

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

# Metodologia para Implementação do Modelo Markoviano em Análise Confiabilística de Sistemas

Autor: Celso Fabrício Moras  
Orientador: Katia Lucchesi Cavalca

01/02

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA  
TESE DEFENDIDA POR Celso Fabrício  
Moras E APROVADA PELA  
COMISSÃO JULGADORA EM 26/07/02.

Katia Lucchesi Cavalca  
ORIENTADOR

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO**

# **Metodologia para Implementação do Modelo Markoviano em Análise Confiabilística de Sistemas**

**Autor: Celso Fabrício Moras  
Orientador: Katia Lucchesi Cavalca**

Curso: Engenharia Mecânica  
Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Dissertação de mestrado acadêmico apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2002  
S.P. – Brasil

0.2249552

**UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL  
CIRCULANTE**

NIDADE BR  
° CHAMADA UNICAMP  
M796m  
EX  
OMBO BCI 51211  
ROC 16.837102  
EX  
RECIBO R\$ 11,00  
DATA 23/10/02  
P. C. O. M. D.

CM00175032-1

BIBID. 265165

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

M796m      Moras, Celso Fabrício  
Metodologia para implementação do modelo  
Markoviano em análise confiabilística de sistemas /  
Celso Fabrício Moras.--Campinas, SP: [s.n.], 2002.

Orientador: Katia Lucchesi Cavalca.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de  
Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

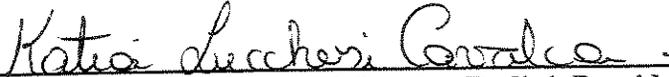
1. Confiabilidade (Engenharia). 2. Redundância  
(Engenharia). 3. Análise de sistemas. 4. Processo  
estocástico. 5. Markov, Processos de. I. Cavalca, Katia  
Lucchesi. II. Universidade Estadual de Campinas.  
Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADEMICO

# Metodologia para Implementação do Modelo Markoviano em Análise Confiabilística de Sistemas

Autor: Celso Fabrício Moras  
Orientador: Katia Lucchesi Cavalca Dedini

  
\_\_\_\_\_  
Profa. Dra. Katia Lucchesi Cavalca Dedini, Presidente  
Instituição: FEM / UNICAMP

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Auteliano Antunes dos Santos  
Instituição: FEM / UNICAMP

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. José Célio Dias  
Instituição: IEM / UNIFEI

Campinas, 26 de Julho de 2002

## **Dedicatória:**

A Deus.

Aos meus pais.

A minha querida noiva.

## **Agradecimentos**

A Deus excelso, que em muito conduz os meus passos, permitindo a conclusão de mais uma etapa em minha vida.

Aos meus pais, pelo incentivo e apoio em todos os momentos da minha vida.

A minha noiva, pela compreensão, incentivo e apoio neste período.

A minha orientadora, Profª. Dra. Katia Lucchesi Cavalca Dedini, pelo apoio, compreensão e incentivo demonstrado durante todo este período.

Ao professor Dr. Franco Giuseppe Dedini, pelas sugestões, conselhos e apoio fornecido.

A todos os professores, funcionários e colegas do Departamento de Projeto Mecânico, que me ajudaram de forma direta e indireta na conclusão deste trabalho.

A CAPES, pelo auxílio de bolsa outorgado, que fez possível o desenvolvimento da pesquisa.

*“Entrega o teu caminho ao Senhor; confia nele, e ele tudo fará.”*  
*Sl 37:5*

## Resumo

MORAS, Celso Fabrício, *Metodologia para Implementação do Modelo Markoviano em Análise Confiabilística de Sistemas*, Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2002. 117 p. Dissertação (Mestrado).

Em uma economia globalizada e competitiva, com regras modernas de segurança, leis ambientais e de responsabilidade, o avanço da tecnologia permite o desenvolvimento de equipamentos e sistemas cada vez mais complexos, capazes de satisfazer as exigências impostas e competir com os concorrentes existentes no mercado, sendo um dos parâmetros de diferença, a confiabilidade do produto ou sistema. Assim, durante o desenvolvimento do mesmo, a quantificação da confiabilidade e de parâmetros associados faz-se necessária, visto que a mesma influi no aspecto da vida de um produto ou sistema. Contudo, na maioria das vezes, a obtenção do seu valor é aproximado, adotando-se critérios de independência de componentes, ou a não inclusão de dados relacionados com manutenção. Visando a obtenção de valores de confiabilidade, considerando os dados mencionados, foi desenvolvida uma metodologia que, utilizando como base a teoria de Processos Estocásticos Markovianos, utiliza diretamente os conceitos de taxa de falha e de reparo, permitindo a inclusão da Curva da Banheira, e das dependências e dos dados de manutenção do produto ou sistema. Assim, a partir dos mesmos, obtém-se um sistema de equações diferenciais que, pela sua resolução, fornece um valor mais realista da confiabilidade e dos parâmetros associados, a disponibilidade e o MTTF do produto ou sistema analisado.

### *Palavras Chave*

Confiabilidade, Análise de Sistemas, Modelos Markovianos, Sistemas Reparáveis.

## **Abstract**

MORAS, Celso Fabrício, *Methodology for Implementation of Markovian Model in Systems Reliability Analysis*, Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2002. 117 p. Dissertação (Mestrado).

In the globalized and competitive economy, with modern security rules, environment and responsibility laws, the advance of technology allows the development of equipments and systems more and more complex. They have to be able to satisfy imposed requirements and to compete with existing market competitor. One of the market differentials is the product or system reliability. In the course of the product development, the reliability evaluation and its associated measures is required, because of its influence on the product or system life. However, most of times, the reliability evaluation is approximated, using the rule of independency of the components, or not considering the maintenance data. To allow the reliability evaluation considering the criterions mentioned, a methodology based on the theory of Markovian stochastic process was developed. It makes use of the concepts of failure and repair rates, including the bathtub curves, and the dependencies and the maintenance data of the components of the product or system. Considering the previous statements, a system of ordinary differential equations is obtained, and its solution provides a more realistic value of the reliability and associated measures, the availability and MTTF of the product or systems in analysis.

### *Key Words*

Reliability, Systems Analysis, Markov Models, Repairable Systems.

# Índice

<b>Lista de Figuras</b> .....	<b>iv</b>
<b>Lista de Tabelas</b> .....	<b>vi</b>
<b>Nomenclatura</b> .....	<b>viii</b>
<b>1 – Introdução</b> .....	<b>1</b>
1.1 – Objetivos do Trabalho .....	3
1.2 – Descrição do Conteúdo da Dissertação .....	4
<b>2 – Revisão da Literatura</b> .....	<b>7</b>
2.1 – A Confiabilidade no Período de 1930 até 1950 .....	9
2.2 – A Confiabilidade no Período de 1950 até 1980 .....	10
2.3 – A Confiabilidade no Período de 1980 até os dias atuais .....	12
<b>3 – Conceitos Básicos</b> .....	<b>15</b>
3.1 – Conceitos Básicos sobre Probabilidade .....	17
3.2 – Conceitos Básicos sobre Variáveis Aleatórias .....	21
3.2.1 – Variáveis Aleatórias Discretas .....	22
3.2.2 – Variáveis Aleatórias Contínuas .....	22
3.3 – Principais Funções Utilizadas em Confiabilidade .....	23
3.3.1 – Relações entre as Funções de Confiabilidade .....	25
3.3.2 – Modelamento Matemático do Tempo Médio entre Falha .....	27
3.3.3 – Análise da Função Taxa de Falhas $\lambda(t)$ .....	28
3.4 – Principais Distribuições Utilizadas em Confiabilidade .....	29

3.4.1 – Distribuição Exponencial .....	31
3.4.2 – Distribuição de Poisson .....	32
3.4.3 – Distribuição Normal .....	33
3.4.4 – Distribuição de Weibull .....	34
3.5 – Estruturas em Confiabilidade .....	35
3.5.1 – Estrutura em Série .....	35
3.5.2 – Estrutura em Paralelo .....	36
3.5.3 – Estrutura em R-em-N .....	37
3.5.4 – Estrutura em StandBy .....	38
3.6 – Análise de Estruturas em Confiabilidade .....	39
3.6.1 – Método da Matriz de Conexão .....	41
<b>4 – Modelagem Teórica por Processo Estocásticos .....</b>	<b>45</b>
4.1 – Conceitos Básicos sobre a Teoria de Processos Estocásticos .....	47
4.2 – Divisões da Teoria de Processos Estocásticos .....	50
4.3 – Processo Markoviano Aplicado em Confiabilidade .....	51
4.4 – Modelagem de um Sistema Simples – Série, Paralelo e R-em-N .....	57
4.5 – Implementação da Dinâmica de um Sistema .....	59
4.5.1 – Implementação de Dependências Devido a Falha de Componentes .....	60
4.5.2 – Implementação da Influência de Equipes e Política de Manutenção .....	61
4.6 – Métodos de Resolução de Sistemas O.D.E. ....	65
4.6.1 – Método de Uniformização .....	67
4.7 – Modelagem de um Sistema Simples – StandBy .....	71
4.7.1 – Com Reparo Primário .....	72
4.7.2 – Com Falha de Backup .....	73
4.7.3 – Com Falha de Chaveamento .....	74
4.8 – Modelagem de um Sistema Complexo .....	75
<b>5 – Descrição da Metodologia e do Programa Computacional .....</b>	<b>79</b>
5.1 – Descrição da Metodologia Desenvolvida .....	79
5.2 – Descrição do Programa Desenvolvido Através da Metodologia .....	84

<b>6 – Análise de Exemplos .....</b>	<b>93</b>
6.1 – Análise Confiabilística de um Sistema Complexo com Conexões Série e Paralelo .....	93
6.2 – Análise Confiabilística de um Sistema Complexo com Conexões R-em-N e Standby .....	97
6.3 – Análise Confiabilística de um Sistema Complexo de Bombeamento .....	101
<b>7 – Conclusões e Sugestões para Próximos Trabalhos .....</b>	<b>107</b>
7.1 – Quanto aos Objetivos .....	107
7.2 – Quanto as Sugestões para Próximos Trabalhos .....	109
<b>Referências Bibliográficas .....</b>	<b>111</b>

## Lista de Figuras

Figura 3.1	Função Densidade e Função Distribuição Acumulada para Caso Discreto. ....	22
Figura 3.2	Função Densidade e Função Distribuição Acumulada para Caso Contínuo. ....	23
Figura 3.3	Curva da Banheira para Componentes Eletrônicos. ....	29
Figura 3.4	Curva da Banheira para Componentes Mecânicos. ....	29
Figura 3.5	Diagrama Representativo de uma Estrutura em Série com Três Componentes. .	36
Figura 3.6	Diagrama Representativo de uma Estrutura em Paralelo com Dois Componentes. ....	37
Figura 3.7	Diagrama Representativo de uma Estrutura em R-em-N com $n$ Componentes. .	38
Figura 3.8	Diagrama Representativo de uma Estrutura em Standby com Dois Componentes. ....	38
Figura 3.9	Diagrama de um Sistema para Ilustração do Método da Matriz de Conexão. ....	41
Figura 4.1	Diagrama dos Estados do Sistema por Falha dos Componentes. ....	60
Figura 4.2	Diagrama dos Estados do Sistema Adotando Interação de Componentes. ....	61
Figura 4.3	Diagrama dos Estados do Sistema por Falha e Reparo dos Componentes. ....	62
Figura 4.4	Diagrama dos Estados do Sistema para o Caso 1. ....	62
Figura 4.5	Diagrama dos Estados do Sistema para o Caso 2. ....	63
Figura 4.6	Diagrama dos Estados do Sistema para o Caso 3. ....	64
Figura 4.7	Diagrama dos Estados de um Sistema Ideal em Standby. ....	71
Figura 4.8	Diagrama dos Estados do Sistema em Standby com Reparo Primário para o Cálculo de Confiabilidade. ....	73
Figura 4.9	Diagrama dos Estados do Sistema em Standby com Reparo Primário para o Cálculo de Disponibilidade. ....	73
Figura 4.10	Diagrama dos Estados do Sistema em Standby com Falha de Backup para o Cálculo de Confiabilidade. ....	74

Figura 4.11	Diagrama dos Estados do Sistema em Standby com Falha de Chaveamento para o Cálculo de Confiabilidade. ....	75
Figura 4.12	Sistema Complexo para Ilustração do Método Descrito. ....	77
Figura 5.1	Configuração Geral do Programa Computacional "PACSM". ....	80
Figura 5.2	Descrição das Etapas Constituintes do Item 1: Entrada de Dados. ....	81
Figura 5.3	Descrição das Etapas Constituintes do Item 2: Análise do Sistema. ....	82
Figura 5.4	Descrição das Etapas Constituintes do Item 3: Montagem e Resolução do Sistema de Equações Diferenciais. ....	83
Figura 5.5	Descrição das Etapas Constituintes do Item 4: Visualização dos Resultados. ....	84
Figura 5.6	Tela Inicial do Programa Desenvolvido Utilizando a Metodologia Descrita. ....	85
Figura 5.7	Tipos de Sistemas Analisados pelo Programa com Opção do Tipo de Taxa. ....	85
Figura 5.8	Dados de um Sistema Simples com Taxa Constante. ....	86
Figura 5.9	Dados de um Sistema Simples com Taxa Variável. ....	86
Figura 5.10	Dados de um Sistema Complexo. ....	88
Figura 5.11	Descrição de um Sistema Simples Constituinte de um Sistema Complexo. ....	88
Figura 5.12	Dados de Análise Temporal e Erro. ....	89
Figura 5.13	Dados de Compartilhamento de Carga e de Reparo. ....	89
Figura 5.14	Tela de Visualização dos Dados, Análise de Sensibilidade e Cálculos. ....	90
Figura 5.15	Tela de Visualização da Matriz $\rho$ . ....	91
Figura 5.16	Tela de Visualização do Gráfico e Cálculo do MTTF. ....	92
Figura 6.1	Visualização do Sistema Complexo Analisado por Mojena (1999) e Tillman (1970). ....	94
Figura 6.2	Diagrama de Análise do Sistema Complexo da Figura 6.1. ....	94
Figura 6.3	Visualização do Sistema Complexo Proposto por Billinton (1983). ....	98
Figura 6.4	Diagrama de Análise do Sistema Complexo da Figura 6.3. ....	98
Figura 6.5	Visualização da Primeira Configuração do Sistema de Bombeamento. ....	101
Figura 6.6	Visualização da Segunda Configuração do Sistema de Bombeamento. ....	102

.....

## Lista de Tabelas

Tabela 3.1	Relações entre as Funções de Confiabilidade. ....	27
Tabela 3.2	Principais Distribuições Estatísticas e suas Aplicações. ....	31
Tabela 3.3	Principais Definições dos Componentes de um Diagrama de Blocos. ....	35
Tabela 3.4	Descrição dos Principais Procedimentos de Análise de Estruturas. ....	41
Tabela 4.1	Descrição dos Principais Processos Estocásticos Utilizados em Análise de Confiabilidade. ....	51
Tabela 4.2	Tabela Contendo os Estados de um Sistema. ....	52
Tabela 4.3	Comportamento do Processo Estocástico. ....	54
Tabela 4.4	Descrição dos Estados de um Sistema Simples em Paralelo com 2 Componentes. ....	59
Tabela 4.5	Descrição dos Principais Métodos de Resolução de Sistemas de Equações Diferenciais de Primeira Ordem. ....	67
Tabela 4.6	Tabela dos Estados do Sistema Complexo da Figura 4.12. ....	78
Tabela 4.7	Tabela dos Estados Operacionais do Sistema Complexo da Figura 4.12. ....	78
Tabela 6.1	Dados dos Componentes do Sistema Complexo da Figura 6.1. ....	95
Tabela 6.2	Taxas de Falha dos Componentes do Sistema Complexo da Figura 6.1. ....	95
Tabela 6.3	Condições de Compartilhamento de Carga Adotadas. ....	96
Tabela 6.4	Valores de Confiabilidade e Disponibilidade Obtidos. ....	96
Tabela 6.5	Dados do Sistema Complexo da Figura 6.3 Conforme Billinton (1983). ....	97
Tabela 6.6	Taxas de Reparo dos Componentes do Sistema Complexo da Figura 6.3. ....	99
Tabela 6.7	Condições do Sistema A em Standby. ....	99
Tabela 6.8	Condições de Compartilhamento de Carga Adotadas. ....	99
Tabela 6.9	Valores de Confiabilidade e Disponibilidade Obtidos. ....	100
Tabela 6.10	Taxas Constantes dos Componentes do Sistema de Bombeamento. ....	102

Tabela 6.11	Parâmetros da Distribuição de Weibull para Taxas de Falhas nos Intervalos de Tempo Considerados. ....	103
Tabela 6.12	Parâmetros da Distribuição de Weibull para Taxas de Reparo nos Intervalos de Tempo Considerados. ....	103
Tabela 6.13	Condições de Compartilhamento de Carga Adotadas. ....	103
Tabela 6.14	Valores de Confiabilidade e Disponibilidade Obtidos para o Caso 1. ....	104
Tabela 6.15	Valores de Confiabilidade e Disponibilidade Obtidos para o Caso 2. ....	104
Tabela 6.16	Valores de MTTF Obtidos para as Duas Configurações Adotadas. ....	105

.....

## Nomenclatura

### *Letras Latinas*

- $A$  – Evento.
- $A$  – Componente.
- $A(t)$  – Função Disponibilidade.
- $B$  – Evento.
- $B$  – Componente.
- $c$  – Constante de Integração.
- $e$  – Constante de Euler.
- $f$  – Número de Falhas.
- $f(x)$  – Função Densidade de Probabilidade.
- $f(t)$  – Função Densidade de Falha.
- $F(x)$  – Função Distribuição Acumulada.
- $F(t)$  – Função Densidade de Falha Acumulada.
- $h$  – Incremento de Tempo.
- $I$  – Matriz Identidade.
- $M$  – Matriz Utilizada no Método de Matriz de Conexão. Matriz Modal.
- $n$  – Número de Triagens, Número de Eventos ou Número de Equações.
- $n$  – Número Total de Componentes de um Sistema.
- $N$  – Número Total de Componentes de um Sistema.
- $N$  – Número de Termos de uma Série.
- $N_A$  – Número de Ocorrência do Evento A em  $n$  Triagens.
- $N(t)$  – Variável Aleatória que Representa o Número de Falhas de Componentes do Sistema após um Tempo  $t$ .

- $N_f(t)$  – Número de Componentes que Falharam no Tempo  $t$ .  
 $N_o$  – Número de Componentes Postos Inicialmente em Prova.  
 $N_s(t)$  – Número de Componentes que Sobreviveram no Tempo  $t$ .  
 $O$  – Conjunto de Estados Funcionais do Sistema.  
 $o(\Delta t)$  – Função Zero.  
 $p(A)$  – Frequência Relativa do Evento  $A$ .  
 $p$  – Probabilidade de Sucesso.  
 $P_{ch}$  – Probabilidade de Sucesso no Chaveamento.  
 $P_{ij}$  – Probabilidade de Transição do Estado de  $S_i$  para  $S_j$ , num Intervalo de Tempo  $\Delta t$ .  
 $P(A)$  – Probabilidade de Ocorrência de um Evento  $A$ .  
 $P_i(t)$  – Probabilidade de Encontrar o Sistema no Estado  $S_i$  no Tempo  $t$ .  
 $P_i'(t)$  – Derivada da Probabilidade de Encontrar o Sistema no Estado  $S_i$  no Tempo  $t$ .  
 $P_x(t)$  – Probabilidade de um Evento ocorrer exatamente  $x$  vezes, no Intervalo  $(0,t)$ .  
 $P$  – Matriz Estocástica.  
 $P^n$  – Matriz Estocástica Multiplicada  $n$  vezes por si mesma.  
 $P(t)$  – Vetor das Probabilidades  $P_i(t)$ .  
 $P(0)$  – Vetor de Condições Iniciais do Modelo.  
 $P'(t)$  – Vetor de Derivadas das Probabilidades  $P_i(t)$ .  
 $q$  – Probabilidade de Falha.  
 $Q$  – Probabilidade de Falha.  
 $Q(t)$  – Função Distribuição de Falhas.  
 $Q$  – Matriz dos Coeficientes do Sistema de Equações Diferenciais ou Matriz Geradora.  
 $R$  – Probabilidade de Sucesso.  
 $R_{ch}$  – Confiabilidade da Conexão ou da Chave.  
 $R(t)$  – Função Distribuição dos Sobreviventes ou de Sucesso.  
 $R$  – Número Mínimo de Componentes em Funcionamento do Sistema.  
 $s$  – Número de Sucessos.  
 $S$  – Conjunto Universal ou Espaço Amostral.  
 $S_N$  – Espaço de Estado da Variável Aleatória  $N(t)$ .  
 $t$  – Variável Tempo.

- $T$  – Conjunto de Parâmetro do Tempo.
- $U_o$  – Unidade Operacional.
- $U_r$  – Unidade em Espera.
- $x$  – Número de Ocorrências de um Evento.
- $x$  – Valores da Variável Aleatória  $X$ .
- $x_i$  – Variável que Representa o Sucesso de um Evento para a  $i$ -ésima Unidade.
- $X$  – Variável Aleatória.
- $X'$  – Processo Estocástico.
- $X(t)$  – Variável Aleatória que Representa o Estado do Sistema após um Tempo  $t$ .

.....

***Letras Gregas***

- $\alpha$  – Parâmetro de Escala.
- $\beta$  – Parâmetro de Forma ou Inclinação.
- $\varepsilon$  – Erro Admissível.
- $\phi(x,t)$  – Função Distribuição de Probabilidade Condicional.
- $\Phi(x,t)$  – Função de Distribuição Condicional.
- $\lambda$  – Taxa de Falhas.
- $\lambda(t)$  – Função Taxa de Falhas.
- $\Lambda$  – Máximo valor de  $\rho_{ij}$ .
- $\mu$  – Média.
- $\mu$  – Taxa de Reparo.
- $\rho_{ij}$  – Taxa de Mudança do Estado  $S_i$  para o Estado  $S_j$ .
- $\rho$  – Matriz das Taxas.
- $\sigma$  – Desvio Padrão.

.....

***Superescritos***

- $n$  – Número Total de Componentes de um Sistema.

.....

### ***Subscritos***

- 1, 2 ...* – Contadores.
- a* – Evento.
- a, b* – Componentes.
- co* – Caminhos Operacionais.
- d* – Dados.
- eo* – Estados Operacionais.
- f* – Falha.
- i, j, k* – Contadores.
- o* – Inicial.
- p* – Paralelo.
- s* – Sobreviventes. Série.
- sc* – Sistema Complexo.
- stb* – Standby.
- stbfb* – Standby com Falha de Backup.
- stbfc* – Standby com Falha de Chaveamento.
- stbrp* – Standby com Reparo Primário.

.....

### ***Abreviações***

- FMEA – Failure Mode and Effect Analysis.
- FMECA – Failure Modes, Effects and Criticality Analysis.
- ODE – Ordinary Differential Equations.
- MTTF – Mean Time To Failure.
- PACSM – Programa de Análise Confiabilística de Sistemas por Modelo Markoviano.

.....

### ***Siglas***

- AGREE – Grupo Conselheiro de Confiabilidade de Equipamentos Eletrônicos.

.....

## Capítulo 1

### Introdução

O desenvolvimento da teoria de confiabilidade e sua aplicação estão diretamente relacionados com o desenvolvimento e aplicação dos conceitos científicos desenvolvidos desde o século XVII até o presente momento, e com o amadurecimento do sistema econômico vigente, que desde o século XVIII desenvolve dispositivos, equipamentos e sistemas cada vez mais complexos, permitindo a evolução deste sistema até o modelo atual, baseado na globalização, tecnologia, otimização, redução de custos e produtividade.

O conteúdo científico produzido desde o século XVII permitiu a criação, num primeiro instante, conforme a Teoria das Ondas de Joseph Schumpeter, publicado na revista britânica *The Economist*, em 1999, das indústrias têxteis e da geração de energia hidráulica desenvolvendo a indústria do ferro, e num segundo instante, a utilização industrial do aço, criação das máquinas a vapor e das estradas de ferro. Neste período, compreendido entre 1785 e 1900, os produtos desenvolvidos eram robustos e duráveis, possuindo limitações no seu desenvolvimento e projeto, devido ao conhecimento e recursos da época, exigindo muita dedicação do projetista, não gerando assim a necessidade de uma teoria para a avaliação da confiabilidade. Paralelamente, houve um grande desenvolvimento da teoria da probabilidade, a base de toda a teoria de confiabilidade.

Num terceiro instante, houve o desenvolvimento de formas comerciais de geração de energia, o desenvolvimento da indústria química e aeronáutica e dos motores de combustão interna. Neste período, compreendido de 1900 a 1950, destaca-se o amadurecimento ou

nascimento de grandes indústrias como a Siemens (1847), GE (1892), FORD (1903), GM (1908), IBM (1911), BOEING (1915) ..., além das duas guerras mundiais, que impulsionaram o desenvolvimento da teoria de confiabilidade, pois era necessário equipamentos confiáveis, principalmente para o complexo industrial militar, assim como, reduzir os períodos de manutenção dos mesmos.

Após este período, houve o desenvolvimento da indústria petroquímica, da eletrônica, da utilização comercial de aviões, da produção industrial em massa e das indústrias nucleares. Neste período, compreendido de 1950 a 1990, destaca-se o desenvolvimento de dispositivos, equipamentos e sistemas cada vez mais complexos e, conforme Sotskov (1972), o problema de confiabilidade e segurança dos sistemas técnicos e de seus elementos componentes tem-se aguçado devido as seguintes causas:

- 1 – O aumento da complexidade dos sistemas técnicos modernos que incluem até  $10^6$  elementos individuais;
- 2 – A intensidade dos regimes de trabalho, de funcionamento do sistema, ou de suas partes individuais: altas temperaturas, altas pressões, altas velocidades;
- 3 – A complexidade das condições a que se expõe o sistema técnico, por exemplo: baixa ou alta temperatura, alta umidade, vibração, aceleração e radiação, etc... ;
- 4 – As exigências de qualidade de trabalho do sistema: alta precisão, efetividade, etc... ;
- 5 – O aumento da responsabilidade das funções cumpridas pelo sistema; o alto valor técnico e econômico de uma interrupção brusca devido a uma falha;
- 6 – A automatização total ou parcial e a exclusão da participação direta do homem, quando suas funções são cumpridas pelo sistema técnico, a exclusão de observação contínua e do controle por parte do homem.

Por fim, num quinto instante, houve o desenvolvimento comercial da indústria eletrônica, permitindo o desenvolvimento de redes digitais, softwares, e de novas mídias, assim como formas de armazenamento em massa. Neste período, compreendido de 1990 até os dias atuais, destaca-se o crescimento de uma economia globalizada e da competição, onde a confiabilidade passou a ser um parâmetro de decisão na aquisição de um sistema. Com o desenvolvimento da

tecnologia, surgiu o desenvolvimento de regras modernas de segurança, leis ambientais e leis de responsabilidade, o que aumenta a necessidade de produtos cada vez mais confiáveis, visto que a confiabilidade influi no aspecto da vida de um produto ou sistema.

### 1.1 – Objetivos do Trabalho

Na avaliação da confiabilidade de um sistema, muitas vezes se obtém um valor não totalmente realista, por se utilizar de simplificações teóricas comuns como:

- 1 – Desconsideração das dependências entre os componentes do sistema;
- 2 – Não utilização das taxas de falha e de reparo dos componentes;
- 3 – A exclusão de equipes de manutenção disponíveis;
- 4 – A exclusão de uma política de prioridade de manutenção dos componentes constituintes do sistema.

Para considerar os fatores acima mencionados e fazer uma avaliação mais realista da confiabilidade, faz-se necessário empregar um conjunto de métodos que permitam analisar este tipo de sistema. Assim, este trabalho tem por objetivos:

- 1 – Desenvolver uma metodologia que permita a avaliação da confiabilidade levando-se em conta, os quatro itens descritos acima;
- 2 – Elaborar um programa computacional desenvolvido em *Visual Basic 5* que, utilizando a metodologia desenvolvida, estime o valor da confiabilidade de um sistema;
- 3 – Estimar os valores de confiabilidade para estruturas simples ( tipo Série, Paralelo, R-em-N e Standby com 2 componentes ), ou complexas ( formadas da combinação de estruturas simples ), em um dado instante de tempo, ou num período de tempo;
- 4 – Permitir a avaliação de sensibilidade dos parâmetros envolvidos, considerando o tipo de estrutura escolhida;
- 5 – Permitir a utilização de taxas de falha e reparo constantes ou variáveis no tempo, sendo esta última modelada pela Distribuição de Weibull;
- 6 – Visualizar por meio gráfico os valores de confiabilidade calculados para um intervalo de tempo, e estimar o valor do MTTF do sistema.

## 1.2 – Descrição do Conteúdo da Dissertação

Este trabalho apresenta, no Capítulo 2, o processo de desenvolvimento da teoria de confiabilidade, levando-se em conta todas as subdivisões conhecidas, inicializando como o desenvolvimento teórico da teoria de probabilidade, passando pelas diferentes necessidades econômicas e tecnológicas através da história, que permitiram o desenvolvimento do seu conteúdo, originando assim, a teoria de confiabilidade empregada nos dias de hoje.

No Capítulo 3 são apresentados os conceitos básicos de confiabilidade, seu modelamento matemático e as principais distribuições estatísticas utilizadas. Além disto, por um sistema ser composto de diversas estruturas, faz-se necessário especificar quais estarão disponíveis para análise, assim como entender a análise de redução do um sistema, obtendo assim os caminhos operacionais do mesmo, permitindo o cálculo do valor percentual da confiabilidade.

