

DESENVOLVIMENTO DE UM MÉTODO PARA  
ANÁLISE DA SOLIDIFICAÇÃO DE METAIS  
EM GEOMETRIAS CILÍNDRICAS

31/80

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

DESENVOLVIMENTO DE UM MÉTODO PARA ANÁLISE  
DA SOLIDIFICAÇÃO DE METAIS EM GEOMETRIAS  
CILÍNDRICAS

*Rezende Gomes dos Santos*

Trabalho apresentado à Comissão de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia de Campinas, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

- CAMPINAS -

1980

## A G R A D E C I M E N T O S

Ao *Prof.* MAURÍCIO PRATES pela orientação, incentivo e amizade e ao *Prof.* AMAURI GARCIA pela co-orientação e sobretudo pela amizade e pelas horas de discussão, que tornaram possível a realização deste trabalho.

Aos colegas ANTONIO LAERTE STRUZIATO, RITA H. BUSO JACON, YOSHIKO HASHIMOTO, MARCOS A. PADULA, LUIZA M. CAMPOS, MARIO W. ALBERTINI e ROBERTO DONADON pela dedicação com que colaboraram na elaboração deste trabalho.

## DESENVOLVIMENTO DE UM MÉTODO PARA ANÁLISE DA SOLIDIFICAÇÃO DE METAIS EM GEOMETRIAS CILÍNDRICAS

### R E S U M O

O principal objetivo deste trabalho foi a realização de um estudo teórico-experimental do processo de solidificação em sistemas metal/molde com geometria cilíndrica, visando o desenvolvimento de um método prático e confiável para a análise de parâmetros relativos à cinética e à distribuição de temperaturas. Inicialmente foi feita uma revisão bibliográfica crítica e extensiva dos principais métodos de análise da transferência de calor em sistemas metal/molde. Em seguida foi projetado e construído um dispositivo simulador, da solidificação radial em moldes cilíndricos refrigerados. Com o uso deste dispositivo foram levantados dados experimentais relativos à cinética e à distribuição de temperaturas durante a solidificação em sistemas metal/molde com geometria cilíndrica. Os resultados obtidos foram analisados comparativamente com as previsões teóricas de um modelo desenvolvido por Garcia e Prates para geometrias planas, de modo a se verificar o distanciamento teórico-experimental em função das alterações introduzidas no processo de solidificação pela curvatura do molde. A partir deste estudo foi desenvolvido um método para análise da solidificação de metais em geometrias cilíndricas sob ponto de vista de cinética e distribuição de temperaturas. Finalmente, para comprovar sua eficiência foram realizadas comparações entre as previsões teóricas obtidas através do método proposto, pela aplicação de técnicas numéricas e analíticas encontradas na literatura, e resultados experimentais obtidos neste trabalho.

DEVELOPMENT OF A METHOD FOR THE ANALYSIS OF SOLIDIFICATION OF METALS IN CYLINDRICAL GEOMETRY

A B S T R A C T

The main objective of this work was to develop a practical and versatile method for the analysis of rates and temperature profiles during solidification in metal/mould systems with cylindrical geometry by using a theoretical-experimental approach. Initially it was made a review of the existing heat transfer methods applied to solidification in metal/mould systems. A special radial water cooled device was then designed and constructed in order to simulate solidification of cylindrical geometries. By using this experimental set-up experiments were carried out in order to obtain solidification rates and temperature data. The results were analysed comparatively with theoretical predictions furnished by a model developed by Garcia and Prates for plane geometry, that permitted to verify the modifications introduced in the solidification process by the mould curvature. The above mentioned analysis permitted to develop method to analyse the solidification of metals (solidification rates and temperature profiles) in cylindrical geometries. Finally, to assess the realibility of the proposed method, it was compared with analytical and numerical methods and with experimental data.

## Í N D I C E

	<u>PÁGINA</u>
CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO .....	1
1.1. IMPORTÂNCIA DA ANÁLISE DA SOLIDIFICAÇÃO NA FUNDIÇÃO E NO LINGOTAMENTO .....	1
1.2. IMPORTÂNCIA DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR NA ANÁLISE DA SOLIDIFICAÇÃO DE METAIS .....	2
1.3. LIMITAÇÕES DA ANÁLISE DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR NA SOLIDIFICAÇÃO DE PEÇAS COM GEOMETRIAS NÃO PLANAS .....	4
1.4. OBJETIVOS DESTE TRABALHO .....	6
 CAPÍTULO 2 - ANÁLISE DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM SISTEMAS METAL/MOLDE .....	 8
2.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS .....	8
2.2. SISTEMAS METAL/MOLDE COM GEOME- TRIA PLANA .....	14
2.2.1. Métodos analíticos exatos .....	14
2.2.2. Métodos analíticos aproximados .....	37
2.2.3. Métodos analógicos .....	51
2.2.4. Métodos numéricos .....	55
2.2.5. Métodos experimentais .....	62
2.3. SISTEMAS METAL/MOLDE COM GEOME- TRIA CILÍNDRICA .....	66
2.3.1. Métodos analíticos aproximados .....	66
2.3.2. Métodos numéricos .....	83
2.3.3. Métodos experimentais .....	87
2.4. COMENTÁRIOS FINAIS SOBRE A ANÁLISE DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM SISTEMAS METAL/MOLDE .....	93

CAPÍTULO 3 - MATERIAIS E MÉTODOS .....	95
3.1. METAIS UTILIZADOS .....	95
3.2. TIPOS DE CONTATO TÉRMICO NA INTER- FACE METAL/MOLDE .....	95
3.3. DISPOSITIVO DE SOLIDIFICAÇÃO RADIAL REFRIGERADO A ÁGUA .....	98
3.4. OPERAÇÃO DO DISPOSITIVO .....	113
3.5. PRECISÃO DOS RESULTADOS EXPERIMEN- TAIS .....	116
3.6. TÉCNICAS METALOGRAFICAS .....	119
 CAPÍTULO 4 - RESULTADOS EXPERIMENTAIS .....	 122
4.1. MACROGRAFIAS E MICROGRAFIAS .....	122
4.2. TEMPOS DE SOLIDIFICAÇÃO E DISTRIBUI- ÇÕES DE TEMPERATURAS .....	122
 CAPÍTULO 5 - DISCUSSÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS E PROPO- SIÇÃO DE UM MÉTODO PARA ANÁLISE DA SOLIDI FICAÇÃO DE GEOMETRIAS CILÍNDRICAS EM MOL- DES REFRIGERADOS .....	   136
5.1. ANÁLISE DE RESULTADOS EXPERIMENTAIS RELATIVOS À CINÉTICA DE SOLIDIFICA- ÇÃO .....	136
5.2. PROPOSIÇÃO DE UM MÉTODO PARA ANÁLISE DA CINÉTICA DE SOLIDIFICAÇÃO .....	142
5.2.1. Tempo de solidificação .....	142
5.2.2. Comparação do método proposto com métodos numéricos e analí- ticos .....	147
5.2.3. Velocidade de solidificação ...	158
5.3. ANÁLISE DOS RESULTADOS RELATIVOS À DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURAS .....	165
5.4. PROPOSIÇÃO DE UM MÉTODO PARA ANÁLISE DO PERFIL TÉRMICO NO SÓLIDO .....	167

CAPÍTULO 6 - CONCLUSÕES .....	179
LINHAS DE PESQUISA DECORRENTES DESTE TRABALHO .....	184
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	185
APÊNDICES .....	198
APÊNDICE 1 - SIMBOLOGIA UTILIZADA .....	198
APÊNDICE 2 - DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES DA FUNÇÃO ERRO E DA FUNÇÃO ERRO COMPLEMENTAR .....	202
APÊNDICE 3 - TABELAS DE MÉDIAS E DESVIOS PADRÃO DOS RESULTADOS DE CINÉTICA .....	203

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

#### 1.1. IMPORTÂNCIA DA ANÁLISE DA SOLIDIFICAÇÃO NA FUNDIÇÃO E NO LINGOTAMENTO

Os processos de fabricação de peças metálicas utilizando a solidificação são conhecidos e aplicados de forma empírica há milhares de anos. Apesar de, cronologicamente, se dividir o desenvolvimento pré-histórico da humanidade em idade da pedra até 3.000 A.C., idade do bronze de 3.000 a 1.200 A.C. e idade do ferro de 1.200 A.C. em diante, já foram descobertos em Nahal Mishmar (Israel) cerca de 500 peças fundidas de bronze que datam de cerca de 6.000 anos atrás!<sup>1,2</sup> Além dessas muitas outras peças, fundidas há milênios, foram encontradas, algumas das quais apresentando qualidades comparáveis às obtidas por processos recentes de fundição. Entre estas podem ser citadas as ferramentas e peças ornamentais (em bronze e ouro) fundidas há aproximadamente 4.000 anos pelos egípcios e assírios, moedas e obras de arte chinesas de cerca de 3.000 anos e as estátuas gregas de grandes dimensões (500 A.C.).<sup>2,3,4,5</sup>

Como em geral acontece com processos muito antigos e tradicionais a fundição se desenvolveu tecnologicamente por tentativa-e-erro com o decorrer dos anos, sem que houvessem grandes preocupações com uma análise mais científica do processo de solidificação. No entanto, a crescente utilização de processos que envolvem a solidificação na produção de peças, desde as mais simples e comuns até àquelas que exigem alto grau de precisão, não permite mais que os processos de fabricação sejam estabelecidos a partir dos métodos empíricos de tentativa-e-erro.<sup>1</sup> Assim sendo, há cerca de quatro décadas começaram a surgir os primeiros estudos sistemáticos de análise do fenômeno da solidificação levando em conta os parâmetros envolvidos e sua influência na qualidade das peças fundidas. A frequência destes trabalhos tem aumentado sensivelmente nos últimos anos, o que é compreensível considerando que praticamente todas as peças metálicas (exceto a feita àquelas obtidas por sinterização a partir de metal pulverizado extraído diretamente dos minérios) passam por um processo de fusão e solidificação em algu-

ma etapa de sua fabricação. Isto pode ocorrer tanto diretamente, na fundição de peças utilizando moldes com o formato desejado, quanto indiretamente na obtenção de lingotes para posterior fabricação de peças através de algum processo de conformação (usinagem, forjamento, etc).<sup>6</sup> A ingerência dos processos de solidificação na produção de peças metálicas pode ser visualizada no fluxograma da Fig. 1.1.<sup>7</sup> Além dos processos metalúrgicos tradicionais, como é o caso da fundição, a fusão e solidificação é essencial na tecnologia eletrônica principalmente na obtenção de monocristais com alta perfeição e na purificação de metais e semi-condutores por fusão zonal.<sup>8,9</sup>

O principal objetivo das análises do fenômeno da solidificação é o conhecimento dos fatores que atuam efetivamente na transformação líquido-sólido, de modo a se estabelecer um maior controle sobre a estrutura e, conseqüentemente, sobre os defeitos e propriedades das peças obtidas. Atualmente já se dispõe de algumas publicações específicas sobre o assunto, que sintetizam os principais trabalhos e resultados obtidos.<sup>7,9,10,11,12,13,14,15,16</sup> De uma forma resumida pode se dizer que, historicamente a primeira constatação de características de metais solidificados foi a observação da estrutura dendrítica por Tschernoff em 1868. No entanto a correlação da microestrutura com parâmetros do processo de solidificação tais como velocidade de solidificação e gradientes de temperatura, só começou a ser estudada na década de 50 por Chalmers e Winegard e só mais tarde Flemings abordou este assunto sob o ponto de vista da transferência de calor analisando a influência do contato térmico na interface metal/molde.

## 1.2. IMPORTÂNCIA DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR NA ANÁLISE DA SOLIDIFICAÇÃO DE METAIS

A solidificação de metais pode ser definida como um processo de extração de calor em regime transiente com mudança de fase, no qual uma certa quantidade de energia térmica deve ser transferida para o meio ambiente para possibilitar a nucleação e o crescimento da fase sólida. A extração de calor vai depender, basicamente, das propriedades térmicas do metal, das características do molde (material, espessura de parede e geometria), das condições

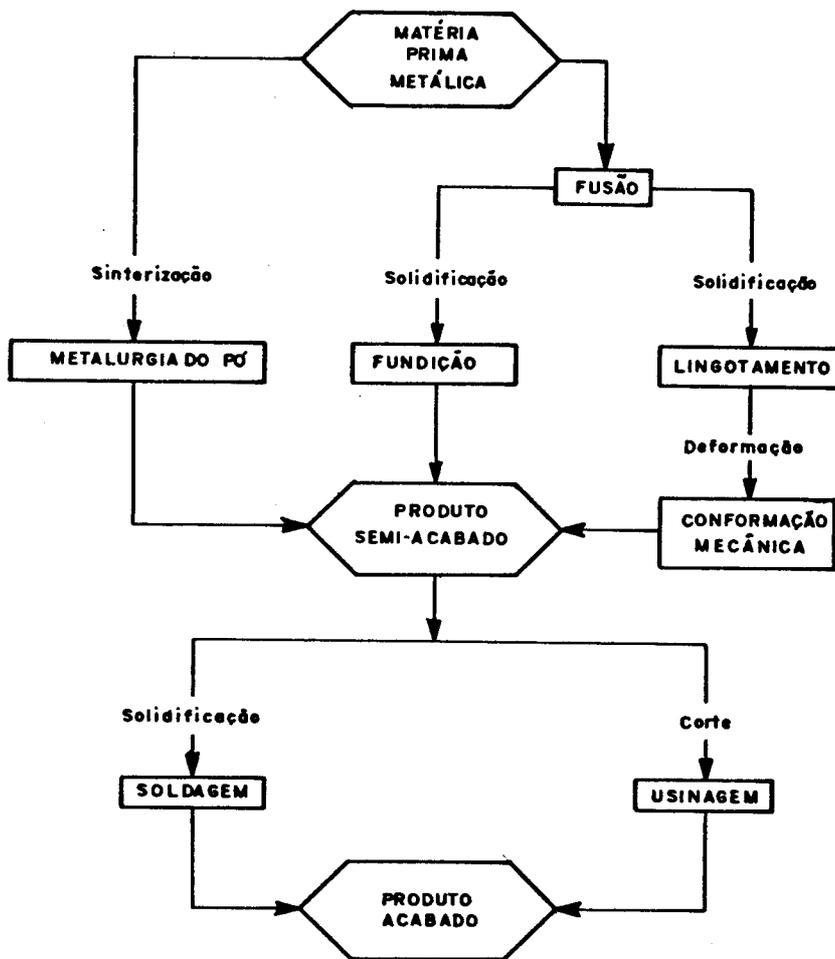


Fig. 1.1 - Ingerência dos processos de solidificação na fabricação de peças metálicas.

da interface metal/molde (contato térmico) e das características do meio que vai absorver calor (água, ar, etc).<sup>17,18,19,20</sup>

Do ponto de vista da fundição de metais, os parâmetros mais importantes afetados pela transferência de calor durante a solidificação são, a velocidade (e conseqüentemente o tempo) de solidificação e os perfis térmicos no metal e no molde, devido à influência que os mesmos exercem na redistribuição de soluto alterando a morfologia da interface sólido/líquido, o que determina a estrutura e a qualidade das peças obtidas.<sup>21,22,23,24,25</sup> Além disso é importante, nos processos tradicionais de fundição, o conhecimento do tempo total de solidificação, para se iniciar a desmoldagem das peças e, nos processos mais recentes de lingotamento contínuo, o conhecimento dos tempos parciais de solidificação, para se controlar a espessura solidificada em cada estágio do processo.<sup>7,26</sup>

No fluxograma da Fig. 1.2 é apresentada, de forma esquemática a seqüência de eventos que caracterizam o processo de solidificação.<sup>7</sup>

### 1.3. LIMITAÇÕES DA ANÁLISE DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR NA SOLIDIFICAÇÃO DE PEÇAS COM GEOMETRIA NÃO PLANA

Apesar da importância do estudo da transferência de calor na solidificação, objetivando a determinação dos parâmetros já citados, o fato do processo ocorrer em regime transiente impõe complexidades matemáticas que dificultam a obtenção de soluções analíticas exatas totalmente gerais.<sup>13</sup> As dificuldades são tanto maiores quanto mais complexa a geometria da peça fundida. Assim sendo a geometria mais estudada, tanto do ponto de vista experimental como analítico, tem sido a geometria plana, para a qual já foram obtidas algumas soluções interessantes, que serão analisadas no próximo capítulo. Mas para outras geometrias muito pouco tem sido feito. Mesmo para a geometria cilíndrica, que é a mais simples depois da plana, as poucas soluções desenvolvidas são quase que totalmente teóricas (baseadas em aproximações matemáticas para a solução das equações diferenciais que descrevem o fenômeno) ou numéricas (solução das equações por diferenças finitas). Os trabalhos experimentais têm visado mais a medida de tempos totais de solidificação, não realizando, em geral, a determinação da cinética de

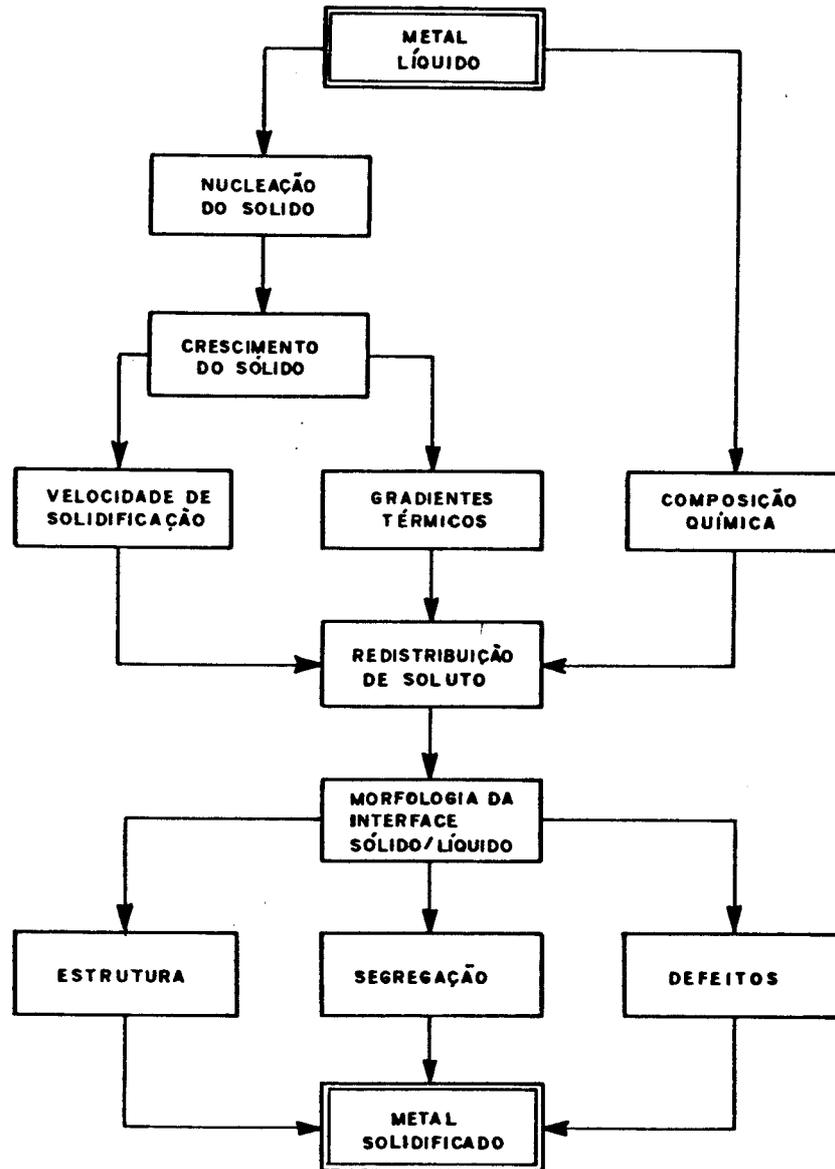


Fig. 1.2 - Sequência de eventos que caracterizam o processo de solidificação.

solidificação, como é feito no caso da geometria plana com o uso de um dispositivo de solidificação unidirecional.<sup>27</sup>

Como a geometria cilíndrica é bastante utilizada na fundição de metais (no lingotamento, por exemplo) é de grande interesse o desenvolvimento de um dispositivo que permita a medida experimental dos parâmetros envolvidos na solidificação com o objetivo de desenvolver e analisar modelos que possam ser aplicados a casos práticos e verificar a validade de modelos teóricos já desenvolvidos.

#### 1.4. OBJETIVOS DESTA TRABALHO

A análise teórica e experimental da solidificação de metais em moldes cilíndricos é bastante complexa devido principalmente, ao fluxo de calor radial divergente que provoca uma frente de solidificação circular que converge para um ponto central, o que dificulta o acompanhamento experimental do processo de forma versátil. Assim sendo, neste trabalho procurou-se desenvolver um dispositivo simulador deste processo, que permitisse o levantamento de dados experimentais durante a solidificação, e analisar os resultados obtidos com o mesmo comparativamente com as previsões teóricas de um modelo desenvolvido por Garcia e Prates<sup>28</sup> para geometrias planas, de modo a se verificar o distanciamento teórico-experimental em função das alterações introduzidas no processo de solidificação, pela curvatura do molde. Para tanto os objetivos do presente trabalho foram divididos em:

- (1) Projeto e construção de um dispositivo para simular a solidificação radial de metais, utilizando um molde refrigerado a água com formato conveniente para representar a geometria cilíndrica e, ao mesmo tempo, permitir a medida da cinética de solidificação e dos perfis de temperatura no metal.

- (2) Determinação experimental, da cinética e das distribuições de temperatura durante o processo de solidificação para o chumbo, o alumínio e o estanho, solidificados em moldes cilíndricos refrigerados, para duas condições de contato térmico na interface metal/molde (superfície interna do molde polida ou recoberta com pintura isolante).
- (3) Comparação dos resultados experimentais obtidos para a geometria cilíndrica com a previsão teórica para a geometria plana obtida através do modelo de Garcia e Prates.<sup>28</sup> Baseado neste estudo comparativo desenvolver um método para análise da solidificação de metais em geometrias cilíndricas, que permita a determinação da cinética e da distribuição de temperaturas.
- (4) Comprovação experimental do método proposto sob o ponto de vista da cinética e da distribuição de temperaturas.
- (5) Comparação do método proposto com outros métodos analíticos e numéricos divulgados na literatura especializada.

## CAPÍTULO 2

### ANÁLISE DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM SISTEMAS METAL/MOLDE

#### 2.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

A solidificação é um processo segundo o qual um material sofre uma transformação da fase líquida para a fase sólida através da emissão de calor em regime não estacionário.<sup>29,30</sup> Para que tal transformação ocorra devem ser satisfeitas as seguintes condições:

- (a) O material deve atingir o estado termodinâmico necessário para a mudança de fase, ou seja, deve ser levado à temperatura de solidificação.
- (b) O calor latente de fusão deve ser removido através de algum dos mecanismos de transferência de calor (condução, convecção e radiação) ou de combinações dos mesmos.

Do ponto de vista metalúrgico o estudo da solidificação é particularmente importante no processo de fabricação de peças metálicas por fundição. Este processo consiste, basicamente, no vazamento do metal, no estado líquido, em um molde que lhe confere uma forma e através do qual é extraído o calor que permitirá a solidificação.

Considerando um caso bastante geral de um metal líquido solidificando em um molde com paredes de espessuras que possam ser consideradas finitas do ponto de vista da transferência de calor, ou seja, aquele em que a superfície externa sofre um aumento de temperatura durante o processo de solidificação, imerso em um meio com temperatura constante, são os seguintes os mecanismos envolvidos na extração de calor.<sup>31,32</sup>

- (a) No caso do metal líquido apresentar algum grau de superaquecimento (ter sido vazado a uma temperatura acima da sua temperatura de fusão), ocorrerão trocas de calor por condução e convecção na fase líquida.

- (b) A partir do momento em que inicia o processo de solidificação passa a ocorrer a transferência de calor por condução na camada de metal solidificada.
- (c) Devido ao contato térmico imperfeito na interface metal/molde, provocado por imperfeições na superfície interna do molde e/ou contração do metal e dilatação do molde durante o processo haverá a formação de uma camada de ar, na qual o calor é transferido por radiação, convecção e condução (transferência newtoniana).
- (d) Nas paredes do molde o calor é transferido da superfície interna para a superfície externa por condução.
- (e) Finalmente o calor que chega à superfície externa do molde é absorvido pelo meio ambiente por radiação, convecção e condução.

A força motriz que torna possível a extração de calor do metal, através dos mecanismos citados, é o gradiente de temperaturas entre o meio ambiente e o metal que se solidifica.

Na Fig. 2.1 são apresentadas, de forma esquemática, as diferentes fases do processo de solidificação em um sistema metal/molde.

A atuação simultânea dos vários mecanismos de transferência de calor e certas características do processo tornam o problema complexo e de difícil solução. Entre estas as principais são:

- (a) A interface sólido/líquido se desloca durante o processo com velocidade variável com o tempo.
- (b) No caso de vazamento com superaquecimento, a temperatura do metal líquido varia durante o processo até que toda a massa líquida atinja a temperatura de fusão.
- (c) Na interface metal/molde devido ao contato térmico imperfeito, a temperatura do metal solidificado é diferente da temperatura do molde e ambas variam com o tempo.

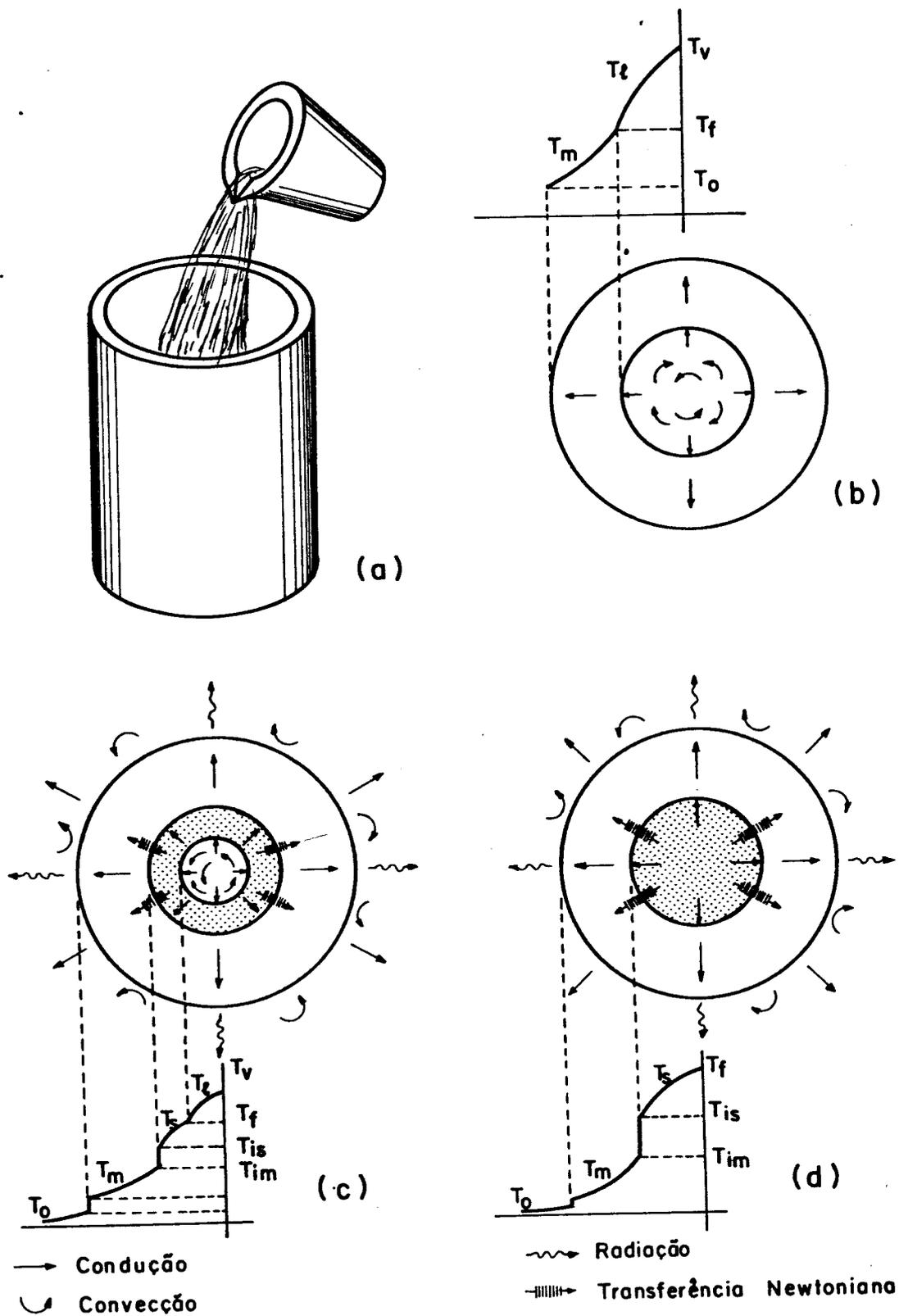


Fig. 2.1 - Representação esquemática das diferentes fases de solidificação em um sistema metal/molde: (a) vazamento ( $T_v > T_f$ ), (b) metal líquido no molde, (c) início da solidificação, (d) final da solidificação.

- (d) Devido às variações das temperaturas do molde e do metal na interface metal/molde há uma variação do fluxo de calor nesta interface e a transferência de calor se dá em regime transiente.
- (e) Além da temperatura da superfície interna, a temperatura da superfície externa do molde também varia com o tempo e a condução de calor do mesmo, bem como a transferência do calor para o meio ambiente se dão em regime transiente.
- (f) Como as propriedades térmicas do metal e do molde dependem da temperatura, elas variam durante o processo.

As transferências de calor em regime transiente e o deslocamento da interface sólido/líquido com velocidade variável, fazem com que as equações diferenciais, envolvidas na análise do problema, apresentem condições de contorno não lineares, tornando complexa a solução exata das mesmas. Existem, no entanto, certos casos que permitem aproximações razoáveis, tornando possível a obtenção de soluções particulares úteis na solução de alguns problemas encontrados na prática. Entre estes podem ser citados:

- (a) Metal vazado sem superaquecimento, quando não ocorrerão transferências de calor no metal líquido devido a inexistência de gradientes térmicos.
- (b) Contato térmico perfeito entre metal e molde permitindo que toda a transferência de calor entre o metal e o molde se dê apenas por condução.
- (c) Solidificação em moldes refrigerados, nos quais a temperatura pode ser considerada constante durante todo o processo.
- (d) Solidificação em moldes de materiais que apresentam baixa difusividade de calor. Nestes casos pode-se admitir que a camada de metal solidificado se sature termicamente, apresentando uma temperatura próxima da temperatura de fusão.

- (e) Solidificação em moldes com paredes que possam ser consideradas semi-infinitas, ou seja, quando a temperatura externa dos mesmos não sofre variações durante o processo, não havendo portanto, transferência de calor para o meio ambiente.
- (f) Propriedades térmicas do metal e do molde que apresentam variação desprezível com a temperatura.

Baseados em aproximações decorrentes destes casos particulares e, eventualmente, introduzindo outras simplificações, de caráter físico ou matemático, foram desenvolvidas algumas soluções para a solidificação de peças com geometria simples. Os métodos de análise usados para o desenvolvimento destas soluções podem ser classificados em: <sup>13, 33, 34</sup>

- Métodos analíticos exatos
- Métodos analíticos aproximados
- Métodos analógicos
- Métodos numéricos
- Métodos experimentais

sendo que em todos eles os objetivos principais são: a determinação do avanço da interface sólido/líquido (frente de solidificação) em função do tempo e da distribuição de temperaturas no sistema metal/molde em função do tempo e do espaço.

Os métodos analíticos exatos tentam obter soluções sem a introdução de aproximações matemáticas, o que se torna bastante difícil, dadas as já citadas dificuldades decorrentes da não linearidade das condições de contorno das equações diferenciais. Assim sendo, são adotadas aproximações de caráter físico e tais soluções, em geral, só podem ser aplicadas para casos bastante particulares e ideais que, normalmente, não representam os casos reais observados na prática de fundição.

Os métodos analíticos aproximados tentam chegar às soluções por meios indiretos, ou seja, introduzindo funções matemáticas auxiliares nas equações diferenciais para permitir a integração analítica ou numérica. Um exemplo destas funções são os polinômios simples introduzidos para descrever a distribuição de temperaturas no metal. Estes métodos permitem que se façam consi-

derações mais gerais, do ponto de vista físico, que nos analíticos exatos e, apesar de aproximados, muitas vezes levam a soluções mais condizentes com a realidade.

Os métodos analógicos são baseados na analogia observada entre as equações que descrevem o fluxo de calor em um sistema térmico e as que descrevem o fluxo de eletricidade em um sistema elétrico. Tal analogia permite que se idealise um circuito elétrico, mais fácil de ser manipulado, capaz de simular a transferência de calor em um sistema metal/molde. Estes métodos são muito específicos e exigem equipamentos muito caros.

Os métodos numéricos consistem em se associar uma malha ao sistema em que se quer analisar a transferência de calor, e aplicar as equações de fluxo de calor em regime permanente entre um ponto de malha e os pontos adjacentes, em pequenos intervalos de tempo. Estes métodos são específicos, exigem, em geral, a utilização de computadores e a programação envolvida é tanto mais complexa quanto maior o grau de precisão desejado.

Os métodos experimentais procuram analisar o problema da solidificação através de dados obtidos experimentalmente, propondo, eventualmente, modelos que podem ser aplicados na solução de casos reais particulares.

Os métodos citados têm sido aplicados exaustivamente na tentativa de se obter soluções para o problema da solidificação. No entanto, os estudos têm se restringido às geometrias mais simples como placas planas, cilindros e esferas. Destas, as placas planas são as que têm sido mais exaustivamente estudadas, devido à maior facilidade de tratamento matemático, o que permitiu, inclusive, a obtenção de soluções analíticas exatas. Já o estudo de cilindros e esferas envolve uma maior complexidade matemática e apesar de terem sido desenvolvidos, recentemente uma série de estudos neste campo, ainda não foram obtidas soluções analíticas exatas para estes casos.

Nos próximos itens serão apresentados os principais estudos desenvolvidos para a análise do problema da solidificação de peças com geometrias planas e cilíndricas.

## 2.2. SISTEMAS METAL/MOLDE COM GEOMETRIA PLANA

Do ponto de vista matemático, a geometria plana é a mais fácil de ser tratada, já que permite que se considere o fluxo de calor unidirecional. Assim sendo, a maior parte dos trabalhos iniciais desenvolvidos no campo da solidificação foram feitos levando em conta esta geometria e existem vários trabalhos de revisão sobre as soluções desenvolvidas.<sup>13, 28, 29, 33, 34, 35</sup>

Para a análise do problema é conveniente se isolar um elemento do sistema metal/molde, capaz de representar o sistema como um todo, e se associar ao mesmo um sistema de referência conforme é mostrado nas Fig. 2.2 e 2.3.

A seguir serão descritas as principais soluções obtidas para a geometria plana, dentro dos métodos citados anteriormente, e analisadas as hipóteses assumidas no seu desenvolvimento e as limitações da aplicação das mesmas a casos reais.

### 2.2.1. Métodos analíticos exatos

No desenvolvimento dos métodos analíticos exatos são consideradas, em geral, as seguintes hipóteses simplificadoras:

- (a) O fluxo de calor é sempre unidirecional.
- (b) A interface sólido/líquido é macroscopicamente plana.
- (c) O molde e o metal se comportam como elementos semi-infinitos, de modo que não haja saturação de calor no molde durante o processo de solidificação.
- (d) O metal entra em contato com o molde instantaneamente, não havendo correntes de convecção forçada (desprezando-se o efeito de vazamento).
- (e) O superaquecimento do metal líquido é dissipado apenas por condução (despreza-se a convecção natural).
- (f) O contato térmico entre o metal e o molde é perfeito, o que significa que não há resistência térmica ao fluxo de calor na interface metal/molde (coeficiente de transmissão de calor infinito).

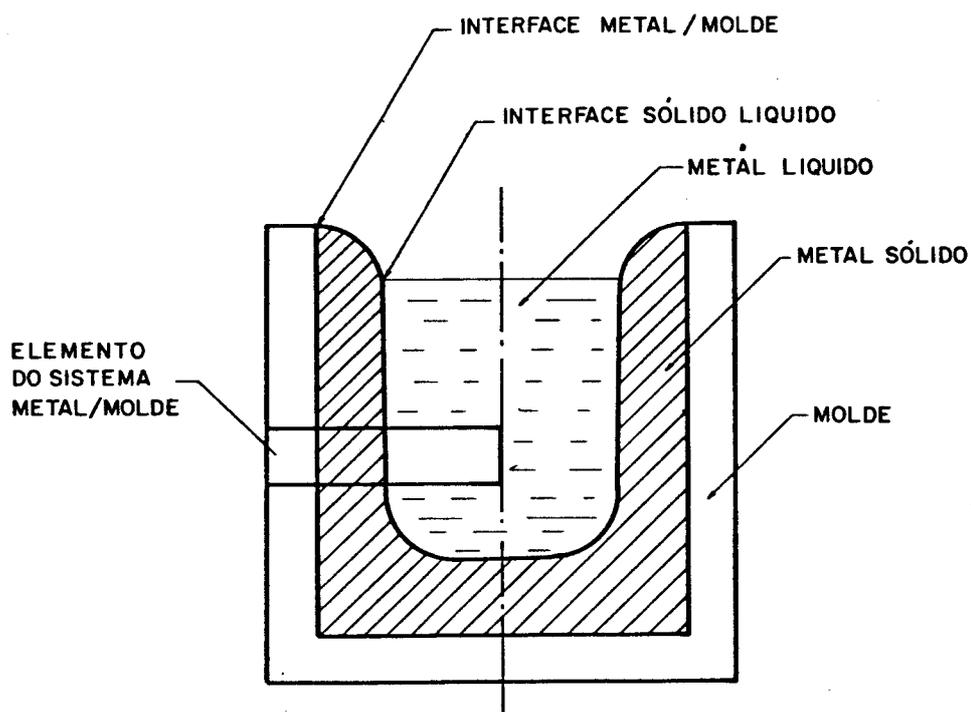


Fig. 2.2 - Representação esquemática do sistema metal/molde em um instante qualquer do processo de solidificação.

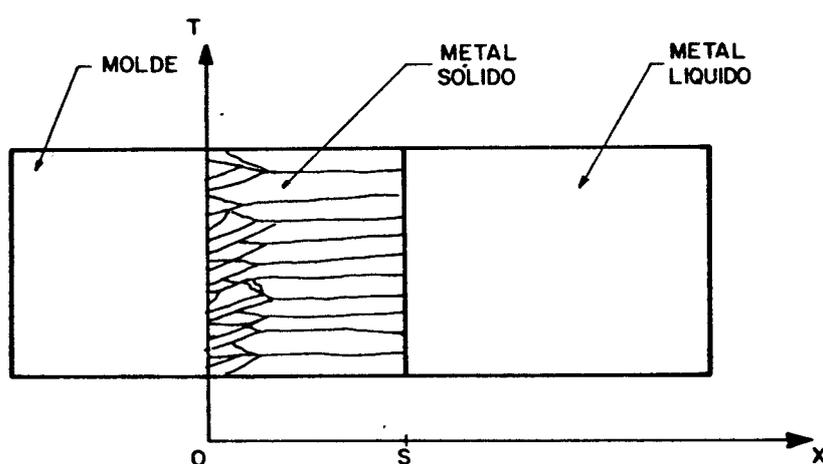


Fig. 2.3 - Elemento retirado do sistema metal/molde.

- (g) As propriedades térmicas do metal e do molde são independentes da temperatura, ou seja, não variam durante o processo de solidificação.

Estas hipóteses permitem que se considere que a extração de calor do metal para promover a solidificação se dá apenas por condução o que facilita o equacionamento do problema.

A simbologia adotada no desenvolvimento das equações é apresentada no Apêndice 1.

Para um elemento infinitesimal do sistema metal/molde, a equação geral da condução de calor no sólido pode ser escrita da seguinte forma: <sup>13, 18, 29, 30, 36</sup>

$$\nabla k \nabla T = \rho \frac{\partial (cT)}{\partial t} \quad (2.1)$$

Considerando o meio isotrópico (condutibilidade térmica independente da posição no espaço), e o calor específico independente da temperatura, a equação 2.1 pode ser simplificada para:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c} \nabla^2 T \quad (2.2)$$

ou, desenvolvendo,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (2.3)$$

como o fluxo de calor é unidirecional, a equação 2.3 pode ser reduzida a

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (2.4)$$

onde,

$$a = \frac{k}{\rho c} \quad (2.5)$$

O fluxo de calor por unidade de área é dado pela equação de Fourier:

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.6)$$

onde

$$q_x = \frac{1}{A} \frac{dQ}{dt} \quad (2.7)$$

De acordo com o sistema de referência adotado, tem-se:

- $x = 0$  - interface metal/molde
- $x < 0$  - molde
- $x > 0$  - metal
- $x = S$  - interface sólido/líquido
- $0 < x < S$  - metal sólido
- $x > S$  - metal líquido

Baseando-se nas hipóteses assumidas anteriormente podem ser estabelecidas as seguintes condições de contorno:

$$\text{para } t = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} x \leq 0 \Rightarrow T_m = T_o \\ x > 0 \Rightarrow T_l = T_v \end{array} \right. \quad (2.8)$$

$$(2.9)$$

$$\text{para } t > 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} x = -\infty \Rightarrow T_m = T_o \\ x = +\infty \Rightarrow T_l = T_v \\ x = 0 \Rightarrow T_m = T_s = T_i = \text{constante} \\ x = S \Rightarrow T_s = T_l = T_f = \text{constante} \end{array} \right. \quad (2.10)$$

$$(2.11)$$

$$(2.12)$$

$$(2.13)$$

Na Fig. 2.4 são apresentados os perfis de temperatura no sistema metal/molde no início e em um instante qualquer do processo de solidificação.

Partindo das equações e condições de contorno apresentadas foram desenvolvidos, vários métodos analíticos exatos, baseados no fato destas equações admitirem soluções do tipo: <sup>13,18,29,33,34</sup>

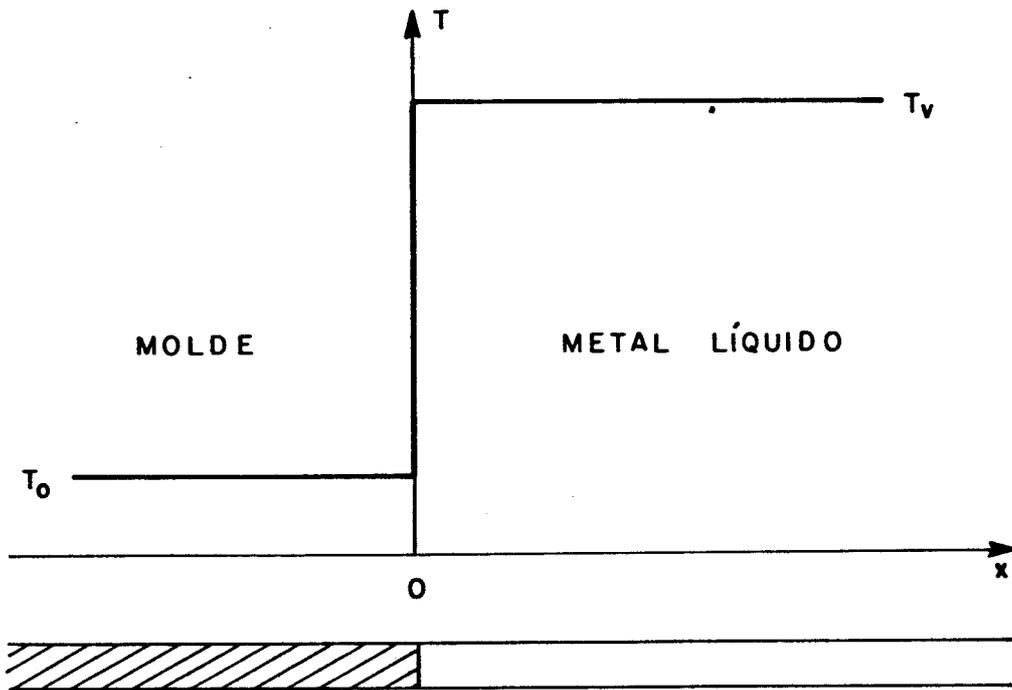
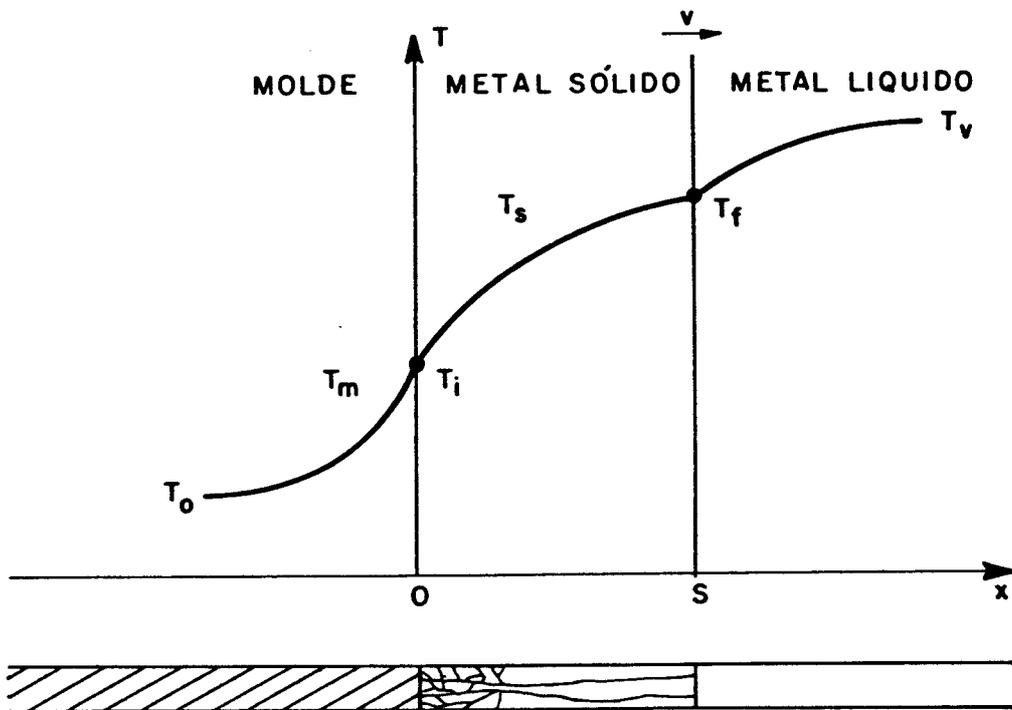
(a)  $t = 0$ (b)  $t > 0$ 

Fig. 2.4 - Distribuição de temperaturas no sistema metal/molde no início e em um instante qualquer do processo de solidificação.

$$T(x,t) = A^* + B^* \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{at}} \right) \quad (2.14)$$

onde  $A^*$  e  $B^*$  são constantes de integração, determinadas através das condições de contorno e "erf" é uma função matemática denominada "função erro" definida por:<sup>37</sup>

$$\operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{at}} \right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{at}}} \exp(-u^2) du \quad (2.15)$$

(As propriedades da função erro são apresentadas no Apêndice 2).

Resolvendo a equação 2.14, levando em conta as condições de contorno estabelecidas, determinou-se a seguinte equação:

$$t = \frac{1}{4a} \left( \frac{S}{\phi} \right)^2 \quad (2.16)$$

onde  $\phi$  é uma constante para cada sistema metal/molde.

Desta forma pode-se determinar:

$$S = f(t) \quad (2.17)$$

e

$$T_{i,\ell,m,s} = f(x,t) \quad (2.18)$$

O primeiro trabalho analítico de que se tem notícia é o de Franz Neumann que foi divulgado em 1860.<sup>13,29,33,34,38</sup> Neumann estudou a formação de placas de gelo, considerando que o molde é um absorvedor perfeito de calor, o que restringe a aplicação de sua solução à solidificação em moldes refrigerados. O maior mérito de Neumann, apesar das limitações do seu método, foi ter demonstrado que a função erro, aplicada às equações diferenciais da condução térmica, satisfaz as condições de contorno do processo de solidificação.

Na solução de Neumann a constante  $\phi$  da equação 2.16 é determinada através da equação:

$$\frac{\exp(-\phi^2)}{\operatorname{erf}(\phi)} - \frac{b_\ell}{b_s} \frac{(T_v - T_f) \exp(-\frac{a_s}{a_\ell} \phi^2)}{(T_f - T_o) \operatorname{erfc}(\sqrt{\frac{a_s}{a_\ell}} \phi)} - \sqrt{\pi} \frac{H}{c_s (T_f - T_o)} \phi = 0 \quad (2.19)$$

onde,

$$b = \sqrt{k\rho c} \quad (2.20)$$

e as distribuições de temperaturas são dadas por:

$$T_m = T_i = T_o = \text{constante} \quad (2.21)$$

no molde e na interface metal molde ( $x \leq 0$ ),

$$T_s = T_o + \frac{(T_f - T_o)}{\operatorname{erf}(\phi)} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_s t}}\right) \quad (2.22)$$

no metal sólido ( $x \leq S$ ) e,

$$T_\ell = T_v - \frac{(T_v - T_f)}{\operatorname{erfc}(n\phi)} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_\ell t}}\right) \quad (2.23)$$

no metal líquido ( $x > S$ ).

Os perfis de temperaturas obtidos através da solução de Neumann estão esquematizados na Fig. 2.5.

Muitos anos mais tarde, em 1930 Lightfoot usando a solução de Neumann e considerando a interface sólido líquido como uma fonte imóvel de calor e o metal e o molde apresentando as mesmas propriedades térmicas, propôs uma nova solução.<sup>39</sup> Lightfoot foi o primeiro a aplicar uma solução à solidificação de metais (lingotes de aço). Na sua solução a constante  $\phi$  é determinada pela equação:

$$\exp(\phi^2) \left[ \frac{1}{\operatorname{erf}\phi} - \frac{(T_v - T_f)}{(T_f - T_o) \operatorname{erfc}(\phi)} \right] - \sqrt{\pi} \frac{H}{c_s (T_f - T_o)} \phi = 0 \quad (2.24)$$

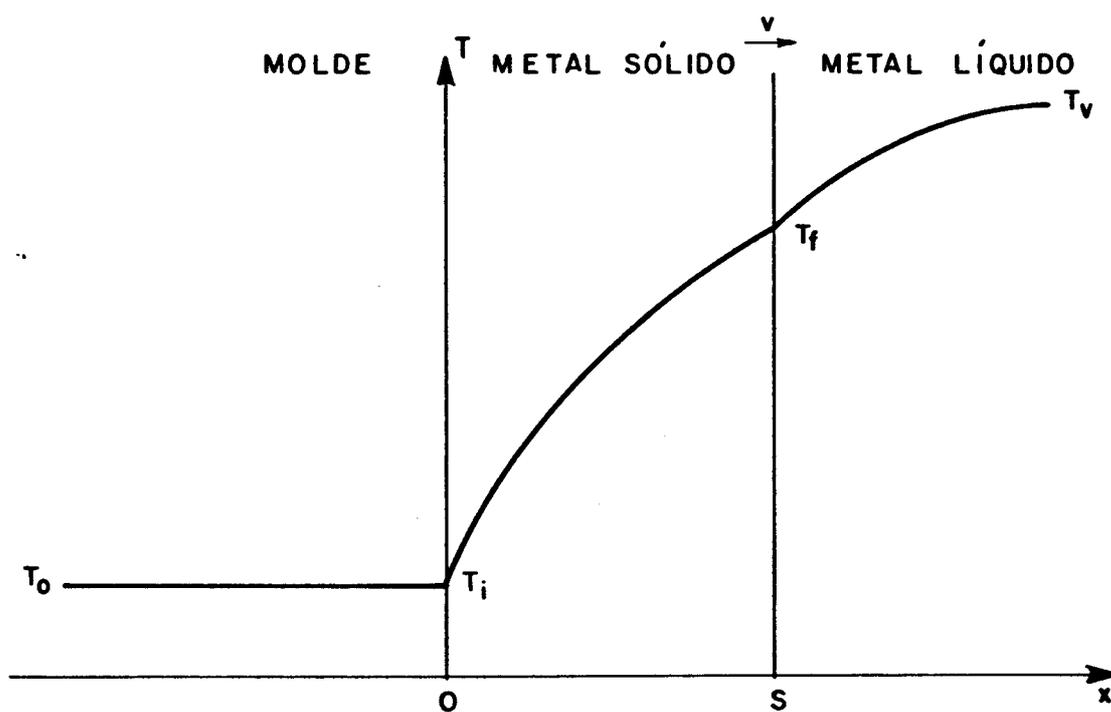


Fig. 2.5 - Representação esquemática da distribuição de temperaturas no sistema metal/molde segundo os métodos de Neumann e Lightfoot.

e as equações para determinação dos perfis de temperatura são as mesmas desenvolvidas por Neumann (Fig. 2.5).

Posteriormente, partindo também da solução de Neumann, Schwarz chegou a uma solução mais geral que leva em conta propriedades térmicas diferentes para o metal e o molde.<sup>40</sup> A solução de Schwarz não é restrita a moldes refrigerados como a de Neumann, mas só pode ser aplicada a moldes semi-infinitos. Neste caso a constante  $\phi$  é determinada pela equação:

$$\frac{\exp(-\phi^2)}{\frac{b_s}{b_m} + \operatorname{erf}(\phi)} - \frac{b_l}{b_s} \frac{(T_v - T_f)}{(T_f - T_o)} \frac{\exp\left(\frac{a_s}{a_l} \phi^2\right)}{\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{a_s}{a_l}} \phi\right)} - \sqrt{\pi} \frac{H}{c_s (T_f - T_o)} \phi = 0 \quad (2.25)$$

e os perfis de temperaturas são dados por:

$$T_m = T_o + \frac{(T_f - T_o)}{1 + \frac{\operatorname{erf}(\phi)}{\frac{b_s}{b_m}}} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{a_m t}} \right) \right] \quad (2.26)$$

no molde,

$$T_i = T_o + \frac{(T_f - T_o)}{1 + \frac{\operatorname{erf}(\phi)}{\frac{b_s}{b_m}}} \quad (2.27)$$

na interface metal/molde,

$$T_s = T_o + \frac{(T_f - T_o)}{\frac{b_s}{b_m} + \operatorname{erf}(\phi)} \left[ \frac{b_s}{b_m} + \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{a_s t}} \right) \right] \quad (2.28)$$

no metal sólido e

$$T_l = T_v - \frac{(T_v - T_f)}{\operatorname{erfc}(n\phi)} \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{a_l t}} \right) \quad (2.29)$$

no metal líquido.

Os perfis de temperaturas obtidos através da solução de Schwarz estão esquematizados na Fig. 2.6.

A partir dos estudos de Schwarz foram propostas várias soluções particulares, úteis na análise de problemas específicos de solidificação. Assim Lyubov, considerando o metal vazado sem superaquecimento, ou seja, à temperatura de fusão, e que a temperatura na interface metal/molde é uma função do tempo desenvolveu uma solução.<sup>41</sup> Mas Lyubov desenvolveu também uma solução mais simples considerando a temperatura na interface metal/molde constante, segundo a qual a constante  $\phi$  é determinada pela equação:

$$\exp(\phi^2) \left[ \frac{b_s}{b_m} + \operatorname{erf}(\phi) \right] = \frac{c_s(T_f - T_o)}{H\sqrt{\pi}} \quad (2.30)$$

e os perfis de temperatura são dados por:

$$T_m = T_o + \frac{(T_f - T_o)}{1 + \frac{\operatorname{erf}(\phi)}{\frac{b_s}{b_m}}} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{a_m t}} \right) \right] \quad (2.31)$$

no molde,

$$T_i = T_o + \frac{(T_f - T_o)}{1 + \frac{\operatorname{erf}(\phi)}{\frac{b_s}{b_m}}} = \text{constante} \quad (2.32)$$

na interface metal/molde,

$$T_s = T_o + \frac{(T_f - T_o)}{\frac{b_s}{b_m} + \operatorname{erf}(\phi)} \left[ \frac{b_s}{b_m} + \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{a_s t}} \right) \right] \quad (2.33)$$

no metal sólido, e,

$$T_l = T_v = T_f = \text{constante} \quad (2.34)$$

no metal líquido.

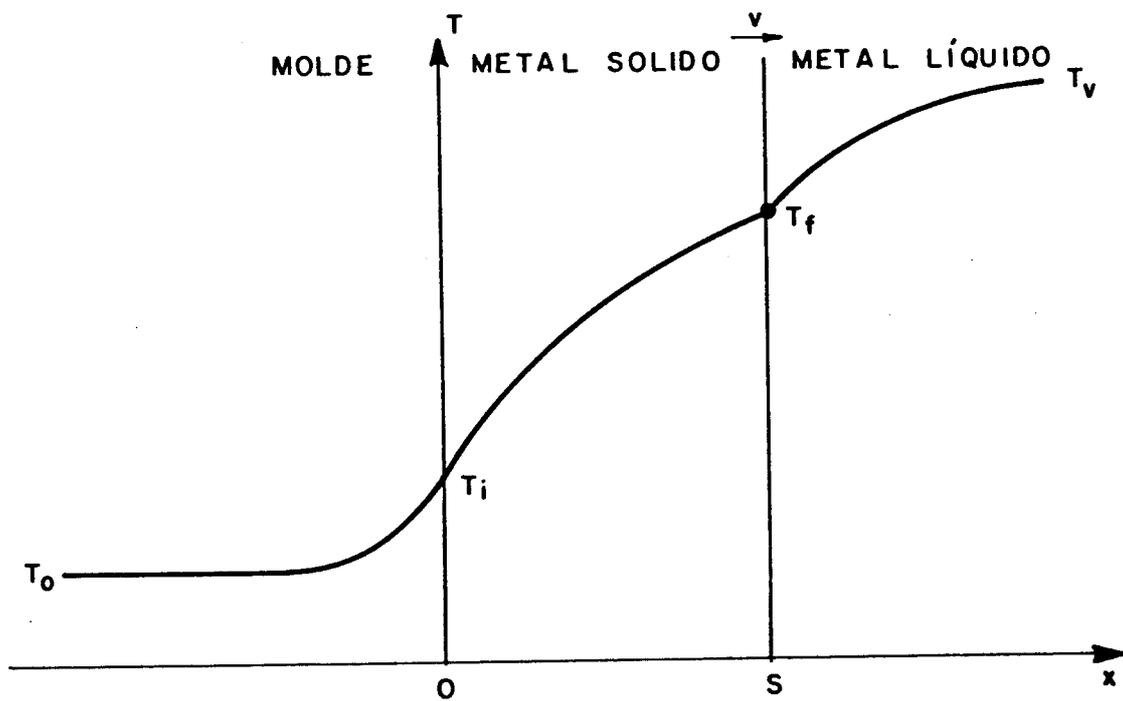


Fig. 2.6 - Representação esquemática da distribuição de temperaturas no sistema metal/molde segundo o método de Schwarz.

Na Figura 2.7 são representados, esquematicamente os perfis de temperatura segundo a solução de Lyubov.

Esta solução de Lyubov é particularmente interessante dada a sua simplicidade, sendo possível a solução gráfica da equação 2.30 (Fig. 2.8), o que facilita os cálculos.

