

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

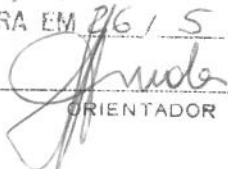
**LOCALIZAÇÃO DE FALHAS ESTRUTURAIS UTILIZANDO MÉTODOS
DE AJUSTE DE MODELOS POR MATRIZ ÓTIMA**

Número de publicação FEM:

Registro na BAE/UNICAMP: V582L

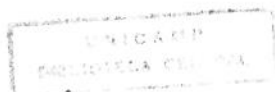
por Carlson Antonio Mendes Verçosa
orientador Prof. Dr. José Roberto de França Arruda

EMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
DEFENDIDA POR CARLSON ANTONIO
MENDES VERÇOSA E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 26/5/95.


ORIENTADOR

Tese submetida à Faculdade de Engenharia
Mecânica da Universidade Estadual de Campinas,
para preenchimento dos pré-requisitos para a
obtenção do Título de Doutor em Engenharia
Mecânica.

maio de 1995



BC
ICAMP
SL
24923
33/95
Y
\$ 11,00
106195
071915-1

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

V582L

Verçosa, Carlson Antonio Mendes

Localização de falhas estruturais utilizando métodos de
ajuste de modelos por matriz ótima / Carlson Antonio
Mendes Verçosa. -- Campinas, SP: [s.n.], 1995.

Orientador: José Roberto de França Arruda.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas,
Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Localização de falhas. 2. Análise modal.
3. Dinâmica estrutural. I. Arruda, José Roberto de França.
II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de
Engenharia Mecânica. III. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

Tese de Doutorado

Título da tese: LOCALIZAÇÃO DE FALHAS ESTRUTURAIS UTILIZANDO
MÉTODOS DE AJUSTE DE MODELOS POR MATRIZ ÓTIMA

Autor: Carlson Antonio Mendes Verçosa

Orientador: Prof. Dr. José Roberto de França Arruda

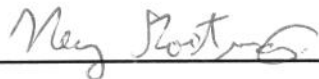
Aprovado por



Prof. Dr. José Roberto de França Arruda, Presidente



Prof. Dr. Domingos Boechat Alves, Membro



Prof. Dr. Ney Roitman, Membro



Prof. Dr. Fernando Iguti, Membro



Prof. Dr. Robson Pederiva, Membro

Campinas, 26 de maio de 1995.

*Ao meu irmão fernando,
dedico.*

*Para Carla e Carolina,
meu carinho.*

CONTEÚDO

AGRADECIMENTOS	i
CONTEÚDO	ii
RESUMO	iv
ABSTRACT	v
1 INTRODUÇÃO	1
2 MÉTODOS DE AJUSTE DE MODELOS POR MATRIZ ÓTIMA	10
2.1 Introdução	11
2.2 Ajuste de Modelos de Elementos Finitos	11
2.2.1 Correção da Matriz Modal Experimental	13
2.2.2 Correção da Matriz de Rigidez	18
3 APLICAÇÃO À LOCALIZAÇÃO DE FALHAS	36
3.1 Introdução	37
3.2 Localização de Falhas Estruturais	37
3.2.1 simulação Numérica de Uma Viga Engastada-Livre	37
3.2.2 Exemplo Experimental de Uma Placa Retangular de Alumínio	62

4 CONCLUSÕES E PROPOSTAS DE CONTINUIDADE	69
--	----

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	74
----------------------------	----

A ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL DE UMA PLACA RETANGULAR DE ALUMÍNIO	82
---	----

B TRABALHOS DIVULGADOS EM CONGRESSOS CIENTÍFICOS	108
--	-----

■ Arruda, J. R. F. e Verçosa, C. A. M., "Fault Detection Methods Using Direct Stiffness Matrix Correction Formulations For Use With Laser Data," *Proceedings, SPIE 1st International Conference on Vibration Measurement by Laser Techniques: Advances and Applications*, Ancona, Italy, Vol. 2358, pp. 60-67, October, 1994;

■ Verçosa, C. A. M. e Arruda, J. R. F., "Using Direct Update Methods to Localize Structural Faults," *DINAME 95*, Caxambú, MG, 6-10 março, pp. 21-24, Março, 1995;

■ Arruda, J. R. F. e Verçosa, C. A. M., "A Weighted Rearranged Spectral Equation Method for Structural Model Updating," *Proceedings, ASME 15th Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise - Symposium on Physical Parameter Identification in Vibration Analysis (Model Updating)*, Boston, MA, September 17-21, 1995, (to appear);

■ Verçosa, C. A. M. e Arruda, J. R. F., "Structural Fault Localization Using Direct Stiffness Update Methods," *Proceedings, ASME 15th Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise - Symposium on Physical Parameter Identification in Vibration Analysis (Model Updating)*, Boston, MA, September 17-21, 1995, (to appear).

Resumo

A vida útil de um elemento estrutural é, em geral, abreviada devido a uma redução da capacidade de carga para a qual o elemento é inicialmente projetado. Em dinâmica estrutural esta redução chama-se falha estrutural. Falhas estruturais promovem a degradação da estrutura e informações sobre sua existência e localização podem ser usadas para garantir a integridade da estrutura. Neste trabalho investiga-se a possibilidade de detectar e localizar falhas em estruturas. A hipótese básica é que falhas estruturais causam mudanças nas propriedades físicas da estrutura que, por sua vez, afetam frequências naturais e modos de vibração. A localização de falhas se desenvolve através de métodos de ajuste de modelos por matriz ótima, que conjugam as matrizes de massa e rigidez teóricas da estrutura na condição intacta com frequências naturais e modos de vibração medidos da estrutura na condição deteriorada. Os dados teóricos são obtidos pelo método de elementos finitos e os dados experimentais por técnicas de análise modal experimental. Introduce-se um novo método de ajuste de modelos e propõe-se uma reformulação no método de Kabe através da incorporação do conceito de pseudo-esparsidade que decorre do cancelamento de forças devido à simetria do modelo estrutural. Exemplos experimental e de simulação numérica são utilizados para validar a metodologia proposta e investigar a influência do truncamento modal no que tange à localização de falhas estruturais. Variações nos parâmetros modais são indicadores sensíveis de alterações estruturais. Na ausência de ruído, os métodos que ajustam a matriz de rigidez elemento-a-elemento reproduzem exatamente os coeficientes de rigidez e preservam o modelo de esparsidade da estrutura, o que não ocorre com os métodos denominados de globais. Contudo, ambos os tipos de métodos proporcionam a exata localização de falhas estruturais. Na presença de modos contaminados com ruído, os métodos de caráter global têm melhor desempenho no processo de localização de falhas estruturais.

Abstract

The service life of a structural element is, in general, shortened when there is a reduction of the load capacity to which it was originally designed. In structural dynamics this reduction is referred to as a structural fault. Structural faults cause the deterioration of the structure and, therefore, information about their existence and location may be used to ensure its integrity. The basic hypothesis implied here is that structural faults cause changes in the physical properties of the structure which, in turn, affect its natural frequencies and mode shapes. In this work, fault localization is done using optimal-matrix update methods which involve the analytical mass and stiffness matrices of the original structure and the natural frequencies and mode shapes of the flawed structure. The analytical model is obtained using the finite element method and the experimental data is obtained using experimental modal analysis. A new model update method is presented as well as a modification of Alvar Kabe's method, which incorporates the concept of pseudo-sparsity caused by force cancellation when assembling the stiffness matrix. Numerical simulation and experimental results are used to validate the proposed method and to investigate the influence of the modal base truncation in the fault localization process. It is shown that, in the absence of noise, the methods that adjust the stiffness matrix element-by-element reproduce exactly the stiffness coefficients and preserve the matrix sparsity. This is not the case when using the methods called global. Nevertheless, both types of methods allow the exact localization of the structural faults. In the presence of noise in the experimental modes, the global methods have a better performance in the process of localizing structural faults.

Capítulo 1

Introdução

O tempo de vida útil de sistemas dinâmicos pode ser abreviado em função de alterações estruturais que decorrem de fatores relacionados a condições ambientais, falhas mecânicas e excesso de carga, entre outros. Em dinâmica estrutural estas alterações são chamadas de falhas estruturais. Falhas estruturais promovem a degradação da estrutura e comprometem as funções para a qual ela é inicialmente projetada. Informações sobre sua existência e localização constituem um dos mais relevantes problemas em engenharia. Estes problemas surgem da necessidade de se assegurar a integridade da estrutura. Avaliações periódicas ao longo de sua vida útil podem ser usadas para monitorar esta integridade.

Diversas técnicas têm sido desenvolvidas neste sentido. A forma mais primária e direta é a inspeção visual com ou sem a ajuda de dispositivos óticos. Esta técnica é, muitas vezes, de difícil realização devido às dificuldades de acesso às diversas partes da estrutura. Ao mesmo tempo, requer extensivo tempo de busca e nem sempre revelam anomalias estruturais. Outras técnicas largamente difundidas na engenharia como meio de avaliar a integridade estrutural são as que utilizam raios-X, emissão acústica e ultrassom e são denominadas de técnicas não destrutivas (NDE). Estes métodos são efetivos no sentido de que revelam a região e a extensão do defeito, porém a estrutura como um todo tem que ser examinada. Esta característica torna estes métodos impraticáveis e caros quando se trata de grandes estruturas. Portanto, é usual a utilização destes métodos em situações especiais e conjugada com outros métodos que, a priori, indiquem regiões da estrutura onde há fortes indícios da presença de falhas.

Medidas de vibração têm sido utilizadas como técnicas não-destrutivas em sistemas dinâmicos (máquinas ferramentas por exemplo) para localização de componentes defeituosos. Para tal é requerido um registro dinâmico das características do equipamento segundo cada um de seus principais componentes. Da comparação de um registro obtido em um instante qualquer ao longo da vida do equipamento com os tais registros padrão, pode-se inferir que componente ou componentes apresentam defeito. Estes métodos, embora às vezes efetivos, são de limitada extensão por sua especificidade.

Atualmente, medidas de vibração têm sido utilizadas em conjunto com algoritmos de identificação para estabelecer as características de sistemas dinâmicos. A análise modal experimental, da qual um teste dinâmico é uma etapa, permite que se construa um modelo matemático a partir de dados medidos para um sistema físico real. Grande parte deste trabalho consiste no estabelecimento de uma curva teórica para as funções resposta em frequências medidas (FRFs) correspondentes aos dados experimentais, a cujo processo dá-se o nome de identificação de parâmetros ou ajuste de curva. Este modelo normalmente é usado para validar um modelo de elementos finitos

idealizado da estrutura. Em geral, discrepâncias significativas são encontradas quando se comparam resultados preditos pelo modelo teórico com resultados experimentais. Desta forma são requeridas alterações em ambos os modelos para se estabelecer uma concordância entre eles. A este processo de detecção e localização de erros em modelos dá-se o nome de ajuste ou correlação de modelos.

Tendo em vista que falhas estruturais causam mudanças nas propriedades físicas da estrutura e que estas afetam as frequências naturais e modos de vibração, abre-se a possibilidade de que estas informações possam ser processadas e manipuladas em conjunto com métodos de ajuste de modelos para localizar falhas em estruturas. Inúmeros trabalhos foram desenvolvidos, com diferentes formulações, objetivando o ajuste de modelos e a localização de falhas estruturais. Desta forma, uma revisão sobre localização de falhas é como uma revisão sobre ajuste de modelos. Como ponto de partida sugere-se uma leitura dos trabalhos de revisão de Imregun e Visser [1] e Mottershed e Friswell [2] e dos Anais das Conferências Internacionais de Análise Modal (IMAC) patrocinados pela Society for Experimental Mechanics. Neste contexto, este trabalho investiga possibilidade de detectar e localizar falhas estruturais utilizando métodos de ajuste de modelos por matriz ótima. A seguir apresenta-se uma visão de alguns métodos de ajuste de modelos, entre os quais aqueles que serão utilizados neste trabalho.

Devido ao crescente aperfeiçoamento das técnicas de medição e aumento da precisão dos instrumentos disponíveis atualmente, os modelos experimentais são geralmente considerados como a melhor representação da estrutura real. Por outro lado, fatores tais como tempo e custo envolvidos numa análise experimental, principalmente quando se tratam de grandes estruturas, tornam imperativa a existência de modelos teóricos confiáveis. Apesar do avanço das técnicas de modelagem (geralmente pelo método de elementos finitos) e algoritmos eficientes para solução de equações, os modelos teóricos não prevêm os resultados experimentais exatamente. Nesta ótica, a validação de modelos teóricos se reveste de importância capital. O processo de validação de modelos de elementos finitos é usualmente feito comparando-se as autopropriedades teóricas com frequências naturais e modos de vibração medidos. Em face da existência de discrepâncias entre estes dois conjuntos de dados, procede-se a um ajuste de modelos que consiste da localização e correção de erros em modelos teóricos a partir de dados modais experimentais.

Dada a importância da obtenção de um modelo ótimo, intensa pesquisa vem se desenvolvendo desde as duas últimas décadas, como testemunhado pelo crescente número de publicações na literatura especializada sobre ajuste de modelos em dinâmica

de estruturas. Imregun e Visser [1] e, mais recentemente, Mottershed e Friswell [2] apresentam revisões bastante amplas e significativas sobre o assunto em tela.

A literatura é clara quanto à relevância do trabalho de Berman e Flannelly [3] para o surgimento das técnicas de ajuste de modelos por correção direta das matrizes de massa e rigidez. Estes autores apresentam o conceito de modelos incompletos e apontam problemas associados com a imprecisão de modelos experimentais e teóricos.

No final da década de 70 e início dos anos 80, Baruch e Bar Itzhack [4], Baruch [5-7], Berman [8,9] e Berman e Nagy [10] introduzem a base dos métodos diretos de ajuste de modelos, através do ajuste direto das matrizes de massa e rigidez, como citado em [2]. Dentre estes trabalhos, as refs. [4] e [10] constituem o núcleo dos métodos chamados de Berman-Baruch, sendo os demais variações ou investidas iniciais.

De acordo com estes métodos, uma dentre as matrizes de massa teórica, rigidez teórica ou dos modos medidos é considerada exata, isto é, inviolável. A matriz escolhida é chamada de base de referência. As outras duas matrizes remanescentes são ajustadas separadamente minimizando-se uma função-objetivo. Os Multiplicadores de Lagrange são utilizados para forçar a satisfação da equação espectral e a simetria das matrizes de massa e rigidez. Nestas formulações é suposto que os dados experimentais disponíveis são representativos do comportamento dinâmico da estrutura e que o modelo teórico é, também, representativo da estrutura. Quando estes pré-requisitos são respeitados, então são requeridas pequenas mudanças para compatibilizar os modelos teórico e experimental.

Posteriormente, muitas técnicas de ajuste de modelos se seguiram na direção dos métodos de Berman-Baruch. A título de referência, podem-se citar, entre outras: Kabe [11, 12], Kammer [13], Wei [14-16] e Smith e Beattie [17].

Baruch e Bar Itzhack [4] assumem que a matriz de massa é correta e a matriz de rigidez é ajustada por minimização da norma Euclidiana de uma matriz erro ponderada pela matriz de massa. A matriz erro é a diferença entre as matrizes ajustada e teórica. Os Multiplicadores de Lagrange são utilizados para incorporar características desejáveis ao modelo ajustado. Neste método são requeridas a simetria da matriz de rigidez ajustada e que o modelo ajustado reproduza os dados medidos. O método é direto e a matriz ajustada é obtida por simples multiplicação entre matrizes, sendo este o seu maior mérito. Por outro lado, o ajuste é de caráter global e a matriz ajustada não preserva a esparsidade do modelo original, o que é traduzido como perda da conectividade e consequente geração de trajetórias de cargas inexistentes no modelo inicial. Além disto, alguns coeficientes podem ser significativamente alterados. O modelo assim ajustado é chamado de modelo de representação. Neste método, os modos de vibração devem ser

previamente ortonormalizados com respeito à matriz de massa teórica, usando a formulação originariamente proposta por Targoff [18] e desenvolvida mais tarde por Baruch e Bar Itzhack [4] como um problema de minimização.

Outra abordagem para o problema é dada por Berman e Nagy [10]. Eles assumem que a matriz modal experimental é correta, sendo tomada como base de referência, e corrigem as matrizes de massa e rigidez teóricas. Esta formulação é igualmente baseada nos multiplicadores de Lagrange. A matriz de rigidez ajustada é essencialmente equivalente à obtida por Baruch e Bar Itzhack [4], conforme notado por Berman e Nagy [10].

As formulações de ajuste de modelos propostas por Baruch e Bar Itzhack [4] e por Berman e Nagy [10] fornecem modelos que são consistentes com os dados medidos. Porém as matrizes de rigidez do modelo ajustado não preservam a esparsidade da matriz de rigidez original. Além disto, muitos dos coeficientes são irrealisticamente alterados. Kabe [11, 12] apresenta um método para corrigir a matriz de rigidez a partir de dados experimentais (frequências naturais e modos de vibração), onde é levada em conta a conectividade estrutural. Nesta formulação, Kabe propõe a minimização de uma função erro que independe das propriedades da massa do sistema e das magnitudes dos coeficientes da matriz de rigidez. Nesta ótica, minimiza-se a variação percentual de cada coeficiente de rigidez. A matriz de rigidez ajustada é obtida pela minimização de uma função erro que é sujeita a restrições de simetria, de conectividade e de equilíbrio de forças. Os multiplicadores de Lagrange são usados para incorporar estas funções de restrição à função erro. Este método é conhecido na literatura por "Stiffness Matrix Adjustment", cuja sigla é KMA.

Apesar dos excelentes resultados obtidos com o método KMA, é impraticável a sua utilização em estruturas complexas, tais como grandes estruturas espaciais, devido à enormidade de memória e tempo computacionais requeridos [19]. Este fato é posteriormente focalizado por Kammer [13] e Beattie e Smith [20]. Contudo, há relatos [17] de que o método tem sido aplicado com sucesso para correlação de modelos e localização de falhas em problemas de pequeno e médio portes (veja por exemplo, as refs. [21] e [22]).

Outro problema que envolve o método em tela diz respeito à ocorrência de elementos nulos "acidentais" na matriz de rigidez analítica. Estes elementos nulos não são gerados pela ausência de conectividade, mas pelo cancelamento de forças internas devido à simetria de elementos adjacentes do modelo estrutural. Nestes casos, o método, tal qual formulado por Kabe [11, 12], falha. Smith e Hendricks[21] demonstram

expressamente esta deficiência do método de Kabe. Posteriormente, Beattie e Smith [20] focalizam este problema como uma questão aberta.

Kammer [13] apresenta um novo método de identificação de sistemas baseado na teoria da projeção matricial e faz uso da inversa generalizada de Moore-Penrose. Igualmente ao método de Kabe [11, 12], o ajuste da matriz de rigidez é feito termo a termo e grandes matrizes podem resultar quando o método é aplicado em problemas de médio e grande porte, conforme observado pelo autor. Para dados contaminados com ruído, o que é sempre o caso quando se trata com dados experimentais, são comuns resultados inconsistentes para os valores dos coeficientes da matriz de rigidez ajustada.

Na mesma linha de Kabe, segue-se também o trabalho de Smith e Beattie [17], que minimiza a norma Euclidiana de uma matriz erro ponderada por uma matriz diagonal e sujeita à equação da frequência, simetria e esparsidade. O esforço computacional do método na solução do problema auxiliar associado é bem inferior ao do método de Kabe. Entretanto, a preservação da esparsidade na presença de dados contaminados com ruído tem se mostrado ser um requisito incompatível, como relatado por Smith e Beattie [23].

Smith [24] apresenta uma estratégia para preservar o modelo de esparsidade da matriz de rigidez através de um processo iterativo envolvendo a matriz de rigidez ajustada por Baruch e Bar Itzhack [4]. Neste método, a esparsidade é imposta através da multiplicação elemento-a-elemento de uma matriz S , consistindo de zeros e uns, com a matriz ajustada por Baruch e Bar Itzhack. A matriz S tem o mesmo modelo de esparsidade da matriz de rigidez analítica. A partir daí, um processo iterativo é iniciado até uma eventual convergência. Smith não apresenta provas de que o processo leve a uma matriz ajustada consistente com frequências naturais e modos de vibração utilizados no ajuste. Em trabalho recente, Verçosa e Arruda [25] verificam que, embora a norma Euclidiana da diferença entre as matrizes de rigidez ajustadas (a última matriz ajustada pela fórmula de Baruch e Bar Itzhack ou a última matriz esparsa calculada a partir dela) entre dois passos consecutivos convirja, isto não significa que a matriz de rigidez ajustada da última iteração (última matriz esparsa) satisfaça a equação da frequência. Os resultados indicam que a norma da matriz das forças residuais se estabiliza depois de um certo número de iterações.

Saindo da linha Berman-Baruch, Sidhu e Ewins [26] desenvolveram uma expressão para uma matriz erro (diferença entre as matrizes de rigidez de elementos finitos e a do modelo experimental) que é função das matrizes de rigidez incompletas de ambos os modelos. Estas matrizes são assim denominadas por não conterem a

contribuição de todos os modos do sistema. Gysin [27] apresenta um estudo criterioso sobre as possibilidades deste método para localização falhas, chegando a conclusão de que a eficiência do método depende de vários fatores e que é necessário levar em conta todos os modos de vibração do sistema, o que é inviável na prática. Posteriormente, Ojalvo e Pilon [28] num trabalho de investigação sobre a capacidade de alguns métodos em localizar falhas, entre eles o da ref. [26], chegam a conclusão de que este método é pobre, o que reforça a posição de Gysin [27].

Um trabalho que merece destaque diz respeito ao método do balanço de forças formulado por Fissette et al. [29]. O método utiliza as matrizes de rigidez de elementos individuais ou de macro elementos escalonadas para mapear o desbalanço de forças do modelo quando dados experimentais são utilizados na equação da frequência. Poucos modos são necessários para o ajuste do modelo e um único modo é suficiente para indicar o local da falha. Por esta razão, tratando-se de localização de falha, ele é chamado de método do vetor de forças residuais. Contudo, conforme comentários dos autores, o método falha na presença de modos contaminados com ruído e que estudos adicionais são ainda necessários. Em trabalho recente, Chen e Wang [30] utilizam o método do balanço de forças, entre outros, para corrigir e localizar erros em modelos de elementos finitos utilizando dados experimentais. Os autores chegam a conclusão de que este método, em particular, é de limitado sucesso quanto ao aspecto de localização.

Luk [31] apresenta um método para identificação de parâmetros físicos (modelo espacial) usando a pseudo-inversa a partir de um conjunto completo ou incompleto de modos obtidos experimentalmente. Mannan e Richardson [32] exploram a possibilidade de localizar falhas estruturais utilizando o método proposto por Luk. Estes autores concluem que o método pode ser empregado para localizar falhas mas que estudos adicionais são requeridos.

Wolff e Richardson [33], Fox [34] e Kim et al. [35], entre outros, usam funções de correlação entre as autopropriedades medidas e teóricas para localizar falhas. Os resultados demonstram que estas funções de correlação são sensíveis indicadores da existência de falhas mas são pobres em localizá-las.

Finalmente, deve ser registrado que muitas vezes a matriz de rigidez ajustada por métodos direto de correção pode não ter qualquer relação com o modelo físico. Esta é a razão porque os chamados métodos de sensibilidade inversa são usualmente preferidos [36]. Para ajuste de modelos estes métodos tem a vantagem de produzir modificações com significado físico. Por outro lado, são métodos iterativos e, portanto, computacionalmente caros e frequentemente instáveis. Os problemas dos métodos de sensibilidade inversa estão relacionados com a escolha dos parâmetros a

serem corrigidos e com a dificuldade de convergência dos algoritmos de otimização não-linear, conforme relatado na literatura. Porém, é unânime a posição de que estes métodos devem ser usados em conjunto com outros métodos que, a priori, forneçam uma indicação da provável região onde a falha se encontra.

Um dos principais problemas enfrentados pelos métodos de ajuste de modelos prende-se à diferença de tamanho entre os modelos teórico e experimental que se faz presente através do número de modos e coordenadas medidas [37, 38]. Do lado experimental, apenas uns poucos modos são determinados na faixa de frequências de interesse e o número de graus de liberdade é limitado no número de direções em que se efetua a aquisição de dados e no número de pontos do modelo geométrico experimental. Do lado teórico, há a necessidade de se ter uma malha de elementos finitos suficientemente refinada para representar de modo adequado o sistema físico real possibilitando a comparação com resultados medidos. Daí decorre, salvo situações especiais, um modelo analítico com um número de graus de liberdade bem maior que o do modelo experimental. O modelo experimental é dito incompleto em termos de graus de liberdade e de modos de vibração.

A redução de tamanho do modelo de elementos finitos e a expansão modal são procedimentos disponíveis que permitem compatibilizar modelos com diferentes tamanhos. O primeiro processo consiste na redução do número de graus de liberdade do modelo teórico através da redução das matrizes de massa e rigidez teóricas. Uma das técnicas mais conhecidas é a redução de Guyan [39]. O segundo, por sua vez, consiste em completar cada vetor modal experimental e o processo é chamado de expansão modal. Neste contexto, pode-se citar os métodos de expansão dinâmica proposto por Kidder [40] e mais recentemente por O'Callahan et al. [41], sendo este último trabalho o embrião do que seria mais tarde o processo de redução/expansão de sistemas equivalentes (SEREP) [42].

Com vistas à localização de falhas, Gysin [37] apresenta um estudo comparativo de diversos métodos de expansão modal e conclui que nenhum método é satisfatório para todos os casos. Dos métodos investigados, o método proposto por Kidder [40] assegura bons resultados, principalmente se se conhece a priori áreas de erro na matriz de rigidez. Nesta mesma direção, Lieven e Ewins [38] comparam métodos de redução e expansão. Eles apresentam inúmeras razões para se descartar as técnicas de redução quando se trata de localização de falhas e registram que o método de Kidder [40] produz pouca distorção na região onde existe danos estruturais. Os métodos propostos por Guyan [39] e Kidder [40] são utilizados neste trabalho, porém com ênfase no segundo.

Desde o advento do laser como tecnologia disponível para medidas de vibração, o número de graus de liberdade medidos pode ser muito grande. Com Vibrômetro Laser Doppler é possível medir-se a resposta dinâmica em mais de 60.000 pontos sobre a superfície de uma estrutura [43]. Desta forma, podem-se obter modelos experimentais com maior número de graus de liberdade que os modelos de elementos finitos. O caráter da alta densidade espacial dos dados medidos com laser resolve parcialmente o problema gerado pela diferença de tamanho, dado que não é possível obter diretamente os deslocamentos de rotação. As rotações, por outro lado, podem ser obtidas por métodos de expansão modal citados no texto ou por métodos de regressão espacial, tais como o da série de Fourier discreta regressiva (RDFS) em duas dimensões [44]. Ainda assim, os métodos de ajuste se defrontam com o problema do truncamento modal e ruídos de medição. No entanto, a possibilidade de se obter modelos experimentais com grande número de GDLs renova o interesse nos métodos de ajuste direto de modelos, que são mais afetados pelo fato do modelo experimental ser incompleto que os métodos de sensibilidade inversa.

Neste trabalho é proposto um método de ajuste modelos baseado na equação espectral. Diferentemente dos métodos que utilizam os multiplicadores de Lagrange, o método possui uma formulação simples e direta, sendo muito semelhante ao método do balanço de forças [29]. Contudo, sua implementação computacional é absolutamente diferente deste último. As características de simetria e esparsidade da matriz de rigidez teórica são preservadas na matriz de rigidez ajustada através de um rearranjo de equações. Com a perspectiva de que o problema da diferença de tamanho entre os modelos teórico e experimental pode agora ser parcialmente resolvido pelas medidas de vibração por processos óticos e tendo em vista as vantagens relativas dos métodos estudados, utilizam-se os métodos de Baruch e Bar Itzhack [4], Kabe [11, 12], Smith [24], Fissette et al. [29] e o método recentemente proposto neste trabalho para investigar a possibilidade de localizar falhas estruturais. O método proposto aqui já foi divulgado parcialmente pelo autor em congressos científicos [25, 45, 46, 47].

Este trabalho está estruturado em 4 capítulos e dois apêndices. A seguir apresenta-se um breve resumo dos conteúdos dos capítulos.

No capítulo 2 apresentam-se de forma detalhada as formulações dos métodos de ajuste de modelos utilizados neste trabalho com vistas à localização de falhas estruturais.

No capítulo 3 são relatados os resultados obtidos da aplicação dos métodos de ajuste aos vários exemplos de simulação numérica e ao exemplo experimental. São

destacadas as potencialidades de cada um dos métodos de ajuste de modelos quanto à possibilidade de localizar falhas.

No capítulo 4 são apresentadas as conclusões do estudo realizado bem como sugestões de continuidade.

No apêndice A descreve-se um ensaio modal experimental em que o objeto de teste é uma placa retangular em alumínio cujos resultados foram usados no capítulo 3. Ao todo são determinados 10 modos de vibração na faixa de frequências de interesse. Dois conjuntos de dados experimentais são obtidos concernentes à placa. No primeiro, a placa é considerada intacta, isto é, sem defeito ou falha. No segundo, faz-se um corte em uma de suas arestas para gerar uma falha estrutural.

No apêndice B apresentam-se cópias de resultados desta pesquisa sob forma de trabalhos divulgados através de congressos científicos.

Capítulo 2

Métodos de Ajuste de Modelos por Matriz Ótima

2.1 - Introdução

Neste capítulo são descritos os métodos de ajuste de modelos que serão utilizados neste trabalho para investigar a possibilidade de localizar falhas estruturais. Os métodos selecionados subentendem que a matriz de massa é representativa da estrutura com um alto grau de precisão e que não precisa ser corrigida [4], isto é, a base de referência é a matriz de massa. É suposto também que os modos de vibração medidos devem ser ortonormalizados em relação à matriz de massa em conformidade com as formulações de Targoff [18] ou Baruch e Bar Itzhack [4]. Para facilidade de compreensão do texto, todas as variáveis e símbolos são descritos ao longo do texto à medida em que aparecem.

2.2 - Ajuste de Modelo de Elementos Finitos

Um modelo matemático numérico de um sistema físico real é geralmente obtido por um processo denominado de discretização. Portanto, um número finito de graus de liberdade (GDLs) é suposto descrever o sistema contínuo. Limitações de ordem computacional impedem que o número de GDLs do modelo teórico cresça indefinidamente. Em paralelo com as limitações de tamanho do modelo teórico, as incertezas das técnicas de modelagem, hipóteses teóricas inadequadas, dificuldade na modelagem de juntas e acoplamentos, imprecisão nos valores das propriedades do material e aplicação de algoritmos inadequados na solução das equações resultantes, também são fontes de erro.

Os modelos experimentais, por sua vez, também contêm algum tipo de erro. Mesmo assim, são geralmente considerados como a melhor representação da estrutura real. Berman e Nagy [10] enumeram algumas fontes de erro mais comuns do lado experimental: calibração inadequada dos equipamentos, ruído excessivo, localização incorreta de transdutores, utilização de algoritmos inadequados para estimação de parâmetros modais e existência de não linearidades no comportamento dinâmico da estrutura.

Desta forma resultam diferenças quando se comparam os resultados preditos com os resultados experimentais. Em face da necessidade de se dispor de

um modelo confiável, tendo em vista o alto custo e tempo envolvido numa análise experimental, procede-se a correções em ambos os modelos de forma a torná-los consistentes. A este processo chama-se de ajuste ou correlação de modelos.

A correlação entre os modelos teórico e experimental envolve as matrizes de massa e rigidez teóricas e as matrizes experimentais modal e de autovalores. Idealmente, estas matrizes corrigidas devem satisfazer a relação de ortogonalidade dos modos ponderados pela matriz de massa, equação (2.1), e a equação espectral, equação (2.2).

$$\Phi^t M \Phi = I \quad (2.1)$$

$$K \Phi = M \Phi \Lambda \quad (2.2)$$

onde,

M	→ matriz de massa, $\dim(n \times n)$
K	→ matriz de rigidez, $\dim(n \times n)$
Φ	→ matriz modal, $\dim(n \times m)$ com $m \leq n$
Λ	→ matriz dos autovalores, $\dim(m \times m)$
I	→ matriz identidade

Admitindo que as frequências e modos medidos são verdadeiros, é trivial mostrar [48] que é possível calcular as matrizes de massa e rigidez da estrutura física real por meio das equações (2.3) e (2.4).

$$M = \Phi^t \Phi^{-1} \quad (2.3)$$

$$K = \Phi^t \Lambda \Phi^{-1} \quad (2.4)$$

Contudo, estas equações só são válidas quando o número de modos é igual ao número de graus de liberdade do modelo teórico, que é geralmente inviável.

Normalmente, o número de modos identificados experimentalmente é em muito inferior ao número de graus de liberdade do modelo teórico. Os modelos experimentais são, desta forma, incompletos, o que impossibilita o estabelecimento do modelo espacial (matrizes de massa e rigidez) a partir dos dados experimentais em conjunto com as equações (2.3) e (2.4). A diferença de tamanho entre os modelos teórico e experimental se constitui num dos maiores problemas enfrentados pelas técnicas de ajuste de modelos[37, 38].

É fato que os modos de vibração obtidos experimentalmente por testes de vibração são ligeiramente não ortogonais. As matrizes de rigidez e massa teóricas oriundas do modelo analítico não representam com fidelidade as propriedades de rigidez e de inércia do sistema físico real. Por outro lado, é aceito que as frequências naturais são geralmente determinadas com grande precisão.

Neste contexto, Baruch e Bar Itzhack [4] apresentam uma formulação a partir da qual se obtêm os modos e a matriz de rigidez corrigidos de forma ótima. Nesta formulação a matriz de massa é tida como exata (base de referência). Os modos são forçados a satisfazerem a relação de ortogonalidade dos modos ponderados pela matriz de massa e a matriz de rigidez, quando levada na equação da frequência, equação (2.2), reproduz os dados experimentais; Nestas condições o modelo ajustado é dito consistente com o modelo experimental. Para ambos os casos, o problema se resume em minimizar a norma Euclidiana de uma matriz erro que é ponderada pela matriz de massa e sujeita a restrições. Estas restrições são incorporadas à função-objetivo por intermédio dos multiplicadores de Lagrange.

2.2.1 - Correção da Matriz Modal Experimental

A primeira dificuldade que se enfrenta no processo de correção da matriz modal experimental surge da diferença de tamanho entre os modelos experimental e teórico. Do lado experimental, apenas uns poucos modos são determinados na faixa de frequências de interesse e o número de graus de liberdade é limitado pelo número de direções em que se efetua a aquisição de dados para os diversos pontos do modelo geométrico experimental. Do lado teórico, somente uma refinada discretização da estrutura gera resultados comparáveis aos experimentais. Daí decorre um modelo analítico com um número de graus de liberdade bem maior que o do modelo experimental. Nestes casos se

recorre aos métodos de redução/expansão para compatibilizar os modelos quanto ao tamanho. Neste trabalho utilizam-se os métodos de redução de Guyan [39] e de expansão dinâmica de Kidder [40], porém com ênfase no segundo.

O método de expansão modal proposto por Kidder [40] é baseado na equação da frequência, equação (2.2), e considera cada vetor modal particionado em dois subvetores, um contendo coordenadas modais conhecidas e outro contendo coordenadas modais desconhecidas. As matrizes K e M são reordenadas, através de operações elementares em suas colunas, de forma a agrupar todos os deslocamentos medidos (translação e/ou rotação) no vetor $\{x_1\}$ e todos os deslocamentos desconhecidos (translação e/ou rotação) no vetor $\{x_2\}$. Assim, a equação (2.2) pode ser reescrita para cada modo de vibração na forma particionada como segue:

$$\left(-\omega_p^2 \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{x_1\}_p \\ \{x_2\}_p \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (2.5)$$

onde,

$\{x_1\}_p \rightarrow$ parte conhecida do p-ésimo vetor modal ($ncc \times 1$)

$\{x_2\}_p \rightarrow$ parte desconhecida do p-ésimo vetor modal ($ncd \times 1$)

$\omega_p \rightarrow$ frequência natural associada ao p-ésimo vetor modal (rad/s)

M_{11}, M_{12}, M_{21} e $M_{22} \rightarrow$ submatrizes da matriz de massa teórica, onde $M_{21} = M_{12}^t$

K_{11}, K_{12}, K_{21} e $K_{22} \rightarrow$ submatrizes da matriz de rigidez teórica, onde $K_{21} = K_{12}^t$

$$M_{11} \text{ e } K_{11} \rightarrow (\text{ncc} \times \text{ncc})$$

$$M_{12} \text{ e } K_{12} \rightarrow (\text{ncc} \times \text{ncd})$$

$$M_{22} \text{ e } K_{22} \rightarrow (\text{ncd} \times \text{ncd})$$

Dado que as matrizes de massa e rigidez teóricas têm dimensão $(n \times n)$, então a relação entre as quantidades de coordenadas conhecidas (ncc) e desconhecidas (ncd) de um vetor modal experimental é dada pela equação (2.6).

$$\text{ncc} + \text{ncd} = n \quad (2.6)$$

Para se estabelecer uma relação direta entre $\{x_1\}_p$ e $\{x_2\}_p$ é necessário expandir a equação matricial (2.5) e a expressão comumente utilizada é dada pela equação (2.7).

$$\{x_2\}_p = T_p \{x_1\}_p \quad (2.7)$$

onde a matriz de transformação T_p é dada pela equação (2.8).

$$T_p = -(K_{22} - \omega_p^2 M_{22})^{-1} (K_{21} - \omega_p^2 M_{21}) \quad (2.8)$$

Existem tantas matrizes de transformação T_p quantos são os vetores modais que se deseja expandir.

A verificação da ortogonalidade dos modos é uma forma usual de quantificar a consistência modal. Quando aplicada a modos medidos, é aparente a existência de elementos fora da diagonal. Targoff [18], originariamente, propôs um método de ortogonalização baseado na verificação da ortogonalidade tal que as mudanças efetuadas nos modos medidos são mínimas e que somente os erros decorrentes da parte simétrica da matriz de corrupção podem ser corrigidos. Baruch e Bar Itzhack [4] demonstram que os resultados de Targoff podem ser obtidos pela minimização da norma Euclidiana da matriz erro, diferença entre as matrizes modais experimental e ajustada, ponderada pela matriz de massa e sujeita a restrições. O problema pode ser descrito da seguinte forma: Dada uma

matriz modal medida $\Psi(n \times m)$, com $n \geq m$, e uma matriz de massa $M(n \times n)$ positiva definida, encontrar a matriz X que minimiza a função dada pelo quadrado da norma Euclidiana (quadrado da norma de Frobenius):

$$\varepsilon = \|Q(X - \Psi)\| = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \left[\sum_{j=1}^n q_{ij}^{1/2} (x_{jk} - \psi_{jk}) \right]^2 \quad (2.9)$$

onde $Q = M^{1/2}$, sujeita à condição de ortogonalidade ponderada, equação (2.10).

$$X^t M X = I \quad (2.10)$$

Variáveis e símbolos gregos afetados de um índice subscrito com um único elemento deve ser entendido como um vetor coluna da matriz que a variável ou o símbolo representa. Se o índice subscrito apresentar dois elementos, então trata-se de um componente da matriz que a variável representa, onde o primeiro elemento indica a linha e o segundo indica a coluna. A função norma na equação (2.9) é ponderada pelo fator $M^{1/2}$. Este fator é único pois do contrário a equação de restrição, equação (2.10), seria violada. Desde que um modo de vibração é único apenas na forma e tendo em vista que a mínima diferença entre dois vetores representando um mesmo modo de vibração ocorre quando ambos são homogeneamente normalizados, deve-se, portanto, escrever a matriz medida Ψ em conformidade com a equação (2.11).

$$\psi_i = \tilde{\psi}_i (\tilde{\psi}_i^t M \tilde{\psi}_i)^{-1/2} \quad (2.11)$$

onde $\tilde{\psi}_i$ é i -ésimo modo medido antes da normalização. Usando os multiplicadores de Lagrange para incorporar a equação de restrição à função a ser minimizada, obtém-se:

$$\eta = \varepsilon + \|\Lambda_t \otimes (X^t M X - I)\| \quad (2.12)$$

onde Λ_t é matriz dos multiplicadores de Lagrange e $\otimes$ representa o produto de duas matrizes elemento-a-elemento. Derivando parcialmente a equação (2.12) com relação a todos os elementos da matriz X , igualando-se o resultado a zero e

resolvendo-se o sistema de equações resultante, obtém-se os valores que tornam η um mínimo. Estas equações são expressas na forma matricial como segue:

$$\frac{\partial \eta}{\partial X} = 2M(X - \Psi) + 2MX\Lambda_t = 0 \quad (2.13)$$

Da equação (2.13) pode-se escrever:

$$X = \Psi(I + \Lambda_t)^{-1} \quad (2.14)$$

Combinando-se as equações (2.10) e (2.14), resulta:

$$I + \Lambda_t = (\Psi^t M \Psi)^{1/2} \quad (2.15)$$

Levando-se agora a equação (2.15) na equação (2.14), finalmente obtém-se a matriz modal medida ortonormalizada de forma ótima, equação (2.16).

$$X = \Psi(\Psi^t M \Psi)^{-1/2} \quad (2.16)$$

Esta matriz experimental ótima será denotada por Ψ_o neste trabalho. Este procedimento para a correção da matriz modal medida pode ser resumido em duas etapas:

(a) normalização da matriz modal experimental, equação (2.11)

(b) ortonormalização da matriz obtida em (a), equação (2.16)

As transformações indicadas em (a) e (b) podem ser levadas a termo através das equações (2.17) e (2.18) dadas a seguir.

$$\Psi_i = \tilde{\Psi}_i(\tilde{\Psi}_i^t M \tilde{\Psi}_i)^{-1/2} \quad (2.17)$$

$$\Psi_o = \Psi(\Psi^t M \Psi)^{-1/2} \quad (2.18)$$

onde $\tilde{\Psi}_i$ é o i-ésimo vetor modal experimental antes da normalização, Ψ é a matriz cujas colunas são os Ψ_i determinados através da equação (2.17) e Ψ_0 é a matriz modal corrigida de forma ótima. Dá-se preferência a corrigir os modos experimentais segundo as equações (2.17) e (2.18) do que corrigí-los diretamente através da expressão proposta por Targoff [18], pois, neste caso, podem ocorrer imprecisões numéricas na inversão da matriz.

Se, por um lado, o número de componentes dos vetores medidos é igual ao número de graus de liberdade do modelo teórico, a correção da matriz modal experimental é feita aplicando-se diretamente as equações (2.17) e (2.18). Caso contrário, deve-se primeiramente compatibilizar os modelos através de uma redução do modelo teórico ou de uma expansão dos modos experimentais.

2.2.2 - Correção da Matriz de Rigidez

Segundo Baruch e Bar Itzhack [4], a segunda etapa do processo de ajuste modelos consiste da correção da matriz de rigidez teórica. Diante da disponibilidade da matriz modal experimental expandida e corrigida de forma ótima Ψ_0 e das frequências de ressonância, também obtidas através do experimento modal, procede-se à correção da matriz de rigidez teórica de forma a satisfazer a equação da frequência, equação (2.2). Na formulação proposta por Baruch e Bar Itzhack, tem-se que matriz corrigida Y é determinada pela minimização da norma Euclidiana da matriz erro, diferença entre Y e K , ponderada pela matriz de massa e sujeita a restrições. A norma da matriz erro é dada pela equação (2.19).

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \| M^{-1/2}(Y - K)M^{-1/2} \| \quad (2.19)$$

As restrições para o problema em tela são dadas pelas equações (2.20) e (2.21). A primeira delas assegura consistência entre a matriz de rigidez corrigida e os modos medidos e a segunda preserva a simetria da matriz.

$$Y \Psi_0 = M \Psi_0 \Lambda \quad (2.20)$$

$$Y = Y^t \quad (2.21)$$

Usando os multiplicadores de Lagrange para incorporar as restrições expressas pelas equações (2.20) e (2.21) à função norma, equação (2.19), define-se a função de Lagrange por:

$$\eta = \varepsilon + 2\|\alpha \otimes [Y\Psi_0 - M\Psi_0\Lambda]\| + \|\beta \otimes (Y - Y')\| \quad (2.22)$$

onde α e β são as matrizes dos multiplicadores de Lagrange. A dimensão de ambas as matrizes é $(n \times m)$. Tomando-se a derivada parcial de η em relação aos elementos Y_{ij} da matriz Y e igualando-se o resultado a zero, obtém-se os valores que tornam a função η mínima. Na forma matricial, pode-se escrever:

$$\frac{\partial \eta}{\partial Y} = M^{-1}(Y - K)M^{-1} - 2\alpha\Psi_0^t + 2\beta = 0 \quad (2.23)$$

Eliminando-se os multiplicadores de Lagrange na equação (2.23) e rearranjando os termos, obtém-se a expressão para a matriz de rigidez Y corrigida de forma ótima, equação (2.24).

$$\begin{aligned} Y = K - K\Psi_0\Psi_0^t M - M\Psi_0\Psi_0^t K + \\ + M\Psi_0\Psi_0^t K\Psi_0\Psi_0^t M + M\Psi_0\Lambda\Psi_0^t M \end{aligned} \quad (2.24)$$

Uma vantagem deste método é que a matriz de rigidez corrigida é obtida diretamente sem iteração a partir dos dados medidos e das matrizes de massa e rigidez teóricas. Por outro lado, por ser um método global de correção, aparecem elementos diferentes de zero onde inicialmente havia zeros na matriz de rigidez original. Portanto, a perda da esparsidade gera trajetórias fictícias de cargas que não existem na estrutura física real.

Smith [24] apresenta uma estratégia para preservar o modelo de esparsidade da matriz de rigidez original através de um processo iterativo usando a equação (2.24). A esparsidade é conseguida pela aplicação de uma matriz S consistindo de uns e zeros em locais apropriados. O processo inicia calculando a matriz de rigidez através da equação (2.25).

$$Y_s = Y \otimes S \quad (2.25)$$

onde $\otimes$ denota o produto de duas matrizes elemento-a-elemento. Então a matriz original K é substituída por Y_s na equação (2.24) e Y é recalculada. O processo continua até que a norma da diferença de Y_s entre dois passos consecutivos se torne menor que uma tolerância especificada. Este método, embora não reproduza os dados experimentais, pode ser usado para correção de modelos e localização de falhas estruturais.

Kabe[11, 12] apresenta um método para corrigir a matriz de rigidez a partir de dados experimentais (frequências naturais e modos de vibração) onde é levada em conta a conectividade estrutural. Nesta formulação, Kabe propõe a minimização de uma função erro que independe das propriedades da massa do sistema e das magnitudes relativas dos coeficientes da matriz de rigidez. A matriz de rigidez ajustada é obtida pela minimização de uma função erro que é sujeita à restrições de simetria, de conectividade e de equilíbrio de forças. Os multiplicadores de Lagrange são usados para incorporar estas funções de restrição à função erro.

Em termos matemáticos, a formulação de Kabe pode ser posta como segue: Dadas as matrizes de massa e rigidez teóricas, M e K respectivamente, e as matrizes dos modos de vibração e frequências naturais medidas, Φ e Ω^2 respectivamente, encontrar uma matriz de rigidez ajustada, Y , consistente com os dados medidos, simétrica e com a mesma esparsidade da matriz de rigidez original. M e K têm dimensão $(n \times n)$, Φ tem dimensão $(n \times m)$ e Ω^2 tem dimensão $(m \times m)$, onde n é o número de graus de liberdade do modelo teórico e m o número de modos determinados experimentalmente. A preservação dos zeros da matriz de rigidez original é conseguida forçando a matriz de rigidez ajustada a se relacionar com a matriz de rigidez original através da equação (2.26).

$$Y = K \otimes \gamma \quad (2.26)$$

onde γ é uma matriz a ser determinada e o operador $\otimes$ define a multiplicação de matrizes elemento-a-elemento como expressa pela equação (2.27).

$$Y_{ij} = K_{ij} \gamma_{ij} \quad (2.27)$$

Portanto, se K tem um elemento nulo então Y também terá o elemento correspondente nulo. Paralelamente, a função erro proposta por Kabe para

minimizar mudanças irreais nos coeficientes de rigidez é dada pela equação (2.28).

