



Vitor Luiz Reis

# **Modelagem do mecanismo biela-manivela com folga na junta pino-pistão**

12/13

CAMPINAS  
2013



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

Vitor Luiz Reis

# **Modelagem do mecanismo biela-manivela com folga na junta pino-pistão**

Orientador: Katia Lucchesi CavalcaDedini

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica, na Área de Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL  
DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO VITOR  
LUIZ REIS, E ORIENTADO PELA PROFA. DRA KATIA  
LUCCHESI CAVALCADEDINI

*Katia Lucchesi Cavalca*  
ASSINATURA DO(A) ORIENTADOR(A)

CAMPINAS  
2013

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

R277m	Reis, Vitor Luiz Modelagem do mecanismo biela-manivela com folga na junta pino-pistão \ Vitor Luiz Reis. – Campinas, SP: [s.n.], 2013.  Orientador: Katia Lucchesi Cavalca Dedini. Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.  1. Automóveis - Motores - Sistemas de lubrificação. 2. Mecânica do contato. 3. Motores de combustão interna. I. Dedini, Katia Lucchesi Cavalca. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.
-------	---

Título em Inglês: Slider-crank mechanism modelling with clearance at piston-pin revolute joint

Palavras-chave em Inglês: Automobiles - Engines - Lubrication systems, Contact mechanics, Internal combustion engines.

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica

Banca Examinadora: Pablo Siqueira Meirelles, Marcelo Becker

Data da defesa: 14-02-2013

Programa de Pós Graduação: Engenharia Mecânica

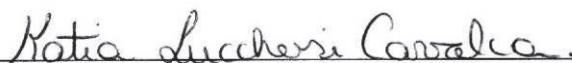
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO  
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

## Modelagem do mecanismo biela-manivela com folga na junta pino-pistão


Autor: Vitor Luiz Reis

Orientadora: Katia Lucchesi Cavalca Dedini

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:



Prof. Dra. Katia Lucchesi Cavalca Dedini, Presidente  
Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP/FEM



Prof. Dr. Pablo Siqueira Meirelles  
Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP/FEM



Prof. Dr. Marcelo Becker  
Universidade de São Paulo - USP/EESC

Campinas, 14 de fevereiro de 2013.



## **Dedicatória**

Dedico este trabalho a minha família.

## **Agradecimentos**

Aos meus pais, Sérgio e Therezinha, pelo apoio e incentivo incondicional.

A minha namorada Gecielli pelo companheirismo e compreensão.

A minha orientadora, Profa. Dra. Katia Lucchesi Cavalca pelo exemplo de dedicação à pesquisa.

Aos professores Marcelo Becker e Pablo Siqueira Meirelles pelas críticas e sugestões que permitiram o aprimoramento do trabalho.

Aos colegas Gregory Bregion Daniel, Diego Martins e Vinicius Augusto Diniz Silva pelas sugestões e discussões pertinentes ao desenvolvimento da dissertação.

A todos os colegas do LAMAR pela amizade e companheirismo ao longo do mestrado.

A todos os professores e colegas do departamento, que ajudaram de forma direta e indireta a conclusão deste trabalho.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

## Resumo

REIS, Vitor Luiz. Modelagem do mecanismo biela-manivela com folga na junta pino-pistão. 2013. 110p. Dissertação de Mestrado. Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Este trabalho apresenta o desenvolvimento de um modelo dinâmico para o mecanismo biela-manivela com folga na junta de revolução pino-pistão. As equações do movimento para este sistema são obtidas através do método de Lagrange e os efeitos relacionados ao contato, atrito e lubrificação que atuam nos elementos com folga são alvo de estudo. O modelo da força de contato utilizado baseia-se na formulação de Hertz, considerando a inclusão do efeito dissipativo associado ao impacto entre o pino e o pistão. A força de atrito adotada baseia-se no atrito de Coulomb, porém adaptada à abordagem da dinâmica mult corpos. Tais modelos são validados com os resultados encontrados na literatura recente. A pesquisa apresenta contribuição na avaliação do efeito introduzido pela lubrificação hidrodinâmica na junta com folga. Dois modelos de lubrificação hidrodinâmica são avaliados: o primeiro, apresenta uma solução direta e de baixo custo computacional; o segundo modelo obtém uma solução numérica que leva em consideração o efeito da aceleração imposta ao fluido lubrificante pelo movimento do mecanismo. A resposta dinâmica é obtida sob a variação paramétrica do tamanho da folga e a velocidade de rotação da manivela. Ao final, agrega-se ao sistema um modelo simplificado de geração da curva de pressão para um motor de combustão interna típico. Observou-se que a inclusão do modelo de lubrificação proposto não garante a sustentação do pino-pistão em regime de lubrificação hidrodinâmica durante as simulações efetuadas. Desta maneira, faz-se necessário o desenvolvimento de um modelo de lubrificação hidrodinâmica e elastohidrodinâmica capaz de determinar o comportamento no contato pino-pistão de maneira mais realista.

*Palavras-chave:* mecanismo biela-manivela, pino-pistão, folga na junta de revolução, lubrificação hidrodinâmica, força de contato de Hertz, força de atrito de Coulomb.

## Abstract

REIS, Vitor Luiz. Slider-crank mechanism modelling with clearance in piston-pin revolute joint. 110p. Dissertação de Mestrado. Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

This work presents the development of a dynamic model for the slider-crank mechanism with clearance on the piston-pin revolute joint. The equations of motion for this system are obtained by Lagrange's method and the effects related to contact, friction and lubrication at the elements that operate in the clearance are the targets of study. The contact force model used in this work is based on Hertz formulation, considering the inclusion of the dissipative effect associated with the impact between the pin and the piston. The frictional force adopted is based on the Coulomb friction but adapted to the multibody dynamics approach. Such models are validated with the results found in recent literature. The research presents contribution in evaluating the effect introduced by hydrodynamic lubrication in the revolute joint clearance. Two models of hydrodynamic lubrication are investigated: the first model presents a direct solution of low computational cost, the second model results in a numerical solution that consider the effect of the acceleration of the lubricant fluid imposed on the movement of the mechanism. The dynamic response is studied for different sets of parameters of clearance and rotational speed of the crank. Moreover, a simplified model of the generation of the pressure curve for a typical internal combustion engine was included in the system. It was observed that the present lubrication model does not guarantee the support of the pin-piston system for hydrodynamic lubrication in the present simulations. Therefore, it is necessary to develop a more realistic model of hydrodynamic lubrication and elastohydrodynamic lubrication that is capable of reproducing the behavior of the piston-pin contact.

*Keywords:* slider-crank mechanism, piston-pin, revolute clearance joint, hydrodynamic lubrication, Hertz contact model, Coulomb friction.

## Lista de Ilustrações

3.1	Mecanismo biela-manivela padrão. . . . .	9
3.2	Subsistema manivela-biela. . . . .	11
3.3	Análise do movimento do centro de massa da manivela. . . . .	14
3.4	Análise do movimento do centro de massa da biela. . . . .	17
3.5	Esforços externos aplicados ao subsistema manivela-biela. . . . .	22
3.6	excentricidade e folga radial. . . . .	31
3.7	profundidade de penetração normal ao contato $\delta$ . . . . .	33
3.8	Diagrama de corpo livre. . . . .	34
3.9	Fluxograma do algoritmo proposto. . . . .	37
4.1	modelo de contato de Hertz . . . . .	41
4.2	modelos de força de contato . . . . .	42
4.3	Velocidade de penetração. . . . .	43
4.4	Atrito de Coulomb . . . . .	44
4.5	Modelo de atrito de Ambrosio . . . . .	45
5.1	Mancal hidrodinâmico com coordenadas . . . . .	52
5.2	Mancal hidrodinâmico e sistema de coordenadas ((PINKUS E STERNLICHT, 1961)).	53
6.1	velocidade angular da manivela para os dois modelos de lubrificação. . . . .	63
6.2	aceleração angular da manivela . . . . .	64
6.3	aceleração angular da biela . . . . .	64
6.4	aceleração do pistão . . . . .	65
6.5	órbita do pino . . . . .	65
6.6	espessura mínima do filme de óleo . . . . .	66
6.7	mapa de Poincaré . . . . .	66
6.8	reação no pino-pistão . . . . .	67
6.9	velocidade angular da manivela . . . . .	68
6.10	aceleração angular da manivela . . . . .	68
6.11	aceleração angular da biela . . . . .	69
6.12	aceleração do pistão . . . . .	69
6.13	órbita do pino . . . . .	70
6.14	espessura mínima do filme de óleo . . . . .	70

6.15	mapa de Poincaré . . . . .	71
6.16	reação no pino-pistão . . . . .	71
6.17	velocidade angular da manivela . . . . .	72
6.18	aceleração angular da manivela . . . . .	73
6.19	aceleração angular da biela . . . . .	73
6.20	aceleração do pistão . . . . .	74
6.21	espessura mínima do filme de óleo . . . . .	74
6.22	órbita do pino . . . . .	75
6.23	mapa de Poincaré . . . . .	75
6.24	reação no pino-pistão . . . . .	76
6.25	(a) curva pressão-volume; (b) força de explosão; . . . . .	78
6.26	velocidade angular da manivela . . . . .	78
6.27	aceleração angular da manivela . . . . .	79
6.28	aceleração angular da biela . . . . .	79
6.29	aceleração do pistão . . . . .	80
6.30	espessura mínima do filme de óleo . . . . .	80
6.31	órbita do pino . . . . .	81
6.32	mapa de Poincaré . . . . .	81
6.33	reação no pino-pistão . . . . .	82
6.34	(a) curva pressão-volume; (b) força de explosão; . . . . .	82
6.35	velocidade angular da manivela . . . . .	83
6.36	aceleração angular da manivela . . . . .	83
6.37	aceleração angular da biela . . . . .	84
6.38	aceleração do pistão . . . . .	84
6.39	espessura mínima do filme de óleo . . . . .	85
6.40	órbita do pino . . . . .	85
6.41	mapa de Poincaré . . . . .	86
6.42	reação no pino-pistão . . . . .	86
6.43	(a) curva pressão-volume; (b) força de explosão; . . . . .	87
6.44	velocidade angular da manivela . . . . .	87
6.45	aceleração angular da manivela . . . . .	88
6.46	aceleração angular da biela . . . . .	88
6.47	aceleração do pistão . . . . .	89
6.48	espessura mínima do filme de óleo . . . . .	89
6.49	órbita do pino . . . . .	90

6.50	mapa de Poincaré . . . . .	90
6.51	reação no pino-pistão . . . . .	91
A.1	modelo do motor utilizado . . . . .	101
A.2	(a) Pressão-Volume; (b) Pressão-Ângulo manivela . . . . .	102
B.1	mecanismo biela-manivela utilizado na verificação . . . . .	104
B.2	velocidade do seguidor . . . . .	106
B.3	aceleração do seguidor . . . . .	106
B.4	momento aplicado na manivela . . . . .	107
B.5	órbita do pino . . . . .	108
B.6	mapa de Poincaré . . . . .	109
B.7	momento aplicado na manivela $c_f = 0,01$ . . . . .	110
B.8	momento aplicado na manivela $c_f = 0,05$ . . . . .	111
B.9	momento aplicado na manivela com $c_f = 0,1$ . . . . .	111
B.10	órbita do pino para $c_f = 0,01$ . . . . .	112
B.11	órbita do pino para $c_f = 0,05$ . . . . .	112
B.12	órbita do pino para $c_f = 0,1$ . . . . .	112
B.13	mapa de Poincaré para $c_f = 0,01$ . . . . .	113
B.14	mapa de Poincaré para $c_f = 0,05$ . . . . .	113
B.15	mapa de Poincaré para $c_f = 0,1$ . . . . .	113
B.16	velocidade do seguidor . . . . .	114
B.17	aceleração do seguidor . . . . .	114
B.18	momento na manivela . . . . .	115
B.19	órbita do pino-pistão . . . . .	115
B.20	mapa de Poincaré . . . . .	116
B.21	reação no pino-pistão . . . . .	116

## Lista de Tabelas

6.1	Propriedades físicas e geométricas do mecanismo biela-manivela. . . . .	61
6.2	Posição dos centros de massa de cada componente. . . . .	62
6.3	Parâmetros utilizados na simulação dinâmica do mecanismo biela-manivela. . . . .	62
6.4	Parâmetros das simulações sem excitação externa. . . . .	63
6.5	Parâmetros utilizados nas simulações do mecanismo biela-manivela com explosão de combustão . . . . .	77
6.6	Parâmetros utilizados no modelo de combustão interna . . . . .	77
A.1	Parâmetros do motor para o modelo de liberação finita de calor . . . . .	102
B.1	Parâmetros geométricos de massa do mecanismo biela-manivela . . . . .	104
B.2	Parâmetros utilizados na verificação do modelo dinâmico . . . . .	105



## Lista de Abreviaturas e Siglas

### Letras Latinas

$[M]$	Matriz de massa do subsistema manivela-biela
$\ddot{A}$	aceleração angular da biela ..... [rad/s <sup>2</sup> ]
$\ddot{q}$	aceleração angular da manivela ..... [rad/s <sup>2</sup> ]
$\ddot{X}_p$	Aceleração vertical do pino ..... [m/s <sup>2</sup> ]
$\ddot{X}_{Pb}$	Aceleração vertical de um ponto de interesse na biela ..... [m/s <sup>2</sup> ]
$\ddot{X}_{Pm}$	Aceleração vertical de um ponto de interesse na manivela ..... [m/s <sup>2</sup> ]
$\ddot{X}_{PT}$	Aceleração vertical do pistão ..... [m/s <sup>2</sup> ]
$\ddot{Y}_p$	Aceleração horizontal do pino ..... [m/s <sup>2</sup> ]
$\ddot{Y}_{Pb}$	Aceleração horizontal de um ponto de interesse na biela ..... [m/s <sup>2</sup> ]
$\ddot{Y}_{Pm}$	Aceleração horizontal de um ponto de interesse na manivela ..... [m/s <sup>2</sup> ]
$\dot{A}$	velocidade angular da biela ..... [rad/s]
$\dot{q}$	velocidade angular da manivela ..... [rad/s]
$\dot{X}_p$	Velocidade vertical do pino ..... [m/s]
$\dot{X}_{Pb}$	Velocidade vertical de um ponto de interesse na biela ..... [m/s]
$\dot{X}_{Pm}$	Velocidade vertical de um ponto de interesse na manivela ..... [m/s]
$\dot{X}_{PT}$	velocidade vertical do pistão ..... [m/s]
$\dot{X}_{rel}^{cto}$	componente x da velocidade relativa ..... [m/s]
$\dot{Y}_p$	Velocidade horizontal do pino ..... [m/s]
$\dot{Y}_{Pb}$	Velocidade horizontal de um ponto de interesse na biela ..... [m/s]

$\dot{Y}_{Pm}$	Velocidade horizontal de um ponto de interesse na manivela ..... [m/s]
$\dot{Y}_{rel}^{cto}$	componente y da velocidade relativa ..... [m/s]
$[K_C]$	Matriz dos coeficientes de velocidade do subsistema manivela-biela
$[L_{APb}]$	Matriz das derivadas do coeficiente de velocidade de um ponto de interesse na biela em relação ao ângulo $A$ ..... [m/rad · s]
$[L_{APm}]$	Matriz das derivadas do coeficiente de velocidade de um ponto de interesse na manivela em relação ao ângulo $A$ ..... [m/rad · s]
$[L_{Ap}]$	Matriz das derivadas do coeficiente de velocidade do pino em relação ao ângulo $A$ [m/rad · s]
$[L_{Pb}]$	Matriz das derivadas do coeficiente de velocidade de um ponto de interesse na biela [m/rad · s]
$[L_{Pm}]$	Matriz das derivadas do coeficiente de velocidade de um ponto de interesse na manivela ..... [m/rad · s]
$[L_P]$	Matriz das derivadas do coeficiente de velocidade do pino ..... [m/rad · s]
$[L_{qPb}]$	Matriz das derivadas do coeficiente de velocidade de um ponto de interesse na biela em relação ao ângulo $q$ ..... [m/rad · s]
$[L_{qPm}]$	Matriz das derivadas do coeficiente de velocidade de um ponto de interesse na manivela em relação ao ângulo $q$ ..... [m/rad · s]
$[L_{qp}]$	Matriz das derivadas do coeficiente de velocidade do pino em relação ao ângulo $q$ [m/rad · s]
$[K_p]$	Matriz dos coeficientes de velocidades do pino ..... [m/rad]
$[K_{Pb}]$	Matriz dos coeficientes de velocidade de um ponto de interesse na biela . [m/rad]
$[K_{Pm}]$	Matriz dos coeficientes de velocidade de um ponto de interesse na manivela [m/rad]
$\mathbf{v}_0$	velocidade crítica de repouso ..... [m/s]
$\mathbf{v}_1$	velocidade crítica de movimento pleno ..... [m/s]

$v_N$	velocidade normal .....	$[m/s]$
$v_T$	velocidade tangencial .....	$[m/s]$
$A$	Ângulo da biela .....	$[rad]$
$a$	fator de eficiência de Weibe	
$c_c$	coeficiente de atrito de Coulomb	
$c_d$	coeficiente de correção dinâmica	
$c_f$	coeficiente de atrito	
$c_r$	folga radial .....	$[m]$
$c_v$	capacidade calorífica específica para volume constante .....	$[J/kgK]$
$D$	coeficiente de atrito viscoso da manivela	
$D_c$	coeficiente dissipativo da força de contato .....	$[N.s/m]$
$dU$	diferencial de energia interna .....	$[J]$
$e$	coeficiente de restituição	
$E_k$	modulo de elasticidade .....	$[Pa]$
$E_p$	Energia potencial gravitacional .....	$[J]$
$F_i$	iésima força aplicada no componente	
$F_T$	força tangencial .....	$[N]$
$F_x$	Componente vertical da força aplicada no pino .....	$[N]$
$F_y$	Componente horizontal da força aplicada no pino .....	$[N]$
$F_{1,2,3,...}$	Forças de reação nos vínculos .....	$[N]$
$F_N$	força normal .....	$[N]$
$g$	aceleração gravitacional .....	$[m/s^2]$
$h$	espessura do filme de óleo .....	$[m]$

$I_B$	Inércia de massa da biela . . . . .	$[kg \cdot m^2]$
$I_M$	Inércia de massa da manivela . . . . .	$[kg \cdot m^2]$
$K$	rigidez generalizada . . . . .	$[N/m]$
$L$	Comprimento da biela. . . . .	$[m]$
$L$	Lagrangiano	
$M_B$	Massa da biela . . . . .	$[kg]$
$M_M$	Massa da manivela . . . . .	$[kg]$
$M_{PT}$	Massa do pistão . . . . .	$[kg]$
$n$	expoente para contato	
$nW$	fator de forma de Weibe	
$P_M$	Ponto de interesse na manivela escrito no referencial móvel solidário à manivela	
$P_t$	pressão no filme de óleo . . . . .	$[Pa]$
$Q$	vetor das componentes generalizadas das forças	
$q$	Ângulo da manivela . . . . .	$[rad]$
$Q_j^{n.c.}$	Componentes generalizadas das forças não conservativas	
$Q_{in}$	quantidade de calor total adicionada . . . . .	$[J]$
$R$	Comprimento da manivela . . . . .	$[m]$
$R_b$	raio do mancal . . . . .	$[m]$
$R_g$	constante universal dos gases perfeitos . . . . .	$[J/mol.K]$
$R_j$	raio do pino . . . . .	$[m]$
$R_k$	raio do componente . . . . .	$[m]$
$R_x$	reação em x . . . . .	$[N]$
$R_y$	reação em y . . . . .	$[N]$

$T$	Energia cinética ..... [J]
$U_0$	velocidade linear da superfície do eixo ..... [m/s]
$U_M$	Eixo $U$ do referencial móvel solidário à manivela
$V$	volume ..... [m <sup>3</sup> ]
$V_\theta$	campo de velocidades em $\theta$ ..... [m/s]
$V_M$	Eixo $V$ do referencial móvel solidário à manivela
$V_r$	campo de velocidades na direção radial ..... [m/s]
$V_{CM}$	Velocidade do centro de massa de cada componente ..... [m/s]
$w$	comprimento do mancal ..... [m]
$x$	eixo vertical
$x_b$	fração de liberação de calor
$X_p$	Posição vertical do pino ..... [m]
$X_k^{cto}$	componente x da posição do ponto de contato ..... [m]
$X_{Pb}$	Aceleração vertical de um ponto de interesse na biela ..... [m]
$X_{Pm}$	Posição vertical de um ponto de interesse na manivela ..... [m]
$X_{PT}$	posição vertical do pistão ..... [m]
$y$	eixo horizontal
$Y_p$	Posição horizontal do pino ..... [m]
$Y_k^{cto}$	componente y da posição do ponto de contato ..... [m]
$Y_{Pb}$	Aceleração horizontal de um ponto de interesse na biela ..... [m]
$Y_{Pm}$	Posição horizontal de um ponto de interesse na manivela ..... [m]

---

**Letras Gregas**

$\alpha_i$	deslocamento virtual angular do $i$ ésimo componente
$\delta q$	deslocamento virtual arbitrário da variável $q$
$\delta r_i$	deslocamento virtual arbitrário do $i$ ésimo componente
$\delta W$	trabalho virtual do sistema
$\delta X_p$	deslocamento virtual vertical associado ao pino
$\delta Y_p$	deslocamento virtual horizontal associado ao pino
$\delta$	profundidade de penetração ..... [m]
$\delta^c$	profundidade de penetração crítica ..... [m]
$\dot{\delta}^{(-)}$	velocidade de impacto ..... [m/s]
$\dot{\epsilon}$	derivada temporal da excentricidade ..... [m/s]
$\gamma$	razão dos calores específicos
$\mu$	viscosidade absoluta ..... [Pa.s]
$\nu$	viscosidade cinemática ..... [m <sup>2</sup> /s]
$\nu_k$	razão de Poisson
$\omega$	Velocidade de angular cada componente ..... [rad/s]
$\omega$	velocidade de rotação do eixo ..... [rad/s]
$\rho$	densidade de massa ..... [kg/m <sup>3</sup> ]
$\sigma_k$	parâmetro de rigidez do contato
$\tau_d$	Torque dissipativo aplicado na manivela ..... [N · m]
$\tau_i$	$i$ ésimo momento aplicado no componente
$\tau_{ext}$	Torque externo aplicado na manivela ..... [N · m]
$\theta$	ângulo associado a excentricidade ..... [rad]
$\theta_d$	duração da liberação de calor ..... [rad]

$\theta_s$	ângulo de início da liberação de calor .....[rad]
$\varepsilon$	excentricidade ..... [m]
$\varepsilon_x$	componente de excentricidade em x ..... [m]
$\varepsilon_y$	componente de excentricidade em y ..... [m]

---

### **Siglas**

FEM	Faculdade de Engenharia Mecânica
LAMAR	Laboratório de Máquinas Rotativas

# SUMÁRIO

<b>Lista de Ilustrações</b>	<b>xv</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xxi</b>
<b>Lista de Abreviaturas e Siglas</b>	<b>xxiii</b>
<b>SUMÁRIO</b>	<b>xxxvii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Objetivos . . . . .	2
1.2 Organização do trabalho . . . . .	2
<b>2 Revisão da Literatura</b>	<b>5</b>
<b>3 Modelo dinâmico do sistema</b>	<b>9</b>
3.1 Introdução . . . . .	9
3.2 Mecanismo biela-manivela com folga . . . . .	10
3.3 Análise cinemática do subsistema manivela-biela . . . . .	10
3.3.1 Análise cinemática da junta pino-pistão . . . . .	11
3.4 Análise cinemática dos centros de massa do subsistema manivela-biela . . . . .	13
3.4.1 Análise cinemática do centro de massa da manivela . . . . .	14
3.4.2 Análise cinemática do centro de massa da biela . . . . .	16
3.5 Análise dinâmica do subsistema manivela-biela . . . . .	19
3.5.1 Forças generalizadas aplicadas no subsistema manivela-biela . . . . .	21
3.5.2 Equação do movimento do subsistema biela-manivela . . . . .	23
3.5.3 Equação de movimento do pistão . . . . .	29
3.6 Análise do movimento relativo do pino e do pistão . . . . .	30
3.7 Cálculos das forças e momentos no mecanismo com folga . . . . .	33
3.8 Integração das equações do movimento . . . . .	36
3.9 Considerações finais . . . . .	37



<b>4</b>	<b>Modelagem das forças de contato</b>	<b>39</b>
4.1	Introdução . . . . .	39
4.2	Modelos para as forças de contato/impacto . . . . .	39
4.2.1	Modelos contínuos de força de contato/impacto . . . . .	39
4.3	Modelagem da força de atrito seco . . . . .	43
4.4	Aspectos numéricos associados à análise do contato . . . . .	45
4.5	Considerações finais . . . . .	47
<b>5</b>	<b>Modelagem das forças de lubrificação</b>	<b>49</b>
5.1	O modelo de lubrificação proposto . . . . .	49
5.2	Modelo de lubrificação Pinkus-Sternlicht . . . . .	52
5.3	Considerações finais . . . . .	59
<b>6</b>	<b>Resultados</b>	<b>61</b>
6.1	Parâmetros utilizados nas simulações . . . . .	61
6.2	Resultados do mecanismo biela-manivela com folga . . . . .	62
6.2.1	Simulação <i>I</i> . . . . .	63
6.2.2	Simulação <i>II</i> . . . . .	67
6.2.3	Simulação <i>III</i> . . . . .	72
6.3	Resultados do mecanismo biela-manivela com folga e modelo de combustão interna	76
6.3.1	Simulação <i>IV</i> . . . . .	77
6.3.2	Simulação <i>V</i> . . . . .	82
6.3.3	Simulação <i>VI</i> . . . . .	86
<b>7</b>	<b>Discussão e considerações finais</b>	<b>93</b>
7.1	Sugestão para trabalhos futuros . . . . .	94
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>95</b>
	<b>APÊNDICES</b>	<b>97</b>
<b>A</b>	<b>Modelagem da força de explosão do pistão</b>	<b>98</b>
A.1	Modelo de liberação finita de calor . . . . .	98
A.2	Considerações finais . . . . .	103
<b>B</b>	<b>Verificação do modelo dinâmico</b>	<b>104</b>
B.1	Influência do tamanho da folga . . . . .	105

B.2	Influência da força de atrito . . . . .	110
B.3	Influência da lubrificação . . . . .	114
B.4	Considerações finais . . . . .	116

# 1 Introdução

Atualmente tem sido grande a demanda pelo desenvolvimento de automóveis mais eficientes e que respeitem a legislação ambiental. Esta situação cria a necessidade de se otimizar o uso de recursos e processos no âmbito industrial, em um processo que busca o desenvolvimento de veículos seguros e com bom desempenho.

O desempenho energético de um automóvel está diretamente relacionado ao seu motor de combustão interna, que é influenciado por uma série de fatores, como o combustível utilizado, as condições de operação, a manutenção adequada, entre outros. No intuito de contribuir para o projeto de motores com melhor desempenho, as empresas têm investido no uso de ferramentas computacionais como o método dos elementos finitos e a dinâmica de fluidos computacional.

Estas ferramentas, aliadas a um programa experimental de qualidade contribuem para o projeto de componentes que apresentam menores índices de desgaste. Uma das maneiras de evitar o desgaste prematuro dos componentes do motor é através do uso de lubrificantes. Em geral, a escolha destes lubrificantes depende do regime de trabalho na qual o componente está sujeito.

Entre os componentes mais intensamente solicitados no motor de combustão interna está a junta pino-pistão, que operando em condições severas, necessita de uma lubrificação adequada para evitar o desgaste. O pino-pistão, em alguns tipos de motores, comporta-se como um eixo de rotação alternada, necessitando de lubrificação para impedir o atrito excessivo dele com as paredes do mancal do pistão.

Visto que a teoria de lubrificação convencional aplica-se a mancais de rotação completa e em regime de lubrificação hidrodinâmico, e o pino-pistão encontra-se em um regime de rotação alternada e com cargas oscilantes de elevada magnitude, faz-se necessário o desenvolvimento de um modelo de lubrificação que leve em conta estas condições de operação.

Diante deste quadro, torna-se interessante o conhecimento da condição de lubrificação nas juntas de revolução intensamente solicitadas e para este propósito pode-se desenvolver um modelo computacional que consiga predizer o comportamento dinâmico deste sistema sob as condições reais de operação.

## 1.1 Objetivos

Este trabalho tem como principal objetivo incluir ao modelo dinâmico do mecanismo biela-manivela com folga na junta pino-pistão desenvolvido em trabalhos precedentes (DANIEL, 2008), modelos de contato, atrito e lubrificação capazes de descrever o mecanismo com folga. Deseja-se também utilizar-se este modelo numérico para simular a resposta do mecanismo, sob condições de operação típicas de um motor de combustão interna. E assim, avaliar o efeito que a folga introduz no desempenho do sistema.

Como objetivos específicos podem ser destacados:

- Desenvolver um sistema de equações do movimento para o mecanismo estudado;
- Implementar um modelo de contato/impacto compatível com a abordagem utilizada, com base na literatura recente;
- Implementar um modelo de atrito adequado às simulações numéricas, com base na literatura recente;
- Implementar o modelo de lubrificação hidrodinâmica desenvolvido para análise de mancais com rotação alternada;
- Implementar uma curva de explosão típica de motores de combustão interna;
- Fazer a comparação das respostas dos modelos implementados neste simulador com os trabalhos de referência;
- Verificar em que medida um regime de lubrificação hidrodinâmica é capaz de sustentar o pino-pistão no mecanismo com folgas.

## 1.2 Organização do trabalho

O trabalho é organizado em sete capítulos e dois apêndices, que compreendem a caracterização do problema investigado, o histórico de sua abordagem na literatura recente, a metodologia empregada neste estudo, os resultados obtidos e as considerações pertinentes:

**Capítulo 1:** Faz-se uma introdução ao tema investigado e pontuam-se os objetivos propostos para o trabalho.

**Capítulo 2:** Apresenta-se uma revisão bibliográfica sobre a modelagem dinâmica de sistemas multicorpos na presença de folgas nas juntas.

**Capítulo 3:** Desenvolve-se o modelo dinâmico do mecanismo biela-manivela utilizando-se a abordagem proposta na literatura (DOUGHTY, 1988), para o mecanismo com folga na junção pino-pistão.

**Capítulo 4:** Descrevem-se os modelos de força de contato/impacto e atrito encontrados na literatura. Por fim, formula-se a aplicação destas forças para o mecanismo estudado.

**Capítulo 5:** Os modelos de lubrificação para a junta com folga são apresentados e formulados para aplicação no mecanismo.

**Capítulo 6:** Descrevem-se as simulações efetuadas, são apresentados e discutidos os resultados obtidos, juntamente das análises pertinentes.

**Capítulo 7:** Ao final, o desempenho do trabalho é avaliado, pontuando-se suas contribuições e limitações, e apreciam-se as propostas para trabalhos futuros.

**Apêndice A:** A força de excitação externa para um motor de combustão interna é modelada.

**Apêndice B:** Expõe o trabalho de validação do modelo dinâmico proposto com àqueles encontrados na literatura recente (FLORES *et al.*, 2004), (FLORES E AMBRÓSIO, 2004), (FLORES *et al.*, 2006), (FLORES *et al.*, 2009) e (FLORES, 2004).



## 2 Revisão da Literatura

O estudo dos efeitos causados pela folga nas juntas dos mecanismos é alvo de pesquisas há muito tempo. É conhecido que a presença de folgas degrada o desempenho dos sistemas mecânicos, causando desgaste, ruído e vibrações (RAVN, 1998). Estas folgas frequentemente conduzem a esforços altamente localizados, aumentando a probabilidade de fadiga do material e assim acabam por diminuir a durabilidade da peça (FARAHANCHI E SHAW, 1994).

Entre as abordagens encontradas na literatura para o estudo do comportamento de mecanismos com folgas nas juntas, destacam-se os trabalhos puramente experimentais, onde se investigam parâmetros que caracterizam a folga e a perda de contato no par cinemático, e aqueles com o objetivo de simular a dinâmica destes sistemas através da solução das equações do movimento.

Em um trabalho de revisão da literatura (HAINES, 1980) são analisados os modelos desenvolvidos até então para abordar a modelagem da folga em juntas de revolução em mecanismos cujo movimento era descrito no plano. Neste artigo, são classificados os principais modos de movimento encontrados nos mecanismos com folga: o movimento livre sem contato; o impacto/retorno; e o tipo de movimento que ocorre na presença do contato.

Entre os trabalhos citados neste estudo, destaca-se a contribuição dos estudos analítico/experimental das forças de impacto em sistemas mecânicos elásticos com folga (DUBOWSKY E MOENING; DUBOWSKY *et al.*, 1978; 1984), no qual os autores quantificam e avaliam o efeito das folgas na degradação do desempenho de um mecanismo.

Na literatura recente, destaca-se o desenvolvimento de abordagens algébricas e softwares de análise multicorpos que incluem o efeito da folga nas juntas. Nesta abordagem, baseada na formulação diferencial algébrica, a obtenção das equações do movimento é feita em coordenadas cartesianas e possui forte caráter computacional (NIKRAVESH; HAUG, 1988; 1989).

Utilizando-se desta abordagem (RAVN, 1998) dedicou um trabalho à modelagem do mecanismo biela-manivela com folga na junta de revolução. Neste trabalho ele apresenta e discute a quantificação do desempenho do mecanismo na presença da folga. Seu estudo revela como é feita a abordagem desta folga com a inclusão de modelos de contato e atrito para o movimento do pino que liga a biela ao pistão.

Alguns anos mais tarde modelou-se o efeito da lubrificação hidrodinâmica na folga (SCHWAB *et al.*, 2002), e verificou-se que esta era capaz de reduzir o efeito da degradação de desempenho no mecanismo também nos modelos computacionais.

Neste contexto, a análise do comportamento do mecanismo biela-manivela com folga na junta de revolução tornou-se um *benchmark*. Desde então os trabalhos envolvendo a análise de modelagens multicorpo apresentam seus resultados com a modelagem da folga na junta de revolução deste mecanismo.

Na última década, ganhou destaque o desenvolvimento da modelagem multicorpo apresentada por Flores em vários artigos (FLORES *et al.*; FLORES E AMBRÓSIO; FLORES *et al.*; FLORES, 2004; 2004; 2006; 2009). Nestes trabalhos, utilizados como base no desenvolvimento da modelagem das forças de contato e parâmetros de validação para a abordagem proposta, encontra-se um crescente aprimoramento dos modelos empregados na análise dinâmica de mecanismos com folga, inicialmente teórica e com quantificação de valores experimentais (FLORES *et al.*, 2011). Nos trabalhos deste autor também encontra-se uma revisão bibliográfica abrangente sobre a dinâmica multicorpo (FLORES, 2004).

