

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PETRÓLEO

Este exemplar corresponde a redação final
da tese defendida por Luiz Alberto
Nozaki Sugahara e aprovada
pela comissão julgadora em 22/01/1996


ORIENTADOR

Dissertação Apresentada à
Faculdade de Engenharia Mecânica
Como Requisito Parcial à Obtenção do
Título de Mestre em Engenharia de Petróleo

**ANÁLISE AUTOMATIZADA DE
TESTES DE BOMBEAMENTO**

02/96

Autor: Luiz Alberto Nozaki Sugahara

Orientador: Prof. Dr. Antonio Cláudio de França Corrêa

Janeiro de 1996



UNIDADE BC
CAMPUS:
T(UNICAMP
Su3) a
27869
667/96
01X
R\$ 11,00
03/07/96
N.º CPD CM.0009044 7-1

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

Su31a

Sugahara, Luiz Alberto Nozaki

Análise automatizada de testes de bombeamento /
Luiz Alberto Nozaki Sugahara.—Campinas, SP: [s.n.],
1996.

Orientador: Antônio Cláudio de França Corrêa.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Águas subterrâneas - Escoamento. 2. Aquíferos. 3.
Hidrogeologia. 4. Poços. 5. Reservatórios subterrâneos.
I. Corrêa, Antônio Cláudio de França. II. Universidade
Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica.
III. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PETRÓLEO

A dissertação “Análise Automatizada de Testes de Bombeamento”, elaborada por Luiz Alberto Nozaki Sugahara foi aceita pela Subcomissão de Pós-Graduação em Engenharia de Petróleo como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Engenharia de Petróleo.

Campinas, 22 de janeiro de 1996

Banca Examinadora:



Antonio Cláudio de França Corrêa, Ph.D.



Alvaro Marcello Marco Peres, Ph.D.



Denis José Schiozer, Ph.D.

**Aos meus pais Luiz (em memória) e Hisako.
À minha esposa Nancy.**

AGRADECIMENTOS

Aos meus familiares.

Ao professor Antônio Cláudio de França Corrêa pela idéia, incentivo e orientação.

Aos colegas, professores e funcionários pela amizade e dedicação.

À Petrobrás pelo suporte financeiro.

Resumo

A análise automatizada de testes de bombeamento em poços de água subterrânea, objetivando a determinação de parâmetros que caracterizam os aquíferos, é descrita neste trabalho.

Para tal, desenvolveu-se um programa computacional, em ambiente operacional Windows, aplicável a dados de testes de bombeamento.

O programa admite 3 tipos de modelos matemáticos para representação do comportamento hidráulico dos aquíferos:

- a) aquífero confinado (modelo de Theis)
- b) aquífero drenante (modelo de Hantush)
- c) aquífero freático ou livre (modelo de Boulton)

A análise dos dados de testes, utilizando apropriadamente os modelos citados, permite a determinação de parâmetros do sistema tais como transmissividade, coeficiente de armazenamento, coeficiente de drenagem e índice de retardo.

O programa admite a análise de dados de testes de bombeamento, com uma ou mais vazões, e de testes de recuperação. No caso de múltiplas vazões, utiliza-se um procedimento de de-superposição para geração de dados equivalentes ao bombeamento com a vazão inicial, de tal modo que tais dados possam ser utilizados para uma estimativa inicial dos parâmetros do aquífero. Tal estimativa é necessária na regressão automatizada dos dados do teste.

A solução dos sistemas de equações diferenciais representativas dos aquíferos, é obtida no campo de Laplace, com posterior inversão numérica da solução transformada pelo método de Stehfest.

O processo de análise é baseado em regressão não linear dos parâmetros dos modelos, ajustando-se uma função representativa de um modelo de aquífero e um dado tipo de teste, aos dados de campo.

A regressão não linear baseou-se no princípio dos mínimos quadrados, utilizando os métodos de minimização de Gauss-Newton e Levenberg-Marquardt.

O programa também possibilita a determinação do coeficiente de perda de carga no poço a partir de dados de teste com múltiplas vazões. Tal coeficiente permite a determinação da curva característica de comportamento do poço.

Abstract

This work describes an automated procedure for analysis of pumping test data performed in groundwater wells.

A computer software was developed to be used under the Windows operational system. The software allows the choice of 3 mathematical models for representing the aquifer behavior, which are:

- a) Confined aquifer (Theis model)
- b) Leaky aquifer (Hantush model)
- c) Unconfined aquifer (Boulton model)

The analysis of pumping test data, using the proper aquifer model, allows for the determination of the model parameters such as transmissivity, storage coefficient, leakage coefficient and delay index.

The computer program can be used for the analysis of data obtained from both pumping tests, with one or more pumping rates, and recovery tests. In the multiple rate case, a desuperposition procedure has been implemented in order to obtain the equivalent aquifer response for the first flow rate, which is used in obtaining an initial estimate of the model parameters. Such initial estimate is required in the non-linear regression analysis method.

The solutions to the partial differential equations describing the aquifer behavior were obtained in Laplace space, followed by numerical inversion of the transformed solutions using the Stehfest algorithm.

The data analysis procedure is based on a non-linear regression method by matching the field data to the theoretical response of a selected aquifer model, for a given type of test. A least squared regression analysis method was implemented using either Gauss-Newton or Levenberg-Marquardt procedures for minimization of a objective function.

The computer software can also be applied to multiple rate test data in order to determine the non-linear well loss coefficient, allowing for the computation of the well inflow performance curve.

Capítulo 1 - Introdução	1
Capítulo 2 - Conceitos Básicos.	3
2.1 Aquífero, aquícludo e aquílard.	3
2.2 Tipos de Aquíferos.	4
2.3 Superfície Piezométrica	5
2.4 Fluxo permanente e transiente.	5
2.5 Propriedades Físicas.	6
Capítulo 3 - Revisão Bibliográfica	11
3.1 Sobre os Modelos de Aquífero e os Métodos de Análise de Testes.	11
3.2 Sobre a Regressão Não Linear dos Dados	12
Capítulo 4 - Modelos	15
4.1 Modelo de Theis (Aquíferos Confinados)	15
4.2 Modelo de Hantush e Jacob (Aquíferos Drenantes)	18
4.3 Modelo de Boulton (Aquíferos Livres)	22
4.4 Modelo Com Perda de Carga Localizada	27
Capítulo 5 - Regressão Não Linear dos Dados.	30
5.1 Mínimos Quadrados Não Lineares	30
5.2 Análise Estatística da Regressão.	33
5.3 Busca Restrita dos Parâmetros.	34
Capítulo 6 - Descrição do Programa	35

6.1 O Programa (Aquatest).-----	35
6.2 Linguagem -----	36
6.3 Análise por Curva Típica. -----	36
6.4 O Conceito de Curva Característica. -----	37
6.5 Os Tipos de Testes Disponíveis.-----	37
6.6 Funções-----	43
6.7 Regressão e Inversão Numérica.-----	43
6.8 A Barra de Opções.-----	43
Capítulo 7 Validação do Programa.-----	45
7.1 Teste 1 - Uma Vazão - Modelo de Theis.-----	45
7.2 Teste2 - Uma Vazão - Modelo de Hantush.-----	47
7.3 Teste 3 - Uma Vazão - Modelo de Boulton.-----	49
7.4 Teste4 - Teste de Recuperação - Modelo de Theis.-----	51
7.5 Teste5 - Teste de Recuperação - Modelo de Hantush.-----	54
7.6 Teste6 - Teste de Recuperação - Modelo de Boulton.-----	57
7.7 Teste7 - Teste de Desempenho de Poço .-----	60
Capítulo 8 - Aplicação Para Dados de Campo.-----	64
8.1 Teste Exemplo 1 - Teste de Bombeamento Com Uma Vazão - Modelo de Theis-----	64
8.2 Teste-Exemplo 2 - Teste de Bombeamento Com Uma Vazão - Modelo de Hantush.--	65
8.3 Teste Exemplo 3 - Teste de Bombeamento Com Uma Vazão - Modelo de Boulton---	68

8.4 Teste-Exemplo 4 - Teste de Desempenho de Poço.....	72
Capítulo 9 Conclusões e Recomendações.....	76
Nomenclatura	77
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	80
Apêndice 1 Derivadas em relação aos parâmetros. Modelo de Theis.....	84
Apêndice 2 Derivadas em relação aos parâmetros. Modelo de Hantush.....	86
Apêndice 3 Derivadas em relação aos parâmetros. Modelo de Boulton.....	89
Apêndice 4 - Derivadas em Relação aos Parâmetros - Modelo com Perda de Carga Localizada.....	93

Capítulo 1 - Introdução

O crescimento populacional e sua urbanização tornam cada vez mais necessárias novas alternativas de abastecimento de água. Em algumas regiões, onde a utilização das águas subterrâneas é economicamente competitiva, nota-se um incremento nos investimentos em perfuração e produção de poços dos quais se esperam grandes vazões. Normalmente o alvo destes poços é um bom aquífero regional. Na região oeste do estado de São Paulo, por exemplo, os poços profundos têm como alvo a Formação Botucatu.

O desenvolvimento de reservas de águas subterrâneas pode ser entendido como um processo seqüencial de 3 fases principais. A primeira é uma fase de exploração, em que técnicas geológicas e geofísicas de superfície e subsuperfície são aplicadas em busca dos aquíferos. A segunda é um estágio de desenvolvimento que abrange as medidas dos parâmetros geológicos, o projeto e análise de poços e o cálculo da capacidade do aquífero. A terceira é uma fase de exploração ou gerenciamento que deve incluir considerações sobre estratégias de ótimo desenvolvimento e uma avaliação das interações entre a exploração das águas subterrâneas e o sistema hidrológico regional.

Para a exploração racional das águas subterrâneas é de fundamental importância a determinação de parâmetros representativos do aquífero que são, geralmente, obtidos através da análise de testes de bombeamento.

No Brasil, atualmente, a indústria do petróleo já se encontra bastante desenvolvida no estudo dos fenômenos de escoamento, na caracterização e no gerenciamento dos reservatórios em meio poroso. Consequentemente, a tecnologia de análise de testes de pressão em poços de petróleo, que é similar à de análise de testes de bombeamento em poços de águas subterrâneas, também está bem desenvolvida e é a base deste estudo.

O objetivo deste trabalho é, utilizando uma tecnologia já amplamente utilizada na indústria petrolífera, desenvolver uma ferramenta automatizada, em ambiente gráfico, para interpretação dos testes de bombeamento, que auxilie na determinação dos parâmetros de um aquífero. O princípio é o de ajustar, pela variação dos parâmetros de interesse, uma função representativa de um modelo de aquífero e teste aos dados obtidos.

O programa baseia-se no método gráfico de ajuste dos dados de teste a uma curva típica de um modelo de aquífero. Este ajuste gráfico serve de estimativa inicial para o processo automatizado de regressão não linear.

Já existem no mercado alguns programas de análise de testes em poços d'água, porém, a maioria não oferece a interface gráfica, além de só estarem disponíveis em inglês.

Com a possibilidade da visualização do gráfico dos dados do teste, é possível se analisar a característica da curva obtida, obtendo-se uma informação adicional do comportamento do aquífero.

Além disso, este trabalho, pela simplicidade da sua metodologia, pode servir de base para o desenvolvimento de novos tipos de testes, além da facilidade de adaptação à realidade brasileira.

Deve-se notar que a ferramenta é automatizada e não automática, pois a escolha do modelo representativo dependerá da sensibilidade do analista, além de outras informações, pois diferentes tipos de aquíferos apresentam comportamentos semelhantes de queda de pressão com o tempo.

Capítulo 2 - Conceitos Básicos.

Neste capítulo são apresentadas algumas definições básicas. Estas definições, e alguns valores das propriedades podem ser encontradas, por exemplo em Walton[34], Freeze e Cherry[10], ou Kruseman[17].

2.1 Aquífero, aquícludo e aquílard.

2.1.1 Aquífero.

Pode ser definido como uma unidade geológica saturada, permeável, capaz de transmitir quantidades economicamente significativas de água para poços. Os aquíferos mais comuns são areia não consolidada e cascalho. Rochas sedimentares permeáveis como arenito e calcário, rochas vulcânicas e cristalinas altamente fraturadas também podem ser classificadas como aquíferos.

2.1.2 Aquícludo.

É uma unidade geológica impermeável, incapaz de transmitir água. Rochas ígneas e metamórficas não fraturadas são típicos aquícludos. Na natureza, unidades geológicas totalmente impermeáveis quase não ocorrem. Na prática, classifica-se como aquícludo as unidades que apresentam permeabilidade com várias ordens de magnitude inferiores às unidades subjacentes ou sobrejacentes.

2.1.3 Aquílard.

São os leitos menos permeáveis numa seqüência estratigráfica. Tais leitos podem apresentar permeabilidade suficiente para transmitir água em quantidades significativas no estudo regional do fluxo das águas subterrâneas. Porém não justificam a completação de poços.

As definições de aquífero e aquífero são propositalmente imprecisas com respeito a condutividade hidráulica. As definições podem, portanto, ser utilizadas em termos relativos.

Por exemplo, numa seqüência intercalada de silte e areia, o silte pode ser considerado um aquífero, entretanto, numa seqüência silte e argila, o silte pode ser considerado aquífero.

2.2 Tipos de Aquíferos.

Basicamente há três tipos de aquíferos: confinados, drenantes e freáticos.

2.2.1 Aquíferos confinados.

São aqueles limitados superiormente e inferiormente por aquíferos.

Neste tipo de aquífero, a pressão da água é, usualmente, maior que a pressão atmosférica, ou seja, o nível d'água estático em um poço será superior ao topo do aquífero e, em alguns casos, superior à superfície do solo, quando o poço é denominado artesiano.

2.2.2 Aquíferos não confinados.

Também conhecidos como aquíferos livres ou freáticos, são limitados inferiormente por um aquífero e não apresentam nenhuma camada confinante superior. O contorno superior é o nível d'água livre, que se apresenta à pressão atmosférica.

2.2.3 Aquíferos drenantes.

Também conhecidos como semi-confinados, são os aquíferos cujos limites superior e inferior são aquíferos ou um limite é um aquífero e o outro é um aquífero. A água é livre para se mover através dos aquíferos, tanto para cima como para baixo.

Em bacias sedimentares profundas, é comum um sistema intercalado de níveis mais ou menos permeáveis, formando um sistema de aquífero multi-camadas. Neste caso é mais

comum que um aquífero se apresente como uma sucessão de aquíferos drenantes, separados por aquitards, que um só tipo principal de aquífero.

2.3 Superfície Piezométrica

A superfície piezométrica de um aquífero confinado é uma superfície imaginária que coincide com o nível da pressão hidrostática da água. O nível d'água em um poço que penetra um aquífero confinado define a elevação da superfície piezométrica naquele ponto.

2.4 Fluxo permanente e transiente.

Há dois tipos de equações de hidráulica de poços: aquelas que descrevem o fluxo permanente e as que descrevem o fluxo transiente.

O fluxo permanente é independente do tempo, ou seja o nível d'água no poço bombeado e em piezômetros próximos não varia com o tempo. O fluxo permanente pode ocorrer quando alguma fonte externa recarrega o aquífero bombeado.

Tais fontes podem ser a chuva, a drenagem, através de aquitards, de aquíferos não bombeados superiores e/ou inferiores, rios, lagos, mares ou oceanos que estejam em contato hidráulico direto com o aquífero bombeado.

Na prática, considera-se fluxo permanente se as variações do nível d'água com o tempo são tão pequenas que podem ser desprezadas.

O fluxo transiente ocorre a partir do início do bombeamento até que o fluxo permanente seja atingido. Teoricamente, em um aquífero horizontal, infinito em área, com espessura constante, confinado e bombeado a vazão constante, apresentará sempre fluxo transiente.

Também neste caso, na prática, considera-se o fluxo transiente enquanto as variações do nível d'água no poço ou em piezômetros sejam mensuráveis.

2.5 Propriedades Físicas.

2.5.1 Porosidade (ϕ).

A porosidade de uma rocha é a sua propriedade de conter poros ou vazios, então:

$$\phi = \frac{V_v}{V_T}$$

onde V_T é um volume unitário total de um material não consolidado e V_v é o seu volume de vazios. A porosidade é usualmente expressa como uma fração decimal ou uma porcentagem.

2.5.2 Compressibilidade (α e β).

A compressibilidade é uma importante propriedade na análise do fluxo transiente no meio poroso.

A compressibilidade do aquífero (ou do aquitard) é definida por:

$$\alpha = -\frac{1}{V_T} \frac{dV_T}{d\sigma_e} \quad (2.1)$$

onde V_T é o volume total de uma dada massa de material e $d\sigma_e$ é a variação na tensão efetiva.

Analogamente, a compressibilidade da água é definida como:

$$\beta = -\frac{1}{V_a} \frac{dV_a}{dp} \quad (2.2)$$

isto é, uma variação na pressão da água dp induz uma mudança no volume V_a de uma dada massa de água

2.5.3 Condutividade Hidráulica (K) e Permeabilidade (k).

Da Lei de Darcy temos:

$$Q = A \frac{k\gamma}{\mu} \frac{dh}{dL}, \quad (2.3)$$

onde k é chamado permeabilidade intrínseca ou permeabilidade específica e tem a dimensão $[L^2]$.

Seu valor normalmente é expresso em Darcy (1 Darcy = 10^{-8} cm^2).

A condutividade hidráulica (K) é definida por:

$$K = \frac{k\gamma}{\mu} \quad (2.4)$$

É preciso cuidado para não se fazer confusões pois alguns textos chamam K de coeficiente de permeabilidade.

2.5.4 Armazenamento Específico - S_s .

O Armazenamento Específico de um aquífero saturado é definido como o volume de água que um volume unitário de aquífero produz, sob um declínio unitário da carga hidráulica.

A diminuição da carga hidráulica causa uma diminuição na pressão (p) e um acréscimo na tensão efetiva (σ_e). O decréscimo da carga (h) produz a água por dois mecanismos: (1) a compactação do aquífero causada pelo aumento da tensão efetiva e (2) a expansão da água causada pela diminuição de p .

O primeiro mecanismo é controlado pela compressibilidade do aquífero (α) e o segundo pela compressibilidade da água (β).

No mecanismo (1) o volume de água produzido é igual à redução do volume do aquífero. A redução volumétrica será negativa (dV_t), mas a água produzida será positiva (dV_w), daí:

$$dV_a = -dV_t = \alpha V_t d\sigma_e$$

Para um volume unitário $V_t=1$, sabendo-se que $d\sigma_e = -\rho g dh$ e para uma queda unitária de carga hidráulica $dh = -1$, temos:

$$dV_a = \alpha \rho g \quad (2.5)$$

Considerando o volume produzido pela expansão da água temos:

$$dV_a = -\beta V_a dp,$$

Sendo $V_a = \phi V_t$, onde ϕ é a porosidade.

Com $V_t=1$, $dp = \rho g d(h - z) = \rho g dh$ e para $dh = -1$, vem:

$$dV_a = -\beta \phi \rho g \quad (2.6)$$

Somando-se as equações (2.5) e (2.6) resulta:

$$S_s = \rho g (\alpha + \phi \beta) \quad (2.7)$$

Uma análise dimensional desta equação mostra que S_s tem a dimensão $[L]^{-1}$, o que está de acordo com a definição.

2.5.5 Coeficiente de Transmissibilidade ou Transmissividade (T) de um aquífero confinado.

Para um aquífero confinado de espessura D , a transmissibilidade ou transmissividade T é definida como:

$$T = K \cdot D \quad (2.8)$$

2.5.6 Coeficiente de Armazenamento (S).

O coeficiente de armazenamento S é definido como:

$$S = S_s \cdot D \quad (2.9)$$

Substituindo (2.7) em (2.9) vem:

$$S = \rho \cdot g \cdot D \cdot (\alpha + \phi \cdot \beta) \quad (2.10)$$

Pode-se dizer que o coeficiente de armazenamento é o volume de água que um aquífero produz por unidade de sua área superficial por declínio unitário da carga hidráulica normal a esta superfície.

A carga hidráulica para um aquífero confinado é, normalmente, apresentada na forma de uma superfície piezométrica.

Como a condutividade hidráulica tem dimensão $[L/T]$, fica claro que a transmissibilidade T tem dimensão $[L^2 T^{-1}]$.

Transmissibilidades maiores que $0,015 m^2 / s$ ($100.000 gal/dia/pé$) representam bons aquíferos para exploração de poços d'água.

O coeficiente de armazenamento é adimensional. Em aquíferos confinados seu valor varia entre 0,005 a 0,00005.

2.5.7 A Difusividade Hidráulica (KD/S).

É a razão entre a transmissibilidade e o coeficiente de armazenamento de um aquífero saturado.

2.5.8 Transmissibilidade (T) em aquíferos não confinados.

Num aquífero não confinado o conceito de transmissibilidade não é bem definido como num aquífero confinado, mas pode ser usado. Pode ser definido pela mesma equação (2.8) mas, neste caso, D é a espessura saturada do aquífero ou a altura do nível d'água sobre o topo do aquífero subjacente ao aquífero.

2.5.9 Produção Específica (“Specific Yield”) (S_y).

O coeficiente de armazenamento para aquíferos não confinados é conhecido como **Produção Específica** (S_y). É definido como o volume de água que um aquífero produz por unidade de área superficial por declínio unitário no nível d'água.

A Produção Específica de aquíferos não confinados é muito maior que os coeficientes de armazenamento dos aquíferos confinados. Usualmente seus valores variam entre 0.01 a 0.30.

Capítulo 3 - Revisão Bibliográfica

3.1 Sobre os Modelos de Aquífero e os Métodos de Análise de Testes.

Vários são os modelos matemáticos desenvolvidos para representar os sistemas de aquíferos encontrados na natureza.

Os sistemas de aquíferos podem ser classificados como confinados, de superfície livre, drenantes, horizontalmente limitados, anisotrópicos, multi-camadas, fraturados, com poços parcialmente penetrantes, poços de grande diâmetro, com efeitos de estocagem, película, etc.

Os testes de bombeamento são procedimentos realizados, para obtenção de dados, a partir dos quais se procuram os parâmetros representativos do modelo idealizado para o aquífero testado. Podem ser realizados nas mais diversas condições, com vazão constante ou variável, na fase de bombeamento ou recuperação, entre outras variações.

Theis [30] foi o primeiro a propor uma solução transiente para um teste de aquífero. Apresenta as hipóteses de aquífero artesiano, isotrópico, homogêneo, de espessura constante, de área horizontal infinita, produzindo a vazão constante e poço totalmente penetrante.

Jacob [14] utilizando a solução de Theis, apresentou o método de análise de dados e obtenção de parâmetros através do ajuste de curva-típica.

Hantush e Jacob [13] apresentaram a solução para um aquífero drenante (“leaky aquifer”). Hantush [12] desenvolveu um método de análise conhecido como Método do Ponto de Inflexão de Hantush.

Walton [33] baseando-se em tabelas de valores publicadas por Hantush, apresentou uma família de curvas-típicas para determinação de parâmetros através do método de ajuste.

Boulton [3],[4] introduziu o conceito de “resposta retardada do nível d’água” (“delayed watertable response”) ao modelar os aquíferos não confinados, também conhecidos como livres ou freáticos. Sua solução, porém, requer a definição de uma constante empírica,

conhecida como o índice de retardo de Boulton, que não é relacionada a nenhum fenômeno físico.

Neuman [21],[22] desenvolveu, para aquíferos livres, uma teoria de resposta retardada do nível d'água baseada em parâmetros físicos bem definidos, tratando o aquífero como um sistema compressível e o nível d'água como um contorno material móvel. Neste modelo reconhece-se a existência de componentes verticais de fluxo.

Kasenow e Pare [15],[16] desenvolveram dois programas para análise de testes, um utilizando o método de Cooper-Jacob [7] e outro o método do Ponto de Inflexão de Hantush, para trabalho em ambiente DOS, não apresentando, porém, a visualização gráfica dos dados e do ajuste.

Ribeiro e Corrêa [26] desenvolveram um programa em ambiente DOS, com interface gráfica que inclui os métodos de ajuste de curva-típica para os modelos de Theis, Hantush e Boulton.

3.2 Sobre a Regressão Não Linear dos Dados

O princípio da análise automatizada de testes de bombeamento consiste no ajuste de uma função representativa de um modelo de aquífero e teste aos dados, pela aplicação de algum método de regressão não linear, buscando parâmetros que minimizem uma função objetivo.

A função objetivo pode ser o somatório dos valores absolutos dos resíduos (norma L1) ou o somatório dos quadrados dos resíduos (norma L2), sendo o resíduo a diferença entre o valor calculado da função e o valor correspondente obtido no teste.

A maioria dos trabalhos baseia-se no segundo processo (norma L2), mais especificamente no método de Newton, que consiste em se aproximar a função objetivo por uma série de Taylor truncada no termo quadrático.

Gauss propôs uma modificação ao método, desprezando o termo que inclui as segundas derivadas, simplificando o cálculo e tornando positivo-definida a matriz do sistema.

A simplificação, porém, tornou o método, atualmente conhecido como Gauss-Newton, mais sensível às estimativas iniciais.

Levenberg[18] e Marquardt[19] propuseram uma modificação ao método de Gauss-Newton adicionando uma constante positiva aos elementos da diagonal da matriz Jacobiana, melhorando o seu condicionamento e tornando o método mais robusto.

Greenstadt[11] propôs uma decomposição espectral da matriz Hessiana para identificar a presença de autovalores nulos ou negativos.

A análise de testes em poços de petróleo já apresenta um desenvolvimento considerável quanto à utilização destes métodos.

Rosa e Horne[27] estudaram a aplicação do método de Gauss-Newton e do método modificado por Levenberg-Marquardt a reservatórios homogêneos infinitos e reservatórios infinitos com múltiplas camadas sem fluxo cruzado. Este trabalho mostrou que as derivadas da pressão em relação aos parâmetros de regressão podem ser obtidas no espaço de Laplace e invertidas numericamente para o espaço real.

Barua et alii [02] aplicaram diferentes métodos tipo-Newton a dados de reservatórios homogêneos e de dupla porosidade.

Namba e Horne[20] analisaram os métodos de Newton, Gauss-Newton, Levenberg-Marquardt e o método de Cholesky de fatorização da matriz Hessiana, denominado método de Gauss-Cholesky.

Suzuki e Namba[29] utilizaram o método de Gauss-Cholesky num sistema de análise de testes de poços horizontais

Orellana e Corrêa[23] aplicaram o método de Greenstadt e a técnica da deconvolução para analisar testes de pressão transientes em escala de laboratório.

Burgeois e Horne[05] propõem que se realize todo o processo de regressão no campo de Laplace.

Vieira e Rosa[32] compararam vários métodos de regressão não linear, baseados nas normas L1 e L2, concluindo que a norma L1 apresenta melhores resultados.

Cisneiros[06] desenvolveu um programa em ambiente operacional Windows, para análise de testes em poços de petróleo. Além deste há outros programas comerciais para análise de testes de pressão em poços de petróleo. Pode-se citar como exemplo o programa “Pan-System” produzido pela empresa EPS - Edimburgh Petroleum Services.

O presente trabalho é resultado da aplicação de metodologias já utilizadas com sucesso na indústria do petróleo a testes de bombeamento em poços d’água, ou seja, aplicou-se técnicas de regressão não linear de dados utilizando-se funções representativas de diferentes tipos de aquíferos.

Capítulo 4 - Modelos

Neste capítulo são apresentados os modelos de aquíferos utilizados no desenvolvimento deste trabalho. Foram utilizados 4 diferentes modelos: modelo de Theis para aquíferos confinados, modelo de Hantush para aquíferos drenantes, modelo de Boulton para aquíferos livres e um modelo semelhante ao modelo de Theis mas com raio finito e perda de carga localizada para testes de desempenho de poço.

4.1 Modelo de Theis (Aquíferos Confinados)

É o modelo mais simples de aquífero com solução para fluxo não permanente. Adota as hipóteses de aquífero confinado, homogêneo, isotrópico, de espessura constante, não limitado horizontalmente, com poço penetrando toda sua espessura e produzindo a vazão constante. A Fig. 4.1 mostra uma seção de um aquífero confinado com um poço produtor e dois poços piezômetros.

