ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR Daniel Augusto
Pereira E APROVADA
PELA COMISSÃO JULGADORA EM 15 / 04 / 2008
nebesto his Perpa.
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

# Projeto de filtros para detecção de falhas usando a norma H-infinito

Autor: Daniel Augusto Pereira Orientador: Alberto Luiz Serpa

# UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

# Projeto de filtros para detecção de falhas usando a norma H-infinito

Autor: Daniel Augusto Pereira Orientador: Alberto Luiz Serpa

Curso: Engenharia Mecânica

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Dissertação de mestrado acadêmico apresentada à Comissão de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2008

SP - Brasil

# FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

Pereira, Daniel Augusto

P414p Projeto de filtros para detecção de falhas usando a norma H-infinito / Daniel Augusto Pereira. --Campinas, SP: [s.n.], 2008.

Orientador: Alberto Luiz Serpa Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Teoria dos sistemas dinâmicos. 2. Localização de falhas (Engenharia). 3. Sistemas de controle por realimentação. I. Serpa, Alberto Luiz. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Título em Inglês: Filters design for fault detection based on H-infinity norm Palavras-chave em Inglês: Theory of dynamical systems, H-infinity control, Fault detection

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica

Banca examinadora: Lázaro Valentim Donadon, Eurípedes Guilherme de Oliveira

Nóbrega

Data da defesa: 15/02/2008

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Mecânica

# UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

# Projeto de filtros para detecção de falhas usando a norma H-infinito

Autor: Daniel Augusto Pereira Orientador: Alberto Luiz Serpa

A Banca Examinadora composta pelo membros baixo aprovou esta dissertação:

Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa, presidente

Faculdade de Engenharia Mecânica - UNICAMP

Prof. Dr. Vazaro Valentim Donadon

Departamento de Engenharia Mecânica – UFMG

Prof. Dr. Eurípedes Guilherme de Oliveira Nóbrega

Faculdade de Engenharia Mecânica - UNICAMP

# Agradecimentos

Agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro.

# Resumo

PEREIRA, Daniel Augusto. *Projeto de filtros para detecção de falhas usando a norma H-infinito*. Dissertação de Mestrado. Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas. 2008.

Esta dissertação aborda a aplicação de técnicas modernas de controle de sistemas dinâmicos ao problema de detecção de falhas. Duas diferentes abordagens de detecção são utilizadas: estimação da falha e geração de resíduo. Tanto na estimação de falha quanto na geração de resíduo é formulado um problema  $\mathcal{H}_{\infty}$  cujo objetivo é encontrar um filtro que garanta robustez a distúrbios. No caso da geração de resíduos, o índice  $H_{-}$  é utilizado como critério de desempenho adicional para garantir a sensibilidade à falha e é transformado em um critério  $\mathcal{H}_{\infty}$ . O projeto  $\mathcal{H}_{\infty}$  é abordado sob o ponto de vista de desigualdades matriciais lineares. Falhas e distúrbios devem apresentar comportamento em freqüência distintos para que os filtros consigam separar os efeitos dos mesmos. Para garantir o desempenho nas regiões em freqüência de interesse são utilizados filtros de ponderação. Em contraposição a essa abordagem, os resultados recentes da literatura sobre o lema generalizado de Kalman-Yakubovič-Popov e o controle  $\mathcal{H}_{\infty}$  restrito na freqüência também são usados como ferramentas de projeto independentes de filtros de ponderação. Os métodos são comparados usando modelos de simulação e experimentos no âmbito de estruturas flexíveis.

Palavras-chave

Teoria dos sistemas dinâmicos, Controle  $\mathcal{H}_{\infty}$ , Detecção de falhas

# **Abstract**

PEREIRA, Daniel Augusto. Filters design for fault detection based on H-infinity norm. Master thesis. Faculty of Mechanical Engineering, State University of Campinas. 2008.

This dissertation adresses the application of modern techniques from control of dynamic systems to the problem of fault detection. Two different approaches are used: fault estimation and residual generation. Both fault estimation and residual generation are formulated as an  $\mathcal{H}_{\infty}$  problem whose objective is to find a filter ensuring robustness to disturbance. In the case of residual generation, the  $H_{-}$  index is used as an additional performance criterion to ensure fault sensitiveness and is transformed into an  $\mathcal{H}_{\infty}$  criterion. The  $\mathcal{H}_{\infty}$  design is treated from the point of view of linear matrix inequalities. Faults and disturbances must have distinct frequency distributions so the filter is able to separate them. Weighting functions are used to guarantee performance at the frequency region of interest. In contrast with this approach, recent results from literature on the generalised Kalman-Yakubovič-Popov lemma and frequency restricted  $\mathcal{H}_{\infty}$  control are also used as design methods whose application is independent of weighting functions. All methods are compared using simple simulation models and experiments with flexible structures.

#### Keywords

Theory of dynamical systems,  $\mathcal{H}_{\infty}$  control, Fault detection

# Sumário

1	Intr	odução		1
	1.1	Aspect	os gerais	1
	1.2	Históri	co	4
	1.3	Estrutu	ıra e organização do trabalho	4
2	Intr	odução	à detecção de falhas	7
	2.1	Introdu	ıção à detecção de falhas	7
	2.2	Métod	os de diagnóstico de falhas baseados em modelos matemáticos	7
		2.2.1	A falha	9
	2.3	Estrutu	ara geral de geração de resíduo	11
		2.3.1	Avaliação do resíduo	12
	2.4	Métod	os de geração de resíduos	12
		2.4.1	Métodos baseados em observadores	13
	2.5	Proble	ma de geração robusta de resíduos	15
		2.5.1	Robustez a distúrbios	16
		2.5.2	Métodos robustos baseados em observadores e desacoplamento de distúrbios	16
	2.6	Projeto	$\mathcal{H}_{\infty}$ no domínio da freqüência	18
3	Con	trole $\mathcal{H}_{\epsilon}$	$\infty$	19
	3.1	Introdu	ıção	19
	3.2	$1.2$ Formulação de um problema de controle $\mathcal{H}_{\infty}$		19
	3.3	Contro	olador $\mathcal{H}_\infty$ via LMI	22
		3.3.1	Formulação de Scherer [35]	23
		3.3.2	Algoritmo do projeto $\mathcal{H}_{\infty}$ seguindo a metodologia de Scherer	27
	3.4	Filtros	de ponderação	27
	3.5	Lema	de Kalman-Yakubovič-Popov - KYP	29
		3.5.1	Lema Generalizado de Kalman-Yakubovič-Popov (GKYP)	32
		3.5.2	Realimentação de saída	35
		3.5.3	Estabilidade	43

		3.5.4	Escolha de $R$	45
		3.5.5	Algoritmo do projeto com o lema GKYP	45
4	Dete	ecção de	e falhas	47
	4.1	Introd	ução	47
	4.2	Filtro	para estimar o sinal de falha	48
		4.2.1	Formulação do problema	48
		4.2.2	Solução do problema	50
		4.2.3	Algoritmo de projeto de um filtro de DIF usando a metodologia de [27, 28]	52
	4.3	Filtro	para gerar sinal de resíduo	52
		4.3.1	Formulação do problema	53
		4.3.2	Adaptação do problema para o projeto $\mathcal{H}_{\infty}$	55
		4.3.3	Solução do problema através de LMI	57
		4.3.4	Algoritmo do projeto de um filtro DIF usando a metodologia de [14,15]	58
		4.3.5	Comentários	61
5	Resu	ıltados		62
	5.1	Filtros	para estimar o sinal de falha	62
		5.1.1	Massa-mola-amortecedor usando filtros de ponderação	62
		5.1.2	Massa-mola-amortecedor usando o lema GKYP	70
		5.1.3	Viga de ordem 16 usando filtros de ponderação	76
		5.1.4	Viga de ordem 16 usando o lema GKYP	83
		5.1.5	Bancada torcional	88
	5.2	Filtros	para gerar o sinal de resíduo	97
		5.2.1	Incerteza de norma $\mathcal{H}_{\infty}$ limitada	97
		5.2.2	Projeto com filtros de ponderação para contemplar incerteza dinâmica	100
		5.2.3	Projeto levando em consideração incerteza politópica modal	104
	5.3	Experi	imentos	107
		5.3.1	Viga experimental	107
		5.3.2	Análise dos resultados dos experimentos com a viga	113
		5.3.3	Bancada torcional	115
6	Con	clusões		117
A	Out	ras abo	rdagens do controle $\mathcal{H}_{\infty}$	119
	A.1	Contro	ole $\mathcal{H}_{\infty}$ por Riccati	119
		Δ 1 1	Algoritmo do projeto Hanor Riccati	121

	A.2	Formu	lação de Skelton, Iwasaki e Grigoriadis [36]	122
		A.2.1	Estabilidade	122
		A.2.2	Desempenho nominal	124
		A.2.3	Algoritmo do projeto $\mathcal{H}_{\infty}$ seguindo a metodologia de Skelton, Iwasaki e	
			Grigoriadis	126
В	Prov	va do Le	ema que transforma $H$ em $\mathcal{H}_\infty$	127
C	Dad	os dos r	nodelos e dos filtros projetados	128
D	Estr	utura d	os filtros de ponderação	138
E	Ince	rtezas		139
	E.1	Teoren	na do Ganho Pequeno	139
	E.2	Incerte	za politópica	139
		E.2.1	Incerteza politópica modal	140

# Lista de Figuras

2.1	Estrutura conceitual de diagnóstico de falhas baseado em modelo matemático.			
2.2	Sistema de malha aberta.	9		
2.3	Estrutura geral de um gerador de resíduos.	11		
2.4	Geração de resíduos via observador de Luenberger generalizado.	14		
2.5	Observador de entrada desconhecida.	17		
3.1	Filtros de ponderação.	29		
4.1	Estrutura básica de um sistema para estimação de falhas.	48		
4.2	Estrutura de projeto de um sistema para estimação de falhas.	48		
4.3	Estrutura de projeto $\mathcal{H}_{\infty}$ de um sistema para estimação de falhas.	49		
4.4	Estrutura generalizada do projeto $\mathcal{H}_{\infty}$ .	50		
4.5	O problema de detecção de falhas.	54		
4.6	Esquema do sistema de geração de resíduos.	55		
4.7	Esquema de projeto do filtro de detecção de falhas.	55		
4.8	Esquema de projeto do filtro de detecção de falhas com filtros de ponderação.	56		
4.9	Esquema padrão de projeto do filtro de detecção de falhas com filtros de ponderação			
	incluídos na planta.	57		
5.1	Sistema massa-mola-amortecedor de três graus de liberdade.	63		
5.2	Resposta em frequência do sistema massa-mola-amortecedor.	64		
5.3	Esquema de projeto do sistema de detecção de falhas usando filtros de ponderação			
	aplicado ao sistema massa-mola-amortecedor.	64		
5.4	Esquema de simulação do sistema de detecção de falhas aplicado ao sistema massa-			
	mola-amortecedor.	65		
5.5	Comparação entre as respostas em frequência do sistema massa-mola-amortecedor			
	e do sistema com inclusão do filtro que estima o sinal de falha projetado usando			
	filtros de ponderação.	66		
5.6	Resposta temporal do sistema massa-mola-amortecedor sem sinal de falha para			
	teste do filtro que estima o sinal de falha projetado usando filtros de ponderação.	67		

5.7	Resposta temporal do sistema massa-mola-amortecedor com sinal de falha do tipo	
	varredura senoidal intermitente para teste do filtro que estima o sinal de falha pro-	
	jetado usando filtros de ponderação.	68
5.8	Resposta temporal do sistema massa-mola-amortecedor com sinal de falha do tipo	
	pulsos para teste do filtro que estima o sinal de falha projetado usando filtros de	
	ponderação.	69
5.9	Comparação entre as respostas em freqüência do sistema massa-mola-amortecedor	
	e do sistema com inclusão do filtro que estima o sinal de falha projetado usando o	
	lema GKYP.	72
5.10	Resposta temporal do sistema massa-mola-amortecedor sem sinal de falha para	
	teste do filtro que estima o sinal de falha projetado usando o lema GKYP.	73
5.11	Resposta temporal do sistema massa-mola-amortecedor com sinal de falha do tipo	
	varredura senoidal intermitente para teste do filtro que estima o sinal de falha pro-	
	jetado usando o lema GKYP.	74
5.12	Resposta temporal do sistema massa-mola-amortecedor com sinal de falha do tipo	
	pulsos para teste do filtro que estima o sinal de falha projetado usando o lema GKYP.	75
5.13	Viga utilizada para testar o filtro de detecção de falhas.	76
5.14	Resposta em freqüência das funções de transferência da viga com respectivas saídas.	77
5.15	Esquema de projeto do sistema de detecção de falhas usando filtros de ponderação	
	aplicado à viga.	77
5.16	Esquema de simulação do sistema de detecção de falhas aplicado à viga.	78
5.17	Comparação entre as respostas em freqüência da viga e do sistema de detecção de	
	falhas com inclusão do filtro que estima o sinal de falha projetado usando filtros de	
	ponderação.	79
5.18	Resposta temporal para a viga sem sinal de falha para teste do filtro que estima o	
	sinal de falha projetado usando filtros de ponderação.	80
5.19	Resposta temporal para a viga com sinal de falha do tipo varredura senoidal inter-	
	mitente para teste do filtro que estima o sinal de falha projetado usando filtros de	
	ponderação.	81
5.20	Resposta temporal para a viga com sinal de falha do tipo pulsos para teste do filtro	
	que estima o sinal de falha projetado usando filtros de ponderação.	82
5.21	Comparação entre as respostas em freqüência da viga e do sistema com inclusão	
	do filtro que estima o sinal de falha projetado usando o lema GKYP.	84
5.22	Resposta temporal para a viga sem sinal de falha para teste do filtro que estima o	
	sinal de falha projetado usando o lema GKYP.	85

5.23	Resposta temporal para a viga com sinal de falha do tipo varredura senoidal in-	
	termitente para teste do filtro que estima o sinal de falha projetado usando o lema	
	GKYP.	86
5.24	Resposta temporal para a viga com sinal de falha do tipo pulsos para teste do filtro	
	que estima o sinal de falha projetado usando o lema GKYP.	87
5.25	Bancada torcional.	88
5.26	Esquema para modelagem da bancada torcional.	89
5.27	Resposta em frequência do modelo com e sem freios.	92
5.28	Esquema de simulação do sistema de detecção de falhas aplicado ao sistema tor-	
	cional com sinal de incerteza.	95
5.29	Simulações com os filtros projetado para estimar o sinal de falha aplicados ao sis-	
	tema torcional.	95
5.30	Resposta em frequência das funções de transferência da viga usada no projeto do	
	gerador de resíduos.	98
5.31	Esquema do problema de geração de resíduos da viga.	99
5.32	Esquema de simulação do problema de geração de resíduos da viga.	100
5.33	Resposta em frequência das funções de transferência da viga e do sistema de de-	
	tecção para o projeto considerando incerteza de norma $\mathcal{H}_{\infty}$ limitada.	101
5.34	Respostas temporais da viga para o filtro projetado considerando incerteza de norma	
	$\mathcal{H}_{\infty}$ limitada.	102
5.35	Resposta em frequência das funções de transferência da viga e do sistema de de-	
	tecção para o projeto considerando incerteza de norma $\mathcal{H}_{\infty}$ limitada.	103
5.36	Respostas temporais da viga para o filtro projetado levando em consideração in-	
	certeza dinâmica.	104
5.37	Resposta em frequência das funções de transferência da viga e do sistema de de-	
	tecção para o projeto considerando incerteza de norma $\mathcal{H}_{\infty}$ limitada.	105
5.38	Respostas temporais da viga para o filtro projetado levando em consideração in-	
	certezas dinâmica e politópica.	106
5.39	Posições dos atuadores e do sensor na planta.	107
5.40	Projeto considerando incerteza de norma $\mathcal{H}_{\infty}$ limitada. Sem falha.	108
5.41	Projeto considerando incerteza de norma $\mathcal{H}_{\infty}$ limitada. O sinal de falha é uma	
	varredura senoidal intermitente.	109
5.42	Projeto considerando incerteza de norma $\mathcal{H}_{\infty}$ limitada. O sinal de falha é um trem	
	de pulsos.	110
5.43	Projeto com filtros de ponderação para contemplar incerteza dinâmica em altas	
	freqüências. Sem falha.	111

5.44	Projeto considerando incerteza dinâmica em altas frequências. Falha é uma varredura	
	senoidal.	112
5.45	Projeto considerando incerteza dinâmica em altas freqüências e incerteza politópica	
	modal. Sem falha.	113
5.46	Projeto considerando incerteza dinâmica em altas freqüências e incerteza politópica	
	modal. O sinal de falha é uma varredura senoidal.	114
5.47	Experimentos com os filtros projetado para estimar o sinal de falha aplicados ao	
	sistema torcional.	116
E.1	Esquema para a apresentação do Teorema do Ganho Pequeno.	139

# Notação

⊗ Produto de Kronecker.