A análise do efeito da lubrificação em mecanismos com folga na junta pino-pistão também é discutida na literatura recente através de aproximações para a equação de Reynolds nos mancais. Entre as soluções está o modelo de lubrificação proposto por (PINKUS E STERNLICHT, 1961), aplicado na modelagem do mecanismo biela-manivela (FLORES, 2009). Neste estudo verificou-se a influência da folga radial e da viscosidade do fluido lubrificante na resposta dinâmica do sistema.

Em trabalhos recentes encontrados na literatura, (GANDARA; BANNWART *et al.*, 2006; 2010) desenvolveram um modelo para lubrificação hidrodinâmica em mancais cujo eixo executa movimento de rotação alternada, justamente o caso da junta pino-pistão. Este modelo, desenvolvido no Laboratório de Máquinas Rotativas (LAMAR), descreve o comportamento das forças hidrodinâmicas exercidas no pino-pistão quando o fluido lubrificante está sujeito às acelerações desenvolvidas no mecanismo.

Este modelo foi então incorporado a uma aplicação de modelagem da dinâmica do mecanismo biela-manivela com folga (DANIEL E CAVALCA, 2011). Os resultados obtidos indicaram que o pino-pistão em poucos momentos permanecia em regime de lubrificação, sendo a maior parte do tempo em contato com o mancal. Porém nestes trabalhos o modelo dinâmico não incluía a mode-



lagem das forças de contato/impacto e de atrito que caracterizam o comportamento do mecanismo após o contato.

O presente trabalho busca aprimorar o modelo dinâmico anteriormente concebido, incluindo as forças de contato/impacto, atrito e de combustão aplicada no pistão. Dessa maneira, objetiva-se a caracterização do comportamento do mecanismo em condições mais próximas àquelas encontradas na literatura, e verificando a influência do modelo de lubrificação no desempenho do sistema.



### 3 Modelo dinâmico do sistema

Este capítulo descreve o procedimento utilizado na obtenção da equação do movimento do mecanismo biela-manivela com folga na junta de revolução. Os fundamentos e os detalhes do desenvolvimento proposto encontram-se no livro *Mechanics of Machines* (DOUGHTY, 1988) e na literatura (DANIEL, 2008), respectivamente.

#### 3.1 Introdução

O mecanismo biela-manivela é comumente utilizado em motores de combustão interna e compressores, sendo constituído basicamente por três componentes: a manivela (1), a biela (2) e o pistão (3), mostrados na figura. 3.1.

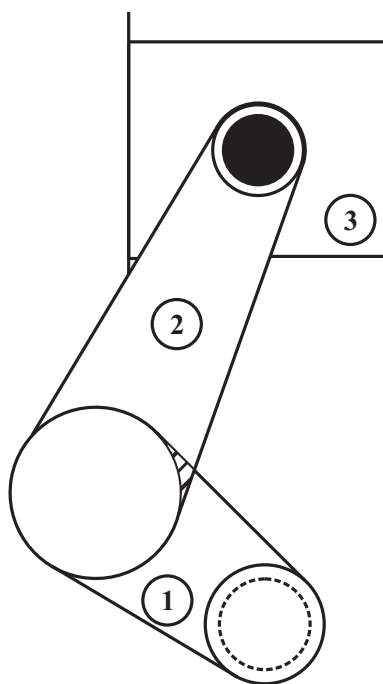


Figura 3.1: Mecanismo biela-manivela padrão.

### 3.2 Mecanismo biela-manivela com folga

A modelagem dinâmica convencional dos mecanismos assume juntas idealizadas, desconsiderando assim a presença das folgas. Nesta abordagem as juntas introduzem restrições cinemáticas (em função da geometria) em uma dada direção. A cada restrição imposta, diminui-se um grau de liberdade do mecanismo. Por exemplo, o mecanismo biela-manivela padrão tem apenas um grau de liberdade considerando todas as juntas ideais.

Porém, os mecanismos reais apresentam folgas, devido a vários fatores como tolerâncias de fabricação e montagem, dilatação térmica, entre outros. A introdução das folgas na modelagem elimina as restrições cinemáticas aumentando o número de graus de liberdade do sistema.

O mecanismo biela-manivela com folga na junta pino-pistão modelado neste trabalho possui 3 graus de liberdade. Este número de graus de liberdade conduz a escolha de 3 coordenadas generalizadas para descrever o movimento do sistema.

Optou-se por desenvolver as equações do movimento dividindo o sistema em dois subsistemas: o subsistema manivela-biela; e o subsistema pistão. A seguir descreve-se a análise cinemática desenvolvida para cada um deles (DOUGHTY, 1988), na qual considera-se os componentes do mecanismo como corpos rígidos.

### 3.3 Análise cinemática do subsistema manivela-biela

O subsistema manivela-biela é visto na figura 3.2, onde se definiram como referência os eixos coordenados  $(x,y)$ . O comprimento da manivela e da biela são  $R$  e  $L$  respectivamente, e as coordenadas generalizadas adotadas para descrever o movimento foram os ângulos  $q$  e  $A$  medidos em relação à vertical.

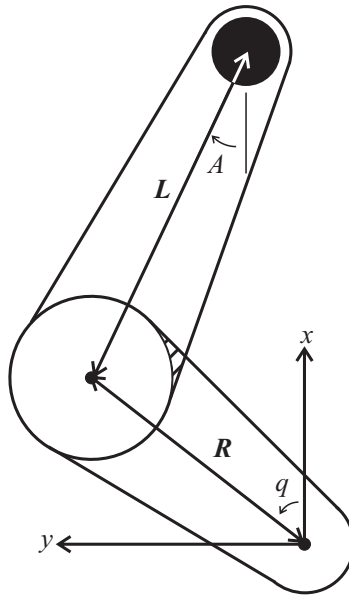


Figura 3.2: Subsistema manivela-biela.

### 3.3.1 Análise cinemática da junta pino-pistão

Inicialmente desenvolvem-se as equações cinemáticas para o centro da junta pino-pistão em relação à referência. Este pode se deslocar livremente dentro da folga assim, a sua posição é dada pela expressão (DOUGHTY, 1988):

$$\begin{aligned} X_p &= R \cos(q) + L \cos(A) \\ Y_p &= R \sin(q) - L \sin(A) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Da mesma maneira que a posição, a velocidade do pino-pistão agora depende de duas coordenadas generalizadas,  $q$  e  $A$ , conforme mostra a equação a seguir:

$$\begin{aligned}\dot{X}_p &= -R\dot{q} \sin(q) - L\dot{A} \sin(A) \\ \dot{Y}_p &= R\dot{q} \cos(q) - L\dot{A} \cos(A)\end{aligned}\quad (3.2)$$

na forma matricial, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \dot{X}_p \\ \dot{Y}_p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -R \sin(q) & -L \sin(A) \\ R \cos(q) & -L \cos(A) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \dot{A} \end{Bmatrix} = [K_P] \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \dot{A} \end{Bmatrix}\quad (3.3)$$

onde, define-se o coeficiente de velocidade como a matriz (DOUGHTY, 1988):

$$[K_P] = \begin{bmatrix} -R \sin(q) & -L \sin(A) \\ R \cos(q) & -L \cos(A) \end{bmatrix}\quad (3.4)$$

A aceleração do centro da junta pino é obtida derivando-se em relação ao tempo a expressão da velocidade (3.3) anteriormente obtida:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{X}_p \\ \ddot{Y}_p \end{Bmatrix} = [K_P] \begin{Bmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{A} \end{Bmatrix} + \dot{q} [L_{qp}] \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \dot{A} \end{Bmatrix} + \dot{A} [L_{Ap}] \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \dot{A} \end{Bmatrix}\quad (3.5)$$

Na qual definem-se as matrizes  $[L_{qp}]$  e  $[L_{Ap}]$  (DOUGHTY, 1988) como as derivadas parciais em relação à  $q$  e  $A$  respectivamente da matriz dos coeficientes de velocidade  $[K_P]$ :

$$[L_{qp}] = \frac{\partial}{\partial q} [K_P] = \begin{bmatrix} -R \cos(q) & 0 \\ -R \sin(q) & 0 \end{bmatrix}\quad (3.6)$$

$$[L_{Ap}] = \frac{\partial}{\partial A} [K_P] = \begin{bmatrix} 0 & -L \cos(A) \\ 0 & L \sin(A) \end{bmatrix}\quad (3.7)$$

As matrizes com a derivada dos coeficientes de velocidade podem ser agrupadas, permitindo que a aceleração seja escrita como:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{X}_P \\ \ddot{Y}_P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -R \sin(q) & -L \sin(A) \\ R \cos(q) & -L \cos(A) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{A} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -R \cos(q) & -L \cos(A) \\ -R \sin(q) & -L \sin(A) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}^2 \\ \dot{A}^2 \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

ou seja,

$$\begin{Bmatrix} \ddot{X}_P \\ \ddot{Y}_P \end{Bmatrix} = [K_P] \begin{Bmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{A} \end{Bmatrix} + [L_P] \begin{Bmatrix} \dot{q}^2 \\ \dot{A}^2 \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

e a derivada dos coeficientes de velocidade se torna:

$$[L_P] = \begin{bmatrix} -R \cos(q) & -L \cos(A) \\ -R \sin(q) & +L \sin(A) \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

### 3.4 Análise cinemática dos centros de massa do subsistema manivela-biela

Com o propósito de avaliar a energia cinética de cada componente do mecanismo, desenvolve-se nesta seção a análise cinemática para um ponto de interesse (o centro de massa) localizado em cada componente do subsistema manivela-biela.

### 3.4.1 Análise cinemática do centro de massa da manivela

Na figura 3.3 pode-se observar a localização de um ponto de interesse na manivela, cujo movimento deseja-se descrever. Para isto, utiliza-se um referencial móvel  $(U_M, V_M)$  solidário à manivela e que gira em torno da origem.

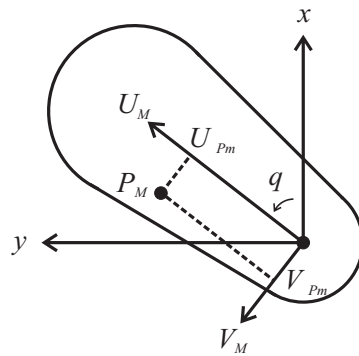


Figura 3.3: Análise do movimento do centro de massa da manivela.

A descrição do movimento deste ponto  $P_M$  no referencial inercial  $(x, y)$  é dada por:

$$\begin{aligned} X_{P_m} &= U_{P_m} \cos(q) - V_{P_m} \sin(q) \\ Y_{P_m} &= U_{P_m} \sin(q) + V_{P_m} \cos(q) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Derivando-se a posição deste ponto em relação ao tempo, encontra-se a sua velocidade:

$$\begin{aligned} \dot{X}_{P_m} &= \dot{q} [-U_{P_m} \sin(q) - V_{P_m} \cos(q)] \\ \dot{Y}_{P_m} &= \dot{q} [ U_{P_m} \cos(q) - V_{P_m} \sin(q)] \end{aligned} \quad (3.12)$$

Escrevendo-se esta velocidade em função das coordenadas generalizadas, tem-se:



$$\begin{Bmatrix} \dot{X}_{Pm} \\ \dot{Y}_{Pm} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -U_{Pm} \sin(q) - V_{Pm} \cos(q) & 0 \\ U_{Pm} \cos(q) - V_{Pm} \sin(q) & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \dot{A} \end{Bmatrix} = [K_{Pm}] \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \dot{A} \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

Assim, a matriz de coeficientes de velocidade é dada por:

$$[K_{Pm}] = \begin{bmatrix} -U_{Pm} \sin(q) - V_{Pm} \cos(q) & 0 \\ U_{Pm} \cos(q) - V_{Pm} \sin(q) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Derivando-se esta expressão em função do tempo, obtém-se a aceleração do ponto de interesse da manivela, dada a seguir:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{X}_{Pm} \\ \ddot{Y}_{Pm} \end{Bmatrix} = [K_{Pm}] \begin{Bmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{A} \end{Bmatrix} + \dot{q} [L_{qPm}] \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \dot{A} \end{Bmatrix} + \dot{A} [L_{APm}] \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \dot{A} \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

com a derivada dos coeficientes de velocidade em relação às coordenadas generalizadas dada por:

$$[L_{qPm}] = \frac{\partial}{\partial q} [K_{Pm}] = \begin{bmatrix} -U_{Pm} \cos(q) + V_{Pm} \sin(q) & 0 \\ -U_{Pm} \sin(q) - V_{Pm} \cos(q) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$[L_{APm}] = \frac{\partial}{\partial A} [K_{Pm}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

agrupando-se as expressões, chega-se a aceleração do ponto de interesse da manivela:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{X}_{Pm} \\ \ddot{Y}_{Pm} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -U_{Pm} \sin(q) - V_{Pm} \cos(q) & 0 \\ U_{Pm} \cos(q) - V_{Pm} \sin(q) & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{A} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -U_{Pm} \cos(q) + V_{Pm} \sin(q) & 0 \\ -U_{Pm} \sin(q) - V_{Pm} \cos(q) & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}^2 \\ \dot{A}^2 \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

de maneira compacta, a aceleração é dada por:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{X}_{Pm} \\ \ddot{Y}_{Pm} \end{Bmatrix} = [K_{Pm}] \begin{Bmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{A} \end{Bmatrix} + [L_{Pm}] \begin{Bmatrix} \dot{q}^2 \\ \dot{A}^2 \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

com,

$$[L_{Pm}] = \begin{bmatrix} -U_{Pm} \cos(q) + V_{Pm} \sin(q) & 0 \\ -U_{Pm} \sin(q) - V_{Pm} \cos(q) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

### 3.4.2 Análise cinemática do centro de massa da biela

Da modo similar ao desenvolvimento feito para a manivela, nesta seção desenvolvem-se as expressões para o movimento de um ponto de interesse na biela. A figura 3.4 apresenta o sistema referencial móvel solidário à biela, que facilita a descrição do movimento do ponto de interesse localizado nela.

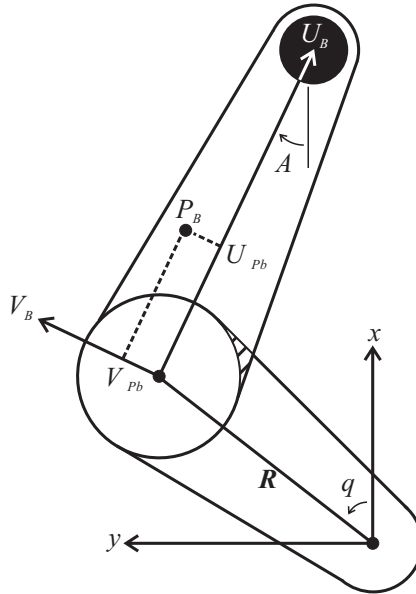


Figura 3.4: Análise do movimento do centro de massa da biela.

A posição do centro de massa da biela pode ser escrita em função das coordenadas generalizadas como:

$$\begin{aligned} X_{Pb} &= R \cos(q) + U_{Pb} \cos(A) + V_{Pb} \sin(A) \\ Y_{Pb} &= R \sin(q) - U_{Pb} \sin(A) + V_{Pb} \cos(A) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Derivando-se em relação ao tempo, obtém-se a velocidade:

$$\begin{aligned} \dot{X}_{Pb} &= -\dot{q}R \sin(q) + \dot{A} [-U_{Pb} \sin(A) + V_{Pb} \cos(A)] \\ \dot{Y}_{Pb} &= \dot{q}R \cos(q) + \dot{A} [-U_{Pb} \cos(A) - V_{Pb} \sin(A)] \end{aligned} \quad (3.22)$$

que pode ser reescrita agrupando-se os termos comuns:

$$\begin{Bmatrix} \dot{X}_{Pb} \\ \dot{Y}_{Pb} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -R \sin(q) & -U_{Pb} \sin(A) + V_{Pb} \cos(A) \\ R \cos(q) & -U_{Pb} \cos(A) - V_{Pb} \sin(A) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \dot{A} \end{Bmatrix} = [K_{Pb}] \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \dot{A} \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

o coeficiente de velocidade é dado por:

$$[K_{Pb}] = \begin{bmatrix} -R \sin(q) & -U_{Pb} \sin(A) + V_{Pb} \cos(A) \\ R \cos(q) & -U_{Pb} \cos(A) - V_{Pb} \sin(A) \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

A aceleração do ponto de interesse da biela é obtida através da derivada temporal da sua velocidade:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{X}_{Pb} \\ \ddot{Y}_{Pb} \end{Bmatrix} = [K_{Pb}] \begin{Bmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{A} \end{Bmatrix} + \dot{q} [L_{qPb}] \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \dot{A} \end{Bmatrix} + \dot{A} [L_{APb}] \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \dot{A} \end{Bmatrix} \quad (3.25)$$

na qual podem-se escrever as matrizes para as derivadas dos coeficientes de velocidade:

$$[L_{qPb}] = \frac{\partial}{\partial q} [K_{Pb}] = \begin{bmatrix} -R \cos(q) & 0 \\ -R \sin(q) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$[L_{APb}] = \frac{\partial}{\partial A} [K_{Pb}] = \begin{bmatrix} 0 & -U_{Pb} \cos(A) - V_{Pb} \sin(A) \\ 0 & U_{Pb} \sin(A) - V_{Pb} \cos(A) \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

resultando na seguinte expressão:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{X}_{Pb} \\ \ddot{Y}_{Pb} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -R \sin(q) & -U_{Pb} \sin(A) + V_{Pb} \cos(A) \\ R \cos(q) & -U_{Pb} \cos(A) - V_{Pb} \sin(A) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{A} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -R \cos(q) & -U_{Pb} \cos(A) - V_{Pb} \sin(A) \\ -R \sin(q) & U_{Pb} \sin(A) - V_{Pb} \cos(A) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}^2 \\ \dot{A}^2 \end{Bmatrix} \quad (3.28)$$

que na forma compacta, fica:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{X}_{Pb} \\ \ddot{Y}_{Pb} \end{Bmatrix} = [K_{Pb}] \begin{Bmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{A} \end{Bmatrix} + [L_{Pb}] \begin{Bmatrix} \dot{q}^2 \\ \dot{A}^2 \end{Bmatrix} \quad (3.29)$$

com,

$$[L_{Pb}] = \begin{bmatrix} -R \cos(q) & -U_{Pb} \cos(A) - V_{Pb} \sin(A) \\ -R \sin(q) & U_{Pb} \sin(A) - V_{Pb} \cos(A) \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

### 3.5 Análise dinâmica do subsistema manivela-biela

A análise dinâmica do subsistema manivela-biela conduz à determinação da sua equação do movimento. Para isso, inicialmente foi determinada a energia cinética do subsistema e em seguida aplicou-se o método de *Lagrange* (DOUGHTY, 1988) para derivar a equação do movimento.

Pode-se escrever uma expressão para o vetor contendo as velocidades do centro de massa de cada componente do mecanismo. Este vetor (3.31) é utilizado para o cálculo da energia cinética do subsistema.

$$\begin{Bmatrix} \dot{X}_{Pm} \\ \dot{Y}_{Pm} \\ \dot{X}_{Pb} \\ \dot{Y}_{Pb} \\ \dot{q} \\ \dot{A} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -U_{Pm} \sin(q) - V_{Pm} \cos(q) & 0 \\ U_{Pm} \cos(q) - V_{Pm} \sin(q) & 0 \\ -R \sin(q) & -U_{Pb} \sin(A) + V_{Pb} \cos(A) \\ R \cos(q) & -U_{Pb} \cos(A) - V_{Pb} \sin(A) \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \dot{A} \end{Bmatrix} \quad (3.31)$$

que na forma compacta fica:

$$\begin{Bmatrix} \dot{X}_{Pm} \\ \dot{Y}_{Pm} \\ \dot{X}_{Pb} \\ \dot{Y}_{Pb} \\ \dot{q} \\ \dot{A} \end{Bmatrix} = [K_C] \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \dot{A} \end{Bmatrix} \quad (3.32)$$

onde, pode-se denotar o termo  $K_C$  como o coeficiente de velocidade do subsistema, dado por:

$$[K_C] = \begin{bmatrix} -U_{Pm} \sin(q) - V_{Pm} \cos(q) & 0 \\ U_{Pm} \cos(q) - V_{Pm} \sin(q) & 0 \\ -R \sin(q) & -U_{Pb} \sin(A) + V_{Pb} \cos(A) \\ R \cos(q) & -U_{Pb} \cos(A) - V_{Pb} \sin(A) \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

A energia cinética deste subsistema é calculada como a soma da energia cinética de translação e de rotação de cada componente (equação 3.34):

$$T = \sum_i \frac{1}{2} M_i V_{i_{CM}}^2 + \sum_i \frac{1}{2} I_{i_{CM}} \omega_i^2 \quad (3.34)$$

onde  $M$ ,  $I$ ,  $V_{CM}$  e  $\omega$  representam a massa, e o momento de inércia de massa, a velocidade de translação do centro de massa e a velocidade angular de cada componente no plano.

Reescrevendo a energia cinética na forma matricial tem-se:

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{q}_i\}^T [K_C]^T [M] [K_C] \{\dot{q}_i\} \quad (3.35)$$

que para o subsistema analisado torna-se:

$$T = \frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} \dot{q} \\ \dot{A} \end{matrix} \right\} [K_C]^T [M] [K_C] \left\{ \begin{matrix} \dot{q} \\ \dot{A} \end{matrix} \right\} \quad (3.36)$$

onde  $[M]$  é a matriz de massa

$$\begin{bmatrix} M_M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_M & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_B \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

### 3.5.1 Forças generalizadas aplicadas no subsistema manivela-biela

Após a determinação da energia cinética do subsistema manivela-biela, faz-se necessário o cálculo das componentes generalizadas dos esforços que atuam no mecanismo, e para isto, utiliza-se o princípio do trabalho virtual (DOUGHTY, 1988).

O trabalho virtual é calculado como a soma do produto dos deslocamentos virtuais ( $\delta q_i$ ), onde  $q_i$  refere-se a cada coordenada generalizada, associados ao ponto de aplicação de cada carregamento externo, pelo respectivo esforço, conforme a equação 3.38.

$$\delta W = \sum_i F_i \delta r_i + \sum_i \tau_i \delta \alpha_i = Q \delta q \quad (3.38)$$

na qual,  $\delta W$  representa o trabalho virtual,  $F_i$  e  $\tau_i$  representam a  $i$ ésima força e o  $i$ ésimo momento aplicado ao sistema. A variável  $Q$  é o vetor contendo as componentes generalizadas das forças.

Na figura 3.5 existem duas forças externas:  $F_x$  e  $F_y$  que atuam no pino-pistão e são responsáveis pelo acoplamento dinâmico dos subsistemas. Há ainda a aplicação de dois torques: um externo,  $\tau_{ext}$ , e um dissipativo,  $\tau_d$ , ambos na manivela.

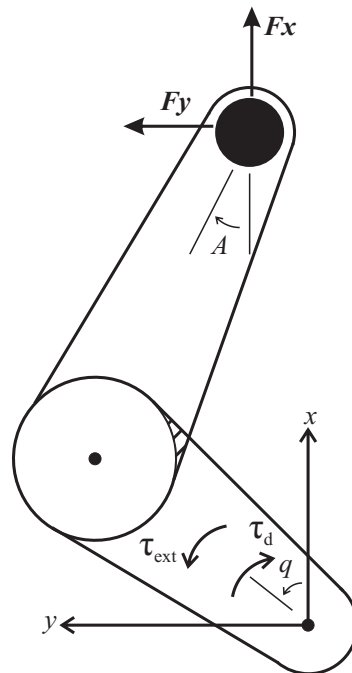


Figura 3.5: Esforços externos aplicados ao subsistema manivela-biela.



Calculando-se os deslocamentos virtuais do pino, em função das coordenadas generalizadas, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \delta X_p \\ \delta Y_p \end{Bmatrix} = [K_P] \begin{Bmatrix} \delta q \\ \delta A \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -R \sin(q) & -L \sin(A) \\ R \cos(q) & -L \cos(A) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta q \\ \delta A \end{Bmatrix} \quad (3.39)$$

Obtém-se as componentes generalizadas das forças que atuam na junta pino-pistão em função de  $q$  e  $A$  como:

$$\begin{Bmatrix} Q_q \\ Q_A \end{Bmatrix} = [K_P]^T \begin{Bmatrix} F_{xp} \\ F_{yp} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -R \sin(q) & R \cos(q) \\ -L \sin(A) & -L \cos(A) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{xp} \\ F_{yp} \end{Bmatrix} \quad (3.40)$$

Adicionando-se os termos referentes ao torque externo ( $\tau_{ext}$ ) e o torque ( $\tau_d$ ) dissipativo, considerado como proporcional à velocidade angular na manivela ( $D\dot{q}$ ), ao subsistema tem-se:

$$\begin{Bmatrix} Q_q \\ Q_A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F_{xp}R \sin(q) + F_{yp}R \cos(q) \\ -F_{xp}L \sin(A) - F_{yp}L \cos(A) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \tau_{ext} \\ 0 \end{Bmatrix} - D \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F_{xp}R \sin(q) + F_{yp}R \cos(q) + \tau_{ext} - D\dot{q} \\ -F_{xp}L \sin(A) - F_{yp}L \cos(A) \end{Bmatrix} \quad (3.41)$$

### 3.5.2 Equação do movimento do subsistema biela-manivela

A fim de determinar a equação do movimento para o conjunto biela-manivela, utiliza-se a equação de *Lagrange*, exposta abaixo

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^{n.c.} \quad (3.42)$$

onde  $L$  é conhecido como o termo Lagrangiano, dado por

$$L = T - E_p \quad (3.43)$$

em que  $T$  é a energia cinética e  $E_p$  é a energia potencial.

Substituindo-se o Lagrangiano na equação de *Lagrange*, tem-se

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_p}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial E_p}{\partial q_j} = Q_j^{n.c.} \quad (3.44)$$

Como a energia potencial do subsistema não depende da derivada temporal das coordenadas generalizadas,

$$\frac{\partial E_p}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad (3.45)$$

simplifica-se a expressão para o desenvolvimento das equações do movimento deste conjunto.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial E_p}{\partial q_j} = Q_j^{n.c.} \quad (3.46)$$

Derivando-se a energia cinética em função de cada derivada temporal das coordenadas generalizadas, tem-se

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \frac{1}{2} \left\{ \dot{q} \quad \dot{A} \right\} \left( [L_q]^T [M] [K_C] + [K_C]^T [M] [L_q] \right) \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \dot{A} \end{Bmatrix} \quad (3.47)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{A}} = \frac{1}{2} \left\{ \dot{q} \quad \dot{A} \right\} \left( [L_A]^T [M] [K_C] + [K_C]^T [M] [L_A] \right) \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \dot{A} \end{Bmatrix} \quad (3.48)$$

No qual  $[L_q]$  e  $[L_A]$  são dados por

$$[L_q] = \frac{\partial}{\partial q} [K_C] = \begin{bmatrix} -U_{P_m} \cos(q) + V_{P_m} \sin(q) & 0 \\ -U_{P_m} \sin(q) - V_{P_m} \cos(q) & 0 \\ -R \cos(q) & 0 \\ -R \sin(q) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

$$[L_A] = \frac{\partial}{\partial A} [K_C] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -U_{P_b} \cos(A) - V_{P_b} \sin(A) \\ 0 & U_{P_b} \sin(A) - V_{P_b} \cos(A) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

Derivando-se a energia cinética em função das coordenadas generalizadas,

$$\frac{\partial T}{\partial q} = \left\{ \dot{q} \quad \dot{A} \right\} [N_q] \left\{ \begin{matrix} \dot{q} \\ \dot{A} \end{matrix} \right\} \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial T}{\partial A} = \left\{ \dot{q} \quad \dot{A} \right\} [N_A] \left\{ \begin{matrix} \dot{q} \\ \dot{A} \end{matrix} \right\} \quad (3.52)$$

define-se  $[N_q]$  e  $[N_A]$  (DOUGHTY, 1988) como

$$[N_q] = \frac{1}{2} \left( [L_q]^T [M] [K_C] + [K_C]^T [M] [L_q] \right) \quad (3.53)$$

$$[N_A] = \frac{1}{2} \left( [L_A]^T [M] [K_C] + [K_C]^T [M] [L_A] \right) \quad (3.54)$$

e agrupando-se na forma matricial,

$$\frac{\partial T}{\partial \begin{Bmatrix} q \\ A \end{Bmatrix}} = \left( \begin{bmatrix} \dot{q} & \dot{A} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} [N_q] + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dot{q} & \dot{A} \end{bmatrix} [N_A] \right) \begin{Bmatrix} q \\ A \end{Bmatrix} \quad (3.55)$$

Escrevendo-se a equação da energia cinética na forma compacta,

$$\frac{\partial T}{\partial \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \dot{A} \end{Bmatrix}} = ([K_C]^T [M] [K_C]) \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \dot{A} \end{Bmatrix} \quad (3.56)$$

e substituindo-se na equação de *Lagrange*,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \dot{A} \end{Bmatrix}} &= [K_C]^T [M] [K_C] \begin{Bmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{A} \end{Bmatrix} + \\ \dot{q} \left( [L_q]^T [M] [K_C] + [K_C]^T [M] [L_q] \right) &\begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \dot{A} \end{Bmatrix} + \\ \dot{A} \left( [L_A]^T [M] [K_C] + [K_C]^T [M] [L_A] \right) &\begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \dot{A} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.57)$$

Que resulta em:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \dot{A} \end{Bmatrix}} = [K_C]^T [M] [K_C] \begin{Bmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{A} \end{Bmatrix} + \left( 2\dot{q} [N_q] + 2\dot{A} [N_A] \right) \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \dot{A} \end{Bmatrix} \quad (3.58)$$

Agrupando as equações, tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \dot{A} \end{Bmatrix}} - \frac{\partial T}{\partial \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \dot{A} \end{Bmatrix}} &= [K_C]^T [M] [K_C] \begin{Bmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{A} \end{Bmatrix} + \\
&\quad \left( 2\dot{q} [N_q] + 2\dot{A} [N_A] \right) \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \dot{A} \end{Bmatrix} - \\
&\quad - \left( \begin{bmatrix} \dot{q} & \dot{A} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} [N_q] + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dot{q} & \dot{A} \end{bmatrix} [N_A] \right) \begin{Bmatrix} q \\ A \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.59}$$

Rearranjando os termos acima, encontra-se:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \dot{A} \end{Bmatrix}} - \frac{\partial T}{\partial \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \dot{A} \end{Bmatrix}} &= [K_C]^T [M] [K_C] \begin{Bmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{A} \end{Bmatrix} + \\
&\quad \left( 2\dot{q} [N_q] + 2\dot{A} [N_A] \right) \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \dot{A} \end{Bmatrix} + \\
&\quad \left( \begin{bmatrix} \dot{q} & -\dot{A} \\ 0 & 2\dot{q} \end{bmatrix} [N_q] + \begin{bmatrix} 2\dot{A} & 0 \\ -\dot{q} & \dot{A} \end{bmatrix} [N_A] \right) \begin{Bmatrix} q \\ A \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.60}$$

Fazendo-se o cálculo da energia potencial gravitacional associada ao subsistema biela-manivela, tem-se:

$$E_p = g [(M_M X_{Pm}) + (M_B X_{Pb})] \tag{3.61}$$

derivando-se em relação à coordenada generalizada  $q$ ;

$$\frac{\partial E_p}{\partial q} = g \left[ \left( M_M \frac{\partial X_{Pm}}{\partial q} \right) + \left( M_B \frac{\partial X_{Pb}}{\partial q} \right) \right] \quad (3.62)$$

obtém-se:

$$\frac{\partial E_p}{\partial q} = g [M_M (-U_{Pm} \sin(q) - V_{Pm} \cos(q)) + M_B (-R \sin(q))] \quad (3.63)$$

e derivando-se em relação à  $A$ :

$$\frac{\partial E_p}{\partial A} = g \left[ \left( M_M \frac{\partial X_{Pm}}{\partial A} \right) + \left( M_B \frac{\partial X_{Pb}}{\partial A} \right) \right] \quad (3.64)$$

obtém-se:

$$\frac{\partial E_p}{\partial A} = g [M_B (-U_{Pb} \sin(A) + V_{Pb} \cos(A))] \quad (3.65)$$

de modo que a expressão matricial torna-se:

$$\frac{\partial E_p}{\partial \begin{Bmatrix} q \\ A \end{Bmatrix}} = g \begin{Bmatrix} M_M (-U_{Pm} \sin(q) - V_{Pm} \cos(q)) + M_B (-R \sin(q)) \\ M_B (-U_{Pb} \sin(A) + V_{Pb} \cos(A)) \end{Bmatrix} \quad (3.66)$$

Desta forma a equação do movimento para o subsistema biela-manivela pode ser escrita na forma completa como:

$$\begin{aligned}
& [K_C]^T [M] [K_C] \begin{Bmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{A} \end{Bmatrix} + (2\dot{q} [N_q] + 2\dot{A} [N_A]) \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \dot{A} \end{Bmatrix} + \\
& \left( \begin{bmatrix} \dot{q} & -\dot{A} \\ 0 & 2\dot{q} \end{bmatrix} [N_q] + \begin{bmatrix} 2\dot{A} & 0 \\ -\dot{q} & \dot{A} \end{bmatrix} [N_A] \right) \begin{Bmatrix} q \\ A \end{Bmatrix} + D \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ 0 \end{Bmatrix} + \\
& g \begin{Bmatrix} M_M (-U_{Pm} \sin(q) - V_{Pm} \cos(q)) + M_B (-R \sin(q)) \\ M_B (-U_{Pb} \sin(A) + V_{Pb} \cos(A)) \end{Bmatrix} = \\
& \begin{Bmatrix} -F_{xp} R \sin(q) + F_{yp} R \cos(q) + \tau_{ext} \\ -F_{xp} L \sin(A) - F_{yp} L \cos(A) \end{Bmatrix} \quad (3.67)
\end{aligned}$$

### 3.5.3 Equação de movimento do pistão

A determinação da equação de movimento do pistão é feita através do balanço de forças que agem sobre ele. Assim, pela segunda lei de Newton

$$M_{PT} \ddot{X}_{PT} = -F_{ext} - F_{xp} - gM_{PT} \quad (3.68)$$

onde o termo  $F_{ext}$  contabiliza a força externa aplicada ao pistão,  $F_{xp}$  representa a força de transmissão do entre o subsistema biela-manivela e o pistão, e o termo  $gM_{PT}$  representa o termo da energia potencial (peso).

