

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

**FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS
ELEMENTOS DE CONTORNO PARA
EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ, VISANDO
MODELAGEM DA RADIAÇÃO E
DISPERSÃO ACÚSTICA**

Autora : Lúcia Ayako Anzou

Orientador: Euclides de Mesquita Neto

04/96

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR Lúcia Ayako
Anzou E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 19/04/96.

Euclides de Mesquita Neto
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

Tese de Mestrado

**FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO
PARA EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ, VISANDO MODELAGEM DA
RADIAÇÃO E DISPERSÃO ACÚSTICA**

Autora : **Lúcia Ayako Anzou**

Orientador: **Euclides de Mesquita Neto**



Prof. Dr. **Euclides de Mesquita Neto**, Presidente



Prof. Dr. **Renato Pavanello**



Prof.^a , Dr.^a **Stelamaris Rolla**

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL**

**FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO
PARA EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ, VISANDO MODELAGEM DA
RADIAÇÃO E DISPERSÃO ACÚSTICA**

Autora : Lúcia Ayako Anzou

Orientador: Euclides de Mesquita Neto

Curso: Engenharia Mecânica.

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Publicação: FEM nº 37/96

Dissertação de Mestrado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 1996

S.P. - Brasil

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

Anzou, Lúcia Ayako

An99f

Formulação do método dos elementos de contorno para equação de Helmholtz, visando modelagem da radiação e difração de ondas acústicas / Lúcia Ayako Anzou.-- Campinas, SP: [s.n.], 1996.

Orientador: Euclides de Mesquita Neto.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Métodos de elementos de contorno. 2. Radiação. 3. Difração. I. Mesquita Neto, Euclides. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Agradecimentos

- Ao orientador, Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto, pelo interesse, atenção, amizade e suporte durante o desenvolvimento de todas as fases deste trabalho.
- Ao colega Carlos Henrique Daros, pela contribuição no desenvolvimento final da tese.
- À CAPES, Comissão de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pelo apoio financeiro para a realização deste trabalho.
- À FAPESP pelo apoio em termos de equipamentos computacionais que viabilizaram muitos dos estudos numéricos apresentados.
- Aos amigos do “corredor de alunos”, professores e funcionários do Departamento de Mecânica Computacional (DMC) pela inesquecível companhia e incentivo durante minha permanência neste departamento.
- E a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

Agradecimento especial

- Ao amigo, Prof. Dr. Edson Rodrigues Carvalho, pela confiança, amizade e oportunidades, que permitiram a ampliação de meus horizontes e o meu desenvolvimento pessoal.

*À minha família,
sempre presentes, participativos e
incentivadores*

Vale a pena?

Tudo vale a pena.

se a alma não é pequena . . .

Fernando Pessoa

RESUMO

Este trabalho apresenta a formulação direta do Método do Elemento de Contorno (MEC) para a equação de onda harmônica no tempo, conhecida como Equação de Helmholtz, aqui utilizada para problemas de radiação e dispersão (scatter) de ondas acústicas bidimensionais. A equação de Helmholtz é deduzida através das equações de estado, de continuidade e de Euler; em seguida são desenvolvidas as equações integrais e a solução fundamental é apresentada. A partir disto, o Método dos Elementos de Contorno é desenvolvido com aproximações numéricas da equação integral usando elementos isoparamétricos constantes, lineares, quadráticos e cúbicos para discretizar a geometria e as variáveis de campo no contorno. Para o exemplo utilizado para a radiação, verifica-se o aparecimento de não unicidade em determinadas frequências, originárias do método numérico adotado. Este problema é solucionado com o método CHIEF (Combined Helmholtz Integral Equation Formulation). Neste trabalho, é apresentado, ainda, um estudo inicial para o problema da dispersão de ondas acústicas.

ABSTRACT

This work presents a direct formulation of Boundary Elements Methods (BEM) for the harmonic wave equation in time domain, known as Helmholtz Equation. This equation is utilized for scattering and radiation problems of bidimensional acoustic waves. The Helmholtz equation is derived by state, continuity and Euler equations. The BEM is then developed by numerical approximation of integral equation using constant, linear, quadratic and cubic isoparametric elements to discretize the geometry and the field variables in the boundary. For the used radiation problems, it is verified the appearance of the uniqueness in certain frequencies obtained by the adopted numerical method. This problem is solved using the CHIEF (Combined Helmholtz Integral Equation formulation) method. Some initial study of wave scattering problem is realized.

SUMÁRIO

Sumário	i
Lista de figuras.....	iv
Lista de tabelas.....	viii
Notação	xi
Capítulo I - Introdução	
1.1. - Considerações Gerais (Acústica e MEC).....	01
1.2. - Revisão Bibliográfica.....	04
1.3. - Motivação	07
1.4. - Objetivos.....	08
1.5. - Descrição do Trabalho.....	08
Capítulo II - Equação de Helmholtz para Meios Acústicos	
2.1. - Equação de Ondas Acústicas	10
2.2. - Equação de Estado	11
2.3. - Equação da Continuidade	13
2.4. - Equação de Euler	15
2.5. - Equação de Onda Linearizada	17
2.6. - Equação de Helmholtz.....	21

Capítulo III - Equação Integral de Contorno

3.1. - Relações Básicas	23
3.2. - Solução Fundamental	26
3.3. - Equação Integral de Contorno.....	29
3.4. - Cálculo de $\frac{\partial \phi^s}{\partial v}$	31

Capítulo IV - Método dos Elementos de Contorno para a Equação de Helmholtz

4.1. - Discretização da Equação Integral de Contorno.....	33
4.2. - Elementos de Contorno.....	36
4.2.1. - Elementos Constantes.....	37
4.2.1.1. - Cálculo da Normal.....	37
4.2.1.2. - Evolução das Integrais.....	39
4.2.1.3. - Cálculo de $\frac{\partial u^*}{\partial v}$	41
4.2.1.4. - Cálculo dos Elementos não Singulares das matrizes G e H	42
4.2.1.5. - Cálculo dos Elementos da Diagonal de G e H	43
4.2.1.6. - Resultados.....	45
4.2.2. - Elementos Lineares	46
4.2.2.1. - Discretização da Equação Integral	48
4.2.2.2. - Tratamento dos Cantos.....	50
4.2.2.3. - Evolução das Integrais.....	54
4.2.2.4. - Cálculo dos Elementos não Singulares das Matrizes G e H.....	57
4.2.2.5. - Cálculo dos Elementos Singulares.....	60
4.2.2.6. - Resultados.....	65
4.2.3. - Elementos Quadráticos.....	65
4.2.3.1. - Discretização e Evolução da Equação Integral.....	69
4.2.3.2. - Cálculo dos Elementos não Singulares das Matrizes G e H.....	73
4.2.3.3. - Cálculo dos Elementos Singulares.....	74
4.2.3.4. - Resultados.....	83
4.2.4. - Elementos Cúbicos	85

4.2.4.1. - Evolução das Integrais.....	87
4.2.4.2. - Cálculo dos Elementos não Singulares das Matrizes G e H.....	90
4.2.4.3. - Cálculo dos Elementos Singulares.....	92
4.2.4.4. - Resultados.....	106
4.3. - Pontos Internos.....	108
4.4. O Problema da Não Unicidade.....	115
4.4.1. - Aspectos Gerais.....	115
4.4.2. - Formulação do CHIEF.....	117
4.4.3. - Resultados.....	119
4.5. O Problema da dispersão de ondas acústicas.....	128
Capítulo V - Conclusões e Sugestões.....	132
Apêndice A - Funções de Hankel.....	135
Apêndice B - Tratamento analítico/numérico dos elementos singulares e não singulares.....	139
Apêndice C - Método dos Mínimos Quadrados.....	166
Apêndice D - Integração pela Quadratura Gaussiana.....	168

Referência Bibliográfica

LISTA DE FIGURAS

Figura	Página
2.1. Fluxo de massa na direção x , através do volume fixo dV	14
3.1. Definição geométrica para problema acústico externo.....	24
3.2. Definição de contorno em meio acústico bidimensional.....	28
3.3. Semi-círculo ao redor do ponto P no contorno Γ	30
4.1. Definição de elemento constante.....	37
4.2. Direção da normal.....	38
4.3. Figura auxiliar com a convenção de produto vetorial para sistema cartesiano destrógiro.....	39
4.4. Sistema de coordenadas do elementos constantes.....	39
4.5. Potencial de velocidade de radiação - elementos constantes.....	47
4.6. Potencial de velocidade de radiação - elementos constantes.....	47
4.7. Definição de elemento linear.....	48
4.8. Funções de interpolação linear.....	50
4.9. Intersecção do elemento linear.....	51
4.10. Elemento descontínuo.....	54
4.11. Potencial de velocidade para radiação (elementos lineares).....	66
4.12. Potencial de velocidade para radiação (elementos lineares).....	66

4.13. Contorno curvilíneo	67
4.14. Funções de forma, elemento quadrático e sistema de referência.....	68
4.15. Definição de elemento quadrático.....	68
4.16. Sistema de coordenada geométrica para integrações numéricas.....	75
4.17. Potencial de velocidade de radiação - elementos quadráticos.....	84
4.18. Potencial de velocidade de radiação - elementos quadráticos.....	85
4.19. Elemento cúbico com 4 nós	86
4.20. Sistema de coordenadas geométricas para integração numérico ponto de colocação no nó 1.....	92
4.21. Sistema de coordenadas geométricas para integração numérica ponto de aplicação no nó 2.....	95
4.22. Sistema de coordenadas geométricas para integração numérica ponto de colocação no nó 3	99
4.23. Sistema de coordenadas geométricas para integração numérica ponto de colocação no nó 4.....	103
4.24. Potencial de velocidade de radiação - elementos cúbicos.....	107
4.25. Potencial de velocidade de radiação - elementos cúbicos.....	107
4.26. Potencial de velocidade de radiação (para pontos do domínio) elementos constantes ($ka = 0.6$)	109
4.27. Potencial de velocidade de radiação (para pontos do domínio) elementos lineares ($ka = 0.6$)	109
4.28. Potencial de velocidade de radiação (para pontos do domínio) elementos quadráticos ($ka = 0.6$)	110
4.29. Potencial de velocidade de radiação (para pontos do domínio) elementos cúbicos ($ka = 0.6$)	110
4.30. Potencial de velocidade para radiação (para pontos do domínio), $ka = 0.6$ comparação entre resultados dos constantes, lineares, quadráticos e cúbicos.....	111
4.31. Potencial de velocidade para radiação (para pontos do domínio), $ka = 0.6$ comparação entre resultados dos constantes, lineares, quadráticos e cúbicos.....	111
4.32. Potencial de velocidade de radiação (para pontos do domínio) elementos constantes ($ka = 5.0$)	112
4.33. Potencial de velocidade de radiação (para pontos do domínio) elementos lineares ($ka = 5.0$)	112

4.34. Potencial de velocidade de radiação (para pontos do domínio)	
elementos quadráticos ($ka = 5.0$)	113
4.35. Potencial de velocidade de radiação (para pontos do domínio)	
elementos cúbicos ($ka = 5.0$)	113
4.36. Potencial de velocidade para radiação (para pontos do domínio), $ka = 5.0$	
comparação entre resultados dos constantes, lineares, quadráticos e cúbicos.....	114
4.37. Potencial de velocidade para radiação (para pontos do domínio), $ka = 5.0$	
comparação entre resultados dos constantes, lineares, quadráticos e cúbicos.....	114
4.38. Solução do problema interior e exterior	115
4.39. Potencial de velocidade de radiação (aplicação do CHIEF)	
elementos constantes	120
4.40. Potencial de velocidade de radiação (aplicação do CHIEF)	
elementos constantes	121
4.41. Potencial de velocidade de radiação (aplicação do CHIEF)	
elementos lineares	121
4.42. Potencial de velocidade de radiação (aplicação do CHIEF)	
elementos lineares	122
4.43. Potencial de velocidade de radiação (aplicação do CHIEF)	
elementos quadráticos.....	122
4.44. Potencial de velocidade de radiação (aplicação do CHIEF)	
elementos quadráticos	123
4.45. Potencial de velocidade de radiação (aplicação do CHIEF)	
elementos cúbicos	123
4.46. Potencial de velocidade de radiação (aplicação do CHIEF)	
elementos cúbicos	124
4.47. Potencial de velocidade para radiação	
comparação entre resultados dos elementos constantes com e sem CHIEF	125
4.48. Potencial de velocidade para radiação	
comparação entre resultados dos elementos lineares com e sem CHIEF	125
4.49. Potencial de velocidade para radiação	
comparação entre resultados dos elementos quadráticos com e sem CHIEF	126
4.50. Potencial de velocidade para radiação	
comparação entre resultados dos elementos cúbicos com e sem CHIEF	126

4.51. Potencial de velocidade para radiação (sem CHIEF)	
comparação entre resultados dos constantes, lineares, quadráticos e cúbicos	127
4.52. Potencial de velocidade para radiação (sem CHIEF)	
comparação entre resultados dos constantes, lineares, quadráticos e cúbicos	127
4.53. Potencial de velocidade para radiação (com CHIEF)	
comparação entre resultados dos constantes, lineares, quadráticos e cúbicos	128
4.54. Potencial difratado - elementos lineares ($ka=5.0$)	129
4.55. Potencial difratado - elementos lineares ($ka=10.0$)	129
4.56. Definição do ângulo θ	130

Apêndice B

B1. $Y_0(x)$ aproximado até x^{12}	139
B2. $Y_0(x)$ aproximado até x^{24}	139
B3. $Y_0(x)$ aproximado até x^{48}	140

LISTA DE TABELAS

Apêndice A

TA1. Comparação entre valores de $J_0(x)$ do Numerical Recipes e do Mathematica.....	137
TA2. Comparação entre valores de $J_1(x)$ do Numerical Recipes e do Mathematica.....	137
TA3. Comparação entre valores de $Y_0(x)$ do Numerical Recipes e do Mathematica	138
TA4. Comparação entre valores de $Y_1(x)$ do Numerical Recipes e do Mathematica	138

Apêndice B

TB1. Integral de Y_0 analítica para elementos constantes, $ka=0.5$	142
TB2. Integral de Y_0 analítica para elementos constantes, $ka=5.0$	142
TB3. Integral de Y_0 analítica para elementos constantes, $ka=15.0$	142
TB4. Integral de J_0 numérica para elementos constantes, $ka=0.5$ e 8 elementos	143
TB5. Integral de J_0 numérica para elementos constantes, $ka=0.5$ e 16 elementos	143
TB6. Integral de J_0 numérica para elementos constantes, $ka=0.5$ e 32 elementos	144
TB7. Integral de J_0 numérica para elementos constantes, $ka=0.5$ e 64 elementos	144
TB8. Integral de J_0 numérica para elementos constantes, $ka=5.0$ e 8 elementos	144
TB9. Integral de J_0 numérica para elementos constantes, $ka=5.0$ e 16 elementos	145
TB10. Integral de J_0 numérica para elementos constantes, $ka=5.0$ e 32 elementos	145
TB11. Integral de J_0 numérica para elementos constantes, $ka=5.0$ e 64 elementos	146
TB12. Integral de J_0 numérica para elementos constantes, $ka=15.0$ e 8 elementos	146

TB13. Integral de J_0 numérica para elementos constantes, $ka=15.0$ e 16 elementos	147
TB14. Integral de J_0 numérica para elementos constantes, $ka=15.0$ e 32 elementos	147
TB15. Integral de J_0 numérica para elementos constantes, $ka=15.0$ e 64 elementos	148
TB16. Elementos de $\mathbf{G}$ para $ka=5.0$ e 8 elementos (elementos constantes)	149
TB17. Elementos de $\mathbf{G}$ para $ka=5.0$ e 64 elementos (elementos constantes)	149
TB18. Elementos de $\mathbf{G}$ para $ka=15.0$ e 8 elementos (elementos constantes)	150
TB19. Elementos de $\mathbf{G}$ para $ka=15.0$ e 64 elementos (elementos constantes)	150
TB20. Elementos de $\mathbf{H}$ para $ka=0.5$ e 8 elementos (elementos constantes)	151
TB21. Elementos de $\mathbf{H}$ para $ka=0.5$ e 64 elementos (elementos constantes)	151
TB22. Elementos de $\mathbf{H}$ para $ka=15.0$ e 8 elementos (elementos constantes)	152
TB23. Elementos de $\mathbf{H}$ para $ka=15.0$ e 64 elementos (elementos constantes)	152
TB24. Integral de Y_0 analítica para elementos lineares, $ka=5.0$	156
TB25. Integral de J_0 numérica para elementos lineares, $ka=5.0$ e 8 elementos	157
TB26. Integral de J_0 numérica para elementos lineares, $ka=5.0$ e 64 elementos	157
TB27. Elementos de $\mathbf{G}$ para $ka=5.0$ e 8 elementos (elementos lineares)	157
TB28. Elementos de $\mathbf{G}$ para $ka=5.0$ e 64 elementos (elementos lineares)	158
TB29. Elementos de $\mathbf{G}$ para $ka=5.0$ e 8 elementos (elementos lineares)	158
TB30. Elementos de $\mathbf{G}$ para $ka=5.0$ e 64 elementos (elementos lineares)	158
TB31. Elementos singulares de $\mathbf{G}$, $ka=5.0$ e 8 elementos ponto de colocação no nó 1 (elementos quadráticos)	159
TB32. Elementos singulares de $\mathbf{G}$, $ka=5.0$ e 64 elementos ponto de colocação no nó 1 (elementos quadráticos)	159
TB33. Elementos de $\mathbf{G}$, $ka=5.0$ e 8 elementos (elementos quadráticos)	160
TB34. Elementos de $\mathbf{G}$, $ka=5.0$ e 64 elementos (elementos quadráticos)	160
TB35. Elementos de $\mathbf{H}$, $ka=5.0$ e 8 elementos (elementos quadráticos)	161
TB36. Elementos de $\mathbf{H}$, $ka=5.0$ e 64 elementos (elementos quadráticos)	161
TB37a. Elementos singulares de $\mathbf{G}$, $k=5.0$ e 8 elementos ponto de colocação no nó 1 (elementos cúbicos)	162
TB37b. Elementos de $\mathbf{G}$, $ka=5.0$ e 8 elementos ponto de colocação no nó 1 (elementos cúbicos)	163
TB38a. Elementos de $\mathbf{G}$, $ka=5.0$ e 64 elementos ponto de colocação no nó 1 (elementos cúbicos)	163

TB38b. Elementos de $\mathbf{G}$, $ka=5.0$ e 64 elementos	
ponto de colocação no nó 1 (elementos cúbicos)	164
TB39. Elementos de $\mathbf{G}$, $ka=5.0$ e 8 elementos (elementos cúbicos)	164
TB40. Elementos de $\mathbf{G}$, $ka=5.0$ e 64 elementos (elementos cúbicos)	164
TB41. Elementos de $\mathbf{H}$, $ka=5.0$ e 8 elementos (elementos cúbicos)	165
TB42. Elementos de $\mathbf{H}$, $ka=5.0$ e 64 elementos (elementos cúbicos)	165

Apêndice D

TD1. Valores de ξ_m e W_m para integração gaussiana	170
TD2. Valores de ξ_m e W_m para integração gaussiana logarítmica	171

NOTAÇÃO ADOTADA

$\mathbf{a}$	Vetor aceleração
c	Velocidade do som
dm	Diferencial de massa
$d\mathbf{F}$	Diferencial do vetor de força líquida
i	Índice referente ao ponto de colocação
$i = \sqrt{-1}$	Unidade imaginária do número complexo
j	Índice referente ao elemento
k	Número de ondas
k_n	Número de ondas característicos
n_{ptg}	Número de pontos de gauss

$nptgl$	Número de pontos de gauss para fórmula especial logaritmica
p	Pressão acústica
$q = \frac{\partial \phi}{\partial v}$	Derivada do potencial de velocidade harmônico no tempo em relação à normal.
$q^* = \frac{\partial u^*}{\partial v}$	Derivada da solução fundamental em relação à normal
r	Constante, representa o valor específico do gás (constante dos gases ideais pelo peso molecular de cada gás)
t	Tempo
u^*	Solução fundamental bidimensional do operador de Helmholtz
v	Velocidade da partícula
(x,y)	Sistema de coordenadas cartesianas
x_c, y_c	Coordenadas dos pontos de colocação
$x_i, i = 1..N$	Posição dos nós
B	Corpo vibrante (radiação) ou obstáculo passivo (dispersão)
L	Comprimento do elemento
N	Número de elementos
P	Ponto do domínio

P_0	Pressão de equilíbrio
P_r	Pressão instantânea (Pa)
Q	Ponto do contorno
R	Distância entre o ponto pertencente ao domínio ao ponto do contorno
S	Condensação
T_k	Temperatura absoluta em Kelvin
V	Volume
β	Módulo de elasticidade volumétrica
ϕ	Potencial de velocidade harmônico no tempo
ϕ^I	Potencial de velocidade (onda) incidente
φ	Potencial de velocidade dependente da posição e do tempo
γ	Constante de Euler
λ	Razão entre o calor específico em pressão constante e entre o calor em volume constante
$\mathbf{v}$	Vetor normal unitário
ρ	Densidade de massa (Kg/m^3)
ρ_0	Densidade de equilíbrio

ω	Frequência angular
Ψ_m	Funções de forma
Γ	Superfície bidimensional do corpo
Ω	Domínio de atuação da Equação de Helmholtz
∇	Operador divergente
∇^2	Laplaciano bidimensional

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

1.1. Considerações Gerais

A acústica, área de aplicação desta tese, é uma ciência já bastante antiga. Pesquisadores famosos, tais como Chladni, Helmholtz e Rayleigh desenvolveram trabalhos científicos rigorosos e formais no século passado, atingindo o auge de suas contribuições em torno dos anos de 1802, 1860 e 1877, respectivamente [Ciskowski,1991]. Atualmente existem muitos pesquisadores, jornais, e sociedades voltadas à acústica, como por exemplo, a Acoustical Society of America e a Institute of Noise Control Engineering. No Brasil, existe uma entidade voltada para esta finalidade, a SOBRAC (Sociedade Brasileira de Acústica).

Existem muitas novas áreas de pesquisa surgindo e encontrando aplicações imediatas, como por exemplo, no controle ativo de ruído e diagnósticos ultra-sônicos. Esta ênfase nas pesquisas acústicas é devido ao seu grande impacto na existência diária. Por exemplo, na medicina, a acústica influencia nas áreas da fala e audição. Danos da audição são aspectos de saúde ocupacional crítica na indústria e nos ambientes onde os níveis de ruído podem ser excessivos. O ultra-som é uma ferramenta bastante valiosa nos diagnósticos da medicina, tão

boa quanto na indústria, onde é utilizada nos testes e limpeza de componentes mecânicos, desde óculos até jatos de máquinas [Ciskowski,1991].

A grande maioria das modelagens de problemas de engenharia resulta em equações diferenciais. Apenas alguns poucos casos simples possuem solução analítica exata. Nos demais a solução só é possível através do uso de métodos numéricos, que utilizam modelos discretos, com finitos graus de liberdade, em substituição aos modelos contínuos dos métodos analíticos.

Na análise de problemas através de métodos numéricos, geralmente surgem grandes sistemas de equações e é grande o número de manipulação com os dados. É indispensável a utilização de máquinas capazes de manipular com velocidade e precisão todos os dados envolvidos na análise. Por isso, a utilização em grande escala dos métodos numéricos se deve ao avanço da eletrônica que proporcionou o surgimento do computador.

Vários métodos numéricos foram desenvolvidos visando a solução dos problemas de engenharia. Pode-se citar como principais o Método das Diferenças Finitas (MDF) e o Método dos Elementos Finitos (MEF), considerados métodos de domínio, e também o Método dos Elementos de Contorno (MEC), considerado um método de contorno.

Na acústica, duas classes básicas de problemas são possíveis:

- **problemas internos:** neste caso, o domínio é limitado e a normal no contorno aponta para fora e é o campo interno do corpo vibrante que é modelado. Estes domínios limitados podem ser discretizados por qualquer um dos métodos acima descritos, MDF, MEF, ou MEC.

- **problemas externos:** neste caso, a normal do contorno aponta para dentro do corpo e é o meio externo ilimitado, que transmite as vibrações, que é modelado. Tal modelo apresenta sérias dificuldades quando representadas com métodos de domínio, devido ao fato de ser impossível discretizar o infinito e as malhas de discretização do domínio devem ser truncadas a alguma distância arbitrária do corpo vibrante, ou dissipador. Evidentemente este truncamento afeta resultados, como será discutido abaixo.

A acústica apresenta um campo bastante interessante para a aplicação do Método dos Elementos de Contorno (MEC). Isto se deve ao fato da natureza privilegiada do método em tratar domínios ilimitados. A propagação de ondas em domínios ilimitados é caracterizada pela chamada condição de Sommerfeld [Sommerfeld, 1978]. Esta condição assume que não existe fonte de energia no infinito e que, portanto, toda energia é carregada através de ondas não refletidas da fonte para o infinito. Esta retirada de energia do sistema, na forma de ondas não refletidas se propagando ao infinito, também é conhecida como “amortecimento geométrico”.

A necessidade de truncamento das malhas do MDF ou MEF quando da modelagem de domínios ilimitados introduz contornos inexistentes que causam reflexão de ondas e consequentemente de energia, não satisfazendo a condição de radiação de Sommerfeld, não simulando o amortecimento geométrico. Existem diversas tentativas ainda não consolidadas de se desenvolverem “elementos infinitos” aplicados ao MEF [Bettes, 1992].

Por sua vez, a formulação do MEC utilizando uma função de Green para o espaço completo, também conhecida como solução fundamental, além de somente exigir a discretização da superfície radiadora ou dispersora limitada próxima, satisfaz automaticamente a condição de radiação [Kane, 1994] [Mesquita Neto, 1989].

A formulação direta [Brebbia, 1984, 1989] [Partridge, 1991] é mais geral, elegante e simples para se implementar computacionalmente do que as formulações indiretas, usadas principalmente antes de 1978, e que envolvem conceitos tais como fontes ou dipolos. Neste trabalho adota-se o Método dos Elementos de Contorno como objeto de estudo. Os elementos de contorno são usualmente associados com formulações diretas, cujas variáveis do problema são as mesmas que as variáveis físicas, por exemplo, potencial e fluxo.

O MEC é o método numérico mais recente do ponto de vista de aplicações computacionais. Consiste em obter a solução das equações diferenciais que descrevem o comportamento de um corpo no seu domínio, através da solução de uma equação integral sobre o contorno. Isto conduz sempre a uma redução das dimensões dos problemas analisados, e consequentemente, menor quantidade de dados de entrada e menor sistema de equações resultantes.

1.2. Revisão Bibliográfica

A primeira técnica numérica usada para resolver equações integrais de contorno foi o Método da Colocação, no qual as funções desconhecidas são aproximadas por funções constantes. O núcleo da integral é evoluída por aproximações retangulares nos pontos [Filippi, 1988].

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) é uma técnica numérica desenvolvida recentemente que iniciou em meados de 1960 com o trabalho de pesquisa de Jaswon [1963], Hess [1967], Symm [1963], Massonnet [1965], Shaw [1962] [1968], Cruse [1968a] [1968b] e outros. Uma versão do MEC foi extensivamente usado no passado sobre o nome de Método da Equação Integral [Chen, 1963] [Chertock, 1964] [Copley, 1967a] [Copley, 1967b][Schenck, 1968], e seu primeiro nome apareceu somente em 1977. O método tem base no Método da Equação Integral de Contorno que é usado já há bastante tempo. Algumas pesquisas bastante conhecidas sobre equação integral entre 1800 e 1950 são de Poisson [1829], Kirchhoff [1883], Somigliana [1886], Fredholm [1903], Kellogg [1929], Kupradze [1935] e outros.

No presente, o elemento de contorno é um campo muito ativo de estudo especialmente na comunidade de engenharia. Este método baseia-se na transformação das equações diferenciais que descrevem o problema em equações integrais, expressas apenas no contorno da região analisada. As equações integrais são discretizadas, o que origina sistemas de equações algébricas cuja solução fornece o valor das incógnitas no contorno. Nos pontos internos do domínio, as incógnitas são calculadas a partir dos valores no contorno através da integração numérica da equação integral.

O Método dos Elementos de Contorno surgiu como poderosa alternativa ao Método dos Elementos Finitos (MEF), particularmente nos casos onde uma melhor acuidade é requerida devido às dificuldades tais como concentrações de tensões ou quando o domínio se estende ao infinito. A mais importante característica do método dos elementos de contorno é que ela requer a discretização apenas da superfície e não do volume todo, assim, as malhas podem ser facilmente generalizadas e as mudanças planejadas não requerem o remalhamento completo do volume, como nos elementos finitos.

O uso da Equação Integral de Contorno para resolver problemas numéricos na acústica é parte do desenvolvimento do MEC e foi facilitado pelo aparecimento e proliferação do computador entre 1950 e 1960. Kirchhoff foi o primeiro a formular a equação integral para o problema de onda escalar, em termos do potencial desconhecido. Entretanto, as soluções de tais problemas iniciaram-se somente no início dos anos 60 com os trabalhos pioneiros de Friedman e Shaw [1962a] [1962b] para problemas de dispersão acústica transiente. Mais tarde Banaugh e Goldsmith [1963a] [1963b] estenderam o trabalho de Friedman e Shaw para problemas no domínio da frequência, e, a partir daí, seguiram-se inúmeros trabalhos como os de Chen e Schweikert [1963], Copley [1967a] [1967b], Chertock [1964], Schenck [1968], dentre outros.

O MEC foi bastante utilizado em várias áreas [Filippi, 1988], tais como aplicação à fluido-dinâmica, problemas de difração de ondas eletromagnéticas ou acústicas, sendo aplicado em seguida em problemas sólidos-dinâmicos. Mais recentemente, em radiação de som por sólidos vibrantes. A acústica é uma área de aplicação ideal para o MEC, pois soluciona facilmente os problemas com domínios infinitos, os quais são tão frequentes nos problemas acústicos [Seybert, 1984, 1985, 1986]. Uma revisão entre os anos de 1968 à 1988 anos de desenvolvimento e aplicação do MEC para a acústica pode ser encontrada em [Filippi, 1988] e em [Seybert, 1988].

Para problemas exteriores, a condição de radiação é incorporada analiticamente na formulação integral. Chen e Scheweikert [1963] realizaram, para corpos arbitrários, o primeiro trabalho utilizando o Método da Equação Integral para problemas de radiação harmônica no tempo. Logo após esse trabalho, surgiram outras aplicações do Método da Equação Integral, como a de Chertock [1964], também para problemas de radiação do som; Brundit [1965], para o problema da dispersão de ondas escalares; Greenspan e Werner [1966], para o problema exterior de Dirichlet; Mitzner [1967], para o problema da dissipação transiente; e Copley [1967a], para a formulação da equação integral fundamental.

Copley [1967a] foi o primeiro a identificar a dificuldade dos autovalores interiores fictícios, ou seja, a não unicidade em determinadas frequências. Assim, iniciaram-se trabalhos na tentativa de solucionar esse problema, pois, as modificações e reformulações das equações integrais para inserir a unicidade sobre o limite do número de ondas, ou em todos os números

de ondas, é um tópico de muito interesse prático e teórico [Panich, 1965] [Piaszczyk, 1984] [Brod, 1984]. Schenck [1968] foi o primeiro a apresentar um método para resolver essa dificuldade, com o seu programa CHIEF (Combined Helmholtz Integral Equation Formulation). No mesmo ano em que Schenck [1968] apresentou o seu método, Chertock [1968] introduziu um método de solução iterativo para a equação integral governante, independente do elemento ("non-element"). No ano seguinte, Waterman [1969] introduziu outra aproximação iterativa, o método da matriz T, mais amplamente aceita. Desde então, aumentou-se muito o número de trabalhos sobre o assunto. Burton e Miller [1971] propuseram a combinação linear das integrais de Helmholtz e o gradiente de sua normal. Ursell [1973] e Jones [1974] demonstraram teoricamente que a unicidade pode ser obtida adicionando à usual função de Green para espaço livre, uma série de funções de ondas de radiação que obedecem a condição de Sommerfeld sem reflexão no infinito (ondas "outgoing"). Kleinman e Roach [1974] propuseram a formulação da equação integral consistindo na combinação linear de camadas potenciais simples e duplas. Meyer *et al.* [Meyer, 1978, 1979] implementou o método proposto por Burton e Miller [1971] realizando a formulação do gradiente de Helmholtz (Helmholtz Gradient Formulation - HGF), através de uma equação integral, resultante da equação integral de Helmholtz adicionada à equação integral formada pelo gradiente da sua normal. Um parâmetro acoplado α é usado no método HGF para ponderar a segunda equação integral relativa à primeira. No entanto, cada uma das duas equações integrais tem uma posição de número de ondas características, estas posições são distintas, e os resultados do método HGF, teoricamente, produzirão uma solução única para todos k , quando o parâmetro acoplado é escolhido, de tal maneira, que sua parte imaginária seja diferente de zero. Cunefare *et al.* [1989], desenvolveu o método denominado CHI (Coupled Helmholtz Integrals) cuja formulação deriva dos trabalhos de Burton e Miller, e cuja característica principal é a ausência das integrais singulares. O método consiste em restringir os pontos no campo dos núcleos das integrais para regiões interiores bem fora do contorno radiado, contornando assim a complicação usual de núcleos singulares. A desvantagem desses métodos é que para modificar cada equação integral ou a solução fundamental, os esforços computacionais requeridos para reduzir a equação integral para forma numérica aumenta. Este é um ponto significativo pois a obtenção das matrizes do sistema, a partir de integrações, consome a maior parte do tempo computacional.

Seybert e Rengarajan [1987] conduziram um estudo sistemático usando o método CHIEF para superar os problemas da não unicidade. O método foi sucessivamente testado para uma variedade de problemas de radiação com geometrias diferentes e condições de contorno nas diferentes frequências. Mas, em uma revisão na literatura, é aparente que são poucos os trabalhos nos quais os métodos propostos para resolver o problema da não unicidade são demonstrados com exemplos numéricos. Não existem estudos comparando dois ou mais métodos e não existe estudo sistemático ilustrando vantagens ou desvantagens de um método particular.

É interessante notar que, justamente nos finais de 1960, a radiação acústica e problemas de dispersão foram bem estudados, para ondas transientes e harmônicas no tempo, por formulações integrais de contorno direta e indireta; outro fato interessante de se notar foi que, nesta época, estabeleceu-se métodos que procuravam solucionar a dificuldade dos autovalores interiores fictícios para formulação da equação integral para radiação exterior e dispersão acústica. Esta falta de unicidade da solução de certas equações integrais quando aplicadas a problemas de exterior onde a solução é única para todas as frequências, é a maior desvantagem do Método da Equação Integral de Contorno, pois não produzem a unicidade de solução em valores característicos de números de ondas [Schenck, 1968] [Chertock, 1971] [Kleinman, 1974] [Seybert, 1987]. Estas frequências características, ou autofrequências fictícias, não tem significado físico, sendo um problema exclusivamente do método numérico.

1.3. Motivação

O Método dos Elementos de Contorno consiste em obter a solução da equação diferencial, que descreve o comportamento de um corpo no domínio, através da solução de uma equação integral sobre o contorno, reduzindo assim, as dimensões do problema analisado. Representa facilmente domínios semi-infinitos, ou quando o mesmo se estende ao infinito, tornando-se, então, bastante conveniente no estudo de problemas no campo acústico, como, por exemplo, em problemas clássicos de radiação e dispersão de ondas.

1.4. Objetivos

O objetivo do presente trabalho é realizar a formulação do Método dos Elementos de Contorno para equação de ondas de Helmholtz, seguida da implementação e validação numérica. Deverão ser considerado problemas externos de radiação e dispersão de ondas, considerando um corpo de forma arbitrária mergulhado em um campo acústico bidimensional infinito, usando técnicas de discretização por elementos isoparamétricos constantes, lineares, quadráticos e cúbicos. A eficiência do método CHIEF para solucionar problemas de não unicidade da solução da equação integral também será numericamente investigada.

1.5. Descrição do trabalho

Este trabalho será dividido em seis capítulos, cujo conteúdo resume-se a seguir:

• Capítulo I - Introdução

Neste capítulo introdutório, encontram-se as considerações gerais sobre o Método dos Elementos de Contorno e sobre a acústica. Uma revisão bibliográfica sobre o MEC é feita, seguida das aplicações do MEC na acústica e trabalhos de não unicidade das frequências fictícias para os problemas externos de radiação. Encontra-se aqui, a motivação que resultou na escolha do assunto do trabalho, sua importância e delimitações. O item seguinte deste capítulo são os objetivos, demonstrando do que se trata o trabalho. Finalmente, uma descrição do trabalho é feita, mostrando a estrutura em que se encontra o mesmo.

• Capítulo II - Desenvolvimento da Equação de Helmholtz para meios acústicos

Aqui, a equação de onda harmônica no tempo (Equação de Helmholtz) é deduzida através das equações de Estado, da Continuidade e de Euler.

• Capítulo III - Desenvolvimento da Equação Integral de Contorno

Neste capítulo são mostradas a formulação da Equação Integral de Contorno e a solução fundamental do problema.

- **Capítulo IV - Desenvolvimento do Método dos Elementos de Contorno para Equação de Helmholtz**

A discretização da Equação Integral de Contorno é feita neste capítulo, seguida da implementação para integração numérica através dos elementos isoparamétricos constantes, lineares, quadráticos e cúbicos. São apresentados os resultados para implementação de cada tipo de elemento tanto para radiação e difração de ondas acústicas. No caso da radiação, será desenvolvido o método CHIEF para resolver os problemas de não unicidade das frequências fictícias

- **Capítulo V - Conclusões e Sugestões**

Finalmente, são realizadas as conclusões e sugestões sobre o trabalho.

- **Apêndices**

Aqui são apresentadas as funções de Hankel e suas integrações, o método dos mínimos quadrados, o método da integração gaussiana, e os tratamentos numéricos e analíticos dos elementos singulares e não singulares utilizados durante as etapas deste trabalho.

- **Referências Bibliográficas**

O presente trabalho apresenta, ainda, uma bibliografia dos trabalhos utilizados e citados durante o mesmo.

CAPÍTULO II

EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ PARA MEIOS ACÚSTICOS

2.1. Equação de Ondas Acústicas

Um dos exemplos de distúrbios de pressão que podem propagar-se através de um fluido compressível são as ondas acústicas que produzem a sensação de som. Estas ondas são longitudinais: as moléculas movem-se para frente e para trás na direção da propagação da onda, produzindo regiões adjacentes de compressão e rarefação.

Os fluidos exibem menor resistência às deformações do que os sólidos. Como resultado, a força de restauração responsável pela propagação das ondas é simplesmente a mudança de pressão que ocorre quando o fluido é comprimido ou expandido.

O termo "partícula de fluido" significa um volume elementar, grande o suficiente para conter milhões de moléculas de tal forma que o fluido possa ser visto como um meio contínuo, ao mesmo tempo tão pequeno para que todas as variáveis acústicas (deslocamentos, densidade, pressão, etc...) possam ser consideradas constantes por todo volume elementar [Kinsler, 1982].

Para estudar a transmissão de ondas acústicas no fluido, os efeitos gravitacionais são desprezados, e assim, a pressão e a densidade permanecem constantes por toda a sua extensão. O fluido é assumido como sendo homogêneo, isotrópico, irrotacional e perfeitamente elástico, de tal forma que nenhum efeito dissipativo esteja presente. Neste capítulo serão estudadas apenas ondas com pequenas amplitudes, de tal forma que as variações da densidade no meio serão pequenas se comparadas com o seu valor de equilíbrio.

2.2. Equação de Estado

A equação de estado para fluidos relacionam as forças internas restauradoras com as respectivas deformações, e deve relatar três quantidades físicas ρ , r e T_k que descrevem o comportamento termodinâmico do fluido.

Para gases perfeitos, a equação de estado é

$$P_n = \rho \, r \, T_k \, , \quad (2.1)$$

onde P_n é a pressão instantânea (em Pascal, Pa) em qualquer ponto; ρ é a massa específica (Kg/m^3) em qualquer ponto; r é a constante, cujo valor depende do gás particular envolvido e T_k é a temperatura absoluta, em Kelvins

Esta equação é conhecida como equação geral dos gases perfeitos, que descreve o processo termodinâmico dos mesmos. O desenvolvimento desta equação pode ser encontrado com detalhes em [Kinsler, 1982].

Se estes processos são restringidos, obtemos uma simplificação na equação de estado, por exemplo: se o gás está contido dentro de um vaso cujas paredes são altamente condutoras térmicas, então, pequenas variações num volume do vaso resultarão em energia térmica, sendo transferida entre as paredes e o fluido. Se as paredes têm capacidade de condução térmica suficientemente alta, o sistema permanecerá à uma temperatura constante. Nesse caso, o gás perfeito é descrito por uma equação de estado isotérmica [Kinsler, 1982].

$$\frac{P_r}{P_{r0}} = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad (2.2)$$

onde P_{r0} é a pressão de equilíbrio constante no fluido, e ρ_0 é a massa específica constante de equilíbrio.

Como os processos acústicos são aproximadamente adiabáticos (possuem insignificante troca de energia térmica de uma partícula do fluido à outra), a entropia (e não a temperatura) do fluido permanece aproximadamente constante.

A equação de estado adiabático fica então [Kinsler, 1982]

$$\frac{P_r}{P_{r0}} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\lambda, \quad (2.3)$$

onde λ é a razão entre o calor específico em pressão constante e o calor específico em volume constante.

Para fluidos que não sejam gases perfeitos, a equação de estado adiabático se torna mais complicada, sendo nestes casos preferível a determinação experimental da relação isoentrópica entre as flutuações de densidade e de pressão.

Encontrada esta relação, pode-se expandi-la em uma série de Taylor,

$$P_r = P_{r0} + \left(\frac{\partial P_r}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} (\rho - \rho_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 P_r}{\partial \rho^2} \right)_{\rho_0} (\rho - \rho_0)^2 + \dots, \quad (2.4)$$

onde as derivadas parciais são constantes determinadas pela compressão e expansão adiabática do fluido em torno da densidade de equilíbrio. Quando as flutuações são pequenas, somente $(\rho - \rho_0)$ é considerado. Assim, tem-se que

$$P_{ri} = P_{r0} + \left(\frac{\partial P_r}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} (\rho - \rho_0). \quad (2.5)$$

Pode-se arranjar a equação acima, chegando em

$$P_{ir} = P_{r0} + \rho_0 \left(\frac{\partial P_r}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} \left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right), \quad (2.6)$$

obtendo-se então, uma relação linear entre a flutuação da pressão e a mudança da densidade

$$P_{ir} - P_{r0} = \beta \left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right); \quad (2.7)$$

onde $\beta = \rho_0 \left(\frac{\partial P_{ri}}{\partial \rho} \right)_{\rho_0}$ é o módulo de elasticidade volumétrica adiabático.

Através dos termos da pressão acústica ($p = P_{ri} - P_{r0}$) e da condensação ($S = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}$), a equação passada é reescrita como

$$p = \beta S. \quad (2.8)$$

Esta equação é conhecida como **Equação de Estado**. A restrição essencial é que $|S| \ll 1$ [Kinsler, 1982].

2.3. Equação da Continuidade

Para relacionar o movimento do fluido com a compressão ou dilatação, é necessário uma relação funcional entre a velocidade da partícula $\mathbf{v}$ e a densidade instantânea ρ . Considerando um pequeno elemento paralelepípedo de volume $dV = dx \cdot dy \cdot dz$, fixo no espaço e sendo atravessado por elementos de fluido, tem-se que a taxa líquida de massa que escoar pelo

volume e por suas faces deve se igualar à taxa com a qual a massa cresce no interior do volume.

Da fig. 2.1, observa-se que, para escoamento em x, tem-se que [Kinsler, 1982]:

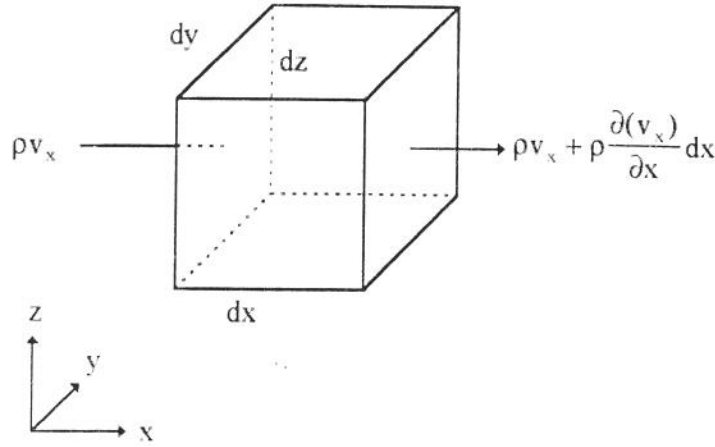


figura 2.1 - fluxo de massa na direção x,
através do volume fixo dV

$$\left\{ \rho v_x - \left[\rho v_x + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dx \right] \right\} dy dz = - \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dV. \quad (2.9)$$

Equações similares dão a vazão líquida para as direções y e z, e o influxo total é

$$-\left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \right] dV = [\nabla \cdot (\rho \mathbf{v})] dV, \quad (2.10)$$

onde ∇ é o operador divergente e v_i , a componente cartesiana de velocidade do fluxo na i-ésima direção.

A taxa com a qual a massa do volume dV cresce é $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV$. Desde que o influxo líquido deve ser igual à taxa de crescimento, obtém-se

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (2.11)$$

Esta equação é conhecida como equação da continuidade não linear.

Fazendo $\rho = \rho_0(1 + S)$, onde ρ_0 é constante tanto no espaço quanto no tempo e $S \ll 1$, tem-se [Kinsler, 1982]:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.12)$$

que é a **Equação linearizada da continuidade**.

2.4. Equação de Euler

Em fluidos reais, a existência da viscosidade e o fato dos processos acústicos não serem perfeitamente adiabáticos introduzem termos dissipativos. No entanto, desde que os efeitos de condutividade térmica na equação de estado foi negligenciada, agora ignora-se os efeitos de viscosidade, considerando o fluido sem viscosidade.

Considerando o elemento de volume $dV = dx \cdot dy \cdot dz$ que se move com o fluxo, contendo uma massa dm do fluido, temos que a força líquida $d\mathbf{F}$ no elemento irá acelerá-lo de acordo com a segunda lei de Newton, $d\mathbf{F} = \mathbf{a} \cdot dm$.

Esta força na direção x é

$$dF_x = \left[P_r - \left(P_r + \frac{\partial P_r}{\partial x} dx \right) \right] dy \cdot dz = - \frac{\partial P_r}{\partial x} dV. \quad (2.13)$$

Analogamente para dF_y e dF_z , tem-se

$$d\mathbf{F} = dF_x \mathbf{i} + dF_y \mathbf{j} + dF_z \mathbf{k}, \quad (2.14)$$

ou seja,

$$d\mathbf{F} = -\nabla P_r dV. \quad (2.15)$$

A velocidade da partícula $\mathbf{v}$ é uma função tanto do tempo quanto do espaço.

Se o elemento do fluido tem velocidade $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ em (x, y, z) no instante t , quando o mesmo se move para $(x+dx, y+dy, z+dz)$, em $(t+dt)$, a velocidade fica $\mathbf{v}(x+dx, y+dy, z+dz, t+dt)$ e a aceleração fica

$$\mathbf{a} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(x + v_x dt, y + v_y dt, z + v_z dt, t + dt) - \mathbf{v}(x, y, z, t)}{dt}, \quad (2.16)$$

onde $dx = v_x dt$; $dy = v_y dt$ e $dz = v_z dt$.

Assumindo os incrementos como sendo muito pequenos, a nova velocidade pela série de Taylor linearizada será

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(x + v_x dt, y + v_y dt, z + v_z dt, t + dt) &= \\ &= \mathbf{v}(x, y, z, t) + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} v_x dt + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} v_y dt + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} v_z dt + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dt, \end{aligned} \quad (2.17)$$

e a aceleração

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}. \quad (2.18)$$

Se o vetor operacional $\mathbf{v} \cdot \nabla$ for definido como

$$\mathbf{v} \cdot \nabla = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad (2.19)$$

tem-se então, que

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}. \quad (2.20)$$

Sabe-se que $dm = \rho dV$, então, substituindo em $d\mathbf{F} = \mathbf{a} dm$, tem-se

$$-\nabla P_{r1} dV = \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] \rho dV, \quad (2.21)$$

ou seja,

$$-\nabla P_{r1} = \rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right] + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}. \quad (2.22)$$

Esta é a **Equação de Euler não linear**.

Assumindo $|S| \ll 1$, e $|(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}| \ll \left| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right|$, ρ pode ser substituído por ρ_0 , e admitindo que $\nabla P_{r1} = \nabla p$, desde que P_{r0} seja constante, então

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p. \quad (2.23)$$

Esta é a equação linear para fluido invíscido ou **Equação de Euler linear**, válida apenas para processos acústicos de amplitudes pequenas.

2.5. Equação de Onda Linearizada

As equações de estado (eq. (2.8)), de continuidade (eq. (2.12)), e de Euler (eq. (2.23)) são combinadas para se chegar a uma única equação diferencial escalar com uma única variável.

Pode-se eliminar a velocidade através das equações de Euler e da continuidade.

Da equação de Euler (eq. (2.23)), vem que

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p, \quad (2.24)$$

podendo ser escrita como

$$\rho_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\nabla p) = -\nabla^2 p, \quad (2.25)$$

ou seja,

$$\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{\nabla^2 p}{\rho_0}. \quad (2.26)$$

Derivando a equação da continuidade (2.12) em relação ao tempo, tem-se que

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} + \frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{v})}{\partial t} = 0, \quad (2.27)$$

ou seja,

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0. \quad (2.28)$$

Substituindo a eq. (2.26) na eq. (2.28), tem-se que

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} - \frac{\nabla^2 p}{\rho_0} = 0, \quad (2.29)$$

ou seja,

$$\nabla^2 p = \rho_0 \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}. \quad (2.30)$$

A seguir, tem-se o desenvolvimento para eliminar o termo S. Da eq. (2.8), vem que

$$S = \frac{p}{\beta}. \quad (2.31)$$

Derivando duas vezes a equação acima, em relação ao tempo, tem-se que

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (2.32)$$

Aplicando a eq. (2.31) na eq. (2.30), obtém-se

$$\nabla^2 p = \frac{\rho_0}{\beta} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \quad (2.33)$$

que pode ser reescrita como:

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \quad (2.34)$$

onde c é a velocidade de fase para ondas acústicas em fluidos, também conhecida por velocidade do som, determinada por

$$c = \sqrt{\frac{\beta}{\rho_0}}. \quad (2.35)$$

A eq. (2.34) é a equação linear da onda para propagação sem perdas em fluidos.

A eq. (2.8) pode ser reescrita como

$$p = \rho_0 \frac{\beta}{\rho_0} S. \quad (2.36)$$

Aplicando a eq. (2.35) em (2.36), chega-se em

$$p = \rho_0 c^2 S. \quad (2.37)$$

Observa-se na equação acima, que p e S são proporcionais, então S também satisfaz a equação de onda (2.34). Como p e S estão linearmente relacionados, p também satisfaz a eq. (2.34), assim

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}. \quad (2.38)$$

Desde que o rotacional do gradiente de uma função deve ser nulo ($\nabla \times \nabla F = 0$), tem-se que a velocidade da partícula da equação de Euler (eq. 2.23) deve ser irrotacional, ou seja, $\nabla \times \mathbf{v} = 0$; isto significa que a velocidade da partícula pode ser expressa como o gradiente de uma função escalar φ ,

$$\mathbf{v} = \nabla \varphi, \quad (2.39)$$

onde φ é o potencial de velocidade.

Fisicamente, isto significa que a excitação acústica de um fluido invíscido não envolve escoamento rotacional, não há efeitos como ondas cortantes, camada limite ou turbulência.

Substituindo a eq. (2.39) em (2.23), vem que

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi = -\nabla p, \quad (2.40)$$

ou seja

$$\nabla \left(\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} + p \right) = 0. \quad (2.41)$$

Considerando não haver excitação acústica, pode-se escolher a quantidade entre parênteses da equação acima desaparecendo identicamente. Assim, tem-se que

$$p = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (2.42)$$

Substituindo a eq. (2.42) na equação de onda (2.34), obtém-se

$$\nabla^2 \left(-\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \left(-\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)}{\partial t^2}, \quad (2.43)$$

ou seja,

$$-\rho_0 \frac{\partial \nabla^2 \varphi}{\partial t} = \frac{1}{c^2} (-\rho_0) \frac{\partial \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)}{\partial t}, \quad (2.44)$$

Integrando a equação acima em relação ao tempo, vem que

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (2.45)$$

Esta é a **equação da onda transiente linearizada** no meio acústico, em função do potencial de velocidade, onde φ é o potencial de velocidade dependente da posição e do tempo, e c a velocidade de fase.

2.6. Equação de Helmholtz

Para investigar ondas sonoras para diferentes frequências, será considerada uma solução $\varphi(X,t)$ para equação da onda (eq. 2.45) que varie harmonicamente com o tempo, ou seja

$$\phi(X,t) = \varphi(X) e^{-i\omega t}, \quad (2.46)$$

onde X é a posição do ponto (x,y,z) , e ω é a frequência circular do fenômeno estacionário.

Derivando a eq. (2.46) duas vezes em relação ao tempo, obtém-se

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\varphi(X) \omega^2 e^{-i\omega t}. \quad (2.47)$$

Derivando a eq. (2.46) duas vezes em relação às coordenadas de sua posição, obtém-se as três equações seguintes

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} e^{-i\omega t}, \quad (2.48a)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} e^{-i\omega t}, \quad (2.48b)$$

e

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} e^{-i\omega t}. \quad (2.48c)$$

Substituindo as equações (2.47), e (2.48a) à (2.48c) na equação da onda (2.46), obtem-se que

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) e^{-i\omega t} = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 (-\phi) e^{-i\omega t} \quad (2.49)$$

Fazendo $k = \frac{\omega}{c}$, podemos reescrever a equação acima como

$$\nabla^2 \phi + k^2 \phi = 0, \quad (2.50)$$

sendo k o número de ondas.

Esta é a **equação de Helmholtz** para propagação de ondas, também conhecida como equação de onda harmônica no tempo para acústica, que descreve os fenômenos estacionários válidas para domínios bi e tridimensionais.

