

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR VINICIUS FERNANDO
ARCARO E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 24 / 01 / 1996

Fernando

ORIENTADOR

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

CONTRIBUIÇÃO AO PROJETO DE COBERTURAS TRIDIMENSIONAIS

**Autor: Vinicius Fernando Arcaro
Orientador: Fernando Iguti**

01/96



FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BAE - UNICAMP

Ar21c Arcaro, Vinicius Fernando
 Contribuição ao projeto de coberturas tridimensionais,
 Vinicius Fernando Arcaro, Campinas, SP, [s.n.], 1996.

 Orientador: Fernando Iguti.
 Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas,
 Faculdade de Engenharia Mecânica.

 1. Estruturas de cabo. 2. Tesouras de telhado. 3.
 Estruturas metálicas. 4. Cabos de aço. 5. Programação não
 linear. 6. Coberturas. 7. Tubos. I. Iguti, Fernando. II.
 Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de
 Engenharia Mecânica. III. Título.

BAE	BC
CHAMADA:	UNICAMP
	Ar 21 c
	27929
	667/96
	0 0 X
	R\$ 11,00
	04/07/96
	N.º CPD

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL**

CONTRIBUIÇÃO AO PROJETO DE COBERTURAS TRIDIMENSIONAIS

Autor: Vinicius Fernando Arcaro

Orientador: Fernando Iguti

Curso: Engenharia Mecânica

Área de Concentração: Mecânica Computacional

Tese de doutorado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Campinas, 1996
SP - Brasil

96077*

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL**

TESE DE DOUTORADO

**CONTRIBUIÇÃO AO PROJETO DE
COBERTURAS TRIDIMENSIONAIS**

**Autor: Vinicius Fernando Arcaro
Orientador: Fernando Iguti**



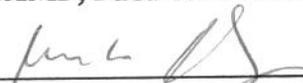
**Prof. Dr. Fernando Iguti, Presidente
UNICAMP, Faculdade de Engenharia Mecânica**



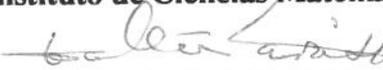
**Prof. Dr. Aloisio Ernesto Assan
UNICAMP, Faculdade de Engenharia Civil**



**Prof. Dr. Francisco Antonio Menezes
UNICAMP, Faculdade de Engenharia Civil**



**Prof. Dr. Marcos Nereu Arenales
USP, Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos**



**Prof. Dr. Walter Savassi
UNESP, Faculdade de Engenharia e Tecnologia - Bauru**

Campinas, Janeiro de 1996

Resumo

ARCARO, Vinicius Fernando, CONTRIBUIÇÃO AO PROJETO DE COBERTURAS TRIDIMENSIONAIS, Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1996, 167 páginas, Tese (doutorado)

Este trabalho considera dois tipos de coberturas tridimensionais: *treliça espacial* e *rede de cabos*, focalizando na formulação exata do tratamento teórico de hastes quando sujeitas a grandes mudanças na geometria. *No caso de treliça espacial*, apresenta uma heurística para o dimensionamento de mínimo peso de treliças espaciais constituídas por tubos cilíndricos de aço. A estratégia de mínimo peso significa um esforço para minimizar o custo deste tipo de treliça que é bastante comum na prática da engenharia civil. Nos subproblemas de cálculo de equilíbrio, o surpreendente desempenho do método quase Newton sem memória é revelado quando comparado com os métodos quase Newton e Newton. Uma aplicação da heurística a um caso real envolvendo milhares de deslocamentos e milhares de barras é apresentado. *No caso de rede de cabos*, proporciona um guia realista seguro sobre o comportamento de sistema estruturais com rede de cabos. A formulação matemática é especialmente adequada para modelar a etapa de tensionamento que é geralmente necessária nas tenso estruturas. Os resultados de um modelo experimental de rede de cabos tensionados, na forma de um parabolóide hiperbólico, ancorada em vigas rígidas retas, são comparados com os resultados do modelo teórico. Um caso real é analisado, onde a estrutura é uma rede de cabos de aço, na forma de um parabolóide hiperbólico, ancorada num anel de concreto, cujo eixo projeta uma elipse no plano horizontal.

Palavras Chave

Estruturas de cabo, Tesouras de telhado, Estruturas metálicas, Cabos de aço, Programação não linear, Coberturas, Tubos.

Abstract

ARCARO, Vinicius Fernando, CONTRIBUIÇÃO AO PROJETO DE COBERTURAS TRIDIMENSIONAIS, Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1996, 167 páginas, Tese (doutorado)

This work considers two types of tridimensional roofs: *space truss* and *cable network*, focusing on exact formulation in the theoretical treatment of stems when subjected to large changes in geometry. *In case of space truss*, it presents a heuristic to minimum weight design of space trusses composed of steel cylindrical tubes. The minimum weight strategy means an effort to minimize the cost of this type of truss, which is very common in the civil engineering practice. In sub-problems of equilibrium calculation, the surprising performance of the memoryless quasi Newton method is revealed when compared to the quasi Newton and Newton methods. An application of the heuristic to a real case encompassing thousands of displacements and thousand of members is presented. *In case of cable network*, it provides a sound practical guidance on the behavior of cable structural systems. The mathematical formulation is specially suited to model the tensioning stage, which is generally necessary in tension structures. The results from an experimental model of a tensioned cable network, in the shape of hyperbolic paraboloid, anchored at straight rigid beams, are compared with the results from the theoretical model. A real case is analyzed, where the structure is a steel cables network, in the shape of hyperbolic paraboloid, anchored at a concrete ring beam, whose axis projects an ellipse in the horizontal plane.

Key Words

Cable networks, Roof trusses, Steel structures, Steel cables, Nonlinear programming, Roofs, Tubes.

0. INTRODUÇÃO

4

1. CONCEITOS FUNDAMENTAIS E MÉTODOS BÁSICOS

5

1.1 OS PONTOS DE MÍNIMO LOCAL DE UMA FUNÇÃO DE CLASSE C^2	6
1.1.1 A DERIVADA PRIMEIRA	7
1.1.2 A DERIVADA SEGUNDA	7
1.1.3 O VETOR GRADIENTE E A MATRIZ HESSIANA	8
1.1.4 A EXPANSÃO EM SÉRIE DE TAYLOR	9
1.1.5 A DIREÇÃO DE DESCIDA	9
1.1.6 A DIREÇÃO DE DESCIDA PELA DEFLEXÃO DO VETOR GRADIENTE	10
1.1.7 CONDIÇÕES SUFICIENTES PARA UM PONTO DE MÍNIMO LOCAL	11
1.2 MÉTODOS COMPUTACIONAIS BÁSICOS	12
1.2.1 BUSCA UNIDIMENSIONAL	13
1.2.2 ALGORITMO PARA O MÍNIMO DA INTERPOLAÇÃO CÚBICA	16
1.2.3 ALGORITMO PARA A BUSCA UNIDIMENSIONAL	19
1.2.4 ALGORITMO ALTERNATIVO PARA A BUSCA UNIDIMENSIONAL	23
1.2.5 ALGORITMO GERAL DE UM MÉTODO BÁSICO DE DESCIDA	27
1.2.6 O MÉTODO DO GRADIENTE	29
1.2.7 O MÉTODO DE NEWTON	29
1.2.8 A MODIFICAÇÃO NA DECOMPOSIÇÃO DE CHOLESKY	32
1.2.9 O MÉTODO QUASE NEWTON	37
1.2.10 O MÉTODO QUASE NEWTON SEM MEMÓRIA	40
1.2.11 O MÉTODO INCREMENTAL NEWTON RAPHSON	41
1.2.12 A ESTRATÉGIA DOS QUADRADOS MÍNIMOS	46
1.2.13 A VERIFICAÇÃO NUMÉRICA DA MATRIZ DE RIGIDEZ	51

2. O ELEMENTO FINITO PARA CABOS OU TRELIÇAS

53

2.1 COMPRIMENTO DO ELEMENTO DEFORMADO	54
2.2 O CORTE DO COMPRIMENTO E A CONTRAÇÃO TÉRMICA	55
2.3 DEFORMAÇÃO LONGITUDINAL DO ELEMENTO	58
2.3.1 EVITANDO O CANCELAMENTO SEVERO	59
2.4 A ENERGIA POTENCIAL DE DEFORMAÇÃO	60
2.5 O GRADIENTE DA ENERGIA POTENCIAL DE DEFORMAÇÃO	60
2.5.1 A INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA PARA O GRADIENTE	61
2.6 A HESSIANA DA ENERGIA POTENCIAL DE DEFORMAÇÃO	62
2.7 O ELEMENTO DE TENSÃO IMPOSTA	64
2.7.1 A ENERGIA POTENCIAL DE DEFORMAÇÃO	65
2.7.2 O GRADIENTE DA ENERGIA POTENCIAL DE DEFORMAÇÃO	66
2.7.3 O CORTE EQUIVALENTE	68
2.7.4 A HESSIANA DA ENERGIA POTENCIAL DE DEFORMAÇÃO	69
2.8 RESTRIÇÃO AO MOVIMENTO DO NÓ	69

3. DIMENSIONAMENTO DE TRELIÇAS ESPACIAIS

73

3.1 TRELIÇA ESPACIAL COM PLANTA RETANGULAR	74
3.1.1 A NUMERAÇÃO DOS NÓS	75
3.1.2 AS COORDENADAS DOS NÓS	77
3.1.3 A INCIDÊNCIA DOS ELEMENTOS	78
3.2 TUBOS CILÍNDRICOS DE AÇO	80
3.3 RECOMENDAÇÕES DA AISI-1986	82
3.3.1 FLAMBAGEM DA PAREDE DO TUBO	83
3.3.2 FLAMBAGEM DO TUBO	83
3.3.3 A LIGAÇÃO ENTRE OS ELEMENTOS	85
3.3.4 ALGORITMO PARA ESCOLHA DO TUBO DE MENOR ÁREA	86
3.3.5 HEURÍSTICA PARA DIMENSIONAMENTO DE TRELIÇAS ESPACIAIS	88
3.4 EXEMPLOS COM PLANTA RETANGULAR	90
3.5 APLICAÇÃO A UM CASO REAL	97

4. ANÁLISE DE REDE DE CABOS

109

4.1 REDE DE CABOS COM PLANTA ELÍPTICA	110
4.1.1 A EQUAÇÃO DA ELIPSE	111
4.1.2 A EQUAÇÃO DA SUPERFÍCIE DO PARABOLÓIDE HIPERBÓLICO	112
4.1.3 A DISCRETIZAÇÃO DO ANEL DE BORDA	112
4.1.4 A DIVISÃO DA ELIPSE	113
4.1.5 O POSICIONAMENTO DA REDE DE CABOS	116
4.1.6 OS NÓS DA REDE DE CABOS	119
4.1.7 O POSICIONAMENTO DOS PILARES	122
4.1.8 A FORMA DA SEÇÃO TRANSVERSAL DO ANEL DE BORDA	123
4.1.9 O EIXO DO ANEL DE BORDA	124
4.1.10 FORÇA NO ANEL DE BORDA DEVIDA AO VENTO LATERAL	126
4.2 ANÁLISE COMPARATIVA COM UM MODELO EXPERIMENTAL	128
4.2.1 A EQUAÇÃO DA SUPERFÍCIE DO PARABOLÓIDE HIPERBÓLICO	130
4.2.2 O EQUILÍBRIO DOS NÓS NA ETAPA DE TENSIONAMENTO	130
4.2.3 ESTIMATIVA DO PESO PRÓPRIO DOS FIOS	133
4.2.4 RESULTADOS OBSERVADOS	133
4.2.5 RESULTADOS PREVISTOS	136
4.2.6 DISCUSSÃO	138
4.3 APLICAÇÃO A UM CASO REAL	140
4.3.1 A EQUAÇÃO DA SUPERFÍCIE DO PARABOLÓIDE HIPERBÓLICO	146
4.3.2 A DISCRETIZAÇÃO DA ESTRUTURA	146
4.3.3 ESPECIFICAÇÃO DOS MATERIAIS	148
4.3.4 CASOS DE CARREGAMENTO	149
4.3.5 RESULTADOS PARA A REDE DE CABOS	151
4.3.6 RESULTADOS PARA O ANEL DE BORDA	152
4.3.7 RESULTADOS PARA OS PILARES	154
4.3.8 REAÇÕES DE APOIO	155
4.3.9 DISCUSSÃO	157

5. BIBLIOGRAFIA	158
------------------------	------------

6. APÊNDICE	165
--------------------	------------

6.1 LISTA DE FIGURAS	165
6.2 LISTA DE TABELAS	166
6.3 NOTAÇÃO	167

0. Introdução

Este trabalho considera dois tipos de coberturas tridimensionais : *treliça espacial* e *rede de cabos*, focalizando na formulação exata do tratamento teórico de hastes quando sujeitas a grandes mudanças na geometria. *No caso de treliça espacial*, apresenta uma heurística para o dimensionamento de mínimo peso de treliças espaciais constituídas por tubos cilíndricos de aço. A estratégia de mínimo peso significa um esforço para minimizar o custo deste tipo de treliça que é bastante comum na prática da engenharia civil. Nos subproblemas de cálculo de equilíbrio, o surpreendente desempenho do método quase Newton sem memória é revelado quando comparado com os métodos quase Newton e Newton. Uma aplicação da heurística a um caso real envolvendo milhares de deslocamentos e milhares de barras é apresentado. *No caso de rede de cabos*, proporciona um guia realista seguro sobre o comportamento de sistemas estruturais com rede de cabos. A formulação matemática é especialmente adequada para modelar a etapa de tensionamento que é geralmente necessária nas tenso estruturas. Os resultados de um modelo experimental de rede de cabos tensionados, na forma de um parabolóide hiperbólico, ancorada em vigas rígidas retas, são comparados com os resultados do modelo teórico. Um caso real é analisado, onde a estrutura é uma rede de cabos de aço, na forma de um parabolóide hiperbólico, ancorada num anel de concreto, cujo eixo projeta uma elipse no plano horizontal.

1. Conceitos Fundamentais E Métodos Básicos

A análise não linear de estruturas apresenta dois problemas formidáveis. O primeiro problema consiste em formular um modelo matemático que represente de um modo aceitável o comportamento da estrutura. É neste problema que a intuição do engenheiro desempenha o papel principal. O processo de formulação de um modelo matemático é uma arte e está longe de poder ser descrita. O segundo problema é a resolução computacional do modelo matemático encontrado. Entretanto, o processo de resolução computacional é uma técnica e pode ser descrito com facilidade.

Para que a análise estrutural, entendida como a formulação de um modelo matemático e sua posterior resolução, tenha melhor probabilidade de sucesso, convém ressaltar um fato que embora óbvio é muito negligenciado, ou seja, que **a formulação de um modelo matemático utilizável está restrita pelo conhecimento das possibilidades de resolução computacional deste mesmo modelo**. Ou em outras palavras, para maximizar a probabilidade de sucesso, a arte deve ser amparada pela técnica.

O princípio da mínima energia potencial total é sem dúvida alguma o conceito operacional mais poderoso para a análise não linear elástica de estruturas. De fato, uma vez escrita a energia potencial total, como função dos deslocamentos nodais da estrutura discretizada, o problema de encontrar as configurações de equilíbrio desta estrutura é um problema de programação não linear, isto é, as configurações estáveis são representadas pelos pontos de mínimo local da função energia potencial total e as configurações instáveis são representadas pelos pontos de máximo local da função energia potencial total. E convém observar que

mesmo a análise linear elástica de estruturas, pode ser pensada como um problema de programação não linear, pois neste caso, a função energia potencial total é uma função quadrática.

Entretanto, existem casos da análise estrutural em que não existe uma função energia potencial total, mas ainda assim uma certa função pode ser definida de modo que seus pontos de mínimo local representem configurações de equilíbrio da estrutura. Portanto uma compreensão dos conceitos fundamentais utilizados em programação não linear é de enorme importância para a análise de estruturas, seja esta análise linear ou não linear, elástica ou inelástica.

O propósito deste capítulo é duplo. Em primeiro lugar apresentar os conceitos fundamentais sobre programação não linear irrestrita. Em segundo lugar apresentar os métodos computacionais básicos que podem ser utilizados em análise não linear de estruturas. A ordem de apresentação dos conceitos supõe o conhecimento da regra da cadeia para a derivação de funções compostas e também a expansão em série de Taylor para funções de uma variável.

1.1 Os pontos de mínimo local de uma função de classe C^2

Para que sejam encontrados os pontos de mínimo de uma função de classe C^2 , a estratégia geral que pode ser adotada é a seguinte : Partir de um ponto qualquer e caminhar numa dada direção e sentido de maneira que o valor da função decresça. Encontrar o mínimo valor da função nesta direção e sentido, obtendo assim um novo ponto de partida. Prosseguir deste modo até que um ponto de mínimo local seja alcançado.

Para o estabelecimento dos conceitos fundamentais, considere uma função não linear de classe C^2 dada por :

$$\pi(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

e considere ainda um ponto x pertencente a uma reta que passa pelo ponto x^0 e tem direção dada pelo vetor d , isto é :

$$x = x^0 + \alpha d$$

Para os pontos x dados pela expressão anterior pode ser facilmente observado que $\pi(x)$ torna-se uma função de apenas uma variável, ou seja $\pi(x) = \pi(\alpha)$.

1.1.1 A derivada primeira

A derivada primeira de $\pi(\alpha)$ pode ser facilmente obtida pela utilização da regra da cadeia, isto é :

$$\frac{d\pi}{d\alpha} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \pi}{\partial x_i} \frac{dx_i}{d\alpha} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \pi}{\partial x_i} d_i$$

1.1.2 A derivada segunda

A derivada segunda de $\pi(\alpha)$ pode ser obtida pela utilização da regra da cadeia aplicada na expressão da derivada primeira, isto é :

$$\frac{d^2\pi}{d\alpha^2} = \frac{d\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \pi}{\partial x_i} d_i\right)}{d\alpha} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_i \partial x_j} d_i d_j$$

1.1.3 O vetor gradiente e a matriz hessiana

Nas expressões precedentes, para as derivadas primeira e segunda de $\pi(\alpha)$, aparecem de modo bastante natural e respectivamente, o gradiente e a hessiana de $\pi(x)$. Estas entidades desempenham papel fundamental na análise e no estabelecimento dos métodos iterativos para a solução de problemas de programação não linear irrestritos.

O vetor gradiente de $\pi(x)$, cuja componente é dada por :

$$r_i = \frac{\partial \pi}{\partial x_i}$$

A matriz hessiana de $\pi(x)$, cuja componente é dada por :

$$s_{ij} = \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_i \partial x_j}$$

Assim, segue que as derivadas primeira e segunda da função $\pi(\alpha)$ podem ser escritas como :

$$\frac{d\pi}{d\alpha} = \sum_{i=1}^n r_i d_i = r(x)^t d$$

$$\frac{d^2\pi}{d\alpha^2} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n s_{ij} d_i d_j = d^t S(x) d$$

Em análise não linear elástica de estruturas, os pontos x representam os deslocamentos nodais da estrutura, a função $\pi(x)$ representa a função energia potencial total, o vetor $r(x)$ representa o vetor resíduo, isto é, um vetor em que cada componente representa o desequilíbrio entre forças agindo num dado nó e numa dada direção, e a matriz $S(x)$ representa a matriz de rigidez.

1.1.4 A expansão em série de Taylor

Como $\pi(\alpha)$ é uma função de apenas uma variável, a expansão em série de Taylor para funções de uma variável é aplicável, assim :

$$\pi(\alpha) = \pi(0) + \pi'(0)\alpha + \pi''(0) \frac{\alpha^2}{2!} + \dots$$

e utilizando as expressões anteriores para as derivadas primeira e segunda de $\pi(\alpha)$, segue :

$$\pi(x^0 + \alpha d) = \pi(x^0) + \alpha r(x^0)^t d + \frac{\alpha^2}{2!} d^t S(x^0) d + \dots$$

1.1.5 A direção de descida

A expressão para a expansão em série de Taylor para $\pi(\alpha)$ pode ser colocada na seguinte forma :

$$\pi(x^0 + \alpha d) - \pi(x^0) = \alpha \left[r(x^0)^t d + \frac{\alpha}{2!} d^t S(x^0) d + \dots \right]$$

É conveniente restringir α a somente valores não negativos, pois caminhar com valor de α negativo na direção definida por um vetor é o mesmo que caminhar com valor de α positivo nesta direção definida por um vetor oposto ao primeiro. Portanto, estando α restrito a valores não negativos, o sentido da direção definida por um vetor estará implícito com sendo o sentido do vetor.

$$\alpha \geq 0$$

Logo, pode ser facilmente notado que para pequenos valores de α , existe um intervalo onde o sinal do segundo membro da equação anterior é dado pelo sinal do termo :

$$r(x^0)^t d$$

Supondo que o sinal deste termo seja negativo, isto é :

$$r(x^0)^t d < 0$$

segue que existe um intervalo para pequenos valores de α onde tem-se :

$$\alpha \in (0, \bar{\alpha}) \Rightarrow \pi(x^0 + \alpha d) < \pi(x^0)$$

, ou seja, o valor da função decresce. Nesta situação a direção dada pelo vetor d é conhecida como uma direção de descida.

1.1.6 A direção de descida pela deflexão do vetor gradiente

Considere uma matriz definida positiva qualquer dada por A . Uma direção de descida num determinado ponto x^0 , pode ser construída pela deflexão do vetor gradiente da seguinte maneira :

$$d = -Ar(x^0)$$

pois,

$$r(x^0)^t d = -r(x^0)^t Ar(x^0) < 0$$

É importante observar que os métodos computacionais básicos utilizados para que sejam encontrados os pontos de mínimo local de uma função não linear de classe C^2 , diferenciam-se principalmente pela

escolha da matriz A empregada. Assim destacam-se as seguintes escolhas para a matriz A :

$A = I \Rightarrow$ método do Gradiente

$A = [S(x^0) + E(x^0)]^{-1} \Rightarrow$ método de Newton

$A \approx S(x^0)^{-1} \Rightarrow$ método Quase Newton

No método do Gradiente a escolha para a matriz A é a mais simples possível, ou seja, a matriz unidade.

No método de Newton, uma matriz diagonal E pode ser somada a matriz hessiana S a fim de assegurar que a matriz A seja uma matriz definida positiva, o que por sua vez, irá garantir uma direção de descida. Convém observar que a literatura sobre análise não linear de estruturas está repleta de variantes do método de Newton que não asseguram uma direção de descida.

No método Quase Newton, partindo-se da matriz unidade, uma aproximação para a inversa da matriz hessiana é atualizada em cada iteração usando-se somente valores do vetor gradiente. Esta aproximação para a inversa da matriz hessiana é por construção uma matriz definida positiva.

1.1.7 Condições suficientes para um ponto de mínimo local

Considere $\pi(x)$ uma função de classe C^2 definida numa região na qual o ponto x^* é um ponto interior, que é o caso irrestrito. Suponha ainda que :

$$r(x^*) = 0$$

$S(x^*)$ é definida positiva

Então x^* é estritamente um ponto de mínimo local, pois pela expansão em série de Taylor para a função $\pi(x)$ numa direção d qualquer e em torno do ponto x^* , pode ser escrito :

$$\pi(x^* + \alpha d) = \pi(x^*) + \alpha r(x^*)^t d + \frac{\alpha^2}{2!} d^t S(x^*) d + o(\alpha^3)$$

mas o gradiente no ponto x^* é um vetor nulo, isto é :

$$r(x^*) = 0$$

logo segue :

$$\pi(x^* + \alpha d) - \pi(x^*) = \frac{\alpha^2}{2!} d^t S(x^*) d + o(\alpha^3)$$

Pode ser facilmente notado que, para pequenos valores de α e uma vez que $S(x^*)$ é uma matriz definida positiva, o sinal do segundo membro da equação acima é positivo. Assim, pode ser escrito :

$$\pi(x^* + \alpha d) > \pi(x^*)$$

Significando que o ponto x^* é estritamente um ponto de mínimo local da função $\pi(x)$.

1.2 Métodos computacionais básicos

Esta seção tem como finalidade principal apresentar os métodos computacionais básicos que podem ser utilizados para encontrar

iterativamente as configurações de equilíbrio na análise não linear de estruturas. Também será apresentado um novo método computacional que resulta diretamente dos conceitos usados na análise estrutural, e que pode ser pensado como uma extensão do método Incremental Newton Raphson.

É importante observar que existe uma preocupação constante orientada para certos detalhes da implementação em programa de computador. Merece especial destaque o fato de que todo algoritmo que eventualmente acompanhe a descrição de um método foi exaustivamente testado durante alguns anos tanto em micro computador como também em estação de trabalho. Adicionalmente, alguns algoritmos foram utilizados em problemas não relacionados com a análise não linear de estruturas.

1.2.1 Busca unidimensional

Como já mencionado anteriormente, em quase todos os métodos computacionais básicos existe uma estrutura subjacente comum. Partindo de um ponto inicial qualquer, determina-se uma direção de movimento de acordo com uma regra fixa, move-se nesta direção até um ponto de mínimo da função relativo a esta direção. Este ponto de mínimo relativo é tomado por um novo ponto inicial e o procedimento é repetido até que um ponto de mínimo local da função seja alcançado. A exceção fica por conta dos métodos que não utilizam o procedimento de busca unidimensional, por exemplo Incremental Newton Raphson. Os métodos computacionais básicos diferenciam-se principalmente pela regra que seleciona a direção de movimento.

O procedimento para determinar um ponto de mínimo numa dada direção é chamado busca unidimensional. Convém observar que o problema de encontrar o ponto de mínimo de uma função com n variáveis é reduzido

a uma sequência de problemas de encontrar o ponto de mínimo de uma função com apenas uma variável. Assim é fácil compreender que a busca unidimensional forma a essência dos métodos computacionais básicos em programação não linear. O desempenho de qualquer método, que se utilize da busca unidimensional, depende fundamentalmente do desempenho da busca unidimensional.

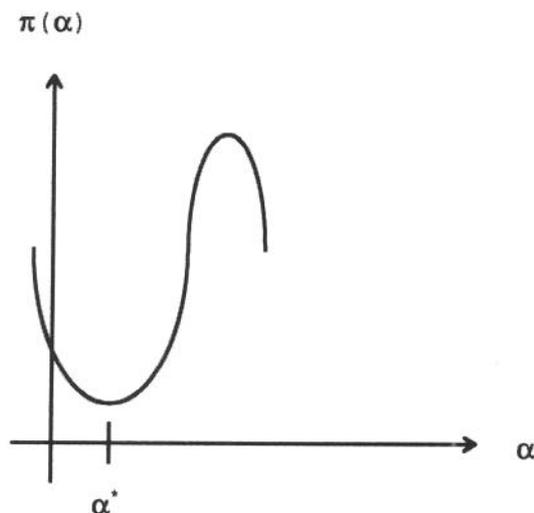


Figura 1.1

O problema pode ser colocado como encontrar um ponto de mínimo de $\pi(\alpha)$ para α maior ou igual a zero. Este ponto, conforme mostra a Figura 1.1, será denominado α^* .

Existem diversos métodos que podem ser usados na busca unidimensional. Entretanto, do ponto de vista da análise estrutural, somente dois merecem destaque, isto é, o método da interpolação cúbica, cuja ordem de convergência é 2.0, e o método da falsa posição, cuja ordem de convergência é 1.618 aproximadamente.

O método da interpolação cúbica pode ser descrito resumidamente da seguinte maneira : Encontrar um primeiro intervalo (α_1, α_2) de maneira que α^* esteja contido neste intervalo. Interpolar uma função cúbica em α utilizando os pontos limites do intervalo. Isto é conseguido com a ajuda dos valores $\alpha_1, \pi(\alpha_1), \pi'(\alpha_1)$ e $\alpha_2, \pi(\alpha_2), \pi'(\alpha_2)$. Calcular α como sendo o ponto de mínimo da função cúbica. Redefinir o intervalo com a ajuda de α e do sinal de $\pi'(\alpha)$. Prosseguir deste modo até que uma certa exatidão seja alcançada. Tomar o último valor encontrado para α como o valor de α^* .

É importante observar que o método Quase Newton exige que a busca unidimensional seja **suficientemente exata**. Tal exatidão é conseguida pela utilização do seguinte critério de parada :

$$|\pi'(\alpha)| \leq -\varepsilon\pi'(0) \quad , \quad \varepsilon \in [0,1)$$

pois, como observado anteriormente, no método Quase Newton a matriz usada para defletir o vetor gradiente é atualizada em cada iteração e a condição acima assegura que esta atualização produza uma matriz definida positiva, o que por sua vez produzirá uma direção de descida.

É importante adicionar ao critério de parada um contador para limitar o número de interpolações, pois a condição expressa acima, dependendo do valor para ε , pode nunca ser satisfeita. Note que a introdução de um limite para o número de interpolações pode produzir eventualmente uma direção que não seja uma direção de descida e portanto a condição :

$$\pi'(0) < 0$$

deve ser testada logo no início da rotina de busca unidimensional, e caso não seja satisfeita, o programa deve ser interrompido.