Assim, o sistema de equações diferenciais ordinárias acoplado é dado por:

$$\begin{aligned}
& [K_C]^T [M] [K_C] \begin{Bmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{A} \end{Bmatrix} + (2\dot{q} [N_q] + 2\dot{A} [N_A]) \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \dot{A} \end{Bmatrix} + \\
& \left( \begin{bmatrix} \dot{q} & -\dot{A} \\ 0 & 2\dot{q} \end{bmatrix} [N_q] + \begin{bmatrix} 2\dot{A} & 0 \\ -\dot{q} & \dot{A} \end{bmatrix} [N_A] \right) \begin{Bmatrix} q \\ A \end{Bmatrix} + D \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ 0 \end{Bmatrix} + \\
& g \begin{Bmatrix} M_M (-U_{Pm} \sin(q) - V_{Pm} \cos(q)) + M_B (-R \sin(q)) \\ M_B (-U_{Pb} \sin(A) + V_{Pb} \cos(A)) \end{Bmatrix} = \\
& \begin{Bmatrix} -F_{xp} R \sin(q) + F_{yp} R \cos(q) + \tau_{ext} \\ -F_{xp} L \sin(A) - F_{yp} L \cos(A) \end{Bmatrix} \\
& M_{PT} \ddot{X}_{PT} = -F_{ext} - F_{xp} - g M_{PT} \tag{3.69}
\end{aligned}$$

### 3.6 Análise do movimento relativo do pino e do pistão

Como será verificado no desenvolvimento do trabalho, é de vital importância o conhecimento exato das condições nas quais, durante a integração das equações propostas, ocorre o contato entre o pino e o pistão.

Define-se a distância relativa entre o centro do furo do pistão e o centro do pino na folga como *excentricidade*, denotada por  $\varepsilon$ .

A excentricidade pode variar de zero, quando o centro do pino encontra-se alinhado com o centro do furo do pistão, até o valor máximo correspondente ao tamanho da folga, denominada folga radial  $c_r$  (figura 3.6).



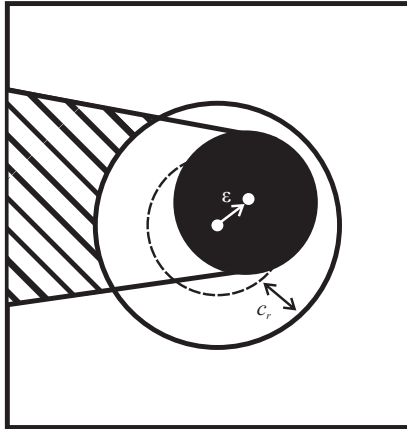


Figura 3.6: excentricidade e folga radial.

A excentricidade é calculada como sendo a diferença das posições do centro do pino e do centro do pistão, ambas no referencial inercial:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon &= \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2} \\
 \varepsilon_x &= X_p - X_{pt} \\
 \varepsilon_y &= Y_p - Y_{pt}
 \end{aligned}
 \tag{3.70}$$

Outra variável de interesse é o ponto onde exatamente ocorre o contato, que pode ser calculado como:

$$\begin{aligned}
 X_k^{cto} &= X_k + R_k \cos(\theta) \\
 Y_k^{cto} &= Y_k + R_k \sin(\theta)
 \end{aligned}
 \quad k = i, j
 \tag{3.71}$$

com  $i, j$  sendo o pino e o pistão, respectivamente. Além disso  $R$  representa o raio do pino e  $\theta$  é dado por:

$$\theta = \text{atan} \left( \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} \right)
 \tag{3.72}$$

Pode-se definir ainda a velocidade de excentricidade, utilizada em cálculos de força de lubrificação descritos no capítulo 5, como:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_x \dot{\varepsilon}_x + \varepsilon_y \dot{\varepsilon}_y}{\varepsilon} \quad (3.73)$$

A velocidade no ponto de contato pode ser calculada como:

$$\begin{aligned} \dot{X}_k^{cto} &= \dot{X}_k - R_k \dot{\theta} \sin(\theta) \\ \dot{Y}_k^{cto} &= \dot{Y}_k + R_k \dot{\theta} \cos(\theta) \end{aligned} \quad k = i, j \quad (3.74)$$

onde os termos denotados com (  $\dot{\quad}$  ) são obtidos através da diferenciação no tempo. A velocidade relativa entre o pino e o pistão é dada por:

$$\begin{aligned} \dot{X}_{rel}^{cto} &= \dot{X}_{pistao}^{cto} - \dot{X}_{pino}^{cto} \\ \dot{Y}_{rel}^{cto} &= \dot{Y}_{pistao}^{cto} - \dot{Y}_{pino}^{cto} \end{aligned} \quad (3.75)$$

Por fim, avalia-se a velocidade radial  $v_N$  e tangencial  $v_T$  relativa do pino com o pistão no ponto de contato:

$$\begin{aligned} v_N &= \dot{X}_{rel}^{cto} \cos(\theta) + \dot{Y}_{rel}^{cto} \sin(\theta) \\ v_T &= -\dot{X}_{rel}^{cto} \sin(\theta) + \dot{Y}_{rel}^{cto} \cos(\theta) \end{aligned} \quad (3.76)$$

Na análise do contato do pino com o pistão, define-se a profundidade de penetração normal ao contato, denominada  $\delta$  (figura 3.7), expressa por:

$$\delta = \varepsilon - c_r \quad (3.77)$$

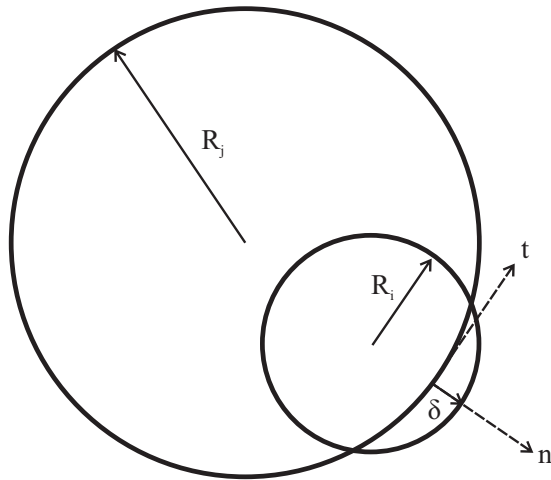


Figura 3.7: profundidade de penetração normal ao contato  $\delta$ .

e a velocidade de penetração normal ao contato, dada por:

$$\dot{\delta} = \dot{\epsilon} \quad (3.78)$$

### 3.7 Cálculos das forças e momentos no mecanismo com folga

O cálculo das forças e momentos desenvolvidos em cada componente do mecanismo é feito através das equações de *Newton*. Na figura 3.8 é apresentado o diagrama de corpo livre do mecanismo simulado.

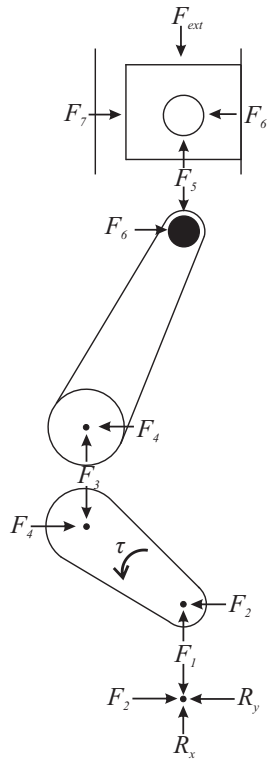


Figura 3.8: Diagrama de corpo livre.

Para este diagrama de corpo livre, chegam-se às seguintes equações:

Na manivela,

$$\begin{aligned}
 F_1 - F_3 &= M_M \ddot{X}_{MCG} + M_M g \\
 F_2 - F_4 &= M_M \ddot{Y}_{MCG} \\
 \tau_{ext} - \tau_d + F_3 R \sin(q) - F_4 R \cos(q) &= I_0 \ddot{q}
 \end{aligned}
 \tag{3.79}$$

Na biela,

$$\begin{aligned}
F_3 - F_5 &= M_B \ddot{X}_{BCG} + M_B g \\
F_4 - F_6 &= M_B \ddot{Y}_{BCG} \\
F_4 [U_{Pb} \cos(A) + V_{Pb} \sin(A)] + \\
F_3 [U_{Pb} \sin(A) - V_{Pb} \cos(A)] + \\
F_5 [(L - U_{Pb}) \sin(A) + V_{Pb} \cos(A)] \\
+ F_6 [(L - U_{Pb}) \cos(A) - V_{Pb} \sin(A)] &= I_{BCG} \ddot{A}
\end{aligned} \tag{3.80}$$

No pistão,

$$\begin{aligned}
F_5 - F_{ext} &= M_P \ddot{X}_{PCG} + M_P g \\
F_6 - F_7 &= 0
\end{aligned} \tag{3.81}$$

No pino de apoio da manivela,

$$\begin{aligned}
R_x - F_1 + F_{ext} &= 0 \\
R_y - F_2 + F_6 &= 0
\end{aligned} \tag{3.82}$$

Resolvendo-se estas equações com os valores calculados das acelerações de cada componente do mecanismo, tem-se

$$\begin{aligned}
F_5 &= F_{ext} + M_P \ddot{X}_{PCG} + M_P g \\
F_3 &= F_5 + M_B \ddot{X}_{BCG} + M_B g \\
F_1 &= F_3 + M_M \ddot{X}_{MCG} + M_M g \\
F_6 &= I_{BCG} \ddot{A} - [M_B \ddot{Y}_{BCG} (U_{Pb} \cos(A) + V_{Pb} \sin(A)) + \\
F_3 (U_{Pb} \sin(A) - V_{Pb} \cos(A)) + F_5 ((L - U_{Pb}) \sin(A) + V_{Pb} \cos(A))] / L \cos(A) \\
F_7 &= F_6 \\
F_4 &= F_6 + M_B \ddot{Y}_{BCG} \\
F_2 &= F_4 + M_M \ddot{Y}_{MCG} \\
R_x &= F_1 - F_{ext} \\
R_y &= F_2 - F_6
\end{aligned} \tag{3.83}$$

### 3.8 Integração das equações do movimento

A integração das equações diferenciais do movimento desenvolvidas neste capítulo é feita através da rotina *ODE*, que encontra-se implementada em FORTRAN e disponível na literatura (SHAMPINE E GORDON, 1975).

Este código inclui quatro rotinas *ODE*, *DE*, *STEP* e *INTRP*, sendo a primeira uma rotina que aloca variáveis utilizadas na integração, a segunda controla o processo de integração definindo quando a rotina *STEP* e *INTRP* são chamadas.

A rotina *STEP* avança a integração em um passo de tempo, sendo executada a cada chamada do integrador. Ela utiliza as equações de Adams-Bashforth (*predictor*) para prever o valor das equações diferenciais e as fórmulas de Adams-Moulton (*corrector*) para corrigir as previsões, num método conhecido como *PECE*. Este código também é capaz de determinar o passo de tempo adequado para conduzir a integração, de modo a tornar o processo mais eficiente.

Como a rotina integra além do passo de tempo máximo definido pelo usuário, ao completar a tarefa ela chama a rotina *INTRP*, capaz de interpolar a solução obtida para o tempo específico requisitado. Tanto a ordem do passo de integração, quanto a ordem do polinômio interpolador são ajustadas de acordo com o erro máximo absoluto e relativo especificados pelo usuário.

O processo de integração das equações apresentadas neste capítulo é esquematizado no fluxograma da figura 3.9. O programa inicia o processo de integração das equações do movimento a partir das condições iniciais. A partir delas são calculadas as posições e velocidades de cada um dos componentes do mecanismo. Neste momento determina-se a posição do pino e do pistão e verifica-se se ambos estão em contato. Caso o contato esteja estabelecido, as forças de contato são calculadas, do contrário o modelo de lubrificação é utilizado. Em seguida calculam-se as forças exercidas no pino e no pistão e assim calculam-se as acelerações de cada componente. Por fim calculam-se as forças de reação nos vínculos e caso o tempo de integração seja superior ao tempo final, o programa finaliza.

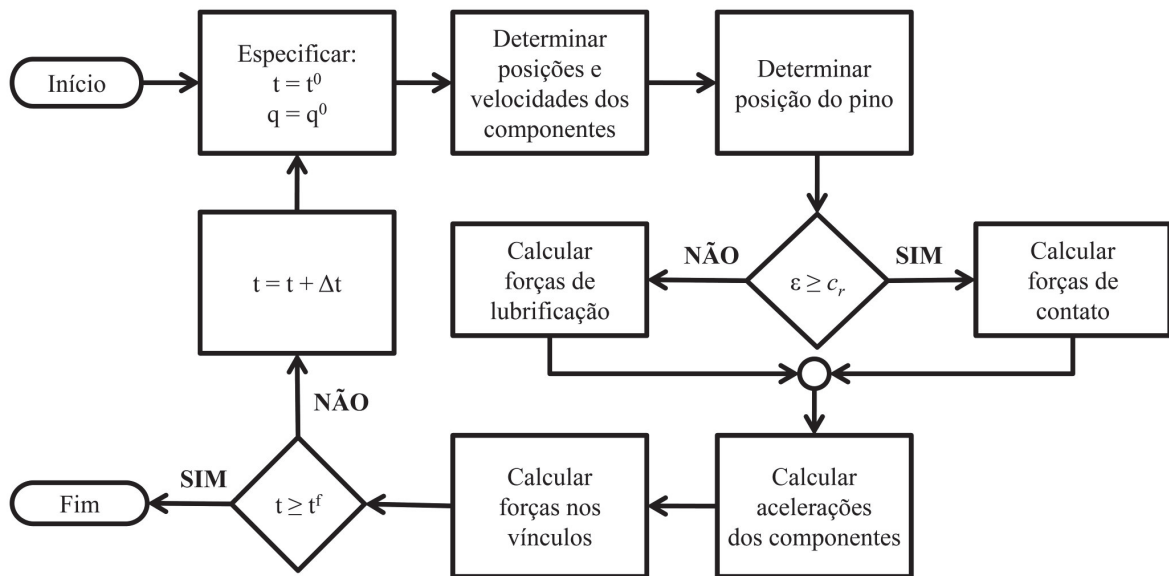


Figura 3.9: Fluxograma do algoritmo proposto.

### 3.9 Considerações finais

Este capítulo apresentou o cerne da modelagem dinâmica do mecanismo biela-manivela padrão e com folga na junta pino-pistão. Observa-se que as equações do movimento obtidas são não lineares, e permitem a análise apropriada dos efeitos da folga na junta de revolução do pino-pistão.





## **4 Modelagem das forças de contato**

### **4.1 Introdução**

Neste capítulo são apresentados os principais modelos de contato/impacto utilizados nas simulações dinâmicas do mecanismo biela-manivela. Esta breve revisão baseou-se nos trabalhos encontrados na literatura (FLORES, 2004).

### **4.2 Modelos para as forças de contato/impacto**

Entre as abordagens propostas na literatura para a modelagem das forças de contato/impacto destacam-se duas aproximações. A primeira assume que o período de impacto/contato entre os corpos é muito curto, permitindo que a integração das equações do movimento seja interrompida e o balanço dos momentos utilizado para determinar as condições do movimento após o impacto. Essa abordagem é dita descontínua, por não caracterizar o desempenho do mecanismo durante o impacto.

A segunda abordagem sugere que as forças provenientes das colisões entre os corpos sejam funções contínuas dependentes da deformação experimentada na zona de contato. A partir da colisão, nesta região surgem forças normais de contato, aplicadas na direção perpendicular ao plano de colisão dos corpos.

A descrição contínua das forças de impacto/contato permite a caracterização do comportamento do sistema quando a aproximação de contato instantâneo não for mais válida, situação típica de mecanismos com contato intermitente.

#### **4.2.1 Modelos contínuos de força de contato/impacto**

Os modelos contínuos para força de contato/impacto encontrados na literatura geralmente fazem o uso de poucos parâmetros para descrever o fenômeno. Entre estes parâmetros estão a deformação localizada na região do contato, e no caso da inclusão da dissipação de energia, a

velocidade de impacto e a quantificação de um coeficiente de restituição empírico que englobe os efeitos dissipativos.

Uma das abordagens mais simples para estabelecer uma relação entre força de contato/impacto e deformação na região de contato considera o modelo proposto inicialmente por Hertz para o contato entre esferas. Neste modelo a força de contato é representada como uma função exponencial (equação 4.1) da profundidade de penetração normal ao plano de contato entre as esferas.

$$F_N = K\delta^n \quad (4.1)$$

Na qual  $K$  é denominada a rigidez generalizada e  $\delta$  é a profundidade de penetração normal ao plano de contato (identação) entre as esferas. O expoente  $n$  reflete o tipo de materiais em contato e a rigidez generalizada é dependente das propriedades geométricas e dos materiais em contato. Para duas esferas em contato, a rigidez generalizada é função do raio de curvatura no contato para ambas as esferas ( $i$  e  $j$ ), conforme a expressão 4.2:

$$K = \frac{4}{3(\sigma_i + \sigma_j)} \left[ \frac{R_i R_j}{R_i + R_j} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.2)$$

onde,

$$\sigma_k = \frac{1 - \nu_k^2}{E_k} \left[ \frac{R_i R_j}{R_i + R_j} \right]^{\frac{1}{2}}; \quad (k = i, j) \quad (4.3)$$

com  $\nu_k$  sendo a razão de Poisson e  $E_k$  o módulo de elasticidade de Young de cada esfera.

Um gráfico típico, obtido a partir da integração das equações do movimento para duas esferas em colisão, da força normal e a profundidade de penetração é dado na figura 4.1:

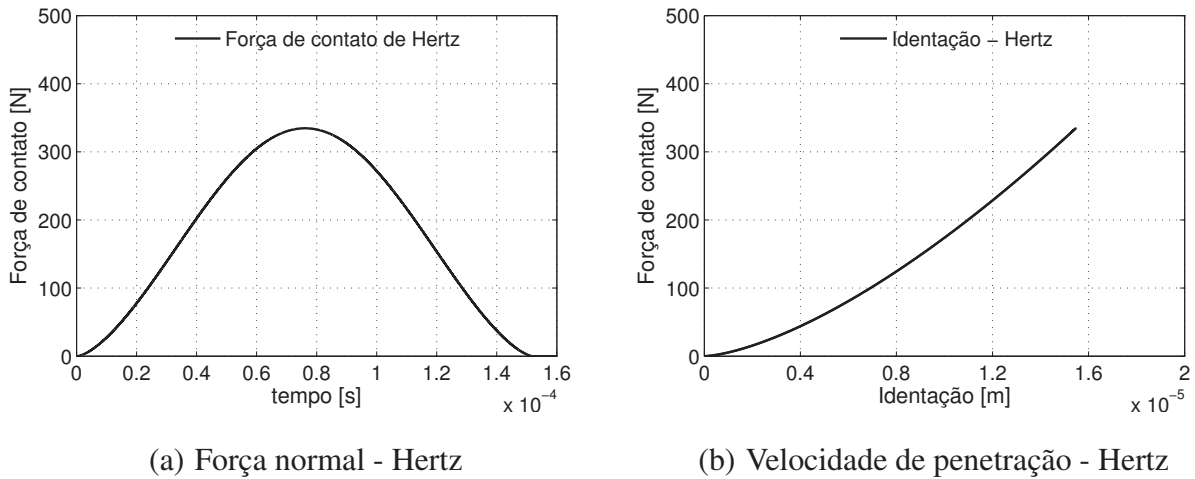


Figura 4.1: modelo de contato de Hertz

Apesar do modelo de contato de Hertz ter sido formulado para o contato entre esferas, ele também pode ser utilizado na modelagem do contato cilíndrico que ocorre na junta pino-pistão. Entretanto o fenômeno do impacto em sistemas mecânicos conduz a dissipação de energia do sistema, que segundo a literatura consultada, pode ser modelada de acordo com amortecimento histerético.

Baseados em trabalhos desenvolvidos por outros pesquisadores, (LANKARANI E NIKRAVESH, 1994) apresentam um modelo que inclui a lei de contato de Hertz com um termo de amortecimento histerético dependente da velocidade de penetração no momento do impacto e no decorrer da penetração e do coeficiente de restituição associado à colisão:

$$F_N = K\delta^n + D_c\dot{\delta} \quad (4.4)$$

$\dot{\delta}$  é a velocidade relativa de impacto e o termo  $D_c$ , que representa o amortecimento, é dado por:

$$D_c = \chi\delta^n \quad (4.5)$$

onde:

$$\chi = \frac{3K(1 - e^2)}{4\dot{\delta}^{(-)}} \quad (4.6)$$

com  $\dot{\delta}^{(-)}$  sendo a velocidade de impacto inicial e  $e$  o coeficiente de restituição. Assim, reescrevendo a expressão da força normal de contato, tem-se:

$$F_N = K\delta^n \left[ 1 + \frac{3(1 - e^2)}{4} \frac{\dot{\delta}}{\dot{\delta}^{(-)}} \right] \quad (4.7)$$

Este modelo é válido somente para velocidades de impacto menores que a velocidade de propagação de ondas elásticas através dos corpos em contato, ou seja,  $\dot{\delta}^{(-)} \leq 10^{-5} \sqrt{E/\rho}$  (FLORES E AMBRÓSIO, 2004), onde  $E$  é o módulo de Young e  $\rho$  é a densidade de massa do material.

Comparativamente à força de contato de Hertz, obtém-se os seguintes gráficos para a força normal de contato:

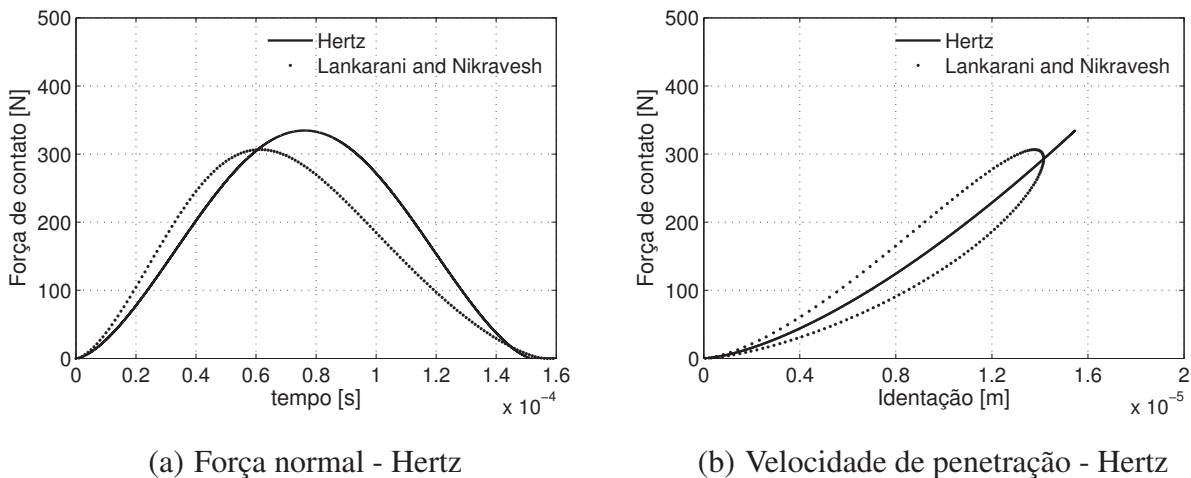


Figura 4.2: modelos de força de contato

A figura 4.3 apresenta uma comparação da velocidade relativa de penetração desenvolvida na colisão entre duas esferas. A partir do início do contato (quando a velocidade relativa é positiva), até a completa separação entre as esferas (velocidade relativa negativa) o modelo de contato de Hertz prediz uma colisão perfeitamente elástica, acarretando que a velocidade de aproximação é igual a velocidade de afastamento. Entretanto, observa-se que o amortecimento do modelo de Lankarani e Nikravesh altera a velocidade final de afastamento das esferas para um valor inferior àquele do início da colisão.

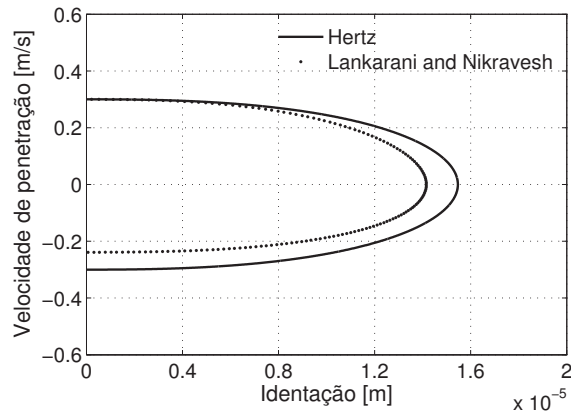


Figura 4.3: Velocidade de penetração.

### 4.3 Modelagem da força de atrito seco

Quando corpos em contato deslizam ou tendem a executar um movimento relativo, forças tangenciais são geradas na superfície de contato. Estas forças são denominadas forças de atrito. O modelo de Coulomb, apresenta-se como o mais simples para descrever o comportamento da força de atrito, no qual a força de atrito  $F_T$  é proporcional a força normal de contato  $F_N$  e contrária ao sentido de deslocamento do corpo em análise.

$$F_T = -c_c F_N \frac{v_T}{|v_T|} \quad (4.8)$$

onde  $c_c$  representa o coeficiente de atrito de Coulomb para a força de atrito. Uma representa-

ção gráfica desta força é dada na figura 4.4.

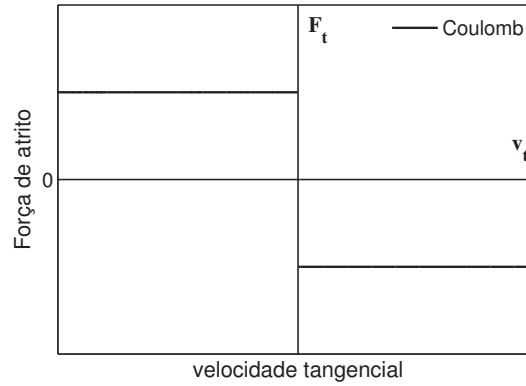


Figura 4.4: Atrito de Coulomb

Porém, devido à forte descontinuidade que ocorre quando a velocidade tangencial aproxima-se de zero, este modelo de atrito é de difícil integração numérica. Formulações mais recentes, como a abordagem encontrada em (AMBRÓSIO, 2003), na qual uma expressão para a força de atrito dada por:

$$F_T = -c_f c_d F_N \frac{\mathbf{v}_T}{v_T} \quad (4.9)$$

onde,  $v_T$  é a velocidade tangencial no contato e  $\mathbf{v}_T$  seu módulo,  $c_f$  é coeficiente de atrito e  $c_d$  é um coeficiente de correção dinâmica, que leva em conta a velocidade de deslizamento entre as superfícies em contato.

$$c_d = \begin{cases} 0 & \text{se } v_T \leq v_0 \\ \frac{v_T - v_0}{v_1 - v_0} & \text{se } v_0 \leq v_T \leq v_1 \\ 1 & \text{se } v_T \geq v_1 \end{cases} \quad (4.10)$$

onde  $v_0$  e  $v_1$  são valores críticos de velocidade na qual se considera em que o corpo está

parado e em movimento pleno, respectivamente. A representação gráfica deste modelo é dada na figura 4.5:

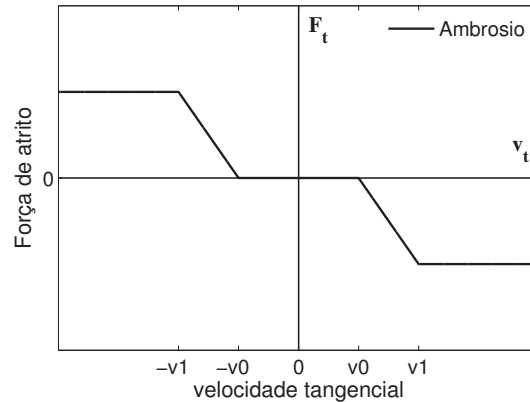


Figura 4.5: Modelo de atrito de Ambrosio

Esta formulação evita a descontinuidade presente na fórmula do atrito de Coulomb e facilita o processo de integração da equação do movimento.

#### 4.4 Aspectos numéricos associados à análise do contato

Nas simulações dinâmicas é muito importante conhecer o momento exato da transição entre os regimes presença e ausência de contato. Isto requer que haja uma grande interação do modelo dinâmico com o procedimento numérico para continuamente detectar e analisar todos os tipos de movimento. Do contrário, erros podem ser acumulados e o resultado final ser impreciso (FLORES E AMBRÓSIO, 2004).

Quando um sistema é composto por componentes que possuem dinâmicas bem diferentes, ou seja, um move-se muito rapidamente e outro muito lentamente, e os autovalores associados ao sistema são muito defasados, diz-se que o sistema é rígido. A rigidez do sistema de equações ocorre quando o movimento global do mecanismo é resultado da combinação de forças de contato não lineares que levam à uma rápida mudança nos valores de velocidade e aceleração dos componentes do sistema. Nesta situação a resposta do sistema torna-se particularmente sensível.

Durante o processo de integração numérica, tanto a ordem quanto o passo de tempo do integrador devem ser mantidos sob controle a fim de evitar o acúmulo de resíduos que levem a erros. O passo de tempo de integração deve ser cuidadosamente escolhido tendo em vista a necessidade de capturar as respostas em baixa e alta frequência exibidas pelo mecanismo durante as fases de movimento sem e com contato.

Faz-se necessária a identificação do momento exato do impacto, com o objetivo de se colher informações a respeito da velocidade de impacto e a direção na qual devem ser aplicadas as forças provenientes do contato. Esta tarefa é executada a cada passo de integração, pela avaliação da profundidade de penetração, dada pela expressão a seguir:

$$\delta = \varepsilon - c_r \quad (4.11)$$

em que  $\varepsilon$  é a excentricidade do pino e  $c_r$  é a folga radial na junta pino-pistão. Valores negativos de  $\delta$  significam que não há contato entre o pino e o mancal. Do contrário, considera-se que existe o contato entre os dois corpos. Na verdade, a detecção do instante do contato ocorre quando o sinal da penetração muda entre dois momentos discretos de tempo,  $t$  e  $t + \Delta t$  (FLORES E AMBRÓSIO, 2004).

$$\delta(q(t)) \cdot \delta(q(t + \Delta t)) < 0 \quad (4.12)$$

Um dos mais importantes aspectos das simulações dinâmicas multicorpos com folgas nas juntas de revolução é a detecção exata do instante do contato entre o pino e o mancal. Além disso o modelo numérico que caracteriza o contato requer o conhecimento da condição pré-impacto, que é a velocidade de impacto na direção normal ao plano de colisão. A duração do contato bem como a profundidade de penetração não podem ser previstas a partir das condições pré-impacto devido a influência das restrições cinemáticas impostas por todos os corpos no movimento geral do sistema.

Como em geral o primeiro impacto entre o pino e o mancal ocorre com elevada profundidade de penetração, as forças de contato também são grandes. Associados a penetração superestimada entre os corpos acumulam-se erros numéricos que causam erros no resultado. Com o intuito de evitar estes erros utiliza-se um método para forçar ao integrador à diminuição do passo de integração. Quando a penetração inicial no contato for superior a um dado valor pré-definido  $\delta_{max}$  o



integrador rejeita o passo de tempo adotado e recalcula as variáveis de estado até que esta condição seja satisfeita, conforme a expressão abaixo:

$$\delta^c < \delta_{max} \quad (4.13)$$

em que  $\delta^c$  é a penetração crítica, quando de fato é assumido o contato.

#### **4.5 Considerações finais**

Este capítulo apresentou os principais modelos de força de contato encontrados na literatura, sendo utilizado no desenvolvimento do trabalho a abordagem de força normal ao contato o modelo de Hertz modificado para inclusão da dissipação de energia, e a força de atrito de Coulomb modificada.



## 5 Modelagem das forças de lubrificação

Este capítulo apresenta os modelos de força de lubrificação utilizados ao longo das simulações dos próximos capítulos. Inicialmente aborda-se o modelo de lubrificação proposto por (GANDARA; BANNWART *et al.*, 2006; 2010), e aplicado ao mecanismo biela-manivela (DANIEL, 2008), e em seguida apresenta-se o modelo desenvolvido por (PINKUS E STERNLICHT, 1961), aplicado em sistemas multicorpos (FLORES *et al.*, 2009).

### 5.1 O modelo de lubrificação proposto

O modelo de lubrificação proposto considera a existência do movimento rotacional alternado do pino-pistão. Este modelo encontra-se desenvolvido em detalhes na referência (DANIEL, 2008) e é baseado na integração das equações diferenciais do fluxo de massa e momento no filme de óleo.

Neste caso as velocidades tangencial (angular) e radial do filme de óleo possuem uma parte complexa devido ao movimento oscilatório do pino da biela em duas as direções. O modelo de lubrificação assume que a velocidade na direção axial do fluido é praticamente nula, como usado em mancais longos. Além disso o fluido é considerado incompressível e os efeitos de cavitação são negligenciados. Desta maneira, a expressão para o campo de velocidades deste modelo é obtido a partir de:

$$V_{\theta}(y, \theta) = \frac{U_0 \sinh \left[ (h(\theta) - y) \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \right]}{\sinh \left[ (h(\theta)) \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \right]} + \frac{\nu}{\omega \mu R_b} \frac{dP_t}{d\theta} \left\{ \frac{\sinh \left[ (h(\theta) - y) \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \right] + \sinh \left( y \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \right)}{\sinh \left[ (h(\theta)) \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \right]} - 1 \right\} \quad (5.1)$$

$$V_r(y, \theta) = \frac{U_0 \frac{dh}{d\theta} \left[ \cosh \left( y \sqrt{\frac{i\omega}{\nu}} \right) - 1 \right]}{\sinh^2 \left[ (h(\theta) - y) \sqrt{\frac{i\omega}{\nu}} \right]} + \frac{\nu}{i\omega \mu R_b^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{dP_t}{d\theta} B(y, \theta) \right] \quad (5.2)$$

onde,

$$B(y, \theta) = \frac{\sqrt{\frac{i\omega}{\nu}} \left\{ -\cosh \left[ (h(\theta) - y) \sqrt{\frac{i\omega}{\nu}} \right] + \cosh \left( y \sqrt{\frac{i\omega}{\nu}} \right) + \cosh \left[ h(\theta) \sqrt{\frac{i\omega}{\nu}} \right] - 1 \right\}}{\sinh \left[ h(\theta) \sqrt{\frac{i\omega}{\nu}} \right]} - y \quad (5.3)$$

Em que  $P_t$ ,  $U_0$ ,  $\omega$ ,  $R_b$ ,  $h$ ,  $\nu$ , e  $\mu$  são a pressão no filme de óleo, a velocidade linear na superfície do eixo, a velocidade de rotação do eixo, o raio do mancal, a espessura do filme de óleo, a viscosidade cinemática, e a viscosidade absoluta, respectivamente. Nestas expressões,  $i$  representa a variável complexa  $\sqrt{-1}$ .