Uma solução particular desta solução de Lyubov é a de Stefan que, além de considerar o vazamento sem superaquecimento e temperatura na interface metal/molde constante, considerou, também, o molde como absorvedor perfeito de calor, restringindo a aplicação a moldes refrigerados.<sup>42</sup> Na verdade, cronologicamente, esta solução é anterior às de Lyubov e Schwarz, sendo a primeira de que se tem conhecimento, após a de Neumann. Na solução de Stefan a constante  $\phi$  é determinada pela equação:

$$\phi \exp(\phi^2) \operatorname{erf}(\phi) = \frac{c_s(T_f - T_o)}{H\sqrt{\pi}} \quad (2.35)$$

e os perfis de temperatura são dados por:

$$T_m = T_i = T_o = \text{constante} \quad (2.36)$$

no molde e na interface metal/molde,

$$T_s = T_o + \frac{(T_f - T_o)}{\operatorname{erf}(\phi)} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_s t}}\right) \quad (2.37)$$

no metal sólido, e,

$$T_\ell = T_v = T_f = \text{constante} \quad (2.38)$$

no metal líquido.

Os perfis de temperatura obtidos com a solução de Stefan estão esquematizados na Fig. 2.9.

Outra solução particular da solução de Lyubov é a de Chvorinov que, ao contrário de Stefan, considerou o molde apresentando baixa capacidade de extração de calor, ou seja, que a difusividade de calor do molde é bem menor que a do metal.<sup>43</sup> Na sua solução a constante  $\phi$  é determinada pela equação:

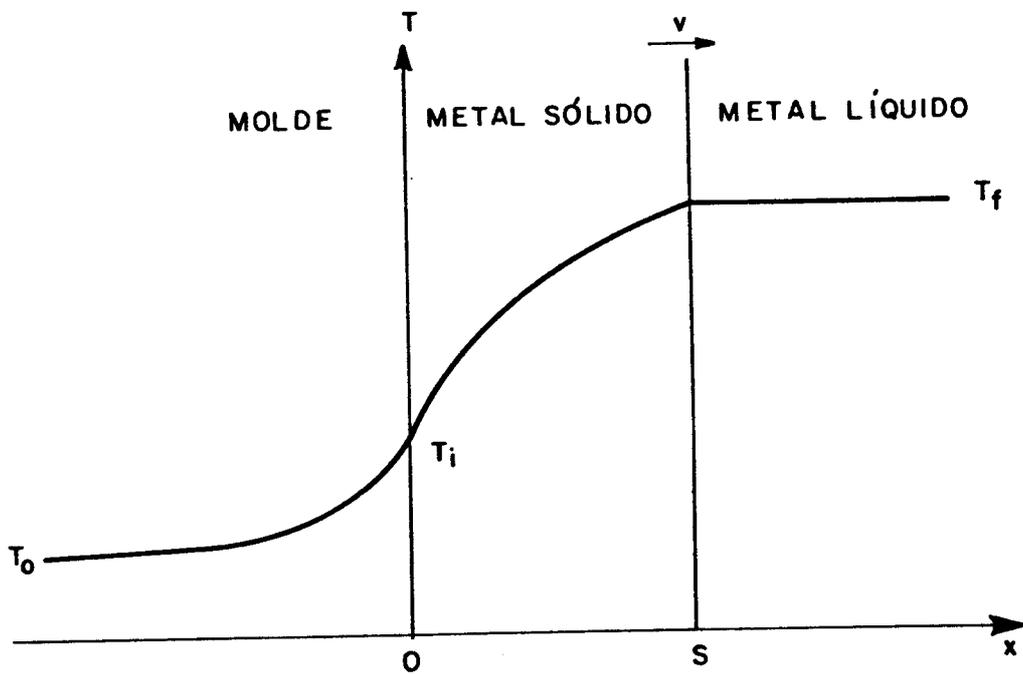


Fig. 2.7 - Representação esquemática da distribuição de temperaturas no sistema metal/molde segundo o método de Lyubov.

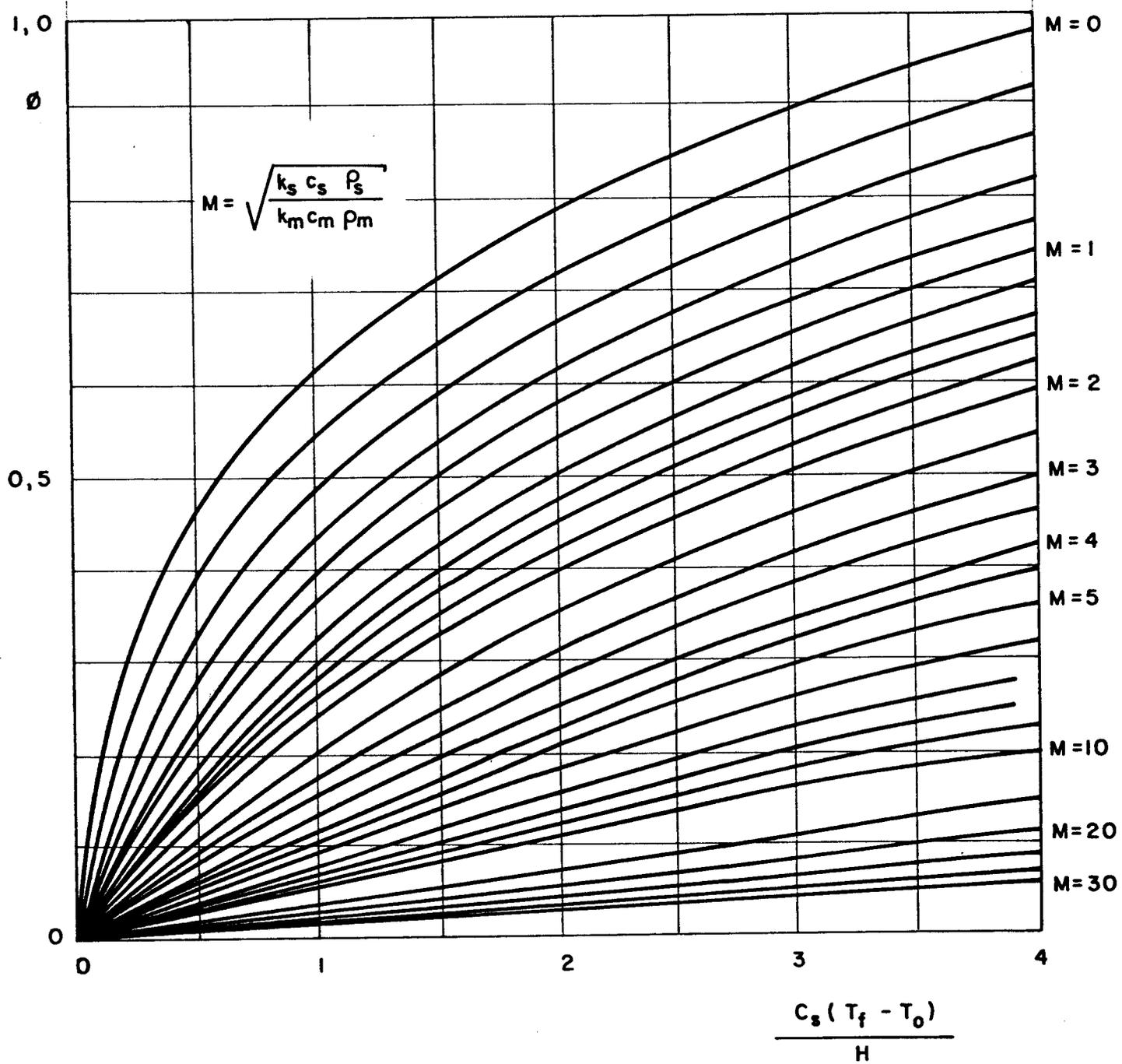


Fig. 2.8 - Solução gráfica da solução de Lyubov, obtida com um computador EAI 640.

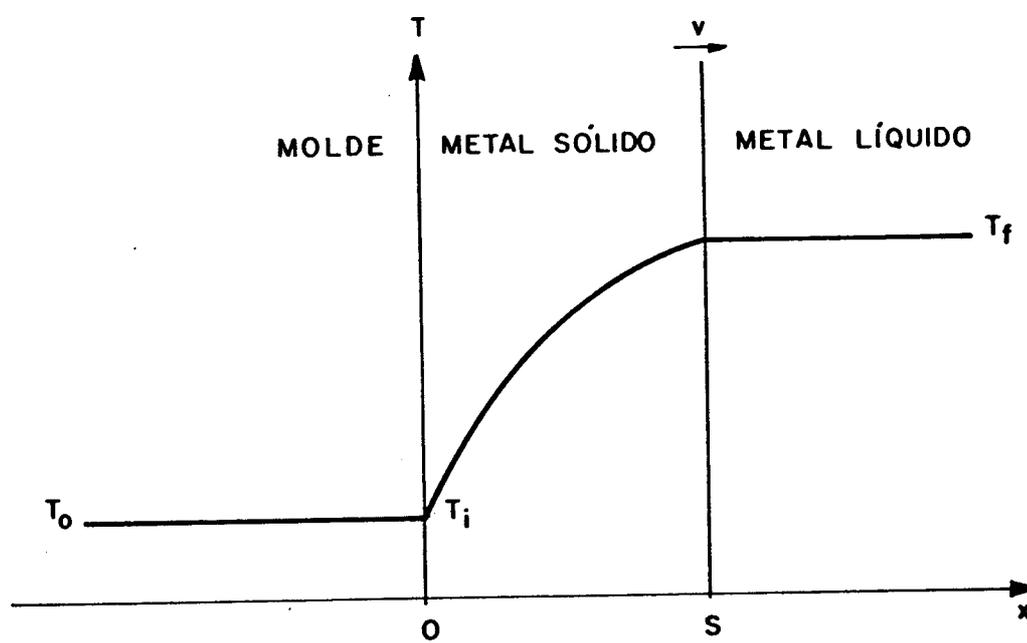


Fig. 2.9 - Representação esquemática da distribuição de temperaturas no sistema metal/molde segundo o método de Stefan.

$$\phi = \frac{b_m c_s (T_f - T_o)}{H \sqrt{\pi} b_s} \quad (2.39)$$

e os perfis de temperatura são dados por:

$$T_m = T_o + (T_f - T_o) \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{a_m t}} \right) \right] \quad (2.40)$$

no molde, e,

$$T_s = T_l = T_i = T_f = \text{constante} \quad (2.41)$$

no metal líquido, no metal sólido e na interface metal/molde.

Os perfis de temperatura obtidos com a solução de Chvorinov estão esquematizados na Fig. 2.10.

A solução de Chvorinov é aplicável, com precisão razoável, a moldes de areia ou de outros materiais com características refratárias (baixa extração de calor).

Mais recentemente, em 1978, A. Garcia e M. Prates propuseram um modelo matemático para determinação da cinética e da distribuição de temperaturas durante o processo de solidificação unidirecional de metais e ligas eutéticas vazados sem superaquecimento. O método foi inicialmente desenvolvido para moldes refrigerados e depois estendido para moldes maciços.<sup>28,44,45,46</sup> Sua vantagem em relação aos anteriores é que ele considera uma resistência térmica finita constante na interface metal/molde. Para contornar o problema da introdução da resistência de contato no desenvolvimento matemático, foi estabelecido um plano imaginário situado entre o metal e o molde, para o qual a temperatura permanece constante durante o processo. Considerando este plano como referência, os autores impuseram, sobre o sistema metal/molde real, um sistema virtual no qual se considera a resistência de contato como equivalente à resistência térmica proporcionada por uma espessura de metal previamente solidificada e por uma parcela virtual da espessura do molde (esta última usada apenas no caso de moldes maciços). Como neste trabalho será utilizado este método de análise da geometria plana para um estudo comparativo com a geometria cilíndri-

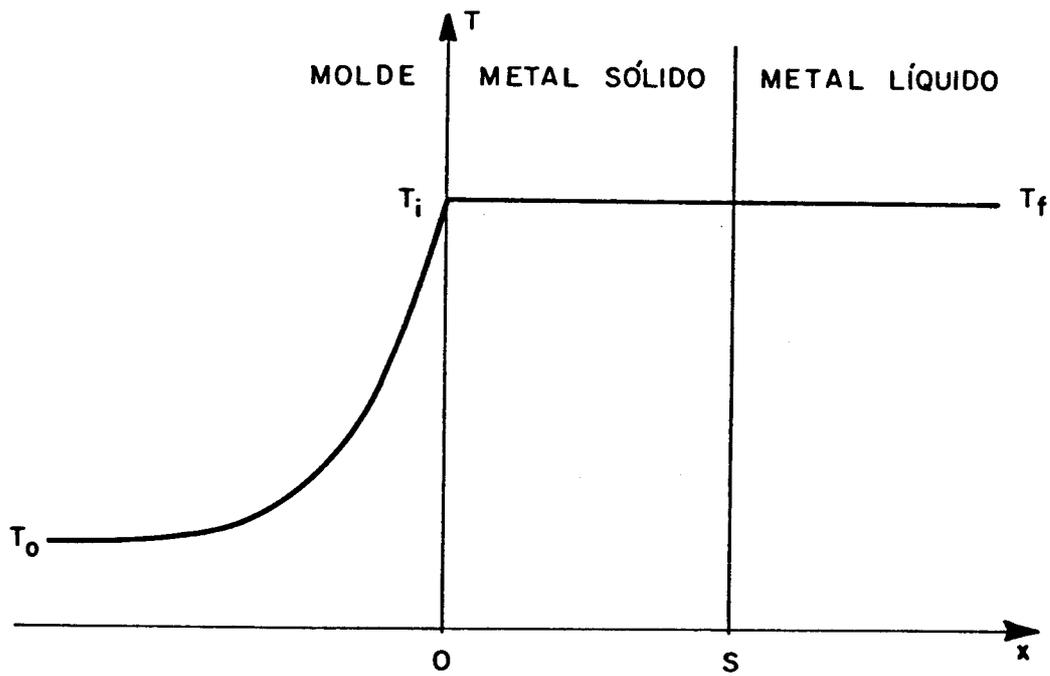


Fig. 2.10 - Representação esquemática da distribuição de temperaturas no sistema metal/molde segundo o método de Chvorinov.

ca, o mesmo será apresentado, a seguir, com um pouco mais de detalhes, para o caso de moldes refrigerados.

### Solução de Garcia e Prates para moldes refrigerados

No desenvolvimento desta solução foram consideradas as mesmas hipóteses básicas adotadas em quase todos os métodos analíticos exatos (fluxo de calor unidirecional, interface sólido líquido plana, metal vazado sem superaquecimento e propriedades térmicas do metal e do molde não variando com a temperatura), com exceção da resistência térmica do contato metal/molde que é considerada finita e substituída por uma camada de metal previamente solidificada em um sistema virtual imposto sobre o sistema metal/molde real. Os sistemas real e virtual são apresentados na Fig. 2.11. A transposição de um sistema para outro é feita através das seguintes relações:

$$x' = S_0 + x \quad (2.42)$$

$$S' = S_0 + S \quad (2.43)$$

$$t' = t_0 + t \quad (2.44)$$

Com as hipóteses assumidas pode-se considerar que todo o calor é transferido por condução e aplicar no sistema virtual a equação:

$$\frac{\partial T}{\partial t'} = a \frac{\partial T}{\partial x'^2} \quad \text{para } 0 \leq x \leq S' \quad (2.45)$$

sendo as condições de contorno dadas por:

$$x' = S' \rightarrow T = T_f = \text{constante} \quad (2.46)$$

$$x' = 0 \rightarrow T = T_0 = \text{constante} \quad (2.47)$$

Considerando a solução baseada na função erro para a equação 2.45 tem-se:

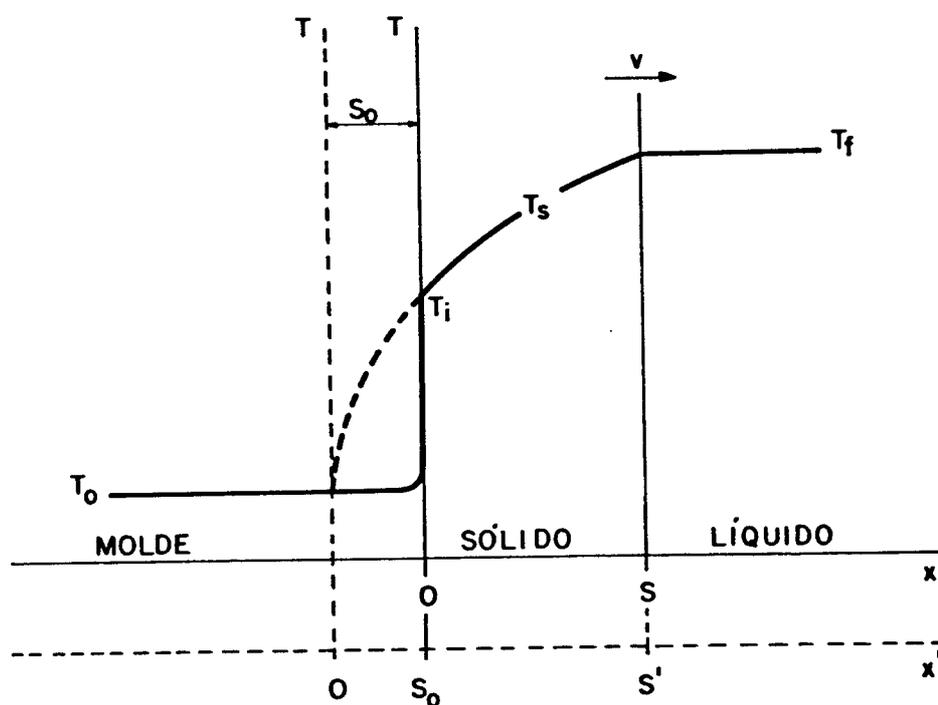


Fig. 2.11 - Sistema metal/molde real, durante a solidificação de um metal em molde refrigerado (linhas cheias) e o correspondente sistema virtual (linhas tracejadas).

$$T = A^* + B^* \operatorname{erf} \left( \frac{x'}{2\sqrt{a_s t'}} \right) \quad (2.48)$$

Das equações 2.46 e 2.48:

$$\frac{S'}{2\sqrt{a_s t'}} = \phi = \text{constante} \quad (2.49)$$

ou:

$$t' = \frac{S'^2}{4 a_s \phi^2} \quad (2.50)$$

Substituindo as equações 2.42, 2.43 e 2.44 em 2.50, obtém-se a equação para o tempo de solidificação ( $t$ ) no sistema real:

$$t = \frac{S^2}{4 a_s \phi} + \frac{S_o S}{2 a_s \phi^2} \quad (2.51)$$

As constantes de integração  $A^*$  e  $B^*$  podem ser determinadas introduzindo as condições de contorno 2.46 e 2.47 na equação 2.48:

$$A^* = T_o \quad (2.52)$$

$$B^* = \frac{T_f - T_o}{\operatorname{erf}(\phi)} \quad (2.53)$$

Como:

$$\frac{x'}{2\sqrt{a_s t'}} = \phi \frac{x'}{S'} = \phi \frac{S_o + x}{S_o + S} \quad (2.54)$$

Substituindo-se 2.52, 2.53 e 2.54 em 2.48:

$$T = T_o + \frac{(T_f - T_o)}{\operatorname{erf}(\phi)} \operatorname{erf} \left( \phi \frac{S_o + x}{S_o + S} \right) \quad (2.55)$$

Fazendo-se um balanço térmico na interface sólido/líquido:

$$H\rho_s \frac{dS'}{dt'} - k_s \frac{\partial T}{\partial x'} = 0 \quad (2.56)$$

Derivando 2.49 e 2.55 e substituindo em 2.56, obtêm-se uma equação para o cálculo da constante  $\phi$ .

$$\sqrt{\pi} \phi \operatorname{erf} \phi \exp \phi^2 = \frac{c_s (T_f - T_o)}{H} \quad (2.57)$$

Resta agora determinar  $S_o$ , o que é feito através de um balanço do fluxo de calor na interface metal/molde:

$$h_i (T_f - T_o) = k_s \left( \frac{\partial T}{\partial x'} \right)_{S_o} \quad (2.58)$$

Derivando-se 2.55 e substituindo em 2.58:

$$S_o = \frac{2a_s \phi^2 H \rho_s}{h_i (T_f - T_o)} \quad (2.59)$$

Substituindo-se 2.59 em 2.51 e 2.55:

$$t = \alpha S^2 + \beta S \quad (2.60)$$

onde:

$$\alpha = \frac{1}{4 a_s \phi^2} \quad (2.61)$$

$$\beta = \frac{H \rho_s}{h_i (T_f - T_o)} \quad (2.62)$$

e

$$T = T_o + \frac{(T_f - T_o)}{\operatorname{erf}(\phi)} \operatorname{erf} \left( \phi \frac{\beta + 2\alpha x}{\beta + 2\alpha S} \right) \quad (2.63)$$

As equações 2.60 e 2.63 permitem o cálculo do tempo de solidificação e da distribuição de temperaturas, respectivamente.

Garcia e Prates propuseram ainda um método para a determinação experimental do coeficiente de transmissão de calor ( $h_i$ ) na interface metal/molde.<sup>47</sup> De acordo com este método os dados cinéticos são colocados na forma de  $(t/S)$  em função de  $S$ , o que, para solidificação unidirecional de metais é dado por:

$$\frac{t}{S} = \alpha S + \beta \quad (2.64)$$

onde o termo  $(t/S)$  apresenta uma variação linear com  $S$ . Plotando-se os valores experimentais de  $(t/S) \times S$  (obtidos com o uso de um dispositivo de solidificação unidirecional<sup>28</sup>), obtém-se o valor de  $\beta$  no ponto onde a reta corta a ordenada (Fig. 2.12). Introduzindo-se o valor de  $\beta$  na equação 2.62 pode-se determinar o valor de  $h_i$ .

Posteriormente M. Medeiros e A. Garcia estenderam a aplicação deste método para o caso de metais vazados com superaquecimento.<sup>48,49,50</sup>

Todas as soluções citadas anteriormente são consideradas analíticas exatas, uma vez que, no seu desenvolvimento, não foram feitas considerações que as afastassem das equações diferenciais que descrevem o processo de solidificação. As aproximações feitas foram sempre de natureza física e não matemática. Mas estas aproximações impõem uma série de restrições à aplicação destas soluções. A principal destas restrições diz respeito à consideração de um contato térmico perfeito entre o metal e o molde, que raramente ocorre na prática devido às imperfeições na superfície do molde e à camada de ar que se forma durante a solidificação devido a contração do metal e/ou dilatação do molde. Das soluções apresentadas somente a última considera a resistência de contato.

Outra limitação é a consideração de um fluxo unidirecional de calor que só é válido para placas paralelas infinitas. Como, na prática, os moldes planos apresentam paredes laterais, há a introdução do efeito que canto, que muitas vezes não pode ser desprezado.<sup>51</sup>

As hipóteses de condições semi-infinitas no metal e no molde também introduzem alguns erros. No caso do metal isto só é válido no início do processo e no caso do molde impede a análise

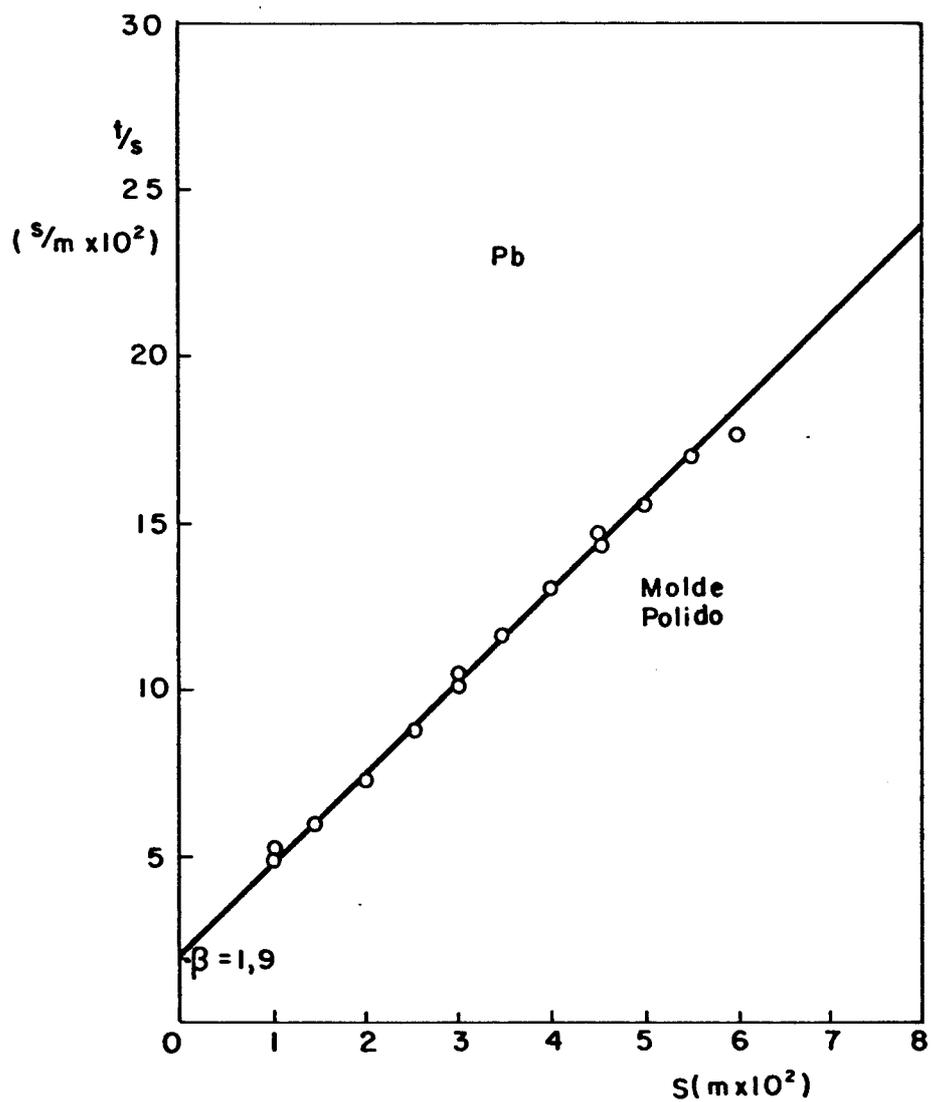


Fig. 2.12 - Representação esquemática da determinação experimental da constante  $\beta$  para o cálculo do coeficiente de transmissão de calor pelo método de Garcia e Prates.

da influência da espessura de parede no tempo de solidificação, uma vez que, no caso de espessuras de parede finitas, a superfície externa do molde pode se aquecer antes de se completar o processo de solidificação, havendo, então, trocas de calor também por radiação e convecção, e não apenas por condução como no caso semi-infinito.

Por último a consideração de propriedades térmicas do metal e do molde independentes da temperatura pode, em alguns casos, provocar erros consideráveis já que para alguns materiais estas propriedades variam sensivelmente.

### 2.2.2. Métodos analíticos aproximadas

No desenvolvimento de soluções analíticas aproximadas são introduzidas aproximações de natureza matemática, juntamente com as de ordem física, comprometendo a exatidão matemática, mas, muitas vezes, aproximando mais os resultados obtidos dos casos encontrados na prática. Os métodos aplicados no desenvolvimento destas soluções baseiam-se na introdução de funções auxiliares arbitrárias (em geral polinômios simples) para descrever a distribuição de temperaturas, no metal, permitindo a integração analítica ou numérica das equações diferenciais. Por esta razão estes métodos são, muitas vezes, citados como: "métodos do perfil integral" ou "métodos interais de balanço de calor".

As aproximações de natureza físicas assumidas no desenvolvimento das soluções analíticas aproximadas são as seguintes:

- (a) O fluxo de calor é unidirecional.
- (b) A interface sólido/líquido é macroscopicamente plana.
- (c) O metal e o molde se comportam como elementos semi-infinitos.
- (d) O material do molde apresenta difusividade de calor muito maior que o metal que solidifica, podendo, o molde, ser considerado como absorvedor perfeito de calor (o que restringe a aplicação a moldes refrigerados).

- (e) Não há correntes de convecção forçada no líquido.
- (f) O superaquecimento do metal líquido é dissipado só por condução.
- (g) As propriedades térmicas do metal e do molde não variam com a temperatura.
- (h) O contato térmico entre o metal e o molde não é perfeito, o que significa que há uma resistência térmica ao fluxo de calor na interface metal/molde e, portanto, o coeficiente de transmissão de calor apresenta um valor finito.

Pode-se notar duas diferenças básicas com as hipóteses assumidas na maioria dos métodos analíticos exatos são a consideração da existência de um contato térmico imperfeito entre metal e molde e da difusividade de calor infinita do molde. Tais hipóteses se aproximam bastante das condições de contorno encontradas em certos casos de lingotamento contínuo, permitindo a aplicação das soluções obtidas em problemas de grande importância tecnológica.<sup>52</sup>

O desenvolvimento analítico básico das soluções analíticas aproximadas baseia-se no balanço de calor em um elemento do sistema metal/molde (Fig. 2.2 e Fig. 2.3) em um instante qualquer do processo de solidificação. Na Fig. 2.13 são apresentados esquematicamente a distribuição de temperaturas e os fluxos de calor no elemento em questão. Fazendo-se o balanço, tem-se:

Na interface sólido/líquido ( $x=S$ ,  $t>0$ ):

$$q_{sl} = -k_s \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=S} + \rho_s \cdot H \cdot \frac{dS}{dt} \quad (2.65)$$

Na interface metal/molde ( $x=0$ ,  $t>0$ ):

$$q_i = -k_s \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} \quad (2.66)$$

No metal sólido ( $0 \leq x \leq S$ ) pode ser aplicada a equação de Fourier:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a_s \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (2.67)$$

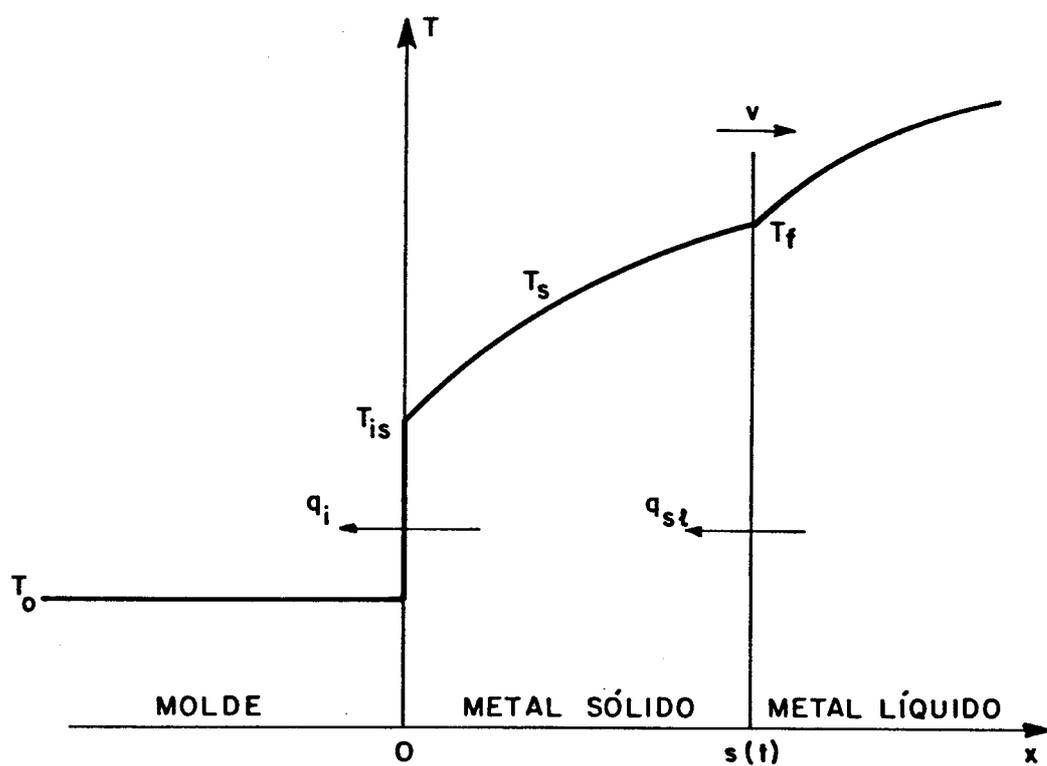


Fig. 2.13 - Representação esquemática da distribuição de temperaturas e dos fluxos de calor em um elemento do sistema metal/molde.

Considerando as propriedades físicas do metal constantes e integrando-se a equação 2.67 tem-se:

$$\int_0^S \frac{\partial T}{\partial t} \cdot dx = \frac{k_s}{\rho_s c_s} \int_0^S \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \cdot dx \quad (2.68)$$

ou

$$\int_0^S \frac{\partial T}{\partial t} \cdot dx = \frac{1}{\rho_s c_s} \left[ k_s \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=S} - k_s \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} \right] \quad (2.69)$$

Introduzindo-se as equações 2.65 e 2.66:

$$\int_0^S \frac{\partial T}{\partial t} \cdot dx = \frac{1}{\rho_s c_s} \left[ q_i - q_{s\ell} + \rho_s \cdot H \cdot \frac{dS}{dt} \right] \quad (2.70)$$

A equação 2.70 pode ser reescrita na forma:

$$\int_0^S \frac{\partial T}{\partial t} \cdot dx = \frac{H}{c_s} \frac{dS}{dt} + \frac{q_i - q_{s\ell}}{\rho_s c_s} \quad (2.71)$$

Aplicando-se a regra de Leibnitz para diferenciação de integrais: <sup>53, 54</sup>

$$\int_0^S \frac{\partial T}{\partial t} \cdot dx = \frac{d}{dt} \int_0^S T_s \cdot dx - T_f \frac{dS}{dt} \quad (2.72)$$

Substituindo 2.72 em 2.71:

$$\frac{d}{dt} \int_0^S T_s \cdot dx - T_f \frac{dS}{dt} = \frac{H}{c_s} \cdot \frac{dS}{dt} + \frac{q_i - q_{s\ell}}{\rho_s c_s} \quad (2.73)$$

e portanto:

$$v = \frac{dS}{dt} = \frac{\frac{d}{dt} \left( \int_0^S T_s \cdot dx \right) - \frac{q_i - q_{s\ell}}{\rho_s c_s}}{T_f - \frac{H}{c_s}} \quad (2.74)$$

A equação 2.74 é a equação básica para o desenvolvimento analítico das soluções aproximadas e a resolução da mesma vai depender do conhecimento das funções que representam  $q_i$ ,  $q_{s\ell}$  e  $T_f$ . Em geral se considera que:

$$q_i = h_i (T_i - T_o) \quad (2.75)$$

assumindo-se que o coeficiente de transmissão de calor permanece constante durante o processo de solidificação. Para o caso do metal solidificando sem superaquecimento:

$$q_{s\ell} = 0 \quad (2.76)$$

Resta, então, a função que descreve o perfil térmico no metal sólido para a qual cada autor assume, arbitrariamente, uma função auxiliar particular, que satisfaça as seguintes condições de contorno:

$$\text{para } x = 0 \quad \rightarrow \quad T_s = T_i \quad (2.77)$$

$$\text{e para } x = S \quad \rightarrow \quad T_s = T_f \quad (2.78)$$

A complexidade da solução da equação 2.74 dependerá das hipóteses iniciais assumidas e da função adotada para o perfil de temperatura no sólido. Mas, em geral, a integração analítica é difícil, havendo quase sempre a necessidade de integração gráfica ou numérica com uso de computadores e a manipulação de parâmetros adimensionais.

Uma das primeiras soluções analíticas aproximadas foi a desenvolvida por London e Seban em 1943 para analisar a formação de gelo em moldes cilíndricos, esféricos e planos.<sup>55,56</sup> London e Seban consideraram, como simplificação matemática, que o perfil de temperatura no metal solidificado é linear do tipo:

$$T_s = T_i + (T_f - T_i) \frac{x}{S} \quad (2.79)$$

conforme pode ser visto na Fig. 2.14. Como simplificações de ordem física consideraram que o metal se solidifica sem superaquecimento, que o molde é um absorvedor perfeito de calor (molde refrigerado) e que o calor específico é desprezível comparado com o calor latente. Desta forma chegaram à seguinte equação:

$$t = \left[ \left( \frac{h_i \cdot S}{k} + 1 \right)^2 - 1 \right] \frac{\rho \cdot H \cdot k}{2 \cdot h_i^2 \cdot (T_f - T_o)} \quad (2.80)$$

Posteriormente foram desenvolvidas três soluções, a de Adams em 1958, a de Megerlin em 1966 e a de Hills em 1969, todas considerando funções polinomiais do segundo grau para descrever o perfil térmico no metal solidificado e o metal solidificando sem superaquecimento.<sup>38,57,58</sup> Os perfis de temperaturas no sistema metal/molde, segundo Adams, Megerlin e Hills, estão esquematizados na Fig. 2.15.

Todos estes métodos levam a equações complexas e, assim sendo, é conveniente tratá-los de forma adimensional. Uma comparação entre eles foi apresentada em 1969 por Jones, a partir das seguintes equações, na forma adimensional, que descrevem a velocidade de avanço da interface sólido/líquido e a espessura solidificada em função do tempo:<sup>59</sup>

$$v^* = \frac{F_1}{1 + S^*} \quad (2.81)$$

$$S^* = F_2 \left( \sqrt{1 + 2t^*/H^*} - 1 \right) \quad (2.82)$$

onde  $F_1$  e  $F_2$  são funções de  $S^*$  e  $H^*$ , cujos valores vão depender das hipóteses e aproximações de cada autor, mas em geral apresentam va

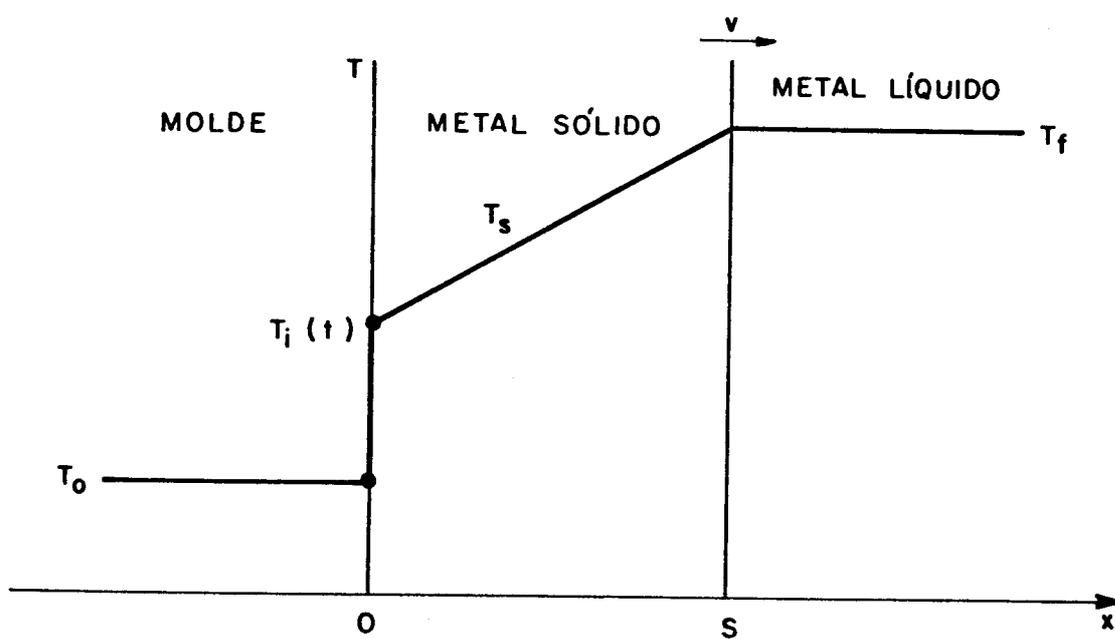


Fig. 2.14 - Representação esquemática da distribuição de temperaturas no sistema metal/molde segundo London & Seban.

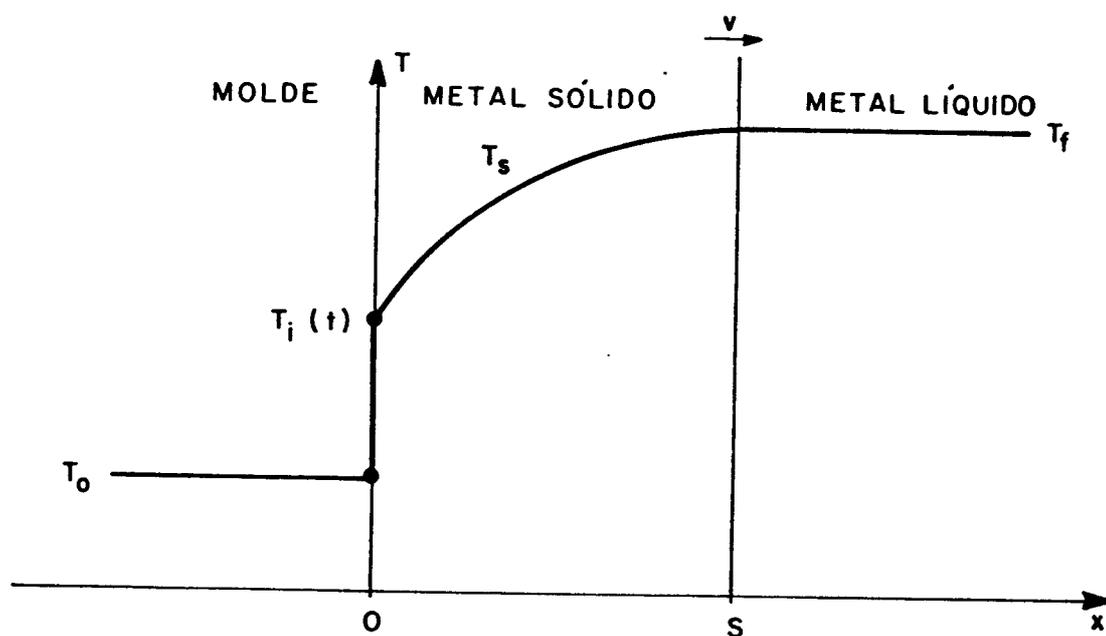


Fig. 2.15 - Representação esquemática da distribuição de temperaturas no sistema metal/molde segundo Adams, Megerlin e Hills.

lores entre 0 e 1. A definição dos termos adimensionais é apresentada no Apêndice 1.

Assim, na solução de London e Seban tem-se:

$$F_1 = F_2 = 1 \quad (2.83)$$

e introduzindo-se estes valores na equação 2.82 e voltando-se à forma dimensional obtém-se a equação 2.80 apresentada anteriormente. Nesta solução os valores de velocidade e da espessura solidificada em relação ao tempo são superestimados porque se despreza o armazenamento de calor no metal solidificado.

Na Solução de Adams tem-se:

$$F_1 = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \frac{4(1 + f_0^3)}{3H^*}}} \quad (2.84)$$

onde:

$$f_0 = (1 + S^*)^{-1} \quad (2.85)$$

Esta equação não permite a integração analítica da equação 2.81 havendo necessidade de integração numérica. Adams não verificou experimentalmente sua solução, apenas comparou-a com a solução exata de Neumann.

Na Solução de Megerlin tem-se:

$$F_1 = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \frac{2(1 - f_0^2)}{H^*}}} \quad (2.86)$$

A equação de Megerlin é dentre as três a única que pode ser integrada analiticamente, dando como resultado:

$$F_2 = \frac{1 - f_0}{f_1 - f_0} \quad (2.87)$$

onde:

$$f_1 = \sqrt{\frac{1}{F_1} - \frac{f_2^2 - f_3^2}{4f_2} \ln \left[ \frac{(f_2 + f_3)(f_2 - 1)}{(f_2 - f_3)(f_2 + 1)} \right]} \quad (2.88)$$

$$f_2 = \sqrt{1 + \frac{2}{H^*}} \quad (2.89)$$

$$f_3 = \sqrt{1 + \frac{2}{H^*} (1 - f_0^2)} = \frac{2}{F_1} - 1 \quad (2.90)$$

Megerlin também não verificou experimentalmente sua solução.

E na Solução de Hills tem-se:

$$F_1 = \frac{2}{f_4 + \sqrt{f_4^2 + f_5}} \quad (2.91)$$

onde:

$$f_4 = 1 + \frac{(1 - f_0)^2}{6H^*} \quad (2.92)$$

$$f_5 = \frac{2}{3H^*} (1 - f_0^2) (1 + 2f_0) \quad (2.93)$$

A Solução de Hills é baseada em uma função da seguinte forma para o perfil térmico no metal solidificado:

$$T_s = T_i - \frac{q_i S}{k_s} \left( \frac{x}{S} \right) + \left( T_f - T_i + \frac{q_i S}{k_s} \right) \left( \frac{x}{S} \right)^2 \quad (2.94)$$

Sua solução também não permite a integração analítica da equação 2.81, exigindo integração numérica. Hills foi o único a comprovar experimentalmente seu método, utilizando um dispositivo de solidificação unidirecional.<sup>60</sup> Mais recentemente, em 1975, o método de Hills foi estendido para o caso de metais vazados com superaquecimento, mas, às custas de programação de computador mais complexa, apresentando resultados satisfatórios.<sup>61</sup>

Outra solução interessante é a Hrycak, desenvolvida em 1963, considerando uma variação linear de temperatura no metal sólido e uma variação parabólica de temperatura no líquido.<sup>62</sup> Hrycak foi o primeiro a considerar o superaquecimento no metal líquido. As funções adotadas para descrever os perfis de temperatura nesta solução foram as seguintes:

$$T_s = T_o + \frac{(T_f - T_o) \left(x + \frac{k}{h}\right)}{\left(S + \frac{k}{h}\right)}, \text{ para } 0 \leq x \leq S \quad (2.95)$$

e

$$T_l = T_f + 2(T_v - T_f) \left[ \frac{x-S}{x_\infty - S} - \frac{1}{2} \left( \frac{x-S}{x_\infty - S} \right)^2 \right], \text{ para } S \leq x \leq x_\infty \quad (2.96)$$

Estes perfis estão esquematizados na Fig. 2.16.

A solução de Hrycak pode ser também colocada na forma das equações 2.81 e 2.82 para  $F_1$  igual a uma raiz menor que a unidade da equação:

$$f_6 F_1^2 - (f_6 + f_7) F_1 + 1 = 0 \quad (2.97)$$

onde,

$$f_6 = 1 + \frac{1 - f_o}{2H^*} + \left( \frac{a_s}{a_l} \right)^{1/2} \cdot \left( \frac{k_l \cdot \rho_l \cdot c_l}{k_s \cdot \rho_s \cdot c_s} \right)^{1/2} \cdot \frac{T_v - T_f}{T_f - T_o} \cdot \frac{1}{H^*} \quad (2.98)$$

$$f_7 = 1 + 2 \left( \frac{k_l \cdot \rho_l \cdot c_l}{k_s \cdot \rho_s \cdot c_s} \right) \cdot \left( \frac{T_v - T_f}{T_f - T_o} \right)^2 \cdot \frac{1}{3H^*} \quad (2.99)$$

A equação de Hrycak pode ser integrada analiticamente, resultando para  $F_2$  o valor menor que a unidade da equação:

$$\left[ \frac{1}{F_1} \left( 1 + \frac{2}{S^*} \right) + \frac{\ln f_o}{H^* (S^*)^2} \right] F_2^2 - \frac{2}{S^*} C - 1 = 0 \quad (2.100)$$

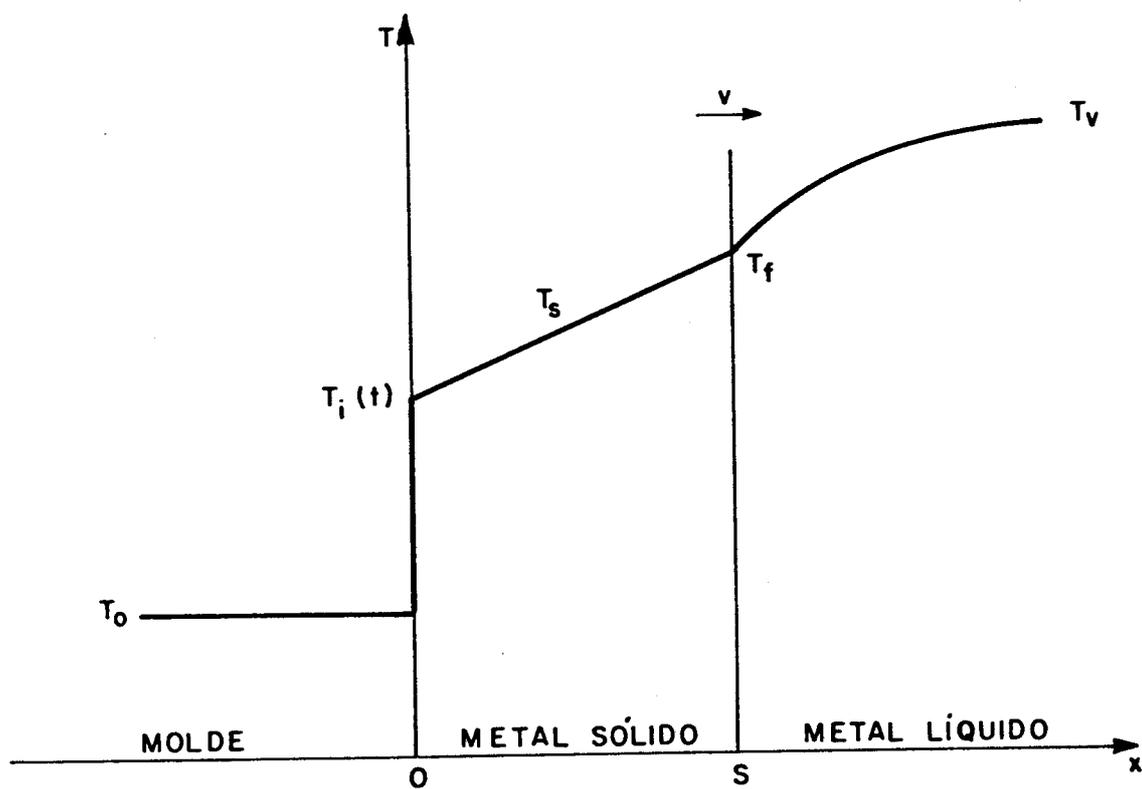


Fig. 2.16 - Representação esquemática da distribuição de temperaturas segundo Hrycak.

Hrycak também não verificou experimentalmente sua solução, apenas comparou-a com métodos analíticos exatos.

Existem algumas outras soluções divulgadas na literatura algumas das quais apresentam apenas interesse acadêmico, com pouca ou nenhuma aplicação prática. Entre estas podem ser destacadas as de Goodman, de Tien e de Nishida e Suzuki.<sup>63,64,65,66,67,68</sup>

A Solução de Goodman foi desenvolvida considerando que o molde é um absorvedor perfeito de calor, que o perfil de temperaturas no metal sólido em função do tempo é dado por um polinômio do segundo grau e que o metal líquido está sempre a uma temperatura constante e igual à temperatura de fusão.<sup>63,64</sup> Goodman considera ainda que ou temperatura na interface metal/molde é fixada ou que o fluxo de calor em função do tempo na interface metal/molde é dado por uma função conhecida. Estas hipóteses impossibilitam a aplicação prática da sua solução a casos de solidificação de metais em sistemas metal/molde, já que nem a temperatura é constante nem o fluxo de calor é conhecido na interface metal/molde.

A Solução de Tien foi obtida considerando que a distribuição de temperaturas no sólido é representada por um polinômio do segundo grau.<sup>65</sup> A partir desta hipótese Tien desenvolveu duas soluções assumindo variação linear e variação exponencial da temperatura na interface metal/molde em função do tempo. Mais tarde, em 1968, Tien adaptou seu método para analisar a solidificação de ligas binárias.<sup>66</sup> Tien, também, em 1968, propôs uma modificação à solução de London e Seban, levando em conta o efeito do calor específico através de uma correção introduzida no calor latente de fusão, mas considerando a temperatura na interface metal/molde constante.<sup>67</sup>

A Solução de Nishida & Suzuki não apresenta nenhum valor prático já que não considera o calor latente do metal.<sup>68</sup>

Resta ainda comentar a Solução de Prates, desenvolvida em 1971, que pode ser, também, colocada na forma das equações 2.81 e 2.82.<sup>33,69</sup> Prates considerou que  $F_1$  e  $F_2$  devem tender a 1 (o que equivale à solução de London e Seban) quando  $S^*$  tende à zero ou  $H^*$  é bem maior que 1, e que as soluções aproximadas devem tender à solução exata de Stefan quando o coeficiente de transferência de calor tende a infinito (ou  $S^*$  tende a infinito) de modo que:

$$F_1 = 2\phi H^* \quad (2.101)$$

e

$$F_2 = \phi(2H^*)^{1/2} \quad (2.102)$$

Assim, pode-se considerar que os campos de variação das funções  $F_1$  e  $F_2$  sejam:

$$2\phi H^* \leq F_1 \leq 1 \quad (2.103)$$

$$\phi(2H^*)^{1/2} \leq F_2 \leq 1 \quad (2.104)$$

Desta forma Prates propôs a seguinte simplificação para o problema:

- Se  $S^* \leq 10^{-2}$  , considera-se  $F_2 = 1$
- Se  $S^* \geq 1$  , considera-se  $F_2 = \phi(2H^*)^{1/2}$
- Se  $10^{-2} < S^* < 1$  , considera-se  $F_2$  variando linearmente com a função  $\log S^*$ .

Valem para todos os métodos analíticos aproximados, as mesmas restrições feitas às hipóteses de ordem física dos métodos analíticos exatos (fluxo de calor unidirecional, metal e molde semi-infinitos, interface metal/molde plana e propriedades térmicas do metal e do molde constantes com a temperatura). Além disso a hipótese de que o material do molde apresenta difusividade de calor infinita restringe a aplicação destes métodos à solidificação em moldes refrigerados.

A grande vantagem dos métodos analíticos aproximados em relação aos exatos (com exceção do método de Garcia e Prates) é o fato de considerarem a existência de uma resistência térmica de contato na interface metal/molde, o que os torna mais próximos dos casos reais de solidificação em sistemas metal molde. Sua precisão, no entanto, depende diretamente das aproximações de ordem matemática, ou seja das funções escolhidas para representar, por exemplo, a variação de temperatura no metal solidificado. Normalmente estas funções são polinomiais e muitas vezes quanto maior o grau escolhido melhor é a aproximação obtida, mas também, mais com

plexa se torna a integração das equações diferenciais e maior é o número de coeficientes a serem determinados, dificultando a solução do problema e exigindo, muitas vezes a utilização de métodos numéricos.

Um fato que deve ser salientado, é que, com excessão de Hills, nenhum autor verificou experimentalmente sua solução. As soluções foram, em geral, comparadas com soluções analíticas exatas e consideradas tanto melhores quanto mais próximos destas estivessem os resultados obtidos. Tal fato é sujeito a críticas, já que, com as soluções aproximadas se pretende justamente contornar as limitações impostas pelas soluções exatas.

### 2.2.3. Métodos analógicos

Nos métodos analógicos o sistema térmico metal/molde é substituído por um circuito elétrico composto de resistências e capacitores, em regime transiente.<sup>13,17</sup> A substituição de um sistema por outro é feita levando em conta as analogias entre as grandezas dos mesmos conforme mostra a Tabela 2.1. Desta forma, as equações que descrevem o sistema térmico:

$$q = -k \frac{dT}{dx} \quad (2.105)$$

e

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (2.106)$$

corresponderão, respectivamente, às seguintes equações que descrevem o sistema elétrico:

$$q_E = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.107)$$

e

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{RC} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (2.108)$$

SISTEMA TÉRMICO	SISTEMA ELÉTRICO
Temperatura	Diferença de potencial
Tempo	Tempo
Quantidade de calor	Carga elétrica
Fluxo de calor	Intensidade de corrente
Resistência elétrica	Resistência térmica
Capacidade térmica	Capacidade elétrica
Condutibilidade térmica	Condutibilidade elétrica
Difusividade térmica	Difusividade elétrica

TABELA 2.1 - Analogia entre grandezas térmicas e elétricas.

A vantagem do sistema elétrico é a sua manipulação mais fácil. Assim, é muito mais fácil de se controlar, medir e registrar diferenças de potencial e intensidades de corrente impostas a um sistema elétrico do que as correspondentes temperaturas e fluxos de calor de um sistema térmico. Por outro lado parâmetros de difícil análise no sistema térmico, como o calor latente e a formação de uma camada de ar na interface metal/molde (resistência de contato) podem ser facilmente analisados, em um sistema elétrico, através da aplicação de uma corrente e da introdução de uma resistência, respectivamente. Também os efeitos de correntes de convecção no metal líquido podem ser levados em conta através de indutâncias aplicadas no circuito.

Os trabalhos mais importantes utilizando a analogia elétrica para analisar a solidificação de metais em sistemas metal/molde foram realizados por Paschkis e seus colaboradores na Universidade de Columbia (USA).<sup>70,71,72,73</sup> Paschkis estudou principalmente a solidificação de peças de aço com geometrias simples (placas, cilindros e esferas).

A aplicação do método pode ser feita dividindo-se o sistema metal/molde em várias partes iguais, cada uma das quais é representada por uma resistência elétrica e um capacitor, conforme pode ser visto na Fig. 2.17. As resistências elétricas simulam a resistência do metal e do molde ao fluxo de calor e os capacitores simulam o efeito do calor específico.

Durante a solidificação é necessário levar em conta a diferença de calor específico entre sólido e líquido, o calor latente e a resistência de contato na interface metal/molde. Isto pode ser feito através da inserção de capacitores em paralelo no lado do metal que possam ser ligados ou desligados durante o processo, da aplicação de correntes em pontos convenientes quando a diferença de potencial atingir o valor correspondente à temperatura de fusão do metal e de uma resistência em paralelo na "interface metal/molde" que possa ser ligada durante o processo (Fig. 2.17). Instrumentos de controle e medida colocados em pontos convenientes do circuito permitem a simulação do processo de solidificação nas condições desejadas e a determinação dos parâmetros de interesse. Assim, pode-se determinar, através dos métodos analógicos, os tempos de solidificação e as distribuições de temperatura no metal e no

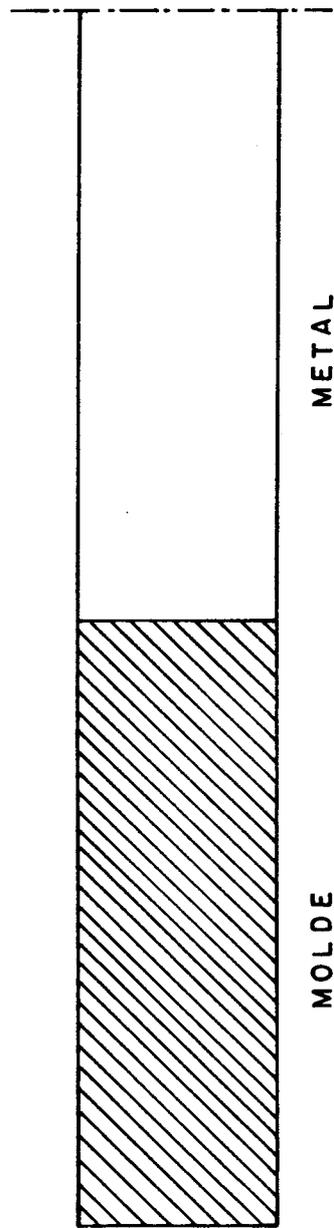
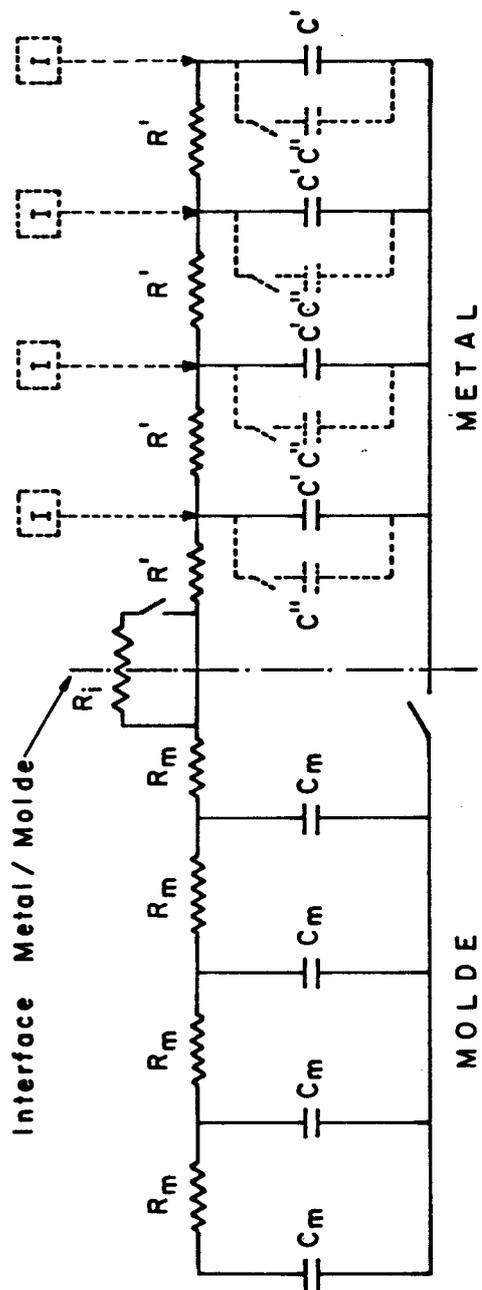


Fig. 2.17 - Representação esquemática de um circuito elétrico análogo a um sistema térmico.

