

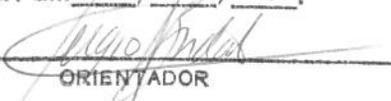
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PETRÓLEO

Dissertação Apresentada à  
Faculdade de Engenharia Mecânica  
Como Requisito Parcial à Obtenção do  
Titulo de Mestre em Engenharia de Petróleo

**SIMULAÇÃO E ANÁLISE DE ESTABILIDADE DO  
ESCOAMENTO BIFÁSICO PADRÃO ANULAR**

**VERTICAL EM REGIME TRANSIENTE**

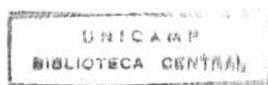
ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA  
TESE DEFENDIDA POR EDUARDO FERREIRA  
GASPARI E APROVADA PELA  
COMISSÃO JULGADORA EM 04 / 12 / 96.

  
ORIENTADOR

Autor: Eduardo Ferreira Gaspari

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Nascimento Bordalo

Dezembro de 1995



DE BC  
UNICAMP  
213 s  
27979  
667/96  
0 11 00  
05107196  
24-6

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

G213s Gaspari, Eduardo Ferreira  
Simulação e análise de estabilidade do escoamento  
bifásico padrão anular vertical em regime transiente /  
Eduardo Ferreira Gaspari.--Campinas, SP: [s.n.], 1995.

Orientador: Sérgio Nascimento Bordalo.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de  
Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Escoamento bifásico. 2. Estabilidade. 3. Métodos  
de simulação. I. Bordalo, Sérgio Nascimento. II.  
Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de  
Engenharia Mecânica. III. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PETRÓLEO

A dissertação “Simulação e análise de estabilidade do escoamento bifásico padrão anular vertical em regime transiente”, elaborada por Eduardo Ferreira Gaspari foi aceita pela Subcomissão de Pós-Graduação em Engenharia de Petróleo como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Engenharia de Petróleo.

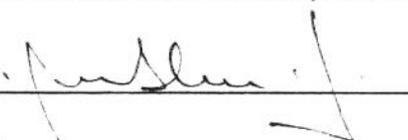
Campinas, 4 de dezembro de 1995

Banca Examinadora:



---

Sérgio Nascimento Bordalo, Ph.D.



---

Fernando de Almeida França, Ph.D.



---

Angela Ourivio Nieckele, Ph.D.

A meus pais José e Altair pela educação que  
me deram.

## **AGRADECIMENTOS**

Ao Prof. Ph.D. Sérgio Nascimento Bordalo pela orientação conselhos e esclarecimentos prestados, ao Prof. Ph.D. Iberê Nascentes Alves pela idéia de tema de tese, ao Prof M.Sc. Attilio Triggia pela paciência e atenção dispensadas em todas as fases deste trabalho, ao Prof. Ph.D. Fernando de Almeida França pelas sugestões oferecidas a este trabalho.

A todos os colegas da UNICAMP e funcionários do DEP.

## RESUMO

Neste trabalho desenvolveu-se um simulador bifásico padrão anular transiente unidimensional utilizando o modelo de dois fluidos foi desenvolvido. Neste simulador são consideradas as equações de conservação de massa e de conservação da quantidade de movimento para cada fase, além disto é considerado o fenômeno de asperção/deposição.

Este simulador é utilizado como ferramenta para se analisar a estabilidade interfacial do escoamento anular a partir do estudo de ondas solitárias no meio bifásico. Uma análise linearizada de estabilidade para o padrão anular é proposta, levando-se em conta o efeito da compressibilidade no mecanismo de estabilização interfacial.

Os resultados obtidos das simulações de ondas solitárias são comparados com dados experimentais de transição do padrão anular comprovando-se boa concordância. Este estudo demonstra, também, o efeito da compressibilidade nos limites de estabilidade do escoamento.

Palavras chaves:

Escoamento bifásico.

Estabilidade.

Métodos de simulação.

## ABSTRACT

The goal of the present work is the development of a one-dimensional simulator for the transient two-phase annular flow using a two-fluid model. The simulator includes the conservation equations for mass and momentum, and takes into account the phenomena of entrainment/deposition of suspended liquid droplets in the gas core flow.

The simulator is used as a tool in the study of interfacial stability of the annular flow through the behavior of solitary waves in the two-phase media . A linear analysis of stability is presented, which includes the effect of the gas compressibility.

The results show good agreement with data for annular transition. Furthermore, this study demonstrates the crucial role of the gas compressibility in the stability limits.

## ÍNDICE

<b>RESUMO .....</b>	<b>iv</b>
<b>ABSTRACT .....</b>	<b>v</b>
<b>NOMENCLATURA.....</b>	<b>ix</b>
<u>ALFABETO GREGO .....</u>	<u>x</u>
<u>SUBSCRITOS .....</u>	<u>xi</u>
<u>SOBRESCRITOS.....</u>	<u>xii</u>
<b>CAPÍTULO 1 : INTRODUÇÃO.....</b>	<b>1</b>
SOBRE OS PADRÕES DE FLUXO .....	2
SOBRE A CLASSIFICAÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS.....	8
RETROSPECTIVA E REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA .....	10
<b>CAPÍTULO 2 : REVISÃO DOS MÉTODOS NUMÉRICOS APLICADOS À SIMULAÇÃO DO ESCOAMENTO BIFÁSICO TRANSIENTE. ....</b>	<b>12</b>
2.1- CARACTERÍSTICAS RELEVANTES DE UM MÉTODO NUMÉRICO.....	12
2.2-MALHA. ....	12
2.3- SISTEMAS EXPLÍCITOS E IMPLÍCITOS. ....	13
2.4- TEMPOS CARACTERÍSTICOS.....	14
2.5- ESTABILIDADE.....	17
2.6- ESQUEMAS DE DIFERENÇAS FINITAS. ....	17
2.6.1- Células doadoras.....	18
2.6.2-Totalmente implícito.....	18
2.6.3- Semi-implícito.....	20
2.6.4- SETS.....	22
2.6.5 Quasi-implícito (nearly implicit).....	23
2.7- O MÉTODO ASWR.....	24
<b>CAPÍTULO 3 : SOBRE A MODELAGEM FÍSICA DO ESCOAMENTO .....</b>	<b>26</b>
3.1.1- A COMPLETA DESCRIÇÃO LOCAL.....	26
3.1.2- O PROCEDIMENTO DAS MÉDIAS.....	28
3.1.3-MODELOS PARA SITUAÇÕES ONDE NÃO EXISTE EQUILÍBRIO TERMODINÂMICO.....	29
3.1.4- ESTABILIDADE DO SISTEMA FÍSICO. ....	29
3.2.0- ESCOAMENTO BIFÁSICO SEM INTERAÇÃO ENTRE AS FASES. ....	30
Sistema A:.....	36
Sistema B:.....	36
Sistema C:.....	36
3.2.1- SISTEMAS MAL POSTOS.....	37
3.3-MODELAGEM DO ESCOAMENTO PADRÃO ANULAR INTERATIVO.....	38
<b>CAPÍTULO 4 : DISCRETIZAÇÃO E SIMULAÇÃO.....</b>	<b>47</b>
4.1- SOBRE O MÉTODO ESCOLHIDO.....	47
4.2- DISCRETIZAÇÃO.....	47
4.3- O CÓDIGO .....	51
4.4-UM EXEMPLO DE SIMULAÇÃO.....	52
<b>CAPÍTULO 5 : ESTABILIDADE INTERFACIAL EM ESCOAMENTO DE PADRÃO ANULAR.....</b>	<b>60</b>
5.1-AS LIMITAÇÕES DA SIMULAÇÃO E A ESTABILIDADE INTERFACIAL.....	60
5.2-ESTABILIDADE DA INTERFACE (PONTO DE VISTA FÍSICO). ....	61
5.3- MODELOS PARA PREDIÇÃO DA INSTABILIDADE.....	63
5.4- A LINEARIZAÇÃO.....	64
5.5-MODOS ORTOGONAIS E COORDENADAS GENERALIZADAS.....	70
(SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS POR AUTO FUNÇÕES).....	70
5.6-O CRITÉRIO DE ESTABILIDADE.....	71

5.7-ESTABILIDADE CONSIDERANDO O GÁS UM FLUIDO COMPRESSÍVEL.....	74
5.8-EQUACIONAMENTO COM COMPRESSIBILIDADE.....	77
5.9- REGIÃO ONDE A EQUAÇÃO UNIDIMENSIONAL PARA PADRÃO ANULAR NÃO APRESENTA TENDÊNCIA À INSTABILIDADE (CASO INCOMPRESSÍVEL) .....	80
5.10-DISSCUSSÃO DO CAPÍTULO.....	82
<b>CAPÍTULO 6 : RESULTADOS.....</b>	<b>83</b>
6.1 ONDAS SOLITÁRIAS.....	83
6.2 COMPARAÇÃO COM MAPAS DE PADRÃO DE FLUXO.....	91
6.3 EFEITO DA COMPRESSIBILIDADE NO LIMITE DE ESTABILIDADE DO ESCOAMENTO ANULAR.....	96
<b>CAPÍTULO 7 : CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES.....</b>	<b>98</b>
CONCLUSÕES .....	98
RECOMENDAÇÕES.....	99
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>100</b>

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1.1 PADRÃO ESTRATIFICADO.....	3
FIGURA 1.2 PADRÃO INTERMITENTE HORIZONTAL.....	3
FIGURA 1.3 PADRÃO ANULAR HORIZONTAL.....	3
FIGURA 1.4 PADRÃO BOLHAS HORIZONTAL.....	4
FIGURA 1.5 PADRÃO BOLHAS VERTICAL.....	4
FIGURA 1.6 PADRÃO INTERMITENTE VERTICAL.....	5
FIGURA 1.7 PADRÃO TURBILHONADO.....	5
FIGURA 1.8 PADRÃO ANULAR VERTICAL.....	6
FIGURA 1.9 EXEMPLO DE MAPA DE PADRÃO DE FLUXO.....	7
FIGURA 2.1 EXEMPLO DE DISCRETIZAÇÃO.....	12
FIGURA 2.2 EXEMPLO DE DISCRETIZAÇÃO NO TEMPO.....	13
FIGURA 3.1 REPRESENTAÇÃO ESPACIAL DE UM SISTEMA FÍSICO.....	27
FIGURA 3.2 REPRESENTAÇÃO DE UM ESCOAMENTO ESTRATIFICADO BIDIMENSIONAL ..	30
FIGURA 3.3 TRAJETÓRIAS DE GOTÍCULAS DISPERSAS.....	43
FIGURA 4.1 PERMANENTE (ÁREA DE LÍQUIDO).....	54
FIGURA 4.2 PERMANENTE (VELOCIDADE DO LÍQUIDO).....	55
FIGURA 4.3 PERMANENTE (VELOCIDADE DO GÁS).....	55
FIGURA 4.4 PERMANENTE (PRESSÃO).....	56
FIGURA 4.5 TRANSIENTE (ÁREA DO LÍQUIDO).....	57
FIGURA 4.6 TRANSIENTE (VELOCIDADE DO LÍQUIDO).....	58
FIGURA 4.7 TRANSIENTE (VELOCIDADE DO GÁS).....	58
FIGURA 4.8 TRANSIENTE (PRESSÃO DO GÁS).....	59
FIGURA 5.1 INTERFACE.....	61
FIGURA 5.2 ESQUEMA DE SISTEMA MASSA-MOLA.....	69
FIGURA 5.3 ANALOGIA DO ESCOAMENTO COM UMA CÂMARA DE GÁS.....	75
FIGURA 5.4 COMPRIMENTO DE ONDA X VELOCIDADE DO GÁS.....	81
FIGURA 6.1 ONDA SOLITÁRIA 1.....	84
FIGURA 6.2 ONDA SOLITÁRIA 2.....	85
FIGURA 6.3 ONDA SOLITÁRIA 3.....	86
FIGURA 6.4 ONDA SOLITÁRIA 4.....	87
FIGURA 6.5 ONDA SOLITÁRIA 5.....	88
FIGURA 6.6 ONDA SOLITÁRIA 6.....	89
FIGURA 6.7 ONDA SOLITÁRIA 7.....	90
FIGURA 6.8 ONDA SOLITÁRIA 8.....	91
FIGURA 6.9 COMPARAÇÃO DE RESULTADO PARA MAPA DE PADRÃO DE FLUXO A 5 GRAUS DE INCLINAÇÃO.....	92
FIGURA 6.10 COMPARAÇÃO DE RESULTADO PARA MAPA DE PADRÃO DE FLUXO A 15 GRAUS DE INCLINAÇÃO.....	93
FIGURA 6.11 COMPARAÇÃO DE RESULTADO PARA MAPA DE PADRÃO DE FLUXO A 30 GRAUS DE INCLINAÇÃO.....	94
FIGURA 6.12 COMPARAÇÃO DE RESULTADO PARA MAPA DE PADRÃO DE FLUXO A 90 GRAUS DE INCLINAÇÃO.....	95
FIGURA 6.13 GRÁFICO REPRESENTANDO OS EFEITOS DA COMPRESSIBILIDADE NA ESTABILIDADE DO ESCOAMENTO.....	96

## NOMENCLATURA

Item	Descrição
A	Operador de média na área para a $i$ -ésima fase ou área.
c	Velocidade do som.
C	Amortecimento viscoso, sistema mola-massa.
$C_i$	Operador diferencial referente às condições de contorno da fase $i$ .
$C_v$	Velocidade crítica de onda.
d	Diâmetro da tubulação.
e	Energia interna.específica
E	Vetor referente às funções de estado.
F	Termo fonte referente à equação de momentum.
$F_e$	Razão de vazão mássica das gotículas dispersas pela vazão total de líquido .
fi	Fator de fricção interfacial.
$f_s$	Fator de fricção de tubo liso.
$f_l$	Fator de fricção do líquido com a parede da tubulação.
g	Gravidade.
$h_l$	Espessura diametral de filme de líquido.
k	Curvatura.
K	Rigidez, sistema massa-mola.
M	Número de Mach.
n	Número de nós ou número de modos ortogonais de vibração.
p	Pressão.
r	Raio.
Re	Número de Reynolds.
s	Entropia específica
S	Perímetro ou a frequência de vibração de um sistema massa-mola amortecido.

t	Tempo.
T	Temperatura.
u	Velocidade axial.
$u_{g s}$	Velocidade superficial do gás.
$u_{l s}$	Velocidade superficial do líquido.
U	Vetor referente às velocidades.
v	Velocidade transversal.
W	Vazão mássica.
x	Coordenada no sistema cartesiano.
y	Coordenada no sistema cartesiano.
z	Coordenada no sistema cartesiano.

### **Alfabeto Grego**

<b>Item</b>	<b>Descrição</b>
$\alpha$	Fração espacial.
$\beta$	Inclinação de fluxo com a horizontal.
$\partial\Omega$	Contorno.
$\Delta$	Variação.
$\varepsilon_i$	Operador diferencial referente à i-ésima fase
$\Gamma$	Taxa de transferência de massa na interface por unidade de comprimento
$\lambda$	Comprimento de onda ou autovalor.
$\mu$	Operador diferencial ou viscosidade dinâmica.
$\pi$	Constante.
$\rho$	Massa específica.
$\tau$	Tensão de cisalhamento.
$\sigma$	Tensão superficial ou parâmetro de interface.

$\phi$	Média de um parâmetro em relação à área.
$\omega$	Frequência natural.
$\Omega$	Domínio.

## **Subscritos**

<b>Item</b>	<b>Descrição</b>
$\alpha$	Relativo à fração espacial do gás.
d	Relativo às gotículas dispersas ou a parte superior da tubulação.
e	Relativo ao entrainment.
f	Relativo ao filme de líquido.
g	Relativo ao gás.
i	Relativo à interface ou relativo a uma fase ou relativo ao modo de oscilação.
j	Índice relativo ao nó de uma célula ou relativo a uma fase.
k	Relativo às iterações no último nível de tempo.
l	Relativo à fase líquido.
n	Índice relativo ao tempo.
p	Relativo à pressão.
t	Tempo.
$u_g$	Relativo à velocidade do gás.
$u_l$	Relativo à velocidade do líquido.
x	Componente na direção x.
0	Parte inferior da tubulação.
1	Fase 1.
2	Fase 2.

## **Sobrescritos**

<b>Item</b>	<b>Descrição</b>
d	Relativo à parte superior da tubulação.
0	Relativo à parte inferior da tubulação.
'	Relativo às variáveis perturbadas.
-	Relativo às variáveis médias.
~	Relativo às variáveis pontuais ou às variáveis de células doadoras.
^	Relativo aos valores limites de uma variável próximo a interface.

## CAPÍTULO 1 : Introdução

O objetivo deste trabalho é implementar um simulador computacional para o escoamento bifásico transiente anular, utilizando o modelo de dois fluidos, fases separadas. Este simulador será utilizado também para se analisar o processo de instabilização interfacial do escoamento bifásico padrão anular.

O estudo dos escoamentos bifásicos é de grande importância na indústria de petróleo, química e nuclear. Transiência em escoamento bifásico é um fenômeno que ocorre com frequência nestas indústrias.

No caso da indústria nuclear, é bastante conhecida a preocupação que se tem com acidentes por perda de fluido refrigerante, que é uma situação típica de transiência. Não só em situações acidentais, mas também em operações rotineiras, observa-se escoamento bifásico permanente e transiente em usinas nucleares. Os primeiros simuladores bifásicos transientes foram direcionados para problemas da área nuclear, e, hoje, a grande maioria dos simuladores são para problemas nucleares.

Na indústria de petróleo, a preocupação com escoamentos bifásicos transientes vem aumentando a cada dia, especialmente nos casos de produção em lâminas d'água de grande profundidade, onde, devido à dificuldade destas operações, os problemas de transiência tem impacto mais crítico.

Na engenharia de petróleo o escoamento anular é comum em poços de gás condensado. Em uma situação de escoamento transiente o líquido pode desenvolver um fluxo descendente, “matando” assim o poço. O escoamento anular ocorre em outras operações práticas de elevação de petróleo, como a injeção intermitente de gás e a elevação pistonada (plunger lift); nestes dois casos, temos gás empurrando uma coluna de líquido para cima e ao redor do gás temos líquido escoando, caracterizando uma disposição geométrica do tipo anular para as fases.

O padrão anular de escoamento guarda dentro de si um alto grau de complexidade. Interações entre as fases do tipo entrada de gotículas de líquido no núcleo gasoso, tensão cizalhante interfacial, equilíbrio termodinâmico, são fenômenos que muito contribuem para a complexidade do escoamento. Estes fenômenos são representados por equações constitutivas, o que aumenta o grau de incerteza da simulação, dado o fato de que todas estas equações são retiradas de experimentos em regime permanente.

O estudo do regime transiente em escoamentos bifásicos também é importante para se determinar em que região existirá uma determinada disposição geométrica dos fluidos dentro de uma tubulação. A disposição geométrica dos fluidos é determinada pela interface entre eles; quando esta interface se instabiliza o escoamento se encontra em uma situação instável, e, fatalmente, a disposição geométrica dos fluidos será modificada. O processo de instabilização da interface é um processo transiente.

### ***Sobre os padrões de fluxo***

Dois fluidos, ou duas fases, escoando ao mesmo tempo possuem um grau de liberdade na geometria do escoamento que não é observado em um fluxo monofásico. Esta possibilidade de disposição dos fluidos ou fases, é o que mais difere o escoamento bifásico de um monofásico, e o que o torna mais complexo. O padrão de fluxo é a classificação que é dada a uma certa disposição geométrica das fases do escoamento bifásico.

Conhecer em qual padrão ocorre o escoamento é de fundamental importância em projetos envolvendo escoamentos bifásicos. Há grandes diferenças entre um padrão e outro, no que se refere às perdas de carga, e às interações entre as fases.

A classificação dos padrões de fluxo é ilustrada abaixo.

### ESCOAMENTO HORIZONTAL:

Estratificado:

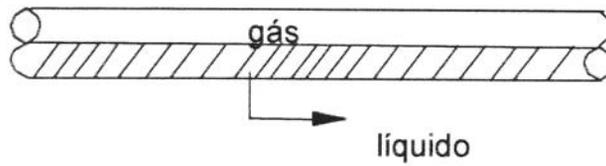


FIGURA 1.1 PADRÃO ESTRATIFICADO

Intermitente (slug):

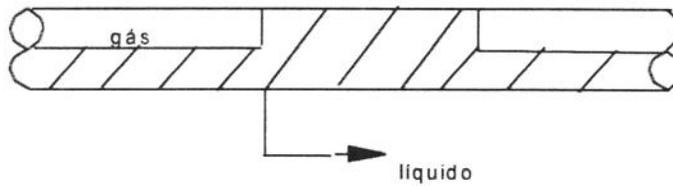


FIGURA 1.2 PADRÃO INTERMITENTE HORIZONTAL

Anular:

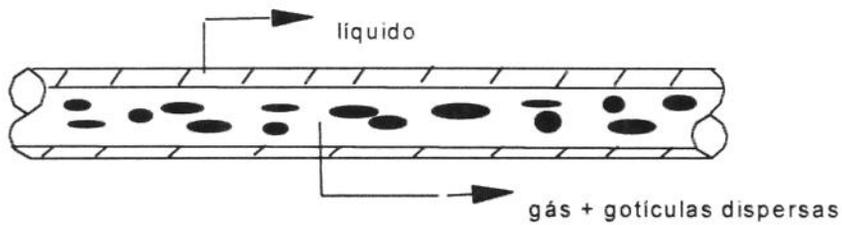


FIGURA 1.3 PADRÃO ANULAR HORIZONTAL

Bolhas dispersas:

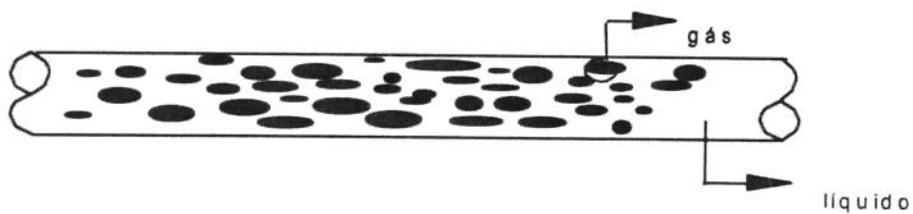


FIGURA 1.4 PADRÃO BOLHAS HORIZONTAL

ESCOAMENTO VERTICAL:

Bolhas dispersas:

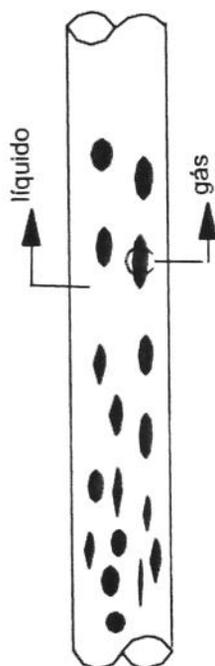


FIGURA 1.5 PADRÃO BOLHAS VERTICAL

Intermitente (slug)

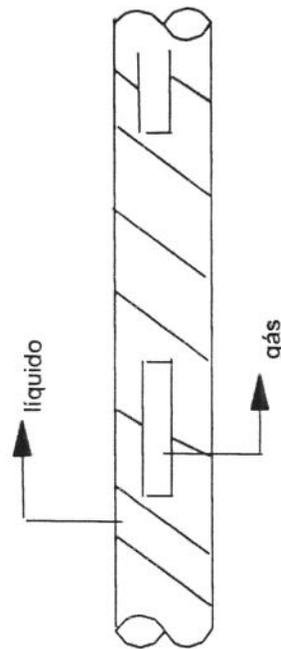


FIGURA 1.6 PADRÃO INTERMITENTE VERTICAL

Turbilhonado “churn” (caracteriza-se por um movimento caótico):



FIGURA 1.7 PADRÃO TURBILHONADO

Anular:

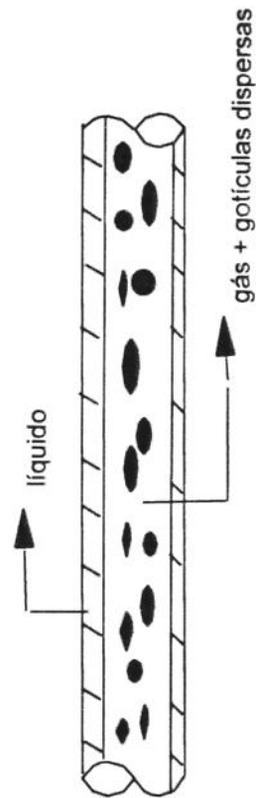


FIGURA 1.8 PADRÃO ANULAR VERTICAL

A maneira mais utilizada, hoje, para se determinar padrões de fluxo é por meio de mapas de padrão de fluxo. Em geral entra-se com  $U_{gs}$  X  $U_{ls}$  e determina-se em qual padrão o escoamento se encontra. Onde :

$$U_{gs} = (\text{vazão volumétrica do gás}) / (\text{área total})$$

$$U_{ls} = (\text{vazão volumétrica do líquido}) / (\text{área total}).$$

Os mapas de padrão de fluxo são obtidos de estudos empíricos ou de análises de estabilidade do escoamento. Dos critérios de estabilidade dois se destacam, o de estabilidade interfacial de Kelvin-Helmholtz, obtido da linearização das equações diferenciais unidimensionais que modelam o escoamento, e o de estabilidade estrutural que analisa a estabilidade a partir da tensão cizalhante necessária para se garantir o escoamento.

É dado, abaixo, um exemplo de mapa de padrão de fluxo:

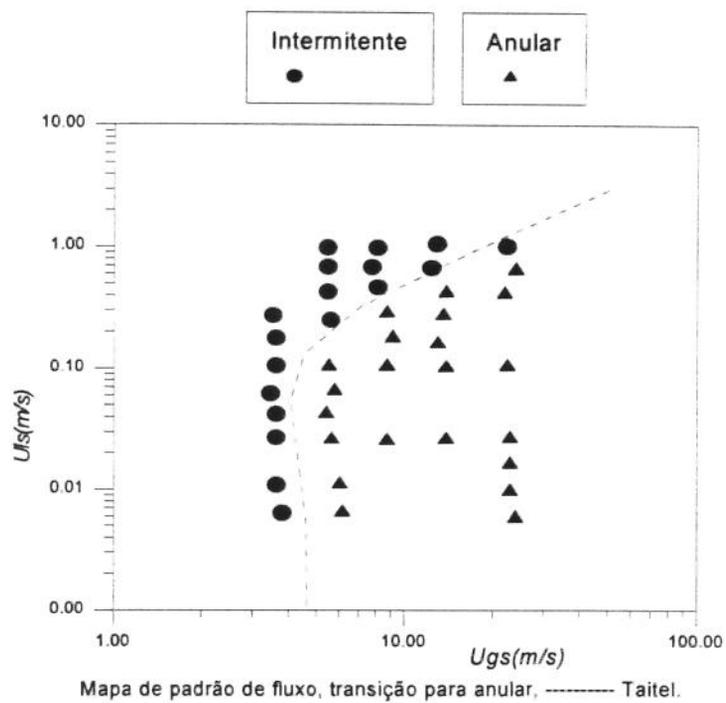


FIGURA 1.9 EXEMPLO DE MAPA DE PADRÃO DE FLUXO

## **Sobre a classificação das equações diferenciais parciais**

A título de esclarecimento será feita uma breve apresentação sobre a classificação das equações diferenciais parciais .

Considere a seguinte equação diferencial parcial:

$$A \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + D \frac{\partial U}{\partial x} + E \frac{\partial U}{\partial y} + FU + G = 0$$

Onde  $U = U(x, y)$  é uma função vetorial de dimensão  $n$ , e  $A, B, C, D, E, F, G$  são matrizes quadradas ( $n \times n$ ) cujos coeficientes são função de  $x$  e  $y$ .

Definindo para um determinado ponto  $(x, y)$  o determinante da equação como

$$[\Delta] = [B^2 - 4AC] \text{ teremos } n \text{ autovalores } (\lambda_k) \text{ de } [\Delta].$$

Então :

$\lambda_i \neq \lambda_j$  e  $\lambda_i, \lambda_j \in \mathfrak{R}$  a equação é hiperbólica.

$\lambda_i = \lambda_j$  e  $\lambda_i, \lambda_j \in \mathfrak{R}$  a equação é parabólica.

$\lambda_i \notin \mathfrak{R}$  a equação é elíptica.

Conhecer qual é a classificação da equação que se deseja resolver é de grande importância. Dependendo do tipo de equação teremos um grupo de métodos mais recomendáveis para a sua solução.

No caso de métodos numéricos a situação se torna mais grave , a não utilização de um método mais adequado ao tipo de equação poderá levar a soluções completamente distantes da realidade física.