Teoricamente, os valores percentuais de confiabilidade podem ser calculados por três teorias diferentes, ao longo do tempo. Assim, o Capítulo 4 introduz as três teorias básicas e, ao longo do mesmo, detalha a teoria utilizada, descrevendo as suas definições básicas, as suas divisões, até o detalhamento do Processo Markoviano utilizado na metodologia desenvolvida neste trabalho. Em seguida, mostra-se inicialmente como utilizar a metodologia para modelar três sistema simples, ilustrando a consideração da dinâmica do sistema para um sistema simples em paralelo, e os métodos de resolução do sistema de equações diferenciais resultante da modelagem, destacando-se o Método de Uniformização. Por fim, o modelamento de um sistema em standby e complexo é demonstrado, assim como a obtenção dos valores de confiabilidade e disponibilidade destes sistemas pela aplicação da metodologia e de algumas condições especiais adotadas, para o caso do sistema em standby. Entende-se assim, que todos os conceitos necessários para uma melhor compreensão e utilização da metodologia e do programa computacional foram mencionados nestes capítulos.

A metodologia desenvolvida neste trabalho é descrita no Capítulo 5, detalhando-se cada um dos componentes da mesma. Uma visão geral do programa computacional criado através da aplicação da metodologia descrita é apresentado, juntamente com uma breve explanação e apresentação das principais telas deste programa.

A análise de resultados, obtidos através da aplicação da metodologia proposta neste trabalho, com a utilização do programa computacional desenvolvido, é apresentada no Capítulo 6, onde são simulados alguns sistemas, obtendo-se os resultados da avaliação de confiabilidade, segundo o caso analisado.

Finalmente, no Capítulo 7 são apresentadas as conclusões referentes aos objetivos descritos neste capítulo, assim como sugestões para melhorar e ampliar a metodologia utilizada e futuros estudos nesta área do conhecimento.

## Capítulo 2

### Revisão da Literatura

O campo de influência da confiabilidade é vasto e sua aplicação se encontra em todas as ramificações da ciência e da engenharia. Todos os sistemas, do mais simples ao mais complexo, podem se beneficiar com a integração dos conceitos de avaliação da confiabilidade, nas fases de definição e planejamento, desenvolvimento e projeto, produção, operação e manutenção, do sistema em questão.

Num primeiro instante, a palavra confiabilidade poderia ser associada somente a um dado valor percentual, que representa a confiabilidade do produto ou sistema. Não deixa de ser verdade que a avaliação da confiabilidade fornece um valor percentual. Contudo, no momento atual, o estudo da mesma é composta, conforme o conteúdo dos livros de Doty (1989), Lewis (1996), Ramakumar (1993) e Sherwin (1993), de pelo menos 13 subdivisões:

- 1 – Teoria de probabilidade;
- 2 – Gerenciamento da confiabilidade do sistema;
- 3 – Modelos de redes e Gráficos bidirecionais;
- 4 – Métodos de análise combinatórios, Markovianos ou simulação;
- 5 – Confiabilidade no projeto: Metodologia de Taguchi, Projeto robusto, Análise de experimentos;
- 6 – Limites de confiança;
- 7 – Análise de segurança (“Safety”), FMECA e Árvores de falha;
- 8 – Responsabilidade do produto (“Product liability”);
- 9 – Análise econômica da confiabilidade;

- 10 – Testes de confiabilidade;
- 11 – Análise de dados e Distribuições estatísticas;
- 12 – Qualidade e suas medidas;
- 13 – Manutenção / “Renewal Processes”.

A teoria de confiabilidade, como se percebe pelo exposto acima, é um campo de estudo multidisciplinar, com aplicações em diversos setores, como descrito ao longo deste capítulo. O desenvolvimento da teoria e sua aplicação estão diretamente relacionados com o desenvolvimento e aplicação dos conceitos científicos desenvolvidos desde o século XVII, e com o amadurecimento do sistema econômico vigente, que desde o século XVIII desenvolve dispositivos, equipamentos e sistemas cada vez mais complexos, permitindo a evolução deste sistema até o modelo atual.

O cálculo da probabilidade surge em 1652, com o filósofo e matemático francês B. Pascal, que muito interessado em jogos de azar, cria formulas para avaliar as chances de um evento ocorrer. A teoria da Probabilidade evoluiu até que, em 1907, conforme Ramakumar (1993), o matemático russo A. A. Markov introduziu o conceito de um tipo de processo estocástico cujo comportamento probabilístico futuro pode ser determinado unicamente através do estado presente. Conceito este, muito utilizado em análise de confiabilidade por Processos Estocásticos, denominado Processo Markoviano.

No período compreendido entre os séculos XVII até o final da segunda década de XX, além do desenvolvimento da teoria da Probabilidade, houve um desenvolvimento de todas as ciências conhecidas, como nunca houve na história conhecida, permitindo o desenvolvimento de equipamentos tais como o telescópio (1610), o microscópio (1683), a máquina a vapor (1712), o torno (1797), o telégrafo (1835), o telefone (1876), o dirigível (1900), o avião (1903) e o automóvel (1908), dentre outros que, como se pode perceber, foram aumentando a complexidade dos equipamentos, ao mesmo tempo que se inicializou o uso comercial e militar destes, muitos durante a Primeira Guerra Mundial (1914-1918), impulsionando a necessidade de técnicas que permitissem a avaliação da confiabilidade, permitindo principalmente, definir uma política de manutenção dos mesmos.

Assim, toda a teoria necessária à área de confiabilidade, conforme a necessidade econômica e tecnológica da época, estava desenvolvida. Teorias mais avançadas começaram a nascer, e foram aprimoradas e utilizadas nos períodos subseqüentes, conforme descrito nos tópicos a seguir.

## 2.1 – A Confiabilidade no Período de 1930 até 1950

A partir de 1930, conforme Barlow (1984), a base matemática da teoria de confiabilidade desenvolveu-se conforme a demanda das modernas tecnologias e, particularmente, devido as experiências da Segunda Guerra Mundial (1939-1945) com sistemas militares complexos, principalmente os aviões. Conforme Cavalca (1998), até este período, tudo era qualitativo. Pode-se dizer que, até este momento, a confiabilidade estava associada com a experiência subjetiva e qualitativa dos engenheiros de projeto e aplicação, produzindo pensamentos como: dois ou três motores são melhor que um, e assim por diante. Com o aumento do número de motores aeronáuticos em 1930, a confiabilidade foi, aos poucos, sendo quantificada através da taxa média de falha e do número médio de falhas em aeroplanos e dirigíveis.

Uma das primeiras áreas na qual foi desenvolvido um modelo matemático mais elaborado, foi a área de manutenção de equipamentos. Para problemas de substituição de componentes, começou a aplicação da “Renewal Theory”, conforme os artigos de A. J. Lotka em 1939, de N. R. Campbell em 1941 e de W. Feller em 1941 e 1949, descritos no artigo de Barlow (1984). Outra área que se desenvolveu foi a determinação do tempo de vida de um material com relação a fadiga, e uma das distribuições empregadas neste caso, a distribuição dos Valores Extremos ou distribuição de Gumbel. Em 1939, W. Weibull propôs a distribuição que leva o seu nome, sendo sugerido o uso para os caso de resistência de materiais e testes de vida. Na resolução de problemas de modelagem telefônica, começou a se justificar o uso da distribuição de Poisson como a distribuição de entrada de chamadas telefônicas.

Com a expansão da indústria aeronáutica e o desencadeamento da Segunda Guerra Mundial (1939-1945), estes conceitos foram empregados e aperfeiçoados. Conforme Cavalca (1998), em 1940, as exigências para motores aeronáuticos passaram a ser descritas em termos de taxas de

acidentes (1 por milhão de horas de voo). Na Alemanha houve o desenvolvimento dos mísseis V-1 e V-2 e, conforme Sherwin (1993), o começo da história dos sistemas em série, que surgiram quando um engenheiro chamado R. Lüsser foi designado para explicar porque as versões do V-1 falhavam em atingir o seus alvos em Londres. Em sua análise, mencionou 6 fatores que deveriam ocorrer simultaneamente para se ter o sucesso desejado. Na avaliação da confiabilidade, originou-se um sistema em série.

## 2.2 – A Confiabilidade no Período de 1950 até 1980

No início da década de 1950, certas áreas da confiabilidade, especialmente os testes de vida e problemas de confiabilidade de sistemas eletrônicos e de mísseis, começaram a ter uma atenção especial por parte dos engenheiros e estatísticos no complexo industrial militar. Um dos motivos decorre da Guerra da Coréia (1950-1953), pois, conforme Cavalca (1998), a não disponibilidade de equipamentos eletrônicos durante esta guerra desencadeou o interesse militar dos Estados Unidos em confiabilidade. A relação entre os requisitos de confiabilidade, custo e manutenção, tornaram-se extremamente importantes, de tal modo que os contratos militares começaram a conter cláusulas envolvendo bônus ou penalidade associados ao grau de confiabilidade verificado durante a série de testes.

Conforme Barlow (1984), em Dezembro de 1950, a Força Aérea americana formou um grupo de confiabilidade em equipamentos eletrônicos para estudar a situação da confiabilidade e recomendar medidas que iriam aumentar a confiabilidade dos equipamentos e reduzir a manutenção. Depois, em 1952, o Departamento de Defesa americano criou o AGREE – Grupo conselheiro de confiabilidade de equipamentos eletrônicos, que, em 1957, produziu seu primeiro relatório contendo limites mínimos aceitáveis, requerimentos de testes de confiabilidade e efeitos de armazenamento em confiabilidade.

O estudo para a resolução do problema da confiabilidade de mísseis continuou. Começou a ser considerada a área de intervalos de confiança, conforme descrito no artigo de A. Madansky de 1958. Na área de teste de vida, passou-se a defender o uso da distribuição Exponencial. Motivados por problemas de vibração encontrados em jatos comerciais, Z. W. Birnbaum e S. C. Saunders apresentaram um modelo de tempo de vida de estruturas sob carga dinâmica. Adotando

algumas considerações, propôs-se o uso da distribuição Gamma em certas situações, para modelar o tempo de vida de estruturas.

Em 1956, um relatório de G. Weiss introduziu o uso de processos semi-Markovianos para resolver problemas de sistemas de manutenção. No ano de 1958, W. L. Smith resumiu os resultados conhecidos da “Renewal Theory”, e em 1962, D. R. Cox editou o livro chamado “Renewal Theory”, teoria esta utilizada em problemas de substituição ou troca. Em 1959 e 1960, foi encontrada a solução para os problemas de confiabilidade e logística.

Na década de 60, a corrida espacial dos Estados Unidos com a Rússia, produziu a primeira viagem a Lua em 1969, assim como o desenvolvimento da indústria nuclear, que fez com que os conceitos de confiabilidade fossem crescentemente empregados nos projetos dos mesmos. Em 1969, militares americanos criam um sistema de comunicação por computador, com o objetivo de descentralizar a rede de defesa dos Estado Unidos, surgindo o Arpanet, que é o início da Internet dos dias atuais.

Conforme Cavalca (1998), o grande blackout de 1965 dos estados do norte dos Estados Unidos resultou num forte impulso à aplicação mais séria dos conceitos de confiabilidade no projeto e na expansão dos sistemas de energia elétrica. Bubenko (1982) menciona que a habilidade de um sistema de energia elétrica em responder a demanda em qualquer ponto de tempo está relacionada com a confiabilidade do sistema.

A complexidade dos sistemas técnicos apresentou um grande crescimento, reforçando a necessidade da avaliação da confiabilidade. Sotskov (1972) menciona que aviões de bombardeio, tipo B-17 e B-29, tinham em média, em 1945, 2000 componentes. No ano de 1960, um tipo B-58 tinha 95000 componentes e, em 1965, um B-70 tinha 150000 componentes.

No início dos anos 70, observa-se o desenvolvimento de algoritmos de análise e cálculo da confiabilidade de sistemas, assim como de obtenção do grupo de mínimo corte ou de ligação. Henley (1973) descreveu uma metodologia geral para obtenção da confiabilidade. Anteriormente, Nelson (1970), Batts (1971) e Fleming (1971) descreveram programas computacionais para o

cálculo da confiabilidade, fornecendo o código fonte dos programas, e Jensey (1969), Brown (1971), Krishnamurthy (1972) e Kim (1972), fornecem algoritmos específicos que permitem a análise da confiabilidade dos sistemas. Basicamente, os algoritmos descritos acima utilizam-se de técnicas combinatórias para calcular a confiabilidade, não permitindo, por exemplo, a inclusão de dependências entre componentes. A utilização de métodos mais flexíveis, que permitem a inclusão de várias considerações no modelo, começaram a ser feitos no próximo período.

Ao longo da década de 70, houve o desenvolvimento da metodologia de análise por árvores de falha, motivado em parte pelas considerações de segurança de reatores de energia nuclear. Começam os esforços para se disponibilizar os métodos de Monte Carlo para encontrar os caminhos mínimos de corte de um sistema, assim como o cálculo computacional do valor da confiabilidade de um sistema. A teoria referente a políticas de manutenção e reparo é aperfeiçoada. Teorias para modelos probabilísticos de tensão em materiais compósitos são desenvolvidas, além do início do modelamento de sistemas com carga compartilhada, bastante estudado no próximo período. No campo tecnológico, em 1977, é lançado o primeiro computador pessoal, chamado Apple II, inaugurando a era dos computadores pessoais.

Neste período, diferentemente do período anterior, que se caracteriza por uma baixa produção de artigos e livros, devido as condições e necessidades do período, pode-se constatar, analisando a bibliografia dos livros utilizados como referência neste trabalho, Clarke (1970), Hoel (1972) e do próprio livro de D. R. Cox, assim como dos artigos mencionados acima, que o mesmo foi de grande maturação da teoria da Probabilidade, a base da teoria de confiabilidade, produzindo artigos, principalmente nas décadas de 50-60, e livros de referências utilizados até hoje, principalmente nas décadas de 60-70, como os três mencionados acima, ou o livro editado por W. Feller em 1968, "Introduction to Probability Theory and its Applications – Vol 1", ou mesmo o livro de S. Karlin, "A First Course in Stochastic Processes", de 1966.

### **2.3 – A Confiabilidade no Período de 1980 até os dias atuais**

Grandes acidentes marcam este período. Na Índia, em 1984, ocorre um vazamento químico na cidade de Bhopal. Logo após, ocorre a destruição do reator nuclear de Chernobyl, além da trágica destruição do ônibus espacial Challenger, todos no ano de 1986. Outro acontecimento foi

o vazamento nuclear da usina de “Three Mile Island” que, conforme Sur (1996), ocorreu devido a falha de 379 componentes, originada de uma causa independente.

No início deste período, observa-se uma tendência de utilização de métodos mais flexíveis de modelagem, como o caso de Processos Estocásticos, e também do Método de Monte Carlo, conforme pode-se observar nos artigos de Gubian (1982), Kanapoulos (1982) e Sahner (1987), descrevendo programas computacionais que se utilizam destas metodologias, assim como o de Gross (1983), descrevendo o Método de Uniformização.

Devido principalmente aos acidentes, percebe-se a necessidade de aprimoramento e investimento em tecnologia e confiabilidade, inicializando o desenvolvimento da Análise de Segurança de Sistemas, área esta que, conforme Sharma (1993), desenvolve segurança pessoal e equipamentos para a prevenção de acidentes. Sur (1996) menciona que, nos dias de hoje, a análise confiabilística de sistemas complexos não se restringe somente a aspectos de hardware, mas também leva em conta outros aspectos como erro humano, causas comuns de falha e falha de chaveamento de sistema.

Esta tendência reflete-se diretamente na produção científica. Muitos artigos baseados principalmente em Processos Estocásticos, analisam sistemas tipo Standby, R-em-N ... , adotando possibilidades de erros humanos, condições ambientais, etc... . Boehm (1988), Chung (1990), Singh (1990), Deng (1993), Li (1993), El-Damcese (1995), Yang (1995), Mokaddis (1996), Sur (1996) e Li (1998) demonstram análise de sistemas com estas considerações.

Outra linha de desenvolvimento que se destaca, conforme Barlow (1984), é a confiabilidade de redes, principalmente devido a importância do computador e das redes de computadores desenvolvidas no período passado. Outros fatores que influenciam no desenvolvimento da confiabilidade são o desenvolvimento da área de satélites e telecomunicações.

Na resolução de sistemas modelados por Processos Estocásticos, observa-se um crescimento acelerado do sistema de equações diferenciais com o número de componentes, aumentando o custo computacional. Assim, na década de 90, vários autores procuraram aprimorar a técnica,

propondo algoritmos ou métodos de resolução. São exemplos Sharma (1993), Tombuyses (1995), Devooght (1996), Tombuyses (1999) e Buchholz (1999). Outros procuram melhorar os métodos, como Suh (1996), Labeau (1998). Livros específicos sobre análise de confiabilidade são editados, procurando reunir os conhecimentos adquiridos nos períodos passados. Como exemplos, tem-se Billinton (1983), Doty (1989), Ravichandran (1990), Souza e Silva (1992), Ramakumar (1993) e Lewis (1996).

Com o aumento da complexidade dos sistemas, as conseqüências de uma falha podem causar sérios prejuízos em termos de custo, esforço, vidas ..., verificando-se o interesse na avaliação da confiabilidade e aumento da mesma nos sistemas. Assim, a ênfase moderna, baseada na confiabilidade e qualidade dos produtos, especialmente os de alta tecnologia, demonstra claramente a necessidade de estudo, quantificação, inovação e projeto dos produtos, equipamentos ou sistemas, promovendo uma melhora da confiabilidade dos mesmos.

Utilizando os conceitos de confiabilidade, além de outros, a NASA, no caso do acidente da Challenger, conseguiu uma melhoria na frota de ônibus espaciais, reduzindo em dois terços os riscos de desastre, conforme mencionado por Dias (1997). Observa-se então, conforme exposto nas páginas anteriores, que a confiabilidade é de importância para o estudo, desenvolvimento e aprimoramento dos produtos, equipamentos ou sistemas, sendo utilizada em todas as ramificações da ciência e da engenharia.

## Capítulo 3

### Conceitos Básicos

Todas as pessoas possuem o seu próprio conceito sobre o significado do termo confiabilidade. Na maioria das vezes, o mesmo pode ser associado a uma medida de desempenho. Pode-se aplicar o termo confiabilidade, não somente em atividades humanas, mas também na avaliação do desempenho de um produto, equipamento ou sistema.

Naresky (1970), em seu artigo, define a confiabilidade como sendo “ A característica de um item, expressa pelo valor da probabilidade de que este irá desempenhar uma função requerida, sobre condições definidas, por um período de tempo ”.

Esta definição está de acordo com as definições descritas por Billinton (1983), Doty (1989), Ramakumar (1993) e Lewis (1996). Os três primeiros, mencionam que esta definição parece simples inicialmente, contudo, numa análise mais profunda, revela quatro elementos que necessitam de uma melhor explicação. São estes:

1 – *probabilidade*: Provê um valor numérico na avaliação da confiabilidade. Admite-se uma possibilidade de falha do item, que pode ser um produto, equipamento ou sistema;

2 – *desempenhar uma função requerida*: Faz-se necessário a utilização de um padrão, norma, ou outra especificação, que esclareça se o desempenho da função é satisfatório ou não. Pode-se dizer que a sua especificação é uma problema de engenharia e de gerência;

3 – *condições definidas*: Esclarece as condições de utilização, tipo temperatura ambiente, umidade, pressão do ar ... ;

4 – *período de tempo*: Na maior parte das definições, o tempo é definido em horas ou anos. Contudo, pode representar tempo total de teste, tempo de reparo, tempo de missão, número de ciclos de uma operação, etc... .

Como exemplo de uma especificação completa, pode-se mencionar: “ *O item possui 95% de probabilidade de operar acima de 90% de carga nominal por 100h sem falha, em temperatura ambiente de  $70 \pm 10$  graus, com não mais que 60% de umidade em uma atmosfera livre de poeira.*” Doty (1989).

Complementando a definição, Naresky (1970), define seis tipos de confiabilidade conforme descrito abaixo:

1 – *Confiabilidade avaliada*: A confiabilidade de um item determinada com limites de confiança especificados de testes ou dados de falha de itens identificados nominalmente. A fonte dos dados deve ser especificada;

2 – *Confiabilidade extrapolada*: Extensão de uma extrapolação ou interpolação definida de uma avaliação de confiabilidade, com condições de tensão ou duração diferentes daquelas condições aplicadas na avaliação da confiabilidade;

3 – *Confiabilidade intrínseca*: A confiabilidade potencial de um item presente em um dado projeto;

4 – *Confiabilidade operacional*: A confiabilidade avaliada de um item baseado em dados de campo;

5 – *Confiabilidade prevista*: A confiabilidade de um equipamento calculada das suas considerações de projeto e da confiabilidade de suas partes, nas condições de uso pretendidas;

6 – *Confiabilidade estimada*: A confiabilidade avaliada de um item, baseada em um teste particular, com tensões e critérios de falha especificados.

Um outro conceito importante é o de disponibilidade, isto é, a probabilidade de um sistema estar operando com sucesso num determinado tempo  $t$ . Sherwin (1993), menciona que o conceito de confiabilidade geralmente prevê somente uma vida ou uma falha, enquanto que a disponibilidade inclui reparos quando necessário, e períodos de disponibilidade ou em funcionamento,

alternando com períodos de reparos ou sem funcionamento, originários de um falha. Embora os dois conceitos se apliquem para um componentes simples ou para um sistema, geralmente a disponibilidade é mais utilizada para sistemas, enquanto que o conceito de confiabilidade é mais utilizado para componentes simples.

### 3.1 – Conceitos Básicos sobre Probabilidade

Existem várias aproximações na definição e no estudo de probabilidades. A aproximação clássica conhecida é a razão entre o número de casos favoráveis e o número total de alternativas. Assumindo que os casos favoráveis equivalem ao número de sucesso  $s$ , e os casos desfavoráveis equivalem ao número de falhas  $f$ , tem-se:

$$P(\text{sucesso}) = \frac{s}{s + f} = p \quad (3.1)$$

e,

$$P(\text{falha}) = \frac{f}{s + f} = q \quad (3.2)$$

Manipulando as equações (3.1) e (3.2), obtém-se que:

$$p + q = 1 \quad (3.3)$$

Observa-se que esta aproximação é muito limitada pois, em muitos casos, não é possível realizar a repetição do experimento. Por outro lado, se os testes podem ser repetidos, existem muitas dúvidas sobre o número de repetições necessárias para representar de maneira exata a probabilidade de ocorrência do evento.

Uma outra definição utilizada menciona que, dado um evento  $A$  e sabendo que o mesmo ocorre  $N_A$  vezes em  $n$  triagens, a frequência relativa  $p(A)$  é dada por:

$$p(A) = N_A / n \quad (3.4)$$

Com isto, a probabilidade de ocorrência do evento  $A$  pode ser obtida por:

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{N_A}{n} \right) \quad (3.5)$$

Quando  $n$  torna-se suficientemente grande,  $p(A)$  se aproxima de  $P(A)$ . Esta aproximação é denominada de aproximação por frequência relativa.

Mesmo com ambas as definições, observa-se a necessidade de definições complementares. Sendo a teoria da probabilidade uma disciplina exata, desenvolvida logicamente e com bases claramente definidas, essas definições serão descritas abaixo em forma de sete teoremas fundamentais de probabilidade, todos de grande aplicabilidade em confiabilidade:

1 – A probabilidade de ocorrência de um evento  $A$  encontra-se entre zero e um, ou seja:

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad (3.6)$$

A probabilidade nula é a certeza de não ocorrência do evento, enquanto que a probabilidade unitária é a certeza de sucesso do evento.

2 – Seja  $S$  um evento determinado, chamado de conjunto universal ou espaço amostral. A probabilidade de um evento  $S$  é igual a unidade, ou seja:

$$P(S) = 1 \quad (3.7)$$

3 – Se o evento  $A$  e o evento  $B$  são mutuamente exclusivos, e  $(A+B)$  significa  $A$  ou  $B$ , ou ainda,  $(A \cup B)$ , então:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) \quad (3.8)$$

Este teorema pode ser estendido a um número infinito de eventos mutuamente exclusivos  $A_1, A_2, \dots$ . Esta propriedade é chamada aditividade infinita.

$$P(A1 + A2 + A3 + \dots) = P(A1) + P(A2) + P(A3) + \dots \quad (3.9)$$

Observa-se que os três teoremas descritos acima, são os elementos básicos da aproximação axiomática da probabilidade.

4 – A probabilidade mútua de dois eventos independentes é igual ao produto das probabilidades de cada evento.

$$P(AB) = P(A) P(B) \quad (3.10)$$

Estendendo o raciocínio para n eventos são todos independentes, então:

$$P(A_1 A_2 A_3 \dots A_n) = P(A_1) P(A_2) P(A_3) \dots P(A_n) = \prod_{i=1}^n P(A_i) \quad (3.11)$$

Este teorema, juntamente com o terceiro, são utilizado diretamente em análise de sistema pelo método combinatório.

5 – Tendo presentes as definições de eventos exclusivos e eventos independentes, pode-se definir como complementares dois eventos onde, se um deles não ocorre, o outro acontece. O evento complementar de A é denominado  $\bar{A}$ .

$$A + \bar{A} = S \text{ e } A\bar{A} = \emptyset \quad (3.12)$$

A probabilidade de evento nulo é:

$$P(\emptyset) = P(\bar{A}) = 0 \quad (3.13)$$

A probabilidade da união de um evento e seu complementar:

$$P(A + \bar{A}) = P(S) = 1 \rightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A}) \quad (3.14)$$

6 – Probabilidade de união de eventos não-exclusivos:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) \quad (3.15)$$

Se os eventos são exclusivos,  $P(AB) = 0$ , então:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) \quad (3.16)$$

Considerando a probabilidade de união de  $n$  eventos não-exclusivos entre si, tem-se a fórmula geral, ou Fórmula de Poincaré:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k) - \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 A_2 \dots A_n) \quad (3.17)$$

7 – Probabilidade condicional : A notação  $P(A/B)$  denota a probabilidade de ocorrência do evento  $A$ , sendo conhecida a ocorrência do evento  $B$ .

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\text{número de ocorrências de } AB}{\text{número de ocorrências de } B} \quad (3.18)$$

ou,

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B) \quad (3.19)$$

Estendendo a equação 3.19 para  $n$  eventos, tem-se:

$$P(A_1 A_2 A_3 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 A_2) \dots P(A_n/A_1 A_2 \dots A_{n-1}) \quad (3.20)$$

Por meio da definição de probabilidade condicional, pode-se obter a equação principal do teorema de Bayes. Supondo que a ocorrência de um evento  $A$  seja dependente de um número de eventos  $B_i$ , mutuamente exclusivos, e utilizando a equação 3.19, tem-se:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(AB_i) = \sum_{i=1}^n P(B_i)P(A/B_i) \quad (3.21)$$

Pela equação 3.18 e 3.20, obtém-se a equação do teorema de Bayes:

$$P(B_i/A) = \frac{P(AB_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i)P(A/B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i)P(A/B_i)}{\sum_{i=1}^n P(B_i)P(A/B_i)} \quad (3.22)$$

### 3.2 – Conceitos Básicos sobre Variáveis Aleatórias

Seja um experimento cujas saídas são definidas e agrupadas num conjunto denominado espaço amostral, ou  $S$ . Dependendo do experimento, pode-se designar um valor de probabilidade associado a cada uma das saídas. Em seguida, para todo elemento do espaço amostral ou para cada saída, pode-se designar um número real específico. Estas designações podem ser consideradas como um mapeamento de todo elemento do espaço amostral no eixo real. Tal mapeamento é denominado variável aleatória. Clarke (1970) define uma variável aleatória como uma função que, para cada ponto de um espaço amostral, é associado um número, normalmente um número real.

As variáveis aleatórias podem ser discretas (quando assumem apenas um valor dentro de um conjunto discreto de valores) ou contínuas (quando podem assumir um número infinito de valores). Como exemplos, pode-se mencionar:

1 – Exemplos de variáveis aleatórias discretas:

Giro de uma moeda ou de várias, cor de uma bola retirada de um conjunto de bolas coloridas.

2 – Exemplos de variáveis aleatórias contínuas:

Comprimento de uma peça manufaturada, tempo de falha de um componente, tempo de reparo, duração de uma tempestade ... .

Funções densidade de probabilidade  $f(x)$  ou a distribuição acumulada  $F(x)$  são utilizadas na descrição de modelos de variáveis aleatórias. Estas funções constituem um par integro-diferencial e é necessário apenas uma delas para que se possa facilmente obter a outra.

### 3.2.1 – Variáveis Aleatórias Discretas

No caso finito, a variável  $X$  assume certos valores discretos  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , e somente estes. A função densidade de probabilidade  $f(x)$ , ou simplesmente função de densidade, e a função distribuição acumulada  $F(x)$  podem ser definidas como:

$$f(x_i) = P(X = x_i) = P(x_i) \quad (3.23)$$

e,

$$F(x_i) = P(X \leq x_i) \quad (3.24)$$

Supondo que o espaço amostral  $S$  seja constituído somente por elementos  $x_i$  até  $x_n$ :

$$P(S) = \sum_i f(x_i) = \sum_i P(x_i) = 1 \quad (3.25)$$

Graficamente,

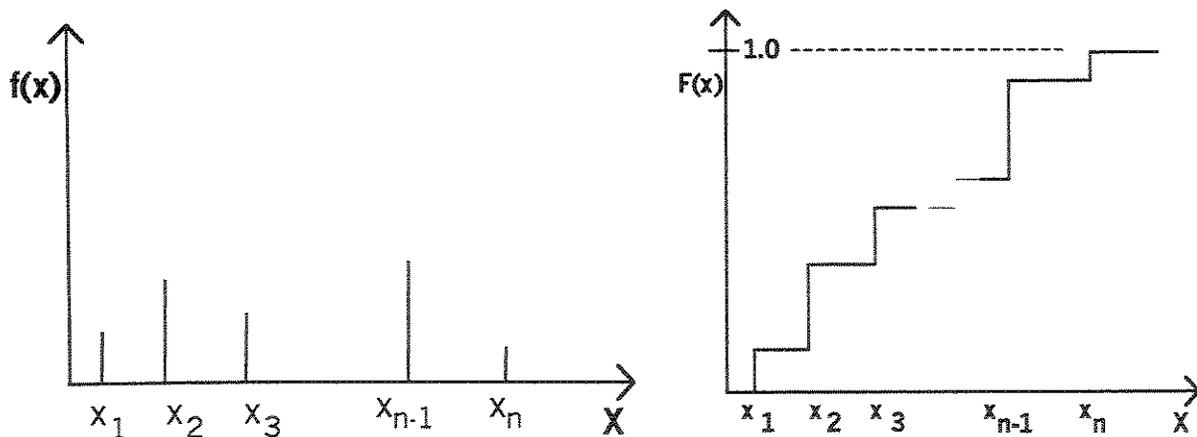


Figura 3.1 : Função Densidade e Função Distribuição Acumulada para Caso Discreto.