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\left(\frac{Y_{ij} - K_{ij}}{K_{ij}} \right)^2 \right] ; \quad K_{ij} \neq 0 \quad (2.28)$$

Tendo em vista a equação (2.27), pode-se escrever a função erro equivalente usando a norma Euclidiana. Neste contexto, a função a ser minimizada é agora dada pela equação (2.29)

$$\varepsilon = \left\| \tilde{I} - \tilde{I} \otimes \gamma \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\tilde{I}_{ij} - \tilde{I}_{ij} \gamma_{ij})^2 \quad (2.29)$$

onde $\tilde{I}$ é uma matriz constituída de uns e zeros em conformidade com a equação (2.30).

$$\begin{cases} \tilde{I}_{ij} = 1 & \text{se } K_{ij} \neq 0 \\ \tilde{I}_{ij} = 0 & \text{se } K_{ij} = 0 \end{cases} \quad (2.30)$$

Diante destas considerações, a matriz de rigidez ajustada pode ser obtida através da minimização da função erro, equação (2.29), sujeita às restrições de equilíbrio de forças e simetria, equações (2.31) e (2.32) respectivamente.

$$-M \phi \Omega^2 + (K \otimes \gamma) \phi = 0 \quad (2.31)$$

$$\gamma - \gamma^t = 0 \quad (2.32)$$

A matriz dos modos medidos deve ser corrigida em conformidade com as equações (2.17) e (2.18) de forma que a relação de ortogonalidade dos modos ponderados pela matriz de massa seja satisfeita. A minimização sem restrições é obtida através da formação da função de Lagrange L , equação (2.33).

$$L = \varepsilon + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} \left(\sum_{l=1}^n K_{il} \gamma_{il} \phi_{lj} \right) - M \phi \Omega^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_{ij} (\gamma_{ij} - \gamma_{ij}^t) \quad (2.33)$$

onde λ_{ij} e μ_{ij} são os multiplicadores de Lagrange. Derivando a função de Lagrange em relação a cada um dos γ_{ij} e igualando o resultado a zero, obtém-se um conjunto de equações que os γ_{ij} devem satisfazer para tornar L um mínimo. Em notação matricial, estas equações são dadas pela equação (2.34).

$$-2(\tilde{I} - \gamma) + K \otimes (\lambda \phi^t) + \mu = 0 \quad (2.34)$$

As equações (2.31), (2.32) e (2.34) formam um sistema de equações que permitem determinar as incógnitas, isto é, os coeficientes das matrizes λ , μ e γ . Dado que a matriz μ é anti-simétrica, então somando-se a equação (2.34) com sua transposta obtém-se:

$$-4(\tilde{I} - \gamma) + K \otimes (\lambda \phi^t + \phi \lambda^t) = 0 \quad (2.35)$$

Multiplicando-se a equação (2.35), elemento-a-elemento, por $(1/4)K$ e rearranjando os termos, resulta:

$$Y = K \otimes \gamma = K - \frac{1}{4} \Gamma \otimes (\lambda \phi^t + \phi \lambda^t) \quad (2.36)$$

onde,

$$\Gamma = K \otimes K \quad (2.37)$$

A equação (2.36) deixa aparente que a matriz de rigidez ajustada torna-se conhecida na medida em que se conhece a matriz λ . Então, levando-se a equação (2.36) na equação (2.31), obtém-se:

$$A + \{\Gamma \otimes (\lambda \phi^t)\} \phi + \{\Gamma \otimes (\phi \lambda^t)\} \phi = 0 \quad (2.38)$$

onde,

$$A = 4(M \phi \Omega^2 - K \phi) \quad (2.39)$$

Resolvendo-se a equação (2.38) obtém-se a matriz λ que levada na equação (2.36) fornece a matriz de rigidez corrigida. A solução da equação (2.38) passa por um problema de autovalores e autovetores. Isolando-se a matriz A na equação (2.38) e desenvolvendo-se as operações indicadas no segundo membro, pode-se estabelecer uma sistema linear de equações na forma da equação (2.40).

$$\{\bar{A}\} = ([\alpha] + [\beta])\{\bar{\lambda}\} \quad (2.40)$$

onde os elementos das matrizes A e λ são escritos na forma de vetores coluna $\{\bar{A}\}$ e $\{\bar{\lambda}\}$, respectivamente, e ambos são de ordem (nm,1). Por exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{bmatrix} \Rightarrow \{\bar{A}\} = \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ A_{21} \\ A_{22} \\ A_{31} \\ A_{32} \end{Bmatrix} \quad (2.41)$$

Pode-se observar que o vetor $\{\bar{A}\}$ é construído armazenando-se em ordem crescente as linhas da matriz A. O vetor $\{\bar{\lambda}\}$ é obtido da matriz λ de forma inteiramente similar a construção de $\{\bar{A}\}$. Assim, obtém-se:

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} \end{bmatrix} \Rightarrow \{\bar{\lambda}\} = \begin{Bmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{12} \\ \lambda_{21} \\ \lambda_{22} \\ \lambda_{31} \\ \lambda_{32} \end{Bmatrix} \quad (2.42)$$

Com os vetores $\{\bar{A}\}$ e $\{\bar{\lambda}\}$ definidos através das equações (2.41) e (2.42), as matrizes $[\alpha]$ e $[\beta]$ são de ordem $(nm \times nm)$ e podem ser escritas como segue:

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} G^1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & G^2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & G^i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & G^n \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

onde $G^i = -\phi^t \hat{\Gamma}^i \phi$ e $\hat{\Gamma}^i$ é uma matriz diagonal de dimensão $(m \times m)$ cujos elementos da diagonal são a i -ésima linha de Γ , equação (2.37) e,

$$[\beta] = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \dots & H_{1j} & \dots & H_{1n} \\ H_{21} & H_{22} & \dots & H_{2j} & \dots & H_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ H_{i1} & H_{i2} & \dots & H_{ij} & \dots & H_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{n1} & H_{n2} & \dots & H_{nj} & \dots & H_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

onde ,

$$H_{ij} = -\{\bar{\Phi}\}_j \{D^j\}_i^t$$

$$\{\bar{\Phi}\}_j = j\text{-ésima coluna de } \phi^t$$

$$\{D^j\}_i = i\text{-ésima coluna de } \phi^t \hat{\Gamma}^j$$

Dispondo-se das matrizes A , $[\alpha]$ e $[\beta]$, a equação (2.40) fornece o vetor $\{\bar{\lambda}\}$. Esta solução pode ser obtida definindo-se a seguinte transformação de coordenadas:

$$\{\bar{\lambda}\} = [\varphi]\{\rho\} \quad (2.45)$$

onde as colunas de $[\varphi]$ são os autovetores associados aos autovalores de $[\alpha] + [\beta]$ que são diferentes de zero. Substituindo a equação (2.45) na equação (2.40) e premultiplicando por $[\varphi]^t$, obtém-se a equação (2.46).

$$[\varphi]^t\{\bar{A}\} = [\varphi]^t([\alpha] + [\beta])[\varphi]\{\rho\} = [\Omega]\{\rho\} \quad (2.46)$$

Combinando-se as equações (2.45) e (2.46), obtém-se finalmente o vetor $\{\bar{\lambda}\}$, equação (2.47), que é a solução da equação (2.40).

$$\{\bar{\lambda}\} = [\varphi][\Omega]^{-1}[\varphi]^t\{\bar{A}\} \quad (2.47)$$

Construindo-se a matriz λ a partir do vetor $\{\bar{\lambda}\}$ em conjunto com a equação (2.42), a matriz de rigidez ajustada é obtida efetuando-se as operações indicadas na equação (2.36).

Valores exatos para os coeficientes da matriz de rigidez ajustada são encontrados quando o número de equações de restrição definido pela equação (2.31) excede o número de coeficientes independentes disponíveis para o ajuste. Isto determina um número mínimo de modos. Se um número de modos menor que este número mínimo é usado, a solução dada pela equação (2.36) será apenas aproximada. A medida que se aumenta o número de modos, o posto ("rank") da matriz obtida pela soma das matrizes $[\alpha]$ e $[\beta]$ aumentam até um valor limite definido pelo número de termos independentes e não nulos da matriz de rigidez. Se, por outro lado, for usado um número de modos maior que este número mínimo, então o número de equações será novamente maior que o número de incógnitas. Se estes modos adicionais são consistentes com as propriedades da estrutura, então os valores dos coeficientes de rigidez ajustados serão iguais aos coeficientes determinados com o número mínimo de modos, pois as equações geradas com os modos adicionais são redundantes.

Como focalizado por muitos autores (veja por exemplo, as refs. [13], [19] e 20]) o considerável custo computacional e a grande quantidade de memória na utilização do método de Kabe impedem sua aplicação em problemas envolvendo grandes estruturas. Paralelamente, Smith e Hendricks [21] têm expressamente mostrado que o método de Kabe falha quando a matriz de rigidez original tem zeros que não são devidos à ausência de conectividade (zeros "acidentais"), mas, em vez disso, zeros decorrentes do cancelamento de forças internas. O método falha porque ele impõe que os coeficientes da matriz rigidez que são originalmente nulos permaneçam nulos, o que neste caso deixa de ser verdade na presença de falhas estruturais. Neste trabalho é proposta uma solução para esta deficiência do método através do conceito de pseudo-esparsidade. Desta forma, o método KMA torna-se aplicável a problemas onde até então falharia.

A matriz da pseudo-esparsidade, que é indicada por P , é definida como a matriz cujos elementos são nulos, exceto os elementos que são nulos devido ao cancelamento de forças os quais são tornados iguais a 1. A matriz P é obtida construindo-se inicialmente a matriz da verdadeira esparsidade da estrutura, que é indicada por V . Esta matriz é facilmente construída quando da montagem da matriz de rigidez global do sistema. A toda entrada da matriz de rigidez que corresponde a uma conectividade, é atribuído o valor 1. As demais entradas é atribuído o valor zero. Portanto, a matriz da pseudo-esparsidade da estrutura é dada diretamente pela diferença entre a matriz V e a a matriz $\tilde{I}$, que representa a esparsidade da matriz de rigidez do modelo de elementos finitos, equação (2.30). Desta forma, P é dada pela equação (2.48).

$$P = V - \tilde{I} \quad (2.48)$$

A modificação do método de Kabe que contorna o problema gerado pela cancelamento de forças internas consiste em adicionar a matriz da pseudo-esparsidade adequadamente escalonada à matriz de rigidez do modelo de elementos finitos. Esta alteração é equivalente a reescrever a equação (2.37) tal que:

$$\Gamma = K \otimes K + \alpha P \quad (2.49)$$

se verificar que a matriz de rigidez analítica em nada se assemelha com a matriz de rigidez exata, exceto pela conectividade.

Para efeito de comparação entre o método KMA e o método modificado, KMAM, dois casos são tratados. No caso 1, a matriz de rigidez analítica apresenta a mesma esparsidade que a matriz de rigidez exata. No caso 2, uma pseudo-esparsidade é introduzida tornando nulos os elementos (1,2), (2,1), (4,6) e (6,4) da matriz de rigidez analítica. Estes elementos de acoplamento são escolhidos arbitrariamente e são mostrados em negrito na tabela 1. Este último caso representa uma situação comum quando se modela uma estrutura por elementos finitos, isto é, podem surgir elementos nulos na matriz de rigidez analítica em decorrência do cancelamento de forças internas. Entretanto, convém ressaltar, estes elementos nulos não pertencem à esparsidade da matriz de rigidez.

Tabela 2.1 Coeficientes das matrizes de rigidez analítica e ajustada pelos métodos KMA e KMAM (dois casos).

NÚMERO DO ELEMENTO	MODELO INICIAL (caso 1)	KMA	KMAM	MODELO INICIAL (caso 2)	KMA	KMAM	MODELO EXATO
(1,1)	2,0	1,5	1,5	2,0	1,0	1,5	1,5
(1,2)	-2,0	-1,5	-1,5	0,0	0,0	-1,5	-1,5
(2,2)	1.512,0	1.011,5	1.011,5	1.512,0	1.006,4	1.011,5	1.011,5
(2,3)	-10,0	-10,0	-10,0	-10,0	-5,3	-10,0	-10,0
(3,3)	1.710,0	1.110,0	1.110,0	1.710,0	1.052,8	1.110,0	1.110,0
(3,5)	-200,0	-100,0	-100,0	-200,0	-64,8	-100	-100,0
(4,4)	850,0	1100,0	1.100,0	850,0	992,4	1.100,0	1.100,0
(4,5)	-200,0	-100,0	-100,0	-200,0	-51,9	-100,0	-100,0
(4,6)	-200,0	-100,0	-100,0	0,0	0,0	-100,0	-100,0
(5,5)	850,0	1.100,0	1.100,0	850,0	1.032,3	1.100,0	1.100,0
(6,6)	1.714,0	1.112,0	1.112,0	1.714,0	621,8	1.112,0	1.112,0
(6,7)	-10,0	-10,0	-10,0	-10,0	-263,1	-10,0	-10,0
(6,8)	-4,0	-2,0	-2,0	-4,0	263,0	-2,0	-2,0
(7,7)	1.512,0	1.011,5	1.011,5	1.512,0	792,4	1.011,5	1011,5
(7,8)	-2,0	-1,5	-1,5	-2,0	211,0	-1,5	-1,5
(8,8)	6,0	3,5	3,5	6,0	-205,9	3,5	3,5

Os coeficientes da matriz ajustada, para os casos 1 e 2, são obtidos com três modos, uma vez que com um ou dois modos obtém-se apenas valores aproximados [11]. Como se pode ver na tabela 2.1, os métodos KMA e KMAM fornecem resultados idênticos para o caso 1, o que já é esperado pois as matrizes exata e analítica têm a mesma esparsidade e a matriz P , equação (2.48), é uma matriz nula. No caso 2, os resultados calculados pelo KMA diferem dos resultados fornecidos pelo KMAM e dos valores exatos. Por outro lado, o método KMAM reproduz exatamente os coeficientes da matriz de rigidez exata. Este fato valida a modificação proposta.

Neste trabalho propõe-se uma formulação para ajuste de modelos por correção direta da matriz de rigidez analítica. Neste contexto, suponha que a matriz de rigidez ajustada Y pode ser expressa com a soma da matriz de rigidez original K e uma matriz de correção aditiva ($-R$) como expressa pela equação (2.50).

$$Y = K - R \quad (2.50)$$

A equação espectral relativa ao modelo de elementos finitos pode ser escrita como segue:

$$K \Phi = M \Phi \Lambda \quad (2.51)$$

onde Φ é a matriz dos autovetores analítica e Λ é matriz dos autovalores analítica. Esta equação é válida para qualquer conjunto de m modos, $m \leq n$, sendo n o número de graus de liberdade do modelo de elementos finitos.

Agora, seja ψ uma matriz modal experimental e Λ_o a matriz dos autovalores associada a esta matriz modal. Se Φ é substituída por ψ e Λ por Λ_o na equação (2.51), a equação espectral não será exatamente satisfeita, isto é, haverá um desbalanço entre as forças elásticas e de inércia que pode ser expresso pela equação (2.52).

$$K \psi - M \psi \Lambda_o = E \quad (2.52)$$

Combinando-se as equações (2.50) e (2.52) e assumindo que exista uma matriz de rigidez ajustada Y tal que:

$$Y \psi = M \psi \Lambda_0 \quad (2.53)$$

então pode-se escrever:

$$R \psi = E \quad (2.54)$$

A equação (2.54) é a equação que a matriz de correção aditiva (-R) tem que satisfazer para se ter Y e M gerando as frequências naturais e modos de vibração obtidos experimentalmente. Como o número de modos medidos é geralmente menor que o número de graus de liberdade ($m < n$), há um número infinito de matrizes Y que satisfazem a equação (2.53). Uma forma usual para encontrar uma solução é por minimização da matriz (-R) sujeita à equação espectral e simetria como equações de restrição, como é o caso de Baruch e Bar Itzhack [4] e outros métodos derivados dele.

A equação (2.54) pode ser resolvida através da pseudo-inversa [49] ou reformulando a equação de modo a preservar a simetria da matriz solução, o que implica na solução de uma equação de Lyapunov, conforme proposto por Arruda e Verçosa [45]. Contudo, estas duas formas de solução não preservariam simultaneamente as características de simetria e esparsidade requeridas para a matriz de rigidez ajustada Y. Neste trabalho propõe-se um rearranjo desta equação de forma que se assegure simetria e esparsidade para a matriz de rigidez ajustada Y.

Se todos os elementos não nulos da parte triangular superior de R são dispostos em um vetor r e, correspondentemente, a matriz ψ é rearranjada numa matriz esparsa A e a matriz E é rearranjada em um vetor e , então a equação (2.54) pode ser escrita como:

$$A r = e \quad (2.55)$$

Pode-se observar que as condições de simetria e esparsidade são impostas a partir do estabelecimento da equação (2.55). A solução da equação (2.55) pode ser rearranjada de volta para recompor a matriz R, que quando subtraída da matriz de rigidez original K fornece a matriz de rigidez ajustada Y.

No método proposto por Baruch e Bar Itzhack [4], a solução é obtida a partir da norma Euclidiana da matriz (-R) com uma ponderação específica, impossibilitando introduzir matrizes de ponderação arbitrárias na formulação. Ao contrário, a equação (2.55) permite que se pondere tanto a matriz do sistema, A, quanto o vetor de parâmetros r . O número de incógnitas em r corresponde ao

número de elementos diferentes de zero na matriz triangular superior associada a R e será denotado por p . O número de equações é dado pelo número de modos utilizados no ajuste vezes o número de graus de liberdade do modelo teórico e será denotado por q . Portanto, dada a esparsidade do modelo teórico, o número de modos que é necessário para determinar a matriz de correção da rigidez de forma única (sem que a solução seja por mínima norma) é aquele que torna o rank da matriz A igual ao número de incógnitas no vetor r .

A transformação da equação (2.54) na equação (2.55) pode ser feita indiferentemente por linhas ou colunas da matriz R . Para ilustrar o procedimento, considere um exemplo onde R é uma matriz simétrica de ordem 4 com $R_{12} = R_{21} = R_{14} = R_{41} = R_{34} = R_{43} = 0$ e que dois modos estejam sendo usados para ajustar o modelo. Neste caso, a equação (2.54) pode ser rearranjada por coluna como mostrado através da equação (2.56).

$$\begin{bmatrix} \psi_{11} & 0 & \psi_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_{12} & 0 & \psi_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_{21} & 0 & \psi_{31} & 0 & \psi_{41} & 0 \\ 0 & \psi_{22} & 0 & \psi_{32} & 0 & \psi_{42} & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{11} & \psi_{21} & \psi_{31} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{12} & \psi_{22} & \psi_{32} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_{21} & \psi_{41} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_{22} & \psi_{42} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_{11} \\ R_{22} \\ R_{13} \\ R_{23} \\ R_{33} \\ R_{24} \\ R_{44} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E_{11} \\ E_{12} \\ E_{21} \\ E_{22} \\ E_{31} \\ E_{32} \\ E_{41} \\ E_{42} \end{Bmatrix} \quad (2.56)$$

A solução da equação (2.55) usando a pseudo-inversa pode ser escrita como:

$$\hat{r} = A^+ e \quad (2.57)$$

onde A^+ é obtida por decomposição em valores singulares (SVD) da matriz A . Pode ser mostrado (Junkins e Kim [50]) que a solução na equação (2.57) equivale à solução por mínimos quadrados quando $Ni \leq Ne$ e $\text{rank}(A) = Ni$, equação (2.58):

$$\hat{r}_{LS} = (A^t A)^{-1} A^t e \quad (2.58)$$

e à solução por norma mínima quando $N_i > N_e$ e $\text{rank}(A) = N_e$:

$$\hat{r}_{\min\|r\|} = A^t (A A^t)^{-1} e \quad (2.59)$$

Ambas as soluções, equações (2.58) e (2.59), podem ser ponderadas. A ponderação das equações é obtida minimizando-se a norma do termo independente da equação (2.55) como dada a seguir:

$$\|e\|_{LS} = \frac{1}{2} e^t W_e e \quad (2.60)$$

onde W_e é uma matriz de ponderação positiva definida. A solução por mínimos quadrados ponderada é dada por:

$$\hat{r}_{WLS} = (A^t W_e A)^{-1} A^t W_e e \quad (2.61)$$

Igualmente, a ponderação dos parâmetros é obtida minimizando-se a norma:

$$\|r\|_w = \frac{1}{2} \hat{r}^t W_p \hat{r} \quad (2.62)$$

onde W_p é uma matriz de ponderação positiva definida. A solução de mínima norma ponderada é dada por:

$$\hat{r}_{\min\|\hat{r}\|_w} = W_p^{-1} A^t (A W_p^{-1} A^t)^{-1} e \quad (2.63)$$

As soluções dadas pelas equações (2.61) e (2.63) tem um menor custo computacional que através da decomposição em valores singulares, e, portanto, elas são preferidas na implementação deste método de ajuste.

Para validar e demonstrar as possibilidades do método proposto, utiliza-se o exemplo de Kabe tratado anteriormente. Os resultados são comparados com os resultados obtidos por Kabe [11]. Três casos são considerados. O caso 1 envolve o ajuste da matriz de rigidez utilizando-se apenas o primeiro modo de vibração. No caso 2 utilizam-se os dois primeiros modos. No caso 3, por fim,

utilizam-se os três primeiros modos. Na tabela 2.2 são mostrados os coeficientes de rigidez ajustados para os três casos.

Tabela 2.2 Coeficientes das matrizes de rigidez analítica e ajustada pelos métodos KMA e Rearranjo das Equações, RE (três casos).

NÚMERO DO ELEMENTO	MODELO INICIAL	KMA (caso 1)	RE (caso 1)	KMA (caso 2)	RE (caso 2)	KMA (caso 3)	RE (caso 3)	MODELO EXATO
(1,1)	2,0	1,7	1,7	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5
(1,2)	-2,0	-2,1	-2,1	-1,5	-1,5	-1,5	-1,5	-1,5
(2,2)	1.512,0	1.013,5	1.014,1	1.011,5	1.011,5	1.011,5	1.011,5	1.011,5
(2,3)	-10,0	-10,1	-10,1	-10,0	-10,0	-10,0	-10,0	-10,0
(3,3)	1.710,0	1.275,8	1.274,7	1.110,0	1.110,0	1.110,0	1.110,0	1.110,0
(3,5)	-200,0	-198,6	-197,9	-100,0	-100,0	-100,0	-100,0	-100,0
(4,4)	850,0	1.237,4	1.217,7	1.100,0	1.100,0	1.100,0	1.100,0	1.100,0
(4,5)	-200,0	-178,6	-159,3	-100,0	-100,0	-100,0	-100,0	-100,0
(4,6)	-200,0	-198,5	-197,7	-100,0	-100,0	-100,0	-100,0	-100,0
(5,5)	850,0	1.237,3	1.217,6	1.100,0	1.100,0	1.100,0	1.100,0	1.100,0
(6,6)	1.714,0	1.279,7	1.278,5	1.113,2	1.113,3	1.112,0	1.112,0	1.112,0
(6,7)	-10,0	-10,1	-10,1	-9,0	-8,9	-10,0	-10,0	-10,0
(6,8)	-4,0	-4,1	-4,3	-3,0	-3,0	-2,0	-2,0	-2,0
(7,7)	1.512,0	1.016,1	1.016,5	1.012,4	1.012,4	1.011,5	1.011,5	1.011,5
(7,8)	-2,0	-2,0	-2,0	-2,3	-2,4	-1,5	-1,5	-1,5
(8,8)	6,0	5,1	5,2	4,3	4,4	3,5	3,5	3,5

Conforme pode ser visto na tabela 2.2, os dois métodos apresentam os mesmos resultados para os casos 2 e 3 e resultados muito próximos para o caso 1. Desta forma, é oportuno fazer uma verificação no custo computacional envolvido em cada um destes métodos. Os resultados que se apresentam são relativos aos casos mostrados na tabela 2.2. O cálculo do custo computacional para o método de Kabe é feito resolvendo-se o problema auxiliar de autovalores conforme proposto pelo autor. No que tange ao método de rearranjo de equações, duas situações são levadas em conta: calculando-se o posto da matriz dos coeficientes,

matriz A; ou sem o cálculo do posto de A. Os resultados demonstram que o método de rearranjo das equações tem um custo computacional significativamente inferior ao método de Kabe. Por outro lado, os resultados na tabela 2.3 demonstram o esforço computacional dispendido quando o posto da matriz A é calculado. Portanto, isto sugere que este cálculo seja otimizado. As soluções das equações (2.58) e (2.59) foram implementadas utilizando-se rotinas para matrizes esparsas do programa MATLAB [51] (marca registrada da The Mathworks, Inc., Natick, MA, USA). Neste software o posto é calculado apenas para matrizes cheias através da decomposição em valores singulares. Desta forma, o cálculo do posto de A foi feito sem tirar proveito da esparsidade de A. Por outro lado, existem algoritmos modernos e eficientes [52] para determinar o posto de matrizes esparsas que poderão ser utilizados para diminuir ainda mais o custo computacional do método proposto.

Tabela 2.3 Custo computacional dos métodos KMA e Rearranjo das Equações para os casos tratados na tabela 1, em KFlops.

MÉTODO	USANDO 1 MODO	USANDO 1 e 2 MODOS	USANDO 1, 2 e 3 MODOS
KMA	25	127	267
RE C/ POSTO	5	15	23
RE S/ POSTO	0,9	1,5	3,5

A superioridade do método de rearranjo das equações em relação ao método de Kabe resulta do fato de ter-se resolvido a equação (2.54) tirando vantagem da grande esparsidade da matriz A. A esparsidade das matrizes de ambos os métodos são mostradas na figura 2.1 Na figura, os pontos representam os elementos diferentes de zero em cada uma das matrizes.

Para evitar que o método de rearranjo das equações falhe quando aplicado em problemas que apresentam o fenômeno da pseudo esparsidade, deve-se substituir os elementos nulos da matriz de rigidez analítica, K, que são gerados pelo cancelamento de forças por elementos não nulos de valor arbitrário, porém de magnitude da mesma ordem de grandeza que os valores da diagonal de K. Isto é necessário de modo a não desbalancear o sistema de equações quando é utilizada

a ponderação dos parâmetros. Uma forma direta para substituir estes elementos nulos consiste em adicionar a matriz da pseudo esparsidade P , equação (2.48), adequadamente escalonada à matriz de rigidez do modelo de elementos finitos.

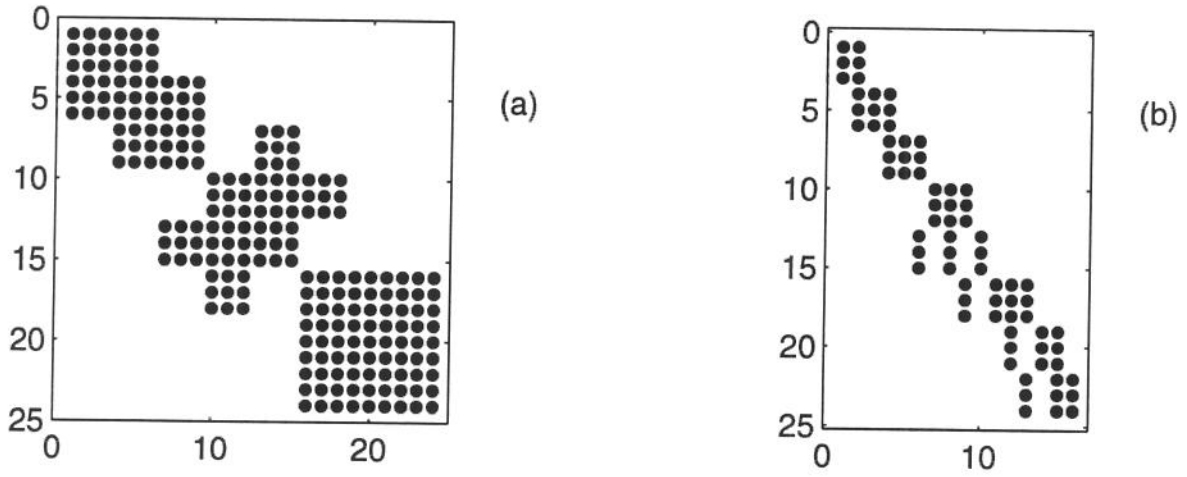


Figura 2.1 Modelos de esparsidade das matrizes dos coeficientes: (a) KMA; (b) Rearranjo das Equações.

Capítulo 3

Aplicação à Localização de Falhas

3.1 - Introdução

Este capítulo trata da aplicação dos métodos de correção da matriz de rigidez por matriz ótima em que são observadas as características da matriz ajustada bem como o desempenho de cada um dos métodos como ferramenta de localização de falhas estruturais. São usados os métodos de Baruch e Bar Itzhack [4], de Kabe [11], de Smith [24] e o método proposto no capítulo anterior. Faz-se uso também do método do balanço de forças [29], em que se propõe a utilização de vários modos de vibração ao invés de um único modo como na proposta original. Diferentemente dos demais métodos, o método do balanço de forças será utilizado apenas como mecanismo de localização de falha e seus resultados mostrados separadamente dos demais. Para se ter resultados homogêneos, todos os métodos serão submetidos a condições idênticas. São utilizados um exemplo teórico (simulação numérica de uma viga engastada-livre) e um exemplo experimental (placa livre-livre-livre-livre). A capacidade de localização da falha de cada um destes métodos é determinada examinando-se a matriz de correção da matriz de rigidez computada.

3.2 - Localização de Falhas Estruturais

3.2.1 - Simulação Numérica de Uma Viga Engastada-Livre

Este exemplo consiste na localização de um defeito imposto artificialmente em uma viga engastada-livre simulada numericamente. As matrizes de massa e rigidez para a estrutura na condição intacta, estado inicial, e na condição deteriorada são geradas com o programa de elementos finitos ISMIS (Interactive Structures and Matrix Interpretive System) [53]. Esta investigação dar-se-á através de dois modelos da viga com diferentes malhas. Um modelo menor com 15 elementos e um modelo maior com 30 elementos. Com o modelo menor será avaliada a capacidade de cada método no que se refere à reprodução dos coeficientes da matriz de rigidez da estrutura real e quanto à possibilidade de localizar a falha sob diferentes condições, isto é, número de modos usado no ajuste, ausência ou presença de ruído e redução do sistema ou expansão modal.

O modelo maior será usado exclusivamente na condição ideal que corresponde ao caso exato, para demonstrar a influência do número de modos no processo de ajuste entre modelos de diferentes tamanhos.

Na figura 3.1 mostra-se o modelo de elementos finitos da viga engastada livre. No modelo estão indicados seus elementos (1-15) e, dentre estes, o elemento de número 9, que será alterado para simular a falha. A viga é suposta vibrar apenas no plano da figura, portanto são utilizados elementos de viga do tipo Bernoulli-Euler com dois graus de liberdade por nó (deslocamento transversal e deslocamento angular). Desta forma o modelo possui 32 GDLs. A numeração dos GDLs é feita sequencialmente a partir do lado da viga em balanço; a primeira metade corresponde aos deslocamentos transversais (1-15) e a segunda às rotações (16-30). O nó do engaste, por ser fixo, é eliminado quando da aplicação das condições de contorno e seus graus de liberdade descartados. Neste contexto, o modelo é dito ser de 30 GDLs. De acordo esta numeração, o elemento defeituoso é definido pelos graus de liberdade 9-10 (deslocamento transversal) e 24-25 (deslocamento angular).



Figura 3.1 Modelo de elementos finitos da viga engastada-livre onde se indica o elemento defeituoso, elemento de número 9.

A viga é homogênea e de seção transversal quadrada. As propriedades do material e características geométricas da viga são mostradas na tabela 3.1.

Tabela 3.1 Propriedades da viga engastada-livre

módulo de elasticidade	2,07 x 10 ¹¹ N/m ²
densidade	7,8 x 10 ³ Kg/m ³
área de seção transversal	1,0 x 10 ⁻⁴ m ²
momento de inércia da seção	8,33 x 10 ⁻¹⁰ m ⁴
comprimento	0,3 m

Para gerar os dados experimentais, procede-se à modificação da rigidez do elemento de número 9, reduzindo sua área para $1/4$ do valor inicial e, por conseguinte, reduzindo o momento de inércia de sua seção transversal para $1/16$ do valor inicial. Os dados "experimentais" são calculados com a matriz de massa do modelo original e com a matriz de rigidez modificada. Na figura 3.2 mostra-se a matriz erro entre as matrizes exata (modificada) e analítica (original). Esta matriz erro é na verdade a matriz de correção da matriz de rigidez ($-R$) que se deseja determinar. Esta matriz é mostrada na figura 3.2 sob três diferentes aspectos e com algum tipo de normalização, sendo todos os seus coeficientes tomados em valor absoluto: (a) vista tridimensional tal que o valor máximo é 1; (b) gráfico da diagonal em que se normaliza separadamente os elementos relativos aos deslocamentos transversais e angulares e cujo valor máximo em ambos os conjuntos é a unidade; (c) projeção ou curvas de nível tomados a partir da vista tridimensional. Nas legendas das figuras em que se usa a matriz R ela será denotada por matriz R e sua diagonal por diagonal de R , normalizada de acordo com o estabelecido acima.

É aparente a partir das figuras 3.2(a), 3.2(b) e 3.2(c) que se os métodos de ajuste de modelo forem capazes de gerar uma matriz de correção semelhante à da figura 3.2, então a falha estará localizada. Neste contexto, a figura 3.2 é uma figura de referência. Nas figuras 3.2(a) e 3.2(b) não são claras as discrepâncias entre as matrizes de rigidez exata e original quanto aos valores relacionados aos graus de liberdade de rotações e de acoplamento entre deslocamentos transversais e rotações. Isto ocorre porque os valores destes últimos coeficientes são bem menores que os coeficientes dos deslocamentos transversais.

Tendo em vista a simetria dos elementos adjacentes do modelo de elementos finitos, a matriz de rigidez do modelo original apresenta o fenômeno da pseudo-esparsidade. As figuras 3.3(a), 3.3(b) e 3.3(c) mostram a esparsidade das matrizes K , Y e P . Note-se que a esparsidade de P é a diferença entre a esparsidade de K e a verdadeira esparsidade associada com a conectividade da estrutura, sendo esta última mostrada na figura 3.3(d), sendo denotada por V . Nestes gráficos, os elementos diferentes de zero são indicados por pontos. Para evitar a falha dos métodos KMA e Rearranjo das Equações devido ao fenômeno da pseudo-esparsidade, serão utilizadas as versões modificadas destes métodos como descritas no capítulo anterior.

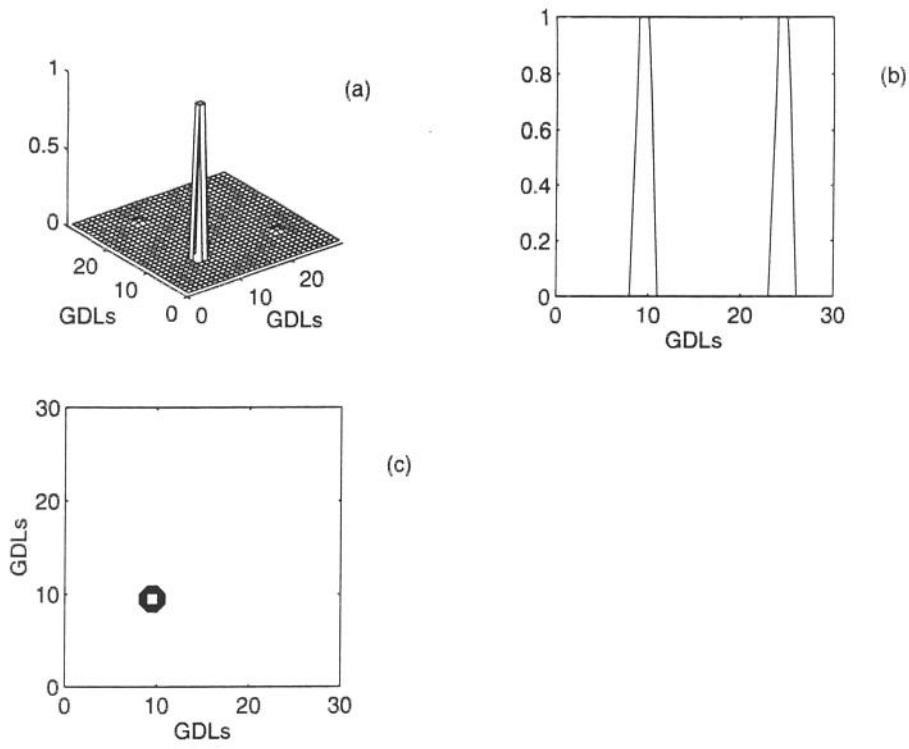


Figura 3.2 Matriz R. (a) vista tridimensional de R; (b) diagonal de R; (c) projeção de R.

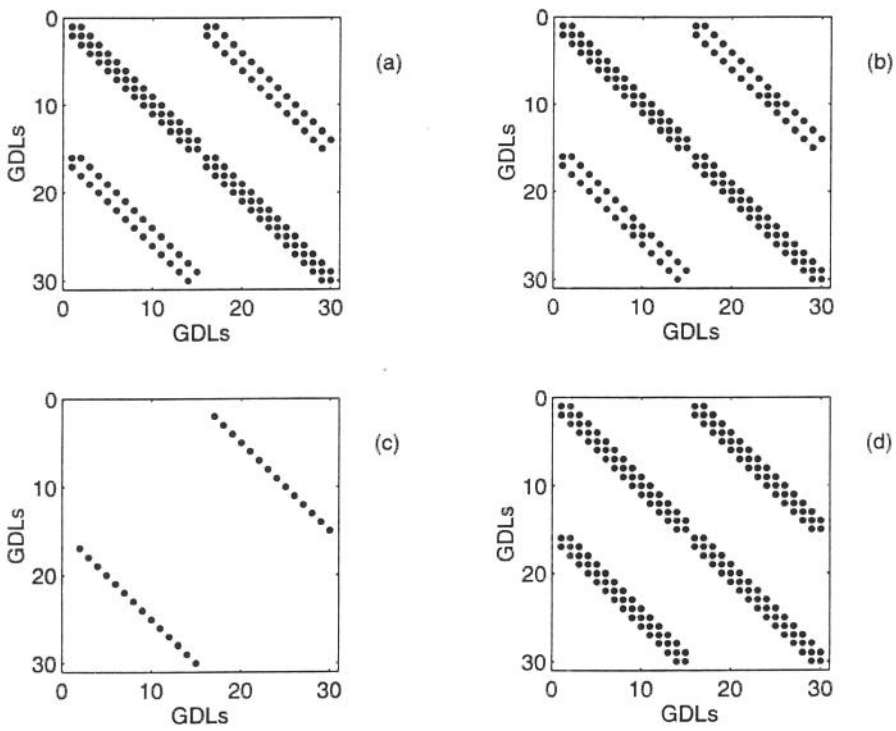


Figura 3.3 Modelos de esparsidade de matrizes onde os pontos indicam os elementos não nulos. (a) matriz K; (b) matriz Y; (c) matriz P; (d) matriz V.

Nos exemplos que se seguem, diversas situações são simuladas. As figuras 3.5-3.8 e 3.9-3.12 correspondem ao caso exato em que não há ruídos de medição e onde se supõe que todos os GDLs são conhecidos. O ajuste de modelos é feito com diferentes números de modos. Desta forma estuda-se o impacto do truncamento modal no processo de ajuste e localização de falhas. Na figuras 3.5-8 representa-se o caso em que apenas um modo é utilizado e as figuras 3.9-12 o caso em que são usados 4 modos. Por simplicidade de notação, o método de Baruch e Bar Itzhack [4] será indicado por BB, o método iterativo de Smith [24] por IS, o método de Kabe [11, 12] por KMA e o método de Rearranjo das Equações por RE. Os resultados apresentados nas figuras (5-12) deixam aparente que todos os métodos localizam a falha, seja com 1 ou 4 modos. Através do método BB somente o gráfico da diagonal de R permite a indicação do defeito, seja nos GDLs de translação (1-15) ou de rotação (16-30). Os métodos IS, KMA e RE, por sua vez, geram matrizes de correção (-R) tal que a falha é facilmente localizada através de qualquer uma das três representações, como mostrado nas figuras em tela.

Na tabela 3.2 são mostrados os erros máximos encontrados entre os coeficientes das matrizes de rigidez original e a ajustada. Como se pode observar nesta tabela, os erros dos métodos BB e IS informam que estes métodos não conseguem reproduzir os coeficientes de rigidez exatos. Isto se deve ao fato de que estes métodos ajustam o modelo de forma global. Por outro lado, os métodos KMA e RE conseguem reproduzir os coeficientes de rigidez exatos, sendo para isso necessário um mínimo de 4 modos. Para um número menor de modos, estes dois métodos apenas localizam a falha. Fica subentendido, salvo menção em contrário, que 1 modo significa o primeiro modo; 4 modos significa os 4 primeiros modos e assim por diante.

Tabela 3.2 Erros máximos usando os métodos BB, IS, KMA e RE.

E R R O (%)		
Método	Usando 1 modo	usando 4 modos
BB	1499	1445
IS	1504	2904
KMA	1499	2,4 e-1
RE	1499	3,3 e-4

É interessante também se ter uma idéia sobre o custo computacional de cada um destes métodos. Os resultados são mostrados na tabela 3.3. O método IS utiliza o método BB de forma iterativa. Portanto, o custo do método IS será sempre um múltiplo do custo do método BB sem processo iterativo interrompe-se em função da tolerância de convergência especificada. Por esta razão, deixa-se de mostrar o custo computacional do método IS. Em ambos os casos o custo computacional é expresso em KFlops.

Tabela 3.3 Custo computacional dos métodos BB, KMA e RE em KFlops.

Custo Computacional		
Método	Usando 1 modo	Usando 4 modos
BB	495	512
KMA	2.258	35.429
RE	8,30	78

Esta diferença de custo computacional envolvendo os métodos KMA e RE, uma vez que entre os métodos usados somente estes ajustam a matriz de rigidez elemento-a-elemento, está relacionada à esparsidade das matrizes dos coeficientes geradas por cada um destes dois métodos. A esparsidade de cada uma destas matrizes é mostrada na figura 3.4. O baixo custo computacional do método RE, que decorre da significativa esparsidade da matriz do sistema, o coloca como um método em potencial para tratar problemas de grande porte. Nas figuras 3.4(a) e 3.4(b) *nz* representa o número de elementos não nulos que são indicados por pontos escuros.

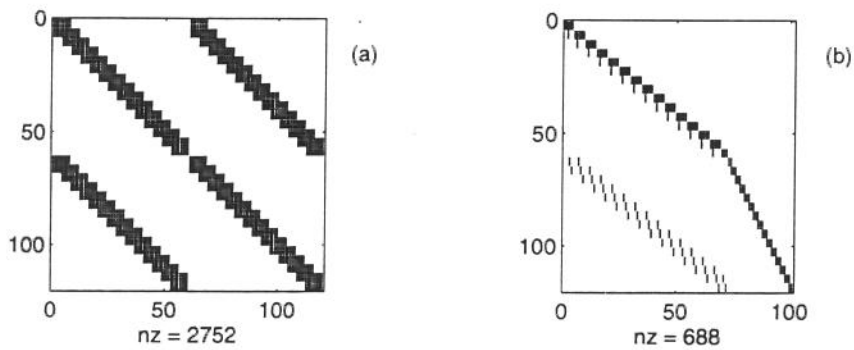


Figura 3.4 Modelo de esparsidade das matrizes dos coeficientes. (a) KMA; (b) RE.

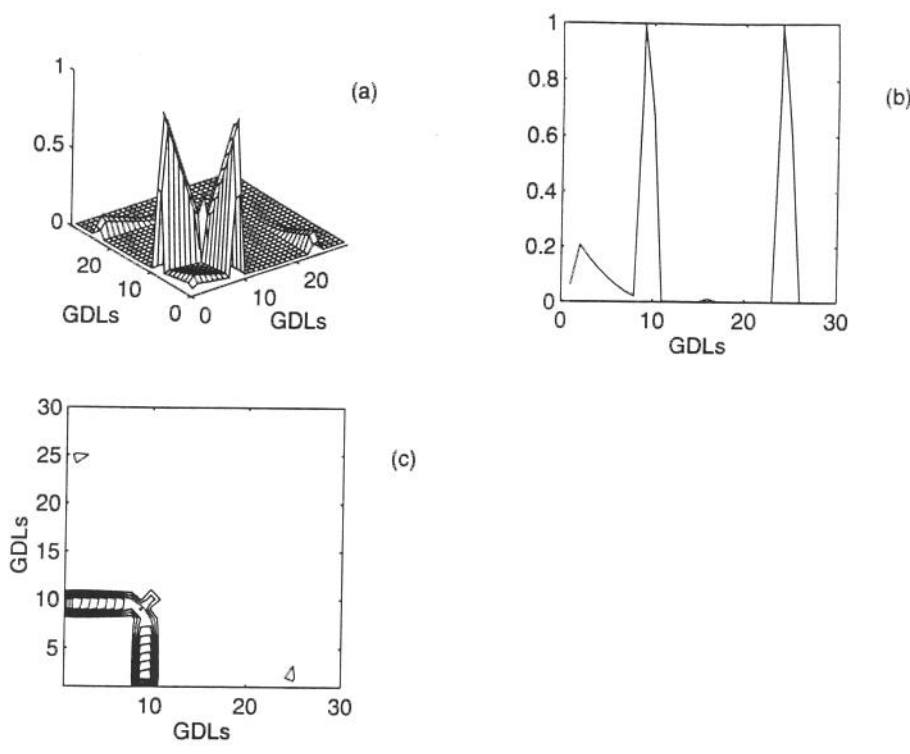


Figura 3.5 Matriz R obtida por BB, 1 modo, caso exato. (a) vista tridimensional de R; (b) diagonal de R; (c) projeção de R.

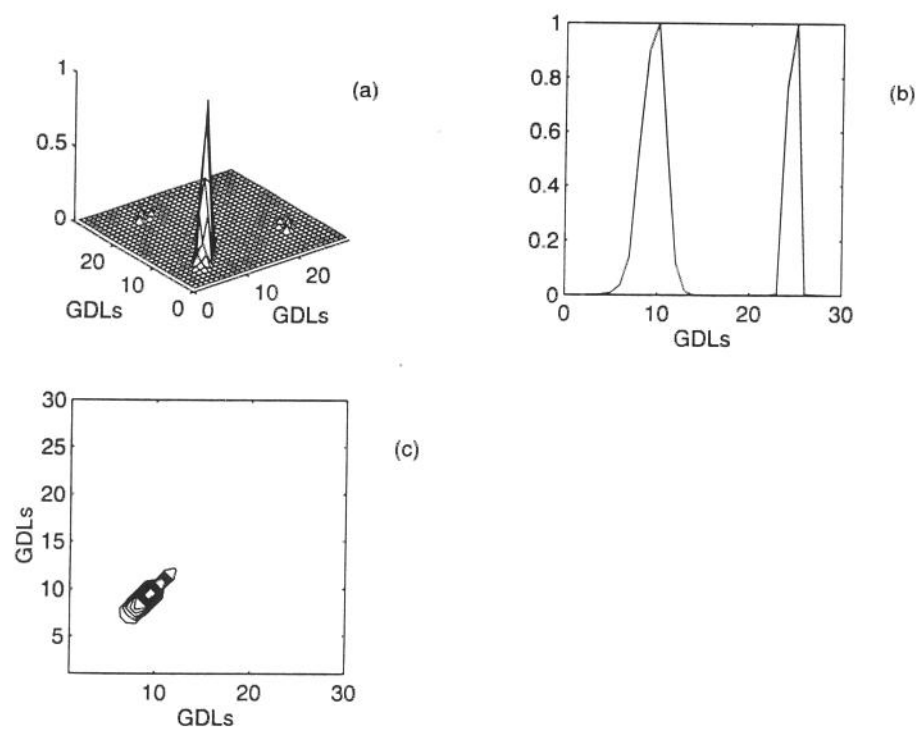


Figura 3.6 Matriz R obtida por IS, 1 modo, caso exato. (a) vista tridimensional de R; (b) diagonal de R; (c) projeção de R.

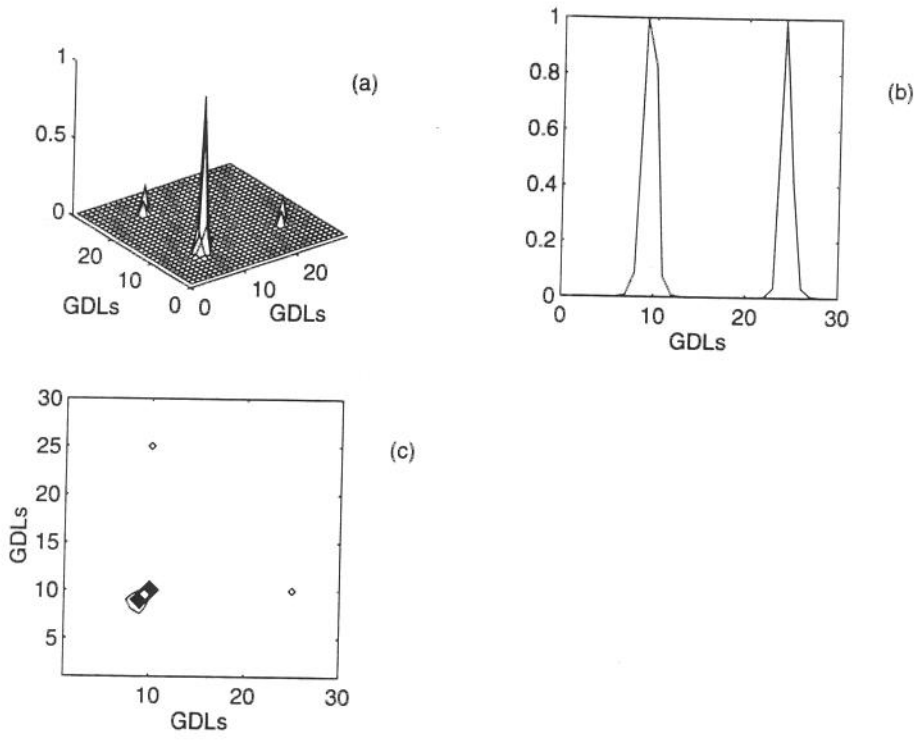


Figura 3.7 Matriz R obtida por KMA, 1 modo, caso exato. (a) vista tridimensional de R; (b) diagonal de R; (c) projeção de R.