1.2.2 Algoritmo para o mínimo da interpolação cúbica

Na descrição a seguir, a função σ representa a função sinal. O valor da função σ num escalar α , resulta em :

$$\sigma(\alpha) = \begin{cases} -1 & | \alpha < 0 \\ 0 & | \alpha = 0 \\ +1 & | \alpha > 0 \end{cases}$$

Convém observar que o algoritmo para encontrar o ponto de mínimo da interpolação cúbica será descrito com a introdução de algumas salvaguardas, referências [31] e [20], para evitar que o ponto de mínimo da interpolação cúbica caia fora do intervalo (α_1, α_2) . Preocupação em evitar o cancelamento severo também está presente na descrição deste algoritmo.

$$\mu \leftarrow 3 \frac{(\pi_1 - \pi_2)}{(\alpha_2 - \alpha_1)} + \pi'_1 + \pi'_2$$

$$\gamma \leftarrow |\mu|$$

$$\eta \leftarrow \sqrt{|\pi'_1|} \sqrt{|\pi'_2|}$$

caso $\sigma(\pi'_1)\sigma(\pi'_2)$ resulte

-1 :

começo

se $\eta > \gamma$

$$\text{então } v \leftarrow \eta \sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{\eta}\right)^2}$$

$$\text{senão } v \leftarrow \gamma \sqrt{1 + \left(\frac{\eta}{\gamma}\right)^2}$$

$$\beta \leftarrow \pi'_2 - \pi'_1 + v + v$$

se $\beta \neq 0$

então

começo

se $\mu > 0$

$$\text{então } \delta \leftarrow -\frac{\pi'_1 \pi'_2}{(v + \mu)}$$

$$\text{senão } \delta \leftarrow v - \mu$$

$$\beta \leftarrow \frac{(\pi'_2 + \delta)}{\beta}$$

se $(\beta < 0)$ ou $(\beta > 1)$

$$\text{então } \beta = 0.5$$

fim

$$\text{senão } \beta = 0.5$$

$$\psi \leftarrow \alpha_2 - \beta(\alpha_2 - \alpha_1)$$

fim

0 :

começo

se $\pi'_1 = 0$

então $\psi = \alpha_1$

senão $\psi = \alpha_2$

fim

1 :

começo

se $\eta > \gamma$

então $\beta = 0.5$

senão

começo

$$v \leftarrow \gamma \sqrt{1 - \left(\frac{\eta}{\gamma}\right)^2}$$

$$\beta \leftarrow \pi'_2 - \pi'_1 + v + v$$

se $\beta \neq 0$

então

começo

se $\mu > 0$

$$\text{ent\~{a}o } \delta \leftarrow -\frac{\pi'_1 \pi'_2}{(\nu + \mu)}$$

$$\text{sen\~{a}o } \delta \leftarrow \nu - \mu$$

$$\beta \leftarrow \frac{(\pi'_2 + \delta)}{\beta}$$

se $(\beta < 0)$ ou $(\beta > 1)$

$$\text{ent\~{a}o } \beta = 0.5$$

fim

$$\text{sen\~{a}o } \beta = 0.5$$

fim

$$\psi \leftarrow \alpha_2 - \beta(\alpha_2 - \alpha_1)$$

fim

fim

1.2.3 Algoritmo para a busca unidimensional

No algoritmo seguinte, o par\~{a}metro λ representa o limite para o n\~{u}mero de interpola\~{c}o'es. O par\~{a}metro ρ \u00e9 usado para assegurar que $\pi(1)$ n\~{a}o seja muito maior que $\pi(0)$, o que \u00e9 conseguido pela diminui\~{c}o da norma do vetor dire\~{c}o'es. Uma express\~{a}o envolvida pelos s\~{i}mbolos $\lfloor \cdot \rfloor$ significa o maior inteiro menor ou igual que a express\~{a}o. A fun\~{c}o ψ

representa o mínimo da interpolação cúbica. Como regra geral, os seguintes valores $\lambda = 20$, $\rho = 10$, $\varepsilon = 0.1$ são recomendáveis.

$$x^0 \leftarrow x$$

$$\pi_0 \leftarrow \pi(x)$$

$$\pi'_0 \leftarrow d^t r(x)$$

se $\pi'_0 \geq 0$ então pare

$$\pi_1 \leftarrow \pi_0$$

$$\pi'_1 \leftarrow \pi'_0$$

$$x \leftarrow x^0 + d$$

$$\pi_2 \leftarrow \pi(x)$$

$$\delta \leftarrow \rho(1 + |\pi_1|)$$

enquanto $(\pi_2 - \pi_1) > \delta$ faça

começo

$$d \leftarrow 0.5d$$

$$x \leftarrow x^0 + d$$

$$\pi_2 \leftarrow \pi(x)$$

fim

$$\pi'_2 \leftarrow d^t r(x)$$

$$\alpha_2 \leftarrow 1$$

enquanto $(\pi'_2 < 0)$ e $(\pi_2 < \pi_1)$ faça

começo

$$\pi_1 \leftarrow \pi_2$$

$$\pi'_1 \leftarrow \pi'_2$$

$$\alpha_2 \leftarrow \alpha_2 + \alpha_2$$

$$x \leftarrow x^0 + \alpha_2 d$$

$$\pi_2 \leftarrow \pi(x)$$

$$\pi'_2 \leftarrow d^t r(x)$$

fim

$$\alpha_1 \leftarrow \left\lfloor \frac{\alpha_2}{2} \right\rfloor$$

$$\alpha \leftarrow \psi(\alpha_1, \pi_1, \pi'_1, \alpha_2, \pi_2, \pi'_2)$$

$$x \leftarrow x^0 + \alpha d$$

$$\pi \leftarrow \pi(x)$$

$$\pi' \leftarrow d^t r(x)$$

$$\pi'_m \leftarrow -\varepsilon\pi'_0$$

$$i \leftarrow 1$$

enquanto $((\pi > \pi_1) \text{ ou } (\pi > \pi_2) \text{ ou } (|\pi'| > \pi'_m))$ e $(i < \lambda)$ faça

começo

$$i \leftarrow i + 1$$

se $\pi' < 0$

então

começo

$$\alpha_1 \leftarrow \alpha$$

$$\pi_1 \leftarrow \pi$$

$$\pi'_1 \leftarrow \pi'$$

fim

senão

começo

$$\alpha_2 \leftarrow \alpha$$

$$\pi_2 \leftarrow \pi$$

$$\pi'_2 \leftarrow \pi'$$

fim

$$\alpha \leftarrow \psi(\alpha_1, \pi_1, \pi'_1, \alpha_2, \pi_2, \pi'_2)$$

$$x \leftarrow x^0 + \alpha d$$

$$\pi \leftarrow \pi(x)$$

$$\pi' \leftarrow d^t r(x)$$

fim

1.2.4 Algoritmo alternativo para a busca unidimensional

Um outro método usado para encontrar o ponto de mínimo de uma função com apenas uma variável e de interesse para a análise não linear de estruturas é conhecido como o método da falsa posição. Este método pode ser descrito resumidamente como seguinte : Encontrar um primeiro intervalo (α_1, α_2) , usando somente valores de $\pi'(\alpha)$, de maneira que α^* esteja contido neste intervalo. Interpolar uma reta para a função $\pi'(\alpha)$ utilizando os pontos limites do intervalo. Isto pode ser conseguido com a ajuda dos valores $\alpha_1, \pi'(\alpha_1)$ e $\alpha_2, \pi'(\alpha_2)$. Calcular α como sendo a raiz desta reta. Redefinir o intervalo com a ajuda de α e do sinal de $\pi'(\alpha)$. Prosseguir deste modo até que uma certa exatidão seja alcançada. Tomar o último valor encontrado para α como o valor de α^* .

O interesse no uso do método da falsa posição reside no fato deste método dispensar o cálculo do valor de $\pi(\alpha)$, o que no contexto de análise estrutural significa dispensar o cálculo do valor da energia potencial total. Convém observar que na prática ocorrem situações onde a função energia potencial total existe mas não se encontra disponível, e neste caso o método da falsa posição pode ser utilizado. As situações

nas quais não existe uma função energia potencial total podem ser tratadas com a estratégia dos quadrados mínimos, ou seja, minimizar a norma euclidiana do vetor resíduo.

$$x^0 \leftarrow x$$

$$\pi'_0 \leftarrow d^t r(x)$$

se $\pi'_0 \geq 0$ então pare

$$\pi'_1 \leftarrow \pi'_0$$

$$\alpha_2 \leftarrow 1$$

$$x \leftarrow x^0 + d$$

$$\pi'_2 \leftarrow d^t r(x)$$

enquanto $(\pi'_2 < 0)$ faça

começo

$$\pi'_1 \leftarrow \pi'_2$$

$$\alpha_2 \leftarrow \alpha_2 + \alpha_2$$

$$x \leftarrow x^0 + \alpha_2 d$$

$$\pi'_2 \leftarrow d^t r(x)$$

fim

$$\alpha_1 \leftarrow \left\lfloor \frac{\alpha_2}{2} \right\rfloor$$

$$\beta \leftarrow \frac{1}{\left(1 - \frac{\pi'_2}{\pi'_1}\right)}$$

se $(\beta < 0)$ ou $(\beta > 1)$

então $\beta \leftarrow 0.5$

$$\alpha \leftarrow \alpha_1 + \beta(\alpha_2 - \alpha_1)$$

$$x \leftarrow x^0 + \alpha d$$

$$\pi' \leftarrow d^t r(x)$$

$$\pi'_m \leftarrow -\varepsilon \pi'_0$$

$$i \leftarrow 1$$

enquanto $(|\pi'| > \pi'_m)$ e $(i < \lambda)$ faça

 começo

$$i \leftarrow i + 1$$

 se $\pi' < 0$

 então

 começo

$$\alpha_1 \leftarrow \alpha$$

$$\pi'_1 \leftarrow \pi'$$

fim

senão

começo

$$\alpha_2 \leftarrow \alpha$$

$$\pi'_2 \leftarrow \pi'$$

fim

$$\beta \leftarrow \frac{1}{\left(1 - \frac{\pi'_2}{\pi'_1}\right)}$$

se $(\beta < 0)$ ou $(\beta > 1)$

então $\beta \leftarrow 0.5$

$$\alpha \leftarrow \alpha_1 + \beta(\alpha_2 - \alpha_1)$$

$$x \leftarrow x^0 + \alpha d$$

$$\pi' \leftarrow d^t r(x)$$

fim

1.2.5 Algoritmo geral de um método básico de descida

No algoritmo descrito a seguir, a direção de descida é obtida pela deflexão do vetor gradiente por uma matriz A , definida positiva qualquer. A escolha da matriz A empregada conduz aos diferentes métodos computacionais utilizados para que sejam encontrados os pontos de mínimo local de uma função não linear de classe C^2 . O escalar λ representa um limite para o número de iterações.

$x \leftarrow$ ponto de partida

$i \leftarrow 0$

enquanto $(\|r(x)\|_{\infty} > \varepsilon \|r(0)\|_{\infty})$ e $(i < \lambda)$ faça

 começo

$i \leftarrow i + 1$

$d \leftarrow -A(x)r(x)$

$\alpha \leftarrow$ busca unidimensional

$x \leftarrow x + \alpha d$

 fim

Observe a semelhança do critério de parada deste algoritmo comparado com o critério de parada usado no algoritmo da busca unidimensional.

Em análise estrutural, o critério de parada expresso por :

$$\|r(x)\|_{\infty} \leq \varepsilon \|r(0)\|_{\infty}$$

significa que o máximo desequilíbrio nodal é menor ou igual a ε vezes o máximo desequilíbrio nodal calculado para a estrutura na configuração cujos deslocamentos incógnitos são iguais a zero, o que é geralmente a configuração indeformada da estrutura. Com esta interpretação é muito fácil especificar um valor para ε . Um valor $\varepsilon = 0.00001$ é usual.

É importante observar que para a configuração cujos deslocamentos incógnitos são iguais a zero, o máximo desequilíbrio nodal é igual à norma infinito do vetor de forças aplicado na estrutura. Entretanto no caso de não existir força nodal aplicada, devem existir deslocamentos **conhecidos** diferentes de zero impostos para alguns nós, o que resultará num vetor resíduo não nulo para deslocamentos **incógnitos** iguais a zero.

Um critério de parada alternativo pode ser estabelecido por :

$$\|r(x)\|_{\infty} \leq \varepsilon$$

, onde o valor de ε depende obviamente das unidades utilizadas na análise. Neste critério o valor de ε estabelece um limite, que não deve ser ultrapassado, para o máximo desequilíbrio nodal.

É importante adicionar ao critério de parada um contador para limitar o número de iterações, pois a condição expressa acima, dependendo do valor para ε , pode nunca ser satisfeita. Também poderia ser adicionado ao critério de parada uma condição envolvendo o valor da energia potencial total, como por exemplo, interromper as iterações caso o decréscimo percentual no valor da energia potencial total, relativo a algumas poucas iterações, não ultrapasse um valor limite. Esta última condição deve ser usada com cautela para prevenir o desperdício de tempo

de computação em problemas que convergem de maneira lenta perto da solução. Convém advertir que em análise estrutural, o critério de parada deve garantir o equilíbrio, ou seja, garantir que a norma infinita do vetor resíduo seja suficientemente pequena.

Como observação final, deve existir uma preocupação constante com a exatidão dos resultados. Assim é recomendável a utilização de dupla precisão nos cálculos computacionais e principalmente uma escolha de unidades adequadas, de maneira que os deslocamentos incógnitos estejam tão próximos quanto possível do valor unitário. Esta última recomendação está fortemente presente na literatura sobre programação não linear, por exemplo referências [35], [18] e [5]. A sua inobservância pode facilmente conduzir ao fracasso a tentativa de resolução de um determinado problema de análise estrutural.

1.2.6 O método do gradiente

Neste método, a direção de busca é dada pela direção oposta ao vetor gradiente. Apesar desta direção ser a direção de máximo decréscimo da função, acredita-se que sua utilidade esteja limitada para valores de x longe da solução.

1.2.7 O método de Newton

Primeiramente será mostrada uma motivação para a definição do método de Newton. Posteriormente as duas falhas encontradas nesta primeira abordagem serão eliminadas.

Considerando a expansão em série de Taylor para $\pi(\alpha)$ em torno de zero, e fazendo $x = x^0 + \alpha d$, pode ser escrito :

$$\pi(x) \approx \pi(x^0) + r(x^0)^t (x - x^0) + \frac{1}{2!} (x - x^0)^t S(x^0)(x - x^0)$$

que é simplesmente a expansão em série de Taylor para $\pi(x)$ em torno do ponto x^0 . Tomando o segundo membro da expressão acima como uma aproximação aceitável para $\pi(x)$, então o ponto de mínimo da aproximação de $\pi(x)$ pode ser usado como uma aproximação para o ponto de mínimo de $\pi(x)$, assim :

$$x^1 = x^0 - S(x^0)^{-1} r(x^0)$$

Observe que x^1 é o ponto de mínimo da aproximação para $\pi(x)$ se e somente se a matriz $S(x^0)$ for definida positiva. O ponto x^1 pode ser tomado como um novo ponto x^0 e prosseguindo desta maneira é provável que possa ser obtida uma aproximação cada vez melhor para o ponto de mínimo de $\pi(x)$. É fácil aceitar que a convergência do processo descrito acima possa ser demonstrada tomando-se um ponto de partida suficientemente próximo da solução.

Note que a expressão para o ponto de mínimo da aproximação de $\pi(x)$ pode ser colocada na forma :

$$x^1 = x^0 + \alpha d$$

com α igual ao valor unitário e direção de busca determinada pela resolução do seguinte sistema de equações lineares :

$$S(x^0)d = -r(x^0)$$

Assim pode ser facilmente verificado que se a matriz $S(x^0)$ não for definida positiva, a direção de busca obtida pela resolução do sistema de equações lineares acima pode não ser uma direção de descida, e portanto uma primeira providência é assegurar uma direção de descida nesta situação. Uma segunda providência é assegurar um passo α de modo que a função $\pi(x)$ decresça, pois mesmo tendo assegurado uma direção de descida, nada garante que um passo α de valor unitário diminua o valor de $\pi(x)$.

A primeira falha pode ser eliminada pela soma de uma matriz diagonal à matriz $s(x^0)$ de modo a garantir que a matriz resultante seja definida positiva, referência [17]. Assim a direção de busca deve ser determinada pela resolução de :

$$[S(x^0) + E]d = -r(x^0)$$

onde a matriz diagonal E é determinada de maneira a garantir não só que a matriz resultante seja suficientemente definida positiva, mas também que a decomposição de Cholesky da matriz resultante seja suficientemente estável.

A segunda falha pode ser eliminada pela simples utilização da rotina de busca unidimensional na direção de descida que é estabelecida pela eliminação da primeira falha.

Pode ser facilmente adicionada, na implementação em programa de computador do método de Newton, a possibilidade de diferenciar um ponto de mínimo local de um ponto de sela, e neste último caso prosseguir na busca por um mínimo local usando uma direção de curvatura negativa. Convém esclarecer ainda, que um ponto de sela representa um ponto de equilíbrio instável nos conceitos da análise estrutural.

1.2.8 A modificação na decomposição de Cholesky

A modificação descrita a seguir é muito semelhante ao método clássico, isto é :

$$A = LDL^t$$

, exceto que os elementos da matriz diagonal D são modificados para serem maiores ou iguais a um certo valor positivo α e tornarem o módulo de cada um dos elementos fora da diagonal da matriz

$$\bar{L} = LD^{1/2}$$

menor ou igual a um certo valor β . A modificação é obtida pela soma de uma matriz diagonal E à matriz A. Caso a matriz A seja suficientemente definida positiva, a matriz E será uma matriz nula.

$$LDL^t = A + E \Rightarrow \sum_{k=1}^n l_{ik} d_{kk} l_{jk} = a_{ij} + e_{ij}$$

mas

$$l_{ij} = 0 \quad | \quad i < j$$

$$l_{jj} = 1$$

logo

$$\sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} d_{kk} l_{jk} + l_{ij} d_{jj} = a_{ij} + e_{ij}$$

definindo

$$w_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} d_{kk} l_{jk}$$

pode ser escrito

$$d_{jj} = w_{jj} + e_{jj}$$

$$l_{ij} = \frac{w_{ij}}{d_{jj}} \quad | \quad i > j$$

Considerando ϵ_m como a precisão relativa da máquina, ou seja o menor número positivo que somado com a unidade resulta num número maior do que a unidade, o valor α deve ser escolhido como seguinte :

$$\alpha = \max\{\epsilon_m, \|A\|_\infty \epsilon_m\}$$

A imposição da seguinte condição :

$$d_{jj} \geq w_{jj}$$

significa que cada um dos elementos da matriz diagonal E é maior ou igual a zero.

Pela imposição da seguinte condição :

$$d_{jj} \geq \frac{w_{ij}^2}{\beta^2} \quad | \quad i > j$$

segue que :

$$|l_{ij} d_{jj}^{1/2}| \leq \beta \quad | \quad i > j$$

significando que o módulo de cada um dos elementos fora da diagonal de

$$\bar{L} = LD^{1/2}$$

é menor ou igual ao valor β .

Portanto a escolha do valor d_{jj} deve ser determinada por :

$$d_{jj} = \max\left\{\alpha, w_{jj}, \frac{w_{ij}^2}{\beta^2} \quad | \quad i > j\right\}$$

O valor β deve ser escolhido de modo que para uma matriz A suficientemente definida positiva, a matriz diagonal E seja uma matriz nula.

$$E = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^j l_{jk}^2 d_{kk} = a_{jj}$$

mas

$$d_{kk} > 0 \Rightarrow l_{jk}^2 d_{kk} \leq a_{jj} \quad | \quad k \leq j$$

Pela imposição da seguinte condição :

$$\beta^2 \geq \max\{a_{jj}\}$$

segue

$$l_{jk}^2 d_{kk} \leq \beta^2 \quad | \quad k \leq j \Rightarrow |l_{jk} d_{kk}^{1/2}| \leq \beta \quad | \quad k \leq j$$

Idealmente β deveria ser escolhido de modo a minimizar a norma infinito da matriz diagonal E. Entretanto, será estabelecido um limite superior para a norma infinito da matriz diagonal E e um valor β será determinado de modo a minimizar este limite superior.

$$-e_{jj} = w_{jj}' - \max\left\{\alpha, w_{jj}', \frac{w_{ij}^2}{\beta^2} \mid i > j\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |e_{jj}| \leq |w_{jj}| + \alpha + \max\left\{\frac{w_{ij}^2}{\beta^2} \mid i > j\right\}$$

mas

$$w_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} d_{kk} l_{jk}$$

$$|l_{ij}d_{jj}^{1/2}| \leq \beta$$

segue

$$|w_{ij}| \leq |a_{ij}| + (n - 1)\beta^2$$

definindo

$$\xi = \max\{|a_{ij}|\} \quad | \quad i > j$$

$$\gamma = \max\{|a_{jj}|\}$$

pode ser escrito

$$\max\{|e_{jj}|\} \leq \gamma + (n - 1)\beta^2 + \alpha + \frac{[\xi + (n - 1)\beta^2]^2}{\beta^2}$$

O segundo membro da expressão acima é uma função convexa em β cujo ponto de mínimo é dado por :

$$\beta^2 = \frac{\xi}{(n^2 - n)^{1/2}}$$

portanto a escolha do valor β deve ser determinada por :

$$\beta^2 = \max\left\{\epsilon_m, \gamma, \frac{\xi}{(n^2 - n)^{1/2}}\right\}$$

No algoritmo seguinte, a parte triangular inferior da matriz L, com exceção dos elementos da diagonal, e os elementos da diagonal da matriz D são armazenados na matriz A. O valor η é a norma infinito da matriz diagonal E.

$\eta \leftarrow 0$

para $j \leftarrow 1$ até n faça

começo

$\omega \leftarrow a_{jj}$

para $k \leftarrow 1$ até $(j - 1)$ faça

começo

$\sigma \leftarrow a_{jk}$

$a_{jk} \leftarrow \frac{\sigma}{a_{kk}}$

$\omega \leftarrow \omega - a_{jk}\sigma$

fim

$a_{jj} \leftarrow \omega$

para $i \leftarrow (j + 1)$ até n faça

começo

$\sigma \leftarrow a_{ij}$

para $k \leftarrow 1$ até $(j - 1)$ faça $\sigma \leftarrow \sigma - a_{jk}a_{ik}$

$a_{ij} \leftarrow \sigma$

$\sigma \leftarrow \frac{\sigma^2}{\beta^2}$

```

    se  $\sigma > a_{jj}$ 

    então  $a_{jj} \leftarrow \sigma$ 

    fim

    se  $\alpha > a_{jj}$ 

    então  $a_{jj} \leftarrow \alpha$ 

    se  $a_{jj} - \omega > \eta$ 

    então  $\eta \leftarrow a_{jj} - \omega$ 

    fim

```

1.2.9 O método quase Newton

A estratégia subjacente neste método é usar uma aproximação para a inversa da hessiana no lugar da verdadeira inversa que é requerida no método de Newton. O método Quase Newton assume que a utilização da matriz hessiana é impraticável, ou porque seu cálculo requer um esforço computacional excessivo, ou mesmo porque suas componentes não estão disponíveis.

É importante ressaltar que no método dos elementos finitos, que é o método usual para a discretização de estruturas, tanto as componentes do vetor resíduo quanto as componentes da matriz de rigidez são obtidos pela soma de valores provenientes de cada elemento. Estes valores são geralmente obtidos pela integração numérica de expressões sobre o volume do elemento na configuração indeformada. Portanto, a simples obtenção do

vetor resíduo ou da matriz de rigidez num determinado ponto do espaço de deslocamentos, é um processo demorado do ponto de vista computacional.

No método Quase Newton uma aproximação para a inversa da matriz hessiana é construída pela atualização de uma primeira aproximação. A utilização deste método na análise não linear de estruturas é muito atraente pois dispensa a trabalhosa obtenção de expressões para as componentes da matriz de rigidez, embora grande parte deste trabalho possa ser realizada de maneira automática por programas de computador que efetuam a derivação analítica de funções matemáticas.

Esta aproximação para a inversa da matriz hessiana é por construção uma matriz definida positiva e uma atualização, conhecida como atualização BFGS, está descrita no algoritmo seguinte, referência [35]. O fator de escala γ está associado com uma estratégia para manter o bom condicionamento desta matriz.

Note que deve ser adicionado ao critério de parada, um contador para limitar o número de iterações. Como regra geral, o máximo número de iterações permitidas deve ser igual a 10 vezes o número de incógnitas. No algoritmo seguinte, o escalar λ representa um limite para o número de iterações.

$x \leftarrow$ ponto de partida

$A \leftarrow I$

$d \leftarrow -r(x)$

$i \leftarrow 0$

enquanto $(\|r(x)\|_{\infty} > \epsilon)$ e $(i < \lambda)$ faça

começo

$l \leftarrow l + 1$

$p \leftarrow x$

$q \leftarrow r(x)$

$\alpha \leftarrow$ busca unidimensional

$x \leftarrow x + \alpha d$

$p \leftarrow x - p$

$q \leftarrow r(x) - q$

{ vetor BFGS }

$$v \leftarrow \frac{(q^t A q)^{1/2} p}{p^t q} - \frac{A q}{(q^t A q)^{1/2}}$$

{ fator de escala }

$$\gamma \leftarrow \frac{p^t q}{q^t A q}$$

$$A \leftarrow \left(A - \frac{A q q^t A}{q^t A q} + v v^t \right) \gamma + \frac{p p^t}{p^t q}$$

$d \leftarrow -A r(x)$

fim

1.2.10 O método quase Newton sem memória

No método Quase Newton Sem Memória uma aproximação para a inversa da matriz hessiana é construída por uma única atualização de uma primeira aproximação, que é dada pela matriz unidade. Assim, o algoritmo anterior para o método Quase Newton pode ser simplificado no algoritmo descrito a seguir, referência [35], onde η representa o número de incógnitas. Note que este algoritmo requer o armazenamento de somente alguns vetores, sendo especialmente indicado para muitas incógnitas.

É importante observar que o método Quase Newton Sem Memória, sem a introdução do fator de escala γ , e com uma busca unidimensional exata, coincide exatamente com a forma Polak-Ribiere do método do gradiente conjugado. Outro fato sobre o método do gradiente conjugado que merece destaque é que a forma Fletcher-Reeves, quando utilizado com uma busca unidimensional inexata que satisfaz certas condições, apresenta a propriedade de descida, referência [1].

$x \leftarrow$ ponto de partida

$i \leftarrow 0$

enquanto $(\|r(x)\|_\infty > \epsilon)$ e $(i < \lambda)$ faça

começo

se $i - \left\lfloor \frac{i}{\eta} \right\rfloor \eta = 0$

então $d \leftarrow -r(x)$

```

l ← l + 1

p ← x

q ← r(x)

α ← busca unidimensional

x ← x + αd

p ← x - p

q ← r(x) - q

d ←  $\left( \frac{q^t r(x)}{q^t q} - 2 \frac{p^t r(x)}{p^t q} \right) p + \frac{p^t r(x)}{q^t q} q - \frac{p^t q}{q^t q} r(x)$ 

fim

```

1.2.11 O método incremental Newton Raphson

De maneira semelhante ao descrito no método de Newton, será mostrada uma motivação que conduz naturalmente à definição do método Newton Raphson e também como a estratégia incremental é aplicada numa tentativa, nem sempre bem sucedida, de eliminar as falhas encontradas e assim definindo o que pode ser chamado de método Incremental Newton Raphson.

No método Incremental Newton Raphson, a abordagem é a resolução direta do sistema de equações não lineares dadas pelas equações de equilíbrio. Não deve ser confundido com o método de Newton, cuja abordagem é a minimização da função dada pela energia potencial total.

O método de Newton procura um ponto de mínimo local da função energia potencial total, e portanto um ponto de equilíbrio estável. Convém ressaltar que a resolução direta das equações de equilíbrio pode resultar em pontos que representam posições de equilíbrio instável da estrutura.

Para o estabelecimento do método Newton Raphson considere um sistema de n equações não lineares com n incógnitas, ou seja as equações de equilíbrio no contexto de análise de estruturas, dadas por :

$$r(x) = 0$$

cuja solução será denotada por x^* , e onde cada componente do vetor r é uma função não linear dada por :

$$r_i(x): R^n \rightarrow R$$

Uma aproximação para cada função $r_i(x)$ pode ser obtida pela expansão em série de Taylor em torno de um ponto qualquer x^0 e assim pode ser escrito :

$$r_i(x) \approx r_i(x^0) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial x_j} (x_j - x_j^0)$$

e definindo uma matriz S de modo que,

$$s_{ij} = \frac{\partial r_i}{\partial x_j}$$

segue,

$$r(x) \approx r(x^0) + S(x^0)(x - x^0)$$

A matriz $S(x)$ é conhecida como a matriz jacobiana de $r(x)$. Em análise de estruturas, os pontos x representam os deslocamentos dos nós da estrutura, o vetor $r(x)$ representa o vetor resíduo e a matriz $S(x)$

representa a matriz de rigidez. De modo idêntico ao descrito no método de Newton, o ponto que satisfaz o problema aproximado :

$$r(x^0) + S(x^0)(x - x^0) = 0$$

é tomado como solução aproximada aceitável para o problema exato. Assim, a solução aproximada pode ser escrita como :

$$x^1 = x^0 - S(x^0)^{-1} r(x^0)$$

O ponto x^1 pode ser tomado como um novo ponto de partida x^0 , e prosseguindo desta maneira é provável que possa ser obtida uma aproximação cada vez melhor para x^* . É fácil aceitar que a convergência do processo descrito acima possa ser demonstrada tomando-se um ponto de partida suficientemente próximo da solução.

A estratégia incremental consiste em definir uma sequência de problemas parametrizados pelo valor μ e escritos como :

$$r(x, \mu) = 0$$

de tal forma que para $\mu = \mu_0$, uma solução de :

$$r(x, \mu_0) = 0$$

seja conhecida e para $\mu = \mu_m$:

$$r(x, \mu_m) = r(x)$$

É aceitável que exista pelo menos uma sequência ordenada de valores próximos, $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$, de modo que a solução de :

$$r(x, \mu_{k-1}) = 0$$

possa ser usada como ponto de partida para a solução de :

$$r(x, \mu_k) = 0$$

Desta maneira, partindo-se da solução para $\mu = \mu_0$, a solução para $\mu = \mu_m$, pode ser atingida pelo uso do método Newton Raphson em cada incremento sucessivo do valor μ . Note que nada impede que a sequência de valores μ seja decrescente, e assim o método Newton Raphson seria usado em cada decremento do valor μ .

Para a aplicação da estratégia incremental num problema de análise não linear de estruturas é conveniente escrever as equações de equilíbrio na forma :

$$r(x) = p(x) - q(x)$$

onde $p(x)$ representa os esforços internos gerados pela estrutura de maneira a equilibrar os esforços externos $q(x)$ aplicados na estrutura. Deste modo é natural definir :

$$r(x, \mu) = p(x) - \mu q(x)$$

pois para $\mu_0 = 0$ e se todos os deslocamentos impostos forem iguais a zero, ou seja a condição usual de vinculação de uma estrutura, então a posição indeformada da estrutura, dada por $x = 0$, é solução de :

$$r(x, \mu_0) = 0$$

pois os esforços internos gerados pela estrutura são nulos, e para $\mu_m = 1$, pode ser escrito :

$$r(x, \mu_m) = r(x)$$

É conveniente definir a sequência de valores μ do seguinte modo :

$$\mu_k = \frac{k}{m}, \quad k = 1, 2, \dots, m$$

Como regra geral, m deve ser escolhido de modo que o número máximo de iterações requeridas pelo método Newton Raphson para a convergência em cada incremento do valor μ seja em torno de três.

É importante observar que no caso de existirem deslocamentos impostos diferentes de zero, então para $x = 0$ os esforços internos gerados pela estrutura não mais serão nulos e assim não mais será conhecida uma solução do problema para $\mu_0 = 0$.

Uma observação mais detalhada revela que mesmo para o caso de todos os deslocamentos impostos serem iguais a zero, é impossível iniciar a estratégia incremental com outro ponto qualquer senão o ponto $x = 0$ que representa a estrutura na posição indeformada. Entretanto, existem algumas situações em que iniciar a estratégia incremental com um ponto qualquer é desejável, como por exemplo quando se conhece uma posição de equilíbrio aproximada da estrutura, que é a situação comum encontrada em qualquer processo de dimensionamento, ou mesmo quando existe interesse em encontrar as várias posições de equilíbrio da estrutura. Esta dificuldade pode ser removida simplesmente redefinindo o problema parametrizado pelo valor μ como :

$$r(x, \mu) = r(x) - (\mu - \mu_m) \frac{r(x^0)}{(\mu_0 - \mu_m)}$$

Note que para $\mu = \mu_0$, x^0 é solução de :

$$r(x, \mu_0) = 0$$

e pode ser escrito para $\mu = \mu_m$ o seguinte :

$$r(x, \mu_m) = r(x)$$

Desta maneira a estratégia incremental pode ser iniciada com um ponto x^0 qualquer e fazendo $\mu_0 = 1$, $\mu_m = 0$ e ainda definindo um vetor f como :

$$f = -r(x^0)$$

segue que o problema parametrizado pode ser escrito como :

$$r(x, \mu) = r(x) + \mu f$$

No contexto de análise de estruturas, esta redefinição do problema parametrizado significa adicionar uma força fictícia na estrutura de modo a resultar equilíbrio na posição escolhida para iniciar a estratégia incremental. Prosseguir de maneira a retirar gradualmente esta força até a sua completa eliminação. Observe que a estratégia é na verdade decremental, pois reduz gradualmente a força fictícia que foi aplicada na estrutura.

1.2.12 A estratégia dos quadrados mínimos

Como observado anteriormente, em algumas situações não existe a função energia potencial total embora existam as equações de equilíbrio. Estas situações podem ser detectadas pela não simetria da matriz de rigidez, ou seja da matriz jacobiana do vetor resíduo, de modo que se a matriz de rigidez não for uma matriz simétrica então não existe uma função energia potencial total. Observe a diferença entre existir e não estar disponível e não existir uma função energia potencial total.

1.2.12.1 O quadrado da norma do vetor resíduo

A estratégia dos quadrados mínimos consiste em definir uma função, cujos pontos de mínimo são soluções das equações de equilíbrio, formada pela metade da soma dos quadrados das componentes do vetor resíduo, isto é, por metade do quadrado da norma euclidiana do vetor resíduo :

$$\phi(x) = \frac{1}{2} r(x)^t r(x)$$

Pode ser facilmente notado que um ponto de mínimo local desta função é também uma solução das equações de equilíbrio e portanto o problema de encontrar soluções das equações de equilíbrio foi transformado no problema de encontrar pontos de mínimo local da função $\phi(x)$. Note que a função $\phi(x)$ não representa a função energia potencial total da estrutura. Na definição de $\phi(x)$, o quadrado da norma do vetor resíduo foi dividido por dois simplesmente para simplificar as expressões para o gradiente de $\phi(x)$.

