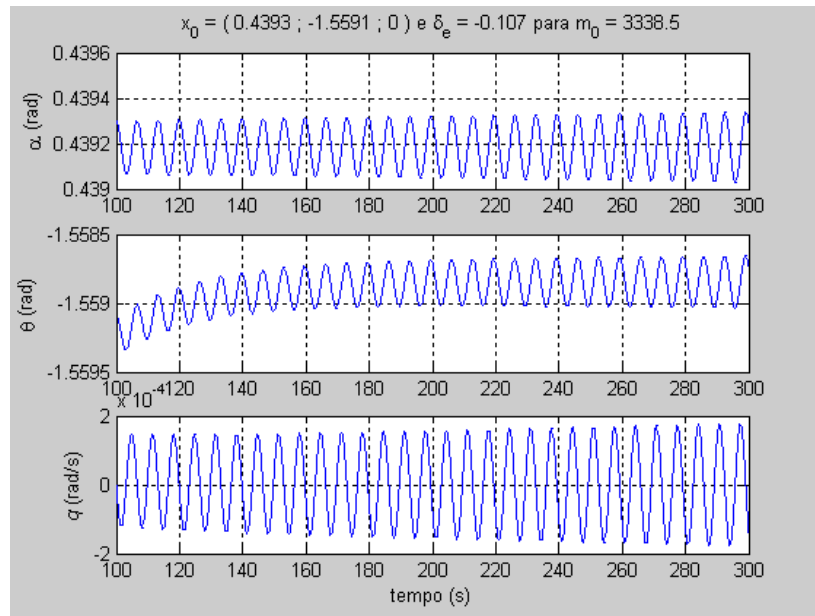


Figura 4.53: Histórico de tempo para o sistema (4.14) com $m=5*m_0$ e condições iniciais para HPF-4.

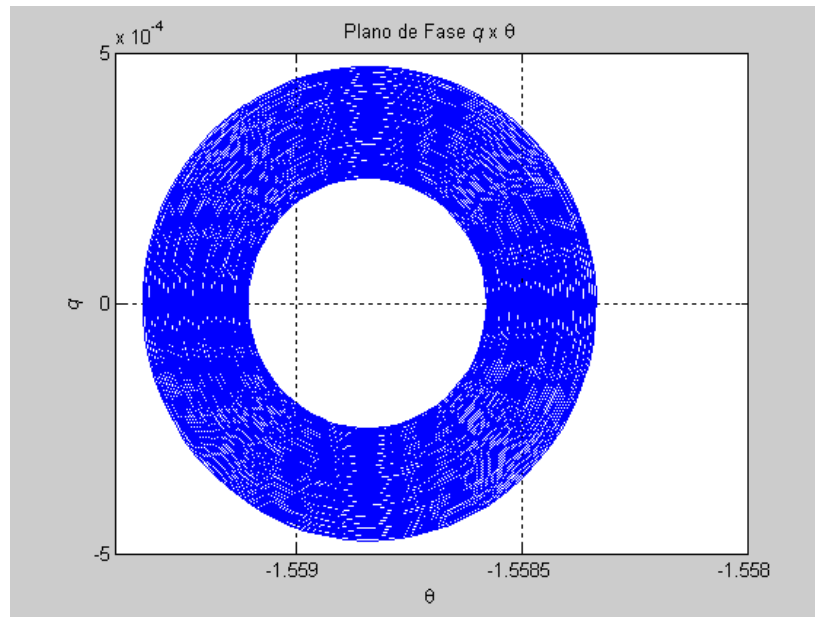


Figura 4.54: Plano de fase $q \times \theta$ para o sistema (4.14) com $m=5*m_0$ e condições iniciais para HPF-4.

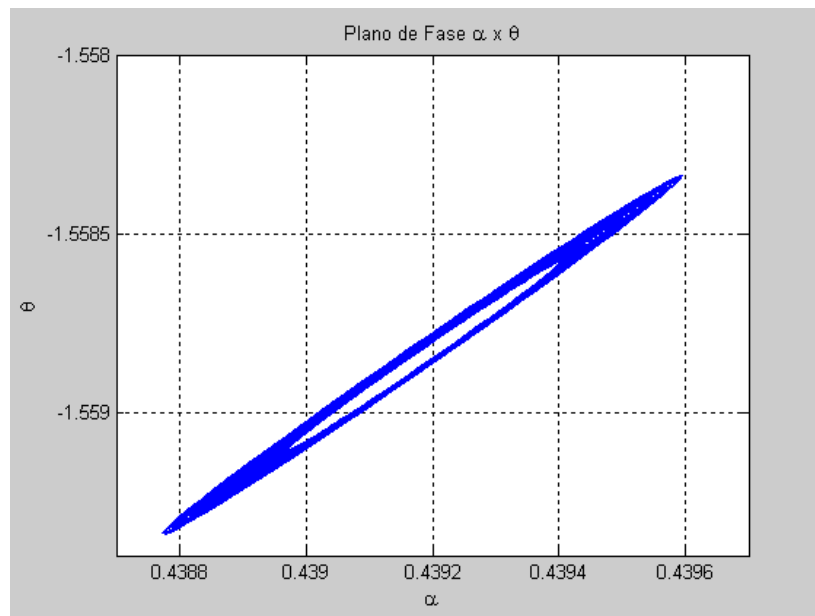


Figura 4.55: Plano de fase $\theta \times \alpha$ para o sistema (4.14) com $m=5*m_0$ e condições iniciais para HPF-4.

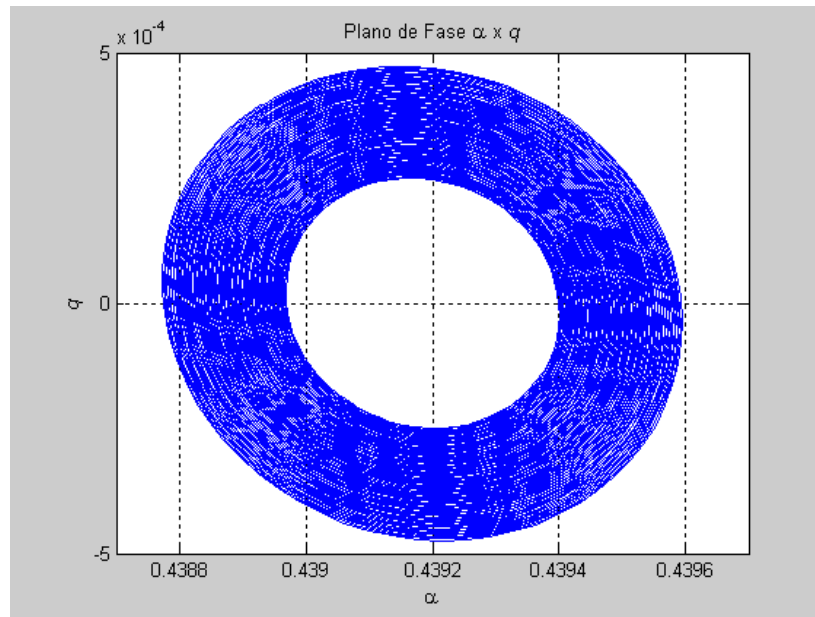


Figura 4.56: Plano de fase q x α para o sistema (4.14) com $m=5*m_0$ e condições iniciais para HPF-4.

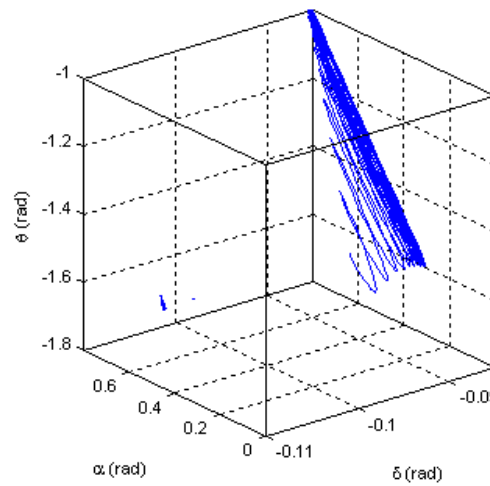


Figura 4.57: Evolução do plano de fase θ x α para o sistema (4.14) com $m=5*m_0$ e condições iniciais para HPF-4.

4.4 Conclusões Parciais:

Nesta etapa, foi abordado o estudo da estabilidade e o comportamento da dinâmica não linear de vôo longitudinal. Foi investigado o comportamento bifurcacional da dinâmica de vôo longitudinal em relação a dois parâmetros de controle: primeiramente em relação à deflexão δ_e do profundor e, depois em relação à variação da massa m da aeronave. Fenômenos não lineares tais como bifurcações tipo sela-nó e de Hopf foram observadas através das simulações numéricas das equações que modelaram a dinâmica da aeronave F-8, conforme a variação do sistema de parâmetros. A ocorrência de bifurcações do tipo sela-nó e do tipo Hopf podem resultar em comportamentos de salto e oscilações de arfagem. Esses saltos podem provocar uma descontinuidade no equilíbrio do sistema, sendo que essa região onde exista descontinuidade pode significar que a aeronave está experimentando situações de estol.

Estes resultados estão de acordo com a literatura existente sobre o assunto. As descontinuidades do equilíbrio do sistema causado por essas bifurcações podem contribuir para comportamentos repentinos de saltos na dinâmica de arfagem da aeronave.

Como dito anteriormente, a análise bifurcacional do sistema foi executada considerando os dois parâmetros de controle; a deflexão δ_e do profundor e a massa m da aeronave.

Do estudo numérico efetuado, pode-se concluir que o parâmetro de controle m , utilizado nesta pesquisa, como sendo a massa da aeronave, pode desempenhar um papel importante na dinâmica de vôo longitudinal.

Tais observações podem ser muito importantes para o projeto de aeronaves quando a mudança de massa se tornar significativa.

A seguir completa-se o estudo da dinâmica não linear com a aplicação de um projeto de controle no sistema (4.44), o que será explicitado no próximo capítulo.

Capítulo 5

Projeto de um Controle Ótimo para o Vôo Longitudinal da Aeronave F-8.

Neste capítulo aplicam-se duas estratégias de controle ótimo para o movimento longitudinal da aeronave F-8 “*Crusader*”. O objetivo é estabilizar o ângulo de ataque quando em regiões próximas ao ângulo crítico da aeronave em regiões abaixo do ângulo de estol. A primeira e a segunda estratégia de controle foram propostas na literatura corrente, a primeira em Garrard (1977) e a segunda estratégia foi proposta por Rafikov e Balthazar (2004, 2005, 2006). Busca-se a técnica de maior eficiência.

5.1 Projeto de Controle Linear e Não Linear.

Analisa-se um projeto de sistema de controle não linear de vôo longitudinal da aeronave F-8, para ser usado em altos ângulos de ataque, com o objetivo de reduzir as oscilações e conseqüentemente a perda de altitude, durante estol e aumentar a magnitude do ângulo de ataque desde que a aeronave possa se recuperar do estol.

Um método para a síntese do sistema de controle de vôo é desenvolvido, e o desempenho desse método de sistema de controle é comparado ao desempenho de um sistema de controle projetado pela teoria de controle ótimo quadrática linear.

Para efetuar este estudo, inicialmente discute-se a modelagem matemática do sistema a ser tratado. Esclarece-se que o modelo matemático é o mesmo que o estudado anteriormente. Entretanto fazem-se necessárias algumas considerações adicionais para o projeto de controle que será exibido a seguir.

5.1.1. Modelagem Matemática

Para efetuar esse estudo consideraremos a mesma aeronave (F-8) e as mesmas condições de voo dado no capítulo 4, ou seja, assume-se que a aeronave se encontra em regime de voo em uma velocidade constante de $u=257.7 \text{ m/s}$ ($845,6 \text{ ft/s}$) em uma altitude de 30.000 ft e com massa m inicial $m_0=9773 \text{ kg}$ ($667,7 \text{ slugs}$).

Primeiramente, considera-se uma condição de nível de voo com $\theta_0 = 0$, assume-se também, que $\theta = \Delta\theta$ e:

$$\begin{aligned} \cos \theta &\cong 1 - \frac{\theta^2}{2} & \cos \alpha &\cong 1 - \frac{\alpha^2}{2} \\ \sin \theta &\cong \theta - \frac{\theta^3}{6} & \sin \alpha &\cong \alpha - \frac{\alpha^3}{6} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Substituindo (5.1) em (4.1) – (4.3) e assumindo os valores dados pela tabela 4.2 obtém-se o sistema dado a seguir:

$$\dot{u} = 845\alpha\dot{\theta} - 281.67\alpha^3\dot{\theta} - 32.2\theta + 5.37\theta^3 + 724\alpha^2 + 0.25\delta_e\alpha \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} = & 0.038\dot{\theta} - \alpha^2\dot{\theta} - 0.019\theta^2 - 0.038\alpha^2 - 0.896\alpha + 3.486\alpha^3 - \\ & - 0.215\delta_e + 0.28\delta_e\alpha^2 + 0.47\delta_e^2\alpha + 0.63\delta_e^3 \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} = & -0.396\dot{\theta} - 4.187\alpha - 3.564\alpha^3 - 20.967\delta_e + 6.265\delta_e\alpha^3 + \\ & + 46\delta_e^2\alpha + 61.4\delta_e^3 \end{aligned} \quad (5.4)$$

Assumindo que a aeronave voa a uma velocidade constante, temos que $\dot{u} = 0$ e tomando os parâmetros (GARRARD, 1977) $\alpha = 0.044$ rad e $\delta_e = -0.009$ rad e, considerando as novas variáveis $\bar{\alpha} = \alpha + 0.044$ e $\bar{\delta}_e = \delta_e - 0.009$ substituídas em (5.3) e (5.4) e, alterando a notação de $\bar{\alpha}$ e $\bar{\delta}_e$ para α e δ_e , obtém-se as seguintes equações em desvios:

$$\dot{\alpha} = \dot{\theta} - \alpha^2 \dot{\theta} - 0.088 \alpha \dot{\theta} - 0.877 \alpha + 0.47 \alpha^2 + 3.846 \alpha^3 - 0.215 \delta_e + 0.28 \delta_e \alpha^2 + 0.47 \delta_e^2 \alpha + 0.63 \delta_e^3 - 0.019 \theta^2 \quad (5.5)$$

$$\ddot{\theta} = -0.396 \dot{\theta} - 4.208 \alpha - 0.47 \alpha^2 - 3.564 \alpha^3 - 20.967 \delta_e + 6.265 \delta_e \alpha^2 + 46 \delta_e^2 + 61.4 \delta_e^3 \quad (5.6)$$

A seguir exibe-se uma síntese do controle para o problema, em análise .

5.1.2. Síntese do Controle.

Sintetiza-se um controle linear para (5.5) e (5.6) para comparação com o controlador não linear.

Então, desprezando os termos não lineares do sistema de equações (5.5) e (5.6) tem-se:

$$\alpha = \dot{\theta} - 0.877 \alpha - 0.215 \delta_e \quad (5.7)$$

$$\ddot{\theta} = -0.396 \dot{\theta} - 4.208 \alpha - 20.967 \delta_e \quad (5.8)$$

Fazendo $\alpha = x_1$, $\theta = x_2$, $\dot{\theta} = x_3$ e $\delta_e = \mu$ tem-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.877 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4.208 & 0 & -0.396 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.215 \\ 0 \\ -20.976 \end{bmatrix} \mu \quad (5.9)$$

ou seja,

$$\dot{X} = AX + b\mu$$

5.1.3 Dedução da Lei de Controle

O controle é escolhido para minimizar o índice de desempenho quadrático.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [X^T Q X + r\mu^2] dt \quad (5.10)$$

O controle linear ótimo é:

$$\mu = -r^{-1}b^T P X \quad (5.11)$$

onde P é a solução definida positiva da equação da matriz de Riccati (ANDERSON, 1990):

$$A^T P + PA - P b r^{-1} b^T P + Q = 0 \quad (5.12)$$

A escolha de:

$$Q = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad r = 1$$

leva á seguinte lei de controle:

$$\mu = -0.053x_1 + 0.5x_2 + 0.521x_3 \quad (5.13)$$

que foi encontrado para dar uma boa resposta, sem exceder a deflexão máxima da cauda de 25° e a taxa de deflexão de cauda de 60°/s, considerada como sendo razoável.

Para se verificar a controlabilidade do sistema calcula-se o posto da matriz $M = [B \mid AB \mid A^2B]$ que é $3 \neq 0$, pois o determinante de M é -64.5988 e, portanto diferente de zero.

Os autovalores da matriz A em (5.9) (sem controle) são:

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = -0.2415 + 2.0455i$$

$$\lambda_3 = -0.2415 - 2.0455i$$

Dado a lei de controle (5.13) e substituindo-se em (5.9) tem-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.877 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4.208 & 0 & -0.396 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.215 \\ 0 \\ -20.976 \end{bmatrix} (-0.053x_1 + 0.5x_2 + 0.521x_3)$$

A nova matriz A é:

$$A = \begin{bmatrix} -0,865605 & -0,1075 & 0,887985 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3,096272 & -10,488 & -11,324496 \end{bmatrix}$$

cujos auto valores da nova matriz A são:

$$\lambda_1 = -9.9664$$

$$\lambda_2 = -1.7108$$

$$\lambda_3 = -0.5129$$

Assim, o projeto de controle apresentado estabiliza o sistema.

Nas equações não lineares (5.7) e (5.8) os termos envolvendo δ_ϵ^n , $n=2,3,4,\dots$, e $\alpha^n \delta_\epsilon^m$, $n,m=1,2,3,\dots$ são eliminados, pois estes termos são pequenos e, a técnica de controle, em questão, não pode contar com termos não lineares.

As equações não lineares do movimento são, agora, escritas, na forma matricial, na forma

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -0.877 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4.208 & 0 & -0.396 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} -x_1^2 x_3 - 0.088 x_1 x_3 - 0.019 x_2^2 + 0.47 x_1^2 + 3.846 x_1^3 \\ 0 \\ -0.47 x_1^2 - 3.564 x_1^3 \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} -0.215 \\ 0 \\ -20.976 \end{bmatrix} \mu \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\dot{X} = AX + \phi(X) + b\mu \quad (5.15)$$

onde X , A , b e μ são iguais ao do caso linear, e $\phi(X)$, é uma função vetorial analítica representando as não linearidades do sistema.

A otimização do sistema está, como no caso linear, em determinar o controle de feedback que transfere qualquer estado inicial para a origem e que minimiza o índice quadrático de desempenho (5.11).

O controle de feedback ótimo (Lee, 1967) é da forma:

$$\mu = -\frac{1}{2} r^{-1} b^T \frac{\partial V}{\partial X}$$

onde $V(x)$ satisfaz a equação diferencial parcial a seguir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V^T}{\partial X} A X + \frac{\partial V^T}{\partial X} \phi - \frac{1}{4} \frac{\partial V^T}{\partial X} b r^{-1} b^T \frac{\partial V}{\partial X} + X^T Q X = 0, \\ V(0) = 0 \end{aligned} \tag{5.16}$$

Desde que, a equação (5.16) não pode ser resolvida analiticamente, procedimentos de perturbações são usados para se obter uma solução simplificada (Garrad, 1967 APUD Garrard, 1977). Dessa forma, a solução para (5.16) pode ser representada como uma série na forma:

$$V(X) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(X) \tag{5.17}$$

$$\phi(X) = \sum_{n=0}^N f_{n+1}(X) \tag{5.18}$$

onde f_{n+1} é da ordem $n+1$ em X , então os V_n 's são dados pela equação:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_0^T}{\partial X} AX - \frac{1}{4} \frac{\partial V_0^T}{\partial X} br^{-1}b^T \frac{\partial V_0}{\partial X} + X^T QX &= 0 \\ \frac{\partial V_1^T}{\partial X} AX - \frac{1}{4} \frac{\partial V_1^T}{\partial X} br^{-1}b^T \frac{\partial V_0}{\partial X} - \frac{1}{4} \frac{\partial V_0^T}{\partial X} br^{-1}b^T \frac{\partial V_1}{\partial X} + \frac{\partial V_0^T}{\partial X} f_2 &= 0 \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \frac{\partial V_n^T}{\partial X} AX - \frac{1}{4} \frac{\partial V_n^T}{\partial X} br^{-1}b^T \frac{\partial V_0}{\partial X} - \frac{1}{4} \frac{\partial V_0^T}{\partial X} br^{-1}b^T \frac{\partial V_n}{\partial X} + \\ + \frac{\partial V_0^T}{\partial X} f_{n+1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial V_k^T}{\partial X} f_{n+1-k} - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial V_k^T}{\partial X} br^{-1}b^T \frac{\partial V_{n-k}}{\partial X} &= 0 \end{aligned}$$

Assim, o controle ótimo resultante será:

$$\mu = -r^{-1}b^T \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial V_n}{\partial X} \quad (5.20)$$

Deve ser notado que V_0 é uma função quadrática em X , V_1 cúbica em X e, em geral, V_n é de ordem $n+2$ em X . A solução de V_n leva para o termo de controle de ordem $n+1$.

Para o modelo não linear, obtém-se, então:

$$\phi(X) = \sum_{n=1}^2 f_{n+1}(X) \quad (5.21)$$

$$= \begin{bmatrix} 0.47x_1^2 - 0.088x_1x_3 - 0.019x_2^2 \\ 0 \\ -0.47x_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3.846x_1^3 - x_1^2x_3 \\ 0 \\ -3.564x_1^3 \end{bmatrix}$$

A solução da primeira equação em (5.17) tem a seguinte forma

$$V_0 = X^T PX \quad (5.22)$$

onde P é a solução definida positiva de (5.12).

Com o intuito de se comparar o controle não linear com o linear, os valores de Q e r usados na derivação do controle linear são também usados na derivação do controle não linear. Dessa forma, a solução P é a mesma como no caso linear e os termos lineares do controle são os mesmos do controlador linear desenvolvido.

A determinação do controle não linear é trabalhosa. A seguir, exibe-se o algoritmo geral para a resolução de V_n , $n=1,2,3,\dots$

Algoritmo geral para a resolução de V_n , $n=1,2,3$

1. Assumindo que $V_n = \sum_{k=0}^{n+2-k} \sum_{j=0}^{n+2} a_{n+2-j-k,j,k}^n x_1^{(n+2-j-k)} x_2^j x_3^k$
2. Calcula-se $\frac{\partial V_n}{\partial X}$,
3. Substituí-se $\frac{\partial V_n}{\partial X}$ em (5.19),
4. Considerando-se a soma de coeficientes de termos iguais como sendo zero,
5. Resolvem-se as equações algébricas para $a_{n+2-j-k,j,k}^n$.

Após V_n ser obtido; $\frac{\partial V_n}{\partial X}$ pode ser calculado e então substituído em (5.20) para a obtenção de μ_{n+1} . Para o controle de segunda ordem, dez coeficientes devem ser encontrados. Quatro deles são próximos de zero e a expressão resultante para V_1 , $\frac{\partial V_1}{\partial X}$, e μ_2 é dada por:

$$V_1 = 0.058x_1^3 - 0.077x_1^2x_2 + 0.002x_1^2x_3 + 0.045x_1x_2^2 - \\ - 0.015x_2^3 - 0.003x_1x_2x_3$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial X} = \begin{bmatrix} 0.174x_1^2 - 0.154x_1x_2 + 0.004x_1x_3 + 0.045x_2^2 - 0.003x_2x_3 \\ -0.077x_1^2 + 0.09x_1x_2 - 0.045x_2^2 - 0.003x_1x_3 \\ 0.002x_1^2 - 0.003x_1x_2 \end{bmatrix}$$

$$\mu_2 = 0.04x_1^2 - 0.048x_1x_2 + 0.004x_1x_3 + 0.005x_2^2 - 0.003x_2x_3$$

Somente os dois primeiros termos de μ_2 são significantes, então:

$$\mu_2 \cong 0.04x_1^2 - 0.048x_1x_2$$

Para os termos cúbicos, assumimos que a forma de V_n tem 15 coeficientes desconhecidos, mas somente dois deles são significantes.

Dessa forma, o controle cúbico é dado por:

$$\mu_3 = 0.374x_1^3 - 0.312x_1^2x_2$$

O controle não linear incluindo termos até terceira ordem é:

$$\begin{aligned} \mu = & 0.053x_1 + 0.5x_2 + 0.52x_3 + 0.04x_1^2 - 0.048x_1x_2 + \\ & + 0.374x_1^3 - 0.312x_1^2x_2 \end{aligned}$$

5.1.4. Resultados das Simulações Numéricas.

A seguir, exibem-se os resultados com e sem controle, utilizando o controle linear

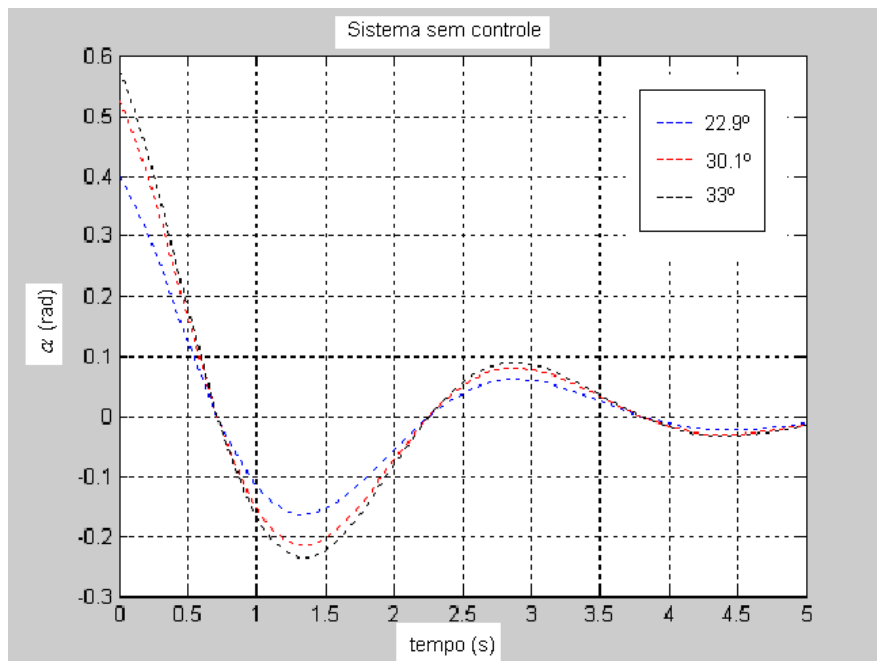


Figura 5.1: Sistema sem controle para valores iniciais $\alpha=29.9^\circ$, 30.1° e 33° .

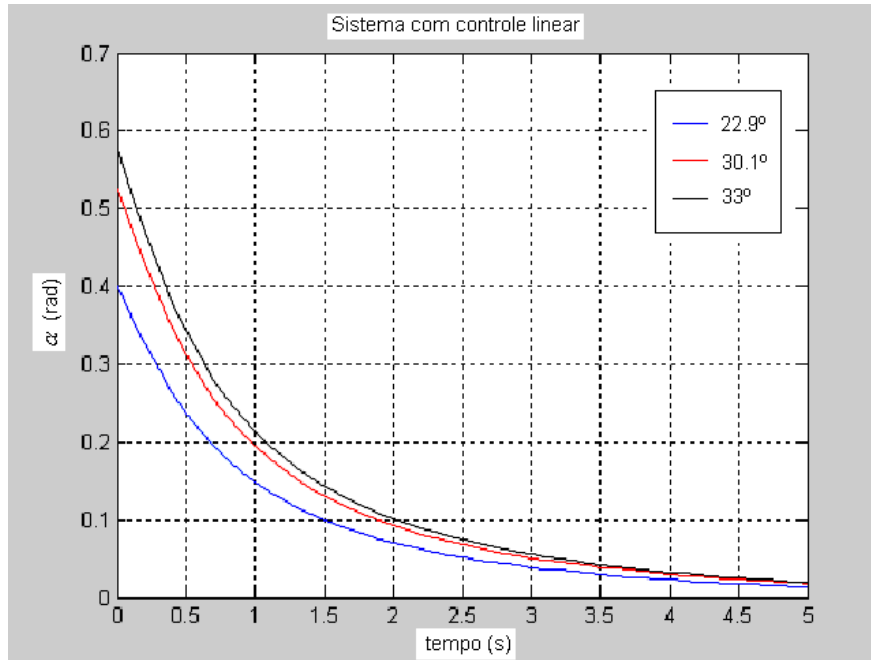


Figura 5.2: Sistema com controle linear para valores iniciais $\alpha=29.9^\circ$, 30.1° e 33° .

Exibem-se, agora, os resultados com e, sem controle, utilizando-se o sistema não linear:

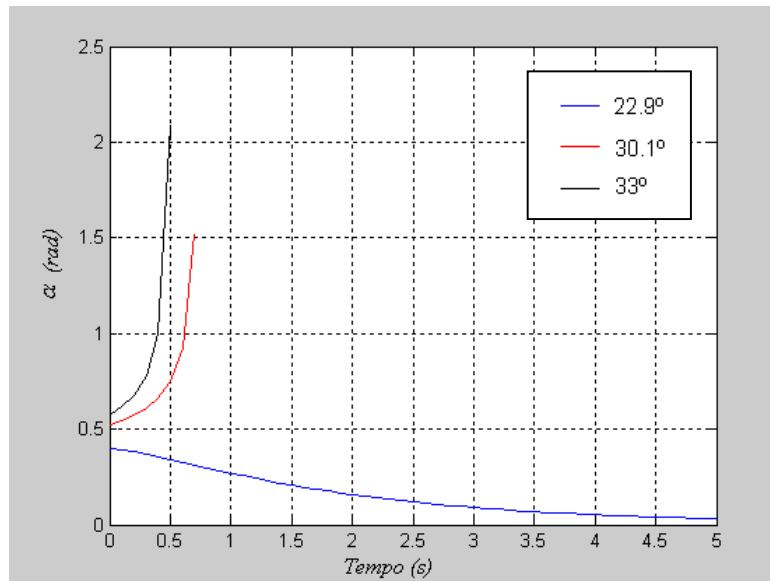


Figura 5.3: Sistema não linear sem controle para valores iniciais $\alpha=29.9^\circ$, 30.1° e 33° .

Introduzindo-se o controle de 2ª ordem com condição inicial de $\theta=0$ e $q=0$ tem-se:

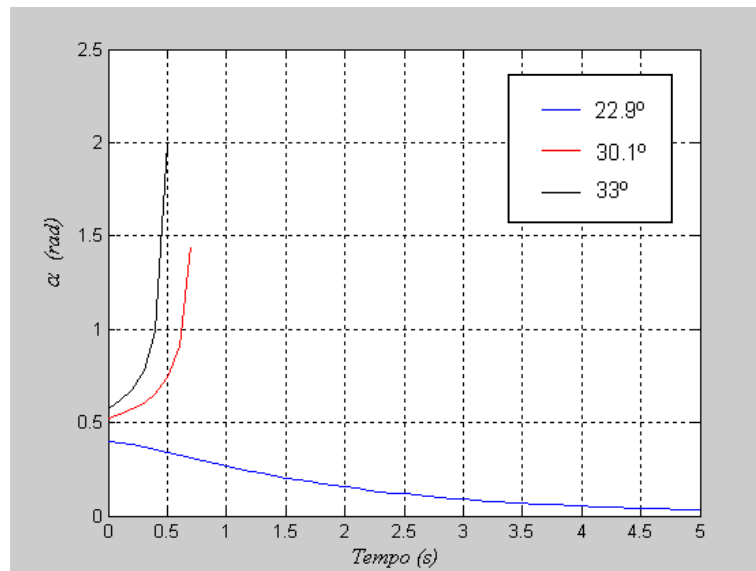


Figura 5.4: Sistema não linear com controle de 2ª ordem para $\alpha=29.9^\circ$, 30.1° e 33° .

Tomando, agora, a condição inicial $\theta = 0.5$ e $q=0$, obtém-se:

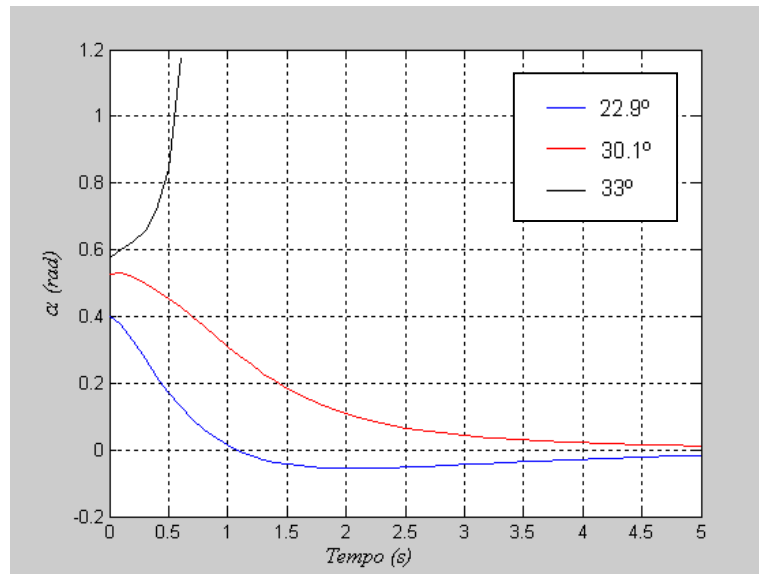


Figura 5.5: Sistema não linear com controle não linear de 2ª ordem para $\alpha=29.9^\circ$, 30.1° e 33° e condição inicial $\theta=0.5$ e $q=0$.

Alterando-se a condição inicial para $\theta = 1$ e $q=0$, obtém-se:

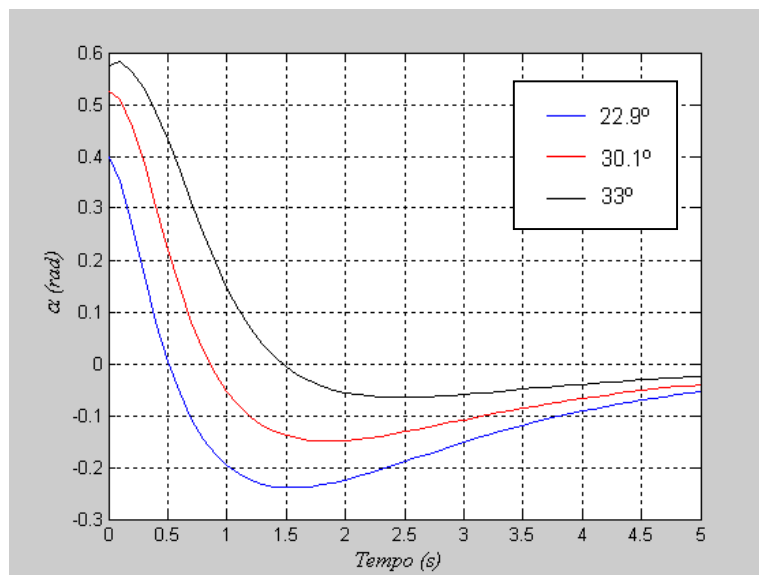


Figura 5.6: Sistema utilizando controle não linear de 2ª ordem para $\alpha=29.9^\circ$, 30.1° e 33° e condição inicial $\theta = 1$ e $q=0$.