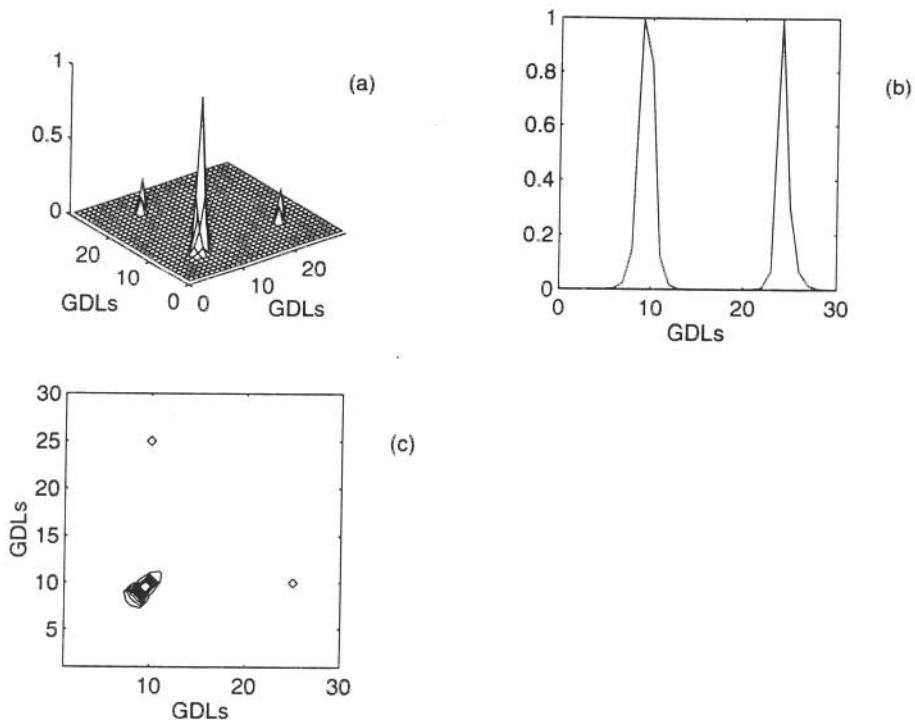


Figura 3.8 Matriz R obtida por RE, 1 modo, caso exato. (a) vista tridimensional de R; (b) diagonal de R; (c) projeção de R.

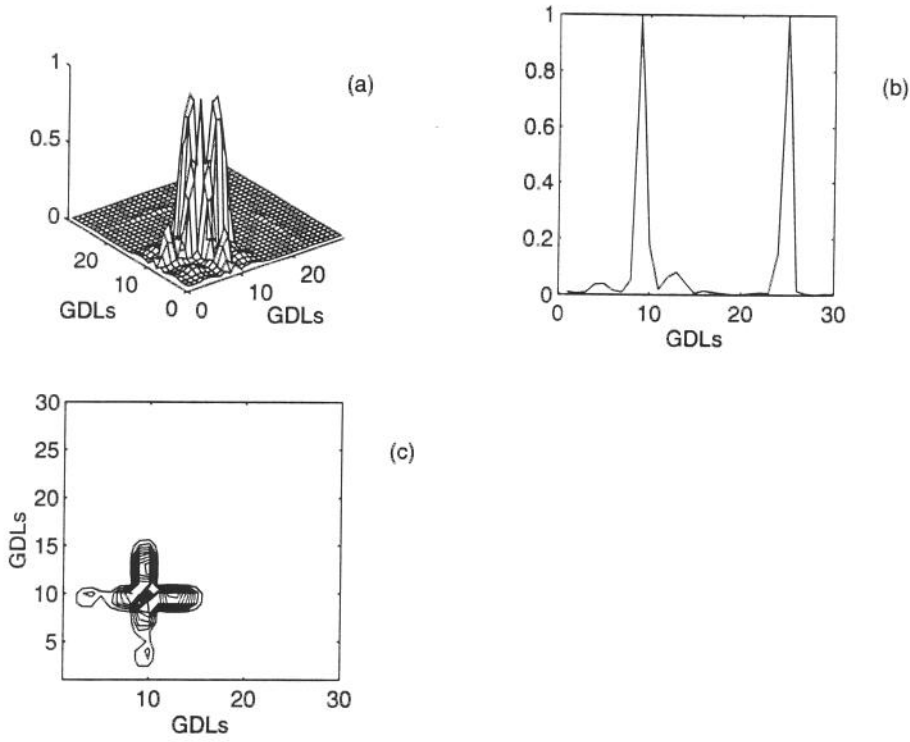


Figura 3.9 Matriz R obtida por BB, 4 modos, caso exato. (a) vista tridimensional de R; (b) diagonal de R; (c) projeção de R.

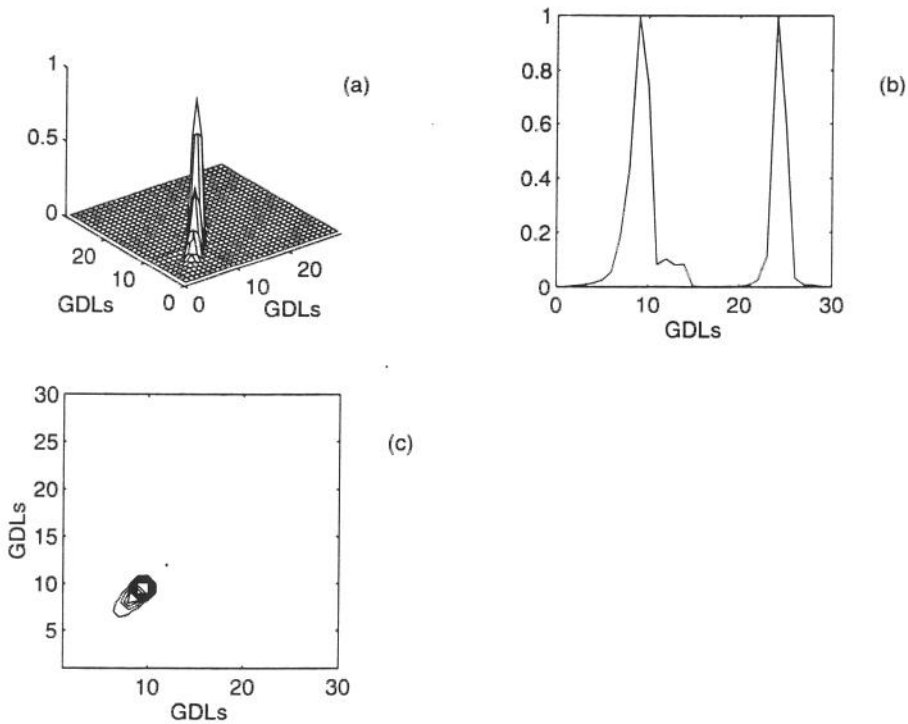


Figura 3.10 Matriz R obtida por IS, 4 modos, caso exato. (a) vista tridimensional de R; (b) diagonal de R; (c) projeção de R.

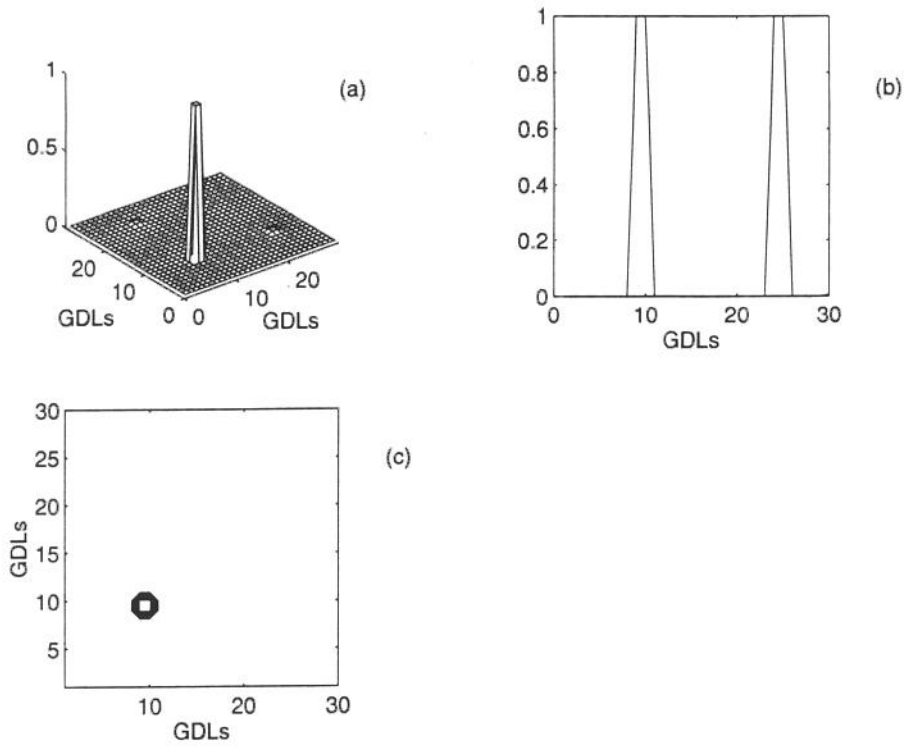


Figura 3.11 Matriz R obtida por KMA, 4 modos, caso exato. (a) vista tridimensional de R; (b) diagonal de R; (c) projeção de R.

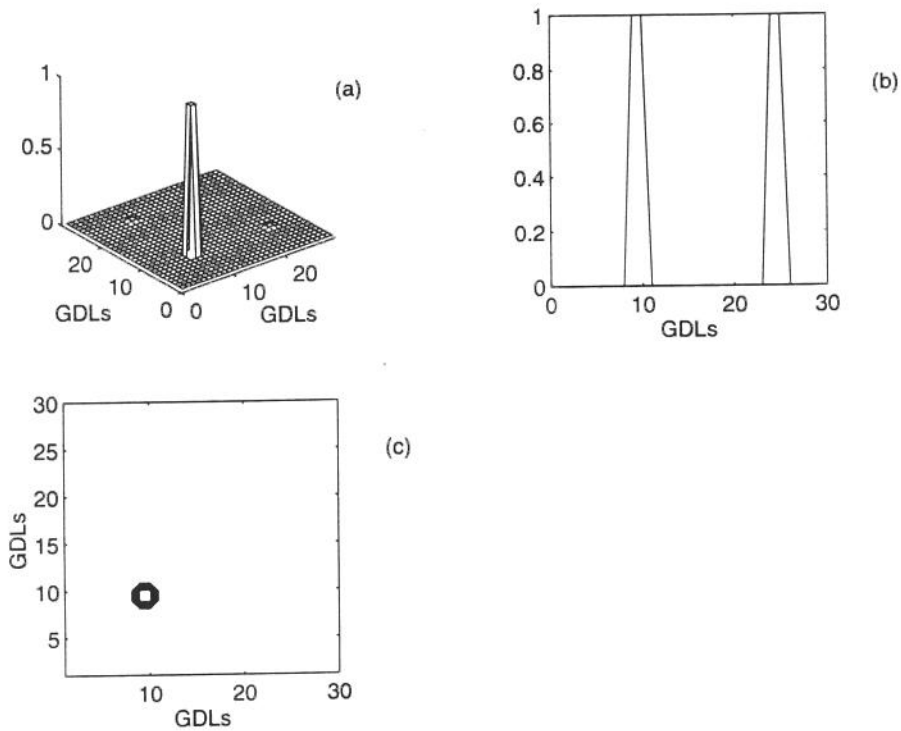


Figura 3.12 Matriz R obtida por RE, 4 modos, caso exato. (a) vista tridimensional de R; (b) diagonal de R; (c) projeção de R.

Considerando que os métodos de ajuste globais nunca reproduzem os coeficientes exatos da matriz de rigidez, ao contrário dos métodos KMA e RE, nos exemplos que se seguem serão usados 4 modos no processo de ajuste e localização de falhas. Este número de modos é escolhido tendo em vista que os métodos KMA e RE foram capazes de reproduzir os coeficientes da matriz de rigidez exata com 4 modos. Estes exemplos são casos mais realísticos por levarem em conta a presença de ruído de medições bem como a questão envolvendo a compatibilização de tamanho entre os modelos teórico e experimental. Expansão e redução do modelo serão consideradas. Um ruído é adicionado aos dados teóricos para simular dados experimentais. Ele é do tipo Gaussiano com média zero e variância unitária. O sinal aleatório é gerado no MATLAB [51] e adicionado aos modos de vibração e frequências naturais em conformidade com as equações (3.1) e (3.2).

$$\Psi_{\text{exp}_i} = \Psi_{t_i} + \text{randn}(n) \text{rms}(\Psi_{t_i}) \left(\frac{p_m}{100} \right) \quad (3.1)$$

$$f_{\text{exp}_i} = f_{t_i} + \text{randn}(1) \text{rms}(f_{t_i}) \left(\frac{p_f}{100} \right) \quad (3.2)$$

onde, Ψ_{t_i} e Ψ_{exp_i} são os i -ésimos vetores modais teórico e experimental, respectivamente; f_{t_i} e f_{exp_i} são as i -ésimas frequências naturais teórica e experimental, respectivamente; p_m e p_f são coeficientes que definem o percentual de ruído a ser adicionado ao modo; $\text{randn}(n)$ é uma função geradora de vetores de números aleatórios de dimensão n e rms é uma função que calcula a raiz do valor médio quadrático para um dos vetores usados.

O exemplo mostrado nas figuras 3.13 a 3.16 representa o caso em que há ruídos de medição e que se supõe conhecidas as rotações. Os métodos BB e IS indicam claramente a localização da falha, ao contrário dos métodos KMA e RE. Quanto ao método BB, as figuras 3.13 (a) e (c) são obscuras para indicar o local da falha, ao contrário da diagonal de R na figura 3.13 (b). Comparando-se as figuras 3.13(a) e 3.14(a) pode-se notar que o método IS limita a valores mínimos os termos que são irrealisticamente alterados pelo método BB.

As figuras 3.17 a 3.20 tratam do caso em que há ruídos de medição e o modelo é expandido por não se conhecerem as rotações. Dos vários métodos de expansão testados, o que melhor conseguiu reproduzir os dados experimentais foi o método de expansão dinâmica proposto por Kidder [40], gerando pouca distorção em torno dos GDLs afetados pela falha, fato que ratifica as observações de Lieven e Ewins [38]. Os

métodos KMA e RE falham em localizar a falha, enquanto os métodos BB e IS indicam claramente o local da falha. O método BB, como no caso anterior, deixa transparecer o local da falha unicamente através da diagonal de R, figura 3.17(b), e, neste caso, somente com os GDLs relacionados aos deslocamentos transversais.

O exemplo relativo às figuras 3.21 a 3.23 é idêntico ao exemplo anterior mas, ao invés de se fazer uma expansão modal, reduzem-se as matrizes de massa e rigidez para a ordem das coordenadas medidas, que são os GDLs do modelo experimental. Esta redução ou condensação do sistema é feita utilizando-se o método de redução de Guyan [39], tendo em vista que a redução destrói a esparsidade das matrizes do sistema, o método iterativo de Smith, IS, [24] deixa de ser aplicado, uma vez que ele, nestes casos, se reduz ao método de Baruch e Bar Itzhack, BB, [4]. Mais uma vez os métodos KMA e RE falham em localizar a falha. Por outro lado, o método BB continua gerando uma matriz R que apresenta um pico nas proximidades dos GDLs que são mais afetados pela falha.

Para finalizar a análise relacionada a este modelo da viga, utiliza-se o método do balanço de forças (MBF) para este último caso tratado. Na sua formulação original [29], apenas um único modo é utilizado para se calcular o vetor das forças residuais F_i que é dado pela equação 3.3:

$$F_i = K \psi_i - M \psi_i \omega_i^2 \quad (3.3)$$

onde K e M são as matrizes de rigidez e massa analíticas, nesta ordem, e ψ_i e ω_i são o par constituído pelo modo de vibração e a frequência natural experimentais que são escolhidos para se calcular o vetor das forças residuais. Neste trabalho é proposto calcular uma matriz das forças residuais ao invés de um vetor. Desta forma, esta matriz, indicada por E, é dada pela equação (3.4):

$$E = K \Psi - M \Psi \Lambda \quad (3.4)$$

onde Ψ e Λ são as matrizes que contém os modos de vibração e os quadrados das frequências naturais experimentais que serão usadas para calcular a matriz de forças residuais. O mecanismo de localização associado às equações (3.3) e (3.4) se baseia no fato de que quando se altera um elemento de uma linha em uma matriz, ao se multiplicar esta matriz por um vetor, o efeito desta alteração vai se refletir exatamente na linha correspondente do vetor produto. Desta forma, considerando-se que a falha está localizada em uma região da matriz de rigidez, sua presença se fará sentir por uma

discrepância entre os elementos do vetor das forças residuais associados aos GDLs afetados por ela. Na presença de ruído, esta discrepância pode não aparecer claramente. Por outro lado, tomando-se não apenas um, mas vários modos de vibração e calculando-se a norma das linhas da matriz dos resíduos das forças, o efeito do ruído, que não é uma característica do sistema, pode ser minimizado devido ao efeito de filtragem da média. Esta situação é claramente mostrada nas figuras 3.24 e 3.25. A sigla NLVFR significa norma das linhas do vetor das forças residuais. Para um vetor, a norma de cada linha coincide com o valor absoluto de cada elemento da linha. Para uma matriz, a norma da linha é definida aqui como a raiz quadrada da soma dos quadrados de todos os elementos desta linha.

Para verificar a possibilidade de localizar falhas estruturais utilizando a NLVFR, utiliza-se o caso de simulação em que se faz uma expansão dos modos pelo método de Kidder [40]. Na figura 3.24(a) tem-se o resíduo exato. Em 3.24(b) tem-se o vetor da norma das linhas da matriz das forças residuais calculado pela equação (3.3) e cujos valores foram normalizadas tal que o maior valor é unidade. Em 3.24 (c) tem-se o vetor que contém a norma das linhas da matriz das forças residuais calculado pela equação (3.4) e cujos valores foram normalizadas tal que o maior valor é unidade. Os GDLs dos deslocamentos transversais e das rotação são normalizados separadamente. Comparando-se a parte correspondente aos GDLs dos deslocamentos transversais entre as figuras 3.24 (b) e (c), pode-se inferir que a norma das linhas da matriz das forças residuais indica perfeitamente o local da falha, o que não acontece quando se utiliza um só modo escolhido entre os modos experimentais disponíveis. O mesmo se pode afirmar com relação ao caso da figura 3.25, onde se procedeu a uma redução da ordem do sistema pelo método de Guyan [39]. É nítida a localização da falha utilizando-se a matriz das forças residuais.

Para aplicações de correlação de modelos, entre as quais localização de falhas, Lieven e Ewins [54] aconselham evitar a redução de Guyan sempre que possível e sugerem que se busque fazer uma expansão modal. Eles argumentam que a redução destrói o modelo de conectividade da estrutura e espalham o erro prejudicando o processo de localização de erros em modelos de elementos finitos. É certo que a redução leva a uma dispersão do erro inicialmente localizado em uma região da matriz de rigidez. Porém, este espalhamento do erro se dá de forma mais intensa na vizinhança do núcleo da falha, perdendo sua força à medida que se caminha para fora dele. O gráfico da figura 3.21(b) deixa claro que ainda é possível localizar a falha quando se aplica a redução de Guyan.

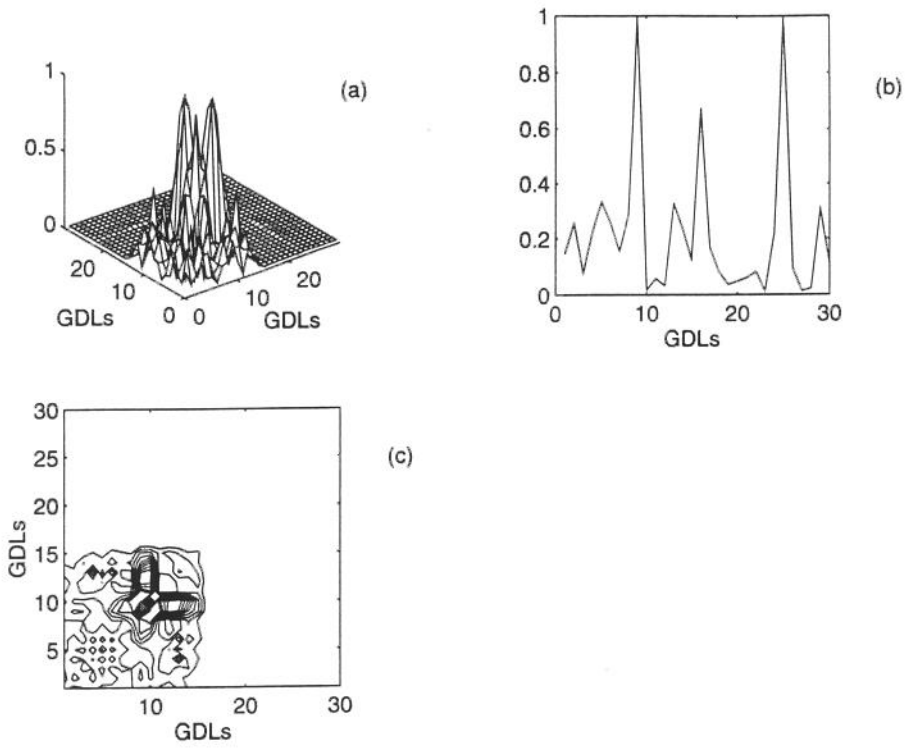


Figura 3.13 Matriz R obtida por BB, 4 modos, ruído Gaussiano aditivo sem expansão. (a) vista tridimensional de R; (b) diagonal de R; (c) projeção de R.

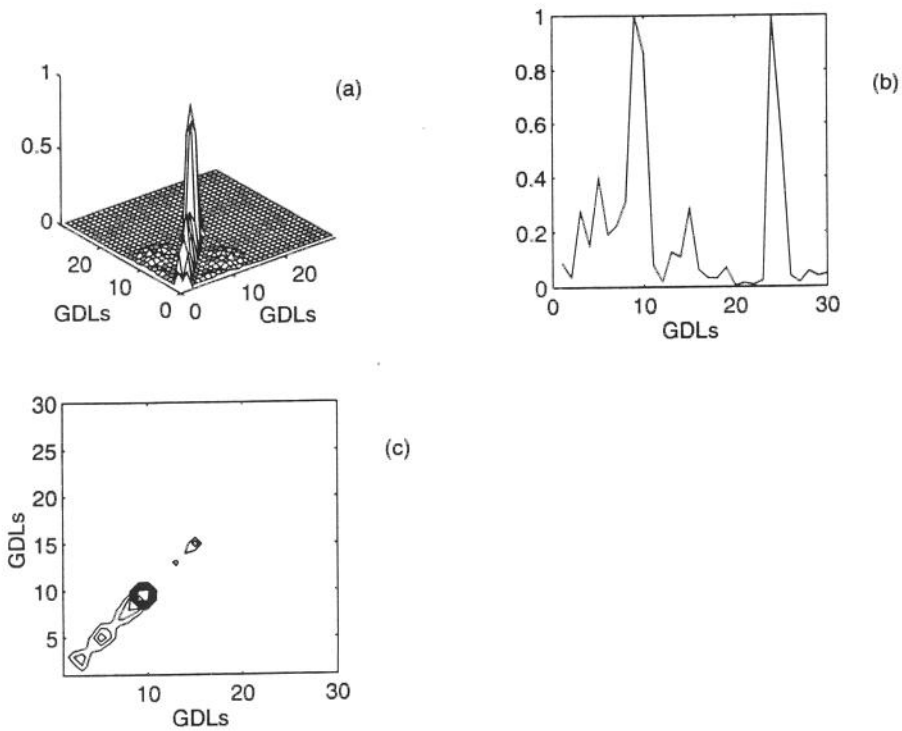


Figura 3.14 Matriz R obtida por IS, 4 modos, ruído Gaussiano aditivo sem expansão. (a) vista tridimensional de R; (b) diagonal de R; (c) projeção de R.

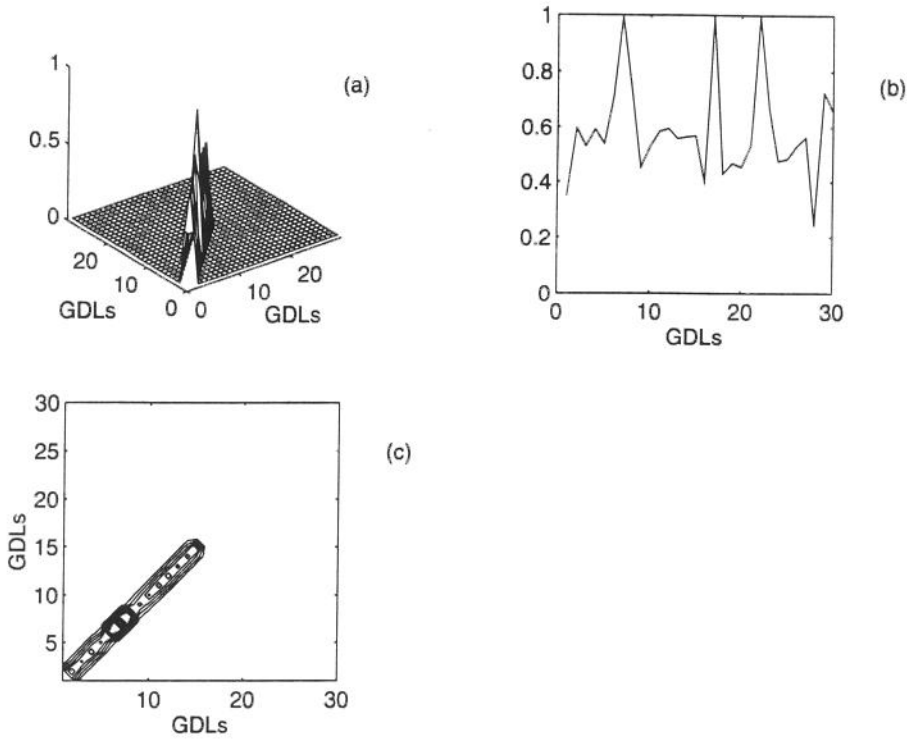


Figura 3.15 Matriz R obtida por KMA, 4 modos, ruído Gaussiano aditivo sem expansão. (a) vista tridimensional de R; (b) diagonal de R; (c) projeção de R.

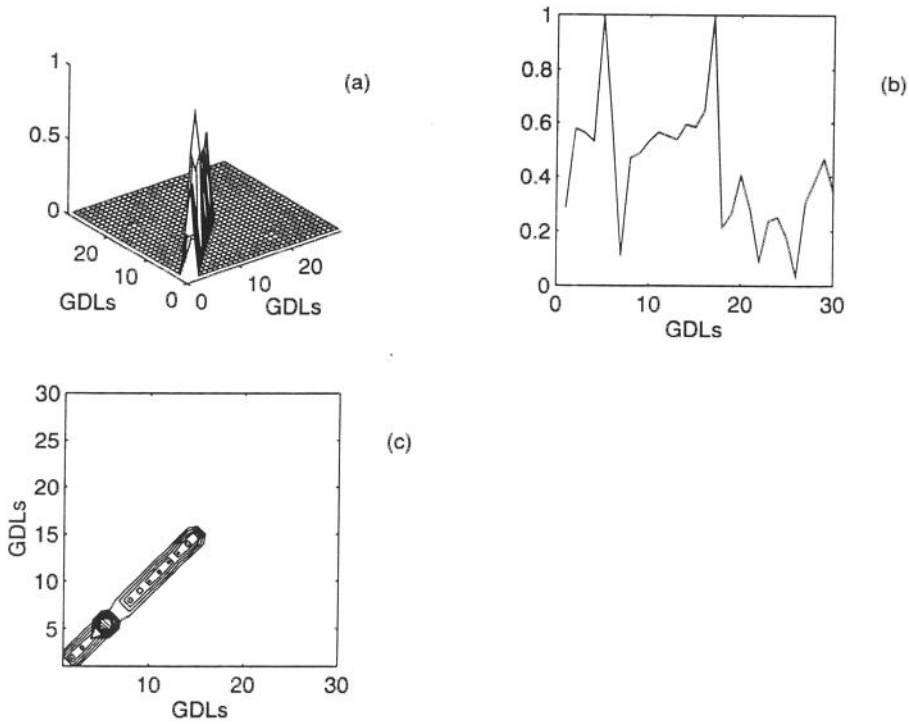


Figura 3.16 Matriz R obtida por RE, 4 modos, ruído Gaussiano aditivo sem expansão. (a) vista tridimensional de R; (b) diagonal de R; (c) projeção de R.

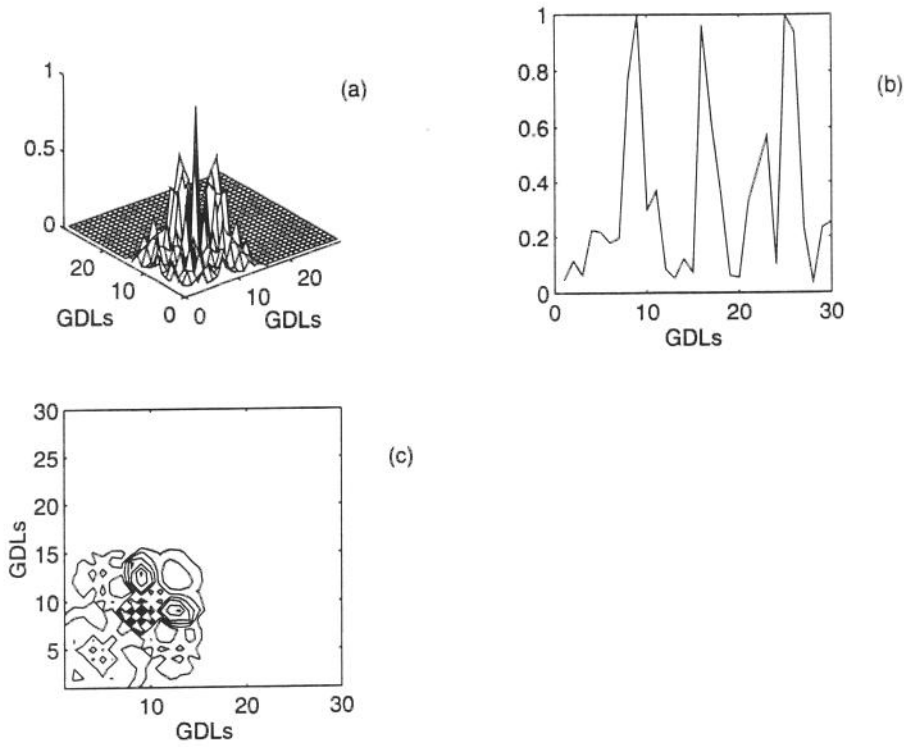


Figura 3.17 Matriz R obtida por BB, 4 modos, ruído Gaussiano aditivo e expansão (Kidder). (a) vista tridimensional de R; (b) diagonal de R; (c) projeção de R.

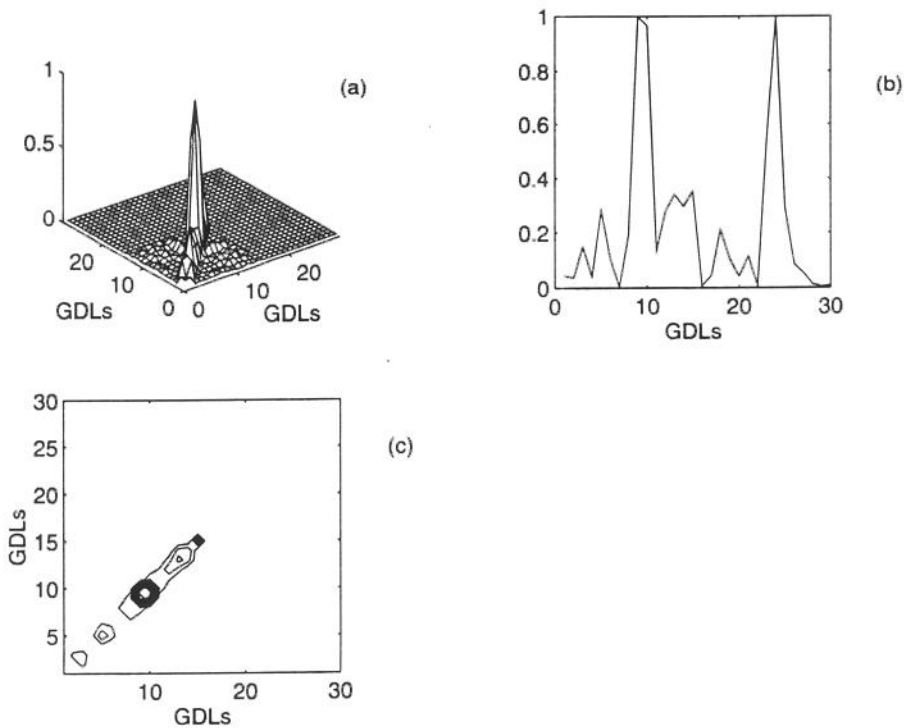


Figura 3.18 Matriz R obtida por IS, 4 modos, ruído Gaussiano aditivo e expansão (Kidder). (a) vista tridimensional de R; (b) diagonal de R; (c) projeção de R.

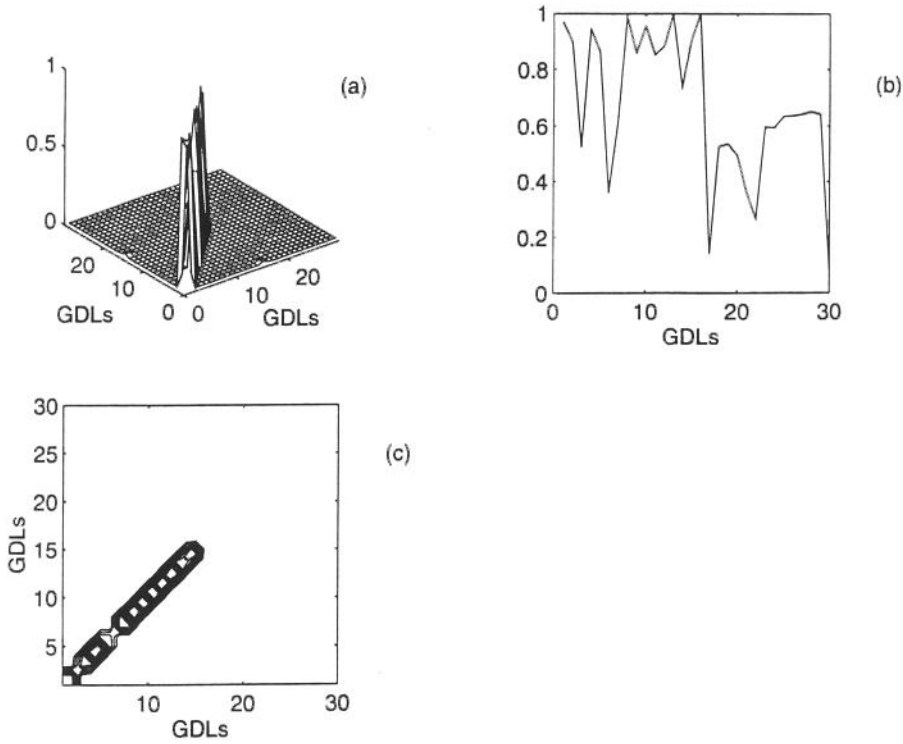


Figura 3.19 Matriz R obtida por KMA, 4 modos, ruído Gaussiano aditivo e expansão (Kidder). (a) vista tridimensional de R; (b) diagonal de R; (c) projeção de R.

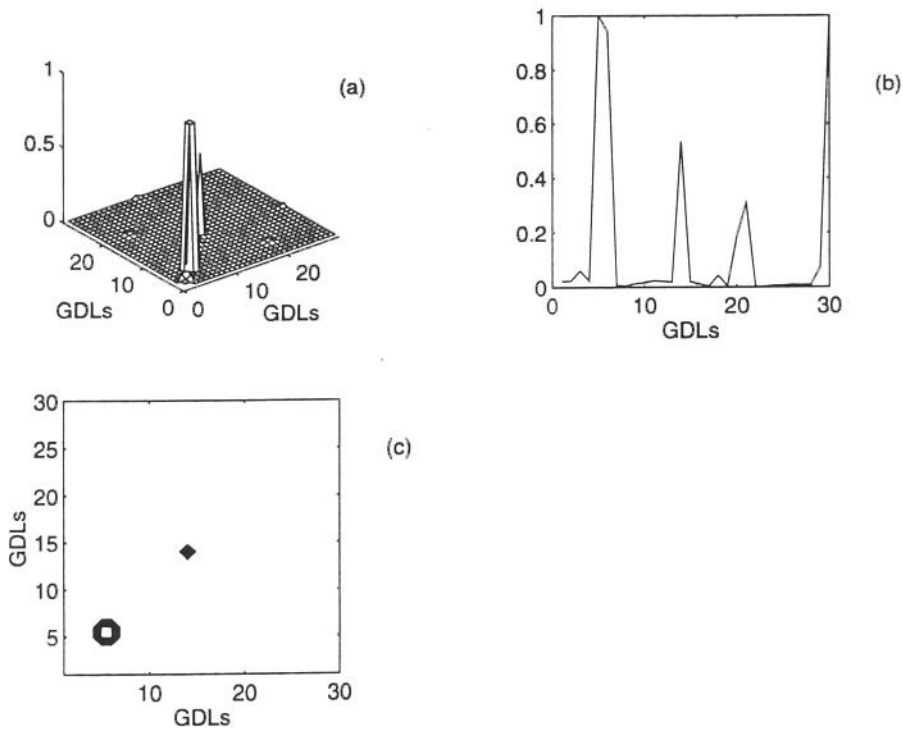


Figura 3.20 Matriz R obtida por RE, 4 modos, ruído Gaussiano aditivo e expansão (Kidder). (a) vista tridimensional de R; (b) diagonal de R; (c) projeção de R.

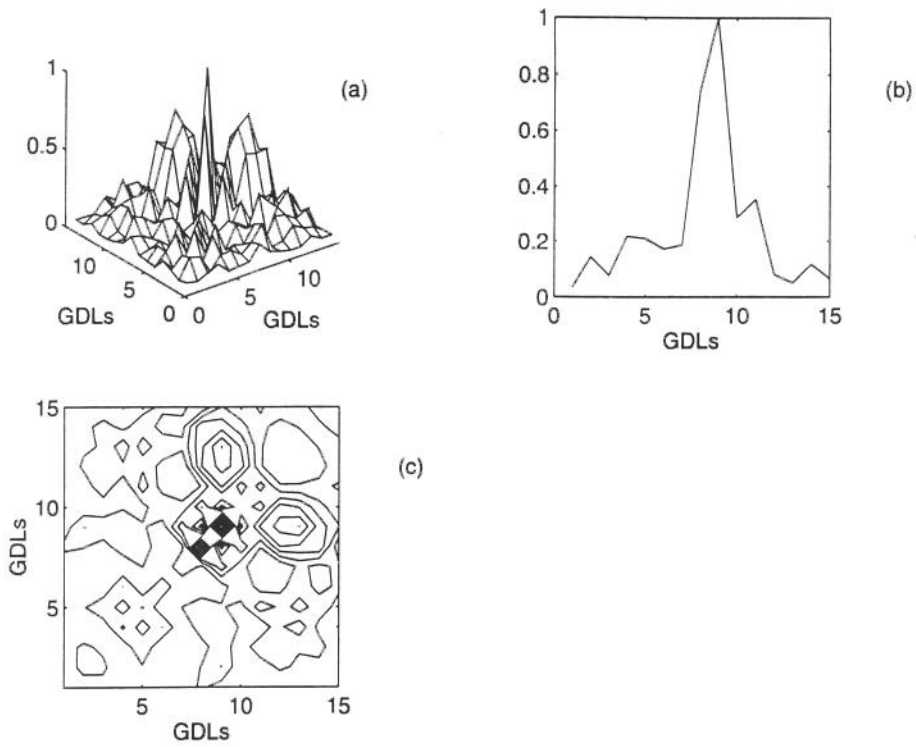


Figura 3.21 Matriz R obtida por BB, 4 modos, ruído Gaussiano aditivo e redução (Guyan). (a) vista tridimensional de R; (b) diagonal de R; (c) projeção de R.

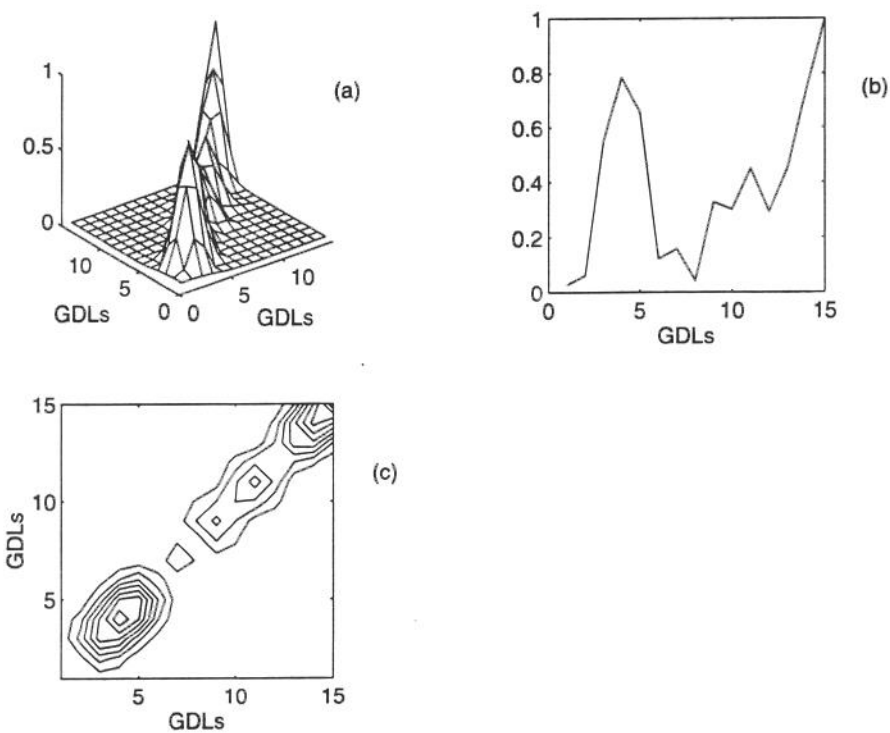


Figura 3.22 Matriz obtida por KMA, 4 modos, ruído Gaussiano aditivo e redução (Guyan). (a) vista tridimensional de R; (b) diagonal de R; (c) projeção de R.

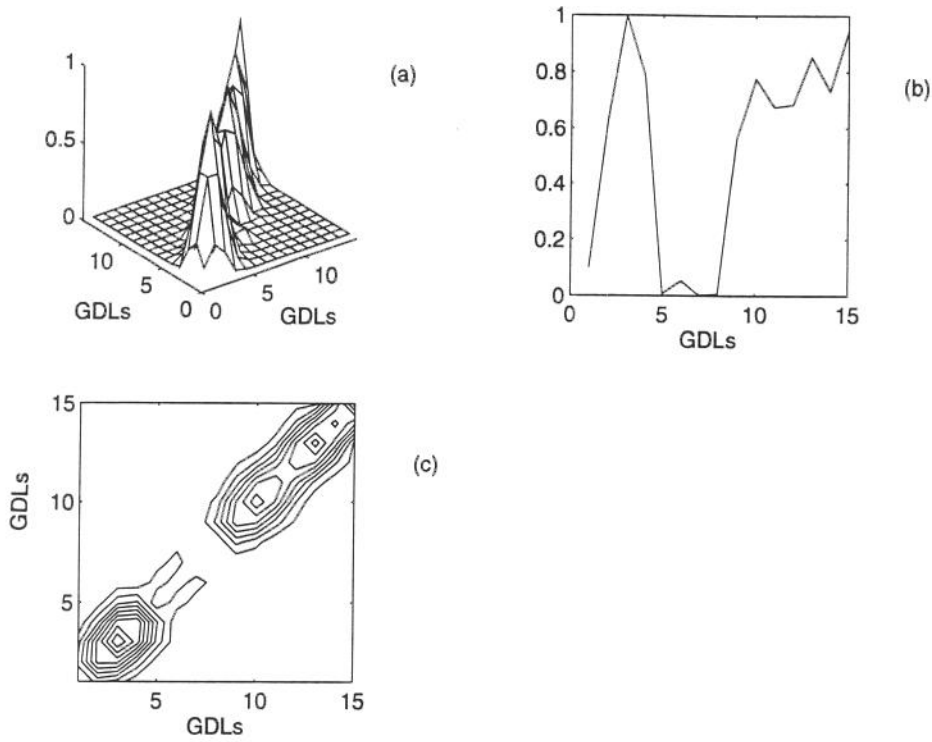


Figura 3.23 Matriz R obtida por RE, 4 modos, ruído Gaussiano aditivo e redução (Guyan). (a) vista tridimensional de R; (b) diagonal de R; (c) projeção de R.

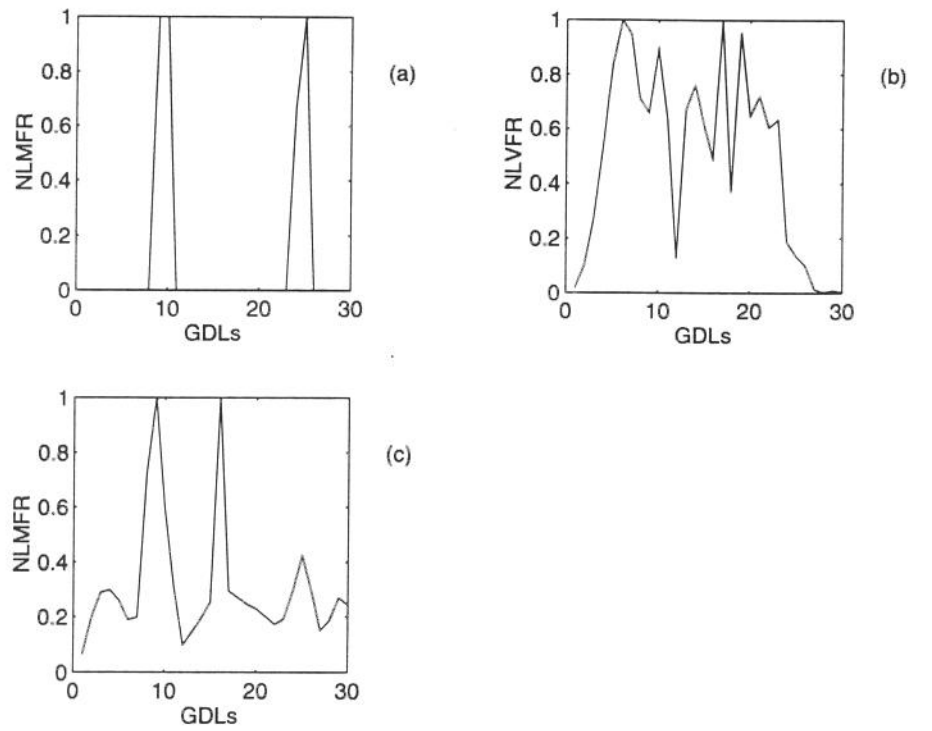


Figura 3.24 Forças residuais (MBF) com expansão de Kidder. (a) NLMFR, caso exato; (b) NLVFR, 1 modo; (c) NLMFR, 4 modos; modos com ruído Gaussiano aditivo.

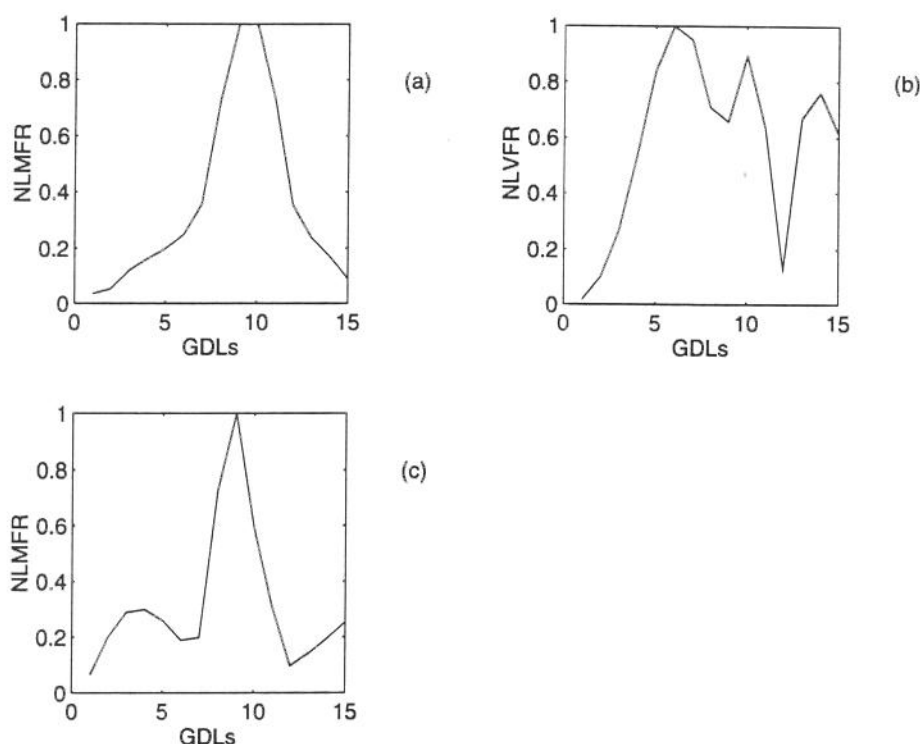


Figura 3.25 Forças residuais (MBF) com redução de Guyan. (a) NLMFR, caso exato; (b) NLVFR, 1 modo; (c) NLMFR, 4 modos; com ruído Gaussiano aditivo.

Nos exemplos tratados anteriormente, a extensão da falha imposta à viga correspondia a um elemento do modelo de elementos finitos. Em situações reais isto acontece. Uma melhor aproximação da realidade pode ser conseguida se a falha estiver contida em um dos elementos em que a estrutura é discretizada. Para simular esta situação, modelou-se a viga com um número maior de elementos, sendo que um deles foi subdividido para simular a falha. Modifica-se a área e o momento de inércia da seção transversal de dois subelementos do elemento escolhido. A redução foi a mesma que a do problema anterior. O elemento escolhido se situa num trecho da viga que, quando comparado com o modelo de 15 elementos, sua localização o coloca como parte do elemento de número 9 deste modelo. Este novo modelo pode ser visto na figura 3.26, onde são indicados os elementos com defeito, isto é, os elementos de números 18 e 19.

