

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À DEFESA FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR *Nelson José Peruzzi*
..... E APROVADA
PELA COMISSÃO JULGADORA EM *08, 04, 2005*
José Balthazar
.....
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**DINÂMICA NÃO LINEAR E CONTROLE DE SISTEMAS IDEAIS E
NÃO-IDEAIS PERIÓDICOS**

Autor: Nelson José Peruzzi

Orientador: José Manoel Balthazar

04/05

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

UNIDADE	BC
Nº CHAMADA	TUNICAMP
	P435c
V	EX
TOMBO BC/	64066
PROC.	16-P-00086-05
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	11,00
DATA	01/06/05
Nº CPD	

Bib. id. 350720

Peruzzi, Nelson José
P435c Dinâmica não linear e controle de sistemas ideais e não-ideais periódicos / Nelson José Peruzzi.--Campinas, SP: [s.n.], 2005.

Orientadores: José Manoel Balthazar, João Maurício Rosário.

Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Liapunov, Funções de. 2. Chebyshev, Polinômios de. 3. Picard, Número de. I. Balthazar, José Manoel. II. Rosário, João Maurício. III. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

**DINÂMICA NÃO LINEAR E CONTROLE DE SISTEMAS IDEAIS E
NÃO-IDEAIS PERIÓDICOS**

Autor: Nelson José Peruzzi

Orientador: José Manoel Balthazar

Curso: Engenharia Mecânica.

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico.

Tese de doutorado apresentada à comissão de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2005

S.P. - Brasil

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO**

TESE DE DOUTORADO

**DINÂMICA NÃO LINEAR E CONTROLE DE SISTEMAS IDEAIS E
NÃO-IDEAIS PERIÓDICOS**

Autor: Nelson José Peruzzi

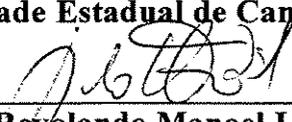
Orientador: José Manoel Balthazar

Co-orientador: João Maurício Rosário



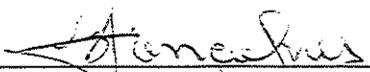
Prof. Dr. José Manoel Balthazar; Presidente

Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP/FEM/DPM



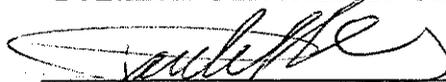
Prof. Dr. Reyolando Manoel Lopes da Fonseca Brasil

Universidade de São Paulo – USP



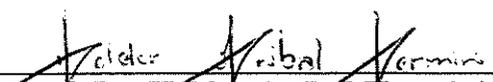
Prof. Dr. Paulo Batista Gonçalves

Pontifícia Universidade Católica – PUC/RJ



Prof. Dr. Paulo Roberto Gardel Kurka

Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP/FEM/DPM



Prof. Dr. Helder Aníbal Hermini

Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP/FEM/DPM

Campinas, 08 de abril de 2005

Dedicatória

A Deus pela força em todos os momentos de minha vida e principalmente durante a execução do meu trabalho.

À minha esposa Aline pela compreensão e colaboração na concretização de mais um objetivo.

À minha Família, que me deu todo o apoio de que precisei nesses anos todos.

Agradecimentos

Agradeço a meu orientador Prof. Dr. José Manoel Balthazar e sua esposa Lúcia pela atenção e apoio dispensados durante toda a elaboração desta tese de doutorado. Com respeito e admiração, o meu muito obrigado.

Agradeço ao Prof. Dr. Bento R. Pontes pela ajuda principalmente na parte de sistemas não-ideais.

Agradeço aos companheiros de trabalho do departamento de Ciências Exatas da UNESP de Jaboticabal, da FATEC-TQ e da Faculdade de Educação São Luís, pela compreensão e apoio durante todo este trabalho.

Agradeço aos colegas da Pós-Graduação, principalmente ao Fábio, pela ajuda durante o curso.

Resumo

Peruzzi, Nelson José, *Dinâmica Não-Linear e Controle de Sistemas Ideais e Não-Ideais Periódicos*, Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2005. 183 p. Tese (Doutorado).

Neste trabalho, apresenta-se um novo método numérico para aproximar matriz de transição de estados (STM) para sistemas com coeficientes periódicos no tempo. Este método, é baseado na expansão polinomial de Chebyshev, no método iterativo de Picard e na transformação de Lyapunov-Floquet (L-F) e aplica-se na análise da dinâmica e o controle de sistemas lineares e periódicos. Para o controle, aplicam-se dois projetos para eliminar o comportamento caótico de sistemas periódicos no tempo. O primeiro, usa o projeto de controle realimentado baseado na aplicação da transformação L-F, e o objetivo do controlador é conduzir a órbita do sistema para um ponto fixo ou para uma órbita periódica. No segundo, utiliza-se o controle não-linear para bifurcação, e o objetivo, neste caso, é modificar (atrasar ou eliminar) as características de uma bifurcação ao longo de sua rota para o caos. Como exemplo, aplicou-se, com sucesso, a técnica para análise e o controle da dinâmica: num pêndulo com excitação paramétrica, no oscilador de Duffing, no sistema de Rössler e sistema pêndulo duplo invertido. O método, também, mostrou-se satisfatório na análise e controle de um sistema monotrilho não ideal.

Palavras-chave:

Transformação Lyapunov-Floquet; Polinômio de Chebyshev; Iteração de Picard, Sistema não-ideal, Dinâmica e Controle.

Abstract

In this work, a new numerical method to approximate state transition matrix (STM) for systems with time-periodic coefficients is presented. This method is based on the expansion Chebyshev polynomials, on the Picard iteration and on the Lyapunov-Floquet transformation (transformation L-F). It is applied to the dynamical analysis and control of linear periodic systems. For the control, two projects to eliminate the chaotic behavior of time periodic systems are applied. The first one, uses the feedback control design based on the L-F transformation, and the controller's objective is to drive the orbit of the system to an equilibrium point or a periodic orbit. In the second one, the non-linear control for bifurcation is used, and the objective, in this case, is to modify (to put back or to eliminate) the characteristics of a bifurcation along its route to chaos. As example, the technique for dynamical analysis and control was applied, successfully, to a pendulum with parametric excitement, the Duffing's oscillator, the Rössler's system and the inverted double pendulum. The method was, also, to be shown satisfactory in the analysis and control of a monorail non-ideal system.

Key words

Lyapunov-Floquet Transformation (Transformation L-F), Chebyshev Polynomials, Picard Iteration, Non-ideal System, Dynamics and Control.

Índice

Lista de Figuras	iv
Lista de Tabelas	vii
Nomenclatura	viii
1. Introdução	1
1.1 Objetivo do Trabalho.....	3
1.2 Descrição do Trabalho.....	3
2. Matriz de Transição de Estados para sistemas periódicos	6
2.1 Resultados Obtidos a Partir da Teoria de Floquet.....	8
2.2 Cálculo da Matriz de Transição de Estados (STM).....	11
2.2.1 Exemplo da STM para um sistema comutativo.....	11
2.3 Sistemas não-comutativos.....	14
2.3.1 Polinômios Ortogonais.....	15
2.3.2 Polinômio de Chebyshev de 1º tipo.....	17
2.3.3 Matriz operacional de integração de Chebyshev.....	18
2.3.4 Matriz operacional de diferenciação de Chebyshev.....	19
2.3.5 Polinômios de Chebyshev alterados de 1º tipo.....	20
2.3.6 Matriz operacional do produto.....	23
2.3.7 Matriz operacional de Integração.....	25
2.4 Método iterativo de Picard.....	26
3. Projetos de Controle	31
3.1 Controle de sistemas periódicos via transformação L-F.....	31
3.1.1 Projeto do controlador linear.....	33
3.1.2 Projeto de controle para sistemas exibindo caos.....	33
3.1.3 Projeto do controlador via transformação L-F.....	35
3.1.4 Robustez do projeto de controle.....	37

3.2 Projeto de controle não-linear	38
3.3 Projeto de controle de bifurcações.....	39
3.3.1 Bifurcação Flip (Duplicação do Período).....	43
3.3.2 Bifurcação Transcrítica e Quebra de Simetria.....	45
3.3.3 Bifurcação Secundária de Hopf.....	47
4. Dinâmica e Controle de Sistemas Vibratórios Ideais com Coeficientes Periódicos...	50
4.1 Modelo Pêndulo Excitado Parametricamente.....	51
4.1.1 Análise da Estabilidade Estrutural.....	52
4.1.2 Estabilização do pêndulo excitado parametricamente.....	58
4.2 Oscilador de Duffing	64
4.2.1 Controle da equação de Duffing.....	68
4.3 Sistema de Rössler.....	73
4.3.1 A órbita desejada.....	74
4.3.2 Controle do sistema de Rössler.....	77
4.4 Pêndulo duplo invertido.....	82
4.4.1 Controle.....	87
4.5 Aplicação do projeto de controle de bifurcações.....	90
5. Dinâmica e Controle de Sistemas Vibratórios não-ideais com coeficientes periódicos...	94
5.1 Sistema pêndulo invertido e o sistema mono-trilho, ideal e não-ideal.....	94
5.2 Modelagem do sistema e obtenção da equação do movimento.....	95
5.3 Dedução das equações do movimento.....	98
5.3.1 Energia Cinética Total.....	98
5.3.2 Energia cinética do carro.....	98
5.3.3 Energia cinética do suporte.....	98
5.3.4 Energia cinética do pêndulo.....	99
5.3.5 Energia cinética do motor.....	99
5.3.6 Energia Potencial Total.....	100
5.3.7 Energia potencial do pêndulo.....	100
5.3.8 Energia potencial da mola-suporte.....	101
5.3.9 Energia potencial da mola-torcional.....	101
5.3.10 As Equações de Euler-Lagrange.....	101

5.3.11 Equação de Euler-Lagrange para o Pêndulo.....	102
5.3.12 Equação de Euler-Lagrange para o Carro.....	103
5.3.13 Equações de Euler-Lagrange para o motor.....	104
5.4 Caso ideal.....	108
5.5 Caso não-ideal.....	109
5.6 O estudo da dinâmica do sistema.....	110
5.7 O Controle.....	116
6. Conclusões e Sugestões para futuros trabalhos.....	120
6.1 Conclusões.....	120
6.2 Sugestões para Futuros Trabalhos	122
Referências Bibliográficas.....	123
Apêndices.....	129
A-) Teoria de Floquet.....	129
B-) Redução à Variedade Central.....	132
C-) Teoria da Forma Normal.....	141
D-) Deformação Versal.....	143
E-) Teoria de Filippov.....	144
Anexos.....	151
A-) Algoritmo da matriz de transição de estados.....	151
B-) Algoritmo da matriz de transição de Floquet e os multiplicadores de Floquet.....	153
C-) Algoritmo do diagrama de estabilidade.....	154
D-) Algoritmo do controle.....	155
E-) Programa em código do Matlab® 6.5 para obtenção da STM e do Diagrama e Estabilidade do Oscilador de Duffing.....	158
F-) Equação do movimento do pêndulo excitado parametricamente.....	171
Súmula curricular	174
Anexo do trabalho submetido.....	176

Lista de Figuras

1.1	Organograma com resumo da técnica usada neste trabalho.....	5
2.1	Aproximação da função seno pelo polinômio de Chebyshev.....	23
4.1	Pêndulo excitado parametricamente.....	51
4.2	Diagrama de estabilidade para $0 < p < 3$ e $0.5 < \omega < 3$	53
4.3	Diagrama de Bifurcação para $p = 2$ e $0.5 < \omega < 3$	54
4.4	Refinamento do Diagrama de Bifurcação para $2.3 < \omega < 3$	55
4.5	(a) Plano de fase, (b) Histórico no tempo do sistema não-controlado.....	56
4.6	(a) Mapa de Poincaré, (b) Refinamento da região indicada.....	57
4.7	Plano de fase da órbita desejada.....	58
4.8	Históricos no tempo do estado x_1 controlado e o desejado.....	60
4.9	Histórico no tempo do estado x_2 controlado e o desejado.....	60
4.10	Comparação dos planos de fase não-controlados e o desejado.....	61
4.11	Comparação dos planos de fase dos sistemas controlados e não-controlados.....	62
4.12	Mapa de Poincaré do sistema controlado.....	63
4.13	Plano de fase do oscilador de Duffing não-controlado.....	64
4.14	Histórico no tempo dos estados não-controlados.....	65
4.15	Plano de fase da órbita desejada.....	66
4.16	Órbita do oscilador de Duffing controlada.....	69
4.17	Órbita do oscilador de Duffing controlada e desejada.....	70
4.18	Histórico no tempo dos estados controlados do oscilador de Duffing.....	71
4.19	Histórico no tempo dos estados controlados e órbita desejada do oscilador de Duffing.....	72
4.20	Planos de fase para os estados não-controlados x_1 e x_2	73
4.21	Planos de fase para os estados não-controlados x_1 e x_3	74
4.22	Plano de fase órbita desejada.....	75
4.23	Plano de fase dos estados x_1 e x_2 : órbitas não-controlada e desejada.....	76

4.24	Plano de fase dos estados x_1 e x_3 : órbitas não-controlada e desejada.....	76
4.25	Plano de fase dos estados controlados x_1 e x_2	80
4.26	Plano de fase dos estados controlados x_1 e x_3	80
4.27	Plano de fase dos estados controlados e não-controlados x_1 e x_2	81
4.28	Plano de fase dos estados controlados e não-controlados x_1 e x_3	81
4.29	Pêndulo duplo invertido com excitação periódica.....	82
4.30	Diagrama de estabilidade para pêndulo duplo invertido com excitação periódica.....	85
4.31	Histórico no tempo dos estados x_1 e x_2 não-controlados.....	86
4.32	Histórico no tempo dos estados x_3 e x_4 não-controlados.....	86
4.33	Histórico no tempo dos estados x_1 e x_2 controlados.....	88
4.34	Histórico no tempo dos estados x_3 e x_4 controlados.....	89
5.1	Sistema monotrilho.....	96
5.2	Subsistemas primário e secundário.....	97
5.3	Diagrama de estabilidade para o sistema ideal.....	111
5.4	Diagrama de estabilidade para $\zeta = 6.0$	112
5.5	Diagrama de estabilidade para $\zeta = 4.0$	112
5.6	Diagrama de estabilidade para $\zeta = 0.1$	113
5.7	Diagrama de estabilidade para $\Delta = 0.33$	114
5.8	Histórico no tempo do sistema não-controlado.....	115
5.9	Histórico no tempo do pêndulo não-controlado.....	115
5.10	Histórico no tempo do carro não-controlado.....	116
5.11	Histórico no tempo do sistema controlado.....	118
5.12	Plano de fase do pêndulo controlado.....	119
5.13	Plano de fase do carro controlado.....	119
B1	Ilustração do Teorema Hartman-Grobman.....	133
B2	Ilustração do teorema da existência da Variedade Central para um ponto fixo.....	134
B3	Equivalência topológica entre os sistemas não-linear e o linearizado.....	135
B4	Ilustração da variedade global.....	135
B5	Ilustração das variedades Estável, Instável e a Central.....	139
B6	Ilustração da equivalência dinâmica entre o sistema original e o reduzido.....	140
E1	Bifurcação descontínua.....	149

Lista de Tabelas

2.1	Coeficientes da lei de recorrência geradora dos polinômios ortogonais.....	16
2.2	Coeficientes da função seno em polinômios de Chebyshev.....	22

Nomenclaturas

Letras Latinas

a_i	Coefficientes da expansão em polinômios de Chebyshev
$A(t)$	Matriz dos coeficientes periódicos
B_0	Matriz de ganhos invariante no tempo do sistema do sistema auxiliar
$B(t)$	Matriz de ganhos variante no tempo do sistema do sistema original
$f(.)$	Função qualquer
$F(t)$	Matriz de ganhos na realimentação
$e(t)$	Erro dinâmico das trajetórias desejada e real
G	Matriz operacional de integração
gr_{cheb}	Grau de polinômio de Chebyshev de primeiro tipo alterado
I	Matriz identidade
it_{pic}	Número de iterações de Picard
\bar{K}	Matriz de ganhos obtida no deslocamento de pólos
L	Lagrangeano
$L(t)$	Matriz da transformação L-F complexa T-periódica
$Q(t)$	Matriz da transformação L-F real 2T-periódica
Q_a	Matriz operacional do produto
R	Matriz da transformação L-F <i>constante real ou complexa</i>
t	Variável tempo
T	Período
T_r	Polinômios de Chebychev alterados e 1º tipo
T_r^*	Polinômios de Chebychev alterados e 1º tipo
\hat{F}^t	Matriz dos polinômios de Chebyshev alterados
u	Controlador

u_L	parte do controle linear
u_{NL}	parte do controle não-linear
u_f	parte do controlador linear “feedforward” (retro-alimentação)
u_i	parte do controlador linear “feedback” (realimentação)
V	Energia Potencial
x	Variável de estado
\dot{x}	Derivada primeira de x
y	Variável de estado

Letras Gregas

$\phi(t)$	Matriz de Transição de Estados
$\phi(T)$	Matriz de Transição de Floquet ou matriz de Monodromia
α_i	Expoentes característicos
α	Vetor de parâmetros
μ_i	Multiplicadores de Floquet <i>ou multiplicadores característicos</i>
θ	Deslocamento angular
$\dot{\theta}$	Derivada primeira de θ - velocidade angular
ω	Frequência de excitação
ϕ	Deslocamento angular do motor

Abreviações

STM	Matriz de Transição de Estados
FTM	Matriz de Transição de Floquet
Bif.	Bifurcação

Capítulo 1

Introdução

Os movimentos de uma ampla classe de sistemas dinâmicos podem ser modelados matematicamente, através de sistemas de equações diferenciais ordinárias lineares de segunda ordem com coeficientes periódicos.

Existe na literatura, uma grande quantidade de trabalhos que trata da estabilidade de equações diferenciais ordinárias e periódicas. Esses trabalhos geraram novas pesquisas e possibilitaram um grande número de aplicações práticas em várias áreas das ciências, tais como: problemas de estabilidade dinâmica em mecânica aplicada, dinâmica estrutural em sistemas com rotações, teoria de controle de sistemas lineares, entre outras.

Dois tipos de questionamentos básicos, associados a estes problemas, são comuns quando se trabalha com modelos em engenharia: a estabilidade de tais sistemas e suas respostas sobre vários tipos de excitações.

A estabilidade de sistemas lineares com coeficientes periódicos tem sido tratada por vários métodos que são bem conhecidos na literatura como: o método do determinante de Hill; o método da perturbação e a teoria de Lyapunov-Floquet (Nayfeh e Mook, 1979), (Meirovitch, 1970).

O método de Hill é o mais antigo deles e é usado para calcular a fronteira de estabilidade do sistema sem que seu vetor-solução seja calculado explicitamente. Este método não é conveniente quando o sistema possui muitos graus de liberdade devido ao número de cálculos envolvidos.

O método da perturbação é geralmente aplicável quando os parâmetros que multiplicam os termos periódicos são pequenos. (Nayfeh, 1981).

A teoria de Lyapunov-Floquet é a mais geral delas mas, no passado recente, não se tinha eficiência computacional para calcular a matriz de transição de estados e, portanto, o seu uso ficou reduzido a uma classe restrita de problemas, a saber, os sistemas comutativos.

Recentemente, porém, surgiram novas técnicas computacionais, tais como as que utilizam a expansão em polinômios ortogonais, de modo que tal deficiência pudesse ser contornada, e a teoria de Lyapunov-Floquet pôde, então, ser aplicada em problemas complexos de engenharia onde aparecem sistemas de equações diferenciais ordinárias lineares com coeficientes periódicos.

A idéia de resolver um sistema de equações diferenciais em termos de polinômios ortogonais, não é nova, (Fox & Parker, 1968) escreveram: “uma solução em série de potência não é a melhor solução convergente num intervalo finito. Se a solução é expressa em termos de polinômios de Chebyshev, a convergência será mais rápida e com melhor precisão”.

Recentemente, muitos autores têm usado polinômios ortogonais para resolver problemas de análise da dinâmica de sistemas e controle. Especificamente, sobre a aplicação dos polinômios de Chebyshev para equações diferenciais com coeficientes periódicos, os primeiros trabalhos foram (Sinha & Chou, 1976), (Sinha, et al., 1979). Porém, as aplicações ficaram restritas a sistemas periódicos de segunda ordem.

A aplicação dos polinômios ortogonais para sistemas periódicos de ordens superiores foi possível através da incorporação da teoria das matrizes operacionais (Chang, et al, 1986) à teoria dos polinômios ortogonais. Com essa incorporação, obteve-se (Sinha & Wu, 1991) um esquema computacional eficiente para aproximar sistemas lineares com coeficientes periódicos. Esta aproximação está baseada no fato de que tanto o vetor de estados como a matriz dos coeficientes periódicos podem ser aproximados por uma série finita de polinômios de Chebyshev no período principal.

Tal expansão reduz o problema original a um conjunto de equações algébricas lineares, cuja solução pode ser obtida no intervalo de período unitário. Além disso, juntamente com a teoria de Floquet, é possível obter a matriz de transição de estados (STM) no final do período unitário e assim obter as condições de estabilidade do sistema através da análise dos autovalores. Para resolver o sistema de equações algébricas, em (Sinha & Wu, 1991) são apresentadas duas formulações: *Formulação Direta* e *Formulação Espaço-Estado*.

Uma vez que a matriz de transição de estados obtida por uma das formulações (*Direta ou Espaço-Estado*) é expressa em termos dos polinômios de Chebyshev, é possível fatorá-la e obter a matriz de transição de Floquet, explicitamente em função do tempo. A transformação de Lyapunov-Floquet (L-F) pode, então, ser aplicada ao sistema variante no tempo de modo a torná-lo dinamicamente equivalente a um sistema invariante no tempo. Uma importante aplicação da

transformação L-F está associada ao projeto de controle de sistemas lineares periódicos, pois as técnicas de controle clássicas e modernas dificilmente se aplicam a sistemas de natureza variante no tempo.

A dificuldade deste método está nas formulações, isto é, no modo de calcular as soluções algebricamente. De fato, para se obter uma boa aproximação da matriz de transição de estados em polinômios de Chebyshev, deve-se ter polinômios de grau maior ou igual a 15. Portanto, a formulação direta e a formulação espaço-estado são computacionalmente longas.

Para contornar este obstáculo, uma nova técnica foi proposta em (Sinha & Butcher, 1997). Nela, a matriz de transição de estados, associada a um sistema linear com coeficientes periódicos de qualquer dimensão, é aproximada através da expansão de polinômios de Chebyshev alterados e do processo iterativo de Picard. Isso possibilita o cálculo da matriz de transição de Floquet que é aplicável no projeto de controle de sistemas não-lineares com coeficientes periódicos e caóticos.

Este último fato possibilita a aplicação desta técnica para a aproximação da matriz de transição de estados, a análise de seus autovalores para o estudo da dinâmica e o controle de sistemas lineares com coeficientes periódicos no tempo, ideais (quando não é considerada a interação do sistema vibratório e sua fonte de energia - a fonte de energia é considerada de potência ilimitada) e não-ideais (quando se considera a interação do sistema vibratório e sua fonte de energia - um motor de corrente contínua de potência limitada), (Bathazar, et al, 2001, 2003, 2004)

1.1 Objetivo do Trabalho

O objetivo deste trabalho é apresentar uma teoria para aproximar a matriz de transição de estados para sistemas lineares e periódicos e aplicá-la no estudo da dinâmica e do controle de sistemas ideais e não-ideais, com coeficientes periódicos. Este trabalho se enquadra no grupo de pesquisa em sistemas dinâmicos não-ideais do Professor Balthazar (Bathazar, et al, 2001, 2003, 2004) e é o primeiro de uma série na linha de controle de sistemas periódicos não-ideais.

1.2 Descrição do Trabalho

Este trabalho está organizado da seguinte forma: no capítulo dois, desenvolve-se a técnica para aproximar matriz de transição de estados para sistemas periódicos no tempo. Inicialmente, serão obtidos os principais resultados a partir da Teoria de Floquet, destacando-se o teorema de Lyapunov-Floquet e a transformação L-F. Em seguida, a matriz de transição de

estados será obtida para o caso comutativo e não-comutativo. Para o caso não-comutativo, será apresentada a teoria sobre polinômios ortogonais, em particular o polinômio de Chebyshev, as matrizes operacionais e o método iterativo de Picard.

No capítulo três, são apresentados dois projetos de controle para eliminar o comportamento caótico de sistemas periódicos no tempo. O primeiro usa o projeto de controle realimentado baseado na aplicação da transformação L-F, e o objetivo do controlador é conduzir a órbita do sistema para um ponto fixo ou para uma órbita periódica. O segundo utiliza o controle não-linear para bifurcação e o objetivo, neste caso, é modificar (atrasar ou eliminar) as características de uma bifurcação ao longo de sua rota para o caos.

No capítulo quatro, aplica-se a teoria desenvolvida nos capítulos dois e três na análise da dinâmica e controle de órbitas caóticas em sistemas tradicionais na literatura, isto é, sistemas ideais. Os sistemas ideais que serão estudados são: pêndulo com excitação paramétrica, oscilador de Duffing, sistema de Rössler e sistema de pêndulo duplo invertido.

Finalmente, no capítulo cinco, considera-se o problema de um monotrilho não-ideal usado no transporte de carga (sistema carro-pêndulo-motor). Para obter-se o modelo matemático do sistema, utilizam-se as equações de Euler-Lagrange. Para estudar as equações do modelo do sistema carro-pêndulo-motor, divide-se o problema em dois casos: para o motor ideal e para o motor não-ideal. Verifica-se a interação do motor com o sistema analisando-se os diagramas de estabilidade para diversas constantes de torque do motor. Enfim, controlam-se os movimentos do carro e do pêndulo através da lei de controle apresentada no capítulo três.

A seguir, é mostrado um organograma que sintetiza a técnica que será utilizada no restante deste trabalho.

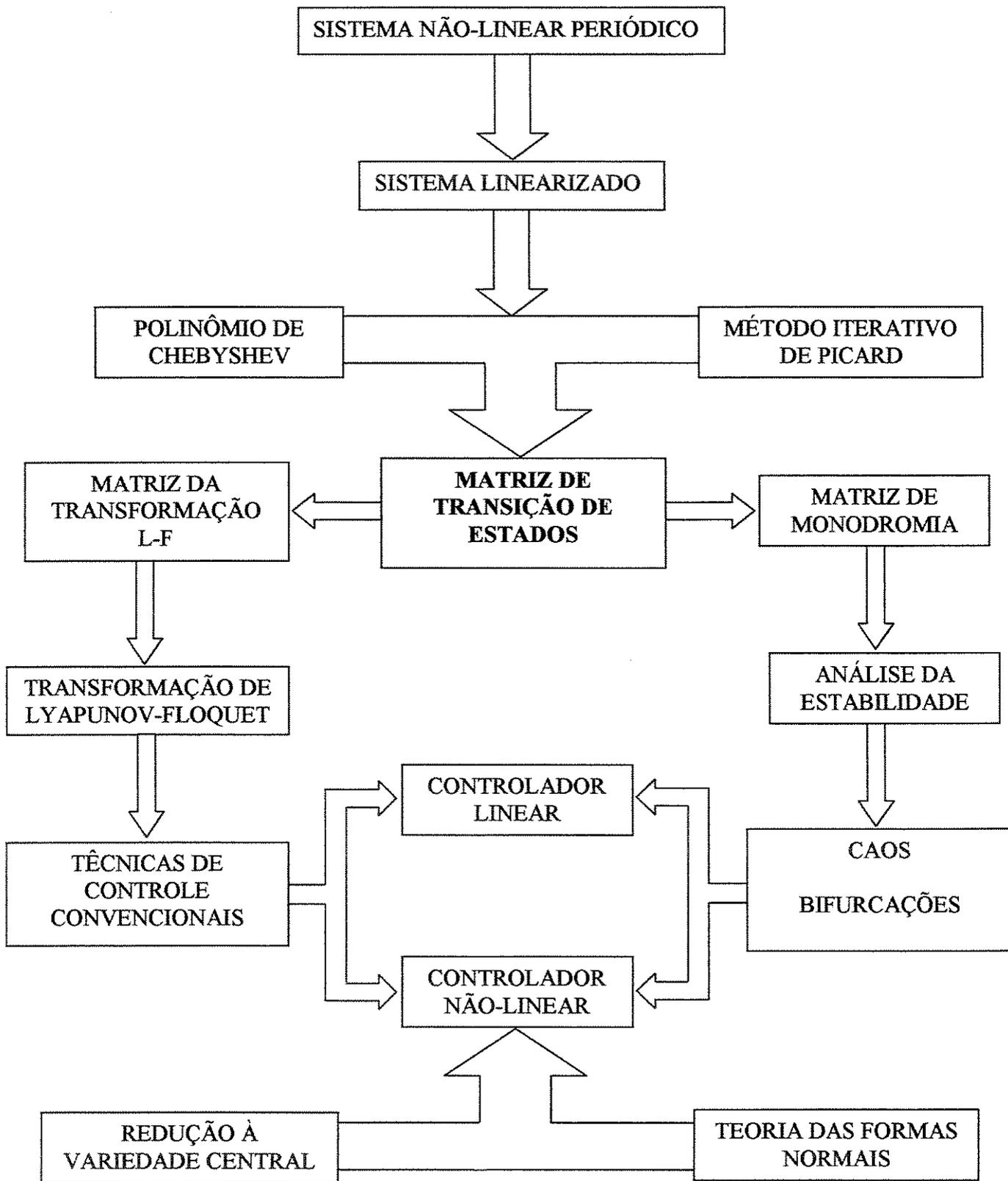


Figura 1.1 - Organograma com resumo da técnica usada neste trabalho.

Capítulo 2

Matriz de Transição de Estados para sistemas periódicos

A análise da estabilidade ocupa uma posição de destaque na teoria de sistemas dinâmicos. Há várias definições para estabilidade de sistemas dinâmicos e estas estão relacionadas com a dependência ou não do problema da variável tempo, isto é, se a natureza do problema é não-autônoma ou autônoma, respectivamente.

Um dos principais resultados encontrados para a análise de sistemas dinâmicos é o teorema de estabilidade de Lyapunov (Khalil, 1996), (Meirovitch, 1970).

Teorema de Lyapunov

Seja $x=0$ um ponto de equilíbrio do sistema autônomo $\dot{x} = f(x)$ e $D \subset \mathbb{R}^n$ é o domínio contendo $x=0$. Seja $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável, tal que $V(0) = 0$ e $V(x) > 0, x \in D - \{0\}$, então:

- i) se $\dot{V}(x) \leq 0, x \in D$, então $x=0$ é um ponto de equilíbrio estável.*
- ii) se $\dot{V}(x) < 0, x \in D - \{0\}$, então $x=0$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.*

Para sistemas periódicos no tempo tem-se a seguinte definição de estabilidade:

Definição

Uma solução periódica é chamada de ciclo-limite se não houver outras soluções periódicas suficientemente próximas a ela.

Com base nessa definição, pode-se concluir que um ciclo-limite é uma solução periódica isolada e esta corresponde a uma órbita fechada no espaço de estado. Assim, do ponto de vista do mapa de Poincaré (Parker & Chua,1989), não há nenhuma diferença fundamental entre o ponto fixo e um ciclo-limite de uma órbita periódica.

Como consequência, pode-se fazer a seguinte analogia:

“a análise de estabilidade de um ciclo-limite, de uma solução de equilíbrio no mapa de Poincaré, é uma generalização da análise da estabilidade dos pontos fixos”.

Desta forma, dado um sistema dinâmico periódico no tempo, é comum investigar para quais condições do conjunto de parâmetros uma solução periódica é estável e de qual forma esta solução pode perder a estabilidade, quando pelo menos um dos parâmetros é variado. Porém, os conceitos usuais para a análise de estabilidade de sistemas autônomos, tais como o critério Routh-Hurwitz (critério R-H), o método de Hill e o método da perturbação não se aplicam a problemas de natureza não-autônoma, como é o caso de sistemas não-lineares com coeficientes periódicos, pois tais sistemas podem ter soluções periódicas estáveis do ponto de vista de Poincaré e instáveis do ponto de vista de Lyapunov (Nayfeh,1994). Veja exemplos deste fato em (Vidyasagar,1978) e (Khalil, 1996).

Por isso, deve-se tomar os devidos cuidados na análise de estabilidade de sistemas periódicos no tempo, para não se tirar falsas conclusões como o fez (Chen, 1993) ao analisar e controlar o oscilador de Duffing. Este problema foi apontado e resolvido por (Sinha,2000(a)).

A seguir, será apresentado o método mais direto para tratar da estabilidade das soluções de sistemas periódicos. Este método está baseado na aplicação do teorema de Lyapunov-Floquet.

2.1 Resultados obtidos a partir da Teoria de Floquet

Os sistemas lineares com coeficientes periódicos no tempo estão presentes na literatura desde o século XIX. O primeiro a pesquisar este problema foi Mathieu em 1868, (apud, Sinha, 1994) quando estudava uma equação diferencial de segunda ordem que modelava o movimento de uma onda de forma elíptica em um lago. Porém, os primeiros trabalhos que tratavam completamente da análise de estabilidade de sistemas com coeficientes periódicos, foram apresentados por Floquet em 1883 e Poincaré em 1899, (apud, Sinha, 1994).

Na teoria de Floquet, podem-se encontrar as condições para garantir a estabilidade de um sistema linear e periódico, a saber: a análise da estabilidade poderá ser feita a partir dos autovalores da matriz de transição de estados calculada no final do período.

Em 1896, Lyapunov introduziu uma transformação que converte um sistema periódico no tempo para a forma invariante no tempo. A base desta transformação é a fatoração da matriz de transição de estados do sistema periódico variante no tempo, original.

Este fato é tratado no teorema a seguir (Meirovitch,1970).

Teorema

Toda matriz fundamental $\phi(t)$ de um sistema linear e periódico

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \quad (2.1)$$

pode ser escrita como:

$$\phi(t) = L(t)e^{Rt} \quad (2.2)$$

onde $L(t)$ é $2T$ -periódica no caso real (ou T -periódica no caso complexo) e R é uma matriz constante real ou complexa, respectivamente.

Pelo teorema, vê-se claramente que o decaimento do sistema é determinado pelo termo e^{Rt} e, tomando o caso particular, quando $t=T$, pode-se calcular a matriz R pela relação:

$$\phi(T) = e^{RT} \quad (2.3)$$

onde, a matriz $\phi(t)$, que é a matriz de transição de estados calculada no final do período T , $\phi(T)$, será denominada Matriz de Transição de Floquet (FTM) ou matriz de Monodromia .

Observação

É importante notar que o teorema de Lyapunov-Floquet não produz a solução do sistema. O que o teorema L-F fornece é a informação, extremamente valiosa, sobre a forma e as propriedades da solução.

Os autovalores da matriz de Monodromia $\phi(T)$, o qual será denotado por (μ_i) , são denominados de *multiplicadores característicos* ou *multiplicadores de Floquet*. São os multiplicadores de Floquet que fornecerão os critérios de estabilidade/instabilidade do sistema linear com coeficientes periódicos no tempo.

Por outro lado, os autovalores da matriz R , o qual denotaremos (α_i) , são denominados de *expoentes característicos*, e estes estão relacionados com os multiplicadores característicos (μ_i) , através da relação:

$$e^{\mu_i T} = \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.4)$$

Logo, pode-se escrever:

$$\alpha_i = \frac{1}{T} \ln |\mu_i| \quad (2.5)$$

Resumindo, o critério de estabilidade para sistemas periódicos está relacionado com os autovalores da matriz $\phi(t)$, onde a condição para a estabilidade é obtida a partir de (2.4) ou (2.5), como:

$$\alpha_i < 0 \quad \text{ou} \quad |\mu_i| < 1 \quad (2.6)$$

Uma importante consequência da teoria de Lyapunov-Floquet é a possibilidade de construção de um sistema invariante no tempo, que é dinamicamente equivalente a um sistema linear periódico.

Esta construção é possível com base na *Transformação de Lyapunov-Floquet*, ou simplesmente, *transformação L-F*, que será dada pelo corolário a seguir.

Corolário

A transformação de Lyapunov-Floquet T -periódica, ou, simplesmente, transformação L-F:

$$x(t) = L(t)z(t), \quad (2.7)$$

reduz o sistema linear variante no tempo $\dot{x} = A(t)x$, à forma invariante no tempo:

$$\dot{z}(t) = Rz(t). \quad (2.8)$$

Observações:

i-) Se os multiplicadores de Floquet (μ_i) estão no lado esquerdo do plano complexo, então existem as transformações L-F: T -periódica complexa e $2T$ -periódica real, sendo que, no caso $2T$ -periódico, a matriz da transformação L-F será denotada por $Q(t)$. Além disso, a matriz da transformação L-F tem a propriedade da simetria, isto é:

$$Q(t+T) = -Q(t).$$

ii-) Se alguns dos multiplicadores de Floquet (μ_i) estão no lado direito do plano complexo, então as transformações L-F: T e $2T$ -periódicas são as mesmas, sendo esta T -periódica e real.

Para concluir, deve-se observar que a dificuldade do teorema é a obtenção da matriz de transição dos estados (STM) $\phi(t)$. Obter a STM $\phi(t)$ na forma fechada é praticamente impossível na maioria dos casos.

A exceção são algumas classes especiais de funções, como é o caso dos sistemas comutativos¹. Para sistemas Comutativos, a matriz de transição de estados $\phi(t)$ pode ser fatorada como:

$$\phi(t) = e^{B(t)} = L(t)e^{Rt} \quad (2.9)$$

onde $L(t)$ é uma matriz T -periódica e:

¹ A matriz periódica $A(t)$ é chamada comutativa se existir uma matriz $B(t)$, tal que, $\frac{dB(t)}{dt} = A(t)$ e ainda satisfazendo a relação $A(t)B(t) - B(t)A(t) = O$.

$$R = \frac{1}{T} \int_0^T A(\zeta) d\zeta \quad (2.10)$$

Para os demais casos, a maneira conveniente para obter-se a matriz de transição de estados $\phi(t)$ é usar uma aproximação numérica.

A seguir, serão apresentadas as formas de se calcular as matrizes de transição de estados para sistemas comutativos e não-comutativos.

2.2 Cálculo da Matriz de Transição de Estados (STM)

Como já foi dito, o cálculo da matriz de transição de estados, em geral, não é uma tarefa trivial. Além disso, a obtenção dessa matriz na forma fechada é possível somente em casos muito especiais, como é o caso dos sistemas comutativos. Para os demais sistemas, a alternativa, quase sempre, é usar alguma aproximação numérica computacional. A aproximação computacional, neste capítulo, está baseada no método proposto em (Sinha, 1991 e 1997), que utiliza os resultados da teoria de Floquet, do polinômio da Chebyshev e do método iterativo de Picard.

2.2.1 Exemplo da STM para um sistema comutativo

O exemplo a seguir ilustra a obtenção da matriz de transição de estados para sistemas comutativos.

Seja o sistema linear com coeficientes periódicos no tempo:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad (2.11)$$

onde $A(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) & \text{sen}(t) \\ -\text{sen}(t) & \cos(t) \end{bmatrix}$.

A matriz $A(t)$ do sistema (11) comuta com a matriz $B(t)$, de modo que:

$$B(t) = \int_0^t A(\zeta) d\zeta = \begin{bmatrix} \text{sen}(t) & 1 - \cos(t) \\ \cos(t) - 1 & \text{sen}(t) \end{bmatrix}$$

Então, a matriz de transição de estados $\phi(t)$ pode ser obtida a partir da equação (2.9) através de $\phi(t) = e^{B(t)}$, isto é:

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} \text{sen}(t) & 1 - \cos(t) \\ \cos(t) - 1 & \text{sen}(t) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Para fixar as idéias, considere as mudanças de variáveis: $\lambda = \text{sen}(t)$ e $\theta = 1 - \cos(t)$, de modo que o lado direito da equação (2.12) fica:

$$e^{\begin{bmatrix} \lambda & \theta \\ -\theta & \lambda \end{bmatrix}} = e^{\lambda I + \theta J}, \quad (2.13)$$

onde, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

É Obvio que as matrizes I e J são matrizes comutativas. Desse modo, pode-se escrever a equação (2.13) como:

$$e^{\lambda I + \theta J} = e^{\lambda I} e^{\theta J}. \quad (2.14)$$

Lembrando que a matriz de transição de estados é definida pela série infinita:

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}, \quad (2.15)$$

pode-se calcular cada um dos fatores separadamente:

$$e^{\lambda I} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda I)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n I^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{\lambda} I \quad (2.16)$$

Logo,

$$e^{\lambda I} = e^{\text{sen}t} I \quad (2.17)$$

$$e^{\theta J} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\theta J)^n}{n!} = I + \frac{(\theta J)^1}{1!} + \frac{(\theta J)^2}{2!} + \frac{(\theta J)^3}{3!} + \frac{(\theta J)^4}{4!} + \frac{(\theta J)^5}{5!} + \frac{(\theta J)^6}{6!} + \dots \quad (2.18)$$

porém, observa-se facilmente que:

$$\begin{aligned}
J^2 &= J^6 = J^{10} = \dots = -I \\
J^3 &= J^7 = J^{11} = \dots = -J \\
J^4 &= J^8 = J^{12} = \dots = I \\
J^5 &= J^9 = J^{13} = \dots = J
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Dessa forma, verifica-se, na expansão (2.18), que:

$$\begin{aligned}
(\theta J)^1 &= \theta J; (\theta J)^2 = -\theta^2 I; (\theta J)^3 = -\theta^3 J^3; \\
(\theta J)^4 &= \theta^4 I; (\theta J)^5 = \theta^5 J; (\theta J)^6 = -\theta^6 I; \dots
\end{aligned}$$

Separando-se os termos I e J na equação (2.18), pode-se escrever:

$$e^{\theta J} = \left(\frac{\theta}{1} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots \right) J + \left(I - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots \right) I \tag{2.20}$$

isto é,

$$e^{\theta J} = \text{sen} \theta J + \text{cos} \theta I \tag{2.21}$$

Portanto, das equações (2.12), (2.17) e (2.21), tem-se:

$$\phi(t) = e^{\lambda I + \theta J} = e^{\lambda I} e^{\theta J} = e^{\lambda I} (\text{sen} \theta J + \text{cos} \theta I) \tag{2.22}$$

ou seja,

$$\phi(t) = e^{\text{sent}} \begin{bmatrix} \text{cos}(1 - \text{cost}) & \text{sen}(1 - \text{cost}) \\ -\text{sen}(1 - \text{cost}) & \text{cos}(1 - \text{cost}) \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

Lembrando a paridade das funções trigonométricas: seno é ímpar e co-seno é par, a matriz de transição de estados, normalizada para o período τ , é:

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} \text{cos}(\text{cost} - \text{cos} \tau) & -\text{sen}(\text{cost} - \text{cos} \tau) \\ \text{sen}(\text{cost} - \text{cos} \tau) & \text{cos}(\text{cost} - \text{cos} \tau) \end{bmatrix} e^{\text{sent} - \text{sen} \tau} \tag{2.24}$$

onde, $\tau = 2\pi$ é uma constante de normalização.

Escrevendo $t = 2\pi'$ tem-se:

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} \text{cos}\left(\frac{1}{2\pi} [\text{cos} 2\pi' - 1]\right) & -\text{sen}\left(\frac{1}{2\pi} [\text{cos} 2\pi' - 1]\right) \\ \text{sen}\left(\frac{1}{2\pi} [\text{cos} 2\pi' - 1]\right) & \text{cos}\left(\frac{1}{2\pi} [\text{cos} 2\pi' - 1]\right) \end{bmatrix} e^{\left(\frac{\text{sen} 2\pi'}{2\pi}\right)} \tag{2.25}$$

Calculando-se a matriz de transição de estados no final do período:

$$\phi(1) = e^R \phi(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Obviamente, o multiplicador característico é real, contém multiplicidade 2, e como

$$R = \begin{bmatrix} \ell n 1 & 0 \\ 0 & \ell n 1 \end{bmatrix}, \text{ então:}$$

$$e^{Rt} = \begin{bmatrix} e^{t \cdot \ell n 1} & 0 \\ 0 & e^{t \cdot \ell n 1} \end{bmatrix} = I. \quad (2.27)$$

Portanto, a decomposição de Lyapunov-Floquet é:

$$\phi(t) = L(t)e^{Rt} = L(t) \quad (2.28)$$

onde, $L(t)$ é 2π -periódica.

2.3 Sistemas não-comutativos

Os sistemas não-comutativos não satisfazem a propriedade: $e^{\lambda I + \theta J} = e^{\lambda I} e^{\theta J}$. Portanto, os procedimentos usados nos cálculos da matriz de transição de estados $\phi(t)$ para o sistema comutativo (2.11), não são válidos.

Neste caso, a matriz de transição de estados $\phi(t)$ deverá ser aproximada por métodos numéricos-computacionais. Os sistemas apresentados nos capítulos 4 e 5 são exemplos de não comutativos.

Em (Sinha, 1991), a aproximação numérica para $\phi(t)$ foi feita através de polinômios ortogonais e, posteriormente, em (Sinha, 1997) foi incorporado à aproximação o método iterativo de Picard, cuja eficiência computacional é muito superior ao primeiro.

A seguir, será apresentado um resumo da teoria dos polinômios ortogonais e nele destaca-se o polinômio de Chebyshev alterado de primeira ordem, que será utilizado no restante deste trabalho.

2.3.1 Polinômios Ortogonais

Muitos problemas de análise de sistemas com equações diferenciais lineares têm sido aproximados através de funções ortogonais. A principal característica dessa técnica é reduzir a solução da equação diferencial para um sistema de equações algébricas, cujas soluções podem ser obtidas simbólicamente ou numericamente. Neste sentido, devem-se, primeiramente, observar as operações que estão envolvidas no processo de aproximação. É o que será feito a seguir

É óbvio que, para obter-se a solução da equação diferencial, é necessário o uso da operação de integração. No caso da aproximação de funções ortogonais, a integração é feita a partir de uma matriz constante, que será obtida a partir de uma base de polinômios ortogonais. Tal matriz será denominada *matriz operacional de integração*.

A matriz operacional de integração pode ser obtida a partir da expansão em séries de polinômios ortogonais, tais como Chebyshev, Laguerre, Legendre, Hermite. Esses polinômios ortogonais, por sua vez, são obtidos a partir de uma expansão em série de Taylor.

Sabe-se da álgebra linear que sempre existe uma matriz de transformação de séries polinomiais que, basicamente, conecta a base de funções polinomiais ortogonais com a série de Taylor.

De fato, é conhecido que toda função analítica $y = y(t)$ pode ser aproximada, em torno da origem, por uma série de Taylor com n termos:

$$y = y(t) = y(0) + ty'(0) + \frac{t^2}{2!} y''(0) + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} y^{(n-1)}(0) \quad (2.29)$$

Essa aproximação pode ser expressa em termos do produto interno:

$$y(t) = y^t f_T(t),$$

onde y^t indica a transposta de y :

$$y^t = \left\{ y(0), y'(0), \frac{y''(0)}{2!}, \dots, \frac{y^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} \right\} \quad (2.30)$$

$$f_T(t) = \{1, t, t^2, \dots, t^{n-1}\}^t \quad (2.31)$$

O vetor $f_T(t)$ é denominado polinômio de Taylor e possui as seguintes propriedades:

$$\frac{d}{dt} f_n(t) = \frac{d}{dt} (t^n) = n f_{n-1}(t) \quad (2.32)$$

$$f_{m+n} = f_m f_n \quad (2.33)$$

O vetor $f_T(t)$ pode ser usado como uma base (não-ortogonal) para a expansão de todas as funções analíticas², isto é, $f_T(t)$ gera o espaço das funções diferenciáveis num certo domínio $D \subset \mathfrak{R}^n$.

Se a base $f_T(t)$ for ortogonalizada via processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, irá gerar infinitos conjuntos ortogonais, tais como os conjuntos polinomiais ortogonais de Chebyshev, de Legendre, de Hermite, entre outros e estes, de modo mais conveniente, também servem como base para a expansão de todas as funções analíticas.

Logo, os polinômios ortogonais $f_{ort}(t)$ são gerados a partir da base $f_T(t)$ e de uma matriz de ortogonalização correspondente, que será denotada $T_{(\cdot)}$. Assim, uma base de polinômios ortogonais pode ser obtida pela transformação: $f_{ort}(t) = T_{(\cdot)} f_T(t)$.

A matriz operacional $T_{(\cdot)}$ para polinômios ortogonais pode ser obtida pela seguinte lei de recorrência:

$$a_n f_{n+1}(t) = (b_n + c_n) f_n(t) - d_n f_{n-1}(t) \quad (2.34)$$

onde os valores dos coeficientes da expressão determinam vários tipos de polinômios ortogonais, como mostra a tabela 1.

	Notação	a_n	b_n	c_n	d_n
Chebyshev(1º tipo)	T_{Cheb}	1	0	2	1
Legendre	P_n	$n+1$	0	$2n+1$	n
Laguerre	L_n	$n+1$	$2n+1$	-1	n
Hermite	H_n	1	0	2	$2n$

Tabela 2.1 - Coeficientes da lei de recorrência geradora dos polinômios ortogonais.

² Uma função é dita analítica em x_0 se esta for diferenciável em x_0 e na vizinhança de x_0 .

Os elementos da matriz operacional $T_{(.)}$ podem ser obtidos desde que se conheçam as duas primeiras linhas e colunas de $T_{(.)}$. Essas filas correspondem aos termos f_0 e f_1 da série Taylor. Portanto, a lei de recorrência obtida determina os elementos t_{ij} a partir dos elementos $t_{i-1,j}$, $t_{i-1,j-1}$ e $t_{i-2,j}$.

O polinômio ortogonal escolhido como base para a expansão de todas as funções analíticas é o polinômio de Chebyshev. A seguir, serão obtidos os principais resultados referentes a esse polinômio.

2.3.2 Polinômio de Chebyshev de 1º tipo

A matriz operacional de ortogonalização T_{Cheb} do polinômio de Chebyshev de 1º tipo, que tem seu intervalo de convergência $[-1,1]$, é obtida a partir de 2.34 e da tabela 2.1:

$$t_{i,j} = 2t_{i-1,j-1} - t_{i-2,j}, \quad i = 3,4,\dots,r \quad \text{e} \quad j = 3,4,\dots,r, \quad (2.35)$$

onde os dois primeiros termos são definidos por: $f_0 = 1$ e $f_1 = t$.

Os termos constantes do polinômio de Chebyshev (1ª coluna da matriz operacional), denotados por $t_{n,0}$, são dados por:

$$t_{n,0} = \begin{cases} 0, & \text{para } n \text{ par} \\ 1, & n = 1,5,\dots,4m+1, \quad m = 0,1,2,\dots \\ -1, & n = 3,7,\dots,4m-1 \end{cases} \quad (2.36)$$

Portanto, a matriz operacional T_{Cheb} tem a forma:

$$T_{cheb} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & t_{32} & t_{33} & t_{42} & \dots \\ 0 & t_{42} & t_{43} & t_{44} & \dots \\ 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Para $r = 7$ (aproximação até a 6ª ordem), tem-se a matriz de ortogonalização a partir das relações 2.35 e 2.36:

$$T_{Cheb} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -8 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -20 & 0 & 16 & 0 \\ -1 & 0 & 18 & 0 & -48 & 0 & 32 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Observe que o produto interno $T_{Cheb(7 \times 7)} \cdot f_T(t)$ gera os polinômios ortogonais Chebyshev até a 6ª ordem:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_0(t) = 1 \\ T_1(t) = t \\ T_2(t) = 2t^2 - 1 \\ T_3(t) = 4t^3 - 3t \\ T_4(t) = 8t^4 - 8t^2 + 1 \\ T_5(t) = 16t^5 - 20t^3 + 5t \\ T_6(t) = 32t^6 - 48t^4 + 18t^2 - 1 \end{array} \right. \quad (2.39)$$

2.3.3 Matriz operacional de integração de Chebyshev

A integração de uma função analítica $y(t)$ pode ser reduzida a uma transformação linear, isto é, multiplicação do vetor $f(t)$ por uma matriz conveniente. Assim, aproximando $y = y(t)$ pela série polinomial $y^t f(t)$, a integral de $y(t)$ é dada pela aproximação:

$$\int_a^t y(s) ds \cong y^T P f(t), \quad (2.40)$$

onde P é denominada *matriz operacional de integração* e é definida por:

$$\int_a^t f(s) ds \cong P f(t) \quad (2.41)$$

A variável t pertence ao intervalo de convergência da série polinomial.

Para obter-se a matriz operacional P , tem-se de integrar o polinômio de Taylor:

$$f_T(t) = \{1, t, t^2, \dots, t^{n-1}\}^T \quad (2.42)$$

no intervalo de convergência $(0, 1)$.

Assim,

$$\int_0^t f(s) ds = (t, \frac{t^2}{2}, \dots, \frac{t^r}{r})^T \quad (2.43)$$

Como $t \in (0, 1)$, pode-se fazer $\frac{t^r}{r} \cong 0$ para r suficientemente grande.

Logo,

$$\int_0^t f(s) ds \cong (t, \frac{t^2}{2}, \dots, \frac{t^{r-1}}{r-1}, 0)^T \quad (2.44)$$

Essa última seqüência pode ser escrita na forma vetorial como:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1/r-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ t^{r-1} \end{bmatrix} = Pf(t) \quad (2.45)$$

Logo, pode-se escrever:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1/r-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

2.3.4 Matriz operacional de diferenciação de Chebyshev

Do mesmo modo que a integral, a diferenciação de $y(t)$ pode ser obtida pela multiplicação do vetor $f(t)$ por uma matriz conveniente.

A derivada aproximada de $y(t)$ pode ser expressa por séries polinomiais:

$$\frac{dy(t)}{dt} \cong y^T Df(t), \quad (2.47)$$

onde a matriz operacional de diferenciação D é definida por:

$$\frac{df(t)}{dt} \cong Df(t) \quad (2.48)$$

com:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 16 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 20 & 0 & 20 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 4(m-2) & 0 & 4(m-2) & 0 & 4(m-2) & \dots & 0 & 0 \\ 2(m-1) & 0 & 4(m-1) & 0 & 4(m-1) & 0 & \dots & 4(m-1) & 0 \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

2.3.5 Polinômios de Chebyshev alterados de 1º tipo

Os polinômios de Chebyshev de 1º tipo (2.35) podem ser definidos pela relação:

$$\begin{aligned} T_r(t) &= \cos r\theta, \\ \cos\theta &= t; \quad t \in [-1,1] \end{aligned} \quad (2.50)$$

Fazendo a mudança de variável $t^* = \frac{t+1}{2}$, obtém-se os polinômios de *Chebyshev alterados de 1º tipo*, ao qual denota-se $T_r^*(t^*)$. O intervalo de convergência para $T_r^*(t^*)$ será $[0,1]$.