R= Resistência ao Fluxo de Calor.  
 C= Capacidade Térmica.  
 C'= Capacidade Térmica do Sólido.  
 C''= Diferença de Capacidade Térmica Sólido e líquido.

molde durante o processo. E problemas difíceis de serem analisados analiticamente, como a passagem de um meio para outro e a mudança de valor de fatores de influência podem ser facilmente estudados através de variações de parâmetros elétricos como resistências, capacitores, etc.

No entanto, algumas restrições são feitas a estes métodos. A primeira delas é a necessidade de se conhecer o fluxo de calor na interface metal/molde para se estabelecer uma analogia entre os sistemas térmico e elétrico. Tal grandeza é de difícil medição e, em geral, precisa ser estimada introduzindo erros no sistema análogo. Uma outra restrição é que a precisão do método está diretamente ligada ao conhecimento preciso das propriedades térmicas dos meios envolvidos e da sua variação durante o processo. Paschkis estudou o assunto e concluiu que erros nos valores do calor específico e do calor latente influem sensivelmente nos resultados, ao passo que erros na condutibilidade térmica têm influência bem menor.<sup>74</sup> Além disso, os métodos analógicos são bastante específicos exigindo a utilização de computadores analógicos para sua aplicação.

#### 2.2.4. Métodos numéricos

Os métodos numéricos são, em geral, baseados na divisão do sistema metal/molde em pequenos intervalos de distância, de modo a se estabelecer uma malha e na substituição das equações de transferência de calor, que são equações de derivadas parciais, por equações aproximadas chamadas equações de diferenças finitas. As equações são, então, resolvidas passo a passo para pequenos intervalos de tempo e a temperatura em um determinado ponto em um determinado instante é calculada segundo os valores de temperatura, neste ponto e em pontos vizinhos, no instante anterior.<sup>17,30,75,76</sup>

Os precursores dos métodos numéricos foram os chamados Métodos Gráficos pelos quais a solução é obtida graficamente não envolvendo muitos cálculos.

O primeiro método gráfico, desenvolvido em 1924, a ser aplicado em problemas de fluxo de calor em regime transiente foi o de Schmidt.<sup>13,30,77</sup>

O Método Gráfico de Schmidt baseia-se na divisão do sistema em pequenos intervalos de distância ( $\Delta x$ ) e na substituição da equação 2.106 pela equação:

$$\frac{\Delta_t T}{\Delta t} = a \frac{\Delta_x^2 T}{(\Delta x)^2} \quad (2.109)$$

onde:

- $\Delta x$  = pequeno incremento em  $x$
- $\Delta t$  = pequeno incremento em  $t$
- $\Delta_x T$  = incremento na temperatura devido a  $\Delta x$  para  $t$  constante
- $\Delta_t T$  = incremento na temperatura devido a  $\Delta t$  para  $x$  constante
- $\Delta_x^2 T$  = diferença entre dois valores sucessivos de  $\Delta_x T$  devido a  $\Delta x$ .

fazendo

$$\frac{a \Delta t}{(\Delta x)^2} = \frac{1}{2} \quad (2.110)$$

a equação 2.109 pode ser escrita na forma

$$\Delta_t T = \frac{\Delta_x^2 T}{2} \quad (2.111)$$

que é facilmente representada na forma gráfica conforme pode ser visto na Fig. 2.18 onde:

$T_{g,h}$  = temperatura no ponto  $g \Delta x$  a partir da origem, após  $h \Delta t$  intervalos de tempo ( $g$  e  $h$  são números inteiros).

Então pode ser escrito:

$$\Delta_t T = T_{g,h+1} - T_{g,h} \quad (2.112)$$

$$\Delta_x T = T_{g+1,h} - T_{g,h} \quad (2.113)$$

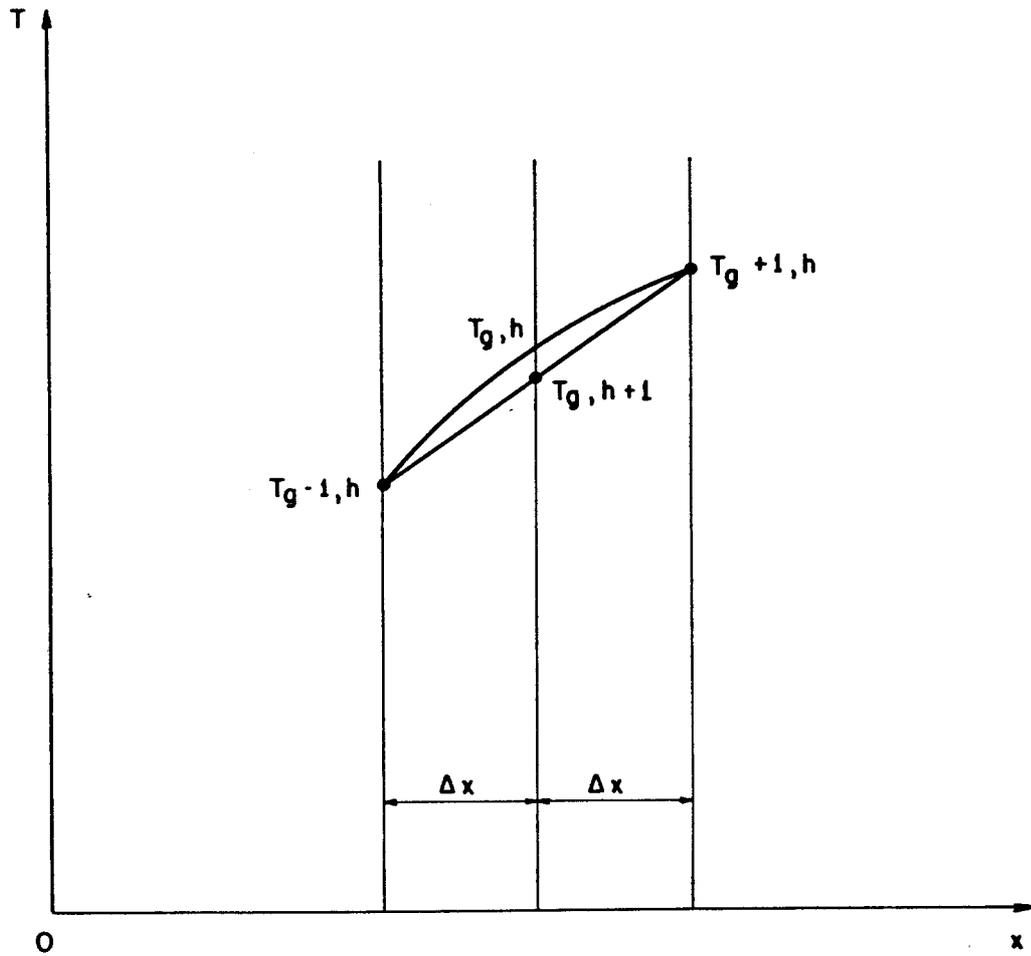


Fig. 2.18 - Representação esquemática do método gráfico de Schmidt.

$$\Delta_x^2 T = \Delta x (\Delta_x T) = (T_{g+1,h} - T_{g,h}) - (T_{g,h} - T_{g-1,h}) \quad (2.114)$$

substituindo 2.112 e 2.114 em 2.111:

$$T_{g,h+1} = \frac{1}{2} (T_{g+1,h} + T_{g-1,h}) \quad (2.115)$$

A equação 2.115 é a equação básica do método de Schmidt e permite que o problema seja resolvido graficamente. A precisão do método é tanto maior quanto menor o incremento  $\Delta x$  adotado.

O método pode ser aplicado para os casos de materiais diferentes em contato e inclusive permite que se leve em conta o efeito da interface desde que se conheça o valor do coeficiente de transferência de calor. É um método rápido e fácil de ser aplicado mas não é muito preciso, principalmente quando os gradientes de temperatura são grandes e não leva em conta a variação das propriedades térmicas dos materiais com a temperatura.

O método de Schmidt foi usado, originalmente, para estudar o resfriamento e aquecimento de materiais com geometria plana. Mais tarde, em 1958, Longwell adaptou o método de Schmidt para o estudo da solidificação de metais em moldes com geometrias planas, cilíndricas e esféricas.<sup>78</sup> Este método será descrito com mais detalhe posteriormente, no item relativo à geometria cilíndrica.

A partir dos métodos gráficos foram desenvolvidos os métodos que hoje são conhecidos como métodos numéricos.<sup>17</sup> O primeiro destes métodos a ser empregado na solução de problemas de transferência de calor em regime transiente foi o desenvolvido por Dusimberre em 1945.<sup>79,80</sup>

O Método de Dusimberre, como todos os outros métodos numéricos baseados em diferenças finitas, consiste em impor ao sistema a ser estudado uma malha e aplicar as equações de fluxo de calor em regime permanente entre um ponto da malha e os pontos vizinhos, em pequenos intervalos de tempo. Na Fig. 2.19 é apresentada uma malha para um sistema com fluxo unidirecional de calor, dividida em elementos com comprimento e largura  $\Delta x$  constante e espessura igual à unidade.

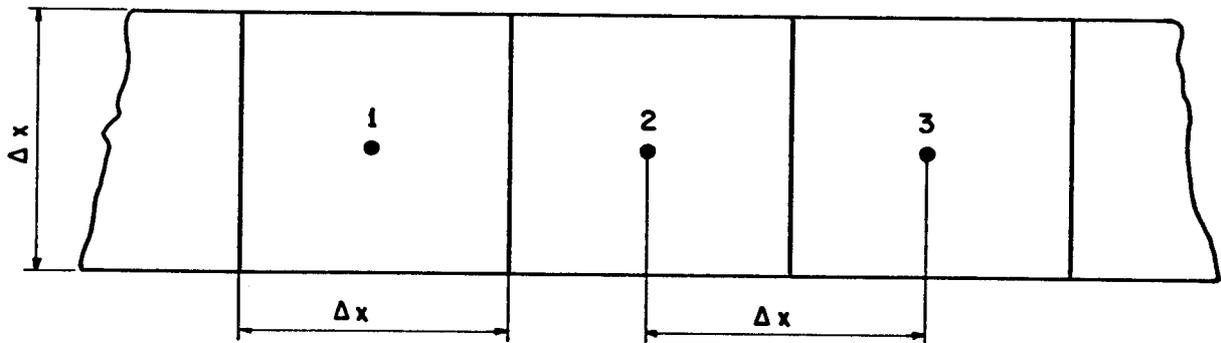


Fig. 2.19 - Representação esquemática de uma malha para aplicação do Método de Dusimberre.

Considerando um intervalo de tempo ( $\Delta t$ ) bem pequeno e chamando de  $T_n$  as temperaturas em um instante de referência e  $T'_n$  as temperaturas no instante seguinte, depois de decorrido um intervalo de tempo  $\Delta t$  ( $n = \text{número do elemento da malha}$ ), o balanço térmico para um elemento da malha (por exemplo em  $n=2$ ) entre dois instantes será da forma:

$$k_{12} (T_1 - T_2) \Delta t + k_{32} (T_3 - T_2) \Delta t = C_2 (T'_2 - T_2) \quad (2.116)$$

onde:

$k_{12}$  e  $k_{32}$  = condutâncias nos trechos 1-2 e 3-2

$C_2$  = capacidade calorífica do elemento 2.

No caso de um único material, homogêneo e para o elemento quadrado considerado:

$$k_{12} = k_{21} = k = \text{condutibilidade térmica do material}$$

e, sendo o volume do elemento igual a  $\Delta x^2$ :

$$C_2 = c\rho (\Delta x)^2 \quad (2.117)$$

logo, a equação 2.116 pode ser escrita na seguinte forma:

$$(T_1 - T_2) k \Delta t + (T_3 - T_2) k \Delta t = c\rho (\Delta x)^2 (T'_2 - T_2) \quad (2.118)$$

Usando o seguinte parâmetro adimensional:

$$M^* = \frac{c\rho(\Delta x)^2}{k \Delta t} = \frac{(\Delta x)^2}{a \Delta t} \quad (2.119)$$

a equação 2.118 pode ser escrita na forma:

$$(T_1 - T_2) + (T_3 - T_2) = M^* (T'_2 - T_2) \quad (2.120)$$

e

$$T'_2 = \frac{T_1 + T_3 + (M^* - 2) T_2}{M^*} \quad (2.121)$$

Da equação 2.121 pode-se concluir que, se  $M^* < 2$  quanto maior  $T_2$  menor será  $T_2'$  o que contraria a segunda lei da termodinâmica, logo deve-se impor:

$$M^* \geq 2 \quad (2.122)$$

Da equação 2.119 fica claro que fixando  $M^*$  e  $\Delta x$ , o valor de  $\Delta t$  fica determinado. Segundo Dusimberre, os valores de  $M^*=3$  permitem obter resultados bastante precisos e a precisão aumenta com o aumento dos valores de  $M^*$  mas aumenta também a quantidade de cálculos envolvidos. É interessante observar que para  $M^*=2$  o Método de Dusimberre se reduz ao Método de Schmidt.

O método de Dusimberre pode ser também aplicado para os casos de materiais diferentes em contato e permite que se considere o efeito da resistência de contato, desde que se conheça o valor do coeficiente de transferência de calor. E apesar de ter sido desenvolvido inicialmente para o estudo de resfriamento e aquecimento de materiais, Dusimberre estendeu seu método para o caso de solidificação de metais utilizando um artifício proposto por Eyres et al, segundo o qual o calor latente é substituído por uma quantidade de calor específico equivalente.<sup>13,81</sup>

A grande vantagem do método de Dusimberre é o fato de envolver cálculos simples (mas exaustivos) que podem ser realizados sem o uso de computadores.

No entanto foi com o advento dos computadores e com os constantes progressos nesta área que os métodos numéricos passaram a ser mais aplicados permitindo considerações mais gerais. Destes um dos mais conhecidos, e, desenvolvido em 1954 especialmente para o estudo da solidificação, resfriamento e reaquecimento de lingotes de aço com geometria retangular, é o Método de Sarjant e Slack.<sup>82</sup> Este método é também baseado na solução das equações por diferenças finitas e utiliza a aproximação proposta por Eyres et al para levar em conta a evolução de calor latente durante a solidificação. Sarjant e Slack adotaram as seguintes hipóteses simplificadoras no desenvolvimento do seu método:

- (a) Evolução isotérmica do calor latente.
- (b) Densidades do molde e do metal constantes durante o processo.

- (c) O metal entra em contato com o molde instantaneamente, não havendo correntes de convecção forçada.
- (d) O superaquecimento é dissipado apenas por condução não havendo convecção natural no metal líquido.
- (e) O "gap" de ar na interface metal/molde se forma após um tempo determinado, sendo adotado 3 minutos para lingotes até 8 toneladas.
- (f) O calor é extraído uniformemente através de todas as faces do molde.
- (g) Perdas longitudinais de calor são desprezadas.

O Método de Sarjant e Slack permite que se leve em conta a variação das propriedades térmicas do metal e do molde com a temperatura e têm servido de base para o desenvolvimento de vários outros métodos numéricos para o estudo da solidificação de metais. Como estes métodos são mais gerais, permitindo inclusive a análise da solidificação em moldes cilíndricos eles serão analisados posteriormente no item relativo aos sistemas com geometrias cilíndricas.

Atualmente têm surgidos alguns trabalhos que utilizam as técnicas de cálculo numérico associadas aos métodos analíticos aproximados (métodos do perfil integral) para o estudo da solidificação. Entre estes pode ser citado, por exemplo, o Método de Bell, baseado no de Goodman, já citado anteriormente.<sup>83</sup>

Os métodos numéricos permitem que se leve em consideração condições de ordem física mais próximas da realidade que os métodos analíticos, no entanto, são métodos bastante específicos e isto é em geral obtido às custas de um intenso e difícil trabalho de programação, do uso de computadores com alta capacidade e tempo relativamente alto de operação.

#### 2.2.5. Métodos experimentais

Além dos trabalhos desenvolvidos com base na aplicação dos métodos já citados muitos outros têm sido realizados visando a análise experimental do processo de solidificação, permitindo, eventualmente, o estabelecimento de modelos aplicáveis a casos reais.

Dentre os que estabeleceram modelos para determinação dos tempos e velocidades de solidificação de peças com geometria plana, um dos mais interessantes é o de Pires, Prates, Biloni (1974).<sup>27,84,85</sup> No desenvolvimento do modelo foram consideradas as seguintes hipóteses:

- (a) Fluxo de calor unidirecional.
- (b) Metal e molde semi-infinitos.
- (c) Interface sólido/líquido macroscopicamente plana.
- (d) Superaquecimento do líquido desprezível.
- (e) Não ocorrem perdas de calor para o meio ambiente.
- (f) Difusividade de calor infinita no molde (molde refrigerado).
- (g) Propriedades térmicas do metal e do molde constantes com a temperatura.

Considerando a atuação de três resistências térmicas atuando durante a solidificação (devido ao metal, ao molde e à interface metal/molde) e analisando resultados experimentais os autores chegaram à seguinte equação:

$$t = \alpha S^2 + \beta S \quad (2.123)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são os mesmos já definidos nas equações 2.61 e 2.62.

Posteriormente esta equação foi deduzida analiticamente por A. Garcia e M. Prates.<sup>28,44</sup>

As velocidades de solidificação podem ser determinadas fazendo-se:

$$v = \frac{1}{\frac{dt}{dS}} \quad (2.124)$$

Este método não permite a determinação da distribuição de temperaturas no sistema metal/molde.

Outro modelo importante é o de Gulyeaev que permite a determinação do tempo total de solidificação de peças fundidas de

grandes dimensões e geometrias simples (retangulares, cilíndricas e esféricas), através da seguinte equação:<sup>7,86</sup>

$$t = 6P \cdot f \cdot e^2 \cdot 10^3 \quad [s] \quad (2.125)$$

onde:

- e = metade da dimensão principal [m]
- f = fator que depende da geometria (1 para forma retangular, 0,76 para cilíndrica e 0,47 para esférica)
- P = fator que depende do metal e do molde (determinado experimentalmente por Gulyeaev). Alguns valores são dados na Tabela 2.2.

Além desses outros trabalhos analisaram experimentalmente a influência de parâmetros específicos no processo de solidificação. Entre estes podem ser citados:

- (a) O de Berry, Kondic and Martin que analisaram a solidificação de três ligas metálicas (Al-12%Si, Cu-8,5%Al e Fe-4,2% C equivalente) em moldes (planos, cilíndricos e esféricos) de areia com várias dimensões, concluindo que o tempo total de solidificação é proporcional ao quadrado da relação entre o volume e superfície da peça.<sup>87</sup>
- (b) Os de Panchnathan, Seschadri e Ramachandran que analisaram a solidificação de duas ligas metálicas (Al-4,5%Cu, Al-12%Si e Al-10%Mg) em moldes retangulares de ferro fundido, cobre e alumínio anodizado, variando a espessura da peça fundida. Os autores mediram: o tempo de solidificação, a máxima temperatura na interface metal/molde e o tempo de início da formação do "gap" de ar na interface metal/molde e estudaram o efeito da relação entre a área da secção transversal do molde e a área da secção transversal da peça nestes parâmetros.<sup>88,89</sup>
- (c) O de Srinivasan, Seshadri e Ramachandran que analisaram, utilizando a técnica de medida de temperaturas, a extração de calor durante a solidificação em função da geometria e do material do molde. Os autores vazaram o alumínio e a liga Al-12%Si em moldes de cobre e ferro fundido com geometrias quadradas, retangulares e cilíndricas.<sup>90</sup>

METAL/LIGA	MOLDE	P
Aço carbono	- areia	0,60
	- ferro fundido	0,15
Alumínio	- areia	0,40
	- ferro fundido	0,10
Ferro fundido cinzento	- areia	2,04
	- ferro fundido	0,21
Ferro fundido maleável	- areia	0,82
	- ferro fundido	0,25
Latão	- areia	0,31
	- ferro fundido	0,17

TABELA 2.2 - Valores experimentais do parâmetro "P" da equação de Gulyeaev.

- (d) O de Jamar que analisou os tempos de solidificação de peças fundidas com diferentes geometrias mas mesma relação entre volume e área superficial.<sup>91</sup>
- (f) O de Garcia e Prates que propuseram uma forma experimental para determinar a condutância térmica metal/molde para solidificação em moldes com geometria plana, refrigerados ou maciços.<sup>47</sup>

Existem ainda os trabalhos de Sciama que, apesar de ter tratado também geometrias planas, abordou de forma interessante as geometrias cilíndricas e portanto seus trabalhos serão analisados mais a frente no item relativo a estas últimas.

### 2.3. SISTEMAS METAL/MOLDE COM GEOMETRIA CILÍNDRICA

A forma cilíndrica, apesar de geometricamente simples, apresenta, em relação à plana, maiores dificuldades matemáticas para a análise da transferência de calor. Já em 1947 Carslaw e Jaeger afirmaram em seu trabalho sobre condução de calor que "para regiões limitadas interna ou externamente por uma superfície cilíndrica, mesmo com temperatura constante, somente soluções aproximadas são disponíveis".<sup>29</sup> Assim sendo os métodos desenvolvidos para o estudo da solidificação em sistemas metal/molde com geometria cilíndrica podem ser classificados em:

- Analíticos aproximados
- Numéricos
- Experimentais

A seguir serão apresentadas as principais soluções obtidas para esta geometria utilizando estes métodos de análise.

#### 2.3.1. Métodos analíticos aproximados

No desenvolvimento das soluções através dos métodos analíticos aproximados são, em geral, consideradas as seguintes hipóteses simplificadoras:

- (a) O fluxo de calor é sempre unidirecional (radial).
- (b) Interface metal/molde circular.
- (c) O molde é um absorvedor perfeito de calor (molde refrigerado).
- (d) O metal entra em contato com molde instantaneamente, não havendo correntes de convecção forçada (despreza-se o efeito de vazamento).
- (e) Metal líquido à temperatura constante igual à temperatura de fusão.
- (f) Propriedades térmicas dos materiais constantes.

Desta forma pode-se considerar que a extração de calor do metal líquido durante a solidificação se dá por condução na camada solidificada e por transferência newtoniana entre metal e fluido de refrigeração.

Considerando o sistema de referência apresentado na Fig. 2.20, a equação da condução de calor na camada pode ser escrita como:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (2.126)$$

ou

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (2.127)$$

na interface sólido/líquido ( $r=r_f$ ), o seguinte balanço térmico pode ser feito:

$$\left[ \begin{array}{l} \text{FLUXO DE CALOR} \\ \text{DEIXANDO A IN-} \\ \text{TERFACE POR CON-} \\ \text{DUÇÃO NO SÓLI-} \\ \text{DO} \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{l} \text{FLUXO DE CALOR} \\ \text{DO METAL LÍQUI-} \\ \text{DO CHEGANDO À} \\ \text{INTERFACE} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} \text{RAZÃO DE} \\ \text{TRANSFERÊNCIA} \\ \text{DE CALOR DU-} \\ \text{RANTE A SOLI-} \\ \text{DIFICAÇÃO} \end{array} \right]$$

(2.128)

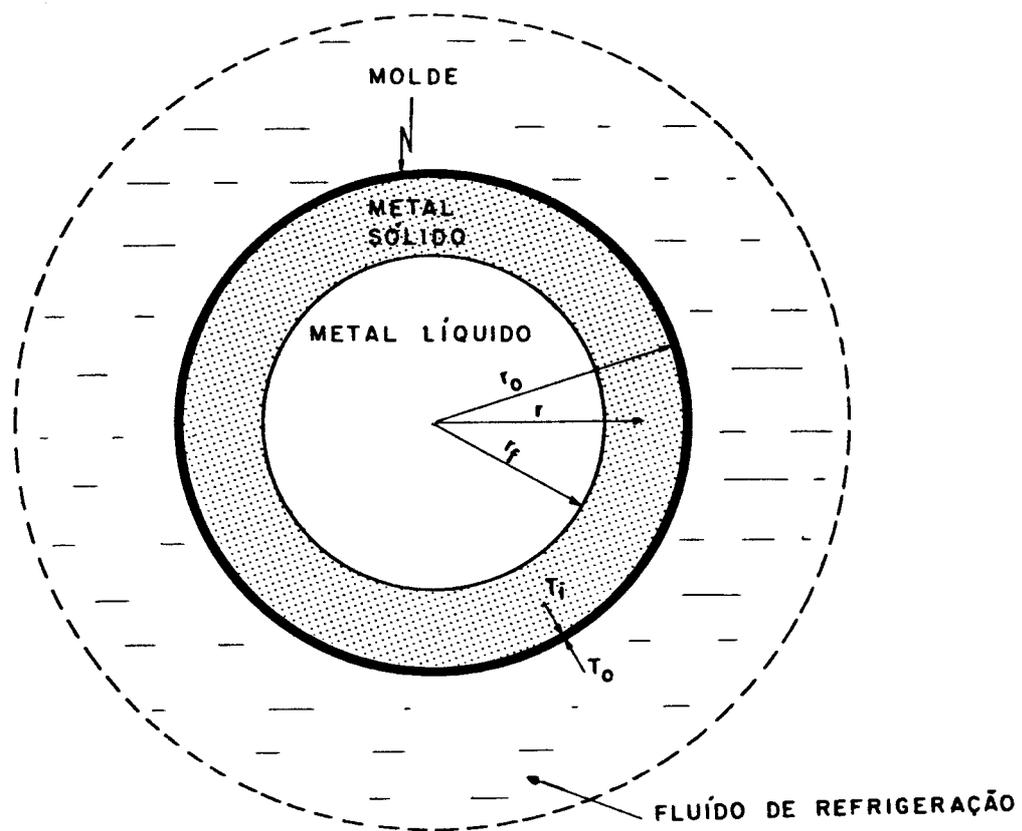


Fig. 2.20 - Representação esquemática do sistema metal/molde cilíndrico em um instante qualquer do processo de solidificação.

onde

$$\begin{bmatrix} \text{RAZÃO DE TRANS} \\ \text{FERÊNCIA DE CA} \\ \text{LOR DURANTE A} \\ \text{SOLIDIFICAÇÃO} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{VELOCIDADE DE} \\ \text{AVANÇO DA} \\ \text{FRENTE DE} \\ \text{SOLIDIFICAÇÃO} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{CALOR} \\ \text{LATENTE} \\ \text{DE} \\ \text{SOLIDIFICAÇÃO} \end{bmatrix} \quad (2.129)$$

logo:

$$\left( -k \frac{\partial T_s}{\partial r} \right) - \left( -k \frac{\partial T_l}{\partial r} \right) = -H\rho \frac{dr_f}{dt} \quad (2.130)$$

como não há superaquecimento:

$$-k \frac{\partial T_l}{\partial r} = 0 \quad (2.131)$$

tem-se:

$$q_{r_f} = -k \left( \frac{\partial T_s}{\partial r} \right)_{r=r_f} = -H\rho \frac{dr_f}{dt} \quad (2.132)$$

E na interface metal/molde ( $r=r_o$ ) pode-se fazer o seguinte balanço térmico:

$$q_{r_o} = -k \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=r_o} = h (T_i - T_o) \quad (2.133)$$

Um dos primeiros trabalhos analíticos realizados para estudar a solidificação em geometrias cilíndricas foi o de London e Seban em 1943.<sup>55</sup> Estes autores estudaram a formação de gelo em moldes cilíndricos refrigerados desprezando o efeito do calor específico, ou seja, considerando que a energia necessária para resfriar o metal já solidificado é desprezível em relação ao calor latente de fusão. Tal simplificação permite que se considere um perfil de temperaturas linear no metal solidificado. Desta forma po-

de-se considerar que o fluxo de calor por condução ( $q'_s$ ) no metal sólido é dado por:

$$q'_s = -k A \frac{dT}{dr} \quad (2.134)$$

ou

$$q'_s = -k 2\pi r \ell \frac{dT}{dr} \quad (2.135)$$

Integrando de  $r_f$  a  $r_o$ :

$$q'_s = \frac{T_f - T_i}{\frac{\ln \frac{r_o}{r_f}}{2k\pi\ell}} \quad (2.136)$$

Na interface metal/molde o fluxo de calor ( $q'_i$ ) é dado por:

$$q'_i = h A_o (T_i - T_o) \quad (2.137)$$

ou

$$q'_i = h 2\pi r_o \ell (T_i - T_o) \quad (2.138)$$

Como:

$$q'_s = q'_i = q' \quad (2.139)$$

somando-se as equações 2.136 e 2.138 :

$$q' = \frac{(T_f - T_o)}{\frac{\ln \frac{r_o}{r_f}}{2k\pi\ell} + \frac{1}{2h\pi r_o \ell}} \quad (2.140)$$

Na interface sólido/líquido o fluxo de calor ( $q'_\ell$ ) é dado por:

$$q'_\ell = -2\pi\rho H \ell r \frac{dr}{dt} \quad (2.141)$$

Igualando as equações 2.140 e 2.141:

$$\frac{dr}{dt} = - \frac{1}{\rho H r} \cdot \frac{(T_f - T_o)}{\frac{\ln \frac{r_o}{r_f}}{k} + \frac{1}{h r_o}} \quad (2.142)$$

Definindo os seguintes adimensionais:

$$r_a = \frac{r_f}{r_o} \quad (2.143)$$

$$R_a = \frac{h r_o}{k} \quad (2.144)$$

$$t_a = \frac{(T_f - T_o) k}{\rho H r_o^2} t \quad (2.145)$$

a equação 2.142 pode ser reescrita na seguinte forma:

$$dt_a = \left( \ln r_a - \frac{1}{R_a} \right) r_a dr_a \quad (2.146)$$

As condições de contorno são:

$$\text{para } t = 0, \quad r_f = r_o \quad (2.147)$$

logo,

$$r_a = 1 \quad (2.148)$$

e

$$\text{para } t = t_t, \quad r_f = 0 \quad (2.149)$$

logo,

$$r_a = 0 \quad (2.150)$$

Integrando a equação 2.146:

$$\int_0^{t_a} dt_a = \int_1^{r_a} \left( \ln r_a - \frac{1}{R_a} \right) r_a dr_a \quad (2.151)$$

e

$$t_a = \frac{r_a^2}{2} \ln r_a + (1 - r_a^2) \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{2R_a} \right) \quad (2.152)$$

A solução de London e Seban é bastante simples, mas, devido às hipóteses assumidas, não apresenta bons resultados para o caso da solidificação de metais onde o calor específico não pode ser desprezado.

Posteriormente, em 1958, Adams propôs outra solução analítica aproximada, usando a mesma técnica utilizada na análise da geometria plana.<sup>38</sup> A equação de Adams é obtida através da expansão das equações diferenciais em séries de potência e a solução é obtida por aproximações sucessivas. A forma da equação é:

$$\begin{aligned} \frac{(T_f - T_o) c_s}{H} &= \frac{r_f}{r_o} \ln \left( \frac{r_o}{r_f} \right) \left[ \frac{r_o}{a} \frac{dr_f}{dt} \right] + \\ &+ \left( \frac{1 - \left(\frac{r_f}{r_o}\right)^2 - 2 \left(\frac{r_f}{r_o}\right)^2 \ln \left(\frac{r_o}{r_f}\right) \cdot \left(1 - \ln \frac{r_o}{r_f}\right)}{4 \ln \frac{r_o}{r_f}} \right) \left( \frac{r_o}{a} \frac{dr_f}{dt} \right)^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.153)$$

A equação de Adams não leva em conta a resistência térmica da interface metal/molde e não pode ser integrada analiticamente, exigindo integração numérica. Utilizando este processo Adams obteve curvas do inverso da velocidade de solidificação em função do raio e integrando numericamente estas curvas obteve tempos totais de solidificação em função do raio da peça. As curvas obtidas por Adams são apresentadas nas Fig. 2.21 e 2.22. Um aspecto inte-

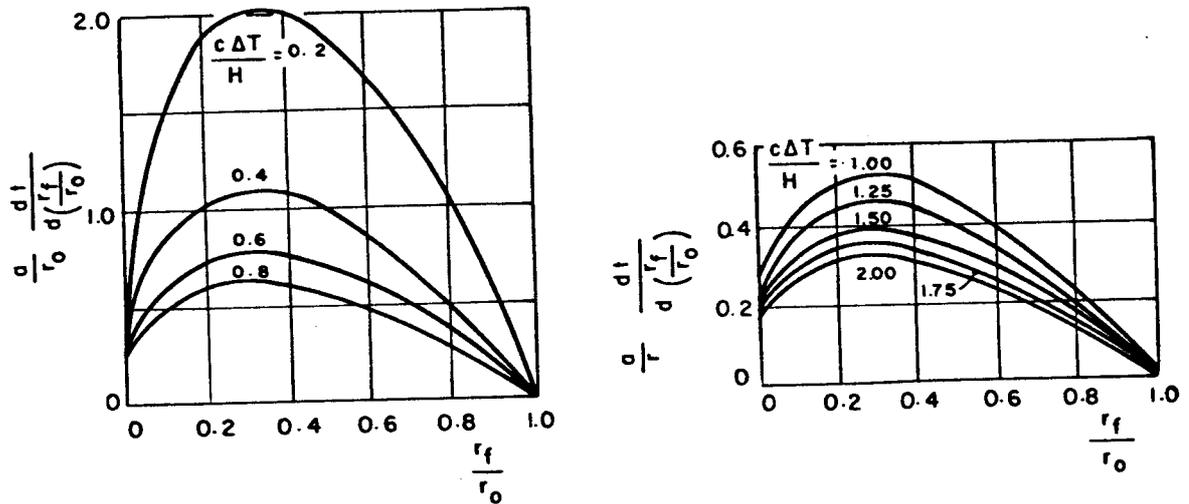


Fig. 2.21 - Curvas do inverso da velocidade de solidificação em função do raio obtidas por Adams.

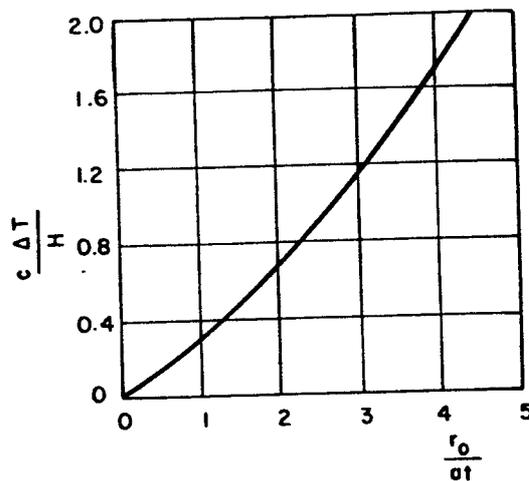


Fig. 2.22 - Curvas do tempo total de solidificação em função do raio obtidas por Adams.

ressante da solução de Adams é o fato de mostrar que a velocidade de avanço da interface sólido/líquido decresce no início da solidificação e volta a crescer no final do processo.

Adams analisou, da mesma forma, a solidificação em geometrias esféricas.

Em 1971 Shih e Tsay apresentaram um método iterativo que permite a determinação de soluções sucessivas para o tempo de solidificação em função da camada solidificada e do perfil de temperaturas.<sup>92</sup>

Shih e Tsay, partiram das seguintes equações e condições de contorno:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right), \text{ em } r_f \leq r \leq r_o \quad (2.154)$$

$$r_f = r_o, \text{ em } t = 0 \quad (2.155)$$

$$\frac{\partial r_f}{\partial t} = \frac{k}{\rho H} \frac{\partial T}{\partial r}, \text{ em } r = r_f \quad (2.156)$$

$$T = T_f, \text{ em } r = r_f \quad (2.157)$$

e

$$q = -k \frac{\partial T}{\partial r} = h (T_i - T_o), \text{ em } r = r_o \quad (2.158)$$

Definindo as seguintes grandezas adimensionais:

$$T^* = \frac{T - T_f}{T_f - T_o} \quad (2.159)$$

$$X = \ln \left( \frac{1}{r_a} \right) \quad (2.160)$$

onde  $r_a$  é o adimensional definido na equação 2.143.

$$x = \ln \left( \frac{r_0}{r} \right) \quad (2.161)$$

$$\gamma = \frac{c (T_f - T_0)}{H} \quad (2.162)$$

ou

$$\gamma = \frac{1}{\frac{H}{c(T_f - T_0)}} = \frac{1}{H^*} \quad (2.163)$$

$$\delta = \frac{k}{hr_0} \quad (2.164)$$

$$T_i^* = \frac{T_i - T_f}{T_f - T_0} \quad (2.165)$$

as equações e condições de contorno iniciais podem ser colocadas na forma:

$$\gamma \exp(-2x) \frac{\partial T^*}{\partial t_a} = \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^2}, \quad \text{em } 0 \leq x \leq X \quad (2.166)$$

$$X = 0, \quad \text{em } t_a = 0 \quad (2.167)$$

sendo  $t_a$  o adimensional definido em 2.145 e

$$\frac{X}{dt_a} = \frac{1}{\exp(-2x)} \frac{\partial T^*}{\partial x} \Big|_x \quad (2.168)$$

$$T^*(X, t_a) = 0 \quad (2.169)$$

$$\left. \frac{\partial T^*}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{1}{\delta} (1 + T_i^*) \quad (2.170)$$

Desta forma as equações assumem uma configuração retangular.

Integrando a equação 2.166, usando as condições de contorno e fazendo mudanças de variáveis convenientes, obtêm-se:

$$t_a = \frac{1}{4} [1 + 2\delta - (1 + 2\delta + 2X) e^{-2X}] - \gamma G(X) \quad (2.171)$$

onde  $G$  é uma função de  $X$  e,

$$T^*(x, X) = 1 + \frac{(\delta+x) \exp(-2X) - \gamma \left( \frac{\partial I}{\partial X} \right)}{(\delta+X) \exp(-2X) - \gamma \left( \frac{dG}{dX} \right)} \quad (2.172)$$

onde  $I$  é uma função de  $x$  e  $X$ .

As equações 2.171 e 2.172 podem ser resolvidas por iteração. Para obter a aproximação de primeira ordem, assume-se, inicialmente, que  $\gamma=0$ , logo:

$$t_{a1} = \frac{1}{4} [1 + 2\delta - (1 + 2\delta + 2X) \exp(-2X)] \quad (2.173)$$

e

$$T_1^* = \frac{x - X}{\delta + X} \quad (2.174)$$

Estes valores iniciais são usados para determinar uma aproximação de segunda ordem para a qual:

$$t_{a2} = t_{a1} - \gamma G_1(X) \quad (2.175)$$

onde

$$G_1(X) = \frac{1}{4(\delta+X)} [1 + \delta - (1 + 2\delta)X - (1 + \delta + X) \exp(-2X)] \quad (2.176)$$

e,

$$T_2^* = -1 + \frac{(\delta + x) \exp(-2X) - \gamma \left( \frac{\partial I_1}{\partial X} \right)}{(\delta + X) \exp(-2X) - \gamma \left( \frac{\partial G_1}{\partial X} \right)} \quad (2.177)$$

onde

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_1}{\partial X} = \frac{1}{4(\delta+X)^2} & \left[ -(1 + 2\delta + 2\delta^2) + (1 + \delta + x) \exp(-2x) + \right. \\ & \left. + (\delta + x) (1 + 2\delta + 2X) \exp(-2X) \right] \end{aligned} \quad (2.178)$$

Usando o mesmo procedimento pode-se, determinar sucessivamente aproximações de maiores ordens, com complexidade matemática crescente.

Os autores compararam seu método com os resultados experimentais de London e Seban e com resultados obtidos com um método numérico concluindo que o mesmo apresenta um desvio grande no final da solidificação, mas apresenta uma boa concordância para uma determinada espessura solidificada.

Posteriormente Shih e Chou estenderam o método para o estudo de geometrias esféricas.<sup>93</sup>

Em 1974, Riley, Smith e Poots apresentaram um método, dividido em duas partes: uma primeira, para analisar o problema até uma determinada espessura solidificada e uma segunda para analisar o final da solidificação.<sup>94</sup> Este método, como o de Adams, também não considera a resistência de contato na interface metal/molde.

A primeira parte do método foi desenvolvida por Riley, baseado em um método proposto por Pedroso e Domoto para o estudo de geometrias esféricas.<sup>95,96,97</sup> Riley usou a equação da condução de calor na seguinte forma (considerando  $t_a = f(S)$ ):

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial r_a'^2} + \frac{1}{r_a'} \frac{\partial T^*}{\partial r_a'} = \frac{1}{H^*} \frac{\partial T^*}{\partial S_a} / t_a(S_a) \quad (2.179)$$

e as condições de contorno:

$$T^* = 0 \quad \text{em} \quad r_a' = 1 \quad (2.180)$$

$$T^* = 1 \quad \text{em} \quad r'_a = 1 - S_a \quad (2.181)$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial r'_a} = - \frac{dS_a}{dt_a} \quad \text{em} \quad r'_a = 1 - S_a \quad (2.182)$$

onde:

$$r'_a = \frac{r}{r_o} \quad (2.183)$$

$$S_a = \frac{r_o - r_f}{r_o} \quad (2.184)$$

e  $T^*$ ,  $H^*$  e  $t_a$  já foram definidos anteriormente, nas equações 2.159, 2.163 e 2.145.

Considerando as seguintes expansões em série de potências

$$T^* = T_o^* + \frac{1}{H^*} T_1^* + \frac{1}{H^{*2}} T_2^* + \dots \quad (2.185)$$

e

$$t_a = t_{ao} + \frac{1}{H^*} t_{a1} + \frac{1}{H^{*2}} t_{a2} + \dots \quad (2.186)$$

e substituindo em 2.179 e 2.182 obteve:

$$T^* = \frac{\ln(1-S_a\eta)}{\ln(1-S_a)} - \frac{\{ [1-S_a\eta]^2 - 1 - S_a^2 \} \ln(1-S_a\eta) + 1 - (1-S_a\eta)^2 + [(1-S_a)^2 - 1] \frac{\ln(1-S_a\eta)}{\ln(1-S_a)} }{[4 H^* (1-S_a)^3 \ln^2(1-S_a)] + O(H^{*-2})} \quad (2.187)$$

e

$$t_a = \frac{1}{4} (1-S_a)^2 [\ln^2(1-S_a) - 1] + \frac{1}{4H^*} \left[ \frac{1 - (1-S_a)^2}{\ln(1-S_a)} + 1 + (1-S_a)^2 \right] + O(H^{*-2}) \quad (2.188)$$

onde

$$\eta = \frac{1 - r'_a}{S_a} \quad (2.189)$$

e  $O(H^{*-2})$  é o erro relativo da teoria.<sup>95</sup>

A segunda parte do método, para estudar o final da solidificação quando  $S_a$  tende a 1, foi desenvolvida, utilizando as funções de Bessel e Euler. As equações obtidas foram as seguintes:

$$T^* = \frac{\ln r'_a}{\ln \Delta} - \frac{1}{2(\ln \Delta)^2} \cdot \left\{ (\ln 2 - \xi) \ln r'_a + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(j_n r'_a) \ln j_n}{[J_1(j_n)]^2 j_n^2} \right\} \quad (2.190)$$

e

$$t_a = \frac{1}{4} + \frac{1}{4H^*} + \frac{1}{4H^* \ln \Delta} + \frac{1}{8H^* (\ln \Delta)^2} \cdot \left\{ 16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln j_n}{[J_1(j_n)]^2 \cdot j_n^2} + \xi - \ln 2 \right\} \quad (2.191)$$

onde  $\xi$  é a constante de Euler,  $J_0$  e  $J_1$  são funções de Bessel de ordem zero e um respectivamente,  $j_n$  são os zeros das funções de Bessel e  $\Delta$  é dado por:

$$\Delta^2 \ln \Delta = - \frac{1}{H^*} \quad (2.192)$$

Os autores compararam seu método com os resultados obtidos através de um método numérico, concluindo que nos momentos finais da solidificação o método se torna impreciso.

Em 1977, Kern and Wells propuseram um método para o estudo da solidificação em geometrias cilíndricas, que, além de utilizar aproximações de ordem matemática considera também uma série de simplificações de ordem física, entre as quais podem ser citadas, pela importância, a consideração de perfil de temperatura linear no metal solidificado e a não consideração da resistência térmica de contato na interface metal/molde.<sup>98</sup>

O desenvolvimento do método foi baseado no seguinte balanço térmico (ver sistema metal/molde na Fig. 2.23):

$$h' A_{r_o} (T_{im} - T_o) = H\rho A_{r_f} \frac{d(r_o - r_f)}{dt} + \frac{dU}{dt} \quad (2.193)$$

onde:

$A_{r_o}$  = área de troca de calor na interface metal/molde

$A_{r_f}$  = área de troca de calor na interface sólido/líquido

$U$  = energia interna

e o coeficiente de transferência de calor  $h'$  representa a soma das resistências térmicas da camada solidificada, da parede do molde e da parede externa para o fluido de refrigeração. É importante observar que não é considerada a resistência térmica na interface metal/molde, que representa uma parcela muito importante da resistência total em processos de solidificação em sistemas metal/molde refrigerados.<sup>99</sup>

A variação da energia interna é considerada como sendo:

$$\frac{dU}{dt} = \rho c \frac{d}{dt} [V (T_f - \bar{T})] \quad (2.194)$$

onde  $\bar{T}$  é a temperatura média na camada sólida e, considerando perfil linear no sólido, foi estabelecido que:

$$(T_f - \bar{T}) = \frac{1}{2} (T_f - T_{im}) = \frac{1}{2} (T_f - T_o) \left[ \frac{1}{\frac{\bar{A}K}{A_{r_o} h' (r_o - r_f)} + 1} \right] \quad (2.195)$$

sendo  $\bar{A}$  uma área média dada por:

$$\bar{A} = \frac{A_{r_o} - A_{r_f}}{2} = \pi(r_o - r_f) \quad (2.196)$$

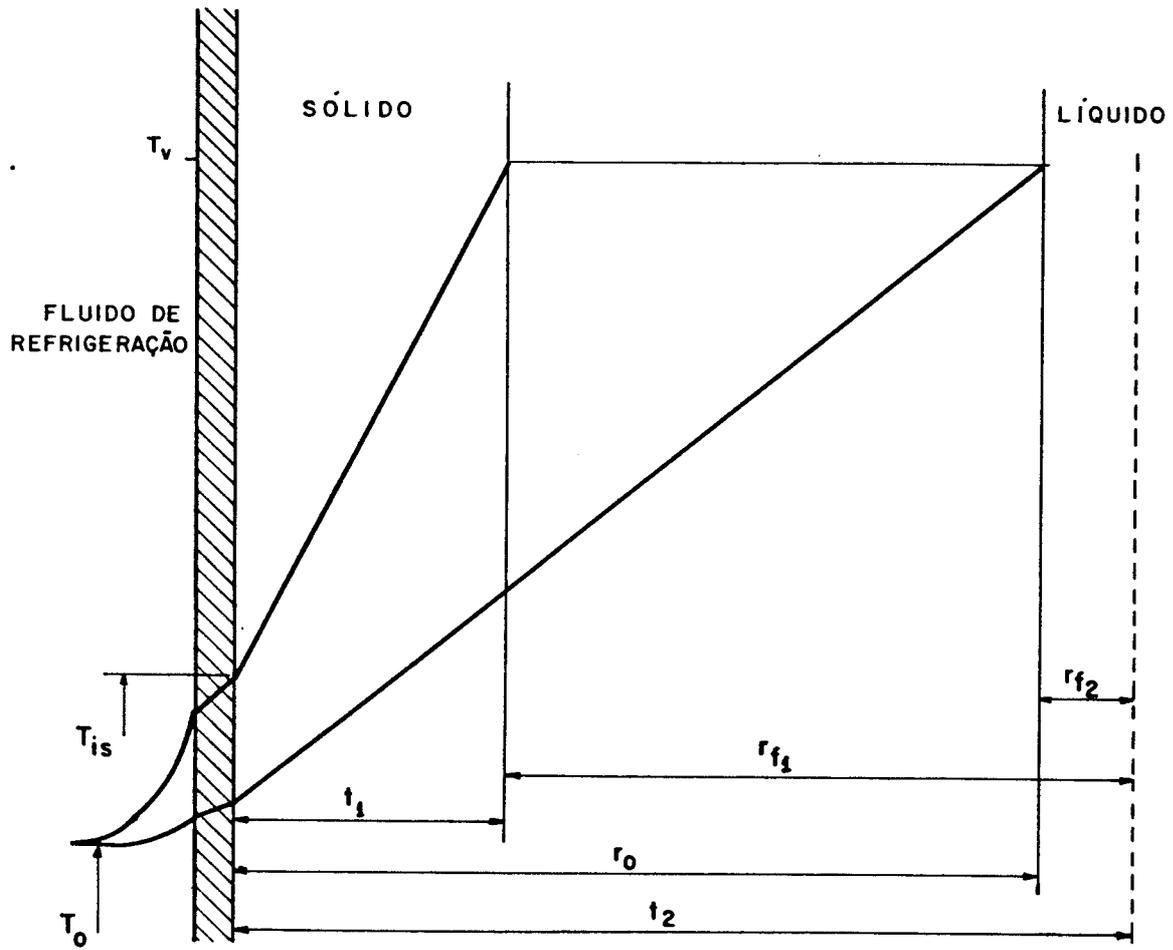


Fig. 2.23 - Sistema metal/molde segundo Kern e Wells.

e  $V$  é o volume dado por:

$$V = \pi (r_o^2 - r_f^2) \quad (2.197)$$

Usando os adimensionais:  $S_a$ ,  $R_a$ ,  $H^*$  e  $t'_a$  onde os três primeiros foram definidos nas equações: 2.184, 2.144 e 2.163 e o último é dado por:

$$t'_a = \frac{tk}{\rho c r_o^2} \quad (2.198)$$

e as equações 2.194, 2.195, 2.196 e 2.197, a equação 2.193 pode ser colocada na forma:

$$\frac{1}{\frac{1 - \frac{S_a}{2}}{R_a S_a} + 1} = 2H^* \frac{(1 - S_a) S_a}{2 - S_a} \frac{dS_a}{dt'_a} + \frac{S_a}{2(2 - S_a)} \frac{d}{dt'_a} \frac{[1 - (1 - S_a)^2] S_a R_a}{1 - S'(\frac{1}{2} - R_a)} \quad (2.199)$$

Esta equação exige uma integração para cada valor de espessura solidificada, não permitindo que se estabeleça uma equação geral que possa ser usada para determinar o tempo de solidificação em função da espessura solidificada. Kern e Wells integraram a equação 2.199 para a solidificação completa ( $S_a=1$ ) e para a solidificação de uma espessura igual à metade do raio ( $S_a=1/2$ ). Apenas como exemplo será transcrita a seguir a solução para o tempo total de solidificação ( $t_{a1}$ ):

$$t'_{a1} = \frac{H^*}{2} \left( \frac{1}{S_a} + 0,455 \right) + \frac{1}{2S_a - 1} \left[ 1 - \frac{1}{S_a - \frac{1}{2}} \ln \left( S_a + \frac{1}{2} \right) \right] + 0,114 \quad (2.200)$$

ou de forma geral:

$$t'_a = f_1(H^*, S_a) + f_2(S_a) + \text{constante} \quad (2.201)$$

Os autores, compararam seu método apenas com um método numérico e concluíram que a equação apresenta um alto grau de imprecisão. Então determinaram através de tentativa-e-erro um fator empírico capaz de ajustar a equação aos resultados numéricos. O fator usado foi  $\sqrt{H^*}$  multiplicado pelo segundo termo da equação 2.201 ou seja:

$$t'_a = f_1(H^*, S_a) + \sqrt{H^*} f_2(S_a) + \text{constante} \quad (2.203)$$

Como pode ser notado o método de Kern e Wells foi desenvolvido desprezando fatores importantes como o efeito de calor específico do material, adotando um perfil de temperatura linear na camada solidificada, e a resistência de contato na interface metal/molde. Além disso há uma forte dose de empirismo no estabelecimento da solução final o que afasta este método daqueles normalmente denominados de analíticos aproximados que se baseiam em manipulação das equações de transferência de calor através de uma série de aproximações matemáticas.

De um modo geral pode-se considerar que os métodos analíticos aproximados aplicados ao estudo de solidificação em sistemas cilíndricos foram desenvolvidos de forma genérica sem que houvesse a necessária aplicação a casos reais. As comparações para decidir sobre a validade destes métodos foi sempre feita em relação a métodos numéricos que também não foram comparados com casos experimentais. A exceção é o método de London e Seban que foi testado para a solidificação de gelo, caso mais próximo das hipóteses adotadas no seu desenvolvimento. Os demais se constituem ou em processo essencialmente matemáticos de tratar o problema ou se baseiam em hipóteses físicas não condizentes com a realidade, não sendo encontrado em nenhum deles exemplos de aplicação específica em sistemas metal/molde reais.

### 2.3.2. Métodos numéricos

Os métodos numéricos são os que mais extensivamente têm sido usados para o estudo da solidificação em geometrias cilíndricas e, da mesma forma que para as geometrias planas, foram desenvolvidos, antes dos métodos numéricos propriamente ditos, métodos gráficos. Destes, o mais importante e conhecido foi o elaborado por Longwell em 1958 baseado no método de Schmidt.<sup>78</sup>

O Método de Longwell leva em conta o superaquecimento do metal líquido e o efeito do calor específico do material. Para o desenvolvimento do seu método considerou que a transferência de calor no sólido e no líquido se dá por condução apenas e é representada pelas equações:

$$a_s \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T_s}{\partial r} \right) = \frac{\partial T_s}{\partial t}, \quad \text{em } r_f \leq r \leq r_o \quad (2.204)$$

e

$$a_l \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T_l}{\partial r} \right) = \frac{\partial T_l}{\partial t}, \quad \text{em } r \leq r_f \quad (2.205)$$

e o seguinte balanço na interface sólido/líquido:

$$k_s \left( \frac{\partial T_s}{\partial r} \right) - k_l \left( \frac{\partial T_l}{\partial r} \right) = H \rho \frac{dr_f}{dt} \quad (2.206)$$

Para a aplicação do método o raio do cilindro é dividido em pequenos incrementos ( $\Delta r$ ) iguais de tal forma que:

$$(\Delta r)^2 = 2 \frac{k}{\rho c} \Delta t \quad (2.207)$$

A construção gráfica é realizada colocando a temperatura na ordenada e  $\ln r$  na abcissa, sendo que o raio  $r$  deve satisfazer a equação 2.207.

Utilizando os termos  $X$  e  $x$  definidos nas equações 2.160 e 2.161 pode ser feita uma mudança de variáveis na equação 2.206 obtendo-se:

$$k_s \left( \frac{\partial T_s}{\partial x} \right) - k_l \left( \frac{\partial T_l}{\partial x} \right) = L \rho_s r_f^2 \frac{dX}{dt} \quad (2.208)$$

passando para a forma de diferenças finitas tem-se:

$$\sum_{1}^N \left[ k_s \left( \frac{\Delta T_s}{\Delta x_s} \right) - k_l \left( \frac{\Delta T_l}{\Delta x_l} \right) \right] = H \rho_s \bar{r}_f^2 \frac{\Delta X}{\Delta t} \quad (2.209)$$

sendo que  $\bar{r}_f$  é obtido quando se aplica a média logarítmica e é dado por:<sup>100</sup>

$$\bar{r}_f = - \frac{\Delta r_f}{\Delta X} \quad (2.120)$$

e N é o número de intervalos adotado.

A equação 2.209 deve ser satisfeita na interface e permite a solução do problema através das construções gráficas de Schmidt.<sup>77</sup>

Longwell não realizou nenhuma comparação do seu método com qualquer outro método ou resultado experimental.

Em 1962, Baxter desenvolveu um método que permite a determinação de tempos totais de solidificação (ou fusão) de materiais puros em sistemas com geometrias planas e cilíndricas, com convecção na superfície.<sup>101</sup> Este método é baseado nos métodos de Dusimberre e Eyres e necessita um computador analógico para sua aplicação.<sup>79, 80, 81</sup> Os resultados de Baxter são apresentados genericamente em forma de gráfico sem o desenvolvimento de aplicações específicas a casos reais.

Em 1963, Schniewind desenvolveu outro método numérico que permite a determinação do movimento da interface sólido/líquido e da temperatura interna do sólido em função do tempo.<sup>102</sup> Este método, que foi aplicado para geometrias planas e cilíndricas, foi desenvolvido utilizando o método de diferenças finitas para a solução das equações diferenciais. Este método leva em conta a formação de um "gap" de ar na interface metal/molde durante a solidificação e considera o coeficiente de transferência de calor como função da temperatura. Além disso, considera o molde maciço e as trocas de calor por convecção e radiação na superfície externa do mesmo através de um coeficiente de convecção natural variável com a temperatura e de uma emissividade constante.

Schniewind apresentou, como exemplo a aplicação do método para o estudo da solidificação de aço, mas não comparou seus resultados com resultados experimentais.

Em 1965, Kohn e Morillon adaptaram o método numérico de diferenças finitas de Sarjant e Slack para estudar a solidificação de lingotes cilíndricos de aço com grandes dimensões em moldes de ferro fundido.<sup>103</sup> O desenvolvimento baseia-se na variação de entalpia em um elemento de volume do metal durante a solidificação. Este método permite a determinação do tempo e da variação de temperatura durante a solidificação. Kohn e Morillon também não compararam seu método com resultados experimentais ou outros métodos.

No mesmo ano Henzel e Keverian apresentaram um método numérico, desenvolvido nos laboratórios da General Electric, para estudar a solidificação de lingotes cilíndricos de grandes dimensões solidificados em moldes de areia.<sup>104</sup> O método leva em conta a variação das propriedades físicas com a temperatura e foi comparado com alguns resultados experimentais obtidos por termometria apresentando bons resultados.

Outro método numérico bastante conhecido é o de Tao, apresentado em 1967, que, atualmente, é muito empregado como referência para comparação com métodos analíticos desenvolvidos para geometrias cilíndricas e esféricas.<sup>105,106</sup> O método é aplicado à solidificação em moldes refrigerados e considera um coeficiente de transferência de calor médio e constante entre a superfície externa do material que se solidifica e o fluido de refrigeração. Tao determinou a posição da interface sólido/líquido em função do tempo e o perfil de temperatura no sólido no instante final da solidificação para casos genéricos, sem considerar nenhum caso específico real. O autor apenas comparou alguns resultados com os obtidos através de outro método numérico (de Baxter<sup>101</sup>).