 $diag(\cdot)$  Matriz bloco diagonal construída a partir dos seus blocos como argumentos. Por exemplo,

$$\operatorname{diag}(A, B, C) = \left[ \begin{array}{ccc} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{array} \right].$$

I Matriz identidade.

 $A^T$  Matriz A transposta.

 $A^*$  Matriz A conjugada e transposta. Define-se também que uma matriz A é hermitiana quando  $A=A^*$ .

 $A^{\perp}$  Matriz do espaço nulo de A. Suas colunas são base para o espaço nulo de  $A^T$ . Sabese que  $AA^{\perp}=0$  e  $A^{\perp T}A^{\perp}\geq 0$ .

*j* Unidade imaginária  $(j = \sqrt{-1})$ .

S Variável do domínio da transformada de Laplace.

 $\bar{\sigma}(A)$  O maior valor singular da matriz A. Por definição, os valores singulares de uma matriz são os autovalores de  $A^*A$ .

 $\sigma(\cdot)$  Função auxiliar usada no Capítulo 3 definida como

$$\sigma(\Gamma, \Sigma) = \left[ \begin{array}{c} \Gamma \\ I \end{array} \right]^* \Sigma \left[ \begin{array}{c} \Gamma \\ I \end{array} \right].$$

 $ho(\cdot)$  Função auxiliar usada no Capítulo 3 definida como

$$\rho(\Gamma, \Sigma) = \left[ \begin{array}{cc} I & \Gamma \end{array} \right] \Sigma \left[ \begin{array}{cc} I & \Gamma \end{array} \right]^*.$$

 $>,<,\geq,\leq$  Esses símbolos possuem dois usos. Significam simultaneamente as relações de precedência usuais e também são associados às desigualdades cônicas em matrizes como segue. Se se diz que A>0, quer dizer que a matriz A é positivo-definida, ou seja,  $x^*Ax>0$  (com > no sentido de maior) para qualquer  $x\in\mathbb{C}$ . Ainda, A>B significa que A-B>0. Definições análogas são usadas para  $<,\geq$  e  $\leq$ .

 $\mathbb{C}^{n\times m}$  Espaço vetorial, de dimensão  $n\times m$ , de elementos complexos.

 $\mathbb{H}_p$  Conjunto das matrizes hermitianas de dimensão  $p \times p$ .

 $\mathbb{R}^{n \times m}$  Espaço vetorial, de dimensão  $n \times m$ , de elementos reais.

 $(P \star K)$  Sistema em malha fechada resultante da transformação linear fracional entre  $P \in K$ .

# Capítulo 1

# Introdução

### 1.1 Aspectos gerais

A demanda por confiabilidade, segurança e redução de desperdícios em processos industriais fez crescer nos últimos anos o interesse pela detecção e isolamento de falhas (DIF ou FDI - fault detection and isolation) e pelo controle tolerante a falhas (CTF ou FTC - fault tolerant control) [29]. Os sistemas de controle estão se tornando cada vez mais complexos e os algoritmos de controle cada vez mais sofisticados. Também por isso, há uma necessidade de tolerância a falhas nos sistemas de controle a ser atendida não apenas através da elevação da confiabilidade das unidades funcionais do sistema (por exemplo introduzindo redundância física), mas também utilizando conceitos analíticos eficientes de detecção, isolamento e acomodação de falhas [9]. A acomodação de falhas é a capacidade do sistema de lidar com os efeitos indesejáveis e manter os requisitos de desempenho através de um sistema de controle tolerante a falhas.

O propósito da detecção de falhas é determinar a ocorrência de uma falha no sistema. Já o isolamento da falha é utilizado para determinar a localização da falha, após a detecção. Uma falha é definida como uma alteração inesperada no sistema (como um mau funcionamento de um componente ou variações bruscas em condições de operação) que pode levar a uma degradação do desempenho [5]. Assim, uma falha não está necessariamente associada a uma interrupção no funcionamento. Essas falhas podem ocorrer em sensores, atuadores ou em componentes da estrutura ou processo.

Os métodos pioneiros para detecção de falhas eram baseados em redundância física. Como exemplo tem-se a utilização de sensores em paralelo indicando falha quando o sinal em um deles é diferente do sinal dos demais. Mas essa abordagem pode ser demasiadamente cara para algumas aplicações, tornando a relação custo-benefício um impedimento para a realização prática. Métodos analíticos confiáveis tornam o processo de detecção mais simples e reduzem custos. Fazendo uso de relações estabelecidas entre sinais de entrada e saída, métodos de redundância analíticos para DIF são baseados na comparação entre os sinais esperados e os medidos, sendo dessa diferença

gerado o chamado vetor de resíduos a ser processado e interpretado.

Os métodos analíticos podem ser baseados no modelo matemático do sistema ou baseados no conhecimento oriundo de alguma descrição lógica de sinais medidos e de elementos do sistema, implicando o uso de técnicas de inteligência artifical [27]. Essa abordagem baseada no conhecimento deve ser vista como uma alternativa à abordagem baseada em modelo matemático, ou complementar a ela [9].

O conceito de resíduo é fundamental para a detecção de falhas. Ele é definido como um escalar ou vetor que carrega informações temporais relativas à existência de uma falha e, às vezes, da localização da ocorrência da falha. Deve ser nominalmente próximo de zero e seu valor deve crescer quando uma falha ocorrer. Para gerar o sinal de resíduo é necessário considerar os seguintes aspectos [9]:

- a evolução no tempo do sinal de falha é desconhecida;
- o modelo matemático do sistema nominal apresenta incertezas;
- existem ruídos no sistema e nas medidas;
- o resíduo deve ser gerado em um tempo de processamento suficiente.

Basicamente, os métodos de geração dos sinais de resíduo, os quais serão brevemente descritos mais adiante, estão divididos em [31]:

- espaço de paridade;
- baseados em observadores:
- identificação de parâmetros.

As técnicas de DIF baseadas em observadores de Luenberger ou filtros de Kalman têm sido bastante investigadas [10]. Os filtros lineares de Kalman assumem uma planta como sendo um modelo linear e exato sujeito a distúrbios gaussianos (com propriedades estatísticas bem conhecidas) [23], enquanto os observadores levam em consideração apenas sinais determinísticos. Esses filtros e observadores fornecem estimativas dos estados e saídas da planta e portanto podem ser utilizados na geração de resíduos. Entretanto são sensíveis a erros de modelagem em suas formulações clássicas [32].

O efeito de incertezas de modelagem é um ponto crítico nos métodos de detecção de falhas baseados em observadores e a solução desse problema é a chave para a sua aplicabilidade prática. Para superar essa dificuldade, os sistemas de DIF devem ser robustos, ou seja, insensíveis ou mesmo invariantes a esses erros de modelagem. Uma simples redução da sensibilidade a esses erros não resolve o problema porque geralmente ela ocasiona também uma redução na sensibilidade a falhas,

dificultando a detecção. Assim, a formulação de um sistema robusto de DIF deve levar em conta a robustez a erros de modelagem sem levar à perda de sensibilidade na detecção da falha [10].

O requisito de geração robusta de resíduos naturalmente leva ao problema de estimação robusta para garantir detecção de falhas também robusta. Daí surge o interesse em se utilizar estimadores  $\mathcal{H}_{\infty}$  robustos [18]. Os métodos baseados na norma  $\mathcal{H}_{\infty}$  para o projeto de filtros (ou controladores) apresentam algumas propriedades essenciais para o sucesso de sistemas de detecção de falhas. Podem-se citar três aspectos fundamentais: a rejeição a perturbações mantendo um índice de desempenho satisfatório; aplicabilidade a sistemas incertos estruturados e não estruturados; e capacidade de encontrar soluções estáveis para problemas complexos [27].

O compromisso central dos filtros DIF é distinguir as falhas dos demais distúrbios existentes quando existem incertezas de modelagem envolvidas. Quando se trabalha com a norma  $\mathcal{H}_{\infty}$ , duas abordagens constumam ser utilizadas: estimação do sinal de falha e geração de resíduos. Na primeira abordagem, a saída do filtro robusto é uma estimativa ótima do sinal de falha obtida através da minimização da norma  $\mathcal{H}_{\infty}$  entre o erro de estimativa e os distúrbios e incertezas. A geração robusta de resíduos é diferente da estimação robusta porque ela não garante apenas a atenuação dos distúrbios e incertezas do modelo. Para garantir o desempenho, são formulados um problema de minimização e outro de maximização simultâneos, uma vez que se deseja maximizar a sensibilidade a falhas e minimizar o efeito de entradas desconhecidas no resíduo. Assim, o problema não pode ser resolvido diretamente a partir das técnicas  $\mathcal{H}_{\infty}$  clássicas. Para superar essa dificuldade, uma possibilidade é a otimização  $\mathcal{H}_{\infty}/H_{-}$ , onde os requisitos de robustez são tratados com a norma  $\mathcal{H}_{\infty}$  e os requisitos de sensibilidade são tratados com a "norma"  $H_{-}$ , um índice que ao contrário da norma  $\mathcal{H}_{\infty}$  trata os mínimos valores singulares. Entretanto esse índice  $H_{-}$  pode ser transformado em um problema  $\mathcal{H}_{\infty}$  a fim de se utilizar as técnicas conhecidas [14].

Para resolver o problema do projeto do filtro  $\mathcal{H}_{\infty}$  duas abordagens foram desenvolvidas no passado. A primeira envolve a solução de uma equação de Riccati e a segunda envolve técnicas de otimização baseadas em LMI (*Linear Matrix Inequalities*) [15], ou desigualdades matriciais lineares. A segunda abordagem tem a vantagem de possuir uma formulação algébrica muito flexível que pode ser aplicada a diversos tipos de plantas [27]. Uma LMI é uma desigualdade semidefinida que é linear nas variáveis desconhecidas. Devido aos recentes avanços na área de otimização convexa, existem eficientes algoritmos para resolver LMI [20]. O aplicativo Matlab possui ferramentas poderosas para o tratamento desse problema de otimização com restrições do tipo LMI.

Em problemas reais, para os controladores  $\mathcal{H}_{\infty}$  serem satisfatórios é usual utilizar o conceito de filtros de ponderação. Esse artifício permite adicionar informações (basicamente, faixas de freqüência predominantes dos sinais envolvidos no problema) à etapa de projeto e conseqüentemente melhorar o desempenho. Entretanto, quanto maior a ordem dos filtros utilizados, maior a ordem do controlador projetado. Além disso, escolher os filtros adequados é uma tarefa difícil, muito

específica do problema e que influencia bastante, sob o ponto de vista numérico, o problema de otimização.

Uma alternativa aos filtros de ponderação é a utilização do *Lema Generalizado de Kalman-Yacubovič-Popov* (GKYP) [17]. O lema GKYP introduz as informações freqüenciais diretamente na formulação das LMIs do problema de controle. Assim, a ordem do controlador projetado não será influenciada pelas limitações em freqüência inevitavelmente introduzidas quando se trabalha com filtros de ponderação. Essa metodologia ainda está em desenvolvimento e fornece resultados bastante gerais para a área de sistemas dinâmicos. Filtros projetados com filtros de ponderação e com o lema GKYP são comparados nesta dissertação. Apesar de os filtros de ponderação acarretarem o acréscimo de ordem do filtro projetado, são obtidos resultados melhores de robustez a distúrbios e sensibilidade a falhas, justamente por causa dessa maior complexidade.

#### 1.2 Histórico

A Tabela 1.1 apresenta um breve histórico em detecção de falhas retirado do livro *Robust model-based fault diagnosis for dynamic systems*, de Ron Patton e Jie Chen [32].

### 1.3 Estrutura e organização do trabalho

O Capítulo 1 apresenta uma breve revisão bibliográfica e aspectos gerais concernentes à detecção de falhas, além de um pequeno histórico da evolução da área de detecção de falhas. No Capítulo 2 é realizada uma introdução mais detalhada ao assunto, com breve descrição dos métodos clássicos, abordagem da necessidade de robustez e da evolução para o projeto no domínio da freqüência através da utilização de técnicas de controle  $\mathcal{H}_{\infty}$ . O Capítulo 3 apresenta uma metodologia de projeto de controladores baseada na norma  $\mathcal{H}_{\infty}$  e em desigualdades matriciais lineares. Com o intuito de garantir que os controladores projetados garantam o desempenho desejado em regiões em freqüência específicas, são abordados os filtros de ponderação, que adicionam pesos no problema de otimização, e o lema generalizado de Kalman-Yakubovič-Popov, que impõe as restrições em freqüência diretamente na formulação das LMIs.

Filtros para estimar sinal de falha e filtros para gerar sinal de resíduo são apresentados no Capítulo 4. Nesses casos, os problemas são transformados em problemas de projeto  $\mathcal{H}_{\infty}$  e as técnicas apesentadas no Capítulo 3 são utilizadas. Para testar essas técnicas de projeto de filtros de detecção de falhas, no Capítulo 5 são realizadas simulações com um sistema massa-mola-amortecedor, uma viga e uma bancada torcional. Para a viga e a bancada torcional são realizados

Tabela 1.1: Histórico de detecção de falhas.

Ano	Autor	Assunto
1971	Beard [4]	Filtro de detecção de falhas de Beard
1971	Mehra [24]	Sistemas estocásticos para DIF
1975	Clark [7]	DIF baseada em observadores
1979	Mironovski [25]	DIF baseada em relações de paridade
1979	Baskiotis [2]	DIF baseada em estimação de parâmetros
1980	Chow [6]	Abordagem da DIF como um problema de dois estágios:
		geração de resíduos e tomada de decisões
1981	Leininger [19]	O problema de robustez foi apontado através da avaliação
		do impacto de erros de modelagem
1981	Frank [11]	DIF baseada em observadores com tentativa de tratar o
		problema da robustez
1982	Watanabe [40]	DIF robusta através de observadores de entrada descon-
		hecida (unknown input observers - UIO)
1986	Patton [34]	DIF robusta através de atribuição de autoestrutura (eigen-
		structure assignment)
1986	Lou [22]	DIF robusta através de relações de paridade ótimas
1987	Viswanadham [38]	Fatoração da matriz de transferência do sistema e utiliza-
		ção de técnicas baseadas na norma $\mathcal{H}_{\infty}$ para o projeto no
		domínio da freqüência.
1988	Emami-Naeini [8]	Avaliação robusta de resíduos e limiares adaptativos
1992	Patton [33]	Representações matemáticas para incertezas de modelagem
		no problema de DIF robusta.
1996	Niemann [26]	Filtro $\mathcal{H}_{\infty}$ para estimar o sinal de falha.

alguns testes experimentais. No Capítulo 6 são realizadas as conclusões finais. Informações adicionais sobre projeto de controladores  $\mathcal{H}_{\infty}$  podem ser conferidas no Apêndice A. Nos apêndices B, C, D e E são mostrados, respectivamente, a prova de um lema importante, tabelas com os modelos de estados das plantas e dos filtros utilizados na dissertação, funções que descrevem os filtros de ponderação utilizados e, por último, um breve comentário sobre incertezas.