CAPÍTULO III

EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO

3.1. Relações Básicas

Para o desenvolvimento da Equação Integral de Contorno, será considerado um corpo bidimensional B mergulhado em um domínio infinito, Ω . O corpo B será um gerador (estrutura vibrante) para o problema da radiação, ou um obstáculo rígido passivo para o problema da dissipação. O contorno (Γ) do corpo B é dividido em Γ_1 e Γ_2 , onde Γ_1 refere-se à parte do contorno onde o potencial de velocidade de valor complexo (ϕ) é conhecido, e, Γ_2 à parte onde a derivada do potencial é conhecida (fig. 3.1).

Considerando a equação de onda acústica linearizada, para o caso bidimensional, harmônico no tempo, tem-se a equação de Helmholtz,

$$\nabla^2 \phi + k^2 \phi = 0, \quad (3.1)$$

em $\Gamma \cup \Omega$, onde $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, com as seguintes condições de contorno [Ciskowski, 1991]:

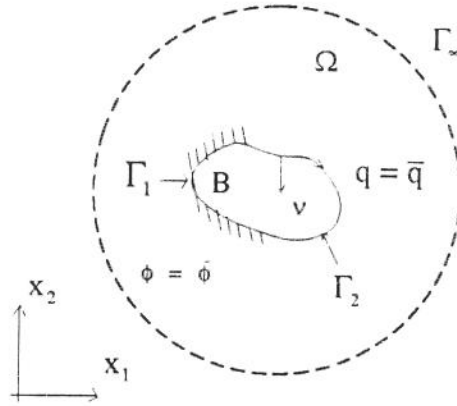


fig. 3.1 - definição geométrica para problema acústico externo

$$\phi = \bar{\phi}, \text{ em } \Gamma_1, \quad (\text{condição essencial, ou condição de Dirichlet}) \quad (3.2a)$$

$$q = \frac{\partial \phi}{\partial \nu} = \bar{q}, \text{ em } \Gamma_2, \quad (\text{condição natural ou condição de Neumann}) \quad (3.2b)$$

e

$$\frac{\partial \phi}{\partial \nu} = ik\phi, \text{ em } \Gamma_\infty, \quad (\text{condição de radiação de Sommerfeld}) \quad (3.2c)$$

onde, k é o número de ondas, ω/c , sendo c a velocidade (de fase) do som, e ω , a frequência angular; ν é o vetor unitário da normal de Γ diretamente através de B .

Aplicando o método dos resíduos ponderados, pela introdução de uma função ponderadora u^* , transforma-se a equação diferencial (3.1) em equação integral

$$\int_{\Omega} u^* (\nabla^2 \phi + k^2 \phi) d\Omega = 0. \quad (3.3)$$

Através da identidade vetorial [Kinsler, 1982],

$$u^* \nabla^2 \phi = \nabla(u^* \nabla \phi) - \nabla u^* \nabla \phi, \quad (3.4)$$

a eq. (3.3) pode ser reescrita como

$$\int_{\Omega} (u^* \nabla^2 \phi + u^* k^2 \phi) \, d\Omega = \int_{\Omega} (\nabla(u^* \nabla \phi) - \nabla u^* \nabla \phi + k^2 \phi u^*) \, d\Omega = 0, \quad (3.5)$$

ou seja,

$$\int_{\Omega} (\nabla(u^* \nabla \phi) - \nabla u^* \nabla \phi + k^2 \phi u^*) \, d\Omega = 0. \quad (3.6)$$

Aplicando o teorema do divergente no primeiro termo da eq. (3.6), a integral de domínio sobre Ω pode ser relacionada com a integral de contorno sobre Γ para as duas funções ϕ e u^* , e a eq. (3.6) é reescrita como

$$\int_{\Gamma} u^* \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \, d\Gamma + \int_{\Omega} (-\nabla u^* \cdot \nabla \phi + k^2 \phi u^*) \, d\Omega = 0. \quad (3.7)$$

Aplicando a seguinte identidade vetorial

$$\nabla \phi \cdot \nabla u^* = \nabla(\phi \cdot \nabla u^*) - \nabla^2 u^* \cdot \phi \quad (3.8)$$

na eq. (3.7), tem-se que

$$\int_{\Gamma} u^* \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \, d\Gamma + \int_{\Omega} (-\nabla(\phi \cdot \nabla u^*) + \nabla^2 u^* \cdot \phi + k^2 \phi u^*) \, d\Omega = 0, \quad (3.9)$$

ou seja,

$$\int_{\Gamma} u^* \frac{\partial \phi}{\partial \nu} d\Gamma + \int_{\Omega} (-\nabla(\phi \nabla u^*) + \phi \nabla^2 u^* + u^* k^2 \phi) d\Omega = 0. \quad (3.10)$$

Aplicando novamente o teorema do divergente, no segundo termo da eq. (3.10), tem-se que

$$\int_{\Gamma} u^* \frac{\partial \phi}{\partial \nu} d\Gamma + \int_{\Gamma} -\phi \frac{\partial u^*}{\partial \nu} d\Gamma + \int_{\Omega} (\nabla^2 u^* \phi + k^2 \phi u^*) d\Omega = 0, \quad (3.11)$$

ou seja,

$$\int_{\Omega} \phi (\nabla^2 u^* + k^2 u^*) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(\phi \frac{\partial u^*}{\partial \nu} - u^* \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right) d\Gamma. \quad (3.12)$$

Esta equação é o ponto de partida para a equação integral de contorno.

3.2. Solução Fundamental

O lado direito da eq. (3.12) envolve apenas integrais de funções ao longo do contorno. No entanto, para reduzir o problema para formulação integral de contorno é necessário, ainda, selecionar a função ponderadora u^* para equação de Helmholtz, que satisfaça a equação governante no domínio, e represente a solução para o potencial concentrado no ponto X_c , tal que

$$\nabla^2 u^* + K^2 u^* + \Delta(X_c) = 0, \quad (3.13)$$

onde $\Delta(X_c)$ representa a função Delta de Dirac, termo não homogêneo e sem qualquer condição de contorno definido como uma função que vai para o infinito no ponto $X = X_c$ e

igual à zero em qualquer outro ponto. A integral de $\Delta(X_c)$ sobre o domínio, no entanto, é igual à 1, ou seja

$$\Delta(X_c) = \delta(X - X_c) = \begin{cases} 0 & \text{se } X \neq X_c \\ \infty & \text{se } X = X_c \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(X) \delta(X - X_c) dX = F(X_c)$$
(3.14)

onde X_c é o ponto de colocação.

A função ponderadora u^* utilizada, será chamada, então, de solução fundamental.

Devido à propriedade da função Delta de Dirac, a integral da mesma multiplicada por qualquer outra função é igual o valor da função qualquer no ponto, ou seja

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u^* + k^2 u^*) \phi \, d\Omega = \int_{\Omega} (-\Delta(X_c)) \phi \, d\Omega = -\phi(X_c), \quad (3.15)$$

onde $\phi(X_c)$ representa o valor da função desconhecida ϕ no ponto em consideração.

Considerando $P = X_c$, das eqs. (3.12) e (3.15), tem-se que

$$\phi(P) = \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi(Q)}{\partial \nu(Q)} u^*(Q, P) \, d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma} \phi(Q) \frac{\partial u^*(Q, P)}{\partial \nu(Q)} \, d\Gamma(Q). \quad (3.16)$$

A equação acima mostra que é possível solucionar a equação diferencial (3.3) em qualquer ponto $X_c = P$ interior ao domínio, utilizando apenas integrais ao longo do contorno.

Para isto, basta conhecer as funções ϕ e $\frac{\partial \phi}{\partial \nu}$ no contorno, pois u^* e $\frac{\partial u^*}{\partial \nu}$ já são conhecidas.

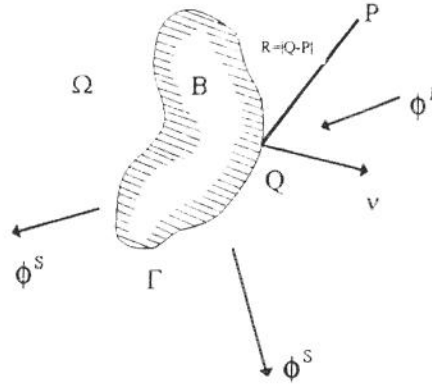


figura 3.2 - Definição de contorno em meio acústico bidimensional

De um modo geral, no entanto ϕ é conhecido apenas em uma parte do contorno (Γ_1) e q em outra parte (Γ_2). Então, para resolver a equação acima, é necessário discretizar o contorno, dividindo-o em elementos.

Neste trabalho, serão utilizados os métodos de discretização por elementos constantes, lineares, quadráticos e cúbicos.

A solução fundamental u^* para equação de Helmholtz precisa satisfazer a eq. (3.13). Ela é apresentada por [Brebbia, 1980], como

$$u^* = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kR), \quad (3.17)$$

e, sua derivada por

$$q^* = \frac{\partial u^*}{\partial v} = -\frac{i k}{4} H_1^{(1)}(kR) \frac{\partial R}{\partial v}, \quad (3.18)$$

onde R é a distância entre o ponto Q no contorno e o ponto de aplicação P no domínio Ω (fig. 3.2); i é a unidade imaginária do número complexo; $H_0^{(1)}$ é a função de Hankel de primeira

espécie e de ordem zero, e $H_1^{(1)}$ é a função de Hankel de primeira espécie e de primeira ordem. As funções de Hankel são apresentadas no apêndice A.

3.3. Equação Integral de Contorno

No item 3.2., foi desenvolvida a eq. (3.16), válida para qualquer ponto P pertencente ao domínio Ω . No Método de Elementos de Contorno, devido às razões computacionais, esta equação é aplicada no contorno [Brebbia, 1989]. Assim, é necessário analisar o que acontece com a equação quando o ponto P está em Γ . Acontece que, quando $P = Q$ (fig.3.2), o valor de R será zero, causando um problema de singularidade nas eqs. (3.17) e (3.18), como é apresentado no apêndice A. Uma maneira simples para evitar isto, é considerar o ponto P no contorno, mas com o domínio ao seu redor sendo aumentado por um semi-círculo de raio ϵ

(fig. 3.3). O ponto P é considerado sendo o centro deste círculo, sendo que no limite, o raio ϵ tende à zero. Assim, o ponto P torna-se um ponto de contorno e a expressão resultante será uma particularização da eq. (3.16) para um ponto pertencente ao contorno Γ . Como este processo limite depende apenas da ordem de singularidade do potencial de velocidade ϕ , a qual é a mesma para os operadores de Helmholtz e Laplace [Seybert et alli, 1985], é realizado um estudo das integrais de contorno da eq. (3.16) utilizando a solução fundamental para a equação de Laplace no domínio Ω , ou seja, $\nabla^2 \phi = 0$. Considera-se para isto, apenas superfícies lisas (smooth boundaries); os casos envolvendo cantos e ângulos serão discutidos no item 4.2.2.2. Esta solução fundamental é dada por [Ciskowski, 1991]

$$u_L^* = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{R}. \quad (3.19)$$

Cada integral de contorno na eq. (3.16) é decomposta em duas partes, sendo uma integral ao longo de $\Gamma - \Gamma_\epsilon$ e outra integral ao longo de Γ_ϵ . A primeira integral da eq. (3.16) é facilmente manuseada, pois apresenta uma singularidade fraca. Assim, para integrais em torno de Γ_ϵ , tem-se que

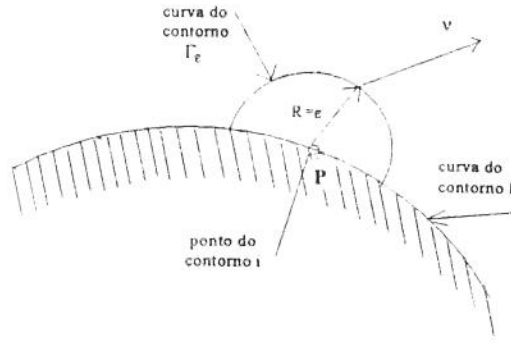


Figura 3.3 - Semi-círculo ao redor do ponto P no contorno Γ

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} u^* d\Gamma \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \left(\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\varepsilon} \right) d\Gamma \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \frac{\pi \varepsilon^2}{2\pi} \ln \frac{1}{\varepsilon} \right\} = 0, \quad (3.20)$$

isto significa que a integral analisada é contínua para a eq. (3.16) no contorno. No entanto, a segunda integral da eq. (3.16) possui um comportamento diferente:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} \phi \frac{\partial u^*}{\partial \nu} d\Gamma \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ - \int_{\Gamma_\varepsilon} \phi \frac{1}{2\pi \varepsilon} d\Gamma \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ - \phi \frac{\pi \varepsilon}{2\pi \varepsilon} \right\} = -\frac{1}{2} \phi(P). \quad (3.21)$$

Assim, quando o ponto P está no contorno, aplica-se as eqs. (3.20) e (3.21) na eq. (3.16), obtendo-se a seguinte expressão:

$$\frac{1}{2} \phi(P) = \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} u^* - \int_{\Gamma} \phi \frac{\partial u^*}{\partial \nu} d\Gamma. \quad (3.22)$$

Esta equação é conhecida como Equação Integral de Contorno, e é a base para o Método dos Elementos de Contorno. Esta equação pode ainda ser generalizada para

$$c(P) \phi(P) = \int_{\Gamma(Q)} \left(-\phi(Q) \frac{\partial u^*(P, Q)}{\partial \nu} + u^*(P, Q) \frac{\partial \phi(Q)}{\partial \nu} \right) d\Gamma(Q), \quad (3.23)$$

onde o termo livre $c(P)$ depende da geometria do contorno, e é determinado pela posição do ponto P . Se o ponto P pertencer ao campo fora do corpo, seu valor será 0.; .5, se o ponto pertencer ao contorno, e 1.0, se pertencer ao interior do corpo [Ciskowski, 1991].

A eq. (3.23) representa o fenômeno da radiação acústica. O problema da dispersão, é analisado adicionando-se simplesmente uma onda incidente, ou seja [Yoon, 1990]

$$c(P) \phi(P) = \int_{\Gamma(Q)} \left(-\phi(Q) \frac{\partial u^*(P, Q)}{\partial \nu} + u^*(P, Q) \frac{\partial \phi(Q)}{\partial \nu} \right) d\Gamma(Q) + \phi^I. \quad (3.24)$$

3.4. Cálculo de $\frac{\partial \phi^S}{\partial \nu}$

A onda plana incidente ϕ^I , presente na eq. (3.24), é dada por

$$\phi^I(P) = \phi^I(X) \exp(ikX), \quad (3.25)$$

sendo a amplitude $\phi^I(X)$ uma amplitude unitária, ou seja, $\phi^I(X) = 1$.

Para o caso da dispersão da onda incidente na superfície do corpo rígido, assume-se que a velocidade do campo total seja zero, ou seja, assume-se que

$$\phi^S + \phi^I = 0; \quad (3.26a)$$

assim,

$$\frac{\partial \phi^s}{\partial v} = -\frac{\partial \phi^l}{\partial v}, \quad (3.26b)$$

ou seja,

$$\frac{\partial \phi^s}{\partial v} = v \cdot \nabla \phi^l = ik \phi^l \cdot v, \quad (3.27)$$

como a condição de contorno. O potencial de velocidade ϕ^s satisfaz a condição de radiação de Sommerfeld.

É interessante notar que a eq. (3.24) fornece o valor exato do potencial de velocidade radiado ou dissipado. A formulação do Método dos Elementos de Contorno para calcular o valor numérico dos potenciais de velocidade será visto no próximo capítulo.

CAPÍTULO IV

MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ

No capítulo passado, a equação diferencial de onda acústica (Eq. de Helmholtz) foi transformada em uma equação integral de contorno (EIC). Neste capítulo, é dada a seqüência para o método dos elementos de contorno (MEC), discretizando esta nova equação através de elementos constantes, lineares, quadráticos e cúbicos. Será mostrado aqui também, as principais etapas utilizadas na implementação numérica de cada tipo de discretização. Após calcular o potencial de velocidade no contorno, será solucionado o problema em qualquer ponto do domínio. Finalmente, o problema da não unicidade será discutido e o método CHIEF implementado para tentar sanar este problema.

4.1. Discretização da Equação Integral de Contorno

No meio acústico bidimensional, o contorno é discretizado em elementos isoparamétricos para chegar ao sistema de equações através do qual os valores de contorno podem ser encontrados. Os pontos onde os valores desconhecidos são considerados são

chamados nós. Em seguida, é feita uma representação numérica da eq. (3.16) para o corpo de forma arbitrária.

Considerando a equação integral de contorno, eq. (3.22),

$$\frac{1}{2}\phi(P) + \int_{\Gamma} \phi \frac{\partial u^*}{\partial \nu} d\Gamma = \int_{\Gamma} u^* \frac{\partial \phi}{\partial \nu} d\Gamma + \phi^I(P), \quad (4.1)$$

discretiza-se o contorno em N elementos para um ponto dado P antes de aplicar qualquer condição de contorno, chegando à seguinte equação:

$$\frac{1}{2}\phi(P) + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \phi(Q) \frac{\partial u^*(P, Q)}{\partial \nu} d\Gamma(Q) = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \frac{\partial \phi(Q)}{\partial \nu} u^*(P, Q) d\Gamma(Q) + \phi^I(P). \quad (4.2)$$

Para a implementação por elementos constantes, assume-se uma distribuição constante das variáveis u^* e $\frac{\partial u^*}{\partial \nu}$ ao longo dos elementos em que o contorno foi discretizado; assim, pode-se escrever:

$$\frac{1}{2}\phi(P) + \sum_{j=1}^N \phi_j \int_{\Gamma_j} \frac{\partial u^*(P, Q)}{\partial \nu} d\Gamma(Q) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial \phi_j}{\partial \nu} \int_{\Gamma_j} u^*(P, Q) d\Gamma(Q) + \phi^I(P). \quad (4.3)$$

As integrais $\int_{\Gamma_j} \frac{\partial u^*}{\partial \nu} d\Gamma$ e $\int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma$ são chamados de coeficientes de influência, pois relacionam a influência da solução no ponto P_j , quando a solução fundamental é integrada sobre o elemento Q_j .

Denominando as integrais

$$G_{ij} = \int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma, \quad (4.4)$$

e

$$\hat{H}_{ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial u^*}{\partial \nu} d\Gamma, \quad (4.5)$$

onde i representa o ponto de colocação, e j o elemento em consideração a ser integrado, a eq. (4.23) pode ser reescrita da seguinte maneira

$$\frac{1}{2}\phi(P) + \sum_{j=1}^N \hat{H}_{ij} \phi_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} + \phi^I(P). \quad (4.6)$$

Denominando

$$H_{ij} = \begin{cases} \hat{H}_{ij}, & \text{se } i \neq j \\ \hat{H}_{ij} + \frac{1}{2}, & \text{se } i = j \end{cases} \quad (4.7)$$

chega-se à seguinte equação:

$$\sum_{j=1}^N H_{ij} \phi_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j + \phi^I(P). \quad (4.8)$$

No caso mais geral, as variáveis u^* e $\frac{\partial u^*}{\partial \nu}$ são aproximadas por funções de interpolação da forma

$$\phi(Q) = \sum_{m=1}^E \phi_m N_m(Q). \quad (4.9)$$

onde E representa o grau da função interpoladora. Assume-se que a posição do nó i também varia de 1 a N ; assim, a solução fundamental é aplicada em cada nó sucessivamente obtendo

um sistema de equações expresso na forma matricial, para cada ponto do contorno, como segue:

$$\mathbf{H} \boldsymbol{\phi} = \mathbf{G} \mathbf{q}, \quad (4.10)$$

onde $\mathbf{H}$ e $\mathbf{G}$ são duas matrizes $N \times N$, e $\boldsymbol{\phi}$ e $\mathbf{q}$ são vetores de comprimento N .

Colocando-se todos os elementos das matrizes $\mathbf{H}$ e $\mathbf{G}$ correspondentes às condições de contorno desconhecidas do lado esquerdo, e aqueles correspondentes às condições de contorno conhecidas do lado direito, e multiplicando as matrizes do lado direito, arma-se o seguinte sistema de equações:

$$\mathbf{A} \mathbf{y} = \mathbf{b}, \quad (4.11)$$

onde $\mathbf{y}$ é o vetor dos valores de contorno desconhecidos de $\boldsymbol{\phi}$ e $\mathbf{q}$. O vetor $\mathbf{b}$ é encontrado multiplicando as colunas correspondentes de $\mathbf{H}$ ou $\mathbf{G}$ pelos valores conhecidos de $\boldsymbol{\phi}$ ou $\mathbf{q}$. É interessante apontar que as variáveis agora podem ser uma mistura dos potenciais e suas derivadas, melhor que apenas do potencial como é nos elementos finitos.

A eq. (4.11) pode ser resolvida e os valores de contorno são encontradas então. Desde que isto é feito é possível calcular qualquer valor interno de $\boldsymbol{\phi}$ ou de suas derivadas, como será mostrado na seção 4.3.

Para as outras funções de interpolação, a dedução detalhada será feita mais adiante.

4.2. Elementos de Contorno

Este trabalho considera o contorno discretizado por elementos isoparamétricos, que são inteiramente definidos pelas coordenadas de seus pontos nodais; as funções de interpolação utilizadas para aproximar valores do potencial de velocidade e de sua derivada serão

considerados constante, linear, quadrática e cúbica, definidas pela posição dos pontos nodais no elemento.

4.2.1. Elementos Constantes

Dando sequência ao trabalho, será realizado, a seguir, uma implementação numérica para os elementos constantes, onde serão demonstradas a equação que define a normal do elemento, a evolução das integrais que definem os elementos singulares e não singulares das matrizes **G** e **H** e, por último, os resultados obtidos.

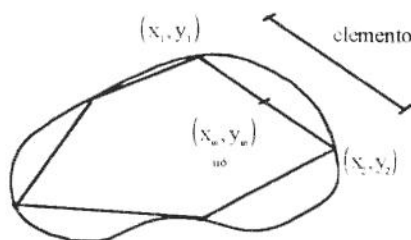


Figura 4.1. Definição de elemento constante

Os valores de ϕ e $\frac{\partial \phi}{\partial v}$ são considerados constantes sobre cada elemento e são iguais aos valores no ponto nodal, cuja posição é convencionada sendo no meio do elemento (fig. 4.1). Os pontos nas extremidades do elemento são usados apenas para definir a geometria do problema.

4.2.1.1. Cálculo da Normal

Quando o domínio é fechado, a numeração dos elementos é feita no sentido anti-horário e a normal é definida sendo externa ao contorno Γ . Neste trabalho, o domínio é aberto, e a numeração dos elementos será feita no sentido horário, definindo a normal sendo interna à superfície (fig. 4.2) [Ciskowski, 1991].

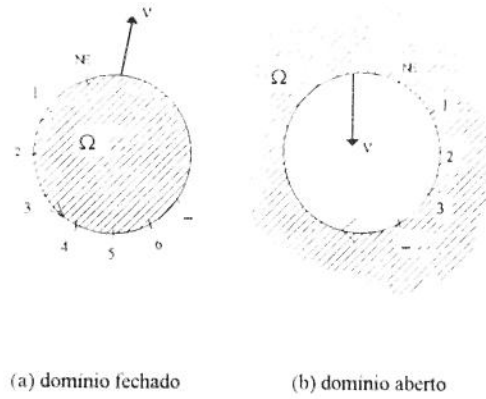


Figura 4.2 - Direção da normal

Para calcular a normal considera-se um vetor $\mathbf{v}_2 = \left(\frac{x_2 - x_1}{L}, \frac{y_2 - y_1}{L}, 0 \right)$, normalizado e unitário, construído através das coordenadas das extremidades do elemento, e outro $\mathbf{v}_1 = (0,0,1)$ ortogonal à $\mathbf{v}_2$, pode-se determinar o vetor normal ao elemento pelo produto vetorial entre $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ (fig. 4.3):

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{x_2 - x_1}{2} & \frac{y_2 - y_1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

ou seja,

$$\mathbf{v} = \left(\frac{y_2 - y_1}{L} i, -\frac{x_2 - x_1}{L} j, 0 k \right), \quad (4.13)$$

onde i, j , e k representam aqui os vetores unitários nas direções x, y e z , respectivamente. Na eq. (4.13), L é o comprimento do elemento dado por

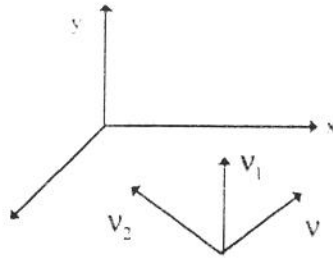


Figura 4.3 - Figura auxiliar com a convenção de produto vetorial para sistema cartesiano destrógiro

$$L = \left\{ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.14)$$

4.2.1.2 Evolução das Integrais

Integrais como $\hat{H}_{ij}$ e G_{ij} da eq. (4.6) podem ser calculadas usando fórmulas de integração numérica como, por exemplo, a regra da quadratura gaussiana [Brebbia, 1989] apresentada no apêndice D.

Para o caso de $i \neq j$, as integrais H_{ij} e G_{ij} são desenvolvidas, então, da seguinte maneira:

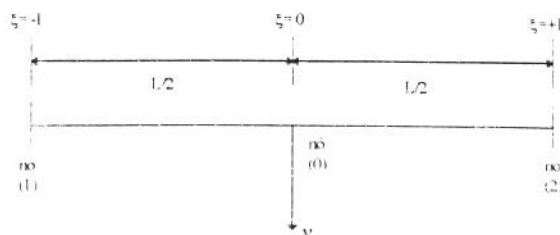


Figura 4.4 - Sistema de coordenadas do elemento constante

$$\int_{X_1}^{X_2} f(X) dX = \int_{-1}^{+1} f(\xi) \left| \frac{dX}{d\xi} \right| d\xi = \sum_{m=1}^{nptg} f(\xi_m) W_m + \text{erro} \quad (4.15)$$

onde nptg é o número de pontos de Gauss usados na integração; W_m e ξ_m são valores já definidos no apêndice D; e, $\left| \frac{dX}{d\xi} \right|$ é o jacobiano da transformação em função de X e ξ .

Para isto, é necessário trocar as coordenadas cartesianas para uma coordenada local ξ sobre o elemento, como mostra a fig. (4.4). Considerando $X_1 = (x_1, y_1)$ e $X_2 = (x_2, y_2)$ sendo as coordenadas de um elemento reto, realiza-se a transformação deste elemento em um elemento reto normalizado, variando de -1 à +1, ou seja:

$$f(X) = aX + b = \xi \quad (4.16)$$

que aplicando nos pontos X_1 e X_2 , forma as seguintes equações:

$$f(X_1) = aX_1 + b = -1, \quad (4.17a)$$

e

$$f(X_2) = aX_2 + b = +1, \quad (4.17b)$$

de onde as constantes a e b são retiradas facilmente, ou seja,

$$a = \frac{2}{X_2 - X_1} \quad (4.18a)$$

e

$$b = \frac{-(X_1 + X_2)}{X_2 - X_1}. \quad (4.18b)$$

Aplicando as equações (4.18a) e (4.18b) na eq. (4.16), obtém-se, então, a relação desejada:

$$X = \frac{X_2 - X_1}{2} \xi + \frac{X_2 + X_1}{2}, \quad (4.19)$$

e também

$$\frac{dX}{d\xi} = \frac{X_2 - X_1}{2} = \frac{L}{2}, \quad (4.20)$$

onde a equação acima representa o Jacobiano da Transformação presente na eq. (4.16), e sendo L o comprimento do elemento. A distância entre o ponto de colocação $X_c = (x_{1c}, x_{2c})$ e os pontos de integração numérica (em função da geometria e coordenadas de ξ) é dada por:

$$R(\xi) = \sqrt{(X - X_c)^2} \quad (4.21)$$

ou seja,

$$R(\xi) = \sqrt{\left[\frac{x_2 + x_1}{2} + \xi \frac{x_2 - x_1}{2} - x_c \right]^2 + \left[\frac{y_2 + y_1}{2} + \xi \frac{y_2 - y_1}{2} - y_c \right]^2} \quad (4.22)$$

4.2.1.3. Cálculo de $\frac{\partial u^*}{\partial v}$

Para calcular o termo $\frac{\partial u^*}{\partial v}$, é necessário determinar o valor de $\frac{\partial R}{\partial v}$, pois:

$$\frac{\partial u^*}{\partial v} = \frac{\partial u^*}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial v}, \quad (4.23)$$

e o valor de $\frac{\partial u^*}{\partial R}$ já é conhecido da eq. (3.18). Para isto, parte-se das equações (4.22) e (4.13),

de onde vem que

$$\nabla R = \left(\frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial y} \right) = \left(\frac{x - x_c}{R} \mathbf{i}, \frac{y - y_c}{R} \mathbf{j} \right) \quad (4.24)$$

e, conseqüentemente

$$\frac{\partial R}{\partial v} = \nabla R \cdot \mathbf{v} = \frac{(x - x_c, y - y_c) \cdot (y_2 - y_1, -(x_2 - x_1))}{R L} \quad (4.25)$$

Considerando a eq. (4.23), tem-se, então, que

$$\frac{\partial u^*}{\partial v} = -\frac{ik}{4} H_1^{(1)}(kR) \left[\frac{(x - x_c)(y_2 - y_1) + (y - y_c)(x_1 - x_2)}{RL} \right] \quad (4.26)$$

4.2.1.4. Cálculo dos Elementos não Singulares das Matrizes G e H

Sendo X_1 e X_2 as coordenadas das extremidades do elemento, tem-se das equações (3.17) e (4.4a) que:

$$G_{ij} = d\Gamma = \int_{X_1}^{X_2} \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kR) d\Gamma \quad (4.27)$$

Integrando a equação acima pela regra da quadratura gaussiana (desenvolvido no apêndice D), obtém-se

$$G_{ij} = \int_{-1}^{+1} \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kR(\xi)) \frac{L}{2} d\xi = \sum_{m=1}^{npq} \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kR(\xi_m)) W_m \frac{L}{2} \quad (4.28)$$

Expandindo a função de Hankel através das funções de Bessel (eq. (A1) do apêndice A), reescreve-se a equação acima como

$$G_{ij} = \sum_{m=1}^{npg} \left\{ \frac{i}{4} J_0(kR(\xi_m)) W_m \frac{L}{2} - \frac{1}{4} Y_0(kR(\xi_m)) W_m \frac{L}{2} \right\} \quad (4.29)$$

Para calcular os elementos da matriz **H**, parte-se das equações (3.18) e (4.5b), ou seja:

$$H_{ij} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u^*}{\partial v} d\Gamma = \int_{x_1}^{x_2} -\frac{ik}{4} H_0^{(1)}(kR) \frac{\partial R}{\partial v} d\Gamma. \quad (4.30)$$

Integrando a equação acima pela regra da quadratura, como para a matriz **G** obtém-se

$$H_{ij} = \int_{-1}^{+1} -\frac{ik}{4} H_1^{(1)}(kR(\xi)) \frac{\partial R}{\partial v} \frac{L}{2} d\xi = \sum_{m=1}^{npg} -\frac{ik}{4} H_1^{(1)}(kR(\xi_m)) \frac{\partial R}{\partial v} W_m \frac{L}{2} \quad (4.31)$$

Expandindo a função de Hankel através das funções de Bessel (eq. (A2) do apêndice A), reescreve-se a equação acima como

$$= \sum_{m=1}^{npg} \left\{ -\frac{ik}{4} J_1(kR(\xi_m)) \frac{\partial R}{\partial v} W_m \frac{L}{2} + \frac{k}{4} Y_1(kR(\xi_m)) \frac{\partial R}{\partial v} W_m \frac{L}{2} \right\} \quad (4.32)$$

4.2.1.5. Cálculo dos Elementos da Diagonal das Matrizes **G** e **H**

Para o caso onde *i* e *j* estão no mesmo elemento, ou seja, *i* = *j*, a presença no elemento de singularidade devido à solução fundamental quando *R* → 0 requer uma integração com fórmulas especiais para obter uma maior acuidade, como por exemplo, a integração pela regra da quadratura gaussiana logarítmica. No caso de elementos constantes, eles são calculados analiticamente.

Sabendo-se que a normal *v* e a coordenada do elemento são sempre perpendiculares uma com a outra, e que o raio de integração agora está sobre o elemento (fig. 4.4), tem-se que

$$\frac{\partial R}{\partial v} = \nabla R \cdot v = 0. \quad (4.33)$$

Assim, os termos $\hat{H}_n$ serão identicamente zeros, pois

$$\hat{H}_n = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial u^*}{\partial v} d\Gamma = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial u^*}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial v} d\Gamma \equiv 0, \quad (4.34)$$

e consequentemente, $H_n = \frac{1}{2}$.

Os elementos G_n requerem manuseio especial. A função de Hankel, presente na eq. (4.27), foi expandida em termos das funções de Bessel (eq. (A1) do apêndice A). Assim, a eq. (4.27) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} G_n &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kR) d\Gamma = \int_{x_1}^{x_2} \frac{i}{4} J_0(kR) d\Gamma + \int_{x_1}^{x_2} \frac{i}{4} i Y_0(kR) d\Gamma = \\ &= -\frac{1}{4} \int_{x_1}^{x_2} Y_0(kR) d\Gamma + \frac{i}{4} \int_{x_1}^{x_2} J_0(kR) d\Gamma. \end{aligned} \quad (4.35)$$

A segunda integral da eq. (4.35) pode ser resolvida numericamente, pois não há casos de singularidade presentes. A atenção se volta, então, para a primeira integral.

$$INT1 = -\frac{1}{4} \int_{x_1}^{x_2} Y_0(kR) d\Gamma. \quad (4.36)$$

Para integrar a expressão acima, deve-se primeiro trocar as coordenadas para as coordenadas normalizadas ξ sobre o elemento (figura 4.4), tal que:

$$R = \left| \xi \frac{L}{2} \right|, \quad (4.37)$$

e

$$d\Gamma = dR = d\xi \frac{L}{2}, \quad (4.38)$$

onde L é o comprimento do elemento.

Aplicando a eq. (4.37) na eq. (4.36), obtém-se a seguinte equação:

$$INT1 = -\frac{1}{4} \int_{x_1}^{x_2} Y_0(kR) d\Gamma = -\frac{1}{4} \int_{-1}^{+1} Y_0\left(k \left| \frac{\xi L}{2} \right| \right) \frac{L}{2} d\xi = -\frac{L}{4} \int_{-1}^{+1} Y_0\left(k \left| \frac{\xi L}{2} \right| \right) d\xi \quad (4.39)$$

Esta integral, calculada através das expansões da função de Bessel de segunda espécie e ordem zero ($Y_0(kR)$), e da eq. (4.32) acima, foram desenvolvidas no apêndice B.

4.2.1.6. Resultados

Na seção 4.2.1 foi desenvolvida a formulação do MEC para resolver problemas de radiação e dispersão de ondas acústicas bidimensionais em altas frequências, onde o contorno era discretizado em elementos constantes. Agora, será investigado, numericamente, o potencial radiado (ϕ) de um cilindro pulsante de raio unitário e comprimento infinitesimal, ou seja, uma membrana circular, mergulhada num domínio bidimensional, cuja condição de contorno será $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 1.0$ ao longo de todo seu contorno. Este problema será utilizado, também, para validar os demais tipos de implementação numérica que serão realizados neste capítulo.

A discretização do contorno foi feita em 8, 16, 64 e 256 elementos. Os resultados são comparados com a solução analítica e apresentados no gráfico da fig. (4.5), onde o eixo x representa a frequência normalizada pelo raio do cilindro, e y o módulo do potencial de velocidade. Para a integração numérica foram utilizados 10 pontos de Gauss (apêndice B).

Este número foi escolhido após uma investigação dos resultados utilizando-se um número variado de pontos de Gauss para o raio de integração.

A solução analítica para radiação de ondas é dada por Yoon [1989] por

$$\phi(P) = A_0 [J_0(kR) + i Y_0(kR)], \quad (4.40)$$

onde

$$A_0 = \frac{4}{k} \frac{U_a}{C_0^2} (J_1(ka) - i Y_1(ka)) , \quad (4.41)$$

sendo a amplitude U_a considerada unitária, e

$$C_0 = \frac{2 J_1(ka)}{\text{sen}(\gamma_0)}, \quad (4.42)$$

e

$$\gamma_0 = \arctg\left(-\frac{J_1(ka)}{Y_1(ka)}\right). \quad (4.43)$$

Observa-se no gráfico da fig. (4.5), o aparecimento de divergência em certos números de ondas. A solução dos problemas de valor de contorno para radiação acústica é única para todos os valores de k . Esta falta de unicidade apresentada no gráfico da fig. (4.5) é um problema puramente matemático [Schenk, 1968], e será estudado com mais detalhes no final deste capítulo. O gráfico da fig. (4.6) mostrado logo a seguir, representa o intervalo onde ocorre a primeira não unicidade do gráfico da fig. (4.5).

4.2.2. Elementos Lineares

Nesta seção será desenvolvido um trabalho análogo ao realizado para os elementos constantes. Inicialmente, considera-se para os elementos lineares, a variação de ϕ e $\frac{\partial \phi}{\partial v}$ sendo linear e os nós sendo as extremidades dos elementos (fig. 4.7).

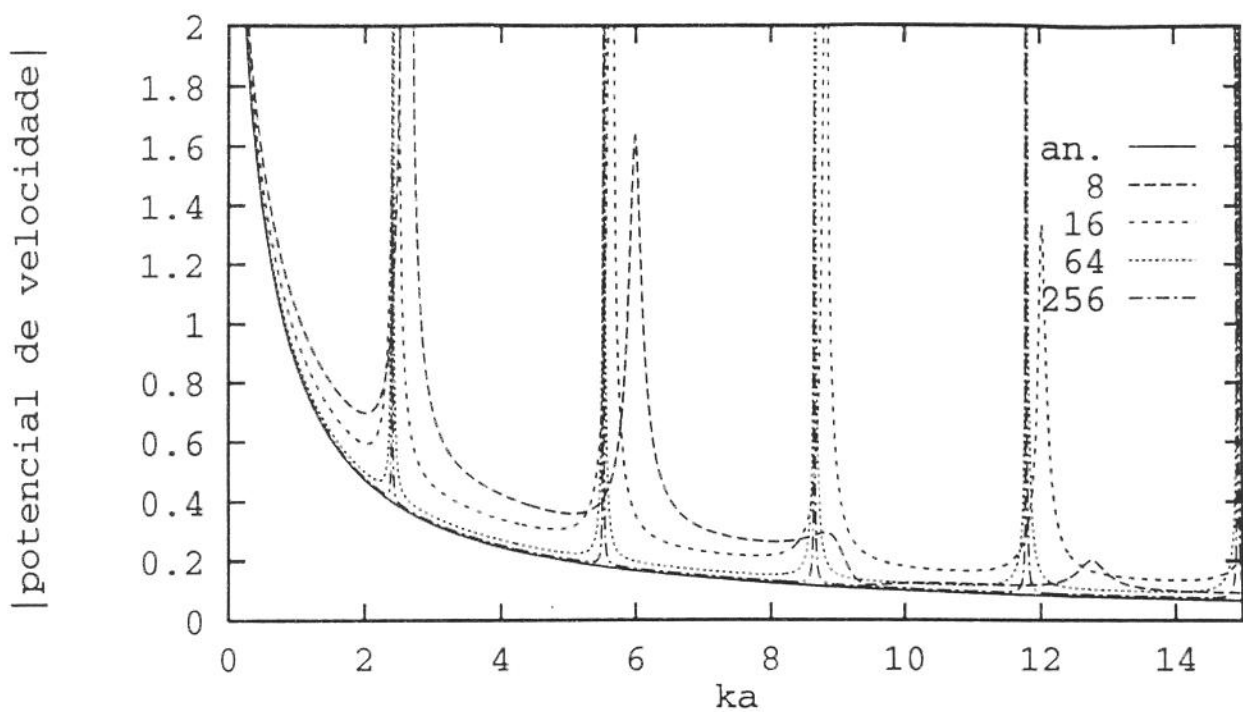


Figura 4.5 - Potencial de velocidade de radiação (analítico e numérico) de um cilindro pulsante de raio $a=1.0$, para 8, 16, 64 e 256 elementos (elementos constantes)

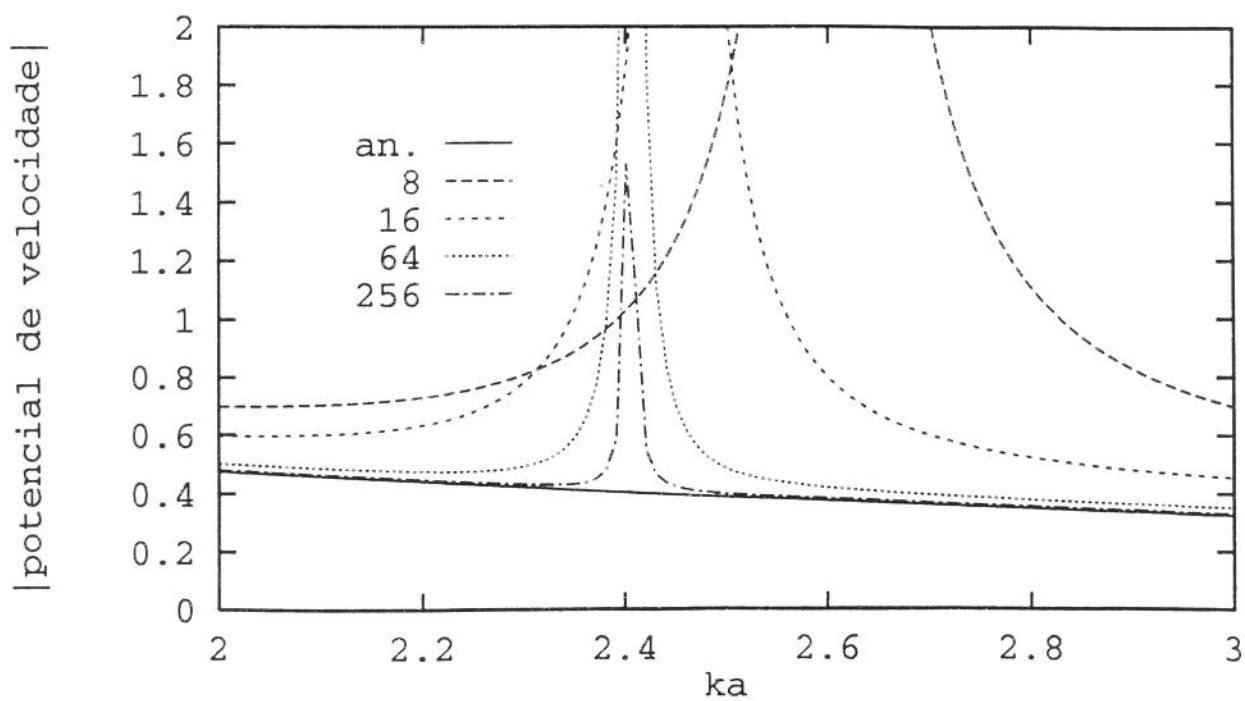


Figura 4.6 - Potencial de velocidade de radiação (analítico e numérico) de um cilindro pulsante de raio $a=1.0$, para 8, 16, 64 e 256 elementos (elementos constantes)

Como nos elementos constantes, o valor das variáveis para os elementos lineares serão os mesmos para todo o contorno.

A equação integral para os elementos lineares é dada por [Brebbia, 1989]

$$c_i \phi_i + \int_{\Gamma} \phi q^* d\Gamma = \int_{\Gamma} u^* q d\Gamma + \phi^i, \tag{4.44}$$

onde $c_i = \frac{\theta}{2\pi}$;sendo θ , o ângulo interno dos cantos em radianos, como mostra a fig. 4.9 [Ciskowski, 1991].

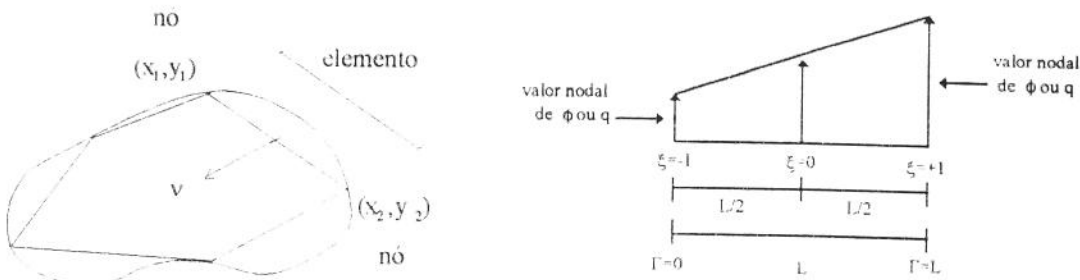


fig. 4.7 - Definição de Elemento Linear

4.2.2.1. Discretização da equação integral

Discretizando o contorno em N elementos, a eq. (4.44) pode ser reescrita como:

$$c_i \phi_i + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \phi q^* d\Gamma = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} u^* q d\Gamma + \phi^i \tag{4.45}$$

Os valores de ϕ e $\frac{\partial \phi}{\partial \nu}$, em qualquer ponto dos elementos, pode ser definido nos termos de seus valores nodais e de duas funções de interpolação linear, ψ_1 e ψ_2 , ou seja

$$\phi(\xi) = \psi_1 \phi_1 + \psi_2 \phi_2 = [\psi_1 \ \psi_2] \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} \quad (4.46)$$

e

$$\frac{\partial \phi(\xi)}{\partial \nu} = \psi_1 q_1 + \psi_2 q_2 = [\psi_1 \ \psi_2] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \quad (4.47)$$

onde as funções de interpolação podem ser dadas como (fig. (4.8))

$$\psi_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad (4.48a)$$

e

$$\psi_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (4.48b)$$

Aplicando a eq. (4.46) na integral do lado esquerdo da eq. (4.45), pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_j} \phi q^* d\Gamma &= \int_{\Gamma_j} [\psi_1 \phi_1 + \psi_2 \phi_2] q^* d\Gamma = \int_{\Gamma_j} \left\{ [\psi_1 \ \psi_2] \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} q^* \right\} d\Gamma = \\ &= \int_{\Gamma_j} [\psi_1 \ \psi_2] q^* d\Gamma \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = [h_1^j \ h_2^j] \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.49)$$

onde, para cada elemento j , tem-se dois termos nos nós:

$$h_i^j = \int_{\Gamma_j} \psi_i q^* d\Gamma \quad (4.50a)$$

e

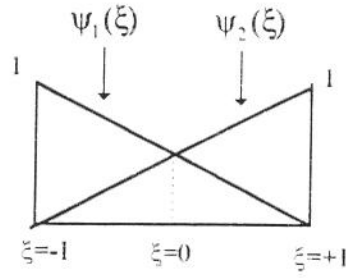


Fig. 4.8 - Funções de Interpolação Linear

$$h_2^j = \int_{\Gamma_j} \psi_2 q^* d\Gamma \quad (4.50b)$$

Analogamente, aplica-se a eq. (4.47) na integral do lado direito da eq. (4.55), obtendo-se

$$\int_{\Gamma_j} u^* q d\Gamma = \int_{\Gamma_j} [\psi_1 \ \psi_2] u^* d\Gamma \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = [g_1^j \ g_2^j] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \quad (4.51)$$

onde

$$g_1^j = \int_{\Gamma_j} \psi_1 u^* d\Gamma \quad (4.52a)$$

e

$$g_2^j = \int_{\Gamma_j} \psi_2 u^* d\Gamma \quad (4.52b)$$

4.2.2.2. Tratamento dos Cantos

Um domínio discretizado usando elementos de contorno, apresentará uma série de cantos, que requerem atenções especiais, pois as condições em ambos os lados podem não ser as mesmas [Brebbia, 1989].

Quando o contorno do domínio é discretizado em elementos lineares contínuos, o nó 2 do elemento j é o mesmo ponto que o nó 1 do elemento $j+1$ (fig. 4.9).

Desde que o potencial é único para qualquer ponto do contorno, ϕ_2 do elemento j e ϕ_1 do elemento $j+1$ são os mesmos, o que não é regra geral para a variável $\frac{\partial \phi}{\partial \nu}$, pois existem pontos no contorno onde a normal sofre uma descontinuidade e onde $\frac{\partial \phi}{\partial \nu}$ não tem valor único. Isto ocorre em pontos onde a normal do contorno não é única (pontos de cantos), podendo ocorrer também quando o valor de q prescrito ao longo de pequenos contornos apresenta descontinuidade em pontos particulares.

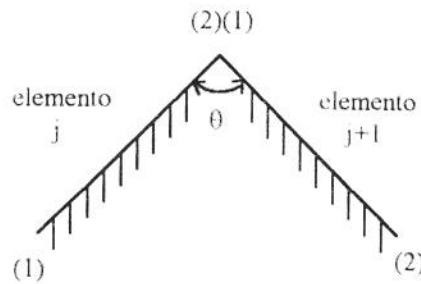


fig. 4.9 - Intersecção do Elemento

Embora os cantos com diferentes valores de $\frac{\partial \phi}{\partial \nu}$ em ambos os lados existam em muitos problemas práticos, os valores descontínuos de $\frac{\partial \phi}{\partial \nu}$ ao longo de contornos planos são raramente prescritos.

Para fazer uma avaliação da possibilidade do valor q no nó 2 do elemento poder ser diferente do valor q do nó 1 do próximo elemento, as variáveis q podem ser arranjadas em um *array* de $2n$.

Substituindo as equações (4.49) e (4.51), para todo elemento j na equação (4.45), obtém-se a seguinte equação para o nó i :

$$c_i u_i + [\hat{H}_{i1} \quad \hat{H}_{i2} \quad \dots \quad \hat{H}_{iN}] \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_N \end{Bmatrix} = [G_{i1} \quad G_{i2} \quad \dots \quad G_{i2N}] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{2N} \end{Bmatrix} \quad (4.53)$$

onde $\hat{H}_{ij}$ é igual ao termo h_1^j do elemento j mais o termo h_2^{j-1} do elemento $j-1$.

A equação (4.53) pode ser reescrita por simplicidade como:

$$c_i u_i + \sum_{j=1}^N \hat{H}_{ij} \phi_j = \sum_{j=1}^{2N} G_{ij} q_j \quad (4.54)$$

ou mais simplesmente

$$\sum_{j=1}^N H_{ij} \phi_j = \sum_{j=1}^{2N} G_{ij} q_j \quad (4.55)$$

onde

$$\begin{cases} H_{ij} = \hat{H}_{ij}, & \text{para } i \neq j \\ H_{ij} = \hat{H}_{ij} + c_i, & \text{para } i = j \end{cases} \quad (4.56)$$

Variando a posição do nó de 1 à N , a eq. (4.53) em consideração, produz um sistema de equações, a qual pode ser representada na forma matricial como:

$$\mathbf{H} \boldsymbol{\phi} = \mathbf{G} \mathbf{q} \quad (4.57)$$

onde $\mathbf{G}$ pode assumir até as dimensões $N \times 2N$.

Muitas situações podem acontecer em um nó do contorno, como por exemplo, quando:

• *O contorno é plano no nó*: neste caso, o valor de q antes e depois do nó são os mesmos, a menos que eles sejam prescritos diferentes; mas, neste caso, apenas uma variável será desconhecida, ou o potencial ou o valor q único.

• *O nó é um ponto de canto*: neste caso quatro diferentes casos são possíveis dependendo das condições de contorno:

- valores conhecidos : $\frac{d\phi}{dv}$ antes e depois do canto

valor desconhecido : ϕ (potencial)

- valores conhecidos : ϕ e $\frac{d\phi}{dv}$ antes do canto

valor desconhecido : $\frac{d\phi}{dv}$ depois do canto

- valores conhecidos : ϕ e $\frac{d\phi}{dv}$ depois do canto

valor desconhecido : $\frac{d\phi}{dv}$ antes do canto

- valor conhecido : ϕ

valores desconhecidos : $\frac{d\phi}{dv}$ antes e depois do canto

Existe apenas uma incógnita por nó para os três primeiros casos, e duas incógnitas para o quarto caso. Como existe apenas uma incógnita por nó, o sistema (4.57) pode ser reordenado de tal forma, que todas as incógnitas fiquem do lado esquerdo, e obteremos um sistema usual $N \times N$ de equações, isto é:

$$A y = b \quad (4.58)$$

onde $\mathbf{y}$ é o vetor das incógnitas $N \times 1$; $\mathbf{A}$ é a matriz de coeficientes $N \times N$, cujas colunas são colunas da matriz $\mathbf{H}$, e colunas da matriz $\mathbf{G}$, depois de uma mudança de sinal, ou soma de duas colunas consecutivas de $\mathbf{G}$ com sinal opostos, quando a incógnita é o valor único da variável q no nó correspondente; $\mathbf{b}$ é o vetor conhecido, computado para produzir as condições de contorno conhecidas, e os coeficientes correspondentes das matrizes $\mathbf{G}$ e $\mathbf{H}$.

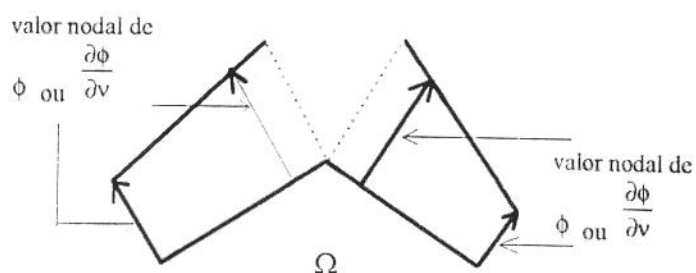


figura 4.10 - elemento descontínuo

Quando o número de incógnitas nos nós de canto é dois (quarto caso), uma equação extra é necessária para o nó. O problema pode ser resolvido usando a idéia de 'descontinuidade' do elemento [Massonet, 1965]. Os nós, que aqui são o final do elemento j , e início do elemento $j+1$, são trocados nos dois elementos lineares, os quais são pegos como canto e remarcados com dois nós distintos ao invés de serem apenas ligados nos cantos (figura 4.10).

Então, uma equação pode ser reescrita para cada nó.

O potencial e o fluxo são representados pelas funções lineares ao longo de cada elemento nos termos de seus valores nodais, mas eles são, em princípio, sempre descontínuos nos cantos.