Em 1968, Sciama adaptou o método de Sarjant e Slack para estudar a solidificação de peças metálicas cilíndricas de pequenas dimensões em moldes maciços.<sup>31</sup> Sciama determinou as variações de temperatura em função do tempo em diversos pontos do sistema metal/molde, considerando o caso particular da liga eutética alumínio-silício solidificada em moldes de ferro fundido com diferentes espessuras de parede. Os resultados numéricos foram comparados com medidas experimentais obtidas por termometria apresentando uma concordância apenas razoável.

Um outro trabalho numérico foi apresentado por Niyama em 1971.<sup>107</sup> Niyama não propôs nenhum método novo apenas aplicou

o método de Dusimberre para determinar tempos de solidificação e variação da temperatura na interface metal/molde para diversos metais e comparar com os resultados de Chvórinov e Adams.

Em geral, considerando os métodos numéricos desenvolvidos para o estudo de solidificação em geometrias cilíndricas apresentados, pode-se notar que aqueles que tentam obter programas para aplicações gerais não apresentam comprovação experimental, limitando-se a apresentação de resultados genéricos obtidos variando de forma aleatória os parâmetros físicos envolvidos no processo. Tal procedimento contorna uma série de problemas de ordem prática encontrados na solidificação de metais em sistemas metal/molde, cuja influência é significativa em casos reais. Por outro lado, os métodos que apresentam comprovação experimental são específicos e desenvolvidos para um determinado caso particular não permitindo generalizações.

### 2.3.3. Métodos experimentais

Os primeiros trabalhos experimentais visando a análise da solidificação de metais em geometrias cilíndricas foram realizados por Ruddle na década de 50.<sup>108,109</sup> Ruddle cita dois métodos para o levantamento de dados experimentais em processos de solidificação:

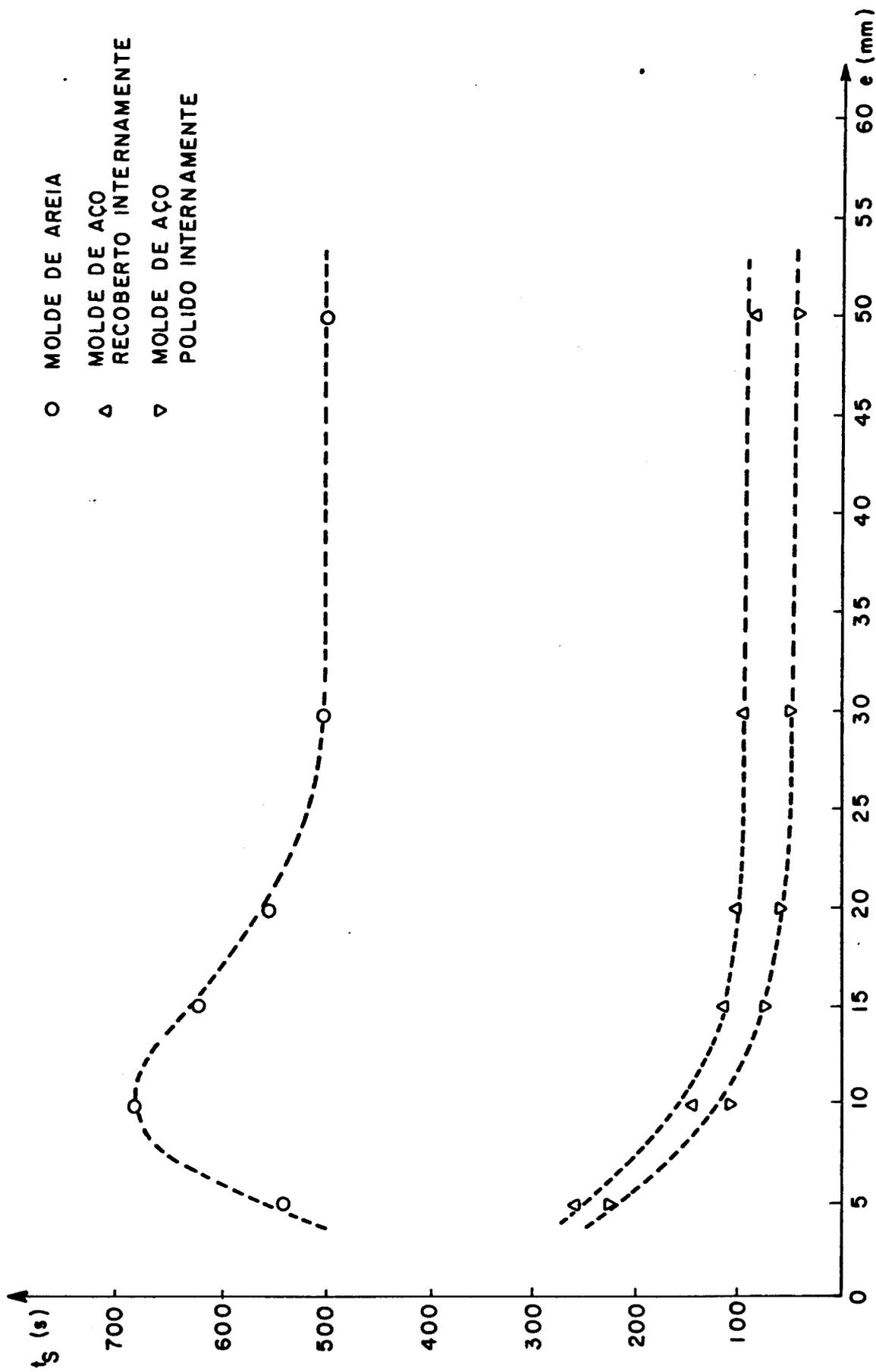
- (a) O método de "pour-out" que consiste em realizar várias experiências em iguais condições, vazando em cada uma delas o metal que ainda permanece líquido em diferentes instantes pré-determinados do processo de solidificação e medindo a espessura solidificada em cada instante. Este método, segundo Ruddle, pode levar a resultados bastante imprecisos.
- (b) A medida da temperatura em vários pontos no metal e no molde durante a solidificação, que é o método adotado por Ruddle em seus trabalhos.

Ruddle realizou uma série de experiências com alumínio e ligas de alumínio solidificadas em moldes cilíndricos de areia, determinando em cada um dos casos curvas de resfriamento, com o uso

de termopares posicionados em diferentes pontos do metal líquido . Através destas curvas determinou o tempo de solidificação para diferentes espessuras solidificadas. Através das mesmas curvas de temperatura Ruddle estimou a extração de calor por unidade de área em moldes geometrias plana e cilíndrica, determinando que a extração de calor é mais eficiente em geometrias cilíndricas.

Posteriormente, já nas décadas de 60 e 70, uma série de trabalhos experimentais foram realizados por Sciama para analisar a solidificação de ligas metálicas solidificadas em moldes maciços metálicos e de areia.<sup>20,110,111,112</sup> Sciama, em geral, trabalhou com ligas eutéticas devido à temperatura única de fundição. Seus trabalhos visaram, principalmente, a análise experimental: da validade de algumas hipóteses clássicas de transferência de calor (como, por exemplo, a consideração de uma temperatura constante na interface metal/molde durante a solidificação em moldes de areia), da influência da variação das dimensões, em peças com a mesma geometria, no tempo de solidificação, e da influência da espessura de parede do molde no tempo total de solidificação.

A partir da idéia deste último trabalho de Sciama, o autor do presente trabalho, juntamente com M. Prates realizou um estudo da influência da espessura de parede do molde no tempo de solidificação e na estrutura de fundição da liga eutética alumínio-silício solidificada em moldes de com geometria cilíndrica e plana.<sup>35,113,114,115,116</sup> Foram realizadas experiências em moldes de areia e de aço, com diferentes dimensões. No caso dos moldes de aço foram analisadas duas condições de contato térmico na interface metal/molde, ou seja, parede do molde polida e recoberta com pintura isolante. Na Fig. 2.24 são mostrados resultados experimentais obtidos com moldes cilíndricos de aço e areia de diferentes espessuras. Pode ser observado que, no caso dos moldes de areia, o tempo inicialmente cresce com o aumento da espessura de parede até que seja atingida uma espessura crítica, após o que decresce até atingir um valor constante. Este valor constante é atingido quando o molde passa a ser considerado semi-infinito, ou seja, quando a parede externa não chega a se aquecer durante o processo de solidificação. No caso dos moldes metálicos não fica evidente a existência de uma espessura crítica, já que, nos limites de espessuras de molde estudadas, o tempo decresceu sempre até atingir o valor constante. Isto pode significar que neste caso não ocorre um aumento do tempo para



Dif. 2.24 - Variação do tempo de solidificação de peças cilíndricas de silumin com a espessura (e) do molde (valores experimentais).

pequenas espessuras ou que tal ocorre para valores muito pequenos, não viáveis na prática.

A análise dos resultados experimentais obtidos e uma análise teórica dos mecanismos de transferência de calor envolvidos permitiu o desenvolvimento da seguinte equação que correlaciona o tempo de solidificação com a espessura do molde:

$$t = t_{\infty} \operatorname{erf} \left( m \frac{V_m}{V_s} \right) + t_0 \operatorname{erfc} \left( n \frac{V_m}{V_s} \right) \quad (2.211)$$

onde: " $t_0$ " é o tempo hipotético para solidificar uma peça sem a influência de qualquer espessura de molde (determinado por tentativa-e-erro a partir dos resultados experimentais; " $t_{\infty}$ " é o tempo para solidificar uma peça em molde semi-infinito (medido experimentalmente);  $(V_m/V_s)$  é a relação entre o volume do molde e o volume da peça e " $m$ " e " $n$ " são fatores que levam em conta a geometria e o material do molde. Estes fatores são apresentados na Tabela 2.3.

MATERIAL DO MOLDE	GEOMETRIA			
	CILÍNDRICA		PLANA	
	m	n	m	n
AÇO	2	1	1	1/2
AREIA	2	1/2	1	1/4

TABELA 2.3 - Valores dos fatores " $m$ " e " $n$ " em função da geometria do molde.

Na Fig. 2.25 são mostradas as curvas obtidas com a aplicação da equação 2.211 juntamente com os resultados experimentais obtidos para moldes cilíndricos, mostrando a boa concordância entre os mesmos.

Foi analisada também a influência do tempo de solidificação no refino dos cristais da fase rica em silício da liga eutética alumínio silício e os resultados experimentais são apresentados na Fig. 2.26. Pode ser observado que o número de cristais da fase

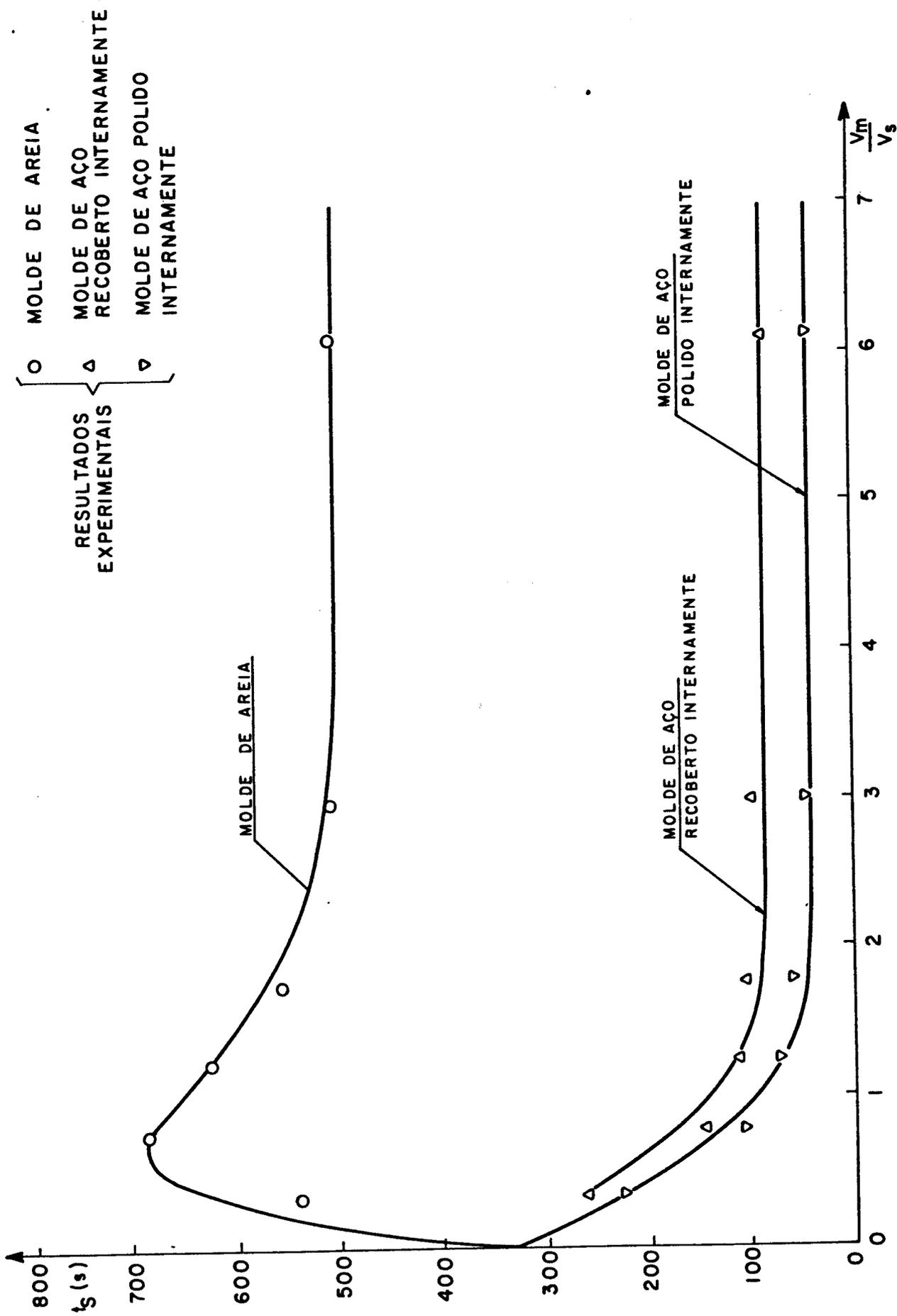


Fig. 2.25 - Curvas do tempo de solidificação de peças cilíndricas em função da relação ( $V_m/V_s$ ) obtidas com a aplicação da equação 2.211.

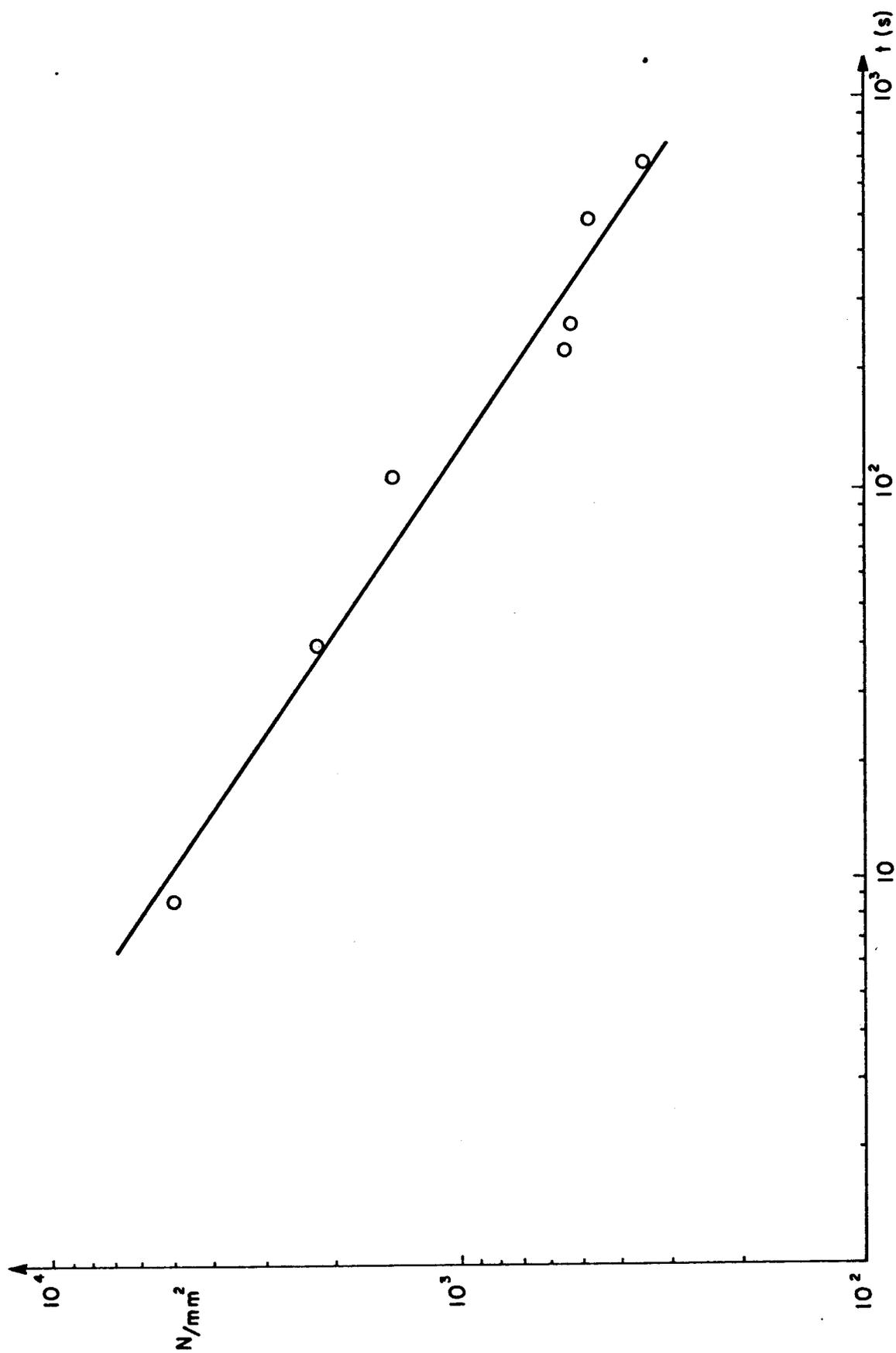


Fig. 2.26 - Variação do número de cristais da fase rica em silício (N) da liga eutética alumínio-silício em função do tempo de solidificação.

rica em silício diminui com o aumento do tempo de solidificação dando como resultado uma estrutura mais grosseira. A partir destes resultados foi determinada uma correlação entre refino da estrutura e tempo de solidificação dada por:

$$N = 25,5 \times 10^3 \cdot t^{-\frac{2}{3}} \quad (2.212)$$

onde N é o número de cristais da fase rica em silício e t é o tempo de solidificação.

Resta ainda comentar o trabalho de Alcantara que estudou experimentalmente a solidificação de metais em moldes cilíndricos externos refrigerados e em torno de moldes cilíndricos internos maciços.<sup>117</sup> As medidas de espessura solidificada em função do tempo foram feitas utilizando a técnica de "pour-out" no caso de moldes externos e de um dispositivo especial de medida no caso de moldes internos. As medidas de temperatura foram feitas com o uso de termopares. A partir dos resultados obtidos o autor propôs equações empíricas para correlacionar a espessura solidificada com o tempo. Estas equações utilizam fatores determinados experimentalmente.

#### 2.4. COMENTÁRIOS FINAIS SOBRE A ANÁLISE DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM SISTEMAS METAL/MOLDE

Da análise dos diferentes métodos para o estudo da solidificação em sistemas metal/molde apresentados, pode-se concluir que o caso de geometrias planas já foi bastante explorado, permitindo inclusive a obtenção de soluções analíticas exatas, que apresentam um alto grau de precisão quando aplicadas a problemas reais de solidificação de metais. Atualmente os trabalhos nesta área se concentram na aplicação de métodos já desenvolvidos, ou especialmente elaborados, para o estudo de processos de lingotamento contínuo.

Já o caso de geometrias cilíndricas não foi ainda bastante estudado e podem ser notadas certas particularidades nos diferentes métodos de análise. Em primeiro lugar não foram obtidas ainda soluções analíticas exatas para o problema e, segundo especialistas em transferência de calor são remotas as possibilidades de se obter tais soluções devido à complexidade das equações dife-

renciais, em coordenadas cilíndricas, e das condições de contorno envolvidas. Os métodos analíticos aproximados foram desenvolvidos ou envolvendo intensas manipulações matemáticas que às vezes obrigam o uso de computadores para sua aplicação ou a adoção de simplificações de ordem física que em geral afastam as soluções obtidas de casos reais. Além disso dadas as particularidades do problema, em geral há necessidade de se tratá-lo em duas partes, distintas obtendo-se duas equações, uma para descrever a relação tempo/espessura solidificada do início até um determinado instante e outra para descrever o final da solidificação quando o raio da interface sólido/líquido tende à zero.

Os métodos numéricos podem ser, de um modo geral, divididos em dois tipos: aqueles desenvolvidos para serem aplicados na solução de um determinado caso prático assumindo assim um caráter particular e aqueles que tentam ser gerais mas acabam sendo apenas genéricos já que estudam a variação aleatória de parâmetros físicos sem testar a solução para casos práticos reais. Tanto nos métodos numéricos como analíticos aproximados são raras as comparações das soluções obtidas com resultados experimentais. Por último, os métodos experimentais visam mais a análise da influência de certos parâmetros do processo no tempo total de solidificação e na distribuição de temperaturas e as equações eventualmente obtidas a partir desta análise têm mais a finalidade de descrever o processo em casos particulares do que realmente permitir cálculos gerais dos parâmetros de interesse (tempos e distribuições de temperatura).

## CAPÍTULO 3

### MATERIAIS E MÉTODOS

#### 3.1. METAIS UTILIZADOS

Os metais utilizados na realização dos trabalhos experimentais foram os seguintes:

- chumbo
- alumínio
- estanho

Estes metais apresentavam grau de pureza comercial e suas composições químicas são apresentadas na Tabela 3.1. A escolha destes metais foi baseada nos seguintes fatos:

- apresentam pontos de fusão relativamente baixos, facilitando a realização dos trabalhos experimentais,
- suas propriedades físicas já foram amplamente estudadas e divulgadas e
- são metais não ferrosos representativos e bastante utilizados na prática.

As propriedades físicas destes metais são apresentadas na Tabela 3.2.<sup>118, 119, 120, 121, 122</sup>

#### 3.2. TIPOS DE CONTATO TÉRMICO NA INTERFACE METAL/MOLDE

A transferência de calor na interface metal/molde está intimamente ligada às condições da superfície do molde em contato com o metal. De um modo geral os fatores que influenciam a troca de calor são: rugosidade superficial, camadas de óxidos formadas e principalmente recobrimentos protetores eventualmente aplicados.<sup>123, 124</sup> Estes recobrimentos são, em geral, de natureza isolan-

METAIS	COMPOSIÇÃO QUÍMICA (Porcentagem em Peso)												
	Al	As	Bi	Cu	Fe	Mg	Mn	Ni	Pb	Sb	Si	Sn	Zn
1. CHUMBO (*)	-	-	-	-	0,002	-	-	0,003	Resto	-	-	0,250	0,004
2. ALUMÍNIO (*)	Resto	-	-	0,002	0,090	0,190	0,002	0,004	-	-	0,120	-	0,005
3. ESTANHO (**)	-	0,006	0,003	0,013	0,003	-	-	0,001	0,028	0,021	-	Resto	-

TABELA 3.1 - Composição química dos metais utilizados na realização dos trabalhos experimentais.

(\*) Análise química fornecida pela METAL LEVE

(\*\*) Análise química fornecida pela CESBRA

METAL	PROPRIEDADES FÍSICAS				
	$C_s$ (*) [J/kg.K]	$\rho_s$ (*) [kg/m <sup>3</sup> ]	H [J/kg]	$k_s$ (*) [J/m.s.K]	$T_f$ [K]
CHUMBO	138	$11,30 \times 10^3$	$24 \times 10^3$	29,7	600
ALUMÍNIO	1076	$2,55 \times 10^3$	$390 \times 10^3$	209,0	933
ESTANHO	260	$7,20 \times 10^3$	$60 \times 10^3$	46,0	505

TABELA 3.2 - Propriedades físicas dos metais utilizados nos trabalhos experimentais.

(\*) Valores na temperatura de fusão.

te e influem diretamente na resistência térmica de contato metal/molde ou seja alteram o coeficiente de transferência de calor ( $h_i$ ). Neste trabalho, para se ter duas condições diferentes de contato térmico, foram usados:

- (a) superfície do molde polida
- (b) superfície do molde recoberta com pintura isolante à base de alumina (Dycote 39 - Foseco)

No primeiro caso a superfície do molde era polida com lixas resina das para metais (Norton K 246) sendo realizado inicialmente um pré-polimento com uma lixa grossa (granulação 80) e posteriormente um polimento final com uma lixa mais fina (granulação 320). No segundo caso a superfície era polida da mesma forma, após o polimento era aplicada, com um pulverizador, uma camada de pintura isolante e por último era feita a secagem do molde em uma estufa.

### 3.3. DISPOSITIVO DE SOLIDIFICAÇÃO RADIAL REFRIGERADO A ÁGUA

Para a realização dos trabalhos experimentais foi projetado e construído um dispositivo especial para provocar a solidificação radial de metais. Este dispositivo é constituído, basicamente, de:

- (a) forno de resistência elétrica,
- (b) molde com formato característico (para simular a geometria cilíndrica),
- (c) sistema de refrigeração,
- (d) medidor de vazão do fluido de refrigeração,
- (e) dispositivo para medida do avanço da interface sólido/líquido durante a solidificação e
- (f) sistema de medida de temperaturas.

Na Fig. 3.1 é apresentada uma fotografia do dispositivo de solidificação radial e nas Fig. 3.2 e 3.3 respectivamente um desenho em perspectiva e um corte do mesmo dispositivo.

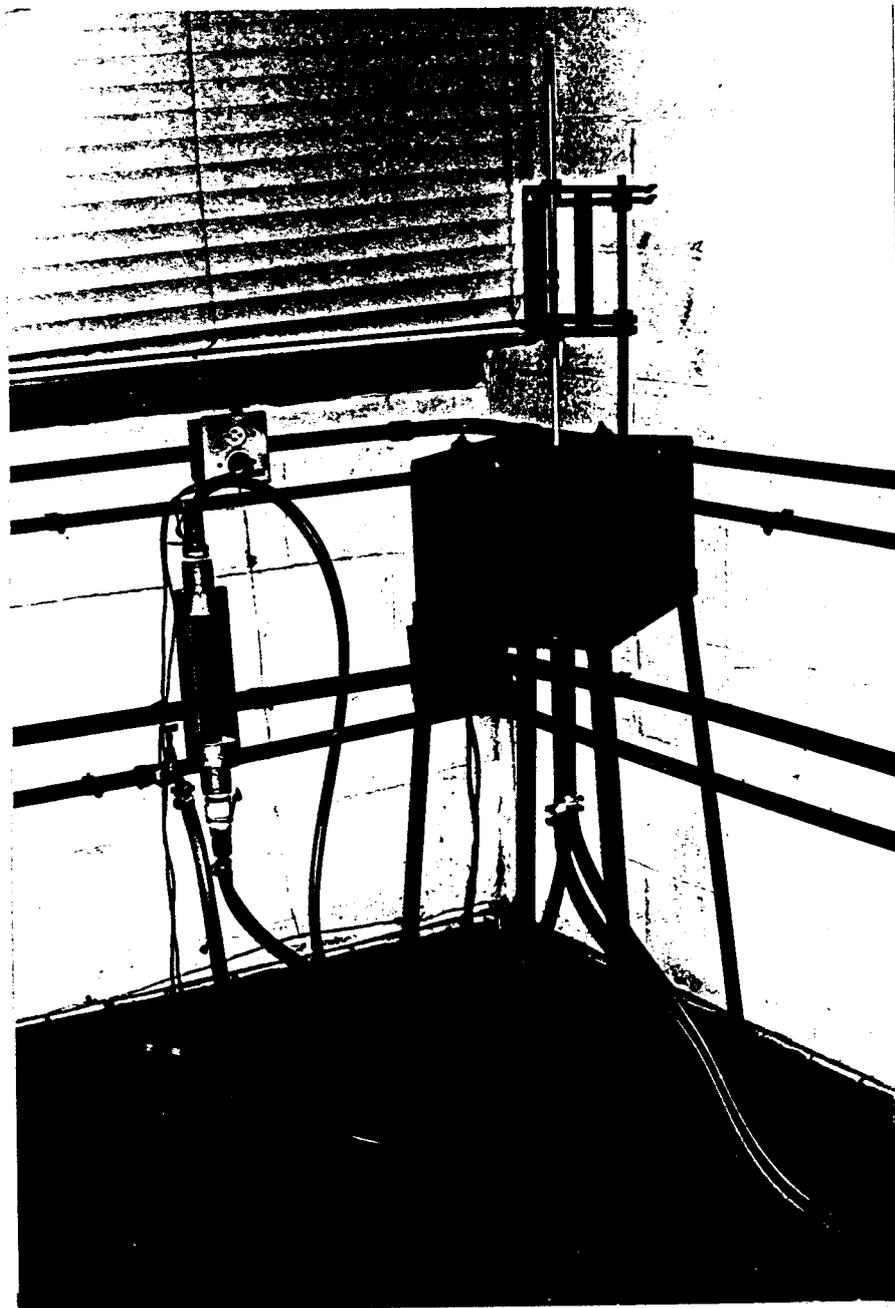


Fig. 3.1 - Fotografia do dispositivo para solidificação radial de metais refrigerado a água.

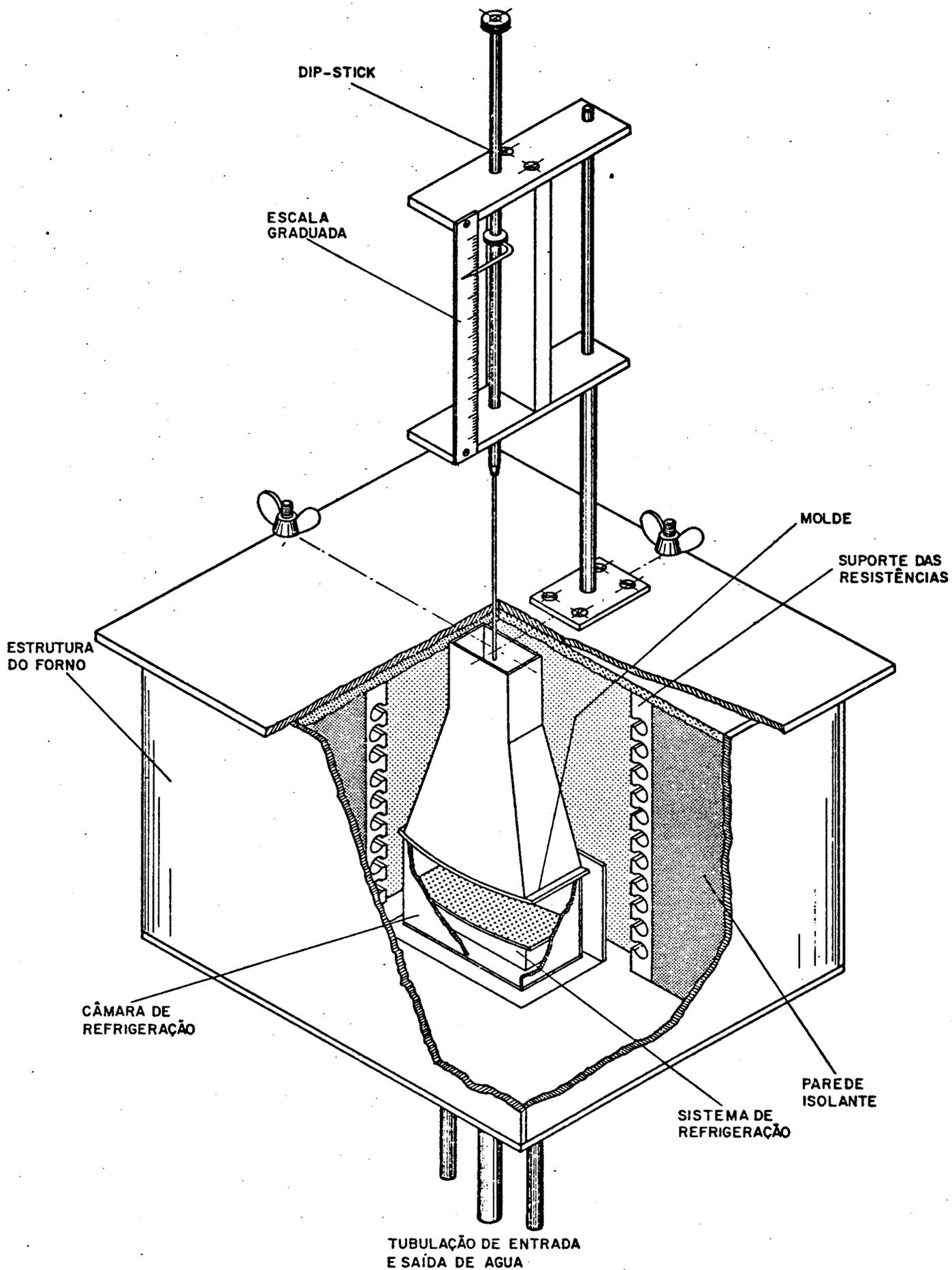


Fig. 3.2 - Desenho em perspectiva do dispositivo de solidificação radial refrigerado a água.

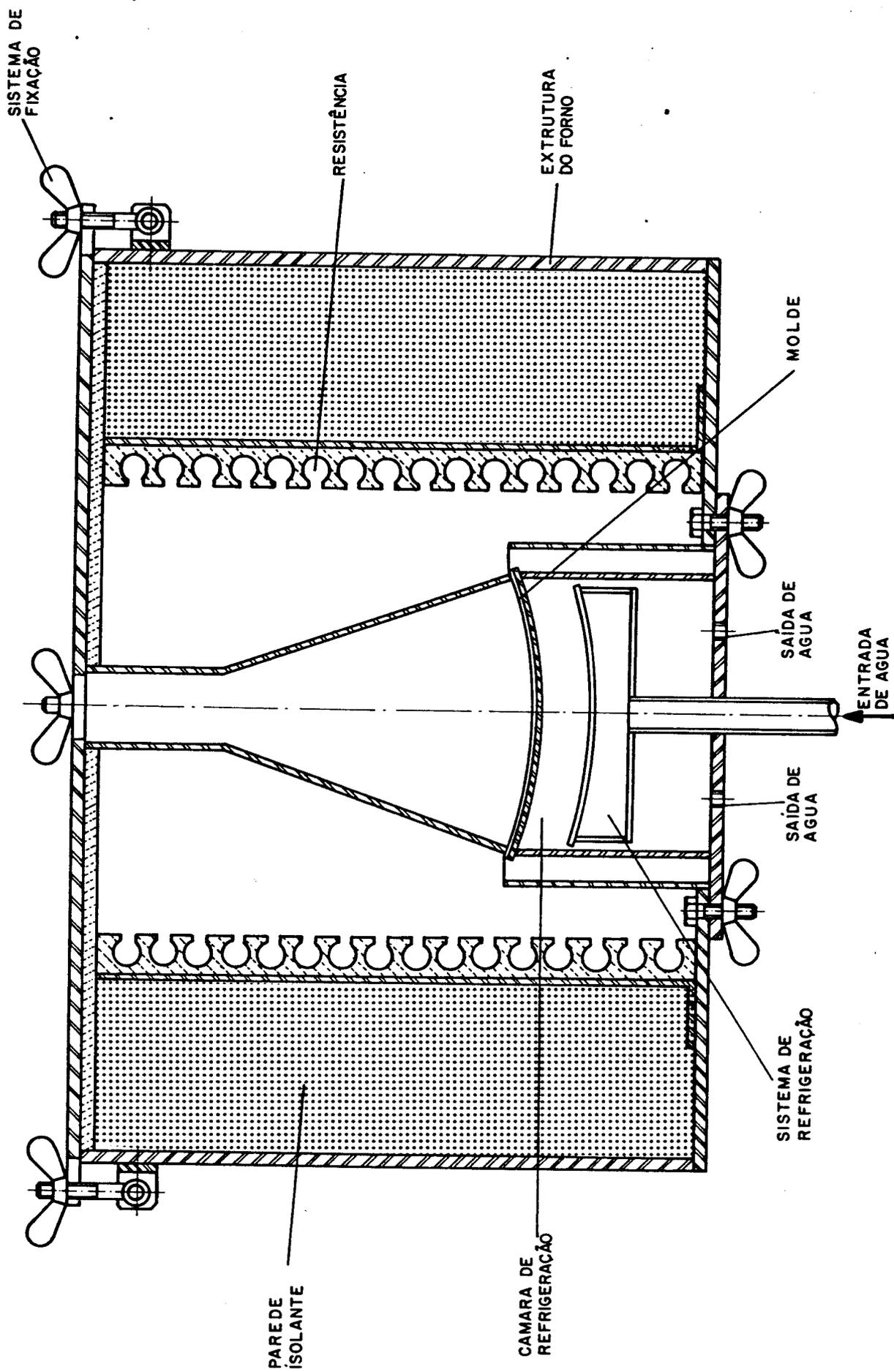


Fig. 3.3 - Representação em corte do dispositivo de solidificação radial refrigerado a água.

A seguir serão apresentados detalhes dos principais componentes do dispositivo.

(a) Forno de resistência elétrica

O forno de resistência elétrica é constituído de uma estrutura de chapas de aço ABNT 1020, com 5 mm de espessura, no interior da qual é montada uma parede isolante de tijolos refratários com 60 mm de espessura. Na superfície interna da parede isolante, são fixados os suportes das resistências elétricas, também de material refratário. A parte inferior do forno foi construída de modo a permitir a fixação do sistema de refrigeração e a parte superior, constituída de uma chapa com um orifício na região central, foi construída de modo a permitir a montagem do molde sob pressão e a fixação do sistema de medida de avanço da interface sólido/líquido.

As resistências do forno foram feitas com fio de níquel-cromo (Kanthal) nº 19 com resistividade de 1,69 ohm.m. Foram usados 19 m de fio de modo a se ter uma potência máxima de 1.5 kW, suficiente para fundir os metais escolhidos.

O controle da potência do forno foi feito com o uso de um variador de voltagem (VARIAC) com as seguintes características:

Voltagem: 0 - 240 V

Corrente máxima: 25 A

Potência máxima: 6 kVA

Os detalhes do forno podem ser observados nas Fig. 3.2 e 3.3.

(b) Molde

O molde foi construído com forma e dimensões convenientes para representar a geometria cilíndrica e permitir as medidas do avanço da interface sólido/líquido e dos perfis de temperatura, em vários pontos do metal, durante a solidificação. Isto foi conseguido tomando-se uma secção de um cilindro com a forma mostrada na Fig. 3.4. Baseado nesta forma o molde foi construído em duas partes independentes conforme pode ser observados nas Fig. 3.5 e 3.6. A primeira parte, formada pelas paredes laterais do molde,

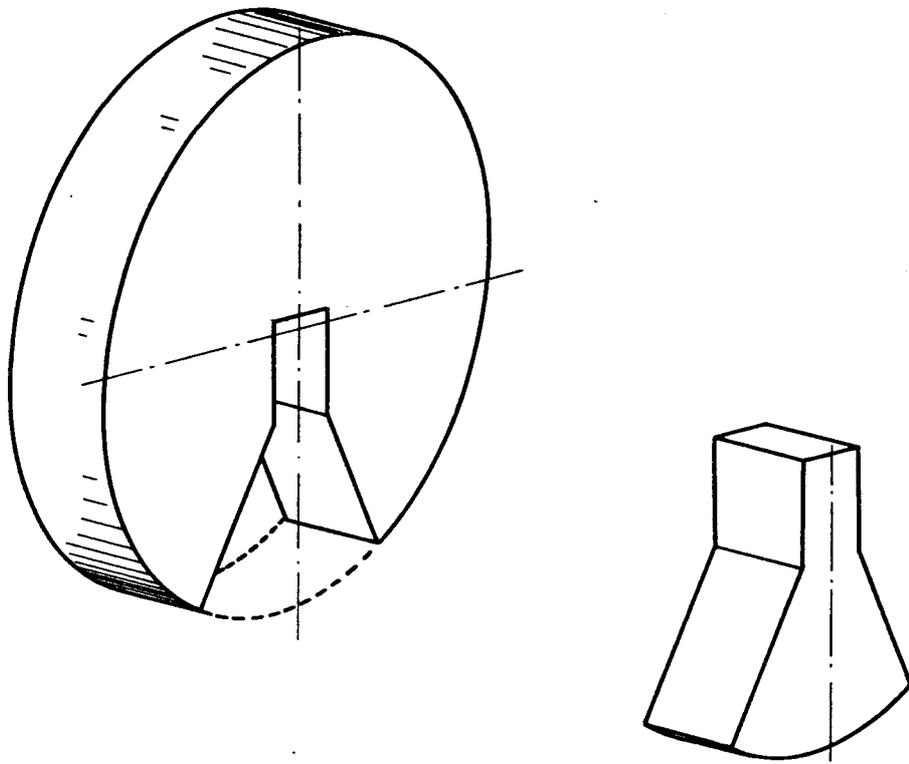


Fig. 3.4 - Forma da secção do cilindro adotada na construção do molde utilizado para simular a solidificação radial em cilindros.

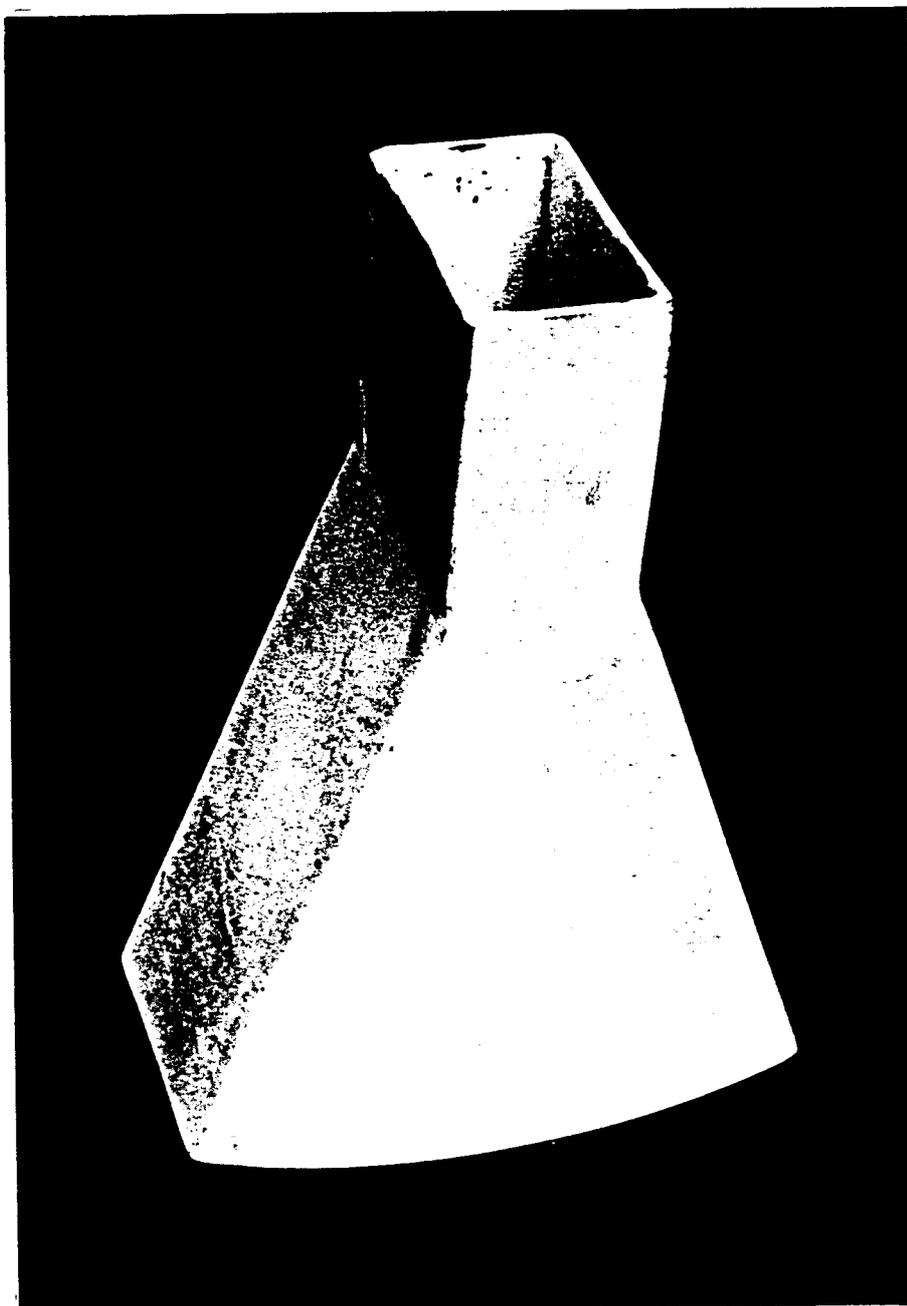


Fig. 3.5 - Paredes laterais do molde.

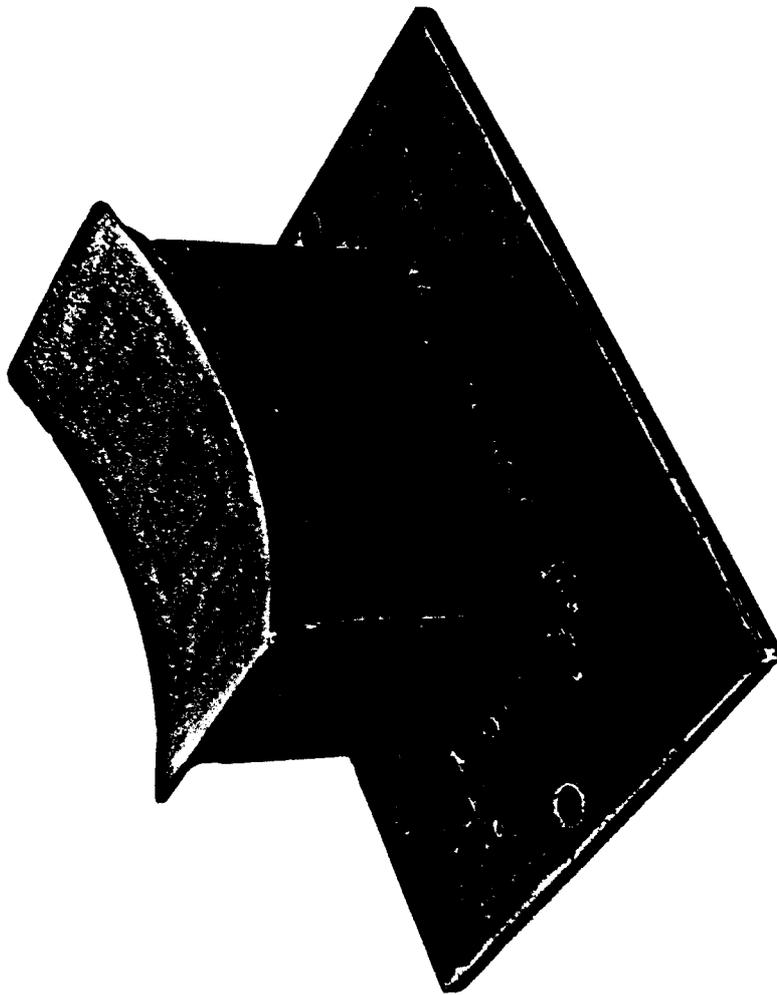


Fig. 3.6 - Parte inferior do molde soldada sobre a câmara de refrige  
ração.

com uma abertura na parte superior para permitir a introdução do dispositivo de medida (dipstick) e de termopares, corresponde aos cortes internos no cilindro para se obter a secção adotada (Fig.3.5). Já a segunda parte corresponde à secção da parede externa do cilindro a ser refrigerada para promover a extração de calor, sendo por isto montada na parte superior de uma câmara de refrigeração (Fig. 3.6). Ambas as partes foram construídas em chapas de aço ABNT 1020 com 2 mm de espessura.

As dimensões do molde são apresentadas na Fig. 3.7.

### (c) Sistema de refrigeração

O sistema de refrigeração (Fig. 3.8) foi construído de forma a permitir uma refrigeração uniforme e radial na parte inferior do molde. Para tanto o tubo de alimentação de água foi acoplado à parte inferior de uma pequena câmara, cuja parte superior é constituída de uma chapa perfurada (com 9 orifícios/cm<sup>3</sup>) cuja curvatura acompanha a curvatura do molde, permitindo que a refrigeração seja feita por jatos de água com a direção coincidente com a direção radial do cilindro. Esta câmara foi construída em chapas de cobre com 2 mm de espessura e foi montada sobre uma chapa de aço ABNT 1020 com 5 mm de espessura destinada a fixar o sistema na câmara de refrigeração (posicionada na parte inferior do molde). Nesta chapa foram acoplados dois tubos para permitir a rápida descarga da água aquecida durante o resfriamento do molde. Tanto para a alimentação como para a descarga da água foram utilizados tubos de cobre com 12.7 mm de diâmetro externo e 9.7 mm de diâmetro interno. Na Fig. 3.9 são apresentadas as dimensões do sistema de refrigeração. Na Fig. 3.10 (a) e (b) são apresentadas, respectivamente fotografias do sistema desmontado e montado na câmara de refrigeração e na Fig. 3.11 um desenho mostrando as dimensões da câmara de refrigeração e a montagem do sistema. Finalmente, na Fig. 3.12 é apresentado o sistema com o molde posicionado na parte superior.

### (d) Medidor de vazão do fluido de refrigeração

O controle da vazão de água de refrigeração foi feito por meio de um rotâmetro com capacidade de 0 a  $9,7 \times 10^{-4}$  [m<sup>3</sup>/s]. A vazão escolhida para a realização dos trabalhos experimentais, por apresentar uma melhor eficiência de refrigeração e facilitar

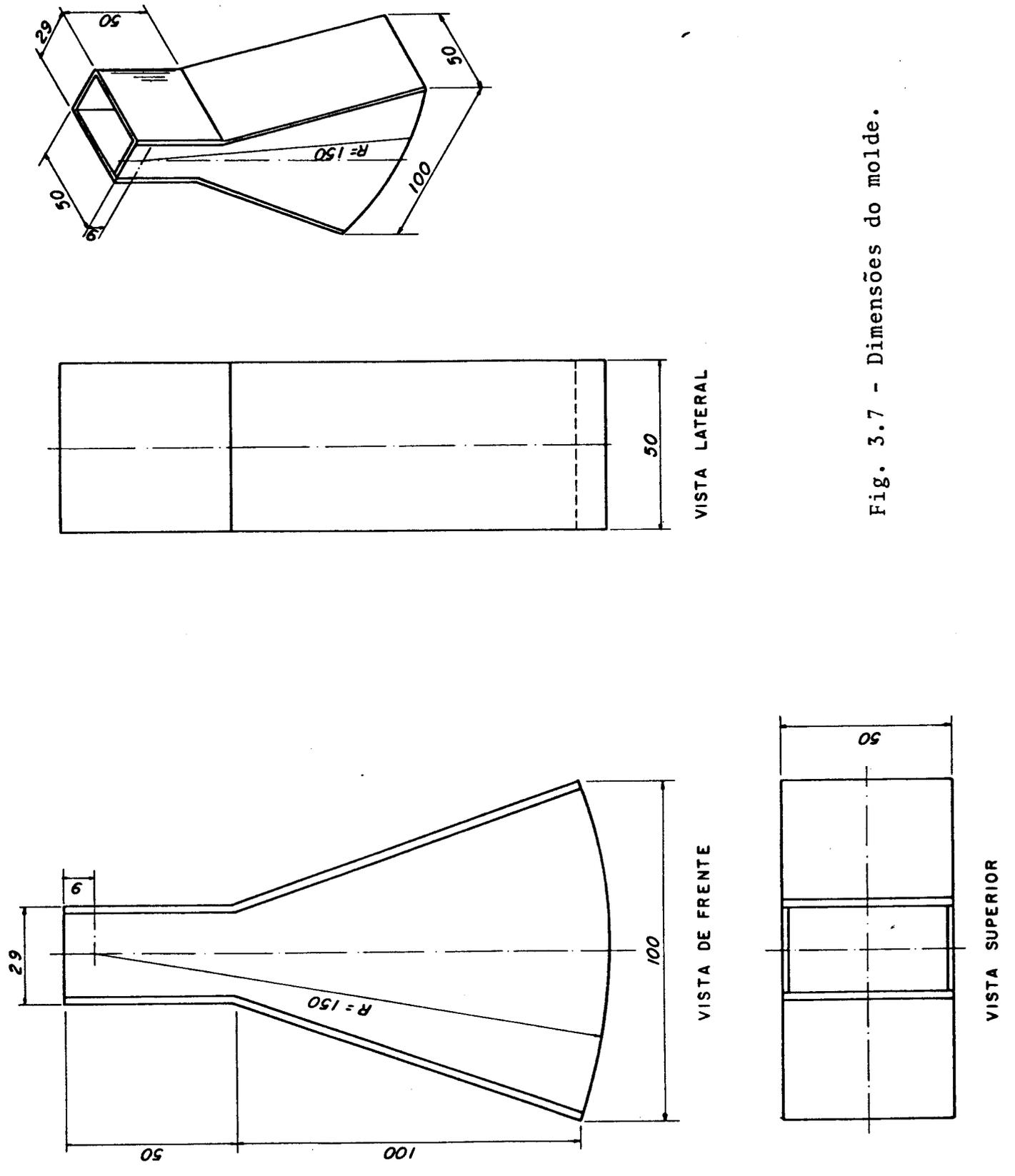


Fig. 3.7 - Dimensões do molde.

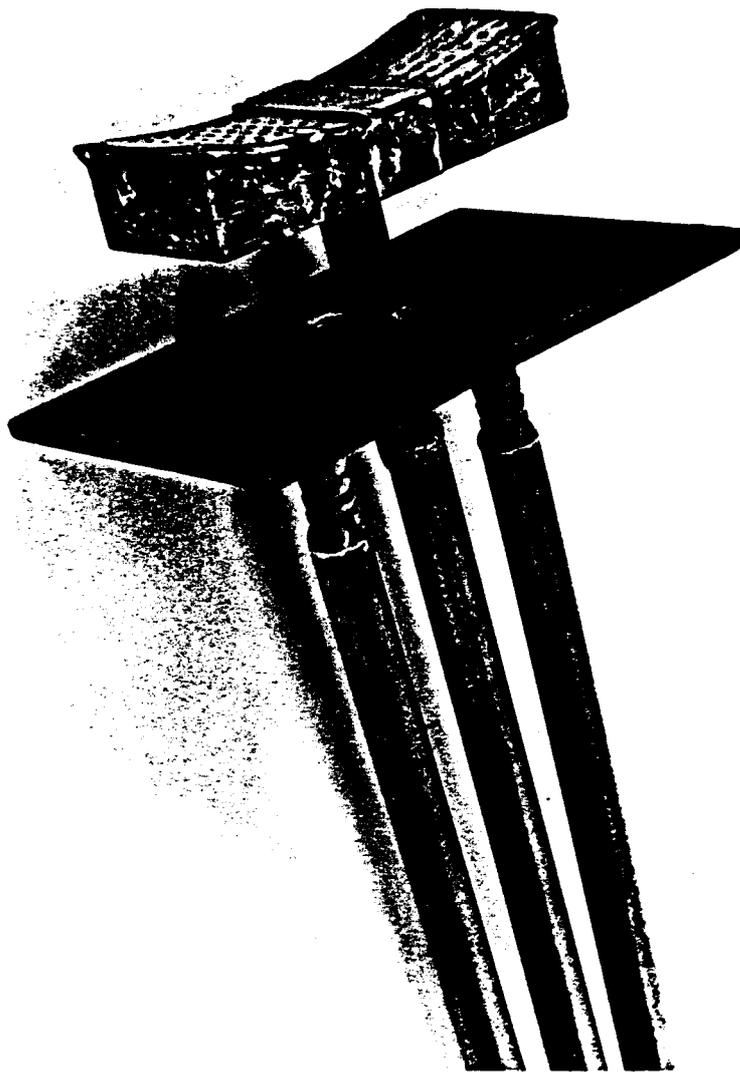


Fig. 3.8 - Fotografia do sistema de refrigeração.