### 3.2.2 – Variáveis Aleatórias Contínuas

Se a variável aleatória  $X$  pode assumir qualquer valor dentro de um número infinito de valores. A função densidade de probabilidade  $f(x)$  é definida como :

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \quad (3.26)$$

Integrando a equação 3.26 no intervalo limitado [a,b], tem-se:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (3.27)$$

A função distribuição acumulada  $F(x)$  é definida como:

$$F(x) = P(X \leq x) \quad (3.28)$$

e,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1 \quad e \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \quad (3.29)$$

Graficamente,

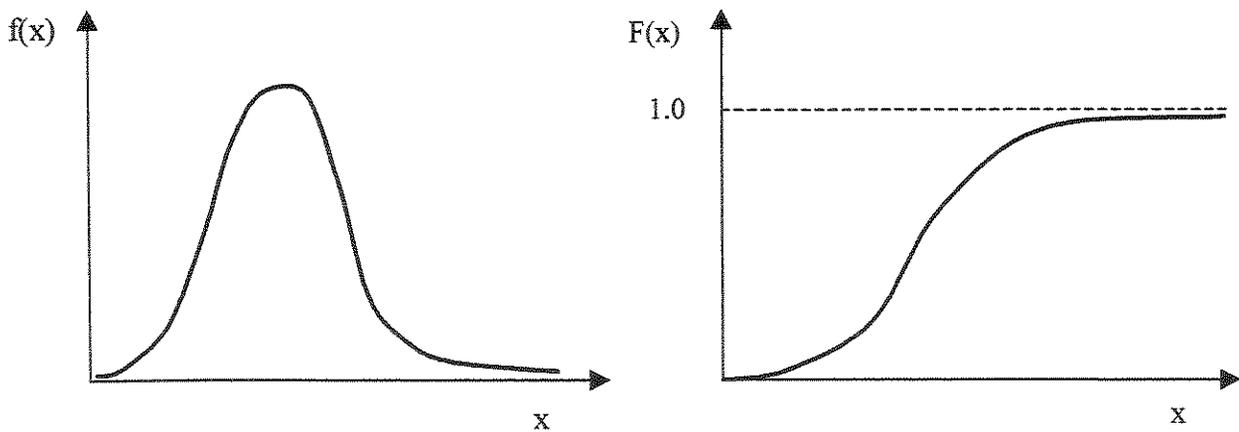


Figura 3.2 : Função Densidade e Função Distribuição Acumulada para Caso Contínuo.

### 3.3 – Principais Funções Utilizadas em Confiabilidade

Durante a vida de um produto, equipamento ou sistema, uma ou várias falhas podem ocorrer, ocasionando perdas de produção, parada de um sistema..., envolvendo perdas financeiras, ou mesmo, gerando insatisfação do cliente. No caso do reparo não ser possível, disponível ou relevante para o funcionamento do mesmo, a falha é considerada catastrófica.

Modelos de falhas para tais itens são tipicamente baseados em resultados de testes de vida e dados sobre taxa de falhas resultantes da teoria de probabilidades. O modelamento básico, baseado em quatro funções e suas relações matemáticas, é desenvolvido abaixo.

Seja um conjunto de  $N_o$  itens idênticos, os quais iniciam a operação no tempo  $t = 0$ . Com o passar do tempo, alguns destes itens irão falhar. Adotando que  $N_s(t)$  represente o número de sobreviventes no tempo  $t > 0$ , sendo o tempo descrito expresso em horas de funcionamento, então o número de componentes que falharam no tempo  $t$ , dado por  $N_f(t)$  é:

$$N_f(t) = N_o - N_s(t) \quad (3.30)$$

Define-se duas funções contínuas no domínio do tempo, a função densidade dos dados de falha  $f_d(t)$ , e a função taxa dos dados de falhas  $\lambda_d(t)$ , como:

$$f_d(t) = \frac{[N_s(t_i) - N_s(t_i + \Delta t_i)] / N_o}{\Delta t_i}, \text{ para } t_i < t \leq (t + \Delta t_i) \quad (3.31)$$

e,

$$\lambda_d(t) = \frac{[N_s(t_i) - N_s(t_i + \Delta t_i)] / N_s(t_i)}{\Delta t_i}, \text{ para } t_i < t \leq (t + \Delta t_i) \quad (3.32)$$

Observa-se que a função densidade  $f_d(t)$  é a razão do número de falhas ocorridas num intervalo de tempo pelo tamanho total da população original. A função taxa de falha  $\lambda_d(t)$  é a razão entre o número de falhas num intervalo de tempo pelo número de sobreviventes no início do intervalo considerado. Intuitivamente,  $f_d(t)$  é a medida da velocidade total de ocorrência de falhas, enquanto que  $\lambda_d(t)$  é a medida instantânea desta velocidade.

A função distribuição dos dados de falhas  $Q_d(t)$  é obtida por integração de  $f_d(t)$ , sendo contínua por partes no intervalo de 0 a  $t$ , ou:

$$Q_d(t) = \int_0^t f_d(\xi) d\xi \quad (3.33)$$

A função distribuição dos dados dos sobreviventes ou de sucesso  $R_d(t)$ , é descrita como:

$$R_d(t) = 1 - Q_d(t) \quad (3.34)$$

Sendo que, eventualmente, todos os componentes devem falhar, a área sob a curva  $f_d(t)$  é igual a unidade. Conseqüentemente, a medida que  $t$  aumenta,  $Q_d(t) \rightarrow 1$  e  $R_d(t) \rightarrow 0$ . Pode ser demonstrado que, com o aumento dos dados disponíveis e do intervalo de tempo tendendo a zero, todas as funções definidas acima aproximam-se de funções contínuas denominadas de  $f(t)$ ,  $\lambda(t)$ ,  $Q(t)$  e  $R(t)$ , ou as quatro funções básicas de confiabilidade. Loo (1971), menciona outras duas funções denominadas de Função de Distribuição Condicional,  $\Phi(x,t)$ , e a Função Distribuição de Probabilidade Condicional,  $\phi(x,t)$ , contudo, as mesmas não serão deduzidas devido ao não uso destas no restante da bibliografia mencionada.

### 3.3.1 – Relações entre as funções de confiabilidade

Partindo-se do modelamento acima, tem-se,

$$R(t) = \frac{N_s(t)}{N_o} = \frac{N_o - N_f(t)}{N_o} = 1 - \frac{N_f(t)}{N_o} \quad (3.35)$$

Utilizando-se a equação 3.31 e 3.35,

$$f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{N_o} \frac{N_s(t) - N_s(t + \Delta t)}{\Delta t} \right] = -\frac{1}{N_o} \frac{d}{dt} N_s(t) \quad (3.36)$$

obtém-se,

$$f(t) = -\frac{d}{dt} R(t) = \frac{d}{dt} Q(t) \quad (3.37)$$

Por meio da equação 3.32 e 3.36, tem-se:

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{N_s(t)} \frac{N_s(t) - N_s(t + \Delta t)}{\Delta t} \right] = -\frac{1}{N_s(t)} \frac{d}{dt} N_s(t) \quad (3.38)$$

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} \quad (3.39)$$

Para obter a relação entre a confiabilidade  $R(t)$  e a taxa de falhas  $\lambda(t)$ :

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{-\frac{d}{dt} R(t)}{R(t)} = -\frac{d}{dt} [\ln R(t)] \quad (3.40)$$

$$\ln R(t) = -\int_0^t \lambda(\xi) d\xi + c \quad (3.41)$$

onde,

$c$  = constante de integração.

Elevando ambos os lados da equação 3.41 como potência de uma função exponencial, obtém-se:

$$R(t) = e^c \exp \left[ -\int_0^t \lambda(\xi) d\xi \right] \quad (3.42)$$

Desde que para  $t = 0$  tem-se  $R(t) = 1$ , pode-se concluir que  $e^c = 1$  e, portanto:

$$R(t) = \exp \left[ -\int_0^t \lambda(\xi) d\xi \right] \quad (3.43)$$

Assim, podemos resumir as equações obtidas na seguinte tabela:

	$f(t)$	$\lambda(t)$	$Q(t)$	$R(t)$
$f(t)$	$f(t)$	$\lambda(t) \exp\left[-\int_0^t \lambda(\xi) d\xi\right]$	$\frac{d}{dt}(Q(t))$	$-\frac{d}{dt}(R(t))$
$\lambda(t)$	$\frac{f(t)}{1 - \int_0^t f(\xi) d\xi}$	$\lambda(t)$	$\frac{1}{1 - Q(t)} \frac{d}{dt}(Q(t))$	$-\frac{d}{dt}(\ln R(t))$
$Q(t)$	$\int_0^t f(\xi) d\xi$	$1 - \exp\left[-\int_0^t \lambda(\xi) d\xi\right]$	$Q(t)$	$1 - R(t)$
$R(t)$	$1 - \int_0^t f(\xi) d\xi$	$\exp\left[-\int_0^t \lambda(\xi) d\xi\right]$	$1 - Q(t)$	$R(t)$

Tabela 3.1 : Relações entre as Funções de Confiabilidade.

### 3.3.2 – Modelamento Matemático do Tempo Médio entre Falha

O valor esperado da variável aleatória contínua denominada tempo até falha é definido como tempo médio até falha, ou simplesmente, MTTF. Em muitas situações práticas, o conhecimento do MTTF é suficiente para caracterizar a qualidade e a disponibilidade de um certo item.

Por definição:

$$MTTF = \int_0^t t f(t) dt \quad (3.44)$$

Pela tabela 3.1, obtém-se,

$$MTTF = - \int_0^{\infty} t \frac{d}{dt} R(t) dt = - \left[ tR(t) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} R(t) dt \right] \quad (3.45)$$

Pela definição de  $R(t)$  como uma função exponencial, tem-se que:

$$\lim_{t \rightarrow 0} tR(t) = 0 \quad e \quad \lim_{t \rightarrow \infty} tR(t) = 0 \quad (3.46)$$

Portanto:

$$MTTF = \int_0^{\infty} R(t) dt \quad (3.47)$$

### 3.2.3 – Análise da Função Taxa de Falhas $\lambda(t)$

A função taxa de falhas  $\lambda(t)$  é a mais comumente usada na representação de um modelo a partir de dados disponíveis, pois descreve claramente os vários estágios da vida dos componentes. Examinando os dados de falhas para uma variedade de componentes num determinado período de tempo, observa-se que a forma geral da função  $\lambda(t)$  é a do perfil de uma banheira, caracterizada por três regiões:

A Região I corresponde às falhas de início ou começo de funcionamento. Nesta região, a taxa de falha é relativamente alta. Muitos fabricantes submetem seus produtos por um período curto de tempo ou igual a  $t_1$ , dependendo do caso, a uma carga normalmente menor que a nominal, para remover esta falha inicial ou a região I. Partes faltantes, a utilização de materiais não padronizados, componentes fora de tolerância e problemas surgidos no transporte são algumas das causas que explicam o porquê da taxa de falha nesta região ser relativamente alta.

A Região II corresponde ao tempo de vida útil do componente ou sistema. Durante este período, as falhas são aleatórias e a taxa de falhas é constante. Terremotos, picos de energia, vibração, impacto, enchentes ... podem causar a falha nesta região. Por fim, a Região III corresponde à fase de desgaste ou fadiga, durante a qual a taxa de falhas aumenta rapidamente com o passar do tempo. Estas três fases são facilmente visualizadas nas Figuras 3.3 e 3.4.

É também interessante substituir o componente após  $t_2 - t_1$  horas de operação, mesmo que não tenha falhado. Para alcançar altos níveis de confiabilidade, todos os componentes devem operar dentro de seu período de vida útil. Equipamentos eletrônicos apresentam um período de vida útil muito longo, demonstrando elevados valores de  $t_2 - t_1$ . No caso de componentes

mecânicos, a região III de desgaste tende a predominar. Estes dois casos extremos são ilustrados abaixo:

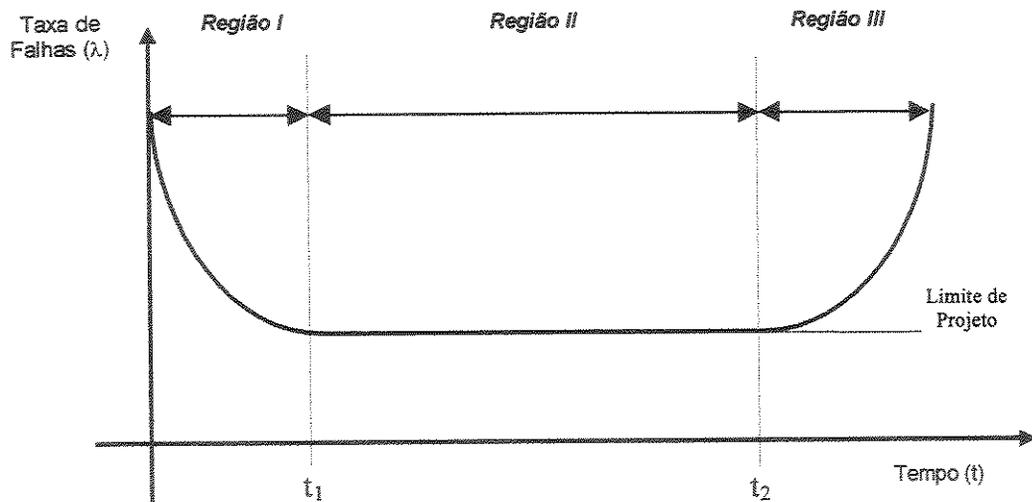


Figura 3.3 : Curva da Banheira para Componentes Eletrônicos.

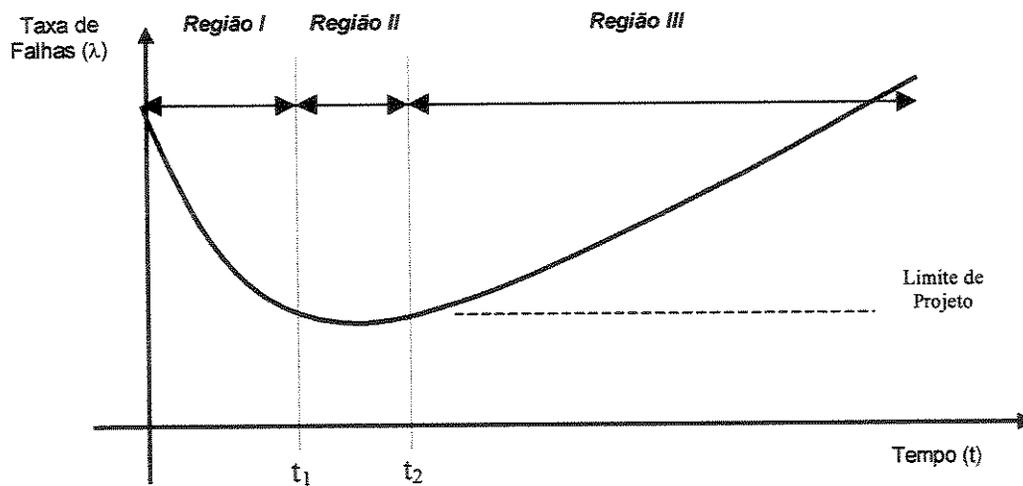


Figura 3.4 : Curva da Banheira para Componentes Mecânicos.

### 3.4 – Principais Distribuições Utilizadas em Confiabilidade

São várias as funções que podem modelar a distribuição probabilística de uma variável aleatória. A escolha do modelo matemático estatístico a ser utilizado está diretamente relacionada aos tipos de testes de falhas realizados, bem como ao tamanho e tipo de amostragem analisada.

Conforme descrito no item 3.2, as variáveis aleatórias podem ser discretas ou contínuas. Seguindo esta divisão, as distribuições podem ser classificadas como:

1 – Distribuições discretas:

1.1 – Distribuição Binomial.

1.2 – Distribuição de Poisson.

2 – Distribuições contínuas:

2.1 – Distribuição Exponencial.

2.2 – Distribuição Retangular.

2.3 – Distribuição de Rayleigh.

2.4 – Distribuição Normal.

2.5 – Distribuição de Weibull.

2.6 – Distribuição Gamma.

2.7 – Distribuição Lognormal.

2.8 – Distribuição Beta.

2.9 – Distribuição dos valores Extremos.

Mojena (1999) desenvolveu uma tabela, descrita abaixo com modificações, demonstrando as principais aplicações das onze distribuições acima mencionadas.

Distribuições Estatísticas	Aplicações
1.1 – Distribuição Binomial	Aplicada para número elevado de amostras no controle de qualidade. Modela o número de falhas em relação ao tamanho inicial da amostra.
1.2 – Distribuição de Poisson	Aplicada no controle de qualidade e modela o número de falhas em relação ao tempo de produção.
2.1 – Distribuição Exponencial	Modela o número de falhas durante o período de vida útil de componentes eletrônicos.
2.2 – Distribuição Retangular	Aplicações restritas, casos em que a densidade de probabilidade é constante num intervalo de tempo.
2.3 – Distribuição de Rayleigh	Modela as regiões da curva da banheira para o caso de falhas iniciais e por desgaste, por uma progressão linear.
2.4 – Distribuição Normal	Analisa produtos durante o início de vida e na fase de degradação natural. Modela falhas por fadiga ou desgaste.

2.5 – Distribuição de Weibull	Modela falhas aleatórias.
2.6 – Distribuição Gamma	Modela tempo de falhas em componentes com reparo ideal.
2.7 – Distribuição Lognormal	Caracteriza o tempo de reparo para uma manutenção normal de falhas de desgaste.
2.8 – Distribuição Beta	Aplicações especiais.
2.9 – Distribuição dos Valores Extremos	Normalmente utilizada em situações em que o número de variáveis, dos quais os dados são obtidos, são muito grandes. Lewis (1996).

Tabela 3.2 : Principais Distribuições Estatísticas e suas Aplicações.

Billinton (1983) menciona que as quatro principais distribuições utilizadas em confiabilidade seriam a Exponencial, Binomial, Normal e Weibull. Seguindo esta descrição, segue-se um estudo mais aprofundado das mesmas, com exceção da distribuição Binomial, substituída pela Distribuição de Poisson.

### 3.4.1 – Distribuição Exponencial

No passado, esta distribuição foi a mais utilizada em todos os estudos de confiabilidade, devido a sua facilidade de uso e por a maioria dos sistemas complexos possuírem qualidades exponenciais. Ainda hoje, aplica-se para análises com taxa de falhas constante, ou ainda, durante o tempo de vida útil do item analisado. Muito eficiente para componentes eletrônicos, cuja vida útil predomina fortemente na curva da banheira. Trata-se de função uniparamétrica, onde o parâmetro principal é a própria taxa de falhas  $\lambda$ .

Pode-se definir como características principais desta lei, as seguintes relações:

1 – Função densidade de Probabilidade:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad (3.48)$$

2 – Função taxas de falhas:

$$\lambda(t) = \lambda \quad (3.49)$$

3 – Função de Confiabilidade:

$$R(t) = e^{-\lambda t} \quad (3.50)$$

### 3.4.2 – Distribuição de Poisson

A distribuição de Poisson aplica-se a análise de partes defeituosas, o que corresponde essencialmente a um controle de qualidade utilizado para prever a probabilidade de ocorrência de defeitos, num intervalo de tempo contínuo, para melhor controle de produção. Pode-se utilizar a mesma para uma taxa de falhas constante no tempo, com reposição instantânea do item falhado, determinando a probabilidade de  $x$  ocorrências do evento no intervalo de tempo requerido. Utiliza-se esta distribuição para variáveis discretas e pequenas amostras.

Pode-se definir como características principais desta lei, as seguintes relações:

1 – Equação da Distribuição de Poisson:

$$P_x(t) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!} \quad (3.51)$$

onde,

$P_x(t)$  = Probabilidade de um evento ocorrer exatamente  $x$  vezes, no intervalo  $(0,t)$ ;

$x$  = Número de ocorrências de um evento.

2 – Média e o Desvio Padrão:

$$\mu = \lambda t \text{ e } \sigma = \sqrt{\lambda t} \quad (3.52)$$

A distribuição de Poisson pode ser utilizada para aproximar a distribuição Binomial quando as taxas de falhas são pequenas e os tempos de teste são relativamente extensos. Para elevado

numero de falhas, torna-se simétrica e aproxima a distribuição normal, sendo portanto, aplicável para falhas de inicio de operacionalização e para falhas por desgaste. A estimativa da confiabilidade, através desta função, é calculada para a ocorrência de nenhuma falha (zero falhas) no intervalo  $(0, t)$ .

### 3.4.3 – Distribuição Normal

A distribuição normal constitui a mais importante lei da probabilidade em estatística e forma o fundamento teórico para muitas outras distribuições de probabilidades. Em confiabilidade, a distribuição normal é utilizada para analisar produtos durante o inicio de vida e na fase de degradação natural, ou ainda, falha por fadiga ou desgaste. Também é conhecida como distribuição Gaussiana. Esta distribuição aplica-se a fenômenos naturais, como medições, características de grandes amostras e populações, degradação ou desgaste, etc. Trata-se de distribuição bi-paramétrica, tendo como padrões principais o valor médio e o desvio padrão.

Pode-se definir como característica principal desta lei, a Função Densidade de Probabilidade:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3.53)$$

onde,

$\mu$  = Média;

$\sigma$  = Desvio Padrão.

Billinton (1983) e Clarke (1970), mencionam que esta distribuição pode aproximar a distribuição de Poisson, com os seguintes valores de  $\mu$  e  $\sigma$ .

$$\mu = \lambda \text{ e } \sigma = \sqrt{\lambda} \quad (3.54)$$

### 3.4.4 – Distribuição de Weibull

A distribuição de Weibull é, geralmente, uma distribuição bi-paramétrica. Estimando adequadamente o tempo esperado de vida útil ou vida característica pelo parâmetro de escala  $\alpha$ , e o parâmetro de forma ou inclinação de Weibull  $\beta$ , a variação da forma das curvas pode ser ajustada aos dados experimentais, sendo mais flexível que as outras distribuições. Por isso, este modelo de distribuição é amplamente utilizado em confiabilidade, substituindo a distribuição exponencial como a mais utilizada.

Pode-se definir como características principais desta lei, as seguintes relações:

1 – Função densidade de Probabilidade:

$$f(t) = \frac{\beta t^{\beta-1}}{\alpha^\beta} \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right] \quad (3.55)$$

2 – Função taxas de falhas:

$$\lambda(t) = \frac{\beta t^{\beta-1}}{\alpha^\beta} \quad \text{onde: } \alpha > 0, \beta > 0 \text{ e } t \geq 0. \quad (3.56)$$

3 – Função de Confiabilidade:

$$R(t) = \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right] \quad (3.57)$$

Para  $\beta = 1$ , a distribuição de Weibull se reduz a uma distribuição exponencial com uma taxa de falha constante igual a  $1/\alpha$ . De um modo geral, o valor de  $\beta$  inferior a unidade representa uma função taxa de falha decrescente, um valor superior a unidade representa uma função crescente e, finalmente, um valor igual a unidade representa uma função constante. Para  $\beta$  igual a 3.4, a distribuição de Weibull aproxima a normal (geralmente este valor varia entre  $2.7 > \beta > 3.7$ ).

### 3.5 – Estruturas em Confiabilidade

Uma sistema real na prática é normalmente representado por um diagrama de blocos, no qual os componentes do sistema podem estar conectados entre si em série, paralelo, r-em-n, standby, ou uma combinação destes. Entretanto, a relação entre o sistema real e sua representação por diagrama de blocos deve ser bem definida, antes de se aplicar uma técnica qualquer para a avaliação da confiabilidade. Muito importante também é o fato de um sistema real e seu modelo de representação não possuírem necessariamente a mesma estrutura topológica.

Algumas definições importantes de componentes de um diagrama de blocos são mostrados abaixo, conforme Krishnamurthy (1972):

Item	Definição
1 – Nó:	Um ponto de conexão.
2 – Componente:	Um item com exatamente dois nós, os quais são distintos; um deles é o nó de entrada, e o outro, o nó de saída.
3 – Diagrama de Blocos:	Uma coleção de componentes interconectados. Deve-se ter exatamente uma Entrada (nó) e uma Saída (nó).
4 – Entrada:	Um conexão de um ou mais nós de entrada, sem nenhum nó de saída.
5 – Saída:	Um conexão de um ou mais nós de saída, sem nenhum nó de entrada.
6 – Sistema Simples:	É um grupo de $n$ componentes conectados ou associados em uma configuração fixa (série, paralelo, r-em-n e standby).
7 – Sistema Complexo:	Estruturas que estão formadas por duas ou mais estruturas simples, as quais podem apresentar diferentes formas de conexão ou associação dos componentes, criando diferentes combinações de configuração.

Tabela 3.3 : Principais Definições dos Componentes de um Diagrama de Blocos.

#### 3.5.1 – Estrutura em Série

Um conjunto de componentes é considerado disposto logicamente em série, do ponto de vista da confiabilidade, se o sucesso da operação do conjunto depende do sucesso da operação de todos os seus componentes; se um deles falhar, todo o conjunto falhará. A figura 3.5 é um exemplo de uma estrutura em série.

Os componentes não necessitam estar fisicamente dispostos em série, mas é de fundamental importância que todos eles funcionem para que o sistema funcione.



Figura 3.5 : Diagrama Representativo de uma Estrutura em Série com Três Componentes.

Para uma representação matemática, se  $x_i$  representa o sucesso de um evento para a  $i$ -ésima unidade, temos que a probabilidade de sucesso do sistema é dada por:

$$P(x_1 x_2 x_3 \dots x_n) = P(x_1) P(x_2/x_1) P(x_3/x_1 x_2) \dots P(x_n/x_1 x_2 \dots x_{n-1}) \quad (3.58)$$

Se as unidades não interagem, então os eventos são independentes:

$$P(x_1 x_2 x_3 \dots x_n) = P(x_1) P(x_2) P(x_3) \dots P(x_n) \quad (3.59)$$

Sendo a confiabilidade a medida de bom desempenho do sistema, então se refere a probabilidade de sucesso do mesmo. Logo,

$$R_s = R_1 R_2 \dots R_n = \prod_{i=1}^n R_i \quad (3.60)$$

### 3.5.2 – Estrutura em Paralelo

Um conjunto de componentes é considerado disposto logicamente em paralelo, do ponto de vista da confiabilidade, se o sucesso da operação do conjunto depende do sucesso da operação de pelo menos um dos seus componentes, ou ainda, todos os componentes deveriam falhar para o conjunto falhar. A figura 3.6 é um exemplo de uma estrutura em paralelo.

Os componentes não necessitam estar fisicamente dispostos em paralelo, mas é de fundamental importância que pelo menos um deles funcione para que o sistema funcione.

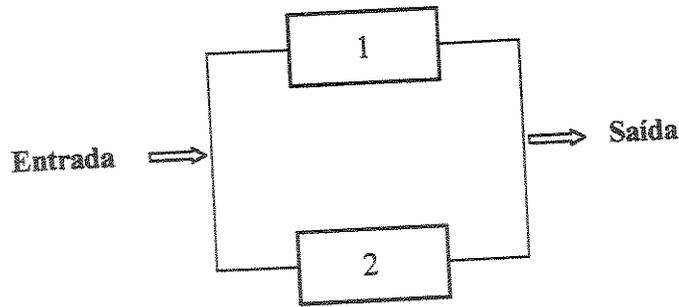


Figura 3.6 : Diagrama Representativo de uma Estrutura em Paralelo com Dois Componentes.

Para uma representação matemática, se  $x_i$  representa o sucesso de um evento para a  $i$ -ésima unidade, temos que a probabilidade de sucesso do sistema é dada por:

$$P(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n) = 1 - P(\bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_{n-1}) \quad (3.61)$$

ou,

$$P(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = 1 - P(\bar{x}_1)P(\bar{x}_2/\bar{x}_1)P(\bar{x}_3/\bar{x}_1\bar{x}_2)\dots P(\bar{x}_n/\bar{x}_1\bar{x}_2\dots\bar{x}_{n-1}) \quad (3.62)$$

Se as unidades não interagem, então os eventos são independentes:

$$P(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = 1 - P(\bar{x}_1)P(\bar{x}_2)P(\bar{x}_3)\dots P(\bar{x}_n) \quad (3.63)$$

Sendo a confiabilidade a medida de bom desempenho do sistema, então se refere a probabilidade de sucesso do mesmo, enquanto que a probabilidade de falhas  $Q$  se refere ao fracasso. Logo,

$$R_p = 1 - Q_1 Q_2 \dots Q_n = 1 - \prod_{i=1}^n Q_i = 1 - Q_p \quad (3.64)$$

### 3.5.3 – Estrutura em R-em-N

Um conjunto de componentes é considerado disposto logicamente em estrutura r-em-n, do ponto de vista da confiabilidade, se o sucesso da operação do conjunto depende do sucesso da operação de pelo menos  $r$  dos seus  $n$  componentes, ou que  $n - r + 1$  componentes deveriam falhar, para o conjunto falhar. A figura 3.7 é um exemplo de uma estrutura em r-em-n.

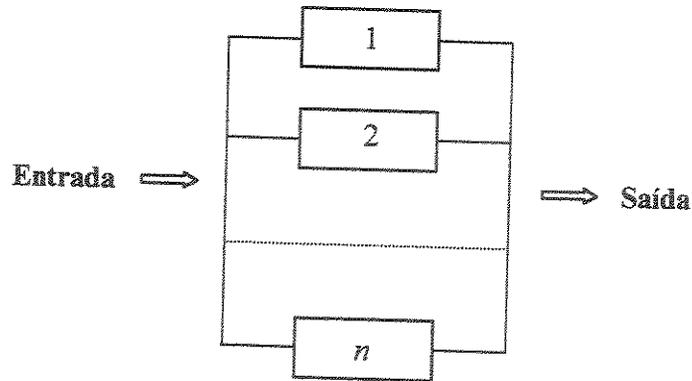


Figura 3.7 : Diagrama Representativo de uma Estrutura em R-em-N com  $n$  Componentes.