Assim,

$$T_r^*(t) = T_r(2t-1), \quad t \in [0,1]. \quad (2.51)$$

Note que, pela definição, tem-se $|T_r^*(t)| \leq 1$. Além disso, os polinômios de Chebyshev alterados de 1º tipo $T_r^*(t)$ podem ser gerados a partir dos dois primeiros termos $T_0^*(t) = 1$, $T_1^*(t) = 2t-1$ e pela lei de recorrência:

$$T_{r+1}^*(t) = 2(2t-1)T_r^*(t) - T_{r-1}^*(t) \quad (2.52)$$

Logo, para $r = 1, 2, \dots$, tem-se:

$$T_2^*(t) = 8t^2 - 8t + 1; \quad T_3^*(t) = 32t^3 - 48t^2 + 18t - 1; \quad \dots$$

Portanto, os polinômios de Chebyshev alterados de 1º tipo $T_r^*(t)$ podem aproximar, por exemplo, uma função contínua no tempo genérica $F(t)$, pela série infinita:

$$F(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j T_j^*(t), \quad t \in [0,1], \quad (2.53)$$

onde

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_0^1 F(t) w(t) dt \quad (2.54)$$

e

$$a_j = \frac{2}{\pi} \int_0^1 F(t) T_j^*(t) w(t) dt, \quad j \geq 1 \quad (2.55)$$

com

$$w(t) = (t-t^2)^{-1/2} \quad (2.56)$$

Por outro lado, pode obter-se uma aproximação para função $F(t)$ pela interpolação polinomial com m -termos de polinômios de Chebyshev de 1º tipo. Assim, $F(t)$ pode ser aproximada pela série finita:

$$F(t) = \sum_{j=0}^{m-1} a_j T_j^*(t) \quad (2.57)$$

Como exemplo, será feita a seguir a aproximação da função seno através do polinômio de chebyshev de 1º tipo de grau 9 ($m=10$). Com base na expansão acima, tem-se:

$$\text{sen}2\pi\tau = \sum_{j=0}^{m-1} a_j T_j^*(\tau) = [a_0, a_1, \dots, a_{m-1}] \cdot [T_0^*, T_1^*, \dots, T_{m-1}^*]^T, \quad ,$$

onde $\tau \in [0,1]$ e $a_i, i = 0, \dots, 9$ foram obtidos a partir da equação (2.55)³:

³ Os cálculos foram feitos usando o software Maple®.

Índice par	Índice ímpar
$a_0 = 0$	$a_1 = -0.56923068635951;$
$a_2 = 0$	$a_3 = 0.66691667240598$
$a_4 = 0$	$a_5 = -0.10428236873424$
$a_6 = 0$	$a_7 = 0.00684063353699$
$a_8 = 0$	$a_9 = -2.500068849503864e-004$

Tabela 2.2 - coeficientes da função seno em polinômios de Chebyshev.

Os polinômios de Chebyshev alterados de 1º tipo foram obtidos a partir da lei de recorrência dada pela equação (2.52):

$$T_0^* = 1;$$

$$T_1^* = 2t - 1;$$

$$T_2^*(t) = 8t^2 - 8t + 1;$$

$$T_3^*(t) = 32t^3 - 48t^2 + 18t - 1$$

$$T_4^* = 128t^4 - 256t^3 + 160t^2 - 32t + 1$$

$$T_5^* = 512t^5 - 1280t^4 + 1120t^3 - 400t^2 + 50t - 1$$

$$T_6^* = 2048t^6 - 6144t^5 + 6912t^4 - 3584t^3 + 840t^2 - 72t + 1$$

$$T_7^* = 8192t^7 - 28672t^6 + 39424t^5 - 26880t^4 + 9408t^3 - 1568t^2 + 98t - 1$$

$$T_8^* = 32768t^8 - 131072t^7 + 212992t^6 - 180224t^5 + 84480t^4 - 21504t^3 \\ + 2688t^2 - 128t + 1$$

$$T_9^* = 131072t^9 - 589824t^8 + 1105920t^7 - 1118208t^6 + 658944t^5 - 228096t^4 \\ + 44352t^3 - 4320t^2 + 162t - 1$$

Na Figura 1 a seguir, estão plotados os gráficos da função $f(\tau) = \text{sen}(2\pi\tau)$ (linha vermelha) e sua aproximação dada pela expansão em polinômios de Chebyshev alterados de 1º tipo (pontos azuis), no intervalo $[0, 1]$.

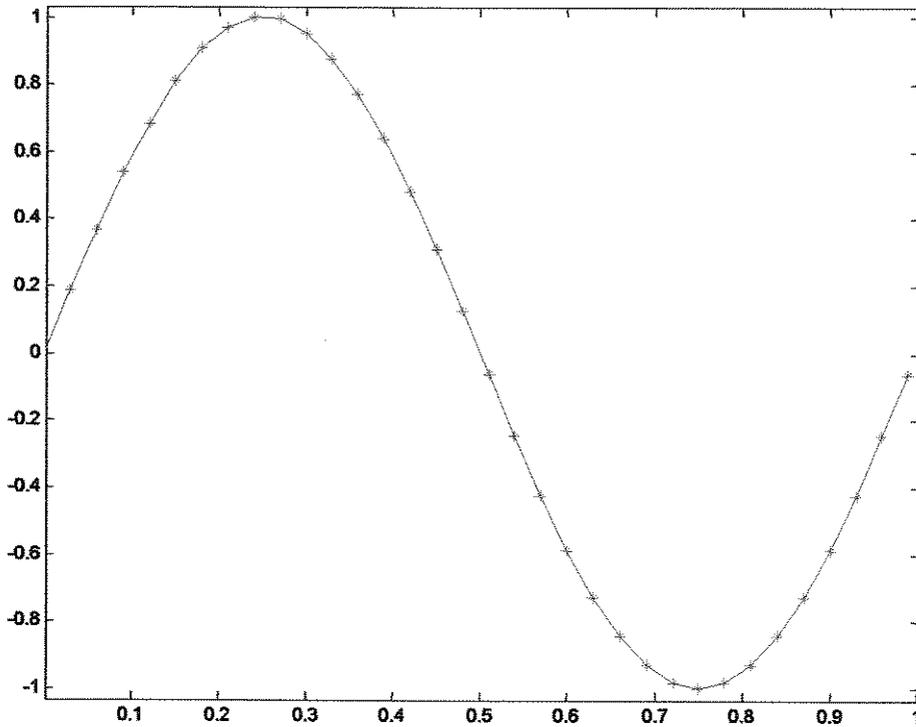


Figura 2.1 - Aproximação da função seno pelo polinômio de Chebyshev.

2.3.6 Matriz operacional do produto

Sejam $y(t)$ e $x(t)$ duas funções analíticas quaisquer. Se $y(t)$ e $x(t)$ forem aproximadas por polinômios de Chebyshev alterados de 1º tipo com m -termos usando a equação (2.52), pode-se escrevê-las como:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= (a_r)^t T^* \\
 &e \\
 x(t) &= (b_r)^t T^*
 \end{aligned}
 \tag{2.58}$$

Logo, o produto entre $y(t)$ e $x(t)$ pode ser escrito como:

$$y(t).x(t) = (a_0 \ a_1 \ \dots \ a_{m-1}) T^* T^{*t} (b_0 \ b_1 \ \dots \ b_{m-1})
 \tag{2.59}$$

onde a_r e b_r são os coeficientes da expansão em polinômios de Chebyshev alterados de 1º tipo das funções $y(t)$ e $x(t)$, dadas pela equação (2.55), respectivamente.

Se $T_{(\cdot)}^*(t) = (T_0^*(t), T_1^*(t), \dots, T_{m-1}^*(t))^t$ é um $(m \times 1)$ -vetor-coluna de polinômios de Chebyshev alterados de 1º tipo, então o produto de quaisquer dois vetores desse tipo T_r^* e T_s^* , é definido por:

$$T_r^* T_s^{*T} = \frac{1}{2} (T_{r+s}^* + T_{|r-s|}^*)$$

$$= \begin{bmatrix} T_0^* & T_1^* & T_2^* & \dots & T_{m-1}^* \\ T_1^* & (T_0^* + T_2^*)/2 & (T_1^* + T_3^*)/2 & \dots & T_m^* + T_{m-2}^*/2 \\ T_2^* & T_1^* + T_3^*/2 & (T_0^* + T_4^*)/2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{m-1}^* & T_m^* + T_{m-2}^*/2 & \dots & \dots & (T_0^* + T_{2(m-1)}^*)/2 \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

Calculando-se $(a_0 \ a_1 \ \dots \ a_{m-1}) T^* T^{*t}$, onde o produto de polinômios de Chebyshev $T^* T^{*t}$ pode ser escrito na forma matricial, usando-se a equação (2.58) e fazendo-se as simplificações necessárias, obtém-se a *matriz operacional do produto* entre as aproximações de Chebyshev, como:

$$y(t).x(t) = T^{*t} Q_a b \quad (2.61)$$

onde:

$$Q_a = \begin{bmatrix} a_0 & a_1/2 & a_2/2 & \dots & a_{m-1}/2 \\ a_1 & a_0 + a_2/2 & \frac{1}{2}(a_1 + a_3) & \dots & \frac{1}{2}(a_{m-2} + a_m) \\ a_2 & \frac{1}{2}(a_1 + a_3) & a_0 + a_4/2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m-1} & \frac{1}{2}(a_{m-2} + a_m) & \dots & \dots & a_0 + a_{2m-2}/2 \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

$$e \ b = (b_0 \ b_1 \ \dots \ b_{m-1})^T.$$

2.3.7 Matriz operacional de Integração

Baseando-se na matriz operacional da integral do polinômio de Chebyshev de 1º tipo, equação 2.41, pode-se obter, de maneira análoga, a *matriz operacional de integração* do polinômio de Chebyshev alterado do 1º tipo, como:

$$\int T_m^*(s) ds = \begin{cases} \frac{1}{2}(T_0^* + T_1^*), & m = 0 \\ \frac{1}{8}(T_2^* - T_0^*), & m = 1 \\ \frac{1}{4} \left(\frac{T_{m+1}^*}{m+1} - \frac{T_{m-1}^*}{m-1} \right) - \frac{(-1)^m}{2(m^2 - 1)}, & m \geq 2 \end{cases} \quad (2.63)$$

Assim, obtém-se a integral $\int T_m^*(s) ds = GT^*$, onde G é da forma:

$$G = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1/8 & 0 & 1/8 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1/6 & -1/4 & 0 & 1/12 & 0 & \dots & 0 \\ 1/16 & 0 & -1/8 & 0 & 1/16 & \dots & 0 \\ -1/30 & 0 & 0 & -1/12 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1/4(m-1) \\ (-1)^m / 2m(m-2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4(m-2) & 0 \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

Note que cada uma das m -linhas de G é a integral do m -ésimo polinômio de Chebyshev do 1º tipo T_r .

Além disso, pode-se escrever uma expressão matricial para a integral múltipla como:

$$\int_0^t \int_0^{\tau_0} \dots \int_0^{\tau_{k-2}} T^*(\tau_k - 1) d\tau_{k-1} \dots d\tau_1 d\tau_0 = G^K T^*. \quad (2.65)$$

2.4 Método iterativo de Picard

Dado o problema de valor inicial

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t), \quad x(t_0) = x^0. \quad (2.66)$$

Integrando-se (sucessivamente) a equação (2.66) de t_0 a t , tem-se:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(\tau), \tau) d\tau \quad (2.67)$$

Uma primeira aproximação pode ser escrita como:

$$x_{(1)}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x^{(0)}(\tau), \tau) d\tau. \quad (2.68)$$

Integrando-se novamente, obtém-se uma segunda aproximação:

$$x^{(2)}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x^{(1)}(\tau), \tau) d\tau \quad (2.69)$$

Esse processo, que é denominado *iteração de Picard*, pode ser escrito sob a seguinte forma recorrente:

$$x^{(k+1)}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x^{(k)}(\tau), \tau) d\tau \quad (2.70)$$

A seqüência gerada pela expressão acima é uma aproximação para as soluções $x(t)$ e, conseqüentemente, a matriz fundamental de estados $\phi(t)$.

No caso do sistema linear e periódico:

$$\dot{x}(t, \alpha) = A(t, \alpha)x(t, \alpha), \quad x(0, \alpha) = x^0, \quad (2.71)$$

onde

$\dot{x}(t, \alpha) \in \mathfrak{R}^N$, α é o vetor dos parâmetros e $A(t, \alpha)$ é uma matriz t -periódica $n \times n$, tal que:

$$A(t, \alpha) = A_1(\alpha)f_1(t) + \dots + A_r(\alpha)f_r(t) \quad (2.72)$$

com

$f_i(t) = f_i(t, \beta)$, $i = 1, \dots, r$, β_i -periódica e $A_i(\alpha)$ são matrizes constantes formadas pelos coeficientes das funções periódicas.

A matriz fundamental das soluções $\phi(t, \alpha)$ pode ser obtida pela combinação da iteração de Picard, do polinômio de Chebyshev e das matrizes operacionais.

Para a simplicidade dos cálculos, faz-se a normalização do tempo através da transformação $t = T\tau$. Essa transformação converte o período principal do sistema original para 1.

Assim, o sistema normalizado, após ser multiplicado pelo período do sistema original T , pode ser reescrito como:

$$\dot{x}(\tau, \alpha) = \bar{A}(\tau, \alpha)x(\tau, \alpha) \quad (2.73)$$

$$\bar{A}(\tau+1, \alpha) = \bar{A}(\tau, \alpha)(\tau+1, \alpha) \text{ e } x(0, \alpha) = x^0,$$

onde

$$\bar{A}(\tau, \alpha) = \bar{A}_1(\alpha)f_1(\tau) + \dots + \bar{A}_r(\alpha)f_r(\tau) \quad (2.74)$$

e

$$\bar{A}_i(\tau) = TA_i(\alpha) \quad (2.75)$$

A equação (2.73) é equivalente à sua forma integral:

$$x(\tau) = x^0 + \int_0^\tau A(t, \alpha)x(t)dt \quad (2.76)$$

Uma aproximação para a equação (2.76) é dada pelo método iterativo de Picard, de modo que a $(k+1)$ -ésima iteração obtém-se:

$$\begin{aligned} x^{(k+1)}(\tau) &= x^0 + \int_0^\tau A(t_k, \alpha)x^{(k)}(t_k)dt_k \\ &= [I + \int_0^\tau A(t_k, \alpha)dt_k + \int_0^\tau A(t_k, \alpha)\int_0^{t_k} A(t_{k-1}, \alpha)dt_{k-1}dt_k \\ &\quad + \dots + \int_0^\tau A(t_k, \alpha)dt_k \dots \int_0^{t_1} A(t_0, \alpha)dt_0 \dots dt_k]x^0 \end{aligned} \quad (2.77)$$

Note que a parte entre colchetes é uma aproximação para a matriz de transição de estados:

$$\begin{aligned} \sum_0^\infty \frac{A^n}{n!} &\cong I + \int_0^\tau A(t_k, \alpha)dt_k + \int_0^\tau A(t_k, \alpha)\int_0^{t_k} A(t_{k-1}, \alpha)dt_{k-1}dt_k \\ &\quad + \dots + \int_0^\tau A(t_k, \alpha)dt_k \dots \int_0^{t_1} A(t_0, \alpha)dt_0 \dots dt_k \end{aligned}$$

Usando-se o método de iteração de Picard no sistema normalizado e expandido em polinômio de Chebyshev alterado de 1º tipo de grau gr_{cheb} , obtém-se a 1ª aproximação para a solução $x(t)$.

1ª iteração

$$x^{(1,gr_{Cheb})}(\tau, \alpha) = [I + \int_0^\tau \hat{T}^t(\tau_0) D(\alpha) d\tau_0] x^0 = \hat{T}^T(\tau_0) [\hat{I} + \hat{G}^T D(\alpha)] x^0,$$

onde

$$D(\alpha) = \sum_{i=1}^r \bar{A}_i(\alpha) \otimes d_i, \quad \bar{A}(\tau, \alpha) = \hat{T}^T(\tau) D(\alpha) \quad \text{e} \quad \hat{T}(\tau) = I_n \otimes T^*(t) \quad \text{é a matriz}$$

polinomial de Chebyshev e G é a matriz operacional de iteração.

2ª iteração

$$\begin{aligned} x^{(2,gr_{Cheb})}(\tau, \alpha) &= [\hat{T}^t(\tau_0) [I + \hat{G}^t D(\alpha)] + \int_0^\tau D'(\alpha) \hat{T}^t(\tau_1) \hat{T}^t(\tau_1) \hat{G}^t D(\alpha) d\tau_1] x^0 = \\ &= \hat{T}^T(\tau_0) [\hat{I} + \hat{G}^T D(\alpha) + G^T \hat{Q}_D(\alpha) \hat{G}^T D(\alpha)] x^0, \end{aligned}$$

onde

$\hat{Q}_D(\alpha) = \sum_{i=1}^r \bar{A}_i(\alpha) \otimes Q_{di}$ e Q_{di} é a matriz operacional do produto de Chebyshev para as funções $f_i(t)$.

Continuando-se dessa mesma forma, a *matriz fundamental das soluções* aproximada para a equação $\dot{x}(\tau, \alpha)$ é:

$$\phi^{(gr_{cheb}, it_{pic})}(\tau) = \hat{T}^T(\tau) \left[\hat{I} + \left(\sum_{i=1}^{it_{pic}} [L(\alpha)] \right)^{i-1} P(\alpha) \right], \quad (2.78)$$

onde gr_{cheb} é grau do polinômio de Chebyshev alterados de 1º tipo, it_{pic} o número da iteração de Picard.

$$\hat{T}^t(\tau) = \begin{bmatrix} T_0^*(\tau) & T_1^*(\tau) & \dots & T_{m-1}^*(\tau) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & T_0^*(\tau) & T_1^*(\tau) & \dots & T_{m-1}^*(\tau) \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

$T_s^*(\tau)$, $s=0, \dots, m-1$ denotam os polinômios de Chebyshev alterados de 1º tipo, e são dados por:

$$T_s^*(\tau) = T_s(2\tau - 1), \quad (2.80)$$

onde:

$$T_{s+1}(\tau) = 2tT_s(\tau) - T_{s-1}(\tau),$$

com $T_0(\tau) = 1$ e $T_1(\tau) = \tau$.

$$\hat{I} := I_n \otimes (1 \ 0 \ \underbrace{\dots}_{(m-1)} \ 0)^T \quad (2.81)$$

é uma matriz $nm \times n$ e \otimes é produto de Kronecker.

A matriz L é dada por:

$$L = \sum_{i=1}^k \bar{A}_i \otimes [G^T Q_{d_i}], \quad (2.82)$$

onde as matrizes operacionais de integração e do produto, G e Q_{d_i} , respectivamente, são dados por:

$$G = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1/8 & 0 & 1/8 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1/6 & -1/4 & 0 & 1/12 & 0 & \dots & 0 \\ 1/16 & 0 & -1/8 & 0 & 1/16 & \dots & 0 \\ -1/30 & 0 & 0 & -1/12 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1/4(m-1) \\ (-1)^m / 2m(m-2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4(m-2) & 0 \end{bmatrix}_{m \times m} \quad (2.83)$$

$$Q_{d_i} = \begin{bmatrix} d_0^i & \frac{d_1^i}{2} & \frac{d_2^i}{2} & \dots & \frac{d_{m-1}^i}{2} \\ d_1^i & d_0^i + \frac{d_1^i}{2} & \frac{1}{2}(d_1^i + d_3^i) & \dots & \frac{1}{2}(d_{m-2}^i + d_m^i) \\ d_2^i & \frac{1}{2}(d_1^i + d_3^i) & d_0^i + \frac{d_4^i}{2} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m-1}^i & \frac{1}{2}(d_{m-2}^i + d_m^i) & \dots & \dots & d_0^i + \frac{d_{2m-2}^i}{2} \end{bmatrix}, \quad (2.84)$$

onde:

$d_i = [d_0^i \ d_1^i \dots \ d_{m-1}^i]^T$ pode ser calculada através de:

$$d_r^i = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{f(t) T_s^*(t)}{\sqrt{t(1-t)}} dt = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(\cos^2 \phi) \cos(2s\phi) d\phi. \quad (2.85)$$

Finalmente, a matriz P é obtida por:

$$P = \sum_{i=1}^k \bar{A}_i \otimes [G^T d_i]. \quad (2.86)$$

e, finalmente, it_{pic} o número da iteração de Picard escolhido de acordo com a precisão desejada.

Note que na equação (2.78), a parte entre colchetes depende apenas do conjunto de parâmetros α . Logo, a matriz de transição de estados $\phi(\tau, \alpha)$ pode ser escrita como produto matricial:

$$\phi(\tau, \alpha) = \hat{T}^T(\tau) B(\alpha) \quad (2.87)$$

Como consequência, se $\phi(\tau, \alpha)$ for calculada para $\tau = 1$, obtém-se a matriz de transição de Floquet, que depende somente dos parâmetros do sistema, isto é, $H(\alpha) = \phi(1, \alpha)$.

Para concluir este capítulo, será apresentada a relação entre os autovalores de $H(\alpha)$, ou seja, os multiplicadores de Floquet e os pontos de bifurcação do sistema.

As características de uma bifurcação, tais como, estabilidade, tamanho ou taxa de crescimento de um ciclo-limite, ao longo da rota para o caos, dependem de como os multiplicadores de Floquet atravessam o círculo unitário e o comportamento do sistema na vizinhança de um ponto crítico.

O tipo de bifurcação depende de como os multiplicadores de Floquet cruzam o círculo unitário: em +1, -1 ou por um par de números complexos de módulo 1.

Para co-dimensão de bifurcação 1 podem ocorrer:

i) Para uma solução kT periódica diz-se que existe uma *Bifurcação Fold (quebra de simetria)*, se $\mu_i = 1$, para algum $i \in [1, \dots, n]$. Isso implica que $\det(I - H(\alpha)) = 0$.

ii) Para uma solução $2kT$ periódica diz-se que existe uma *Bifurcação Flip (duplicação no período)*, se $\mu_i = -1$, para algum $i \in [1, \dots, n]$. Isso implica que $\det(I + H(\alpha)) = 0$.

iii) Dize-se que existe uma *Bifurcação Hopf*, quando $|\mu_i| = |\bar{\mu}_i| = 1$.

Capítulo 3

Projetos de Controle

Neste capítulo, serão apresentados dois projetos de controle para eliminar o comportamento caótico de sistemas periódicos no tempo para um dado conjunto de parâmetros.

O primeiro, usa o projeto de controle realimentado baseado na aplicação da transformação L-F, e o objetivo do controlador é conduzir a órbita do sistema para um ponto fixo ou para uma órbita periódica, (Sinha & Joseph, 1994).

O outro projeto de controle, utiliza o controle não-linear para bifurcação, e o objetivo neste caso, é modificar (atrasar ou eliminar) as características de uma bifurcação ao longo de sua rota para o caos, (Sinha & Dávid, 2000(b) (c)).

3.1 Controle de sistemas periódicos via transformação L-F

Considere o sistema não-linear e periódico no tempo e controlado representado por:

$$\dot{x} = F(x, t, \alpha) + u(t), \quad (3.1)$$

onde x e F são vetores de dimensão n , cuja função não-linear $F(x, t+T, \alpha) = F(x, t, \alpha)$ é T -periódica; α é um m -vetor que contém os parâmetros do sistema. Finalmente, $u(t)$ é uma lei de controle, que será descrita a seguir.

Suponha que a equação (3.1) possa ser escrita na forma:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t) + f(x, t), \quad (3.2)$$

onde $A(t)$ e $B(t)$ são as matrizes T -periódicas da parte linear e do controlador, respectivamente, e $f(x, t)$ é parte não-linear, tal que $f(0, t) = 0$.

Finalmente, seja:

$$u(t) = u_L + u_{NL}, \quad (3.3)$$

onde u_L é a parte linear do controle e u_{NL} é a parte não-linear do controle.

O objetivo da lei de controle é atingir as especificações de estabilidade assintótica e performance do sistema.

O controle e a estabilidade da equação (3.1) serão discutidos através do método direto de Lyapunov.

Inicialmente, seja a lei de controle linear:

$$u_L = -F(t)x \quad (3.4)$$

Como é usual na literatura, defini-se a função de Lyapunov quadrática (Khalil, 1996), como:

$$V(x, t) = x^t P(t)x, \quad (3.5)$$

onde a matriz $P(t)$ é uma matriz simétrica e positiva definida.

A derivada $\dot{V}(x, t)$ é dada por:

$$\dot{V}(x, t) = \dot{x}^t P(t)x + x^t \dot{P}x + x^t P\dot{x} \quad (3.6)$$

Substituindo-se (3.3) e (3.4) em (3.2):

$$\dot{x} = A_c x + Bu_{NL} + f(x, t) \quad (3.7)$$

onde $A_c = A(t) - BF$, é o sistema em malha fechada obtida com o controle linear.

Usando-se as equações (3.6) e (3.7), escreve-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, t) = & (A_c x + Bu_{NL} + f(x, t))^t P(t)x \\ & + x^t P(t)x + x^t P(t)(A_c x + Bu_{NL} + f(x, t)) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Aplicando-se a propriedade distributiva e agrupando-se os termos semelhantes, tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, t) = & x^t (\dot{P}(t) + A_c^t P(t) + P(t)A_c)x \\ & + (Bu_{NL} + f(x, t))^t P(t)x + x^t P(t)(Bu_{NL} + f(x, t)) \end{aligned}$$

Usando-se o fato de $P(t)$ ser simétrica, obtém-se:

$$\dot{V}(x, t) = x^t (\dot{P}(t) + A_c^t P(t) + P(t)A_c)x + 2x^t P(t)(Bu_{NL} + f(x, t)) \quad (3.9)$$

De acordo com a teoria de Lyapunov, a matriz de estabilidade é assintoticamente estável na origem, se existir uma matriz definida positiva, tal que:

$$\dot{P}(t) + A_c^t P(t) + P(t) A_c = Q \quad (3.10)$$

e

$$x^t P(t) (B u_{NL} + f(x, t)) \leq -s(t) \|x\|^2 < 0 \quad (3.11)$$

onde $s(t)$ é uma função escalar não-decrescente, contínua, tal que $s(0) = 0$.

O problema que surge agora é: como obter as leis de controle linear u_L e não-linear u_{NL} ? Estas questões serão respondidas nas seções seguintes.

3.1.1 Projeto do controlador linear

Suponha, que o sistema (3.1) tenha um ponto de equilíbrio em $x=0$ e que exista um intervalo de parâmetros $(\alpha_{\text{inf}}, \alpha_{\text{sup}})$ que, na ausência do termo de controle $u(t)$, o sistema seja caótico.

O objetivo da lei de controle é estabilizar o sistema caótico. No caso de um controle linear, $u = u(x)$ é uma função linear de x , e o objetivo é projetá-lo de forma que, para todo $\alpha \in (\alpha_{\text{inf}}, \alpha_{\text{sup}})$, o sistema seja conduzido para uma órbita periódica desejada $y(t)$ ou para um ponto de equilíbrio y_0 .

3.1.2 Controle para sistemas exibindo caos

Considere o sistema não-linear periódico no tempo:

$$\dot{x} = f(t, x(t)) + u(t) \quad (3.12)$$

o qual possui um atrator caótico para um dado conjunto de parâmetros, quando $u(t) = 0$.

O objetivo da lei de controle $u(t)$ é conduzir a trajetória caótica para uma órbita periódica desejável. Seja o termo de controle $u(t)$ definido em duas partes:

$$u(t) = u_f + u_t, \quad (3.13)$$

onde

$$u_f = \dot{y} - f(t, y(t)) \quad (3.14)$$

e

$$u_t = -F(t)(x - y) \quad (3.15)$$

as partes do controlador são “feedforward” (retro-alimentação) e “feedback” (realimentação), respectivamente.

A matriz $F(t)$ na equação (3.15) é a matriz de ganhos na realimentação de estados e será obtida a seguir.

Com a lei de controle (3.13), o sistema controlado (3.1) fica:

$$\dot{x} = f(t, x(t)) + u_f + u_t \quad (3.16)$$

Substituindo-se (3.14) em (3.16), tem-se:

$$\dot{x} = f(t, x(t)) + \dot{y} - f(t, y(t)) + u_t \quad (3.17)$$

ou seja,

$$\dot{x} - \dot{y} = f(t, x(t)) - f(t, y(t)) + u_t \quad (3.18)$$

Definindo-se o erro dinâmico entre $x(t)$ (trajetória do sistema controlado) e $y(t)$ (trajetória da órbita desejada) como:

$$e(t) = x(t) - y(t) \quad (3.19)$$

e

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{y}(t)$$

substituindo-se (3.19) em (3.18), obtém-se:

$$\dot{e}(t) = g(t, e(t)) + u_t, \quad (3.20)$$

onde a função não-linear $g(t, e(t)) \in C^1$ é definida a partir de $f(t, x(t)) - f(t, y(t))$.

Assumindo-se que $g(t, 0) = 0, \forall t \geq 0$, é possível obter-se a linearização da equação

(3.20), em torno da origem, se $\limsup_{\|e\| \rightarrow 0} \frac{\|g(t, e) - A(t)e + u_t\|}{\|e\|} = 0$, onde

$A(t) = \left. \frac{\partial g(t, e)}{\partial e} \right|_{e=0}$ é uma matriz cujos coeficientes são periódicos no tempo.

Assim, a linearização de (3.20) pode ser escrita como:

$$\dot{e}(t) = A(t)e(t) + u_t, \quad (3.21)$$

A seguir, é obtida a forma geral para a parte do controlador realimentada u_t .

Projeto do controlador via transformação L-F

Considere como forma geral do sistema linear controlado (3.21) a equação:

$$\dot{z}(t) = A(t)z(t) + B(t)u_t \quad (3.22)$$

onde $A(t)$ e $B(t)$ são matrizes T-periódicas no tempo e o par $[A, B]$ é controlável.

Aplicando-se a transformação de Lyapunov-Floquet dada pela equação (2.8) na equação (3.22), obtém-se o sistema invariante no tempo:

$$\dot{q}(t) = Rq(t) + Q^{-1}(t)B(t)u_t, \quad (3.23)$$

onde

$$R = \frac{1}{2T} \ln(\Phi^2(T)). \quad (3.24)$$

Desde que a matriz de ganhos do sistema (3.23) é invariante no tempo, deve-se construir um sistema auxiliar cuja matriz de ganhos seja constante no tempo:

$$\dot{\bar{q}}(t) = R\bar{q}(t) + B_0v(t), \quad (3.25)$$

onde B_0 é uma matriz constante de posto completo, tal que o par $[R, B_0]$ é controlável.

A lei de controle $v(t)$ em (3.25) é determinada aplicando-se a técnica de deslocamento de pólos, de modo que:

$$v(t) = F_0\bar{q}(t), \quad (3.26)$$

onde F_0 é matriz de ganhos obtida na realimentação.

A partir de (3.23) e (3.25), para cada instante t , o erro dinâmico entre $q(t)$ e $\bar{q}(t)$ é dado por:

$$\dot{q}(t) - \dot{\bar{q}}(t) = R(q(t) - \bar{q}(t)) + Q^{-1}(t)B(t)u_t - B_0F_0\bar{q}(t) \quad (3.27)$$

Definindo-se $\varepsilon(t) = q(t) - \bar{q}(t)$, a equação (3.27) fica:

$$\dot{\varepsilon}(t) = R\varepsilon(t) + Q^{-1}(t)B(t)u_t - B_0F_0q(t) \quad (3.28)$$

somando-se e subtraindo-se $B_0F_0\varepsilon(t)$ na equação (3.28), pode-se reescrevê-la como:

$$\dot{\varepsilon}(t) = (R + B_0F_0)\varepsilon(t) + Q^{-1}(t)B(t)u_t - B_0F_0q(t) \quad (3.29)$$

Desde que a matriz de estabilidade (3.29) é $R + B_0F_0$, os sistemas (3.23) e (3.25) podem ser considerados equivalentes

$$Q^{-1}(t)B(t)u_t = B_0F_0q(t) \quad , \quad (3.30)$$

ou seja,

$$u_t = B^*(t)Q(t)B_0F_0q(t) \quad , \quad (3.31)$$

onde $B^*(t)$ é a inversa generalizada da matriz $B(t)$, definida por: $B^*(t) = (B^T B)^{-1} B^T$.

Finalmente, aplicando-se a transformação Lyapunov-Floquet inversa:

$$q(t) = Q^{-1}(t)z(t) \quad (3.32)$$

tem-se:

$$u_t = B^*(t)Q(t)B_0F_0Q^{-1}(t)z(t) \quad (3.33)$$

Comparando-se a equação (3.33) com a equação (3.14), vê-se que a matriz de ganhos $F(t)$ variante no tempo é dada por:

$$F(t) = B^*(t)Q(t)B_0F_0Q^{-1}(t) \quad (3.34)$$

Portanto, a lei de controle com realimentação de estados pode ser escrita sob a forma da equação (3.4):

$$u_t = -B^*(t)Q(t)B_0F_0Q^{-1}(t)z(t) \quad (3.35)$$

3.1.4 Robustez do projeto de controle

Considere a parte linear e controlada da equação (3.2):

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t) \quad (3.36)$$

de modo que $A(t) = A_N(t) + A_p(t)$, onde $A_N(t)$ é a matriz do sistema nominal e $A_p(t)$ é a matriz nominal perturbada.

Considere a lei de controle linear:

$$u = -F(t)x \quad (3.37)$$

na equação (3.36):

$$\dot{x} = (A_N(t) + A_p(t))x - BFx \quad (3.38)$$

ou seja,

$$\dot{x} = (A_N(t) - BF + A_p(t))x. \quad (3.39)$$

Chamando-se a parte nominal controlada em malha fechada $A_{Nctrl} = A_N(t) - BF$, tem-se:

$$\dot{x} = (A_{Nctrl}(t) + A_p(t))x \quad (3.40)$$

Seja a transformação de Lyapunov-Floquet $x = Q(t)z$, obtida a partir da matriz de transição de estados da matriz A_{Nctrl} . Aplicando-se a transformação L-F na equação (3.40), obtém-se o sistema nominal invariante no tempo:

$$\dot{z} = [R_{Nctrl} + Q^{-1}(t)A_pQ(t)]z. \quad (3.41)$$

Como a matriz de transição de Floquet $Q(t)$ e sua inversa $Q^{-1}(t)$ são periódicas, então $\|Q(t)\|$ e $\|Q^{-1}(t)\|$ são limitadas. Desta forma, a perturbação estrutural $Q^{-1}(t)A_pQ(t)$ para as incertezas do sistema linear é limitada:

$$\|Q^{-1}(t)A_pQ(t)\| < \frac{\min\{\lambda_{\bar{Q}}\}}{\max\{\lambda_{\bar{P}}\}}, \quad (3.42)$$

onde \bar{Q} e \bar{P} são matrizes positivas definidas e satisfazem a equação estabilidade de Lyapunov.

3.2 Projeto de controle não-linear

Se o controle linear não atingir as exigências de performance do sistema, pode-se implementar o vetor de controle não-linear para melhorar o desempenho do sistema.

Suponha que o controle linear já esteja incorporado ao sistema, isto é, o sistema está escrito na forma da equação (3.7):

$$\dot{x} = A_c x + Bu_{NL} + f(x, t) \quad (3.43)$$

onde A_c é o sistema, em malha fechada, obtido com o controle linear.

De acordo com a função quadrática de Lyapunov (equação (3.5)):

$$V(x, t) = x^T P(t)x \quad (3.44)$$

pode-se escrever, a partir de (3.43) e (3.44):

$$\dot{V}(x, t) = -x^T Q_1(t)x + 2x^T P(t)(Bu_{NL} + f(x, t)) \quad (3.45)$$

onde $Q_1(t)$ é matriz definida positiva.

Para garantir a estabilidade do sistema (3.43), deve-se escolher um vetor de controle mínimo $\|u_{NL}\|$ tal que $\dot{V}(x, t) < 0$.

O vetor de controle não-linear variante no tempo pode ser escolhido como:

$$x^T P(t)(Bu_{NL} + f(x, t)) = -x^T P(t)EP(t)x \quad (3.46)$$

onde E é uma matriz semipositiva definida, invariante no tempo.

Minimizando-se $\|u_{NL}\|$ em (3.46), usando-se uma função de otimização dada em (Wiens, et al, 1991), obtém-se:

$$u_{NL} = -[x^T P(t)B(t)]^\# x^T P(t)[EP(t)x + f(x, t)] \quad (3.47)$$

Substituindo-se (3.47) em (3.45):

$$\dot{V}(x, t) = -x^T [Q_1(t) + 2P(t)EP(t)]x \quad (3.48)$$

vê-se que $\dot{V}(x, t) < 0$, uma vez que $Q_1(t) > 0$ e $E \leq 0$.

3.3 Projeto de controle de bifurcações

Considere o sistema não-linear, periódico no tempo e controlado, representado pela equação:

$$\dot{x} = F(x, t, \alpha)x + B(t, \alpha)u(t), \quad (3.49)$$

onde x e f são vetores de dimensão n , cuja função não-linear $f(x, t+T, \alpha) = f(x, t, \alpha)$ é T -periódica; α é um m -vetor que contém os parâmetros do sistema. Finalmente, $u(t)$ é uma lei de controle que será descrita a seguir.

Suponha, ainda, que o sistema tenha um ponto de equilíbrio em $x=0$ e que exista um intervalo de parâmetros $(\alpha_{inf}, \alpha_{sup})$ que, na ausência do termo de controle $u(t)$, o sistema seja caótico.

No caso de um controle não-linear, $u = u(x)$ é uma função não-linear de x , e o objetivo é projetá-lo de forma que, para todo $\alpha \in (\alpha_{inf}, \alpha_{sup})$, as características não-lineares da bifurcação (estabilidade e taxa de crescimento do ciclo-limite) na rota para o caos sejam atrasadas ou mesmo eliminadas.

Expandindo o lado direito da equação (3.49) em série de Taylor, em torno do ponto de equilíbrio $x=0$ e $u=0$, tem-se:

$$\dot{x} = L_x(t, \alpha)x + Q(x, t, \alpha) + C(x, t, \alpha) + B(t, \alpha)u + O(|x|^4, t, \alpha), \quad (3.50)$$

onde os termos do lado direito são T -periódicos e os n -vetores Q e C são formas quadráticas e cúbicas na variável x , respectivamente.

Assume-se que existe um valor crítico α_c , tal que a matriz do sistema linear L_x tenha n_1 multiplicadores de Floquet sobre o círculo unitário e n_2 no interior do círculo

unitário, ou seja, está admitindo-se que, em α_c , tem-se um ponto de bifurcação do sistema.

Portanto, o problema que se coloca, é projetar uma lei de controle realimentado u , tal que:

1) a origem da equação (3.49) seja localmente, assintoticamente, estável em $\alpha = \alpha_c$.

2) o ciclo-limite pós-bifurcação seja localmente, assintoticamente, estável em $\alpha \neq \alpha_c$.

As restrições de projeto do controlador 1 e 2 podem ser atingidas, simultaneamente, usando um controlador não-linear e, mais ainda, no caso de co-dimensão de bifurcação 1, é suficiente manter somente os termos de 2ª e 3ª ordens para ter-se uma boa aproximação qualitativa e quantitativa do fenômeno de bifurcação [Lindtner, 1990]. Desta forma, pode-se considerar:

$$\dot{x} = L_x(t, \alpha)x + Q(x, t, \alpha) + C(x, t, \alpha) + B(t, \alpha)u \quad (3.51)$$

O propósito de uma lei de controle não-linear é controlar o sistema no ponto de bifurcação e numa pequena vizinhança deste ponto.

Assim, a partir dessas observações acima, assume-se que a lei controle não-linear é a forma:

$$u(x, t) = u_2(x, t) + u_3(x, t) \quad , \quad (3.52)$$

onde $u_2(x, t)$ e $u_3(x, t)$ referem-se aos termos quadráticos e cúbicos do controlador. Observa-se que a matriz de ganhos de $u_2(x, t)$ e $u_3(x, t)$ ainda são indeterminadas e serão obtidas durante o projeto de controle.

Deste modo, aplicando-se o controlador (3.52) e uma seqüência de ferramentas matemáticas, tais como: a transformação L-F, redução à variedade central (Apêndice B), teoria da forma normal dependente do tempo (Apêndice C), pode-se analisar e, posteriormente, modificar as características não-lineares da sistema (3.51) no ponto de bifurcação α_c e ao longo da rota para o caos.

Para a análise do sistema em malha fechada e, conseqüente, o projeto de controle, convém, naturalmente, restringir o estudo da dinâmica do sistema no ponto de bifurcação $\alpha = \alpha_c$.

Primeiramente, calcula-se a matriz de transição de estados para o valor crítico α_c para, em seguida, fatorá-la. A partir da forma fatorada, obtém-se a transformação L-F, $2T$ -periódica, $x = L(t)y$.

Aplicando-se a transformação L-F na equação (3.51), obtém-se a forma invariante do tempo:

$$\dot{y} = Ry + L^{-1}(Q(y,t) + C(y,t)) + L^{-1}Bu(y,t), \quad (3.53)$$

onde R é real e constante no tempo.

Apesar de as equações (3.51) e (3.53) serem escritas de formas diferentes, elas são dinamicamente equivalentes, isto é, as características de estabilidade e bifurcação são preservadas.

Além disso, como a análise da dinâmica do sistema (3.51) deve ser feita numa vizinhança do ponto crítico α_c , é suficiente, portanto, reduzir o estudo da equação (3.53) sobre a variedade central.

Desta forma, aplicando-se a transformação modal $y = Mz$ à equação (3.53), obtém-se:

$$\dot{z} = Jy + M^{-1}L^{-1}(Q(y,t) + C(y,t)) + M^{-1}L^{-1}Bu(y,t) \quad (3.54)$$

A teoria de redução à variedade central periódica no tempo garante que, pode-se particionar a equação (3.54) separando-se a parte estável da instável.

Considerando-se que (3.54) possui n_1 estados críticos e n_2 estados estáveis, a equação (3.54) pode ser escrita como:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_c \\ \dot{z}_s \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} J_c & 0 \\ 0 & J_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_c \\ z_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{Q}_c(z_c, z_s, t) + \tilde{C}_c(z_c, z_s, t) \\ \tilde{Q}_s(z_c, z_s, t) + \tilde{C}_s(z_c, z_s, t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_c(z_c, z_s, t) \\ \tilde{B}_s(z_c, z_s, t) \end{bmatrix}, \quad (3.55)$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_c(z_c, z_s, t) &= M^{-1}L^{-1}(t)Q, \quad \tilde{C}_c(z_c, z_s, t) = M^{-1}L^{-1}(t)C \text{ e} \\ \tilde{B}_i(z_c, z_s, t) &= M^{-1}L^{-1}Bu(z_c, z_s, t) \end{aligned}$$

com c e s indicando os estados crítico e estável, respectivamente.

As partes estáveis e instáveis podem ser desacopladas, de acordo com a teoria de variedade central. De fato, pela teoria, existe uma relação não-linear com coeficientes periódicos da forma:

$$z_s = H(z_c, t), \quad (3.56)$$

tal que $H(z_c, t)$ é da forma: $H(z_c, t) = h_{2c}(t)z_c^2 + h_{3c}(t)z_c^3$, onde $h_{2c}(t)$ e $h_{3c}(t)$ são coeficientes $2T$ -periódicos (ainda desconhecido) dos termos quadráticos e cúbicos do vetor de estados estável z_c , respectivamente.

A relação z_c pode ser obtida a partir da solução da equação:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial z_c}(J_c z_c + w_c) = J_s z_s + w_s \quad (3.57)$$

onde $w_c = \tilde{Q}_c + \tilde{C}_c + \tilde{B}_c$ e $w_s = \tilde{Q}_s + \tilde{C}_s + \tilde{B}_s$.

Substituindo-se (3.56) em (3.57), obtém-se um conjunto de equações diferenciais em termos dos coeficientes periódicos $h_{2c}(t)$ e $h_{3c}(t)$:

$$\frac{dh_{ic}}{dt} - \lambda_s h_{ic} = K_s \quad (3.58)$$

onde λ_s é o autovalor da parte estável e k_s é o valor obtido a partir dos coeficientes periódicos (3.55). Na equação (3.58), expandindo os termos $h_{2c}(t)$ e $h_{3c}(t)$ em série de Fourier pode-se calcular os coeficientes da série a partir da comparação termo a termo e assim, os estados críticos podem ser desacoplados dos estados estáveis, ficando na forma geral:

$$\dot{z}_c = J_c z_c + w_c^* \quad (3.59)$$

onde w_c^* é o vetor que contém a parte não-linear de z_c .

Para concluir esta seção, deve-se observar que as escolhas de $h_{2c}(t)$ e $h_{3c}(t)$ e, conseqüentemente, do controlador u vão depender do tipo de bifurcação que ocorre em α_c . Por isso, a seguir deve-se estudar cada caso de bifurcação em separado.

3.3.1 Bifurcação Flip (Duplicação do Período)

Suponha que a matriz de transição de Floquet da parte linear L_x da equação (3.50) seja calculada no ponto α_c e tenha um autovalor -1 (isto é, um autovalor 0 na forma de Jordan) e os demais $(n-1)$ autovalores estão dentro do círculo unitário.

Como $n=2$, a equação (3.55) pode ser escrita:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_c \\ \dot{z}_s \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} J_c & 0 \\ 0 & J_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_c \\ z_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{Q}_c(z_c, z_s, t) + \tilde{C}_c(z_c, z_s, t) \\ \tilde{Q}_s(z_c, z_s, t) + \tilde{C}_s(z_c, z_s, t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_c(z_c, z_s, t) \\ \tilde{B}_s(z_c, z_s, t) \end{bmatrix}, \quad (3.60)$$

onde $J_s(n-1, n-1)$ é bloco de Jordan para o estado estável.

Como o autovalor da parte estável da equação (3.58) está no lado esquerdo do plano complexo, a transformação L-F é real, simétrica, sua inversa é $2T$ -periódica e $Q(t+T) = -Q(t)$. Por causa da propriedade da simetria, o coeficiente do termo quadrático tem média zero no intervalo $[0, 2T]$.

Pela teoria da variedade central, admite-se a existência da relação não-linear $z_s = H(z_1, t)$, que desacopla a parte crítica da parte estável. Definindo a relação da forma (3.56):

$$z_s = h_{2,s}(t)z_1^2 + h_{3,s}(t)z_1^3 \quad (3.61)$$

e substituindo-a na equação (3.60), obtém-se a equação reduzida sobre a variedade central de dimensão 1, como:

$$\dot{z}_1 = \tilde{Q}_{1,(2,0,\dots,0)}^*(t)z_1^2 + \sum_{i=2}^n \tilde{Q}_{1,(1,0,\dots,1,\dots,0)}^*(t)h_{2,i}(t) + \tilde{C}_{1,(3,0,\dots,0)}^*(t)z_1^3 \quad (3.62)$$

onde $\tilde{Q}_{1,(2,0,\dots,0)}^*$ e $\tilde{C}_{1,(3,0,\dots,0)}^*$ são funções de coeficientes periódicos, e os subíndices entre parênteses indicam a potência dos termos não-lineares, por exemplo: $(2,0, \dots, 0)$ indica $z_1^2 z_2^0 \dots z_n^0$.

De modo a simplificar um pouco mais a equação (3.62), aplicaremos a teoria da forma normal dependente no tempo, eliminando, assim, tanto quanto possível, seus termos não-lineares.

Desta forma, assumimos uma seqüência de transformações:

$$\dot{z}_1 = v + h_{n,2}(v, t) + h_{n,3}(v, t) \quad (3.63)$$

a qual pode eliminar a maioria dos termos não-lineares da equação (3.62).

Desta forma, obtém-se:

$$\dot{v} = \left(\overline{\sum_{i=2}^n \tilde{Q}_{1,(1,0,\dots,1,\dots,0)}^*(t) h_{2,i}(t)} + \overline{\tilde{C}_{1,(3,0,\dots,0)}^*(t) v^3} \right) = \underline{a} v^3, \quad (3.64)$$

onde a barra denota a média da quantidade sobre o período, e \underline{a} é uma constante.

Note que a constante \underline{a} contém ganhos do controle, os quais ainda são desconhecidos e, portanto, não podem ser determinados.

Porém, esta forma é suficiente para se ter uma idéia sobre o projeto do controlador para levar o sistema à estabilidade, isto é, analisando o valor da constante \underline{a} , podem-se determinar as exigências sobre o controlador para estabilizar o sistema.

De fato, a equação (3.64) indica que a origem do sistema original no ponto de bifurcação é assintoticamente estável se, e somente se, a constante \underline{a} for negativa.

Por outro lado, para a análise do sistema na vizinhança do ponto de bifurcação, é necessário criar uma dependência dos parâmetros que descrevem a bifurcação.

A deformação versal da forma normal (apêndice D) pode ser construída para possibilitar o estudo do comportamento numa pequena vizinhança do ponto de bifurcação.

No caso da equação (3.64), a deformação versal é dada por:

$$\dot{v} = \mu(\alpha) v + \left(\overline{\sum_{i=2}^n \tilde{Q}_{1,(1,0,\dots,1,\dots,0)}^*(t) h_{2,i}(t)} + \overline{\tilde{C}_{1,(3,0,\dots,0)}^*(t) v^3} \right) = \mu(\alpha) v + \underline{a} v^3, \quad (3.65)$$

onde o parâmetro de deformação versal $\mu(\alpha)$ é uma função dos parâmetros de bifurcação do sistema original.

A equação (3.65) tem um ciclo-limite $2T$ -periódico para $\mu(\alpha) \geq 0$ se, e somente se, \underline{a} é negativo. Então, vê-se que a estabilização do sistema na origem para o valor crítico α_c e o ciclo-limite após a bifurcação exigem o cumprimento das mesmas condições, implicando que a estabilização por realimentação e o controle de bifurcação podem ser atingidos através de um mesmo controlador não-linear.

Observa-se, também, que \tilde{Q} contém somente termos quadráticos do controle de entrada, enquanto \tilde{C} contém incógnitas de ordem 2 e 3. Desta forma, se o controle for

uma função puramente cúbica, então \tilde{Q} é conhecido, e as relações da variedade central quadrática $h_{2,i}(t)$ podem ser calculadas.

Como somente o termo cúbico do controle é função do parâmetro crítico, então, se no domínio transformado, após as aplicações das transformações L-F e modal, escolhemos o controle como:

$$h_{2c} := 0; \quad M^{-1}Q^{-1}(t)L_u(t)H(z,t) := \{\tilde{u}_c \ 0 \ \dots \ 0\}^T \quad (3.66)$$

onde $\tilde{u}_c = \beta z_1^3$. Então, a equação (63) fica:

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \mu(\alpha)v + \left(\sum_{i=2}^n \overline{\tilde{Q}_{1,(1,0,\dots,1,\dots,0)}^*(t)} h_{2,i}(t) + \overline{\tilde{C}_{1,(3,0,\dots,0)}^*(t)} + \beta \right) v^3, \\ &= \mu(\alpha)v + \beta v^3 \end{aligned} \quad (3.67)$$

onde β pode ser escolhido de modo a tornar o parâmetro \underline{a} negativo.

Observamos que a equação (3.67) pode ser resolvida na forma fechada, e a partir da solução é fácil ver como o β afeta o tamanho e a taxa de crescimento do ciclo-limite do sistema para qualquer valor desejado.

3.3.2 Bifurcação Transcrítica e Quebra de Simetria

Suponha agora que a matriz de transição de Floquet da equação (3.50) calculada para o parâmetro crítico α_c tenha um autovalor igual a +1 (isto é, um autovalor 0 na forma de Jordan) e os demais (n-1) autovalores têm módulo menor que 1.

Da mesma forma que no caso da bifurcação Flip, aplicando-se a transformação de Lyapunov-Floquet e a transformação modal, a equação (3.57) pode ser escrita na mesma forma que a equação (3.60):

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_s \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & O_1 \\ O_1 & J_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{Q}_1(z_1, z_s, t) + \tilde{C}_1(z_1, z_s, t) + \tilde{B}_1(z_1, z_s, t) \\ \tilde{Q}_s(z_1, z_s, t) + \tilde{C}_s(z_1, z_s, t) + \tilde{B}_s(z_1, z_s, t) \end{bmatrix} \quad (3.68).$$

Porém, neste caso, pelo menos um dos autovalores está no lado direito do plano complexo e, portanto, a transformação L-F é T -periódica e não possui a propriedade de simetria. Logo, a média dos termos não-lineares permanece.

Aplicando-se a teoria da variedade central e a teoria da forma normal:

$$\begin{aligned}\dot{v} &= \overline{Q^*_{1(2,0,\dots,0)}(t)}v^2 + \left(\sum_{i=2}^n \overline{\tilde{Q}^*_{1,(1,0,\dots,1,\dots,0)}(t)}h_{2,i}(t) + \overline{\tilde{C}^*_{1,(3,0,\dots,0)}(t)}v^3\right) \\ &= bv^2 + av^3\end{aligned}\quad (3.69)$$

onde a e b são constantes reais.

A equação da deformação versal é dada por:

$$\begin{aligned}\dot{v} &= \mu(\alpha)v + \overline{Q^*_{1(2,0,\dots,0)}(t)}v^2 + \left(\sum_{i=2}^n \overline{\tilde{Q}^*_{1,(1,0,\dots,1,\dots,0)}(t)}h_{2,i}(t) + \overline{\tilde{C}^*_{1,(3,0,\dots,0)}(t)}v^3\right) \\ &= \mu(\alpha)v + bv^2 + av^3.\end{aligned}\quad (3.70)$$

Observando a equação transformada (3.68), pode-se escolher o controle de entrada com:

$$\begin{aligned}M^{-1}Q^{-1}(t)L_u(t)G(t)z &:= \{\tilde{u}_{c2}, \dots, 0\}^t, \\ \tilde{u}_{c2} &:= \beta_2 z_1^2\end{aligned}\quad (3.71)$$

$$\begin{aligned}M^{-1}Q^{-1}(t)L_u(t)H(z, t) &:= \{\tilde{u}_{c3}, \dots, 0\}^t, \\ \tilde{u}_{c3} &:= \beta_3 z_1^3,\end{aligned}\quad (3.72)$$

onde β_2 e β_3 são ganhos de controle desconhecidos.

Da equação (3.68) tem-se:

- Se o coeficiente do termo quadrático não é zero, a equação (3.70) descreve uma bifurcação transcritical: se o ponto de equilíbrio é estável para $\mu < 0$, então existe uma órbita instável em torno deste ponto, e quando $\mu > 0$, o ponto de equilíbrio perde a estabilidade, e a órbita torna-se estável. Neste caso, a origem é sempre estável no ponto de bifurcação (para $\mu = 0$).

- Se \underline{b} é zero, então (3.70) descreve uma bifurcação com quebra de simetria, quando no ciclo-limite existe somente um lado do ponto de bifurcação, e o coeficiente do termo cúbico determina a estabilidade deste ciclo-limite bem como a estabilidade da origem em α_c .

Note que \underline{b} contém incógnita somente a partir do ganho de controle quadrático $G(t)$. Então, para uma bifurcação com quebra de simetria supercrítica, deve-se ter $\alpha < 0$.

3.3.3 Bifurcação Secundária de Hopf

Finalmente, suponha que a matriz de transição de Floquet da equação (3.50) calculada para o parâmetro crítico α_c tenha um par de autovalores complexos sobre o círculo unitário e os demais autovalores tenham módulo menor que 1.

Esse par complexo corresponde a um par de autovalores puramente imaginários da matriz R da forma $0 \pm \omega_c i$.

Se ω_c não é um múltiplo inteiro de $\frac{2\pi}{T}$, então a forma normal é invariante no tempo; caso contrário, os termos periódicos ressonantes permanecem.

Será considerado aqui somente o caso não-ressonante, já que o caso ressonante pode ser tratado de forma muito similar.

Com as suposições acima, a equação (3.50) tem a forma:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_s \end{cases} = \begin{bmatrix} \omega_c i & 0 & \mathbf{O} \\ 0 & -\omega_c i & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & J_s \end{bmatrix} \begin{cases} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{cases} + \begin{cases} \tilde{Q}_1^*(z_1, z_2, z_s, t) + \tilde{C}_1^*(z_1, z_2, z_s, t) \\ \tilde{Q}_2^*(z_1, z_2, z_s, t) + \tilde{C}_2^*(z_1, z_2, z_s, t) \\ \tilde{Q}_3^*(z_1, z_2, z_s, t) + \tilde{C}_3^*(z_1, z_2, z_s, t) \end{cases} \quad (3.73)$$

onde $O = O(n-2, n-2)$.