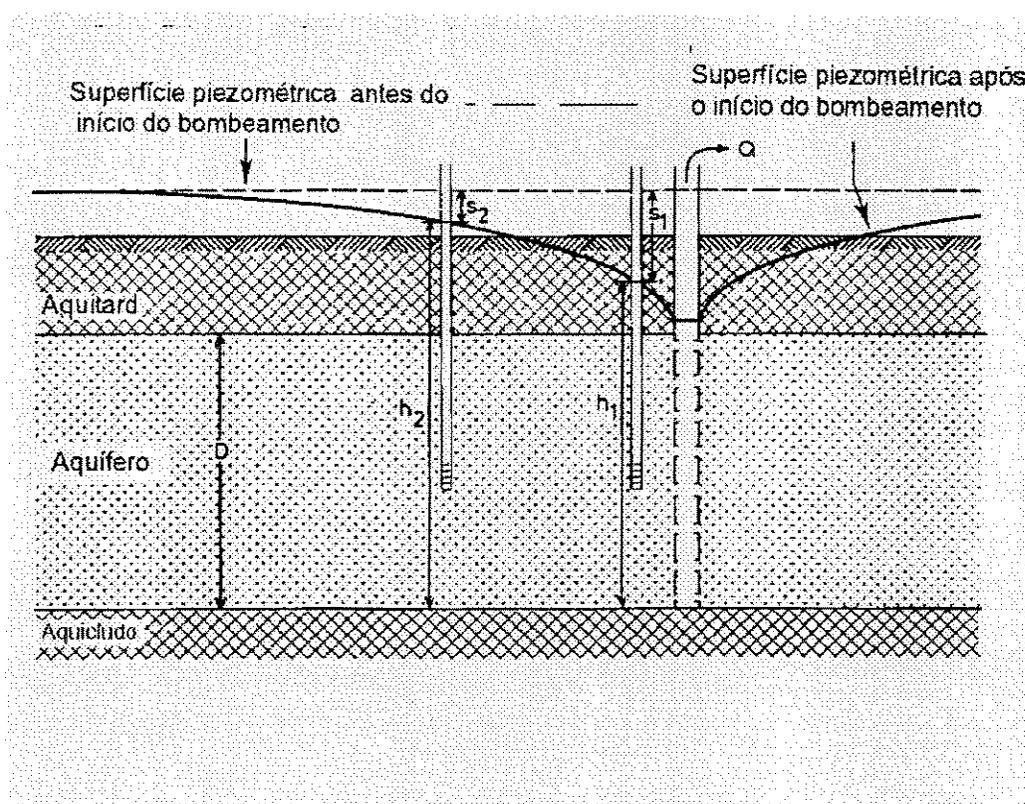


Figura 4.1 Poço e piezômetros em aquífero confinado (Fig. extraída da ref. 17).

Pode ser representado pelo seguinte sistema de equações:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial s}{\partial r} = \frac{S}{T} \frac{\partial s}{\partial t}, \quad (4.01)$$

$$s(r, 0) = 0, \quad (4.02)$$

$$s(\infty, t) = 0, \quad (4.03)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(r \frac{\partial s}{\partial r} \right) = -\frac{Q}{2\pi T}. \quad (4.04)$$

Aplicando a transformação de Laplace temos:

$$\frac{d^2 \bar{s}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{s}}{dr} = \frac{S}{T} w \bar{s}, \quad (4.05)$$

$$\bar{s}(r, w) = AK_0 \left(r \sqrt{\frac{S}{T} w} \right), \quad (4.06)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(r \frac{d\bar{s}}{dr} \right) = -\frac{Q}{2\pi T} \frac{1}{w}, \quad (4.07)$$

onde w é o parâmetro de Laplace.

Daí a solução do rebaixamento no espaço de Laplace fica:

$$\bar{s}(r, w) = \frac{q}{2\pi T} \frac{Ko \left(r \sqrt{\frac{S}{T} w} \right)}{w}, \quad (4.08)$$

cuja expressão no espaço real é:

$$h_0 - h(r, t) = s(r, t) = \frac{Q}{2\pi T} L^{-1} \left\{ \frac{K_0 \left(r \sqrt{\frac{S}{T} w} \right)}{w} \right\}. \quad (4.09)$$

A solução apresentada por Theis [30] é

$$s = \frac{q}{4\pi T} \int_u^\infty \frac{e^{-y} dy}{y} = \frac{Q}{4\pi T} W(u), \quad (4.10)$$

onde:
$$u = \frac{r^2 S}{4Tt}, \quad (4.11)$$

e então:
$$W(u) = 2 * L^{-1} \left\{ \frac{K_0 \left(r \sqrt{\frac{S}{T} w} \right)}{w} \right\}. \quad (4.12)$$

A Figura 4.2 mostra a Curva-Típica do modelo de Theis

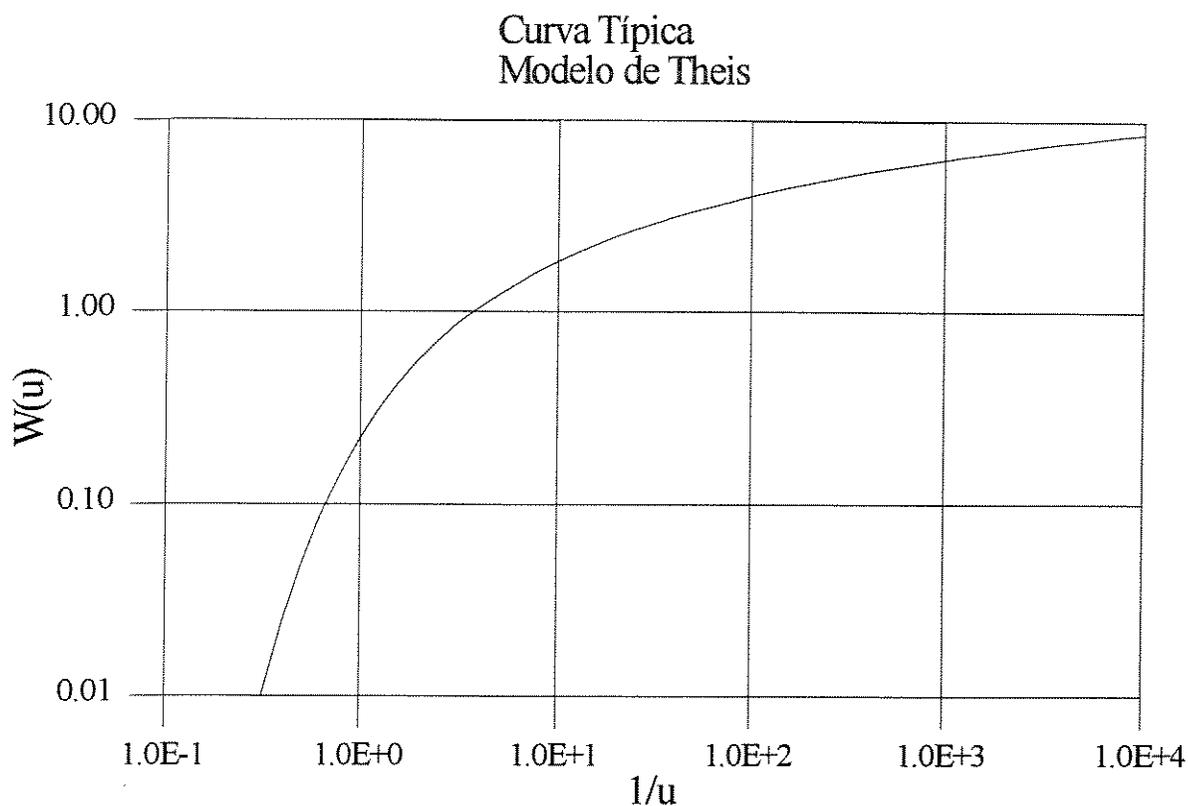


Figura 4.2 Curva-Típica modelo de Theis.

Neste modelo os parâmetros que variam no ajuste são S e T .

4.2 Modelo de Hantush e Jacob (Aqüíferos Drenantes)

É um modelo desenvolvido para aqüíferos semi-confinados ou drenantes, isto é, as camadas confinantes não são totalmente impermeáveis.

Adota as hipóteses de aqüífero isotrópico, com poço penetrando totalmente, sem produção devido à descompressão do aquitard, produção a vazão constante e nível d'água sobre o aquitard constante. A Fig. 4.2 mostra uma seção-exemplo de aqüífero drenante.

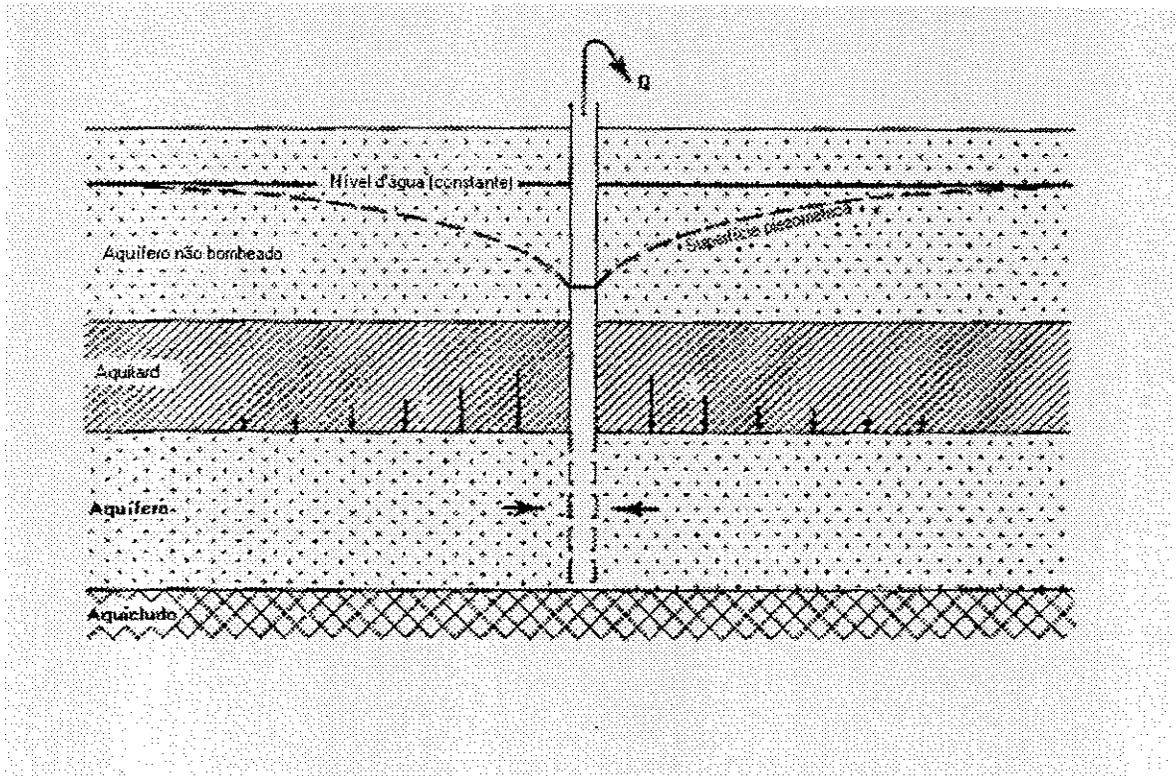


Figura 4.3 Aquífero drenante (Extraída da ref. 17).

Pode ser representado pelo seguinte sistema de equações:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial s}{\partial r} - \frac{s}{B^2} = \frac{S}{T} \frac{\partial s}{\partial t}, \quad (4.13)$$

$$s(r,0) = 0, \quad (4.14)$$

$$s(\infty,t) = 0, \quad (4.15)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(r \frac{\partial s}{\partial r} \right) = -\frac{Q}{2\pi T}, \quad (4.17)$$

onde :

$$B = \sqrt{\frac{TD^*}{K^*}}, \quad (4.18)$$

D^* = espessura do aquitard,

K^* = condutividade hidráulica do aquitard,

sendo $c = \frac{D^*}{K^*}$ a resistência hidráulica do aquífero. (4.19)

Aplicando-se a transformação de Laplace tem-se:

$$\frac{d^2 \bar{s}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{s}}{dr} - \frac{\bar{s}}{B^2} = \frac{S}{T} [w\bar{s} - \bar{s}(r,0)],$$
 (4.20)

mas como $\bar{s}(r,0) = 0$, a equação fica:

$$\frac{d^2 \bar{s}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{s}}{dr} - \left(\frac{S}{T} w + \frac{1}{B^2} \right) \bar{s} = 0.$$
 (4.21)

A solução geral da equação é:

$$\bar{s}(r, w) = AK_0 \left(r \sqrt{\frac{S}{T} w + \frac{1}{B^2}} \right),$$
 (4.22)

com: $\frac{d\bar{s}}{dr} = -A \sqrt{\frac{S}{T} w + \frac{1}{B^2}} K_1 \left(r \sqrt{\frac{S}{T} w + \frac{1}{B^2}} \right).$ (4.23)

Da Eq.(4.17) vem:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(r \frac{d\bar{s}}{dr} \right) = -\frac{Q}{2\pi T} \frac{1}{w},$$
 (4.24)

resultando em:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(r \frac{d\bar{s}}{dr} \right) = -A \lim_{r \rightarrow 0} \left[\left(r \sqrt{\frac{S}{T} w + \frac{1}{B^2}} \right) K_1 \left(r \sqrt{\frac{S}{T} w + \frac{1}{B^2}} \right) \right] = -A$$
 (4.25)

ou: $A = \frac{Q}{2\pi T} \frac{1}{w}.$ (4.26)

A solução no espaço de Laplace fica:

$$\bar{s}(r, w) = \frac{Q}{2\pi T} \frac{K_0\left(r\sqrt{\frac{S}{T}w + \frac{1}{B^2}}\right)}{w} \quad (4.27)$$

No campo real temos:

$$s(r, t) = \frac{Q}{2\pi T} L^{-1} \left\{ \frac{K_0\left(r\sqrt{\frac{S}{T}w + \frac{1}{B^2}}\right)}{w} \right\} \quad (4.28)$$

A solução apresentada por Hantush e Jacob [13] é representada por:

$$s = \frac{Q}{4\pi T} W\left(u, \frac{r}{B}\right), \quad (4.29)$$

onde:

$$u = \frac{r^2 S}{4Tt} \quad (4.30)$$

Então:

$$W\left(u, \frac{r}{B}\right) = 2L^{-1} \left\{ \frac{K_0\left(\sqrt{\frac{Sr^2}{T}w + \left(\frac{r}{B}\right)^2}\right)}{w} \right\} \quad (4.31)$$

A Figura 4.4 mostra as Curvas Típicas do modelo de Hantush

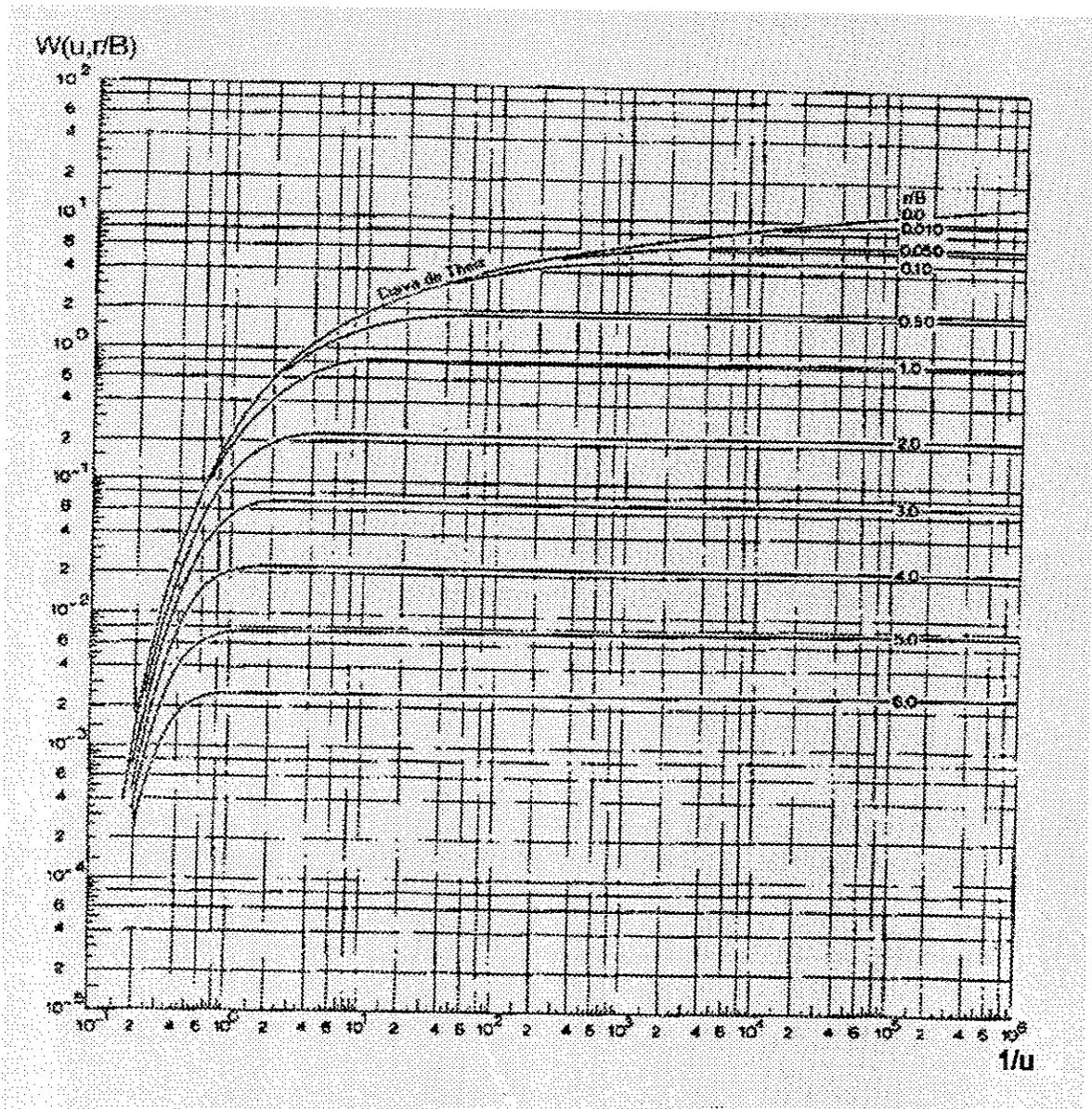


Figura 4.4 Curvas-Típicas modelo de Hantush (Extraído da ref. 34).

4.3 Modelo de Boulton (Aqüíferos Livres)

Este modelo procura representar o comportamento de um aquífero não confinado e, para tanto, utilizou o conceito de “resposta retardada do nível d’água” através do parâmetro D_i (índice de retardo). A Figura 4.5 mostra uma seção-exemplo de um aquífero livre.

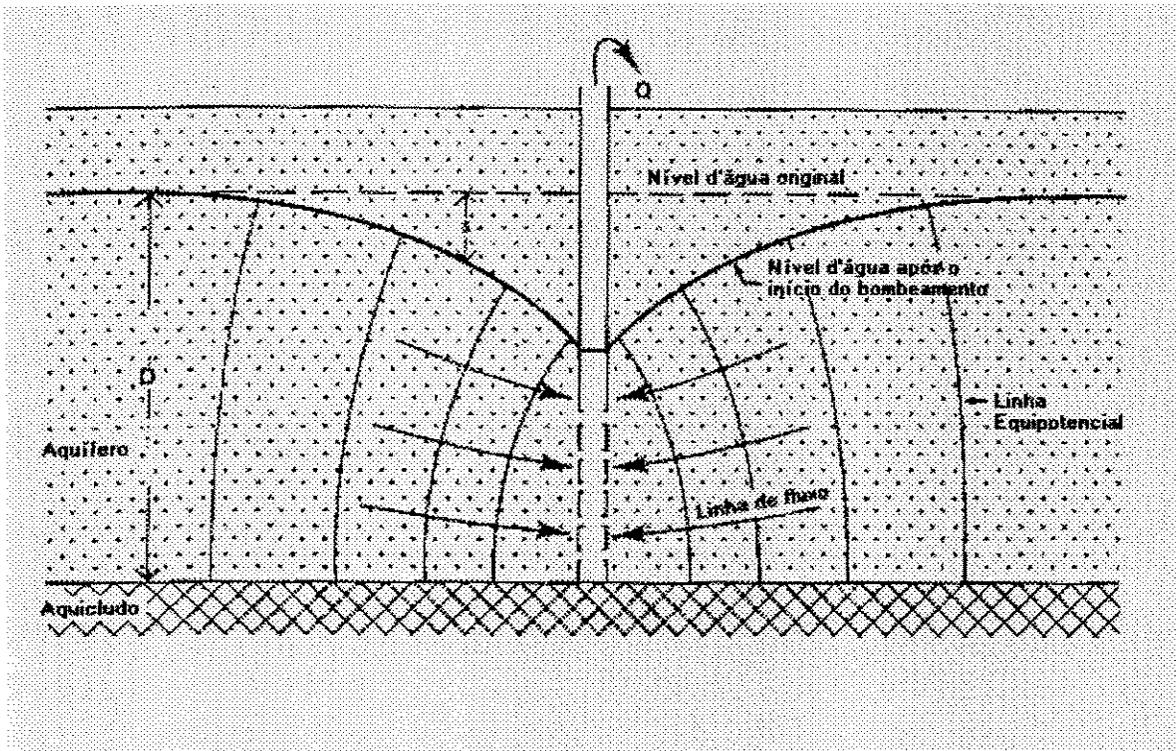


Figura 4.5 Aquífero não confinado (Extraído da ref.17).

O modelo de Boulton pode ser matematicamente representado por:

$$T \left(\frac{\partial^2 s}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial s}{\partial r} \right) = S \frac{\partial s}{\partial t} + D_i S_y \int_0^t \frac{\partial s}{\partial \tau} e^{-D_i(t-\tau)} d\tau, \quad (4.32)$$

$$s(r, 0) = 0, \quad (4.33)$$

$$s(\infty, t) = 0, \quad (4.34)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(r \frac{\partial s}{\partial r} \right) = -\frac{Q}{2\pi T}. \quad (4.35)$$

Boulton [03] apresentou uma solução geral do tipo:

$$s = \frac{Q}{4\pi T} W \left(u_{ay}, \frac{r}{D_t} \right), \quad (u_{ay} \text{ pode assumir valores de } u_a \text{ ou } u_y) \quad (4.36)$$

onde:

$$u_a = \frac{r^2 S}{4Tt}, \quad (4.37)$$

$$u_y = \frac{r^2 S_y}{4Tt}, \quad (4.38)$$

$$D_i = \sqrt{\frac{T}{D_i S_y}}. \quad (4.39)$$

Aplicando-se a transformação de Laplace tem-se:

$$T \left(\frac{d^2 \bar{s}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{s}}{dr} \right) = S[w\bar{s} - s(r,0)] + D_i S_y [w\bar{s} - s(r,0)] \left(\frac{1}{D_i + w} \right), \quad (4.40)$$

mas como $s(r,0) = 0$, a equação fica:

$$\frac{d^2 \bar{s}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{s}}{dr} - \frac{S}{T} w \left[1 + \frac{D_i S_y}{S(D_i + w)} \right] \bar{s} = 0. \quad (4.41)$$

A solução geral é:

$$\bar{s} = AK_0 \left(r \sqrt{\left(1 + \frac{D_i S_y}{S(D_i + w)} \right) \frac{S}{T} w} \right), \quad (4.42)$$

$$\frac{d\bar{s}}{dr} = -A \left(\sqrt{\left(1 + \frac{D_i S_y}{S(D_i + w)} \right) \frac{S}{T} w} \right) K_1 \left(r \sqrt{\left(1 + \frac{D_i S_y}{S(D_i + w)} \right) \frac{S}{T} w} \right), \quad (4.43)$$

mas como:

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \frac{d\bar{s}}{dr} = -A = -\frac{Q}{2\pi T w}, \quad (4.44)$$

então:

$$\bar{s}(r, w) = \frac{Q}{2\pi T} \frac{K_0 \left(r \sqrt{1 + \frac{D_i S_y}{S(D_i + w)}} \right) \frac{S}{T} w}{w} \quad (4.45)$$

No campo real a solução fica:

$$s(r, t) = \frac{Q}{2\pi T} L^{-1} \left\{ \frac{K_0 \left(r \sqrt{\frac{S}{T} w + \frac{D_i S_y}{T (D_i + w)}} \right)}{w} \right\} \quad (4.46)$$

Pode-se concluir portanto que:

$$W \left(u_{ay}, \frac{r}{D_t} \right) = 2L^{-1} \left\{ \frac{K_0 \left(r \sqrt{\frac{S}{T} w + \frac{D_i S_y}{T (D_i + w)}} \right)}{w} \right\} \quad (4.47)$$

Para tempos curtos pode-se fazer a seguinte aproximação:

$$t \rightarrow \text{pequeno} \Rightarrow w \rightarrow \text{grande} \Rightarrow \frac{w}{(D_i + w)} \rightarrow 1$$

A equação (4.47) fica:

$$s(r, t) = \frac{Q}{2\pi T} L^{-1} \left\{ \frac{K_0 \left(r \sqrt{\frac{S}{T} w + \frac{D_i S_y}{T}} \right)}{w} \right\} \quad (4.48)$$

Esta equação representa a solução para curto tempo e gera as curvas-típicas do grupo A no gráfico de Boulton.

Para tempos longos, isto é, $t \rightarrow \text{grande} \Rightarrow w \rightarrow \text{pequeno}$, e considerando-se que S_y é muito maior que S , pode-se adotar a seguinte aproximação:

$$\sqrt{\left(\frac{S_r^2}{T} w + \frac{S_y r^2}{T} \frac{D_i}{(D_i + w)} w\right)} \cong \sqrt{\frac{S_y r^2}{T} \frac{D_i}{(D_i + w)} w} \quad (4.49)$$

então:

$$s(r, t) = \frac{Q}{2\pi T} L^{-1} \left\{ \frac{K_0 \left(r \sqrt{\frac{S_y}{T} \frac{D_i w}{(D_i + w)}} \right)}{w} \right\} \quad (4.50)$$

Deve-se notar que para w pequeno, $\frac{D_i}{D_i + w} \cong 1$ e a Eq.(4.50) fica igual à solução de Theis par S_y .

Esta equação é utilizada, neste modelo, para representar a solução de longo tempo e gerando as curvas-típicas do grupo Y no gráfico de Boulton representado pela Figura 4.6.

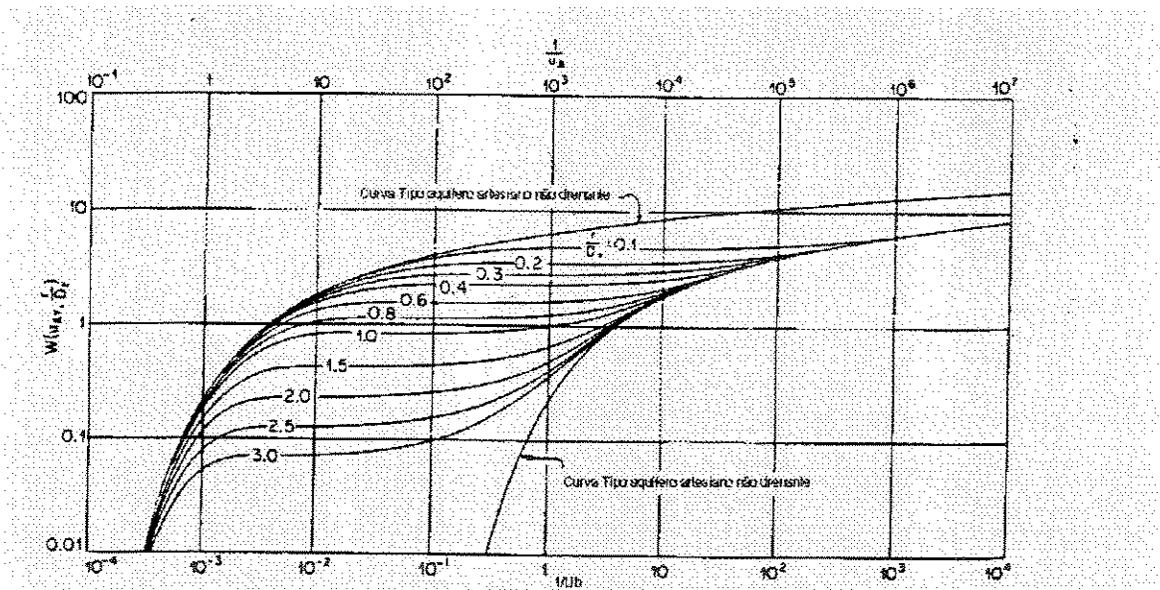


Figura 4.6 Curvas-Típicas modelo de Boulton (Extraído da ref.34).

O modelo de Boulton foi o primeiro a reproduzir os três segmentos de curva, em forma de S, sendo um de curto tempo, um para os tempos intermediários e outro para os tempos longos.

Os três segmentos de curva podem ser entendidos pela explicação a seguir:

- O segmento inclinado de curto tempo cobre apenas um breve período após o início do bombeamento. Neste intervalo, um aquífero livre reage de maneira semelhante a um aquífero confinado, isto é, a produção é proveniente, basicamente, da expansão da água e da compactação do aquífero. O comportamento do segmento de curto tempo é similar à curva-típica de Theis.

- O segmento estável de tempos intermediários reflete o efeito da drenagem que acompanha a queda do nível d'água. O efeito da drenagem no rebaixamento é comparável ao comportamento do aquífero drenante. A variação do rebaixamento diminui com o tempo desviando da curva de Theis.