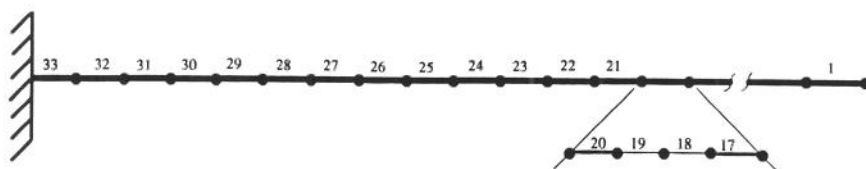


Figura 3.26 Modelo de EF refinado da viga engastada-livre com elemento subdividido para simulação de defeito.

A proposta é tentar localizar a falha utilizando-se o modelo de 15 elementos em conjunto com os dados "experimentais" gerados com o novo modelo. Desta forma, é esperado que o defeito apareça entre os GDLs (9 e 10) e (24 e 25), como no problema anterior.

A partir dos vetores modais gerados com o novo modelo mais refinado, geram-se os vetores modais "experimentais" tomando-se as coordenadas modais dos nós que também são nós no modelo com 15 elementos. Para caracterizar uma situação real, é adicionado ruído Gaussiano e se supõe desconhecidos os GDLs de rotação. Os métodos BB, IS, KMA e RE são utilizados para tentar localizar a falha. Pelos resultados anteriores, é esperado que apenas os métodos BB e IS sejam capazes de indicar o local da falha. Os modos são expandidos pelo método de Kidder [40] para fornecer as rotações. Os resultados são mostrados nas figuras 3.27 a 3.30. A incapacidade dos métodos KMA e RE é confirmada como pode ser visto nas figuras 3.29 e 3.30. Por outro lado, surpreendentemente, o método IS também não foi capaz de indicar o local da falha, conforme se deduz das figuras 3.28(b) e 3.28(c), muito embora exista um pico na região dos GDLs (9 e 10) e (24 e 26) como pode ser visto na figura 3.28(b). O método BB, por sua vez, através dos elementos da diagonal relativos aos GDLs dos deslocamentos transversais, figura 3.27(b), indica sem margem de dúvidas o local da falha.

Tendo em vista que o método BB foi o único a apontar o local da falha em todos os casos de simulação aqui tratados, conclui-se de toda esta análise que este método é o mais adequado quando o objetivo é localização de falhas estruturais. Ao mesmo tempo, aliada a esta qualidade, o método apresenta um custo computacional baixo, o que o coloca como um método a ser levado em conta ao se tratar problemas de grande porte.

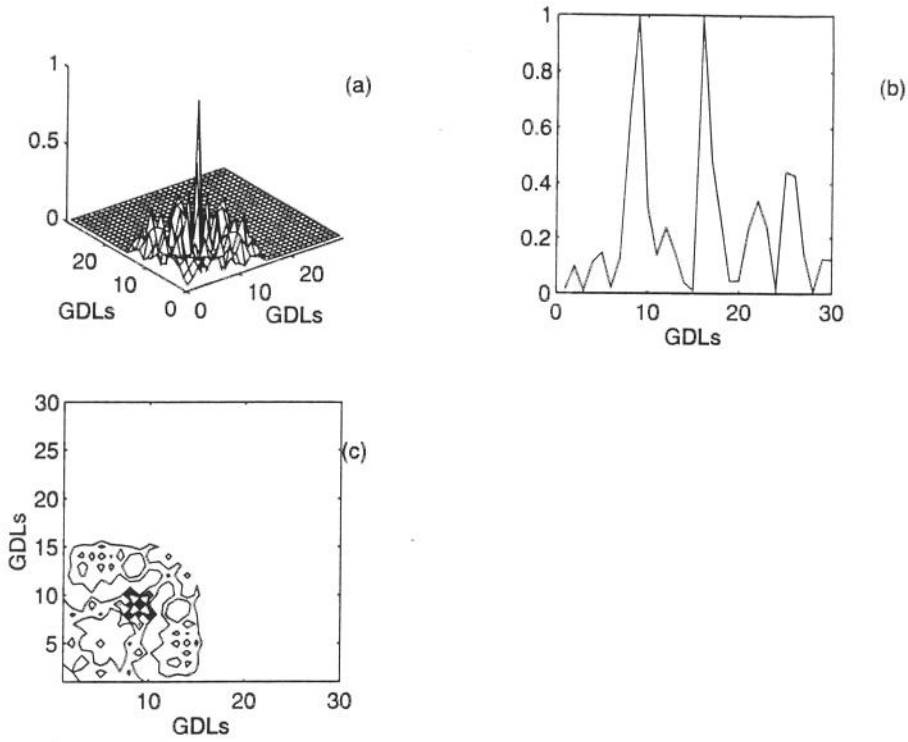


Figura 3.27 Matriz R obtida por BB, 4 modos, ruído Gaussiano aditivo e expansão (Kidder). (a) vista tridimensional de R; (b) diagonal de R; (c) projeção de R.

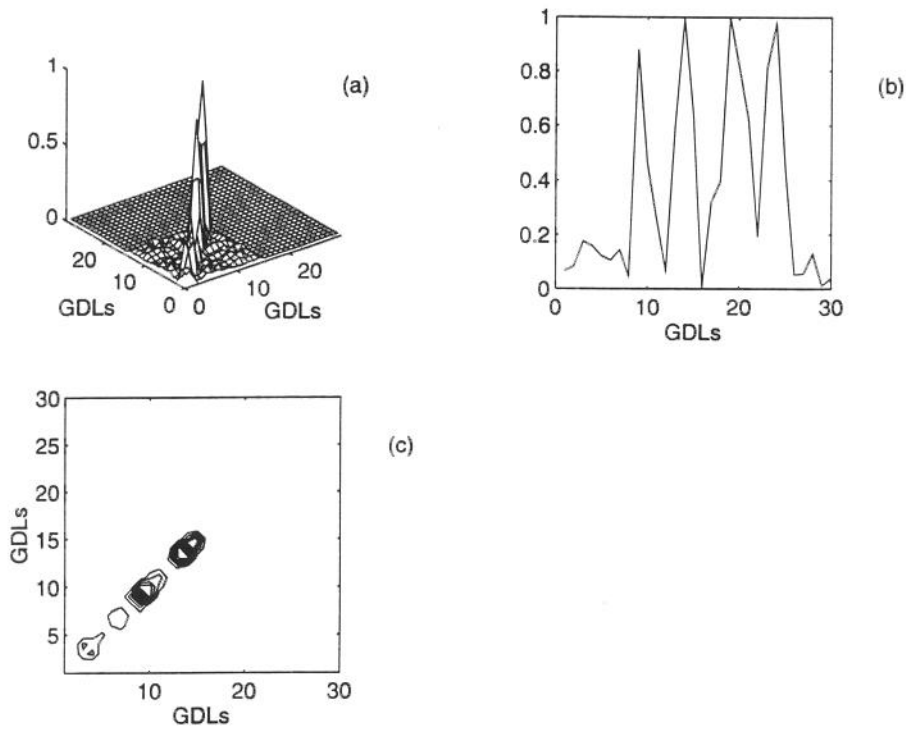


Figura 3.28 Matriz R obtida por IS, 4 modos, ruído Gaussiano aditivo e expansão (Kidder). (a) vista tridimensional de R; (b) diagonal de R; (c) projeção de R.

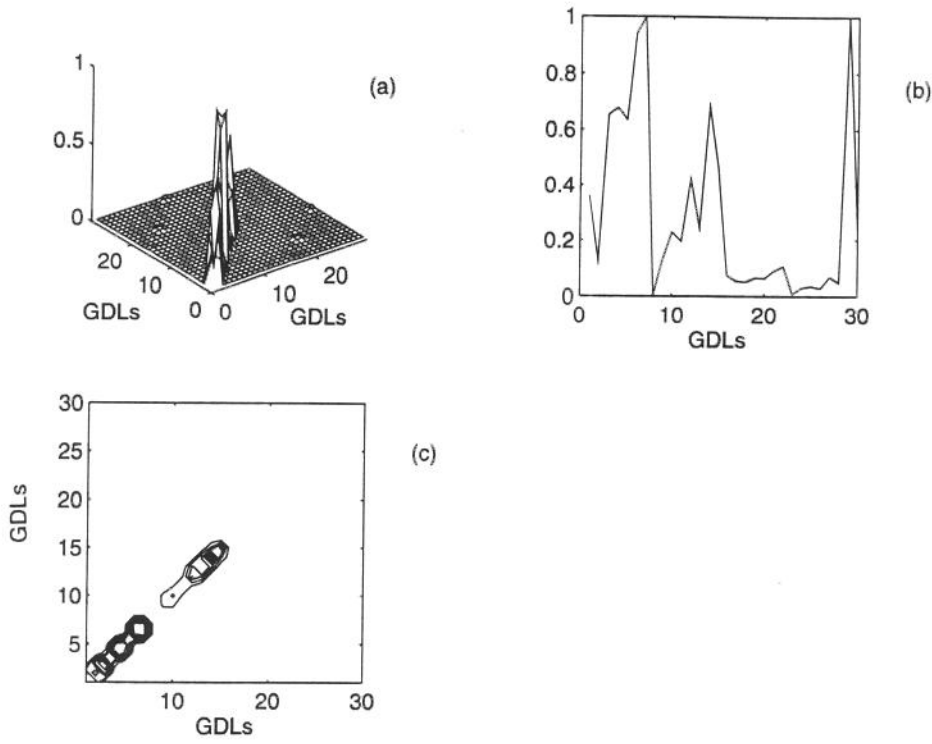


Figura 3.29 Matriz R obtida por KMA, 4 modos, ruído Gaussiano aditivo e expansão (Kidder). (a) vista tridimensional de R; (b) diagonal de R; (c) projeção de R.

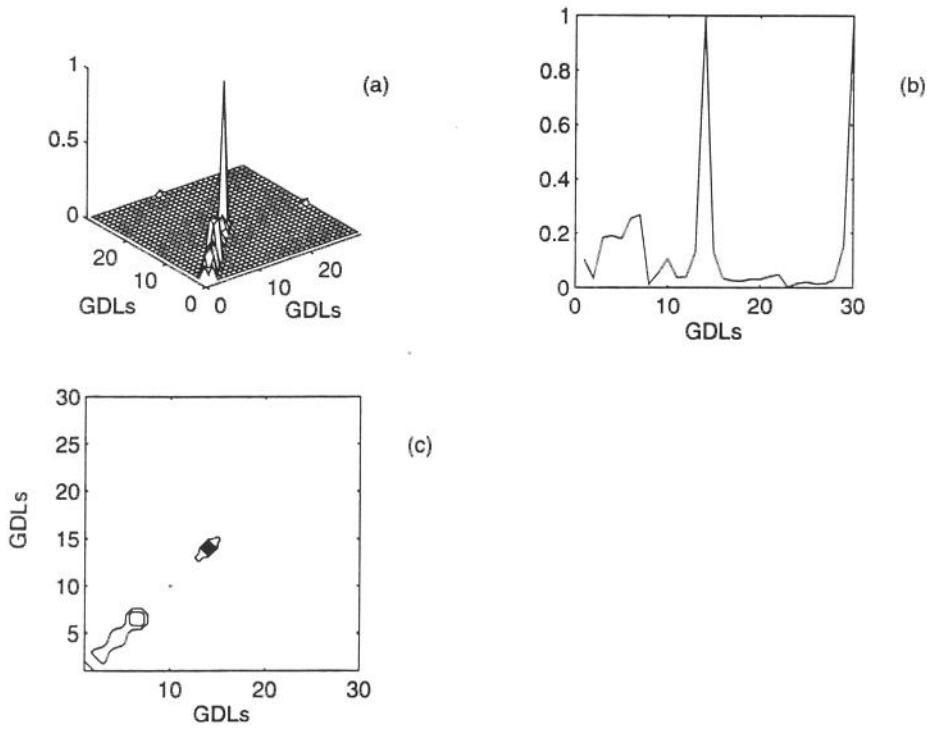


Figura 3.30 Matriz R obtida por RE, 4 modos, ruído Gaussiano aditivo e expansão (Kidder). (a) vista tridimensional de R; (b) diagonal de R; (c) projeção de R.

Um aspecto comumente encontrado na literatura nesta área de ajuste de modelos coloca o dinamicista diante da seguinte situação: é preferível se dispor de mais modos para o ajuste de modelos ou é melhor ter um modelo com mais graus de liberdade? Lieven e Ewins [54] são taxativos em afirmar que a maior causa de uma pobre correlação de modelos se deve mais ao número reduzido de coordenadas do que ao número de modos.

Para responder a esta indagação, foi construído um terceiro modelo com o dobro de elementos em relação ao modelo de 15 elementos, o qual é mostrado na figura 3.31. Os elementos com defeitos são os de números 17 e 18, que correspondem ao elemento de número 9 no modelo de 15 elementos. Estes dois elementos danificados são limitados pelos GDLs 17-19 dos deslocamentos transversais e pelos GDLs 47-49 das rotações. Esta investigação ficará limitada ao caso exato, isto é, sem ruído e com todos os GDLs conhecidos. Estas condições ideais permitem uma melhor avaliação dos métodos. Procedeu-se ao ajuste de ambos os modelos inicialmente com 4 modos, número que proporciona a exata reprodução dos coeficientes da matriz de rigidez com o modelo de 15 elementos, seja com o método KMA ou RE. Como ambos dão os mesmos resultados, faz-se opção pelo método RE.

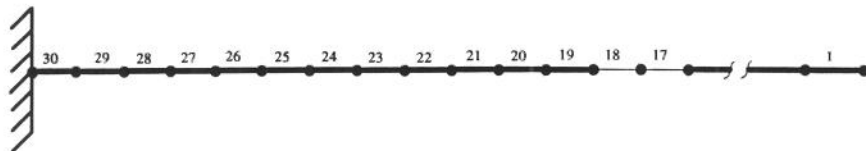


Figura 3.31 Modelo de EF da viga engastada-livre onde se indicam os elementos defeituosos, elementos de números 17 e 18.

A matriz erro exata R é mostrada na figura 3.32(a) e 3.32(b), através da projeção de R e de sua diagonal, respectivamente, como referência de comparação com a matriz R calculada por ajuste. Com 4 modos não se consegue localizar a falha com o modelo de 30 elementos, como se pode ver claramente nas figuras 3.32(c) e 3.32(d). Uma outra tentativa é feita utilizando-se agora 5 modos. Neste caso foi possível localizar a falha como demonstrado nas figuras 3.32(e) e 3.32(f). Contudo, os erros máximos em relação aos coeficientes de rigidez são 678% e 25% respectivamente. Para atingir a ordem de grandeza de erro encontrada com o modelo de 15 elementos foram necessários 7 modos, resultando num erro máximo de $5,3 \cdot 10^{-3} \%$.

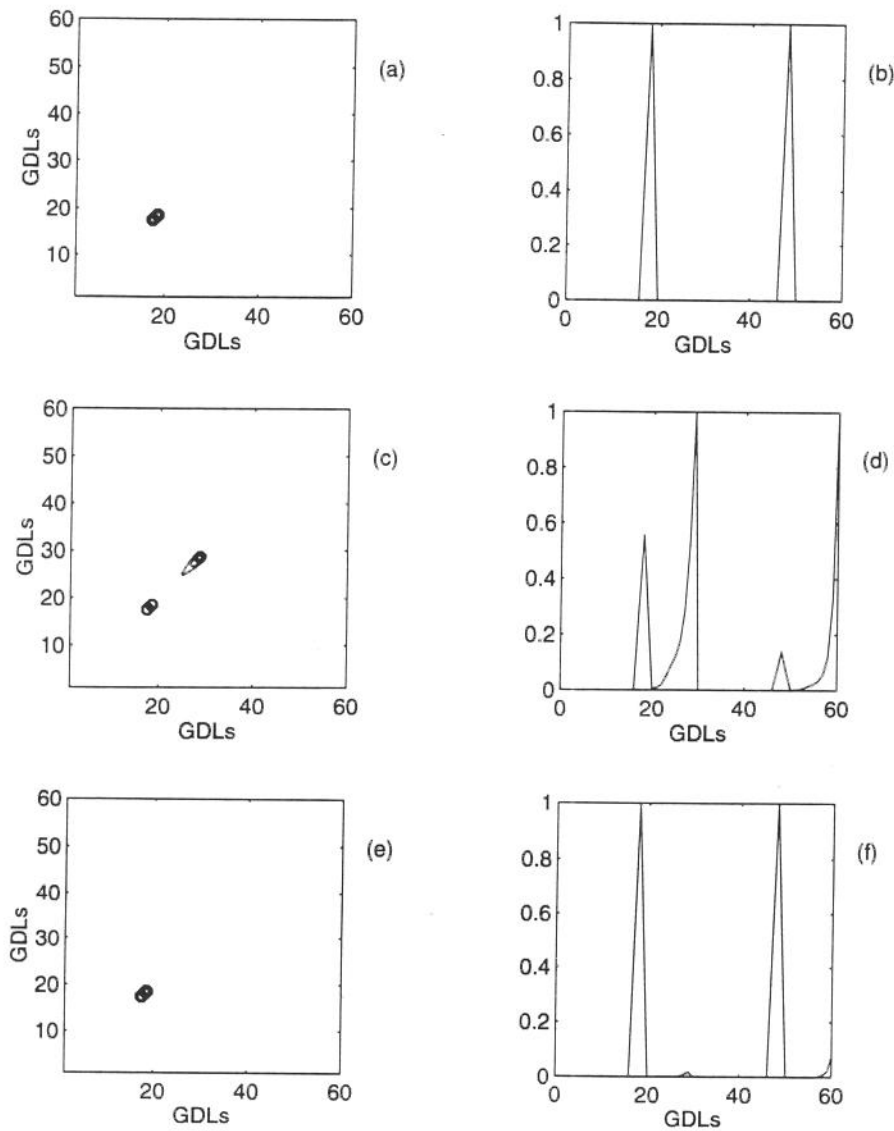


Figura 3.32 Matriz R obtida por RE, 4 modos, caso exato. (a) projeção de R, (b) diagonal de R, matriz R exata; (c) projeção de R, (d) diagonal de R, matriz R ajustada com 4 modos; (e) projeção de R, (f) diagonal de R, matriz R ajustada com 5 modos.

Estes resultados deixam aparente que é necessário ter mais modos disponíveis para o ajuste quando se utiliza um modelo de maior número de graus de liberdade, quando em que se usa um método de ajuste de matriz de rigidez elemento-a-elemento (KMA, RE). Desta forma, um determinado número de modos representa mais informações para um modelo menor do que para um modelo maior, em termos relativos. Este fato vai contrariar a afirmação de que quanto mais refinado o modelo melhores são as chances de localização de falhas. Uma justificativa pode ser dada à luz da dimensão

modal de cada modelo. Para um mesmo número de modos, a fração modal, calculada como a razão entre os modos disponíveis para o ajuste e a dimensão da base do modelo teórico, é determinante para o sucesso do ajuste. Entre dois modelos de um mesmo sistema físico, a localização da falha ocorrerá primeiro no modelo com maior fração modal, que, pela definição, corresponde ao modelo com menor número de GDLs. Considerando 4 modos disponíveis para o ajuste, a fração modal para o modelo de 30 GDLs é 13,3% e para o modelo de 60 GDLs é 6,6%. Este exemplo demonstra claramente uma posição contrária à de Lieven e Ewins [54]. Provavelmente, a recomendação destes autores seja pertinente ao método analisado por eles, mas isto não significa que possa ser generalizada.

3.2.2 - Exemplo Experimental da Placa Retangular de Alumínio

Este exemplo consiste na localização de um defeito imposto à uma placa retangular em alumínio. Suas dimensões são 400 x 450 mm, sendo a espessura 3,25 mm. As propriedades mecânicas e físicas representam valores médios e são obtidas em tabelas facilmente encontradas em manuais de projeto e são fornecidas a seguir.

• módulo de elasticidade	69 x 10 ⁹ Pa
• coeficiente de Poisson	0,33
• densidade	2700 Kg/m ³

Para representar a placa na condição deteriorada, promove-se a abertura de um rasgo em uma das arestas, conforme indicado na figura 3.33. A partir das funções resposta e frequência medidas identificou-se o modelo modal, isto é, as frequências naturais e os modos de vibração. Utilizou-se o programa de elementos finitos ANSYS [55] para gerar as matrizes de massa e rigidez teóricas que são de ordem (100 x 100). Estas matrizes foram obtidas utilizando o método de redução de Guyan [39] em virtude das dificuldade em se manusear matrizes de ordens maiores. Dispondo-se destes dois conjuntos de propriedades da estrutura, procede-se à utilização dos métodos de ajuste para obter-se a matriz de correção da matriz de rigidez (-R) e, através dela, tentar localizar a falha. Note-se que neste caso não há a menor possibilidade de se comparar a matriz (-R) obtida por ajuste com a matriz erro exata, como no caso da simulação

numérica da viga. Tal impossibilidade advém do fato de que é impossível se conhecer a matriz de rigidez e massa da estrutura real.

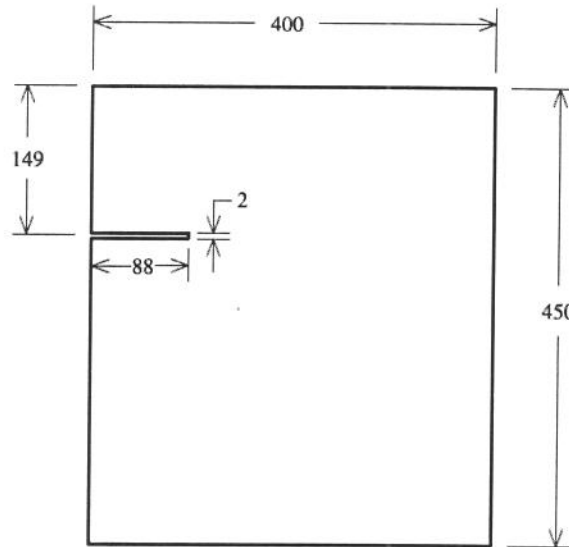


Figura 3. 33 Placa com defeito, dimensões em mm.

Tendo em vista a disponibilidade de um conjunto com uma quantidade razoável de modos experimentais e levando em conta que estes modos são afetados diferentemente pela falha, (ver apêndice A), vários conjuntos de modos são formados para se investigar de que forma modos mais ou menos afetados pela falha influenciam nos métodos de ajuste quanto à localização da falha. Neste contexto, quatro conjuntos de modos são formados. O primeiro conjunto é formado pelos 4 primeiros modos. O segundo, por todos os dez modos identificados na faixa de frequências de interesse. O terceiro, pelos 5 modos mais afetados, ou seja, modos de números 5, 6, 7, 8 e 10. Finalmente, um quarto conjunto é formado utilizando-se os modos 5 e 6.

Nas figuras 3.34 e 3.35 são apresentados os resultados obtidos com o método de Baruch e Bar Itzhack [4] relativos à matriz R calculada para cada um dos 4 conjuntos de modos formados. Com relação ao primeiro conjunto, as figuras 3.34 (a), 3.34(b) e 3.34(c) correspondem à vista tridimensional, ao gráfico da diagonal e à projeção da matriz R , respectivamente. Embora se notem picos pronunciados nas figuras 3.34(a) e 3.34(b), elas são de difícil interpretação, uma vez que se deve localizar o GDL ou GDLs correspondentes a estes picos e associá-los ao correspondente nós no modelo de elementos finitos. Este procedimento pode levar a resultados duvidosos devido a erros de

leitura. Quanto à projeção de R , figura 3.34(c), não há nenhuma região que indique o local da falha. Neste caso da placa, em face destas dificuldades apresentadas, deve-se evitar estas formas de abordagem para a matriz R . Considerando que cada elemento da diagonal da matriz R pode ser associado a rigidez de cada ponto da placa, pode-se lançar mão destes valores e redistribuí-los sobre os nós do modelo geométrico formando uma matriz quadrada associada a topologia da placa. Uma vista tridimensional desta matriz é dada na figura 3.34(d). Pode-se notar um pico pronunciado na região da falha, porém há outros picos e não se pode afirmar com certeza qual deles representa a falha. Na figura 3.34(e) apresenta-se a projeção desta matriz. Nela ainda não se pode ver claramente a indicação da localização da falha. Nas figuras 3.35(a-b), 3.35(c-d) e 3.35(e-f) são mostrados a vista tridimensional da matriz que contém os valores da rigidez da diagonal da matriz R para os três últimos conjuntos de modos, nesta ordem. Com todos os 10 modos, figuras 3.35(a) e 3.35(b) já se pode ver uma região que se destaca pelas amplitudes elevadas. Fazendo-se o ajuste com os modos mais afetados pelo defeito imposto à placa, conjuntos 3 e 4, é aparente (figuras 3.35(c) e 3.35(d) e figuras 3.35(e) e 3.35(f)) o local do defeito na placa. O último conjunto que é formado pelos modos 5 e 6 fornecem uma matriz R onde é incontestável a indicação do defeito na placa. A projeção de R mostra toda a região afetada pelo corte. Portanto, os valores da diagonal da matriz R , quando associados ao modelo geométrico experimental pode ser uma ferramenta de localização de falha em placas.

Os resultados obtidos com os métodos KMA e RE são mostrados nas figuras 3.36 e 3.37, respectivamente. Ambos os métodos foram aplicados a dois conjuntos de dados envolvendo os modos mais sensíveis. Um conjunto com um modo, o de número 7 e um conjunto formado pelos modos de números 5, 6, 7 e 8. As figuras 3.36 e 3.37 deixam aparente que ambos os métodos produzem resultados muito próximos. Com um modo, figuras 3.36(a e b) e 3.37(a e b), foi possível indicar a região afetada pelo corte. Contudo, com o segundo conjunto, a falha é indicada erroneamente, como mostrado nas figuras 3.36(c e d) e 3.37(c e d). Estes resultados demonstram um comportamento instável destes métodos para tratar dados experimentais. Cabe notar que o método de Smith [24] não foi aplicado porque a redução do modelo destrói a esparsidade da matriz de rigidez e, como se sabe, neste caso este método se reduz ao método de Baruch e Bar Itzhack [4].

A análise dos resultados dos exemplos tratados demonstram cabalmente que apenas o método de Baruch e Bar Itzhack [4] foi capaz de localizar a falha em todas as situações propostas. Isto demonstra um comportamento estável do método que o torna confiável como método de localização de falhas em estruturas.

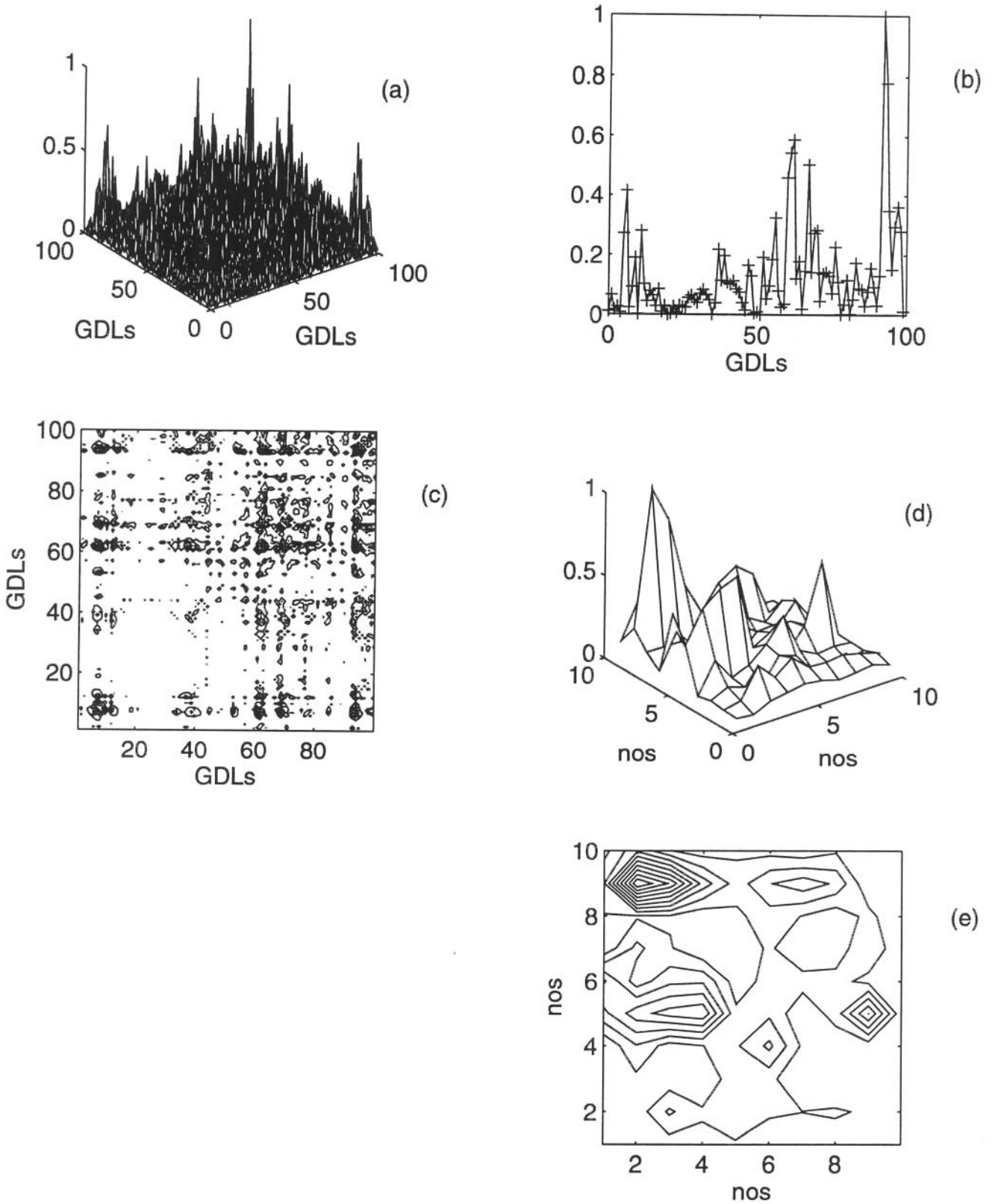


Figura 3.34 Matriz R obtida por BB, 4 modos. (a) vista tridimensional de R ; (b) diagonal de R ; (c) projeção de R ; (d) vista tridimensional da matriz formada pela diagonal de R distribuída sobre a malha experimental; (e) projeção desta matriz.

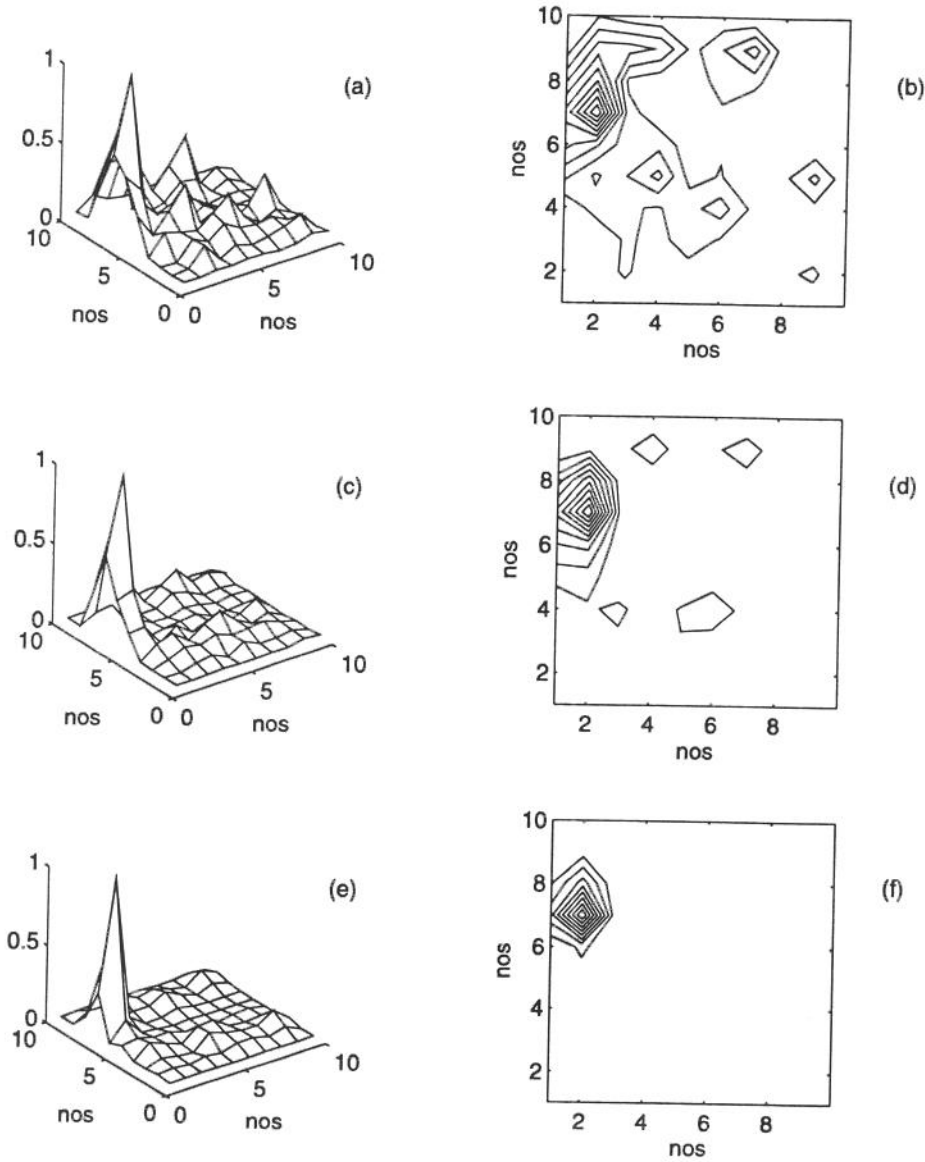


Figura 3.35 Matriz R obtida por BB. (a) vista tridimensional da matriz formada pela diagonal de R distribuída sobre a malha experimental, todos os modos; (b) projeção desta matriz; (c) vista tridimensional da matriz formada pela diagonal de R distribuída sobre a malha experimental, modos 5, 6, 7, 8 e 10; (d) projeção desta matriz; (e) vista tridimensional da matriz formada pela diagonal de R distribuída sobre a malha experimental, modos 5 e 6; (f) projeção desta matriz.

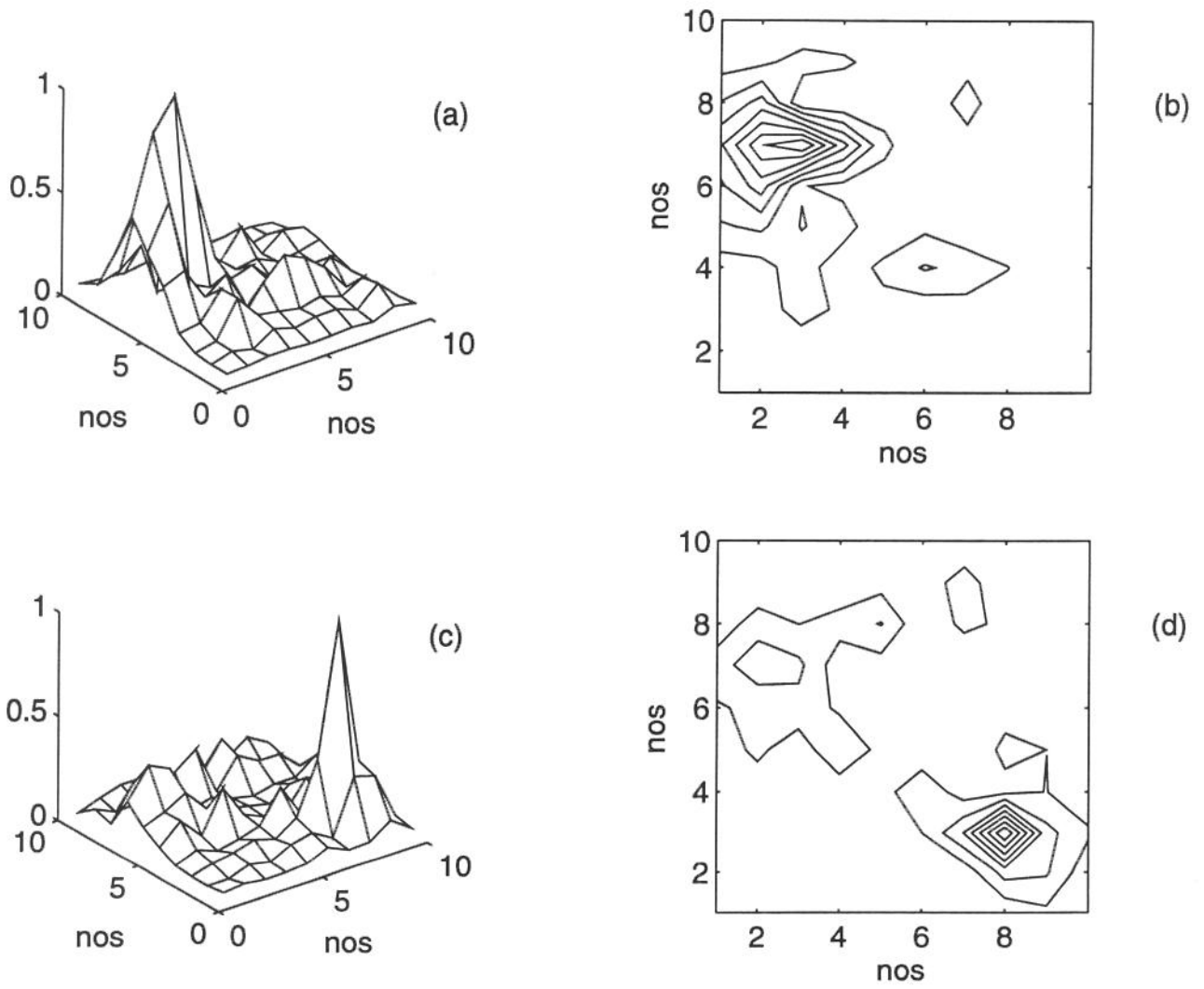


Figura 3.36 Matriz R obtida por KMA. (a) vista tridimensional da matriz formada pela diagonal de R distribuída sobre a malha experimental, modo de número 7; (b) projeção desta matriz; (c) vista tridimensional da matriz formada pela diagonal de R distribuída sobre a malha experimental, modos 5, 6, 7 e 8; (d) projeção desta matriz.

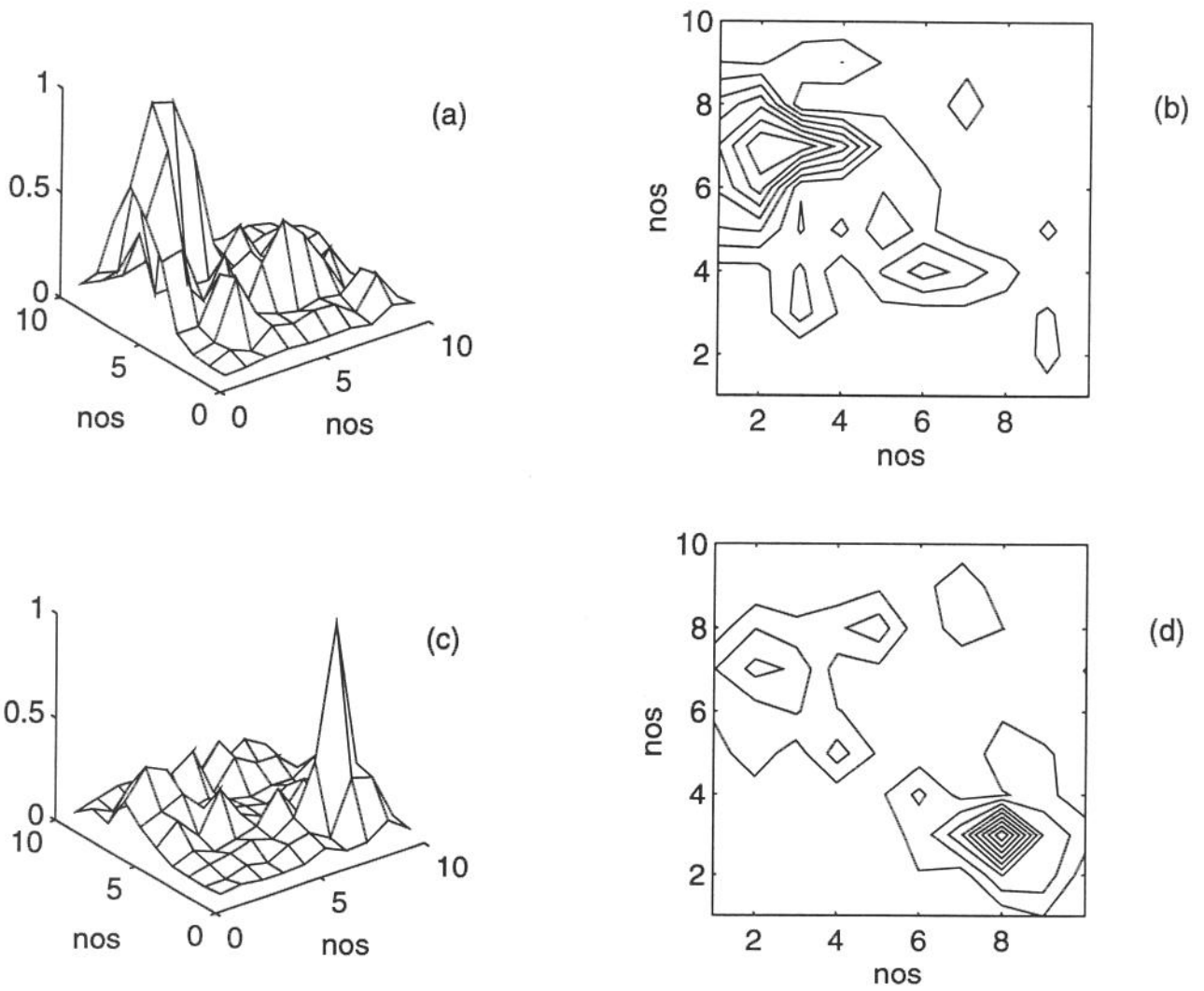


Figura 3.37 Matriz R obtida por RE. (a) vista tridimensional da matriz formada pela diagonal de R distribuída sobre a malha experimental, modo de número 7; (b) projeção desta matriz; (c) vista tridimensional da matriz formada pela diagonal de R distribuída sobre a malha experimental, modos 5, 6, 7 e 8; (d) projeção desta matriz.

Capítulo 4

Conclusões e Propostas de Continuidade

Neste trabalho alguns métodos diretos de ajuste de modelos foram tratados objetivando a localização de falhas estruturais. Estes métodos conjugam as matrizes de massa e rigidez teóricas da estrutura na condição intacta com frequências naturais e modos de vibração experimentais da estrutura na condição deteriorada. As hipóteses básicas são que falhas estruturais causam mudanças nas propriedades físicas da estrutura que, por sua vez, afetam frequências naturais e modos de vibração e que elas afetam mais fortemente a região em sua vizinhança. Outra componente que norteou esta pesquisa diz respeito a possibilidade de obtenção de modelos experimentais com grande número de graus de liberdade utilizando métodos óticos de medição. Com isso, reduz-se parcialmente o problema da diferença de tamanho entre modelos teóricos e experimentais.

Introduziu-se um novo método de ajuste de modelos, método de rearranjo das equações, que, entre outras características, possui uma formulação simples e direta, cuja base é a equação da frequência. No método proposto frequências naturais e modos de vibração medidos são usados em conjunto com as matrizes analíticas de massa e rigidez para se obter uma matriz de rigidez corrigida. As propriedades de simetria e esparsidade da matriz de rigidez ajustada são preservadas através do rearranjo da equação do resíduo de forças gerada pelo desbalanceamento da equação espectral quando modos de vibração e frequências medidas são utilizados no lugar das autopropriedades teóricas. O modelo ajustado obtido é consistente com os dados medidos na faixa de frequências de interesse. O método é flexível no sentido de que possui uma característica extremamente importante e que inexiste nos demais métodos estudados, que é a possibilidade de se ponderar arbitrariamente a matriz dos coeficientes e o vetor de parâmetros a determinar na solução do sistema linear de equações. Este fato pode ser de extrema importância quando os modos são contaminados com ruído.

Para validar o método proposto utilizou-se um exemplo clássico na literatura da área em tela, que é o exemplo que Kabe utilizou para apresentar seu método de ajuste de modelos (KMA) [11]. Em muitos casos os resultados são similares aos resultados obtidos por Kabe, mas com um menor custo computacional. Esta importante característica decorre da significativa esparsidade da matriz dos coeficientes gerada pelo método. Além disso, foi mostrado que o método de rearranjo das equações é aplicado com sucesso em problemas onde há zeros "acidentais" devido ao cancelamento de forças em virtude da simetria de elementos adjacentes do modelo estrutural, o que não é o caso do método de Kabe, como reportado na literatura. Todas estas características reunidas num só método, sobretudo o baixo custo computacional, o tornam uma ferramenta em potencial para tratar problemas de grande porte, tais como grandes estruturas espaciais.

Em relação à deficiência do método de Kabe quando existem zeros que não são devidos à ausência de conectividade, é proposta neste trabalho uma solução através do conceito de pseudo-esparsidade. Desta forma, com a modificação aqui sugerida, o método de Kabe torna-se aplicável a problemas onde até então falharia. Cabe comentar que os resultados apresentados por Kim e Bartkowicz [55], que utilizam o método de Kabe para localizar falhas em uma viga homogênea de seção transversal constante simplesmente apoiada são discutíveis, já que neste caso ocorre o fenômeno da pseudo-esparsidade e este não é levado em conta pelos autores.

Para avaliar as possibilidades de cada um destes métodos em localizar falhas, exemplos de simulação numérica e experimental são utilizados. O exemplo de simulação numérica trata de uma viga engastada-livre em que uma falha é imposta em uma região ao longo de seu comprimento. O exemplo de caráter experimental envolve dados obtidos a partir de uma placa retangular em alumínio na condição de intacta e com defeito. O defeito é imposto à placa através de um corte em uma de suas arestas.

Para localizar a falha no exemplo de simulação numérica, fez-se uso de todos os métodos de ajuste apresentados no capítulo 2 (Baruch e Bar Itzhack [4], Smith [24], Kabe [11, 12] e Rearranjo das Equações). Além disso, foi utilizado também o método das forças residuais (Fisette et al. [29]) tanto na forma como foi proposto originalmente como na versão modificada proposta neste trabalho (capítulo 3). Os métodos de Kabe e Rearranjo das Equações são usados em conjunto com a matriz da pseudo esparsidade tendo em vista a existência do fenômeno do cancelamento de forças.

Tratando-se de ajuste de modelos na ausência de ruído, todos os métodos que reajustam a matriz de rigidez elemento-a-elemento, como são os métodos de Kabe [11] e rearranjo das equações têm melhor desempenho que os métodos ditos globais (Baruch and Bar Itzhack [4] e Smith [24]), pois, além de localizar a falha, eles reproduziram exatamente os coeficientes da matriz de rigidez exata da estrutura preservando a conectividade do modelo original. Deve-se lembrar que esta matriz nunca é conhecida na prática, mas aqui, como se trata de uma simulação, ela foi usada para gerar os dados experimentais, o que possibilitou esta comparação. Por outro lado, os demais métodos também foram capazes de localizar a falha estrutural. Entretanto, na presença de ruído, isto é, modos contaminados, somente os métodos de Baruch e Bar Itzhack [4], Smith [24] e Fisette et al. [29] foram capazes de indicar a localização da falha. Foram comparados os custos computacionais dos métodos de Baruch e Bar Itzhack, Kabe e Rearranjo das Equações usando-se o modelo da viga com 15 elementos. Os resultados demonstraram claramente que o método de Rearranjo das Equações apresenta um custo computacional significativamente menor que o custo computacional dos demais métodos.

É importante registrar que um melhor desempenho do método de Fissette et al. [29] foi obtido com a inclusão de vários modos no cálculo do resíduo das forças, ao contrário da proposta original, que envolve apenas um modo. A utilização de vários modos tem o efeito de um filtro atenuando o ruído presente nos modos experimentais. Isto proporciona claramente o aparecimento de picos no vetor que contém a norma de cada uma das linhas da matriz das forças residuais. A simples inspeção dos componentes deste vetor revelaram a localização da falha. Neste trabalho, o método do balanço de forças foi utilizado apenas para localizar a falha. A correção ou ajuste do modelo por este método não foi, portanto, investigada.

Quanto à questão sobre se é preferível se dispor de mais modos para o ajuste ou se é melhor ter um modelo com mais graus de liberdade, os resultados apresentados neste trabalho deixam aparente que, quando se utilizam métodos de ajuste do tipo elemento-a-elemento (KMA e RE), é necessário ter mais modos disponíveis para o ajuste com um modelo de maior graus de liberdade. Pode-se dizer que um determinado número de modos representa mais informações para um modelo menor do que para um modelo maior, em termos relativos. Diante destas observações e objetivando-se localizar falhas estruturais, pode-se recomendar que a estrutura deva ser modelada com o menor número possível de graus de liberdade, sem, contudo, perder de vista que um bom modelo requer uma malha suficientemente refinada para representar adequadamente seu comportamento dinâmico na faixa de frequências de interesse.