No caso de se considerar termos de terceira ordem $\theta=0$ e $q=0$, obtêm-se:

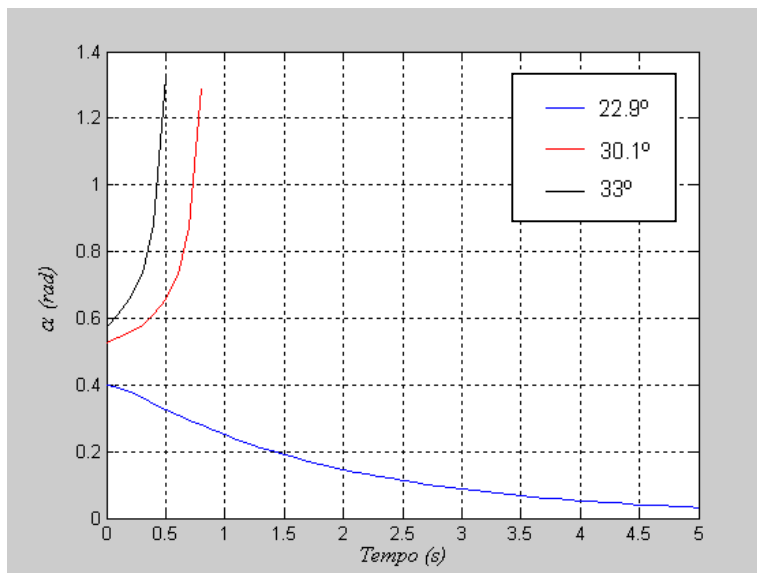


Figura 5.7: Sistema utilizando controle não linear de 3ª ordem para $\alpha=29.9^\circ$, 30.1° e 33° e condição inicial $\theta = 0$ e $q=0$.

Para este caso de terceira ordem e com condição inicial $\theta=0.5$ e $q=0$, temos:

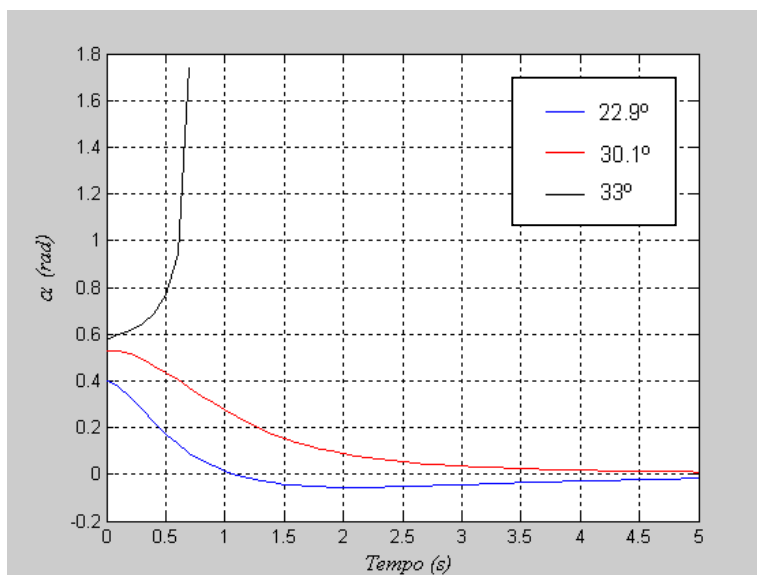


Figura 5.8: Sistema utilizando controle não linear de 3ª ordem para $\alpha=29.9^\circ$, 30.1° e 33° e condição inicial $\theta = 0.5$ e $q=0$.

E para condição inicial $\theta=1$ e $q=0$, obtém-se:

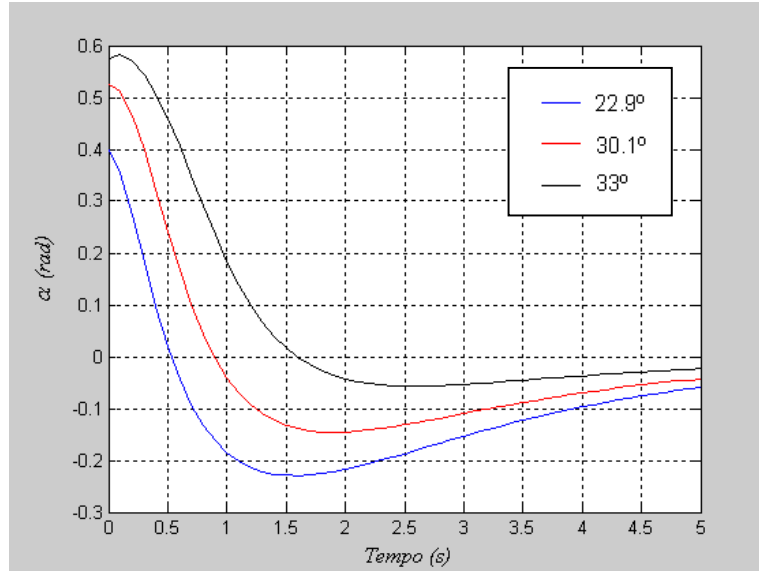


Figura 5.9: Sistema utilizando controle não linear de 3ª ordem para $\alpha=29.9^\circ$, 30.1° e 33° e condição inicial $\theta = 1$ e $q=0$.

Ressalta-se que o controle não linear depende das condições iniciais de θ como mostrado nas figuras, a seguir, o que mostra a necessidade de um formalismo melhor da síntese de controle do que o exposto em Garrard (1977).

Considerando os controles de segunda e terceira ordem para $\theta=0.5$ e $q=0$:

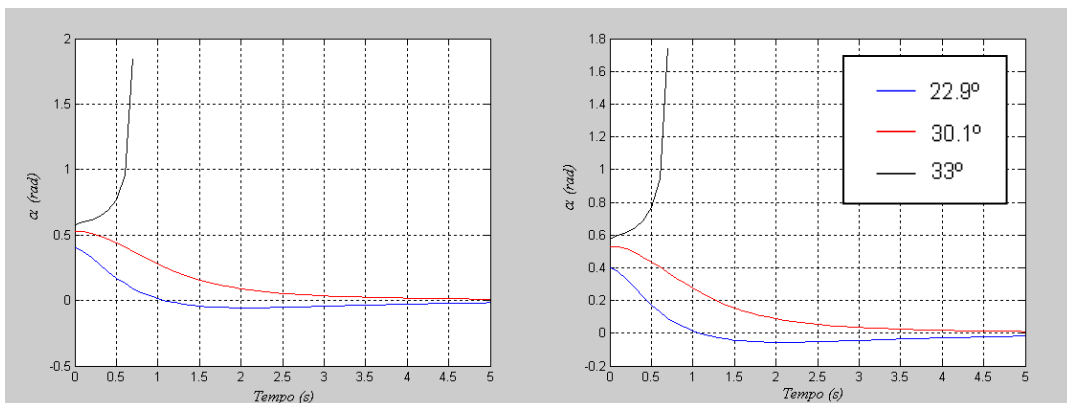


Figura 5.10: Sistema utilizando controle não linear de 2ª e 3ª ordem para $\alpha=29.9^\circ$, 30.1° e 33° e condição inicial $\theta = 0.5$ e $q=0$.

No caso em que as condições iniciais são $\theta=1$ e $q=0$, tem-se:

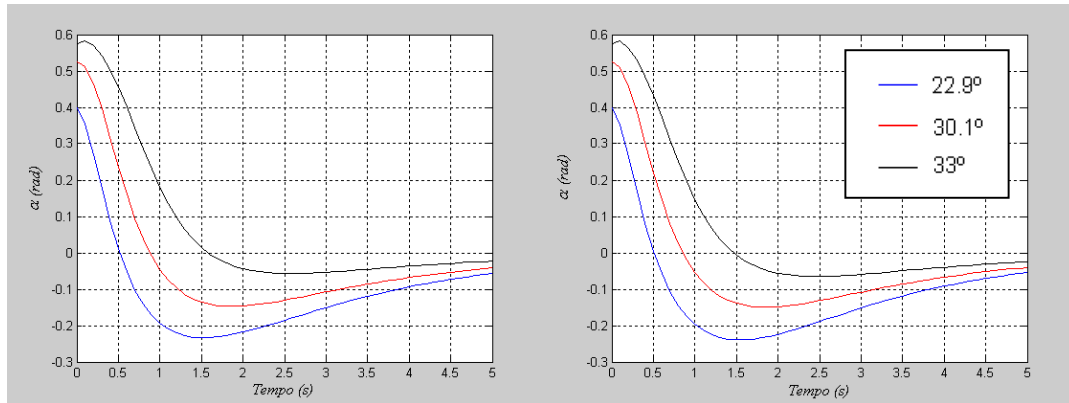


Figura 5.11: Sistema utilizando controle não linear de 2º e 3ª ordem para $\alpha=29.9^\circ$, 30.1° e 33° e condição inicial $\theta = 1$ e $q=0$.

5.1.5 Conclusões Parciais:

Observa-se que o controle não tem maior eficácia a partir de um ângulo de “pitch” maior que 28° .

A conclusão que se obtém é que se deve projetar um tipo de controle mais eficaz o que será abordado na sequência deste trabalho.

Agora, utilizar-se-á a técnica de controle desenvolvida recentemente pelo Professor Dr. Marat Rafikov e pelo orientador Prof. Dr. José Manoel Balthazar (Rafikov, Balthazar, 2004; 2005a; 2005b) que propuseram uma metodologia para encontrar um controle ótimo linear realimentado onde se encontram condições para a aplicação do controle linear em sistemas não-lineares (Rafikov, Balthazar, 2004; 2005a; 2005b) a qual se mostrou ser adequada a análise da dinâmica não linear de vôo longitudinal, abordada no presente trabalho.

Antes de se utilizar esta técnica, apresenta-se a sua formulação sintetizada:

5.2 Formulação do Problema de Controle Linear com Retroalimentação .

Considera-se um sistema dinâmico, da seguinte forma:

$$\dot{x} = Ax + g(x) + U \quad (5.23)$$

Onde:

$x \in R^n$: Vetor de estado,

$A \in R^{n \times n}$: Matriz constante,

$g(x)$: vetor de funções contínuas e,

função de controle U , da seguinte forma:

$$U = \tilde{u} + u_t \quad (5.24)$$

cujas componentes serão descritas, logo abaixo.

Esclarece-se que se deve escolher a lei de controle U que levará uma solução do sistema dinâmico (5.23) indesejada para uma desejada, quer ela seja um ponto fixo de equilíbrio, uma órbita periódica ou uma não periódica (Caótica). Para se atingir este objetivo, procede-se como será explicado a seguir.

Nota-se que na teoria do controle existem dois tipos de problemas, sendo o primeiro deles à função do controle $u(t)$, que deve ser encontrada como uma função do tempo, ou seja, nesse caso a função de controle ótimo determina uma trajetória ótima que corresponde a uma condição inicial dada do sistema. No segundo caso, a função de controle $u(t,x)$, que depende do tempo e de variáveis de estado; este tipo de controle é chamado controle com realimentação podendo ser aplicado para qualquer condição inicial.

Se as variáveis do sistema são desvios do regime desejado, o controle ótimo estabiliza em torno da trajetória desejada, minimizando o funcional que caracteriza os desvios quadrados da trajetória e do controle do regime desejado (Schmid, Rafikov, 2004; Rafikov, Balthazar, 2005a; 2005b).

A seguir, discute-se a formulação do controle ótimo com realimentação.

Seja $\tilde{x}$ uma função vetorial que caracteriza a trajetória desejada.

Toma-se $\tilde{u}$ (que mantém o sistema controlado, na trajetória desejada) descrito como:

$$\tilde{u} = \dot{\tilde{x}} - A\tilde{x} - g(\tilde{x}) \quad (5.25)$$

O vetor de controle u_t que estabilizará o sistema dinâmico considerado em torno da trajetória desejada, assumirá a seguinte forma:

$$u_t = Bu \quad (5.26)$$

onde $B \in R^{n \times m}$ é uma matriz constante.

Definindo

$$y = x - \tilde{x} \quad (5.27)$$

como sendo o desvio da trajetória do sistema (5.23) da trajetória desejada, e admitindo-se (5.24) - (4.4) chega-se à equação em desvios:

$$\dot{y} = Ay + g(x) - g(\tilde{x}) + Bu \quad (5.28)$$

A parte não-linear do sistema (5.28) pode ser escrita como

$$g(x) - g(\tilde{x}) = G(x, \tilde{x})(x - \tilde{x}) \quad (5.29)$$

onde $G(x, \tilde{x})$ é uma matriz limitada, cujos elementos dependem de x e $\tilde{x}$. Admitindo (5.29), o sistema (5.28) tem a seguinte forma:

$$\dot{y} = Ay + G(x, \tilde{x})y + Bu \quad (5.30)$$

Rafikov e Balthazar (Rafikov, Balthazar, 2005a; 2005b) formularam o seguinte teorema:

Teorema

Se existem as matrizes Q e R , definidas positivas, sendo Q simétrica, tais que a matriz

$$\tilde{Q} = Q - G^T(x, \tilde{x})P - PG(x, \tilde{x}) \quad (5.31)$$

seja definida positiva para G limitada, então o controle com realimentação

$$u = -R^{-1}B^T P y \quad (5.32)$$

é ótimo para transferir o sistema não linear (5.30) de qualquer estado inicial ao estado final

$$y(\infty) = 0 \quad (5.33)$$

minimizando o funcional

$$\tilde{J} = \int_0^{\infty} (y^T \tilde{Q} y + u^T R u) dt \quad (5.34)$$

onde a matriz simétrica P é calculada da equação algébrica não linear de Riccati:

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (5.35)$$

onde as matrizes $Q \in R^{n \times n}$ e $R \in R^{n \times m}$ são constantes, definidas positivas.

Prova: Seja o controle linear com realimentação (5.32) com a matriz P determinada pela equação (5.35) que transfere o sistema não-linear (5.30) de qualquer estado inicial ao estado final (5.33) minimizando o funcional em forma (5.34) em que a matriz $\tilde{Q}$ é determinada.

Conforme programação dinâmica (Bellman, 1957) se o mínimo do funcional (5.34) existe e V é uma função suave de condições iniciais, então ela satisfaz a equação de Hamilton – Jacobi – Bellman :

$$\min_u \left(\frac{dV}{dt} + y^T \tilde{Q} y + u^T R u \right) = 0 \quad (5.36)$$

Considera-se a função de Lyapunov

$$V = y^T P y \quad (5.37)$$

onde P é matriz positiva definida, simétrica e satisfaz a equação de Ricatti (5.32).

A derivada da função V , calculada na trajetória ótima com o controle (5.31) é

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \dot{y}^T P y + y^T P \dot{y} = \\ &= [y^T A^T + y^T G^T(x, \tilde{x}) - y^T P B(R^{-1})^T B^T] P y + y^T P [A y + G(x, \tilde{x}) y - B R^{-1} B^T P y] = \\ &= y^T [A^T P + P A - P B(R^{-1})^T B^T P - P B R^{-1} B^T P] y + y^T [G^T(x, \tilde{x}) P + P G(x, \tilde{x})] y\end{aligned}$$

Substituindo $\dot{V}$ na equação de Hamilton – Jacobi – Bellman (5.36), obtêm-se

$$\begin{aligned}y^T [A^T P + P A - P B(R^{-1})^T B^T P - P B R^{-1} B^T P] y + y^T [G^T(x, \tilde{x}) P + P G(x, \tilde{x})] y + \\ + y^T \tilde{Q} y + u^T R u = 0\end{aligned}$$

ou

$$y^T [A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + G^T(x, \tilde{x}) P + y P G(x, \tilde{x}) + \tilde{Q}] y = 0$$

de onde segue

$$\tilde{Q} = Q - G^T(x, \tilde{x}) P - P G(x, \tilde{x}) \quad (5.38)$$

Para as matrizes $\tilde{Q}$ e R positivas definidas o sistema controlado (5.30) é assintoticamente estável, pois existe a função de Lyapunov (5.37) positiva definida, cuja derivada $\dot{V} = -y^T \tilde{Q} y - u^T R u$, calculada nas trajetórias ótimas do sistema (5.30) é definida negativa.

Observando que conforme a teoria de controle ótimo de sistemas lineares com funcional quadrático (Bryson, Ho, 1975), a equação não-linear algébrica de Riccati (5.32) possui única solução positiva simétrica $P > 0$ para quaisquer $R > 0$ e $Q \geq 0$ dadas, conclui-se então a demonstração do teorema de Rafikov e Balthazar (Rafikov, Balthazar, 2004, 2005).

A resolução do problema de síntese de controle ótimo exposto (5.30)-(5.34) pode ser resumido utilizando o fluxograma da figura 5.12.

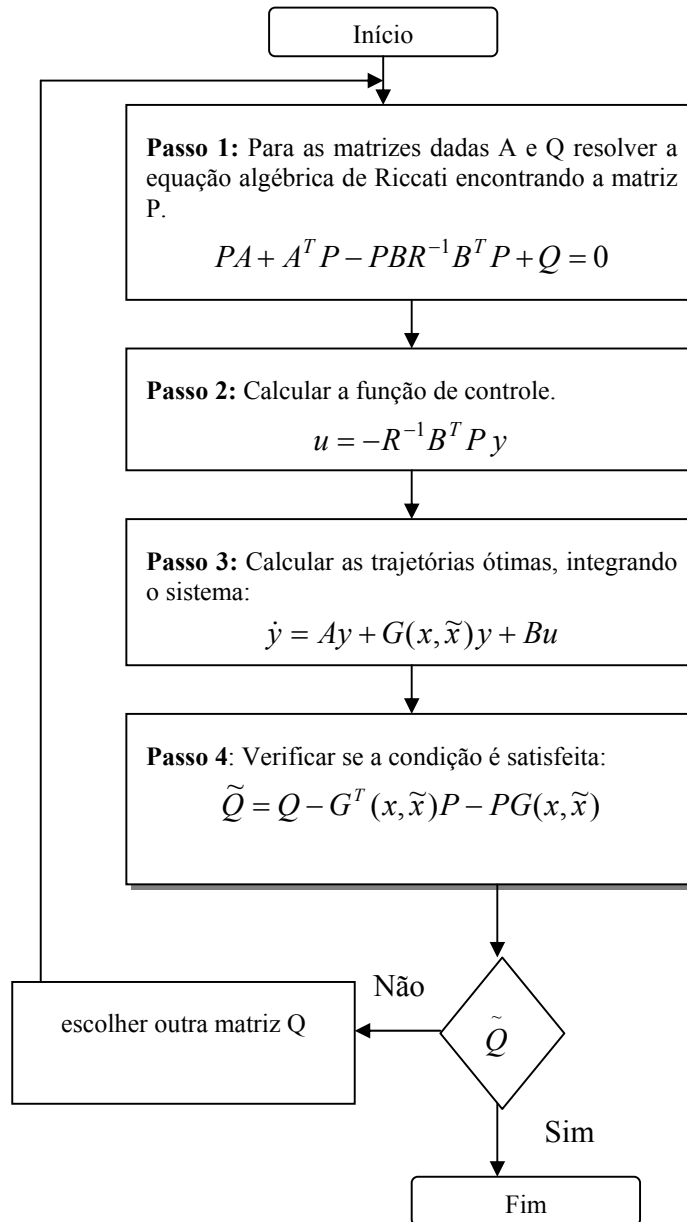


Figura 5.12: Fluxograma da Síntese do Controle Ótimo.

Utilizar-se-á, o teorema acima, nos casos que foram obtidos na análise bifurcacional da dinâmica de vôo longitudinal da aeronave F-8 “Crusader” (Pereira, 2006), obtidas por ocasião do capítulo 3 visto anteriormente, com o objetivo de demonstrar a eficiência desta teoria de controle, porém sem esgotar todas as possibilidades.

5.3. Controle Linear Ótimo para o Modelo adotado de vôo longitudinal

As equações que descrevem o modelo de vôo longitudinal são as seguintes:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= q \cos^2 \alpha + 0.0381 \cos^2 \alpha \cos \theta - (1/m)(564.434\alpha - 1693.301\alpha^3) \cos^3 \alpha W - \\ &\quad (1/m)(35.145\alpha - 6.560\alpha^3 + 144.096\delta_e - 316.309\alpha\delta_e^2 - 421.745\delta_e^3) \cos^2 \alpha \\ &\quad (0.25\alpha + \delta_e) + U \\ \dot{\theta} &= q \\ \dot{q} &= -(1/m)264.409q + (1/m)(622.222\alpha - 1866.667\alpha^3) \cos \alpha W - (1/m)(3423.386\alpha - \\ &\quad 641.885\alpha^3 + 14035.883\delta_e - 7702.619\alpha^2\delta_e^2 - 41080.634\delta_e^3) \cos(0.25\alpha + \delta_e)\end{aligned}$$

Utilizando a técnica de controle, exposta, através do teorema 1 (Rafkov e Balthazar) obtiveram-se os seguintes e importantes resultados:

5.3.1 Primeiro caso:

Tomando-se os valores iniciais:

$$m = 9773\text{kg}; \alpha = 0.4\text{rad}; \theta = -1.5\text{rad}; q = 0.1; \delta_e = -0.11\text{rad},$$

determina-se a matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

cujos elementos a_{ij} são dados por:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= -2\theta \cos \alpha \sin \alpha - 0.0762 \cos \alpha \cos q \sin \alpha - (0.8453 - 7.6081\alpha^2) \cos \alpha^3 / \\
&\quad (1 + 1.7099 * 10^{23} \alpha^{60}) + 3(0.8453\alpha - 2.5360\alpha^3) \cos \alpha^2 / (1 + 1.7099 * 10^{23} \alpha^{60}) \sin \alpha + \\
&\quad 1.0259 * 10^{25} (0.8453\alpha - 2.5360\alpha^3) \cos \alpha^3 / (1 + 1.7099 * 10^{23} \alpha^{60})^2 \alpha^{59} - (0.0469 \\
&\quad - 0.0295\alpha^2 + 0.0261\alpha) \cos \alpha^2 \cos(0.25\alpha - 0.11) + 2(0.0469\alpha - 0.0098\alpha^3 - 0.0229 + \\
&\quad 0.0130\alpha^2) \cos \alpha \cos(0.25\alpha - 0.11) \sin \alpha + 0.25(0.0469\alpha - 0.0098\alpha^3 - 0.0229 + 0.0130\alpha^2) \\
&\quad \cos \alpha^2 \sin(0.25\alpha - 0.11) \\
a_{12} &= \cos \alpha^2 \\
a_{13} &= -0.0381 \cos \alpha^2 \sin q \\
a_{21} &= (0.9319 - 8.3870\alpha^2) \cos \alpha / (1 + 1.7099 * 10^{23} \alpha^{60}) - (0.9319\alpha - 2.7957\alpha^3) \sin \alpha / \\
&\quad (1 + 1.7099 * 10^{23} \alpha^{60}) - 1.0259 * 10^{25} (0.9319\alpha - 2.7957\alpha^3) \sin \alpha / (1 + 1.7099 * 10^{23} \alpha^{60}) - \\
&\quad 1.0259 * 10^{25} (0.9319\alpha - 2.7957\alpha^3) \cos \alpha / (1 + 1.7099 * 10^{23} \alpha^{60})^2 \alpha^{59} - (4.5688 \\
&\quad - 2.8840\alpha^2 + 2.5379\alpha) \cos(0.25\alpha - 0.11) + 0.25(4.5688\alpha - 0.9613\alpha^3 - 2.2304 \\
&\quad + 1.2690\alpha^2) \sin(0.25\alpha - 0.11) \\
a_{22} &= -0.3960 \\
a_{23} &= 0 \\
a_{31} &= 0 \\
a_{32} &= 1 \\
a_{33} &= 0
\end{aligned} \tag{5.40}$$

A matriz B, neste caso, é tomada como sendo

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.41}$$

$$\text{Escolhendo } y = \begin{bmatrix} x_1 - \tilde{x}_1 \\ x_2 - \tilde{x}_2 \\ x_3 - \tilde{x}_3 \end{bmatrix}, \quad \tilde{x} = \begin{bmatrix} 0.43 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e a matriz } Q = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix} \text{ definida}$$

positiva; que substituídas na matriz A, obtém-se:

$$A = \begin{bmatrix} -0.6003 & 0.9714 & 0 \\ -4.2266 & -0.3960 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

A controlabilidade do sistema dinâmico, em questão, é obtida calculando-se o posto da matriz $M = [B \mid AB \mid A^2B]$.

Obteve-se que a matriz M , tem posto 3, pois o determinante de M é 17.8644 e portanto diferente de zero.

A seguir, obtém-se a matriz P :

$$P = \begin{bmatrix} 0.3993 & -0.0682 & -0.2500 \\ -0.0682 & 0.0551 & 0.0591 \\ -0.2500 & 0.0591 & 0.2833 \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

Através da solução da equação algébrica de Riccati (5.35), utilizando-se o MatLab®, tem-se que a função de controle ótimo u , para este caso, tem a seguinte forma:

$$u = 0.9531x_1 - 0.2133x_2 - 0.500x_3. \quad (5.44)$$

Os resultados obtidos, logo acima, são ilustrados através da figura 5.13, onde se exibem os resultados com e sem controle, demonstrando, desta forma a eficácia do processo utilizado.

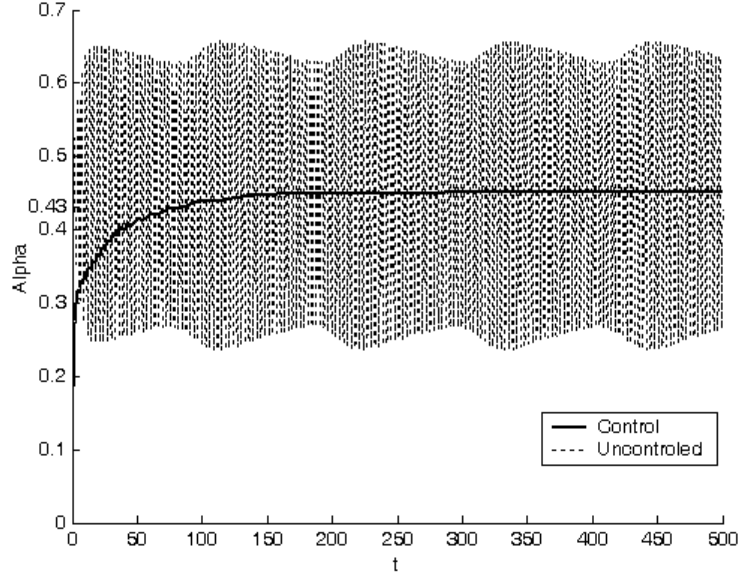


Figura 5.13: Sistema controlado e não controlado para os valores

$$m = 9773\text{kg}; \alpha = 0.4\text{rad}; \theta = -1.5\text{rad}; q = 0.1; \delta_e = -0.11\text{rad}$$

5.3.2 Segundo caso:

Procedendo-se de maneira semelhante ao efetuado no primeiro caso, tem-se:

Para as condições iniciais com Bifurcação de Hopf:

$$m = 667.7; \alpha = 0.4347\text{rad}; \theta = 1.4588\text{rad}; q = 0; \delta_e = -0.1058\text{rad}.$$

Determina-se a matriz A :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

cujos elementos a_{ij} são dados por:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= -2\theta \cos \alpha \sin \alpha - 0.0762 \cos \alpha \cos q \sin \alpha - (0.8453 - 7.6081\alpha^2) \cos \alpha^3 / \\
&\quad (1 + 1.7099 * 10^{23} \alpha^{60}) + 3(0.8453\alpha - 2.5360\alpha^3) \cos \alpha^2 / (1 + 1.7099 * 10^{23} \alpha^{60}) \sin \alpha + \\
&\quad 1.0259 - 10^{25} (0.8453\alpha - 2.5360\alpha^3) \cos \alpha^3 / (1 + 1.7099 * 10^{23} \alpha^{60})^2 \alpha^{59} - (0.0473 \\
&\quad - 0.0295\alpha^2 + 0.0251\alpha) \cos \alpha^2 \cos(0.25\alpha - 0.1058) + 2(0.0473\alpha - 0.0098\alpha^3 - 0.0346\alpha^2) \\
&\quad \cos \alpha \cos(0.25\alpha - 0.1058) \sin \alpha + 0.25(0.0473\alpha - 0.0098\alpha^3 - 0.0221 + 0.0125\alpha^2) \\
&\quad \cos \alpha^2 \sin(0.25\alpha - 0.1058) \\
a_{12} &= \cos \alpha^2 \\
a_{13} &= -0.0381 \cos \alpha^2 \sin q \\
a_{21} &= (0.9319 - 8.3870\alpha^2) \cos \alpha / (1 + 1.7099 * 10^{23} \alpha^{60}) - (0.9319\alpha - 2.7957\alpha^3) \sin \alpha / \\
&\quad (1 + 1.7099 * 10^{23} \alpha^{60}) - 1.0259 * 10^{25} (0.9319\alpha - 2.7957\alpha^3) \sin \alpha / (1 + 1.7099 * 10^{23} \alpha^{60}) - \\
&\quad 1.0259 * 10^{25} (0.9319\alpha - 2.7957\alpha^3) \cos \alpha / (1 + 1.7099 * 10^{23} \alpha^{60})^2 \alpha^{59} - (4.6106 \\
&\quad - 2.8840\alpha^2 + 2.4410\alpha) \cos(0.25\alpha - 0.1058) + 0.25(4.6106\alpha - 0.9613\alpha^3 - 2.1512 \\
&\quad + 1.2205\alpha^2) \sin(0.25\alpha - 0.1058) \\
a_{22} &= -0.3960 \\
a_{23} &= 0 \\
a_{31} &= 0 \\
a_{32} &= 1 \\
a_{33} &= 0
\end{aligned}$$

A matriz B é da forma:

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Onde } y = \begin{bmatrix} x_1 - \tilde{x}_1 \\ x_2 - \tilde{x}_2 \\ x_3 - \tilde{x}_3 \end{bmatrix}, \tilde{x} = \begin{bmatrix} 0.37 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e a matriz } Q = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix} \text{ é definida positiva.}$$

Substituindo-se os valores descritos na matriz de estado tem-se:

$$A = \begin{bmatrix} 0.3265 & 0.8692 & 0 \\ -5.0930 & -0.3960 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Para se verificar a controlabilidade do sistema calcula-se o posto da matriz $M = [B \mid AB \mid A^2B]$ que é $3 \neq 0$, pois o determinante de M é 36.2282 e portanto diferente de zero.

Logo após, obtém-se a matriz P , onde temos:

$$P = \begin{bmatrix} 4.6289 & -0.9406 & -1.6203 \\ -0.9406 & 0.6762 & 0.6203 \\ -1.6203 & 0.6203 & 1.9185 \end{bmatrix}$$

Resolvendo a equação algébrica de Riccati (5.35) a função de controle ótimo u tem a seguinte forma:

$$u = 3.68883 x_1 - 0.2644 x_2 - 1 x_3.$$

As trajetórias α do sistema sem controle e do sistema controlado são ilustradas a seguir:

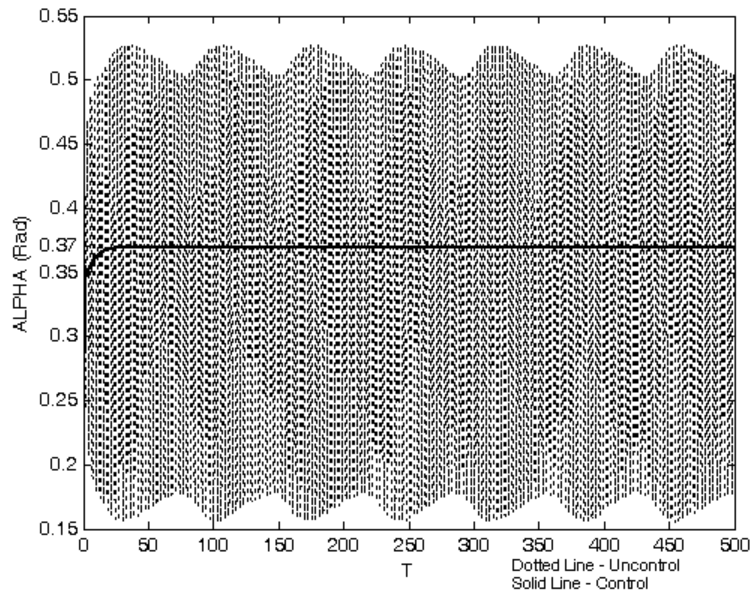


Figura 5.14: Sistema controlado e não controlado para os valores

$$m = 9773kg; \alpha = 0.4347rad; \theta = 1.4588rad; q = 0; \delta_e = -0.1058rad$$

OBS: Como o controle é ótimo, é preciso refazer os cálculos somente quando mudar a massa da aeronave, do contrário somente muda-se as condições iniciais e aplica-se o mesmo controle

5.3.3 Terceiro caso:

Procedendo-se de maneira semelhante ao efetuado no primeiro caso, tem-se para as condições iniciais com Bifurcação de Hopf:

$$m = 667.7; \alpha = 0.4360rad; \theta = -1.4773rad; q = 0; \delta_e = -0.1062rad$$

Obtém-se a matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

com elementos a_{ij} dados por:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -2\theta \cos \alpha \sin \alpha - 0.0762 \cos \alpha \cos q \sin \alpha - (0.8453 - 7.6081\alpha^2) \cos \alpha^3 / \\ &\quad (1 + 1.0276 * 10^{97} \alpha^{60}) + 3(0.8453\alpha - 2.5360\alpha^3) \cos \alpha^2 / (1 + 1.0276 * 10^{97} \alpha^{60}) \sin \alpha + \\ &\quad 1.0259 - 10^{25} (0.8453\alpha - 2.5360\alpha^3) \cos \alpha^3 / (1 + 1.0276 * 10^{97} \alpha^{60})^2 \alpha^{59} - (0.0473 \\ &\quad - 0.0295\alpha^2 + 0.0251\alpha) \cos \alpha^2 \cos(0.25\alpha - 0.1062) + 2(0.0473\alpha - 0.0098\alpha^3 - 0.0222 + 0.0126\alpha^2) \\ &\quad \cos \alpha \cos(0.25\alpha - 0.1062) \sin \alpha + 0.25(0.0473\alpha - 0.0098\alpha^3 - 0.0222 + 0.0126\alpha^2) \\ &\quad \cos \alpha^2 \sin(0.25\alpha - 0.1062) \\ a_{12} &= \cos \alpha^2 \\ a_{13} &= -0.0381 \cos \alpha^2 \sin q \\ a_{21} &= (0.9319 - 8.3870\alpha^2) \cos \alpha / (1 + 1.7099 * 10^{23} \alpha^{60}) - (0.9319\alpha - 2.7957\alpha^3) \sin \alpha / \\ &\quad (1 + 1.7099 * 10^{23} \alpha^{60}) - 1.0259 * 10^{25} (0.9319\alpha - 2.7957\alpha^3) \sin \alpha / (1 + 1.7099 * 10^{23} \alpha^{60})^2 \alpha^{59} - \\ &\quad (4.6067 - 2.8840\alpha^2 + 2.4503\alpha) \cos(0.25\alpha - 0.1062) + 0.25(4.6067\alpha - 0.9613\alpha^3 - 2.1588 \\ &\quad + 1.2251\alpha^2) \sin(0.25\alpha - 0.1062) \\ a_{22} &= -0.3960 \\ a_{23} &= 0 \\ a_{31} &= 0 \\ a_{32} &= 1 \\ a_{33} &= 0 \end{aligned}$$

e matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Tem-se } y = \begin{bmatrix} x_1 - \tilde{x}_1 \\ x_2 - \tilde{x}_2 \\ x_3 - \tilde{x}_3 \end{bmatrix}, \tilde{x} = \begin{bmatrix} 0.43 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e matriz } Q = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix} \text{ definida positiva.}$$

Substituindo os valores em questão na matriz A , obtem-se :

$$A = \begin{bmatrix} -0.0153 & 0.8108 & 0 \\ -5.2015 & -0.3960 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Para se verificar a controlabilidade do sistema calcula-se o posto da matriz $M = [B \mid AB \mid A^2B]$ que é $3 \neq 0$, pois o determinante de M é 27.0558 e portanto diferente de zero.