4.2.2.3. Evolução das Integrais

A fórmula para integração numérica é a mesma utilizada para os elementos constantes na equação (4.15), ou seja, a regra da quadratura gaussiana.

A transformação de variáveis, necessária para a regra da quadratura gaussiana poder ser usada, é obtida através da seguinte transformação de variáveis:

$$\Gamma = a + b\xi \quad (4.59)$$

Observando a fig. (4.7), tem-se que:

$$\text{- para } \Gamma = 0 \Rightarrow \xi = -1$$

$$\text{- para } \Gamma = L \Rightarrow \xi = 1$$

Aplicando estas duas relações na equação (4.57), obtém-se que:

$$a = b = \frac{L}{2} \quad (4.60)$$

e também que,

$$\Gamma(\xi) = \frac{L}{2}(1 + \xi) \quad (4.61)$$

de onde vem que

$$\frac{d\Gamma}{d\xi} = \frac{L}{2} \quad (4.62)$$

que é o Jacobiano da transformação.

Agora, é necessária uma relação entre a variável X e Γ . Para isto, consideremos $X_1 = (x_1, y_1)$ e $X_2 = (x_2, y_2)$ segue-se a seguinte tabela (fig. 4.7):

X	Γ	ξ
X_1	0	-1
X_2	L	1

e a seguinte variação linear entre X e Γ :

$$X = a + b\Gamma, \quad (4.63)$$

de onde observa-se que

$$\text{- para } \Gamma = 0 \Rightarrow X_1 = a + 0,$$

e

$$\text{- para } \Gamma = 1 \Rightarrow X_2 = a + bL,$$

chegando aos valores de:

$$a = X_1 \quad (4.63a)$$

e

$$b = \frac{X_2 - X_1}{L} \quad (4.63b)$$

Aplicando estes valores de a e b na equação (4.59), obtém-se para cada coordenada, as relações desejadas:

$$x = \frac{x_2 + x_1}{2} + \frac{x_2 - x_1}{2} \xi \quad (4.64a)$$

Analogamente, chega-se em:

$$y = \frac{y_2 + y_1}{2} + \frac{y_2 - y_1}{2} \xi \quad (4.64b)$$

Como a geometria dos elementos lineares e a dos elementos constantes é a mesma, a normal pode, então, ser calculada da mesma forma que a dos elementos constantes. O cálculo da distância do ponto de colocação aos pontos de integração, e de $\frac{\partial u^*}{\partial v}$ seguem a idéia básica dos elementos constantes (equações (4.22) e (4.26)).

4.2.2.4. Cálculo dos elementos não singulares das matrizes G e H

Aplicando as eq. (4.49) e (4.51) na eq. (4.45), vem que

$$c_i \phi_i + \sum_{j=1}^N [h_1^{ij} \ h_2^{ij}] \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^N [g_1^{ij} \ g_2^{ij}] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \quad (4.65)$$

Em seguida é apresentado o desenvolvimento dos termos h_1^{ij} , h_2^{ij} , g_1^{ij} e g_2^{ij} .

• Desenvolvimento de h_1^{ij}

Desenvolvendo a eq. (4.50), tem-se que

$$\begin{aligned} h_1^{ij} &= \int_{\Gamma_j} \psi_i(X) q^*(i, X) \, d\Gamma(X) = \int_{\Gamma_j} \psi_i \frac{\partial u^*}{\partial \nu} \, d\Gamma(X) = \int_{\Gamma_j} \psi_i(x, y) \frac{\partial u^*(R)}{\partial \nu} \, d\Gamma = \\ &= \int_{\Gamma_j} \psi_i(X) \left[-\frac{ik}{4} H_1^{(1)}(kR) \frac{\partial R}{\partial n} \right] d\Gamma(X) = \int_{-1}^{+1} \psi_i(\xi) \left[-\frac{ik}{4} H_1(kR(\xi)) \right] \frac{\partial R(\xi)}{\partial \nu(\xi)} |JAC(R, \xi)| \, d\xi = \\ &= -i \frac{k}{4} \int_{-1}^{+1} \psi_i(\xi) [J_1(kR(\xi)) + iY_1(kR(\xi))] \frac{\partial R(\xi)}{\partial \nu(\xi)} |JAC(R, \xi)| \, d\xi \end{aligned} \quad (4.66)$$

que, integrando pela regra da quadratura gaussiana, torna-se:

$$h_1^{ij} = -\frac{ik}{4} \left\{ \sum_{m=1}^{nptg} J_1(kR(\xi_m)) \frac{\partial R}{\partial \nu} w_m \frac{L}{2} \psi_i(\xi_m) + \sum_{m=1}^{nptg} i Y_1(kR(\xi_m)) \frac{\partial R}{\partial \nu} w_m \frac{L}{2} \psi_i(\xi_m) \right\} \quad (4.67)$$

onde $\frac{\partial R}{\partial v}$ é dado pela eq.(4.25).

Aplicando a função de forma da eq. (4.48a) na equação acima, obtém-se o valor final de h_1^{ij} , como segue:

$$h_1^{ij} = -\frac{ik}{4} \left\{ \sum_{m=1}^{nptg} J_1(kR(\xi_m)) \frac{\partial R}{\partial v} W_m \frac{L}{2} \frac{(1-\xi_m)}{2} + \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^{nptg} i Y_1(kR(\xi_m)) \frac{\partial R}{\partial v} W_m \frac{L}{2} \frac{(1-\xi_m)}{2} \right\} \quad (4.68)$$

• Desenvolvimento de h_2^{ij}

Análogo ao desenvolvimento da eq. (4.50a), tem-se para a eq. (4.50b), que:

$$h_2^{ij} = -\frac{ik}{4} \left\{ \sum_{m=1}^{nptg} J_1(kR(\xi_m)) \frac{\partial R}{\partial v} W_m \frac{L}{2} \frac{(1+\xi_m)}{2} + \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^{nptg} i Y_1(kR(\xi_m)) \frac{\partial R}{\partial v} W_m \frac{L}{2} \frac{(1+\xi_m)}{2} \right\} \quad (4.69)$$

• Desenvolvimento de g_1^{ij}

Desenvolvendo a eq. (4.52a), tem-se que:

$$g_1^{ij} = \int_{\Gamma_j} \psi_1 u^*(i, X) d\Gamma(X) = \int_{\Gamma_j} \psi_1(X) \left[\frac{i}{4} H_0^{(1)}(kR) \right] d\Gamma(X) =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-1}^{+1} \psi_1(\xi) \left[\frac{i}{4} H_0^{(1)}(kR(\xi)) \right] |JAC(R, \xi)| d\xi = \\
&= \frac{i}{4} \int_{-1}^{+1} \psi_1(\xi) \left[J_0(kR(\xi)) + iY_0(kR(\xi)) \right] |JAC(R, \xi)| d\xi
\end{aligned} \tag{4.70}$$

que, integrando pela regra da quadratura gaussiana, torna-se:

$$g_1^{ij} = \frac{i}{4} \left\{ \sum_{m=1}^{nptg} J_0(kR(\xi_m)) W_m \frac{L}{2} \psi_1(\xi_m) + \sum_{m=1}^{nptg} i Y_0(kR(\xi_m)) W_m \frac{L}{2} \psi_1(\xi_m) \right\} \tag{4.71}$$

Aplicando a função de forma da eq. (4.48a) na equação acima, obtém-se o valor final de g_1^{ij} , como segue:

$$g_1^{ij} = \frac{i}{4} \left\{ \sum_{m=1}^{nptg} J_0(kR(\xi_m)) W_m \frac{L}{2} \frac{(1-\xi_m)}{2} + \sum_{m=1}^{nptg} i Y_0(kR(\xi_m)) W_m \frac{L}{2} \frac{(1-\xi_m)}{2} \right\} \tag{4.72}$$

• Desenvolvimento de g_2^{ij}

Análogo ao desenvolvimento da eq. (4.52a), tem-se para a eq. (4.52b) que:

$$g_2^{ij} = \frac{i}{4} \left\{ \sum_{m=1}^{nptg} J_0(kR(\xi_m)) W_m \frac{L}{2} \frac{(1+\xi_m)}{2} + \sum_{m=1}^{nptg} i Y_0(kR(\xi_m)) W_m \frac{L}{2} \frac{(1+\xi_m)}{2} \right\} \tag{4.73}$$

4.2.2.5. Desenvolvimento dos Elementos da Diagonal das Matrizes $\mathbf{H}$ e $\mathbf{G}$ (Elementos Singulares)

• Desenvolvimento de H_{ii}

Para os termos da diagonal de $\mathbf{H}$ serem desenvolvidos, seria necessário a determinação da constante c_i da eq. (4.44); neste trabalho, porém, eles serão calculados implicitamente, simplificando a formulação [Brebbia, 1989].

O procedimento é baseado no fato que as singularidades da solução fundamental dinâmica e estática do operador de Laplace, para R e k tendendo à zero são as mesmas [Dominguez, 1993]. Então os coeficientes independentes das equações dos elementos de contorno, c_i , são as mesmas na dinâmica e na estática.

As integrais que dão origem aos termos de $\mathbf{G}$ e $\mathbf{H}$ da eq. (4.57), dependem somente da geometria do contorno, das funções de interpolação e da solução fundamental (ou sua derivada), e não das condições de contorno específicos de determinado problema. Ou seja, $\mathbf{G}$ e $\mathbf{H}$ são os mesmos para quaisquer condições de contorno, assim sendo escolhe-se $\phi_i = 1.0$ e $\frac{\partial \phi_i}{\partial v} = 0$. Para o operador de Laplace, quando $k \rightarrow 0$, tem-se então que $\phi = \phi^{est}$; e assim,

$$\mathbf{H}^{est} \mathbf{I} = \mathbf{0} \quad (4.74)$$

ou ainda,

$$\sum_{j=1}^N H_{ij}^{est} = 0 \quad (4.75)$$

ou seja,

$$H_{ii}^{est} = - \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^N H_{ij}^{est} \quad (4.76)$$

Obtém-se então, o elementos diagonal H_{ii}^{est} , que por sua vez é composto pela contribuição do termo livre c_i e da integral singular propriamente dita

$$H_{ii}^{est} = c_i^{est} + \hat{H}_{ii}^{est} \quad (4.77)$$

ou seja,

$$c_i^{est} = H_{ii}^{est} - \hat{H}_{ii}^{est} \quad (4.78)$$

A singularidade aparece apenas no termo $\hat{H}_{ii}^{est}$, porém o termo livre c_i depende somente da geometria; assim, para o desenvolvimento assintótico da solução fundamental ($R \rightarrow 0$), tem-se que

$$c_i^{est} = c_i^{din} \quad (4.79)$$

Sabe-se também que

$$H_{ii}^{din} = c_i^{din} + \hat{H}_{ii}^{din} \quad (4.80)$$

assim, aplicando a eq. (4.76) na eq. (4.78), tem-se que

$$c_i^{est} = \left(- \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^N H_{ij}^{est} \right) - \hat{H}_{ii}^{est} \quad (4.81)$$

Através das equações (4.79) e (4.81), a eq. (4.80) pode ser reescrita como

$$H_{ii}^{din} = \left(- \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^N H_{ij}^{est} \right) + (\hat{H}_{ii}^{din} - \hat{H}_{ii}^{est}) \quad (4.82)$$

Desta forma, retira-se a singularidade dos termos da diagonal, pois o segundo termo da eq. (4.82) é não singular [Dominguez, 1993].

A condição apresentada pela eq. (4.82) é válida somente para domínios fechados. Quando os domínios são regiões abertas infinitas ou semi-infinitas, se o movimento do corpo

rigido estático é prescrito com um potencial unitário, a integral sobre o contorno externo Γ_∞ no infinito não será zero. Desde que a solução fundamental estática

$$u_{est}^* = -\frac{1}{2\pi R} \frac{\partial R}{\partial \nu} \quad (4.83)$$

é devido à uma fonte negativa unitária [Dominguez, 1993], tem-se, para $R \equiv \epsilon \rightarrow \infty$, que:

$$\int_{\Gamma_\infty} u_{est}^* d\Gamma = -1 \quad (4.84)$$

Os termos da diagonal da matriz estática para este caso

$$H_{ii}^{est} = c_i + \hat{H}_{ii}^{est} = 1 - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \hat{H}_{ij}^{est} \quad (4.85)$$

e

$$H_{ii}^{din} = 1 - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \hat{H}_{ij}^{est} + (\hat{H}_{ii}^{din} - \hat{H}_{ii}^{est}) \quad (4.86)$$

Então, a unidade deve ser adicionada nos termos da diagonal nestes casos.

Esta maneira de se calcular os termos H_{ii} implicitamente poupa o trabalho de se calcular o valor de c_i explicitamente, proporcionando uma forma de integrar sobre a singularidade de q^* .

• Desenvolvimento de G_{ij}

A seguir, serão apresentados o desenvolvimento dos termos g_1^{ii} e g_2^{ii} , para os elementos da diagonal de $\mathbf{G}$, presentes no lado direito da eq. (4.65); os casos de singularidade foram resolvidos analiticamente, e seus desenvolvimentos se encontram no apêndice B.

• Desenvolvimento de g_1^{ii}

Análogo ao desenvolvimento de g_1^{ij} (eq. 4.70) tem-se que

$$g_1^{ii} = \frac{i}{4} \int_{-1}^{+1} \psi_1(\xi) \left[J_0(kR(\xi)) + iY_1(kR(\xi)) \right] |JAC(R, \xi)| d\xi \quad (4.87)$$

O primeiro termo do lado direito da eq. (4.87) pode ser resolvido numericamente, por não apresentar casos de singularidades (como mostra o apêndice A); assim, utiliza-se o método da quadratura gaussiana para resolver a sua integração, idêntico ao processo realizado na eq. (4.71).

O segundo termo, porém, deve ser desenvolvido analiticamente, já que este apresenta casos de singularidades, como foi mostrado para elementos constantes.

O ponto de colocação, para a implementação dos elementos constantes, foi definido como ponto médio do elemento; para o caso dos elementos lineares, o ponto de colocação é considerado sendo o ponto x_1 . Então, para desenvolver a eq. (4.21), tem-se que

$$\begin{aligned} x_1(\xi) - x_c &= \frac{x_2 - x_1}{2} \xi + \frac{x_2 + x_1}{2} - x_1 = \left(\frac{x_2}{2} - \frac{x_1}{2} \right) \xi + \frac{x_2}{2} - \frac{x_1}{2} = \\ &= \frac{x_2 - x_1}{2} (1 + \xi) \end{aligned} \quad (4.88a)$$

$$\begin{aligned} y_1(\xi) - y_c &= \frac{y_2 - y_1}{2} \xi + \frac{y_2 + y_1}{2} - y_1 = \left(\frac{y_2}{2} - \frac{y_1}{2} \right) \xi + \frac{y_2}{2} - \frac{y_1}{2} = \\ &= \frac{y_2 - y_1}{2} (1 + \xi) \end{aligned} \quad (4.88b)$$

Aplicando as equações (4.88a) e (4.88b) na equação (4.21), vem que:

$$R(\xi) = \left\{ \left[\frac{x_2 - x_1}{2} (1 + \xi) \right]^2 + \left[\frac{y_2 - y_1}{2} (1 + \xi) \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1 + \xi}{2} \left\{ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{L}{2} (1 + \xi) \quad (4.89)$$

Substituindo a eq. (4.89) na eq. (4.87), tem-se que

$$\text{INT2} = \frac{i}{4} \int_{-1}^{+1} i Y_0(kR(\xi)) \frac{L}{2} \psi_1(\xi) d\xi = \frac{i}{4} \int_{-1}^{+1} i Y_0\left(\frac{kL}{2}(1 + \xi)\right) \frac{L}{2} \left(\frac{1 - \xi}{2}\right) d\xi =$$

$$= -\frac{L}{16} \int_{-1}^{+1} Y_0\left(\frac{kL}{2}(1 + \xi)\right) (1 - \xi) d\xi \quad (4.90)$$

A eq. (4.90) é desenvolvida analiticamente no apêndice B.

• Desenvolvimento de g_2^{ii}

Análogo ao desenvolvimento de g_2^{ii} , tem-se que

$$g_2^{\text{ii}} = \frac{i}{4} \int_{-1}^{+1} \psi_1(\xi) \left[J_0(kR(\xi)) + iY_1(kR(\xi)) \right] |JAC(R, \xi)| d\xi \quad (4.91)$$

onde o primeiro termo do lado direito da eq. (4.91) é resolvido numericamente pelo método da quadratura gaussiana (idem à g_1^{ii}), e o segundo termo

$$\text{INT3} = \frac{i}{4} \int_{-1}^{+1} i Y_0(kR(\xi)) \frac{L}{2} \psi_2(\xi) d\xi = \frac{i}{4} \int_{-1}^{+1} i Y_0\left(\frac{kL}{2}(1 + \xi)\right) \frac{L}{2} \left(\frac{1 + \xi}{2}\right) d\xi =$$

$$= -\frac{L}{16} \int_{-1}^{+1} Y_0\left(\frac{kL}{2}(1+\xi)\right) (1+\xi) d\xi \quad (4.92)$$

é resolvido analiticamente, sendo seu desenvolvimento apresentado no apêndice B.

4.2.2.6. Resultados

Basicamente, os resultados apresentados para os elementos lineares possuem as mesmas considerações já feitas para os elementos constantes.

A discretização do contorno foi feita em 8, 16, 64 e 256 elementos. Os resultados são comparados com a solução analítica e apresentados no gráfico da fig. (4.11), onde o eixo x representa a frequência normalizada pelo raio do cilindro, e y o módulo do potencial de velocidade. Para a integração numérica foram utilizados 10 pontos de Gauss, como nos elementos constantes. Este número foi escolhido após uma investigação dos resultados utilizando-se um número variado de pontos de Gauss para o raio de integração (apêndice B). O gráfico da fig. (4.12) mostrado logo a seguir, representa o intervalo onde ocorre a primeira não unicidade do gráfico da fig. (4.11).

4.2.3. Elementos Quadráticos

Nos problemas reais, geralmente as geometrias não são lineares. Neste caso, é mais conveniente realizar uma implementação usando elementos curvilíneos. Eles não apresentam nenhuma dificuldade especial, sendo necessário apenas a transformação das coordenadas cartesianas para as curvilíneas. Considerando o contorno da curva mostrado na figura (4.13), onde Γ é definido ao longo do contorno e R é o vetor posição, em função do sistema cartesiano do sistema (x,y) , temos as variáveis ϕ ou q , que podem ser escritas nos termos das funções de interpolação, os quais são funções das coordenadas normalizadas ξ , isto é:

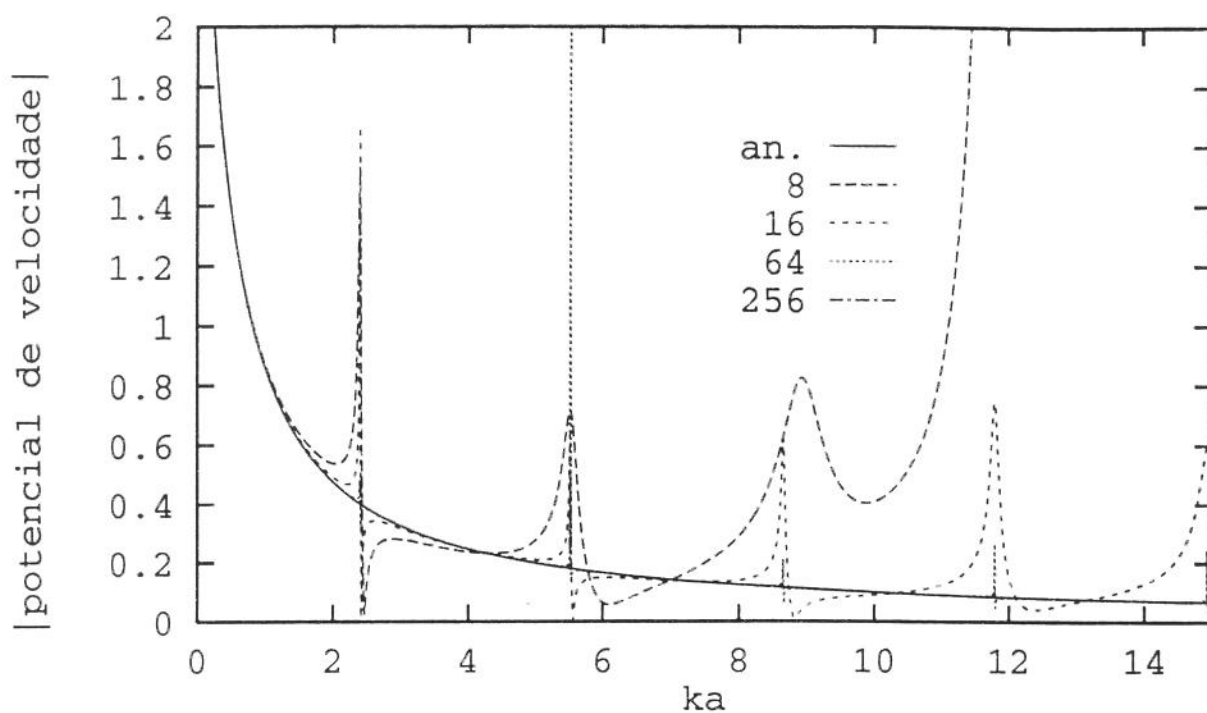


Figura 4.11 - Potencial de velocidade de radiação (analítico e numérico) de um cilindro pulsante de raio $a=1.0$, para 8, 16, 64 e 256 elementos (elementos lineares)

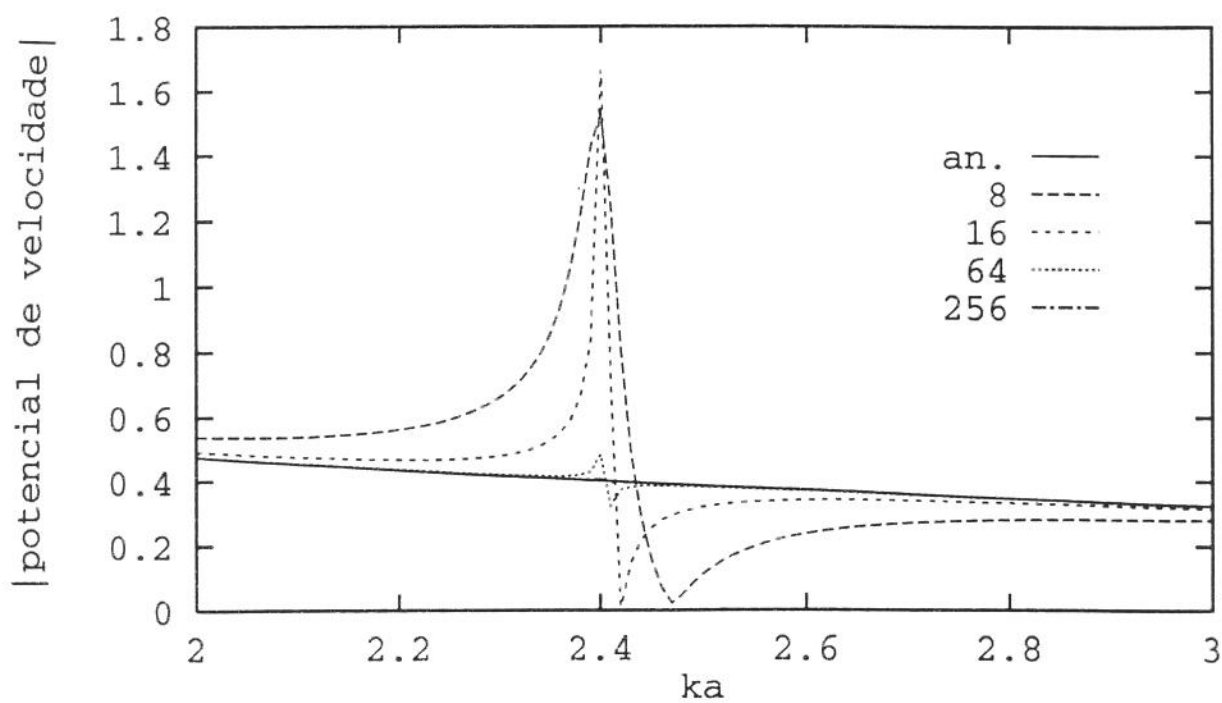


Figura 4.12 - Potencial de velocidade de radiação (analítico e numérico) de um cilindro pulsante de raio $a=1.0$, para 8, 16, 64 e 256 elementos (elementos lineares)

$$\phi(\xi) = \psi_1 \phi_1 + \psi_2 \phi_2 + \psi_3 \phi_3 = [\psi_1 \ \psi_2 \ \psi_3] \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} \quad (4.93)$$

$$q(\xi) = \psi_1 q_1 + \psi_2 q_2 + \psi_3 q_3 = [\psi_1 \ \psi_2 \ \psi_3] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} \quad (4.94)$$

onde as funções de interpolação podem ser dadas por [Brebbia, 1989]

$$\psi_1 = \frac{1}{2} \xi (\xi - 1) \quad (4.95a)$$

$$\psi_2 = (1 - \xi) (1 + \xi) \quad (4.95b)$$

$$\psi_3 = \frac{1}{2} \xi (1 + \xi) \quad (4.95c)$$

Estas funções são quadráticas em ξ e dão os valores nodais das variáveis ϕ ou q , quando especificadas para os nós, isto é, de acordo com a figura (4.14), tem-se:

nó	ξ	ψ_1	ψ_2	ψ_3
1	-1	1	0	0
2	0	0	1	0
3	1	0	0	1

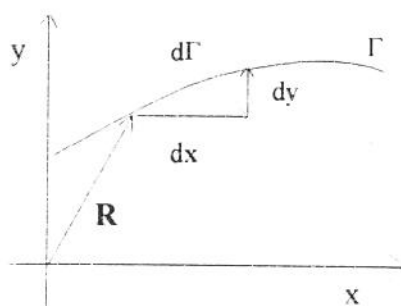


fig. 4.13. - Contorno curvilíneo

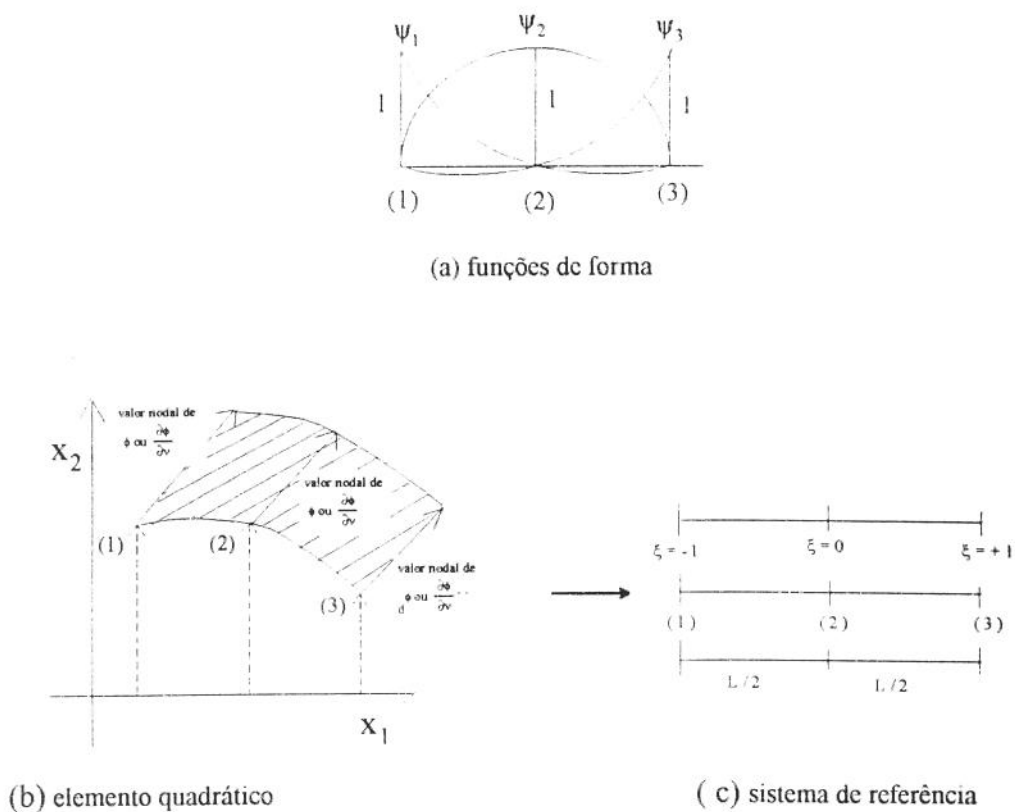


figura 4.14 -

- (a) funções de forma
- (b) elemento quadrático
- (c) sistema de referência

As integrais ao longo de qualquer elemento "j" são semelhantes aos elementos lineares, mas existem agora três variáveis nodais (figura 4.15).

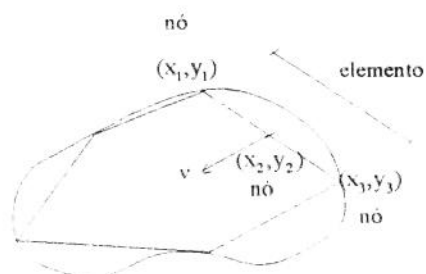


fig. 4.15 - Definição de elemento quadrático

4.2.3.1. - Evolução das Integrais

A equação integral para equação de Helmholtz é a mesma definida para os elementos lineares (eq. 4.44); discretizando-a em N elementos, obtem-se

$$c_i \phi_i + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \phi q^* d\Gamma = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} u^* q d\Gamma + \phi^i \quad (4.96)$$

Aplicando a eq. (4.93) na integral do lado esquerdo da eq. (4.96), tem-se que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_j} \phi q^* d\Gamma &= \int_{\Gamma_j} [\psi_1 \phi_1 + \psi_2 \phi_2 + \psi_3 \phi_3] q^* d\Gamma = \int_{\Gamma_j} \left\{ [\psi_1 \ \psi_2 \ \psi_3] \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} q^* \right\} d\Gamma = \\ &= \int_{\Gamma_j} [\psi_1 \ \psi_2 \ \psi_3] q^* d\Gamma \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} = [h_1^j \ h_2^j \ h_3^j] \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.97)$$

onde para cada elemento j, tem-se três termos nos nós:

$$h_1^j = \int_{\Gamma_j} \psi_1 q^* d\Gamma, \quad (4.98a)$$

$$h_2^j = \int_{\Gamma_j} \psi_2 q^* d\Gamma, \quad (4.98b)$$

e

$$h_3^j = \int_{\Gamma_j} \psi_3 q^* d\Gamma. \quad (4.98c)$$

Analogamente, aplicando a eq. (4.94) na integral do lado esquerdo da eq. (4.96), tem-se que

$$\int_{\Gamma_j} u^* q \, d\Gamma = \int_{\Gamma_j} [\psi_1 \, \psi_2 \, \psi_3] u^* \, d\Gamma \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = [g_1^j \, g_2^j \, g_3^j] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} \quad (4.99)$$

onde

$$g_1^j = \int_{\Gamma_j} \psi_1 u^* \, d\Gamma \quad (4.100a)$$

$$g_2^j = \int_{\Gamma_j} \psi_2 u^* \, d\Gamma \quad (4.100b)$$

$$g_3^j = \int_{\Gamma_j} \psi_3 u^* \, d\Gamma \quad (4.100c)$$

Variando a posição dos nós de 1 à N, os resultados das equações (4.98a) à (4.98c) e (4.100a) à (4.100bc) são reunidos em sistemas de matrizes G e H, respectivamente. A matriz G será uma matriz retangular (2N x 3N) pois, para cada nó pertencente à extremidade do elemento, pode haver dois valores de $\frac{\partial \phi}{\partial v}$, isto é, um antes e um depois do nó. A matriz H será uma matriz quadrada (2N x 2N). Feito isto, as matrizes G e H são reordenadas segundo as condições de contorno, resultando em

$$A X = F$$

onde X é um vetor (N x 1) das incógnitas, sendo N o número de nós; A é uma matriz (2Nx2N) cujas colunas são uma combinação linear das colunas de H ou G dependendo das condições de contorno ou das duas colunas consecutivas de G quando os valores desconhecidos possuem um valor único em ambos os lados dos nós de extremidade do elemento; e F é um vetor computado pela multiplicação das condições de contorno prescritas pelos termos da linha correspondente de G e H.

A evolução dos termos (4.98a) à (4.98c) e (4.100a) à (4.100c), requer o uso do Jacobiano da transformação, já que as funções ψ_i são expressas nos termos de ξ , mas as

integrals são funções de Γ . Para a curva da figura (4.13), a transformação é simples [Brebbia, 1989]

$$(d\Gamma)^2 = \left[\left(\frac{dx}{d\xi} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi} \right)^2 \right] d\xi^2 \quad (4.101)$$

que pode ser escrito como:

$$d\Gamma = \left\{ \left[\left(\frac{dx}{d\xi} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\} d\xi = |JAC| d\xi \quad (4.102)$$

onde $|JAC|$ é o Jacobiano.

Assim, pode-se escrever:

$$h_s^y = \int_{\Gamma_j} \psi_s(\xi) q^* d\Gamma = \int_{-1}^{+1} \psi_s(\xi) q^* |JAC| d\xi \quad s = 1, 2, \text{ e } 3 \quad (4.103a)$$

$$g_s^y = \int_{\Gamma_j} \psi_s(\xi) u^* d\Gamma = \int_{-1}^{+1} \psi_s(\xi) u^* |JAC| d\xi \quad s = 1, 2 \text{ e } 3 \quad (4.103b)$$

Geralmente, fórmulas do tipo das (4.103a) e (4.103b) são bastante difíceis de se integrar analiticamente, e as integrações numéricas são usadas em todos os casos, inclusive nos elementos com singularidade.

Para calcular o jacobiano, $|JAC|$, na eq. (4.102), é necessário uma variação das coordenadas x e y nos termos de ξ . Estas coordenadas dos nós referem ao sistema global. Isto pode ser feito definindo as formas geométricas do elemento da mesma forma que as variáveis ϕ e q são definidas, isto é, usando interpolação quadrática:

$$x = \psi_1 x_1 + \psi_2 x_2 + \psi_3 x_3 \quad (4.104a)$$

$$y = \psi_1 y_2 + \psi_2 y_2 + \psi_3 y_3 \quad (4.104b)$$

Isto é similar ao conceito dos elementos isoparamétricos (quando o número das funções de forma usados na interpolação são iguais ao número de funções de forma usadas para o campo de deslocamento), comumente usados nas análises dos elementos finitos.

Substituindo as equações (4.95a) à (4.95c) nas equações (4.104a) e (4.104b), pode-se escrever:

$$x(\xi) = \frac{1}{2} \xi^2 (x_1 - 2x_2 + x_3) + \frac{1}{2} \xi (x_3 - x_1) + x_2 \quad (4.105a)$$

$$y(\xi) = \frac{1}{2} \xi^2 (y_1 - 2y_2 + y_3) + \frac{1}{2} \xi (y_3 - y_1) + y_2 \quad (4.105b)$$

Assim, o Jacobiano pode ser obtido substituindo as equações (4.105a) e (4.105b) na eq. (4.102), resultando em

$$|JAC| = \left\{ \left[(x_1 - 2x_2 + x_3) \xi + \frac{1}{2}(x_3 - x_1) \right]^2 + \left[(y_1 - 2y_2 + y_3) \xi + \frac{1}{2}(y_3 - y_1) \right]^2 \right\} \quad (4.106)$$

e aplicando as equações (4.105a e (4.105b) na eq. (4.21), o raio de integração será dado, então, por

$$R(\xi) = \sqrt{(x(\xi) - x_c)^2 + (y(\xi) - y_c)^2} \quad (4.107)$$

Sabendo-se que a normal para os elementos quadráticos é dado por [Brebbia, 1989]:

$$v = \left(\frac{\partial JAC}{\partial y}, -\frac{\partial JAC}{\partial x} \right) \quad (4.108)$$

chega-se em

$$\frac{\partial R}{\partial \mathbf{v}} = \nabla R \cdot \mathbf{v} = \left(\frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial y} \right) \cdot \left(\frac{\partial JAC}{\partial y}, -\frac{\partial JAC}{\partial y} \right) \quad (4.109)$$

Assim, pode-se calcular o valor de q^* na eq. (103), como segue

$$q^* = \frac{\partial u^*}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial u^*}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial \mathbf{v}} \quad (4.110)$$

sendo que $\frac{\partial u^*}{\partial R}$ já é conhecido da eq. (3.18).

4.2.3.2. - Cálculo dos Elementos não Singulares das Matrizes G e H

• Desenvolvimento da Matriz H

O desenvolvimento dos termos h_s^{ij} ($s = 1, 2$ e 3) da eq. (4.103a), para $i \neq j$, segue normalmente pela aplicação das funções de forma e integração pela regra da quadratura gaussiana:

$$\begin{aligned} h_s^{ij} &= \int_{\Gamma_j} \frac{\partial u^*}{\partial \mathbf{v}} \psi_s(X) d\Gamma(X) = \int_{\Gamma_j} \psi_s(X) \left(-i \frac{k}{4} \right) H_1^{(1)}(kR) \frac{\partial R}{\partial \mathbf{v}} d\Gamma(X) = \\ &= \int_{-1}^{+1} \psi_s(\xi) \left(-i \frac{k}{4} \right) H_1^{(1)}(kR(\xi)) \frac{\partial R(\xi)}{\partial \mathbf{v}(\xi)} |JAC(R, \xi)| d\Gamma(\xi) = \\ &= -i \frac{k}{4} \int_{-1}^{+1} \psi_s(\xi) [J_1(kR(\xi)) + iY_1(kR(\xi))] \frac{\partial R(\xi)}{\partial \mathbf{v}(\xi)} |JAC(R, \xi)| d\xi = \\ &= -\frac{ik}{4} \left\{ \sum_{m=1}^{npig} J_1(kR(\xi_m)) \frac{\partial R}{\partial \mathbf{v}} W_m |JAC| \psi_s(\xi_m) + \sum_{m=1}^{npig} i Y_1(kR(\xi_m)) \frac{\partial R}{\partial \mathbf{v}} W_m |JAC| \psi_s(\xi_m) \right\} \end{aligned} \quad (4.111)$$

com $s = 1, 2$ e 3 .

• Desenvolvimento da Matriz G

O desenvolvimento dos termos g_s^{ij} ($s = 1, 2$ e 3) para eq. (4.103b), para $i \neq j$, é feito análogo ao desenvolvimento dos termos de h_s^{ij} , como vê-se a seguir:

$$\begin{aligned}
 g_s^{ij} &= \int_{\Gamma_j} u^* \psi_s(X) d\Gamma(X) = \int_{\Gamma_j} \psi_s(X) \left(\frac{i}{4} \right) H_0^{(1)}(kR) d\Gamma(X) = \\
 &= \int_{-1}^{+1} \psi_s(\xi) \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kR(\xi)) |JAC(R, \xi)| d\Gamma(\xi) = \\
 &= \frac{i}{4} \int_{-1}^{+1} \psi_s(\xi) [J_0(kR(\xi)) + iY_0(kR(\xi))] |JAC(R, \xi)| d\xi = \\
 &= \frac{i}{4} \left\{ \sum_{m=1}^{nptg} J_0(kR(\xi_m)) W_m |JAC| \psi_s(\xi_m) + \sum_{m=1}^{nptg} i Y_0(kR(\xi_m)) W_m |JAC| \psi_s(\xi_m) \right\}
 \end{aligned} \tag{4.112}$$

com $s = 1, 2$ e 3 .

4.2.3.3. - Cálculo dos Elementos Singulares das Matrizes G e H

As singularidades ocorrem quando o ponto de colocação é um dos três pontos do elemento em que estão contidos.

As singularidades ocorridas na diagonal da matriz H são resolvidas analogamente às dos elementos lineares (item 4.3.2.5); as integrais com singularidade na matriz G serão análogas às da eq. (4.103b), ou seja

$$g_s^{ii} = \int_{\Gamma_j} \psi_s(X) u^* d\Gamma(X) = \int_{-1}^{+1} \psi_s(\xi) u^* |JAC| d\xi \quad (4.113)$$

com $s = 1, 2$ e 3 .

Três casos são considerados dependendo da posição do ponto de colocação, ou seja, no nó 1, 2 ou 3 (conforme mostra a figura 4.16).

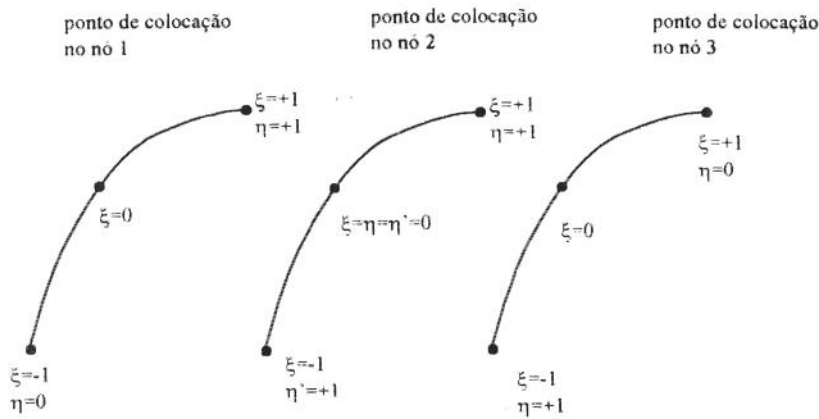


figura 4.16 - Sistema de coordenadas geométricas para integrações numéricas

i. Ponto de Colocação no Nó 1

A troca das coordenadas de x e y para ξ é definida através das equações (4.105a) e (4.105b).

Mas, para integrar a singularidade, uma nova troca de variáveis é feita:

$$\eta = \frac{\xi + 1}{2} \quad (4.114)$$

e assim,

$$\xi = 2\eta - 1 \quad (4.115)$$

As funções de forma em relação à nova variável, passa a ser, então:

$$\psi_{1A} = \frac{\xi}{2}(\xi - 1) = \frac{2\eta - 1}{2}(2\eta - 1 - 1) = 2\eta^2 - 3\eta + 1 \quad (4.116a)$$

$$\psi_{2A} = (1 - \xi)(1 + \xi) = 1 - \xi^2 = 1 - (2\eta - 1)^2 = 4\eta(1 - \eta) \quad (4.116b)$$

$$\psi_{3A} = \frac{\xi}{2}(\xi + 1) = \frac{2\eta - 1}{2}(2\eta - 1 + 1) = \eta(2\eta - 1) \quad (4.116c)$$

Assim, os elementos da diagonal da matriz **G**, serão escritos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} g_s^{ii} &= \int_{\Gamma_j} \psi_s(X) \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kR) d\Gamma(X) = \\ &= \int_{\Gamma_j} \psi_s(X) \frac{i}{4} J_0(kR) d\Gamma(X) - \int_{\Gamma_j} \psi_s(X) \frac{1}{4} Y_0(kR) d\Gamma(X) = \\ &= \frac{i}{4} \left\{ \int_{-1}^{+1} \psi_s(\xi) J_0(kR(\xi)) |JAC(R, \xi)| d\xi + \int_0^{+1} \psi_{s_A}(\eta) Y_0(kR(\eta)) |JAC_A(R, \eta)| d\eta \right\} \end{aligned} \quad (4.117)$$

com s e s_A variando de 1 à 3, onde

$$x_A = (2\eta^2 - 3\eta + 1) x_1 + (4\eta - 4\eta^2) x_2 + (2\eta^2 - \eta) x_3 \quad (4.118a)$$

$$y_A = (2\eta^2 - 3\eta + 1) y_1 + (4\eta - 4\eta^2) y_2 + (2\eta^2 - \eta) y_3 \quad (4.118b)$$

e

$$|JAC_A| = \left[\left(\frac{\partial x_A}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_A}{\partial \eta} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.119)$$

ou seja,

$$|JAC_A| = \left\{ \left[2\eta(x_1 + x_3 - 2x_2) + 2x_2 - \frac{x_3}{2} - \frac{3}{2}x_1 \right]^2 + \left[2\eta(y_1 + y_3 - 2y_2) + 2y_2 - \frac{y_3}{2} - \frac{3}{2}y_1 \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.120)$$

As integrais são divididas agora, em duas partes: uma com singularidade (segunda integral do último termo da equação (4.117)) e outra sem (primeira integral do último termo da equação(4.117)). Como a singularidade apresentada é do tipo logarítmica, é integrada pela fórmula de integração especial logarítmica (apêndice D), do tipo:

$$I = \int_0^1 \ln\left(\frac{1}{\eta}\right) f(\eta) d\eta \approx \sum_{m=1}^{nptgl} W_{ml} f(\eta_{ml}) \quad (4.121)$$

Assim, desenvolvendo a integral com singularidade da eq. (4.117), tem-se que

$$\begin{aligned} INT4 &= \int_0^{+1} i \psi_{s_A} Y_0(kR(\eta)) |JAC_A| d\eta = \int_0^{+1} i \ln\left(\frac{1}{\eta}\right) \frac{\psi_{s_A} \frac{1}{4} Y_0(KR(\eta)) |JAC_A|}{\ln\left(\frac{1}{\eta}\right)} d\eta = \\ &= \sum_{m=1}^{nptgl} i W_{ml} \psi_{s_A} \frac{1}{4} Y_0(kR(\eta_{ml})) |JAC_A| \frac{1}{-\ln \eta_{ml}} \end{aligned} \quad (4.122)$$

com $s_A = 1, 2$ e 3 ; onde $|JAC_A|$ é o jacobiano e ψ_{s_A} são as funções de forma em função de η , dados pelas equações (4.120) e (4.116a) à (4.116c), respectivamente.

A parte sem singularidade da equação (4.117) é integrada pela fórmula da quadratura gaussiana nos termos da variável ξ :

$$INT5 = \int_{-1}^{+1} \psi_s J_0(kR(\xi)) |JAC| d\xi = \sum_{m=1}^{nptg} W_m \psi_s J_0(kR(\xi_m)) |JAC| \quad (4.123)$$

com $s = 1, 2$ e 3 ; onde $|JAC|$ é o jacobiano e ψ_s são as funções de forma em função da variável ξ , calculados pela eq. (4.106) e pelas equações (4.95a) à (4.95b), respectivamente.

ii. Ponto de Colocação no Nó 2

A seguir, considera-se o ponto de colocação sendo no nó 2; e para integrar as duas singularidades que aparecem em ambos os lados dos nós, a integral é definida em duas partes:

$$g_s^{ii} = \int_{\Gamma_j} \psi_s(X) u^* d\Gamma(X) = \int_{x_1}^{x_2} \psi_s(X) u^* d\Gamma(X) + \int_{x_2}^{x_3} \psi_s(X) u^* d\Gamma(X) \quad (4.124)$$

com $s = 1, 2$ e 3 .

A primeira integral do último termo da equação (4.124) é trocada para a variável $\eta' = -\xi$ (fig. 4.16), e a segunda para a variável $\eta = \xi$. Assim, cada integral será dividida em uma com singularidade (e integrada pela fórmula da integração especial logaritmica), e outra sem singularidade. As duas partes sem singularidades serão integradas juntas pela regra da quadratura gaussiana.

Para a integral do nó 1 ao nó 2, tem-se que:

$$\xi = -\eta' \quad (4.125)$$

De onde retira-se as funções de forma nos termos desta nova variável:

$$\psi_{1A} = \frac{\xi}{2}(\xi - 1) = \frac{-\eta'}{2}(-\eta' - 1) = \frac{\eta'}{2}(\eta' + 1) \quad (4.126a)$$

$$\psi_{2A} = (1 - \xi^2) = 1 - \eta'^2 \quad (4.126b)$$

$$\psi_{3A} = \frac{\xi}{2}(\xi + 1) = \frac{-\eta'}{2}(-\eta' + 1) = \frac{\eta'}{2}(\eta' - 1) \quad (4.126c)$$

e às coordenadas:

$$x_A = \left(\frac{\eta'^2}{2} + \frac{\eta'}{2} \right) x_1 + (1 - \eta'^2) x_2 + \left(\frac{\eta'^2}{2} - \frac{\eta'}{2} \right) x_3 \quad (4.127a)$$

$$y_A = \left(\frac{\eta'^2}{2} + \frac{\eta'}{2} \right) y_1 + (1 - \eta'^2) y_2 + \left(\frac{\eta'^2}{2} - \frac{\eta'}{2} \right) y_3 \quad (4.127b)$$

Destas novas variáveis, obtém-se o jacobiano da transformação:

$$|JAC_A| = \left\{ \left[(x_3 - 2x_2 + x_1) (-\eta') + \frac{1}{2}(x_3 - x_1) \right]^2 + \left[(y_3 - 2y_2 + y_1) (-\eta') + \frac{1}{2}(y_3 - y_1) \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.128)$$

Para a integral do nó 2 ao nó 3, tem-se :

$$\xi = \eta \quad (4.129)$$

chegando às funções de forma

$$\psi_{1B} = \frac{\xi}{2}(\xi - 1) = \frac{\eta}{2}(\eta - 1) \quad (4.130a)$$

$$\psi_{2B} = (1 - \xi^2) = 1 - \eta^2 \quad (4.130b)$$

$$\psi_{3B} = \frac{\xi}{2}(\xi + 1) = \frac{\eta}{2}(\eta + 1) \quad (4.130c)$$

e às coordenadas

$$x_B = \frac{1}{2}(\eta^2 - \eta)x_1 + (1 - \eta^2)x_2 + \frac{1}{2}(\eta^2 + \eta)x_3 \quad (4.131a)$$

$$y_B = \frac{1}{2}(\eta^2 - \eta)y_1 + (1 - \eta^2)y_2 + \frac{1}{2}(\eta^2 + \eta)y_3 \quad (4.131b)$$

e também ao jacobiano

$$|JAC_B| = \left\{ \left[(x_3 - 2x_2 + x_1) \eta + \frac{1}{2} (x_3 - x_1) \right]^2 + \left[(y_3 - 2y_2 + y_1) \eta + \frac{1}{2} (y_3 - y_1) \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.132)$$

Assim, da equação (4.124), pode-se escrever que:

$$\begin{aligned} g_s^{ii} &= \int_{x_1}^{x_3} \psi_s(X) u^* d\Gamma(X) = \int_{x_1}^{x_3} \psi_s(X) \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kR) d\Gamma(X) = \\ &= \frac{i}{4} \left\{ \int_{x_1}^{x_3} \psi_s(X) J_0(kR) d\Gamma(X) + \int_{x_1}^{x_3} \psi_s(X) i Y_0(kR) d\Gamma(X) \right\} = \\ &= \frac{i}{4} \left\{ \int_{x_1}^{x_3} \psi_s(X) J_0(kR) d\Gamma(X) + \int_{x_1}^{x_2} i \psi_s(X) Y_0(kR) d\Gamma(X) + \int_{x_2}^{x_3} i \psi_s(X) Y_0(kR) d\Gamma(X) \right\} \end{aligned} \quad (4.133)$$

com $s = 1, 2$ e 3 .

A primeira integral do último termo da equação (4.133) é resolvida normalmente, pela regra da quadratura gaussiana:

$$\begin{aligned} INT6 &= \int_{x_1}^{x_3} \psi_s(X) J_0(kR) d\Gamma(X) = \int_{-1}^{+1} \psi_s(\xi) J_0(kR(\xi)) |JAC(R, \xi)| d\Gamma(\xi) = \\ &= \sum_{m=1}^{nptg} \psi_s(\xi_m) W_m J_0(kR(\xi_m)) |JAC| \end{aligned} \quad (4.134)$$

com $s = 1, 2$ e 3 , onde $|JAC|$ é o jacobiano em função de ξ (eq. 4.106) e ψ_s são as funções de forma dadas pelas equações (4.95a) à (4.95b).

A segunda e a terceira integral do último termo da equação (4.133) ficam, então:

$$\begin{aligned}
 INT7 &= \int_{X_1}^{X_2} i \psi_s(X) Y_0(kR) d\Gamma(X) + \int_{X_2}^{X_1} i \psi_s(X) Y_0(kR) d\Gamma(X) = \\
 &\int_{X_1}^{X_2} i \psi_{s_A} Y_0(kR(\eta')) |JAC_A| d\eta' + \int_{X_2}^{X_1} i \psi_{s_B} Y_0(kR(\eta)) |JAC_B| d\eta = \\
 &= \int_0^{+1} i \ln\left(\frac{1}{\eta'}\right) \frac{\psi_{s_A} Y_0(kR(\eta')) |JAC_A|}{\ln\left(\frac{1}{\eta'}\right)} d\eta' - \int_0^{+1} i \ln\left(\frac{1}{\eta}\right) \frac{\psi_{s_B} Y_0(kR(\eta)) |JAC_B|}{\ln\left(\frac{1}{\eta}\right)} d\eta = \\
 &= \sum_{ml=1}^{nptgl} i W_{ml} \psi_{s_A} Y_0(kR(\eta'_{ml})) |JAC_A| \frac{1}{\ln(\eta'_{ml})} + \sum_{ml=1}^{nptgl} i W_{ml} \psi_{s_B} Y_0(kR(\eta_{ml})) |JAC_B| \frac{1}{\ln(\eta_{ml})}
 \end{aligned} \tag{4.135}$$

com s_A e s_B variando de 1 até 3; onde $|JAC_A|$ é o jacobiano e ψ_{s_A} são as funções de forma em função de η' , equações (4.128) e (4.126a) à (4.126c), respectivamente; e $|JAC_B|$ é o jacobiano e ψ_{s_B} são as funções de forma em função de η , equações (4.132) e (4.130a) à (4.130c), respectivamente.

iii. Ponto de Colocação no Nó 3

Este caso é similar ao primeiro (ponto de colocação no nó 1), sendo que os elementos da diagonal de $\mathbf{G}$, são escritos da mesma forma, ou seja

$$\begin{aligned}
g_s'' &= \int_{\Gamma_j} \psi_s(X) \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kR) d\Gamma(X) = \\
&= \int_{\Gamma_j} \psi_s(X) \frac{i}{4} J_0(kR) d\Gamma(X) - \int_{\Gamma_j} \psi_s(X) \frac{1}{4} Y_0(kR) d\Gamma(X) = \\
&= \frac{i}{4} \left\{ \int_{-1}^{+1} \psi_s(\xi) J_0(kR(\xi)) |JAC(R, \xi)| d\xi + \int_0^{+1} \psi_{s_A}(\eta) Y_0(kR(\eta)) |JAC_A(R, \eta)| d\eta \right\}
\end{aligned} \tag{4.136}$$

com s e s_A variando de 1 à 3; mas, para integrar a singularidade, uma nova troca de variáveis é feita

$$\eta = \frac{1-\xi}{2} \tag{4.137}$$

ou seja,

$$\xi = 1 - 2\eta \tag{4.138}$$

chegando às funções de forma:

$$\psi_{1A} = \frac{\xi}{2}(\xi - 1) = \eta(2\eta - 1) \tag{4.139a}$$

$$\psi_{2A} = 1 - \xi^2 = 4\eta(1 - \eta) \tag{4.139b}$$

$$\psi_{3A} = \frac{\xi}{2}(\xi + 1) = 2\eta^2 - 3\eta + 1 \tag{4.139c}$$

e às coordenadas:

$$x_A = (1 - 3\eta + 2\eta^2)x_3 + (4\eta - 4\eta^2)x_2 + (2\eta^2 - \eta)x_1 \quad (4.140a)$$

$$y_A = (1 - 3\eta + 2\eta^2)y_3 + (4\eta - 4\eta^2)y_2 + (2\eta^2 - \eta)y_1 \quad (4.140b)$$

e ao jacobiano de transformação:

$$|JAC_A| = \left[(4\eta(x_1 - 2x_2 + x_3) - 2x_3 + 4x_2 - 2x_1)^2 + (4\eta(y_1 - 2y_2 + y_3) - 2y_3 + 4y_2 - 2y_1)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.141)$$

A primeira integral do último termo da eq. (4.136) é resolvida normalmente pela regra da quadratura gaussiana por não haver singularidade; e a segunda integral pela regra especial logarítmica, resultando em:

$$g_s^{ii} = \frac{i}{4} \left\{ \sum_{m=1}^{nptg} \psi_s(\xi) J_0(kR(\xi_m)) |JAC| W_m + \sum_{ml=1}^{nptgl} i \psi_{sA} Y_0(kR(\eta_{ml})) |JAC_A| \frac{1}{\ln \eta_{ml}} \right\} \quad (4.142)$$

com s e sA variando de 1 até 3; onde $|JAC|$ é o jacobiano e ψ_s as funções de forma em função de ξ , retirados das equações (4.106) e (4.95a) à (4.95b), respectivamente; $|JAC_A|$ é o jacobiano e ψ_{sA} as funções de forma em função de η , retirados das equações (4.141) e (4.139a) à (4.139b), respectivamente.