Os métodos de ajuste de modelos por matriz ótima aplicados à viga, também foram utilizados para tentar localizar uma falha imposta a uma placa retangular em alumínio. A falha é gerada através de um corte que se faz em uma das arestas da placa. A placa é ensaiada para se obter as frequências naturais e modos de vibração, que são utilizados para ajustar um modelo de elementos finitos com vistas a localizar o defeito. Neste processo foram utilizados diferentes sub-conjuntos de modos de vibração experimentais, obtidos a partir do conjunto de modos estimados. Isto permitiu que se verificasse a influência do uso de modos de vibração que são mais ou menos sensíveis à falha.

Os resultados obtidos com o método de Baruch e Bar Itzhack [4] são conclusivos em apontar de forma incontestável o local da falha na placa, sobretudo quando apenas os modos mais afetados por ela são usados no ajuste dos modelos teórico e experimental. Tudo indica que o método não é exigente quanto ao número de modos, mas pode fornecer resultados inexpressivos quando modos de vibração pouco sensíveis à falha são utilizados no ajuste do modelo. Como, em geral, não se determinam mais do que uns poucos modos na faixa de frequências de interesse, este método parece encerrar

qualidades que podem ser potencialmente exploradas quando a questão é localização de falhas estruturais.

Quanto aos métodos KMA e Rearranjo das Equações, os resultados mostraram que foi possível localizar a falha utilizando-se apenas um modo dentre os modos mais sensíveis. Por outro lado, com maior número de modos o local da falha não é indicado corretamente. Estes resultados sugerem que estes métodos podem ser melhorados minimizando-se o efeito do ruído e das distorções geradas pelos métodos de compatibilização da ordem dos modelos.

Tendo em vista as conclusões acima, podem-se fazer algumas sugestões para estudos futuros:

- investigação de novas matrizes de ponderação para serem usadas no método de rearranjo de equações, de forma a minorar o efeito do ruído existente nos modos experimentais;

- aplicação dos métodos a modelos mais complexos de estruturas associada à implementação de modernos algoritmos para matrizes esparsas, com vistas à redução do custo computacional;

- exploração das potencialidades de dados medidos com dispositivos óticos, no caso particular com vibrômetro laser, para serem usados em conjunto com métodos de ajuste de modelos por matriz ótima;

- investigação da relação entre o número de modos de vibração e o número graus de liberdade em problemas diversos, visando o estabelecimento de uma relação ótima entre estes números tendo em vista a aplicação em localização de falhas.

Referências Bibliográficas

- [1] Imregun, M. e Visser, W. J., "Review of Model Updating Techniques," *Shock & Vibration Digest*, Technical Article, Vol. 23, No. 1, pp. 9-20, 1991.
- [2] Mottershead, J. E. e Friswell, M. I., "Model Updating in Structural Dynamics: A Survey," *Journal of Sound Vibration*, Vol. 167, No. 2, pp. 347-375, 1993.
- [3] Berman, A. e Flannelly, W. G., "Theory of Incomplete Models of Dynamic Structures," *AIAA Journal*, Vol. 9, No. 8, pp. 1481-1487, August, 1971.
- [4] Baruch, M. e Bar Itzhack, I. Y., "Optimal Weighted Orthogonalization of Measured Modes," *AIAA Journal*, Vol. 16, No 4, pp. 346-351, April, 1978.
- [5] Baruch, M., "Optimization Procedure to Correct Stiffness and Flexibility Matrices Using Vibration Tests," *AIAA Journal*, Vol. 16, No. 11, pp. 1208-1210, November, 1978.
- [6] Baruch, M., "Optimal Correction of Mass and Stiffness Matrices Using Measured Modes," *AIAA Journal*, Technical Notes, Vol. 20, No. 11, pp. 1623-1626, November, 1982.
- [7] Baruch, M., "Methods of Reference Basis for Identification of Linear Dynamic Structures," *AIAA Journal*, Vol. 22, No. 4, pp. 561-564, 1984.
- [8] Berman, A. "Comment on 'Optimal Weighted Orthogonalization of Measured Modes'," *AIAA Journal*, Readers' Forum, Vol. 17, No. 8, pp. 927-928, August, 1979.
- [9] Berman, A., "Mass Matrix Correction Using an Incomplet Set of Measured modes," *AIAA Journal*, Thechnical Notes, Vol. 17, No. 10, pp. 1147-1148, October, 1979.
- [10] Berman, A. e Nagy, E. J., "Improvement of a Large Analytical Model Using Test Data," *AIAA Journal*, Vol. 21, No 8, pp. 1168-1173, August, 1983.

- [11] Kabe, A. M., "Stiffness Matrix adjustment Using Mode Data," *AIAA Journal*, Vol 23, No. 9, pp. 1431-1436, September, 1985.
- [12] Kabe, A. M., "Constrained Adjustment of Analytical Stiffness Matrices," *SAE Thechnical Paper Series 851932*, 1986.
- [13] Kammer, D. C., "Optimum Approximation for Residual Stiffness in Linear System Identification," *AIAA Journal*, Vol. 26, No. 1, pp. 104-112, January, 1988.
- [14] Wei, F-S., "Mass Matrix Modification Using Element Correction Method," *AIAA Journal*, Technical Notes, Vol. 27, No. 1, pp. 119-121, January, 1989.
- [15] Wei, F-S., "Analytical Dynamic Model Improvement Using Vibration Test Data," *AIAA Journal*, Technical Notes, Vol. 28, No. 1, pp. 175-177, January, 1990.
- [16] Wei, F. S., "Mass and Stiffness Interaction Effects in analytical Model Modification," *AIAA Journal*, Technical Notes, Vol. 28, No. 9, pp. 1686-1688, September, 1990.
- [17] Smith, S. W. e Beattie, C. A., "Secant-Method Adjustment for Structural Models," *AIAA Journal*, Vol 29, No. 1, pp. 119-126, January, 1991
- [18] Targoff, W. P., "Orthogonality Check and Corretion of Measured Modes," *AIAA Journal*, Vol. 14, No. 2, pp. 164-167, February, 1976.
- [19] Fuh, J. S. e Berman, A., Comment on "Stiffness Matrix Adjustment Using Mode Data," *AIAA Journal*, Readers' Forum, Vol. 24, No. 8, pp. 1405-1406, August, 1986.
- [20] Beattie, C. A. e Smith, S. W., "Optimal Matrix Approximants in Structural Identification," *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol 74, No. 1, pp. 23-56, July, 1992.

- [21] Smith, S. W. e Hendricks, S. L., "Evaluation of Two Identification Methods for Damage Detection in Large Space Trusses," *Proceedings, 6th VPI&SU/AIAA Symposium on Dynamic and Controls for Large Structures*, edited by L. Meirovitch, Blacksburg, VA, pp. 127-142, 1987.
- [22] Smith, S. W. e Hendricks, S. L., "Damage Detection and Location in Large Space Trusses," *AIAA SDM Issues of the International Space Station, A Collection of Technical Papers*, AIAA, Washington, DC, pp. 56-63, 1988.
- [23] Smith, S. W., "Optimal Identification Using Inconsistent Modal Data," *AIAA-91-0948-CP*, pp. 2319-2324, April, 1991.
- [24] Smith, S. W., "Applications Strategies for Structure Identification With Optimal-Matrix Updates," *Proceedings, UC/SEM 11th International Modal Analysis Conference*, pp. 1274-1280, February, 1993.
- [25] Verçosa, C. A. M. e Arruda, J. R. F., "Structural Fault Localization Using Direct Stiffness Update Methods," *Proceedings, ASME 15th Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise - Symposium on Physical Parameter Identification in Vibration Analysis*, Boston, MA, 1995, (to appear).
- [26] Sidhu, J. e Ewins, D. J., "Correlation of Finite Element and Modal Test Studies of a Pratical Structure," *Proceedings, UC/SEM 2th International Modal Analysis Conference*, pp. 756-762, February, 1984.
- [27] Gysin, H., "Critical Application of the Error Matrix Method for Localization of Finite Element Modeling Inaccuracies," *Proceedings, UC/SEM 4th International Modal Analysis Conference*, pp. 1339-1351, February, 1986.
- [28] Ojalvo, I. U. e Pilon, D., "Diagnostics for Geometrically Locating Structural Math Model Errors from Modal Test Data," Paper No. 88-2358, *29th AIAA/ASME/ASCE/AHS SDM Conference*, Williamsburg, VA, April 1988.

- [29] Fissette, E., Stavrinidis, C. e Ibrahim, S. R., "Error Location and Updating of Analytical Dynamic Models Using a Force Balance Method," *Proceedings, UC/SEM 6th International Modal Analysis Conference*, pp. 1063-1070, April, 1988.
- [30] Chen, T. Y. e Wang, C. T., "Locating and Correcting Finite Element Model Errors Using Experimental Modal Data," *Proceedings, UC/SEM 11th International Modal Analysis Conference*, pp. 194-199, February, 1993.
- [31] Luk, Y. W., "Identification of Physical Mass, Stiffness and Damping Matrices Using Pseudo-Inverse," *Proceedings, UC/SEM 5th International Modal Analysis Conference*, pp. 679-685, April, 1987.
- [32] Mannan, M. A. e Richardson, M. H., "Detection and Location of Structural Cracks Using FRF Measurements," *Proceedings, UC/SEM 8th International Modal Analysis Conference*, pp. 652-657, 29 January - 1 February, 1990.
- [33] Wolff, T. e Richardson, M., "Fault Detection in Structures From Changes in Their Modal Parameters," *Proceedings, UC/SEM 7th International Modal Analysis Conference*, pp. 87-94, January, 1989.
- [34] Fox, C. H. J., "The Location of Defects in Structures: A Comparison of The Use of Natural Frequency and Mode Shape Data," *Proceedings, UC/SEM 10th International Modal Analysis Conference*, pp. 522-528, 1992.
- [35] Kim, J. H., Jeon, H. S., e Lee, C. W., "Application of the Modal Assurance Criteria for Detecting and Locating Structural Faults," *Proceedings, UC/SEM 10th International Modal Analysis Conference*, pp. 536-540, 1992.
- [36] Natke, H. G. e Yao, J. T. P., "Fault Detection and Localization in Structures: A discussion," *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 5, pp. 345-356, 1991.

- [37] Gysin, H., "Comparison of Expansion Methods For FE Modeling Error Localization," *Proceedings, UC/SEM 8th International Modal Analysis Conference*, pp. 195-204, September, 1990.
- [38] Lieven, N. A. J. e Ewins, D. J., "Expansion of Modal Data for Correlation," *Proceedings, UC/SEM 8th International Modal Analysis Conference*, pp. 605-609, September, 1990.
- [39] Guyan, R. J., "Reduction of Stiffness and Mass Matrices," *AIAA Journal*, Vol. 3, No. 2, p. 380, February, 1965.
- [40] Kidder, Robert L., "Reduction of Structural Frequency Equations," *AIAA Journal*, Vol. 11, No. 6, p. 892, 1973.
- [41] O'Callahan, J. C., Lieu, I. W., Avitabile, P., e Madden, R., "An Efficient Method of Determining Rotational Degrees of Freedom from Analytical and Experimental Modal Data," *Proceedings, UC/SEM 4th International Modal Analysis Conference*, pp. 50-58, February, 1986.
- [42] O'Callahan, J. C., Avitabile, P., e Riemer, R., "System Equivalent Reduction Expansion Process (SEREP)," *Proceedings, UC/SEM 7th International Modal Analysis Conference*, pp. 29-37, January, 1989.
- [43] Arruda, J. R. F., "Spatial Domain Modal Analysis of Lightly-Damped Structures Using Laser Velocimeters," *Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME*, Vol. 115, pp. 225-231, 1993.
- [44] Arruda, J. R. F., "Surface Smoothing and Partial Spatial Derivatives Computation Using a Regressive Discrete Fourier Series," *Mechanical Systems and Signal Precessing*, Vol. 6, No. 1, pp. 41-50, 1992.

- [45] Arruda, J. R. F. e Verçosa, C. A. M., "Fault Detection Methods Using Direct Stiffness Matrix Correction Formulations For Use With Laser Data," *Proceedings, SPIE 1st International Conference on Vibration Measurement by Laser Techniques: Advances and Applications*, Ancona, Italy, Vol. 2358, pp. 60-67, October, 1994.
- [46] Verçosa, C. A. M. e Arruda, J. R. F., "Using Direct Stiffness Update Methods to Localize Structural Faults," *DINAME 95*, Caxambú, MG, 6-10 março, pp. 21-24, Março, 1995.
- [47] Arruda, J. R. F. e Verçosa, C. A. M., "A Weighted Rearranged Spectral Equation Method for Structural Model Updating," *Proceedings, ASME 15th Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise - Symposium on Physical Parameter Identification in Vibration Analysis*, Boston, MA, 1995, (to appear).
- [48] Ewins, D. J., *Modal Testing: Theory and Practice*, New York - Research Studies Press Ltd by John Wiley, 1984.
- [49] Golub, G. H. e Van Loan, C. F., *Matrix Computations*, John Hopkins University Press, 1990.
- [50] Junkins, J. L. e Kim, Y., *Introduction to Dynamics and Control Flexible Structures*, Chapter 2, AIAA Education Series, 1993.
- [51] MATLAB, High-Performance Numeric Computation and Visualization Software, The MATHWORKS, Inc, 1993.
- [52] Barlow, J. L. e Vemulapati, U. B., "Rank Detection Methods for Sparse Matrices," *SIAM Journal on Matrix Analysis and applications*, Vol. 13, No. 4, pp. 1279-1297, 1992.
- [53] Becker, E. B. e Craig, Jr., R. R., *Interactive Structures and Matrix Interpretive System (ISMIS), User's Guide with Programmer's Guide*, The University of Texas at Austin, Texas, 1974.

- [54] Lieven, N. A. J. e Ewins, D. J., "Effect of Incompleteness and Noise on Error Matrix Calculations," *Proceedings, UC/SEM 10th International Modal Analysis Conference*, pp. 1406-1413, 1992.
- [55] Kim, H. M. e Bartkowicz, T. J., "Damage Detection and Health Monitoring of Large Space Structures," *Sound and Vibration*, pp. 12-17, June, 1993.
- [56] Berman, A., "Improved Orthogonality Check for Measured Modes," Technical Notes, *AIAA Journal*, Vol. 18, No. 9, pp. 1151-1152, 1980.
- [57] Inman, D. J., *Vibration With Control, Measurement, and Stability*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1989.
- [58] Corelli, D. e Brown, D. L., "Impact Testing Considerations," *Proceedings, UC/SEM 2nd International Modal Analysis Conference*, pp. 735-742, 1984.
- [59] LMS CADA-X, *Modal Analysis, user manual*, Copyright © LMS International, Interleuvenlaan 68, 3001 Heverlee (Leuven), Belgium, 1992.
- [60] LMS CADA-PC, (Computer Aided Dynamic Analysis on Personal Computer), LMS's Software, (Leuven Measurement Systems), Leuven, Belgium, 1992.
- [61] SWANSON ANALYSIS SYSTEMS INC, "ANSYS Finite Elements Analysis Program," Revision 5.0 (Educational Version), 1992.
- [62] Allemang, R. J. e Brown, D. L., "A Correlation Coefficient For Modal Vector Analysis," *Proceedings, UC/SEM 1st International Modal Analysis Conference*, pp. 110-116, 1982.
- [63] Lieven, N. A. J., "Spatial Correlation of Mode Shapes, the Coordinate Modal Assurance Criterion," *Proceedings, UC/SEM 6th International Modal Analysis Conference*, pp. 690-695.

Apêndice A

Análise Modal Experimental de Uma Placa Retangular

A.1 - Introdução

Neste apêndice são relatadas duas análises modais experimentais realizadas. Dois distintos instantes da vida útil de uma placa retangular são considerados. O primeiro, identificado por S_1 , considera a placa na condição intacta ou sem falha. O segundo, identificado por S_2 , considera a placa com um certo grau de deterioração estrutural, sendo, portanto, considerada defeituosa. Faz-se um corte em uma das arestas da placa para gerar esta condição. A placa, em alumínio comercial, é suspensa em apoios elásticos muito flexíveis para simular a condição de contorno livre-livre-livre-livre, sendo excitada por um martelo de impacto em todos os pontos do modelo geométrico (100 GDLs), segundo a direção perpendicular ao plano da placa. Um acelerômetro é fixado em um dos pontos do modelo geométrico para a obtenção das respostas. As funções resposta em frequência (FRFs) são medidas em cada um dos 100 graus de liberdade, sendo de 0 a 400 Hz a faixa de frequências de interesse. A estimação dos parâmetros modais é feita usando-se 10 modos identificados na referida faixa.

A.2 - Ensaio 1 / Placa Intacta

A placa é em alumínio comercial e suas dimensões principais são 400 x 450 mm, sendo a espessura 3,25 mm. As propriedades mecânicas e físicas representam valores médios e são obtidas em tabelas facilmente encontradas em manuais de projeto e são fornecidas a seguir.

• módulo de elasticidade	69 x 10 ⁹ Pa
• coeficiente de Poisson	0,33
• densidade	2700 Kg/m ³

A realização de um teste modal se processa segundo duas fases distintas de atividades. A primeira fase prende-se à excitação da estrutura e medição de um conjunto apropriado de FRFs. A segunda, por sua vez, consiste na aplicação de procedimentos de

ajuste de curvas aos dados medidos. Como resultado obtém-se um modelo modal da estrutura, que é expresso em termos de frequências naturais, coeficientes de amortecimento e modos de vibração. O problema de obtenção de um modelo matemático a partir de informações dos sinais de entrada ("input") e saída ("output") pertence a uma classe de problemas chamada de problema inverso.

Antes de proceder-se à primeira etapa da análise modal experimental, deve-se conceber um modelo geométrico para representar a estrutura real. Este procedimento chama-se discretização. Este modelo geométrico consiste de uma rede constituída de nós interligados entre si e que são marcados na superfície da estrutura real. Não existe uma regra única para a seleção destes pontos. Contudo, eles devem ser escolhidos com base em um modelo teórico. É requerido que o modelo geométrico seja um subconjunto do modelo teórico. Isto permite a compatibilização das matrizes de massa, rigidez e amortecimento teóricas com os dados experimentais [56]. Uma escolha adequada dos pontos e graus de liberdade de medição proporcionam um conjunto de deslocamentos que representa de forma adequada a configuração deformada do sistema físico real.

A placa é modelada experimentalmente por 100 nós e 100 graus de liberdade. Na figura A.1 mostra-se o modelo geométrico da placa, onde cada nó é identificado pelo nome "pl" e por um número de 1 a 100.

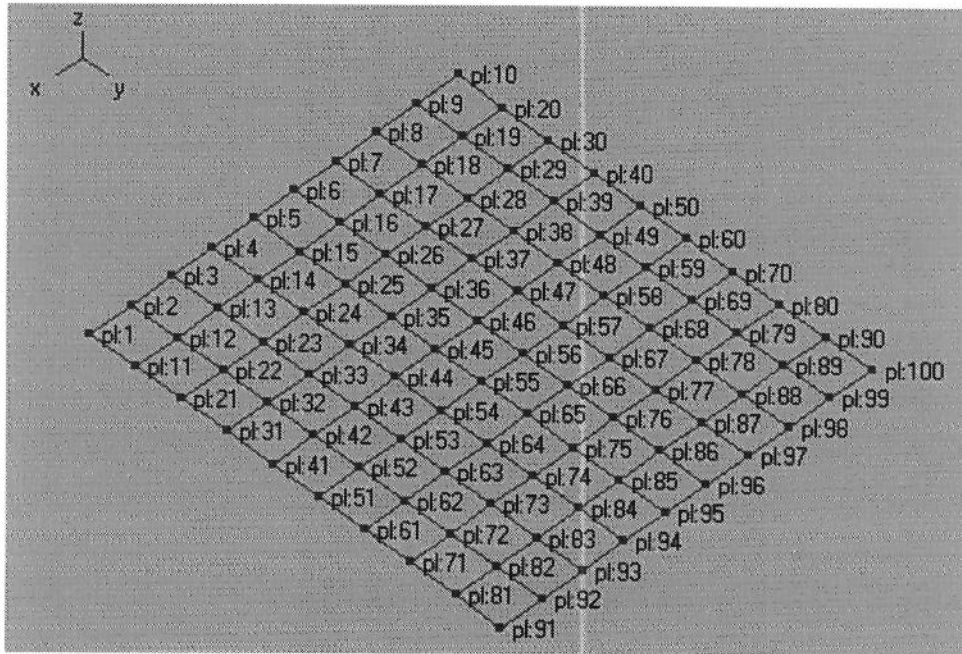


Figura A.1 Modelo geométrico experimental da placa.

Está também indicado o sistema de coordenadas com origem no nó 1. Uma vez caracterizada a estrutura, a mesma é suspensa através de elementos extremamente flexíveis. Com estes elementos de sustentação, com mínima rigidez, tenta-se reproduzir as condições de contorno livre-livre-livre-livre. Por questões de praticidade e rapidez, optou-se por um ensaio de impacto com martelo. Os nós do modelo geométrico experimental constituem os pontos de medição e/ou excitação. O nó 100 é escolhido como ponto de referência, isto é, o local onde um acelerômetro é fixado.

O processo de coleta dos dados tem início quando se procede à excitação da placa, o que é conseguido batendo-se em cada nó com um martelo instrumentado e adequadamente calibrado. Os sinais de excitação medidos com transdutores de forças e de resposta medidos com acelerômetros são então amplificados e enviados para o analisador espectral (HP Spectrum Analyser), de onde se obtém as funções resposta em frequências (FRFs) correspondentes aos diferentes pontos da estrutura. A função resposta em frequência é definida pela razão entre as transformadas de Fourier da resposta ("output") no ponto i , $X_i(\omega)$, e da força ("input") no ponto j , $F_j(\omega)$. A FRF, comumente representada pelo símbolo $H_{ij}(\omega)$, é uma propriedade do sistema dinâmico e matematicamente se escreve:

$$X_i(\omega) = H_{ij}(\omega) \cdot F_j(\omega) \quad (A.1)$$

Para cada ponto são realizadas três medidas e obtida a média, que é tomada como resultado final. Este procedimento é adotado com o objetivo de assegurar dados mais confiáveis e de minimizar a presença de ruídos no sinal. Dois aspectos tornam possível a atenuação de ruídos através do processo de médias: (a) o ruído não é uma característica do sistema dinâmico; (b) o ruído ocorre de forma aleatória na faixa de frequências de interesse. Desta forma, o processo de se fazer médias é equivalente a filtrar o sinal. Ao todo são obtidas 100 FRFs, isto é, $H_{100,1}$, $H_{100,2}$, ..., $H_{100,100}$, que constituem a última linha da matriz função resposta em frequência, aqui denotada por H . Duas curvas experimentais, deste conjunto de 100 FRFs, são mostradas na figura A.2, onde é aparente a presença de 10 modos de vibração na faixa de frequências de 0 a 400 Hz.

Na figura A.2(a) mostra-se também a função de coerência associada a esta FRF particular (excitação no ponto 1 e resposta no ponto 100). A função de coerência pode ser usada para avaliar a qualidade da estimação da FRF numa dada faixa de frequências [57]. Ela é normalmente denotada na literatura especializada por γ^2 . A função de coerência assume valores no intervalo $[0, 1]$. O valor 1 ocorre quando os sinais são totalmente correlatos e o valor 0 (zero) quando não existe qualquer correlação linear

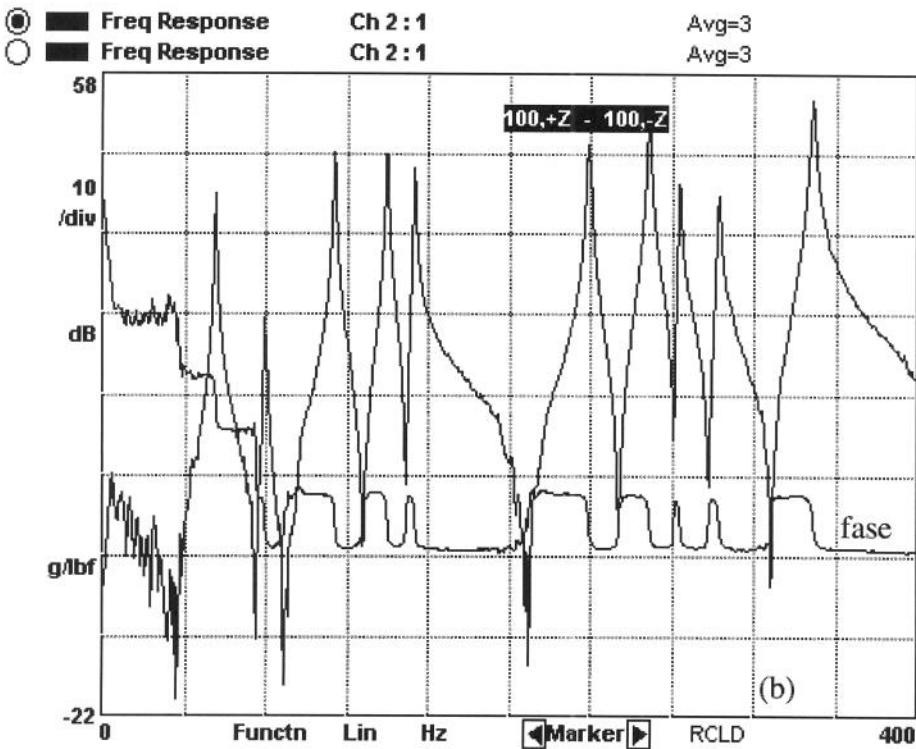
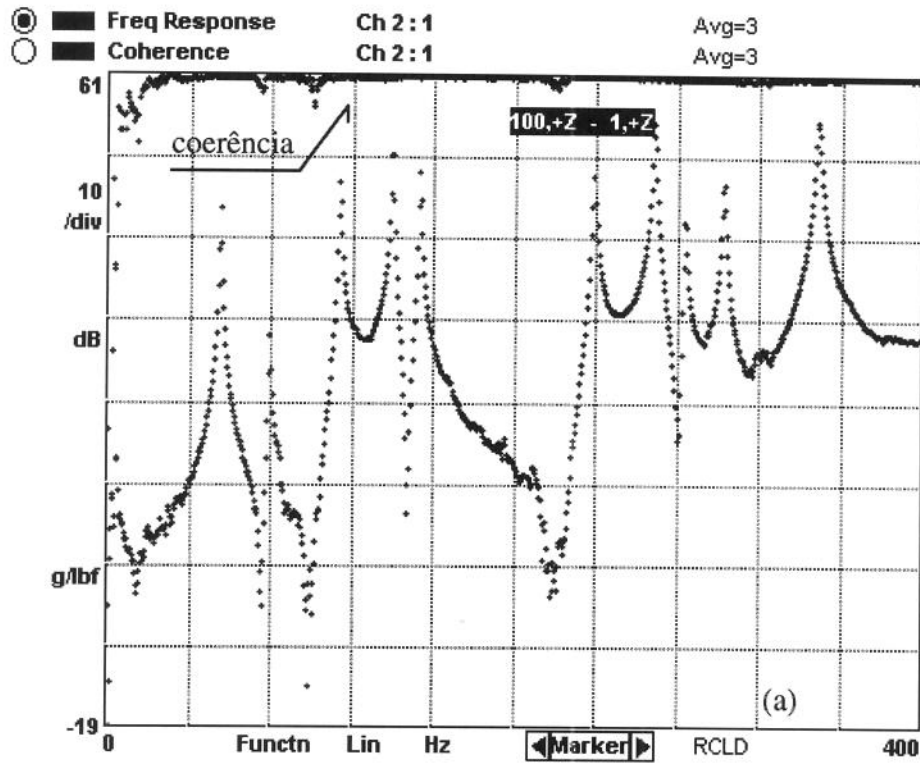


Figura A.2 Função resposta em frequência experimentais: (a) $H_{100.1}$; (b) $H_{100.100}$.

entre eles. Outra possibilidade de baixa coerência ocorre quando o sistema não é completamente linear. Na figura A.2(b) mostra-se a fase correspondente a uma FRF (excitação e resposta no ponto 100). A principal característica da fase é que ela varia de 180° entre duas ressonâncias sucessivas, sendo que a ressonância corresponde a uma variação de 90° . É interessante notar que a fase também varia de 180° ao passar por uma antirressonância, também variando de 90° na antirressonância. Em face desta propriedade da fase, é sempre desejável apresentá-la juntamente com a respectiva FRF, uma vez que ela torna evidente a existência de ressonâncias cujos picos, muitas vezes, não aparecem tão claramente nas FRFs.

Uma série de dificuldades foram enfrentadas para se chegar à configuração final adotada para o experimento, sendo que várias medições foram feitas até a obtenção de uma resposta aceitável. Os parâmetros julgados mais relevantes neste processo são: o tipo de ponta do martelo; a intensidade da batida em função da sensibilidade do martelo; e o tempo de aquisição do sinal. Corelli e Brown [58] apresentam uma descrição detalhada de um ensaio modal experimental com martelo de impacto, onde são destacados os maiores e mais comuns problemas envolvidos neste tipo de ensaio.

A.3 - Estimação de parâmetros modais

Do ponto de vista experimental, a primeira etapa de uma análise modal consiste da aquisição de dados dinâmicos da estrutura que, em geral, são as funções resposta em frequência (FRFs - domínio da frequência) ou resposta ao impulso (IRFs - domínio do tempo). A partir destes dados, objetiva-se derivar um modelo paramétrico capaz de descrever estes dados. Então, a estimação de parâmetros consiste do cálculo de coeficientes para um modelo tal que os dados preditos por este modelo se ajustem ou se aproximem aos dados medidos. A este processo dá-se o nome de ajuste de curva. Normalmente, este é um problema resolvido por mínimos quadrados.

Em dinâmica estrutural, os parâmetros modais são frequências naturais, amortecimentos e modos de vibração. Inúmeros são os métodos nos domínios da frequência e do tempo para estimar parâmetros dinâmicos [48, 57, 59]. Dependendo dos algoritmos destes métodos, estes parâmetros modais se fundem em dois outros conhecidos por polos e resíduos. Os métodos no domínio da frequência, como são conhecidos os que ajustam a FRF, promovem o ajuste de curvas considerando a distribuição das ressonâncias ao longo das FRFs. Os métodos no domínio do tempo,

como são chamados os que ajustam as IRFs, utilizam valores discretos da resposta ao impulso. Ambos os métodos apresentam vantagens e desvantagens.

A estimação dos parâmetros modais, para o modelo da placa em tela é feita com a ajuda do "Software" CADA-PC [60], (Computer Aided Dynamic Analysis on Personal Computer), da LMS (Leuven Measurement Systems, Leuven, Bélgica) direcionado para análise modal experimental. Este software, disponível no Laboratório de Análise Modal (LAM) do Departamento de Mecânica Computacional da FEM/UNICAMP, está implementado com o método da Exponencial Complexa por mínimos quadrados (domínio do tempo) e contempla conjuntos de dados obtidos com uma entrada ("input") e uma saída ("output"), SISO, ou com múltiplas entradas e múltiplas saídas, MIMO. Finalmente, é feita uma análise modal teórica da placa utilizando-se o programa de cálculo dinâmico estrutural ANSYS [61].

Na figura A.3 apresentam-se três curvas associadas a uma seção típica de análise modal e que são identificadas pelos números 1, 2 e 3.

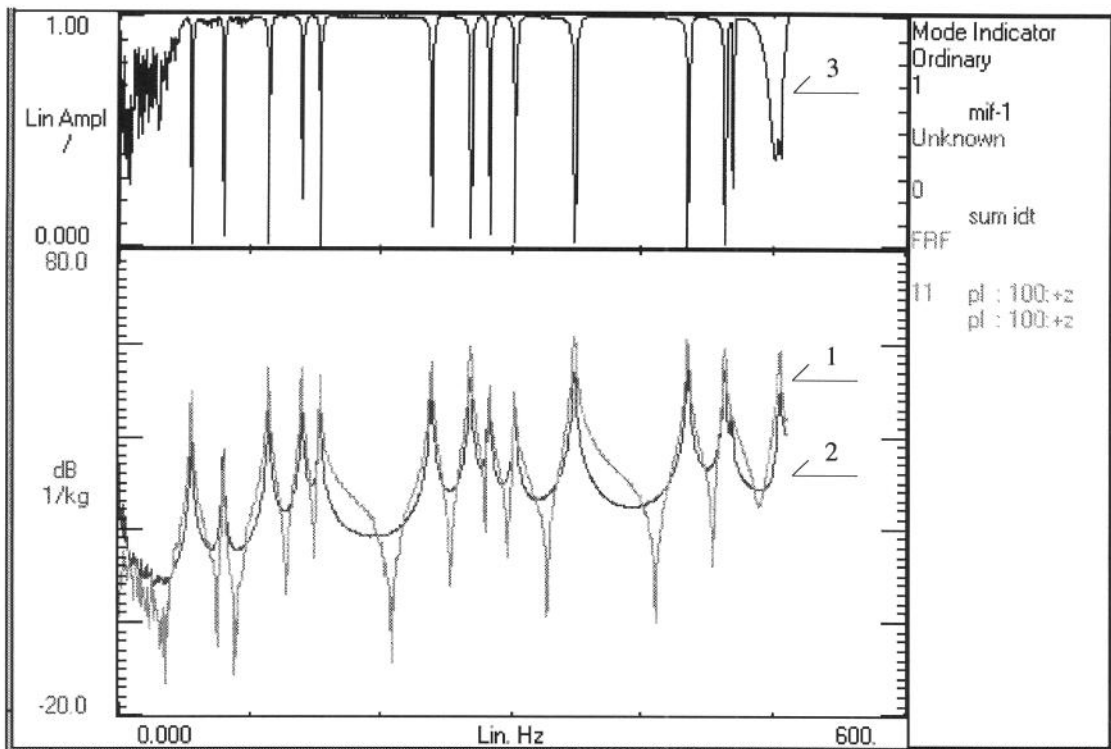
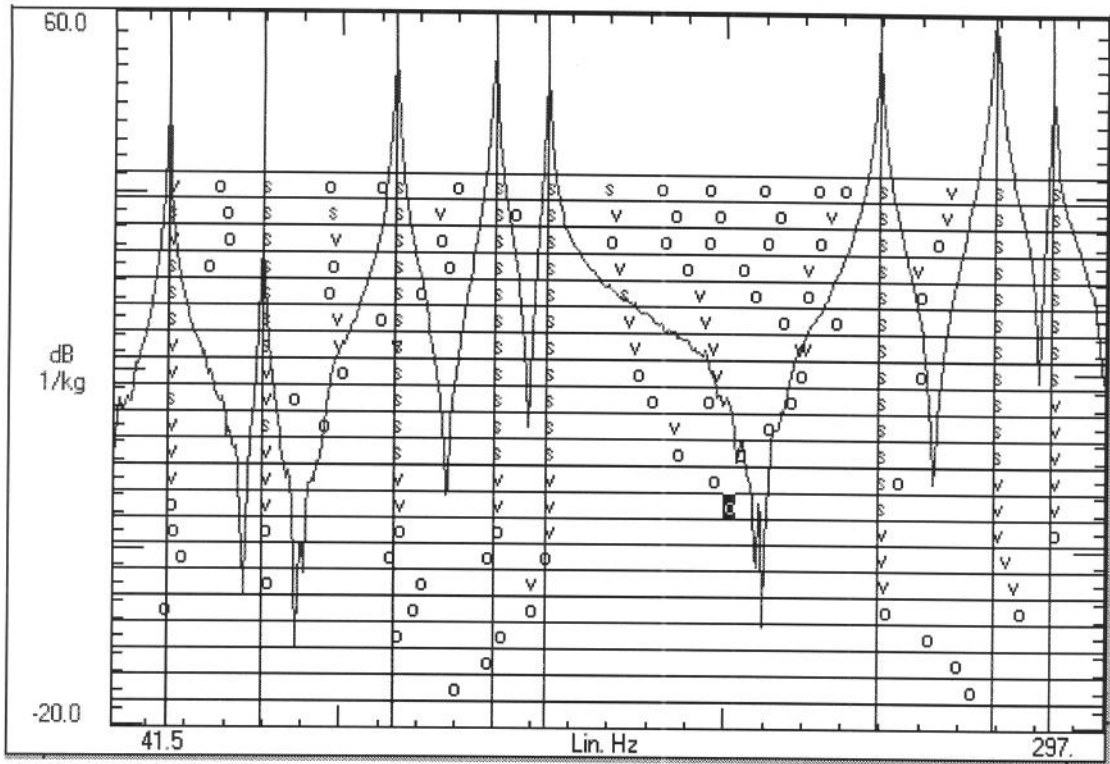


Figura A.3 Curvas de referência em uma análise modal experimental

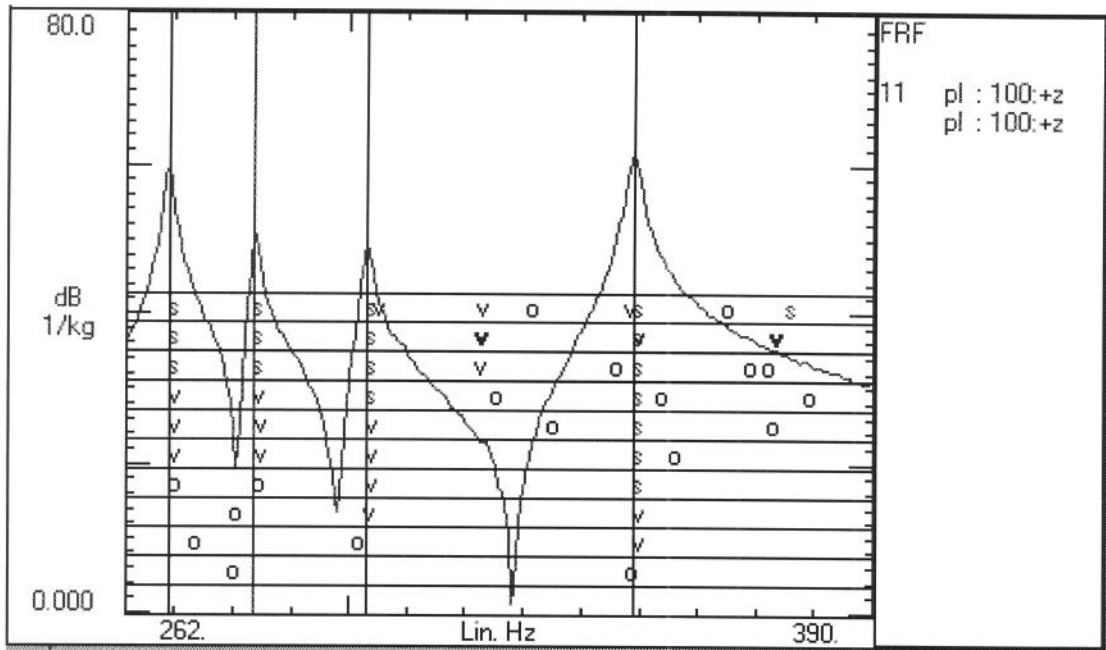
A curva 1, $H_{100,100}$, é o módulo de uma FRF típica do conjunto medido (área inferior da figura A.3, traço mais claro). Ela apresenta uma ressonância e anti-ressonância alternadamente, fato indicador de que o ponto de excitação coincide com o de resposta. A curva 2, superposta à curva 1, é o módulo da média aritmética de todas as FRFs medidas. É uma curva opcional e deve ser usada quando há dúvidas quanto à existência ou não de ressonâncias em trechos da FRF, uma vez que ela torna aparente todas as ressonâncias na faixa de frequências de interesse. A curva 3, conhecida por função indicadora de modos (mode indicator function-MIF), é uma função no domínio da frequência que exhibe um mínimo local em cada uma das frequências de ressonância associada a cada um dos modos reais da estrutura [59]. Há MIFs de ordem 1, 2, ..., n, onde n é o número de referências na estrutura. Os MIFs de ordem superior, $n \geq 2$, permitem que se identifique raízes repetidas. Por conseguinte, os MIFs se revelam uma ferramenta poderosa para a análise modal experimental.

A partir das informações colhidas através das curvas da figura A.3, aciona-se o módulo de estimação dos parâmetros modais. Neste contexto, é assumida a existência de vários modos, sendo requerida a faixa de frequências para análise. A faixa de frequências deve ser escolhida de modo a permitir a identificação dos modos desejados. O número de modos contido na faixa de frequências não deve ser excessivo devido às limitações dos algoritmos e da plataforma computacional utilizados. Por outro lado, pode-se adiantar que a faixa de frequências de 400 a 512 Hz deve ser descartada. Isto advém do fato de se utilizar um filtro anti-aliasing, que é do tipo passa-baixa e com frequência de corte teórica pouco menor que a frequência de Nyquist. De acordo com a configuração dos parâmetros de medição do sistema de aquisição, a frequência de Nyquist é 512 Hz. Em virtude da não existência de um filtro perfeito, utiliza-se um filtro que começa a atenuar a na frequência de 400 Hz, o que força o sinal a se tornar praticamente nulo a partir de Nyquist. Isto propicia uma faixa útil de frequências de 0 a 400 Hz.

Todo o processo de cálculo pode ser acompanhado pelo diagrama de estabilização que é mostrado na figura A.4. Este diagrama dá uma indicação de como os parâmetros modais mudam a medida em que se aumenta o tamanho do modelo (número de modos estimados). Cada nova linha horizontal significa um novo tamanho de modelo. Além dos modos físicos, aparecem também modos computacionais, que servem para acomodar erros de medição ou ruídos. As letras o, f, d, v e s, denominadas de indicadores, surgem em função da comparação dos parâmetros modais determinados na iteração atual e a anterior. O indicador o significa um novo polo; o indicador f significa que a frequência atual está presente no modelo anterior; o indicador d significa um modo



(a)



(b)

Figura A.4 Diagrama de estabilização na determinação de polos.

com idêntica frequência e amortecimento em relação ao modelo anterior; o indicador $\underline{y}$ significa mesma frequência e mesmo fator de participação modal em relação ao modelo anterior; o indicador $\underline{s}$ significa que todos os parâmetros modais são estáveis em relação ao modelo anterior. A convergência depende da tolerância imposta, que neste caso é de 5% para o amortecimento, 1% para as frequências naturais e 2% para os resíduos. Cada diagrama de estabilização representa um processo iterativo para o cálculo dos parâmetros modais. Para estimar tais parâmetros, neste caso em particular, houve a necessidade de se dividir a faixa de frequências de interesse em dois intervalos, isto é, o primeiro de 40 a 297 Hz e o segundo de 262 a 390 Hz, ambos em Hz, o que deu origem aos diagramas (a) e (b) da figura A.4. A justificativa para este procedimento é que o CADA-PC transforma cada FRF em IRF. O programa CADA-PC limita esta conversão, que deve ser feita com um número de pontos que é potência de 2. Ora, a faixa de 0 a 400 Hz contém 800 linhas ou 800 pontos, tornando inviável estimar todas as 10 ressonâncias de uma única vez. 512 pontos são tomados para o primeiro subintervalo, o que abrange 8 ressonâncias, e 256 pontos para o segundo, abrangendo 4 ressonâncias, duas das quais já calculadas no primeiro subintervalo.

Ao final do processo deve-se selecionar, no diagrama de estabilização, as frequências estáveis. Estas representam os modos verdadeiros da estrutura. Quando uma frequência estável é aceita, surge uma barra vertical passando por esta frequência no diagrama de estabilização. As frequências estimadas e selecionadas nos diagramas de estabilização, figuras A.4(a) e A.4(b), são listadas juntamente com os respectivos coeficientes de amortecimento modal, ver tabela 1. Na figura A.5, são mostrados os dois primeiros modos de vibração da placa.

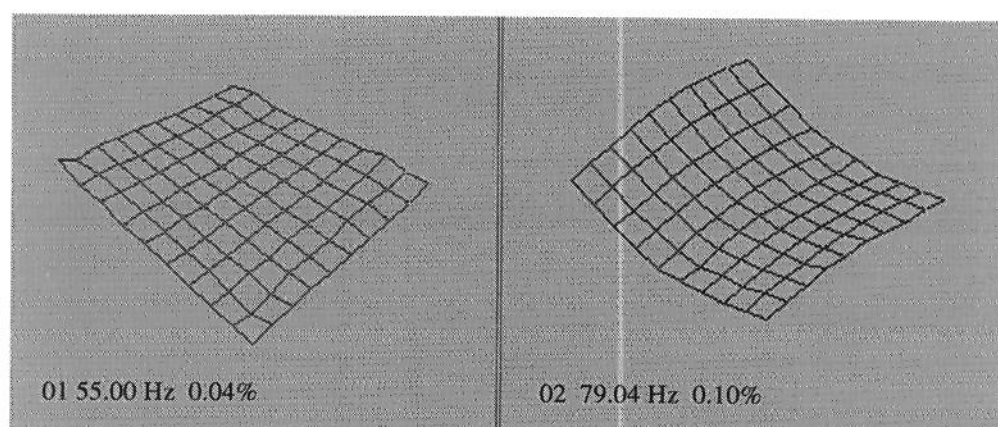


Figura A.5 1° e 2° modos de vibração da placa estimados.

Tabela A.1 Frequências naturais e coeficientes de amortecimento modal estimados.

Modo	Frequência Natural (Hz)	Amortecimento modal (%)
<i>1</i>	<i>55,00</i>	<i>0,04</i>
<i>2</i>	<i>79,40</i>	<i>0,10</i>
<i>3</i>	<i>114,05</i>	<i>0,13</i>
<i>4</i>	<i>139,74</i>	<i>0,09</i>
<i>5</i>	<i>153,50</i>	<i>0,08</i>
<i>6</i>	<i>239,22</i>	<i>0,12</i>
<i>7</i>	<i>268,09</i>	<i>0,12</i>
<i>8</i>	<i>283,61</i>	<i>0,07</i>
<i>9</i>	<i>302,91</i>	<i>0,12</i>
<i>10</i>	<i>348,90</i>	<i>0,15</i>

Uma vez determinados os parâmetros modais, deve-se verificar se o modelo proposto é representativo dos dados experimentais. Há várias ferramentas disponíveis para se validar um modelo modal. Entre elas, pode-se citar: a regeneração das FRFs; a inspeção gráfica dos modos de vibrar e o coeficiente de correlação modal (MAC - Modal Assurance Criterion). Na figura A.6 mostram-se duas FRFs, a experimental e a sintetizada correspondente, gerada a partir dos parâmetros modais estimados. A figura deixa aparente a excelente correlação entre elas.

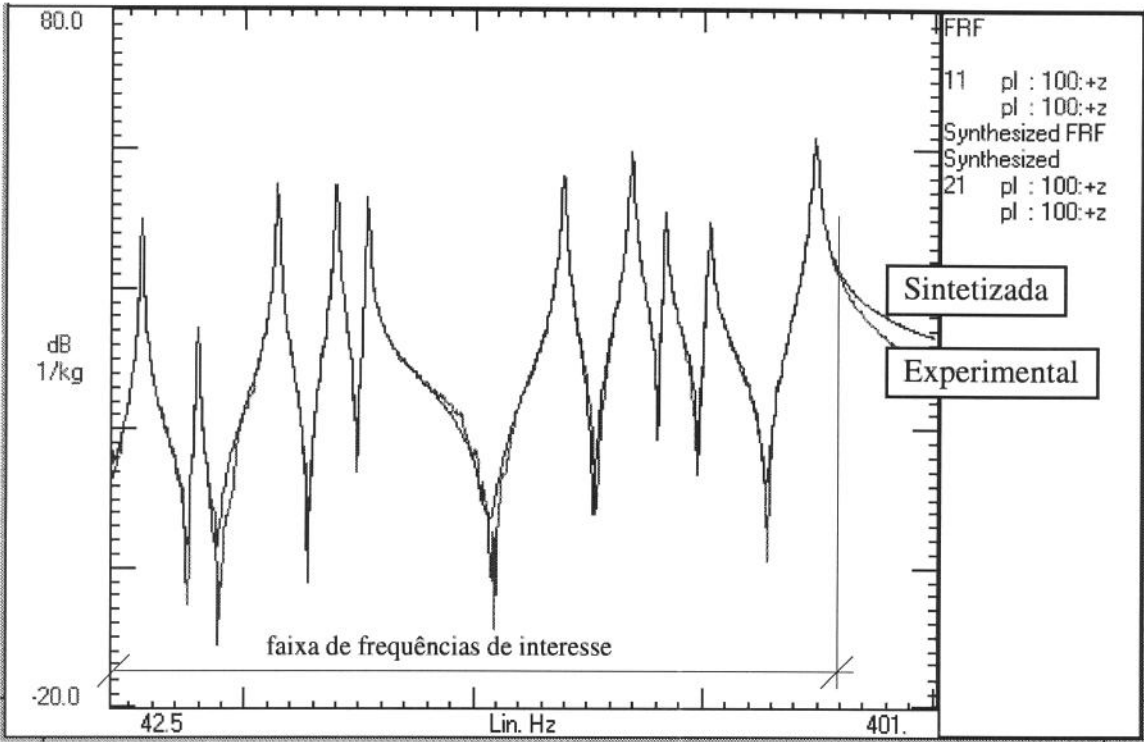


Figura A.6 Comparação entre as FRF's experimental e sintetizada - $H_{100.100}$.

A.3 - Ensaio 2 / Placa com defeito

Nesta etapa do trabalho procede-se à realização de uma nova análise modal experimental para a determinação das propriedades modais da placa do ensaio 1, considerada agora como deteriorada, isto é, com algum defeito. Tal situação é proporcionada pela abertura de um rasgo junto a uma de suas arestas, conforme pode ser visto na figura A.7, onde as medidas estão em mm. Tendo em vista o modelo geométrico experimental, figura A.1, o corte localiza-se na linha dos nós 31, 32 e 33. É esperado que o nível de modificação estrutural imposto à placa seja suficiente para produzir alterações detectáveis em suas propriedades modais.