- O segmento relativamente inclinado de longo tempo reflete a situação onde $\frac{D_i}{D_i + w} \cong 1$, como já comentado, e a curva $s \times t$, mais uma vez, tende à curva de Theis.

4.4 Modelo Com Perda de Carga Localizada

Este modelo baseia-se em hipóteses semelhantes ao modelo de Theis, porém, introduz o conceito de perda de carga localizada nas proximidades do poço.

Tais perdas de carga são devidas ao fluxo turbulento, no meio poroso (fluxo não Darciano) e na entrada do poço. Considerou-se portanto que a perda de carga localizada é proporcional ao quadrado da vazão.

Deve-se notar que, neste modelo, não se pode fazer medições em poços piezômetros pois a perda de carga localizada só é detectável no poço produtor.

Pode ser representado pelo seguinte sistema de equações:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial s}{\partial r} = \frac{S}{T} \frac{\partial s}{\partial t}, \quad (4.51)$$

$$s(r, 0) = 0, \quad (4.52)$$

$$s(\infty, t) = 0, \quad (4.53)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(r \frac{\partial s}{\partial r} \right) = -\frac{Q}{2\pi T}, \quad (4.54)$$

$$s_w(t) = \lim_{r \rightarrow 0} (s(r, t)) + CQ^2. \quad (4.55)$$

Onde C é o coeficiente de perda de carga não linear e tem dimensão $[T^2/L^5]$.

Aplicando-se a transformação de Laplace, vem:

$$\frac{\partial^2 \bar{s}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{s}}{\partial r} = \frac{S}{T} w \bar{s}, \quad (4.56)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(r \frac{\partial \bar{s}}{\partial r} \right) = -\frac{Q}{2\pi T} \frac{1}{w}, \quad (4.57)$$

$$\bar{s}_w(w) = \lim_{r \rightarrow 0} (\bar{s}(r, w)) + \frac{CQ^2}{w}. \quad (4.58)$$

A solução do sistema é:

$$s(r, t) = \frac{Q}{2\pi T} L^{-1} \left\{ \frac{K_0 \left(\sqrt{\frac{S}{T}} w r \right)}{w} \right\} \quad (4.59)$$

ou de (4.58):

$$s_w(t) = \frac{Q}{2\pi T} L^{-1} \left\{ \frac{K_0 \left(\sqrt{\frac{S}{T} w \Gamma_w^2} \right)}{w} \right\} + CQ^2 \quad (4.60)$$

As derivadas das soluções dos modelos em relação aos parâmetros podem ser encontradas nos apêndices.

Capítulo 5 - Regressão Não Linear dos Dados.

5.1 Mínimos Quadrados Não Lineares

Neste trabalho foram analisados os métodos baseados na norma L2, isto é, na minimização da somatória do quadrado das diferenças, já largamente utilizados na análise de testes de pressão na indústria do petróleo.

A função objetivo (E) a ser minimizada no método dos mínimos quadrados é:

$$E(\vec{\alpha}) = \sum_{i=1}^{nptos} [y_i - F(\vec{\alpha}, x_i)]^2 \quad (5.1)$$

Onde :

nptos é o número de pontos do teste,

x é a variável independente,

F é a função que representa o modelo matemático,

y é o valor medido de F e

$\vec{\alpha}$ é o vetor de parâmetros a ser determinado.

5.1.1 O método de Newton

O método de Newton consiste em aproximar a função E por uma série de Taylor truncada no termo quadrático, dando um caráter parabólico à aproximação E_a , então:

$$E_a(\vec{\alpha}) = E(\vec{\alpha}^0) + \sum_{k=1}^{npar} (\alpha_k - \alpha_k^0) \left(\frac{\partial E}{\partial \alpha_k} \right)_{\vec{\alpha}_0} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{npar} \sum_{k=1}^{npar} (\alpha_j - \alpha_j^0) (\alpha_k - \alpha_k^0) \left(\frac{\partial^2 E}{\partial \alpha_j \partial \alpha_k} \right)_{\vec{\alpha}_0}, \quad (5.2)$$

onde npar é o número de parâmetros e $\vec{\alpha}_0$ é uma estimativa inicial do vetor de parâmetros.

Definindo-se:

$$\bar{J} = \left\{ j_j \right\} = \left\{ \left. \frac{\partial E}{\partial \alpha_j} \right|_{\bar{\alpha}_0} \right\}, \quad (5.3)$$

$$H = \left\{ h_{jk} \right\} = \left\{ \left. \frac{\partial^2 E}{\partial \alpha_k \partial \alpha_j} \right|_{\bar{\alpha}_0} \right\}, \quad (5.4)$$

$$j_j = -2 \sum_{i=1}^{nkptos} [y_i - F(\bar{\alpha}_0, x_i)] \left. \frac{\partial F}{\partial \alpha_j} \right|_{\bar{\alpha}_0} \quad e \quad (5.5)$$

$$h_{jk} = -2 \sum_{i=1}^{nptos} \left\{ - \left. \frac{\partial F}{\partial \alpha_k} \frac{\partial F}{\partial \alpha_j} \right|_{\bar{\alpha}_0} + [y_i - F(\bar{\alpha}_0, x_i)] \left. \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_k \partial \alpha_j} \right|_{\bar{\alpha}_0} \right\}. \quad (5.6)$$

Definindo-se ainda $(\bar{\alpha}^{i+1} - \bar{\alpha}^i) = \delta \bar{\alpha}$, e escrevendo a equação (5.2) em notação matricial vem:

$$E_a = E(\bar{\alpha}_0) + \delta \bar{\alpha}^T \bar{J} + \frac{1}{2} \delta \bar{\alpha}^T H \delta \bar{\alpha}. \quad (5.7)$$

Deseja-se encontrar o mínimo da função E_a . Então, dada uma estimativa inicial $\bar{\alpha}_0$, determina-se $\delta \bar{\alpha}$ tal que $E_a^{i+1} < E_a^i$ e, portanto, para $i = 1, 2, \dots, npar$, vem:

$$\frac{\partial E_a}{\partial \delta \alpha_i} = 0. \quad (5.8)$$

De (5.7) e (5.8) vem:

$$H \delta \bar{\alpha} = -\bar{J}. \quad (5.9)$$

A cada passo, ao se resolver o sistema (5.9), atualiza-se $\bar{\alpha}$ da seguinte maneira:

$$\bar{\alpha}^{i+1} = \bar{\alpha}^i + \delta \bar{\alpha}. \quad (5.10)$$

Repete-se o procedimento até a convergência, isto é, até que se encontre o mínimo da função E_a , satisfazendo-se a condição:

$$\frac{\partial E_a}{\partial \alpha_i} = 0. \quad (5.11)$$

5.1.2 O método de Gauss-Newton

Gauss propôs uma modificação ao método de Newton, simplesmente desprezando-se os termos com as derivadas de segunda ordem da equação (5.6), com o benefício de tornar a matriz H positivo-definida. Neste método a matriz H fica:

$$h_{jk} = -2 \sum_{i=1}^{nptos} \left\{ - \frac{\partial F}{\partial \alpha_k} \frac{\partial F}{\partial \alpha_j} \Big|_{\hat{\alpha}_0} \right\}, \quad (5.12)$$

tornando-se, porém, mais sensível quanto à estimativa inicial.

5.1.3 O método de Levenberg-Marquardt

Baseados no método de Gauss-Newton, Levenberg [18] e Marquardt [19] propuseram uma alteração objetivando melhorar o condicionamento da matriz Hessiana. Esta alteração consiste em somar à matriz Hessiana uma matriz diagonal cujos elementos são iguais a uma constante positiva de valor λ .

Marquardt sugere $\lambda = 0,01$ para a primeira iteração. Adota-se posteriormente $\lambda_{i+1} = \frac{\lambda_i}{10}$ caso a função objetivo tenha sido minimizada. Em caso contrário adota-se $\lambda_{i+1} = 10\lambda_i$.

É interessante notar que quando o valor de λ torna-se pequeno, este método volta a se aproximar do método de Gauss-Newton.

5.2 Análise Estatística da Regressão.

Quando se determina o valor de um parâmetro (α) numa regressão não linear, pode-se também estimar o seu intervalo de confiança, na forma de dois valores, um superior e outro inferior. Este intervalo é função da quantidade e da qualidade dos pontos experimentais.

Definindo-se γ como “nível de significância”, pode-se calcular um intervalo de confiança tal que há uma probabilidade de $(1-\gamma)$ de que o valor de α esteja entre os seus dois limites, ou seja, o parâmetro α_j é determinado da seguinte forma:

$$\alpha_j^* - \Delta\alpha_j^* \leq \alpha_j \leq \alpha_j^* + \Delta\alpha_j^* \quad (5.13)$$

onde α_j^* é a estimativa de α_j da última iteração.

Dogru, Dixon e Edgar[09] apresentaram um método de estimativa do intervalo de confiança ($\Delta\alpha_j^*$).

Definindo-se o erro médio quadrático como:

$$EMQ = \frac{E(\alpha^*)}{nptos - npar} \quad (5.14)$$

pode-se estimar o intervalo de confiança da seguinte maneira:

$$\Delta\alpha_j^* = \left(t_{\gamma/2; (nptos-npar)} \right) \sqrt{EMQ * h_{jj}} \quad (5.15)$$

onde h_{jj} é o elemento da diagonal da inversa da matriz Hessiana, na última iteração, correspondente ao parâmetro α_j e $t_{\gamma/2; (nptos-npar)}$ é o valor da distribuição t de Student para um nível de significância γ e grau de liberdade $(nptos-npar)$.

Adotou-se, neste trabalho, o valor de 5% para o nível de significância ($\gamma=0.05$), ou seja, há uma probabilidade de 95% de que os parâmetros se encontrem dentro do intervalo calculado.

5.3 Busca Restrita dos Parâmetros.

Ao se realizar a regressão não linear, não é desejável que se encontre valores sem significado físico. A transmissividade, por exemplo, deve ser sempre positiva.

Encontram-se na literatura vários métodos de otimização restrita como, por exemplo, o método das penalidades.

Neste trabalho, após a determinação de um intervalo significativo para cada parâmetro, simplesmente limitou-se a calcular um novo valor de $\delta\alpha$ no caso de $\alpha + \delta\alpha$ atingir um valor fora do intervalo. O novo valor será $\frac{(\alpha - \text{lim. inf})}{2}$ ou $\frac{(\text{lim. sup} - \alpha)}{2}$.

Este procedimento apresentou bons resultados e foi suficiente para garantir a convergência, mesmo a partir de estimativas iniciais distantes dos valores ótimos, na maioria dos casos.

Nos casos em que não houve convergência e o programa terminou após um número máximo de iterações, notou-se que alguns parâmetros tendiam a um dos seus limites.

Capítulo 6 - Descrição do Programa

6.1 O Programa (Aquatest).

O programa, denominado **Aquatest**, foi desenvolvido para se tornar uma ferramenta automatizada de análise de testes de bombeamento.

A análise de testes realizada manualmente é um procedimento sensível à subjetividade do analista. Este trabalho propõe a sua automatização, realizando, com o auxílio de um computador, um procedimento de ajuste de dados a uma curva típica, mantendo o seu princípio básico e possibilitando que se obtenha informações qualitativas ao se observar o formato da curva dos dados do teste.

A Fig. 6.1 mostra um exemplo de tela do programa.

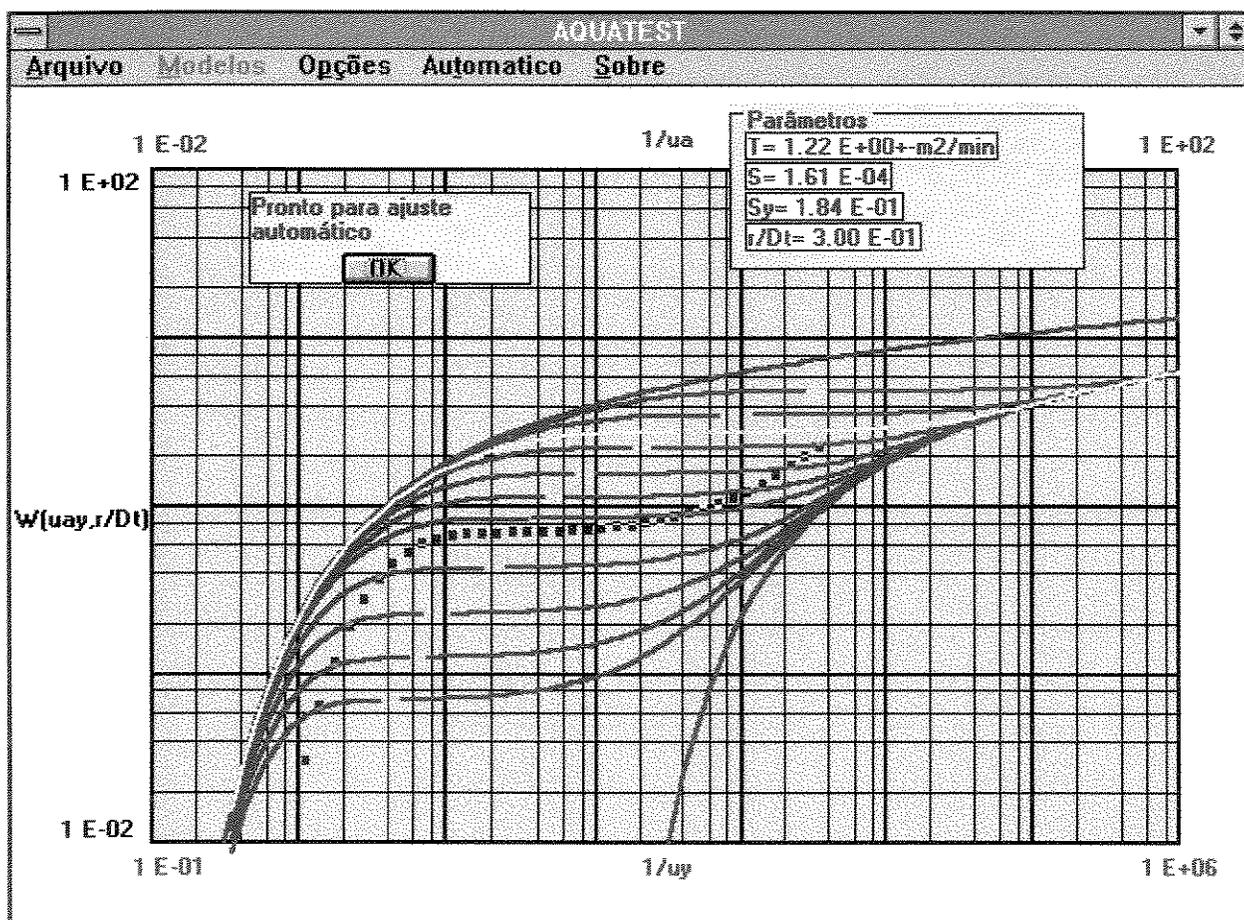


Figura 6.1 Exemplo de tela do programa Aquatest.

6.2 Linguagem

Constatou-se que, atualmente, há uma preferência, dos usuários de microcomputadores, de trabalhar em ambiente operacional Windows. Portanto, desenvolveu-se este trabalho na linguagem Visual Basic, devido à facilidade de assimilação e à riqueza de recursos disponíveis para a geração de programas que trabalham em ambiente Windows.

O Visual Basic é uma linguagem que induz o programador a utilizar a programação orientada a eventos. O programa é desenvolvido através de várias sub-rotinas, que são ativadas após a ocorrência de algum evento, como por exemplo, posicionar o ponteiro do “mouse” sobre algum comando e pressionar o botão.

6.3 Análise por Curva Típica.

O princípio desta técnica de análise é o de que as variáveis adimensionais, utilizadas nos modelos, são funções lineares das variáveis reais. Conseqüentemente, ao se traçar o gráfico de rebaixamento contra o tempo, para um dado modelo, o formato das curvas dimensional e adimensional serão idênticos e a diferença entre valores das coordenadas gráficas é correspondente a uma translação de seus eixos. Por exemplo, para o modelo de Theis, têm-se:

$$\frac{1}{u} = \frac{4Tt}{r^2S} \quad (6.1)$$

$$W(u) = \frac{4\pi Ts}{Q} \quad (6.2)$$

O procedimento básico para análise através das curvas típicas é descrito a seguir:

- Traça-se a curva-típica de um determinado modelo, em um papel bi-logarítmico, utilizando como coordenadas as variáveis adimensionais, por exemplo, no modelo de Theis, $1/u$ e $W(u)$.

- Traça-se a curva dos dados observados (t e s , neste exemplo), em outro papel bi-logarítmico de mesma escala que o do gráfico anterior.

- Faz-se o ajuste da curva de dados com a curva típica, mantendo-se os eixos coordenados paralelos.

- Seleciona-se um ponto de ajuste arbitrário e anota-se as coordenadas, neste exemplo, s , t , $W(u)$, e $1/u$.

- Com os valores das coordenadas e as equações de adimensionalização, neste caso, as Equações (6.1) e (6.2), calcula-se os parâmetros de interesse.

6.4 O Conceito de Curva Característica.

A curva característica de um poço é um gráfico do tipo rebaixamento versus vazão.

Ao se bombear um poço, o rebaixamento medido é uma soma entre o rebaixamento devido à perda de carga no aquífero e a perda de carga no poço.

As perdas de carga no aquífero estão relacionadas ao fluxo da água no meio poroso. As perdas de carga no poço estão relacionadas, entre outros fatores, ao fluxo não Darciano na sua proximidade e a turbulência do fluxo na sua entrada.

Neste trabalho, propôs-se que o comportamento do rebaixamento no poço obedece à seguinte equação:

$$s_w = f(t)Q + CQ^2 \quad (6.4.1)$$

$f(t)$ é o coeficiente linear de perda de carga do aquífero e varia com o tempo.

C é o coeficiente não linear de perda de carga no poço.

A curva característica é, portanto, o gráfico da Equação (6.4.1), para um determinado tempo de produção.

6.5 Os Tipos de Testes Disponíveis.

Estão disponíveis no programa 3 tipos de testes:

1 - Teste de bombeamento com vazão constante para os modelos de Theis, Hantush e Boulton.

2 - Teste de bombeamento, com vazão constante e fechamento do poço, com análise dos dados dos períodos de fluxo e recuperação para os mesmos 3 modelos acima citados.

3 - Teste de desempenho de poço (“well performance test”) e geração da sua curva característica, com a análise de dados de dois períodos de produção consecutivos, para modelo de reservatório semelhante ao de Theis, mas com raio do poço finito e perda de carga localizada.

6.5.1 Teste com uma vazão.

Para os testes de bombeamento com uma vazão, adotou-se o procedimento semelhante ao realizado manualmente, isto é, após plotar os pontos em um gráfico com escala bi-logarítmica, faz-se o ajuste visual a uma curva-típica de um modelo pré-escolhido. Adota-se os valores encontrados neste ajuste manual como a estimativa inicial para o ajuste automático.

6.5.2 Teste de recuperação.

Para o segundo tipo de teste, utilizando-se o princípio da superposição dos efeitos, gera-se a provável continuação do gráfico de rebaixamento após o fechamento (curva pontilhada para $t > t_1$ na Fig. 6.2). Com a curva resultante, faz-se a análise dos dados adotando o mesmo procedimento do primeiro tipo de teste.

Como no primeiro caso, utilizam-se os valores dos parâmetros do ajuste visual como valores iniciais do ajuste automático.

Do princípio da superposição, para $t > t_1$, podemos escrever:

$$s(t) = s_2(t) = s_1(t) + \frac{(Q_2 - Q_1)}{Q_1} s_1(t - t_1), \quad (6.3)$$

resultando:

$$s_1(t) = s(t) - \frac{(Q_2 - Q_1)}{Q_1} s_1(t - t_1). \quad (6.4)$$

Os dados dos testes são pontos discretos $s(t_i)$ versus t_i . Dificilmente se terá, para um dado tempo t , um $\Delta t = (t - t_1)$ correspondente. Portanto, torna-se necessário ajustar uma curva aos dados do teste. Para este caso ajustou-se uma curva aos dados do período de recuperação, isto é, para $t > t_1$.

Optou-se por ajustar uma função spline cúbico com partição homogênea. Como se tem um gráfico em escala logarítmica, ajustou-se a função spline ao logaritmo, de base decimal dos pontos. A função spline utilizada pode ser encontrada, por exemplo, no livro de Cunha [8].

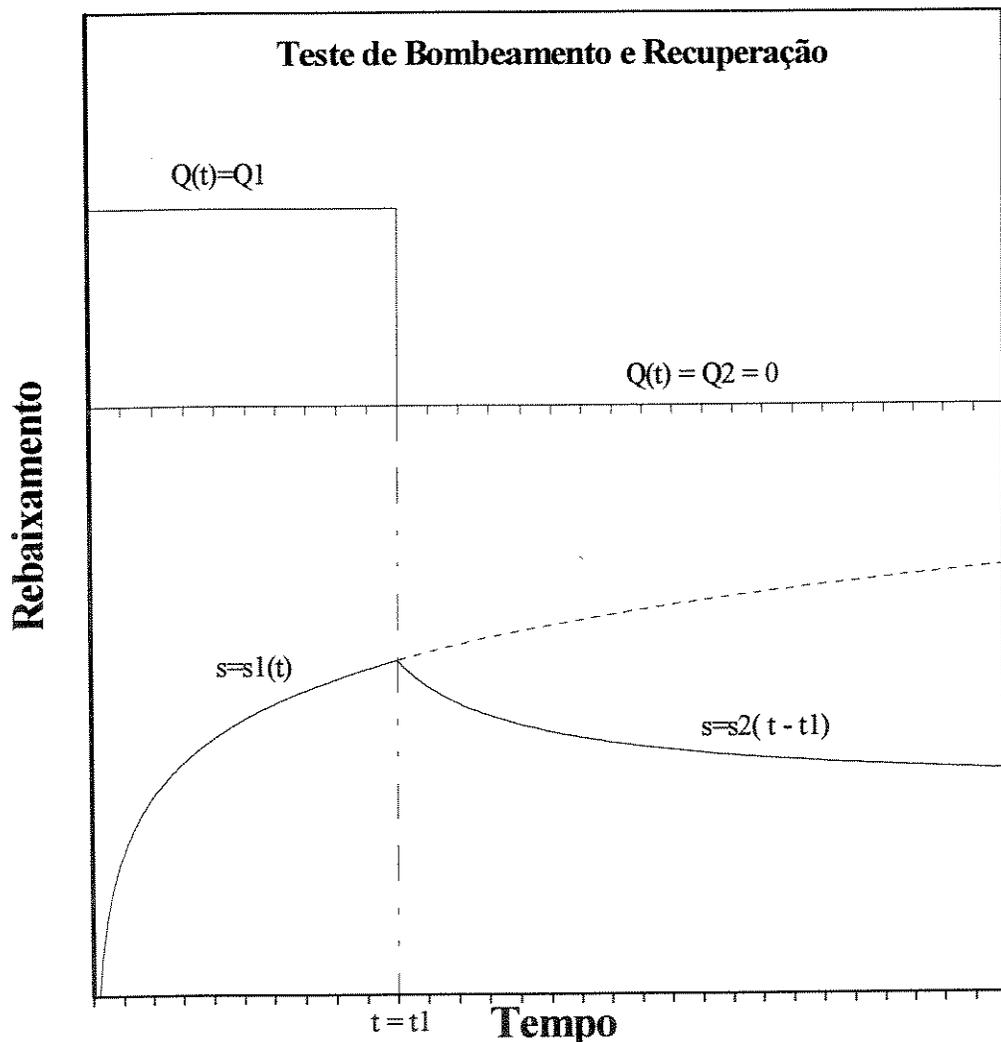


Figura 6.2 - Exemplo de gráfico $s \times t$ para teste de recuperação.

6.5.3 Teste de desempenho de poço (“well performance test”).

No terceiro tipo de teste, realizam-se dois períodos de produção com vazões constantes, distintas e maiores que zero. A Figura 6.3 mostra um exemplo de gráfico de s versus t para um teste com duas vazões

Neste caso temos, para $t < t_1$

$$s_1(t) = Q_1 s_{mp}(t) + CQ_1^2, \quad (6.5)$$

e para $t > t_1$: $s_2(t) = Q_1 s_{mp}(t) + (Q_2 - Q_1) s_{mp}(t - t_1) + CQ_2^2$. (6.6)

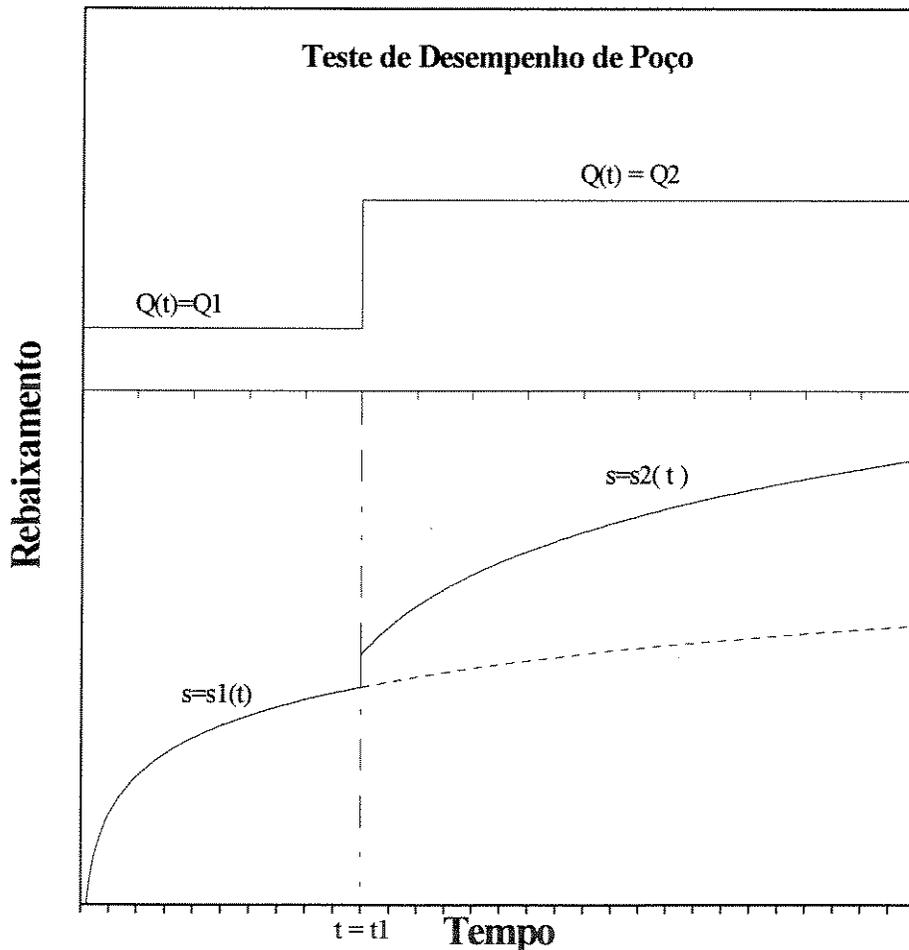


Figura 6.3 Exemplo de gráfico s versus t para teste de desempenho de poço.

Para se gerar a provável continuação da curva de rebaixamento e a estimativa inicial torna-se necessário adotar mais uma hipótese, que é considerar constante o efeito da primeira vazão, para tempos maiores que t_1 . Então, para $t > t_1$, a Eq. (6.5) fica:

$$Q_1 s_{mp}(t) = Q_1 s_{mp}(t_1) = s_1(t_1) - CQ_1^2. \quad (6.7)$$

Portanto da Eq. (6.6) vem:

$$s_2(t) = s_1(t_1) - CQ_1^2 + (Q_2 - Q_1)s_{mp}(t - t_1) + CQ_2^2; \quad t > t_1. \quad (6.8)$$

Definindo-se

$$\begin{aligned} \Delta t &= t - t_1, \\ \Delta Q &= Q_2 - Q_1, \\ \Delta s(\Delta t) &= s_2(t) - s_1(t_1), \end{aligned}$$

tem-se:

$$\Delta s(\Delta t) = \Delta Q s_{mp}(\Delta t) + C(Q_2^2 - Q_1^2). \quad (6.9)$$

Como $(Q_2^2 - Q_1^2) = (Q_2 + Q_1)(Q_2 - Q_1)$, pode-se escrever:

$$\frac{s_1(t)}{Q_1} = s_{mp}(t) + CQ_1, \quad (6.10)$$

$$\frac{\Delta s(\Delta t)}{\Delta Q} = s_{mp}(\Delta t) + C(Q_2 + Q_1). \quad (6.11)$$

Ao se plotar as Equações (6.10) e (6.11), superpondo os eixos t e Δt , e também os eixos

$\frac{s_1}{Q_1}$ e $\frac{\Delta s}{\Delta Q}$, obtêm-se um gráfico semelhante à Fig. (6.4).