Considerando a condição de contorno da pressão como  $P(0) = P(2\pi) = P_0$ , a distribuição de pressão é dada por:

$$P(\theta) = P_0 + \rho \omega R_b U_0 \left( \frac{L}{R_b} (1 - \cos(\theta)) - i\theta \right) + \mu U_0 \frac{i\omega}{\nu} \int_0^\theta \left( \frac{\tanh \left[ \frac{h(\theta)}{2} \sqrt{\frac{i\omega}{\nu}} \right] - K_1 \frac{c_r}{2} \sqrt{\frac{i\omega}{\nu}}}{h(\theta) \sqrt{\frac{i\omega}{\nu}} - 2 \tanh \left[ \frac{h(\theta)}{2} \sqrt{\frac{i\omega}{\nu}} \right]} \right) d\theta \quad (5.4)$$

Sendo que:

$$K_1 = \frac{\int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\tanh \left[ \frac{h(\theta)}{2} \sqrt{\frac{\nu\omega}{\nu}} \right]}{h(\theta) \sqrt{\frac{\nu\omega}{\nu}} - 2 \tanh \left[ \frac{h(\theta)}{2} \sqrt{\frac{\nu\omega}{\nu}} \right]} - 1 \right\} d\theta}{\frac{h(\theta)}{2} \sqrt{\frac{\nu\omega}{\nu}} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{h(\theta) \sqrt{\frac{\nu\omega}{\nu}} - 2 \tanh \left[ \frac{h(\theta)}{2} \sqrt{\frac{\nu\omega}{\nu}} \right]} \right\} d\theta} \quad (5.5)$$

Por fim, as componentes das forças aplicadas no pino são dadas por:

$$F_x(t) = wR_j \int_0^{2\pi} \left( -p \sin(\theta) + \mu \frac{\partial v_\theta}{\partial y} \cos(\theta) \right)_{y=h} d\theta \quad (5.6)$$

$$F_y(t) = wR_j \int_0^{2\pi} \left( -p \cos(\theta) + \mu \frac{\partial v_\theta}{\partial y} \sin(\theta) \right)_{y=h} d\theta \quad (5.7)$$

com  $w$  sendo o comprimento do mancal e  $R_j$  o raio do pino. Visto que o sentido de rotação do pino define o sentido da força tangencial  $F_x$ , analisa-se o sentido do vetor velocidade e o quadrante no qual o pino se encontra para definir seu sentido de aplicação.

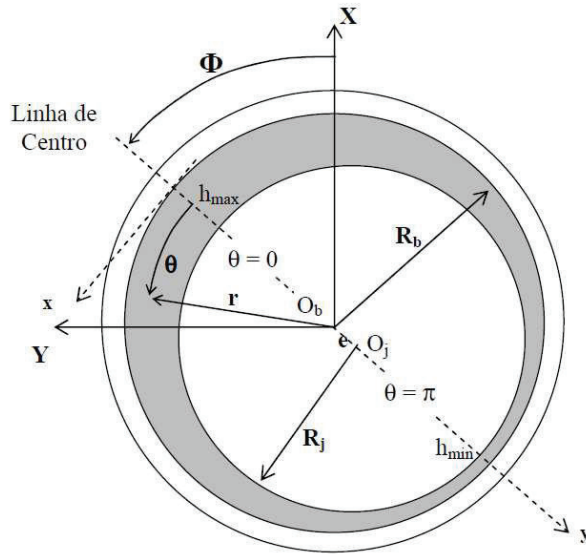


Figura 5.1: Mancal hidrodinâmico com coordenadas

Estas forças estão escritas no referencial móvel  $(x, y)$  e precisam ser escritas no referencial inercial, função do ângulo  $\Phi$ . A transformação das forças para este referencial é dada pela expressão:

$$F_X(t) = -F_y(t) \cos(\Phi) - F_x(t) \sin(\Phi) \quad (5.8)$$

$$F_Y(t) = -F_y(t) \sin(\Phi) + F_x(t) \cos(\Phi) \quad (5.9)$$

## 5.2 Modelo de lubrificação Pinkus-Sternlicht

O modelo encontrado no livro *Theory of Hydrodynamic Lubrication*, proposto por Pinkus e Sternlicht em 1961 é descrito a seguir.

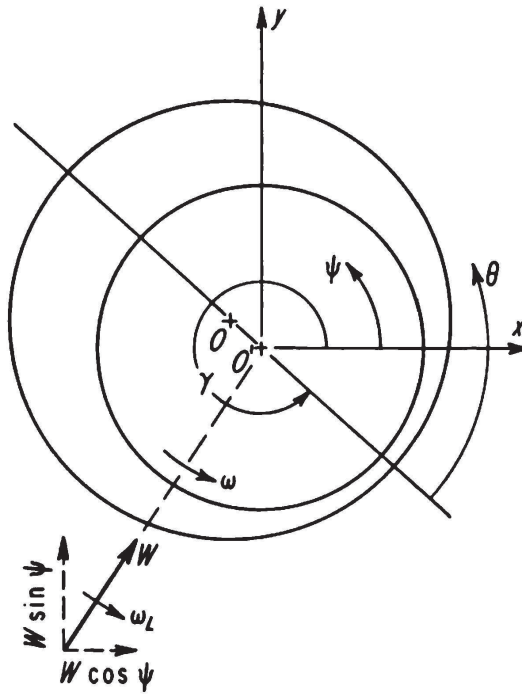


Figura 5.2: Mancal hidrodinâmico e sistema de coordenadas ((PINKUS E STERNLICHT, 1961)).

A partir da equação de Reynolds:

$$\frac{\partial}{R\partial\psi} \left( h^3 \frac{\partial p}{R\partial\psi} \right) = 6\mu\omega \frac{\partial h}{\partial\psi} + 12\mu \frac{dh}{dt} \quad (5.10)$$

Assumindo a espessura do filme de óleo como:

$$h = C [1 - \varepsilon \cos(\psi - \gamma)] \quad (5.11)$$

tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{(C/R)^2}{6\mu\omega} \{ [1 - \varepsilon \cos(\psi - \gamma)]^3 \frac{\partial^2 p}{\partial \psi^2} + 3 [1 - \varepsilon \cos(\psi - \gamma)]^2 \varepsilon \sin(\psi - \gamma) \frac{\partial p}{\partial \psi} \\ - \varepsilon \sin(\psi - \gamma) - \frac{2}{\omega} [-\cos(\psi - \omega)] \frac{d\varepsilon}{dt} - \varepsilon \sin(\psi - \gamma) \frac{d\gamma}{dt} \} = 0 \end{aligned} \quad (5.12)$$

usando-se:

$$\Pi = \frac{p(C/R)^2}{\mu\omega}; \quad E = \frac{2}{\omega} \frac{d\varepsilon}{dt}; \quad G = \frac{2}{\omega} \frac{d\gamma}{dt} \quad (5.13)$$

a equação 5.12 pode ser reescrita como:

$$\frac{d^2 \Pi}{d\psi^2} + \frac{3\varepsilon \sin(\psi - \gamma)}{1 - \varepsilon \cos(\psi - \gamma)} \frac{d\Pi}{d\psi} + 6 \frac{E \cos(\psi - \gamma) - \varepsilon(1 - G) \sin(\psi - \gamma)}{[1 - \varepsilon \cos(\psi - \gamma)]^2} = 0 \quad (5.14)$$

utilizando as substituições

$$\psi - \gamma = \theta \quad \text{e} \quad \Pi = \frac{u}{(1 - \varepsilon \cos(\theta))^2} \quad (5.15)$$

e notando que

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \psi} = \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} \quad (5.16)$$

tem-se em termos das novas variáveis  $u$  e  $\theta$

$$(1 - \varepsilon \cos(\theta)) \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \varepsilon \sin(\theta) \frac{\partial u}{\partial \theta} - 2\varepsilon \cos(\theta) u = 6 [\varepsilon (1 - G) \sin(\theta) - E \cos(\theta)] \quad (5.17)$$



Assume-se a solução na forma:

$$u(\theta) = C_1 \sin(\theta) + C_2 \sin(2\theta) + C_3 \cos(\theta) + C_4 \cos(2\theta) \quad (5.18)$$

por substituição de  $u$ ,  $u'$  e  $u''$  na equação 5.17 e equacionando os coeficientes dos termos semelhantes no lado direito e esquerdo da equação 5.17, avaliam-se as constantes para fornecer:

$$u(\theta) = \frac{12\varepsilon(1-G)}{2+\varepsilon^2} \sin(\theta) + \frac{3\varepsilon^2(1-G) \sin(2\theta)}{2+\varepsilon^2} + \frac{12E}{2+\varepsilon^2} \cos(\theta) - \frac{3\varepsilon E}{2+\varepsilon^2} \cos(2\theta) \quad (5.19)$$

e, por substituição de  $u(\theta)$  na expressão original,

$$\Pi = \frac{p(C/R)^2}{\mu\omega} = \frac{1}{(1-\varepsilon \cos(\theta))^2(2+\varepsilon^2)} [-12\varepsilon(1-G) \sin(\theta) + 3\varepsilon^2(1-G) \sin(2\theta) + 12E \cos(\theta) - 3\varepsilon E \cos(2\theta)] \quad (5.20)$$

As constantes de integração da equação 5.20 foram igualadas a zero para satisfazer a condição  $p(0) = p(\pi) = 0$  para o caso de regime estacionário. Como as integrais da pressão são avaliadas somente na porção positiva, isto requer o conhecimentos dos pontos em que a equação 5.20 são iguais a zero, ou seja, os ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$  nos quais a pressão é igual a zero. Para carregamentos estáticos estes ângulos são assumidos como 0 e  $\pi$ . Para carregamentos variáveis eles são funções dependentes do tempo.

Os pontos que zeram a equação podem ser obtidos igualando-se a equação:

$$\Pi = \frac{p(C/R)^2}{\mu\omega} = \frac{u}{(1-\varepsilon \cos(\theta))^2} = 0 \quad (5.21)$$

ou  $u = 0$ . Analisando-se esta equação no termo de  $u$ , tem-se:

$$-12\varepsilon(1-G)\sin(\theta) + 3\varepsilon^2(1-G)\sin(2\theta) + 12E\cos(\theta) - 3\varepsilon E\cos(2\theta) = 0 \quad (5.22)$$

com  $q = (1-G)/E$  na equação acima, tem-se:

$$-4\varepsilon q\sin(\theta) + \varepsilon^2 q\sin(2\theta) + 4\cos(\theta) - \varepsilon\cos(2\theta) = 0 \quad (5.23)$$

Examinando-se a equação 5.23, mostra-se que em geral, para  $E = 0$ ,  $\theta = \pi$  sempre irá se encontrar entre os zeros da função  $\theta_1$  e  $\theta_2$ . Para  $E > 0$  as pressões serão positivas por volta de  $\theta = 0$  ou  $h_{min}$ . Para  $E < 0$  as pressões serão positivas próximas a  $\theta = \pi$ . A equação 5.23 pode ser reescrita como:

$$q\varepsilon(4\sin(\theta) - \varepsilon\sin(2\theta)) - (4\cos(\theta) - \varepsilon\cos(2\theta)) = 0 \quad (5.24)$$

expressando-se os termos duplos através de uma função de um argumento, tem-se:

$$2(q\varepsilon\sin(\theta) - \cos(\theta))(2 - \varepsilon\cos(\theta)) - \varepsilon = 0 \quad (5.25)$$

a simplificação agora introduzida é que  $\varepsilon\cos(\theta)$  é pequena quando comparada com 2, tem-se:

$$q\varepsilon\sin(\theta) - \cos(\theta) - \frac{\varepsilon}{4} = 0 \quad (5.26)$$

utilizando-se as seguintes substituições:

$$\sin(\theta) = \frac{2\tan(\theta/2)}{1+\tan^2(\theta/2)} \quad \cos(\theta) = \frac{1-\tan^2(\theta/2)}{1+\tan^2(\theta/2)} \quad (5.27)$$

obtém-se uma expressão quadrática:

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right) \tan^2(\theta/2) + 2q\varepsilon \tan(\theta/2) - \left(1 + \frac{\varepsilon}{4}\right) = 0 \quad (5.28)$$

cujas raízes são:

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{-q\varepsilon \pm \sqrt{q^2\varepsilon^2 + 1 - \varepsilon/16}}{1 - \varepsilon/4} \quad (5.29)$$

negligenciando o termo  $\varepsilon^2/16$  e rearranjando os termos, obtém-se os dois pontos zeros  $\theta_1$  e  $\theta_2$ :

$$\tan\left(\frac{\theta_{1,2}}{2}\right) = \pm\varepsilon \left(1 + \frac{\varepsilon}{4}\right) \left[\left(q^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}\right)^{1/2} \mp q\right] \quad (5.30)$$

Deve-se agora integrar o perfil de pressões do fluido de  $\theta_1$  a  $\theta_2$  para se obter as componentes horizontal e vertical do carregamento. Estas, são dadas por:

$$\begin{aligned} W_y &= - \int_{\theta_1}^{\theta_2} p(\psi) \sin(\psi) LR d\psi \\ W_x &= - \int_{\theta_1}^{\theta_2} p(\psi) \cos(\psi) LR d\psi \end{aligned} \quad (5.31)$$

de

$$p(\psi) = \frac{\Pi(\psi)\mu\omega}{(C/R)^2} \text{ e } \psi = \theta + \gamma \quad (5.32)$$

tem-se,

$$\begin{aligned}
P_y &= -\frac{1}{2} \frac{\mu\omega}{(C/R)^2} \int \Pi(\theta) \sin(\theta + \gamma) d\theta = -\frac{1}{2} \frac{\mu\omega}{(C/R)^2} F_y \\
P_x &= -\frac{1}{2} \frac{\mu\omega}{(C/R)^2} \int \Pi(\theta) \cos(\theta + \gamma) d\theta = -\frac{1}{2} \frac{\mu\omega}{(C/R)^2} F_x
\end{aligned} \tag{5.33}$$

onde  $F_x$  e  $F_y$  representam as respectivas integrais, ou, a soma dos ângulos expandidos dados por:

$$\begin{aligned}
F_y &= \int \Pi(\theta) (\sin(\theta) \cos(\gamma) + \cos(\theta) \sin(\gamma)) d\theta \\
F_x &= \int \Pi(\theta) (\cos(\theta) \cos(\gamma) - \sin(\theta) \sin(\gamma)) d\theta
\end{aligned} \tag{5.34}$$

A avaliação destas integrais envolve uma boa manipulação matemática, e para detalhes deve-se consultar a referência (OTT, 1948). O resultado destas integrais para  $E > 0$  é dado por:

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} F_y \\ F_x \end{Bmatrix} &= -\frac{6\pi\varepsilon(1-G)}{(2+\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2)^{1/2}} \left( \frac{k+3}{k+3/2} \right) \begin{Bmatrix} -\cos(\gamma) \\ \sin(\gamma) \end{Bmatrix} \\
&- \frac{3E}{(2+\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2)^{1/2}(1-\varepsilon^2)} \left[ 4k\varepsilon^2 + (2+\varepsilon^2)\pi \frac{k+3}{k+3/2} \right] \begin{Bmatrix} \sin(\gamma) \\ \cos(\gamma) \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{5.35}$$

e para  $E < 0$ , por:

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} F_y \\ F_x \end{Bmatrix} &= -\frac{6\pi\varepsilon(1-G)}{(2+\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2)^{1/2}} \left( \frac{k}{k+3/2} \right) \begin{Bmatrix} -\cos(\gamma) \\ \sin(\gamma) \end{Bmatrix} \\
&- \frac{3E}{(2+\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2)^{1/2}(1-\varepsilon^2)} \left[ 4k\varepsilon^2 - (2+\varepsilon^2)\pi \frac{k}{k+3/2} \right] \begin{Bmatrix} \sin(\gamma) \\ \cos(\gamma) \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{5.36}$$

onde:

$$k = (1 - \varepsilon^2)^{1/2} \left[ \left( \frac{1 - G}{E} \right)^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \right]^{1/2} \quad (5.37)$$

### 5.3 Considerações finais

Este capítulo apresentou de maneira sucinta os dois modelos de lubrificação avaliados nas simulações. É interessante notar que ambos tratam somente do regime de lubrificação hidrodinâmica, sendo que o modelo encontrado na literatura (PINKUS E STERNLICHT, 1961) apresenta uma solução direta em vista das considerações feitas e de grande vantagem computacional. Já o modelo proposto (GANDARA; DANIEL, 2006; 2008), de caráter fortemente numérico, leva em conta em sua formulação, a aceleração na qual o fluido no mancal em movimento está sujeita.



## 6 Resultados

Este capítulo tem por objetivo apresentar e discutir os resultados obtidos nas simulações efetuadas com o modelo dinâmico do mecanismo biela-manivela proposto no capítulo 3.

Inicialmente é avaliado o comportamento de cada um dos modelos de lubrificação descritos no capítulo 5 sob a influência da variação dos parâmetros físicos de folga radial e velocidade angular da manivela.

Em seguida incorpora-se ao sistema dinâmico o modelo de força de combustão interna apresentado no apêndice A e quantifica-se o desempenho do mecanismo nas mesmas condições simuladas sem a excitação externa.

A partir destes dados são feitas considerações sobre o comportamento do mecanismo e a validade dos modelos de lubrificação simulados.

As rotinas para o todos os cálculos foram implementadas em código FORTRAN e os resultados das simulações plotados com o auxílio do software MATLAB®.

### 6.1 Parâmetros utilizados nas simulações

A escolha das dimensões físicas do mecanismo biela-manivela foi baseada nas características de um motor de pequeno porte. Desta maneira foi possível analisar o efeito de alguns dos parâmetros de interesse no projeto de motores de combustão interna. As propriedades físicas e geométricas de cada componente estão listadas nas tabelas 6.1 e 6.2.

Tabela 6.1: Propriedades físicas e geométricas do mecanismo biela-manivela.

<b>Componente</b>	<b>Comprimento [m]</b>	<b>Massa [kg]</b>	<b>Momento de inércia [<math>kg\ m^2</math>]</b>
Manivela	0,0508	0,80	0,006
Biela	0,2032	1,36	0,010
Pistão	-	0,91	-

Tabela 6.2: Posição dos centros de massa de cada componente.

<b>Componente</b>	<b>Posição do centro de massa [m]</b>
Manivela	$U_M = 0,000$ e $V_M = 0,000$
Biela	$U_B = 0,0508$ e $V_B = 0,000$
Pistão	-

O estudo da influência da força de contato e dos modelos de lubrificação no modelo foi conduzido a partir dos valores declarados na tabela 6.3.

Tabela 6.3: Parâmetros utilizados na simulação dinâmica do mecanismo biela-manivela.

<b>Raio do mancal</b>	10,0 <i>mm</i>	<b>Viscosidade absoluta do óleo</b>	0,0117 [ <i>Pa · s</i> ]
<b>Coefficiente de restituição</b>	0,9	<b>Viscosidade cinemática do óleo</b>	$1,38 \cdot 10^{-5}$ [ <i>m<sup>2</sup>/s</i> ]
<b>Coefficiente de atrito</b>	0,03	<b>Densidade do óleo</b>	887,8 [ <i>kg/m<sup>3</sup></i> ]
<b>Coefficiente de contato</b>	1,5	<b>Largura do mancal</b>	0,015 [ <i>m</i> ]
<b>Módulo de Young</b>	207 <i>GPa</i>	<b>Erro máximo de integração</b>	$1,00 \cdot 10^{-6}$
<b>Razão de Poisson</b>	0,3	<b>Passo de integração</b>	$1,00 \cdot 10^{-7}$

Em todas as simulações, o mecanismo parte da condição de regime (obtida através do modelo com junta ideal) com a manivela e a biela verticalmente alinhadas e a excentricidade do pino em relação ao mancal do pistão nula.

## 6.2 Resultados do mecanismo biela-manivela com folga

Inicialmente o sistema biela-manivela com folga foi simulado sem a presença de forças e torques externos, e os valores de folga radial e velocidade angular inicial da manivela utilizados encontram-se ordenados na tabela 6.4.



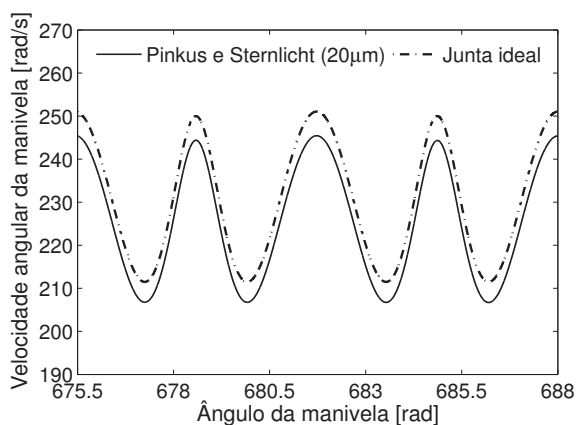
Tabela 6.4: Parâmetros das simulações sem excitação externa.

Simulação	Folga radial	Velocidade angular inicial da manivela
I	$20\ \mu m$	$250\ [rad/s]$
II	$40\ \mu m$	$250\ [rad/s]$
III	$20\ \mu m$	$1.000\ [rad/s]$

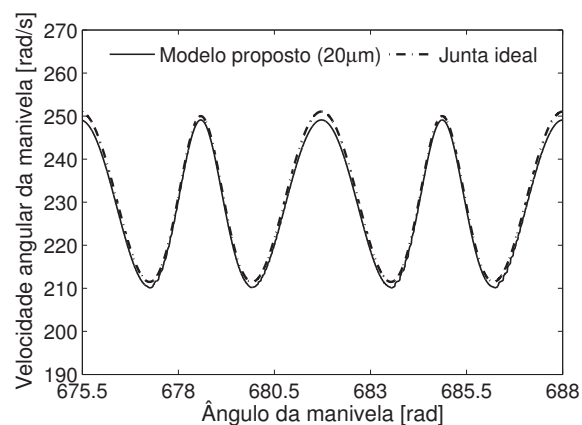
### 6.2.1 Simulação I

Na primeira simulação a velocidade inicial da manivela foi considerada  $250\ rad/s$  e a folga na junta pino-pistão como  $20\ \mu m$ . A resposta dinâmica do mecanismo é apresentada nas figuras 6.1 a 6.7.

Na figura 6.1 pode-se observar que em ambas as simulações a velocidade da manivela acompanha o comportamento do modelo de junta ideal, exceto pela defasagem existente entre as curvas. Esta defasagem deve-se à dissipação de energia inerente a cada modelo de lubrificação. A velocidade dos demais componentes não apresentou diferença significativa quando comparadas aquela obtida no mecanismo sem folga (junta ideal).



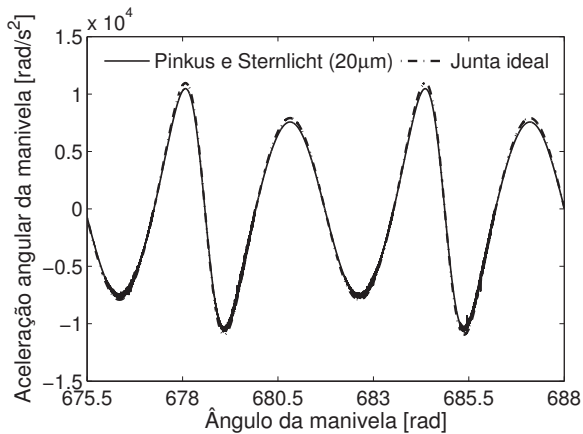
(a) Pinkus e Sternlicht



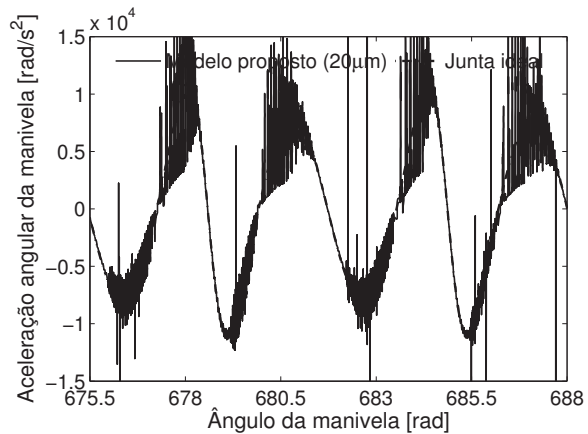
(b) modelo proposto

Figura 6.1: velocidade angular da manivela para os dois modelos de lubrificação.

Nas figuras 6.2-6.4 comparam-se as acelerações de cada componente. Observa-se uma grande diferença no desempenho de cada modelo de lubrificação. Enquanto o primeiro modelo apresenta uma resposta muito próxima do mecanismo ideal, o segundo carrega no sinal de saída regiões com fortes oscilações, onde nota-se a presença de instabilidades numéricas.

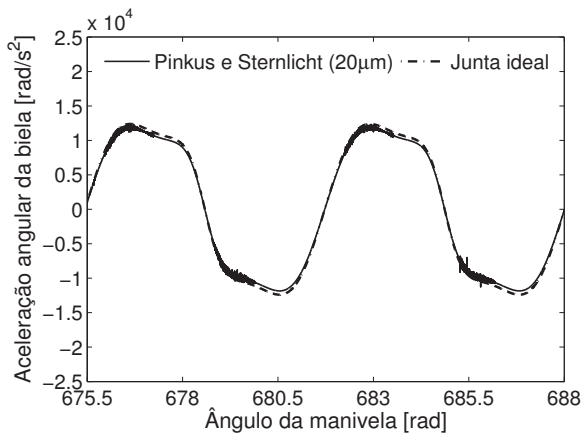


(a) Pinkus e Sternlicht

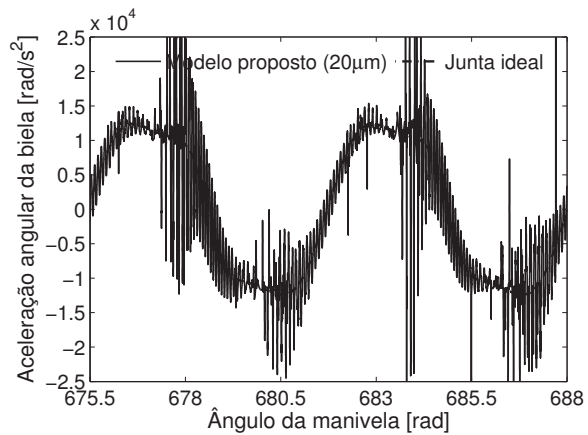


(b) modelo proposto

Figura 6.2: aceleração angular da manivela

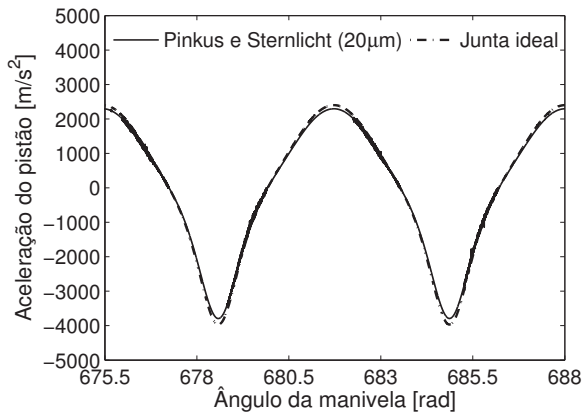


(a) Pinkus e Sternlicht

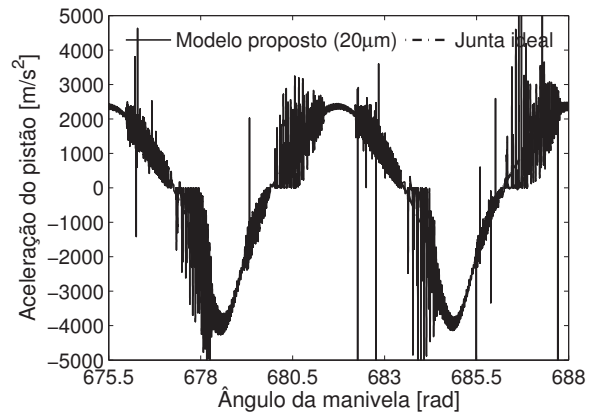


(b) modelo proposto

Figura 6.3: aceleração angular da biela



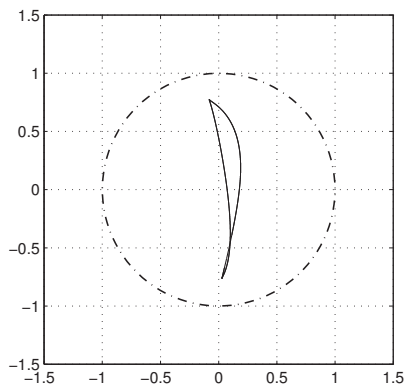
(a) Pinkus e Sternlicht



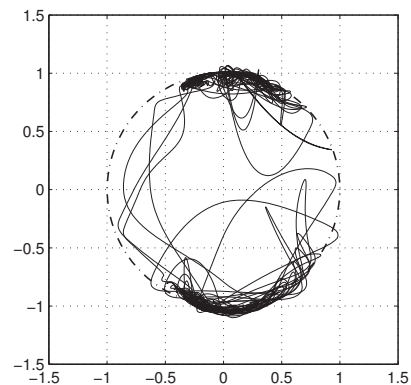
(b) modelo proposto

Figura 6.4: aceleração do pistão

Estas oscilações podem ser explicadas quando leva-se em conta a transição entre os modelos de lubrificação e contato (figs. 6.5 e 6.6) que ocorre no segundo modelo de lubrificação. Observa-se na fig. 6.5b uma pequena profundidade de penetração.



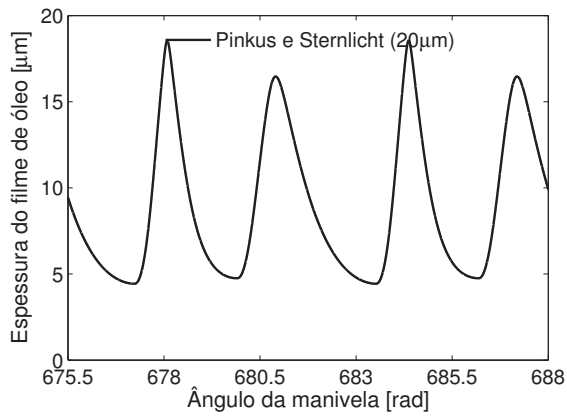
(a) Pinkus e Sternlicht



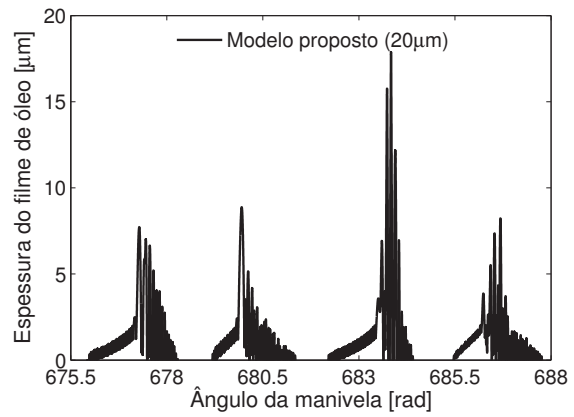
(b) modelo proposto

Figura 6.5: órbita do pino

Os gráficos de órbita são normalizados pela folga radial.



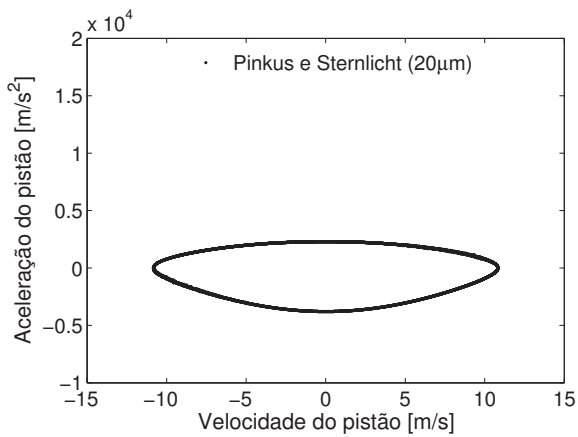
(a) Pinkus e Sternlicht



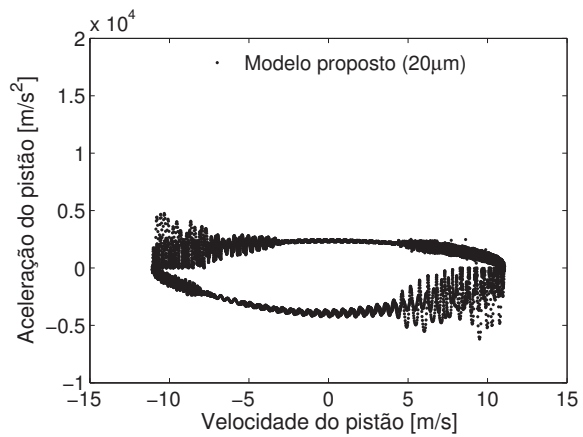
(b) modelo proposto

Figura 6.6: espessura mínima do filme de óleo

A degradação no desempenho causada pela mudança abrupta das forças é verificada no mapa de Poincaré do pistão (fig. 6.7) e na força resultante sobre o pino-pistão (fig. 6.8).