# Capítulo 2

# Introdução à detecção de falhas

### 2.1 Introdução à detecção de falhas

Este capítulo é baseado no livro *Robust model-based fault diagnosis for dynamic systems*, de Ron Patton e Jie Chen [32]. Para sua composição foram tomados como base trechos de diferentes capítulos desse livro.

A abordagem baseada em modelo para o diagnóstico de falhas em processos automatizados tem recebido considerável atenção desde o começo dos anos 1970, tanto no contexto da pesquisa como no domínio das aplicações em processos reais. Existe uma grande variedade de métodos na literatura baseados no uso de modelos matemáticos do processo monitorado e na teoria de controle moderno.

A questão mais importante nessa área de diagnóstico de falhas baseado em modelos é a robustez a incertezas de modelagem, que são originárias do conhecimento incompleto do sistema monitorado. Assim, o diagnóstico robusto de falhas se tornou uma questão central nos últimos anos.

#### 2.2 Métodos de diagnóstico de falhas baseados em modelos matemáticos

O diagnóstico de falhas baseado em modelos matemáticos pode ser definido como a detecção, isolamento e caracterização das falhas em componentes de um sistema a partir da comparação das medidas disponíveis com informações conhecidas *a priori* provenientes de um modelo matemático do sistema.

Falhas são detectadas através do ajuste de um limiar (fixo ou variável) para um valor residual gerado pela diferença entre as medidas reais e as estimativas dessas medidas obtidas através do modelo matemático. Um certo número de resíduos pode ser projetado (banco de resíduos) de tal forma que cada um tenha uma sensibilidade a um certo tipo de falha que atua em uma localidade

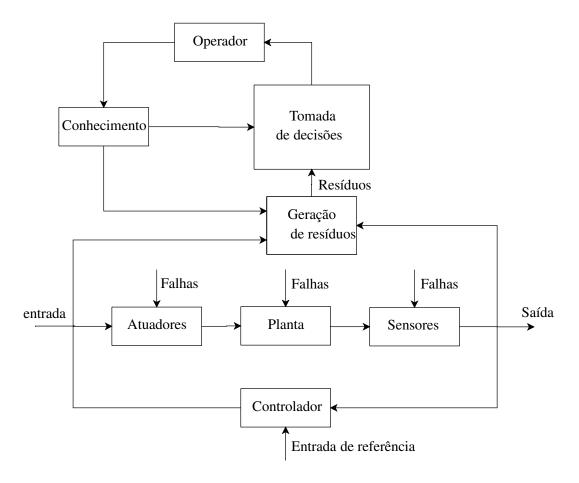


Figura 2.1: Estrutura conceitual de diagnóstico de falhas baseado em modelo matemático.

conhecida do sistema. A análise subsequente de cada resíduo, uma vez concebido um limiar, leva ao isolamento da falha.

A Figura 2.1 ilustra a estrutura geral e conceitual do sistema de diagnóstico de falhas baseado em modelo matemático composto por dois estágios principais: geração de resíduos e tomada de decisões. Esses dois estágios pricipais são descritos a seguir.

Geração de resíduos: Seu propósito é gerar um sinal indicativo de falha (resíduo), utilizando informações disponíveis de entrada e saída do sistema monitorado. Esse sinal de resíduo é projetado para refletir o início de uma possível falha no sistema analisado e deve ser nominalmente zero, ou próximo de zero, quando não há falha presente, mas inconfundivelmente diferente de zero quando uma falha ocorre. Isso significa que o resíduo é caracteristicamente independente das entradas e saídas do sistema em condições ideais de operação. O algoritmo (ou processador) utilizado para gerar os resíduos é chamado *gerador de resíduos*. A geração de resíduos é, então, um procedimento para extrair do sistema indicativos de falha, sendo esses indicativos representados pelo sinal de resíduo. Idealmente, o resíduo deve carregar informações concernentes somente às falhas. Para garantir uma DIF confiável, a perda de



Figura 2.2: Sistema de malha aberta.

informações relativas às falhas contidas no resíduo deve ser tão pequena quanto possível.

**Tomada de decisões:** Os resíduos são examinados pela verossimilhança das falhas e, então, uma regra de decisão é aplicada para determinar se alguma falha ocorreu. Um processo de decisão deve consistir em um simples teste de limiar nos valores instantâneos ou médias móveis dos resíduos ou ele pode consistir em métodos de teoria estatística de decisões, por exemplo, teste de razão de verossimilhança generalizada (GLRT) ou teste de razão de probabiliade seqüencial (SPRT).

A maioria dos trabalhos na área de diagnóstico quantitativo de falhas baseado em modelo matemático é focada no problema da geração de resíduos, inclusive este, porque a tomada de decisões baseada em resíduos bem projetados é relativamente fácil. Entretanto, isso não significa que a pesquisa em tomada de decisões seja menos importante.

#### 2.2.1 A falha

O efeito da falha pode ser modelado como um sinal desconhecido atuando na dinâmica do sistema ou nos sensores e atuadores. Para proceder a DIF, é necessário construir um modelo matemático do sistema monitorado que indique como as possíveis falhas afetam o mesmo. Para ilustrar uma modelagem geral de falhas em componentes, em atuadores e em sensores, considera-se a Figura 2.2 e o respectivo modelo de estados:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu_R(t) 
y_R(t) = Cx(t) + Du_R(t)$$
(2.1)

onde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estado,  $u_R(t) \in \mathbb{R}^r$  é o vetor de entrada real e  $y_R(t) \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de saída real do sistema; A, B, C e D são matrizes conhecidas de dimensões apropriadas.

Uma falha de componente pode ser interpretada como alterações em condições de operação que tornam as relações dinâmicas inválidas. Quando uma falha de componente ocorre no sistema, a nova equação dinâmica pode ser descrita por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu_R(t) + f_c(t) \tag{2.2}$$

onde  $f_c(t) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de falha de componente.

Em alguns casos, as falhas em componentes podem ser descritas como alterações nos parâmetros do sistema, por exemplo, uma alteração na i-ésima linha e na j-ésima coluna da matriz A, de tal forma que a equação dinâmica pode ser representada por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu_R(t) + I_i \Delta a_{ij} x_j(t)$$
(2.3)

onde  $x_j(t)$  é o j-ésimo elemento do vetor x(t),  $I_i$  é um vetor de dimensão n com todos os elementos nulos à exceção de um 1 no i-ésimo elemento, e  $\Delta a_{ij}$  é a alteração no elemento da matriz A.

Na prática, a saída real  $y_R(t)$  do sistema não é diretamente acessível e sensores são usados para medi-la, ou seja, um novo equipamento é acrescentado ao sistema e ele também pode falhar. Assim, a saída do sistema no caso de falha em um sensor será:

$$y(t) = y_R(t) + f_s(t) \tag{2.4}$$

onde  $f_s(t) \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de falha de sensor.

Para o caso da atuação, em um sistema controlado o sinal de controle u(t) é enviado primeiramente a um atuador e a planta recebe o sinal  $u_R(t)$ , ou seja, novamente é acrescentado um equipamento o qual também é passível de falha. Nesse caso, uma falha no atuador será representada por:

$$u_R(t) = u(t) + f_a(t) \tag{2.5}$$

onde  $f_a(t) \in \mathbb{R}^r$  é o vetor de falha de atuador.

Um sistema com possibilidade de falhas de componentes, sensores e atuadores pode ser representado por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Bf_a(t) + f_c(t) 
y(t) = Cx(t) + Du(t) + Df_a(t) + f_s(t)$$
(2.6)

ou de forma mais geral por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + R_1 f(t) 
y(t) = Cx(t) + Du(t) + R_2 f(t)$$
(2.7)

onde  $f(t) \in \mathbb{R}^g$  é o vetor de falha com cada elemento  $f_i(t)$  (i = 1, ..., g) correspondendo a uma falha específica,  $R_1$  e  $R_2$  são matrizes conhecidas modeladas de acordo com os tipos de falhas envolvidas.

Assim, um sistema com possíveis falhas é descrito da seguinte forma em termos de funções de transferência:

$$y(s) = G_u(s)u(s) + G_f(s)f(s).$$
 (2.8)

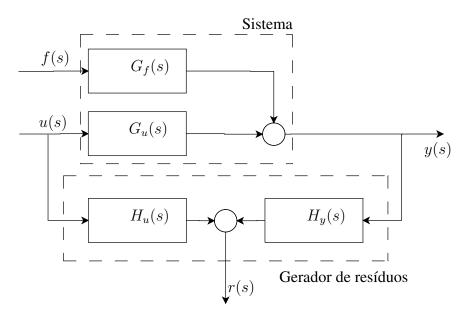


Figura 2.3: Estrutura geral de um gerador de resíduos.

## 2.3 Estrutura geral de geração de resíduo

Um gerador de resíduo é um processador linear cuja entrada consiste tanto da entrada como da saída do sistema monitorado. Uma estrutura geral para um gerador de resíduo é mostrada na Figura 2.3 e é representada matematicamente por:

$$r(s) = \begin{bmatrix} H_u(s) & H_y(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(s) \\ y(s) \end{bmatrix} = H_u(s)u(s) + H_y(s)y(s)$$
 (2.9)

onde  $H_u(s)$  e  $H_y(s)$  são matrizes de transferência realizáveis utilizando-se sistemas lineares. De acordo com a definição, o resíduo é projetado para ser nulo na ausência de falhas e diferente disso quando ocorrer uma falha, ou seja

$$r(t) = 0 \iff f(t) = 0. \tag{2.10}$$

Do diagrama da Figura 2.3 nota-se que:

$$r(s) = H_y(s)(G_f(s)f(s) + G_u(s)u(s)) + H_u(s)u(s).$$
  

$$r(s) = (H_u(s) + H_v(s)G_u(s))u(s) + H_v(s)G_f(s)f(s).$$
(2.11)

Portanto, para satisfazer (2.10), tem-se:

$$H_u(s) + H_y(s)G_u(s) = 0.$$
 (2.12)

A equação (2.9) é uma representação generalizada para os geradores de resíduo. O projeto do gerador de resíduo resume-se à escolha das matrizes de transferência  $H_u(s)$  e  $H_y(s)$  que devem satisfazer a equação (2.12). Assim, podem ser obtidos diferentes geradores de resíduos utilizandose diferentes parametrizações de  $H_u(s)$  e  $H_y(s)$ , selecionados de acordo com as necessidades de desempenho requeridas.

# 2.3.1 Avaliação do resíduo

Uma falha pode ser detectada comparando-se uma certa função de avaliação do resíduo  $F_r(r(t))$  com uma função limiar T(t) de acordo com o seguinte teste

$$\begin{cases} F_r(r(t)) & \leq T(t) & \text{para} \quad f(t) = 0. \\ F_r(r(t)) & > T(t) & \text{para} \quad f(t) \neq 0. \end{cases}$$

Se esse teste é positivo (ou seja, o limiar é excedido pela função de avaliação do resíduo), pode-se supor a existência de uma falha. Existem muitas maneiras de se definir funções de avaliação e determinar limiares. Como exemplo, a função de avaliação do resíduo pode ser escolhida como sendo a norma do vetor de resíduo e o limiar pode ser definido como um valor positivo constante (limiar fixo).

#### 2.4 Métodos de geração de resíduos

A geração de resíduos é uma questão central nos esquemas de detecção e isolamento de falhas. Uma grande variedade de métodos que utilizam modelos matemáticos dos sistemas monitorados está disponível na literatura, sendo as três técnicas a seguir o principal ponto de partida:

1. Métodos baseados em observadores: a idéia básica por trás dos métodos baseados em observadores (ou filtros) é estimar as saídas do sistema a partir de medidas (ou subconjuntos de medidas), utilizando-se observadores de Luenberger, para o caso determinístico, ou filtros de Kalman, para o caso estocástico. Assim, o erro (possivelmente ponderado) de estimativa da saída (ou inovações no caso estocástico), é usado como um resíduo. A flexibilidade na forma de seleção dos ganhos de observadores foi bastante explorada na literatura e permitiu o desenvolvimento de uma grande variedade de esquemas de DIF.

2. **Métodos baseados em relações de paridade:** a idéia básica dos métodos baseados em relações de paridade é prover uma verificação da consistência (paridade) das medidas do sistema monitorado. Seja um problema geral dado pela medição de um vetor *n*-dimensional utilizando-se *m* sensores. A equação algébrica dessa medição é:

$$y(k) = Cx(k) + f(k) + \xi(k)$$
(2.13)

onde  $y(k) \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de medidas,  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estado, f(k) é o vetor de falhas no sensor e  $\xi(k)$  é o vetor de ruídos, sendo C uma matriz conhecida de dimensão  $m \times n$  e k a variável independente relativa ao tempo no domínio discreto.

Com redundância de hardware, o número de sensores é maior que o mínimo necessário para proceder as medições. Isso significa que a dimensão de y(k) é maior que a dimensão de x(k), ou seja, m>n e rank(C)=n. Para sistemas com essa configuração, o número de medidas é maior que o número de variáveis monitoradas. Assim, a inconsistência em um dado proveniente da medição é então uma métrica, a ser definida de tal forma que o vetor de resíduos carregue informações relativas apenas às falhas, que pode ser usada inicialmente para detecção de falhas e posteriormente para isolamento de falhas.

3. **Métodos baseados em identificação de parâmetros:** essa abordagem é baseada na premissa de que as falhas são refletidas nos parâmetros físicos do sistema tais como atrito, massa, viscosidade, resistência, indutância, capacitância etc. A idéia básica do método de detecção é que os parâmetros do processo são repetidamente estimados, em tempo real, utilizando métodos bem conhecidos de estimação e os resultados são comparados com os parâmetros do modelo de referência obtido inicialmente sob a hipótese de ausência de falha. Qualquer discrepância substancial é indicada como uma falha.

#### 2.4.1 Métodos baseados em observadores

Os métodos baseados em observadores são o foco dessa dissertação de mestrado e, portanto, será descrita com um pouco mais de detalhes a fundamentação matemática dos mesmos. Com esse intuito, considera-se o sistema a seguir:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + R_1 f(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) + R_2 f(t) \end{cases}$$
 (2.14)

onde  $f(t) \in \mathbb{R}^g$  é o vetor de falhas. Para esse sistema, um gerador de resíduo baseado em obser-

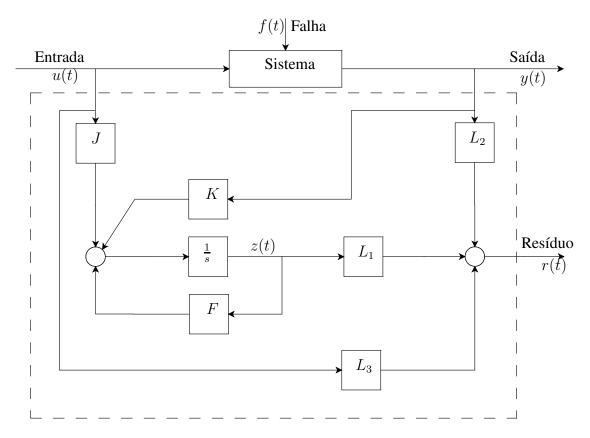


Figura 2.4: Geração de resíduos via observador de Luenberger generalizado.

vador de Luenberger é ilustrado na Figura 2.4 e pode ser definido por:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Fz(t) + Ky(t) + Ju(t) \\ r(t) = L_1 z(t) + L_2 y(t) + L_3 u(t) \end{cases}$$
 (2.15)

onde  $z(t) \in \mathbb{R}^q$  é o vetor de estados desse observador e F, K, J,  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$  são matrizes de dimensões apropriadas a serem projetadas. Nota-se que o observador de Luenberger mostrado possui uma estrutura de realimentação dada pela matriz K. Esta pode ser utilizada para melhorar o comportamento dinâmico do resíduo.