Subtraindo (6.10) de (6.11) para um valor t qualquer, tal que $t = \Delta t$, isto é, traçando-se uma linha vertical e anotando-se os pontos $\left(\Delta t, \frac{\Delta s}{\Delta Q}\right)$ e $\left(t, \frac{s_1}{Q_1}\right)$, vem:

$$\frac{\Delta s(\Delta t)}{\Delta Q} - \frac{s_1(t)}{Q_1} = CQ_2 \quad (6.12)$$

então:

$$C = \frac{\left(\frac{\Delta s(\Delta t)}{\Delta Q} - \frac{s_1(t)}{Q_1}\right)}{Q_2} \quad (6.13)$$

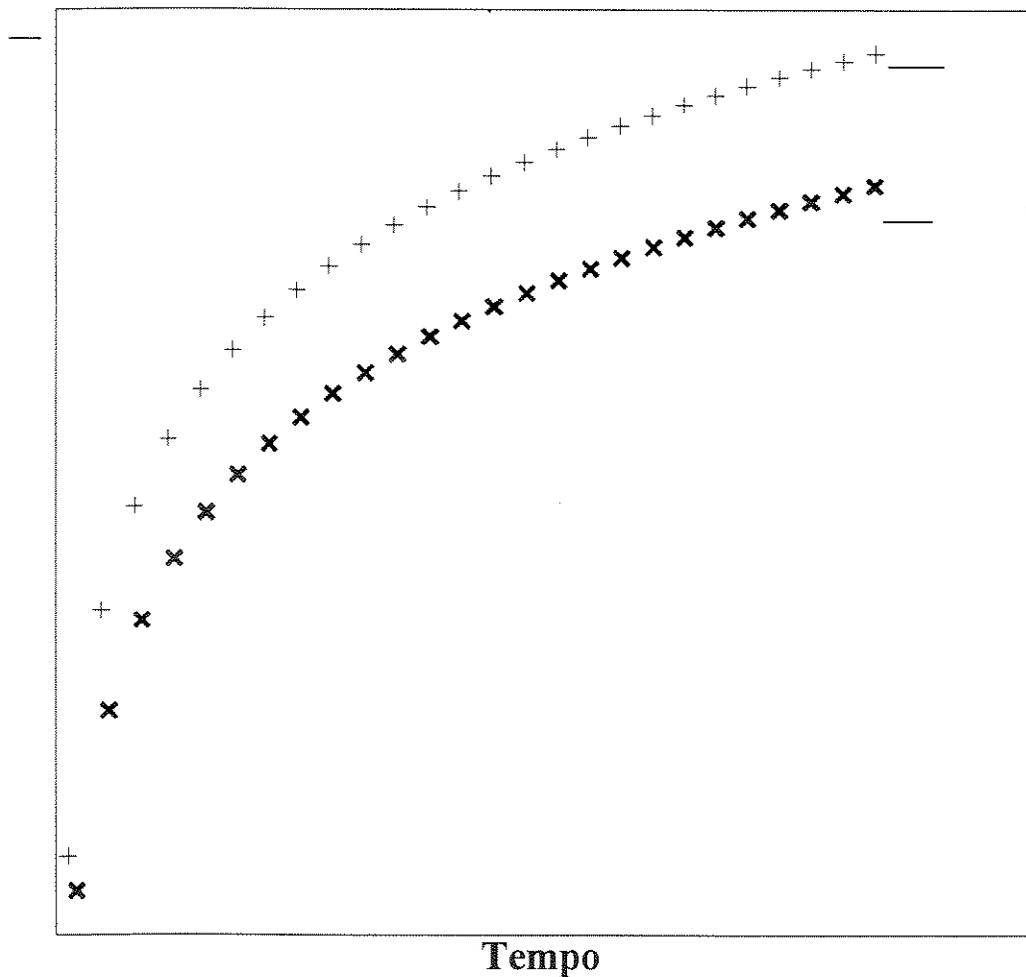


Figura 6.4 Exemplo de gráfico do tipo (s/Q) versus tempo.

Com esta estimativa inicial de C e a equação (6.7), pode-se escrever, para $t < t_1$:

$$Q_1 s_{mp} \cong s_1(t) - CQ_1^2 \quad (6.14)$$

Ajusta-se os pontos aproximados $Q_1 s_{mp}$ versus t ($t < t_1$) para se encontrar a estimativa inicial dos outros parâmetros, neste caso S e T.

Com estes valores iniciais, faz-se o ajuste automático final, utilizando todos os dados do teste e a função do modelo.

Pelo mesmo motivo apresentado no caso anterior, ajustou-se cada um dos dois períodos de teste a uma função spline cúbico com partição homogênea.

6.6 Funções

Algumas funções, que não estão disponíveis na biblioteca matemática da linguagem, como, por exemplo, as funções de Bessel, foram aproximadas por polinômios. Para a distribuição t de Student, utilizou-se uma tabela. Estas aproximações podem ser encontradas no livro de Abramowitz [1].

6.7 Regressão e Inversão Numérica.

A solução das funções dos modelos, assim como suas derivadas em relação aos parâmetros, foram encontradas no campo de Laplace e invertidas numericamente pelo método de Stehfest [28].

A regressão foi realizada no campo real, após a inversão das funções.

Utilizou-se o método de Levenberg-Marquardt exceto no modelo de Theis, onde, por ajustar apenas dois parâmetros e não apresentar problemas de convergência, fez-se uso do método Gauss-Newton.

6.8 A Barra de Opções.

A tela principal do programa apresenta as seguintes opções:

- Arquivo:
- Abrir: abre um arquivo.
 - Editar: edita um arquivo.
 - Nova Análise: reinicializa o programa.
 - Sistema de Unidade: seleciona as unidades.
 - Sair: termina o programa.
- Modelos:
- Theis: escolhe o modelo de Theis.
 - Hantush: escolhe o modelo de Hantush.
 - Boulton: escolhe o modelo de Boulton.
- Opções:
- Tipo de Teste: seleciona o tipo de teste.
 - Gerar Pontos: gera a provável curva de rebaixamento para $t > t_1$ nos testes de recuperação.
 - Curva Característica: gera a curva característica nos testes de desempenho de poço.
- Automático:
- Ajuste Automático: faz o ajuste automático.
- Sobre:
- Sobre: informa sobre o programa.

Capítulo 7 Validação do Programa.

Para se validar o programa desenvolvido, foram gerados alguns dados sintéticos, do tipo rebaixamento versus tempo, com o auxílio de uma rotina desenvolvida em linguagem Turbo C, onde os valores dos parâmetros são previamente conhecidos. Os testes estão descritos a seguir.

7.1 Teste 1 - Uma Vazão - Modelo de Theis.

Adotaram-se os seguintes valores:

Vazão = $0,5 \text{ m}^3/\text{min}$
Distância do poço de observação ao poço produtor (raio de observação) = 30 metros.

Os dados foram computados com os parâmetros:

$T = 0,1 \text{ m}^2/\text{min}$
$S = 0,0002$

A estimativa inicial (Fig. 7.1) constou dos seguintes valores dos parâmetros de ajuste:

$T = 0.0398$
$S = 0.000177$

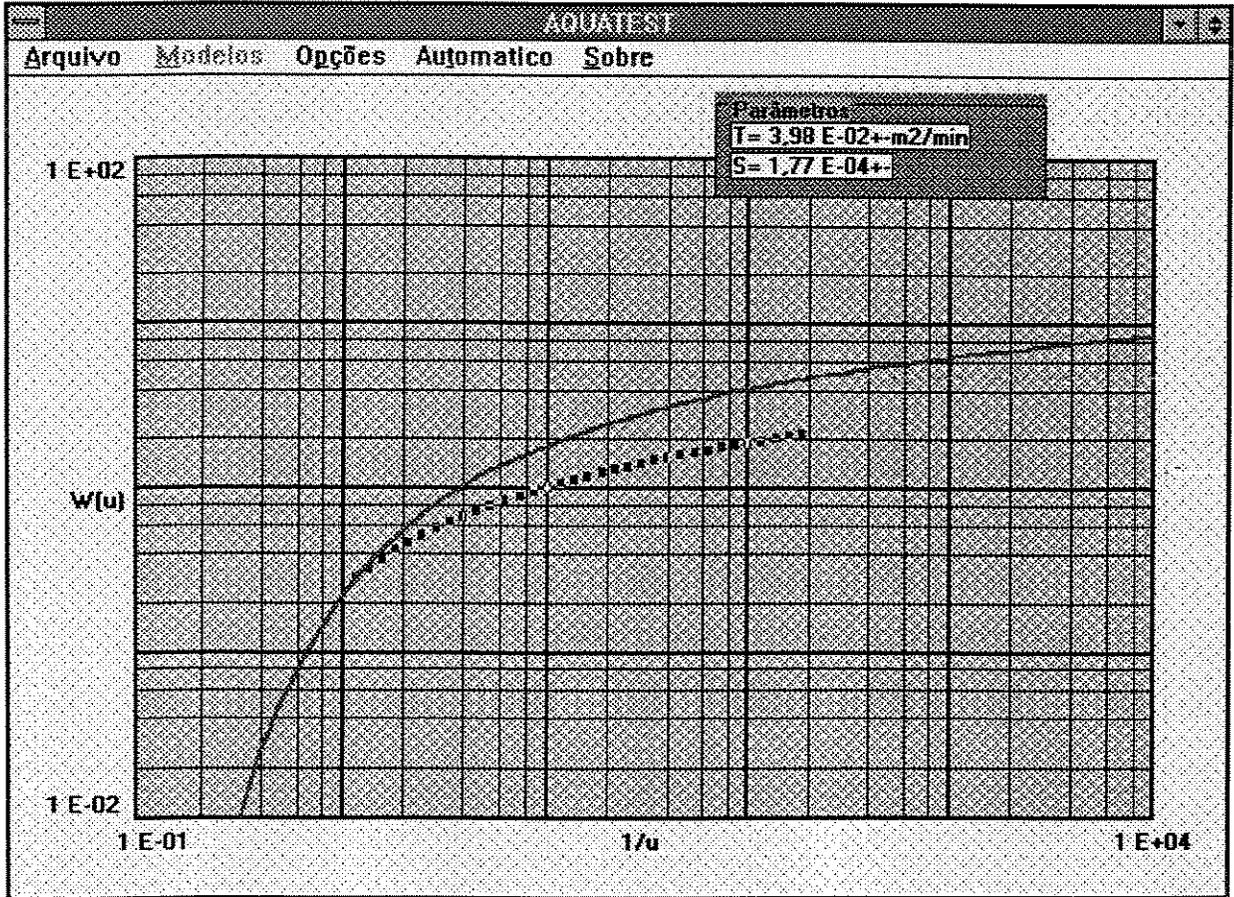


Figura 7.1 Estimativa inicial do Teste1.

O resultado esperado foi obtido após 7 iterações (Fig. 7.2).

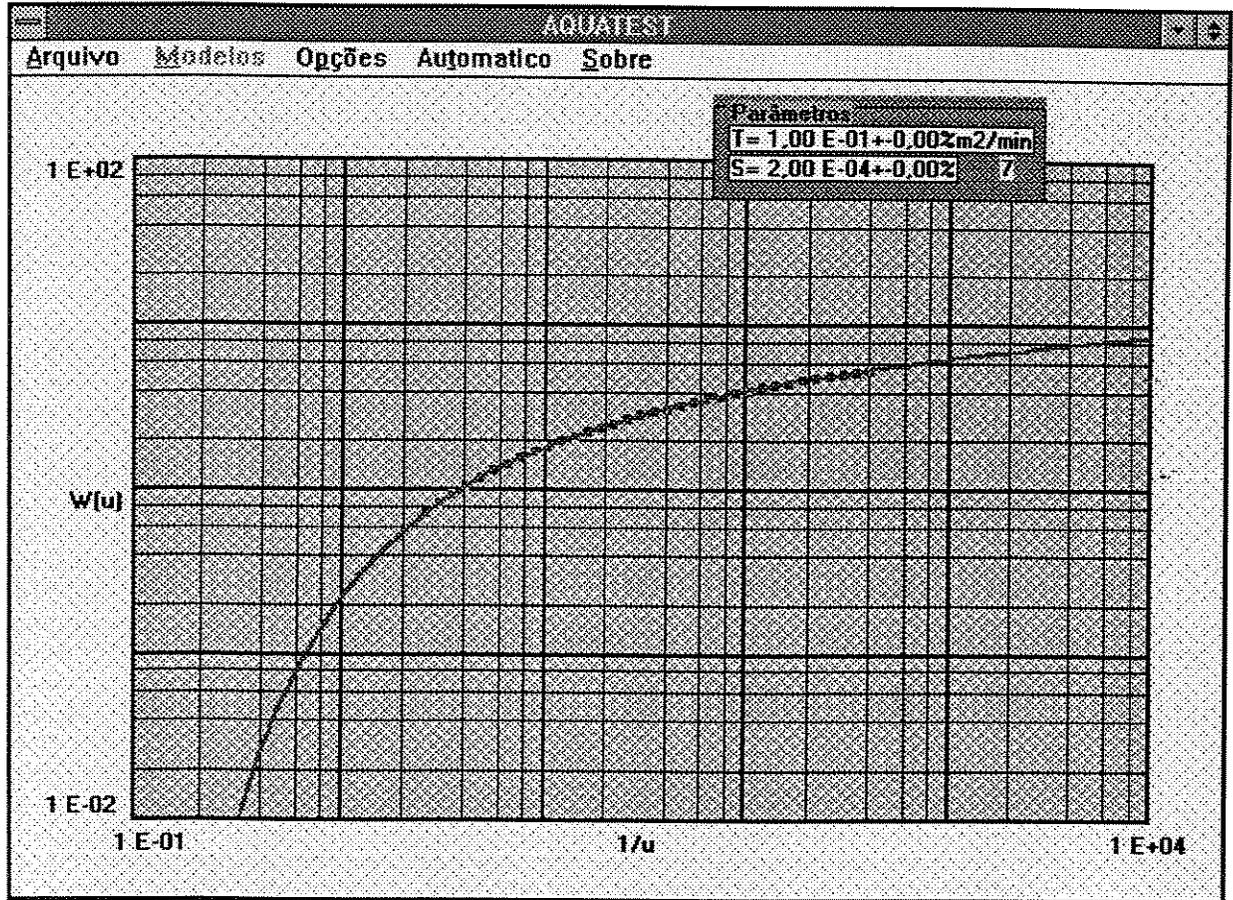


Figura 7.2 Resultado do Teste1.

7.2 Teste2 - Uma Vazão - Modelo de Hantush.

Adotaram-se os seguintes valores:

Vazão = $0,5 \text{ m}^3/\text{min}$

Raio de observação = 30 metros.

Os dados foram computados com os parâmetros:

$T = 0.1 \text{ m}^2/\text{min}$

$S = 0.0002$

$r/B = 0.5$

A estimativa inicial (Fig. 7.3) constou dos seguintes valores dos parâmetros de ajuste:

$$T = 0.0447$$

$$S = 0.0000861$$

$$r/B = 0.05$$

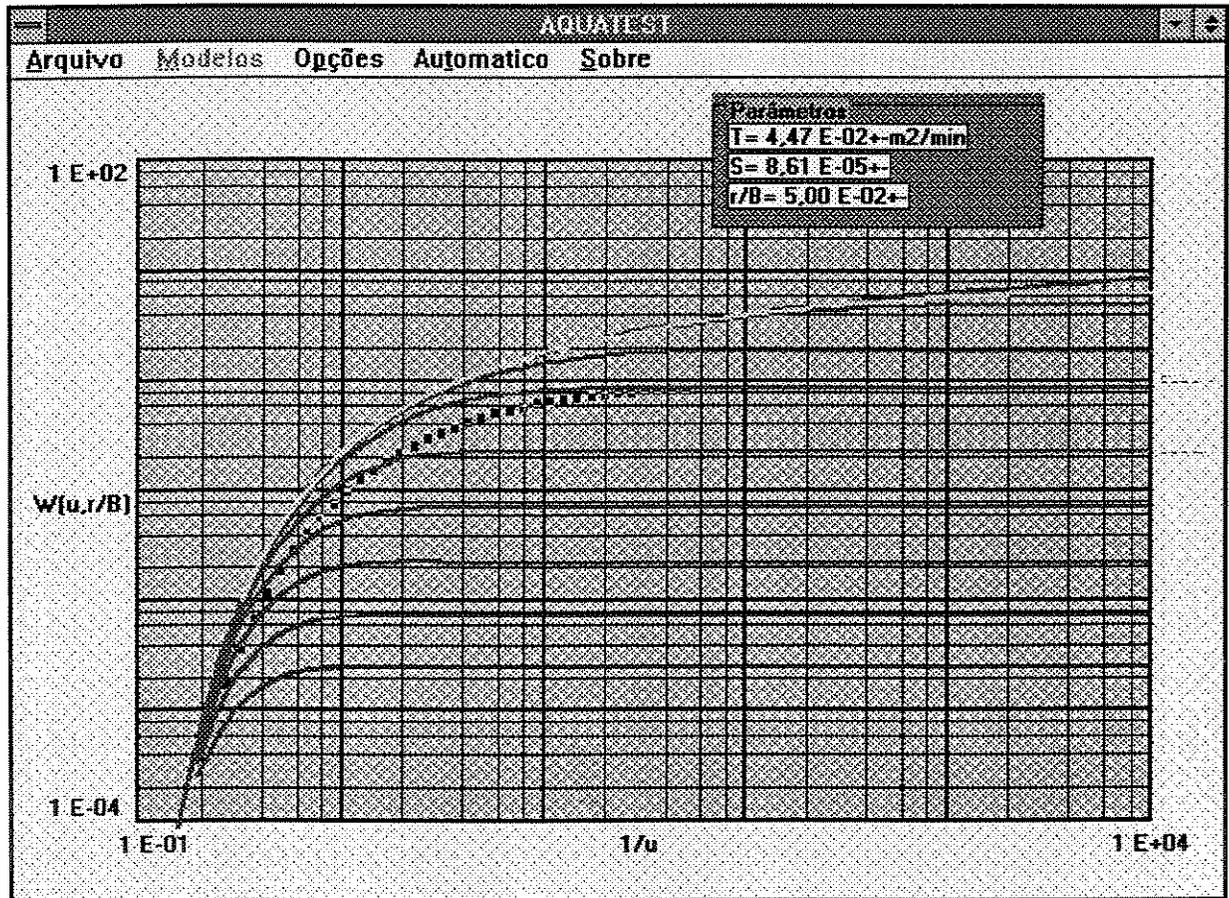


Figura 7.3 Estimativa inicial do Teste2.

O resultado esperado foi obtido após 5 iterações, conforme a Fig. 7.4.

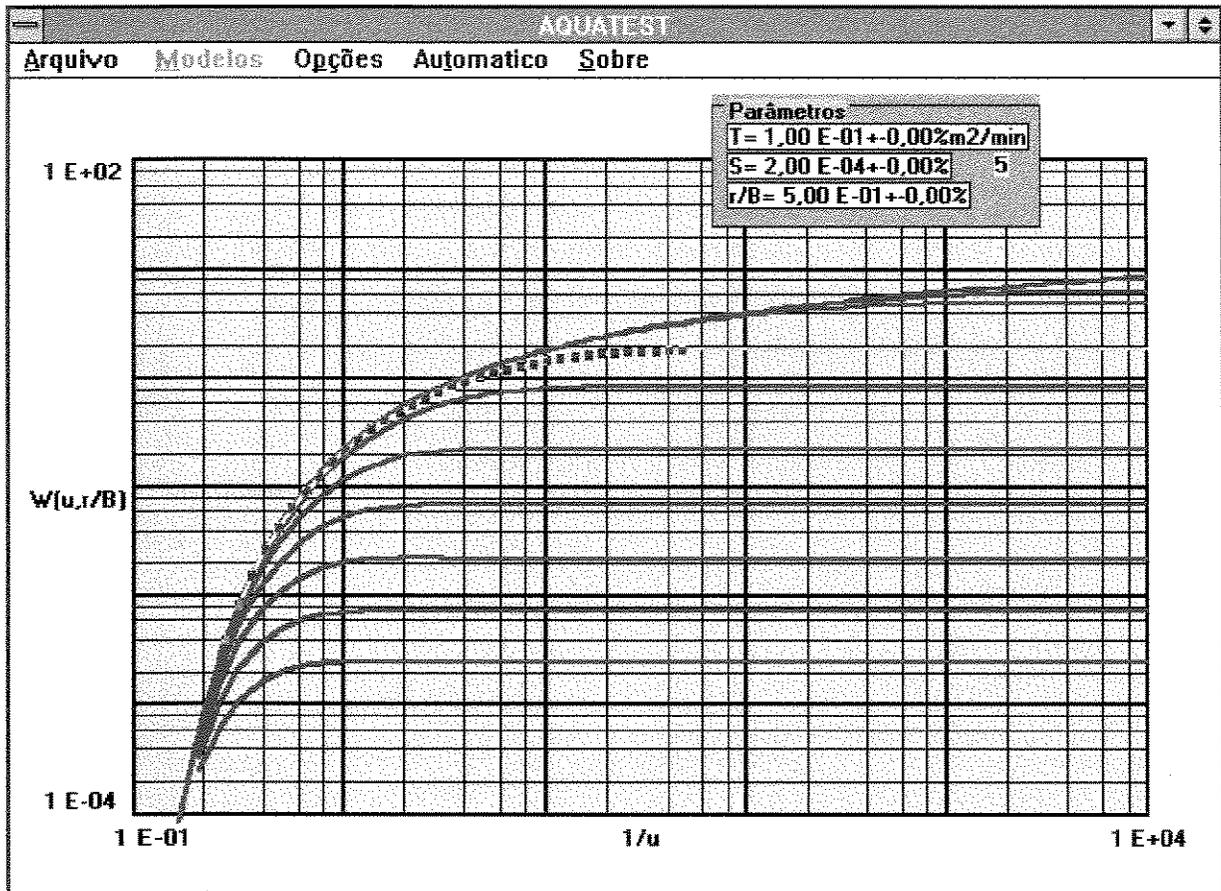


Figura 7.4 Resultado do Teste2.

7.3 Teste 3 - Uma Vazão - Modelo de Boulton.

Adotaram-se os seguintes valores:

Vazão = 0,5 m³/min

Raio de observação = 30 metros.

Os dados foram computados com os parâmetros:

T = 0.4 m²/min

S = 0.0002

S_y = 0.1

$$D_i = 0.04 \text{ min}^{-1}$$

A estimativa inicial (Fig. 7.5) constou dos seguintes valores dos parâmetros de ajuste:

$$T = 0.153 \text{ m}^2/\text{min}$$

$$S = 0.000114$$

$$S_y = 0.374$$

$$r/D_t = 1.0$$

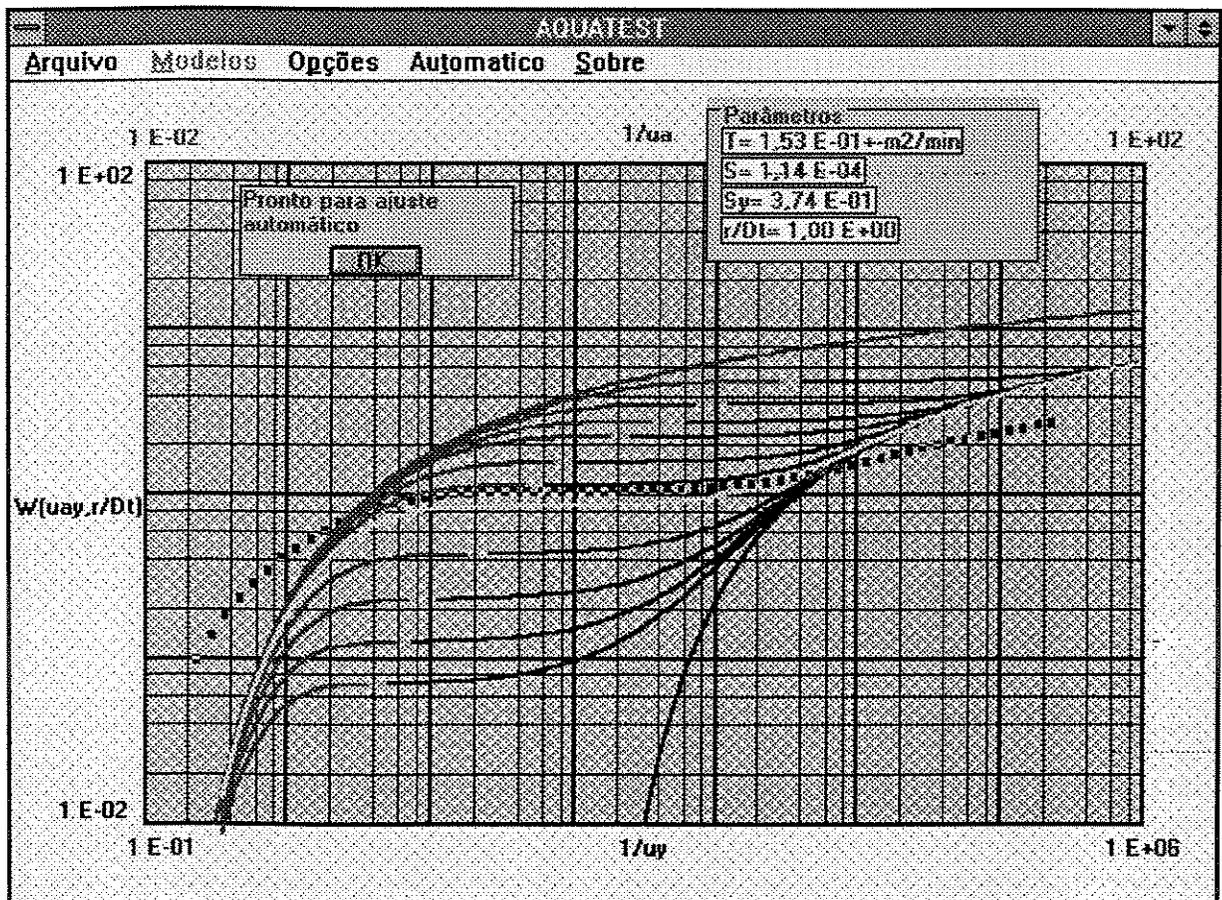


Figura 7.5 Estimativa inicial - Teste3.

O resultado esperado foi obtido após 6 iterações, conforme a Fig. 7.6.

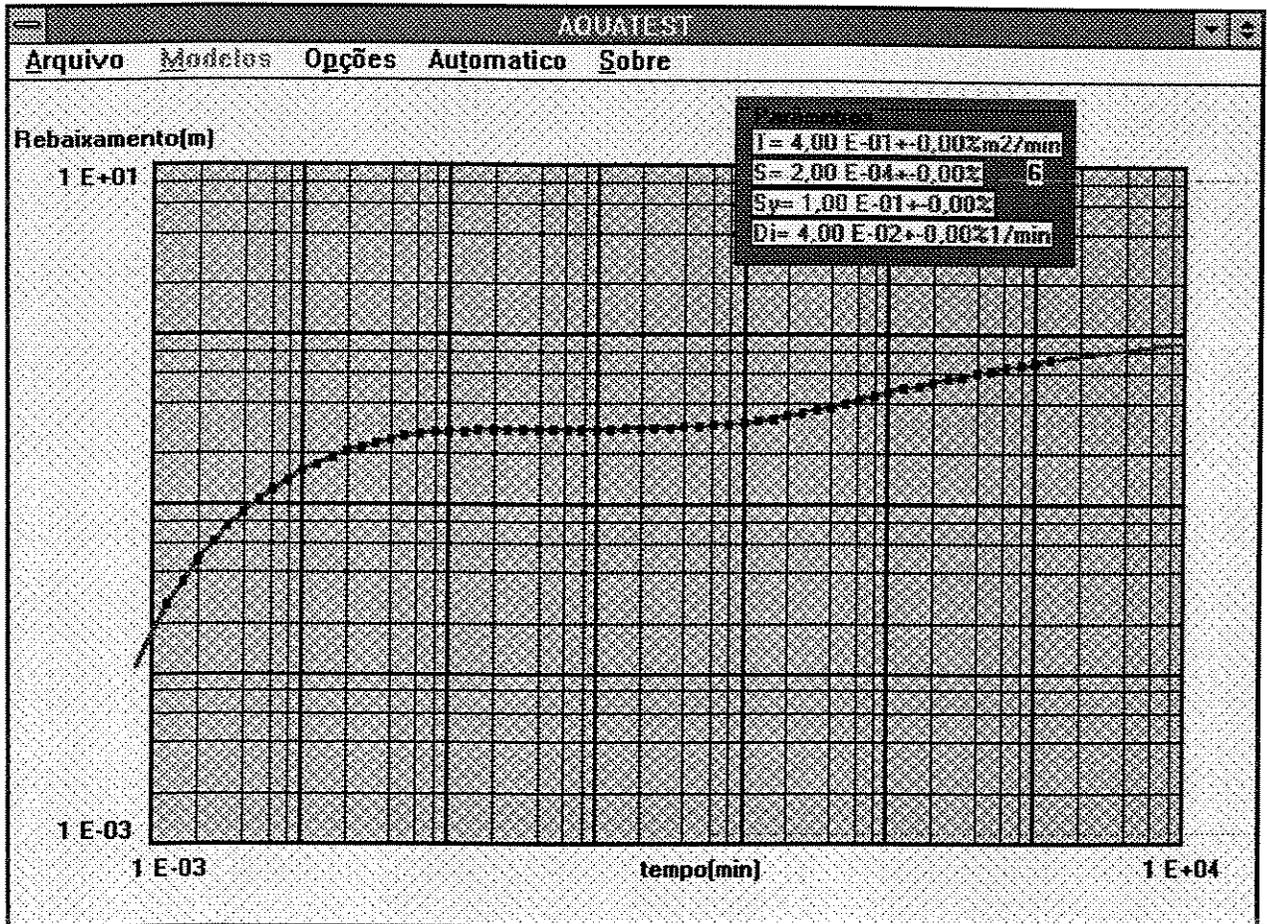


Figura 7.6 Resultados do Teste3.