1.2.12.2 O vetor gradiente

As componentes do vetor gradiente de $\phi(x)$ podem ser obtidas pela utilização da regra da cadeia, ou seja :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_j} = \frac{\partial \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n r_i^2 \right)}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^n r_i \frac{\partial r_i}{\partial x_j}$$

e definindo um vetor g e uma matriz S de modo que :

$$g_j = \frac{\partial \phi}{\partial x_j}$$

$$s_{ij} = \frac{\partial r_i}{\partial x_j}$$

segue,

$$g(x) = S(x)^t r(x)$$

Note que em análise de estruturas, os pontos x representam os deslocamentos dos nós da estrutura, o vetor $r(x)$ representa o vetor resíduo, a matriz $S(x)$ representa a matriz de rigidez e a função $\phi(x)$ representa a metade do quadrado da norma euclidiana do vetor resíduo. Para encontrar os pontos de mínimo de $\phi(x)$ não deve ser utilizado o método de Newton, pois para calcular o gradiente de $\phi(x)$ é necessária a utilização da matriz de rigidez. A utilização do método de Newton é praticamente inviável, pois iria requerer as derivadas das componentes da matriz de rigidez, formando um conjunto de três dimensões.

1.2.12.3 A aproximação da matriz de rigidez

No método de Newton, no método Incremental Newton Raphson e no uso da estratégia dos Quadrados Mínimos é requerida a matriz de rigidez $S(x)$. Entretanto como a simples obtenção das componentes desta matriz é uma tarefa muito trabalhosa, uma aproximação por diferença finita pode ser usada para estimar $S(x)$. A aproximação por diferença finita é realizada para cada coluna da matriz $S(x)$ somente pelo uso da rotina que calcula o vetor resíduo $r(x)$.

No caso da matriz de rigidez $S(x)$ estar disponível, é muito recomendável sua comparação com uma aproximação calculada por diferença finita para diversos valores do ponto x que podem ser gerados facilmente com o uso de números pseudo aleatórios. Desta maneira, a exatidão das expressões das componentes de $S(x)$ pode ser verificada e possíveis erros detectados.

No uso da estratégia dos Quadrados Mínimos é importante notar que cada componente do vetor gradiente de $\phi(x)$ é determinada pelo produto escalar do vetor resíduo $r(x)$ e uma coluna da matriz $S(x)$, assim é desnecessário ter-se todas as colunas de $S(x)$ disponíveis no mesmo instante.

1.2.12.4 A aproximação do vetor gradiente

O uso da matriz de rigidez $S(x)$ no cálculo do vetor gradiente de $\phi(x)$ é um inconveniente que pode ser removido pela utilização de uma aproximação por diferença finita para cada coluna de $S(x)$ usando somente a rotina que calcula o vetor resíduo $r(x)$. Nos algoritmos seguintes, ϵ_m é a precisão relativa da máquina, que é o menor número que somado com a unidade resulta um número maior do que a unidade.

{ diferença finita para frente }

$a \leftarrow r(x)$

para $i \leftarrow 1$ até n faça

 começo

$$\alpha \leftarrow x_i$$

$$\delta \leftarrow (1 + |\alpha|)\epsilon_m^{2/5}$$

$$x_i \leftarrow \alpha + \delta$$

$$b \leftarrow r(x)$$

$$g_i \leftarrow \frac{a^t(b - a)}{\delta}$$

$$x_i \leftarrow \alpha$$

fim

{ diferença finita central }

$$c \leftarrow r(x)$$

para $i \leftarrow 1$ até n faça

começo

$$\alpha \leftarrow x_i$$

$$\delta \leftarrow (1 + |\alpha|)\epsilon_m^{4/15}$$

$$x_i \leftarrow \alpha - \frac{\delta}{2}$$

$$a \leftarrow r(x)$$

$$x_i \leftarrow \alpha + \frac{\delta}{2}$$

$b \leftarrow r(x)$

$$g_i \leftarrow \frac{c^t(b - a)}{\delta}$$

$x_i \leftarrow \alpha$

fim

O algoritmo que utiliza diferença finita central realiza n chamadas adicionais da rotina que calcula o vetor resíduo num determinado ponto, isto é $r(x)$, quando comparado com o algoritmo que utiliza diferença finita para frente, e portanto deve ser usado perto da solução, onde é desejável uma melhor aproximação.

1.2.13 A verificação numérica da matriz de rigidez

No caso da matriz de rigidez $S(x)$ estar disponível e considerando a grande complexidade das expressões para as componentes desta matriz, é recomendável uma verificação numérica destas expressões pela comparação com uma aproximação calculada por diferença finita. Desta maneira, a exatidão das expressões das componentes de $S(x)$ pode ser verificada e possíveis erros detectados. No algoritmo seguinte, a norma infinito da diferença entre a matriz de rigidez $S(x)$ e uma aproximação desta matriz por diferença finita é dada por ε .

$\varepsilon \leftarrow 0$

$c \leftarrow r(x)$

para $j \leftarrow 1$ até n faça

 começo

$\alpha \leftarrow x_j$

$\delta \leftarrow (1 + |\alpha|)\epsilon_m^{4/15}$

$x_j \leftarrow \alpha - \frac{\delta}{2}$

$a \leftarrow r(x)$

$x_j \leftarrow \alpha + \frac{\delta}{2}$

$b \leftarrow r(x)$

 para $i \leftarrow 1$ até n faça

 começo

$\rho \leftarrow \left| s_{ij} - \frac{c^t(b-a)}{\delta} \right|$

 se $\rho > \epsilon$

 então $\epsilon \leftarrow \rho$

 fim

$x_j \leftarrow \alpha$

 fim

2. O Elemento Finito Para Cabos Ou Treliças

Para modelar um elemento de treliça é fácil perceber que basta ser considerado um segmento de reta ligando os dois nós deste elemento. Para modelar um cabo flexível basta substituir este cabo por uma linha poligonal e modelar cada um dos segmentos desta linha por um elemento de treliça.

A literatura sobre cabos flexíveis está repleta de alusões à curva conhecida como catenária, que é a forma assumida por um fio **inextensível** quando livremente suspenso e sujeito à ação de seu peso próprio, referências [8] e [32]. A análise estática baseada na catenária é útil para a compreensão do comportamento estrutural dos cabos, pois fornece expressões analíticas que podem ser facilmente utilizadas para um dimensionamento prévio.

Porém existe uma forte razão para desconsiderar a catenária num modelo computacional. O problema colocado pela simulação computacional do comportamento de um cabo deformável é um problema mais fácil de ser resolvido do que o problema da simulação do comportamento de um cabo indeformável, pois devem ser incluídas restrições não lineares neste ultimo caso, referência [35].

É claro que um cabo flexível não resiste a esforços de compressão, o que é aparentemente uma dificuldade para o modelo de linha poligonal. Porém esta dificuldade pode ser superada, não pela geometria do elemento, mas pela escolha adequada de uma equação para descrever a tensão como função da deformação. Pode ser escolhida uma função que para valores de deformação positiva esteja de acordo com os resultados experimentais obtidos para um cabo flexível de determinado material, e para valores de deformação negativa, a função tenda rapidamente e também

assintoticamente ao valor zero. Desta maneira, o modelo de linha poligonal nunca apresentaria compressão, mas no mínimo uma pequena tração, pois o cabo flexível estando sempre sujeito à ação de seu peso próprio tende a cair, encontrando assim uma configuração de equilíbrio com tração nos elementos da linha poligonal.

2.1 Comprimento do elemento deformado

Na Figura 2.1, o vetor λu , onde u é um vetor unitário, representa um elemento qualquer de cabo ou treliça na configuração inicial da estrutura, que é simplesmente uma configuração de geometria conhecida. É fácil verificar que o escalar λ representa a distância entre os nós associados a este elemento. Entretanto, como ficará claro mais adiante, esta distância entre nós nem sempre é o comprimento do elemento indeformado. O vetor l representa o mesmo elemento, agora na configuração final da estrutura, ou seja na configuração de equilíbrio. Os vetores p e q representam os deslocamentos dos nós do elemento.

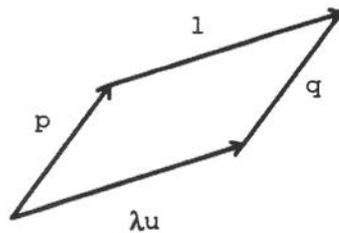


Figura 2.1

Os vetores da Figura 2.1 estão relacionados de acordo com a seguinte equação :

$$\lambda u + q - l - p = 0$$

E definindo o vetor z como :

$$z = \frac{(q - p)}{\lambda}$$

Segue que o vetor l pode ser escrito como :

$$l = \lambda(u + z)$$

E portanto o comprimento do vetor l pode ser escrito como :

$$\|l\| = \lambda(1 + 2u^t z + z^t z)^{1/2}$$

Definindo o escalar δ como :

$$\delta = 2u^t z + z^t z$$

Segue, finalmente :

$$\|l\| = \lambda(1 + \delta)^{1/2}$$

2.2 O corte do comprimento e a contração térmica

Para tensionar um elemento na configuração inicial da estrutura, será imaginado um pequeno corte no comprimento indeformado deste elemento, com valor dado por μ . Este corte também pode ser pensado como o que se convencionou chamar de defeito de fabricação, no contexto de estática das estruturas.

Com a imposição deste corte, o elemento terá de alongar-se até que seu comprimento seja igual à distância entre os nós associados a este

mesmo elemento na configuração inicial da estrutura (λ). Desta maneira o elemento estaria tensionado já na configuração inicial da estrutura.

O conceito de corte é também útil na determinação da configuração final da estrutura, pois a deformação sofrida por um elemento com corte de valor μ pode ser expressa de maneira exata.

É importante observar que na prática construtiva, na verdade o que é imposto a determinados elementos, a partir da configuração inicial da estrutura, é um valor para a tensão nestes elementos, e não um valor para corte. Isto é, partindo-se da configuração inicial da estrutura, uma configuração de equilíbrio é atingida, onde são conhecidos os valores de tensão de determinados elementos. Convém observar que esta configuração de equilíbrio é simplesmente uma configuração intermediária para a estrutura, na verdade é uma configuração inicial para a aplicação dos diversos carregamentos a que ela será posteriormente submetida. Como ficará claro mais adiante esta situação pode ser modelada com a introdução de um elemento de tensão imposta.

Contudo, o conceito de corte é indispensável, pois a partir da configuração intermediária referida no parágrafo anterior, os elementos com imposição de tensão, devem agora ser tratados com a imposição de um corte equivalente à tensão imposta, pois as deformações sofridas por estes elementos devem alterar os valores das tensões impostas.

Uma outra forma de introduzir um tensionamento no elemento, muito semelhante à imposição de corte, é o efeito produzido pela contração térmica do material de que é constituído o cabo. O efeito produzido pela dilatação térmica é uma diminuição no valor do tensionamento no elemento, e é essencialmente igual ao efeito produzido pela contração, portanto no texto seguinte será usada somente a palavra contração para referir-se ao efeito da variação da temperatura.

Embora a contração ocorra em qualquer configuração da estrutura, ou seja, a contração pode ocorrer tanto no comprimento indeformado como no comprimento deformado do elemento, será proposto um modelo onde a contração ocorre somente no comprimento indeformado do elemento. Isto é, será imaginado que o efeito da contração térmica é equivalente a uma diminuição do comprimento indeformado do elemento.

Na Figura 2.2, o escalar λ_c representa o comprimento do elemento antes da contração térmica. Note que a imposição de um corte de valor μ está presente. O escalar λ_c é na verdade o comprimento original do elemento, isto é o comprimento que não sofreu qualquer tipo de alteração. O escalar λ_t representa o comprimento do elemento após a contração térmica. O escalar γ é o coeficiente de dilatação linear térmica do material multiplicado pela variação da temperatura. Note que γ é um número adimensional e no caso de contração térmica, o valor de γ é negativo.

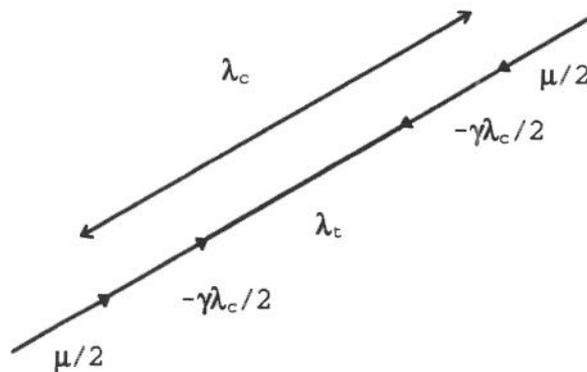


Figura 2.2

Desta maneira podem ser escritas as seguintes relações :

$$\lambda_c = (\lambda - \mu)$$

$$\lambda_t = \lambda_c(1 + \gamma)$$

$$\lambda_t = (\lambda - \mu)(1 + \gamma)$$

2.3 Deformação longitudinal do elemento

Tendo escrito na seção 2.1 o comprimento do elemento deformado, causado pelos deslocamentos nodais, e na seção 2.2 o comprimento do elemento indeformado, embora este comprimento já esteja contraído pelo efeito da variação de temperatura, segue agora de maneira natural, a expressão para a deformação longitudinal do elemento, ou seja :

$$\varepsilon = \frac{\|l\| - \lambda_t}{\lambda_t}$$

Com a ajuda das expressões deduzidas nas seções 2.1 e 2.2, segue :

$$\varepsilon = \frac{\lambda(1 + \delta)^{1/2} - (\lambda - \mu)(1 + \gamma)}{(\lambda - \mu)(1 + \gamma)}$$

E definindo o escalar adimensional ρ como :

$$\rho = \frac{\mu}{\lambda}$$

Segue finalmente :

$$\varepsilon = \frac{(1 + \delta)^{1/2} - (1 - \rho)(1 + \gamma)}{(1 - \rho)(1 + \gamma)}$$

2.3.1 Evitando o cancelamento severo

O cancelamento severo é uma decorrência da natureza finita da representação dos números reais em computadores. Ocorre numa operação de subtração quando os dois números são próximos um do outro, isto é quando os dígitos dominantes das mantissas dos números coincidem. Como a operação com os dois números é de subtração, os dígitos dominantes são cancelados, resultando na verdade, numa operação de subtração entre dois números que nada significam, pois os erros de arredondamento estão acumulados exatamente nos dígitos que não são os dígitos dominantes. Dai decorre o nome cancelamento severo, referência [22].

Examinando a expressão para a deformação longitudinal do elemento de cabo ou treliça, no caso de não existir corte imposto ou variação de temperatura, isto é quando $\rho = \gamma = 0$, pode ser facilmente notada a presença do cancelamento severo, pois :

$$\varepsilon = (1 + \delta)^{1/2} - 1$$

E com ε sendo um valor necessariamente pequeno comparado com a unidade, nos casos de interesse prático, é fácil concluir que δ deve ser também um valor pequeno comparado com a unidade.

Entretanto, o cancelamento severo na situação descrita é um caso clássico e pode ser facilmente evitado escrevendo a expressão para ε como seguinte :

$$\varepsilon = \frac{\delta}{(1 + \delta)^{1/2} + 1}$$

É claro que na expressão geral para ε , a expressão que considera corte imposto e também variação de temperatura, o cancelamento severo

também está presente, e para evitá-lo esta expressão deve ser codificada da seguinte maneira :

$$\epsilon = \frac{\frac{\delta}{(1 + \delta)^{1/2} + 1} + \rho - \gamma(1 - \rho)}{(1 - \rho)(1 + \gamma)}$$

2.4 A energia potencial de deformação

Supondo a existência de uma tensão normal σ , constante na seção transversal do elemento, função somente da deformação longitudinal, e que esta tensão seja *conjugada* com a deformação, a energia potencial de deformação pode ser escrita, para um elemento prismático de área indeformada α e comprimento indeformado λ_e , como :

$$\phi = \alpha \lambda_e \int_0^{\epsilon} \alpha(\zeta) d\zeta$$

2.5 O gradiente da energia potencial de deformação

Considerando que os deslocamentos nodais, dados pelos vetores p e q , podem ser representados por um único vetor de seis componentes, ou seja, com as primeiras três componentes dadas pelo vetor p e com as últimas três componentes dadas pelo vetor q , e partindo-se da expressão para a energia potencial de deformação, isto é da expressão :

$$\phi = \alpha \lambda_e \int_0^{\epsilon} \alpha(\zeta) d\zeta$$

, o gradiente da energia potencial de deformação em relação aos deslocamentos nodais, pode ser escrito como :

$$\nabla\phi = \alpha\lambda_t\alpha(\epsilon)\nabla\epsilon$$

Note que a dificuldade para calcular o gradiente da energia potencial de deformação está no cálculo do gradiente da deformação longitudinal. Porém, da expressão para a deformação longitudinal :

$$\epsilon = \frac{(1 + \delta)^{1/2} - (1 - \rho)(1 + \gamma)}{(1 - \rho)(1 + \gamma)}$$

, seguem as seguintes derivadas parciais :

$$\frac{\partial\epsilon}{\partial p_i} = -\frac{(1 + \delta)^{-1/2}(u_i + z_i)}{\lambda_t}$$

$$\frac{\partial\epsilon}{\partial q_i} = +\frac{(1 + \delta)^{-1/2}(u_i + z_i)}{\lambda_t}$$

Finalmente, podem ser escritas as componentes do gradiente da energia potencial de deformação como :

$$\frac{\partial\phi}{\partial p_i} = -\alpha\alpha(\epsilon)(1 + \delta)^{-1/2}(u_i + z_i)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial q_i} = +\alpha\alpha(\epsilon)(1 + \delta)^{-1/2}(u_i + z_i)$$

2.5.1 A interpretação geométrica para o gradiente

A interpretação geométrica para o gradiente da energia potencial de deformação, além de proporcionar uma melhor compreensão do modelo de elemento finito proposto para cabos flexíveis ou treliças, será de

fundamental importância para a introdução do elemento de tensão constante.

Considerando a Figura 2.1, é fácil escrever um vetor unitário e paralelo ao elemento na configuração final da estrutura como :

$$v = \frac{1}{\|l\|} = (1 + \delta)^{-1/2}(u + z)$$

Agora, escrevendo as componentes do gradiente da energia potencial de deformação, com a ajuda do vetor v , segue :

$$\frac{\partial \phi}{\partial p_i} = -\alpha(\epsilon)v_i$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial q_i} = +\alpha(\epsilon)v_i$$

Nas expressões precedentes, o subscrito $i = 1, 2, 3$ representa, de modo alternado, os eixos coordenados do sistema de referência. O escalar $\alpha(\epsilon)$ nada mais é do que o módulo da força normal. Portanto, e ainda como era esperado, as componentes do gradiente da energia potencial de deformação representam componentes de forças na configuração final da estrutura, ou seja, representam as componentes das forças internas. Na configuração final, as forças internas são equilibradas pelas forças externas aplicadas na estrutura.

2.6 A hessiana da energia potencial de deformação

Considerando novamente, que os deslocamentos nodais dados pelos vetores p e q são representados por um único vetor de seis componentes,

e partindo-se da expressão para o gradiente da energia potencial de deformação em relação aos deslocamentos nodais, dada por :

$$\nabla\phi = \alpha\lambda_t\alpha(\epsilon)\nabla\epsilon$$

, a hessiana de ϕ em relação aos deslocamentos nodais, pode ser escrita como :

$$\nabla^2\phi = \alpha\lambda_t\left[\frac{d\sigma}{d\epsilon}(\nabla\epsilon)(\nabla\epsilon)^t + \alpha(\epsilon)\nabla^2\epsilon\right]$$

Observe que a dificuldade para calcular a hessiana de ϕ reside no cálculo da hessiana de ϵ , que pode ser expressa como uma matriz formada por quatro sub-matrizes, isto é :

$$\nabla^2\epsilon = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2\epsilon}{\partial p_i \partial p_j} & \frac{\partial^2\epsilon}{\partial p_i \partial q_j} \\ \frac{\partial^2\epsilon}{\partial q_i \partial p_j} & \frac{\partial^2\epsilon}{\partial q_i \partial q_j} \end{bmatrix}$$

Estas quatro sub-matrizes podem ser encontradas partindo-se das expressões para as componentes do gradiente da deformação longitudinal, ou seja das expressões :

$$\frac{\partial\epsilon}{\partial p_i} = -\frac{(1+\delta)^{-1/2}(u_i + z_i)}{\lambda_t}$$

$$\frac{\partial\epsilon}{\partial q_i} = +\frac{(1+\delta)^{-1/2}(u_i + z_i)}{\lambda_t}$$

Logo, as expressões, onde δ_{ij} é o delta de kronecker, para as componentes da hessiana da deformação longitudinal são dadas por :

$$\frac{\partial^2\epsilon}{\partial p_i \partial p_j} = +\frac{(1+\delta)^{-1/2}}{\lambda^2(1-\rho)(1+\gamma)}(\delta_{ij} - v_i v_j)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial p_i \partial q_j} = - \frac{(1 + \delta)^{-1/2}}{\lambda^2 (1 - \rho)(1 + \gamma)} (\delta_{ij} - v_i v_j)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial q_i \partial p_j} = - \frac{(1 + \delta)^{-1/2}}{\lambda^2 (1 - \rho)(1 + \gamma)} (\delta_{ij} - v_i v_j)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial q_i \partial q_j} = + \frac{(1 + \delta)^{-1/2}}{\lambda^2 (1 - \rho)(1 + \gamma)} (\delta_{ij} - v_i v_j)$$

2.7 O elemento de tensão imposta

A introdução de um elemento de cabo flexível, capaz de manter uma tensão imposta, permite modelar situações muito comuns da prática construtiva. Na prática construtiva, os cabos de uma tenso estrutura são tensionados numa primeira etapa, levando a estrutura de uma configuração inicial de geometria conhecida, para uma configuração intermediária, de geometria conhecida e de equilíbrio.

Esta configuração pode ser chamada de intermediária porque os principais carregamentos, à que a estrutura deve resistir, serão aplicados em seguida. Portanto a configuração intermediária é, na verdade, uma configuração inicial para a aplicação dos referidos carregamentos. Convém ressaltar ainda que a configuração intermediária não pode para efeito da análise estrutural, de maneira alguma, ser confundida com a configuração inicial de geometria conhecida.

Em todas as propostas para a análise de tenso estruturas, encontradas nos principais periódicos, existe a necessidade de partir-se de uma configuração de geometria conhecida e próxima do equilíbrio. Em particular pode ser citada a referência [37].

Na verdade, a necessidade de partir-se de uma configuração de geometria conhecida e próxima do equilíbrio é uma decorrência do método de análise estrutural empregado, ou seja do método Newton Raphson Incremental. Esta restrição não é, absolutamente, uma restrição que decorre da natureza das tenso estruturas, mas somente do método empregado na sua análise. A análise das tenso estruturas requer um retorno **operacional** ao princípio fundamental que está subjacente em toda a análise estrutural, ou seja, o princípio da mínima energia potencial total, referência [12].

Na etapa de tensionamento, somente para alguns elementos é que existe a imposição de tensão, isto é, para os chamados elementos de amarração. Na prática, o tensionamento de um determinado elemento de amarração pode ser obtido pelo uso de macaco hidráulico. Desta maneira, a tensão de projeto pode ser imposta a este elemento.

Considerando os principais carregamentos que a tenso estrutura deve suportar e partindo-se da configuração intermediária, os elementos que na primeira etapa estavam com tensão imposta, devem agora sofrer variação no valor desta tensão. Para modelar esta situação será mostrado mais adiante um corte equivalente à uma tensão imposta, e com o artifício de mudar o estado de um elemento de uma tensão imposta para um corte imposto, esta situação estará corretamente modelada.

2.7.1 A energia potencial de deformação

Para o estabelecimento de um elemento de tensão imposta, basta impor a tensão σ_0 na expressão para a energia potencial de deformação, ou seja :

$$\phi = \alpha \lambda_t \int_0^{\xi} \sigma_0 d\zeta \Rightarrow \phi = \alpha \lambda_t \sigma_0 \varepsilon$$

Mas da expressão para a deformação longitudinal,

$$\varepsilon = \frac{\lambda(1 + \delta)^{1/2} - (\lambda - \mu)(1 + \gamma)}{(\lambda - \mu)(1 + \gamma)}$$

Com a ajuda da expressão para o comprimento indeformado do elemento, já contraído pelo efeito da variação da temperatura,

$$\lambda_t = (\lambda - \mu)(1 + \gamma)$$

, segue :

$$\phi = \alpha \sigma_0 \lambda (1 + \delta)^{1/2} - \alpha \sigma_0 (\lambda - \mu)(1 + \gamma)$$

Convém observar que a energia potencial de deformação pode ser definida simplesmente como :

$$\phi = \alpha \sigma_0 \lambda (1 + \delta)^{1/2}$$

, pois o termo eliminado é uma constante, cuja permanência só adicionaria uma soma de constantes na energia potencial total para a estrutura. Minimizar uma função mais uma constante é equivalente a minimizar somente a função.

2.7.2 O gradiente da energia potencial de deformação

Partindo-se da expressão para a energia potencial de deformação, dada por :

$$\phi = \alpha \lambda_t \sigma_0 \varepsilon$$

, segue que o gradiente de ϕ é dado por :

$$\nabla\phi = \alpha\lambda_t\sigma_0\nabla\varepsilon$$

Mas, as componentes do gradiente de ε , com relação aos deslocamentos nodais, são dadas por :

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial p_i} = -\frac{(1+\delta)^{-1/2}(u_i+z_i)}{\lambda_t}$$

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial q_i} = +\frac{(1+\delta)^{-1/2}(u_i+z_i)}{\lambda_t}$$

E portanto as componentes do gradiente de ϕ , com relação aos deslocamentos nodais, são dadas por :

$$\frac{\partial\phi}{\partial p_i} = -\alpha\sigma_0(1+\delta)^{-1/2}(u_i+z_i) = -\alpha\sigma_0v_i$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial q_i} = +\alpha\sigma_0(1+\delta)^{-1/2}(u_i+z_i) = +\alpha\sigma_0v_i$$

Nas expressões precedentes, o subscrito $i = 1,2,3$ representa, de modo alternado, os eixos coordenados do sistema de referência. O escalar $\alpha\sigma_0$ é o módulo da força normal. O vetor v é paralelo ao elemento na configuração final da estrutura. Logo, as componentes do gradiente da energia potencial de deformação representam componentes de forças na configuração final da estrutura.

Uma aparente alternativa para interpretar as equações precedentes, é imaginar que elas decorrem da aplicação de um carregamento auto equilibrado num determinado elemento, carregamento este que seria necessariamente conservativo, pois existe uma função energia potencial associada. Entretanto a energia de deformação deste determinado elemento ainda estaria presente na análise da estrutura e teria de ser removida

por algum artifício. Além disso, considerando os principais carregamentos que a estrutura deve suportar, e não somente a etapa de tensionamento, uma nova dificuldade teria de ser superada. A dificuldade do estabelecimento de uma equivalência, para passar do carregamento auto equilibrado, para um elemento possivelmente com imposição de corte.

Enfim, como será mostrado a seguir, é mais fácil pensar num elemento que muda de estado, de um estado onde o valor da tensão é imposto, para um estado onde o valor do corte é imposto.

2.7.3 O corte equivalente

Considerando a expressão para a deformação longitudinal,

$$\epsilon = \frac{(1 + \delta)^{1/2} - (1 - \rho)(1 + \gamma)}{(1 - \rho)(1 + \gamma)}$$

, segue que μ , isto é o valor do corte equivalente a uma determinada tensão, pode escrito como :

$$\mu = \lambda \left(1 - \frac{(1 + \delta)^{1/2}}{(1 + \gamma)(1 + \epsilon)} \right)$$

onde ϵ deve ser determinado com a ajuda da equação :

$$\sigma_0 = \alpha(\epsilon)$$

Deste modo fica estabelecida a equivalência entre elemento com valor de tensão imposta e elemento com valor de corte imposto.

2.7.4 A hessiana da energia potencial de deformação

Partindo-se da expressão para o gradiente da energia potencial de deformação, dada por :

$$\nabla\phi = \alpha\lambda_t\sigma_0\nabla\varepsilon$$

, segue que a hessiana de ϕ é dada por :

$$\nabla^2\phi = \alpha\lambda_t\sigma_0\nabla^2\varepsilon$$

E, com a ajuda das expressões para as componentes da hessiana da deformação longitudinal, seguem finalmente as expressões, onde δ_{ij} é o delta de Kronecker, para as componentes da hessiana da energia potencial de deformação, :

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial p_i\partial p_j} = + \frac{\alpha\sigma_0(1+\delta)^{-1/2}}{\lambda} (\delta_{ij} - v_i v_j)$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial p_i\partial q_j} = - \frac{\alpha\sigma_0(1+\delta)^{-1/2}}{\lambda} (\delta_{ij} - v_i v_j)$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial q_i\partial p_j} = - \frac{\alpha\sigma_0(1+\delta)^{-1/2}}{\lambda} (\delta_{ij} - v_i v_j)$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial q_i\partial q_j} = + \frac{\alpha\sigma_0(1+\delta)^{-1/2}}{\lambda} (\delta_{ij} - v_i v_j)$$

2.8 Restrição ao movimento do nó

Para a imposição de deslocamento de valor conhecido ao movimento do nó, nas direções dos eixos do sistema de referência, as expressões

precedentes para a energia potencial de deformação, seu gradiente e sua hessiana, podem ser usadas sem qualquer inconveniente. Para tanto basta colocar nestas expressões os valores conhecidos do deslocamento do nó nas respectivas componentes do vetor p ou q . Além disso, observando que a derivada parcial da energia potencial de deformação em relação a um deslocamento de valor conhecido é zero, ficam claras as alterações necessárias nas respectivas componentes do seu gradiente e da sua hessiana.

Entretanto, existem duas situações, de restrição ao movimento do nó, que não são possíveis de serem modeladas como imposição de deslocamento de valor conhecido. Na primeira situação, o nó pode estar sujeito a movimentar-se numa dada reta, que pode ser definida por um vetor unitário e pelo ponto onde está localizado este nó. Neste caso basta considerar que o vetor deslocamento nodal pode ser escrito como um múltiplo do vetor unitário que define a direção desta reta. Na segunda situação, o nó pode estar sujeito a movimentar-se num dado plano, que pode ser definido por dois vetores unitários e pelo ponto onde está localizado este nó. Neste caso basta considerar que o vetor deslocamento nodal pode ser escrito como uma combinação linear dos dois vetores que definem a inclinação deste plano.

Representando os vetores deslocamentos nodais restritos, isto é os vetores deslocamentos nodais que respeitam a restrição imposta, quer seja deslocamento numa reta ou num plano, por um traço acima da letra correspondente ao vetor deslocamento nodal irrestrito, podem ser escritas as seguintes relações :

$$p = P\bar{p}$$

$$q = Q\bar{q}$$

As matrizes P e Q podem conter uma coluna não nula e duas colunas nulas, no caso do respectivo nó estar sujeito a movimentar-se numa dada reta, ou duas colunas não nulas e uma coluna nula, no caso do respectivo nó estar sujeito a movimentar-se num dado plano, ou ainda podem conter as colunas da matriz unidade, no caso de não existir restrição ao deslocamento do respectivo nó.

A energia potencial de deformação pode ser interpretada como função dos vetores p e q. Assim pode ser escrito :

$$\phi = \phi(p, q)$$

Utilizando a regra da cadeia, o gradiente da energia potencial de deformação nas novas variáveis pode ser obtido, ou seja :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \bar{p}_i} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \phi}{\partial p_k} \frac{dp_k}{d\bar{p}_i} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \phi}{\partial q_k} \frac{dq_k}{d\bar{p}_i}$$

que simplificando fornece,

$$\frac{\partial \phi}{\partial \bar{p}_i} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \phi}{\partial p_k} p_{ki}$$

analogamente,

$$\frac{\partial \phi}{\partial \bar{q}_i} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \phi}{\partial q_k} q_{ki}$$

Utilizando novamente a regra da cadeia, a hessiana da energia potencial de deformação nas novas variáveis pode ser obtida, ou seja :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{p}_i \partial \bar{p}_j} = \sum_{k=1}^3 p_{ki} \frac{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial p_k} \right)}{\partial \bar{p}_j}$$

mas,

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial p_k} \right)}{\partial \bar{p}_j} = \sum_{l=1}^3 \frac{\partial^2 \phi}{\partial p_k \partial p_l} \frac{dp_l}{d\bar{p}_j} + \sum_{l=1}^3 \frac{\partial^2 \phi}{\partial p_k \partial q_l} \frac{dq_l}{d\bar{p}_j}$$

logo,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{p}_i \partial \bar{p}_j} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 p_{ki} p_{lj} \frac{\partial^2 \phi}{\partial p_k \partial p_l}$$

analogamente,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{q}_i \partial \bar{q}_j} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 q_{ki} q_{lj} \frac{\partial^2 \phi}{\partial q_k \partial q_l}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{p}_i \partial \bar{q}_j} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 p_{ki} q_{lj} \frac{\partial^2 \phi}{\partial p_k \partial q_l}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{q}_i \partial \bar{p}_j} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 q_{ki} p_{lj} \frac{\partial^2 \phi}{\partial q_k \partial p_l}$$

Observe que transformações de natureza semelhante às descritas, embora muito mais simples, devem também ser realizadas nas forças aplicadas aos nós sujeitos a movimentar-se numa dada reta ou num dado plano.