Finalmente, obtem-se a matriz P :

$$P = \begin{bmatrix} 0.7128 & -0.0449 & -0.2500 \\ -0.0449 & 0.0728 & 0.0350 \\ -0.2500 & 0.0350 & 0.2278 \end{bmatrix}$$

Resolvendo-se a equação algébrica de Riccati, a função de controle ótimo u obtem-se :

$$u = 1.5271x_1 - 0.2046x_2 - 0.500x_3.$$

As trajetórias do sistema dinâmico em questão, sem controle e do sistema controlado, são ilustradas a seguir:

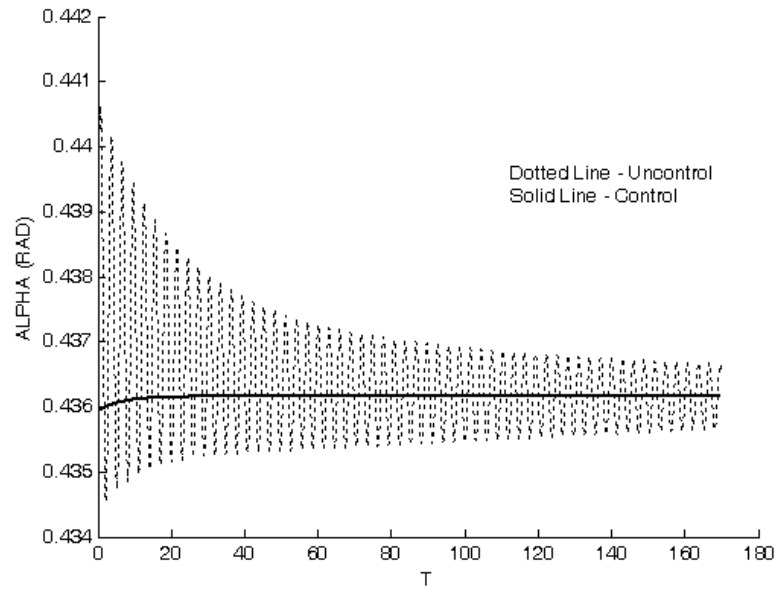


Figura 5.15: Sistema controlado e não controlado para os valores
 $m = 9773\text{kg}; \alpha = 0.4360\text{rad}; \theta = -1.4773\text{rad}; q = 0; \delta_e = -0.1062\text{rad}$

5.3.4 Quarto caso:

Para as condições iniciais com Bifurcação Sela Nó:

$m = 667.7; \alpha = 0.0448\text{rad}; \theta = 0\text{rad}; q = 0; \delta_e = -0.0090\text{rad}$, determina-se a matriz A como sendo:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= -2\theta \cos \alpha \sin \alpha - 0.0762 \cos \alpha \cos q \sin \alpha - (0.8453 - 7.6081\alpha^2) \cos \alpha^3 / \\
&\quad (1 + 1.0276 * 10^{97} \alpha^{60}) + 3(0.8453\alpha - 2.5360\alpha^3) \cos \alpha^2 / (1 + 1.0276 * 10^{97} \alpha^{60}) \sin \alpha + \\
&\quad 1.0259 - 10^{25} (0.8453\alpha - 2.5360\alpha^3) \cos \alpha^3 / (1 + 1.0276 * 10^{97} \alpha^{60})^2 \alpha^{59} - (0.0473 \\
&\quad - 0.0295\alpha^2 + 0.0251\alpha) \cos \alpha^2 \cos(0.25\alpha - 0.1062) + 2(0.0473\alpha - 0.0098\alpha^3 - 0.0222 + 0.0126\alpha^2) \\
&\quad \cos \alpha \cos(0.25\alpha - 0.1062) \sin \alpha + 0.25(0.0473\alpha - 0.0098\alpha^3 - 0.0222 + 0.0126\alpha^2) \\
&\quad \cos \alpha^2 \sin(0.25\alpha - 0.1062) \\
a_{12} &= \cos \alpha^2 \\
a_{13} &= -0.0381 \cos \alpha^2 \sin q \\
a_{21} &= (0.9319 - 8.3870\alpha^2) \cos \alpha / (1 + 1.7099 * 10^{23} \alpha^{60}) - (0.9319\alpha - 2.7957\alpha^3) \sin \alpha / \\
&\quad (1 + 1.7099 * 10^{23} \alpha^{60}) - 1.0259 * 10^{25} (0.9319\alpha - 2.7957\alpha^3) \sin \alpha / (1 + 1.7099 * 10^{23} \alpha^{60})^2 \alpha^{59} - \\
&\quad (4.6067 - 2.8840\alpha^2 + 2.4503\alpha) \cos(0.25\alpha - 0.1062) + 0.25(4.6067\alpha - 0.9613\alpha^3 - 2.1588 \\
&\quad + 1.2251\alpha^2) \sin(0.25\alpha - 0.1062) \\
a_{22} &= -0.3960 \\
a_{23} &= 0 \\
a_{31} &= 0 \\
a_{32} &= 1 \\
a_{33} &= 0
\end{aligned}$$

e a matriz B:

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tem-se, neste caso, $y = \begin{bmatrix} x_1 - \tilde{x}_1 \\ x_2 - \tilde{x}_2 \\ x_3 - \tilde{x}_3 \end{bmatrix}$, $\tilde{x} = \begin{bmatrix} 0.04 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e a matriz $Q = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix}$ sendo

definida positiva.

Substituindo-se os valores na matriz A , temos:

$$A = \begin{bmatrix} -0.0153 & 0.8108 & 0 \\ -5.2015 & -0.3960 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Da mesma forma que anteriormente, para se verificar a controlabilidade do sistema dinâmico em questão, calcula-se o posto da matriz, que é 3, pois o determinante de M é 27.0558 e portanto diferente de zero (quando o sistema dinâmico considerado é controlável).

Logo após, obtém-se a matriz P, onde temos:

$$P = \begin{bmatrix} 0.7128 & -0.0449 & -0.2500 \\ -0.0449 & 0.0728 & 0.0350 \\ -0.2500 & 0.0350 & 0.2278 \end{bmatrix}$$

Resolvendo (2.13), a função de controle ótimo u tem a seguinte forma:

$$u = 1.5271x_1 - 0.2046x_2 - 0.5000x_3.$$

As trajetórias α do sistema sem controle e do sistema controlado são ilustradas a seguir:

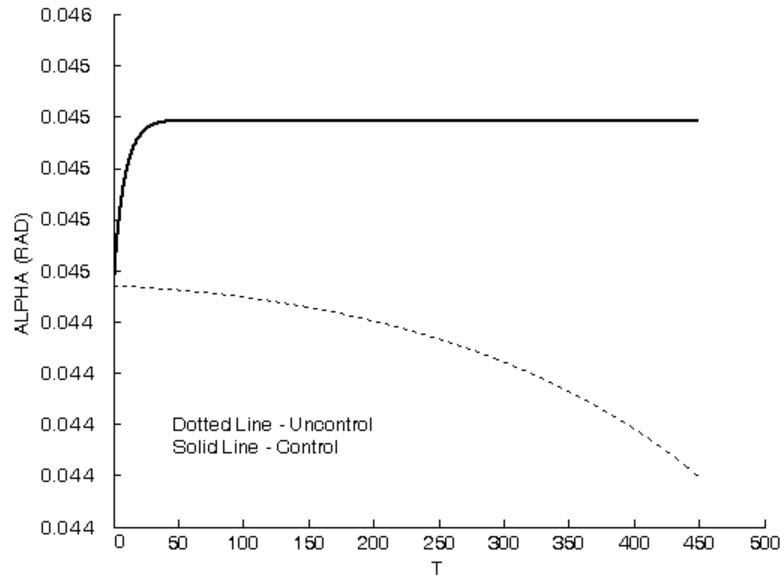


Figura 5.16: Sistema controlado e não controlado para os valores

$$m = 9773kg; \alpha = 0.0448rad; \theta = 0rad; q = 0; \delta_e = -0.0090rad$$

5.3.5 Quinto caso:

Para as condições iniciais com Bifurcação Sela Nó:

$$m = 667.7; \alpha = 0.4177rad; \theta = 0rad; q = 0; \delta_e = -0.0999rad$$

Determina-se a matriz A como sendo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Com os elementos a_{ij} obtidos por:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= -2\theta \cos \alpha \sin \alpha - 0.0762 \cos \alpha \cos q \sin \alpha - (0.1691 - 1.5216\alpha^2) \cos \alpha^3 / \\
&\quad (1 + 1.7099 * 10^{23} \alpha^{60}) + 3(0.1691\alpha - 0.5072\alpha^3) \cos \alpha^2 / (1 + 1.7099 * 10^{23} \alpha^{60}) \sin \alpha + \\
&\quad 1.0259 - 10^{25} (0.1691\alpha - 0.5072\alpha^3) \cos \alpha^3 / (1 + 1.7099 * 10^{23} \alpha^{60})^2 \alpha^{59} - (0.0099 \\
&\quad - 0.0059\alpha^2 + 0.0039\alpha) \cos \alpha^2 \cos(0.25\alpha - 0.0825) + 2(0.0099\alpha - 0.0020\alpha^3 - 0.0035 + 0.0020\alpha^2) \\
&\quad \cos \alpha \cos(0.25\alpha - 0.0825) \sin \alpha + 0.25(0.0099\alpha - 0.0020\alpha^3 - 0.0035 + 0.0020\alpha^2) \\
&\quad \cos \alpha^2 \sin(0.25\alpha - 0.0825) \\
a_{12} &= \cos \alpha^2 \\
a_{13} &= -0.0381 \cos \alpha^2 \sin q \\
a_{21} &= (0.1864 - 1.6774\alpha^2) \cos \alpha / (1 + 1.7099 * 10^{23} \alpha^{60}) - (0.1864\alpha - 0.5591\alpha^3) \sin \alpha / \\
&\quad (1 + 1.7099 * 10^{23} \alpha^{60}) - 1.0259 * 10^{25} (0.1864\alpha - 0.5591\alpha^3) \sin \alpha / (1 + 1.7099 * 10^{23} \alpha^{60})^2 \alpha^{59} - \\
&\quad (0.9625 - 0.5768\alpha^2 + 0.3809\alpha) \cos(0.25\alpha - 0.0825) + 0.25(0.9625\alpha - 0.1923\alpha^3 - 0.3401 \\
&\quad + 2.2860 * 10^{33} \alpha^2) \sin(0.25\alpha - 0.0825) \\
a_{22} &= -0.3960 \\
a_{23} &= 0 \\
a_{31} &= 0 \\
a_{32} &= 1 \\
a_{33} &= 0
\end{aligned}$$

$$E \ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{x} = \begin{bmatrix} 0.37 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix}.$$

Temos

$$A = \begin{bmatrix} 0.0052 & 0.8108 & 0 \\ -4.6315 & -0.3960 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Como anteriormente, verifica-se a controlabilidade do sistema calculando-se o posto da matriz $M = [B \mid AB \mid A^2B]$ que é $3 \neq 0$. Então, como o determinante de M é 21.4511 e diferente de zero e obtem-se a controlabilidade do sistema.

Logo após, obtem-se a matriz P , onde tem-se:

$$P = \begin{bmatrix} 0.6973 & -0.0450 & -0.2500 \\ -0.0450 & 0.0787 & 0.0374 \\ -0.2500 & 0.0374 & 0.2287 \end{bmatrix}$$

Resolvendo-se a equação algébrica de Riccati, a função de controle ótimo u tem a seguinte forma:

$$u = 1.4829x_1 - 0.2087x_2 - 0.5000x_3.$$

As trajetórias α do sistema sem controle e do sistema controlado são ilustradas a seguir:

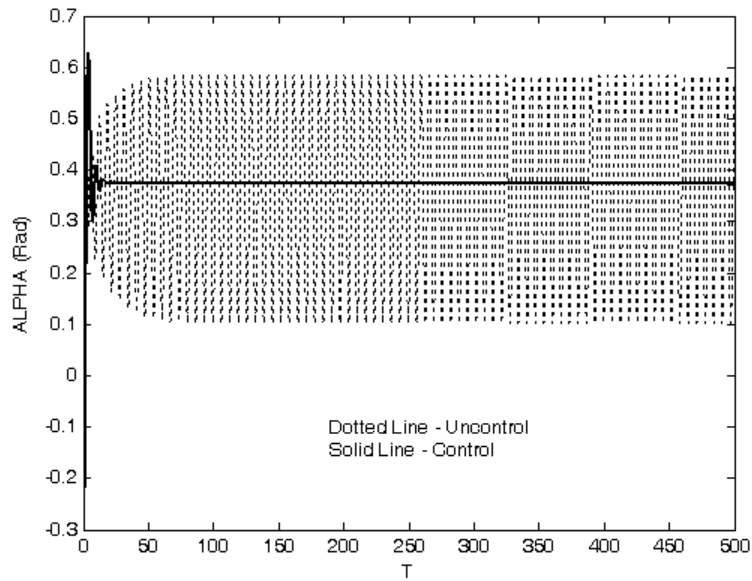


Figura 5.17: Sistema controlado e não controlado para os valores

$$m = 9773kg; \alpha = 0.4177rad; \theta = 0rad; q = 0; \delta_e = -0.0999rad$$

5.3.6 Sexto caso:

Para as condições iniciais com Bifurcação Hopf com massa $m=5*m_0$:

$$m = 5 * 667.7; \alpha = 0.381108rad; \theta = 0.531238rad; q = 0; \delta_e = -0.084208rad$$

OBS: Mudando a Massa, mudam-se também as matrizes de Controle

Determina-se a matriz A como sendo:

$$A = \begin{bmatrix} -0.0261 & 0.8108 & 0 \\ -1.0311 & -0.0792 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

E,

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \tilde{x} = \begin{bmatrix} 0.37 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } Q = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix}$$

Para se verificar a controlabilidade do sistema calcula-se o posto da matriz $M = [B \mid AB \mid A^2B]$ que é $3 \neq 0$, pois o determinante de M é 1.0632 e portanto diferente de zero.

Logo após, obtem-se a matriz P, onde temos:

$$P = \begin{bmatrix} 0.6300 & -0.1781 & -0.2500 \\ -0.1781 & 0.3799 & 0.1591 \\ -0.2500 & 0.1591 & 0.2598 \end{bmatrix}$$

resolvendo a equação algébrica de Riccati (5.35) a função de controle ótimo u tem a seguinte forma:

$$u = 1.1601x_1 - 0.5607x_2 - 0.5000x_3.$$

As trajetórias α do sistema sem controle e do sistema controlado são ilustradas a seguir:

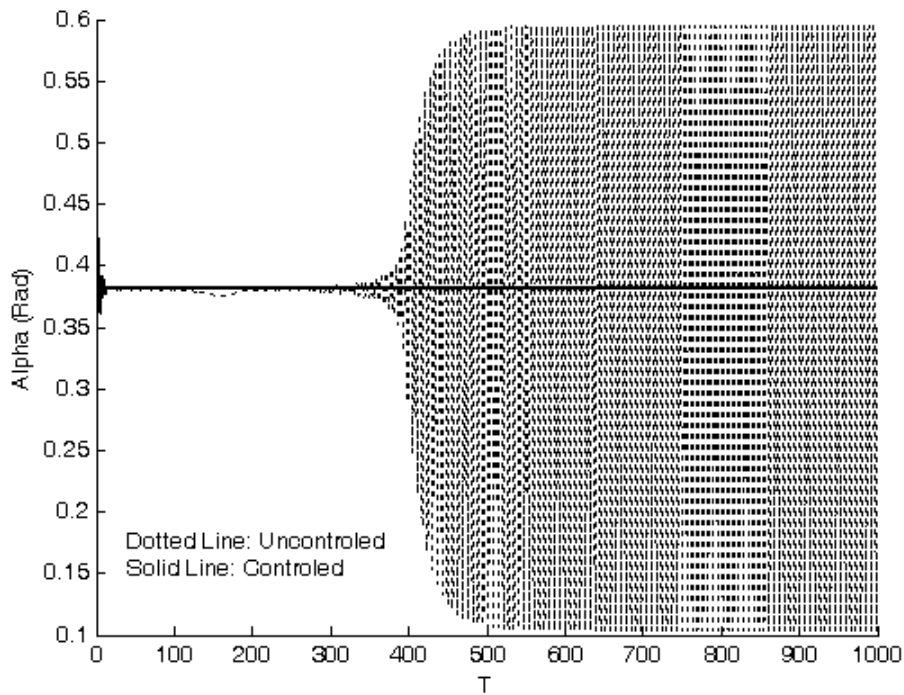


Figura 5.18: Sistema controlado e não controlado para os valores

$$m = 5*9773kg; \alpha = 0.381108rad; \theta = 0.531238rad; q = 0; \delta_e = -0.084208rad$$

5.3.7 Sétimo caso:

Para as condições iniciais com Bifurcação Hopf:

$$m = 5*667.7; \alpha = 0.432570rad; \theta = 1.541697rad; q = 0; \delta_e = -0.105210rad$$

Tem-se que a matriz A é da forma seguinte:

$$A = \begin{bmatrix} -0.0269 & 0.8108 & 0 \\ -1.0402 & -0.0792 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Para se verificar a controlabilidade do sistema calcula-se o posto da matriz $M = [B \mid AB \mid A^2B]$ que é $3 \neq 0$, pois o determinante de M é 1.0819 e portanto diferente de zero.

Logo após, obtem-se a matriz P , da forma:

$$P = \begin{bmatrix} 0.6303 & -0.1772 & -0.2500 \\ -0.1772 & 0.3764 & 0.1580 \\ -0.2500 & 0.1580 & 0.2595 \end{bmatrix}$$

Resolvendo-se a equação algébrica de Riccati (5.35), a função de controle ótimo u tem a seguinte forma:

$$u = 1.1616x_1 - 0.5585x_2 - 0.5000x_3$$

As trajetórias α do sistema sem controle e do sistema controlado são ilustradas a seguir:

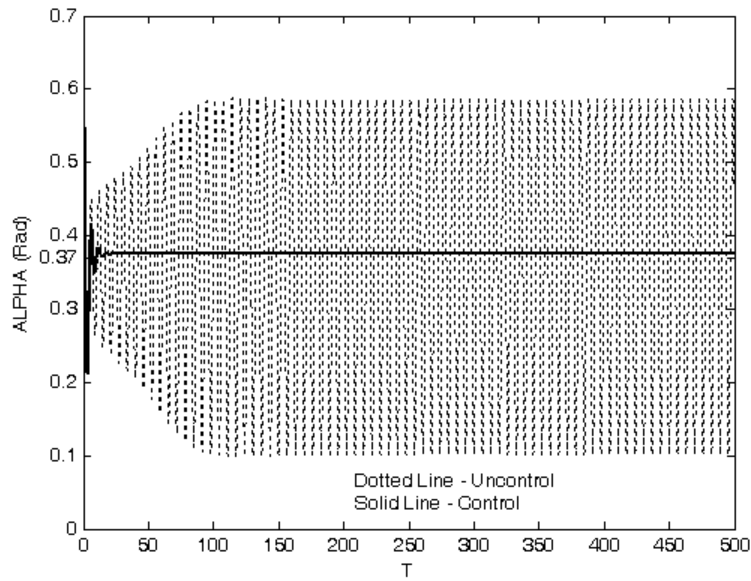


Figura 5.19: Sistema controlado e não controlado para os valores
 $m = 5 * 9773 \text{ kg}; \alpha = 0.432570 \text{ rad}; \theta = 1.541697 \text{ rad}; q = 0; \delta_e = -0.105210 \text{ rad}$

5.3.8 Oitavo caso:

Para as condições iniciais com Bifurcação Hopf:

$$m = 5 * 667.7; \alpha = 0.374950 \text{ rad}; \theta = -0.498879 \text{ rad}; q = 0; \delta_e = -0.082545 \text{ rad}$$

Determina-se a matriz A como sendo:

$$A = \begin{bmatrix} -0.0261 & 0.8108 & 0 \\ -1.0311 & -0.0792 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Para se verificar a controlabilidade do sistema calcula-se o posto da matriz $M = [B \mid AB \mid A^2B]$ que é $3 \neq 0$, pois o determinante de M é 1.0632 e portanto diferente de zero.

Logo após, obtem-se a matriz P:

$$P = \begin{bmatrix} 0.6300 & -0.1781 & -0.2500 \\ -0.1781 & 0.3799 & 0.1591 \\ -0.2500 & 0.1591 & 0.2598 \end{bmatrix}$$

Resolvendo a equação algébrica de Riccati (5.35) a função de controle ótimo u tem a seguinte forma:

$$u = 1.1601x_1 - 0.5607x_2 - 0.5000x_3$$

As trajetórias α do sistema sem controle e do sistema controlado são ilustradas a seguir:

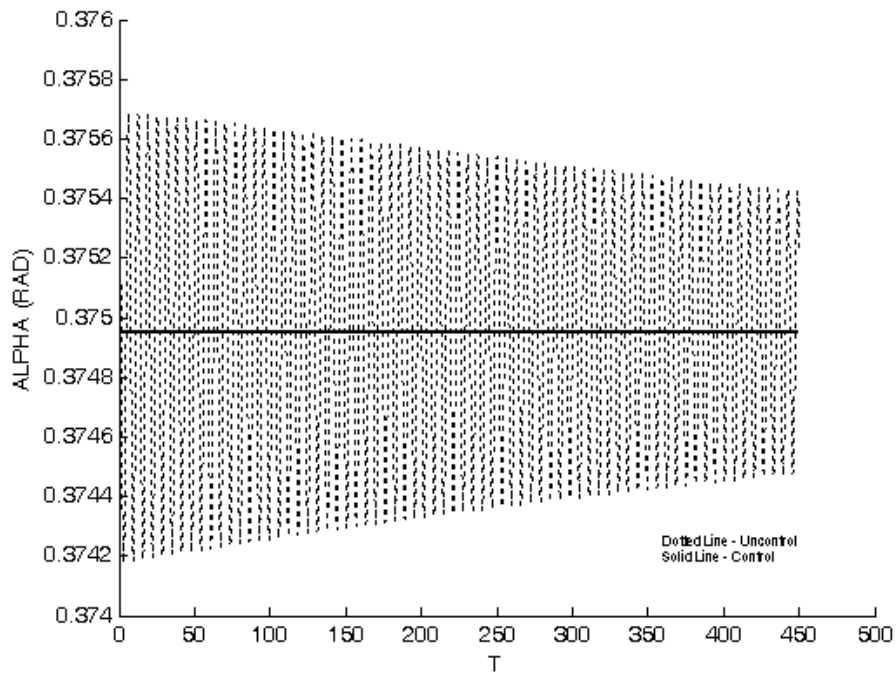


Figura 5.20: Sistema controlado e não controlado para os valores

$m = 5 * 9773 \text{ kg}; \alpha = 0.374950 \text{ rad}; \theta = -0.498879 \text{ rad}; q = 0; \delta_e = -0.082545 \text{ rad}$

5.3.9 Nono caso:

Procedendo-se de maneira análoga tem-se para as condições iniciais com Bifurcação Hopf:
 $m = 5 * 667.7; \alpha = 0.43956rad; \theta = -1.559730rad; q = 0; \delta_e = -0.107098rad$

Tem-se a matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} -0.0270 & 0.8108 & 0 \\ -1.0404 & -0.0792 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Para se verificar a controlabilidade do sistema calcula-se o posto da matriz $M = [B \mid AB \mid A^2B]$ que é $3 \neq 0$, pois o determinante de M é 1.0825 e portanto diferente de zero.

Logo após, obtem-se a matriz P:

$$P = \begin{bmatrix} 0.6303 & -0.1772 & -0.2500 \\ -0.1772 & 0.3763 & 0.1579 \\ -0.2500 & 0.1579 & 0.2595 \end{bmatrix}$$

Resolvendo-se a equação algébrica de Riccati (5.35) a função de controle ótimo u Obtém-se:

$$u = 1.1616x_1 - 0.5584x_2 - 0.5000x_3.$$

As trajetórias α do sistema sem controle e do sistema controlado são ilustradas a seguir:

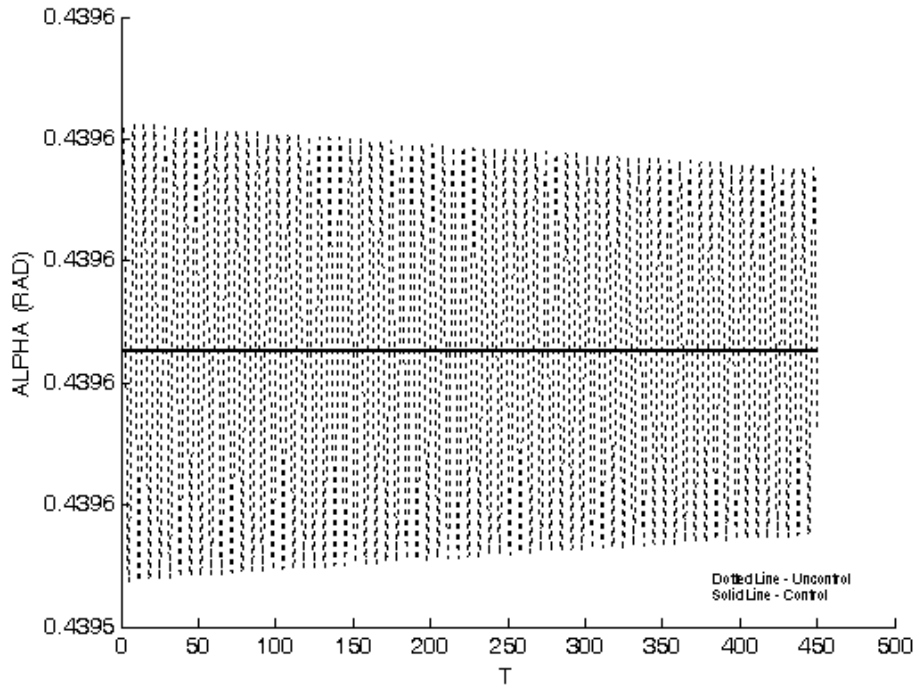


Figura 5.21: Sistema controlado e não controlado para os valores
 $m = 5 \cdot 9773 \text{ kg}; \alpha = 0.4396 \text{ rad}; \theta = -1.559730 \text{ rad}; q = 0; \delta_e = -0.107098 \text{ rad}$

5.3 Conclusões Parciais.

Nas figuras 5.12 a 5.21 obtidas, mostram-se os resultados com controle e sem controle. Nas ilustrações acima exibidas, pode-se observar que a aeronave foi submetida a um alto ângulo de ataque próximo do valor crítico de estol, nas condições de voo estabelecidas, conforme mencionado em (Garrard, 1977), que assume a aeronave em voo constante a uma velocidade de 257.7 m/s em 9773 m de altitude tendo um ângulo de estol de 23.5° (0.4102 rad). Observou-se que o controlador obtido estabilizou o ângulo de ataque, que era o objetivo a ser alcançado.

Ressalta-se que os resultados que foram expostos (seção 5.2) anteriormente foram satisfatórios, para o movimento longitudinal da aeronave considerada, onde se assumiu que a aeronave considerada voa em velocidade constante, isto é, $\dot{u} = 0$.

Observa-se que esta técnica analítica trabalha sem derrubar qualquer contribuição importante presente na equação do movimento.

Nota-se que os resultados apresentados na seção 5.2, têm um forte indicativo de que este tipo de design de controle ótimo pode levar a uma melhoria significativa no tipo de aeronave considerada. Extensões para outros tipos de aeronave podem ser facilmente obtidas.

O exposto esclarece e resolve o problema de controle para esta aeronave.

A seguir, analisa-se o caso em que se considera $\dot{u} \neq 0$, com o objetivo de completar a pesquisa efetuada, tomando-se situações físicas, mais realísticas.

Esclarece-se que esta pesquisa é de extrema importância no estudo da dinâmica de uma aeronave para o conhecimento da resposta a uma determinada entrada no controle de pilotagem.

Levou-se em conta, neste trabalho, os efeitos de influências externas, tais como rajadas de vento (na resposta de aeronave e de cargas, descrevendo algumas das muitas fontes de turbulência atmosférica) que poderiam atuar na aeronave considerada, ou influenciar, tanto na resposta dinâmica da aeronave como também em seu “design” estrutural.

Nestas condições, consideram-se as equações do movimento longitudinal (onde no estado estacionário de referencia, consideram-se as asas niveladas) da aeronave F-8 *Crusader*.

Supõe-se que onde o arrasto é considerado muito pequeno em relação ao empuxo e ao seu peso e, que ela está a uma altitude de 9144 m, sendo sua massa inicial de 9773 Kg. O momento de inércia no eixo de arfagem foi tomado como sendo proporcional a massa da aeronave.

Neste trabalho, pesquisa-se uma possível interação do sistema aerodinâmico da aeronave F-8, com o campo de velocidade (considerando-se rajadas de vento cossenoidais) resultando em forças e momentos, que por sua vez causará uma resposta dinâmica nesta estrutura.

Trata-se de um estudo preliminar para a obtenção de um túnel de vento virtual.

Ressalta-se que as turbulências atmosféricas, modeladas aproximadamente por considerações de rajadas cossenoidas discretas, é na realidade, um processo randômico.

As análises destes efeitos envolvem as teorias harmônicas que, combinadas com métodos de espectros de potência, completam o estudo efetuado.

Utilizam-se as mesmas notações que foram utilizadas por ocasião da obtenção das equações do movimento longitudinal em que a velocidade da aeronave considerada era tomada como sendo constante, para facilidade de análise.

Capítulo 6

Túnel de Vento Virtual

Neste capítulo, aborda-se uma modelagem matemática do sistema não linear de voo longitudinal para aeronave F-8 “Crusader”, adicionando-se uma rajada de vento a fim de simular as variações da velocidade da aeronave.

6.1. Túnel de Vento Virtual para Movimento Longitudinal da Aeronave F-8 “Crusader”.

Como as várias aeronaves existentes variam extensamente em suas características dinâmicas, não é um empenho prático se desenvolver modelos matemáticos para cada uma delas. Busca-se, nesta etapa, apresentar um modelo geral levando-se em conta todas as forças e momentos envolvidos na modelagem considerada.

Analisa-se o efeito de mudanças súbito da velocidade do vento devido à turbulência atmosférica na resposta dinâmico da aeronave e seu projeto estrutural.

Como aplicação considera-se as equações de voo longitudinal da aeronave F-8 “*Crusader*” já descrita anteriormente. Da mesma forma, considera-se o arrasto muito pequeno em relação às forças de sustentação da aeronave. O momento de inércia é tomado como sendo proporcional à massa da aeronave. Neste caso, considera-se o movimento longitudinal da aeronave F-8 *Crusader* assumindo-se que ela “voa” em velocidade não constante, isto é, $\dot{u} \neq 0$ (Yang, 1993).

As equações do movimento ($\dot{x} = f(x, v)$) são escritas em termos de quatro variáveis ($x = (u, \alpha, \theta, q)$), onde u : velocidade do vôo longitudinal; α : ângulo de ataque; θ ângulo de arfagem (“pitch”), q : razão de arfagem (“pitch rate”) da aeronave e, v a variação da velocidade do vento (túnel de vento virtual), ao longo do tempo. Supõe-se que v é tomada como sendo composta de uma parte média (v_0) e de uma parte flutuante que pode ser definida como sendo do tipo cosseno ou como a turbulência atmosférica é de fato um processo randômico sendo modelada por uma série de funções harmônicas sobrepostas. Simula-se a interação da aeronave com o campo de velocidade de vento que gera forças e momentos.

A seguir, apresenta-se o desenvolvimento algébrico, necessário á obtenção das equações governantes do movimento, no caso em questão. As nomenclaturas e valores numéricos são definidos através das tabelas 4.1 e 4.2:

Em termos gerais:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F(x, V(t)) \\ x &= (x_1, x_2, x_3) = (\alpha, \theta, q)\end{aligned}$$

6.2. Equações de Movimento Longitudinal com u não Constante:

Ressalta-se que as forças atuantes na aeronave considerada, tomadas no sistema de coordenadas, utilizado para a obtenção das equações governantes de movimento longitudinal são apresentados pela figura 4.1 do capítulo 4.

Na dedução destas equações o arrasto será desconsiderado, e a sustentação será separada em duas componentes: de asa e de cauda, como foi feito anteriormente no capítulo 4.

Utilizando-se as notações anteriores e os valores das tabelas 4.1 e 4.2, as equações do movimento para dinâmica longitudinal, com arrasto considerado como sendo muito pequeno em

relação ao empuxo e ao peso (e, baseado nesta hipótese, desconsiderados), são dadas por (4.1) – (4.3).

Lembremos que:

$$L_w = \bar{q} S C_{L_w} = \bar{q} S (C_{L_w}^0 + C_{L_w}^1 \alpha - C_{L_w}^2 \alpha^3),$$

$$L_t = \bar{q} S_t C_{L_t} = \bar{q} S_t (C_{L_t}^0 + C_{L_t}^1 \alpha_t - C_{L_t}^2 \alpha_t^3 + a_e \delta_e),$$

$$W = \left\{ \frac{1}{1 + \left(\frac{\alpha}{0,41} \right)^{60}} \right\}, \quad \bar{q} = \frac{1}{2} \rho V_t^2 = \frac{1}{2} \rho_0 V_e^2 \quad e,$$

$$\bar{q} = \frac{1}{2} \rho V_t^2 = \frac{1}{2} \rho_0 V_e^2 \Rightarrow V_t = \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}} V_e,$$

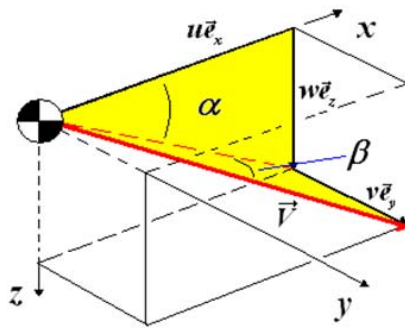
onde V é velocidade e ρ a densidade atmosférica.

Na figura a seguir, exibem-se as componentes de velocidades (u , v e w) ao longo dos eixos (x , y e z) e, suas relações:

$$u = V \cos \beta \cos \alpha$$

$$v = V \sin \beta$$

$$w = V \cos \beta \sin \alpha$$



$$V = (u^2 + v^2 + w^2)^{\frac{1}{2}}$$

Figura 6.12: Componentes de velocidade.