7.4 Teste4 - Teste de Recuperação - Modelo de Theis.

Adotaram-se os seguintes valores:

Vazão = $0,5 \text{ m}^3/\text{min}$
Raio de observação = 30 metros.
Tempo de fechamento do poço (t_1) = 100 min.

Os dados foram computados com os seguintes parâmetros:

$$T = 0.3 \text{ m}^2/\text{min}$$

$$S = 0.0002$$

Nos testes de recuperação, como é este caso, gera-se a provável curva de s versus t para tempos $t > t_1$ (ver Fig. 7.7).

Notar que a curva cheia descendente é gerada pelo spline ajustado aos pontos do período de recuperação.

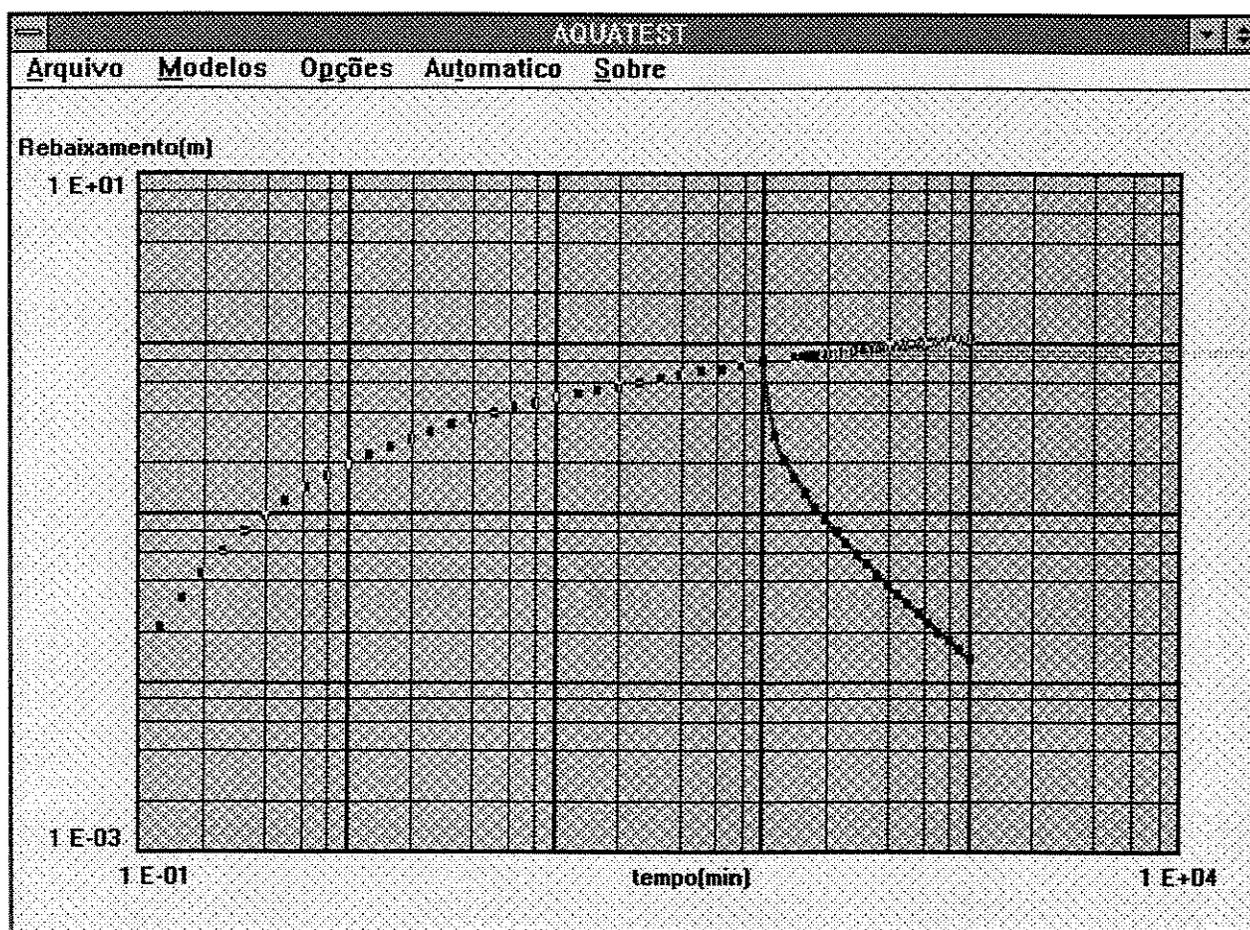


Figura 7.7 Curva provável de pontos para $t > t_1$ Teste4.

A estimativa inicial (Fig. 7.8) constou dos seguintes valores dos parâmetros de ajuste:

$$T = 0.0398$$

$$S = 0.000177$$

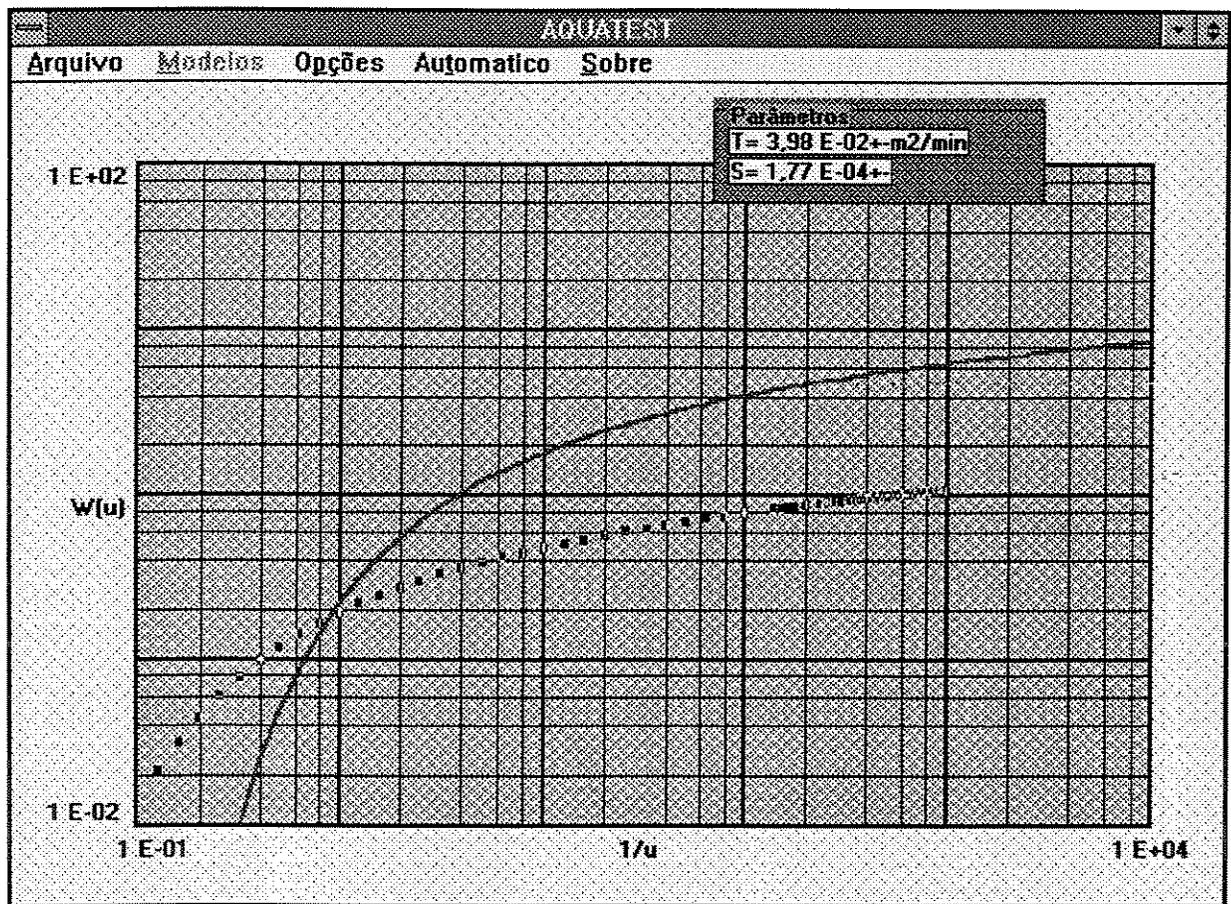


Figura 7.8 Estimativa inicial do Teste4.

A Fig. 7.9 mostra o resultado do teste4, sendo que os parâmetros convergiram para os valores esperados.

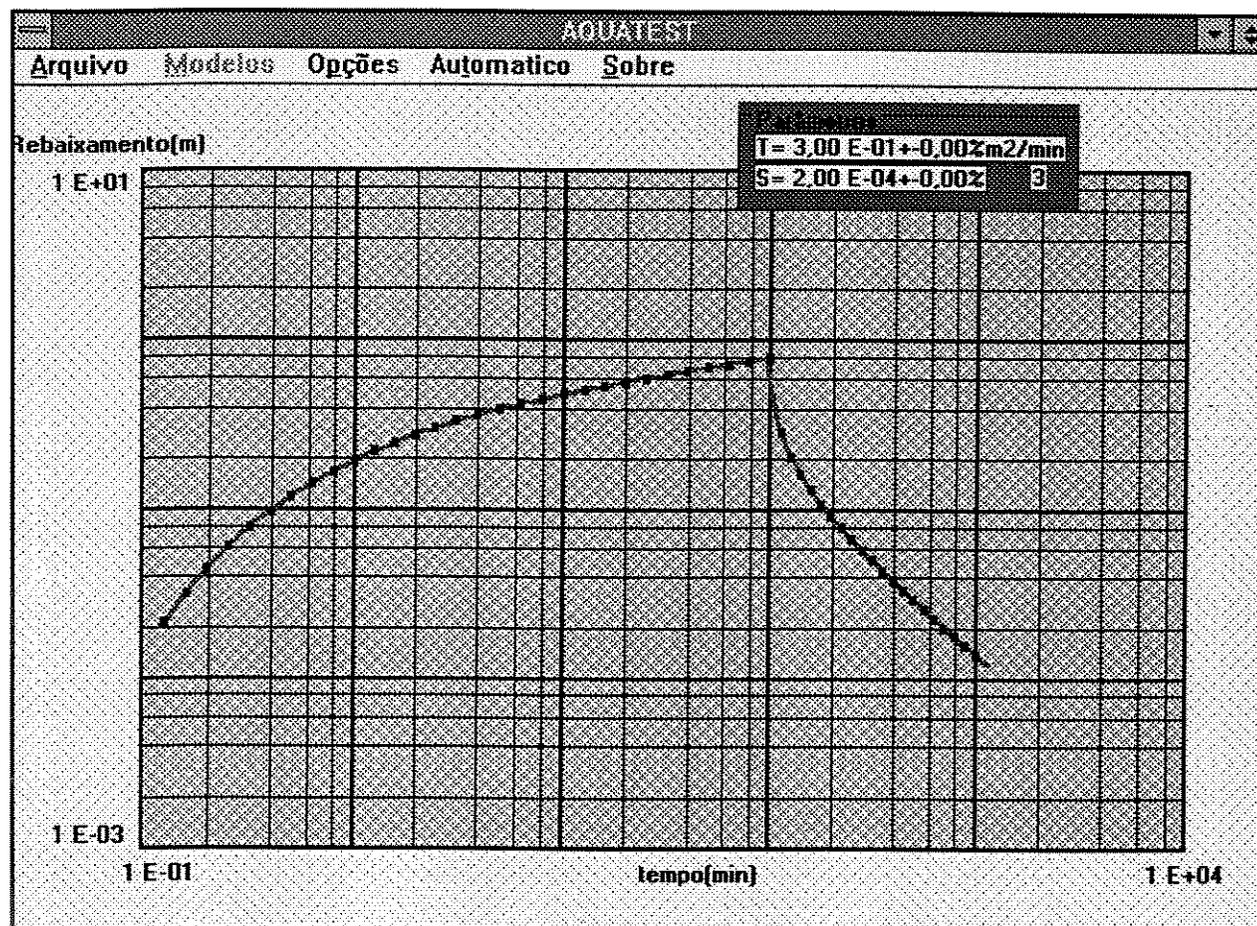


Figura 7.9 Resultados do Teste4.

7.5 Teste5 - Teste de Recuperação - Modelo de Hantush.

Adotaram-se os seguintes valores:

Vazão = $0,5 \text{ m}^3/\text{min}$

Raio de observação = 30 metros.

Tempo de fechamento do poço (t_1) = 100 min.

Os dados foram computados com os parâmetros:

$T = 0.03 \text{ m}^2/\text{min}$

$S = 0.0002$

$r/B = 0.1$

Como no caso anterior, gera-se uma curva provável de pontos para $t > t_1$, como se pode observar na Fig. 7.10.

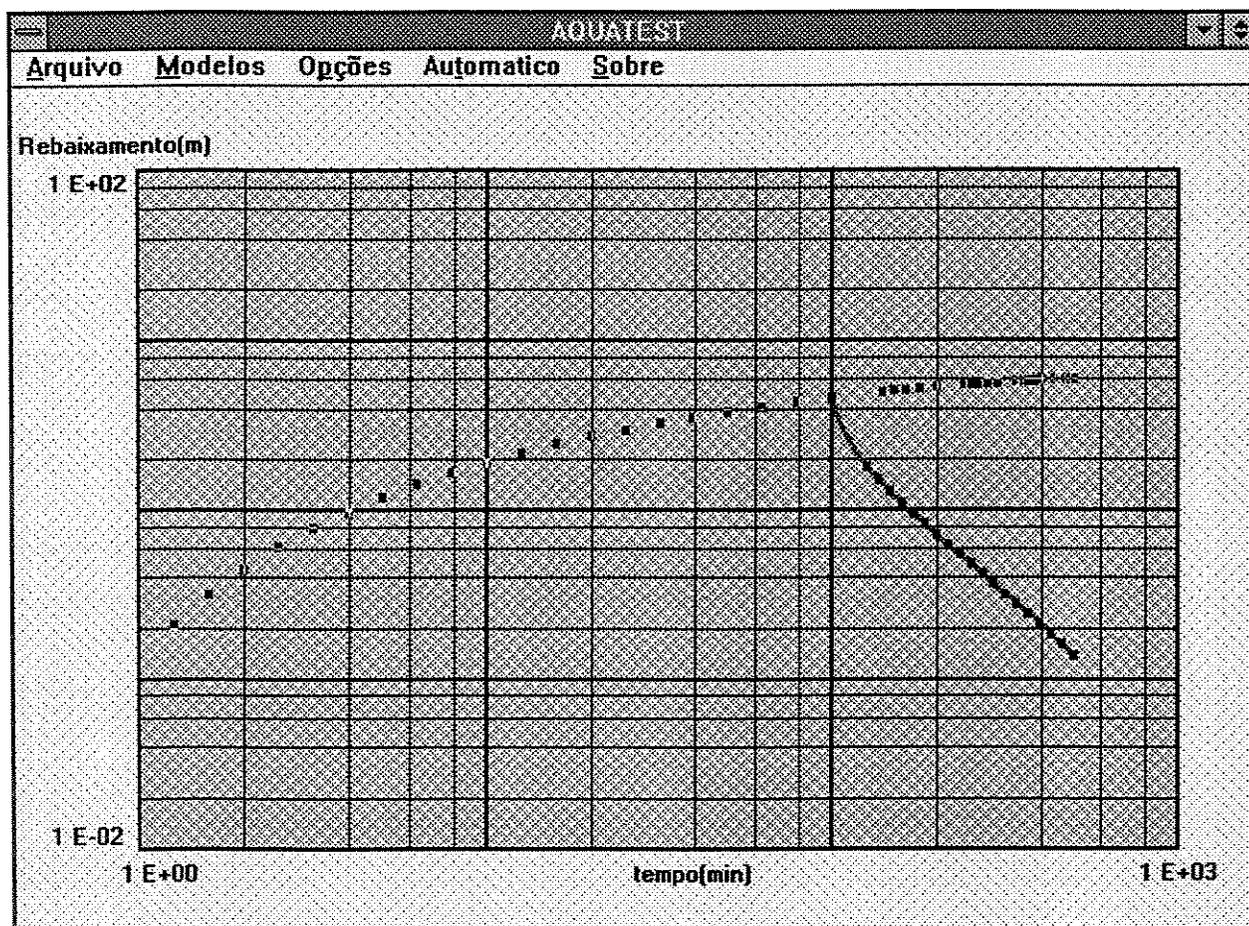


Figura 7.10 Curva provável de pontos para $t > t_1$ Teste5.

A estimativa inicial (Fig. 7.11) constou dos seguintes valores dos parâmetros de ajuste:

$T = 0.028$
$S = 0.000114$
$r/B = 0.01$

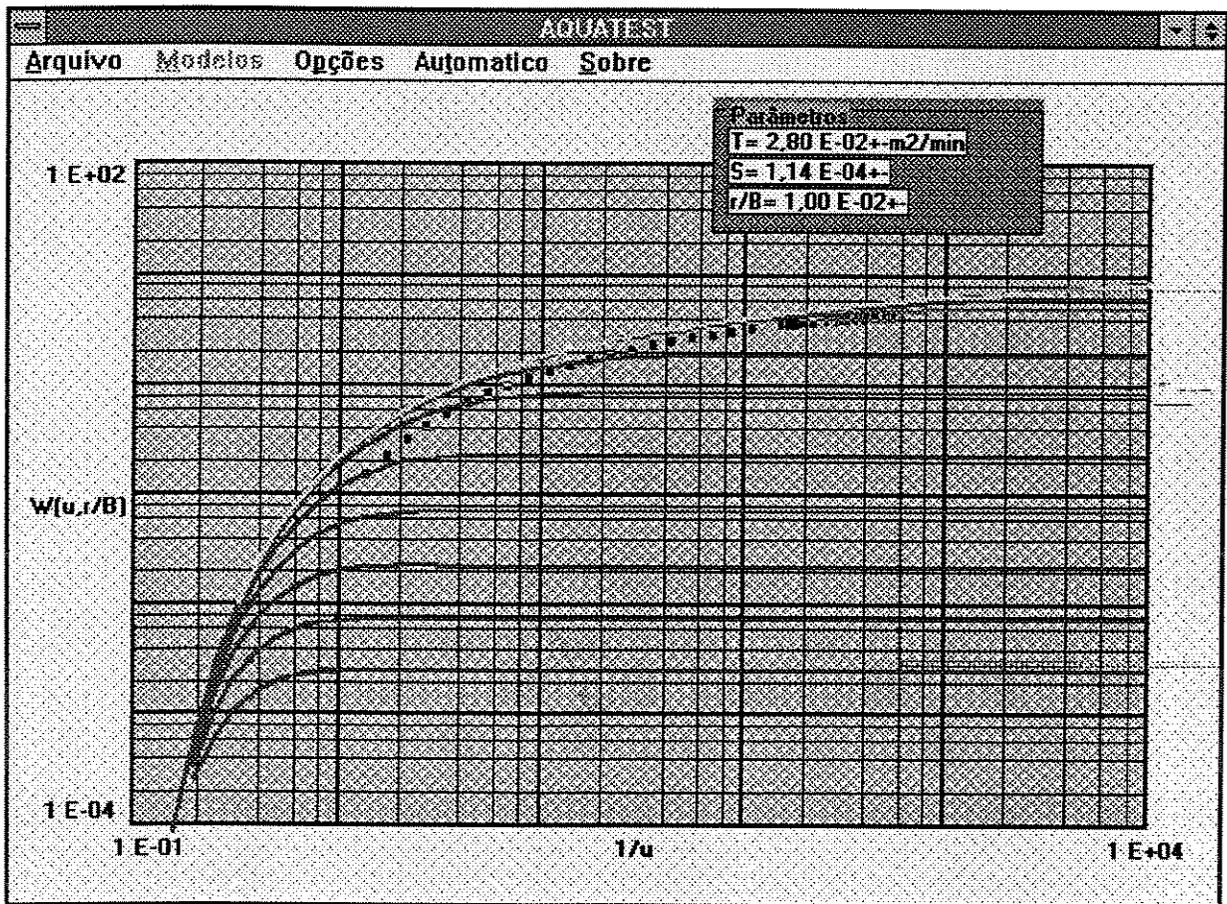


Figura 7.11 Estimativa inicial do Teste5.

A Figura 7.12 mostra o resultado obtido.

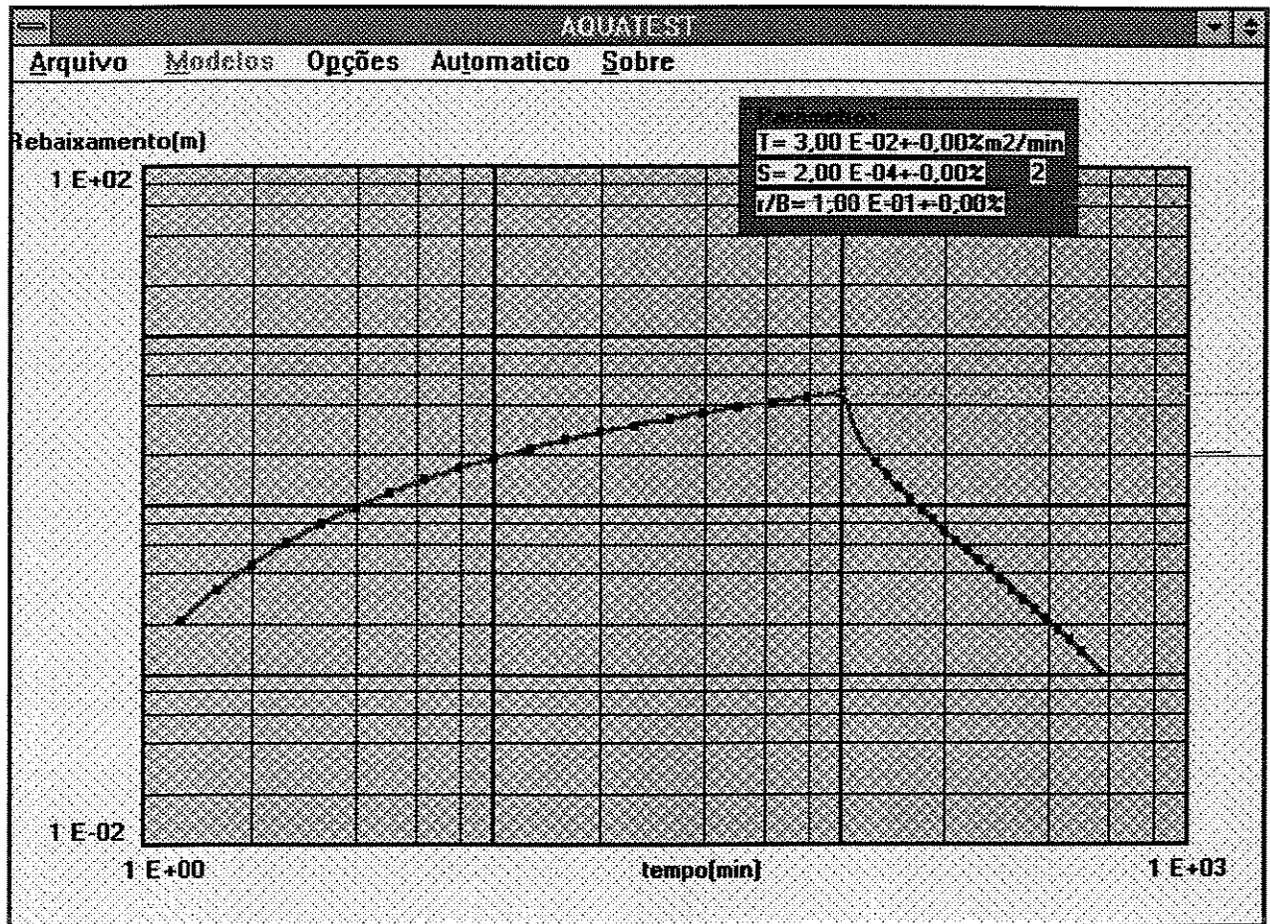


Figura 7.12 Resultado do Teste5.

7.6 Teste6 - Teste de Recuperação - Modelo de Boulton.

Adotaram-se os seguintes valores:

Vazão = 0,5 m³/min

Raio de observação = 30 metros.

Tempo de fechamento do poço (t₁) = 100 min.

Os dados foram computados com os parâmetros:

$T = 0,3 \text{ m}^2/\text{min}$
$S = 0,0002$
$S_y = 0.1$
$D_i = .0,01$

A curva provável para $t > t_1$ pode ser observada na Fig. 7.13.

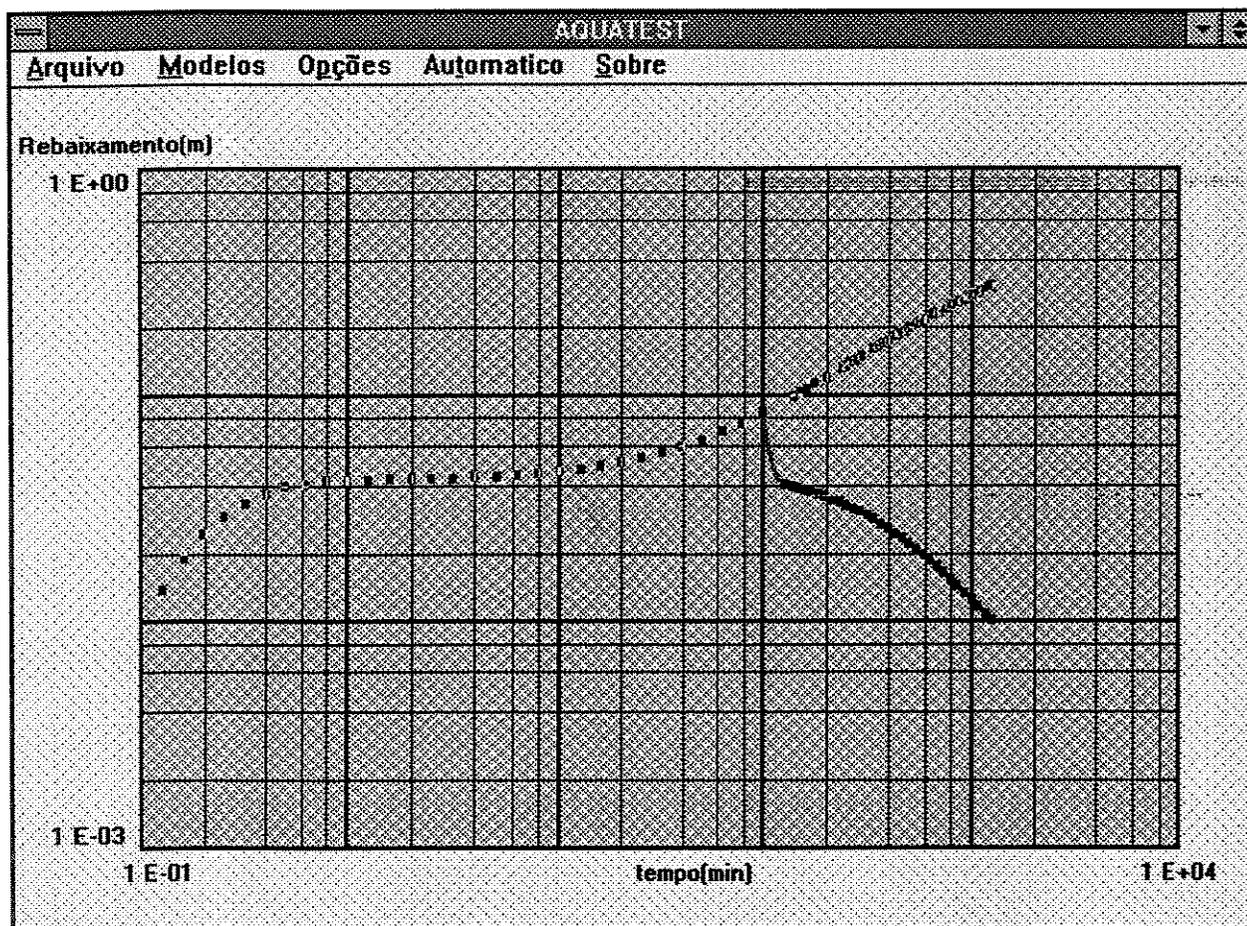


Figura 7.13 Curva Provável de pontos para $t > t_1$ Teste6.