Das principais diferenças existentes podemos apontar :

No caso das equações elípticas, é preciso considerar as condições de contorno do problema, além do sistema de equações diferenciais.

No caso das equações hiperbólicas e parabólicas, se torna necessário uma condição inicial além do sistema de equações diferenciais e condições de contorno. Problemas que envolvem equações hiperbólicas e parabólicas são chamados de problemas de valor inicial.

As equações do regime transiente utilizadas neste trabalho são hiperbólicas. As condições iniciais serão especificadas a partir de uma situação de regime permanente. As equações do regime permanente são elípticas.

## **Retrospectiva e referência bibliográfica**

A pesquisa em simulação numérica de escoamento bifásico transiente teve impulso na década de sessenta, ocorrendo na década de setenta um aumento dos esforços nesta área, principalmente devido a preocupação com problemas que pudessem ocorrer em reatores nucleares. Em princípio, as simulações eram em diferenças finitas, utilizando esquemas explícitos, servindo principalmente para se analisar problemas transientes de natureza sônica (Stewart & Wendroff, 1984); com o tempo, tornou-se necessário simulações de fenômenos mais lentos, sendo o esquema explícito insatisfatório, devido a limitações de incremento de tempo (Mahaffy, 1982)

Um esquema que não tem limitações em incremento de tempo é o implícito; porém, este esquema traz dificuldades na implementação computacional, tendo um custo de tempo computacional muito grande (Liles & Reed, 1978). Assim surgiu a necessidade de se desenvolver esquemas com limitações de incremento de tempo menores que o explícito, e de custo computacional menor que o implícito. Inicialmente, surgiu o método semi-implícito (Liles & Reed, 1978), e, depois, suas variações, como o SETS, e o nearly-implicit (Mahaffy, 1982), (Trapp & Riemke, 1986), (Barre et alii, 1993).

Outros métodos surgiram como alternativas à diferenças finitas, como, por exemplo, o método das características (Alves, 1994), e o ASWR (Werner e Graf, 1994) que se inspira no método de elementos finitos com malha adaptativa (Pereyra & Sewell, 1974).

No capítulo 2, que se segue, serão revistos os métodos citados acima; incluindo o método **semi-implícito**, que será o método utilizado para se implementar o simulador neste trabalho.

O procedimento das médias e a modelagem física do escoamento será apresentado no capítulo 3, sendo importante para o entendimento do problema estudado, e das

limitações das soluções obtidas. A análise de estabilidade interfacial do escoamento bifásico padrão anular será apresentada no capítulo 5.

Um dos primeiros trabalhos em que se observa a preocupação com a instabilidade interfacial é o de Jeffreys, 1925, onde é feito um estudo sobre a estabilidade de escoamentos em canais. Mais recentemente, Wallis, 1969 fez um estudo de estabilidade interfacial para o padrão estratificado, lançando mão das equações unidimensionais transientes para o modelo de dois fluidos

Alguns trabalhos consideram os dois fluidos como desprovidos de viscosidade (Taytel & Dukler, 1976), o que torna a previsão do limite de estabilidade pouco preciso; atualmente, vem-se trabalhando com a hipótese de fluidos viscosos e incompressíveis, o que melhora as previsões principalmente para a instabilização interfacial do padrão estratificado (Barnea & Taitel, 1993), (Crowley et alii, 1992), (Hanratty, 1983), (Lin & Hanratty, 1986), (Wu et alii, 1987).

Pouco foi feito na análise de estabilidade interfacial para o padrão anular, sendo mais comum o estudo de estabilidade estrutural de filme de líquido (Barnea & Taitel, 1992), isto em muito é devido ao fato de se tomar como hipótese inicial que os dois fluidos são incompressíveis, o que é uma boa aproximação quando se fala de escoamento estratificado (Ferschneider et alii, 1985), mas traz erros consideráveis para o caso de alta vazão mássica de gás, que é a realidade do padrão anular.

Neste trabalho será considerada a **compressibilidade do gás** na análise de estabilidade interfacial.

## CAPÍTULO 2 : Revisão dos métodos numéricos aplicados à simulação do escoamento bifásico transiente.

### 2.1- Características relevantes de um método numérico.

Em um método numérico para solução de equações diferenciais detalhes, como discretização (explícita ou implícita), disposição das variáveis na célula e método de solução das equações de diferença estão intimamente relacionados com o problema físico, exatidão da solução e tempo de computação.

Apresentam-se, a seguir, os diversos métodos numéricos que, hoje, são utilizados para se resolver o problema de escoamento bifásico transiente; as suas particularidades, e quais características de um problema físico indicam qual método deve ser empregado.

### 2.2-Malha.

O esquema de discretização mais comum para a resolução das equações de escoamento bifásico é o de diferenças defasadas. Este esquema está representado pela figura abaixo.

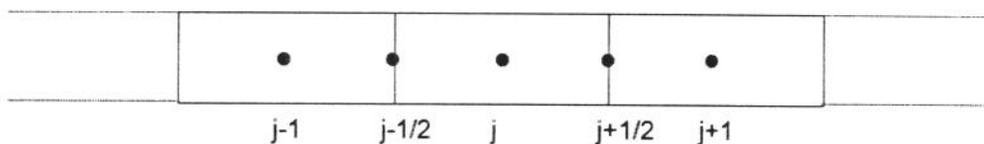


FIGURA 2.1 EXEMPLO DE DISCRETIZAÇÃO

Na figura vemos um retângulo representando uma célula discretizada. Os pontos da malha localizados no centro da célula tem índices inteiros. No centro da célula são calculadas as variáveis referentes ao estado do fluido, pressão, temperatura e fração de vazio ou área da fase líquida. Nas faces da célula são calculadas as velocidades do sistema. Valores de variáveis de estado localizadas na face de uma célula são calculados via interpolação.

### 2.3- Sistemas explícitos e implícitos.

Em problemas transientes, a resolução é feita em níveis de tempo; para cada novo nível de tempo teremos um novo problema espacial a ser resolvido, encontrando assim o valor das variáveis para cada ponto da malha atual. Ver figura abaixo:

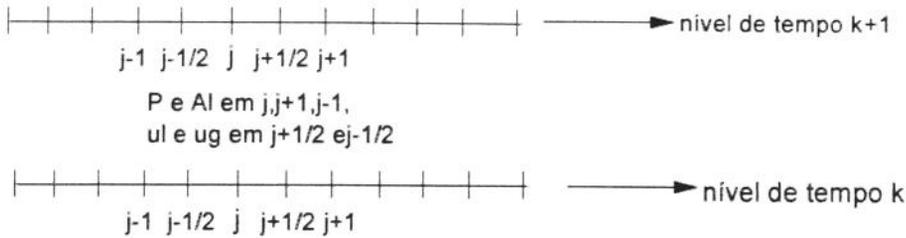


FIGURA 2.2 EXEMPLO DE DISCRETIZAÇÃO NO TEMPO

$j$  = índice espacial,  $k$  = índice de tempo,  $p$ ,  $Al$ ,  $ul$ ,  $ug$  variáveis a serem resolvidas.

Uma derivada no espaço é discretizada de maneira explícita se esta é calculada usando apenas valores do nível de tempo anterior, no caso implícito as derivadas no tempo são representadas em termos das variáveis a serem determinadas no tempo atual.

Exemplo:

derivada

$$\partial_x f \tag{2.3.1}$$

discretização explícita

$$\left( \frac{f_j - f_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \right)^{k-1} \tag{2.3.2}$$

discretização implícita

$$\left( \frac{f_j - f_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \right)^k \tag{2.3.3}$$

Onde  $j$  é o índice referente à disposição no espaço, e  $k$  o índice do nível de tempo ( $k =$  nível de tempo atual ), ver figura 2.2.

Métodos explícitos são mais simples e mais rápidos para se calcular as variáveis a cada nível de tempo, porém estes métodos trazem consigo limitações referentes ao intervalo de tempo com que se passa do nível  $k$  para  $k+1$ .

Estas limitações estão associadas aos tempos característicos dos diversos fenômenos físicos existentes no problema. Temos, por exemplo, o tempo característico referente à convecção. Métodos que trabalham com termos convectivos de maneira explícita tem a limitação de não poderem usar incrementos de tempo superiores ao tempo característico de convecção. Um exemplo é o método semi-implícito.

#### **2.4- Tempos característicos (Stewart. & Wendroff,1984).**

Tempos característicos servem para fornecer uma noção da velocidade com que um certo fenômeno transiente ocorre em um meio .

Podemos enunciar os seguintes fenômenos de importância para o processo de transiência em escoamentos bifásicos.

- convecção.
- propagação sônica.
- interação entre as fases.

No caso da convecção o tempo característico seria o tempo para um dos fluidos se deslocar em uma distância igual à distância entre dois pontos da malha. No caso da propagação sônica seria o tempo de uma pequena perturbação de pressão viajar entre dois pontos da malha. No caso da interação entre as fases podemos dar o exemplo da fricção interfacial,a seguir.

Considerando alguns termos da equação de quantidade de movimento :

$$\alpha_i \rho_i \partial_t v_i + \dots = \dots + f_i |v_j - v_i| (v_j - v_i) \quad (2.4.1)$$

tem-se

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} \rightarrow \frac{(v_j - v_i)}{\left( \frac{\alpha_i \rho_i}{f_i |v_j - v_i|} \right)} \quad (2.4.2)$$

Portanto o tempo característico relativo à **interação entre as fases** devido à fricção interfacial seria

$$\left( \frac{\alpha_i \rho_i}{f_i |v_j - v_i|} \right) \quad (2.4.3)$$

$f_i$  => fator de fricção interfacial.

$\alpha_i$  => fração espacial.

$\rho_i$  => massa específica.

Para o tempo característico convectivo; considerando os seguintes termos da equação de quantidade de movimento :

$$\alpha_i \rho_i \partial_t v_i + \dots = \dots - \alpha_i \rho_i v_i \partial_x v_i \quad (2.4.4)$$

tem-se

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} \rightarrow v_i \frac{\partial v_i}{\partial x} \quad (2.4.5)$$

Portanto o tempo característico **convectivo** deverá ser da ordem de grandeza :

$$\frac{\Delta x}{v_i} \quad (2.4.6)$$

Para o tempo característico de propagação sônica uma **ordem de grandeza** pode ser obtida da seguinte análise :

Da equação de quantidade de movimento (**monofásico**) :

$$\rho \partial_t v + \dots = \partial_x p + \dots \quad (2.4.6)$$

e da equação de continuidade

$$c^2 \partial_t p + \dots = \rho \partial_x v + \dots \quad (2.4.7)$$

obté-m-se

$$c^2 \partial_t^2 p + \dots = \partial_x^2 p + \dots \quad (2.4.8)$$

logo

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \quad (2.4.9)$$

e o tempo característico **sônico** é da ordem de

$$c \Delta x \quad (2.4.10)$$

onde  $c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}$  indica a compressibilidade do fluido.

Em um típico problema bifásico temos que os tempos podem ser da ordem de  $10^{-5}$  s para interação entre as fases,  $10^{-3}$  s para propagação sônica e  $10^{-1}$  para convecção.

Os fenômenos que se pretendem estudar são de natureza convectiva, sendo portanto o tempo característico convectivo o mais relevante para o nosso trabalho.

## **2.5- Estabilidade**

Infelizmente não se tem um método numérico ideal, que traga consigo simplicidade e capacidade de fornecer aproximações para a sua solução analítica da melhor maneira possível.

Em algum momento um método que se demonstrava satisfatório deixa de ser interessante , seja do ponto de vista de estabilidade, seja do ponto de vista da consistência.

Em problemas de valor inicial , como o que temos a resolver, fenômenos de natureza numérica ocorrem em cada nível de tempo. Podemos enumerar fenômenos como difusão numérica, oscilações devido às trocas interfaciais, amortecimento numérico devido ao uso de células doadoras. Estes fenômenos podem se contrabalançar ou não; em caso negativo, serão geradas oscilações espúrias que podem crescer de maneira indefinida quando  $t \rightarrow \infty$ . É imprescindível manter o algoritmo de cálculo estável.

Se certificar que um método seja o mais estável possível é algo de grande importância.

Uma outra preocupação é saber se uma modelagem descreve de maneira correta instabilidades físicas reais. Fica claro que um método numérico sem oscilações ou amortecimentos numéricos espúrios é interessante para se melhorar a modelagem da instabilidade física. Assim não se confundem instabilidades numéricas espúrias com instabilidades físicas reais.

## **2.6- Esquemas de diferenças finitas.**

Apresentam-se, aqui, alguns esquemas existentes para a resolução de problemas de escoamento bifásico transiente.

No simulador que foi construído escolheu-se como esquema de discretização o semi-implícito, que é apresentado no item 2.6.3.

### 2.6.1- Células doadoras.

(Mahaffy, 1982).

Em diferenças finitas com o esquema de malha defasada, torna-se necessário trabalhar com células doadoras, devido a instabilidade numérica deste esquema de malha. Nos métodos que serão apresentados adiante fica-se subentendido que se estará usando o sistema de células doadoras.

Considere uma célula doadora com uma determinada propriedade do fluido  $Y$  e considerando que este fluido escoa com uma velocidade média  $V$ . No nó referente a uma das faces da célula  $(j+1/2)$ , ver figura 2.1, teremos as seguintes convenções:

$$\begin{aligned} (Y V)_{j+1/2} &= Y_j V_{j+1/2}, & V_{j+1/2} &\geq 0 \\ &= Y_{j+1} V_{j+1/2}, & V_{j+1/2} &< 0 \end{aligned}$$

$$(\partial_x Y V)_j = \left[ (Y V)_{j+1/2} - (Y V)_{j-1/2} \right] / \Delta x_j,$$

$$V_{j+1/2} (\partial_x V)_{j+1/2} = V_{j+1/2} (V_{j+1/2} - V_{j-1/2}) / \Delta x_{j+1/2}, \quad V_{j+1/2} \geq 0$$

$$V_{j+1/2} (\partial_x V)_{j+1/2} = V_{j+1/2} (V_{j+3/2} - V_{j+1/2}) / \Delta x_{j+1/2}, \quad V_{j+1/2} < 0$$

### 2.6.2-Totalmente implícito.

(Barre et al, 1993)

Em problemas onde o fluxo é esperado mudar lentamente, é interessante se trabalhar com incrementos de tempo grandes; neste caso, sistemas que tem limitações no incremento de tempo deixam de ser interessantes. Neste caso, torna-se necessário

trabalhar com esquemas que abordem todos os termos, convectivos, propagação de pressão e interação entre os fluidos, de maneira implícita.

O esquema totalmente implícito parte desta abordagem. Este esquema é complexo e de tempo de computação grande, pois trata todos os termos do sistema de equações como não lineares.

Foram desenvolvidas diversas opções ao totalmente implícito para se abordar a simulação com intervalos de tempos maiores. Destas opções podemos destacar (veremos com mais detalhes posteriormente) o SETS e o quasi-implícito (“nearly implicit”), além destes que trabalham com diferenças finitas, podemos citar o ASWR que é inspirado no método de elementos finitos.

Exemplo de discretização para o totalmente implícito:

Considere o sistema de equações

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \partial_x \rho u &= 0 \\ \rho \partial_t u + \rho u \partial_x u &= -\tau S - \partial_x p \end{aligned} \quad (2.6.1)$$

discretizando:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\rho_i^k - \rho_i^{k-1}}{\Delta t} \right) + (\partial_x \rho u)_i^k &= 0 \\ \bar{\rho}_{j+1/2} \left( \frac{(u)_{j+1/2}^k - (u)_{j+1/2}^{k-1}}{\Delta t} \right) + (\bar{\rho} u)_{j+1/2}^k (\partial_x u)_{j+1/2}^k &= -\tau_j^k S - \left( \frac{p_j^k - p_{j-1}^k}{\Delta x} \right) \end{aligned} \quad (2.6.2)$$

A barra acima da variável significa uma média aritmética tirada entre dois nós vizinhos ao nó indicado ( $\bar{\rho}_{j+1/2} = \left( \frac{\rho_{j+1} + \rho_{j-1}}{2} \right)$ ).

Um exemplo de simulador que usa o totalmente implícito é o Cathare (Barre et al, 1993)

Para atenuar os efeitos da necessidade de uma boa estimativa inicial para aplicar o método de Newton podemos como opção fazer o seguinte procedimento:

Antes das equações serem discretizadas, é feita uma derivação em cadeia, que permita trabalhar com um sistema linearizado.

Exemplo :

Derivando em cadeia as equações 2.6.1 :

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \rho \partial_x u + u \partial_x \rho &= 0 \\ \rho \partial_t u + \rho u \partial_x u &= -\tau S - \partial_x p \end{aligned} \tag{2.6.1*}$$

discretizando :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\rho_i^k + \rho_i^{k-1}}{\Delta t} \right) + \rho_i^{k-1} \left( \frac{u_i^k - u_{i-1}^k}{\Delta x} \right) + \bar{u}_i^{k-1} \left( \frac{\rho_i^k - \rho_{i-1}^k}{\Delta x} \right) &= 0 \\ \bar{\rho}_{i+1/2}^{k-1} \left( \frac{u_{i+1/2}^k - u_{i+1/2}^{k-1}}{\Delta t} \right) + (\bar{\rho} u)_{i+1/2}^{k-1} (\partial_x u)_{j+1/2}^k &= -\tau_i^{k-1} - \left( \frac{p_i^k - p_{i-1}^k}{\Delta x} \right) \end{aligned} \tag{2.6.3}$$

### 2.6.3- Semi-implicito

(Liles & Reed, 1976)

A idéia deste método é a de se trabalhar com os termos convectivos de forma explícita.

Exemplo:

(utilizando as equações diferenciais já apresentadas acima)

$$\left( \frac{\rho_i^k - \rho_i^{k-1}}{\Delta t} \right) + (\partial_x \rho u)_j^k = 0$$

$$\bar{\rho}_{i+1/2}^{k-1} \left( \frac{u_{i+1/2}^k - u_{i+1/2}^{k-1}}{\Delta t} \right) + (\bar{\rho} u)_{i+1/2}^{k-1} (\partial_x u)_{j+1/2}^{k-1} = -\tau_i^{k-1} - \left( \frac{p_i^k - p_{i-1}^k}{\Delta x} \right)$$

onde

(2.6.4)

$$(\rho u)_{j+1/2}^k = \rho_j^{k-1} u_{j+1/2}^k, \quad u_{j+1/2}^k \geq 0$$

$$= \rho_{j+1}^{k-1} u_{j+1/2}^k, \quad u_{j+1/2}^k < 0$$

$$(\partial_x \rho u)_j^k = \left[ (\rho u)_{j+1/2}^k - (\rho u)_{j-1/2}^k \right] / \Delta x_j,$$

Em Eq. 2.6.4 podemos observar que  $u \partial_x u$  é todo discretizado no nível de tempo  $k-1$  deixando este termo convectivo em uma maneira explícita, uma vantagem do semi implícito é que se pode trabalhar com as equações discretizadas de maneira que todo o sistema torna-se dependente exclusivamente de  $p$ , isto simplifica em muito o problema.

O método semi-implícito é um método simples e robusto, as sua principal limitação esta no incremento de tempo , que não deverá ser maior que o tempo característico de convecção. O simulador OLGA (Bendiksen at al, 1991) de óleo e gás utiliza o método semi-implícito.

Na busca de se obter métodos que aliassem a simplicidade e rapidez de computação do semi-implícito com flexibilidade de incremento de tempo, surgiu uma nova classe de esquemas chamados de fracionados , estes buscam a estabilidade da solução numérica a partir de diversos passos estabilizadores. Desta classe destacam-se o SETS e o quasi-implícito, que serão apresentados agora a titulo de informação.

## 2.6.4- SETS

(Mahaffy, 1982)

SETS trabalha com dois passos a cada resolução das equações no espaço , primeiramente trabalha-se apenas com as equações de quantidade de movimento (equações de quantidade de movimento estabilizadoras), desta maneira só as variáveis de velocidade são tratadas implicitamente, a discretização da parte referente ao momentum ficaria da seguinte forma:

$$\bar{p}_{j+1/2}^{k-1} \left( \frac{\tilde{u}_{j+1/2}^k - u_{j+1/2}^{k-1}}{\Delta t} \right) + \bar{p}_{j+1/2}^{k-1} u_{j+1/2}^{k-1} (\partial_x \tilde{u})_{j+1/2}^k = -\tau_i^{k-1} - \left( \frac{p_i^{k-1} - p_{i-1}^{k-1}}{\Delta x} \right) \quad (2.6.5)$$

O til acima das variáveis indica que o valor obtido desta é um valor temporário e que será apenas utilizado em passo posterior.

Após aplicar as equações de momentum estabilizadoras, resolve-se o sistema discretizado como no semi-implicito porém nos termos convectivos ao invés de se aplicar as variáveis de velocidade do tempo anterior, aplica-se as velocidades obtidas das equações de momentum estabilizadoras, desta maneira teremos:

$$\left( \frac{\tilde{\rho}_j^k - \rho_j^{k-1}}{\Delta t} \right) + (\partial_x \rho^{k-1} u^k)_j = 0$$

$$\bar{p}_{j+1/2}^{k-1} \left( \frac{u_{j+1/2}^k - u_{j+1/2}^{k-1}}{\Delta t} \right) + \bar{p}_{j+1/2}^{k-1} u_{j+1/2}^{k-1} (\partial_x \hat{u})_{j+1/2} = -\tau_i^{k-1} - \left( \frac{p_i^k - p_{i-1}^k}{\Delta x} \right) \quad (2.6.6)$$

onde o símbolo ^ indica um valor calculado em um passo anterior.

Após os cálculos das equações básicas partimos para a utilização das equações estabilizadoras de conservação da massa, poderia ser utilizada também as equações de energia, cujo o procedimento é similar ao da continuidade, assim :

$$\left( \frac{\rho_j^k - \rho_j^{k-1}}{\Delta t} \right) + (\partial_x \rho^k \hat{u})_j = 0$$

SETS apresenta-se como uma boa opção quando se deseja trabalhar com tempos que são maiores que os tempos característicos de convecção; porém, o aumento no incremento de tempo não é ilimitado apresentando oscilações espúrias quando este incremento é muito alto.

Um exemplo de código que utiliza o SETS é o simulador de escoamento bifásico transiente unidimensional utilizado para plantas nucleares TRAC-PF1 (Mahaffy, 1982).

### 2.6-5 Quasi-implícito (nearly implicit).

(Trapp & Riemke, 1985)

O método quasi-implícito utiliza dois passos, em um primeiro passo utiliza-se as equações de continuidade e momentum de maneira que a velocidade é calculada no nível de tempo atual, todos as outras variáveis utilizam os valores do tempo anterior, com isto obtém-se um sistema de equações acopladas apenas pelas velocidades. A forma discretizada segue o seguinte esquema:

$$\left( \frac{\tilde{\rho}_j^k - \rho_j^{k-1}}{\Delta t} \right) + (\partial_x \rho^{k-1} u^k)_j = 0$$

$$\bar{p}_{j+1/2}^{k-1} \left( \frac{u_{j+1/2}^k - u_{j+1/2}^{k-1}}{\Delta t} \right) + \bar{p}_{j+1/2}^{k-1} u_{j+1/2}^{k-1} (\partial_x u)_{j+1/2}^k = -\tau_i^{k-1} - \left( \frac{p_i^{k-1} - p_{i-1}^{k-1}}{\Delta x} \right) \quad (2.6.7)$$

O segundo passo tem por função estabilizar o calculo das variáveis de estado, que no primeiro passo teve o seu acoplamento feito apenas pela velocidade. Os termos referentes à troca na interface (que no exemplo utilizado não é ilustrado) são calculados

com as variáveis de estado obtidas no tempo anterior, a velocidade é obtida dos cálculos feito no primeiro passo. Deste temos o passo estabilizador :

$$\left( \frac{\rho_j^k - \rho_j^{k-1}}{\Delta t} \right) + \left( \partial_x \rho^{k-1} \hat{u}^k \right)_j = 0$$

Um dos códigos em que o nearly-implicit foi implementado foi o simulador de escoamento bifásico transiente unidimensional utilizado para plantas nucleares RELAP5 (Trapp & Riemke, 1985).

## 2.7- O método ASWR.

(Werner & Graf, 1994)

O ASWR é um método inspirado em elementos finitos. Neste método utiliza-se, em cada célula, bases interpoladoras de segunda ordem. O método foi pensado de maneira tal que se pudesse usar malhas assimétricas da melhor maneira possível.

Tendo um sistema de equações válidas para o domínio  $[0,1]$ , onde 1 é o comprimento da tubulação, do tipo

$$A(u, x, t) \partial_t u + B(u, x, t) \partial_x u = R(u, x, t)$$

Onde  $A(u, x, t)$  e  $B(u, x, t)$  são matrizes  $(m \times m)$  e  $R(u, x, t)$  um vetor  $(m)$ , todos com coeficientes dependentes de  $x, t$  e  $u$  onde  $u$  é o vetor  $(m)$  de variáveis a ser resolvido.

Sendo  $U$  a solução aproximada de  $u$  obtida de uma expansão em série do tipo:

$$U = \sum_{i=1}^n c_i(t) \phi_i(x)$$

Onde  $n/2$  é o número de células,  $\phi_i(x)$  e  $c_i(t)$  funções de formato conhecido. (que no nosso caso será uma parábola no domínio da  $i$ -ésima célula, e zero fora deste para  $\phi$ , e uma reta para  $c$ ), e aplicando a metodologia de resíduos ponderados no sistema de equações diferenciais (Galerkin) teremos:

$\phi_i = U_i * f(x) + U_i'g(x)$ ,  $f(x)=1$  e  $g(x)=0$  em  $x_i$ , e  $f'(x)=0$  e  $g'(x)=1$  em  $x_i$

$$\int_0^{\Delta t} \int_0^1 c_i \phi_i \partial_t U_i dx dt + \int_0^{\Delta t} \int_0^1 c_i \phi_i L \partial_x U dx dt - \int_0^{\Delta t} \int_0^1 c_i \phi_i H dx dt = 0$$

$$L = A^{-1} B \text{ e } H = A^{-1} R$$

Fazendo este procedimento para todas as  $n$  funções interpoladoras teremos um sistema algébrico cujas variáveis a serem determinadas são

$U_i$  e  $U_i'$  (valor da derivada de  $U$  em  $i$ )

A metodologia de malha adaptativa é inspirado em um princípio de equidistribuição do erro na malha desenvolvido por Pereyra & Sewell, 1974

## CAPÍTULO 3 : Sobre a modelagem física do escoamento

Neste capítulo faz-se uma apresentação da modelagem do escoamento de fases separadas dando ênfase ao procedimento de médias. O procedimento das médias é o responsável pela aproximação de um fenômeno físico, que é inerentemente tridimensional, para uma situação unidimensional ou bidimensional.

### 3.1.1- A completa descrição local.

Considere um sistema físico constituído de dois fluidos , cada um ocupando um certo domínio ( $\Omega_i$ ,  $i=1,2$ ); considere também que este domínio tenha a liberdade de, dentro do sistema, variar com o tempo, ou seja  $\Omega_i = \Omega_i(t)$ . Se o fluido contido no domínio  $\Omega_i$  puder ter todas as suas características físicas em um determinado ponto  $x=(x_1,x_2,x_3)$  representadas pelo vetor estado  $w_i(x,t)$ , então é possível representar-se o comportamento deste fluido , no espaço e no tempo, através de um sistema de equações diferenciais:

$$\frac{\partial(w_i(x,t))}{\partial t} + \zeta(w_i(x,t)) = 0 \quad (3.1.1)$$

Onde  $\zeta_i$  é um operador diferencial nas variáveis espaciais.

Quando observamos a evolução de um fenômeno físico precisamos de referenciais que nos façam perceber suas alterações no tempo e no espaço, ou seja , precisamos ter conhecimento do estado inicial do sistema para compreender as alterações no tempo e precisamos ter conhecimento de condições de contorno para daí entender como o sistema varia no espaço.