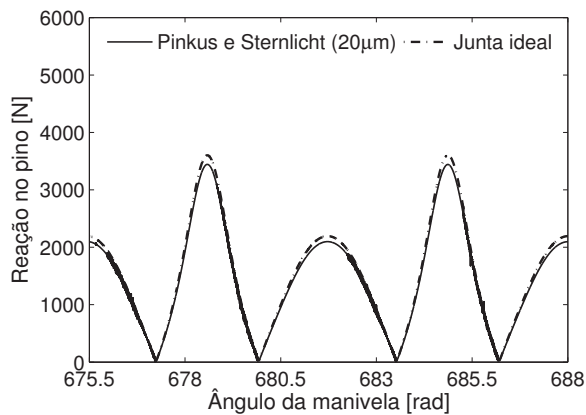


(a) Pinkus e Sternlicht

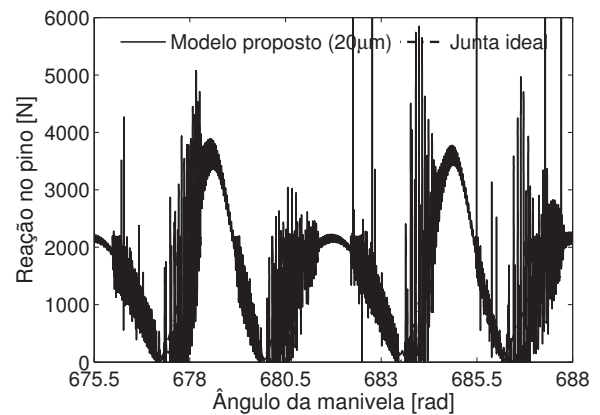


(b) modelo proposto

Figura 6.7: mapa de Poincaré



(a) Pinkus e Sternlicht



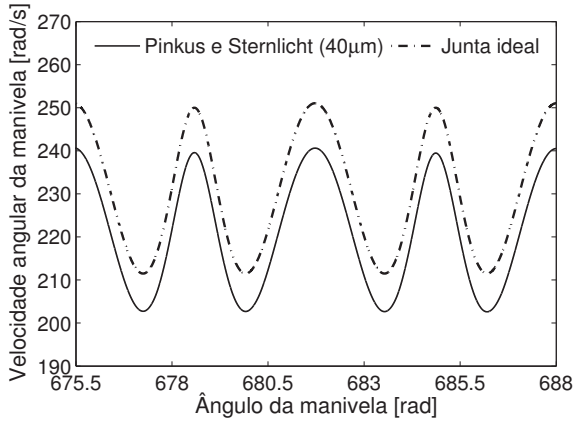
(b) modelo proposto

Figura 6.8: reação no pino-pistão

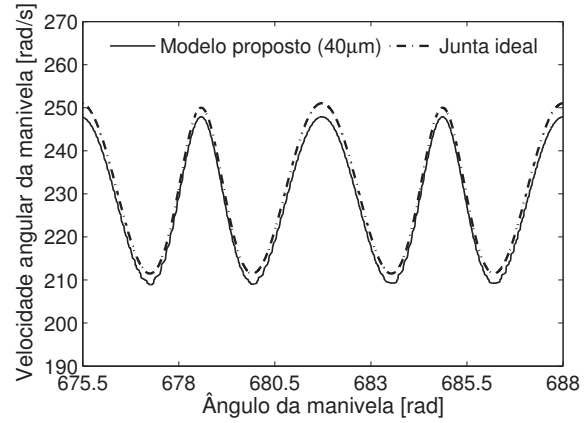
## 6.2.2 Simulação II

A segunda simulação avalia o efeito da variação da folga na junção pino-pistão, duas vezes superior ( $40\mu m$ ) àquela utilizada no primeiro teste. Os demais parâmetros foram mantidos inalterados e os gráficos de desempenho estão nas figuras 6.9 - 6.15.

O aumento da folga repercute em um aumento na dissipação de energia pelos modelos de lubrificação (fig. 6.9).



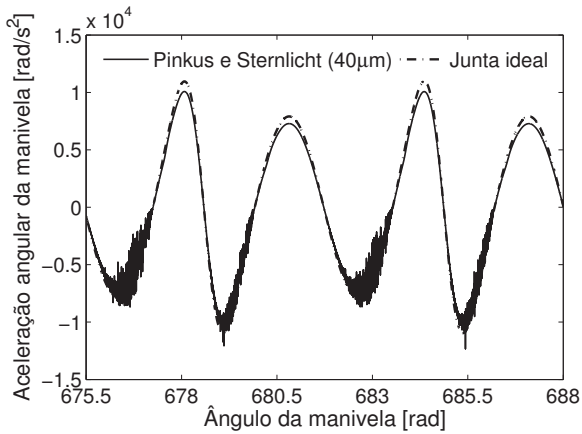
(a) Pinkus e Sternlicht



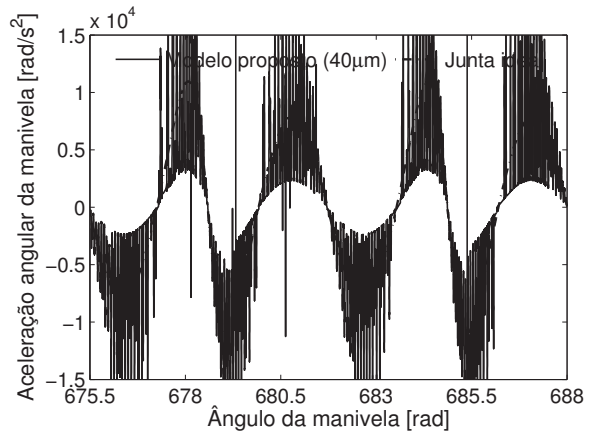
(b) modelo proposto

Figura 6.9: velocidade angular da manivela

As acelerações dos componentes do mecanismo estão representadas nas figuras 6.10-6.12. Em ambos os modelos de lubrificação é verificado o aumento no nível do ruído na resposta, em especial no segundo, novamente em virtude da alternância entre os modelos de impacto/contato e lubrificação (figs. 6.13 e 6.14). Nota-se ainda que no primeiro modelo de lubrificação, quando o pino aproxima-se do contato, o ruído se intensifica, porém não ocorre a transição do regime de lubrificação para o regime de contato puro observado no segundo modelo.

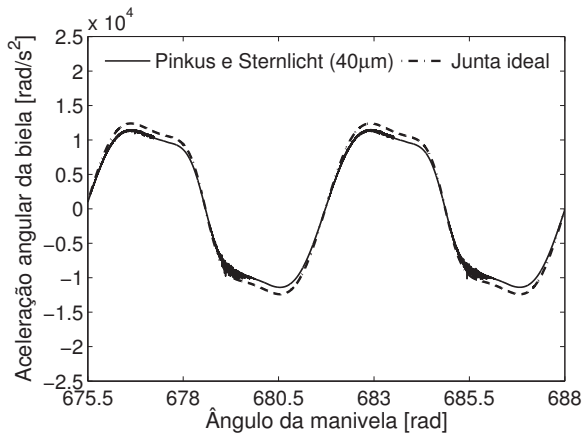


(a) Pinkus e Sternlicht

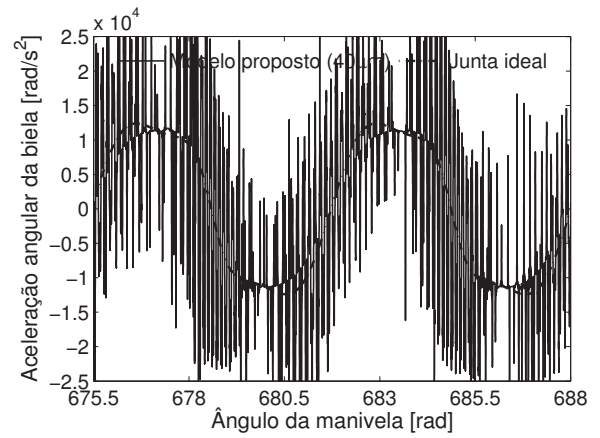


(b) modelo proposto

Figura 6.10: aceleração angular da manivela

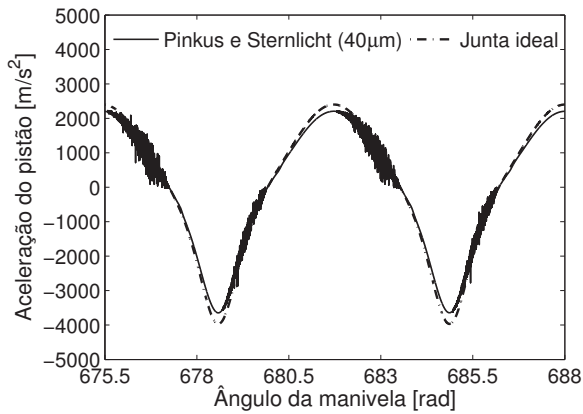


(a) Pinkus e Sternlicht

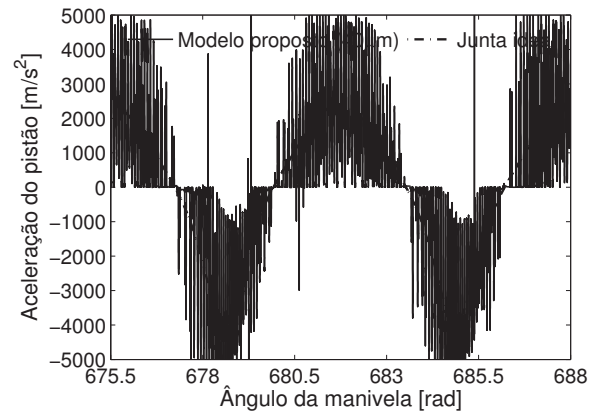


(b) modelo proposto

Figura 6.11: aceleração angular da biela

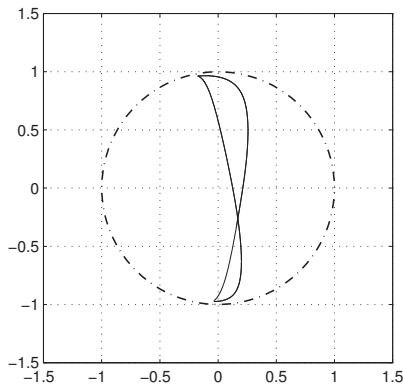


(a) Pinkus e Sternlicht

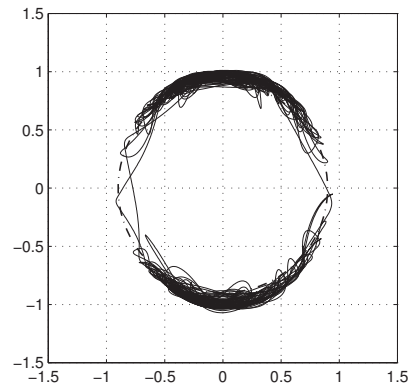


(b) modelo proposto

Figura 6.12: aceleração do pistão

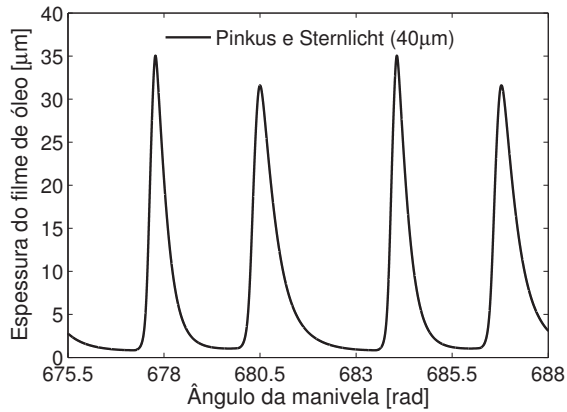


(a) Pinkus e Sternlicht

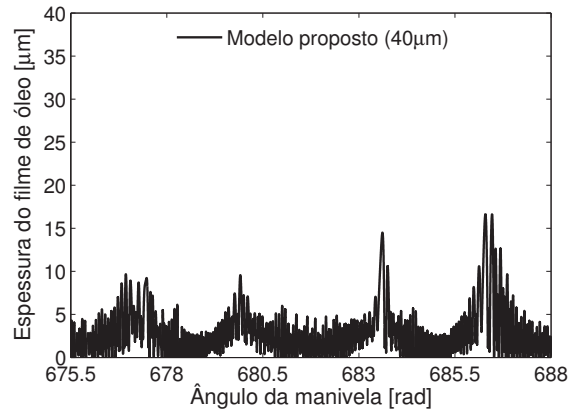


(b) modelo proposto

Figura 6.13: órbita do pino



(a) Pinkus e Sternlicht



(b) modelo proposto

Figura 6.14: espessura mínima do filme de óleo

A força de reação no pino novamente sofre alteração quando o pino aproxima-se da condição de contato, no primeiro modelo de lubrificação. Em contrapartida, no segundo modelo de lubrificação é observado que o filme de óleo não é capaz de sustentar o pino em lubrificação hidrodinâmica.

Ocorre uma transição entre os modelos de lubrificação e contato puro. O mapa de Poincaré



é plotado na figura 6.15 e evidencia a mudança abrupta de velocidades e acelerações impostas ao pino-pistão.

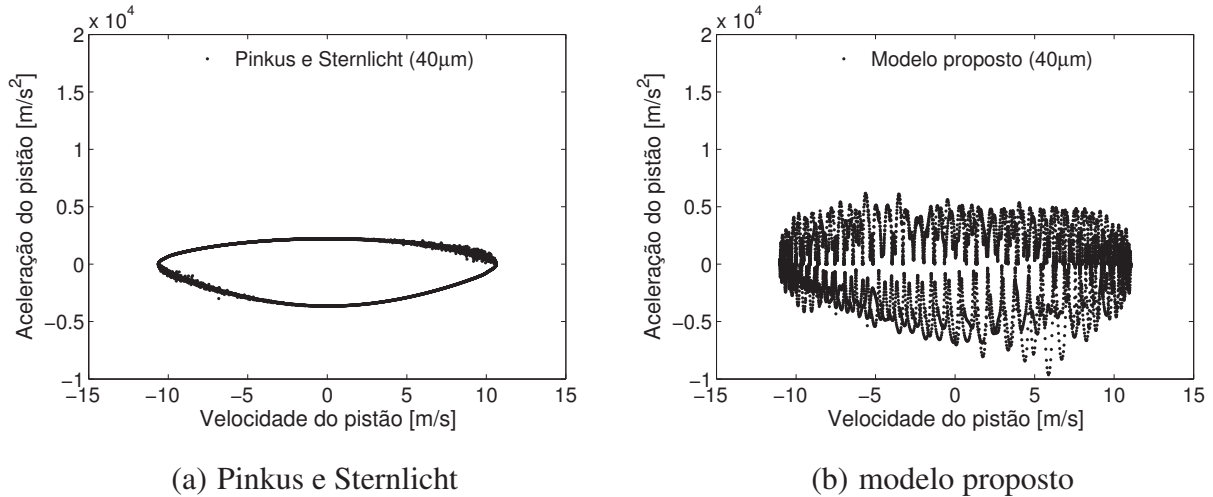


Figura 6.15: mapa de Poincaré

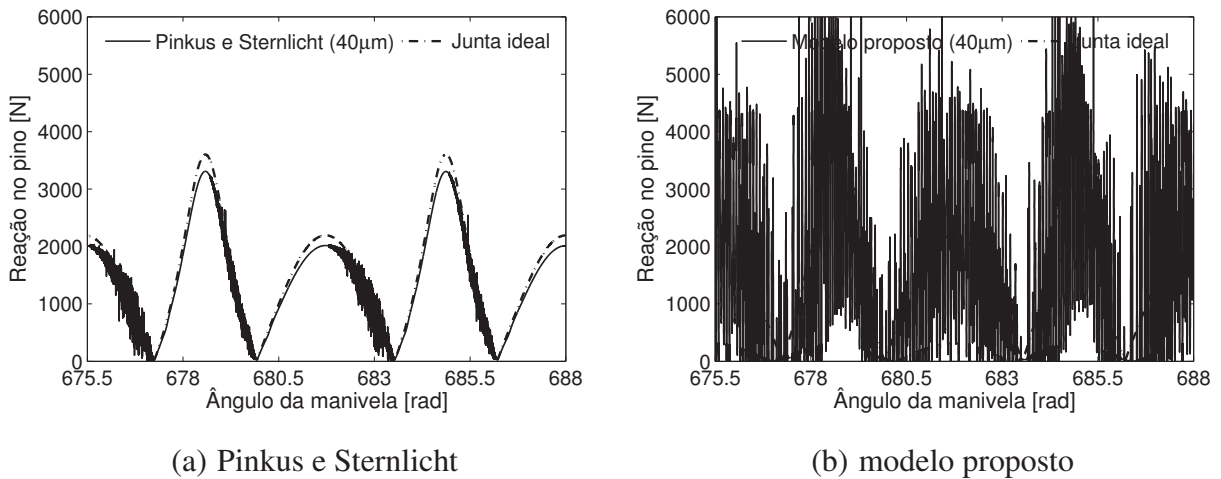


Figura 6.16: reação no pino-pistão

Em comparação à primeira simulação, o aumento da folga implica num aumento da degradação do desempenho do sistema. Ambos os modelos de lubrificação apresentaram respostas que devem ser analisadas com cautela. O primeiro modelo, apesar de levar em consideração os efeitos

de cunha e esmagamento, não é capaz de descrever o comportamento do pino-pistão quando este aproxima-se criticamente do contato. O segundo modelo admite a transição entre os modelos de contato/impacto e de lubrificação hidrodinâmica, porém esta transição ocorre de forma abrupta.

### 6.2.3 Simulação III

A terceira simulação utilizou uma folga radial de  $20\mu m$  e a velocidade inicial da manivela de  $1.000rad/s$ . Esta configuração representa uma velocidade limite de operação para o mecanismo e deseja-se avaliar o efeito da mudança da velocidade de rotação da manivela no comportamento do sistema.

Na figura 6.17 é observado a velocidade da manivela para os dois modelos de lubrificação. Observa-se que em ambos os modelos a degradação de energia ocorre. Esta degradação afeta as velocidades dos demais componentes.

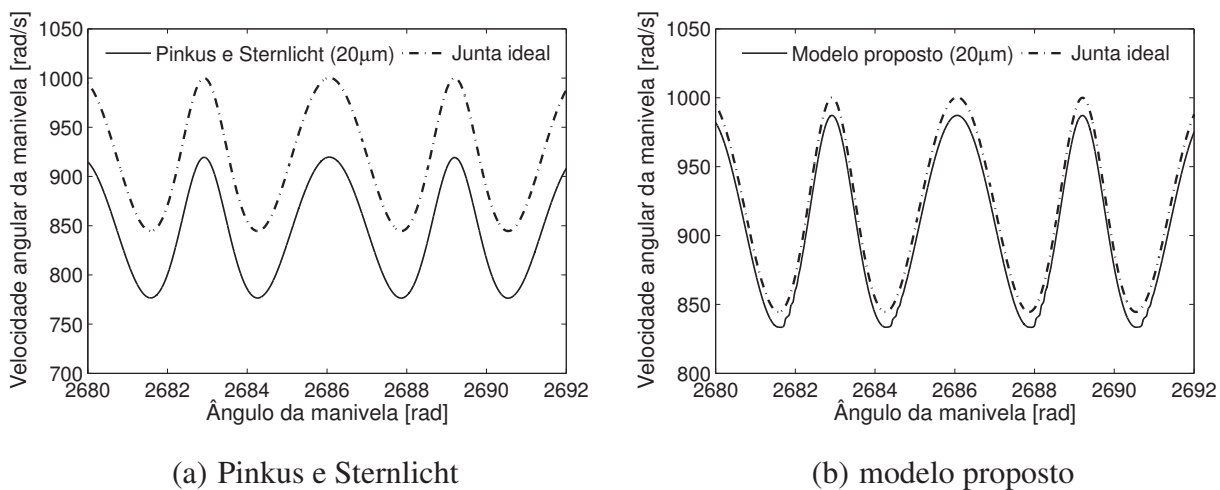
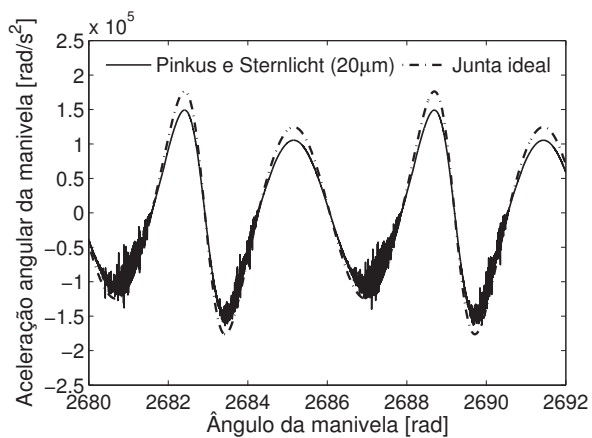
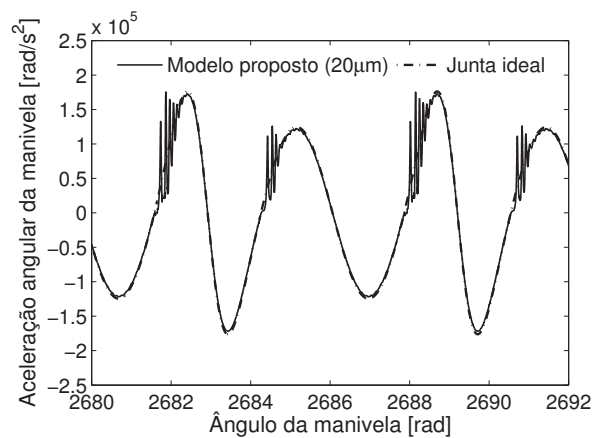


Figura 6.17: velocidade angular da manivela

As figuras 6.18-6.20 mostram as acelerações de cada componente do sistema. Observa-se uma diferença no comportamento de ambos os modelos de lubrificação. Enquanto no primeiro modelo a defasagem em relação ao modelo de junta ideal ocorre devido à dissipação de energia e à aproximação do pino ao contato (fig. 6.21), no segundo modelo a aceleração dos componentes sofre alterações periódicas.

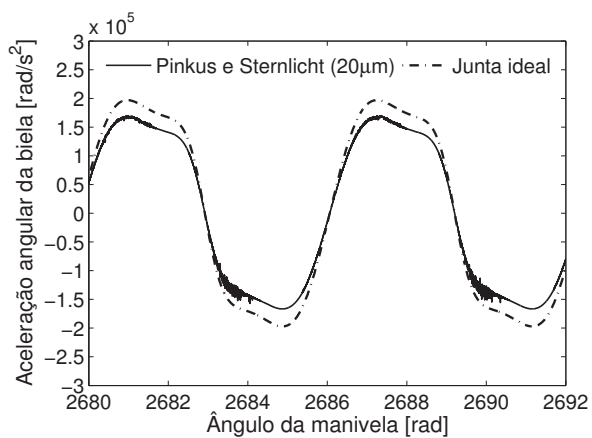


(a) Pinkus e Sternlicht

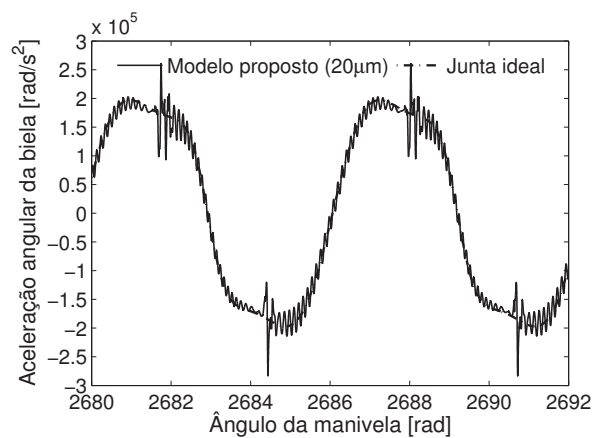


(b) modelo proposto

Figura 6.18: aceleração angular da manivela

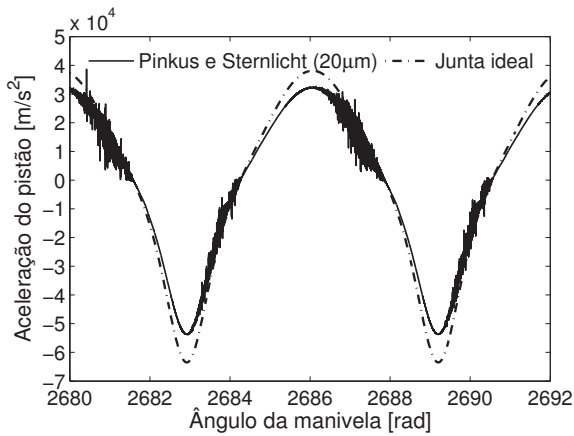


(a) Pinkus e Sternlicht

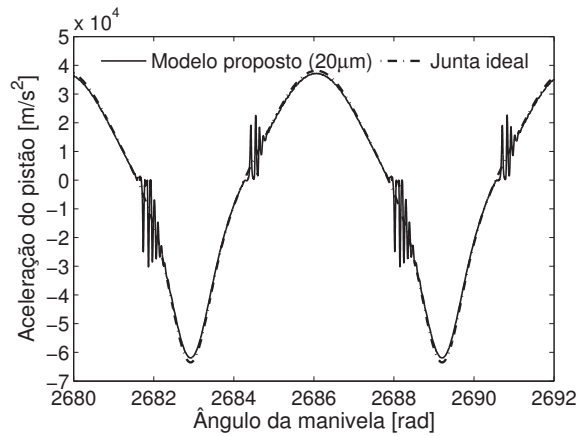


(b) modelo proposto

Figura 6.19: aceleração angular da biela



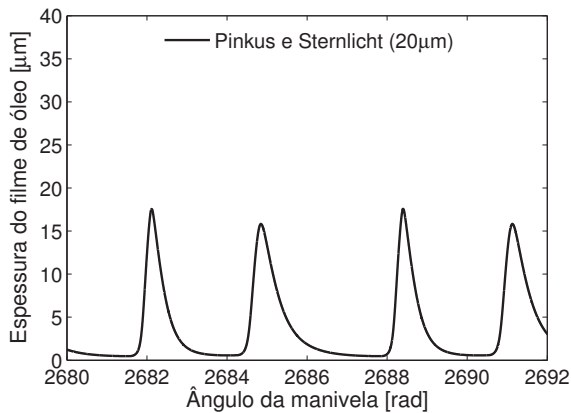
(a) Pinkus e Sternlicht



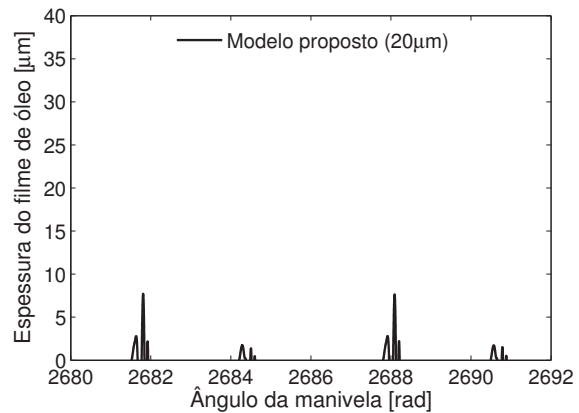
(b) modelo proposto

Figura 6.20: aceleração do pistão

Estas alterações são explicadas pela mudança do modelo de lubrificação e de contato, observado na figura 6.21. No gráfico da órbita 6.22 a resposta do mecanismo é diferente em cada um dos modelos de lubrificação. Novamente no primeiro modelo o mecanismo fica sob o regime de lubrificação durante toda a simulação, enquanto que no segundo modelo o pino-pistão fica a maior parte do tempo em contato.

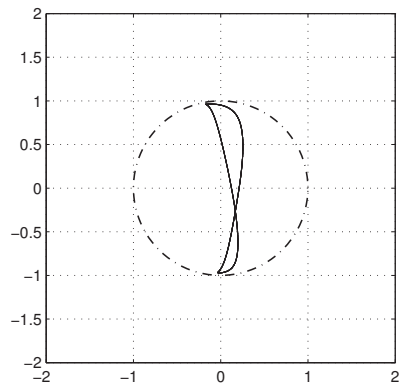


(a) Pinkus e Sternlicht

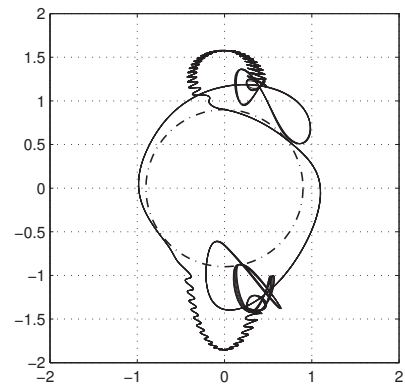


(b) modelo proposto

Figura 6.21: espessura mínima do filme de óleo



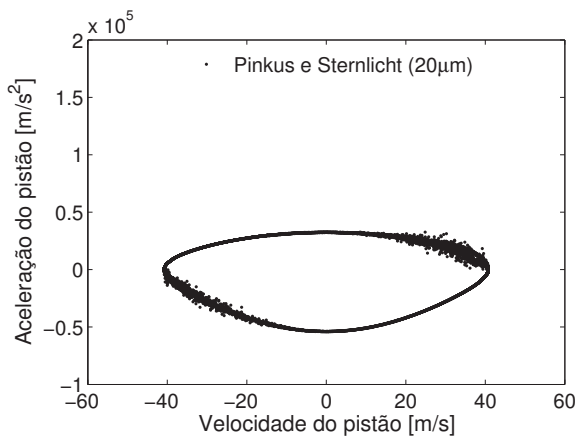
(a) Pinkus e Sternlicht



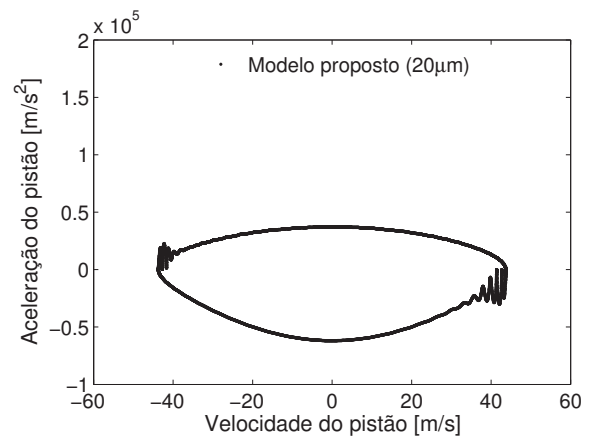
(b) modelo proposto

Figura 6.22: órbita do pino

De maneira similar ao que ocorreu com o aumento da folga, verifica-se a mudança abrupta de velocidades e acelerações experimentadas pelo pino com o segundo modelo de lubrificação (fig. 6.23), influenciando fortemente nas forças atuantes sobre ele (figura 6.24), que diverge muito em relação ao modelo com junta ideal.

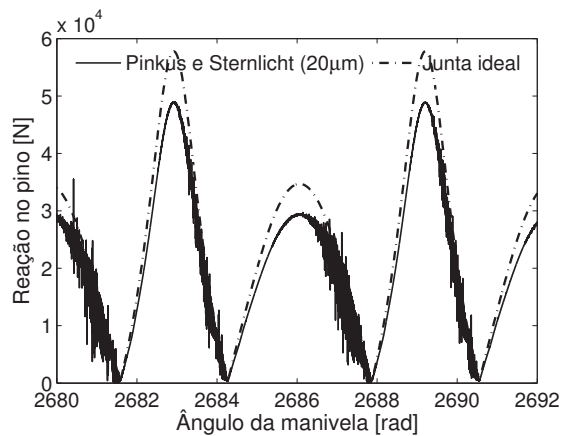


(a) Pinkus e Sternlicht

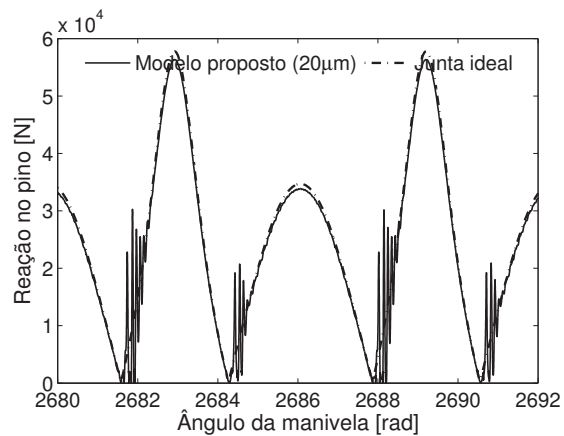


(b) modelo proposto

Figura 6.23: mapa de Poincaré



(a) Pinkus e Sternlicht



(b) modelo proposto

Figura 6.24: reação no pino-pistão

Numa comparação com a primeira simulação, nota-se que o aumento da velocidade da manivela também aumenta a perda de desempenho do sistema. Enquanto o primeiro modelo de lubrificação prevê a condição a ausência de contato durante toda a simulação, o segundo modelo convergiu para forças que não foram capazes de manter o pino em regime de lubrificação hidrodinâmica.

### 6.3 Resultados do mecanismo biela-manivela com folga e modelo de combustão interna

As próximas simulações incluem o modelo de combustão interna, desenvolvido no apêndice A, ao mecanismo biela-manivela estudado. Nestas simulações adicionou-se um termo dissipativo de energia à equação de movimento do sistema, de modo a contabilizar as perdas em atrito.

O coeficiente de amortecimento adotado no virabrequim  $D = 0,030 N \cdot m \cdot s/rad$  foi escolhido de forma a permitir a velocidade média do mecanismo permanecer próxima a  $250 rad/s$  nas simulações *IV* e *V* e  $1.000 rad/s$  na simulação *VI*. Nas tabelas 6.5 e 6.6 estão os demais parâmetros utilizados nas simulações.

Tabela 6.5: Parâmetros utilizados nas simulações do mecanismo biela-manivela com explosão de combustão

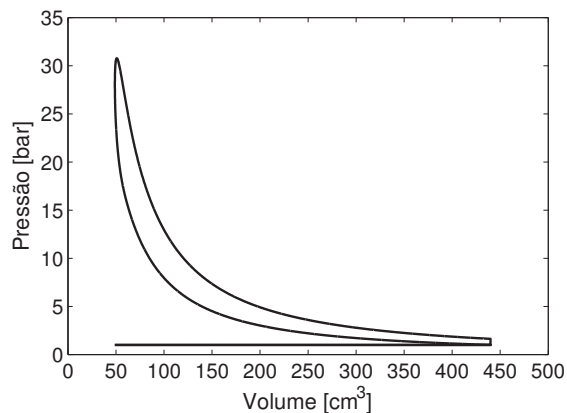
<b>Simulação</b>	<b>Folga radial</b>	$Q_{in}$
<b>IV</b>	20 $\mu m$	165 [J]
<b>V</b>	40 $\mu m$	165 [J]
<b>VI</b>	20 $\mu m$	650 [J]

Tabela 6.6: Parâmetros utilizados no modelo de combustão interna

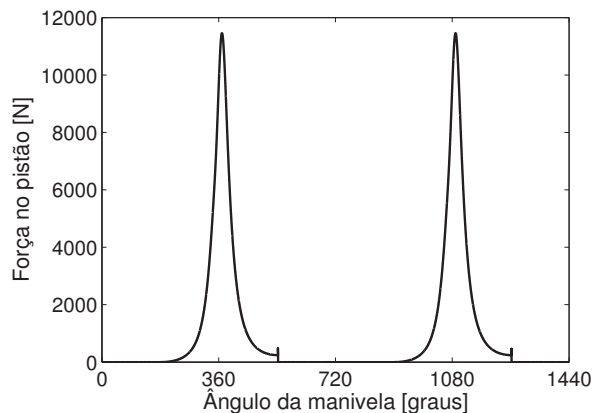
<b>Diâmetro do pistão</b>	70,0[mm]
<b>taxa de compressão</b>	9,0
$\gamma$	1,4
<b>a</b> (fator de forma)	5,0
<b>n</b> (fator de eficiência)	3,0
$\theta_s$	340,0[graus]
$\theta_d$	40,0[graus]

### 6.3.1 Simulação IV

Na quarta simulação, avaliou-se o comportamento do mecanismo com a inclusão da força de excitação externa proveniente da combustão. A curva pressão-volume e o gráfico força/ângulo da manivela estão representadas na figura 6.25.