Quando se aplica o gerador de resíduos descrito em (2.15) ao sistema descrito em (2.14), o resíduo é dado por:

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = Fe(t) - TR_1 f(t) + KR_2 f(t) \\ r(t) = L_1 e(t) + L_2 R_2 f(t) \end{cases}$$
 (2.16)

onde e(t) = z(t) - Tx(t) é um sinal de erro e T é uma matriz de transformação adequada. Percebese que o resíduo depende apenas das falhas pois o comportamento assintótico da estimativa exige que e(t) seja anulado com o passar do tempo. Além disso, considera-se a relação a seguir para a

dinâmica do sistema:

$$\dot{e}(t) = \dot{z}(t) - T\dot{x}(t) 
= Fz(t) + Ky(t) + Ju(t) - T[Ax(t) + Bu(t) + R_1f(t)] 
= Fz(t) + K[Cx(t) + Du(t) + R_2f(t)] + Ju(t) - T[Ax(t) + Bu(t) + R_1f(t)] 
= Fz(t) + [KC - TA]x(t) + [KD + J - TB]u(t) + KR_2f(t) - TR_1f(t) 
= Fe(t) - TR_1f(t) + KR_2f(t)$$

donde se conclui que F deve ser estável, TA - FT = KC e J = TB - KD. Ainda é necessário considerar a relação a seguir relacionada à equação do resíduo:

$$r(t) = L_1 z(t) + L_2 y(t) + L_3 u(t)$$

$$= L_1 z(t) + L_2 [Cx(t) + Du(t) + R_2 f(t)] + L_3 u(t)$$

$$= L_1 z(t) + L_2 Cx(t) + [L_2 D + L_3] u(t) + L_2 R_2 f(t)$$

$$= L_1 e(t) + L_2 R_2 f(t)$$

que permite concluir que  $L_1T = -L_2C$  e  $L_3 + L_2D = 0$ . Portanto, para projetar o observador é necessário considerar:

$$F$$
 estável
$$TA - FT = KC$$

$$J = TB - KD$$

$$L_1T + L_2C = 0$$

$$L_3 + L_2D = 0$$

Para alterar a resposta em freqüência do resíduo, um filtro dinâmico Q(s) pode ser utilizado. O modo mais simples de se projetar um gerador de resíduos baseado em observadores é tomar um observador de Luenberger de ordem completa, ou seja, com ordem igual à da planta e o observador é um estimador de estados, de tal forma que:

$$T = I$$
  $L_1 = QC$   
 $F = A - KC$   $L_2 = -Q$   
 $J = B - KD$   $L_3 = QD$ .

# 2.5 Problema de geração robusta de resíduos

A confiabilidade do diagnóstico de falhas deve ser maior que a do sistema monitorado. No

diagnóstico de falhas baseado no modelo matemático do sistema, quanto melhor for esse modelo, melhor será a chance de melhorar a confiabilidade e o desempenho do diagnóstico de falhas. Entretanto, erros de modelagem e distúrbios em sistemas complexos de engenharia são inevitáveis e por isso existe a necessidade de se desenvolver algoritmos de diagnóstico de falhas robustos. A robustez de um sistema de diagnóstico de falhas significa que o mesmo deve ser sensível somente a falhas, mesmo na presença de diferenças entre o modelo e o sistema real (por exemplo, variações de parâmetros e turbulência). Usualmente, variações de parâmetros e distúrbios agem em cima de um processo real de um modo incerto. Assim, pode ser difícil projetar um sistema de diagnóstico de falhas muito sensível a falhas e ao mesmo tempo insensível a incertezas e distúrbios não modelados.

O procedimento central do diagnóstico de falhas baseado em modelo é a geração de resíduos. Tanto falhas quanto incertezas afetam o resíduo e a discriminação entre esses efeitos é difícil. A tarefa no projeto de um sistema DIF robusto é, então, gerar resíduos insensíveis a incertezas e também sensíveis a falhas e, portanto, robustos. A robustez é obviamente provada somente se o resíduo de interesse permanecer insensível a incertezas em toda a faixa de operação do sistema sob supervisão.

#### 2.5.1 Robustez a distúrbios

Seja  $G_d(s)$  a função de transferência entre uma entrada de distúrbio e a saída da planta. Se o gerador de resíduo for projetado para satisfazer:

$$H_{\nu}(s)G_d(s) = 0$$
 (2.17)

ou seja, o distúrbio for totalmente desacoplado do resíduo r(t), o resíduo será robusto a distúrbios. Esse é o princípio do desacoplamento do distúrbio para a geração robusta de resíduo.

### 2.5.2 Métodos robustos baseados em observadores e desacoplamento de distúrbios

Dois métodos clássicos de detecção de falhas que utilizam conceitos de robustez e desacoplamento de distúrbios estão descritos na referência [32] e são brevemente descritos a seguir:

Observadores de entrada desconhecida - UIO: as abordagens baseadas no desacoplamento
do distúrbio são dominantes quando se trata da geração robusta de resíduos. Sob esse ponto
de vista, a metodologia baseada em observadores de entrada desconhecida tem por objetivo
fazer o erro de estimativa de estados desacoplado das entradas desconhecidas (distúrbios),

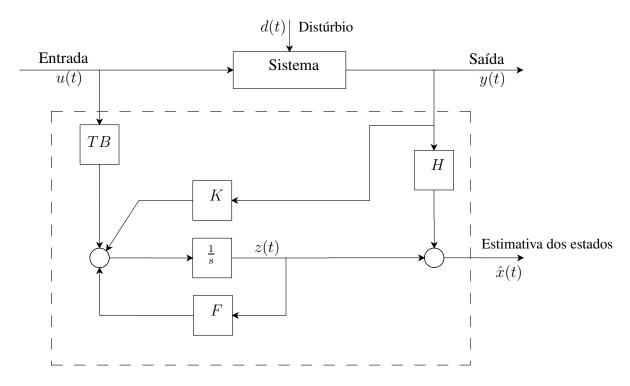


Figura 2.5: Observador de entrada desconhecida.

que apesar de desconhecidas têm matriz de distribuição conhecida, ou seja, é possível modelar o efeito desses distúrbios. A Figura 2.5 mostra esse observador. Várias abordagens para esse tipo de gerador de resíduo foram exploradas na literatura.

2. Observadores com atribuição de autoestruturas (eigenstructure assignment): enquanto os observadores de entrada desconhecida tentam tornar o erro de estimativa independente dos distúrbios, os observadores com atribuição de autoestruturas fazem o resíduo diretamente independente dos distúrbios. Para isso, alguns autovetores à esquerda são escolhidos de tal forma que sejam ortogonais às direções de distribuição dos distúrbios.

A desvantagem desses dois métodos (UIO e atribuição de autoestruturas) é que a distribuição dos distúrbios é requerida para facilitar o projeto, mesmo o distúrbio em si sendo desconhecido. Entretanto, na maioria dos sistemas incertos, as incertezas de modelagem são tratadas como erros de modelagem e a abordagem de desacoplamento de distúrbios não pode ser diretamente aplicada. Até existem formas de gerar aproximações para a matriz de distribuição do distúrbio quando as incertezas são erros de modelagem, mas não são tão eficazes e a robustez é apenas parcialmente atingida.

# 2.6 Projeto $\mathcal{H}_{\infty}$ no domínio da freqüência

Existem diversas maneiras (observadores de entrada desconhecida, atribuição de autoestruturas, relações de paridade ótimas) de eliminar ou minimizar os efeitos de distúrbios e erros de modelagem no resíduo a fim de se obter robustez em DIF. Apesar dessas técnicas serem diferentes, elas apresentam uma característica comum: as estruturas gerais desses métodos são desenvolvidas para sistemas ideais ou com uma estrutura de incerteza especial. Para superar essa limitação, é necessário incluir incertezas não ideais ou mais gerais. Em contraste, a otimização  $\mathcal{H}_{\infty}$  é um método de projeto robusto cuja motivação original originou-se na consideração de várias incertezas, especialmente erros de modelagem. A otimização  $\mathcal{H}_{\infty}$  tem sido desenvolvida, desde sua origem, com a compreensão de que o objetivo de projeto de um sistema pode ser perfeitamente atingido sem estar comprometido com uma otimização na presença de incerteza. Assim, essa técnica é bastante adequada para o tratamento de incertezas.

A maioria dos métodos de otimização  $\mathcal{H}_{\infty}$  para DIF envolvem filtros  $\mathcal{H}_{\infty}$  ligeiramente modificados para gerar o resíduo. Isso significa que o objetivo de projeto é minimizar os efeitos dos distúrbios e erros de modelagem no erro de estimativa e conseqüentemente no resíduo. Entretanto, o problema da geração robusta de resíduo é diferente do problema de estimação robusta porque não requer somente atenuação de distúrbios. O resíduo deve permanecer sensível a falhas ao mesmo tempo que o efeito dos distúrbios deve ser minimizado. Uma possibilidade é estabelecer um compromisso entre robustez a distúrbios e sensibilidade a falhas.

Uma das vantagens dessa abordagem integrada de projeto é que esse problema pode ser facilmente formulado como um problema  $\mathcal{H}_{\infty}$  padrão. Ainda, os erros de modelagem podem ser incorporados diretamente na formulação padrão do problema e resolvidos utilizando-se técnicas de controle robusto. Nesse caso, em vez de gerar um resíduo, pode ser estabelecido um problema de estimação da falha. A falha estimada pode ser utilizada tanto para DIF como para reconfiguração do controle.

A razão para se utilizar  $\mathcal{H}_{\infty}$  em conexão com o problema de DIF é devida ao aspecto de robustez a incertezas de modelagem. Assim como em controle robusto, o problema de filtragem ótima pode ser resolvido através da formulação por desigualdades matriciais lineares. Na aplicação de LMI no projeto de observadores robustos, a característica mais importante é introdução da sensibilidade a falhas no projeto do observador. O pior caso de sensibilidade a falhas é usado como uma restrição para o problema de otimização, que pode ser solucionado utilizando os métodos de LMI.

# Capítulo 3

# Controle $\mathcal{H}_{\infty}$

## 3.1 Introdução

O projeto  $\mathcal{H}_{\infty}$  pode ser empregado quando se deseja que um sistema mantenha um determinado desempenho em condições adversas tais como existência de erros de modelagem e presença de distúrbios. Zames [41] foi quem primeiro formulou o problema de controle  $\mathcal{H}_{\infty}$ .

Em termos gerais, deseja-se reduzir os efeitos de distúrbios externos e ruídos de sensores no sistema tendo em vista o pior caso, ou seja, o valor de pico da função de resposta em frequência (ou diagrama de valor singular). Para tanto, um método de otimização no domínio da frequência é utilizado para que se obtenha o menor valor possível da norma  $\mathcal{H}_{\infty}$  da função de transferência de malha fechada que ainda garanta certos requisitos de projeto.

Conforme visto no Capítulo 2, o problema da detecção de falhas pode ser tratado pela teoria de controle  $\mathcal{H}_{\infty}$ . Por isso, será apresentada no presente capítulo uma formulação para o problema de controle  $\mathcal{H}_{\infty}$  baseada em desigualdades matriciais lineares. No Apêndice A estão descritas a formulação por equações de Riccati e uma outra formulação baseada em LMI.

Neste capítulo também é apresentada a formulação de filtros de ponderação e do lema Generalizado de Kalman-Yakubovič-Popov, uma alternativa à outra. Essas duas formulações são necessárias para garantir restrições em frequência e consequentemente melhorar o desempenho em determinadas regiões de interesse.

## 3.2 Formulação de um problema de controle $\mathcal{H}_{\infty}$

Será definida a seguir a formulação de um problema genérico de controle a ser posteriormente adaptado para diversas situações. Para tanto, seja o sistema descrito no espaço de estados:

$$\dot{x}_p = Ax_p + B_1 w + B_2 u 
z = C_1 x_p + D_{11} w + D_{12} u 
y = C_2 x_p + D_{21} w + D_{22} u$$
(3.1)

onde  $x_p \in \mathbb{R}^n$  e as matrizes  $A, B_1, B_2, C_1, D_{11}, D_{12}, C_2, D_{21}$  e  $D_{22}$  possuem dimensões apropriadas e são conhecidas. Ainda, y é a saída medida, z é a saída de desempenho, w o vetor de distúrbios e u o sinal de controle.

O problema básico do projeto em controle é achar um controlador tal que o sistema de malha fechada seja estável e satisfaça um conjunto de especificações desejado. Observa-se que a matriz que conecta a saída medida y ao sinal de controle u será considerada nula ( $D_{22}=0$ ) por simplificação. Desse modo, para o controlador admite-se o seguinte modelo de estado:

$$\dot{x}_k = A_k x_k + B_k y 
 u = C_k x_k + D_k y$$
(3.2)

onde  $x_k \in \mathbb{R}^{n_k}$  e as matrizes  $A_k$ ,  $B_k$ ,  $C_k$ ,  $D_k$  possuem dimensões compatíveis com as da planta e devem ser o resultado do projeto.

O sistema de malha fechada pode ser escrito a partir de simples manipulações algébricas. Para tanto, deve-se considerar como estados desse sistema de malha fechada  $x_p$  e  $x_k$ , como entrada o vetor w (entradas exógenas) e como saída z (saída de desempenho). Assim, é necessário escrever as equações dinâmicas de forma a isolar  $\dot{x}_p$  e  $\dot{x}_k$  em função dessa entrada w e dos estados  $x_p$  e  $x_k$ . Também é necessário escrever a saída z em função desses mesmos vetores  $(x_p, x_k e w)$ .