Dispondo-se da placa devidamente preparada e montada em idênticas condições ao ensaio 1, dá-se início aos procedimentos para a obtenção das FRFs. Por se tratar de um ensaio com as mesmas características do ensaio 1, apenas serão fornecidos seus resultados. Por razões óbvias, a faixa de frequências de interesse é de 0 a 400 Hz e são também estimadas 10 ressonâncias, que são listadas na tabela 2 juntamente com os respectivos coeficientes de amortecimento modal. Estes resultados demonstram que as propriedades modais da placa são claramente afetadas pela presença da falha.

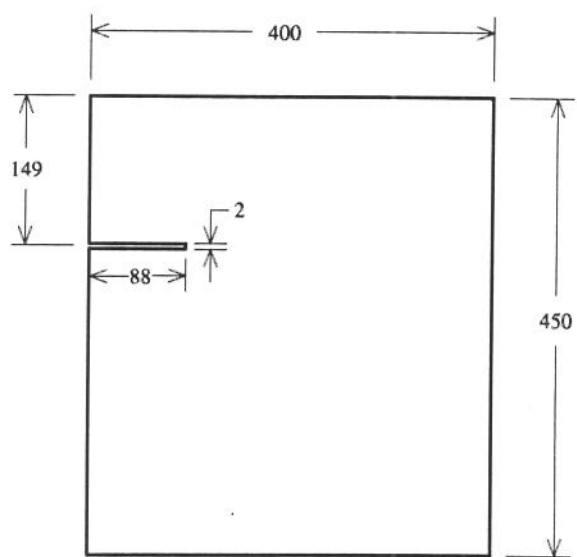


Figura A.7 Placa com defeito; dimensões em mm.

Tabela A.2 Frequências naturais e coeficientes de amortecimento modal estimados.

Modo	Frequência Natural (Hz)	Amortecimento modal (%)
1	53,06	1,60
2	76,45	1,21
3	113,37	0,79
4	131,09	0,68
5	147,07	0,59
6	222,79	0,42
7	247,12	0,36
8	271,69	0,39
9	303,12	0,31
10	340,41	0,28

A.4 - Comparação e análise dos resultados

Visando caracterizar as diferenças entre os dois estágios de vida da placa, promove-se uma comparação direta entre os dois conjuntos de propriedades modais. Dois procedimentos podem ser adotados. Um processo é aquele em que as frequências e modos são mostrados graficamente, sendo conhecido por confronto qualitativo. O outro, por vez, quantifica as diferenças entre modelos através de valores numéricos. Ambos os processos são utilizados para realçar diferenças entre dois conjuntos de propriedades modais de um mesmo sistema dinâmico, seja experimental contra teórico ou experimental contra experimental. Diante do fato de que algumas diferenças entre modelos não aparecem igualmente explícitas nas formas qualitativa e quantitativa, então é conveniente que ambas as formas sejam exploradas.

A.4.1- Comparação das frequências naturais

Na figura A.8 mostram-se as frequências naturais correspondentes à placa intacta e com defeito, onde se observa claramente uma redução nos valores das frequências naturais quando a placa passa da condição intacta para defeituosa. Isto decorre das alterações na rigidez da placa em decorrência da falha imposta.

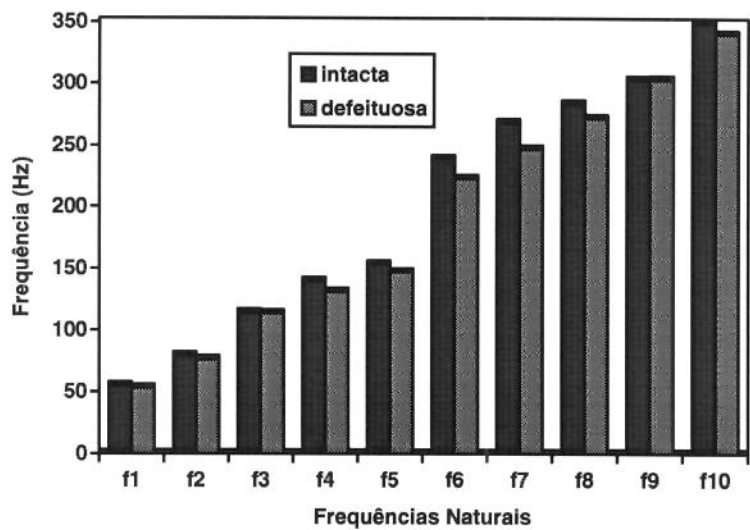


Figura A.8 Comparação entre frequências naturais da placa intacta e defeituosa.

Outra forma, também muita usada para comparar dois conjuntos de dados modais, é traçar um conjunto contra o outro e observar a distribuição dos pontos em relação a uma linha inclinada de 45°, conforme a figura A.9.

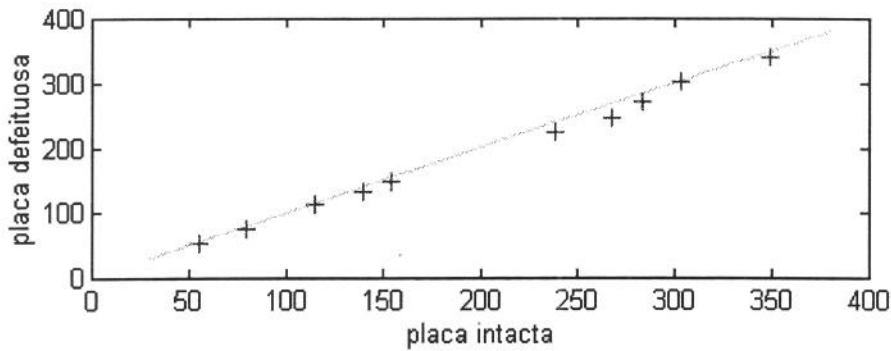
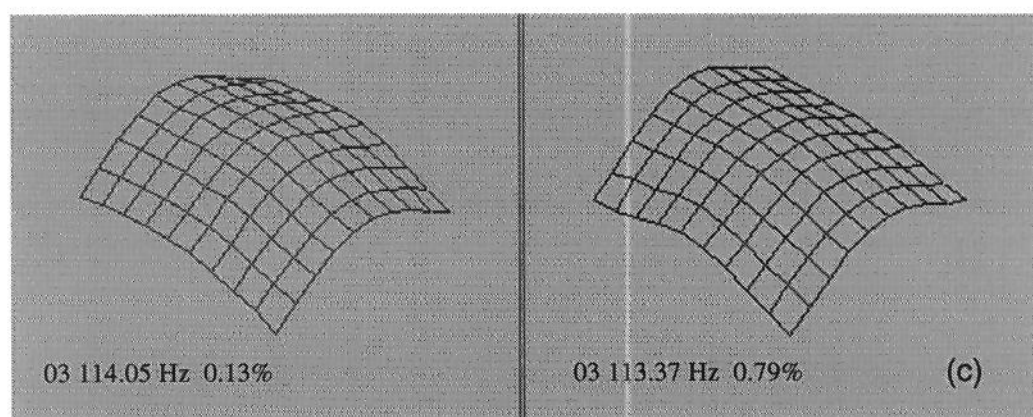
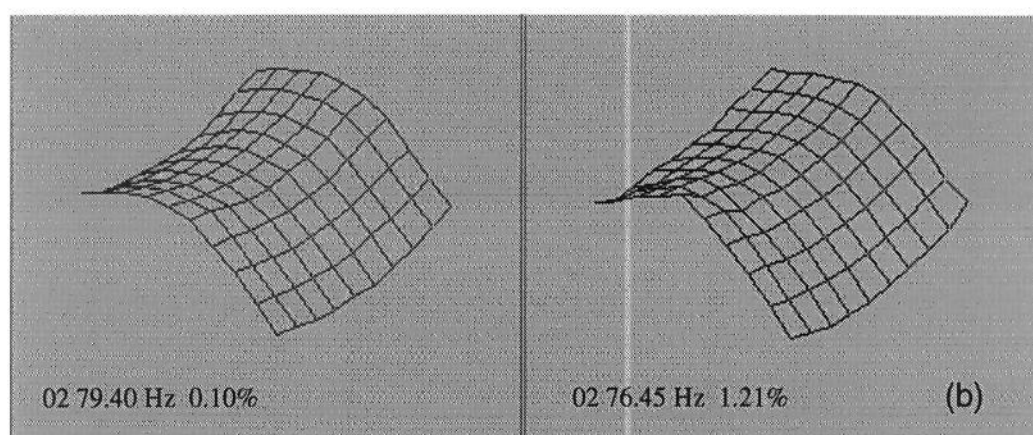
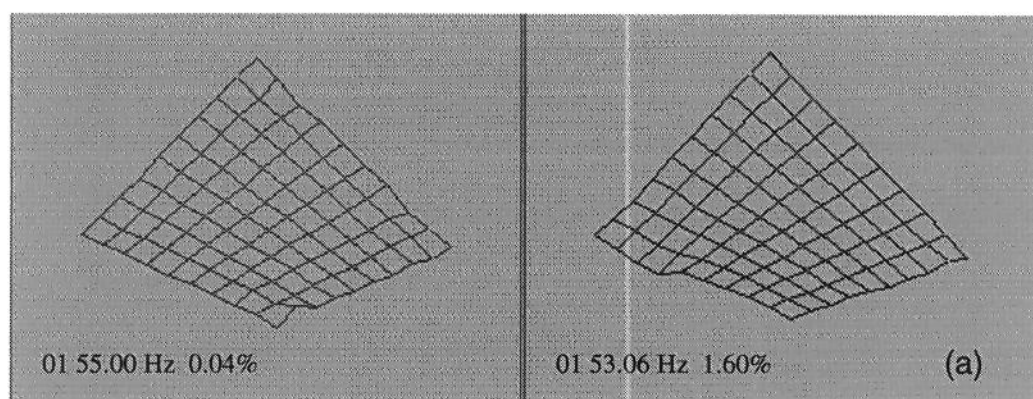


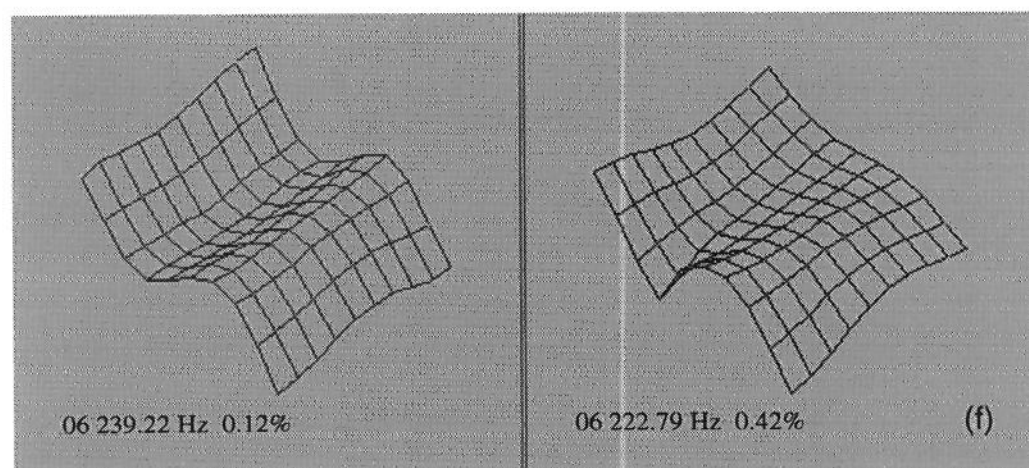
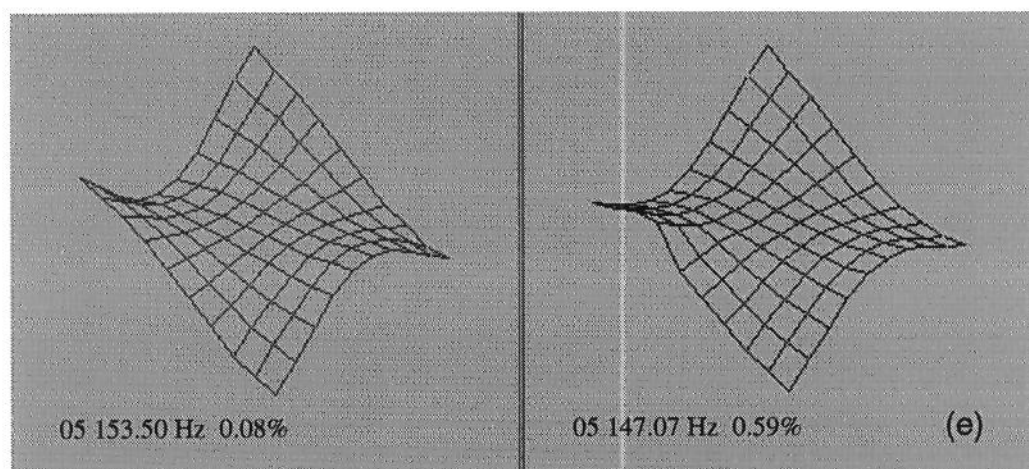
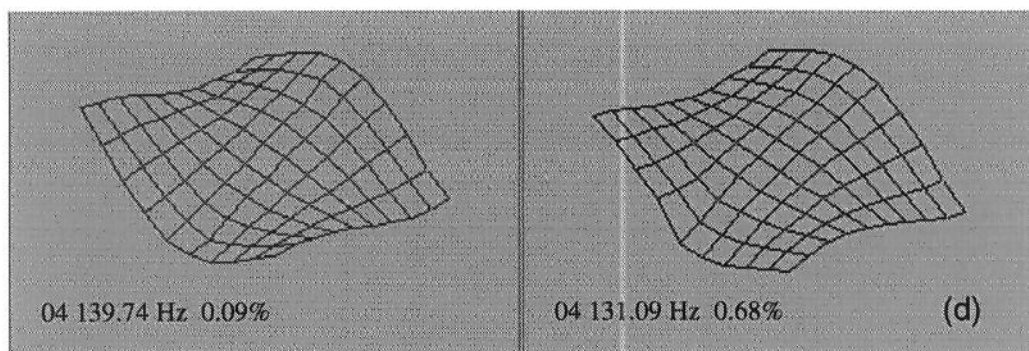
Figura A.9 Frequências naturais: placa intacta contra placa defeituosa.

E interessante notar que este tipo de representação pode refletir não somente o grau de correlação mas também a natureza da discrepância entre os modelos, tais como: erros de modelagem, erros inerentes ao processo de medição ou erros de caráter sistemático [48]. A distribuição dos pontos, sistematicamente abaixo da linha de 45° enseja um erro decorrente de modelagem, aqui representada pela alteração da rigidez devida ao corte em uma das arestas da placa.

A.4.2- Comparação dos modos de vibração

Nas figuras A.10(a, b, c, d, e, f e g) são mostrados, sequencialmente, os 7 primeiros modos de vibração de flexão da placa. A coluna da esquerda corresponde à placa intacta, enquanto a da direita se refere à placa com falha. Em geral procura-se marcar modos correspondentes em um mesmo gráfico. Contudo, deve-se evitar tal procedimento quando existir ambiguidade.





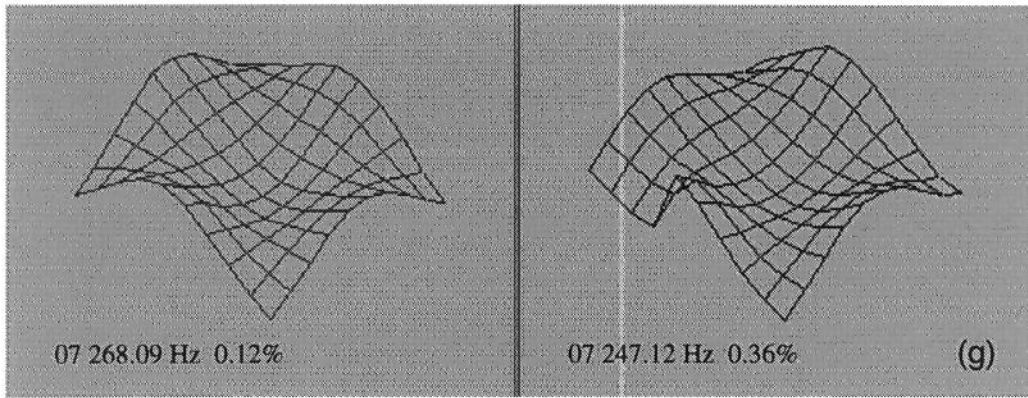


Figura A.10 Configuração deformada de uma placa retangular, 7 primeiros modos experimentais; coluna da esquerda, placa intacta; coluna da direita, placa defeituosa.

Conforme se depreende da figura A.10, os modos da placa com defeito, coluna da direita, diferem moderadamente dos correspondentes modos da placa intacta, coluna da esquerda. Considerando os pares de modos de números 4, 5, 6 e 7, observa-se em cada um destes pares uma área bastante diferenciada, a qual, sabe-se, a priori, tratar-se da região onde se localiza a falha na placa. O mesmo não acontece com os pares de modos de números 1 a 3. Então os modos de números 4, 5, 6 e 7 são mais sensíveis à presença do defeito. Este tipo de representação embora indique claramente diferenças existentes entre os referidos modos, não é claro quanto às origens e localização destas diferenças [48]. Convém ressaltar que existe apenas um único modelo geométrico experimental para ambos os casos. Desta forma pode-se observar mais facilmente o efeito decorrente da falha na resposta dinâmica.

Para se inferir sobre a natureza da diferença entre os dois modelos experimentais, pode-se traçar os modos correspondentes uns contra os outros, de forma semelhante à usada com os dois conjuntos de frequências naturais. Na figura A.12 mostram-se os diagramas de dispersão modal, cujos pontos não apresentam uma direção preferencial. Muito pelo contrário, os pontos apresentam um espalhamento em torno da reta de 45° , fato que denota a existência de erros provenientes de modelagem ou do processo de medição. É interessante observar que este tipo de representação não é de grande utilidade no que tange à localização de erros em modelos. Na figura A.11(a) são traçados todos os 7 sete primeiros modos de vibração, em A.11(b) apenas o primeiro e em A.11(c) o sexto. A apresentação simultânea de todos os modos em um único diagrama favorece a detecção de erros sistemáticos.

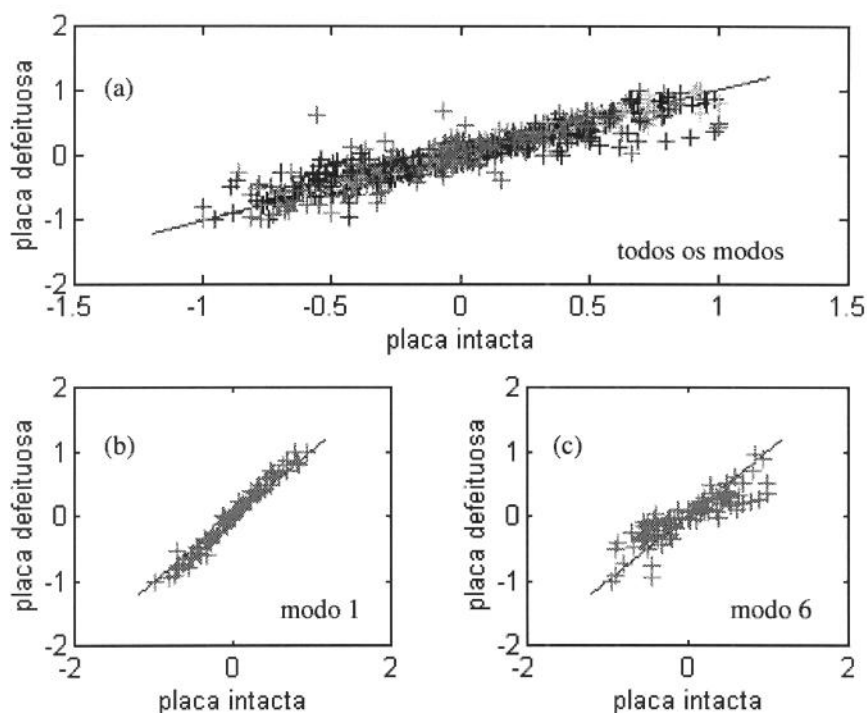
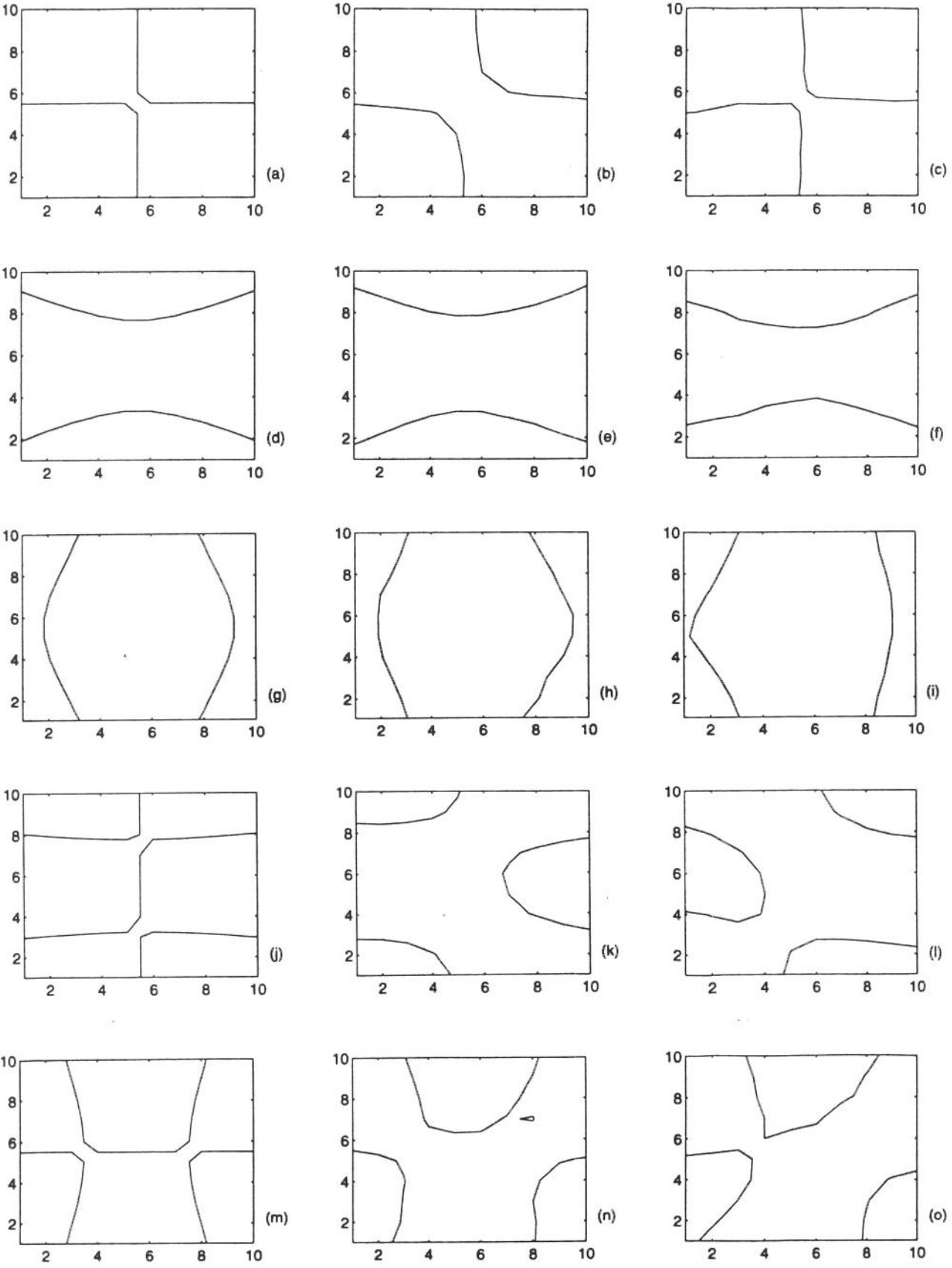


Figura A.11 Diagramas de dispersão modal.

Quando se trata do estudo dinâmico de placas, é muito comum exibir as linhas nodais da configuração deformada. Linhas nodais são linhas formadas por pontos da placa que apresentam deslocamento transversal nulo. Elas são resultantes da interseção do plano de referência (superfície média da placa) com a superfície deformada. Na figura A.12 pode-se ver estas linhas nodais para ambos os casos aqui tratados, bem como as linhas nodais previstas por um modelo de elementos finitos. A geração de um modelo teórico é oportuna pois serve de referência para ratificar os resultados experimentais e, ao mesmo tempo, porque fornece as matrizes teóricas de massa e rigidez, imprescindíveis ao processo de ajuste de modelos.



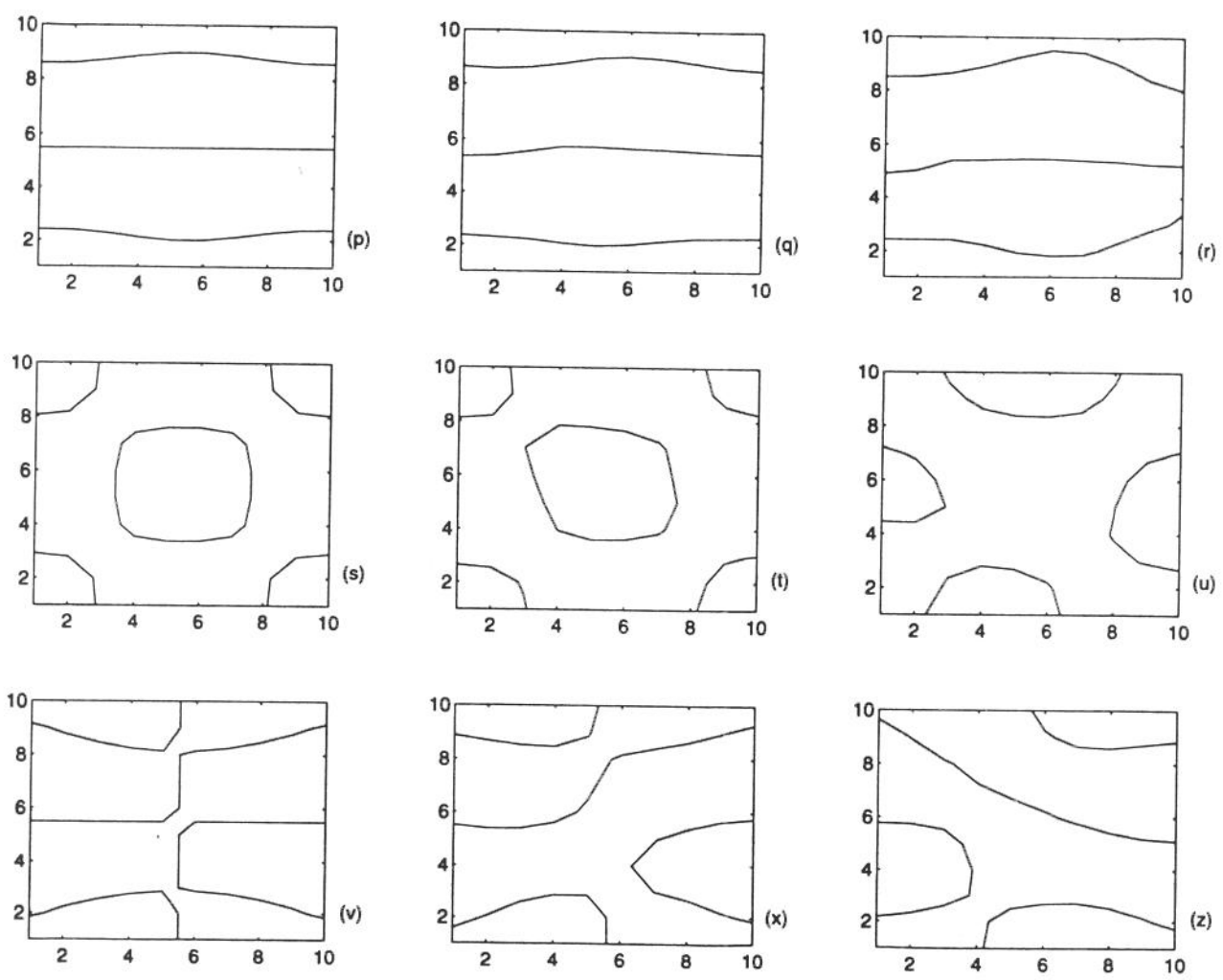


Figura A.12 Linhas nodais dos 8 primeiros modos da placa: (a), (d), (g), (j), (m), (p), (s) e (v), modos preditos; (b), (e), (h), (k), (n), (q), (t) e (x), modos experimentais da placa intacta; (c), (f), (i), (l), (o), (r), (u) e (z), modos experimentais da placa com defeito.

A.4.3 - Comparação quantitativa dos modos

Do ponto de vista quantitativo, três métodos são geralmente utilizados para comparar quaisquer pares de modos. Cada modo de um destes pares não pertence a um mesmo conjunto de modos. Desta forma, pode-se determinar a correlação entre conjuntos de modos experimentais e teóricos ou entre conjuntos de modos de naturezas diversas. As expressões representativas de cada método assumem que os modos de vibração podem ser complexos e são baseadas na comparação entre um conjunto de modos experimentais estimados, que se indica por Φ , e um conjunto de modos preditos teoricamente, sendo este denotado por Ψ . As colunas de Φ são indicados por ϕ_p e as de Ψ por ϕ_q , com p e $q = 1, 2, \dots m$. Cada modo de vibração é também chamado de vetor modal, cuja dimensão é n por 1, sendo n o número de graus de liberdade do modelo. O número de modos das matrizes modais Φ e Ψ é indicado pela letra m . Com base nestas informações define-se o fator de escala modal (MSF), o coeficiente de correlação modal (MAC) e o coeficiente de correlação dos graus de liberdade (COMAC), que são calculados para correlacionar ambos os modos experimentais, isto é, os da placa intacta e os placa com defeito, com os modos teóricos.

O fator de escala modal representa a inclinação da melhor reta que passa entre os pontos quando se traça o modo medido contra o modo predito [48, 62]. O MSF é definido pela equação (A.2).

$$MSF(\phi_q, \phi_p) = \frac{\sum_{i=1}^n (\phi_p)_i (\phi_q)_i^*}{\sum_{i=1}^n (\phi_p)_i (\phi_p)_i^*} \quad (A.2)$$

onde,

$(\phi_p)_i \rightarrow$ i -ésima componente do p -ésimo vetor da matriz modal Φ

$(\phi_q)_i \rightarrow$ i -ésima componente do q -ésimo vetor da matriz modal Ψ

$*$ $\rightarrow$ denota o conjugado

Na equação (A.2) os vetores experimentais, para ambos os casos, são tomados como referência e os valores dos MSF's calculados são mostrados na tabela 3.

Nomenclatura: MSFI = MSF entre modos experimentais da placa intacta e os modos teóricos e MSFD = MSF entre modos experimentais da placa com defeito e os modos teóricos.

Tabela A.3 Comparação entre fatores de escala modal - MFSs.

MSFI	0.88	0.90	0.90	0.82	0.82	0.95	0.84	0.84	0.83	0.87
MSFD	1.02	0.88	0.89	0.72	0.70	0.62	0.74	0.64	0.71	0.61

Os valores da primeira linha da tabela A.3 são muito próximos de 1, significando que o modelo teórico é bem representativo da estrutura física real. O mesmo não sucede com os valores da segunda linha da mesma tabela, exceto os três primeiros valores, o que denota uma maior discrepância entre os dois conjuntos modais. Ao mesmo tempo, os baixos valores dos MSFs para os modos de números 4 a 10, indicam que estes são sensíveis ao defeito existente na placa. Os MSFs dos modos 3 e 6 são mostrados na figura A.13 através dos respectivos coeficientes angulares.

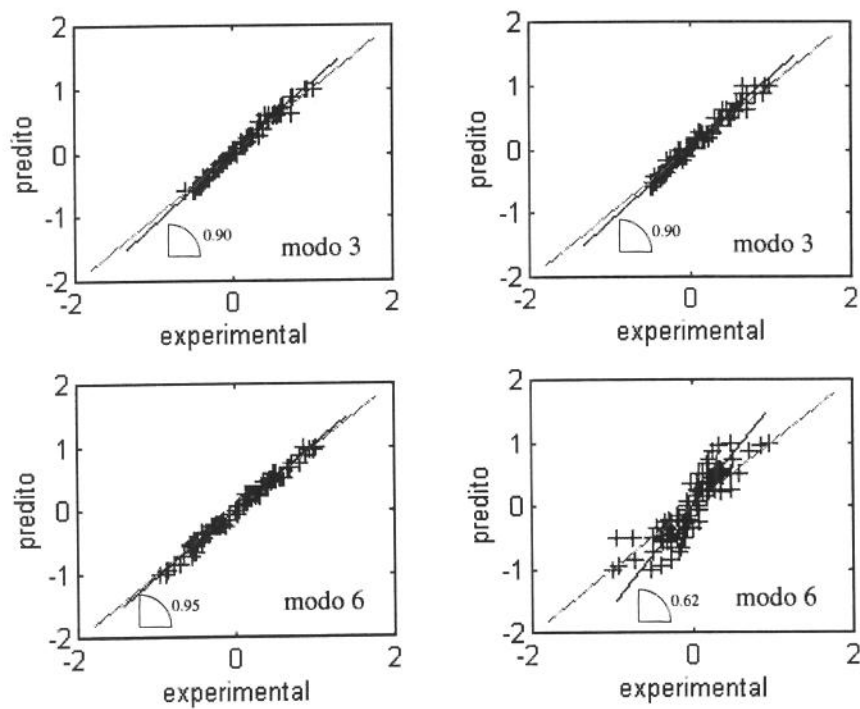


Figura A.13 Ilustração dos MSFs; coluna da esquerda, placa intacta; coluna da direita, placa com defeito.

O coeficiente de correlação modal (MAC) foi originalmente proposto para calcular a correlação entre dois conjuntos de vetores [62]. Os valores do MAC indicam o grau de consistência entre dois vetores quaisquer, onde cada um destes vetores pertence a conjuntos distintos. O MAC assume valores na faixa de 0 a 1. Para vetores consistentes, o MAC assume valores próximos à unidade. Modos correlacionados com MAC inferior a 0.9 são considerados pouco consistentes e tanto maior é esta falta de consistência quanto mais o MAC se aproxima de 0. Matematicamente se escreve:

$$\text{MAC}(p,q) = \frac{\left| \sum_{i=1}^n (\phi_p)_i (\phi_q)_i^* \right|^2}{\left(\sum_{i=1}^n (\phi_p)_i (\phi_p)_i^* \right) \left(\sum_{i=1}^n (\phi_q)_i (\phi_q)_i^* \right)} \times 100 \quad (\text{A.3})$$

A nomenclatura utilizada na definição do MSF aplica-se integralmente para os elementos que definem o MAC. As matrizes do MAC, para ambos os casos em estudo, são mostradas na figura A.14 juntamente com os respectivos elementos da diagonal.

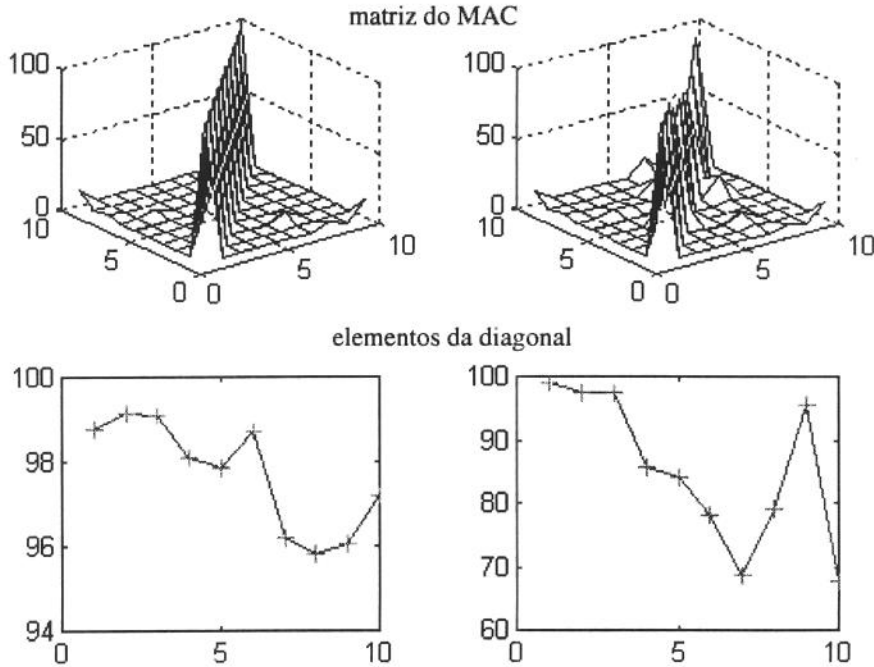


Figura A.14 Matriz do MAC expressa em porcentagem: coluna da esquerda, placa intacta; coluna da direita, placa com defeito.

Comparando-se os elementos gráficos das colunas direita e esquerda, figura A.14, pode-se afirmar que a matriz do MAC é afetada pela presença do defeito na placa. Contudo, nenhuma indicação é dada sobre a localização do referido defeito. Pode-se observar ainda que o ordenamento dos modos não foi afetado pelo defeito na faixa de frequências investigadas.

A terceira forma de correlação modal é expressa pelo COMAC. Ele identifica os correspondentes graus de liberdade para os quais dois conjuntos modais não concordam [63]. Por ser uma medida global, o COMAC não dá qualquer indicação sobre quais modos apresentam mudanças em suas coordenadas e seus valores variam no intervalo $[0, 1]$. Para graus de liberdade consistentes, o COMAC assume valores próximos à unidade. Graus de liberdade correlacionados com COMAC inferior a 0.9 são considerados pouco consistentes.

$$\text{COMAC}(i) = \frac{\left(\sum_{p=1}^m |(\phi_p)_i (\varphi_p)_i| \right)^2}{\left(\sum_{p=1}^m [(\phi_p)_i]^2 \right) \left(\sum_{p=1}^m [(\varphi_p)_i]^2 \right)} \quad (\text{A.4})$$

onde,

$\text{COMAC}(i)$ → COMAC do i -ésimo grau de liberdade

m → número de modos da matriz modal

$(\phi_p)_i$ → i -ésima componente do p -ésimo vetor da matriz modal Φ

$(\varphi_p)_i$ → i -ésima componente do p -ésimo vetor da matriz modal Ψ

Φ e Ψ → representações modais de um mesmo sistema dinâmico

Os valores do COMAC, para os casos da placa intacta e com defeito, podem ser calculados através da equação (A.4). No primeiro caso, combina-se a matriz modal teórica com a matriz modal experimental da placa intacta. No segundo caso, a combinação se dá entre as matrizes modais teórica e experimental da placa com defeito. Os resultados para os 10 modos e 100 graus de liberdade são mostrados na figura A.15.

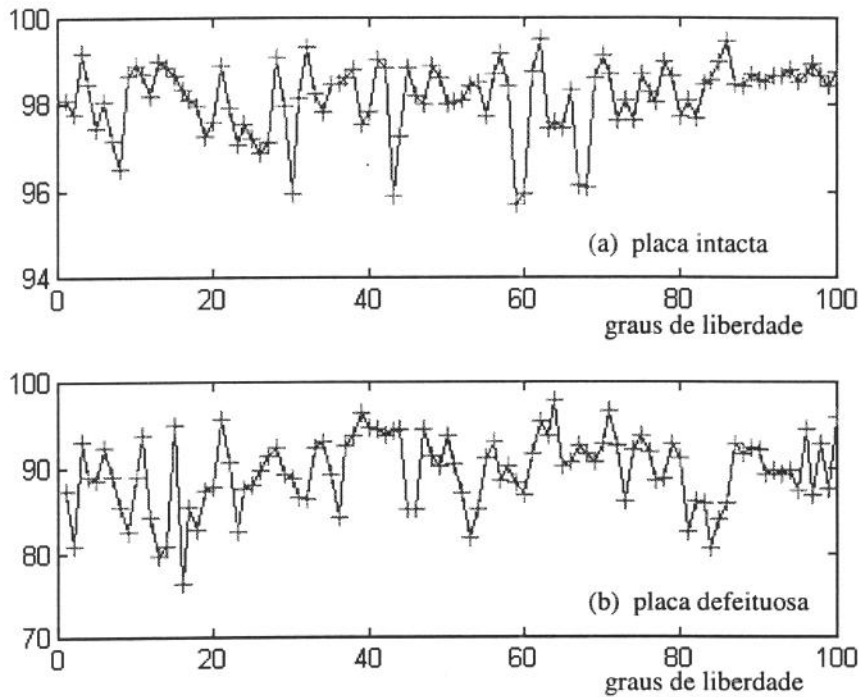


Figura A.15 Valor porcentual do COMAC: 10 modos e 100 graus de liberdade

Para o caso da figura A.15(a), o COMAC varia no intervalo (95 ; 100), dado em porcentagem, o que demonstra uma forte correlação entre os graus de liberdade dos modelos. Já no caso da placa com defeito, figura A.15(b), observa-se uma forte alteração em seus valores. Como se pode ver, o COMAC também se mostra sensível às alterações estruturais, porém não permite localizar o defeito introduzido.

Dos resultados obtidos das diversas formas de comparação entre o modelo teórico com ambos os modelos experimentais, chega-se à conclusão de que todos os parâmetros de correlação modal se alteram em maior ou menor grau com a modificação imposta à estrutura e que as formas gráficas permitem que se visualizem tais alterações. Entretanto, nada se pode inferir sobre sua localização.

Apêndice B

Trabalhos Divulgados em Congressos Científicos



SPIE—The International Society for Optical Engineering

PROCEEDINGS

First International Conference on

Vibration Measurements by Laser Techniques: Advances and Applications

Enrico Primo Tomasini
Chair/Editor

3–5 October 1994
Ancona, Italy

Organized by
A.I.VE.LA (Italian Association of Laser Velocimetry)
Dipartimento di Meccanica, Università di Ancona



Sponsored by
European Commission Measurement and Testing Programme
Consiglio Nazionale delle Ricerche

Published by
SPIE—The International Society for Optical Engineering



Roberto de França Arruda
MECÂNICA COMPUTACIONAL
ENGENHARIA MECÂNICA

Caixa Postal 6122

13:081 - Campinas SP. - Brasil

Volume 2358

SPIE (The Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers) is a nonprofit society dedicated to the advancement of optical and optoelectronic applied science and technology.

Fault detection methods using direct stiffness matrix correction formulations for use with laser data

José Roberto de França Arruda

Universidade Estadual de Campinas
Campinas, SP 13083-970 Brasil

Carlson Antonio Mendes Verçosa

Universidade Federal de Pernambuco
Recife, PE 50740-530 Brasil

ABSTRACT

In this paper, direct stiffness correction methods (Berman-Baruch methods) are revisited for use as a tool for localizing structural faults based on spatially dense mode shapes obtained experimentally using laser Doppler velocimeters. Besides the standard Berman-Baruch formulation and a recently proposed iterative formulation which preserves sparsity, three other alternative formulations are proposed by the authors. The methods are evaluated using both numerically simulated and experimental data. The numerical example results (clamped-free beam) show that some of the formulations indicate clearly the fault location. With the experimental example (free-free beam), however, the fault localization wasn't so evident. The experimental modal test was done with conventional instrumentation. The authors expect that better results can be obtained using laser data.

1. INTRODUCTION

The possibility of detecting, localizing, and identifying structural faults based on the dynamic behavior of the structure is very attractive, and many researchers have investigated the problem in recent years¹. The usual approach consists of using sensitivity analysis and inverse sensitivity Finite Element (FE) model updating techniques to both localize and identify structural faults².

Direct stiffness matrix correction methods based on experimentally obtained modal parameters, originally proposed by Berman/Baruch and co-authors^{3,4}, have the disadvantage of generating stiffness matrices which may be physically meaningless. This happens because there's no unique solution when the experimental modal data is incomplete, which is always the case. This is the main reason why inverse sensitivity methods are preferred in FE model updating applications. However, when using scanning laser Doppler velocimeters (LDV) in modal tests, high spatial density is easily achieved, and the experimental data may be complete, in terms of degrees of freedom, with respect to the FE model, i.e., the responses may be measured at all the FE model DOF's. This encourages revisiting Berman/Baruch methods for use with LDV modal tests. In this paper, the use of direct stiffness matrix correction techniques for fault localization is investigated using numerically simulated and experimental data. A truncated set of modes is used to update the original FE model.

2. DIRECT STIFFNESS MATRIX UPDATING METHODS

The original technique proposed by Baruch and Bar Itzhack⁴ consists of finding a corrected stiffness matrix Y that obeys the spectral equation:

$$YX = MX\Omega^2 \quad (1)$$

where X e Ω^2 are the measured eigenvectors and eigenvalues, respectively, and M is the theoretical mass matrix, supposed undisturbed by the fault. Even enforcing $Y = Y^T$, there are more unknowns

than equations and, hence, there is no unique solution for Y . To find a solution, it is supposed that the solution minimizes the norm $\|M^{-1/2}(Y-K)M^{-1/2}\|$, which yields:

$$Y - K = -R = -KXX^T M - MXX^T K + MXX^T KXX^T M + MX\Omega^2 X^T M \quad (2)$$

where K is the original FE stiffness matrix.

Besides using the standard Berman-Baruch formulations and an iterative implementation proposed by Smith⁶, three other, simpler alternative formulations were implemented by the authors. The corrected stiffness matrix Y of Eq. (2) does not preserve the sparsity of the original stiffness matrix K . Smith proposed an iterative scheme, where the sparsity is enforced by applying a "mask" which can be implemented with an element-by-element product by a matrix S consisting of ones and zeros in the appropriate locations:

$$Y_s = Y \circ S \quad (3)$$

where $\circ$ denote the element-by-element product of two matrices. The scheme consists of applying Eq. (2), enforcing sparsity with Eq. (3) and then replacing K by Y_s in Eq. (2). The process continues until the norm of the difference $Y - Y_s$ reaches a sufficiently small value. Smith did not provide any proof that the iterative scheme converges to the exact solution.

Based on the methods exposed previously, the authors have searched for alternative, simpler formulations of the direct stiffness correction methods.

If one writes:

$$Y = K - R \quad (4)$$

then:

$$RX = KX - MX\Omega^2 = E \quad (5)$$

Equation (5) is the equation that the stiffness correction matrix R has to obey in order to have $Y \in M$ generating the measured eigenvalues and eigenvectors. In order to enforce the symmetry of R , one has to solve the Lyapunov equation:

$$R(XE^T) + (XE^T)^T R = 2(EE^T) \quad (6)$$

The well-known solution of the Lyapunov equation⁵ yields the symmetric solution R . If one does not impose the symmetry of the solution R , then it may be computed directly from Eq. (5) using the pseudo-inverse of the rectangular matrix X :

$$R = EX^+ \quad (7)$$

The solution given by Eq. (6) preserves symmetry but not sparsity, while in Eq. (7) neither symmetry nor sparsity are preserved. A simple approach to preserve symmetry and sparsity when solving Eq. (5) consists of picking the distinct, non-zero elements of matrix R and arranging them into a vector r . Correspondingly, E and X are arranged into a vector e and a matrix A , respectively, and it's possible to write:

$$A r = e \quad (8)$$

If the size of vector r , i.e., the number of unknowns in R , is larger than the number of equations (size

of e), then the solution:

$$\hat{r} = A^+e \tag{9}$$

yields e in Eq. (8) exactly, which means that the measured eigenvectors and eigenvalues will be reproduced exactly. Otherwise, they will be only approximated.

3. FAULT DETECTION AND LOCALIZATION

The solutions given by Eqs. (6), (7), and (9) were implemented, as well as the Berman-Baruch and the Smith's iterative solutions. If the computed correction matrix R approximates the "exact" correction, then it can be used to localize the structural fault and, at the same time, to update the FE model.

3.1. Numerical example

In order to evaluate the ability of the different methods to compute R and localize a structural fault, a simple numerical example was first treated. It consists of a clamped-free beam modeled with 30 Euler-Bernoulli beam elements of 4 DOF's each, which totalizes 60 DOF's. The fault was simulated by modifying the stiffness coefficients of one of the finite elements, namely the FE connecting DOF's 17-18 (linear displacements) and 47-48 (angular displacements). The geometrical and material properties of the beam can be see on table 1. The correction matrix R was computed using the five different direct matrix correction methods and was compared with the exact matrix. The procedure was done using different numbers of modes and different numbers of DOF's.

Young's modulus	$2.07 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$
mass density	$7.8 \times 10^3 \text{ Kg/m}^3$
cross-section area	$1.0 \times 10^{-4} \text{ m}^2$
cross-section inertia	$8.33 \times 10^{-10} \text{ m}^4$
length	0.3 m

Table 1 - Physical data of the numerical example (clamped-free beam)

Figure 1 shows the contour plots of the correction matrix R for a typical case, where the first 3 modes with 30 DOF's (linear displacements) were used. From these plots the possibility of localizing the fault can be evaluated for the different methods. It can be seen that methods which gave the best results in terms of localization were Smith's method and the method which preserves symmetry (Eq. (6)).