Note-se que, se  $r = 1$  o sistema é paralelo, se  $r = n$  o sistema é em série. No caso de redundâncias passivas, entra em jogo a confiabilidade dos conectores ou dos chaveamentos. Sendo a estrutura analisada como uma aplicação da distribuição binomial, se  $p$  é a probabilidade de sucesso de cada componente, a confiabilidade do sistema é:

$$R_{r-n} = \sum_{k=r}^n {}_n C_k p^k (1-p)^{n-k} \quad (3.65)$$

### 3.5.4 – Estrutura em StandBy

Um conjunto de componentes é considerado disposto logicamente em standby, do ponto de vista da confiabilidade, se uma unidade redundante somente é ativada quando a unidade operacional atual falha. Esta estrutura pode ser entendida como uma estrutura em paralelo passiva. A taxa de falhas, na unidade de espera, é naturalmente mais baixa que aquela da unidade em operação. A figura 3.8 é um exemplo de uma estrutura em standby.

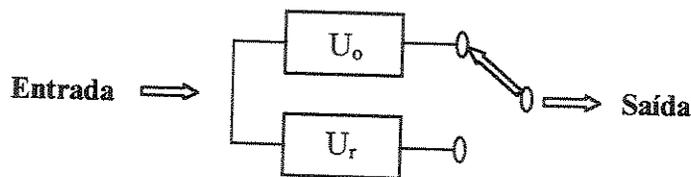


Figura 3.8 : Diagrama Representativo de uma Estrutura em Standby com Dois Componentes.

Sendo Q a probabilidade de falha do sistema:

$$Q = Q(U_o) \cdot Q(U_r/\bar{U}_o) \quad (3.66)$$

Se as unidades não interagem, então os eventos são independentes:

$$Q = Q(U_o) \cdot Q(U_r) = Q_o \cdot Q_r \quad (3.67)$$

A operação do componente redundante é feita através de um chaveamento. Considerando a possibilidade de sucesso ( $P_{ch}$ ) e fracasso no chaveamento de uma unidade para outra, temos:

$$\begin{aligned} \text{Falha do sistema} = & \text{Prob. de falha c/ sucesso de chaveamento} \times P_{ch} + \\ & \text{Prob. de falha c/ fracasso de chaveamento} \times (1 - P_{ch}) \end{aligned} \quad (3.68)$$

ou,

$$Q = Q_o Q_r \times P_{ch} + Q_o \times (1 - P_{ch}) = Q_o - Q_o P_{ch} (1 - Q_r) \quad (3.69)$$

Se a chave, ou conector, não é perfeito, então sua confiabilidade, ou mortalidade, deve integrar o sistema, conforme equação abaixo:

$$R = (1 - Q) \times R_{ch} \quad (3.70)$$

onde:

$R_{ch}$  = Confiabilidade da conexão ou da chave.

### 3.6 – Análise de Estruturas em Confiabilidade

Na prática, muitos sistemas apresentam estruturas complexas que fogem aos padrões até aqui abordados. A estimativa da confiabilidade de tais sistemas requer a aplicação de técnicas mais gerais e poderosas. Os procedimentos mais conhecidos são:

- 1 – Inspeção;
- 2 – Método espaço-evento;
- 3 – Caminho do sucesso;

- 4 – Decomposição;
- 5 – Grupo mínimo de corte;
- 6 – Grupo mínimo de ligação;
- 7 – Matriz de conexão;
- 8 – Árvore de eventos;
- 9 – Árvore de falhas.

Para uma melhor visualização da utilização de cada um destes procedimentos, segue a tabela 3.3, demonstrando sua descrição e em que situações os mesmos devem ser aplicados.

Procedimentos	Descrição e Aplicação
1 – Inspeção	A partir do diagrama de blocos, identifica os sistemas simples, calculando assim, a confiabilidade. Útil quando um pequeno número de componentes está envolvido.
2 – Método espaço-evento	Lista, sistematicamente, todas as possibilidades lógicas do sistema. A confiabilidade é obtida pela soma dos eventos favoráveis. Como se tem $2^n$ eventos, onde $n$ é o número de componentes, o procedimento fica trabalhoso para $n$ maior que 5 ou 6.
3 – Caminho do sucesso	Obtém-se todos os eventos favoráveis do sistema e calcula-se a confiabilidade pela união destes, utilizando a equação 3.17. Procedimento algébrico e de trabalhosa implementação para um número de componentes maior que 5.
4 – Decomposição	Também chamado de método da probabilidade condicional, pois, através da escolha de um componente principal, utiliza-se a equação 3.21 para calcular a confiabilidade. Procedimento algébrico que depende da escolha correta deste componente principal, e se torna inviável para um número de componentes maior que 5.
5 – Grupo mínimo de corte	É um conjunto de componentes do sistema, obtidos de tal forma que se todos o grupo mínimo falhar, o sistema falha. Identifica os modos de falha. Técnica poderosa e de fácil implementação computacional.
6 – Grupo mínimo de ligação	É um grupo de caminhos operacionais que formam uma conexão entre a entrada e a saída do sistema. Possui relação com o método espaço-evento.
7 – Matriz de conexão	Método matricial que fornece o mesmo resultado que os métodos de espaço-evento e grupo mínimo de ligação. Técnica poderosa e de fácil implementação computacional.
8 – Árvore de eventos	Consiste na representação ilustrativa em forma de árvore, de um espaço de eventos completo de um dado sistema. Se torna inviável para um número de componentes maior que 5.

9 – Árvore de falhas	Representa as condições que podem causar a falha do sistema. Método visual utilizado para analisar sistemas complexos. Utilizando a técnica, permite-se obter a probabilidade do evento principal.
----------------------	--

Tabela 3.4 : Descrição dos Principais Procedimentos de Análise de Estruturas.

### 3.6.1 – Método da Matriz de Conexão

O método da Matriz de Conexão é um procedimento de análise de estruturas de fácil implementação computacional, além de possuir um desenvolvimento teórico bastante simplificado. Assim, algumas considerações adicionais sobre este método serão demonstrados a seguir.

A técnica da matriz de conexão envolve a montagem de uma matriz  $M$  para um sistema, e então, empregando a técnica de multiplicação de matriz ou remoção nodal, obtém-se a transmissão final entre entrada e saída, ou seja, os caminhos operacionais do sistema. A matriz é construída com base nos elementos posicionados entre os nós, sendo que existem apenas um nó de entrada e um nó de saída, com fluxo de eventos numa única direção. Seja o exemplo da figura 3.9,

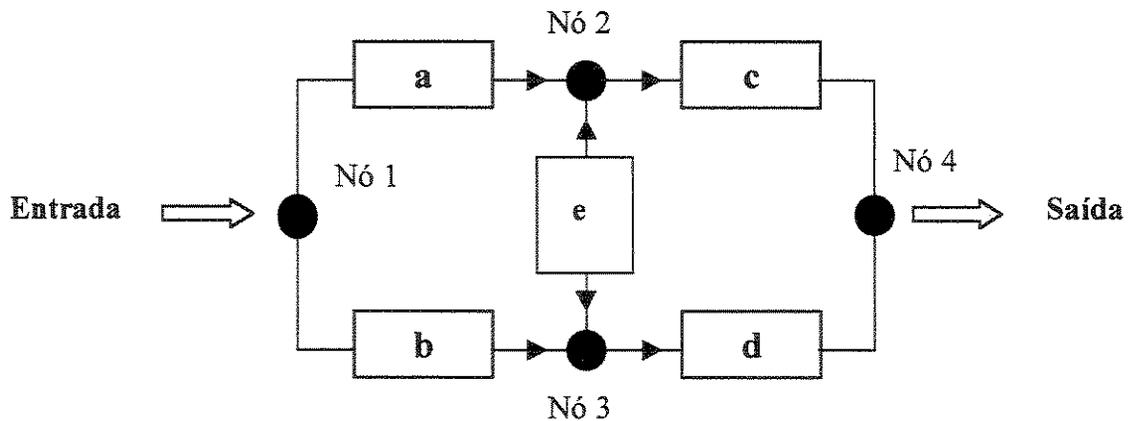


Figura 3.9 : Diagrama de um Sistema para Ilustração do Método da Matriz de Conexão.

A matriz de conexão da estrutura acima é montada de acordo com as seguintes regras:

- 1 – Os nós devem ser dispostos de tal maneira que entre um nó e outro, exista somente um componente ou um sistema simples;

- 2 – Os valores da diagonal principal da matriz, deverão possuir o valor 1;
- 3 – Se entre um nó e outro nó existir uma linha de comunicação com componente ou sistema simples, o valor colocado na matriz será a letra representativa do mesmo;
- 4 – Se entre um nó e outro nó existir uma linha de comunicação sem componente ou sistema simples, o valor colocado na matriz será 1;
- 5 – Se entre um nó e outro nó não existir uma linha de comunicação, o valor colocado na matriz será 0.

Aplicando as regras descritas para o sistema representado na figura 3.9, obtém-se:

$$\begin{array}{c}
 \text{nó: } 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\
 \mathbf{M} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & a & b & 0 \\ 0 & 1 & e & c \\ 0 & e & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{array} \tag{3.71}$$

Na multiplicação desta matriz, as seguintes regras devem ser observadas:

- 1 – A soma de elementos iguais é igual ao elemento;
- 2 – A multiplicação de elemento iguais é igual a 0 (Zero);
- 3 – A multiplicação do número 1 e um elemento é igual ao elemento;
- 4 – A multiplicação do número 0 e um elemento é igual a 0.

Assim, utilizando as regras acima descritas, verifica-se a facilidade de implementação computacional deste método. Aplicando-as para o sistema representado na figura 3.9, tem-se:

$$\begin{array}{c}
 \text{nó: } 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\
 \mathbf{M}^2 = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & a+be & b+ae & ac+bd \\ 0 & 1 & e & c+ed \\ 0 & e & 1 & ec+d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{array} \tag{3.72}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{nó: } 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\
 \mathbf{M}^3 = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \left[ \begin{array}{cccc} 1 & a+be & b+ae & ac+bd+bec+aed \\ 0 & 1 & e & c+ed \\ 0 & e & 1 & ec+d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]
 \end{array} \tag{3.73}$$

Potências maiores de  $\mathbf{M}$ , neste caso 4, 5 ... , fornecerão a mesma matriz descrita em 3.73, assim, comparando a potência posterior da matriz  $\mathbf{M}$  com a sua potência anterior, e verificando que as mesmas são iguais, tem-se um critério para o término do cálculo. Assim, o caminho operacional para o sistema ilustrado na figura 3.9, que se inicia no nó 1 e termina no nó 4, seria o valor descrito na junção da linha 1 com a coluna 4 da matriz  $\mathbf{M}^3$ , ou :

$$\text{Caminho Operacional} = ac+bd+bec+aed \tag{3.74}$$

## Capítulo 4

### Modelagem Teórica por Processos Estocásticos

Um dos grandes problemas na análise confiabilística reside na estimativa da confiabilidade de um sistema em termos da confiabilidade de seus componentes, calculada, na maioria das vezes, utilizando-se de uma abordagem probabilística. Para realizar esta estimativa, pode-se utilizar as seguintes metodologias:

- 1 – Métodos Combinatórios;
- 2 – Processos Estocásticos;
- 3 – Métodos de Cálculo de Índices.

Conforme Bubenko (1982), o primeiro método na estimativa da confiabilidade de um sistema é baseado nos conceitos combinatórios da teoria de probabilidade, adotando principalmente que os componentes são mutuamente independentes. Exemplos de cálculo de confiabilidade utilizando técnicas Bayesianas podem ser encontrados nos artigos de Keller (1982) e Soman (1993). Contudo, utilizando somente este método, o cálculo da confiabilidade fica incompleto, e não descreve a totalidade do desempenho do sistema, pois não permite as seguintes abordagens:

- 1 – Modelamento dos efeitos causados por condições externas, tais como condições ambientais ou variações de cargas;
- 2 – Modelamento de operações não independentes, de falha e reparo de componentes do sistema.

Para se conseguir as características acima, é necessário a utilização de processos estocásticos, com a propriedade de Markov, modelamento este, muito flexível, conforme Bubenko (1982). Kitchin (1988) menciona que o modelamento utilizando a propriedade de Markov, ou modelamento Markoviano, é uma técnica flexível e com visualização gráfica, útil na quantificação de tomada de decisões em “design for reliability”, verificando a conformidade com os objetivos de confiabilidade e otimizando as estratégias de manutenção de sistemas complexos. O método demonstra graficamente as informações de um sistema, calcula medidas de confiabilidade de sistemas e auxilia na otimização de parâmetros de projeto. Sharma (1993), após mencionar algumas das vantagens descritas deste método, menciona que, como desvantagem, o modelo Markoviano cresce com  $2^n$ , onde  $n$  é o número de componentes.

A primeira contribuição do método de Markov reside na modelagem de situações em que as taxas de falhas dos componentes não podem ser assumidas como independentes do estado atual do sistema. Aplicações típicas deste caso são os sistemas compartilhados ou redundantes, como membros estruturais, geradores elétricos ou bombas e válvulas mecânicas, operando conjuntamente e, conseqüentemente, dividindo a carga total. Quando uma destas unidades falha e a outra assume a carga total, este carregamento adicional, na verdade, irá contribuir para o aumento da taxa de falha da unidade operante. Este fato não pode ser abordado pelo método combinatório.

Os sistemas de espera ou realimentação são amplamente aplicados em sistemas com tolerância de falhas, como chips lógicos extra, dispositivos de navegação ou geradores de emergência. Tais sistemas também envolvem dependência entre seus componentes e estados, sendo, portanto, fortes aplicativos para o modelo de Markov, uma vez que, após a falha de um componente, a unidade de espera (ou redundância passiva) deve ser acionada, o que envolve a confiabilidade do processo de acionamento (relês elétricos, válvulas hidráulicas, circuitos de controle eletrônicos, etc), o bom funcionamento do dispositivo de acionamento em si e a confiabilidade da unidade redundante, fatores estes também dependentes do estado operacional do sistema num dado instante de tempo.

Dois são os benefícios consideráveis na aplicação de sistemas redundantes: mais de uma falha deve ocorrer para desencadear a falha do sistema e a unidade em falha pode ser reparada *in loco*, enquanto a carga é assumida pela unidade redundante. A possibilidade de reparo de um componente antes da ocorrência da falha da unidade redundante, em muito incrementa a confiabilidade do sistema, tanto para redundâncias ativas como para passivas.

Uma outra metodologia, seria a utilização do métodos de cálculo de índices. Pelo descrito em seu artigo, Bubenko (1982) menciona que os métodos para o cálculo de índices podem ser separados em duas classes gerais:

- 1 – Métodos Analíticos;
- 2 – Métodos de Simulação por Monte Carlo.

Os métodos analíticos utilizam as regras da teoria de probabilidade diretamente para calcular os índices da confiabilidade de um sistema, enquanto que os métodos de simulação por Monte Carlo criam uma história do funcionamento do sistema, por simulação em computador, e assim, calculam os índices por este histórico de funcionamento. A principal vantagem do método de Monte Carlo é que o desempenho do sistema, o qual é influenciado por efeitos probabilísticos, pode ser estudado com um mínimo de considerações e sem um tratamento direto das leis da probabilidade, que constitui a base da natureza estocástica do sistema. Uma desvantagem deste método seria que o mesmo requer uma grande quantidade de memória e processamento computacional para simular um histórico suficiente de operação para se obter valores significativos estatisticamente dos índices de confiabilidade. Outra desvantagem é a impossibilidade de se analisar a influência de mudanças nos parâmetros do sistema sem a total repetição da simulação.

#### **4.1 – Conceitos Básicos sobre a Teoria de Processos Estocásticos**

Muitos fenômenos físicos e medições de campo ou experimentais são designados como fenômenos estocásticos. Tais processos se referem a observações que não podem ser precisamente previstas com antecedência, mas existe a possibilidade de se especificar a probabilidade associada a diferentes estados num determinado tempo decorrido.

Conforme Hoel (1972), um processo estocástico  $\{X(t), t \geq 0\}$  pode ser definido como uma coleção de variáveis aleatórias  $X(t), t \in T$ , definido em um espaço de probabilidade comum, onde  $T$  é um subconjunto de  $(-\infty, +\infty)$ , sendo denominado como o conjunto de parâmetro do tempo. O processo é chamado Processo de Parâmetro Contínuo se  $T$  está definido em um intervalo de comprimento positivo, e de Processo de Parâmetro Discreto, se  $T$  está definido em um intervalo que contenha somente os números positivos.

Se a variável aleatória  $X(t)$  tem todos os seus valores contidos em  $S$ , então,  $S$  é denominado espaço de estados do processo. Um estado pode ser entendido como um valor assumido pela variável aleatória, e o espaço de estado do processo estocástico refere-se ao conjunto de valores possíveis que a variável aleatória pode assumir. Em análise de confiabilidade, o interesse reside na evolução do desempenho de projeto do sistema físico em função do tempo de operação decorrido.

A estacionalidade de um processo estocástico  $\{X(t), t \geq 0\}$  é definida como sendo simples, ou de primeira ordem, se a distribuição do processo é invariante no tempo. Isto significa que, para qualquer  $h > 0$ ,  $X(t)$  e  $X(t+h)$  possuem distribuições de probabilidade idênticas. Como consequência, o valor esperado do processo é constante. O processo estocástico é dito de segunda ordem, se a distribuição conjunta de  $X(t)$  e  $X(s)$  é invariante em qualquer mudança de tempo. Isto significa que para  $i, j \in S$ , e  $h_1, h_2 > 0$ , as distribuições conjuntas  $P\{X(t) = i \text{ e } X(s) = j\}$  e  $P\{X(t+h_1) = i \text{ e } X(s+h_2) = j\}$  são idênticas. Como consequência, os dois primeiros momentos do processo são constantes, assim como, a covariância entre  $X(s)$  e  $X(t)$  depende somente de  $|t - s|$ .

Um processo estocástico  $\{N(t), t \geq 0\}$  é dito ordenado se, para um pequeno intervalo de tempo  $\Delta t$ , o valor incrementado em  $N(t)$  não muda significativamente. Matematicamente, tem-se:

$$P\{N(t + \Delta t) - N(t) > 1\} = o(\Delta t) \quad (4.1)$$

onde,

$$\frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \rightarrow 0, \text{ Quando } \Delta t \rightarrow 0 \quad (4.2)$$

Em 1907, o matemático russo A.A. Markov introduziu o conceito de um tipo de processo estocástico cujo comportamento probabilístico futuro pode ser determinado unicamente através do estado presente, sendo este tipo de comportamento sem memória. Em outras palavras, dado o presente estado de um processo, o histórico passado do mesmo não afeta as probabilidades condicionais dos eventos no futuro. Muitos processos estocásticos de interesse teórico e aplicado possuem esta consideração, e os processos que possuem esta propriedade são denominados de Processos de Markov. Em confiabilidade, alguns problemas são extremamente simplificados, uma vez que o conhecimento do estado presente desacopla os estados passado e futuro. Matematicamente, para  $t > s$  e  $i \in S$ , tem-se:

$$P\{X(t) = i / X(u), 0 \leq u \leq s\} = P\{X(t) = i / X(s)\} \quad (4.3)$$

A propriedade Markoviana descrita acima, implica que o tempo de permanência de um processo num dado estado deve possuir a propriedade de não possuir memória, característica de uma distribuição exponencial negativa. Assim, uma outra propriedade do Processo Markoviano, conforme descrito por Clarke (1970), é que o tempo em que o processo permanece em determinado estado, tempo entre transições, é uma variável aleatória com uma distribuição exponencial negativa. Conforme item 3.4.1, equação 3.49, esta distribuição possui uma taxa  $\lambda(t)$  constante no tempo, o que permite a modelagem dos sistemas em análise de confiabilidade. Conforme Ravichandran (1990), a distribuição Erlangiana e a Erlangiana Generalizada poderiam ser utilizadas.

Os Processos de Markov podem ser divididos de duas formas, observando sempre o subconjunto  $T$ , pois  $S$  é discreto. Caso  $T$  discreto, tem-se um Processo Markoviano de Parâmetro Discreto, denominado de Cadeia de Markov, enquanto que se  $T$  for contínuo, tem-se um Processo Markoviano de Parâmetro Contínuo, denominado de Processo de Markov, onde se enquadram vários problemas em análise de confiabilidade.

## 4.2 – Divisões da Teoria de Processos

Birolini (1982) menciona que a análise de confiabilidade é feita em dois níveis diferentes. No nível inicial do projeto, o engenheiro de desenvolvimento avalia a taxa de falha e, muitas vezes, também realiza uma análise do modo de falha para descobrir os pontos mais fracos do projeto. Isto deve ser feito o quanto antes possível, na fase de desenvolvimento. Para realizar o mesmo, o seguinte procedimento pode ser adotado:

- 1 – Definir o item e a função requerida;
- 2 – Confecção do digrama de blocos do sistema;
- 3 – Determinação das tensões (térmicas, elétricas e/ou mecânicas), aplicadas em cada um dos componentes do diagrama de blocos;
- 4 – Determinação da taxa de falha  $\lambda$  de cada componente do diagrama de blocos;
- 5 – Calcular a função de confiabilidade  $R(t)$  deste sistema;
- 6 – Realizar um FMEA deste sistema para determinar os pontos de falhas críticos ou particulares do mesmo;
- 7 – Eliminar as fraquezas do sistema e repetir os passos de 2 a 6 até que as metas de confiabilidade sejam alcançadas.

Concluída esta fase, conforme o autor, se inicializa o nível de sistema, onde o engenheiro de confiabilidade analisa o comportamento estocástico do sistema, levando em consideração os aspectos de confiabilidade, manutenibilidade e logística. Nesta fase, o uso da teoria de Processos Estocásticos se faz necessário. Conforme esta teoria, os principais processos estudados e aplicados seriam:

- 1 – Processos Markovianos;
- 2 – Processos Semi-Markovianos;
- 3 – “Renewal Process”;
- 4 – Processos de Renovação Alternado;
- 5 – Processo Regenerativo com somente um Estado Regenerado;
- 6 – Técnica de Variáveis Suplementares.

Para uma melhor descrição e visualização da utilização de cada um destes processos, segue-se a tabela 4.1, demonstrando sua descrição e em que situações os mesmos devem ser aplicados.

Processo Estocástico	Utilizado no modelamento de	Conhecimento necessário	Grau de dificuldade
Processos Markovianos	Sistemas com estrutura arbitrária e taxas constantes de falha e reparo.	Equações Diferenciais	Baixo
Processos Semi-Markovianos	Sistemas com estrutura arbitrária, com taxas de falha constante, taxa de reparo arbitrária, mas com somente uma equipe de reparo.	Equações Integrais	Médio
“Renewal Process”	Reserva de peças sobressalentes, com taxa de falha arbitrária e substituição desnecessária, ou com tempo de reparo.	Teoria de Renovação	Médio
Processos de Renovação Alternado	1 item de sistema com taxas de falha e reparo arbitrárias.	Teoria de Renovação	Médio
Processo Regenerativo com somente um estado regenerado	Algumas estruturas gerais com taxas de falha e reparo gerais.	Equações Integrais	Alto
Técnica de Variáveis Suplementares	Sistemas com estrutura arbitrária e taxas de falha e reparo também arbitrárias.	Métodos Sofisticados	Alto / Muito Alto

Tabela 4.1 : Descrição dos Principais Processos Estocásticos Utilizados em Análise de Confiabilidade.

A escolha do Processo Estocástico para o modelamento de um sistema em confiabilidade é freqüentemente difícil, e erros podem ocorrer devido a limitações práticas ou teóricas do mesmo.

#### 4.3 – Processo Markoviano Aplicado em Confiabilidade

A formulação de Markov, em análise de confiabilidade, inicia-se considerando todas as possíveis combinações de funcionamento dos componentes de um sistema, que consiste na particular combinação de estar operando (1) ou em falha (0). Este conjunto de combinações dará origem ao espaço de estados do processo, denominado  $S$ . Assim, um sistema composto por  $n$  componentes, apresenta  $2^n$  combinações de estado, conforme descrito na tabela 4.2.

Estado / Componente	1	2	3	4	...	$n+1$	$n+2$	...	$2^n$
1	1	0	1	1	...	1	0	...	0
2	1	1	0	1	...	1	0	...	0
3	1	1	1	0	...	1	1	...	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$n$	1	1	1	1	...	0	1	...	0

Tabela 4.2 : Tabela Contendo os Estados de um Sistema.

Assim, observa-se que cada estado é um vetor com uma combinação do funcionamento ou não de cada componente do sistema, demonstrando se o sistema está em operação ou não, conforme sua estrutura. Como exemplo, o estado 1 seria um vetor de ordem  $n$ , ou  $(1,1,1, \dots,1)$ , com  $n$  elementos. Para se confeccionar a tabela de estado do sistema, algumas regras devem ser seguidas:

- 1 – O modo de funcionamento dos componentes do sistema terá a simbologia (1) se estiver operando, ou (0) se estiver em falha;
- 2 – O estado 1 será sempre o estado operacional inicial do sistema, sem falhas;
- 3 – O estado  $2^n$  será sempre o estado de falha total ou final do sistema;
- 4 – Os demais estados serão construídos, a partir do estado 1, admitindo-se inicialmente, uma falha de componente no sistema. Combina-se então, a mesma para os  $n$  componentes. Depois, admite-se 2 falhas de componente no sistema e realiza-se as combinações, e assim sucessivamente até se admitir  $n$  falhas e se obter o estado de falha final do sistema. O total de combinações para cada quantidade de falha, percorrendo os  $n$  componentes do sistema, segue o triângulo de Pascal.

Observando a estrutura da tabela 4.2, para um sistema com 3 componentes, tem-se um conjunto de estados  $S = \{ S_1 = 1, S_2 = 2, \dots, S_8 = 8 \}$ . Conforme descrito na regra 4 acima, as combinações seguiriam um triângulo de Pascal. Pelo mesmo, teria-se 1 estado sem falha ( o estado 1 ), 3 estados com 1 falha ( os estados 2, 3 e 4 ), 3 estados com 2 falhas ( os estados 5, 6 e 7 ) e 1 estado com 3 falhas ( o estado 8 ). Pela análise destes estados, percebe-se que o estado 1 se comunica com os estados 2, 3 e 4 por uma falha, modelado por uma taxa de falha  $\lambda$ ,

respectivamente dos componentes 1, 2 e 3. O contrário também é válido, onde os estados 2, 3 e 4, se comunicam com o estado 1 por um reparo, modelado por uma taxa de reparo  $\mu$ . Contudo, os estados 2, 3 e 4 não se comunicam entre si.

Este tipo de análise vale para qualquer um dos estados pertencentes a  $S$ , sempre respeitando a diferença de uma transição entre os estados, seja devido a uma falha ou reparo, ou de uma taxa específica entre dois estados, como no caso de uma falha devido ao chaveamento de um sistema. Sendo assim, adotando-se que as taxas de falha e reparo dos componentes sejam constantes, isto é, que o tempo de vida e de reparo de cada componente seja regido por uma distribuição exponencial negativa, ter-se-á um processo Markoviano, observando-se que as taxas dos componentes modelam as taxas de transição entre os estados.

Utilizando uma linguagem mais técnica, esta modelagem poderia ser descrita como um tipo de Processos Markovianos de Salto Puro, especificamente uma variação do Processo de Nascimento ou Morte. No capítulo 3 de seu livro, Hoel (1972), trata especificamente deste processo, descrevendo em detalhes a obtenção das equações de Chapman-Kolmogorov, que regem este processo. Contudo, para uma melhor compreensão da modelagem, a descrição do modelo será feita utilizando de informações descritas em Ravichandran (1990) e Ramakumar (1993).

Seja um processo estocástico  $\{X(t), t \geq 0\}$ , onde  $X(t)$  seja uma variável aleatória que representa o estado do sistema após um tempo  $t$ , sendo os estados descritos no conjunto de estados  $S$ , obtido conforme as quatro regras descritas na página anterior. Seja  $N(t)$  uma variável aleatória que represente o número de falhas de componentes do sistema após um tempo  $t$ , sendo o número de falhas descritos no conjunto de estados  $S_N = \{0, 1, \dots, n\}$ .

Pelo requerimento de ordenança, conforme 4.1, em um pequeno intervalo de tempo  $\Delta t$ , o número de falhas ou reparos deve ser um ou nenhum, acarretando ou não uma mudança do estado de  $S_i$  para  $S_j$ , ambos pertencentes a  $S$ , sendo:

- 1 –  $i < j$  para o caso de uma falha de um componente;
- 2 –  $i > j$  para o caso de um reparo de um componente;
- 3 –  $i = j$  para o caso de nenhuma falha ou reparo.

Sejam as seguintes definições,

$$\rho_{ij} = \text{Taxa de Mudança do estado } S_i \text{ para o estado } S_j, \quad i, j \in S \quad (4.4)$$

$$P_{ij} = \rho_{ij} \Delta t, \quad i, j \in S \quad (4.5)$$

$$P_i(t) = P\{X(t) = i / X(0) = S_1\}, \quad i \in S \quad (4.6)$$

onde,

$P_{ij}$  = Probabilidade de transição do estado de  $S_i$  para  $S_j$ , num intervalo de tempo  $\Delta t$ .

$P_i(t)$  = Probabilidade de encontrar o sistema no estado  $S_i$  no tempo  $t$ .

O comportamento do processo estocástico  $\{X(t), t \geq 0\}$  estudado, pode ser caracterizado pelas informações contidas na tabela 4.3, onde  $j \neq k \neq i$ .

Condição	Status em $t$	Mudança em $(t, t + \Delta t)$	Status em $t + \Delta t$	Probabilidade Correspondente
(a)	$S_i$	Falha de 2 ou mais componentes	$S_j$	$o(\Delta t)$
(b)	$S_i$	Reparo de 2 ou mais componentes	$S_k$	$o(\Delta t)$
(c)	$S_i$	Falha de 1 componente	$S_j$	$\lambda_{ij} \cdot \Delta t + o(\Delta t)$
(d)	$S_i$	Reparo de 1 componente	$S_k$	$\mu_{ik} \cdot \Delta t + o(\Delta t)$
(e)	$S_i$	Nenhuma falha ou reparo	$S_i$	$1 - \lambda_{ij} \cdot \Delta t - \mu_{ik} \cdot \Delta t + o(\Delta t)$
(f)	$S_j$	Reparo de 1 componente	$S_i$	$\mu_{ji} \cdot \Delta t + o(\Delta t)$
(g)	$S_k$	Falha de 1 componente	$S_i$	$\lambda_{ki} \cdot \Delta t + o(\Delta t)$

Tabela 4.3 : Comportamento do Processo Estocástico.