Para a equação dinâmica relativa a  $x_p$  em (3.1), substitui-se u pela equação de saída do controlador definida em (3.2). Essa equação é função de y, variável a ser substituída pela equação de saída da planta definida em (3.1), considerando-se  $D_{22} = 0$ , ou seja:

$$\dot{x}_{p} = Ax_{p} + B_{1}w + B_{2}u 
\dot{x}_{p} = Ax_{p} + B_{1}w + B_{2}(C_{k}x_{k} + D_{k}y) 
\dot{x}_{p} = Ax_{p} + B_{1}w + B_{2}C_{k}x_{k} + B_{2}D_{k}(C_{2}x_{p} + D_{21}w) 
\dot{x}_{p} = \begin{bmatrix} A + B_{2}D_{k}C_{2} & B_{2}C_{k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{p} \\ x_{k} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{1} + B_{2}D_{k}D_{21} \end{bmatrix} w.$$

A equação dinâmica relativa a  $x_k$  em (3.2) é dependente da variável y, a ser novamente

substituída pela equação de saída definida em (3.1).

$$\dot{x}_k = A_k x_k + B_k y 
\dot{x}_k = A_k x_k + B_k (C_2 x_p + D_{21} w) 
\dot{x}_k = \begin{bmatrix} B_k C_2 & A_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_p \\ x_k \end{Bmatrix} + [B_k D_{21}] w.$$

Para a saída de desempenho z, repetem-se os mesmos passos, substituindo-se u e y pelas correspondentes equações provenientes dos modelos de estado do controlador e da planta, respectivamente, ou seja:

$$z = C_{1}x_{p} + D_{11}w + D_{12}u$$

$$z = C_{1}x_{p} + D_{11}w + D_{12}(C_{k}x_{k} + D_{k}y)$$

$$z = C_{1}x_{p} + D_{11}w + D_{12}C_{k}x_{k} + D_{12}D_{k}(C_{2}x_{p} + D_{21}w)$$

$$z = \begin{bmatrix} C_{1} + D_{12}D_{k}C_{2} & D_{12}C_{k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{p} \\ x_{k} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} + D_{12}D_{k}D_{21} \end{bmatrix} w.$$

Logo, o sistema de malha fechada pode ser escrito como:

$$\begin{cases}
\dot{x}_{p} \\
\dot{x}_{k}
\end{cases} = \begin{bmatrix}
A + B_{2}D_{k}C_{2} & B_{2}C_{k} \\
B_{k}C_{2} & A_{k}
\end{bmatrix}
\begin{cases}
x_{p} \\
x_{k}
\end{cases} + \begin{bmatrix}
B_{1} + B_{2}D_{k}D_{21} \\
B_{k}D_{21}
\end{bmatrix} w$$

$$z = \begin{bmatrix}
C_{1} + D_{12}D_{k}C_{2} & D_{12}C_{k}
\end{bmatrix}
\begin{cases}
x_{p} \\
x_{k}
\end{cases} + \begin{bmatrix}
D_{11} + D_{12}D_{k}D_{21}
\end{bmatrix} w.$$
(3.3)

Ou de forma mais compacta:

$$\dot{x} = \tilde{A}x + \tilde{B}w 
z = \tilde{C}x + \tilde{D}w,$$
(3.4)

onde

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A + B_2 D_k C_2 & B_2 C_k \\ B_k C_2 & A_k \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} B_1 + B_2 D_k D_{21} \\ B_k D_{21} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} C_1 + D_{12} D_k C_2 & D_{12} C_k \end{bmatrix}$$

$$\tilde{D} = \begin{bmatrix} D_{11} + D_{12} D_k D_{21} \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{Bmatrix} x_p \\ x_k \end{Bmatrix}.$$

O problema de controle  $\mathcal{H}_{\infty}$  pode ser assim definido:

**Problema ótimo**  $\mathcal{H}_{\infty}$  [27]: Encontrar um controlador real e racional próprio K que estabilize a planta generalizada P de modo a minimizar J, dado por:

$$J = \|T_{zw}\|_{\infty} = \max_{\omega} \bar{\sigma}[T_{zw}(j\omega)]$$

onde  $\bar{\sigma}(\cdot)$  é o máximo valor singular.

Desse modo, o controlador ótimo  $\mathcal{H}_{\infty}$  minimiza o valor de pico da matriz de transferência  $T_{zw}$  entre a entrada de distúrbios (w) e a saída de desempenho (z), considerando a resposta em freqüência. Entretanto, encontrar o controlador ótimo  $\mathcal{H}_{\infty}$  pode ser muito complicado. Desse modo, é comum satisfazer os requisitos para o controlador utilizando-se uma solução sub-ótima, a ser melhorada iterativamente até que se atinja o desempenho desejado. Define-se assim o problema sub-ótimo.

**Problema sub-ótimo**  $\mathcal{H}_{\infty}$  [27]: Encontrar um controlador real e racional próprio K que estabilize internamente a planta generalizada P e que, dado um  $\gamma > 0$ , satisfaça a condição:

$$||T_{zw}||_{\infty} < \gamma.$$

## 3.3 Controlador $\mathcal{H}_{\infty}$ via LMI

As Desigualdades Matriciais Lineares (do inglês "Linear Matrix Inequalities - LMIs") e as técnicas de solução das LMIs têm emergido como uma poderosa ferramenta de projeto em áreas como engenharia de controle, identificação de sistemas e projeto estrutural. Três fatores tornam as técnicas de LMI atrativas [12]:

- Uma grande variedade de especificações e restrições de projeto podem ser expressas como LMIs;
- Uma vez formulado em termos de LMIs, um problema pode ser resolvido por algoritmos eficientes de otimização convexa;
- A maioria dos problemas com múltiplas restrições ou objetivos raramente possuem soluções analíticas em termos de equações matriciais, mas geralmente podem ser tratados em termos das ferramentas de LMI. Ou seja, LMIs são uma alternativa aos métodos "analíticos" clássicos.

A seguir será mostradaa uma formulação do problema de controle  $\mathcal{H}_{\infty}$  utilizando LMIs. Uma outra formulação pode ser verificada na seção A.2.

### 3.3.1 Formulação de Scherer [35]

A transformação de variáveis fornecida por Scherer [35] unifica vários problemas de controle, inclusive o  $\mathcal{H}_{\infty}$ . A substituição das matrizes de malha fechada dos sistemas com controlador  $\mathcal{H}_{\infty}$  em sua desigualdade matricial pode ser linearizada se forem aplicadas transformações utilizando as matrizes definidas a seguir.

Seja Q a matriz de Lyapunov e sua inversa  $Q^{-1}$  dadas por:

$$Q = \left[ \begin{array}{cc} Y & N \\ N^T & \bullet \end{array} \right] \ \mathbf{e} \ \ Q^{-1} = \left[ \begin{array}{cc} X & M \\ M^T & \bullet \end{array} \right]$$

em que o sinal (●) indica que a matriz naquela posição não será usada nas definições a seguir e, portanto, não é nomeada.

Definem-se as matrizes  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$  como

$$\Pi_1 = \left[ egin{array}{cc} X & I \ M^T & 0 \end{array} 
ight] \; {
m e} \; \; \Pi_2 = \left[ egin{array}{cc} I & Y \ 0 & N^T \end{array} 
ight]$$

de onde vem que:

$$Q\Pi_1=\Pi_2.$$

Para o problema  $\mathcal{H}_{\infty}$ , a transformação de congruência usada é definida pela matriz diag $(\Pi_1, I, I)$  aplicada sobre a desigualdade matricial (A.25). A desigualdade a ser utilizada é:

$$\begin{bmatrix} \Pi_{1}^{T} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A}^{T}Q + Q\tilde{A} & Q\tilde{B} & \tilde{C}^{T} \\ \tilde{B}^{T}Q & -\gamma I & \tilde{D}^{T} \\ \tilde{C} & \tilde{D} & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_{1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} \Pi_{1}^{T}\tilde{A}^{T}Q\Pi_{1} + \Pi_{1}^{T}Q\tilde{A}\Pi_{1} & \Pi_{1}^{T}Q\tilde{B} & \Pi_{1}^{T}\tilde{C}^{T} \\ \tilde{B}^{T}Q\Pi_{1} & -\gamma I & \tilde{D}^{T} \\ \tilde{C}\Pi_{1} & \tilde{D} & -\gamma I \end{bmatrix}.$$

Devem-se expandir os termos  $\Pi_1^T Q A \Pi_1$ ,  $\Pi^T Q B$ ,  $C \Pi_1$  e  $\Pi_1^T Q \Pi_1$  e substituir as matrizes de estado de malha fechada  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$ ,  $\tilde{C}$  e  $\tilde{D}$  relações adequadas descritas em (3.3). Assim,

$$\Pi_1^T Q A \Pi_1 = \Pi^T A \Pi_1 =$$

$$= \begin{bmatrix} AX + B_2D_cC_2X + B_2C_cM^T & A + B_2D_cC_2 \\ NB_cC_2X + NA_cM^T + Y^TAX + Y^TB_2D_cC_2X + Y^TB_2C_cM^T & NB_cC_2 + Y^TA + Y^TB_2D_cC_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$= \begin{bmatrix} AX + B_2\hat{C} & A + B_2\hat{D}C_2 \\ \hat{A} & Y^TA + \hat{B}C_2 \end{bmatrix}.$$

onde foram feitas as substituições:

$$\hat{A} = NB_c C_2 X + NA_c M^T + Y^T A X + Y^T B_2 D_c C_2 X + Y^T B_2 C_c M^T, \tag{3.5}$$

$$\hat{B} = NB_cC_2 + Y^TB_2D_c, \tag{3.6}$$

$$\hat{C} = D_c C_2 X + C_c M^T, \tag{3.7}$$

$$\hat{D} = D_c, \tag{3.8}$$

as quais correspondem às relações que podem ser isoladas para obter as matrizes do controlador  $A_c$ ,  $B_c$ ,  $C_c$  e  $D_c$ .

Os outros termos a serem expandidos são:

$$\begin{split} \Pi_{1}^{T}QB &= \Pi_{2}^{T}B = \begin{bmatrix} B_{1} + B_{2}D_{c}D_{21} \\ Y^{T}B_{1} + Y^{T}B_{2}D_{c}D_{21} + NB_{c}D_{21} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} B_{1} + B_{2}D_{c}D_{21} \\ Y^{T}B_{1} + \hat{B}D_{21} \end{bmatrix}. \\ C\Pi_{1} &= \begin{bmatrix} C_{1}X + D_{12}D_{c}C_{2}X + D_{12}C_{c}M^{T} & C_{1} + D_{12}D_{c}C_{2} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} C_{1}X + D_{12}\hat{C} & C_{1} + D_{12}\hat{D}C_{2} \end{bmatrix}. \\ \Pi_{1}^{T}Q\Pi_{1} &= \Pi_{1}^{T}\Pi_{2}\begin{bmatrix} X & XY + MN^{T} \\ I & Y \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix}, \end{split}$$

onde foi imposto que  $XY + MN^T = I$ .

Pelas relações encontradas acima, podem-se substituir os termos  $\Pi_1^T Q A \Pi_1$ ,  $\Pi_1^T Q B$  e  $C \Pi_1$ . Dessa forma, tem-se a desigualdade matricial que constitui a restrição do problema de otimização da norma  $\mathcal{H}_{\infty}$ .

**Teorema 1 (Scherer)** O Lema do Limite Real (A.25) pode ser representado como o seguinte problema de otimização:

$$\begin{array}{ll} \textit{minimizar} & \gamma \\ \textit{sujeito a} & (3.9), \end{array}$$

onde a LMI é dada por (3.9);  $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D})$  são variáveis que representam o sistema de malha fehada;  $(A, [B_1, B_2], [C_1; C_2], [D_{11}, D_{12}; D_{21}, D_{22}])$  são as matrizes conhecidas da planta;  $Y \geq X > 0$  também são variáveis adicionais do problema originárias da transformação de congruência;  $\gamma > 0$  é a variável de otimização.

As matrizes do controlador projetado são obtidas através das seguintes relações:

$$D_c = \hat{D} \tag{3.10}$$

$$C_c = (\hat{C} - D_c C_2 X) M^{-T}$$
(3.11)

$$B_c = N^{-1}(\hat{B} - YB_2D_c) \tag{3.12}$$

$$A_c = N^{-1} [\hat{A} - NB_c C_2 X - Y B_2 C_c M^T - Y (A + B_2 D_c C_2) X] M^{-T},$$
(3.13)

$$\begin{bmatrix} AX + XA^{T} + B_{2}\hat{C} + \hat{C}^{T}B_{2}^{T} & \hat{A}^{T} + A + B_{2}\hat{D}C_{2} & B_{1} + B_{2}\hat{D}D_{21} & XC_{1}^{T} + \hat{C}^{T}D_{12}^{T} \\ \hat{A} + A^{T} + C_{2}^{T}\hat{D}^{T}B_{2}^{T} & A^{T}Y + YA + \hat{B}C_{2} + C_{2}\hat{B}^{T} & YB_{1} + \hat{B}D_{21} & C_{1}^{T} + C_{2}^{T}\hat{D}^{T}D_{12}^{T} \\ B_{1}^{T} + D_{21}^{T}\hat{D}^{T}B_{2}^{T} & B_{1}^{T}Y + D_{21}^{T}\hat{B}^{T} & -\gamma I & D_{21}^{T}\hat{D}^{T}D_{12}^{T} + D_{11}^{T} \\ C_{1}X + D_{12}\hat{C} & C_{1} + D_{12}\hat{D}C_{2} & D_{11} + D_{12}\hat{D}D_{21} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0.$$
(3.9)

onde M e N são matrizes arbitrárias e não singulares que satisfazem a equação  $MN^T + XY = I$ . Por exemplo, N = I.

Em resumo, o problema de controle  $\mathcal{H}_{\infty}$  sob essa abordagem consiste em determinar  $X, Y, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$  de forma a satisfazer a desigualdade (3.9) e garantir o menor valor possível de  $\gamma$ . Então são aplicadas as equações (3.10), (3.11), (3.12) e (3.13) para se determinar as matrizes  $A_c, B_c, C_c$  e  $D_c$  do controlador.

# 3.3.2 Algoritmo do projeto $\mathcal{H}_{\infty}$ seguindo a metodologia de Scherer

Um algoritmo para resolver o problema de controle  $\mathcal{H}_{\infty}$  seguindo a metodologia de Scherer é:

- 1. Escrever o problema na forma de estados padrão (3.1).
- 2. Determinar  $X, Y, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$  de forma a satisfazer a desigualdade (3.9) e garantir o menor valor possível de  $\gamma$ .
- 3. Determinar as matrizes de estado do controlador através das equações (3.10), (3.11), (3.12) e (3.13).
- 4. Verificar a estabilidade do controlador projetado e da malha fechada. Em caso de instabilidade, voltar para o passo 2, ajustar parâmetros do pacote computacional utilizado e proceder os cálculos novamente.

Existem softwares capazes de resolver um problema de controle formulado por LMIs, por exemplo, o MATLAB com o apoio da interface *yalmip* [21] e de pacotes como *sedumi*, *sdpt3* [37] etc.

# 3.4 Filtros de ponderação

Os filtros de ponderação são funções que podem ser colocadas tanto nas entradas quanto nas saídas do sistema a ser controlado no momento do projeto do controlador, ou seja, são apenas uma ferramenta de projeto. Essas funções dão pesos para determindas regiões em freqüência da planta utilizada para projeto, com o objetivo de ressaltá-las ou penalizá-las. Para exemplificar como os filtros de ponderação atuam no projeto de controladores, seja  $H_{z_1w_1}$  a função de transferência entre um certo par entrada/saída de um sistema qualquer em malha fechada. Supõe-se que se deseja projetar um controlador para minimizar a norma  $\mathcal{H}_{\infty}$  de  $H_{z_1w_1}$  garantindo  $||H_{z_1w_1}||_{\infty} < \gamma_1$ , onde

 $\gamma_1>0$  é um número real qualquer. A inclusão do filtro de ponderação  $W_1$  no projeto fará com que o problema passe a ser minimizar  $\|W_1H_{z_1w_1}\|_\infty$  de modo que  $\|W_1H_{z_1w_1}\|_\infty<\gamma_1$ . Assim, percebese que a composição espectral de  $W_1$  fará com que algumas regiões de  $H_{z_1w_1}$  sejam ressaltadas e outras penalizadas. Grosseiramente, se  $\gamma_1$  é um número fixo e  $W_1$  é um filtro com composição espectral passa alta,  $H_{z_1w_1}$  é forçado a ter composição espectral passa baixa, o que será conseguido através do controlador resultante do projeto.

Os filtros de ponderação utilizados nas entradas do sistema têm o objetivo de fazer que os sinais de entrada tenham uma composição espectral específica. Dessa forma, conhecendo-se o conteúdo em freqüência dos sinais exógenos, pode-se projetar um controlador com menor conservadorismo, pois os filtros de ponderação atuam de forma a fazer que o conhecimento prévio do comportamento dos sinais de entrada seja levado em consideração durante a fase de projeto do controlador. Em outras palavras, sabendo-se que um dado sinal de referência apresenta apenas componentes de baixa freqüência, a inclusão de um filtro passa-baixas possibilita que o sinal de controle para um sistema de rastreamento venha a apresentar apenas baixas freqüências, ao contrário do que aconteceria se o filtro de ponderação não fosse considerado.