Desta forma obtém-se que:

$$w = u \tan \alpha \text{ e } \dot{w} = \dot{u} \tan \alpha + u \dot{\alpha} \sec^2 \alpha$$

permitindo-se reescrever as equações, (4.1) – (4.3), da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{u} = -u\dot{\theta} \tan \alpha - g \sin \theta + (L_w/m) \sin \alpha + (L_t/m) \sin \alpha_t \\ \dot{\alpha} = \dot{\theta} \cos^2 \alpha + (g/u) \cos^2 \alpha \cos \theta - L_w/(um) \cos^3 \alpha - \\ \quad - L_t/(um) \cos^2 \alpha \cos \alpha_t - (\dot{u}/u) \sin \alpha \cos \alpha \\ \ddot{\theta} = M_w/I_y + (lL_w/I_y) \cos \alpha - (l_t L_t/I_y) \cos \alpha_t - (c/I_y) \dot{\theta} \end{cases} \quad (5.1)$$

Substituindo-se

$$\dot{u} = -u\dot{\theta} \tan \alpha - g \sin \theta + (L_w/m) \sin \alpha + (L_t/m) \sin \alpha_t$$

na equação (5.1) obtém-se:

$$\begin{cases} \dot{u} = -u\dot{\theta} \tan \alpha - g \sin \theta + (L_w/m) \sin \alpha + (L_t/m) \sin \alpha_t \\ \dot{\alpha} = -\frac{u}{\dot{u}} \cos \alpha \sin \alpha + \dot{\theta} \cos^2 \alpha + \left(\frac{g}{u}\right) \cos^2 \alpha \cos \theta - \\ \quad - \left(\frac{L_w}{um}\right) \cos^3 \alpha - \left(\frac{L_t}{um}\right) \cos^2 \alpha \cos^2 \alpha_t \\ \ddot{\theta} = \left(\frac{M_w}{I_y}\right) + \left(\frac{lL_w}{I_y}\right) \cos \alpha - \left(\frac{l_t L_t}{I_y}\right) \cos \alpha_t - \left(\frac{c}{I_y}\right) \dot{\theta} \end{cases} \quad (5.2)$$

Ressalta-se a importância que neste caso a velocidade longitudinal da aeronave considerada não é tomada como sendo constante, ou seja, como u não é constante temos que $\dot{u} \neq 0$.

Dessa forma, usando apenas a equação de α do sistema (5.2) temos:

$$\dot{\alpha} = -\frac{1}{u} \cos \alpha \sin \alpha \left[-u \dot{\theta} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - g \sin \theta + \left(\frac{L_w}{m} \right) \sin \alpha + \left(\frac{L_t}{m} \right) \sin \alpha_t \right] + \dot{\theta} \cos^2 \alpha + \left(\frac{g}{u} \right) \cos^2 \alpha \cos \theta - \left(\frac{L_w}{um} \right) \cos^3 \alpha - \left(\frac{L_t}{um} \right) \cos^2 \alpha \cos^2 \alpha_t$$

Assim:

$$\dot{\alpha} = \dot{\theta} \sin^2 \alpha + \left(\frac{g}{u} \right) \cos \alpha \sin \alpha \sin \theta - \left(\frac{L_w}{um} \right) \cos \alpha \sin^2 \alpha - \left(\frac{L_t}{um} \right) \cos \alpha \sin \alpha \sin \alpha_t + \dot{\theta} \cos^2 \alpha + \left(\frac{g}{u} \right) \cos^2 \alpha \cos \theta - \left(\frac{L_w}{um} \right) \cos^3 \alpha - \left(\frac{L_t}{um} \right) \cos^2 \alpha \cos^2 \alpha_t$$

Colocando os termos em evidência:

$$\dot{\alpha} = \dot{\theta} (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + \left(\frac{g}{u} \right) [\cos \alpha \sin \alpha \sin \theta + \cos^2 \alpha \cos \theta] - \left(\frac{L_w}{um} \right) [\cos \alpha \sin^2 \alpha + \cos^3 \alpha] - \left(\frac{L_t}{um} \right) [\cos \alpha \sin \alpha \sin \alpha_t + \cos^2 \alpha \cos^2 \alpha_t]$$

Assim:

$$\dot{\alpha} = \dot{\theta} + \left(\frac{g}{u} \right) [\cos \alpha \sin \alpha \sin \theta + \cos^2 \alpha \cos \theta] - \left(\frac{L_w}{um} \right) [\cos \alpha \sin^2 \alpha + \cos^3 \alpha] - \left(\frac{L_t}{um} \right) [\cos \alpha \sin \alpha \sin \alpha_t + \cos^2 \alpha \cos^2 \alpha_t]$$

Considerando-se o estabilizador horizontal e, conseqüentemente o profundor da Aeronave (considerada) F-8 estando “dentro” da esteira da asa (ver figura 5.13 a seguir), Nota-se que o ângulo de “downwash” ϵ (ângulo formado entre a direção do ar conforme chega pelo bordo de

ataque da asa e sua direção de saída pelo bordo de fuga da asa) é incluído no modelo matemático para se determinar ângulo de ataque do profundor.

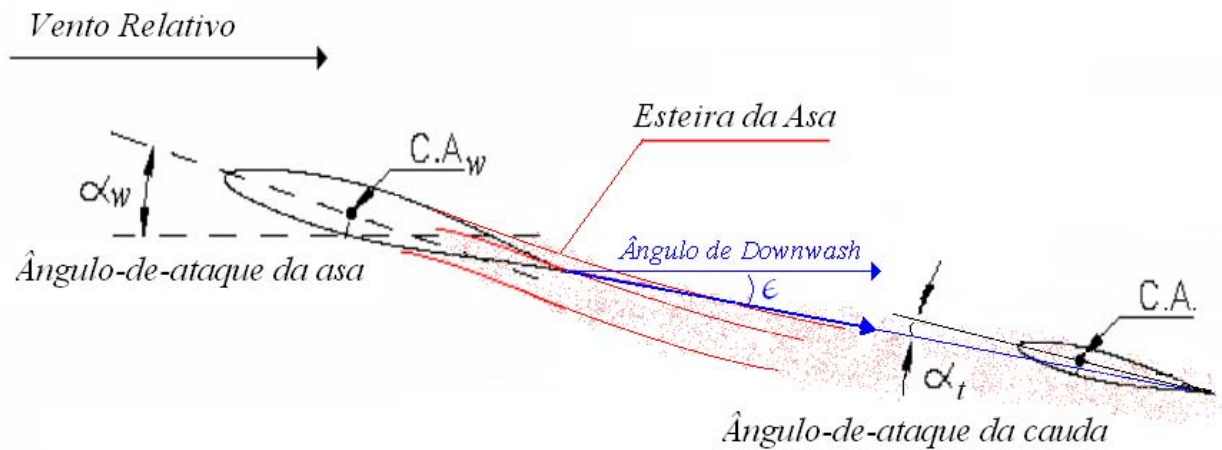


Figura 6.13: Estabilizador horizontal e Esteira da asa na aeronave

Obs.: Deve-se observar que o ângulo de ataque em relação ao profundor pode não ser o mesmo em relação ao da asa por causa das diferentes incidências do vento relativo na asa e no profundor.

Tomando-se a aproximação linear (Liaw, 2000) $\epsilon = a_\epsilon \alpha$ tem-se que o ângulo α_t é dado por:

$$\alpha_t = \alpha - \epsilon + \delta_\epsilon \Rightarrow \alpha_t = \alpha - a_\epsilon \alpha + \delta_\epsilon \Rightarrow \alpha_t = \alpha(1 - a_\epsilon) + \delta_\epsilon$$

Ressalta-se que, considerando $a_\epsilon = 0.75$, temos: $\alpha_t = 0.25\alpha + \delta_\epsilon$.

Após cálculos algébricos, tem-se que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{u} = -uq \tan \alpha - g \sin \theta + (L_w/m) \sin \alpha + (L_t/m) \sin(0,25\alpha + \delta_e) \\ \dot{\alpha} = q + \left(\frac{g}{u}\right) [\cos \alpha \sin \alpha \sin \theta + \cos^2 \alpha \cos \theta] - \left(\frac{L_w}{um}\right) [\cos \alpha \sin^2 \alpha + \cos^3 \alpha] - \\ \quad - \left(\frac{L_t}{um}\right) [\cos \alpha \sin \alpha \sin(0,25\alpha + \delta_e) + \cos^2 \alpha \cos^2(0,25\alpha + \delta_e)] \\ \dot{\theta} = q \\ \dot{q} = \left(\frac{M_w}{I_y}\right) + \left(\frac{lL_w}{I_y}\right) \cos \alpha - \left(\frac{l_t L_t}{I_y}\right) \cos(0,25\alpha + \delta_e)_t - \left(\frac{c}{I_y}\right) \dot{\theta} \end{array} \right. \quad (5.3)$$

Substituindo e reorganizando as equações temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{u} = -uq \tan \alpha - g \sin \theta + \frac{1}{m} \sin \alpha [\bar{q}S(C_{L_w}^0 + C_{L_w}^1 \alpha - C_{L_w}^2 \alpha^3)W] + \\ \quad + \frac{1}{m} \sin(0,25\alpha + \delta_e) [\bar{q}S_t(C_{L_t}^0 + C_{L_t}^1 (0,25\alpha + \delta_e) - C_{L_t}^2 (0,25\alpha + \delta_e)^3 + a_e \delta_e)] \\ \dot{\alpha} = q + \frac{g}{u} [\cos \alpha \sin \alpha \sin \theta + \cos^2 \alpha \cos \theta] - \\ \quad - \frac{1}{mu} [\cos \alpha \sin^2 \alpha + \cos^3 \alpha] [\bar{q}S(C_{L_w}^0 + C_{L_w}^1 \alpha - C_{L_w}^2 \alpha^3)W] - \\ \quad - \frac{1}{mu} [\cos \alpha \sin \alpha \sin(0,25\alpha + \delta_e) + \cos^2 \alpha \cos(0,25\alpha + \delta_e)] \cdot \\ \quad \cdot [\bar{q}S_t(C_{L_t}^0 + C_{L_t}^1 (0,25\alpha + \delta_e) - C_{L_t}^2 (0,25\alpha + \delta_e)^3 + a_e \delta_e)] \\ \dot{\theta} = q \\ \dot{q} = \frac{M_w}{I_y} + \frac{l}{I_y} \cos \alpha [\bar{q}S(C_{L_w}^0 + C_{L_w}^1 \alpha - C_{L_w}^2 \alpha^3)W] - \\ \quad - \frac{l_t}{I_y} \cos(0,25\alpha + \delta_e) [\bar{q}S_t(C_{L_t}^0 + C_{L_t}^1 (0,25\alpha + \delta_e) - C_{L_t}^2 (0,25\alpha + \delta_e)^3 + a_e \delta_e)] - \\ \quad - \frac{c}{I_y} q \end{array} \right. \quad (5.4)$$

e, apenas colocando em evidência alguns fatores comuns temos:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\dot{u} = -uq \tan \alpha - g \sin \theta + \frac{\bar{q}S}{m} W \sin \alpha (C_{L_w}^0 + C_{L_w}^1 \alpha - C_{L_w}^2 \alpha^3) + \\
+ \frac{\bar{q}S_t}{m} \sin(0.25\alpha + \delta_e) [C_{L_t}^0 + C_{L_t}^1 (0.25\alpha + \delta_e) - C_{L_t}^2 (0.25\alpha + \delta_e)^3 + a_e \delta_e] \\
\dot{\alpha} = q + \frac{g}{u} [\cos \alpha \sin \alpha \sin \theta + \cos^2 \alpha \cos \theta] - \\
- \frac{\bar{q}S}{mu} W (\cos \alpha \sin^2 \alpha + \cos^3 \alpha) (C_{L_w}^0 + C_{L_w}^1 \alpha - C_{L_w}^2 \alpha^3) - \\
- \frac{\bar{q}S_t}{mu} [\cos \alpha \sin \alpha \sin(0.25\alpha + \delta_e) + \cos^2 \alpha \cos(0.25\alpha + \delta_e)] \cdot \\
\cdot (C_{L_t}^0 + C_{L_t}^1 (0.25\alpha + \delta_e) - C_{L_t}^2 (0.25\alpha + \delta_e)^3 + a_e \delta_e) \\
\dot{\theta} = q \\
\dot{q} = \frac{M_w}{I_y} + \frac{l\bar{q}S}{I_y} \cos \alpha (C_{L_w}^0 + C_{L_w}^1 \alpha - C_{L_w}^2 \alpha^3) W - \\
- \frac{l_i \bar{q}S_t}{I_y} \cos(0.25\alpha + \delta_e) [C_{L_t}^0 + C_{L_t}^1 (0.25\alpha + \delta_e) - C_{L_t}^2 (0.25\alpha + \delta_e)^3 + a_e \delta_e] - \frac{c}{I_y} q
\end{array} \right. \quad (5.5)$$

Considerando-se as identidades trigonométricas:

- (a) $\cos \alpha \sin^2 \alpha + \cos^3 \alpha = \cos \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \cos \alpha$
- (b) $\cos \alpha \sin \alpha \sin \theta + \cos^2 \alpha \cos \theta = \cos \alpha (\sin \alpha \sin \theta + \cos \alpha \cos \theta) = \cos \alpha \cos(\alpha - \theta)$
- (c) $\cos \alpha \sin \alpha \sin(0.25\alpha + \delta_e) + \cos^2 \alpha \cos(0.25\alpha + \delta_e) =$
 $= \cos \alpha [\sin \alpha \sin(0.25\alpha + \delta_e) + \cos \alpha \cos(0.25\alpha + \delta_e)] =$
 $= \cos \alpha \cos(0.75\alpha - \delta_e)$

E, substituindo (a), (b) e (c) no sistema (5.5) obtemos:

$$\begin{cases}
\dot{u} = -uq \tan \alpha - g \sin \theta + \frac{\bar{q}S}{m} W \sin \alpha (C_{L_w}^0 + C_{L_w}^1 \alpha - C_{L_w}^2 \alpha^3) + \\
+ \frac{\bar{q}S_t}{m} \sin(0.25\alpha + \delta_e) [C_{L_t}^0 + C_{L_t}^1 (0.25\alpha + \delta_e) - C_{L_t}^2 (0.25\alpha + \delta_e)^3 + a_e \delta_e] \\
\dot{\alpha} = q + \frac{g}{u} \cos \alpha \cos(\alpha - \theta) - \frac{\bar{q}S}{mu} W \cos \alpha (C_{L_w}^0 + C_{L_w}^1 \alpha - C_{L_w}^2 \alpha^3) - \\
- \frac{\bar{q}S_t}{mu} \cos \alpha \cos(0.75\alpha - \delta_e) (C_{L_t}^0 + C_{L_t}^1 (0.25\alpha + \delta_e) - C_{L_t}^2 (0.25\alpha + \delta_e)^3 + a_e \delta_e) \\
\dot{\theta} = q \\
\dot{q} = \frac{M_w}{I_y} + \frac{l\bar{q}S}{I_y} \cos \alpha (C_{L_w}^0 + C_{L_w}^1 \alpha - C_{L_w}^2 \alpha^3) W - \\
- \frac{l_t \bar{q}S_t}{I_y} \cos(0.25\alpha + \delta_e) [C_{L_t}^0 + C_{L_t}^1 (0.25\alpha + \delta_e) - C_{L_t}^2 (0.25\alpha + \delta_e)^3 + a_e \delta_e] - \frac{c}{I_y} q
\end{cases} \quad (5.6)$$

que, colocando alguns fatores em evidência teremos:

$$\begin{cases}
\dot{u} = -uq \tan \alpha - g \sin \theta + \frac{\bar{q}}{m} \left\{ SW \sin \alpha (C_{L_w}^0 + C_{L_w}^1 \alpha - C_{L_w}^2 \alpha^3) + \right. \\
\left. + S_t \sin(0.25\alpha + \delta_e) [C_{L_t}^0 + C_{L_t}^1 (0.25\alpha + \delta_e) - C_{L_t}^2 (0.25\alpha + \delta_e)^3 + a_e \delta_e] \right\} \\
\dot{\alpha} = q + \frac{g}{u} \cos \alpha \cos(\alpha - \theta) - \frac{\bar{q}}{mu} \cos \alpha \left\{ SW (C_{L_w}^0 + C_{L_w}^1 \alpha - C_{L_w}^2 \alpha^3) - \right. \\
\left. - S_t \cos(0.75\alpha - \delta_e) (C_{L_t}^0 + C_{L_t}^1 (0.25\alpha + \delta_e) - C_{L_t}^2 (0.25\alpha + \delta_e)^3 + a_e \delta_e) \right\} \\
\dot{\theta} = q \\
\dot{q} = \frac{M_w}{I_y} - \frac{c}{I_y} q + \frac{\bar{q}}{I_y} \left\{ lS \cos \alpha (C_{L_w}^0 + C_{L_w}^1 \alpha - C_{L_w}^2 \alpha^3) W - \right. \\
\left. - l_t S_t \cos(0.25\alpha + \delta_e) [C_{L_t}^0 + C_{L_t}^1 (0.25\alpha + \delta_e) - C_{L_t}^2 (0.25\alpha + \delta_e)^3 + a_e \delta_e] \right\}
\end{cases} \quad (5.7)$$

onde:

$$M_w = l_t mg \cos \theta - (l + l_t) (\bar{q} S (C_{L_w}^0 + C_{L_w}^1 \alpha - C_{L_w}^2 \alpha^3) W) \cos \alpha$$

$$\bar{q} = \frac{1}{2} \rho V_t^2$$

ρ =densidade atmosférica em determinada altitude.

A partir de agora se substitui no sistema (5.7), os valores para a aeronave F-8 dados na tabela 2.

Dessa forma obtêm-se a forma final do sistema de equações, a ser analisado:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{u} = -uq \tan \alpha - 10 \sin \theta + \frac{\bar{q}}{m} \left\{ 33.75W \sin \alpha (4\alpha - 12\alpha^3) + \right. \\ \left. + 8.41 \sin (0.25\alpha + \delta_e) [4(0.25\alpha + \delta_e) - 12(0.25\alpha + \delta_e)^3 + 0.1\delta_e] \right\} \\ \dot{\alpha} = q + \frac{10}{u} \cos \alpha \cos (\alpha - \theta) - \frac{\bar{q}}{mu} \cos \alpha \left\{ 33.75W (4\alpha - 12\alpha^3) - \right. \\ \left. - 8.41 \cos (0.75\alpha - \delta_e) [4(0.25\alpha + \delta_e) - 12(0.25\alpha + \delta_e)^3 + 0.1\delta_e] \right\} \\ \dot{\theta} = q \\ \dot{q} = \frac{50.1}{127512} m \cos \theta - \frac{171.1125(4\alpha - 12\alpha^3)}{127512} \bar{q} W \cos \alpha - \frac{50494.752}{127512} q + \\ + \frac{\bar{q}}{127512} \left\{ 2.025(4\alpha - 12\alpha^3) W \cos \alpha - \right. \\ \left. - 42.1341 \cos (0.25\alpha + \delta_e) [4(0.25\alpha + \delta_e) - 12(0.25\alpha + \delta_e)^3 + 0.1\delta_e] \right\} \end{array} \right\} \quad (5.8)$$

$$\text{com } W = \left\{ \frac{1}{1 + \left(\frac{\alpha}{0.41} \right)^{60}} \right\}$$

6.3. Rajadas de Vento:

Para simular a ação do vento neste procedimento, divide-se ação do vento em uma dada direção em duas partes: uma parte flutuante e uma parcela média. De acordo com o método proposto, a parcela média é aplicada estaticamente ao corpo exposto ao vento e a parcela flutuante é dividida em séries de componentes harmônicas com ângulos de fase aleatórios.

Para a parte flutuante, utilizam-se 11 componentes harmônicas com uma delas sendo ressonante. As frequências das outras componentes são definidas como múltiplos ou submúltiplos dessa frequência ressonante pelo fator 2.

Numa versão melhorada, faz-se esse fator igual à razão entre as frequências naturais do primeiro e do segundo modos, estabelecendo-se assim funções ressonantes com esses modos fundamentais. A amplitude de cada uma das componentes harmônicas é obtida a partir da Função de Densidade Espectral de Potência da velocidade do vento (Carril Jr, 2000), (Lazanha, 2003) e (Leite, 1999).

A Função de Densidade Espectral de Potência (PSDF), de acordo com Blessmann (1998), indica a distribuição de energia contida num fenômeno em diversas frequências. Admitindo-se que o sinal fornecido por sismos constitua de uma função não-periódica complexa, pelo teorema de Fourier essa função pode ser encarada como uma superposição de funções harmônicas simples, como descrito em Newland (1975).

A idealização mais simples de uma PSDF para o vento é o ruído branco ideal

$$S_{\ddot{s}_g}(\omega) = S_0, \quad 0 < \omega < \infty \quad (5.9)$$

Essa descrição é, entretanto, pouco razoável, por corresponder a potência infinita. Uma forma mais realista, que será utilizada neste trabalho, é o modelo de ruído branco filtrado (Kanai, 1957) e (Tajimi, 1960) conhecido como modelo de Kanai-Tajimi.

Neste modelo, o vento é visto como sendo a resposta em aceleração absoluta de um sistema de um grau de liberdade sujeito a uma aceleração de base de um espectro tipo ruído branco ideal. Supõe-se que este oscilador modelo as rajadas de vento. A formulação para o modelo de Tajimi é encontrado em Buchholdt (1999), com algumas variações de parâmetros.

Em Buchholdt (1999), tem-se a representação da PSDF de uma rajada de vento pela expressão:

$$S_{\ddot{s}_g}(\omega) = S_0 \frac{[1 + 4H^2 r^2]}{(1 - r^2)^2 + 4H^2 r^2} \quad (5.10)$$

onde S_0 é utilizado como um ruído branco ideal $\left[\frac{m}{s^2} \right]^2 s$. H é um fator não dimensional relacionado com o amortecimento e r a relação não-dimensional de frequências.

O modelo Kanai-Tajimi é usado em muitos trabalhos que procuram estimar acelerogramas artificiais.

A proposta deste capítulo é usar o seguinte espectro reduzido:

$$S_{r\ddot{s}_g}(\omega) = \frac{\omega S_{\ddot{s}_g}(\omega)}{R^2} \quad (5.11)$$

onde R é uma constante com dimensões de aceleração.

Assim, propõe-se modelar matematicamente a excitação de suporte como uma superposição de n componentes harmônicas: O modelo matemático (Kanai, 1957) e (Tajimi, 1960) é:

$$\ddot{S}_g = R \sum_{k=1}^n \bar{C}_k \cos(\bar{\omega}_k t - \theta_k) \quad (5.12)$$

onde as amplitudes adimensionais são retiradas da PSDF (Corbani, 2006) na forma:

$$C_k = \sqrt{2S_{r\ddot{S}_g}(\omega_k)\Delta\omega} \quad (5.13)$$

Sendo $R=1/11$ e $n=11$ obtêm-se $\bar{C}_k$ e $\bar{\omega}_k$, descritos na tabela 5 a seguir (Corbani, 2006):

Os ângulos de fase θ_k são valores randômicos tal que $\theta_k \in [0, 2\pi]$

Tabela 6.1. Valores para $\bar{C}_k$ e $\bar{\omega}_k$.

$\bar{C}_1=0,18$	$\bar{\omega}_1=122,55$
$\bar{C}_2=0,23$	$\bar{\omega}_2=77,52$
$\bar{C}_3=0,30$	$\bar{\omega}_3=49,04$
$\bar{C}_4=0,40$	$\bar{\omega}_4=31,02$
$\bar{C}_5=0,53$	$\bar{\omega}_5=19,62$
$\bar{C}_6=0,62$	$\bar{\omega}_6=12,41$
$\bar{C}_7=0,49$	$\bar{\omega}_7=7,85$
$\bar{C}_8=0,34$	$\bar{\omega}_8=4,97$
$\bar{C}_9=0,25$	$\bar{\omega}_9=3,14$
$\bar{C}_{10}=0,19$	$\bar{\omega}_{10}=1,99$
$\bar{C}_{11}=0,15$	$\bar{\omega}_{11}=1,26$

Depois de estabelecido a PSDF para o vento, pode-se realizar um estudo do número de funções harmônicas razoável para simular o fenômeno. Dessa forma, estima-se um número qualquer de funções harmônicas com um termo ressonante, nessas condições, é possível determinar a amplitude do carregamento para cada harmônico k , como ilustrado na Figura 5.4.

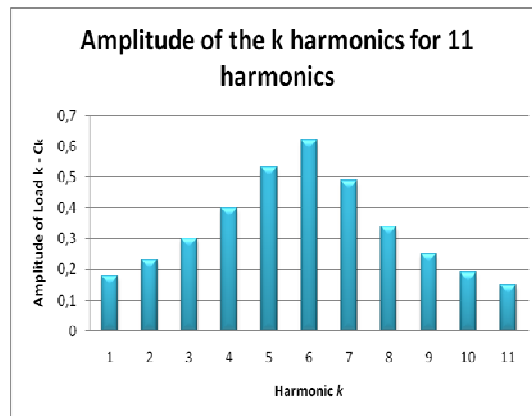
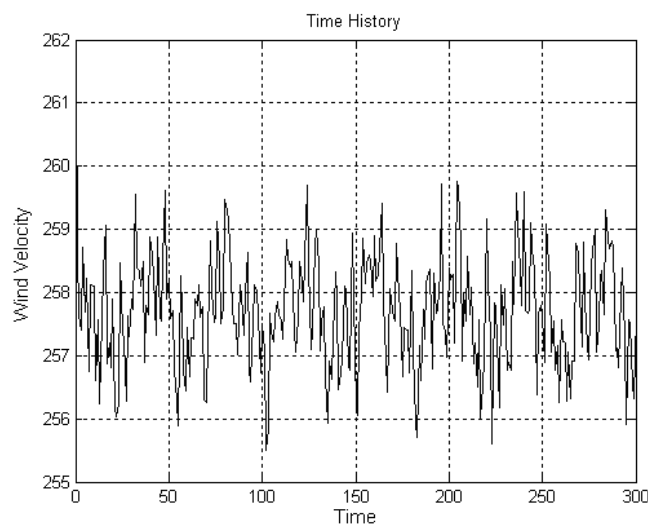


Figure 6.4: Amplitude dos k harmonicos para 11 harmonicos

A Densidade Espectral de Potência (power spectral density) foi simulado como apresentado na figura 6.5 a seguir:



**Figura 6.5: Histórico de tempo de carregamento gerado pela função de densidade espectral
(Load Time History Generated by Power Spectral Density Fuction.)**

Para as simulações usa-se:

$$\begin{aligned}\bar{q} &= \frac{1}{2} \rho V^2 \\ V(t) &= V_0 + \ddot{S}_g\end{aligned}\tag{5.14}$$

6.4 Simulações:

Para simulação os seguintes valores serão usados:

Com valores iniciais de: $V_0=u=845, 6 \text{ ft/s}$ ($257, 7 \text{ m/s}$) e uma altitude de 30000 ft (9144m). A massa inicial m da aeronave é dada por: $m_0 = 667,7 \text{ slugs}$ (9773 Kg) e a densidade atmosférica ρ para 9144 metros de altitude igual a 0.4938 .

As condições iniciais são: $u=257.7\text{m/s}$, $\alpha=0.24\text{rad}$, $\theta=0.23 \text{ rad}$, $q=0 \text{ rad/s}$ and $\delta_e = -0.1 \text{ rad}$.

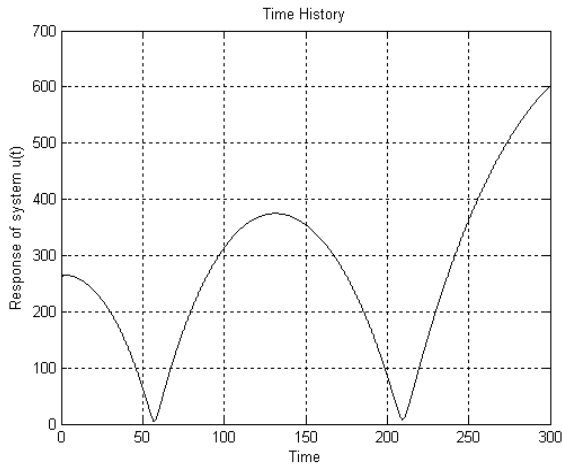


Figura 6.5: Histórico de tempo de u

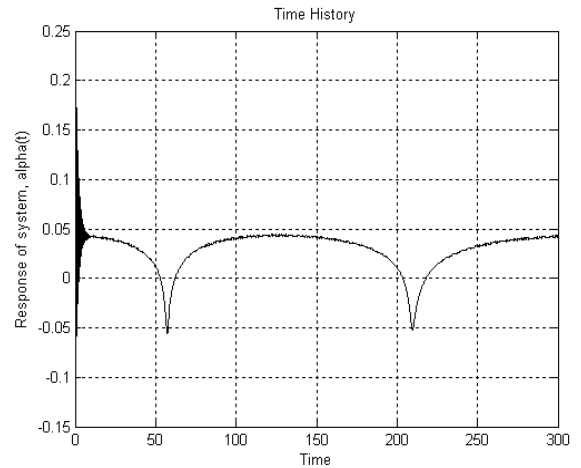


Figura 6.6: Histórico de tempo de α

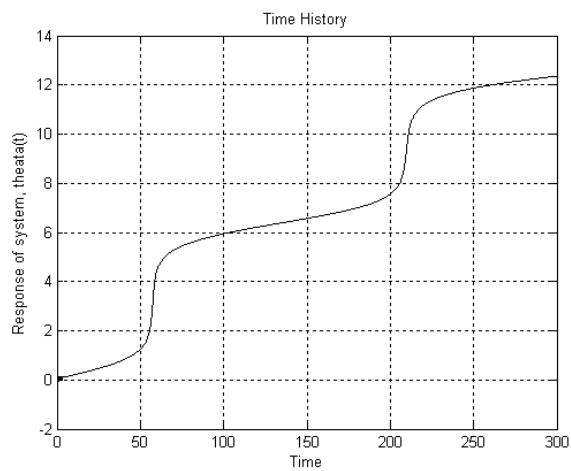


Figura 5.7: Histórico de tempo de θ

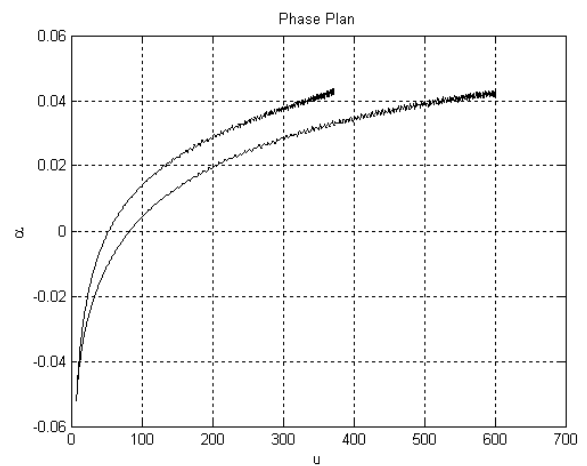


Figura 5.9: Plano de fase u vs α

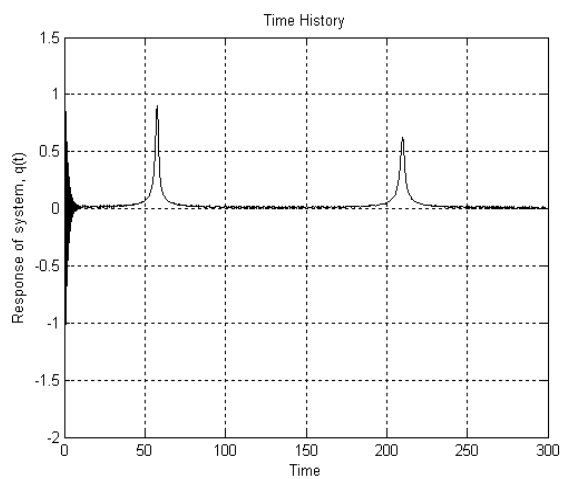


Figure 6.8: Histórico de tempo de q

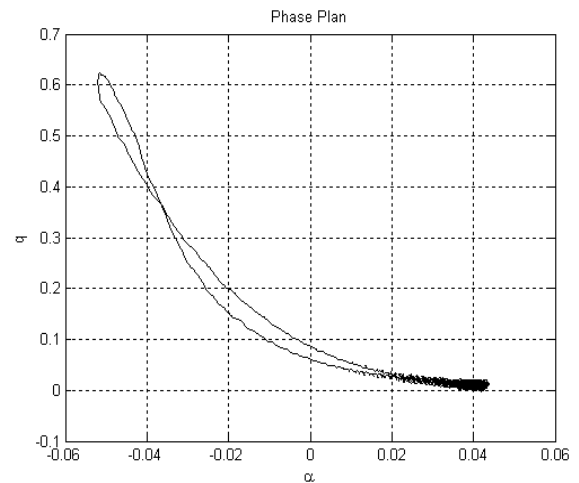


Figura 6.10: Plano de fase α vs q

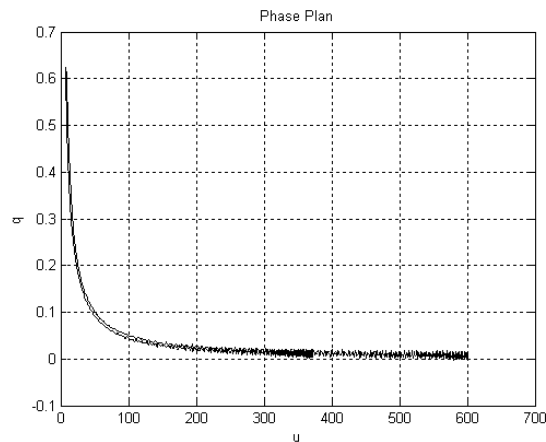


Figura 6.11: Plano de fase u vs. q

6.5 Conclusões parciais:

Muitas aeronaves a jato variam amplamente em suas características dinâmicas e isto é uma dificuldade, pois não é prático se desenvolver um modelo matemático para cada uma delas. Nesse capítulo foi apresentado um modelo geral para uma aeronave sujeita ao vento, tomando em conta todas as forças e momentos envolvidos no sistema

Foram analisados os efeitos de mudanças de ventos súbitas devido a turbulências atmosféricas em relação à resposta dinâmica da aeronave e seu design estrutural.

Como aplicações foram consideradas as equações de movimento longitudinal da aeronave F-8 “*Crusader*” em vôo nivelado a uma altitude de 30000ft (9144m) e de massa igual a 9773 kg (667.7 slugs).

As equações diferenciais de movimento da aeronave ($\dot{x} = f(x, v)$) foram escritas em termos de quarto variáveis ($x = (u, \alpha, \theta, q)$), onde u : velocidade da aeronave; α : ângulo de ataque; θ : ângulo de arfagem (pitch); q = taxa de arfagem (pitch rate); e v = a variação da velocidade do vento, composta por uma parte constante (v_0) e uma parte flutuante.

A turbulência atmosférica foi tomada como um processo randômico que foi modelado por uma série de funções harmônicas sobrepostas. Elas foram geradas de uma função de densidade espectral baseada nas sugestões dadas por Tajimi (1960) e Kanai (1957) no contexto de movimentos sísmicos, conforme reportado em Buchholdt (1999).

A introdução do modelo de rajada de vento foi uma etapa importante, pois essa modelagem matemática mostrou resultados satisfatório sendo um bom modelo para simular condições de vôo dessa natureza, o que, para o pesquisador e o orientador foi satisfatório.

Uma próxima etapa, que seria uma continuidade natural deste trabalho, seria a inserção de controle, detecção de caos no sistema com velocidade variável e também o acoplamento de movimentos laterais da aeronave.

Capítulo 7

Resultados e Discussões

7.1 Conclusões

Todas as técnicas utilizadas nesta tese completaram o objetivo da pesquisa em fazer uma análise da dinâmica não linear de uma aeronave em vôo longitudinal.