3. Dimensionamento De Treliças Espaciais

O propósito principal deste capítulo é apresentar uma heurística para o dimensionamento de mínimo peso de treliças espaciais constituídas por tubos cilíndricos de aço. Este tipo de treliça é bastante comum na construção civil e por este motivo merece ser tratado de modo especial. É razoável considerar que o custo deste tipo de treliça é proporcional ao seu peso, e portanto minimizar o peso significa na verdade um esforço para minimizar o custo.

Convém observar que um algoritmo para o dimensionamento de mínimo peso deste tipo de treliça poderia ser definido, uma vez que o problema de dimensionar uma treliça de mínimo peso poderia ser formulado como um problema de programação não linear com variáveis inteiras. O impedimento para esta abordagem reside no fato de que os problemas de ordem prática apresentam milhares de nós, e portanto o problema de programação não linear teria milhares de variáveis inteiras. Um problema deste porte, para ser otimista, está longe de poder ser resolvido nos computadores atualmente disponíveis.

O elemento finito definido no capítulo anterior, geometricamente exato, será utilizado em conjunto com a equação constitutiva dada pela lei de Hooke. As considerações para um outro tipo de equação constitutiva, como por exemplo um modelo elásto-plástico, ou um modelo visco-elástico, podem ser encontradas nas referências [39] e [2]. Estas considerações não serão abordadas neste trabalho.

Para a etapa de cálculo do equilíbrio, convém lembrar que o método Quase Newton Sem Memória requer o armazenamento de somente alguns poucos vetores, sendo portanto uma escolha ideal para problemas com muitas

incógnitas. Entretanto, será mostrada uma comparação do desempenho computacional deste método com os métodos de Newton e Quase Newton.

3.1 Treliça espacial com planta retangular

Considere uma treliça espacial com projeção retangular em planta, constituída por duas ou mais camadas planas (Figura 3.2), onde cada duas camadas subsequentes são ligadas por diagonais formando pirâmides regulares de base retangular (Figura 3.1). Este tipo de treliça espacial é de uso frequente na construção civil e sua regularidade facilita a geração automática dos dados referentes à descrição da estrutura. As equações para esta geração automática serão descritas a seguir. Para a geração automática dos dados referentes à descrição de uma treliça espacial qualquer, a referência [46] representa o estado da arte.

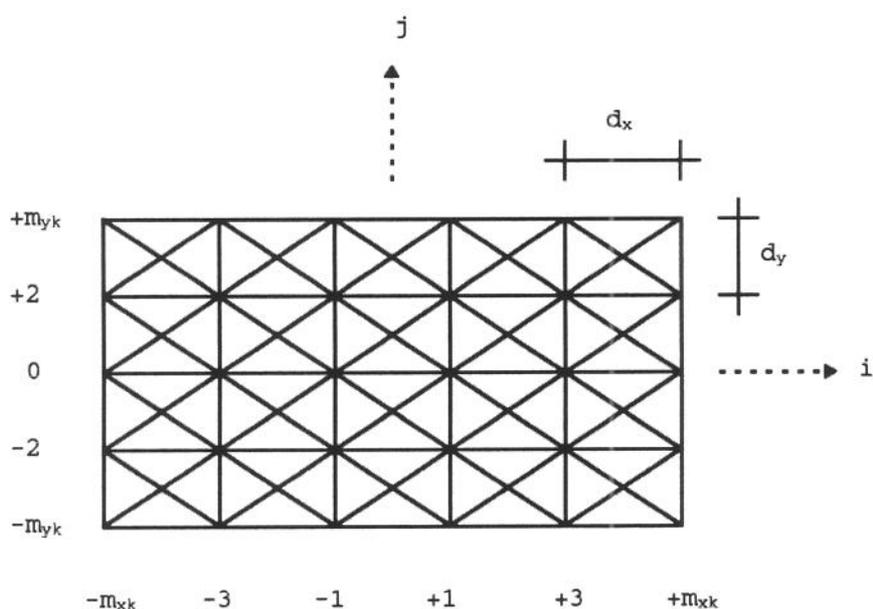


Figura 3.1

A Figura 3.1 apresenta uma vista em planta da camada k e das diagonais que ligam esta camada com a camada anterior $k - 1$, de uma treliça espacial do tipo descrita acima. O número de módulos na direção i é dado por m_{xk} . O número de módulos na direção j é dado por m_{yk} . O comprimento do módulo na direção i é dado por d_x . O comprimento do módulo na direção j é dado por d_y . A Figura 3.2 apresenta uma vista lateral mostrando as várias camadas desta treliça espacial, onde o número de módulos na direção k é dado por m_z , que é igual ao número de camadas menos um. A distância entre a camada k e a camada 0 é dada por h_k . Observe que os valores de k são não positivos. Na verdade, na prática da construção civil é rara a utilização de três camadas, sendo ainda raríssima a utilização de quatro ou mais camadas.

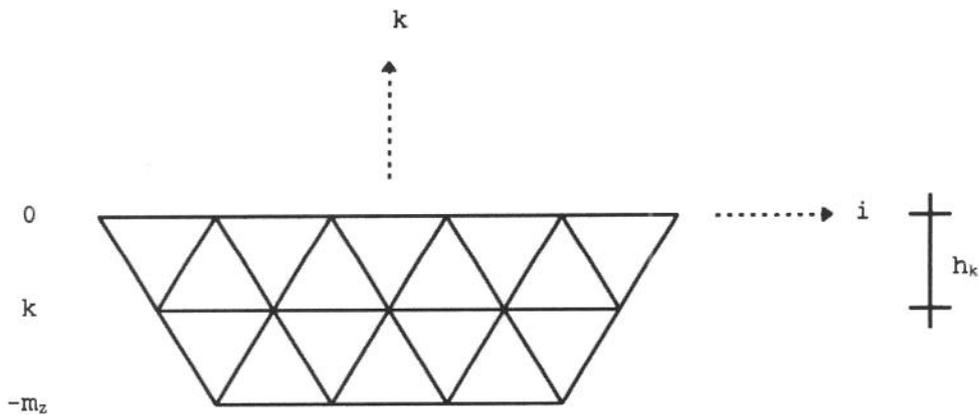


Figura 3.2

3.1.1 A numeração dos nós

Uma primeira dificuldade para a geração automática dos dados referentes à descrição desta estrutura, consiste em encontrar uma função que associe à cada ponto (i, j, k) o número do nó localizado na posição determinada por este ponto. Entretanto, observando a Figura 3.2, é fácil

estabelecer as seguintes relações entre o número de módulos da camada k e o número de módulos da camada 0 :

$$m_{xk} = m_{x0} + k$$

$$m_{yk} = m_{y0} + k$$

$$k = 0, -1, \dots, -m_z$$

Definindo σ como sendo a soma do número de nós das camadas desde a camada $k + 1$ até a camada 0 , segue que σ pode ser escrito como :

$$\sigma = \sum_{l=k+1}^0 (m_{xl} + 1)(m_{yl} + 1)$$

,que uma vez desenvolvido conduz à :

$$\sigma = -(m_{x0} + 1)(m_{y0} + 1)k - \frac{(m_{x0} + m_{y0} + 2)(k + 1)k}{2} - \frac{(2k + 1)(k + 1)k}{6}$$

Uma numeração para a camada k , que assinale o número 1 à posição determinada pelo ponto $(-m_{xk}, -m_{yk}, k)$ e prossiga primeiro ao longo do eixo i , no sentido do eixo, e depois ao longo do eixo j , no sentido do eixo, é dada por :

$$\eta = \frac{(j + m_{yk})(m_{xk} + 1)}{2} + \frac{(i + m_{xk})}{2} + 1$$

,cuja simplificação conduz à :

$$\eta = \frac{(j + m_{y0} + k)(m_{x0} + k + 1)}{2} + \frac{(i + m_{x0} + k)}{2} + 1$$

Logo, a numeração que assinale o número 1 à posição determinada pelo ponto $(-m_{x0}, -m_{y0}, 0)$ e prossiga primeiro ao longo do eixo i , no sentido do eixo, e depois ao longo do eixo j , no sentido do eixo, e

depois ao longo do eixo k, no sentido contrário ao eixo, pode ser escrita como :

$$n_{ijk} = \sigma + \eta$$

$$k = 0, -1, \dots, -m_z$$

$$j = -(m_{y0} + k), -(m_{y0} + k) + 2, \dots, (m_{y0} + k)$$

$$i = -(m_{x0} + k), -(m_{x0} + k) + 2, \dots, (m_{x0} + k)$$

Observe que o número total de nós para esta estrutura pode ser deduzido com a ajuda da expressão para σ , calculado em $k = -(m_z + 1)$, totalizando :

$$n_t = (m_{x0} + 1)(m_{y0} + 1)(m_z + 1) - \frac{(m_{x0} + m_{y0} + 2)(m_z + 1)m_z}{2} + \frac{(2m_z + 1)(m_z + 1)m_z}{6}$$

3.1.2 As coordenadas dos nós

A associação de coordenadas (x, y, z) à posição determinada pelo ponto (i, j, k) não representa dificuldade alguma, pois da Figura 3.1 e da Figura 3.2 é fácil concluir que as coordenadas para a camada k, podem ser escritas como :

$$x = i \frac{d_x}{2}$$

$$y = j \frac{d_y}{2}$$

$$z = -h_k$$

$$k = 0, -1, \dots, -m_z$$

$$j = -(m_{y0} + k), -(m_{y0} + k) + 2, \dots, (m_{y0} + k)$$

$$i = -(m_{x0} + k), -(m_{x0} + k) + 2, \dots, (m_{x0} + k)$$

3.1.3 A incidência dos elementos

As incidências de um elemento pertencente à camada k e disposto na direção do eixo i está mostrada na Figura 3.3.

$$(i, j, k) \text{ ————— } (i + 2, j, k)$$

Figura 3.3

$$k = 0, -1, \dots, -m_z$$

$$j = -(m_{y0} + k), -(m_{y0} + k) + 2, \dots, (m_{y0} + k)$$

$$i = -(m_{x0} + k), -(m_{x0} + k) + 2, \dots, (m_{x0} + k) - 2$$

Observe que todos os elementos dispostos na direção do eixo i , possuem o mesmo tamanho para qualquer que seja a camada k , ou seja possuem tamanho igual a d_x . O número de elementos nesta direção, determinado pela soma do número de elementos para cada camada, pode ser escrito como :

$$e_i = m_{x0}(m_{y0} + 1)(m_z + 1) - \frac{(m_{x0} + m_{y0} + 1)(m_z + 1)m_z}{2} + \frac{m_z(m_z + 1)(2m_z + 1)}{6}$$

As incidências de um elemento pertencente à camada k e disposto na direção do eixo j está mostrada na Figura 3.4.



Figura 3.4

$$k = 0, -1, \dots, -m_z$$

$$i = -(m_{x0} + k), -(m_{x0} + k) + 2, \dots, (m_{x0} + k)$$

$$j = -(m_{y0} + k), -(m_{y0} + k) + 2, \dots, (m_{y0} + k) - 2$$

Observe que todos os elementos dispostos na direção do eixo j , possuem o mesmo tamanho para qualquer que seja a camada k , ou seja possuem tamanho igual a d_y . O número de elementos nesta direção, determinado pela soma do número de elementos para cada camada, pode ser escrito como :

$$e_j = m_{y0}(m_{x0} + 1)(m_z + 1) - \frac{(m_{x0} + m_{y0} + 1)(m_z + 1)m_z}{2} + \frac{m_z(m_z + 1)(2m_z + 1)}{6}$$

As incidências de quatro elementos diagonais, que ligam a camada k com a camada posterior $k + 1$, está mostrada na Figura 3.5. Note que para cada nó da camada k , existem quatro diagonais ligadas neste nó, sendo que cada diagonal está ligada em um nó distinto da camada $k + 1$.

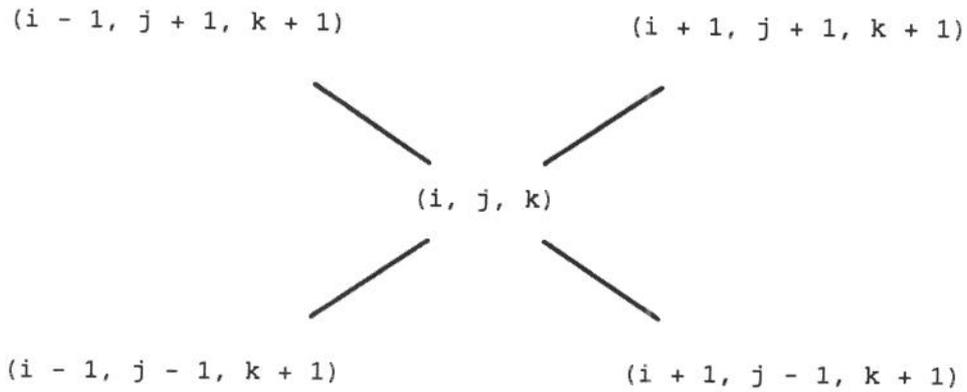


Figura 3.5

$$k = -1, \dots, -m_z$$

$$j = -(m_{y0} + k), -(m_{y0} + k) + 2, \dots, (m_{y0} + k)$$

$$i = -(m_{x0} + k), -(m_{x0} + k) + 2, \dots, (m_{x0} + k)$$

O número de elementos diagonais, que ligam a camada k com a camada posterior $k + 1$, é dado por :

$$e_k = 4(m_{x0} + k + 1)(m_{y0} + k + 1)$$

Com a ajuda da expressão anterior, basta somar o número de diagonais em cada intervalo entre duas camadas, para concluir que o total de elementos diagonais pode ser escrito como :

$$e_d = 4(m_{x0} + 1)(m_{y0} + 1)m_z - 2(m_{x0} + m_{y0} + 2)(m_z + 1)m_z + \frac{2m_z(m_z + 1)(2m_z + 1)}{3}$$

3.2 Tubos cilíndricos de aço

Tubo	Diâmetro Externo (mm)	Espessura (mm)
1	48.30	2.00
2	60.32	2.00
3	60.32	2.25
4	60.32	2.65
5	76.20	2.25
6	60.32	3.00
7	76.20	2.65
8	60.32	3.75
9	76.20	3.00
10	88.90	2.65
11	88.90	3.00
12	76.20	3.75
13	114.30	2.65
14	88.90	3.75
15	114.30	3.00
16	133.00	2.65
17	133.00	3.00
18	159.00	2.65
19	114.30	3.75
20	159.00	3.00
21	133.00	3.75
22	114.30	4.50
23	133.00	4.50
24	159.00	3.75
25	114.30	6.30
26	159.00	4.50
27	133.00	6.30
28	114.30	7.94
29	159.00	6.30
30	133.00	7.94
31	159.00	7.94

Tabela 3.1

A Tabela 3.1, apresenta uma lista de tubos cilíndricos de aço, em ordem crescente de área. A especificação para o aço é USI-SAC-41, fabricado pela Usiminas, com módulo de elasticidade igual a $2.1 * 10^3$ tf/cm², tensão de escoamento igual a 2.5 tf/cm², peso específico igual a $7.89 * 10^{-6}$ tf/cm³ e coeficiente térmico igual a $1.2 * 10^{-5}$ /°C.

3.3 Recomendações da AISI-1986

As recomendações da American Iron and Steel Institute, edição de 1986, para o dimensionamento de tubos cilíndricos de aço, sujeitos à tração ou compressão simples, serão transcritas de maneira resumida a seguir. Posteriormente, será mostrado como estas recomendações podem ser incorporadas na heurística para o dimensionamento de treliças espaciais de mínimo peso, constituídas por tubos cilíndricos de aço. A notação utilizada define os seguintes termos :

- a_i : área da seção transversal do tubo i
- d_i : diâmetro externo do tubo i
- t_i : espessura da parede do tubo i
- β : módulo de elasticidade
- δ : comprimento indeformado do elemento
- η : força axial aplicada no elemento reduzida pelo fator μ
- λ : índice de esbeltez
- μ : 0.75 para carregamento que inclua vento, caso contrário 1.00
- $\bar{\sigma}$: tensão admissível de tração ou compressão
- $\bar{\sigma}_i$: tensão admissível de tração ou compressão associada ao tubo i
- σ_y : tensão de tração ou compressão no escoamento
- ω : coeficiente de segurança

3.3.1 Flambagem da parede do tubo

Quando a espessura da parede do tubo é relativamente pequena, ondulações na parede do tubo aparecem antes de ser atingida a carga crítica de flambagem do tubo. Estas ondulações são referidas como flambagem da parede do tubo, ou flambagem local. Nos tubos cilíndricos de aço, formados a frio, a flambagem local pode ser controlada pela redução da área efetiva de compressão de acordo com a relação entre a espessura da parede do tubo e o diâmetro externo do tubo. Uma maneira simples de evitar a flambagem local é escolher tubos cilíndricos de aço que satisfaçam a seguinte inequação :

$$\frac{\beta t_i}{\sigma_y d_i} \geq 9$$

Esta providência foi adotada na definição da Tabela 3.1. Desta maneira, para o dimensionamento da treliça espacial, é necessário controlar somente a flambagem de cada tubo da treliça espacial.

3.3.2 Flambagem do tubo

Considerando a expressão para a carga crítica de Euler, e impondo tensão de compressão menor ou igual ao valor da tensão de compressão no escoamento, conclui-se que :

$$\sigma = \frac{\pi^2 \beta}{\lambda^2} \leq \sigma_y \Leftrightarrow \lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 \beta}{\sigma_y}}$$

Portanto, a expressão para a carga crítica de Euler deve ser aplicada para λ maior ou igual a um determinado valor, pois para valores de λ menores do que este determinado valor, a tensão de compressão,

calculada a partir da expressão para a carga crítica de Euler, resulta maior do que a tensão de compressão no escoamento, que é a máxima tensão de compressão que pode ser suportada por uma barra comprimida. Porém, os resultados de um grande número de experimentos apresentam um desvio do exposto acima.

A expressão empírica de J. B. Johnson, pode ser utilizada para superar algumas das desvantagens da expressão de Euler, referência [55]. A fórmula de J. B. Johnson apresenta-se como :

$$\sigma = c_2 \lambda^2 + c_1 \lambda + c_0$$

A constante c_0 é determinada pela imposição de valor de tensão de compressão igual à tensão de compressão no escoamento para índice de esbeltez igual a zero, isto é :

$$c_0 = \sigma_y$$

As constantes c_1 e c_2 são determinadas impondo que as curvas de Euler e de J. B. Johnson são tangentes no ponto onde o valor da tensão de compressão é igual a metade da tensão de compressão no escoamento, isto é :

$$c_1 = 0$$

$$c_2 = -\frac{\sigma_y^2}{4\pi^2\beta}$$

Portanto, a expressão de J. B. Johnson pode ser escrita como :

$$\sigma = -\frac{\sigma_y^2}{4\pi^2\beta} \lambda^2 + \sigma_y$$

3.3.3 A ligação entre os elementos

Em treliças espaciais metálicas, o dispositivo de ligação entre os elementos representa uma parte considerável do peso total da estrutura. Em geral, as empresas envolvidas neste segmento da construção civil, possuem vários tipos de nós patenteados, desenvolvidos especialmente para a ligação entre os elementos. Para controlar a resistência da ligação entre os elementos, considere um determinado tipo de nó, de maneira que os elementos são ligados a este nó por meio de ponteiros nos tubos como mostrado na Figura 3.6.

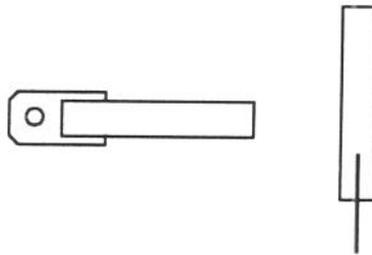


Figura 3.6

Para o detalhe construtivo mostrado na Figura 3.6, conhecidas as dimensões da chapa que liga o tubo ao nó e as dimensões da seção transversal do tubo, é fácil aceitar que pode ser determinada uma força admissível de tração ou compressão que pode ser aplicada nesta ligação. Assim, é possível associar ao tubo uma tensão admissível de tração ou compressão, através da divisão desta força admissível de tração ou compressão pela área da seção transversal do tubo. Portanto, conhecidas as dimensões da chapa que liga o tubo ao nó para cada tubo disponível, é possível estabelecer um controle da resistência da ligação entre os elementos. Para tanto, basta impor que o valor absoluto da tensão na seção transversal do tubo não ultrapasse o valor da tensão admissível de tração ou compressão associada ao tubo. A tensão admissível, associada

ao tubo i , será denotada por $\bar{\sigma}_i$. A escolha do tipo de nó para cada local da treliça espacial, depende da escolha dos tubos ligados a este nó, e poderá ser realizada numa etapa posterior ao dimensionamento da treliça espacial.

3.3.4 Algoritmo para escolha do tubo de menor área

$i \leftarrow 0$

repita

$i \leftarrow i + 1$

Se $\eta \geq 0$

então

começo

$$\sigma = \frac{\eta}{a_i}$$

$$\omega \leftarrow \frac{5}{3}$$

$$\bar{\sigma} \leftarrow \frac{\sigma_y}{\omega}$$

fim

senão

começo

$$\sigma = -\frac{\eta}{a_1}$$

$$\lambda \leftarrow \frac{4\delta}{\sqrt{d_1^2 + (d_1 - 2t_1)^2}}$$

$$\rho \leftarrow \frac{\sigma_y \lambda^2}{2\pi^2 \beta}$$

se $\rho \geq 1$

então

{ flambagem de Euler }

começo

$$\omega \leftarrow \frac{23}{12}$$

$$\bar{\sigma} \leftarrow \frac{\sigma_y}{2\rho\omega}$$

fim

senão

{ flambagem de J. B. Johnson }

começo

$$\omega \leftarrow \frac{5}{3} + \frac{(3 - \rho)\sqrt{\rho}}{8}$$

$$\bar{\sigma} \leftarrow \left(1 - \frac{\rho}{2}\right) \frac{\sigma_y}{\omega}$$

fim

fim

até ($i = \text{número de tubos}$) ou $((\sigma \leq \bar{\sigma}) \text{ e } (\sigma \leq \bar{\sigma}_i))$

3.3.5 Heurística para dimensionamento de treliças espaciais

Na heurística seguinte, observe que no final de cada iteração, ou seja quando está disponível a força axial mínima e máxima para cada elemento da treliça espacial, o tubo associado a cada elemento é possivelmente alterado, o que por sua vez irá alterar os valores para a força axial mínima e máxima para cada elemento. Assim γ representa o número de elementos da treliça espacial que não **estavam** de acordo com a escolha determinada pelo algoritmo para a escolha do tubo de menor área. Idealmente, no final de um dimensionamento este número deve ser igual a zero.

para cada elemento faça

começo

associe um tubo qualquer

$\eta_{\min} \leftarrow +\infty$

$\eta_{\max} \leftarrow -\infty$

fim

repita

para cada carregamento faça

começo

encontre posição de equilíbrio

para cada elemento faça

começo

calcule η como sendo a força axial

$\eta \leftarrow \mu\eta$

se $\eta < \eta_{\min}$

então $\eta_{\min} \leftarrow \eta$

se $\eta > \eta_{\max}$

então $\eta_{\max} \leftarrow \eta$

fim

fim

para cada elemento faça

começo

escolha tubo para η_{\min} e η_{\max}

se tubo associado ao elemento \neq tubo escolhido

então

começo

associe tubo escolhido ao elemento

$\gamma \leftarrow \gamma + 1$

fim

fim

até ($\gamma = 0$) ou (limite máximo de iterações)

3.4 Exemplos com planta retangular

Para o dimensionamento de qualquer estrutura é necessária uma avaliação criteriosa de todas as cargas que a estrutura terá de suportar. Entretanto, para estimar o dimensionamento de uma treliça espacial de propósito geral, serão utilizados valores médios, conforme mostrado na Tabela 3.2, para todas as cargas envolvidas somente na direção vertical. O peso de cada nó da treliça espacial será considerado igual a 4 kgf.

Considerando as Figuras 3.1 e 3.2, uma aparente dificuldade é representada por carregamentos não simétricos nas faces da treliça espacial, pois como regra geral, um carregamento não simétrico irá produzir um dimensionamento também não simétrico da treliça espacial. Esta aparente dificuldade pode ser superada pela introdução de um ou mais carregamentos artificiais para cada carregamento não simétrico presente. Por exemplo, para um carregamento uniforme numa face lateral,

deverá ser introduzido um carregamento artificial uniforme de sinal oposto na face lateral oposta.

Uma melhor solução, é a definição do conceito de **localidade**, ou seja, associar a todos os elementos de determinado conjunto de elementos da treliça espacial o mesmo número inteiro denominado **local**. Assim, um mesmo tubo poderá ser associado a todos os elementos deste determinado conjunto. Os valores η_{\min} e η_{\max} devem ser associados aos locais e não mais aos elementos, entretanto o conjunto de elementos com um mesmo número de local deve ser utilizado para definir os valores η_{\min} e η_{\max} . Observe que a quantidade de locais é menor ou igual à quantidade de elementos.

	Permanente (kgf/m ²)	Acidental (kgf/m ²)	Vento (kgf/m ²)	Total (kgf/m ²)
Carregamento 1	-15.0	-15.0	0.0	-30.0
Carregamento 2	-15.0	-1.5	-48.0	-64.5
Carregamento 3	-15.0	0.0	72.0	57.0

Tabela 3.2

A geometria da treliça espacial será, como mostrado na Figura 3.7, dada por uma treliça espacial de planta quadrada, com apoios nos quatro cantos da camada inferior, apoios que impedem somente o deslocamento na vertical. Conforme a orientação dos eixos na Figura 3.1, o comprimento do módulo na direção i é igual ao comprimento do módulo na direção j. Desta maneira, o número de módulos na direção i é igual ao número de módulos na direção j. O comprimento da diagonal é imposto igual ao comprimento do módulo, o que é obtido pelo estabelecimento de uma relação entre a altura da treliça espacial, isto é a distância entre a camada 1 e a camada 0, e o comprimento do módulo.

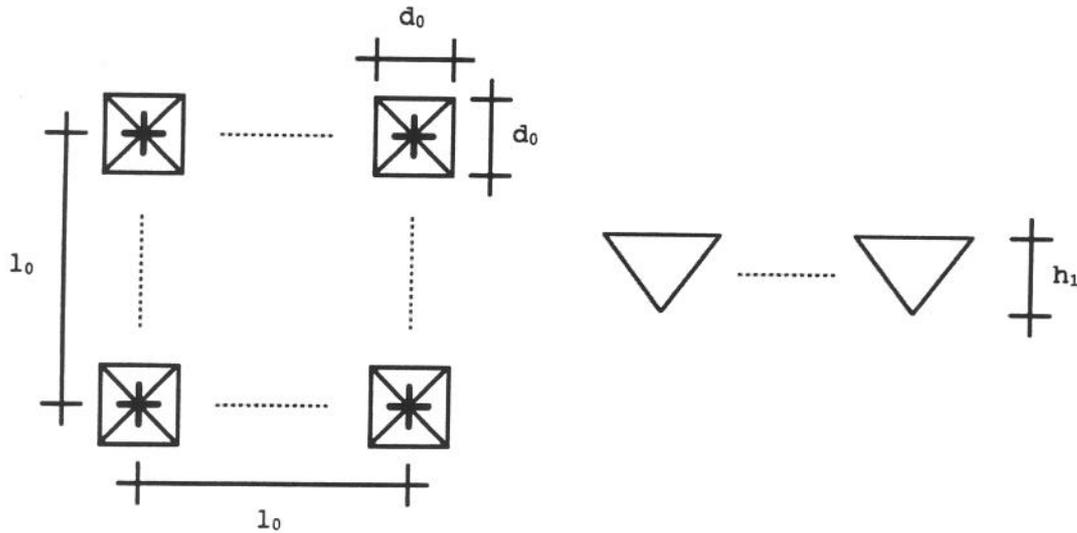


Figura 3.7

Os vários exemplos são definidos pela variação do número de módulos para uma determinada distância entre os apoios. Como a distância entre apoios é mantida fixa, e a altura da treliça espacial está relacionada com o comprimento do módulo, segue que a relação entre a distância entre apoios e a altura da treliça espacial depende somente do número de módulos. Seja m_0 o número de módulos, logo :

$$l_0 = (m_0 - 1)d_0$$

$$h_1 = \frac{d_0}{\sqrt{2}}$$

A arquitetura estabelece o seguinte intervalo de variação para a relação entre a distância entre apoios e a altura da treliça espacial :

$$15 \leq \frac{l_0}{h_1} \leq 25 \Rightarrow 11 \leq m_0 \leq 19$$

A tensão admissível associada a cada tubo, em decorrência da resistência da ligação entre os elementos, foi considerada igual a um

valor muito grande, desta maneira o valor encontrado para o peso total da treliça espacial é na verdade um limite inferior.

A Tabela 3.3, mostra o número de iterações para o dimensionamento da treliça espacial, ou seja o número de iterações maiores. Na última iteração de cada exemplo, todos os elementos estavam de acordo com a escolha determinada pelo algoritmo para a escolha do tubo de menor área.

Módulos	Incógnitas	Iterações maiores		
		Quase Newton Sem Memória	Quase Newton	Newton
11	791	4	4	4
12	935	7	7	7
13	1091	8	8	8
14	1259	7	7	7
15	1439	10	10	10
16	1631	11	11	11
17	1835	11	11	11
18	2051	13	13	13
19	2279	15	14	14

Tabela 3.3

É importante esclarecer que as eventuais diferenças no número de iterações maiores requeridas para o dimensionamento da treliça espacial, decorrentes da utilização de diferentes métodos na etapa de cálculo do equilíbrio, podem ser atribuídas ao fato de que o equilíbrio é atingido dentro de uma certa tolerância, podendo portanto resultar em forças axiais ligeiramente diferentes.

O valor da tolerância para a norma infinito do vetor resíduo foi determinado de modo que permitisse desequilíbrio máximo igual a 1 kgf. O número máximo de interpolações cúbicas na rotina de busca unidimensional foi estabelecido em 60.

A Tabela 3.4 mostra o número de iterações menores, ou seja iterações para encontrar o equilíbrio, requeridas para a solução de cada um dos três problemas de cálculo de equilíbrio, realizadas durante a última iteração maior. Observe que o número de iterações menores requeridas pelo método Quase Newton Sem Memória é superior ao número de iterações menores requeridas pelo método Quase Newton. O método de Newton requer um pequeno número de iterações menores.

Módulos	Incógnitas	Iterações menores		
		carregamento 1/carregamento 2/carregamento 3		
		Quase Newton Sem Memória	Quase Newton	Newton
11	791	80/ 83/ 82	76/ 78/ 77	3/ 3/ 3
12	935	88/ 93/ 89	88/ 89/ 88	2/ 2/ 2
13	1091	106/143/108	96/102/102	2/ 2/ 2
14	1259	118/161/122	114/118/115	3/ 5/ 3
15	1439	145/186/137	131/135/131	3/ 5/ 3
16	1631	159/213/151	148/150/145	3/ 5/ 3
17	1835	172/243/171	159/158/159	3/ 5/ 3
18	2051	248/282/191	175/178/176	2/ 4/ 2
19	2279	283/312/211	191/196/195	3/ 4/ 2

Tabela 3.4

A Tabela 3.5 mostra o tempo médio de execução por iteração maior, isto é, o tempo total para o dimensionamento da treliça espacial dividido pelo número de iterações maiores requeridas. Observe que cada iteração maior requer a solução de três problemas de cálculo de equilíbrio, um para cada carregamento. É surpreendente o desempenho do método Quase Newton Sem Memória, quando comparado com o método Quase Newton ou com o método de Newton. Os tempos mostrados na Tabela 3.5 são para o computador IBM, modelo SP1.