Quando aplicados aos sinais de saída do sistema, os filtros de ponderação atuam de forma a fazer com que as funções de transferência de malha fechada apresentem um comportamento pré-definido. Sabendo-se que um dado distúrbio exógeno afeta com maior intensidade a saída de desempenho nas baixas freqüências, pode-se incluir na fase de projeto do controlador um filtro de ponderação que provoque uma maior atenuação deste distúrbio justamente nas baixas freqüências. Neste caso, o filtro de ponderação força uma conformação espectral da função de transferência da malha fechada entre o distúrbio e o sinal de desempenho, onde se verificará uma atenuação do espectro de baixa-freqüência [27].

Na área de controle robusto de estruturas flexíveis, os modelos utilizados são comumente obtidos através do truncamento da composição espectral em uma dada faixa de freqüências. Com isso, desconsideram-se todos os modos de vibração pertecentes à faixa desprezada. Em outras palavras, tais modelos apresentam incerteza dinâmica. Nestes casos, é indesejado que o sinal de controle atue na faixa de freqüências que foi desconsiderada devido ao truncamento. Na prática, a excitação de modos não considerados para o projeto do controlador é um fenômeno denominado *spillover* e pode tornar o sistema em malha fechada instável. Para contornar esse problema, um filtro de ponderação é utilizado para conformar a composição espectral da função de transferência de malha fechada entre os distúrbios exógenos e o sinal de controle de forma a forçar a existência de sinal de controle apenas na faixa de freqüências desejada.

A Figura 3.1 permite exemplificar como são adicionados filtros de ponderação na etapa de projeto. Nesse caso, se o critério para o projeto é  $||S||_{\infty} < \gamma$ , onde  $S = P(I + PK)^{-1}$  é a função de sensibilidade [42], ao se incluir o filtro de ponderação do distúrbio de saída  $W_d$ , o novo

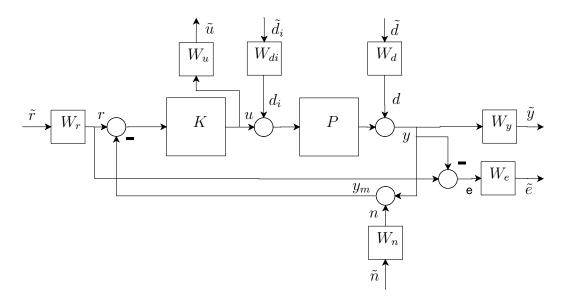


Figura 3.1: Filtros de ponderação.

critério passa a ser  $||SW_d||_{\infty} < \gamma$ . Admitindo-se que o filtro de ponderação é invertível, tem-se que  $||S||_{\infty} \le \gamma ||W_d^{-1}||_{\infty}$ . Conclui-se então que ao se adotar um filtro de ponderação, a função de sensibilidade será sempre limitada pela inversa do filtro. O mesmo ocorre para qualquer outro critério de projeto.

A possibilidade de pré e pós-multiplicar as funções que representam o sistema por dois filtros de ponderação diferentes a serem selecionados pelo projetista permite uma grande flexibilidade de projeto, porém acarreta também uma maior dificuldade exigindo um bom julgamento na seleção. Deve-se portanto simplificar sempre que possível a escolha dos filtros de ponderação, o que é corroborado pelo fato de que a ordem do controlador depende da ordem dos filtros envolvidos, somada é claro à ordem da planta. Desse modo, deve-se adotar filtros de baixa ordem, tipicamente de primeira ou segunda ordem.

## 3.5 Lema de Kalman-Yakubovič-Popov - KYP

A seção a seguir é baseada no artigo *Feedback control synthesis of multiple frequency domain specifications via generalized KYP lemma* de T. Iwasaki e S. Hara [17].

Em problemas reais, para os controladores  $\mathcal{H}_{\infty}$  serem satisfatórios é necessário utilizar o conceito de filtros de ponderação. Entretanto, quanto maior a ordem dos filtros utilizados, maior a ordem do controlador projetado. Além disso, escolher os filtros adequados é uma tarefa difícil, muito específica do problema e que influencia bastante, sob o ponto de vista numérico, o problema de otimização. Para superar essa dificuldade, pode ser utilizado o Lema Generalizado de Kalman-

Yakubovič-Popov (GKYP)

O lema de Kalman-Yakubovič-Popov (KYP) é um dos resultados mais gerais nas áreas de análise de sistemas dinâmicos, controle por realimentação e processamento de sinais. Várias propriedades de sistemas dinâmicos podem ser caracterizadas por um conjunto de restrições de desigualdade no domínio da freqüência. O lema de KYP estabelece equivalência entre essas desigualdades no domínio da freqüência para uma função de transferência e desigualdades matriciais lineares (LMI) para sua representação no espaço de estados. Por isso, é bastante útil em problemas modernos de análise e síntese.

**Lema 1 (KYP)** [17] Dadas as matrizes de estado A e B e uma matriz hermitiana  $\Theta$ , a designal-dade em frequência

$$\left[\begin{array}{c} (j\omega I - A)^{-1}B \\ I \end{array}\right]^* \Theta \left[\begin{array}{c} (j\omega I - A)^{-1}B \\ I \end{array}\right] < 0 \tag{3.14}$$

é válida se, e somente se,

$$\begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix} + \Theta < 0$$
 (3.15)

admitir uma solução hermitiana para P.

Assim, as diversas desigualdades parametrizadas por  $\omega$  abrangidas em (3.14) podem ser verificadas através da solução da desigualdade convexa (3.15). Escolhas apropriadas de  $\Theta$  permitem representar várias propriedades de sistemas, por exemplo, positividade real e limite real.

Seja  $\Theta = \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & I \end{bmatrix}^* \Xi \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & I \end{bmatrix}$ . Então é possível escrever o corolário a seguir, que facilita a especificação de critérios de desempenho aplicados também sobre a saída dos sistemas.

**Corolário 1** [17] Dadas as matrizes de estado (A, B, C, D) e uma matriz hermitiana  $\Xi$ , a desigualdade em frequência

$$\begin{bmatrix} C(j\omega I - A)^{-1}B + D \\ I \end{bmatrix}^* \Xi \begin{bmatrix} C(j\omega I - A)^{-1}B + D \\ I \end{bmatrix} < 0$$
 (3.16)

é válida se, e somente se,

$$\begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & I \end{bmatrix}^* \Xi \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0$$
 (3.17)

admitir uma solução hermitiana para P.

## Critérios $\mathcal{H}_{\infty}$

O problema  $\mathcal{H}_{\infty}$  pode ser escrito em termos do lema de KYP. Para tanto, basta selecionar a matriz  $\Xi$  adequada. Com esse intuito, seja  $\|H(s)\|_{\infty}^2 = \lambda_{max}(H^*(s)H(s))$  e  $\|H(s)\|_{\infty}^2 < \gamma^2$ , onde  $\gamma$  é uma constante apropriada e  $\lambda_{max}(\cdot)$  remete ao máximo autovalor. Considera-se ainda válida a seguinte relação:

$$\lambda_i(H^*(s)H(s) - \gamma^2 I) = \lambda_i(H^*(s)H(s)) - \gamma^2.$$

Logo, obtém-se que

$$\lambda_{max}(H^*(s)H(s) - \gamma^2 I) = \lambda_{max}(H^*(s)H(s)) - \gamma^2 < 0$$

porque para o caso de máximo autovalor, sabe-se que  $\|H(s)\|_{\infty}^2 = \lambda_{max}(H^*(s)H(s))$  e, ainda,  $\|H(s)\|_{\infty}^2 < \gamma^2$ . Logo,

$$H^*(s)H(s) - \gamma^2 I < 0$$

porque 
$$\lambda_{max}(H^*(s)H(s) - \gamma^2 I) < 0$$
.

Assim, é possível obter a matriz  $\Xi$  adequada para o problema  $\mathcal{H}_{\infty}$ , fazendo-se  $s=j\omega$  para a abordagem no domínio da freqüência e realizando algumas manipulações algébricas conforme mostrado a seguir:

$$H^*(s)H(s) - \gamma^2 I < 0$$

$$\begin{bmatrix} H(j\omega) \\ I \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} H(j\omega) \\ I \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} H(j\omega) \\ I \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H(j\omega) \\ I \end{bmatrix} < 0.$$

Portanto, para o problema  $\mathcal{H}_{\infty}$  tem-se:

$$\Xi = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}. \tag{3.18}$$

A obtenção de valores factíveis de  $\gamma$  que limitem  $||H(s)||_{\infty}$  está restrita aos valores que satisfaçam a desigualdade (3.17). A substituição do  $\Xi$  obtido nessa desigualdade fornece:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & I \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} A^T & I \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C^T & 0 \\ D^T & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} P & A^T P \\ 0 & B^T P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C^T & 0 \\ D^T & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} PA + A^T P & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C^T C & C^T D \\ D^T C & D^T D - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} PA + A^T P & PB \\ B^T P & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C^T \\ D^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} < 0.$$

A aplicação do complemento de Schur [36] na desigualdade anterior leva a:

$$\begin{bmatrix} PA + A^T P & PB & C^T \\ B^T P & -\gamma^2 I & D^T \\ C & D & -I \end{bmatrix} < 0.$$

$$(3.19)$$

Percebe-se que a desigualdade (3.19) não garante a estabilidade da função de transferência H(s). Mas observa-se que  $A^TP + PA < 0$ . Logo a simples inclusão da restrição  $P = P^T > 0$  garante, por Lyapunov, a estabilidade e leva a uma nova forma de estabelecer o *Bounded Real Lemma*, ou Lema do Limite Real.

Apesar de o lema KYP ser uma ferramenta importantíssima para o desenvolvimento da teoria de sistemas, ele não é compatível com requerimentos práticos. Em particular, cada requisito de projeto geralmente não é especificado para todas as freqüências ( $\omega=[0,\infty)$ ) e o lema KYP trabalha em toda essa faixa. Por exemplo, um sistema mecânico geralmente requer rejeição a distúrbios em baixas freqüências e rejeição a ruídos de medição em altas freqüências. Assim, um conjunto de especificações pode exigir requisitos diferentes em diferentes faixas de freqüência. Com o objetivo de lidar com essas situações foi desenvolvido o Lema Generalizado de Kalman-Yakubovič-Popov (GKYP).

# 3.5.1 Lema Generalizado de Kalman-Yakubovič-Popov (GKYP)

O lema generalizado de Kalman-Yakubovič-Popov extende o lema KYP padrão de forma a fornecer uma descrição do tipo LMI para desigualdades no domínio da freqüência com faixas de freqüências finitas. Para a apresentação do lema, considera-se um sistema de realimentação com

uma planta  $G(\lambda)$  linear e invariante no tempo de ordem  $n_p$  e um controlador  $K(\lambda)$  de ordem  $n_c$  tais que

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = G(\lambda) \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}, \quad u = K(\lambda)y$$

onde  $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$  é a entrada de controle,  $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$  é a saída medida,  $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$  e  $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$  são os sinais utilizados para descrever as especificações de desempenho e  $\lambda$  é a variável em freqüência ( $\lambda = s$  para sistemas contínuos e  $\lambda = z$  para sistemas discretos). A função de transferência de malha fechada é denotada por  $GK(I+GK)^{-1}$ . A função quadrática  $\sigma(G,\Pi)$  é definida por  $\sigma(G,\Pi) = \begin{bmatrix} G \\ I \end{bmatrix}^*\Pi \begin{bmatrix} G \\ I \end{bmatrix}$ .

#### Problema de controle

O problema de síntese de controladores de interesse é, dadas a planta  $G(\lambda)$ ,  $\Pi$ ,  $\Phi$  e  $\Psi$ , encontrar o controlador  $K(\lambda)$  de ordem completa  $(n_c = n_p)$  tal que o sistema de malha fechada  $H(\lambda) := G(\lambda) \star K(\lambda)$  satisfaça

$$||H(\lambda)|| < \infty \quad \text{e} \quad \sigma(H(\lambda), \Pi) < 0 \quad \forall \lambda \in \Lambda(\Phi, \Psi)$$
 (3.20)

onde

$$\Lambda(\Phi, \Psi) := \{ \lambda \in \mid \sigma(\lambda, \Phi) = 0, \sigma(\lambda, \Psi) \ge 0 \}. \tag{3.21}$$

O conjunto  $\Lambda(\Phi, \Psi)$  representa curvas do tipo cônicas. Para melhor compreensão da forma como esse conjunto representa essas regiões, consultar a referência [16].

A primeira condição em (3.20) significa que  $H(\lambda)$  não possui pólos em  $\Lambda(\Phi,\Psi)$ . A segunda condição é especificada em termos das três matrizes hermitianas  $\Pi$ ,  $\Phi$  e  $\Psi$ . A matriz  $\Pi$  representa propriedades em freqüência como a condição de positividade real (ou passividade)  $H(\lambda)+H(\lambda)^*>0$ , a condição de limite real (ou ganho pequeno)  $\|H(\lambda)\|<\gamma$  ou a condição de limitação da norma  $\mathcal{H}_{\infty}$  dada por  $\|H\|_{\infty}<\gamma$ . Por outro lado,  $\Phi$  e  $\Psi$  permitem estabelecer faixas de freqüência (possivelmente finitas) que contemplem a restrição de interesse e são definidos da seguinte forma para sistemas contínuos [17]:

a) Para  $\sigma(s,\Phi)=0$  e  $s=j\omega$  representando toda a resposta em freqüência

$$\Phi = \left[ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right].$$

**b)** Para  $\sigma(s, \Psi) \geq 0$  e  $s = j\omega$ :

$$\bullet \ \forall \omega \in \mathbb{R} \Rightarrow \Psi = \left[ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right].$$

• 
$$|\omega| \le \omega_b \Rightarrow \Psi = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & \omega_b^2 \end{bmatrix}$$
.

• 
$$|\omega| \ge \omega_a \Rightarrow \Psi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\omega_a^2 \end{bmatrix}$$
.

• 
$$\omega_1 \le \omega \le \omega_2 \Rightarrow \Psi = \begin{bmatrix} -1 & j\omega_c \\ -j\omega_c & -\omega_1\omega_2 \end{bmatrix}, \ \omega_c = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}.$$

• 
$$\omega < \omega_1, \ \omega > \omega_2 \Rightarrow \Psi = - \begin{bmatrix} -1 & j\omega_c \\ -j\omega_c & -\omega_1\omega_2 \end{bmatrix}.$$

Agora introduz-se o lema GKYP para sistemas contínuos. Ressalta-se que  $A\otimes B$  indica o produto de Kronecker entre A e B.

**Lema 2 (GKYP)** [17] Dadas as matrizes de estado A e B e as matrizes hermitianas  $\Theta$ ,  $\Phi$  e  $\Psi$ , a designaldade

$$\begin{bmatrix} (sI - A)^{-1}B \\ I \end{bmatrix}^* \Theta \begin{bmatrix} (sI - A)^{-1}B \\ I \end{bmatrix} < 0, \ \forall \ s \in \Lambda(\Phi, \Psi)$$
 (3.22)

é válida se, e somente se, existirem matrizes hermitianas P e Q, Q > 0, tais que

$$\begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix}^* (\Phi \otimes P + \Psi \otimes Q) \begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix} + \Theta < 0$$
 (3.23)

Assim, a especificação de uma região em freqüência está incluída na matriz  $\Psi$  e a restrição de resposta em freqüência contínua ( $\lambda=s$ ) está na matriz  $\Phi$ . Determinando-se tais matrizes e especificando o tipo de restrição nessa região de freqüência, através de  $\Xi$ , pode-se aplicar o lema GKYP sobre a restrição de projeto de interesse e obter uma desigualdade matricial simples, independente da variável  $\omega$ , à semelhança do lema de KYP.