4.2.3.4. Resultados

Basicamente, os resultados apresentados para os elementos quadráticos possuem as mesmas considerações já feitas para os elementos constantes e lineares.

A discretização do contorno foi feita em 8,16 e 64 elementos. Os resultados são comparados com a solução analítica e apresentados no gráfico da fig. (4.17), onde o eixo x

representa a frequência normalizada pelo raio do cilindro, e y o módulo do potencial de velocidade. Para a integração numérica foram utilizados 10 pontos de Gauss, como nos elementos constantes e lineares. Este número foi escolhido após uma investigação dos resultados utilizando-se um número variado de pontos de Gauss para o raio de integração (apêndice B).

O gráfico da fig. (4.18) mostrado logo a seguir, representa o intervalo onde ocorre a primeira não unicidade do gráfico da fig. (4.17).

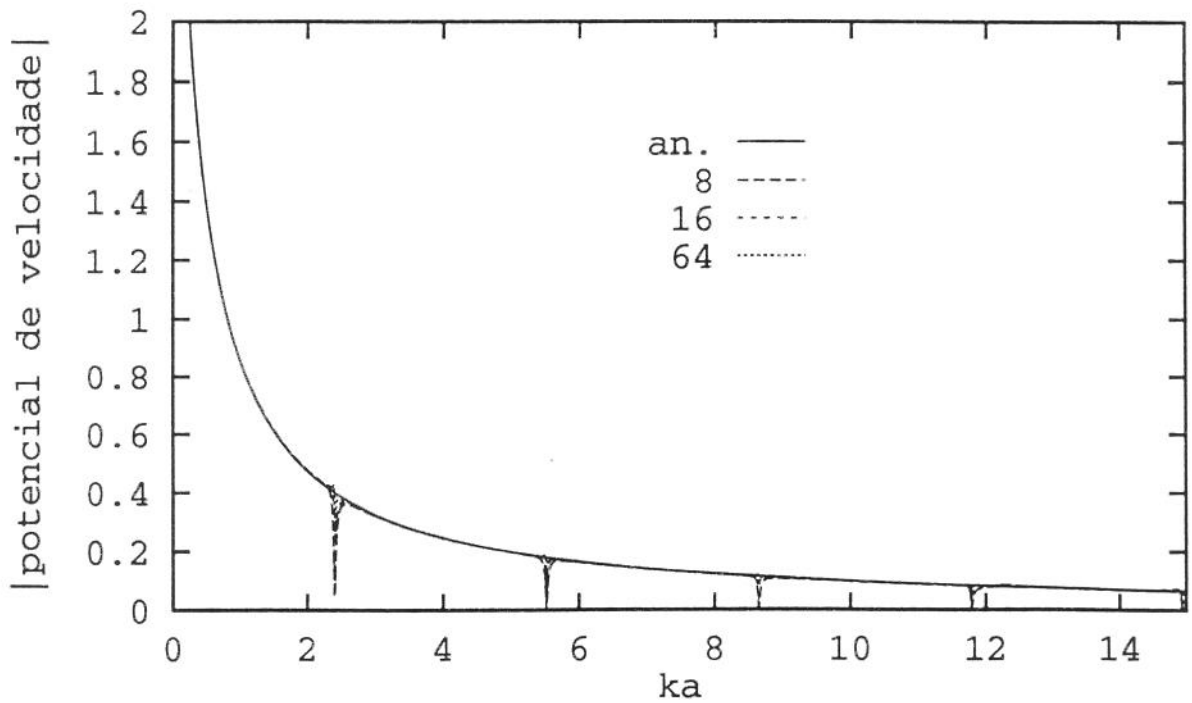


Figura 4.17 - Potencial de velocidade de radiação (analítico e numérico) de um cilindro pulsante de raio $a=1.0$, para 8, 16 e 64 elementos (elementos quadráticos)

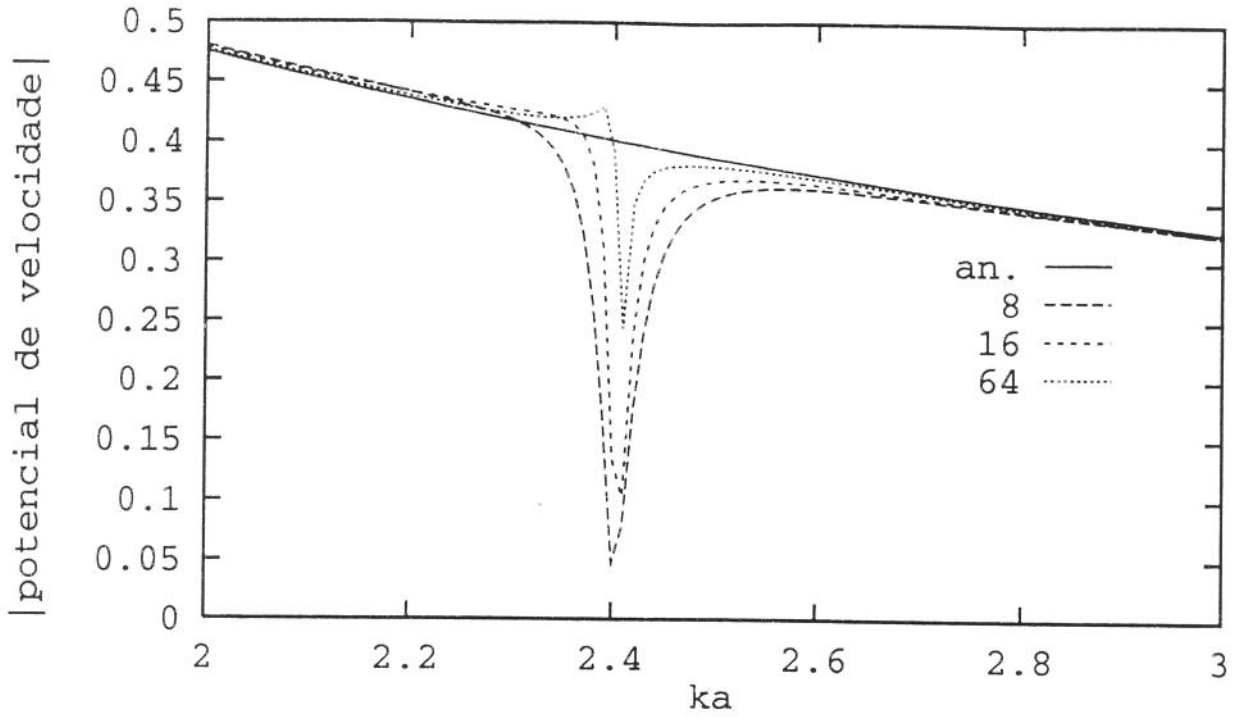


Figura 4.18 - Potencial de velocidade de radiação (analítico e numérico) de um cilindro pulsante de raio $a=1.0$, para 8, 16 e 64 elementos (elementos quadráticos)

4.2.4. Elementos Cúbicos

Nesta seção será apresentada uma variação cúbica da geometria do elemento e da variável ϕ (ou q). Neste caso, as funções são descritas pegando quatro nós sobre cada elemento, conforme mostra a figura (4.19):

$$\phi(\xi) = \psi_1 \phi_1 + \psi_2 \phi_2 + \psi_3 \phi_3 + \psi_4 \phi_4 \quad (4.143a)$$

$$q(\xi) = \psi_1 q_1 + \psi_2 q_2 + \psi_3 q_3 + \psi_4 q_4 \quad (4.143b)$$

e similarmente,

$$x = \psi_1 x_1 + \psi_2 x_2 + \psi_3 x_3 + \psi_4 x_4 \quad (4.144a)$$

$$y = \psi_1 y_1 + \psi_2 y_2 + \psi_3 y_3 + \psi_4 y_4 \quad (4.144b)$$

onde as funções de interpolação são dadas por [Brebbia, 1991]:

$$\psi_i = \prod_{i \neq j} \frac{(\xi - \xi_j)}{(\xi_i - \xi_j)} \quad i, j = 1, 2, 3, 4 \quad (4.145)$$

ou seja,

$$\psi_1 = \frac{1}{16} (1 - \xi) (9\xi^2 - 1) \quad (4.146a)$$

$$\psi_2 = \frac{9}{16} (1 - \xi^2) (1 - 3\xi) \quad (4.146b)$$

$$\psi_3 = \frac{9}{16} (1 - \xi^2) (1 + 3\xi) \quad (4.146c)$$

$$\psi_4 = \frac{1}{16} (1 + \xi) (9\xi^2 - 1) \quad (4.146d)$$

os quais podem ser especificadas para os nós como segue:

nó	ξ	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4
1	-1	1	0	0	0
2	-1/3	0	1	0	0
3	+1/3	0	0	1	0
4	+1	0	0	0	1

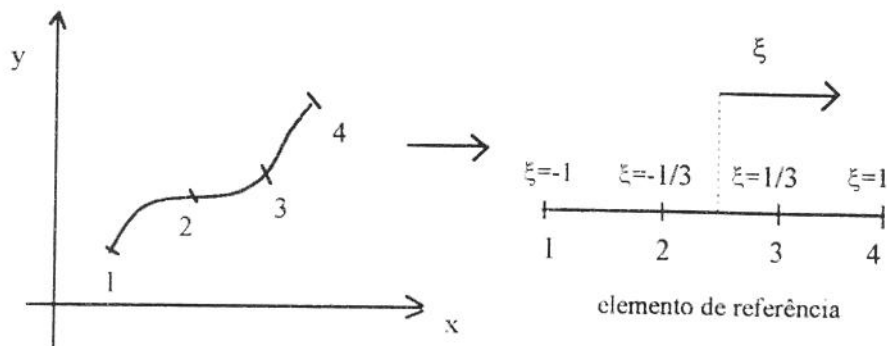


Figura 4.19 - Elemento cúbico com 4 nós

4.2.4.1. Evolução das Integrais

Analogamente às implementações anteriores, é necessário resolver a equação integral (4.44); discretizando-a em N elementos, vem

$$c_i \phi_i + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \phi q^* d\Gamma = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} u^* q d\Gamma + \phi^i \quad (4.147)$$

Aplicando a eq. (4.143a) na integral do lado direito da eq. (4.147), tem-se que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_j} \phi q^* d\Gamma &= \int_{\Gamma_j} [\psi_1 \phi_1 + \psi_2 \phi_2 + \psi_3 \phi_3 + \psi_4 \phi_4] q^* d\Gamma = \int_{\Gamma_j} [\psi_1 \ \psi_2 \ \psi_3 \ \psi_4] \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} q^* d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma_j} [\psi_1 \ \psi_2 \ \psi_3 \ \psi_4] q^* d\Gamma \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} = [h_1^j \ h_2^j \ h_3^j \ h_4^j] \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.148)$$

onde para cada elemento j, tem-se três termos nos nós:

$$h_1^j = \int_{\Gamma_j} \psi_1 q^* d\Gamma, \quad (4.149a)$$

$$h_2^j = \int_{\Gamma_j} \psi_2 q^* d\Gamma, \quad (4.149b)$$

$$h_3^j = \int_{\Gamma_j} \psi_3 q^* d\Gamma, \quad (4.149c)$$

e

$$h_4^j = \int_{\Gamma_j} \psi_4 q^* d\Gamma \quad (4.149d)$$

Analogamente, aplicando a eq. (4.143b) na eq. (4.147), obtém-se

$$\int_{\Gamma_j} u^* q \, d\Gamma = \int_{\Gamma_j} [\psi_1 \, \psi_2 \, \psi_3 \, \psi_4] u^* \, d\Gamma \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = [g_1^{ij} \, g_2^{ij} \, g_3^{ij} \, g_4^{ij}] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} \quad (4.150)$$

onde

$$g_1^{ij} = \int_{\Gamma_j} \psi_1 u^* \, d\Gamma \quad (4.151a)$$

$$g_2^{ij} = \int_{\Gamma_j} \psi_2 u^* \, d\Gamma \quad (4.151b)$$

$$g_3^{ij} = \int_{\Gamma_j} \psi_3 u^* \, d\Gamma \quad (4.151c)$$

$$g_4^{ij} = \int_{\Gamma_j} \psi_4 u^* \, d\Gamma \quad (4.151d)$$

Variando a posição dos nós de 1 à N, os resultados das equações (4.149a) à (4.149d) e (4.151a) à (4.151d) são reunidos em sistemas de matrizes **G** e **H**, respectivamente. A matriz **G** será uma matriz retangular (3N x 4N) pois, para cada nó pertencente à extremidade do elemento, pode haver dois valores de $\frac{\partial \phi}{\partial v}$, isto é, um antes e um depois do nó. A matriz **H** será uma matriz quadrada (3N x 3N). Feito isto, as matrizes **G** e **H** são reordenadas segundo as condições de contorno, resultando em

$$\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{F}$$

onde **X** é um vetor (N x 1) das incógnitas, sendo N o número de nós; **A** é uma matriz (3Nx3N) cujas colunas são uma combinação linear das colunas de **H** ou **G** dependendo das condições de contorno ou das duas colunas consecutivas de **G** quando os valores desconhecidos possuem

um valor único em ambos os lados dos nós de extremidade do elemento; e $\mathbf{F}$ é um vetor computado pela multiplicação das condições de contorno prescritas pelos termos da linha correspondente de $\mathbf{G}$ e $\mathbf{H}$.

Agora, é necessário uma relação entre as variáveis ξ e X . Para isto, aplica-se as equações (4.146a) à (4.146d) em (4.144a) e (4.144b), chegando-se em:

$$\begin{aligned} x(\xi) = & \frac{1}{16} [9\xi^2 - 1 - 9\xi^3 + \xi] x_1 + \frac{1}{16} [1 - 3\xi - \xi^2 + 3\xi^3] x_2 + \\ & + \frac{9}{16} [1 + 3\xi - \xi^2 - 3\xi^3] x_3 + \frac{1}{16} [9\xi^2 - 1 + 9\xi^3 - \xi] x_4 \end{aligned} \quad (4.152a)$$

e análogo :

$$\begin{aligned} y(\xi) = & \frac{1}{16} [9\xi^2 - 1 - 9\xi^3 + \xi] y_1 + \frac{1}{16} [1 - 3\xi - \xi^2 + 3\xi^3] y_2 + \\ & + \frac{9}{16} [1 + 3\xi - \xi^2 - 3\xi^3] y_3 + \frac{1}{16} [9\xi^2 - 1 + 9\xi^3 - \xi] y_4 \end{aligned} \quad (4.152b)$$

de onde pode-se tirar o jacobiano, que é calculado utilizando-se as derivadas das equações (4.152a) e (4.152b), ou seja:

$$|\text{JAC}| = \left\{ \left(\frac{dx}{d\xi} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.153)$$

Assim, tem-se que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} = & \frac{1}{16} [18\xi - 27\xi^2 + 1] x_1 + \frac{9}{16} [-3 - 2\xi + 9\xi^2] x_2 \\ & + \frac{9}{16} [3 - 2\xi - 9\xi^2] x_3 + \frac{1}{16} [18\xi + 27\xi^2 - 1] x_4 + \end{aligned} \quad (4.154a)$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial \xi} = & \frac{1}{16}(x_1 - x_4 - 27 x_2 + 27 x_3) + \frac{9}{8}\xi (x_1 + x_4 - x_2 - x_3) \\ & + \frac{27}{16} \xi^2 (-x_1 + x_4 + 3x_2 - 3x_3)\end{aligned}\quad (4.154b)$$

analogamente, chega-se em:

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial \xi} = & \frac{1}{16}(y_1 - y_4 - 27 y_2 + 27 y_3) + \frac{9}{8}\xi (y_1 + y_4 - y_2 - y_3) \\ & + \frac{27}{16} \xi^2 (-y_1 + y_4 + 3y_2 - 3y_3)\end{aligned}\quad (4.154c)$$

Assim, pode-se escrever que

$$h_s^{ij} = \int_{\Gamma_j} \psi_s(\xi) q^* d\Gamma = \int_{-1}^{+1} \psi_s(\xi) q^* |JAC| d\xi \quad s = 1, 2, 3 \text{ e } 4 \quad (4.155a)$$

$$g_s^{ij} = \int_{\Gamma_j} \psi_s(\xi) u^* d\Gamma = \int_{-1}^{+1} \psi_s(\xi) u^* |JAC| d\xi \quad s = 1, 2, 3 \text{ e } 4 \quad (4.155b)$$

O desenvolvimento das equações (4.155a) e (4.155b) são realizados numericamente. A fórmula do raio de integração, da normal e de q^* , necessários para o desenvolvimento das referidas equações, são as mesmas apresentadas para os elementos quadráticos, ou seja, equações (4.107), (4.108) e (4.110), respectivamente.

4.2.4.2. Desenvolvimento dos Elementos não Singulares de G e H

De posse do jacobiano e da transformação de variáveis, pode-se calcular os elementos das matrizes G e H como segue:

$$\begin{aligned}
h_s^{ij} &= \int_{\Gamma_j} \frac{\partial u^*}{\partial \nu} \psi_s(X) d\Gamma(X) = \int_{\Gamma_j} \psi_s(X) \left(-i \frac{k}{4} \right) H_1^{(1)}(kR) \frac{\partial R}{\partial \nu} d\Gamma(X) = \\
&= \int_{-1}^{+1} \psi_s(\xi) \left(-i \frac{k}{4} \right) H_1^{(1)}(kR(\xi)) \frac{\partial R(\xi)}{\partial \nu(\xi)} |JAC(R, \xi)| d\Gamma(\xi) = \\
&= -i \frac{k}{4} \int_{-1}^{+1} \psi_s(\xi) [J_1(kR(\xi)) + iY_1(kR(\xi))] \frac{\partial R(\xi)}{\partial \nu(\xi)} |JAC(R, \xi)| d\xi = \\
&= -\frac{ik}{4} \left\{ \sum_{m=1}^{nptg} J_1(kR(\xi_m)) \frac{\partial R}{\partial \nu} W_m |JAC| \psi_s(\xi_m) + \sum_{m=1}^{nptg} i Y_1(kR(\xi_m)) \frac{\partial R}{\partial \nu} W_m |JAC| \psi_s(\xi_m) \right\}
\end{aligned} \tag{4.156}$$

com $s = 1, 2, 3$ e 4 .

$$\begin{aligned}
g_s^{ij} &= \int_{\Gamma_j} u^* \psi_s(X) d\Gamma(X) = \int_{\Gamma_j} \psi_s(X) \left(\frac{i}{4} \right) H_0^{(1)}(kR) d\Gamma(X) = \\
&= \int_{-1}^{+1} \psi_s(\xi) \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kR(\xi)) |JAC(R, \xi)| d\Gamma(\xi) = \\
&= \frac{i}{4} \int_{-1}^{+1} \psi_s(\xi) [J_0(kR(\xi)) + iY_0(kR(\xi))] |JAC(R, \xi)| d\xi = \\
&= \frac{i}{4} \left\{ \sum_{m=1}^{nptg} J_0(kR(\xi_m)) W_m |JAC| \psi_s(\xi_m) + \sum_{m=1}^{nptg} i Y_0(kR(\xi_m)) W_m |JAC| \psi_s(\xi_m) \right\}
\end{aligned} \tag{4.157}$$

com $s = 1, 2, 3$ e 4 .

4.2.4.3. Cálculo dos Elementos Singulares de G e H

Dependendo da posição do ponto de colocação em cada um dos quatro nós, tem-se um caso de singularidade, resolvido a seguir. As singularidades da matriz **H** são resolvidas análogas à dos elementos lineares. Já para o desenvolvimento das singularidades que ocorrem em **G**, uma nova troca de variáveis é feita para cada um dos quatro casos.

i. Ponto de Colocação no Nó 1

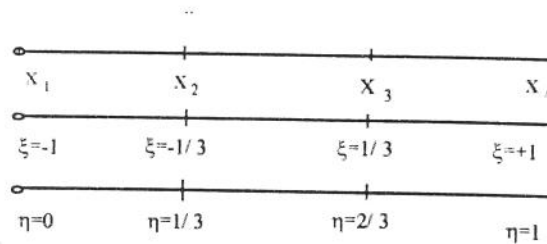


fig. 4.20 - Sistema de coordenadas geométricas
para integrações numéricas: ponto de
colocação no nó 1

Para integrar esta singularidade, a troca de variáveis é feita de tal forma que:

$$\xi = 2\eta - 1 \quad (4.158)$$

Fazendo as transformações de variáveis, chega-se às funções de forma:

$$\psi_{1A} = \frac{1}{16} (1 - 2\eta + 1) \left\{ -10 + 9[(2\eta - 1)^2 + 1] \right\} = 1 - \frac{11}{2}\eta + 9\eta^2 - \frac{9}{2}\eta^3 \quad (4.159a)$$

$$\psi_{2A} = \frac{9}{16} [1 - (2\eta - 1)^2] [1 - 3(2\eta - 1)] = 9\eta - \frac{45}{2}\eta^2 + \frac{27}{2}\eta^3 \quad (4.159b)$$

$$\psi_{3A} = \frac{9}{16} [1 - (2\eta - 1)^2] [1 + 3(2\eta - 1)] = -\frac{9}{2}\eta + 18\eta^2 - \frac{27}{2}\eta^3 \quad (4.159c)$$

$$\psi_{4A} = \frac{1}{16} (1 + 2\eta - 1) \left\{ -10 + 9[(2\eta - 1)^2 + 1] \right\} = \eta - \frac{9}{2}\eta^2 + \frac{9}{2}\eta^3 \quad (4.159d)$$

e os elementos da matriz $\mathbf{G}$ serão dados por:

$$\begin{aligned} g_s^{ii} &= \int_{\Gamma_j} \psi_s(X) \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kR) d\Gamma(X) = \\ &= \int_{\Gamma_j} \psi_s(X) \frac{i}{4} J_0(kR) d\Gamma(X) - \int_{\Gamma_j} \psi_s(X) \frac{1}{4} Y_0(kR) d\Gamma(X) = \\ &= \frac{i}{4} \left\{ \int_{-1}^{+1} \psi_s(\xi) J_0(kR(\xi)) |JAC(R, \xi)| d\xi + \int_0^{+1} \psi_{s_A} i Y_0(kR(\eta)) |JAC_A(R, \eta)| d\eta \right\} \end{aligned} \quad (4.160)$$

com s e s_A variando de 1 à 4; onde

$$\begin{aligned} x_A &= \left(-\frac{9}{2}\eta^3 + 9\eta^2 - \frac{11}{2}\eta + 1 \right) x_1 + \left(\frac{9}{2}\eta^3 - \frac{9}{2}\eta^2 + \eta \right) x_4 + \\ &+ \left(\frac{27}{2}\eta^3 - \frac{45}{2}\eta^2 + 9\eta \right) x_2 + \left(-\frac{27}{2}\eta^3 + 18\eta^2 - \frac{9}{2}\eta \right) x_3 \end{aligned} \quad (4.161a)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} x_A &= \frac{9}{2} (-x_1 + x_4 + 3x_2 - 3x_3) \eta^3 + \frac{9}{2} (2x_1 - x_4 - 5x_2 + 4x_3) \eta^2 + \\ &+ \left(-\frac{11}{2}x_1 + x_4 + 9x_2 - \frac{9}{2}x_3 \right) \eta + x_1 \end{aligned} \quad (4.161b)$$

Analogamente, obtém-se:

$$y_A = \frac{9}{2}(-y_1 + y_4 + 3y_2 - 3y_3) \eta^3 + \frac{9}{2}(2y_1 - y_4 - 5y_2 + 4y_3) \eta^2 + \left(-\frac{11}{2}y_1 + y_4 + 9y_2 - \frac{9}{2}y_3\right) \eta + (-y_1) \quad (4.161c)$$

Obtendo, então, os termos para o jacobiano de transformação $|JAC_A|$:

$$|JAC_A| = \left\{ \left(\frac{dx_A}{d\xi} \right)^2 + \left(\frac{dy_A}{d\xi} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.162)$$

que são:

$$\frac{\partial x_A}{\partial v} = \frac{27}{2}(-x_1 + x_4 + 3x_2 - 3x_3) \eta^2 + 9(x_2 - x_4 - 5x_2 + 4x_3) \eta + \left(-\frac{11}{2}x_1 + x_4 + 9x_2 - \frac{9}{2}x_3\right) \quad (4.163a)$$

e

$$\frac{\partial y_A}{\partial v} = \frac{27}{2}(-y_1 + y_4 + 3y_2 - 3y_3) \eta^2 + 9(y_2 - y_4 - 5y_2 + 4y_3) \eta + \left(-\frac{11}{2}y_1 + y_4 + 9y_2 - \frac{9}{2}y_3\right) \quad (4.163b)$$

O primeiro termo da equação (4.160) não possui singularidade e é resolvida pela fórmula da quadratura gaussiana (idem eq. (4.123) para $s=1, 2, 3$ e 4). Já o segundo termo, por possuir singularidade, é resolvido pela fórmula especial de integração logarítmica, como já foi realizado nos elementos quadráticos, ou seja:

$$g_s^n = \frac{i}{4} \left\{ \sum_{m=1}^{nptg} \psi_s(\xi_m) J_0(kR(\xi_m)) |JAC| W_m + \sum_{ml=1}^{nptgl} \psi_{s_A}(\eta_{ml}) Y_0(kR(\eta_{ml})) |JAC_A| W_{ml} \frac{1}{\ln \eta_{ml}} \right\} \quad (4.164)$$

com s e s_A variando de 1 até 4; onde $|JAC|$ é o jacobiano e ψ_s as funções de forma em função de ξ , retirados das equações (4.153) e (4.146a) à (4.146d), respectivamente; $|JAC_A|$ é o jacobiano, e ψ_{s_A} as funções de forma em função de η , obtidas através das equações (4.162) e (4.159a) à (4.159d), respectivamente.

ii. Ponto de Colocação no Nó 2

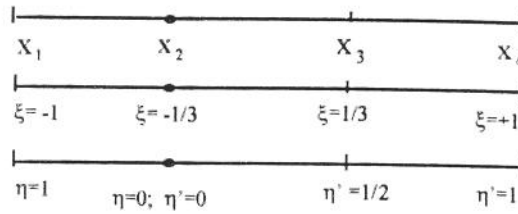


fig. 4.21 - Sistema de coordenadas geométricas
para integração numérica: ponto de
colocação no nó 2

Aqui, as singularidades aparecem nos dois lados dos nós, e a integral é dividida em partes:

$$\begin{aligned}
 g_s^{ii} &= \int_{X_1}^{X_4} \psi_s(X) u^* d\Gamma(X) = \int_{X_1}^{X_4} \psi_s(X) \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kR) d\Gamma(X) = \\
 &= \frac{i}{4} \left\{ \int_{X_1}^{X_4} \psi_s(X) J_0(kR) d\Gamma(X) + \int_{X_1}^{X_4} \psi_s(X) i Y_0(kR) d\Gamma(X) \right\} = \\
 &= \frac{i}{4} \left\{ \int_{X_1}^{X_4} \psi_s(X) J_0(kR) d\Gamma(X) + \int_{X_1}^{X_2} i \psi_s(X) Y_0(kR) d\Gamma(X) + \int_{X_2}^{X_4} i \psi_s(X) Y_0(kR) d\Gamma(X) \right\}
 \end{aligned} \tag{4.165}$$

com $s = 1, 2, 3$ e 4.

Aplicando a transformação de variáveis, chega-se em:

$$g_s^{ii} = \frac{i}{4} \left\{ \int_{-1}^{+1} \psi_s(\xi) J_0(kR(\xi)) |JAC| d\xi + \int_0^{+1} \psi_{s_A}(\eta) i Y_0(KR(\eta)) |JAC_A| d\eta + \right. \\ \left. + \int_0^{+1} \psi_{s_B}(\eta') i Y_0(KR(\eta')) |JAC_B| d\eta' \right. \quad (4.166)$$

A primeira integral do lado direito da eq. (4.166) é resolvida pela fórmula da quadratura gaussiana, por não possuir singularidade e as duas últimas pela fórmula especial logaritmica.

Desenvolvendo, então, a segunda integral do lado direito da eq. (4.166), nova troca de variáveis é feita:

$$\xi = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\eta \quad (4.167)$$

Obtendo, então, as funções de forma em função da nova variável:

$$\psi_{1A} = \frac{1}{16} \left(1 + \frac{1+2\eta}{3} \right) \left\{ -10 + 9 \left[\left(-\frac{1+2\eta}{3} \right)^2 + 1 \right] \right\} = \frac{\eta^3}{6} + \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{1}{3}\eta \quad (4.168a)$$

$$\psi_{2A} = \frac{9}{16} \left\{ 1 - \left(-\frac{1+2\eta}{3} \right)^2 \right\} \left\{ 1 - 3 \left(-\frac{1+2\eta}{3} \right) \right\} = -\frac{\eta^3}{2} - 2\eta^2 + \frac{1}{2}\eta + 1 \quad (4.168b)$$

$$\psi_{3A} = \frac{9}{16} \left\{ 1 - \left(-\frac{1+2\eta}{3} \right)^2 \right\} \left\{ 1 + 3 \left(-\frac{1+2\eta}{3} \right) \right\} = -\eta + \frac{\eta^2}{2} + \frac{\eta^3}{2} \quad (4.168c)$$

$$\psi_{4A} = \frac{1}{16} \left(1 - \frac{1+2\eta}{3} \right) (4\eta + 4\eta^2) = \frac{1}{6}\eta - \frac{1}{6}\eta^3 \quad (4.168d)$$

e também as coordenadas:

$$x_A = \left(\frac{\eta^3}{6} + \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{1}{3}\eta \right) x_1 + \left(-\frac{1}{6}\eta^3 + \frac{1}{6}\eta \right) x_4 + \left(-\frac{\eta^3}{2} - 2\eta^2 + \frac{1}{2}\eta + 1 \right) x_2 + \left(\frac{\eta^3}{2} + \frac{1}{2}\eta^2 - \eta \right) x_3$$

ou seja:

$$x_A = x_3 + \left(\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{6}x_4 + \frac{1}{2}x_2 - x_3 \right) \eta + \left(\frac{1}{2}x_1 - x_2 + \frac{1}{2}x_3 \right) \eta^2 + \left(\frac{1}{6}x_1 - \frac{1}{6}x_4 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \right) \eta^3 \quad (4.169a)$$

analogamente, tem-se

$$y_A = y_3 + \left(\frac{1}{3}y_1 + \frac{1}{6}y_4 + \frac{1}{2}y_2 - y_3 \right) \eta + \left(\frac{1}{2}y_1 - y_2 + \frac{1}{2}y_3 \right) \eta^2 + \left(\frac{1}{6}y_1 - \frac{1}{6}y_4 - \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 \right) \eta^3 \quad (4.169b)$$

e os termos do jacobiano de transformação $|JAC_A|$ (eq. (4.162)):

$$\frac{\partial x_A}{\partial \eta} = \left(\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{6}x_4 + \frac{1}{2}x_2 - x_3 \right) + (x_1 - 2x_2 + x_3) \eta + \left(\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_4 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 \right) \eta^2 \quad (4.170a)$$

e

$$\frac{\partial y_A}{\partial \eta} = \left(\frac{1}{3}y_1 + \frac{1}{6}y_4 + \frac{1}{2}y_2 - y_3 \right) + (y_1 - 2y_2 + y_3) \eta + \left(\frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_4 - \frac{3}{2}y_2 + \frac{3}{2}y_3 \right) \eta^2 \quad (4.170b)$$

Para a terceira integral do lado direito da eq. (4.166), a troca de variáveis é a seguinte:

$$\xi = \frac{4\eta^4 - 1}{3} \quad (4.171)$$

De onde obtém-se as funções de forma:

$$\psi_{1B} = \frac{1}{16} \left(1 - \frac{4\eta'}{3} + \frac{1}{3} \right) \left\{ -10 + 9 \left[\left(\frac{4\eta' - 1}{3} \right)^2 + 1 \right] \right\} = -\frac{2}{3} \eta' + 2\eta'^2 - \frac{4}{3} \eta'^3 \quad (4.172a)$$

$$\psi_{2B} = \frac{9}{16} \left\{ 1 - \left(\frac{4\eta' - 1}{3} \right)^2 \right\} \left\{ 1 - 3 \left(\frac{4\eta' - 1}{3} \right) \right\} = 1 - \eta' - 4\eta'^2 + 4\eta'^3 \quad (4.172b)$$

$$\psi_{3B} = \frac{9}{16} \left\{ 1 - \left(\frac{4\eta' - 1}{3} \right)^2 \right\} \left\{ 1 + 3 \left(\frac{4\eta' - 1}{3} \right) \right\} = 2\eta' + 2\eta'^2 - 4\eta'^3 \quad (4.172c)$$

$$\psi_{4B} = \frac{1}{16} \left(1 + \frac{4\eta'}{3} - \frac{1}{3} \right) (16\eta'^2 - 8\eta') = -\frac{1}{3} \eta' + \frac{4}{3} \eta'^3 \quad (4.172d)$$

e as coordenadas

$$x_B = \left(-\frac{2}{3} \eta' + 2\eta'^2 - \frac{4}{3} \eta'^3 \right) x_1 + \left(-\frac{1}{3} \eta' + \frac{4}{3} \eta'^3 \right) x_4 + (1 - \eta' - 4\eta'^2 + 4\eta'^3) x_2 + (2\eta' + 2\eta'^2 - 4\eta'^3) x_3$$

ou seja,

$$x_B = x_3 + \left(-\frac{2}{3} x_1 - \frac{1}{3} x_4 - x_2 + 2x_3 \right) \eta' + (2x_1 - 4x_2 + 2x_3) \eta'^2 + \left(-\frac{4}{3} x_1 + \frac{4}{3} x_4 + 4x_2 - 4x_3 \right) \eta'^3 \quad (4.173a)$$

e analogamente

$$y_B = y_3 + \left(-\frac{2}{3} y_1 - \frac{1}{3} y_4 - y_2 + 2y_3 \right) \eta' + (2y_1 - 4y_2 + 2y_3) \eta'^2 + \left(-\frac{4}{3} y_1 + \frac{4}{3} y_4 + 4y_2 - 4y_3 \right) \eta'^3 \quad (4.173b)$$

e os termos necessários para o jacobiano de transformação $|JAC_B|$:

$$|JAC_B| = \left\{ \left(\frac{dx_B}{d\xi} \right)^2 + \left(\frac{dy_B}{d\xi} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.174)$$

que são

$$\frac{\partial x_B}{\partial \eta} = \left(-\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_4 - x_2 + 2x_3 \right) + (4x_1 - 8x_2 + 4x_3)\eta' + (-4x_1 + 4x_4 + 12x_2 - 12x_3)\eta'^2 \quad (4.175a)$$

e

$$\frac{\partial x_B}{\partial \eta} = \left(-\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_4 - x_2 + 2x_3 \right) + (4x_1 - 8x_2 + 4x_3)\eta' + (-4x_1 + 4x_4 + 12x_2 - 12x_3)\eta'^2 \quad (4.175b)$$

De posse destas variáveis, reescreve-se a eq. (4.166) como:

$$g_s^{ii} = \frac{i}{4} \left\{ \sum_{m=1}^{nptg} \psi_s(\xi_m) J_0(kR(\xi_m)) |JAC| W_m + \sum_{ml=1}^{nptgl} i \frac{\psi_{s_A}(\eta_{ml}) Y_0(kR(\eta_{ml})) |JAC_A| W_{ml}}{\ln \eta_{mlA}} + \right. \\ \left. + \sum_{ml=1}^{nptgl} \frac{\psi_{s_B}(\eta'_{ml}) Y_0(kR(\eta'_{ml})) |JAC_B| W_{ml}}{\ln \eta_{mlB}} \right\} \quad (4.176)$$

com s_A e s_B variando de 1 à 4.

iii. Ponto de Colocação no Nó 3

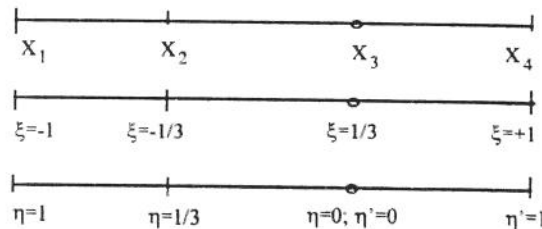


fig. 4.22 - Sistema de coordenadas geométricas
para integração numérica: ponto de
colocação no nó 3

Análogo ao caso onde o ponto de colocação é definido no nó 2, aqui, a singularidade aparece nos dois lados dos nós; sendo, então, a integral dividida da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
g_s^{ii} &= \int_{x_1}^{x_4} \psi_s(X) u^* d\Gamma(X) = \int_{x_1}^{x_4} \psi_s(X) \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kR) d\Gamma(X) = \\
&= \frac{i}{4} \left\{ \int_{x_1}^{x_4} \psi_s(X) J_0(kR) d\Gamma(X) + \int_{x_1}^{x_4} \psi_s(X) i Y_0(kR) d\Gamma(X) \right\} = \\
&= \frac{i}{4} \left\{ \int_{x_1}^{x_4} \psi_s(X) J_0(kR) d\Gamma(X) + \int_{x_1}^{x_3} i \psi_s(X) Y_0(KR) d\Gamma(X) + \int_{x_3}^{x_4} i \psi_s(X) Y_0(kR) d\Gamma(X) \right\}
\end{aligned} \tag{4.177}$$

com $s = 1, 2, 3$ e 4 .

ou seja

$$\begin{aligned}
g_s^{ii} &= \frac{i}{4} \left\{ \int_{-1}^{+1} \psi_s(\xi) J_0(kR(\xi)) |JAC| d\xi + \int_0^{+1} \psi_{s_A}(\eta) i Y_0(KR(\eta)) |JAC_A| d\eta + \right. \\
&\quad \left. + \int_0^{+1} \psi_{s_B}(\eta') i Y_0(KR(\eta')) |JAC_B| d\eta' \right\}
\end{aligned} \tag{4.178}$$

Para a terceira integral do lado direito da eq. (4.178), a relação para a troca de variáveis é feita por:

$$\xi = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \eta' \tag{4.179}$$

com as seguintes funções de forma:

$$\psi_{1B} = \frac{1}{16} \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \eta' \right) \left(-10 + 9 \left(\frac{1 + 4\eta' + 4\eta'^2}{9} + 1 \right) \right) = \frac{1}{6} \eta' - \frac{1}{6} \eta'^3 \tag{4.180a}$$

$$\psi_{3B} = \frac{9}{16} \left[1 - \left(\frac{1+4\eta'+4\eta'^2}{9} \right) \right] \left[1 - 3 \left(\frac{1+2\eta'}{3} \right) \right] = -\eta' + \frac{1}{2}\eta'^2 + \frac{1}{2}\eta'^3 \quad (4.180b)$$

$$\psi_{4B} = \frac{1}{4} (2 - \eta' - \eta'^2) (1 + 1 + 2\eta') = 1 + \frac{1}{2}\eta' - \eta'^2 - \frac{1}{2}\eta'^3 \quad (4.180c)$$

$$\psi_{2B} = \left(\frac{\eta' + \eta'^2}{4} \right) \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\eta' \right) = \frac{1}{3}\eta' + \frac{1}{2}\eta'^2 + \frac{1}{6}\eta'^3 \quad (4.180d)$$

e as coordenadas

$$x_B = \left(\frac{1}{6}\eta' - \frac{1}{6}\eta'^3 \right) x_1 + \left(\frac{1}{3}\eta' + \frac{1}{2}\eta'^2 + \frac{1}{6}\eta'^3 \right) x_4 + \left(-\eta' + \frac{\eta'^2}{2} + \frac{\eta'^3}{2} \right) x_2 + \left(1 + \frac{1}{2}\eta' - \eta'^2 - \frac{1}{2}\eta'^3 \right) x_3$$

ou seja,

$$x_B = x_3 + \left(\frac{1}{6}x_1 - x_2 + \frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{2}x_3 \right) \eta' + \left(\frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_2 - x_3 \right) \eta'^2 + \left(-\frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{6}x_4 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \right) \eta'^3 \quad (4.181a)$$

e analogamente,

$$y_B = y_3 + \left(\frac{1}{6}y_1 - y_2 + \frac{1}{3}y_4 + \frac{1}{2}y_3 \right) \eta' + \left(\frac{1}{2}y_4 + \frac{1}{2}y_2 - y_3 \right) \eta'^2 + \left(-\frac{1}{6}y_1 + \frac{1}{6}y_4 + \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3 \right) \eta'^3 \quad (4.181b)$$

e aos termos do jacobiano da transformação $|JAC_B|$ (eq. (4.174)):

$$\frac{\partial x_B}{\partial \eta} = \left(\frac{1}{6}x_1 - x_2 + \frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{2}x_3 \right) + (x_4 + x_2 - 2x_3)\eta' + \left(-\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{3}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_2 \right) \eta'^2 \quad (4.182a)$$

e

$$\frac{\partial y_B}{\partial \eta} = \left(\frac{1}{6}y_1 - y_2 + \frac{1}{3}y_4 + \frac{1}{2}y_3 \right) + (y_4 + y_2 - 2y_3)\eta' + \left(-\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_4 - \frac{3}{2}y_3 + \frac{3}{2}y_2 \right) \eta'^2 \quad (4.182b)$$

Para a segunda integral do lado direito da eq. (4.178), a transformação das variáveis é a seguinte:

$$\xi = \frac{1}{3} - \frac{4}{3}\eta \quad (4.183)$$

com as seguintes funções de forma:

$$\psi_{1A} = \frac{1}{16} \left[1 - \left(\frac{1}{3} - \frac{4}{3}\eta \right) \right] \left\{ -10 + 9 \left[\left(\frac{1}{3} - \frac{4}{3}\eta \right)^2 + 1 \right] \right\} = -\frac{\eta}{3} + \frac{4}{3}\eta^3 \quad (4.184a)$$

$$\psi_{2A} = \frac{9}{16} \left\{ 1 - \left(\frac{1-8\eta+16\eta^2}{9} \right) \right\} \left[1 - 3 \left(\frac{1-4\eta}{3} \right) \right] = 2\eta + 2\eta^2 - 4\eta^3 \quad (4.184b)$$

$$\psi_{3A} = \frac{9}{16} \left\{ 1 - \left(\frac{1-8\eta+16\eta^2}{9} \right) \right\} \left[1 + 3 \left(\frac{1-4\eta}{3} \right) \right] = 1 - \eta - 4\eta^2 + 4\eta^3 \quad (4.184c)$$

$$\psi_{4A} = \frac{1}{16} \left[1 + \frac{1}{3} - \frac{4}{3}\eta \right] (-8\eta + 16\eta^2) = -\frac{2}{3}\eta + 2\eta^2 - \frac{4}{3}\eta^3 \quad (4.184d)$$

e as coordenadas

$$x_A = \left(-\frac{\eta}{3} + \frac{4}{3}\eta^3 \right) x_1 + \left(-\frac{2}{3}\eta + 2\eta^2 - \frac{4}{3}\eta^3 \right) x_4 + (2\eta + 2\eta^2 - 4\eta^3) x_2 + (1 - \eta - 4\eta^2 + 4\eta^3) x_3$$

ou seja,

$$x_A = x_3 + \left(-\frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_4 + 2x_2 - x_3 \right) \eta + (2x_4 + 2x_2 - 4x_3) \eta^2 + \left(\frac{4}{3}x_1 - \frac{4}{3}x_4 - 4x_2 + 4x_3 \right) \eta^3 \quad (4.185a)$$

e análogo,

$$y_A = y_3 + \left(-\frac{1}{3}y_1 - \frac{2}{3}y_4 + 2y_2 - y_3 \right) \eta + (2y_4 + 2y_2 - 4y_3) \eta^2 + \left(\frac{4}{3}y_1 - \frac{4}{3}y_4 - 4y_2 + 4y_3 \right) \eta^3 \quad (4.185b)$$

e aos termos utilizados para a determinação do jacobiano $|JAC_A|$ (eq. (4.162)):

$$\frac{\partial x_A}{\partial \eta} = \left(-\frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_4 + 2x_2 - x_3 \right) + (4x_4 + 4x^2 - 8x_3)\eta + (4x_1 - 4x_4 - 12x_2 + 12x_3)\eta^2 \quad (4.186a)$$

e

$$\frac{\partial y_A}{\partial \eta} = \left(-\frac{1}{3}y_1 - \frac{2}{3}y_4 + 2y_2 - y_3 \right) + (4y_4 + 4y^2 - 8y_3)\eta + (4y_1 - 4y_4 - 12y_2 + 12y_3)\eta^2 \quad (4.186b)$$

A primeira integral da equação (4.178), que não apresenta singularidades, é resolvida normalmente pela regra da quadratura gaussiana, e as duas últimas pela regra especial logarítmica, como segue:

$$GW = \frac{i}{4} \left\{ \sum_{m=1}^{nptg} \psi_s(\xi_m) J_0(kR(\xi_m)) |JAC| W_m + \sum_{ml=1}^{nptgl} \frac{\psi_{sA}(\eta_{ml}) i Y_0(kR(\eta_{ml})) |JAC_A| W_{ml}}{\ln \eta_{mlA}} + \right. \\ \left. + \sum_{ml=1}^{nptgl} i \frac{\psi_{sB}(\eta'_{ml}) Y_0(kR(\eta'_{ml})) |JAC_B| W_{ml}}{\ln \eta_{mlB}} \right\} \quad (4.187)$$

iv. Ponto de Colocação no Nó 4

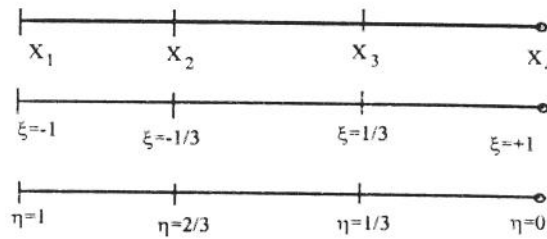


fig. 4.23 - Sistema de coordenadas geométricas
para integração numérica: ponto
de colocação no nó 4

A integral que representa a matriz $\mathbf{G}$ é dividida da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 g_s^{ii} &= \int_{x_1}^{x_4} \psi_s(X) u^* d\xi(X) = \int_{x_1}^{x_4} \psi_s(X) \frac{i}{4} H_0^I(kR) d\Gamma(X) = \\
 &= \frac{i}{4} \left\{ \int_{x_1}^{x_4} \psi_s(X) J_0(kR) d\Gamma(X) + \int_{x_1}^{x_4} i \psi_s(X) Y_0(kR) d\Gamma(X) \right\} \quad (4.188)
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$g_s^{ii} = \frac{i}{4} \left\{ \int_{-1}^{+1} \psi_s(\xi) J_0(kR(\xi)) |JAC| d\xi + \int_0^{+1} i \psi_{s_A}(\eta) Y_0(kR(\eta)) |JAC_A| d\eta \right\} \quad (4.189)$$

Para a segunda integral da equação (4.189), é feita a seguinte transformação de variáveis:

$$\xi = 1 - 2\eta \quad (4.190)$$

com as seguintes funções de forma:

$$\psi_{1A} = \frac{1}{16} (1 - 1 + 2\eta) \{-10 + 9(1 - 4\eta + 4\eta^2 + 1)\} = \eta - \frac{9}{2}\eta^2 + \frac{9}{2}\eta^3 \quad (4.191a)$$

$$\psi_{3A} = \frac{9}{16} (1 - 1 + 4\eta - 4\eta^2) \{1 - 3(1 - 2\eta)\} = -\frac{9}{2}\eta + 18\eta^2 - \frac{27}{2}\eta^3 \quad (4.191b)$$

$$\psi_{4A} = \left(\frac{9}{2}\eta - \frac{9}{2}\eta^2 \right) (1 + 3 - 6\eta) = 9\eta - \frac{45}{2}\eta^2 + \frac{27}{2}\eta^3 \quad (4.191c)$$

$$\psi_{2A} = \frac{1}{16} \{1 + 1 - 2\eta\} \{8 - 36\eta + 36\eta^2\} = 1 - \frac{11}{2}\eta + 9\eta^2 - \frac{9}{2}\eta^3 \quad (4.191d)$$

e as coordenadas

$$x_A = \left(\eta - \frac{9}{2}\eta^2 + \frac{9}{2}\eta^3 \right) x_1 + \left(1 - \frac{11}{2}\eta + 9\eta^2 - \frac{9}{2}\eta^3 \right) x_4 + \left(-\frac{9}{2}\eta + 18\eta^2 - \frac{27}{2}\eta^3 \right) x_2 + \\ + \left(9\eta - \frac{45}{2}\eta^2 + \frac{27}{2}\eta^3 \right) x_3$$

ou seja,

$$x_A = x_4 + \left(x_1 - \frac{11}{2}x_4 - \frac{9}{2}x_2 + 9x_3 \right) \eta + \left(-\frac{9}{2}x_1 - \frac{45}{2}x_3 + 18x_2 + 9x_4 \right) \eta^2 + \\ + \left(\frac{9}{2}x_1 - \frac{9}{2}x_4 - \frac{27}{2}x_3 + \frac{27}{2}x_3 \right) \eta^3 \quad (4.192a)$$

e

$$y_A = y_4 + \left(y_1 - \frac{11}{2}y_4 - \frac{9}{2}y_2 + 9y_3 \right) \eta + \left(-\frac{9}{2}y_1 - \frac{45}{2}y_3 + 18y_2 + 9y_4 \right) \eta^2 + \\ + \left(\frac{9}{2}y_1 - \frac{9}{2}y_4 - \frac{27}{2}y_3 + \frac{27}{2}y_3 \right) \eta^3 \quad (4.192b)$$

e também os termos para o jacobiano de transformação $|JAC_A|$ (eq. (4.162)):

$$\frac{\partial x_A}{\partial \eta} = \left(x_1 - \frac{11}{2}x_4 - \frac{9}{2}x_2 + 9x_3 \right) + (-9x_1 + 18x_4 + 36x_2 - 45x_3)\eta + \\ + \left(\frac{27}{2}x_1 - \frac{27}{2}x_4 - \frac{81}{2}x_2 + \frac{81}{2}x_3 \right) \eta^2 \quad (4.193a)$$

$$\frac{\partial y_A}{\partial \eta} = \left(y_1 - \frac{11}{2}y_4 - \frac{9}{2}y_2 + 9y_3 \right) + (-9y_1 + 18y_4 + 36y_2 - 45y_3)\eta +$$

$$+\left(\frac{27}{2}y_1 - \frac{27}{2}y_4 - \frac{81}{2}y_2 + \frac{81}{2}y_3\right)\eta^2 \quad (4.193b)$$

Assim, resolve-se a primeira integral da equação (4.189) pela fórmula da quadratura gaussiana e a última pela fórmula especial logarítmica, como segue:

$$g_s'' = \frac{i}{4} \left\{ \sum_{m=1}^{nptg} \psi_s(\xi_m) J_0(kR(\xi_m)) |JAC| W_m + \sum_{ml=1}^{nptgl} i \frac{\psi_{s_A}(\eta_{ml}) Y_0(kR(\eta_{ml})) |JAC_A| W_{ml}}{\ln \eta_{ml}} \right\} \quad (4.194)$$

onde s e s_A variando de 1 até 4.

4.2.4.4. Resultados

Os resultados, aqui apresentados, possuem as mesmas considerações já feitas para os elementos constantes, lineares e quadráticos.

A discretização do contorno foi feita em 8,16 e 64 elementos. Os resultados são comparados com a solução analítica e apresentados no gráfico da fig. (4.24), onde o eixo x representa a frequência normalizada pelo raio do cilindro, e y o módulo do potencial de velocidade. Para a integração numérica foram utilizados 10 pontos de Gauss, como nos elementos constantes, lineares e quadráticos. Este número foi escolhido após uma investigação dos resultados utilizando-se um número variado de pontos de Gauss para o raio de integração (apêndice B).

O gráfico da fig. (4.25) mostrado logo a seguir, representa o intervalo onde ocorre a primeira não unicidade do gráfico da fig. (4.24).