Módulos	Incógnitas	Tempo de execução por iteração maior (média em segundos)		
		Quase Newton Sem Memória	Quase Newton	Newton
11	791	9	371	892
12	935	11	618	1097
13	1091	17	992	1556
14	1259	22	1510	3661
15	1439	30	2271	5952
16	1631	38	3225	8978
17	1835	48	4414	12274
18	2051	65	6416	12799
19	2279	83	8607	21136

Tabela 3.5

Para iniciar o dimensionamento das treliças espaciais, e com referência à Tabela 3.1, o tubo número 2 foi associado aos elementos diagonais da treliça espacial, para os outros elementos foi associado o tubo número 4. É importante observar que a experiência adquirida no dimensionamento de treliças espaciais pode iniciar o dimensionamento com tubos diferentes dos sugeridos neste parágrafo.

A configuração indeformada da treliça espacial, que é definida por deslocamentos incógnitos iguais a zero foi utilizada como ponto de partida para a solução de todos os problemas de cálculo de equilíbrio. Entretanto, observe que no final da primeira iteração maior, poderia estar armazenada a solução de cada um dos três problemas de cálculo de equilíbrio. Cada solução poderia então ser utilizada como ponto de partida para o respectivo problema de cálculo de equilíbrio na segunda iteração maior. Prosseguindo desta maneira, é provável que o tempo total gasto no dimensionamento da treliça espacial possa ser reduzido.

A Tabela 3.6 apresenta alguns resultados de interesse da prática do dimensionamento de treliças espaciais, já colocados nas unidades usuais. A coluna referente ao peso apresenta o peso total, incluído o peso dos nós, dividido pela área coberta entre os apoios. Pode ser observado que, uma vez fixada a distância entre apoios, o peso total da treliça espacial aumenta com a diminuição da sua altura. Portanto, para a obtenção de um dimensionamento com economia de recursos, a altura da treliça espacial deve ser fixada no máximo permitido pela arquitetura. Uma outra conclusão importante, que pode ser obtida com a ajuda da Tabela 3.6, é que o peso da totalidade dos nós representa em média cerca de 23% do peso total da treliça espacial.

Módulos	Nós	Elementos	Peso (kgf/m ²)	Deslocamento vertical (mm)	
				Mínimo	Máximo
11	265	968	14.98	-80	47
12	313	1152	16.41	-90	50
13	365	1352	17.94	-99	53
14	421	1568	19.52	-109	55
15	481	1800	21.25	-117	56
16	545	2048	22.95	-127	57
17	613	2312	24.70	-138	58
18	685	2592	26.49	-148	58
19	761	2888	28.36	-158	58

Tabela 3.6

Observe que, em alguns casos, o deslocamento vertical mínimo apresentado na Tabela 3.6, pode ser considerado como excessivo. Uma maneira para reduzir a amplitude deste deslocamento consiste em diminuir o ângulo de inclinação dos elementos diagonais da treliça espacial em relação a vertical, resultando num aumento da altura para o mesmo tamanho do módulo. Nos exemplos mostrados, em decorrência do comprimento

da diagonal ser considerado igual ao comprimento do módulo, este ângulo é igual a 45° .

As conclusões baseadas nos exemplos precedentes podem ser estendidas, com cautela, como uma primeira aproximação para outras treliças espaciais com plantas retangulares.

3.5 Aplicação a um caso real

A estrutura que será analisada é uma treliça espacial com projeção circular em planta, constituída basicamente por duas calotas treliçadas ligadas por diagonais. Este tipo de treliça é usualmente referido como cúpula esférica. Esta cúpula esférica é a cobertura de um ginásio de esportes, situado no centro desportivo presidente Médici, na cidade de Brasília, construído pela empresa Mendes Júnior Industrial Limitada, sob responsabilidade técnica do Engenheiro Leovi Antonio Pinto Carisio. O vão livre coberto é igual a cerca de 101 metros e a altura máxima é igual a cerca de 14 metros. Foram considerados como apoios fixos, 36 nós igualmente espaçados ao longo da borda da cúpula esférica. A geometria da estrutura é definida através de 1674 nós e 6489 elementos. Observe que o total de deslocamentos incógnitos é igual a 4914. A Figura 3.8 mostra uma vista lateral da estrutura. Note a presença de um lanternim para a ventilação e iluminação do ambiente.

O dimensionamento desta cúpula esférica foi realizado com a ajuda do programa de computador para a análise linear de estruturas conhecido por SAP90 (Structural Analysis Program), observando as recomendações da AISI-1986. Este é portanto, um exemplo ideal para o estabelecimento de uma análise comparativa com a heurística, para o dimensionamento de

mínimo peso de treliças espaciais, proposta neste capítulo. Este exemplo também demonstra o desempenho do método Quase Newton Sem Memória.

Entretanto, uma comparação considerando somente o peso total da cúpula esférica está prejudicada, pois vários tubos, que compõem a estrutura dimensionada através da análise linear, não satisfazem as recomendações da AISI-1986, quando a estrutura é submetida a uma análise não linear. Na análise não linear, a tensão atuando em alguns dos elementos chega a ser 1.15 vezes o valor da tensão admissível. Convém esclarecer que os carregamentos foram os mesmos tanto para a análise linear quanto para a análise não linear. Esta cúpula esférica foi dimensionada considerando-se três casos de carregamento, isto é, cargas permanentes somadas com cargas acidentais, cargas permanentes somadas com cargas produzidas por uma primeira hipótese sobre o vento e cargas permanentes somadas com cargas produzidas por uma segunda hipótese sobre o vento. Uma dificuldade adicional para a análise comparativa reside no fato da relação de tubos disponíveis, utilizada para o dimensionamento através da análise linear, não estar disponível. A tensão de escoamento do aço utilizado na fabricação dos tubos é igual a 2.9 tf/cm^2 .

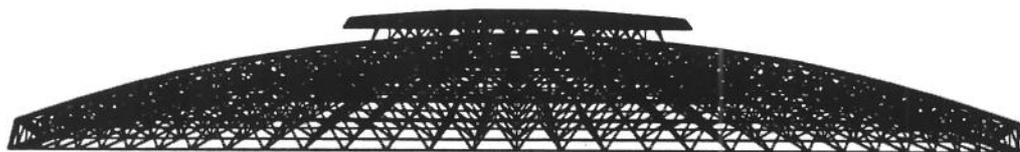


Figura 3.8

Para uma descrição não muito detalhada desta cúpula esférica, convém lembrar a definição do conceito de localidade, ou seja, associar a todos os elementos de determinado conjunto de elementos da treliça

espacial o mesmo número inteiro denominado local. Assim, um mesmo tubo poderá ser associado a todos os elementos deste determinado conjunto.

Na estrutura dimensionada através da análise linear, existem 7 locais, e conseqüentemente um máximo de 7 tubos distintos. A análise não linear desta estrutura com 7 locais, revela que alguns elementos do local 1 e alguns elementos do local 5 não satisfazem as recomendações da AISI-1986. Entretanto, um dimensionamento através da análise não linear mantendo estes 7 locais, provavelmente levaria a um aumento considerável do peso da estrutura, pois o total de elementos do local 1 é igual a 3582. Observe que o total de elementos do local 5 é igual a 90, o que provavelmente representaria um aumento irrelevante de peso. Para um novo dimensionamento foi definido o local 8 que inclui os elementos do local 1 que não satisfazem as recomendações da AISI-1986, juntamente com todos os seus elementos simétricos. No dimensionamento através da análise não linear, a tolerância para a norma infinito do vetor resíduo foi determinada de modo que signifique desequilíbrio máximo igual a 1 kgf. O número máximo de interpolações cúbicas na rotina de busca unidimensional foi estabelecido em 60.

Foram necessárias 5 iterações maiores para o dimensionamento desta cúpula esférica. O programa foi executado por uma estação de trabalho IBM, modelo RISC 6000-32H, durante um intervalo de tempo igual a 1 hora e 21 minutos. O número de iterações menores, realizadas durante a última iteração maior, foi igual a 444 para o carregamento 1, 431 para o carregamento 2 e 430 para o carregamento 3. Convém notar que os tubos escolhidos pela heurística proposta neste capítulo satisfazem as recomendações da AISI-1986. Uma comparação da Tabela 3.7 com a Tabela 3.8 mostra que os tubos escolhidos pela heurística são praticamente os mesmos tubos escolhidos pelo projetista da estrutura.

Para o dimensionamento através da análise linear, os tubos e os locais estão relacionados com as Figuras 3.9 até 3.16 de acordo com a Tabela 3.7.

Análise Linear				
Local	Tubo (mm)	Quantidade	Peso (kgf)	Figura
1	76.2 X 1.90	3582	41053	3.9 / 3.16
2	88.9 X 3.00	1683	39361	3.10
3	101.6 X 3.00	333	8798	3.11
4	127.0 X 3.00	414	15586	3.12
5	141.3 X 3.00	90	3494	3.13
6	141.3 X 4.75	351	18358	3.14
7	141.3 X 6.30	36	2452	3.15

Tabela 3.7

Para o dimensionamento através da análise não linear, os tubos e os locais estão relacionados com as Figuras 3.9 até 3.16 de acordo com a Tabela 3.8.

Análise Não Linear				
Local	Tubo (mm)	Quantidade	Peso (kgf)	Figura
1	76.2 X 1.90	3510	39982	3.9
2	88.9 X 3.00	1683	39620	3.10
3	101.6 X 3.00	333	8798	3.11
4	127.0 X 3.00	414	15586	3.12
5	168.3 X 4.80	90	6608	3.13
6	141.3 X 4.75	351	18358	3.14
7	141.3 X 5.60	36	2191	3.15
8	88.9 X 3.00	72	1695	3.16

Tabela 3.8

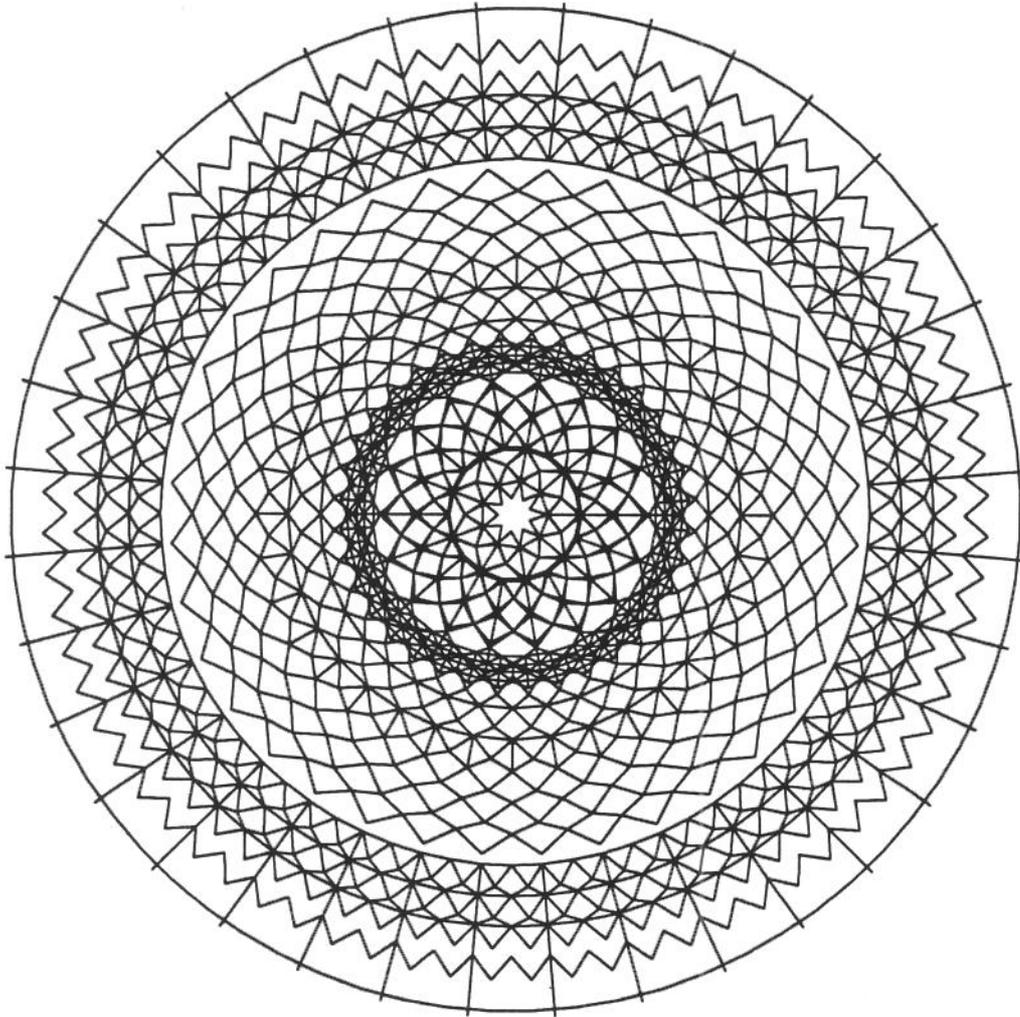


Figura 3.9

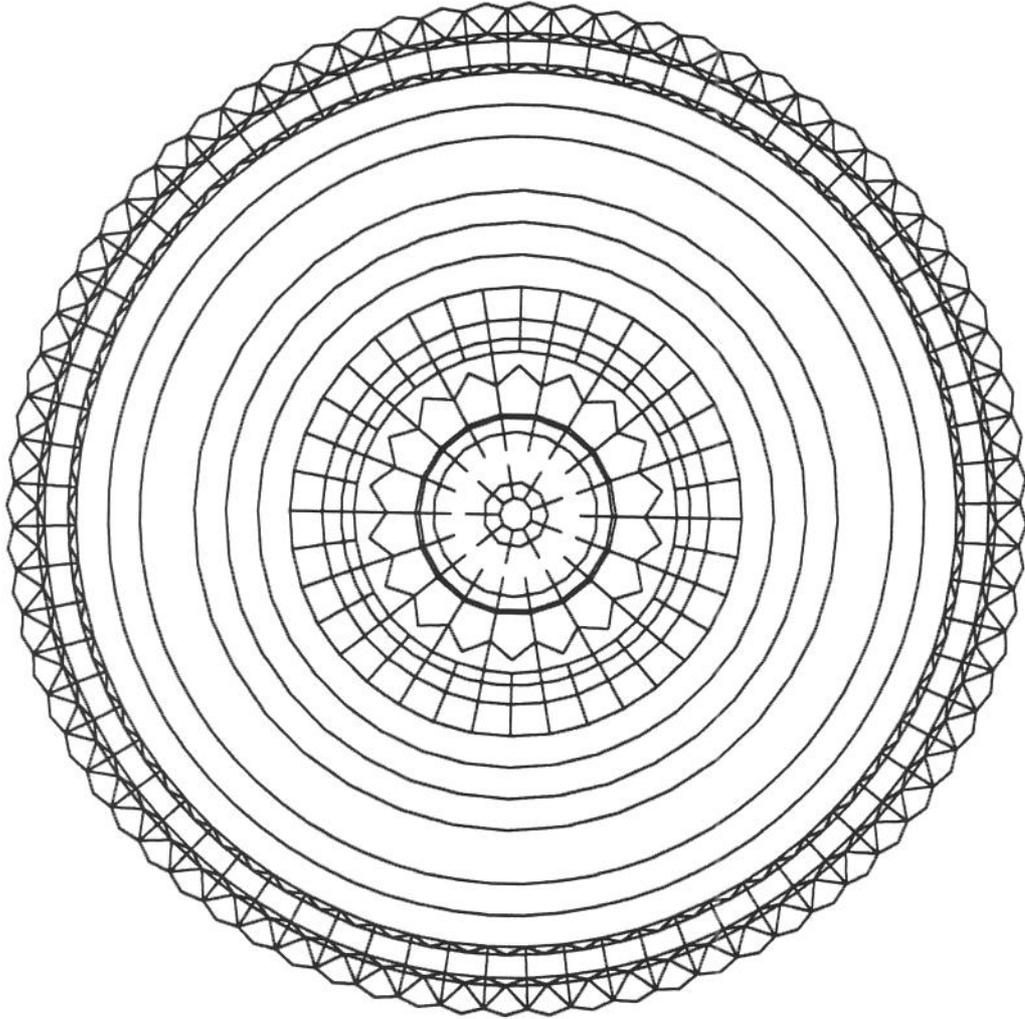


Figura 3.10

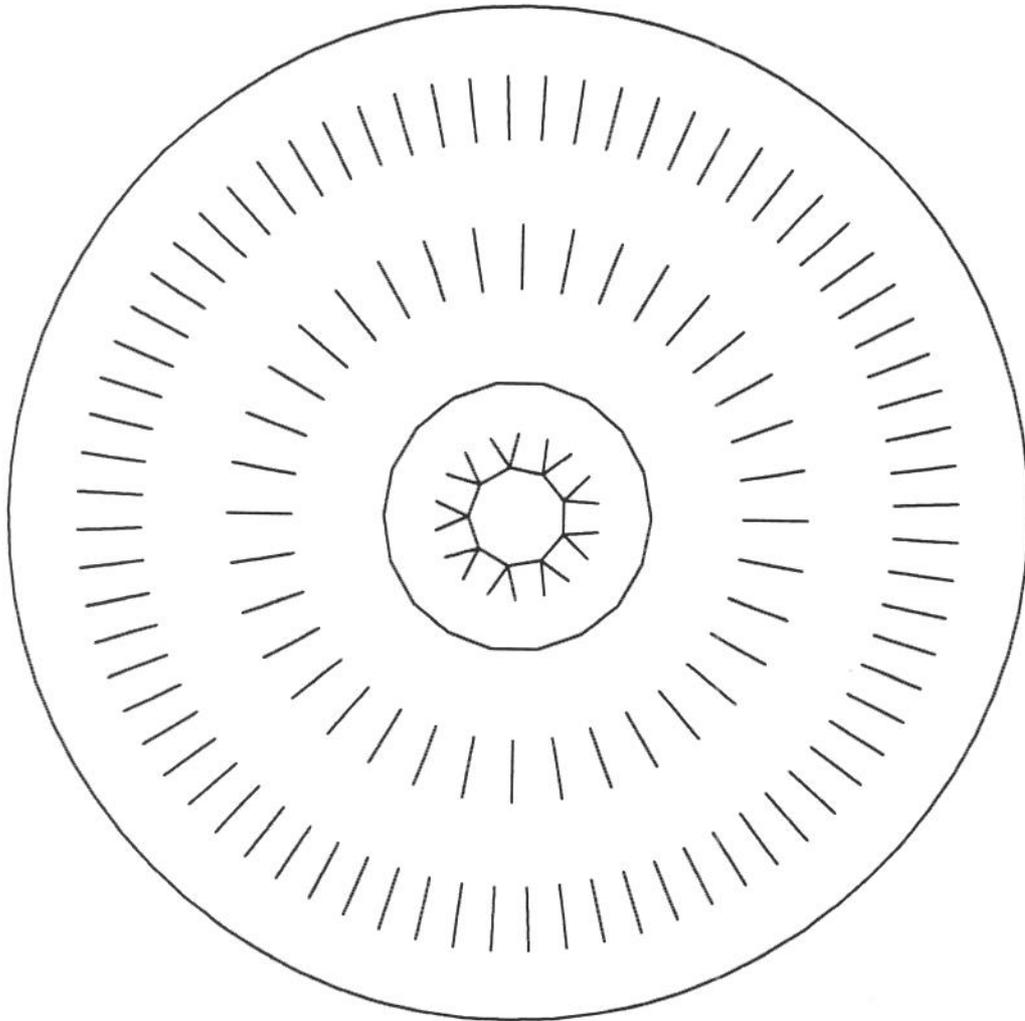


Figura 3.11

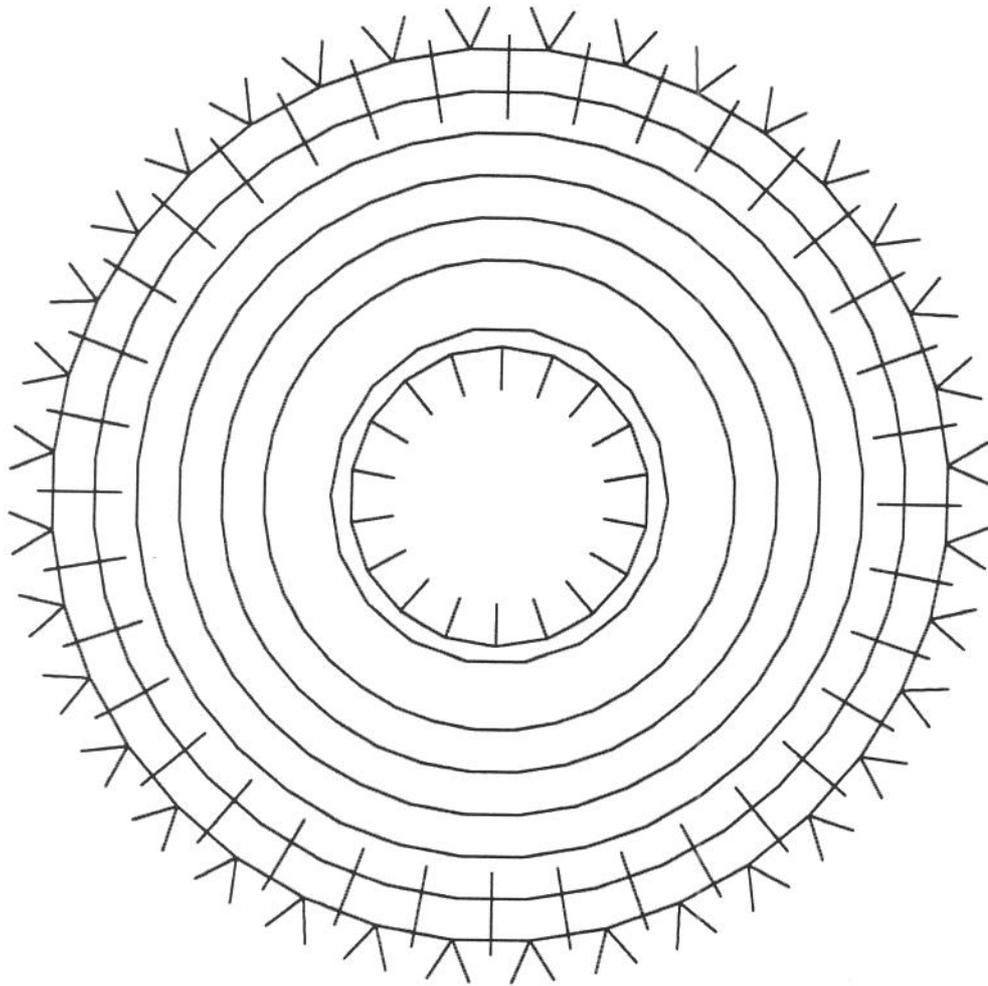


Figura 3.12

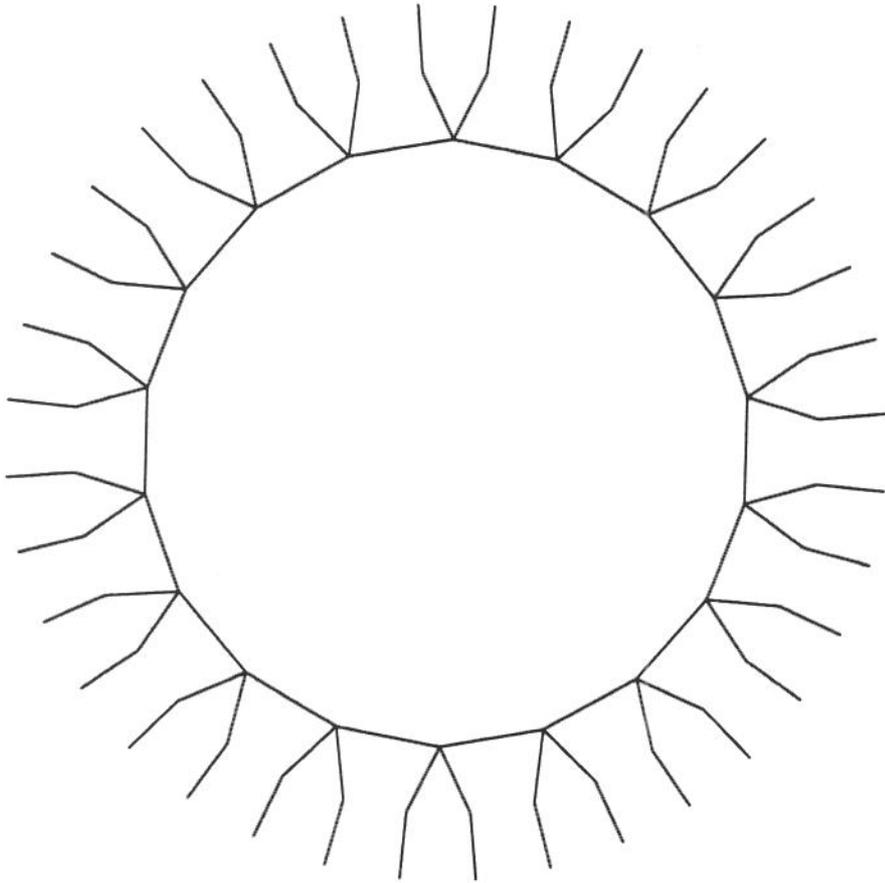


Figura 3.13

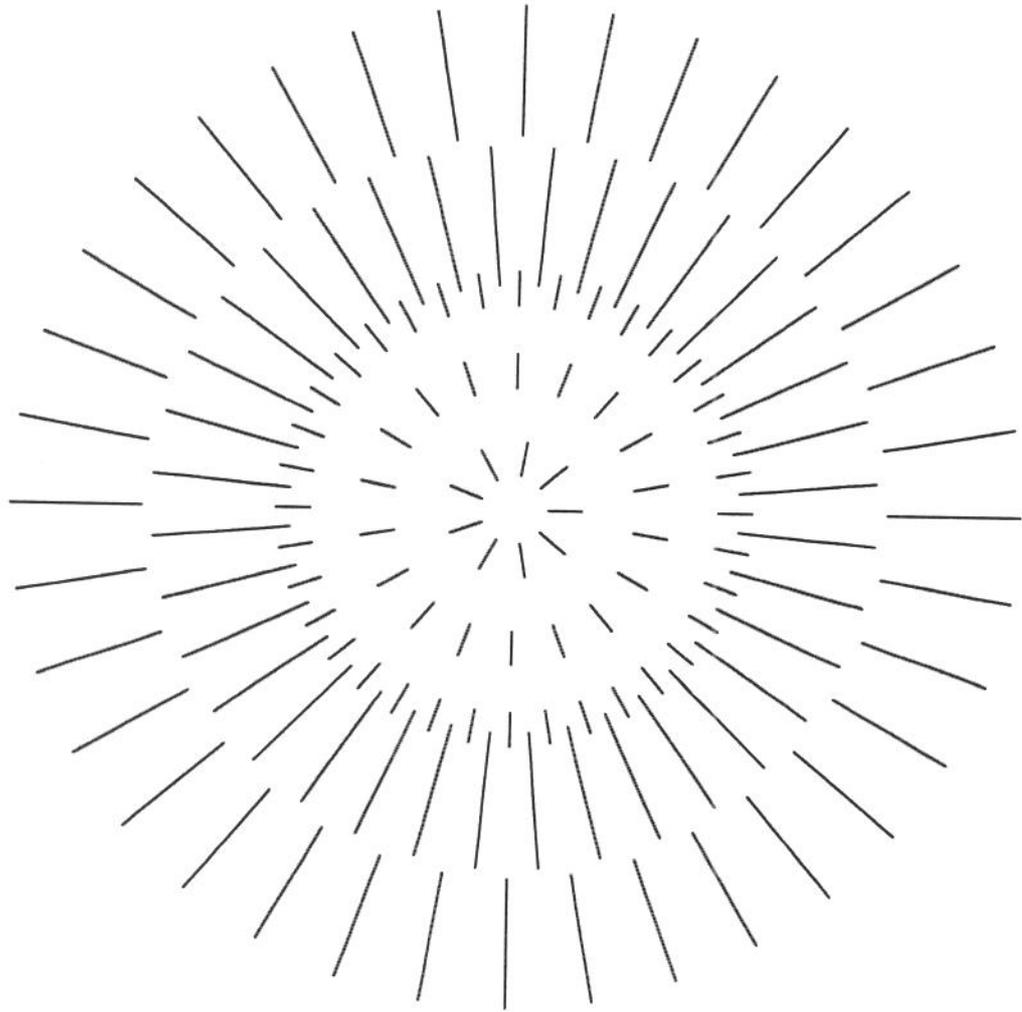


Figura 3.14

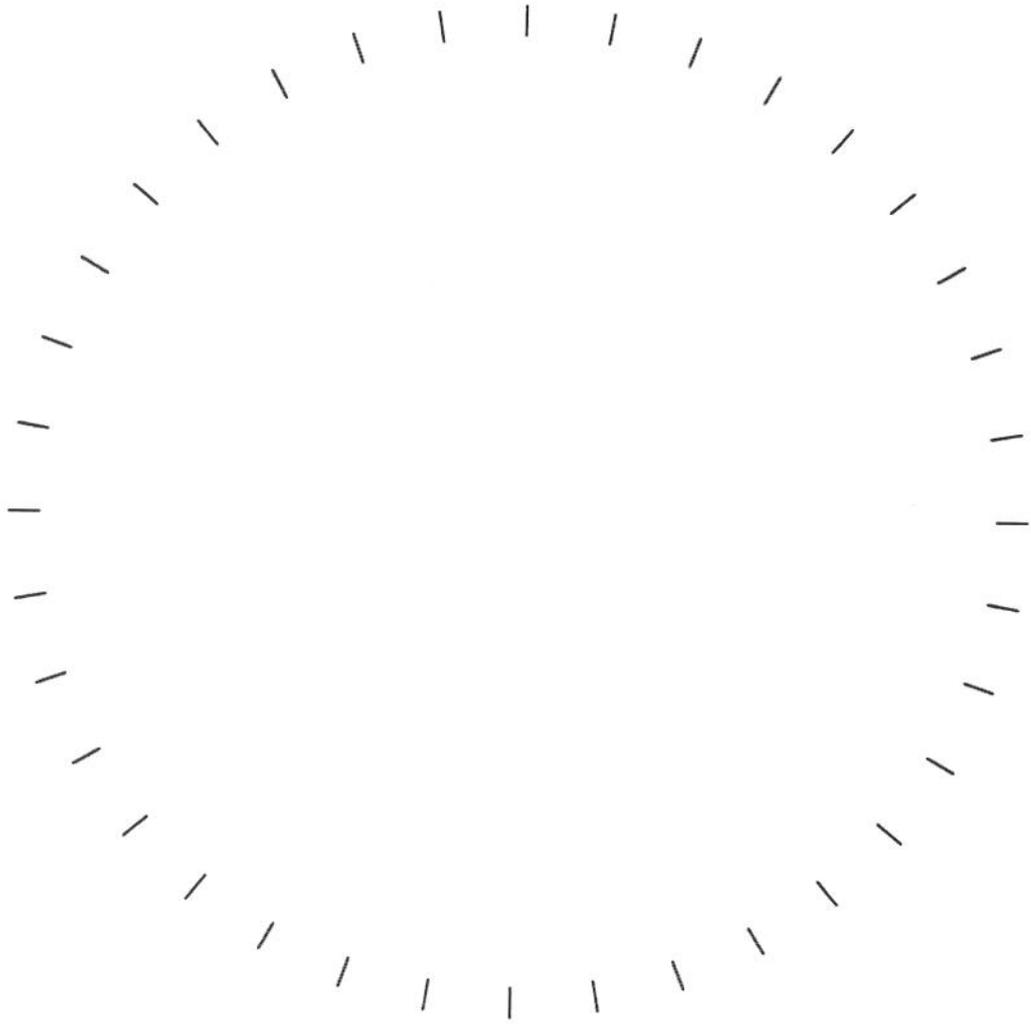


Figura 3.15

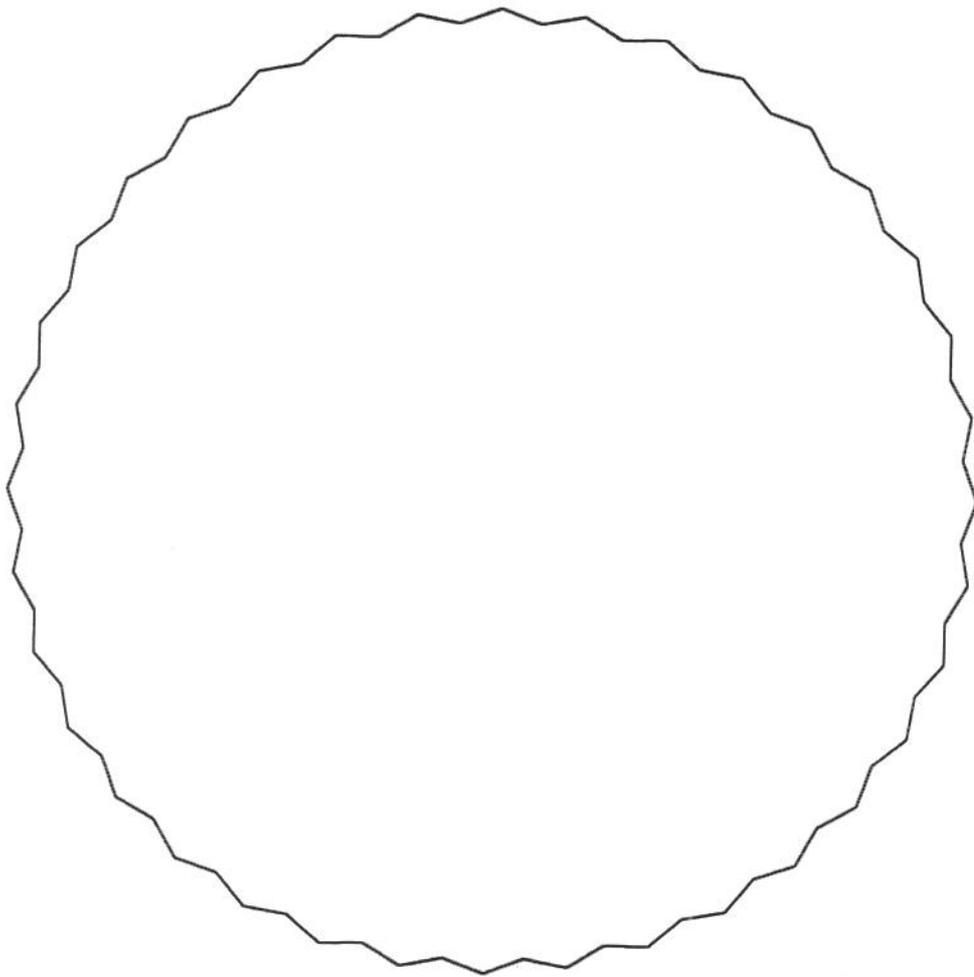


Figura 3.16

4. Análise De Rede De Cabos

O propósito principal deste capítulo é mostrar que o elemento finito definido no capítulo 2 pode ser utilizado para a análise e para o dimensionamento das estruturas que incluem cabos de aço tensionados, sendo especialmente adequado para modelar a etapa de tensionamento que é geralmente necessária neste tipo de estrutura. É importante observar que as estruturas em que predominam cabos de aço tensionados, definem um subconjunto das tenso estruturas.