No Capítulo 4 os resultados foram satisfatórios e estava de acordo com a pesquisa existente, onde foi abordado o estudo da estabilidade e o comportamento da dinâmica não linear de vôo longitudinal. Foi investigado o comportamento bifurcacional da dinâmica de vôo longitudinal em relação a dois parâmetros de controle: primeiramente em relação à deflexão δ_e do profundor e, depois em relação à variação da massa m da aeronave.

Fenômenos não lineares tais como bifurcações tipo sela-nó e de Hopf foram observadas através das simulações numéricas das equações que modelaram a dinâmica da aeronave F-8, conforme a variação do sistema de parâmetros. A ocorrência de bifurcações do tipo sela-nó e do tipo Hopf pode resultar em comportamentos de salto e oscilações de arfagem. Esses saltos podem provocar uma descontinuidade no equilíbrio do sistema, sendo que essa região onde existe descontinuidade pode significar que a aeronave está experimentando situações de estol.

Do estudo numérico efetuado, pode-se concluir que o parâmetro de controle m , utilizado nesta pesquisa, como sendo a massa da aeronave, pode desempenhar um papel importante na dinâmica de voo longitudinal.

Tais observações podem ser muito importantes para o projeto de aeronaves quando a mudança de massa se tornar significativa.

No capítulo 5 foi feita uma abordagem com um maior rigor da aplicação de uma técnica de controle linear ótimo do sistema o que foi satisfatório em relação ao objetivo da pesquisa. Já em relação às oscilações do ângulo de ataque da aeronave em regiões próximas ao estol o controle ótimo desenvolvido por Rafikov e Bathazar (2004, 2005, 2006) na seção 5.2-5.3 mostrou-se o melhor tipo de controle, sendo mais eficaz, estabilizando o sistema e isto é muito importante em condições de voo adversas.

Deve-se ressaltar que o método de controle pode ser feito para uma gama de aeronaves de forma similar a que foi efetuada nesta pesquisa, fato este muito importante na pesquisa aeronáutica.

Completando o estudo, no Capítulo 6, introduziu-se um método de modelo de rajada de vento com o objetivo de se simular a variação de velocidade da aeronave, até então tomada como constante. Pelas simulações verificou-se que este método pode ser feito eficazmente o que é um avanço na pesquisa aeronáutica.

Ressalta-se que os resultados que foram expostos nas figuras 6.4 -6.11 simulados no capítulo 6 foram satisfatórios considerando-se o movimento longitudinal da aeronave com a velocidade variável da aeronave.

Nota-se que os resultados apresentados aqui, em que se analisou o caso em que se considera $\dot{u} \neq 0$, atingiram o objetivo de completar a pesquisa efetuada na tese de doutorado

sobre a análise da dinâmica não linear e controle de uma aeronave em voo longitudinal, tomando-se situações físicas, mais realísticas.

Observou-se, com isso, que esta técnica de simular o vento foi satisfatória e poderia ser utilizada para questões desta natureza.

Uma próxima etapa, que seria uma sequência natural deste trabalho, seria a inserção de controle, detecção de caos no sistema com velocidade variável e também o acoplamento de movimentos laterais da aeronave.

7.2 Sugestões para Próximos Trabalhos:

Dar-se-á continuidade aos resultados já obtidos anteriormente abordando-se com maior profundidade e completividade a pesquisa da dinâmica não linear de voo longitudinal com a velocidade não constante assim como uma possível presença de bifurcações, caos e controle. Uma sequência natural, dando continuidade à pesquisa, seria a inclusão do voo lateral da aeronave acoplado ao voo longitudinal da aeronave considerada.

Dessa forma, trabalhos futuros podem completar esta análise iniciada aqui para prover uma resposta de dinâmica sobre uma gama completa de ângulos de ataque em que uma aeronave moderna de alto desempenho possa vir a operar, evitando situações de voo perigosas.

O estudo da interação entre os movimentos longitudinal e lateral da aeronave considerada para altos ângulos de ataque também pode ser considerado como um desafio em uma próxima etapa, usando a mesma metodologia, discutidos nesta tese.

Referências Bibliográficas

Abed, E. H.; Lee, H. C.; *Nonlinear Stabilization of High Angle-of-Attack Flight Dynamics Using Bifurcation Control. Proceedings of the 1990 American Control Conference*, IEEE Publications, Piscataway, NJ, pp.2235 – 2238, 1990.

Almeida, F.; O Segredo de Voar Bem. *AERO Magazine*, © Nova Cultural, ano 9, nº 97, 1999.

Anderson, B.D.O.; Moore, J. B.; *Optimal Control, Linear Quadratic Methods*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, ISBN: 0-13-638560-5, 1990.

Associação Brasileira de Normas Técnicas. Forças devidas ao vento em edificações - NBR 6123. Rio de Janeiro, 1988.

Anthony, K.C. The background to statistical approach: the modern design of wind-sensitive structures. In: Seminar At Institution Of Civil Engineers, London, 1970. *Proceedings. London*, ICE, 1970. Paper 2, p.17-27.

Bellman, R.; *Dynamic Programming*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1957.

Blessmann, J. *Introdução ao estudo das ações dinâmicas do vento*. Porto Alegre, 282 p., Editora da UFRGS, 1998.

Brasil, M.L.R.F.; Carril Jr, C.F. Noções Básicas de Dinâmica Aleatória, com Aplicação ao Efeito de Ventos sobre Estruturas. *Anais do APLICON 2001*, EEUSP - São Carlos, 30 de Julho a 03 Agosto de 2001, Editado por J M Balthazar, V A de Oliveira, G.N Silva e J JM Rosário, 2001.

Bryan, G.H. *Stability in Aviation*, MacMillan and Co., London, 1911.

Bryan, G.H.; Williams, W.E.; The Longitudinal Stability of Gliders, *Proc. Roy. Soc. of London*, Vol. 73, (pp. 100-116), 1904.

Buchholdt, H.A.; *An introduction to cable roof structures*. 2 ed. London. Thomas Telford, 285 p., 1999.

Carril Jr, C.F.; *Análise Numérica e Experimental do Efeito dinâmico do Vento em torres metálicas Treliçadas para Telecomunicações*. Tese (Doutorado) Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações. 143 p. São Paulo, 2000.

Carrol, J. V.; Mehra, R. K.; Bifurcation Analysis of Nonlinear Aircraft Dynamics, *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, vol. 5, nº 5, pp. 529 – 536, 1982.

Cooper, J.E.; Towards Efficient Prediction of Nonlinear Aerolastic Phenomena. *Proceedings of the DINAME*, 10-14 March 2003, Ubatuba-SP, Brazil, Edited by P R G Kurka e A T Fleury, (2000), 289-294.

Corbani, S. *Análise dinâmica elasto-plástica de estruturas metálicas sujeitas a excitação aleatória de sismos*. M.Sc. dissertation, EP, USP, São Paulo, 2006.

Davenport, A.G., Gust loading factors. *Journal of Structural Division. American Society of Civil Engineers*, p.11-34, June 1967.

- Davenport, A.G., The response of slender structures to wind. In: *Wind Climate in Cities*, Waldbronn, *Proceedings of NATO Advanced Study Institute*. s.L., s.ed., 1993. n.p.
- Dhooge, A., Govaerts, W., Kuznetsov Y. A. Matcont: A Matlab Package for Numerical Bifurcation Analysis of Odes, *ACM TOMS* 29(2), pp. 141 – 164, 2003.
- Dhooge, A.; Govaerts, W.; Kuznetsov, Y. A. “Matcont: A Matlab Package for Dynamical Systems with Applications to Neural Activity”. *ACM TOMS*, 2004.
- Dhooge, A., Govaerts, W., Kuznetsov Y. A.: *Limit Cycles and Their Bifurcations in MatCont*, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Ghent University, Belgium, July 9, 2004.
- Doedel, E.J., Champneys, A.R., Fairgrieve, T.F., Kuznetsov, Yu.A., Sandstede, B., Wang, X.J., *AUTO 97: Continuation and Bifurcation Software for Ordinary Differential Equations (with HomCont)*, User’s Guide, Concordia University, Montreal, Canada, march 29, 1998. (Fonte: <http://indy.cs.concordia.ca>).
- Doedel, E.J., Champneys, A.R., Fairgrieve, T.F., Kuznetsov, Yu.A., Sandstede, B., Wang, X.J., *AUTO 2000: Continuation and Bifurcation Software for Ordinary Differential Equations (with HomCont)*, User’s Guide, Concordia University, Montreal, Canada 2000. (Fonte: <http://indy.cs.concordia.ca>).
- Etkin, B.; “*Dynamics of Atmospheric Flight*”. John Wiley, New York, 1972.
- Försching, H.; *Aeroelastic Problems in Aircraft Design*. Von Karman Institute for Fluid Dynamics, Lecture Series 1979.
- Gandur, M. C.; *Comportamento Dinâmico em Desprendimento de Fitas Adesivas*. (PDF File), Tese de doutorado, p. 69 – 70, 159 f., 2001.

- Garrard, W.L.; Jordan, J.M.; Design of Nonlinear Automatic Flight Control Systems. *Automatica*, v.13, nº 5, pp. 497–505. Pergamon Press, 1977.
- Goman, M. G., Khrantsovskiy, A. V., 1997, Global Stability Analysis of Nonlinear Aircraft Dynamics, *AIAA-97-3721*, 662-672.
- Jahnke CC, Culliaik, FEC.1994.Application of Bifurcation Theory to the High–Angle–of–Attack Dynamics of the F-14, *Journal of Aircraft*, Vol. 31, N1, 26-34, 1994.
- Kanai, K. 1957. Semi-empirical formula for the seismic characteristic of the ground. *Bulletin of Earthquake Research Institute*, Tokyo, v. 35, pp.309-325.
- Kuznetsov, Yu.A., Levitin, V.V., *Content: Integrated Environment for Analysis of Dynamical Systems*. CWI, Amsterdam, 1997. (Fonte: <ftp://ftp.cwi.nl/pub/CONTENT>).
- Lazanha, E. C.; *Análise dinâmica elasto-plástica de estruturas metálicas sob excitação aleatória de vento*. 2003. 142 f. Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.
- Leite, W. C.; *Análise dinâmica estocástica de estruturas de cabos de comportamento não linear sob vibrações aleatórias devidas ao vento*. 1998. 115 f. Tese (Doutorado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.
- Lanchester, FW. *Aerodnetics*. Constable and Co. Ltd., London, 1908.
- Lee, E.B.; Markus, L., *Foundations of Optimal Control Theory*. John Wiley, New York, 1967.
- Lence S, Rega G. Bifurcation and Chaos in Mechanical Applications: A Dynamical System Approach to Their Control, In: *IUTAM Symposium Chaotic Dynamics and Control of Systems and Processes in Mechanics*, La Sapienza, Rome, Italy 8-13 June 2003.

- Liaw, D-C.; Song, C-C.; Analysis of Longitudinal Flight Dynamics: A Bifurcation-Theoretic Approach. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. Vol. 24, n° 1, pp. 109 – 116, January – February 2001.
- Liaw, D-C.; Two-Parameter Bifurcation Analysis of Longitudinal Flight Dynamics. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 39, n° 3, pp 1103 – 1110, July. 2003.
- Liaw, D-C.; Chau-Chung, S.; Wen-Ching, C.; Nonlinear Control of Longitudinal Flight Dynamics. *Proceedings of the American Control Conference*, Denver, Colorado, pp 1637 – 1642, June 4 – 6, 2003.
- Lowenberg, M.H.; Bifurcation Analysis of Multiple –Attractor Flight Dynamics. *Phil. Trans. R. Soc. London*, 356, 2297-2319,(1998).
- Lowenberg, M. H.; Champneys, A.R.; Shil’nikov Homoclinic Dynamics and Escape from Roll Autorotation in an F-4 Model. . *Phil. Trans. R. Soc. Lon.* 356, 2241 – 2256, (1988).
- Macmillan, F.B.J., Thompson J.M.T. Bifurcation Analysis in the flight dynamics design process? A view from the aircraft industry. *Phil.Trans. R. Soc. London*, 350, 2321-2333, (1998).
- Macmillan, F.B.J., Nonlinear Flight Dynamics Analysis. *Phil. Trans. R. Soc. Lon.* 356, 2167– 2180, (1998).
- Meirovitch, L.; “*Methods of Analytical Dynamics*”. McGraw–Hill Series in Advanced Engineering, New York, 1970.
- Melnikov, V. K.: On The stability of the Center for Time Periodic Perturbations, *Trans. Moscow Math. Soc.*, (12), 1-57, 1963.

- Mehra, R.D., Kessel, W.C., Carrol, J.V. Global stability and control analysis of aircraft at high angles-of-attack. *Annual Technical Report no. 1*, ONR-CR215-248-1 Scientific System, USA, 1977.
- Mestrom, W.: *Continuation of Limit Cycles in Matlab*. Master Thesis, Mathematical Institute, Utrecht University, the Netherlands, 2002.
- Nayfeh, A H, Mook, DT. *Nonlinear Oscillations*. Wiley 1979
- Nayfeh, A H. *Method of Normal Forms*. Wiley, 1993
- Nayfeh AH, Balachandran B. *Nonlinear Dynamics*. Wiley, 1994.
- Newland, D. E.; *An introduction to random vibrations and spectral analysis*. 2nd ed. New York: Wiley, 377 p. , 1975.
- Oiwa, N. N.; *Comparação de algoritmos para estimativa de expoentes de lyapunov*. Dissertação de Mestrado, IF-USP, São Paulo, SP, 138 f., 1994.
- Ott, E.C., Greboggi C, Yorke JA. Controlling Chaos. *Phys. Rev. Lett* 64(1990), 1196-1199.
- Parker, T.S., Chuá E.O.; *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*. Springer Verlag, 1989.
- Planeaux, J. B., T.J. Barth, Eglin AFB. 1998. High- Angle-of- Attack Dynamic Behavior of a Model High-Performance Fighter Aircraft. *AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference* Minneapolis, Minnesota 7.AIAA-88-4368, I August 15-17, 1988.

- Planeaux, J. B., Beck, J. A., and Baumann, D. D., Bifurcation Analysis of a Model Fighter Aircraft with Control Augmentation, *AIAA Paper* 90-2836, Aug. 1990.
- Pereira, D.C.; Balthazar, J.M.; Sobre A Dinâmica Não-linear de uma Aeronave em Vôo Longitudinal – *Proceedings of IV Congresso Nacional de Engenharia Mecânica*, Recife - PE, Brasil, august 22-25, 2006. In Portuguese. CD-ROM, 2006.
- Rafikov, M.; Balthazar, J. M.; On an Optimal Control Design for Rössler System. *Physics Letters, Elsevier*, 5 p., October, 2004.
- Rafikov, M.; Balthazar, J. M. 2005, Optimal Linear and Nonlinear Control Design for Chaotic Systems. DETC2005-84998. Proceedings of IDETC'05, 2005 *ASME International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, Long Beach, California, USA, September 24–28, 2005, CD ROM, 2005.
- Rafikov, M, Balthazar, J, M. Optimal Linear Control Design for Nonlinear Systems. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, ASME*, USA, Submitted, 2006.
- Riet, A.; *A Continuation Toolbox in MATLAB*, Master Thesis, Mathematical Institute, Utrecht University, Netherlands, 2000.
- Rocha, J. C.; *Um Controlador de Flutter Baseado em Lógica Difusa*. Tese De Doutorado – Usp – São Carlos – SP, 173p. 2003.
- Schmidt, L.V.; *Introduction to Aircraft Flight Dynamics*. Amer Institute of Aeronautics (AIAA), © 03/01/1998, 397 pages, Hardback ISBN-10: 1-56347-226-0, ISBN-13: 978-1-56347-226-8

- Sibilski, S. K., Roman R. The Continuation Design Framework for Nonlinear Aircraft Control. *44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, 9 - 12 January 2006, Reno, Nevada. AIAA 2006-426.
- Tajimi, H. 1960. A statistical method of determining the maximum response of a building structure during an earthquake. In: *World Conference on Earthquake Engineering*, 2, Japan: WCEE, pp. 781-797.
- Takens, F.; *Detecting Strange Attractors in Turbulence*, In: D A Rand e LS (eds.), *Dynamical Systems and Turbulence (Lectures Notes in Math 898)*. Springer Verlag, 1980.
- Teware, A.; *Flutter: The Flying Nemesis*. Department of Aerospace Engineering. Iit Kanpur, Vol. N°1, January, 1999.
- Wright, J. R.; Introduction to Flutter of Winged Aircraft – Elementary Flutter Analysis. Von Karman Institute for Fluid Dynamics, *Lecture Series* 1992-01, (1992).
- Yang, Y.; Sontag, E.D.; Stabilization with Saturated Actuators, a Work Example: F-8 Longitudinal Flight Control. *Proceedings 1993 IEEE Conf. on Aerospace Control Systems*, Thousand Oaks, CA, pp. 289-293, May 1993.

Apêndices

Apêndice A: Matcont.

Considera-se um sistema dinâmico na forma:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \alpha) \quad (\text{c.1})$$

com $x \in R^n$, $f(x, \alpha) \in R^n$, e α um vetor de parâmetros.

Para se analisar o comportamento de (c.1), normalmente calcula-se os pontos de equilíbrio, pontos de bifurcações, etc a medida que um ou mais (codimensão) parâmetros de controle variam.

Existem alguns softwares no mercado para esses cálculos, como por exemplo o AUTO (DOEDEL, 1998, 2000) e o CONTENT (KUZNETSOV, 1997). Entretanto, o que ocorre é que estes softwares requerem que se escreva o modelo matemático num formato específico e não são amigáveis para se tratar com os resultados, seja na exportação dos mesmos ou na sua representação gráfica, além disso, são de difícil instalação e manuseio.

O objetivo do MatCont é prover um ambiente de continuação que seja compatível com a representação de equações diferenciais usadas pelo MatLab.

Dessa forma o MatCont é um *toolbox* do MatLab e foi desenvolvido para a detecção de singularidades via funções testes, localização de singularidades, processamento de pontos singulares e regulares, suporte a derivadas simbólicas, etc.

Os precursores do MatCont são descritos em Mestron (2002) e Riet (2000). A estrutura geral do MatCont pode ser encontrada em Dhooge (2003).

Para iniciar o MatCont basta digitar “matcont” na linha de comando do MatLab, e isto fará com que abra algumas janelas na sessão em uso.

Normalmente o numero de janelas abertas no MatCont é determinado pelas informações da ultima sessão usada, visto que o MatCont salva as informações da última sessão. A janela padrão do MatCont é o menu principal chamado de MatCont, como mostrado na figura a seguir:

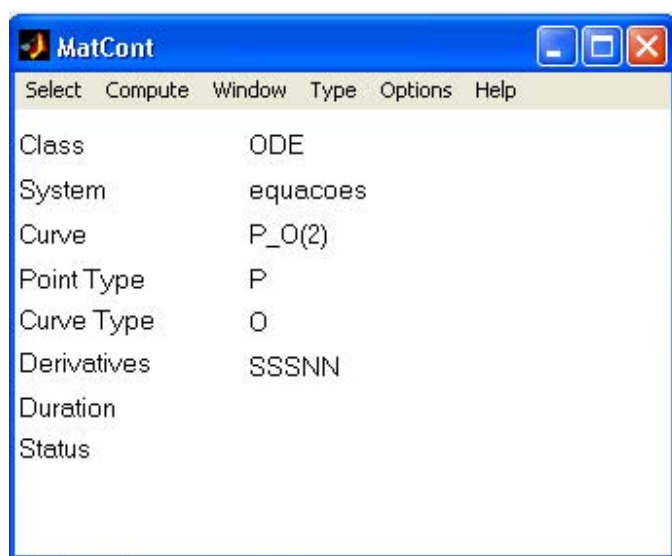


Figura A-1: Janela principal do MatCont

Para encerrar a sessão basta clicar no X da janela ou em “Select” e escolher a opção “exit”.

Para se iniciar o estudo numérico do comportamento de um sistema, como o que efetuou-se na sessão 3, deve-se, primeiramente introduzir as equações no MatCont.

Para isso clica-se em “Select” na janela da figura C-1, e escolhe-se a opção “System” e depois em “New ou “Edit/Load”

Se o sistema já estiver no computador. Para entrar com um novo sistema escolhe-se a opção “New”. Isto fará abrir uma nova janela de título “System” como exibido na figura a seguir:

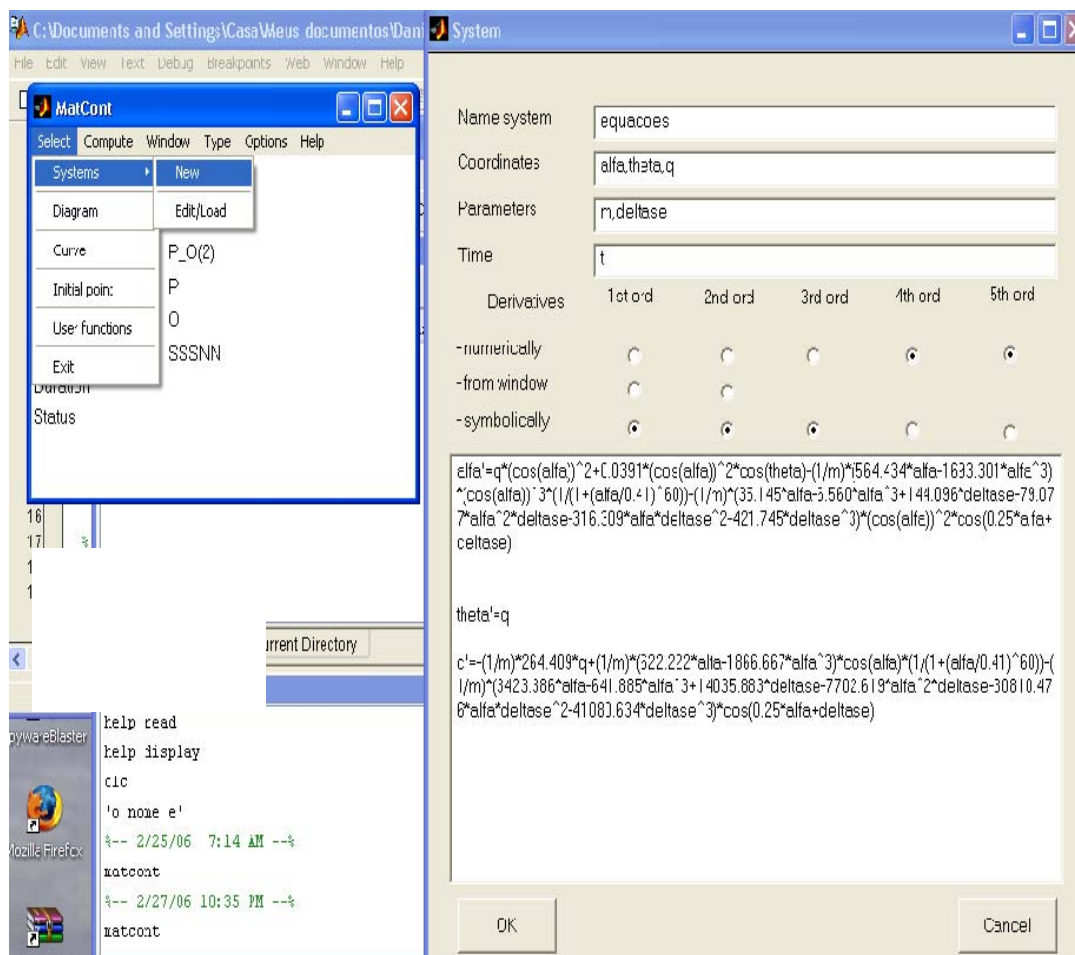


Figura A-2: Janela para se introduzir as equações do sistema.

Nesta janela deve-se entrar com o nome do sistema (que irá ser salvo), as coordenadas, os parâmetros que irão variar e o variável tempo (normalmente t).

Na parte inferior da tabela devem-se digitar as equações, como mostrado na figura C-2. feito isso, clica-se em “OK” e a janela se fechará os diretórios e arquivos necessários para o manuseio computacional do sistema serão criados automaticamente.

Para preparar uma computação orbital (plano de fase, por exemplo) clica-se na opção “Type” da janela principal do MatCont e escolhe-se a opção “Initial Point/Point”.

Feito isso o MatCont abrirá duas novas janelas, uma nomeada “Start” e a outra “Integrator”.

Na janela “Starter” coloca-se os valores iniciais das variáveis de estado, dos parâmetros e o tempo inicial. Na janela “integrator” pode-se escolher o método de resolução das EDO compatíveis com o MatLab (ODE45, ODE23, ODE113, etc).

A escolha do método é de escolha dos usuários e também da necessidade do problema.

A figura a seguir ilustra esta etapa descrita.

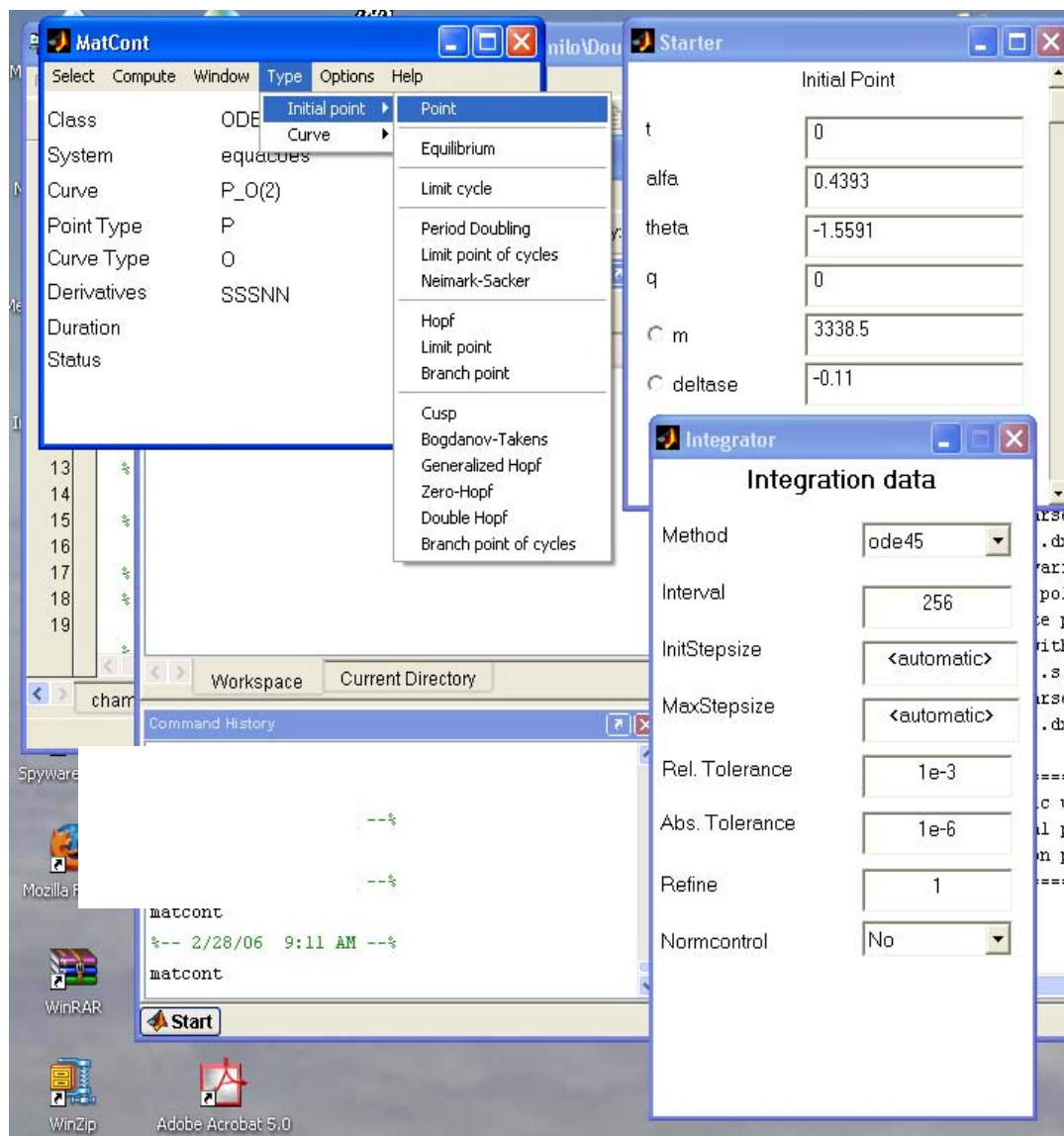


Figura A-3: Janela para computação orbital.

Durante a computação, pode-se monitorar a saída dos resultados em tempo real abrindo janelas adicionais podendo ser janelas gráficas (2D ou 3D) ou janelas de resultados numéricos.

A janela numérica apresenta os valores das variáveis de estado numericamente. As janelas podem ser abertas clicando em “window” e então escolher no sub-menu as opções “plot/2D-plot”, “plot/3D-plot” ou “numeric”.

Na figura a seguir são apresentadas janelas “2D-plot” e “numeric Window”.

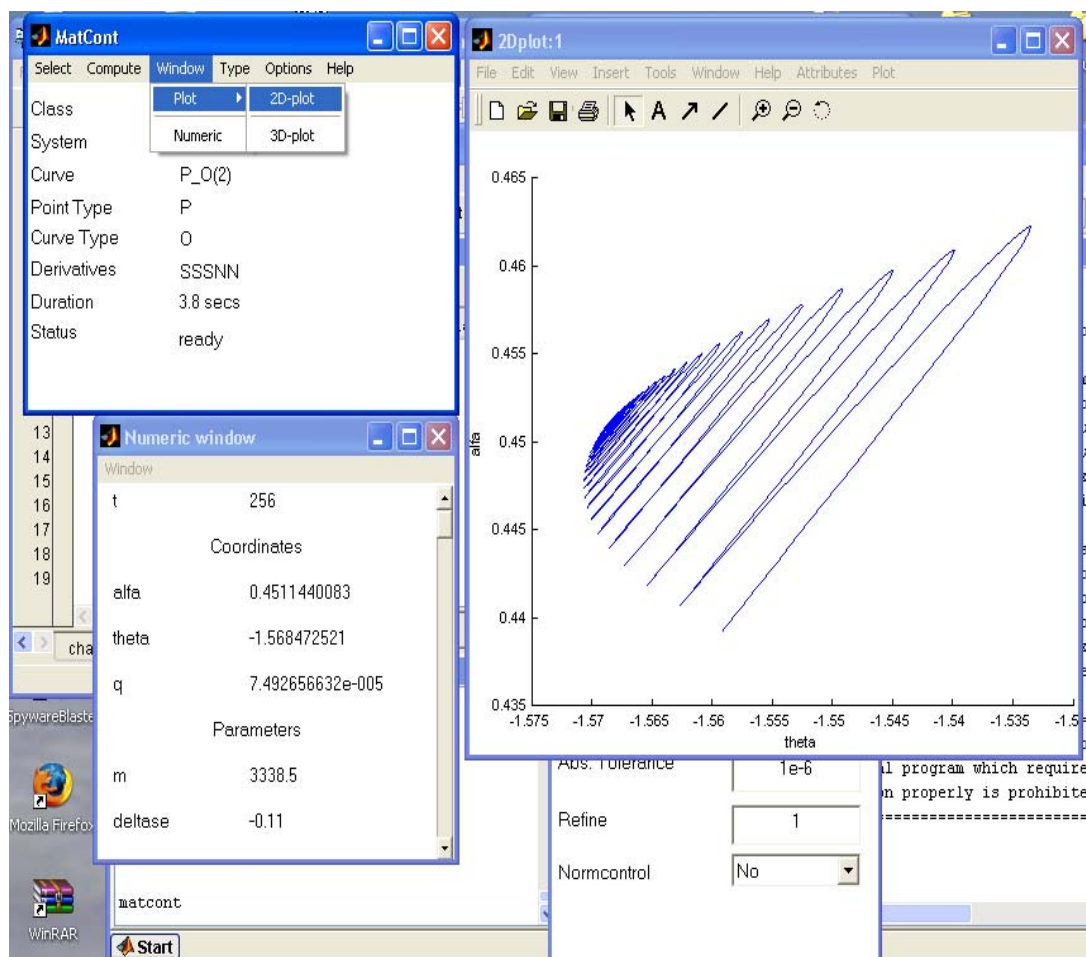


Figura A-4: Janelas numeric e 2D-plot.

Na opção “attributes” da janela 2D-plot pode-se escolher as variáveis que serão plotadas. Na figura C-4, tem-se o exemplo gráfico de um plano de fase relativo às variáveis alfa e theta.

Inicia-se a computação da órbita clicando no botão “Compute/Forward” da janela “MatCont”. Durante a computação a janela “MatCont” mostra o status “computing” até o momento em que acabar a computação e então aparecerá no status a palavra “ready”. É possível estender a computação (pelo mesmo intervalo de tempo) clicando em “Compute/Extend” na janela MatCont. Pode-se fazer isto quantas vezes for necessário para o sistema.

O MatCont pode calcular, ainda, curvas de equilíbrio.

Pode-se fazer isto escolhendo a opção “Type/Initial Point/Equilibrium” na janela do MatCont.

O método de cálculo é similar ao caso anterior com a diferença que se deve escolher como ponto inicial um ponto de equilíbrio do sistema e escolher um parâmetro de controle para ser variado.