Similarmente ao lema de KYP, este lema admite um corolário imediato para que a restrição seja dada sobre a função de transferência  $H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ , facilitando a imposição de critérios de desempenho sobre a saída do sistema.

**Corolário 2 (GKYP)** [17] Dadas as matrizes de estado (A, B, C, D) e as matrizes hermitianas  $\Xi$ ,  $\Phi \in \Psi$ , a designaldade

$$\begin{bmatrix} C(sI-A)^{-1}B+D \\ I \end{bmatrix}^* \Xi \begin{bmatrix} C(sI-A)^{-1}B+D \\ I \end{bmatrix} < 0, \quad \forall \ s \in \Lambda(\Phi, \Psi)$$
 (3.24)

é válida se, e somente se, existirem matrizes hermitianas P e Q, Q > 0, tais que

$$\begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix}^* (\Phi \otimes P + \Psi \otimes Q) \begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & I \end{bmatrix}^* \Xi \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0$$
 (3.25)

## 3.5.2 Realimentação de saída

Para a aplicação do lema GKYP será considerado um sistema dinâmico linear e invariante no tempo submetido a uma estrutura de controle por realimentação de saída. Sejam as realizações no espaço de estados da planta G(s) e do controlador K(s) dadas por:

onde  $x(t) \in \mathbb{R}_{n_p}$ ,  $x_c(t) \in \mathbb{R}_{n_c}$ . O sistema de malha fechada é descrito por:

$$\begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + B_2 D_c C_2 & B_2 C_c & B_1 + B_2 D_c D_{21} \\ B_c C_2 & A_c & B_c D_{21} \\ \hline C_1 + D_{12} D_c C_2 & D_{12} C_c & D_{11} + D_{12} D_c D_{21} \end{bmatrix}.$$
 (3.28)

A seguir o lema GKYP será aplicado no sistema de malha fechada  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ . Mas primeiro é necessário apresentar algumas definições, baseadas em outras já comentadas, com o objetivo de simplificar as operações matriciais subseqüentes e evitar aplicações sucessivas da operação de transposição.

**a**) 
$$\sigma(\cdot)$$
 é substituído por  $\rho(\cdot)$ :  $\rho(\Gamma, \Sigma) = \begin{bmatrix} I & \Gamma \end{bmatrix} \Sigma \begin{bmatrix} I & \Gamma \end{bmatrix}^*$ .

**b)** 
$$\Lambda_p(\Phi_p, \Psi_p) = \{ s \in \mathbb{C} \mid \rho(s, \Phi_p) = 0, \ \rho(s, \Psi_p) \ge 0 \} = \Lambda(\Phi, \Psi).$$

$$\bullet \ \Phi_p = \left[ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right].$$

•  $\Psi_p$ : trocam-se os elementos das diagonais de  $\Psi$  de posição.

c)  $\Xi$ : trocam-se os elementos das diagonais de posição e adota-se uma nova matriz  $\Pi$ . Ou seja,

$$\Xi = \left[ \begin{array}{ccc} \Xi_{11} & \Xi_{12} \\ \Xi_{12}^* & \Xi_{22} \end{array} \right] \quad e \quad \Pi = \left[ \begin{array}{ccc} \Pi_{11} & \Pi_{12} \\ \Pi_{12}^* & \Pi_{22} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc} \Xi_{22} & \Xi_{12}^* \\ \Xi_{12} & \Xi_{11} \end{array} \right].$$

Adiante serão apresentados desenvolvimentos algébricos sobre o lema GKYP com a utilização das definições apresentadas. A restrição no domínio do tempo do Corolário 2 será manipulada algebricamente de forma conveniente para posteriormente ser transformada em uma LMI.

**Importante:** O objetivo das manipulações algébricas a seguir é obter uma formulação de LMI para o o problema de controle por realimentação de saída sob análise.

Fazendo as substituições  $\chi = (\Phi \otimes P + \Psi \otimes Q)$  e  $\chi_p = (\Phi_p \otimes P + \Psi_p \otimes Q)$  para simplificar as passagens, podem ser feitas as operações mostradas em (3.29). Transpondo e conjugando a última desigualdade em (3.29), obtém-se a equação (3.30) do corolário 3, descrito a seguir.

Corolário 3 [17] Para o sistema em malha fechada  $H(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$  e matrizes hermitianas  $\Pi$ ,  $\Phi_p$  e  $\Psi_p$ , a designaldade

$$\begin{bmatrix} I & H(s) \end{bmatrix} \Pi \begin{bmatrix} I & H(s) \end{bmatrix}^* < 0, \forall s \in \Lambda_p(\Phi_p, \Psi_p)$$

é válida se, e somente se, existirem matrizes hermitianas P e Q, Q > 0, tais que

$$F\Omega F^* < 0 \tag{3.30}$$

sendo

$$F = \begin{bmatrix} I & A & 0 & C \\ 0 & B & I & D \end{bmatrix} e \Omega = \begin{bmatrix} \Phi_p \otimes P + \Psi_p \otimes Q & 0 \\ 0 & \Pi \end{bmatrix}.$$
 (3.31)

Assim, dadas as matrizes  $\Phi$  e  $\Psi$ , que definem a região de freqüência de interesse, e o critério sobre o qual se deseja o controle, contido na matriz  $\Pi$ , as variáveis de projeto são as matrizes P e Q e as matrizes de estado do controlador  $(A_c, B_c, C_c, D_c)$ , das quais são funções as matrizes de estado do sistema de malha fechada  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ .

**Importante:** Percebe-se que a restrição de projeto representada pela desigualdade (3.30) apresenta não linearidade e precisa ser melhor desenvolvida a fim de se chegar a uma representação do tipo LMI.

Tendo em vista a obtenção dessas desigualdades matriciais lineares, serão realizadas algumas

$$\begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix}^* \chi \begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix}^* \chi \begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix}^* \Xi \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} A^* \chi A + \chi & A^* \chi B \\ B^* \chi A & B^* \chi B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C^* \Xi_{11} & C^* \Xi_{12} \\ D^* \Xi_{11} + \Xi_{12}^* & D^* \Xi_{12} + \Xi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} A^* \chi A + \chi & A^* \chi B \\ B^* \chi A & B^* \chi B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C^* \Xi_{11} C & C^* \Xi_{11} D + C^* \Xi_{12} \\ D^* \Xi_{11} C + \Xi_{12}^* C & D^* \Xi_{11} D + \Xi_{12}^* D + D^* \Xi_{12} + \Xi_{22} \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} I & A^* \end{bmatrix} \chi_p \begin{bmatrix} I & A^T \end{bmatrix}^T + C^* \Xi_{11} C \\ B^* \end{bmatrix} \chi_p \begin{bmatrix} I & A^* \end{bmatrix} \chi_p \begin{bmatrix} 0 & B^T \end{bmatrix}^T + C^* \Xi_{11} D + C^* \Xi_{12} \\ D^* \Xi_{11} C + \Xi_{12}^* C & D^* \Xi_{12} D + D$$

transformações sobre o Corolário 3. Por isso, reescreve-se F de modo que:

$$F = \left[ \begin{array}{ccc} I & A & 0 \\ 0 & C & I \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cccc} I & 0 & 0 & B \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & D \end{array} \right].$$

Seja ainda 
$$F_A = \begin{bmatrix} A \\ -I \\ C \end{bmatrix}$$
 e  $F_B = \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ D \end{bmatrix}$ . Então [17]:

$$F = F_A^{\perp *} \left[ I \quad F_B \right]. \tag{3.32}$$

Supondo-se a existência de matrizes W e R quaisquer, introduz-se ainda a desigualdade (3.33) a seguir, que também será útil posteriormente [17]:

$$\begin{bmatrix} I & F_B \end{bmatrix} \Omega \begin{bmatrix} I & F_B \end{bmatrix}^* < F_A W R + (F_A W R)^*. \tag{3.33}$$

Para a realização das transformações convenientes também será utilizado o conhecido Lema da Projeção [36], já apresentado anteriormente mas novamente transcrito para padronização com formulação aqui utilizada, ou seja, formulação de [17].

**Lema 3** (**Lema da Projeção**) [17] As seguintes condições são equivalentes para as matrizes  $\Upsilon$ ,  $\Sigma$ ,  $J \in \Lambda$ :

$$\Upsilon + \Lambda^* \Sigma J + (\Lambda^* \Sigma J)^* < 0. \tag{3.34}$$

(ii)

$$\Lambda^{\perp *} \Upsilon \Lambda^{\perp} < 0 \tag{3.35}$$

$$J^{\perp *} \Upsilon J^{\perp} < 0. \tag{3.36}$$

Fazendo-se  $F_A=-\Lambda^*,\,R=J,\,W=\Sigma$  e  $\left[\begin{array}{cc}I&F_B\end{array}\right]\Omega\left[\begin{array}{cc}I&F_B\end{array}\right]^*=\Upsilon$  e tendo como objetivo a solução de  $F\Omega F^*<0$ , é possível escrever o corolário a seguir.

**Corolário 4** [17] Dados o modelo de estados de malha fechada  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ , as matrizes  $F_A$  e  $F_B$ , a matriz hermitiana  $\Omega$  e as matrizes W e R, as seguintes condições são equivalentes:

**(i)** 

$$F\Omega F^* < 0 \tag{3.37}$$

$$R^{\perp *} \left[ \begin{array}{cc} I & F_B \end{array} \right] \Omega \left[ \begin{array}{cc} I & F_B \end{array} \right]^* R^{\perp} < 0. \tag{3.38}$$

A condição (3.39) foi produzida para que a aplicação do lema da projeçao levasse à condição original de projeto (3.37). Inevitavelmente, sua aplicação produziu também a condição (3.38). Assim, para satisfazer a condição original (3.37) basta encontrar matrizes P, Q, W, R e matrizes de estado do controlador que satisfaçam (3.39), porém satisfazendo também (3.38), que é uma condição extra que constitui um conservadorismo com relação ao projeto.

A equivalência entre (3.37) e (3.39) só seria exata se (3.38) estivesse obrigatoriamente satisfeita pela escolha de R. Isso normalmente não é atingido (por exemplo, por questões numéricas), porém (3.38) é usada em [17] para a obtenção de uma matriz R fixa antes do projeto, o que garante um conservadorismo menor do que o obtido com uma matriz arbitrária.

Assim, a partir de agora a condição de projeto (3.37) é substituída pela desigualdade (3.39). Essa desigualdade ainda não é uma LMI, entretanto está em uma forma que tornará mais fácil as manipulações que produzirão a LMI de interesse.

### Transformação de (3.39) em uma LMI

Serão necessárias diversas manipulações algébricas para a obtenção de uma desigualdade matricial linear partindo-se de (3.39). Para tanto serão utilizadas matrizes W e R convenientes e será aplicada uma transformação de congruência adequada conforme proposto em [30]:

$$W = \left[ \begin{array}{cc} X & \bullet \\ U & \bullet \end{array} \right] \ \mathbf{e} \quad W^{-1} = \left[ \begin{array}{cc} Y & V \\ \bullet & \bullet \end{array} \right]^*.$$

Como  $WW^{-1} = W^{-1}W = I$ , tem-se:

$$\begin{bmatrix} X & (I - XY^*)V^{-1*} \\ U & -UY^*V^{-1*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y^* & (I - Y^*X)U^{-1} \\ U^* & -V^*XU^{-1} \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

É conveniente utilizar as matrizes auxiliares  $T=\begin{bmatrix}I&0\\Y&V\end{bmatrix}$ ,  $\mathscr{T}=\mathrm{diag}(T,T,I)$  e  $R\mathscr{T}^*=T^*\mathscr{R}$ . Tomando-se a desigualdade (3.39), a primeira transformação será pré e pós-multiplicar os

dois membros da desigualdade por  $\mathscr{T}$  e  $\mathscr{T}^*$ . A seguir, substitui-se  $R\mathscr{T}^*$  por  $T^*\mathscr{R}$ . Ao mesmo tempo,  $\Omega$  é substituída por sua definição (3.31), já incluindo no primeiro elemento (é uma matriz) de  $\Omega$  a pré e pós-multiplicação por  $\mathscr{T}$  e substituindo  $\mathscr{T}$  por diag(T,T,I).

$$\left[\begin{array}{cc} I & F_B \end{array}\right] \Omega \left[\begin{array}{cc} I & F_B \end{array}\right]^* < F_A W R + (F_A W R)^*$$
 
$$\left[\begin{array}{cc} \mathscr{T} & \mathscr{T} F_B \end{array}\right] \Omega \left[\begin{array}{cc} \mathscr{T} & \mathscr{T} F_B \end{array}\right]^* < \mathscr{T} F_A W R \mathscr{T}^* + (\mathscr{T} F_A W R \mathscr{T}^*)^*$$
 
$$\left[\begin{array}{cc} I & \mathscr{T} F_B \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} \Phi_p \otimes T P T^* + \Psi_p \otimes T Q T^* & 0 \\ 0 & \Pi \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} I & \mathscr{T} F_B \end{array}\right]^* < \mathscr{T} F_A W T^* \mathscr{R} + (\mathscr{T} F_A W T^* \mathscr{R})^*.$$

Para obter uma notação mais compacta, sejam ainda  $\mathscr{A} = \mathscr{T}F_AWT^*$ ,  $\mathscr{B} = \mathscr{T}F_B$ ,  $\mathscr{P} = TPT^*$  e  $\mathscr{Q} = TQT^*$ . Assim, a equação (3.39) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} I & \mathscr{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_p \otimes \mathscr{P} + \Psi_p \otimes \mathscr{Q} & 0 \\ 0 & \Pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \mathscr{B} \end{bmatrix}^* < \mathscr{A}\mathscr{R} + (\mathscr{A}\mathscr{R})^*. \tag{3.40}$$

O objetivo agora é escrever as variáveis  $\mathscr{A}=\mathscr{T}F_AWT^*$  e  $\mathscr{B}=\mathscr{T}F_B$  em função das variáveis auxiliares X, Y, Z e U introduzidas pela transformação anterior, das matrizes de estado  $(A_c, B_c, C_c, D_c)$  do controlador (variáveis de interesse) e das conhecidas matrizes do sistema  $(A, B_1, B_2, C_1, C_2, D_{11}, D_{12}, D_{21}, D_{22})$ . Para isso e se preocupando em adotar uma forma compacta de apresentação das relações matemáticas, definem-se as variáveis M, G, H e L tais que:

$$\begin{bmatrix} M & G \\ H & L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} YAX & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V & YB_2 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U & 0 \\ C_2X & I \end{bmatrix}.$$
(3.41)

Assim, manipulam-se os termos de  $\mathscr{A}$  e  $\mathscr{B}$  em etapas.