Da mesma forma para se representar um fenômeno físico a partir de (3.1.1) precisamos de condições adicionais, que seriam as condições iniciais e as de contorno, matematicamente:

Dado o sistema (ver figura)

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \text{ e}$$

$$\partial\Omega := \text{contorno de } \Omega$$

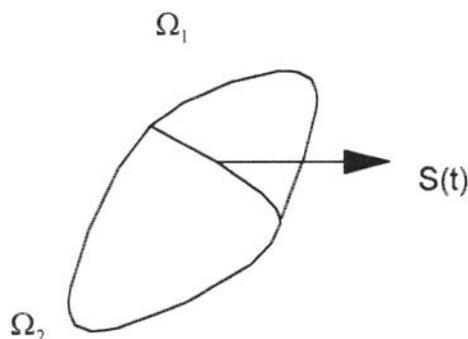


FIGURA 3.1 REPRESENTAÇÃO ESPACIAL DE UM SISTEMA FÍSICO

Deveremos então impor certas condições sobre  $\partial\Omega$ . Além disto devemos colocar condições na interface dos dois domínios, esta é representada por

$$S(t) = (\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2) / \partial\Omega;$$

Chamamos o sistema de equações diferenciais e suas condições adicionais de completa descrição local, ver Stewart & Wendroff, 1984. É praticamente impossível se computar o fluxo a partir da descrição local, é necessário então suprimir alguns detalhes na modelagem para tornar o sistema computável. Lançando mão de aproximações médias da completa descrição local é possível se obter um procedimento racional para se derivar modelos mais úteis.

### 3.1.2- O procedimento das médias.

Uma das principais referências sobre a utilização de médias para se obter modelos práticos é Ishii (Ishii, 1975).

Supondo que o vetor estado  $w_i$  dependa de um certo parâmetro vetorial  $\mathbf{r}$  ( que pode envolver variáveis de tempo e espaço), e que este parâmetro varia sobre uma região  $R_i$ , que pode depender de  $x$  e  $t$ , isto é:

$$w_i = w_i(x, t, \mathbf{r})$$

O que se deseja é substituir a função pontual  $w_i$  pela sua integral em  $R_i$ , portanto considerando o operador

$$A_i = \int_{R_i} d\mathbf{r}$$

aplicando  $A_i$  em (3.1.1)

$$\partial_t (A_i w_i) = \zeta (A_i w_i) + C_i$$

$$C_i = [\partial_t (A_i w_i) - \zeta (A_i w_i)] - A_i [\partial_t w_i - \zeta (w_i)]$$

( $\partial_p$  representa o operador de derivação parcial em  $p$ , onde  $p$  é um parâmetro qualquer.)

$C_i$  depende das médias em  $R_i$ , quantidades locais, valores de contorno e de interface. Para agora fechar o sistema, tratando apenas com variáveis médias, deveremos substituir  $C_i$  por um operador que trate apenas de variáveis médias e de parâmetros de interface, disto temos

$$\begin{aligned} \partial_t \phi_i &= \zeta(\phi_i) + \xi_i(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n), \\ \partial_t \sigma_j &= \mu_j(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n), \quad j = 1, n \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

além das condições de contorno e iniciais.

Onde  $\phi_i$  representa as médias e  $\sigma_j$  os parâmetros de interface.  $\xi_i$  e  $\mu_j$  são operadores diferenciais.  $\xi_i$  e  $\mu_j$  devem ser escolhidos de modo que as leis de conservação sejam satisfeitas pelas médias.

### **3.1.3-Modelos para situações onde não existe equilíbrio termodinâmico.**

Fluxo multifásico é intrinsecamente um processo onde não existe equilíbrio termodinâmico. Embora se suponha existir equilíbrio em cada fase, não existirá equilíbrio entre as fases. Desta forma se deverá fornecer razões de transferência de massa, momentum e energia, estas razões apareceram em (3.1.2) através dos parâmetros  $\sigma_j$ . Estas razões deverão ser obtidas de relações empíricas e serão muito provavelmente a maior fonte de erros na modelagem.

### **3.1.4- Estabilidade do sistema físico.**

O sistema físico bifásico poderá se encontrar em uma situação de instabilidade que o obrigue a mudar a sua disposição geométrica, na simulação deve-se ficar atento a este fenômeno, pois pode-se estar simulando uma situação que geometricamente estará distante da situação real. Deve-se também observar que as equações diferenciais devem ser sensíveis à estas instabilidades, o que deve dificultar a simulação em casos próximos a zonas de instabilidade física e matemática .

### 3.2.0- Escoamento bifásico sem interação entre as fases.

Iremos agora exemplificar o procedimento das médias por meio de um escoamento estratificado (sem interação entre as fases ). Com isto iremos reduzir um problema bi-dimensional para um uni-dimensional.

Esta exemplificação também é interessante para se demonstrar o universo de possibilidades de sistemas de equações diferenciais uni-dimensionais que são perfeitamente capazes de satisfazer as leis de conservação.

Considere o seguinte escoamento bi-dimensional:

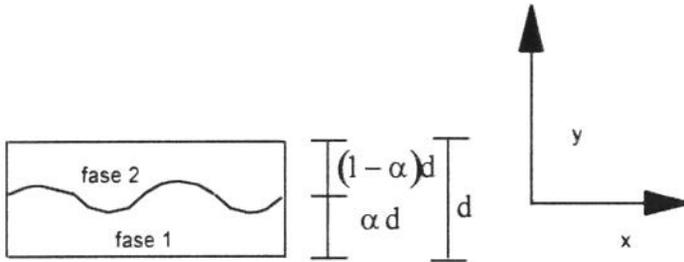


FIGURA 3.2 REPRESENTAÇÃO DE UM ESCOAMENTO ESTRATIFICADO BIDIMENSIONAL

As equações de conservação da massa, momentun, e entropia da fase i são :

$$\partial_t \tilde{\rho}_i + \partial_x (\tilde{\rho}_i \tilde{u}_i) + \partial_y (\tilde{\rho}_i \tilde{v}_i) = 0 \quad (3.2.1)$$

$$\partial_t (\tilde{\rho}_i \tilde{u}_i) + \partial_x (\tilde{\rho}_i \tilde{u}_i^2 + \tilde{p}_i) + \partial_y (\tilde{\rho}_i \tilde{v}_i \tilde{u}_i) = 0 \quad (3.2.2)$$

$$\partial_t (\tilde{\rho}_i \tilde{v}_i) + \partial_x (\tilde{\rho}_i \tilde{u}_i \tilde{v}_i) + \partial_y (\tilde{\rho}_i \tilde{v}_i^2 + \tilde{p}_i) = 0 \quad (3.2.3)$$

$$\partial_t (\tilde{\rho}_i \tilde{\xi}_i) + \partial_x (\tilde{\rho}_i \tilde{u}_i \tilde{\xi}_i) + \partial_y (\tilde{\rho}_i \tilde{v}_i \tilde{\xi}_i) = 0 \quad (3.2.4)$$

Sendo

$$\tilde{\rho}_i = \tilde{\rho}_i(x, y, t) \quad (\text{densidade local})$$

$$\tilde{u}_i = \tilde{u}_i(x, y, t) \quad (\text{velocidade longitudinal})$$

$$\tilde{v}_i = \tilde{v}_i(x, y, t) \quad (\text{velocidade transversal})$$

$$\tilde{p}_i = \tilde{p}_i(x, y, t) \quad (\text{pressão})$$

$$\tilde{\xi}_i = \tilde{\xi}_i(x, y, t) \quad (\text{entropia})$$

As equações são válidas para a fase 1 em  $0 < y < d\alpha(x,t)$  e para a fase 2 em  $\alpha d < y < d$ .

Deverá existir uma equação de estado para cada fase, de modo que

$$\tilde{p}_i = \tilde{p}_i(\tilde{\rho}_i, \tilde{\xi}_i)$$

$\tilde{T}_i$  e  $\tilde{e}_i$  (energia interna) devem satisfazer

$$\tilde{T}_i d\tilde{\xi}_i = d\tilde{e}_i + \tilde{p}_i d\tilde{\rho}_i$$

Utilizando o teorema de Leibnitz :

$$\int_{a(x,t)}^{b(x,t)} \partial f \partial y = \partial \int_{a(x,t)}^{b(x,t)} f \partial y - [f(x,b,t) \partial b - f(x,a,t) \partial a] \quad (3.2.5)$$

$$A_i = \int_{a_{i-1}}^{a_i} dy;$$

$$a_0 = 0;$$

$$a_1 = \alpha d;$$

$$a_2 = d$$

adotando a notação :  $f_i = \frac{1}{a_i - a_{i-1}} A_i \tilde{f}_i;$

$$\hat{f}_i = \lim_{y \rightarrow a} \tilde{f}_i(x, y, t);$$

$$\tilde{f}^0 = \tilde{f}_1(x, 0, t);$$

$$\tilde{f}^d = \tilde{f}_2(x, d, t);$$

$$\alpha_1 = \alpha;$$

$$\alpha_2 = 1 - \alpha_1;$$

Aplicando o operador  $A_i$  em Eq. 3.2.1

$$\int_0^{\alpha d} \partial_t \tilde{\rho}_i dy + \int_0^{\alpha d} \partial_x (\tilde{\rho}_i \tilde{u}_i) dy + \int_0^{\alpha d} \partial_y (\tilde{\rho}_i \tilde{v}_i) dy = 0 \quad (3.2.6)$$

$$\begin{aligned} & \partial_t \int_0^{\alpha d} \tilde{\rho}_i dy + \partial_x \int_0^{\alpha d} \tilde{\rho}_i \tilde{u}_i dy + \int_0^{\alpha d} \partial_y \tilde{\rho}_i \tilde{v}_i dy = \\ & [\hat{\rho}(\partial_t \alpha_1 d) - \tilde{\rho}^0(\partial_t \tilde{\alpha}^0 d)] + [\hat{\rho}_1 \hat{u}_1 (\partial_x \alpha_1 d) - \tilde{\rho}^0 \tilde{u}_0 (\partial_x \tilde{\alpha}_0 d)] \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

$\tilde{\alpha}_0$  é constante logo

$$\int_0^{\alpha d} \partial_y \tilde{\rho}_i \tilde{v}_i = \hat{\rho}_1 \hat{v}_1 - \tilde{\rho}_0 \tilde{v}_0$$

disto

$$\partial_t (\alpha_1 \rho_1) + \partial_x (\alpha_1 (\rho u)_1) = \hat{\rho}_1 \left[ \partial_t \alpha_1 + \hat{u}_1 \partial_x \alpha_1 - \frac{\hat{v}_1}{d} \right] + \frac{\tilde{\rho}^0 \tilde{v}^0}{d} \quad (3.2.8)$$

Onde  $\rho_1, (\rho u)_1$  são valores médios na fase 1.

Da mesma forma para a fase 2

$$\partial_t (\alpha_2 \rho_2) + \partial_x (\alpha_2 (\rho u)_2) = \hat{\rho}_2 \left[ -\partial_t \alpha_1 - \hat{u}_1 \partial_x \alpha_1 + \frac{\hat{v}_2}{d} \right] - \frac{\tilde{\rho}^d \tilde{v}^d}{d} \quad (3.2.9)$$

Para simplificar as duas equações vistas acima precisaremos aplicar as condições de contorno e de interface, estas são :

$$\tilde{v}_0 = \tilde{v}_d = 0 \quad (3.2.10)$$

(primeira condição de contorno.)

condições de interface :

$$\partial_t \alpha_1 + \hat{u}_1 \partial_x \alpha_1 = \hat{v}_1 / d \quad (3.2.11)$$

$$\partial_t \alpha_1 + \hat{u}_2 \partial_x \alpha_2 = \hat{v}_2 / d \quad (3.2.12)$$

(primeira condição de interface.)

Eq. 3.2.11 e Eq 3.2.12 nos dizem que a interface varia a sua posição do ponto de vista da fase  $i$  com uma velocidade igual a  $\hat{v}_i$ .

Com isto temos que Eq 3.2.1 após a aplicação do operador  $A_i$  se torna :

$$\partial_t (\alpha_i \rho_i) + \partial_x (\alpha_i (\rho u)_i) = 0 \quad (3.2.13)$$

Da mesma forma para (3.2.2) :

$$\begin{aligned} \partial_t (\alpha_i (\rho u)_i) + \partial_x [\alpha_i (\rho u^2)_i + p_i] &= \hat{p}_i \partial_x \alpha_i; \\ \partial_t (\alpha_2 (\rho u)_2) + \partial_x [\alpha_2 (\rho u^2)_2 + p_2] &= -\hat{p}_2 \partial_x \alpha_i; \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

O momentum longitudinal total se conservará se :  $\hat{p}_1 = \hat{p}_2$  (3.2.15), esta é mais outra condição de interface a ser imposta (segunda condição de interface).

Com isto Eq 3.2.2 e Eq 3.2.4 torna-se :

$$\partial_t (\alpha_i (\rho_i u_i)) + \partial_x [\alpha_i ((\rho u^2)_i + p_i)] = \hat{p} \partial_x \alpha_i \quad (3.2.16)$$

$$\partial_t (\alpha_i (\rho_i s_i)) + \partial_x [\alpha_i ((\rho us)_i + p_i)] = 0 \quad (3.2.17)$$

Aplicando agora o operador  $A_i$  nas equações de conservação do momentum transversal

$$\begin{aligned} \partial_t (\alpha_i (v\rho)_i) + \partial_x (\alpha_i (\rho uv)_i) &= (\tilde{p}^0 + \hat{p}) / d \\ \partial_t (\alpha_2 (v\rho)_2) + \partial_x (\alpha_{i2} (\rho uv)_2) &= (-\tilde{p}^d + \hat{p}) / d \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

Uma condição de contorno razoável para  $\tilde{p}^0$  e  $\tilde{p}^d$  seria :

$$\tilde{p}^0 = p_1, \tilde{p}^d = p_2 \text{ (segunda condição de contorno)}$$

Disto Eq 3.2.3 torna-se

$$\partial_t (\alpha_i (\rho v)_i) + \partial_x (\alpha_i (\rho uv)_i) = (-1)^i (\hat{p} - p_i) / d \quad (3.2.19)$$

Para  $i=1e2$  temos no total oito equações de conservação e de transporte interfacial, porém contabilizando as variáveis temos :

$$\alpha_i, \rho_i, (\rho u)_i, (\rho u^2)_i, (\rho s)_i, (\rho us)_i, p_i, \hat{p}, u_i, \hat{v}_i, \hat{u}_i, v_i$$

Que é um número superior ao de equações. Faremos então as seguintes aproximações :

$$\begin{aligned} u_i &= \frac{(\rho u)_i}{\rho_i} \\ (\rho u^2)_i &= \rho_i u_i^2 \\ (\rho s)_i &= \rho_i s_i \\ (\rho us)_i &= \rho_i u_i s_i \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

Utilizando equações de estado teremos:

$$\begin{aligned} p_i &= \tilde{p}_i(\rho_i, s_i) \\ e_i &= \tilde{e}_i(\rho_i, s_i) \\ T_i &= \tilde{T}_i(\rho_i, s_i) \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

De maneira tal que :

$$T_i ds_i = de_i + p_i d(1/\rho_i) \quad (3.2.21)$$

Podemos agora derivar a equação de transporte da energia total.

Energia interna:

$$\partial_t(\alpha_i \rho_i e_i) + \partial_x(\rho_i \alpha_i u_i e_i) + p_i [\partial_t \alpha_i + \partial_x(\alpha_i u_i)] = 0$$

Energia cinética

(longitudinal)

$$\partial_t(\rho_i \alpha_i \frac{u_i^2}{2}) + \partial_x(u_i \alpha_i \rho_i \frac{u_i^2}{2}) - u_i \partial_x(\alpha_i p_i) - u_i \hat{p} \partial_x \alpha_i = 0 \quad (3.2.22)$$

(transversal)

$$\partial_t(\rho_i \alpha_i \frac{v_i^2}{2}) + \partial_x(u_i \alpha_i \rho_i \frac{v_i^2}{2}) - v_i \partial_x(\alpha_i p_i) - u_i \hat{p} \partial_x \alpha_i = 0 \quad (3.2.23)$$

$$\begin{aligned} \text{Então } \sum_{i=1}^2 \partial_t [\rho_i \alpha_i (e_i + \frac{u_i^2}{2} + \frac{v_i^2}{2})] + \partial_x [u_i \rho_i \alpha_i (e_i + \frac{u_i^2}{2} + \frac{v_i^2}{2}) + \alpha_i u_i p_i] \\ + p_i \partial_t \alpha_i + u_i p_i \partial_x \alpha_i - v_i (-1)^i (\frac{\hat{p} - p_i}{d}) = 0 \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

Para que a equação acima se torne conservativa temos que impor:

$$(p_1 - p_2) \partial_t \alpha_i + [u_1 p_1 - u_2 p_2 - \hat{p}(u_1 - u_2)] \partial_x \alpha_i - \sum_{i=1}^2 v_i (-1)^i (\frac{\hat{p} - p_i}{d}) = 0 \quad (3.2.25)$$

Aplicando a seguinte condição de interface :

$$\hat{v}_i = v_i \quad (3.2.26)$$

(terceira condição de interface)

e aplicando as equações de transporte interfacial em Eq 3.2.25 , obtemos:

$$u_1 p_1 - u_2 p_2 - \hat{p}(u_1 - u_2) + \hat{u}_1 (\hat{p} - p_1) - \hat{u}_2 (\hat{p} - p_2) = 0 \quad (3.2.27)$$

Chegamos a um ponto interessante pois existem diversas maneiras de se satisfazer esta equação, desta forma temos diversas escolhas de sistemas de equações diferenciais fisicamente corretas por respeitarem as leis de conservação. Isto é importante pois nem sempre um sistema de equações diferenciais será o ideal para em uma determinada situação se simular numericamente o fenômeno de escoamento bifásico.

Dos diversos sistemas que se podem tirar a partir da equação Eq. 3.2.27 escolhemos três a título de exemplificação.

### Sistema A:

Impondo  $\hat{u}_1 = u_1$  e  $\hat{u}_2 = u_2$ , o que é suficiente para satisfazer Eq. 3.2.27, passa-se a ter dez variáveis, o que bate com o nosso sistema de dez equações, citado anteriormente [Eq 3.2.13, Eq 3.2.16, Eq. 3.2.17, Eq 3.2.18, Eq. 3.2.11, Eq. 3.2.12]

As variáveis são

$$\rho_1, \rho_2, u_1, u_2, v_1, v_2, s_1, s_2, \alpha, \hat{p}$$

### Sistema B:

Neste sistema impomos :

$$\hat{u}_1 = \hat{u}_2 = (u_1 + u_2) / 2, \hat{p} = (p_1 + p_2) / 2.$$

Tem-se então dez equações e nove variáveis. Impondo  $v_2 = v_1 = v$ , torna-se desnecessário utilizar (3.2.8) e adiciona-se as duas equações de momento transversal:

$$\begin{aligned} \partial_1 [(\alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2) v] + \partial_x [(\alpha_1 \rho_1 u_1 + \alpha_2 \rho_2 u_2) v] = \\ - \left( \frac{p_1 - p_2}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.2.28)$$

Este sistema foi descoberto em 1976 por Ransom & Schofield, a grande vantagem deste sistema é a de ser sempre bem posto.

### Sistema C:

O sistema C vem da imposição :

$$\hat{p} = p_1 = p_2$$

Neste caso torna-se desnecessárias as equações de conservação de momentum transversal, sendo assim tem-se seis equações e seis variáveis:

$$\partial_t (\alpha_i \rho_i) + \partial_x (\alpha_i \rho_i u_i) = 0 \quad (3.2.29)$$

$$\partial_t (\alpha_i \rho_i u_i) + \partial_x (\alpha_i \rho_i u_i^2) + \alpha_i \partial_x p = 0 \quad (3.2.30)$$

$$\partial_t (\alpha_i \rho_i s_i) + \partial_x (\alpha_i \rho_i u_i s_i) = 0 \quad (3.2.31)$$

Este sistema pelo fato de ser mais simples é o mais utilizado em simulações numéricas de escoamento bifásico transiente. Ele apresenta a desvantagem , que será discutida no próximo item, de ser mal posto .

### 3.2.1- Sistemas mal postos.

Considere um sistema físico contínuo, cujo comportamento possa ser representado por

$$B \partial_t u + A \partial_x u = 0 \quad (3.2.32)$$

Onde  $u$  é um vetor de dimensão  $n$  e dependente de  $x$  e  $t$  ,  $B$  e  $A$  são matrizes  $n \times n$  cujos termos são dependentes de  $u$ ,  $x$  e  $t$ .

Rescrevendo Eq. 3.2.32

$$\partial_t u + C \partial_x u = 0, \text{ onde } C = B^{-1} A$$

Os autovalores de  $C$  representam as velocidades características do sistema , uma vez que é com estas velocidades que as informações referentes a alguma alteração no sistema são transportadas.

Diz-se que um sistema é mal posto quando este sistema tem velocidades características complexas (Stewart & Wendroff, 1985).

Um problema que ocorre com o sistema C, que é exatamente o sistema mais utilizado em simulação de escoamento bifásico, é que este sistema apesar de respeitar as leis de conservação, é um sistema mal posto.

Um sistema com autovalores complexos tem uma natureza elíptica, o que vai de encontro com a idéia que foi colocada a princípio de se ter um problema de valor inicial. Portanto a utilização de métodos para resolução de valor inicial em sistemas de natureza elíptica pode levar a soluções sem sentido físico.

Pode-se fazer com que o sistema C se torne bem posto modificando a sua condição de interface,  $p_1 = p_2 = p$ , para

$$p_1 = p_2 + \sigma k$$

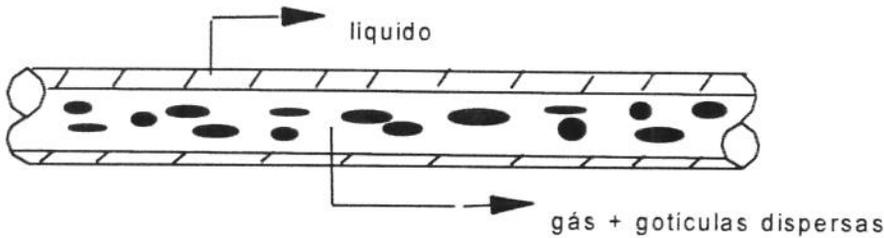
Onde  $\sigma$  é a **tensão superficial**, e  $k$  a **curvatura** local da interface.

Esta opção de condição interfacial será feita na nossa modelagem. Uma outra opção para se obter um sistema bem posto é a utilização do sistema B que tem as seguintes velocidades características, ver (Stewart & Wendroff, 1985),  $u_1 + c_1, u_2 + c_2, \bar{u}, \bar{u}, u_1, u_2$ , onde  $c_i$ , é a velocidade do som no meio  $i$  e  $\bar{u} = (u_1 + u_2) / 2$ .

### **3.3-Modelagem do escoamento padrão anular interativo.**

A interação de uma fase com os sistemas que formam a vizinhança com esta é fortemente influenciada pelo formato da interface entre estes. Neste momento do trabalho será dada uma maior atenção a um formato específico de interface, ou melhor um padrão de escoamento específico, o anular.

O escoamento anular caracteriza-se pelo escoamento de gás no centro da tubulação e escoamento de líquido na periferia, circundando o gás. Além disto é observado uma certa quantidade de líquido disperso na fase gasosa. Este escoamento esta representado na figura abaixo.



Foi escolhido o sistema C (por ser o sistema mais simples) para se modelar este problema , incluindo a equação constitutiva :

$$p_l = p_g + \sigma k \quad (3.3.1)$$

Na modelagem será considerado que a velocidade das gotículas de líquido disperso é igual à velocidade do gás.

As equações serão apresentadas utilizando a área do gás e do líquido como variáveis e não a fração de vazio  $\alpha$  . Nesta forma é mais cômoda a análise da estabilidade interfacial do escoamento (Barnea & Taitel, 1994).

As equações são :

Continuidade do líquido

:

$$\partial_t (\rho_l A_l) + \partial_x (\rho_l A_l u_l) = \Gamma_d - \Gamma_e \quad (3.3.2)$$

Continuidade do gás +gotículas de líquido disperso :

$$\partial_t (\rho_l A_d + \rho_g A_g) + \partial_x ((\rho_l A_d + \rho_g A_g) u_g) = \Gamma_e - \Gamma_d \quad (3.3.3)$$

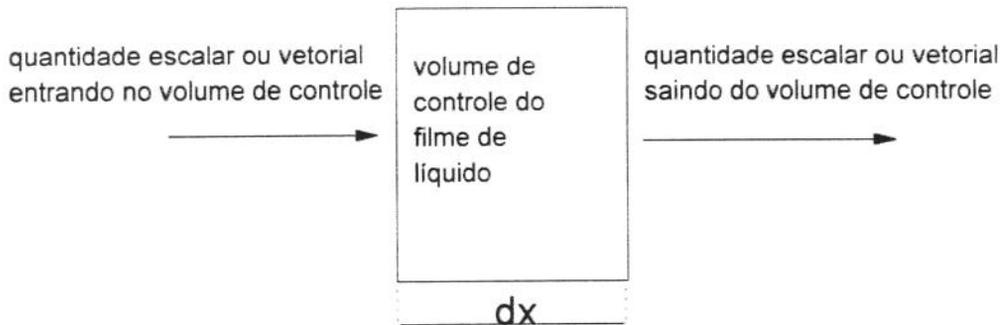
Conservação da quantidade de movimento do filme de líquido

$$\begin{aligned} \partial_t (\rho_l A_l u_l) + \partial_x (\rho_l A_l u_l^2) = & \\ & - \tau_l S_l + \tau_i S_i - A_l \partial_x p_{il} - \\ & \rho_l A_l g \cos(\beta) \partial_x h_l - \Gamma_e v_l + \\ & \Gamma_d v_g - \rho_l A_l g \sin(\beta) \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Conservação da quantidade de movimento do gás e do líquido disperso :

$$\begin{aligned} \partial_t ((\rho_l A_d + \rho_g A_g) u_g) + \partial_x ((\rho_l A_d + \rho_g A_g) u_g^2) = & \\ & - \tau_i S_i - (A_d + A_g) \partial_x p_{ig} - \\ & (\rho_l A_d + \rho_g A_g) g \cos(\beta) \partial_x h_l + \Gamma_e v_l - \\ & \Gamma_d v_g - (\rho_l A_d + \rho_g A_g) g \sin(\beta) \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

Dada a seguinte representação do volume de controle :



temos, no lado esquerdo das equações, que as derivadas no tempo representam a taxa de variação no tempo de uma certa quantidade dentro do volume de controle, e as derivadas no espaço representam a taxa de entrada e saída no volume de controle de uma certa certa quantidade, enquanto, no lado direito, aparecem termos fonte nas equações de continuidade, e forças nas equações de momentum.

Nas equações vistas acima temos :

$g \rightarrow$  índice referente ao gas

$l \rightarrow$  índice referente ao liquido

$A_l \rightarrow$  area do filme liquido

$A_g \rightarrow$  area do gas

$A_d \rightarrow$  area do liquido disperso

$S_l \rightarrow$  perimetro da tubulação

$S_i \rightarrow$  perimetro int erfacial

$\tau_l \rightarrow$  tensão cizalhante com a parede

$\tau_i \rightarrow$  tensão int erfacial

$p_{il} \rightarrow$  pressão do liquido na int erface

$p_{ig} \rightarrow$  pressão do gas na int erface

$h_l \rightarrow$  espessura do filme de liquido

$\beta \rightarrow$  angulo entre a tubulação e a horizontal

$\Gamma_e \rightarrow$  fluxo de goticulas entrando no nucleo de gas

$\Gamma_d \rightarrow$  fluxo de goticulas entrando no filme

Além disso as tensões tangenciais são dadas por :

$$\tau_l = f_l \rho_l u_l |u_l| / 2, \quad \tau_i = f_i \rho_g (u_g - u_l) |u_g - u_l| / 2$$

No presente trabalho se utilizará a correlação de Wallis para se determinar  $f_i$ . Nesta correlação buscou-se relacionar  $f_i$  com a espessura do filme de liquido. De Wallis (Wallis, 1970) :

$$f_i = f_s (1 + 300 h_l / d) \quad (3.3.6)$$

Onde  $f_s$  é o fator de fricção de tubo liso, obtido de Blasius, (Sherman, 1993).

Outro fenômeno relevante é o de deposição e dispersão, este fenômeno refere-se ao fluxo de gotículas de líquido do filme para o núcleo gasoso (dispersão) e do núcleo para o filme (deposição).

Deve-se obter então equações que representem a fração de gotículas no gás e o fluxo referente à dispersão/deposição.