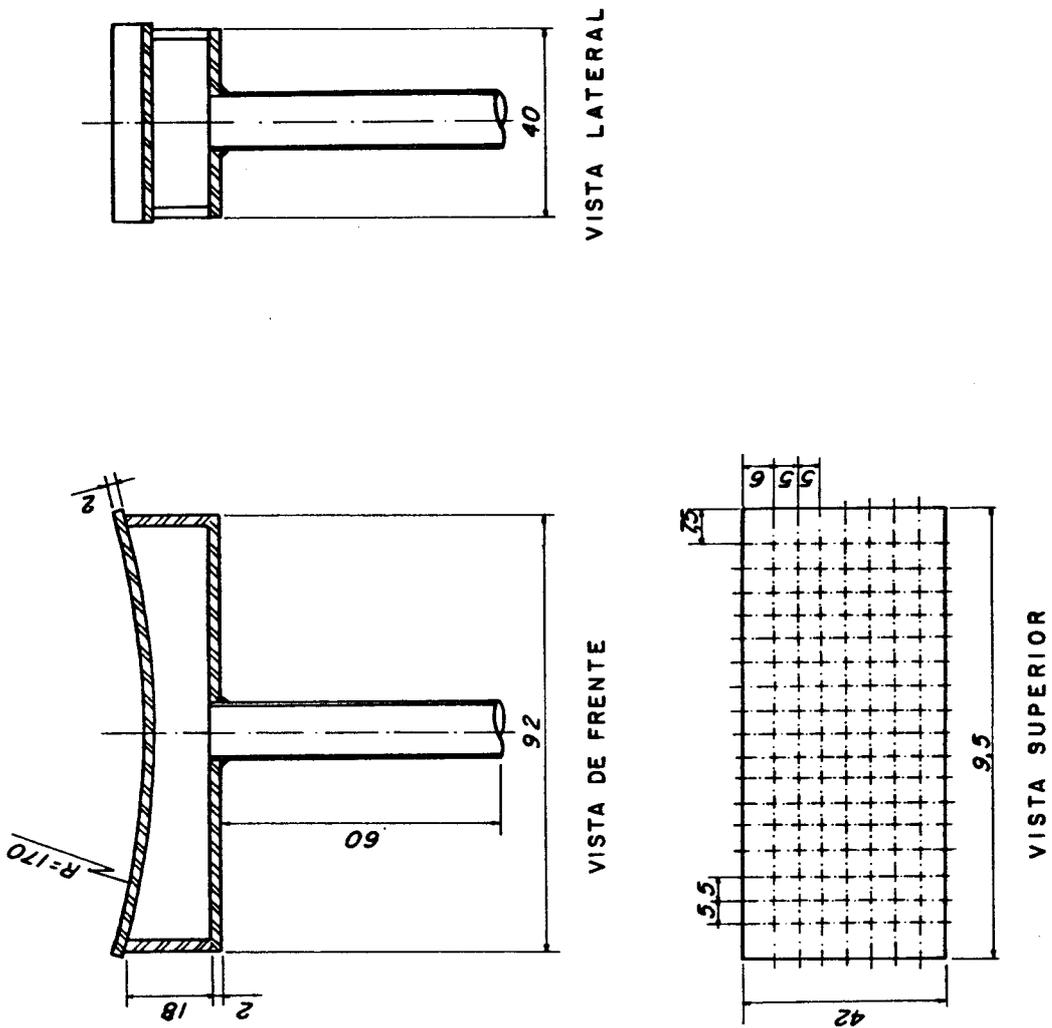
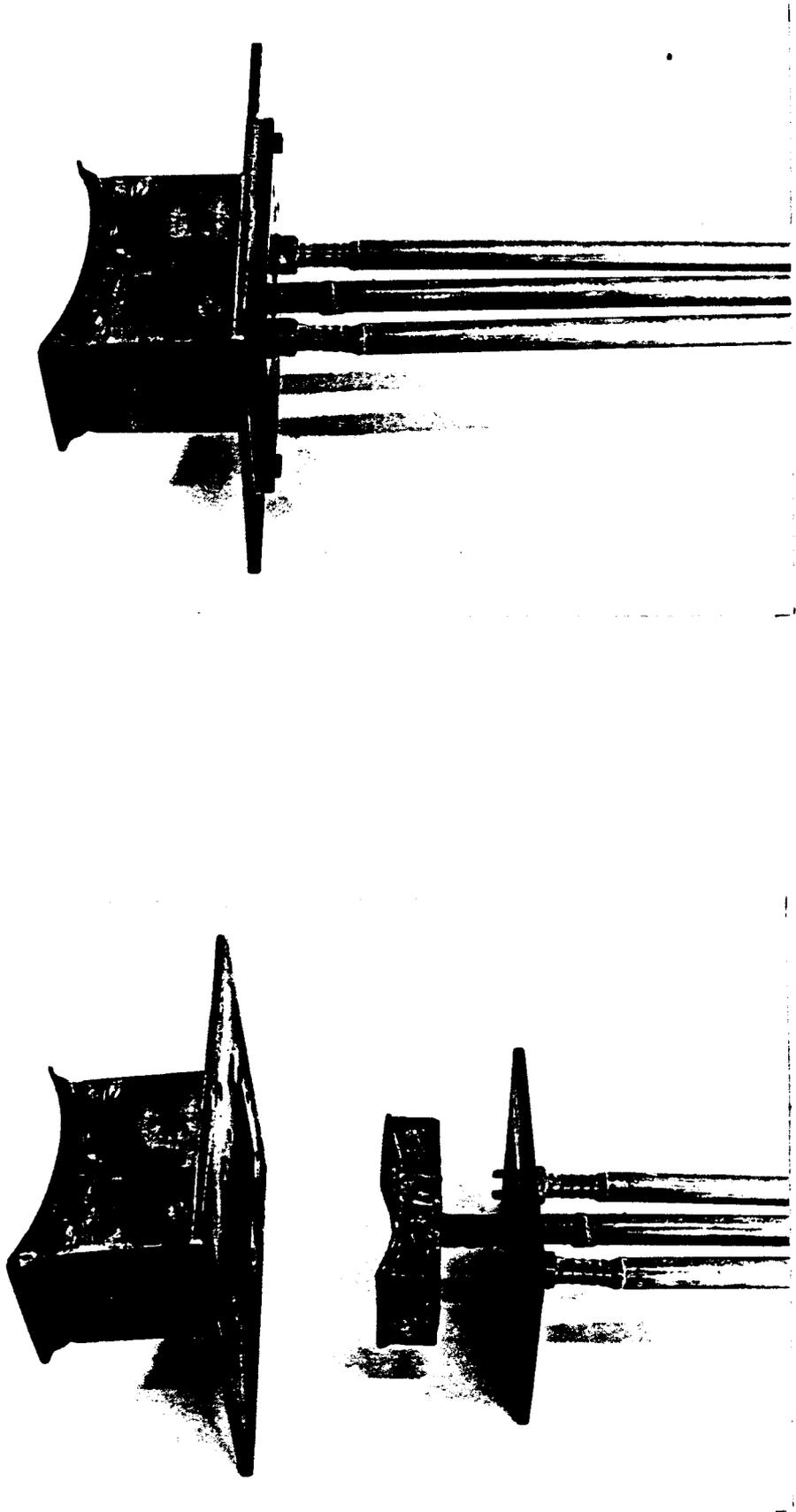


Fig. 3.9 - Dimensões do sistema de refrigeração.



(b)

(a)

Fig. 3.10 - Montagem do sistema de refrigeração na câmara de refrigeração:  
(a) sistema desmontado e (b) sistema montado.

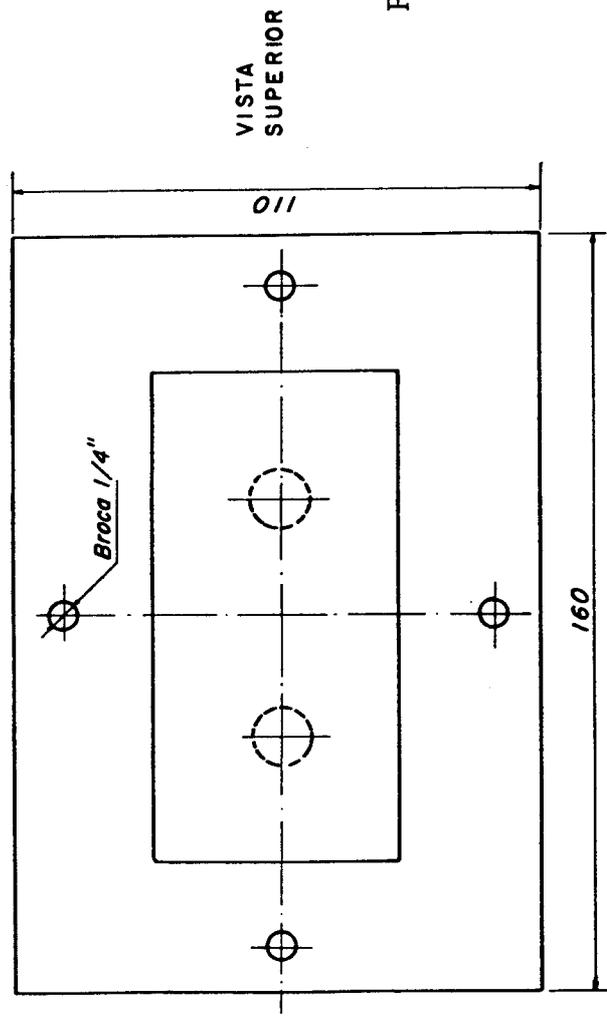
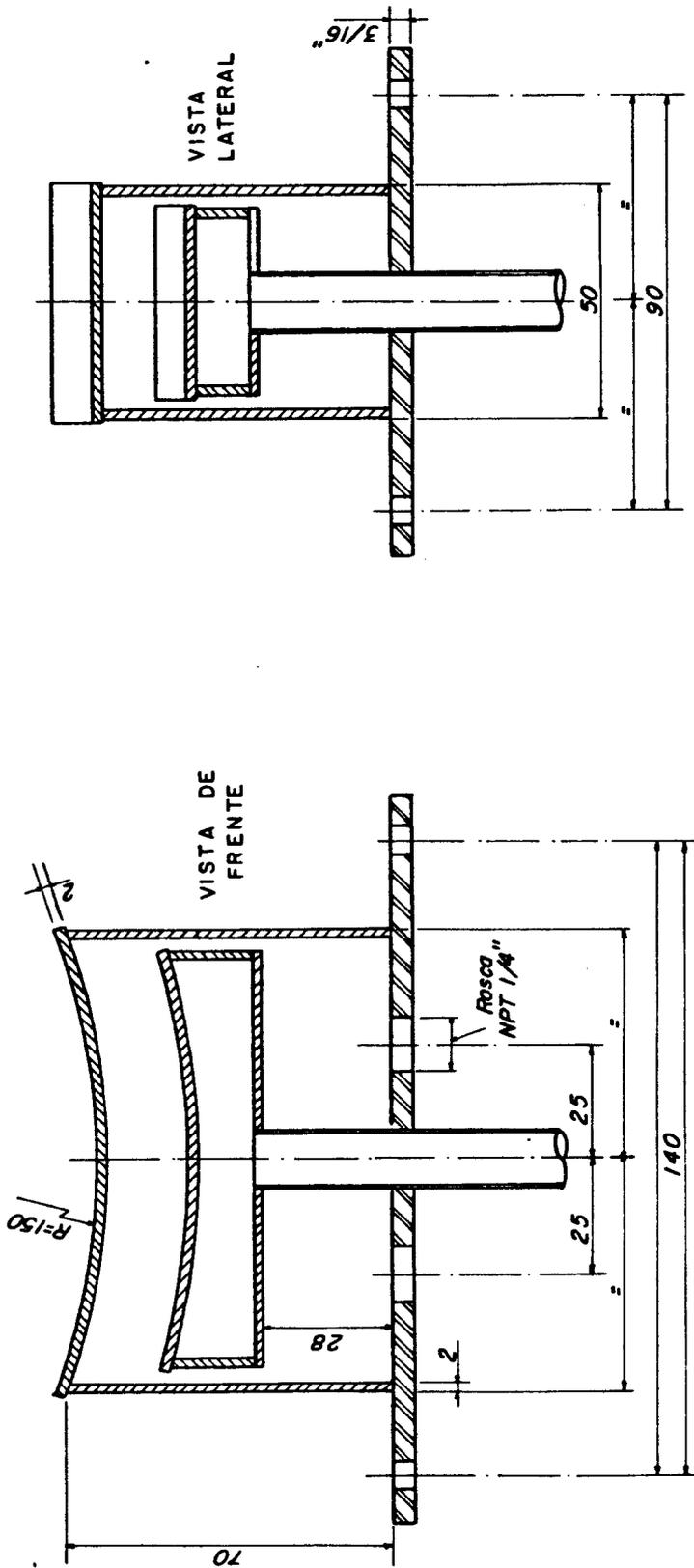


Fig. 3.11 - Dimensões da câmara de refrigeração e montagem do sistema.

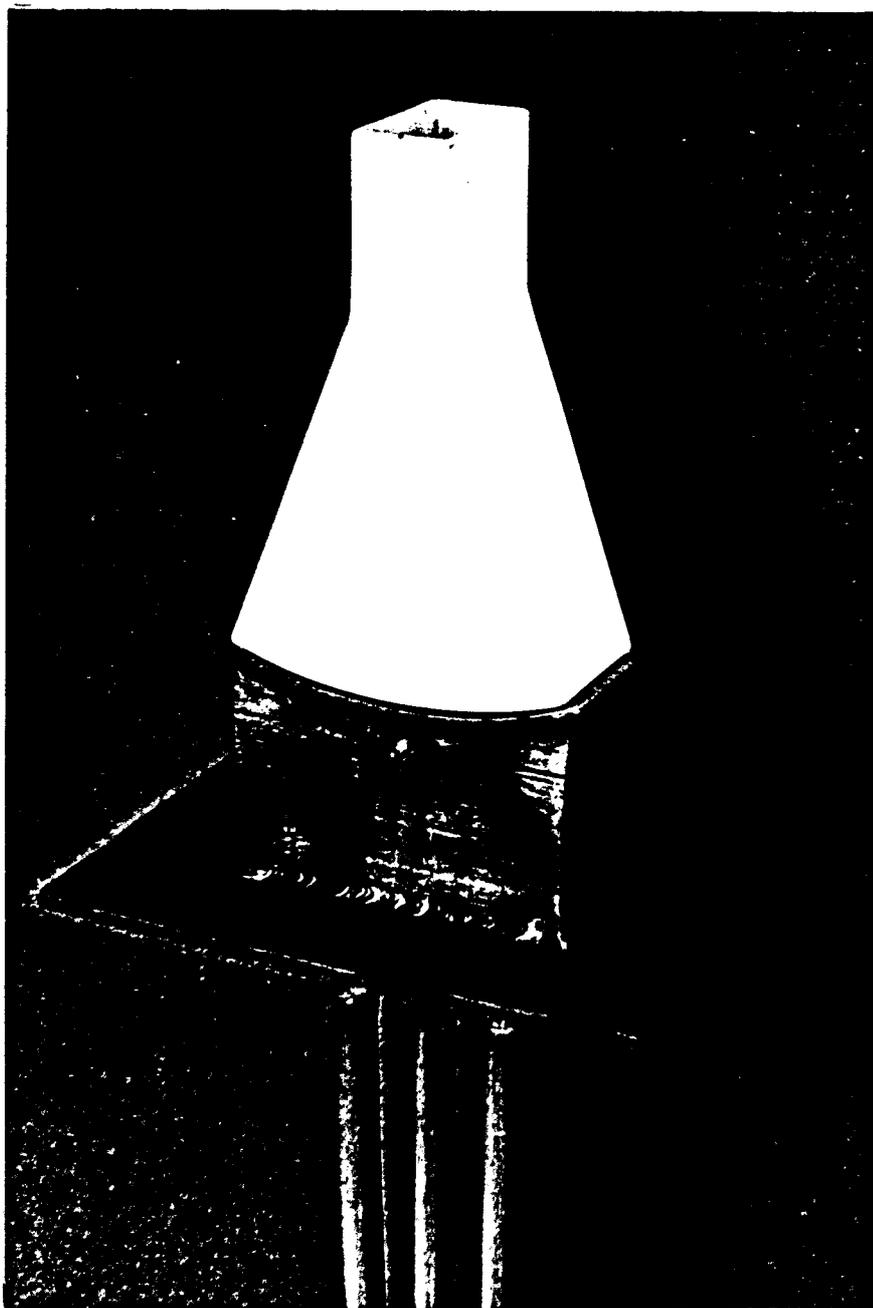


Fig. 3.12 - Montagem do sistema de refrigeração e molde.

a obtenção de uma solidificação no sentido radial do cilindro, foi de  $2,9 \times 10^{-4}$  [m<sup>3</sup>/s]. A otimização da vazão foi feita através de uma série de experiências prévias.

(e) Dispositivo para medida do avanço da interface sólido/líquido durante a solidificação

Para a medida do avanço da interface sólido/líquido foi utilizada a técnica conhecida e aceita do "dip-stick", já comprovada em diversos trabalhos experimentais de solidificação de metais.<sup>60,61,85</sup> Esta técnica consiste em mergulhar (to dip) uma vareta (stick) no metal líquido e acompanhar o avanço da interface através de leves toques com a ponta da vareta, cronometrando-se o tempo em função da espessura solidificada. A medida da espessura solidificada é realizada por meio de um ponteiro solidário com a vareta, que desliza sobre uma escala graduada em milímetros, conforme pode ser visto na Fig. 3.13. Foi utilizada uma vareta de aço ABNT 1020, com 5 mm de diâmetro, recoberta com uma pintura isolante para evitar a aderência do metal.

(f) Sistema de medida da temperatura

A determinação das curvas de variação de temperatura (perfis de temperatura) em diversos pontos durante a solidificação foi feita com o uso de termopares de cromel-alumel com junta soldada e isolamento mineral, protegidos com bainha de aço inoxidável de 3 mm de diâmetro, acoplados a registradores de temperatura (YOKOGAWA 3047) com precisão de leitura de 0,3% do fundo de escala. A montagem do sistema é apresentada na Fig. 3.14.

### 3.4. OPERAÇÃO DO DISPOSITIVO

Inicialmente era montado o dispositivo e o forno era ligado para um pré-aquecimento do molde. Paralelamente o metal era fundido em um cadinho de material refratário, utilizando-se para tanto um forno de resistência elétrica com potência de 6 kW. Uma vez fundido, o metal era vazado no molde do dispositivo. O forno do dispositivo era então mantido durante algum tempo com potência elevada para que fosse atingido o equilíbrio térmico do sistema.

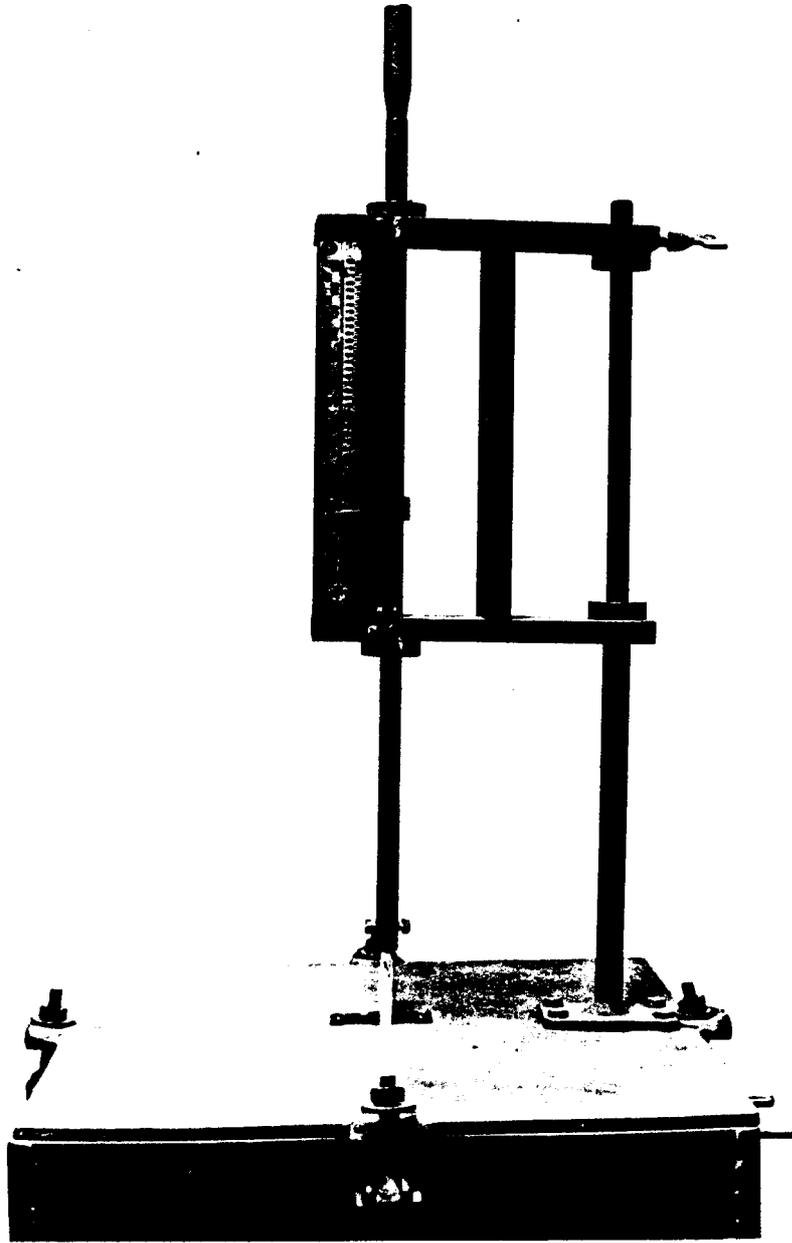


Fig. 3.13 - Sistema de medida do avanço da interface sólido/líquido durante a solidificação.



Fig. 3.14 - Montagem utilizada na determinação dos perfis térmicos em diferentes pontos da peça, durante a solidificação.

Uma vez atingido o equilíbrio, a potência era reduzida gradativamente enquanto o metal líquido era agitado manualmente para se manter uma temperatura uniforme em todos os pontos. Uma vez atingida uma temperatura próxima à temperatura de fusão (3 a 4 K acima para se ter certeza que todo o metal estava no estado líquido) o forno era desligado e a água de refrigeração aberta para se iniciar a solidificação. Em experiências subsequentes com o mesmo metal era adotado o mesmo procedimento mas a fusão era feita no próprio forno do dispositivo.

O fato do molde estar em equilíbrio térmico com o forno até o momento de início da solidificação evita trocas laterais de calor, permitindo que a extração de calor seja feita apenas pela parte inferior do molde, atingida pela água de refrigeração. Mas para dificultar ainda mais as trocas laterais indesejáveis, as paredes laterais do molde foram recobertas interna e externamente com uma pintura isolante à base de alumina.

A medida do avanço da interface sólido/líquido foi feita cronometrando-se o tempo de solidificação a cada 0,010 m de espessura solidificada. Apesar do molde simular um cilindro de 0,15 m de raio, foi necessário manter uma parte com seção retangular na região próxima à parte correspondente ao centro do cilindro (Fig. 3.4) para permitir a introdução do "dip-stick" (Fig. 3.2) e dos termopares. Assim sendo as medidas foram realizadas apenas até a espessura solidificada de 0,10 m, quando o molde deixa de representar a geometria cilíndrica.

O levantamento dos perfis de temperatura durante a solidificação foi feito com quatro termopares posicionados respectivamente na interface metal/molde e a 0,03, 0,06 e 0,09 m da mesma. As quatro medidas eram realizadas simultaneamente em uma mesma experiência. Na Fig. 3.15 é mostrado um exemplo das curvas obtidas.

### 3.5. PRECISÃO DOS RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Como a técnica do "dip-stick" depende, em parte, da habilidade do operador, as experiências realizadas com cada um dos metais foram repetidas dez vezes nas mesmas condições. Os resultados eram colocados na forma da Tabela 3.3, que apresenta, como exem-

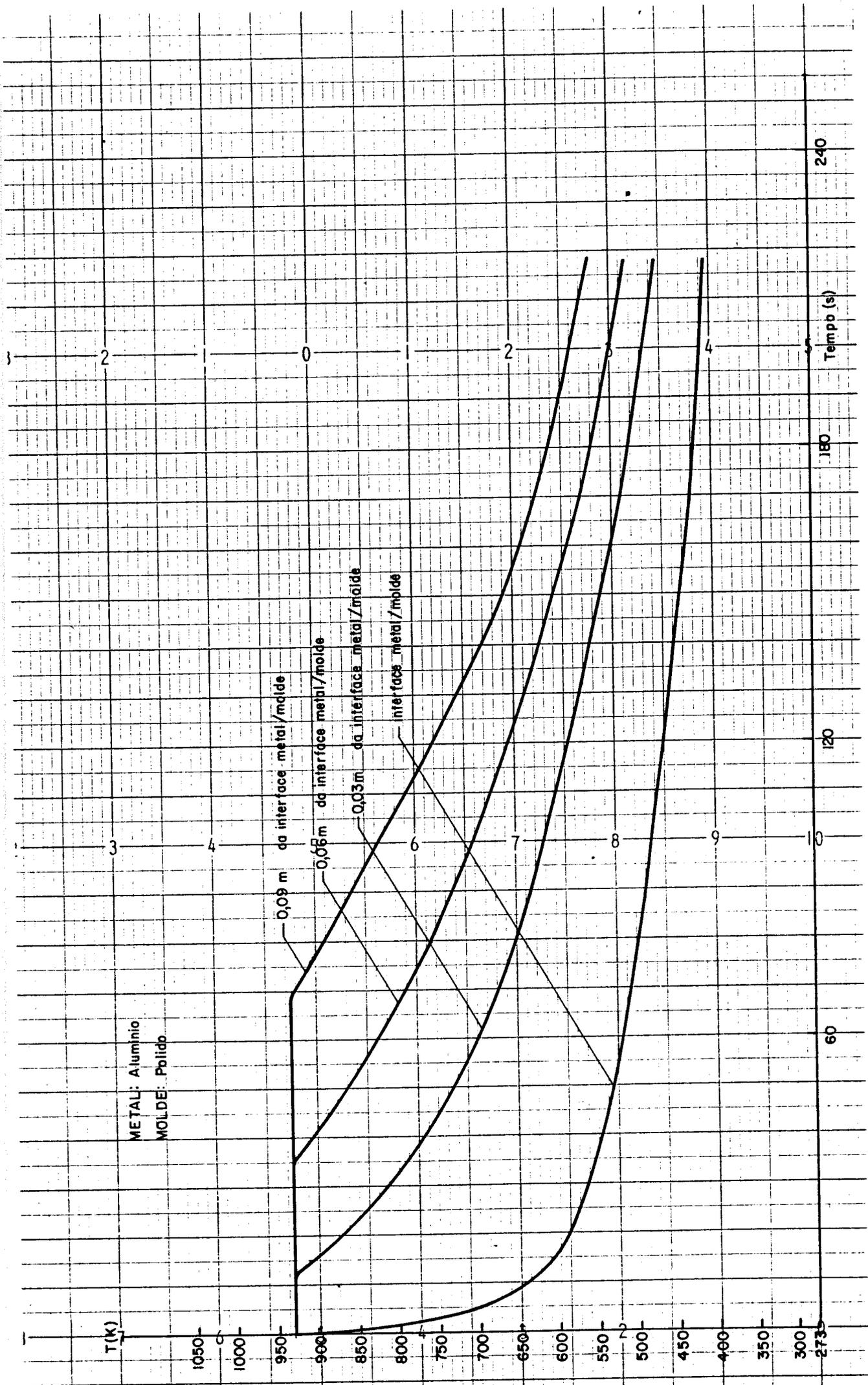


Fig. 3.15 - Perfis de temperaturas obtidos com termopares posicionados em diferentes pontos para o alumínio solidificado em molde polido.

SOLIDIFICAÇÃO DE METAIS EM MOLDES CILÍNDRICOS

METAL: CHUMBO

MOLDE: POLIDO

TEMPERATURA DE FUSÃO: 600 K

TEMPERATURA NO INÍCIO DA REFRIGERAÇÃO: 600 K

TEMPO DE SOLIDIFICAÇÃO EM SEGUNDOS										
s (m)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,01	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
0,02	13	14	13	14	14	12	13	13	13	14
0,03	24	29	28	29	28	27	29	28	27	29
0,04	42	52	49	48	46	47	48	50	50	50
0,05	65	80	76	73	70	71	74	77	80	77
0,06	92	113	107	101	96	99	101	108	110	109
0,07	127	148	140	132	125	131	132	142	144	141
0,08	168	184	176	164	154	164	164	176	177	174
0,09	202	219	212	198	187	197	196	212	214	210
0,10	240	254	246	232	218	229	229	248	247	245

TABELA 3.3 - Resultados experimentais obtidos em dez experiências de solidificação radial do chumbo em molde polido, realizadas nas mesmas condições.

plo, os resultados experimentais do tempo de solidificação em função da espessura solidificada obtidos para o chumbo em molde polido. As medidas do tempo foram realizadas com o uso de um cronômetro digital (Citizen) com precisão de 0,1 s. A partir dos resultados obtidos foram calculadas a média aritmética ( $\bar{t}$ ) e o desvio padrão ( $\sigma$ ) através das equações:

$$\bar{t} = \frac{\Sigma t}{10} \quad (3.1)$$

e

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma (t - \bar{t})^2}{10}} \quad (3.2)$$

Na Tabela 3.4 são mostrados, como exemplo os valores obtidos a partir dos resultados apresentados na Tabela 3.3 (chumbo em molde polido).

Nas medidas de temperatura a precisão dos resultados é limitada pela precisão dos registradores (0,3% do fundo de escala), assim sendo foi de:  $\pm 1,5$  K para as experiências realizadas com chumbo e estanho e  $\pm 3,7$  K para as realizadas com alumínio.

As curvas de temperaturas foram também utilizadas para comprovação de algumas medidas de tempo de solidificação realizadas com dip-stick.

### 3.6. TÉCNICAS METALGRÁFICAS

Algumas das peças de chumbo obtidas foram cortadas longitudinalmente na região central para análise metalográfica. O corte foi realizado cuidadosamente com baixa velocidade e pequeno avanço da serra para evitar deformações superficiais e recristalização dos grãos da estrutura. Foram analisadas:

(a) macroestruturas

(b) microestruturas

S(m)	$\bar{t}$ (s)	$\sigma$ (s)
0,01	5,0	0,0
0,02	13,3	0,7
0,03	27,8	1,5
0,04	48,2	2,8
0,05	74,3	4,7
0,06	103,6	6,8
0,07	136,2	7,8
0,08	170,1	8,8
0,09	204,7	10,1
0,10	238,8	11,3

TABELA 3.4 - Valores da média aritmética e do desvio padrão calculados a partir dos resultados da Tabela 3.3, para o chumbo solidificado em molde polido.

### (a) Macroestruturas

As peças cortadas foram inicialmente usinadas com passo de 0,05 mm e velocidade de 355 r.p.m. A seguir foram lixadas em lixadeiras planas manuais com lixas parafinadas com granulações decrescentes de 320, 400 e 600. Estas lixas eram refrigeradas a água para evitar o aquecimento excessivo das peças. A seguir foi realizado um ataque químico para revelação da macroestrutura.

A solução utilizada para o ataque das peças de chumbo foi uma mistura em partes iguais de uma solução A constituída de 15 g de molibdato de amônio em 100 g de água destilada e de uma solução B constituída de 6 partes de ácido nítrico em 4 partes de água destilada.<sup>125</sup>

### (b) Microestruturas

Foram cortadas amostras de secção quadrada com 0,01m de lado das peças a serem analisadas. As amostras foram lixadas em lixadeiras mecânicas circulares refrigeradas a água, com lixas com granulações decrescentes de 200, 320, 400 e 600. Após estas operações foi realizado um polimento em politrizes mecânicas com baixa rotação, refrigeradas a água, utilizando como abrasivo pastas de diamante de 6 $\mu$ , 3 $\mu$ , 1 $\mu$  e 0,25 $\mu$ . Posteriormente foi feito um polimento químico por imersão das amostras em uma solução composta de ácido acético e água oxigenada (30 v) em volumes iguais.<sup>118</sup> Por último foi feito um ataque químico para revelação da microestrutura.

A solução utilizada para o ataque das amostras de chumbo foi uma mistura de 3 partes de ácido acético, 4 partes de ácido nítrico e 16 partes de água destilada.<sup>125</sup>

## CAPÍTULO 4

### RESULTADOS EXPERIMENTAIS

#### 4.1. MACROGRAFIAS E MICROGRAFIAS

Antes de serem iniciadas as medidas dos parâmetros de interesse para o estudo da solidificação de metais em moldes cilíndricos (tempos de solidificação e perfis de temperatura), foram realizadas algumas experiências para comprovar que a solidificação se dá de forma radial no dispositivo projetado. Para tanto o processo era iniciado de forma normal (abrindo-se a água de refrigeração no momento que o metal atingia a temperatura de fusão) mas após um tempo suficiente para que uma certa espessura de material se solidificasse, era provocada uma mudança brusca na velocidade de solidificação através da interrupção durante alguns instantes do fluxo de água. A mudança de velocidade de solidificação provocada altera a estrutura do metal solidificado permitindo a caracterização da interface sólido/líquido.

Na Fig. 4.1 é mostrada a macrografia de uma peça de chumbo obtida da forma descrita, onde pode ser observada a linha correspondente à mudança da velocidade de solidificação caracterizando a forma da interface sólido/líquido. Como pode ser visto, a curvatura da interface corresponde à curvatura do molde mostrando que a solidificação se dá de forma radial.

Foram também obtidas micrografias da região de mudança de velocidade de solidificação mostrando a alteração na estrutura. Estas micrografias são mostradas na Fig. 4.2, onde são correlacionadas, esquematicamente, com a mudança de velocidade provocada. Pode-se notar, nitidamente, uma faixa com uma estrutura grosseira bem característica correspondente aos instantes em que houve a interrupção do fluxo de água e portanto a diminuição brusca da velocidade de solidificação.

#### 4.2. TEMPOS DE SOLIDIFICAÇÃO E DISTRIBUIÇÕES DE TEMPERATURA

A seguir serão apresentados na forma de gráficos os resultados experimentais obtidos neste trabalho. No Apêndice 3 são

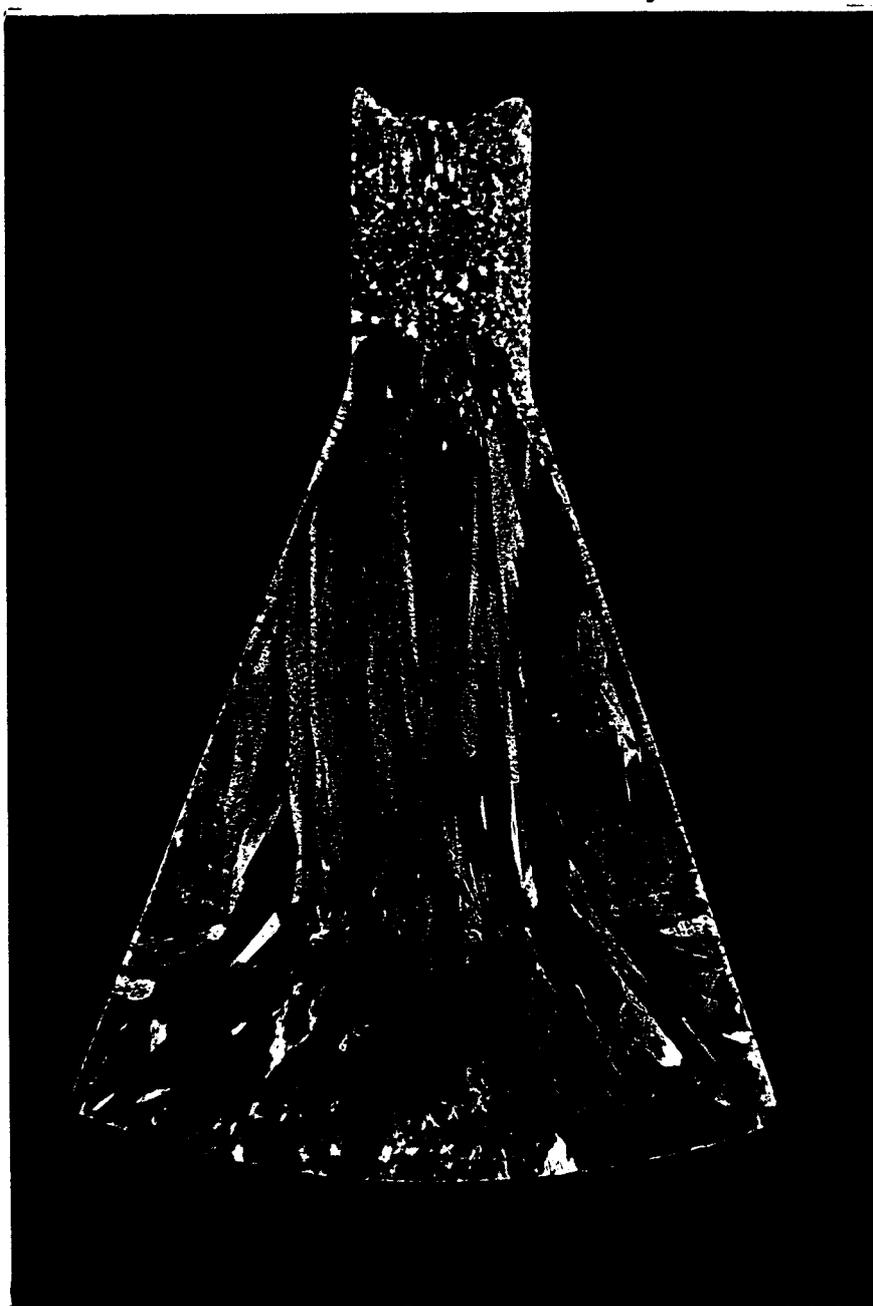


Fig. 4.1 - Macrografia de uma peça de chumbo obtida com o uso do dispositivo de solidificação radial mostrando a forma da interface sólido/líquido.

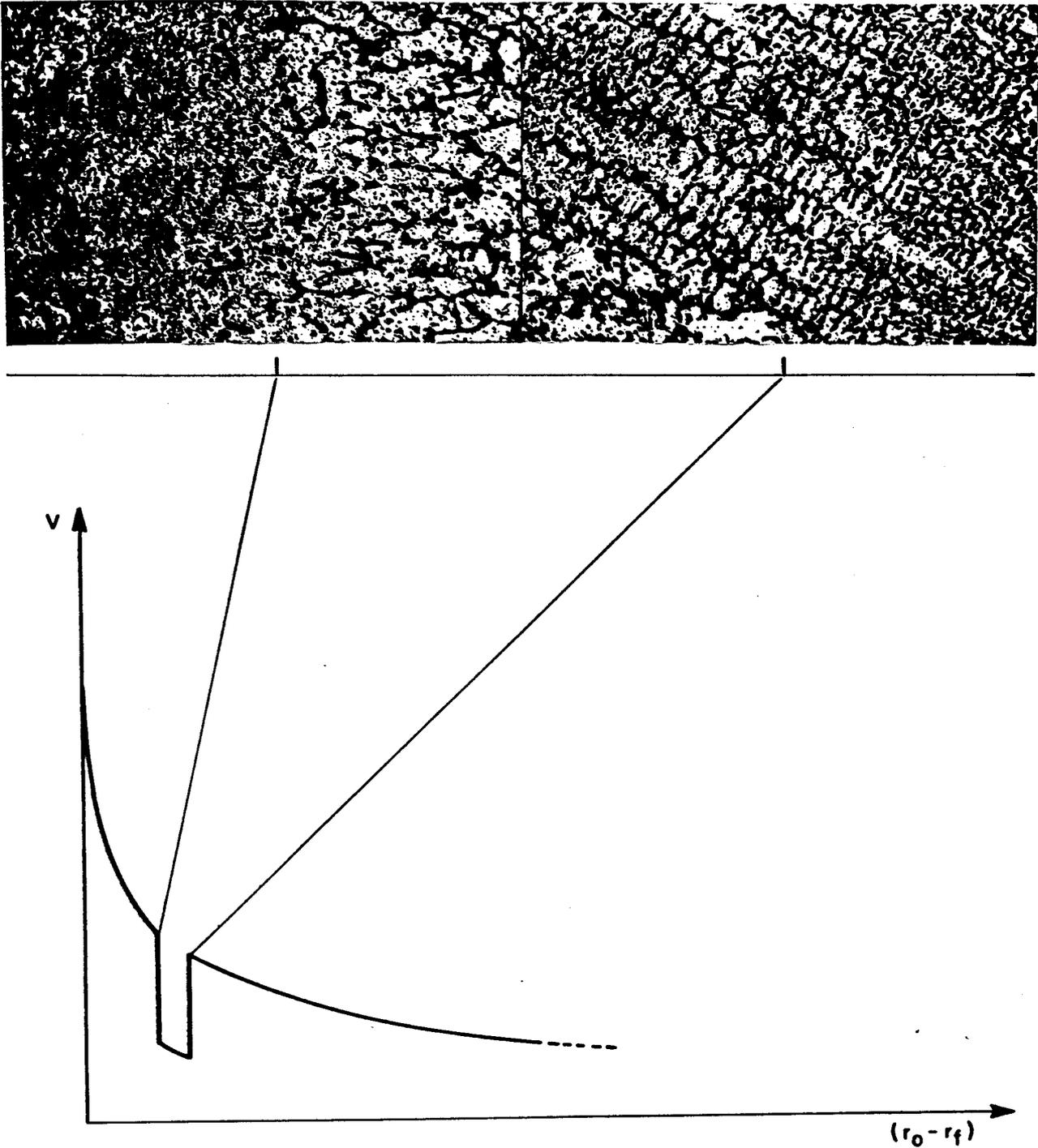


Fig. 4.2 - Correlação entre a mudança provocada na velocidade de solidificação e a alteração na estrutura do chumbo solidificado no dispositivo de solidificação radial.

encontradas em forma de tabelas as médias e desvios padrões dos tempos de solidificação determinados a partir das dez experiências realizadas para cada caso tratado.

Os tempos de solidificação serão apresentados em função da relação entre o volume de metal solidificado e a área de troca de calor na interface metal/molde dada por:

$$\frac{V_s}{A_i} = \frac{r_o^2 - r_f^2}{2r_o} \quad (4.1)$$

A Fig. 4.3 mostra a variação da relação  $(V_s/A_i)$  em função do tempo de solidificação, para o chumbo solidificado radialmente em molde refrigerado para duas condições de contato térmico na interface metal/molde (superfície interna do molde polida e pintada com tinta a base de alumina) o que leva a dois diferentes valores do coeficiente de transferência de calor nesta interface. Pelas diferenças de tempos de solidificação para um mesmo valor da relação  $(V_s/A_i)$  pode-se notar a influência do coeficiente de transferência de calor na cinética de solidificação. Na Fig. 4.4 são apresentadas as variações da temperatura na interface metal/molde e em pontos situados a 0,03; 0,06 e 0,09 metros da mesma durante a solidificação radial do chumbo em molde polido e na Fig. 4.5 são apresentados os resultados obtidos com o uso do molde pintado. Fica evidente, comparando-se os resultados das Fig. 4.4 e 4.5 a forte influência do coeficiente de transferência de calor também nos gradientes de temperatura.

A Fig. 4.6 mostra a variação da relação  $(V_s/A_i)$  em função do tempo de solidificação, para o alumínio solidificado radialmente em molde refrigerado, para as duas condições de contato térmico na interface metal/molde utilizadas. As diferenças de tempo observadas com a variação do contato térmico mostram que a cinética de solidificação do alumínio é muito mais sensível à influência do coeficiente de transferência de calor na interface metal/molde que o chumbo. O mesmo ocorre para as variações de temperatura conforme pode ser observado nas Fig. 4.7 e 4.8 respectivamente para o caso de molde polido e pintado. Pode-se notar, analisando as distribuições de temperatura nos dois casos, que durante a solidificação em

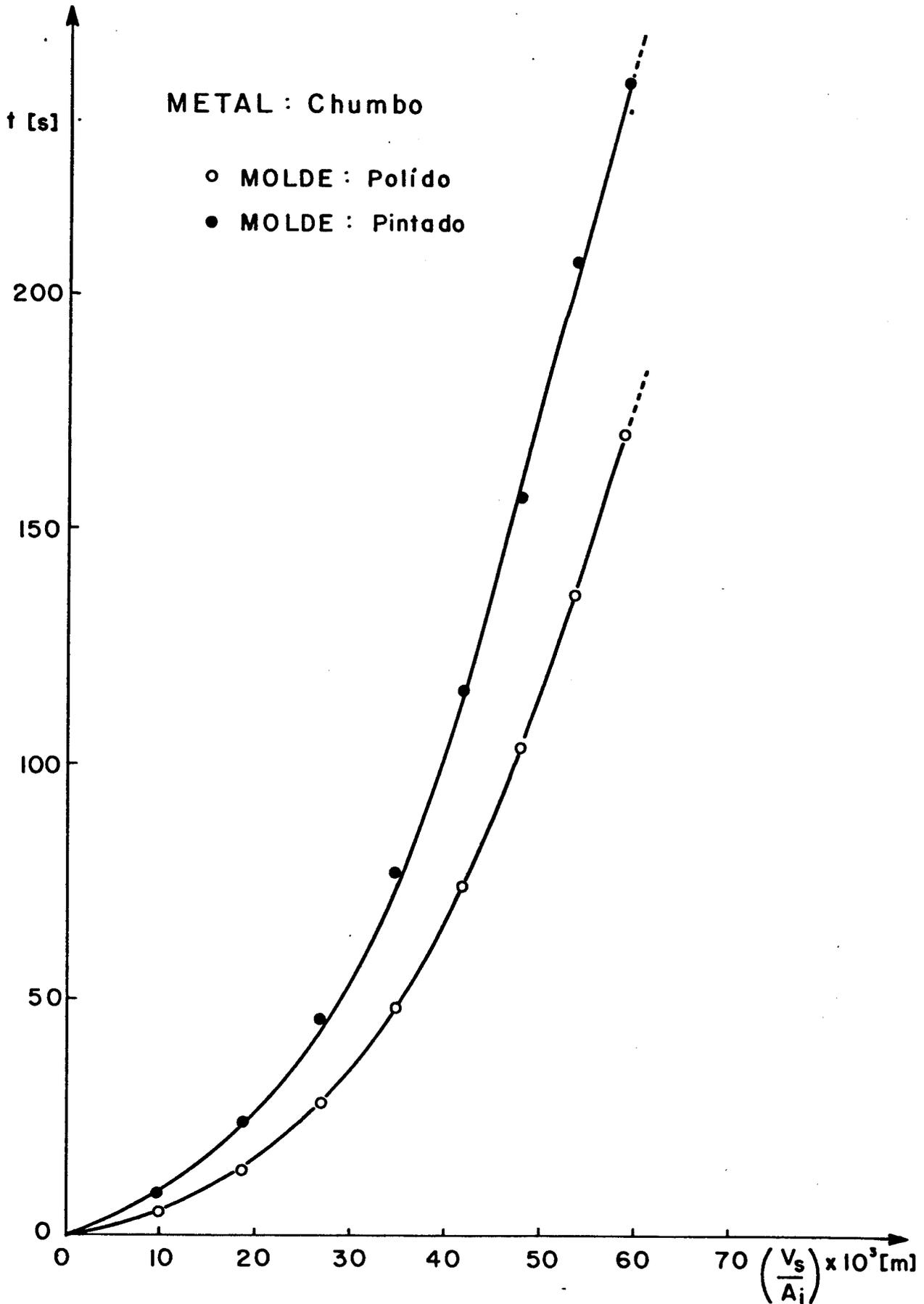


Fig. 4.3 - Resultados experimentais da cinética de solidificação radial do chumbo em molde refrigerado a água para duas condições de contato térmico na interface metal/molde.

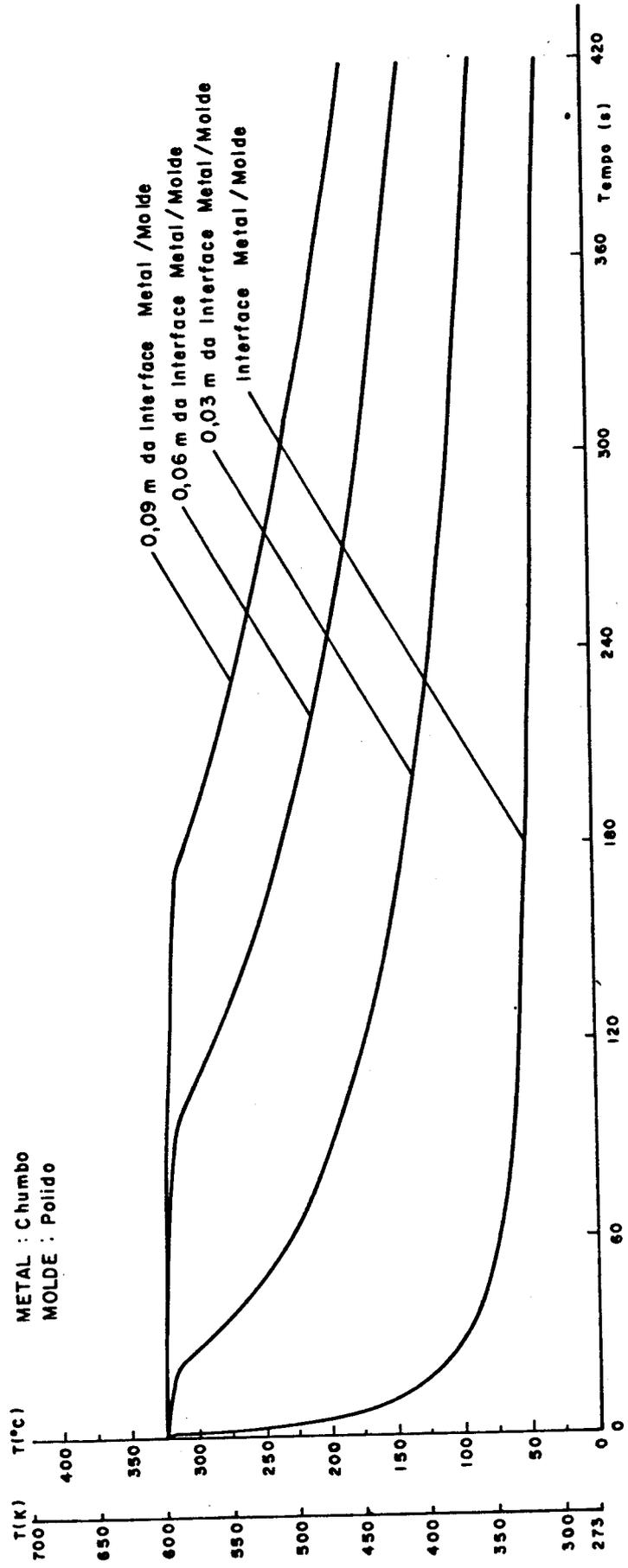


Fig. 4.4 - Variação da temperatura na interface metal/molde e em pontos situados a 0,03; 0,06 e 0,09 metros da mesma durante a solidificação radial do chumbo em molde polido refrigerado.

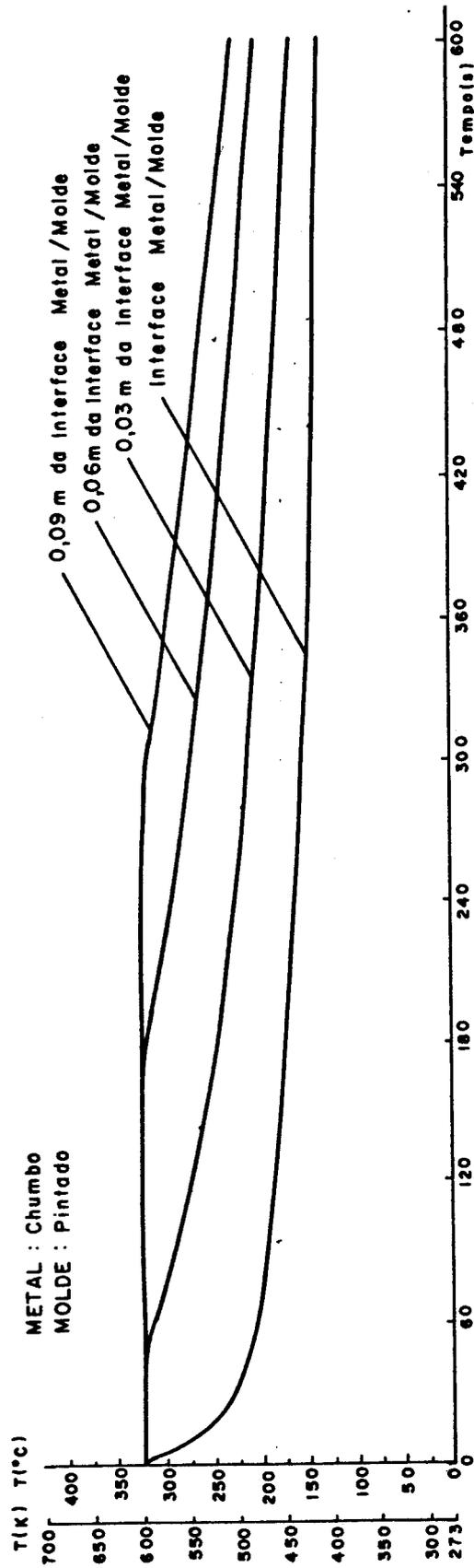


Fig. 4.5 - Variação da temperatura na interface metal/molde e em pontos situados a 0,03; 0,06 e 0,09 metros da mesma durante a solidificação do chumbo em molde pintado refrigerado.

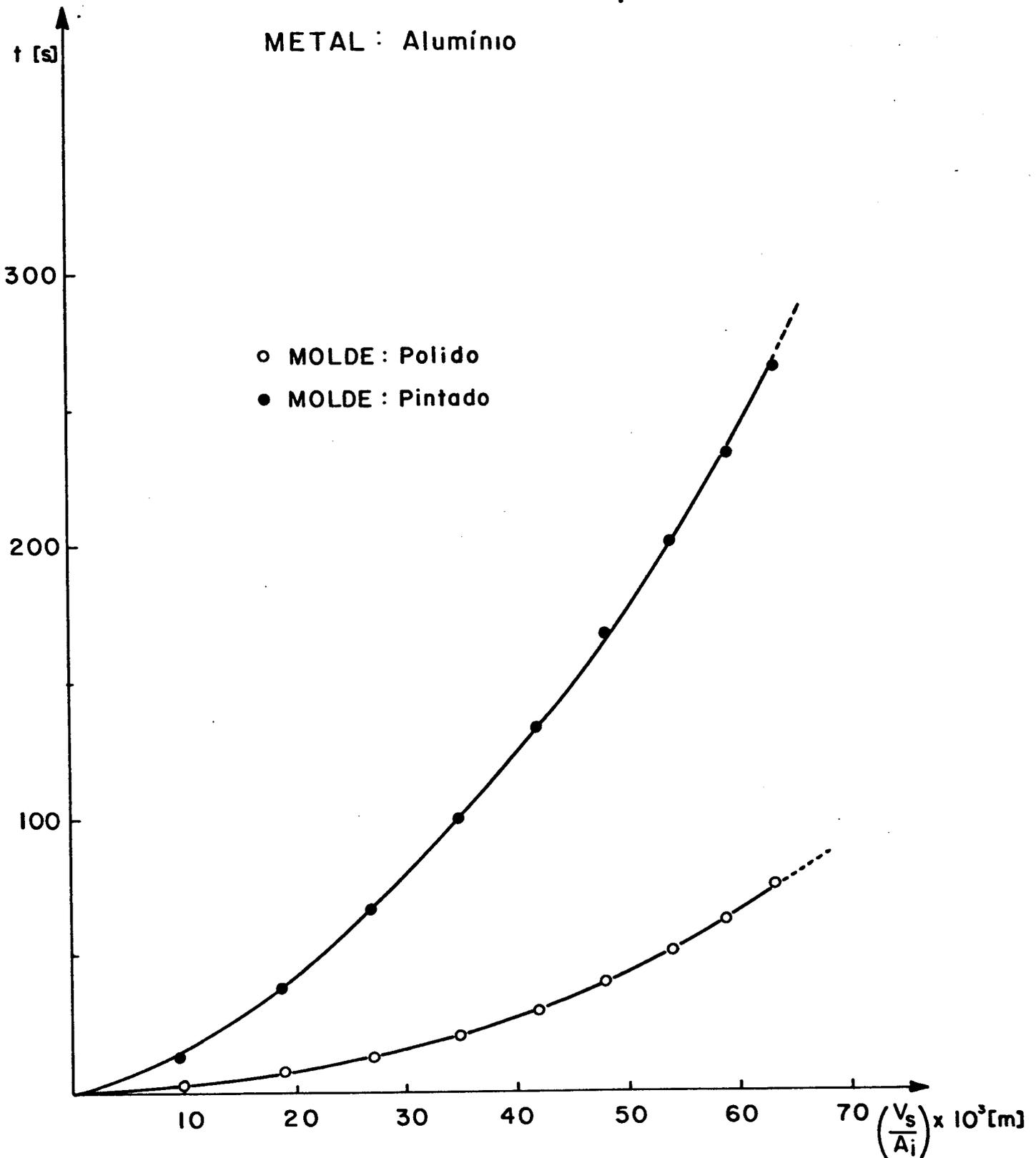


Fig. 4.6 - Resultados experimentais da cinética de solidificação radial do alumínio em molde refrigerado a água para duas condições de contato térmico na interface metal/molde.

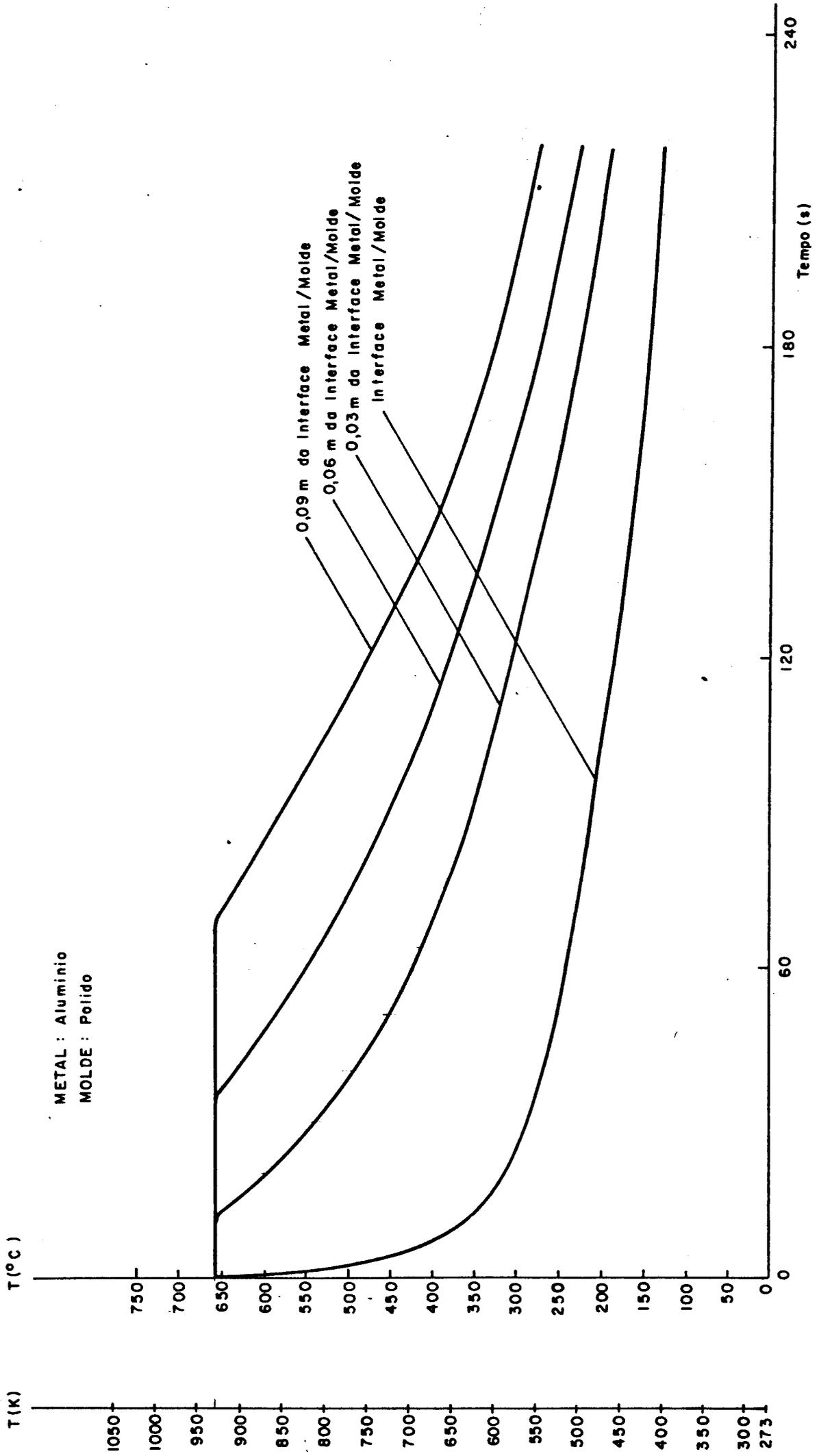


Fig. 4.7 - Variação da temperatura na interface metal/molde e em pontos situados a 0,03; 0,06 e 0,09 metros da mesma durante a solidificação radial do alumínio em molde polido refrigerado.