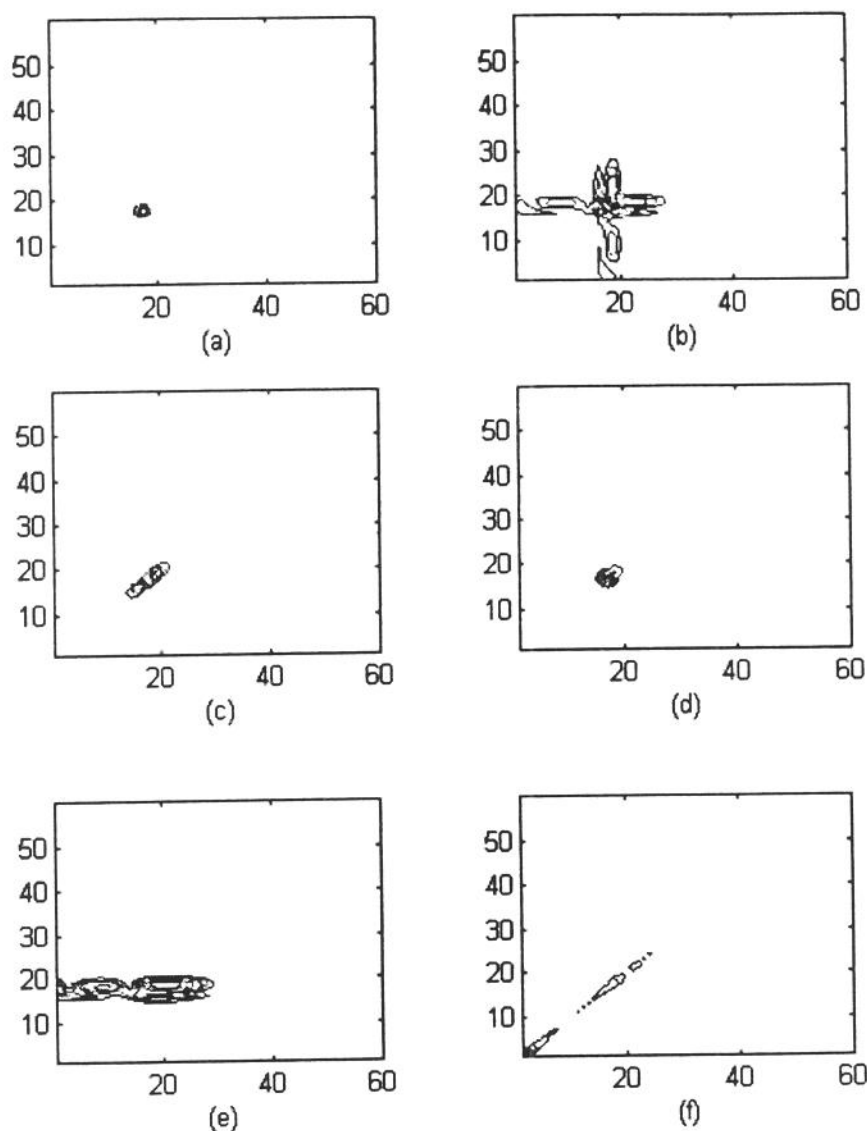


Fig.1 - Contour plots of matrix R for the five different methods. (a) exact; (b) Berman-Baruch; (c) Smith; (d) Eq. (6); (e) Eq. (7); (f) Eq. (9).

Two other localization tools have been implemented by the authors. One of them is based upon the fact that in Eq (7) it is possible to limit the correction to a given set of chosen DOF's by truncating X. If the number of chosen DOF's is larger than or equal the number of measured modes, then Eq. (7) will yield a R matrix which obeys Eq. (5) exactly. Otherwise, it will only approximate Eq. (5). The norm of matrix R as a function of the "central" DOF of the region chosen for correction (3 DOF's in this case) can be plotted as a function of the central DOF. It is expected that this norm will be minimum when the selected DOF's are close to the fault location. It can be seen in Fig.2(a) that the minimum norm occurs near the fault location. In this case the investigation was restricted to linear displacement DOF's.

Another simple localizer curve can be obtained by plotting the norm of the rows of matrix E. If one element of matrix K is changed, this change will affect the corresponding row of matrix E. Fig.2(b) shows the maximum of this norm occurs near the fault location.

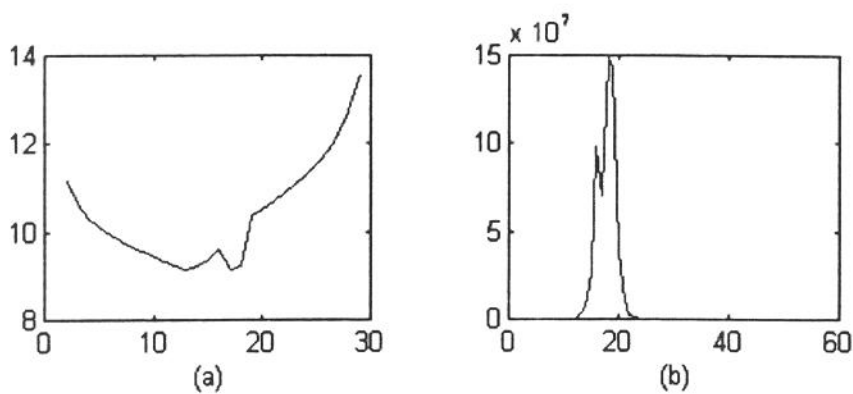


Fig.2 - Localization plots - numerical example. (a) norm of the truncated matrix R obtained with X truncated in Eq. (7); (b) norm of the rows of matrix E.

3.2. Experimental example

Next, an experimental example was treated in order to verify the proposed methods under more realistic conditions. A freely-suspended beam with an indentation, shown in Fig.3, was tested, and the first 4 modes were identified using a global complex exponential method. The Frequency Response Functions (FRF's) were obtained with a fixed accelerometer placed at one of the extremities of the beam (node 21), while a roving hammer excited all the node locations. The angular displacements were computed using a mode expansion method⁷. The indentation lies between nodes 12 and 13.

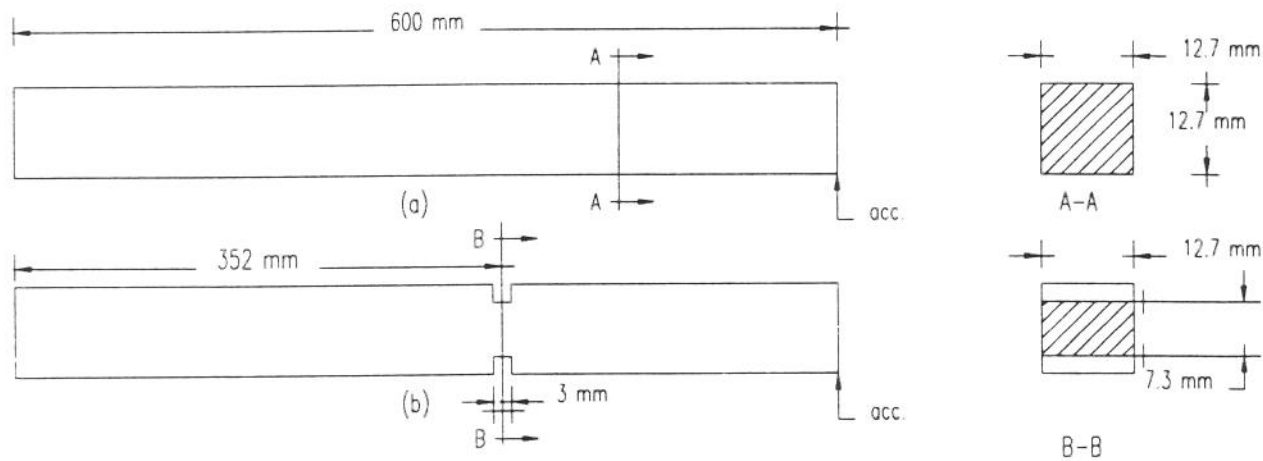


Fig.3. Experimental example - free-free beam. (a) original model ; (b) model with fault

Table 2 shows the geometrical and material properties of the beam, which was modeled with 20 Euler-Bernoulli beam finite elements.

Young's modulus	$2.07 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$
mass density	$7.8 \times 10^3 \text{ Kg/m}^3$
cross-section area	$1.613 \times 10^{-4} \text{ m}^2$
cross-section inertia	$2.168 \times 10^{-9} \text{ m}^4$
length	0.6 m

Table 2. Geometrical data and material properties of the experimental example

Fig.4 shows the contour plots of the correction matrices R computed using the 5 different methods investigated. Fig.5 shows the other two localization plots for this experimental example.

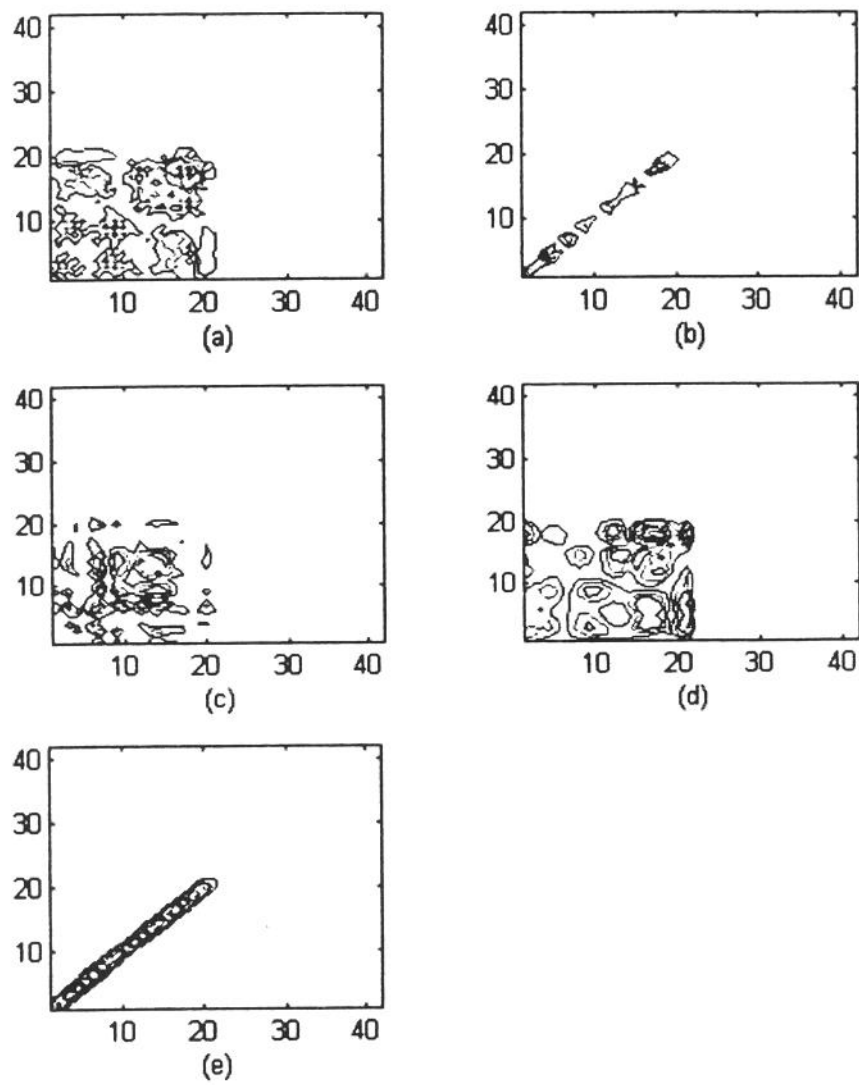


Fig.4 - Contour plots of matrix R for the five different methods. (a) Berman-Baruch; (b) Smith; (c) Eq. (6); (d) Eq. (7); (e) Eq. (9).

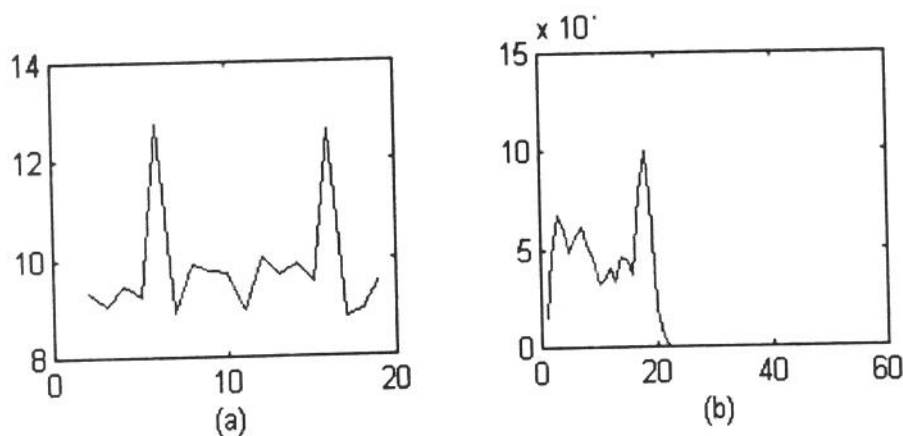


Fig.5 - Localization plots for the experimental example. (a) norm of the truncated matrix R obtained with X truncated in Eq. (7); (b) norm of the rows of matrix E.

4. DISCUSSION AND CONCLUSIONS

Although, as expected, the preliminary experimental results are not as good as the results for the numerical example, they still suggest that direct stiffness methods may indeed be used in fault localization when spatially complete (with reference the FE model) experimental modal data is available.

The authors expect that spatially dense modal data obtained using LDVs will yield even better results in association with direct stiffness correction methods, both for fault localization and for FE model updating.

5. ACKNOWLEDGEMENTS

The authors are thankful to the Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (Proc. No. 92/0908-4) for the financial support.

6. REFERENCES

1. H. G. Natke and J. T. P. Yao, "Structural Safety Evaluation Based on System Identification Approaches," Wesbaden: Vieweg, Braunschweig, 1988
2. H. G. Natke and C. Cempel, "Fault Detection and Localisation in Structures: A Discussion," *Systems and Signal Processing*, vol 5, pp. 345-356, 1991.
3. A. Berman, F. Wei, and K. V. Rao, "Improvement of Analytical Models Using Modal Test Data," *AIAA - Structures, Structural Dynamics, and Materials*, Conference, Paper 80-0800, pp. 809-814, 1980.
4. M. Baruch and I. Y. Itzhack, "Optimal Weighted Orthogonalization of Measured Modes," *AIAA Journal*, vol 16, No. 4, pp.346-351, 1978.
5. J.L. Junkins and Y. Kim. "Introduction to Dynamics and Control of Flexible Structures," Washington: *AIAA Educational Series*, 1993.

6. Smith, S. Weaver, "Application strategies for structure identification with optimal-matrix updates," *Proceedings of XI International Modal Analysis Conference*, pp 1274-1280, Feb. 1993.

7. Kidder, Robert L, "Reduction of Structural Frequency Equation," *AIAA Journal*, Vol 11, No 6, 1973.

Using Direct Stiffness Update Methods to Localize Structural Faults

Carlson Antonio Mendes Verçosa
Universidade Federal de Pernambuco
Recife, PE 50740-530

José Roberto de França Arruda
Universidade Estadual de Campinas
Campinas, SP 13083-970

Introduction

Structural dynamic modeling via Finite Elements (FE) has become standard engineering practice in the past few years. However, there's usually a considerable discrepancy between results predicted with the FE model and experimental results. There are numerous papers presenting different formulations to reconcile the theoretical and the experimental models [1]. FE model error localization and correction techniques are usually known as **model updating** techniques.

One of the major problems faced by model updating techniques is the difference in the size, i.e., the number of degrees of freedom, between the experimental and the theoretical models [2]. Experimental models are usually complete, which precludes the computation of spatial models (stiffness and mass matrices) from experimental data [3].

In general, the experimental model consists of measured natural frequencies and mode shapes, and the updating procedure consists of correcting the theoretical stiffness and mass matrices so that both the orthogonality and the spectral equations are satisfied by the updated matrices. One of the most popular direct matrix correction methods was proposed by Berman, Baruch, and co-authors [4,5]. The Berman-Baruch method consists of minimizing the norm of an error matrix subject to the orthogonality and the spectral equations, which are imposed using Lagrange multipliers. The major shortcoming of this method is the fact that the updated stiffness matrix which it generates does not necessarily correspond to any physical model. It doesn't preserve the connectivity nor the consistency of the original FE model. Therefore, even though the updated model predicts exactly the measured eigenfrequencies and eigenmodes, it isn't necessarily a better model than the original one. This is the reason why the so-called inverse sensitivity [6] methods are usually preferred. The latter consist of computing the sensitivity Jacobian of the measured quantities (eigenmodes, frequency Response Functions, etc.) with respect to the chosen parameters and solving the inverse problem, which involves solving a non-linear least-squares problem. The shortcomings of the inverse sensitivity methods are related to the choice of the parameters to be corrected and to the poor convergence of the non-linear least-squares algorithms.

Model updating methods may be used to localize structural faults using experimental modal data. The basic assumption is that the faults cause changes of the physical properties of the structure, which affect the natural frequencies and mode shapes. Several papers treat this problem [7,8,9] using correlation functions between the measured and the theoretical eigen properties, e.g., the Modal Confidence factor, the Modal Assurance Criterion, and the Coordinate Modal Assurance Criterion. Simulation and experimental results for beams and plates show that the modal data is affected by the structural faults. However, the ability of the theoretical/experimental correlation coefficients to localize the faults is very poor. Further research is therefore needed on the subject.

This paper investigates the use of Berman-Baruch type model update methods to localize structural faults. Different direct stiffness correction methods are formulated. The methods are applied to a numerical simulation example of a clamped-free beam with a fault located in one of the finite elements.

Direct Stiffness Matrix Update Methods

The original technique proposed by Baruch and Bar Itzhack [5] consists of finding a corrected stiffness matrix that obeys the spectral equation:

$$YX = MX\Omega^2 \quad (1)$$

where $X \in \Omega^2$ are the measured eigenvectors and eigenvalues, respectively, and M is the theoretical mass matrix, supposed undisturbed. Even enforcing $Y = Y^t$, there are more unknowns than equations and, hence, there is no unique solution for Y . To find a solution, it is supposed that the solution minimizes the norm $\|M^{-1/2}(Y - K)M^{-1/2}\|$, which yields:

$$Y - K = -R = -KXX^tM - MXX^tK + MXX^tKXX^tM + MX\Omega^2X^tM \quad (2)$$

where K is the original FE stiffness matrix.

The corrected stiffness matrix Y of Eq. (2) does not preserve the sparsity of the original stiffness matrix K . Besides using the standard Berman-Baruch formulations, an iterative implementation proposed by Smith [10], which preserves the original stiffness matrix sparsity, was implemented. Sparsity is enforced by applying a matrix S consisting of ones and zeros in the appropriate locations:

$$Y_s = Y \circ S \quad (3)$$

where $\circ$ denote the element-by-element product of two matrices. Then the original K is replaced by Y_i in Eq. (2) and Y is recalculated. The process is repeated until the norm of the difference between the Y and Y_i is smaller than a specified tolerance.

Based on the methods exposed previously, the authors have searched for alternative, simpler formulations of the direct stiffness correction methods. If one writes:

$$Y = K - R \quad (4)$$

then:

$$RX = KX - MX\Omega^2 = E \quad (5)$$

Equation (5) is the equation that the stiffness correction matrix R has to obey in order to have $Y \in M$ generating the measured eigenvalues and eigenvectors. In order to enforce the symmetry of R , one may solve the Lyapunov equation:

$$R(XE^t) + (XE^t)^t R = 2(EE^t) \quad (6)$$

The well-known solution of the Lyapunov equation yields the symmetric solution R . The solution given by Eq. (6) preserves symmetry but not sparsity. A simple approach to preserve symmetry and sparsity when solving Eq. (5) consists of picking the distinct, non-zero elements of matrix R and arranging them into a vector r . Correspondingly, E and X are arranged into a vector e and a matrix A , respectively, and it's possible to write:

$$A r = e \quad (7)$$

If the size of vector r , i.e., the number of unknowns in R , is larger than the number of equations (size of e), then the solution:

$$\hat{r} = A^+ e \quad (8)$$

yields e in Eq. (7) exactly, which means that the measured eigenvectors and eigenvalues will be reproduced exactly. Otherwise, they will be only approximated.

The solutions given by Eqs. (6) and (8) were implemented, as well as the Berman-Baruch and the Smith's iterative solutions. If the computed correction matrix R approximates the "exact" correction, then it can be used to localize the structural fault and, at the same time, to update the FE model.

Numerical Example

In order to investigate the ability of the different methods formulated in the previous section in localizing structural faults, a numerical simulation example of a clamped-free beam with a fault located in one of the finite elements was used. With the simulated data, the influence of the experimental data truncation - both in the number of "measured" modes and the number of "measured" degrees of freedom - was investigated, as well as the influence of Gaussian noise added to the "measured" data.

To investigate the influence of the mesh density on the localization ability of the methods, two FE models were used - one with 15 elements and the other with 30. Bernoulli-Euler beam elements with 2 degrees of freedom per node (transverse displacement and angular displacement) were used.

The localization ability was determined by examining the contour plots of the mass matrix corrections calculated using each different formulation. Results obtained using Eq. (8) are not displayed here because they were poorer than the results obtained using the other three formulations. The authors are pursuing the investigations using this method, which is very flexible and preserves both symmetry and sparsity.

Figure 1 shows a summary of the results obtained with the numerical example. The fault is located at element 7 in the 15-element model and elements 13 and 14 in the 30-element model. Figures 1.c through 1.k were obtained using the first 3 modes (natural frequencies and mode shapes) of the beam with the fault. Only the transverse displacements were used as experimental data. The angular displacements were obtained by mode expansion [11], as it would be necessary in a true experiment. Figures 1.c, 1.f, and 1.i illustrate the ability of the three methods to localize the structural fault. Comparing figures c, f, and i with figures d, g, and j, one can evaluate the influence of the mesh density on the localization capability. It can be seen that the dense mesh improves the localization.

Figures 1.e, 1.h, and 1.k show the effect of noise added to the simulated mode shapes (approximately 10%). It was observed that the noise added to the mode shapes has a much larger impact on the performance of the methods than the noise added to the natural frequencies. The ability of the three methods to localize the fault was heavily affected by the noise. This means that the methods are not likely to work in practical situations, where noise will always be present.

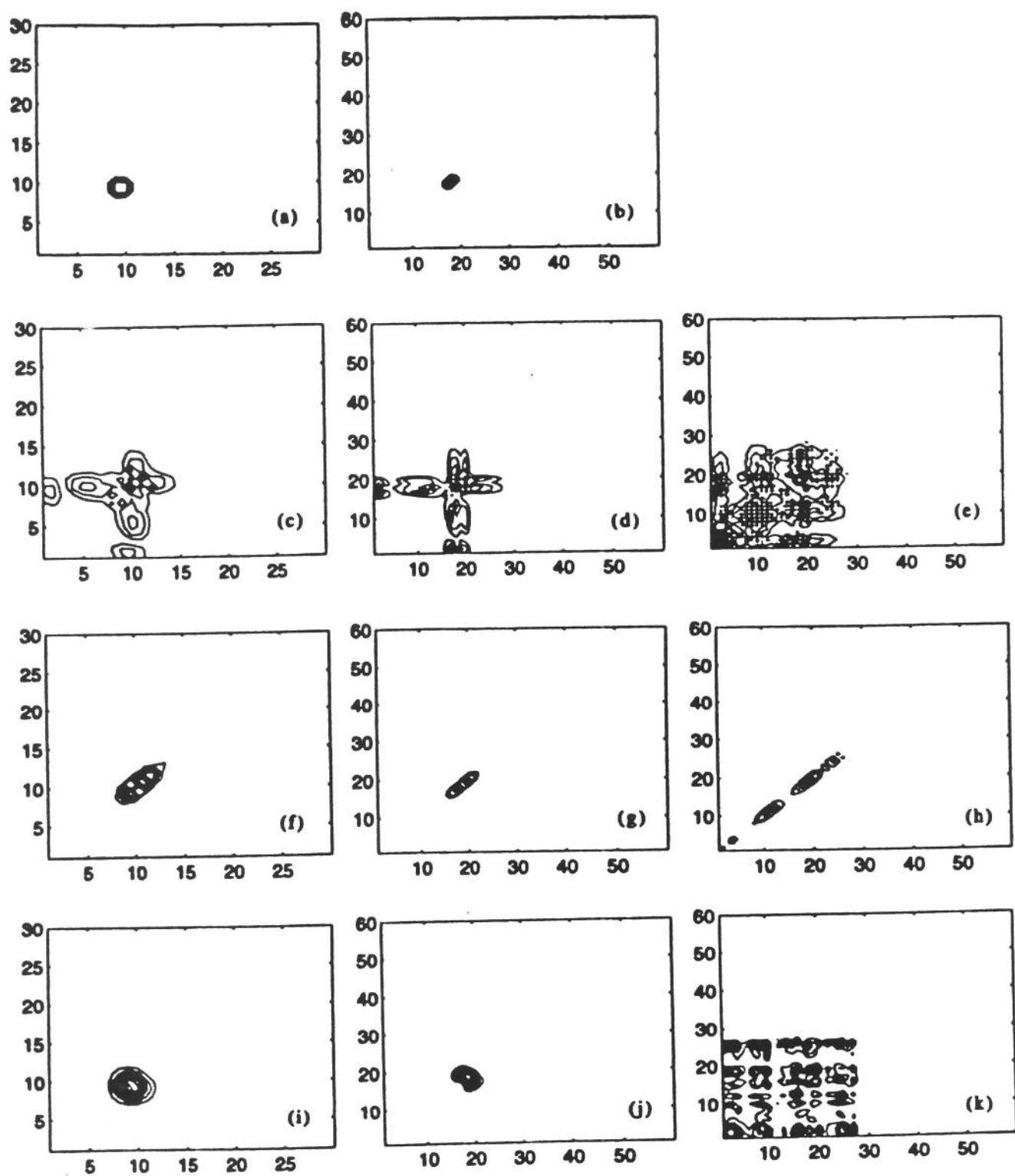


Fig. 1: Contour plots of the correction stiffness matrix (Y-K). 1.a-b) exact; 1.c-e) Berman-Baruch; 1.f-h) Smith; 1.i-k) Eq. (6). 1.a,c,f,i) 15-element FE model, noise-free; 1.b,d,g,j) 30-element FE model, noise-free; 1.e,h,k) 30-element FE model, 10% additive Gaussian noise.

The fact that the dense mesh improved the localization encourages the investigation of the use of high spatial density measurements for fault localization based on experimental modal data. The authors are presently investigating the use of high-spatial density laser-measured mode shapes to localize faults using direct stiffness correction methods.

Acknowledgements

The authors are thankful to FAPESP and to CAPES for the financial support.

References

- [1] M. Imregun, and W. J. Visser, "Review of Model Updating Techniques," Shock & Vibration Digest, 23 - 1 - 1991.
- [2] Gysin, Hanspeter, "Comparison of Expansion Methods For FE Modeling Error Localization," Proceedings of VIII International Modal Analysis Conference, pp 195-204, Sept. 1990.
- [3] Ewins, D. J., "Modal Testing: Theory and Practice," New York - Research Studies Press Ltd by John Wiley, 1984.
- [4] A. Berman, F. Wei, and K. V. Rao, "Improvement of Analytical Models Using Modal Test Data," AIAA - Structures, Structural Dynamics, and Materials, Conference, Paper 80-0800, pp. 809-814, 1980.
- [5] M. Baruch and I. Y. Itzhack, "Optimal Weighted Orthogonalization of Measured Modes," AIAA Journal, Vol 16, No 4, pp. 346-351, 1978.
- [6] H. G. Natke and J. T. P. Yao, "Fault Detection and Localisation in Structures: A Discussion," Systems and Signal Processing, Vol 5, pp. 345-356, 1991.
- [7] Cawley, P., and Adams, R. D. "The Location of Defects in Structures From Measurements of Natural Frequencies," IMECHE - Journal of Strain Analysis, Vol 14, No 2, pp. 49-57, 1979.
- [8] Fox, C. H. J. "The Location of Defects in Structures: A Comparison of The Use of Natural Frequency and Mode Shape Data," Proceedings of X International Modal Analysis Conference, pp. 522-528, 1992.
- [9] Richardson, M. and Wollf, T. "Fault Detection in Structures From Changes in Their Modal Parameters," Proceedings of VII International Modal Analysis Conference, pp. 87-94, Jan 1989.
- [10] Smith, S. Weaver, "Application Strategies for Structure Identification With Optimal-Matrix Updates," Proceedings of XI International Modal analysis Conference, pp 1274-1280, Feb 1993.
- [11] Kidder, R. L., "Reduction of Structural Frequency Equations," AIAA Journal Vol 11, No 6, p 892, 1973.

A WEIGHTED REARRANGED SPECTRAL EQUATION METHOD FOR STRUCTURAL MODEL UPDATING

José Roberto F. Arruda

Departamento de Mecânica Computacional
Universidade Estadual de Campinas
Campinas, São Paulo
Brazil

Carlson Antonio M. Verçosa

Departamento de Engenharia Mecânica
Universidade Federal de Pernambuco
Recife, Pernambuco
Brazil

ABSTRACT

A new structural model updating method based on the dynamic force balance is presented. The method consists of rearranging the spectral equation so that measured modes and natural frequencies can be used to compute directly updated stiffness coefficients. The proposed method preserves both the structural connectivity and reciprocity, which translate into sparsity and symmetry of the stiffness matrix, respectively. Large changes in small-valued stiffness coefficients are avoided using parameter weighting in the rearranged spectral equation solution. It is shown that the proposed method produces results which are similar to the results obtained using Alvar Kabe's method, with the advantages of simpler formulation and smaller computational cost. A simple example of an 8 degrees-of-freedom mass-spring system, originally used by Kabe to present his method, is used here to evaluate the proposed method.

INTRODUCTION

The validation of dynamic models of structures is important to many engineering applications, particularly when large structures are involved, as it is the case in aerospace structures (Smith and Beattie, 1991b). Factors related to test time and cost make it imperative to develop reliable models to simulate and analyze different operating conditions. Myriad methods have been proposed in the past few decades to improve analytical models (usually Finite Element models) using experimental data. A recent comprehensive review of such methods was given by Mottershead and Friswell (1993). There are two major families of

methods: inverse sensitivity methods and direct stiffness update methods. The former have the advantage of producing physically meaningful model corrections, but are usually iterative, and, therefore, are computationally expensive and frequently unstable. The latter are usually straightforward to implement, but can produce stiffness matrices which do not preserve the connectivity the original structure, thus creating spurious load paths.

The most well-known direct stiffness correction methods are called Berman-Baruch methods after the works of Baruch and Bar Itzhack (1978) and Berman and Nagy (1983). In the method proposed by Baruch and Bar Itzhack, the stiffness matrix is updated by minimizing a weighted Euclidean norm of the stiffness matrix variation, subject to the spectral equation and to symmetry. In this method, the mode shapes are previously orthonormalized with respect to the analytical mass matrix using the formulation originally proposed by Targoff (1976) and developed later by Baruch and Bar Itzhack (1978). The updated stiffness matrix, together with the original mass matrix, generate the measured natural frequencies and mode shapes. However, the solution is not unique, and the minimization of the norm of the stiffness variation does not guarantee that the updated matrix constitutes a reasonable model. The Berman and Nagy (1983) method is similar, the difference being that it updates both the stiffness and the mass matrices. In both methods, some of the stiffness matrix elements may undergo very large variations, which are not physically meaningful, and the sparsity of the analytical stiffness matrix, which is associated with the structural connectivity, is lost. These are the major shortcomings

Kabe (1985, 1986) proposed a modified formulations which preserves the original stiffness matrix sparsity. In Kabe's method, an auxiliary eigenvalue problem has to be solved. This auxiliary problem is computationally expensive and somewhat tricky, as it involves a choice of the eigenvalues to be neglected. Kammer (1988) proposed a method based on the projector matrix theory, but he admitted that for large problems his method suffers from the same shortcomings as Kabe's method, as pointed out by Smith and Beattie (1991a). Smith (1993) proposed a straightforward method to enforce sparsity in the Baruch and Bar Itzhack (1978) method, where their solution is element-by-element multiplied by a matrix consisting of ones and zeros, obtained by replacing, in the original stiffness matrix, the elements different from zero with ones. The result of the product, which has the same sparsity as the original matrix, replace the original matrix in the Baruch-Bar Itzhack solution. The process is repeated until eventual convergence, which is not guaranteed. Smith has not presented proof or evidence that the iterative process converges to the right solution. Our experience has shown it does not (Verçosa and Arruda, 1995).

In this paper, a new stiffness matrix update method is proposed. It preserves the original symmetry and sparsity of the stiffness matrix, and it's formulation is very simple. It's approach is similar to the force balance method, proposed by Fissette et al. (1988), in the sense that the spectral equation is the basis of the method. However, the implementation is completely different, as the stiffness coefficients are estimated directly by rearranging the equations, instead of using finite element stiffness matrix scaling coefficients. The method exposed in this paper is an improvement of a method previously proposed by the authors (Arruda e Verçosa, 1994). A simple numerical simulation example of an 8-degree-of-freedom spring-mass system is treated in order evaluate the proposed method and to compare it with Kabe's method. The example system is the same used by Kabe (1985).

FORMULATION OF THE METHOD

The updated stiffness matrix, Y , can be expressed as a sum of the original stiffness matrix, K , and an additive correction matrix, $(-R)$, as:

$$Y = K - R \tag{1}$$

The spectral equation, which can be viewed as a dynamic force balance equation, of the initial model can be written as:

$$K\Phi = M\Phi\Lambda \tag{2}$$

where Φ is the analytical eigenvector matrix and Λ is the analytical eigenvalue matrix. This equation is valid for any set of m modes, $m \leq n$, where n is the number of degrees-of-freedom.

Now, let Φ_x be an experimental modal matrix. If Φ is replaced by Φ_x in Eq.(2), the spectral equation will not be exactly satisfied, i. e., there is going to be a dynamic force unbalance:

$$K\Phi_x - M\Phi_x\Lambda_x = E \tag{3}$$

Substituting Eq.(1) into Eq.(3), and assuming that it is possible to find an updated stiffness matrix Y such that:

$$Y\Phi_x = M\Phi_x\Lambda_x \tag{4}$$

one can write:

$$R\Phi_x = E \tag{5}$$

Equation (5) is the equation which the additive correction matrix $(-R)$ has to satisfy so that Y and M generate the experimentally obtained modal matrix and natural frequencies.

As the number of measured modes is usually smaller than the number of degrees-of-freedom ($m < n$), there is an infinite number of matrices Y which satisfy Eq. (4). The usual way to find a solution is to minimize a norm of matrix $(-R)$ subject to the spectral equation and to the symmetry of the solution Y , as it is the case with the Baruch and Bar Itzhack (1978) method and other methods derived from it.

Instead of solving Eq.(5) directly, for instance using the pseudo-inverse, the authors propose here the rearrangement of this equation. This rearrangement insures both the symmetry and the sparsity of the updated matrix. If all the nonzero elements of the upper triangular part of matrix R are rearranged into a vector r and, correspondingly, matrix Φ_x is rearranged into a sparse matrix A and matrix E is rearranged into a vector e , Eq.(5) may be written as:

$$Ar = e \tag{6}$$

The solution of Eq.(6) may be rearranged back into a matrix R , which, when subtracted from the original matrix K , yields the updated stiffness matrix Y . In the Baruch and Bar Itzhack (1978) method, the solution is formed for a specific weighted norm of $(-R)$, namely the Euclidean norm $\|M^{-1/2}(-R)M^{-1/2}\|$, and it is not possible to introduce arbitrary weighting matrices in the formulation. On the contrary, Eq.(6) allows the use of both equation weighting and parameter weighting in the solution. The number of unknowns (Nu) it is the number of nonzero elements of the upper

triangular part of the analytical stiffness matrix (excluding the "accidental" zeros caused by force cancellation in an actual load path, as will be discussed later). The number of equations (Ne) is the number of the measured modes times the number of degrees-of-freedom. Therefore, given the sparsity of the analytical stiffness matrix, the number of modes which is necessary to determine the stiffness correction matrix uniquely (without need for norm minimization) is the number of modes which make the rank of matrix A equal to the number of unknowns (size of vector r).

The rearrangement of Eq.(5) can be done rowwise or columnwise. To illustrate the procedure, consider an example where R is a 4-by-4 symmetric matrix, with $R_{12} = R_{21} = R_{14} = R_{41} = R_{34} = R_{43} = 0$ and 2 modes are used to update the model. In this case, Eq.(5) can be rearranged columnwise as shown in Eq.(7).

$$\begin{bmatrix} \phi_{11} & 0 & \phi_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi_{12} & 0 & \phi_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \phi_{21} & 0 & \phi_{31} & 0 & \phi_{41} & 0 \\ 0 & \phi_{22} & 0 & \phi_{32} & 0 & \phi_{42} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \phi_{11} & \phi_{21} & \phi_{31} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{12} & \phi_{22} & \phi_{32} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_{21} & \phi_{41} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_{22} & \phi_{42} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_{11} \\ R_{22} \\ R_{13} \\ R_{23} \\ R_{33} \\ R_{24} \\ R_{44} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E_{11} \\ E_{12} \\ E_{21} \\ E_{22} \\ E_{31} \\ E_{32} \\ E_{41} \\ E_{42} \end{Bmatrix} \quad \dots (7)$$

The solution of Eq.(6) using the pseudo-inverse can be written as:

$$\hat{r} = A^+ e \quad (8)$$

where A^+ is obtained by singular-value decomposition (SVD) of matrix A . It can be shown (Junkins and Kim, 1993) that the solution in Eq.(8) yields both the least-squares solution, when $Nu \leq Ne$ and $\text{rank}(A) = Nu$:

$$\hat{r}_{LS} = (A^t A)^{-1} A^t e \quad (9)$$

and the minimum-norm solution, when $Nu > Ne$ and $\text{rank}(A) = Ne$:

$$\hat{r}_{\min\|r\|} = A^t (A A^t)^{-1} e \quad (10)$$

Both solutions can be weighted. Equation weighting is obtained by minimizing:

$$\|e\|_{LS} = \frac{1}{2} e^t W_e e \quad (11)$$

where W_e is a symmetric positive definite weight matrix. The weighted least-squares solution is given by:

$$\hat{r}_{wLS} = (A^t W_e A)^{-1} W_e A^t e \quad (12)$$

Parameter weighting is obtained by minimizing:

$$\|\hat{r}\|_w = \frac{1}{2} \hat{r}^t W_p \hat{r} \quad (13)$$

where W_p is a symmetric positive definite weight matrix. The weighted minimum-norm solution is given by:

$$\hat{r}_{\min\|\hat{r}\|_w} = W_p^{-1} A^t (A W_p^{-1} A^t)^{-1} e \quad (14)$$

The solutions given by Eqs.(12) and (14) have a smaller computational cost than the SVD, and, therefore, were preferred in the computer implementation of the method.

Note that it is usually necessary to expand the measured modes to form matrix Φ_x . Lieven and Ewins (1990) observed that the dynamic expansion method proposed by Kidder (1973) is suitable for model updating applications, which agrees with our experience. It is also recommended to orthonormalize the experimental mode shapes with respect to the analytical mass matrix, for instance using the method originally proposed by Targoff (1976) and later developed by Baruch and Bar Itzhack (1978).

SIMULATION EXAMPLE

In order to illustrate the proposed method and to compare it with Kabe's method, the simple spring-mass example treated by Kabe in his original paper (Kabe, 1985) is used here. A schematic view of the example system is shown in Fig. 1. The values of the exact stiffness and mass coefficients are also given in Fig. 1.

Table 1 shows the results obtained using Kabe's Stiffness Matrix Adjustment method (KMA) and the proposed Spectral Equation Rearrangement method (SER). Physical units are not given, as they are irrelevant in this example. The stiffness matrix of the exact model with a few of its coefficients corrupted was used as the stiffness of the initial model to be updated. The different results shown in Table 1 correspond to 3 different cases. For each case, the

identification of the updated stiffness coefficients was done using either the first, the first two, or the first three modes computed using the exact mass and stiffness matrices.

In this example there are 16 unknowns. As each mode yields 8 equations (number of degrees-of-freedom), at least two modes are necessary to reproduce the exact solution. Below that number, the solution is approximate. However, in this example, two modes were not sufficient, as shown in Table 1. It was observed that the rank of matrix A was 15 using the two first modes. Therefore, it was necessary to add the 3rd mode to increase the rank of matrix A to 16. Using the three modes, both methods were able to correctly identify the exact stiffness coefficient values. It can be seen in Table 1 that in all the cases treated there's good agreement between results from the KMA and SER methods.

The computational cost of the two methods in the cases treated in Table 1 are shown in Table 2. The computational cost is expressed in thousands of floating-point operations (KFlops). It can be seen that the proposed method is computationally more efficient than Kabe's method. Figure 2 shows the sparsity plots of matrix A of the SER method and of the square matrix of Kabe's method auxiliary problem (whose eigenvalues need to be computed) when modes 1, 2, and 3 are used. The sparsity plot consists of a mapping of the nonzero elements of a matrix, indicated with dots. It can be seen that matrix A is considerably more sparse, and, therefore, demands less memory space and less computational effort than Kabe's auxiliary problem matrix. In the computations of the SER method, sparse matrix computation algorithms were used. In Table 2 it can be observed that the cost associated with the computation of the rank of matrix A is significant. This computation can be optimized when solving the linear system of equations using sparse matrix algorithms. The discussion of these algorithms is beyond the scope of this paper (see, for instance, Barlow and Vemulapati (1992)).

When the rank of matrix A is equal to the number of unknowns, parameter weighting is not necessary. However, it becomes mandatory when this is not the case; otherwise, the results become much worse than those from Kabe's method. The weighting matrix used in this example is simply a diagonal matrix where the elements are the stiffness matrix coefficients of the initial model.

One particular case is worth emphasizing. As it has been pointed out by Smith and Hendricks (1987), Kabe's method fails when the sparsity of the initial stiffness matrix is not preserved in the real structure. This happens frequently in Finite Element models, where the regularity of the structure can cause adjacent element force cancellation ("accidental" zeros). Whenever this phenomenon happens, the initial

stiffness matrix will have elements which are originally zero, but may become nonzero when the regularity of adjacent elements is changed.

In such cases, when using the SER method, it is sufficient to include these elements in vector r and to weight these parameters with an average stiffness coefficient value. In practical situations, the connectivity of the structure is likely to be known. Hence, the "accidental" zeros can easily be detected. This is particularly straightforward when assembling a Finite Element model using the direct stiffness method.

Table 3 shows the results obtained using the SER method and with Kabe's method in the presence of "accidental" zeros in stiffness elements (1,2) and (4,6). It is clear from Table 3 that the SER method still works, while Kabe's method fails, as expected.

CONCLUSIONS

A new direct stiffness matrix update method based on the dynamic force balance was presented. In the proposed method, measured natural frequencies and mode shapes are used to update the analytical stiffness matrix. Starting with the spectral equation, the stiffness coefficient elements which may be assigned nonzero values according to the structure connectivity are rearranged in vector form. The system of linear equations thus obtained may be solved by weighted least squares, weighted minimum norm, or using the singular value decomposition.

The proposed method was compared with Kabe's method using the simple spring-mass example used by Kabe (1985) to illustrate his method. In most cases, the proposed method yields results which are similar to Kabe's results, but at a lower computational cost. It was also shown that the proposed method works in cases where Kabe's method fails because of the presence of "accidental" zeros. This phenomenon is likely to occur in finite element models, due to force cancellation between adjacent elements when assembling of the stiffness matrix.

The formulation of the proposed method is straightforward, and its implementation is easy and flexible. The authors are pursuing the investigation of the method, which, due to its flexibility, may be easily modified to incorporate strategies to improve its robustness with respect to measurement noise. The lower computational cost of the method is also an important feature for the application to large structures.

ACKNOWLEDGMENTS

The authors are thankful to the Fundação de Amparo à pesquisa do Estado de São Paulo for the financial support.

REFERENCES

Arruda, J. R. F. and Verçosa, C. A. M., 1994, "Fault Detection Methods Using Direct Stiffness Matrix Correction Formulations For Use With Laser Data," *Proceedings, SPIE 1st International Conference on Vibration Measurements by Laser Techniques: Advances and Applications*, E. P. Tomasini, ed., Ancona, Italy, , Vol. 2358, pp. 60-67.

Barlow, J. L. and Vemulapati, U. B., 1992, "Rank Detection Methods For Sparse Matrices," *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, Vol. 13, No. 4, pp. 1279-1297.

Baruch, M. and Bar Itzhack, I. Y., 1978, "Optimal Weighted Orthogonalization of Measured Modes," *AIAA Journal*, Vol. 16, No. 4, pp. 346-351.

Berman, A. and Nagy, E. J., 1983, "Improvement of a Large Analytical Model Using Test Data," *AIAA Journal*, Vol. 21, No. 8, pp. 1168-1173.

Fisette, E., Stravrinidis, C., and Ibrahim, S. R., 1988, "Error Location and Updating of Analytical Dynamic Models Using a Force Balance Method," *Proceedings, UC/SEM 6th International Modal Analysis Conference*, Kissimmee, FL, pp. 1063-1070.

Junkins, J. L. and Kim, Y., 1993, *Introduction to Dynamics and Control of Flexible Structures*, AIAA Education Series, Washington, DC.

Kabe, A. M., 1985, "Stiffness Matrix Adjustment Using Mode Data," *AIAA Journal*, Vol. 23, No. 9, pp. 1431-1436.

Kabe, A. M., 1986, "Constrained Adjustment of Analytical Stiffness Matrices," SAE Paper 851932.

Kammer, D. C., 1988, "Optimum Approximation for Residual Stiffness in Linear System Identification," *AIAA Journal*, Vol. 26, No. 1, pp. 104-112.

Kidder, R. L., 1973, "Reduction of Structural Frequency Equations," *AIAA Journal*, Vol. 11, No. 6, p. 892.

Lieven, N. A. J. and Ewins, D. J., 1990, "Expansion of Modal Data for Correlation," *Proceedings, UC/SEM 8th International Modal Analysis Conference*, Kissimmee, FL, pp. 605-609.

Mottershead, J. E. and Friswell, M. I., 1993, "Model Updating in Structural Dynamics: A Survey," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 167, No. 2, pp. 347-375.

Targoff, W. P., 1976, "Orthogonality Check and Correction of Measured Modes," *AIAA Journal*, Vol. 14, No. 2, pp. 164-167.

Smith, S. W., 1993, "Application Strategies for Structure Identification With Optimal-Matrix Updates," *Proceedings, UC/SEM 11th International Modal Analysis Conference*, Kissimmee, FL, pp. 1274-1280.

Smith, S. W. and Beattie, C. A., 1991a, "Secant-Method Adjustment for Structural Models," *AIAA Journal*, Vol. 29, No. 1, pp. 119-126.

Smith, S. W. and Beattie, C. A., 1991b, "Optimal Identification Using Inconsistent Modal Data," *Proceedings, AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC 32nd Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, AIAA-91-0948-CP, pp. 2319-2324.

Smith, S. W. and Hendricks, S. L., 1987, "Evaluation of Two Identification Methods for Damage Detection in Large Space Trusses," *Proceedings, 6th VPI&SU/AIAA Symposium on Dynamic and Controls for Large Structures*, L. Meirovitch, ed., Blacksburg, VA, pp. 127-142.

Verçosa, C. A. M. and Arruda, J. R. F. 1995, "Structural Fault Localization Using Direct Stiffness Update Methods," *Proceedings, ASME 15th Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise - Symposium on Physical Parameter Identification in Vibration Analysis*, Boston, MA (to appear).

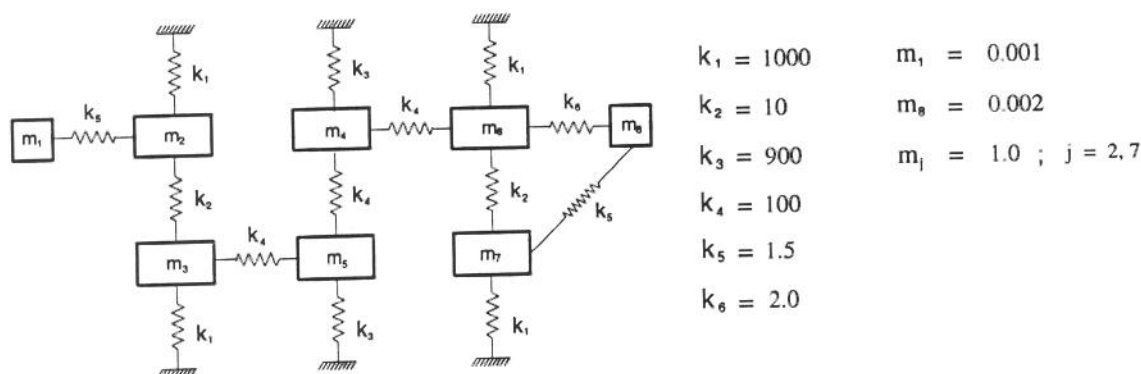


FIG. 1 KABE'S SPRING-MASS SYSTEM EXAMPLE.

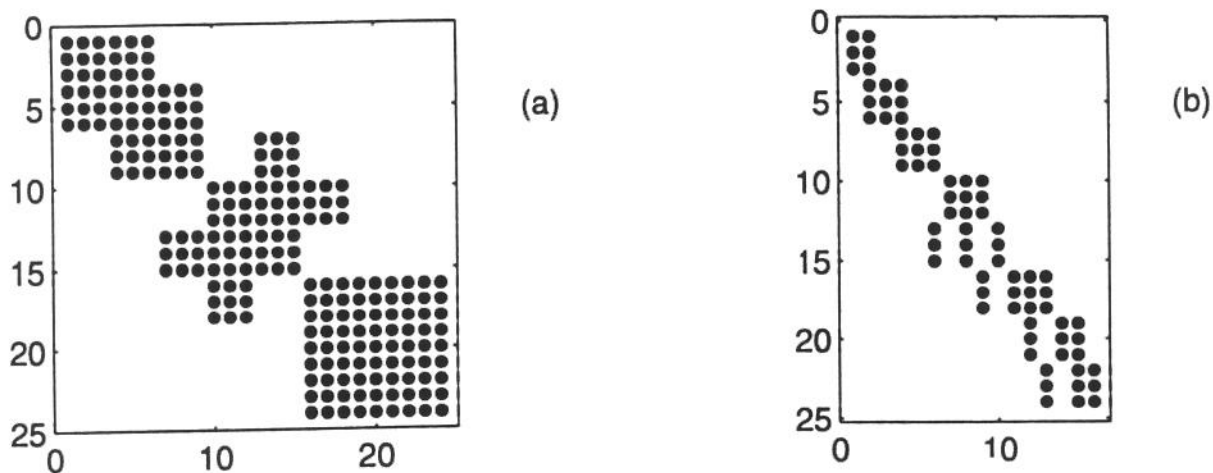


FIG. 2 SPARSITY PLOTS USING THE FIRST 3 MODES. (A) KABE'S METHOD MATRIX - 216 NONZERO ELEMENTS; (B) SER METHOD MATRIX - 72 NONZERO ELEMENTS.