Para se calcular a fração de gotículas dispersas escolheu-se Wallis (Alves, 1987), dele temos:

$$F_e = \frac{W_l - W_{lf}}{W_l} \quad (3.3.7)$$

$W_l \rightarrow$  vazão massica de todo liquido

$W_{lf} \rightarrow$  vazão massica do filme

Segundo Wallis  $F_e$  é função apenas da velocidade crítica do gás quando o filme for totalmente turbulento:

$$u_{gsc} = u_{gs} \frac{\mu_g}{\sigma} \left[ \frac{\rho_g}{\rho_l} \right]^{1/2} \quad (3.3.8)$$

Neste caso

$$F_e = 1 - e^{-(0.125(10^4 u_{gsc} - 1.5))} \quad (3.3.9)$$

Para a razão de deposição escolheu-se o trabalho de Andreussi (Andreussi, 1983)

$\Gamma_d = 2 \pi r_l k c_e A$ , onde

$c_e = \rho_g \frac{W_a}{W_g}$ , onde

$W_a \rightarrow$  fluxo das gotículas

Para  $u_g > 40$  m/s a deposição pode ser regida pela difusividade turbulenta do gas, neste caso:

$$\frac{k}{u^*} = \frac{0.115}{1 + 2.3 c_e / \rho_g} \quad (3.3.10)$$

onde  $u^*$  é a velocidade de fricção do gás

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_i}{\rho_g}} \quad (3.3.11)$$

Para  $u_g < 40$  m/s a turbulência já não é tão grande, permitindo a coalescência das gotículas, neste caso o caminho da gotícula é pouco influenciado pela turbulência, tendo a gotícula uma trajetória reta.



FIGURA 3.3 TRAJETÓRIAS DE GOTÍCULAS DISPERSAS

Portanto para gotículas de grande diâmetro ( $u_g < 40$  m/s) temos

$k = k(t^+)$   $t^+ \Rightarrow$  tempo adimensional de relaxação

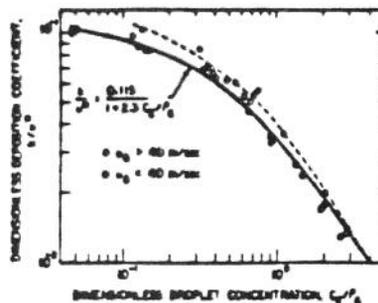
$$t^+ = \frac{d_p^2 u^{*2} \rho_g \rho_l}{18 \mu_g^2}$$

$$d_p = \frac{2 d_{32}}{\sqrt{\pi}}$$

$$d_{32} = d_{\text{tubulacao}} 1.91 \frac{R_{eg}^{0.1}}{W_e^{0.6}} \left( \frac{\rho_g}{\rho_l} \right)^{0.6} + 0.4 \frac{c_c}{\rho_g} \quad (3.3.12)$$

$$W_e = \frac{\rho_g u_g^2 d_{\text{tub}}}{\sigma}$$

Disto temos uma correlação como a mostrada abaixo



No caso da razão de dispersão, tem-se por exemplo a correlação de Dallmans & Hanhatty 1979.

$$\begin{aligned}
 R_e &= m((\Gamma - \Gamma') u_g^2 \rho_g^{1/2} \rho_l^{1/2}) \\
 \Gamma &\Rightarrow \text{fluxo do liquido / perimetro} \\
 \Gamma' &= 0.046 \text{ Kg / mseg} \\
 m &= 6.7 \times 10^6 \text{ sec}^2 / \text{Kg}
 \end{aligned}
 \tag{3.3.13}$$

As correlações para as taxas de dispersão/deposição trazem consigo uma grande quantidade de incertezas, isto em muito é devido às dificuldades de medição destas taxas, ver França, 1984. Portanto neste trabalho buscou-se evitar ao máximo o uso destas correlações, na verdade abdicou-se do uso da correlação de dispersão, usando ao invés disto apenas a correlação de deposição e a correlação de fração de gotículas dispersas, sendo a taxa de dispersão obtida a partir da lei de continuidade, este é um procedimento diferente do proposto para se fazer a simulação no OLGA (Bendiksen et al, 991), que usa diretamente uma correlação de dispersão, porém nos parece que obter a taxa de dispersão a partir da correlação de fração de líquido disperso é uma opção mais razoável, pois esta correlação traz um teor de incerteza menor que o existente nas correlações de taxa de dispersão/deposição.

Iremos apresentar as modificações em Eq. 3.3.2, Eq. 3.3.3, Eq. 3.3.4 e Eq. 3.3.5, que permitem suprimir a correlação da taxa de entrainment, de Eq. 3.3.7 :

$$\begin{aligned}
 F_e &= \frac{W_l - W_{lf}}{W_l}, \text{ logo} \\
 F_e &= \frac{W_l - u_l \rho_l A_f}{W_l}
 \end{aligned}
 \tag{3.3.14}$$

porém

$$W_l = W_{lf} + W_d \tag{3.3.15}$$

$W_d$  vazão mássica das gotículas dispersas.

sendo

$$W_d = u_g \rho_g A_d \tag{3.3.16}$$

$A_d$  área do líquido disperso.

De Eq. 3.3.14, Eq. 3.3.15, Eq. 3.3.16 :

$$A_d = A_f \frac{u_l}{u_g} \frac{F_e}{(1 - F_e)} \quad (3.3.17)$$

Aplicando a equação da continuidade para o líquido disperso :

$$\partial_t (\rho_l A_d) + \partial_x (\rho_l A_d u_g) = \Gamma_e - \Gamma_d \quad (3.3.18)$$

de Eq. 3.17 e Eq. 3.18

$$\Gamma_e = \Gamma_d + \partial_t \left( \rho_l A_f \frac{u_l}{u_g} \frac{F_e}{(1 - F_e)} \right) + \partial_x \left( \rho_l A_f \frac{u_l}{u_g} \frac{F_e}{(1 - F_e)} u_g \right) \quad (3.3.19)$$

A Eq. 3.19 será agora a equação pela qual obteremos o valor de  $\Gamma_e$ .

Aplicando Eq. 3.3.17 e Eq. 3.3.18 em Eq. 3.3.2 podemos obter uma equação que represente a conservação da massa de todo líquido (filme + gotículas no gás) :

$$\partial_t (\rho_l A_l \left( 1 + \frac{u_l}{u_g} \frac{F_e}{(1 - F_e)} \right)) + \partial_x (\rho_l A_l u_l \left( 1 + \frac{F_e}{(1 - F_e)} \right)) = 0 \quad (3.3.20)$$

Além desta, utilizaremos a equação da continuidade do gás:

$$\partial_t (\rho_g A_g) + \partial_x (\rho_g A_g u_g) = 0 \quad (3.3.21)$$

Para as equações de conservação do momentum, continuaremos usando as equações Eq. 3.3.4 e Eq. 3.3.5, porém subtraídas das equações de continuidade, sendo assim:

$$\begin{aligned}
 \rho_l A_l (\partial_t (u_l) + u_l \partial_x (u_l)) = & \\
 & - \tau_l S_l + \tau_l S_l - A_l \partial_x p_{ll} - \\
 & \rho_l A_l g \cos(\beta) \partial_x h_l + \Gamma_d (u_g - u_l) \\
 & - \rho_l A_l g \sin(\beta)
 \end{aligned} \tag{3.3.22}$$

$$\begin{aligned}
 (\rho_l A_d + \rho_g A_g (\partial_t u_g + u_g \partial_x (u_g))) = & \\
 & - \tau_l S_l - (A_d + A_g) \partial_x p_{lg} - \\
 & (\rho_l A_d + \rho_g A_g) g \cos(\beta) \partial_x h_l + \Gamma_c (u_l - u_g) \\
 & - (\rho_l A_d + \rho_g A_g) g \sin(\beta)
 \end{aligned} \tag{3.3.23}$$

$\Gamma_c$  é obtido de Eq. 3.3.19, com Eq. 3.3.20, Eq. 3.3.21, Eq. 3.3.22, Eq. 3.3.23 temos as equações com as quais serão feitas a simulação do escoamento transiente (notar que não foi incluída a equação da conservação da energia).

## CAPÍTULO 4 : Discretização e simulação

### 4.1- Sobre o método escolhido

Para se ter maior flexibilidade na escolha do incremento de tempo, com economia de computação, foi escolhido o esquema semi-implícito, porém a maneira como o programa foi escrito permite a mudança para o implícito com grande rapidez.

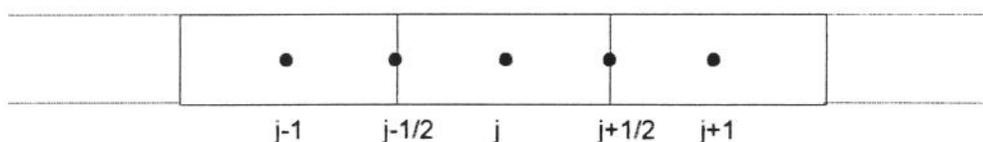
Foi feita uma simulação monofásica implícita, utilizando matriz jacobiana. Observou-se que o processo apresentava uma certa dificuldade de convergência quando o incremento de tempo era grande; observou-se, também, que no caso monofásico a transiência era regida pela propagação sônica, sendo o tempo de convergência muito rápido.

Iremos apresentar a discretização do conjunto de equações 3.3.19, 3.3.20, 3.3.21, 3.3.22, 3.3.23 apresentados no tópico de fluxo interativo

### 4.2- Discretização

Antes de apresentar a discretização, convém discutir sobre o uso dos índices. Temos um conjunto de equações diferenciais parciais no tempo e o no espaço, neste capítulo utilizaremos o índice  $j$  para localizar um nó no espaço e o índice  $n$  para localizar o nível de tempo.

Considere a seguinte célula no nível de tempo  $n$ :



Os índices  $j+1/2$  e  $j-1/2$  correspondem aos nós nas faces da célula, estes índices estão relacionados às velocidades dos fluidos; o índice  $j$  corresponde ao centro da célula, este índice está relacionado com as variáveis de estado da célula.

O conceito de célula doadora será utilizado (ver revisão de métodos numéricos), desta forma um til ( $\sim$ ) sobre alguma variável indicará que a variável é do tipo doadora. Uma barra sobre alguma variável indicará, que esta é obtida a partir de uma média entre dois nós.

Quanto ao nível de tempo temos:

$n+1 \Rightarrow$  nível de tempo atual.

$n \Rightarrow$  nível de tempo anterior.

Para se calcular as variáveis em  $n+1$  teremos, após a discretização, um sistema algébrico não linear, este sistema é resolvido por substituição sucessiva. A substituição sucessiva foi escolhida por ter se observado, que as estimativas iniciais quase sempre eram insatisfatórias quando se utilizava Newton. Já que em  $n+1$  teremos um processo iterativo, teremos então dois tipos de variáveis em  $n+1$ , a variável associada com a iteração atual ( $k+1$ ) a ser resolvida e a variável associada com a última iteração ( $k$ ), esta já calculada.

Depois desta discussão podemos iniciar a apresentação das discretizações:

Temos dois conjuntos de vetores a serem resolvidos no domínio onde é estudado o fenômeno transiente:

$$U = (u_l, u_g)_{j+1/2}$$

$$E = (A_l, p)_j$$

Da Eq. 3.3.20 obtemos

$$\begin{aligned} & \bar{\rho}_1 \frac{\left(1 + \frac{\bar{u}_i}{\bar{u}_g} \frac{\bar{F}_c}{1 - \bar{F}_c}\right)_j^k}{\Delta t} A_{lj}^{k+1} - \bar{\rho}_1 \frac{\left(1 + \frac{\bar{u}_i}{\bar{u}_g} \frac{\bar{F}_c}{1 - \bar{F}_c}\right)_j^n}{\Delta t} A_{lj}^n + \\ & \tilde{\rho}_1 \tilde{A}_1 \Big|_{j+1/2}^n \frac{\left(1 + \frac{\bar{F}_c}{1 - \bar{F}_c}\right)_{j+1/2}^n}{\Delta x} u_i \Big|_{j+1/2}^{k+1} + \tilde{\rho}_1 \tilde{A}_1 \Big|_{j-1/2}^n \frac{\left(1 + \frac{\bar{F}_c}{1 - \bar{F}_c}\right)_{j-1/2}^n}{\Delta x} u_i \Big|_{j-1/2}^{k+1} = 0 \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

Da Eq. 3.3.21

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_g \Big|_j^k}{\Delta t} (A - A_1 \Big|_j^{k+1}) - \frac{\rho_g \Big|_j^n}{\Delta t} (A - A_1 \Big|_j^n) + \\ & \frac{\tilde{\rho}_g \tilde{A}_g \Big|_{j+1/2}^n}{\Delta x} u_g \Big|_{j+1/2}^{k+1} - \frac{\tilde{\rho}_g \tilde{A}_g \Big|_{j-1/2}^n}{\Delta x} u_g \Big|_{j-1/2}^{k+1} = 0 \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

Da Eq 3.3.23

$$\begin{aligned} & \frac{(u_g \Big|_{j+1/2}^{k+1} - u_g \Big|_{j+1/2}^n)}{\Delta t} + u_g \Big|_{j+1/2}^n \partial_x \tilde{u}_g \Big|_{j+1/2}^n = \\ & \frac{[-\bar{\tau}_i \bar{S}_i - (\bar{\rho}_1 \bar{A}_d + \bar{\rho}_g \bar{A}_g) g \sin(\beta) + \bar{\Gamma}_c (\bar{u}_i + \bar{u}_g)]_{j+1/2}^n}{(\bar{\rho}_1 \bar{A}_d + \bar{\rho}_g \bar{A}_g)_{j+1/2}^n} + \\ & g \cos(\beta) \partial_x h_1 \Big|_{j+1/2}^k - \frac{(\bar{A}_g + \bar{A}_d) \Big|_{j+1/2}^n}{(\bar{\rho}_1 \bar{A}_d + \bar{\rho}_g \bar{A}_g)_{j+1/2}^n} \frac{(p_{ig} \Big|_j^{k+1} - p_{ig} \Big|_{j-1}^{k+1})}{\Delta x} \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Onde  $\Gamma_c$  é obtida da Eq. 3.3.19

Observar, que neste esquema existem termos, que apesar de serem calculados de maneira implícita, são menos implícitos do que outros termos da equação. É o caso, por exemplo, de  $\tau_i S_i$  e  $\partial_x p$ ; ambos são implícitos, porém  $\partial_x p$  (k+1) estará sempre uma iteração a frente de  $\tau_i S_i$  (k). Isto torna o sistema menos implícito, porém torna a computação bem mais simples.

No caso da Eq. 3.3.22 teremos que trabalhar com  $p_{i1}$ , podemos obter  $p_{i1}$  de  $p_{ig}$  a partir da relação:

$$p_{i1} = p_{ig} - \sigma \left( \frac{1}{r_i} - \partial_{x^2} r_i \right) \quad (4.2.4)$$

Desta forma a discretização da equação 3.3.22 do tópico de fluxos interativos fica:

$$\begin{aligned} & \frac{(u_1|_{j+1/2}^{k+1} - u_1|_{j+1/2}^n)}{\Delta t} + u_1|_{j+1/2}^n \partial_x \tilde{u}_1|_{j+1/2}^n = \\ & \frac{(-\bar{\tau}_1 \bar{S}_1 + \bar{\tau}_1 \bar{S}_1 - \bar{\rho}_1 \bar{A}_1 g \sin(\beta) + \bar{\Gamma}_d (\bar{u}_g - \bar{u}_1))_{j+1/2}^k}{\bar{\rho}_1 \bar{A}_1|_{j+1/2}^n} - \frac{1}{\bar{\rho}_1|_{j+1/2}^n} \frac{(p_{ig}|_j^{k+1} - p_{ig}|_{j-1}^{k+1})}{\Delta x} + \\ & \frac{\sigma}{\bar{\rho}_1|_{j+1/2}^n} \left. \left( \frac{1}{r_i} - \partial_{x^2} r_i \right) \right|_j^k - \frac{\sigma}{\bar{\rho}_1|_{j+1/2}^n} \left. \left( \frac{1}{r_i} - \partial_{x^2} r_i \right) \right|_{j-1}^k - g \cos(\beta) \frac{(h_1|_i^k - h_1|_{i-1}^k)}{\Delta x} \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Novamente observamos nestas equações, que existem termos diferentemente implícitos; por exemplo, o termo que diferencia as pressões interfaciais é colocado na equação no passo interativo k, enquanto a derivada da pressão estará na iteração k+1.

Outro ponto que deve ser notado é que foi colocada uma derivada de segunda ordem ( $\partial_{x^2} r_i$ ) na equação, isto nos obriga a ter duas condições de contorno a mais do que no caso em que as pressões interfaciais são iguais; como este termo deverá influenciar

pouco nas equações (a curvatura da interface é suave, e na verdade só está lá para garantir que o problema seja bem posto), foi então imposta as seguintes condições de contorno adicionais:

$$\partial_x r_i|_0 = 0 \quad \text{e} \quad \partial_{x^2} r_i|_0 = 0$$

As equações referentes à conservação do momentum foram discretizadas de maneira tal que permitem ter as velocidades na iteração mais atual apenas como função das pressões na iteração mais atual; isto é muito interessante, pois o sistema algébrico que será formado fica desta forma mais simplificado, pois o número de variáveis a serem resolvidas simultaneamente diminui para dois, a pressão e a área do líquido; desta forma tem-se uma matriz do tipo bloco-tridiagonal, onde cada bloco terá a dimensão 2 X 2.

### **4.3- O código**

O código é formado por um programa principal que recebe e gerencia os dados recebidos, e de mais seis bibliotecas; são estas :

PERM.H => responsável pela estimativa inicial para a solução permanente, a metodologia utilizada para esta estimativa é a proposta por França,1994. Em perm.h tem-se a limitação de que todas as condições de contorno para a obtenção do permanente deverão sempre estar em uma mesma extremidade do domínio; a solução é obtida a partir de um processo de marcha, utilizando Runge-Kuta, logo após se obter esta estimativa inicial; ela é refinada a partir da biblioteca que trata do transiente propriamente dito, evitando assim a existência de alguma transiência espúria que possa existir na simulação.

FECHA.H=> nesta biblioteca se encontram sub-rotinas relativas às equações de fechamento; nela se calcula valores como densidade do gás, densidade do líquido, taxa de deposição e fator de fricção interfacial.

GEOM.H => nesta biblioteca obtém-se termos geométricos necessários à resolução do problema, termos como perímetro interfacial e espessura do filme. Além disto, é nela que se calcula as perdas devido à tensão cizalhante.

Vale notar, que se tem duas bibliotecas geométricas, uma para estratificado e outra para anular.

EQUA.H => é nesta biblioteca que se resolve propriamente a transiência; é nela que é promovida a discretização e a armazenagem dos coeficientes desta discretização em uma matriz bloco tridiagonal.

MANIMAT.H => nesta biblioteca encontramos diversas sub-rotinas de manipulação matricial.

TELA.H => esta biblioteca foi feita simplesmente para se ter uma saída gráfica da solução, o que permiti uma interpretação mais imediata do que ocorre com o programa.

#### ***4.4-Um exemplo de simulação***

Das simulações que foram feitas observou-se dois tipos de instabilização, uma de natureza sônica e outra de natureza convectiva.

A instabilidade de natureza sônica ocorre em um tempo cuja a ordem de grandeza é a do tempo característico sônico, ela tende a aumentar em situações de alta vazão de gás e pequeno diâmetro. Neste trabalho o interesse é de atenuar esta intabilização. Já a instabilização de natureza convectiva é inerente ao problema fisico de um escoamento de fases separadas, esta instabilização será o motivo de discussão do restante da tese.

Três ações foram tomadas para se atenuar a instabilização sônica:

1- Como a intenção é a de se observar o processo de transiência convectiva no filme de líquido, a transiência de natureza tem menor importância, principalmente no núcleo gasoso, portanto optou-se por considerar o gás em um quase permanente

2- A aproximação de gás em quase permanente de fato atenuou a instabilização, porém não foi suficiente; era ainda observado um processo de variação muito rápida, principalmente nos primeiros instantes da simulação, na pressão do líquido, que era a primeira a ser calculada, para depois ser calculada a pressão do gás pela equação de tensão superficial, Eq. 4.2.4. Como solução, no simulador calcula-se primeiro a pressão do gás para depois se calcular a pressão do líquido.

3- Como última ação, as simulações, principalmente em velocidades de gás muito altas (acima de 20 m/s), são feitas em incrementos de tempo bem inferior ao tempo característico convectivo, geralmente algo em torno de um décimo deste tempo.

As equações de conservação com a simplificação de gás em quase permanente serão apresentadas agora:

Conservação da massa total do líquido:

$$\partial_t \left( \rho_l A_l \left( 1 + \frac{u_l}{u_g} \frac{F_c}{(1 - F_c)} \right) \right) + \partial_x \left( \rho_l A_l u_l \left( 1 + \frac{F_c}{(1 - F_c)} \right) \right) = 0 \quad (4.4.1)$$

Conservação da massa de gás: (quase permanente)

$$\rho_g A_g u_g = W_g \text{ (constante ao longo de } x) \text{ ou } \partial_x (\rho_g A_g u_g) = 0 \quad (4.4.2)$$

Momentum no filme de líquido:

$$\begin{aligned} \rho_l A_l (\partial_t (u_l) + u_l \partial_x (u_l)) = \\ - \tau_l S_l + \tau_i S_i - A_l \partial_x p_{il} - \\ \rho_l A_l g \cos(\beta) \partial_x h_l + \Gamma_d (u_g - u_l) \\ - \rho_l A_l g \sin(\beta) \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

Momentum do gás mais gotículas dispersas (quasi permanente):

$$\begin{aligned}
 (\rho_l A_d + \rho_g A_g) u_g \partial_x (u_g) = & \\
 & - \tau_i S_i - (A_d + A_g) \partial_x p_{ig} - \\
 & (\rho_l A_{dl} + \rho_g A_g) g \cos(\beta) \partial_x h_l + \Gamma_\epsilon (u_l - u_g) \\
 & - (\rho_l A_d + \rho_g A_g) g \sin(\beta)
 \end{aligned} \tag{4.4.4}$$

Será feita, a título de exemplo, uma simulação de um processo transiente em que a vazão de líquido no início do escoamento é aumentada em 0.5 vezes a vazão anterior.

O número de nós escolhido foi de 100, o incremento de tempo escolhido foi de 0.2 vezes o tempo característico convectivo.

PERMANENTE.

ÁGUA E AR

Pressão = 1.5 Mpa; Temperatura = 298 K; Comprimento = 10 m

Diâmetro = 0.025m;  $U_{gs}$  = 40 m/s (início da tubulação);

$U_{ls}$  = 0.02 m/s (início da tubulação);

Área de líquido X Comprimento.

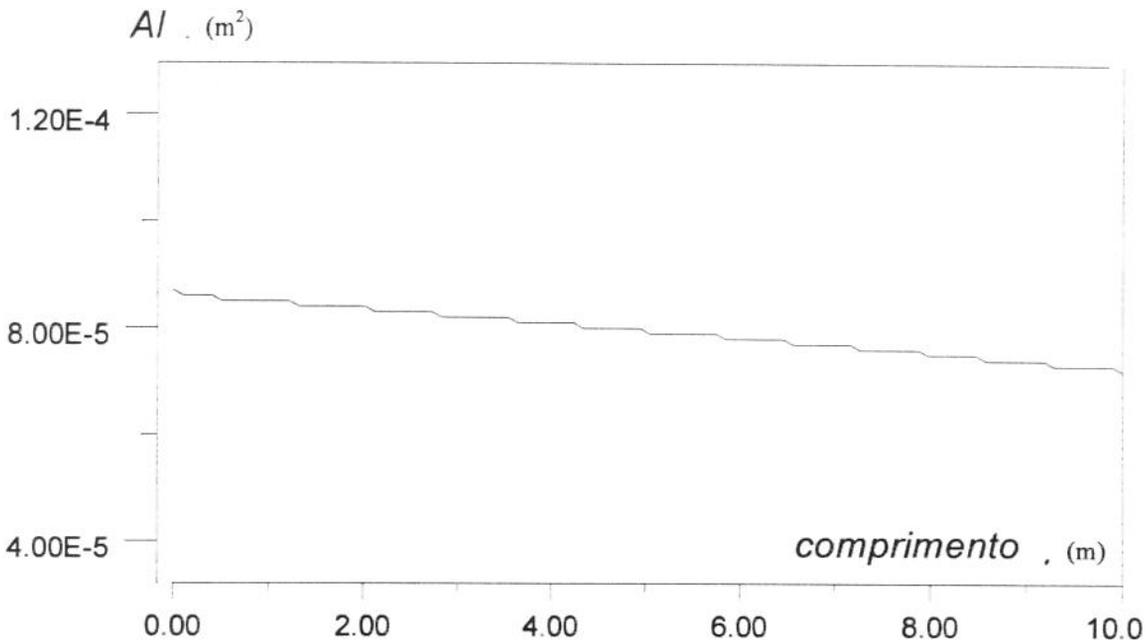


FIGURA 4.1 PERMANENTE -ÁREA DE LÍQUIDO

### Velocidade do líquido X Comprimento

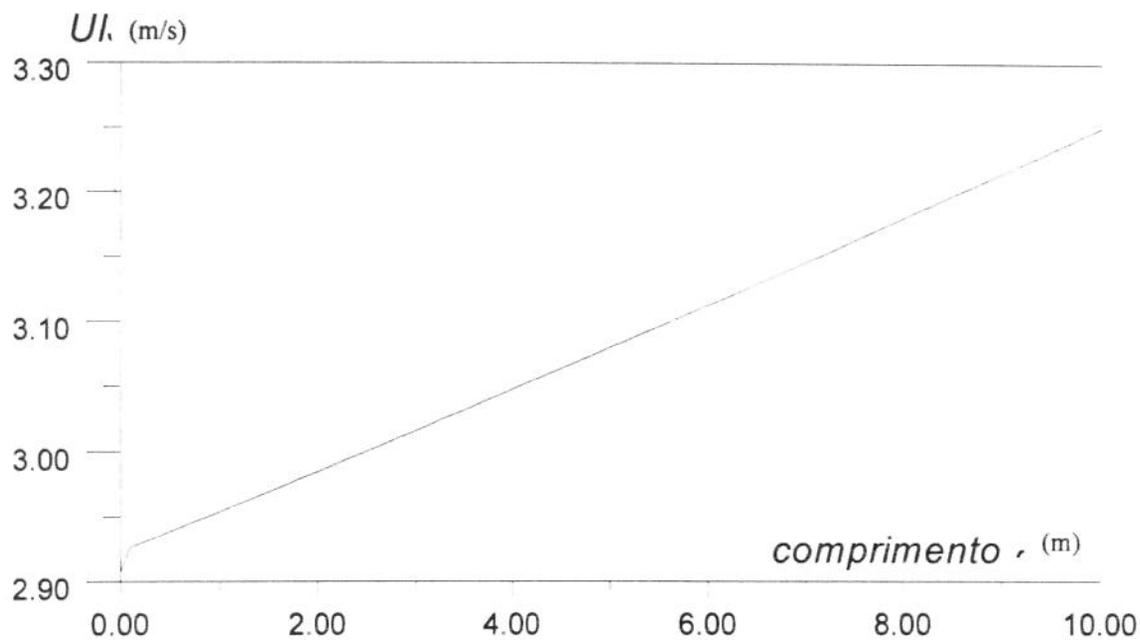


FIGURA 4.2 PERMANENTE -VELOCIDADE DO LÍQUIDO

### Velocidade do gás X Comprimento

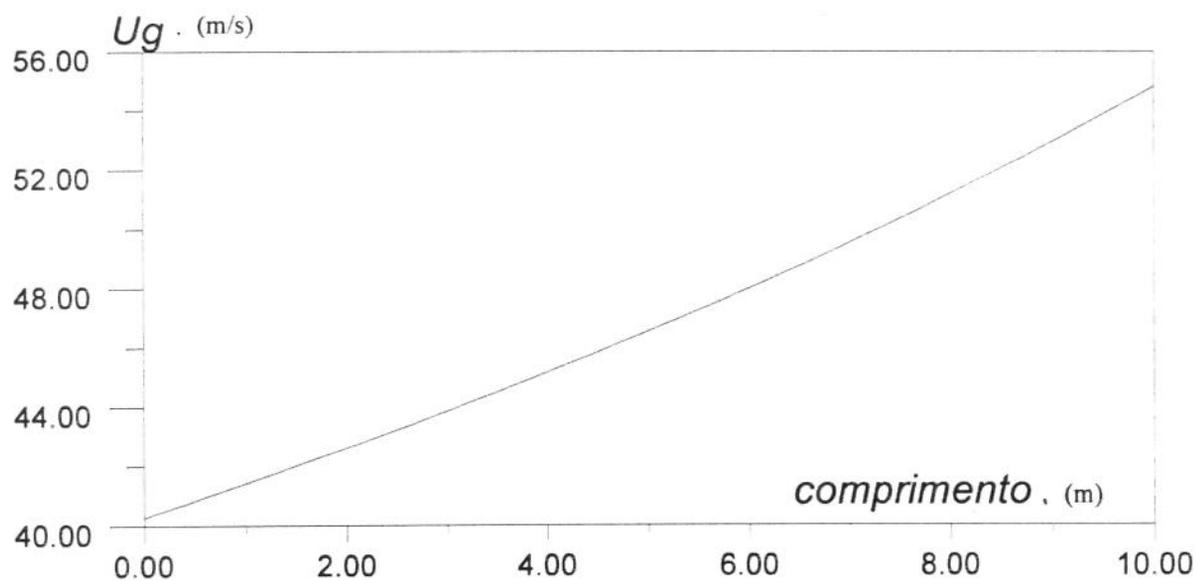


FIGURA 4.3 PERMANENTE -VELOCIDADE DO GÁS

Pressão X Comprimento.