Assumindo as relações da variedade central como:

$$z_i = h_{2,i}(z_1, z_2, t) + h_{3,i}(z_1, z_2, t), \quad (3.74)$$

onde os termos quadráticos são:

$$h_{2,i}(z_1, z_2, t) = h_{2,i,(2,0)}(t)z_1^2 + h_{2,i,(1,1)}(t)z_1 z_2 + h_{2,i,(0,2)}(t)z_2^2 \quad (3.75)$$

com $i=3, 4, \dots, n$.

Os termos cúbicos são:

$$h_{3,i}(z_1, z_2, t) = h_{3,i,(3,0)}(t)z_1^3 + 3h_{3,i,(2,1)}(t)z_1^2z_2 + 3h_{3,i,(1,2)}(t)z_1z_2^2 + h_{3,i,(0,3)}(t)z_2^3 \quad (3.76)$$

A deformação versal de dimensão 2 é dada por:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mu(\alpha) + \omega_c i & 0 \\ 0 & \mu(\alpha) - \omega_c i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} \\ &+ \begin{Bmatrix} \left(\sum_{i=3}^n \overline{Q^*_{1,(1,0,\dots,1,\dots,0)}(t)h_{2,i,(1,1)}} + \overline{Q^*_{1,(0,1,\dots,1,\dots,0)}(t)h_{2,i,(2,1)}} \right) + \\ \quad + \overline{C^*_{1,(1,2,0,\dots,0)}(t)}v_1^2v_2 \\ \left(\sum_{i=3}^n \overline{Q^*_{2,(1,0,\dots,1,\dots,0)}(t)h_{2,i,(1,1)}} + \overline{Q^*_{2,(0,1,\dots,1,\dots,0)}(t)h_{2,i,(2,1)}} \right) + \\ \quad + \overline{C^*_{2,(1,2,0,\dots,0)}(t)}v_1v_2^2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.77)$$

O parâmetro $\mu(\alpha)$ é, em geral, complexo, porém observa-se que, em torno do ponto crítico, a parte imaginária independe do parâmetro α , logo é conveniente assumir $\mu(\alpha)$ real.

Dessa forma, aplicando-se a transformação de coordenada polar à equação (3.77):

$$\begin{aligned} \dot{R} &= \mu(\alpha)R + \\ &+ \operatorname{Re} \left(\sum_{i=3}^n \overline{Q^*_{1,(1,0,\dots,1,\dots,0)}(t)h_{2,i,(1,1)}} + \overline{Q^*_{1,(0,1,\dots,1,\dots,0)}(t)h_{2,i,(2,1)}} + \overline{C^*_{1,(1,2,0,\dots,0)}(t)} \right) R^3 \end{aligned} \quad (3.78)$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta} R &= -\omega_c R + \\ &+ \operatorname{Re} \left(\sum_{i=3}^n \overline{Q^*_{1,(1,0,\dots,1,\dots,0)}(t)h_{2,i,(1,1)}} + \overline{Q^*_{1,(0,1,\dots,1,\dots,0)}(t)h_{2,i,(2,1)}} + \overline{C^*_{1,(1,2,0,\dots,0)}(t)} \right) R^3. \end{aligned}$$

Na equação (3.78), vemos que a bifurcação secundária de Hopf ocorre se $\mu = 0$, e a estabilidade do ciclo-limite depende do sinal da constante do coeficiente cúbico real da equação amplitude.

Portanto, o controlador mais simples possível que estabiliza este ciclo-limite no domínio transformado, é:

$$G(t) := 0,$$

$$M^{-1}Q^{-1}(t)L_u H(z,t) := \{\tilde{u}_c, 0, \dots, 0\}^T \quad (3.79)$$

onde $\tilde{u}_c = \begin{Bmatrix} \beta_3 z_1^2 z_2 \\ \beta_3 z_1 z_2^2 \end{Bmatrix}$, com β_3 sendo o ganho de controle desconhecido.

Capítulo 4

Dinâmica e Controle de Sistemas Vibratórios Ideais com Coeficientes Periódicos

Este capítulo apresentará, a título de exemplo, aplicações da teoria desenvolvida nos capítulos dois e três em problemas tradicionais na literatura, isto é, ideais. Nas aplicações, serão analisadas as dinâmicas de cada problema e projetadas leis de controle a fim de estabilizá-las.

Foram selecionados quatro exemplos, de modo que a ordem do sistema na forma espaço-estado foi aumentada a cada exemplo e, também, os problemas foram colocados em ordem crescente de complexidade.

O primeiro problema tratará de um pêndulo com excitação paramétrica periódica do suporte (Flashner, 1996). Este exemplo, na forma espaço-estado é de segunda ordem e a excitação periódica foi modelada pela função $p \cos(\omega t)$. Portanto, a matriz de transição de estados deverá ser obtida através da aproximação, pelos polinômios de Chebyshev, da função co-seno.

O segundo problema é o tradicional oscilador de Duffing (Sinha, et al, 2000(a)). Este exemplo, é também um sistema de segunda ordem porém, o sistema linearizado e controlado dependerá das funções $\sin(2t)$ e $\cos(2t)$. Portanto, a obtenção da matriz de transição de estados dependerá da aproximação dessas funções em polinômios de Chebyshev.

O terceiro problema é o não menos tradicional sistema de Rössler (Sinha, et al, 2000(a)). Este problema é de terceira ordem e a matriz dos coeficientes da parte linear dependerá das funções $\sin(t)$ e $\cos(t)$. Novamente, a obtenção da matriz de transição de estados dependerá da aproximação dessas funções em polinômios de Chebyshev.

No quarto problema será apresentado o sistema composto por um pêndulo duplo invertido e amortecido (Pandiyani & Sinha, 2001). Este problema, na forma espaço-estado, é de quarta ordem e a excitação periódica será modelada pela função $p_1 + p_2 \cos(\omega t)$. Portanto, a matriz de transição de estados será obtida através da aproximação da função cosseno pelos polinômios de Chebyshev.

Finalmente, o sistema apresentado no primeiro exemplo será usado para aplicar o controle de bifurcação. Neste exemplo, para um dado conjunto de parâmetros, ocorre uma bifurcação Flip (duplicação do período) e será usada a técnica apresentada no capítulo 3 para o seu controle.

Todas as equações, deste capítulo, foram implementados no MATLAB® 6.5.

4.1 Modelo de Pêndulo Excitado Parametricamente

Considere o problema com vibração definido pela Figura 4.1.

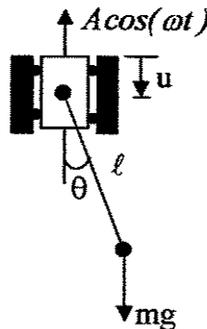


Figura 4.1 - Pêndulo excitado parametricamente.

Esse problema consiste em um pêndulo livre para oscilar ou girar num plano cujo pivô é verticalmente conduzido por uma força periódica. Depois de algumas simplificações (anexo F) a equação de Lagrange do movimento pode ser escrita como (Flashner, 1996):

$$\ddot{\theta} = -\beta \dot{\theta} - (1 + p \cos(\omega t)) \sin \theta + u(t), \quad (4.1)$$

onde θ é a medida do deslocamento angular, $p \cos(\omega t)$ a força externa aplicada ao pivô, $\beta = 0.1$ é o coeficiente de amortecimento e $u(t)$ é uma lei de controle. A lei de controle $u(t)$ é composta por $u(t) = u_f(t) + u_t(t)$, onde $u_f(t)$ é a parte da retroalimentação e $u_t(t)$ é a parte realimentada, definidas como nas equações 2.14 e 2.15, respectivamente.

A seguir, analisa-se a estabilidade estrutural do sistema com vibração paramétrica.

4.1.1 Análise da Estabilidade Estrutural

Um dos primeiros passos dados na direção da análise da estabilidade estrutural é encontrar os valores dos parâmetros que tornam o sistema, com coeficientes periódicos, crítico, isto é, os valores para os quais tem-se multiplicadores de Floquet 1 ou -1.

O gráfico obtido pela variação de um dos parâmetros, de modo que os multiplicadores de Floquet tenham valor absoluto 1, será chamado Diagrama de Estabilidade. Nele é possível observar as regiões de estabilidade e instabilidade separadas por fronteiras, onde pode-se verificar os tipos de bifurcações.

No exemplo do pêndulo acima, equação (4.1), a estabilidade é analisada pelos autovalores da Matriz de Transição de Floquet, o qual será denotado por μ , que é aproximada a partir da equação (2.78).

Na aproximação, o grau de polinômio de Chebyshev de primeiro tipo alterado é $m=gr_{cheb}=20$, e o número de iterações de Picard, $k=it_{pic}=40$.

No espaço de parâmetros $p - \omega$, foi possível construir o diagrama de estabilidade, que é mostrado na Figura 4.2. Considerou-se os parâmetros p e ω nos intervalos $0 < p < 3$ e $0.5 < \omega < 3$, respectivamente.

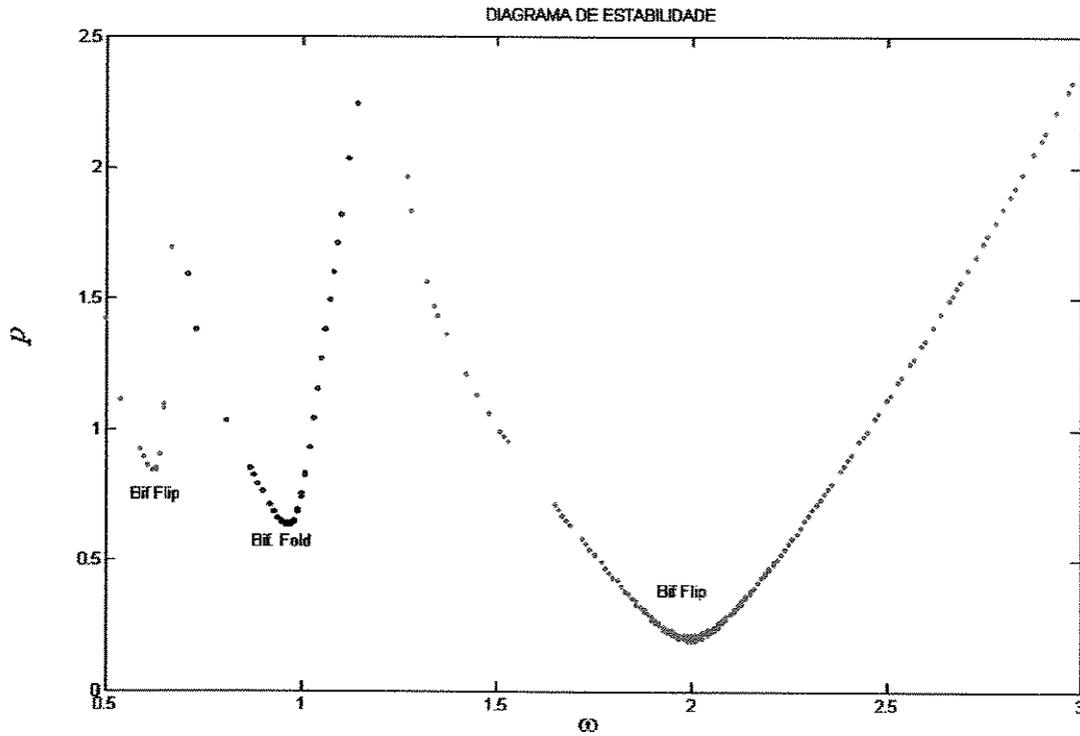


Figura 4.2 - Diagrama de estabilidade para $0 < p < 3$ e $0.5 < \omega < 3$.

Observa-se, no gráfico, duas regiões distintas, isto é, bifurcação por quebra de simetria e bifurcação com duplicação do período.

Na Figura 4.3, o diagrama de bifurcação foi obtido fixando-se a amplitude $p = 2$ e variando-se a frequência de excitação $0.5 \leq \omega \leq 3$.

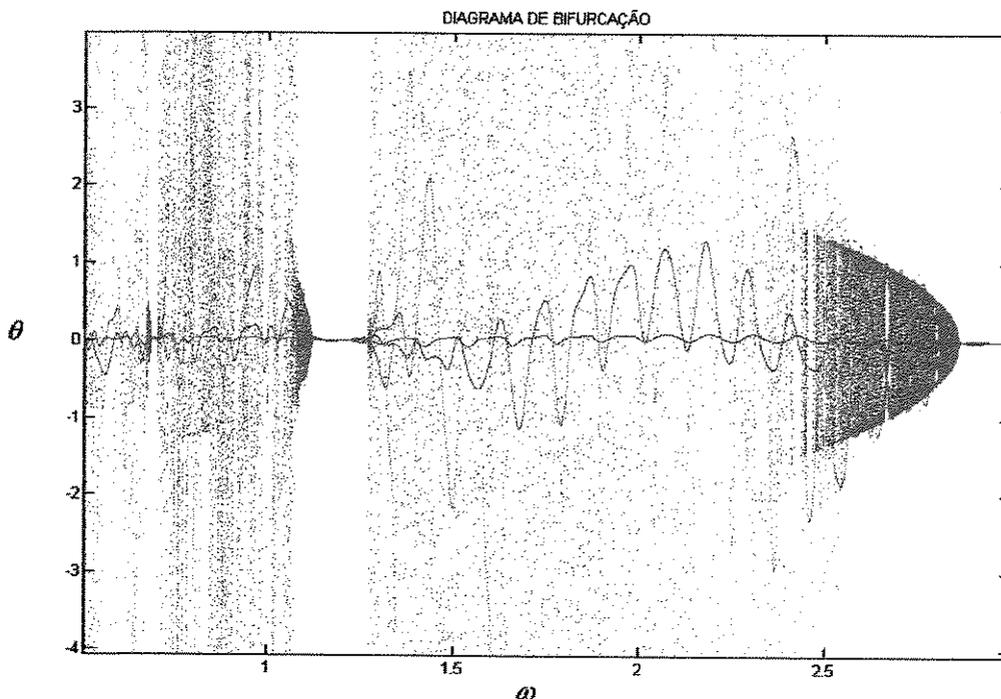


Figura 4.3 - Diagrama de Bifurcação para $p = 2$ e $0.5 < \omega < 3$.

Note que há uma correspondência entre as Figuras (4.2) e (4.3). De fato, imagine a reta $p=2$ na Figura (4.2) de modo que as interseções da reta $p=2$ com as fronteiras de estabilidade indicam os pontos de bifurcações, a saber, bifurcação flip para $\omega = 1.267398$ e $\omega = 2.86142$; bifurcação por quebra de simetria $\omega = 1.117098$.

Para $\omega < 1.117098$, a região de instabilidade mostrada na Figura 4.2 pode ser observada, também, no diagrama de bifurcação (Figura 4.3).

Para $1.117098 < \omega < 1.267398$, observa-se uma região de estabilidade em ambas as figuras.

Se $1.267398 < \omega < 2.86142$, tem-se a instabilidade do sistema e para $\omega > 2.86142$ a região é estável.

A Figura 4.4 mostra o diagrama de bifurcação numa vizinhança da bifurcação por duplicação do período (flip) para $\omega = 2.86142$, onde o problema será analisado com maiores detalhes.

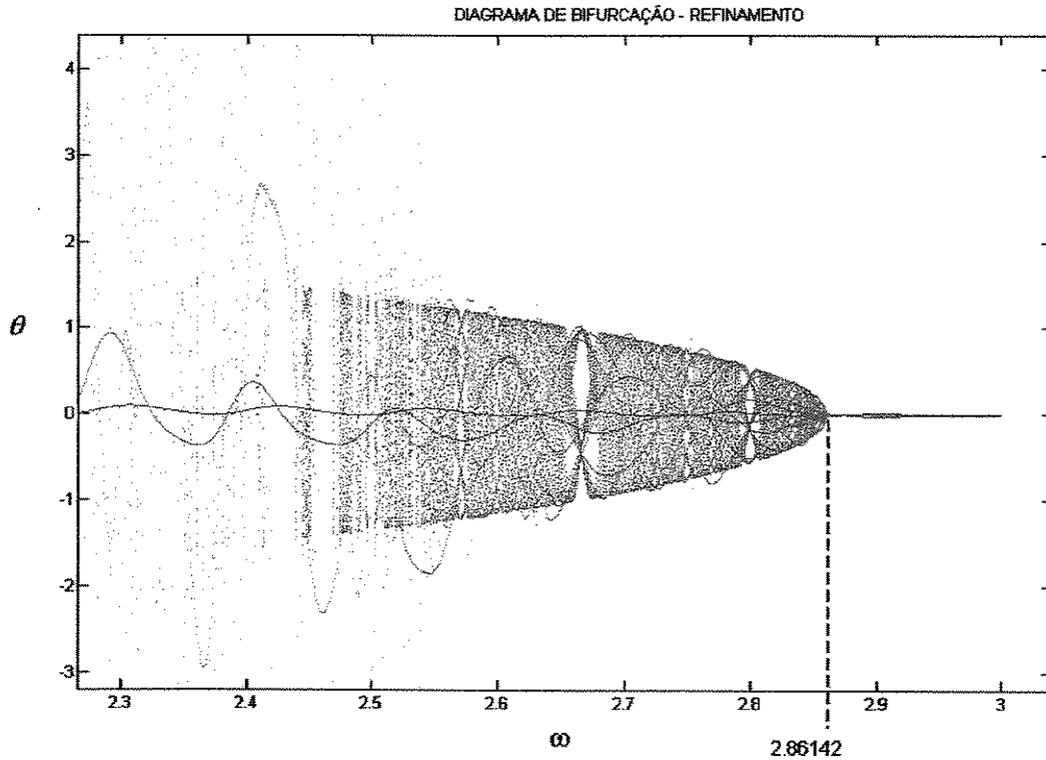
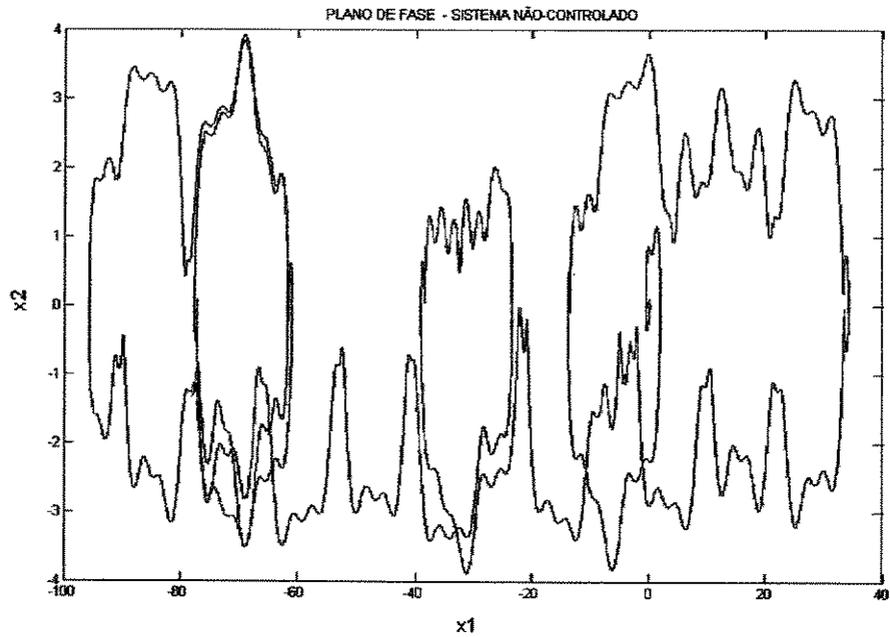


Figura 4.4 - Refinamento do Diagrama de Bifurcação para $2.3 < \omega < 3$.

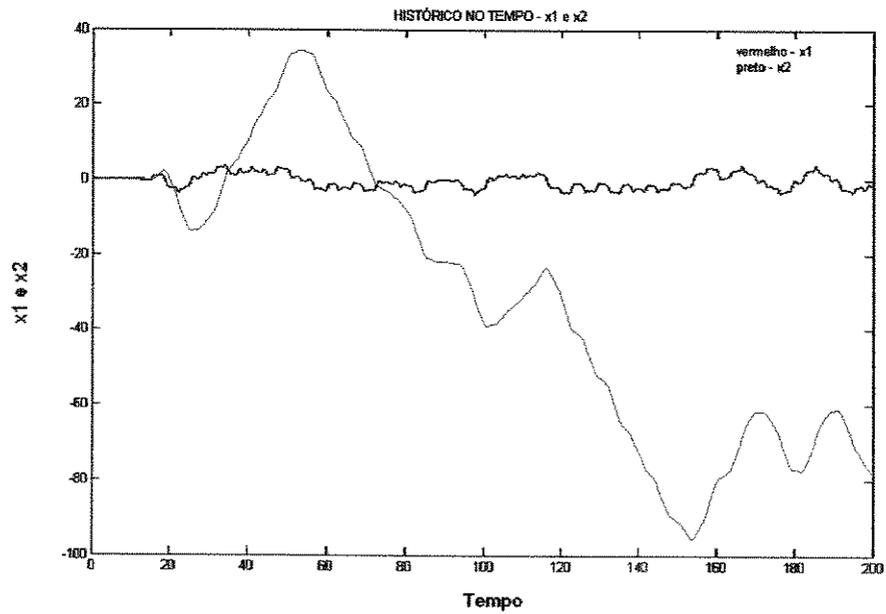
Uma vez feita a análise estrutural de estabilidade e o diagrama de bifurcação, suponha que o sistema (4.1) opere com os parâmetros $p = 2$ e $\omega = 2$. Esses parâmetros pertencem à região de instabilidade do sistema.

A Figura 4.5 mostra o plano de fase e o histórico no tempo dos estados quando $u(t) = 0$, isto é, do sistema não-controlado.

a-)



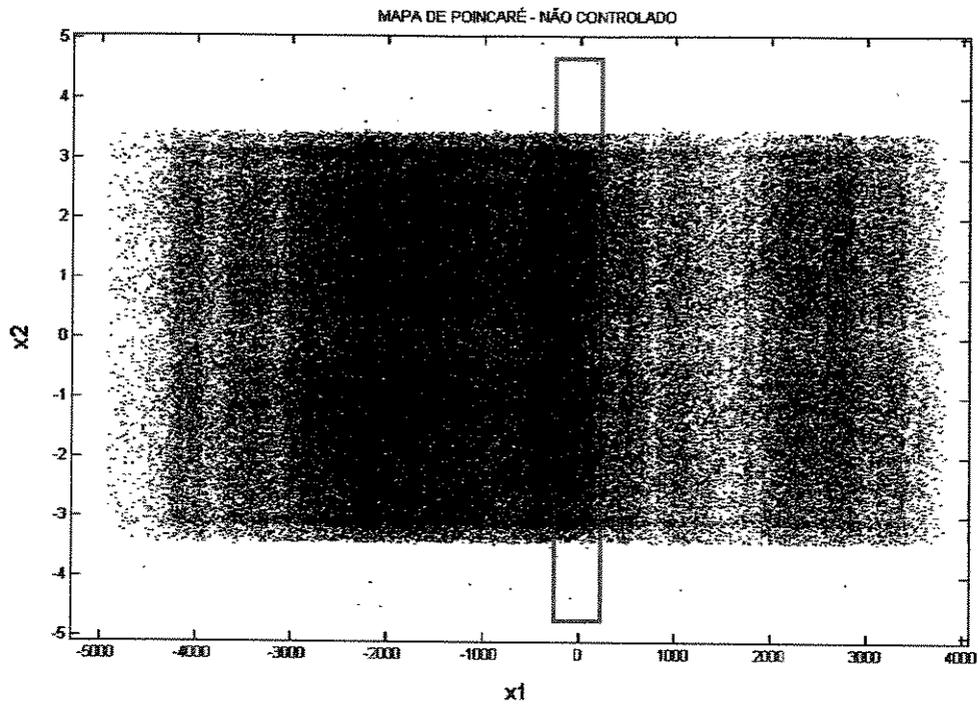
b-)



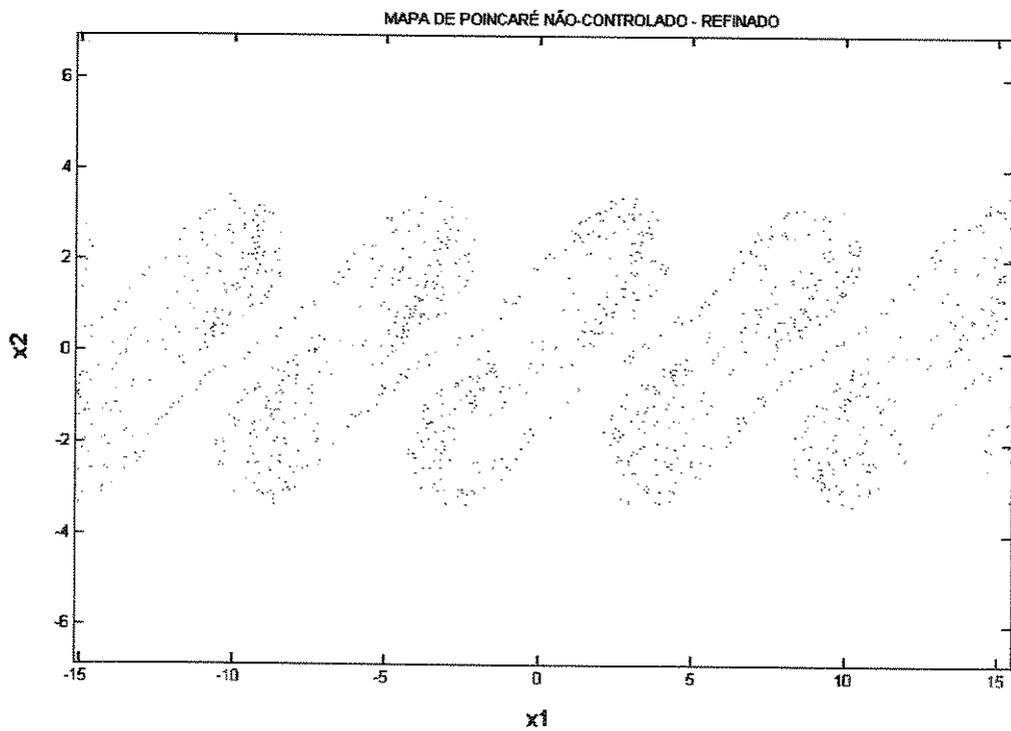
Figuras 4.5(a) e 4.5(b) - Plano de Fase e Histórico no tempo do sistema não-controlado.

O mapa de Poincaré associado é determinado nas Figuras 4.6(a) e 4.6(b).

a-)



b-)



Figuras 4.6(a) e 4.6(b) - Mapa de Poincaré e o Refinamento da região indicada.

A seguir, aplica-se o método apresentado no capítulo 3 para estabilizar o pêndulo.

4.1.2 Estabilização do pêndulo excitado parametricamente

O objetivo do projeto de controle é determinar uma lei $u(t)=u_f(t)+u_t(t)$ para conduzir a órbita instável (Figura 4.5) para uma trajetória desejada qualquer. Como trajetória desejada foi escolhida a função trigonométrica 2π -periódica $y(t)=2\cos(t)+\sin(t)$.

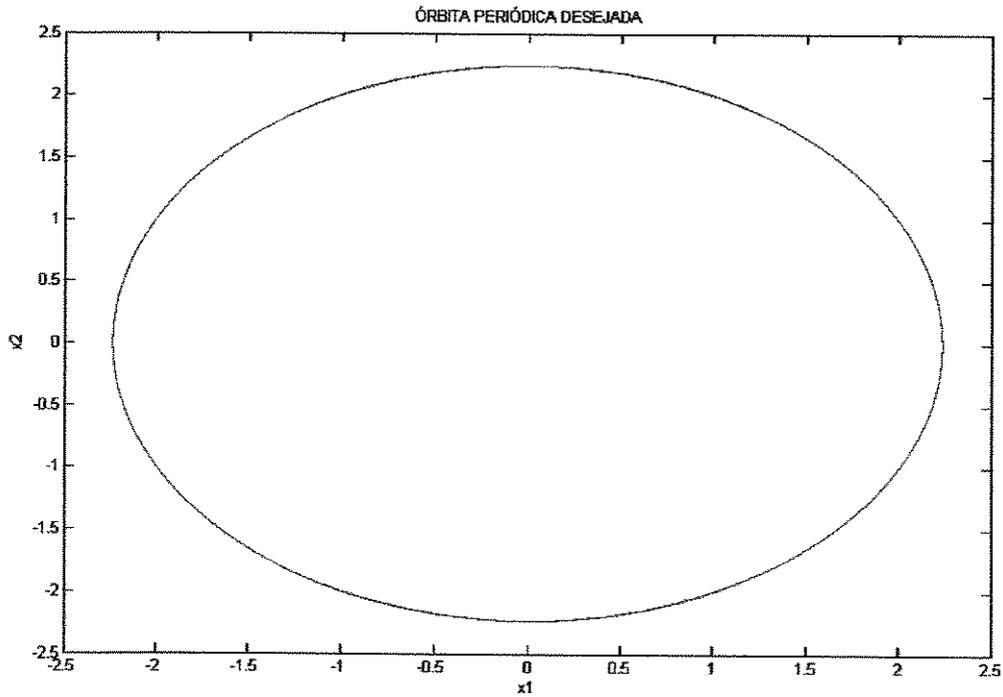


Figura 4.7 - Plano de fase da órbita desejada.

A parte do controlador $u_f(t)$ é obtida a partir da equação (3.14), como:

$$u_f = \ddot{y}(t) + 0.1(-2\sin(t) + \cos(t)) + (1 + 2\cos(2t)\sin(y(t))) \quad (4.2)$$

Considerando-se somente a parte linear (4.1), obtém-se a equação na forma espaço-estado do erro dinâmico $e(t)$:

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 - p \cos(\omega t) & -0.1 \end{bmatrix} e + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_t \quad (4.3)$$

Tomando-se $gr_{cheb} = 20$ e $it_{pic} = 40$ na equação (2.78), obtém-se a matriz de transição de Floquet $\phi(\pi)$, para $p = 2$ e $\omega = 2$, como:

$$\phi(\pi) = \begin{bmatrix} -1.8235 & 1.1425 \\ 2.4537 & -1.9378 \end{bmatrix}$$

Os multiplicadores de Floquet são:

$$\mu_1 = -3.5560 \text{ e } \mu_2 = -0.2054,$$

onde verifica-se a instabilidade do sistema devido ao multiplicador de Floquet $|\mu_1| = |-3.5560| > 1$.

Fatorando-se $\phi(\cdot)$, a transformação de Lyapunov-Floquet (2.8) converte o sistema periódico e variante no tempo (4.3) para a forma invariante no tempo, dinamicamente equivalente:

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} -0.205661 & -0.972285 \\ -2.088110 & -0.108474 \end{bmatrix} q + Q^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_t \quad (4.4)$$

Os autovalores da matriz de estabilidade do sistema invariante no tempo (equação (4.4)) são $\lambda_1 = 1.2686$ e $\lambda_2 = -1.5828$. O autovalor $\lambda_1 = 1.2686 > 0$ indica a instabilidade do sistema.

Usando-se a técnica de deslocamento de pólos, obtém-se a matriz de ganhos do controlador realimentado de modo a estabilizar o sistema e conduzi-lo à órbita desejada:

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} 1.7944 & -0.9743 \\ -2.0881 & 2.8874 \end{bmatrix},$$

onde os pólos desejados são -2 e -3.

Finalmente, a lei de controle $u(t)$ é obtida a partir das equações (4.2) e (3.33).

Os históricos no tempo do sistema controlado e o desejado são mostrados nas Figuras 4.8 e 4.9.

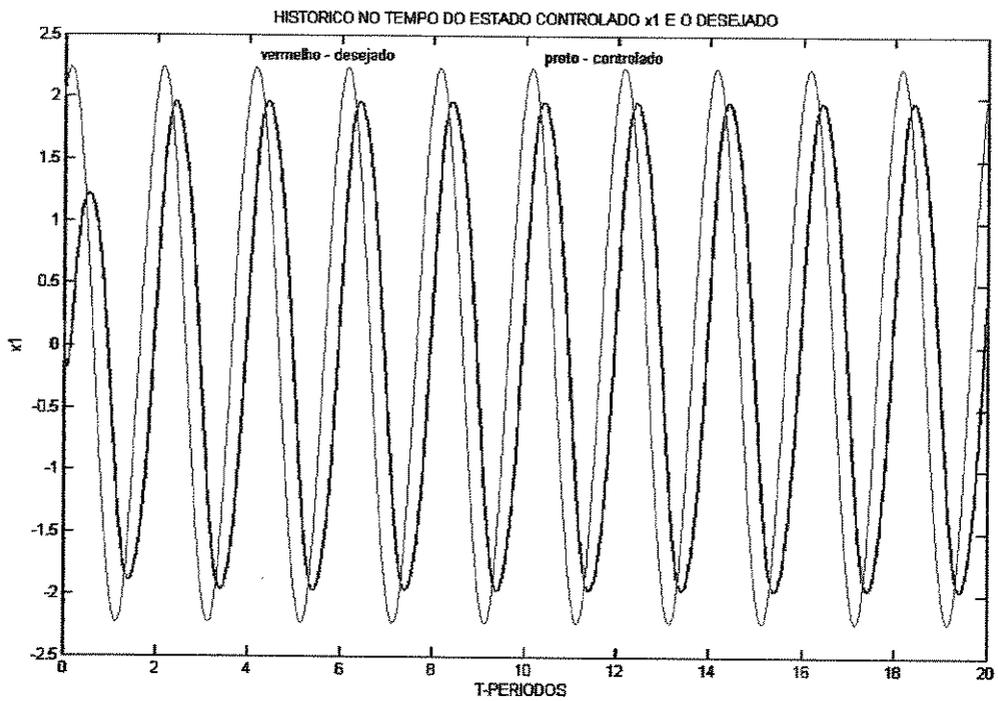


Figura 4.8 - Histórico no tempo do estado x_1 controlado e o desejado.

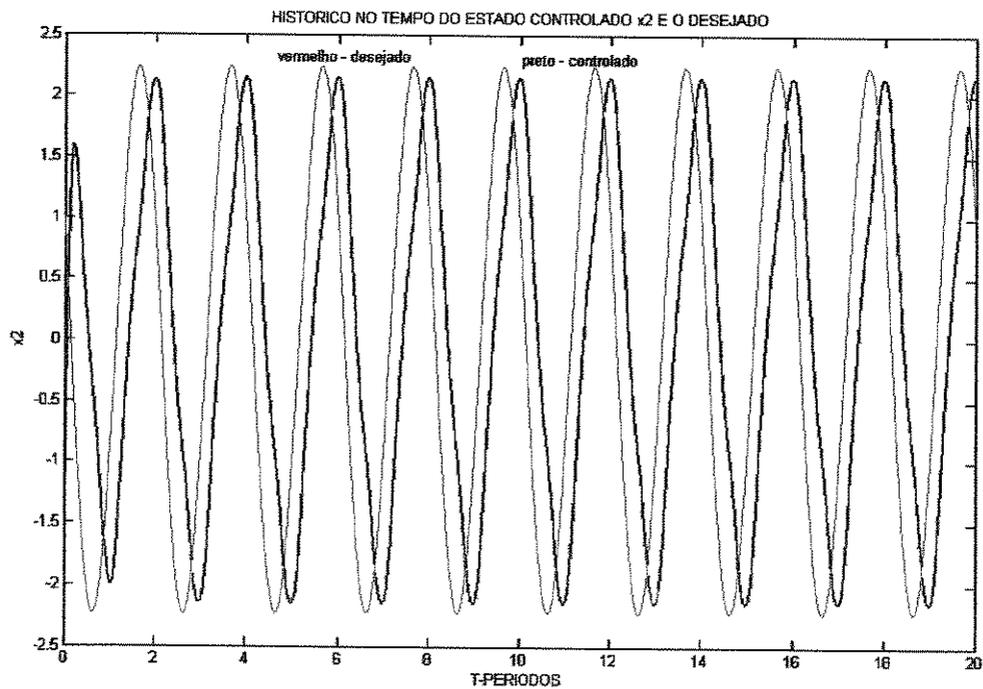


Figura 4.9 - Histórico no tempo do estado x_2 controlado e o desejado.

A comparação entre as órbitas não-controlada e a órbita desejada é apresentada na Figura 4.10 e a comparação entre as órbitas não-controlada e a controlada é apresentada na Figura 4.11.

Fazendo-se uma análise das Figuras 4.10 e 4.11, verifica-se que o projeto de controle foi executado com sucesso.

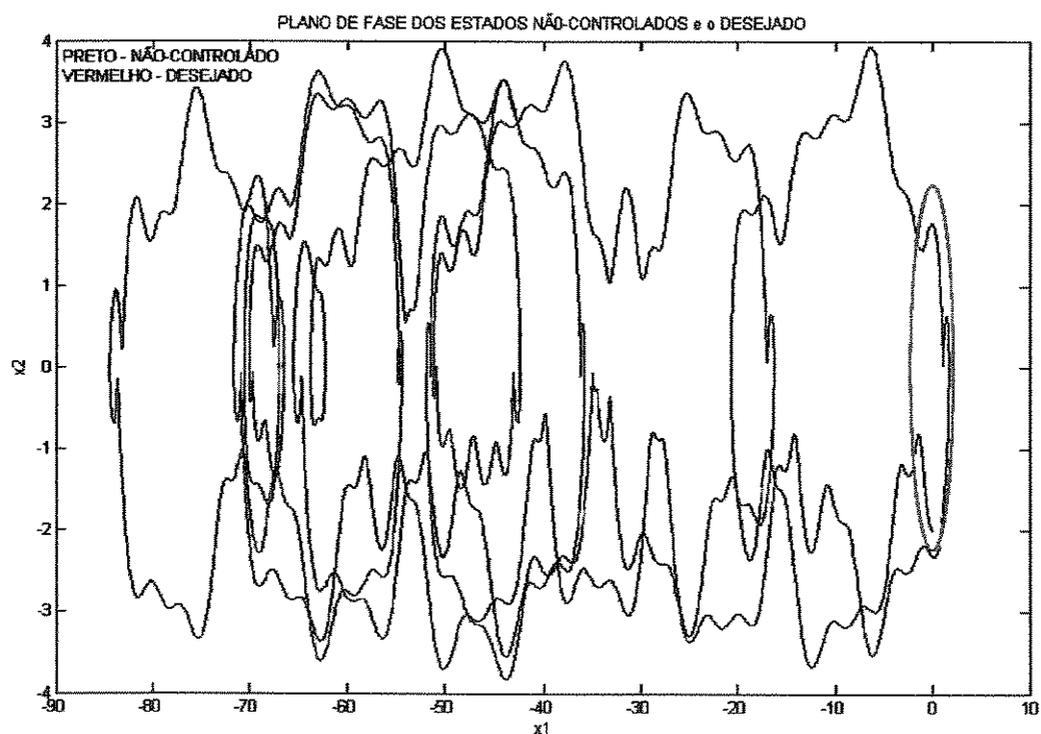


Figura 4.10 - Comparação dos planos de fase não-controlados e o desejado.

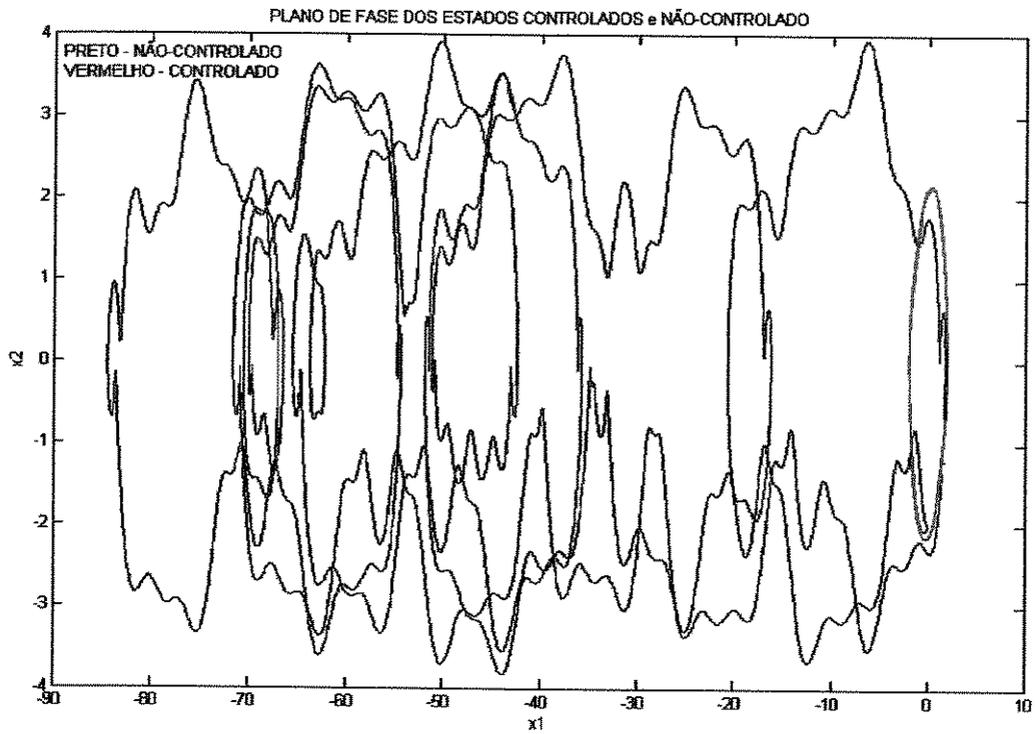


Figura 4.11 - Comparação dos planos de fase dos sistemas controlado e não-controlado.

O mapa de Poincaré, na Figura 4.12, mostra que a órbita periódica obtida tem período 1.

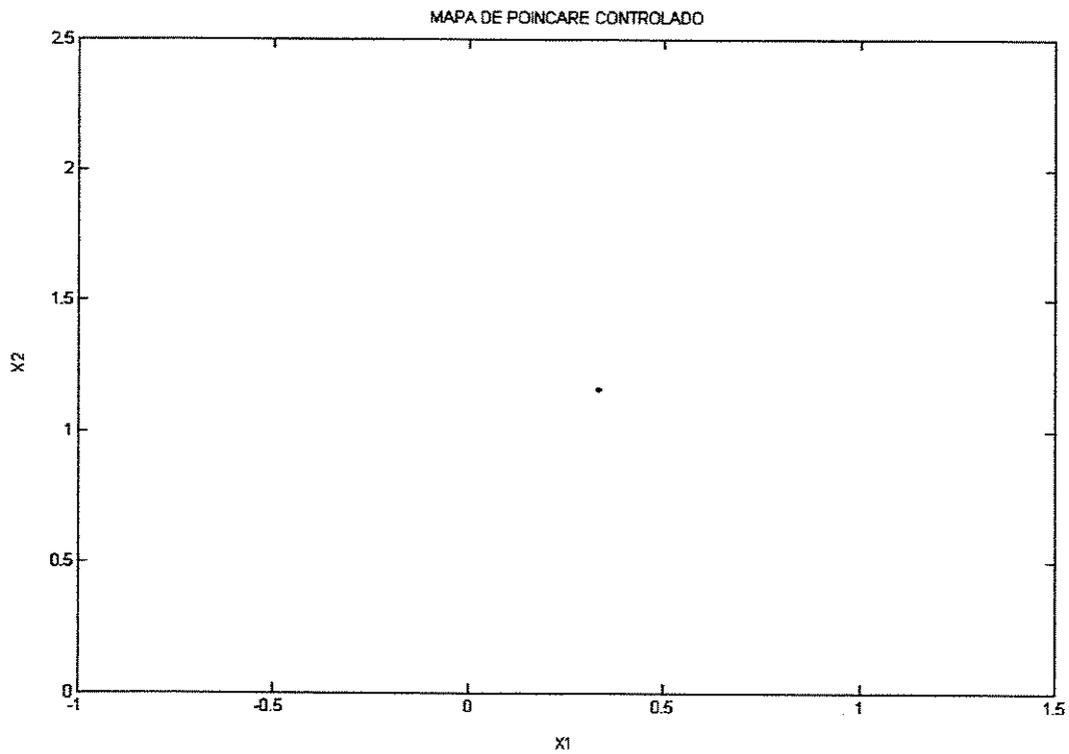


Figura 4.12 - Mapa de Poincaré do sistema controlado.

4.2 Oscilador de Duffing

Considere o oscilador de Duffing controlado modelado pela equação:

$$\ddot{x} = -\alpha x - x^3 - 2\zeta \dot{x} + A \cos(\omega t) + u(t) \quad (4.5)$$

onde α é o coeficiente de elasticidade, ζ é o amortecimento viscoso, A e ω são a amplitude e a frequência de excitação, respectivamente.

Para o conjunto de parâmetros $\alpha=-1$, $\zeta=0.125$, $A=1$ e $\omega=1$, temos:

$$\ddot{x} = x - x^3 - 0.25\dot{x} + \cos(t) + u(t) \quad (4.6)$$

na ausência do termo de controle $u(t)$, o sistema $\ddot{x} = x - x^3 - 0.25\dot{x} + \cos(t)$ possui o plano de fase (Figura 4.13) e o histórico no tempo (Figura 4.14) para os estados instáveis:

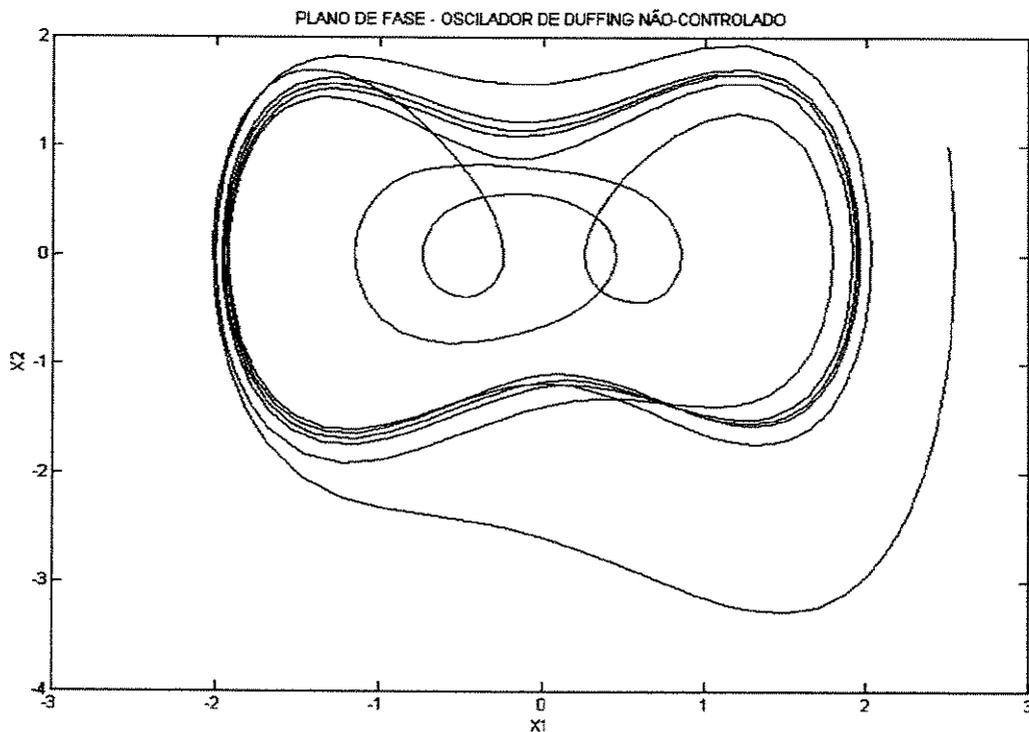


Figura 4.13 - Plano de fase do oscilador de Duffing não-controlado.

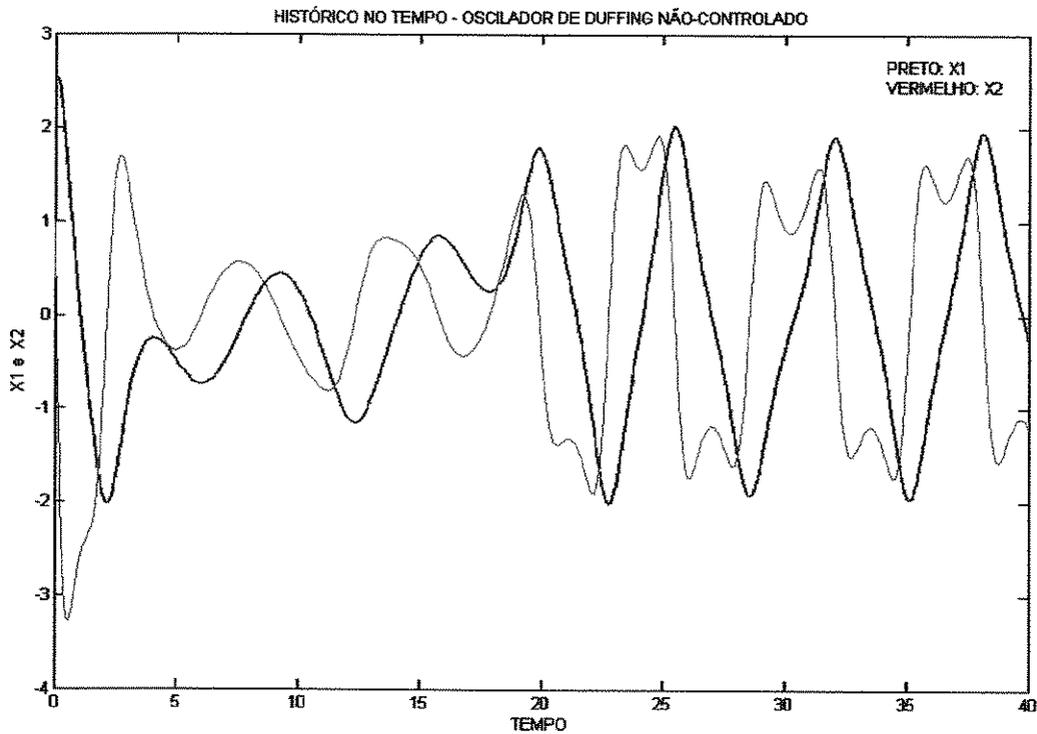


Figura 4.14 - Histórico no tempo dos estados não-controlados.

A estratégia de controle linear, apresentada no capítulo 3, pode ser usada para projetar uma lei de controle realimentado para o oscilador de Duffing, de modo a conduzir a órbita caótica para uma órbita periódica desejada qualquer, por exemplo, para a órbita:

$$y=2\cos(t)+\text{sen}(t) \quad (4.7)$$

mostrada na Figura 4.14.

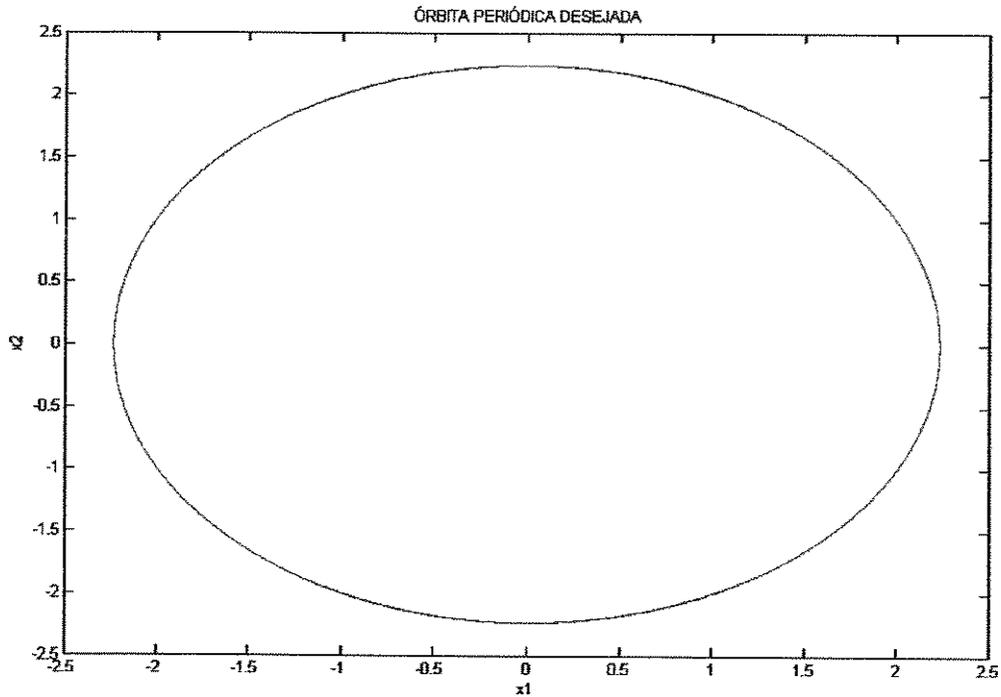


Figura 4.15 - Plano de fase da órbita desejada.

Com o controle do tipo $u = u_f + u_t$, a equação de Duffing controlada pode ser escrita como:

$$\ddot{x} = f(t, x) + u_f + u_t \quad (4.8)$$

Calculada a parte do controlador como na equação (3.14), $u_f = \ddot{y} - f(t, y)$, tem-se:

$$u_f = \ddot{y} - y + y^3 + 0.25y - \cos(t) \quad (4.9)$$

Substituindo-se a equação (4.9) em (4.8):

$$\ddot{x} - \ddot{y} = x - y - x^3 - y^3 + 0.25(\dot{x} - \dot{y}) \quad (4.10)$$

Calculando-se o erro dinâmico entre as trajetórias $x(t)$ e $y(t)$ como $e = x - y$ de modo que $x \cong y$, obtém-se:

$$\ddot{e} = (1 - 3y^2)e + 0.25\dot{e} \quad (4.11)$$

desenvolvendo-se o coeficiente periódico $(1 - 3y^2)$, temos:

$$\begin{aligned} 1 - 3y^2 &= 1 - 3(4 \cos^2(t) + 2.2 \cos(t)\text{sen}(t) + \text{sen}^2(t)) \\ &= 1 - 12 \cos^2(t) - 3\text{sen}^2(t) - 6\text{sen}(2t) \\ &= 1 - 9 \cos^2(t) - 3 - 6\text{sen}(2t) \\ &= -2 - 9 \cos^2(t) - 6\text{sen}(2t) \\ &= -\frac{13}{2} + \frac{9}{2} - 9 \cos^2(t) - 6\text{sen}(2t) \\ &= -\frac{13}{2} + \frac{9}{2}[1 - 2 \cos^2(t)] - 6\text{sen}(2t) \\ &= -\frac{13}{2} - \frac{9}{2} \cos(2t) - 6\text{sen}(2t) \end{aligned}$$

assim, pode-se reescrever a equação (4.11) na forma espaço-estado linearizado, π -periódico:

$$\dot{z}(t) = A(t)z(t) + B(t)u_t, \quad (4.12)$$

onde

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ \dot{e} \end{pmatrix}$$

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{13}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{9}{2} & 0 \end{bmatrix} \cos(2t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} \text{sen}(2t) \quad (4.13)$$

$$\text{e } B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A estabilidade do sistema B-periódico é dada pelos autovalores da matriz de transformação de Floquet (FTM).

Tal matriz foi obtida, numericamente para $T = \pi$, através da aproximação do polinômio de Chebyshev ($gr_{cheb} = 20$) e do método iterativo de Picard ($it_{pic} = 40$) como na equação (2.78). A FTM é:

$$\phi(\pi) = \begin{bmatrix} 1.052 & -0.021 \\ -6.326 & 0.561 \end{bmatrix}$$

Os multiplicadores de Floquet são: $\mu_1 = 1.2459$ e $\mu_2 = 0.3671$. A presença do multiplicador $|\mu_1 = 1.2459| > 1$ indica a instabilidade do sistema para este conjunto de parâmetros.