Em particular, será analisada a estrutura com cobertura suspensa formada por uma rede de cabos de aço, com forma inicial definida pela superfície de um parabolóide hiperbólico, delimitada por um cilindro de seção transversal elíptica, cujo eixo contém o ponto de sela da superfície do parabolóide hiperbólico, e é paralelo a um vetor perpendicular à superfície do parabolóide hiperbólico neste ponto. A curva fechada definida pela intersecção da superfície do cilindro com a superfície do parabolóide hiperbólico define o eixo de um anel, que é geralmente de concreto, e será referido como anel de borda. Uma série de pilares, geralmente de concreto, com alturas possivelmente diferentes para acompanhar a superfície do parabolóide hiperbólico, sustenta o anel de borda. Os cabos de aço são dispostos de modo que suas projeções em planta sejam paralelas às direções dos eixos da elipse.

Uma outra motivação para uma dedicação especial a este tipo de estrutura reside no fato de que a sua construção requer baixo consumo de material e é fácil de ser executada. Porém é interessante observar que é praticamente inexistente no Brasil a edificação de estruturas que incluem cabos de aço tensionados, muito embora a construção do Pavilhão do São Cristóvão, na cidade do Rio de Janeiro, esteja entre as primeiras

obras executadas no mundo com cobertura formada por uma rede de cabos de aço na forma da superfície de um parabolóide hiperbólico.

Uma apresentação detalhada do desenvolvimento histórico das tenso estruturas, pode ser encontrado na referência [37]. As tenso estruturas tem despertado ao longo do tempo, o interesse de alguns pesquisadores brasileiros. Em especial, apresentaram contribuição, para a análise e também para o dimensionamento de estruturas que incluem cabos de aço tensionados, os autores das seguintes referências [4] e [53].

4.1 Rede de cabos com planta elíptica

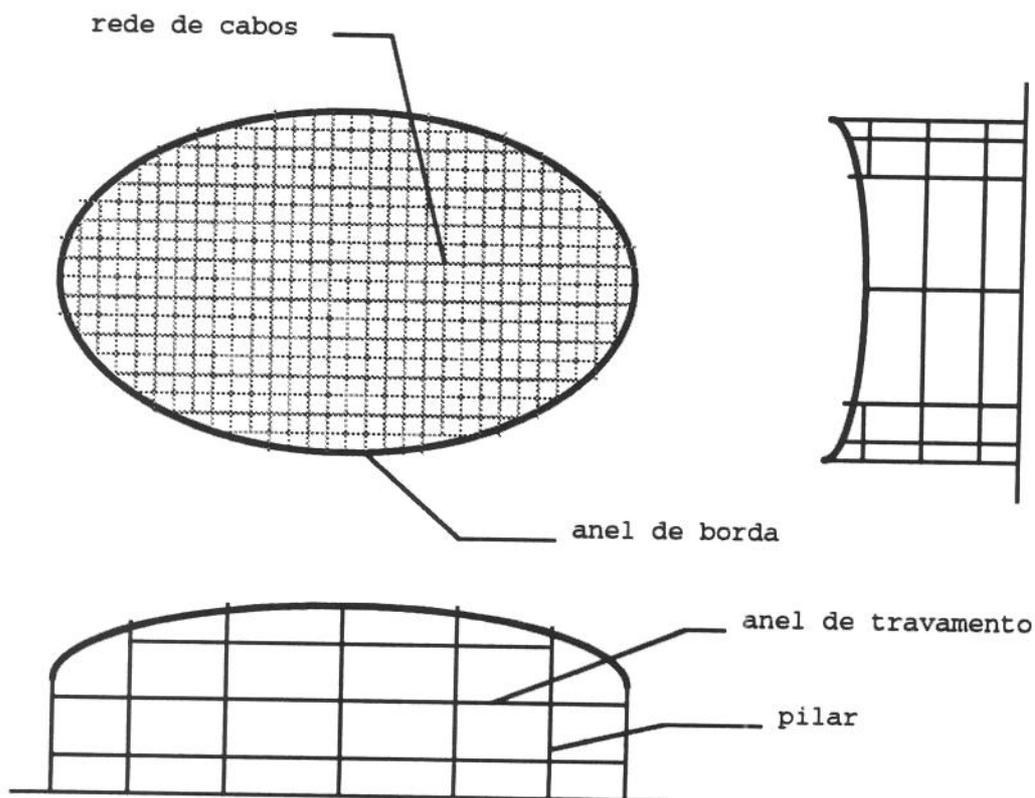


Figura 4.1

A Figura 4.1 mostra um esquema geral do tipo de estrutura que será analisada neste capítulo, colocando uma primeira dificuldade a ser superada. Esta primeira dificuldade pode ser representada na seguinte questão : Como pode ser modelado o anel de borda ?.

Este estudo empregará elementos de pórtico espacial, utilizados largamente na análise linear de estruturas, para modelar o anel de borda. O lugar geométrico do eixo do anel de borda será definido por uma linha poligonal fechada. O elemento de pórtico espacial para pequenos deslocamentos é bastante adequado, pois, ao contrário do esperado para a rede de cabos, pequenos deslocamentos são esperados para o anel de borda.

4.1.1 A equação da elipse

Conforme mostra a Figura 4.2, considere uma elipse com centro na origem do sistema de coordenadas e eixo maior paralelo ao eixo das coordenadas x.

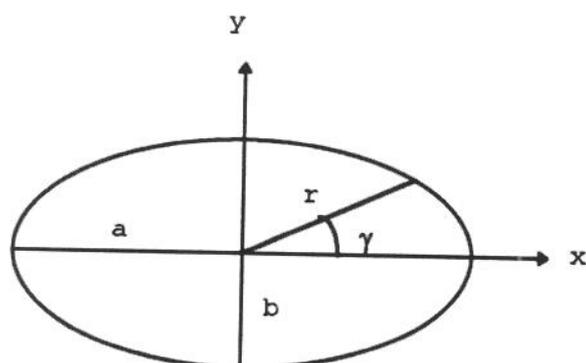


Figura 4.2

A equação da elipse, em coordenadas retangulares, é dada por :

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

A equação da elipse, em coordenadas polares, é dada por :

$$r = \frac{ab}{\sqrt{(b \cos \gamma)^2 + (a \sin \gamma)^2}}$$

4.1.2 A equação da superfície do parabolóide hiperbólico

Considere um parabolóide hiperbólico cujos dois planos de simetria contém respectivamente os eixos x e y do sistema de coordenadas.

Considere h como a coordenada z do ponto central, ou seja a altura do ponto de sela. A equação da superfície do parabolóide hiperbólico, que cobre uma elipse de semi eixo maior a e semi eixo menor b, pode ser escrita como a seguir, onde o produto AB deve ser negativo :

$$z = A\left(\frac{x}{a}\right)^2 + B\left(\frac{y}{b}\right)^2 + h$$

4.1.3 A discretização do anel de borda

Uma solução elegante para o problema colocado pela discretização do anel de borda seria dividir a curva fechada definida pela intersecção da superfície do cilindro de seção transversal elíptica com a superfície do parabolóide hiperbólico em partes iguais. Assim as coordenadas dos pontos determinados por esta divisão seriam as coordenadas dos nós da discretização. Entretanto, a realização desta divisão é uma dificuldade que exige um grande esforço para ser superada.

A abordagem adotada consiste em dividir a elipse que define a seção transversal do cilindro em partes aproximadamente iguais. Assim as coordenadas x e y dos pontos determinados por esta divisão definem as coordenadas x e y dos nós da discretização. A coordenada z de cada ponto da discretização, pode ser obtida com a ajuda da expressão para a superfície do parabolóide hiperbólico.

4.1.4 A divisão da elipse

Nesta seção será descrita uma maneira para dividir uma elipse em partes aproximadamente iguais. Entretanto, esta divisão será em partes iguais no caso da elipse reduzir-se a uma circunferência. Em decorrência da simetria, basta dividir somente um dos quatro quadrantes da elipse.

Conforme mostra a Figura 4.3, considere o primeiro quadrante de uma elipse, com raios maior e menor dados respectivamente por a e b , dividido em m partes não necessariamente iguais. Seja s_i o comprimento do arco definido pelos pontos número i e número $(i - 1)$, e seja θ_i o ângulo definido pelos raios associados a estes dois pontos.

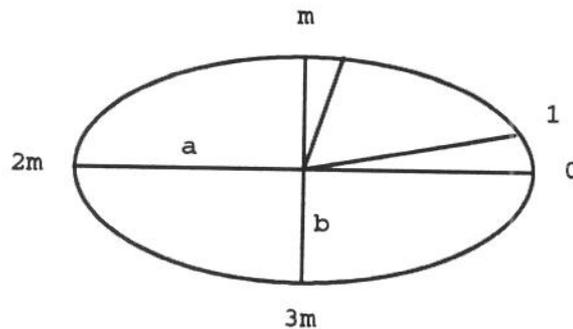


Figura 4.3

Observe que para uma discretização adequada do anel de borda, m deve ser um número relativamente grande, portanto podem ser escritas as seguintes expressões :

$$s_1 \approx a\theta_1$$

$$s_m \approx b\theta_m$$

Pela imposição de igualdade nestes comprimentos, segue :

$$\theta_m \approx \frac{a}{b} \theta_1$$

Portanto, para uma divisão da elipse em partes aproximadamente iguais, a expressão anterior sugere estabelecer que a sequência de ângulos seja crescente desde θ_1 até θ_m . Uma sequência crescente para os ângulos θ_i pode ser obtida pela imposição de uma variação linear para θ_i em função do índice i , da seguinte maneira :

$$\theta_i = f_i \theta_1$$

$$f_1 = 1$$

$$f_m = \frac{a}{b}$$

Definindo,

$$\mu = \frac{a}{b}$$

e impondo uma variação linear para f_i em função do índice i , segue :

$$f_i = \frac{(\mu - 1)i + m - \mu}{m - 1}$$

O ângulo θ_1 pode ser determinado através da seguinte equação :

$$\sum_{i=1}^m \theta_i = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta_1 \sum_{i=1}^m f_i = \frac{\pi}{2}$$

mas,

$$\sum_{i=1}^m f_i = \frac{m(\mu + 1)}{2}$$

portanto o ângulo θ_1 pode ser escrito como :

$$\theta_1 = \frac{\pi}{(\mu + 1)m}$$

Observe que no caso da elipse reduzir-se a uma circunferência, isto é, quando $\mu = 1$, a expressão para θ_1 implica numa divisão em partes iguais.

Como declarado anteriormente, θ_1 é o ângulo definido pelos raios associados as pontos número i e número $(i - 1)$. Entretanto é conveniente escrever uma expressão para o ângulo associado a cada ponto da divisão da elipse. Seja γ_k o ângulo associado ao ponto número k , logo :

$$\gamma_k = \sum_{i=1}^k \theta_i$$

que conduz à :

$$\gamma_k = \frac{\pi(\mu - 1)k^2 + \pi(2m - \mu - 1)k}{2m(m - 1)(\mu + 1)}$$

Também é conveniente escrever uma expressão para o número do ponto dado um certo ângulo γ , o que pode ser obtido através da solução da seguinte equação do segundo grau :

$$\pi(\mu - 1)k^2 + \pi(2m - \mu - 1)k - 2m(m - 1)(\mu + 1)\gamma = 0$$

A solução da equação anterior pode ser escrita como :

$$k = \frac{c_0}{\sqrt{1 + 2c_0c_1 + 1}}$$

onde,

$$c_0 = \frac{4m(m-1)(\mu+1)\gamma}{\pi(2m-\mu-1)}$$

$$c_1 = \frac{\mu-1}{2m-\mu-1}$$

Note que a solução é válida no caso da elipse reduzir-se a uma circunferência, isto é, quando $\mu = 1$.

4.1.5 O posicionamento da rede de cabos

Observe que para definir a posição da rede de cabos, basta definir as coordenadas dos seus nós no plano xy, pois as coordenadas z podem ser obtidas com a ajuda da expressão para a superfície do parabolóide hiperbólico. Os cabos com projeções em planta paralelas ao eixo maior da elipse serão referidos por cabos longitudinais. Os cabos com projeções em planta paralelas ao eixo menor da elipse serão referidos por cabos transversais. As extremidades dos cabos são ligadas à nós simetricamente localizados no anel de borda.

É desejável que os cabos longitudinais pudessem ser igualmente espaçados ao longo do eixo menor da elipse, e que os cabos transversais pudessem ser igualmente espaçados ao longo do eixo maior da elipse. Deste modo seria produzida uma malha quadrada que facilitaria a fixação das telhas. Entretanto, a discretização do anel de borda torna difícil

que isto ocorra. Uma maneira de contornar esta situação é **arredondar** a posição ideal de cada cabo para a posição do mais próximo ponto da discretização do anel de borda. Este arredondamento é desnecessário para posicionar um cabo longitudinal na coordenada y igual a zero e para posicionar um cabo transversal na coordenada x igual a zero. Observe que a simetria existente neste problema sugere que seja descrito o posicionamento dos cabos longitudinais nas coordenadas y positivo e o posicionamento dos cabos transversais nas coordenadas x positivo.

Considere m_y o número de divisões do semi eixo menor da elipse. Logo os cabos longitudinais deveriam ser posicionados nas coordenadas y_j dadas por :

$$Y_j = \frac{b}{m_y} j$$

$$j = 1, \dots, (m_y - 1)$$

O algoritmo seguinte utiliza expressões deduzidas na seção anterior para determinar a coordenada y do ponto da divisão da elipse mais próximo ao ponto onde deveria ser posicionado o cabo longitudinal.

para $j \leftarrow 1$ até $m_y - 1$ faça

começo

$$\gamma \leftarrow \arctan\left(\frac{j}{\mu\sqrt{m_y^2 - j^2}}\right)$$

$$c_0 \leftarrow \frac{4m(m-1)(\mu+1)\gamma}{\pi(2m-\mu-1)}$$

$$c_1 \leftarrow \frac{\mu - 1}{2m - \mu - 1}$$

$$k \leftarrow \left[0.5 + \frac{c_0}{\sqrt{1 + 2c_0c_1 + 1}} \right]$$

$$\gamma \leftarrow \frac{\pi(\mu - 1)k^2 + \pi(2m - \mu - 1)k}{2m(m - 1)(\mu + 1)}$$

$$y_j \leftarrow \frac{ab \sin \gamma}{\sqrt{(b \cos \gamma)^2 + (a \sin \gamma)^2}}$$

fim

Considere m_x o número de divisões do semi eixo maior da elipse. Logo os cabos transversais deveriam ser posicionados nas coordenadas x_i dadas por :

$$x_i = \frac{a}{m_x} i$$

$i = 1, \dots, (m_x - 1)$

O algoritmo seguinte utiliza expressões deduzidas na seção anterior para determinar a coordenada x do ponto da divisão da elipse mais próximo ao ponto onde deveria ser posicionado o cabo transversal.

para $i \leftarrow 1$ até $m_x - 1$ faça

começo

$$\gamma \leftarrow \arctan\left(\frac{\sqrt{m_x^2 - i^2}}{i\mu}\right)$$

$$c_0 \leftarrow \frac{4m(m-1)(\mu+1)\gamma}{\pi(2m-\mu-1)}$$

$$c_1 \leftarrow \frac{\mu-1}{2m-\mu-1}$$

$$k \leftarrow \left[0.5 + \frac{c_0}{\sqrt{1+2c_0c_1+1}}\right]$$

$$\gamma \leftarrow \frac{\pi(\mu-1)k^2 + \pi(2m-\mu-1)k}{2m(m-1)(\mu+1)}$$

$$x_i \leftarrow \frac{ab \cos \gamma}{\sqrt{(b \cos \gamma)^2 + (a \sin \gamma)^2}}$$

fim

4.1.6 Os nós da rede de cabos

A Figura 4.4 mostra que os nós que pertencem exclusivamente à rede de cabos estão localizados no interior da elipse. Para estes nós observe que para cada valor da coordenada j , o valor da coordenada i varia de modo simétrico entre um limite inferior e um limite superior. De maneira análoga, para cada valor da coordenada i , o valor da coordenada j varia de modo simétrico entre um limite inferior e um limite superior.

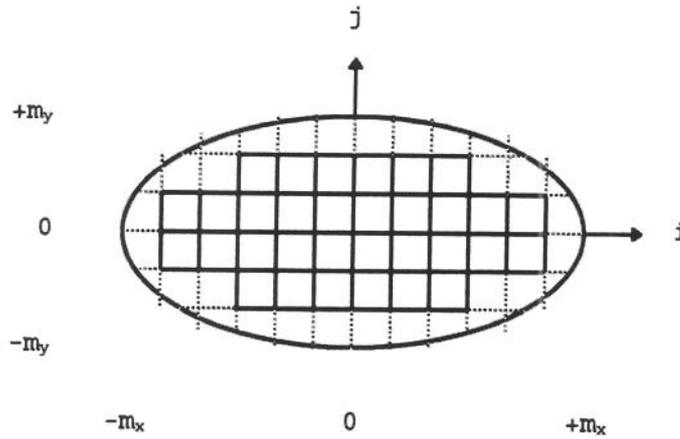


Figura 4.4

Seja m_{xj} o limite superior do intervalo de variação da coordenada i para um dado valor da coordenada j , m_{yi} o limite superior do intervalo de variação da coordenada j para um dado valor da coordenada i e δ a menor distância, medida paralelamente aos eixos, permitida entre um nó da rede de cabos e o eixo da elipse. A especificação de um valor maior do que zero para δ tem como objetivo eliminar nós da rede de cabos que poderiam ser considerados muito perto do anel de borda. Os algoritmos para determinar m_{xj} e m_{yi} estão descritos a seguir.

$$m_{x0} \leftarrow m_x - 1$$

para $j \leftarrow 1$ até $m_y - 1$ faça

começo

$$x \leftarrow a \sqrt{1 - \left(\frac{y_j}{b}\right)^2}$$

$$i \leftarrow m_x$$

repita

$i \leftarrow i - 1$

$$y \leftarrow b\sqrt{1 - \left(\frac{x_i}{a}\right)^2}$$

até $(x_i \leq x - \delta)$ e $(y_j \leq y - \delta)$

$m_{xj} \leftarrow i$

fim

$m_{y0} \leftarrow m_y - 1$

para $i \leftarrow 1$ até $m_x - 1$ faça

começo

$$y \leftarrow b\sqrt{1 - \left(\frac{x_i}{a}\right)^2}$$

$j \leftarrow m_y$

repita

$j \leftarrow j - 1$

$$x \leftarrow a\sqrt{1 - \left(\frac{y_j}{b}\right)^2}$$

até $(y_j \leq y - \delta)$ e $(x_i \leq x - \delta)$

$m_{y1} \leftarrow j$

fim

É importante observar que os nós que pertencem simultaneamente à rede de cabos e ao anel de borda, podem ser referidos pelas coordenadas $(-m_x, j)$, (m_x, j) , $(i, -m_y)$ e (i, m_y) .

4.1.7 O posicionamento dos pilares

O posicionamento dos pilares está restrito às posições definidas pelos nós da discretização do anel de borda. A ligação entre o anel de borda e o pilar pode dificultar a rotação do anel em torno do seu eixo, favorecendo o aparecimento de momento torçor no anel. Entretanto, o valor absoluto do momento torçor no anel de borda pode ser minimizado. Para que isto ocorra, os pilares devem ser posicionados conforme pode ser mostrado com a ajuda da Figura 4.5. O eixo de menor momento de inércia da seção transversal do pilar deve ser tangente à equação da elipse, ou em outras palavras, o eixo de maior momento de inércia da seção transversal do pilar deve ser paralelo ao vetor unitário v .

É importante observar que a flambagem dos pilares pode representar uma dificuldade ao projeto deste tipo de estrutura. Entretanto, esta dificuldade pode ser superada pela introdução dos anéis de travamento. Os anéis de travamento, conforme mostra a Figura 4.1, são anéis na forma de elipse ou arco de elipse, paralelos ao plano xy que interligam os pilares.

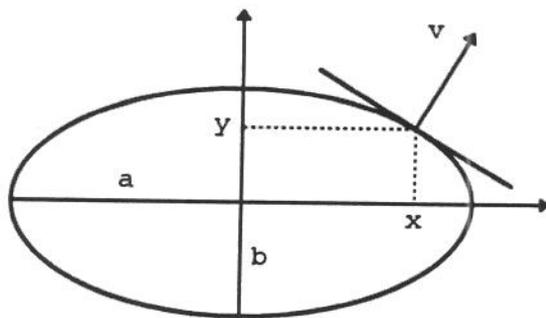


Figura 4.5

As expressões para as componentes do vetor unitário v , podem ser escritas como :

$$v_x = \frac{xb^2}{\sqrt{x^2b^4 + y^2a^4}}$$

$$v_y = \frac{ya^2}{\sqrt{x^2b^4 + y^2a^4}}$$

4.1.8 A forma da seção transversal do anel de borda

Objetivando a facilidade construtiva, é recomendável que para a forma da seção transversal do anel de borda seja considerada a seção retangular. No caso de grandes vãos livres, a seção retangular vazada é indicada, pois neste caso as grandes dimensões requeridas para o seu dimensionamento facilitam sua execução como seção retangular vazada, o que proporciona uma economia de concreto. Entretanto, no caso de pequenos vãos livres, a seção retangular cheia é inevitável, pois neste caso as pequenas dimensões requeridas para o seu dimensionamento impedirão sua execução como seção vazada.

4.1.9 O eixo do anel de borda

As coordenadas dos pontos que definem o eixo do anel de borda podem ser escritas com a ajuda das expressões para a equação da elipse e da expressão para a equação da superfície do parabolóide hiperbólico, assim :

$$r = \left[\left(\frac{\cos \gamma}{a} \right)^2 + \left(\frac{\sin \gamma}{b} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$x = r \cos \gamma$$

$$y = r \sin \gamma$$

$$z = A \left(\frac{x}{a} \right)^2 + B \left(\frac{y}{b} \right)^2 + h$$

Um vetor u , tangente ao eixo do anel pode ser determinado por :

$$u_x = \frac{dx}{d\gamma}, \quad u_y = \frac{dy}{d\gamma}, \quad u_z = \frac{dz}{d\gamma}$$

cujo desenvolvimento conduz à :

$$u_x = \frac{-r^3 \sin \gamma}{b^2}$$

$$u_y = \frac{r^3 \cos \gamma}{a^2}$$

$$u_z = \frac{2(B - A)r^4 \sin \gamma \cos \gamma}{a^2 b^2}$$

Um vetor v , perpendicular à superfície do parabolóide hiperbólico pode ser determinado por :

$$v_x = -\frac{dz}{dx}, \quad v_y = -\frac{dz}{dy}, \quad v_z = 1$$

cujo desenvolvimento, quando calculado num ponto pertencente ao anel de borda, conduz à :

$$v_x = \frac{-2Ar \cos \gamma}{a^2}$$

$$v_y = \frac{-2Br \sin \gamma}{b^2}$$

$$v_z = 1$$

Como esperado, observe que o produto escalar $u^t v$ é igual a zero. Um vetor w , perpendicular aos vetores u e v pode ser determinado pelo produto vetorial $u \otimes v$, assim :

$$w_x = \frac{r^3 \cos \gamma}{a^2} + \frac{4B(B - A)r^5 \cos \gamma \sin^2 \gamma}{a^2 b^4}$$

$$w_y = \frac{r^3 \sin \gamma}{b^2} - \frac{4A(B - A)r^5 \cos^2 \gamma \sin \gamma}{a^4 b^2}$$

$$w_z = \frac{2Ar^4 \cos^2 \gamma}{a^4} + \frac{2Br^4 \sin^2 \gamma}{b^4}$$

Numa tentativa de produzir predominantemente esforço de compressão no anel de borda e também para facilitar a fixação dos cabos, a inclinação da seção transversal do anel deve ser compatível com a inclinação da superfície do parabolóide hiperbólico. O eixo de maior momento de inércia da seção transversal do anel deve ser perpendicular à superfície do parabolóide hiperbólico, pois em torno deste eixo é esperado um maior esforço de flexão.

4.1.10 Força no anel de borda devida ao vento lateral

Para determinar em quais pontos do anel de borda existe força aplicada devida a um vento soprando lateralmente, considere a Figura 4.6. O vetor d é paralelo à direção do vento. As duas retas tangentes à elipse são paralelas ao vetor d . O vetor s é perpendicular à reta que une os dois pontos da elipse por onde passam as retas tangentes. O vetor r define um ponto qualquer da elipse. Lembre que esta elipse é a projeção do eixo do anel de borda no plano xy .

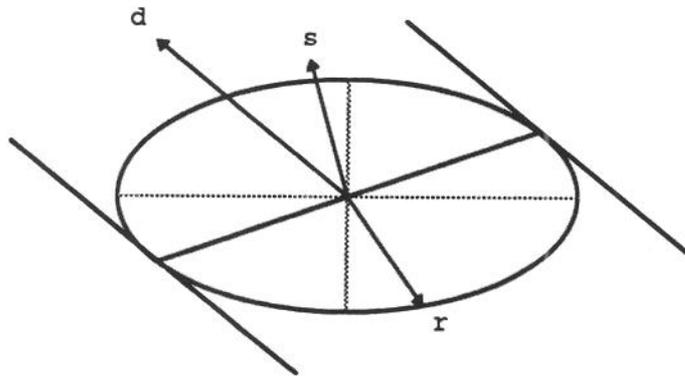


Figura 4.6

A inclinação de uma reta tangente à elipse pode ser determinada com a ajuda de :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}$$

Entretanto, a inclinação da reta que une os dois pontos da elipse por onde passam as retas tangentes, pode ser determinada por :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d_y}{d_x} \Rightarrow \frac{y}{x} = -\frac{b^2d_x}{a^2d_y}$$

e lembrando que o vetor s é perpendicular a esta reta, segue :

$$-\frac{s_x}{s_y} = -\frac{b^2 d_x}{a^2 d_y}$$

e ainda observando que para $d_x < 0 \Rightarrow s_x < 0$, é possível definir as componentes do vetor s como :

$$s_x = b^2 d_x$$

$$s_y = a^2 d_y$$

É fácil verificar que existe força aplicada nos pontos do anel de borda onde ocorrer $s^t r < 0$. Para a determinação da intensidade e da direção desta força considere a Figura 4.7, onde são mostradas as duas situações possíveis do choque do vento soprando lateralmente contra as faces do anel de borda. Considere os vetores d , v , w , descritos na seção anterior, como normalizados.

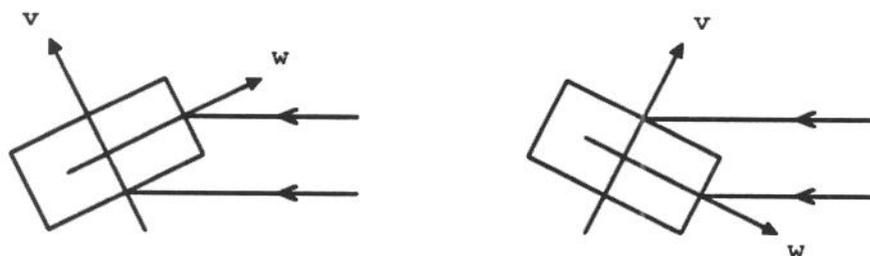


Figura 4.7

Considere p como a pressão exercida pelo vento numa superfície plana. Esta pressão pode ser determinada em função da velocidade do vento. Conforme sugere a Figura 4.3, considere o primeiro quadrante do anel de borda discretizado em m elementos de comprimento aproximadamente

iguais. Assim, o comprimento aproximado δ de cada elemento pode ser determinado por :

$$\delta = \frac{\pi}{m} \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{8}}$$

e definindo as dimensões l_v e l_w da seção retangular do anel de borda como as dimensões paralelas ao vetor v e ao vetor w respectivamente, segue que a força aplicada num nó do anel de borda, devida ao vento soprando lateralmente, pode ser escrita como :

$$f = -\rho\delta l_v (w^t d)^2 w + \rho\delta l_w (v^t d)^2 v \quad | \quad w_z > 0$$

$$f = -\rho\delta l_v (w^t d)^2 w - \rho\delta l_w (v^t d)^2 v \quad | \quad w_z < 0$$

4.2 Análise comparativa com um modelo experimental

A referência [28] apresenta os valores das medidas efetuadas num modelo experimental de rede de cabos tensionados, na forma da superfície de um parabolóide hiperbólico. A projeção em planta é um quadrado com diagonal medindo 204 polegadas. A rede é formada por uma malha ortogonal 12 x 12 paralela às diagonais do quadrado. Dois cantos opostos da diagonal são rebaixados de 9 polegadas a partir da origem, enquanto que os outros dois cantos são elevados de 9 polegadas a partir da origem. A origem está localizada no centro da superfície. Para os cabos foram utilizados fios de aço de alta resistência com diâmetro igual a 0.16 polegadas. Os fios foram espaçados em 17 polegadas, de modo uniforme e paralelo às diagonais. A rede foi ancorada ao longo das vigas rígidas e retas representadas pelos lados do quadrado como mostrado na figura 4.8.