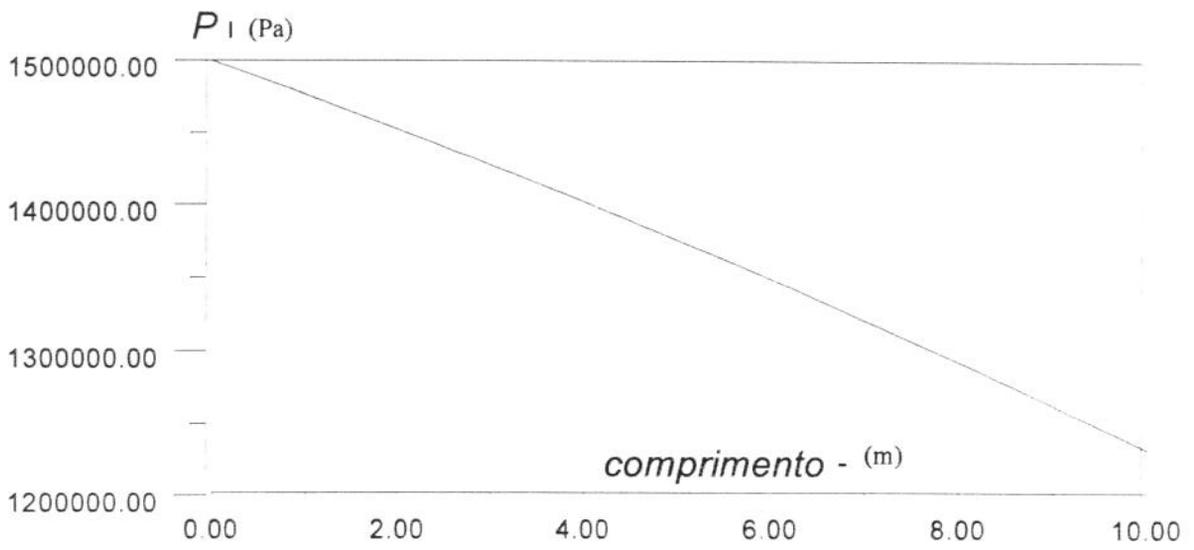


FIGURA 4.4 PERMANENTE -PRESSÃO

TRANSIENTE.

Área do líquido X Comprimento.

(em vários níveis de tempo)

*sentido de propagação* ▶

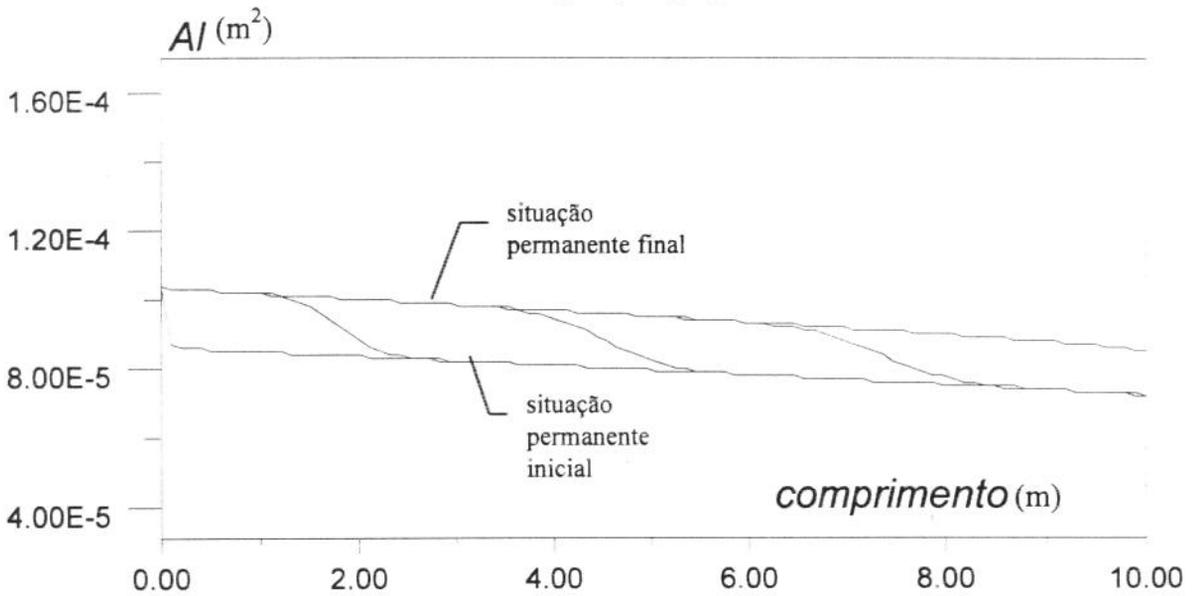


FIGURA 4.5 TRANSIENTE- ÁREA DO LÍQUIDO

Velocidade do líquido X Comprimento.

(em vários níveis de tempo)

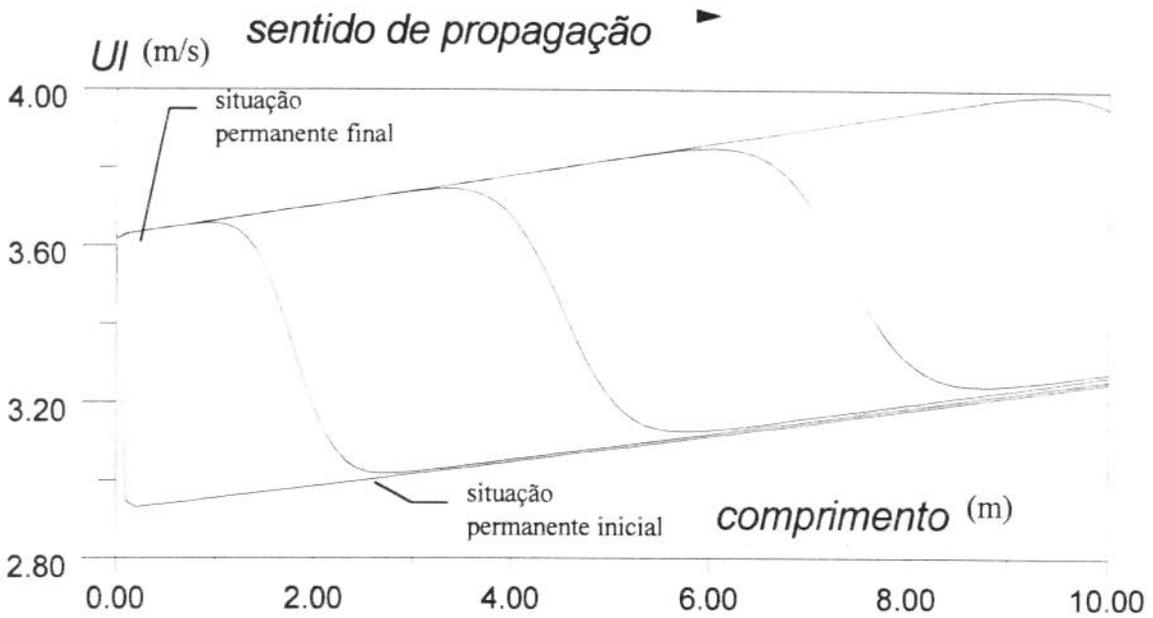


FIGURA 4.6 TRANSIENTE -VELOCIDADE DO LÍQUIDO

Velocidade do Gás X Comprimento.

(em vários níveis de tempo)

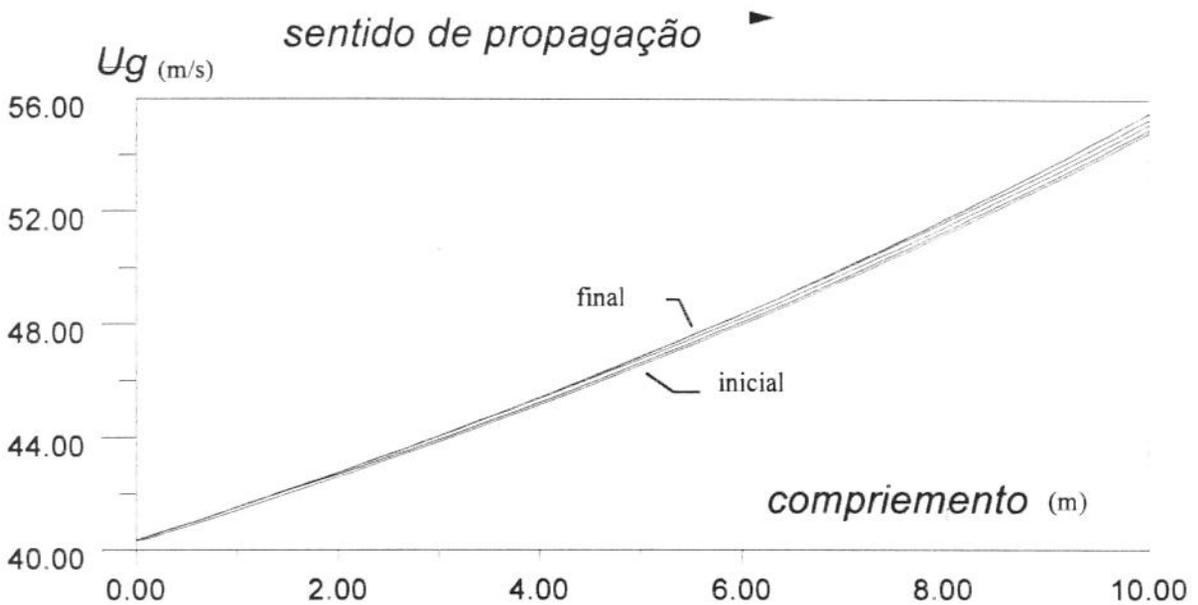


FIGURA 4.7 TRANSIENTE -VELOCIDADE DO GÁS

Pressão X Comprimento.  
(em vários níveis de tempo)  
*sentido de propagação* ▶

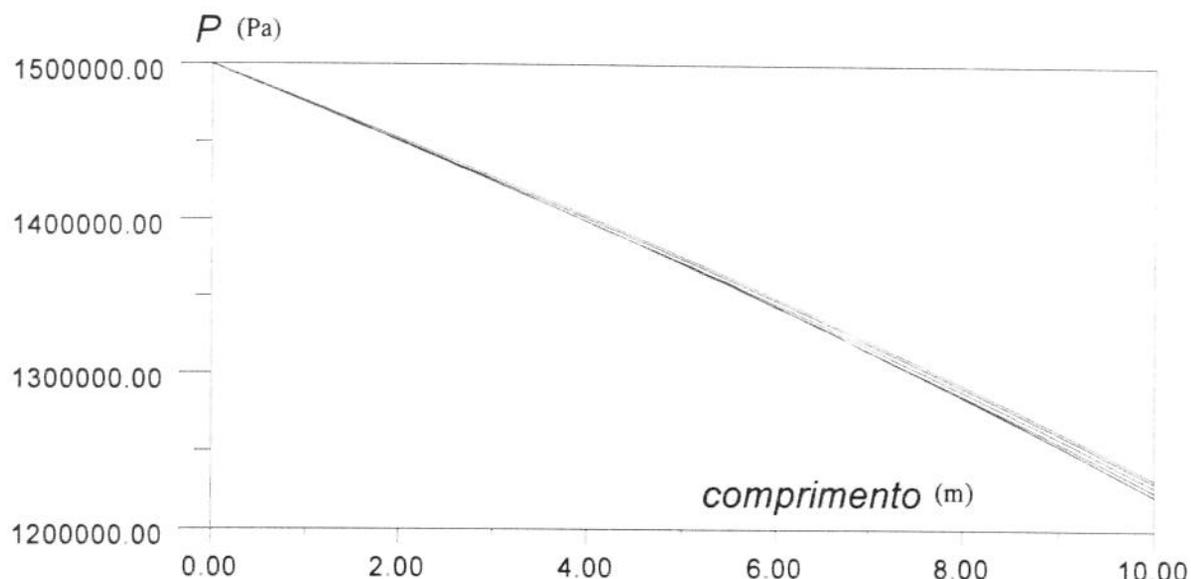


FIGURA 4.8 TRANSIENTE -PRESSÃO DO GÁS

Nas simulações transientes feitas viu-se que o processo transiente é regido pela variação da área do filme de líquido, tendo portanto o processo transiente uma natureza convectiva; além disto, observamos, pelo gráfico de variação da pressão, que a transiência desta é rápida em comparação às outras variáveis isto em muito é devido a natureza sônica da transiência que ocorre na pressão.

## **CAPÍTULO 5 : Estabilidade interfacial em escoamento de padrão anular.**

### ***5.1-As limitações da simulação e a estabilidade interfacial.***

O simulador que foi feito apresentou uma tendência a instabilização quando em velocidades de gás relativamente baixas; esta tendência apresenta uma coincidência com a realidade física do escoamento, pois este deixa de existir em baixas vazões de gás. De posse desta observação será feita uma análise da estabilidade interfacial do escoamento anular.

A análise de estabilidade de um escoamento bifásico resume-se a um problema de autovalor. A resolução é feita a partir da linearização das equações diferenciais que representam o escoamento anular.

Duas metodologias serão apresentadas para se fazer a análise; a primeira é a que usualmente é feita, e que tem como uma das hipóteses básicas admitir que os dois fluidos são incompressíveis. Esta é uma consideração perigosa quando se sabe que o gás esta em alta velocidade, pois, como veremos neste caso, a compressibilidade do gás começa a ter grande importância. A segunda metodologia a ser apresentada é uma análise linearizada que considere a compressibilidade do gás.

A partir das idéias obtidas neste capítulo é feito um estudo mais quantitativo da instabilidade interfacial do escoamento, utilizando como ferramenta o simulador que foi desenvolvido neste trabalho.

## 5.2-Estabilidade da interface (ponto de vista físico).

Craik 1966 e Hanratty 1983 observaram que dois mecanismos geram instabilidades interfaciais. O efeito viscoso em uma interface com comprimento de onda curto gera uma transferência irreversível de energia do gás, fazendo com que este tenha a sua pressão diminuída. O outro mecanismo poderia ser entendido como um mecanismo reversível, processo do tipo Bernoulli, onde a variação da pressão do gás e do líquido ocorrem em fase com a variação da altura do filme de líquido. O primeiro mecanismo estaria relacionado com as ondas de continuidade, enquanto o segundo com ondas dinâmicas Crowley et al, 1991.

Considere o seguinte escoamento estratificado:

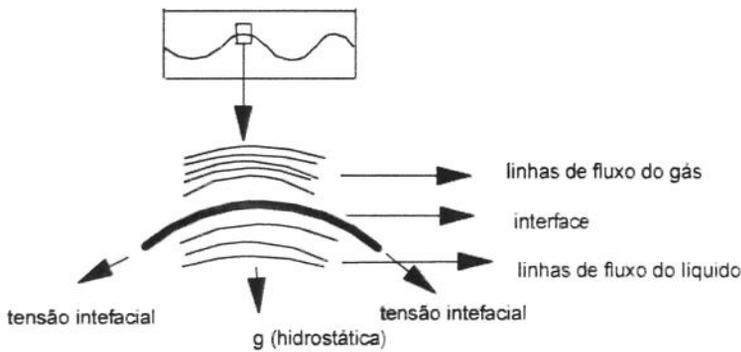


FIGURA 5.1 INTERFACE

Observando o processo reversível (Bernoulli), temos, que quando o filme de líquido aumenta, as linhas de fluxo do gás tendem a ficar mais próximas, fazendo com que a pressão na fase gás diminua, ao mesmo tempo as linhas de fluxo do líquido ficam mais afastadas e a pressão interfacial do líquido se torna maior que a do gás, isto gera um desequilíbrio entre as pressões interfaciais, desta forma a espessura do filme de líquido tende a aumentar, fazendo com que a área do líquido aumente e a do gás diminua, ou seja as linhas de fluxo do líquido tendem a se distanciar ainda mais aumentando a sua pressão média, enquanto as linhas de fluxo do gás tendem a diminuir; desta maneira gera-se um processo contínuo de instabilização, que faz com que a espessura do líquido cresça indefinidamente; porém, em oposição a este mecanismo

surgem outros de natureza restauradora, fazendo com que a interface volte a uma situação de equilíbrio.

O primeiro mecanismo restaurador, porém não o mais importante, que se pode enumerar é o efeito da tensão interfacial. Um crescimento da espessura do filme de líquido faz com que a interface tome um formato côncavo em relação ao líquido, gerando uma força resultante contrária ao aumento do filme, desta maneira a interface age como um “lençol elástico” sobre o líquido (ver figura acima), obrigando-o a voltar à situação original.

Um outro mecanismo estabilizador, este muito influente na restauração do equilíbrio interfacial, é a ação da gravidade. Neste caso temos que quando a altura do filme de líquido aumenta, o centro de massa sobe, porém devido ao efeito da gravidade o centro de massa tende a baixar, tornando a interface mais estável. Este mecanismo é o mais importante na restauração do equilíbrio.

No caso do escoamento anular vertical, o equilíbrio interfacial fica muito prejudicado devido a ausência do efeito estabilizador da hidrostática sobre o filme de líquido, lhe restando a ação da tensão interfacial, que como veremos é muito influente na restauração do equilíbrio, no caso de pequenos comprimentos.

Veremos, agora, um processo de desequilíbrio que se encontra em fase com a variação da curvatura da interface; este processo está relacionado com as ondas de continuidade. De forma breve, o que ocorre é a diminuição da pressão média da fase gás devido à fricção com a interface, é claro que uma interface mais rugosa gera uma variação maior de pressão tornando o sistema mais instável.

É importante considerar que a discussão que foi feita é muito simplificada, tendo em vista a complexidade do escoamento bifásico. No que foi visto acima, aproximou-se muito o fenômeno para uma realidade monofásica, quando na verdade tem-se dois escoamentos completamente acoplados!

Na verdade o que se deseja ilustrar nesta discussão é a tendência ao desequilíbrio na interface de um escoamento do tipo fases separadas, utilizando como guia o comportamento da pressão em cada fase. Com efeito, não necessariamente a pressão do líquido tende a crescer em termos absolutos quando ocorre uma desestabilização interfacial, porém, esta pressão, pelo que foi discutido antes, será induzida a se tornar maior que a pressão da fase gás, caracterizando assim um desequilíbrio interfacial.

### **5.3- Modelos para predição da instabilidade.**

Para se predizer se haverá instabilidade interfacial lança-se mão do critério de Kelvin-Helmholtz (K.H.) (Barnea & Taitel, 1994),(Lin & Hanhatty, 1985), que está relacionado com o balanço dos mecanismos de instabilização e estabilização citados acima.

O estudo da estabilidade interfacial através do K.H. tem um valor prático imediato, que é o de se determinar quando ocorrerá a transição de um padrão de fluxo. O critério K.H. demonstrou ser um modelo para se determinar a transição do estratificado para o padrão intermitente.

Um dos trabalhos mais citados utilizando o K.H. é o de Taitel & Duckler (1976), neste trabalho foi considerado um fluxo não iterativo, portanto **invícido**, sendo o critério chamado de Kelvin-Helmholtz invícido (I.K.H.). Um critério mais completo, considerando os efeitos viscosos é chamado de Kelvin-Helmholtz viscoso (V.K.H.) (Crowley et al, 1991), (Lin & Hanhatty, 1985),(Barnea & Taitel, 1991), (Bruno & McCready, 1988).

O critério K.H. se fundamenta na análise linearizada das equações unidimensionais transientes do modelo de dois fluidos. Nesta linearização são considerados fluidos **incompressíveis**. No caso de escoamentos em que os dois fluidos tem pouca compressibilidade, ou que o fluido mais compressível está em baixa velocidade isto é bem razoável. (Wu et al, 1987 e Ferschneider et al, 1985), mas em escoamentos do tipo anular ou estratificado onde a vazão de gás é alta a

compressibilidade pode ser muito influente. Neste capítulo iremos ver a linearização considerando fluidos incompressíveis e as limitações apontadas a partir desta linearização sobre o escoamento de padrão anular.

#### 5.4- A linearização.

As equações utilizadas são as mesmas já apresentadas em Eq. 3.3.1, Eq. 3.3.2, Eq. 3.3.3 e Eq. 3.3.4, desta maneira temos (O procedimento apresentado aqui é o procedimento usual de linearização) :

$$\partial_t A_g + A_g \partial_x u_g + u_g \partial A_g = 0 \quad (5.4.1)$$

$$\partial_t A_g - (A - A_g) \partial_x u_l + u_l \partial A_g = 0 \quad (5.4.2)$$

$$\rho_g A_g \partial_t u_g + \rho_g A_g u_g \partial_x u_g = -\tau_i S_i - A_g \partial_x p_{ig} - \rho_g A_g g \quad (5.4.3)$$

$$\rho_l A_l \partial_t u_l + \rho_l A_l u_l \partial_x u_l = \tau_i S_i - \tau_l S_l - A_l \partial_x p_{il} - \rho_l A_l g \quad (5.4.4)$$

considerando:

$$F_g = (-\tau_i S_i - \rho_g A_g g) \frac{A}{A_g}; \quad (5.4.5)$$

$$F_l = (\tau_i S_i - \tau_l S_l - \rho_l A_l g) \frac{A}{A_l} \quad (5.4.6)$$

Além disto temos a equação constitutiva:

$$p_{ig} = p_{il} + \sigma \left( \frac{1}{r_i} - \partial_x^2 r_i \right) \quad (5.4.7)$$

onde  $r_i$  é o raio da interface

$$r_i = \frac{d}{2} \sqrt{\frac{A_g}{A}}$$

$$\frac{A_g}{A} = \alpha$$

Aplicando Eq. 5.4.7 em Eq. 5.4.4 e subtraindo Eq. 5.4.3 de Eq. 5.4.4 de forma a

eliminar  $p_{ig}$  :

$$\rho_l \partial_t u_l - \rho_g \partial_t u_g + \rho_l u_l \partial_x u_l - \rho_g \partial_x u_g + \sigma \left( \frac{1}{r_i^2} \partial_x r + \partial_x^3 r \right) = F_l - F_g \quad (5.4.8)$$

Iremos aplicar a linearização em Eq. 5.4.1, Eq. 5.4.2, Eq. 5.4.8 . Considere que as variáveis nestas equações tenham um valor médio  $\bar{\phi}$  e uma pequena oscilação em torno deste valor ( $\phi'$ ), assim teremos:

$$\alpha = \bar{\alpha} + \alpha'$$

$$r_j = \bar{r}_j + r'_j$$

$$u_l = \bar{u}_l + u'_l$$

$$u_g = \bar{u}_g + u'_g$$

Assim as equações (5.4.1), (5.4.2) e (5.4.8) tornam-se:

$$\partial_t \alpha' + \bar{\alpha} \partial_x u'_g + \bar{u}_g \partial_x \alpha' = 0 \quad (5.4.9)$$

$$\partial_t \alpha' - (1 - \bar{\alpha}) \partial_x u'_l + \bar{u}_l \partial_x \alpha' = 0 \quad (5.4.10)$$

$$\rho_l \partial_t u'_l - \rho_g \partial_t u'_g + \bar{\rho}_l \bar{u}_l \partial_x u'_l - \bar{\rho}_g \bar{u}_g \partial_x u'_g + \sigma \left( \frac{1}{r_1^2} \partial_x r'_1 + \partial_x r'_1 \right) = F_l - F_g \quad (5.4.11)$$

Aplicando Eq. 5.4.9 e Eq. 5.4.10 em Eq. 5.4.11, eliminando assim as derivadas  $\partial_x u'_l$  e  $\partial_x u'_g$  (omitindo a barra sobre os valores médios) :

$$\begin{aligned} & \rho_l \partial_t u'_l - \rho_g \partial_t u'_g + \frac{\rho_l u_l}{(1 - \alpha)} \partial_t \alpha' + \frac{\rho_l u_l^2}{(1 - \alpha)} \partial_x \alpha' + \frac{\rho_g u_g}{\alpha} \partial_t \alpha' + \frac{\rho_g u_g^2}{\alpha} \partial_x \alpha' \\ & + \sigma \left( \frac{1}{r_1^2} \partial_x r'_1 + \partial_x r'_1 \right) = F_l - F_g \end{aligned} \quad (5.4.12)$$

Derivaremos Eq. 5.4.12 em relação a x e Eq. 5.4.9 e Eq. 5.4.10 em relação a t para assim se eliminar as derivadas  $\partial_t u'_l$  e  $\partial_t u'_g$ :

$$\begin{aligned} F_l - F_g &= F \\ \frac{\rho_l}{(1 - \alpha)} \partial_{t^2} \alpha' + \frac{\rho_g}{\alpha} \partial_{t^2} \alpha' + \frac{\rho_l u_l}{(1 - \alpha)} \partial_{xt} \alpha' + \frac{\rho_g u_g}{\alpha} \partial_{xt} \alpha' + \frac{\rho_l u_l^2}{(1 - \alpha)} \partial_{x^2} \alpha' + \\ \frac{\rho_g u_g^2}{\alpha} \partial_{x^2} \alpha' + \sigma \left( \frac{1}{r_1^2} \partial_{x^2} r'_1 + \partial_{x^2} r'_1 \right) &= \partial_{u_l} F \partial_x u_l + \partial_{u_g} F \partial_x u_g + \\ \partial_\alpha F \partial_x \alpha & \end{aligned} \quad (5.4.13)$$

Aplicando Eq. 5.4.9 e Eq. 5.4.10 em Eq. 5.4.13 para se eliminar  $\partial_x u_l$  e  $\partial_x u_g$ :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\rho_l}{(1-\alpha)} + \frac{\rho_g}{\alpha} \right) \partial_{r_i^2} \alpha' + 2 \left( \frac{\rho_g u_g}{\alpha} + \frac{\rho_l u_l}{(1-\alpha)} \right) \partial_{r_i x} \alpha' + \left( \frac{\rho_l u_l^2}{(1-\alpha)} + \frac{\rho_g u_g^2}{\alpha} \right) \partial_{x^2} \alpha' + \\ & \sigma \left( \frac{1}{r_i^2} \partial_{x^2} r_i' + \partial_{x^4} r_i' \right) = \frac{1}{(1-\alpha)} \partial_{u_l} F \partial_t \alpha' + \frac{u_l}{(1-\alpha)} \partial_{u_l} F \partial_x \alpha' - \frac{1}{\alpha} \partial_{u_g} F \partial_t \alpha' - \\ & \frac{u_g}{\alpha} \partial_{u_g} F \partial_x \alpha' + \partial_\alpha F \partial_x \alpha' \end{aligned} \quad (5.4.14)$$

Utilizando a relação:  $r_i = \frac{d}{2} \sqrt{\alpha}$

$$\partial_x r_i' = \frac{d}{4} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \partial_x \alpha'; \quad \partial_{x^2} r_i' = \frac{d}{4} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \partial_{x^2} \alpha'; \quad \partial_{x^4} r_i' = \frac{d}{4} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \partial_{x^4} \alpha'$$

Aplicando em (4.14)

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma d}{4\sqrt{\alpha}} \partial_{x^4} \alpha' + \left( \frac{\rho_l u_l^2}{(1-\alpha)} + \frac{\rho_g u_g^2}{\alpha} + \frac{\sigma}{d\alpha\sqrt{\alpha}} \right) \partial_{x^2} \alpha' + \\ & 2 \left( \frac{\rho_l u_l}{(1-\alpha)} + \frac{\rho_g u_g}{\alpha} \right) \partial_{x_t} \alpha' + \left( \frac{\rho_g}{\alpha} + \frac{\rho_l}{(1-\alpha)} \right) \partial_{r_i^2} \alpha' = \\ & \left[ \frac{-1}{\alpha} \partial_{u_g} F + \frac{1}{(1-\alpha)} \partial_{u_l} F \right] \partial_t \alpha' + \left[ \frac{u_l}{(1-\alpha)} - \frac{u_g}{\alpha} \partial_{u_g} F + \partial_\alpha F \right] \partial_x \alpha' \end{aligned} \quad (5.4.15)$$

$$F = F_l - F_g = \tau_i S_i \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{(1-\alpha)} \right) - \tau_i S_l \left( \frac{1}{1-\alpha} \right) + A g (\rho_g - \rho_l)$$

$$\tau_i = \frac{f_l \rho_g (u_g - u_l)^2}{2} \pi$$

onde:  $\tau_l = \frac{f_l \rho_l u_l^2}{2}$

$$S_i = 2\pi r_i = 2\pi d \sqrt{\alpha}$$

$$S_l = \pi d$$

$$F = \frac{f_l \rho_g (u_g - u_l)^2 \pi d \sqrt{\alpha}}{2} \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{(1-\alpha)} \right) - \frac{f_l \rho_l u_l^2 \pi d}{2} + A g (\rho_g + \rho_l)$$

Tratando F de maneira linearizada, temos (considerando que a transição é pouco influenciada pela variação de  $f_i$  e  $f_i$  (Crowley et alii, 1991),  $f_i$  e  $f_i$  serão considerados constantes) :

$$\partial_{u_1} F = -f_i \rho_\varepsilon \pi d \left( \frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha} + \frac{\sqrt{\alpha}}{(1-\alpha)} \right) (u_\varepsilon - u_1) u_1 - f_i \rho_1 \pi d \frac{1}{(1-\alpha)} u_1. \quad (5.4.17)$$

$$\partial_{u_\varepsilon} F = -f_i \rho_\varepsilon \pi d \left( \frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha} + \frac{\sqrt{\alpha}}{(1-\alpha)} \right) (u_\varepsilon - u_1) u_\varepsilon \quad (5.4.18)$$

$$\partial_\alpha F = \frac{f_i \rho_\varepsilon (u_\varepsilon - u_1)^2 \pi d}{2} \left( -0.5 \frac{1}{\alpha^{3/2}} - 0.5 \frac{1}{(1-\alpha)\alpha^{3/2}} + \frac{\sqrt{\alpha}}{(1-\alpha)^2} \right) - f_i \rho_1 \pi d u_1 \frac{1}{(1-\alpha)^2} \quad (5.4.19)$$

Colocando a equação (5.4.15) de uma maneira mais simplificada:

$$\partial_{x^2} \alpha' + a \partial_{x^1} \alpha' + b \partial_1 \alpha' + c \partial_{x^2} \alpha' + d \partial_{x^4} \alpha' + e \partial_x \alpha' = 0 \quad (5.4.20)$$

onde:

$$\begin{aligned} a &= 2 \left( \frac{\rho_1 u_1}{(1-\alpha)} + \frac{\rho_\varepsilon u_\varepsilon}{\alpha} \right) / \rho \\ b &= - \left[ -\frac{1}{\alpha} \partial_{u_\varepsilon} F + \frac{1}{(1-\alpha)} \partial_{u_1} F \right] / \rho \\ c &= \left[ \frac{\rho_1 u_1^2}{(1-\alpha)} + \frac{\rho_\varepsilon u_\varepsilon^2}{\alpha} + \frac{\sigma}{d\alpha\sqrt{\alpha}} \right] / \rho \\ d &= \frac{\sigma d}{4\sqrt{\alpha} \rho} \\ e &= - \left[ \frac{u_1}{(1-\alpha)} \partial_{u_1} F - \frac{u_\varepsilon}{\alpha} \partial_{u_\varepsilon} F + \partial_\alpha F \right] / \rho \\ \rho &= \frac{\rho_\varepsilon}{\alpha} + \frac{\rho_1}{(1-\alpha)} \end{aligned} \quad (5.4.21)$$

A equação (5.4.20) pode ser entendida como a equação de oscilação de uma estrutura onde esta é a interface entre o líquido e o gás; na verdade, estuda-se a instabilidade interfacial a partir dos efeitos de uma onda solitária. Vamos preferir abordá-la do ponto de vista de uma estrutura vibrante; no fim os resultados serão os mesmos, mas do ponto de vista de uma estrutura vibrante pode-se chegar a uma analogia interessante com um sistema massa-mola.