4.2.1 Controle da equação de Duffing

De acordo com a teoria de Lyapunov-Floquet, a matriz de transição de estados (STM) pode ser fatorada como $\phi(t) = Q(t)e^{Rt}$. Aplicando-se a transformação Lyapunov-Floquet: $z(t) = Q(t)q(t)$, a equação do erro dinâmico é transformada para a forma invariante no tempo, dinamicamente equivalente:

$$\dot{q}(t) = \begin{bmatrix} -0.0517 & -0.029 \\ -8.804 & -0.733 \end{bmatrix} q(t) + Q^{-1}(t) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_t \quad (4.14)$$

Os autovalores da matriz de estabilidade são 0.2170 e -1.0017. A presença de 0.2170 > 0 indica a instabilidade do sistema transformado.

Para projetar um controlador de realimentação de estados, será aplicada a técnica de deslocamento de pólos. Deseja-se deslocar os pólos para -2 e -3. De acordo com a técnica de controle apresentada no capítulo 3, determinou-se:

$$B_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix};$$

$$F_0 = \begin{bmatrix} 12.7 & 2.12 \\ -1.9483 & 0.029 \end{bmatrix}$$

A matriz de ganhos invariante no tempo $\bar{K} = B_0 F_0$ é então obtida:

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} -1.9483 & 0.029 \\ -16.5966 & -2.062 \end{bmatrix}$$

Assim, a lei de controle composta por u_f e u_t conduz o sistema de Duffing para a órbita desejada, como se vê na Figura 4.16.

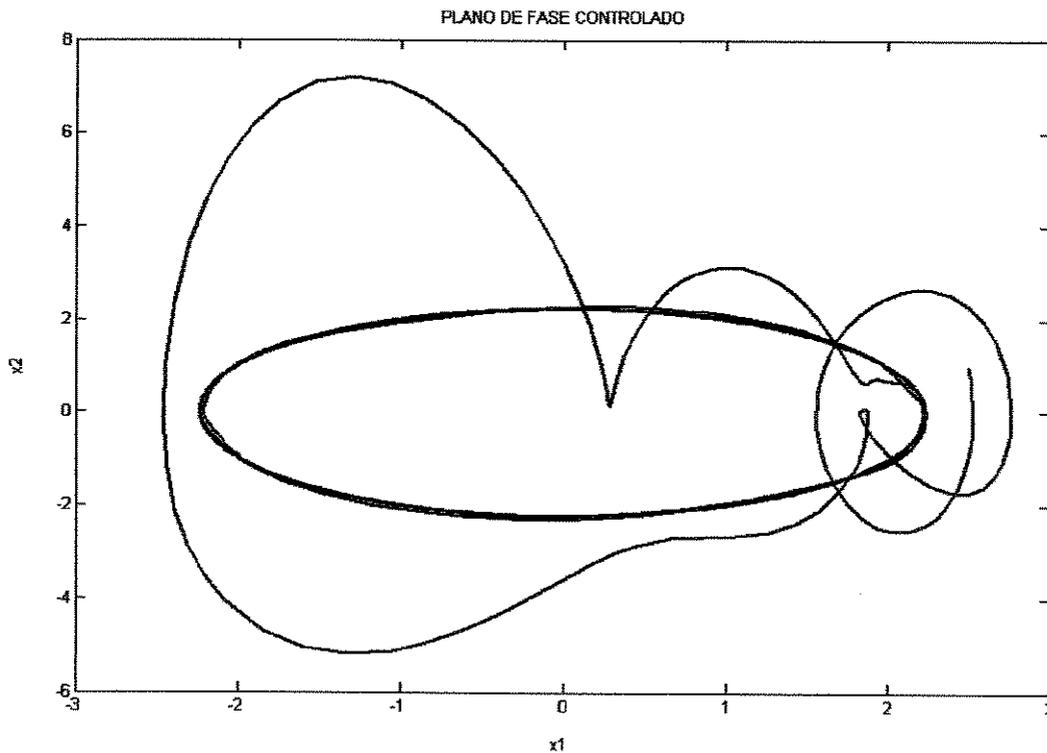


Figura 4.16 - Órbita do oscilador de Duffing controlada.

Comparando-se a órbita controlada, mostrada na Figura 4.16, e a órbita desejada, mostrada na Figura 4.15, pode-se verificar a eficiência do projeto de controle.

A Figura 4.17 ilustra melhor essa análise.

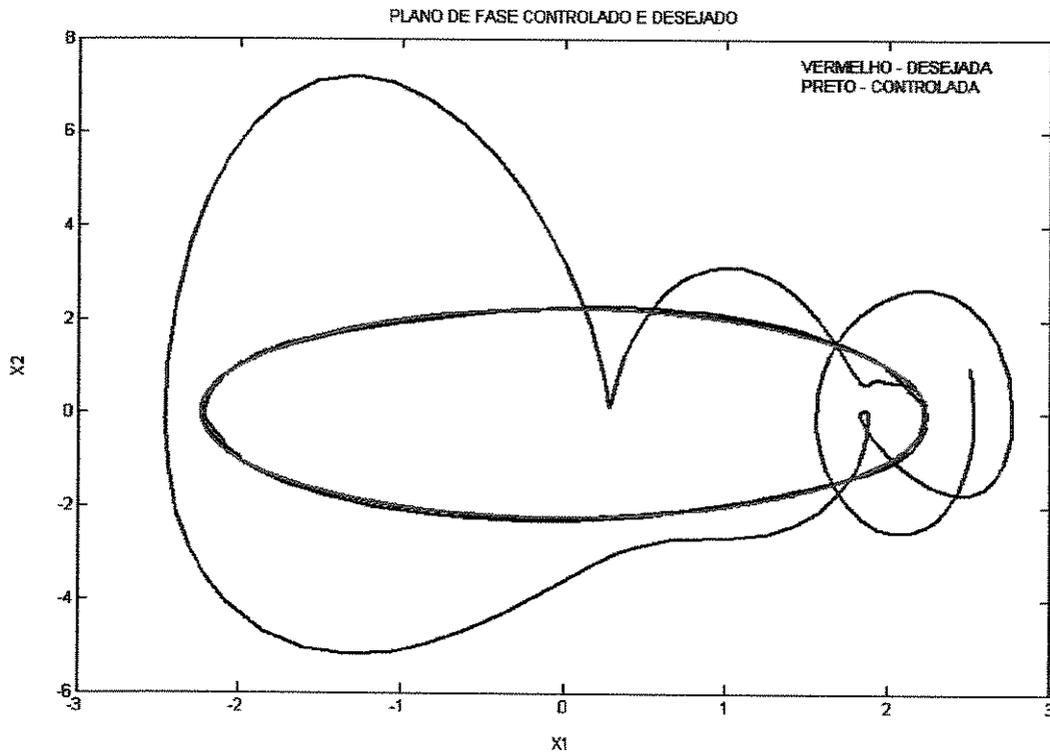


Figura 4.17 - Órbita do oscilador de Duffing controlada e desejada.

A eficiência do controlador pode, também, ser analisada através dos históricos no tempo. Na Figura 4.18, são mostrados os históricos no tempo estados controlados x_1 e x_2 .

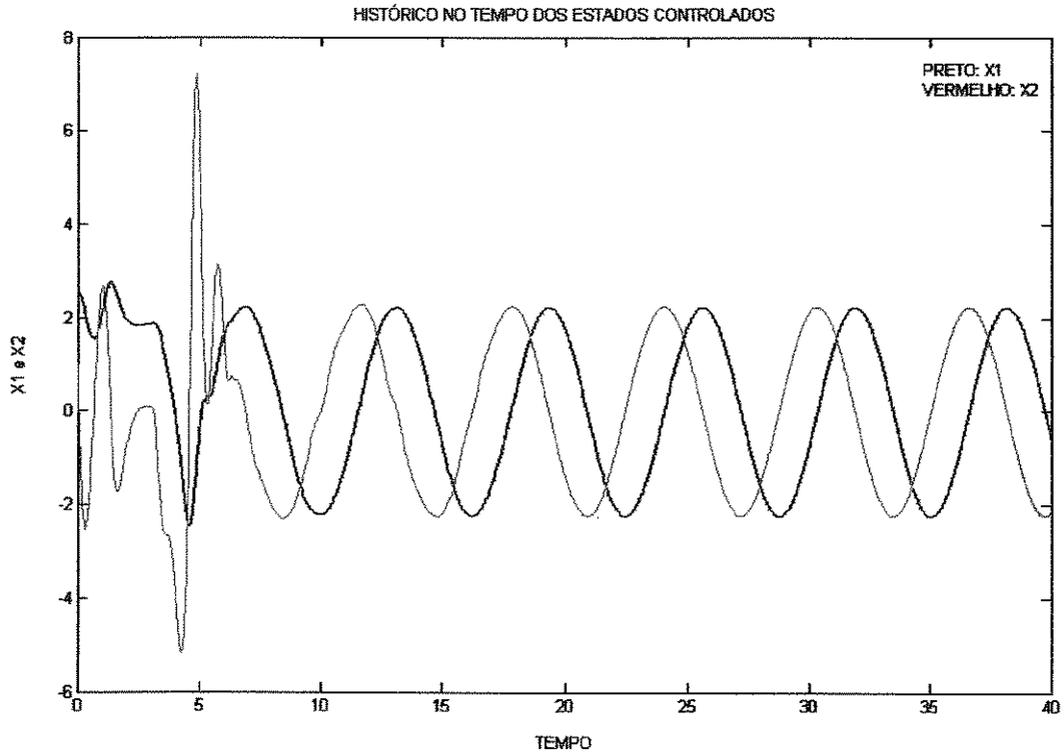


Figura 4.18 - Histórico no tempo dos estados controlados do oscilador de Duffing.

Na Figura 4.19, são comparados os históricos no tempo da trajetória desejada e dos estados controlados x_1 e x_2 .

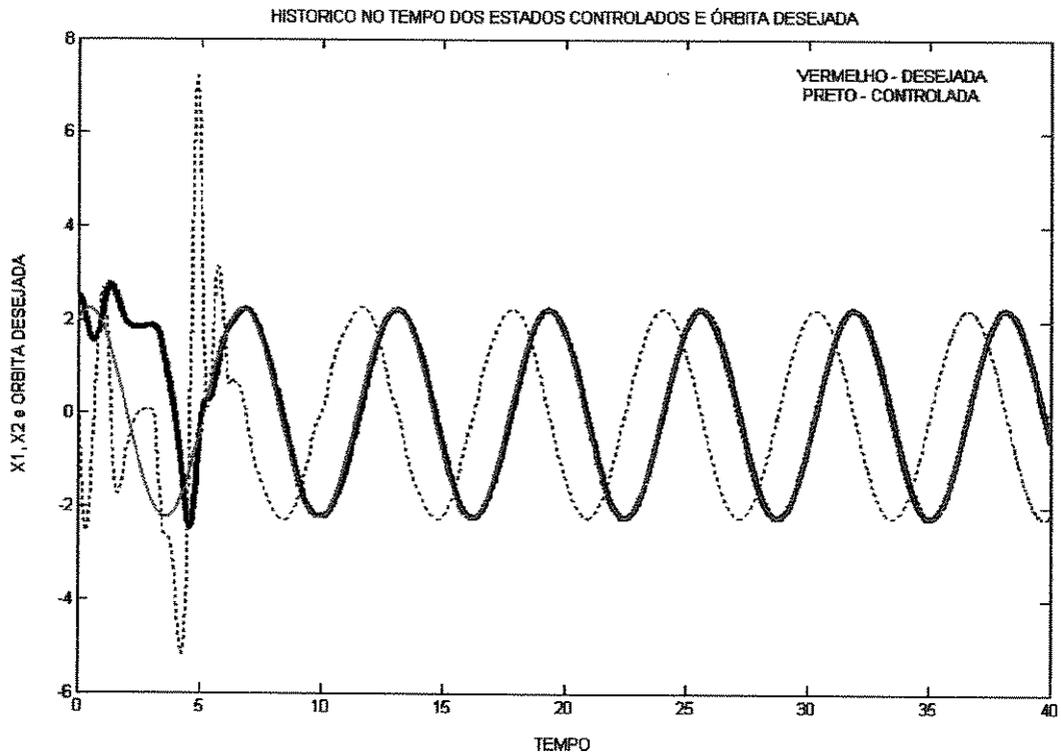


Figura 4.19 - Histórico no tempo dos estados controlados e órbita desejada do oscilador de Duffing.

Como pode ser observado, através das figuras acima, o projeto de controle linear para o oscilador de Duffing foi bem-sucedido.

4.3 Sistema de Rössler

Considere o seguinte sistema tridimensional que é conhecido na literatura como *Sistema de Rössler*:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1 + ax_2 \\ \dot{x}_3 = b + x_3(x_1 - c) \end{cases} \quad (4.15)$$

As equações de Rössler são um sistema não-linear cuja não-linearidade é quadrática. Para o conjunto de parâmetros $a = 0.2$, $b = 0.2$ e $c = 5.7$, as equações (4.15) apresentam um atrator caótico estranho, que é conhecido como “*Rössler bands*”.

As Figuras 4.20 e 4.21 mostram os respectivos planos de fase para os estados instáveis do sistema de Rössler.

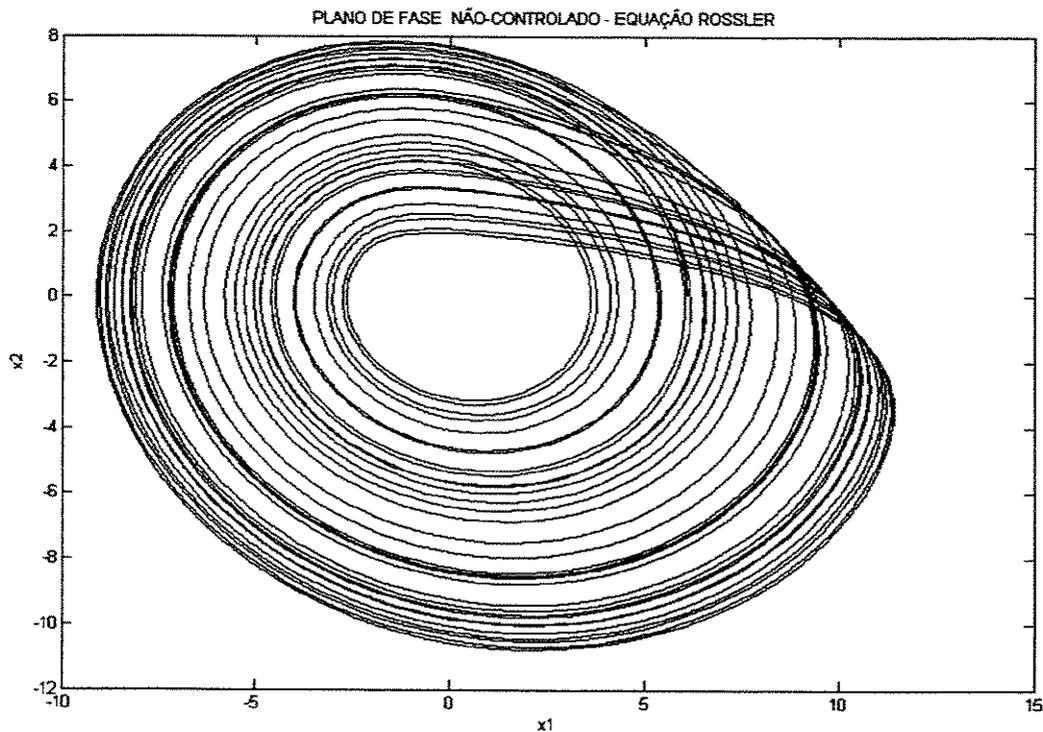


Figura 4.20 - Planos de fase para os estados não-controlados x_1 e x_2 .

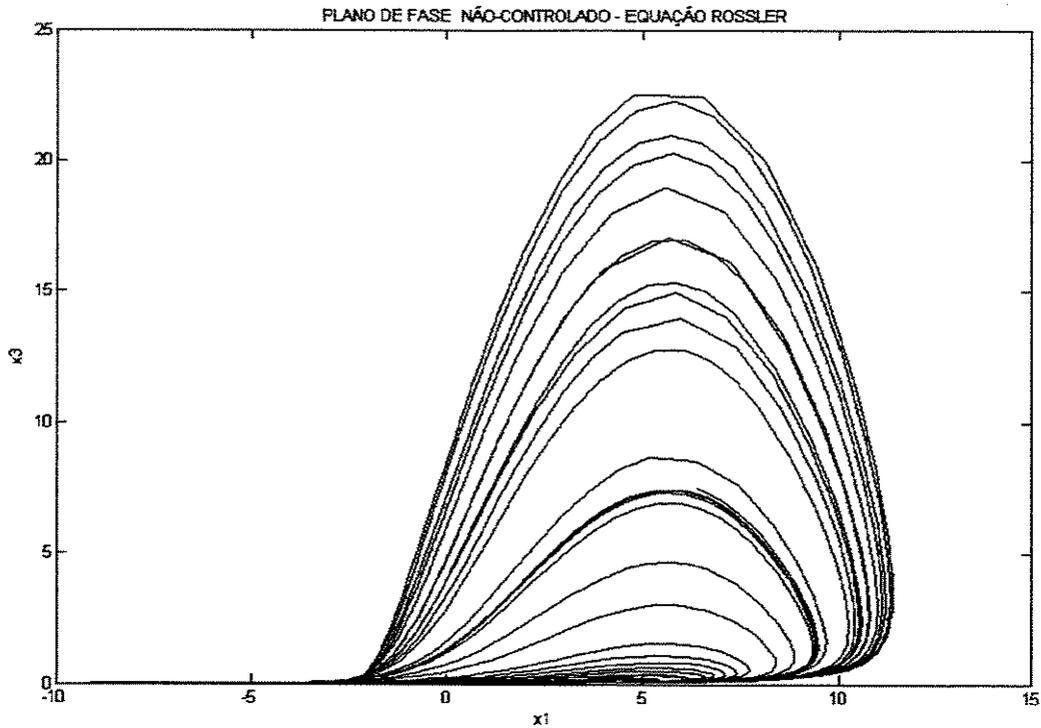


Figura 4.21 - Planos de fase para os estados não-controlados x_1 e x_3 .

4.3.1 A órbita desejada

O projeto de controle linear apresentado no capítulo 3 pode ser usado para projetar uma lei de controle realimentado para as equações de Rössler (equação 4.15), de modo a conduzir a órbita caótica para uma órbita 2π -periódica cujas equações são:

A órbita periódica escolhida para esse caso é:

$$y = \begin{cases} y_1 = 5 + \cos(t) \\ y_2 = \text{sen}(t) \\ y_3 = \text{sen}(t) \end{cases} \quad (4.16)$$

O plano de fase com os estados desejados é dada pela Figura 4.22:

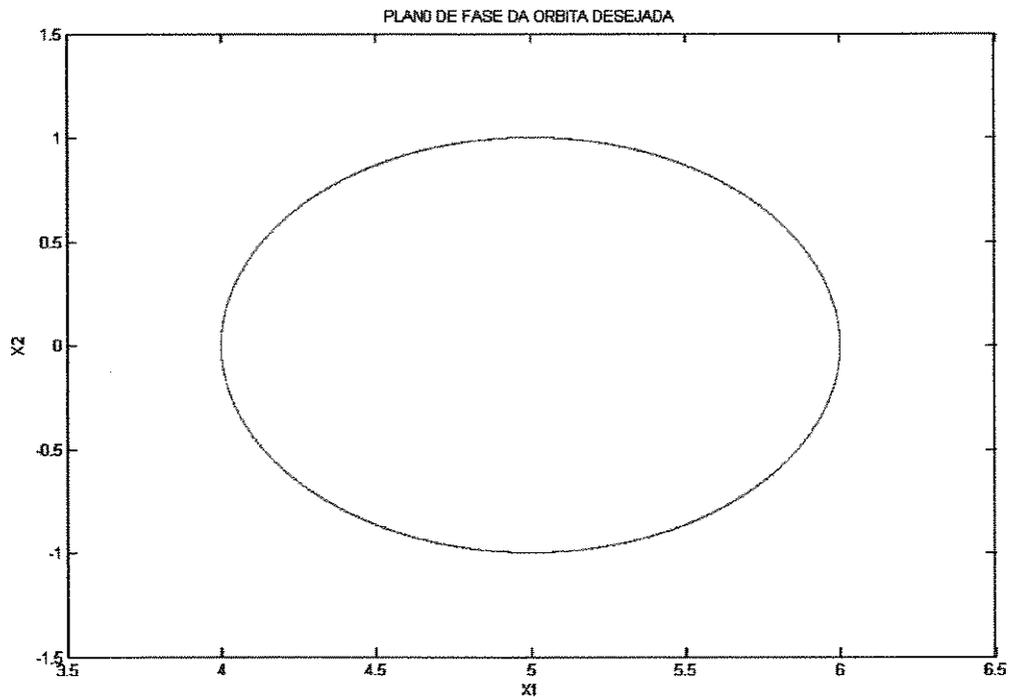


Figura 4.22 - Plano de fase da órbita desejada.

O projeto de controle deve conduzir as trajetórias instáveis dadas nas Figuras 4.20 e 4.21 para uma órbita periódica com pequena amplitude.

As Figuras 4.23 e 4.24 mostram os planos de fase do sistema não-controlado e a órbita desejada após o acionamento do controlador.

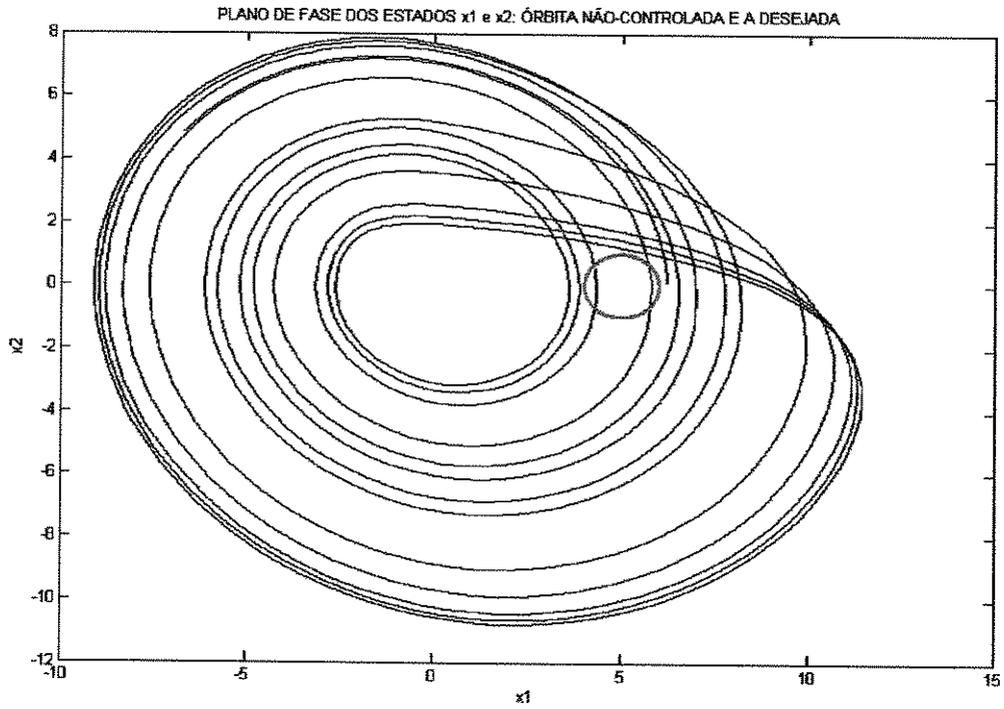


Figura 4.23 - Plano de fase dos estados x_1 e x_2 : órbitas não-controlada e desejada.

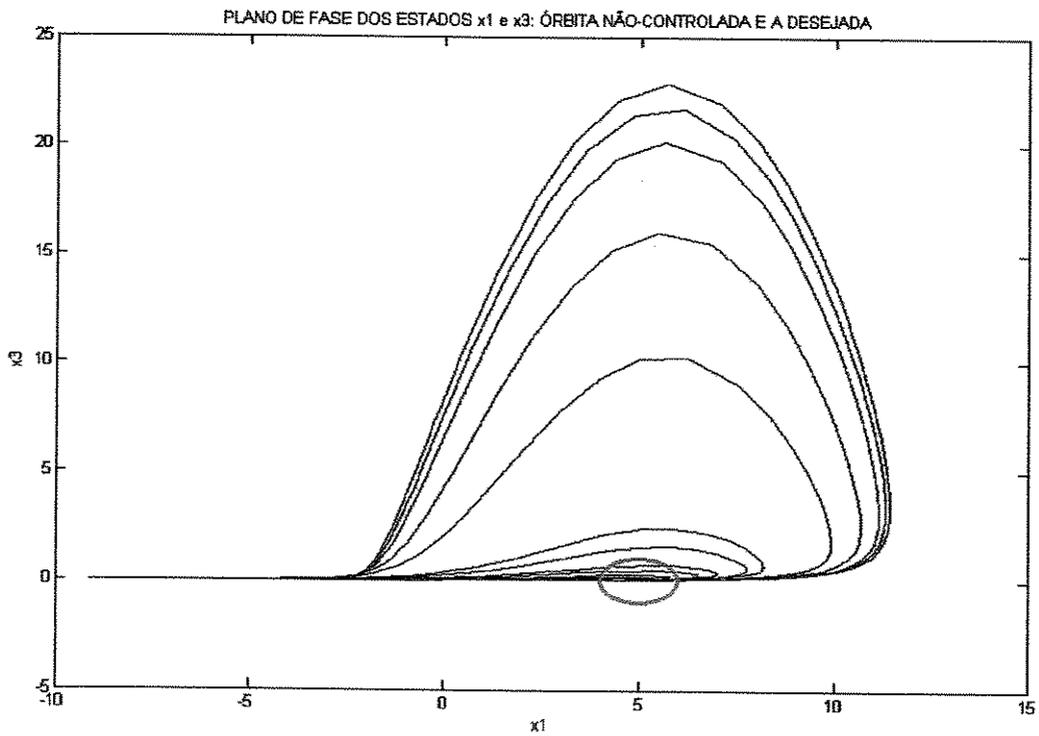


Figura 4.24 - Plano de fase dos estados x_1 e x_3 : órbitas não-controlada e desejada.

4.3.2 Controle do sistema de Rössler

Com a lei de controle linear do tipo $u = u_f + u_i$, a equação de Rössler pode ser escrita como:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_3 + u_{f,1} + u_i \\ \dot{x}_2 = x_1 + 0.2x_2 + u_{f,2} \\ \dot{x}_3 = 0.2 + x_3(x_1 - 5.7) + u_{f,3} \end{cases} \quad (4.17)$$

Pela equação (3.14), isto é, $u_f = \dot{y} - f(t, y(t))$, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} u_{f,1} &= \dot{y}_1 - f_1(y, t) \\ u_{f,2} &= \dot{y}_2 - f_2(y, t) \\ u_{f,3} &= \dot{y}_3 - f_3(y, t) \end{aligned} \quad (4.18)$$

onde

$$\begin{aligned} f_1(y, t) &= -y_2 - y_3 \\ f_2(y, t) &= y_1 + 0.2y_2 \\ f_3(y, t) &= 0.2 + y_3(y_1 - 5.7) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Considerando-se a órbita desejada dada pela equação (4.16), tem-se:

$$\begin{aligned} u_{f,1} &= \dot{y}_1 + y_2 + y_3 \\ u_{f,2} &= \dot{y}_2 - y_1 - 0.2y_2 \\ u_{f,3} &= \dot{y}_3 - 0.2 - y_3(y_1 - 5.7) \end{aligned} \quad (4.20)$$

ou seja,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_3 + \dot{y}_1 + y_2 + y_3 + u_i \\ \dot{x}_2 = x_1 + 0.2x_2 + \dot{y}_2 - y_1 - 0.2y_2 \\ \dot{x}_3 = 0.2 + x_3(x_1 - 5.7) + \dot{y}_3 - 0.2 - y_3(y_1 - 5.7) \end{cases} \quad (4.21)$$

Adicionando-se à terceira equação de (4.21) $\pm y_1 x_3$ e considerando-se os erros dinâmicos entre as variáveis atuais e desejadas, x e y , respectivamente, obtém-se:

$$\begin{aligned} e_1 &= x_1 - y_1 \\ e_2 &= x_2 - y_2 \\ e_3 &= x_3 - y_3 \end{aligned} \quad (4.22)$$

Portanto, pode-se reescrever a equação (4.21) como:

$$\begin{aligned}
\dot{e}_1 &= -e_2 - e_3 + u_t \\
\dot{e}_2 &= e_1 + 0.2e_2 \\
\dot{e}_3 &= \text{sen}(t)e_1 + (-0.7 + \cos(t))e_3
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Pode-se, ainda, escrever a equação do erro entre a equação de Rössler e a desejada na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0.2 & 0 \\ \text{sen}(t) & 0 & -0.7 + \cos(t) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_t \tag{4.24}$$

Note que a matriz dos coeficientes é 2B-periódica em função de $\text{sen}(t)$ e $\cos(t)$. Assim, a estabilidade do sistema 2B-periódico é dada pelos autovalores da matriz de FTM.

Tal matriz foi obtida, numericamente no período $T = 2\pi$, através da aproximação da matriz de transição de estados (STM - equação (2.78)) pelo polinômio de Chebyshev ($gr_{cheb} = 20$) e do método iterativo de Picard ($it_{pic} = 40$).

Neste caso, a matriz de transição de Floquet é:

$$\phi(2\pi) = \begin{bmatrix} 1.8744 & 0.1874 & -0.3348 \\ 0.5643 & 1.2581 & 3.8015 \\ 1.0162 & -0.8190 & -2.1287 \end{bmatrix} \tag{4.25}$$

Os multiplicadores de Floquet são: $\mu_1 = 1.8867$, $\mu_2 = -0.8561$ e $\mu_3 = -0.0267$. A presença do multiplicador $|\mu_1 = 1.8867| > 1$ indica a instabilidade do sistema de Rössler para o conjunto de parâmetros.

A matriz de transição de estados obtida a partir da equação (2.78) pode ser fatorada como $\phi(t) = Q(t)e^{Rt}$. Aplicando-se a transformação Lyapunov-Floquet $z(t) = Q(t)e(t)$ na equação (4.24), a equação do erro dinâmico é transformada para a forma invariante no tempo, cujas dinâmicas são equivalentes:

$$\dot{q}(t) = \begin{bmatrix} 1.5941 & 1.6137 & 2.5709 \\ -6.0846 & -9.6666 & -16.2125 \\ 1.6759 & 2.9532 & 4.9321 \end{bmatrix} q(t) + Q^{-1}(t) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_t \tag{4.26}$$

Os autovalores da matriz de estabilidade são $\lambda_1 = -3.6198$, $\lambda_2 = 0.6348$ e $\lambda_3 = -0.1553$. A presença de $\lambda_2 = 0.6348 > 0$ indica a instabilidade do sistema transformado invariante no tempo.

Para projetar um controlador de realimentação de estados, será aplicada a técnica de deslocamento de pólos, apresentada no capítulo 3. Os novos pólos desejados são -2, -3 e -4.

De acordo com a técnica de controle linear apresentada no capítulo 3, obtêm-se as matrizes:

$$B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_0 = \begin{bmatrix} -2.4963 & -2.9733 & -7.8583 \\ 3.3167 & 2.9934 & 6.7844 \\ -0.5488 & 0.6798 & 2.6437 \end{bmatrix}$$

A matriz de ganhos invariante no tempo $\bar{K} = B_0 F_0$ é então obtida:

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} -3.5941 & -1.6137 & -2.5709 \\ 6.0846 & 6.6666 & 16.2125 \\ -1.6759 & -2.9532 & -8.9321 \end{bmatrix}$$

Assim, a lei de controle composta por u_f e u_t conduz o sistema de Rössler para a órbita desejada dada pela equação (4.16).

Os resultados com o acionamento do controlador podem ser analisados pelas Figuras apresentadas a seguir.

Nas Figuras 4.25 e 4.26, comparam-se os estados do sistema controlado com os desejados através dos respectivos planos de fase.

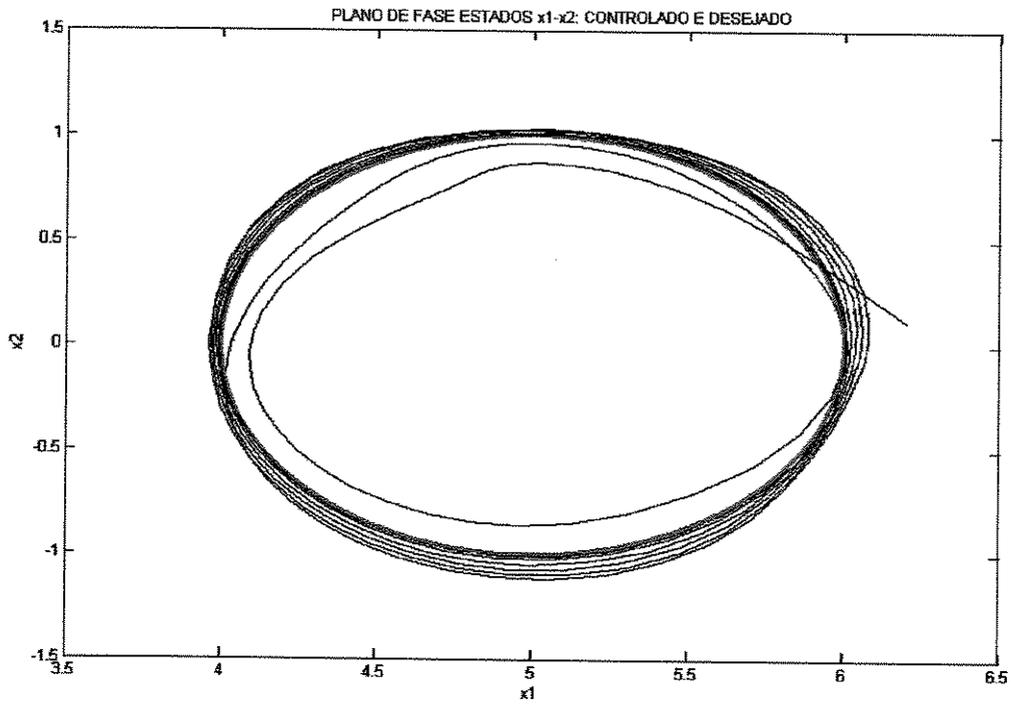


Figura 4.25 - Plano de fase dos estados controlados x_1 e x_2 .

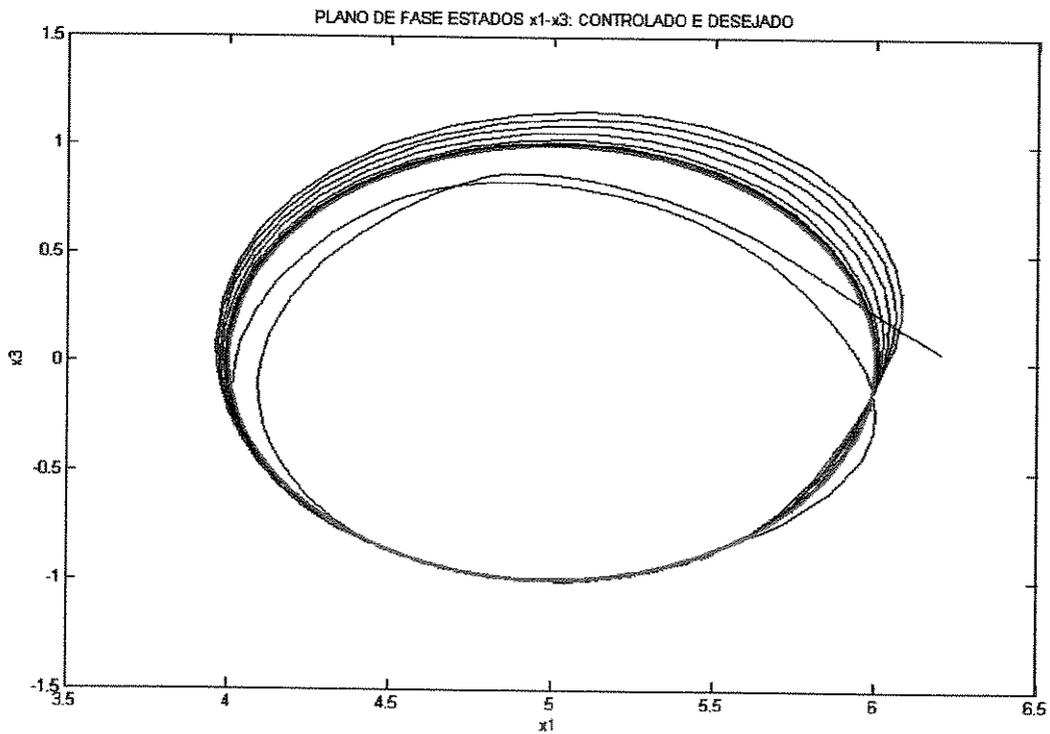


Figura 4.26 - Plano de fase dos estados controlados x_1 e x_3 .

As Figuras 4.27 e 4.28 analisam os estados dos sistemas controlados e não-controlados.

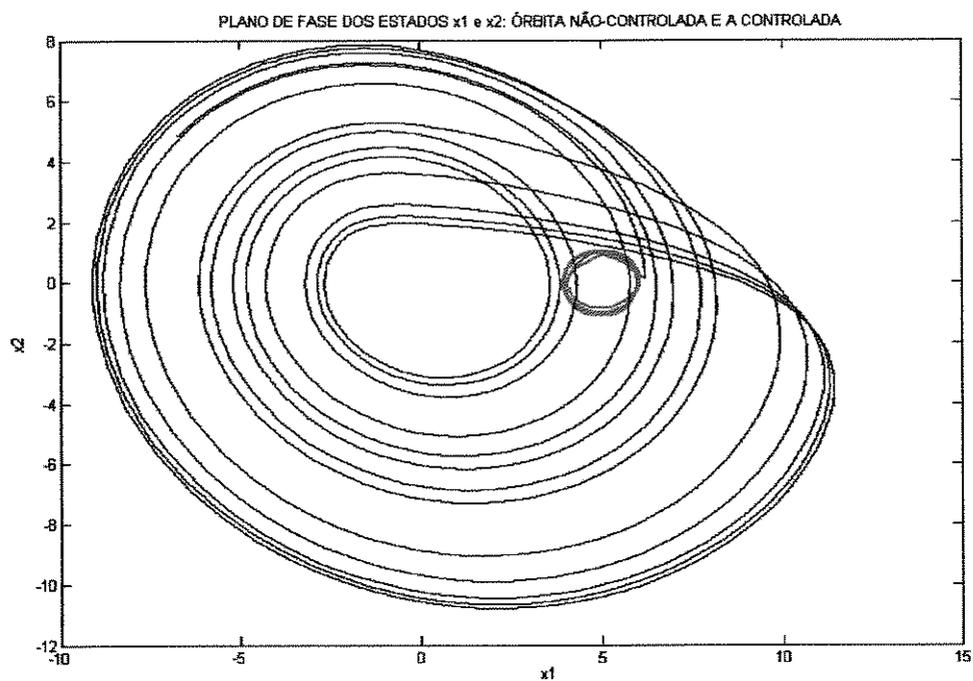


Figura 4.27 - Plano de fase dos estados controlados e não-controlados x_1 e x_2 .

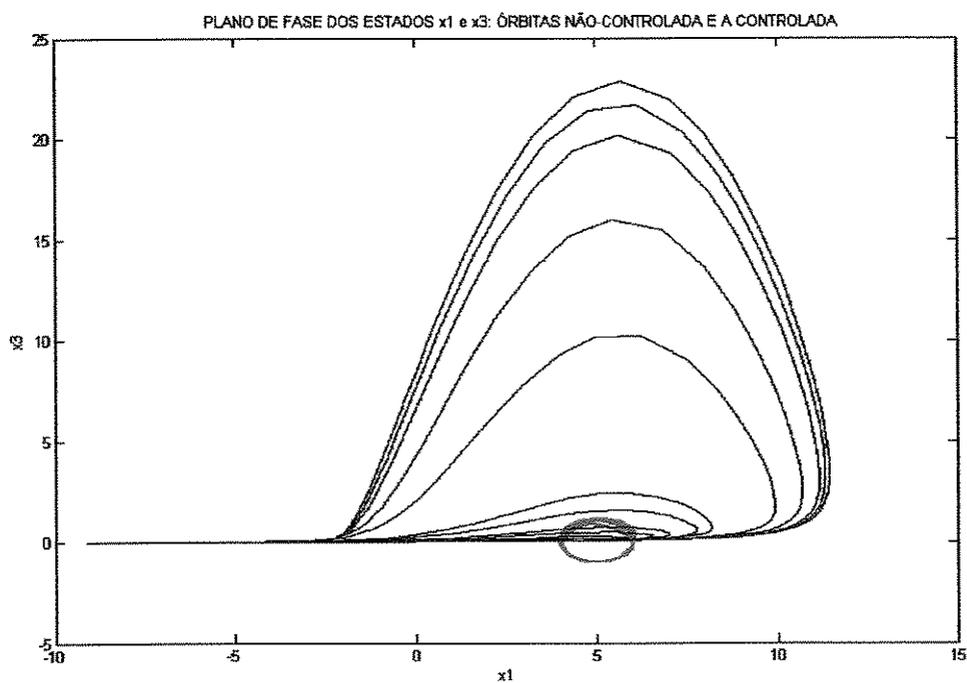


Figura 4.28 - Plano de fase dos estados controlados e não-controlados x_1 e x_3 .

Se for feita a comparação entre as Figuras 4.27 e 4.23 e as figuras 4.28 e 4.24, vê-se que o projeto de controle foi satisfatório.

4.4 Pêndulo duplo invertido

Considere o pêndulo duplo invertido e amortecido, dado pela Figura 1, sujeito a uma força composta por duas componentes – uma constante e a outra periódica no tempo.

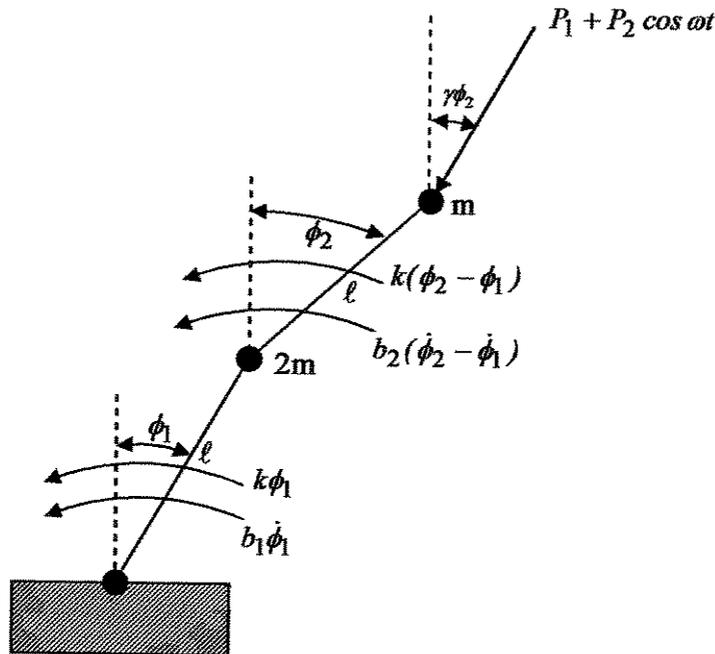


Figura 4.29 - Pêndulo duplo invertido com excitação periódica.

As equações do movimento do sistema periódico no tempo foram obtidas por Leipholz e Herrmann, (apud Sinha, 1998), como:

$$3\ddot{\phi}_1 + \cos(\phi_2 - \phi_1)\ddot{\phi}_2 - \sin(\phi_2 - \phi_1)\dot{\phi}_2^2 + (B_1 + B_2)\dot{\phi}_1 - B_2\dot{\phi}_2 + 2\bar{k}\phi_1 - \bar{k}\phi_2 - \bar{p}(t)\sin(\phi_1 - \gamma\phi_2) = u_1 \quad (4.27)$$

$$\cos(\phi_2 - \phi_1)\ddot{\phi}_1 + \ddot{\phi}_2 + \sin(\phi_2 - \phi_1)\dot{\phi}_1^2 - B_2\dot{\phi}_1 + B_2\dot{\phi}_2 - \bar{k}\phi_1 + \bar{k}\phi_2 - \bar{p}(t)\sin((1 - \gamma)\phi_2) = u_2$$

onde $\bar{k} = \frac{k}{m\ell^2}$ é o coeficiente de elasticidade normalizado, $B_1 = \frac{b_1}{m\ell^2}$ e $B_2 = \frac{b_2}{m\ell^2}$ são as constantes de amortecimento normalizadas, $p(t) = \frac{P_1 + P_2 \cos(\omega t)}{m\ell} = p_1 + p_2 \cos(\omega t)$ é a força aplicada, onde p_1 é a magnitude estática da força e p_2 é a amplitude de excitação, ω é a frequência de excitação da força periódica e, finalmente, γ é o parâmetro da direção da força.

Expandindo-se em série de Taylor até a terceira ordem, em torno da posição de equilíbrio vertical $\phi_1 = \phi_2 = 0$, a equação (4.27) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}_1 = & -0.5(B_1 + 2B_2)\dot{\phi}_1 + B_2\dot{\phi}_2 + 0.5\bar{k}(p-3)\phi_1 + 0.5\bar{k}(2-p)\phi_2 \\ & - 0.5(\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2)(\phi_1 - \phi_2) - \left(\frac{p\bar{k}}{12}\right)\{(\phi_1 - \gamma\phi_2)^3 - (1-\gamma)^3\phi_2^3\} \\ & - \left(\frac{(\phi_1 - \phi_2)^2}{4}\right)\{\bar{k}(p-4)\phi_1 + \bar{k}(3+p(\gamma-2))\phi_2 \\ & - (B_1 + 3B_2)\dot{\phi}_1 + 3B_2\dot{\phi}_2\} + \frac{u_1 - u_2}{2} \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}_2 = & 0.5(B_1 + 4B_2)\dot{\phi}_1 - 2B_2\dot{\phi}_2 + 0.5\bar{k}(5-p)\bar{k}\phi_1 + \{(p(1.5-\gamma) - 2)\bar{k}\}\phi_2 \\ & + 0.5(3\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2)(\phi_1 - \phi_2) + \left(\frac{p\bar{k}}{12}\right)\{(\phi_1 - \gamma\phi_2)^3 - 3(1-\gamma)^3\phi_2^3\} \\ & + \left(\frac{(\phi_1 - \phi_2)^2}{4}\right)\{\bar{k}(2p-7)\phi_1 + \bar{k}(5+p(\gamma-3))\phi_2 \\ & - (2B_1 + 5B_2)\dot{\phi}_1 + 5B_2\dot{\phi}_2\} - \frac{u_1 - 3u_2}{2} \end{aligned}$$

Reescrevendo-se o sistema na forma espaço-estado, através das transformações $x_1 = \phi_1$; $x_2 = \phi_2$; $x_3 = \dot{\phi}_1$ e $x_4 = \dot{\phi}_2$, temos:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.5\bar{k}(p-3) & 0.5\bar{k}(2-p) & -0.5(B_1+2B_2) & B_2 \\ 0.5\bar{k}(5-p) & \bar{k}[p(1.5-\gamma)-2] & 0.5(B_1+4B_2) & -2B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \\
&+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \left(\frac{1}{2}(x_2-x_1)(x_3^2+x_4^2) - \frac{p\bar{k}}{12}[(x_1-\gamma x_2)^3 - (1-\gamma)^3 x_2^3] - \right. \\ \left. - \frac{(x_1-x_2)^2}{4}[\bar{k}(p-4)x_1 + \bar{k}(3+p(\gamma-2))x_2 - (B_1+3B_2)x_3 + 3B_2x_4] \right) \\ \left(\frac{1}{2}(x_1-x_2)(3x_3^2+x_4^2) + \frac{p\bar{k}}{12}[(x_1-\gamma x_2)^3 - 3(1-\gamma)^3 x_2^3] + \right. \\ \left. + \frac{(x_1-x_2)^2}{4}[\bar{k}(2p-7)x_1 + \bar{k}(5+p(\gamma-3))x_2 - (2B_1+5B_2)x_3 + 5B_2x_4] \right) \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \tag{4.29}
\end{aligned}$$

Seja o conjunto de parâmetros $\bar{k} = 1$, $B_1 = B_2 = 0.01$, $\gamma = 1$ e $\omega = 2$ para a equação (4.29).

No espaço de parâmetros $p_1 - p_2$, foi construído o diagrama de estabilidade mostrado na Figura 4.29, onde p_1 e p_2 variam nos intervalos $0 \leq p_1 \leq 7$ e $-7 \leq p_2 \leq 3.5$.

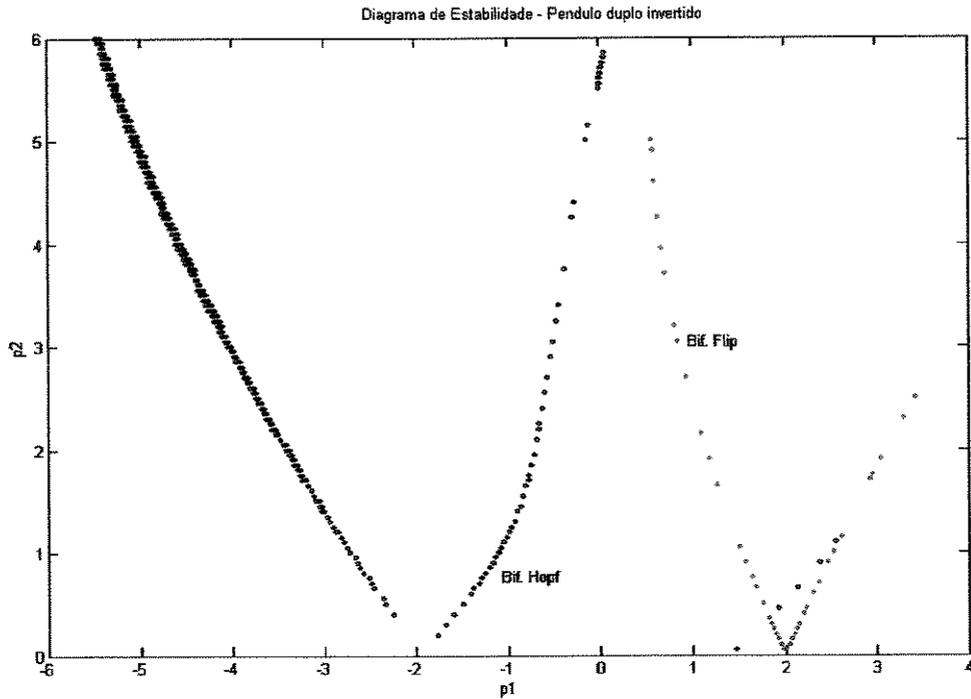


Figura 4.30 - Diagrama de estabilidade para pêndulo duplo invertido com excitação periódica.

Para o conjunto de parâmetros $\bar{k} = 2$, $B_1 = B_2 = 0$, $p_1 = 2$, $p_2 = 0.7$, $\gamma = 1$ $\omega = 2$, a matriz de transição de estados $\phi(t)$ foi obtida a partir da equação (2.78). A matriz de transição de Floquet $\phi(\pi)$ foi então calculada como:

$$\phi(\pi) = \begin{bmatrix} -0.1169 & -0.2154 & 0.0597 & 0.3238 \\ -0.7840 & -1.3003 & 2.381 & -0.6259 \\ -0.1877 & 0.5808 & -1.6615 & 0.2994 \\ -2.4893 & 0.8356 & -1.2989 & 0.2442 \end{bmatrix}$$

Os multiplicadores de Floquet são: $\mu_1 = -2.45002$, $\mu_{2,3} = 0.01178 \pm 0.99999i$ e $\mu_4 = -0.408159$. Note que, $|\mu_1| > 1$, $|\mu_{2,3}| = 1$ e $|\mu_4| < 1$.

Assim, a partir do módulo do autovalor μ_1 , vemos que a equação (4.29) apresenta um comportamento instável.

Os históricos no tempo dos estados instáveis x_1 , x_2 e x_3 , x_4 para o sistema não-controlado são mostrados nas Figuras 4.31 e 4.32, respectivamente.

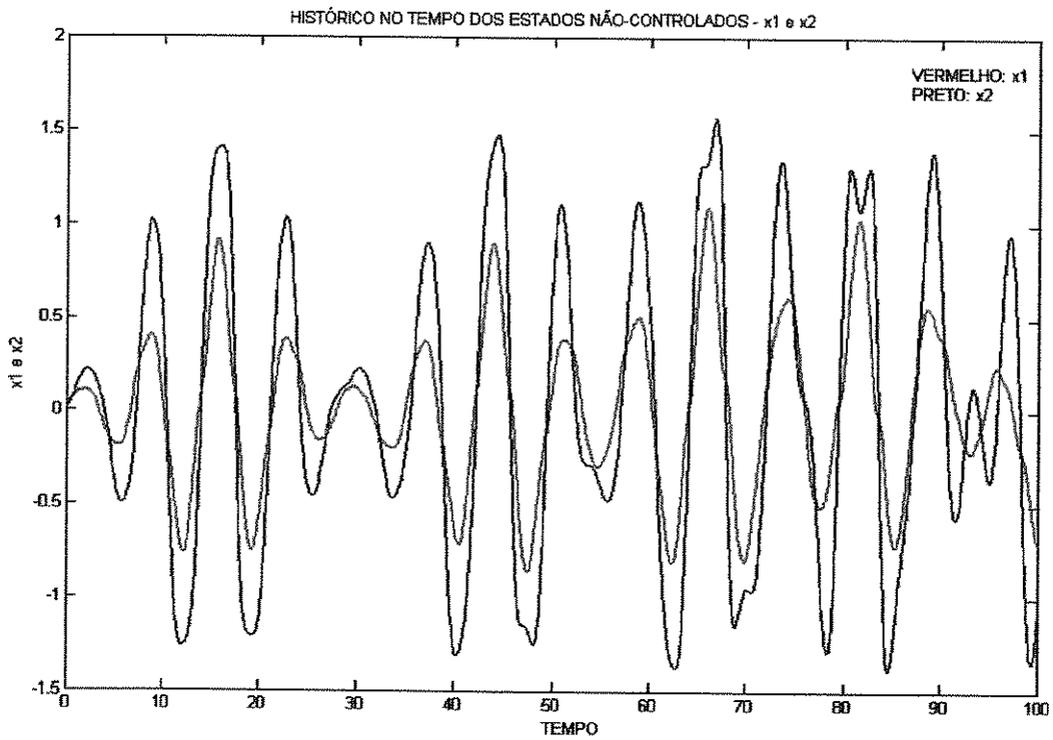


Figura 4.31 - Histórico no tempo dos estados x_1 e x_2 não-controlados.

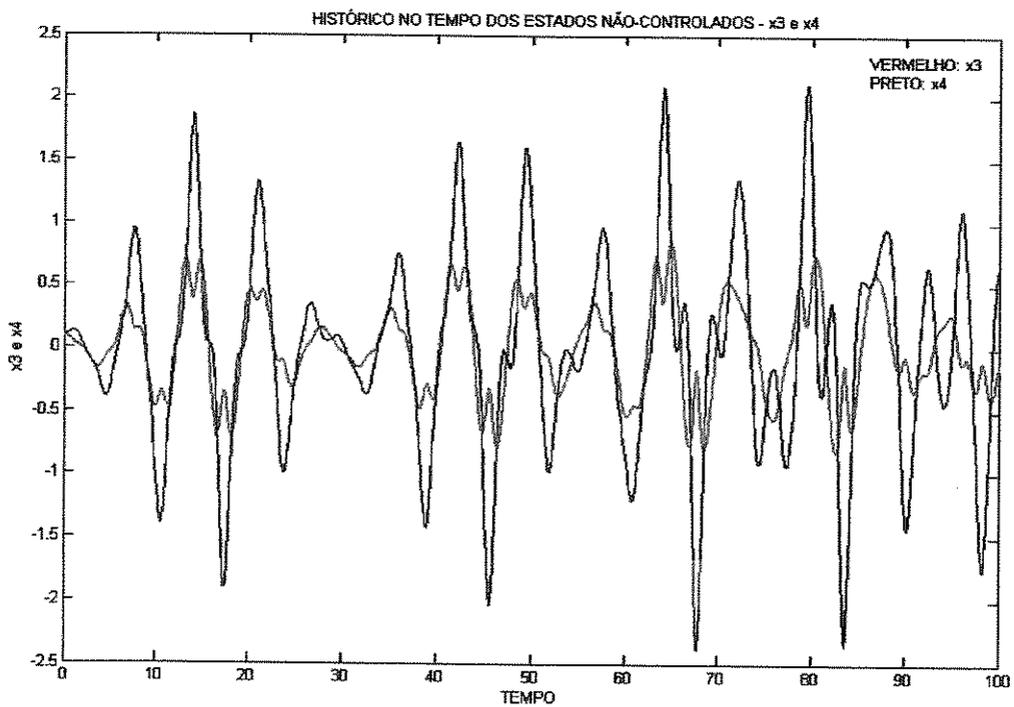


Figura 4.32 - Histórico no tempo dos estados x_3 e x_4 não-controlados.