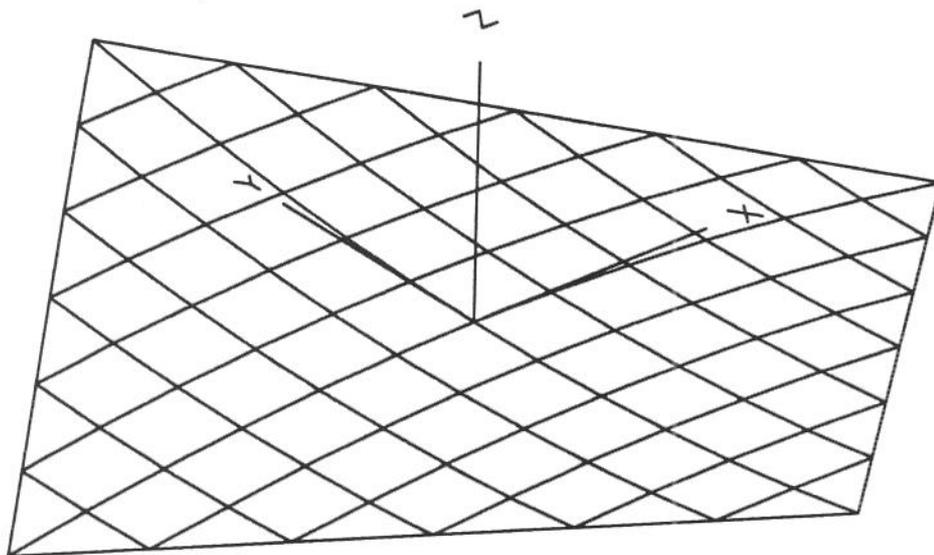


Figura 4.8

A unidade para força é igual a mil libras força, e será denotada por klf. A mínima força de ruptura dos fios de aço foi avaliada em 4.6 klf, enquanto que o módulo de elasticidade multiplicado pela área foi avaliado em 618.2 klf. O tensionamento dos fios foi realizado de modo que a componente horizontal da força atuando em cada fio fosse igual a 1.2 klf (aproximadamente 0.25 da força de ruptura).

Colunas atarracadas fixaram as extremidades das vigas, que eram suficientemente rígidas para não flexionar sob a ação das máximas forças estimadas para os fios. Defletômetros com sensibilidade igual a 0.001 polegadas foram fixados em vários pontos das vigas e não indicaram qualquer movimento para as máximas cargas aplicadas.

Os fios foram presos nos pontos nodais depois da rede ter sido tensionada e a correta geometria obtida. O modelo foi tensionado em vários estágios. As componentes horizontais das forças finais obtidas, apresentaram uma dispersão máxima igual a $2.7 * 10^{-2}$ do valor estipulado igual a 1.2 klf em cada fio. A geometria obtida para a rede, apresentou uma diferença máxima igual a $5 * 10^{-3}$ da forma requerida.

Note que para o modelo teórico, a configuração de equilíbrio da etapa de tensionamento é conhecida. Também são conhecidas as forças de tensionamento para todos os elementos da estrutura.

4.2.1 A equação da superfície do parabolóide hiperbólico

A equação da superfície do parabolóide hiperbólico para o modelo experimental pode ser escrita como :

$$z = \frac{a(y^2 - x^2)}{b^2}$$

Note que o valor de a é igual a 9 polegadas e o valor de b é igual a 102 polegadas.

4.2.2 O equilíbrio dos nós na etapa de tensionamento

Convém observar que o tensionamento da rede foi realizado de modo que a componente horizontal da força atuando em cada fio fosse igual a um determinado valor. Este valor será denotado por h. Logo, o equilíbrio de forças está satisfeito nas direções x e y para os nós internos da rede.

A seguir será mostrado que **se o peso próprio dos fios não for considerado**, o equilíbrio de forças na direção z , para os nós internos da rede, também está satisfeito no caso da superfície da rede ser dada pela equação do parabolóide hiperbólico.

Considerando que a malha é regular, com espaçamento constante dado por δ , as coordenadas x e y para os pontos nodais da rede podem ser escritas como :

$$x_i = i\delta$$

$$y_j = j\delta$$

Note que o valor de δ é igual a 17 polegadas e i e j são números inteiros. Assim, a coordenada z para o ponto (x_i, y_j) pode ser escrita como :

$$z_{i,j} = \frac{a\delta^2}{b^2} (j^2 - i^2)$$

Considere um determinado ponto nodal da rede, com seus quatro elementos incidentes como mostrado na Figura 4.9. Definindo θ_k como sendo o ângulo que o elemento k faz com a horizontal, a componente vertical da força aplicada no nó pelo elemento, denotada por v_k , pode ser escrita como :

$$v_1 = -h \tan \theta_1$$

$$v_2 = +h \tan \theta_2$$

$$v_3 = -h \tan \theta_3$$

$$v_4 = +h \tan \theta_4$$

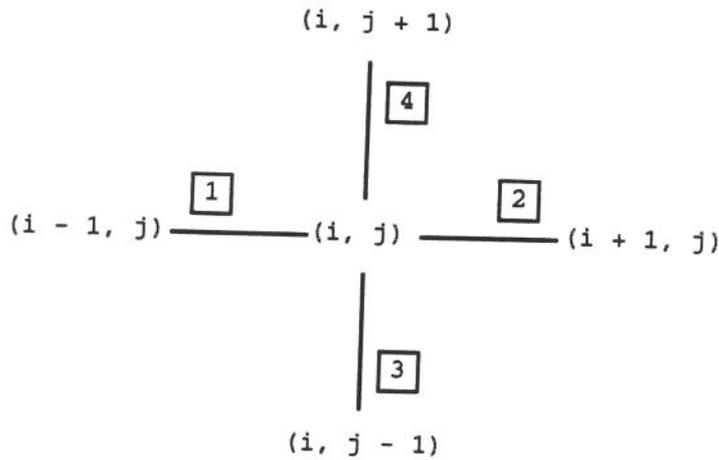


Figura 4.9

Entretanto, as tangentes dos ângulos θ_k podem ser escritas como :

$$\tan \theta_1 = \frac{z_{i,j} - z_{i-1,j}}{\delta} \Rightarrow v_1 = + \frac{ha\delta}{b^2} (2i - 1)$$

$$\tan \theta_2 = \frac{z_{i+1,j} - z_{i,j}}{\delta} \Rightarrow v_2 = - \frac{ha\delta}{b^2} (2i + 1)$$

$$\tan \theta_3 = \frac{z_{i,j} - z_{i,j-1}}{\delta} \Rightarrow v_3 = - \frac{ha\delta}{b^2} (2j - 1)$$

$$\tan \theta_4 = \frac{z_{i,j+1} - z_{i,j}}{\delta} \Rightarrow v_4 = + \frac{ha\delta}{b^2} (2j + 1)$$

Observe que :

$$-(v_1 + v_2) = (v_3 + v_4) = \frac{2ha\delta}{b^2}$$

Logo, o equilíbrio de forças na direção z para os nós internos da rede está satisfeito.

4.2.3 Estimativa do peso próprio dos fios

A força nodal *consistente* devida ao peso próprio dos fios pode ser calculada pela soma dos pesos de metade do comprimento dos elementos incidentes no nó. Definindo d como sendo o diâmetro do fio e ρ como sendo o peso específico do fio, a força nodal pode ser estimada por :

$$f = \frac{\pi d^2 \delta \rho}{2}$$

Convém observar que o valor de ρ não foi fornecido. Entretanto, o peso específico do aço é igual a $2.85 * 10^{-4}$ klf por polegada cúbica, resultando $f \approx 1.9 * 10^{-4}$ klf.

Observe que :

$$\left| \frac{f}{v_1 + v_2} \right| = \frac{\pi d^2 \rho b^2}{4ha} \approx 5.5 * 10^{-3}$$

O resultado anterior sugere que o peso próprio dos fios pode ser desprezado e que os erros encontrados na geometria da rede podem ser atribuídos ao fato das componentes horizontais das forças finais obtidas, apresentarem uma dispersão em relação ao valor estipulado.

4.2.4 Resultados observados

A Figura 4.10 mostra a numeração dos nós da rede. Esta numeração é diferente da numeração escolhida pelos autores do experimento que incluía somente os nós internos da rede.

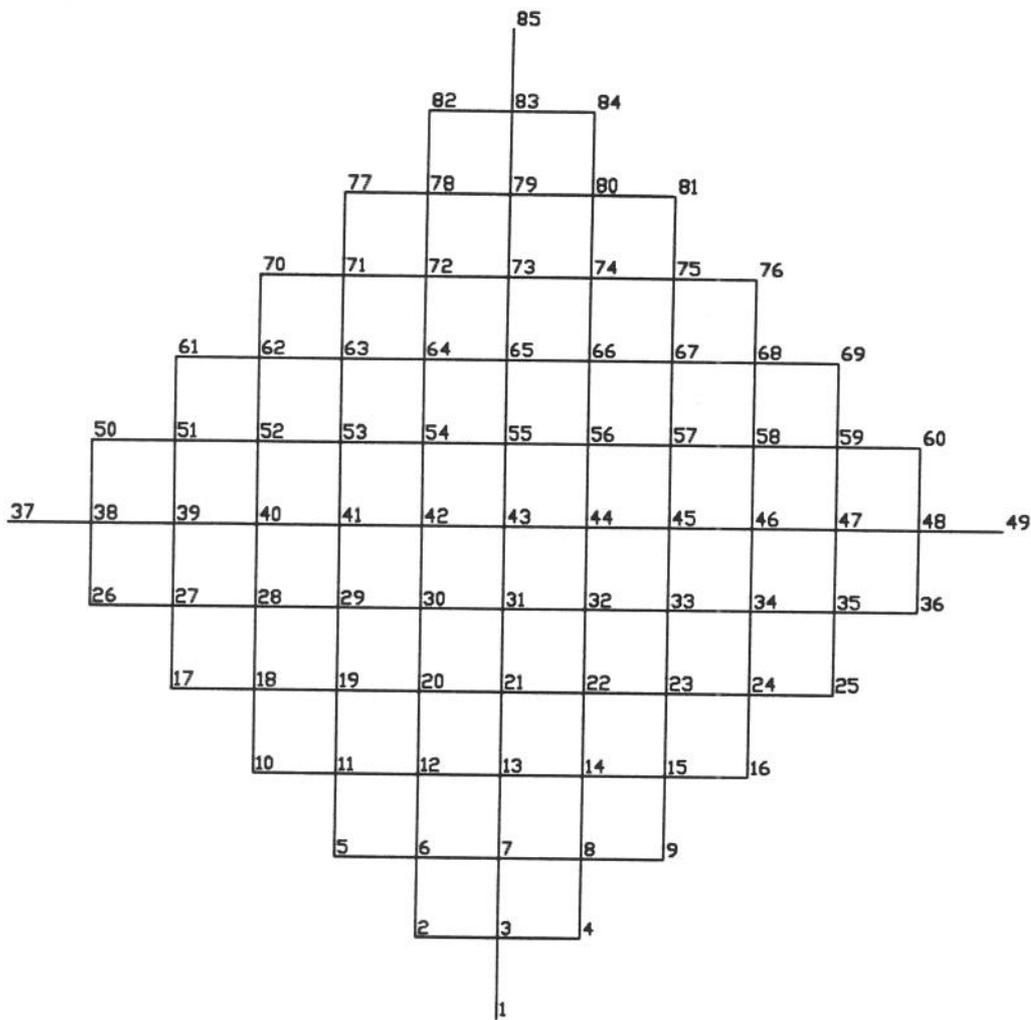


Figura 4.10

A Tabela 4.1 apresenta os deslocamentos verticais dos nós, para casos de carregamento por força vertical no sentido contrário ao eixo z , definidos por : (1) 0.22 klf aplicado no nó 43, (2) 0.22 klf aplicado no nó 21, (3) 0.22 klf aplicado no nó 7, (4) 0.022 klf aplicado somente nos nós internos desde o nó 1 até o nó 49.

N ^o	(1)	(2)	(3)	(4)
3	0.0232	-0.0075	-0.1981	-0.1260
6	0.0157	-0.0622	0.2165	-0.1880
13	-0.0059	-0.4150	-0.2850	-0.3820
15	-0.0043	-0.0492	-0.0276	-0.2480
19	-0.0268	*	*	-0.3465
20	-0.0826	-0.3860	-0.0579	*
22	-0.0826	-0.3860	-0.0579	-0.3565
24	-0.0045	0.0043	-0.0027	-0.1970
28	-0.0078	-0.0053	-0.0023	-0.2835
31	-0.3945	-0.3900	-0.0102	-0.4520
33	-0.0756	-0.0748	-0.0063	-0.3740
35	0.0138	*	*	-0.1345
39	0.0276	0.0047	0.0000	-0.1680
41	-0.1145	-0.0358	0.0047	-0.2560
42	-0.4290	*	*	-0.3345
43	-0.1610	-0.1040	0.0307	-0.3660
44	-0.3980	*	*	-0.3500
46	-0.0063	*	*	-0.2400
48	0.0234	0.0036	0.0000	-0.0826
52	-0.0079	*	*	-0.0728
54	-0.1970	-0.0059	0.0296	-0.1140
56	-0.2010	-0.0059	0.0296	-0.0890
57	-0.0791	-0.0039	0.0091	-0.0905
59	-0.0137	0.0000	0.0000	-0.0471
62	-0.0049	*	*	-0.0055
63	-0.0296	0.1180	0.0118	-0.0130
65	-0.1171	*	*	0.0039
67	-0.0315	0.0108	0.0095	-0.0130
68	-0.0043	*	*	-0.0047
72	-0.0079	0.0432	0.0287	0.0471
74	-0.0075	0.0432	0.0287	0.0394
79	-0.0315	0.0472	0.0354	0.0462

Tabela 4.1

A Tabela 4.2 apresenta a variação da força axial em relação à força axial que foi produzida pelo tensionamento da rede. O fio X_i está localizado no segmento número i ($i = 1, 2, \dots, 12$) da diagonal paralela ao eixo X, contado no sentido do eixo. O fio Y_j está localizado no segmento número j ($j = 1, 2, \dots, 12$) da diagonal paralela ao eixo Y, contado no sentido do eixo.

Fio	(1)	(2)	(3)	(4)
X_2	0.0152	-0.0555	-0.4000	-0.1791
X_3	-0.0058	-0.1340	-0.1100	-0.2310
X_4	-0.0435	-0.2740	-0.0371	-0.3060
X_5	-0.1010	-0.0856	-0.0055	-0.2970
X_6	-0.1985	-0.0310	0.0060	-0.1980
X_7	-0.1010	-0.0022	0.0110	-0.0725
X_8	-0.0435	0.0134	0.0182	0.0000
X_9	-0.0058	0.0268	0.0154	0.0362
X_{10}	0.0152	0.0258	0.0204	0.0362
Y_2	-0.0154	-0.0044	0.0000	0.0885
Y_3	0.0059	0.0044	0.0000	0.1335
Y_4	0.0418	0.0308	0.0049	0.1465
Y_5	0.1100	0.0890	0.0363	0.1870
Y_6	0.1950	0.1770	0.1330	0.1850
Y_7	0.1100	0.0890	0.0363	0.1870
Y_8	0.0418	0.0308	0.0049	0.1465
Y_9	0.0059	0.0044	0.0000	0.1335
Y_{10}	-0.0154	-0.0044	0.0000	0.0885

Tabela 4.2

4.2.5 Resultados previstos

A Tabela 4.3 apresenta os deslocamentos verticais dos nós. O carregamento (0) é definido pelo peso próprio dos fios.

Nº	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)
3	-0.0021	0.0300	-0.0061	-0.2438	-0.1244
6	-0.0041	0.0129	-0.0628	-0.2626	-0.1943
13	-0.0093	-0.0069	-0.3859	-0.3433	-0.3801
15	-0.0050	-0.0087	-0.0588	-0.0366	-0.1977
19	-0.0090	-0.0394	-0.1134	-0.0304	-0.3136
20	-0.0115	-0.0852	-0.3630	-0.0731	-0.4018
22	-0.0115	-0.0852	-0.3630	-0.0731	-0.4018
24	-0.0050	-0.0101	-0.0202	-0.0073	-0.1785
28	-0.0082	-0.0213	-0.0201	-0.0097	-0.2618
31	-0.0143	-0.4038	-0.4007	-0.0067	-0.4242
33	-0.0115	-0.0880	-0.0858	-0.0158	-0.3473
35	-0.0041	0.0038	0.0028	-0.0048	-0.1469
39	-0.0056	0.0029	-0.0021	-0.0073	-0.1739
41	-0.0123	-0.1312	-0.0453	-0.0034	-0.2870
42	-0.0143	-0.3796	-0.0893	0.0136	-0.3179
43	-0.0150	-1.0810	-0.1259	0.0368	-0.3307
44	-0.0143	-0.3796	-0.0893	0.0136	-0.3179
46	-0.0093	-0.0329	-0.0162	-0.0085	-0.2392
48	-0.0021	0.0077	0.0014	-0.0035	-0.0915
52	-0.0082	-0.0213	-0.0091	-0.0062	-0.0807
54	-0.0136	-0.2190	-0.0120	0.0281	-0.1155
56	-0.0136	-0.2190	-0.0120	0.0281	-0.1155
57	-0.0115	-0.0880	-0.0126	0.0038	-0.1023
59	-0.0041	0.0038	-0.0038	-0.0059	-0.0475
62	-0.0050	-0.0101	-0.0032	-0.0032	-0.0106
63	-0.0090	-0.0394	0.0055	0.0067	-0.0116
65	-0.0123	-0.1242	0.0475	0.0594	-0.0111
67	-0.0090	-0.0394	0.0055	0.0067	-0.0116
68	-0.0050	-0.0101	-0.0032	-0.0032	-0.0106
72	-0.0082	-0.0122	0.0372	0.0299	0.0323
74	-0.0082	-0.0122	0.0372	0.0299	0.0323
79	-0.0056	0.0332	0.0573	0.0457	0.0439

Tabela 4.3

É importante observar que os deslocamentos para os casos de carregamento (1), (2), (3), (4), são relativos à configuração obtida pela ação do peso próprio dos fios.

A Tabela 4.4 apresenta a variação da força axial em relação à força axial que foi produzida pelo tensionamento da rede juntamente com a ação do peso próprio dos fios.

Fio	(1)	(2)	(3)	(4)
X ₂	-0.0810	-0.0280	0.0110	-0.2140
X ₃	-0.0813	-0.0280	0.0110	-0.2122
X ₄	-0.0815	-0.0280	0.0111	-0.2109
X ₅	-0.0813	-0.0279	0.0111	-0.2101
X ₆	-0.0795	-0.0278	0.0110	-0.2097
X ₇	-0.0795	-0.0278	0.0110	-0.2097
X ₈	-0.0813	-0.0279	0.0111	-0.2101
X ₉	-0.0815	-0.0280	0.0111	-0.2109
X ₁₀	-0.0813	-0.0280	0.0110	-0.2122
Y ₂	0.2642	0.2718	0.2475	0.1825
Y ₃	0.2659	0.2733	0.2190	0.1802
Y ₄	0.2683	0.2749	0.2144	0.1785
Y ₅	0.2710	0.2609	0.2093	0.1773
Y ₆	0.2735	0.2572	0.2045	0.1766
Y ₇	0.2735	0.2533	0.2003	0.1765
Y ₈	0.2710	0.2496	0.1967	0.1761
Y ₉	0.2683	0.2465	0.1938	0.1755
Y ₁₀	0.2659	0.2441	0.1917	0.1748

Tabela 4.4

4.2.6 Discussão

Quando é considerado o deslocamento vertical, a comparação da Tabela 4.1 com a Tabela 4.3 indica uma semelhança razoável dos valores

observados com os valores previstos. Entretanto, quando é considerada a variação da força axial, a comparação da Tabela 4.2 com a Tabela 4.4 indica uma diferença razoável dos valores observados com os valores previstos. Talvez, parte desta diferença possa ser atribuída a pequenas variações na deformação dos fios do modelo experimental, eventualmente causadas por nós de dimensões finitas.

O valor da tolerância para a norma infinito do vetor resíduo foi imposto igual a $1.0 * 10^{-7}$ klf, que é aproximadamente igual a $1.0 * 10^{-3}$ do valor da força nodal devida ao peso próprio do fio. O valor imposto para o número máximo de interpolações cúbicas na rotina de busca unidimensional foi igual a 60. O programa com o método quase Newton sem memória foi executado durante um intervalo de tempo igual a 7 segundos, enquanto que o programa com o método quase Newton foi executado durante um intervalo de tempo igual a 35 segundos. Estes programas foram executados por uma estação de trabalho IBM, modelo RISC 6000-36T. Como esperado, o desempenho do método quase Newton sem memória foi muito superior ao desempenho do método quase Newton.

Num trabalho recentemente publicado, referência [7], uma análise comparativa entre este modelo experimental e um outro modelo teórico é apresentada. No modelo teórico, embora o autor não considere o peso próprio dos fios, tanto os deslocamentos verticais quanto as variações da força axial são praticamente idênticos aos valores mostrados pelas Tabelas 4.3 e 4.4.

4.3 Aplicação a um caso real

A estrutura que será descrita a seguir é o resultado de um projeto elaborado para a prefeitura da cidade de São José do Rio Pardo, SP. Esta estrutura é parte de um projeto arquitetônico para a reformulação de uma das praças da cidade, de autoria do arquiteto Luiz Paulo Cobra Monteiro. A responsabilidade técnica é do engenheiro Luiz Carlos de Almeida.

A estrutura é uma cobertura suspensa formada por uma rede de cabos inicialmente na forma da superfície de um parabolóide hiperbólico. A rede de cabos está ancorada num anel de concreto armado cujo eixo projeta uma elipse no plano horizontal. Os eixos maior e menor da elipse medem respectivamente 20.00 metros e 13.00 metros. A rede é formada por uma malha ortogonal 10 x 6 paralela aos eixos da elipse. Os dois pontos extremos do eixo maior são rebaixados de 1.75 metros a partir do centro da superfície, enquanto que os dois pontos extremos do eixo menor são elevados de 1.00 metro a partir do centro da superfície. O centro da superfície está situado a 4.50 metros de altura. Para o cabo está prevista a utilização de cordoalha de diâmetro igual à uma polegada, composta por fios de aço de alta resistência e zincados. O espaçamento entre cabos é cerca de dois metros, de modo não uniforme e paralelo aos eixos da elipse. A seção transversal do anel de borda é retangular cheia medindo 1.00 m x 0.45 m. Note que o eixo do anel de borda acompanha a forma da superfície do parabolóide hiperbólico. O anel é sustentado por quatro pilares iguais de concreto armado com altura medindo 3.71 metros e seção retangular medindo 0.25 m x 0.50 m. O eixo de menor momento de inércia da seção transversal do pilar é tangente à equação da elipse. A estrutura está mostrada nas Figuras 4.11 até 4.16. A Figura 4.13 mostra a rotação da seção transversal do anel de borda em torno do seu eixo.

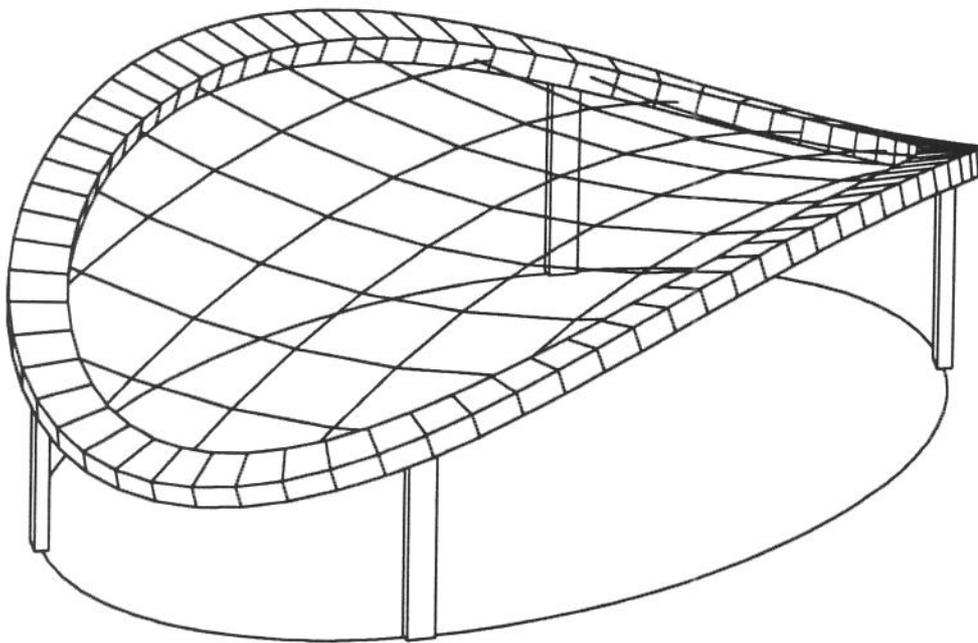


Figura 4.11

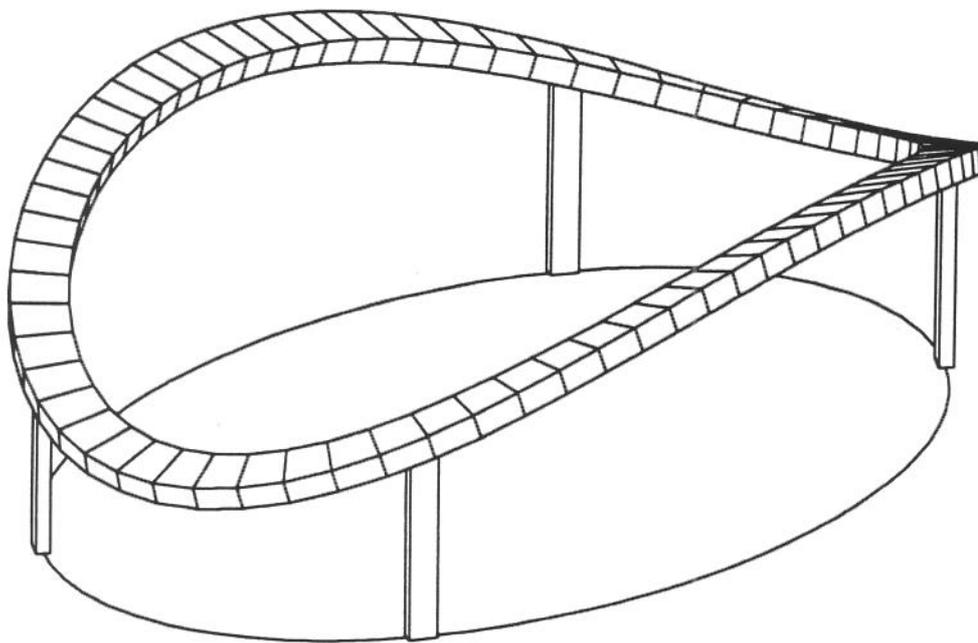


Figura 4.12

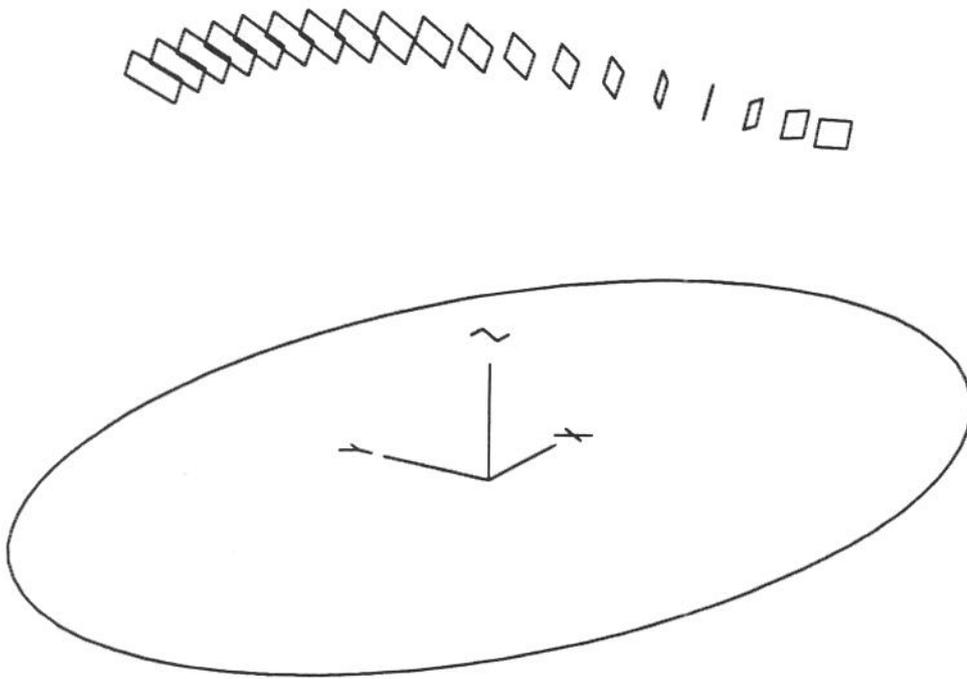


Figura 4.13

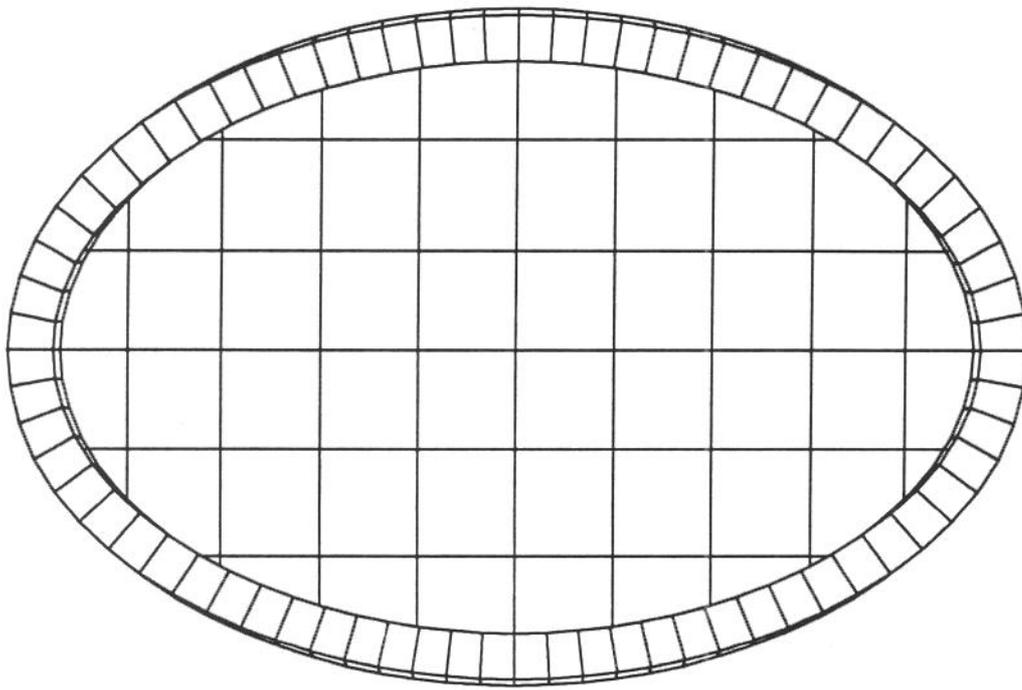


Figura 4.14

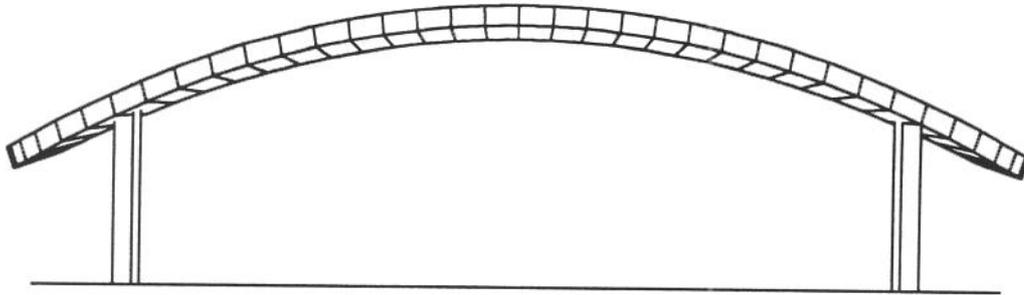


Figura 4.15

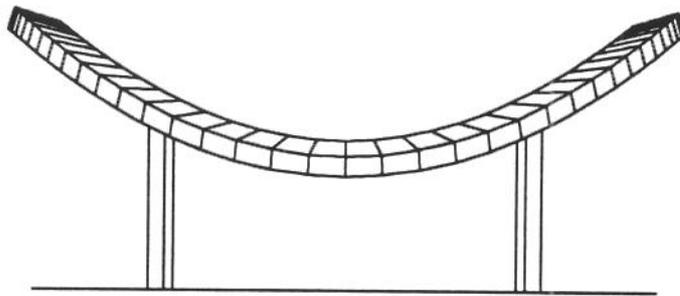


Figura 4.16

4.3.1 A equação da superfície do parabolóide hiperbólico

A equação da superfície do parabolóide hiperbólico, necessária para a descrição da configuração indeformada, pode ser escrita como :

$$z = A\left(\frac{x}{a}\right)^2 + B\left(\frac{y}{b}\right)^2 + h$$

Considerando o sistema de referência mostrado na Figura 4.13, note que o valor de A é igual a -1.75 m, o valor de B é igual a 1.00 m, o valor de a é igual a 10.00 m, o valor de b é igual a 6.50 m e o valor de h é igual a 4.50 m.