Apresentam-se, agora, alguns resultados complementares ao estudo da dinâmica do voo longitudinal discutida no capítulo 4:

A.1: Planos de Fase Para o Ponto Hopf 1:

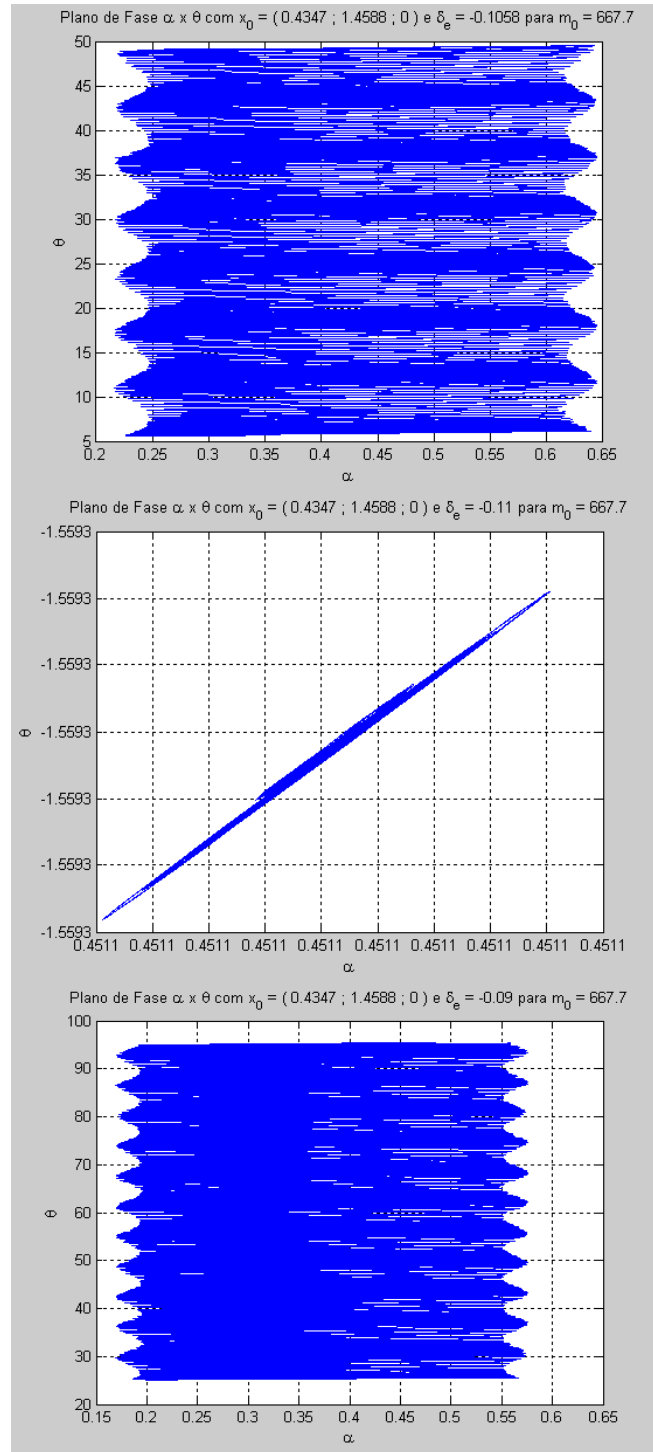


Figura A-5: Planos de Fase $\alpha \times \theta$ com δ_e variando em torno do valor referente ao ponto Hopf 1 da tabela 4.3

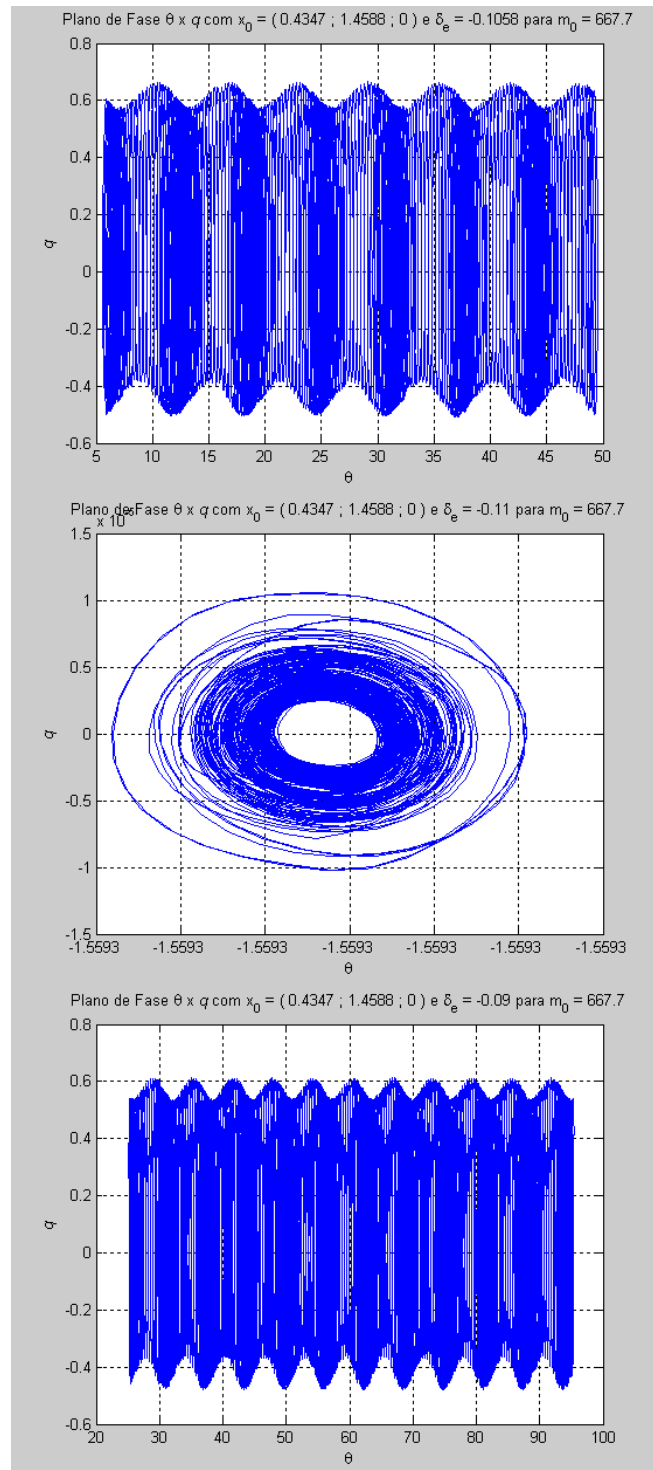


Figura A-6: Planos de Fase $\theta \times q$ com δ_e variando em torno do valor referente ao ponto Hopf 1 da tabela 4.3

A.2: Planos de Fase Para o Ponto Hopf 2:

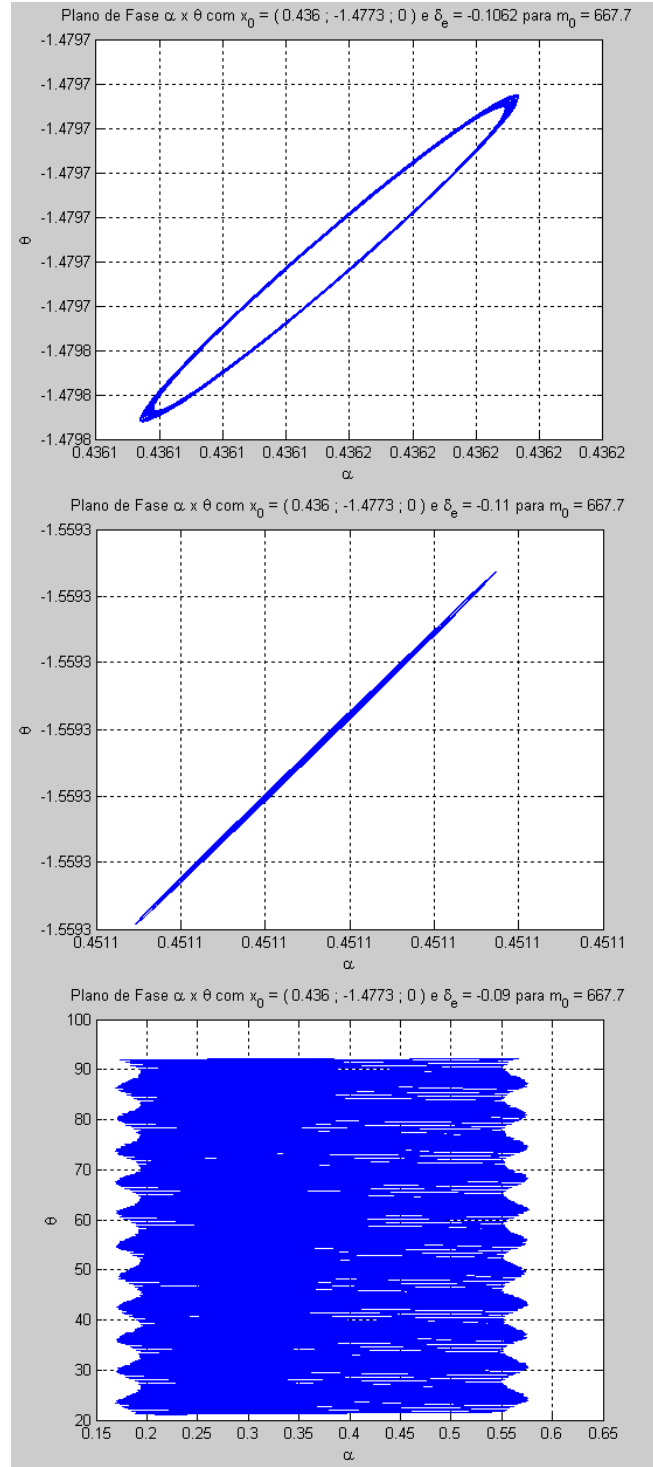


Figura A-7: Planos de Fase $\alpha \times \theta$ com δ_e variando em torno do valor referente ao ponto Hopf 2 da tabela 4.3

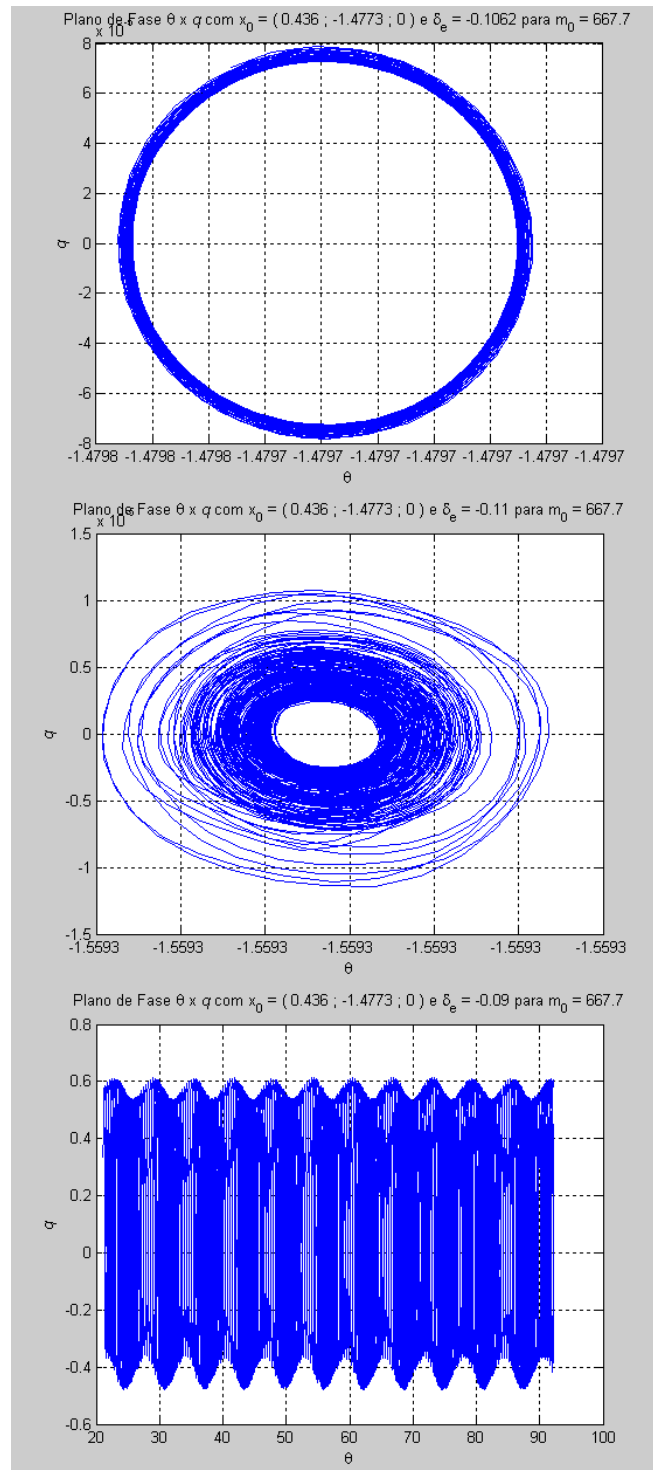


Figura A-8: Planos de Fase $\theta \times q$ com δ_e variando em torno do valor referente ao ponto Hopf 2 da tabela 4.3

A.3: Planos de Fase para o Ponto Sela N 1.

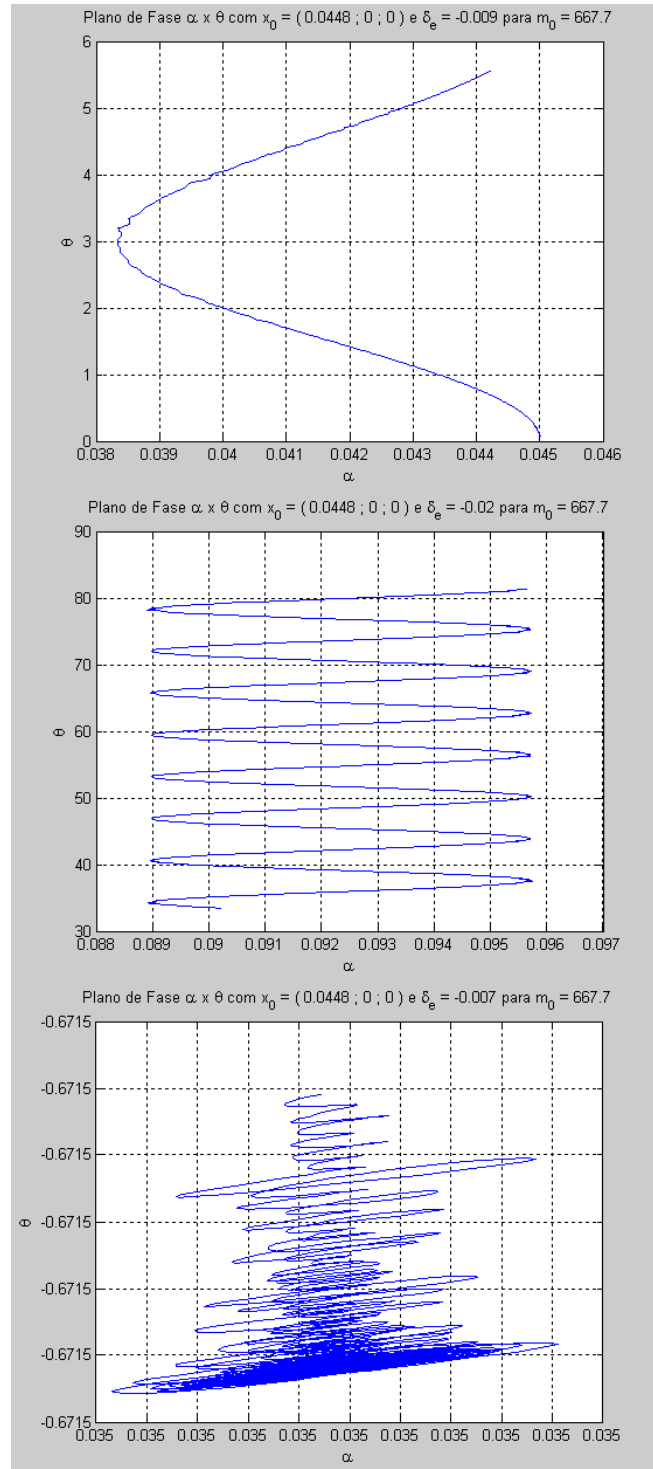


Figura A-9: Planos de Fase α x θ com δ_e variando em torno do valor referente ao ponto Sela n 1 da tabela 4.3

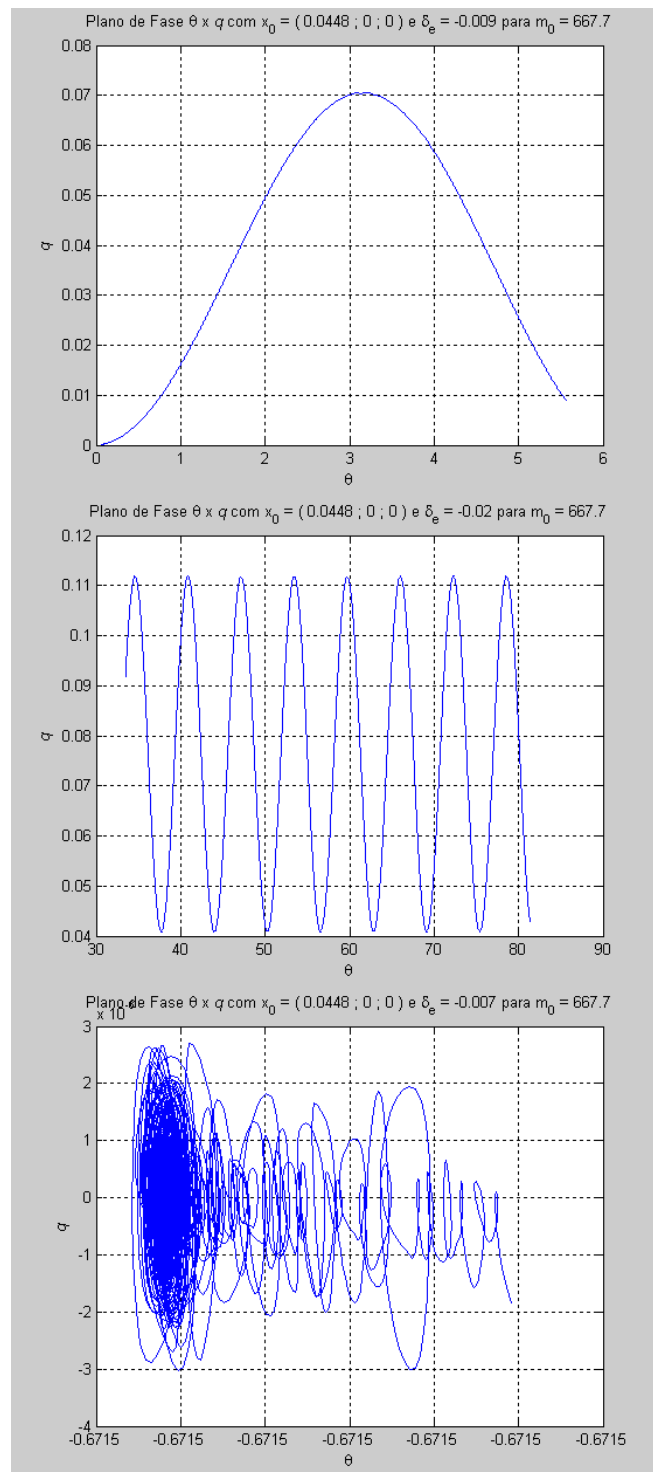


Figura A-10: Planos de Fase $\theta \times q$ com δ_e variando em torno do valor referente ao ponto Sela nó 1 da tabela 4.3

A.4: Planos de Fase para o Ponto Sela Nó 2 da Tabela 4.3.

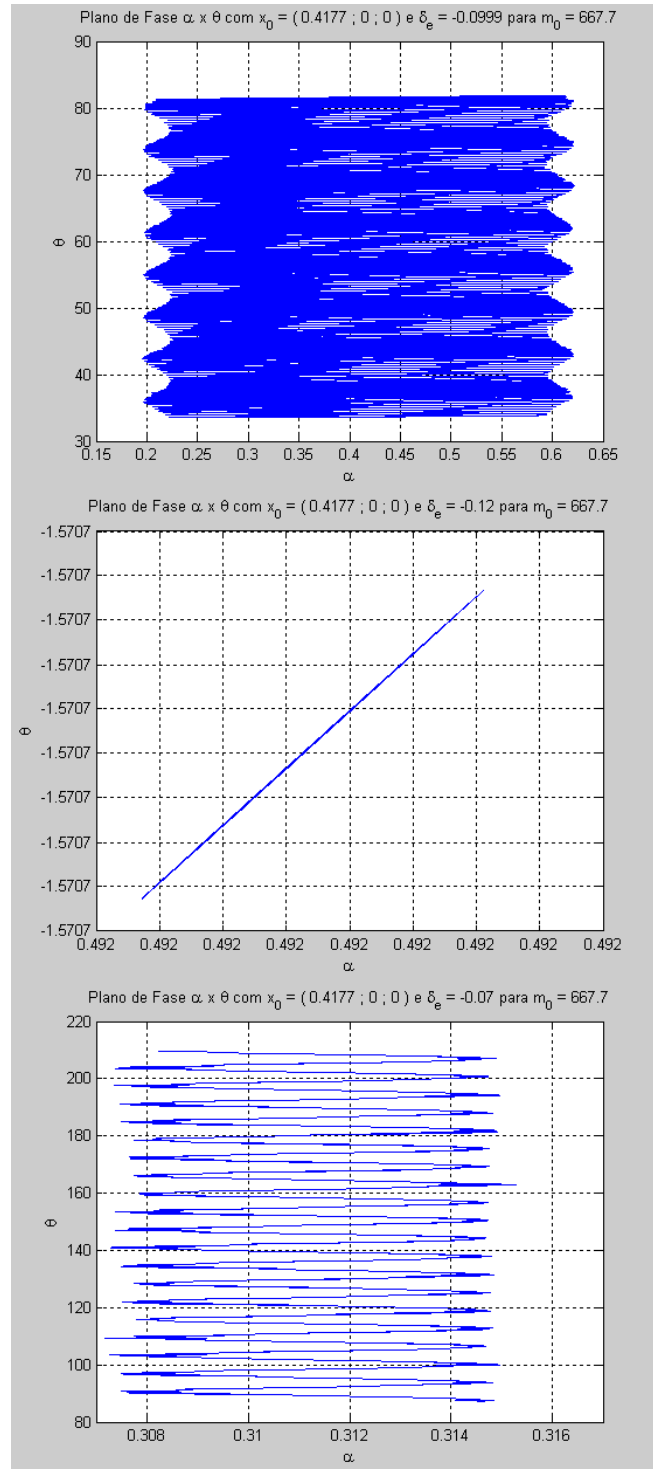


Figura A.11: Planos de Fase θ x q com δ_e variando em torno do valor referente ao ponto Sela nó 1 da tabela 4.3

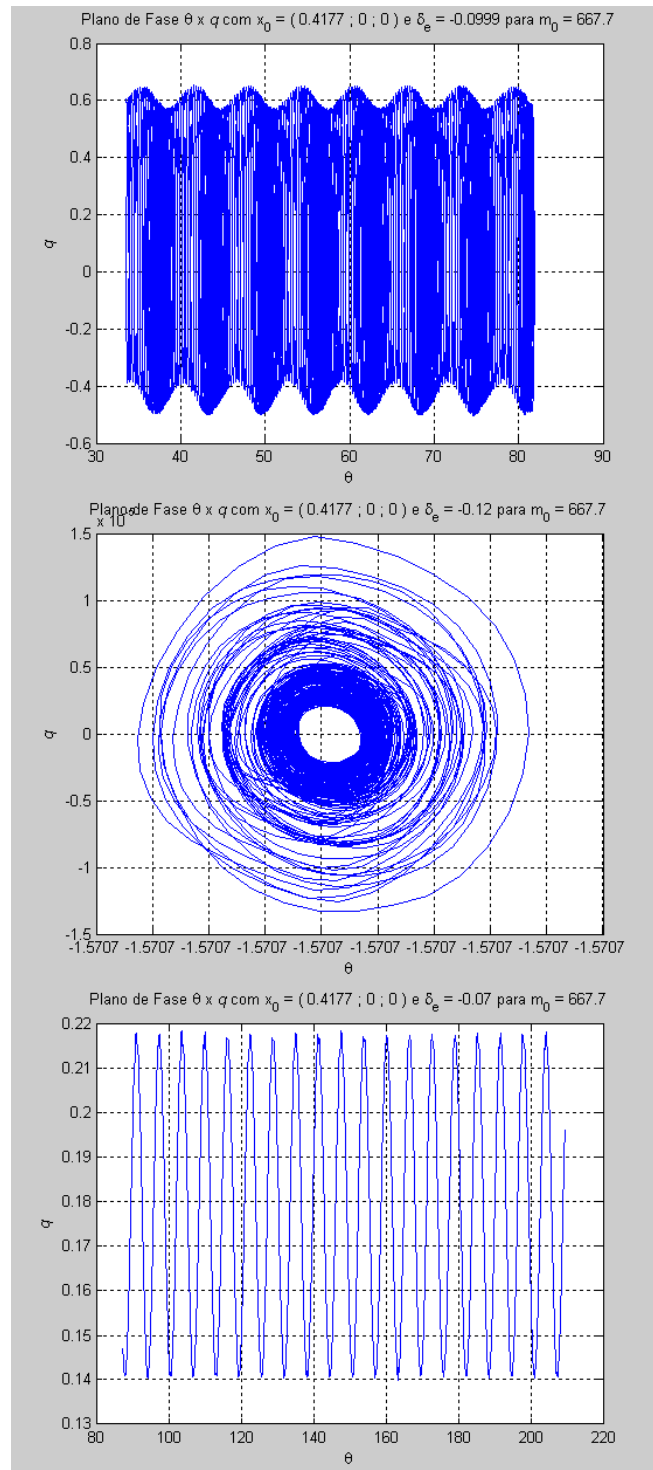


Figura A.12: Planos de Fase $\theta \times q$ com δ_e variando em torno do valor referente ao ponto Sela nó 1 da tabela 4.3.

Apêndice B: Sobre o Fenômeno “Flutter”.

Em modernas aeronaves, os problemas aeroelásticos têm afetado, além do seu projeto aerodinâmico e estrutural, o seu desempenho. Efeitos aeroelásticos são os resultados de interações mútuas de forças aerodinâmicas, estruturais inerciais e elásticas, isto é, forças aerodinâmicas que são induzidas por (e/ou induzindo) deformações estáticas ou dinâmicas da estrutura. Se a estrutura, quando exposta a um escoamento de ar, permanece perfeitamente rígida, não existem problemas aeroelásticos. No entanto, as estruturas das aeronaves são flexíveis e, quando expostas ao escoamento do ar, esta flexibilidade é fundamentalmente responsável por vários tipos de fenômenos aeroelásticos, dentre eles o *flutter*.

No mundo todo, desde o início, quando começaram as primeiras experiências de vôo, o fenômeno *flutter* têm sido as causas de vários acidentes, já que antes de 1930 poucos entendiam sobre esse fenômeno (TEWARE, 1999).

O que prevalecia na época era o “espírito aventureiro” que encorajava os aviadores a correr grandes riscos com o novo “esporte” que era a aviação. Por esse motivo, muitos sucumbiram ao *flutter*.

Após 1930, com a viabilidade de novos motores e a busca por recordes de velocidade, o fenômeno *flutter* começou a ser reconhecido como um problema de alta periculosidade e isso, conseqüentemente, gerou sérios esforços em engenharia na análise e prevenção de *flutter*, especialmente em projetos de aeronaves velozes das décadas de 1930 e 1940.

Uma solução possível para o problema era aumentar a rigidez estrutural, mas isso nem sempre era possível devido às limitações de peso.

Foi quando soluções analíticas de modelos matemáticos e resultados experimentais revelaram a velocidade de vôo a qual acontece o *flutter* e, como sua frequência característica é muito afetada pela distribuição de massa da estrutura e sua rigidez, comparativamente ao

balanceamento das asas, lemes e superfícies de controle. Estas começaram a ser partes integrantes nas construções de aeronaves.

Assim, a investigação aeroelástica durante o desenvolvimento do projeto de uma aeronave faz parte de um processo de otimização estrutural, em que a configuração final da superfície de sustentação é uma das mais importantes decisões do projeto (FÖRSCHING, 1979).

Com o passar do tempo, com as velocidades máximas de voo de aeronaves aumentando além da velocidade do som, foi notado que o fenômeno *flutter* era mais provável nas velocidades supersônicas (perto da velocidade de som) devido ao movimento instável de uma onda de choque que existiria, em cima da asa.

Então, uma melhor modelagem matemática das cargas aerodinâmicas instáveis no regime supersônico era exigida, o que resultou em códigos de computador que exigiam um tempo de processamento de semanas nos supercomputadores da época. Conseqüentemente, os maiores supercomputadores existentes eram dedicados a tratar o problema aerodinâmico supersônico instável.

Ao mesmo tempo, instalações experimentais de organizações como o Centro de Pesquisas Nasa-Langley foi incrementado para o estudo do fenômeno de *flutter*, em regimes transônicos

Os dados resultantes destes, estudos foram valiosos e aplicados para a maioria dos aviões atuais, como, por exemplo, o Boeing 747 - 400 e o Airbus A-340, que têm, habitualmente, velocidades de cruzeiro em regime supersônico (TEWARE, 1999).

Ressalta-se que o método passivo tradicional de se evitar *flutter*, como o balanceamento de massa e rigidez local, continua até hoje.

Estas técnicas são ineficientes (porque elas somam peso à estrutura) como também pouco sistemáticas, e nem sempre têm sucesso. Conseqüentemente, o fenômeno de *flutter* continua acontecendo. Recentes exemplos incluem os caças IDF de Taiwan, que colidiram devido a *flutter* de cauda em um teste de vôo no ano de 1992, o que levou ao cancelamento do projeto.

Mais tarde, no mesmo ano, um protótipo de caça americano, F22, se envolveu em um acidente com causa relacionada ao fenômeno de *flutter*. Em 1997, uma aeronave da força aérea americana, a saber, um F-117 “Stealth” se acidentou devido à vibração de um dispositivo solto.

Todo ano, pequenas aeronaves, normalmente as de construções “caseiras”, continuam sofrendo acidentes fatais causados pelo fenômeno de *flutter*.

Nos últimos anos, no Brasil, ocorreram, pelo menos, dois acidentes fatais com aeronaves envolvendo o fenômeno *flutter* (ou ressonância aeroelástica). Mas o que se entende por fenômeno de *flutter*?

Segundo WRIGHT (1992), *flutter* é uma condição onde componentes de uma aeronave, a asa, por exemplo, ou a aeronave como um todo, exibe oscilações de sustentação própria para uma certa velocidade frontal, que neste caso é denominada velocidade crítica de *flutter*.

Para as velocidades abaixo da velocidade crítica, qualquer vibração dinâmica estrutural inicial é amortecida, enquanto que as velocidades acima da velocidade crítica, qualquer perturbação dinâmica estrutural crescerá, levando, quando não for limitada por comportamento estrutural ou dinâmico não-linear, à falha estrutural.

Pode-se dizer, então, que este comportamento iterativo entre o escoamento e a estrutura persiste até que um equilíbrio estático seja atingido, ou seja, até que as forças aerodinâmicas não sejam suficientes para deformar mais a estrutura.

Quando este equilíbrio estático não é alcançado ocorre o problema da divergência o que poderá provocar a ruptura da asa.

O problema dinâmico ocorre a partir desse equilíbrio estático, assim as respostas a essas perturbações, obtidas pelo mesmo processo iterativo anterior, apresentam um comportamento oscilatório. Quando se obtém respostas oscilatórias divergentes ocorre o fenômeno de flutter.

Podem-se destacar os tipos de *flutter* clássicos e os não clássicos.

O ***flutter* clássico** está associado com o escoamento potencial, mas não necessariamente, envolve o acoplamento de dois ou mais graus de liberdade.

Já o ***flutter* não clássico**, que é difícil de ser analisado com base apenas teórica, pode envolver separação de escoamento, escoamento periódico, condições de estol e vários efeitos de atraso no tempo entre as forças aerodinâmicas e o movimento.

O mais significativo tipo de *flutter* clássico é o escoamento em torno de uma asa considerada como um escoamento potencial não separável.

Flutter de flexão-torção, flexão-*aileron* e torção-*aileron* são tipos de *flutter* com dois graus de liberdade envolvidos (modos de vibração).

Quando a asa curva e torce os *ailerons* são significativamente envolvidos, tem-se o *flutter* denominado de flexão-torção-*aileron*.

Embora o *flutter* seja restrito a superfícies de sustentação, a fuselagem, em companhia das instabilidades de *flutter*, pode afetar significativamente a velocidade crítica.

O ***tail flutter*** surge do comportamento elástico da fuselagem e normalmente envolve um grande número de graus de liberdade.

Outro tipo de *flutter* aparece em aeronaves que levam munições externamente. Este *flutter* é denominado **wing-with-store flutter**.

A adição de casulos externos à aeronave provoca significativas mudanças nas características dinâmicas e freqüentemente efeitos adversos nas propriedades de *flutter* causam drásticas reduções na velocidade crítica.

Um outro problema é que são vários os tipos de casulos. Em velocidades de vôo muito altas, o esfoliamento da fuselagem pode exibir um tipo de *flutter* que está associado ao deslocamento do painel na direção normal a esta superfície.

Este *flutter* é chamado de **panel flutter** e difere do *flutter* convencional pelo menos por dois aspectos: é um fenômeno inteiramente supersônico e as não-linearidades estruturais, associadas com os limites aerodinâmicos, tendem a limitar fortemente as amplitudes de *flutter*. Estas limitações causam falhas nos modos estruturais e explosivas fraturas na superfície da aeronave.

Um outro tipo de *flutter* que ocorre no escoamento potencial é o **Propeller-rotor/whirl flutter**. O mecanismo básico na instabilidade *whirl flutter* é o acoplamento giroscópico de *pitch* e *yaw* no sistema de hélice.

Um tipo não clássico de *flutter* (ROCHA, 2003) é o que associado ao escoamento separável e é chamado de **stall flutter**.

O *stall flutter* pode ocorrer em uma superfície de sustentação, quando esta opera com alto ângulo de ataque no escoamento durante, ao menos, parte de cada ciclo de oscilação.

Ele ocorre principalmente no *flutter* de um grau de liberdade em uma oscilação torcional, e um grande número de parâmetros pode ter enorme influência neste fenômeno de *flutter* entre

eles podemos citar, número de Reynolds, frequência reduzida, localização do eixo torcional, forma do aerofólio e algumas amplitudes de oscilações.

Pela existência de todos estes parâmetros, as não-linearidades aerodinâmicas e o escoamento separável complicam imensamente uma previsão teórica do *flutter* para este caso.

Para se compreender melhor o fenômeno de *flutter*, faz-se uma análise relacionada ao comportamento de um sistema mecânico constituído de uma massa, uma mola e um amortecedor quando submetido a uma força externa oscilatória.

Variando-se a frequência da oscilação externa, atinge-se um ponto, que se chama de ressonância, em que as oscilações da massa são ampliadas ao máximo.

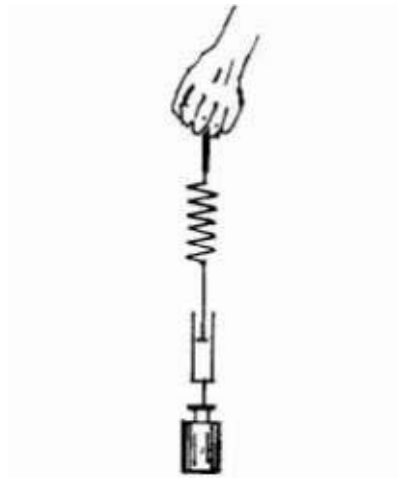


Figura B-1: Massa, mola e amortecedor.

Num gráfico, a resposta da massa em função da frequência da oscilação de entrada, tem-se curvas conforme a figura abaixo.

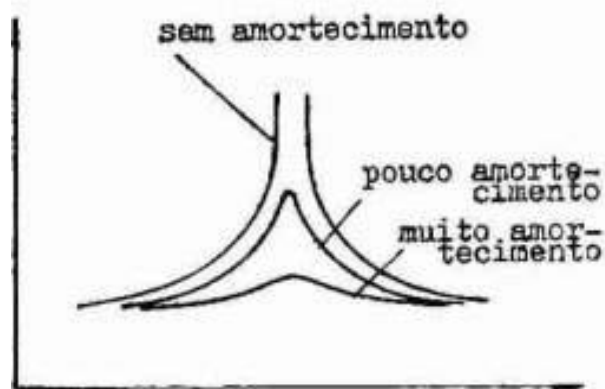


Figura B-2: Resposta da massa em função da frequência.

Este comportamento natural de um sistema é geral e como exemplo tem-se os casos de “Shimmy” de rodas de automóveis e os circuitos de rádio e televisão. Sintonizar um aparelho é alterar os seus elementos de modo a fazê-lo “ressoar” numa certa frequência.