A partir das informações da tabela 4.3, a probabilidade de se encontrar o sistema no estado  $S_i$  no tempo  $t + \Delta t$ , seria,

$$P_i(t + \Delta t) = \lambda_{ki} \cdot \Delta t \cdot P_k(t) + \mu_{ji} \cdot \Delta t \cdot P_j(t) + [1 - \lambda_{ij} \cdot \Delta t - \mu_{ik} \cdot \Delta t] \cdot P_i(t) + o(\Delta t), \quad j \neq k \neq i \quad (4.7)$$

onde,

$S_k$  = um estado anterior ao  $S_i$ .

$S_j$  = um estado posterior a  $S_i$ .

Utilizando a notação da equação 4.4, e juntando os índices  $j$  e  $k$  em um único índice, tem-se,

$$P_i(t + \Delta t) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \rho_{ji} \cdot \Delta t \cdot P_j(t) + [1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \rho_{ij} \cdot \Delta t] \cdot P_i(t) + o(\Delta t), \quad i, j \in S \quad (4.8)$$

Manipulando a equação 4.8 e utilizando a equação 4.2 quando  $\Delta t \rightarrow 0$ , tem-se,

$$\frac{P_i(t + \Delta t) - P_i(t)}{\Delta t} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \rho_{ji} \cdot P_j(t) - [\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \rho_{ij}] \cdot P_i(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}, \quad i, j \in S \quad (4.9)$$

$$P'_i(t) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \rho_{ji} \cdot P_j(t) - [\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \rho_{ij}] \cdot P_i(t), \quad i, j \in S \quad (4.10)$$

Para  $i = 1, 2, \dots, n$  componentes, tem-se um conjunto de  $n$  equações diferenciais de primeira ordem, que escrita na forma matricial, obtém-se,

$$\begin{bmatrix} P'_1(t) \\ P'_2(t) \\ \vdots \\ P'_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sum_{j=2}^n \rho_{1j} & \rho_{21} & \cdots & \rho_{n1} \\ \rho_{12} & -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^n \rho_{2j} & \cdots & \rho_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{1n} & \rho_{2n} & \cdots & -\sum_{j=1}^{n-1} \rho_{nj} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ \vdots \\ P_n(t) \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

ou,

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}(t) \quad (4.12)$$

Para se obter a matriz  $Q$ , denominada matriz dos coeficientes do sistema de equações diferenciais ou matriz geradora, a partir das taxas de falha ou reparo do sistema em estudo, utiliza-se de uma matriz  $\rho$ , denominada matriz das taxas, definida como sendo:

$$\rho = \begin{matrix} \text{Estado} & S_1 & S_2 & \dots & S_n \\ \begin{matrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \dots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \dots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \dots & \rho_{nn} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (4.13)$$

Para a construção correta da matriz  $\rho$ , faz-se necessária a análise da configuração do sistema, permitindo assim, a identificação de quais estados indicam a operação ou a falha do sistema, sendo os primeiros pertencentes ao conjunto de estados funcionais do sistema  $O$ , e os outros, pertencente ao conjunto  $S - O$ . Com esta informação, inicia-se a análise da tabela de estados de um sistema, ou tabela 4.2.

Para se calcular os valores de confiabilidade do sistema, considera-se a interação entre dois estados operacionais, ou entre um estado operacional e um estado de falha. No cálculo dos valores de disponibilidade, considera-se também a interação entre um estado de falha e um estado operacional, pois conforme definição, a disponibilidade inclui reparos quando necessário e períodos de disponibilidade ou em funcionamento, alternando com períodos de reparos ou sem funcionamento, originários de um falha, enquanto que o conceito de confiabilidade geralmente prevê somente uma vida ou uma falha. Para o cálculo de disponibilidade pode-se adotar também a interação entre dois estados de falha, o que não ocorre no cálculo de confiabilidade.

A partir destas considerações, pode-se implementar a dependência entre os componentes do sistema, as equipes de manutenção disponíveis e a política de prioridade de manutenção dos componentes constituintes do sistema, sendo que o primeiro afeta o valor de cada taxa, enquanto os demais, a presença ou não de uma dada taxa na matriz  $\rho$ . Por meio desta matriz, a matriz  $Q$  será obtida pela equação 4.14.

$$\mathbf{Q} = \boldsymbol{\rho}^T \quad (4.14)$$

Resolvendo o sistema de equações diferenciais, descrito na equação 4.12, obtém-se os valores de  $P_i(t)$ . Assim, com o conjunto de estados funcionais do sistema  $O$  já obtido, os valores de confiabilidade e disponibilidade do sistema são obtidos conforme equação abaixo:

$$R(t) = \sum_{i \in O} P_i(t) \quad \text{e} \quad A(t) = \sum_{i \in O} P_i(t) \quad (4.15)$$

#### 4.4 – Modelagem de um Sistema Simples – Série, Paralelo e R-em-N

Conforme mencionado na introdução do capítulo 3, o conceito de confiabilidade prevê somente uma vida ou uma falha, isto é, uma vez que o sistema atingiu um estado de falha, a análise do mesmo termina, não existindo comunicação entre os estados de falha, ou entre estes e os operacionais, por meio de taxas de reparo. Contudo, o conceito de disponibilidade, inclui reparos, quando necessário, e períodos de disponibilidade ou em funcionamento, alternando com períodos de reparos ou sem funcionamento originários de uma falha, permitindo a comunicação entre os estados de falha, ou entre estes e os operacionais, por meio de taxas de reparo.

Para um sistema em série, conforme descrito no item 3.51, todos os componentes devem funcionar para que o sistema funcione. Montando a tabela de estados para um sistema com  $n$  componentes ou tabela 4.2, e considerando a condição deste sistema, obtém-se que o estado que satisfaz esta condição, seria o estado 1. Portanto, este estado será chamado de estado operacional do sistema, enquanto que os outros estados serão chamados de estados de falha do sistema. Logo, conforme equação 4.15, o valor da confiabilidade e da disponibilidade seriam:

$$R_s(t) = P_1(t) \quad (4.16)$$

e,

$$A_s(t) = P_1(t) \quad (4.17)$$

Para um sistema em paralelo, conforme descrito no item 3.52, o mesmo é considerado disposto logicamente em paralelo do ponto de vista da confiabilidade, se o sucesso da operação

do conjunto depende do sucesso da operação de pelo menos um dos seus componentes, ou ainda, todos os componentes deveriam falhar para o conjunto falhar. Montando a tabela de estados para um sistema com  $n$  componentes ou tabela 4.2, e considerando a condição deste sistema, obtém-se que o estado que não satisfaz esta condição, seria o estado  $2^n$ . Portanto, este estado será chamado de estado de falha do sistema, enquanto que os outros estados serão chamados de estados operacionais do sistema. Portanto, conforme equação 4.15, o valor da confiabilidade e da disponibilidade seriam:

$$R_p(t) = P_1(t) + P_2(t) + \dots + P_{2^{n-1}}(t) = 1 - P_{2^n}(t) \quad (4.18)$$

e,

$$A_p(t) = P_1(t) + P_2(t) + \dots + P_{2^{n-1}}(t) = 1 - P_{2^n}(t) \quad (4.19)$$

Para um sistema em r-em-n, conforme descrito no item 3.53, o mesmo é considerado disposto logicamente em estrutura r-em-n, do ponto de vista da confiabilidade, se o sucesso da operação do conjunto depende do sucesso da operação de pelo menos  $r$  dos seus  $n$  componentes, ou que  $n-r+1$  componentes deveriam falhar, para o conjunto falhar.

Montando a tabela de estados para um sistema com  $n$  componentes ou tabela 4.2, pela definição e pela análise da equação 3.65, considera-se então, que os estados com  $r$  componente operacionais,  $r+1$ ,  $r+2$ , ..., até com  $n$  componentes operacionais serão chamado de estados operacionais do sistema, enquanto que os outros estados serão chamados de estados de falha do sistema. Seja  $ne$  o número de estados que satisfazem a condição, partindo do estado com todos os  $n$  componentes funcionando, ou estado 1, até o último estado com  $r$  componentes operacionais. Assim, o mesmo é calculado por:

$$ne = \sum_{k=r}^n {}_n C_k \quad (4.20)$$

onde:

${}_n C_k$  = Combinatória de  $n$  Componentes, tendo  $k$  Componentes Operacionais.

A equação 4.20, representa a soma dos primeiros  $n-r+1$  termos de um Triângulo de Pascal, na linha de potência  $n$ . Com isto, conforme equação 4.15, o valor da confiabilidade e da disponibilidade seriam:

$$R_{r-em-n}(t) = \sum_{i=1}^{ne} P_i(t) \quad (4.21)$$

e,

$$A_{r-em-n}(t) = \sum_{i=1}^{ne} P_i(t) \quad (4.22)$$

#### 4.5 – Implementação da Dinâmica de um Sistema

A fim de exemplificar a utilização da modelagem desenvolvida, seja um sistema em paralelo com dois componentes A e B, onde o componente A possui taxa de falha e reparo,  $\lambda_a$  e  $\mu_a$ , enquanto que o componente B,  $\lambda_b$  e  $\mu_b$ . A formulação de Markov inicia-se considerando todas as possíveis combinações de estados dos componentes de um sistema, obtidos conforme regras descritas no item 4.3. Seguindo as mesmas, tem-se a seguinte tabela:

Estado / Componente	1	2	3	4
A	1	0	1	0
B	1	1	0	0

Tabela 4.4 : Descrição dos Estados de um Sistema Simples em Paralelo com 2 Componentes.

Na teoria de Processos Estocástico, a representação gráfica das interações entre os estados é muito utilizada, pois a mesma é didática. Para um sistema constituído de dois componentes, é possível fazer um diagrama bidimensional, ilustrando a montagem da matriz  $\rho$ . Para o caso de três ou mais componentes no sistema, esta representação se torna inviável na análise de confiabilidade, montando-se a matriz  $\rho$  diretamente pela análise das interações entre estados. Estas interações são influenciadas pela classificação dos estados, seja operacional ou de falha, e também pela dinâmica adotada, ou seja, pela inter-relação causada entre dois estados por um

componente que falhou e/ou foi reparado, assim como, por variação da taxa de falha de um componente devido a dependência com outro componente, equipes de manutenção disponíveis e por uma política de prioridade de manutenção existente.

#### 4.5.1 – Implementação de Dependências Devido a Falha de Componentes

Inicialmente, considera-se o sistema adotado somente com as relações de falha dos componentes. Analisando a tabela 4.4 com esta consideração, obtém-se o seguinte diagrama de estados:

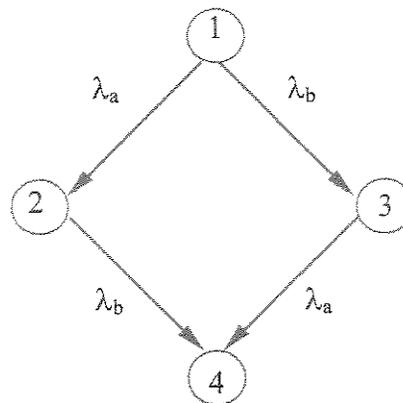


Figura 4.1 : Diagrama dos Estados do Sistema por Falha dos Componentes.

Conforme a teoria, entre cada transição espera-se que ocorra uma ou nenhuma falha ou reparo de componente. Assim, as transições de estado ocorreriam do estado 1 para o estado 2 ou 3, do estado 2 para o estado 4 e do estado 3 para o estado 4. Não ocorre interação entre os estados 2 e 3 porque os mesmos são opostos, não possuindo apenas uma posição diferente, nem entre os estados 1 e 4, pois não se considera no modelo a ocorrência de duas ou mais falhas simultâneas. Assim, obtém-se uma matriz  $\rho$ , conforme demonstrado abaixo:

$$\rho = \begin{bmatrix} -\lambda_a - \lambda_b & \lambda_a & \lambda_b & 0 \\ 0 & -\lambda_b & 0 & \lambda_b \\ 0 & 0 & -\lambda_a & \lambda_a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Assumindo a condição de que na falha do componente A a carga do mesmo seria assumida pelo componente B, tem-se que nesta interação, a taxa de falha do componente B seria aumentada

em 50%. Logo, analisando a tabela 4.4 e incluindo esta condição, observa-se que a mesma ocorre somente na transição do estado 2 para o estado 4. Assim, teria-se o seguinte diagrama de estados:

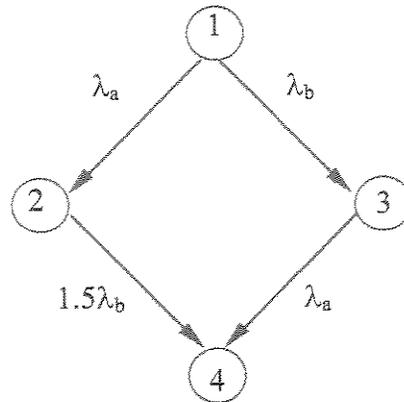


Figura 4.2 : Diagrama dos Estados do Sistema Adotando Interação de Componentes.

Obtendo-se a seguinte matriz  $\rho$ :

$$\rho = \begin{bmatrix} -\lambda_a - \lambda_b & \lambda_a & \lambda_b & 0 \\ 0 & -1.5\lambda_b & 0 & 1.5\lambda_b \\ 0 & 0 & -\lambda_a & \lambda_a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \dots (4.24)$$

Assim, caso o sistema a ser analisado possua  $n$  componentes, esta mesma análise pode ser considerada, utilizando-se de todas as interações conhecidas, seja somente entre dois componentes, conforme descrito acima e estendido para este novo sistema, ou entre a interação da falha de um componente com dois, três, ou até  $n-1$  componentes, ou mesmo entre a interação da falha de dois ou mais componentes, com o restante dos componentes funcionais deste novo sistema.

#### 4.5.2 – Implementação da Influência de Equipes e Política de Manutenção

Considere o sistema em paralelo com dois componentes do item anterior, supondo que o mesmo disponha de duas equipes de manutenção para reparar a falha dos componentes, assim como uma política de manutenção em que o componente A seja reparado primeiro que o componente B. Assim, obtém-se o seguinte diagrama de estados, conforme análise da tabela 4.4:

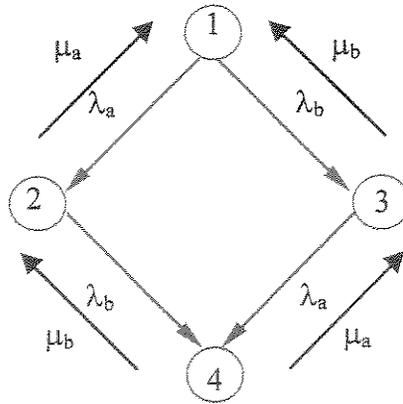


Figura 4.3 : Diagrama dos Estados do Sistema por Falha e Reparo dos Componentes.

Observe que, caso a política de manutenção fosse que o componente B seja reparado primeiro que o componente A, obteria-se o mesmo diagrama de estados. Isto ocorre porque o número de equipes de reparo é igual ao número de falhas totais do sistema. Por análise destas condições, obtém-se uma nova matriz  $\rho$ , conforme demonstrado abaixo:

$$\rho = \begin{bmatrix} -\lambda_a - \lambda_b & \lambda_a & \lambda_b & 0 \\ \mu_a & -\lambda_b - \mu_a & 0 & \lambda_b \\ \mu_b & 0 & -\lambda_a - \mu_b & \lambda_a \\ 0 & \mu_b & \mu_a & -\mu_a - \mu_b \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

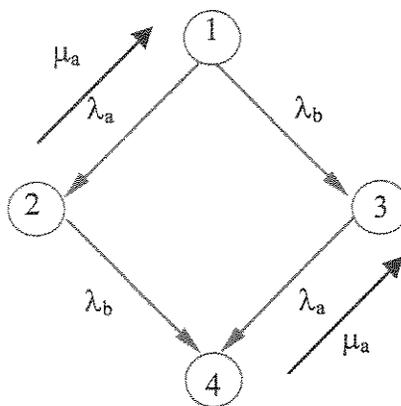


Figura 4.4 : Diagrama dos Estados do Sistema para o Caso 1.

Seja agora um caso 1, onde o sistema possui somente uma equipe de manutenção, e que a

política de reparo permita que somente o componente A seja reparado. Com esta condição, e por análise da tabela 4.4, observa-se que a mesma ocorre na transição do estado 4 para o estado 3, e na transição do estado 2 para o estado 1. Assim, teria-se o diagrama de estados da figura 4.4.

Obtém-se uma nova matriz  $\rho$ , conforme demonstrado abaixo:

$$\rho = \begin{bmatrix} -\lambda_a - \lambda_b & \lambda_a & \lambda_b & 0 \\ \mu_a & -\lambda_b - \mu_a & 0 & \lambda_b \\ 0 & 0 & -\lambda_a & \lambda_a \\ 0 & 0 & \mu_a & -\mu_a \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Considere agora, o caso 2, onde a política de reparo permite que somente o componente B seja reparado, mantendo-se uma equipe de manutenção. Com esta condição, e por análise da tabela 4.4, observa-se que a mesma ocorre na transição do estado 4 para o estado 2, e na transição do estado 3 para o estado 1. Assim, obtém-se a matriz  $\rho$ , conforme demonstrado abaixo:

$$\rho = \begin{bmatrix} -\lambda_a - \lambda_b & \lambda_a & \lambda_b & 0 \\ 0 & -\lambda_b & 0 & \lambda_b \\ \mu_b & 0 & -\lambda_a - \mu_b & \lambda_a \\ 0 & \mu_b & 0 & -\mu_b \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Com esta nova condição, teria-se o seguinte diagrama de estados:

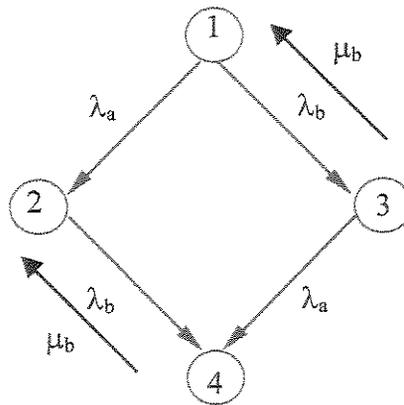


Figura 4.5 : Diagrama dos Estados do Sistema para o Caso 2.

Considere, por fim, o caso 3, onde a política de reparo permite que o componente A seja reparado primeiro que o componente B, mantendo-se uma equipe de manutenção. Com esta condição, e por análise da tabela 4.4, observa-se que a mesma ocorre na transição do estado 4 para o estado 3, na transição do estado 3 para o estado 1 e na transição do estado 2 para o estado 1. Com esta nova condição, teria-se o seguinte diagrama de estados:

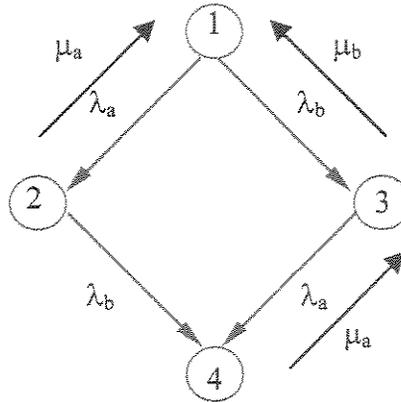


Figura 4.6 : Diagrama dos Estados do Sistema para o Caso 3.

Assim, obtém-se a matriz  $\rho$ , conforme demonstrado abaixo:

$$\rho = \begin{bmatrix} -\lambda_a - \lambda_b & \lambda_a & \lambda_b & 0 \\ \mu_a & -\lambda_b - \mu_a & 0 & \lambda_b \\ \mu_b & 0 & -\lambda_a - \mu_b & \lambda_a \\ 0 & 0 & \mu_a & -\mu_a \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

Observando as equações 4.25, 4.26, 4.27 e 4.28, nota-se que elas são diferentes entre si. Assim, os valores de confiabilidade e de disponibilidade serão um pouco diferentes para cada política de manutenção adotada, assim como, para as quantidades de equipes de manutenção disponíveis. No caso de não se ter nenhuma equipe de reparo e, conseqüentemente, nenhuma política de reparo, forneceria um equacionamento conforme equação 4.23, e diagrama de estados conforme figura 4.1. Observa-se também, que abaixo da diagonal principal tem-se a região onde se encontram somente taxas de reparo  $\mu$ , enquanto que acima da mesma, se encontram somente

taxas de falha,  $\lambda$ . Esta observação, apesar de simples, constitui uma condição para a verificação da montagem correta da matriz  $\rho$ .

No caso da análise de um sistema com  $n$  componentes, este mesmo procedimento pode ser considerado, seguindo a análise descrita nos exemplos deste item. A medida que o número de componentes aumenta, este tipo de análise se torna cada vez mais complexa, podendo-se combinar diferentes equipes de manutenção com diferentes políticas de reparo, obtendo valores diferentes de confiabilidade e de disponibilidade, para um dado valor de tempo. Pode-se também, fazer a mesma combinação com as interações devido a falha de componentes, seguindo a análise descrita nos exemplos do item 4.51, realizando assim, um estudo mais detalhado do sistema em avaliação.

#### 4.6 – Métodos de Resolução de Sistemas O.D.E.

Seja um sistema de equações diferenciais, conforme equação 4.12,

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}(t) \quad (4.12)$$

onde  $\mathbf{P}(t)$  é a matriz contendo as Probabilidades de cada evento,

$$\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ \vdots \\ P_n(t) \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Tem-se que, conforme descrito no item 4.1, a matriz  $\mathbf{Q}$  possui todos os seus elementos constantes, assim, o sistema a ser resolvido será,

$$\mathbf{P}(t) = e^{\mathbf{Q}t} \cdot \mathbf{P}(0) \quad (4.30)$$

onde  $e^{\mathbf{Q}t}$  é denominada Matriz de Transição de Estados e  $\mathbf{P}(0)$  são as condições iniciais do modelo, ou,

$$\mathbf{P}(0) = \begin{bmatrix} P_1(0) \\ P_2(0) \\ \vdots \\ P_n(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

Para a resolução do sistema descrito na equação 4.12, pode-se utilizar um dos seguintes métodos:

- 1 – Transformada de Laplace;
- 2 – Expansão em Série;
- 3 – Método da Matriz Resolvente;
- 4 – Método dos Autovalores;
- 5 – Método de Runge-Kutta;
- 6 – Método de Uniformização.

Para uma melhor descrição e visualização da utilização de cada um destes métodos, segue-se a tabela 4.5, demonstrando sua descrição e em que situações os mesmos devem ser aplicados.

Método	Descrição
Transformada de Laplace	Método de resolução geral de sistemas de equações diferenciais. Permite a obtenção da solução analítica do sistema de equações diferenciais.
Expansão em Série	Consiste na expansão em série dos termos de $e^{Qt}$ da equação 4.30, originando uma matriz onde estes termos são equações polinomiais, que podem ser substituídas por expansões em série de funções exponenciais. A resolução algébrica do sistema é obtida pela multiplicação desta matriz por $\mathbf{P}(0)$ .
Método da Matriz Resolvente	Consiste na aplicação da transformada de Laplace inversa em uma matriz $\mathbf{R}(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{Q}]^{-1}$ , obtendo assim, a resolução do termo $e^{Qt}$ . A resolução do sistema é obtido pela multiplicação desta matriz por $\mathbf{P}(0)$ , conforme equação 4.30.

Método dos Autovalores	Consiste no cálculo dos autovalores e autovetores da matriz $Q$ . Os autovetores formam uma nova matriz denominada matriz modal $M$ , que permite a obtenção do termo $e^{Qt}$ , por $e^{Qt} = M \cdot e^{Dt} \cdot M^{-1}$ . A resolução do sistema é obtida pela multiplicação desta matriz por $P(0)$ , conforme equação 4.30.
Método de Runge-Kutta	O método mais utilizado seria o de Runge-Kutta explícito de quarta ordem. É um dos melhores integradores explícitos de 1 passo, fornecendo uma precisão muito boa. Método baseada em aproximação de uma função usando expansões em série de Taylor.
Método de Uniformização	Método desenvolvido através de considerações probabilísticas, para a realização de análise transiente. Considerado, conforme descrito em Souza e Silva (1992), uma das técnicas mais eficientes para análise transientes de modelos Markovianos.

Tabela 4.5 : Descrição dos Principais Métodos de Resolução de Sistemas de Equações Diferenciais de Primeira Ordem.

#### 4.6.1 – Método de Uniformização

Considere novamente o processo estocástico  $\{X(t), t \geq 0\}$ , onde  $X(t)$  é uma variável aleatória, descrito no item 4.3. O elemento  $\rho_{ij}$ , conforme descrito na equação 4.4, é a taxa de mudança de um estado  $S_i$  para o estado  $S_j$ , sendo que quando  $i = j$ , representa a taxa de mudança ou saída do estado  $S_i$ , isto é, a taxa que o processo vai para outro estado diferente de  $S_i$ . Do mesmo modo, o tempo de permanência no estado  $S_i$  é exponencial com taxa  $\rho_{ii}$ .

Conforme descrito em Souza e Silva (1992), seja  $\Lambda \geq \max\{\rho_{ii}\}$ . Como o espaço de estados é finito e as taxas  $\rho_{ij}$  são limitadas, é sempre possível achar  $\Lambda$  como indicado. Considerando um novo processo estocástico  $X'$ , obtido a partir de  $X$ , com as seguintes considerações:

- 1 –  $X'$  tem o mesmo espaço de estados de  $X$ ;
- 2 – O tempo de permanência em qualquer estado antes de uma transição ocorrer é exponencial com taxa  $\Lambda$ ;
- 3 – A probabilidade de  $X'$  transicionar de  $S_i$  para  $S_j$ ,  $i \neq j$ , é igual a  $\rho_{ij} / \Lambda$ . Pode transicionar para o mesmo estado com probabilidade  $1 - \rho_{ii} / \Lambda$ .

Após algumas manipulações probabilísticas e algébricas, conclui-se que os processos  $X'$  e  $X$  são equivalentes. Logo, transformou-se  $X$  em um processo tal que o tempo de permanência em qualquer estado antes de uma transição é exponencial com a mesma taxa  $\Lambda$ . Como o tempo entre duas transições de  $X'$  tem distribuição exponencial com taxa  $\Lambda$ , então, o número de transições no intervalo  $(0,t)$  é fornecido por uma distribuição de Poisson com a mesma taxa  $\Lambda$ .

Seja  $\mathbf{P}$  a matriz que, por construção de  $X'$ , fornece as probabilidades de transição de estados, conforme equação abaixo:

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} + \frac{\mathbf{Q}}{\Lambda} \quad (4.32)$$

Após toda esta formulação, percebe-se que o processo  $X$  é equivalente a uma cadeia de Markov de tempo discreto, subordinada a um processo de Poisson. Assim, Gross (1984) em seu artigo propõe, após algumas manipulações probabilísticas e algébricas, a seguinte solução numérica da equação 4.12:

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}^n \cdot \frac{(\Lambda t)^n}{n!} \cdot e^{-\Lambda t} \quad (4.33)$$

A equação 4.33 é a equação básica do método de uniformização ou aleatorização. Este método, conforme descrito por Gross (1984) e aplicado por Souza e Silva (1992), engloba o método de Runge-Kutta. Conforme descrito por Souza e Silva (1992), o método de Runge-Kutta não seria conveniente para o cálculo de  $\mathbf{P}(t)$  a partir da matriz  $\mathbf{Q}$ , devido aos erros de arredondamento nas operações efetuadas, pois somam termos positivos e negativos. Entretanto, no método de uniformização isto não ocorre, pois a matriz  $\mathbf{P}$  é uma matriz estocástica, sendo que todos os elementos são positivos e a soma de qualquer linha é igual a um.

Conforme descrito em Souza e Silva (1992), algumas considerações de ordem prática para o cálculo de  $\mathbf{P}(t)$  a partir da equação 4.33 devem ser feitas. Inicialmente, esta equação é um

somatório infinito, por isto, a série precisa ser truncada em algum ponto. Retendo-se  $N + 1$  termos da série descrita nesta equação, tem-se:

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{n=0}^N \mathbf{P}^n \cdot \frac{(\Lambda t)^n}{n!} \cdot e^{-\Lambda t} + \varepsilon(N) \quad (4.34)$$

onde,

$$\varepsilon(N) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \mathbf{P}^n \cdot \frac{(\Lambda t)^n}{n!} \cdot e^{-\Lambda t}, \text{ é o erro considerado no truncamento.} \quad (4.35)$$

Como  $\|\mathbf{P}^n\|_{\infty} \leq 1$ , obtém-se,

$$\varepsilon(N) \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(\Lambda t)^n}{n!} \cdot e^{-\Lambda t} \quad (4.36)$$

ou,

$$\varepsilon(N) = 1 - \sum_{n=0}^N \frac{(\Lambda t)^n}{n!} \cdot e^{-\Lambda t} \quad (4.37)$$

Assim, uma das vantagens do método de uniformização é que para dado uma determinada tolerância, pode-se obter o valor de  $N$ , e assim, calcular os valores de  $\mathbf{P}(t)$ .

Uma próxima consideração seria com relação ao cálculo de  $\mathbf{P}^n$ . Esta matriz deve ser calculada pela seguinte recursão:

$$\mathbf{P}^{n+1} = \mathbf{P}^n \cdot \mathbf{P} \quad (4.38)$$

onde,

$$\mathbf{P}^0 = \mathbf{I} \quad (4.39)$$

Pelas equações 4.33 e 4.37, faz-se necessário o cálculo de uma distribuição de Poisson. Observe que a medida que o valor de  $n$  e  $t$  se tornam cada vez maiores, podem ocorrer problemas de “underflow” e “overflow”, pois o termo  $e^{-\Lambda t}$  tende a ser um valor bem pequeno, enquanto  $(\Lambda t)^n$  e  $n!$  tendem a assumir valores elevados. Assim, uma terceira consideração, para solucionar

este problema, conforme descrito no item 3.4.2 e 3.4.3, seria a utilização de uma distribuição Normal para aproximar toda a distribuição de Poisson. Assim, pode-se realizar esta aproximação a partir do valor de  $n$  e  $t$  que causam erros de “underflow” ou “overflow” no cálculo.