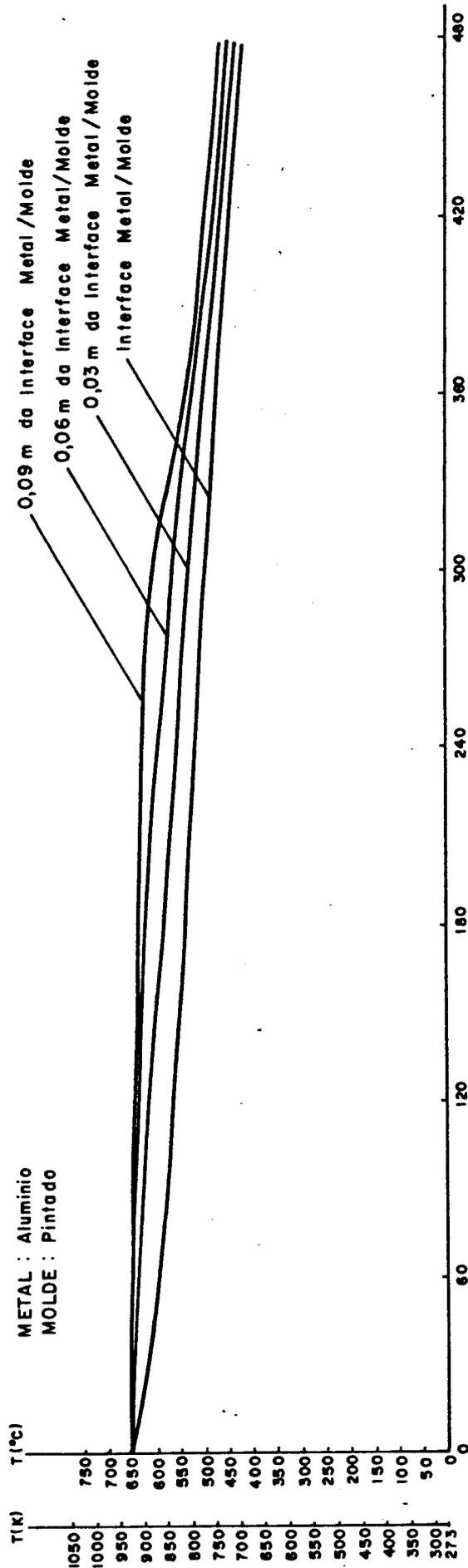


Fig. 4.8 - Variação da temperatura na interface metal/molde e em pontos situados a 0,03; 0,06 e 0,09 metros da mesma durante a solidificação do alumínio em molde em molde pintado refrigerado.

moldes polidos a camada de metal solidificado é submetida a gradientes de temperatura muito mais altos que em moldes pintados.

A Fig. 4.9 mostra a variação da relação  $(V_s/V_i)$  em função do tempo de solidificação, para o estanho solidificado radialmente em molde refrigerado, também para as duas condições de contato térmico na interface metal/molde. As Fig. 4.10 e 4.11 mostram, respectivamente, as variações de temperatura durante o processo de solidificação para o caso de molde polido e pintado. Comparando-se os resultados obtidos para o estanho com os dois casos anteriores pode-se notar que o estanho é dos três o menos sensível à influência do coeficiente de transferência de calor, apresentando pequenas diferenças de tempo e temperatura entre os casos de molde polido e molde pintado.

METAL: Estanho

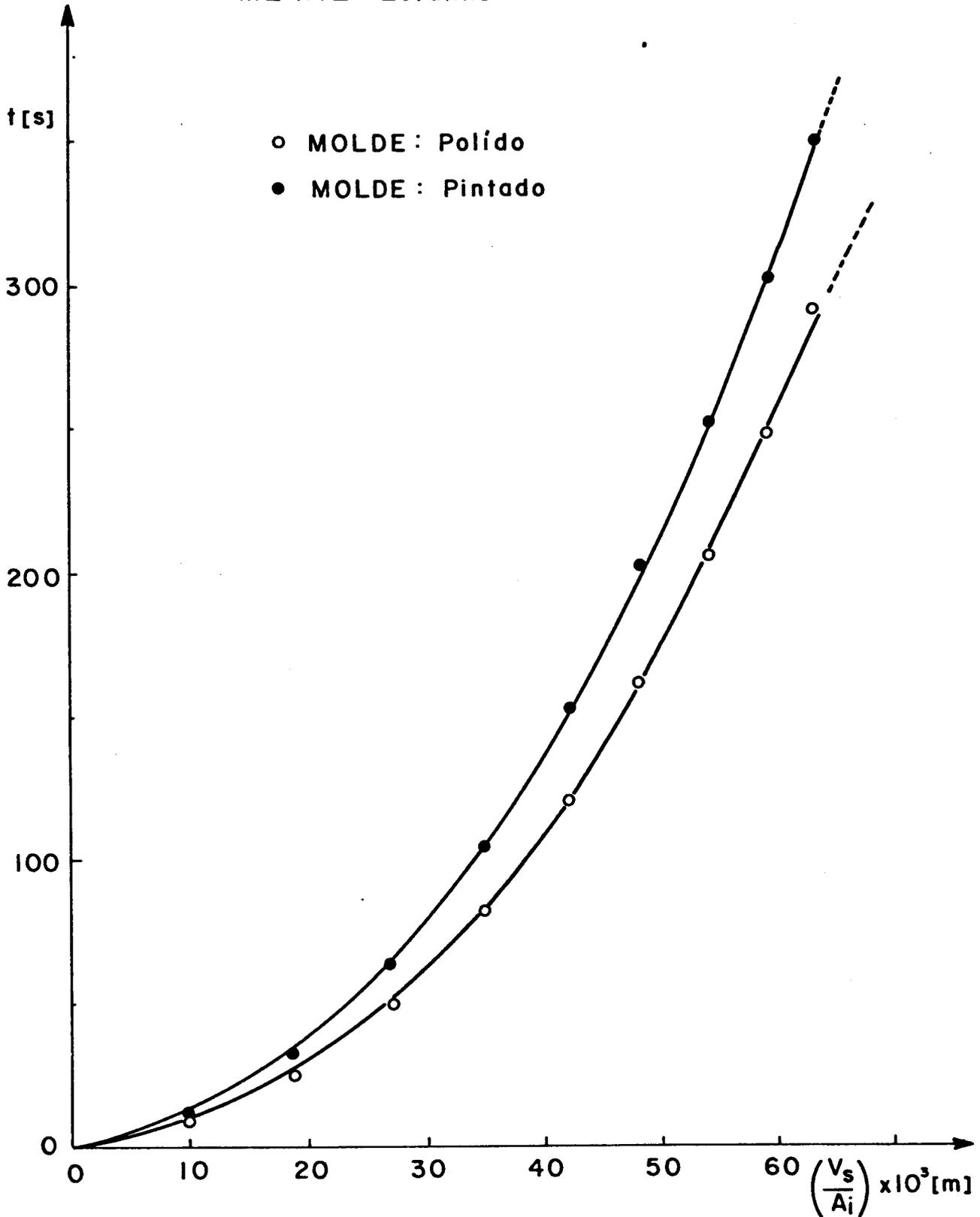


Fig. 4.9 - Resultados experimentais da cinética da solidificação radial do estanho em molde refrigerado a água para duas condições de contato térmico na interface metal/molde.

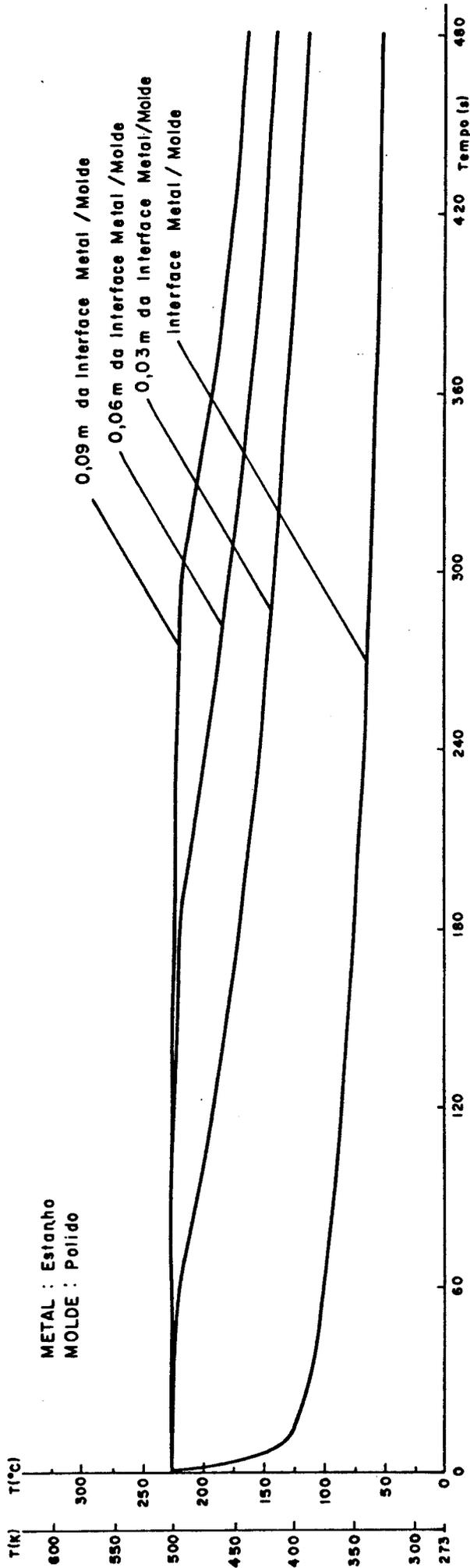


Fig. 4.10 - Variação da temperatura na interface metal/molde e em pontos situados a 0,03; 0,06 e 0,09 metros da mesma durante a solidificação radial do estanho em molde polido refrigerado.

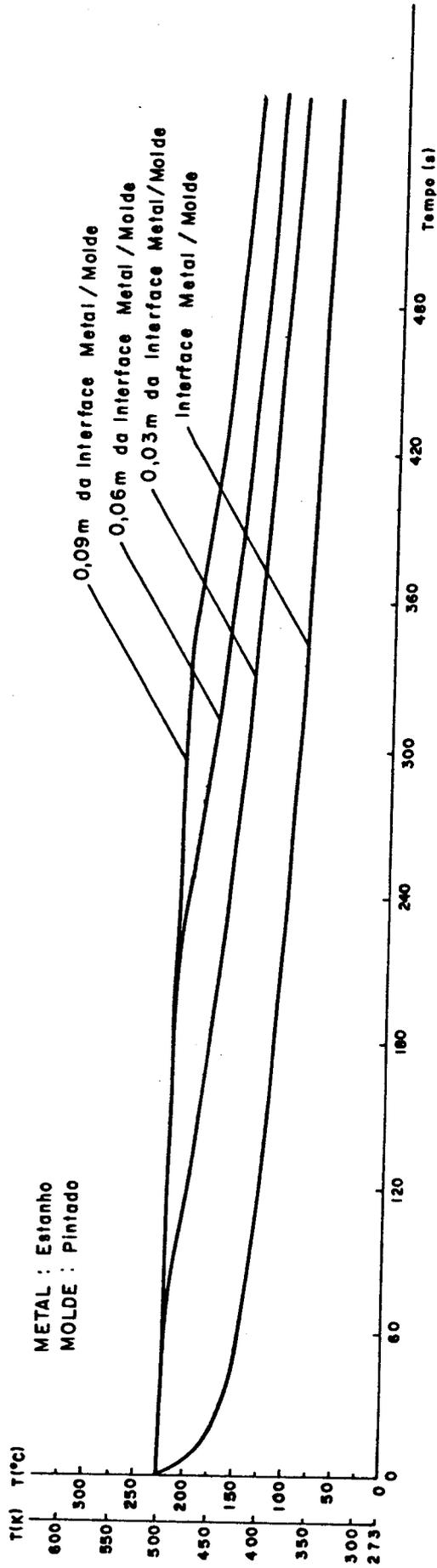


Fig. 4.11 - Variação da temperatura na interface metal/molde e em pontos situados a 0,03, 0,06 e 0,09 metros da mesma durante a solidificação do estanho em molde pinta do refrigerado.

CAPÍTULO 5

DISCUSSÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS E PROPOSIÇÃO DE UM MO-  
DELO PARA A ANÁLISE DA SOLIDIFICAÇÃO DE GEOMETRIAS CI-  
LÍNDRICAS EM MOLDES REFRIGERADOS

5.1. ANÁLISE DE RESULTADOS EXPERIMENTAIS RELATIVOS À CINÉTICA DE  
SOLIDIFICAÇÃO

Da análise dos métodos desenvolvidos para o estudo da solidificação em geometrias cilíndricas pode se constatar a inexistência de um método simples e confiável, que tenha sido comprovado experimentalmente, e que possa ser aplicado em sistemas metal/molde com esta geometria. Os únicos métodos aceitos atualmente como gerais são os numéricos que exigem extenso trabalho de programação e a utilização de computadores para a sua aplicação. Desta forma procurou-se desenvolver neste trabalho uma solução simples e de fácil aplicação, mas que ao mesmo tempo possa ser usada de forma geral e extensiva na análise da solidificação de metais em moldes cilíndricos refrigerados. A idéia básica para se desenvolver tal solução foi a de estender a solução de Garcia e Prates<sup>28,44,45</sup>, desenvolvida para a geometria plana, para o caso da geometria cilíndrica, introduzindo um fator que leve em conta os efeitos da curvatura.

Neste trabalho, inicialmente foram obtidas curvas comparativas entre os tempos de solidificação de metais em moldes refrigerados com geometria plana e com geometria cilíndrica em função da relação entre o volume de metal solidificado e a área de troca de calor na interface metal/molde ( $V_s/A_i$ ). Este parâmetro é conveniente para análise comparativa por levar em conta, no caso do cilindro, a redução da área de troca de calor na interface sólido/líquido durante a solidificação. No caso da geometria plana esta relação representa a própria espessura solidificada, já que:

$$\frac{V_s}{A_i} = \frac{S \cdot A_i}{A_i} = S \quad (5.1)$$

onde  $A_i$  é a área de troca de calor na interface metal/molde (igual

à área de troca de calor na interface sólido/líquido) e  $S$  a espessura solidificada. No caso do cilindro esta relação é dada por:

$$\frac{V_s}{A_i} = \frac{\pi r_o^2 \ell - \pi r_f^2 \ell}{2\pi r_o \ell} \quad (5.2)$$

onde  $\ell$  é a altura do cilindro, ou, simplesmente:

$$\frac{V_s}{A_i} = \frac{r_o^2 - r_f^2}{2r_o} \quad (5.3)$$

É importante salientar que para um mesmo valor da relação  $(V_s/A_i)$  a espessura solidificada na geometria plana é menor que a espessura solidificada no cilindro.

A Fig. 5.1 representa, de forma esquemática um instante qualquer do processo de solidificação em moldes com geometria plana e cilíndrica.

Nas Figuras 5.2, 5.3 e 5.4 são apresentados os tempos de solidificação em função da relação  $(V_s/A_i)$  respectivamente para o chumbo, o alumínio e o estanho solidificados em moldes polidos refrigerados com geometrias plana e cilíndrica. Os resultados para moldes cilíndricos foram obtidos experimentalmente através do dispositivo de solidificação radial desenvolvido neste trabalho, e os relativos à geometria plana calculados com a equação 2.60. Pode ser notado que no início da solidificação os tempos necessários para solidificar um mesmo  $(V_s/A_i)$  em moldes cilíndricos e planos não diferem muito mas a medida que o processo continua o tempo se torna cada vez maior no caso do molde cilíndrico em relação ao plano. A extrapolação das curvas experimentais mostrou que no final da solidificação o tempo de solidificação do cilindro é cerca de duas vezes maior.

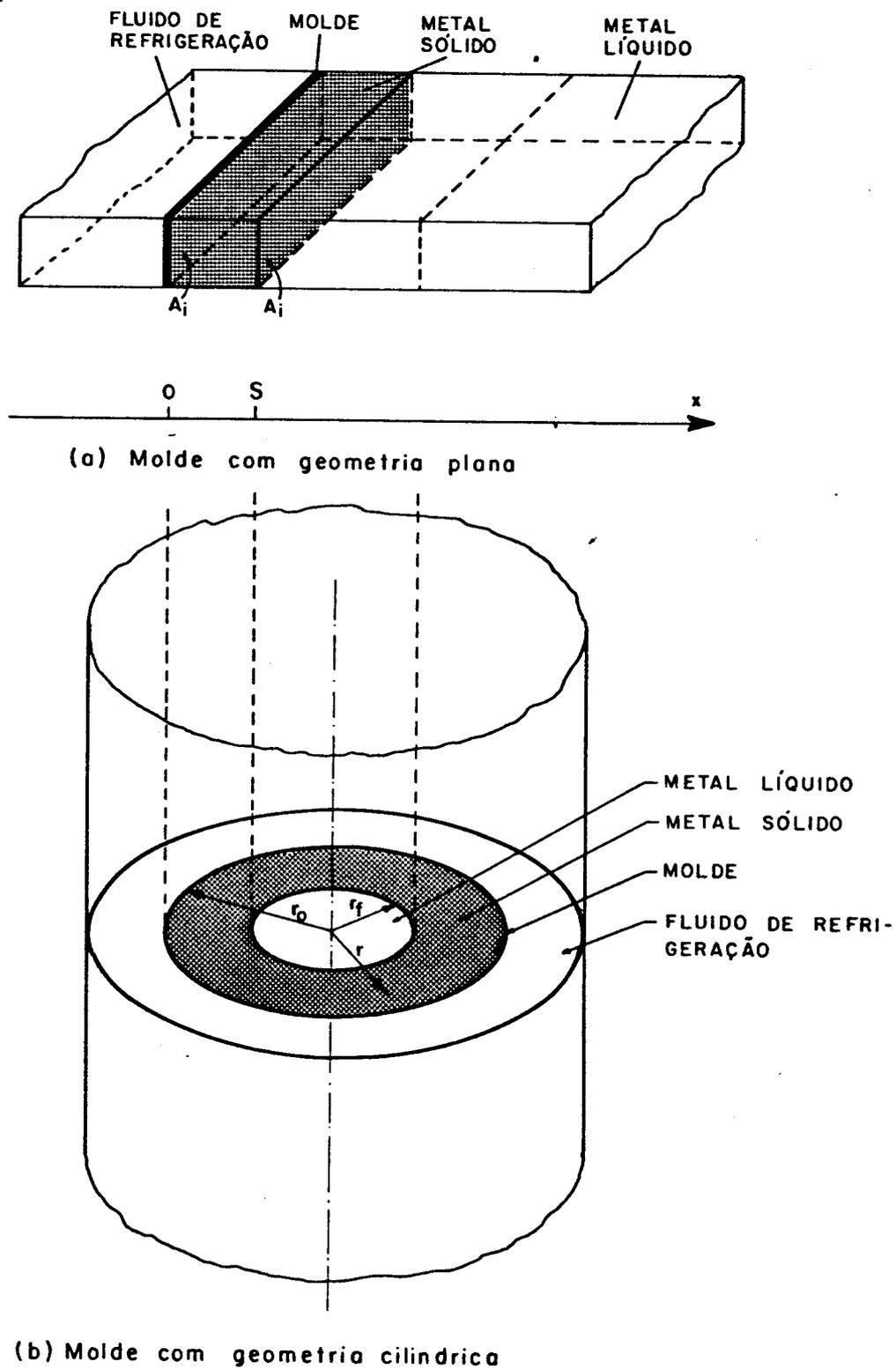


Fig. 5.1 - Representação esquemática de solidificação em moldes com geometria plana e com geometria cilíndrica.

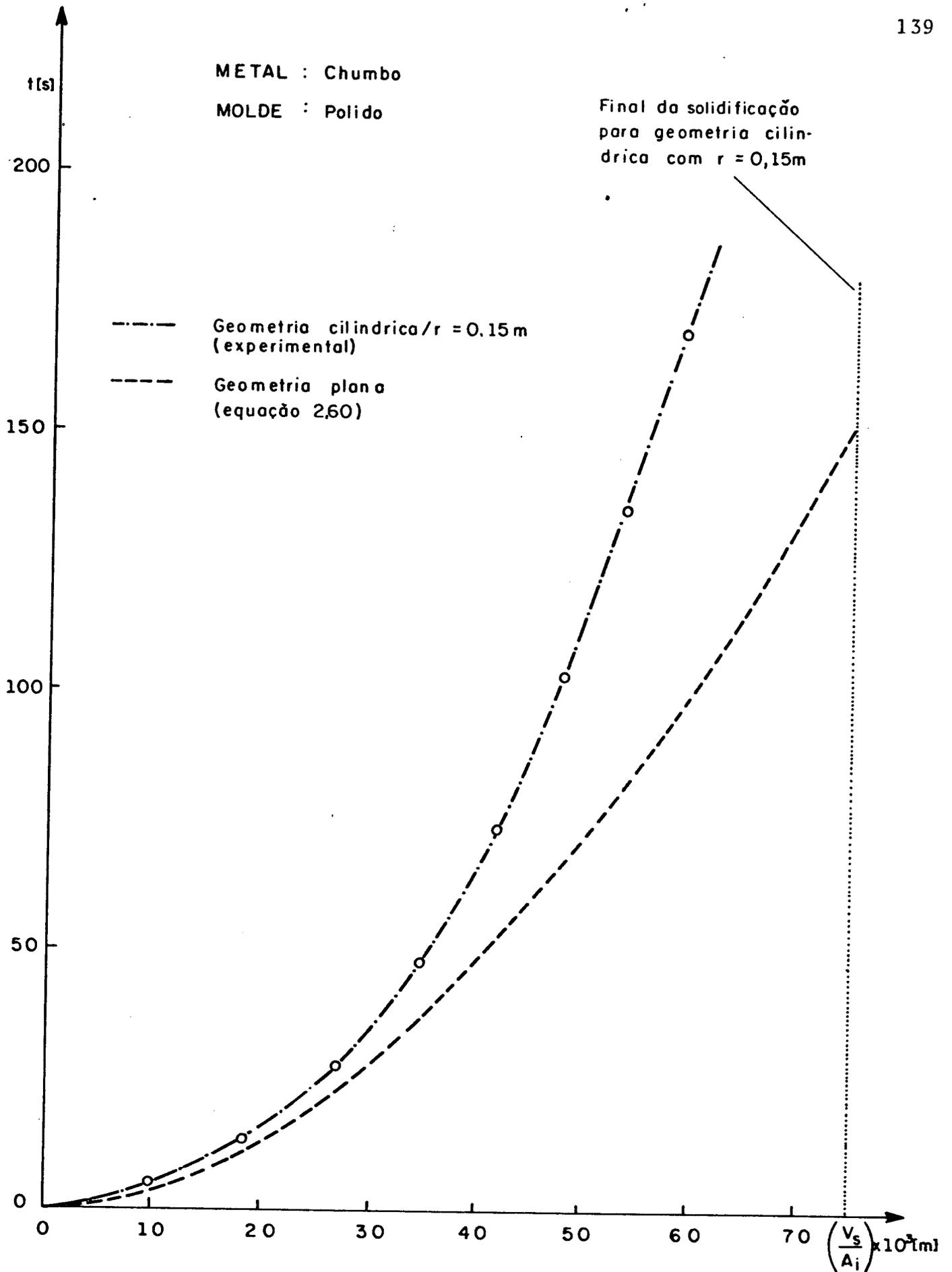


Fig. 5.2 - Comparação entre tempos de solidificação do chumbo solidificado em moldes polidos refrigerados com geometrias plana e cilíndrica em função de  $(V_s/A_i)$ .

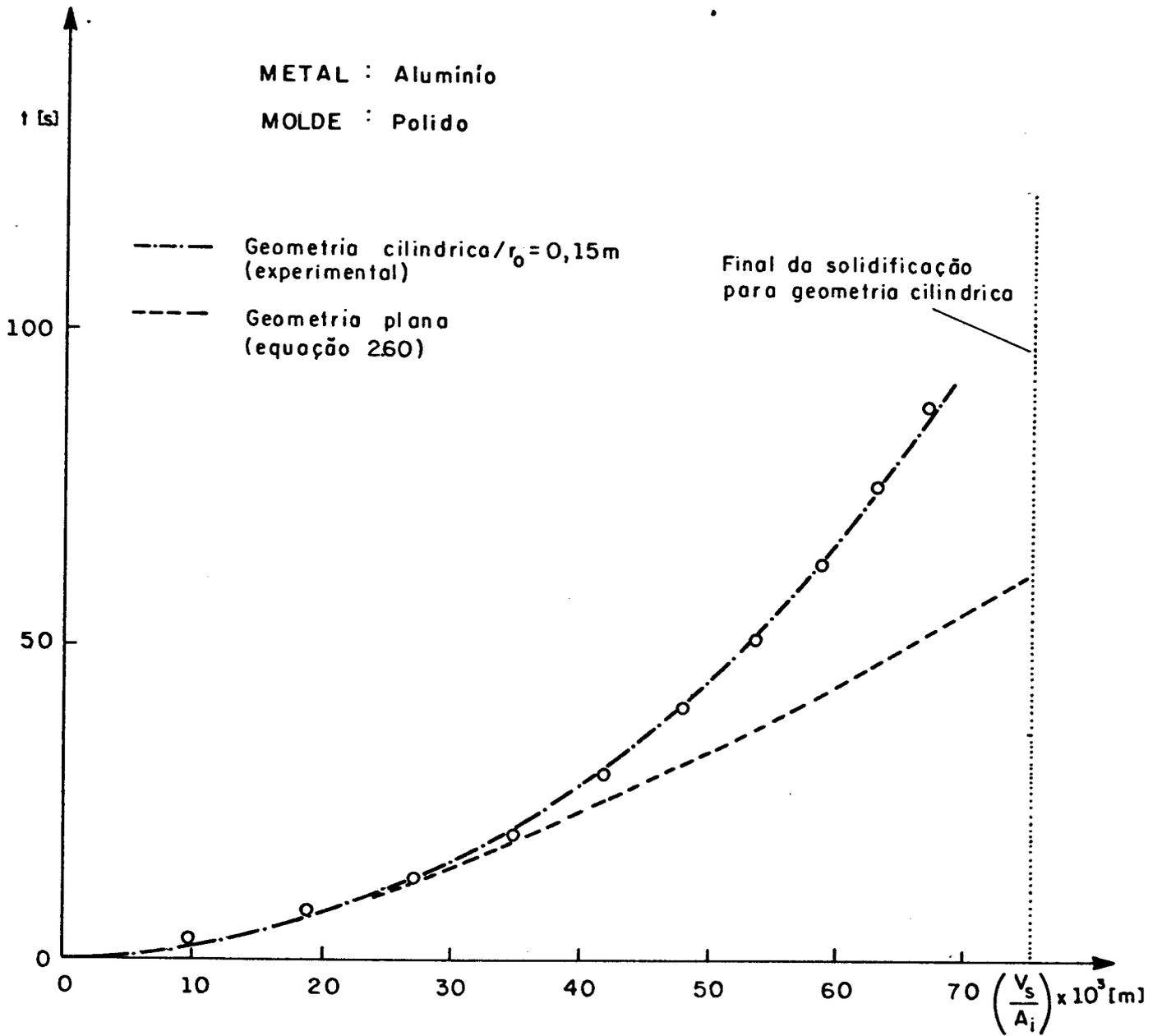


Fig. 5.3 - Comparação entre tempos de solidificação do alumínio solidificado em moldes polidos refrigerados com geometrias plana e cilíndrica em função de  $(V_s/A_i)$ .

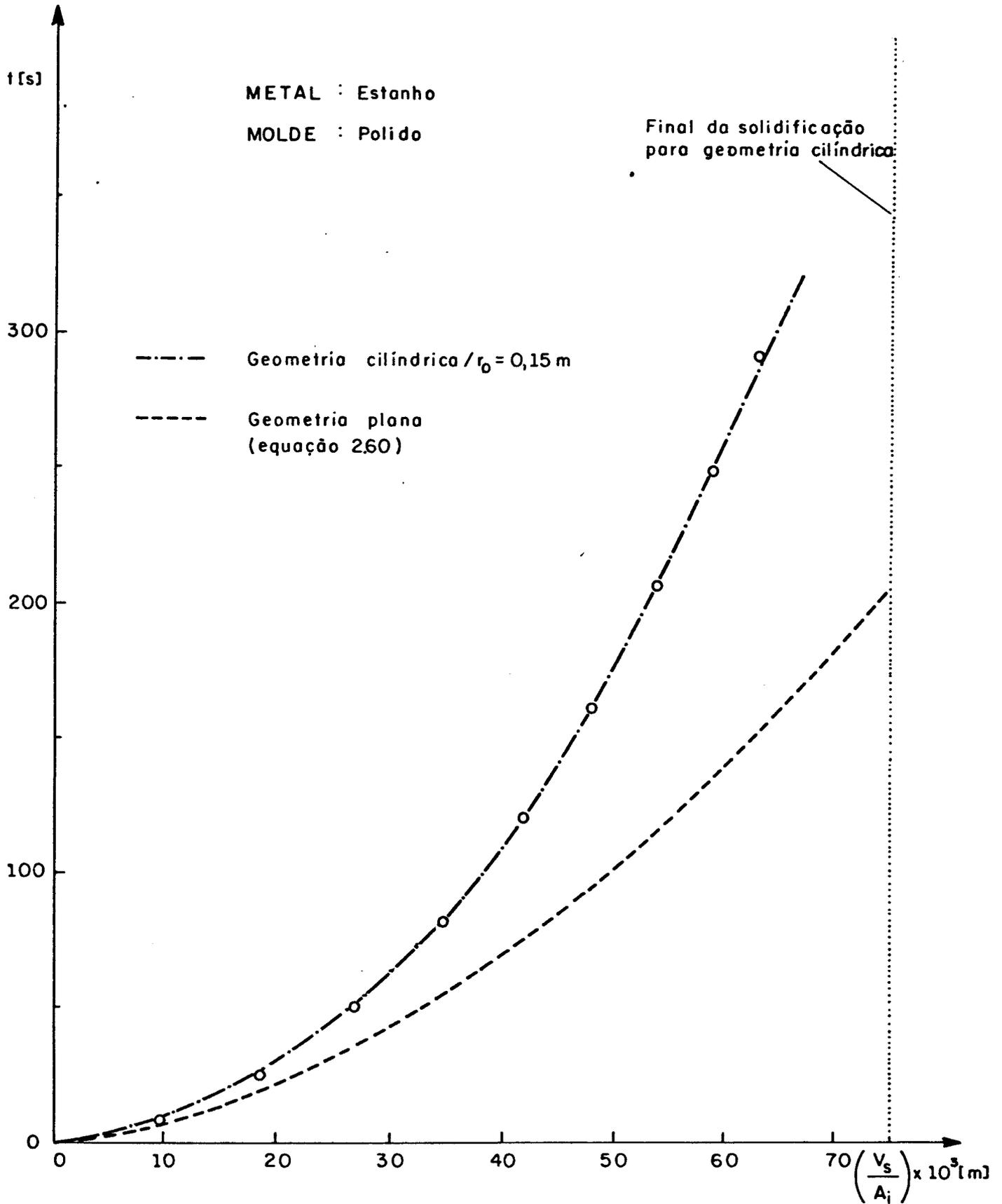


Fig. 5.4 - Comparação entre tempos de solidificação do estanho solidificado em moldes polidos com geometrias plana e cilíndrica em função de  $(V_s/\hat{A}_i)$ .

## 5.2. PROPOSIÇÃO DE UM MÉTODO PARA ANÁLISE DA CINÉTICA DE SOLIDIFICAÇÃO

### 5.2.1. Tempo de solidificação

Para conferir ao modelo de Garcia e Prates um caráter mais geral e extensivo é conveniente colocá-lo em uma forma adimensional. Isto pode ser feito introduzindo-se as seguintes grandezas adimensionais:

$$t^* = \frac{h_i^2 t}{b_s^2} \quad (5.4)$$

$$S^* = \frac{h_i S}{k_s} \quad (5.5)$$

na equação 2.60 obtendo-se:

$$\frac{t^* b_s^2}{h_i^2} = \alpha \left( \frac{S^* k_s^2}{h_i} \right) + \beta \left( \frac{S^* k_s}{h_i} \right) \quad (5.6)$$

Substituindo-se  $\alpha$  e  $\beta$  pelas equações 2.61 e 2.62 e  $b_s$  pela equação 2.20:

$$\frac{t^* k_s \rho_s c_s}{h_i^2} = \frac{\rho_s c_s}{4\phi^2 k_s} \cdot \frac{S^{*2} k_s^2}{h_i^2} + \frac{H \rho_s}{h_i (T_f - T_0)} \cdot \frac{S^* k_s}{h_i} \quad (5.7)$$

logo:

$$t^* = \frac{1}{4\phi^2} S^{*2} + \frac{H}{c_s (T_f - T_0)} S^* \quad (5.8)$$

ou

$$t^* = \frac{1}{4\phi^2} S^* + H^* S^* \quad (5.9)$$

onde  $\phi$  é definido pela equação 2.57 e

$$H^* = \frac{H}{c_s(T_f - T_o)} \quad (5.10)$$

Para se estender a equação 5.9, desenvolvida para geometrias planas para o caso de geometrias cilíndricas deve-se introduzir um fator modificador que leve em conta a curvatura do cilindro. Este fator deve levar em conta a diferença de geometria entre plano e cilindro e o fato de, no caso da geometria cilíndrica a taxa de redução do volume de líquido no final da solidificação aumentar mais rapidamente que no caso da plana.

De acordo com o constatado experimentalmente, o tempo de solidificação deve assumir um valor duas vezes maior que o do plano com um mesmo valor de  $(V_s/A_i)$ , no final do processo. Por outro lado, quando se compara uma peça cilíndrica com raio  $r_o$ , com uma placa plana, refrigerada em uma face, com espessura também igual a  $r_o$  pode-se determinar, usando as equações 5.1 e 5.3, que a relação entre os valores máximos de  $(V_s/A_i)$  para os dois casos é dada por:

$$\frac{\left(\frac{V_s}{A_i}\right)_p}{\left(\frac{V_s}{A_i}\right)_c} = \frac{S}{\frac{r_o^2 - r_f^2}{2r_o}} \quad (5.11)$$

como no final da solidificação:

$$S = r_o \quad (5.12)$$

e, para:

$$r_f = 0 \quad (5.13)$$

obtem-se

$$\frac{\left(\frac{V_s}{A_i}\right)_{pM\bar{x}}}{\left(\frac{V_s}{A_i}\right)_{cM\bar{x}}} = \frac{r_o}{\frac{r_o^2}{2r_o}} \quad (5.14)$$

ou

$$\frac{\left(\frac{V_s}{A_i}\right)_{pM\bar{x}}}{\left(\frac{V_s}{A_i}\right)_{cM\bar{x}}} = 2 \quad (5.15)$$

Como esta relação assume um valor constante igual a dois isto sugere que a mesma pode ser adotada como o termo do fator de correção responsável pela diferença geométrica entre plano e cilindro. Entretanto, como foi visto anteriormente as diferenças de tempos de solidificação para as duas geometrias são pequenas no início do processo e tendem a aumentar durante o processo até atingir o valor duas vezes maior no final. Isto indica que há necessidade de se introduzir, no fator de correção, um termo que atenua a parcela devido à diferença de geometria no início da solidificação e tenda a zero no final do processo. Este termo deve estar relacionado com a variação do volume de metal líquido remanescente em relação ao volume solidificado para a geometria cilíndrica que, como já foi dito, cai mais rapidamente que o plano no final do processo. De fato, considerando-se novamente um cilindro com raio  $r_o$  e uma placa plana com espessura  $r_o$ , a relação entre o volume do líquido remanescente e o volume já solidificado em cada instante é, para a placa igual a:

$$\left(\frac{V_l}{V_s}\right)_p = \frac{(r_o - S_p)A_i}{r_o \cdot A_i} \quad (5.16)$$

ou

$$\left( \frac{V_l}{V_s} \right)_p = \frac{r_o - S_p}{r_o} \quad (5.17)$$

e para o cilindro, igual a:

$$\left( \frac{V_l}{V_s} \right)_c = \frac{\pi(r_o - S_c)^2 l}{\pi r_o^2 l} \quad (5.18)$$

ou

$$\left( \frac{V_l}{V_s} \right)_c = \left( \frac{r_o - S_c}{r_o} \right)^2 \quad (5.19)$$

onde

$$S_c = r_o - r_f \quad (5.20)$$

Como pode ser notado a relação é linear para a geometria plana e quadrática para o cilindro. Introduzindo a equação 5.20 na equação 5.19 esta pode ser colocada na forma:

$$\left( \frac{V_l}{V_s} \right)_c = \left( \frac{r_f}{r_o} \right)^2 \quad (5.21)$$

Esta relação parece adequada para ser usada como segundo termo do fator de correção já que assume um valor máximo igual à unidade no início da solidificação ( $r_f=r_o$ ) e tende a zero no final ( $r_f=0$ ).

Desta forma incluindo a equação 5.21 como fator atenuante da correção dada pela equação 5.15, a correção global  $\theta$  ficaria dada por:

$$\theta = \left[ \frac{\left(\frac{V_s}{A_i}\right)_{pM\acute{a}x}}{\left(\frac{V_s}{A_i}\right)_{cM\acute{a}x}} - \left(\frac{V_l}{V_s}\right)_c \right] \quad (5.22)$$

ou, de forma simplificada:

$$\theta = \left[ 2 - \left(\frac{r_f}{r_o}\right)^2 \right] \quad (5.23)$$

Introduzindo este fator na equação 5.9 e substituindo  $S^*$  por  $(V_s/A_i)_c^*$ , obtêm-se a equação para o cálculo do tempo de solidificação de metais solidificados em moldes cilíndricos refrigerados:

$$t_c^* = \left[ 2 - \left(\frac{r_f}{r_o}\right)^2 \right] \cdot \left[ \frac{1}{4\phi^2} \left(\frac{V_s}{A_i}\right)_c^{*2} + H^* \left(\frac{V_s}{A_i}\right)_c^* \right] \quad (5.24)$$

onde  $(V_s/A_i)^*$  é a relação  $(V_s/A_i)$  na forma adimensional dada por:

$$\left(\frac{V_s}{A_i}\right)_c^* = \frac{h_i}{k_s} \left( \frac{r_o^2 - r_f^2}{2r_o} \right) \quad (5.25)$$

Uma vez desenvolvida a equação para determinação dos tempos de solidificação em função de  $(V_s/A_i)$  na forma adimensional, o passo seguinte foi a verificação da validade da mesma através da comparação com os resultados experimentais.

Para a aplicação da equação 5.24 há necessidade de se conhecer, além das propriedades térmicas dos metais escolhidos, o coeficiente de transferência de calor ( $h_i$ ) na interface metal/molde para cada um dos casos estudados. Estes valores não devem depender da geometria e para o caso de moldes polidos foram utilizados os

valores determinados por A. Garcia.<sup>28</sup> No caso de moldes pintados estes valores dependem fortemente da espessura da camada de recobrimento e da composição da tinta utilizada, sendo por isto determinados experimentalmente para os casos estudados utilizando o método de Garcia e Prates.<sup>47</sup> Os valores de  $h_i$  utilizados são apresentados na Tabela 5.1.

Na Fig. 5.5 é apresentada a curva de variação do tempo de solidificação em função da relação  $V_S/A_i$  (ambos na forma adimensional) obtida com a aplicação do método proposto (equação 5.24), juntamente com os pontos experimentais, para o chumbo solidificado em molde cilíndrico polido refrigerado. É também apresentada, para efeito de comparação, a mesma variação para a geometria plana calculada pelo método de Garcia e Prates (equação 5.9). Na Fig. 5.6 são apresentados os mesmos resultados para o chumbo em molde pintado.

Nas Figuras 5.7 e 5.8 são apresentadas as mesmas curvas para o alumínio, solidificado, respectivamente, em molde polido e pintado. E nas Figuras 5.9 e 5.10 as mesmas curvas para o estanho, também solidificado em molde polido e pintado.

Pode-se notar que, para todos os metais estudados, há uma boa concordância entre os resultados teóricos, obtidos com a aplicação do método proposto, e os resultados experimentais, obtidos com o dispositivo de solidificação radial desenvolvido neste trabalho, o que comprova a eficiência do modelo.

#### 5.2.2. Comparação do método proposto com métodos numéricos e analíticos

Devido a características já citadas do dispositivo simulador de geometria cilíndrica, só foram obtidos valores experimentais do tempo de solidificação até uma espessura solidificada correspondente a 2/3 do raio do molde cilíndrico. Como a equação desenvolvida permite a análise completa do processo de solidificação, resta comprovar sua eficiência no 1/3 final, para o qual não foram obtidos resultados experimentais. Além disso como os resultados experimentais foram obtidos para um cilindro com raio igual a 0,15 metros, é necessário verificar a validade da equação para cilindros com outros raios. Para efetuar estas verificações foram realizadas comparações com um método de diferenças finitas, tradicionalmente utilizado na análise da solidificação de peças com geome-

CONDIÇÃO DO MOLDE	COEFICIENTE DE TRANSMISSÃO DE CALOR NA INTERFACE METAL/MOLDE ( $h_i$ ) [ $J/m^2 sK$ ]		
	CHUMBO	ALUMÍNIO	ESTANHO
MOLDE POLIDO	$4,9 \times 10^3$	$4,8 \times 10^3$	$4,2 \times 10^3$
MOLDE PINTADO	$1,5 \times 10^3$	$0,9 \times 10^3$	$2,6 \times 10^3$

TABELA 5.1 - Valores do coeficiente de transmissão de calor na interface metal/molde utilizados neste trabalho.

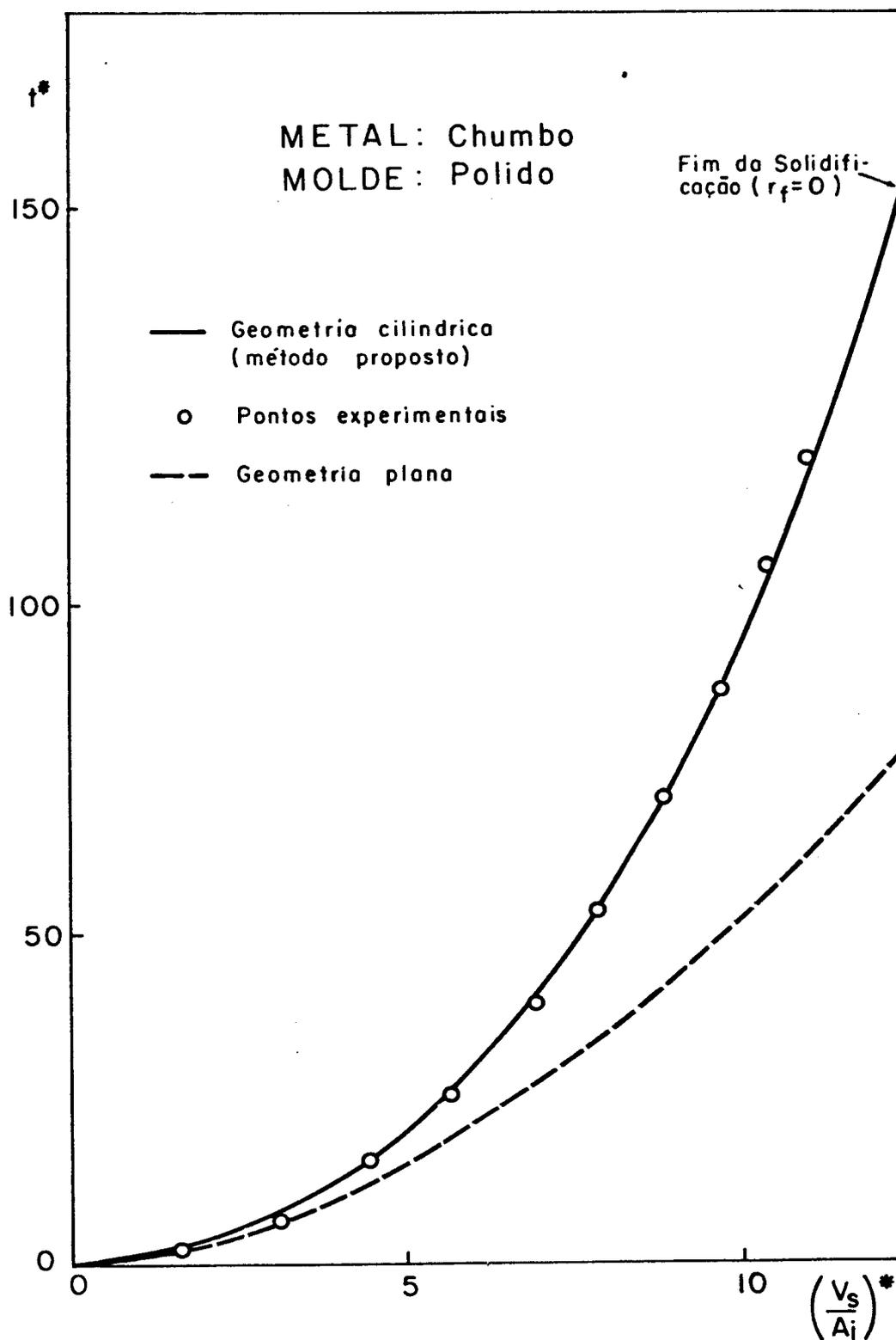


Fig. 5.5 - Variação do tempo de solidificação com a relação  $V_s/A_i$ , adimensionais, durante a solidificação do chumbo em molde cilíndrico refrigerado, polido internamente, obtida com o método proposto, comparada com resultados experimentais.

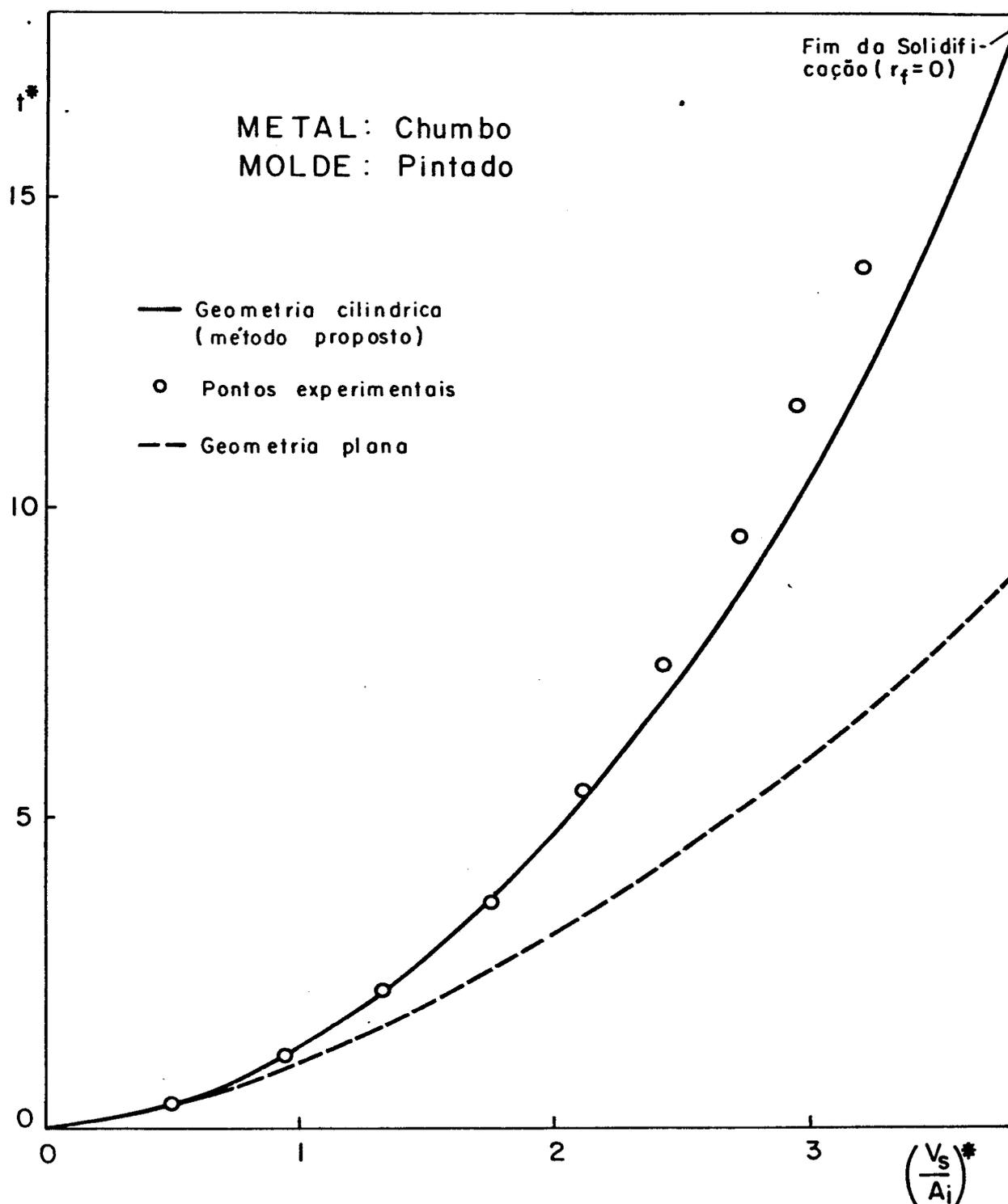


Fig. 5.6 - Variação do tempo de solidificação com a relação  $(V_s/A_i)$ , adimensionais, durante a solidificação do chumbo em molde cilíndrico refrigerado, pintado internamente, obtida com o método proposto, comparada com resultados experimentais.

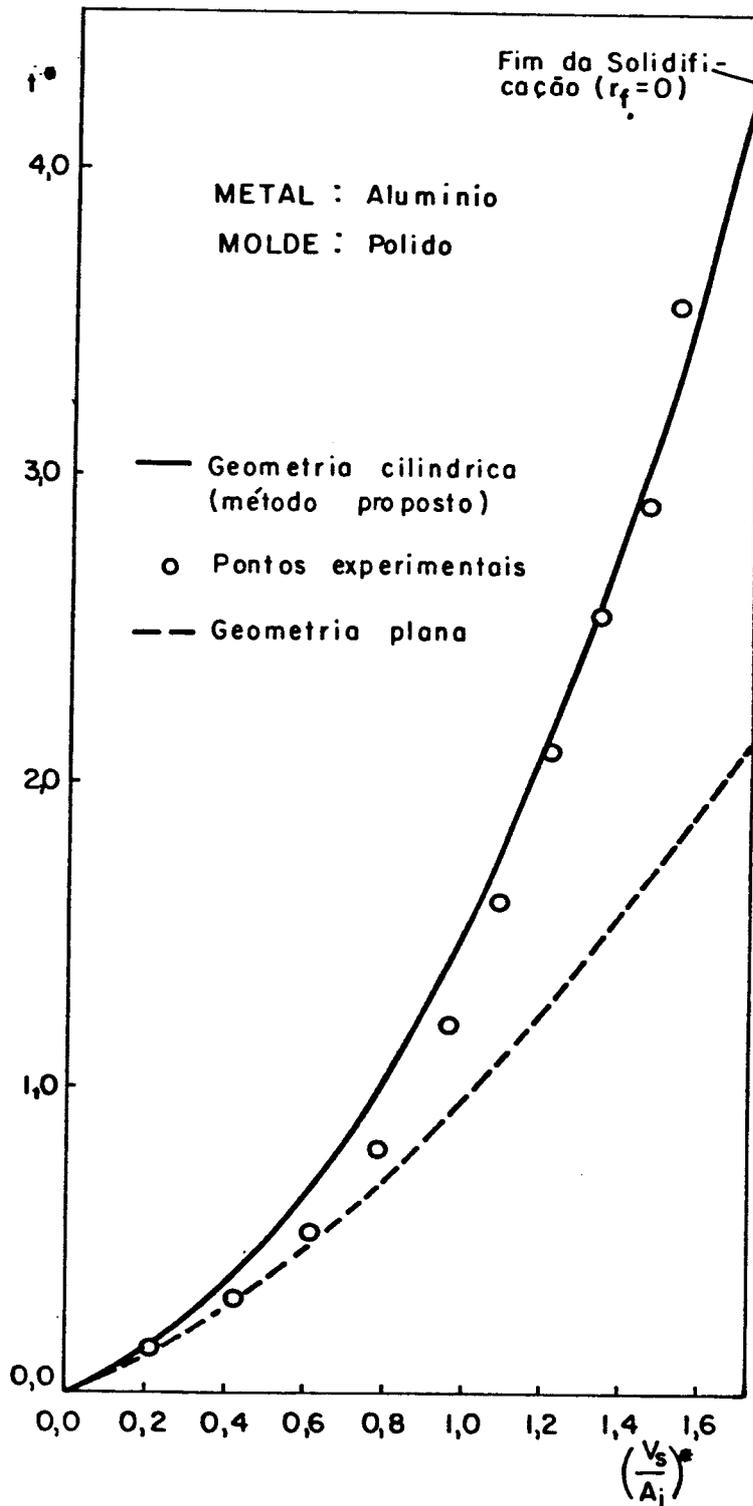


Fig. 5.7 - Variação do tempo de solidificação com a relação  $V_s/A_i$ , adimensionais, durante a solidificação do alumínio em molde cilíndrico refrigerado, polido internamente, obtida com o método proposto, comparada com resultados experimentais.

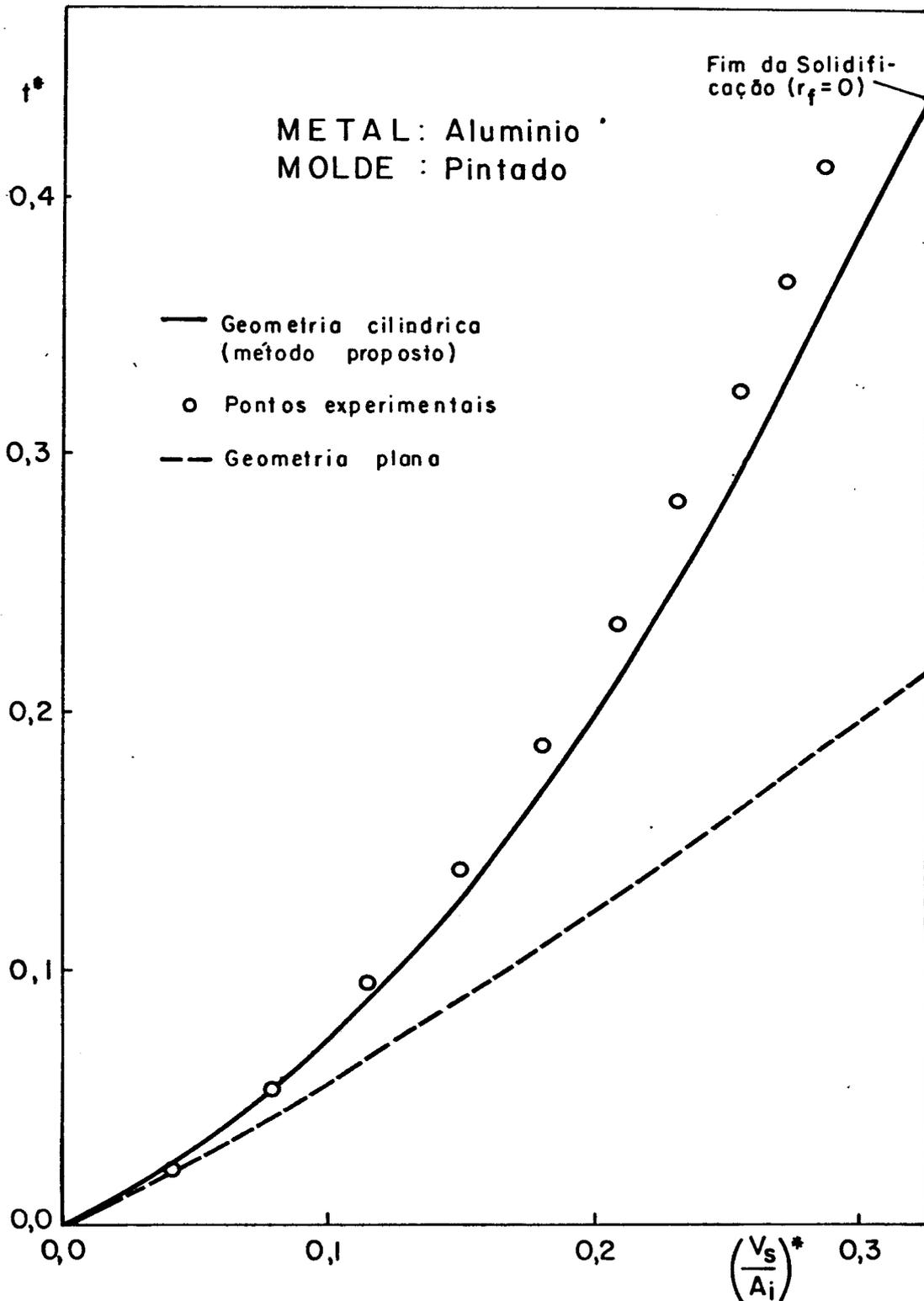


Fig. 5.8 - Variação do tempo de solidificação com a relação  $V_s/A_i$ , adimensionais, durante a solidificação do alumínio em molde cilíndrico refrigerado, pintado internamente, obtida com o método proposto, comparada com resultados experimentais.

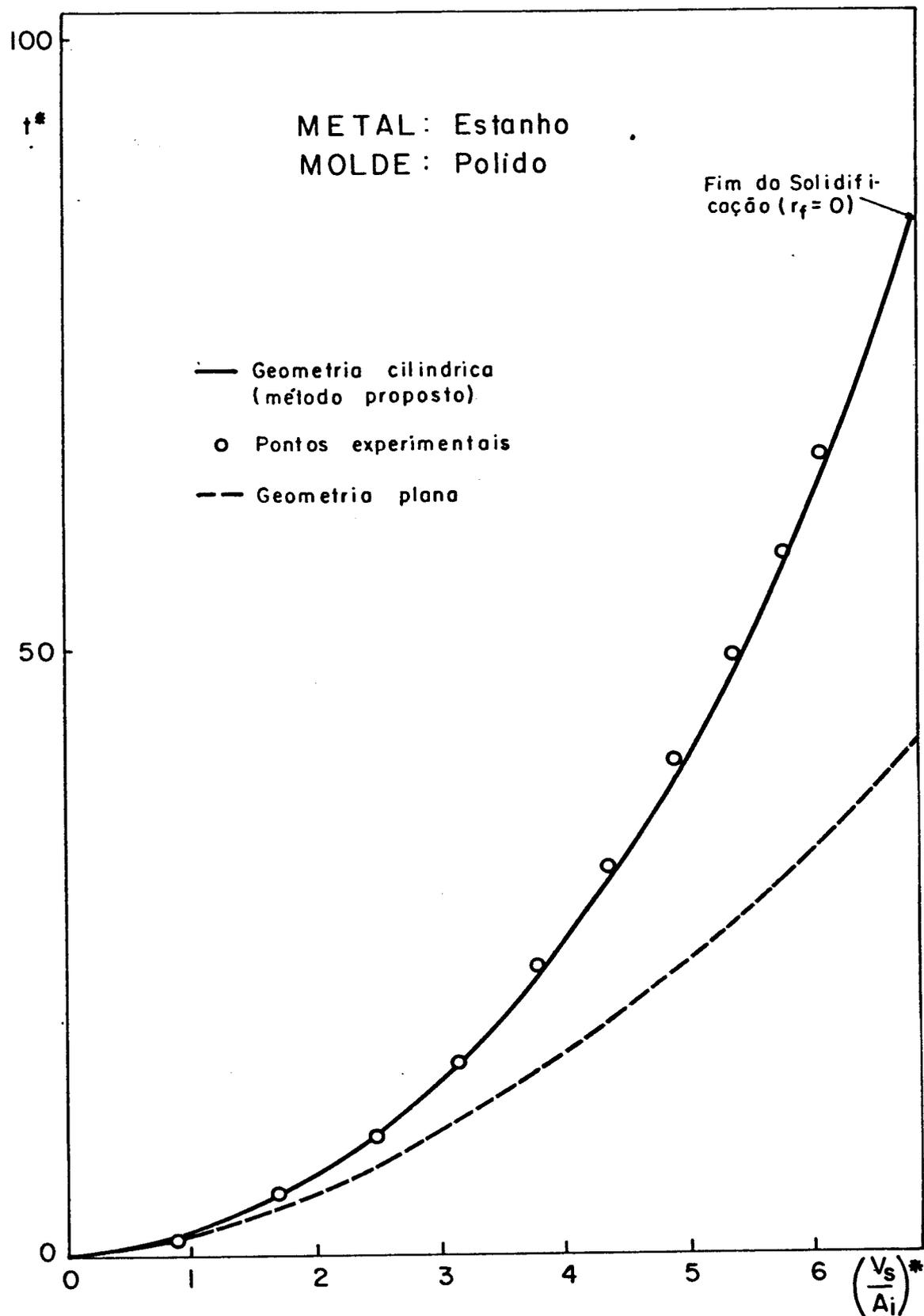


Fig. 5.9 - Variação do tempo de solidificação com a relação  $V_s/A_i$ , adimensionais, durante a solidificação do estanho em molde cilíndrico refrigerado, polido internamente, obtida com o método proposto, comparada com resultados experimentais.