4.4.1 Controle

Fatorando-se a matriz de transição de estados como $\phi(t) = Q(t)e^{Rt}$ e aplicando-se a transformação Lyapunov-Floquet $y(t) = Q(t)x(t)$ na equação (4.29), a equação do erro dinâmico é transformada para a forma invariante no tempo, dinamicamente equivalente ao sistema original:

$$\dot{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.2506 & 0.2108 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.3253 & -0.1002 & 0 & 0 \\ -1.4156 & 0.1131 & 0 & 0 \end{bmatrix} y(t) + Q^{-1}(t) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} + Q^{-1}(t) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

onde

$$f_1 = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_3^2 + x_4^2) - \frac{p}{6}[(x_1 - x_2)^3] - \frac{(x_1 - x_2)^2}{4}[(2p - 8)x_1 + (6 - 2p)x_2]$$

$$f_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)(3x_3^2 + x_4^2) + \frac{p}{6}[(x_1 - x_2)^3] + \frac{(x_1 - x_2)^2}{4}[(4p - 14)x_1 + (10 - 4p)x_2]$$

Os autovalores da matriz de estabilidade da parte linear invariante no tempo na equação (4.30), são: $\lambda_1 = 0.2852$, $\lambda_{2,3} = \pm 0.4962i$ e $\lambda_4 = -0.2852$.

A presença do autovalor $\lambda_1 = 0.2852 > 0$ indica a instabilidade do sistema transformado invariante no tempo.

Para projetar um controlador de realimentação de estados, será aplicada a técnica de deslocamento de pólos. Os pólos desejados são $-30 \pm 10i$ e $-35 \pm 11i$.

De acordo com a técnica de controle linear apresentada no capítulo 3, obtém-se a matriz de ganhos invariante no tempo $\bar{K} = B_0 F_0$:

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} 30 & -10 & -0.2506 & 0.2108 \\ 10 & 30 & -0.5255 & -0.0052 \\ -0.3253 & -0.1002 & 35 & -12 \\ -1.4156 & 0.1131 & 12 & 35 \end{bmatrix}$$

Assim, a lei de controle linear definida por $u_L = -B^\# Q(t) \bar{K} Q^{-1}(t) x$ estabiliza a órbita do sistema pêndulo duplo invertido, como se vê nas Figuras 4.33 e 4.34.

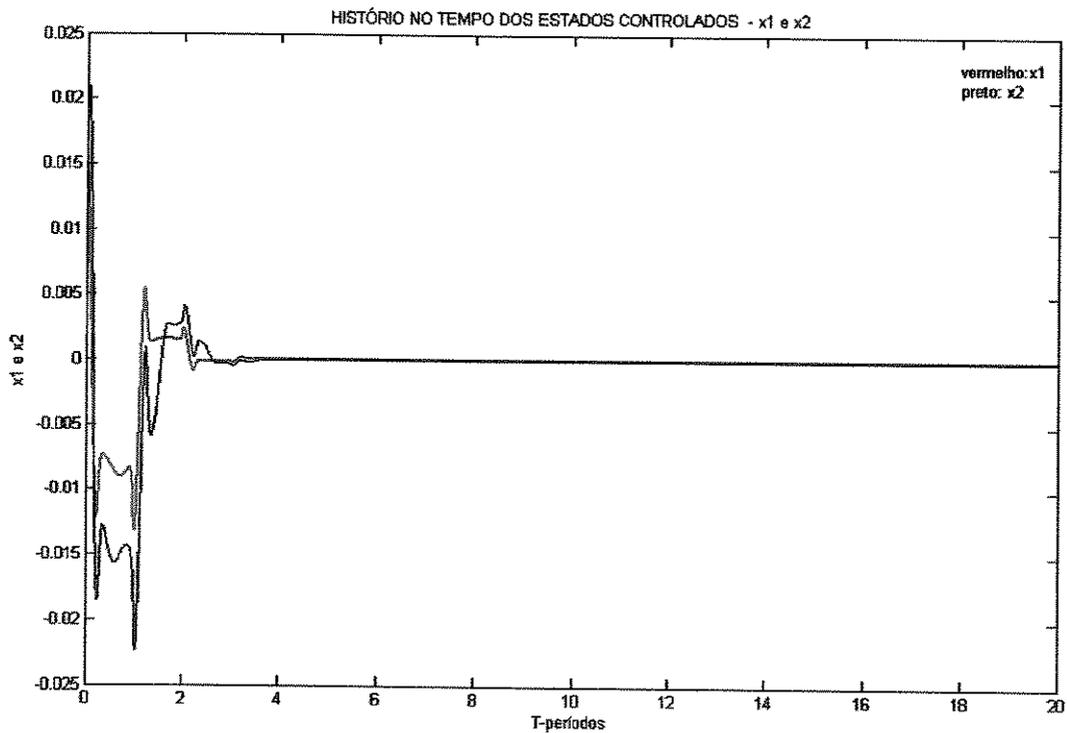


Figura 4.33 - Histórico no tempo dos estados x_1 e x_2 controlados.

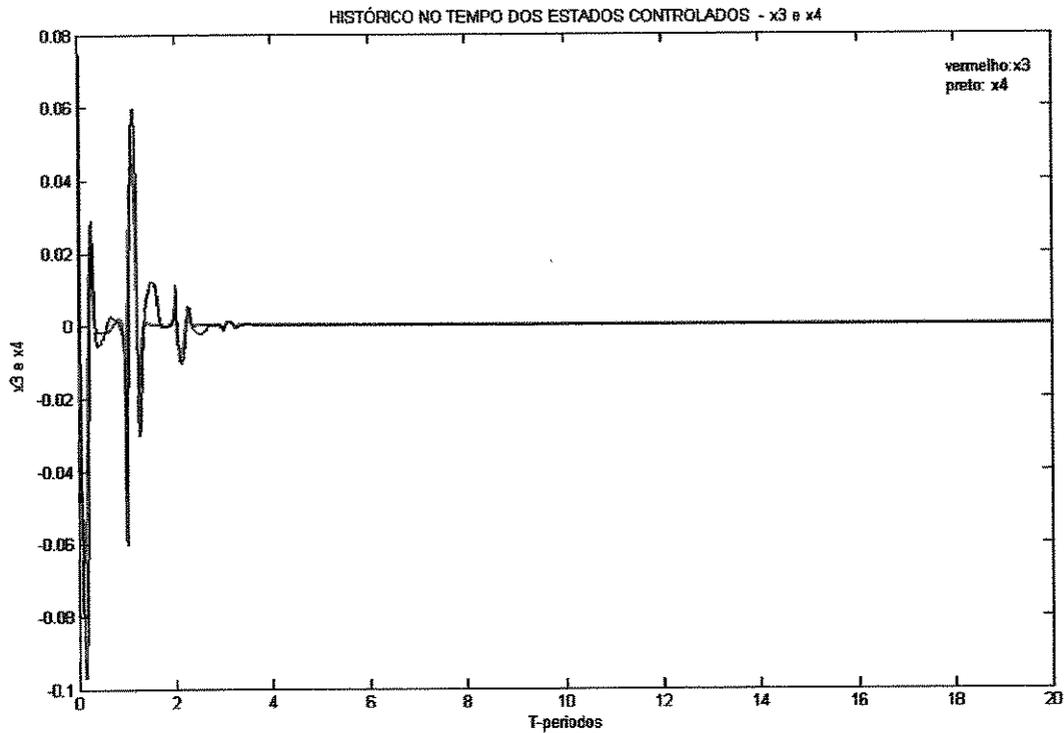


Figura 4.34 - Histórico no tempo dos estados x_3 e x_4 controlados.

Com base nos resultados apresentados acima, pode-se concluir que o projeto de controle, utilizando-se um controlador linear, para o problema do pêndulo duplo invertido foi executado com sucesso.

4.5 Aplicação do projeto de controle de bifurcações

Para se exemplificar a aplicação do projeto de controle de bifurcação será usado o pêndulo excitado parametricamente dado pela equação (4.1):

$$\ddot{\theta} = -\beta\dot{\theta} - (1 + p \cos(\omega t)) \sin\theta + u$$

Aproximando-se a função $\sin\theta$ em série de Taylor até terceira ordem e transformando-se a equação (4.1) aproximada, na forma espaço estado através: $\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$, tem-se:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & -(1 + p \cos(\omega t)) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{(1 + p \cos(\omega t))}{6} (x_1)^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ u(x) \end{pmatrix}. \quad (4.31)$$

Para a análise da dinâmica do sistema, é conveniente obter-se uma estimativa quantitativa das soluções no ponto de bifurcação, bem como numa vizinhança deste ponto.

Com esse fim, deve-se analisar a estabilidade do sistema (4.1) para o parâmetro crítico $\omega_c = 2.86142$, onde ocorre uma bifurcação flip.

Inicialmente, fatora-se a Matriz de Transição de Estados como $\phi(t) = Q(t)e^{Rt}$, onde:

$$Q(t) = \begin{bmatrix} Q_{11}(t) & Q_{12}(t) \\ Q_{21}(t) & Q_{22}(t) \end{bmatrix}, \quad (4.32)$$

de modo que a transformação de L-F: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = Q(t) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, converta a parte linear do sistema (4.31), na forma invariante no tempo.

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + Q^{-1}(t) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{(1 + p \cos(\omega t))}{6} (Q_{11}(t)y_1 + Q_{12}(t)y_2)^3 \end{pmatrix} + Q^{-1}(t) \begin{pmatrix} 0 \\ u(Qy) \end{pmatrix}. \quad (4.33)$$

Aplicando-se a Transformação Modal

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

na equação (4.33), obtém-se a equação na Forma de Jordan:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \\ + M^{-1} \underline{Q}^{-1}(t) \left(\frac{(1+p \cos(\omega t))}{6} [Q_{11}(t)(M_{11}z_1 + M_{12}z_2) + Q_{12}(t)(M_{21}z_1 + M_{22}z_2)^3] + \right. \\ \left. + M^{-1} \underline{Q}^{-1}(t) \begin{pmatrix} 0 \\ u(MQz) \end{pmatrix} \right) \quad (4.35)$$

onde M_{ij} são as entradas da Matriz M , e λ_1 e λ_2 correspondem aos multiplicadores de Floquet crítico e estável, respectivamente. Como consequência dessa correspondência, vê-se que $\lambda_1 = 0$.

Efetuando-se os produtos e desenvolvendo-se os termos de ordem cúbica, tem-se:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{11}(t)z_1^3 + f_{12}(t)z_1^2z_2 + f_{13}(t)z_1z_2^2 + f_{14}(t)z_2^3 \\ f_{21}(t)z_1^3 + f_{22}(t)z_1^2z_2 + f_{23}(t)z_1z_2^2 + f_{24}(t)z_2^3 \end{pmatrix}, \quad (4.36) \\ + M^{-1} \underline{Q}^{-1}(t) \begin{pmatrix} 0 \\ u(MQz) \end{pmatrix}$$

onde os coeficientes $f_{ij}(t)$ são funções 2T-periódicas, pois a matriz da transformação L-F $\underline{Q}(t)$ também é 2T-periódica.

Como na equação (4.36) não possui termos quadráticos, é conveniente projetar um controlador puramente cúbico:

$$M^{-1} \underline{Q}^{-1}(t) \begin{pmatrix} 0 \\ u(MQz) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 z_1^3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.37)$$

onde k_1 é um ganho de controle constante ainda desconhecido.

Devido à periodicidade dos $f_{ij}(t)$, tais funções podem ser calculadas a partir da expansão em série de Fourier:

$$f_{ij}(t) = a_0^{ij} + \sum_{n=1}^{\ell} a_n^{ij} \cos(n\pi t) + \sum_{n=1}^{\ell} b_n^{ij} \sin(n\pi t) \quad (4.38)$$

Como os termos da parte não linear de (4.36) são cúbicos, pela teoria da Variedade Central, existe uma transformação não-linear com coeficientes periódicos da forma cúbica:

$$z_2 = H(z_1, t) = h_3(t)z_1^3 \quad (4.39)$$

onde $h_3(t) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} h_v e^{iv\pi t} z_1^3$ e $h_v = \frac{a_v}{iv\pi}$, com a_v são os coeficientes de Fourier da função periódica contendo os monômios de z_1 com ordem 3, que reduz o estudo da dinâmica do sistema original para a dinâmica da parte crítica.

A equação reduzida à Variedade Central tem a forma:

$$\dot{z}_1 = (w(t) + k_1)z_1^3 \quad (4.40)$$

A teoria da Forma Normal garante que existe uma transformação:

$$z_1 = v + \bar{h}_3(v, t), \quad (4.41)$$

onde

$$h_3(v, t) = \sum_{v=-q}^q h_v e^{iv\pi t} v^3 \quad (4.42)$$

e

$$h_v = \frac{a_v}{iv\pi}$$

transforma o sistema de co-dimensão de bifurcação 1, num sistema completamente invariante no tempo.

De fato, é óbvio que a condição de redutibilidade de (4.412) é $v \neq 0$, isto é, o sistema pode ser reduzido a sua forma linear, desde que, $v \neq 0$.

Como na equação (4.41) só temos o termo não-linear, a condição de ressonância $\nu = 0$ corresponde ao termo constante no tempo da expansão em série de Fourier desta função, isto é,

$$h_3(\nu, t) = \sum_{\nu=-q}^q a_0 \nu^3.$$

Portanto, a redução à Forma Normal resultará numa equação independente do tempo com a forma:

$$\dot{\nu} = (\omega + k_1)\nu^3 \quad (4.43)$$

Para os parâmetros $p = 2$ e $\omega_c = 2.86142$, obtém-se a forma de Jordan:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0.2196 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} f_{11}(t)z_1^3 + f_{12}(t)z_1^2z_2 + f_{13}(t)z_1z_2^2 + f_{14}(t)z_2^3 \\ f_{21}(t)z_1^3 + f_{22}(t)z_1^2z_2 + f_{23}(t)z_1z_2^2 + f_{24}(t)z_2^3 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} k_1z_1^3 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.44)$$

Aplicando as reduções à Variedade Central e à Forma Normal, obtém-se o sistema invariante no tempo:

$$\dot{\nu} = (-23.0232 + k_1)\nu. \quad (4.45)$$

A solução da equação (4.45) pode ser obtida facilmente na forma fechada como:

$$\nu(t) = (\pm 0.14736 + k_1)t^{-0.5} \quad (4.46)$$

Logo, pode-se concluir que o sistema é assintoticamente estável no ponto crítico $\omega_c = 2.86142$.

Capítulo 5

Dinâmica e Controle de Sistemas Vibratórios não-ideais com Coeficientes Periódicos

Neste capítulo, consideram-se os problemas de oscilações auto-excitadas em transporte de cargas. Primeiramente, apresenta-se um sistema monotrilho, representado por um sistema pêndulo invertido-carro-motor, para o caso ideal e para o caso não-ideal.

No sistema ideal, a dinâmica não é influenciada pela resposta do sistema, e a fonte de excitação (motor) considerada é constante ou é função do tempo.

No sistema não-ideal, a dinâmica recebe a influência da resposta do sistema, e esta dinâmica depende diretamente das propriedades de sua fonte de excitação e, geralmente, a potência disponível na fonte de energia é limitada.

Então, analisa-se a influência do motor para o caso não-ideal. Finalmente, controla-se o sistema não-ideal usando-se as técnicas apresentadas nos capítulos dois e três.

Todos os cálculos, deste capítulo, foram obtidos a partir da implementação computacional no MATLAB® 6.5.

5.1 Sistema pêndulo invertido e sistema monotrilho: ideal e não-ideal

O funcionamento do sistema mecânico em questão depende, basicamente, de dois efeitos: a dissipação (amortecimento) e a auto-excitação.

A dissipação é produzida pelo atrito. É o atrito o responsável pela redução da quantidade de energia cinética e potencial do sistema mecânico.

A auto-excitação irá depender das características que constituem o sistema mecânico, por exemplo, o atrito pode transferir energia ao sistema. Assim, a quantidade de energia do

sistema poderá sofrer um acréscimo ou decréscimo. Desta forma, a força de atrito poderá aumentar a amplitude das oscilações quando as amplitudes são pequenas, ou diminuí-las quando as amplitudes são grandes.

Neste capítulo, serão considerados os problemas de oscilações auto-excitadas em um sistema físico representado por um pêndulo invertido e um carro do sistema monotrilho, devido à interação do atrito de dois tipos de sistemas: o ideal e o não-ideal. Além disso, em ambos, a força de atrito seco é responsável pelo efeito de auto-excitação do sistema. Neste caso, tem-se um sistema descontínuo e o presente trabalho não tratará deste tipo de problema.

Nota-se, ainda, que aos sistemas dinâmicos não-ideais deve-se adicionar uma equação que descreve como a fonte de energia passa essa energia às equações que governam o correspondente sistema dinâmico ideal. Assim, como uma primeira característica, o sistema vibratório não-ideal tem um grau de liberdade a mais que seu correspondente sistema ideal.

5.2 Modelagem do sistema e obtenção das equações do movimento

Um problema inerente ao transporte de cargas apoiadas em plataformas é a estabilização das oscilações que surgem durante o deslocamento das mesmas, devido, principalmente, à aceleração ou desaceleração.

Essas oscilações exigem que os procedimentos de transporte sejam executados em baixas velocidades, em consequência da dificuldade de posicionamento preciso das cargas e, além disso, a necessidade de evitar impacto.

Um exemplo clássico deste tipo de problema, é o sistema de transporte de cargas por pontes rolantes em indústrias. Um modelo para esse problema é o sistema físico com três graus de liberdade, mostrado na Figura 5.1. Neste modelo é representado um pêndulo invertido com excitação no suporte e um carro transportador do sistema monotrilho.

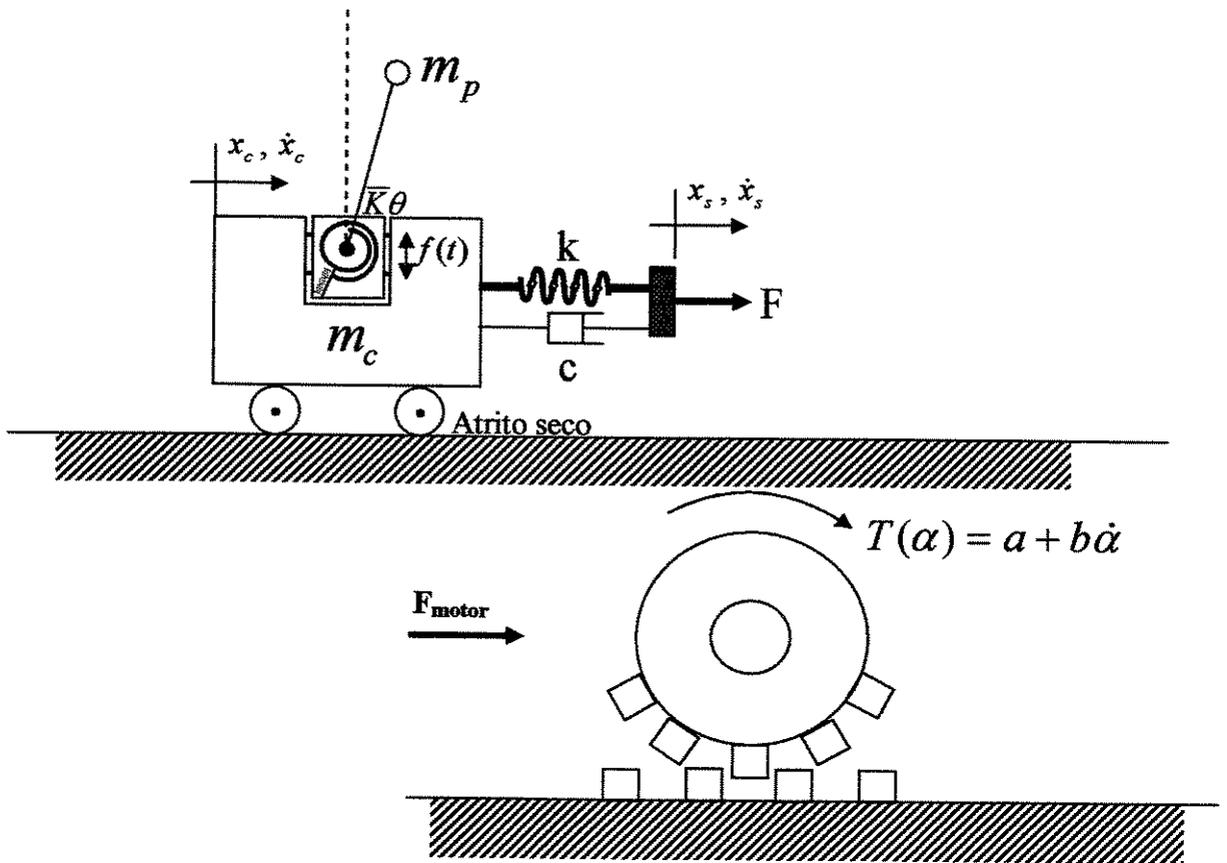


Figura 5.1 - Sistema monotrilho.

Um sistema primário (Figura 5.1) consiste de um carro de massa m_c , uma mola linear com coeficiente de elasticidade k e um amortecimento que é representado pelo coeficiente c .

O acionamento do carro (transmissão da potência do motor) é modelado por uma força F . A força de acionamento F é transmitida através de um suporte onde são consideradas as propriedades elásticas e de amortecimento do sistema, citadas acima.

A Figura 5.2 mostra um sistema secundário, onde a carga transportada é modelada. Tal sistema é composto por um pêndulo invertido de massa m_p e, em seu suporte, existe uma mola de rigidez torcional com coeficiente de elasticidade \bar{K} . Esta mola forçará o pêndulo a manter-se na posição vertical.

Supõe-se ainda que, quando o sistema primário está em movimento, o suporte do pêndulo possui uma pequena vibração periódica vertical representada por $f(t) = \bar{A} \text{sen} \omega t$, onde \bar{A} representa a amplitude e ω a frequência da vibração.

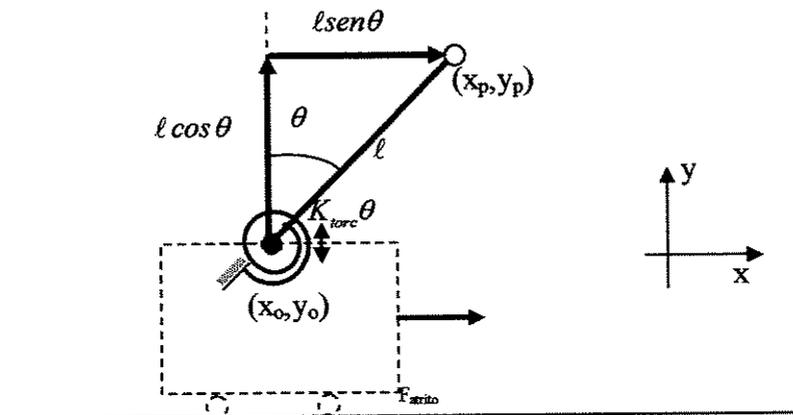


Figura 5.2 - Subsistemas primário e secundário.

onde:

(x_0, y_0) é a coordenada do suporte do pêndulo, com $x_0 = x_c$; com x_c : posição do carro;

(x_p, y_p) é a coordenada do centro de massa do pêndulo;

l é a distância entre o suporte e centro de massa;

$f(t) = \bar{A} \text{sen} \omega t$ é o movimento vibratório do suporte do pêndulo.

O modelo matemático para o sistema representado pela Figura 5.1 será obtido a seguir, através das equações de Lagrange.

5.3 Dedução das equações do movimento

As equações do movimento do sistema serão obtidas através das equações de Lagrange. Para isso, será necessário determinar a energia cinética total e a energia potencial total do sistema. Isso será feito a seguir, começando pela energia cinética total.

5.3.1 Energia Cinética Total

A energia cinética total do sistema (T) é dada pela soma das energias cinéticas de todas as componentes que atuam no sistema, isto é, a energia cinética do carro, do suporte, do pêndulo e do motor.

Desta forma, pode-se escrever a energia cinética total, como:

$$T = T_{carro} + T_{sup\ porte} + T_{pêndulo} + T_{motor} \quad (5.1)$$

Cada uma das energias cinéticas das componentes do sistema será calculada, separadamente, a seguir.

5.3.2 Energia cinética do carro

A energia cinética do carro (T_{carro}), é dada por:

$$T_{carro} = \frac{m_c}{2} \dot{x}_c^2 \quad (5.2)$$

onde x_c e m_c indicam a posição e a massa do carro, respectivamente.

5.3.3 Energia cinética do suporte

Neste trabalho será considerado que o suporte tenha massa desprezível. Desta forma, $T_{suporte}$ pode ser tomada como nula.

5.3.4 Energia cinética do pêndulo

Para o pêndulo, energia cinética é dada por:

$$T_{p\acute{e}ndulo} = \frac{m_p}{2} (\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2) + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 \quad (5.3)$$

onde m_p é massa do pêndulo, (x_p, y_p) e I indicam a coordenada e o momento de inércia do centro de massa do pêndulo, respectivamente. Finalmente, a variável θ indica a posição angular do pêndulo.

De acordo com o modelo, o pêndulo tem uma componente de movimento horizontal devido ao movimento do carro e uma componente vertical devido à vibração periódica do seu suporte.

Por isso, será necessário decompor o movimento do pêndulo nas direções horizontal e vertical:

- O movimento horizontal do pêndulo é dado por:

$$x_p = x_c + l \sin \theta \quad (5.4)$$

- O movimento vertical do pêndulo é dado por:

$$y_p = l \cos \theta + \bar{A} \sin \omega t \quad (5.5)$$

Portanto, a velocidade do pêndulo é obtida a partir da derivada das componentes do movimento nas direções horizontal e vertical:

$$\dot{x}_p = \dot{x}_c + l \dot{\theta} \cos \theta \quad (5.6)$$

$$\dot{y}_p = -l \dot{\theta} \sin \theta + \bar{A} \omega \cos \omega t \quad (5.7)$$

Substituindo (5.6) e (5.7) em (5.3), tem-se a energia cinética do pêndulo:

$$T_{p\acute{e}ndulo} = \frac{m_p}{2} ((\dot{x}_c + l \dot{\theta} \cos \theta)^2 + (-l \dot{\theta} \sin \theta + \bar{A} \omega \cos \omega t)^2) + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 \quad (5.8)$$

5.3.5 Energia cinética do motor

A energia cinética relativa ao motor é dada pela expressão:

$$T_{motor} = \frac{1}{2} J \dot{\phi}^2 \quad (5.9)$$

onde J e $\dot{\phi}$ são o momento de inércia e a velocidade angular do motor.

Finalmente, substituindo-se as energias cinéticas obtidas nas equações (5.2), (5.8) e (5.9) em (5.1), obtém-se a energia cinética total do sistema.

$$T = \frac{m_c + m_p}{2} \dot{x}_c^2 + \frac{m_p \ell^2 \dot{\theta}^2}{2} + m_p \ell \dot{\theta} (\dot{x}_c \cos \theta - (\bar{A} \omega \cos \omega t) \sin \theta) + \frac{m_p}{2} \bar{A}^2 \omega^2 \cos^2 \omega t + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\phi}^2 \quad (5.10)$$

5.3.6 Energia Potencial Total

A energia potencial total do sistema é dada pela soma de todas as energias potenciais que atuam no sistema, isto é, a energia potencial do pêndulo, da mola do suporte e da mola torcional.

Desta forma, pode-se escrever a energia potencial total, como:

$$V = V_{p\acute{e}ndulo} + V_{mola-sup\ or\ te} + V_{mola-torcional} \quad (5.11)$$

Cada uma das componentes que formam a energia potencial total do sistema será calculada separadamente.

5.3.7 Energia potencial do pêndulo

No pêndulo, a energia potencial é dada por:

$$V_{p\acute{e}ndulo} = m_p g (\ell \cos \theta + \bar{A} \sin \omega t) \quad (5.12)$$

onde m_p é a massa do pêndulo, g é a aceleração da gravidade, ℓ é a distância entre o suporte e o centro de massa, θ deslocamento angular do pêndulo, \bar{A} e ω indicam a amplitude e frequência de excitação do suporte do pêndulo.

5.3.8 Energia potencial da mola-suporte

Para o suporte de acoplamento, a energia potencial é a da mola linear, devendo-se levar em consideração os movimentos relativos entre o suporte do acoplamento e o carro.

Desta forma, tem-se:

$$V_{mola-suporte} = \frac{1}{2}k(x_s - x_c)^2 \quad (5.13)$$

onde k é a constante de elasticidade da mola, x_c e x_s representam os deslocamentos do carro e do suporte, respectivamente.

5.3.9 Energia potencial da mola-torcional

Para a mola com rigidez torcional, tem-se a energia potencial:

$$V_{mola-torcional} = \frac{1}{2}\bar{K}\theta^2 \quad (5.14)$$

onde \bar{K} é a constante da mola torcional.

Finalmente, substituindo-se as energias potenciais obtidas nas equações (5.12), (5.13) e (5.14) na equação (5.11), obtém-se a energia potencial total do sistema, como:

$$V = m_p g(\ell \cos\theta + \bar{A} \sin\omega t) + \frac{1}{2}k(x_s - x_c)^2 + \frac{1}{2}\bar{K}\theta^2 \quad (5.15)$$

5.3.10 As Equações de Euler-Lagrange

O Lagrangeano de um sistema é calculado pela diferença entre a energia cinética e a energia potencial do sistema, isto é, $L = T - V$.

Assim, para o sistema representado na Figura (5.1), o Lagrangeano é obtido pela diferença entre as equações (5.10) e (5.15), isto é:

$$\begin{aligned}
L = & \frac{m_c + m_p}{2} \dot{x}_c^2 + \frac{m_p \ell^2 \dot{\theta}^2}{2} + m_p \ell \dot{\theta} (\dot{x}_c \cos \theta - (\bar{A} \omega \cos \omega t) \sin \theta) + \\
& + \frac{m_p}{2} \bar{A}^2 \omega^2 \cos^2 \omega t + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\phi}^2 - \\
& - m_p g (\ell \cos \theta + \bar{A} \sin \omega t) - \frac{1}{2} k (x_s - x_c)^2 - \frac{1}{2} \bar{K} \theta^2
\end{aligned} \tag{5.16}$$

As equações de Euler-Lagrange, para coordenadas generalizadas (θ, x_c) , são dadas pela equação:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = Q, \tag{5.17}$$

onde q e Q têm como coordenadas (θ, x_c) que indicam, respectivamente, o deslocamento angular do pêndulo e o deslocamento relativo do carro (x_c).

5.3.11 Equação de Euler-Lagrange para o Pêndulo

A equação de Euler-Lagrange com relação ao pêndulo ($Q_\theta = 0$), isto é, com relação à coordenada θ , é dada pela equação:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \tag{5.18}$$

Assim,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m_p \ell^2 \dot{\theta} + m_p \ell (\dot{x}_c \cos \theta - (\bar{A} \omega \cos \omega t) \sin \theta) + I \dot{\theta} \tag{5.19}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = & m_p \ell^2 \ddot{\theta} + m_p \ell (\ddot{x}_c \cos \theta - \dot{x}_c \dot{\theta} \sin \theta + (\bar{A} \omega^2 \sin \omega t) \sin \theta \\
& - (\bar{A} \omega \cos \omega t) \dot{\theta} \cos \theta) + I \ddot{\theta}
\end{aligned} \tag{5.20}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = m_p \ell (g \sin \theta - \dot{\theta} ((\bar{A} \omega \cos \omega t) \cos \theta + \dot{x}_c \sin \theta)) - \bar{K} \theta \tag{5.21}$$

Substituindo-se (5.20) e (5.21) em (5.18):

$$(I + m_p \ell^2) \ddot{\theta} + m_p \ell (\ddot{x}_c \cos \theta - \dot{x}_c \dot{\theta} \sin \theta + (\bar{A} \omega^2 \sin \omega t) \sin \theta - (\bar{A} \omega \cos \omega t) \dot{\theta} \cos \theta - g \sin \theta + (\bar{A} \omega \cos \omega t) \dot{\theta} \cos \theta + \dot{x}_c \dot{\theta} \sin \theta) + \bar{K} \theta = 0 \quad (5.22)$$

ou seja,

$$(I + m_p \ell^2) \ddot{\theta} + m_p \ell \cos \theta \ddot{x}_c + \bar{K} \theta + m_p \ell (\bar{A} \omega^2 \sin \omega t - g) \sin \theta = 0 \quad (5.23)$$

5.3.12 Equação de Euler-Lagrange para o Carro

A equação de Lagrange com relação ao carro, isto é, com relação à coordenada x_c , é dada pela equação:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_c} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_c} = Q_{x_c} \quad (5.24)$$

onde Q_{x_c} é a força externa generalizada definida como: $Q_{x_c} = -c(\dot{x}_s - \dot{x}_c) - F_{atrito}$.

Assim,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_c} = (m_c + m_p) \dot{x}_c + m_p \ell \dot{\theta} \cos \theta \quad (5.25)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_c} \right) = (m_c + m_p) \ddot{x}_c + m_p \ell \ddot{\theta} \cos \theta - m_p \ell \dot{\theta}^2 \sin \theta \quad (5.26)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_c} = k(x_s - x_c) \quad (5.27)$$

Substituindo (5.26) e (5.27) em (5.24):

$$(m_c + m_p) \ddot{x}_c + m_p \ell \ddot{\theta} \cos \theta - m_p \ell \dot{\theta}^2 \sin \theta - k(x_s - x_c) = -c(\dot{x}_s - \dot{x}_c) - F_{atrito} \quad (5.28)$$

5.3.13 Equações de Euler-Lagrange para o motor

Agora será considerada a ação do motor sobre o sistema carro-pêndulo. O motor age sobre o suporte de acoplamento impondo-lhe um deslocamento x_s .

Portanto, a equação de Lagrange em relação ao motor é dada pela equação:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_s} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_s} = T(\dot{\phi}, t) \quad (5.29)$$

com $T(\dot{\phi}, t) = a - b\dot{\phi} - c(\dot{x}_s - \dot{x}_c)$, onde os parâmetros a e b estão relacionados ao motor de cc:

$$\begin{aligned} a &= \frac{k_m V_a}{R_a} \\ e \\ b &= \frac{k_m k_b}{R_a}, \end{aligned} \quad (5.30)$$

onde:

R_a é a resistência elétrica do motor;

k_b é a constante da tensão elétrica do motor;

V_a a tensão de entrada aplicada na armadura do motor;

k_m é a constante de torque do motor.

A variável x_s do deslocamento do suporte de acoplamento está vinculada às variáveis do motor pelas relações:

$$\begin{cases} x_s = \phi r \\ \dot{x}_s = \dot{\phi} r \\ \ddot{x}_s = \ddot{\phi} r \end{cases} \quad (5.31)$$

onde ϕ e r representam o deslocamento angular do motor e o raio da massa desbalanceada.

Desta forma, considerando-se x_s como dada na equação (5.31), pode-se reescrever (5.29) como:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = T(\dot{\phi}, t) \quad (5.32)$$

com $T(\dot{\phi}, t) = a - (b + c)r\dot{\phi} + c\dot{x}_c$.

Assim, a partir do Lagrangeano (equação (5.16)), tem-se:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = J\dot{\phi} \quad (5.33)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) = J\ddot{\phi} \quad (5.34)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = -kr(r\dot{\phi} - x_c) \quad (5.35)$$

Substituindo-se (5.34) e (5.35) em (5.32):

$$J\ddot{\phi} + kr^2\dot{\phi} - kr x_c = a - (b+c)r\dot{\phi} + c\dot{x}_c \quad (5.36)$$

ou

$$J\ddot{\phi} + (b+c)r\dot{\phi} + kr^2\dot{\phi} - kr x_c - c\dot{x}_c = a \quad (5.37)$$

Desta forma, as equações do movimento para o sistema carro-pêndulo-motor (Figura 1), desprezando-se a força de atrito e o momento de inércia do pêndulo, isto é, $F_{\text{atrito}} = 0$ e $I = 0$, são dadas pelo sistema de equações (5.23), (5.28) e (5.37):

$$\left\{ \begin{array}{l} m_p \ell^2 \ddot{\theta} + m_p \ell \cos \theta \ddot{x}_c + \bar{K} \theta + m_p \ell (\bar{A} \omega^2 \sin \omega t - g) \sin \theta = 0 \\ (m_c + m_p) \ddot{x}_c + m_p \ell \ddot{\theta} \cos \theta - m_p \ell \dot{\theta}^2 \sin \theta - k(\dot{\phi} r - x_c) = -c(\dot{\phi} r - \dot{x}_c) \\ J\ddot{\phi} + (b+c)r\dot{\phi} + kr^2\dot{\phi} - kr x_c - c\dot{x}_c = a \end{array} \right. \quad (5.38)$$

É importante notar na equação (5.38) a presença de quatro movimentos harmônicos distintos:

- O primeiro está relacionado com a frequência periódica de oscilação do suporte do pêndulo ($\omega_p = \omega$).

- O segundo é a frequência natural do subsistema pêndulo-mola-torcional

$$(\omega_0 = \sqrt{\frac{\bar{K}}{m_p \ell^2} - \frac{g}{\ell}}).$$

- No terceiro, tem-se a frequência natural relacionada com a elasticidade do acoplamento do subsistema carro-mola-amortecedor ($\omega_c = \sqrt{\frac{kr}{m_c + m_p}}$).

- Finalmente, tem-se a frequência natural do motor ($\omega_m = \sqrt{\frac{kr^2}{J}}$).

Devido às diferentes grandezas existentes no modelo do sistema (5.38), é conveniente torná-lo adimensional, isto é, a equação (5.38) deverá ser reescrita em novas variáveis de tempo e deslocamento (adimensional) τ e x .

Para isso, deve-se tomar a nova variável de tempo τ proporcional a t , cuja razão de proporção é a frequência natural ω_0 do pêndulo, ou seja, $\tau = \omega_0 t$ e tomar como ℓ referência para o deslocamento de modo que: $x = \frac{x_c}{\ell}$.

Denotando a primeira e a segunda derivada de uma função y , em relação à variável

τ , por $y' = \frac{dy}{d\tau}$ e $y'' = \frac{d^2y}{d\tau^2}$, tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_p \ell^2 \omega_0^2 \theta'' + m_p \omega_0^2 \ell^2 \cos \theta x'' + \bar{K} \theta + m_p \ell \left[\bar{A} \omega^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\omega \tau}{\omega_0}\right) - g \right] \operatorname{sen} \theta = 0 \\ (m_c + m_p) \omega_0^2 \ell x'' + m_p \omega_0^2 \ell^2 \cos \theta \theta'' - m_p \omega_0^2 \ell^2 \theta'^2 \operatorname{sen} \theta + k \ell x - c \ell \omega_0 x' = k \phi r - c \omega_0 \phi' r \\ J \omega_0^2 \phi'' + (b + c) r \omega_0 \phi' + k r^2 \phi - k r \ell x - c \ell \omega_0 x' = a \end{array} \right. \quad (5.39)$$

Dividindo-se as equações do sistema pelos respectivos coeficientes dos termos de segunda ordem, obtém-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta'' + \cos \theta x'' + \frac{\bar{K}}{\omega_0^2 m_p \ell^2} \theta + \left(\frac{\bar{A} \omega^2}{\omega_0^2 \ell} \operatorname{sen} \left(\frac{\omega \tau}{\omega_0} \right) - \frac{g}{\omega_0^2 \ell} \right) \operatorname{sen} \theta = 0 \\ x_c'' + \frac{m_p \ell \cos \theta \theta''}{(m_c + m_p) \ell} - \frac{m_p \ell \operatorname{sen} \theta \theta'^2}{(m_c + m_p) \ell} + \frac{k \ell x}{(m_c + m_p) \ell \omega_0^2} - \frac{c \ell x'}{(m_c + m_p) \ell \omega_0} = \\ \frac{k \phi r}{(m_c + m_p) \ell \omega_0^2} - \frac{c \phi' r}{(m_c + m_p) \ell \omega_0} \\ \phi'' + \frac{(b+c)r}{J \omega_0} \phi' + \frac{k r^2}{J \omega_0^2} \phi - \frac{k r \ell}{J \omega_0^2} x - \frac{c \ell}{J \omega_0} x' = \frac{a}{J \omega_0^2} \end{array} \right. \quad (5.40)$$

simplificando-se os termos semelhantes e considerando as novas variáveis:

$$n = \frac{m_c}{m_p}, \quad \lambda = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \alpha = \frac{\omega_c}{\omega_0}, \quad \xi = \frac{\omega_m}{\omega_0}, \quad \varepsilon = \frac{r}{\ell}, \quad \Delta = \frac{\bar{A}}{\ell} \lambda^2, \quad \eta = \frac{c}{(n+1)m_p \omega_0}, \quad (5.41)$$

$$c_2 = \eta \varepsilon, \quad c_1 = \frac{c_2}{c \omega_0}, \quad \zeta = \frac{(b+c)r}{J \omega_0}, \quad \sigma = \frac{k r \ell}{J \omega_0^2}, \quad \gamma = \frac{c \ell}{J \omega_0}, \quad c_3 = \frac{a}{J \omega_0^2}$$

tem-se o sistema adimensionalizado:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta'' + \cos \theta x'' + \frac{\bar{K}}{\omega_0^2 m_p \ell^2} \theta + \left(\Delta \operatorname{sen}(\lambda \tau) - \frac{g}{\omega_0^2 \ell} \right) \operatorname{sen} \theta = 0 \\ x_c'' + \frac{\cos \theta}{n+1} \theta'' - \frac{\operatorname{sen} \theta}{n+1} \theta'^2 + \alpha^2 x - \eta x' - c_1 \phi + c_2 \phi' = 0 \\ \phi'' + \zeta \phi' + \xi^2 \phi - \sigma x - \gamma x' = c_3 \end{array} \right. \quad (5.42)$$

Observa-se, na equação (5.32), que $(x, \theta, \phi) = (0, 0, 0)$ é um ponto de equilíbrio do sistema, se $c_3 = 0$. Desta forma, aproximando-se na vizinhança do ponto de equilíbrio

$\sin\theta = \theta$ e $\cos\theta = 1$, tem-se as equações do modelo adimensional para o sistema carro-pêndulo-motor:

$$\begin{cases} \theta'' + x'' + (1 + \Delta \sin(\lambda \tau))\theta = 0 \\ x_c'' + \frac{1}{n+1}\theta'' - \frac{1}{n+1}\theta\theta'^2 + \alpha^2 x - \eta x' - c_1\phi + c_2\phi' = 0 \\ \phi'' + \zeta\phi' + \xi^2\phi - \sigma x - \gamma x' = c_3 \end{cases} \quad (5.43)$$

O sistema (5.43) controlado pode ser escrito como:

$$\begin{cases} \theta'' + x'' + (1 + \Delta \sin(\lambda \tau))\theta = u_1 \\ x_c'' + \frac{1}{n+1}\theta'' - \frac{1}{n+1}\theta\theta'^2 + \alpha^2 x - \eta x' - c_1\phi + c_2\phi' = u_2 \\ \phi'' + \zeta\phi' + \xi^2\phi - \sigma x - \gamma x' = c_3 \end{cases} \quad (5.44)$$

Para estudar as equações do modelo do sistema carro-pêndulo-motor, o problema será dividido em dois casos: para o motor ideal e para o motor não-ideal. Primeiramente, será discutido o problema ideal e, em seguida, será analisado o problema não-ideal.

5.4 Caso ideal

Considerando-se o problema como ideal, tem-se que a fonte de excitação (motor) considerada é constante ou é função do tempo. Se a fonte de excitação é constante na equação (5.43), $\phi'' = 0$, pode-se escrever:

$$\begin{cases} x'' = \frac{1}{n}[(1 + \Delta \sin(\lambda \tau))\theta] + \frac{n+1}{n}(-\alpha^2 x + \eta x') \\ \quad + \frac{n+1}{n}[c_1\phi - c_2\phi'] + \frac{1}{n}\theta\theta'^2 - \frac{u_1}{n} + \frac{(n+1)u_2}{n} \\ \theta'' = \frac{n+1}{n}[-(1 + \Delta \sin(\lambda \tau))\theta + \alpha^2 x - \eta x' - c_1\phi + c_2\phi'] - \frac{1}{n}\theta\theta'^2 + \frac{(n+1)}{n}(u_1 - u_2) \end{cases} \quad (5.45)$$

Reescrevendo-se o sistema na forma espaço-estado para (x, θ) , através das transformações $x = x_1$; $x' = x_2$; $\theta = x_3$ e $\theta' = x_4$, obtém-se:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(n+1)\alpha^2}{n} & \frac{(n+1)\eta}{n} & \frac{1}{n}(1 + \Delta \text{sen}(\lambda \tau)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{(n+1)\alpha^2}{n} & -\frac{(n+1)\eta}{n} & -\frac{n+1}{n}(1 + \Delta \text{sen}(\lambda \tau)) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\theta\theta'^2}{n} \\ 0 \\ -\frac{\theta\theta'^2}{n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{n} & \frac{n+1}{n} \\ 0 & 0 \\ \frac{n+1}{n} & -\frac{n+1}{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (5.46)$$

5.5 Caso não-ideal

Considerando-se o problema como não-ideal, a dinâmica do sistema (5.43) é influenciada pela resposta do próprio sistema e esta dinâmica dependerá das propriedades de uma fonte de energia cuja potência é limitada.

Portanto,

$$\begin{cases} x'' = \frac{1}{n}[(1 + \Delta \text{sen}(\lambda \tau))\theta] + \frac{n+1}{n}(-\alpha^2 x + \eta x') + \frac{n+1}{n}[c_1 \phi r - c_2 \phi' r] \\ \quad + \frac{1}{n}\theta\theta'^2 - \frac{u_1}{n} + \frac{(n+1)u_2}{n} \\ \theta'' = \frac{n+1}{n}[-(1 + \Delta \text{sen}(\lambda \tau))\theta + \alpha^2 x - \eta x' - c_1 \phi + c_2 \phi'] - \frac{1}{n}\theta\theta'^2 \\ \quad + \frac{(n+1)}{n}(u_1 - u_2) \\ \phi'' = -\zeta\phi' - \xi^2\phi + \sigma x + \gamma x' + c_3 \end{cases} \quad (5.47)$$

Reescrevendo-se o sistema na forma espaço-estado, através das transformações $x = x_1$; $x' = x_2$; $\theta = x_3$, $\theta' = x_4$, $\phi = x_5$ e $\phi' = x_6$ e tomando-se a parte linear, obtém-se:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{(n+1)\alpha^2}{n} & \frac{(n+1)\eta}{n} & \frac{1}{n}(1+\Delta sen\lambda\tau) & 0 & \frac{(n+1)c_1}{n} & -\frac{(n+1)c_2}{n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(n+1)\alpha^2}{n} & -\frac{(n+1)\eta}{n} & -\frac{(n+1)}{n}(1+\Delta sen\lambda\tau) & 0 & -\frac{(n+1)c_1}{n} & \frac{(n+1)c_2}{n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \sigma & \gamma & 0 & 0 & -\xi^2 & -\zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\theta\theta'^2}{n} \\ 0 \\ -\frac{\theta\theta'^2}{n} \\ 0 \\ c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{n+1} & \frac{n}{n+1} \\ \frac{n}{n+1} & -\frac{n}{n+1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (5.48)$$

A seguir, serão considerados os casos Ideal e não-ideal, cujas equações são (5.46) e (5.48), respectivamente.

5.6 O Estudo da Dinâmica do Sistema

A influência do motor sobre o subsistema carro-pêndulo, isto é, do problema monotrilho não-ideal (leva-se em conta a interação do motor (fonte de energia limitada) com o sistema físico estrutural), pode ser observada através dos diagramas de estabilidade. Como referência, será usado o diagrama de estabilidade para o caso ideal (Figura 5.3), onde o conjunto de parâmetros usado nas simulações é:

$$\lambda = \pi; \alpha = 1; \eta = 0.1; \xi = 1.41; \sigma = 1;$$

$$\gamma = 1; c_1 = 1; c_2 = 0.01; c_3 = 0.01.$$

Foram escolhidos os parâmetros relacionados com a constante de torque do motor, $\zeta = 4.0$ e $\zeta = 6.0$ de modo a obter-se três conjuntos para a análise da interação entre o motor sobre o sistema. Os demais parâmetros serão variados, tais que: $0 < n < 4$, $0.2 < \Delta < 2$

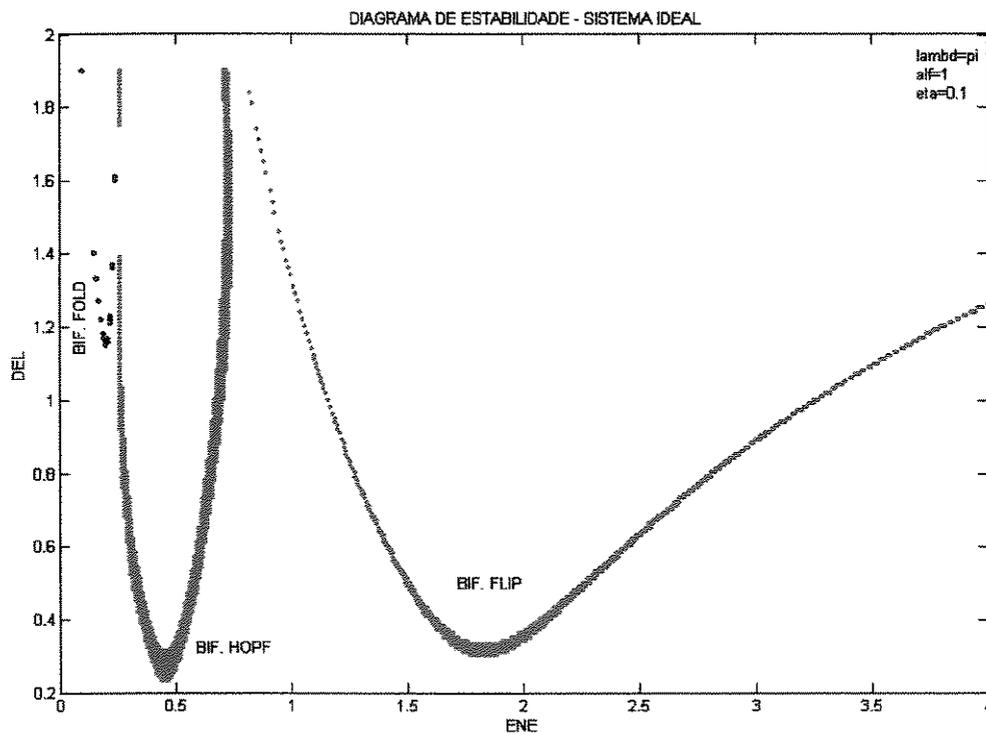


Figura 5.3 - Diagrama de estabilidade para o sistema ideal.

Aplicando-se a mesma tensão no motor, nos três casos, tem-se os seguintes diagramas de estabilidade:

Para $\zeta = 6.0$, vemos que a influência do motor sobre o sistema é pequena, e os diagramas de estabilidade para os casos ideal e não-ideal são praticamente os mesmos.

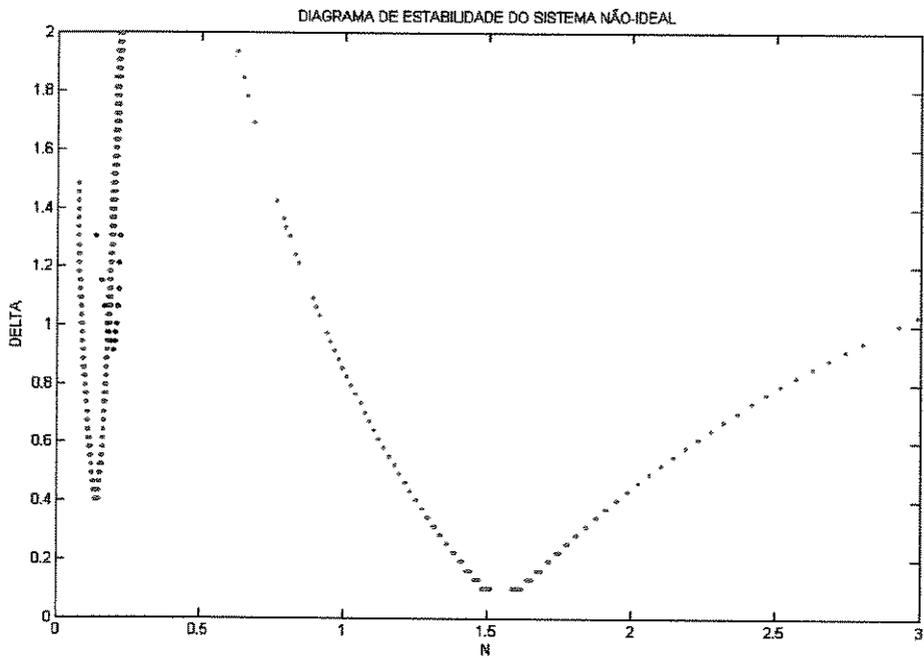


Figura 5.4 - Diagrama de estabilidade para $\zeta = 6.0$.

Diminuindo-se a constante de torque do motor para $\zeta = 4.0$, obtém-se o diagrama de estabilidade que se segue:

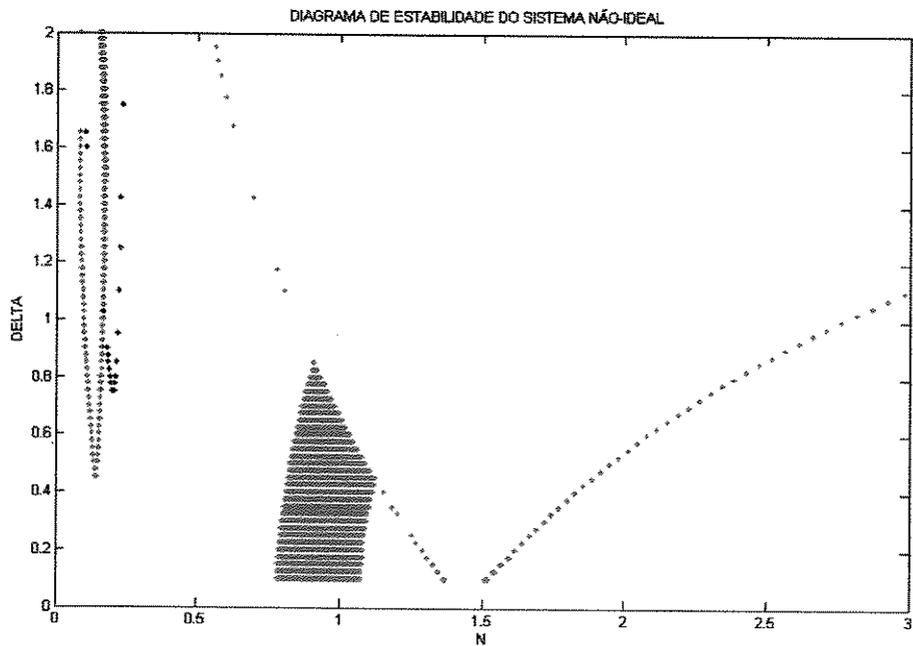


Figura 5.5 - Diagrama de estabilidade para $\zeta = 4.0$.