Por fim, uma última consideração, consiste no fato do processo estocástico  $\{X(t), t \geq 0\}$  ser homogêneo no tempo, isto é, as taxas de transições entre estados não variam com o tempo, ou que a matriz  $Q$  permanece constante em todo tempo  $t$  da análise. Contudo, é possível usar a equação 4.33 nos casos em que as taxas de transições de estado variam no tempo. Assim, para cada intervalo  $[t_{i-1}, t_i)$ , tem-se uma matriz geradora  $Q$ . Neste intervalo, o processo  $X_i$  é homogêneo. Assim, o procedimento consiste em uniformizar o processo em cada intervalo e calcular recursivamente  $P(t_{i+1})$  correspondente ao intervalo  $[t_i, t_{i+1})$  a partir do valor anteriormente calculado  $P(t_i)$  correspondente ao intervalo  $[t_{i-1}, t_i)$ . Matematicamente, tem-se:

$$P(t) = \sum_{n=0}^{N_i} P_i^n \cdot \frac{(\Lambda_i t_*)^n}{n!} \cdot e^{-\Lambda_i t_*} + \varepsilon(N) \quad (4.40)$$

onde,

$$P_i^n = P_i^{n-1} \cdot P_i \quad (4.41)$$

$$P_i(0) = P(t_{i-1}) \quad (4.42)$$

e,

$$t_* = t_i - t_{i-1}, \text{ no intervalo } [t_{i-1}, t_i) \quad (4.43)$$

Após uma manipulação algébrica similar a realizada para a obtenção do erro descrito na equação 3.36, tem-se os erros acumulados de intervalo a intervalo. Assim, para se escolher os valores de  $N_i$ , satisfazendo um dado erro total  $\varepsilon$ , divide-se  $\varepsilon$  proporcionalmente ao tamanho do intervalo, isto é,

$$\varepsilon_i = \frac{t_i - t_{i-1}}{t} \cdot \varepsilon \quad (4.44)$$

Obtendo-se o valor de  $N_i$ , por,

$$\varepsilon \leq 1 - \sum_{n=0}^{N_i} \frac{(\Lambda_i t_0)^n}{n!} \cdot e^{-\Lambda_i t_0} \quad (4.45)$$

#### 4.7 – Modelagem de um Sistema Simples – StandBy

Para um sistema em standby, conforme descrito no item 3.54, o mesmo é considerado disposto logicamente em standby, do ponto de vista da confiabilidade, se uma unidade redundante B somente é ativada quando a unidade operacional atual A falha. Esta estrutura pode ser entendida como uma estrutura em paralelo passiva.

A metodologia Markoviana permite uma grande flexibilidade na modelagem de sistema em confiabilidade, valendo esta regra para um sistema simples em standby. Este sistema em especial, possui vários tipos de modelagem, conforme Singh (1990), Yang (1995) e Mokaddis (1996). Contudo, o sistema simples em standby adotado para estudo neste trabalho, consiste em um sistema com dois componentes, considerando que o mesmo possa ter ou não, reparo primário, falha de backup ou de chaveamento.

Seja uma configuração standby com dois componentes A e B, na sua forma ideal, considerando somente as taxas de falha. Assim, o diagrama de estados é representado figura abaixo:

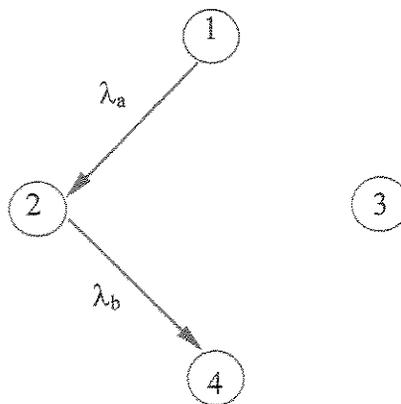


Figura 4.7 : Diagrama dos Estados de um Sistema Ideal em Standby.

Assim, pela análise deste diagrama de estados, os estados que satisfazem a condição do sistema seriam os estados 1 e 2. O estado 4 é o estado de falha, enquanto que o estado 3 não é considerado nesta análise. Portanto, conforme equação 4.15, o valor da confiabilidade seria:

$$R_{stb}(t) = P_1(t) + P_2(t) \quad (4.46)$$

Adotando-se uma equipe e política de manutenção para o reparo de componentes, seguindo o exemplo do item 4.5.2, dependendo do caso, o valor de disponibilidade poderá assumir os seguintes valores:

$$A_{stb}(t) = P_1(t) + P_2(t) \quad (4.47)$$

ou,

$$A_{stb}(t) = P_1(t) + P_2(t) + P_3(t) \quad (4.48)$$

Os próximos itens referem-se a condições extras adotadas em um sistema em standby. Estas condições, ou adotam um tipo de reparo específico, como no primeiro caso, ou influenciam nas taxas de falha, como nos demais casos.

#### 4.7.1 – Com Reparo Primário

Considerando o modelo ideal, com a condição de se ter uma equipe de manutenção para o reparo de uma falha do componente A, estando ainda o sistema em operação, tem-se um sistema em standby com reparo primário. Este sistema pode ser modelado como tendo uma equipe de manutenção e uma política de reparo que permite ao componente B ser reparado primeiro que o componente A, conforme ilustrado na figura 4.9. Seguindo esta descrição, tem-se o diagrama de estados representado pela figura 4.8, para o cálculo de confiabilidade:

Assim, pela análise deste diagrama de estados, os estados que satisfazem a condição do sistema seriam os estados 1 e 2. Portanto, conforme equação 4.14, o valor da confiabilidade seria:

$$R_{stbrp}(t) = P_1(t) + P_2(t) \quad (4.49)$$

Para o cálculo de disponibilidade, o diagrama de estados obtido pode ser visualizado na figura 4.9, mantendo-se as condições descritas.

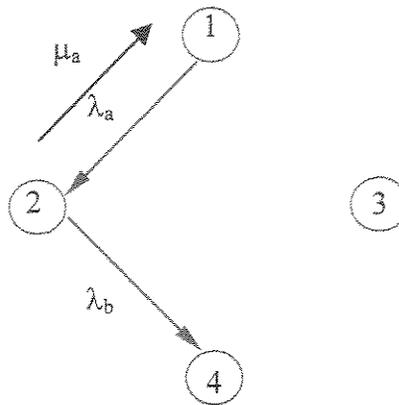


Figura 4.8 : Diagrama dos Estados do Sistema em Standby com Reparo Primário para o Cálculo de Confiabilidade.

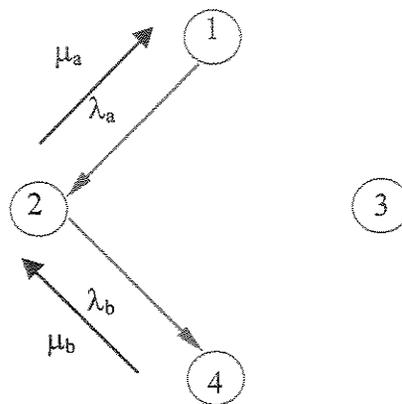


Figura 4.9 : Diagrama dos Estados do Sistema em Standby com Reparo Primário para o Cálculo de Disponibilidade.

Assim, pela análise deste diagrama de estados, os estados que satisfazem a condição do sistema seriam os estados 1 e 2. Portanto, conforme equação 4.15, o valor da disponibilidade seria:

$$A_{stbrp}(t) = P_1(t) + P_2(t) \quad (4.50)$$

#### 4.7.2 – Com Falha de Backup

Em um sistema em standby, a unidade redundante somente é ativada quando a unidade operacional A falha. Contudo, a unidade redundante B pode falhar com uma taxa de falha  $\lambda_b^*$ , mesmo não estando em operação, sendo que esta taxa é menor que a taxa de falha da unidade em funcionamento  $\lambda_b$ . Seguindo esta descrição, tem-se o diagrama de estados representado pela figura 4.10, para o cálculo de confiabilidade:

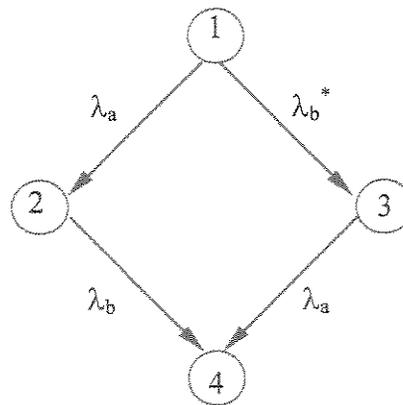


Figura 4.10 : Diagrama dos Estados do Sistema em Standby com Falha de Backup para o Cálculo de Confiabilidade.

Assim, pela análise deste diagrama de estados, os estados que satisfazem a condição do sistema seriam os estados 1, 2 e 3. Portanto, conforme equação 4.15, o valor da confiabilidade seria:

$$R_{stbfb}(t) = P_1(t) + P_2(t) + P_3(t) \quad (4.51)$$

Considerando a possibilidade de inclusão de uma equipe e política de reparo, conforme descrito no item 4.5.2, os valores de disponibilidade seriam calculados conforme equação 4.48.

#### 4.7.3 – Com Falha de Chaveamento

Uma segunda dificuldade encontrada em sistemas em standby consiste na possibilidade de que falhando o componente A, ao se ligar ou chavear o componente redundante, isto é, o componente B, ocorra uma falha de chaveamento com probabilidade  $q$ . Assim o sistema possui a possibilidade de não operar, indo do estado 1 para o estado 4, decorrente do chaveamento do

componente B. Seguindo esta descrição, tem-se o diagrama de estados representado pela figura 4.11, para o cálculo de confiabilidade:

Assim, pela análise deste diagrama de estados, os estados que satisfazem a condição do sistema, seria os estados 1 e 2. Portanto, conforme equação 4.15, o valor da confiabilidade seria:

$$R_{stbjc}(t) = P_1(t) + P_2(t) \tag{4.52}$$

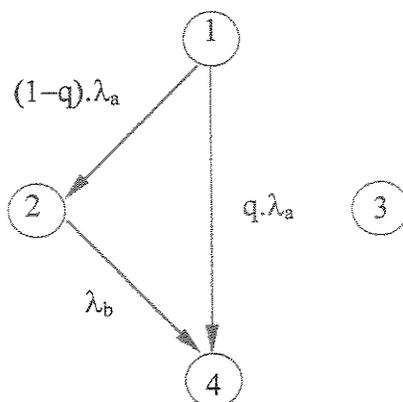


Figura 4.11 : Diagrama dos Estados do Sistema em Standby com Falha de Chaveamento para o Cálculo de Confiabilidade.

Considerando a possibilidade de inclusão de uma equipe e política de reparo, conforme descrito no item 4.5.2, os valores de disponibilidade seriam calculados pelas equações 4.47 ou 4.48.

#### 4.8 – Modelagem de um Sistema Complexo

A obtenção dos estados operacionais para o cálculo de confiabilidade e disponibilidade, conforme descrito nos itens 4.4 e 4.7, é aplicada para um sistema simples. Contudo, uma aplicação mais abrangente do método de Markov para solução de sistemas deve abordar as relações de dependência entre vários componentes, relacionados por uma estrutura complexa. Estas estruturas são formadas por duas ou mais estruturas simples, as quais podem apresentar diferentes formas de conexão ou associação dos componentes, criando diferentes combinações de configuração. Um exemplo deste tipo de estrutura é mostrado na figura 3.9.

Analisando-se o modelamento Markoviano para sistemas de confiabilidade, conforme descrito nos itens anteriores, percebe-se que o mesmo pode ser dividido em quatro etapas:

- 1 – Definição do sistema em estudo (estrutura e número de componentes);
- 2 – Obtenção dos caminhos operacionais;
- 3 – Modelamento da dinâmica do sistema;
- 4 – Resolução do sistema de equações diferenciais.

Para um sistema simples, a etapa 3 é obtida pela definição do sistema ou das considerações adotadas, conforme demonstrado nos itens 4.4 e 4.7. Para um sistema complexo, faz-se necessário a aplicação de uma técnica de análise de estruturas de sistema, conforme descrito no item 3.6, obtendo assim os caminhos operacionais deste sistema e, por análise, os estados operacionais deste sistema, permitindo o cálculo da confiabilidade ou disponibilidade do mesmo.

Esta análise consiste das seguintes regras:

- 1 – Obter os caminhos operacionais do sistema complexo, por uma das técnicas apresentadas no item 3.6;
- 2 – Separar cada caminho operacional formando o conjunto  $S_{co}$ ;
- 3 – Obter a tabela dos estados do sistema complexo, conforme item 4.3;
- 4 – Para cada elemento do conjunto  $S_{co}$ , montar para cada sistema simples deste elemento, todas as combinações possíveis que representem a operação deste elemento;
- 5 – Analisar todos os estados constituintes da tabela dos estados do sistema, obtidos na etapa 3, para encontrar os estados em que os sistemas simples do elemento analisado, pertencente ao conjunto  $S_{co}$ , estejam operacionais, conforme combinações da etapa 4;
- 6 – Com esta relação de estados, acrescentar a mesma em um conjunto de estados operacionais,  $S_{eo}$ ;
- 7 – Repetir os passos 4 a 6, até analisar todos os elementos do conjunto  $S_{co}$ ;
- 8 – Retirar todos os elementos repetidos do conjunto de estados operacionais  $S_{eo}$ ;
- 9 – Ordenar os elementos do conjunto de estados operacionais  $S_{eo}$ ;

Assim, obtido o conjunto  $S_{eo}$ , os valores de confiabilidade e disponibilidade podem ser obtidos conforme equação 4.14, ou:

$$R_{sc}(t) = \sum_{i \in S_{co}} P_i(t) \quad (4.53)$$

$$A_{sc}(t) = \sum_{i \in S_{co}} P_i(t) \quad (4.54)$$

A título de aplicação da metodologia descrita acima, seja o sistema complexo apresentado na figura 4.12:

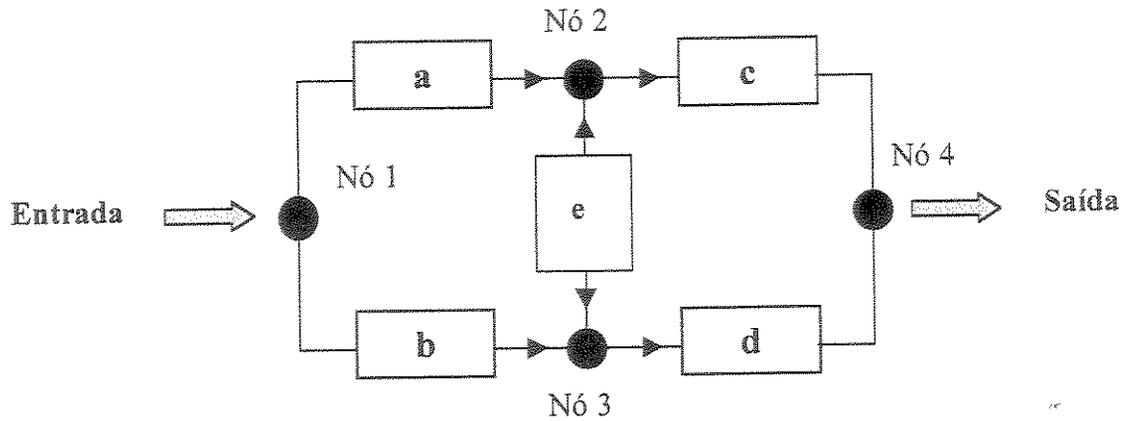


Figura 4.12 : Sistema Complexo para Ilustração do Método Descrito.

Para o passo 1, a obtenção dos caminhos operacionais, pode-se utilizar uma das técnicas apresentada no item 3.6. Conforme equação 3.74, o caminho operacional entre os nós 1 e 4 seria constituído por  $ac+bd+bec+aed$ . Assim, o conjunto  $S_{co}$ , teria os seguintes elementos:

$$S_{co} = \{ ac, bd, bec, aed \} \quad (4.55)$$

Como o sistema possui 5 componentes, conforme passo 2, a tabela de estados do sistema é obtida conforme item 4.3. Assim, obtém-se:

Estado / Componente	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
B	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1
E	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1
C	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0
D	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0

Estado / Componente	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
A	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0
B	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
E	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
C	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0
D	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0

Tabela 4.6 : Tabela dos Estados do Sistema Complexo da Figura 4.12.

Analisando cada elemento do conjunto  $S_{co}$  com relação aos estados da tabela 4.6, conforme passos de 4 a 7, obtém-se a seguinte análise:

Elemento de $S_{co}$	Estados encontrados na análise
<i>ac</i>	1, 3, 4, 6, 11, 13, 15 e 24
<i>bd</i>	1, 2, 4, 5, 8, 9, 14 e 20
<i>bec</i>	1, 2, 6 e 10
<i>aed</i>	1, 3, 5 e 12

Tabela 4.7 : Tabela dos Estados Operacionais do Sistema Complexo da Figura 4.12.

Por meio da tabela 4.7, e realizando os passos 8 e 9, obteria-se o conjunto de estados operacionais  $S_{eo}$ :

$$S_{eo} = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 20, 24 \} \quad (4.56)$$

Assim, obtido o conjunto  $S_{eo}$ , os valores de confiabilidade e disponibilidade podem ser obtidos conforme equação 4.53 e 4.54.

## Capítulo 5

### Descrição da Metodologia e do Programa Computacional

Para alcançar os objetivos deste trabalho, foi elaborada uma metodologia que utiliza os conceitos descritos e desenvolvidos nos capítulos anteriores, permitindo a análise confiabilística de um dado sistema considerando:

- 1 – A utilização de taxas de falha e reparo dos componentes do sistema;
- 2 – As dependências entre os componentes;
- 3 – Os dados referentes a equipes de reparo ou manutenção disponíveis;
- 4 – A prioridade de reparo ou manutenção considerada.

Utilizando-se desta metodologia, foi desenvolvido um programa computacional em *Visual Basic 5*, denominado de “PACSM”, que permite:

- 1 – Estimar os valores de confiabilidade e disponibilidade do sistema;
- 2 – Utilizar taxas de componentes constantes ou variáveis;
- 3 – Avaliar a sensibilidade dos parâmetros envolvidos;
- 4 – Visualizar a matriz  $\rho$ , ou um gráfico dos valores calculados com a opção de se calcular o MTTF do sistema.

#### 5.1 – Descrição da Metodologia Desenvolvida

Após uma descrição da evolução da teoria de confiabilidade no capítulo 2, os principais conceitos necessários para o desenvolvimento de uma metodologia que permita a análise confiabilística de um sistema, utilizando-se da teoria de processos estocásticos com a propriedade Markoviana, foram descritos nos capítulos 3 e 4.

Utilizando-se destes conceitos descritos e desenvolvidos a metodologia pode ser descrita, de uma maneira geral, conforme diagrama abaixo:

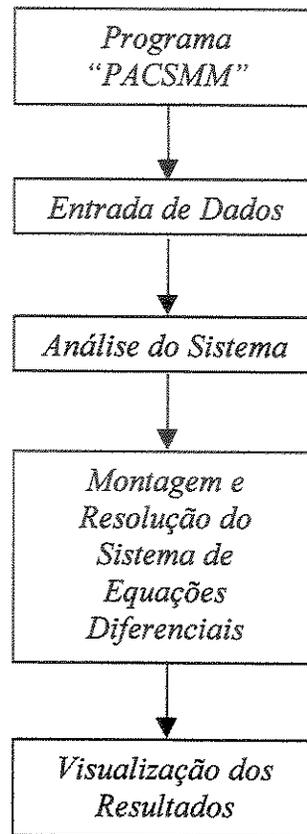


Figura 5.1 : Configuração Geral do Programa Computacional "PACSM".

Para se aplicar o modelamento Markoviano, faz-se necessário alguns dados essenciais do sistema e da sua dinâmica, permitindo sua análise estrutural, construção da matriz  $\rho$ , montagem do sistema de equações diferenciais e a utilização do método de uniformização para sua resolução e obtenção dos valores de confiabilidade e disponibilidade. Assim, a fase de Entrada de Dados seria constituída das etapas descritas conforme figura 5.2.

O tipo de sistema a ser escolhido para análise pode ser um sistema simples tipo série, paralelo, r-em-n ou standby. As características destes sistemas foram descritos nos itens 3.51, 3.52, 3.53 e 3.54, respectivamente, e o seu modelamento realizado conforme itens 4.4 e 4.7. Pode

também ser um sistema complexo, sistema este constituído dos sistemas simples descritos, e modelado conforme item 4.8.

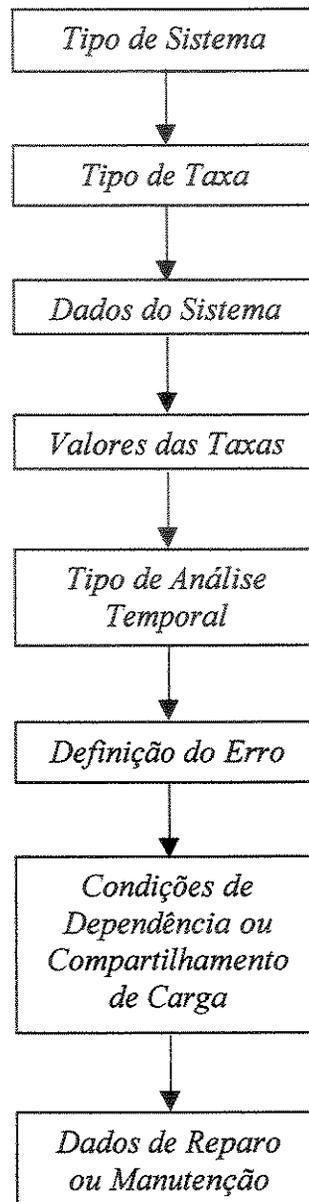


Figura 5.2 : Descrição das Etapas Constituintes do Item 1: Entrada de Dados.

Pelo modelamento Markoviano, o tempo de permanência em um estado deve apresentar uma distribuição exponencial, ou seja, possuir uma taxa constante. Contudo, devido ao uso do método de uniformização na resolução do sistema de equações diferenciais, pode-se utilizar no modelo, taxas de falha ou reparo constantes ou variáveis. Entretanto, a modelagem de taxa

variável deve ser constituída de pequenos intervalos, conforme descrito no item 4.6.1, onde se adota um valor constante de taxa em cada intervalo. Este trabalho considera o valor médio da taxa entre os pontos inicial e final do intervalo.

Os dados do sistema constituem-se do número de componentes, para o caso de um sistema em série ou paralelo, ou do número de N (Número total de componentes) e R (Número Mínimo de componentes em operação) de um sistema R-em-N, ou da taxa de falha de backup, chaveamento ou a possibilidade de reparo primário de um sistema em standby.

No caso de um sistema complexo, faz-se necessário o conhecimento da estrutura e de seus sub-sistemas. Por isso, os dados relevantes seriam o número total de componentes do sistema, o número total de sistemas simples e o número de nós. Outros dados essenciais seriam os valores das taxas para cada componente, se a análise temporal é pontual ou em um intervalo, o erro considerado no cálculo e as condições adotadas, sendo que os Dados de Reparo ou Manutenção, incluem o número de equipes e as políticas de reparo ou manutenção existentes.

Com estes dados, inicia-se a fase de Análise de Sistema, cuja descrição pode ser visualizada na figura 5.3. Para se obter os caminhos operacionais do sistema, utiliza-se do método da matriz de conexão, conforme descrito no item 3.6. Montando-se a matriz de estados conforme 4.3, pode-se obter os estados operacionais do sistema, conforme ilustrado no item 4.8.

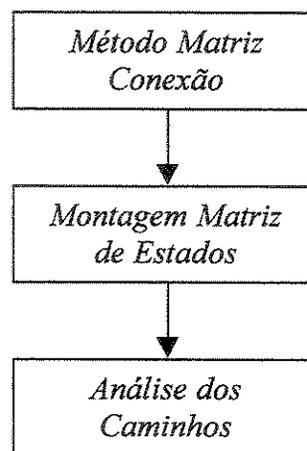


Figura 5.3 : Descrição das Etapas Constituintes do Item 2: Análise do Sistema.

Sabendo-se quais os estados operacionais do sistema, inicia-se a fase de Montagem e Resolução do Sistema de Equações Diferenciais, conforme figura 5.4. Para a utilização do método de uniformização são necessários os dados de tempo e a matriz  $\rho$ . A partir dos estados operacionais, juntamente com os valores das taxas e condições, consegue-se a montagem da matriz  $\rho$ . Aplicando o modelo markoviano conforme item 4.3, obtém-se um sistema de equações diferenciais, que será resolvido pelo método de uniformização, obtendo-se os valores da probabilidade de cada estado, para cada valor de tempo considerado.

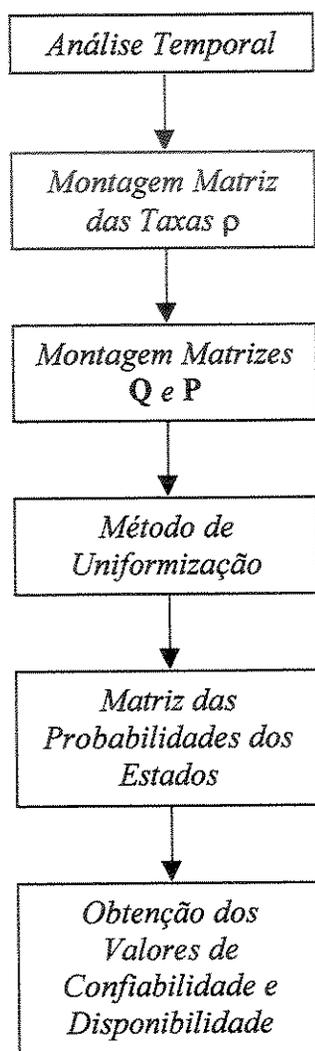


Figura 5.4 : Descrição das Etapas Constituintes do Item 3: Montagem e Resolução do Sistema de Equações Diferenciais.

Assim, os valores de confiabilidade e disponibilidade podem ser obtidos através da equação 4.53 e 4.54. Com isto, os valores dos mesmos para cada instante de tempo considerado podem ser visualizados. Para a verificação da modelagem, pode-se mostrar a matriz  $\rho$ . Com os valores de confiabilidade e disponibilidade, pode-se plotar um gráfico, de onde o valor do MTTF pode ser calculado conforme 3.3.2. Esta fase constitui-se da Visualização dos Resultados, e pode ser representada conforme figura 5.5.

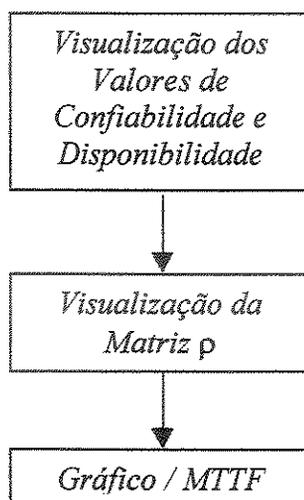


Figura 5.5 : Descrição das Etapas Constituintes do Item 4: Visualização dos Resultados.

## 5.2 – Descrição do Programa Desenvolvido Através da Metodologia

Utilizando-se da metodologia descrita no item anterior, desenvolveu-se um programa computacional em *Visual Basic 5*, denominado de “PACSMIM”, que permite o cálculo dos valores de confiabilidade, disponibilidade e MTTF de um sistema. Sua apresentação ou tela inicial, pode ser visualizado na figura 5.6.

Para análise dos sistemas estudados nos capítulos 3 e 4, o programa inicia-se com a escolha do tipo de sistema, sendo ou um sistema simples ( Série, Paralelo, R-em-N ou Standby com dois componentes ), ou um sistema complexo. Pelo descrito na metodologia, escolhe-se também o tipo de taxa a ser analisada, sendo esta constante ou variável. No caso em que se escolha a opção de Taxa Variável, a mesma será modelada por uma distribuição de Weibull, onde para cada sub-intervalo, adota-se o valor da taxa como sendo o valor médio entre o valor da taxa no ponto inicial e a do ponto final. Sua implementação no programa pode ser visualizada pela figura 5.7.



Figura 5.6 : Tela Inicial do Programa Desenvolvido Utilizando a Metodologia Descrita.

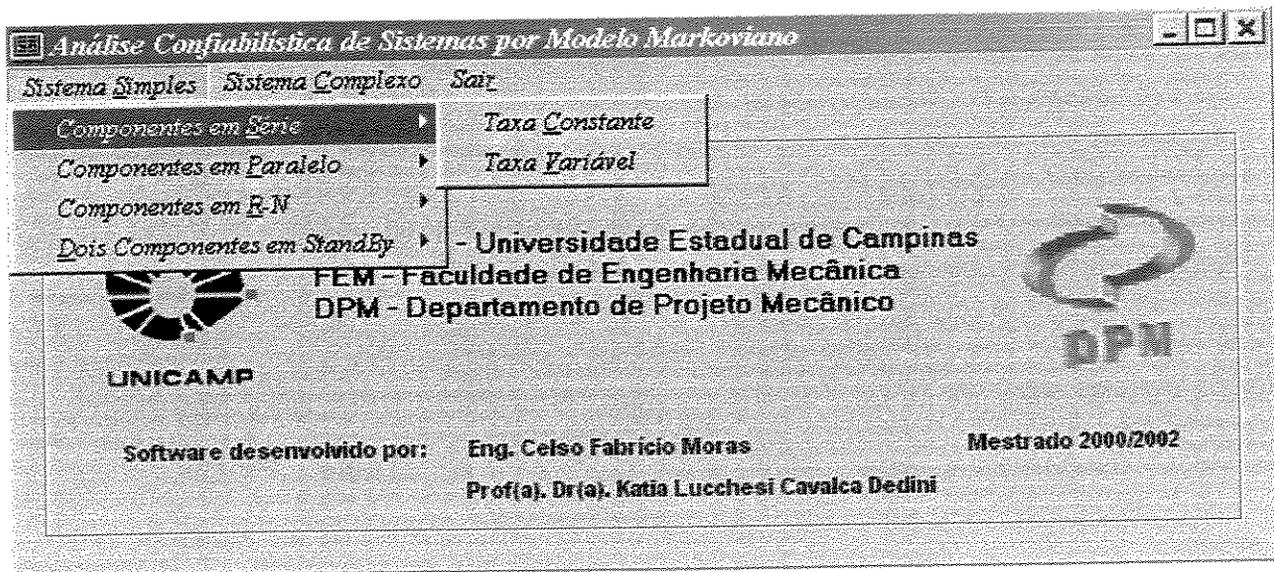


Figura 5.7 : Tipos de Sistemas Analisados pelo Programa com Opção do Tipo de Taxa.