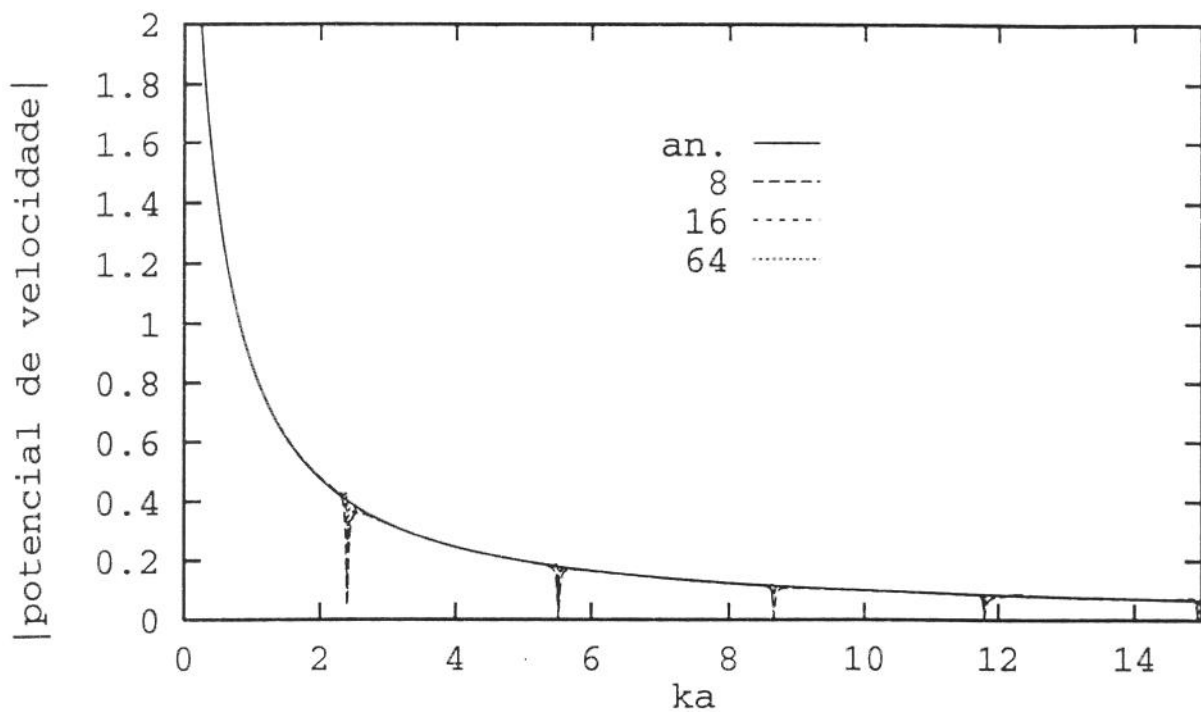


Figura 4.24 - Potencial de velocidade de radiação (analítico e numérico) de um cilindro pulsante de raio $a=1.0$, para 8, 16 e 64 elementos (elementos cúbicos)

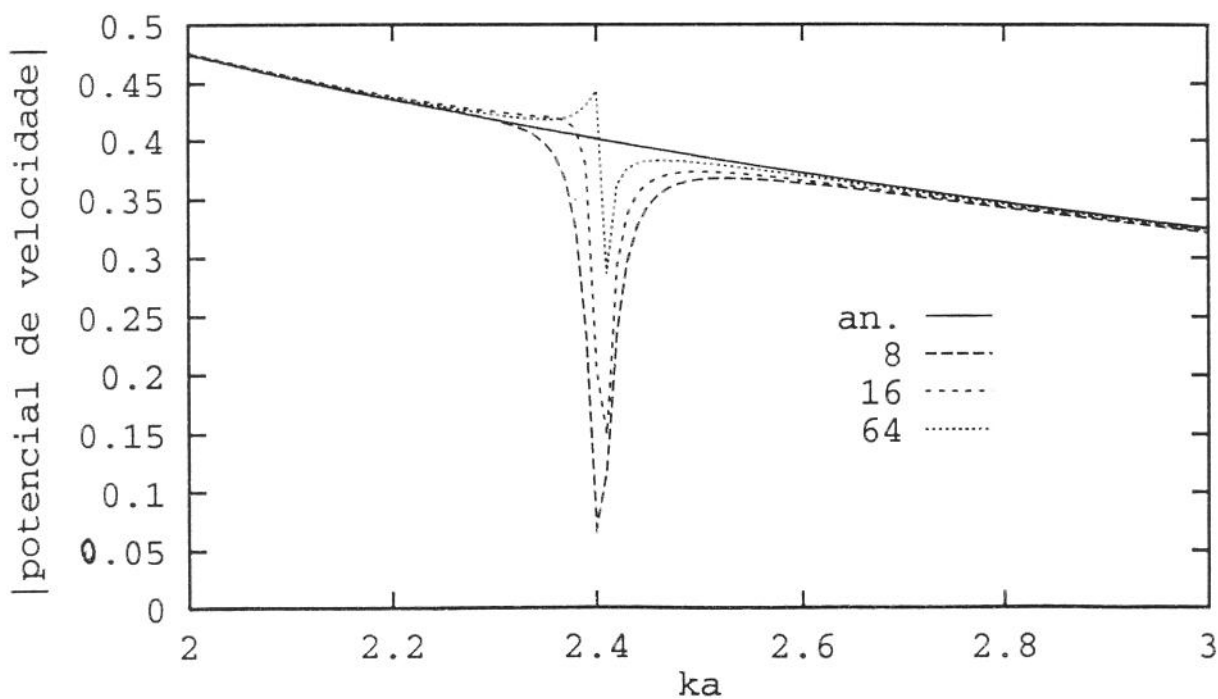


Figura 4.25- Potencial de velocidade de radiação (analítico e numérico) de um cilindro pulsante de raio $a=1.0$, para 8, 16 e 64 elementos (elementos cúbicos)

4.3. Pontos Internos

Desde que todos os valores do potencial de velocidade do contorno são conhecidos, é possível calcular o valor do potencial de velocidade, em qualquer ponto interno ao domínio, utilizando a eq. (3.24) com $c(P)=1.0$. O processo é somente de integração numérica, pois a solução fundamental que atua no ponto P , e todos os valores de u^* e de ϕ já são conhecidos; a discretização utilizada é a mesma para as integrais de contorno, ou seja:

$$\phi(P) = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j - \sum_{j=1}^N \hat{H}_{ij} \phi_j + \phi^I \quad (4.195)$$

onde N representa o número de elementos da discretização do contorno.

O potencial de velocidade, nos pontos internos ao domínio Ω , foi investigado considerando-se um cilindro de raio unitário. Os gráficos apresentados nas figuras (4.26), (4.27), (4.28) e (4.29) mostram os resultados obtidos para os pontos internos ao domínio e próximos do contorno, utilizando implementações por elementos isoparamétricos constantes, lineares, quadráticos e cúbicos, respectivamente. Os gráficos das figuras (4.30) e (4.31) mostram, respectivamente, comparações entre os diferentes tipos de implementação para pontos do domínio próximos e distantes do contorno, sendo utilizados 18 nós. Em todos esses gráficos foram utilizados um número de onda $k = 0.6$ e 10 pontos de Gauss para a integração numérica. É interessante notar que a acuidade dos pontos pertencentes ao domínio vai diminuindo conforme os mesmos se aproximam do contorno. Este fato ocorre devido ao raio da distância entre esses pontos e os pertencentes aos elementos de discretização do contorno tender à zero, causando problemas com a solução fundamental do problema. Para manter a acuidade, é necessário, então, aumentar o número de elementos de discretização, quando na sua proximidade. Os gráficos apresentados nas figuras (4.32) à (4.37) mostram os mesmos casos que os das figuras (4.26) à (4.31), só que com um número de ondas $k=5.0$.

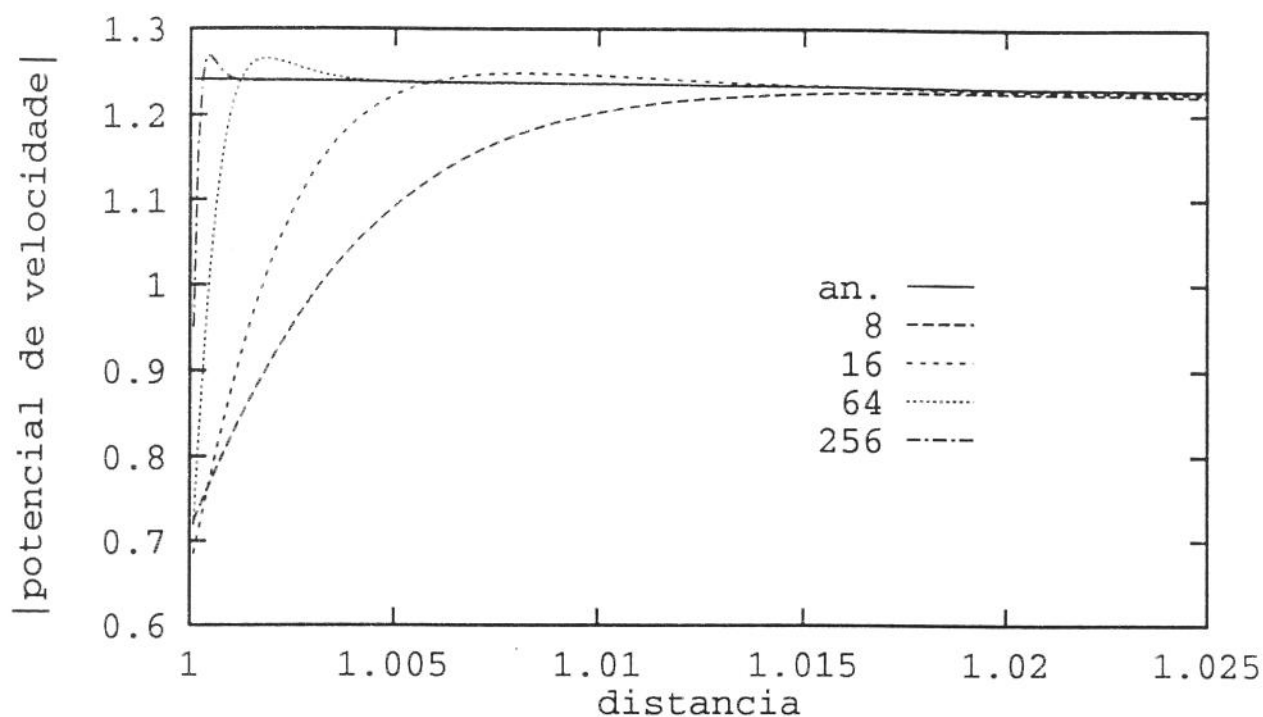


Figura 4.26 - Potencial de velocidade para radiação de ondas de um cilindro de raio $a=1.0$ e para $k=0.6$ (elementos constantes)

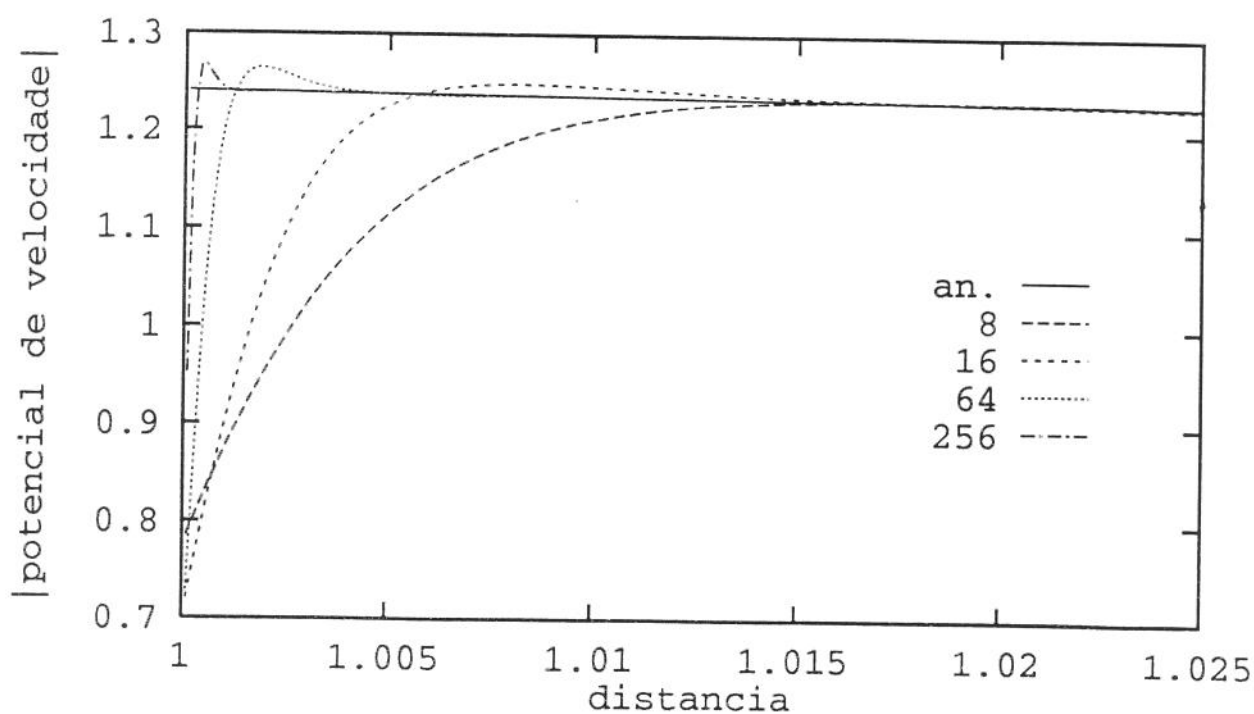


Figura 4.27 - Potencial de velocidade para radiação de ondas de um cilindro de raio $a=1.0$ e para $k=0.6$ (elementos lineares)

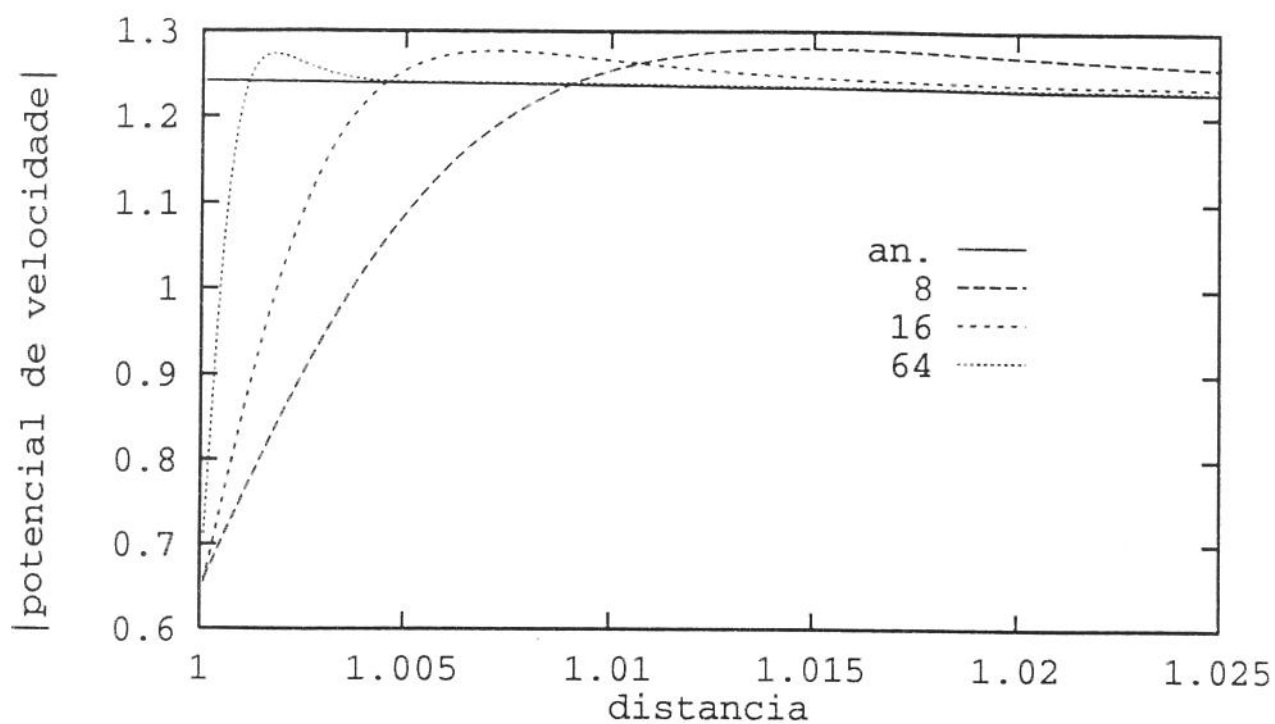


Figura 4.28 - Potencial de velocidade para radiação de ondas de um cilindro de raio $a=1.0$ e para $k=0.6$ (elementos quadráticos)

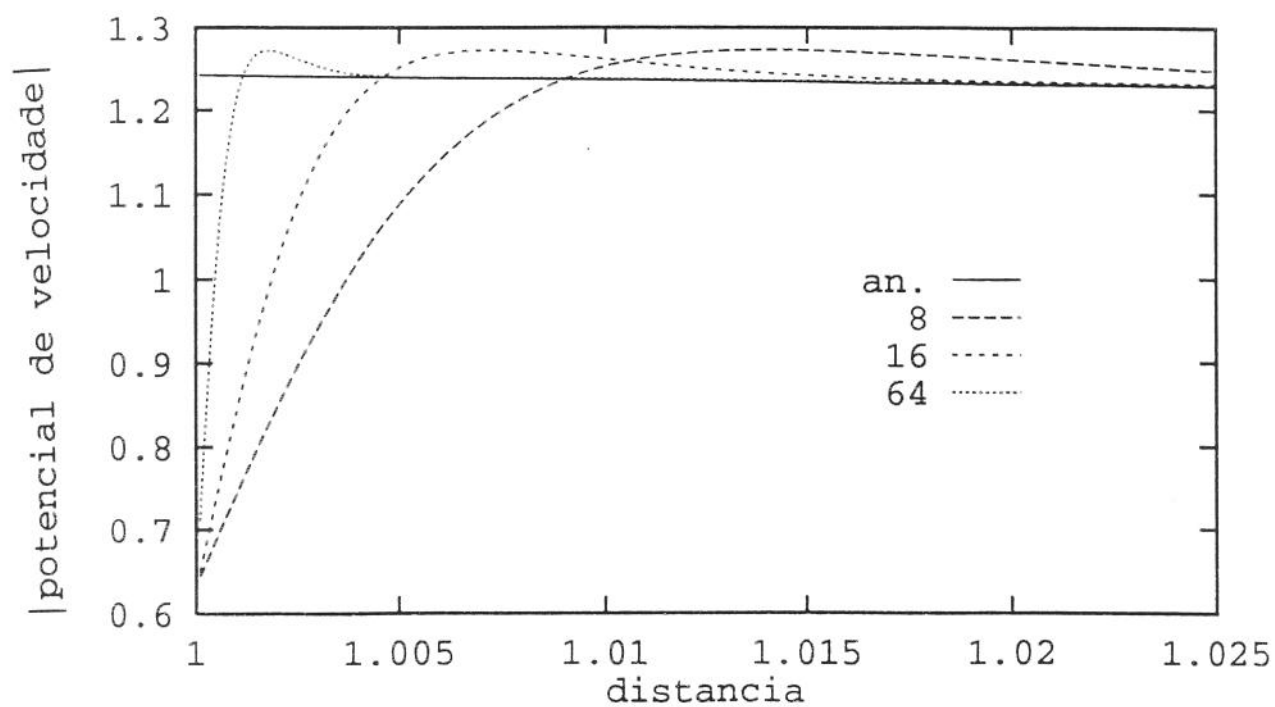


Figura 4.29 - Potencial de velocidade para radiação de ondas de um cilindro de raio $a=1.0$ e para $k=0.6$ (elementos cúbicos)

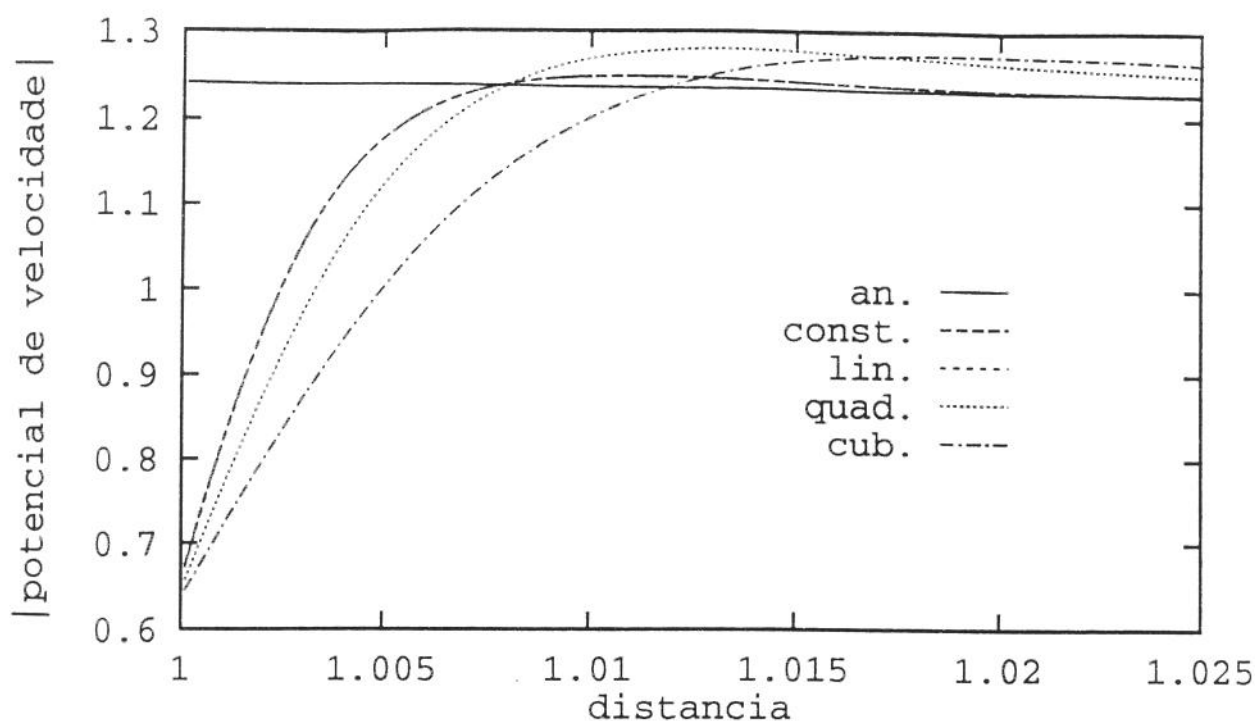


Figura 4.30 - Potencial de velocidade para radiação de ondas de um cilindro de raio $a=1.0$ e $k=0.6$. Comparação entre resultados obtidos através da implementação por elementos constantes, lineares, quadráticos e cúbicos (18 nós)

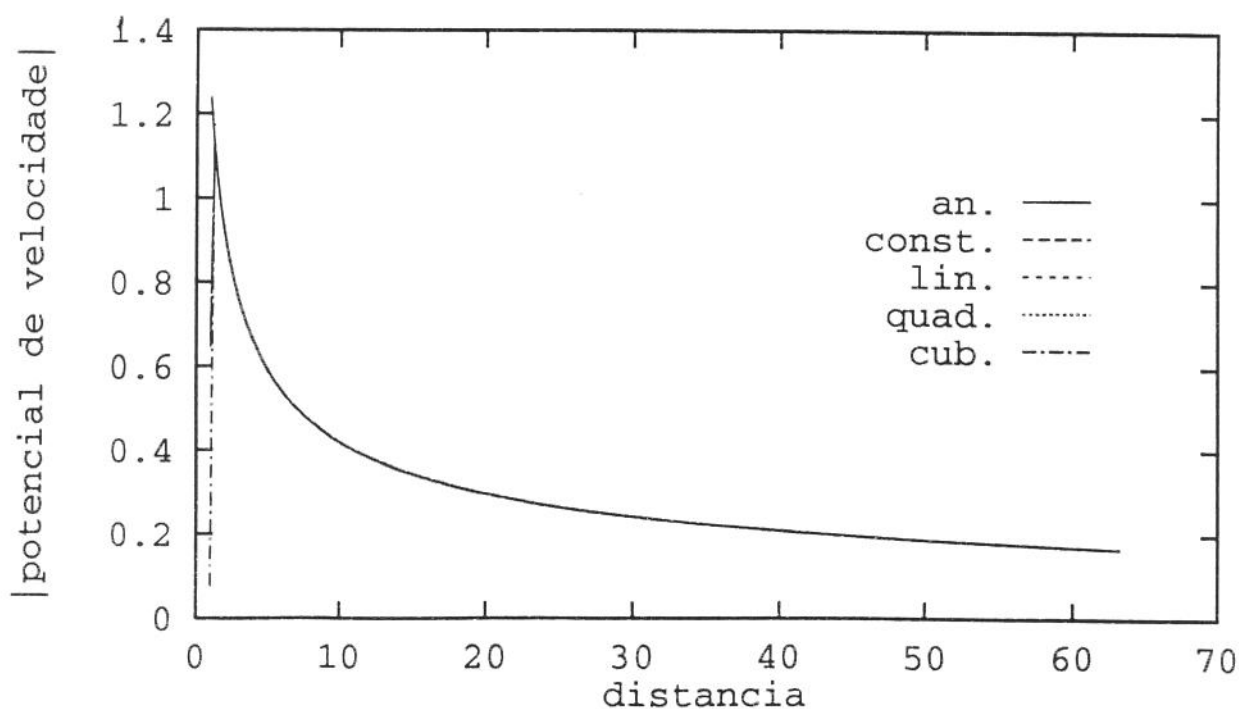


Figura 4.31 - Potencial de velocidade para radiação de ondas de um cilindro de raio $a=1.0$ e $k=0.6$. Comparação entre resultados obtidos através da implementação por elementos constantes, lineares, quadráticos e cúbicos (18 nós)

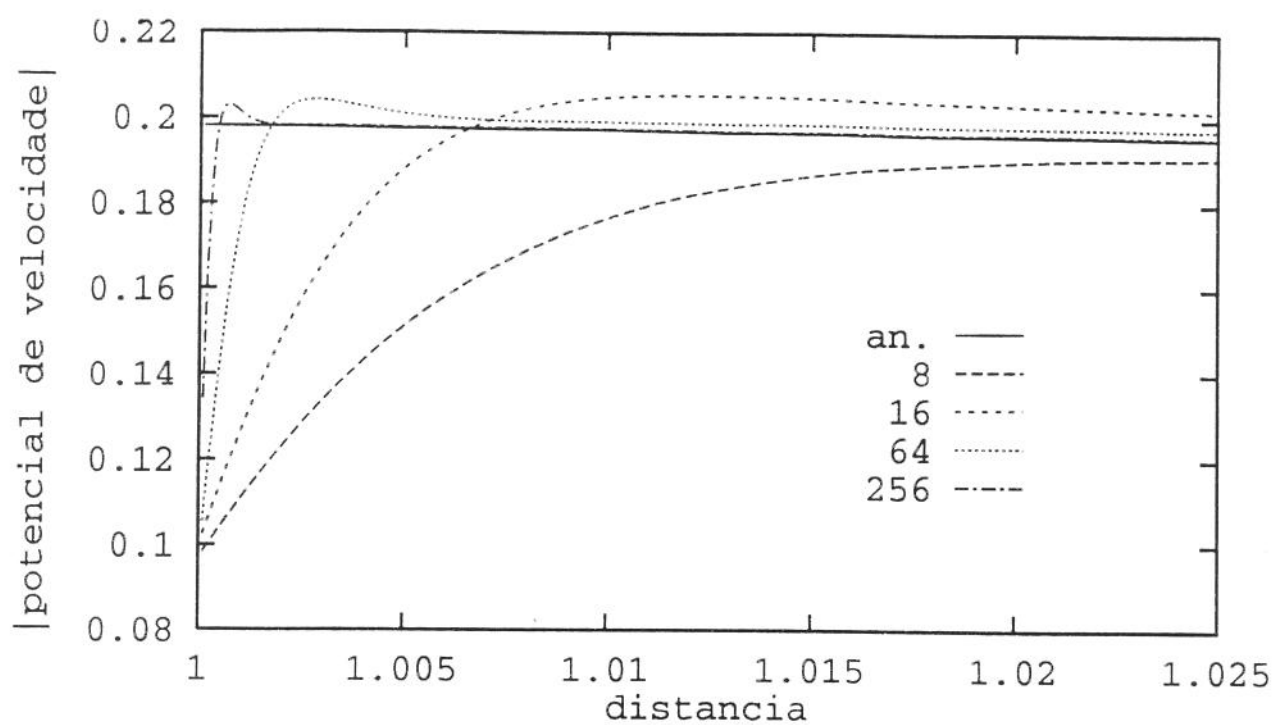


Figura 4.32 - Potencial de velocidade para radiação de ondas de um cilindro circular de raio $a=1.0$ e para $k=5.0$ (elementos constantes)

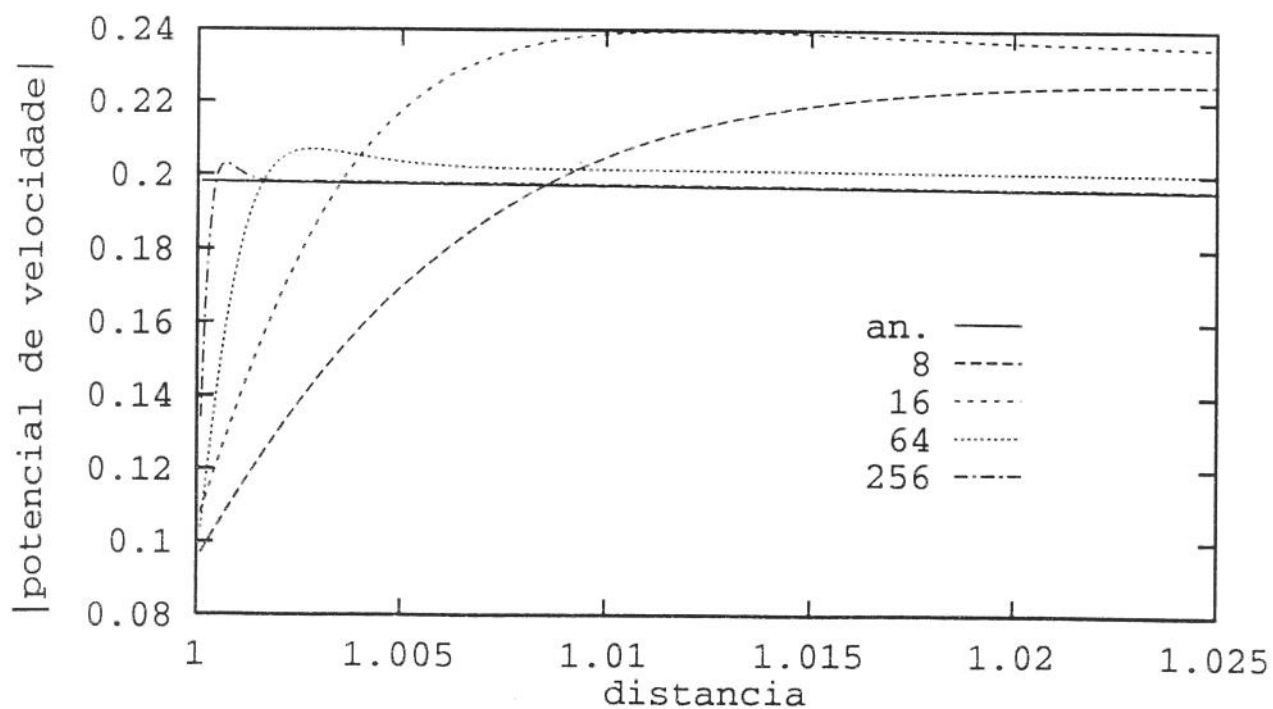


Figura 4.33 - Potencial de velocidade para radiação de ondas de um cilindro circular de raio $a=1.0$ e para $k=5.0$ (elementos lineares)

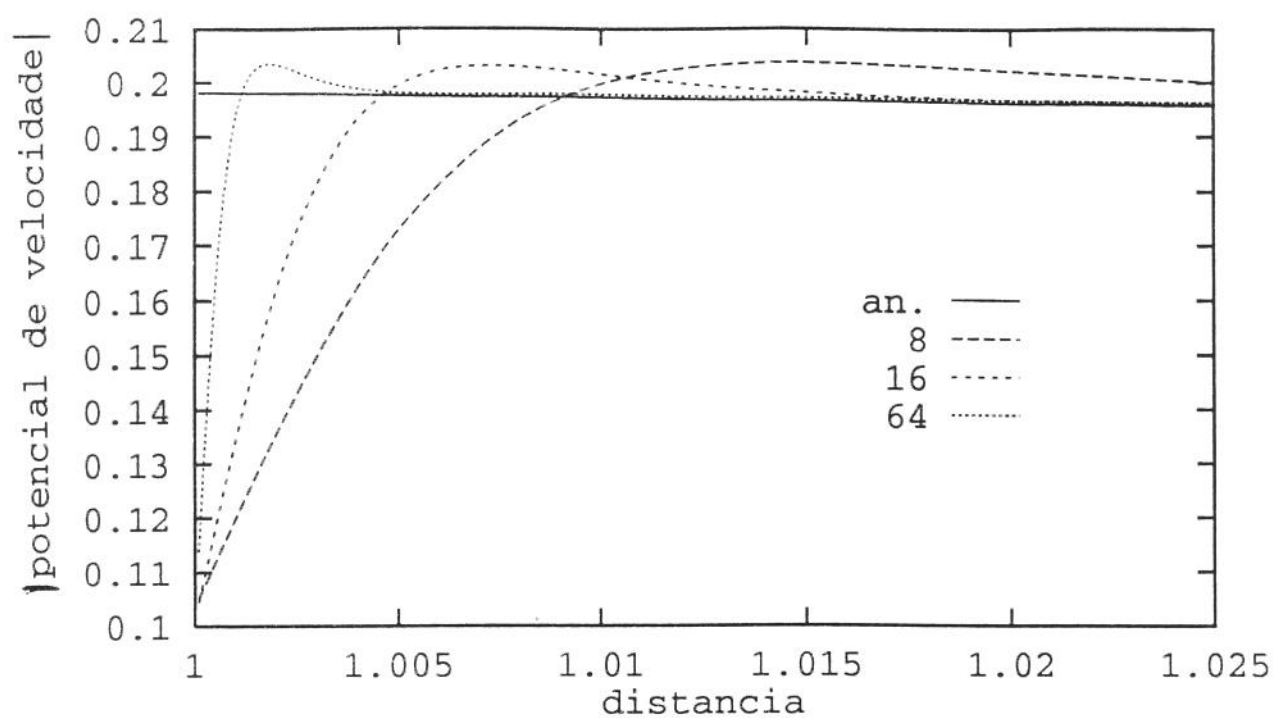


Figura 4.34 - Potencial de velocidade para radiação de ondas de um cilindro circular de raio $a=1.0$ e para $k=5.0$ (elementos quadráticos)

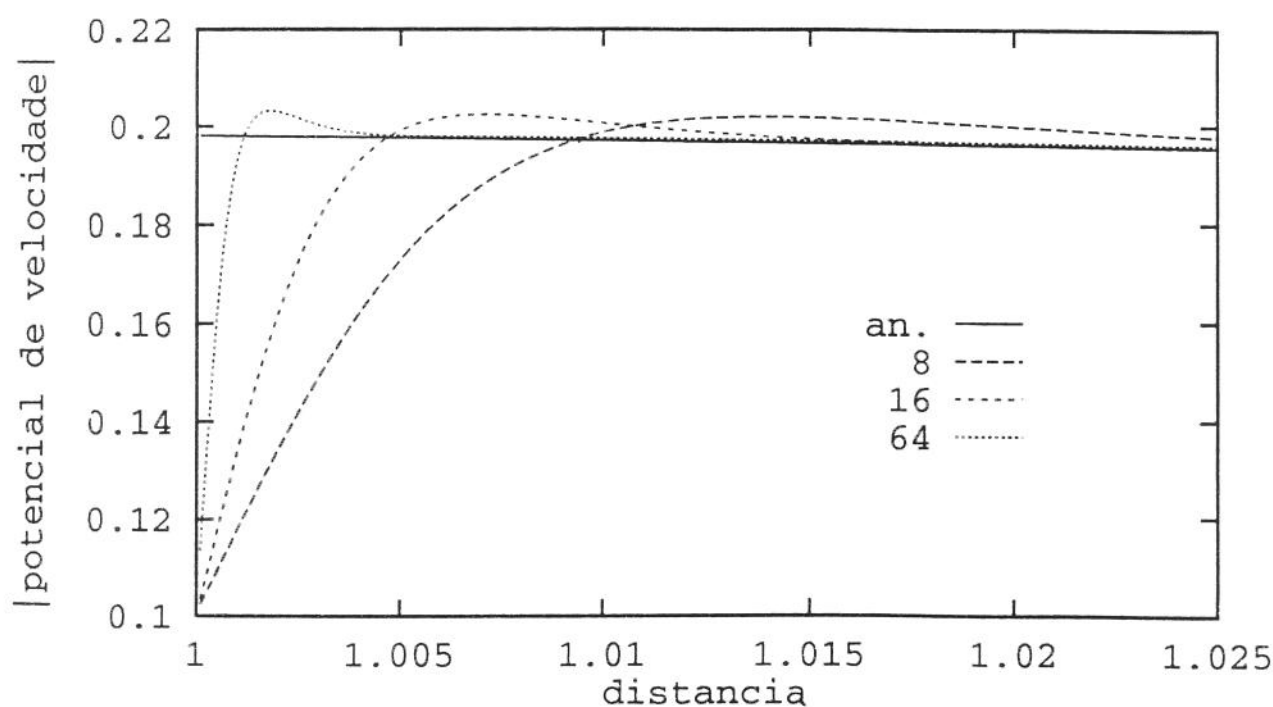


Figura 4.35 - Potencial de velocidade para radiação de ondas de um cilindro circular de raio $a=1.0$ e para $k=5.0$ (elementos cúbicos)

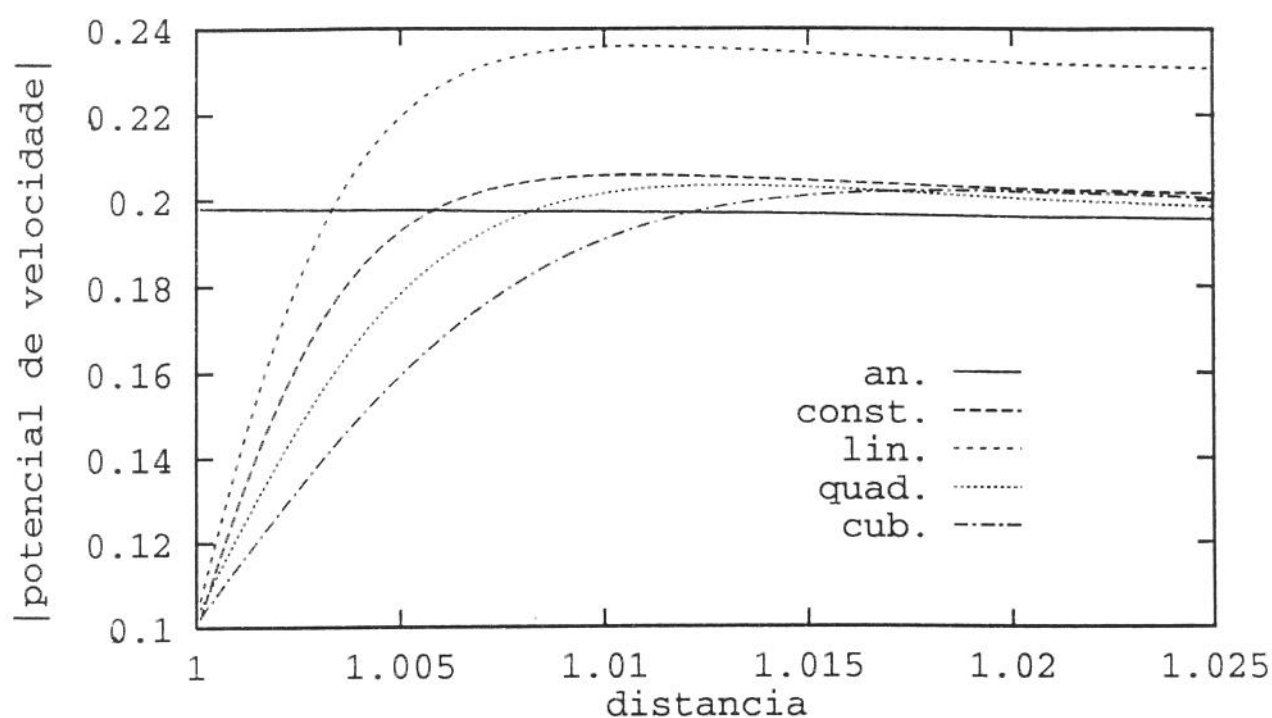


Figura 4.36 - Potencial de velocidade para radiação de ondas de um cilindro de raio $a=1.0$ e $k=5.0$. Comparação entre resultados obtidos através da implementação por elementos constantes, lineares, quadráticos e cúbicos (18 nós)

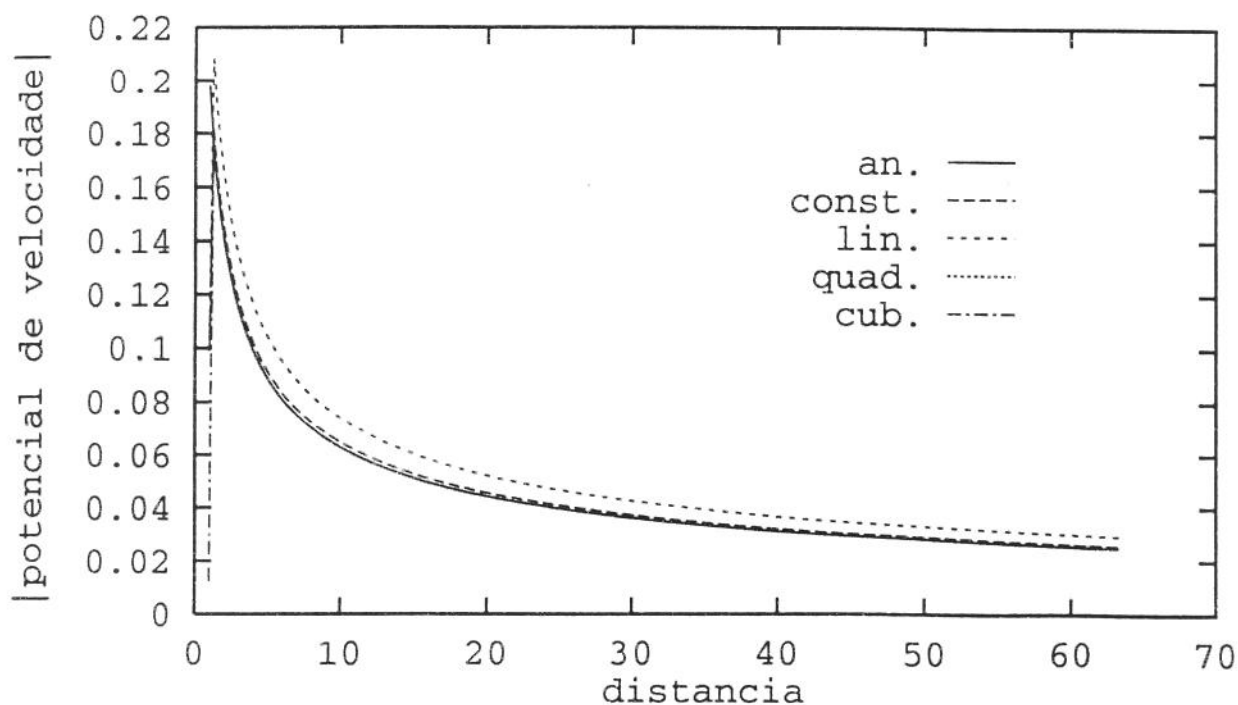


Figura 4.37 - Potencial de velocidade para radiação de ondas de um cilindro de raio $a=1.0$ e $k=5.0$. Comparação entre resultados obtidos através da implementação por elementos constantes, lineares, quadráticos e cúbicos (18 nós)

4.4. O Problema da Não Unicidade

4.4.1. Aspectos Gerais

A solução dos problemas de valor de contorno para radiação e dispersão acústica é única para todos os valores do número de onda k . No entanto, quando o problema de valor de contorno exterior é reformulado nos termos de uma equação integral de contorno, a solução quando o ponto P está sobre Γ (fig. 3.2) não é única em infinitos valores discretos de k associados com os modos próprios do problema de interior conjugado. Este problema foi bem relatado por [Schenck, 1968], [Chertock, 1971] e [Kleinman, 1974]. Os valores de k , nas quais a solução dos problemas exteriores não são únicos são chamados números de ondas característicos, k_n , os quais dependem do tipo de equação integral de contorno usado, a forma do corpo e o tipo de dados de contorno prescrito sobre Γ . Para problemas de valor de contorno de Neumann (Dirichlet) exterior à B , as frequências características são frequências de ressonância (ou autofrequências) dos problemas de interior de Dirichlet. Para entender isto, considera-se a situação mostrada na fig. 4.38. Na parte (a) da figura, é descrito um problema interior com condições de contorno com potencial de velocidade zero. As soluções para este problema podem ser encontradas para certos valores (auto valores) de k . Estas soluções são referentes aos modos próprios, os quais satisfazem a equação integral de Helmholtz no contorno do problema. A fig. 4.38(b) descreve a solução do problema exterior associado com a mesma forma e condições de contorno com potencial de velocidade zero. A amplitude da distribuição do potencial ilustrada na fig. 4.38(b) decai na direção radial, representando a solução com o mesmo comprimento de onda da solução do modo próprio, mas de uma outra maneira bastante diferente. É óbvio que tal solução não é única. Para ver isto, considera-se uma segunda solução para o problema exterior, o qual é feito através da primeira solução exterior adicionada ao múltiplo da solução do modo próprio do problema interior. Qualquer dessas soluções também satisfazem a equação integral de contorno e então devem ser aceitas. Esta não unicidade é puramente um problema matemático (característica associada com a formulação da equação integral de contorno), não existindo significado físico.

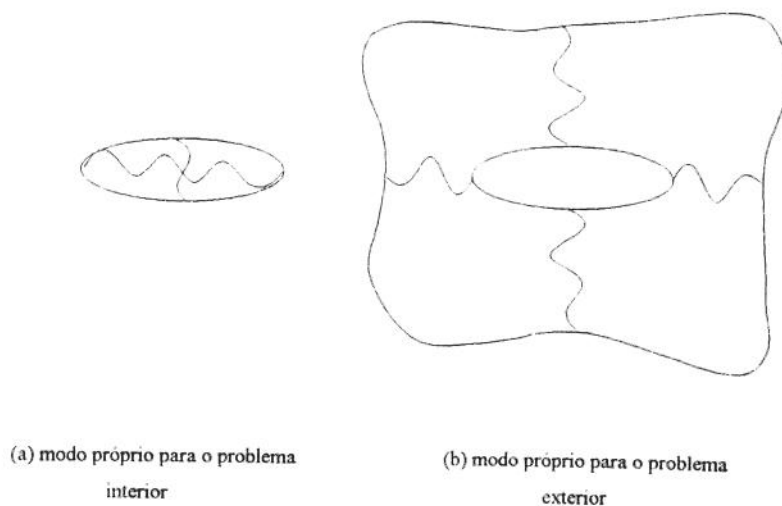


Figura 4.38 -Solução do problema interior e exterior

Devido ao fato da densidade espectral de k_n aumentar com a frequência, geralmente não é possível interpolar entre regiões onde a solução possui acuidade para obter uma estimativa da solução de k_n . Mas, Chertok [1970] enfatiza que a alta frequência não é necessária para resolver uma equação integral, pois o potencial de velocidade pode ser encontrado através da derivada normal de uma das várias aproximações de alta frequência. Estas aproximações foram feitas por [Fairweather, 1984] e [Ciskowski, 1991] para resolver problemas de radiação. Então qualquer método para resolver a não unicidade necessita apenas ter sucesso no limite dos números de ondas onde as técnicas de alta frequência não são apropriadas.

A escolha de um método apropriado depende grandemente da preferência pessoal e situação individual. Existem muitos métodos propostos para tentar sanar os problemas da dificuldade das autofrequências fictícias, onde alguns dos mais conhecidos são: o método da super determinação (*overdetermination*) externa de Piaszczyk e Klosner [1984]; o método do núcleo modificado de Ursell [1973] e Jones [1974]; a combinação linear da equação integral de contorno de Helmholtz e a equação integral de contorno da derivada normal hipersingular de Burton e Miller [1971], onde a maior dificuldade é que a derivada normal da equação integral de Helmholtz envolver uma integral com hiper-singularidade, o método HGF (Helmholtz Gradient Formulation) de Meyer *et al.* [1978, 1979], onde uma nova equação integral é

formada adicionando à Equação Integral de Helmholtz uma segunda integral formada pelo gradiente da sua normal. No entanto, estes métodos são freqüentemente difíceis de se implementar ou são ineficientes computacionalmente.

Neste trabalho, adota-se o método CHIEF (Combined Helmholtz Integral Equation Formulation), apresentado por Schenck [1968] para resolver o problema de não unicidade. A escolha deste método deve-se ao fato de sua implementação ser simples. Para sanar este problema de não unicidade para problemas externos, a estratégia de solução é considerar a equação integral de Helmholtz (eq. 3.23), com pontos dentro do corpo ($c(P)=0$), como uma condição que deve ser satisfeita ao longo da superfície. Os pontos internos usados na formulação do CHIEF são chamados de pontos de CHIEF. No entanto, quando um ponto CHIEF coincide com uma superfície nodal do problema interior, o método falha. Normalmente, é necessário apenas poucos pontos CHIEF para inserir unicidade de solução nas frequências características. O grande problema é como selecionar bons pontos CHIEF, pois as frequências características e as superfícies nodais não são conhecidas antes de resolver o problema interior. O problema torna-se mais difícil pelo fato que as frequências crescem com as autofrequências, e a superfície nodal do problema interno torna-se um espaço fechado. A prática usual é usar pontos CHIEF para todas as frequências e aumentar o número quando a frequência aumenta.

4.4.2. Formulação do CHIEF

O método CHIEF é baseado na equação integral de Helmholtz (eq. 3.23):

$$c(P) \phi(P) = \int_{\Gamma} \left(-\phi(Q) \frac{\partial u^*}{\partial \nu}(P, Q) + u^*(P, Q) \frac{\partial \phi}{\partial \nu}(Q) \right) d\Gamma(Q) \quad (4.196)$$

para o meio acústico Ω , exterior ao corpo finito B , com superfície Γ (fig. 3.1.); onde $Q \subset \Gamma$ e P pode estar em B , Ω ou em Γ (fig. 3.2).

A eq. (4.196) é usada com pontos dentro do corpo ($c(P)=0$), como uma restrição que deve ser satisfeita ao longo da superfície.

Sendo P um ponto CHIEF em B, tem-se que

$$\int_{\Gamma} \left(\phi(Q) \frac{\partial u^*}{\partial \nu}(P, Q) - u^*(P, Q) \frac{\partial \phi}{\partial \nu}(Q) \right) d\Gamma(Q) = 0 \quad (4.197)$$

A não unicidade se manifesta numericamente produzindo uma matriz de coeficientes quase singular para valores de k nas vizinhanças de k_n . Isto causa o mau condicionamento nas vizinhanças de k_n e nas equações do sistema algébrico resultante; mas, mesmo assim é melhor que a não unicidade nos valores discretos de $k = k_n$, que causam problemas práticos associados com a não unicidade.

Este método envolve um aumento do sistema de equações resultante do MEC com um número de equação adicional. Essencialmente, estas equações adicionais não permitem falhas na solução real nos modos próprios, forçando a solução resultante ser zero nos pontos CHIEF. Assim, o sistema $N \times N$ de equações, resultante da eq. (4.196) para P sobre Γ , é aumentado por k equações, representando P em B, para o qual o lado esquerdo da eq. (4.197) é zero.

O sistema $(N+K) \times N$ pode ser resolvido pelo processo dos mínimos quadrados. (apêndice C).

A não unicidade é esperada para ocorrer quando o número de onda coincide com qualquer das autofrequências do problema interior de Dirichlet.

Para o cilindro tratado nos exemplos anteriores, as autofrequências k_n são os zeros das funções esféricas de Bessel.

Já foi mencionado que o método CHIEF falha quando o ponto CHIEF coincide com a superfície nodal do modo correspondente às autofrequências interiores K_n .

Assim um bom ponto CHIEF é aquele que não coincide com a superfície nodal do modo correspondentes às autofrequências interiores, enquanto os maus pontos CHIEF são aqueles que coincidem.

É bastante importante salientar [Seybert, 1987] que um ponto bom de CHIEF é suficiente para obter acuidade nos resultados. Muitos pontos ruins não aproximam tão bem como quando pelo menos um ponto bom é usado. Schenck [1968] diz que um bom ponto pode se tornar ruim se a superfície nodal for bastante fechada.

O número de condicionamento de uma matriz de coeficientes de um sistema algébrico resultante da implementação numérica da eq. (4.196) serve como medida para o erro da solução [Seybert, 1987]. Se a solução é um erro devido ao mau condicionamento para uma matriz de coeficientes, então o número de condicionamento será alto (para uma matriz perfeitamente condicionada tem o número de condição unitário). No entanto, a recíproca não é obrigatoriamente verdadeira, pois quando pontos bons e ruins são usados simultaneamente, por exemplo, causam um alto número de condicionamento causando a falsa indicação do erro da solução.

A não unicidade causa um erro na solução sobre a superfície do corpo, o potencial de velocidade exterior ao corpo também será um erro porque a solução nos pontos exteriores é calculado através dos dados do contorno. Os resultados obtidos do potencial de velocidade do ponto P localizado dentro do corpo deve ser zero. Uma boa solução é acompanhada por um valor relativamente pequeno para o potencial interno; e quando o potencial interno é alto, existe erro na solução. O potencial interno, juntamente com o número de condicionamento, representam uma boa indicativa de erro na solução.

4.4.3. Resultados

Nesta seção, aplica-se o método CHIEF para todos os problemas anteriormente apresentados, sob as mesmas considerações sobre condições de contorno e número de pontos de Gauss utilizados.