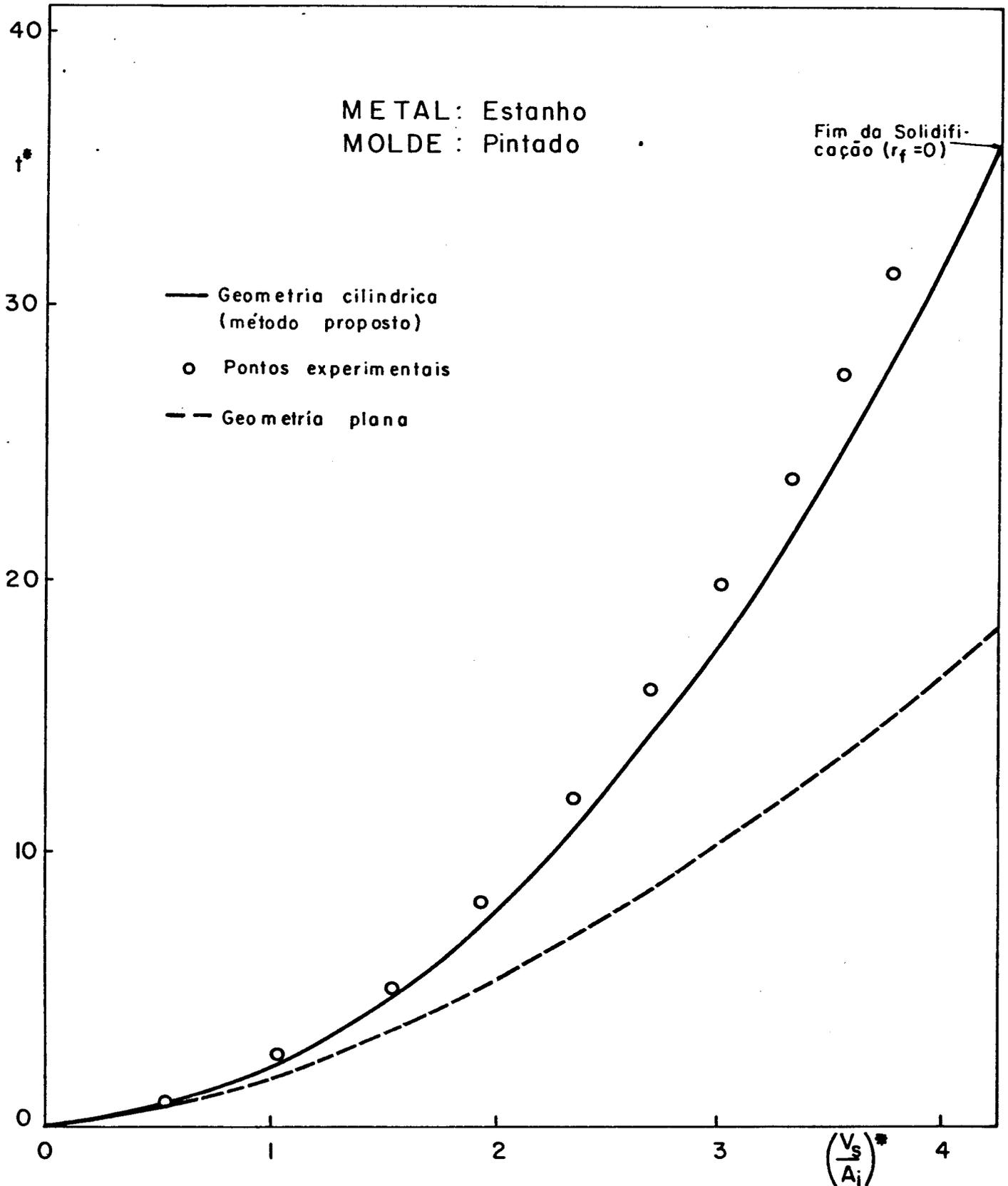


Fig. 5.10 - Variação do tempo de solidificação com a relação  $V_s/A_i$ , adimensionais, durante a solidificação do estanho em molde cilíndrico refrigerado, pintado internamente, obtida com o método proposto, comparada com resultados experimentais.

trias cilíndricas.<sup>105</sup> Desta forma, considerando o caso do alumínio solidificado em molde cilíndrico refrigerado com um coeficiente de transferência de calor igual a  $2.100 \text{ [J/m}^2\text{sK]}$ , foram calculados os tempos de solidificação adimensionais em função da relação adimensional  $(V_s/A_i)^*$  para moldes com raio igual 0,20 metros e com raio igual a 0,10 metros.

Na Fig. 5.11 (a e b) são apresentadas as curvas obtidas através do método proposto comparadas com as obtidas pelo método numérico para o processo de solidificação completo. Para manter o mesmo parâmetro adotado no método numérico, o tempo de solidificação adimensional foi plotado em função da relação adimensional  $r_f/r_o$ . Pode-se notar que a concordância entre as curvas obtidas pelos dois métodos é excelente, o que permite concluir que o método proposto, pode ser aplicado na análise completa do processo de solidificação e para geometrias cilíndricas com diferentes raios.

Um fato interessante que é evidenciado quando se plota o tempo de solidificação em função do parâmetro  $r_f/r_o$ , é que a curva apresenta duas inflexões durante o processo, indicando a ocorrência de um decréscimo da velocidade de solidificação após um certo instante do início e de um aumento da mesma no final da solidificação. Tal ocorrência não é perceptível quando se plota o tempo em função da relação  $(V_s/A_i)$ . Este fato será analisado com mais detalhe posteriormente no estudo das velocidades de solidificação.

O método proposto foi também comparado com os métodos analíticos aproximados de London e Seban e de Shih e Tsay.<sup>55,92</sup> Na Fig. 5.12 são apresentados os resultados obtidos  $(t^* \times r_f/r_o)$ , juntamente com os pontos experimentais, para a solidificação do chumbo em molde polido. Pode-se notar que o método proposto é o que apresenta melhor concordância com os pontos experimentais. Fica evidenciado, também, que o método de London e Seban subestima demais os tempos de solidificação durante o processo se tornando inaceitável para analisar a solidificação de metais. Tal fato já era esperado, uma vez que este método despreza o efeito do calor específico do material que se solidifica, o que não pode ser feito na solidificação de metais. Já o método de Shih e Tsay apresenta uma boa concordância com os resultados experimentais obtidos para a solidificação de uma espessura equivalente a 2/3 do cilindro. No entanto no 1/3 final, a aproximação de segunda ordem utilizada para

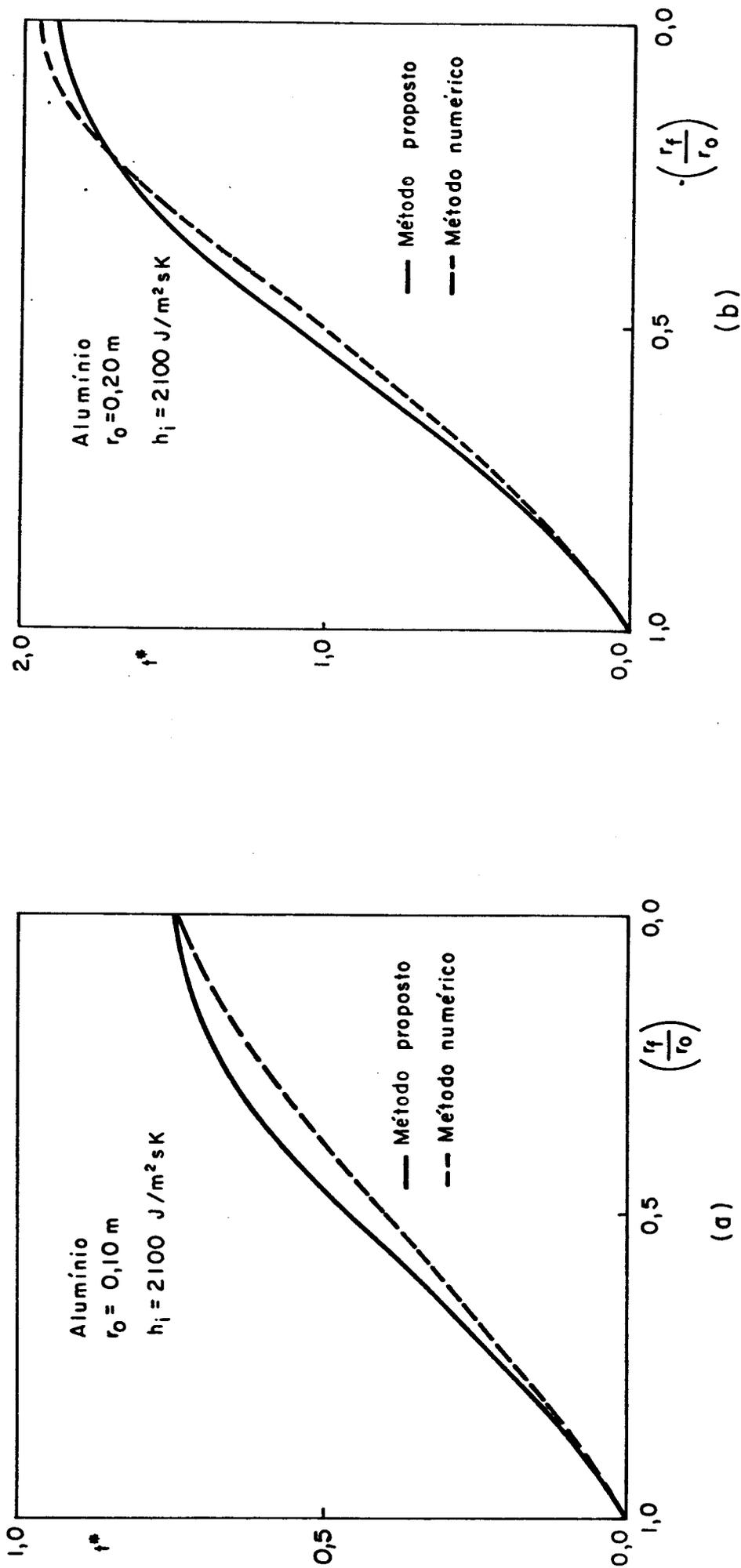


Fig. 5.11 - Comparação entre as curvas de variação do tempo de solidificação adimensional com a relação adimensional  $r_f/r_o$ , obtidas através do método proposto e de um método numérico de diferenças finitas<sup>105</sup>, para o alumínio solidificado em moldes cilíndricos refrigerados com raios iguais a 0,10 e 0,20 metros.

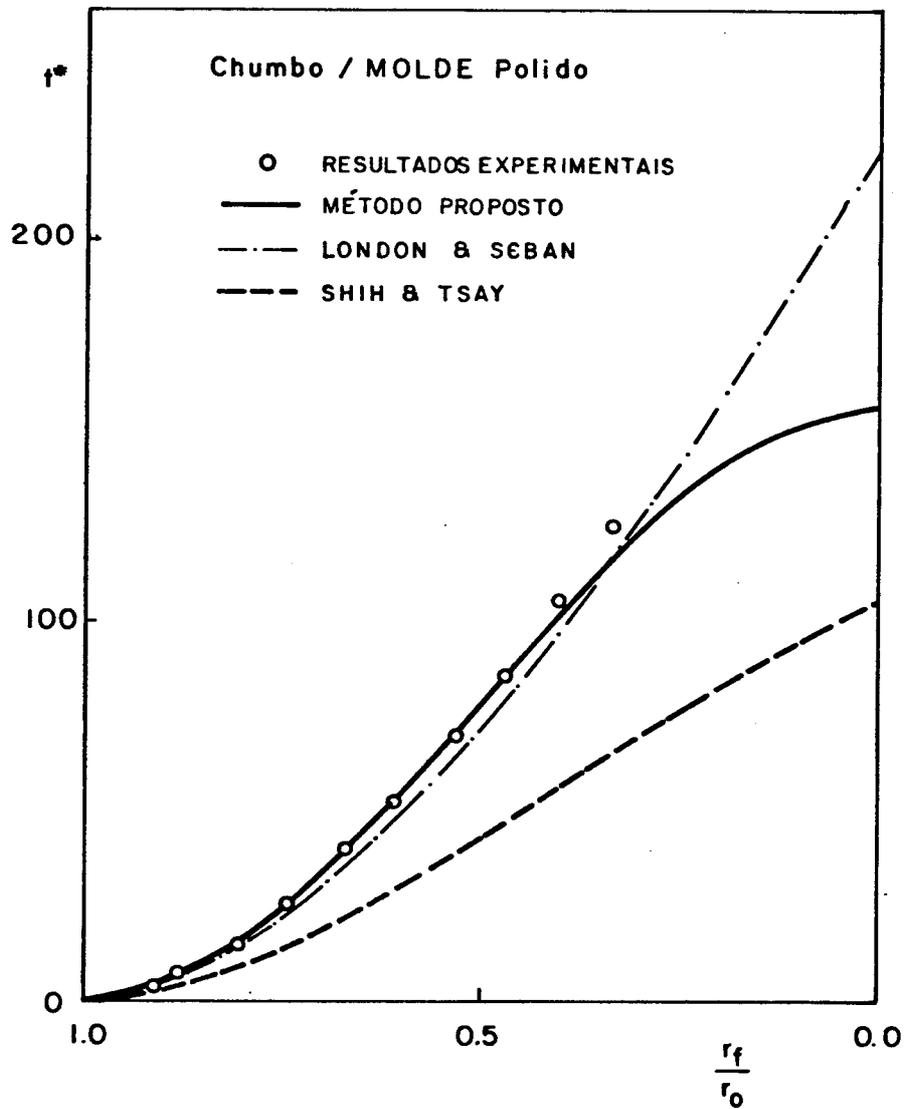


Fig. 5.12 - Comparação entre o método proposto e métodos analíticos aproximados.

os cálculos, não leva em conta o aumento da velocidade que ocorre nesta fase do processo para geometrias cilíndricas.

Shih e Tsay já haviam constatado em seu trabalho, através de comparação com método numérico, que para o caso de metais o seu método, mesmo para aproximações de maior ordem, não apresenta bons resultados na fase final da solidificação, apresentando boa concordância nesta fase apenas para casos semelhantes ao estudado por London e Seban, onde o efeito do calor específico pode ser desprezado.<sup>92</sup>

### 5.2.3. Velocidade de solidificação

Uma vez desenvolvida e verificada a equação que permite a determinação do tempo em função do volume solidificado (ou da espessura solidificada) em moldes cilíndricos foi determinada, a partir da mesma a equação que descreve a variação de velocidade de solidificação durante o processo. Para tanto a equação 5.24 foi colocada na seguinte forma dimensional:

$$C_2 t_c = \left[ 2 - \frac{r_f}{r_o} \right] \left[ \frac{1}{4\phi^2} \left( C_1 \frac{V_s}{A_i} \right)^2 + H^* C_1 \frac{V_s}{A_i} \right] \quad (5.26)$$

onde:

$$C_1 = \frac{h_i}{k} \quad (5.27)$$

e,

$$C_2 = \frac{h_i^2}{k \cdot \rho \cdot c} \quad (5.28)$$

Como a velocidade de solidificação está relacionada com o avanço da interface sólido/líquido e portanto com o aumento da espessura solidificada, é conveniente colocar a equação 5.26 em função desta espessura que, para geometrias cilíndricas, é dada por  $(r_o - r_f)$ . Desta forma obtém-se:

$$t_c = \frac{1}{C_2} \left\{ \left[ 2 - \left( \frac{r_o - (r_o - r_f)}{r_o} \right)^2 \right] \cdot \left[ \frac{1}{4\phi^2} \left( C_1 \frac{2r_o(r_o - r_f) - (r_o - r_f)^2}{2r_o} \right)^2 \right] + \left[ H^*C_1 \frac{2r_o(r_o - r_f) - (r_o - r_f)^2}{2r_o} \right] \right\} \quad (5.29)$$

Derivando a equação 5.29 em função da espessura solidificada  $(r_o - r_f)$ , obtêm-se:

$$\begin{aligned} \frac{dt_c}{d(r_o - r_f)} = \frac{1}{C_2} & \left\{ \left[ \frac{2}{C_2} \left( \frac{r_o - (r_o - r_f)}{r_o} \right) \right] \left[ \frac{1}{4\phi^2} \left[ C_1 \frac{2r_o(r_o - r_f) - (r_o - r_f)^2}{2r_o} \right]^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + H^*C_1 \left[ \frac{2r_o(r_o - r_f) - (r_o - r_f)^2}{2r_o} \right] \right] + \right. \\ & \left. + \left[ 2 - \left( \frac{r_o - (r_o - r_f)}{r_o} \right)^2 \right] \left[ \frac{2C_1^2}{4\phi^2} \left( \frac{2r_o(r_o - r_f) - (r_o - r_f)^2}{2r_o} \right) \frac{1}{2r_o} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{H^*C_1}{2r_o} \right] \left[ 2r_o - 2(r_o - r_f) \right] \right\} \quad (5.30) \end{aligned}$$

como a velocidade  $(v)$  é dada por:

$$v = \frac{d(r_o - r_f)}{dt_c} = \left[ \frac{dt_c}{d(r_o - r_f)} \right]^{-1} \quad (5.31)$$

rearranjando a equação 5.30, obtêm-se:

$$v = \left[ \frac{dt_c}{d(r_o - r_f)} \right]^{-1} = \frac{1}{C_2} \left( \frac{r_f}{r_o} \right) \left\{ \left[ \frac{C_1^2}{4\phi^2} \left( \frac{2r_o(r_o - r_f) - (r_o - r_f)^2}{2r_o} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + H^* C_1 \left( \frac{2r_o(r_o - r_f) - (r_o - r_f)^2}{2r_o} \right) \right] \frac{2}{r_o} + \right. \\ \left. + \left[ 2 - \left( \frac{r_f}{r_o} \right)^2 \right] \left[ \frac{2C_1^2}{4\phi^2} \left( \frac{2r_o(r_o - r_f) - (r_o - r_f)^2}{2r_o} \right) + H^* C_1 \right] \right\}^{-1} \quad (5.32)$$

Como:

$$\frac{2r_o(r_o - r_f) - (r_o - r_f)^2}{2r_o} = \frac{V_s}{A_i} \quad (5.33)$$

a equação 5.32 pode ser colocada também em função de  $(V_s/A_i)$ , obtendo-se:

$$v = \left\{ \frac{1}{C_2} \left( \frac{r_f}{r_o} \right) \left\{ \left[ \frac{C_1^2}{4\phi^2} \left( \frac{V_s}{A_i} \right)^2 + H^* C_1 \left( \frac{V_s}{A_i} \right) \right] \frac{2}{r_o} + \right. \right. \\ \left. \left. + \left[ 2 - \left( \frac{r_f}{r_o} \right)^2 \right] \left[ \frac{2C_1^2}{4\phi^2} \left( \frac{V_s}{A_i} \right) + H^* C_1 \right] \right\} \right\}^{-1} \quad (5.34)$$

Uma vez estabelecida a equação para o cálculo da velocidade (5.32 ou 5.34) foram, inicialmente, determinadas as curvas de variação da velocidade em função da espessura solidificada  $(r_o - r_f)$  para os metais estudados neste trabalho (Al, Pb, Sn), solidificados em moldes polidos refrigerados. As curvas obtidas são apresentadas na Fig. 5.13. Pode-se notar que, para todos os casos, a velocidade inicialmente cai durante uma primeira fase do processo de solidificação, atinge um valor aproximadamente constante em uma segunda fase e volta a crescer em uma terceira fase.

Um fato interessante que pode ser observado é que

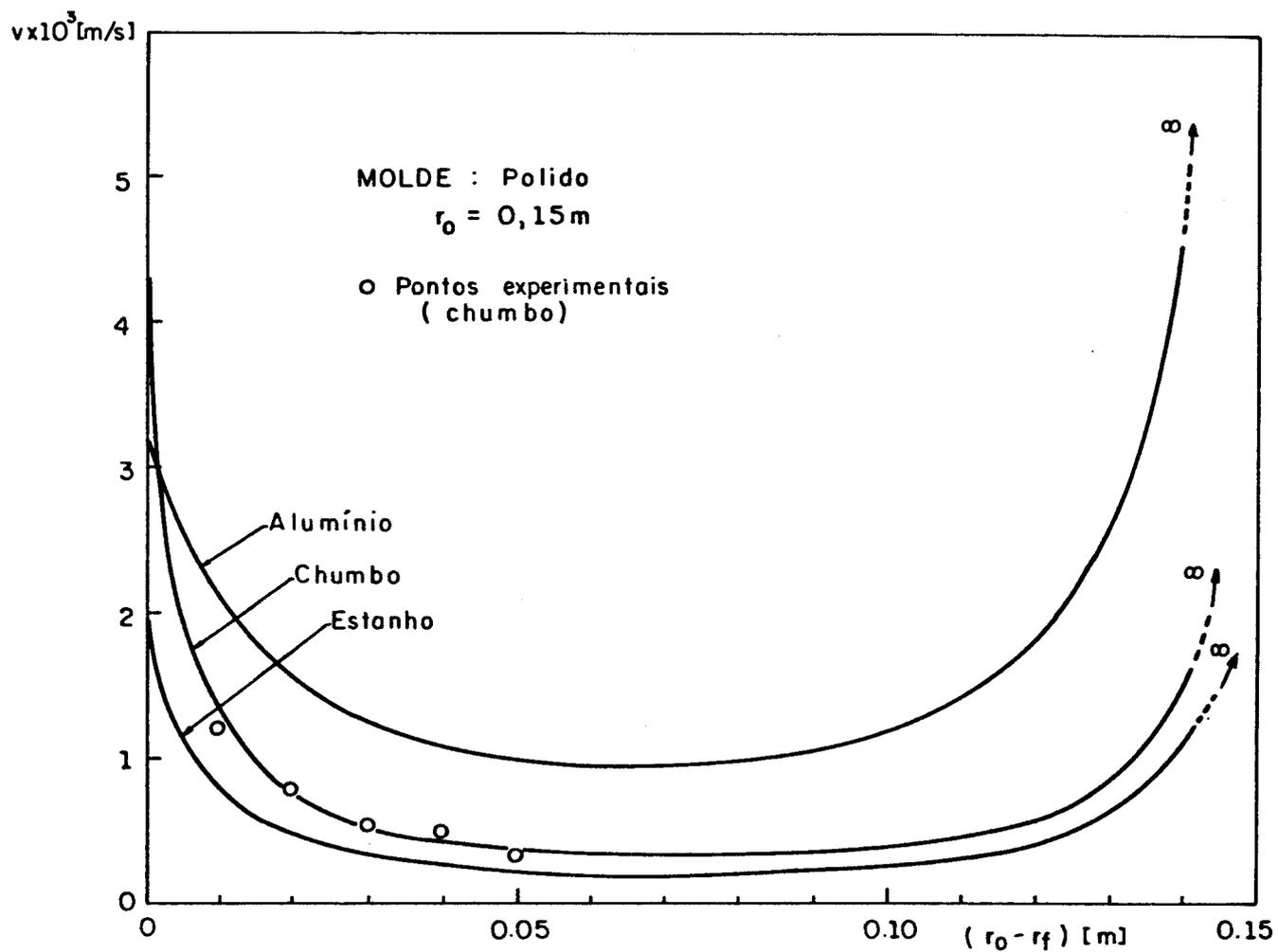


Fig. 5.13 - Curvas de variação da velocidade de solidificação com  $(r_0/r_f)$  obtidas através do método proposto.

a velocidade tende a um valor infinito nos instantes finais da solidificação. A razão disto é que a taxa de redução do volume de metal líquido remanescente cresce rapidamente no final do processo, reduzindo drasticamente a quantidade de calor latente a ser retirada. Adams já havia constatado este fenômeno através da integração numérica da sua solução aproximada.<sup>38</sup>

As curvas de velocidade obtidas permitem, também, que se façam considerações sobre parâmetros de estrutura de peças solidificadas em moldes cilíndricos.<sup>7</sup> Assim pode-se concluir que a granulação da estrutura, que depende fortemente da velocidade de solidificação, é fina nas regiões próximas à superfície do lingote que se solidifica com velocidades altas, se torna mais grosseira em regiões mais internas, à medida que a velocidade cai, e volta a ser refinada à medida que se aproxima do núcleo, quando a velocidade volta a aumentar. O mesmo comportamento deve ser apresentado pelo espaçamento interdendrítico que deve aumentar da periferia para o centro e diminuir novamente a medida que se aproxima do núcleo. Outro parâmetro de interesse prático que pode ser analisado é a segregação de soluto. Sabe-se que esta segregação será maior quanto mais alta for a velocidade de solidificação. Assim este problema será maior em regiões mais próximas do núcleo. E uma análise das curvas da Fig. 5.13 mostra que esta região será mais extensa no caso do alumínio, em que a velocidade começa crescer antes, que no caso do chumbo e do estanho em que a velocidade começa a crescer numa região bem mais próxima do núcleo do cilindro.

Para o caso do chumbo foram colocados, na Fig. 5.13, alguns valores de velocidade obtidos pelo método das tangentes a partir de curvas experimentais em comparação com a curva teórica. A concordância dos resultados evidencia a eficiência do método também para o cálculo da velocidade de solidificação.

Para efeito de comparação foram ainda determinadas as variações da velocidade de solidificação para outros metais significativos. Na Fig. 5.14 são mostradas as curvas obtidas para o zinco, o magnésio e o cobre solidificados em molde polido ( $h_i = 4500 \text{ J/m}^2\text{sK}$ ) com raio igual a 0,15 metros.

Também para efeito de comparação são apresentadas na Fig. 5.15 as curvas de variação de velocidade para o alumínio vazado em moldes polidos refrigerados com geometrias plana e cilíndrica, em

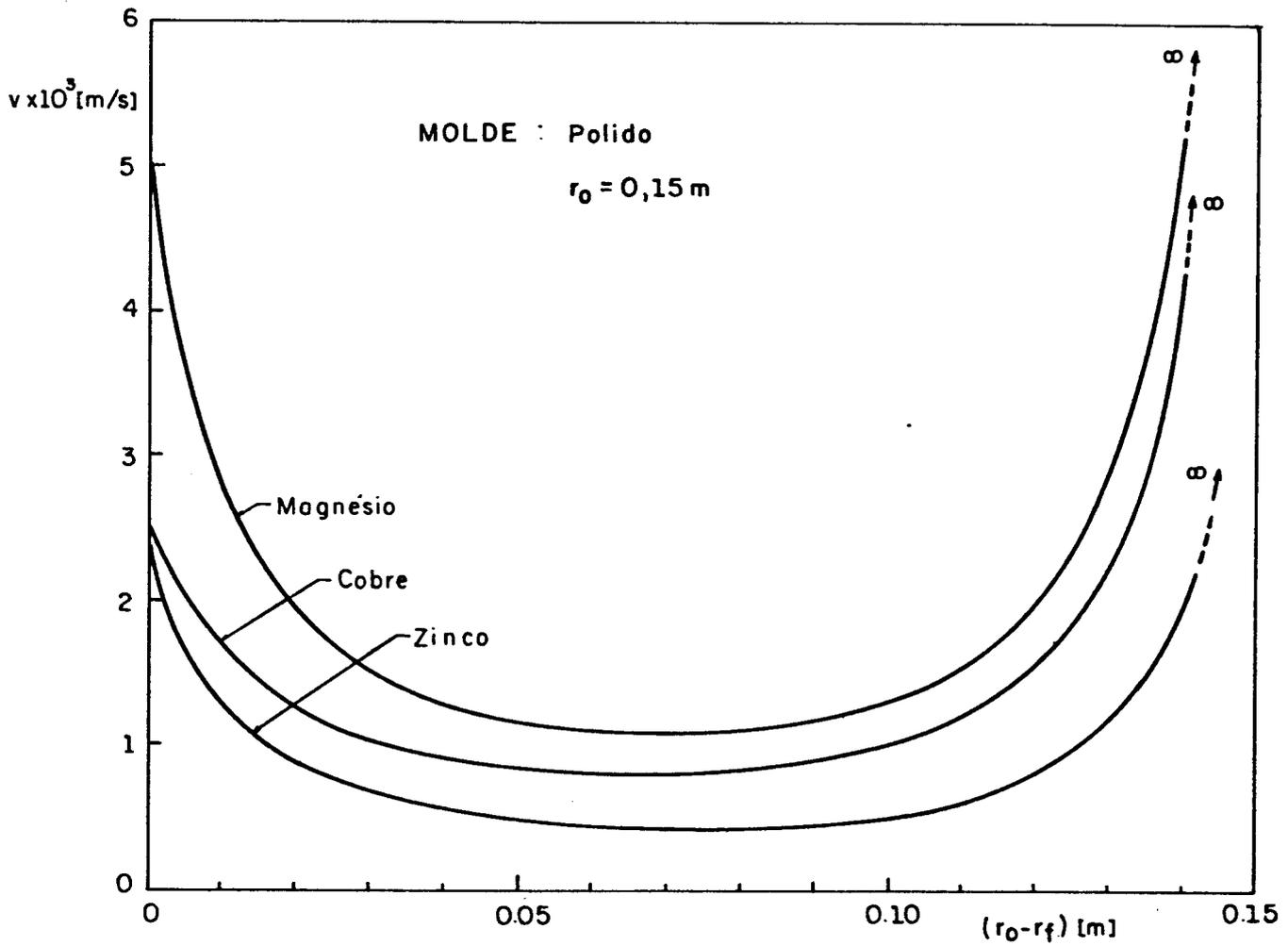


Fig. 5.14 - Curvas de variação da velocidade de solidificação com  $(r_o - r_f)$  obtidas através do método proposto.

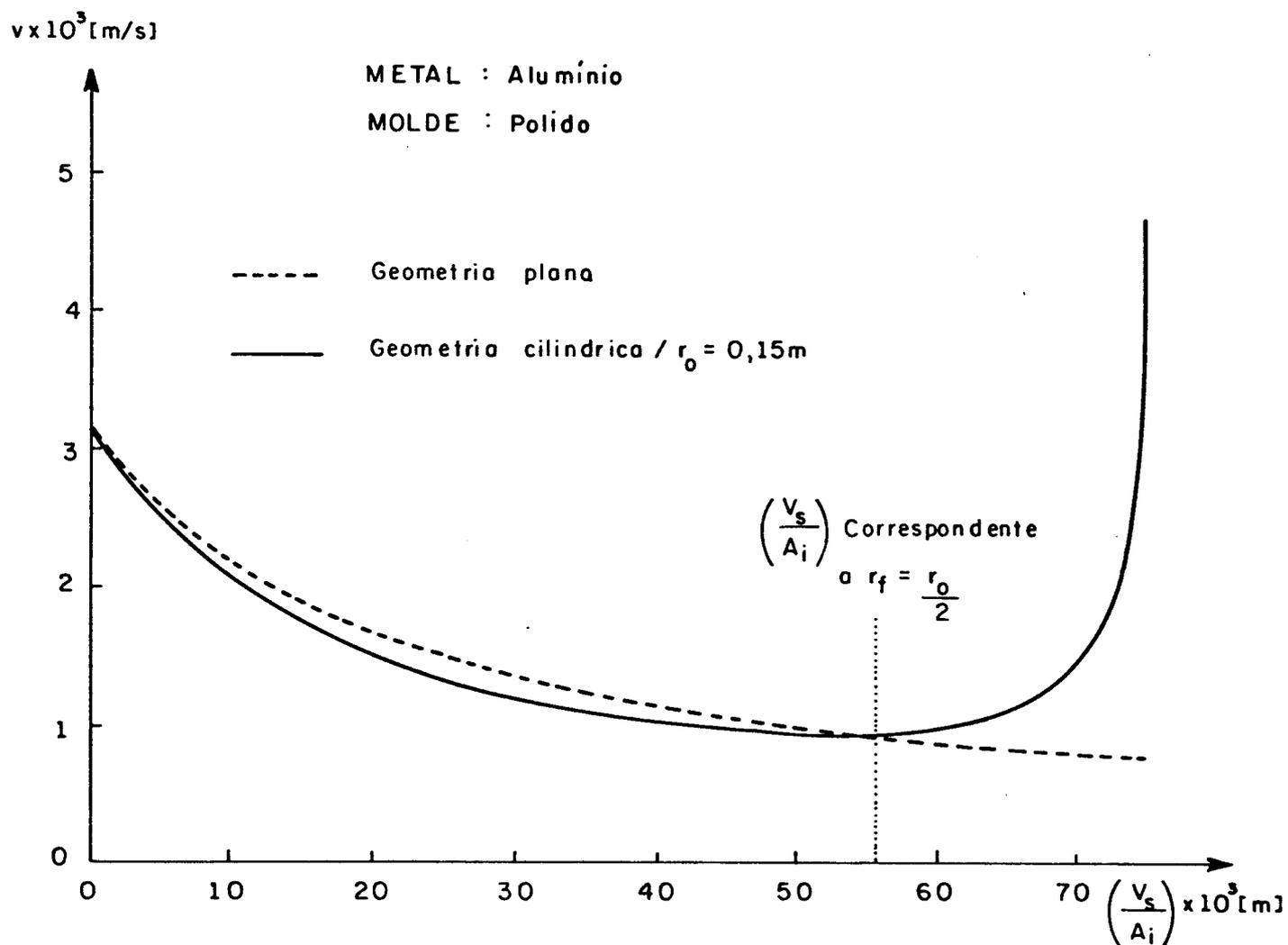


Fig. 5.15 - Curvas comparativas da variação de velocidade de solidificação para o alumínio vazado em moldes polidos refrigerados com geometrias plana e cilíndrica.

função da relação  $(V_s/A_i)$ . Pode-se notar que a velocidade é igual para as duas geometrias no início da solidificação, apresenta valores próximos decrescentes até a relação  $(V_s/A_i)$  atingir um valor correspondente à uma espessura solidificada aproximadamente igual a metade do raio do cilindro, após o que a velocidade na geometria cilíndrica começa a crescer enquanto na plana continua decrescente.

### 5.3. ANÁLISE DE RESULTADOS RELATIVOS À DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURAS

Para o estudo da distribuição de temperaturas no sólido durante o processo de solidificação de geometrias cilíndricas tentou-se, inicialmente, analisar comparativamente a variação de temperatura na superfície do metal em função da relação  $(V_s/A_i)$ , para a solidificação do chumbo em moldes com geometria plana e cilíndrica. Os valores da temperatura para o caso de moldes com geometria cilíndrica foram obtidos experimentalmente e para o caso de moldes com geometria plana foram obtidos através da equação 2.63 (modelo de Garcia e Prates) que no caso da interface metal/molde fica reduzida a:

$$T_i = T_o + \frac{(T_f - T_o)}{\operatorname{erf} \phi} \operatorname{erf} \left( \phi \frac{\beta}{\beta + 2\alpha S} \right) \quad (5.35)$$

A Fig. 5.16 mostra as duas curvas obtidas. Pode-se notar que as temperaturas para as geometrias plana e cilíndrica são iguais no início ( $T_f$ ), se distanciam durante a solidificação, sendo a do plano sempre mais baixa e tendem novamente para um valor igual no final do processo. Este comportamento dificulta o desenvolvimento de uma relação geométrica, semelhante à obtida para a cinética, capaz de estender a solução do plano para o cilindro. Assim sendo, procurou-se neste caso, por tentativa-e-erro, uma relação empírica, mas de alguma forma ligada a parâmetros geométricos do cilindro, que permitisse estender a equação desenvolvida para a geometria plana na estimativa da variação de temperatura durante a solidificação de cilindros.

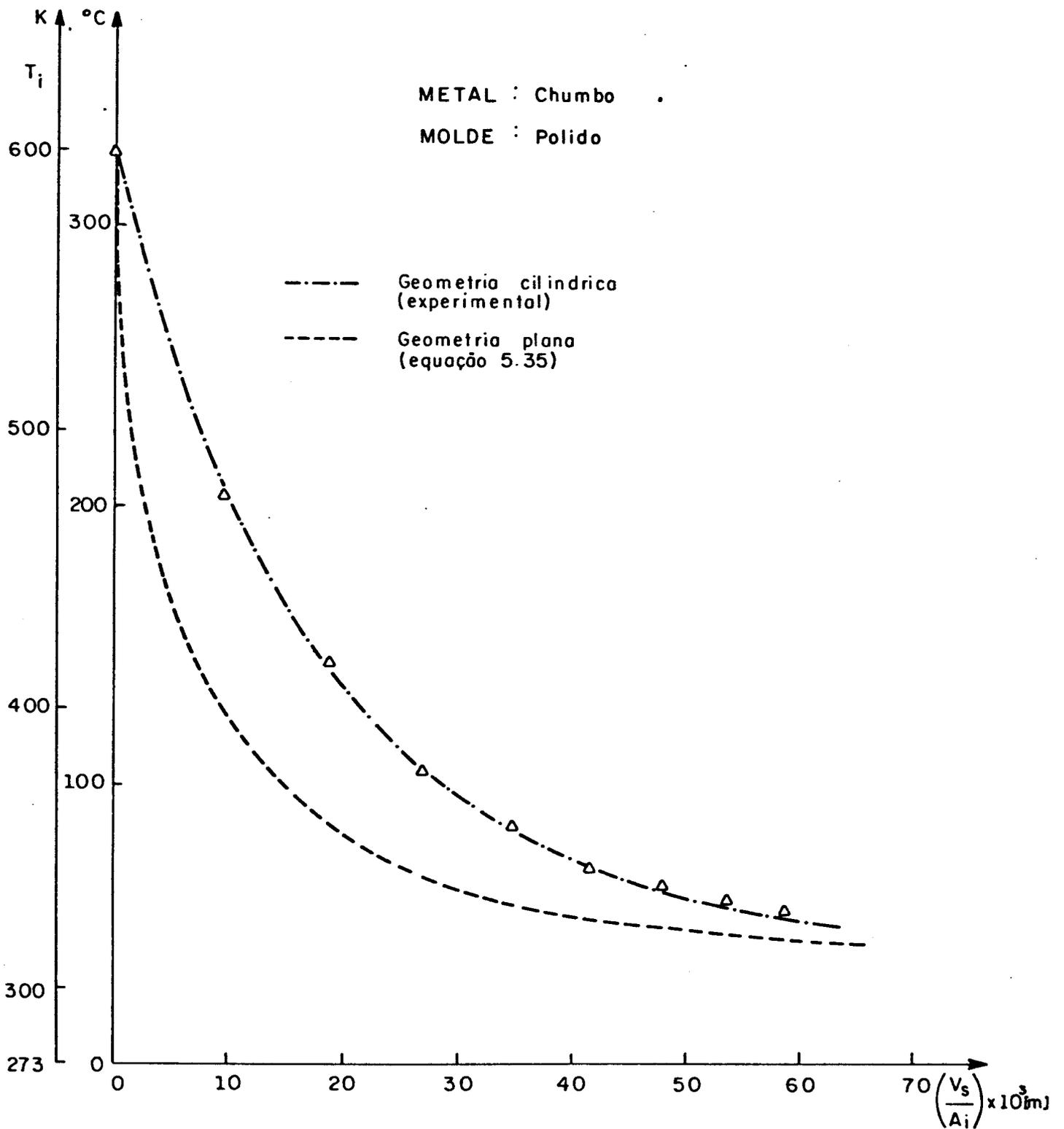


Fig. 5.16 - Curvas comparativas da variação de temperatura na interface metal/molde para geometrias plana e cilíndrica.

#### 5.4. PROPOSIÇÃO DE UM MÉTODO PARA ANÁLISE DO PERFIL TÉRMICO NO SÓ-LIDO

Pelas mesmas razões já citadas no caso da cinética a equação 2.63 foi também colocada em uma forma adimensional dada por:<sup>28</sup>

$$T_s^* = \frac{(T_s - T_o)}{(T_f - T_o)} = \frac{1}{\operatorname{erf}\phi} \operatorname{erf}\left(\phi \frac{S_o^* + x^*}{S_o^* + S^*}\right) \quad (5.36)$$

onde:

$$S_o^* = 2\phi^2 H^* \quad (5.37)$$

e  $x^*$  é a distância à interface metal/molde na forma adimensional dada por:

$$x^* = \frac{h_i}{k} x \quad (5.38)$$

colocando em termos de  $(V_s/A_i)$ :

$$T_s^* = \frac{T_s - T_o}{T_f - T_o} = \frac{1}{\operatorname{erf}\phi} \operatorname{erf}\left(\phi \frac{2\phi^2 H^* + \left(\frac{V_s}{A_i}\right)_o^*}{2\phi^2 H^* + \left(\frac{V_s}{A_i}\right)^*}\right) \quad (5.39)$$

onde  $(V_s/A_i)_o$  é o valor da relação correspondente a posição analisada em relação à interface metal/molde.

Pelo comportamento apresentado pelas curvas da Fig.5.16 pode-se deduzir que um fator de correção a ser introduzido para entender a equação do plano para o caso cilíndrico, deve ser incluído dentro da função erro. Além disso deve ser tal que, para o cálculo de variações de temperatura em diferentes pontos do metal que se solidifica, leve em conta o fato de que a temperatura deve ser

igual à temperatura de fusão quando a frente de solidificação alcança o ponto considerado.

Após uma série de tentativas usando relações adimensionais obtidas com parâmetros ligados à geometria cilíndrica, chegou-se à conclusão que um fator ( $\psi$ ) baseado na relação:

$$\psi = \left( \frac{r_o - r_f}{r_o} \right)^{1/3} \quad (5.40)$$

corrigindo o valor de  $(V_s/A_i)^*$  na equação 5.39 apresentaria resultados bastante satisfatórios na previsão dos perfis de temperatura. E para que equação se aplique na previsão da variação de temperatura de qualquer ponto da camada solidificada, inclusive na superfície do lingote o valor de  $(V_s/A_i)^*$  da equação 5.39 deve ser substituído por uma relação da seguinte forma:

$$\left( \frac{V_s}{A_i} \right)_o^* + \left[ \left( \frac{V_s}{A_i} \right)^* - \left( \frac{V_s}{A_i} \right)_o^* \right] \left( \frac{r_o - r_f}{r_o} \right)^{1/3} \quad (5.41)$$

ou seja, em outras palavras, o fator corretivo incide somente sobre a parcela a ser solidificada a partir do ponto considerado  $[(V_s/A_i)^* - (V_s/A_i)_o^*]$ . Assim sendo a expressão que determina a variação de temperatura de um ponto qualquer da camada solidificada, para o caso de geometrias cilíndricas e dada por:

$$T_s^* = \frac{1}{\text{erf}\phi} \text{erf} \left\{ \phi \frac{2\phi^2 H^* + \left( \frac{V_s}{A_i} \right)_o^*}{2\phi^2 H^* + \left( \frac{V_s}{A_i} \right)_o^* + \left[ \left( \frac{V_s}{A_i} \right)^* - \left( \frac{V_s}{A_i} \right)_o^* \right] \left( \frac{r_o - r_f}{r_o} \right)^{1/3}} \right\} \quad (5.42)$$

Pode-se notar que a equação apresenta um caráter geral, uma vez que, quando a interface sólido/líquido atinge um ponto de referência  $[(V_s/A_i)^* = (V_s/A_i)_o^*]$ , a mesma assume um valor unitário, o que corresponde a  $T_s = T_f$ . No caso particular da superfície do lingote  $[(V_s/A_i)_o^* = 0]$  a equação 5.42 fica reduzida a uma expressão mais simples:

$$T_i^* = \frac{1}{\text{erf}\phi} \text{erf} \left[ \phi \frac{2\phi^2 H^*}{2\phi^2 H^* + \left( \frac{V_s}{A_i} \right)^* \left( \frac{r_o - r_f}{r_o} \right)^{1/3}} \right] \quad (5.43)$$

Uma vez desenvolvida a equação, foram determinadas, com o uso da mesma, curvas de variação de temperatura para os metais estudados neste trabalho e foram feitas comparações com os resultados experimentais obtidos.

Na Fig. 5.17 é mostrada a variação da temperatura na superfície do metal determinada pela equação 5.43 juntamente com os valores obtidos experimentalmente, para o chumbo solidificado em molde polido. Pode ser notado que há uma boa concordância entre a curva teórica e os pontos experimentais. Na Fig. 5.18 é apresentada a mesma comparação para o chumbo solidificado em molde pintado. Pode-se notar, neste caso, que a previsão teórica se afasta um pouco dos pontos experimentais. Esta diferença pode ser explicada pela dificuldade de posicionamento de termopares para medida de temperaturas na interface metal/molde, já constatada por diversos autores.<sup>28, 30</sup> O termopar pode se deslocar, devido a contrações no metal durante a solidificação, registrando a temperatura em um ponto mais interior do metal sólido. Assim, para confirmar a validade da equação foi determinada a variação de temperatura em um ponto mais interno do metal sólido (0,03 m da interface metal/molde) e comparada com os valores experimentais. Esta comparação é apresentada na Fig. 5.19 onde pode ser verificada boa concordância entre a curva teórica e os pontos experimentais.

Nas Figuras 5.20 e 5.21 são apresentadas as curvas de variação da temperatura na superfície do metal para o estanho solidificado, respectivamente, em molde polido e pintado. Pode-se notar que nos dois casos há uma boa concordância entre a curva determinada com a equação 5.43 e os pontos experimentais, comprovando a eficiência do modelo proposto.

Nas Figuras 5.22 e 5.23 são apresentadas as mesmas curvas para o alumínio. Pode-se observar que, no caso do alumínio, a concordância entre a curva teórica e os pontos experimentais é bastante boa para a solidificação em molde recoberto. No caso da solidificação em molde polido há um certo afastamento da curva teórica

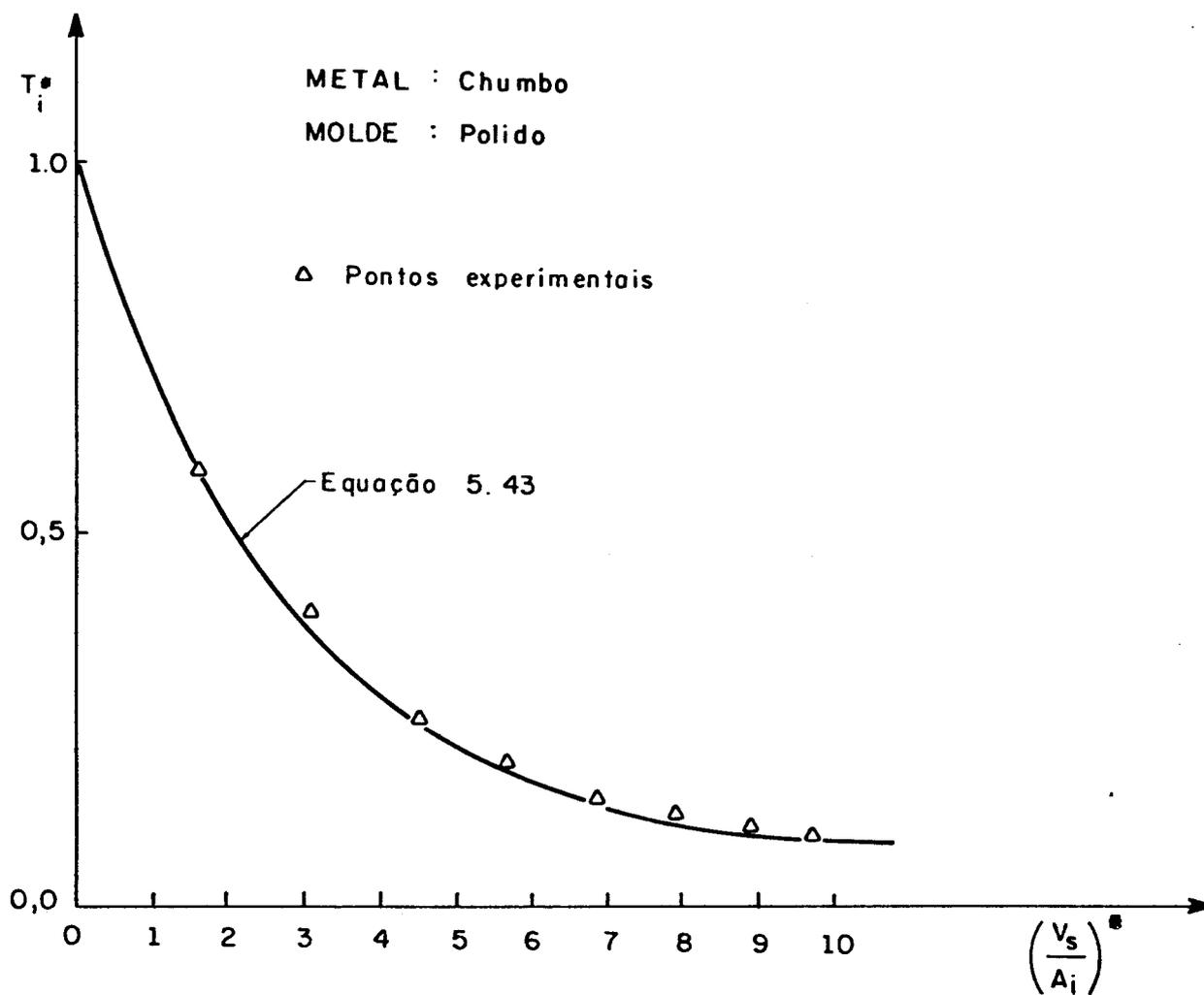


Fig. 5.17 - Variação da temperatura na superfície do metal para o chumbo solidificado em molde polido.

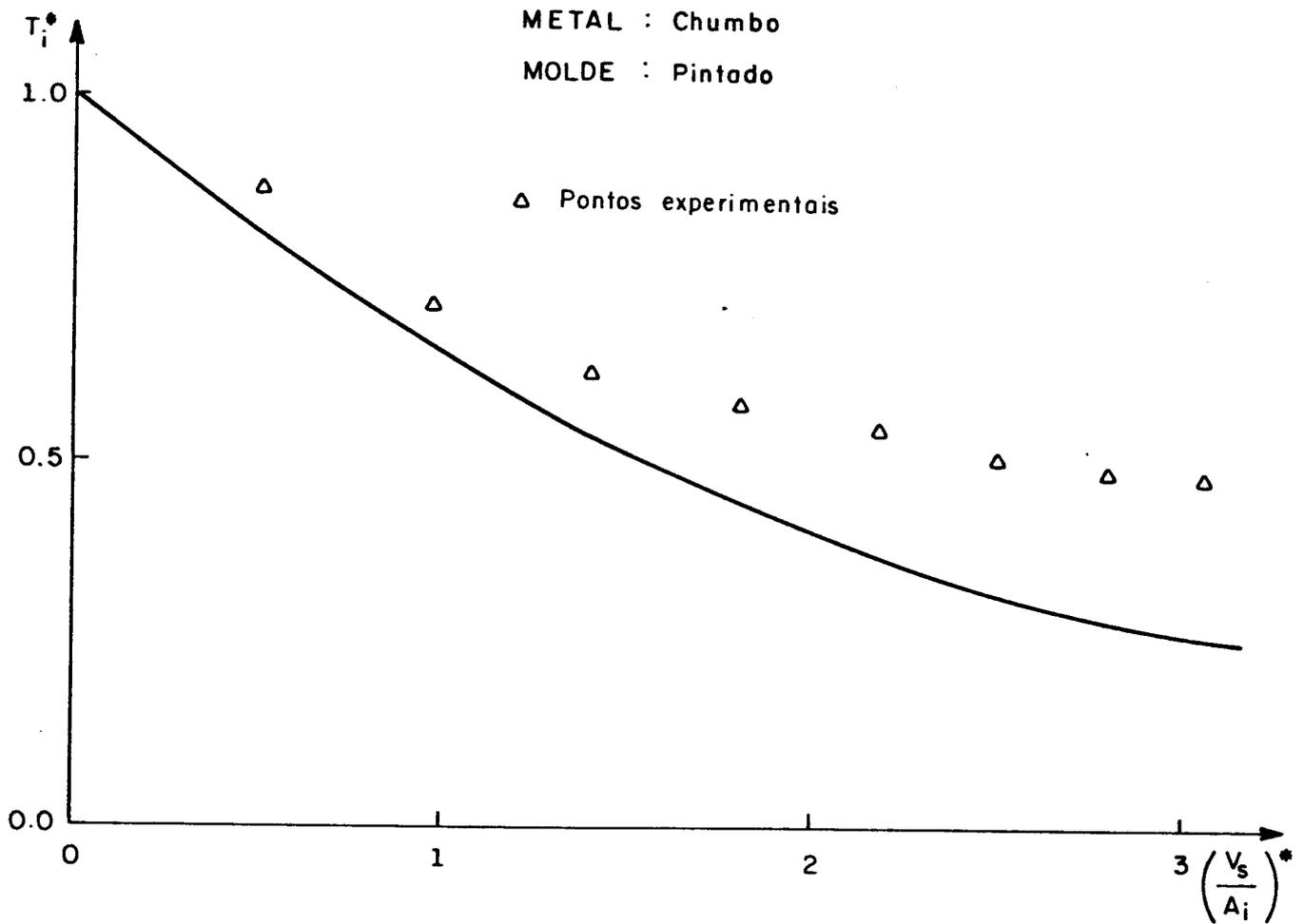


Fig. 5.18 - Variação de temperatura na superfície do metal para o chumbo solidificado em molde pintado.

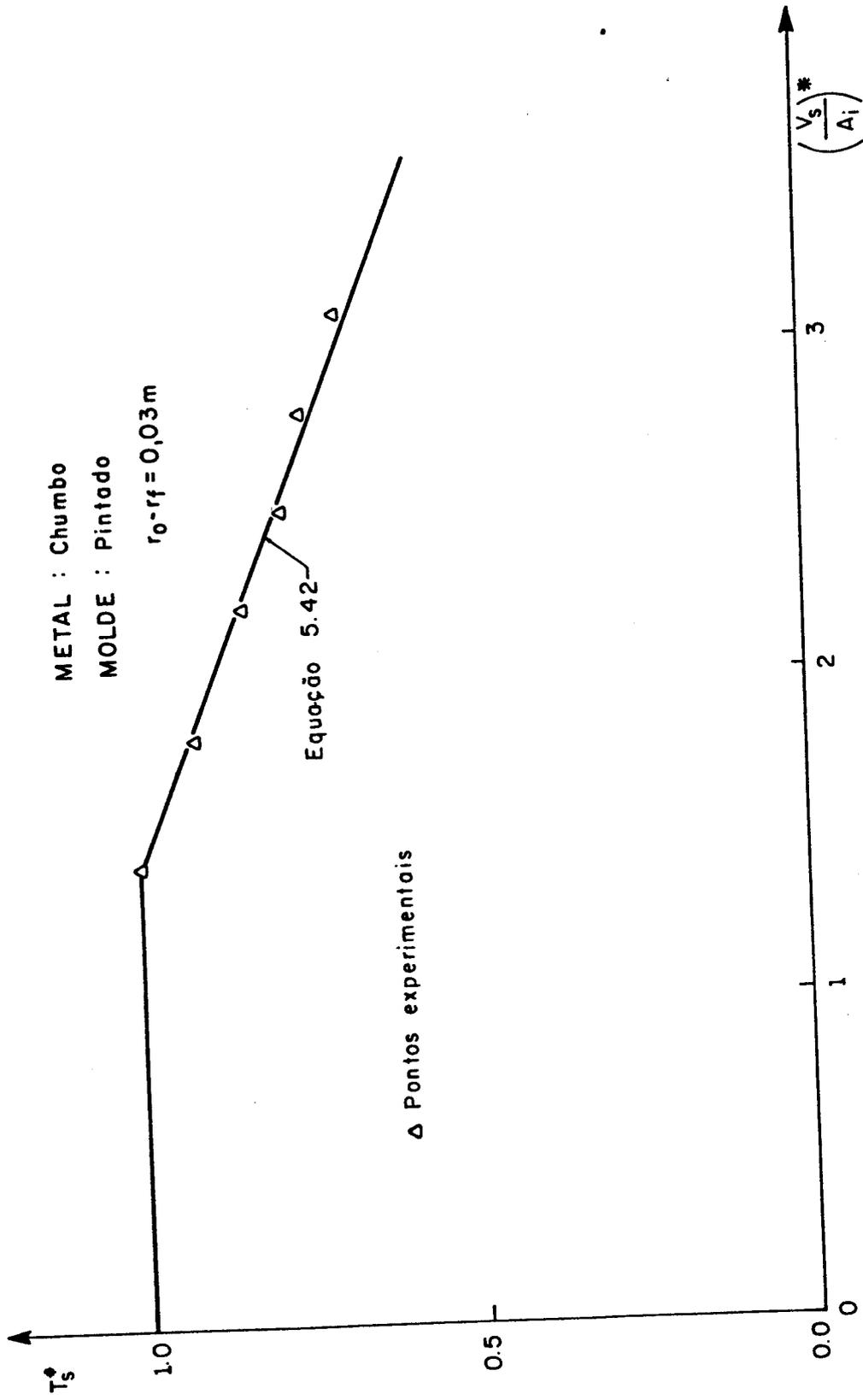


Fig. 5.19 - Variação de temperatura em um ponto situado a 0,03 m da interface metal/molde, para o chumbo solidificado em molde pintado.

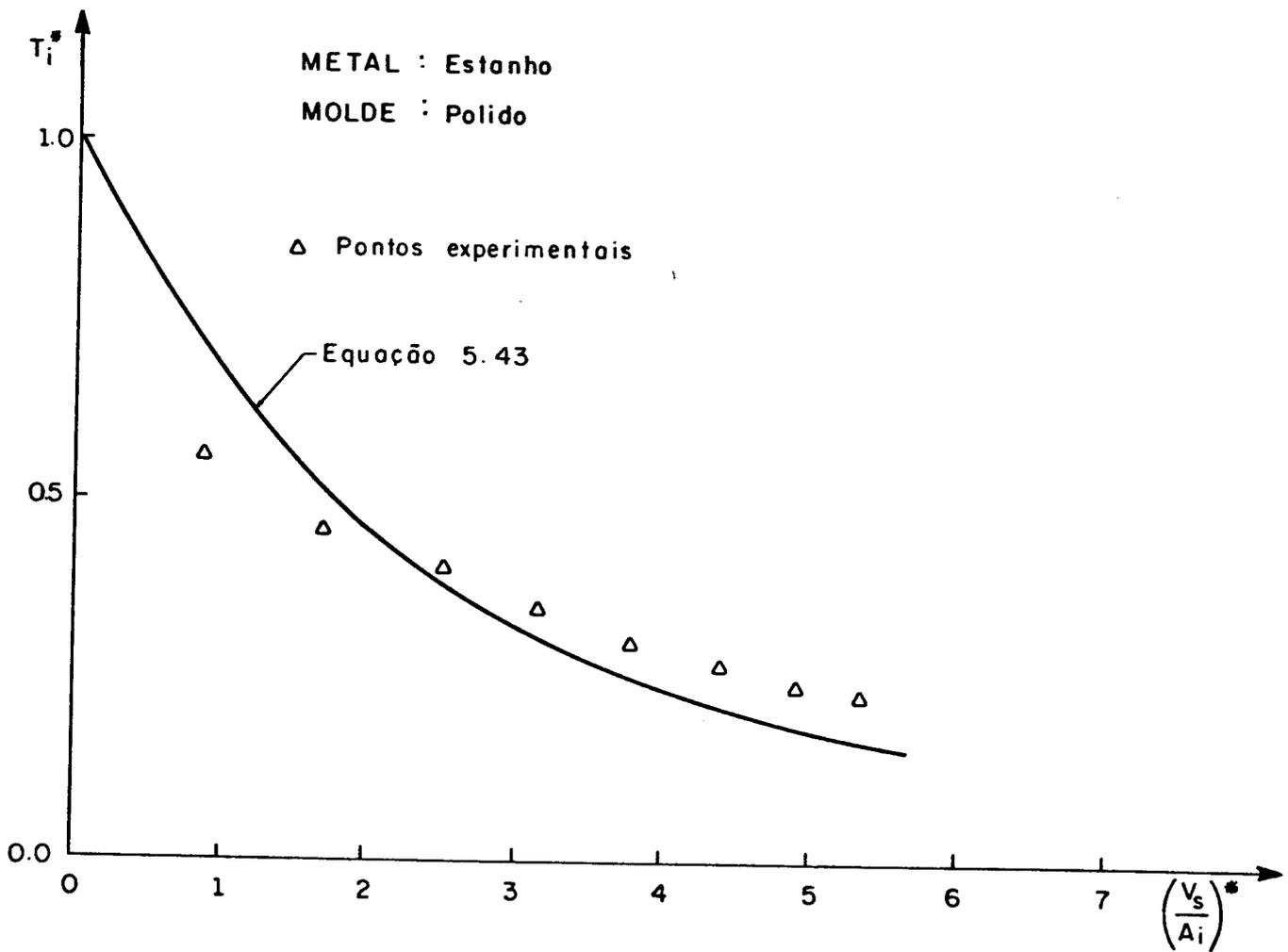


Fig. 5.20 - Variação da temperatura na superfície do metal para o estanho solidificado em molde polido.