Escolhendo os itens anteriores, faz-se necessário, conforme metodologia, incluir os dados do sistema em estudo, assim como os valores das taxas. Para um sistema simples em série ou paralelo, é necessário o valor do número de componentes do sistema. Para o caso de um sistema r-em-n, necessita-se do número de componentes do sistema (N) e do número mínimo de

componentes operacionais do sistema (R), para a sua análise. Estes dados podem ser visualizados na figura 5.8.

**Dados do Sistema - R-N - Taxa Constante**

Dados do Sistema em R-N

Digite o Número de Componentes **N** : 2

Digite o Número de Componentes **R** : 1

Ok

Valores das Taxas dos Componentes do Sistema

Digite os Valores das Taxas do Componente 1 :

$\lambda$  : 1 0.00001/h     $\mu$  : 0.1 1/h

Ok

Figura 5.8 : Dados de um Sistema Simples com Taxa Constante.

**Dados do Sistema - Standby - Taxa Variável**

Dados do Sistema em Standby

Digite Taxa de Falha do Backup : 1 0.00001/h

Digite Prob de Falha Chaveamento : 20 %

Reparo Primário ? ( S/N ) : 5

Ok

Dados das Taxas dos Componentes do Sistema

Componente 1 / Dados Taxa de Falha :

Digite o Número de Intervalos : 3

Ok

Distribuição de Weibull / Dados do Intervalo 1 :

$\alpha$  : 100000    Tempo Inicial : 0 h    Número de Sub-intervalos

$\beta$  : 1    Tempo Final : 1000 h    10

Figura 5.9 : Dados de um Sistema Simples com Taxa Variável.

Para o caso de um sistema standby com dois componentes, faz-se necessário os valores da taxa de falha de backup, da probabilidade de falha de chaveamento e se o sistema possui reparo primário ou não, conforme item 4.7. No programa, o mesmo foi implementado conforme visualização da figura 5.9.

Os valores das taxas de falha e reparo, para o caso de taxa constante, são expressos diretamente pelos seus valores no programa, conforme figura 5.8. No caso de taxa variável, os dados referentes a distribuição de Weibull são necessários, assim como o intervalo de tempo válido para estes dados da distribuição. No caso da taxa de falha, conforme item 3.3.3, a mesma possui três regiões bem definidas. Assim, considera-se três intervalos, cada qual com seus valores de  $\alpha$  e  $\beta$ , o intervalo de tempo considerado para estes valores e quantos sub-intervalos ou divisões deste intervalo de tempo se deseja, para que os valores de confiabilidade e disponibilidade sejam calculados. Para o caso da taxa de reparo, pode-se considerar três intervalos, como no caso da taxa de falha, ou quantos intervalos forem necessários conforme experiência. Normalmente, esta taxa é modelada como tendo  $\beta = 1$ , ou seja, uma taxa constante em cada intervalo de tempo.

Na modelagem de um sistema complexo, outros dados se fazem necessários. Como este sistema pode assumir qualquer tipo de estrutura, inicia-se seu estudo com os dados referentes a estrutura, ou seja, o número total de componentes, o número de sistemas simples e o número de nós. Com estes dados, o programa pergunta se existe um sistema entre dois nós, conforme visualizado na figura 5.10. Caso não exista uma ligação ou sistema, coloca-se o valor zero. Se existir uma ligação sem sistema, coloca-se o valor 1, ou no caso de se ter um sistema, coloca-se a letra que identifica este sistema. Este sistema pode ser qualquer um dos quatro tipos de sistema simples estudados anteriormente, ou um outro, que se adotou como simples, sendo constituído de um único componente. Como ilustração no programa, pela figura 5.10 para um caso qualquer, entre os nós 1 e 2 existe o sistema A, que é um sistema simples em paralelo. Assim, seleciona-se o tipo de sistema e preenche-se os dados deste conforme figura 5.11.

Terminada esta fase de identificação do sistema, outros dados são necessários. Pela metodologia, seriam o tipo de análise temporal, definição de erro, condições de compartilhamento de carga e dados de reparo.

**Dados do Sistema Complexo - Taxa Constante**

Dados do Sistema Complexo

Digite o Número Total de Componentes:

Digite o Número Total de Sistemas:

Digite o Número Total de Nós:

Identificação do Sistema Complexo através dos Nós

Digite Nome do Sistema que está entre os Nós 1 e 2:

Escolha o Tipo de Sistema de A:

Simple       Paralelo       StandBy

Série       B-N

Figura 5.10 : Dados de um Sistema Complexo.

**Dados do Sistema A - Paralelo - Taxa Constante**

Dados do Sistema em Paralelo

Digite o Número de Componentes:

Valores das Taxas dos Componentes do Sistema

Digite os Valores das Taxas do Componente 1:

$\lambda$ :  0.00001/h       $\mu$ :  1/h

Figura 5.11 : Descrição de um Sistema Simple Constituinte de um Sistema Complexo.

Na análise temporal de um sistema simples ou complexo, o programa permite a análise de um ponto ou de um intervalo de tempo. Com relação ao valor do erro adotado para o cálculo, o programa adota como valor padrão ou o valor de 0.01%. Contudo, a medida da necessidade, outros valores podem ser adotados. Para visualização deste item no programa, ver figura 5.12.

**Dados do Sistema Complexo - Taxa Constante**

Análise Temporal do Sistema

Pontual      Tempo Inicial:  h

Intervalo de Tempo      Tempo Final:  h

Ok

---

Erro Esperado no Cálculo do Sistema

Digite o Valor do Erro Esperado:  %

Ok

Figura 5.12 : Dados de Análise Temporal e Erro.

Para implementar as condições de compartilhamento entre os componentes de um sistema, o programa pergunta inicialmente quantas condições este sistema possui. Com isto, pergunta cada condição, conforme visualizado na figura 5.13. O programa permite o modelamento de condições múltiplas, isto ocorre no caso da falha de dois ou mais componentes influenciarem um outro componente. Neste caso, basta considerar a influência de cada um separadamente.

**Dados do Sistema Complexo - Taxa Constante**

Condições de Load Sharing do Sistema

Digite o Número de Condições:

Ok

Condição 2:

Falhando o Componente  o Componente

terá um acréscimo de  % na sua Taxa de Falha.

---

Equipes de Manutenção do Sistema

Digite o Número de Equipes de Manutenção:

Ok

Prioridade 3 de Manutenção Componente:

Figura 5.13 : Dados de Compartilhamento de Carga e de Reparo.

Na seqüência, o programa pergunta os dados de reparo, ou seja, quantas equipes de manutenção ou reparo o sistema possui, sendo este valor de zero até o número de componentes, assim como a prioridade de reparo dos componentes do sistema.

Completado o item 1 da metodologia, o programa apresenta a tela demonstrada na figura 5.14, na qual fornece todos os dados informados ao programa sobre o sistema analisado.

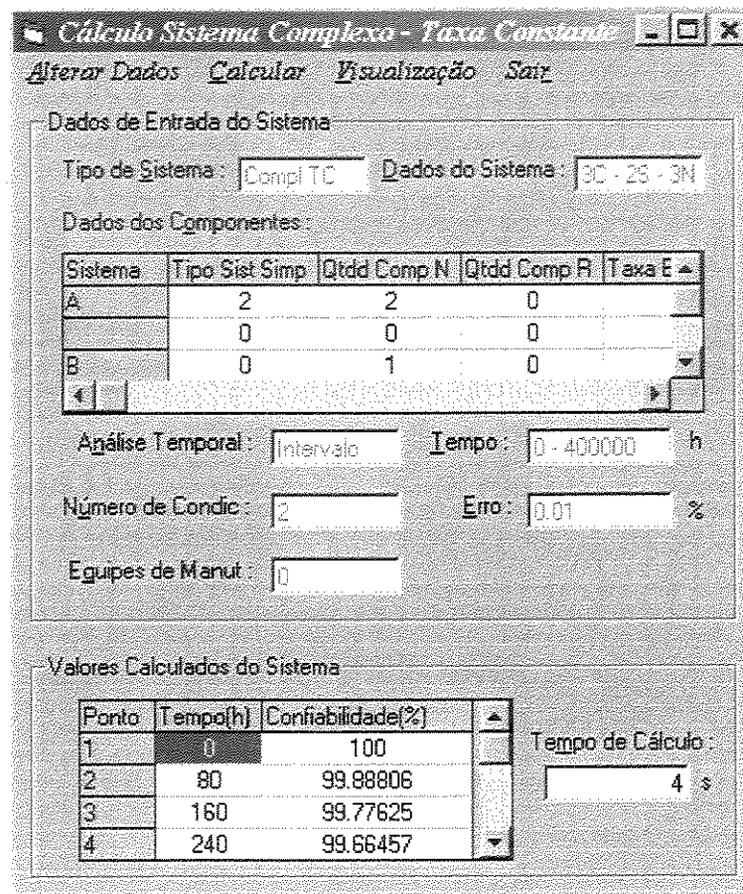


Figura 5.14 : Tela de Visualização dos Dados, Análise de Sensibilidade e Cálculos.

No menu da figura 5.14, pode-se escolher realizar uma análise de sensibilidade, acessando o item "Alterar Dados", no qual permite a mudança dos valores ou condições do sistema, descritos nas figuras 5.8, 5.9, 5.11, 5.12 e 5.13. Caso se deseje modificar o tipo de sistema, faz-se necessário o reinício do programa.

Acessando o item “*Calcular*”, o programa permite o cálculo dos valores de confiabilidade e de disponibilidade do sistema. Este item executa diretamente os passos descritos nos itens 2 e 3 do sub-capítulo anterior. Após os cálculos, mostra os valores obtidos e o tempo de cálculo necessário, conforme demonstrado na parte inferior da figura 5.14.

Para verificar se a matriz  $\rho$  montada pelo sistema está correta, basta acessar o item “*Visualização*”, escolhendo no menu o item “*Matriz das Taxas*”, que fornecerá uma tela conforme a descrita na figura 5.15.

The screenshot shows a window titled "Visualização da Matriz das Taxas" with a "Sair" button. The main content is a table titled "Visualização da Matriz das Taxas do Sistema". The table has 8 rows and 8 columns, with the first column labeled "Event\Event" and the first row labeled "1" through "8". The values in the table are as follows:

Event\Event	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1.00E+00	2.05E-02	2.05E-02	9.59E-01	0	0	0	0
2	0	-9.90E-01	0	0	3.08E-02	9.59E-01	0	0
3	0	0	-9.90E-01	0	3.08E-02	0	9.59E-01	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0

Figura 5.15 : Tela de Visualização da Matriz  $\rho$ .

Para a visualização gráfica dos valores de confiabilidade ou disponibilidade calculados, basta acessar o item “*Visualização*”, escolhendo no menu o item “*Gráfico*”, que apresentará uma tela conforme figura 5.16. Após a visualização, pode-se obter o valor do MTTF do sistema, que conforme item 3.3.2, é a integral dos valores da confiabilidade. Assim, o programa calcula o valor do MTTF utilizando a regra de integração Trapezoidal. Conforme observado na figura 5.16, os maiores valores estão no início do gráfico. Assim, para o caso de taxa constante, adotou-se sub-intervalos diferentes nos 10% iniciais do tempo, permitindo assim, um cálculo mais preciso. No caso de taxas variáveis, deve-se considerar, para o primeiro intervalo da modelagem por

distribuição de Weibull, um número de sub-intervalos que permita obter-se valores de tempos da ordem de 100 h.

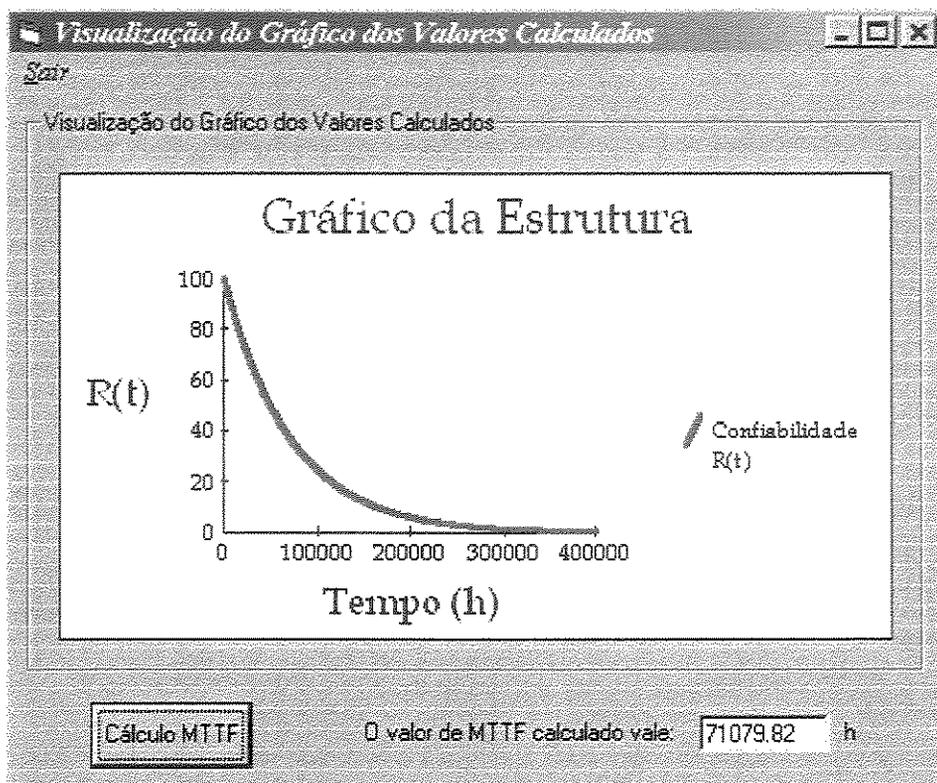


Figura 5.16 : Tela de Visualização do Gráfico e Cálculo do MTTF.

## Capítulo 6

### Análise de Resultados

Para demonstrar a utilização da metodologia descrita no capítulo anterior, este capítulo apresenta diferentes exemplos de sistemas, os quais serão solucionados mediante a utilização do programa computacional “PACSMM”.

Os dois primeiros exemplos analisados demonstram a precisão do cálculo do programa computacional “PACSMM” com relação ao cálculo de confiabilidade pelo Método Combinatório, baseado nos conceitos combinatórios da teoria de probabilidade, adotando a independência dos componentes. Após a comparação dos valores de confiabilidade fornecidos pelos autores com os obtidos pelo programa, acrescenta-se outras condições, conforme apresentado no capítulo 5, demonstrando os recursos do programa.

Por fim, o último exemplo visa permitir um estudo mais aprofundado dos recursos disponíveis pela metodologia desenvolvida, ilustrando, além do cálculo de confiabilidade e disponibilidade para taxas constantes e da análise das influências das condições de compartilhamento de carga e dos dados de reparo, a utilização de taxas variáveis e o cálculo de MTTF do sistema, para duas configurações diferentes de um mesmo problema.

#### 6.1 – Análise Confiabilística de um Sistema Complexo com Conexões Série e Paralelo

Em sua dissertação, Mojena (1999) estimou o valor da confiabilidade de uma estrutura complexa que estava relacionada com um sistema de fornecimento de oxigênio às cápsulas espaciais utilizadas pelos astronautas. Originalmente, o mesmo foi descrito por Tillman (1970).

Segundo o autor, o sistema teria sua representação conforme a figura 6.1, e seus componentes seriam:

- a)- Depósito de Oxigênio a Alta Pressão (1);
- b)- Reguladores (3 e 7);
- c)- Válvula de Seleção (2);
- d)- Válvula de Controle (4 e 9);
- e)- Válvula de Corte (5 e 10);
- f)- Válvula Automática de Retenção de Emergência (6 e 8).

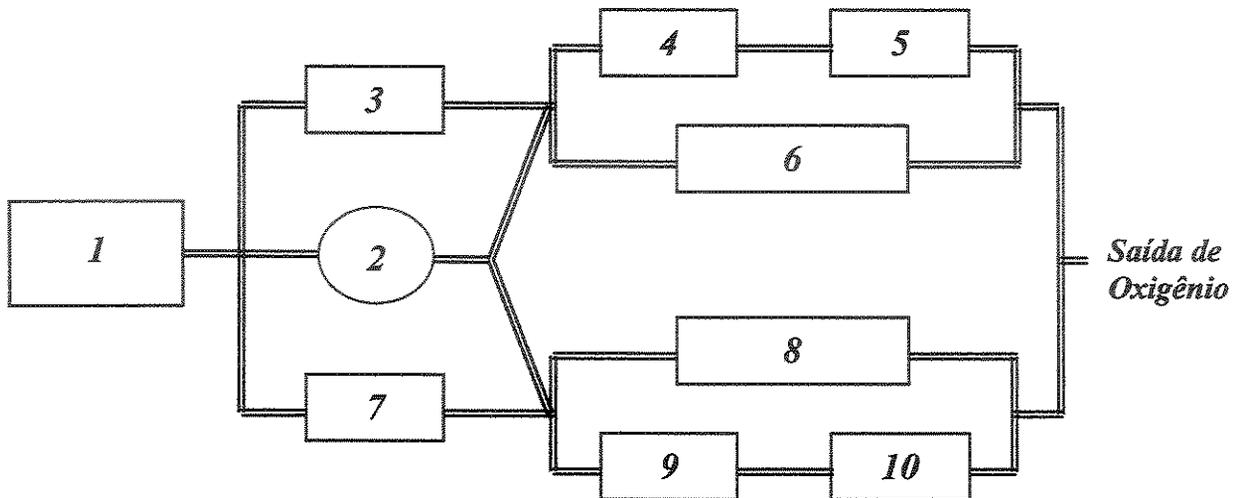


Figura 6.1 : Visualização do Sistema Complexo Analisado por Mojena (1999) e Tillman (1970).

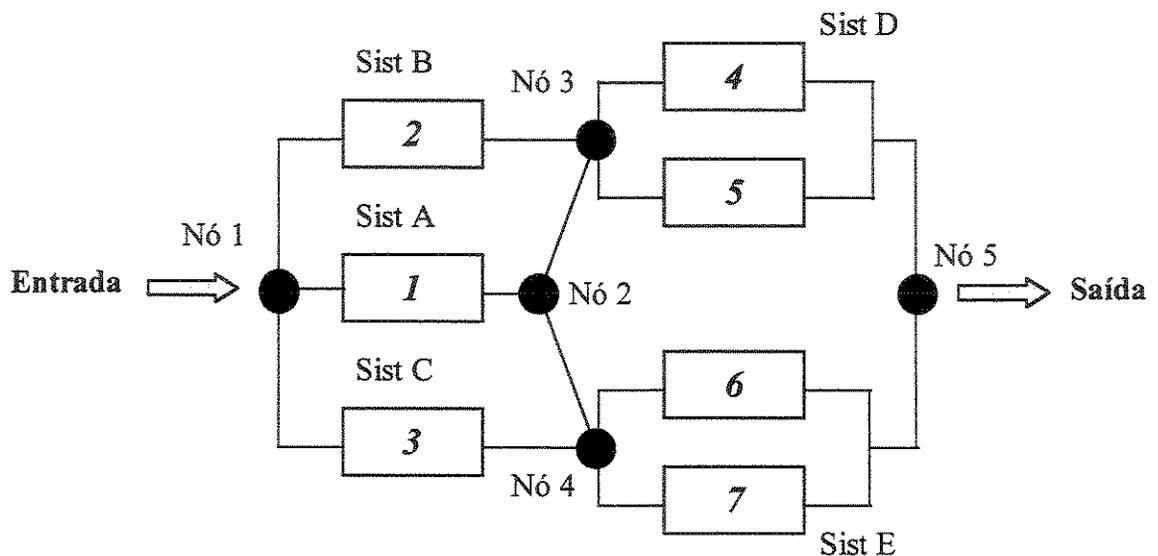


Figura 6.2 : Diagrama de Análise do Sistema Complexo da Figura 6.1.

Para se obter a confiabilidade do sistema, o depósito de oxigênio não precisa ser modelado, sendo que os componentes podem ser analisados conforme figura 6.2.

Adotando um valor fixo de confiabilidade em um dado tempo para cada componentes, os autores Tillman (1970) e Mojena (1999), simularam 11 situações diferentes, obtendo em cada uma delas o valor de confiabilidade do sistema. Assim, para as interações 0 e 10, tem-se os dados visualizados na tabela 6.1 abaixo:

Interação	Confiabilidade dos Componente da Figura 6.2				Confiabilidade do Sistema
	5 e 6	2 e 3	1	4 e 7	
0	0.7	0.7	0.7	0.7	95.480%
10	0.81563	0.9149	0.7715	0.7991	99.5706%

Tabela 6.1 : Dados dos Componentes do Sistema Complexo da Figura 6.1.

Para o caso de análise de sistema por modelo Markoviano, faz-se necessário a utilização de uma taxa que represente o componente. Assim, adotando o valor de tempo 1000h e utilizado a equação 3.50, obtém-se os valores de taxa de falha conforme tabela 6.2.

Interação	Taxa de Falha $\lambda$ dos Componente da Figura 6.2 para $t = 1000$ h, expresso em $(10^{-5} \text{ h}^{-1})$			
	5 e 6	2 e 3	1	4 e 7
0	35.6675	35.6675	35.6675	35.6675
10	20.3794	8.8941	25.9419	22.4269

Tabela 6.2 : Taxas de Falha dos Componentes do Sistema Complexo da Figura 6.1.

Para se obter os valores de confiabilidade acima, basta utilizar a metodologia considerando nenhuma equipe de manutenção e nenhuma condição de compartilhamento de carga. Contudo, a metodologia permite a abordagem destas considerações. Assim, sejam as seguintes condições de compartilhamento de carga, conforme tabela 6.3.

Condição	Componente que Falhou	Componente Operacional que assume a Carga	Acréscimo na Taxa de Falha do Componente Operacional
1	1	2	50%
2	1	3	50%
3	4	5	100%
4	5	4	100%
5	6	7	100%
6	7	6	100%

Tabela 6.3 : Condições de Compartilhamento de Carga Adotadas.

Adotando- agora, que os componentes possuam taxa de reparo  $\mu = 0.01 \text{ h}^{-1}$ , análise pontual com  $t = 1000 \text{ h}$ , erro de cálculo de 0.0001% e política de manutenção 1234567, obtém-se os dados da tabela 6.4, variando o número de equipes de manutenção disponíveis para cada interação.

Cálculo	Condições de:		Valores Calculados Interação 0		Valores Calculados Interação 10	
	Compart. de Carga	Equipes de Manutenção	Confiabilidade (%)	Disponibilidade (%)	Confiabilidade (%)	Disponibilidade (%)
1	N	N	95.47995	----	99.57065	----
2	S	N	91.69975	----	98.98624	----
3	S	1	99.47821	99.89854	99.96215	99.99301
4	S	2	99.77673	99.98559	99.98579	99.999
5	S	3	99.79871	99.99174	99.98786	99.99937
6	S	4	99.79962	99.99215	99.98806	99.99955
7	S	5	99.79971	99.99229	99.98795	99.99944
8	S	6	----	99.99229	----	99.99944
9	S	7	----	----	----	----

Tabela 6.4 : Valores de Confiabilidade e Disponibilidade Obtidos.

Comparando o valor da confiabilidade do sistema para o cálculo 1 da tabela 6.4 com os valores obtidos por Tillman (1970) e Mojena (1999) na tabela 6.1, observa-se a precisão do cálculo da metodologia, baseada em modelagem Markoviana. Contudo, esta mesma metodologia permite que condições de compartilhamento de carga e equipes de reparo sejam analisadas. Assim, variando as possibilidades de condições, obtém-se os demais cálculos da tabela.

Analisando os cálculos realizados para esta configuração e demais condições adotadas, pode-se observar que:

1 – Para o caso da interação 10 que possui valores de confiabilidade maiores ( taxas de falha menores ) que o caso da interação 0, a influência das condições de carga diminui, conforme comparação entre o cálculo 2 e o cálculo 1. Assim, a influência da condição de compartilhamento de carga pode ser confirmada pela diminuição do valor da confiabilidade observada nesta análise;

2 – Ao se incluir os valores de equipes de manutenção, observa-se um crescimento gradual dos valores de confiabilidade, aproximando-se dos valores de disponibilidade. Para este caso, o cálculo da confiabilidade com a utilização de 2, 3 e 4 equipes de manutenção, fornecem valores bem próximos do cálculo com 5 equipes, podendo ser substituído pelo cálculo do mesmo. Por serem os valores de cálculo com 6 e 7 equipes iguais ao do cálculo com 5 equipes de manutenção, os mesmos foram desconsiderados.

## 6.2 – Análise Confiabilística de um Sistema Complexo com Conexões R-em-N e Standby

No capítulo 7 de seu livro, Billinton (1983) propõe o cálculo da confiabilidade do sistema da figura 6.3, para um missão com tempo de 100 h. Fornece também, os valores das taxas de falhas dos componentes do sistema e o resultado, conforme descrito na tabela 6.5.

Taxa de Falha $\lambda$ dos Componente da Figura 6.3 para $t = 100$ h, expresso em $(10^{-5} \text{ h}^{-1})$						Confiabilidade do Sistema
1	2	3	4 e 5	6	7	
12	20	1	10	5	10	99.9922%

Tabela 6.5 : Dados do Sistema Complexo da Figura 6.3 Conforme Billinton (1983).

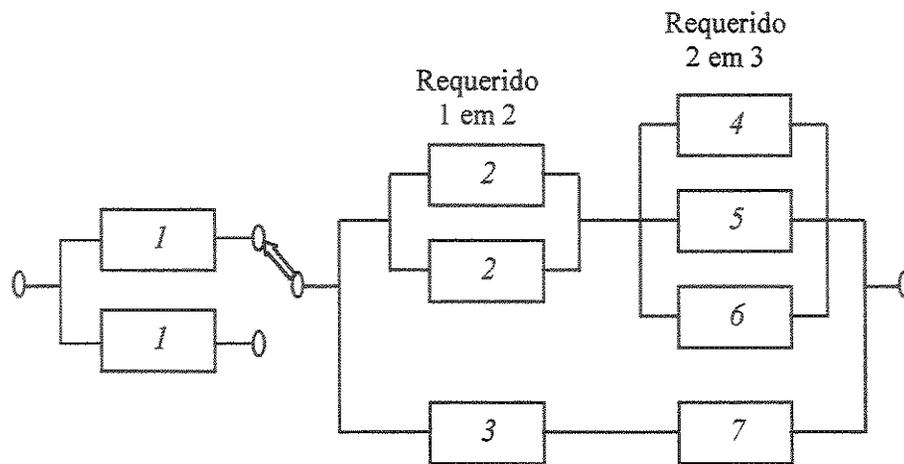


Figura 6.3 : Visualização do Sistema Complexo Proposto por Billinton (1983).

Para se obter a confiabilidade do sistema, utilizando-se a metodologia, o mesmo pode ser modelado conforme figura 6.4.

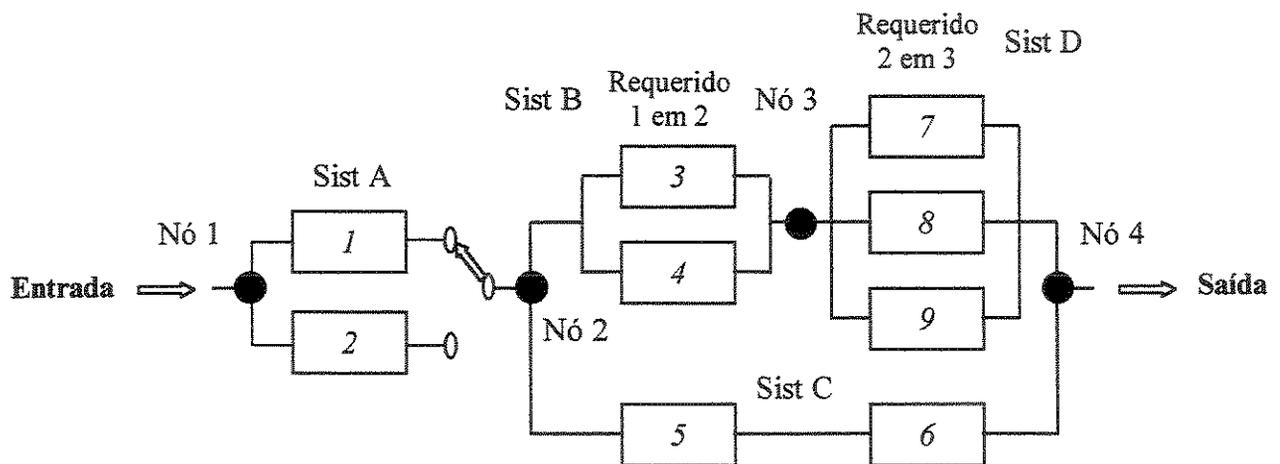


Figura 6.4 : Diagrama de Análise do Sistema Complexo da Figura 6.3.

Para se obter o valor de confiabilidade listado na tabela 6.5, basta utilizar a metodologia considerando nenhuma equipe de manutenção e nenhuma condição de compartilhamento de carga. Para explorar os recursos da metodologia para este sistema, sejam os valores das taxas de reparo dos componente conforme tabela 6.6, condições do sistema A em standby conforme tabela 6.7 e as condições de compartilhamento de carga conforme tabela 6.8.