Considerando que a solução da equação (5.4.20) seja:

$\alpha' = T(t)X(x)$  temos

$$X\ddot{T} + (aX' + bX)\dot{T} + (cX'' + dX^{IV} + eX')T = 0 \quad (5.4.22)$$

Multiplicando Eq. 5.4.22 por X e integrando no domínio onde ocorre o fenômeno:

$$\left(\int_0^l X^2 dx\right)\ddot{T} + \left(\int_0^l (aX' + bX)X dx\right)\dot{T} + \left(\int_0^l (cX'' + dX^{IV} + eX')X dx\right)T = 0 \quad (5.4.23)$$

Onde l é o comprimento da tubulação, Eq. 5.4.23 é apenas dependente do tempo, nesta situação uma analogia seria com o sistema massa-mola amortecido:

$$M \text{ (massa)} = \left(\int_0^l X^2 dx\right) \quad (5.4.24)$$

$$C \text{ (amortecimento)} = \left(\int_0^l (aX' + bX)X dx\right) \quad (5.4.25)$$

$$K \text{ (rigidez do sistema)} = \left(\int_0^l (cX'' + dX^{IV} + eX')X dx\right) \quad (5.4.26)$$

com isto a Eq. 5.4.23 fica

$$M \ddot{T} + C \dot{T} + K T = 0 \quad (5.4.27)$$

A solução desta equação é :

$$T(t) = e^{ist} \quad (5.4.28)$$

onde

$$S = \frac{C}{2M} i \pm \sqrt{-\left(\frac{C}{2M}\right)^2 + \frac{K}{M}} \quad (5.4.29)$$

Um sistema massa-mola com amortecimento viscoso é considerado instável se quando este sistema for colocado em uma situação fora de equilíbrio as características mecânicas do sistema além de serem incapazes de levá-lo de volta à situação de equilíbrio o distanciem cada vez mais desta situação (ver esquema abaixo).

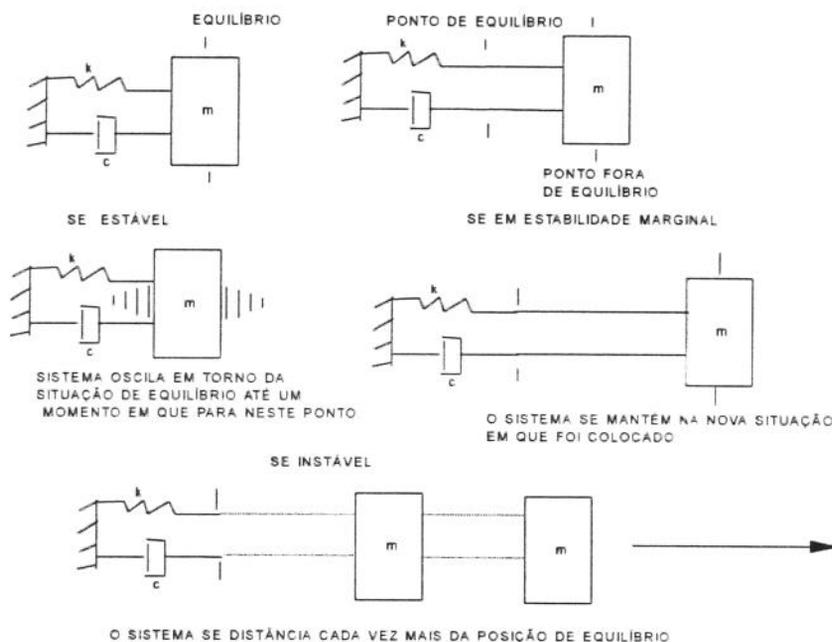


FIGURA 5.2, ESQUEMA DE SISTEMA MASSA-MOLA

Podemos observar que a rigidez do sistema é a característica mecânica que faz com que o sistema de maneira oscilante busque a sua condição de equilíbrio; o amortecimento viscoso é a característica que faz com que o sistema pare de oscilar. Quando uma destas características, ou as duas, deixam de funcionar desta maneira, tendo então um comportamento anômalo, teremos o sistema instável. Na verdade quando analisamos se um escoamento de fases separadas é instável, o que nós estamos querendo saber é se a rigidez e o amortecimento viscoso tem um comportamento anômalo.

A equação (5.4.25) fica muito simples de se verificar isto, pois quando  $S$  tiver um valor que seja do tipo  $S = S_r \pm iS_i$ , teremos que  $T(t)$ , para  $-iS_i$ , crescerá indefinidamente, caracterizando a situação instável descrita anteriormente, onde o sistema se distanciará continuamente da situação inicial de equilíbrio. Portanto para se determinar se um escoamento é instável basta verificar se o autovalor  $S$ , que corresponde à frequência de vibração, tem valores complexos com parte imaginária negativa.

### **5.5-Modos ortogonais e coordenadas generalizadas**

#### **(solução de equações diferenciais por auto funções)**

Antes de continuar a análise de estabilidade do escoamento é importante estudar o tipo de solução que se obtém de uma equação diferencial parcial linear como a (5.4.20).

Em equações diferenciais como esta não se terá apenas uma solução do tipo:

$$\alpha = T X$$

Na verdade o que se terá é uma série do tipo:  $\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} T_i X_i$ ; onde  $X_i$  é um elemento da base vetorial  $B = (X_1, X_2, \dots, X_j, \dots)$ , a qual representa o espaço vetorial que contém a solução da função  $\alpha$ .  $X_i$  é chamado de auto-função; no caso de sistemas vibrantes ele é chamado de modo ortogonal de vibração.  $T_i$  é chamada de coordenada generalizada, ela é quem determina como será a combinação linear da base  $B$  que se transformará na solução  $\alpha$ .

O que nos interessa é determinar qual o modo ortogonal mais suscetível à instabilidade, pois como (pelo menos nesta análise) se trata de uma combinação linear o primeiro modo a se instabilizar instabilizará toda a solução.

A determinação deste modo é simples; basta observar a equação que determina a rigidez do sistema, a qual é responsável pelo retorno do sistema à posição de equilíbrio; dela vemos que a rigidez é maior quanto maior for  $X''$  e  $X^{IV}$ , portanto, um modo de curvatura mais suave será o modo de menor rigidez e portanto mais instável, este modo é invariavelmente chamado de modo fundamental e tem o maior comprimento de onda, portanto de interface mais suave, e a menor frequência de vibração.

### 5.6-O critério de estabilidade.

Para equacionar o valor de S é preciso ter uma expressão para X, uma expressão razoável seria:

$$X = e^{-\frac{x}{\lambda_i}} \quad (5.6.1)$$

Aplicando (5.6.1) em (5.4.26) temos:

$$S = \left[ \left( \frac{a}{2} \right) \frac{1}{\lambda_i} - \frac{b}{2} i \right] \pm \sqrt{\left\{ \left[ \left( \frac{a}{2} \right)^2 - c \right] \frac{1}{\lambda_i^2} + d \left( \frac{1}{\lambda_i} \right)^4 - \left( \frac{b}{2} \right)^2 \right\}} + \left\{ e \frac{1}{\lambda_i} - \frac{ab}{2} \frac{1}{\lambda_i} \right\} i \quad (5.6.2)$$

$\lambda_i$  como já foi dito corresponderá ao comprimento de onda do modo fundamental, que é muito grande.

Iremos agora descobrir em que momento S deixará de ter apenas valores reais, este momento corresponderá à situação de estabilidade marginal.

Podemos descobrir quando ocorrerá a estabilidade marginal da seguinte maneira:

Quando

$$\sqrt{\left\{ \left[ \left( \frac{a}{2} \right)^2 - c \right] \frac{1}{\lambda_i^2} + d \left( \frac{1}{\lambda_i} \right)^4 - \left( \frac{b}{2} \right)^2 \right\}} + \left\{ e \frac{1}{\lambda_i} - \frac{ab}{2} \frac{1}{\lambda_i} \right\} i = R - \frac{b}{2} i; \quad (5.6.3)$$

onde R é um valor real .

Esta situação representará o limiar onde S deixará de ter valores reais. Elevando (5.6.3) ao quadrado:

$$\left\{ \left[ \left( \frac{a}{2} \right)^2 - c \right] \frac{1}{\lambda_i} + d \left( \frac{1}{\lambda_i} \right)^4 - \left( \frac{b}{2} \right)^2 \right\} + \left\{ e \frac{1}{\lambda_i} - \frac{ab}{2} \frac{1}{\lambda_i} \right\} i = R^2 - Rbi - \left( \frac{b}{2} \right)^2$$

disto temos:

$$R^2 = \left[ \left( \frac{a}{2} \right)^2 - c \right] \frac{1}{\lambda_i^2} + d \left( \frac{1}{\lambda_i} \right)^4$$

$$R = - \left[ \frac{e}{b} \frac{1}{\lambda_i} - \frac{a}{2} \frac{1}{\lambda_i} \right]$$

logo (igualando as duas equações anteriores) :

$$\left[ \frac{e}{b} - \frac{a}{2} \right]^2 - \left[ \left( \frac{a}{2} \right)^2 - c \right] - d \left( \frac{1}{\lambda_i} \right) = 0 \quad (5.6.4)$$

$$\frac{e}{b} = C_v \rightarrow \text{velocidade crítica de onda.}$$

$$\frac{d}{2} = C_{iv}$$

Da Eq. 5.6.4 temos como determinar quando ocorrerá a instabilidade; podemos observar, também, que se :

$$[C_v - C_{iv}]^2 - \left[ \left( \frac{a}{2} \right)^2 - c \right] - d \left( \frac{1}{\lambda_i} \right) < 0 \quad \text{o sistema é estável.}$$

$$[C_v - C_{iv}]^2 - \left[ \left( \frac{a}{2} \right)^2 - c \right] - d \left( \frac{1}{\lambda_i} \right) > 0 \quad \text{o sistema é instável.}$$

A partir da Eq. 5.6.4 podemos obter qual o máximo valor requerido do comprimento de onda para garantir a estabilidade :

Isto é importante, pois como estamos falando do modo fundamental , o valor do comprimento de onda deverá ser no mínimo algo próximo do comprimento da tubulação, desta maneira, podemos entender quais os efeitos do comprimento na estabilidade do escoamento ou das equações diferenciais.

$$(\lambda_i)_{req} = \left( \frac{d}{[C_v - C_{IV}]^2 - \left[ \left( \frac{a}{2} \right)^2 - c \right]} \right)^{1/2} \quad (5.6.5)$$

Foi construído um gráfico de  $\lambda / D$  , onde D é o diâmetro da tubulação, versus  $U_{gs}$  ( ver tópico nove), neste gráfico se vê que pela análise linearizada o comprimento de onda requerido é pequeno quando em altas vazões de gás, o que é um grande limitador da estabilidade, pois se está falando do comprimento de onda do modo fundamental, que deve ser no mínimo da ordem de grandeza do comprimento da tubulação.

Após se fazer uma análise linearizada como a anterior, termina-se sendo induzido à conclusão de que não existe estabilidade interfacial no escoamento anular, sendo a sua interface instável. Na literatura, é comum encontrar-se a hipótese de que as ondas do filme de líquido são quebradas pela pressão dinâmica do gás, que é alta em altas vazões de gás, impedindo a obstrução da passagem do gás pelas ondas.

Esta afirmação é razoável em um escoamento em que os dois fluidos são pouco compressíveis, mas não corresponde ao que de fato ocorre em uma situação em que um dos fluidos tem alta compressibilidade.

### **5.7-Estabilidade considerando o gás um fluido compressível.**

As análises de estabilidade interfacial consideram sempre o gás como um fluido incompressível, isto é bastante razoável quando se deseja observar a transição de um escoamento estratificado de baixa vazão de gás e alta fração de líquido  $h/d > 0.5$  (onde  $h$  é o nível do líquido) ver (Barnea & Taitel, 1991), (Barnea & Taitel, 1994). Porém, quando a vazão de gás é alta, se torna mais razoável considerar a compressibilidade do gás. O que será proposto agora é uma metodologia de estabilidade que leve em conta a compressibilidade.

A compressibilidade a princípio deve ser um fator estabilizador. Considere o seguinte termo da equação da continuidade para fluido incompressível:

$$\rho_g \nabla(A_g \vec{V}_g)$$

Quando a espessura do filme aumenta a área do gás diminui e para que a vazão do gás continue a mesma, a velocidade do gás terá de aumentar.

Agora considere o mesmo termo caso o fluido seja compressível:

$$\nabla(\rho_g A_g \vec{V}_g)$$

Neste caso acontecerá o mesmo que descrito acima, porém como a densidade é variável, ela aumenta com a diminuição da área do gás, fazendo com que, para se garantir que a vazão mássica de gás não aumente, não seja necessário se aumentar tanto a velocidade como no caso incompressível.

Isto traz consigo um efeito positivo quanto à pressão do gás, pois como a velocidade aumenta menos, as linhas de fluxo ficam menos próximas, fazendo com que a pressão de gás diminua menos.

Na verdade tem-se um efeito como o de um fluido dentro de uma câmara. Quando este fluido é comprimido, a sua compressibilidade age como uma mola aumentando a pressão interna e desta maneira se equilibrando com a pressão externa, isto também

ocorre no caso do escoamento, diminuindo o desequilíbrio entre a pressão interfacial de gás e de líquido (ver diagrama abaixo).

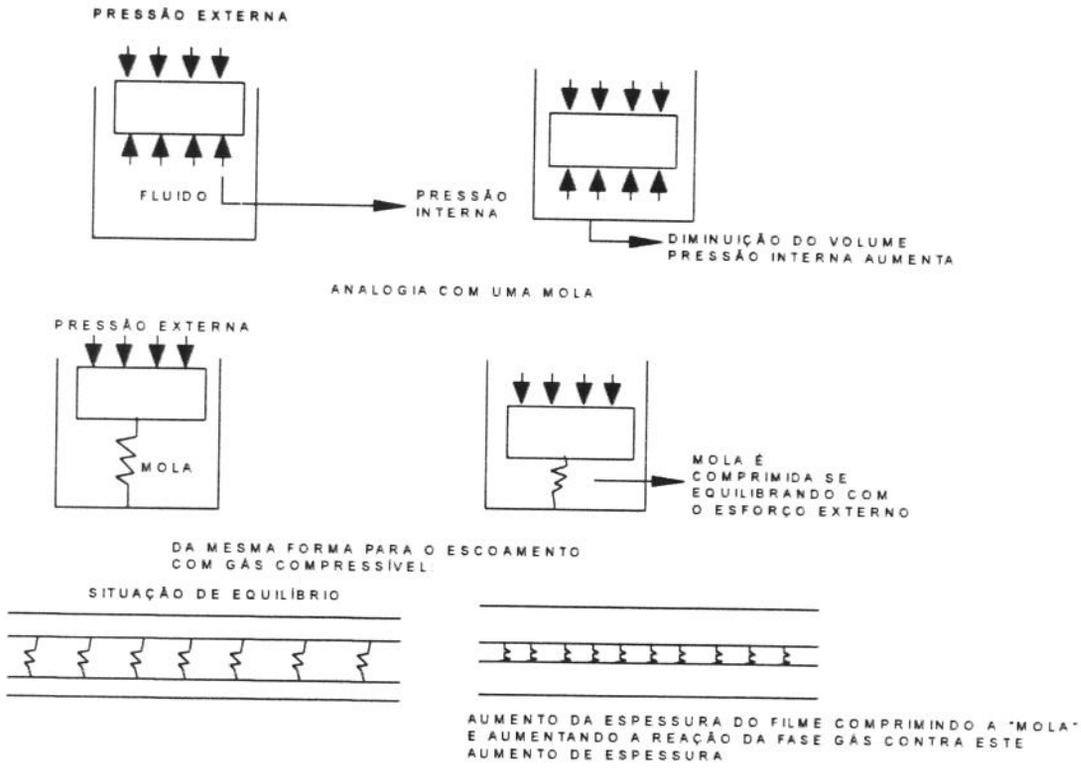


FIGURA 5.3 ANALOGIA DO ESCOAMENTO COM UMA CÂMARA DE GÁS

O mecanismo que faz com que a compressibilidade se torne um termo estabilizador no escoamento anular está muito próxima da idéia de escoamentos de fluidos compressíveis em tubulação de área convergente; neste caso, o comportamento do fluido é regido pelo número de Mach.

Sendo o número de Mach definido como  $M = U / \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}}$  temos que quando M for maior que 1, a velocidade do fluido diminuirá e a pressão aumentará, caso contrário, a velocidade aumentará e a pressão diminuirá; desta forma em um duto convergente o fluido terá de ter uma velocidade maior que  $\sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}}$  para ter a sua pressão aumentada enquanto passa pelo duto.

De novo é colocada uma maneira de enxergar o escoamento bifásico que o aproxima da interpretação monofásica, sendo assim um ponto de vista qualitativo que desconsidera o nível de acoplamento do escoamento da fase líquida com a fase gás.

Entendendo que para o gás passar por uma região em que o filme de líquido se instabiliza, diminuindo portanto a área de gás, é como passar por um duto convergente, o comportamento da pressão do gás deverá estar relacionada com  $\sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}}$ , tendo então uma relação parecida com a do número de Mach; logo, deverá existir uma situação em que se o filme de líquido tender a um crescimento, a pressão do gás tenderá a aumentar, forçando a interface a voltar para a sua posição anterior; nesta situação, se terá equilíbrio interfacial no escoamento anular.

É claro que o limite de velocidade não deverá ser o mesmo que o encontrado para o caso de dutos convergentes ( $\sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}}$ ), pois o **problema de autovalor** em um sistema monofásico é diferente do problema de autovalor em um sistema bifásico. É importante não confundir isto com o limite de escoamento crítico de todo o meio bifásico. Na verdade o que se tem é uma velocidade crítica em que a pressão da fase gás tende a crescer em relação à fase líquida.

Iremos apresentar no próximo tópico o equacionamento linearizado que nos dá as frequências naturais (autovalores) do sistema bifásico compressível.

### 5.8-Equacionamento com compressibilidade.

O equacionamento não difere muito do apresentado para o caso incompressível, sendo apenas algebricamente mais complexo. Apresentaremos a equação com a qual se obtém a frequência fundamental; veremos que esta equação é bem mais complexa do que a do caso incompressível não permitindo conclusões imediatas sobre os parâmetros que causam a instabilização. Foi considerado o efeito da hidrostática, pois este equacionamento serve também para o caso estratificado com alta vazão de gás. Temos então, linearizando outra vez as equações (3.3.2), (3.3.3), (3.3.4) e (3.3.5):

$$\begin{aligned} & \rho_l \partial_t^2 \alpha + 2 \rho_l u_l \partial_x \alpha + (\rho_l u_l^2 + \rho_l A_l g \cos(\beta) \partial_{A_l} h_l) \partial_{x^2} \alpha - \left( \frac{\partial_{u_l} F_l}{A_l} - \frac{\partial_{u_g} F_l}{A_g} \right) \partial_t \alpha - \\ & \left( \frac{u_l}{A_l} \partial_{u_l} F_l - \frac{u_g}{A_g} \partial_{u_g} F_l - \partial_{A_l} F_l \right) \partial_x \alpha + A_l \partial_{x^2} p + \frac{c_g^2}{A \rho_g} \partial_{u_g} F_l \partial_t p + \\ & \left( \frac{c_g^2 u_g}{A \rho_g} \partial_{u_g} F_l - \frac{\partial_p F_l}{A} \right) \partial_x p = 0 \end{aligned} \quad (5.8.1)$$

sendo  $c_g^2 = \partial_p \rho_g$ ;

$$\begin{aligned} & -\rho_g \partial_t^2 \alpha - 2 \rho_g u_g \partial_x \alpha - (\rho_g u_g^2 + \rho_g A_g g \cos(\beta) \partial_{A_l} h_l) \partial_{x^2} \alpha - \left( \frac{\partial_{u_l} F_g}{A_l} - \frac{\partial_{u_g} F_{lg}}{A_g} \right) \partial_t \alpha - \\ & \left( \frac{u_l}{A_l} \partial_{u_l} F_g - \frac{u_g}{A_g} \partial_{u_g} F_g - \partial_{A_l} F_g \right) \partial_x \alpha - c_g^2 A_g \partial_t^2 p - 2 u_g A_g c_g^2 \partial_x p - \\ & (u_g^2 A_g c_g^2 - A_l) \partial_{x^2} p + \frac{c_g^2}{A \rho_g} \partial_{u_g} F_g \partial_t p + \left( \frac{c_g^2 u_g}{A \rho_g} \partial_{u_g} F_g - \frac{\partial_p F_g}{A} \right) \partial_x p = 0 \end{aligned} \quad (5.8.2)$$

onde:

$$F_g = (-\tau_l S_l - \rho_g A_g g);$$

$$F_l = (\tau_l S_l - \tau_l S_l - \rho_l A_l g)$$

Definindo:

$$a_1^\alpha = \rho_l$$

$$b_1^\alpha = 2 \rho_l u_l$$

$$c_1^\alpha = (\rho_l u_l^2 + \rho_l A_l g \cos(\beta)) \hat{\partial}_{A_l} h_l$$

$$d_1^\alpha = - \left( \frac{\partial_{u_l} F_l}{A_l} - \frac{\partial_{u_g} F_l}{A_g} \right)$$

$$e_1^\alpha = - \left( \frac{u_l}{A_l} \partial_{u_l} F_l - \frac{u_g}{A_g} \partial_{u_g} F_l - \partial_{A_l} F_l \right)$$

$$a_1^p = A_l$$

$$b_1^p = \frac{c_g^2}{A \rho_g} \partial_{u_g} F_l$$

$$c_1^p = \left( \frac{c_g^2 u_g}{A \rho_g} \partial_{u_g} F_l - \frac{\partial_p F_l}{A} \right)$$

$$a_2^\alpha = -\rho_g$$

$$b_2^\alpha = -2 \rho_g u_g$$

(5.8.3)

$$c_2^\alpha = -(\rho_g u_g^2 + \rho_g A_g g \cos(\beta)) \hat{\partial}_{A_l} h_l$$

$$d_2^\alpha = - \left( \frac{\partial_{u_l} F_g}{A_l} - \frac{\partial_{u_g} F_{lg}}{A_g} \right)$$

$$e_2^\alpha = - \left( \frac{u_l}{A_l} \partial_{u_l} F_g - \frac{u_g}{A_g} \partial_{u_g} F_g - \partial_{A_l} F_g \right)$$

$$a_2^p = -c_g^2 A_g$$

$$b_2^p = -2 u_g A_g c_g^2$$

$$c_2^p = -(u_g^2 A_g c_g^2 - A_l)$$

$$d_2^p = \frac{c_g^2}{A \rho_g} \partial_{u_g} F_g$$

$$e_2^p = \left( \frac{c_g^2 u_g}{A \rho_g} \partial_{u_g} F_g - \frac{\partial_p F_g}{A} \right)$$

$$\begin{vmatrix} -a_1^\alpha \omega^2 + b_1^\alpha \omega / \lambda - c_1^\alpha / \lambda^2 + d_1^\alpha / \lambda^4 + e_1^\alpha \omega i & -a_1^p / \lambda^2 + b_1^p \omega i - c_1^p / \lambda \\ -a_2^\alpha \omega^2 + b_2^\alpha \omega / \lambda - c_2^\alpha / \lambda^2 + d_2^\alpha \omega i - e_2^\alpha i / \lambda & -a_2^p \omega^2 + b_2^p \omega / \lambda - c_2^p / \lambda^2 + d_2^p \omega i - e_2^p i / \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (5.8.4)$$

Com a Eq. 5.8.4 é possível se obter o valor da frequência e assim verificar se esta tem valores que tornem o escoamento instável.

Como exemplos de resultados que se podem obter com a Eq. 5.8.4 temos:

$$U_{gs} = 20 \text{ m/s}, \quad U_{ls} = 0.01 \text{ m/s}, \quad p = 0.1 \text{ Mpa}, \quad T = 298 \text{ K}, \quad d = 2.5 \text{ cm}, \quad \lambda = 10^5 \text{ (imposto)}.$$

A complexidade algébrica da equação traz consigo limitações práticas como a necessidade de se impor um certo comprimento de onda para se poder aplicá-las numericamente. Isto foi feito neste exemplo; escolheu-se um comprimento de onda grande o suficiente para poder anular os efeitos estabilizadores da tensão superficial, só levando em conta então a compressibilidade para a estabilização.

$$\text{Para } c_g^2 = 10^{-4}$$

$$\omega = -7.3097 \times 10^{-6} + 3.13508 \times 10^{-10} I$$

$$\omega = 0.0000229453 + 8.860783 I$$

$$\omega = 0.000194092 + 1.01822 \times 10^{-8} I$$

$$\omega = 0.000209201 + 171.272 I$$

$$\text{Para } c_g^2 = 10^{-5}$$

$$\omega = -7.338674 \times 10^{-6} + 7.24518 \times 10^{-9} I$$

$$\omega = 0.0000274813 + 8.860783 I$$

$$\omega = 0.000086338 + 9.7757 \times 10^{-8} I$$

$$\omega = 0.000311996 + 171.272 I$$

$$\text{Para } c_g^2 = 10^{-7}$$

$$\omega = -7.24163 \times 10^{-6} - 5.67801 \times 10^{-9} I$$

$$\omega = -0.0117752 + 8.96789 \times 10^{-6} I$$

$$\omega = 0.000581946 + 8.86073 I$$

$$\omega = 0.0116194 + 171.272 I$$

$$\text{Para } c_g^2 = 10^{-10}$$

$$\omega = -7.24277 \times 10^{-6} - 5.57842 \times 10^{-9} I$$

$$\omega = -11.5199 - 0.997059 I$$

$$\omega = 0.195863 + 9.1198 I$$

$$\omega = 11.3245 + 171.011 I$$

Nestes resultados vê-se que todos os autovalores são complexos, porém autovalores cujo termo imaginário é positivo não caracteriza uma situação de instabilidade interfacial.