Para $\zeta = 0.1$, a interação entre o motor e o subsistema carro-pêndulo pode ser notada através da completa mudança no diagrama de estabilidade.

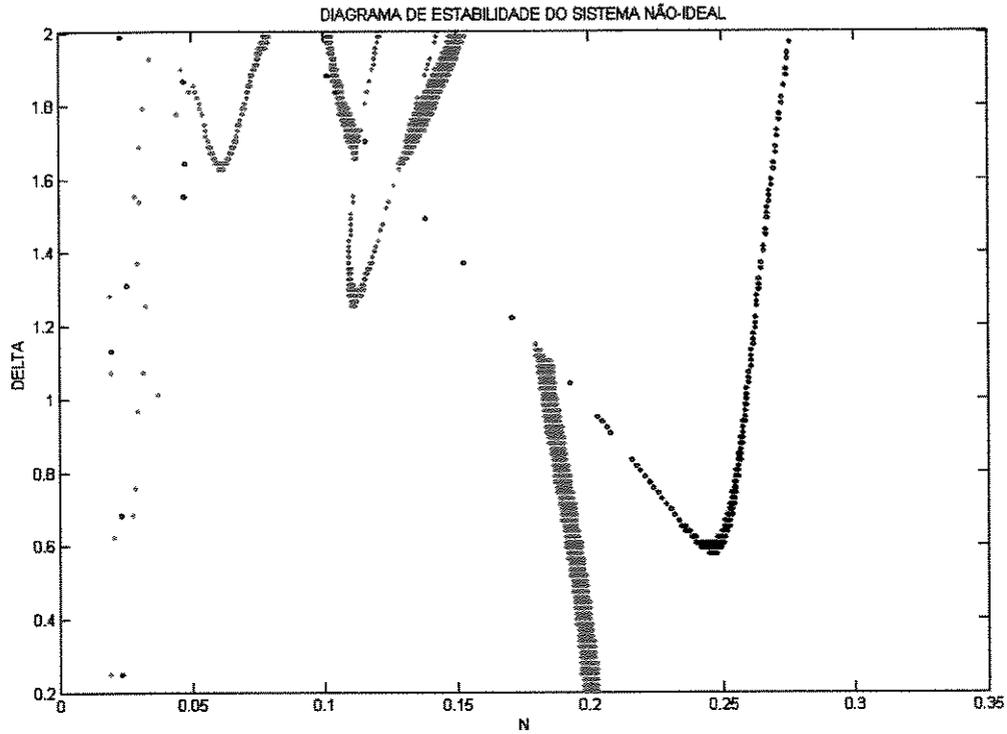


Figura 5.6 - Diagrama de estabilidade para $\zeta = 0.1$.

Comparando-se as figuras acima, verifica-se que a influência do motor é maior quando a constante de torque diminui e que para a $\zeta = 6.0$, a dinâmica do sistema não-ideal é próxima à dinâmica do sistema ideal.

O sistema não-ideal tem sua estabilidade estrutural alterada quando a constante de torque é diminuída de 2.5 para 1.8 – passa de estável para instável. O diagrama de estabilidade que se segue, foi obtido para $\Delta = 0.33$ e variando-se ζ e n , mostra-se a mudança da estabilidade.

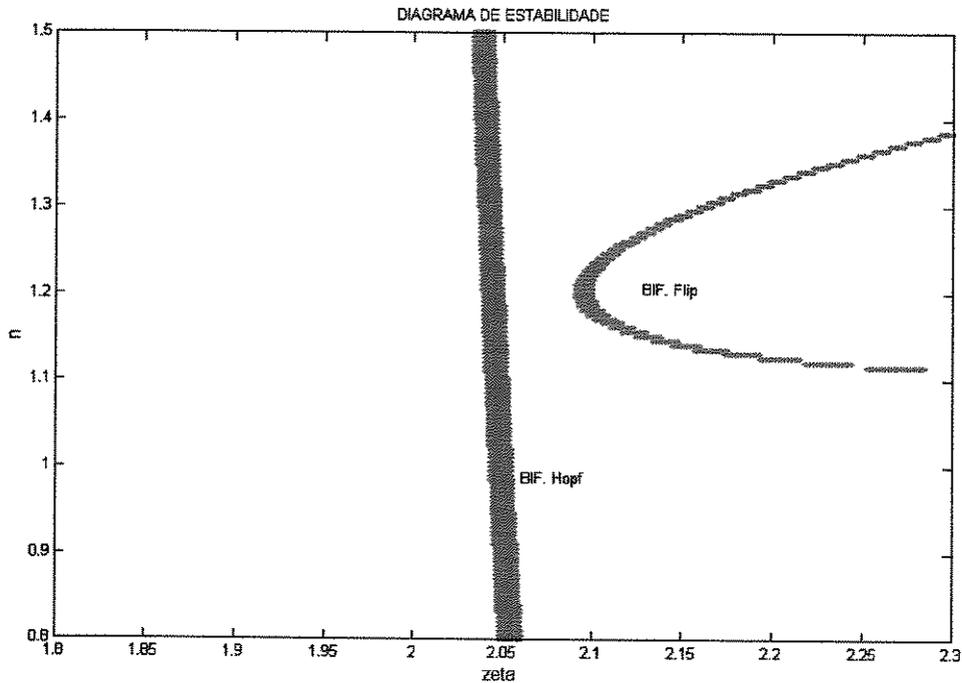


Figura 5.7 - Diagrama de estabilidade para $\Delta = 0.33$.

Para $\zeta = 2.5$, encontra-se os multiplicadores de Floquet:

$$\mu_{1,2} = 0.3231 \pm 0.8959i ;$$

$$\mu_{3,4} = -0.8550 \pm 0.1276i ;$$

$$\mu_{5,6} = -0.0161 \pm 0.1207i .$$

Neles, os módulos são todos menores que 1, indicando, assim, a estabilidade do sistema.

Para $\zeta = 1.8$, encontra-se os multiplicadores de Floquet:

$$\mu_{1,2} = 0.4187 \pm 0.9429i ;$$

$$\mu_{3,4} = -0.2524 \pm 0.1308i ;$$

$$\mu_5 = -0.8851 \text{ e } \mu_6 = -0.5352 .$$

O par de autovalores $|\mu_{1,2}| > 1$ indica que o sistema é instável. Veja as figuras (5.8, 5.9 e 5.10).

Além disso, o fato de existir multiplicadores de Floquet no lado direito do plano complexo, indica que a matriz de transformação de L-F, $Q(t)$ é π -periódica e real (Sinha, 2000(c)).

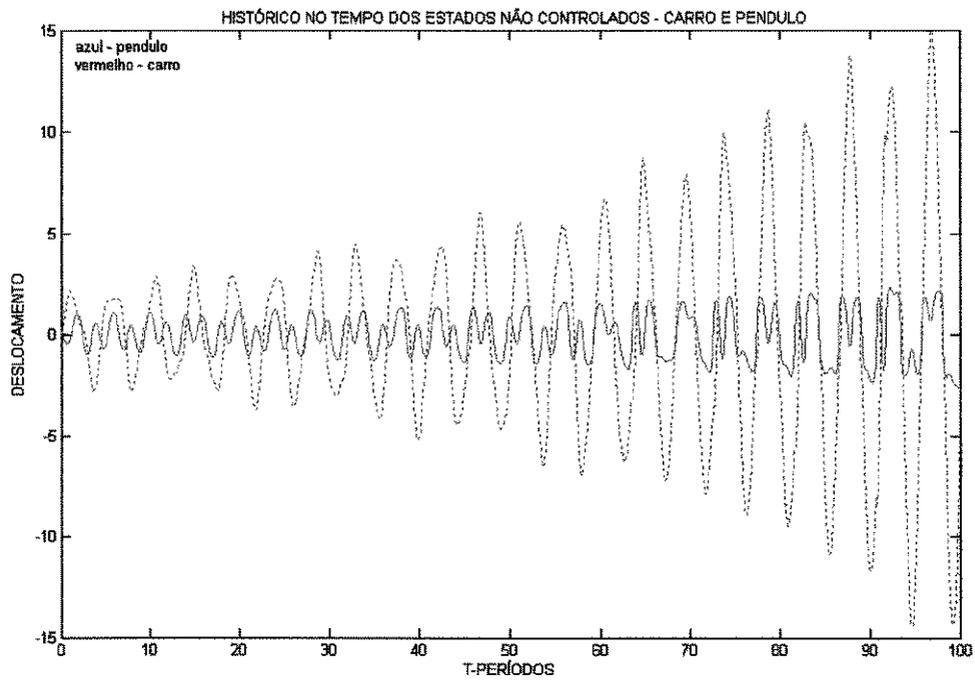


Figura 5.8 - Histórico no tempo do sistema não-controlado.

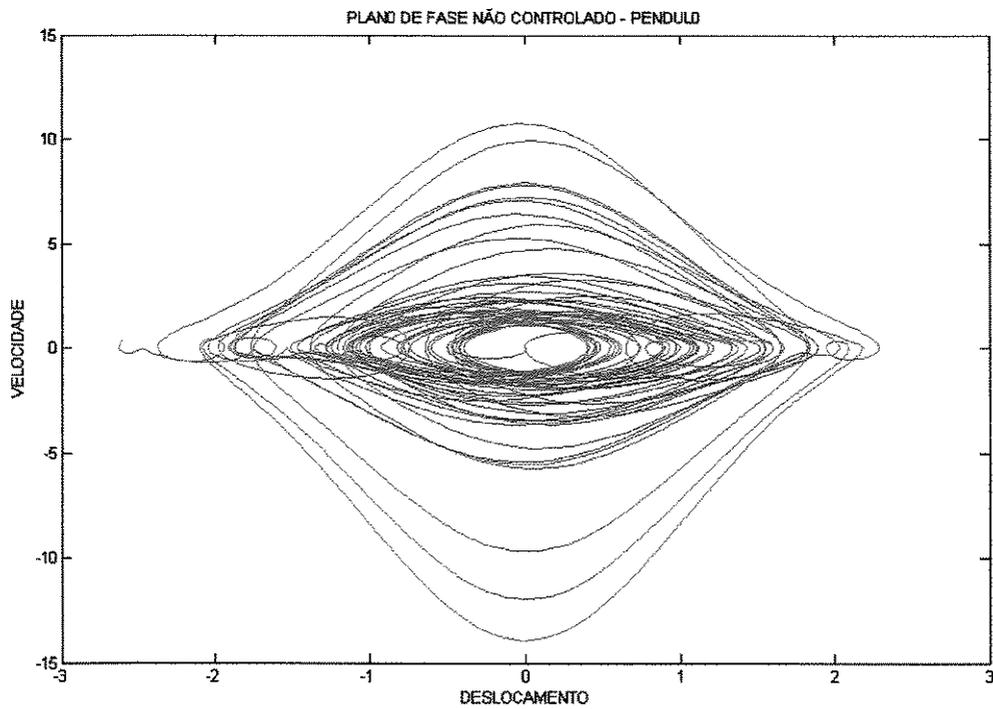


Figura 5.9 - Plano de fase do pêndulo não-controlado.

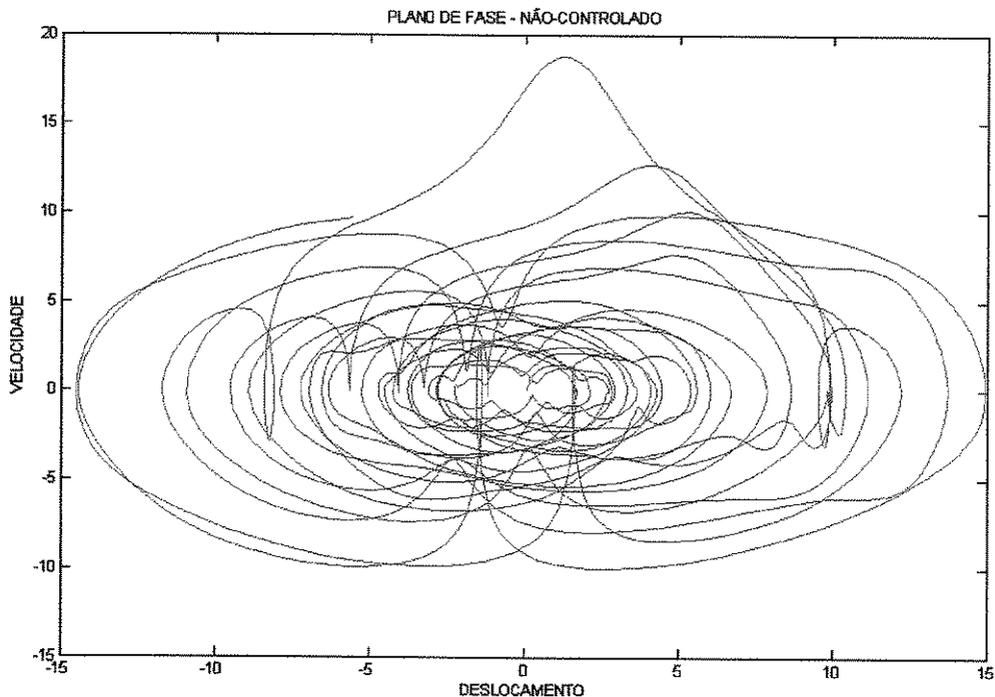


Figura 5.10 - Plano de fase do carro não-controlado.

5.7 O Controle

Uma lei de controle linear apresentada no capítulo 3, (Sinha, 2000(a) e Pandiyan, 2001), pode ser projetada para estabilizar o sistema.

O controlador pode ser obtido a partir da aplicação da mudança de variável do sistema dada pela transformação L-F, $x = Q(t)y$, onde a matriz de transformação L-F: $Q(t)$, pode ser obtida pela fatoração da matriz de transição de estados (STM), a qual pode ser obtida através do método do capítulo 2 e 3 (Sinha, 1991 e 1997).

Essa transformação converte o sistema original, cuja parte linear é variante no tempo, num sistema dinamicamente equivalente, cuja matriz da parte linear é invariante no tempo.

Aplicando-se a transformação L-F ao sistema (5.48) com $\zeta = 1.8$, obtém-se a forma invariante no tempo:

$$\dot{y} = Ry + Q^{-1}(t)f(y,t) + Q^{-1}(t)B(t)u \quad (5.49)$$

onde

$$R = \begin{bmatrix} 0.0374 & 0.8992 & -0.1379 & 0.4469 & 0.0649 & -0.2143 \\ -1.0117 & -0.2050 & -0.0364 & -0.0675 & 1.1370 & 0.3731 \\ -0.6654 & 0.1352 & 0.0865 & 0.1296 & 1.0277 & 0.5834 \\ 0.3992 & 0.0955 & -0.0771 & 0.0025 & -0.8368 & 0.1237 \\ 0.6676 & 0.5397 & -0.1187 & 0.3953 & -1.0263 & -0.3016 \\ -0.5213 & 0.3553 & -0.2421 & -0.0945 & 0.8375 & -0.4952 \end{bmatrix}$$

$$f(y,t) = \begin{bmatrix} 0 & y_3 y_4^2 & 0 & -y_3 y_4^2 & 0 & c_3 \end{bmatrix}^t,$$

$$B(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^t.$$

Os autovalores da matriz R são:

$$\beta_{1,2} = 0.0156 \pm 0.5765i;$$

$$\beta_{3,4} = -0.6288 \pm 0.2391i;$$

$$\beta_5 = -0.0610; \beta_6 = -0.3126$$

A presença do par de autovalores no lado direito do plano complexo indica, mais uma vez, que o sistema não-controlado é instável para o conjunto de parâmetros.

Seguindo-se os procedimentos propostos por (Sinha, 1994, 2000 e 2001), pode-se projetar um controlador linear usando-se a técnica de deslocamento de pólos.

Escolhendo-se como novos pólos:

$$-0.5186 \pm 0.429i;$$

$$-0.2524 \pm 0.1308i;$$

$$-0.88 \text{ e } -0.5352.$$

A matriz de ganhos invariante no tempo obtida a partir do deslocamento dos pólos é dada por:

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} -0.4890 & 0.1784 & 0.2314 & 0.2405 & 0.41 & 0.3220 \\ 0.1261 & -0.9350 & 0.2802 & -0.4021 & -0.0163 & 0.2748 \\ 0.2411 & 0.2840 & -0.2563 & 0.0237 & -0.2396 & -0.3085 \\ 0.7602 & 0.6073 & -0.6981 & -0.0354 & -0.7264 & -0.8568 \\ -0.2840 & 0.1081 & 0.1327 & 0.1414 & 0.2377 & 0.1853 \\ 0.0786 & -0.4577 & 0.1268 & -0.2027 & -0.0227 & 0.1209 \end{bmatrix}$$

Aplicando-se a lei de controle:

$$u_L = -F(x)y,$$

onde $F(t) = B^\#(t)Q(t)\bar{K}Q^{-1}(t)$ e $B^\# = (B^t B)^{-1} B^t$, na equação (5.48), o sistema é controlado e o histórico no tempo dos estados é mostrado pela Figura 5.11. Os respectivos planos de fase para o pêndulo e para o carro são mostrados nas Figuras 5.12 e 5.13.

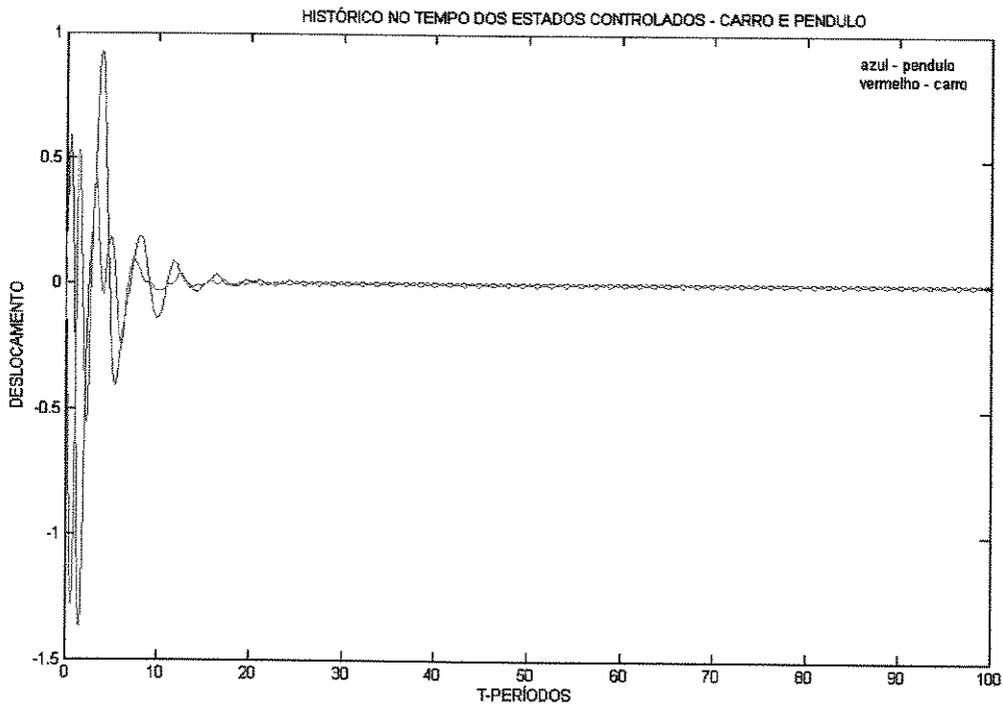


Figura 5.11 - Histórico no tempo do sistema controlado.

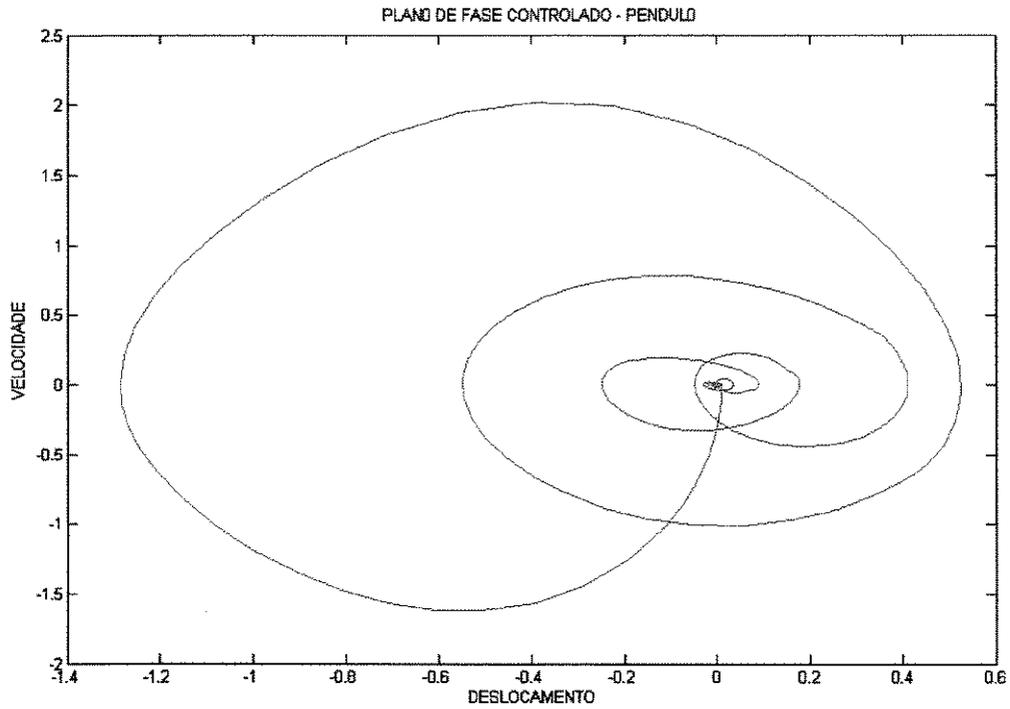


Figura 5.12 - Plano de fase do pêndulo controlado.

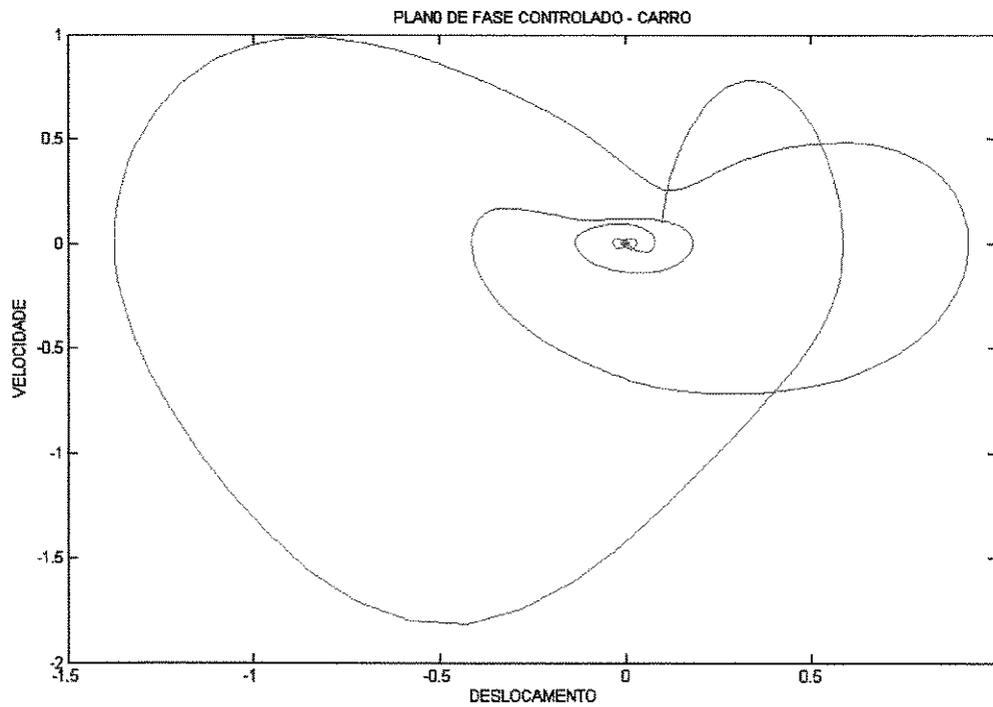


Figura 5.13 - Plano de fase do carro controlado.

Capítulo 6

Conclusões e Sugestões para Futuros Trabalhos

6.1 Conclusões

Este trabalho tratou de sistemas dinâmicos, cujos modelos matemáticos, são descritos por equações diferenciais ordinárias lineares com coeficientes periódicos ideais e não-ideais. Nesses sistemas aplicou-se uma nova e eficiente técnica numérica para aproximar a matriz de transição de estados (STM). A principal contribuição deste trabalho está na re-organização da técnica para a formulação em estado e na formalização do método de modo a descrevê-lo de forma didática.

Na aplicação da técnica, todos os coeficientes periódicos da parte linear dos sistemas em questão foram expandidos em polinômios ortogonais de Chebyshev alterados de primeiro tipo com grau 20 e usou-se o processo iterativo de Picard com 40 iterações.

Uma vez obtida a STM, foi possível determinar a estabilidade dos sistemas estudados através da análise dos multiplicadores de Floquet, isto é, dos autovalores da matriz de transição de estados do sistema periódico calculada, no final do período principal.

Além disso, com a aplicação da transformação de Lyapunov-Floquet (transformação L-F) obtida a partir da fatoração da STM, foi possível transformar os sistemas estudados, cuja natureza era variante no tempo, em sistemas invariantes no tempo dinamicamente equivalentes.

Assim, os sistemas transformados passaram a ter o seu domínio invariante no tempo e pôde-se usar, para o controle linear do sistema realimentado, a técnica tradicional de deslocamento de pólos nos sistemas.

Como exemplos de sistemas lineares com coeficientes periódicos não comutativos, ideais, foram discutidos: o pêndulo com excitação paramétrica, o oscilador de Duffing, o sistema de Rössler e o sistema pêndulo duplo invertido para verificar a eficiência do método apresentado.

A matriz de transição de estados para pêndulo com excitação paramétrica periódica, foi obtida a partir da aproximação da função co-seno pelos polinômios de Chebyshev. A dinâmica do sistema foi estudada a partir do diagrama de estabilidade e uma lei de controle foi projetada com sucesso e conduziu o sistema caótico para uma órbita periódica desejada.

Para o oscilador de Duffing, a STM foi obtida aproximando-se as funções $\text{sen}(2t)$ e $\text{cos}(2t)$ em polinômios de Chebyshev. Também, neste caso, foi projetada com sucesso uma lei de controle que conduziu o sistema caótico para uma órbita periódica desejada.

O Sistema de Rössler, que é de terceira ordem, foi controlado para uma órbita periódica, aplicando-se o deslocamento de pólos e a aproximação em polinômios de Chebyshev das funções $\text{sen}(t)$ e $\text{cos}(t)$.

Para o pêndulo duplo invertido e amortecido, que é de quarta ordem, a STM foi obtida através da aproximação da função co-seno em polinômios de Chebyshev. Neste problema, a dinâmica do sistema foi estudada a partir do diagrama de estabilidade, e a aplicação da lei de controle projetada conduziu o sistema para uma estabilidade assintótica.

Estes problemas ideais, que são comuns na literatura, serviram para verificar e comprovar a eficiência da aplicação da transformação L-F, obtida a partir da aproximação polinomial ortogonal da STM, e fornecer o suporte para aplicação em sistemas não-ideais de ordens superiores.

Finalmente, considerou-se o sistema monotrilho, cuja aplicação é de grande interesse no transporte de cargas (sistema carro-pêndulo-motor). As equações do movimento, que foram deduzidas através das equações de Euler-Lagrange, produziram um

sistema não-ideal e com coeficientes periódicos na parte linear, que escrito na forma espaço-estado, é um sistema de sexta ordem.

A matriz de transição de estados para o sistema monotrilho foi obtida a partir da aproximação da função seno pelos polinômios de Chebyshev. Desta forma, pôde-se estudar a dinâmica do sistema não-ideal a partir da análise do diagrama de estabilidade para um determinado conjunto de parâmetros.

De fato, a influência do motor sobre a dinâmica do subsistema carro-pêndulo, isto é, do problema não-ideal, pôde ser observada variando-se a constante de torque do motor e construindo-se os respectivos diagramas de estabilidade. Como referência para análise da influência do motor sobre a dinâmica do subsistema carro-pêndulo, foi construído o diagrama de estabilidade para o caso ideal.

Observa-se nos diversos diagramas de estabilidade construídos, que à medida que se aumenta a constante de torque do motor, os diagramas de estabilidade do sistema não-ideal aproximam-se do diagrama de estabilidade do caso ideal e vice-versa, isto é, a interação da dinâmica do motor com o subsistema carro-pêndulo é maior quando os valores da constante de torque são menores.

O sistema monotrilho, quando operado sob certas condições dos parâmetros, apresentou movimento caótico. A lei de controle para o sistema monotrilho foi aplicada com sucesso ao sistema caótico, conduzindo os estados do mesmo para uma estabilidade assintótica.

A implementação computacional da técnica de aproximação, foi realizada no ambiente do MATLAB[®] 6.5 em um micro-computador Pentium[®] 4, 2.8. As operações elementares sobre matrizes garantiram a eficiência na programação e possibilitaram uma rápida execução dos programas. Por exemplo, os multiplicadores de Floquet da parte linear do sistema 5.48 foram obtidos em, aproximadamente, 0.6 segundos. O Controle do mesmo sistema foi executado em 8.4 segundos.

6.2 Sugestões para Futuros Trabalhos

A intenção é implementar e aplicar as técnicas aqui apresentadas em sistemas lineares com coeficientes periódicos não-ideais descontínuos. Para isso, a técnica deve ser

aplicada em conjunto com a teoria de Filippov. Um breve resumo desta teoria é apresentado no apêndice E.

Referências Bibliográficas

- Balthazar, J.M., Mook, D.T., Weber, H.I., Reyolando, M.L.R.F., Fenili, A., Belato, D., Fleix, J.L.P., *Recent results on vibrating problems with limited power supply*, In: sixth Conference on Dynamical Systems Theory and Applications. Lodz, Poland Edited By Awrejwicz J., Brabski J., Nowaskowski J., pp.27-50, December, 10-12, 2001.
- Balthazar, J.M., Mook, D.T., Weber, H.I., Reyolando, M.L.R.F., Fenili, A., Belato, D., Fleix, J.L.P., *An overview on non-ideal vibrations*. *Meccanica*, v.38, pp.613-621, 2003.
- Balthazar, J.M., Mook, D.T., Weber, H.I., Reyolando, M.L.R.F., Fenili, A., Belato, D., Fleix, J.L.P., Garzeri, F. J., *A review on new vibration issues due to non-ideal energy sources*. In: Dynamics systems and Control, edited by Udwadia, F.E., Weber, H.I., Leitman, G., Stability and Control: theory. Methods and Applications, v.22, Chapman&Hallick, pp.237-258, 2004.
- Barnett, S., *Multiplication of generalized polynomials with application to classical orthogonal polynomials*. *Journal on Algebraic and Discrete Methods*, v.5, pp.457-462, 1984.
- Bishop, S.R., Clifford, M.J. *Zones of Chaotic Behavior in the Parametric Excited Pendulum*. *Journal of Sound and Vibration*. v.189(1), pp.142-47, 1996.
- Bishop, S.R, Clifford, M.J. *Stabilizing the Parametric Excited Pendulum Onto High Order Periodic Orbits*. *Journal of Sound and Vibration*, v.194(2), pp.287-93, 1996.
- Chang, P.Y., Yang, S.Y., Wang, M.L., *Solution of linear dynamical systems by generalized orthogonal polynomial*, *Intenational Journal of Science*, v. 17, pp.1727-1740, 1986.

- Chen, C.-T., *Linear system theory and design*. Oxford, Oxford University Press, 3 ed., 1999.
- Chen, G., *On feedback control of chaotic continuous-time systems*. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, v. 40(9), pp.591-601, 1993.
- Dávid A., Sinha, S.C. *Bifurcation Control of Nonlinear Systems with Time-Periodic Coefficients*. Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control.
- Deshmukh, V.S., Sinha, S.C., *Control of Dynamic Systems with Time-Periodic Coefficients via the Lyapunov-Floquet Transformation and Backstepping Technique*. Journal of Vibration and Control, v.10, pp.1517-1533, 2003.
- Fox, L., Parker, I.B., *Chebyshev polynomials in numerical analysis*. Oxford, Oxford University Press, 1968.
- Khalil, H.K., *Nonlinear Systems*. New Jersey, Prentice Hall, 1996.
- Leech, J.W., *Mecânica Analítica*. Tradução Carlos Campos de Oliveira. Editora da Universidade de São Paulo. 156p. 1971.
- Leine, R.I. *Bifurcations in discontinuous mechanical systems of Filippov-type*. Tese de Doutorado. Technische Universiteit Eindhoven, Netherlands, 143p., 2000.
- Leine, R.I.; Van Campen, D.H.; De Kraker, A.; Van Den Steen, L. *Stick-slip vibrations induced by alternate friction models*. Nonlinear Dynamics, v. 16, 41-54. 1998.
- Leine, R.I.; Van Campen, D.H.; Van De Vrande, B.L. *Bifurcations in nonlinear discontinuous systems*. Nonlinear Dynamics, v. 23, 105-164, 2000.

- Lindtner, E., Steindl, A., Troger, H., *Generic One-Parameter Bifurcations in the motions of a simple robot*. In Continuation Techniques and Bifurcations Problems, Mittleman, H.D. and Roose, pp.199-218, 1990.
- Meirovitch, L. *Methods of Analytical Dynamics*. New York, McGraw-Hill Book Company, 1970.
- Nayfeh, A.H., *Introduction to Perturbation Methods*. John Wiley and Sons, 1981.
- Nayfeh, A.H., *Method of normal Forms*. John Wiley and Sons, 1993.
- Nayfeh, A. H., Balachandran, B., *Applied Nonlinear Dynamics*. John Wiley and Sons, 1994.
- Nayfeh, A. H., Mook, D. T., *Nonlinear Oscillations*. John Wiley and Sons, 1979.
- Pandiyani, R., Sinha, S.C., *Analysis of Time-Periodic Nonlinear Dynamical Systems Undergoing Bifurcations*. Nonlinear Dynamics, v.8, pp. 21-43, 1995.
- Pandiyani, R., Sinha, S.C. *Time-Varying Controller Synthesis for Nonlinear Systems Subject to Periodic Parametric Loadings*. Journal of Vibration and Control, v.7, pp. 73-90, 2001.
- Parker, T.S.; Chua, L.O., *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*, Berlin, Springer-Verlag, 1989.
- Peruzzi, N.J., Balthazar, J.M., Pontes, B. R., Control of a non-ideal system with periodic coefficients Proceedings of DETC'05: ASME 2005 Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference Long Beach, CA, USA, September 24 – 28, 2005. (submitted)

- Pontes, B.R., *Dinâmica e controle de sistemas não-lineares com interação auto-excitadora, sujeitos à fontes de energia do tipo ideal e não-ideal*. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo – Departamento de Engenharia Elétrica – São Carlos, SP, Brasil, 176p.,2003.
- Slotine, J.J.E., *Applied nonlinear control*. Prentice Hall. New Jersey, 461p., 1991.
- Sinha, S.C., Chou, C.C., *An approximate analysis of transient response of time-dependent linear systems by orthogonal polynomials*. Journal of Sound and Vibration, v.49, 309-326,1976.
- Sinha, S.C., Chou, C.C., Denman, H.H., *Stability analysis of systems with periodic coefficients*. Journal of Sound and Vibration, v.64, 515-527,1979.
- Sinha, S.C., Wu. Der-Ho, *An Efficient Computational Scheme for the Analysis of Periodic Systems*. Journal of Sound and Vibration, v.151(1), pp. 91-117, 1991.
- Sinha, S.C., Wu. Der-Ho., V. Juneja, P. Joseph, *Analysis of Dynamic Systems with Periodically Varying Parameters via Chebyshev Polynomials*. Journal of Vibration and Acoustics, v. 115, pp. 96-102, Jan. 1993.
- Sinha, S.C., P. Joseph, *Control of General Dynamic Systems with Periodically Varying Parameters Via Lyapunov-Floquet Transformation*. Journal of Dynamic, Measurement, and Control, v.116, pp.650-658, 1994.
- Sinha, S.C., R. Pandiyan *Analysis of Quasilinear Dynamical Systems with Coefficients via Lyapunov-Floquet Transformation*. Int. Journal Nonlinear Mechanics, v.29, No. 5, pp. 687-702, 1994.
- Sinha, S.C., R. Pandiyan, P.S. Bibb *Lyapunov-Floquet Transformation: Computations and Applications to Periodic Systems*. Journal of Vibration and Acoustics. V.118, pp. 209-219, 1996.

- Sinha, S.C., E.A. Butcher, *Symbolic Computation of Fundamental Solution Matrices for Linear Time-Periodic Dynamical Systems*. Journal of Sound and Vibration, v.206(1), pp.61-85, 1997.
- Sinha, S.C., Butcher, E.A., Dávid, A. *Construction of Dynamically Equivalent Time-Invariant Forms for Time-Periodic Systems*. Nonlinear Dynamics, v.16, pp. 203-221, 1998.
- Sinha, S.C., Henrichs and B. Ravindra, *A general approach in the design of active controllers for Nonlinear Systems Exhibiting Chaos*. Int. Journal of Bifurcation and Chaos, 10(1), v. 1, pp. 165-178, 2000(a).
- Sinha, S.C., *Control of Chaos in Nonlinear Systems with Time-Periodic Coefficients*. American Control Conference, pp. 764-768, June 2000(b).
- Sinha, S.C., *Versal Deformation and Local Bifurcation Analysis of Time-Periodic Nonlinear Systems*. Nonlinear Dynamics, v.21, pp. 317-336, 2000(c).
- Sinha, S.C., *A Strategy for Chaos Control of Nonlinear Nonautonomous Systems*. Int. Congress on Sound and Vibration, 8-11 junho, Orlando, FL., 2002.
- Sinha, S.C., et. al. *Order Reduction of Nonlinear Time Periodic Systems Using Invariant Manifolds*. Proceedings of DETC2003/VIB-48445, ASME 2003.
- Sinha, S.C., Gourdon, E., Zhang, Y., *Control of time-periodic systems via symbolic computation with application to chaos control*. Nonlinear Science and Numerical Simulation, (artigo em publicação).
- Snyder, M.A., *Chebyshev Methods in Numerical Approximations*. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice Hall, 1966.

Sparis, P. D., Mouroutsos, S.G., *A Comparative Study of the Operational Matrices of Integration and Differentiation for Orthogonal Polynomial Series*. International journal of control, v.42(3), pp 621-638, 1985.

The Student Edition of MATHLAB: version 5: user's guide. Prentice Hall, Massachusetts, 833p. 2004.

Wiens, G.J., Lu, M.S., Sinha, S.C., *Controller design for nonlinear mechanical systems via Lyapunov's direct method*. AIAA/ASME/ASCE/AIIS/ASC 32nd Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Part 3, Baltimore, 2239-2246,

Vidyasagar, M., *Nonlinear Systems Analysis*. New Jersey, Prentice Hall, 1978.

Zhou, K., Doyle, J.C., *Essential of Robust Control*. Prentice Hall. New Jersey, 411p., 1998.

Apêndices

A-) Teoria de Floquet

A primeira pessoa que estudou sistemas com coeficientes periódicos foi Mathieu (1868), enquanto analisava uma equação diferencial de segunda ordem com coeficientes periódicos, que modelava o movimento de uma onda de um lago elíptico. Porém, um tratado completo sobre a análise da estabilidade de sistemas periódicos no tempo foi estabelecido alguns anos mais tarde por Floquet em 1883 e por Poincaré em 1899. Baseando-se nos trabalhos de Floquet, Lyapunov (1896) introduziu uma transformação que convertia o sistema periódico no tempo na forma invariante no tempo. A seguir, apresenta-se um breve resumo da teoria de Floquet para sistemas de segunda ordem.

Seja

$$\dot{x} = F(x, t) \quad (A1)$$

uma equação diferencial de 2ª ordem com coeficientes periódicos no tempo.

Considere, também, x_1 e x_2 soluções linearmente independentes de (A1). O conjunto $\{x_1(t), x_2(t)\}$ é chamado conjunto fundamental das soluções de (A1).

Desta forma, toda solução x de (A1) pode ser escrita como combinação linear de x_1 e x_2 , isto é:

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \quad (A2)$$

Como $x_1(t+T) = x_1(t)$ e $x_2(t+T) = x_2(t)$, então $\{x_1(t+T), x_2(t+T)\}$ também é um conjunto fundamental de soluções de (A1). Logo,

$$\begin{aligned}x_1(t+T) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) \\x_2(t+T) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t)\end{aligned}\tag{A3}$$

onde $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ é uma matriz não singular que depende do conjunto fundamental escolhido.

Como mostrado acima, existe um conjunto fundamental de soluções que contêm as chamadas *soluções normais* ou de *Floquet*, tais que:

$$\begin{aligned}v_1(t+T) &= \lambda v_1(t) \\v_2(t+T) &= \lambda v_2(t)\end{aligned}\tag{A4}$$

onde λ é uma constante.

Substituindo-se a equação (A4) em (A3), concluímos que existe uma matriz $P_{2 \times 2}$ não-singular tal que

$$v(t+T) = [B]v(t)\tag{A5}$$

onde $[B] = P^{-1}AP$ de modo que A e B são similares (possuem os mesmos autovalores) e ainda B podendo ser escrita na forma de Jordan.

Note que a forma de Jordan depende dos autovalores λ_1 e λ_2 da matriz A, isto é, $\det(A - \lambda I) = 0$.

Assim, se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ então $B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ e (A4) pode ser escrita como:

$$v_i(t+T) = [B]v_i(t)\tag{A6}$$

Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_i(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } |\lambda_i| < 1 \\ \infty, & \text{se } |\lambda_i| > 1 \end{cases}\tag{A7}$$

Como v_i e x_i estão relacionados por P , tem-se:

x_i é assintoticamente estável se $\lambda_i < 1$; é instável se $\lambda_i > 1$; T -periódico se $\lambda_i = 1$ e $2T$ -periódico se $\lambda_i = -1$.

Finalmente, fazendo-se $\lambda_i = e^{(\gamma_i T)}$, tem-se que:

$$v_i(t) = e^{(\gamma_i t)} \phi_i(t) \quad , \quad (\text{A8})$$

onde, $\phi_i(t+T) = \phi_i$.

$$\text{- Se } \lambda_1 = \lambda_2, \text{ então: } B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \text{ ou } B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} .$$

Se $B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, tem-se a forma (A8).

Se $B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}$, então:

$$v_1(t+T) = \lambda v_1(t) \quad (\text{A9})$$

$$v_2(t+T) = \lambda v_2(t) + v_1(t) \quad . \quad (\text{A10})$$

Analogamente, $v_i \rightarrow 0$ se $|\lambda| < 1$ e $v_i \rightarrow \infty$ se $|\lambda| > 1$ e

$$v_1(t) = e^{(\gamma_1 t)} \phi_1(t) \quad (\text{A11})$$

$$v_2(t) = e^{(\gamma_2 t)} \left[\phi_1(t) + \frac{t}{\lambda T} \phi_1(t) \right] \quad . \quad (\text{A12})$$

B-) Redução à variedade Central

Na teoria de sistemas dinâmicos encontram-se dois fatos fundamentais que dizem respeito a pontos fixos hiperbólicos (autovalor com parte real nula) são:

1. **Teorema de Hartman-Grobman** que trata da estabilidade e comportamento das soluções do sistema não-linear na vizinhança de um ponto fixo hiperbólico do sistema linearizado.

2. **Teorema da Variedade Invariante** oferece uma técnica sistemática para determinar a estabilidade do ponto fixo degenerado e aproximar a dinâmica na vizinhança desses pontos fixos.

Estes teoremas ajudam a entender a relação entre variedade central e a bifurcação na dinâmica de um sistema. Para entender melhor esta relação, considere o sistema não-linear de EDO:

$$\dot{x} = F(x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (\text{B1})$$

Para investigar a estabilidade na vizinhança de um ponto fixo x_s , considera-se um ponto $x = x_s + \tilde{x}$ adjacente a x_s . Expandindo-se (B1) em série de Taylor na vizinhança de x_s , tem-se:

$$F(x_s + \tilde{x}) = F(x_s) + \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x_s} \tilde{x} + O(\tilde{x}^2) \quad (\text{B2})$$

Desde que, $\dot{x} = \dot{x}_s + \dot{\tilde{x}}$ e $\dot{x}_s = F(x_s) = 0$, deduz-se, para a evolução temporal de pequenas perturbações, que:

$$\dot{\tilde{x}} = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x_s} \tilde{x} + O(\tilde{x}^2) \quad (\text{B3})$$

Se $O(\tilde{x}^2)$ é suficientemente pequeno comparado com \tilde{x} , pode-se considerar na análise somente o termo linear (Jacobiano) :

$$\dot{\tilde{x}} = D(x_s)\tilde{x}, \quad D(x_s) = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x_s} \quad (\text{B4})$$

TEOREMA B1 (Hartman-Grobman)

Se os autovalores (λ_i) da Matriz $D(x_s)$ são hiperbólicos ($Re(\lambda_i) \neq 0$) então, na vizinhança $U(x_s)$ do ponto fixo x_s , existe um homeomorfismo h (h é bijetora e bi-continua) que relaciona as trajetórias do fluxo do sistema não-linear ϕ_t com o fluxo do sistema linearizado e^{Dt} . O homeomorfismo h preserva a estabilidade/instabilidade das trajetórias entre o sistema não-linear e o linearizado e, além disso, pode-se escolher h de modo a preservar a parametrização em t .

Resumindo, para pontos fixos hiperbólicos, pode-se deduzir o comportamento das soluções não-lineares, na vizinhança do ponto fixo, a partir da matriz dos coeficientes D do sistema linearizado. Neste caso, na vizinhança $U(x_s)$, a fase do fluxo do sistema não-linear é topologicamente equivalente ao fluxo do sistema linearizado, isto é, os dois fluxos podem ser convertidos um no outro através de uma transformação não-linear de coordenadas.

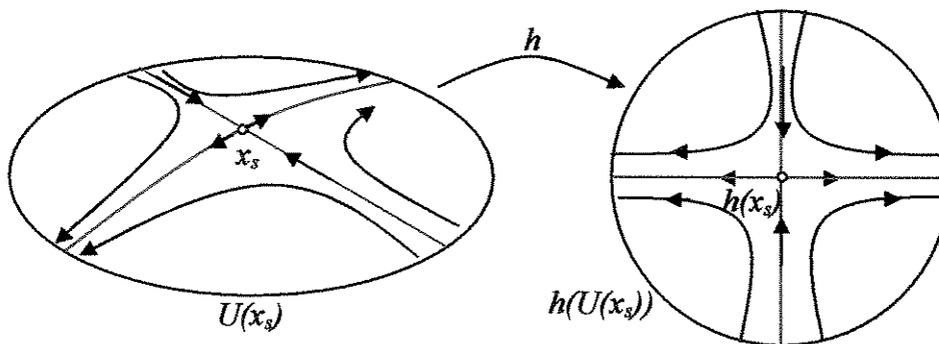


Figura B1 - Ilustração do Teorema Hartman-Grobman.

Denotando-se por n_s os autovetores associados aos autovalores s_i com parte real negativa e por n_u os autovetores associados aos autovalores u_i com parte real positiva, pode-se definir os subespaços invariantes lineares estáveis e instáveis por $E^s = [s_1, \dots, s_{n_s}]$ e $E^u = [u_1, \dots, u_{n_u}]$, respectivamente.

Em analogia aos autoespaços invariantes lineares E^s e E^u , podem-se introduzir as variedades invariantes (local) não-linear estável e instável do ponto fixo x_s :

$$W_{loc}^s(x_s) := \{x \in U; \lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x) = x_s \text{ e } \phi_t(x) \in U, \forall t \geq 0\}$$

$$W_{loc}^u(x_s) := \{x \in U; \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(x) = x_s \text{ e } \phi_t(x) \in U, \forall t \leq 0\}$$

As relações entre E^s e W_{loc}^s (E^u e W_{loc}^u) é dado pelo teorema:

TEOREMA B2 (Da existência da Variedade Central para um Ponto Fixo)

Se x_s é um ponto fixo hiperbólico do sistema não-linear (1) então, existe uma variedade local não-linear estável W_{loc}^s (instável W_{loc}^u) com mesma dimensão n_s de E^s (n_u de E^u) do sistema linearizado, tal que W_{loc}^s e E^s (W_{loc}^u e E^u) são tangentes em x_s . As variedades W_{loc}^s e W_{loc}^u são suavizações da função F .

Resumindo, o teorema acima garante que o autoespaço linear E^s (E^u) é uma aproximação tangente e local da variedade não-linear W_{loc}^s (W_{loc}^u) em x_s .

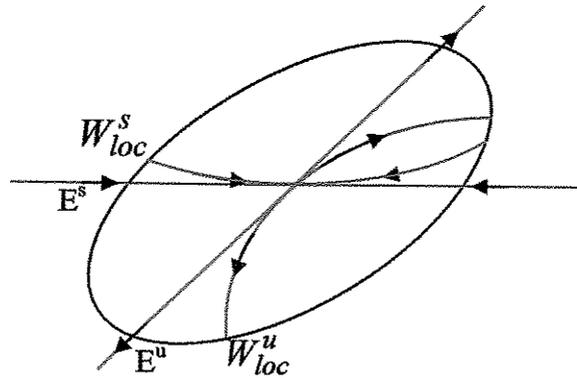


Figura B2 - Ilustração do teorema da existência da Variedade Central para um ponto fixo.

Além disso, pelo teorema de Hartman-Grobman existe um homeomorfismo h entre W_{loc}^s e E^s (W_{loc}^u e E^u) ao qual garante a equivalência topológica entre os sistemas não-linear e o linearizado.

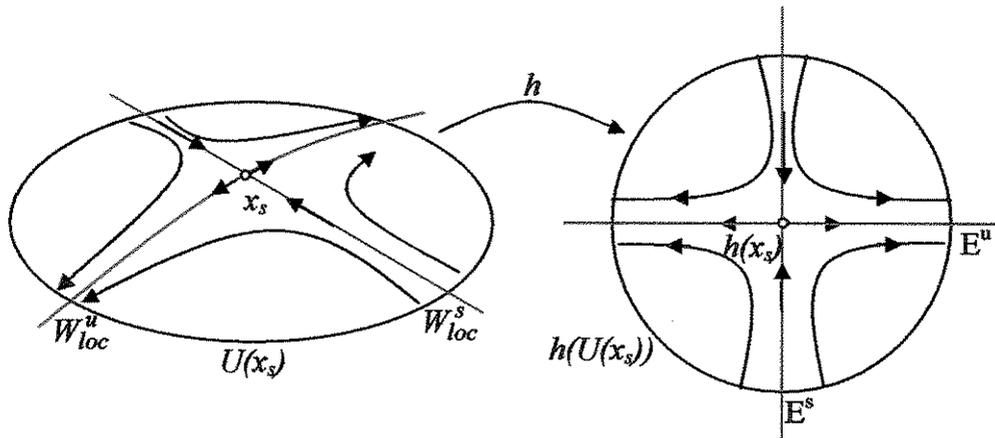


Figura B3 - Equivalência topológica entre os sistemas não-linear e o linearizado.

Generalizando-se, pode-se definir a variedade global estável/instável como:

$$W^s(x_s) = \bigcup_{t \geq 0} \phi_t(W_{loc}^s(x_s)) \text{ e } W^u(x_s) = \bigcup_{t \leq 0} \phi_t(W_{loc}^u(x_s))$$

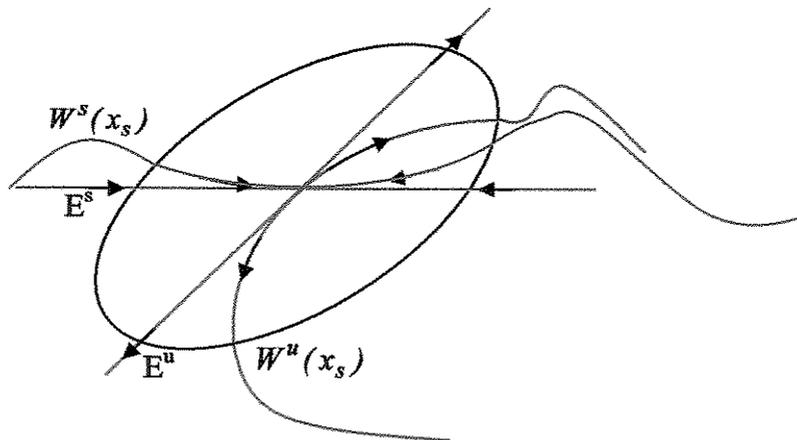


Figura B4 - Ilustração da variedade global.

Para o caso degenerado, isto é, o caso onde pelo menos um autovalor de D tem parte real nula, pode-se introduzir de forma análoga o subespaço invariante central E^c , onde $E^c := [w_1, \dots,$

$w_{nc}]$, onde os w_1, \dots, w_{nc} são autovetores associados aos n_c autovalores com parte real nula $\lambda_1, \dots, \lambda_{nc}$.

Associado a E^c tem-se, no caso não-linear, a variedade invariante central W^c . Pelo teorema 2, W^c é tangente à E^c em x_s e existe um homeomorfismo h entre E^c e W^c tal que, é possível determinar a estabilidade/instabilidade do sistema não-linear a partir do sistema linearizado.

TEOREMA B3 (Variedade Central)

Seja x_s um ponto fixo de (1) e D seu Jacobiano (4). O Espectro dos autovalores de D

pode ser subdividido em $\{\lambda_{si}\}$; $\{\lambda_{ci}\}$ e $\{\lambda_{ui}\}$, onde: $Re(\lambda) : \begin{cases} < 0, \text{ se } \lambda \in \{\lambda_{si}\} \\ = 0, \text{ se } \lambda \in \{\lambda_{ci}\}. \text{ Desta forma,} \\ > 0, \text{ se } \lambda \in \{\lambda_{ui}\} \end{cases}$

$\{\lambda_{si}\}$ e $\{\lambda_{ui}\}$ geram E^s e E^u , respectivamente e, como consequência, existem e são únicos W^s e W^u r -vezes diferenciáveis. Por outro lado, $\{\lambda_{ci}\}$ gera E^c e como consequência existe W^c $(r-1)$ vezes diferenciável que não é necessariamente único.

Para determinar se o fluxo sob W^c move-se em direção a origem ou se afasta desta, devem ser considerados os termos de ordem superior na investigação da estabilidade. Introduzindo-se localmente (na origem) as “coordenadas das variedades” \bar{x}, \bar{y} e \bar{z} associadas a W^c, W^s e W^u , pode-se escrever, pelo teorema da variedade central, o sistema não-linear (1) na forma linearizada:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}) \\ \dot{\bar{y}} = -\bar{y}, \text{ onde } (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in W^c \times W^s \times W^u \\ \dot{\bar{z}} = \bar{z} \end{cases} \quad (B5)$$

onde (B1) e (B5) são topologicamente equivalentes numa certa vizinhança do ponto fixo, isto é, o comportamento assintótico do sistema (B1) pode ser reduzido, através de uma conveniente transformação de coordenadas na origem, ao comportamento de $\bar{f}(\bar{x})$.