Os gráficos das figuras (4.39) e (4.40) mostram os resultados do CHIEF para a determinação do potencial de velocidade para radiação de ondas acústicas, através da implementação dos elementos constantes, onde o contorno foi discretizado em 8, 16, 64 e 256 elementos. Nesses gráficos foi utilizado apenas um ponto CHIEF localizado no centro do cilindro. Os gráficos das figuras (4.41) e (4.42) mostram a mesma análise para a implementação por elementos lineares. Por fim, os gráficos das figuras (4.43) à (4.44) e (4.45) à (4.46) mostram a implementação para 8, 16 e 64 elementos para os elementos quadráticos e cúbicos, respectivamente.

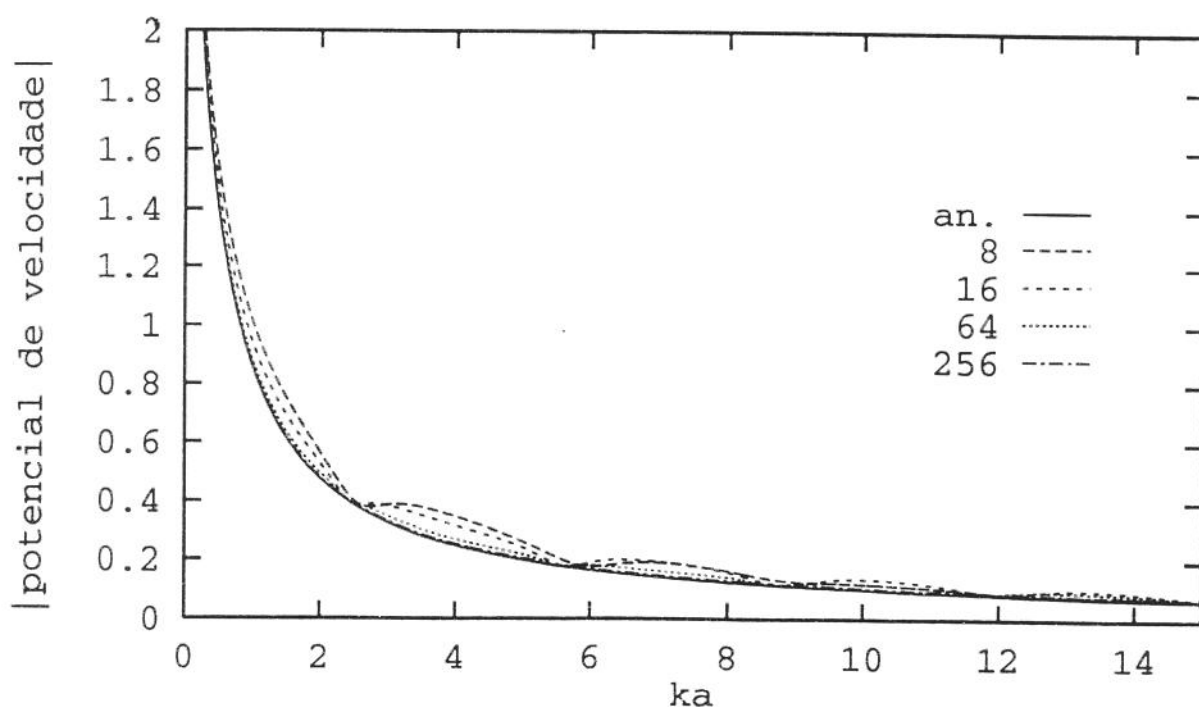


Figura 4.39 - Potencial de velocidade para radiação de ondas de um cilindro circular de raio $a=1.0$ e para 8, 16, 64 e 256 elementos (elementos constantes) após a aplicação do método CHIEF

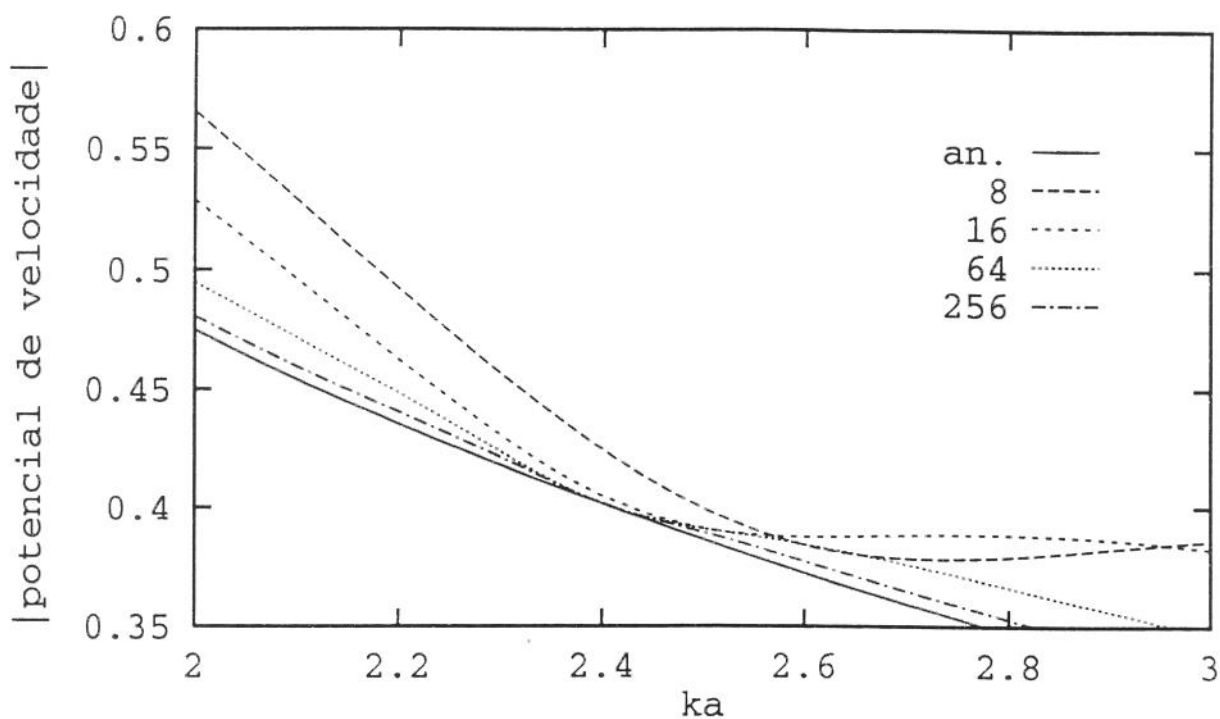


Figura 4.40 - Potencial de velocidade para radiação de ondas de um cilindro de raio $a=1.0$ e para 8, 16, 64 e 256 elementos (elementos constantes) após a aplicação do método CHIEF

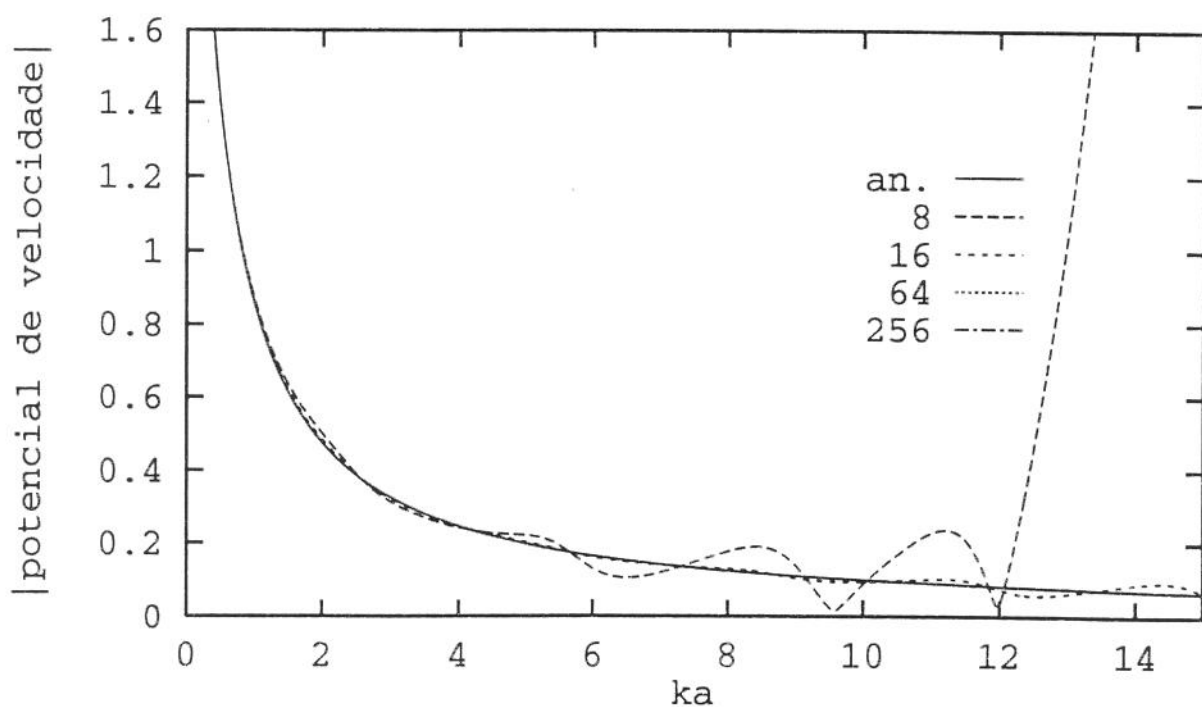


Figura 4.41 - Potencial de velocidade para radiação de ondas de um cilindro de raio $a=1.0$ e para 8, 16, 64 e 256 elementos (elementos lineares) após a aplicação do método CHIEF

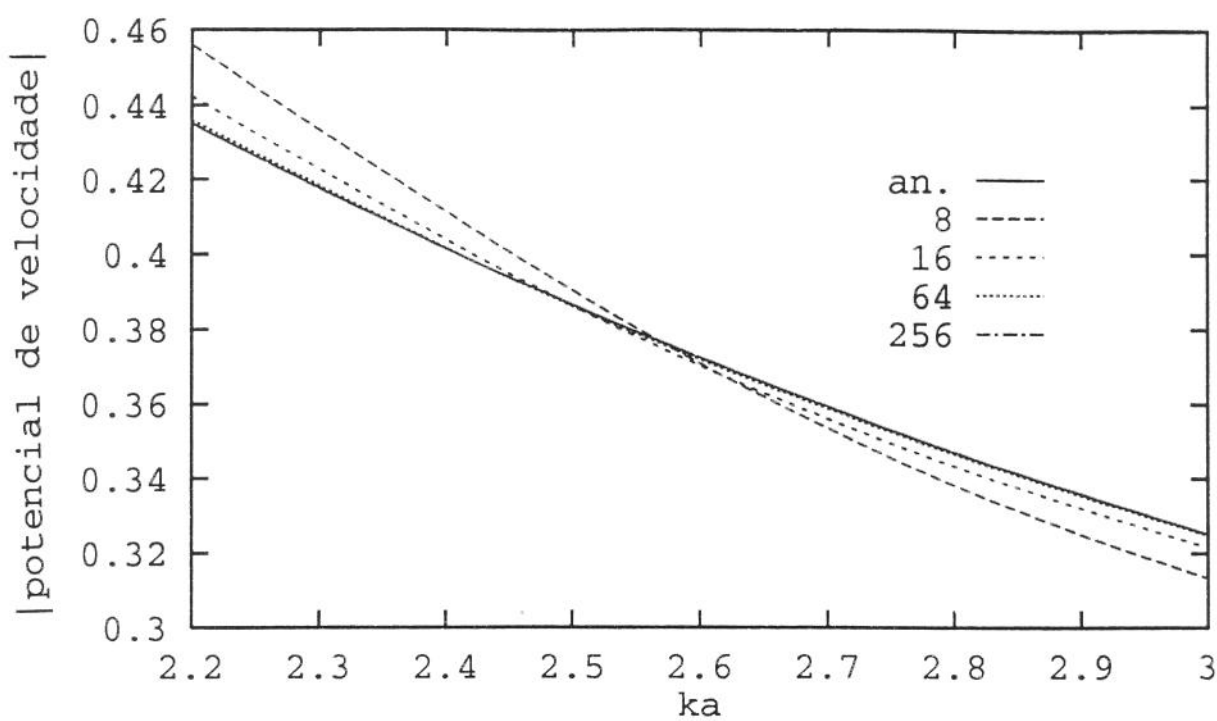


Figura 4.42 - Potencial de velocidade para radiação de ondas de um cilindro de raio $a=1.0$ e para 8, 16, 64 e 256 elementos (elementos lineares) após a aplicação do método CHIEF

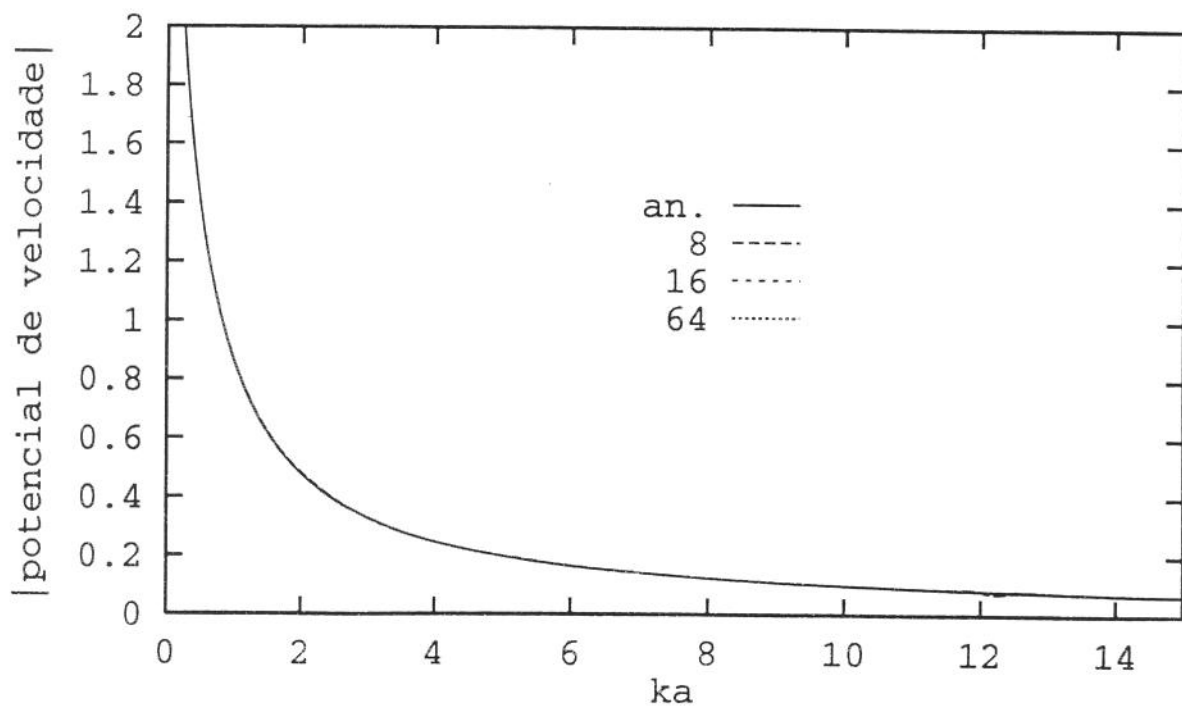


Figura 4.43 - Potencial de velocidade para radiação de ondas de um cilindro de raio $a=1.0$ e para 8, 16 e 64 elementos (elementos quadráticos) após a aplicação do método CHIEF

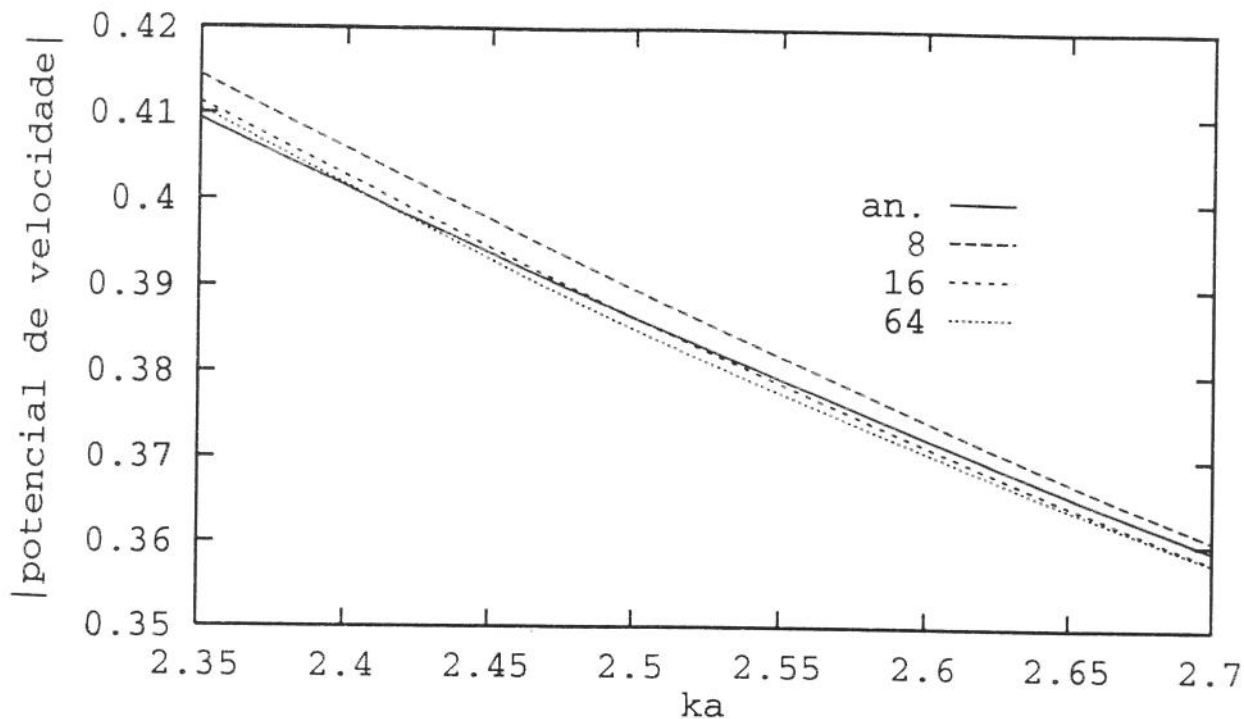


Figura 4.44 - Potencial de velocidade para radiação de ondas de um cilindro de raio $a=1.0$ e para 8, 16, e 64 elementos (elementos quadráticos) após a aplicação do método CHIEF

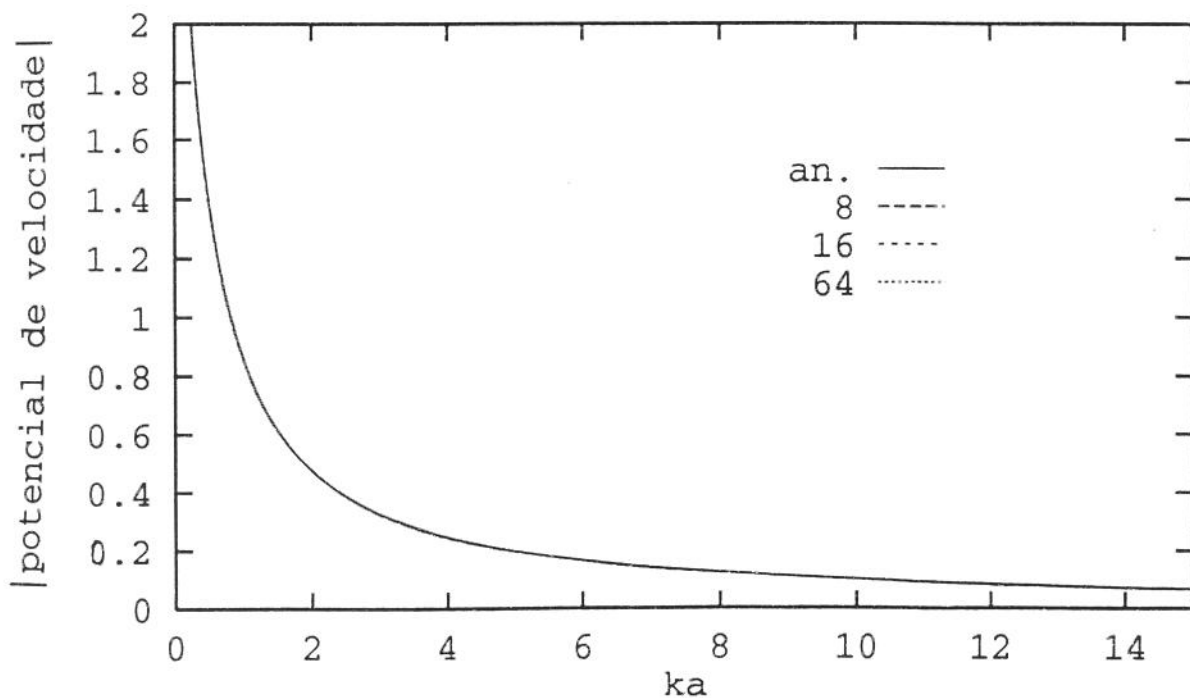


Figura 4.45 - Potencial de velocidade para radiação de ondas de um cilindro de raio $a=1.0$ e para 8, 16, 64 e 256 elementos (elementos cúbicos) após a aplicação do método CHIEF

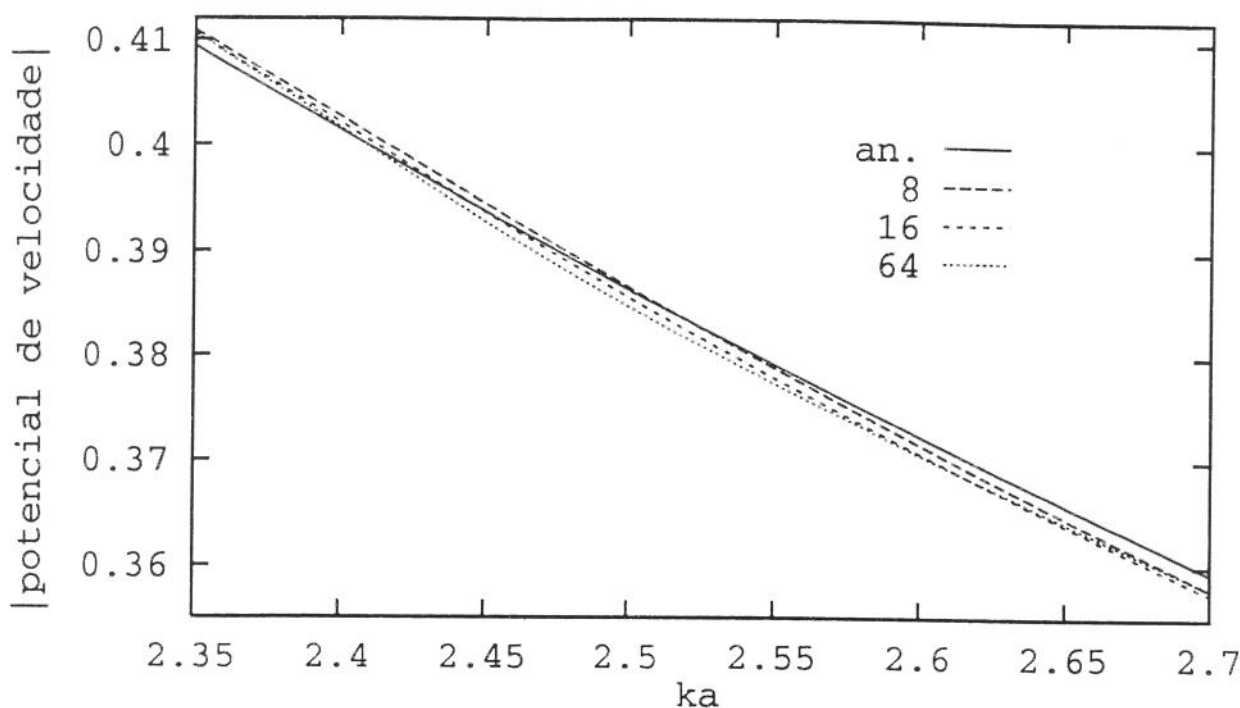


Figura 4.46 - Potencial de velocidade para radiação de ondas de um cilindro de raio $a=1.0$ e para 8, 16, e 64 elementos (elementos cúbicos) após a aplicação do método CHIEF

As figuras (4.47) à (4.50), apresentadas a seguir, representam o potencial de velocidade para radiação obtidos através da implementação por elementos isoparamétricos constantes, lineares, quadráticos e cúbicos, respectivamente. As considerações básicas são as mesmas que à dos exemplos anteriores, sendo o contorno discretizado em elementos, de tal forma que produzam 18 nós no contorno; observa-se nestas figuras, que o método CHIEF consegue solucionar o problema da não unicidade, tanto nos pontos das frequências k_n , quanto nas suas vizinhanças. São apresentados nestas figuras uma comparação entre o potencial de velocidade radiado obtidos através da aplicação do método de elementos de contorno com e sem a aplicação do método CHIEF. Ambos são comparados com a solução analítica.

Logo em seguida, são apresentadas as figuras (4.51) à (4.53), que contém uma comparação entre os quatro diferentes tipos de elementos. Novamente, as considerações básicas são as mesmas passadas. As figuras (4.51) e (4.52) mostram esta comparação para a implementação numérica sem a utilização do método CHIEF; a figura (4.53) mostra esta mesma comparação, sendo que, agora, o método CHIEF é implementado.

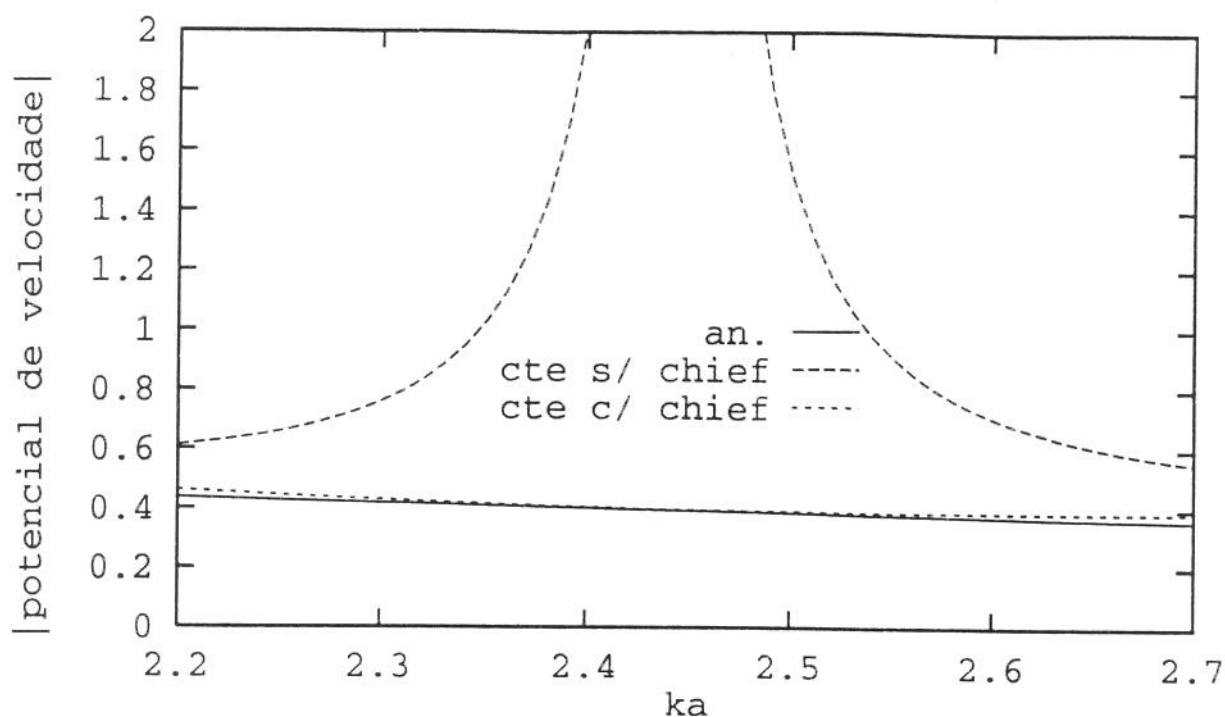


Figura 4.47 - Potencial de velocidade para radiação de ondas de um cilindro de raio $a=1.0$ e 18 elementos (18 nós) . Comparação entre resultados obtidos através da implementação para elementos constantes, com e sem o método CHIEF.

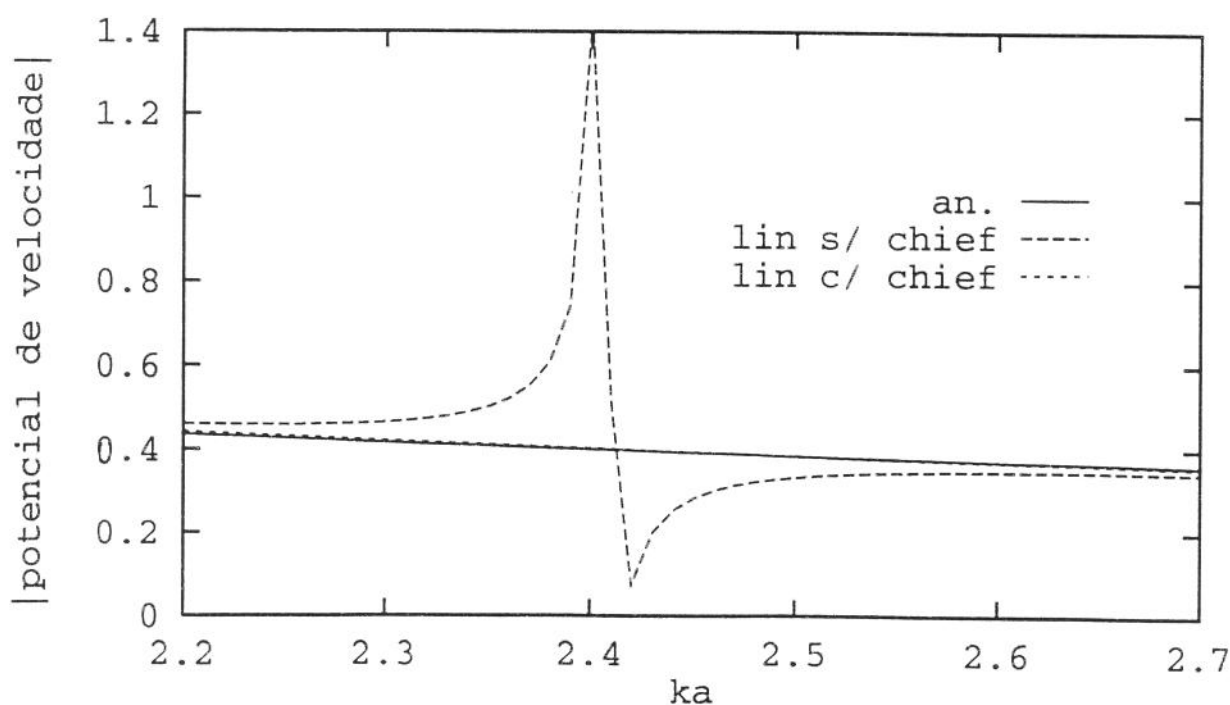


Figura 4.48 - Potencial de velocidade para radiação de ondas de um cilindro de raio $a=1.0$ e 18 elementos (18 nós) . Comparação entre resultados obtidos através da implementação para os elementos lineares ,com e sem o método CHIEF.

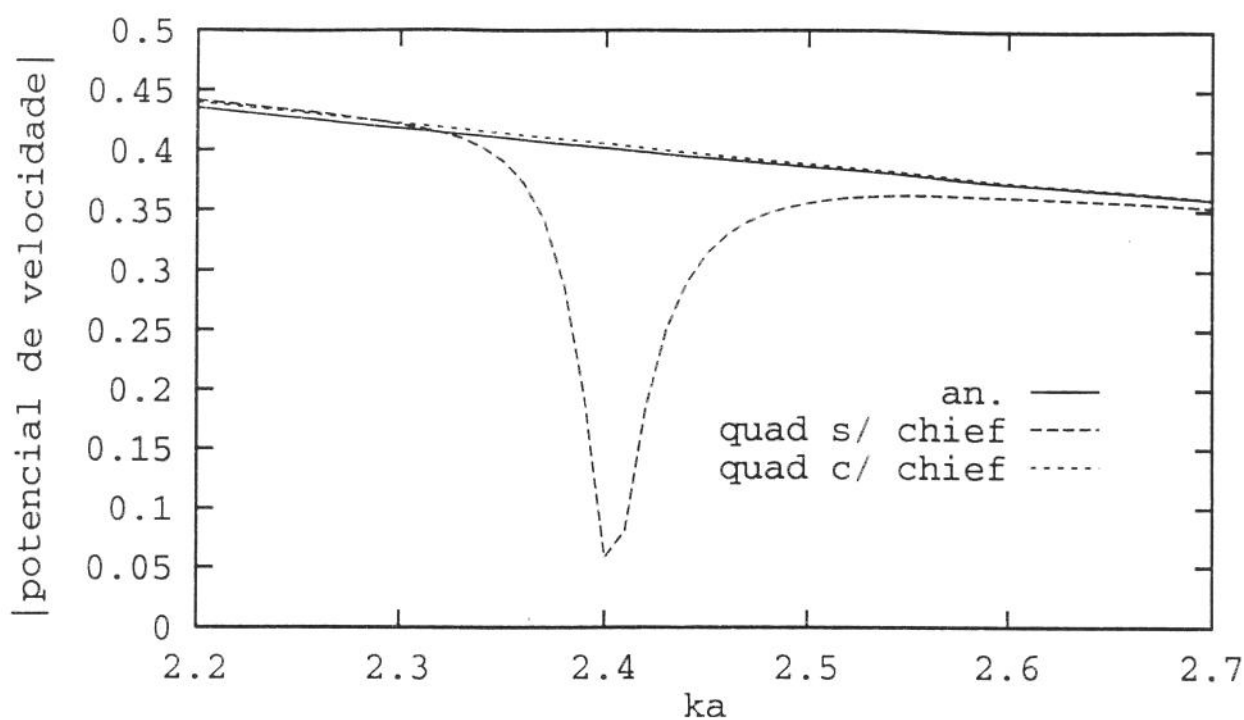


Figura 4.49 - Potencial de velocidade para radiação de ondas de um cilindro de raio $a=1.0$ e 9 elementos (18 nós). Comparação entre resultados obtidos através da implementação para os elementos quadráticos, com e sem o método CHIEF.

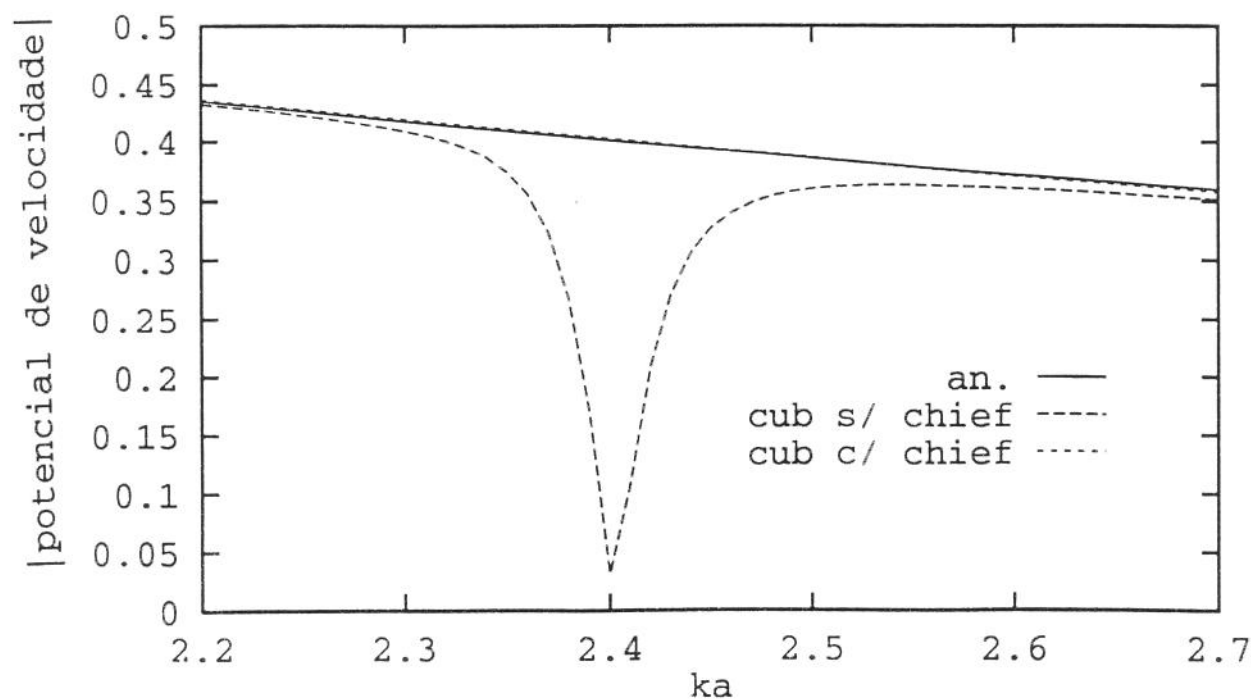


Figura 4.50 - Potencial de velocidade para radiação de ondas de um cilindro de raio $a=1.0$ e 6 elementos (18 nós). Comparação entre resultados obtidos através da implementação para os elementos cúbicos, com e sem o método CHIEF.

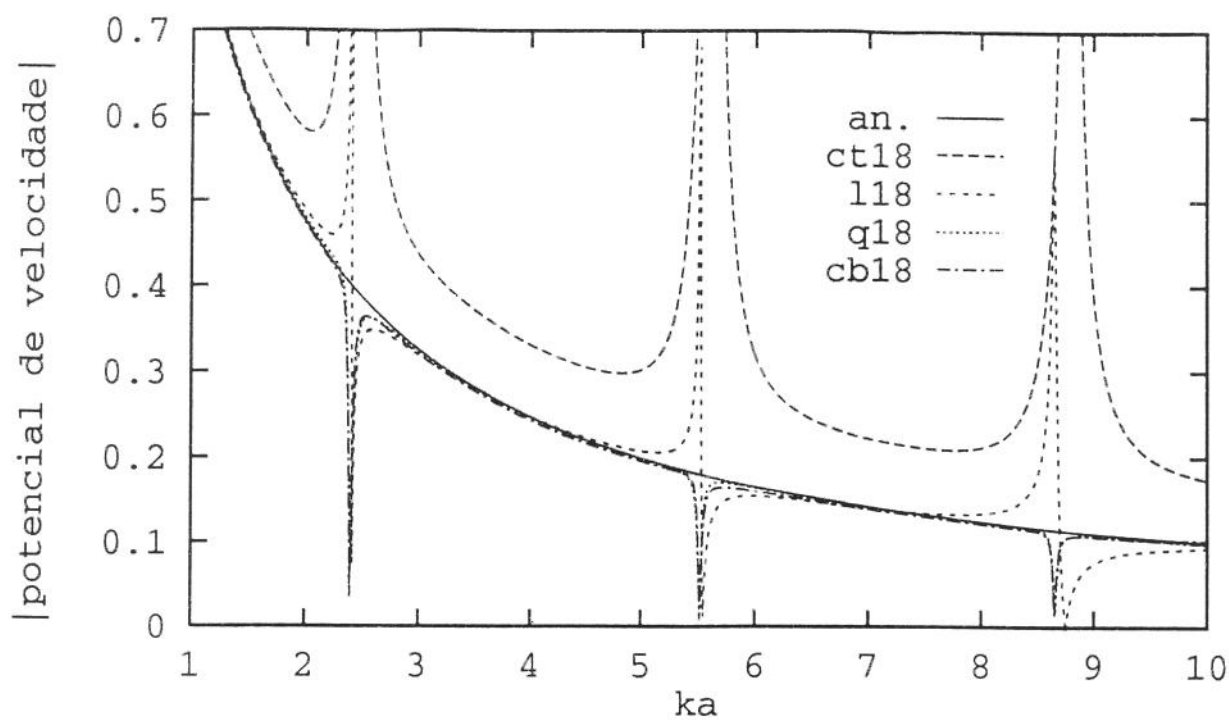


Figura 4.51 - Potencial de velocidade para radiação de ondas de um cilindro de raio $a=1.0$. Comparação entre resultados obtidos através da implementação (sem CHIEF) por elementos constantes, lineares, quadráticos e cúbicos (18 nós)

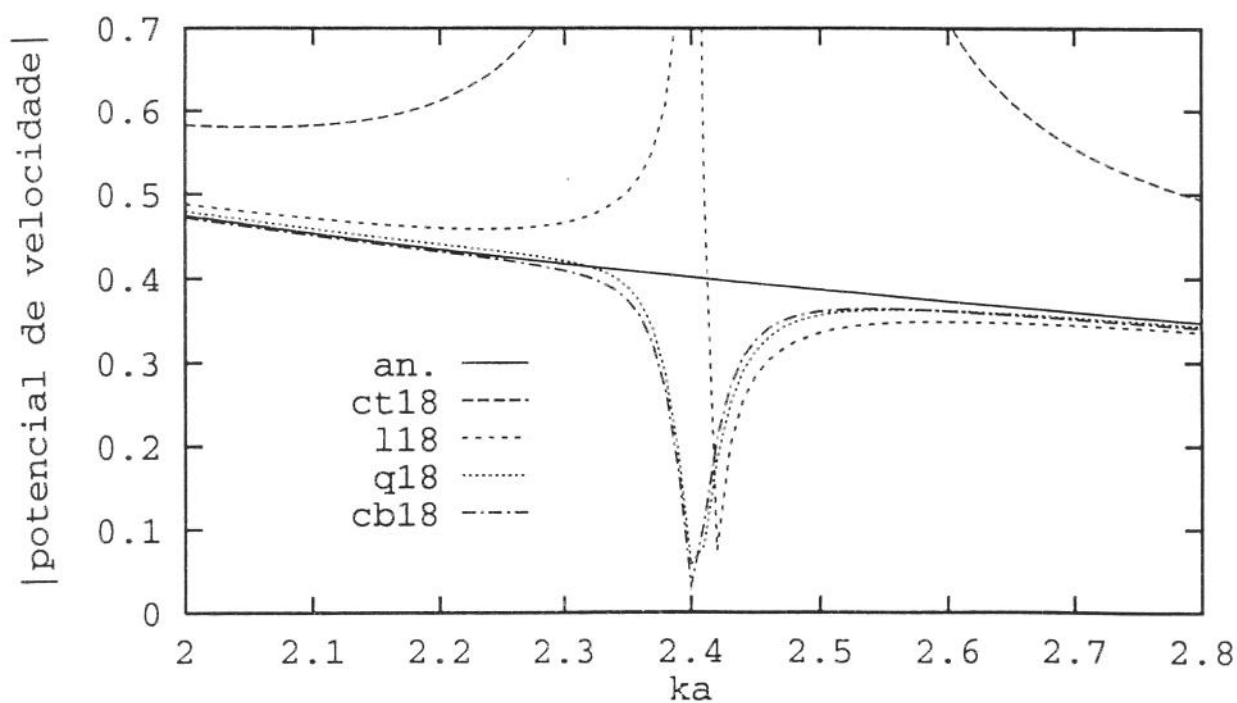


Figura 4.52 - Potencial de velocidade para radiação de ondas de um cilindro de raio $a=1.0$. Comparação entre resultados obtidos através da implementação (sem CHIEF) por elementos constantes, lineares, quadráticos e cúbicos (18 nós)

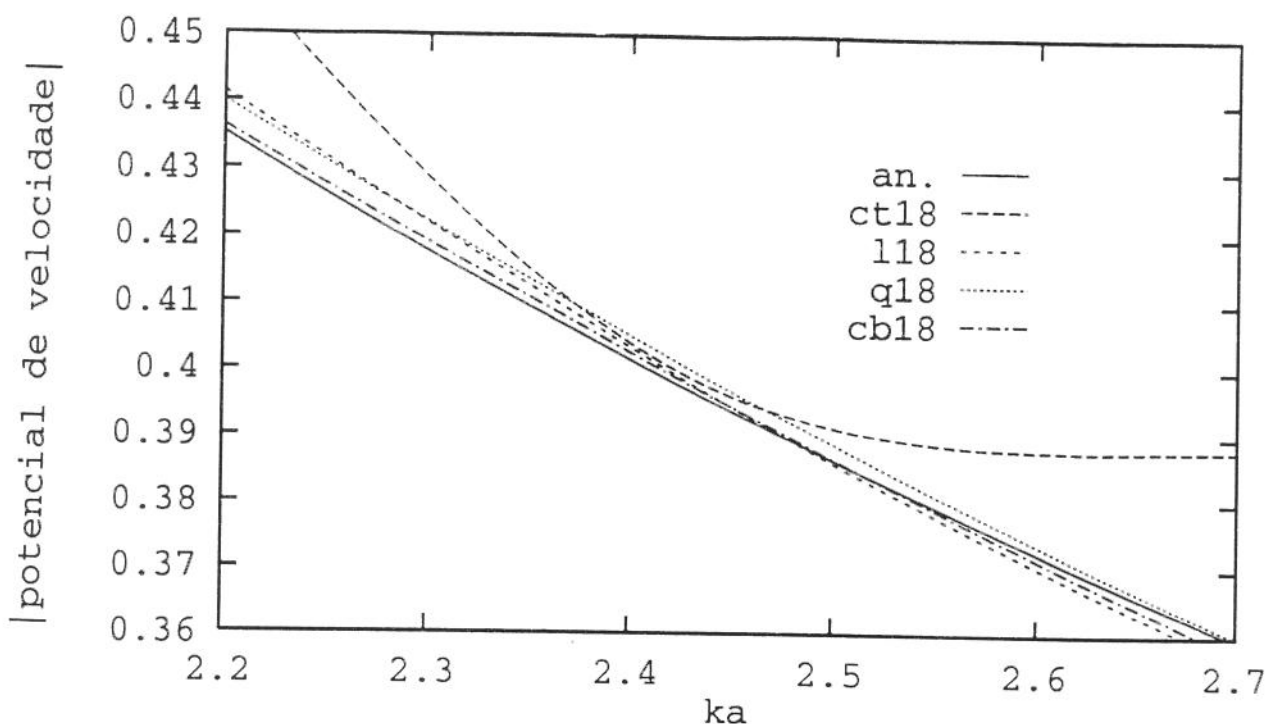


Figura 4.53 - Potencial de velocidade para radiação de ondas de um cilindro de raio $a=1.0$. Comparação entre resultados obtidos através da implementação (com CHIEF) por elementos constantes, lineares, quadráticos e cúbicos (18 nós)

4.5. O Problema da Dispersão de Ondas Acústicas

O potencial de velocidade disperso, após a aplicação de uma onda incidente (eq. 3.25) em um obstáculo, pode ser calculado através da eq. (3.24). A natureza do obstáculo, rígido ou não, é caracterizada pelas condições de contorno prescritas em sua superfície. Considera-se para este trabalho, que nenhuma energia seja absorvida, resultando nas condições de contorno da eq. (3.27).

O exemplo a ser mostrado é o da dispersão de ondas acústicas planas de um cilindro rígido de raio unitário “a”, quando uma onda incide sobre o seu contorno. A implementação é realizada utilizando elementos lineares. As figuras (4.54) e (4.55) mostram a dispersão para os parâmetros $ka = 5$ e 10 , respectivamente. Aqui, $ka = 2\pi a / \lambda$ é a frequência normalizada que relata a dimensão do cilindro para o comprimento de onda. O resultado da fig. (4.54) é comparado com o publicado por Yoon [1990] usando elementos cúbicos. Para o gráfico da fig. (4.55), o resultado numérico é comparado com a solução analítica [Morse, 1986]

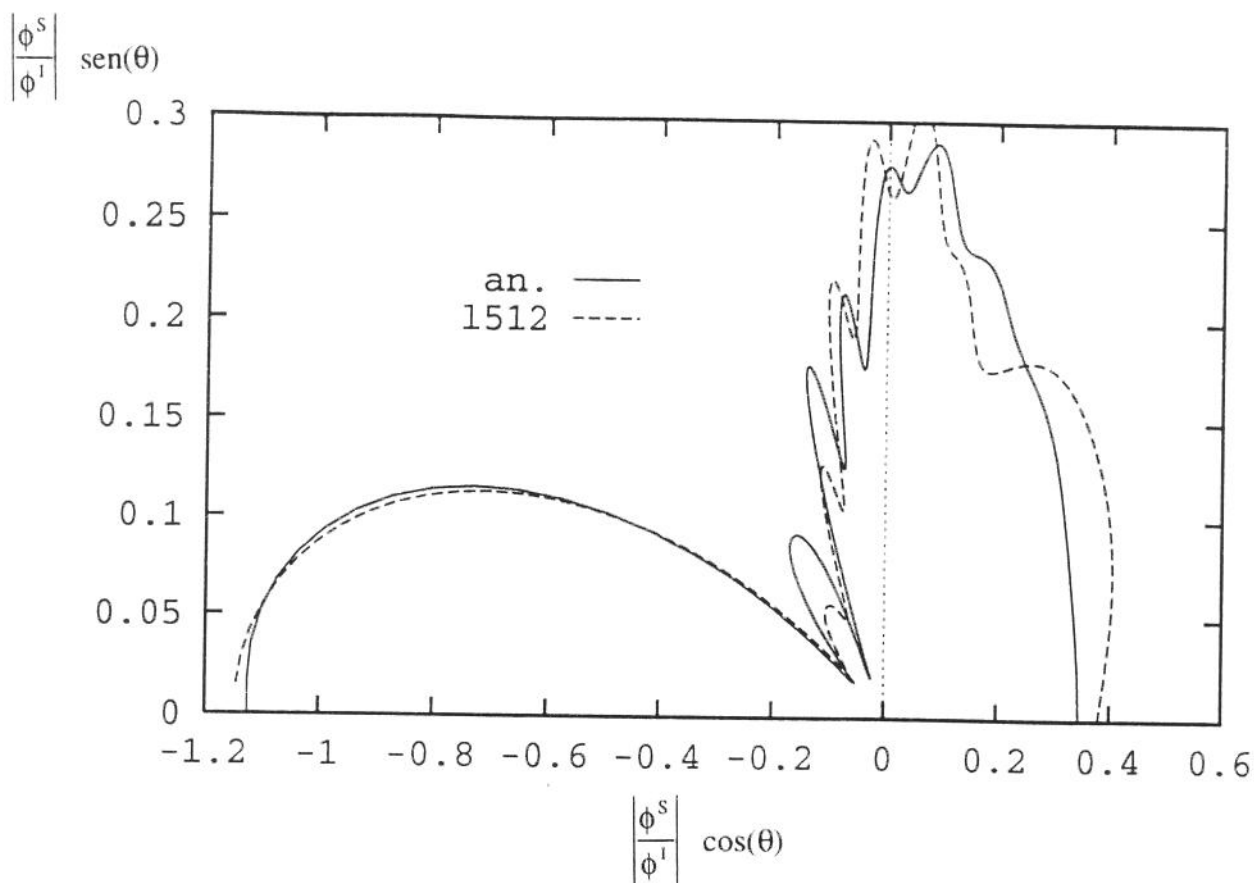


Figura 4.54 - Potencial difratado de um cilindro de raio unitário obtido através da implementação por elementos lineares ($ka=5.0$)

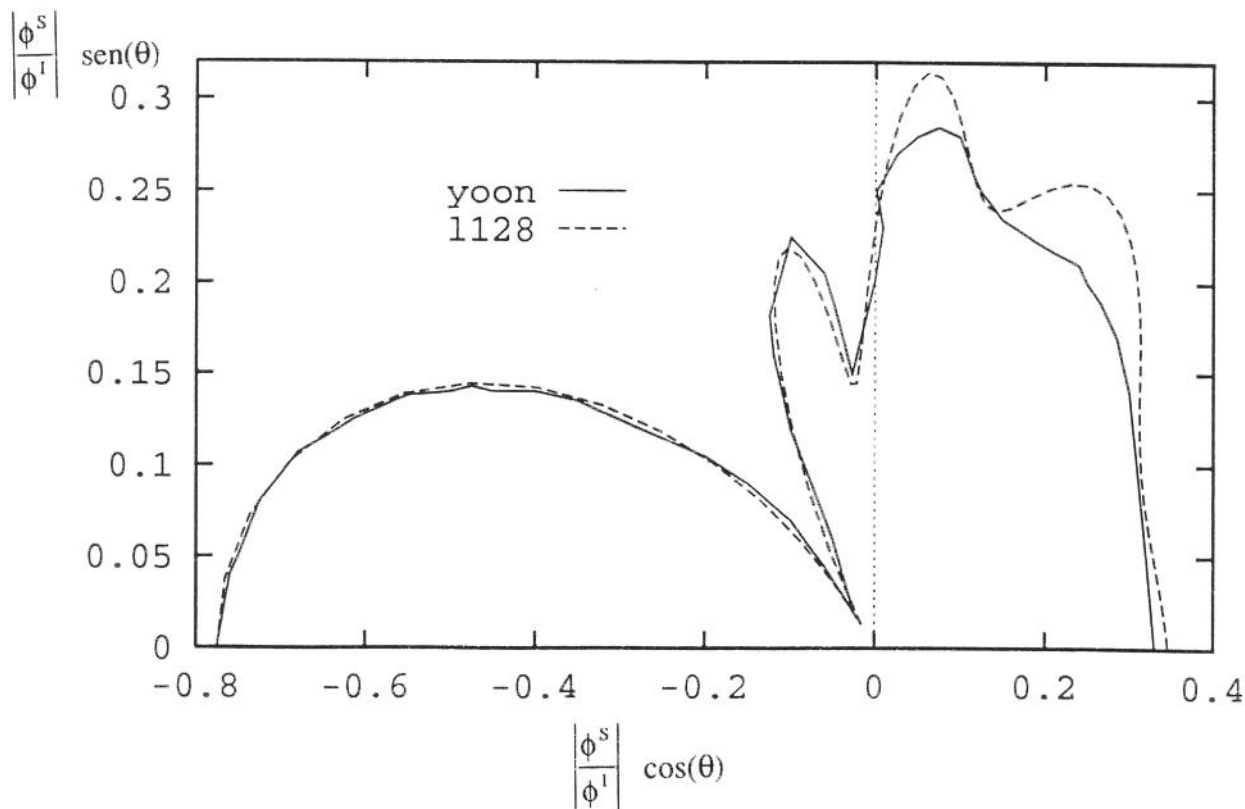


Figura 4.55 - Potencial difratado de um cilindro de raio unitário obtido através da implementação por elementos lineares ($ka=10.0$)

$$\frac{\phi^S}{\phi^I} = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos(m\theta) [J_m(kR) + iY_m(kR)] \quad (4.198)$$

onde

$$A_m = -\epsilon_m i^{m+1} e^{-i\gamma_m} \sin(\gamma_m), \quad (4.199)$$

$$\gamma_0 = \arctg^{-1} \left(-\frac{J_1(ka)}{Y_1(ka)} \right) \quad (4.200)$$

$$\gamma_m = \arctg^{-1} \left(\frac{J_{m-1}(ka) - J_{m+1}(ka)}{Y_{m+1}(ka) - Y_{m-1}(ka)} \right) \quad (4.201)$$

e $\epsilon_0=1$, e $\epsilon_m=2$ para todos os valores de m maiores que um. A notação das equações (4.198) à (4.201) seguem a mesma que a utilizada por Morse [1986].