Para os dois primeiros casos, compressibilidade mais alta, é observado que todos os autovalores tem termo imaginário positivo, sendo a interface estável.

Nos dois últimos, casos onde a compressibilidade é menor, é observado o aparecimento de autovalores com termos imaginários negativos, sendo então a interface instável para estes dois casos. Isto caracteriza bem a importância da compressibilidade na estabilidade interfacial.

### **5.9- Região onde a equação unidimensional para padrão anular não apresenta tendência à instabilidade (caso incompressível).**

A curva mostrada abaixo foi obtida a partir de (5.6.5) e representa o limite de estabilidade marginal; abaixo desta tem-se que o sistema de equações diferenciais é estável, acima desta o sistema tenderá a ser instável. Foram usados como parâmetros para se montar esta curva o comprimento de onda do modo fundamental dividido pelo diâmetro da tubulação e a velocidade do gás. Nesta curva pode-se observar que a região em que, pela análise linearizada, tem-se equações diferenciais estáveis é muito pequena

e que ela se torna cada vez menor a medida em que a velocidade do gás aumenta. Do ponto de vista do comprimento, como já foi dito antes, tem-se que ele deverá ser da mesma ordem de grandeza do comprimento de onda fundamental, se não for menor. Isto é muito importante, pois pela curva apresentada abaixo o comprimento de onda é no máximo duas vezes maior do que o diâmetro, ou seja o comprimento em que as equações não apresentarão nenhuma instabilidade no senso da análise linear é muito pequeno. Temos :

$U_{ls} = 0.02 \text{ m/s}$ ,  $p = 0.13 \text{ E } 7\text{Pa}$ ,  $T = 300 \text{ K}$ ,  $\mu_l = 0.8 \text{ cp}$ ,  $\mu_g = 0.02 \text{ cp}$ ,  
 $\sigma = 30 \text{ E } -3 \text{ dina/cm}$ , raio = 0.1m;

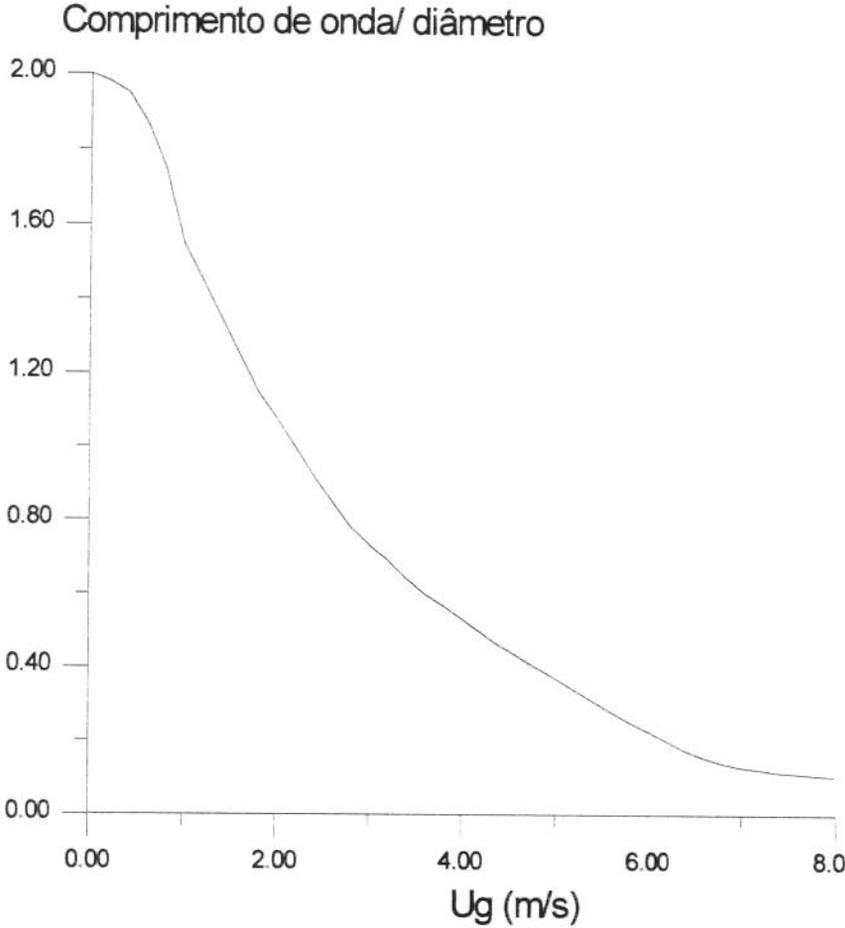


FIGURA 5.4 COMPRIMENTO DE ONDA X VELOCIDADE DO GÁS

## 5.10-Discussão do capítulo.

Neste capítulo foi estudado, física e matematicamente, o problema de instabilidade interfacial no escoamento bifásico do tipo fases separadas. Este estudo é importante, pois determinar quando a interface se instabiliza é determinar quando ocorrerá a mudança de padrão de fluxo.

É bom deixar claro que a instabilização interfacial está relacionada com os limites de existência entre o escoamento do tipo fases separadas e o escoamento do tipo intermitente, pois modela bem o fenômeno físico de crescimento da espessura de filme de líquido até a obstrução da passagem de gás.

No caso de transição de um escoamento de fases separadas para outro também de fases separadas, a transição é mais complexa, sendo necessário se enumerar outros fenômenos físicos para os quais as equações que foram apresentadas acima são insuficientes. De fato, observa-se que o critério viscoso prevê mal a transição estratificado-anular.

## **CAPÍTULO 6 : Resultados**

O simulador desenvolvido neste trabalho foi utilizado para se analisar o processo de instabilização da interface de um escoamento bifásico padrão anular. A maneira escolhida para se detectar o processo de desestabilização da interface foi a de se observar a evolução de uma onda solitária no meio bifásico. Quando a amplitude da onda tende a decair, tem-se a situação estável. Quando a amplitude apresenta uma tendência a crescimento tem-se, então, uma interface de características instáveis. Quando a sua amplitude tende a ficar constante, interpreta-se isto como uma situação de estabilidade marginal, como discutido no capítulo anterior. A partir destas observações foram construídos limites para a estabilidade do escoamento anular, os quais foram comparados com dados de Shoham (1980).

A maneira como a onda é gerada no simulador, consiste em se dar um súbito aumento na área do filme de líquido, um acréscimo de meia área, para depois de um certo intervalo de tempo, algo em torno de vinte e cinco incrementos de tempo de ordem de grandeza convectiva, retornar a área de filme de líquido para a sua situação inicial.

Em todas as simulações que foram feitas observou-se a forte influência da compressibilidade do gás na estabilidade interfacial. O fator de compressibilidade neste trabalho foi obtido a partir da equação cúbica de Van der Waals, sendo os dois fluidos sempre água e ar.

### **6.1 Ondas solitárias.**

Serão apresentadas, agora, algumas simulações de onda solitária:

Primeira simulação:

pressão = 0.1 Mpa ;  $U_{gs} = 5$  m/s;  $U_{ls} = 0.06$  m/s, temperatura 298 K,  
diâmetro = 0.025 m ; comprimento = 10 m, inclinação da tubulação = 5 graus;

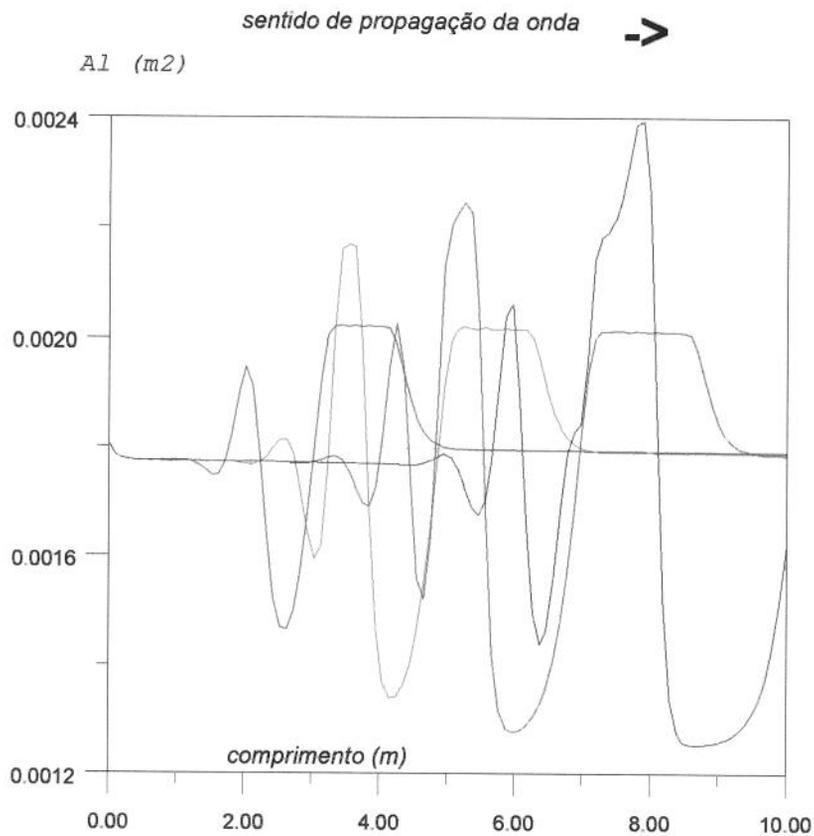
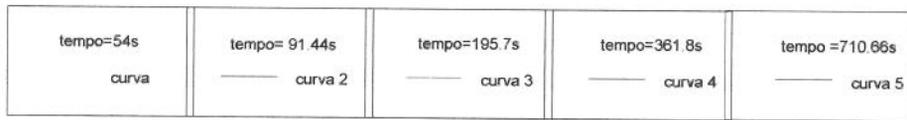


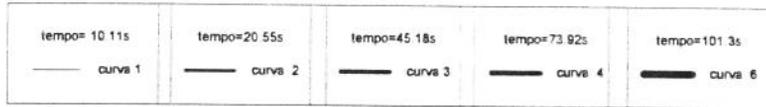
FIGURA 6.1 ONDA SOLITÁRIA 1

Neste caso o escoamento já se encontra abaixo da condição de estabilidade, portanto, apresenta uma forte tendência à instabilização, o que é notado pela curva número cinco.

Na próxima simulação o único parâmetro que será mudado é a velocidade do gás; desta forma será ilustrada a forte tendência do escoamento anular em se estabilizar em altas vazões de gás, isto, como já foi discutido, deve-se ao fato de que nesta situação a compressibilidade do gás torna-se mais influente na equação de continuidade, atenuando assim os efeitos desestabilizadores de Bernoulli.

## Segunda simulação:

pressão = 0.1 Mpa ;  $U_{gs}$  = 20 m/s;  $U_{ls}$  = 0.06 m/s, temperatura 298 K,  
diâmetro = 0.025 m ; comprimento = 10 m, inclinação da tubulação = 5 graus;



sentido de propagação →

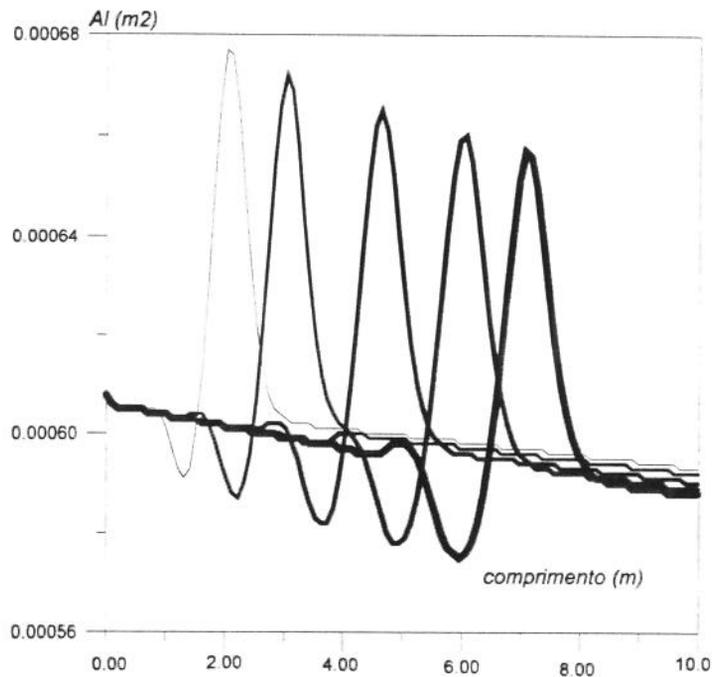


FIGURA 6.2 ONDA SOLITÁRIA 2

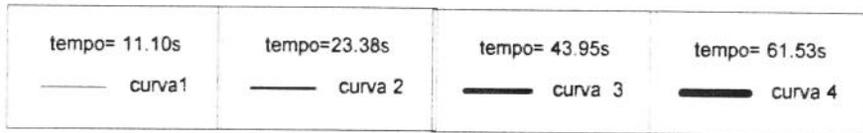
Nesta simulação vê-se claramente a tendência a estabilização da onda.

A compressibilidade é uma função da pressão; no simulador a maneira como é calculada a compressibilidade leva a valores maiores desta em alta pressão, portanto é natural que na simulação seja observada uma maior estabilidade interfacial em altas

pressões. Ilustrando esta característica será apresentada uma simulação estável a alta pressão e baixa vazão de gás.

Terceira simulação:

pressão = 1.3 Mpa ;  $U_{gs}$  = 5 m/s;  $U_{ls}$  = 0.06 m/s, temperatura 298 K,  
diâmetro = 0.025 m ; comprimento = 10 m, inclinação da tubulação = 5 graus;



sentido de propagação ->

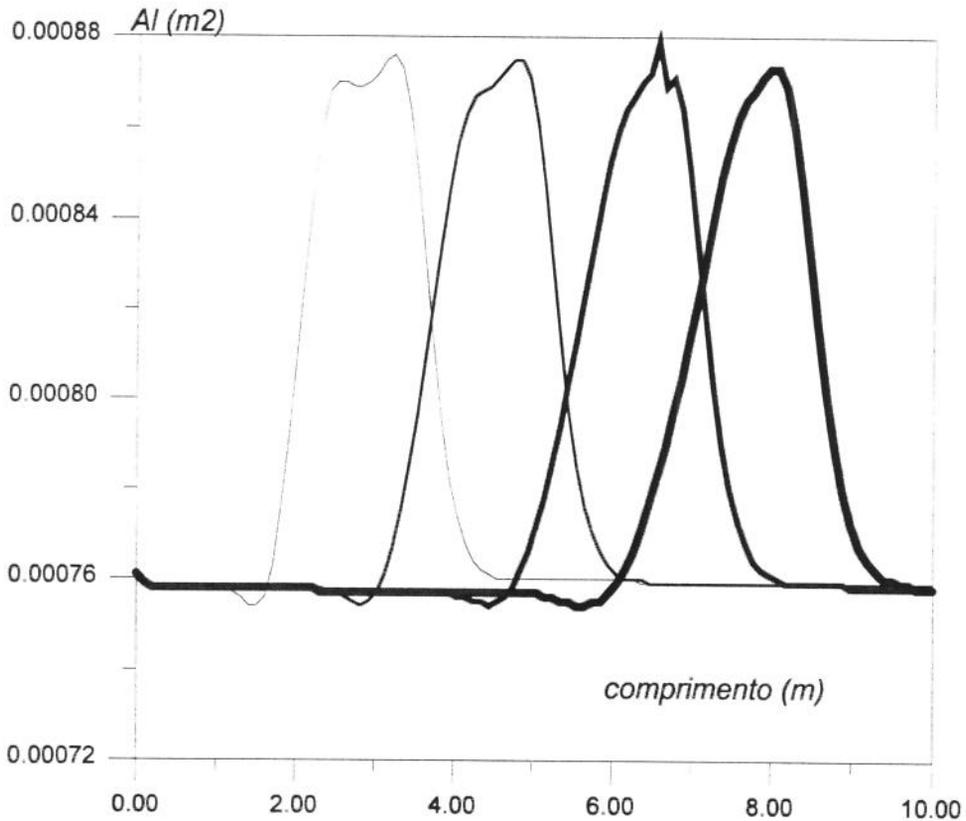


FIGURA 6.3 ONDA SOLITÁRIA 3

Esta última simulação difere da primeira apenas na pressão escolhida, porém nota-se que a onda tem um comportamento mais estável, apesar de sua amplitude ter um amortecimento muito lento. Esta situação de amplitude de onda constante, caracteriza uma situação de estabilidade marginal. Será apresentada, agora, uma simulação cuja a única diferença com a anterior é a velocidade do gás, que será mais alta, portanto teremos uma interface estável.

Quarta simulação:

pressão = 1.3 Mpa ;  $U_{gs} = 20$  m/s;  $U_{ls} = 0.06$  m/s, temperatura 298 K,  
 diâmetro= 0.025 m ; comprimento= 10 m, inclinação da tubulação= 5 graus;

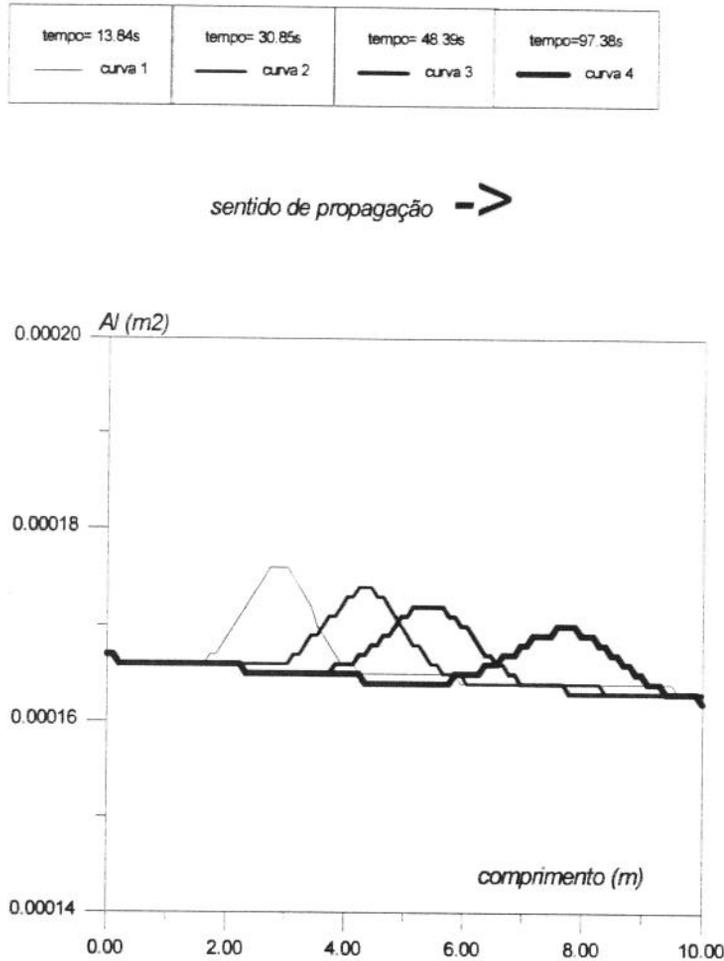
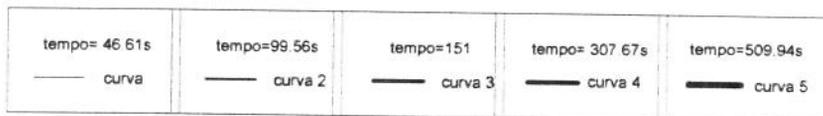


FIGURA 6.4 ONDA SOLITÁRIA 4

Um outro termo de influência desestabilizadora no escoamento é a vazão de líquido; o que é natural, pois uma maior vazão de líquido implica em uma maior espessura de filme, o que torna o escoamento mais instável. A próxima simulação difere da primeira por ter uma vazão de líquido menor, portanto um comportamento mais estável.

Quinta simulação:

pressão = 0.1 Mpa ;  $U_{gs} = 5 \text{ m/s}$ ;  $U_{ls} = 0.02 \text{ m/s}$ , temperatura 298 K,  
 diâmetro = 0.025 m ; comprimento = 10 m, inclinação da tubulação = 5 graus;



sentido de propagação ->

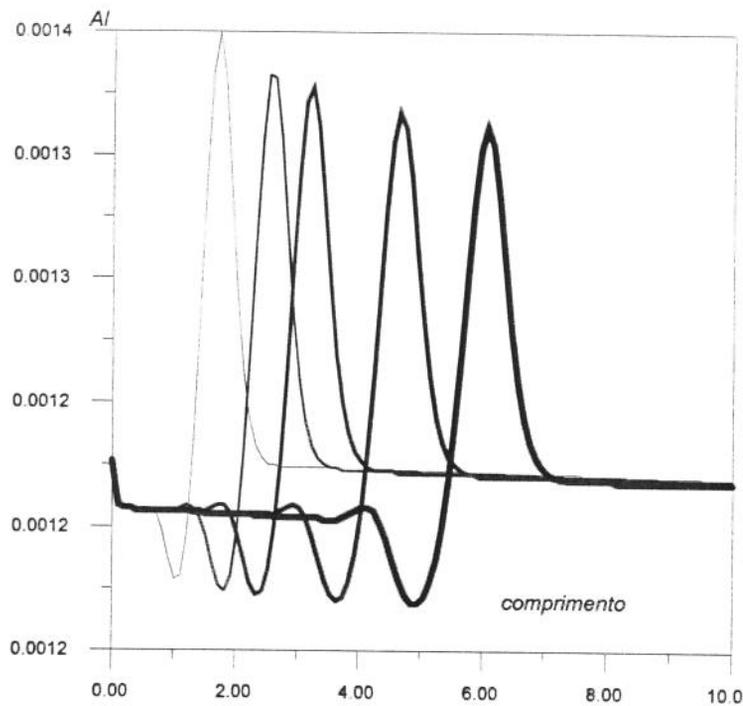


FIGURA 6.5 ONDA SOLITÁRIA 5

Serão apresentadas agora um grupo de simulações em escoamento vertical, o que se verificou é que nesta situação o filme de líquido tende a ser mais instável.

Sexta simulação:

pressão = 0.45 Mpa ;  $U_{gs}$  = 7 m/s;  $U_{ls}$  = 0.02 m/s, temperatura 298 K,  
diâmetro = 0.025 m ; comprimento = 10 m, inclinação da tubulação = 90 graus;

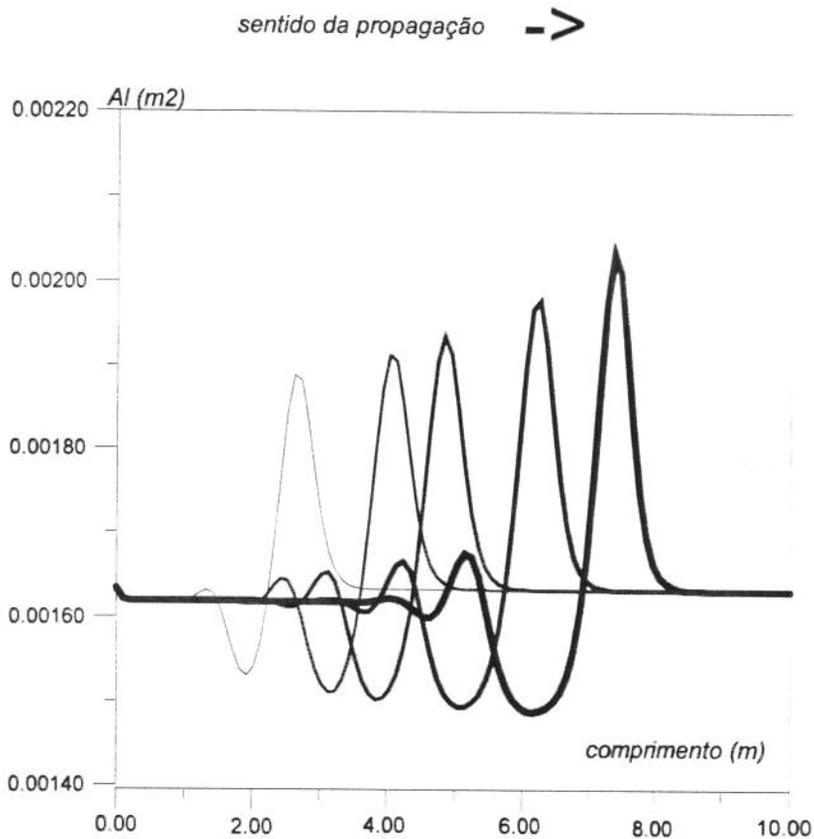
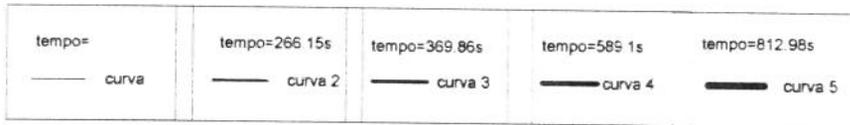
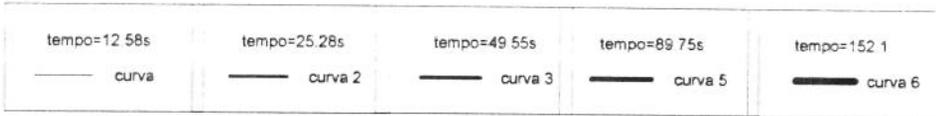


FIGURA 6.6 ONDA SOLITÁRIA 6

Sétima simulação:

pressão = 0.45 Mpa ;  $U_{gs}$  = 20 m/s;  $U_{ls}$  = 0.02 m/s, temperatura 298 K,  
diâmetro = 0.025 m ; comprimento = 10 m, inclinação da tubulação = 90 graus;



sentido da propagação →

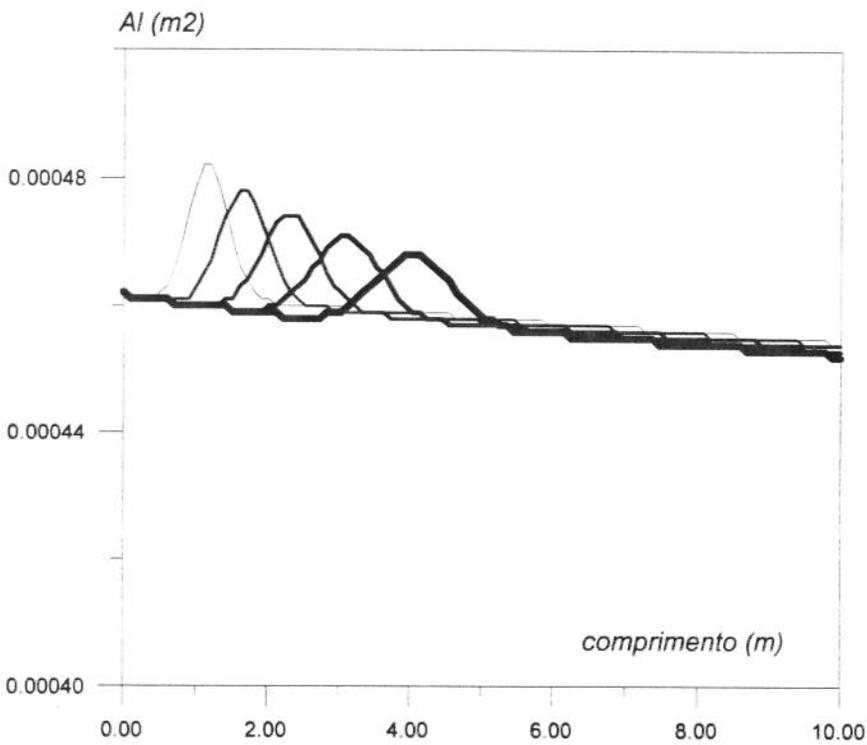


FIGURA 6.7 ONDA SOLITÁRIA 7

### Oitava simulação:

pressão = 1.3 Mpa ;  $U_{gs} = 7$  m/s;  $U_{ls} = 0.02$  m/s, temperatura 298 K,  
diâmetro= 0.025 m ; comprimento= 10 m, inclinação da tubulação= 90 graus;

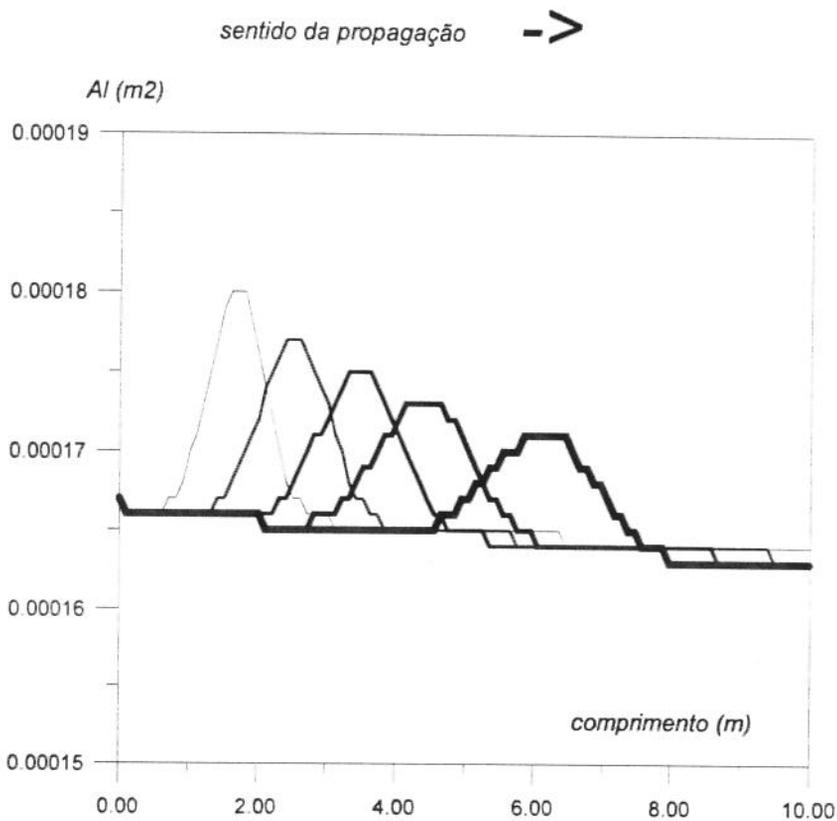
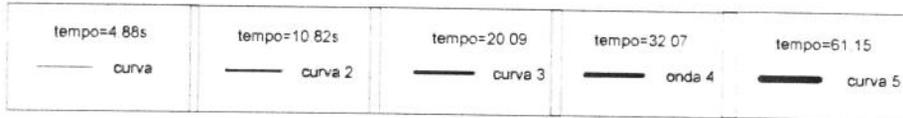


FIGURA 6.8 ONDA SOLITÁRIA 8

### 6.2 Comparação com mapas de padrão de fluxo.

Com o resultado do simulador foram construídas algumas curvas limitadoras do padrão anular, as quais foram comparadas com dados experimentais, os fluidos são água e ar.