A estimativa inicial (Fig. 7.14) constou dos seguintes valores dos parâmetros de ajuste:

$T = 0.689 \text{ m}^2/\text{min}$
$S = 0.000336$
$S_y = 0.0621$
$r/D_t = 1.0$

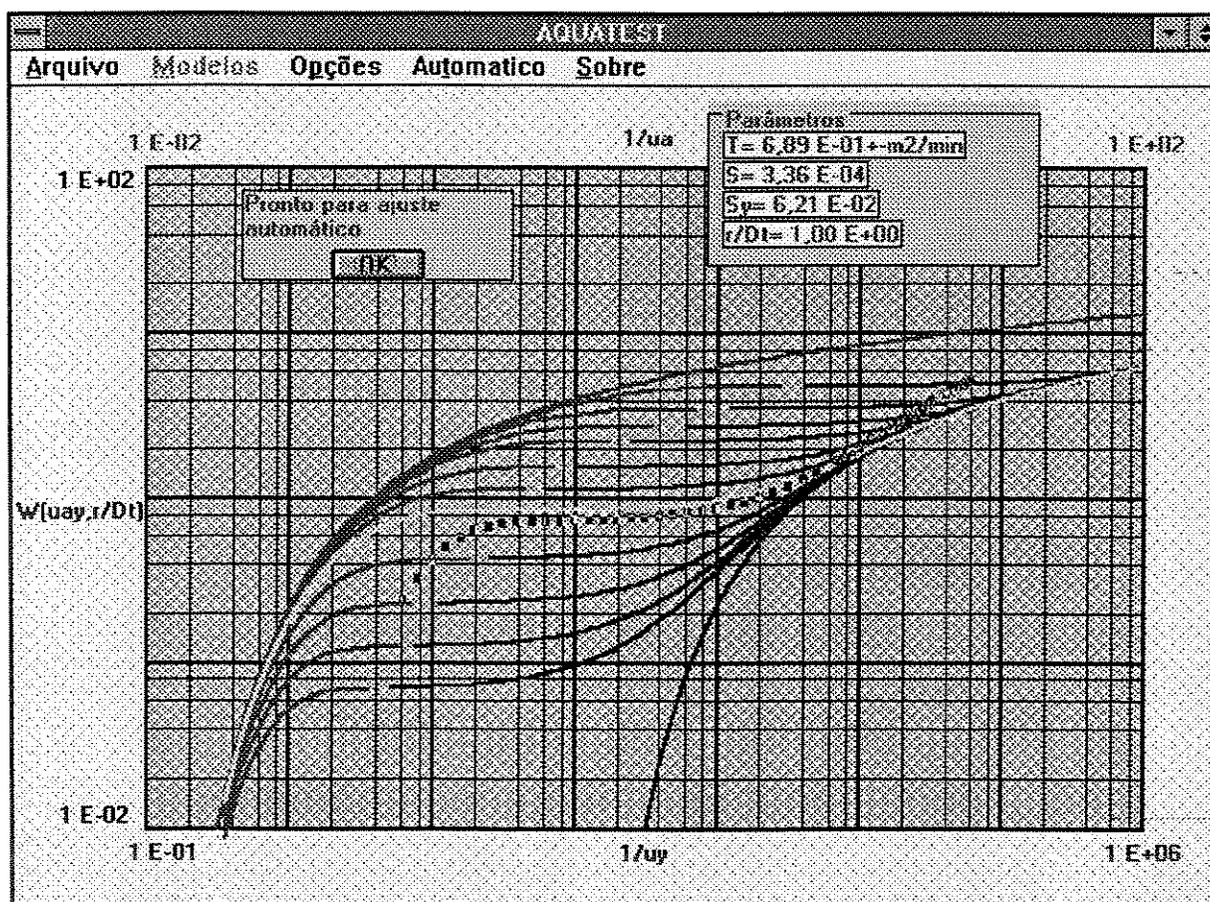


Figura 7.14 Estimativa inicial do Teste6.

O resultado obtido está na Fig. 7.15.

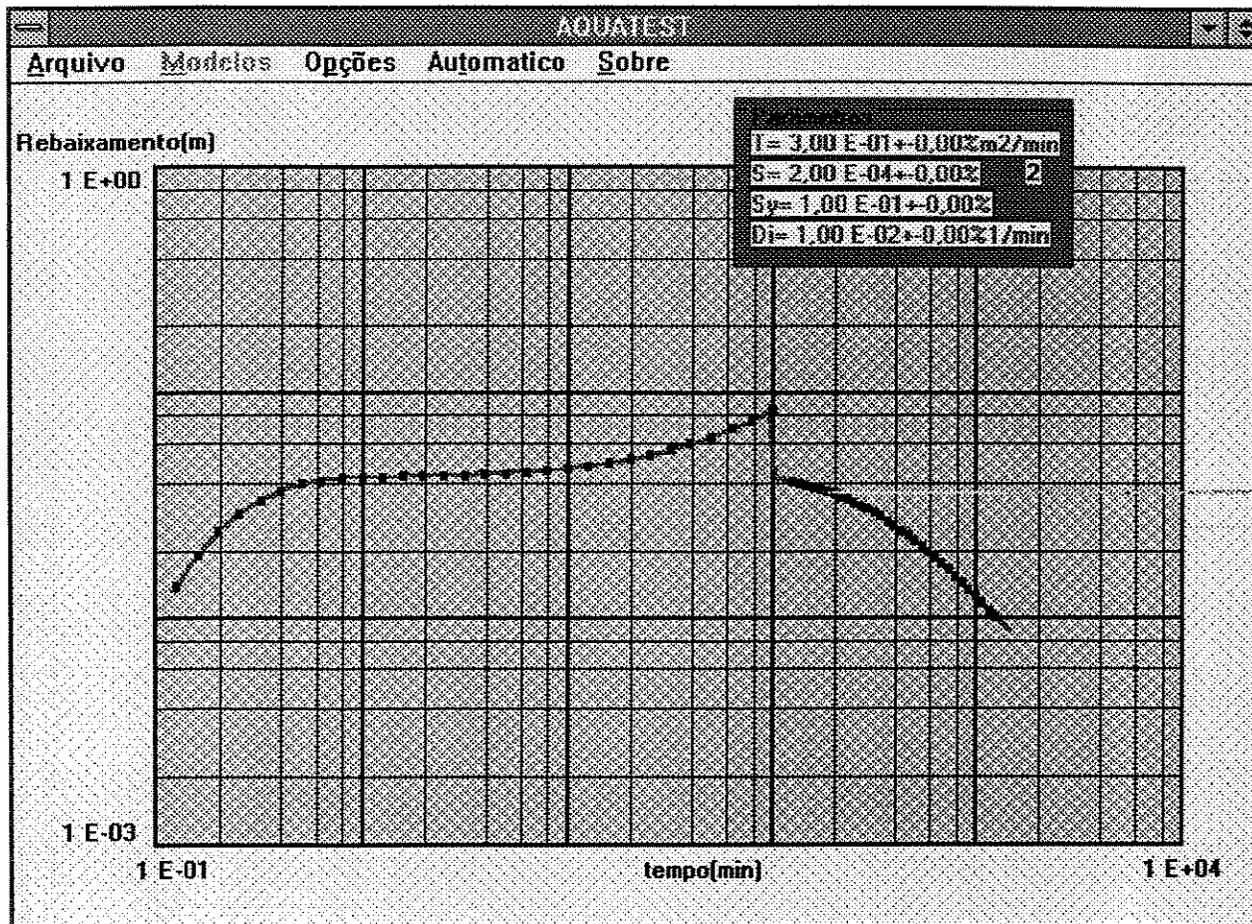


Figura 7.15 Resultado do Teste6.

7.7 Teste7 - Teste de Desempenho de Poço .

Adotaram-se os seguintes valores:

Vazão1 = $0,5 \text{ m}^3/\text{min}$
Vazão2 = $1.0 \text{ m}^3/\text{min}$
Raio do poço = 1 metro.
Tempo da mudança de vazão (t_1) = 100 min.

Os dados foram computados com os parâmetros:

$T = 0,1 \text{ m}^2/\text{min}$
$S = 0,0002$
$C = 2.0$

Neste caso o próprio programa se encarrega de gerar a estimativa inicial dos parâmetros, como está descrito no Capítulo 6.

A Fig. 7.16 mostra os dados de entrada.

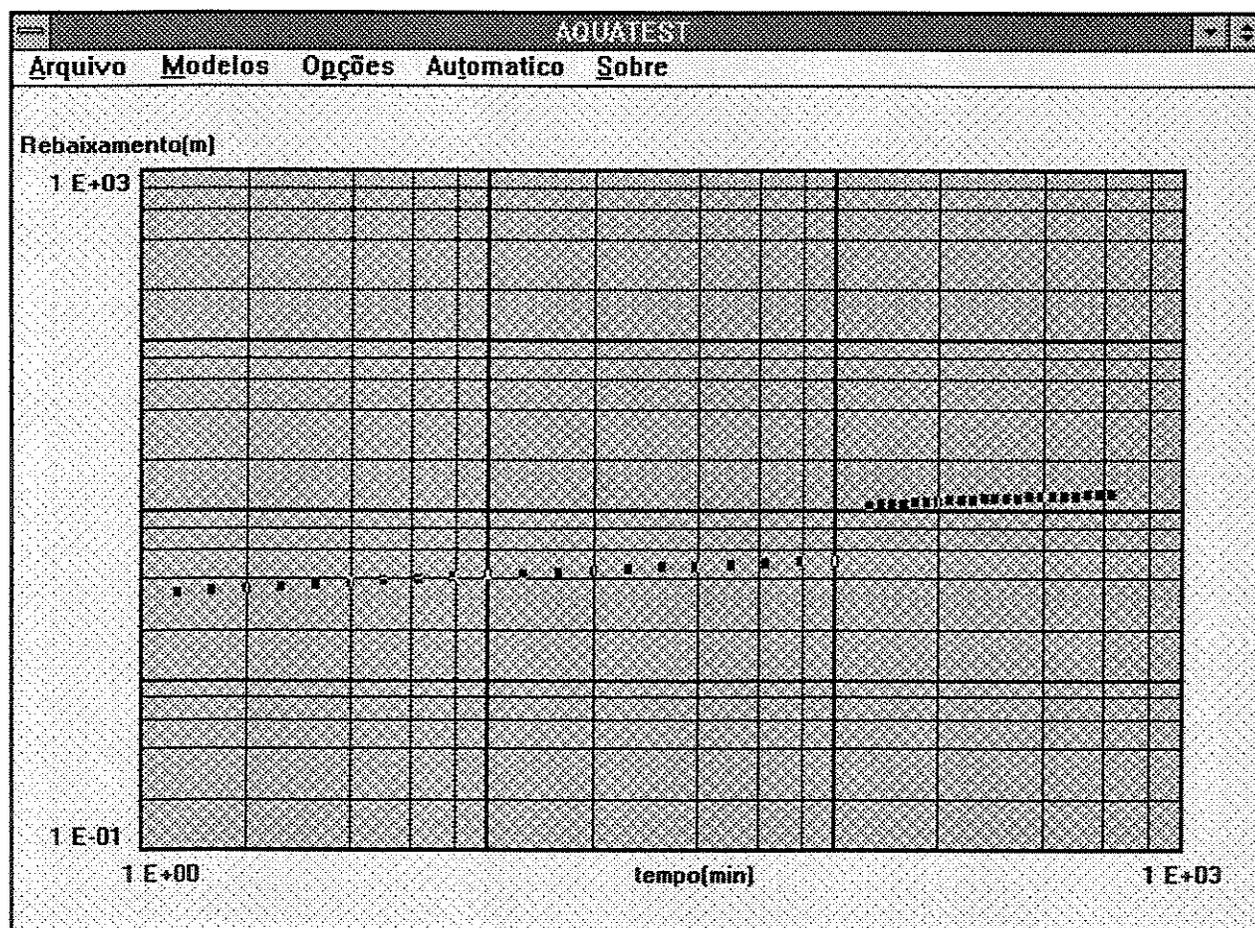


Figura 7.16 Dados do Teste7.

A Figura 7.17 mostra o resultado obtido. A curva cheia é resultante do ajuste da equação do modelo com os parâmetros encontrados na regressão.

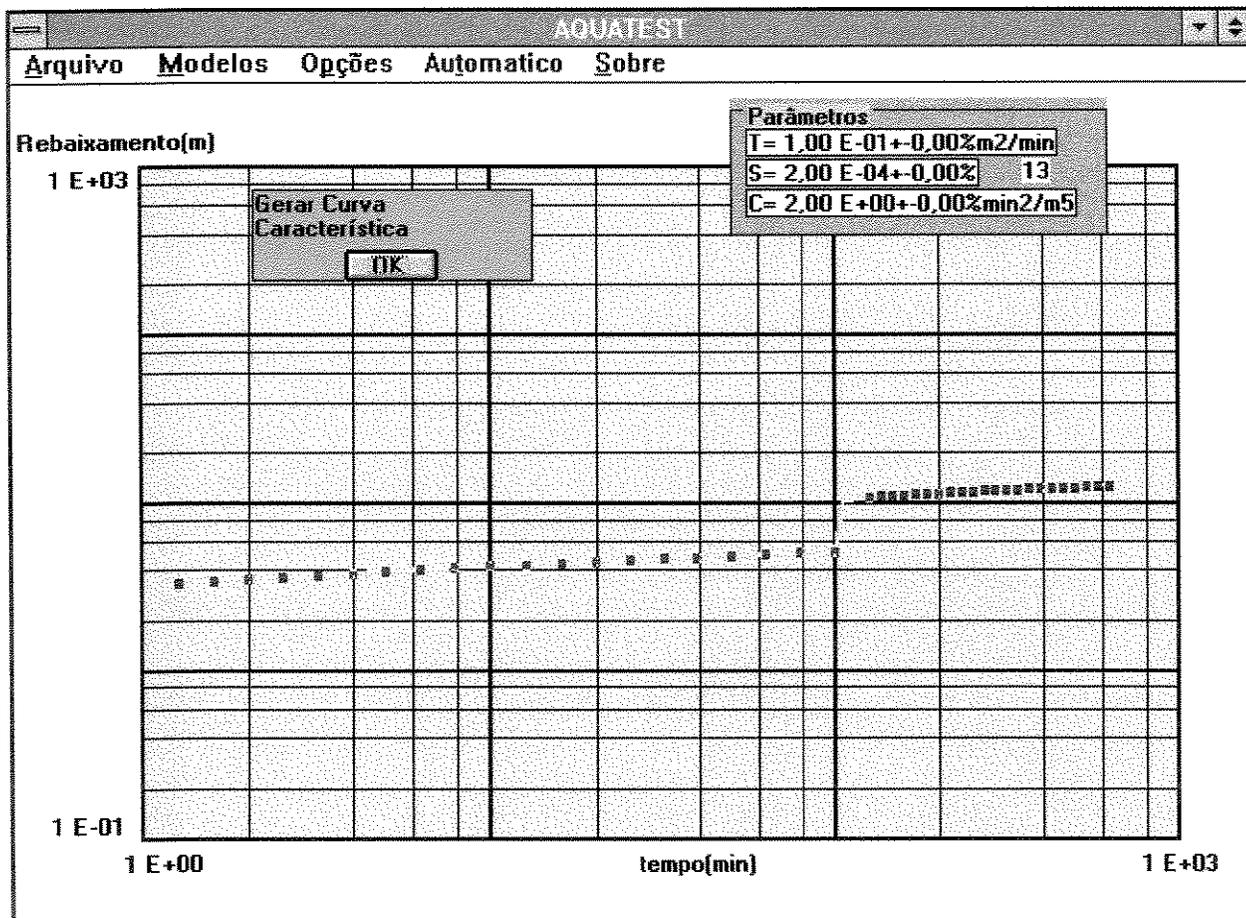


Figura 7.17 Resultado do ajuste do Teste7.

Após o ajuste, gera-se a curva característica do poço (Fig. 7.18), que é uma curva do tipo $s = s(Q)$ para um dado tempo total de bombeamento. Notar que para cada tempo total de bombeamento, há uma curva característica de bombeamento. Neste Teste7, adotou-se o tempo de bombeamento de 600 minutos.

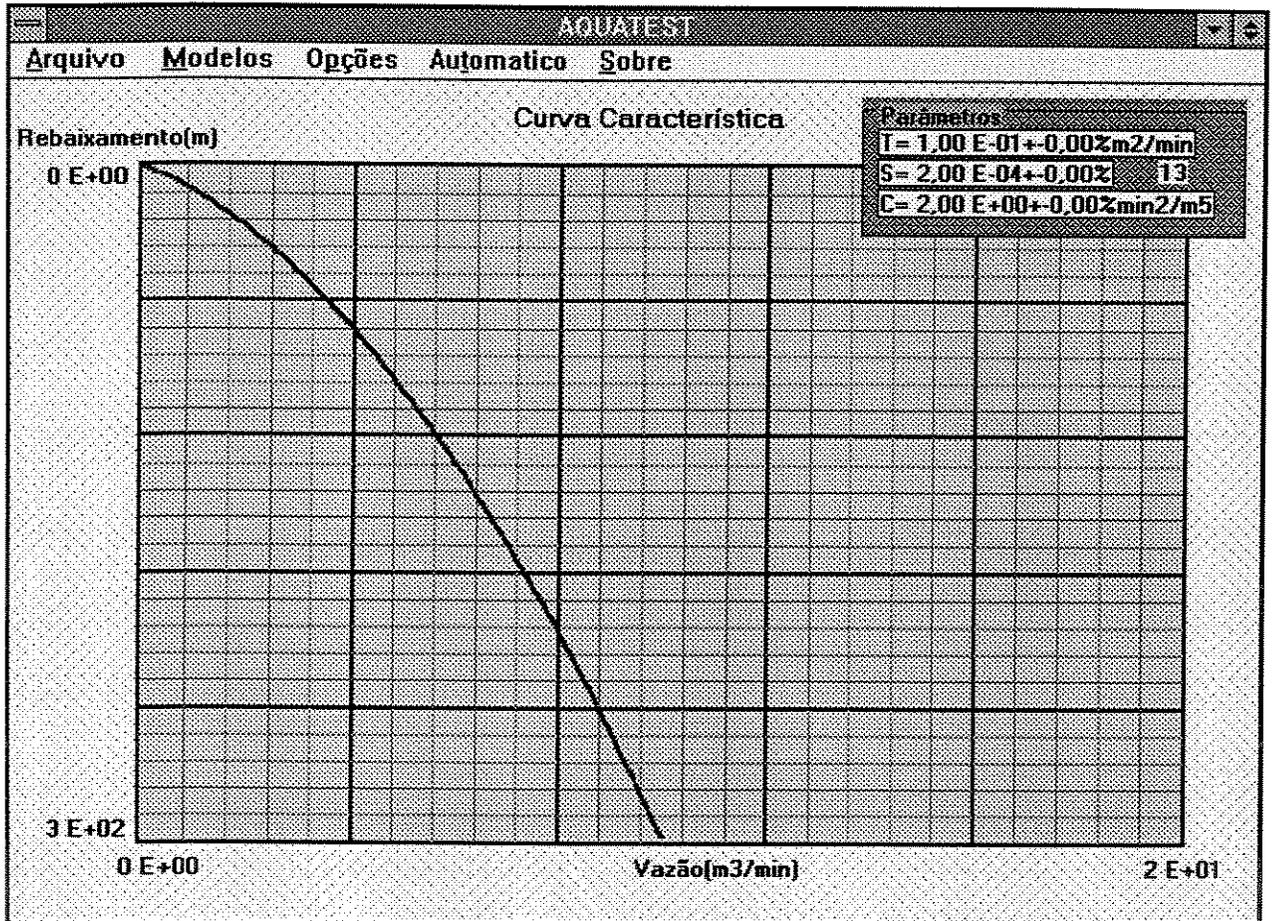


Figura 7.18 Curva Característica resultante do Teste7.

Capítulo 8 - Aplicação Para Dados de Campo.

O programa foi utilizado para se analisar dados de campo, encontrados na literatura.

Deve-se notar que, em alguns casos, o ajuste obtido pelo programa é diferente do obtido manualmente. Esta diferença deve estar, em grande parte, relacionada ao fato de que, para este tipo de problema, o método dos mínimos quadrados atribui um peso muito maior aos pontos finais do teste.

8.1 Teste Exemplo 1 - Teste de Bombeamento Com Uma Vazão - Modelo de Theis.

Foram utilizados os seguintes dados extraídos de Kruseman[17].

Vazão = 0,5472222 m ³ /min.
Raio de Observação = 30 m.

Tabela 8.1 Dados do Teste “Oude Korendijk” extraídos de Kruseman [17].

t (min)	s (m)
0,1	0,04
0,25	0,08
0,5	0,13
0,7	0,18
1	0,23
1,4	0,28
1,9	0,33
2,33	0,36
2,8	0,39
3,36	0,42
4	0,45
5,35	0,5
6,8	0,54
8,3	0,57
8,7	0,58
10	0,6
13,1	0,64

18	0,68
27	0,742
33	0,753
41	0,779
48	0,793
59	0,819
80	0,855
95	0,873
139	0,915
181	0,935
245	0,966
300	0,99
360	1,007
480	1,05
600	1,053
728	1,072
830	1,088

Inicializou-se o programa com a seguinte estimativa (Fig. 8.1):

$T = 0,0392 \text{ m}^2/\text{min.}$
$S = 0,000126$

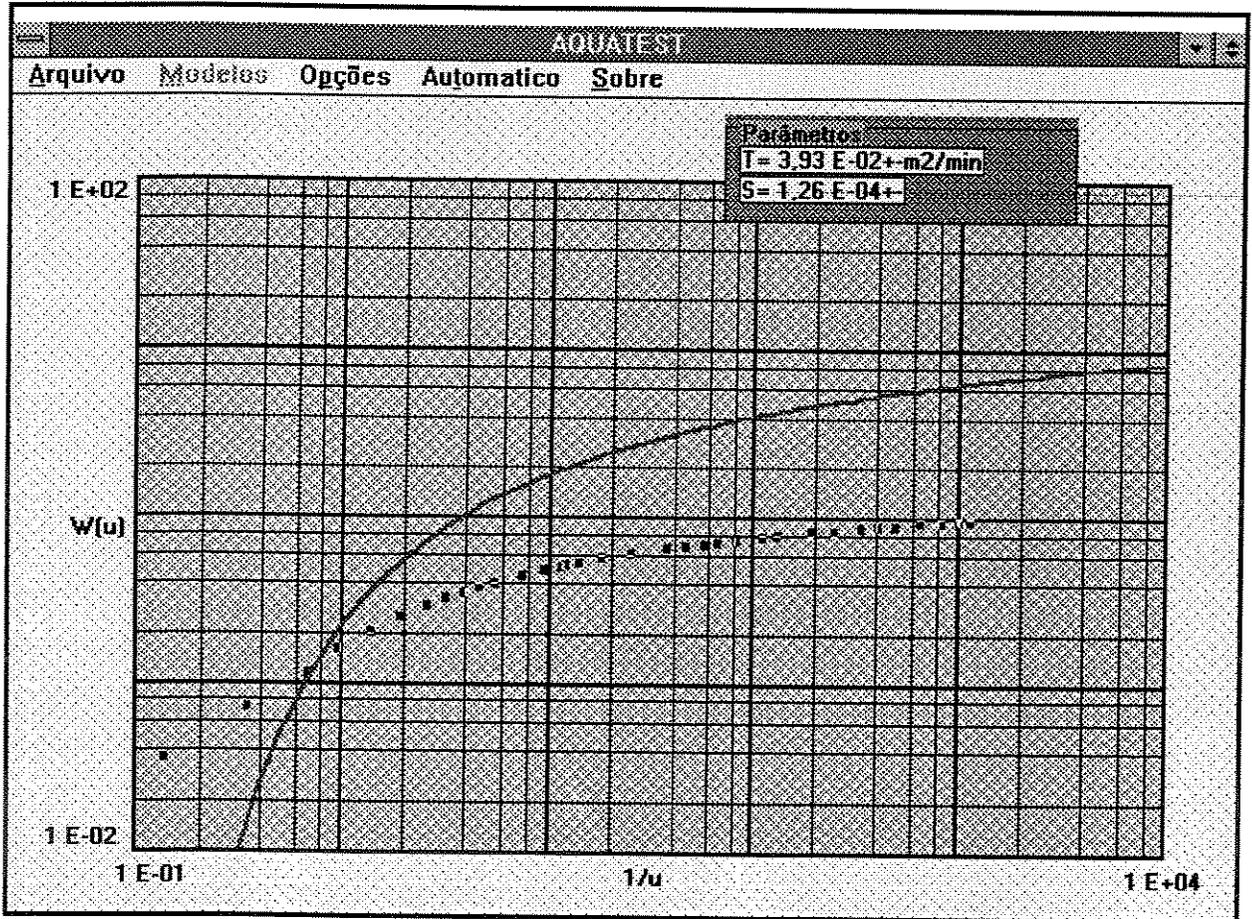


Figura 8.1 Estimativa inicial para o Teste-Exemplo 1.

Obteve-se o seguinte resultado após 7 iterações, conforme a Fig. 8.2:

$T = 0,334 \pm 4,23\% \text{ m}^2/\text{min}$
$S = 0,000112 \pm 19,92\%$

Kruseman, obteve, após um ajuste manual, os seguintes valores:

$$T = 0.272 \text{ m}^2/\text{min.}$$

$$S = 0.00016$$

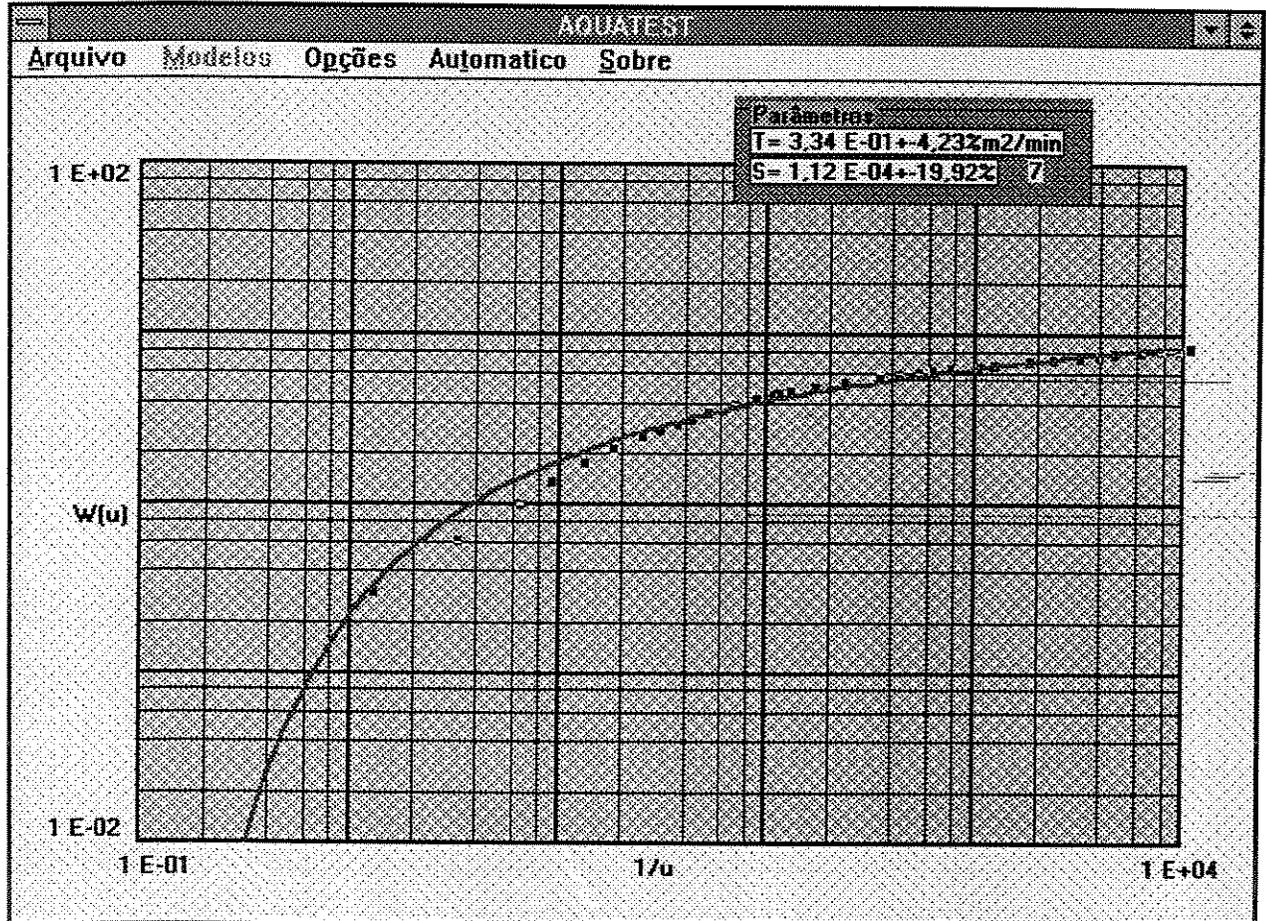


Figura 8.2 Resultados do Teste-Exemplo 1

Este é um caso em que se nota que o método priorizou os pontos finais do teste no ajuste.