TABLE 1 UPDATED STIFFNESS COEFFICIENTS COMPUTED WITH THE PROPOSED SER METHOD AND WITH KABE'S KMA METHOD.

ELEMENT NUMBER	INITIAL MODEL	USING 1ST MODE		USING 1ST & 2ND MODES		USING 1ST, 2ND & 3RD MODES		EXACT MODEL
		KMA	SER	KMA	SER	KMA	SER	
(1,1)	2.0	1.7	1.7	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5
(1,2)	-2.0	-2.1	-2.1	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5
(2,2)	1512.0	1013.5	1014.1	1011.5	1011.5	1011.5	1011.5	1011.5
(2,3)	-10.0	-10.1	-10.1	-10.0	-10.0	-10.0	-10.0	-10.0
(3,3)	1710.0	1275.8	1274.7	1110.0	1110.0	1110.0	1110.0	1110.0
(3,5)	-200.0	-198.6	-197.9	-100.0	-100.0	-100.0	-100.0	-100.0
(4,4)	850.0	1237.4	1217.7	1100.0	1100.0	1100.0	1100.0	1100.0
(4,5)	-200.0	-178.6	-159.3	-100.0	-100.0	-100.0	-100.0	-100.0
(4,6)	-200.0	-198.5	-197.7	-100.0	-100.0	-100.0	-100.0	-100.0
(5,5)	850.0	1237.3	1217.6	1100.0	1100.0	1100.0	1100.0	1100.0
(6,6)	1714.0	1279.7	1278.5	1113.2	1113.3	1112.0	1112.0	1112.0
(6,7)	-10.0	-10.1	-10.1	-9.0	-8.9	-10.0	-10.0	-10.0
(6,8)	-4.0	-4.1	-4.3	-3.0	-3.0	-2.0	-2.0	-2.0
(7,7)	1512.0	1016.1	1016.5	1012.4	1012.4	1011.5	1011.5	1011.5
(7,8)	-2.0	-2.0	-2.0	-2.3	-2.4	-1.5	-1.5	-1.5
(8,8)	6.0	5.1	5.2	4.3	4.4	3.5	3.5	3.5

TABLE 2 COMPUTATIONAL COSTS OF THE KMA AND THE SER METHODS FOR THE CASES TREATED IN TABLE 1, IN KFLOPS.

METHOD	USING 1ST MODE	USING 1ST & 2ND MODES	USING 1ST, 2ND & 3RD MODES
KMA	25	127	267
SER W/ RANK COMP.	5	15	23
SER W/O RANK COMP.	0.9	1.5	3.5

TABLE 3 COMPARISON OF UPDATED STIFFNESS COEFFICIENTS COMPUTED WITH THE KMA AND SER METHODS USING THE 3 FIRST MODES IN THE PRESENCE OF "ACCIDENTAL" ZEROS IN THE ORIGINAL STIFFNESS MATRIX.

ELEMENT NUMBER	INITIAL MODEL	KMA	SER	EXACT MODEL
(1,1)	2.0	1.0	1.5	1.5
(1,2)	0.0	0.0	-1.5	-1.5
(2,2)	1512.0	1006.4	1011.5	1011.5
(2,3)	-10.0	-5.3	-10.0	-10.0
(3,3)	1710.0	1052.8	1110.0	1110.0
(3,5)	-200.0	-64.8	-100.0	-100.0
(4,4)	850.0	992.4	1100.0	1100.0
(4,5)	-200.0	-51.9	-100.0	-100.0
(4,6)	0.0	0.0	-100.0	-100.0
(5,5)	850.0	1032.3	1100.0	1100.0
(6,6)	1714.0	621.8	1112.0	1112.0
(6,7)	-10.0	-263.1	-10.0	-10.0
(6,8)	-4.0	263.0	-2.0	-2.0
(7,7)	1512.0	792.4	1011.5	1011.5
(7,8)	-2.0	211.0	-1.5	-1.5
(8,8)	6.0	-205.9	3.5	3.5

STRUCTURAL FAULT LOCALIZATION USING DIRECT STIFFNESS UPDATE METHODS

Carlson Antonio M. Verçosa

Departamento de Engenharia Mecânica
Universidade Federal de Pernambuco
Recife, Pernambuco
Brazil

José Roberto F. Arruda

Departamento de Mecânica Computacional
Universidade Estadual de Campinas
Campinas, São Paulo
Brazil

ABSTRACT

The problems caused by experimental data incompleteness when using optimal-matrix update methods are well known. Since the advent of laser-based vibration measurements, the number of measured degrees-of-freedom may be very large, even larger than the number of degrees-of-freedom in a finite element model. Considering that the incompleteness problem may now be partly solved, this paper revisits some well-established direct stiffness update methods, as well as a method recently proposed by the authors, for use in structural fault localization applications. The methods are appraised using a simulation example consisting of a clamped-free beam. The force cancellation between adjacent finite elements, which is known to create an impossible situation for Kabe's method, is solved by introducing the concept of pseudo sparsity. The effects of modal truncation, expansion, and additive noise are investigated.

INTRODUCTION

In the modern dynamic analysis of structures, considerable effort has been invested in the generation of sophisticated computer models. Due to modeling uncertainties, such models frequently require experimental validation techniques to assess the quality of the analytical model. Model updating techniques seek to automatically localize model discrepancies and improve the analytical model based on experimental data, which usually consist of identified modal parameters (natural frequencies, damping coefficients, modal masses, and mode shapes).

It is well known that the identified modal parameters of a structure are a function of its physical properties (geometry, material properties, boundary conditions, and joint properties). Therefore, discrepancies between analytical model predictions and experimental measurements may also be the result of structural damage. Supposing there exists a validated analytical model of the undamaged structure, it should be possible to detect and to localize faults by updating the analytical model based on experimental measurements performed on the damaged structure.

The use of model updating methods to detect and localize faults has been the subject of intensive research since the late 80's. However, the latest publications on damage location using model update techniques are fairly unanimous in stating that the subject needs further investigation. New methods are under development, and the selection and proper use of existing methods remains a significant task. In principle, any model update method may be used to localize faults. A review of fault localization methods is like a review of model update methods. Imregun and Visser (1991) and, more recently, Mottershead and Friswell (1993), have comprehensively reviewed structural model update methods.

Modal correlation methods are the most direct modal-based methods of structural fault detection. Wolff and Richardson (1989), Fox (1992), and Kim et al. (1992), among others, have used modal correlation methods with limited success. Their results have shown that these methods may be useful to detect faults but they are not suitable to locate them.

Among the different approaches to model updating, optimal-matrix update methods are very attractive, as

they are usually non-iterative and computationally less expensive than inverse sensitivity methods. The latter have the advantages of yielding physically meaningful model corrections, and being less sensitive to measurement noise. However, they depend upon the possibility of localizing the fault *a priori*. Otherwise, the number of parameters to estimate becomes too large. To overcome this problem, the usual approach is to use macro elements in order to reduce the number of parameters to be estimated in the error localization stage (Zhang and Lallement, 1987).

When using direct stiffness matrix update methods to localize structural faults, the hypothesis, clearly stated by Richardson and Mannan (1992), that a structural fault affects mainly the stiffness of the region where the fault is located, is implied. If it is possible to identify changes in the stiffness coefficients related to a few degrees-of-freedom (DOFs) of the structural model, the region of structure affected by the fault is localized. Knowing the damaged region, either conventional Nondestructive Evaluation (NDE) techniques or refined model update procedures may be applied to assess the extent of the fault. Inverse sensitivity model update methods, for instance, may usually be carried out successfully with *a priori* knowledge of the fault location.

The problems caused by experimental data incompleteness when using optimal-matrix update methods are well known. Incompleteness is usually due to experimental limitations, which restrict the number of identified modes and the number of measured DOFs. However, with the advent of laser-based vibration measurements, the number of measured DOFs may be very large, even larger than the number of DOFs in a finite element (FE) model. Typically, tens of thousands of locations may be measured. Systems capable of extracting 6 DOFs per measurement location are under development (Montgomery and West, 1994), but actual commercial scanning laser vibrometers are only capable of measuring velocities on vibrating surfaces along the line of sight of the laser beam. In the case of beams, plates, and shells, post-processing of the measured velocity field can generate in-plane rotational DOFs (Arruda, 1992).

This paper revisits some well-established direct stiffness methods considering that the incompleteness problem may now be partly solved. It is supposed that the translational velocities (from which the translational displacements may be easily obtained) are measured at all the nodes of the FE model. Rotational DOFs are either supposed measured or are obtained using modal expansion methods.

The direct stiffness matrix update methods most frequently used in fault localization applications are investigated, namely the original method proposed by Baruch and Bar Itzhack (1978), the well-known method proposed by Kabe (1985), and the method recently

proposed by Smith (1993). Furthermore, a method recently proposed by the authors (Arruda and Verçosa, 1994) was also used.

The stiffness correction matrix, which is the difference between the original and the updated stiffness matrices, is used to localize the faults. The capability to localize a fault is investigated using a simple numerically simulated example. In the example, a stiffness change is made in one of the finite elements of a clamped-free beam. As the beam is modeled with identical Bernoulli-Euler beam finite elements, the phenomenon of force cancellation in the assembled stiffness matrix occurs. This false sparsity, caused by force cancellation, was shown to cause Kabe's method to fail by Smith and Hendricks (1987). More recently, Beattie and Smith (1992) refer to this problem as an open question. A simple solution to this problem is presented in this paper, which allows the use of Kabe's method in the presence of this pseudo sparsity. The effects of modal base truncation, modal expansion (to generate rotational DOFs only), and additive Gaussian noise are investigated.

DIRECT STIFFNESS MATRIX UPDATE METHODS

In this section, the optimal-matrix update methods used in this paper will be briefly reviewed. The original technique proposed by Baruch and Bar Itzhack (1978) consists of finding a corrected stiffness matrix Y that obeys the equations:

$$Y\Phi = M\Phi\Lambda \quad (1)$$

$$Y = Y^T \quad (2)$$

where Φ is the experimental modal matrix, Λ is the experimental eigenvalue matrix (whose diagonal elements are the natural frequencies squared), and M is the theoretical mass matrix, supposed undisturbed. To find a solution, it is supposed that the solution minimizes the weighted Euclidean norm $\|M^{-1/2}(Y-K)M^{-1/2}\|$. Lagrange multipliers are used to enforce the constraint equations expressed by Eqs. (1) and (2). The solution that minimizes the augmented objective function is:

$$Y = K + K\Phi\Phi^T M - M\Phi\Phi^T K + \\ + M\Phi\Phi^T K\Phi\Phi^T M + M\Phi\Lambda\Phi^T M \quad (3)$$

where K is the original stiffness matrix. In this method, the mode shapes are previously orthonormalized with respect to the analytical mass matrix using the formulation originally proposed by Targoff (1976) and developed later by Baruch and Bar Itzhack (1978). The updated model (Y, M) reproduces exactly the

experimental natural frequencies and mode shapes, but it is not necessarily an improvement of the original model (K, M). The major shortcoming of this method is that the corrected stiffness matrix, Y , does not preserve the original connectivity of the structural model, i. e., the original stiffness matrix sparsity, thus creating spurious load paths.

Kabe (1985) proposed a method which preserves the original stiffness matrix sparsity and avoids unrealistically large variations of the stiffness coefficient values. The sparsity is imposed by expressing the updated stiffness matrix as:

$$Y = K \otimes \gamma \quad (4)$$

where γ is a correction coefficient matrix and the operator $\otimes$ denotes the element-by-element matrix product, given by:

$$Y_{ij} = K_{ij} \gamma_{ij} \quad (5)$$

Therefore, if K has a zero element, then Y will have the corresponding element equal to zero too. The error function proposed by Kabe is given by:

$$\epsilon = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\frac{Y_{ij} - K_{ij}}{K_{ij}} \right]^2; \quad K_{ij} \neq 0 \quad (6)$$

where n is the number of DOFs. The error function is augmented using Lagrange multipliers to incorporate the constraints given by Eqs. (7) and (8).

$$-M\Phi\Lambda + (K \otimes \gamma)\Phi = 0 \quad (7)$$

$$\gamma - \gamma^T = 0 \quad (8)$$

The updated matrix may be shown to be (Kabe, 1985):

$$Y = K \otimes \gamma = K - \frac{1}{4} \Theta \otimes (\lambda \Phi^T + \Phi \lambda^T) \quad (9)$$

with

$$\Theta = K \otimes K \quad (10)$$

where λ is a matrix of Lagrange multipliers. To obtain the elements of matrix λ , a large indefinite linear system of equations (auxiliary problem) must be solved. Kabe solves this auxiliary problem by solving an equivalent eigenvalue problem. The difficulty with the implementation of Kabe's method comes from the dimension of the symmetric indefinite system (or the equivalent eigenvalue problem) to be solved, which is equal to the product of the number of DOFs by the number of measured modes used in the update process.

As pointed out by many authors (see, for instance, Fuh and Berman, 1986), the considerable computational cost and the large amount of memory necessary to apply the method preclude its application in the case of large structures.

Smith and Hendricks (1987) have expressly shown that Kabe's method fails when the original stiffness matrix has zeroes that are not due to the absence of connectivity ("accidental" zeros), but, instead, to the force cancellation between adjacent finite elements. The method fails because it imposes that the stiffness matrix elements that were originally zero will remain zero, what may no longer be true in the presence of a fault. To overcome this pseudo-sparsity problem, a simple solution is now presented.

The pseudo-sparsity matrix is defined as a matrix whose elements are zero, except for the elements corresponding to the elements of K that are zero due to force cancellation, which are made equal to one. This matrix is easy to build when assembling the original stiffness matrix using the FE method. The numerical example in the next section illustrates the construction of the pseudo-sparsity matrix.

The simple modification of Kabe's method which overcomes the difficulty with the force cancellation consists of adding the pseudo-sparsity matrix properly scaled to the original stiffness matrix K . This is equivalent to changing Eq.(10) such that:

$$\Theta = K \otimes K + \alpha P \quad (11)$$

where P is the pseudo-sparsity matrix. The scaling is necessary to properly weight, in the objective function, the stiffness matrix coefficients that are originally zero. In this paper, α was taken as the maximum absolute value among the elements of matrix $K \otimes K$. With this simple modification, it was possible to make Kabe's method work in the presence of pseudo sparsity, as it is the case in the numerical example treated in the next section.

In the iterative sparsity preservation method proposed by Smith (1993), sparsity is enforced by an element-by-element matrix product by a matrix S , which consists of ones and zeros:

$$\begin{cases} S_{ij} = 1 & \text{if } K_{ij} \neq 0 \\ S_{ij} = 0 & \text{if } K_{ij} = 0 \end{cases} \quad (12)$$

In Eq. (3), the original stiffness matrix K is replaced by Y_s given by:

$$Y_s = Y \otimes S \quad (13)$$

and Y is recalculated. The process is repeated until convergence. Our experience with this method have

shown that the Euclidean norm $\|Y_s\Phi - M\Phi\Lambda\|$ stabilizes after a certain number of iterations and, hence, can not be made arbitrarily small. In this paper, we have used the variation of the above-mentioned norm between consecutive iteration steps in the convergence test.

As the above-mentioned norm does not vanish, the method does not actually enforce the spectral equation constraint when Y_s of the last iteration is taken as the updated stiffness matrix (as proposed by Smith). For this reason, we have chosen to take Y obtained in the last iteration step as the updated matrix (prior to the multiplication by S). The matrix Y thus obtained obeys the spectral equation. Furthermore, the elements that should be zero due to sparsity are minimized.

It should be noted that Smith's iterative method may also benefit from the addition of the pseudo-sparsity matrix P to matrix S in Eq. (13).

Finally, a simple and flexible formulation originally proposed by the authors (Arruda and Verçosa, 1994) and later modified to treat the pseudo-sparsity problem (Arruda and Verçosa, 1995), will be briefly reviewed. It's approach is similar to the force balance method, proposed by Fissette et al. (1988), in the sense that the spectral equation is the basis of the method. However, its implementation is completely different, as the stiffness coefficients are estimated directly by rearranging the equations, instead of using element or macro-element stiffness matrix scaling coefficients.

The updated stiffness matrix, Y , may be expressed as sum of the original stiffness matrix, K , and an additive correction matrix, $(-R)$, as:

$$Y = K - R \quad (14)$$

If the analytical natural frequencies and mode shapes are replaced by the experimental natural frequencies and mode shapes in the spectral equation, it won't be exactly satisfied, i. e., there's going to be a dynamic force unbalance E expressed by:

$$K\Phi - M\Phi\Lambda = E \quad (15)$$

Substituting Eq.(14) into Eq.(15), and assuming that it is possible to find an updated stiffness matrix Y such that:

$$Y\Phi = M\Phi\Lambda \quad (16)$$

one may write:

$$R\Phi = E \quad (17)$$

Equation (17) is the equation which the additive correction matrix, $(-R)$, has to satisfy so that Y and M generate the experimentally obtained modal matrix and natural frequencies used in the update process.

As the number of measured modes, m , is usually smaller than the number of DOFs ($m < n$), there is an infinite number of matrices Y that satisfy Eq. (16). The usual way to find a solution is to minimize a norm of matrix $(-R)$ subject to the spectral equation and to the symmetry of the solution Y , as it is the case with the Baruch and Bar Itzhack (1978) method and other methods derived from it.

Instead of solving Eq.(17) directly, for instance using the pseudo inverse, the authors have proposed (Arruda and Verçosa, 1994) the rearrangement of Eq.(17) such that all the non-zero elements of the upper triangular part of matrix R are rearranged into a vector r . Correspondingly, matrix Φ is rearranged into a sparse matrix A , and matrix E is rearranged into a vector e . This rearrangement insures both symmetry and sparsity. The process is straightforward (Arruda and Verçosa, 1995) and, after the rearrangement, Eq.(17) may be written as:

$$Ar = e \quad (18)$$

The solution of Eq.(18) may be rearranged back into a matrix R , which, when subtracted from the original matrix K , yields the sought updated matrix Y . Eq.(18) allows the use of both equation weighting and parameter weighting. The number of unknowns (Nu) is the number of non-zero elements of the upper triangular part of the analytical stiffness matrix. The number of equations (Ne) is the number of the measured modes times the number of DOFs. Therefore, in order to determine the stiffness correction matrix uniquely, given the sparsity of the analytical stiffness matrix, it is necessary to use a set of modes which produce a matrix A of rank Nu . The solution of Eq.(18) using the pseudo inverse may be written as:

$$\hat{r} = A^+ e \quad (19)$$

where A^+ may be obtained by singular-value decomposition (SVD) of matrix A . It may be shown (Junkins and Kim, 1994) that the solution in Eq.(19) yields both the least-squares solution, if $Nu \leq Ne$ and $\text{rank}(A) = Nu$:

$$\hat{r}_{LS} = (A^t A)^{-1} A^t e \quad (20)$$

and the minimum-norm solution, if $Nu > Ne$ and $\text{rank}(A) = Ne$:

$$\hat{r}_{min||\hat{r}||} = A^t (A A^t)^{-1} e \quad (21)$$

The solutions given by Eqs.(20) and (21) may be weighted using arbitrary diagonal weighting matrices. They have a computational cost smaller than the SVD.

and, therefore, were preferred in the computer implementation of the method. Throughout this paper, this method will be referred to as the Spectral Equation Rearrangement (SER) method. The SER method is investigated in more detail by the authors in another paper (Arruda and Verçosa, 1995).

APPRAISAL OF METHODS USING A SIMULATED EXAMPLE

In order to investigate the capability of the different direct stiffness matrix update formulations exposed above to localize structural faults, a simple simulated test system was used. The system consists of a homogenous clamped-free beam. The beam has a square cross-section, and its physical properties are given in Table 1.

The FE model has 15 Bernoulli-Euler beam elements, as shown in Fig. 1. Only in-plane transverse vibration is investigated, and, therefore, each element has 4 DOFs - one translational and one rotational displacement per node. The "experimental" modes were computed using the original mass matrix and a modified stiffness matrix, computed with a reduced-stiffness element, which simulates the fault. The reduced stiffness was simulated by reducing the cross-section area of element number 9 to 1/4 of the original area and the moment of inertia of its cross-section to 1/16 of the original value.

The localization of the fault with each method is done by observation of two types of plots of the computed correction matrix $(-R)$: the surface mesh of the magnitude of $(-R)$ normalized so that the maximum value is one and the plot of the diagonal values of the magnitude of $(-R)$ normalized. The normalization of the diagonal elements was done separately for elements relating to translational DOFs and rotational DOFs. Figures 2a-b show these two plots for the exact correction matrix.

The numbering of the DOFs of the FE model was done sequentially, starting from the first element, at the tip of the beam; the first half correspond to transverse displacements and the second half to rotations. It is clear from Figs. 2a-b that, if the model update methods are able to approximate matrix $(-R)$, these plots will clearly indicate the fault location, associated with translational DOFs 9-10 and rotational DOFs 24-25. Although it's not evident in Fig. 2a, the discrepancy between Y and K will also show up in the corresponding rotational DOFs and in their coupling terms with the displacements. This is not apparent in Fig. 2a because the stiffness coefficients associated with the rotational DOFs are small compared to those associated with displacements DOFs in this example. This is the reason why the diagonal elements corresponding to translational and rotational

displacements have been normalized separately in Fig. 2b.

The stiffness matrix of the initial model presents the pseudo-sparsity phenomenon due to the homogeneity of adjacent elements. Figures 3a-c show the sparsities of matrices K , Y , and P . Note that the sparsity of P is the difference between the sparsity of K and the true sparsity associated with the connectivity of the structure, shown in Fig. 3d. In these plots, the non-zero elements are indicated with dots. Because of the pseudo-sparsity phenomenon, the modified Kabe method described in the previous section was used in the illustrative results that follow.

In the first simulated case, the "experimental" modes are complete (all DOFs are supposed known) and exact (no added noise). Therefore, only the modal base truncation effect is investigated. Whenever it is said that m modes were used, the first m lowest natural frequencies and the corresponding m mode shapes are meant. The direct stiffness update methods are referred to as: SER (Spectral Equation Rearrangement), BB (Baruch and Bar Itzhack), KMA (Kabe Stiffness Matrix Adjustment with pseudo-sparsity modification), and SI (Smith Iterative).

In this "exact" case, any number of modes is sufficient to localize the fault with any of the methods. However, in order to predict the correct stiffness matrix exactly, 4 modes are necessary when using the SER and the KMA methods. The BB and SI methods adjust the stiffness matrix so that the "measured" natural frequencies and mode shapes are reproduced, but they do not predict the correct stiffness matrix when the modal base is incomplete. Figures 4a-h show the results obtained using 4 modes. Compared to the BB and SI methods, the SER and KMA methods have, therefore, the advantage of yielding the exact updated stiffness matrix. However, as will be shown in what follows, the more realistic simulations including modal expansion and additive noise led to different conclusions.

Initially, the mode shapes were still complete, but additive noise was added to the natural frequencies and mode shapes. In the following cases, 1% Gaussian noise was added to the "experimental" natural frequencies and 2% to the mode shapes. Figures 5a-h show the results obtained using 4 modes. It may be seen that, using the BB and SI methods, the mesh is more complex than in the noise-free case, but it is still possible to localize the fault using the plot of the diagonal. It can be observed that the diagonal coefficients relating to translational DOFs are less sensitive to the additive noise. The SI method improves the result of the BB method in terms of fault localization capability. Both the KMA and the SER methods failed in the presence of noise. Not only the stiffness coefficients were not approximated, but even

the localization capability was lost, as illustrated in Figs. 5e-h.

To conclude, a more realistic case is presented, where only the translational displacements (15 DOFs) of the first 4 modes were "measured". The simulated modes were corrupted with additive Gaussian noise (same levels as before) and then expanded, using the method proposed by Kidder (1973), to generate the rotational DOFs. Again, the SER and KMA methods failed, in the sense that it was not possible to localize the fault from the plots, as illustrated in Figs. 6e-h. Figures 6a-d show the results obtained with the BB and the SI methods. It is clear that the localization is still possible by observing the plots of the diagonal of the stiffness correction matrix. It can be observed that, when using the BB method, only the diagonal coefficients relating to translational DOFs indicate the fault.

The computational costs of the methods investigated in this paper using the "exact" data, expressed in terms of millions of floating-point operations (MFlops), were approximately: SER - 0.08 MFlops; KMA - 35 MFlops; SI - 190 MFlops (with 0.1% tolerance); BB - 0.5 MFlops. The computational costs were similar in the "noisy" cases, except for the SI method, where convergence was achieved with a much smaller number of iterations in the presence of noise, decreasing the computational cost to approximately 39 MFlops.

It was observed that results obtained with the KMA method and with the proposed SER method were similar in the "exact" case. However, the SER method has the advantage of being computationally more efficient. The lower computational cost of the SER method is due to the significant sparsity of matrix A . It must be mentioned that Kabe's method was implemented as originally proposed by the author (Kabe, 1985), i.e., solving an auxiliary eigenvalue problem.

CONCLUSIONS

Some of the most commonly used direct stiffness model update methods were briefly reviewed. The capability of the methods to localize structural faults was investigated using a numerical simulation example consisting of a clamped-free beam. In order to be able to use Kabe's method in this example, a modification of the method (reported in the literature) due to the pseudo sparsity caused by force cancellation between similar adjacent finite elements. The Spectral Equation Rearrangement (SER) method, recently proposed by the authors, was also investigated.

The results for the "exact" simulation cases, where no noise was added and no expansion made, lead to the conclusion that the SER method and the Kabe Stiffness Matrix Adjustment (KMA) method have the advantage

of, besides localizing the fault, yielding the exact updated stiffness matrix. Results obtained with the SER method were similar to those obtained with the KMA method. The SER method has the advantages of a lower computational cost and the possibility of using arbitrary weighting matrices.

However, more realistic simulations, including modal expansion and additive noise, led to different conclusions. In the presence of noise and incompleteness, only the method of Baruch and Bar Itzhack and Smith's method were able to indicate the fault location. Neither the SER method results nor the KMA method results (which were not similar in the presence of noise) indicated clearly the fault location.

It is hoped that laser-based vibration measurements will partly solve the problem of incompleteness of the data, although the problems of modal base truncation and measurement noise will remain. This encourages further research on optimal-matrix update methods for fault localization applications. The authors are pursuing the investigation of the SER method, which, due to its flexibility, may be easily modified to incorporate strategies to improve its robustness with respect to measurement noise. The lower computational cost of the SER method is also an important feature for large structures applications.

REFERENCES

- Arruda, J. R. F., 1992, "Surface Smoothing and Partial Spatial Derivatives Computation Using a Regressive Discrete Fourier Series," *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 6, No. 1, pp. 41-50.
- Arruda, J. R. F. and Verçosa, C. A. M., 1994, "Fault Detection Methods Using Direct Stiffness Matrix Correction Formulations For Use With Laser Data," *Proceedings, SPIE 1st International Conference on Vibration Measurements by Laser Techniques: Advances and Applications*, E.P. Tomasini, ed., Ancona, Italy, Vol. 2358, pp. 60-67.
- Arruda, J. R. F. and Verçosa, C. A. M., 1995, "A Weighted Rearranged Spectral Equation Method for Structural Model Updating," *Proceedings, ASME 15th Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise/Symposium on Physical Parameter Identification in Vibration Analysis*, Boston, MA (to appear).
- Baruch, M. and Bar Itzhack, I. Y., 1978, "Optimal Weighted Orthogonalization of Measured Modes," *AIAA Journal*, Vol. 16, No. 4, pp. 346-351.
- Beattie, C. A. and Smith, S. W., 1992, "Optimal Matrix Approximants in Structural Identification," *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 74, No 1, pp. 23-56.
- Fisette, E., Stravrinidis, C., and Ibrahim, S. R., 1988, "Error Location and Updating of Analytical Dynamic Models Using a Force Balance Method,"

Proceedings, UC/SEM 6th International Modal Analysis Conference, Kissimmee, FL, pp. 1063-1070.

Fox, C. H. J., 1992, "The Location of Defects in Structures: A Comparison of The Use of Natural Frequency and Mode Shape Data," *Proceedings, UC/SEM 10th International Modal Analysis Conference*, San Diego, CA, pp. 522-528.

Fuh, J. S. and Berman, A., 1986, "Comment on 'Stiffness Matrix Adjustment Using Mode Data'," *AIAA Journal*, Vol. 24, No. 8, pp. 1405-1406.

Imregun, M. and Visser, W. J., 1991, "Review of Model Updating Techniques," *Shock & Vibration Digest*, Vol. 23, No. 1, pp. 9-20.

Junkins, J. L. and Kim, Y., 1993, *Introduction to Dynamic Control of Flexible Structures*, AIAA Education Series, Washington, DC.

Kabe, A. M., 1985, "Stiffness Matrix Adjustment Using Mode Data," *AIAA Journal*, Vol. 23, No. 9, pp. 1431-1436.

Kidder, R. L., 1973, "Reduction of Structural Frequency Equations," *AIAA Journal*, Vol. 11, No. 6, p. 892.

Kim, J. H., Jeon, H. S., and Lee, C. W., 1992, "Applications of the Modal Assurance Criteria for Detecting and Locating Structural Faults," *Proceedings, UC/SEM 10th International Modal Analysis Conference*, San Diego, CA, pp. 536-540.

Montgomery, D. E. and West, R. L., 1994, "Three-Dimensional Experimental Spatial Dynamic Response of a Reciprocating Freon Compressor," *Proceedings, SPIE 1st International Conference on Vibration Measurements by Laser Techniques: Advances and*

Applications, E.P. Tomasini, ed., Ancona, Italy, Vol. 2358, pp. 200-211.

Mottershead, J. E. and Friswell, M. I., 1993, "Model Updating in Structural Dynamics: A Survey," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 167, No. 2, pp. 347-375.

Richardson, M. R. and Mannan, M. A., 1992, "Remote Detection and Location of Structural Faults Using Modal Parameters," *Proceedings, UC/SEM 10th International Modal Analysis Conference*, San Diego, CA, pp. 502-507.

Smith, S. W. and Hendricks, S. L., 1987, "Evaluation of Two Identification Methods for Damage Detection in Large Space Trusses," *Proceedings, 6th VPI&SU/AIAA Symposium on Dynamic and Controls for Large Structures*, L. Meirovitch, ed., Blacksburg, VA, pp. 127-142.

Smith, S. W., 1993, "Application Strategies for Structure Identification With Optimal-Matrix Updates," *Proceedings, UC/SEM 11th International Modal Analysis Conference*, Kissimmee, FL, pp. 1274-1280.

Targoff, W. P., 1976, "Orthogonality Check and Correction of Measured Modes," *AIAA Journal*, Vol. 14, No. 2, pp. 164-167.

Wolff, T. and Richardson, M., 1989, "Fault Detection in Structures From Changes in Their Modal Parameters," *Proceedings, UC/SEM 7th International Modal Analysis Conference*, Las Vegas, NV, pp. 87-94.

Zhang, Q. and Lallement, G., 1987, "Dominant Error Localization in a Finite Element Model of a Mechanical Structure," *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 1, No. 2, pp. 141-149.

TABLE 1 PHYSICAL PROPERTIES OF THE CLAMPED-FREE BEAM EXAMPLE

Young's Modulus	$2.07 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$
density	$7.8 \times 10^3 \text{ Kg/m}^3$
cross section area	$1.0 \times 10^{-4} \text{ m}^2$
cross section moment of inertia	$8.33 \times 10^{-10} \text{ m}^4$
length	0.3 m

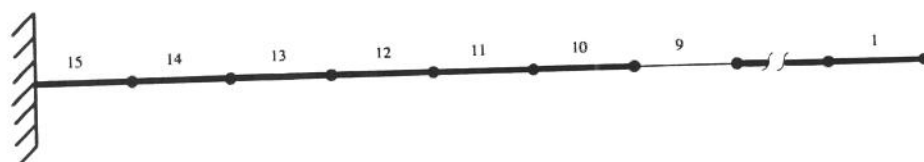


FIG. 1 FINITE ELEMENT MESH OF THE CLAMPED-FREE BEAM EXAMPLE INDICATING THE FLAWED ELEMENT (NO. 9).

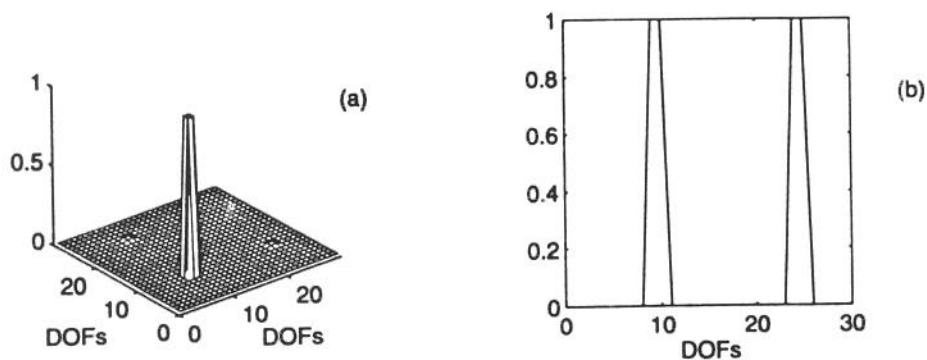


FIG. 2 NORMALIZED ABSOLUTE VALUE OF THE EXACT STIFFNESS CORRECTION MATRIX (-R). (A) SURFACE MESH; (B) PLOT OF THE DIAGONAL ELEMENTS NORMALIZED SEPARATELY FOR TRANSLATIONAL AND ROTATIONAL DOFs.

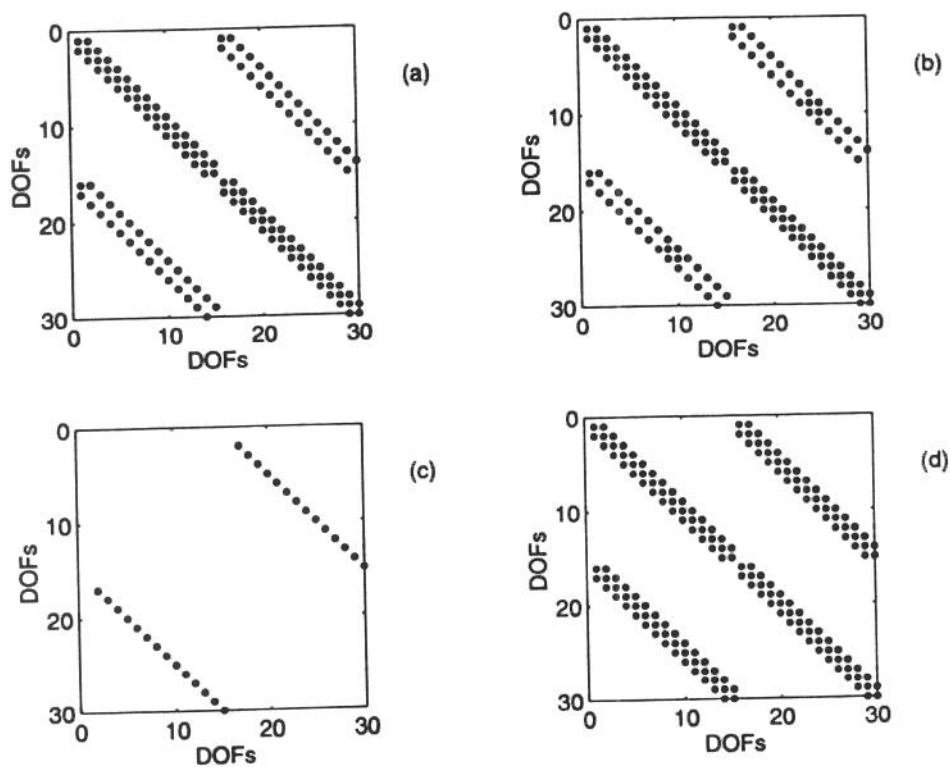


FIG. 3 SPARSITY PLOTS, WHERE THE DOTS REPRESENT NONZERO MATRIX ELEMENTS. (A) MATRIX K ; (B) MATRIX Y ; (C) MATRIX P ; (D) TRUE SPARSITY MATRIX ASSOCIATED WITH THE CONNECTIVITY.

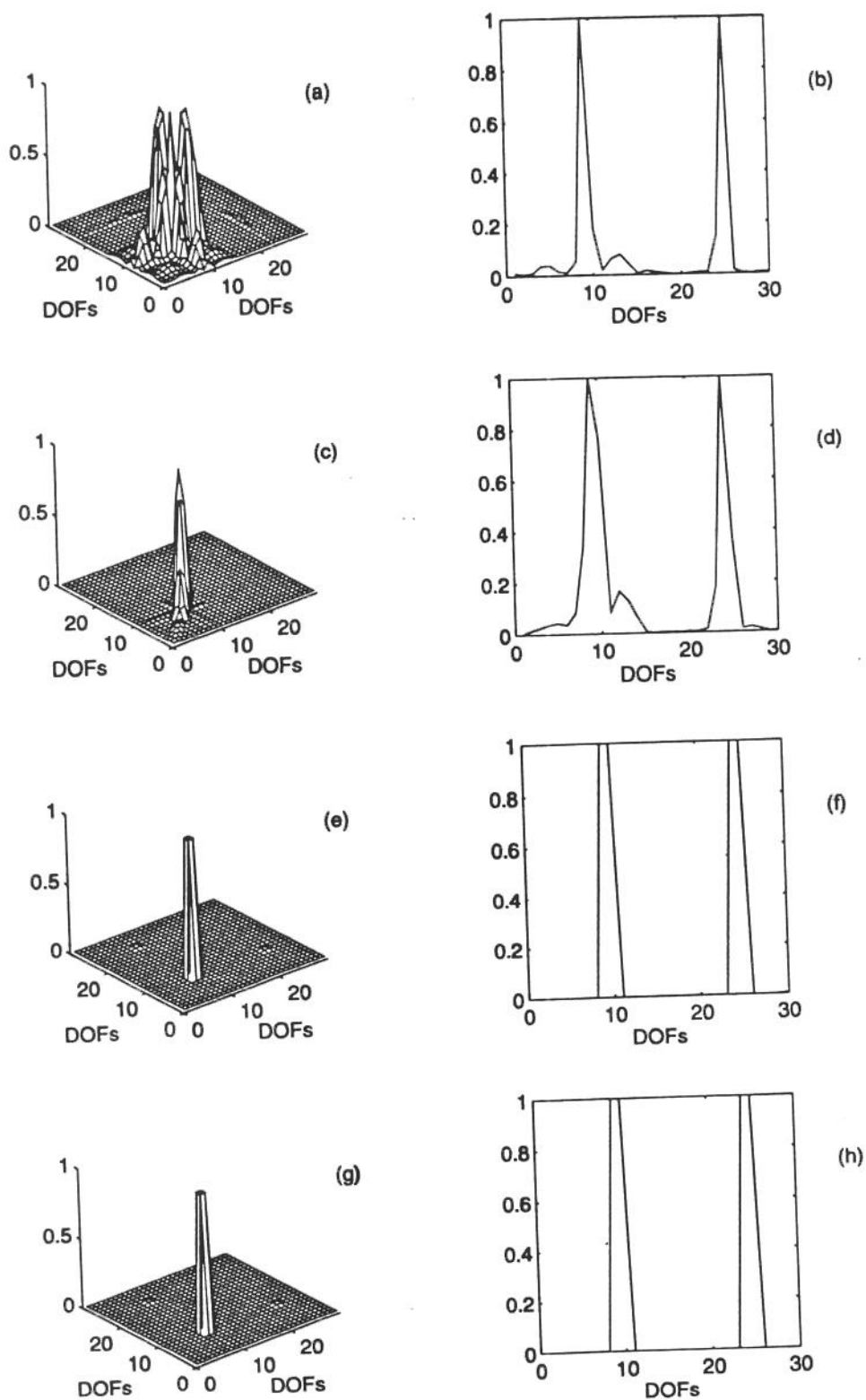


FIG. 4 ABSOLUTE VALUE OF $(-R)$, 4 MODES, "EXACT" CASE. NORMALIZED SURFACE MESH: (A) BB; (C) SI; (E) KMA; (G) SER. PLOT OF THE DIAGONAL ELEMENTS NORMALIZED SEPARATELY FOR TRANSLATIONAL AND ROTATIONAL DOFS: (B) BB; (D) SI; (F) KMA; (H) SER.

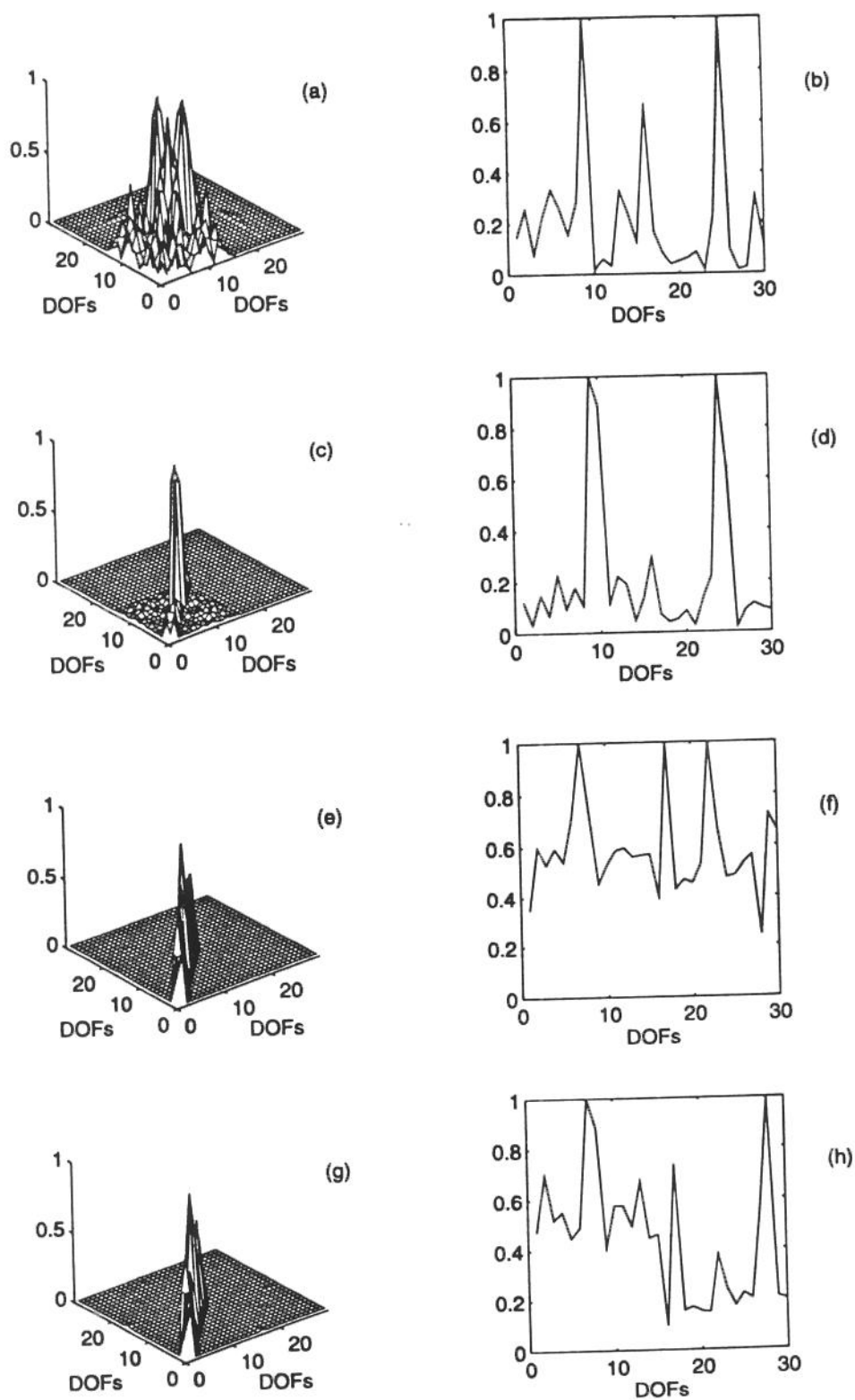


FIG. 5 ABSOLUTE VALUE OF $(-R)$, 4 MODES, GAUSSIAN NOISE ADDED, NO EXPANSION. NORMALIZED SURFACE MESH: (A) BB; (C) SI; (E) KMA; (G) SER. PLOT OF THE DIAGONAL ELEMENTS NORMALIZED SEPARATELY FOR TRANSLATIONAL AND ROTATIONAL DOFS: (B) BB; (D) SI; (F) KMA; (H) SER.

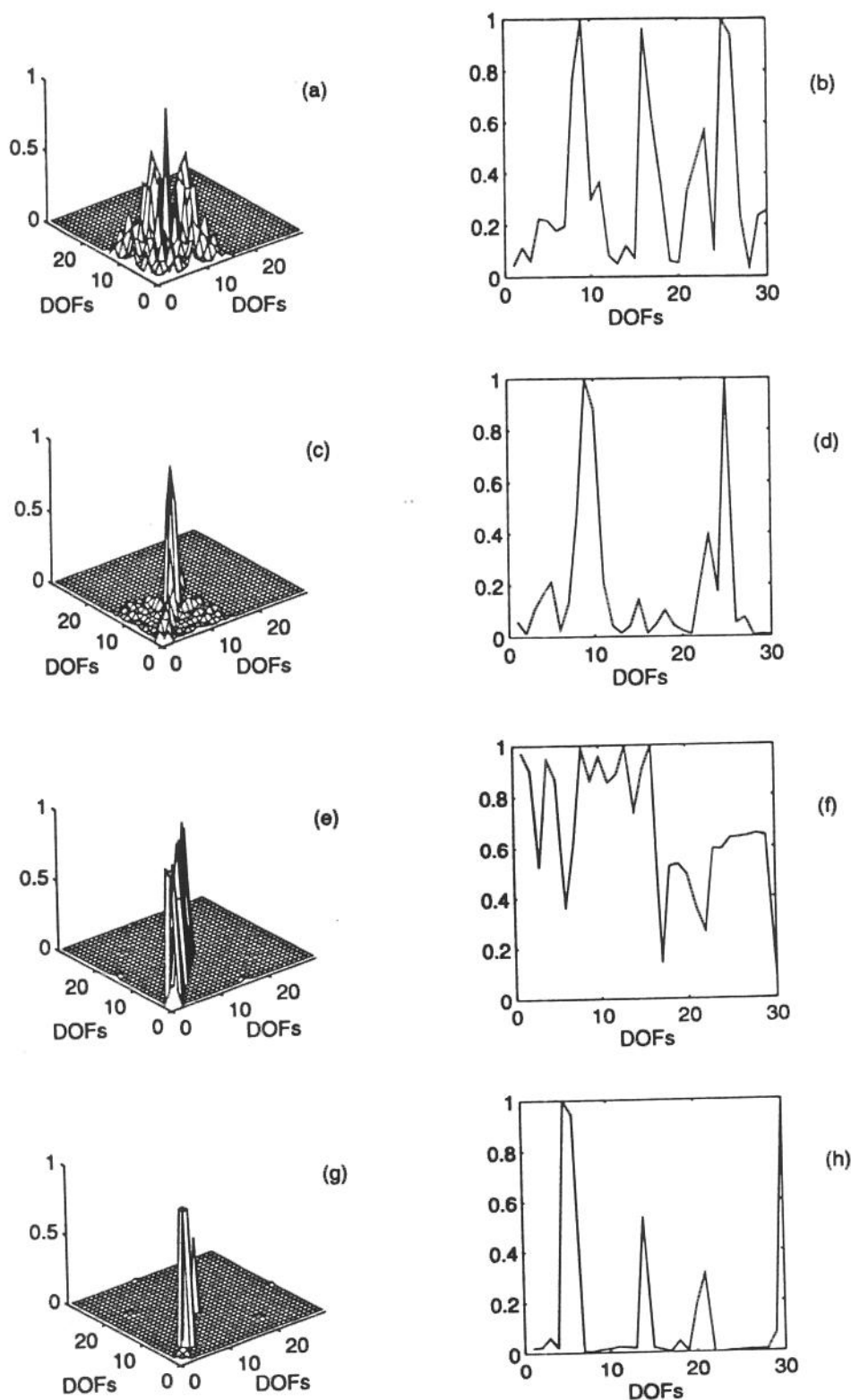


FIG. 6 ABSOLUTE VALUE OF $(-R)$, 4 MODES, GAUSSIAN NOISE ADDED, KIDDER'S EXPANSION. NORMALIZED SURFACE MESH: (A) BB; (C) SI; (E) KMA; (G) SER. PLOT OF THE DIAGONAL ELEMENTS NORMALIZED SEPARATELY FOR TRANSLATIONAL AND ROTATIONAL DOFS: (B) BB; (D) SI; (F) KMA; (H) SER.