Para esclarecer os passos de tal transformação, vamos supor que $W^u = \phi$ e considerar o sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + f(x, y) \\ \dot{y} = By + g(x, y) \end{cases}, \text{ onde } x \in R^c, y \in R^s \quad (\text{B6})$$

Todos os autovalores de A possuem parte real nula enquanto que os autovalores de B tem parte real negativa. As funções f e g são não-lineares e $f(0,0)=g(0,0)=0$ e $f'(0,0)=g'(0,0)=0$, onde $f' = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \right]$ e $g' = \left[\frac{\partial g}{\partial x} \quad \frac{\partial g}{\partial y} \right]$. A idéia é reduzir (sem perda da qualidade na dinâmica) o sistema inicial (não-linear) a uma forma mais simples (linear) é garantida pelo teorema da variedade central. O teorema da existência da Variedade Central diz que W^c pode ser expresso por uma função $h(x)$, de modo que, escrevendo $y=h(x)$ a variedade central $y=0$ do sistema linearizado é tangente ao não-linear W^c .

Substituindo-se $y=h(x)$ na primeira equação de (B6) obtém-se a projeção do campo vetorial com respeito a variedade central W^c em E^c . Assim,

$$\dot{x} = Ax + f(x, h(x)) \quad (\text{B7})$$

O comportamento dinâmico de (B7) mostra o comportamento da equação (B6) em $\{x, y\} = \{0, 0\}$.

TEOREMA B4 (Da equivalência)

Se a origem $x=0$ em (B7) é localmente assintoticamente estável/instável então, a solução nula do sistema não-linear original (B6) é também localmente assintoticamente estável (instável).

A solução de (B7), na vizinhança da origem, é uma boa aproximação para o fluxo da equação $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ sobre a variedade central. Para obter a função $h(x)$, tal que $y(t)=h(x(t))$, tem-se pela regra da cadeia: $\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial x} \frac{dx}{dt}$. Então reescrevendo-se-se (B6):

$$\frac{\partial h}{\partial x} [Ax + f(x, h(x))] - Bh(x) - g(x, h(x)) = 0 \quad (\text{B8})$$

onde $h(0)$ e $\left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_0 = 0$.

Se W^c na origem puder ser descrita por uma função analítica, a solução de (B8) pode ser aproximada pela série de Taylor. Seja $\psi(x)$ uma aproximação da função $h(x)$. O resíduo de (B8) é dado por:

$$R(\psi(x)) = \frac{\partial \psi}{\partial x} [Ax + f(x, \psi(x)) - B\psi(x) - g(x, \psi(x))] \quad (\text{B9})$$

O grau de exatidão é dado pelo teorema:

TEOREMA B5 (Da aproximação)

Se existe $\psi(x)$ com $\psi(0)=0$, $\psi'(0)=0$ e $R(\psi(x))=O(|x|^q)$, $q>1$ é satisfeito quando $|x|\rightarrow 0$ então, o grau de aproximação de $h(x)$ é também de ordem q , isto é, $h(x) = \psi(x) + O(|x|^q)$ para $|x|\rightarrow 0$.

Considere um exemplo.

Dado o sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = -xy \\ \dot{y} = -y + x^2 \end{cases} \quad (\text{B10})$$

pode-se reescrevê-lo na forma (B6), onde $A=0$, $f(x,y) = -xy$, $B = -I$ e $g(x,y) = x^2$.

Linearizando (B10) no ponto fixo $x_s=(0,0)$, obtém-se:

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (\text{B11})$$

Os autovalores de (B11) são $\lambda_A = 0$ e $\lambda_B = -1$. Logo, não pode-se analisar a estabilidade de (B10) em (0,0) a partir de (B11). Então, para analisar a estabilidade usar-se o teorema da variedade central.

Os autovalores $\lambda_A = 0$ (centro) e $\lambda_B = -1$ (estável) geram os autoespaços $E^c = \{(x,y) \in \mathfrak{R}^2 / y=0\}$ e $E^s = \{(x,y) \in \mathfrak{R}^2 / x=0\}$, respectivamente. Logo, existe uma variedade local W_{loc}^c não-linear tangente a E^c no ponto fixo $x_s=(0,0)$.

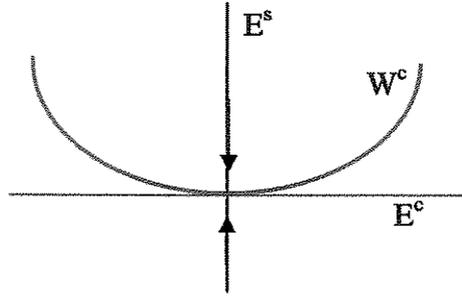


Figura B5 - Ilustração das variedades Estável, Instável e a Central.

Do teorema da existência da variedade central tem-se que W^c pode ser expresso como $y=h(x)$, com $h(0)=0$ e $h'(0)=0$.

Aproximando-se h por $\psi(x)$, obtém-se o resíduo dado a partir de (B9) e (B10):

$$R(\psi(x)) = \frac{d\psi}{dx}(-x\psi(x)) + \psi(x) - x^2 \quad (\text{B12})$$

Escolhendo-se uma aproximação de ordem quadrática: $\psi(x) = o(x^2)$, tem-se:

$$R(\psi(x)) = o(x^4) + \psi(x) - x^2 \quad (\text{B13})$$

Reescrevendo-se-se (13) e usando-se o teorema (5), obtém-se: -

$$R(\psi(x)) = \underbrace{x^2 - o(x^4)}_{h(x)} - \psi(x), \text{ isto é:}$$

$$h(x) = x^2 + o(x^4) \quad (\text{B14})$$

como $\psi(x) \cong h(x)$ pode-se desprezar os termos de 4º ordem, desta forma: $\psi(x) = x^2$.

Substituindo-se-se $h(x)$, dada pela equação (B14), na 1ª equação de (B10) obtém-se a relação

$$\dot{x} = -x^3 + o(x^5) \quad (\text{B15})$$

cuja solução, de acordo com o teorema (B4), determina que (B1) é assintoticamente estável na origem.

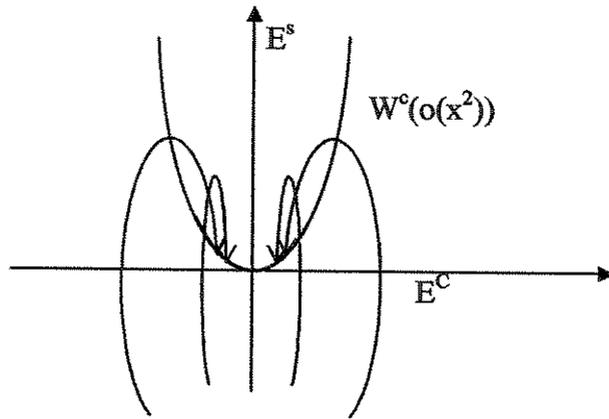


Figura B6 - Ilustração da equivalência dinâmica entre o sistema original e o reduzido.

C-) Teoria da Forma Normal

Considere a forma canônica de Jordan geral obtida a partir de uma equação não-linear periódica no tempo:

$$\dot{y} = Jy + \sum_{n=2}^r w_n(y,t) + O(|y|^{r+1}, t), \quad (C1)$$

onde J é a forma de Jordan da matriz R dada pela equação (10) e $w_n(y,t)$ são funções T -periódicas que contêm os monômios de ordem r na variável y .

De modo a remover os termos não-lineares $w_n(y,t)$ são aplicadas na equação (C1), de acordo com a teoria da forma normal, sucessivas transformações da forma:

$$y = v + h_n(v,t), \quad (C2)$$

onde $h_n(v,t)$ é uma série de potências de grau n na variável (desconhecida) v , cujos coeficientes são T -periódicos.

Aplicando-se a transformação (C2) na equação (C1), obtém-se:

$$\dot{v} = Jv - \left\{ (D_y h_n) Jv - Jh_n + \frac{\partial h_n}{\partial t} \right\} + w_n(v,t) + O(|v|^{r+1}, t). \quad (C3)$$

Impondo-se que na equação (C3):

$$(D_y h_n) Jv - Jh_n + \frac{\partial h_n}{\partial t} = w_n(v,t), \quad (C4)$$

pode-se eliminar todos os termos de ordem n , onde a equação (C4) é chamada *Equação Homológica*.

Desde que os monômios $w_n(v,t)$ e a transformação não-linear $h_n(v,t)$ sejam periódicas no tempo, elas podem ser aproximadas por série de Fourier finita.

$$w_n(v,t) = \sum_{j=1}^s \sum_{\tilde{m}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{\tilde{m},j,k} e^{\frac{ik\pi}{T}} |v|^{\tilde{m}} e_j$$

$$h_n(v,t) = \sum_{j=1}^s \sum_{\tilde{m}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{\tilde{m},j,k} e^{\frac{ik\pi}{T}} |v|^{\tilde{m}} e_j$$

onde, $|v|^{\tilde{m}} = z_1^{m_1} z_2^{m_2} \dots z_k^{m_k}$; $m_1 + \dots + m_n = n$; e_j é a j -ésima coordenada da base canônica e $i = \sqrt{-1}$.

Os $a_{\bar{m},j,k}$ são coeficientes de Fourier conhecidos, e os $h_{\bar{m},j,k}$ são coeficientes de Fourier desconhecidos.

Da comparação termo a termo dos coeficientes de Fourier, tem-se:

$$h_{\bar{m},j,\nu} = \frac{a_{\bar{m},j,\nu}}{\frac{i\nu\pi}{T} + \sum_{\ell=1}^n (m_{\ell}\lambda_{\ell}) - \lambda_s} \quad , \quad (C5)$$

onde os λ_{ℓ} são os autovalores da parte crítica da forma de Jordan e λ_s são os autovalores da parte estável da forma de Jordan.

Portanto, a condição de redutibilidade dada pela equação (C4) fica:

$$\frac{i\nu\pi}{T} + \sum_{\ell=1}^n (m_{\ell}\lambda_{\ell}) - \lambda_s \neq 0, \quad (C6)$$

com, $\nu \in Z$.

Obviamente, a condição de ressonância da redução à forma normal é:

$$\frac{i\nu\pi}{T} + \sum_{\ell=1}^n (m_{\ell}\lambda_{\ell}) - \lambda_s = 0 \quad . \quad (C7)$$

Se $\nu=0$ e alguma combinação linear entre λ_{ℓ} e λ_s é zero, então tem-se uma “ressonância interna verdadeira”.

Se $\nu \neq 0$ e a frequência de excitação paramétrica ω ($\omega = \frac{2\pi}{T}$) são uma combinação linear de λ_{ℓ} e λ_s , tem-se uma “ressonância de combinação verdadeira”.

No caso da ressonância paramétrica, no mínimo, um par de multiplicadores de Floquet é real e repetido. Isto implica que um par de autovalores da parte crítica da forma de Jordan é zero.

D-) Deformação Versal

Uma alternativa simples e rápida para a determinação do parâmetro da deformação versal é calcular a FTM ($\Phi(T, \alpha)$) numericamente e variar o parâmetro α na vizinhança de α_c .

Seja α_c um ponto crítico da parte linear de $\dot{x} = F(x, t, \alpha)$, isto é, calculando-se os auto-valores de $\Phi(T, \alpha_c)$, encontra-se um multiplicador de Floquet com magnitude 1.

Seja o conjunto de parâmetros, tal que $\alpha \in I_{\alpha_c} = (\alpha_c - \varepsilon, \alpha_c + \varepsilon)$, onde $\varepsilon > 0$ e suficientemente pequeno.

Então, $\forall \alpha_k \in I_{\alpha_c}$, $\alpha_k = \alpha_c + \eta_k$ com $\eta_k \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, pode-se calcular $R(\alpha)$ e seus autovalores λ_k , onde:

$$R(\alpha_k) = \frac{1}{2} \ln(\phi^2(T, \alpha_k)) \quad . \quad (D1)$$

Assumindo-se que:

$$\lambda_k = \text{Re}(\mu_k) + (\text{Im}(\mu_k) + \omega_c) i \quad , \quad (D2)$$

onde

$$\mu_{kj} = a_{1j} \eta_{kj} + a_{2j} \eta_{kj}^2 + \dots + a_{pj} \eta_{kj}^p \quad (D3)$$

com, $j = 1, \dots, n_1$.

Os coeficientes $a_{\ell j}$, $\ell = 1, \dots, p$ são desconhecidos, em geral, complexos, e o valor de k depende da aproximação que se deseja. Por exemplo, para uma aproximação quadrática, k pode ser escolhido entre 3 e 5.

Finalmente, ajustando a curva (quadrática ou de ordem superior) para os pares (η_k, μ_k) , pode-se encontrar os coeficientes $a_{\ell j}$ da relação desejada.

E-) TEORIA DE FILIPPOV

Construção de uma solução

Um sistema dinâmico é usualmente expresso como:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(t) \in \mathfrak{R}^n, \quad (\text{E1})$$

onde x é o vetor de estados n -dimensional tal que $f(t, x(t))$ é linearmente limitada, isto é, $\|f(t, x(t))\| \leq \gamma \|x\| + c$, $\forall (t, x)$ e $\gamma, c \in \mathfrak{R}_+^*$.

Se o campo vetorial é suave ($f()$ é continuamente diferenciável com relação a x e t para qualquer ordem), então uma solução $x(t)$ do sistema (E1) existe e é única para qualquer condição inicial.

Contudo, equações diferenciais que modelam sistemas físicos reais podem ser descontínuas, isto é, $f(t, x(t))$ pode ser descontínua em $x(t_p)$.

A teoria de Filippov apresenta uma definição geral para a solução das equações diferenciais que são descontínuas. Tal solução será contínua no tempo.

A idéia central quando trata-se de soluções de sistemas descontínuos no tempo é estender a noção usual de solução, substituindo-se o lado direito $f(x)$ por um conjunto de valores de funções $F(x)$ chamado de *inclusão diferencial*, de modo que a equação diferencial $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ é substituída por uma *inclusão diferencial* de modo que $\dot{x}(t) \in F(x)$.

A *inclusão diferencial* deve ser escolhida de forma conveniente:

$$F(x) = \begin{cases} \{f(x)\}, & \text{se } f \text{ é contínua em } x \\ \text{escolhida convenientemente,} & \text{se } f \text{ é descontínua em } x \end{cases}$$

Num sentido mais geral, o espaço estado \mathfrak{R}^n é dividido por uma hiper-superfície Σ em dois subespaços V_- e V_+ , isto é, $\mathfrak{R}^n = V_- \cup \Sigma \cup V_+$. A hiper-superfície Σ pode ser definida através de uma *função indicadora* escalar $h(x(t))$.

Assim, diz-se que $x(t) \in \Sigma$ quando $h(x(t)) = 0$. O vetor normal \bar{n} a Σ é definido por: $\bar{n} = \text{grad}(h(x(t)))$. Assume-se que a função indicadora $h(x(t))$ é tal que $\bar{n} \neq \bar{0}$.

Desta forma, definimos os conjuntos:

$$\begin{aligned} V_- &= \{x \in \mathfrak{R}^n / h(x(t)) < 0\} \\ \Sigma &= \{x \in \mathfrak{R}^n / h(x(t)) = 0\} \\ V_+ &= \{x \in \mathfrak{R}^n / h(x(t)) > 0\} \end{aligned} \quad (E2)$$

A função $f(t, x(t))$ é assumida como localmente contínua, suave e linearmente limitada para todo $x \notin \Sigma$. Logo, a solução $x(t)$ dentro de cada subespaço V_- e V_+ existe e é única.

Desta forma, considere o sistema n-dimensional não-linear com lado direito descontínuo:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) = \begin{cases} f_-(t, x(t)), & x \in V_- \\ f_+(t, x(t)), & x \in V_+ \end{cases} \quad (E3)$$

com a condição inicial $x(0) = x_0$. Note que o sistema acima não está definido para $x \in \Sigma$.

Este problema o pode ser contornado pela definição da **inclusão diferencial**:

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)) = \begin{cases} f_-(t, x(t)), & x \in V_- \\ \overline{\text{co}}\{f_-(t, x(t)), f_+(t, x(t))\}, & x \in \Sigma \\ f_+(t, x(t)), & x \in V_+ \end{cases} \quad (E4)$$

onde $\overline{\text{co}}\{f_-, f_+\}$ denota o menor conjunto convexo fechado que contém f_- e f_+ e é definido por:

$$\overline{\text{co}}\{f_-, f_+\} = \{(1-q)f_- + qf_+, \forall q \in [0,1]\} \quad (E5)$$

A extensão (convexificação) de um sistema descontínuo em uma inclusão diferencial convexa é conhecida como *Método Convexo de Filippov*.

A solução da inclusão diferencial (E4) com $x_0 \in \Sigma$ é localmente única no tempo se:

1. as projeções do campo vetorial estão do mesmo lado de Σ , isto é, $(\bar{n} \cdot f_-(0, x_0))(\bar{n} \cdot f_+(0, x_0)) > 0$
2. $(\bar{n} \cdot f_-(0, x_0)) > 0$ e $(\bar{n} \cdot f_+(0, x_0)) < 0$

Matriz de Transição de Estados

Uma matriz de transição de estados pode ser considerada como um conjunto fundamental de soluções da linearização de um sistema não-linear perturbado. Logo, a matriz de transição de estados é de fundamental importância para a análise das soluções periódicas de sistemas não-lineares periódicos.

Em sistemas cujo campo vetorial é descontínuo, a evolução da matriz de transição de estados no tempo, também apresentará descontinuidade (saltos).

Seja um sistema não-linear descontínuo em $t = t_p$ definido pela inclusão diferencial (E4):

$$\dot{x}(t) \in F(t), \quad x(0) = x_0 \quad (\text{E6})$$

Assumindo-se que para $t = t_p$ a solução $x(t)$ atravessa Σ , tem-se que: $h(x(t_p)) = 0$.

Como o campo vetorial é descontínuo em Σ , as derivadas laterais f_{p^-} e f_{p^+} , que indicam a direção da solução para $t = t_p$, são diferentes: $f_{p^-} \neq f_{p^+}$.

De fato, as projeções de f_{p^-} e f_{p^+} sobre a normal \bar{n} tem as magnitudes $n^T f_{p^-}$ e $n^T f_{p^+}$, respectivamente. A intersecção entre a trajetória de $x(t)$ e Σ será transversal se, e somente se, $(n^T f_{p^-}) \cdot (n^T f_{p^+}) > 0$, isto é, a trajetória $x(t)$.

Seja $x_0 \in V_-$ uma solução que inicialmente está no subespaço V_- cuja trajetória no tempo atinge Σ em $t = t_p$, isto é, $h(x(t_p)) = 0$. Desta forma, define-se os intervalos $I_- = \{t \in \mathfrak{R} / t_0 \leq t \leq t_p\}$ e $I_+ = \{t \in \mathfrak{R} / t_p \leq t \leq t_q\}$, onde no interior do conjunto I_- e I_+ o sistema e a matriz de transição de estados são funções contínuas.

Como na fronteira do conjunto I_- e I_+ a matriz Jacobiana $\frac{\partial f(t_p, x(t_p))}{\partial x}$ não está unicamente definida, a matriz de transição de estados é descontínua para $t = t_p$, isto é, a matriz de transição de estados tem um salto em $t = t_p$.

Definindo-se a matriz de transição de estados antes e depois do salto (em Σ) por $\Phi(t_{p^-}, t_0)$ e $\Phi(t_{p^+}, t_0)$, respectivamente, onde:

$$\Phi(t_{p^-}, t_0) = \lim_{t \rightarrow t_{p^-}} \Phi(t, t_0) \quad (\text{E7})$$

$$\Phi(t_{p^+}, t_0) = \lim_{t \rightarrow t_{p^+}} \Phi(t, t_0) \quad (\text{E8})$$

é óbvio que $\Phi(t_{p^-}, t_0) \neq \Phi(t_{p^+}, t_0)$.

Agora, vamos assumir que exista uma matriz S que expresse o salto da matriz de transição de estados, isto é:

$$\Phi(t_{p^+}, t_0) = S\Phi(t_{p^-}, t_0) \quad (\text{E9})$$

Logo, a matriz de transição de estados de t_0 até t_q , passando por Σ em t_p , pode ser escrita como:

$$\Phi(t_q, t_0) = \Phi(t_q, t_{p^+})\Phi(t_{p^+}, t_0) \quad (\text{E10})$$

e a partir da equação (E9), tem-se:

$$\Phi(t_q, t_0) = \Phi(t_q, t_{p^+})S\Phi(t_{p^-}, t_0) \quad (\text{E11})$$

A pergunta que fica é: como obter a matriz de salto S em $t = t_p$? Para responder a essa pergunta estuda-se a dinâmica do sistema não-linear na vizinhança de Σ , isto é, $t \in [t_0, t_q]$, onde $t_0 \in V_-$ e $t_0 \in V_-$.

Seja $\bar{x}_0 = x_0 + \delta x_0$ uma condição inicial na vizinhança de $x(t_0) = x_0$. A trajetória $\bar{x}(t)$ cuja condição inicial é $\bar{x}_0 \in V_-$ atingirá Σ em $\delta t = \bar{t}_p - t_p$ segundos, adiantado ou atrasado dependendo do sinal de δt .

A diferença entre as soluções perturbada e não perturbada no momento da passagem por Σ é dado por:

$$\delta x_{p^-} = \bar{x}(t_p) - x(t_p) \quad (\text{E12})$$

$$\delta x_{p^+} = \bar{x}(\bar{t}_p) - x(\bar{t}_p) \quad (\text{E13})$$

Aproximando-se por série de Taylor as soluções: não perturbada e perturbada, tem-se:

$$x(\bar{t}_p) \cong x(t_p) + f_{p^+} \delta t \quad (\text{E14})$$

$$\bar{x}(\bar{t}_p) \cong x(t_p) + \delta x_{p^-} + f_{p^-} \delta t \quad (\text{E15})$$

Da mesma forma, aproximando-se a função indicadora em série de Taylor, tem-se:

$$h(\bar{x}(\bar{t}_p)) = h(x(t_p) + \delta x_{p^-} + f_{p^-} \delta t) \cong n^T (\delta x_{p^-} + f_{p^-} \delta t) = 0 \quad (\text{E16})$$

Como na equação (E16) tem-se que $n^T (\delta x_{p^-} + f_{p^-} \delta t) = 0$, obtém-se:

$$\delta\alpha = \frac{n^T \delta x_{p^-}}{n^T f_{p^-}} \quad (\text{E17})$$

Combinando-se as equações (E13), (E14), (E15) e (E17), tem-se:

$$\delta x_{p^+} = \delta x_{p^-} + (f_{p^+} - f_{p^-}) \frac{n^T \delta x_{p^-}}{n^T f_{p^-}} \quad (\text{E18})$$

Como a matriz de salto S relaciona δx_{p^+} e δx_{p^-} , isto é:

$$\delta x_{p^+} = S \delta x_{p^-} \quad (\text{E19})$$

pode-se combinar as equações (E18) e (E19) obtendo-se a matriz de salto $S = \Phi(t_{p^+}, t_{p^-})$ para sistemas autônomos como:

$$S = I + \frac{(f_{p^+} - f_{p^-})n^T}{n^T f_{p^-}} \quad (\text{E20})$$

A inversa da matriz de salto $S^{-1} = \Phi(t_{p^-}, t_{p^+})$ para sistemas autônomos é:

$$S^{-1} = I + \frac{(f_{p^-} - f_{p^+})n^T}{n^T f_{p^+}} \quad (\text{E21})$$

Para sistemas não autônomos a matriz de salto é dada por:

$$S = I + \frac{(f_{p^+} - f_{p^-})n^T}{n^T f_{p^-} + \frac{\partial h(t_p, x(t_p))}{\partial t}} \quad (\text{E22})$$

Bifurcação Descontínua

A análise da estabilidade de soluções periódicas é determinada pelos multiplicadores de Floquet: a solução periódica é estável se todos os multiplicadores de Floquet tiverem magnitude

menor que 1 (dentro de um círculo unitário) e instável se pelo menos um dos multiplicadores tiver magnitude maior que 1 (fora de um círculo unitário).

Se a solução periódica depender de algum parâmetro de controle, naturalmente a magnitude dos multiplicadores de Floquet também irá depender desse parâmetro. Assim, variando-se o parâmetro de controle a solução periódica pode passar de estável para instável ou vice-versa. Se o número de soluções periódicas mudar quando o parâmetro de controle variar, term-se, no espaço-estado, um ponto onde ocorre uma mudança qualitativa ao qual chamamos de *Ponto de Bifurcação*. O ponto de bifurcação dependerá da característica do sistema.

No caso de soluções periódicas de *sistemas contínuos suaves* diz-se que ocorre uma *bifurcação contínua* quando um multiplicador de Floquet passa pelo círculo unitário (possui magnitude -1 ou 1) quando o parâmetro de controle do sistema é variado.

Para soluções periódicas de *sistemas contínuos não suaves* diz-se que ocorre uma *bifurcação descontínua* quando um dos multiplicadores de Floquet *salta* o círculo unitário.

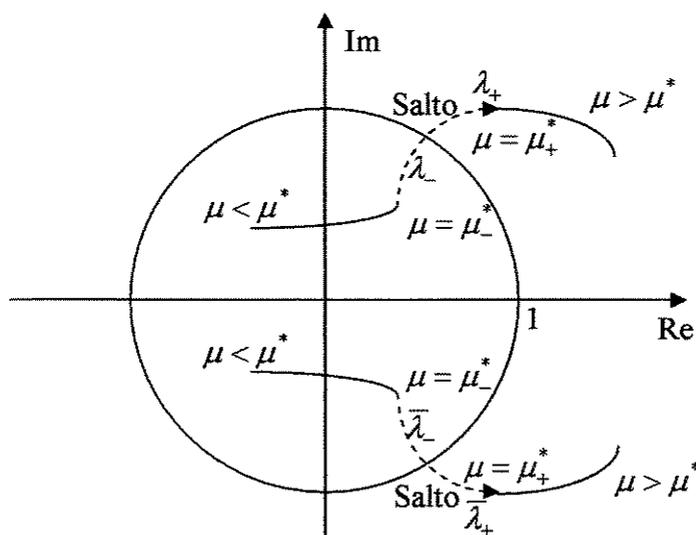


Figura F1 - Bifurcação descontínua.

O caminho do salto é obtido a partir de uma combinação convexa das matrizes de soluções fundamentais antes e depois do salto em Σ . Tal caminho mostrará o cruzamento dos multiplicadores de Floquet com o círculo unitário.

Definição:

Um ponto de bifurcação é chamado *ponto de bifurcação descontínuo* se os multiplicadores de Floquet no ponto de bifurcação é um conjunto de valores (obtido por combinação convexa de (Φ_-, Φ_+)) e um dos valores é 1 ou -1.

Portanto, pela definição acima a combinação convexa entre (Φ_-, Φ_+) determina a existência e o tipo de bifurcação de soluções periódicas.

Anexos

A-) Algoritmo da matriz de transição de estados

Dado o sistema linear com coeficientes periódicos:

$$\dot{x}(t, \alpha) = A(t, \alpha)x(t, \alpha)$$

para obter a matriz de transição de estados apresenta-se o seguinte algoritmo:

Passo - 1: Desacoplamento dos termos periódicos.

$$A(t, \alpha) = A_1(\alpha)f_1(t) + \dots + A_r(\alpha)f_r(t),$$

onde $f_i(t) = f_i(t, \beta)$, $i = 1, \dots, r$, β_i -periódica e $A_i(\alpha)$ são matrizes constantes formadas pelos coeficientes das funções periódicas.

Passo - 2: Normalização do sistema para o período unitário.

$$\bar{A}(\tau, \alpha) = \bar{A}_1(\alpha)f_1(\tau) + \dots + \bar{A}_r(\alpha)f_r(\tau),$$

onde, $\bar{A}_i(\tau) = TA_i(\alpha)$ e T é o período original.

Passo - 3: Cálculo da matriz dos polinômios de Chebyshev alterados de 1º tipo.

$$\hat{T}^t(\tau) = \begin{bmatrix} T_0^*(\tau) & T_1^*(\tau) & \dots & T_{m-1}^*(\tau) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & T_0^*(\tau) & T_1^*(\tau) & \dots & T_{m-1}^*(\tau) \end{bmatrix},$$

onde $T_s^*(\tau) = T_s(2\tau - 1)$ e $T_{s+1}(\tau) = 2\tau T_s(\tau) - T_{s-1}(\tau)$.

Passo - 4: Cálculo das matrizes operacionais de integração (G) e do produto (Q_{d_i}).

$$G = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1/8 & 0 & 1/8 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1/6 & -1/4 & 0 & 1/12 & 0 & \dots & 0 \\ 1/16 & 0 & -1/8 & 0 & 1/16 & \dots & 0 \\ -1/30 & 0 & 0 & -1/12 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1/4(m-1) \\ (-1)^m / 2m(m-2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4(m-2) & 0 \end{bmatrix}_{m \times m}$$

$$Q_{d_i} = \begin{bmatrix} d_0^i & \frac{d_1^i}{2} & \frac{d_2^i}{2} & \dots & \frac{d_{m-1}^i}{2} \\ d_1^i & d_0^i + \frac{d_1^i}{2} & \frac{1}{2}(d_1^i + d_3^i) & \dots & \frac{1}{2}(d_{m-2}^i + d_m^i) \\ d_2^i & \frac{1}{2}(d_1^i + d_3^i) & d_0^i + \frac{d_4^i}{2} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m-1}^i & \frac{1}{2}(d_{m-2}^i + d_m^i) & \dots & \dots & d_0^i + \frac{d_{2m-2}^i}{2} \end{bmatrix},$$

onde $d_r^i = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{f(t) T_s^*(t)}{\sqrt{t(1-t)}} dt = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(\cos^2 \phi) \cos(2s\phi) d\phi$.

Passo - 5: Cálculo das matrizes com os coeficientes de Chebyshev.

$$P(\alpha) = \sum_{i=1}^k \bar{A}_i \otimes [G^T d_i]$$

e

$$L(\alpha) = \sum_{i=1}^k \bar{A}_i \otimes [G^T Q_{d_i}],$$

onde $G^T d_i = G * d_i$ e $GxQ_{d_i} = G^T * Q_{d_i}$.

Passo - 6: Cálculo da matriz de transição de estados.

$$\phi^{(gr\ cheb, it\ pic)}(\tau) = \hat{T}^T(\tau) \left[\hat{I} + \left(\sum_{i=1}^{it\ pic} [L(\alpha)]^{i-1} \right) P(\alpha) \right].$$

B-) Algoritmo da matriz de transição de Floquet e os multiplicadores de Floquet

Dado o sistema linear com coeficientes periódicos:

$$\dot{x}(t, \alpha) = A(t, \alpha)x(t, \alpha)$$

para obter a matriz de transição de Floquet (FTM), calcular os respectivos multiplicadores de Floquet e determinar a estabilidade do sistema, apresenta-se o seguinte algoritmo:

Passo - 1: Cálculo da STM.

Seguir os Passos de 1 a 5 no anexo A.

Passo - 2: Cálculo da FTM para $\alpha = \alpha_0$.

Faça $\tau = 1$ para obter:

$$\phi(T) = \hat{T}^T(1) \left[\hat{I} + \left(\sum_{i=1}^{it \text{ pic}} [L(\alpha_0)]^{i-1} \right) P(\alpha_0) \right]$$

Passo - 3: Cálculo dos multiplicadores de Floquet.

Os multiplicadores de Floquet são as raízes do polinômio característico:

$$p(\mu_i) = \det(\mu_i I - \phi(T))$$

Passo - 4: Análise da dinâmica.

Para a análise da dinâmica, calcula-se os valores absolutos dos multiplicadores de Floquet:

$$|p(\mu_1)| < 1 - \textit{estável}$$

$$|p(\mu_1)| > 1 - \textit{instável}$$

C-) Algoritmo do diagrama de estabilidade

Dado o sistema linear com coeficientes periódicos:

$$\dot{x}(t, \alpha) = A(t, \alpha)x(t, \alpha)$$

o gráfico obtido pela variação do parâmetro α , de modo que os multiplicadores de Floquet tenham valor absoluto 1, é chamado Diagrama de Estabilidade. Nele é possível se observar as regiões de estabilidade e instabilidade separadas por fronteiras, onde pode-se verificar os tipos de bifurcações.

Passo - 1: Cálculo da STM.

Seguir os Passos de 1 a 5 no anexo A.

Passo - 2: Cálculo da FTM para $\alpha \in [\alpha_{inf}, \alpha_{sup}]$.

Faça $\tau = 1$ para obter:

$$\phi(T) = \hat{T}^T(1) \left[\hat{I} + \left(\sum_{i=1}^{it\ pic} [L(\alpha)]^{i-1} \right) P(\alpha) \right]$$

Passo - 3: Cálculo dos multiplicadores de Floquet.

Os multiplicadores de Floquet são as raízes do polinômio característico:

$$p(\mu_i) = \det(\mu_i I - \phi(T, \alpha))$$

Passo - 4: Obtenção do diagrama de estabilidade.

Para a determinar os pontos de bifurcação em função do parâmetro α , calcula-se os valores absolutos dos multiplicadores de Floquet no passo três, observando-se as possibilidades:

i) se $\mu_i = 1$, para algum $i \in [1, \dots, n]$, então $\det(I - \phi(T, \alpha)) = 0$.

Para uma solução kT periódica diz-se que existe uma *Bifurcação Fold (quebra de simetria)*.

ii) se $\mu_i = -1$, para algum $i \in [1, \dots, n]$, então $\det(I + H(\alpha)) = 0$.

Para uma solução $2kT$ periódica diz-se que existe uma *Bifurcação Flip (duplicação no período)*.

iii) se $|\mu_i| = |\bar{\mu}_i| = 1$. Diz-se que existe uma *Bifurcação Hopf*.

D-) Algoritmo do controle

Dado o sistema linear controlado com coeficientes periódicos:

$$\dot{x}(t, \alpha) = A(t, \alpha)x(t, \alpha) + B(t)u(x, t, \alpha)$$

O objetivo do projeto de controle é determinar $u = u(x, t, \alpha)$, tal que, o sistema seja conduzido para uma órbita periódica desejada $y(t)$ ou para um ponto de equilíbrio y_0 .

Passo - 1: Desacoplamento dos termos periódicos, para $\alpha = \alpha_0$.

$$A(t, \alpha_0) = A_1(\alpha_0)f_1(t) + \dots + A_r(\alpha_0)f_r(t),$$

onde $f_i(t) = f_i(t, \beta)$, $i = 1, \dots, r$, β_i -periódica e $A_i(\alpha_0)$ são matrizes constantes formadas pelos coeficientes das funções periódicas.

Passo - 2: Normalização do sistema para o período unitário.

$$\bar{A}(\tau, \alpha_0) = \bar{A}_1(\alpha_0)f_1(\tau) + \dots + \bar{A}_r(\alpha_0)f_r(\tau),$$

onde, $\bar{A}_i(\tau) = TA_i(\alpha_0)$ e T é o período original.

Passo - 3: Cálculo das matrizes operacionais de integração (G) e do produto (Q_{d_i}).

$$G = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1/8 & 0 & 1/8 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1/6 & -1/4 & 0 & 1/12 & 0 & \dots & 0 \\ 1/16 & 0 & -1/8 & 0 & 1/16 & \dots & 0 \\ -1/30 & 0 & 0 & -1/12 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1/4(m-1) \\ (-1)^m / 2m(m-2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4(m-2) & 0 \end{bmatrix}_{m \times m}$$

$$Q_{d_i} = \begin{bmatrix} d_0^i & \frac{d_1^i}{2} & \frac{d_2^i}{2} & \dots & \frac{d_{m-1}^i}{2} \\ d_1^i & d_0^i + \frac{d_1^i}{2} & \frac{1}{2}(d_1^i + d_3^i) & \dots & \frac{1}{2}(d_{m-2}^i + d_m^i) \\ d_2^i & \frac{1}{2}(d_1^i + d_3^i) & d_0^i + \frac{d_4^i}{2} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m-1}^i & \frac{1}{2}(d_{m-2}^i + d_m^i) & \dots & \dots & d_0^i + \frac{d_{2m-2}^i}{2} \end{bmatrix},$$

onde $d_r^i = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{f(t) T_s^*(t)}{\sqrt{t(1-t)}} dt = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(\cos^2 \phi) \cos(2s\phi) d\phi$.

Passo - 3: Cálculo das matrizes com os coeficientes de Chebyshev.

$$P(\alpha_0) = \sum_{i=1}^k \bar{A}_i \otimes [G^T d_i]$$

e

$$L(\alpha_0) = \sum_{i=1}^k \bar{A}_i \otimes [G^T Q_{d_i}],$$

onde $G^T d_i = G^* d_i$ e $GxQ_{d_i} = G^T * Q_{d_i}$.

Passo - 4: Cálculo da FTM, para $\alpha = \alpha_0$.

Faça $\tau = 1$ para obter:

$$\phi(T) = \hat{T}^T(1) \left[\hat{I} + \left(\sum_{i=1}^{it \text{ pic}} [L(\alpha_0)]^{i-1} \right) P(\alpha_0) \right]$$

Passo - 5: Cálculo da matriz constante R na Fatoração da FTM em $\phi(T) = e^{RT}$.

$$R = \frac{1}{2T} \log \phi^2(T)$$

Passo - 6: Escolha de uma matriz de ganhos que seja constante no tempo B_0 , tal que o par $[R, B_0]$ seja controlável.

Passo - 7: Escolha dos novos pólos e a aplicação da técnica de deslocamento de pólos.

Passo – 8: Chamar a Sub-rotina de integração.

Passo – 9: Saída dos estados controlados e “plotagem” dos gráficos.

SUB-ROTINA DE INTEGRAÇÃO

Passo – 1:

seja t ; $T=\pi$;

$$\bar{t}_1 = \frac{t}{T}$$

se $\bar{t}_1 \leq 1$, faça $\bar{t} = \bar{t}_1$ e $n=0$;

se $\bar{t}_1 \geq 1$, faça $n=$ parte inteira de \bar{t}_1 e $\bar{t} = \bar{t}_1 - n$

$$\tau = \bar{t}_1$$

Passo - 2: Cálculo da matriz dos polinômios de Chebyshev alterados de 1º tipo.

$$\hat{T}^t(\tau) = \begin{bmatrix} T_0^*(\tau) & T_1^*(\tau) & \dots & T_{m-1}^*(\tau) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & T_0^*(\tau) & T_1^*(\tau) & \dots & T_{m-1}^*(\tau) \end{bmatrix},$$

Passo - 3: Cálculo da matriz da transformação L-F e sua inversa.

$$Q(\tau) = \hat{T}^t(\tau) \left[\hat{I} + \left(\sum_{i=1}^{it_{pic}} [L(\alpha_0)]^{i-1} \right) P(\alpha_0) \right]^* \phi(T) e^{-R\tau}$$

$$Q^{-1}(\tau)$$

Passo - 4: Cálculo da matriz de ganhos $F(t)$ variante no tempo.

$$F(t) = B^*(t)Q(t)B_0F_0Q^{-1}(t)$$

Passo - 5: Aplicação da lei de controle com realimentação de estados.

$$u_t = -B^*(t)Q(t)B_0F_0Q^{-1}(t)x(t)$$

Passo – 6: Aplicação da lei de controle no sistema.

$$\dot{x}(t, \alpha) = [A(t, \alpha) - B(t)B^*(t)Q(t)B_0F_0Q^{-1}(t)]x(t, \alpha)$$

E-) Programa em código do Matlab® 6.5 para obtenção da STM e do Diagrama e Estabilidade do Oscilador de Duffing

```
T=pi; %periodo do sistema
Abar1=T*[ 0    1 ; -13/2 -1/4];% termo relativo a f1(t)=1

Abar2=T*[ 0    0 ; -9/2  0];% termo relativo a f2(t)=cos(2pit)

Abar3=T*[0    0 ; -6  0];% termo relativo a f3(t)=sen(2pit)

%matriz identidade Chapéu
Ich=[1 0;zeros(19,2);0 1; zeros(19,2)];

%coeficientes da expansão do 1
a0=1;
j=1:1:38;
a(j)=0;

% matriz operacional do produto
a0=1;
j=1:1:38;
a(j)=0;

% matriz operacional do produto
Qd1=eye(20);

%coeficientes da expansão do cos(2pit)
%coeficientes com índice par
j=1:2:37;
c(j)=0;
```

%coeficientes de indice pares

```

c0=0.30424217764409;
c(2)=0.97086786526302;
c(4)=-0.30284915526270;
c(6)=0.02909193396501;
c(8)=-0.00139224399118;
c(10)=4.018994451075495e-005;
c(12)=-7.782767011815312e-007;
c(14)=1.082653034185827e-008;
c(16)=-1.135109177911508e-010;
c(18)=9.295296632678742e-013 ;
c(20)=-6.111364188334749e-015;
c(22)=3.297657841343460e-017 ;
c(24)=-1.486813423673211e-019;
c(26)=5.685578136847147e-022 ;
c(28)=-1.867420621047668e-024;
c(30)=5.325446783539806e-027;
c(32)=-1.331025651671212e-029;
c(34)=2.939643213493515e-032;
c(36)=-5.778609710394926e-035;
c(38)=1.017575641669066e-037;

```

% matriz operacional do produto

```

Qd2=[c0      c(1)/2      c(2)/2      c(3)/2      c(4)/2      c(5)/2      c(6)/2
      c(7)/2      c(8)/2      c(9)/2      c(10)/2     c(11)/2     c(12)/2     c(13)/2
      c(14)/2     c(15)/2     c(16)/2     c(17)/2     c(18)/2     c(19)/2;
      c(1)  c0+c(2)/2  (c(1)+c(3))/2  (c(2)+c(4))/2  (c(3)+c(5))/2  (c(4)+c(6))/2
(c(5) +c(7))/2  (c(6)+c(8))/2  (c(7)+c(9))/2  (c(8)+c(10))/2  (c(9)+c(11))/2
(c(10)+c(12))/2  (c(11)+c(13))/2  (c(12)+c(14))/2  (c(13)+c(15))/2  (c(14)+c(16))/2
(c(15)+c(17))/2  (c(16)+c(18))/2  (c(17)+c(19))/2  (c(18)+c(20))/2;
      c(2)  (c(1) +c(3))/2  c0+c(4)/2  (c(1)+c(5))/2  (c(2)+c(6))/2  (c(3)+c(7))/2
(c(4) +c(8))/2  (c(5)+c(9))/2  (c(6)+c(10))/2  (c(7)+c(11))/2  (c(8)+c(12))/2
(c(9)+c(13))/2  (c(10)+c(14))/2  (c(11)+c(15))/2  (c(12)+c(16))/2  (c(13)+c(17))/2
(c(14)+c(18))/2  (c(15)+c(19))/2  (c(16)+c(20))/2  (c(17)+c(21))/2;
      c(3)  (c(2) +c(4))/2  (c(1) +c(5))/2  c0+c(6)/2  (c(1)+c(7))/2  (c(2)+c(8))/2
(c(3) +c(9))/2  (c(4)+c(10))/2  (c(5)+c(11))/2  (c(6)+c(12))/2  (c(7)+c(13))/2
(c(8)+c(14))/2  (c(9)+c(15))/2  (c(10)+c(16))/2  (c(11)+c(17))/2  (c(12)+c(18))/2
(c(13)+c(19))/2  (c(14)+c(20))/2  (c(15)+c(21))/2  (c(16)+c(22))/2;
      c(4)  (c(3) +c(5))/2  (c(2) +c(6))/2  (c(1) +c(7))/2  c0+c(8)/2  (c(1)+c(9))/2
(c(2) +c(10))/2  (c(3)+c(11))/2  (c(4)+c(12))/2  (c(5)+c(13))/2  (c(6)+c(14))/2

```

$(c(7)+c(14))/2$ $(c(8)+c(16))/2$ $(c(9)+c(17))/2$ $(c(10)+c(18))/2$ $(c(11)+c(19))/2$
 $(c(12)+c(20))/2$ $(c(13)+c(21))/2$ $(c(14)+c(22))/2$ $(c(15)+c(23))/2$;

$c(5)$ $(c(4)+c(6))/2$ $(c(3)+c(7))/2$ $(c(2)+c(8))/2$ $(c(1)+c(9))/2$ $c_0+c(10)/2$
 $(c(1)+c(11))/2$ $(c(2)+c(12))/2$ $(c(3)+c(13))/2$ $(c(4)+c(14))/2$ $(c(5)+c(15))/2$
 $(c(6)+c(16))/2$ $(c(7)+c(17))/2$ $(c(8)+c(18))/2$ $(c(9)+c(19))/2$ $(c(10)+c(20))/2$
 $(c(11)+c(21))/2$ $(c(12)+c(22))/2$ $(c(13)+c(23))/2$ $(c(14)+c(24))/2$;

$c(6)$ $(c(5)+c(7))/2$ $(c(4)+c(8))/2$ $(c(3)+c(9))/2$ $(c(2)+c(10))/2$ $(c(1)$
 $+c(11))/2$ $c_0+c(12)/2$ $(c(1)+c(13))/2$ $(c(2)+c(14))/2$ $(c(3)+c(15))/2$ $(c(4)+c(16))/2$
 $(c(5)+c(17))/2$ $(c(6)+c(18))/2$ $(c(7)+c(19))/2$ $(c(8)+c(20))/2$ $(c(9)+c(21))/2$
 $(c(10)+c(22))/2$ $(c(11)+c(23))/2$ $(c(12)+c(24))/2$ $(c(13)+c(25))/2$;

$c(7)$ $(c(6)+c(8))/2$ $(c(5)+c(9))/2$ $(c(4)+c(10))/2$ $(c(3)+c(11))/2$ $(c(2)$
 $+c(12))/2$ $(c(1)+c(13))/2$ $c_0+c(14)/2$ $(c(1)+c(15))/2$ $(c(2)+c(16))/2$ $(c(3)+c(17))/2$
 $(c(4)+c(18))/2$ $(c(5)+c(19))/2$ $(c(6)+c(20))/2$ $(c(7)+c(21))/2$ $(c(8)+c(22))/2$ $(c(9)$
 $+c(23))/2$ $(c(10)+c(24))/2$ $(c(11)+c(25))/2$ $(c(12)+c(26))/2$;

$c(8)$ $(c(7)+c(9))/2$ $(c(6)+c(10))/2$ $(c(5)+c(11))/2$ $(c(4)+c(12))/2$ $(c(3)$
 $+c(13))/2$ $(c(2)+c(14))/2$ $(c(1)+c(15))/2$ $c_0+c(16)/2$ $(c(1)+c(17))/2$ $(c(2)+c(18))/2$
 $(c(3)+c(19))/2$ $(c(4)+c(20))/2$ $(c(5)+c(21))/2$ $(c(6)+c(22))/2$ $(c(7)+c(23))/2$ $(c(8)$
 $+c(24))/2$ $(c(9)+c(25))/2$ $(c(10)+c(26))/2$ $(c(11)+c(27))/2$;

$c(9)$ $(c(8)+c(10))/2$ $(c(7)+c(11))/2$ $(c(6)+c(12))/2$ $(c(5)+c(13))/2$ $(c(4)$
 $+c(14))/2$ $(c(3)+c(15))/2$ $(c(2)+c(16))/2$ $(c(1)+c(17))/2$ $c_0+c(18)/2$ $(c(1)+c(19))/2$
 $(c(2)+c(20))/2$ $(c(3)+c(21))/2$ $(c(4)+c(22))/2$ $(c(5)+c(23))/2$ $(c(6)+c(24))/2$ $(c(7)$
 $+c(25))/2$ $(c(8)+c(26))/2$ $(c(9)+c(27))/2$ $(c(10)+c(28))/2$;

$c(10)$ $(c(9)+c(11))/2$ $(c(8)+c(12))/2$ $(c(7)+c(13))/2$ $(c(6)+c(14))/2$ $(c(5)$
 $+c(15))/2$ $(c(4)+c(16))/2$ $(c(3)+c(17))/2$ $(c(2)+c(18))/2$ $(c(1)+c(19))/2$ $c_0+c(20)/2$
 $(c(1)+c(21))/2$ $(c(2)+c(22))/2$ $(c(3)+c(23))/2$ $(c(4)+c(24))/2$ $(c(5)+c(25))/2$ $(c(6)$
 $+c(26))/2$ $(c(7)+c(27))/2$ $(c(8)+c(28))/2$ $(c(9)+c(29))/2$;

$c(11)$ $(c(10)+c(12))/2$ $(c(9)+c(13))/2$ $(c(8)+c(14))/2$ $(c(7)+c(15))/2$ $(c(6)$
 $+c(16))/2$ $(c(5)+c(17))/2$ $(c(4)+c(18))/2$ $(c(3)+c(19))/2$ $(c(2)+c(20))/2$
 $(c(1)+c(21))/2$ $c_0+c(22)/2$ $(c(1)+c(23))/2$ $(c(2)+c(24))/2$ $(c(3)+c(25))/2$ $(c(4)$
 $+c(26))/2$ $(c(5)+c(27))/2$ $(c(6)+c(28))/2$ $(c(7)+c(29))/2$ $(c(8)+c(30))/2$;

$c(12) (c(11)+c(13))/2 (c(10)+c(14))/2 (c(9) +c(15))/2 (c(8) +c(16))/2 (c(7)$
 $+c(17))/2 (c(6) +c(18))/2 (c(5)+c(19))/2 (c(4)+c(20))/2 (c(3)+c(21))/2$
 $(c(2)+c(22))/2 (c(1)+c(23))/2 c0+c(24)/2 (c(1)+c(25))/2 (c(2) +c(26))/2 (c(3)$
 $+c(27))/2 (c(4) +c(28))/2 (c(5) +c(29))/2 (c(6) +c(30))/2 (c(7) +c(31))/2;$

$c(13) (c(12)+c(14))/2 (c(11)+c(15))/2 (c(10)+c(16))/2 (c(9) +c(17))/2 (c(8)$
 $+c(18))/2 (c(7) +c(19))/2 (c(6)+c(20))/2 (c(5)+c(21))/2 (c(4)+c(22))/2$
 $(c(3)+c(23))/2 (c(2)+c(24))/2 (c(1)+c(25))/2 c0+c(26)/2 (c(1) +c(27))/2 (c(2)$
 $+c(28))/2 (c(3) +c(29))/2 (c(4) +c(30))/2 (c(5) +c(31))/2 (c(6) +c(32))/2;$

$c(14) (c(13)+c(15))/2 (c(12)+c(16))/2 (c(11)+c(17))/2 (c(10)+c(18))/2 (c(9)$
 $+c(19))/2 (c(8) +c(20))/2 (c(7)+c(21))/2 (c(6)+c(22))/2 (c(5)+c(23))/2$
 $(c(4)+c(24))/2 (c(3)+c(25))/2 (c(2)+c(26))/2 (c(1)+c(27))/2 c0+c(28)/2 (c(1)$
 $+c(29))/2 (c(2) +c(30))/2 (c(3) +c(31))/2 (c(4) +c(32))/2 (c(5) +c(33))/2;$

$c(15) (c(14)+c(16))/2 (c(13)+c(17))/2 (c(12)+c(18))/2 (c(11)+c(19))/2$
 $(c(10)+c(20))/2 (c(9) +c(21))/2 (c(8)+c(22))/2 (c(7)+c(23))/2 (c(6)+c(24))/2$
 $(c(5)+c(25))/2 (c(4)+c(26))/2 (c(3)+c(27))/2 (c(2)+c(28))/2 (c(1) +c(29))/2$
 $c0+c(30)/2 (c(1) +c(31))/2 (c(2) +c(32))/2 (c(3) +c(33))/2 (c(4) +c(34))/2;$

$c(16) (c(15)+c(17))/2 (c(14)+c(18))/2 (c(13)+c(19))/2 (c(12)+c(20))/2$
 $(c(11)+c(21))/2 (c(10)+c(22))/2 (c(9)+c(23))/2 (c(8)+c(24))/2 (c(7)+c(25))/2$
 $(c(6)+c(26))/2 (c(5)+c(27))/2 (c(4)+c(28))/2 (c(3)+c(29))/2 (c(2) +c(30))/2 (c(1)$
 $+c(31))/2 c0+c(32)/2 (c(1) +c(33))/2 (c(2) +c(34))/2 (c(3) +c(35))/2;$

$c(17) (c(16)+c(18))/2 (c(15)+c(19))/2 (c(14)+c(20))/2 (c(13)+c(21))/2$
 $(c(12)+c(22))/2 (c(11)+c(23))/2 (c(10)+c(24))/2 (c(9)+c(25))/2 (c(8)+c(26))/2$
 $(c(7)+c(27))/2 (c(6)+c(28))/2 (c(5)+c(29))/2 (c(4)+c(30))/2 (c(3) +c(31))/2 (c(2)$
 $+c(32))/2 (c(1)+c(33))/2 c0+c(34)/2 (c(1) +c(35))/2 (c(2) +c(36))/2;$

$c(18) (c(17)+c(19))/2 (c(16)+c(20))/2 (c(15)+c(21))/2 (c(14)+c(22))/2$
 $(c(13)+c(23))/2 (c(12)+c(24))/2 (c(11)+c(25))/2 (c(10)+c(26))/2 (c(9)+c(27))/2$
 $(c(8)+c(28))/2 (c(7)+c(29))/2 (c(6)+c(30))/2 (c(5)+c(31))/2 (c(4) +c(32))/2 (c(3)$
 $+c(33))/2 (c(2)+c(34))/2 (c(1) +c(35))/2 c0+c(36)/2 (c(1) +c(37))/2;$

$c(19) (c(18)+c(20))/2 (c(17)+c(21))/2 (c(16)+c(22))/2 (c(15)+c(23))/2$
 $(c(14)+c(24))/2 (c(13)+c(25))/2 (c(12)+c(26))/2 (c(11)+c(27))/2 (c(10)+c(28))/2$

$(c(9)+c(29))/2$ $(c(8)+c(30))/2$ $(c(7)+c(31))/2$ $(c(6)+c(32))/2$ $(c(5)+c(33))/2$ $(c(4)+c(34))/2$ $(c(3)+c(35))/2$ $(c(2)+c(36))/2$ $(c(1)+c(37))/2$ $c0+c(38)/2$];

%coeficientes da expansão do $\text{sen}(2\text{pit})$

s0=0;

i=2:2:38;

s(i)=0;

%coeficientes com índice ímpar

s(1)=-0.56923068635951;

s(21)=-4.595956146182953e-016;

s(3)=0.66691667240598;

s(23)=2.262305928197399e-018;

s(5)=-0.10428236873424;

s(25)=-9.377647799153133e-021;

s(7)=0.00684063353699;

s(27)=3.318599491698523e-023;

s(9)=-2.500068849503864e-004;

s(29)=-1.014380222196153e-025;

s(11)=5.850248308639134e-006;

s(31)=2.705193531668121e-028;

s(13)=-9.534772750299359e-008;

s(33)=-6.349659955384189e-031;

s(15)=1.145638441709465e-009;

s(35)=1.321902223071495e-033;

s(17)=-1.057427261753912e-011;

s(37)=-2.457568364289569e-036;

s(19)=7.735270995404307e-014;