Assim o *flutter* em aeronaves, nada mais é do que mais um caso particular deste fenómeno vibratório geral, no qual:

- **As forças externas são fornecidas pelo ar em movimento, sendo o seu valor, portanto, proporcional ao quadrado da velocidade da aeronave, como quase todas as forças aerodinâmicas.**
- **As massas são as das partes oscilantes em movimento, uma asa, um aileron ou um profundor.**
- **Os amortecedores, no caso de superfícies fixas como uma asa, é o atrito interno de deformação dos materiais das estruturas, e no caso de superfícies móveis, também os atritos dos sistemas de comando. Em ambos os casos, estes amortecimentos são bastante pequenos sendo um pouco maiores para as estruturas rebitadas e parafusadas ou fabricadas em material composto (FBVV, 1972).**

Há ainda, um certo amortecimento provocado pelo próprio ar que envolve a superfície em movimento, mas que, sendo praticamente constante, o seu valor relativo às forças aerodinâmicas cai com a velocidade, além de sofrer modificações devido a esta.

Pode se fazer uma analogia com um remo oscilando dentro da água e assim ter uma idéia deste tipo de amortecimento. De qualquer maneira, o fundamental é que o amortecimento é quase sempre pequeno.

- **As molas, no caso de superfícies fixas, são representadas pela própria estrutura, e no caso de superfícies móveis é mais uma vez, o próprio ar em movimento, ajudado, em certos casos pela elasticidade do próprio sistema de comando.**

O *flutter* pode ocorrer, pela excitação e vibração de uma única superfície fixa isoladamente como, por exemplo, uma asa, o que não é freqüente, ou em casos mais raros, com uma deriva ou um estabilizador isolados. Nestes casos, ele é geralmente catastrófico devido ao amortecimento muito fraco.

O *flutter* pode ocorrer ainda, devido à vibração de uma superfície móvel isolada, profundor, leme, etc. Nestes casos, ele se apresenta mais controlável pelo piloto, a não ser quando a mola é representada por um sistema de comando demasiadamente flexível.

Mas o caso mais comum de *flutter* é o de acoplamento da vibração de uma superfície móvel com a de uma fixa, e que por ser acoplado, é mais difícil de ser analisada. Imaginem por exemplo um sistema com 2 molas, 2 amortecedores, 2 massas e 2 mãos.

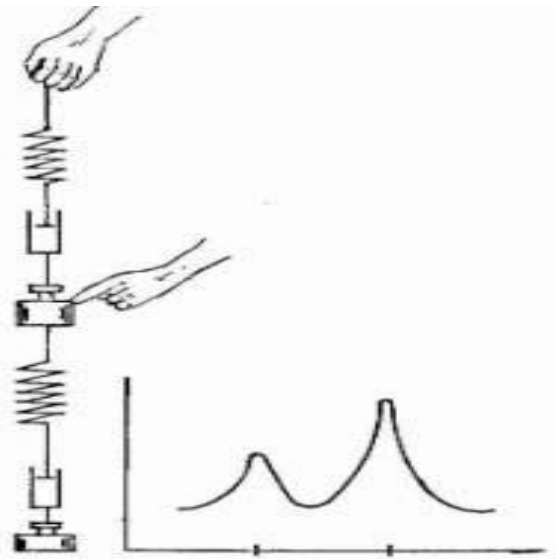


Figura B 3: Sistema com 2 massas, 2 molas e 2 amortecedores

Um sistema deste é mais complexo e na realidade, uma asa com um aileron representa um sistema com pelo menos 3 graus de liberdade envolvendo flexão da asa, torção da asa e deflexão do aileron ou as vezes com graus de liberdade adicionais envolvidos.

Uma “empenagem” representaria um sistema ainda mais complexo se considerarmos a torção e flexão do cone da cauda, etc. A análise de como ocorre tudo isto, logicamente não é simples e o seu estudo representa em si uma especialização completa no campo da engenharia aeronáutica, mas para o objetivo deste estudo especial, o até aqui exposto é suficiente.

Estabelecem-se, a seguir, algumas regras baseadas nos quatro elementos fundamentais - **massa - mola - amortecedor - força externa**:

- **Massa-** O balanceamento correto das superfícies de comando é fundamental na prevenção do *flutter*, seja estática ou dinamicamente. Qualquer acréscimo de peso ou maior afastamento do centro de gravidade da linha de articulação com relação ao projeto original de uma aeronave pode ter conseqüências desagradáveis. A

introdução de tanques de lastro ou de qualquer massa razoável nas asas altera seu comportamento vibratório. Estas massas serão tão mais prejudiciais quanto mais externas e quanto mais recuados em direção ao bordo de fuga. As reformas estruturais geralmente acarretando aumento de peso. Em todos os casos é útil comparar-se a frequência natural da asa antes e depois de reformas. Esta frequência pode ser facilmente medida, sacudindo as asas naturalmente pelas pontas e contando-se o número de oscilações obtidas, digamos em um minuto. Uma variação substantiva da frequência natural é sempre um alerta.

- **Mola.** Os sistemas de comando devem ser conservados livres de folgas e jogos, e nos sistemas de comando por cabos quando for o caso, devem ser mantidos com a tensão correta, pois tal como ocorre com as cordas de um violão, a frequência de vibração da superfície de comando irá depender desta tensão. Após as montagens e desmontagens é útil verificar-se o comportamento das superfícies de comando, mantendo-se fixos os pedais e o manche. Quanto a “mola” aerodinâmica, a única coisa que podemos fazer é não ultrapassar os limites de velocidades previstas.
- **Amortecedor.** Deve-se procurar manter a estrutura da aeronave, íntegra em todos os seus elementos - uma nervura ou caverna deslocadas ou um remendo mal feito podem alterar o amortecimento de uma asa ou de cone da cauda. Também sob este aspecto, é interessante manter-se um registro das frequências naturais dos componentes que permite detectar falhas internas ocorridas, por exemplo, após pousos problemáticos. A substituição de roldanas ou guinhóis com buchas por outros com rolamentos pode facilitar o aparecimento de *flutter*, pela redução do atrito e, portanto, do amortecimento do sistema.
- **Força externa.** A ocorrência do *flutter* sempre exige uma excitação correta numa velocidade determinada. Ensaio de vôos onde às velocidades são aumentadas gradativamente, com a aproximação da zona de *flutter* são importantes para a

análise de registros que permitam acompanhar a evolução do comportamento dos amortecimentos da estrutura e das superfícies de comando.

No sentido de superar a insuficiência de técnicas passivas e voar a uma velocidade maior que a velocidade de *flutter*, uma técnica foi desenvolvida em meados dos anos de 1970, a chamada supressão ativa de *flutter*. Neste caso, um sistema onboard de controle automático move uma superfície de controle na asa em resposta ao movimento estrutural, a fim de suprimir o *flutter*.

A primeira demonstração prática de supressão ativa de *flutter* foi feita pela força aérea norte-americana em seu programa de Alívio de Carga e Modo de Estabilização (LAMS – Load Alleviation and Mode Stabilization) que resultou em um Boeing bombardeiro B-52 que criou história nos céus do estado de Kansas nos E.U.A. em 1973 voando 10 nós mais rapidamente que sua velocidade de *flutter* de loop-aberto.

Porém, apesar deste primeiro sucesso, a supressão ativa de *flutter* permaneceu em grande parte como experimental, e ainda não alcançou estado operacional em qualquer aeronave. Isto é por causa de muitas razões, a principal delas é a da dificuldade em se projetar um sistema de controle que é robusto para incertezas paramétricas. Claramente, os projetistas de aeronaves e operadores não estão dispostos a correr riscos.

A supressão ativa de *flutter* requer um conhecimento preciso dos modos aeroelásticos que o causam, para assim, mudar ativamente suas características de tal modo que o fenômeno *flutter* aconteça a uma velocidade de vôo cada vez mais alta.

As diferenças entre os tipos de aeronaves e/ou suas finalidades influenciam muito no estudo do *flutter*, pois embora o *flutter* clássico de uma asa de aspect-ratio alto, como a de um Boeing 747 ou um Airbus A-340, é causado por uma interação entre as primeiras dobras e torção de modos aeroelásticos, o mecanismo de flutter de uma asa de aspect-ratio baixo como a de um avião de combate é mais complicado de ser analisado.

Para estudar *flutter*, como também a supressão ativa de *flutter*, é necessário que um modelo aeroelástico preciso seja baseado na modelagem das forças aerodinâmicas instáveis como uma matriz de transferência.

No domínio de Laplace, esta matriz multiplicada pelo vetor de deslocamento generalizado dá o vetor que contém forças aerodinâmicas instáveis e momentos (TEWARE, 1999).

O método mais comum de obter a matriz de transferência da instabilidade aerodinâmica é o uso de aproximações aperfeiçoadas de funções racionais para suas condições, providos dos dados de domínio de frequência no limite harmônico.

Depois que a matriz de transferência é obtida, um modelo de espaço de estados, linear, invariante no tempo para o sistema aeroelástico, inclusive o atuador de controle da superfície, pode ser obtido. O controlador de realimentação para supressão ativa de *flutter* pode ser projetado então por técnicas padrão de *loop-fechado* (TEWARE, 1999).

Durante a última década, vários autores trabalharam nos vários aspectos de supressão ativa de *flutter*, como, por exemplo, modelos aerodinâmicos de domínio de frequência subsônica para supersônica, otimização não-linear para aproximações de funções racionais e projeto de controladores robustos otimizados.

Existia, também a aplicação prática, como por exemplo, nos caças F/A-18 E/F da *McDonnell Douglas Corp. – U.S.A.* Desde então a área é interdisciplinar em sua natureza, proporcionando assim uma oportunidade excelente para se estudar dinâmica de fluidos, dinâmica estrutural, e sistemas de controle, tudo ao mesmo tempo. A. Teware (1999) trabalhou com a supressão de *flutter*. As figuras a seguir mostram, as análises no assunto de supressão de *flutter*.

A figura abaixo mostra a resposta de loop-aberto de uma asa equipada com um acelerômetro externo e uma superfície de controle *trailing-edge* em uma velocidade ligeiramente maior que a velocidade de *flutter*. O movimento é visto como sendo instável.

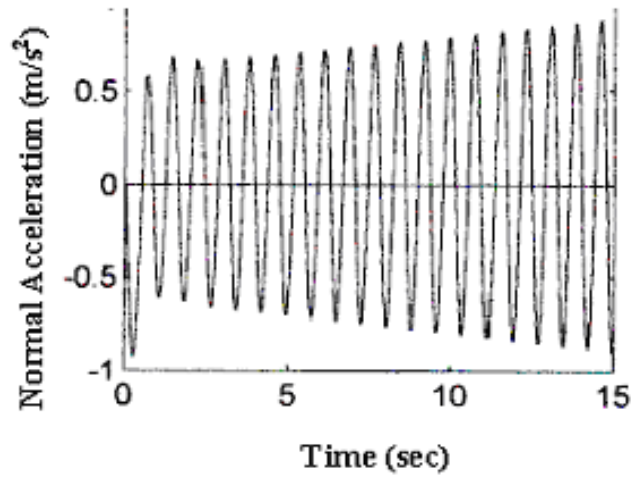


Figura B-4: Resposta de *flutter* de loop aberto.

A figura B-5 exibe a comparação, na mesma velocidade, da resposta de loop fechado de um controlador baseado em uma técnica de A. Teware (1999), a ORW (Output Rate-Weighted) com a técnica tradicional método linear quadrático (LQRY). Observa-se que o controlador ORW alcança a supressão de *flutter* muito mais cedo e com uma aceleração normal com um pico muito mais baixo.

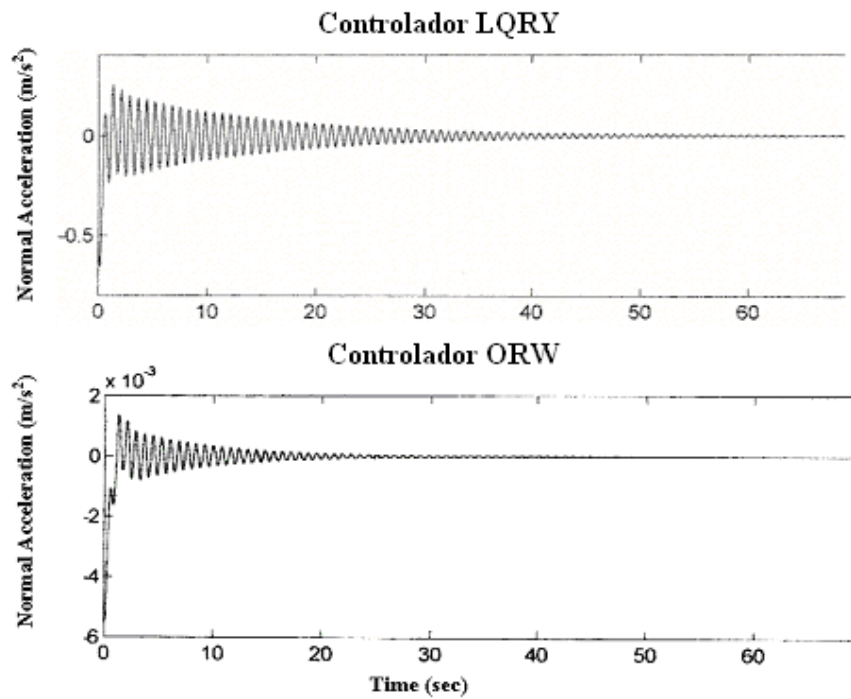


Figura B 5: Comparação de dois controladores de supressão ativa de *flutter*.

As figuras B-6 e B-7 mostram a aplicação de outra técnica inovadora, a entrada pré-shaping para a supressão de *flutter*.

Na figura B-7 é mostrada a entrada pré-shaped de controle de torque obtida pela convolução de uma entrada *bang-bang* (TEWARE, 1999) com uma seqüência baseada nos primeiros seis modos aeroelásticos. O objetivo de tal entrada é trazer o sistema para o repouso no final da seqüência de entrada.

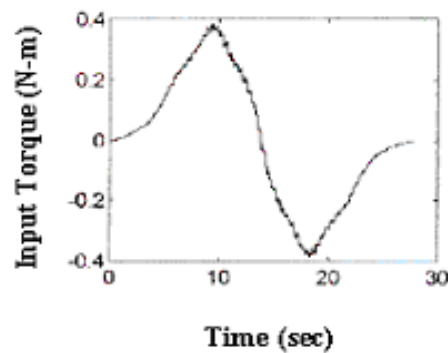


Figura B 6: Entrada pre-shaped para supressão de *flutter* tomando os primeiros seis modos aeroelasticos.

A figura B-7 mostra a resposta de aceleração para esta entrada a uma velocidade ligeiramente maior que a velocidade de *flutter de loop aberto*, significando a supressão do *flutter*.

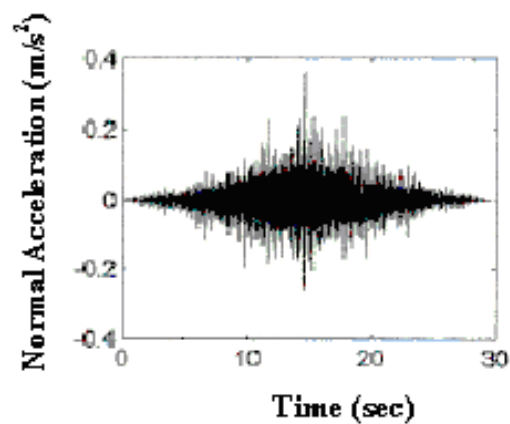


Figura B 7: Resposta para a entrada pré-shaped no ponto de *flutter de loop aberto*.

O problema de *flutter* está, provavelmente, se tornando cada vez mais agudo com o passar do tempo com o advento da utilização de materiais leves e o aumento nas velocidades de vôo. Por exemplo, uma aeronave hipersônica em uma velocidade dez vezes maior que a velocidade do som experimentará altos gradientes térmicos, que são, provavelmente, de grande influência nas características aeroelásticas.

A iteração aerotermoelástica resultante poderá fazer com que a ocorrência do *flutter* seja mais provável.

Espera-se que, cada vez mais, com o passar do tempo, um esforço maior seja feito a fim de se diminuir substancialmente ou até eliminar este problema tão perigoso para a aviação, já que este tipo de fenômeno é responsável por muitos acidentes fatais com aeronaves no mundo.

Como mencionado anteriormente, a busca pela maior performance, tanto de materiais como de velocidade, já torna o estudo do aparecimento de *flutter* em aeronaves de suma importância para a área e este estudo teve a finalidade de nos familiarizar com esse fenômeno para uma pesquisa nesse assunto.

Apêndice C: Especificações e Imagem do F-8 Crusader:



Figura C-1: F-8 “Crusader”.



Figura C-2: Vista lateral do F-8 “Crusader”

F-8 Crusader Specifications	
Primary Function:	Carrier-based fighter and attack aircraft
Contractor:	Vought
Crew:	One
Unit Cost:	N/A
Powerplant	
	One Pratt & Whitney J57 turbojet engine rated at 18,000lb
Dimensions	
Length:	54.5 ft (16.61 m) -- F-8F
Wingspan:	35.6 ft (10.87 m) -- F-8F
Height:	15.75 ft (4.8 m) -- F-8F
Weights	
Empty:	17,836 lb
Maximum Takeoff:	34,100 lb (gross)
Performance	
Speed:	1,133 mph (mach 1.72)
Ceiling:	58,000 ft (17,680 m) -- F-8F
Range:	1,000 miles
Armament	
	Four 20mm cannons M39 and up to 2,268 kg weapons incl. two AIM Matra R530 missiles or eight 5 in (127 mm) rockets. -- F-8F

Figura C-3: Especificações técnicas do F-8 Crusader



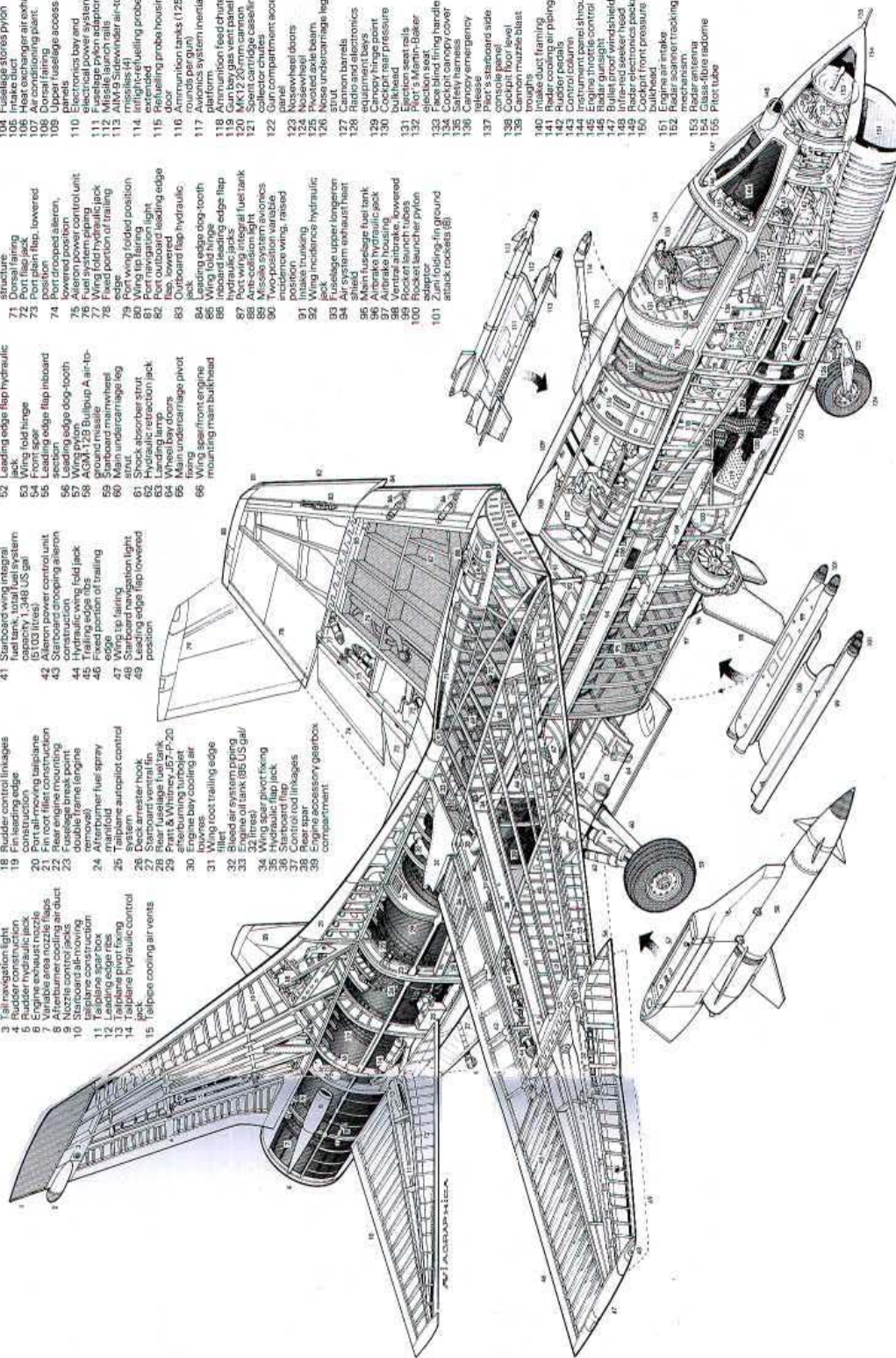
Figura C-4: Landing do F-8 Crusader em um Porta-Aviões e a característica do ângulo de ataque variável

Vought F-8E Crusader cutaway drawing key

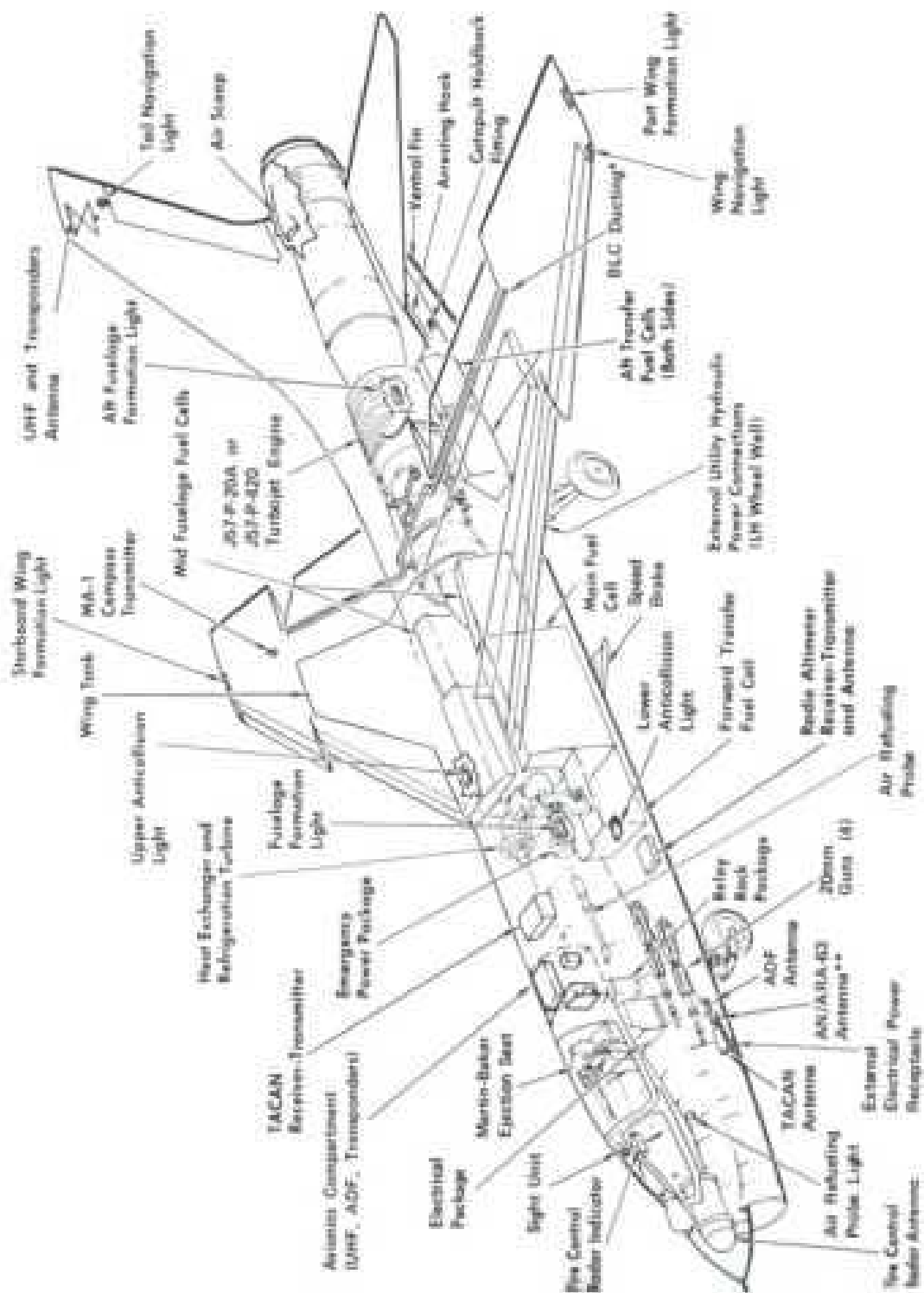
- 1 Fin tip VHF aerial fairing
- 2 Tail wheel fairing
- 3 Tail navigation light
- 4 Rudder construction
- 5 Rudder hydraulic jack
- 6 Variable area nozzle flaps
- 7 Afterburner cooling air duct
- 8 Nozzle control jacks
- 9 Fuel system (engine and tailplane construction)
- 10 Tailplane spar box
- 11 Landing edge ribs
- 12 Landing edge flap
- 13 Tailplane hydraulic control jack
- 14 Tailplane cooling air vents
- 15 Tailplane cooling air vents
- 16 Inboard wing panel multi-structure
- 17 Starboard wing integral fuel tank, total fuel system capacity 1,348 US gal
- 18 Rudder control linkages
- 19 Fin leading edge
- 20 Fin root fillet construction
- 21 Fin root fillet construction
- 22 Fin root fillet construction
- 23 Fin root fillet construction
- 24 Afterburner fuel spray system
- 25 Afterburner fuel spray system
- 26 Deck arrester hook
- 27 Starboard ventral fin
- 28 Pratt & Whitney J57-P-20 turbojet engine
- 29 Pratt & Whitney J57-P-20 turbojet engine
- 30 Pratt & Whitney J57-P-20 turbojet engine
- 31 Wing root trailing edge
- 32 Wing root trailing edge
- 33 Wing root trailing edge
- 34 Wing spar pivot fixing
- 35 Wing spar pivot fixing
- 36 Wing spar pivot fixing
- 37 Wing spar pivot fixing
- 38 Wing spar pivot fixing
- 39 Wing spar pivot fixing

- 50 Leading edge flap rib construction
- 51 Outer wing panel spar
- 52 Leading edge flap hydraulic jack
- 53 Wing folding hinge
- 54 Wing folding hinge
- 55 Leading edge flap inboard section
- 56 Leading edge dog-tooth
- 57 Leading edge dog-tooth
- 58 AOM-128 Bullpup A air-to-ground missile
- 59 Main undercarriage leg
- 60 Main undercarriage leg
- 61 Shock absorber strut
- 62 Main undercarriage jack
- 63 Main undercarriage jack
- 64 Wheel bay doors
- 65 Main undercarriage pivot
- 66 Wing spar front engine mounting main bulkhead
- 67 Engine compressor intake
- 68 Wing root rib
- 69 Centre section fuel tank
- 70 Centre section fuel tank structure
- 71 Dorsal fairing
- 72 Port flap jack
- 73 Port flap jack
- 74 Port flap jack
- 75 Port flap jack
- 76 Port flap jack
- 77 Port flap jack
- 78 Port flap jack
- 79 Port flap jack
- 80 Port flap jack
- 81 Port flap jack
- 82 Port flap jack
- 83 Port flap jack
- 84 Port flap jack
- 85 Port flap jack
- 86 Port flap jack
- 87 Port flap jack
- 88 Port flap jack
- 89 Port flap jack
- 90 Port flap jack
- 91 Port flap jack
- 92 Port flap jack
- 93 Port flap jack
- 94 Port flap jack
- 95 Port flap jack
- 96 Port flap jack
- 97 Port flap jack
- 98 Port flap jack
- 99 Port flap jack
- 100 Port flap jack
- 101 Port flap jack

- 102 Emergency air driven generator, extended position
- 103 Fuelage stores pylon (LOV)
- 104 Fuelage stores pylon
- 105 Inake duct
- 106 Heat exchanger air exhaust
- 107 Heat exchanger air exhaust
- 108 Dorsal fairing
- 109 Upper fuselage access
- 110 Electrical power system
- 111 Fuelage pylon adaptor
- 112 Fuelage pylon adaptor
- 113 AIM-54 Sidewinder air-to-air missile (4)
- 114 In-flight refuelling probe
- 115 Refuelling probe housing door
- 116 Ammunition tanks (125-126)
- 117 Avionics system inertial platform
- 118 Ammunition feed chutes
- 119 Ammunition feed chutes
- 120 MK12 20mm cannon
- 121 Spent cartridge case/link collector chutes
- 122 Ammunition access panel
- 123 Nosewheel doors
- 124 Nosewheel doors
- 125 Nosewheel doors
- 126 Nose undercarriage leg
- 127 Nose undercarriage leg
- 128 Nose undercarriage leg
- 129 Nose undercarriage leg
- 130 Nose undercarriage leg
- 131 Ejection seat rails
- 132 Ejection seat rails
- 133 Ejection seat rails
- 134 Ejection seat rails
- 135 Ejection seat rails
- 136 Ejection seat rails
- 137 Pilot's starboard side console panel
- 138 Pilot's starboard side console panel
- 139 Pilot's starboard side console panel
- 140 Pilot's starboard side console panel
- 141 Pilot's starboard side console panel
- 142 Pilot's starboard side console panel
- 143 Pilot's starboard side console panel
- 144 Pilot's starboard side console panel
- 145 Pilot's starboard side console panel
- 146 Pilot's starboard side console panel
- 147 Pilot's starboard side console panel
- 148 Pilot's starboard side console panel
- 149 Pilot's starboard side console panel
- 150 Pilot's starboard side console panel
- 151 Pilot's starboard side console panel
- 152 Pilot's starboard side console panel
- 153 Pilot's starboard side console panel
- 154 Pilot's starboard side console panel
- 155 Pilot's starboard side console panel



GENERAL ARRANGEMENT



Apêndice D: Expoente de Lyapunov.

O expoente de Lyapunov, λ , é um parâmetro de caracterização dinâmica de atratores. Ele mede a taxa de divergência de órbitas vizinhas (e consecutivas) dentro do atrator [GANDUR, 2001] e, assim, quantifica a dependência, ou sensibilidade do sistema às condições iniciais.

Analogamente, pode-se dizer que o expoente de Lyapunov fornece uma indicação de quão rápido perde-se informação movendo-se ao longo do atrator. Nos sistemas caóticos, associados a um atrator estranho, a dependência das condições iniciais implica na existência de pelo menos um expoente de Lyapunov positivo. Em séries temporais experimentais, o ponto de partida para o cálculo dos expoentes é o atrator reconstruído, em uma dimensão de imersão adequada (para maiores detalhes ver Nelson F. Ferrara & C. P. C. Prado. *Caos: Uma introdução*, Edgard Blücher Ltda., São Paulo, 1994) [GANDUR, 2001]. Uma vez reconstruído o atrator, define-se uma trajetória fiducial a partir da sequência de vetores reconstruídos.

A seguir, deve-se analisar o que ocorre com pontos vizinhos desta trajetória. Com as informações sobre as taxas de divergência destes pontos, podem-se obter então os expoentes de Lyapunov. Existem vários métodos para o cálculo dos expoentes, os quais diferem na maneira de analisar a dinâmica ao longo da trajetória fiducial. Os métodos mais conhecidos são os métodos de Wolf, de Eckmann e Ruelle e o método de Brown e Bryant [GANDUR, 2001].

Dadas duas trajetórias $\xi_0(t)$ e $\xi_1(t)$, pertencentes a algum espaço de fases n-dimensional, a diferença entre essas trajetórias a cada tempo é dada por $\delta_0(t)$.

Podem-se considerar tanto as trajetórias e a diferença entre elas, como evoluções temporais dos valores iniciais. Desse modo, se a evolução temporal de $\delta_0(t=0)$ para $\delta_0(t)$ é de caráter exponencial, então se pode escrever:

$$\delta_0(t) = \delta_0(0)e^{\lambda t} \quad (1.1)$$

assim,

$$\lambda = \left(\frac{1}{t} \right) \ln \left(\frac{\|\delta_0(t)\|}{\|\delta_0(0)\|} \right) \quad (1.2)$$

onde λ é uma aproximação do expoente de Lyapunov, que é o maior expoente possível para o afastamento das trajetórias.

Para a obtenção do verdadeiro expoente de Lyapunov, devemos considerar a diferença entre as trajetórias cuja norma ao quadrado é

$$\|\delta_0(t)\|^2 = \delta_0(t)^\dagger \delta_0(t) \quad (1.3)$$

porém, como $\delta_0(t)$ é uma evolução temporal de $\delta_0(t=0)$, podemos escrever

$$\delta_0(t) = A \delta_0(0) \quad (1.4)$$

onde A é o operador de evolução temporal, desse modo, substituindo (1.4) na equação (1.3) teremos

$$\|\delta_0(t)\|^2 = (A \delta_0(0))^\dagger (A \delta_0(0)) \quad (1.5)$$

e assim,

$$\|\delta_0(t)\|^2 = \delta_0(0)^\dagger A^\dagger A \delta_0(0) \quad (1.6)$$

O novo operador $A^\dagger A$, é hermitiano [Oiwa, 1994], portanto possui autovalores reais e auto funções ortogonais entre si, formando um conjunto de funções, que serve de base para o espaço que as contém.

Dessa forma, é possível escrever $\delta_0(0)$ com base nas autofunções de $A^\dagger A$, denotadas por u_i , com autovalores α_i^2 .

$$\delta_0(0) = \sum_i c_i u_i \quad (1.7)$$

onde c_i é a probabilidade de se encontrar o espaçamento u_i entre as trajetórias no tempo $t = 0$.

Aplicando o operador A em $\delta_0(0)$ obteremos

$$A\delta_0(0) = \sum_i c_i A u_i = \sum_i c_i \alpha_i u_i \quad (1.8)$$

e calculando a norma ao quadrado

$$(A\delta_0(0))^\dagger (A\delta_0(0)) = \left(\sum_i c_i \alpha_i u_i \right)^\dagger \left(\sum_j c_j \alpha_j u_j \right) = \sum_i c_i^2 \alpha_i^2 u_i^2 \quad (1.9)$$

pois, da hermiticidade de $A^\dagger A$ conclui-se que as auto funções da A são ortogonais entre si [OIWA, 1994].