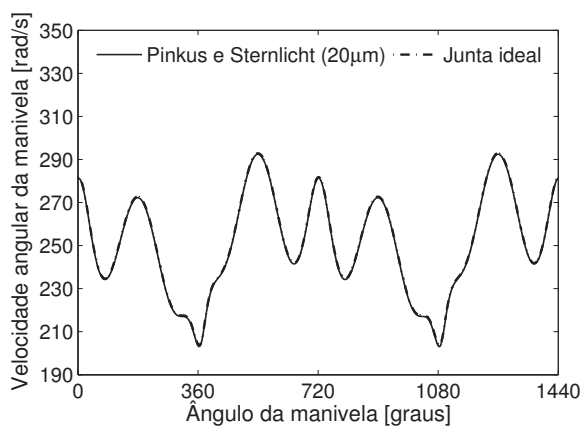
(a) Pinkus e Sternlicht



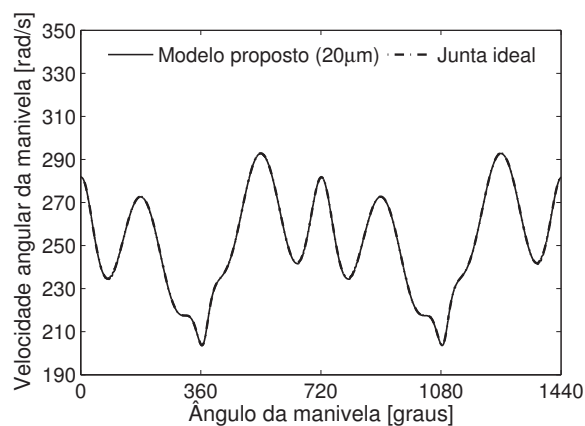
(b) modelo proposto

Figura 6.25: (a) curva pressão-volume; (b) força de explosão;

Na figura 6.26 pode-se observar e comparar o desempenho da velocidade da manivela do mecanismo para os dois modelos de lubrificação analisados. Em ambos os casos, esta grandeza não sofreu alteração significativa quando comparada à resposta de um mecanismo ideal na mesma condição.



(a) Pinkus e Sternlicht



(b) modelo proposto

Figura 6.26: velocidade angular da manivela

Os gráficos apresentados nas figuras 6.27-6.29 referem-se às acelerações de cada compo-



nente. Pode-se observar que em ambos os modelos de lubrificação as respostas dinâmicas oscilam entre períodos de semelhança com o comportamento esperado em um mecanismo ideal e em períodos com a presença de oscilações com alta frequência. Observa-se ainda que estes períodos ocorrem de maneira diversa para os dois modelos de lubrificação.

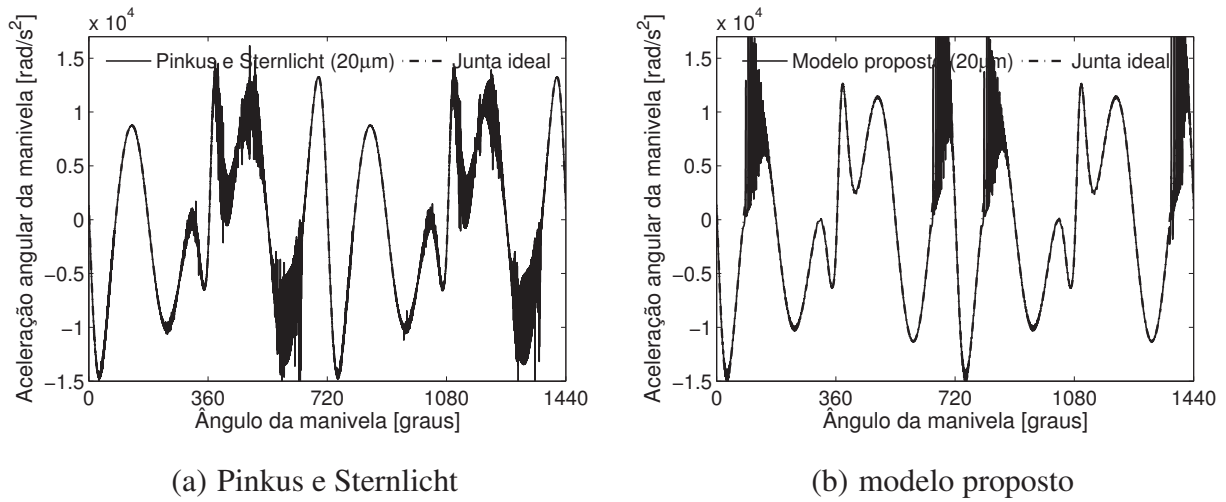


Figura 6.27: aceleração angular da manivela

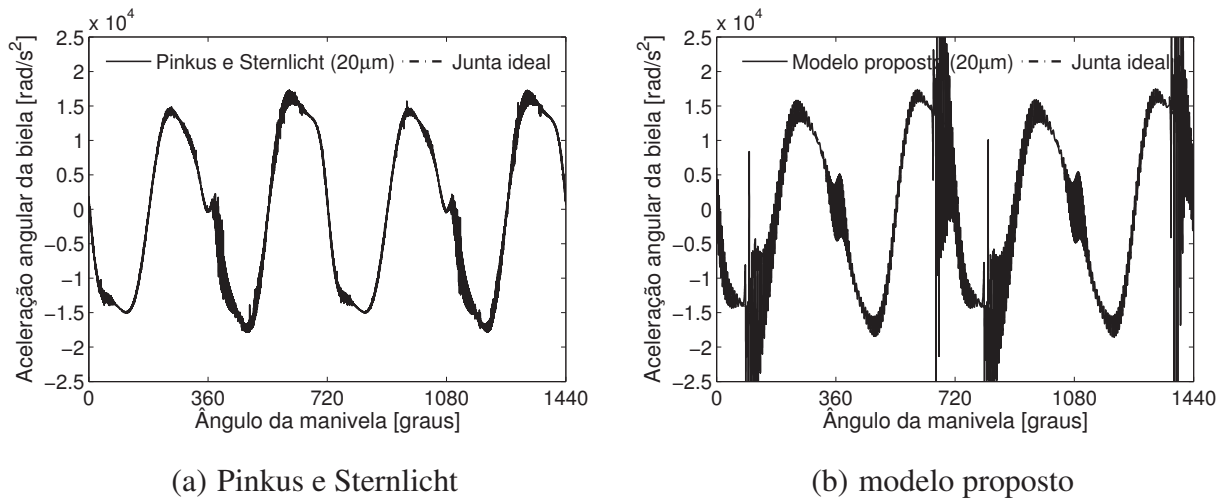
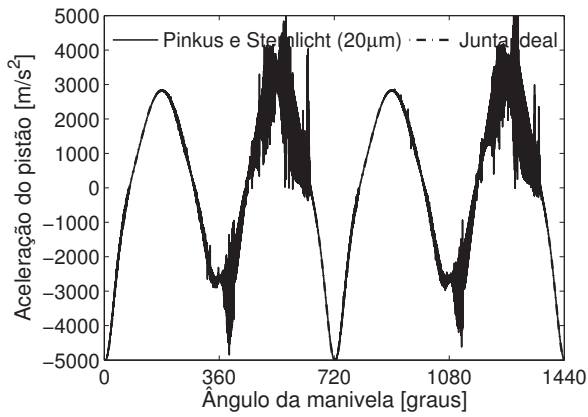
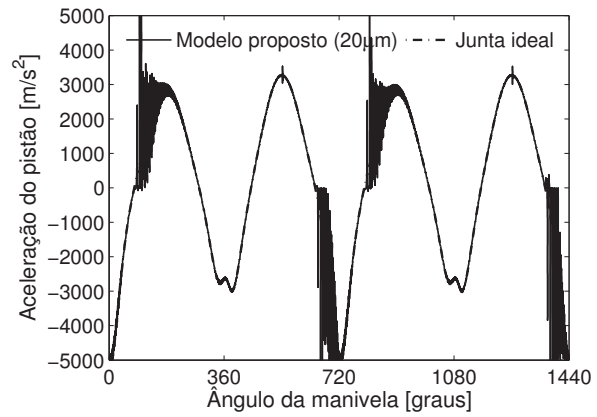


Figura 6.28: aceleração angular da biela



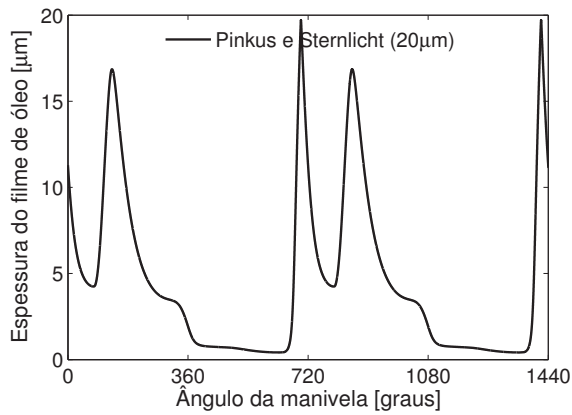
(a) Pinkus e Sternlicht



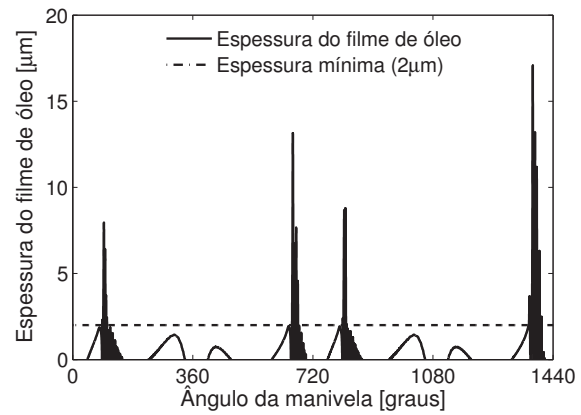
(b) modelo proposto

Figura 6.29: aceleração do pistão

Comparando-se estes gráficos com a espessura do filme de óleo (fig. 6.30) e com a órbita do pino (fig. 6.31) é possível constatar que a presença das perturbações no desempenho do mecanismo está associada com a aproximação do pino ao contato.

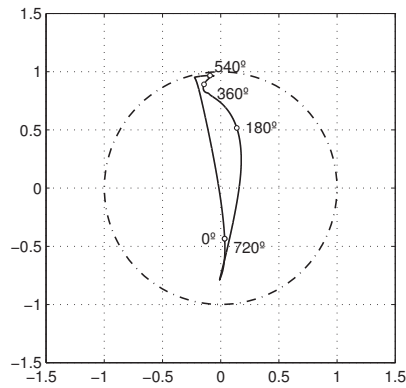


(a) Pinkus e Sternlicht

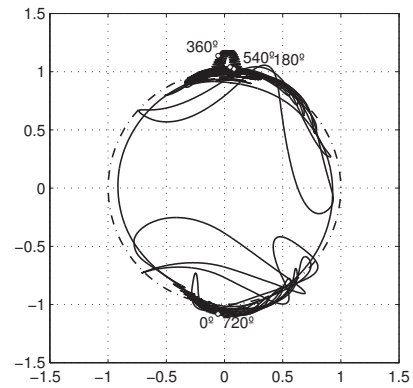


(b) modelo proposto

Figura 6.30: espessura mínima do filme de óleo



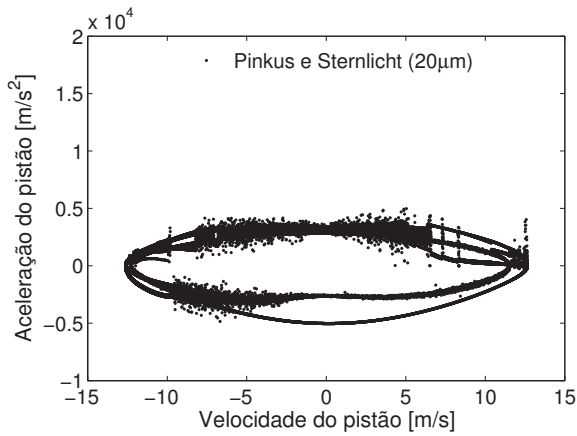
(a) Pinkus e Sternlicht



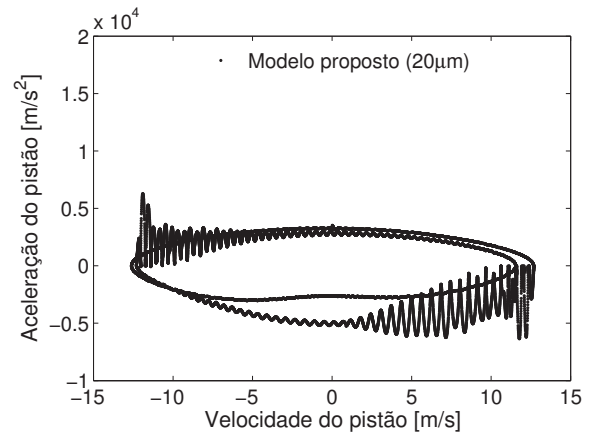
(b) modelo proposto

Figura 6.31: órbita do pino

Esta condição de aproximação faz com que o mapa de Poincaré de ambos os modelos sofra alterações, conforme verificado na figura 6.32. A figura 6.33 apresenta a força de reação resultante no pino-pistão e mostra claramente a variação de carga sofrida durante a operação do mecanismo.

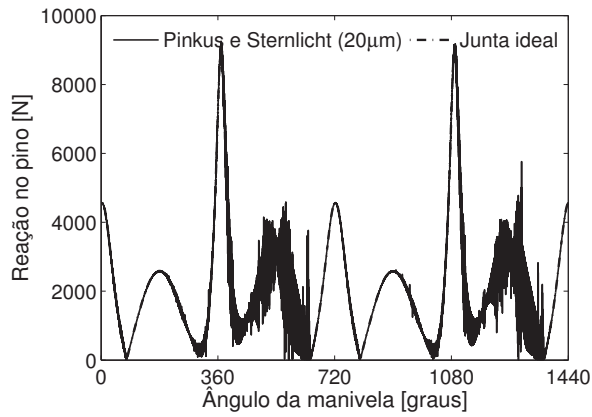


(a) Pinkus e Sternlicht

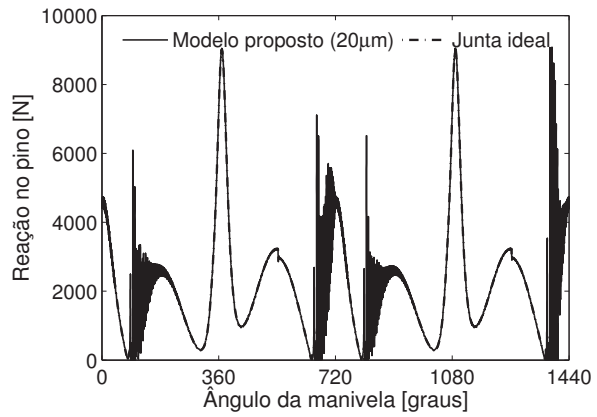


(b) modelo proposto

Figura 6.32: mapa de Poincaré



(a) Pinkus e Sternlicht

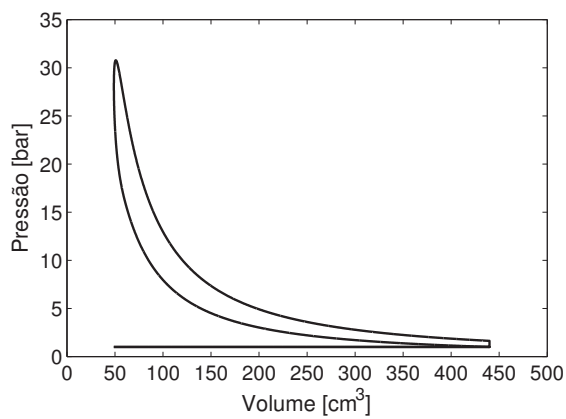


(b) modelo proposto

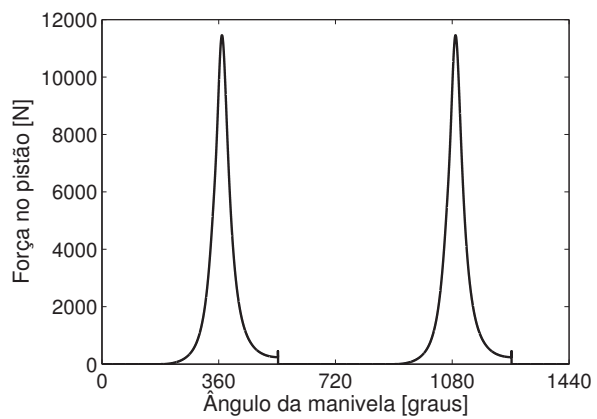
Figura 6.33: reação no pino-pistão

### 6.3.2 Simulação V

Na quinta simulação avaliou-se o efeito do aumento da folga no comportamento do sistema na presença da força de explosão do motor. As curvas de pressão-volume e força de explosão são as mesmas da última simulação, e estão repetidas por conveniência a seguir (fig. 6.34).



(a) Pinkus e Sternlicht



(b) modelo proposto

Figura 6.34: (a) curva pressão-volume; (b) força de explosão;

A figura 6.35 indica que a velocidade da manivela não é significativamente afetada em ambos os modelos de lubrificação, apesar do aumento da folga.

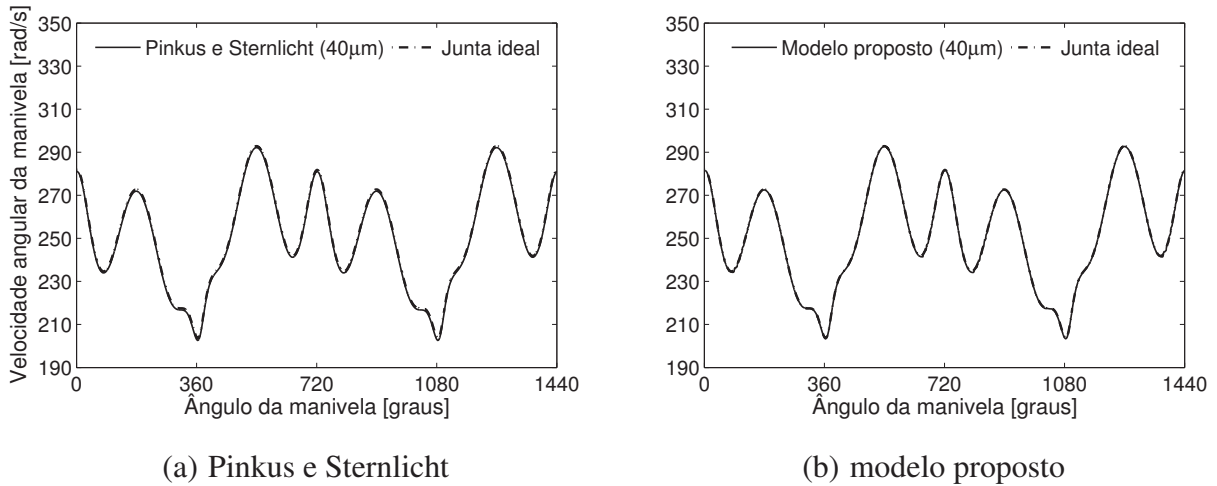


Figura 6.35: velocidade angular da manivela

Em contrapartida as acelerações sofrem de modo mais significativo essa influência quando comparadas às respostas apresentadas na simulação anterior (figs. 6.36-6.38).

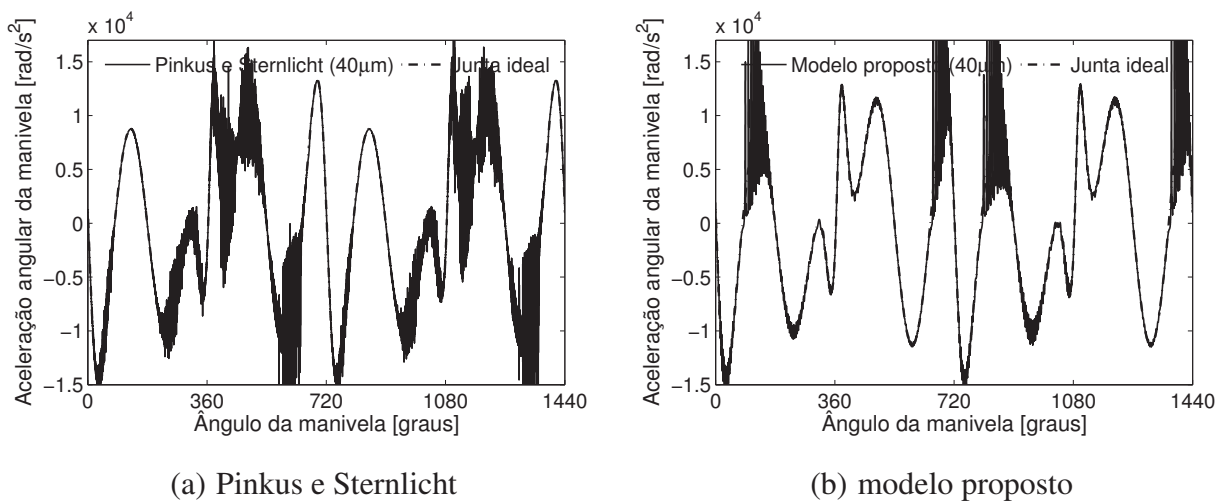
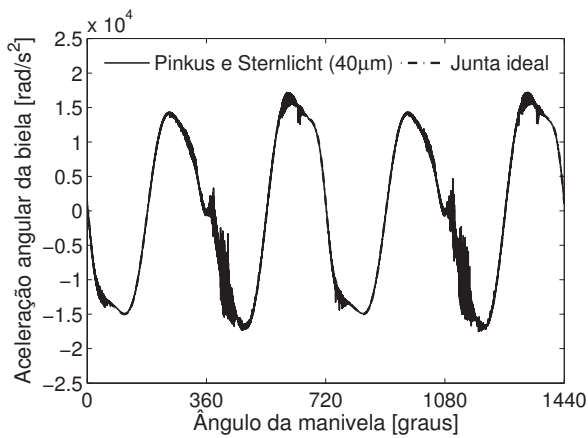
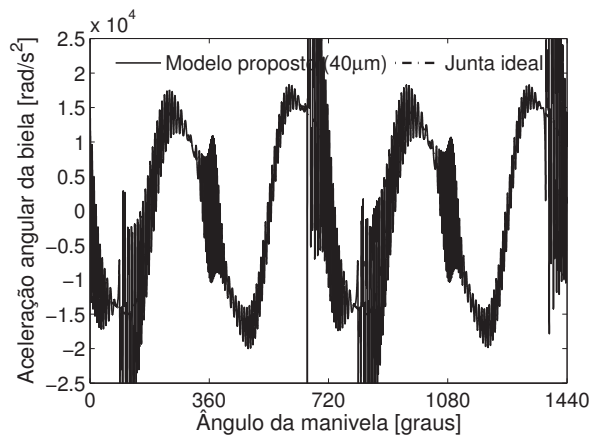


Figura 6.36: aceleração angular da manivela

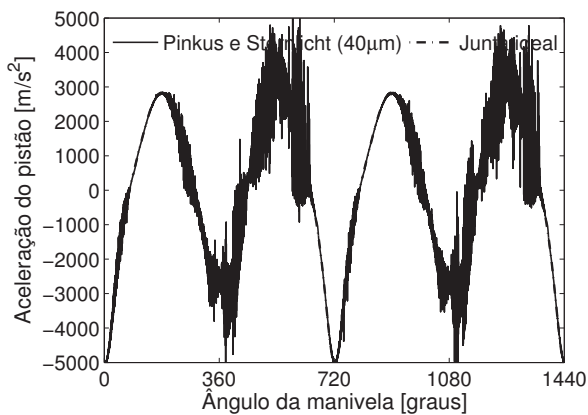


(a) Pinkus e Sternlicht

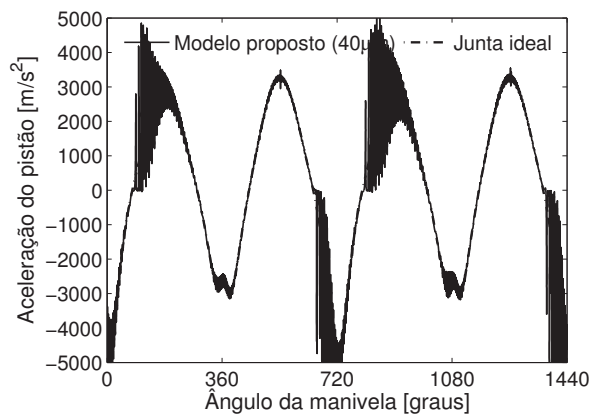


(b) modelo proposto

Figura 6.37: aceleração angular da biela



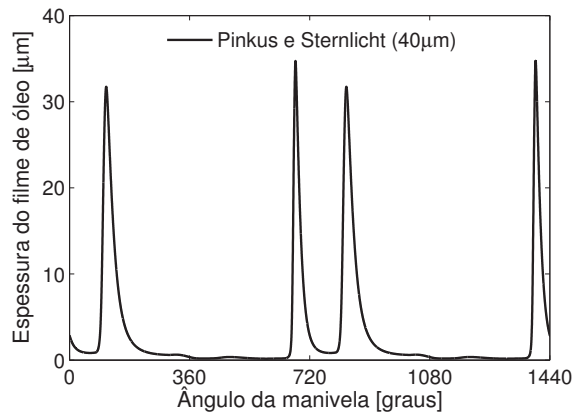
(a) Pinkus e Sternlicht



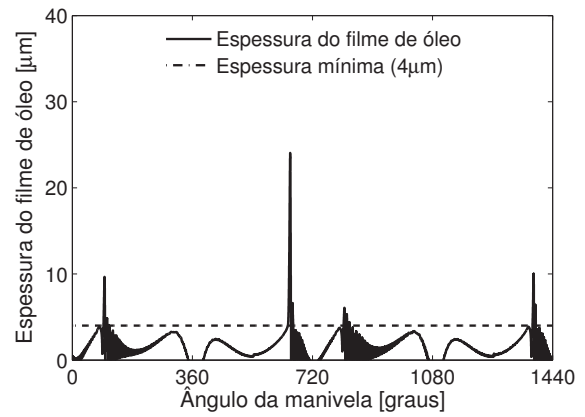
(b) modelo proposto

Figura 6.38: aceleração do pistão

Verifica-se que o aumento da folga diminui a espessura do filme de óleo (fig. 6.39) e a modifica a órbita do pino (fig. 6.40) para os dois modelos de lubrificação. Enquanto no primeiro modelo o pino se aproxima do contato com maior intensidade, no segundo modelo é novamente a mudança do regime de contato para lubrificação que causa impactos e degradação de desempenho.

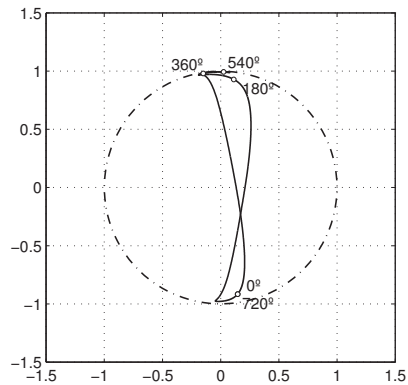


(a) Pinkus e Sternlicht

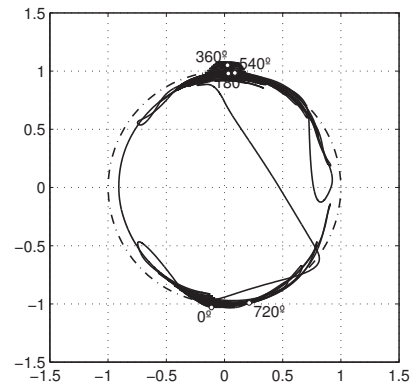


(b) modelo proposto

Figura 6.39: espessura mínima do filme de óleo



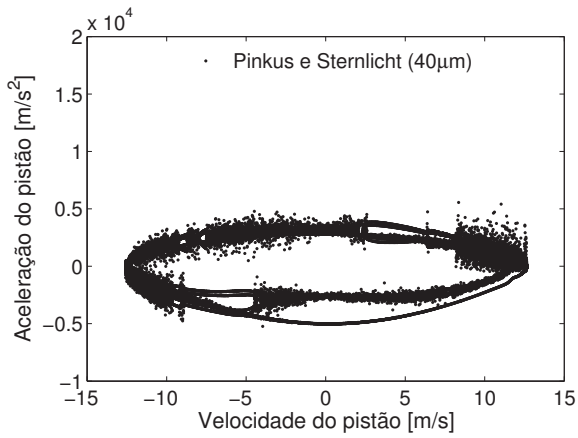
(a) Pinkus e Sternlicht



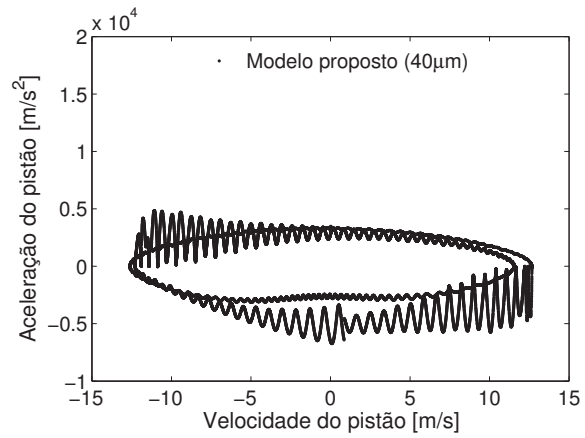
(b) modelo proposto

Figura 6.40: órbita do pino

Observando-se o mapa de Poincaré desta simulação, nota-se uma semelhança com aquele analisado na quarta simulação. E a força de reação no pino segue a tendência de aumento no ruído observado nas acelerações em função do aumento da folga.

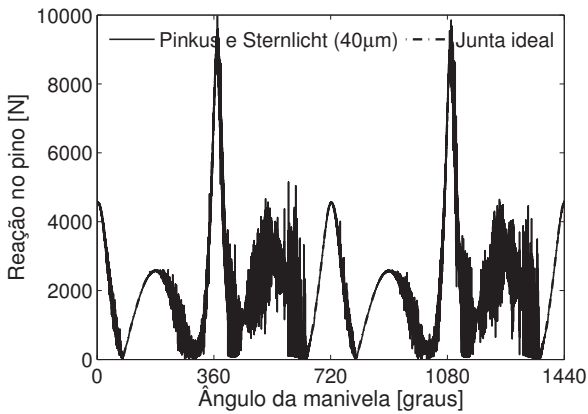


(a) Pinkus e Sternlicht

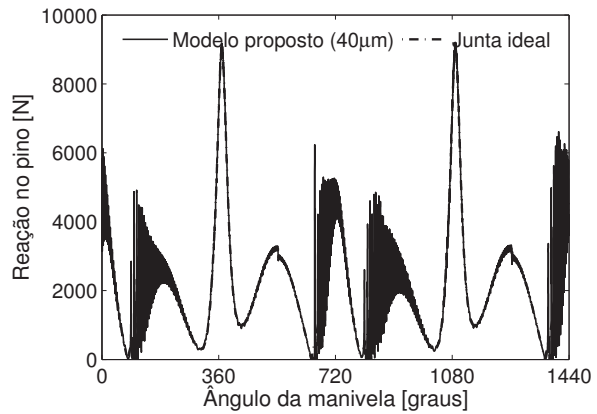


(b) modelo proposto

Figura 6.41: mapa de Poincaré



(a) Pinkus e Sternlicht



(b) modelo proposto

Figura 6.42: reação no pino-pistão

### 6.3.3 Simulação VI

Esta simulação avalia o efeito do aumento da velocidade da manivela na dinâmica do mecanismo. Este aumento ocorre devido ao aumento da força de explosão associada à combustão. Os



gráficos com a curva de pressão-volume e força/ângulo da manivela podem ser vistos na figura 6.43.

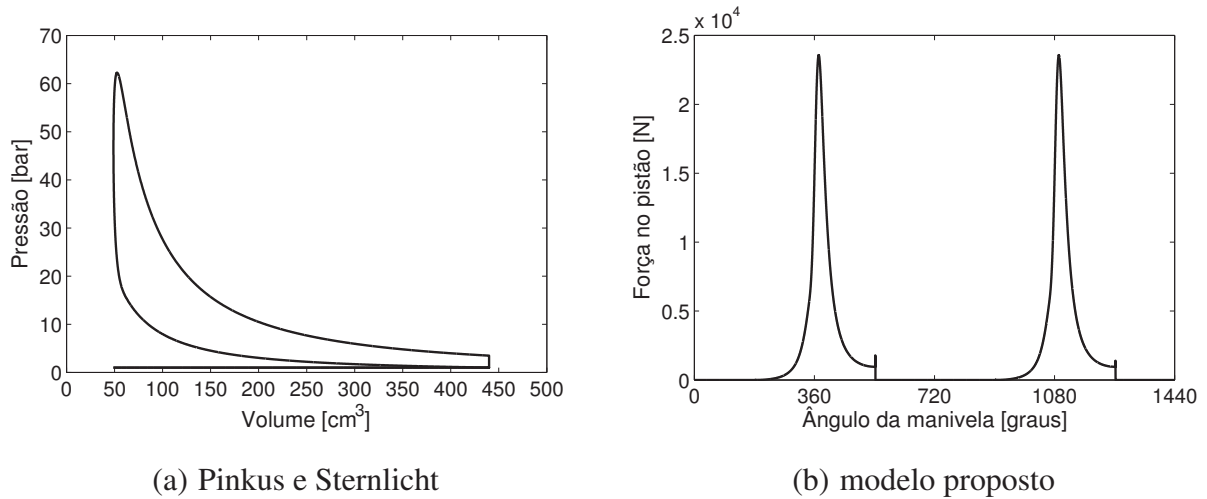


Figura 6.43: (a) curva pressão-volume; (b) força de explosão;

A análise inicia-se com a verificação do desempenho da velocidade da manivela, apresentada na figura 6.44. Observa-se que ambos os modelos de lubrificação aproximam-se do comportamento esperado para o mecanismo ideal.