8.2 Teste-Exemplo 2 - Teste de Bombeamento Com Uma Vazão - Modelo de Hantush.

Foram utilizados os seguintes dados extraídos de Kruseman[17].

$$\text{Vazão} = 0,52847 \text{ m}^3/\text{min.}$$

Raio de Observação = 30 m.

Tabela 8.2 Dados do Teste “Dalem” extraídos de Kruseman [17].

t (min)	s (m)
22,03	0,138
26,06	0,141
32,976	0,15
42,048	0,156

51,984	0,163
65,952	0,171
95,04	0,18
124,99	0,19
180	0,201

240,5	0,21
299,5	0,217
360	0,22
420,5	0,224
479,5	0,228

Inicializou-se o programa com a seguinte estimativa (Fig. 8.3):

$T = 0,944 \text{ m}^2/\text{min}.$
$S = 0,00324.$
$r/B = 0,1.$

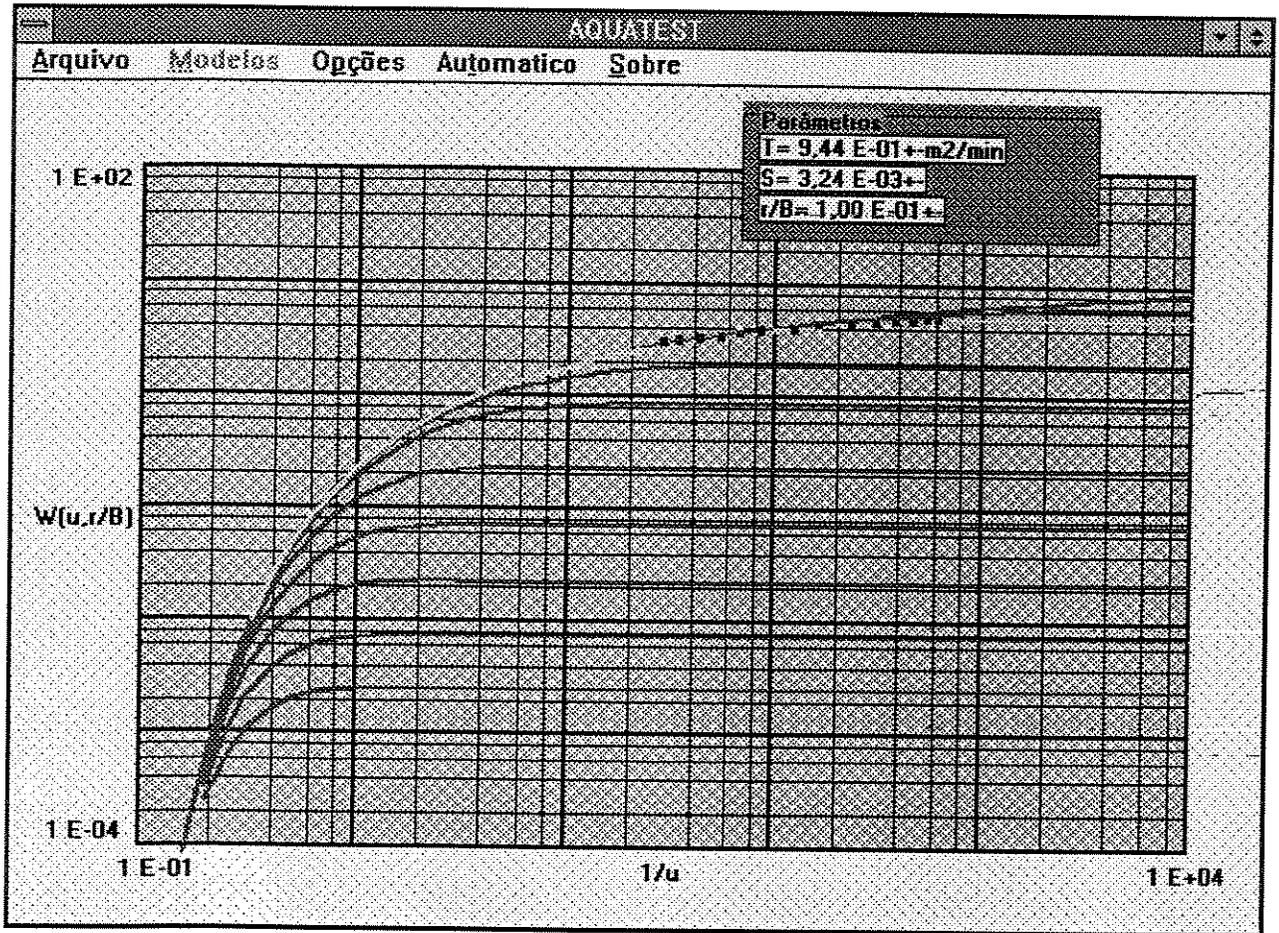


Figura 8.3 Estimativa inicial para o Teste-Exemplo 2.

Obteve-se o seguinte resultado após 7 iterações:

$T = 1,34 \pm 5,62\% \text{ m}^2/\text{min}$
$S = 0,000946 \pm 21,71\%$
$r/B = 0,0155 \pm 64,82\%$

Kruseman, obteve, após um ajuste manual, os seguintes valores:

$T = 1.202 \text{ m}^2/\text{min.}$
$S = 0.0019$
$r/B = 0.1$

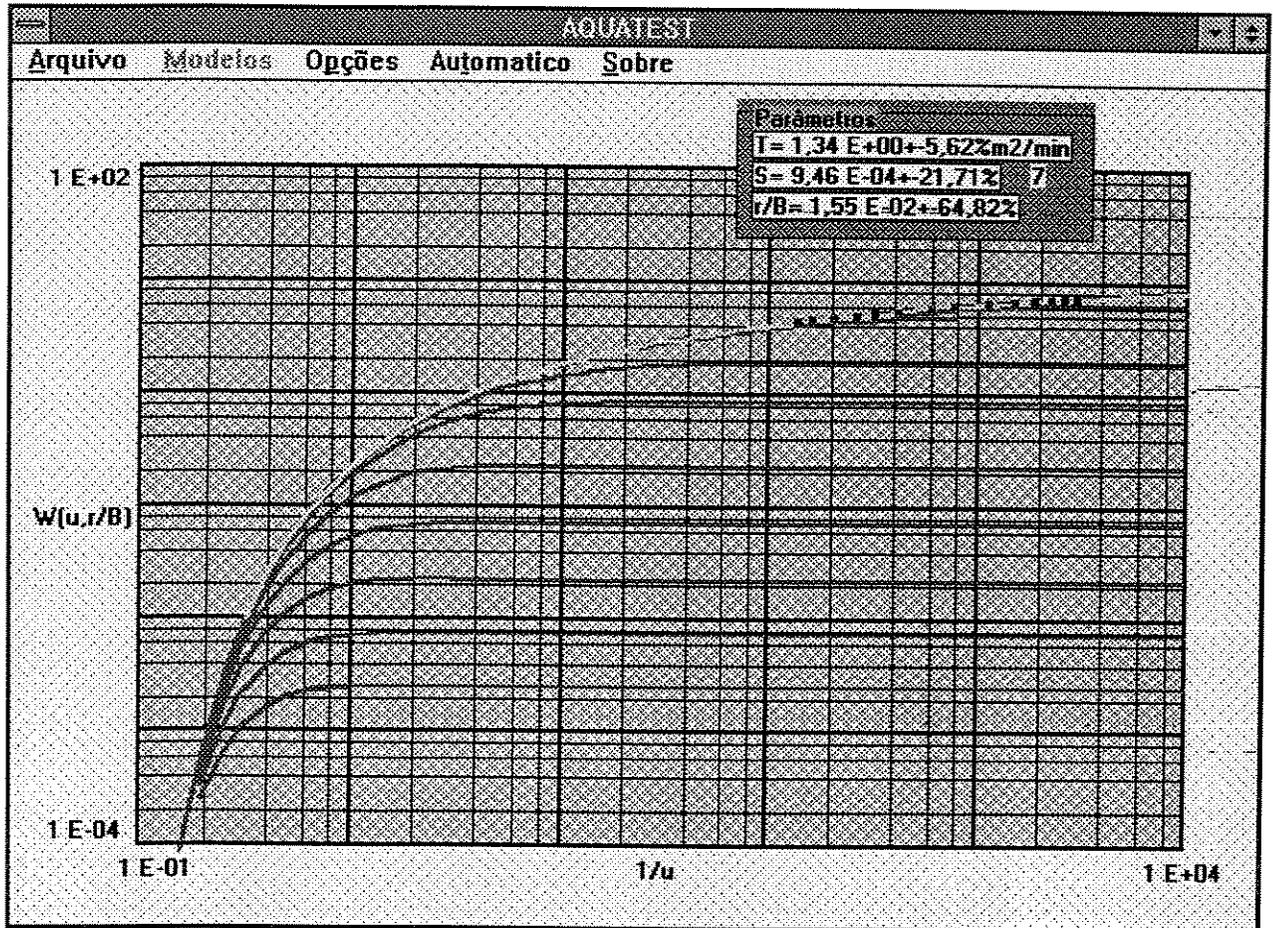


Figura 8.4 Resultados do Teste-Exemplo 2.

8.3 Teste Exemplo 3 - Teste de Bombeamento Com Uma Vazão - Modelo de Boulton.

Foram utilizados os seguintes dados extraídos de Kruseman[17].

Vazão = 0.606 m ³ /min.
Raio de Observação = 90 m.

Tabela 8.3 Dados do Teste “Vennebulten” extraídos de Kruseman [17].

tempo (min)	rebaixamento (m)
1.17	0.004
1.34	0.009
1.7	0.015
2.5	0.03
4	0.047

5	0.054
6	0.061
7.5	0.068
9	0.064
14	0.09
18	0.098

21	0.103
26	0.11
31	0.115
41	0.128
51	0.133
65	0.141
85	0.146
115	0.161
175	0.161

260	0.172
300	0.173
370	0.173
430	0.179
485	0.183
665	0.182
1340	0.2
1490	0.203
1520	0.204

Inicializou-se o programa com a seguinte estimativa (Fig. 8.5):

$T = 0,836 \text{ m}^2/\text{min}.$
$S = 0,000584.$
$S_y = 0,0107$
$r/D_t = 0.3.$

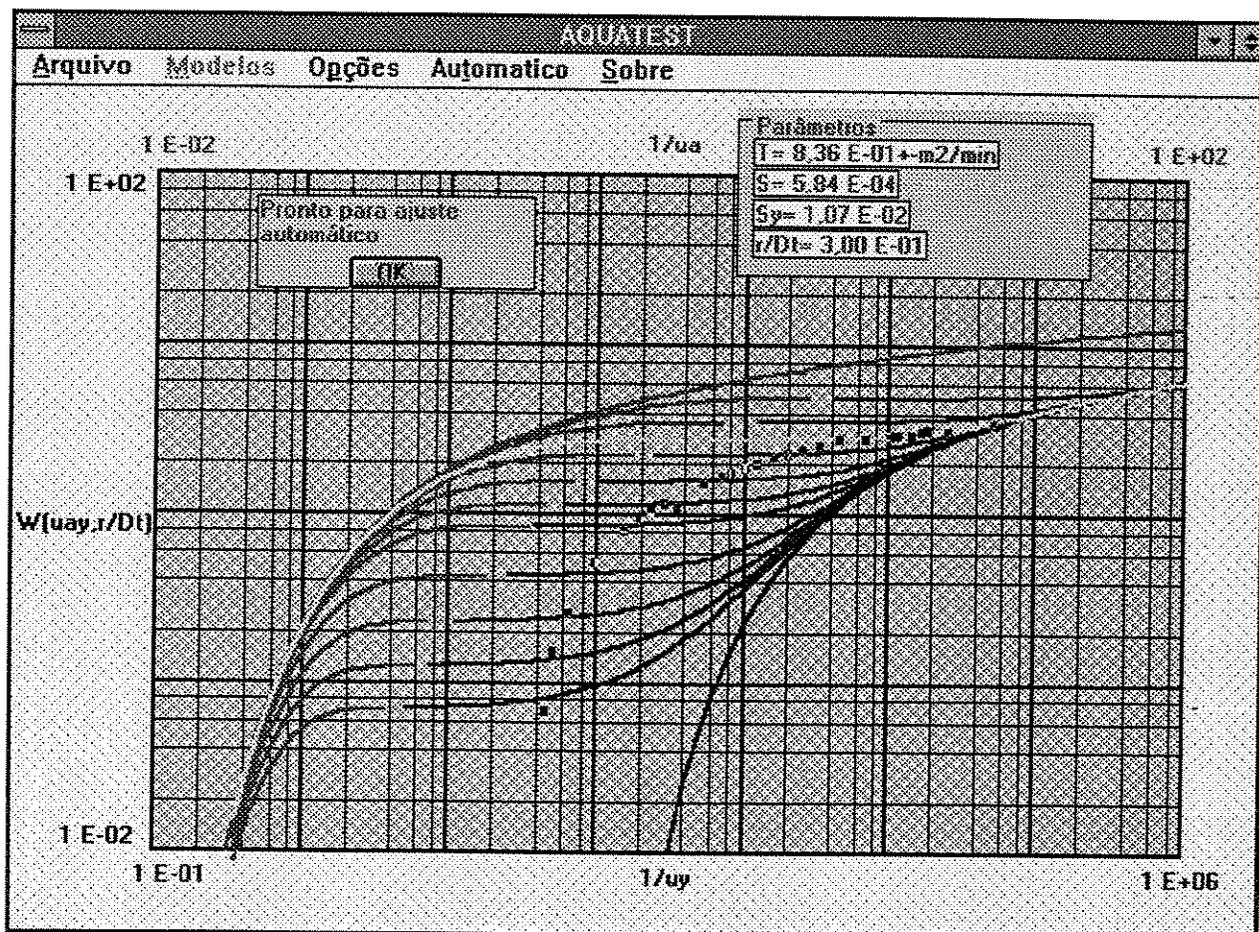


Figura 8.5 Estimativa inicial para o Teste-Exemplo 3.

Obteve-se o seguinte resultado após 5 iterações (Fig. 8.6):

$T = 1,08 \pm 8,43\% \text{ m}^2/\text{min}$
$S = 0,000588 \pm 9,01\%$
$S_y = 0,00514 \pm 36,47\%$
$Di = 0.000762 \pm 26,9\% \text{ min}^{-1}$

A Fig. 8.6 mostra a função ajustada aos pontos do teste. É interessante notar que também neste caso os pontos iniciais não se ajustaram tão bem quanto os finais.

Neste caso Kruseman analisou os dados através de outro método, porém, para ilustrar o exemplo, pode-se citar os seguintes resultados:

$T = 1.063 \text{ m}^2/\text{min}.$
$S = 0.00052$
$S_y = 0.0049$

Como as análises foram realizadas através de diferentes métodos, não é possível se comparar o parâmetro D_i .

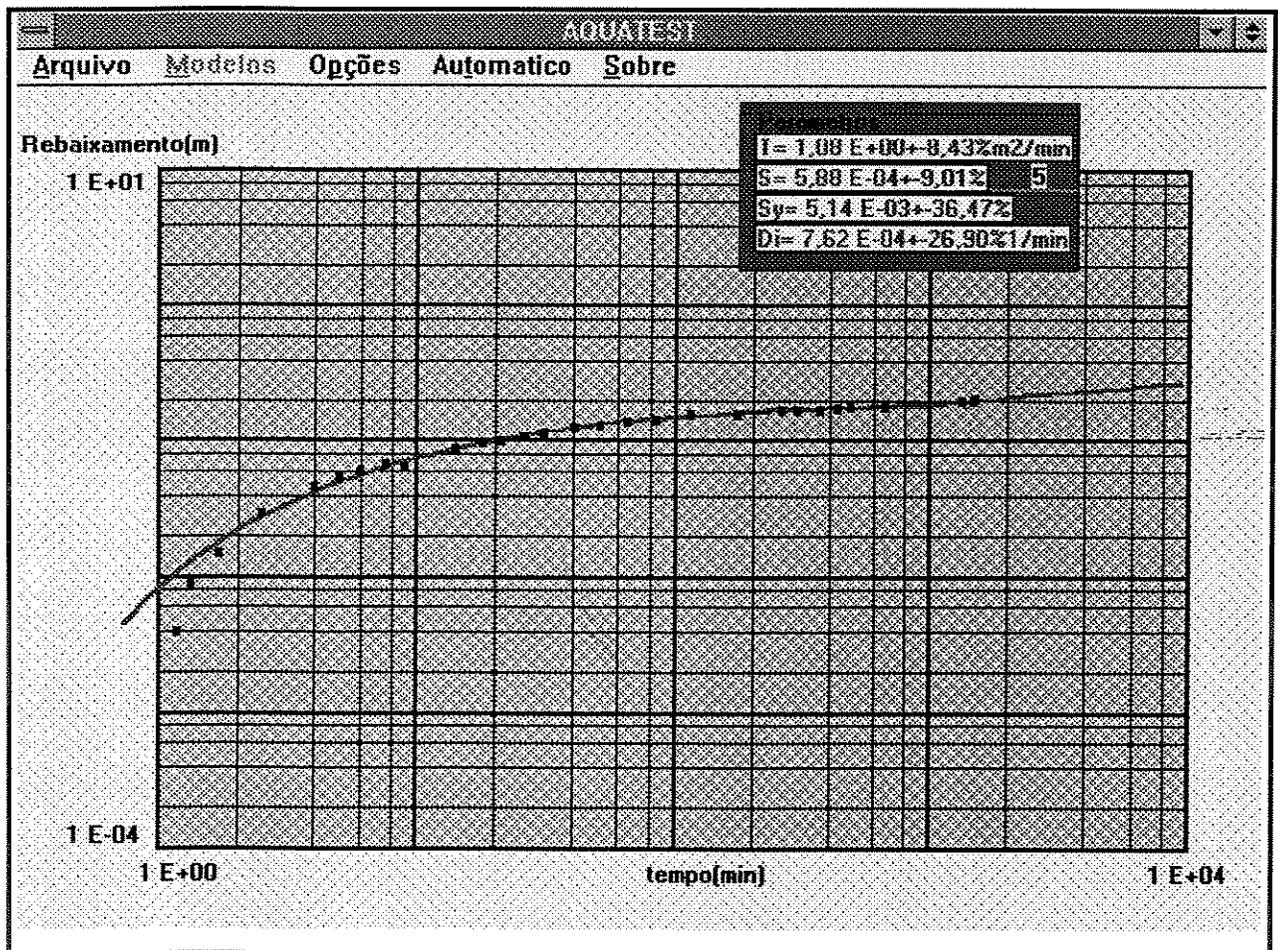


Figura 8.6 Resultados do Teste-Exemplo 3.

8.4 Teste-Exemplo 4 - Teste de Desempenho de Poço.

Foram utilizados os seguintes dados extraídos de Raghunath[24] (p. 230).

Vazão1 = 0.45 m ³ /min.
Vazão2 = 1.26 m ³ /min.
Raio do Poço = 0.15 m.
Tempo da mudança de vazão (t ₁) = 65 min.

Tabela 8.4 Teste de produção com vazões variáveis. Extraído de Raghunath[24].

tempo (min)	rebaixamento (m)
2	0.22
5	0.23
10	0.24
15	0.245
20	0.255
25	0.26
30	0.26
40	0.265
50	0.265

65	0.265
67	1.11
70	1.17
75	1.2
80	1.22
85	1.235
90	1.24
95	1.245
105	1.26
115	1.275
125	1.29

A Figura 8.7 mostra os dados utilizados no Teste-Exemplo 4:

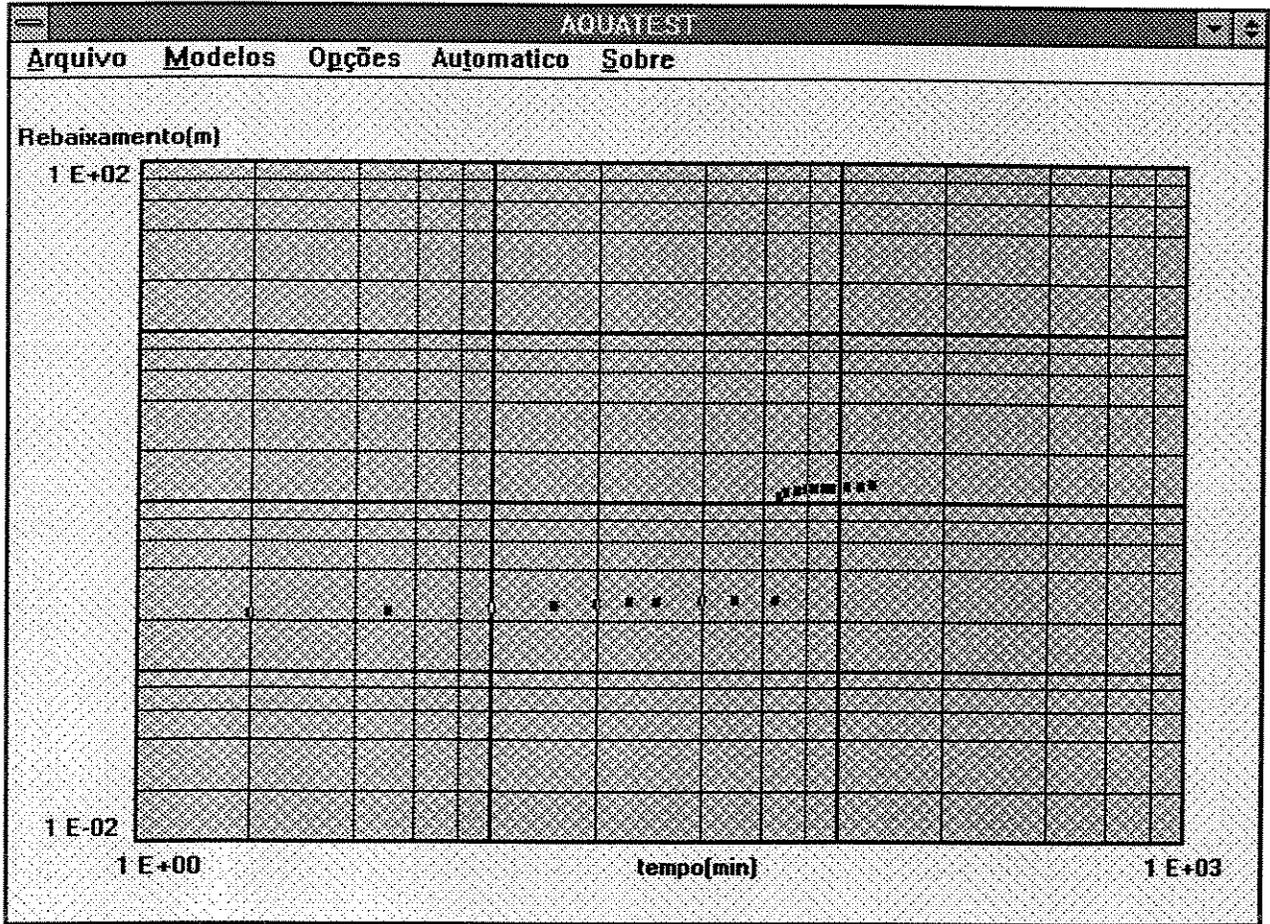


Figura 8.7 Dados do Teste-Exemplo 4 .

A Figura 8.8 mostra o ajuste do Teste-Exemplo 4. A curva cheia é o gráfico da função do teste utilizando os parâmetros obtidos na regressão.

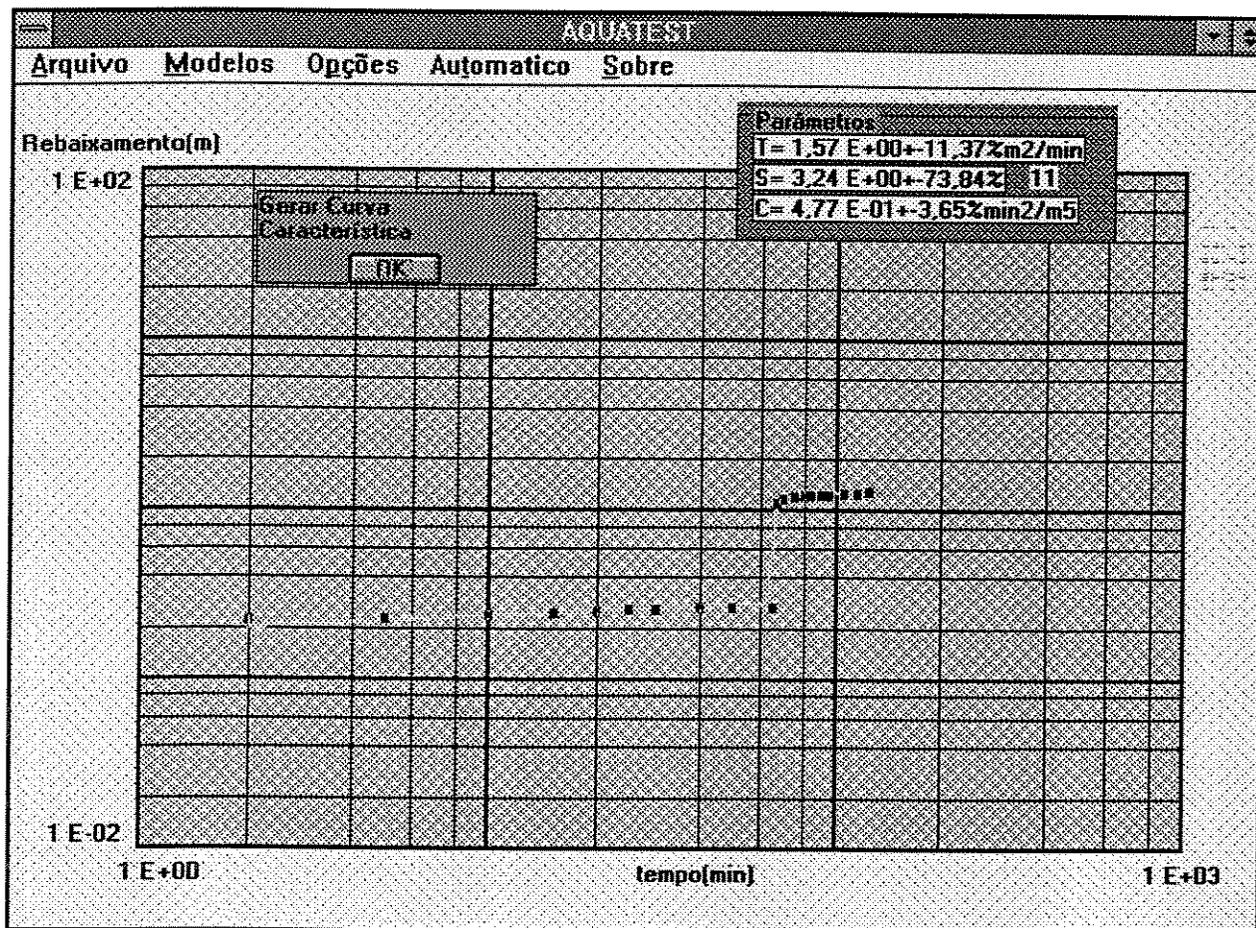


Figura 8.8 Resultados do Teste-Exemplo 4.

Obteve-se os seguintes resultados:

$T = 1,57 \pm 11,37\% \text{ m}^2/\text{min}.$
$S = 3,24 \pm 73,84\%.$
$C = 0,477 \pm 3,65\% \text{ min}^2/\text{m}^5.$

Apesar de utilizar um método diferente de análise, Raghunath também calcula um fator de perda de carga não linear.

No caso dos dados acima utilizados, Raghunath obteve o seguinte valor:

$$C = 0.531 \text{ min}^2/\text{m}^5 .$$

A curva característica resultante pode ser observada na Figura 8.9.