Taxa de Reparo $\mu$ dos Componente da Figura 6.3 para $t = 100$ h, expresso em ( $h^{-1}$ )			
1 e 2	3 e 7	4 e 5	6
0.01	0.05	0.0125	0.025

Tabela 6.6 : Taxas de Reparo dos Componentes do Sistema Complexo da Figura 6.3.

Condições do Sistema em Standby		
Taxa de Falha do Backup ( $10^{-5} h^{-1}$ )	Probabilidade de Falha de Chaveamento	Reparo Primário
2	25%	S

Tabela 6.7 : Condições do Sistema A em Standby.

Condição	Componente que Falhou	Componente Operacional que assume a Carga	Acréscimo na Taxa de Falha do Componente Operacional
1	3	4	50%
2	4	3	50%
3	7	8	50%
4	7	9	50%
5	8	7	50%
6	8	9	50%
7	9	7	50%
8	9	8	50%

Tabela 6.8 : Condições de Compartilhamento de Carga Adotadas.

Adotando agora análise pontual com  $t = 100$  h, erro de cálculo de 0.0001% e política de manutenção 123456789, obtém-se os dados da tabela 6.9, variando o número de equipes de manutenção disponíveis.

Cálculo	Condições de:			Valores Calculados:	
	Standby	Compart. de Carga	Equipes de Manutenção	Confiabilidade (%)	Disponibilidade (%)
1	N	N	N	99.99218	----
2	S	N	N	99.69489	----
3	N	S	N	99.99218	----
4	S	S	N	99.69489	----
5	S	S	1	99.69646	99.8075
6	S	S	2	99.69654	99.86798
7	S	S	3	99.69658	99.86806
8	S	S	4	99.69654	99.86798
9	S	S	5	99.69661	99.86806
10	S	S	6	99.69661	99.86806
11	S	S	7	----	99.86806
12	S	S	8	----	----
13	S	S	9	----	----

Tabela 6.9 : Valores de Confiabilidade e Disponibilidade Obtidos.

Comparando o valor da confiabilidade do sistema para o cálculo 1 da tabela 6.9 com o valor obtido por Billinton (1983) na tabela 6.5, observa-se a precisão do cálculo da metodologia baseado em modelagem Markoviana. Os demais cálculos da tabela foram obtidos variando-se as possibilidades de condições para o sistema em questão.

Analisando os cálculos, obtidos para esta configuração e demais condições estipuladas, observa-se que:

1 – Apesar dos valores de taxa de falha serem da ordem de  $10^{-4}$ , as condições de compartilhamento de carga não influenciaram o valor de confiabilidade, conforme comparação entre o cálculo 1 e 3;

2 – Por ser o sistema A em standby colocado em série com os demais sistemas, observa-se uma variação no valor de confiabilidade, comparando-se os valores do cálculo 1 com os do cálculo 2;

3 – Ao se incluir os valores de equipes de manutenção, observa-se um crescimento praticamente insignificante dos valores de confiabilidade. Observa-se também, que os mesmo são próximos dos valores de disponibilidade, e que estes são menores que o valor da confiabilidade do sistema calculado sem a metodologia, conforme tabela 6.5 ou cálculo 1, o que não ocorre no caso do sistema analisado no item 6.1. Além disto, o cálculo da confiabilidade com a utilização de 2, 3, 4 e 5 equipes de manutenção fornecem valores bem próximos do cálculo com 6 equipes, podendo ser substituído pelo cálculo do mesmo. Por serem os valores de cálculo com 7, 8 e 9 equipes iguais aos do cálculo com 6 equipes de manutenção, os mesmos foram desconsiderados.

### 6.3 – Análise Confiabilística de um Sistema Complexo de Bombeamento

Seja uma unidade de bombeamento de água composto de quatro componentes. Numa primeira situação, o sistema pode ser montado conforme configuração da figura 6.5. Devido ao ambiente onde foi instalado, o sistema possui dois filtros da linha, ou os componente 1 e 2, enquanto que os componentes 3 e 4 constituem as bombas hidráulicas do sistema.

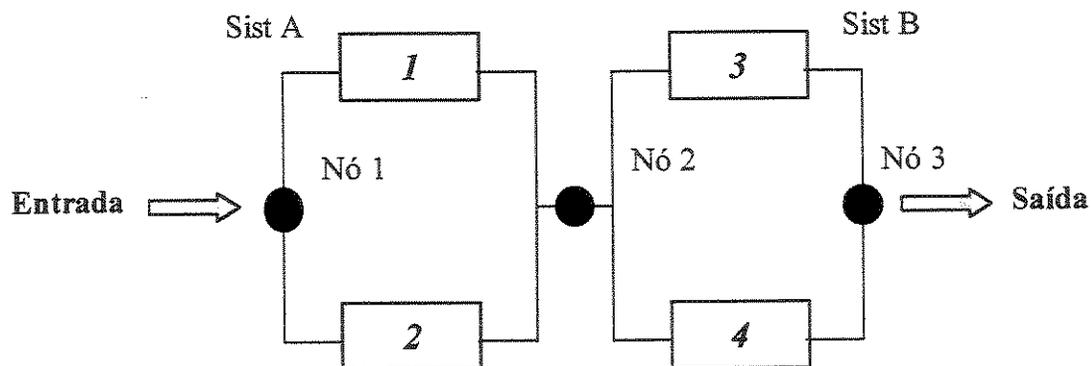


Figura 6.5 : Visualização da Primeira Configuração do Sistema de Bombeamento.

Em uma outra situação, modificando somente a estrutura de conexão, o sistema pode ser considerado conforme configuração da figura 6.6.

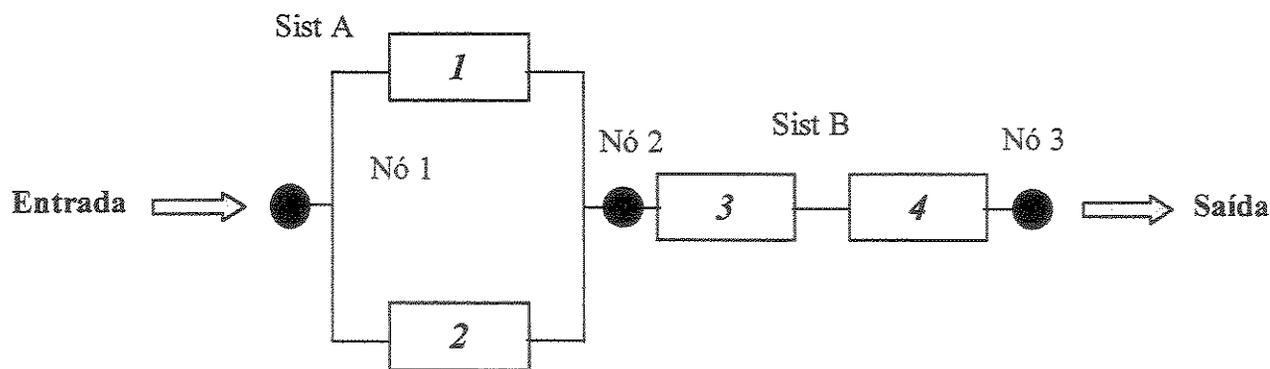


Figura 6.6 : Visualização da Segunda Configuração do Sistema de Bombeamento.

Para se realizar uma análise comparativa dos dois sistemas em termos dos valores de confiabilidade, disponibilidade e MTTF, será realizada a análise dos mesmos conforme metodologia, utilizando-se taxas de falha e reparo constantes em uma análise, e em outra, taxas variáveis com o tempo.

No caso 1, onde os valores das taxas de falha e reparo dos componentes das duas configurações adotadas são consideradas constantes, os seus valores podem ser visualizados conforme tabela 6.10. Estes valores estão de acordo com os valores descritos por Dias (1997) e por Sotskov (1972). Os valores das taxas de reparo foram adotados para estes componentes.

Componentes	Taxa de Falha $\lambda$ ( $10^{-5} \text{ h}^{-1}$ )	Taxa de reparo $\mu$ ( $\text{h}^{-1}$ )
1 ou 2	0.03	0.5
3 ou 4	1.4	0.05

Tabela 6.10 : Taxas Constantes dos Componentes do Sistema de Bombeamento.

Para o caso 2, utilizando-se como ponto de partida dos valores da tabela 6.10, pode-se obter valores de taxas de falha e reparo variáveis, utilizando-se a distribuição de Weibull. Assim, utilizando-se da equação 3.56 e adotando valores do parâmetro  $\beta$  da distribuição, obtêm-se os parâmetros de forma  $\alpha$  a partir dos valores das taxas e dos tempos 1000 e 45000 h. Assim, o modelamento de taxa de falha variável esta descrito na tabela 6.11, enquanto que o modelamento da taxa de reparo esta descrito na tabela 6.12.

Intervalo de Tempo em (h)	Subdivisões do Intervalo	Modelamento Taxa de Falha dos Componentes 1 e 2		Modelamento Taxa de Falha dos Componentes 3 e 4	
		$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$
$0 \leq t < 1000$	20	2777777777.76	0.5	1275510.20408	0.5
$1000 \leq t < 45000$	550	3333333.33	1	71428.5714	1
$45000 \leq t < 400000$	2500	186699.893	4	71431.9283	4

Tabela 6.11 : Parâmetros da Distribuição de Weibull para Taxas de Falhas nos Intervalos de Tempo Considerados.

Intervalo de Tempo em (h)	Subdivisões do Intervalo	Modelamento Taxa de Reparo dos Componentes 1 e 2		Modelamento Taxa de Reparo dos Componentes 3 e 4	
		$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$
$0 \leq t < 1000$	13	1.3333333	1	13.3333333	1
$1000 \leq t < 45000$	550	2	1	20	1
$45000 \leq t < 400000$	2220	4	1	40	1

Tabela 6.12 : Parâmetros da Distribuição de Weibull para Taxas de Reparo nos Intervalos de Tempo Considerados.

Para a configuração da figura 6.5, pode-se considerar quatro condições de compartilhamento de carga, conforme descritas na tabela 6.13. No caso da estrutura da figura 6.6, pode-se considerar as duas primeiras condições de compartilhamento de carga desta tabela.

Condição	Componente que Falhou	Componente Operacional que assume a Carga	Acréscimo na Taxa de Falha do Componente Operacional
1	1	2	100%
2	2	1	100%
3	3	4	200%
4	4	3	200%

Tabela 6.13 : Condições de Compartilhamento de Carga Adotadas.

Assim, utilizando o programa computacional “PACSM” para analisar estas duas configurações com taxas constantes e variáveis, em análise pontual com  $t = 87600$  h ou 10 anos, erro de 0.0001% e política de manutenção 1234, obtém-se os valores da tabela 6.14 e 6.15, para diversas considerações de equipes de manutenção.

Cálculo	Condições de:		Valores Calculados para Configuração Figura 6.5:		Valores Calculados para Configuração Figura 6.6:	
	Compart. de Carga	Equipes de Manutenção	Confiabilidade (%)	Disponibilidade (%)	Confiabilidade (%)	Disponibilidade (%)
1	N	N	50.03043	----	8.599441	----
2	S	N	20.73936	----	8.593753	----
3	S	1	99.73852	99.9996	8.596291	99.94364
4	S	2	99.99979	99.99969	----	99.94375
5	S	3	----	99.99969	----	----
6	S	4	----	----	----	----

Tabela 6.14 : Valores de Confiabilidade e Disponibilidade Obtidos para o Caso 1.

Cálculo	Condições de:		Valores Calculados para Configuração Figura 6.5:		Valores Calculados para Configuração Figura 6.6:	
	Compart. de Carga	Equipes de Manutenção	Confiabilidade (%)	Disponibilidade (%)	Confiabilidade (%)	Disponibilidade (%)
1	N	N	12.39274	----	0.4111955	----
2	S	N	1.177044	----	0.4099012	----
3	S	1	96.78836	99.9991	0.4123105	99.82921
4	S	2	96.91705	99.99952	----	99.83364
5	S	3	----	99.99952	----	----
6	S	4	----	----	----	----

Tabela 6.15 : Valores de Confiabilidade e Disponibilidade Obtidos para o Caso 2.

Para a obtenção dos valores de MTTF das duas configurações adotadas, utiliza-se o programa computacional “PACSM”, com taxas constantes e variáveis, em um intervalo de tempo de 0 - 400000 h, erro de 0.0001% e política de manutenção 1234, obtendo-se os valores da tabela 6.16, para diversas considerações de equipes de manutenção.

Cálculo	Condições de:		Valores Calculados de MTTF para a Configuração da Figura 6.5:		Valores Calculados de MTTF para a Configuração da Figura 6.6:	
	Compart. de Carga	Equipes de Manutenção	Taxa Constante (h)	Taxa Variável (h)	Taxa Constante (h)	Taxa Variável (h)
1	N	N	106508.97	62438.52	35706.06	29610.10
2	S	N	59484.66	45972.52	35698.18	29606.89
3	S	1	397569.88	134978.28	35698.30	29605.46
4	S	2	399999.97	135128.16	----	----
5	S	3	----	----	----	----
6	S	4	----	----	----	----

Tabela 6.16 : Valores de MTTF Obtidos para as Duas Configurações Adotadas.

Analisando os cálculos obtidos para a configuração da figura 6.5 nas tabelas 6.14 e 6.15, com as condições adotadas, observa-se que:

1 – Mesmo possuindo taxa de falha dos filtros da ordem de  $10^{-7}$ , as condições de compartilhamento de carga influenciaram o valor calculado da confiabilidade, conforme comparação entre o cálculo 1 e 2;

2 – Nos cálculos sem condições de equipes de manutenção, os valores de confiabilidade para taxa constante são expressivamente maiores que os obtidos para taxa variável, demonstrando para esta configuração, a influência deste tipo de análise;

3 – Ao se incluir os valores de equipes de manutenção, observa-se um crescimento elevado dos valores de confiabilidade. Observa-se que os mesmos são próximos dos valores de disponibilidade, incluindo também a análise com taxas variáveis. Contudo, a medida que se aumenta o número de equipes de manutenção, os valores de confiabilidade e disponibilidade fornecem valores bem próximos do cálculo com 2 equipes, podendo ser

substituído pelo cálculo do mesmo. Por serem os valores de cálculo com 3 e 4 equipes iguais ao do cálculo com 2 equipes de manutenção, os mesmos foram desconsiderados.

Analisando os cálculos obtidos para a configuração da figura 6.6 nas tabelas 6.14 e 6.15, com as condições adotadas, observa-se que:

1 – As condições de compartilhamento de carga influenciaram pouco no valor calculado de confiabilidade para esta configuração, conforme comparação entre o cálculo 1 e 2;

2 – Nos cálculos sem condições de equipes de manutenção, os valores de confiabilidade para taxa constante são expressivamente maiores que os obtidos para taxa variável, demonstrando para esta configuração, a influência deste tipo de análise;

3 – Na inclusão dos valores de equipes de manutenção, observa-se pouca influência nos valores calculados de confiabilidade. Observa-se também, que os mesmos estão muito distantes dos valores de disponibilidade, sendo que o mesmo ocorre na análise com taxas variáveis. Por serem os valores de cálculo com 2, 3 e 4 equipes iguais ao do cálculo com 1 equipe de manutenção, os mesmos foram desconsiderados.

Nos cálculos da tabela 6.16, pode-se perceber a influência da utilização de taxas variáveis na vida útil do sistema, demonstrando uma expressiva diminuição no caso da configuração da figura 6.5, enquanto que na outra configuração a diminuição foi pequena.

Assim, analisando os casos descritos nos três subtópicos deste capítulo, observa-se que a existência de redundâncias na configuração do sistema aumenta as influências no cálculo dos valores de confiabilidade e disponibilidade, devido a condições de compartilhamento de carga e de reparo. Para sistemas com conexões em série, a contribuição destas condições é afetada. Caso o sistema seja exclusivamente em série, a contribuição é praticamente inexistente. Os valores e os tipo de taxas, assim como a número de equipes de manutenção, também influenciam no cálculo. Contudo, esta influência dependente da configuração do sistema.

## Capítulo 7

### Conclusões e Sugestões para Próximos Trabalhos

#### 7.1 – Quanto aos Objetivos

Conforme descrito no item 1.1, o presente trabalho possui alguns objetivos básicos, que se resumem no desenvolvimento de uma metodologia capaz de permitir a análise de sistemas levando- se em conta:

- 1 – As dependências entre componentes;
- 2 – Utilização de taxas de falha e de reparo constantes ou variáveis no tempo;
- 3 – Inclusão de dados de reparo ou manutenção.

A aplicação desta metodologia permitiu o desenvolvimento de um programa computacional, que conforme os objetivos listados no item 1.1, permite:

- 1 – Análise do sistema em um dado instante de tempo, ou em um intervalo de tempo;
- 2 – Estimar os valores de confiabilidade e disponibilidade do sistema simples ou complexo;
- 3 – Análise de sensibilidade dos dados do sistema;
- 4 – Cálculo do MTTF do sistema.

Conforme descrição da metodologia e do programa computacional no capítulo 5, conclui-se que os objetivos requeridos foram alcançados. Na utilização da metodologia, conforme exemplos analisados no capítulo 6, pode-se observar que a análise de sistemas, utilizando modelamento

Markoviano, é mais ampla que a análise por Métodos Combinatórios, visto a variedade de possibilidades que podem ser analisadas. Estas possibilidades influenciam nos valores calculados de confiabilidade, disponibilidade e MTTF.

Em uma análise mais detalhada destas possibilidades, pode-se concluir que:

1 – Para um sistema puramente em série, não há influência nenhuma destas condições no cálculo dos valores mencionados. No caso extremo, em um sistema puramente paralelo, as influências são totais. Como um sistema complexo com  $n$  componentes, na modelagem, se situa entre estes dois extremos, a configuração deste sistema influencia diretamente na validade da utilização de condições de dependência ou de dados de reparo, conforme demonstrado nos casos estudados no capítulo 6;

2 – A análise de sistemas utilizando taxas de falha e reparo variáveis demonstram a validade de pesquisas nesta área, visto a diferença de valores encontrados em comparação com a utilização de taxas constantes;

3 – A inclusão das dependências entre componentes, através das condições de compartilhamento de carga, demonstrou-se útil, sendo sua principal aplicação em sistema redundantes;

4 – Apesar do modelamento Markoviano permitir a inclusão do número de equipes de manutenção e da política de reparo, observa-se que a inclusão de 1, 2, ... ,  $n$  equipes, dada uma política de reparo, apresenta variação pequena entre as mesmas, sendo assim, recomendado a verificação da influência de 1 equipe e do número máximo viável de equipes fornecido pelo programa, de acordo com a configuração. As políticas de manutenção adotadas podem ser várias, mas se observa que a influência de uma política 1234 ou 1324, para um sistema com 4 componentes, fornecem valores bem próximos, senão iguais, dependendo dos valores das taxas de reparo ou da configuração do sistema, sendo este o motivo de não se realizar este tipo de análise nos exemplos do capítulo 6. Pode-se adotar políticas tais como, 1111 ou 1212, focando determinados componentes, contudo, não se tem base prática para o mesmo. Caso se deseje modelar uma política primeiro-falha-primeiro-repara, utiliza-se o número máximo de equipes de manutenção disponível com prioridade 123... $n$ , no caso de um sistema com  $n$  componentes.

Assim, este trabalho constitui uma ferramenta para análise mais realística dos valores de confiabilidade, disponibilidade e MTTF de sistemas que dispõem de dados tais como, taxas de falha e reparo, condições de dependências e de reparo dos componentes.

## 7.2 – Quanto as Sugestões para Próximos Trabalhos

Devido ao número de estados ser dependente do número de componentes, a medida que este último cresce, a resolução do problema exige um custo computacional muito alto, sugerindo assim, o emprego da metodologia para sistemas com até 9 componentes. Entretanto, por a matriz  $\rho$  ser esparsa e, dependendo da configuração do sistema, não se utilizar de todos os estados, o custo computacional pode ser reduzido e assim, aumentar o número de componentes a ser analisado. Para isto, poderia-se estudar a implementação de um dos seguintes procedimentos:

- 1 – Truncagem dos estados;
- 2 – Agregação de estados;
- 3 – Aplicação da técnica de matriz esparsa.

Caso se tenha a necessidade de modelagem de outros sistemas simples, a metodologia permite a inclusão de sistemas tipo Standby com 3 ou mais componentes, sistemas de computação tipo Voter ou Trimodular, ou outro sistema disponível.

O trabalho adota que cada componente pode estar operando ou em falha. Pode-se também, utilizar a metodologia para sistemas que possuam três condições do componente, ou sistemas ternários, necessitando de ajuste na construção da matriz de estados, matriz  $\rho$  e análise do sistema.

Outra sugestão seria o estudo do tempo de permanência do sistema em cada estado. Com isto, poderia-se realizar uma análise temporal incorporando custo do reparo, ou mesmo, saber quais os estados mais prováveis após um tempo, permitindo assim, a incorporação de manutenção preditiva para se evitar tais estados. O modelamento da manutenção, utilizando-se da distribuição Gamma, também poderia ser analisado, assim como, o modelamento da mesma por processo de renovação ou “Renewal Process”.

Conclui-se finalmente, que este trabalho, abordando o tema de confiabilidade de sistemas, é respaldado pela atualidade do assunto e pela importância deste tipo de problema e cálculo, visto os sistemas de engenharia, cada vez mais complexos, hoje disponíveis.

## Referências Bibliográficas

- Barlow, R. E. Mathematical theory of reliability: A historical perspective. *IEEE Transactions on Reliability*, v. R-33, (1), pp.16-20, 1984.
- Batts, J. R. Computer program for approximating system reliability – Part II. *IEEE Transactions on Reliability*, v. R-20, (2), pp.88-90, 1971.
- Billinton, R., Allan, R. N. *Reliability evaluation of engineering systems: Concepts and techniques*. New York: Plenum Press, 1983, 349 p.
- Birolini, A. On the use of Stochastic processes in modeling reliability problems. *Reliability in Electrical and Electronic Components and Systems*, pp.96-100, 1982.
- Boehm, F., Hald, U. P. Lewis, E. E. Parts renewal in continuous-time Monte Carlo reliability simulation. *IEEE Proceedings Annual Reliability and Maintainability Symposium*, pp.345-349, 1988.
- Bronson, R. *Schaum's outline of modern introductory differential equations*. New York: McGraw-Hill, 1973, 306 p.
- Brown, D. B. A computerized algorithm for determining the reliability of redundant configurations. *IEEE Transactions on Reliability*, v. R-20, (3), pp.121-124, 1971.

- Bubenko, J. A., Habibollahzadeh, H. Reliability aspects in power systems. *Reliability in Electrical and Electronic Components and Systems*, pp.18-19, 1982.
- Buchholz, P. An adaptive aggregation/disaggregation algorithm for hierarchical Markovian models. *European Journal of Operational Research*, v. 116, pp.545-564, 1999.
- Cavalca, K. L. *Confiabilidade em engenharia*. Apostila da Disciplina IM461, 1998.
- Chung, W. K. A reliability analysis of a k-out-of-N:G redundant system with common-cause failures and critical human errors. *Microelectron. Reliab.*, v. 30, (2), pp.237-241, 1990.
- Clarke, A. B., Disney, R. L. *Probability and random processes for engineers and scientists*. New York: John Wiley & Sons Inc., 1970, 346 p.
- Deng, Y., Song, S. Reliability analysis of a multicomponent system in a multistate Markovian environment. *Microelectron. Reliab.*, v. 33, (9), pp.1237-1239, 1993.
- Devooght, J., Tombuyses, B. Aggregation methods for reliability and availability calculations. *Reliability Engineering and System Safety*, v. 51, pp.23-34, 1996.
- Dias, J. C. *Confiabilidade de sistemas mecânicos*. Apostila da Disciplina MX11, 1997.
- Doty, L. A. *Reliability for the technologies*. 2<sup>nd</sup> ed. New York: Industrial Press Inc., 1989, 307 p.
- El-Damcese, M. A. Markovian-model for systems with independent units. *Microelectron. Reliab.*, v. 35, (7), pp.1059-1061, 1995.
- Fleming, J. L. Relcomp: A computer program for calculating system reliability and MTBF. *IEEE Transactions on Reliability*, v. R-20, (3), pp.102-107, 1971.

- Gross, D., Miller, D. R. The randomization technique as a modeling tool and solution procedure for transient Markov processes. *Operations Research*, v. 32, pp.343-361, 1984.
- Gubian, P., Santomauro, M. RELAN: A computer program for reliability analysis of complex systems. *Reliability in Electrical and Electronic Components and Systems*, pp.64-67, 1982.
- Henley, E. J., Willian, R. A. *Graph theory in modern engineering – Computer aided design, control, optimization, reliability analysis*. New York: Academic Press Inc., 1973, Cap. 12, Process reliability analysis by Flow-Graph methods, pp. 223-244.
- Hoel, P. G., Port, S. C., Stone, C. J. *Introduction to Stochastic processes*. Boston: Houghton Mifflin Company, 1972, 203 p.
- Jensen, P. A., Bellmore, M. An algorithm to determine the reliability of a complex system. *IEEE Transactions on Reliability*, v. R-18, (4), pp.169-174, 1969.
- Kanapoulos, N., Wright, V. IRAAP: An interactive computer program for reliability and availability predictions of fault-tolerant systems architectures. *Reliability in Electrical and Electronic Components and Systems*, pp.638-640, 1982.
- Keller, A. Z., Kamath, A. R. R. Bayesian reliability prediction. *Reliability in Electrical and Electronic Components and Systems*, pp.954-959, 1982.
- Kim, Y. H., Case, K. E., Ghare, P. M. A method for computing complex system reliability. *IEEE Transactions on Reliability*, v. R-21, (4), pp.215-219, 1972.
- Kitchin, J. F. Practical Markov modeling for reliability analysis. *IEEE Proceedings Annual Reliability and Maintainability Symposium*, pp.290-296, 1988.
- Krishnamurthy, E. V., Komissar, G. Computer-aided reliability analysis of complicated networks. *IEEE Transactions on Reliability*, v. R-21, (2), pp.86-89, 1972.

- Labeau, P. E. Multicomponent systems with time-dependent transition rates. A note on the representation and number of system states. *Ann. Nucl. Energy*, v. 25, (10), pp.765-769, 1998.
- Lewis, E. E. *Introduction to reliability engineering*. 2<sup>nd</sup> ed. New York: John Wiley & Sons Inc., 1996, 435 p.
- Li, W., Alfa, A. S, Zhao, Y. Q. Stochastic analysis of a repairable system with three units and two repair facilities. *Microelectron. Reliab.*, v. 38, (4), pp.585-595, 1998.
- Li, W., Shi, D. Reliability analysis of a two-unit parallel system with “preemptive priority” rule. *Microelectron. Reliab.*, v. 33, (10), pp.1447-1453, 1993.
- Loo, S. G. Evaluation of Conditional Failure Density from Hazard Rate. *IEEE Transactions on Reliability*, v. R-20, (2), pp.87-88, 1971.
- Mojena, M. A. R.. *Análise e redução de estruturas em confiabilidade* Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1999, 158 p. Tese (Mestrado).
- Mokaddis, G. S., Tawfek, M. L. Some characteristics of a two-dissimilar-unit cold standby redundant system with three modes. *Microelectron. Reliab.*, v. 36, (4), pp.497-503, 1996.
- Naresky, J. J. Reliability definitions. *IEEE Transactions on Reliability*, v. R-19, (4), pp.198-200, 1970.
- Nelson, A. C., Batts, J. R., Beadles, R. L. A computer program for approximating system reliability. *IEEE Transactions on Reliability*, v. R-19, (2), pp.61-65, 1970.
- Press, W. H. et al. *Numerical recipes in C : The art of scientific computing*. 2<sup>nd</sup> ed. New York: Cambridge University Press, 1992, 986 p.

- Ramakumar, R. *Engineering reliability: Fundamentals and application*. New Jersey: Prentice-Hall International Inc., 1993, 482 p.
- Ravichandran, N. *Stochastic methods in reliability theory*. New Delhi: Wiley Eastern Limited, 1990, 201 p.
- Sahner, R. A., Trivedi, K. S. Reliability modeling using SHARPE. *IEEE Transactions on Reliability*, v. R-36, (2), pp.186-193, 1987.
- Sharma, T. C., Bazovsky, I. Reliability analysis of a large system by Markov techniques. *IEEE Proceedings Annual Reliability and Maintainability Symposium*, pp.260-267, 1993.
- Sherwin, D. J., Bossche, A. *The reliability, availability and productiveness of systems*. London: Chapman & Hall, 1993, 270 p.
- Singh, R. P., Misra, R. B. Two unit repairable redundant standby system. *Microelectron. Reliab.*, v. 30, (2), pp.289-298, 1990.
- Soman, K. P., Misra, K. B. On Bayesian estimation of system reliability. *Microelectron. Reliab.*, v. 33, (10), pp.1455-1459, 1993.
- Souza e Silva, E. A., Muntz, R.R. *Métodos computacionais de solução de cadeias de Markov: Aplicação a sistemas de computação e comunicação*. Porto Alegre: Instituto de Informática da UFRGS, 1992, 206 p.
- Sotskov, B. *Fundamentos de la teoria y del calculo de fiabilidad*. Moscou: Editorial Mir, 1972, 263 p.
- Suh, J., Han, C., Jun, C. System reliability estimation using simulation combined with network reductions. *Microelectron. Reliab.*, v. 36, (9), pp.1263-1267, 1996.

- Sur, B. N., Sarkar, T. Numerical method of reliability evaluation of stand-by redundant system. *Microelectron. Reliab.*, v. 36, (5), pp.693-696, 1996.
- Tillman, F. A. et al. Optimal Reliability of a Complex System. *IEEE Transactions on Reliability*, v. R-19, (3), pp.95-99, 1970.
- Tombuyses, B. Reduction of the Markovian system by the influence graph method: Error bound and reliability computation. *Reliability Engineering and System Safety*, v. 63, pp.1-11, 1999.
- Tombuyses, B., Devooght, J. Solving Markovian systems of O.D.E. for availability and reliability calculations. *Reliability Engineering and System Safety*, v. 48, pp.47-55, 1995.
- Yang, N., Dhillon, B. S. Stochastic analysis of a general standby system with constant human error and arbitrary system repair rates. *Microelectron. Reliab.*, v. 35, (7), pp.1037-1045, 1995.