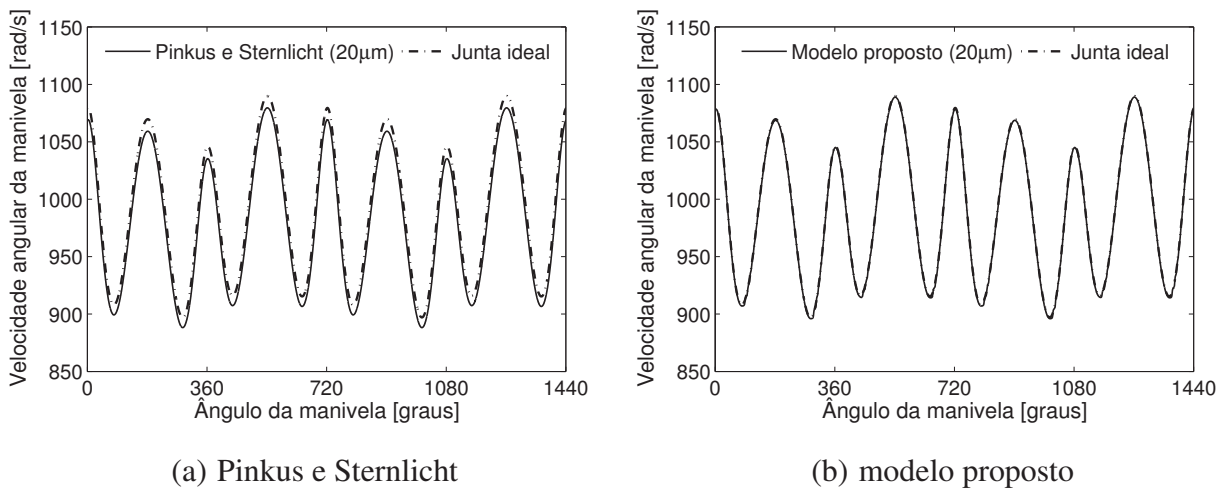
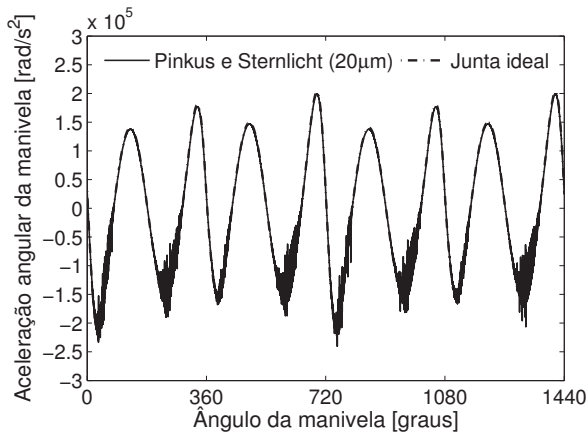
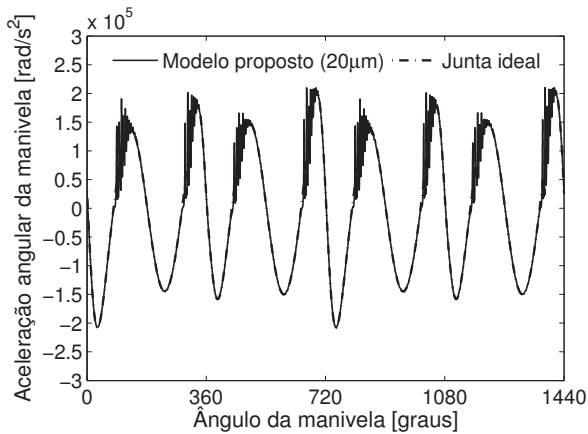


Figura 6.44: velocidade angular da manivela

As acelerações de cada componente podem ser vistas nas figuras 6.45-6.47. Observa-se que elas sofrem influência do aumento da força de explosão.

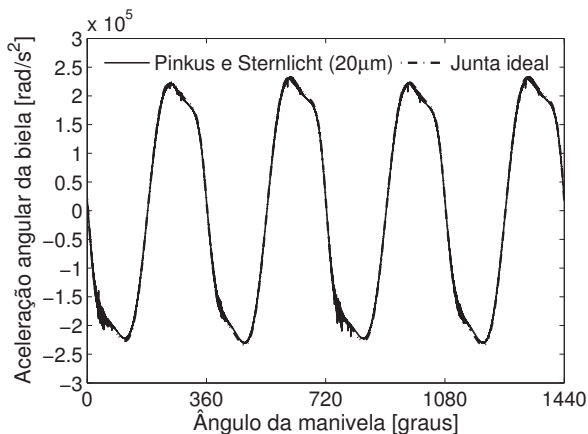


(a) Pinkus e Sternlicht

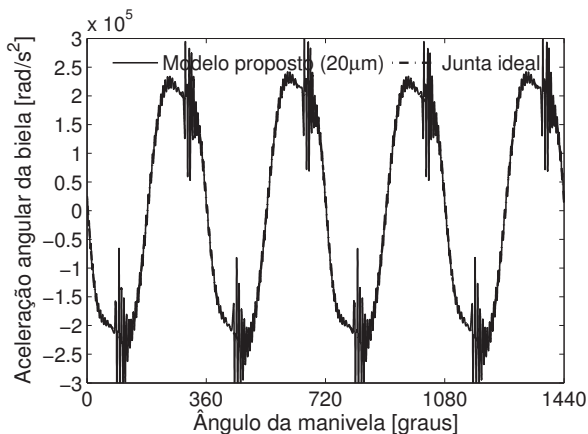


(b) modelo proposto

Figura 6.45: aceleração angular da manivela

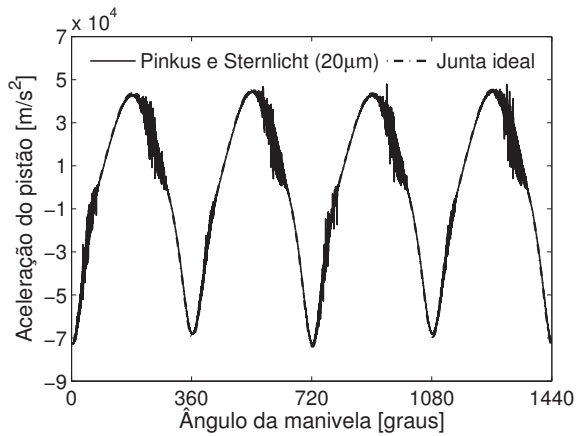


(a) Pinkus e Sternlicht

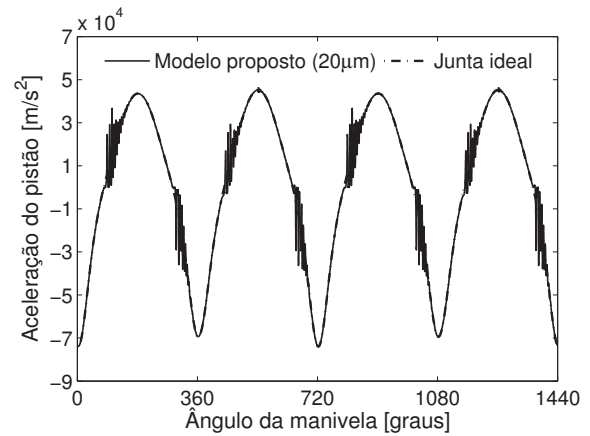


(b) modelo proposto

Figura 6.46: aceleração angular da biela



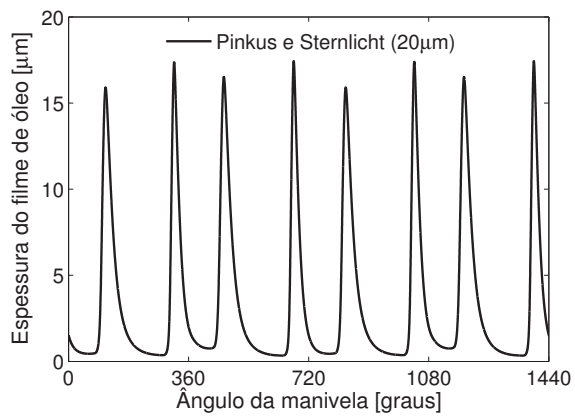
(a) Pinkus e Sternlicht



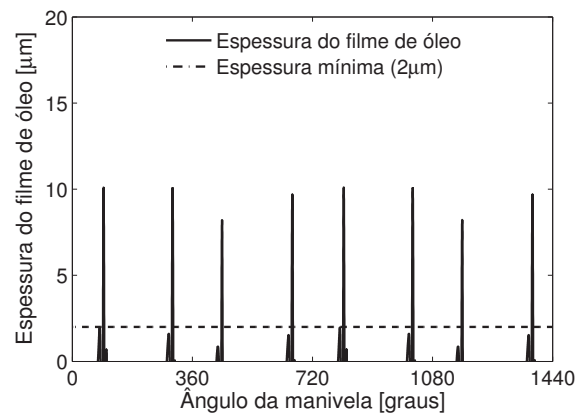
(b) modelo proposto

Figura 6.47: aceleração do pistão

A espessura do filme de óleo (fig. 6.48) do primeiro modelo de lubrificação oscila muito durante o movimento do pino na folga, sem entretanto permitir o contato do pino com o mancal do pistão. O segundo modelo de lubrificação aponta para o contato em quase todos os momentos da simulação, salvo poucos intervalos no qual o pino entra no regime de lubrificação (fig. 6.49).

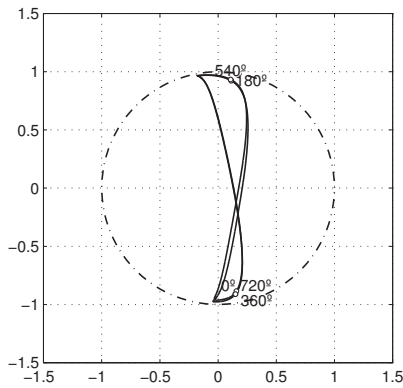


(a) Pinkus e Sternlicht

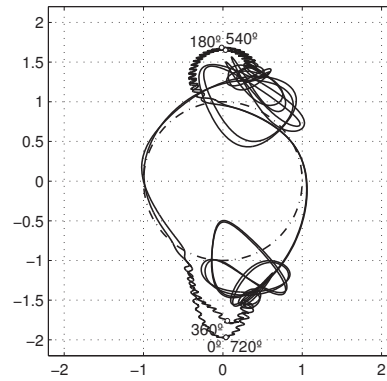


(b) modelo proposto

Figura 6.48: espessura mínima do filme de óleo



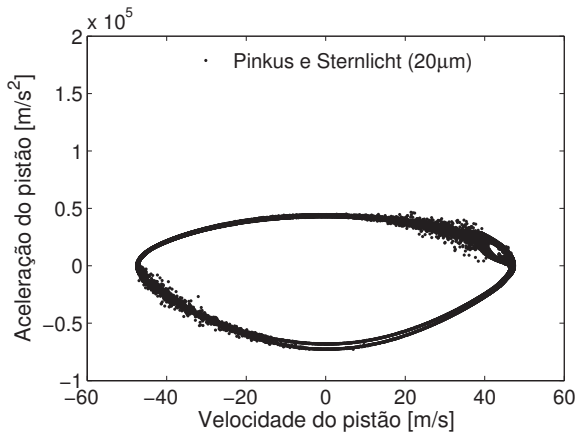
(a) Pinkus e Sternlicht



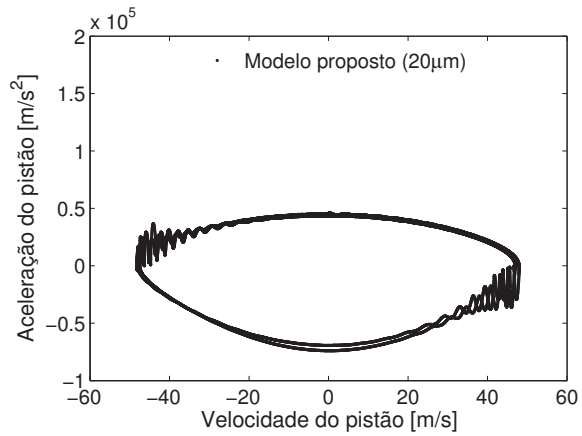
(b) modelo proposto

Figura 6.49: órbita do pino

Nesta condição, os modelos de lubrificação conduzem a um mapa de Poincaré (figura 6.50) muito semelhante, evidenciando um comportamento periódico. Observa-se também que a força de reação no pino-pistão de ambos os modelos acompanha a mesma tendência (figura 6.51).

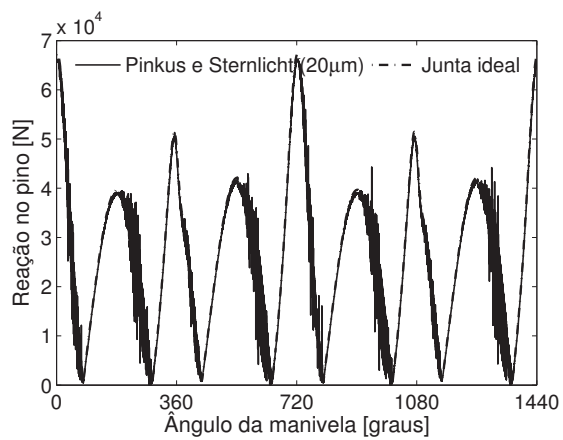


(a) Pinkus e Sternlicht

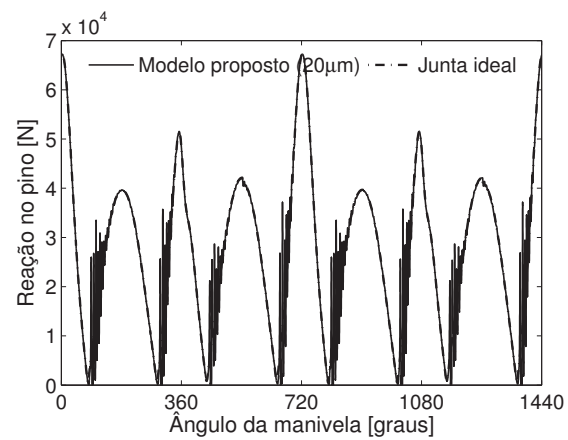


(b) modelo proposto

Figura 6.50: mapa de Poincaré



(a) Pinkus e Sternlicht



(b) modelo proposto

Figura 6.51: reação no pino-pistão



## 7 Discussão e considerações finais

Este trabalho apresentou o desenvolvimento de um modelo dinâmico para prever o comportamento do mecanismo biela-manivela na presença de folga na junta pino-pistão. Este modelo acrescentou aos trabalhos precedentes os efeitos contato/impacto, atrito e lubrificação comumente encontrados na modelagem de sistemas multicorpos presentes na literatura.

Para isso, utilizou-se do desenvolvimento das equações do movimento através do método de *Lagrange*. As forças de contato/impacto e atrito foram obtidas através dos modelos encontrados na literatura recente, e o modelo de lubrificação hidrodinâmica desenvolvido especificamente para mancais com rotação alternada foi implementado para análise deste mecanismo.

A integração das equações do movimento foram realizadas com o uso das rotinas do integrador *predictor-corrector* (SHAMPINE E GORDON, 1975), cuja aplicação em sistemas multicorpos é indicada em virtude do passo de integração ser variável e de ser utilizada em processos numéricos intensos onde alta precisão e estabilidade são requeridas. Desenvolveu-se ainda um modelo de combustão interna típico de motores. Este modelo forneceu a curva de pressão necessária à simulação do comportamento do mecanismo em condições mais próximas às reais de operação.

O modelo de lubrificação proposto apresentou resultados que apontam para um comportamento diferente daquele com o qual foi comparado. Esta discrepância é resultado da abordagem diferenciada que ambos os modelos apresentam. Enquanto o modelo de referência avalia o efeito de cunha e o efeito de esmagamento do filme de óleo, o modelo proposto avalia a lubrificação com o efeito de cunha e leva em consideração a aceleração do fluido decorrente do movimento do pistão.

Observou-se também que a transição da condição de lubrificação para a condição de contato causa elevada perturbação nos resultados obtidos. Um método de ponderação deve ser empregado com o objetivo de diminuir esse comportamento.

Verificou-se que o passo de tempo máximo utilizado nas simulações apresentou importância significativa no custo computacional da operação. Além disso, a inclusão de um modelo de lubrificação mais sofisticado implica no aumento significativo do tempo necessário à simulação.

Diante dos resultados do capítulo anterior e das considerações aqui presentes, é possível per-

ceber que o modelo de lubrificação proposto indica que não há condição suficiente para sustentar o pino-pistão no regime de lubrificação hidrodinâmica durante as simulações efetuadas. Este comportamento era esperado, visto que o pino-pistão apresenta desgaste real nos motores de combustão interna.

## **7.1 Sugestão para trabalhos futuros**

Entre as etapas e os desdobramentos futuros deste trabalho pode-se destacar:

- Melhorar os modelos de contato e atrito nas simulações;
- Considerar os efeitos elastohidrodinâmicos no modelo de lubrificação, o que permitiria avaliar melhor as forças hidrodinâmicas no pino pistão;
- Considerar os efeitos de elasticidade de cada componente do mecanismo;
- Efetuar uma análise de sensibilidade paramétrica do sistema em relação à condição de lubrificação.



## REFERÊNCIAS

AMBRÓSIO, J. Impact of rigid and flexible multibody systems: Deformation description and contact models. **Virtual Nonlinear Multibody Systems, Nato Advanced Study Institute**, v. II, 57–81, 2003.

BANNWART, A.C.; CAVALCA, K.L. e DANIEL, G.B. Hydrodynamic bearings modeling with alternate motion. **Mechanics Research Communications**, v. 37, 590–597, 2010.

DANIEL, Gregory Bregon. **Análise Dinâmica de um Sistema Pino Pistão com Lubrificação Hidrodinâmica**. 2008. Dissertação (Mestrado). Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP.

DANIEL, G.B. e CAVALCA, K.L. Analysis of the dynamics of a slider-crank mechanism with hydrodynamic lubrication in the connecting rod-slider joint clearance. **Mechanism and Machine Theory**, v. 46, 1434–1452, 2011.

DOUGHTY, S. **Mechanics of Machines**. John Wiley & Sons, 1988.

DUBOWSKY, S. e MOENING, M. An experimental and analytical study of impact forces in elastic mechanical systems with clearances. **Mechanism and Machine Theory**, v. 13, 451–465, 1978.

DUBOWSKY, S.; NORRIS, M.; ALONI, E. e TAMIR, A. An analytical and experimental study of the prediction of impacts in planar mechanical systems with clearances. **Transactions of the ASME**, v. 106, 444–451, 1984.

FARAHANCHI, F. e SHAW, S.W. Chaotic and periodic dynamics of a slider-crank mechanism with slider clearance. **Journal of Sound and Vibration**, v. 177, 307–324, 1994.

FERGUSON, C.R. e KIRKPATRICK, A.T. **Internal Combustion Engines Applied Thermosciences**. John Wiley & Sons, 2nd ed., 2001.

FLORES, João Paulo. **Dynamic Analysis Of Mechanical Systems With Imperfect Kinematic Joints**. 2004. Tese (Doutorado). Universidade do Minho.

FLORES, P. Modeling and simulation of wear in revolute clearance joints in multibody systems. **Mechanism and Machine Theory**, v. 44, 1211–1222, 2009.

FLORES, P. e AMBRÓSIO, J. Revolute joints with clearance in multibody systems. **Computers & Structures**, v. 82, 1359–1369, 2004.

FLORES, P.; AMBRÓSIO, J.; CLARO, J.; LANKARANI, H. e KOSHY, C. A study on dynamics of mechanical systems including joints with clearance and lubrication. **Mechanism and Machine Theory**, v. 41, 247–261, 2006.

FLORES, P.; AMBRÓSIO, J.; CLARO, J.; LANKARANI, H. e KOSHY, C. Lubricated revolute joints in rigid multibody systems. **Nonlinear Dynamics**, v. 56, 277–295, 2009.

FLORES, P.; AMBRÓSIO, J. e CLARO, J.P. Dynamic analysis for planar multibody mechanical systems with lubricated joints. **Multibody System Dynamics**, v. 12, 47–74, 2004.

FLORES, P.; KOSHY, C.; LANKARANI, H.; AMBRÓSIO, J. e CLARO, J. Modeling and simulation of wear in revolute clearance joints in multibody systems. **Nonlinear Dynamics**, v. 65, 383–398, 2011.

GANDARA, Irineu. **Modelagem de Mancais Hidrodinâmicos com Movimento Oscilatório**. 2006. Dissertação (Mestrado). Universidade Estadual de Campinas.

HAINES, R.S. Survey: 2-dimensional motion and impact at revolute joints. **Mechanism and Machine Theory**, v. 15, 361–370, 1980.

HAUG, E.J. **Computer Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems**, v. Volume 1: Basic Methods. Allyn and Bacon, 1989.

LANKARANI, H.M. e NIKRAVESH, P.E. Continuous contact force models for impact analysis in multibody systems. **Nonlinear Dynamics**, v. 5, 193–207, 1994.

NIKRAVESH, P.E. **Computer Aided Analysis of Mechanical Systems**. Prentice Hall, 1988.

OTT, H.H. **Zylindrische Gleitlager bei instationärer Belastung**. Verlag A. G. Leemann, 1948.

PINKUS, O. e STERNLICHT, B. **Theory of hydrodynamic lubrication**. McGraw-Hill, 1961.

RAVN, P. A continuous analysis method for planar multibody systems with joint clearance. **Multibody System Dynamics**, v. 2, 1–24, 1998.

SCHWAB, A.L.; MEIJAARD, J.P. e MEIJERS, P. A comparison of revolute joint clearance models in the dynamic analysis of rigid and elastic mechanical systems. **Mechanism and Machine Theory**, v. 37, 895–913, 2002.

SHAMPINE, L.F. e GORDON, M.K. **Computer Solution of Ordinary Differential Equations: The Initial Value Problem**. W.H. Freeman & Co Ltd, 1975.

SILVA, V.A.D. **Modelo L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X para a preparação de teses e dissertações da FEM versão 1.2**. Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Setembro 2012.

## APÊNDICE A Modelagem da força de explosão do pistão

Os motores de combustão interna, utilizam o combustível como fonte de energia e na medida em que se processa a combustão, a energia contida no combustível é liberada aumentando a temperatura e a pressão dentro da câmara de combustão. Este aumento de pressão é o responsável por introduzir a energia necessária ao acionamento do mecanismo biela-manivela descrito neste trabalho.

Com o intuito de se modelar de maneira satisfatória a força de explosão desenvolvida nos motores de combustão interna, utiliza-se o modelo simplificado de liberação finita de calor, encontrado na literatura básica de máquinas térmicas (FERGUSON E KIRKPATRICK, 2001).

### A.1 Modelo de liberação finita de calor

Tanto os ciclos Otto como o Diesel são ciclos normalmente utilizados na caracterização do comportamento de máquinas térmicas que operam em volume constante e pressão constante, respectivamente. Porém, estes modelos não são capazes de descrever de maneira acurada o perfil de temperatura desenvolvido em um motor real, que opera numa condição intermediária entre tais modelos.

Assim, o modelo de liberação finita de calor é um modelo diferencial de um ciclo de potência desenvolvido num motor, no qual uma adição de calor é especificada como função do ângulo de giro da manivela. Este modelo pode ser ajustado com dados experimentais e fornece uma boa aproximação para o levantamento da curva de pressão utilizada nas simulações dos modelos de motores.

Este modelo estabelece uma relação para a fração de combustão, expressa pela equação (A.1):

$$x_b(\theta) = 1 - \exp \left[ -a \left( \frac{\theta - \theta_s}{\theta_d} \right)^{nW} \right] \quad (\text{A.1})$$

onde

$\theta$  = ângulo da manivela

$\theta_s$  = ângulo de início da liberação de calor

$\theta_d$  = duração da liberação de calor

$nW$  = fator de forma de Weibe

$a$  = fator de eficiência de Weibe

Os parâmetros  $a$  e  $nW$  são ajustados a partir de dados experimentais.

A taxa com que o calor é liberado na câmara de combustão em função do ângulo da manivela é obtida através da diferenciação da expressão da liberação finita de calor, dada a seguir:

$$\frac{dQ}{d\theta} = Q_{in} \frac{dx_b}{d\theta} = na \frac{Q_{in}}{\theta_d} (1 - x_b) \left( \frac{\theta - \theta_s}{\theta_d} \right)^n W \quad (\text{A.2})$$

em que  $Q$  representa o calor liberado e  $Q_{in}$  a quantidade de calor total adicionada no início da combustão.

Para um sistema fechado, a equação para a primeira lei da termodinâmica pode ser escrita na forma diferencial em função do ângulo da manivela como:

$$\delta Q - \delta W = dU \quad (\text{A.3})$$

como  $\delta W = PdV$  e  $dU = mc_v dT$ ,

$$\delta Q - PdV = mc_v dT \quad (\text{A.4})$$

Assumindo o comportamento de gás ideal,

$$PV = mR_gT \quad (\text{A.5})$$

que na forma diferencial fica

$$mdT = \frac{1}{R_g}(PdV + VdP) \quad (\text{A.6})$$

A equação da conservação da energia fica então:

$$\delta Q - PdV = \frac{c_v}{R_g}(PdV + VdP) \quad (\text{A.7})$$

por unidade do ângulo da manivela,

$$\frac{dQ}{d\theta} - P\frac{dV}{d\theta} = \frac{c_v}{R_g}\left(P\frac{dV}{d\theta} + V\frac{dP}{d\theta}\right) \quad (\text{A.8})$$

Resolvendo-se para a pressão  $P$ ,

$$\frac{dP}{d\theta} = -\gamma\frac{P}{V}\frac{dV}{d\theta} + \frac{\gamma - 1}{V}\left(\frac{dQ}{d\theta}\right) \quad (\text{A.9})$$

Esta equação diferencial de primeira ordem deve ser resolvida para calcular a pressão no cilindro  $P$  para cada ângulo da manivela  $\theta$ . O modelo do motor utilizado nestas equações encontra-se na figura A.1, da qual pode-se se extrair uma expressão para o volume do cilindro de combustão em função do ângulo da manivela:

$$V(\theta) = \frac{V_d}{r - 1} + \frac{V_d}{2}[R + 1 - \cos(\theta) - (R^2 - \sin^2(\theta))^{1/2}] \quad (\text{A.10})$$

que diferenciada em relação ao ângulo  $\theta$  fica,

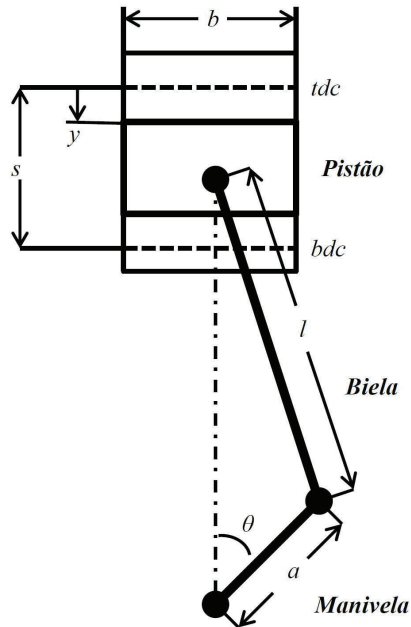


Figura A.1: modelo do motor utilizado

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{V_d}{2} \sin(\theta) [1 + \cos(\theta) - (R^2 - \sin^2(\theta))^{-1/2}] \quad (\text{A.11})$$

onde

$$V_d = \frac{\pi}{4} b^2 s, \text{ volume deslocado}$$

$r$  = taxa de compressão

$$R = 2l/s$$

Para a porção de compressão e expansão do ciclo de combustão sem a liberação de calor, onde  $\theta < \theta_s$  e  $\theta > \theta_s + \theta_d$ ,  $\frac{dQ}{d\theta} = 0$ . Sem a liberação de calor a equação da energia pode ser integrada como uma curva pressão volume isoentrópica e as seguintes relações podem ser utilizadas:

Tabela A.1: Parâmetros do motor para o modelo de liberação finita de calor

$Q_{in}$	adição total de calor [J]
$\theta_s$	ângulo da manivela de início da liberação do calor
$\theta_d$	duração da liberação do calor
$a$	fator de eficiência de Weibe
$nW$	fator de forma de Weibe
$r$	taxa de compressão
$l$	comprimento da biela [m]
$b$	diâmetro do pistão [m]
$s$	curso do pistão [m]

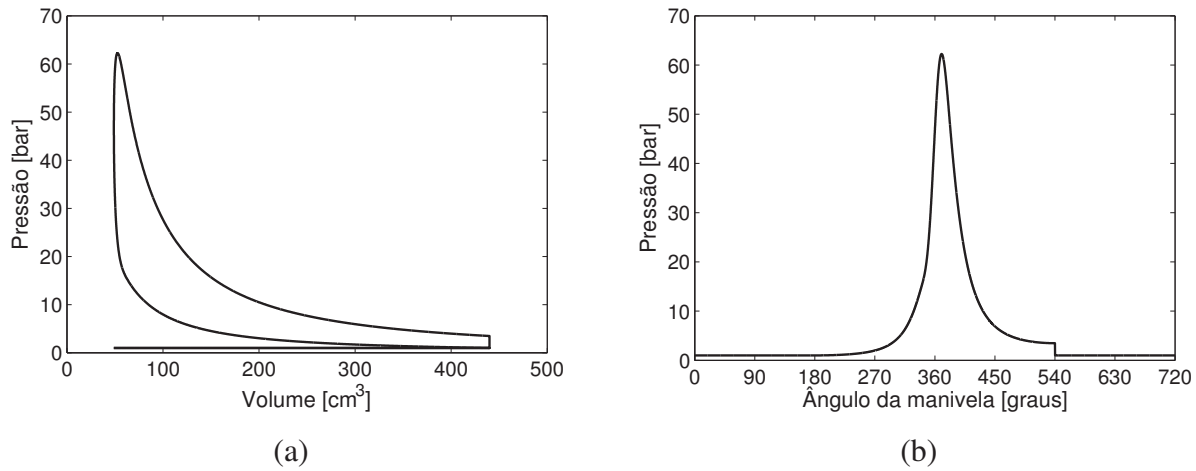


Figura A.2: (a) Pressão-Volume; (b) Pressão-Ângulo manivela

$$\frac{dP}{d\theta} = -\frac{P}{V} \frac{dV}{d\theta} \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{dP}{P} = -\gamma \frac{dV}{V} \quad (\text{A.13})$$

$$PV^\gamma = \text{constante} \quad (\text{A.14})$$

Os parâmetros necessários à definição do modelo de liberação finita de calor estão listados na tabela A.1. A partir desta formulação, integrando-se a equação A.9, obtém-se uma curva típica de pressão em função do ângulo de giro da manivela para um motor quatro tempos (fig. A.2).



## **A.2 Considerações finais**

Neste apêndice apresentou-se o modelo de força de combustão interna utilizado nas simulações do mecanismo biela-manivela. Esta modelagem permite uma avaliação mais realista da dinâmica do mecanismo usado em motores.

## APÊNDICE B Verificação do modelo dinâmico

Este apêndice apresenta os resultados obtidos a partir da comparação do modelo implementado e aqueles encontrados na literatura (FLORES *et al.*; FLORES; FLORES E AMBRÓSIO; FLORES *et al.*; FLORES *et al.*, 2004; 2004; 2004; 2006; 2009).

Nestes trabalhos, a dinâmica do mecanismo biela-manivela com folga na junta pino-pistão é avaliada e a influência dos principais parâmetros que a caracterizam são analisados. O mecanismo (figura B.1) é simulado com velocidade de rotação constante na manivela ( $\dot{q} = 5.000rpm$ ) e as propriedades geométricas e de massa listadas na tabela B.1.

Tabela B.1: Parâmetros geométricos de massa do mecanismo biela-manivela

Componente	Comprimento [m]	Massa [kg]	Momento de inércia [ $kgm^2$ ]
Manivela	0,05	0,30	0,00001
Biela	0,12	0,21	0,00025
Seguidor	-	0,14	-

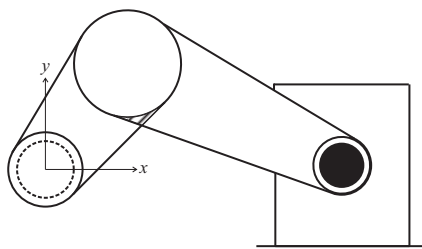


Figura B.1: mecanismo biela-manivela utilizado na verificação

Nas análises, considera-se que o centro de massa dos componentes está localizado na metade de seu comprimento, os efeitos gravitacionais e dissipativos são desprezados. O modelo de contato utilizado nas simulações encontra-se descrito no capítulo 4 e os parâmetros a ele associados, encontram-se listados na tabela B.2.

Tabela B.2: Parâmetros utilizados na verificação do modelo dinâmico

<b>Raio do mancal</b>	10,0 <i>mm</i>	<b>Razão de Poisson</b>	0,3
<b>Coefficiente de restituição</b>	0,9	<b>Erro máximo de integração</b>	$1,00 \cdot 10^{-6}$
<b>Coefficiente de contato</b>	1,5	<b>Passo de integração</b>	$1,00 \cdot 10^{-7}$
<b>Módulo de Young</b>	207 <i>GPa</i>		

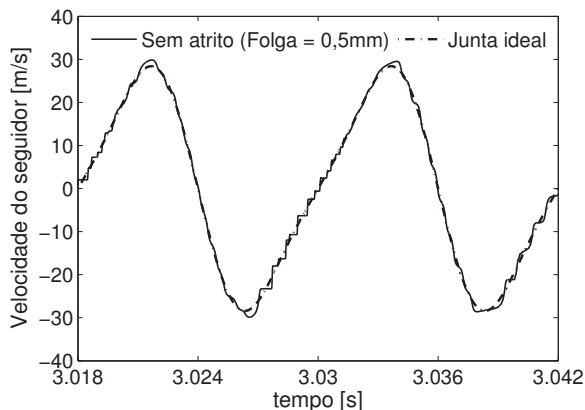
A verificação é dividida em três etapas: na primeira, observa-se o efeito do tamanho da folga; na segunda avalia-se o efeito da inclusão do atrito; e por fim, a influência da lubrificação.