Nos gráficos das figuras (4.54) e (4.55), a distância da origem representa o módulo do potencial de dispersão normalizado ϕ^S/ϕ^I , no ponto emitente na distância de cinco raios e ângulo polar dado. O eixo vertical Y representa $|\phi^S/\phi^I| \sin(\theta)$ e o eixo X , $|\phi^S/\phi^I| \cos(\theta)$, onde θ é o ângulo formado pelo ponto de colocação pertencente ao domínio, ao plano paralelo paralelo à direção da onda incidente (fig. 4.56).

Para o exemplo de $ka=5$, o contorno foi discretizado em 128 elementos, e para $ka=10$, em 256.

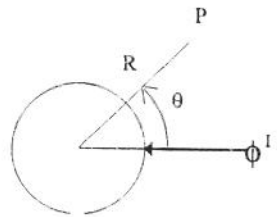


Figura 4.56 - Definição do ângulo θ

Os gráficos das figuras (4.54) e(4.55) foram validados baseados em fontes distintas (através da solução analítica e Yoon [1990]) devido à dificuldade em se obter resultados homogêneos entre as duas fontes. Além dos resultados apresentados, foram testados vários outros, sendo que, em alguns dos testes, os resultados se aproximavam dos apresentados por Yoon [1990] e em outros, dos apresentados pela solução analítica. Neste trabalho, não foi possível implementar a solução analítica de tal forma que a mesma representasse os resultados apresentados por Yoon, ou vice-versa. Além da implementação utilizando uma discretização do contorno por elementos lineares, também foram realizadas implementações por elementos constantes, quadráticos e cúbicos. Nessas outras formas de discretização do contorno, porém, os resultados obtidos não foram satisfatórios; é necessário, então, um estudo mais profundo e detalhado para investigar as possíveis falhas teóricas ou mesmo na implementação dos problemas de dispersão acústica.

CAPÍTULO V

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Para o problema da radiação, algumas conclusões são bastante interessantes. A formulação e implementação do MEC mostrou ser bastante eficiente. A formulação para elementos constantes mostrou ser bastante simples de se implementar, mas requerendo muitos elementos de discretização para se obter uma boa aproximação. Já para os elementos lineares, a implementação é fácil, e há uma grande melhora de acuidade. Para o caso dos elementos quadráticos, o desenvolvimento matemático se mostra mais trabalhoso, com a vantagem, porém, de se obter resultados numéricos bastante próximos aos do analítico. Os resultados para os elementos cúbicos também não foge à regra, demonstrando uma acuidade melhor que a dos elementos quadráticos. Deve-se considerar, porém, que há um grande aumento de trabalho matemático também.

Para os elementos singulares e quase singulares, não houve uma boa convergência, principalmente na implementação por elementos quadráticos e cúbicos. Esta dificuldade em se obter a acuidade nestes elementos, levou à falta de acuidade nos resultados finais, observados principalmente, para o potencial calculado no domínio com implementação por elementos quadráticos e cúbicos. Assim, é necessário uma outra estratégia de integração, pois, a utilizada neste trabalho (integração pela Regra de Gauss Logarítmica) não apresenta bons resultados,

desde que os valores dos números de pontos de Gauss logarítmico é tabulado apenas até 16. Para valores maiores que este, torna-se muito difícil calcular, sem perda de acuidade; mesmo utilizando recursos computacionais significantes [Stroud, 1966].

Para um mesmo tipo de implementação, verificou-se que, à medida que o número de elementos na discretização aumentavam, aumentava a acuidade.

As frequências fictícias surgidas pela formulação integral de contorno, foram totalmente eliminadas pela implementação do Método CHIEF, que demonstrou ser bastante eficiente para os exemplos utilizados.

Para o problema da dispersão de ondas, os resultados não foram tão satisfatórios quanto para radiação. Embora, a formulação e implementação do MEC para dispersão não pareça oferecer nenhuma grande dificuldade, neste trabalho foram testados vários exemplos para a implementação por elementos constantes, lineares, quadráticos e cúbicos, e só conseguiu-se uma boa aproximação no caso da implementação por elementos lineares. Várias dificuldades foram encontradas, como por exemplo, a dificuldade em se reproduzir a solução analítica.

Como se pode ver nas figuras (4.54) e (4.55), a implementação por elementos lineares requer muitos pontos de integração para aproximar o resultado obtido pela implementação por elementos cúbicos apresentados por [Yoon, 1990], principalmente nos exemplos de altas frequências. Assim, seria bastante interessante a implementação através dos outros elementos isoparamétricos para se poder fazer um estudo sistemático de convergência e tempo gasto de CPU.

Para futuros trabalhos, fica a sugestão de se introduzir a equação para a derivada do potencial ($q = \frac{\partial \phi}{\partial v}$) e estudar as suas singularidades, em particular, para a singularidade forte e hiper-singular $\frac{1}{x}$ e $\frac{1}{x^2}$. Outra sugestão, é o aprimoramento dos esquemas de integração dos elementos com singularidade e da quase singularidade logarítmica do potencial de velocidade. É interessante, também, a generalização do estudo realizado para outros tipos de corpos, e homogenizar e validar os esquemas numéricos para poder estudar a eficiência dos diferentes

tipos de implementação. Finalmente, seria necessário ainda, aprimorar o estudo sobre dispersão acústica.

APÊNDICE A

FUNÇÕES DE HANKEL

As funções de Hankel utilizadas na solução fundamental das eq. (3.17) e (3.18) são:

$$H_0^{(1)}(KR) = J_0(KR) + iY_0(KR) \quad (A1)$$

e

$$H_1^{(1)}(KR) = J_1(KR) + iY_1(KR) \quad (A2)$$

Nas equações (A1) e (A2), J e Y representam funções de Bessel de primeira e segunda espécie, respectivamente, com indicações subscritas de suas ordens; J e Y são representadas nas equações abaixo [Spiegel, 1976].

$$J_m(x) = \frac{x^m}{2^m} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2^{2k} k! \Gamma(m+k+1)} \quad (A3)$$

onde

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (A4)$$

$$Y_m(x) = \frac{2}{\pi} \left\{ \ln \left(\frac{x}{2} \right) + \gamma \right\} J_m(x) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{m-1} (m-k-1)! \left(\frac{x}{2} \right)^{2k-m} -$$

$$- \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \{ \Phi(k) + \Phi(m+k) \} \frac{(x/2)^{2k+m}}{k! (m+k)!} \quad (A5)$$

onde γ é a constante de Euler ($\gamma = 0.577215664901532\dots$), e

$$\Phi(p) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{p}, \quad \Phi(0) = 0 \quad (A6)$$

Das equações (A3) e (A5), são retiradas as seguintes funções de Bessel:

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots \quad (A7)$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^2 \cdot 4} + \frac{x^5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} - \frac{x^7}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} + \dots \quad (A8)$$

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \left\{ \ln \left(\frac{x}{2} \right) + \gamma \right\} J_0(x) + \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) + \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) - \dots \right\} \quad (A9)$$

As sub-rotinas que determinam as funções de Bessel $J_0(x)$, $J_1(x)$, $Y_0(x)$ e $Y_1(x)$, utilizadas nas implementações numéricas deste trabalho, foram retiradas do NUMERICAL RECIPES [Press et alli, 1986] e validadas através dos resultados apresentados pelo software MATHEMATICA FOR WINDOWS [Wolfram, 1991]. Esta validação é apresentada através das tabelas TA1, TA2, TA3 e TA4. O erro absoluto, apresentado nessas tabelas, é calculado através da diferença entre o valor obtido pelo MATHEMATICA e pelo NUMERICAL RECIPES; o erro relativo, por sua vez, é calculado pelo quociente entre o erro absoluto e o valor obtido pelo MATHEMATICA.

x	$J_0(x)$ (MATHEMATICA)	$J_0(x)$ (Num. Recipes)	erro absoluto	erro relativo
0.010	0.999975000156250	0.999975002986380	-0.283013E-08	-0.283020E-08
10.010	-0.246357974862372	-0.246357974796970	-0.654024E-10	0.265477E-09
20.010	0.166348161489689	0.166348161500090	-0.104006E-10	-0.625231E-10
30.010	-0.085176372734293	-0.085176372794835	0.605420E-10	-0.710784E-09
40.010	0.006106317618391	0.006106317693542	-0.751501E-10	-0.123069E-07
50.010	0.056784541794293	0.056784541724087	0.702059E-10	0.123636E-08
60.010	-0.091933168035223	-0.091933167986657	-0.485656E-10	0.528271E-09
70.010	0.094804112222293	0.094804112205701	0.165917E-10	0.175010E-09
80.010	-0.069178149986661	-0.069178150003107	0.164459E-10	-0.237732E-09
90.010	0.025829486512435	0.025829486553761	-0.413259E-10	-0.159995E-08
100.010	0.020756253146527	0.020756253094867	0.516596E-10	0.248887E-08
110.010	-0.056570831571390	-0.056570831525754	-0.456365E-10	0.806714E-09
120.010	0.071937870016360	0.071937869990050	0.263102E-10	0.365735E-09
130.010	-0.063941685337571	-0.063941685337148	-0.423273E-12	0.661966E-11
140.010	0.036793656107937	0.036793656131713	-0.237764E-10	-0.646208E-09
150.010	-0.000122632606682	-0.000122632645748	0.390658E-10	-0.318559E-06
160.010	-0.034217846020039	-0.034217845978702	-0.413374E-10	0.120806E-08
170.010	0.055821227489311	0.055821227458650	0.306613E-10	0.549276E-09
180.010	-0.058773194558018	-0.058773194546975	-0.110427E-10	0.187887E-09
190.010	0.043195227015086	0.043195227026072	-0.109864E-10	-0.254342E-09
200.010	-0.014893645322208	-0.014893645350693	0.284848E-10	-0.191255E-08
210.010	-0.016695973543435	-0.016695973507196	-0.362386E-10	0.217050E-08
220.010	0.041574031027026	0.041574030994742	0.322839E-10	0.776539E-09
230.010	-0.052278912173149	-0.052278912154778	-0.183706E-10	0.351396E-09
240.010	0.046078877950109	0.046078877950843	-0.734239E-12	-0.159344E-10
250.010	-0.025619396265557	-0.025619396284398	0.188413E-10	-0.735430E-09
260.010	-0.002113569808659	-0.002113569778343	-0.303164E-10	0.143437E-07
270.010	0.028132788512764	0.028132788480954	0.318097E-10	0.113070E-08
280.010	-0.044322914265275	-0.044322914242061	-0.232140E-10	0.523748E-09
290.010	0.045940398215463	0.045940398207877	0.758641E-11	0.165136E-09

Tabela TA1 - Comparação entre valores de $J_0(x)$ do Numerical Recipes e do MATHEMATICA

x	$J_0(x)$ (MATHEMATICA)	$J_0(x)$ (Num. Recipes)	erro absoluto	erro relativo
0.010	0.004999937500260	0.004999937501020	-0.759782E-12	-0.151958E-09
10.010	0.040969056455100	0.040969056626985	-0.171885E-09	-0.419548E-08
20.010	0.068466185258794	0.068466185098630	0.160164E-09	0.233932E-08
30.010	-0.119569077479604	-0.119569077358520	-0.121084E-09	0.101267E-08
40.010	0.126074173992072	0.126074173935540	0.565325E-10	0.448407E-09
50.010	-0.096929396583980	-0.096929396593317	0.933689E-11	-0.963267E-10
60.010	0.045673662430990	0.045673662489215	-0.582248E-10	-0.127480E-08
70.010	0.010934866489602	0.010934866409140	0.804616E-10	0.735826E-08
80.010	-0.056744854230288	-0.056744854155706	-0.745818E-10	0.131434E-08
90.010	0.080179052051161	0.080179052004670	0.464913E-10	0.579843E-09
100.010	-0.076933936091633	-0.076933936084369	-0.726387E-11	0.944170E-10
110.010	0.050602116514041	0.050602116544259	-0.302184E-10	-0.597177E-09
120.010	-0.011085445260143	-0.011085445315043	0.549001E-10	-0.495245E-08
130.010	-0.028673624496830	-0.028673624436348	-0.604822E-10	0.210933E-08
140.010	0.056639782762342	0.056639782715507	0.468354E-10	0.826900E-09
150.010	-0.065145304366781	-0.065145304347202	-0.195789E-10	0.300541E-09
160.010	0.052881490013592	0.052881490025563	-0.119714E-10	-0.226382E-09
170.010	-0.024907363146053	-0.024907363183868	0.378153E-10	-0.151824E-08
180.010	-0.009234005443052	-0.009234005392737	-0.503152E-10	0.544890E-08
190.010	0.038644497788002	0.038644497741641	0.463606E-10	0.119967E-08
200.010	-0.054453475944753	-0.054453475916684	-0.280694E-10	0.515476E-09
210.010	0.052425760879623	0.052425760877751	0.187233E-11	0.357139E-10
220.010	-0.034040444754898	-0.034040444778573	0.236749E-10	-0.695492E-09
230.010	0.005777084112326	0.005777084152945	-0.406187E-10	-0.703100E-08
240.010	0.023100458315194	0.023100458271156	0.440375E-10	0.190635E-08
250.010	-0.043525668523485	-0.043525668490052	-0.334332E-10	0.768126E-09
260.010	0.049432569280448	0.049432569267746	0.127017E-10	0.256950E-09
270.010	-0.039524554325841	-0.039524554337088	0.112474E-10	-0.284568E-09
280.010	0.017500316822947	0.017500316853711	-0.307641E-10	-0.175792E-08
290.010	0.009279297006378	0.009279296966516	0.398626E-10	0.429587E-08

Tabela TA2 - Comparação entre valores de $J_1(x)$ do Numerical Recipes e do MATHEMATICA

x	$Y_0(x)$ (MATHEMATICA)	$Y_0(x)$ (Num. Recipes)	erro absoluto	erro relativo
0.010	-3.005455637083645	-3.005455650891900	-0.367647E-07	0.122326E-07
10.010	0.053179516162828	0.053179516310759	0.147167E-09	0.276736E-08
20.010	0.064292140251674	0.064292140139708	-0.145048E-10	-0.225608E-09
30.010	-0.118133968560506	-0.118133968492450	-0.567477E-10	0.480367E-09
40.010	0.125988047666594	0.125988047641250	0.992634E-10	0.787879E-09
50.010	-0.097492202155423	-0.097492202169779	-0.100401E-09	0.102984E-08
60.010	0.046437980179160	0.046437980223903	0.701804E-10	0.151127E-08
70.010	0.010257563981954	0.010257563922632	-0.236733E-10	-0.230789E-08
80.010	-0.056311462415663	-0.056311462360089	-0.231417E-10	0.410960E-09
90.010	0.080034340686459	0.080034340650339	0.567614E-10	0.709213E-09
100.010	-0.077036741770978	-0.077036741763135	-0.690454E-10	0.896266E-09
110.010	0.050858702736840	0.050858702757160	0.587466E-10	0.115509E-08
120.010	-0.011385057406062	-0.011385057446131	-0.312071E-10	0.274106E-08
130.010	-0.028427507279661	-0.028427507233527	-0.370265E-11	0.130249E-09
140.010	0.056508027605958	0.056508027568316	0.347703E-10	0.615316E-09
150.010	-0.065144533782510	-0.065144533764386	-0.527911E-10	0.810368E-09
160.010	0.052988154372632	0.052988154378418	0.531455E-10	0.100297E-08
170.010	-0.025071423728190	-0.025071423754696	-0.368748E-10	0.147079E-08
180.010	-0.009070721908596	-0.009070721870758	0.100196E-10	-0.110461E-08
190.010	0.038530699510636	0.038530699473850	0.184912E-10	0.479909E-09
200.010	-0.054416073899133	-0.054416073874836	-0.397100E-10	0.729747E-09
210.010	0.052465362387487	0.052465362382685	0.474035E-10	0.903519E-09
220.010	-0.034134838259160	-0.034134838274471	-0.398308E-10	0.116687E-08
230.010	0.005890714525487	0.005890714555230	0.200653E-10	0.340626E-08
240.010	0.023004415151852	0.023004415117625	0.516691E-11	0.224605E-09
250.010	-0.043474345045782	-0.043474345018018	-0.277266E-10	0.637770E-09
260.010	0.049436542261839	0.049436542249031	0.406428E-10	0.822121E-09
270.010	-0.039576582119637	-0.039576582125267	-0.402350E-10	0.101664E-08
280.010	0.017579433779298	0.017579433800928	0.271308E-10	0.154333E-08
290.010	0.009200078716756	0.009200078686509	-0.591512E-11	-0.642943E-09

Tabela TA3 - Comparação entre valores de $Y_0(x)$ do Numerical Recipes e do MATHEMATICA

x	$Y_1(x)$ (MATHEMATICA)	$Y_1(x)$ (Num. Recipes)	erro absoluto	erro relativo
0.010	-63.678596282060660	-63.678596245295999	0.138083E-07	-0.216843E-09
10.010	0.249310639496377	0.249310639349210	-0.147931E-09	-0.593359E-09
20.010	-0.164794388150685	-0.164794388136180	0.111966E-09	-0.679427E-09
30.010	0.083220475533589	0.083220475590337	-0.680565E-10	-0.817785E-09
40.010	-0.004532582379757	-0.004532582479021	0.253440E-10	-0.559152E-08
50.010	-0.057762007885344	-0.057762007784943	0.143564E-10	-0.248544E-09
60.010	0.092323249558348	0.092323249488168	-0.447434E-10	-0.484639E-09
70.010	-0.094733275119139	-0.094733275095466	0.593217E-10	-0.626197E-09
80.010	0.068827611538783	0.068827611561925	-0.555736E-10	-0.807432E-09
90.010	-0.025385312835881	-0.025385312892642	0.361202E-10	-0.142288E-08
100.010	-0.021141648078062	-0.021141648009017	-0.784259E-11	0.370954E-09
110.010	0.056802565932831	0.056802565874084	-0.203202E-10	-0.357734E-09
120.010	-0.071985927268459	-0.071985927237252	0.400691E-10	-0.556624E-09
130.010	0.063832831622699	0.063832831626402	-0.461336E-10	-0.722725E-09
140.010	-0.036592093312303	-0.036592093347073	0.376425E-10	-0.102871E-08
150.010	-0.0000944982170578	-0.000094498217787	-0.181236E-10	0.191787E-06
160.010	0.034383589085540	0.034383589032395	-0.578622E-11	-0.168284E-09
170.010	-0.055895203395648	-0.055895203358773	0.265056E-10	-0.474201E-09
180.010	0.058748226414675	0.058748226404655	-0.378388E-10	-0.644084E-09
190.010	-0.043093986021572	-0.043093986040063	0.367856E-10	-0.853613E-09
200.010	0.014757659325354	0.014757659365064	-0.242970E-10	-0.164640E-08
210.010	0.016820931734767	0.016820931687364	0.480175E-11	0.285463E-09
220.010	-0.041651713635807	-0.041651713595976	0.153111E-10	-0.367598E-09
230.010	0.052291840975041	0.052291840954976	-0.297430E-10	-0.568788E-09
240.010	-0.046031054276531	-0.046031054281698	0.342270E-10	-0.743564E-09
250.010	0.025532502634421	0.025532502622148	-0.277642E-10	-0.108741E-08
260.010	0.002208639982135	0.002208639941492	0.128080E-10	0.579906E-08
270.010	-0.028206123748068	-0.028206123707833	0.562995E-11	-0.199600E-09
280.010	0.044354375551582	0.044354375524451	-0.216298E-10	-0.487659E-09
290.010	-0.045924604881301	-0.045924604875386	0.302466E-10	-0.658615E-09

Tabela TA4 - Comparação entre valores de $Y_1(x)$ do Numerical Recipes e do MATHEMATICA

APÊNDICE B

TRATAMENTO ANALÍTICO/NUMÉRICO DOS ELEMENTOS SINGULARES E NÃO SINGULARES

• Desenvolvimento analítico de $Y_0(x)$

Desenvolvendo a eq. (A5), ou seja, $Y_0(x)$, observa-se que a singularidade está apenas no elemento $\ln(x)$. Esta é uma singularidade fraca, que pode ser resolvida facilmente. Desenvolvendo $Y_0(x)$ analiticamente até os termos x^{12} , x^{24} , x^{48} obtém-se uma aproximação com a função real para x aproximadamente até 5, 10 e 20, respectivamente, como mostram as figuras b1, b2 e b3. Nestas figuras, geradas pelo software MATHEMATICA FOR WINDOWS [Wolfram, 1991], o eixo y representa o valor da função Y_0 e o eixo x, seu argumento.

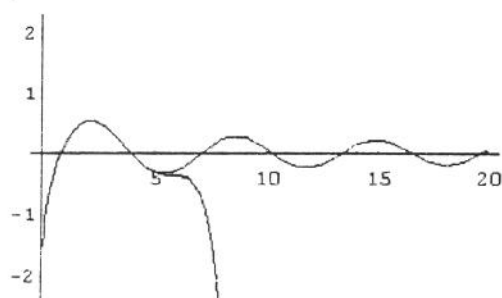


fig. b1 - $Y_0(x)$ aproximado em até x^{12}

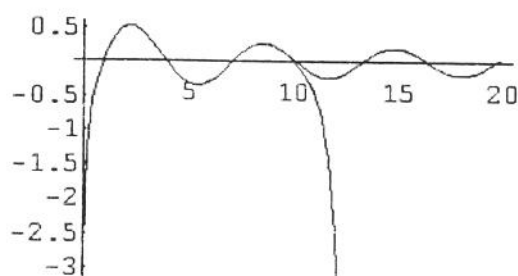


fig. b2 - $Y_0(x)$ aproximado em até x^{24}

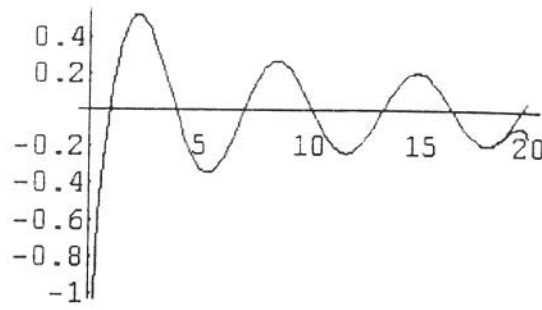


fig. b3 - $Y_0(x)$ aproximado em até x^{18}

Neste trabalho, a função $Y_0(x)$ foi implementada analiticamente para os elementos constantes e lineares, sendo, nestes casos, expandida até o termo x^{12} . A equação abaixo representa esta expansão:

$$\begin{aligned}
 Y_0(x) = & \frac{2}{\pi} \left\{ \gamma + \ln \frac{x}{2} - \frac{1}{4} x^2 \ln \frac{x}{2} + \frac{1}{64} x^4 \ln \frac{x}{2} - \frac{1}{2304} x^6 \ln \frac{x}{2} + \frac{1}{147456} x^8 \ln \frac{x}{2} - \right. \\
 & - \frac{1}{14745600} x^{10} \ln \frac{x}{2} + \frac{1}{2123366400} x^{12} \ln \frac{x}{2} + \frac{(1-\gamma)}{4} x^2 + \frac{(2\gamma-3)}{128} x^4 + \\
 & + \frac{(11-6\gamma)}{13824} x^6 + \frac{(12\gamma-25)}{1769472} x^8 + \frac{(137-60\gamma)}{884736000} x^{10} + \frac{(60\gamma-147)}{127401980000} x^{12} + \\
 & \left. + \frac{\gamma}{2123366400} - \frac{147}{127401980000} \right\}
 \end{aligned}
 \tag{B1}$$

• Elementos constantes singulares

Para a implementação por elementos constantes, a singularidade ocorrida em $Y_0(x)$ é contornada através da eq. (B1). Aplicando-se na eq. (4.29), obtém-se:

$$\begin{aligned}
\text{INT1} &= -\frac{1}{4} \int_{x_1}^{x_2} Y_0(kR) d\Gamma = -\frac{1}{4} \int_{-1}^{+1} Y_0\left(\frac{k\xi L}{2}\right) \frac{L}{2} d\xi = -\frac{L}{4} \int_0^{+1} Y_0\left(\frac{k\xi L}{2}\right) d\xi = \\
&= -\frac{L}{4} \left\{ \ln\left(\frac{kL}{4}\right) - 1.0 - \frac{1}{3} \left(\frac{kL}{4}\right)^2 \left[\ln\left(\frac{kL}{4}\right) - \frac{1}{3} \right] + \frac{1}{2^5 \cdot 5} \left(\frac{kL}{4}\right)^4 \left[\ln\left(\frac{kL}{4}\right) - \frac{1}{5} \right] - \right. \\
&\quad - \frac{1}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 7} \left(\frac{kL}{4}\right)^6 \left[\ln\left(\frac{kL}{4}\right) - \frac{1}{7} \right] + \frac{1}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 9} \left(\frac{kL}{4}\right)^8 \left[\ln\left(\frac{kL}{4}\right) - \frac{1}{9} \right] - \\
&\quad - \frac{1}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 \cdot 11} \left(\frac{kL}{4}\right)^{10} \left[\ln\left(\frac{kL}{4}\right) - \frac{1}{11} \right] + \frac{1}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 \cdot 6^2 \cdot 13} \left(\frac{kL}{4}\right)^{12} \\
&\quad \left[\ln\left(\frac{kL}{4}\right) - \frac{1}{13} \right] + \gamma + \left(\frac{kL}{4}\right)^2 \left[\frac{1-\gamma}{3} \right] + \left(\frac{kL}{4}\right)^4 \left[\frac{\gamma - \left(1 + \frac{1}{2}\right)}{3} \right] + \\
&\quad + \left(\frac{kL}{4}\right)^6 \left[\frac{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \gamma}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 7} \right] + \left(\frac{kL}{4}\right)^8 \left[\frac{\gamma - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 9} \right] + \\
&\quad + \left(\frac{kL}{4}\right)^{10} \left[\frac{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) - \gamma}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 \cdot 11} \right] + \left(\frac{kL}{4}\right)^{12} \left[\frac{\gamma - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 \cdot 6^2 \cdot 13} \right] \Big\}
\end{aligned} \tag{B2}$$

A seguir, são apresentados as tabelas TB1, TB2 e TB3 que contém resultados obtidos através da eq. (B2), os quais são comparados com os resultados obtidos através do software MATHEMATICA, para os valores de k igual à 0.5, 5.0 e 15.0, respectivamente. Nestas e demais tabelas deste apêndice, o comprimento do elemento, L, é calculado para um cilindro de raio a = 1.0. Os resultados são apresentados para discretização do contorno em 8, 16, 32 e 64

elementos. Observa-se nessas tabelas, que o erro absoluto entre os resultados numéricos apresentados é satisfatório para o número de ondas igual à 0.5 e 5.0, mesmo utilizando poucos elementos na discretização do contorno. Para $k = 15.0$, o erro absoluto também é pequeno, sendo neste caso, necessário aumentar o número de elementos na discretização.

número de elementos	argumento $\frac{k\xi L}{2}$	$\int_0^1 Y_0\left(\frac{k\xi L}{2}\right) d\xi$ (através da eq. (B2))	$\int_0^1 Y_0\left(\frac{k\xi L}{2}\right) d\xi$ (através do Mathematica)	erro absoluto
8	0.191341716182574	0.672444031597297	0.672444031597282	$-1.50 \cdot 10^{-14}$
16	0.097545161008062	0.427289277522336	0.427289277522377	$4.17 \cdot 10^{-14}$
32	0.049008570164780	0.257760348121657	0.257760348121653	$-3.60 \cdot 10^{-15}$
64	0.024533837163708	0.150669938990531	0.150669938990530	$-1.60 \cdot 10^{-15}$

Tabela TB1 - Integral de Y_0 para elementos constantes, $k=0.5$

número de elementos	argumento $\frac{k\xi L}{2}$	$\int_0^1 Y_0\left(\frac{k\xi L}{2}\right) d\xi$ (através da eq. (B2))	$\int_0^1 Y_0\left(\frac{k\xi L}{2}\right) d\xi$ (através do Mathematica)	erro absoluto
8	1.91341716182574	0.065183994266913	0.065183993544760	$-7.22 \cdot 10^{-10}$
16	0.97545161008062	0.127799679449872	0.127799679449829	$-4.27 \cdot 10^{-14}$
32	0.49008570164780	0.111463127398719	0.111463127398719	$3.00 \cdot 10^{-16}$
64	0.24533837163708	0.078305029466604	0.078305029466602	$-2.70 \cdot 10^{-15}$

Tabela TB2 - Integral de Y_0 para elementos constantes, $k=5.0$

número de elementos	argumento $\frac{k\xi L}{2}$	$\int_0^1 Y_0\left(\frac{k\xi L}{2}\right) d\xi$ (através da eq. (B2))	$\int_0^1 Y_0\left(\frac{k\xi L}{2}\right) d\xi$ (através do Mathematica)	erro absoluto
8	5.7402514854762	0.004563002819012	0.003065561744253	$-1.49 \cdot 10^{-3}$
16	2.9263548302419	0.011269420084882	0.011269530907536	$1.10 \cdot 10^{-7}$
32	1.4702571049434	0.034863260704843	0.034863260699613	$-5.22 \cdot 10^{-12}$
64	0.73601511491225	0.042017434780685	0.042017434780684	$-1.52 \cdot 10^{-15}$

Tabela TB3 - Integral de Y_0 para elementos constantes, $k=15.0$

Na eq. (4.28), que representa os elementos da diagonal da matriz G , há ainda o termo que contém a integral de $J_0(x)$. Como esta função não apresenta singularidade, é integrada numericamente pelo Método da Quadratura Gaussiana. Para isto, é necessário definir o número de pontos de Gauss, a fim de otimizar e garantir a acuidade dos resultados. As tabelas TB4 à TB15 mostram os resultados da integração numérica da segunda integral da eq. (4.28) e também o erro absoluto entre o mesmo e os resultados obtidos pelo software Mathematica. Essas tabelas apresentam resultados para k igual à 0.5, 5.0 e 15, sendo que, em cada um desses casos, o contorno foi discretizado em 8, 16, 32 e 64 elementos. O número máximo de pontos de Gauss apresentados em cada tabela mostra que, a partir daí, os resultados se mantêm inalterados dentro da precisão trabalhada.

$x = \frac{k\xi L}{2} = 0.191341716182574$ $\int_0^1 J_0\left(\frac{k\xi L}{2}\right) d\xi$ obtido pelo Mathematica = 1.993906429440236		
nptg	$\int_0^1 J_0\left(\frac{k\xi L}{2}\right) d\xi$	erro absoluto
2	1.9939027159283	$3.71151 \cdot 10^{-6}$
3	1.9939064357676	$-6.32736 \cdot 10^{-9}$
4	1.9939064347947	$-5.35446 \cdot 10^{-9}$
5	1.9939064347948	$-5.35456 \cdot 10^{-9}$

Tabela TB4 - Integral de J_0 para elementos constantes; $k=0.5$ e 8 elementos

$x = \frac{k\xi L}{2} = 0.097545161008062$ $\int_0^1 J_0\left(\frac{k\xi L}{2}\right) d\xi$ obtido pelo Mathematica = 1.99841472267261		
nptg	$\int_0^1 J_0\left(\frac{k\xi L}{2}\right) d\xi$	erro absoluto
2	1.9984144768435	$2.45829 \cdot 10^{-7}$
3	1.9984147282714	$-5.59879 \cdot 10^{-9}$
4	1.9984147282543	$-5.58169 \cdot 10^{-9}$

Tabela TB5 - Integral de J_0 para elementos constantes, $k=0.5$ e 16 elementos

$x = \frac{k\xi L}{2} = 0.04900857016478001$ $\int_0^1 J_0\left(\frac{k\xi L}{2}\right) d\xi$ obtido pelo Mathematica = 1.999599729395235		
nptg	$\int_0^1 J_0\left(\frac{k\xi L}{2}\right) d\xi$	erro absoluto
2	1.9995997190142	$1.03810 \cdot 10^{-8}$
3	1.9995997350378	$-5.64257 \cdot 10^{-9}$
4	1.9995997350375	$-5.64227 \cdot 10^{-9}$

Tabela TB6 - Integral de J_0 para elementos constantes, $k=0.5$ e 32 elementos

$x = \frac{k\xi L}{2} = 0.024533837163708$ $\int_0^1 J_0\left(\frac{k\xi L}{2}\right) d\xi$ obtido pelo Mathematica = 1.999899684069985		
nptg	$\int_0^1 J_0\left(\frac{k\xi L}{2}\right) d\xi$	erro absoluto
2	1.9998996887213	$-4.65132 \cdot 10^{-9}$
3	1.9998996897277	$-5.65771 \cdot 10^{-9}$
4	1.9998996897276	$-5.65762 \cdot 10^{-9}$

Tabela TB7 - Integral de J_0 para elementos constantes, $k=0.5$ e 64 elementos

$x = \frac{k\xi L}{2} = 1.91341716182574$ $\int_0^1 J_0\left(\frac{k\xi L}{2}\right) d\xi$ obtido pelo Mathematica = 1.467758787028619		
nptg	$\int_0^1 J_0\left(\frac{k\xi L}{2}\right) d\xi$	erro absoluto
2	1.4347998683924	$3.29589 \cdot 10^{-2}$
3	1.4686413255837	$8.82539 \cdot 10^{-4}$
4	1.4677457476685	$1.30394 \cdot 10^{-3}$
5	1.4677589086393	$-1.21611 \cdot 10^{-7}$
6	1.4677587857955	$1.23312 \cdot 10^{-9}$
7	1.4677587865901	$4.38519 \cdot 10^{-10}$
8	1.4677587865862	$4.42419 \cdot 10^{-10}$

Tabela TB8 - Integral de J_0 para elementos constantes, $k=5.0$ e 8 elementos

$x = \frac{k\xi L}{2} = 0.97545161008062$ $\int_0^1 J_0\left(\frac{k\xi L}{2}\right) d\xi$ obtido pelo Mathematica = 1.846968611833512		
nptg	$\int_0^1 J_0\left(\frac{k\xi L}{2}\right) d\xi$	erro absoluto
2	1.8445317555865	$2.43686 \cdot 10^{-3}$
3	1.8469852749287	$1.66631 \cdot 10^{-5}$
4	1.8469685490317	$6.28018 \cdot 10^{-8}$
5	1.8469686123750	$-5.41488 \cdot 10^{-10}$
6	1.8469686122223	$-3.88788 \cdot 10^{-10}$
7	1.8469686122226	$-3.89088 \cdot 10^{-10}$

Tabela TB9 - Integral de J_0 para elementos constantes , $k=5.0$ e 16 elementos

$x = \frac{k\xi L}{2} = 0.4900857016478001$ $\int_0^1 J_0\left(\frac{k\xi L}{2}\right) d\xi$ obtido pelo Mathematica = 1.96032817314383		
nptg	$\int_0^1 J_0\left(\frac{k\xi L}{2}\right) d\xi$	erro absoluto
2	1.9601691997666	$1.58973 \cdot 10^{-4}$
3	1.9603284501214	$-2.76978 \cdot 10^{-7}$
4	1.9603281767022	$-3.55837 \cdot 10^{-9}$
5	1.9603281769630	$-3.81917 \cdot 10^{-9}$
6	1.9603281769629	$-3.81907 \cdot 10^{-9}$

Tabela TB10 - Integral de J_0 para elementos constantes , $k=5.0$ e 32 elementos

$x = \frac{k\xi L}{2} = 0.24533837163708$ $\int_0^1 J_0\left(\frac{k\xi L}{2}\right) d\xi$ obtido pelo Mathematica = 1.9899907969559883		
nptg	$\int_0^1 J_0\left(\frac{k\xi L}{2}\right) d\xi$	erro absoluto
2	1.9899807583888	$1.00386 \cdot 10^{-5}$
3	1.9899908064411	$-9.48511 \cdot 10^{-9}$
4	1.9899908021203	$-5.16431 \cdot 10^{-9}$
5	0.9899908021213	$-5.16531 \cdot 10^{-9}$

Tabela TB11 - Integral de J_0 para elementos constantes , $k=5.0$ e 64 elementos

$x = \frac{k\xi L}{2} = 5.7402514854772$ $\int_0^1 J_0\left(\frac{k\xi L}{2}\right) d\xi$ obtido pelo Mathematica = 0.235861779121118		
nptg	$\int_0^1 J_0\left(\frac{k\xi L}{2}\right) d\xi$	erro absoluto
2	-0.69474877895622	0.930611
3	0.51940229244379	-0.28354
4	0.19215087810644	$4.37109 \cdot 10^{-2}$
5	0.23994554040764	$-4.08376 \cdot 10^{-3}$
6	0.23560559088374	$2.56188 \cdot 10^{-4}$
7	0.23587333523856	$-1.15561 \cdot 10^{-5}$
8	0.23586138235680	$3.96764 \cdot 10^{-7}$
9	0.23586179108642	$-1.19653 \cdot 10^{-8}$
10	0.23586177839098	$7.30138 \cdot 10^{-10}$
11	0.23586177909536	$2.57580 \cdot 10^{-11}$
12	0.23586177901589	$1.05228 \cdot 10^{-10}$
13	0.23586177902442	$9.66980 \cdot 10^{-11}$
14	0.23586177902371	$9.74080 \cdot 10^{-11}$
15	0.23586177902376	$9.73580 \cdot 10^{-11}$

Tabela TB12 - Integral de J_0 para elementos constantes , $k=15.0$ e 8 elementos

$x = \frac{k\xi L}{2} = 2.9263548302419$ $\int_0^1 J_0\left(\frac{k\xi L}{2}\right) d\xi$ obtido pelo Mathematica = 0.960768484493058		
nptg	$\int_0^1 J_0\left(\frac{k\xi L}{2}\right) d\xi$	erro absoluto
2	0.80805957716426	$1.52709 \cdot 10^{-1}$
3	0.97065586385814	$-9.88738 \cdot 10^{-3}$
4	0.96041886044159	$3.49624 \cdot 10^{-4}$
5	0.96077626539936	$-7.78091 \cdot 10^{-6}$
6	0.96076836558287	$1.18910 \cdot 10^{-7}$
7	0.96076848612062	$-1.62756 \cdot 10^{-9}$
8	0.96076848475530	$-2.62242 \cdot 10^{-10}$
9	0.96076848476867	$-2.75612 \cdot 10^{-10}$
10	0.96076848476848	$-2.75422 \cdot 10^{-10}$

Tabela TB13 - Integral de J_0 para elementos constantes , k=15.0 e 16 elementos

$x = \frac{k\xi L}{2} = 1.4702571049434$ $\int_0^1 J_0\left(\frac{k\xi L}{2}\right) d\xi$ obtido pelo Mathematica = 1.667708475778108		
nptg	$\int_0^1 J_0\left(\frac{k\xi L}{2}\right) d\xi$	erro absoluto
2	1.6556277359050	$1.20807 \cdot 10^{-2}$
3	1.6678976075795	$-1.89132 \cdot 10^{-4}$
4	1.6677068360614	$1.63972 \cdot 10^{-6}$
5	1.6677084835792	$-7.80109 \cdot 10^{-9}$
6	1.6677084745332	$1.24491 \cdot 10^{-9}$
7	1.6677084745677	$1.21041 \cdot 10^{-9}$
8	1.6677084745676	$1.21051 \cdot 10^{-9}$

Tabela TB14 - Integral de J_0 para elementos constantes , k=15.0 e 32 elementos

$x = \frac{k\xi L}{2} = 0.73601511491125$ $\int_0^L J_0\left(\frac{k\xi L}{2}\right) d\xi$ obtido pelo Mathematica = 1.91152815717047		
nptg	$\int_0^L J_0\left(\frac{k\xi L}{2}\right) d\xi$	erro absoluto
2	1.9107274838284	$8.00673 \cdot 10^{-4}$
3	1.9115312680488	$-3.11088 \cdot 10^{-6}$
4	1.9115281525094	$4.66107 \cdot 10^{-9}$
5	1.9115281592184	$-2.04793 \cdot 10^{-9}$
6	1.9115281592092	$-2.03873 \cdot 10^{-9}$

Tabela TB15 - Integral de J_0 para elementos constantes , $k=15.0$ e 64 elementos

• Elementos constantes não singulares

Aqui são apresentadas as tabelas TB16 à TB23, que contém os resultados das eqs.(4.23) e (4.25) para vários números de Gauss utilizados na integração numérica. O número máximo de pontos de Gauss apresentado em cada tabela indica que, a partir daí, os resultados permanecem inalterados. O número de ondas utilizado nessas tabelas foi 0.5 e 15, sendo que em cada um desses casos, o contorno foi discretizado em 8 e 64 elementos. Os dados apresentados correspondem aos elementos das matrizes **G** e **H**. Cada uma dessas tabelas apresenta um dos elementos próximos de um elemento singular, e o elemento mais distante do mesmo. Observa-se nessas tabelas que, para os elementos mais distantes do elemento singular, a convergência é boa, tanto para a parte real, quanto para a parte imaginária dos elementos das matrizes **G** e **H**. O mesmo não ocorre com os elementos próximos do elemento singular. Para $k = 0.5$, a convergência da parte imaginária e real dos elementos das matrizes **G** e **H** é boa, sendo que, para a parte real, apresenta-se um pouco mais demorada. Para $k = 15.0$, e com um número de elementos no contorno igual à 8, observa-se que não é possível aumentar a convergência até a precisão vista para $k = 0.5$. Isto ocorre, tanto para a parte real, quanto para a parte imaginária dos elementos das matrizes em consideração; a precisão nas demais casas decimais só é encontrada aumentando o número de elementos, como o exemplo mostrado para $N = 64$. Esta falta de acuidade deve-se ao fato do raio da integração estar bem próximo da singularidade; este fato é conhecido como "quase singularidade".

nptg	$g(1, 2)$	$g(1, 5)$
2	(-.08983666544145, -.00636189430017)	(-.08017298663250, -.03958094363172)
3	(-.09114144505972, -.00636189817619)	(-.08018460833125, -.03958096960602)
4	(-.09114737230862, -.00636189817543)	(-.08018448798053, -.03958096960087)
5	(-.09113900313214, -.00636189817543)	(-.08018448923954, -.03958096960087)
6	(-.09113812091122, -.00636189817543)	(-.08018448922633, -.03958096960087)
7	(-.09113808823543, -.00636189817543)	(-.08018448922647, -.03958096960087)
8	(-.09113809082384, -.00636189817543)	(-.08018448922647, -.03958096960087)
9	(-.09113809129975, -.00636189817543)	(-.08018448922647, -.03958096960087)
10	(-.09113809133029, -.00636189817543)	(-.08018448922647, -.03958096960087)
11	(-.09113809133020, -.00636189817543)	(-.08018448922647, -.03958096960087)
12	(-.09113809133000, -.00636189817543)	(-.08018448922647, -.03958096960087)
13	(-.09113809132998, -.00636189817543)	(-.08018448922647, -.03958096960087)
14	(-.09113809132997, -.00636189817543)	(-.08018448922647, -.03958096960087)

Tabela TB16 - Elementos de G para $k=0.5$ e $n= 8$ (elementos constantes)

nptg	$g(1, 2)$	$g(1, 33)$
2	(-.01011155175845, -.00001474455636)	(-.00959389198277, -.00539311616980)
3	(-.01041769243224, -.00001474455636)	(-.00959389227173, -.00539311617077)
4	(-.01044975834017, -.00001474455636)	(-.00959389227168, -.00539311617077)
5	(-.01045275241610, -.00001474455636)	(-.00959389227168, -.00539311617077)
6	(-.01045301425412, -.00001474455636)	(-.00959389227168, -.00539311617077)
7	(-.01045303617783, -.00001474455636)	(-.00959389227168, -.00539311617077)
8	(-.01045303795608, -.00001474455636)	(-.00959389227168, -.00539311617077)
9	(-.01045303809677, -.00001474455636)	(-.00959389227168, -.00539311617077)
10	(-.01045303810768, -.00001474455636)	(-.00959389227168, -.00539311617077)
11	(-.01045303810851, -.00001474455636)	(-.00959389227168, -.00539311617077)
12	(-.01045303810857, -.00001474455636)	(-.00959389227168, -.00539311617077)
13	(-.01045303810858, -.00001474455636)	(-.00959389227168, -.00539311617077)

Tabela TB17 - Elementos de G para $k=0.5$ e $n= 64$ (elementos constantes)

nptg	$g(1, 2)$	$g(1, 5)$
2	(-.26209114495364, -.16576394708280)	(0.18270170319140, -.38978595712617)
3	(-.03747218435986, 0.04831534153928)	(0.17911094732168, -.38415762298292)
4	(-.08521114584250, -.01943470573042)	(0.17885871309898, -.38438071495126)
5	(-.07965769331346, -.00914582136461)	(0.17886861168156, -.38438852543420)
6	(-.08005400574821, -.01007521063922)	(0.17886877834279, -.38438818846886)
7	(-.08003500909706, -.01001938524723)	(0.17886876924337, -.38438818645883)
8	(-.08003568137509, -.01002178212341)	(0.17886876925510, -.38438818665627)
9	(-.08003566395745, -.01002170490956)	(0.17886876925852, -.38438818665494)
10	(-.08003566341323, -.01002170728760)	(0.17886876925848, -.38438818665489)
11	(-.08003566470533, -.01002170674234)	(0.17886876925847, -.38438818665489)
12	(-.08003566426126, -.01002170681777)	(0.17886876925848, -.38438818665489)
13	(-.08003566361100, -.01002170712460)	(0.17886876925848, -.38438818665489)
14	(-.08003566456652, -.01002170678843)	(0.17886876925848, -.38438818665489)
15	(-.08003566416591, -.01002170688436)	(0.17886876925848, -.38438818665489)
16	(-.08003566372267, -.01002170706028)	(0.17886876925848, -.38438818665489)
17	(-.08003566450919, -.01002170678795)	(0.17886876925848, -.38438818665489)
18	(-.08003566410197, -.01002170693109)	(0.17886876925848, -.38438818665489)
19	(-.08003566377612, -.01002170703635)	(0.17886876925848, -.38438818665489)
20	(-.08003566447144, -.01002170678408)	(0.17886876925848, -.38438818665489)
21	(-.08003566406806, -.01002170695481)	(0.17886876925848, -.38438818665489)

Tabela TB18 - Elementos de G para $k=15.0$ e $n= 8$ (elementos constantes)

nptg	$g(1, 2)$	$g(1, 33)$
2	(-.01058986169626, -.00984212427534)	(0.03251358471527, 0.04266813111732)
3	(-.01090723105095, -.00984285052899)	(0.03251348808364, 0.04266796149034)
4	(-.01093993069393, -.00984284875816)	(0.03251348822319, 0.04266796143128)
5	(-.01094295787596, -.00984284876083)	(0.03251348822322, 0.04266796143137)
6	(-.01094322152585, -.00984284876083)	(0.03251348822322, 0.04266796143137)
7	(-.01094324355057, -.00984284876083)	(0.03251348822322, 0.04266796143137)
8	(-.01094324533449, -.00984284876083)	(0.03251348822322, 0.04266796143137)
9	(-.01094324547550, -.00984284876083)	(0.03251348822322, 0.04266796143137)
10	(-.01094324548642, -.00984284876083)	(0.03251348822322, 0.04266796143137)
11	(-.01094324548725, -.00984284876083)	(0.03251348822322, 0.04266796143137)
12	(-.01094324548732, -.00984284876083)	(0.03251348822322, 0.04266796143137)

Tabela T19 - Elementos de G para $k=15.0$ e $n= 64$ (elementos constantes)

nptg	h(1, 2)	h(1, 5)
2	(-.13656522324390, -.18484997100270)	(0.00608038742857, -.15211557428394)
3	(-.13652443858602, -.18485031066055)	(0.00607430083404, -.15211590551040)
4	(-.13651180762438, -.18485031057188)	(0.00607434005656, -.15211590542219)
5	(-.13651097310233, -.18485031057190)	(0.00607433975522, -.15211590542220)
6	(-.13651095621473, -.18485031057190)	(0.00607433975773, -.15211590542220)
7	(-.13651095849760, -.18485031057190)	(0.00607433975771, -.15211590542220)
8	(-.13651095877440, -.18485031057190)	(0.00607433975771, -.15211590542220)
9	(-.13651095878741, -.18485031057190)	(0.00607433975771, -.15211590542220)
10	(-.13651095878714, -.18485031057190)	(0.00607433975771, -.15211590542220)
11	(-.13651095878705, -.18485031057189)	(0.00607433975771, -.15211590542220)

Tabela TB20 - Elementos de **H** para $k=0.5$ e $n= 8$ (elementos constantes)

nptg	h(1, 2)	h(1, 33)
2	(-.04954970319839, -.02451787838280)	(0.00214410762846, -.01878515061810)
3	(-.04957481491533, -.02451787839513)	(0.00214410746480, -.01878515062945)
4	(-.04957600561394, -.02451787839513)	(0.00214410746481, -.01878515062945)
5	(-.04957606763731, -.02451787839513)	(0.00214410746481, -.01878515062945)
6	(-.04957607101632, -.02451787839513)	(0.00214410746481, -.01878515062945)
7	(-.04957607120432, -.02451787839513)	(0.00214410746481, -.01878515062945)
8	(-.04957607121484, -.02451787839513)	(0.00214410746481, -.01878515062945)
9	(-.04957607121543, -.02451787839513)	(0.00214410746481, -.01878515062945)
10	(-.04957607121546, -.02451787839513)	(0.00214410746481, -.01878515062945)
11	(-.04957607121546, -.02451787839513)	(0.00214410746481, -.01878515062945)

Tabela TB21 - Elementos de **H** para $k=0.5$ e $n= 64$ (elementos constantes)

nptg	h(1,2)	h(1, 5)
2	(0.02215703319700,-.04250204289885)	(0.02637778230953,0.01179265545989)
3	(-.00277304599482,0.00276096623789)	(0.02598070146826,0.01158673857270)
4	(0.00424786369239,-.01066849838494)	(0.02599342449936,0.01156809547212)
5	(0.00326382194844,-.00852797604905)	(0.02599404778436,0.01156866617156)
6	(0.00334904850169,-.00873872201501)	(0.02599402783944,0.01156868155470)
7	(0.00334393804116,-.00872477475786)	(0.02599402756707,0.01156868099317)
8	(0.00334416246039,-.00872543504939)	(0.02599402758002,0.01156868099039)
9	(0.00334415520974,-.00872541147857)	(0.02599402758000,0.01156868099063)
10	(0.00334415537175,-.00872541222321)	(0.02599402758000,0.01156868099063)
11	(0.00334415510579,-.00872541226879)	(0.02599402758000,0.01156868099063)
12	(0.00334415540344,-.00872541210990)	(0.02599402758000,0.01156868099063)
13	(0.00334415541480,-.00872541216129)	(0.02599402758000,0.01156868099063)
14	(0.00334415516576,-.00872541224346)	(0.02599402758000,0.01156868099063)
15	(0.00334415535223,-.00872541215064)	(0.02599402758000,0.01156868099063)
16	(0.00334415542588,-.00872541214262)	(0.02599402758000,0.01156868099063)
17	(0.00334415522539,-.00872541220923)	(0.02599402758000,0.01156868099063)
18	(0.00334415532212,-.00872541217691)	(0.02599402758000,0.01156868099063)
19	(0.00334415541694,-.00872541214284)	(0.02599402758000,0.01156868099063)
20	(0.00334415526737,-.00872541218408)	(0.02599402758000,0.01156868099063)
21	(0.00334415530992,-.00872541218881)	(0.02599402758000,0.01156868099063)

Tabela TB22 - Elementos de **H** para k=15.0 e n= 8 (elementos constantes)

nptg	h(1,2)	h(1,33)
2	(0.00759655535853,-.01262806937516)	(-.00280750223127,0.00221431301479)
3	(0.00758339883116,-.01263037904802)	(-.00280749151332,0.00221430566183)
4	(0.00758222270680,-.01263037142071)	(-.00280749150834,0.00221430567059)
5	(0.00758216224208,-.01263037143545)	(-.00280749150834,0.00221430567060)
6	(0.00758215891563,-.01263037143543)	(-.00280749150834,0.00221430567060)
7	(0.00758215872981,-.01263037143543)	(-.00280749150834,0.00221430567060)
8	(0.00758215871939,-.01263037143543)	(-.00280749150834,0.00221430567060)
9	(0.00758215871880,-.01263037143543)	(-.00280749150834,0.00221430567060)
10	(0.00758215871877,-.01263037143543)	(-.00280749150834,0.00221430567060)
11	(0.00758215871877,-.01263037143543)	(-.00280749150834,0.00221430567060)

Tabela TB23 - Elementos de **H** para k=15.0 e n= 64 (elementos constantes)