Nos próximos gráficos  $\Delta$  representa o padrão anular e  $\bullet$  representa o padrão turbilhonado (churn) ou intermitente (slug).

Primeiro caso:

pressão = 0.1 Mpa ; temperatura 298 K,

diâmetro= 0.025 m ; inclinação da tubulação= 5 graus

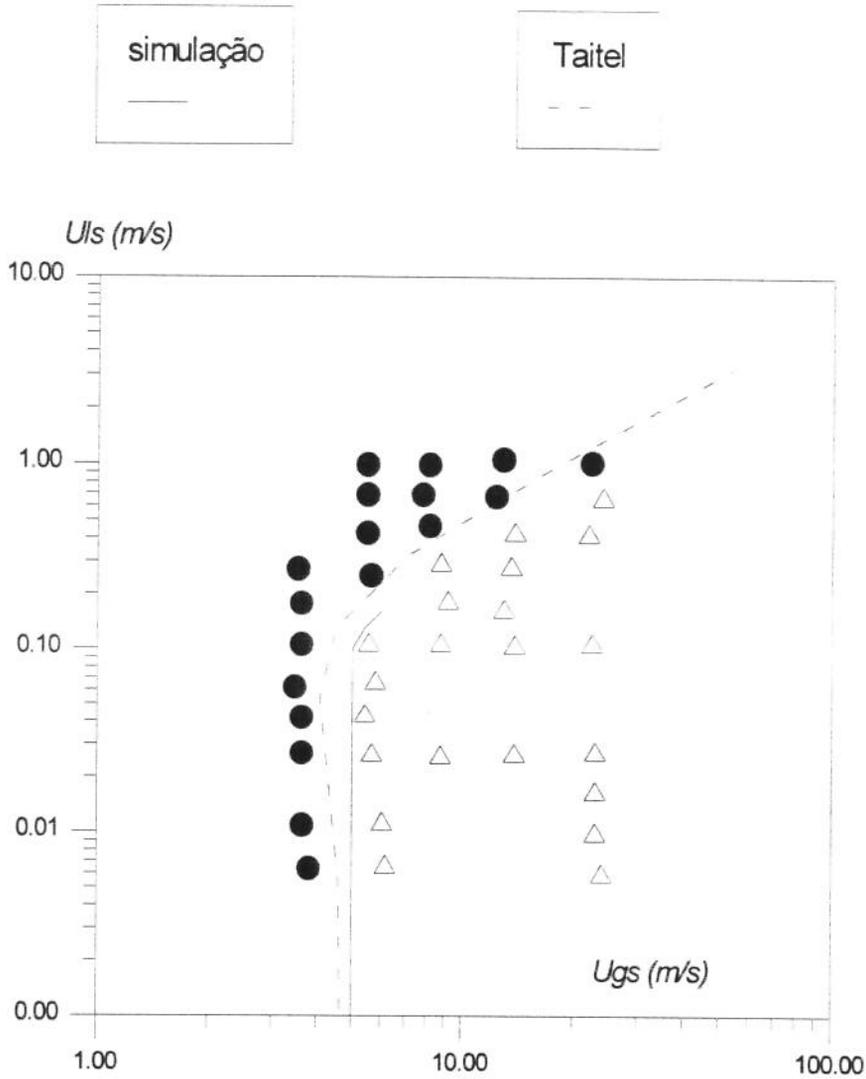


FIGURA 6.9 COMPARAÇÃO DE RESULTADO PARA MAPA DE PADRÃO DE FLUXO A 5 GRAUS DE INCLINAÇÃO

Segundo caso:

pressão = 0.1 Mpa ; temperatura 298 K,

diâmetro= 0.025 m ; inclinação da tubulação= 15 graus

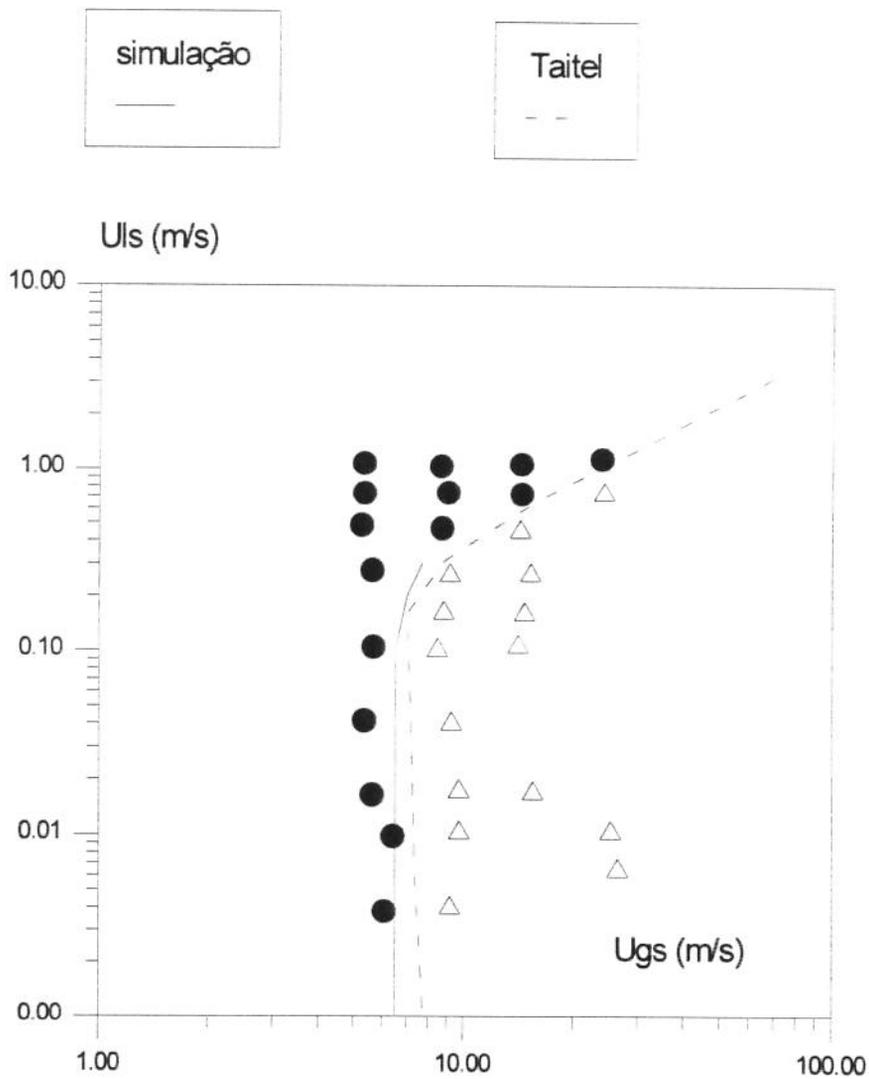


FIGURA 6.10 COMPARAÇÃO DE RESULTADO PARA MAPA DE PADRÃO DE FLUXO A 15 GRAUS DE INCLINAÇÃO

Terceiro caso:

pressão = 0.1 Mpa ; temperatura 298 K,

diâmetro= 0.025 m ; inclinação da tubulação= 30 graus

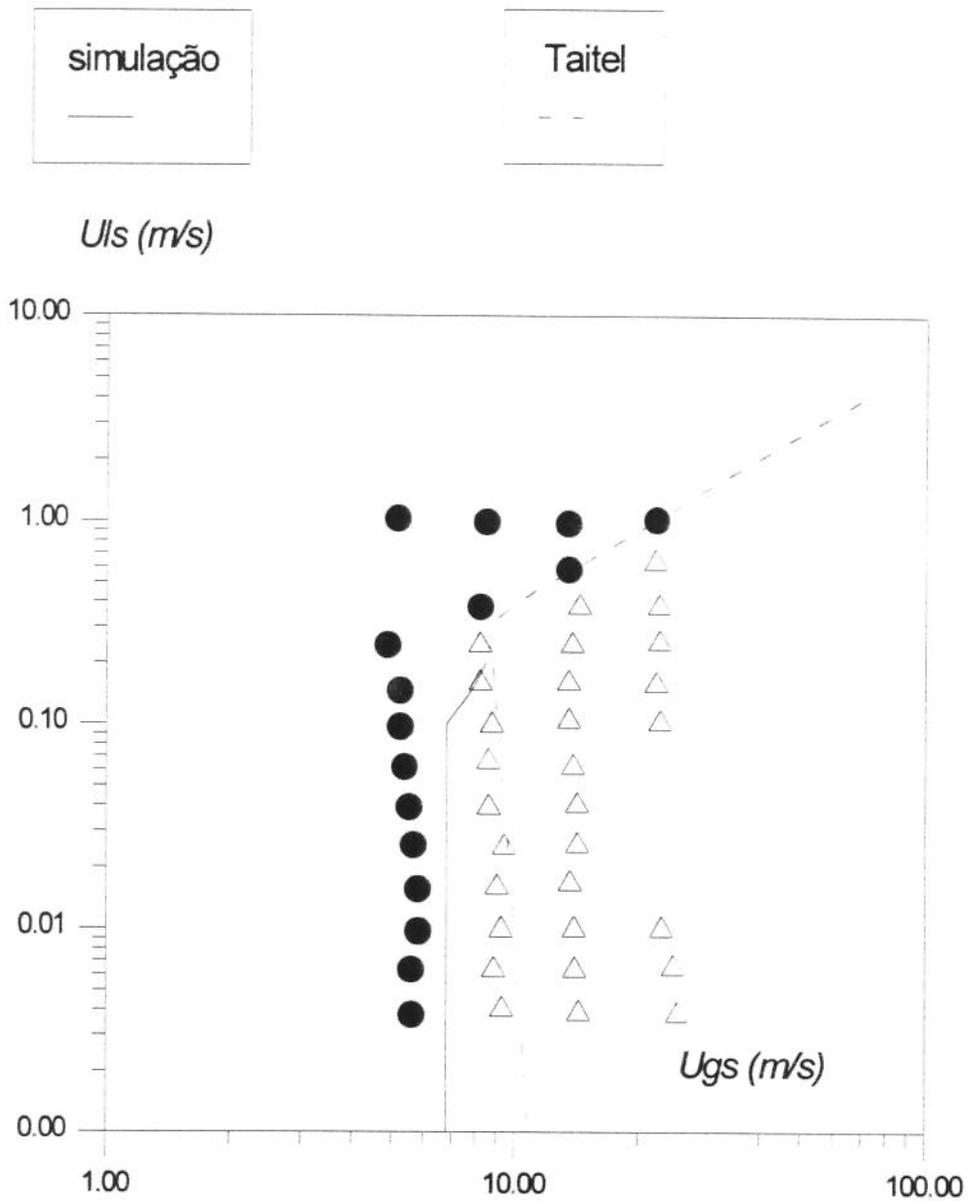


FIGURA 6.11 COMPARAÇÃO DE RESULTADO PARA MAPA DE PADRÃO DE FLUXO A 30 GRAUS DE INCLINAÇÃO

Quarto caso:

pressão = 0.1 Mpa ; temperatura 298 K,

diâmetro= 0.025 m ; inclinação da tubulação= 90 graus

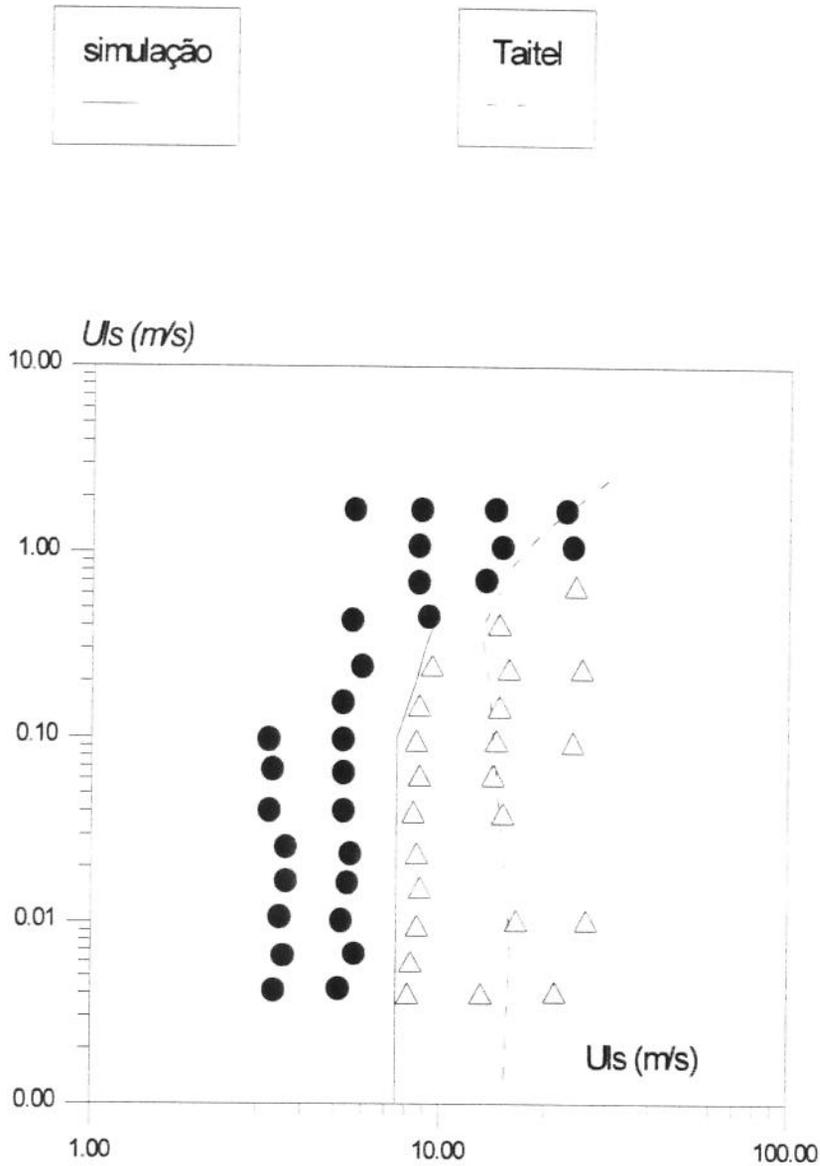


FIGURA 6.12 COMPARAÇÃO DE RESULTADO PARA MAPA DE PADRÃO DE FLUXO A 90 GRAUS DE INCLINAÇÃO

Pode-se notar que, em geral, o limite de estabilidade do escoamento anular observado pela simulação apresenta ótima concordância com os dados experimentais, sendo mais deslocado para a esquerda em comparação com a teoria de Barnea e Taitel (1994). Não foi possível simular ondas solitárias a altas vazões de líquido, isto devido à dificuldades na convergência, nesta situação, da biblioteca que calcula o permanente aproximado.

### 6.3 Efeito da compressibilidade no limite de estabilidade do escoamento anular.

Algumas simulações (4 simulações) foram feitas buscando-se observar o efeito de  $\frac{\partial \rho}{\partial p}$  no limite de estabilidade do escoamento, como foi dito no capítulo anterior sobre estabilidade de escoamento anular, este deverá ser o principal fator de estabilização da interface. As simulações foram feitas variando a compressibilidade e mantendo-se a vazão de líquido constante em 0.02 m/s, o diâmetro foi fixado em 0.025m.

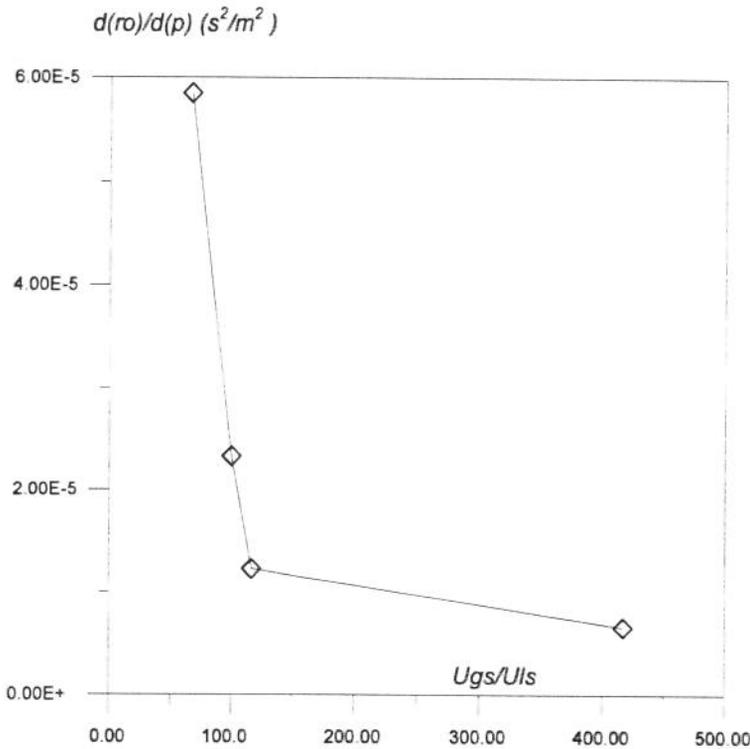


FIGURA 6.13 GRÁFICO REPRESENTANDO OS EFEITOS DA COMPRESSIBILIDADE NA ESTABILIDADE DO ESCOAMENTO

Neste gráfico pode-se observar o quanto a compressibilidade é influente na estabilidade do escoamento anular, sendo que em situações de baixa compressibilidade o escoamento tende a limites de estabilidade muito alto.

Assim, podemos classificar a estabilidade interfacial em dois tipos; a de natureza hidrostática, típica do padrão estratificado de baixa vazão de gás e grande espessura de filme de líquido, e a de natureza compressível, típica do padrão anular e estratificado de alta vazão mássica de gás.

## **CAPÍTULO 7 : Conclusões e recomendações.**

### ***Conclusões***

1- Foi construído um simulador de escoamento bifásico transiente unidimensional para o padrão anular, levando em consideração as equações de continuidade e conservação da quantidade de movimento do modelo de dois fluidos. Utilizou-se incrementos de tempos bem inferiores ao tempo característico convectivo, algo em torno de um décimo deste e considerando o gás em um quase permanente.

2- Utilizou-se o simulador como ferramenta para se fazer a análise de estabilidade interfacial do escoamento anular. A análise que foi feita levava em conta o comportamento de uma onda solitária no meio bifásico. A partir das simulações destas ondas solitárias foram obtidos limites para a transição do escoamento anular, os quais apresentaram uma boa concordância com os dados experimentais, nas regiões em que se foi possível simular.

3- Observou-se que a estabilidade interfacial do escoamento anular está muito relacionada com a compressibilidade do gás, tendo a partir de uma determinada velocidade limite um comportamento parecido com o de um fluido em duto convergente a uma velocidade supersônica. Sendo portanto o mecanismo de estabilização do escoamento anular bem diferente do mecanismo de estabilização do escoamento estratificado (a hidrostática).

4- Uma conclusão imediata que se pode tirar do que foi discutido acima é que os limites de estabilidade interfacial e portanto os mapas de transição do padrão anular muito dependem das variáveis de estado pressão e temperatura, pois elas determinam o quanto o gás será compressível.

5- Uma análise linearizada do escoamento anular feita considerando o gás um fluido incompressível demonstrou que para este caso não existiria estabilidade interfacial do escoamento anular; para este caso o fenômeno que se acredita ocorrer é o de quebra da onda da interface devido à pressão dinâmica do fluido no núcleo gasoso. Este fenômeno não é possível de se simular de maneira unidimensional, sendo portanto qualquer conclusão sobre os limites de estabilidade para este caso muito difíceis de serem determinados.

### **Recomendações**

- 1- Implementar as equações de conservação de energia no simulador.
- 2- Buscar melhores metodologias para se calcular o regime permanente, pois a metodologia empregada apresentou limitações de convergência no caso de altas vazões de líquido.
- 3- Verificar os efeitos da viscosidade do líquido nos limites de estabilidade interfacial.
- 4- Realizar testes experimentais, em diversas pressões e temperaturas, e para diversos tipos de fluidos, que investiguem o efeito da compressibilidade na transição do padrão anular.
- 5- Combinar a análise de estabilidade interfacial com a análise de estabilidade estrutural de filme de líquido para a construção de mapas de padrão de fluxo no caso anular, como é feito no caso estratificado (Barnea e Taitel, 1992).

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alves, Iberê N. : “Modelagem Composicional Do escoamento Bifásico Anular,” (Dissertação de Mestrado) . Ouro Preto, Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto, 1987.
- Alves, Iberê N. : “Notas De Aulas Em escoamento Bifásico Transiente,” Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Departamento de Engenharia de Petróleo, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), 1994.
- Andreussi, Paolo : “Droplet Transfer In Two-Phase Annular Flow,” Int. J. Multiphase Flow, Vol 9, No. 6, pp. 697-713, 1983.
- Barnea, D. & Taitel, Y. : “Structural And Interfacial Stability Of Multiple Solutions For Stratified Flow,” Int. J. Multiphase Flow, Vol 18, No. 6, pp. 821-830, 1992.
- Barnea, D. & Taitel, Y. : “Kelvin-Helmholtz Stability Criteria For Stratified Flow: Viscous Versus Non-Viscous (Inviscid) Approaches,” Int. J. Multiphase Flow, Vol 19, No. 4, pp. 639-649, 1993.
- Barnea, D. & Taitel, Y. : “Interfacial And Structural Stability Of Separated Flow,” Int. J. Multiphase Flow, Vol 20, Suppl., pp. 387-414, 1994.
- Barre, F. Parent, M. & Brun, B. : “ Advanced Numerical Methods For Themalhydraulics,” Nuclear Engineering and Design, Vol. 145, pp. 147-158, 1993.
- Bendiksen, K. H., Malnes, D., Moe, R. & Nuland, S. : “The Dynamic Two-Fluid Model Olga : Theory And Application,” SPE Production Engineering, pp 171-180, May 1991.

- Bruno K. & McCready, M. J. : “ Origin Of Roll Waves In Horizontal Gas-Liquid Flows,” AICHE Journal, Vol. 34, No 9, September 1988.
- Craik, A. D. D. : “Wind-Generated Waves In Thin Liquid Films,” J. Fluid Mech., Vol 26, pp. 369, 1966.
- Crowley, C. J., Wallis, G. B. & Barry, J. J. : “Validation Of A One-Dimensional Wave Model For The Stratified-To-Slug Flow Regime Transition, With Consequences For Wave Growth And Slug Frequency,” Int. J. Multiphase Flow, Vol 18, No. 2, pp. 249-271, 1992.
- Dallman, J. C. & Hanratty, T. J. : “ Interpretation Of Entrainment Measurements In Annular Gas-Liquid Flows,” Momentum Heat and Mass Transfer in Chemical Process and Engineering System, Hemisphere McGraw-Hill. 1979.
- França, Fernando de A. : “Notas De Aulas Em Modelagem De Escoamento Bifásico,” Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Departamento de Engenharia de Petróleo, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), 1994.
- Ferschneider, G., Lagiere, M., Bourgeois, T. & Fitremann, J-M. : “How To Calculate Two-Phase Flow Of Gas And Oil In Pipe Lines,” Pipe Line Ind., Vol. 63, pp. 33-39, 1985.
- Hanratty, T. J. : “Interfacial Instabilities Caused By Air Flow,” Waves on Fluid Interfaces, Academic Press, ed ., R. E. Meyer, 221, 1983.
- Ishii M. : “Thermo-Fluid Dynamic Theory Of Two-Phase Flow,” Eyrolles, Paris, 1975.
- Jeffreys, H. : “On The Formation Of Water Waves By Wind,” Proc. R. Soc. A107, 189-206, 1925.

- Liles, D. R., & Reed, Wm. H. : " A Semi-Implicit Method For Two Phase Fluid Dynamics," J. of Computational Physics, Vol. 26, pp. 390-407, 1978.
- Lin, P. Y. & Hanratty, T. J. : "Prediction Of The Initiation Of Slugs With Linear Stability Theory," Int. J. Multiphase Flow, Vol 12 No. 1 pp. 79-98, 1986.
- Mahaffy, J. H., : "A Stability-Enhancing Two Step Method For Fluid Flow Calculations," J. of Computational Physics, Vol. 46, pp. 329-341, 1982.
- Pereyra, V. & Sewell, E. G. : "Mesh Selection For Discrete Solution Of Boundary Problems In Ordinary Differential Equations," Numer. Math., Vol 23, pp 261-268, 1975.
- Ransom, V. H. & Scofield, M. P. : "Two-Pressure Hydrodynamic Model For Two-Phase Separated Flow," INEL Report SRD-50-76, 1976.
- Stewart, H. B. & Wendroff, B. : "Two-Phase Flow: Models And Methods," J. of Computational Physics, Vol 56, pp 363-409, 1984.
- Trapp, J., A. & Riemke, R., A. : "A Nearly-Implicit Hydrodynamic Numerical Scheme For Two-Phase Flows," J. of Computational Physics, Vol 66, pp 62-82, 1986.
- Taytel, Y. & Dukler, A. : "A Model For Predicting Flow Regime Transitions In Horizontal And Near Horizontal Gas-Liquid Flow," AIChE J., Vol 22, pp 47-56, 1976.
- Wu, H. L., Pots, B. F. M., Hollenberg, J. F. & Meerhoff, R. : "Flow Pattern Transitions In A Two-Phase Gas/Condensate Flow At High Pressure In A 8" Horizontal Pipe," Proc. 3rd Int. Conf. on Multi-phase Flow, The Hague, The Netherlands, pp. 13-21, 1987.