### B.1 Influência do tamanho da folga

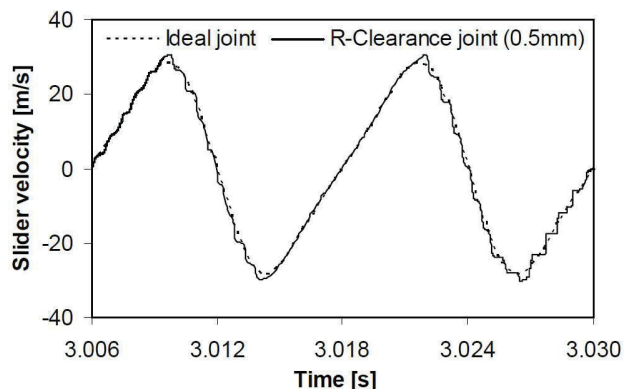
O estudo da influência do tamanho da folga no mecanismo é conduzido através da comparação das principais variáveis que descrevem o comportamento do mecanismo na presença de diferentes tamanhos de folga.

Inicialmente é quantificado o desempenho do mecanismo com uma folga de 0,5 *mm*. em seguida, a folga é diminuída para 0,1 *mm* e por fim para 0,01 *mm*.

Para os valores de folga de 0,5 *mm* pode-se ver na figura B.2 que a velocidade do seguidor é perturbada com a presença da folga. Seguindo a mesma tendência, a aceleração do seguidor sofre grandes alterações quando comparada àquela obtida para a junta ideal (figura B.3).

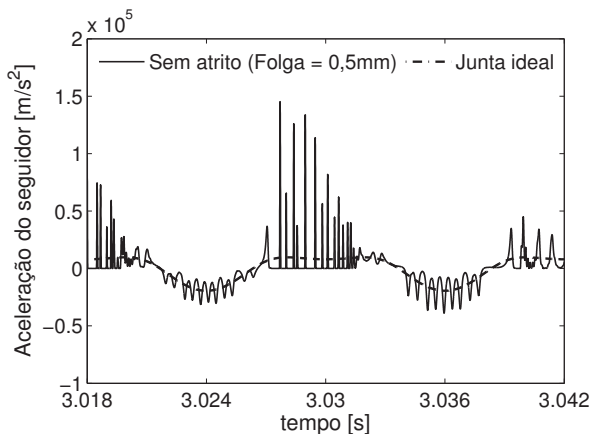


(a) modelo de Pinkus implementado

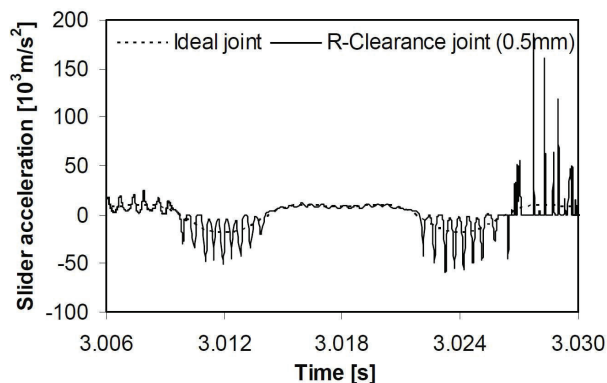


(b) (FLORES, 2004)

Figura B.2: velocidade do seguidor



(a) modelo de Pinkus implementado

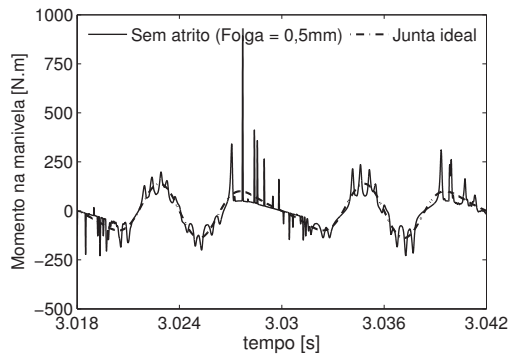


(b) (FLORES, 2004)

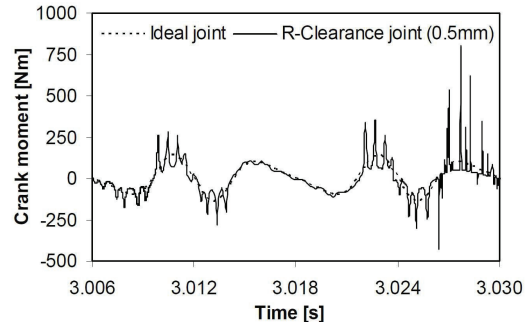
Figura B.3: aceleração do seguidor

Pode-se observar nestes gráficos a presença da folga altera de maneira significativa o perfil de velocidades/acelerações desenvolvidas no seguidor. Além disso, a comparação das respostas de ambos os modelos são muito semelhantes.

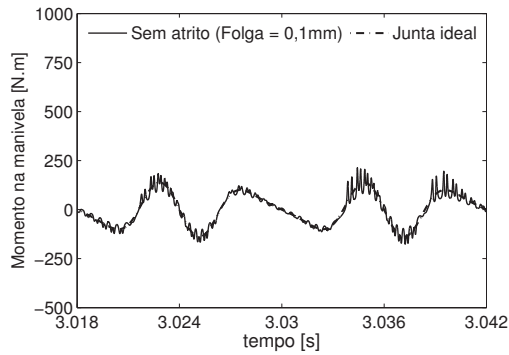
Na figura B.4 avalia-se o efeito da variação da folga no valor do momento aplicado à manivela. Novamente a concordância é verificada entre as implementações e observa-se que a diminuição da folga faz com que o comportamento do mecanismo se aproxime da modelagem idealizada das juntas.



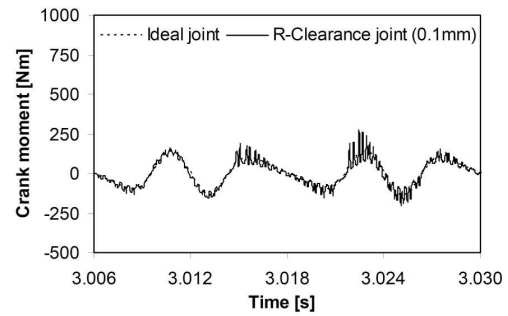
(a) modelo de Pinkus implementado



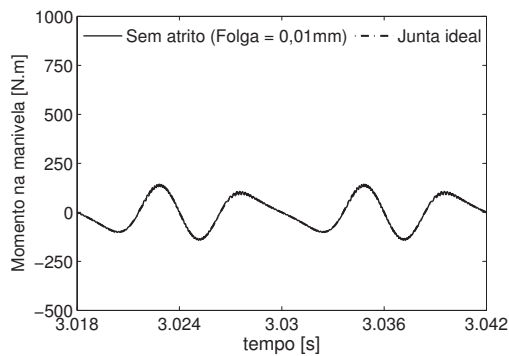
(b) (FLORES, 2004)



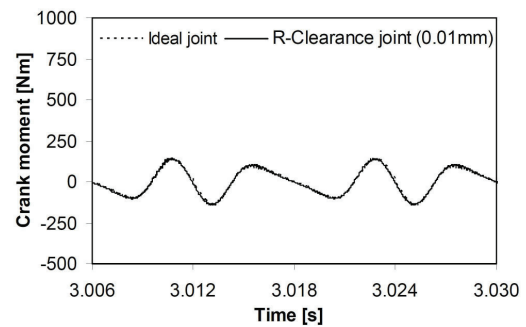
(c) modelo de Pinkus implementado



(d) (FLORES, 2004)



(e) modelo de Pinkus implementado

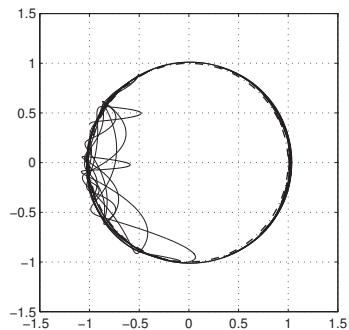


(f) (FLORES, 2004)

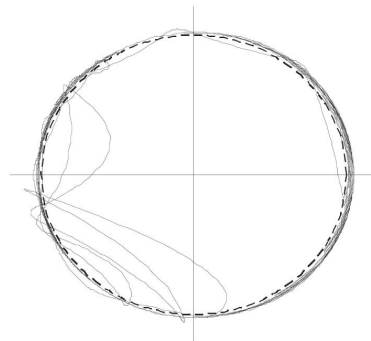
Figura B.4: momento aplicado na manivela

As órbitas do pino no interior da folga podem ser comparadas na figura B.5. Na medida em que a folga é diminuída, o pino permanece mais em contato com o seguidor e desta forma as

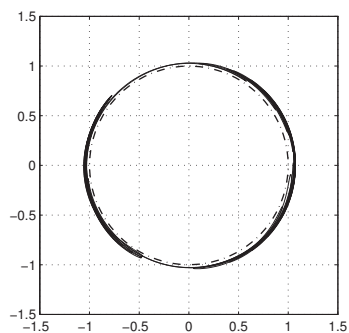
flutuações decorrentes da transição do movimento livre para o impacto do pino com o seguir, são amenizadas.



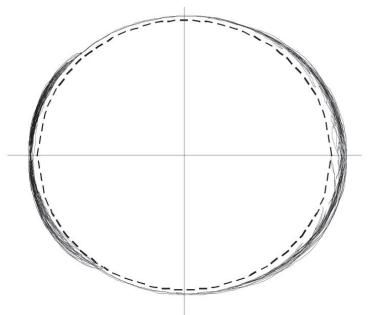
(a) modelo de Pinkus implementado



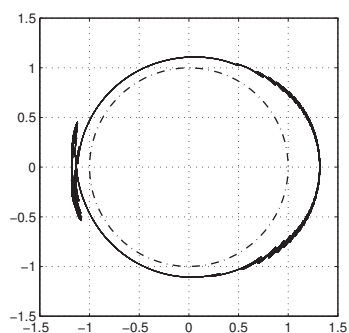
(b) (FLORES, 2004)



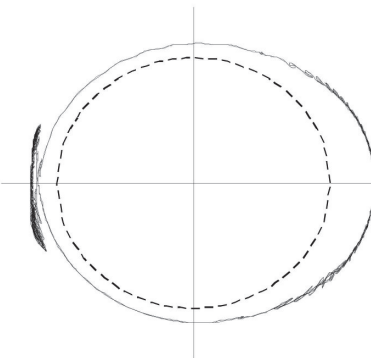
(c) modelo de Pinkus implementado



(d) (FLORES, 2004)



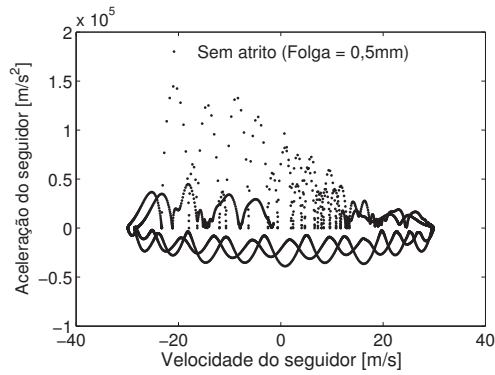
(e) modelo de Pinkus implementado



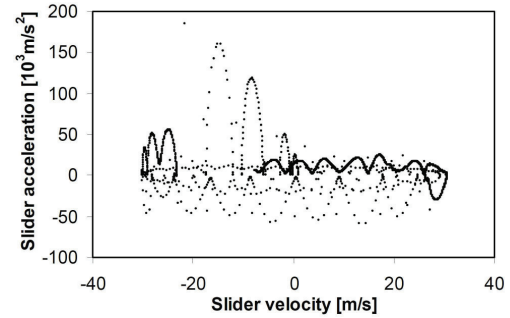
(f) (FLORES, 2004)

Figura B.5: órbita do pino

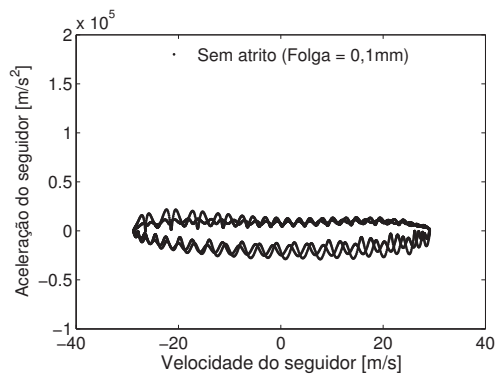
No intuito de se verificar o comportamento periódico do sistema, plota-se ainda o mapa de Poincaré para cada um dos casos testados (figura B.6). É possível verificar que na medida que a folga diminui, a resposta do sistema aproxima-se do comportamento periódico.



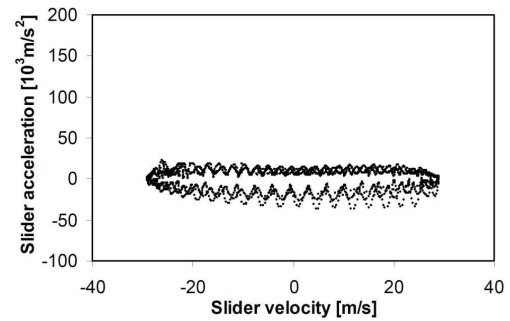
(a) modelo de Pinkus implementado



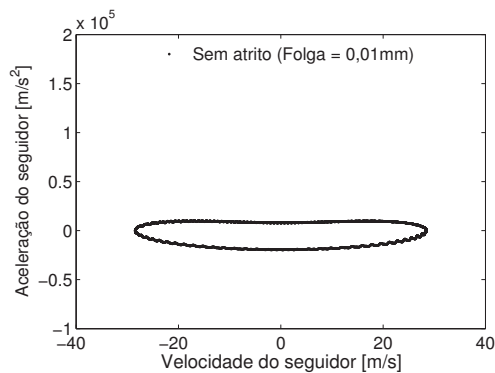
(b) (FLORES, 2004)



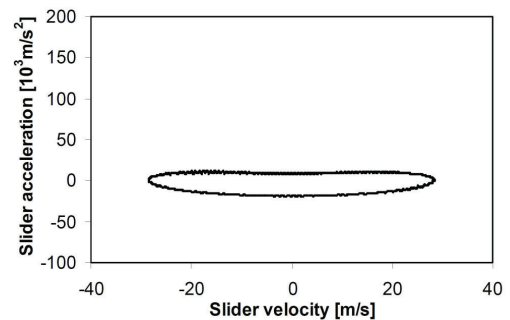
(c) modelo de Pinkus implementado



(d) (FLORES, 2004)



(e) modelo de Pinkus implementado



(f) (FLORES, 2004)

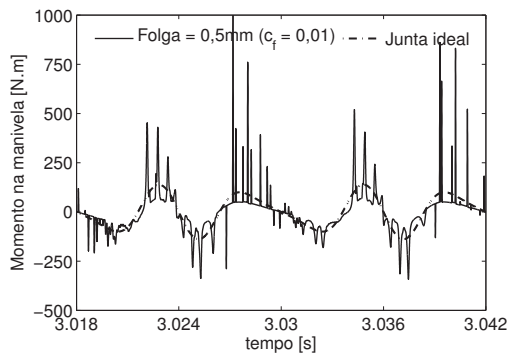
Figura B.6: mapa de Poincaré

Nesta seção, verificou-se com a literatura a implementação do modelo de contato e a influência do tamanho da folga no desempenho do sistema.

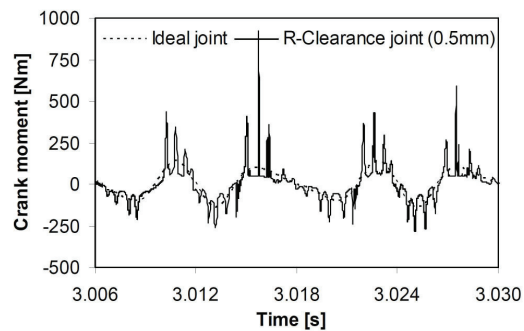
## B.2 Influência da força de atrito

A modelagem da força de atrito, também referenciada no cap. 4, tem o intuito de conferir ao sistema alguma dissipação de energia. As simulações foram efetuadas com folga radial constante e igual a  $0,5\text{mm}$  e o coeficiente de atrito  $c_f$  foi alvo de estudo em cada simulação.

Nas figuras B.7-B.9 são apresentados os resultados obtidos para o momento aplicado à manivela, sob diferentes coeficientes de atrito. Pode-se observar que o aumento do coeficiente implica na redução das oscilações causadas no torque de acionamento.



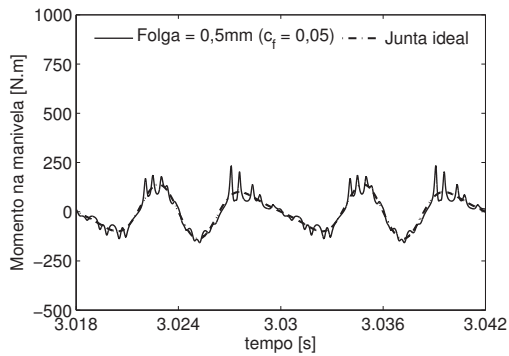
(a) modelo de Pinkus implementado



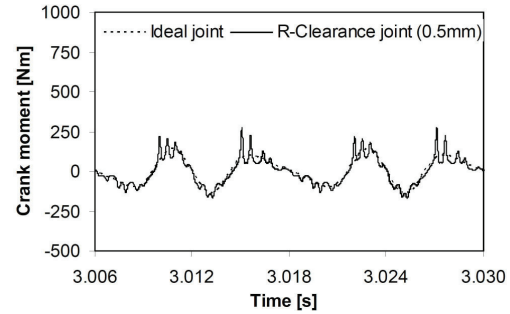
(b) (FLORES, 2004)

Figura B.7: momento aplicado na manivela  $c_f = 0,01$



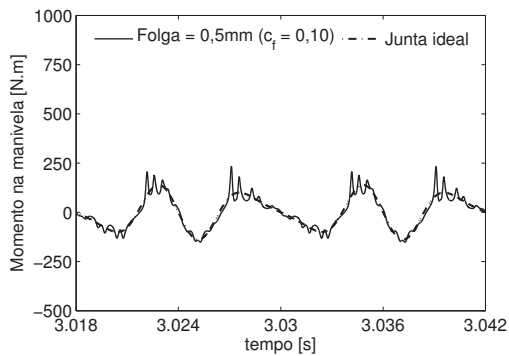


(a) modelo de Pinkus implementado

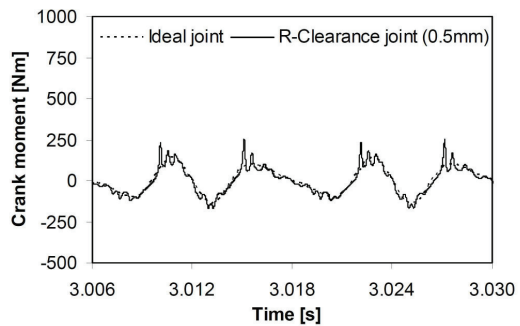


(b) (FLORES, 2004)

Figura B.8: momento aplicado na manivela  $c_f = 0,05$



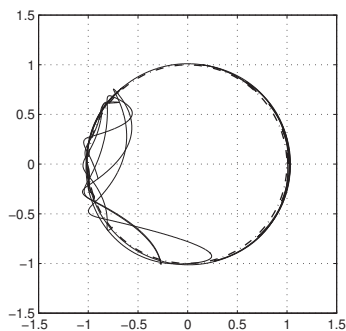
(a) modelo de Pinkus implementado



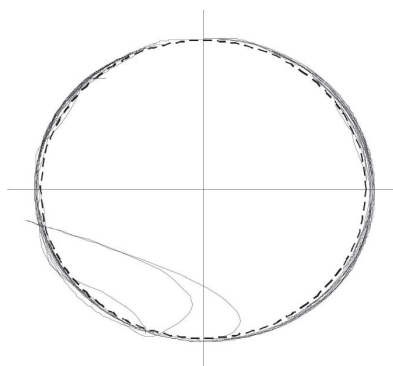
(b) (FLORES, 2004)

Figura B.9: momento aplicado na manivela com  $c_f = 0,1$

Na figura B.10 são apresentadas as órbitas obtidas para as simulações envolvendo a mudança do coeficiente de atrito  $c_f$ . Verifica-se que o aumento no coeficiente de atrito faz com que o pino permaneça mais tempo em contato com o seguidor, o que contribui para que ocorram alterações mais suaves tanto na velocidade quanto na aceleração de cada componente do sistema.

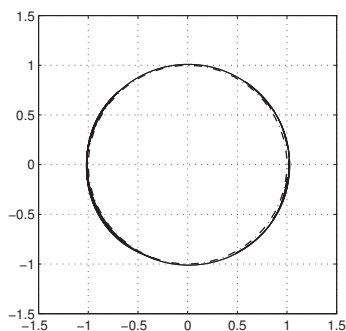


(a) modelo de Pinkus implementado

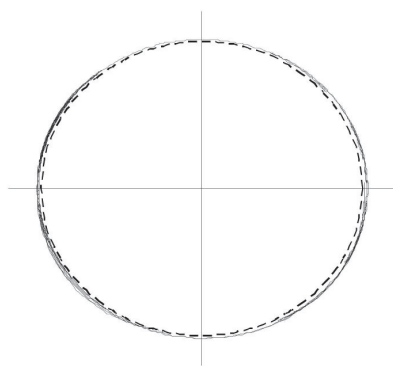


(b) (FLORES, 2004)

Figura B.10: órbita do pino para  $c_f = 0,01$

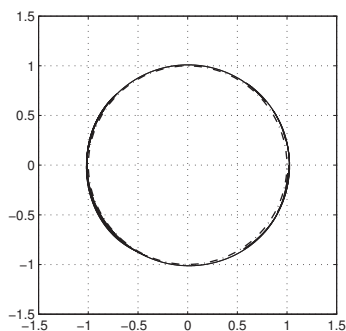


(a) modelo de Pinkus implementado

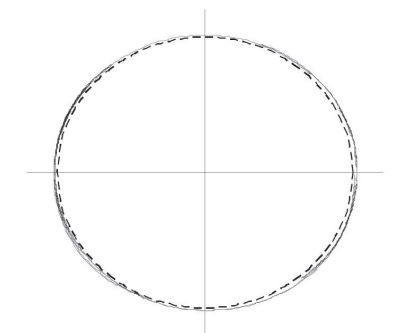


(b) (FLORES, 2004)

Figura B.11: órbita do pino para  $c_f = 0,05$



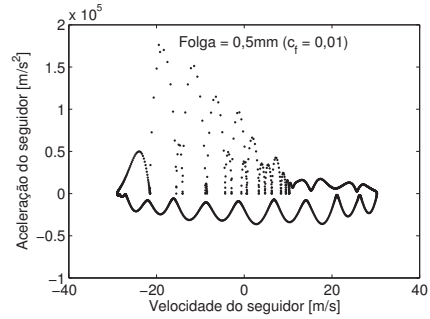
(a) modelo de Pinkus implementado



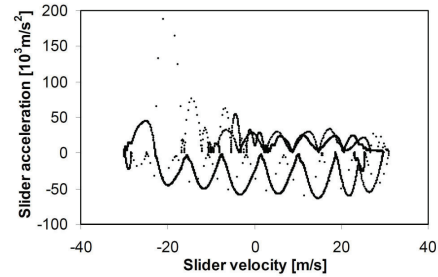
(b) (FLORES, 2004)

Figura B.12: órbita do pino para  $c_f = 0,1$

Dessa forma, o mapa de Poincaré apresenta novamente a tendência de comportamento periódico na medida em que o coeficiente de atrito é aumentado (fig.B.13).

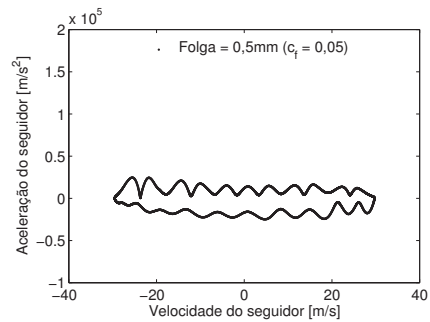


(a) modelo de Pinkus implementado

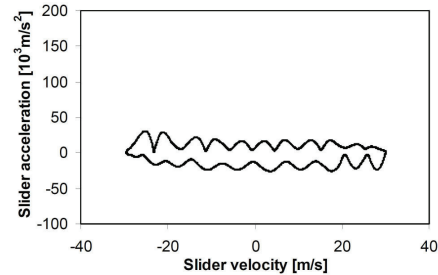


(b) (FLORES, 2004)

Figura B.13: mapa de Poincaré para  $c_f = 0,01$

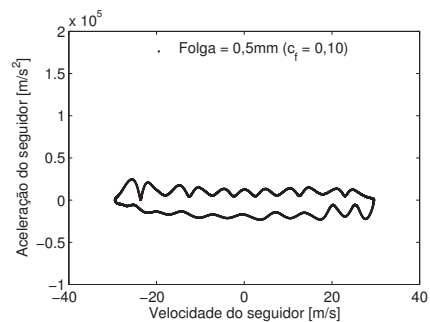


(a) modelo de Pinkus implementado

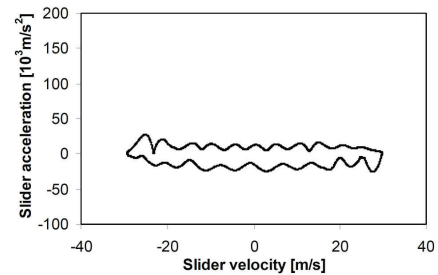


(b) (FLORES, 2004)

Figura B.14: mapa de Poincaré para  $c_f = 0,05$



(a) modelo de Pinkus implementado



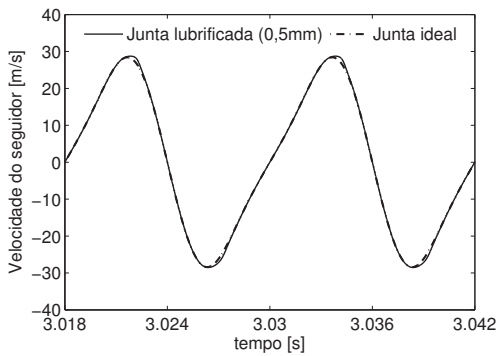
(b) (FLORES, 2004)

Figura B.15: mapa de Poincaré para  $c_f = 0,1$

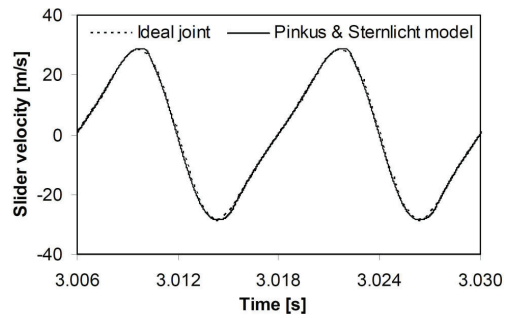
### B.3 Influência da lubrificação

Nesta seção são comparados os resultados obtidos a partir do modelo de lubrificação descrito no capítulo 5. Este modelo de lubrificação hidrodinâmica apresenta dependência direta das propriedades do fluido lubrificante.

Inicialmente obtém-se a resposta do sistema para uma folga radial de  $0,5\text{mm}$  e viscosidade absoluta do filme de óleo de  $400\text{cP}$ . Comparando-se a velocidade e a aceleração do seguidor na presença do filme de óleo (figura B.16) é observado que a inclusão do lubrificante diminui a degradação do desempenho do sistema.

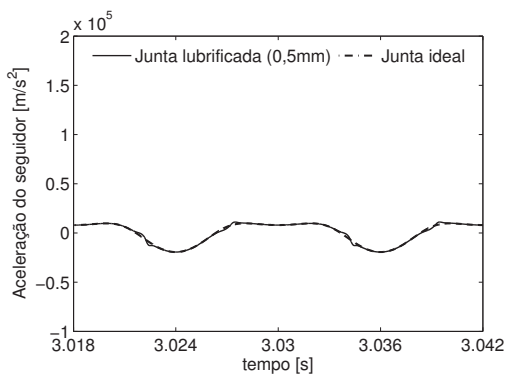


(a) modelo de Pinkus implementado

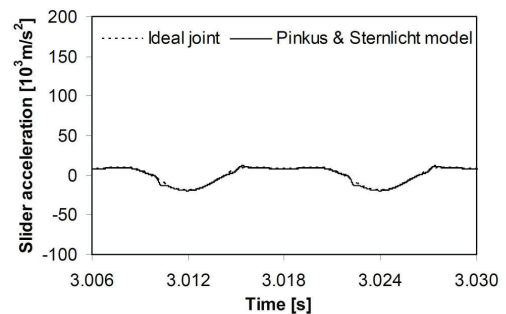


(b) (FLORES, 2004)

Figura B.16: velocidade do seguidor



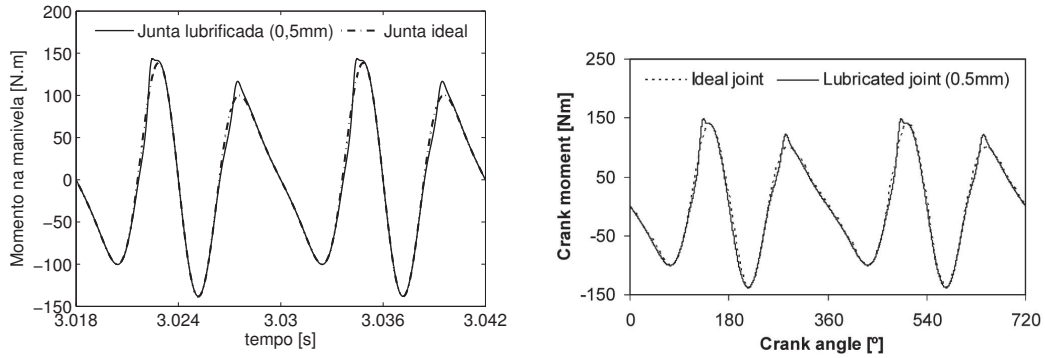
(a) modelo de Pinkus implementado



(b) (FLORES, 2004)

Figura B.17: aceleração do seguidor

Comparando-se o momento na manivela (fig. B.18) na presença da lubrificação com aquele obtido sem o filme de óleo verifica-se que sua inclusão reduz os impactos do pino-pistão no seguidor e por consequência diminui as mudanças abruptas nas variáveis dinâmicas analisadas.

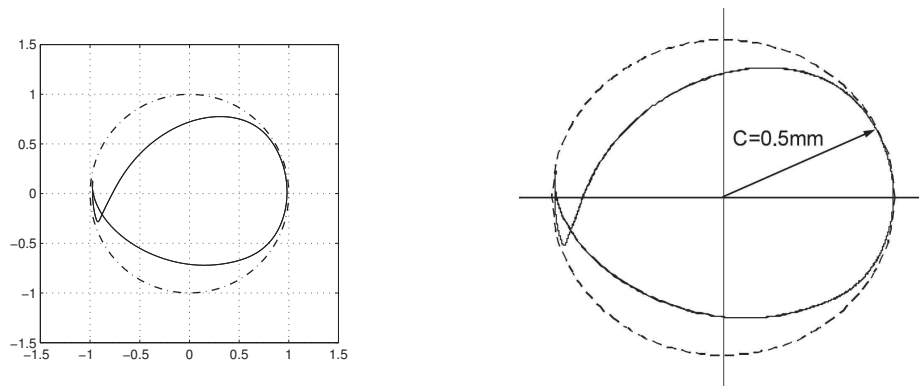


(a) modelo de Pinkus implementado

(b) (FLORES, 2004)

Figura B.18: momento na manivela

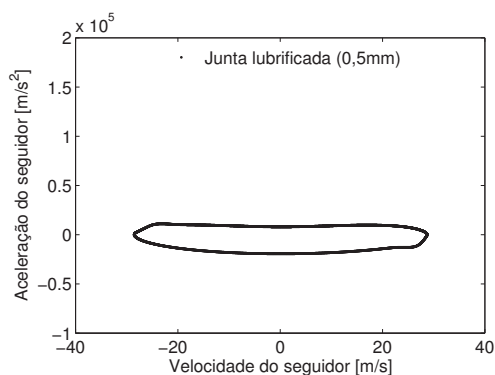
Pode-se constatar ainda que órbita do pino sofre mudança na presença do filme de óleo (fig. B.19). Ela é caracterizada por uma trajetória bem determinada, que se aproxima do contato. Na figura B.20 observa-se o mapa de Poincaré para o seguidor, indicando a tendência de periodicidade.



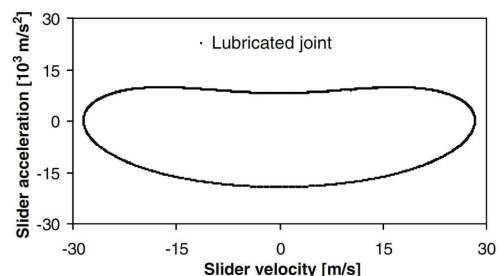
(a) modelo de Pinkus implementado

(b) (FLORES, 2004)

Figura B.19: órbita do pino-pistão



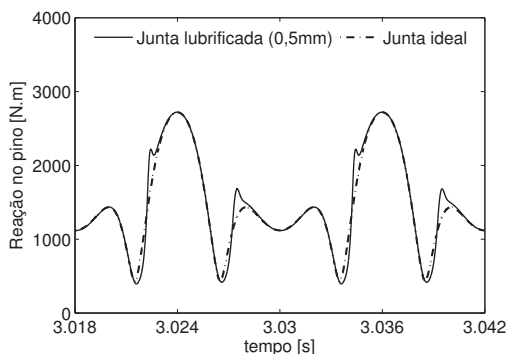
(a) modelo de Pinkus implementado



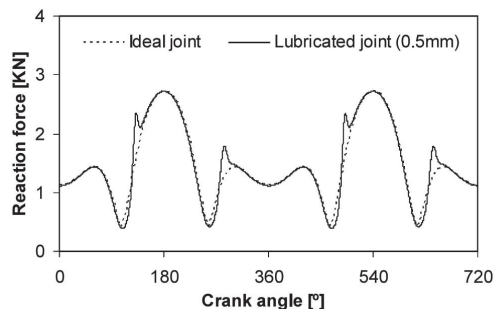
(b) (FLORES, 2004)

Figura B.20: mapa de Poincaré

A força de reação no pino-pistão é visualizada na figura B.21. Observa-se que o comportamento desta grandeza aproxima-se daquele obtido com mancal sem folga.



(a) modelo de Pinkus implementado



(b) (FLORES, 2004)

Figura B.21: reação no pino-pistão

## B.4 Considerações finais

Este apêndice apresentou a verificação das rotinas que descrevem as forças de contato, atrito e lubrificação aplicadas na modelagem do mecanismo biela-manivela. Observou-se a uma boa concordância com os resultados encontrados na literatura.