4.3.2 A discretização da estrutura

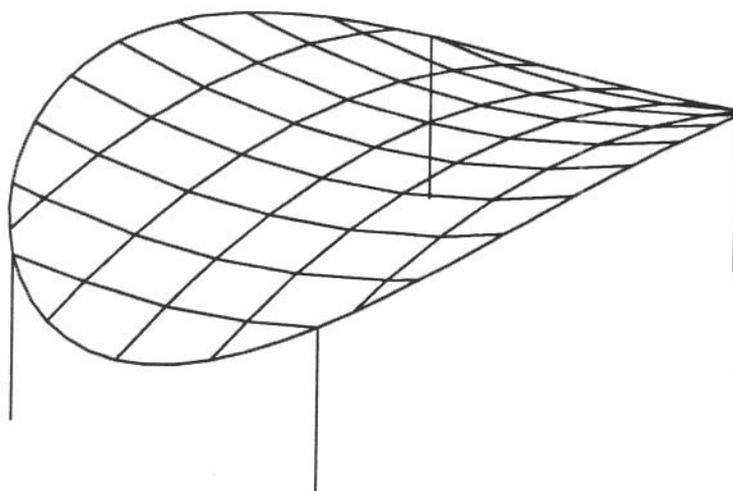


Figura 4.17

O anel de borda foi discretizado em 72 elementos de pórtico espacial, do tipo utilizado largamente na análise linear de estruturas. Este elemento é bastante adequado, pois, ao contrário do esperado para a rede de cabos, pequenos deslocamentos são esperados para o anel de borda. O eixo do anel de borda discretizado é definido por uma linha poligonal fechada, cujos vértices pertencem à superfície do parabolóide hiperbólico. Para a discretização de cada pilar foi utilizado somente um elemento de pórtico espacial. A estrutura discretizada está mostrada na Figura 4.17. A Figura 4.18 mostra a numeração dos nós da estrutura. A incidência para os quatro pilares é o seguinte : pilar 1 ligado aos nós 6 e 73, pilar 2 ligado aos nós 30 e 74, pilar 3 ligado aos nós 42 e 75, pilar 4 ligado aos nós 66 e 76.

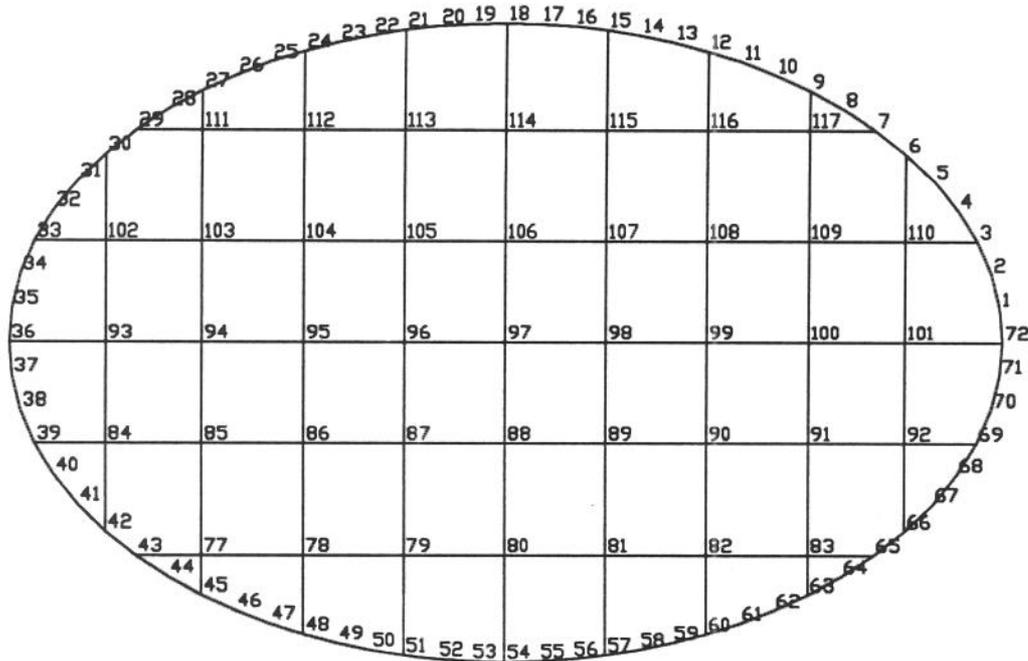


Figura 4.18

A ligação entre o anel de borda e o pilar pode dificultar a rotação do anel em torno do seu eixo, favorecendo o aparecimento de momento torçor no anel. Para minimizar o valor absoluto do momento torçor no anel, os pilares foram supostos rotulados na conexão com o anel e engastados na base. Além disso, o eixo de menor momento de inércia da seção transversal do pilar foi suposto tangente à equação da elipse, pois a hipótese de rótula na conexão do pilar com o anel não será verificada de maneira perfeita na estrutura real.

4.3.3 Especificação dos materiais

Diâmetro	Fios	Área cm ²	Peso 10 ⁻⁵ tf/cm	Ruptura tf	Elasticidade tf/cm ²
1/2"	19	0.96274	0.8157	12.111	1600.0
9/16"	19	1.22916	1.0417	15.286	1600.0
5/8"	19	1.50903	1.2713	18.235	1600.0
11/16"	19	1.81758	1.5395	22.060	1600.0
3/4"	19	2.16617	1.8368	26.445	1600.0
7/8"	37	2.92018	2.4702	35.650	1500.0
1"	37	3.82917	3.2533	46.585	1500.0
1 1/8"	7 x 7	3.98060	3.3819	48.590	1300.0
1 1/4"	7 x 7	4.91058	4.1672	59.440	1300.0
1 3/8"	7 x 19	5.83269	4.9465	75.790	1250.0
1 1/2"	7 x 19	6.94139	5.8280	89.760	1250.0
1 5/8"	7 x 19	8.14649	6.8450	104.400	1250.0
1 3/4"	7 x 19	9.44800	7.8436	120.400	1250.0
1 7/8"	7 x 19	10.84364	9.0015	137.600	1250.0
2"	7 x 19	12.34024	10.2510	155.870	1250.0

Tabela 4.5

A Tabela 4.5 mostra os cabos fabricados pela Companhia Industrial e Mercantil de Artefatos de Ferro - CIMAF para finalidades estruturais. Para o cabo está prevista a utilização de cordoalha de diâmetro igual à 1 polegada, composta por 37 fios de aço de alta resistência e zincados. Observe que o módulo de elasticidade da cordoalha é significativamente menor do que o módulo de elasticidade do aço. Todos os cabos listados na Tabela 4.5 são previamente submetidos a um tensionamento por um período de tempo suficiente para eliminar o alongamento inicial causado pela configuração helicoidal dos fios. O coeficiente térmico para estes cabos é igual a $1.15 \cdot 10^{-5} / ^\circ\text{C}$.

A especificação para o concreto é dada por módulo de elasticidade igual a $2.8 \cdot 10^2 \text{ tf/cm}^2$, módulo de elasticidade transversal igual a $1.167 \cdot 10^2 \text{ tf/cm}^2$ e peso específico igual a $2.5 \cdot 10^{-6} \text{ tf/cm}^3$.

4.3.4 Casos de carregamento

Para a rede de cabos, a ação do vento foi considerada atuando na direção perpendicular à superfície do parabolóide hiperbólico, que é a configuração indeformada da rede de cabos. Note que uma configuração deformada da rede de cabos não define um parabolóide hiperbólico. Para o anel de borda, a ação do vento lateral foi considerada atuando na perpendicular às faces do anel de borda.

Um elemento de **amarração** é um elemento que está ligado ao anel de borda. Conforme pode ser observado na Figura 4.18, existem 10 elementos de amarração na direção X e 18 elementos de amarração na direção Y. Na etapa de tensionamento, somente para os elementos de amarração é que existe a imposição de tensão. O artifício que consiste em definir para os elementos de amarração um dos **estados** seguintes : tensão imposta,

cutte imposto, cutte equivalente a tensão atuando, será utilizado. Note que um elemento permanece num dado estado até que este estado seja alterado no início de um caso de carregamento posterior.

Na prática, o tensionamento da rede de cabos é obtido através do tensionamento de alguns dos elementos de amarração. O tensionamento de um determinado elemento de amarração pode ser obtido pelo uso de macaco hidráulico. Desta maneira, a tensão de projeto pode ser imposta a este elemento.

Os oito casos de carregamento estão mostrados na Tabela 4.6, onde # é o número do caso de carregamento, S é o coeficiente de segurança para a força axial nos cabos, (1) é a pressão aplicada na rede de cabos na direção do eixo Z devida à carga permanente e ou acidental, (2) é a pressão aplicada na rede de cabos devida à ação do vento e (3) é a pressão aplicada no anel de borda devida à ação do vento lateral. Lembre que a direção do vento lateral é paralela ao plano horizontal. Note que a direção do vento lateral está determinada pelo ângulo, especificado em graus, que esta direção faz com o eixo X.

#	S	ΔT (°C)	Pressão (kgf/m ²)			Estado amarração X
			(1)	(2)	(3)	
1	2.0	0.0	0.0	0.0	0.0, 0	
2	2.0	0.0	0.0	0.0	0.0, 0	2.0 tf/cm ² tensão
3	2.2	0.0	-9.5	0.0	0.0, 0	cutte equivalente
4	2.7	0.0	-29.5	0.0	0.0, 0	
5	2.0	0.0	-9.5	-48.0	60.0, 0	
6	2.0	0.0	-9.5	72.0	60.0, 90	
7	2.0	-15.0	-29.5	0.0	0.0, 0	
8	2.0	15.0	-29.5	0.0	0.0, 0	

Tabela 4.6

4.3.5 Resultados para a rede de cabos

A Tabela 4.7 mostra, para cada caso de carregamento, o deslocamento mínimo e o deslocamento máximo, entre todos os nós da rede de cabos, nas direções dos eixos do sistema de referência. Para os casos de carregamento 1 e 2, os deslocamentos são relativos à configuração indeformada da rede de cabos. Para os demais casos de carregamento, os deslocamentos são relativos à configuração obtida após o tensionamento dos elementos de amarração na direção X. Observe que os deslocamentos mínimo e máximo na direção Z, entre todos os casos de carregamento, ocorrem no caso de vento de pressão e vento de sucção respectivamente. Observe ainda que o máximo deslocamento em módulo na direção Z, dividido pelo diâmetro médio da elipse é da ordem de 1/300.

#	Deslocamento mínimo (mm)						Deslocamento máximo (mm)					
	X	Nó	Y	Nó	Z	Nó	X	Nó	Y	Nó	Z	Nó
1	-10	36	-4	54	-29	18	10	72	4	18	8	36
2	-17	102	-6	18	-69	97	17	92	6	54	0	66
3	-1	36	-1	18	-7	97	1	72	1	54	0	72
4	-3	36	-2	18	-15	97	3	72	2	54	1	36
5	-6	36	-6	18	-36	97	6	72	6	54	2	72
6	-9	72	-8	54	-3	72	9	36	9	18	54	97
7	-2	36	-4	18	-16	97	2	72	4	54	1	54
8	-3	36	-1	18	-15	97	3	72	1	54	2	36

Tabela 4.7

A Tabela 4.8 mostra, para cada caso de carregamento, a máxima força axial entre todos os elementos da rede de cabos. Observe que a máxima força axial, entre todos os casos de carregamento, ocorre no caso de vento de sucção e que o valor desta força dividido pelo valor da força de ruptura do cabo é da ordem de 1/5. Aparentemente, um cabo de

menor área poderia ser utilizado. Entretanto, uma tentativa para utilizar o cabo de área imediatamente inferior não mostrou resultado melhor, pois para manter os deslocamentos verticais dentro do aceitável, foi necessário aumentar a força de tensionamento dos elemento de amarração, o que por outro lado produziu um aumento inaceitável nos esforços solicitantes do anel de borda.

#	Força (tf)
1	2.080
2	7.658
3	7.434
4	6.988
5	6.632
6	9.539
7	7.832
8	6.147

Tabela 4.8

4.3.6 Resultados para o anel de borda

A Tabela 4.9 mostra os esforços solicitantes críticos, entre todos os casos de carregamento, para o anel de borda. Para cada esforço solicitante crítico são listados na sequência os nós inicial e final de um elemento da discretização do anel de borda. O esforço solicitante crítico ocorre num dos nós deste elemento. Para cada nó, as ações finais de extremidade estão mostradas no sistema de referência local do elemento, cujo eixo Y é paralelo ao lado de menor dimensão da seção transversal retangular do anel de borda. Observe que a máxima compressão do anel de borda ocorre no caso de diminuição de temperatura.

Força normal de compressão (tf), # 7						
Nó	FX	FY	FZ	MX	MY	MZ
64	31.793	-3.920	-6.492	-0.923	-1.967	-0.036
65	-32.079	4.794	6.527	0.923	7.291	-3.527
Força normal de tração (tf)						
Nó	FX	FY	FZ	MX	MY	MZ
Força de cisalhamento Y (tf), # 5						
Nó	FX	FY	FZ	MX	MY	MZ
41	22.628	-8.201	12.695	1.431	-25.362	1.031
42	-22.341	9.076	-12.765	-1.431	14.908	-8.124
Força de cisalhamento Z (tf), # 5						
Nó	FX	FY	FZ	MX	MY	MZ
30	22.340	9.075	-12.766	-1.431	-14.901	8.123
31	-22.627	-8.199	12.696	1.431	25.356	-1.031
Momento torçor (tfm), # 1						
Nó	FX	FY	FZ	MX	MY	MZ
27	10.457	-5.515	-1.944	4.177	11.979	-2.933
28	-10.726	6.373	2.023	-4.177	-10.386	-1.839
Momento fletor Y (tfm), # 5						
Nó	FX	FY	FZ	MX	MY	MZ
36	25.826	-0.565	-0.708	0.329	-48.573	-11.793
37	-25.791	1.295	0.455	-0.329	48.973	11.154
Momento fletor Z (tfm), # 1						
Nó	FX	FY	FZ	MX	MY	MZ
18	6.590	0.115	-0.583	0.291	21.511	-19.985
19	-6.605	0.626	0.810	-0.291	-21.032	19.809

Tabela 4.9

4.3.7 Resultados para os pilares

Força normal de compressão (tf), # 5						
Nó	FX	FY	FZ	MX	MY	MZ
75	19.388	-0.314	3.265	0.000	-12.121	-1.167
42	-18.228	0.314	-3.265	0.000	0.000	0.000
Força normal de tração (tf)						
Nó	FX	FY	FZ	MX	MY	MZ
Força de cisalhamento Y (tf), # 1						
Nó	FX	FY	FZ	MX	MY	MZ
75	16.444	-0.491	1.965	0.000	-7.297	-1.824
42	-15.284	0.491	-1.965	0.000	0.000	0.000
Força de cisalhamento Z (tf), # 5						
Nó	FX	FY	FZ	MX	MY	MZ
73	19.387	-0.356	3.447	0.000	-12.797	-1.321
6	-18.227	0.356	-3.447	0.000	0.000	0.000
Momento torçor (tfm)						
Nó	FX	FY	FZ	MX	MY	MZ
Momento fletor Y (tfm), # 5						
Nó	FX	FY	FZ	MX	MY	MZ
73	19.387	-0.356	3.447	0.000	-12.797	-1.321
6	-18.227	0.356	-3.447	0.000	0.000	0.000
Momento fletor Z (tfm), # 1						
Nó	FX	FY	FZ	MX	MY	MZ
75	16.444	-0.491	1.965	0.000	-7.297	-1.824
42	-15.284	0.491	-1.965	0.000	0.000	0.000

Tabela 4.10

A Tabela 4.10 mostra os esforços solicitantes críticos, entre todos os casos de carregamento, para os pilares. Para cada esforço solicitante crítico são listados na sequência os nós inicial e final de um elemento da discretização dos pilares. O esforço solicitante crítico ocorre num dos nós deste elemento. Para cada nó, as ações finais de extremidade estão mostradas no sistema de referência local do elemento, cujo eixo Y é paralelo ao lado de menor dimensão da seção transversal retangular do pilar.

4.3.8 Reações de apoio

A Tabela 4.11 mostra, para cada caso de carregamento, as reações em dois dos quatro nós de apoio. Note que as reações para os outros dois nós podem ser obtidas por considerações de simetria.

# 1					
N6	FX	FY	FZ	MX	MY
73	-1.797	0.935	16.444	-3.472	-6.672
74	1.797	0.935	16.445	-3.472	6.673
# 2					
N6	FX	FY	FZ	MX	MY
73	-1.371	1.003	16.444	-3.725	-5.089
74	1.371	1.003	16.443	-3.725	5.089
# 3					
N6	FX	FY	FZ	MX	MY
73	-1.601	1.167	16.928	-4.331	-5.945
74	1.601	1.166	16.928	-4.331	5.945
# 4					
N6	FX	FY	FZ	MX	MY
73	-2.086	1.510	17.949	-5.607	-7.746
74	2.086	1.510	17.950	-5.606	7.746
# 5					
N6	FX	FY	FZ	MX	MY
73	-2.816	2.019	19.387	-7.495	-10.456
74	2.652	1.929	19.386	-7.162	9.848
# 6					
N6	FX	FY	FZ	MX	MY
73	0.160	-0.116	13.265	0.431	0.595
76	0.079	-0.016	13.222	0.058	0.294
# 7					
N6	FX	FY	FZ	MX	MY
73	-2.020	1.516	17.949	-5.630	-7.499
74	2.020	1.516	17.950	-5.630	7.499
# 8					
N6	FX	FY	FZ	MX	MY
73	-2.152	1.503	17.949	-5.582	-7.991
74	2.152	1.503	17.950	-5.581	7.991

Tabela 4.11

4.3.9 Discussão

A tolerância para a norma infinito do vetor resíduo foi determinada de modo que signifique desequilíbrio máximo igual a 1 kgf para força e 10^{-4} tfm para momento. O número máximo de interpolações cúbicas na rotina de busca unidimensional foi estabelecido em 60. O programa com o método quase Newton sem memória foi executado durante um intervalo de tempo igual a 11 horas, 53 minutos e 8 segundos, enquanto que o programa com o método quase Newton foi executado durante um intervalo de tempo igual a 5 horas, 32 minutos e 5 segundos. Estes programas foram executado por uma estação de trabalho IBM, modelo RISC 6000-32H. A Tabela 4.12 mostra o número de iterações requeridas para encontrar o equilíbrio em cada caso de carregamento.

#	Quase Newton Sem Memória	Quase Newton
1	190391	1568
2	200933	1555
3	99906	1411
4	109334	1490
5	114876	1498
6	121544	1581
7	114324	1484
8	116554	1499

Tabela 4,12

5. Bibliografia

- [1] Al-Baali, M., Descent property and global convergence of the Fletcher-Reeves method with inexact line search, IMA journal of numerical analysis, Vol. 5, No. 1, January, 1985.
- [2] Arcaro, V. F. e Iguti, F., Treliça - análise não linear inelástica, XIII Congresso Ibero Latino Americano de Métodos Computacionais para Engenharia, Porto Alegre, 1992.
- [3] Arcaro, V. F., Pulino, A. R. e Iguti, F., Treliça - grandes deslocamentos e grandes deformações, XI Congresso Ibero Latino Americano de Métodos Computacionais em Engenharia, Rio de Janeiro, 1990.
- [4] Barbato, L. A., Emprego de cabos livremente suspensos e cabos treliça na construção de coberturas penseis, Tese de livre docência, EESC-USP, 1991.
- [5] Bazaraa, M. S., Sherali, H. D. and Shetty, C. M., Nonlinear programming - theory and algorithms, second edition, John Wiley & Sons, Singapore, 1993.
- [6] Boresi, A. P., Schmidt, R. J. and Sidebottom O. M., Advanced mechanics of materials, John Wiley & Sons, Singapore, 1993.
- [7] Broughton, P. and Ndumbaro, P., The analysis of cable and catenary structures, Thomas Telford, London, 1994.
- [8] Buchholdt, H. A., Introduction to cable roof structures, Cambridge University Press, 1985.
- [9] Buckley, A. G., A combined conjugate gradient quasi Newton minimization algorithm, Mathematical Programming 15, 1978.

- [10] Cable suspended roof construction state of the art, Journal of the structural division, ASCE, June, 1971.
- [11] Cordoalhas de fios de aco zincados para estais, tirantes, cabos mensageiros e usos similares, NBR 5909, ABNT, 1985.
- [12] Coyette, J. P. e Guisset, P., Cable network analysis by a nonlinear programming technique, Engineering Structures, Vol. 10, January, 1988.
- [13] Dembo, R. S., Steihaug, T., Truncated Newton algorithms for large scale unconstrained optimization, Mathematical Programming 26, 1983.
- [14] Dickie, J. F. and Broughton, P., Discussion of paper on study of suspended roof model, Journal of the structural division, ASCE, January, 1972.
- [15] Fiacco, A. V. and McCormick, G. P., Nonlinear programming - sequential unconstrained minimization techniques, SIAM, 1990.
- [16] Garey, M. R. and Johnson, D. S., Computers and intractability, W. H. Freeman and Company, New York, 1979.
- [17] Gill, P. E. and Murray, W., Newton type methods for unconstrained and linearly constrained optimization, Mathematical Programming 7, 1974.
- [18] Gill, P. E., Murray, W. and Wright, M. H., Practical optimization, Academic Press, London, 1981.
- [19] Gill, P. E., Murray, W., Saunders, M. A. and Wright, M. H., Procedures for optimization problems with a mixture of bounds and general linear constraints, ACM transactions on mathematical software, Vol. 10, No. 3, 1984.

- [20] Gill, P. E., Murray, W., Saunders, M. A. and Wright, M. H., Two step length algorithms for numerical optimization, technical report SOL 79-25, 1979.
- [21] Gutkowski, W. and Bauer, J., Sensitivity and optimum structural design, IASS-ASCE International Symposium, Atlanta, 1994.
- [22] Hamming, R. W., Numerical methods for scientists and engineers, second edition, McGraw-Hill Book Company, Tokyo, 1973.
- [23] Horowitz, E. and Sahni, S., Fundamentals of computer algorithms, Computer Science Press, Potomac, Maryland, 1978.
- [24] Karczewski, J. A. and Paczkowski, W. M., On some problems of the multicriteria optimization of the spatial grid structures, IASS-ASCE International Symposium, Atlanta, 1994.
- [25] Kawaguchi, M. and others, Structural tests on the suspen dome system, IASS-ASCE International Symposium, Atlanta, 1994.
- [26] Kawaguchi, M., Possibilities and problems of latticed structures, IASS-ASCE International Symposium, Atlanta, 1994.
- [27] Kolosowski, J., A new method for the subdivision of braced domes, Fourth International Conference on Space Structures, University of Surrey, Guilford, UK, 1993.
- [28] Krishna, P. and Agarwala, T. P., Study of suspended roof model, Journal of the structural division, ASCE, June, 1971.
- [29] Labossiere, P. and Leblanc, S., A simulation of cable dome construction, Fourth International Conference on Space Structures, University of Surrey, Guilford, UK, 1993.

- [30] Large scale numerical optimization, Proceedings of the workshop on large scale numerical optimization, Cornell University, 1989.
- [31] Lasdon, L. S., Optimization theory for large systems, Macmillan, New York, 1970.
- [32] Leonard, J. W., Tension structures - behavior and analysis, McGraw-Hill Book Company, New York, 1988.
- [33] Liu, D. C. and Nocedal, J., On the limited memory BFGS method for large scale optimization, Mathematical Programming 45, 1989.
- [34] Liu, X. L., Research and application of various joints of space grid structures in China, IASS-ASCE International Symposium, Atlanta, 1994.
- [35] Luenberger, D. G., Linear and nonlinear programming, second edition, Addison Wesley, Reading, Massachusetts, 1989.
- [36] Madi, U. R., Lack of fit as a design parameter of double layer grids, Fourth International Conference on Space Structures, University of Surrey, Guilford, UK, 1993.
- [37] Majowiecky, M., Tensostrutture: progetto e verifica, Siderservizi, Milano, 1985.
- [38] Manual for structural applications of steel cables for buildings, AISI, 1973.
- [39] Meek, J. L., Elasto plastic analysis of cable net structures, IASS-ASCE International Symposium, Atlanta, 1994.
- [40] Menezes, F. A. e Arcaro, V. F., Portico Plano - Análise não linear elástica, XXV Jornadas Sul Americanas de Engenharia Estrutural, Porto Alegre, 1991.

- [41] Mollaert, M. and Mas, E., Form finding analysis and construction of a synclastic curved glass dome, Fourth International Conference on Space Structures, University of Surrey, Guilford, UK, 1993.
- [42] Murtagh, B. A. and Saunders, M. A., Large scale linearly constrained optimization, *Mathematical Programming* 14, 1978.
- [43] Murtagh, B. A. and Saunders, M. A., Minos 5.1 user's guide, technical report SOL 83-20R, Stanford University, 1987.
- [44] Namita, Y. Nakanishi, H., A numerical method of optimum design analysis for cable assemblies, Fourth International Conference on Space Structures, University of Surrey, Guilford, UK, 1993.
- [45] Nilsson, N. J., Problem solving methods in artificial intelligence, McGraw-Hill Book Company, New York, 1971.
- [46] Nooshin, H. and Disney, P. and Yamamoto, C., Formian, Multi-Science Publishing Company, Essex, 1993.
- [47] Papadrakakis, M., Nonlinear solution methods for shell and spatial structures, IASS-ASCE International Symposium, Atlanta, 1994.
- [48] Paula, J. H. M., Pulino, A. R. e Arcaro, V. F., Influência do comportamento não linear da estrutura de apoio em cabos treliça, XV Congresso Ibero Latino Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia, UFMG, 1992.
- [49] Paula, J. H. M., Pulino, A. R. e Arcaro, V. F., Um Modelo para o estudo da instabilidade global de estruturas reticuladas planas, XV Congresso Ibero Latino Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia, UFMG, 1992.
- [50] Pearl, J., Heuristics, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1984.

- [51] Powell, M. J. D., A note on quasi Newton formulae for sparse second derivative matrices, *Mathematical Programming* 20, 1981.
- [52] Pulino, A. R., Arcaro, V. F. e Iguti, F., Automatic prestressing and natural frequencies of cable networks by the finite element method, 11th ABCM Mechanical Engineering Conference, Sao Paulo, 1991.
- [53] Pulino, A. R., Contribuição ao estudo das coberturas penseis, tese de doutorado, FEM, Unicamp, 1991.
- [54] Rizwan, S. A. and Bhatti, A. A., On the performance of double layer square on square grids, Fourth International Conference on Space Structures, University of Surrey, Guilford, UK, 1993.
- [55] Shigley, J. E., Mechanical engineering design, first metric edition, McGraw-Hill Book Company, Singapore, 1986.
- [56] Standard for structural applications of steel cables for buildings (ballot draft #1), ASCE, March 1995.
- [57] Stefanou, G. D. and Nejad S. E. M., A general method for the analysis of cable assemblies with fixed and flexible elastic boundaries, *Computer & Structures*, Vol. 55, No. 5, June 1995.
- [58] Suzuki, T., Ogawa, T., Tsushima, Y., Kimura, M. and Kaneko, H., Stability of a space truss composed of square pyramid units, Fourth International Conference on Space Structures, University of Surrey, Guilford, UK, 1993.
- [59] Thapa, M. N., Optimization of unconstrained functions with sparse hessian matrices - quasi Newton methods, *Mathematical Programming* 25, 1983.
- [60] Toint, P. A note about sparsity exploiting quasi Newton updates, *Mathematical Programming* 21, 1981.

- [61] Vilnay, O., Cable nets and tensegric shells - analysis and design applications, Ellis Horwood, 1990.
- [62] Vizotto, I. and Arcaro, V. F., A shape generation model and structural analysis of free form shells, International Conference on Lightweight Structures in Civil Engineering, Poland, 1995.
- [63] Vizotto, I. and Arcaro, V. F., Computerized shape generation of shells, Fourth International Conference on Space Structures, University of Surrey, Guilford, UK, 1993.
- [64] Wester, T., The nature of structural morphology, IASS-ASCE International Symposium, Atlanta, 1994.
- [65] Wire rope sling user's manual, WRTB, Woodstock, Maryland, 1990.
- [66] Wire rope user's manual, third edition, WRTB, Woodstock, Maryland, 1993.
- [67] Young, W. C., Roarks's formulas for stress and strain, sixth edition, McGraw-Hill Book Company, New York, 1989.

6. Apêndice

6.1 Lista de figuras

<i>Figura 1.1</i>	14
<i>Figura 2.1</i>	54
<i>Figura 2.2</i>	57
<i>Figura 3.1</i>	74
<i>Figura 3.2</i>	75
<i>Figura 3.3</i>	78
<i>Figura 3.4</i>	79
<i>Figura 3.5</i>	80
<i>Figura 3.6</i>	85
<i>Figura 3.7</i>	92
<i>Figura 3.8</i>	98
<i>Figura 3.9</i>	101
<i>Figura 3.10</i>	102
<i>Figura 3.11</i>	103
<i>Figura 3.12</i>	104
<i>Figura 3.13</i>	105
<i>Figura 3.14</i>	106
<i>Figura 3.15</i>	107
<i>Figura 3.16</i>	108
<i>Figura 4.1</i>	110
<i>Figura 4.2</i>	111
<i>Figura 4.3</i>	113
<i>Figura 4.4</i>	120
<i>Figura 4.5</i>	123
<i>Figura 4.6</i>	126
<i>Figura 4.7</i>	127
<i>Figura 4.8</i>	129
<i>Figura 4.9</i>	132
<i>Figura 4.10</i>	134
<i>Figura 4.11</i>	141
<i>Figura 4.12</i>	142
<i>Figura 4.13</i>	143
<i>Figura 4.14</i>	144
<i>Figura 4.15</i>	145
<i>Figura 4.16</i>	145
<i>Figura 4.17</i>	146
<i>Figura 4.18</i>	147

6.2 Lista de tabelas

<i>Tabela 3.1</i>	
<i>Tabela 3.2</i>	81
<i>Tabela 3.3</i>	91
<i>Tabela 3.4</i>	93
<i>Tabela 3.5</i>	94
<i>Tabela 3.6</i>	95
<i>Tabela 3.7</i>	96
<i>Tabela 3.8</i>	100
<i>Tabela 4.1</i>	100
<i>Tabela 4.2</i>	135
<i>Tabela 4.3</i>	136
<i>Tabela 4.4</i>	137
<i>Tabela 4.5</i>	138
<i>Tabela 4.6</i>	148
<i>Tabela 4.7</i>	150
<i>Tabela 4.8</i>	151
<i>Tabela 4.9</i>	152
<i>Tabela 4.10</i>	153
<i>Tabela 4.11</i>	154
<i>Tabela 4.12</i>	156
	157

6.3 Notação

Em qualquer expressão, exceto quando especificamente definido, um escalar é denotado por uma letra Grega, um vetor é denotado por uma letra minúscula e é sempre uma matriz coluna e uma matriz é denotada por uma letra maiúscula.