Calculando o quociente

$$\left(\frac{\|\delta_0(t)\|^2}{\|\delta_0(0)\|^2} \right) = \left(\frac{\sum_i |c_i|^2 \alpha_i^2}{\sum_i |c_i|^2} \right) \quad (1.10)$$

e escolhendo $\delta_0(t)$ paralelo a alguma das auto funções de A , temos

$$\left(\frac{\|\delta_0(t)\|^2}{\|\delta_0(0)\|^2} \right) = \left(\frac{|c_i|^2 \alpha_i^2}{|c_i|^2} \right) = \alpha_i^2 \quad (1.11)$$

e,

$$\|\delta_0(t)\| = \alpha_i \|\delta_0(0)\| \quad (1.12)$$

Se considerarmos que o afastamento entre as trajetórias evolui exponencialmente com o tempo, podemos escrever

$$\|\delta_0(t)\| = e^{\lambda_i t} \|\delta_0(0)\| \quad (1.13)$$

o que implica

$$\lambda_i = \left(\frac{1}{t} \right) \ln \left(\frac{\|\delta_0(t)\|}{\|\delta_0(0)\|} \right) \quad (1.14)$$

Porém, ainda é necessário mais um passo para a obtenção do expoente de Lyapunov, é preciso aplicar o limite assintótico previsto pela teoria ergódica de Oselec,

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t} \right) \ln \left(\frac{\|\delta_0(t)\|}{\|\delta_0(0)\|} \right) \quad (1.15)$$

onde, λ_i é o expoente de Lyapunov.

Agora, observamos o expoente. Assim, se esse número for negativo então as trajetórias colapsam com o tempo, mostrando um regime integrável; se o expoente for zero então as trajetórias não se afastam e nem colapsam, o que indica também um sistema integrável; no caso do expoente ser positivo finito então as trajetórias se afastam exponencialmente com o tempo,

explicitando um quadro caótico no sistema; e no caso do expoente ser divergente positivamente então o sistema é puramente estocástico.

Uma descrição mais detalhada da obtenção do expoente de Lyapunov pelo método de Wolf pode ser encontrada no apêndice 7.3 da tese de doutorado de Marcelo C. Gandur [Gandur, 2001].

A seguir, calculam-se os expoentes de lyapunov nos pontos de bifurcação das tabelas 4.3 e 4.4 do sistema 4.4 dado no capítulo 4 a fim de se verificar a possível existência de caos no sistema.

Para efetuar os cálculos utiliza-se o pacote do Software MatLab® chamado MATDS (V. Apêndice I)

Assim, para valores de massa $m=m_0$ e condições iniciais do ponto hopf1 da tabela 4.3:

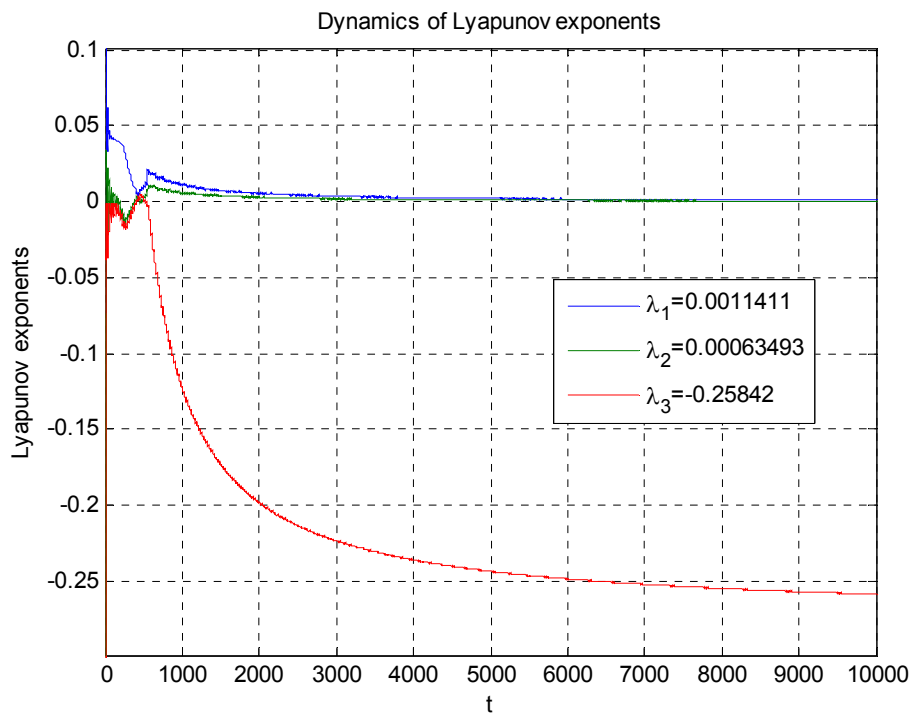


Figura D.1: Resultado do cálculo do expoente de Lyapunov:: t=10000.0000 L1=0.001141; L2=0.000635; L3=-0.258415;

Para Massa $m=m_0$ e condições iniciais do ponto hopf2 da tabela 3.3:

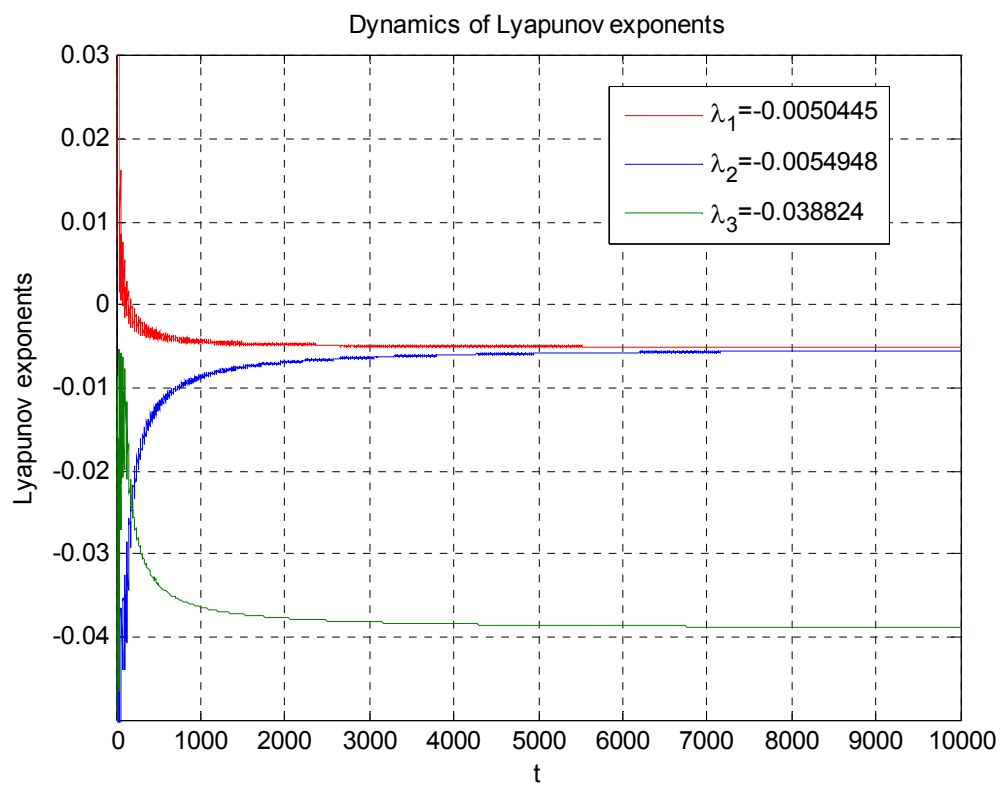


Figura D.2: Resultado do cálculo do expoente de Lyapunov: $t=10000.0000$ $L_1=-0.005045$; $L_2=-0.005495$; $L_3=-0.038824$;

Para Massa $m=m_0$ e condições iniciais do ponto Sela-nó 1 da tabela 4.3:

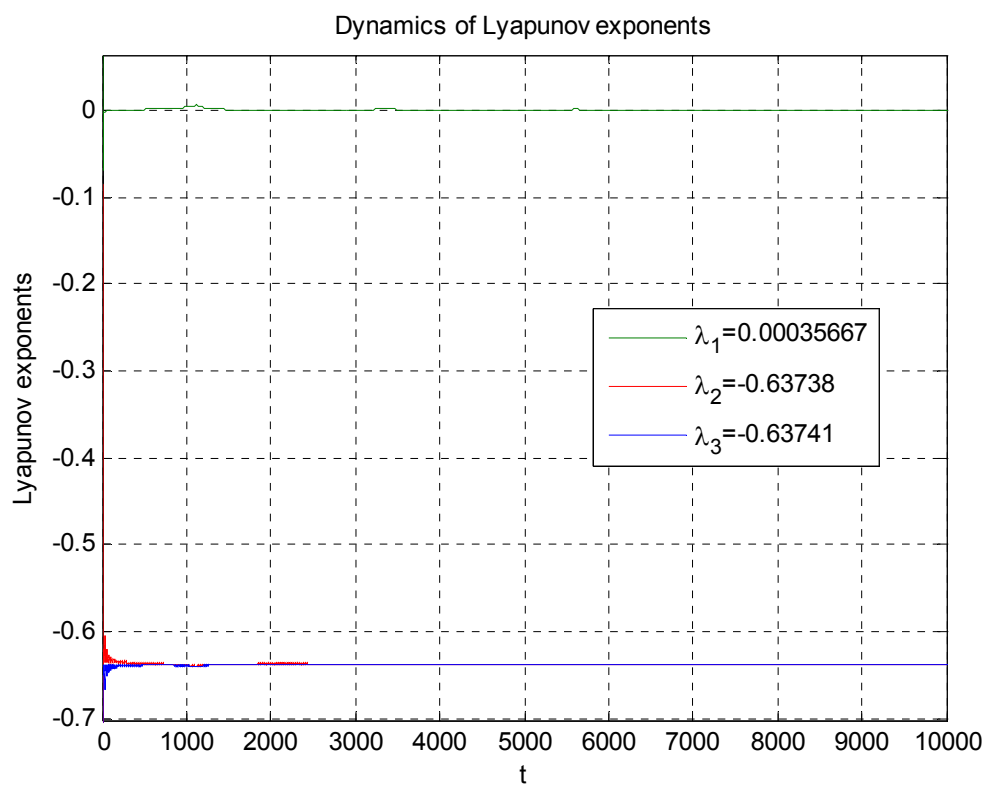


Figura D.3: Resultado do cálculo do expoente de Lyapunov: $t=10000.0000$ $L_1=0.000357$; $L_2=-0.637377$; $L_3=-0.637405$;

Para Massa $m=m_0$ e condições iniciais do ponto Sela-nó 2 da tabela 4.3:

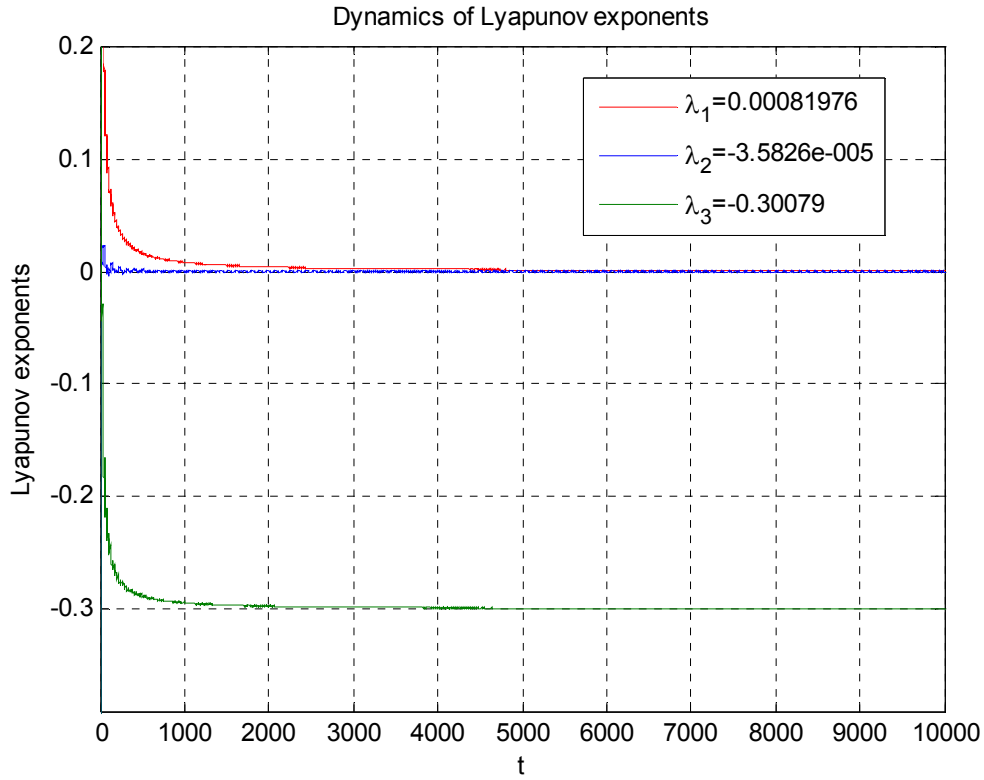


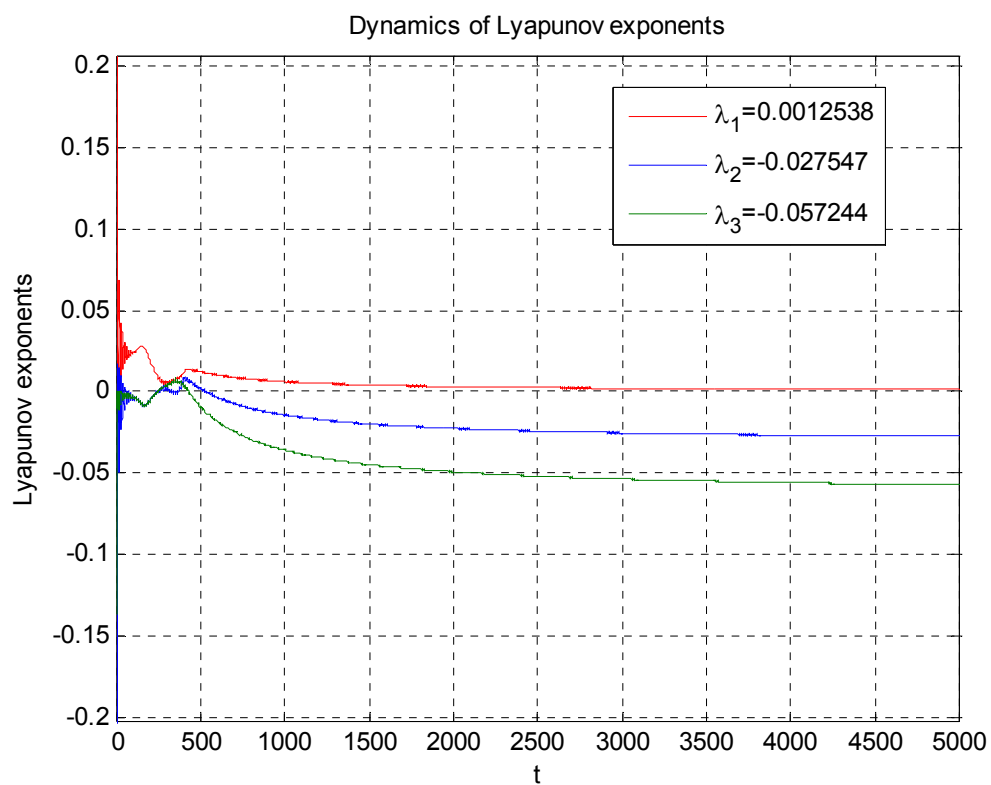
Figura D.4: Resultado do cálculo do expoente de Lyapunov: $t=10000.0000$ $L_1=0.000820$; $L_2=-0.000036$; $L_3=-0.300787$;

Nas figuras D.1 – D.4 acima somos mostrados a evolução dos LEs para os pontos “hopf1”, “hopf2”, “Sela-nó 1” e “Sela-nó 2” da tabela 3 e verificou-se que não ocorreram valores positivos dos expoentes, o que não indicou a presença de caos no sistema para esses valores iniciais.

A seguir calculam-se a evolução dos LEs para os valores iniciais dados pela tabela 4 onde a massa da aeronave foi aumentada para $5*m_0$.

Aumentando a massa para $m=5*m_0$ e condições iniciais para o ponto “HPF-1” da tabela

4.4:



**Figura D.5: Resultado do cálculo do expoente de Lyapunov: $t=5000.0000$ $L1=0.001254$;
 $L2=-0.027547$; $L3=-0.057244$;**

Massa $m=5*m_0$ e condições iniciais para o ponto “HPF-2” da tabela 4.4:

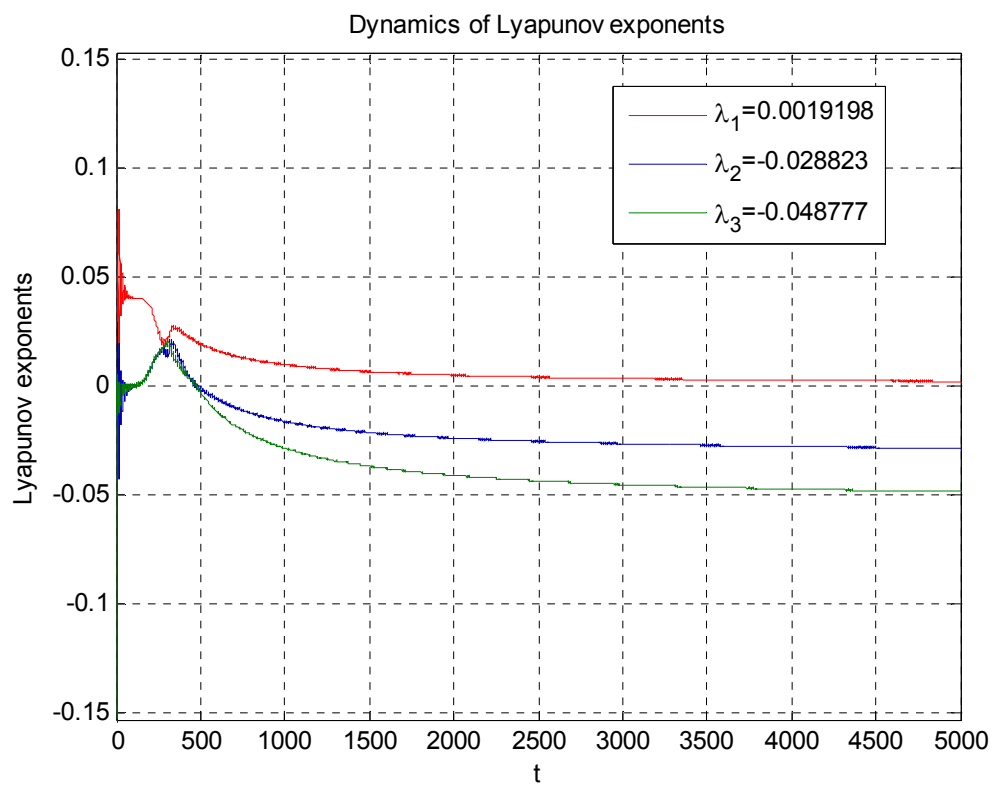


Figura D.6: Resultado do cálculo do expoente de Lyapunov: $t=5000.0000$ $L1=0.001920$; $L2=-0.028823$; $L3=-0.048777$;

Massa $m=5*m_0$ e condições iniciais para o ponto “HPF-3” da tabela 4.4:

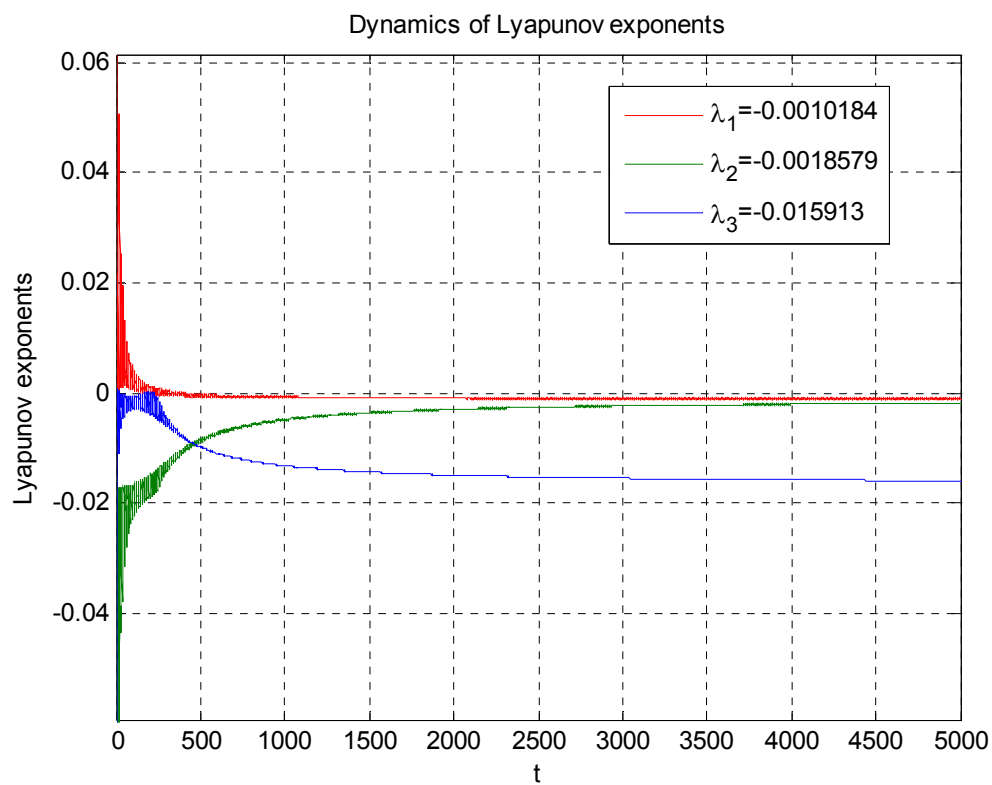


Figura D.7: Resultado do cálculo do expoente de Lyapunov: $t=5000.0000$ $L1=-0.001018$; $L2=-0.001858$; $L3=-0.015913$;

Massa $m=5*m_0$ e condições iniciais para o ponto “HPF-4” da tabela 4.4:

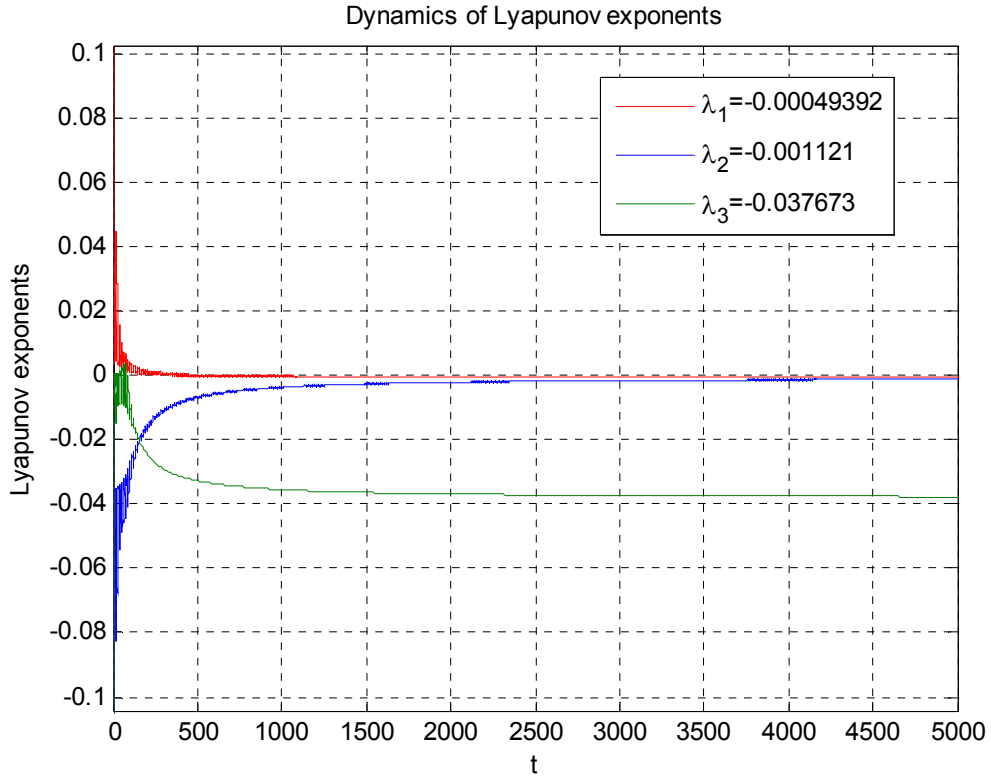


Figura D.8: Resultado do cálculo do expoente de Lyapunov: $t=5000.0000$ $L1=-0.000494$; $L2=-0.001121$; $L3=-0.037673$;

Nas figuras D.5 – D.8 são mostrados a evolução dos LEs para os pontos HPF-1, HPF-2, HPF-3 e HPF-4 da tabela 4 e verificou-se a não ocorrência de LEs positivos o que não indica a presença de caos no sistema para os valores da tabela 4.4.

Apêndice E: Matds

MATDS é um pacote gráfico baseado no software MATLAB® para investigação e estudo interativo de sistemas dinâmicos.

Para se utilizar o matds deve-se abrir o MATLAB e no prompt de commando digitar “MATDS” (2) como ilustrado na figura a seguir. Deve-se notar que é necessário estar no diretório onde o matds foi instalado (2). Ver figura E.1.

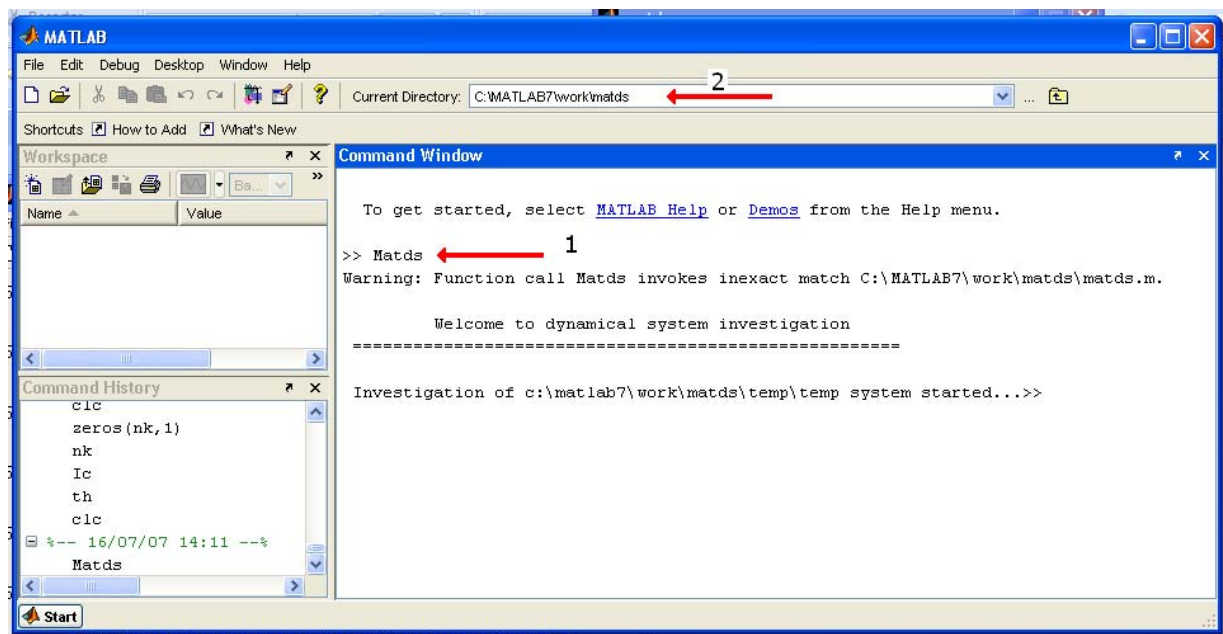


Figura E.1: Prompt de comando do MATLAB

Feito isso o menu do matds será aberto (figura E.2) e o programa estará apto a receber um novo sistema ou abrir um já existente.

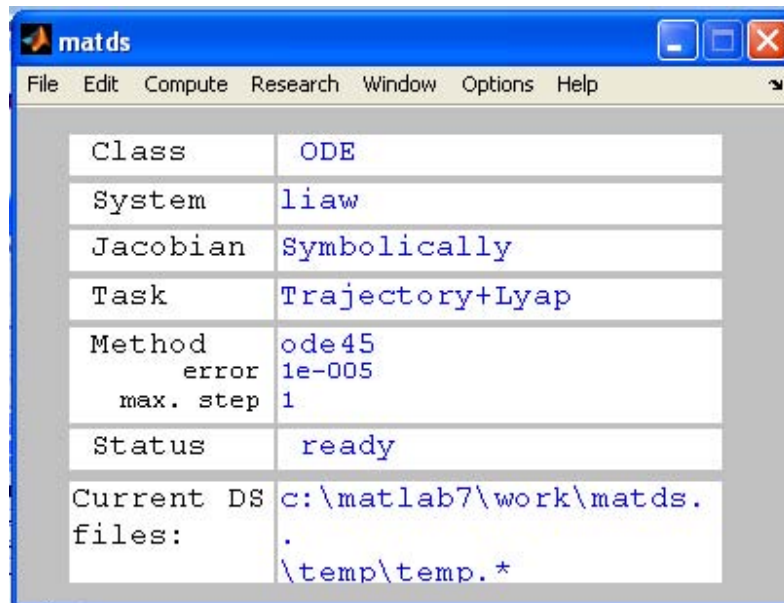


Figura E.2: Menu de comando do MATDS

A seguir apresenta-se algumas funcionalidades desse pacote.

1. Integrações numéricas de sistemas ODE (Ordinary Differential Equations): onde estão disponíveis todos os métodos standard da biblioteca ODE do MATLAB, e ainda integradores de alta precisão como o ODE78 e ODE87.
2. Análise de equilíbrio: onde é possível analisar a estabilidade e equilíbrio para valores fixados de parâmetros. Para cálculos de equilíbrio usa-se o método de Newton.
3. Expoentes de Lyapunov: onde, para se calcular o expoente de Lyapunov de um sistema deve-se clicar no item “Research→Lyapunov” no menu do matds. Feito isto, deve-se especificar o número de expoentes de Lyapunov que se deseja (menor ou igual que a dimensão do sistema) (Wolf, 1985).

Terminado isso, deve-se clicar no item “Compute” no menu do matds. As figuras a seguir exemplificam essas etapas.

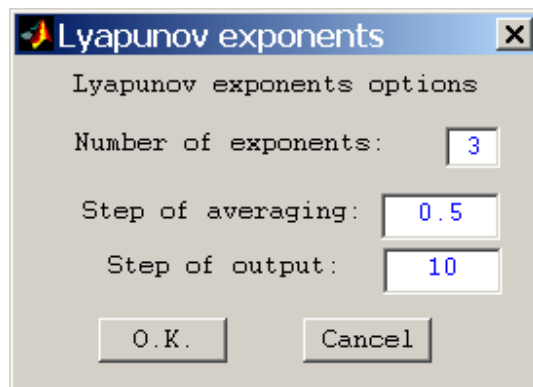


Figura E.3: Menu de opções para o cálculo do Expoente de Lyapunov

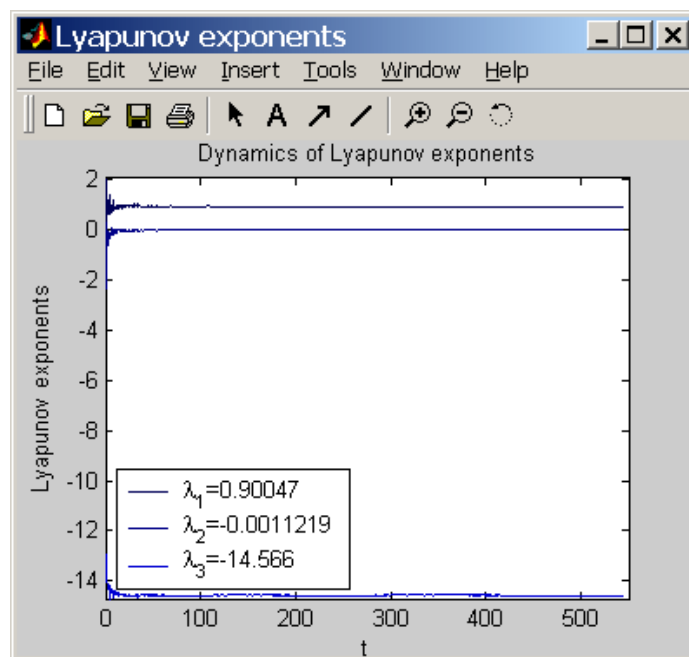


Figura E.4: Expoentes de Lyapunov para o sistema de Lorenz com valores de parâmetros: $R=28$; $b=8/3$; $\sigma=10$

Pode-se, ainda calcular soluções periódicas, campos vetoriais e mapas de Poincarés. Para melhores detalhes ver: <http://kvm.math.rsu.ru/matds/>.

Anexos

Anexo 1 – Súmula Curricular:

RELAÇÃO DE PUBLICAÇÕES:

1. **PEREIRA, D.C.**; BALTHAZAR, J. M.; “*Análise Bifurcacional da Aeronave F-8 em Voo Longitudinal*”. 5th Brazilian Conference on Dynamics, Control and Their Applications, may 23 – 26, 2006 – Guaratinguetá, SP, Brazil, CD-Rom, SBMAC, 2006.
2. **FISCHER; B.**; PEREIRA, D. C.; BALTHAZAR; J. M.; “*Sobre o Método do Gradiente Conjugado na Dinâmica não Linear Longitudinal de Aeronaves*”. Resumo XXIX Encontro Nacional de Física da Matéria Condensada de 09 a 13 de maio de 2006, São Lourenço, Minas Gerais.
3. **PEREIRA, D.C.**; BALTHAZAR, J. M.; “*Sobre a Dinâmica não-linear de uma Aeronave em Voo Longitudinal*”, Simpósio de Fenômenos não lineares e Caóticos em Engenharia no IV Congresso Nacional de Engenharia Mecânica – CONEM – em 22 a 25 de agosto de 2006, Recife, PE, CD-Rom, ABCM, 2006.
4. **PEREIRA, D.C.**; BALTHAZAR, J. M.; CHAVARETTE, F. R.; “*On Stability-Instability Analysis and an Optimal Linear Control to a Nonlinear Longitudinal Flight Dynamics*”, XII International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics – DINAME 2007, Feb. 26 – may, 02, CD-Rom, ABCM, 2007.
5. **PEREIRA, D.C.** BALTHAZAR, J.M.; CHAVARETTE; “*On a Project of Linear and Non Linear Controls for an Aircraft*”. 6º Brazilian Conference on Dynamics, Control and Their Applications – DINCON 2007 –UNESP – Campus de São José do Rio Preto, SP, Brazil, May 21 – 25, CD-Rom, ABCM, 2007.
6. **PEREIRA, D.C.**; BALTHAZAR, J.M.; BRASIL; R.M.L.R.F; “*On Numerical Simulation of the Nonlinear Dynamics of a Jet Plane Flight Characteristics*”; 19º Congresso de Engenharia Mecânica – COBEM 2007, November, 5 – 9, Brasília, Brasil. (Submetido).

7. **PEREIRA**, D.C.; BALTHAZAR, J.M.; CHAVARETTE, F.R.; RAFIKOV, M.; *On Nonlinear Dynamics and a Linear Optimal Control to a Longitudinal Flight Dynamics* – Journal on Computational and Nonlinear Dynamics, ISSN:155/1423/CODEN.JCNDM, American Society of Mechanical Engineering (ASME). (Aceito)
8. **PEREIRA**, D.C.; BALTHAZAR, J.M.; CHAVARETTE, F.R.; A Virtual Wind Tunnel to the Longitudinal Flight Motion of a Nonlinear Aircraft, preprint, 2007, to be submitted