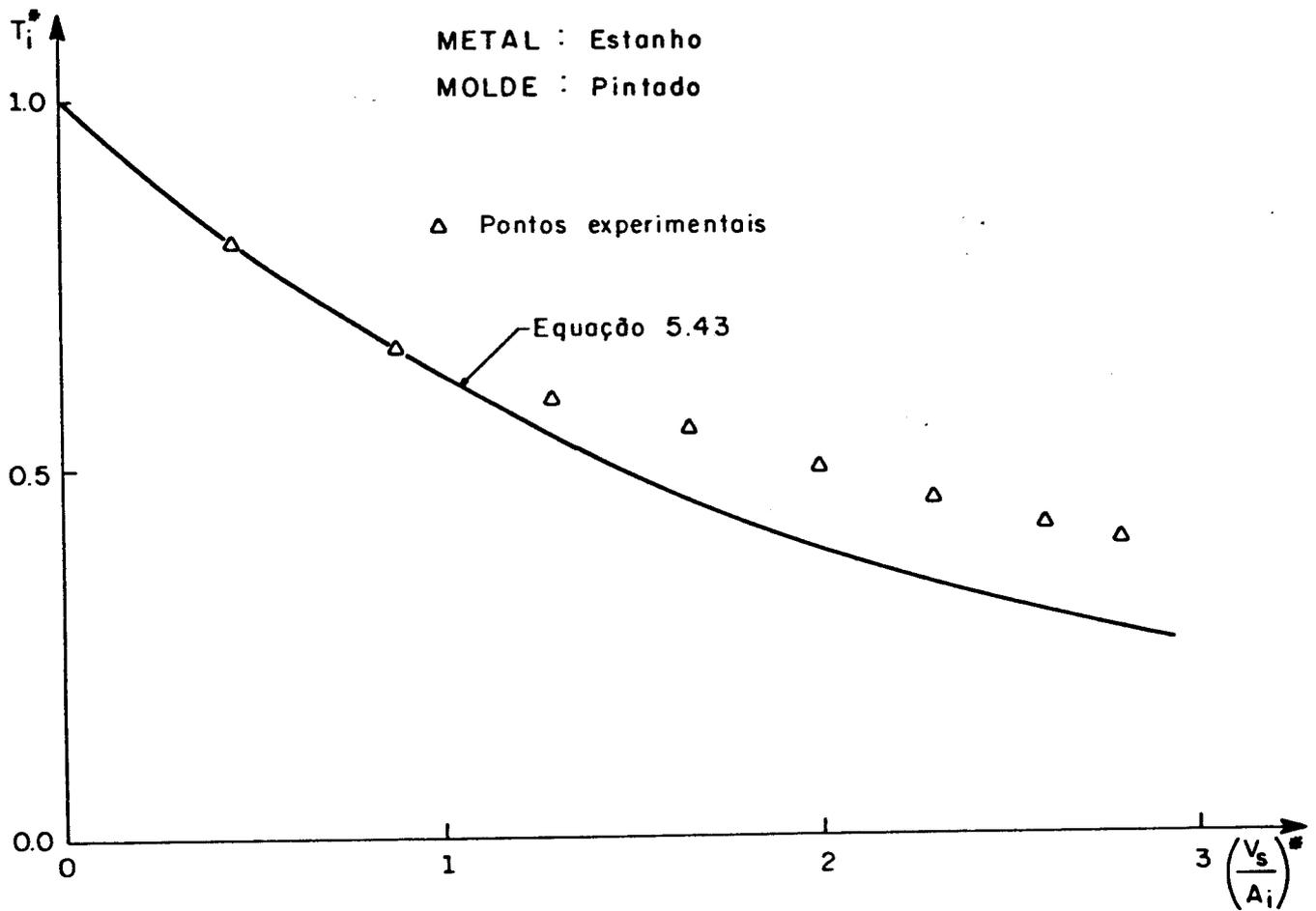


Fig. 5.21 - Variação da temperatura na superfície do metal para o estanho solidificado em molde pintado.

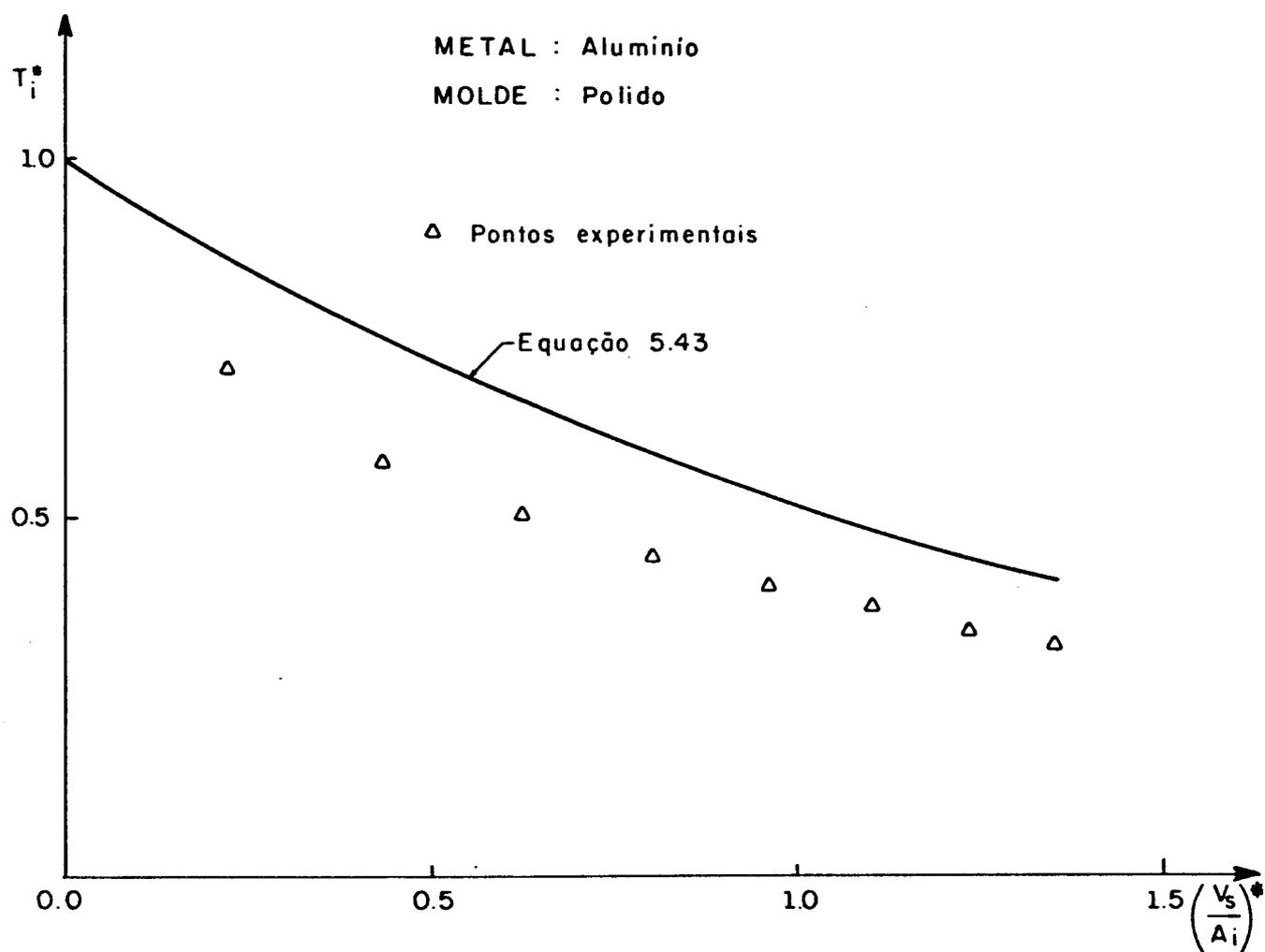


Fig. 5.22 - Variação da temperatura na superfície do metal para o alumínio solidificado em molde polido.

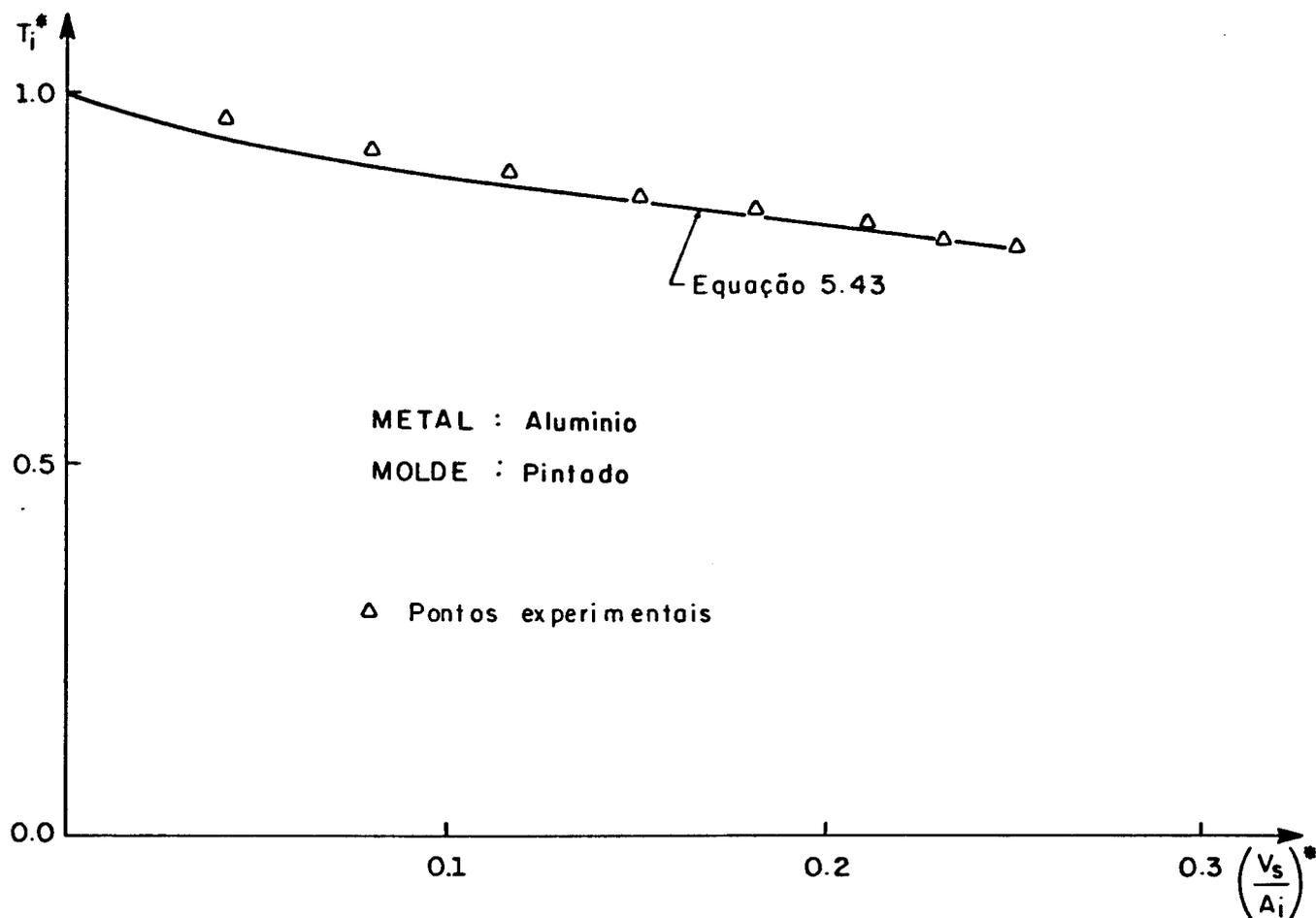


Fig. 5.23 - Variação da temperatura na superfície do metal para o alumínio solidificado em molde pintado.

em relação aos pontos experimentais. Isto pode ser, em parte, devido ao já citado problema de posicionamento do termopar para medida de temperatura na interface metal/molde. Neste caso, ao que parece, o termopar registrou a variação de temperatura fora da superfície do metal (portanto mais baixa). Assim, também neste caso, foi determinada teoricamente a variação de temperatura em um ponto mais interno do metal sólido (0,03 m da interface metal/molde), e comparada com os valores experimentais. Esta comparação é apresentada na Fig. 5.24. Pode-se notar que há, neste caso, uma concordância melhor, no entanto a curva teórica apresenta ainda um certo distanciamento com relação aos resultados experimentais. Isto provavelmente ocorre devido a dois outros problemas que influem significativamente na análise da variação de temperaturas durante a solidificação do alumínio. Em primeiro lugar pode haver a corrosão dos termopares de cromel-alumel pelo alumínio provocando um certo grau de imprecisão nas medidas experimentais. E, em segundo lugar, no caso do alumínio solidificado em molde polido, a camada solidificada fica submetida a gradientes de temperatura maiores que na solidificação em molde pintado. Como os cálculos da variação de temperatura foram realizados utilizando valores das propriedades térmicas próximos à temperatura de fusão, inevitavelmente se introduz uma certa margem de erro nos mesmos, já que estas propriedades sofrem uma certa variação na camada solidificada. De qualquer forma os resultados experimentais mostram uma aproximação bastante boa com o método proposto comprovando a sua eficiência no cálculo de temperaturas durante a solidificação do alumínio.

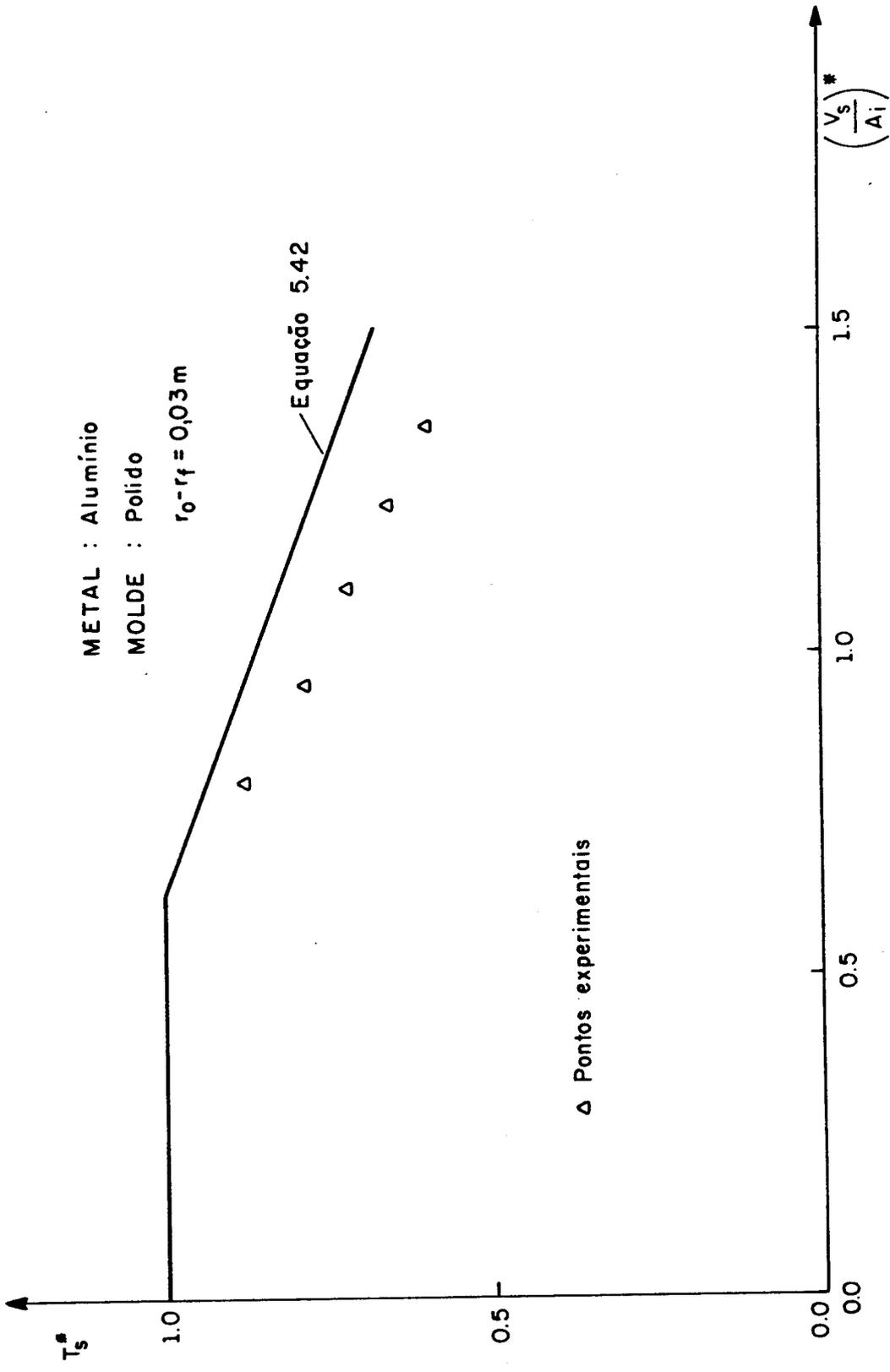


Fig. 5.24 - Variação de temperatura em um ponto situado a 0,03 m da interface metal/molde, para o alumínio solidificado em molde polido.

## CAPÍTULO 6

### CONCLUSÕES

Os resultados obtidos, decorrentes da solidificação radial de metais em moldes cilíndricos refrigerados, nas condições experimentais utilizadas permitem que sejam extraídas as seguintes conclusões:

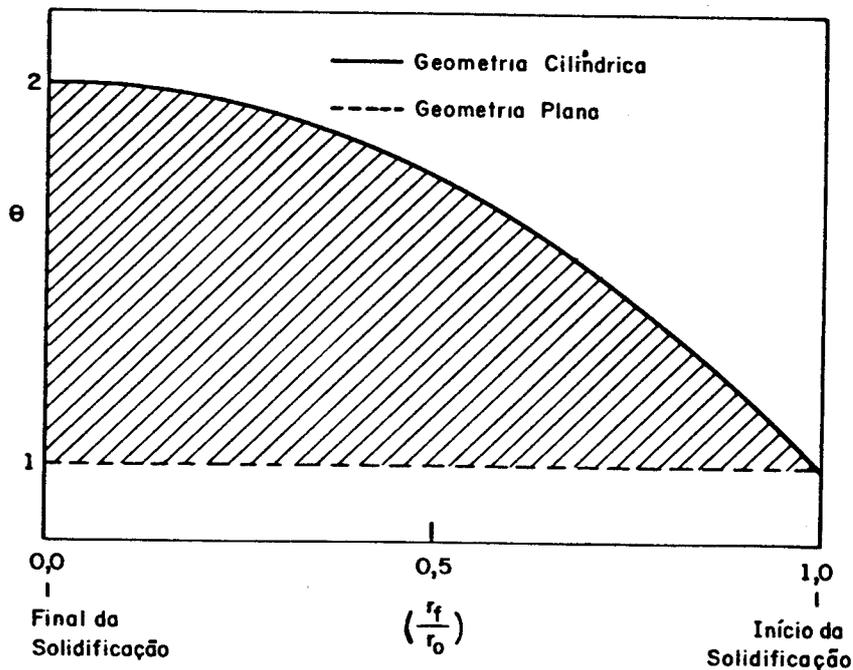
6.1. A cinética da solidificação de metais em sistemas metal/molde com geometrias cilíndricas é determinada pela equação adimensional:

$$t_c^* = \theta \cdot t_p^* = \theta \left[ \frac{1}{4\phi^2} \left( \frac{V_s}{A_i} \right)_c^{*2} + H^* \left( \frac{V_s}{A_i} \right)_c^* \right]$$

onde  $t_c^*$  é o tempo de solidificação da geometria cilíndrica,  $t_p^*$  é o tempo de solidificação da geometria plana correspondente e  $\theta$  é uma função de correlação geométrica definida por:

$$\theta = \left[ \frac{\left( \frac{V_s}{A_i} \right)_{pM\acute{a}x.}}{\left( \frac{V_s}{A_i} \right)_{cM\acute{a}x.}} - \left( \frac{V_l}{V_s} \right)_c \right] = \left[ 2 - \left( \frac{r_f}{r_o} \right)^2 \right]$$

cujos símbolos estão definidos no Apêndice 1 e cuja representação gráfica é a seguinte:

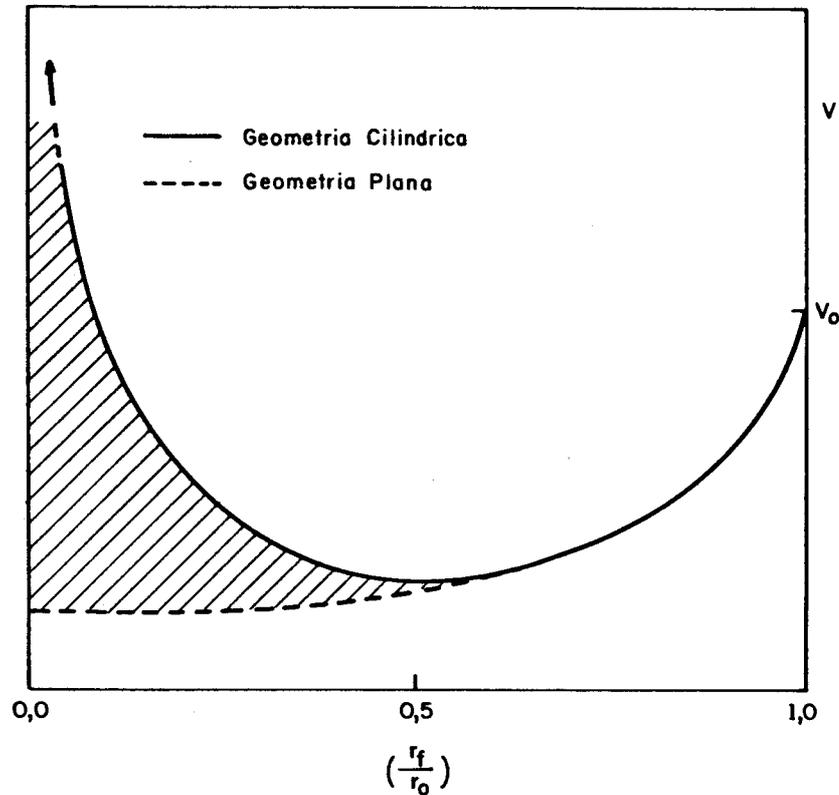


onde se pode observar a diferença de comportamento cinético entre as duas geometrias (plana e cilíndrica) ao longo da solidificação do metal.

6.2. A velocidade de solidificação em geometrias cilíndricas, derivada a partir da equação de cinética é definida por:

$$v = \left\{ \frac{1}{C_2} \left( \frac{r_f}{r_o} \right) \left\{ \left[ \frac{C_1^2}{4\phi^2} \left( \frac{2r_o(r_o-r_f)-(r_o-r_f)^2}{2r_o} \right)^2 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + H \cdot C_1 \left( \frac{2r_o(r_o-r_f)-(r_o-r_f)^2}{2r_o} \right) \right] \frac{2}{r_o} + \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \left[ 2 - \left( \frac{r_f}{r_o} \right)^2 \right] \left[ \frac{2C_1^2}{4\phi^2} \left( \frac{2r_o(r_o-r_f)-(r_o-r_f)^2}{2r_o} \right) + H \cdot C_1 \right] \right\} \right\}^{-1}$$

onde os símbolos estão definidos no Apêndice 1 e cuja representação gráfica é a seguinte:



onde pode ser observada a diferença de comportamento entre as geometrias plana e cilíndrica. E a velocidade inicial ( $v_0$ ) é dada por:

$$v_0 = \left( H^* \frac{C_1}{C_2} \right)^{-1} = \left( \frac{H\rho}{h(T_f - T_0)} \right)^{-1}$$

que coincide com a velocidade inicial na geometria plana, já que no instante inicial a velocidade depende apenas do contato térmico entre o metal e o molde, independentemente da geometria do molde.

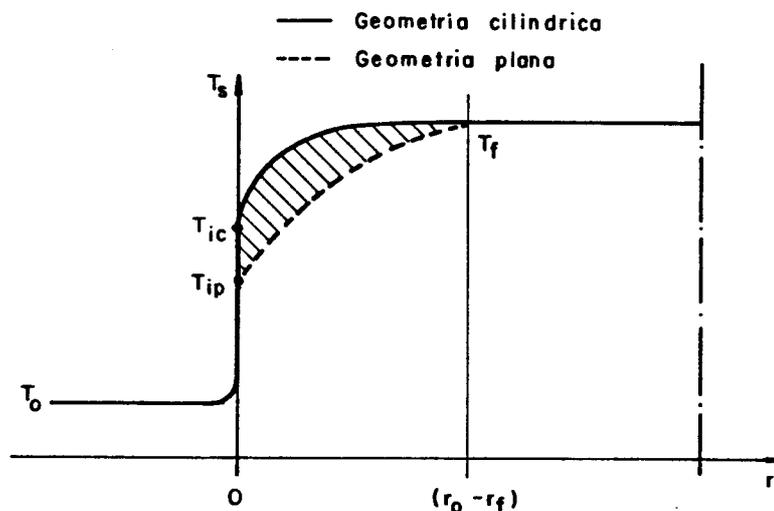
- 6.3. A distribuição de temperaturas no metal sólido durante a solidificação em sistemas metal/molde com geometria cilíndrica é dada pela seguinte equação na forma adimensional:

$$T_s^* = \frac{1}{\text{erf}\phi} \left\{ \phi \frac{2\phi^2 H^* + \left(\frac{V_s}{A_i}\right)_0^*}{2\phi^2 H^* + \left(\frac{V_s}{A_i}\right)_0^* + \left[ \left(\frac{V_s}{A_i}\right)^* - \left(\frac{V_s}{A_i}\right)_0^* \right] \cdot \psi} \right\}$$

onde os símbolos estão definidos no Apêndice 1,  $\left(\frac{V_s}{A_i}\right)_0^*$  é o valor da relação no ponto onde se estuda a distribuição de temperaturas e  $\psi$  é uma função de correlação geométrica dada por:

$$\psi = \left( \frac{r_o - r_f}{r_o} \right)^{1/3}$$

A representação gráfica da distribuição de temperaturas é a seguinte:

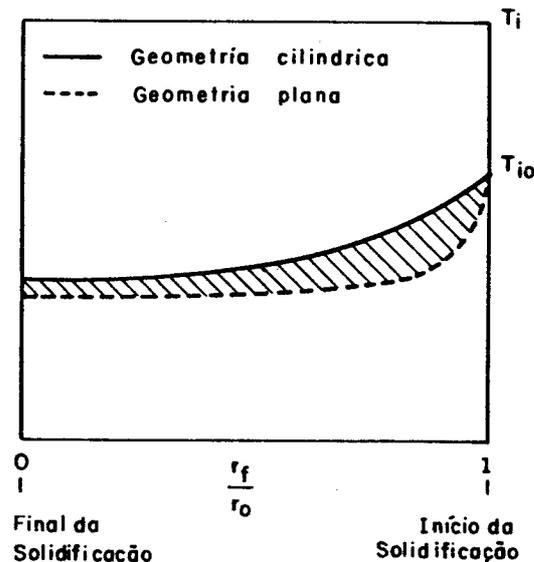


onde pode ser observada a diferença de comportamento entre as geometrias plana e cilíndrica.

- 6.4. Em particular, na interface metal/molde, onde  $(V_s/A_i)_0^* = 0$ , a distribuição de temperaturas é dada por:

$$T_i^* = \frac{1}{\text{erf}} \text{erf} \left[ \phi \frac{2\phi^2 H^*}{2\phi^2 H^* + \left(\frac{V_s}{A_i}\right)^* \cdot \psi} \right]$$

cuja representação gráfica é a seguinte:



onde pode ser observada a diferença de comportamento entre as geometrias plana e cilíndrica.

- 6.5. O dispositivo simulador da solidificação radial em moldes cilíndricos refrigerados a água, inédito, especialmente projetado é construído na realização deste trabalho, mostrou-se versátil e eficiente na sua utilização operacional e, portanto, adequado para a determinação experimental da cinética e das distribuições de temperatura, durante a solidificação em sistemas metal/molde com geometrias cilíndricas.

### LINHAS DE PESQUISA DECORRENTES DESTE TRABALHO

A partir dos resultados, discussões e conclusões deste trabalho podem ser propostas as seguintes linhas de pesquisa decorrentes:

- (1) Determinação experimental, da cinética e das distribuições de temperatura durante a solidificação de metais em moldes cilíndricos maciços semi-infinitos e proposição de adaptações nas equações representativas do método proposto para levar em conta o efeito da parede do molde.
- (2) Verificação da influência do superaquecimento sobre a solidificação de metais em moldes cilíndricos e proposição de adaptações nas equações representativas do método proposto para levar em conta o efeito do superaquecimento.
- (3) Verificação da influência do teor de soluto na solidificação de ligas metálicas em moldes cilíndricos e proposição de adaptações nas equações representativas do método proposto para levar em conta o efeito das isotermas "liquidus" e "solidus".
- (4) Verificação da influência da variação da espessura de parede do molde na solidificação de metais e ligas, e proposição de adaptações nas equações representativas do método proposto para levar em conta o efeito da espessura de parede do molde.
- (5) Adaptação do dispositivo de solidificação radial para o estudo da solidificação de metais em moldes esféricos e desenvolvimento de um método de análise para esta geometria.
- (6) Correlação entre parâmetros de natureza térmica, parâmetros estruturais e a segregação de soluto durante a solidificação em moldes com geometria cilíndrica.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. WEINBERG, F. - The casting of steel. Metallurgical Transactions A, v.6, p.1971-1985, novembro, 1975.
2. SIMPSON, B.L. - History of the metal casting industry. 2 ed., Chicago, Ed. American Foundrymen's Society, 1969, p.1-20.
3. NEELY, J. - Practical metallurgy and materials of industry. 1 ed. New York, Ed. John Wiley and Sons, 1979, p.321-333.
4. FLINN, R.A. - Fundamentals of metal castings. 1 ed., Massachusetts, Ed. Addison-Wesley, 1963, p.3-10.
5. BEELEY, P.R. - Foundry technology. 1 ed. Londres, Ed. Butterworths, 1972, p.1-12.
6. TAYLOR, H.F. & FLEMINGS, M.C. & WULFF, J. - Foundry engineering. 1 ed. New York, Ed. John Wiley & Sons, 1959, p.1-16.
7. PRATES, M. & DAVIES, G.J. - Solidificação de metais e suas ligas. 1 ed. Rio de Janeiro, Ed. Livros Técnicos e Científicos, 1978, p.1-7 e 83-125.
8. PFANN, W.G. - Zone melting. 1 ed. New York, Ed. John Wiley , 1958.
9. FLEMINGS, M.C. - Solidification processing. 1 ed. New York , Ed. McGraw-Hill, 1974.
10. CHALMERS, B. - Principles of solidification. 1 ed. New York , Ed. John Wiley, 1964.
11. WINEGARD, W.C. - An introduction to the solidification of metals. 1 ed. Londres, Ed. The Institute of Metals, 1964.

12. DAVIES, G.J. - Solidification of casting. 1 ed. Londres, Ed. Applied Science, 1973.
13. RUDDLE, R.W. - The solidification of castings. 2 ed. Londres, Ed. The Institute of Metals, 1957.
14. OHNO, A. - The solidification of metals. 1 ed. Tokio, Ed. Chigin Shokan, 1976.
15. BILONI, H. - Estado atual da pesquisa na área de solidificação de metais e ligas. Metalurgia, v.26, nº155, p.803-823, outubro, 1970.
16. VOGEL, A. - Solidification science helps develop new foundry technology. Metals and Materials, p.30-32, fevereiro, 1979.
17. SCIAMA, G. - Transmission de chaleur et solidification. Founderie, nº218, p.138-150, abril, 1964.
18. GEIGER, G.H. & POIRIER, D.R. - Transport phenomena in metallurgy. 1 ed. Massachusetts, Ed. Addison-Wesley, 1973, p. 329-360.
19. DROUZY, M. - Caractéristiques thermiques des coquilles, pour la coulée des alliages légers. Founderie, nº317, p.407-411, novembro, 1972.
20. SCIAMA, G. - Solidification des moulages - homotétie et facteurs de forme. Founderie, nº276, p.135-144, março, 1969.
21. FLEMINGS, M.C. - Solidification processing. Metallurgical Transactions, v.5, p.2121-2134, outubro, 1974.
22. TILLER, W.A. - Grain size control during ingot solidification. Journal of Metals, p.512-514, agosto, 1959.
23. TILLER, W.A. - Grain size control during ingot solidification - Part II: colunar-equiaxed transition. Transactions of the Metallurgical Society of AIME, v.224, p.448-459, junho, 1962.

24. PRATES, M. & FISSOLO, J. & BILONI, H. - Heat flow parameters affecting the unidirectional solidification of pure metals. Metallurgical Transactions, v.3, p.1419-1425, junho, 1972.
25. GLISKSMAN, M.E. - What we do not know about solidification theory. Materials Science and Engineering, v.25, p.93-101, 1976.
26. GAUTIER, J.J. & MORILLON, Y. & DUMONT-FILLON, J. - Mathematical study of the continuous casting of steel. Journal of The Iron and Steel Institute, p.1053-1059, dezembro, 1970.
27. PIRES, O.S. & PRATES, M. & BILONI, H. - Cinética de solidificação unidirecional de metais vazados sem superaquecimento. Metalurgia, v.29, nº193, p.813-820, dezembro, 1973.
28. GARCIA, A. - Desenvolvimento e verificação experimental de um modelo matemático para análise da solidificação de metais. Tese de doutorado, UNICAMP, Campinas, 1978.
29. CARSLAW, H.S. & JAEGER, J.C. - Conduction of heat in solids. 2 ed. Londres, Ed. Oxford University Press, 1959, p.282-296.
30. KREITH, F. - Princípios da transmissão de calor. 1 ed. São Paulo, Ed. Edgard Blücher, 1969, p.497-503.
31. SCIAMA, G. - Calcul du temps de refroidissement de jets cylindriques coulés en moules métalliques. Foundrie, nº268, p. 267-284, junho-julho, 1968.
32. PEREIRA, O.J. & KURI, S.E. & PRATES, M. - Influência da capacidade de extração de calor do sistema metal/molde no tempo de solidificação de lingotes de alumínio. Trabalho apresentado no 2º Congresso Brasileiro de Engenharia e Ciência dos Materiais, São Carlos, 1976.
33. PRATES, M. - Influência de la capacidad de extracción calórica del sistema metal/molde sobre el proceso de solidificación. Tese de doutoramento apresentada na Universidad Nacional del Sur, Argentina, 1971.

34. BILONI, H. - Transferência calorica en el sistema metal/molde. Siderurgia, v.2, p.51-71, julho-setembro, 1975.
35. SANTOS, R.G. - Influência da espessura de parede de molde no tempo de solidificação e na estrutura de fundição da liga eutética alumínio - 12% silício (silumin). Tese de mestrado, UNICAMP, 1977.
36. INGERSOL, L.R. & ZOBEL, O.J. & INGERSOL, A.C. - The mathematical theory of heat conduction. 1 ed. New York, Ed. McGraw-Hill, 1948.
37. ABRAMOWITZ, M. & STEGUN, I.A. - Handbook of mathematical functions. 1 ed. New York, Ed. Dover, 1965, p.295-329.
38. ADAMS JR, C.M. - Thermal considerations in freezing. In: liquid metals and solidification. 1 ed. Cleveland, Ed. American Society for Metals, 1958, p.187-217.
39. LIGHTFOOT, N.M.H. - The solidification of molten steel. Proceedings, London Mathematical Society. v.31, p.97, 1930.
40. SCHWARTZ, C. - Mathematics of solidification processes in the casting of metals. Zeitschrift für Angereaudt Mathematik und Mechanik. v.13, p.202, 1933.
41. LYUBOV, Y. - Doklay Akad. Nauk S.S.S.R. v.68, p.847, 1949.
42. STEFAN, J. - Ann. Phys. u. chem. v.42, p.139,1891.
43. CHVORINOV, N. - Control of the solidification of castings by calculations. Die Giesserei. v.27, p.177,201 e 222, 1940.
44. GARCIA, A. & PRATES, M. - Cálculo dos tempos e da distribuição de temperatura na solidificação de não ferrosos em moldes refrigerados a água. Metalurgia, v.35, nº263, p.677-683, outubro, 1979.

45. GARCIA, A. & PRATES, M. - Mathematical model for the unidirectional solidification of metals: I. Cooled moulds. Metallurgical Transactions B, v.9, p.449-457, setembro, 1978.
46. GARCIA, A. & CLYNE, T.W. & PRATES, M. - Mathematical model for the unidirectional solidification of metals: II. Massive moulds. Metallurgical Transactions B, v.10, p.85-92, março, 1979.
47. GARCIA, A. & PRATES, M. - Determinação experimental da condutância térmica metal/molde no processo de solidificação. Anais do V Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Campinas, v.B, p.B.001-B.011, dezembro, 1979.
48. MEDEIROS, M.D. - Influência do superaquecimento no comportamento térmico de sistemas metal/molde durante a solidificação. Tese de Mestrado, UNICAMP, 1979.
49. MEDEIROS, M.D. & GARCIA, A. - Solidificação em moldes refrigerados com superaquecimentos. Previsão da cinética e da distribuição de temperaturas. Anais do 1º Congresso Nacional de Metalurgia, Santiago-Chile, p.167-177, novembro, 1979.
50. MEDEIROS, M.D. & GARCIA, A. - Modelo analítico para a análise da solidificação unidirecional de metais em presença de superaquecimento. Anais do V Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Campinas, v.8, p.B.012-B.022, dezembro, 1979.
51. RUSSELL, T.F. - The thermal relations between ingot and mould. Journal of The Iron and Steel Institute, v.143, p.163-194, 1941.
52. HILLS, A.W.D. - Simplified theoretical treatment for the transfer of heat in continuous casting machine moulds. Journal of The Iron and Steel Institute, v.203, p.18, 1965.
53. ARPACI, V.S. - Conduction Heat Transfer. New York, Ed. Addison-Wesley, 1966, p.94.

54. SPIEGEL, M.R. - Manual de fórmulas e tabelas matemáticas. 1 ed. São Paulo, Ed. McGraw-Hill, 1974, p.95.
55. LONDON, A.L. & SEBAN, R.A. - Rate of ice formation. Transactions of the ASME, v.65, p.771-778, outubro, 1943.
56. SEBAN, R.A. & LONDON, A.L. - Experimental confirmation of predicted water freezing rates. Transactions of the ASME, v.67, p.39-44, janeiro, 1943.
57. MEGERLIN, F. - Tese de Doutorado, Techn. Hochschule, Aaden, 1966.
58. HILLS, A.W.D. - A generalized integral profile method for the analysis of unidirectional heat flow during solidification. Transactions of The Metallurgical Society of AIME, v.245, p.1471-1479, julho, 1969.
59. JONES, H. - A comparison of approximate analytical solutions of freezing from a plane chill. Journal of The Institute of Metals, v.97, p.38-43, 1969.
60. HILLS, A.W.D. & MOORE, M.R. - The solidification of pure metals under unidirectional heat flow conditions. I - Solidification with zero superheat. Transactions of The Metallurgical Society of AIME, v.245, p.1481-1492, julho, 1969.
61. HILLS, A.W.D. & MALHOTRA, S.L. & MOORE, M.R. - The solidification of pure metals (and eutectics) under unidirectional solidification in the presence of superheat. Metallurgical Transactions B, v.6, p.131-142, março, 1975.
62. HRYCAK, P. - Problem of solidification with Newton's cooling at the surface. A.I.Ch. Journal, v.9, n°5, p.585-589, setembro, 1963.
63. GOODMAN, T.R. - The heat-balance integral and its application to problems involving a change of phase. Transactions of the ASME, v.80, p.335-342, fevereiro, 1958.

64. GOODMAN, T.R. - Application of integral methods to transient non linear heat transfer. In: Advances in heat transfer. New York, Ad. Academic Press, 1964, v.1, p.51-122.
65. TIEN, R.H. - Freezing of semi-infinite slab with time dependent surface temperature - An extension of Neumann's solution. Transactions of The Metallurgical Society of AIME , v.233, p.1887-1891, outubro, 1965.
66. TIEN, R.H. & KOUMP, V. - Unidimensional solidification of a slab - Variable surface temperature. Transactions of The Metallurgical Society of AIME, v.242, p.283-291, fevereiro, 1968.
67. TIEN, R.H. - A modified heat of fusion for use in the mathematical formulation of solidification processes. Transactions of The Metallurgical Society of AIME, v.242, p.1289-1292 , julho, 1968.
68. NISHIDA, Y. & SUZUKI, S. - Heat resistense at the mold - ingot interface. Transactions of The Japan Institute of Metals , v.11, p.56-61, 1970.
69. PRATES, M. & MORANDO, R. & BILONI, H. - Simplification of the approximate analytical solution applied to continuous casting mould calculation. Journal of The Institute of Metals, v.101, p.334, 1973.
70. PASCHKIS, V. - Relatório ao Comitê de Transferência de Calor. American Foundrymen, p.23, dezembro, 1945.
71. PASCHKIS, V. - Study on solidification of steel spheres. Transactions of American Foundrymen's Society, v.53, p.373 , 1948.
72. PASCHKIS, V. - Solidification of cylinders. Transactions of American Foundrymen's Society, v.61, p.142-149, 1953.

73. PASCHKIS, V. & HLINKA, J.W. - Some generalized solidification studies. Transactions of American Foundrymen's Society, v. 65, 1957.
74. PASCHKIS, V. - Influence of properties on solidification of metals. Transactions of American Foundrymen's Society, v.52, p.54, 1947.
75. BANKOFF, S.G. - Heat conduction or diffusion with change of phase. In: Advances in chemical engineering. 1 ed. Ed. Academic Press, 1964, v.5, p.75-150.
76. FOX, L. - What are the best numerical methods ? In: Moving boundary problems in heat flow and diffusion. 1 ed. Londres, Ed. Clarendon Press, 1975, p.210-241.
77. SCHMIDT, E. - Festschriftzum Siebzigsten Geburtstag August Foepppls. Berlim, Julius Springer, p.179, 1924.
78. LONGWELL, P.A. - A graphical method for solution of freezing problems. A.I.Ch.E. Journal, v.4, nº1, p.53-57, março, 1958.
79. DUSIMBERRE, G.M. & BLACKSBURG, V.A. - Numerical methods for transient heat flow. Transactions of the ASME, v.67, p.703-712, 1945.
80. DUSIMBERRE, G.M. - Numerical analysis of heat flow. 1 ed. New York, Ed. McGraw-Hill, 1949.
81. EYRES, N.E. et al. - The calculation of variable heat flow in solids. Phil. Trans. Royal Society, v.240 A, p.1-57, 1946.
82. SARJANT, R.J. & SLACK, M.R. - Internal temperature distribution in the cooling and reheating of steel ingots. Journal of The Iron and Steel Institute, v.177, p.428-444, agosto, 1954.
83. BELL, G.E. - A refinement of heat balance integral method applied to a melting problem. International Journal of Heat and Mass Transfer, v.21, p.1357-1362, 1978.

84. PIRES, O.S. - Determinação da cinética unidirecional de metais. Tese de mestrado, ITA, S.J. dos Campos, 1972.
85. PIRES, O.S. & PRATES, M. & BILONI, H. - Unidirectional solidification of metals with zero superheat - Case of cooled molds. Zeit fur Metallkde , v.65, p.143, 1974.
86. BIDULYA, P. - Steel foundry practice. 1 ed. Moscou, Ed. Peace, 1960, p.66-70.
87. BERRY, J. & KONDIC, V. & MARTIN, G. - Solidification times of simple shaped castings in sand molds. Transactions of The American Foundrymen Society, v.67, p.449-476, 1959.
88. PANCHANATHAN, V. & SESHADRI, M.R. & RAMACHANDRAN, A. - Thermal behavior of metallic molds with long freezing range alloys. Transactions of The American Foundrymen Society, v.72, p. 65-72, 1964.
89. PANCHANATHAN, V. & SESHADRI, M.R. & RAMACHANDRAN, A. - Volume ratio effect on thermal behavior of metallic molds. Transactions of The American Foundrymen Society, v.74, p.37-42, 1966.
90. SRINIVASAN, M.N. & SESHADRI, M.R. & RAMACHANDRAN, A. - Heat extraction by metallic molds during solidification of simple shaped aluminum and its alloy castings. Transactions of The American Foundrymen Society, v.75, p.21-32, 1967.
91. JAMAR, J. - Des différences de temps de solidification de formes d'égal module geometrique coulées en acier. Anais do 42º Congresso Internacional de Fundição, Lisboa, 1975, p. 1-13.
92. SHIH, Y.P. & TSAY, S.Y. - Analytical solutions for freezing a saturated liquid inside or outside cylinders. Chemical Engineering Science, v.26, p.809-816, 1971.

93. SHIH, Y.P. & SHOU, T.C. - Analytical solutions for freezing a saturated liquid inside or outside spheres. Chemical Engineering Science, v.26, p.1787-1793, 1971.
94. RILEY, D.S. & SMITH, F.T. & POOTS, G. - The inward solidification of spheres and circular cylinders. International Journal of Heat and Mass Transfer, v.17, p.1507-1516, 1974.
95. RILEY, D.S. - Tese de Doutorado, Hull University, 1972.
96. PEDROSO, R.I. & DOMOTO, G.A. - Perturbation solutions for spherical solidification of saturated liquids. Journal of Heat Transfer, v.95, p.42, 1973.
97. PEDROSO, R.I. & DOMOTO, G.A. - Inward spherical solidification - Solution by the method of strained coordinates. Journal of Heat and Mass Transfer, v.16, p.1037-1043, 1973.
98. KERN, J. & WELLS, G.L. - Simple analysis and working equations for the solidification of cylinders and spheres. Metallurgical Transactions B, v.8, p.99-105, março, 1977.
99. ALBERNY, R. et al. - La lingotière de coulée continue de brames et son bilau thermique. Revue de Metalurgie, v.73, p. 547, 1976.
100. McADAMS, W.H. - Heat transmission. 3 ed., New York, Ed. McGraw-Hill, 1954.
101. BAXTER, D.C. - The fusion times of slabs and cylinders. Journal of Heat Transfer, v.84, p.317-326, novembro, 1962.
102. SCHNIEWIND, J. - Solutions of the solidification problem of a one-dimensional medium by a new numerical method. Journal of The Iron and Steel Institute, v.201, n°7, p.594-601, julho, 1963.
103. KOHN, A. & MORILLON, Y. - Étude mathématique de la solidification de lingots de 12 tonnes en acier doux et en acier mi-dur. Revue de Metallurgie, p.321-338, abril, 1965.

104. HENZEL JR., J.G. & KEVERIAN, J. - Comparison of calculated and measured solidification patterns in a variety of steel castings. Transactions of The American Foundrymen's Society, v.74, p.661-679, 1965.
105. TAO, L.C. - Generalized numerical solutions of freezing a saturated liquid in cylinders and spheres. A.I.Ch.E. Journal, v.13, n°1, p.165-169, janeiro, 1967.
106. TAO, L.C. - Generalized solution of freezing a saturated liquid in a convex container. A.I.Ch.E. Journal, v.14, n°5, p.720-721, setembro, 1968.
107. NIYAMA, E. - The solidification time of cylindrical sand mold castings of various metals affected by the decrease in surface temperature. Transactions of ISIJ, v.11, p.376-382, 1971.
108. RUDDLE, R.W. - A preliminary study of the solidification of castings. The Journal of The Institute of Metals, v.77, p.1-36, 1950.
109. RUDDLE, R.W. & SKINNER, R.A. - Heat extraction at corners and curved surfaces in sand moulds. The Journal of The Institute of Metals, v.79, p.35-56, 1951.
110. SCIAMA, G. - Étude expérimentale de la validité d'hypothèses classiques en matière de transmission de chaleur. Revue de Metallurgie, p.889-903, novembro, 1966.
111. SCIAMA, G. & JEANCOLAS, M. - Temps de solidification de pièces élémentaires coulées en sable. Fonderie, n°303, p.239-250, julho, 1971.
112. SCIAMA, G. - Épaisseurs des moules et vitesses de refroidissement des pièces moulées. Fonderie, n°344, p.143-151, abril, 1975.

113. SANTOS, R.G. & PRATES, M. - Influência da espessura do molde no tempo de solidificação e na estrutura do silumin. Meta-lurgia, v.34, nº252, p.767-771, novembro, 1978.
114. SANTOS, R.G. & PRATES, M. - Otimização da espessura de parede do molde em função do tempo de solidificação e da estrutura final de peças fundidas. Anais da V Conferência Inter-americana de Tecnologia de Materiais, p.7-12, novembro , 1978.
115. SANTOS, R.G. & PRATES, M. - Variação do tempo de solidificação com a espessura de parede do molde. Anais do 3º Congresso Brasileiro de Engenharia e Ciência dos Materiais , p.L1-9-L1-9, dezembro, 1978.
116. SANTOS, R.G. & PRATES, M. - Influence of mould wall thickness on the heat transfer and solidification time of castings. In: Multiphase transport - Fundamentals, reactor, safety and Applications. 1 ed. Washington, Ed. Hemisphere, 1980, p.1023-1033.
117. ALCANTARA, N.G. - Análise da solidificação de metais em sistemas metal/molde com geometria cilíndrica. Tese de mestrado - UNICAMP, 1978.
118. SMITHELLS, C.J. - Metals reference book. 5 ed. Londres, Ed. Butterworths, 1976, p.186-188, 307 e 940-951.
119. MONDOLFO, L.F. - Aluminum alloys: structure and properties. 1 ed. Londres, Ed. Butterworth, 1976, p.56-67.
120. BARRAND, P. & GADEAN, R. - Enciclopedia del aluminio. 1 ed. Bilbao, Ed. Urmo, 1968, p.13-23.
121. METALS HANDBOOK. 8 ed. Ohio, Ed. American Society for metals (ASM), v.8, 1975, p.44-56.
122. BRESCIANI FILHO, E. & GOMES, M.R. - Propriedades e usos de metais não ferrosos. 1 ed. S.Paulo, Ed. ABM, 1976, p.1-2 , 104 e 210.

123. PRATES, M. & PIRES, O.S. - A resistência térmica da interface metal/molde e sua importância na solidificação de lingotes. Metalurgia, v.29, nº184, p.157-164, março, 1973.
124. CAMPOS, C.A.B. & PRATES, M. - Coeficiente de transmissão de calor da interface metal/molde na solidificação de metais. Metalurgia, v.32, nº218, p.29-34, janeiro, 1976.
125. DIMARTINI, C. - Metallographic technique for lead and lead alloys. In: Metals Handbook. 8 ed. Ohio, Ed. American Society for Metals, v.8, 1975, p.132-134.

APÊNDICE 1SIMBOLOGIA UTILIZADA1. Parâmetros dimensionais

- a - difusividade de temperatura =  $k/\rho c$
- A - área de troca de calor
- b - difusividade de calor =  $\sqrt{k c \rho}$
- c - calor específico
- C - capacidade elétrica
- $C_1$  - constante (equação da velocidade) =  $h_i/k$
- $C_2$  - constante (equação da velocidade) =  $h_i^2/k\rho c$
- e - espessura de parede do molde
- h - coeficiente de transferência de calor
- H - calor latente de fusão
- k - condutibilidade térmica
- ℓ - altura do molde cilíndrico ou plano
- q - fluxo de calor por unidade de área
- q' - fluxo de calor = qA
- $q_E$  - fluxo de eletricidade por unidade de área
- Q - quantidade de calor
- r - distância radial a partir do centro em sistemas metal/molde cilíndricos
- $r_o$  - raio do molde
- $r_f$  - raio da interface sólido/líquido
- R - resistência elétrica
- S - espessura solidificada
- S' - espessura solidificada no sistema virtual da solução de Garcia e Prates
- t - tempo
- t' - tempo no sistema virtual da solução de Garcia e Prates

- $T_o$  - temperatura do meio que extrai calor  
 $T_f$  - temperatura de fusão  
 $T_v$  - temperatura de vazamento  
 $U$  - energia interna  
 $v$  - velocidade de solidificação  
 $V$  - volume  
 $x, y, z$  - coordenadas cartesianas  
 $x$  - distância da interface metal/molde  
 $x'$  - distância da interface metal/molde no sistema virtual da equação de Garcia e Prates  
 $x_\infty$  - extensão da influência do resfriamento na superfície do molde no metal líquido  
 $\alpha$  - constante das equações representativas do modelo de Garcia e Prates =  $1/4a_s\phi^2$   
 $\beta$  - constante das equações representativas do modelo de Garcia e Prates =  $H\rho_s/h_i (T_f - T_o)$   
 $\theta$  - fator de correção usado para estender a equação da cinética da geometria plana para a cilíndrica  
 $= 2 - (r_f/r_o)^2$   
 $v$  - diferença de potencial elétrico  
 $\rho$  - densidade  
 $\sigma$  - desvio padrão  
 $\phi$  - constante das soluções analíticas exatas  
 $\psi$  - fator de correção usado para estender a equação de temperatura da geometria plana para a cilíndrica =  $[(r_o - r_f)/r_o]^{1/3}$

## 2. Parâmetros adimensionais

- $H^*$  - calor latente =  $H/c_s(T_f - T_o)$   
 $M$  - constante do sistema metal/molde =  $b_s/b_m$   
 $r_a$  - raio da interface sólido/líquido =  $r_f/r_o$   
 $r'_a$  - distância radial =  $r/r_o$   
 $R_a$  - raio do molde =  $hr_o/k$   
 $S_a$  - espessura solidificada =  $(r_o - r_f)/r_o$   
 $S^*$  - espessura solidificada =  $h_i S/k$   
 $t_a$  - tempo =  $(T_f - T_o)kt/\rho H r_o^2$   
 $t'_a$  - tempo =  $tk/\rho c r_o^2$   
 $t^*$  - tempo  $h_i^2 t/b_s^2$   
 $T^*$  - temperatura =  $(T - T_o)/(T_f - T_o)$   
 $T_i^*$  - temperatura na interface metal/molde =  $(T_i - T_o)/(T_f - T_o)$   
 $T_s^*$  - temperatura no metal sólido =  $(T_s - T_o)/(T_f - T_o)$   
 $v^*$  - velocidade =  $dS^*/dt^*$   
 $x$  - distância =  $\ln(r_o/r)$   
 $x^*$  - distância da interface metal/molde ao ponto cuja temperatura está sendo analisada =  $h_i x/k$   
 $X$  - distância =  $\ln(1/r_a)$   
 $\gamma$  - inverso do calor latente =  $c(T_f - T_o)/H$

3. Sub-índices utilizados na identificação de grandezas relativas ao sistema metal/molde

c	-	geometria cilíndrica
i	-	interface metal/molde
l	-	metal líquido
m	-	molde
p	-	geometria plana
s	-	metal sólido

4. Funções matemáticas

$\text{erf}(x)$  - função erro

$\text{erfc}(x)$  - função erro complementar

$\text{exp}(x)$  - função exponencial

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

APÊNDICE 2

Definição e propriedades da função-erro (erf) e da função-erro complementar (erfc).<sup>37</sup>

(1) Definição:

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-u^2) du$$

$$\operatorname{erfc}(z) = 1 - \operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} \exp(-u^2) du$$

(2) Propriedades:

$$\operatorname{erf}(-z) = -\operatorname{erf}(z)$$

$$\operatorname{erf}(0) = 0$$

$$\operatorname{erf}(\infty) = 1$$

$$\operatorname{erf}(-\infty) = -1$$

(3) Derivada:

$$\frac{d}{dz} \operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-z^2)$$

APÊNDICE 3

Tabelas dos valores experimentais: tempo médio ( $\bar{t}$ ) e desvio padrão ( $\sigma$ ) em função da relação (V/A).

$\frac{V}{A} \times 10^3 [m]$	MOLDE POLIDO		MOLDE PINTADO	
	$\bar{t} [s]$	$\sigma [s]$	$\bar{t} [s]$	$\sigma [s]$
0,00	0,0	0,0	0,0	0,0
9,67	4,8	0,4	8,0	2,0
18,67	13,3	0,7	23,9	3,6
27,00	27,8	1,5	46,3	5,5
34,67	48,2	2,8	77,5	7,6
41,67	74,3	4,7	115,7	9,1
48,00	103,6	6,8	156,8	10,1
53,67	136,2	7,8	200,7	11,2
58,67	170,1	8,8	245,0	11,8
63,00	204,7	10,1	290,0	12,8

TABELA A-3.1 - Chumbo

$\frac{V}{A} \times 10^3 [m]$	MOLDE POLIDO		MOLDE PINTADO	
	$\bar{t}[s]$	$\sigma[s]$	$\bar{t}[s]$	$\sigma[s]$
0,00	0,0	0,0	0,0	0,0
9,67	3,3	0,5	13,7	1,6
18,67	7,6	0,5	38,4	2,2
27,00	12,9	0,9	67,2	2,6
34,67	20,1	1,3	99,9	3,4
41,67	29,4	1,6	134,4	4,4
48,00	40,0	1,8	168,5	5,5
53,67	51,3	1,6	202,0	6,4
58,67	63,5	2,3	234,5	7,4
63,00	76,0	3,1	265,9	7,3

TABELA A-3.2 - Alumínio

$\frac{V}{A} \times 10^3 \text{ [m]}$	MOLDE POLIDO		MOLDE REFRIGERADO	
	$\bar{t} \text{ [s]}$	$\sigma \text{ [s]}$	$\bar{t} \text{ [s]}$	$\sigma \text{ [s]}$
0,00	0,0	0,0	0,0	0,0
9,67	8,1	0,6	12,4	1,2
18,67	24,9	1,4	32,9	1,0
27,00	49,2	1,5	63,3	1,3
34,67	82,0	2,4	105,7	1,9
41,67	120,6	4,1	153,2	3,2
48,00	162,3	6,1	202,7	4,6
53,67	205,7	7,7	252,9	5,8
58,67	249,0	9,6	302,9	7,4
63,00	292,1	11,1	351,3	8,8

TABELA A-3.3 - Estanho