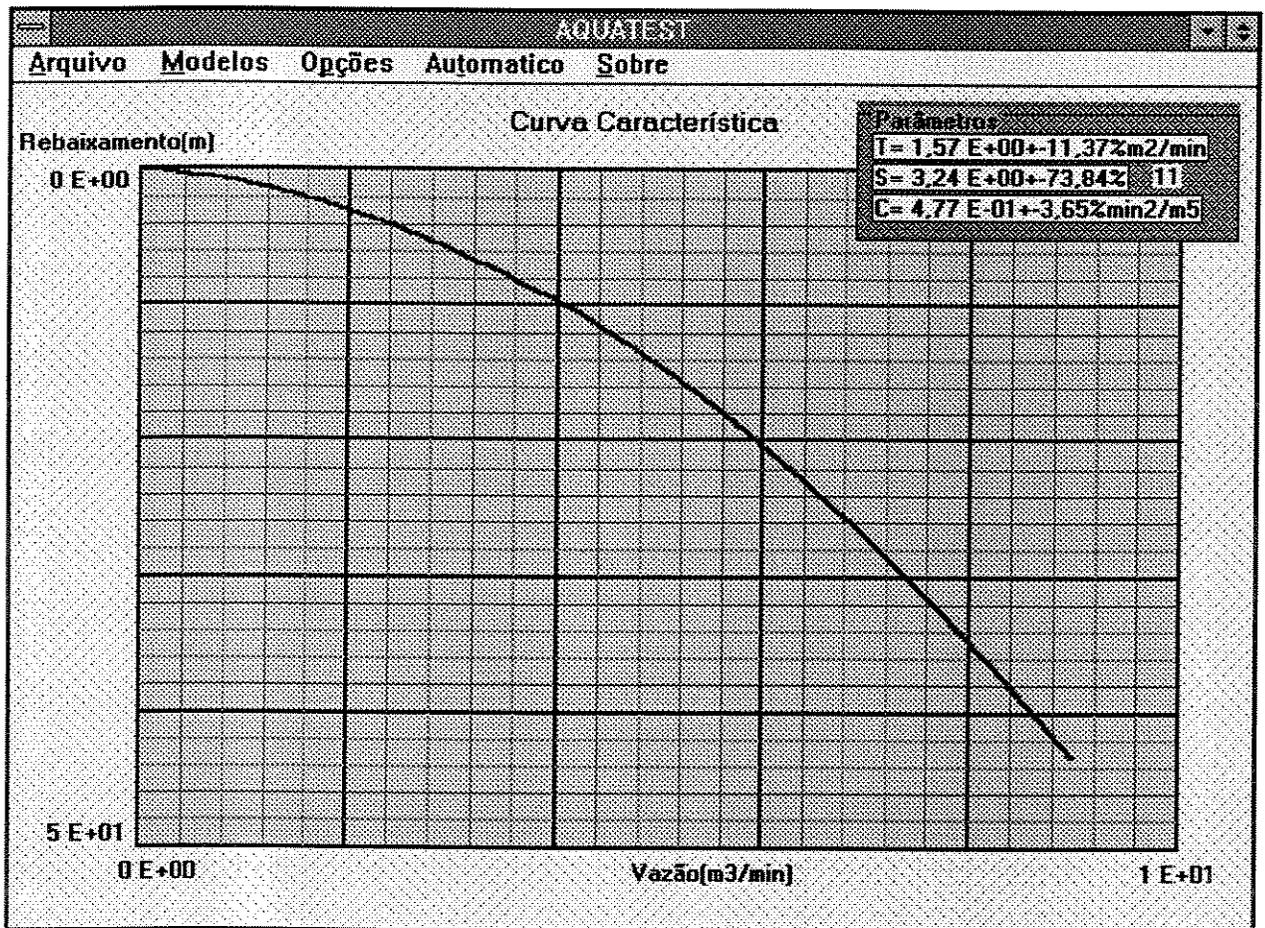


Figura 8.9 Curva Característica do Poço do Teste-Exemplo 4.

Capítulo 9 Conclusões e Recomendações.

O procedimento de análise de dados de testes de bombeamento em poços d'água pode ser facilmente automatizada utilizando-se os métodos descritos neste trabalho.

É possível a geração automatizada da curva característica de um poço a partir de dados de um teste com duas vazões.

Os procedimentos utilizados para a geração dos valores iniciais dos parâmetros, nos testes de recuperação e desempenho de poço são eficientes. Não ocorreram problemas de divergência nos casos testados.

Neste tipo de trabalho, ao se utilizar o princípio dos mínimos quadrados, os pontos finais do teste tornam-se mais importantes que os iniciais no cálculo da função objetivo, justificando, inclusive, a grande variação entre os resultados obtidos em um ajuste manual e os obtidos pelo programa. É recomendável que se considere este efeito nos próximos trabalhos e que se tente minimizá-lo.

No modelo de Hantush, como após um certo tempo o fluxo atinge o regime permanente, os pontos iniciais do teste são os mais importantes no ajuste. Este modelo é o que mais apresentou problemas de convergência, provavelmente devido ao efeito anteriormente citado e só atinge o valor ótimo partindo-se de uma boa estimativa inicial. Portanto, uma outra vantagem de um programa com interface gráfica é que, com a possibilidade de se obter uma boa estimativa inicial dos parâmetros, através de um ajuste manual preliminar, os problemas de convergência da regressão são minimizados.

A visualização gráfica dos pontos do teste e da curva ajustada adiciona informações qualitativas ao analista, possibilitando que se relacione o formato da curva de dados a um tipo de aquífero, bem como a adequação do modelo escolhido aos dados.

As próximas etapas de desenvolvimento deste trabalho consistem em desenvolver e incluir outros modelos de aquíferos, como por exemplo o modelo de Neuman[21], e também os efeitos de estocagem e perda de carga localizada ("skin").

Nomenclatura

Símbolos Alfabéticos:

B = Fator de Drenagem.

C = Coeficiente de perda de carga não linear.

D = Espessura do aquífero

c = resistência hidráulica do aquitard.

D_1 = Inverso do Índice de Retardo de Boulton.

E = Função objetivo para a norma L2.

E_a = Aproximação da função objetivo.

F = Função representativa de um modelo de aquífero.

g = Aceleração da gravidade.

h = Carga hidráulica.

h_0 = Carga hidráulica inicial.

k = Permeabilidade intrínseca de um meio poroso.

K = Condutividade hidráulica.

K_0 = Função de Bessel modificada de segunda espécie e ordem zero.

K_1 = Função de Bessel modificada de segunda espécie e ordem um.

L^{-1} = Transformada inversa de uma função no espaço de Laplace.

p = Pressão.

Q = Vazão.

r = Raio.

s = Rebaixamento.

S = Coeficiente de armazenamento.

S_s = Armazenamento específico.

S_y = Produção específica.

T = Transmissividade ou Transmissibilidade.

V = Volume

x = Variável genérica independente.

w = Parâmetro de Laplace

y = Variável genérica dependente.

Símbolos Gregos:

$\vec{\alpha}$ = Vetor de parâmetros para ajuste.

ϕ = Porosidade.

γ = Peso específico.

μ = Viscosidade.

ρ = Massa específica.

σ = Tensão

Subscritos

$()_v$ = Vazios

$()_t = \text{Total}$

$()_e = \text{Específico}$

$()_w = \text{Poço}$

$()_a = \text{Água}$

$()_{mp} = \text{Relativo ao meio poroso}$

Sobrescritos

$()^T = \text{Transposta}$

$()^* = \text{Relativo ao aquífero}$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ABRAMOWITZ, M. e STEGUN, I. A.: Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications, Inc. New York, 1046p., 1964.
2. BARUA, J., HORNE, R. N., GREENSTADT, J. L., e LOPEZ, L.: "Improved Estimation Algorithms for Automated Type-Curve Analysis of Well Tests", SPE paper 14225, Annual Technical Conference of the Society of Petroleum Engineers of AIME, Las Vegas, Nevada, 1985.
3. BOULTON, N. S.: "The Drawdown of the Watertable Under Non-Steady Conditions Near a Pumped Well in an Inconfined Formation", Proc. Inst. Civil Engrs., v.3, p.564-579, 1954.
4. BOULTON, N. S.: "Analysis of Data from Non-Equilibrium Pumping Tests Allowing for Delayed Yield from Storage", Proc. Inst. Civil Engrs., v.26, p.469-482, 1963.
5. BOURGEOIS, M. J. e HORNE, R. N.: "Well Test Model Recognition Using Laplace Space", SPE paper 22682, 66th Annual Technical conference of the Society of Petroleum Engineers of AIME, Dallas, Texas, 1991.
6. CISNEIROS, F. A. A.: "Análise de Testes em Ambiente Windows", Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP, 1992.
7. COOPER, H. H. e JACOB, C. E.: "A Generalized Graphical Method for Evaluating Formation Constants and a Summarizing Well-Field History", Transactions of the American Geophysical Union, v.27, n.4, 1946.
8. CUNHA, C.: Métodos Numéricos para as Engenharias e Ciências Aplicadas, Editora da Unicamp, 265p., 1993.
9. DOGRU, A. N., DIXON, T. N. e EDGAR, T. F.: "Confidence Limits On The Parameters And Predictions Of Slightly Compressible, Single-Phase Reservoirs", Soc. Pet. Eng. J. p. 42-56. (February, 1977)

10. FREEZE, R. A. e CHERRY, J. A.: Groundwater, Prentice Hall, Inc. New Jersey. 604 p. 1979.
11. GREENSTADT, J. L.: "On the Relative Efficiencies of Gradient Method. Mathematics of Computation", 21, p. 360-367, 1967.
12. HANTUSH, M. S.: "Analysis of Data from Pumping Tests in Leaky Aquifers", Trans. Amer. Geophys. Union, v.37, p.702-714, 1956.
13. HANTUSH, M. S., JACOB, C.E.: "Non-Steady Radial Flow in an Infinite Leaky Aquifer", Trans. Amer. Geophys. Union, v.36, p. 95-100, 1955
14. JACOB, C.E.: "On the Flow of Water in an Elastic Artesian Aquifer", Trans. Amer. Geophys. Union, v.21, p.574-586, 1940.
15. KASENOW, M. C. e PARE, P.: Determination of Aquifer Parameters Using Array and Regression Analysis, Water Resources Publications, 57p., 1994.
16. KASENOW, M. C. e PARE, P.: Leaky Confined Aquifers and the Hantush Inflection Point, Water Resources Publications, 54p. 1994.
17. KRUSEMAN, G. F. e de RIDDER, N. A.: Analysis and Evaluation of Pumping Test Data, International Institute for Land Reclamation and Improvement, Water Resources Publications, 345p., 1994.
18. LEVENBERG, K. A.: "Method for the Solution of Certain Problems in Least-Squares", Quart. Appl. Math., n. 2, p. 164-168, 1944.
19. MARQUARDT, D. W.: "An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters", J. Soc. Indust. Appl. Math. v.11, n. 2, p. 431-441, jun. 1963.
20. NANBA, T. e HORNE, R. N.: "An Improved Regression Algorithm for Automated Well Test Analysis", SPE paper 18161, 63rd Annual Technical Conference of the Society of Petroleum Engineers of AIME, Houston, Texas, 1988.

21. NEUMAN, S. P.: "Theory of Flow in Unconfined Aquifers Considering Delayed Response of the Watertable", *Water Resources Research*, v.8, p.1031-1045, 1972.
22. NEUMAN, S. P.: "Analysis of Pumping Test Data from Anisotropic Unconfined Aquifers Considering Delayed Gravity Response", *Water Resources Research*, v.11, p. 329-342.
23. ORELLANA, E. N. e CORRÊA, A. C. F.: "Automation of Pressure Transient Test in Laboratory Using Deconvolution", SPE paper 23702, 2nd Latin American Petroleum Engineering Conference, Caracas, Venezuela, 1992.
24. RAGHUNATH, H. M.: Ground Water, Wiley Eastern Limited, New Delhi, India, 562p., 1987.
25. RAUDKIVI, A. J. e CALLANDER, R. A.: Analysis of Groundwater Flow, Edward Arnold Ltd, London, 1976.
26. RIBEIRO, A.L e CORRÊA, A. C. F.: Dissertação de Mestrado em Desenvolvimento. UNICAMP, 1994.
27. ROSA, A. J. e HORNE, R. N.: "Automated Type-Curve Matching in Well Test Analysis Using Laplace Space Determination of Parameter Gradients", SPE paper 12131, 58th Annual Technical Conference of the Society of Petroleum Engineers of AIME, San Francisco, California, 1983.
28. STEHFEST, H.: "Numerical Inversion of Laplace Transforms", *Communications of the ACM*, 13, n. 1, algorithm 368, 1970.
29. SUZUKI, K. e NANBA, T.: "Horizontal Well Test Analysis System", SPE paper 20613, 65th Annual Technical Conference of the Society of Petroleum Engineers of AIME, New Orleans, LA, 1990.
30. THEIS, C. V.: "The Relation Between the Lowering of the Piezometric Surface and the Rate and Duration of Discharge of a Well Using Groundwater Storage", *Trans. Amer. Geophys. Union*, v.16, p.519-524, 1935.

31. VAN EVERDINGEN, A. F. e HURST, W.: "The Application of the Laplace Transformation to Flow Problems in Reservoirs", Trans. AIME, 186, p.305-324, 1949.
32. VIEIRA, P. M. F. e ROSA, A. J.: "A Comparison of Several Methods for Automated Well Test Analysis", SPE paper 26428, 68th Annual Technical Conference of the Society of Petroleum Engineers of AIME, Houston, Texas, 1993.
33. WALTON, W.C.: "Selected Analytical Methods for Well and Aquifer Evaluation", Illinois State Water Survey Bull. n.49, 1962. 81 p.
34. WALTON, W. C.: Groundwater Resource Evaluation, McGraw-Hill Book Company, 664 p. 1970.

Apêndice 1 Derivadas em relação aos parâmetros. Modelo de Theis.

A solução do modelo de Theis é:

$$h_0 - h(r, t) = s(r, t) = \frac{Q}{2\pi T} L^{-1} \left\{ \frac{K_0 \left(r \sqrt{\frac{S}{T} w} \right)}{w} \right\} \quad (4.09)$$

Derivando em relação a T:

$$\frac{\partial s}{\partial T} = \frac{-Q}{2\pi T^2} L^{-1} \left\{ \frac{K_0 \left(\sqrt{\left(\frac{S}{T} r^2 w \right)} \right)}{w} \right\} + \frac{Q}{2\pi T} L^{-1} \left\{ \frac{-K_1 \left(\sqrt{\left(\frac{S}{T} r^2 w \right)} \right)}{w} \frac{1(-1Sr^2w)}{2T^2 \sqrt{\left(\frac{S}{T} r^2 w \right)}} \right\} \quad (A1.1)$$

rearranjando:

$$\frac{\partial s}{\partial T} = \frac{Q}{2\pi T^2} L^{-1} \left\{ \frac{-K_0 \left(\sqrt{\left(\frac{S}{T} r^2 w \right)} \right)}{w} \right\} + \frac{Q}{2\pi T^2} L^{-1} \left\{ \frac{1}{2w} K_1 \left(\sqrt{\left(\frac{S}{T} r^2 w \right)} \right) \sqrt{\left(\frac{S}{T} r^2 w \right)} \right\} \quad (A1.2)$$

Ou ainda, fazendo $\beta = \sqrt{\frac{S}{T} r^2 w}$ vem:

$$\frac{\partial s}{\partial T} = \frac{Q}{2\pi T^2} L^{-1} \left\{ \frac{-K_0(\beta)}{w} + \frac{K_1(\beta)}{2w} \beta \right\} \quad (A1.3)$$

Derivando em relação a S:

$$\frac{\partial s}{\partial S} = \frac{Q}{2\pi T} L^{-1} \left\{ \frac{-K_1 \left(\sqrt{\left(\frac{S}{T} r^2 w \right)} \right) \left(\frac{r^2 w}{T} \right)}{w \cdot 2 \sqrt{\left(\frac{S}{T} r^2 w \right)}} \right\} \quad (A1.4)$$

rearrumando:

$$\frac{\partial s}{\partial S} = \frac{Q}{2\pi T^2} L^{-1} \left\{ \frac{-K_1 \left(\sqrt{\left(\frac{S}{T} r^2 w \right)} \right)}{2 \sqrt{\left(\frac{S}{T} r^2 w \right)}} r^2 \right\} \quad (A1.5)$$

ou

$$\frac{\partial s}{\partial S} = \frac{Q}{2\pi T^2} L^{-1} \left\{ \frac{-K_1(\beta)}{2\beta} r^2 \right\} \quad (A1.6)$$

Apêndice 2 Derivadas em relação aos parâmetros. Modelo de Hantush.

A solução do modelo de Hantush é:

$$s(r, t) = \frac{Q}{2\pi T} L^{-1} \left\{ \frac{K_0 \left(\sqrt{\frac{S}{T} r^2 w + \frac{r^2}{B^2}} \right)}{w} \right\} \quad (4.26)$$

Derivando em relação a T:

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial T} = & \frac{-Q}{2\pi T^2} L^{-1} \left\{ \frac{K_0 \left(\sqrt{\frac{S}{T} r^2 w + \frac{r^2}{B^2}} \right)}{w} \right\} + \\ & + \frac{Q}{2\pi T} L^{-1} \left\{ \frac{-K_1 \left(\sqrt{\frac{S}{T} r^2 w + \frac{r^2}{B^2}} \right)}{w} \frac{1(-1Sr^2w)}{2T^2 \sqrt{\frac{S}{T} r^2 w + \frac{r^2}{B^2}}} \right\} \end{aligned} \quad (A2.1)$$

rearranjando:

$$\frac{\partial s}{\partial T} = \frac{Q}{2\pi T^2} L^{-1} \left\{ \frac{-K_0 \left(\sqrt{\frac{S}{T} r^2 w + \frac{r^2}{B^2}} \right)}{w} \right\} +$$

$$+ \frac{Q}{2\pi T^2} L^{-1} \left\{ \frac{Sr^2 K_1 \left(\sqrt{\frac{S}{T} r^2 w + \frac{r^2}{B^2}} \right)}{2T \sqrt{\frac{S}{T} r^2 w + \frac{r^2}{B^2}}} \right\} \quad (\text{A2.2})$$

Ou ainda, fazendo $\beta = \sqrt{\frac{S}{T} r^2 w + \frac{r^2}{B^2}}$ vem:

$$\frac{\partial s}{\partial T} = \frac{Q}{2\pi T^2} L^{-1} \left\{ \frac{-K_0(\beta)}{w} + \frac{Sr^2 K_1(\beta)}{2T \beta} \right\} \quad (\text{A2.3})$$

Derivando em relação a S:

$$\frac{\partial s}{\partial S} = \frac{Q}{2\pi T} L^{-1} \left\{ \frac{-K_1 \left(\sqrt{\frac{S}{T} r^2 w + \frac{r^2}{B^2}} \right) \left(\frac{r^2 w}{T} \right)}{w \cdot 2 \sqrt{\frac{S}{T} r^2 w + \frac{r^2}{B^2}}} \right\} \quad (\text{A2.4})$$

rearrumando:

$$\frac{\partial s}{\partial S} = \frac{Q}{2\pi T^2} L^{-1} \left\{ \frac{-K_1 \left(\sqrt{\frac{S}{T} r^2 w + \frac{r^2}{B^2}} \right)}{2 \sqrt{\frac{S}{T} r^2 w + \frac{r^2}{B^2}}} r^2 \right\} \quad (\text{A2.5})$$

ou

$$\frac{\partial s}{\partial S} = \frac{Q}{2\pi T^2} L^{-1} \left\{ \frac{-K_1(\beta)}{2\beta} r^2 \right\} \quad (\text{A2.6})$$

Derivando em relação a r/B :

$$\frac{\partial s}{\partial r/B} = \frac{Q}{2\pi T} L^{-1} \left\{ \frac{-K_1 \left(\sqrt{\frac{S}{T} r^2 w + \frac{r^2}{B^2}} \right) 2r}{w 2 \sqrt{\frac{S}{T} r^2 w + \frac{r^2}{B^2}} B} \right\} \quad (\text{A2.7})$$

rearrumando:

$$\frac{\partial s}{\partial r/B} = \frac{Q}{2\pi T} L^{-1} \left\{ \frac{-K_1 \left(\sqrt{\frac{S}{T} r^2 w + \frac{r^2}{B^2}} \right) r}{\sqrt{\frac{S}{T} r^2 w + \frac{r^2}{B^2}} w B} \right\} \quad (\text{A2.8})$$

ou

$$\frac{\partial s}{\partial r/B} = \frac{Q}{2\pi T} L^{-1} \left\{ \frac{-K_1(\beta) r}{\beta w B} \right\} \quad (\text{A2.9})$$

Apêndice 3 Derivadas em relação aos parâmetros. Modelo de Boulton

A solução do modelo de Boulton é:

$$s(r, t) = \frac{Q}{2\pi T} L^{-1} \left\{ \frac{K_0 \left(r \sqrt{\left(\frac{S}{T} w + \frac{D_i S_y}{T} \frac{w}{(D_i + w)} \right)} \right)}{w} \right\} \quad (4.46)$$

Derivando em relação a T:

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial T} = & \frac{-Q}{2\pi T^2} L^{-1} \left\{ \frac{K_0 \left(\sqrt{\left(\frac{S}{T} r^2 w + \frac{D_i S_y}{T} \frac{r^2 w}{(D_i + w)} \right)} \right)}{w} \right\} + \\ & + \frac{Q}{2\pi T} L^{-1} \left\{ \frac{-K_1 \left(\sqrt{\left(\frac{S}{T} r^2 w + \frac{D_i S_y}{T} \frac{r^2 w}{(D_i + w)} \right)} \right) \cdot 1 \left(-r^2 w \left(S + \frac{D_i S_y}{(D_i + w)} \right) \right)}{w \cdot 2T^2 \sqrt{\left(\frac{S}{T} r^2 w + \frac{D_i S_y}{T} \frac{r^2 w}{(D_i + w)} \right)}} \right\} \end{aligned} \quad (A3.1)$$

rearranjando:

$$\frac{\partial s}{\partial T} = \frac{Q}{2\pi T^2} L^{-1} \left\{ \frac{-K_0 \left(\sqrt{\left(\frac{S}{T} r^2 w + \frac{D_i S_y}{T} \frac{r^2 w}{(D_i + w)} \right)} \right)}{w} \right\} +$$

$$+\frac{Q}{2\pi T^2}L^{-1}\left\{\frac{K_1\left(\sqrt{\frac{S}{T}r^2w+\frac{D_iS_y}{T}(D_i+w)}\right)}{2T\sqrt{\frac{S}{T}r^2w+\frac{D_iS_y}{T}(D_i+w)}}r^2\left(S+\frac{D_iS_y}{(D_i+w)}\right)\right\} \quad (A3.2)$$

Ou ainda, fazendo $\beta = \sqrt{\frac{S}{T}r^2w+\frac{D_iS_y}{T}(D_i+w)}$ vem:

$$\frac{\partial s}{\partial T} = \frac{Q}{2\pi T^2}L^{-1}\left\{\frac{-K_0(\beta)}{w} + \frac{K_1(\beta)}{2T\beta}r^2\left(S+\frac{D_iS_y}{(D_i+w)}\right)\right\} \quad (A3.3)$$

Derivando em relação a S:

$$\frac{\partial s}{\partial S} = \frac{Q}{2\pi T}L^{-1}\left\{\frac{-K_1\left(\sqrt{\frac{S}{T}r^2w+\frac{D_iS_y}{T}(D_i+w)}\right)\left(\frac{r^2w}{T}\right)}{w \cdot 2\sqrt{\frac{S}{T}r^2w+\frac{D_iS_y}{T}(D_i+w)}}\right\} \quad (A3.4)$$

rearranjando:

$$\frac{\partial s}{\partial S} = \frac{Q}{2\pi T^2}L^{-1}\left\{\frac{-K_1\left(\sqrt{\frac{S}{T}r^2w+\frac{D_iS_y}{T}(D_i+w)}\right)}{2\sqrt{\frac{S}{T}r^2w+\frac{D_iS_y}{T}(D_i+w)}}r^2\right\} \quad (A3.5)$$

ou

$$\frac{\partial s}{\partial S} = \frac{Q}{2\pi T^2}L^{-1}\left\{\frac{-K_1(\beta)}{2\beta}r^2\right\} \quad (A3.6)$$

Derivando em relação a S_y :

$$\frac{\partial s}{\partial S_y} = \frac{Q}{2\pi T} L^{-1} \left\{ \frac{-K_1 \left(\sqrt{\left(\frac{S}{T} r^2 w + \frac{D_i S_y}{T} \frac{r^2 w}{(D_i + w)} \right)} \right) \frac{D_i r^2 w}{T(D_i + w)}}{w \cdot 2 \sqrt{\left(\frac{S}{T} r^2 w + \frac{D_i S_y}{T} \frac{r^2 w}{(D_i + w)} \right)}} \right\} \quad (\text{A3.7})$$

rearranjando:

$$\frac{\partial s}{\partial S_y} = \frac{Q}{2\pi T^2} L^{-1} \left\{ \frac{-K_1 \left(\sqrt{\left(\frac{S}{T} r^2 w + \frac{D_i S_y}{T} \frac{r^2 w}{(D_i + w)} \right)} \right) D_i r^2}{2 \sqrt{\left(\frac{S}{T} r^2 w + \frac{D_i S_y}{T} \frac{r^2 w}{(D_i + w)} \right)} (D_i + w)} \right\} \quad (\text{A3.8})$$

então:

$$\frac{\partial s}{\partial S_y} = \frac{Q}{2\pi T^2} L^{-1} \left\{ \frac{-K_1(\beta) D_i r^2}{2\beta (D_i + w)} \right\} \quad (\text{A3.9})$$

Derivando em relação a D_i :

$$\frac{\partial s}{\partial D_i} = \frac{Q}{2\pi T} L^{-1} \left\{ \frac{-K_1 \left(\sqrt{\left(\frac{S}{T} r^2 w + \frac{D_i S_y}{T} \frac{r^2 w}{(D_i + w)} \right)} \right)}{w} \left[\frac{\left(\frac{S_y r^2 w}{T(D_i + w)} + \frac{(-D_i S_y r^2 w)}{T(D_i + w)^2} \right)}{2 \sqrt{\left(\frac{S}{T} r^2 w + \frac{D_i S_y}{T} \frac{r^2 w}{(D_i + w)} \right)}} \right] \right\} \quad (\text{A3.10})$$

rearranjando:

$$\frac{\partial s}{\partial D_i} = \frac{Q}{2\pi T^2} L^{-1} \left\{ \frac{-K_1 \left(\sqrt{\left(\frac{S}{T} r^2 w + \frac{D_i S_y}{T} \frac{r^2 w}{(D_i + w)} \right)} \right)}{2 \sqrt{\left(\frac{S}{T} r^2 w + \frac{D_i S_y}{T} \frac{r^2 w}{(D_i + w)} \right)}} \left(\frac{S_y r^2 w}{(D_i + w)^2} \right) \right\} \quad (\text{A3.11})$$

então:

$$\frac{\partial s}{\partial D_i} = \frac{Q}{2\pi T^2} L^{-1} \left\{ \frac{-K_1(\beta)}{2\beta} \left(\frac{S_y r^2 w}{(D_i + w)^2} \right) \right\} \quad (\text{A3.12})$$

Apêndice 4 - Derivadas em Relação aos Parâmetros - Modelo com Perda de Carga Localizada.

A solução do modelo com perda de carga localizada é:

$$s_w(t) = \frac{Q}{2\pi T} L^{-1} \left\{ \frac{K_0 \left(\sqrt{\frac{S}{T}} wr^2 \right)}{w} \right\} + CQ^2 \quad (4.60)$$

Derivando em relação a T:

$$\frac{\partial s_w}{\partial T} = \frac{-Q}{2\pi T^2} L^{-1} \left\{ \frac{K_0 \left(\sqrt{\frac{S}{T}} wr^2 \right)}{w} \right\} + \frac{Q}{2\pi T} L^{-1} \left\{ \frac{-K_1 \left(\sqrt{\frac{S}{T}} wr^2 \right)}{w} \frac{-Swr^2}{2T^2 \sqrt{\frac{S}{T}} wr^2} \right\} \quad (A4.1)$$

ou

$$\frac{\partial s_w}{\partial T} = \frac{Q}{2\pi T^2} L^{-1} \left\{ \frac{-K_0 \left(\sqrt{\frac{S}{T}} wr^2 \right)}{w} + \frac{\sqrt{\frac{S}{T}} r K_1 \left(\sqrt{\frac{S}{T}} wr^2 \right)}{2\sqrt{w}} \right\} \quad (A4.2)$$

derivando em relação a S:

$$\frac{\partial s_w}{\partial S} = \frac{Q}{2\pi T} L^{-1} \left\{ \frac{-K_1 \left(\sqrt{\frac{S}{T}} r^2 w \right)}{w} \frac{\left(\frac{r^2 w}{T} \right)}{2\sqrt{\frac{S}{T}} r^2 w} \right\} \quad (A4.3)$$

rearranjando:

$$\frac{\partial s_w}{\partial S} = \frac{-Q}{2\pi TS} L^{-1} \left\{ \frac{1}{2w} K_1 \left(\sqrt{\frac{S}{T}} r^2 w \right) r \sqrt{\frac{S}{T} w} \right\} \quad (\text{A4.4})$$

Derivando em relação a C:

$$\frac{\partial s_w}{\partial C} = Q^2 = \text{cte.} \quad (\text{A4.5})$$