• Elementos lineares singulares e não singulares

Análogo ao desenvolvimento dos elementos constantes singulares, aqui, a singularidade é contornada desenvolvendo a eq. (4.69b) através da eq. (B1), sendo, então, reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \text{INT2} &= - \int_{-1}^{+1} \frac{1}{4} Y_0(kR(\xi)) \frac{L}{2} \psi_1 d\xi = - \frac{1}{4} \int_{-1}^{+1} Y_0\left(\frac{kL}{2}(1+\xi)\right) \frac{L}{2} \left(\frac{1-\xi}{2}\right) d\xi = \\
 &= - \frac{L}{16} \int_{-1}^{+1} Y_0\left(\frac{kL}{2}(1+\xi)\right) (1-\xi) d\xi = \\
 &= - \frac{L}{16} \left\{ -\frac{6}{\pi} + \frac{4\gamma}{\pi} + \frac{19}{72\pi} (kL)^2 - \frac{\gamma}{6\pi} (kL)^2 - \frac{7}{900\pi} (kL)^4 + \right. \\
 &+ \frac{\gamma}{240\pi} (kL)^4 + \frac{353}{2709504\pi} (kL)^6 - \frac{\gamma}{16128\pi} (kL)^6 - \\
 &- \frac{413}{298598400\pi} (kL)^8 + \frac{\gamma}{1658880\pi} (kL)^8 + \frac{811}{80289792000\pi} (kL)^{10} - \\
 &- \frac{\gamma}{243302400\pi} (kL)^{10} - \frac{4729}{87917985792000\pi} (kL)^{12} + \frac{\gamma}{48306585600\pi} (kL)^{12} + \\
 &+ \frac{4}{\pi} \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{6\pi} \ln\left(\frac{1}{2}\right) (kL)^2 + \frac{1}{240\pi} \ln\left(\frac{1}{2}\right) (kL)^4 - \frac{1}{16128\pi} \ln\left(\frac{1}{2}\right) (kL)^6 + \\
 &+ \frac{1}{1658880\pi} \ln\left(\frac{1}{2}\right) (kL)^8 - \frac{1}{243302400\pi} \ln\left(\frac{1}{2}\right) (kL)^{10} + \\
 &+ \frac{1}{48306585600\pi} \ln\left(\frac{1}{2}\right) (kL)^{12} + \frac{3}{\pi} \ln(2) - \frac{5}{96\pi} \ln(2) (kL)^2 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{7}{15360\pi} \ln(2) (kL)^4 - \frac{1}{458752\pi} \ln(2) (kL)^6 + \frac{11}{1698693120\pi} \ln(2) (kL)^8 - \\
& + \frac{13}{996566630400\pi} \ln(2) (kL)^{10} + \frac{1}{52763673231360\pi} \ln(2) (kL)^{12} + \\
& + \frac{3}{\pi} \ln\left(\frac{kL}{2}\right) - \frac{5}{96\pi} \ln\left(\frac{kL}{2}\right) (kL)^2 + \frac{7}{15360\pi} \ln\left(\frac{kL}{2}\right) (kL)^4 - \\
& - \frac{1}{458752\pi} \ln\left(\frac{kL}{2}\right) (kL)^6 + \frac{11}{1698693120\pi} \ln\left(\frac{kL}{2}\right) (kL)^8 + \\
& - \frac{13}{996566630400\pi} \ln\left(\frac{kL}{2}\right) (kL)^{10} + \frac{1}{52763673231360\pi} \ln\left(\frac{kL}{2}\right) (kL)^{12} \\
& + \frac{1}{\pi} \ln(kL) - \frac{11}{96\pi} (kL)^2 \ln(kL) + \frac{19}{5120\pi} (kL)^4 \ln(kL) - \\
& - \frac{247}{4128768\pi} (kL)^6 \ln(kL) + \frac{1013}{1698693120\pi} (kL)^8 \ln(kL) - \\
& - \frac{1361}{332188876800\pi} (kL)^{10} \ln(kL) + \frac{16369}{791455098470400\pi} (kL)^{12} \ln(kL)
\end{aligned} \tag{B3}$$

Da mesma forma, aplicando a eq. (B1) na eq. (4.69d), esta última pode ser reescrita como:

$$\text{INT3} = - \int_{-1}^{+1} \frac{1}{4} Y_0(kR(\xi)) \frac{L}{2} \psi_2 d\xi = - \frac{1}{4} \int_{-1}^{+1} Y_0\left(\frac{kL}{2}(1+\xi)\right) \frac{L}{2} \left(\frac{1+\xi}{2}\right) d\xi =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{L}{16} \int_{-1}^{+1} Y_0\left(\frac{kL}{2}(1+\xi)\right) (1+\xi) d\xi = \\
&= -4261681299456000 + 8523362598912000 \gamma + 1331775406080000 (kL)^2 - \\
&- 1065420324864000 \gamma (kL)^2 - 73987522560000 (kL)^4 + \\
&+ 44392513536000 \gamma (kL)^4 + 1811152896000 (kL)^6 - 924844032000 \gamma (kL)^6 - \\
&- 25240535040 (kL)^8 + 11560550400 \gamma (kL)^8 + 227999744 (kL)^{10} - \\
&- 96337920 \gamma (kL)^{10} - 1445888 (kL)^{12} + 573440 \gamma (kL)^{12} + \\
&+ 8523362598912000 \ln\left(\frac{1}{2}\right) - 1065420324864000 (kL)^2 \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \\
&+ 44392513536000 (kL)^4 \ln\left(\frac{1}{2}\right) - 924844032000 (kL)^6 \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \\
&+ 11560550400 (kL)^8 \ln\left(\frac{1}{2}\right) - 96337920 (kL)^{10} \ln\left(\frac{1}{2}\right) + 573440 (kL)^{12} \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \\
&+ 2130840649728000 \ln(2) - 66588770304000 (kL)^2 \ln(2) + \\
&+ 693633024000 (kL)^4 \ln(2) - 3612672000 (kL)^6 \ln(2) + 11289600 (kL)^8 \ln(2) - \\
&- 23520 (kL)^{10} \ln(2) + 35 (kL)^{12} \ln(2) + 2130840649728000 \ln\left(\frac{kL}{2}\right) - \\
&- 66588770304000 (kL)^2 \ln\left(\frac{kL}{2}\right) + 693633024000 (kL)^4 \ln\left(\frac{kL}{2}\right) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 3612672000 (kL)^6 \ln\left(\frac{kL}{2}\right) + 11289600 (kL)^8 \ln\left(\frac{kL}{2}\right) - 23520 (kL)^{10} \ln\left(\frac{kL}{2}\right) + \\
& + 35 (kL)^{12} \ln\left(\frac{kL}{2}\right) + 6392521949184000 \ln(kL) - \\
& - 998831554560000 (kL)^2 \ln(kL) + 43698880512000 (kL)^4 \ln(kL) - \\
& - 921231360000 (kL)^6 \ln(kL) + 11549260800 (kL)^8 \ln(kL) - \\
& - 96314400 (kL)^{10} \ln(kL) + 573405 (kL)^{12} \frac{\ln(kL)}{2130840649728000\pi}
\end{aligned}
\tag{B4}$$

A seguir, alguns resultados, obtidos através da eq. (B3), são comparados com os resultados do MATHEMATICA e apresentados na tabela TB24 para $k = 5.0$. Nas tabelas seguintes, TB25 e TB26, são apresentados os resultados da integral de $J_0(x)$ para os elementos da diagonal da matriz $\mathbf{G}$ (primeira integral da eq. (4.60)), com $k = 5.0$ e número de elementos igual a 8 e 64. Nessas três tabelas, o erro absoluto diminui conforme o número de elementos da discretização (TB24), ou o número de pontos de gauss (TB25 e TB26) vai aumentando. As tabelas TB27 à TB30 mostram alguns dos elementos não singulares próximos e distantes dos elementos singulares das matrizes $\mathbf{G}$ e $\mathbf{H}$, também para $k = 5.0$ e número de elementos igual a 8 e 64.

número de elementos	$\int_{-1}^1 Y_0\left(\frac{kL}{2}(1+\xi)\right)(1-\xi) d\xi$ (através da eq. (B3))	$\int_{-1}^1 Y_0\left(\frac{kL}{2}(1+\xi)\right)(1-\xi) d\xi$ (através do Mathematica)	erro absoluto
8	-0.20758620053136	-0.2075809465162914	$5.25402 \cdot 10^{-6}$
16	-1.9977509598988	-1.997750959898743	$5.68434 \cdot 10^{-14}$
32	-1.0220357298152	-1.022035729183043	$6.32157 \cdot 10^{-10}$
64	-2.9333838014925	-2.933383801492452	$4.76616 \cdot 10^{-14}$

Tabela TB24 - Integral de Y_0 para elementos lineares, $k = 5.0$

$\int_{-1}^1 J_0\left(\frac{kL}{2}(1+\xi)\right)(1-\xi) d\xi$ obtido pelo Mathematica = 1.14621221157715		
nptg	$\int_{-1}^1 J_0\left(\frac{kL}{2}(1+\xi)\right)(1-\xi) d\xi$	erro absoluto
2	1.2173210914307	-7.56999 10 ⁻²
3	1.1386290115514	2.99221 10 ⁻³
4	1.1416791089441	-5.78878 10 ⁻⁵
5	1.1416205542297	6.66928 10 ⁻⁷
6	1.1416212262830	-5.12528 10 ⁻⁹
7	1.1416212211544	3.31513 10 ⁻¹²
8	1.1416212211820	-2.42850 10 ⁻¹¹
9	1.1416212211819	-2.41849 10 ⁻¹¹

Tabela TB25 - Integral de J_0 para elementos lineares, $k = 5.0$ e 8 elementos

$\int_{-1}^1 J_0\left(\frac{kL}{2}(1+\xi)\right)(1-\xi) d\xi$ obtido pelo Mathematica = 1.980056694351116		
nptg	$\int_{-1}^1 J_0\left(\frac{kL}{2}(1+\xi)\right)(1-\xi) d\xi$	erro absoluto
2	1.9800867064341	3.00121 10 ⁻⁵
3	1.9800566775837	1.67674 10 ⁻⁸
4	1.9800566990626	-4.71148 10 ⁻⁹
5	1.9800566990554	-4.70428 10 ⁻⁹

Tabela TB26 - Integral de J_0 para elementos lineares, $k = 5.0$ e 64 elementos

nptg	$g(1,2)$	$g(1,5)$
2	(-.04886685571078,-.00303620314459)	(-.01268321619556,0.02069092516768)
3	(-.04886685571078,0.00022395064235)	(-.01328744964672,0.02061816610525)
4	(-.04886685571078,0.00009569037375)	(-.01326874567139,0.02061245110041)
5	(-.04886685571078,0.00009819604873)	(-.01326903890698,0.02061270791313)
6	(-.04886685571078,0.00009816686918)	(-.01326903626241,0.02061270335065)
7	(-.04886685571078,0.00009816709459)	(-.01326903646967,0.02061270333951)
8	(-.04886685571078,0.00009816709336)	(-.01326903626004,0.02061270341078)
9	(-.04886685571078,0.00009816709337)	(-.01326903642879,0.02061270335077)
10	(-.04886685571078,0.00009816709337)	(-.01326903626249,0.02061270340997)

Tabela TB27 - Elementos de G para $k=5.0$ e $n = 8$ (elementos lineares)

nptg	$g(1,2)$	$g(1,33)$
2	(0.00989419679559, 0.01190112089623)	(-0.00034869135975, 0.00361963647175)
3	(0.00989419679559, 0.01190142525809)	(-0.00034897780468, 0.00361967077482)
4	(0.00989419679559, 0.01190142507474)	(-0.00034897764768, 0.00361967069554)
5	(0.00989419679559, 0.01190142507479)	(-0.00034897764772, 0.00361967069558)
6	(0.00989419679559, 0.01190142507479)	(-0.00034897764772, 0.00361967069558)

Tabela TB28 - Elementos de **G** para $k=5.0$ e $n = 64$ (elementos lineares)

nptg	$h(1,2)$	$h(1,5)$
2	(-0.06232088883562, -0.05770042733606)	(-0.19845795557695, 0.12169766623096)
3	(-0.05743900602885, -0.05672304419397)	(-0.19659611780220, 0.12173277858955)
4	(-0.05760261777510, -0.05680352277840)	(-0.19661640643301, 0.12176809784309)
5	(-0.05760086207789, -0.05680175904288)	(-0.19661665972384, 0.12176755922681)
6	(-0.05760088010238, -0.05680177946444)	(-0.19661665355674, 0.12176756103468)
7	(-0.05760087950192, -0.05680177931381)	(-0.19661665360572, 0.12176756105754)
8	(-0.05760087948779, -0.05680177931458)	(-0.19661665360553, 0.12176756105723)
9	(-0.05760087948781, -0.05680177931458)	(-0.19661665360553, 0.12176756105723)
10	(-0.05760087948783, -0.05680177931458)	(-0.19661665360553, 0.12176756105723)

Tabela TB29 - Elementos de **H** para $k=5.0$ e $n = 8$ (elementos lineares)

nptg	$h(1,2)$	$h(1,33)$
2	(0.00561705291050, 0.00139539027989)	(-0.03050471415571, 0.00551428106061)
3	(0.00569329250307, 0.00139536443740)	(-0.03050465203618, 0.00551429525637)
4	(0.00569662749884, 0.00139536445016)	(-0.03050465204907, 0.00551429527596)
5	(0.00569675622093, 0.00139536445016)	(-0.03050465204907, 0.00551429527596)
6	(0.00569676084144, 0.00139536445016)	(-0.03050465204907, 0.00551429527596)
7	(0.00569676099938, 0.00139536445016)	(-0.03050465204907, 0.00551429527596)
8	(0.00569676100458, 0.00139536445016)	(-0.03050465204907, 0.00551429527596)
9	(0.00569676100475, 0.00139536445016)	(-0.03050465204907, 0.00551429527596)

Tabela TB30 - Elementos de **H** para $k=5.0$ e $n = 64$ (elementos lineares)

Observa-se através das tabelas TB25 à TB30, que considerando o número de pontos de Gauss igual à 10, garante-se uma aproximação de no mínimo 9 casas decimais, tanto para os elementos singulares quanto para os não singulares, sendo este, o número adotado para integração numérica dos elementos lineares.

• Elementos quadráticos singulares e não singulares

As tabelas TB31 e TB32 mostram os resultados das integrais que compõem um dos elementos singulares de $\mathbf{G}$ quando o ponto de colocação é localizado no nó 1 (eq.(4.90)). A parte real destes termos foi integrada pela fórmula da quadratura gaussiana logarítmica, e a parte imaginária, pela fórmula da quadratura gaussiana normal. Logo em seguida, são apresentadas as tabelas TB33 à TB36, que contém alguns dos resultados dos elementos não singulares próximos e distantes de um dos elementos singulares das matrizes $\mathbf{G}$ e $\mathbf{H}$. Nas tabelas TB31 à TB36, o contorno é discretizado em 8 e 64 elementos e k é igual à 5.0.

nptg	GW(1)	GW(2)	GW(3)
2	(.02775590917,.040252630643726)	(-.0392499458,.036559093931163)	(-.009711796789,-.0219730836781)
3	(.02672933092,.038020080967926)	(-.0370767054,.034451927475606)	(-.010475828009,-.0185227922479)
4	(.02720939518,.037920216914641)	(-.0371840545,.034687647805946)	(-.01072075348,-.01864343715393)
5	(.02743389458,.037925443426231)	(-.0372187457,.034684107634223)	(-.01086238719,-.01864447496648)
6	(.02747849590,.037925468623046)	(-.0365896773,.034683932933696)	(-.00859678514,-.01864434752892)
7	(.02762986088,.037925465550858)	(-.0372357567,.034683938567635)	(-.01100434315,-.01864434993181)
8	(.02767827918,.037925465574170)	(-.0372383915,.034683938527555)	(-.01104246329,-.01864434991532)
9	(.02771161590,.037925465574464)	(-.0372398258,.034683938527667)	(-.01106963083,-.01864434991565)
10	(.02773552493,.037925465574465)	(-.0372406599,.034683938527645)	(-.01108966208,-.01864434991563)
12	(.02776672073,.037925465574465)	(-.0372414985,.034683938527646)	(-.01111663468,-.01864434991563)
14	(.02778552488,.037925465574465)	(-.0372418644,.034683938527646)	(-.01113346978,-.01864434991563)

Tabela TB31 - Elementos singulares de $\mathbf{G}$, $k=5.0$ e $ne=8$
Ponto de colocação no nó 1- Elementos quadráticos

nptg	GW(1)	GW(2)	GW(3)
2	(.00974551505,.0041311226497092)	(.01681769491,.016036975219233)	(.0000281257,.0038873649599071)
3	(.00964253140,.0041162207292868)	(.01686166445,.016066429107729)	(.0006742383,.0038728733499423)
4	(.00960713317,.0041162285335868)	(.01686941039,.01606641359831)	(.0009641686,.0038728810786696)
5	(.00959049690,.0041162285363306)	(.01687171758,.016066413592320)	(.0011179183,.0038728810816171)
6	(.00963840819,.0041162285366281)	(.01660550878,.016066413592325)	(.0002707234,.0038728810816146)
7	(.00957574155,.0041162285366281)	(.01687299223,.016066413592325)	(.0012674769,.0038728810816146)
8	(.00957208631,.0041162285366281)	(.01687318996,.016066413592325)	(.0013071443,.0038728810816146)
9	(.00956956696,.0041162285366281)	(.01687329783,.016066413592325)	(.0013353037,.0038728810816146)
10	(.00956775872,.0041162285366281)	(.01687336066,.016066413592325)	(.0013560110,.0038728810816146)
12	(.00956539760,.0041162285366281)	(.01687342393,.016066413592325)	(.0013838242,.0038728810816146)
14	(.00956397337,.0041162285366281)	(.01687345158,.016066413592325)	(.0014011456,.0038728810816146)

Tabela TB32 - Elementos singulares de $\mathbf{G}$, $k=5.0$ e $ne=64$
Ponto de colocação no nó 1- Elementos quadráticos

nptg	$g(1,2)$	$g(1,9)$
2	(-0.039249945832, 0.03655909393116)	(-0.009830731360, -.00559597320258)
3	(-0.037076705415, 0.03445192747561)	(-0.008919520328, -.00528489815452)
4	(-0.076687612467, 0.03468764780595)	(-0.008902959677, -.00532587241195)
5	(-0.047782007311, 0.03468410763422)	(-0.008904712939, -.00532607165449)
6	(-0.036589677346, 0.03468393293370)	(-0.008904707211, -.00532602002526)
7	(-0.037235756793, 0.03468393856763)	(-0.008904706308, -.00532602051716)
8	(-0.037238416089, 0.03468393852755)	(-0.008904706278, -.00532602051149)
9	(-0.037239825897, 0.03468393852767)	(-0.008904706310, -.00532602051970)
10	(-0.037240659925, 0.03468393852764)	(-0.008904706296, -.00532602051956)
12	(-0.037485845167, 0.03468393852765)	(-0.008904706303, -.00532602052108)
14	(-0.037069728970, 0.03468393852765)	(-0.008904706302, -.00532602051766)
16	(-0.037242043693, 0.03468393852765)	(-0.008904706279, -.00532602051364)

Tabela TB33 - Elementos de G para $k=5.0$ e 8 elementos (elementos quadráticos)

nptg	$g(1,2)$	$g(1,65)$
2	(0.016817694915, 0.01603697521923)	(-0.004407215813, -.00020315079080)
3	(0.016861664455, 0.01606642910773)	(-0.004410597256, -.00020535740960)
4	(0.026761904466, 0.01606641359833)	(-0.004410599188, -.00020535495563)
5	(0.022594262870, 0.01606641359232)	(-0.004410599186, -.00020535495481)
6	(0.016605508781, 0.01606641359233)	(-0.004410599186, -.00020535495481)
7	(0.016872992240, 0.01606641359233)	(-0.004410599186, -.00020535495481)
8	(0.016873190873, 0.01606641359233)	(-0.004410599186, -.00020535495481)
9	(0.016873297837, 0.01606641359233)	(-0.004410599186, -.00020535495481)
10	(0.016873360649, 0.01606641359233)	(-0.004410599186, -.00020535495481)
12	(0.016083070032, 0.01606641359233)	(-0.004410599186, -.00020535495481)
14	(0.016785029711, 0.01606641359233)	(-0.004410599186, -.00020535495481)
16	(0.016873465205, 0.01606641359233)	(-0.004410599186, -.00020535495481)

Tabela TB34 - Elementos de G para $k=5.0$ e 64 elementos (elementos quadráticos)

nptg	$h(1,2)$	$h(1,9)$
2	(-0.0094344073539, 0.04262447843818)	(-0.0866860909725, 0.00599468708497)
3	(0.0033014208262, 0.05579938490238)	(-0.0863457299201, 0.00963916199518)
4	(0.0018145036200, 0.05486011080752)	(-0.0862457819581, 0.00959536442909)
5	(0.0018413466237, 0.05488590794421)	(-0.0862471211461, 0.00959304290934)
6	(0.0018395778258, 0.05488570939574)	(-0.0862471589725, 0.00959307223426)
7	(0.0018391034673, 0.05488570529317)	(-0.0862471583873, 0.00959307277731)
8	(0.0018389741511, 0.05488570538382)	(-0.0862471583802, 0.00959307276829)
9	(0.0018389315148, 0.05488570538368)	(-0.0862471583803, 0.00959307276821)
10	(0.0018389156177, 0.05488570538367)	(-0.0862471583803, 0.00959307276821)
11	(0.0018389090721, 0.05488570538367)	(-0.0862471583803, 0.00959307276821)
12	(0.0018389061490, 0.05488570538367)	(-0.0862471583803, 0.00959307276821)
13	(0.0018389047524, 0.05488570538367)	(-0.0862471583803, 0.00959307276821)
14	(0.0018389040459, 0.05488570538367)	(-0.0862471583803, 0.00959307276821)
15	(0.0018389036707, 0.05488570538367)	(-0.0862471583803, 0.00959307276821)
16	(0.0018389034629, 0.05488570538367)	(-0.0862471583803, 0.00959307276821)

Tabela TB35 - Elementos de H para $k=5.0$ e 8 elementos (elementos quadráticos)

nptg	$h(1,2)$	$h(1,65)$
2	(0.0055423674347, 0.00032262697014)	(-0.0101909334508, 0.00175815304207)
3	(0.0055341705576, 0.00029124847982)	(-0.0101923402446, 0.00176678272126)
4	(0.0055337122713, 0.00029130954179)	(-0.0101923370423, 0.00176678342856)
5	(0.0055336795030, 0.00029130951227)	(-0.0101923370423, 0.00176678342753)
6	(0.0055336747609, 0.00029130951227)	(-0.0101923370423, 0.00176678342753)
7	(0.0055336737553, 0.00029130951227)	(-0.0101923370423, 0.00176678342753)
8	(0.0055336734821, 0.00029130951227)	(-0.0101923370423, 0.00176678342753)
9	(0.0055336733936, 0.00029130951227)	(-0.0101923370423, 0.00176678342753)
10	(0.0055336733609, 0.00029130951227)	(-0.0101923370423, 0.00176678342753)
11	(0.0055336733475, 0.00029130951227)	(-0.0101923370423, 0.00176678342753)
12	(0.0055336733416, 0.00029130951227)	(-0.0101923370423, 0.00176678342753)
13	(0.0055336733387, 0.00029130951227)	(-0.0101923370423, 0.00176678342753)
14	(0.0055336733373, 0.00029130951227)	(-0.0101923370423, 0.00176678342753)
15	(0.0055336733365, 0.00029130951227)	(-0.0101923370423, 0.00176678342753)
16	(0.0055336733361, 0.00029130951227)	(-0.0101923370423, 0.00176678342753)

Tabela TB36 - Elementos de H para $k=5.0$ e 64 elementos (elementos quadráticos)

Observa-se nos elementos $g(1,2)$, que a convergência não é tão boa quanto para os outros elementos. Isto se deve ao fato do raio da integração estar bem próximo da singularidade; é o caso da “quase singularidade”, já visto anteriormente.

O número de Gauss para integração numérica dos elementos quadráticos é escolhido através dos resultados apresentados pelas tabelas TB31 à TB36. Para a parte imaginária dos elementos singulares e não singulares, o número de pontos de Gauss igual à 10 garante uma convergência de no mínimo 10 casas decimais. Para a parte real, o erro de convergência aparece logo na quarta casa decimal, com uma convergência bastante lenta; mesmo assim, como o resultado não melhora aumentando o número de Gauss, considera-se para a integração, tanto para a parte real quanto para a imaginária, o número de Gauss igual à 10. Para sanar esta dificuldade de convergência para os elementos com singularidade, necessita-se de outra estratégia de integração, pois a utilizada neste trabalho não apresenta bons resultados, desde que os valores dos números de pontos de Gauss logaritmico é tabulada apenas até 16. Para valores maiores que este, torna-se muito difícil calcular, sem perda de acuidade, mesmo utilizando recursos computacionais significantes [Stroud, 1966].

• Elementos cúbicos singulares e não singulares

As tabelas TB37a à TB38b mostram alguns dos resultados das integrais que compõem um dos elementos singulares de $\mathbf{G}$ quando o ponto de colocação é localizado no nó 1 (eq.(4.26)). As tabelas seguintes, TB39 à TB42, mostram os resultados de um dos elementos não singulares próximo e distante do elemento singular das matrizes $\mathbf{G}$ e $\mathbf{H}$. Essas tabelas seguem o mesmo caso apresentado para os elementos quadráticos, ou seja, para $k = 5.0$, com 8 e 64 elementos de discretização do contorno.

nptg	GW(1)	GW(2)
2	(.018741536616131, .014736761242079)	(.014115915899072, .091441502063539)
3	(.022893469349477, .022715201332981)	(-.002745081578035, .057165992058462)
4	(.023065185474104, .021601961431746)	(-.001697875136403, .060736186987984)
5	(.023301138123030, .021651886066156)	(-.001819944730947, .060586450008440)
6	(.023611569227949, .021650488676726)	(-.002419391036892, .060590533911913)
7	(.023490350236149, .021650519654144)	(-.001856201498444, .060590445042872)
8	(.023536297589729, .021650519103883)	(-.001861865179859, .060590446598924)
9	(.023567729469984, .021650519111909)	(-.001864924387600, .060590446576393)
10	(.023590169759410, .021650519111805)	(-.001866693435664, .060590446576685)

Tabela TB37a - Elementos singulares de $\mathbf{G}$, $k=5.0$ e $n_e=8$

Ponto de colocação no nó 1- Elementos cúbicos

nptg	GW (3)	GW (4)
2	(-.05914898782783,-.050252152948368)	(.004780601196206,-.001006978203688)
3	(-.03889118800026,-.018039417441063)	(-.001989578645527,-.007924039574232)
4	(-.04019626413606,-.021292173512760)	(-.001828080483715,-.007077560491614)
5	(-.04010161257223,-.021157751988338)	(-.001999099888158,-.007113670835847)
6	(-.03883490304299,-.021161390254097)	(-.000215007264509,-.007112684882928)
7	(-.04008278445925,-.021161311422367)	(-.002143073732282,-.007112706447578)
8	(-.04007981894686,-.021161312796662)	(-.002180789974216,-.007112706069827)
9	(-.04007823215049,-.021161312776809)	(-.002207437954805,-.007112706075295)
10	(-.04007732081644,-.021161312777067)	(-.002226971755298,-.007112706075223)

Tabela TB37b - Elementos singulares de G , $k=5.0$ e $nc=8$

Ponto de colocação no nó 1- Elementos cúbicos

nptg	GW (1)	GW (2)
2	(.0072363717078762,.003037402592012)	(.013829678489554,.0092950747535287)
3	(.0070625397546821,.003055849544651)	(.014058060665009,.0092030560158429)
4	(.0070209245641514,.003055793669283)	(.014079617835265,.0092032611446597)
5	(.0070026008802961,.003055793716610)	(.014085541286455,.0092032609821629)
6	(.0069337227876525,.003055793716586)	(.014336023754258,.0092032609822425)
7	(.0069869662861205,.003055793716586)	(.014088651779931,.0092032609822425)
8	(.0069831795678374,.003055793716586)	(.014089118849205,.0092032609822425)
9	(.0069805892876786,.003055793716586)	(.014089371015751,.0092032609822425)
10	(.0069787400281139,.003055793716586)	(.014089516812345,.0092032609822425)

Tabela TB38a - Elementos singulares de G , $k=5.0$ e $nc=64$

Ponto de colocação no nó 1- Elementos cúbicos

nptg	GW (3)	GW (4)
2	(.0050928219538818,.008746473821057)	(.000433611918252,.0029764469328493)
3	(.0049147353839485,.008874590192414)	(.001143733841051,.0029220301351066)
4	(.0049018875889632,.008874348058211)	(.001438682229534,.0029221229449875)
5	(.0048985596059685,.008874348240973)	(.001593705943583,.0029221228774242)
6	(.0043487712602892,.008874348240885)	(.000896990304770,.0029221228774561)
7	(.0048968831632872,.008874348240885)	(.001743862585250,.0029221228774561)
8	(.0048966385622430,.008874348240885)	(.001783604337803,.002.922122877456)
9	(.0048965077603960,.008874348240885)	(.001811798230740,.0029221228774561)
10	(.0048964326513924,.008874348240885)	(.001832521808187,.0029221228774561)

Tabela TB38b - Elementos singulares de G , $k=5.0$ e $ne=64$
Ponto de colocação no nó 1- Elementos cúbicos

nptg	$g(1,2)$	$g(1,13)$
2	(.054225568193118,.003101142688578)	(-.058014152777391,.017714300656691)
3	(.032954731288962,.024918776355470)	(-.059339610636618,.013051603246579)
4	(.035638039600005,.020331096551391)	(-.059643113666030,.013265746209010)
5	(.035395448594215,.020578261476915)	(-.059637671623644,.013272436744626)
6	(.035395620675665,.020572443366462)	(-.059637558037628,.013272391625375)
7	(.035394036940957,.020572531703174)	(-.059637557913177,.013272389824057)
8	(.035393657291215,.020572530564093)	(-.059637557934221,.013272389816964)
9	(.035393536288723,.020572530576477)	(-.059637557934354,.013272389817129)
10	(.035393492415781,.020572530576369)	(-.059637557934353,.013272389817131)

Tabela TB39 - Elementos de G para $k=5.0$ e 8 elementos (elementos cúbicos)

nptg	$g(1,2)$	$g(1,97)$
2	(.0028711080424733,-.000090021284122)	(.0007641728810178,.003415910262045)
3	(.0029714993953878,.000001607774859)	(.0007906578946665,.003447399324443)
4	(.0029676493774345,.000001217700510)	(.0007904910935349,.003447255936765)
5	(.0029675301342288,.000001218094659)	(.0007904912477022,.003447256103138)
6	(.0029675156842769,.000001218094468)	(.0007904912479171,.003447256103045)
7	(.0029675128972330,.000001218094468)	(.0007904912479196,.003447256103045)
8	(.0029675121805298,.000001218094468)	(.0007904912479197,.003447256103045)
9	(.0029675119564167,.000001218094468)	(.0007904912479197,.003447256103045)
10	(.0029675118755569,.000001218094468)	(.0007904912479197,.003447256103045)

Tabela TB40 - Elementos de G para $k=5.0$ e 64 elementos (elementos cúbicos)

nptg	$h(1,2)$	$h(1, 13)$
2	(.014115915899072,.09144150206353)	(-.003546628403457,-.0050966702033055)
3	(-.002745081578035,.05716599205846)	(-.004712674635295,-.0042655039189865)
4	(-.001697875136403,.06073618698798)	(-.004678226690511,-.0042207332777816)
5	(-.001819944730947,.06058645000844)	(-.004677325433623,-.0042211618243646)
6	(-.002419391036892,.06059053391191)	(-.004677320661017,-.0042211749596754)
7	(-.001856201498444,.06059044504287)	(-.004677320765182,-.0042211751868385)
8	(-.001861865179859,.06059044659892)	(-.004677320769148,-.0042211751881487)
9	(-.001864924387600,.06059044657639)	(-.004677320769207,-.0042211751881034)
10	(-.001866693435664,.06059044657668)	(-.004677320769207,-.0042211751881022)

Tabela TB41 - Elementos de H para $k=5.0$ e 8 elementos (elementos cúbicos)

nptg	$h(1,2)$	$h(1, 97)$
2	(.013829678489554,.009295074753528)	(-.001307385778946,.001345305433974)
3	(.014058060665009,.009203056015842)	(-.001201810507850,.001514342556922)
4	(.014079617835265,.009203261144659)	(-.001201652209644,.001514029219146)
5	(.014085541286455,.009203260982162)	(-.001201651588201,.001514029437181)
6	(.014336023754258,.009203260982242)	(-.001201651585661,.001514029437084)
7	(.014088651779931,.009203260982242)	(-.001201651585651,.001514029437084)
8	(.014089118849205,.009203260982242)	(-.001201651585651,.001514029437084)
9	(.014089371015751,.009203260982242)	(-.010201651585651,.001514029437084)
10	(.014089516812345,.009203260982242)	(-.001201651585651,.001514029437084)

Tabela TB42 - Elementos de H para $k=5.0$ e 64 elementos (elementos cúbicos)

Observando as tabelas TB37a à TB40, verifica-se que, para um número de Gauss igual à 10, a parte imaginária dos elementos singulares e dos não singulares apresenta uma estabilidade de, no mínimo, 11 casas decimais. Para a parte real, o máximo de estabilidade conseguida é até a quarta casa decimal, não apresentando melhora mesmo com o aumento do número dos pontos de Gauss. Assim, considera-se tanto para a parte real, quanto para a parte imaginária, o número de Gauss igual à 10.

APÊNDICE C

MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

Quando o Método CHIEF é aplicado às equações integrais, ela produz um sistema de equações de ordem $M \times N$ ($M > N$). Neste trabalho, a resolução deste sistema é feita através do Método dos Mínimos Quadrados [Pipes, 1970].

Considerando a matriz do sistema $A_{M \times N}$, e sendo $x_{N \times 1}$ o vetor das incógnitas e $b_{M \times 1}$ o vetor de coeficientes independentes

$$A_{M \times N} x_{N \times 1} = b_{M \times 1} \quad (C1)$$

O método consiste em multiplicar os dois lados da equação (C1) pela transposta da matriz $A_{M \times N}$:

$$[A_{M \times N}]^T A_{M \times N} x_{N \times 1} = [A_{M \times N}]^T b_{M \times 1} \quad (C2)$$

a fim de tornar a matriz A quadrada. Daí, então, vem:

$$\mathbf{F}_{n \times n} \mathbf{x}_{n \times 1} = \mathbf{y}_{n \times 1} \quad (\text{C3})$$

que é, em seguida, resolvida pelo método da eliminação de Gauss.

APÊNDICE D

INTEGRAÇÃO PELA QUADRATURA GAUSSIANA

Existem muitos métodos numéricos de integração numérica; neste trabalho foi adotado o método da quadratura gaussiana por ser geral, simples e apresentar uma boa acuidade. Aqui, são apresentados dois casos de integração: para funções com singularidade logarítmica e não singulares.

• Quadratura Gaussiana Unidimensional

A integral pode ser escrita como:

$$I = \int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi = \sum_{m=1}^{nptg} W_m f(\xi_m) + E_m \quad (D1)$$

onde $nptg$ é o número de pontos de integração, ξ_m é a coordenada do m -ésimo ponto de integração, W_m é o fator de ponderação associado e E_m é o erro dado por:

$$E_m = \frac{2^{2 \text{nptg}+1} (\text{nptg}!)^4}{(2 \text{nptg} + 1) [(2 \text{nptg}!)]^3} \frac{d^{2 \text{nptg}} f(\xi)}{d\xi^{2 \text{nptg}}} \quad (-1 < \xi < 1) \quad (D2)$$

A fórmula (D1) é baseada na representação de $f(\xi)$ pelo polinômio de Legendre $P_{\text{nptg}}(\xi)$. O valor de ξ_m é a coordenada no ponto m onde P_{nptg} é zero e para o qual o peso é dado por:

$$W_m = 2 / (1 - \xi_m^2) \left[\frac{dP_{\text{nptg}}(\xi)}{d\xi} \right]_{\xi=\xi_m}^2 \quad (D3)$$

Os valores de ξ_m e W_m são listados na Tabela TD1, que se segue. Os valores de ξ_m são simétricos em relação à $\xi = 0$, e W_m é o mesmo para dois valores simétricos.

• Quadratura Gaussiana Logarítmica Unidimensional

Os núcleos que incluem uma singularidade logarítmica em um dos extremos do domínio de integração pode ser integrado usando a seguinte fórmula [Stroud, 1966]:

$$I = \int_0^1 \ln\left(\frac{1}{x}\right) f(\xi) d\xi \cong \sum_{m=1}^{\text{nptgl}} W_m f(\xi_m) \quad (D4)$$

onde as coordenadas dos pontos de integração ξ_m e os fatores de ponderação são dados na Tabela TD2.

Valores para ξ_m e W_m para números de pontos de gauss logarítmicos (nptgl), maiores que os mostrados na tabela TD2, podem ser encontrados em [Dominguez, 1993] e [Stroud, 1966].

nptg	$\pm\xi_m$	W_m	nptg	$\pm\xi_m$	W_m
2	0.577350269189626	1.000000000000000	9	0.000000000000000	0.330239355001260
3	0.000000000000000	0.888888888888888		0.324253423403809	0.312347077040003
	0.774596669241483	0.555555555555555		0.613371432700590	0.260610696402935
4	0.339981043584856	0.652145154862546		0.836031107326636	0.180648160694857
	0.861136311594053	0.347854845137454		0.968160239507626	0.081274388361574
5	0.000000000000000	0.568888888888889	10	0.148874338981631	0.295524224714753
	0.538469310105683	0.478628670499366		0.433395394129247	0.269266719309996
	0.906179845938664	0.236926885056189		0.679409568299024	0.219086362515982
6	0.238619186083197	0.467913934572691		0.865063366688985	0.149451349150581
	0.661209386466265	0.360761573048139		0.973906528517172	0.066671344308688
	0.932469514203152	0.171324492379170	12	0.125233408511469	0.249147045813403
7	0.000000000000000	0.417959183673469		0.367831498998180	0.233492536538355
	0.405845151377397	0.381830050505119		0.587317954286617	0.203167426723066
	0.741531185599394	0.279705391489277		0.769902674194305	0.160078328543346
	0.949107912342759	0.129484966168870		0.904117256370475	0.106939325995318
8	0.183434642495650	0.362683783378362		0.981560634246719	0.047175336386512
	0.525532409916329	0.313706645877887			
	0.796666477413627	0.222381034453374			
	0.960289856497536	0.101228536290376			

Tabela TD1 - Valores de ξ_m e W_m para integração gaussiana

nptgl	$\pm\xi_m$	W_m	nptgl	$\pm\xi_m$	W_m
2	0.11200880	0.71853931	8	0.013320243	0.16441660
	0.60227691	0.28146068		0.079750427	0.23752560
3	0.063890792	0.51340455		0.19787102	0.22684198
	0.36899706	0.39198004		0.35415398	0.17575408
	0.76688030	0.094615406		0.52945857	0.11292402
4	0.041448480	0.38346406		0.70181452	0.057872212
	0.24527491	0.38687532		0.84937932	0.020979074
	0.55616545	0.19043513		0.95332645	0.0036864071
	0.84898239	0.039225487	9	0.010869338	0.14006846
5	0.029134472	0.29789346		0.064983682	0.20977224
	0.17397721	0.34977622		0.16222943	0.21142716
	0.41170251	0.23448829		0.29374996	0.17715622
	0.67731417	0.098930460		0.44663195	0.12779920
	0.89477136	0.018911552		0.60548172	0.078478879
6	0.0216344005	0.23876366		0.75411017	0.039022490
	0.12958339	0.30828657		0.87726585	0.013867290
	0.31402045	0.24531742		0.96225056	0.0024080402
	0.53865721	0.14200875	10	0.0090425944	0.12095474
	0.75691533	0.055454622		0.053971054	0.18636310
	0.92266884	0.010168958		0.13531134	0.19566066
7	0.016719355	0.19616938		0.24705169	0.17357723
	0.10018568	0.27030264		0.38021171	0.13569579
	0.24629424	0.23968187		0.52379159	0.093647084
	0.43346349	0.16577577		0.66577472	0.055787938
	0.63235098	0.088943226		0.79419019	0.027159893
	0.81111862	0.033194304		0.89816102	0.0095151992
	0.94084816	0.0059327869		0.96884798	0.0016381586

Tabela TD2 - Valores de ξ_m e W_m para integração gaussiana logaritmica

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Adeyeye, J. O., Bernal, M. J. M., Pitman, K. E., "An Improved Boundary Integral Equation Method for Helmholtz Problems", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 21, 779-787, 1985.
- [2] Amini, S., Chenke, Harris, P. J., "Iterative Solution of Boundary Element Equations for the Exterior Helmholtz Problems", *Journal of Vibration and Acoustic*, 112, 257-262, abril, 1990.
- [3] Banaugh, R. P., Goldsmith, W., "Diffraction of Steady Elastic Waves by Surfaces of Arbitray Shape", *J. Acous. Soc. Amer.*, 30, 589-597, 1963a.
- [4] Banaugh, R. P., Goldsmith, W., "Diffraction of Steady Acoustic Waves by Surfaces of Arbitray Shape", *J. Acous. Soc. Amer.*, 35, 1590-1601, 1963b.
- [5] Banerjee, P. K., Betterfield, ed., "Developments in Boundary Element Methods -1", *Applied Science Publishers Ltd, London*, 1979.
- [6] Bettes, P., "Infinite Elements", *Penshaw Press, UK*, 1992.

- [7] Brebbia, C. A., "Fundamentals of Boundary Element", New Developments in Boundary Element Methods, (C. A. Brebbia, Ed.). Computational Mechanics Center Publication, Southampton, UK, 1980.
- [8] Brebbia, C. A., Dominguez, J., "Boundary Elements: An Introductory Course", Computational Mechanics Publications, Southampton e McGraw-Hill Book Company, New York, 1989.
- [9] Brebbia, C. A., Telles, J. F. C., Wrobel, L. C., "Boundary Element Techniques", Springer-Verlag, Berlin e New York, 1984.
- [10] Brod, K., "On the Uniqueness of Solution for All Wavenumbers in Acoustic Radiation", J. Acous. Soc. Amer., 76, 1238-1243, 1984.
- [11] Brundit, G. B., "A Solution to the Problem of Scalar Scattering from a Smooth Bounded Obstacle Integral Equations", Quar. Journal of Mechanics Applied Math., 18, 473-489, 1965.
- [12] Burton, A. J., Miller, G. F., "The Application of Integral Equation Methods to the Numerical Solutions of Some Exterior Boundary Value Problems", Proc. Roy. Soc. London Ser. A., 323, 201-210, 1971.
- [13] Butkov, E., "Física Matemática", Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1983.
- [14] Chen, L. H., Scheweikert, D. G., "Sound Radiation from an Arbitraty Body", J. Acoust. Soc. Am., 35, 1626-1632, 1963.
- [15] Chertock, G., "Sound Radiation from Vibrating Surfaces", J. Acous. Soc. Amer., 36, 1305-1313, 1964.
- [16] Chertock, G., "Integral Equation Methods in Sound Radiation and Scattering from Abitrary Surfaces", David W. Taylor Nav. Ship Res. Dev. Cen. Rep, 35-38, 1971.

- [17] Chertock, G., "Convergence of Iterative Solutions to Integral Equations for Sound Radiation", *Quar. App. Math*, 26, 268-271, 1968.
- [18] Chertock, G., "Solutions for Sound Radiation Problems by Integral Equations at the Critical Wavenumbers", *J. Acoust. Soc. Am.*, 47, 387-388, 1970.
- [19] Ciskowski, R. D., Brebbia, C. A., "Boundary Element Methods in Acoustics", Computational Mechanics Publications, Southampton, 1991.
- [20] Copley, L. G., "Fundamental Results Concerning Integral Representations in Acoustic Radiation", *J. Acoust. Soc. Amer.*, 44, 28-32, 1967a.
- [21] Copley, L. G., "Integral Equation Method for Radiation from Vibrating Bodies", *J. Acous. Soc. Amer.*, 41, 807-816, 1967b.
- [22] Costa Jr., J. J., "An Alternative Procedure to Solve Helmholtz Problems by BEM" *Boundary Elements X*, Vol. 4, (C. A. Brebbia, Ed), 245-254, Computational Mechanics Publications, Springer Verlag, Berlin, 1988.
- [23] Cruse, T. A., Rizzo, F. J., "A Direct Formulation and Numerical Solution of the General Transient Elastodynamic Problem I", *Jour. Math. Anal. and Appl.*, 22, 244-259, 1968a.
- [24] Cruse, T. A., "A Direct Formulation an Numerical Solution of the General Transient Elastodynamic Problem II", *Jour. Math. Anal. and Appl*, 22, 341-355, 1968b.
- [25] Cunefare, K. A., Koopmann, G., Brod, K., "A Boundary Element Method for Acoustic Radiation Valid for All Wavenumbers", *J. Acous. Soc. Amer.*, 85, 39-48, 1989.
- [26] Dominguez, J., "Boundary Elements in Dynamics", Computational Mechanics Publications, Southampton, U. K., 1993.

- [27] Fairweather, G., "A Note on the Condition Number of a Matriz", *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, 11, 191-195, 1984.
- [28] Filippi, P. J. T., "Boundary Element Methods in Acoustics and Vibrations: A Review of the last Twenty Years", *Boundary Elements X*, vol. 4, (C. A. Brebbia, Ed), 269-287, Computational Mechanics Publications, Springer-Verlag, Berlim, 1988.
- [29] Fredholm, I., "Sur une Classe d'Equations Fonctionelles", *Acta Math.*, 27,365-390, 1903.
- [30] Friedman, M. B., Shaw, R. P., "Diffraction of a Plane Shock Wave by an Arbitray Rigid Cylindrical Obstacle", *Jour. App. Mech.*, 29, 40-46, 1962.
- [31] Greenspan, D., Werner,P., "A Numerical Method for the Exterior Dirichlet Problem for the Reduced Wave Equation", *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 23, 288-316, 1966.
- [32] Hall, W. S., Robertson, W. H., "Boundary Element Methods for Acoustic Wave Scattering", *Boundary Elements X*, vol. 4, (C. A. Brebbia, Ed), 301-315, Computational Mechanics Publications, Springer-Verlag, Berlim, 1988.
- [33] Hartmann, Friedel, "Introduction to Boundary Elements - Theory and Aplications", Springer-Verlag, Berlim, Heidelberg, 1989.
- [34] Hess, J. L., Smith, A. M. O., "Calculation of Potential Flow about Arbitrary Bodies", *Progress in Aeronautical Sciences* , 8, Ed. D. Küchemann, Pergamon Press, London, 1967.
- [35] Jaswon, M. A., "Integral Equation Methods in Potential Theory",*I, Proc. Roy. Soc. Ser. A*, 275, 23-32, 1963.

- [36] Jiang, J. K., Prasad, M. G., "On the Applications of the Boundary Element Method to Acoustical Field Studies of Vibrating Structures", Transaction of the ASME, 108, October, 454-561, 1986.
- [37] Jones, D. S., "Integral Equations for the Exterior Acoustic Problem", Q. J. Mech. Appl. Math., 27, 129-142, 1974.
- [38] Kane, James H., "Boundary Element Analysis (in Engineering Continuum Mechanics)", Prentice Hall Inc., New Jersey, 1994.
- [39] Kellogg, O. D., "Foundations of Potential Theory", Springer Verlag, Berlin, 1929.
- [40] Kinsler, L. E., Frey, A. R., Coppens, A. B., Sanders, J. V., "Fundamentals of Acoustics", John Wiley & Sons, Singapore, 1982.
- [41] Kirchhoff, G., "Zur Theorie Der Lichtstrahlen", Annalen der Physik, 18, 663-695, 1883.
- [42] Kleinman, R. E., Roach, G. F., "Boundary Integral Equations for the Three-Dimensional Helmholtz Equations". SIAM Rev., 16, 214-236, 1974.
- [43] Kondapalli, Prasanna S., Shippy, David J., Fairweather, Graeme, "The Method of Fundamental Solutions for Transmission and Scattering of Elastic Waves", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 96, North-Holland, 255-269, 1992.
- [44] Koopman, G. H., Benner, H., "Method for Computing the Sound Power of Machines Based on the Helmholtz Integral", J. Acous. Soc. Am., 71, 77-89, 1982.
- [45] Kupradze, V. D., "Fundamental Problems in the Mathematical Theory of Diffraction", RT 1260, Translation of Russian Text, 1935.

- [46] Latcha, M. A., Akay, A., "Application of the Helmholtz Integral in Acoustics", Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reability in Design, 108, outubro, 447-453, 1986.
- [47] Massonet, C. E., "Numerical Use of Integral Procedures", Cap. 10 em "Stress Analysis", Ed. O. C. Zienkiewicz e G. S. Hollister, John Wiley and Sons, New York, 1965.
- [48] Mesquita Neto, E., "Zur Dynamischen Wechselwirkung von Fundamenten auf dem Viskoelastischen Halbraum". VDI. Fortschritt-Berichte, Reihe 11: Schwingungstechnik, Nr. 120, VDI. Verlag, Duesseldorf, 1989.
- [49] Meyer, W. L., Bell, W. A., Zinn, B. T., Stallybrass, M. P., "Boundary Integral Solutions of Three-Dimensional Acoustic Radiation Problems", J. Sound Vib., 59, 245-262, 1978.
- [50] Meyer, W. L., Bell, W. A., Stallybrass, M. P., Zinn, B. T., "Prediction of the Sound Field Radiated from Axisymmetric Surfaces", J. Acoust. Soc. Am., 65, 631-638, 1979.
- [51] Mitzer, K. M., "Numerical Solution for Transient Scattering from a Hard Surface of Arbitrary Shape - Retarded Potential Techniques", J. Acoust. Soc. Amer., 42, 391-397, 1967.
- [52] Morse, P. H., Ingard, K. U., ed., "Theoretical Acoustics", Princeton University Press, 1966.
- [53] Panich, O. I., "On the Question of The Solvability of the Exterior Boundary - Value Problems for the Wave Equation and Maxwell's Equations", Russ. Math. Surv., 20, 221-226, 1965.
- [54] Partridge, P. W., Brebbia, C. A., Wrobel, L. C., "The Dual Reciprocity Boundary Element Method", Computational Mechanics Publications, Southampton, 1991.

- [55] Piaszczyk, C. M., Klosner, J. M., "Acoustic Radiation from Vibrating Surfaces at Characteristic Frequencies", J. Acoust. Soc. Am., 75, 363-375, 1984.
- [56] Pipes, L. A., Harvill, L. R., "Applied Mathematics for Engineers and Physicists", Mc Graw-Kogakusha, Tokyo, 1970.
- [57] Poisson, S. D., "Mémoire Sur L'équilibre et le Mouvement des Corps Elastiques", Mém. Acad. Sci, 8, 357-570, Paris, 1829.
- [58] Press, W. H., "Numerical Recipes- the art of scientific computing", Cambridge University, Cambridge, 1986.
- [59] Ramesh, P. S., Lean, M. H., "Accurate Integration of Singular Kernels in Boundary Integral Formulations for Helmholtz Equation", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 31, 1055-1068, 1991.
- [60] Schenck, H. A., "Improved Integral Formulation for Acoustic Radiation Problems", J. Acoust. Soc. Amer., 44, 41-58, 1968.
- [61] Seybert, A. F., Wu, T. W., "Recent Developments and Applications of the BEM in Acoustics and Noise Control", Boundary Elements X, vol. 4, (C. A. Brebbia, Ed), 289-300, Computational Mechanics Publications, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [62] Seybert, A. F., Soenarko, B., Rizzo, F. J., e Shippy , D. J., "An Advanced Computational Method for Radiation and Scattering of Acoustic Waves in Three Dimensions", Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 77, 362-368, 1985.
- [63] Seybert, A. F., Soenarko, B., Rizzo, F. J., Shippy, D. J., "A Special Integral Equation Formulation for Acoustic Radiation and Scattering for Axisymmetric Bodies and Boundary Conditions", J. Acoust. Soc. Am. ,80, 1241-1247, 1986.

- [64] Seybert, A. F., Rengarajan, T. K., "The Use of CHIEF to Obtain Unique Solutions for Acoustic Radiation Using Boundary Integral Equations", J. Acoust. Soc. Amer., 81 (5) maio, 1299-1306, 1987.
- [65] Seybert, A. F., Soenarko, B., Rizzo, F. J., e Shippy, D. J., "Application of BIE Method of Sound Radiation Problems using an Isoparametric Element", Transaction of the ASME, Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, vol 106, 414-420, 362-368, 1984.
- [66] Shaw, R. P., "Retarded Potential Approach to the Scattering of Elastic Waves by Rigid Obstacles of Arbitrary Shape", Jour. Acoust. Soc. Amer., 44, 745-748, 1968.
- [67] Shaw, R. P., Friedman, M. B., "Diffraction of a Plane Shock Wave by a Free Cylindrical Obstacle at a Free Surface", Proc. 4^o U. S. National Congress of Applied Mechanics, 371-379, 1962.
- [68] Somigliana, C., "Sopra l'Equilibrio di un Corpo Elastico Isotropo", Il Nuovo Cimento, 17-19, 1886.
- [69] Sommerfeld, A., "Partielle Differentialgleichungen der Physik. Vorlesungen ueber Theoretische Physik". Band VI, Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt/M., 1978.
- [70] Spiegel, Murray R., "Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas", Coleção Schaum, Mc Graw-Hill, São Paulo, 1976.
- [71] Stroud, A. H., Secrest, D., "Gaussian Quadrature Formulas", Prentice-Hall, New York, 1966.
- [72] Symm, G. T., "Integral Equation Methods in Potential Theory", II, Proc. Roy. Soc. Ser. A, 275, 33-46, 1963.
- [73] Ursell, F., "On the Exterior Problems of Acoustics", Proc. Cambridge Philos. Soc., 74, 117-125, 1973.

- [74] Waterman, P. C., "New Formulation of Acoustic Scattering", J. Acous. Soc. Amer., 45, 1417-1429, 1969.
- [75] Watson G. H., "A Treatise on the Theory of Bessel Functions", Cambridge Univers. Press, Cambridge, 1966.
- [76] Wolfram, S., "Mathematica, A System for doing Mathematics by Computer", Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Califórnia, 1991.
- [77] Wu, Xiao Feng, Pierce, Allan D., "Uniqueness of Solutions to Variationally Formulated Acoustic P", J. of Vibration and Acoustic, 112, abril, 263-267, 1990.
- [78] Yoon, W. S., Park, J. M., Eversman, W., "Two-Dimensional Radiation and Scattering at Short Wave Length", Transactions of the ASME, Vol. 112, julho, 384-391, 1990.