% matriz operacional do produto

Qd3=[s0 s(1)/2 s(2)/2 s(3)/2 s(4)/2 s(5)/2 s(6)/2

s(7)/2 s(8)/2 s(9)/2 s(10)/2 s(11)/2 s(12)/2 s(13)/2

s(14)/2 s(15)/2 s(16)/2 s(17)/2 s(18)/2 s(19)/2 ;

s(1) s0+s(2)/2 (s(1)+s(3))/2 (s(2)+s(4))/2 (s(3)+s(5))/2 (s(4)+s(6))/2

(s(5)+s(7))/2 (s(6)+s(8))/2 (s(7)+s(9))/2 (s(8)+s(10))/2 (s(9)+s(11))/2

(s(10)+s(12))/2 (s(11)+s(13))/2 (s(12)+s(14))/2 (s(13)+s(15))/2 (s(14)+s(16))/2

(s(15)+s(17))/2 (s(16)+s(18))/2 (s(17)+s(19))/2 (s(18)+s(20))/2;

s(2) (s(1)+s(3))/2 s0+s(4)/2 (s(1)+s(5))/2 (s(2)+s(6))/2 (s(3)+s(7))/2

(s(4)+s(8))/2 (s(5)+s(9))/2 (s(6)+s(10))/2 (s(7)+s(11))/2 (s(8)+s(12))/2

$$\begin{aligned}
& (s(9)+s(13))/2 \quad (s(10)+s(14))/2 \quad (s(11)+s(15))/2 \quad (s(12)+s(16))/2 \quad (s(13)+s(17))/2 \\
& (s(14)+s(18))/2 \quad (s(15)+s(19))/2 \quad (s(16)+s(20))/2 \quad (s(17)+s(21))/2; \\
& \quad s(3) \quad (s(2)+s(4))/2 \quad (s(1)+s(5))/2 \quad s_0+s(6)/2 \quad (s(1)+s(7))/2 \quad (s(2)+s(8))/2 \\
& (s(3)+s(9))/2 \quad (s(4)+s(10))/2 \quad (s(5)+s(11))/2 \quad (s(6)+s(12))/2 \quad (s(7)+s(13))/2 \\
& (s(8)+s(14))/2 \quad (s(9)+s(15))/2 \quad (s(10)+s(16))/2 \quad (s(11)+s(17))/2 \quad (s(12)+s(18))/2 \\
& (s(13)+s(19))/2 \quad (s(14)+s(20))/2 \quad (s(15)+s(21))/2 \quad (s(16)+s(22))/2; \\
& \quad s(4) \quad (s(3)+s(5))/2 \quad (s(2)+s(6))/2 \quad (s(1)+s(7))/2 \quad s_0+s(8)/2 \quad (s(1)+s(9))/2 \\
& (s(2)+s(10))/2 \quad (s(3)+s(11))/2 \quad (s(4)+s(12))/2 \quad (s(5)+s(13))/2 \quad (s(6)+s(14))/2 \\
& (s(7)+s(14))/2 \quad (s(8)+s(16))/2 \quad (s(9)+s(17))/2 \quad (s(10)+s(18))/2 \quad (s(11)+s(19))/2 \\
& (s(12)+s(20))/2 \quad (s(13)+s(21))/2 \quad (s(14)+s(22))/2 \quad (s(15)+s(23))/2; \\
& \quad s(5) \quad (s(4)+s(6))/2 \quad (s(3)+s(7))/2 \quad (s(2)+s(8))/2 \quad (s(1)+s(9))/2 \quad s_0+s(10)/2 \\
& (s(1)+s(11))/2 \quad (s(2)+s(12))/2 \quad (s(3)+s(13))/2 \quad (s(4)+s(14))/2 \quad (s(5)+s(15))/2 \\
& (s(6)+s(16))/2 \quad (s(7)+s(17))/2 \quad (s(8)+s(18))/2 \quad (s(9)+s(19))/2 \quad (s(10)+s(20))/2 \\
& (s(11)+s(21))/2 \quad (s(12)+s(22))/2 \quad (s(13)+s(23))/2 \quad (s(14)+s(24))/2; \\
& \quad s(6) \quad (s(5)+s(7))/2 \quad (s(4)+s(8))/2 \quad (s(3)+s(9))/2 \quad (s(2)+s(10))/2 \quad (s(1)+s(11))/2 \\
& s_0+s(12)/2 \quad (s(1)+s(13))/2 \quad (s(2)+s(14))/2 \quad (s(3)+s(15))/2 \quad (s(4)+s(16))/2 \quad (s(5)+s(17))/2 \\
& (s(6)+s(18))/2 \quad (s(7)+s(19))/2 \quad (s(8)+s(20))/2 \quad (s(9)+s(21))/2 \quad (s(10)+s(22))/2 \\
& (s(11)+s(23))/2 \quad (s(12)+s(24))/2 \quad (s(13)+s(25))/2; \\
& \quad s(7) \quad (s(6)+s(8))/2 \quad (s(5)+s(9))/2 \quad (s(4)+s(10))/2 \quad (s(3)+s(11))/2 \quad (s(2)+s(12))/2 \\
& (s(1)+s(13))/2 \quad s_0+s(14)/2 \quad (s(1)+s(15))/2 \quad (s(2)+s(16))/2 \quad (s(3)+s(17))/2 \\
& (s(4)+s(18))/2 \quad (s(5)+s(19))/2 \quad (s(6)+s(20))/2 \quad (s(7)+s(21))/2 \quad (s(8)+s(22))/2 \quad (s(9) \\
& +s(23))/2 \quad (s(10)+s(24))/2 \quad (s(11)+s(25))/2 \quad (s(12)+s(26))/2; \\
& \quad s(8) \quad (s(7)+s(9))/2 \quad (s(6)+s(10))/2 \quad (s(5)+s(11))/2 \quad (s(4)+s(12))/2 \quad (s(3)+s(13))/2 \\
& (s(2)+s(14))/2 \quad (s(1)+s(15))/2 \quad s_0+s(16)/2 \quad (s(1)+s(17))/2 \quad (s(2)+s(18))/2 \\
& (s(3)+s(19))/2 \quad (s(4)+s(20))/2 \quad (s(5)+s(21))/2 \quad (s(6)+s(22))/2 \quad (s(7)+s(23))/2 \quad (s(8) \\
& +s(24))/2 \quad (s(9) +s(25))/2 \quad (s(10)+s(26))/2 \quad (s(11)+s(27))/2; \\
& \quad s(9) \quad (s(8)+s(10))/2 \quad (s(7)+s(11))/2 \quad (s(6)+s(12))/2 \quad (s(5)+s(13))/2 \quad (s(4)+s(14))/2 \\
& (s(3)+s(15))/2 \quad (s(2)+s(16))/2 \quad (s(1)+s(17))/2 \quad s_0+s(18)/2 \quad (s(1)+s(19))/2 \\
& (s(2)+s(20))/2 \quad (s(3)+s(21))/2 \quad (s(4)+s(22))/2 \quad (s(5)+s(23))/2 \quad (s(6)+s(24))/2 \quad (s(7) \\
& +s(25))/2 \quad (s(8) +s(26))/2 \quad (s(9) +s(27))/2 \quad (s(10)+s(28))/2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& s(10) (s(9)+s(11))/2 (s(8)+s(12))/2 (s(7)+s(13))/2 (s(6)+s(14))/2 (s(5)+s(15))/2 \\
& (s(4)+s(16))/2 (s(3)+s(17))/2 (s(2)+s(18))/2 (s(1)+s(19))/2 s_0+s(20)/2 \\
& (s(1)+s(21))/2 (s(2)+s(22))/2 (s(3)+s(23))/2 (s(4)+s(24))/2 (s(5)+s(25))/2 (s(6) \\
& +s(26))/2 (s(7) +s(27))/2 (s(8) +s(28))/2 (s(9) +s(29))/2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& s(11) (s(10)+s(12))/2 (s(9)+s(13))/2 (s(8)+s(14))/2 (s(7)+s(15))/2 (s(6)+s(16))/2 \\
& (s(5)+s(17))/2 (s(4)+s(18))/2 (s(3)+s(19))/2 (s(2)+s(20))/2 (s(1)+s(21))/2 \\
& s_0+s(22)/2 (s(1)+s(23))/2 (s(2)+s(24))/2 (s(3)+s(25))/2 (s(4)+s(26))/2 (s(5) \\
& +s(27))/2 (s(6) +s(28))/2 (s(7) +s(29))/2 (s(8) +s(30))/2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& s(12) (s(11)+s(13))/2 (s(10)+s(14))/2 (s(9)+s(15))/2 (s(8)+s(16))/2 (s(7)+s(17))/2 \\
& (s(6)+s(18))/2 (s(5)+s(19))/2 (s(4)+s(20))/2 (s(3)+s(21))/2 (s(2)+s(22))/2 \\
& (s(1)+s(23))/2 s_0+s(24)/2 (s(1)+s(25))/2 (s(2)+s(26))/2 (s(3)+s(27))/2 (s(4) \\
& +s(28))/2 (s(5) +s(29))/2 (s(6) +s(30))/2 (s(7) +s(31))/2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& s(13) (s(12)+s(14))/2 (s(11)+s(15))/2 (s(10)+s(16))/2 (s(9)+s(17))/2 (s(8)+s(18))/2 \\
& (s(7)+s(19))/2 (s(6)+s(20))/2 (s(5)+s(21))/2 (s(4)+s(22))/2 (s(3)+s(23))/2 \\
& (s(2)+s(24))/2 (s(1)+s(25))/2 s_0+s(26)/2 (s(1)+s(27))/2 (s(2)+s(28))/2 (s(3) \\
& +s(29))/2 (s(4) +s(30))/2 (s(5) +s(31))/2 (s(6) +s(32))/2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& s(14) (s(13)+s(15))/2 (s(12)+s(16))/2 (s(11)+s(17))/2 (s(10)+s(18))/2 (s(9)+s(19))/2 \\
& (s(8)+s(20))/2 (s(7)+s(21))/2 (s(6)+s(22))/2 (s(5)+s(23))/2 (s(4)+s(24))/2 \\
& (s(3)+s(25))/2 (s(2)+s(26))/2 (s(1)+s(27))/2 s_0+s(28)/2 (s(1)+s(29))/2 (s(2) \\
& +s(30))/2 (s(3) +s(31))/2 (s(4) +s(32))/2 (s(5) +s(33))/2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& s(15) (s(14)+s(16))/2 (s(13)+s(17))/2 (s(12)+s(18))/2 (s(11)+s(19))/2 (s(10)+s(20))/2 \\
& (s(9)+s(21))/2 (s(8)+s(22))/2 (s(7)+s(23))/2 (s(6)+s(24))/2 (s(5)+s(25))/2 \\
& (s(4)+s(26))/2 (s(3)+s(27))/2 (s(2)+s(28))/2 (s(1)+s(29))/2 s_0+s(30)/2 (s(1) \\
& +s(31))/2 (s(2) +s(32))/2 (s(3) +s(33))/2 (s(4) +s(34))/2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& s(16) (s(15)+s(17))/2 (s(14)+s(18))/2 (s(13)+s(19))/2 (s(12)+s(20))/2 (s(11)+s(21))/2 \\
& (s(10)+s(22))/2 (s(9)+s(23))/2 (s(8)+s(24))/2 (s(7)+s(25))/2 (s(6)+s(26))/2 \\
& (s(5)+s(27))/2 (s(4)+s(28))/2 (s(3)+s(29))/2 (s(2)+s(30))/2 (s(1)+s(31))/2 \\
& s_0+s(32)/2 (s(1) +s(33))/2 (s(2) +s(34))/2 (s(3) +s(35))/2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& s(17) (s(16)+s(18))/2 (s(15)+s(19))/2 (s(14)+s(20))/2 (s(13)+s(21))/2 (s(12)+s(22))/2 \\
& (s(11)+s(23))/2 (s(10)+s(24))/2 (s(9)+s(25))/2 (s(8)+s(26))/2 (s(7)+s(27))/2
\end{aligned}$$

$(s(6)+s(28))/2$ $(s(5)+s(29))/2$ $(s(4)+s(30))/2$ $(s(3)+s(31))/2$ $(s(2)+s(32))/2$
 $(s(1)+s(33))/2$ $s_0+s(34)/2$ $(s(1)+s(35))/2$ $(s(2)+s(36))/2$;

$s(18)$ $(s(17)+s(19))/2$ $(s(16)+s(20))/2$ $(s(15)+s(21))/2$ $(s(14)+s(22))/2$ $(s(13)+s(23))/2$
 $(s(12)+s(24))/2$ $(s(11)+s(25))/2$ $(s(10)+s(26))/2$ $(s(9)+s(27))/2$ $(s(8)+s(28))/2$
 $(s(7)+s(29))/2$ $(s(6)+s(30))/2$ $(s(5)+s(31))/2$ $(s(4)+s(32))/2$ $(s(3)+s(33))/2$
 $(s(2)+s(34))/2$ $(s(1)+s(35))/2$ $s_0+s(36)/2$ $(s(1)+s(37))/2$;

$s(19)$ $(s(18)+s(20))/2$ $(s(17)+s(21))/2$ $(s(16)+s(22))/2$ $(s(15)+s(23))/2$ $(s(14)+s(24))/2$
 $(s(13)+s(25))/2$ $(s(12)+s(26))/2$ $(s(11)+s(27))/2$ $(s(10)+s(28))/2$ $(s(9)+s(29))/2$
 $(s(8)+s(30))/2$ $(s(7)+s(31))/2$ $(s(6)+s(32))/2$ $(s(5)+s(33))/2$ $(s(4)+s(34))/2$
 $(s(3)+s(35))/2$ $(s(2)+s(36))/2$ $(s(1)+s(37))/2$ $s_0+s(38)/2$];

%Matriz operacional integração

```

G=[1/2  1/2  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0;
-1/8  0  1/8  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0;
-1/6  -1/4  0  1/12  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0;
1/16  0  -1/8  0  1/16  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0;
-1/30  0  0  -1/12  0  1/20  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0;
1/48  0  0  0  -1/16  0  1/24  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0;
-1/70  0  0  0  0  -1/20  0  1/28  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0;
1/96  0  0  0  0  0  -1/24  0  1/32  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0;
-1/126  0  0  0  0  0  0  -1/28  0  1/36  0  0  0  0  0  0  0  0  0;
1/160  0  0  0  0  0  0  0  -1/32  0  1/40  0  0  0  0  0  0  0  0  0;
-1/198  0  0  0  0  0  0  0  0  -1/36  0  1/44  0  0  0  0  0  0  0  0;
1/240  0  0  0  0  0  0  0  0  0  -1/40  0  1/48  0  0  0  0  0  0  0;
-1/286  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  -1/44  0  1/52  0  0  0  0  0  0;
1/336  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  -1/48  0  1/56  0  0  0  0  0;
-1/390  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  -1/52  0  1/60  0  0  0  0;
1/448  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  -1/56  0  1/64  0  0  0;
-1/510  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  -1/60  0  1/68  0  0;
1/576  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  -1/64  0  1/72  0;
  
```

```
-1/646  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  -1/68  0  1/76;
1/720  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  -1/72  0];
```

Gt=G';

%Calculo de L(alfa)=L1+L2=Abar1 x [Gt] + Abar2 x [GtQd]

%Calculo de L1

GxQd1=Gt*Qd1;

L1=[Abar1(1,1)*GxQd1 Abar1(1,2)*GxQd1;

Abar1(2,1)*GxQd1 Abar1(2,2)*GxQd1];

%Calculo de L2

GxQd2=Gt*Qd2;

L2=[Abar2(1,1)*GxQd2 Abar2(1,2)*GxQd2;

Abar2(2,1)*GxQd2 Abar2(2,2)*GxQd2];

%Calculo de L3

GxQd3=Gt*Qd3;

L3=[Abar3(1,1)*GxQd3 Abar3(1,2)*GxQd3;

Abar3(2,1)*GxQd3 Abar3(2,2)*GxQd3];

L=L1+L2+L3;

%Calculo da P(alfa)=Abar1 x [Gtd1] + Abar2 x [Gtd2]= Abar1 x Gt(1 0 0 0 0 0 0)' + Abar2
x Gt(d0 d1 ... d7)' = P1 + P2 +P3

d1=[1 0];

d2=[c0 c(1) c(2) c(3) c(4) c(5) c(6) c(7) c(8) c(9) c(10) c(11) c(12) c(13) c(14) c(15) c(16)
c(17) c(18) c(19)];

d3=[s0 s(1) s(2) s(3) s(4) s(5) s(6) s(7) s(8) s(9) s(10) s(11) s(12) s(13) s(14) s(15) s(16)
s(17) s(18) s(19)];

%Calculo de P1

Gtd1=Gt*d1;

P1=[Abar1(1,1)*Gtd1 Abar1(1,2)*Gtd1; Abar1(2,1)*Gtd1 Abar1(2,2)*Gtd1];

```

%Calculo de P2
Gtd2=Gt*d2;
P2=[Abar2(1,1)*Gtd2 Abar2(1,2)*Gtd2; Abar2(2,1)*Gtd2 Abar2(2,2)*Gtd2];

```

```

%Calculo de P3
Gtd3=Gt*d3;
P3=[Abar3(1,1)*Gtd3 Abar3(1,2)*Gtd3; Abar3(2,1)*Gtd3 Abar3(2,2)*Gtd3];

```

```

P=P1+P2+P3;

```

```

% Calculo da Matriz de Transição de Estado: STM - Fi - equação (2.78)

```

```

LL=eye(40)+L+L^2+L^3+L^4+L^5+L^6+L^7+L^8+L^9+L^10+L^11+L^12+L^13+L^14+
L^15+L^16+L^17+L^18+L^19+L^20+L^21+L^22+L^23+L^24+L^25+L^26+L^27+L
^28+L^29+L^30 + L^31+L^32+L^33+L^34+L^35+L^36+L^37+L^38+L^39+L^40;

```

```

tt=1;

```

```

pp1= 2*tt-1;
pp2=2*(2*tt-1)^2-1;
pp3=4*(2*tt-1)^3-6*tt+3;
pp4=8*(2*tt-1)^4-8*(2*tt-1)^2+1;
pp5=16*(2*tt-1)^5-20*(2*tt-1)^3+10*tt-5;
pp6=32*(2*tt-1)^6-48*(2*tt-1)^4+18*(2*tt-1)^2-1;
pp7=64*(2*tt-1)^7-112*(2*tt-1)^5+56*(2*tt-1)^3-14*tt+7;
pp8=128*(2*tt-1)^8-256*(2*tt-1)^6+160*(2*tt-1)^4-32*(2*tt-1)^2+1;
pp9=256*(2*tt-1)^9-576*(2*tt-1)^7+432*(2*tt-1)^5-120*(2*tt-1)^3+18*tt-9;
pp10=512*(2*tt-1)^10-1280*(2*tt-1)^8+1120*(2*tt-1)^6-400*(2*tt-1)^4+50*(2*tt-1)^2-1;
pp11=1024*(2*tt-1)^11-2816*(2*tt-1)^9+2816*(2*tt-1)^7-1232*(2*tt-1)^5+220*(2*tt-1)^3-
22*tt+11;
pp12=2048*(2*tt-1)^12-6144*(2*tt-1)^10+6912*(2*tt-1)^8-3584*(2*tt-1)^6+840*(2*tt-1)^4-
72*(2*tt-1)^2+1;

```

```

pp13=4096*(2*tt-1)^13-13312*(2*tt-1)^11+16640*(2*tt-1)^9-9984*(2*tt-1)^7+2912*(2*tt-
1)^5-364*(2*tt-1)^3+26*tt-13;
pp14=8192*(2*tt-1)^14-28672*(2*tt-1)^12+39424*(2*tt-1)^10-26880*(2*tt-1)^8+9408*(2*tt-
1)^6-1568*(2*tt-1)^4+98*(2*tt-1)^2-1;
pp15=16384*(2*tt-1)^15-61440*(2*tt-1)^13+92160*(2*tt-1)^11-70400*(2*tt-1)^9+28800*(2*tt-
1)^7-6048*(2*tt-1)^5+560*(2*tt-1)^3-30*tt+15;
pp16=1-128*(2*tt-1)^2+2688*(2*tt-1)^4+84480*(2*tt-1)^8-21504*(2*tt-1)^6+32768*(2*tt-
1)^16-131072*(2*tt-1)^14+212992*(2*tt-1)^12-180224*(2*tt-1)^10;
pp17=34*tt-17-816*(2*tt-1)^3+11424*(2*tt-1)^5+239360*(2*tt-1)^9-71808*(2*tt-
1)^7+65536*(2*tt-1)^17-278528*(2*tt-1)^15+487424*(2*tt-1)^13-452608*(2*tt-1)^11;
pp18=162*(2*tt-1)^2-4320*(2*tt-1)^4+131072*(2*tt-1)^18-589824*(2*tt-1)^16+1105920*(2*tt-
1)^14-1118208*(2*tt-1)^12+658944*(2*tt-1)^10-228096*(2*tt-1)^8+44352*(2*tt-1)^6-
1;
pp19=-38*tt+19+1140*(2*tt-1)^3-20064*(2*tt-1)^5+262144*(2*tt-1)^19-695552*(2*tt-
1)^9+160512*(2*tt-1)^7-1245184*(2*tt-1)^17+2490368*(2*tt-1)^15-2723840*(2*tt-
1)^13+1770496*(2*tt-1)^11;

pp=[1;pp1;pp2;pp3;pp4;pp5;pp6;pp7;pp8;pp9;pp10;pp11;pp12;pp13;pp14;pp15;pp16;pp17;pp18;
pp19]';

```

```

Tcht=[pp zeros(1,20); zeros(1,20) pp];%matriz identidade Chapéu

```

```

Fi=Tcht*(Ich+LL*P);%Fi calculada para t em (0 1)

```

```

MF=eig(Fi) %multiplicadores de Floquet

```

```

MF_abs=abs(Fi) %valor absoluto dos multiplicadores de Floquet

```

```

%Diagrama de Estabilidade
mf=1;
while mf<7
MFi=MF(mf,:);

if ~isreal(MFi) %MF complexo
    if abs(1-abs(MF(mf)))<0.008 %bif Hopf
        %MFabs=abs(MF(mf))
        conth=conth+1
        xH(conth)=ene;
        yH(conth)=del;
        mf=mf+1;
    end
    else %MF real
        if abs(1+MFi)<0.01 %bif flip
            contfp=contfp+1
            xFp(contfp)=ene;
            yFp(contfp)=del;
        else
            if abs(1-MFi)<0.008 %bif fold
                contfd=contfd+1
                xFd(contfd)=ene;
                yFd(contfd)=del;
            end
        end
    end
end
mf=mf+1;
end
end
end

```

```
%Plotagem dos gráficos
figure(2)
title('GRAFICO DE ESTABILIDADE')
plot(xFp,yFp,'k.','markersize',4)
xlabel('zeta');
ylabel('n');
hold on
plot(xH,yH,'r.','markersize',4)
hold on
plot(xFd,yFd,'k.','markersize',5)
```

F-) Equação do movimento do pêndulo excitado parametricamente

O sistema modelado é um pêndulo com excitação paramétrica vertical no suporte. Nessa seção é apresentada a modelagem matemática utilizando a equação de Lagrange. A modelagem do sistema é desenvolvida a partir do seu Lagrangeano, obtendo-se as energias cinética e potencial em relação às coordenadas x e y como mostrado a seguir.

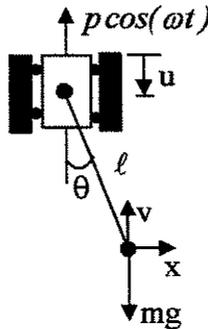


Figura 4.1 - Pêndulo com excitação paramétrica vertical no suporte.

Lagrangeano do sistema não controlado

As equações do movimento do sistema serão obtidas através das equações de Lagrange. A seguir, calculam-se as energias cinéticas e potenciais do sistema representado na Figura 4.1.

Energia cinética

A energia cinética total do sistema representado pela Figura 4.1 é dada por:

$$T = T_{horizontal} + T_{vertical} \quad (1)$$

onde $T_{horizontal} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ é a energia cinética em relação a coordenada x e $T_{vertical} = \frac{1}{2}m\dot{y}^2$ é a energia cinética em relação a coordenada y .

A posição do pêndulo em relação a coordenada x é dada pela seguinte expressão:

$$x = l \sin \theta . \quad (2)$$

A velocidade na direção x é dada por:

$$\dot{x} = l \dot{\theta} \cos \theta . \quad (3)$$

Substituindo (3) na expressão da energia cinética tem-se a energia cinética para a coordenada x

$$T_{Horizontal} = \frac{1}{2} m (\ell \dot{\theta} \cos \theta)^2. \quad (4)$$

A expressão para a posição do pêndulo em relação a coordenada y é dada por

$$y = -\ell \cos \theta - A \cos(\omega t) \quad (5)$$

Derivando (5), em relação ao tempo, obtém-se a expressão da velocidade

$$\dot{y} = \ell \dot{\theta} \sin \theta + A \omega \sin(\omega t). \quad (6)$$

Finalmente, tem-se a energia cinética para a coordenada y

$$T_{vertical} = \frac{1}{2} m (\ell \dot{\theta} \sin \theta + A \omega \sin(\omega t))^2. \quad (7)$$

Substituindo (4) e (7) em (1) obtém-se a energia cinética total do sistema

$$T = \frac{1}{2} m ((\ell \dot{\theta} \cos \theta)^2 + (\ell \dot{\theta} \sin \theta + A \omega \sin(\omega t))^2). \quad (8)$$

ou seja

$$T = \frac{1}{2} m (\ell^2 \dot{\theta}^2 + 2\ell \dot{\theta} A \omega \sin(\omega t) \sin \theta + A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t)) \quad (9)$$

Energia potencial

A energia potencial gravitacional total do sistema representado pela Fig. 1 é dada por

$$V = V_{horizontal} + V_{vertical} \quad (10)$$

onde $V_{horizontal} = -mg\ell \cos \theta$ é a energia potencial gravitacional em relação a coordenada x ,

$V_{vertical} = A \cos(\omega t)$ é a energia potencial gravitacional em relação a coordenada y .

Portanto,

$$V = -mg(\ell \cos \theta - A \cos(\omega t)) \quad (11)$$

Desta forma, o Lagrangeano $L = T - V$ é dado por

$$L = \frac{1}{2} m (\ell^2 \dot{\theta}^2 + 2\ell \dot{\theta} A \omega \sin(\omega t) \sin \theta + A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t)) + mg(\ell \cos \theta - A \cos(\omega t)) \quad (12)$$

Equações do movimento de Lagrange

A seguir, apresentam-se as equações de Lagrange em relação ao deslocamento angular θ para obter a equação do movimento do sistema.

A equação de Lagrange em relação ao deslocamento angular θ é dada por:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (12)$$

Substituindo (11) em (12) obtém-se as equações do movimento do sistema

$$\ddot{\theta} + \frac{2\dot{\theta}}{l} + \frac{A\omega^2 \cos(\omega t) \text{sen}(\theta)}{l} + \frac{g \text{sen}(\theta)}{l} = 0 \quad (13)$$

Adimensionalizando a equação (13):

$$p = \frac{A\omega^2}{g}, \quad \beta = \frac{2}{l} \text{ e } g = l,$$

temos:

$$\ddot{\theta} + \beta \dot{\theta} + (1 + p \cos(\omega t)) \text{sen}(\theta) = 0 \quad (14)$$

Súmula Curricular

Proceedings of DETC'05: ASME 2005 Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference Long Beach, CA, USA, September 24 – 28, 2005. (submetido)

- Peruzzi, N.J., Balthazar, J.M., Pontes, B. R., *Control of a non-ideal system with periodics coefficients*

Proceedings of the Workshop on Nonlinear Modeling and their Applications, 4-6 may, 2005 – SP – Brazil.

- Peruzzi, N.J., Balthazar, J.M., Pontes, B. R., Control of a non-ideal system with periodics coefficients *Dynamical Analysis and Control of a Mono-rail Nonideal System.*

4º Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicações

6-10 de junho de 2005 - UNESP – Campus de Bauru

- Peruzzi, N.J., Balthazar, J.M., Pontes, B.R. *Dinâmica e Controle de Sistemas Vibratórios Ideais com Coeficientes Periódicos.*

CONEM – BELÉM – 2004

- Peruzzi, N.J., Balthazar, J.M. *Controle de Vibrações Caóticas de Um Pêndulo Excitado.*

3º Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicações

03-06 de maio de 2004 - Unesp – Ilha Solteira

- Mini-curso - *Controle de Sistemas Periódicos Baseados na Técnica S-W*, p. 1-41.

XXVI CNMAC – Unesp - S.J. Rio Preto – SP, 2003

- Peruzzi, N.J., et al, *Análise e Controle de um Pêndulo Excitado Periodicamente via transformação de Lyaunov –Floquet.*

2º Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicações
18 a 22 de agosto de 2003 – ITA-S.José dos Campos

- Peruzzi, N.J., et al, *Aproximação (Shr) para o Controle de Vibrações Caóticas de um Pêndulo Excitado Parametricamente*, p. 1769-1780.
- Andrade, V.S, Peruzzi, N.J., et al, *Modelagem de um Sistema Dinâmico do Tipo Pendular*, p. 1742-1750.
- Andrade, V.S, Peruzzi, N.J., et al, *Análise da Dinâmica Caótica de um Pêndulo com Excitação Paramétrica do Suporte*, p. 1751-1758.

Anexo do Trabalho submetido

DETC2005/VIB-84.76

CONTROL OF A NON-IDEAL SYSTEM WITH PERIODICS COEFFICIENTS

N.J.Peruzzi

Department of Exact Science
State University of Sao Paulo,
Jaboticabal, SP, Brazil.

J.M. Balthazar

Department of Applied Mathematics
State University of Sao Paulo
Rio Claro, SP, Brazil

B.R.Pontes

Department of Applied Mathematics
State University of Sao Paulo
Bauru, SP, Brazil

ABSTRACT

In this work, a new numerical method is used for the analysis and control of a non-ideal system with periodic coefficients that has been recently denominated in literature as S-W method. The S-W is a method to approach States Transition Matrix (STM) for time-periodic coefficients systems. The method that can be used for analysis and control of periodic systems is based on the Chebyshev polynomial expansion, in the iterative Picard method and in the Lyapunov-Floquet transformation (L-F transformation). The non ideal system in subject is a transporter of loads that is composed for mono-rail system, a car and an inverted pendulum.

INTRODUCTION

The operation of periodical mechanical systems depends, basically, of two effects: the dissipation (damping) and the excitation.

The dissipation is produced by the friction. It is the friction the responsible for the reduction of the amount of kinetic and potential energy total mechanical energy of the system.

The excitation will depend on the characteristics that constitute of the mechanical system. When the excitation is not influenced by the response of the system, this is said ideal

excitation or has origin in an ideal source of energy. On the other hand, when the excitation is influenced by the response of the system, the excitation is said to be non ideal [1].

As a first characteristic that differentiate them, the non-ideal vibratory system has one more degree of freedom than its corresponding ideal system, because the dynamic non-ideal system presents the equation that describes the interaction of the source of energy with the ideal dynamic system.

Therefore, in non-ideal system the dynamics depends directly on the properties of the excitation whose available potency in the source of energy, generally, it is limited.

As a second characteristic, is observed that the dynamics of a non ideal system approaches of the ideal case as the supplied potency becomes sufficiently big and vice-versa.

The ideal case is common in the literature but, the case non ideal that is more realistic and, it only recently, comes being explored more intensity. A revision of the main researches on systems non ideals is found in [2].

An inherent problem to the transport of loads, being this fact in platforms or suspended by cables, it is the stabilization of the oscillations that can appear during the displacement, due to the acceleration or induced by the driving system denominated phenomenon of phenomenon Sommerfeld.

Those effects demand that the procedures of load transport are executed in low speed, due to the difficulty of precise positioning of the loads and to avoid impacts. A classic example of that case is the lift system and load carriage for track crane bridge in industries and in the containers transport. The positioning and the movement of precision is harmed due to the oscillations or vibrations induced by the driving system.

In this work, the problems of oscillations auto-excited in transport of loads were considered. Firstly, the system mono-rail, was represented by a system: inverted pendulum-car-motor, was modeled. Then, the influence of motor on non ideal problem was analyzed and, finally, the system was controlled by S-W method.

MODEL

The physical system with three degrees of freedom, shown in the figure (1), represents an inverted pendulum and a car of the system mono-rail. A primary system consists of a car whose mass is m_c , a linear spring with elasticity coefficient k and a damping that is represented by the coefficient c . The driving system of the car (transmission of the potency motor) is modeled by a force F . The force of driving system F is transmitted through a support where the elastic properties and of reduction of the system are considered.

A secondary system, where the transported load is modeled, is composed by an inverted pendulum whose mass is m_p . In the pendulum support there is a spring of twist stiffness whose elasticity coefficient is \bar{K} . This spring will force the pendulum staying in the vertical position. Still about the pendulum support, we will suppose that when the system car-pendulum is in movement this support has a small vertical periodic vibration

of type $f(t) = \bar{A} \text{sen} \omega t$, where \bar{A} represents the amplitude of the vibration and ω the frequency.

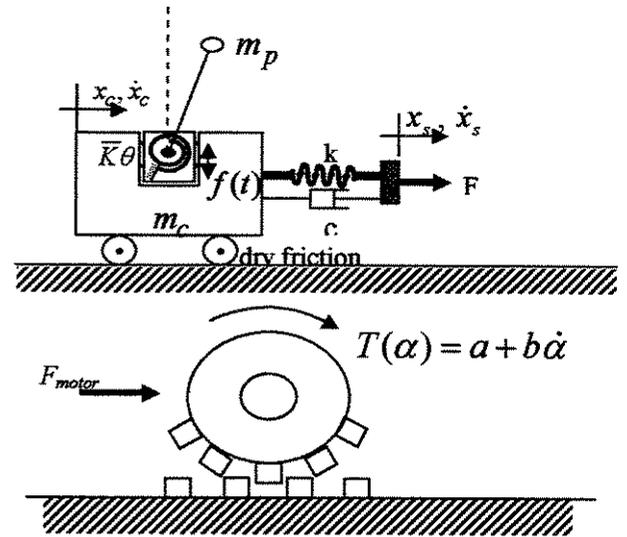


figure 1 – Non ideal physical system

The equations of movement of the system were obtained from the equations of Lagrange, they are:

$$\begin{cases} m_p \ell^2 \ddot{\theta} + m_p \ell \cos \theta \ddot{x}_c + \bar{K} \theta + m_p \ell (\bar{A} \omega^2 \text{sen} \omega t - g) \text{sen} \theta = 0 \\ (m_c + m_p) \ddot{x}_c + m_p \ell \ddot{\theta} \cos \theta - m_p \ell \dot{\theta}^2 \text{sen} \theta - k(\phi - x_c) - c(\dot{\phi} - \dot{x}_c) = 0 \\ J \ddot{\phi} + (b+c)r \dot{\phi} + k r^2 \phi - k r x_c - c \dot{x}_c = a \end{cases} \quad (1)$$

Taking the new variable of time as τ , then $\tau = \omega_0 t$,

$x = \frac{x_c}{\ell}$ and denoting the first and second derived of a generic

function y , in relation to variable τ , for $y' = \frac{dy}{d\tau}$ and

$y'' = \frac{d^2 y}{d\tau^2}$, we have the adimensional system:

$$\begin{cases} m_p \ell^2 \omega_0^2 \theta'' + m_p \omega_0^2 \ell^2 \cos \theta x'' + \bar{K} \theta + m_p \ell [\bar{A} \omega^2 \text{sen}(\frac{\omega \tau}{\omega_0}) - g] \text{sen} \theta = 0 \\ (m_c + m_p) \omega_0^2 \ell x'' + m_p \ell \omega_0^2 \theta'' \cos \theta - m_p \ell \omega_0^2 \theta'^2 \text{sen} \theta + k \ell x - c \ell \omega_0 x' = k \phi - c \omega_0 \phi' \\ J \omega_0^2 \phi'' + (b+c)r \omega_0 \phi' + k r^2 \phi - k r \ell x - c \ell \omega_0 x' = a \end{cases} \quad (2)$$

and considering:

$$n = \frac{m_c}{m_p}, \quad \lambda = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \alpha = \frac{\omega_c}{\omega_0}, \quad \xi = \frac{\omega_m}{\omega_0}, \quad \varepsilon = \frac{r}{\ell}, \quad \Delta = \frac{\bar{A}}{\ell} \lambda^2,$$

$$\eta = \frac{c}{(n+1)m_p \omega_0}, \quad c_2 = \eta \varepsilon, \quad c_1 = \frac{c_2}{c \omega_0}, \quad \varsigma = \frac{(b+c)r}{J \omega_0},$$

$$\sigma = \frac{k r \ell}{J \omega_0^2}, \quad \gamma = \frac{c \ell}{J \omega_0}, \quad c_3 = \frac{a}{J \omega_0^2}.$$

we have:

$$\begin{cases} \theta'' + \cos \theta x'' + \frac{\bar{K}}{\omega_0^2 m_p \ell^2} \theta + \left(\Delta \text{sen}(\lambda \tau) - \frac{g}{\omega_0^2 \ell} \right) \text{sen} \theta = 0 \\ x_c'' + \frac{\cos \theta}{n+1} \theta'' - \frac{\text{sen} \theta}{n+1} \theta'^2 + \alpha^2 x - \eta x' - c_1 \phi + c_2 \phi' = 0 \\ \phi'' + \varsigma \phi' + \xi^2 \phi - \sigma x - \gamma x' = c_3 \end{cases} \quad (3)$$

In the equation (3) is observed that $(x, \theta, \phi) = (0, 0, 0)$ is a equilibrium position of the system, if $c_3 = 0$. In this way, approaching in the neighborhood of the equilibrium position $\sin \theta = \theta$ and $\cos \theta = 1$, ones can write the equations of the adimensional model for the non ideal controlled system car-pendulum-motor, as:

$$\begin{cases} \theta'' + x'' + (1 + \Delta \text{sen}(\lambda \tau))\theta = u_1 \\ x'' + \frac{1}{n+1}\theta'' - \frac{1}{n+1}\theta\theta'^2 + \alpha^2 x - \eta x' - c_1\phi + c_2\phi' = u_2 \quad (4) \\ \phi'' + \zeta\phi' + \xi^2\phi - \sigma x - \gamma x' = c_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'' = \frac{1}{n}[(1 + \Delta \text{sen}(\lambda \tau))\theta] + \frac{n+1}{n}(-\alpha^2 x + \eta x') + \frac{n+1}{n}[c_1\phi - c_2\phi'] + \frac{1}{n}\theta\theta'^2 - \frac{u_1}{n} + \frac{(n+1)u_2}{n} \\ \theta'' = \frac{n+1}{n}[-(1 + \Delta \text{sen}(\lambda \tau))\theta + \alpha^2 x - \eta x' - c_1\phi + c_2\phi'] - \frac{1}{n}\theta\theta'^2 + \frac{(n+1)}{n}(u_1 - u_2) \\ \phi'' = -\zeta\phi' - \xi^2\phi + \sigma x + \gamma x' + c_3 \end{cases} \quad (5)$$

Rewriting the system in the space-state form, through the transformations:

$$x = x_1; x' = x_2; \theta = x_3, \theta' = x_4, \phi = x_5 \text{ e } \phi' = x_6$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(n+1)\alpha^2}{n} & \frac{(n+1)\eta}{n} & \frac{1}{n}(1 + \Delta \text{sen} \lambda \tau) & 0 & \frac{(n+1)c_1}{n} & -\frac{(n+1)c_2}{n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(n+1)\alpha^2}{n} & -\frac{(n+1)\eta}{n} & -\frac{(n+1)}{n}(1 + \Delta \text{sen} \lambda \tau) & 0 & -\frac{(n+1)c_1}{n} & \frac{(n+1)c_2}{n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \sigma & \gamma & 0 & 0 & -\xi^2 & -\zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\theta\theta'^2}{n} \\ 0 \\ -\frac{\theta\theta'^2}{n} \\ 0 \\ c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{n+1} & \frac{n}{n+1} \\ \frac{n}{n+1} & -\frac{n}{n+1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (6)$$

RESULTS

The influence of the motor on the car-pendulum dynamics can be observed through the stability diagrams in the figures 3-5. As reference will be used the stability diagram for the ideal case (figure 2), where the parameters set used in the simulations is:

$$\lambda = \pi; \alpha = 1; \eta = 0.1; \xi = 1.41; \sigma = 1; \gamma = 1; c_1 = 1; \\ c_2 = 0.01; c_3 = 0.01.$$

Furthermore, were chosen the parameters related with the motor torque constants $\zeta = 0.1$, $\zeta = 4.0$ and $\zeta = 6.0$ to obtain three groups for the analysis of the motor interaction on the

it means:

system. The other parameters will be varied: $0 < n < 3$, $0 < \Delta < 2$.

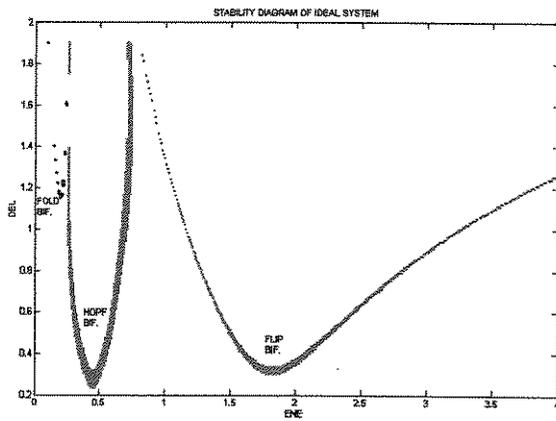


figure 2 – Stability diagram of ideal system

Applying the same tension in the motor for the three cases, we have the following stability diagrams.

For $\zeta = 6.0$ we see that the influence of the motor on the system is small and the stability diagrams for the ideal and non ideal cases are practically the same.

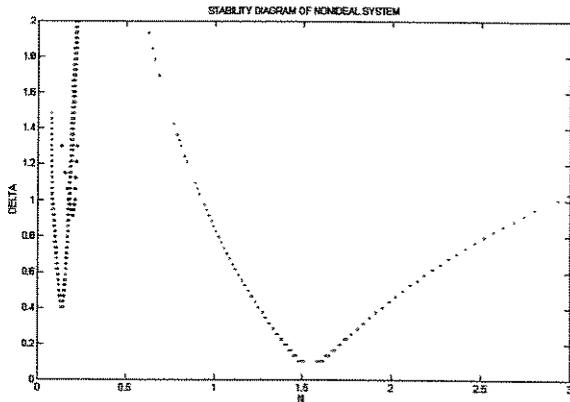


figure 3 – Stability diagram for $\zeta = 6.0$

Decreasing the torque constant of the motor for $\zeta = 4.0$, we obtain the stability diagram below.

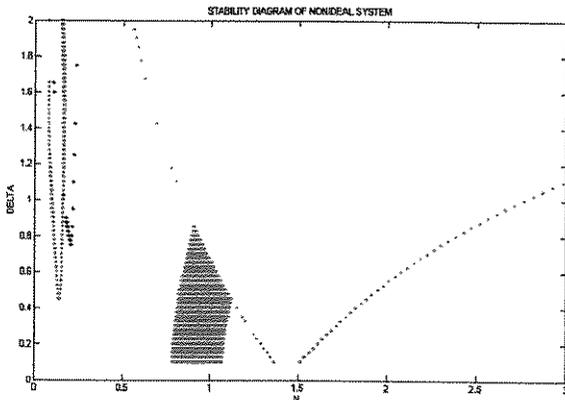


figure 4 - Stability diagram for $\zeta = 4.0$

For $\zeta = 0.1$, the interaction between the motor and the carpendulum subsystem can be observed through the complete change in the stability diagram (figure 5).

Comparing the figures above, ones can verify that the influence of the motor is larger when the torque constant decreases and for $\zeta = 6.0$, the dynamics of non ideal system tend stay closer to the dynamics of ideal system.

Resuming, the interaction between the motor and the system is lager when decrease the torque constant.

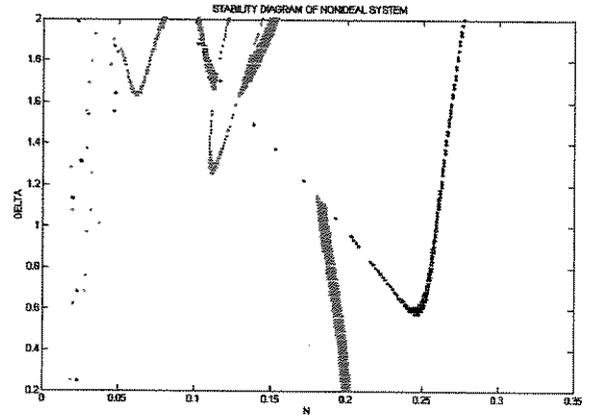


figure 5 - Stability diagram for $\zeta = 0.1$

The Control

The system non ideal has its structural stability altered when the torque constant is decreased of 2.5 to 1.8 - it passes to stable for unstable. The stability diagram below, that was obtained for $\Delta = 0.33$ and varying ζ and n , shows the change of the stability.

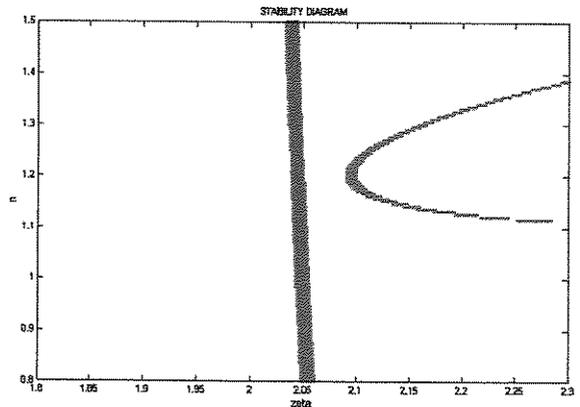


figure 6 - Stability diagram for $\Delta = 0.33$

For $\zeta = 2.5$ we found the Floquet multipliers:

$$\mu_{1,2} = 0.3231 \pm 0.8959i; \mu_{3,4} = -0.8550 \pm 0.1276i;$$

$$\mu_{5,6} = -0.0161 \pm 0.1207i$$

whose modulus are all smaller than 1, indicating then, the stability of the system.

For $\zeta = 1.8$, the Floquet multipliers are:

$$\mu_{1,2} = 0.4187 \pm 0.9429i, \mu_{3,4} = -0.2524 \pm 0.1308i;$$

$$\mu_5 = -0.8851 \text{ e } \mu_6 = -0.5352$$

The eigenvalues pair $|\mu_{1,2}| > 1$ indicates that the system is unstable, see figure (7).

Besides, the fact of existing Floquet multipliers on the right side of the complex plan, indicates that the matrix transformation of L-F, $Q(t)$, is π -periodic and real [3].

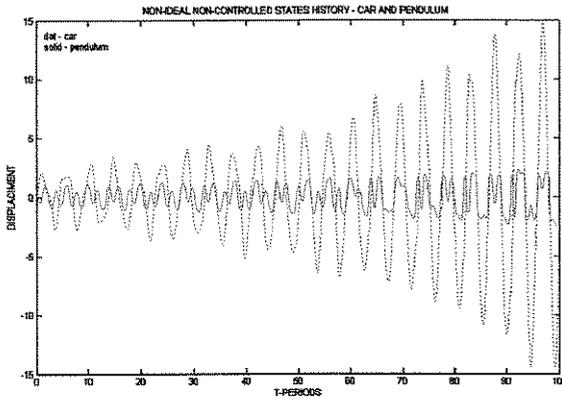


figura 7 – Non-controlled system time history

A law of linear control, based on the works [4, 5, 6] can be projected to stabilize the system.

The controller can be obtained from the application of the variable change of the system given by the transformation L-F $x = Q(t)y$, where the transformation matrix L-F, $Q(t)$, can be obtained by the decomposing of the states transition matrix (STM), which can be obtained through S-W method [7, 8].

That transformation converts the original system whose lineal part is time-variant, in a system dynamically equivalent, whose matrix of the lineal part is time-invariante.

Applying the transformation L-F to the system (5) with $\zeta = 1.8$, we obtain the time-invariant form:

$$\dot{y} = Ry + Q^{-1}(t)f(y, t) + Q^{-1}(t)B(t)u \quad (7)$$

where

$$R = \begin{bmatrix} 0.0374 & 0.8992 & -0.1379 & 0.4469 & 0.0649 & -0.2143 \\ -1.0117 & -0.2050 & -0.0364 & -0.0675 & 1.1370 & 0.3731 \\ -0.6654 & 0.1352 & 0.0865 & 0.1296 & 1.0277 & 0.5834 \\ 0.3992 & 0.0955 & -0.0771 & 0.0025 & -0.8368 & 0.1237 \\ 0.6676 & 0.5397 & -0.1187 & 0.3953 & -1.0263 & -0.3016 \\ -0.5213 & 0.3553 & -0.2421 & -0.0945 & 0.8375 & -0.4952 \end{bmatrix}$$

$$f(y, t) = \begin{bmatrix} 0 & y_3 y_4^2 & 0 & -y_3 y_4^2 & 0 & c_3 \end{bmatrix}^T,$$

$$B(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

The eigenvalues of matrix R, are:

$$\beta_{1,2} = 0.0156 \pm 0.5765i; \beta_{3,4} = -0.6288 \pm 0.2391i;$$

$$\beta_5 = -0.0610; \beta_6 = -0.3126$$

The eigenvalues pairs presence on the right side of the complex plan indicates, once again, that the not controlled system is unstable for the parameters set.

Following the procedures proposed for [4, 5, 6] a linear controller can be projected using the pole placement technique.

Choosing news poles like:

$$-0.5186 \pm 0.429i; -0.2524 \pm 0.1308i; -0.88 \text{ and } -0.5352$$

The time-invariant gain matrix obtained from the pole displacement is given for:

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} -0.4890 & 0.1784 & 0.2314 & 0.2405 & 0.41 & 0.3220 \\ 0.1261 & -0.9350 & 0.2802 & -0.4021 & -0.0163 & 0.2748 \\ 0.2411 & 0.2840 & -0.2563 & 0.0237 & -0.2396 & -0.3085 \\ 0.7602 & 0.6073 & -0.6981 & -0.0354 & -0.7264 & -0.8568 \\ -0.2840 & 0.1081 & 0.1327 & 0.1414 & 0.2377 & 0.1853 \\ 0.0786 & -0.4577 & 0.1268 & -0.2027 & -0.0227 & 0.1209 \end{bmatrix}$$

Applying the linear control law:

$$u_L = -F(x)y,$$

where $F(t) = B^\#(t)Q(t)\bar{K}Q^{-1}(t)$ and $B^\# = (B^t B)^{-1} B^t$, in the equation (6) the system is controlled and the states time history is shown by the figure 8.

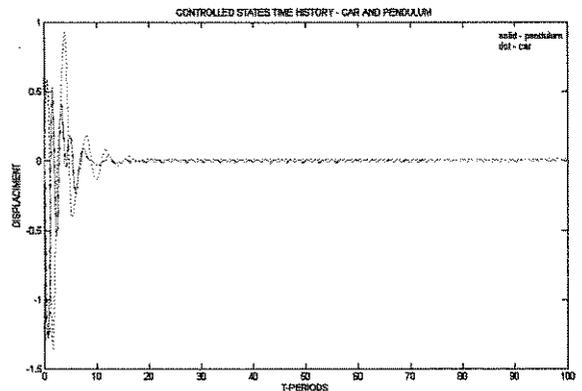


figura 8 – Controlled system time history

CONCLUSIONS

The problem of transport of loads for the system monorail was modeled. The equations resulting of the non ideal system presents periodic coefficients in the time. For that problem type were used the theory of Floquet and the method S-W.

The dynamics of the non ideal system was studied for different values of motor torque constant and compared with the ideal case. Later, the system was controlled by a linear control law, also based in method S-W.

ACKNOWLEDGMENTS

The authors thank the support given by FAPESP, Fundação de Apoio à Pesquisa do Estado de São Paulo, by CNPq, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico.

REFERENCES

- [1] Kononenko, V.O., "Vibrating Systems with a Limited Power Supply" (in Russian:1959), English tradition, Illife books, 1969.
- [2] Balthazar, J.M., et al, "An Overview on Non-Ideal Vibrations", *Meccanica*, No. 38, 613-621.
- [3] Sinha, S.C., Versal Deformation and Local Bifurcation Analysis of Time-Periodic Nonlinear Systems. *Nonlinear Dynamics*, 21, p. 317-336, 2000.
- [4] Sinha, S.C., "Control of Chaos in Nonlinear Systems with Time-Periodic Coefficients". American Control Conference, p. 764-768, June 2000.
- [5] Sinha, S.C. Henrichs and B. Ravindra, "A general approach in the design of active controllers for Nonlinear Systems Exhibiting Chaos". *Int. Journal of Bifurcation and Chaos*, 10(1), n. 1, (2000) p. 165-178.
- [6] Sinha, S.C., P. Joseph, "Control of General Dynamic Systems with Periodically Varying Parameters Via Lyapunov-Floquet Transformation". *Journal of Dynamic, Measurement, and Control*, v.116, p.650-658, 1994.
- [7] Sinha, S.C., Wu. Der-Ho, "An Efficient Computational Scheme for the Analysis of Periodic Systems". *Journal of Sound and Vibration*, 151(1), p. 91-117, 1991.
- [8] Sinha, S.C., E.A. Butcher, "Symbolic Computation of Fundamental Solution Matrices for Linear Time-Periodic Dynamical Systems". *Journal of Sound and Vibration*, 206(1), p61-85, 1997.
- [9] Sinha, S.C. Wu. Der-Ho., V. Juneja, P. Joseph, "Analysis of Dynamic Systems with Periodically Varying Parameters via Chebyshev Polynomials". *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 115, p. 96-102, Jan. 1993.
- [10] Sinha, S.C., R. Pandiyan, P.S. Bibb "Lyapunov-Floquet Transformation: Computations and Applications to Periodic Systems". *Journal of Vibration and Acoustics*. 118, p. 209-219, 1996.
- [11] Sinha, S.C., Butcher, E.A., Dávid, A. "Construction of Dynamically Equivalent Time-Invariant Forms for Time-

Periodic Systems". *Nonlinear Dynamics*, 16, p. 203-221, 1998.

- [12] Sinha, S.C., et. al. "Order Reduction of Nonlinear Time Periodic Systems Using Invariant Manifolds". *Proceedings of DETC2003/VIB-48445*, ASME 2003.
- [13] Sinha, S.C., R. Pandiyan "Analysis of Quasilinear Dynamical Systems with Coefficients via Lyapunov-Floquet Transformation". *Int. Journal Nonlinear Mechanics*, vol. 29, No. 5, p. 687-702, 1994.
- [14] P. D. Sparis, S.G. Mouroutsos, "A Comparative Study of the Operational Matrices of Integration and Differentiation for Orthogonal Polynomial Series". *International journal of control*, 42(3), p 621-638, 1985.
- [15] M.A. Snyder, "Chebyshev Methods in Numerical Approximations". Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice Hall, 1966.
- [16] Pandiyan R., Sinha, S.C. "Time-Varying Controller Synthesis for Nonlinear Systems Subject to Periodic Parametric Loadings". *Journal of Vibration and Control*, No.7, p. 73-90, 2001.
- [17] Dávid A., Sinha, S.C. "Bifurcation Control of Nonlinear Systems with Time-Periodic Coefficients". To appear in the "Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control".

Appendix

Theorem: All states fundamental matrix $\Phi(t)$ of linear system with periodic coefficients:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \quad (A1)$$

can be write factored as:

$$\phi(t) = L(t)e^{Rt} \quad (A2)$$

where:

$L(t)$ can be $2T$ -periodic, in the real case or T -periodic, in complex case; R is a constant matrix real or complex, respectively.

A numerical approach for $\phi(t)$ based on the S-W method (ref- sinha 1991), uses the results from Floquet theory, Chebyshev polynomial expansion and Picard iterative method (ref - sinha 1998). This way, $\phi(t)$ is:

$$\phi^{(gr_{cheb}, it_{pic})}(t) = \hat{T}^T(\tau) \left[\hat{I} + \left(\sum_{i=1}^{it_{pic}} [L(\alpha)]^{i-1} \right) P(\alpha) \right]$$

For the control problem of the system of the type:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u \quad (A5)$$

is used the a law linear control usual via pole displacement thecnique, obtained for (ref - sinha 2001) as:

$$u = -F(t)x \quad (A6)$$

where $F(t) = B^*(t)Q(t)B_0F_0Q^{-1}(t)$, B_0 is a full rank constant matrix, such that the pair $[R, B_0]$ is controllable and F_0 is a feedback gain matrix.