# Manipulações em $\mathscr{A} = \mathscr{T} F_A W T^*$

1. Expansão de  $\mathscr{T}F_A$ :

$$\mathscr{T}F_A = \left[ egin{array}{ccc} T & 0 & 0 \\ 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & I \end{array} \right] \left[ egin{array}{c} A \\ -I \\ C \end{array} \right]$$
 $\mathscr{T}F_A = \left[ egin{array}{c} TA \\ -T \\ C \end{array} \right].$ 

Mas,

$$TA = \begin{bmatrix} I & 0 \\ Y & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A + B_2 D_c C_2 & B_2 C_c \\ B_c C_2 & A_c \end{bmatrix}$$

$$TA = \begin{bmatrix} A + B_2 D_c C_2 & B_2 C_c \\ YA + YB_2 D_c C_2 + VB_c C_2 & YB_2 C_c + VA_c \end{bmatrix}.$$

# 2. Expansão de $WT^*$ :

$$WT^* = \begin{bmatrix} X & (I - XY^*)V^{-1*} \\ U & -UY^*V^{-1*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & Y^* \\ U & 0 \end{bmatrix}.$$

$$WT^* = \begin{bmatrix} X & I \\ U & 0 \end{bmatrix}.$$

# 3. Produto entre $\mathscr{T}F_A$ e $WT^*$ :

$$\mathcal{F}F_{A}WT^{*} = \begin{bmatrix} A + B_{2}D_{c}C_{2} & B_{2}C_{c} \\ YA + YB_{2}D_{c}C_{2} + VB_{c}C_{2} & YB_{2}C_{c} + VA_{c} \\ -I & 0 \\ -Y & -V \\ C_{1} + D_{12}D_{c}C_{2} & D_{12}C_{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & I \\ U & 0 \end{bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} AX + B_{2}D_{c}C_{2}X + B_{2}C_{c}U & A + B_{2}D_{c}C_{2} \\ YAX + YB_{2}D_{c}C_{2}X + VB_{c}C_{2}X + YB_{2}C_{c}U + VA_{c}U & YA + YB_{2}D_{c}C_{2} + VB_{c}C_{2} \\ -X & -I \\ -YX - VU & -Y \\ C_{1}X + D_{12}D_{c}C_{2}X + D_{12}C_{c}U & C_{1} + D_{12}D_{c}C_{2} \end{bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} AX + B_{2}H & A + B_{2}LC_{2} \\ M & YA + GC_{2} \\ -X & -I \\ -Z & -Y \end{bmatrix},$$

onde

$$M = YAX + YB_2D_cC_2X + VB_cC_2X + YB_2C_cU + VA_cU$$

$$G = YB_2D_cC_2 + VB_c$$

$$H = D_cC_2X + C_cU$$

$$L = D_c$$

$$Z = YX + VU.$$

## Manipulações em $\mathscr{B} = \mathscr{T}F_B$

$$\mathcal{T}F_B = \begin{bmatrix} T & 0 & 0 \\ 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & 0 & D \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{T}F_B = \begin{bmatrix} TB \\ 0 \\ D \end{bmatrix}.$$

Mas

$$TB = \begin{bmatrix} I & 0 \\ Y & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 + B_2 D_c D_{21} \\ B_c D_{21} \end{bmatrix}$$

$$TB = \begin{bmatrix} B_1 + B_2 D_c D_{21} \\ YB_1 + YB_2 D_c D_{21} + VB_c D_{21} \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$\begin{bmatrix} \mathscr{A} & \mathscr{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AX + B_2H & A + B_2LC_2 \\ M & YA + GC_2 \\ -X & -I \\ -Z & -Y \\ C_1X + D_{12}H & C_1 + D_{12}LC_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 + B_2D_cD_{21} \\ YB_1 + YB_2D_cD_{21} + VB_cD_{21} \\ YB_1 + YB_2D_cD_{21} + VB_cD_{21} \\ D_{11} + D_{12}D_cD_{21} \end{bmatrix}. (3.42)$$

Assim, é possível escrever o lema que solucionará o problema de controle que está sendo estudado.

**Lema 4** [17] Considere a planta G e o controlador K de ordem  $n_c = n_p$  e sejam P,  $Q \in \mathbb{H}_n$ ,  $R \in \mathbb{C}^{n \times (2n+nz)}$ ,  $\Phi$ ,  $\Psi \in \mathbb{H}_2$  e  $\Pi \in \mathbb{H}_{nw+nz}$  dados com  $n = n_p$ . Então as seguintes sentenças são

equivalentes:

- (i) Existem matrizes P,  $Q \in \mathbb{H}_n$ , um multiplicador  $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e um controlador  $(A_c, B_c, C_c, D_c)$  tais que (3.39) seja satisfeita para a malha fechada (A, B, C, D).
- (ii) Existem  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{Q} \in \mathbb{H}_n$  e matrizes reais X, Y, Z, M, G, H e L satisfazendo

$$\begin{bmatrix} I & \mathscr{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_p \otimes \mathscr{P} + \Psi_p \otimes \mathscr{Q} & 0 \\ 0 & \Pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \mathscr{B} \end{bmatrix}^* < \mathscr{A}\mathscr{R} + (\mathscr{A}\mathscr{R})^*. \tag{3.43}$$

Para tornar a desigualdade (3.43) linear em  $\mathscr{B}$  são realizadas algumas manipulações algébricas e é aplicado o Complemento de Schur, conforme mostrado no conjunto de equações (3.44). Desse modo, é obtida a LMI que descreve a restrição do projeto (3.45).

Assim, o problema de projeto de controle por realimentação de saída com faixa de frequência limitada pode ser resolvido através de um problema de desigualdade matricial linear em que a desigualdade a ser resolvida é (3.45), cujas variáveis são as matrizes reais M, G, H, L, X, Y, Z e W e as matrizes hermitianas  $\mathscr{P}$  e  $\mathscr{Q}$ , dado que  $\mathscr{Q}>0$ . As matrizes variáveis V e U são quaisquer satisfazendo a relação Z=YX+VU e as matrizes de estado do controlador são encontradas pela equação (3.46).

$$\begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V & YB_2 \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} \left( \begin{bmatrix} M & G \\ H & L \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} YAX & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} U & 0 \\ C_2X & I \end{bmatrix}^{-1}.$$
 (3.46)

#### 3.5.3 Estabilidade

A desigualdade (3.45) permite criar restrições de projeto que garantam desempenho em faixas de freqüência de interesse. Entretanto, não é garantida a estabilidade da malha fechada. Para superar essa limitação é introduzido o lema a seguir, onde  $\operatorname{He}(A) = A + A^*$  indica a matriz hermitiana de A.

**Lema 5** [17] Sejam  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  e  $\Phi \in \mathbb{H}_2$  dados. Suponha  $\det \Phi < 0$ . Então as seguintes sentencas são equivalentes:

- (i) Cada autovalor  $\lambda$  de A satisfaz  $\rho(\lambda, \Phi) < 0$ .
- (ii) Existe  $P = P^* > 0$  tal que  $\rho(A, \Phi \otimes P) < 0$ .

$$\begin{bmatrix}
I_{2n+nz} & \mathcal{B}
\end{bmatrix} \begin{bmatrix}
\Phi_{p} \otimes \mathcal{P} + \Psi_{p} \otimes \mathcal{Q} & 0_{2n \times nz} & 0_{2n \times nw} \\
0_{nz \times 2n} & \Pi_{11} & \Pi_{12} \\
\hline
0_{nw \times 2n} & \Pi_{21}
\end{bmatrix} \begin{bmatrix}
I_{2n+nz} \\
\mathcal{B}^{*}
\end{bmatrix} < \mathcal{A}\mathcal{R} + (\mathcal{A}\mathcal{R})^{*}$$

$$\begin{bmatrix}
\Phi_{p} \otimes \mathcal{P} + \Psi_{p} \otimes \mathcal{Q} & 0_{2n \times nz} \\
0_{nz \times 2n} & \Pi_{11}
\end{bmatrix} + \mathcal{B}\begin{bmatrix}0_{nw \times 2n} & \Pi_{21}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0_{2n \times nw} \\ \Pi_{12}\end{bmatrix} + \mathcal{B}\Pi_{22}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}I_{2n+nz} \\ \mathcal{B}^{*}\end{bmatrix} < \mathcal{A}\mathcal{R} + (\mathcal{A}\mathcal{R})^{*}$$

$$\begin{bmatrix}
\Phi_{p} \otimes \mathcal{P} + \Psi_{p} \otimes \mathcal{Q} & 0_{2n \times nz} \\
0_{nz \times 2n} & \Pi_{11}\end{bmatrix} + \mathcal{B}\begin{bmatrix}0_{nw \times 2n} & \Pi_{21}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0_{2n \times nw} \\ \Pi_{12}\end{bmatrix} \mathcal{B}^{*} + \mathcal{B}\Pi_{22}\mathcal{B}^{*} < \mathcal{A}\mathcal{R} + (\mathcal{A}\mathcal{R})^{*}$$

$$\begin{bmatrix}
\mathcal{A}\mathcal{R} + (\mathcal{A}\mathcal{R})^{*} - \begin{bmatrix}\Phi_{p} \otimes \mathcal{P} + \Psi_{p} \otimes \mathcal{Q} & 0_{2n \times nz} \\
0_{nz \times 2n} & \Pi_{11}\end{bmatrix} - \mathcal{B}\begin{bmatrix}0_{nw \times 2n} & \Pi_{21}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0_{2n \times nw} \\ \Pi_{12}\end{bmatrix} \mathcal{B}^{*} & \mathcal{B}
\end{bmatrix} > 0 \quad (3.45)$$

(iii) Existem  $W e P = P^*$  tais que

$$\Phi \otimes P < He \begin{bmatrix} A \\ -I \end{bmatrix} W \begin{bmatrix} -qI & pI \end{bmatrix}. \tag{3.47}$$

onde  $r=\begin{bmatrix} p & q \end{bmatrix}^T \in \mathbb{C}^2$  é um vetor arbitrário satisfazendo  $r^*\Phi r < 0$ .

Assim, para garantir a estabilidade da malha fechada, utiliza-se a condição (iii) do Lema (5), onde se substitui a matriz A de malha aberta pela respectiva matriz de malha fechada e se aplica a transformação de congruência diag(T,T). Assim, obtém-se:

$$\Phi \otimes P < \text{He}(J \mathscr{A} S)$$

$$\Phi \otimes P - (J \mathscr{A} S) - (J \mathscr{A} S)^* < 0. \tag{3.48}$$

onde 
$$J = \begin{bmatrix} I_{2n} & 0 \end{bmatrix}$$
 e  $S = \begin{bmatrix} -qI & pI \end{bmatrix}$ .

É importante ressaltar que p e q são parâmetros de projeto, com sinais opostos, a serem ajustados a fim de se refinar a resultado obtido. Eles interferem numericamente no algoritmo do problema de otimização, podendo deixá-lo mais lento ou até mesmo instável. Caso o problema numérico seja bastante instável, o ajuste de p e q se torna uma tarefa de ajuste por tentativa e erro.

#### 3.5.4 Escolha de R

Conforme discutido em [17], a escolha da matriz R é realizada da seguinte forma:

- 1.  $R=\begin{bmatrix} I & \epsilon I & 0 \end{bmatrix}$ , quando o conjunto  $\Lambda_p$  representa todo o eixo de freqüência. Observação:  $\epsilon>0$  pequeno suficiente para garantir estabilidade.
- 2.  $R = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \end{bmatrix}$ , quando há uma limitação de freqüências do tipo  $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ .
- 3.  $R=\left[\begin{array}{ccc} j\omega_c I & I & 0 \end{array}\right]$ , quando a limitação é  $\omega\leq\omega_1$  ou  $\omega_2\leq\omega$ , com  $\omega_c=\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ .

# 3.5.5 Algoritmo do projeto com o lema GKYP

A seguir será mostrado um algoritmo para o projeto de controladores de realimentação de saída a partir do lema GKYP.

1. Definir o modelo matemático da planta e escrever o modelo de estados (3.26).

- 2. Escolher a faixa de freqüência de interesse para o problema de controle e definir critério de desempenho. Ou seja, escolher  $\Phi$  (discreto ou contínuo),  $\Psi$  (faixa de freqüência) e  $\Pi$  (critério de desempenho, por exemplo,  $\mathcal{H}_{\infty}$ ).
- 3. Atribuir valores às variáveis de projeto p e q (por exemplo, p = 1 e q = -1).
- 4. Formular problema de otimização com restrições do tipo LMI. Nessa etapa, serão formuladas as LMIs (3.45) e (3.48), que garantem, respectivamente, desempenho e estabilidade.
- 5. Determinar V e U de tal forma que VU=Z-YX. Por exemplo,  $U=I_{n_c}$  e  $V=(Z-YX)U^{-1}$ . Aplicar a equação (3.46). Assim, é possível determinar as matrizes de estado do controlador  $(A_c, B_c, C_c, D_c)$ .
- 6. Verificar resultados (estabilidade e desempenho). Caso não seja satisfatório, atribuir novos valores a *p* e *q* e refazer o projeto.

# Capítulo 4

# Detecção de falhas

## 4.1 Introdução

Conforme já mencionado, o presente trabalho se propõe ao estudo de métodos baseados em observadores para a detecção de falhas. Nesses casos, os observadores produzem como saída sinais de resíduo, os quais dependem da saída medida e da entrada da planta, sendo a entrada função do sinal de controle. Ressalta-se que o sistema pode não estar sujeito a uma malha de controle. Assim, a idéia dos métodos de detecção baseados em observadores é produzir o resíduo como a diferença entre a saída medida do sistema e a estimação da saída gerada pelo observador.

Com base nessa técnica, diversos métodos robustos foram desenvolvidos, por exemplo, o já mencionado (Capítulo 2) método baseado em observadores de entrada desconhecida (UIO). Seguindo a evolução da teoria de Controle, esses métodos evoluiram para a utilização de métodos baseados na norma  $\mathcal{H}_{\infty}$ , os quais lidam melhor com as incertezas provenientes de erros de modelagem [32].

Uma outra abordagem é impor como resíduos os sinais de estimação da falha, em vez das diferenças produzidas nos sinais de saída [26]. Isso tem a vantagem de isolar a falha facilmente e o problema pode ser formulado através de uma mudança simples do índice de desempenho adotado para observadores de saída, permitindo a adoção de métodos  $\mathcal{H}_{\infty}$  para projetar os filtros. A vantagem dessa abordagem é que enquanto no projeto tradicional de observadores de saída são necessários dois passos, um para calcular o vetor de ganhos do observador e outro para determinar o filtro de saída que ajusta a resposta em freqüência, na estimação da falha esses dois parâmetros são obtidos, indiretamente, num único passo [26].

Nesse capítulo serão exploradas duas abordagens de projeto de filtros de detecção de falhas: uma baseada nos observadores tradicionais cujo resíduo é dado pela comparação entre saída estimada e saída medida e outra baseada na estimação dos sinais de falha.

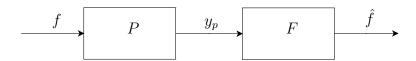


Figura 4.1: Estrutura básica de um sistema para estimação de falhas. A entrada do sistema é o sinal de falha f e a saída é o sinal de falha estimado  $\hat{f}$ .

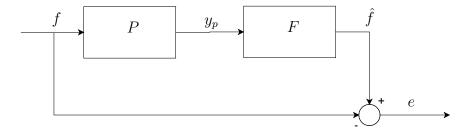


Figura 4.2: Estrutura de projeto de um sistema para estimação de falhas.

#### 4.2 Filtro para estimar o sinal de falha

A saída do filtro de detecção de falhas pode ser um sinal de resíduo (nem sempre é o resíduo diretamente) ou uma estimativa do sinal de falha. Esse último caso é de aplicação restrita aos sistemas invertíveis (bi-próprios), ou seja, a matriz D é não-nula. A seguir será apresentada uma metodologia para o projeto de um filtro desse tipo, seguindo a formulação empregada na referência [27]. Nessa metodologia, o problema de estimativa é transformado em um problema padrão de controle ótimo  $\mathcal{H}_{\infty}$  onde o critério de desempenho é a norma infinito da função (matriz) de transferência entre o sinal de erro, dado pela diferença entre a falha real e a falha estimada, e o sinal de entradas exógenas.

## 4.2.1 Formulação do problema

A Figura 4.1 ilustra a idéia básica do filtro utilizado para estimar o sinal de falha. Nesse caso, a entrada da planta é um sinal de falha e a saída da mesma é filtrada pelo estimador de falhas resultando em um sinal de falha estimado. Percebe-se a necessidade da planta ser invertível, porque assim F poderá se aproximar do inverso de P, tornando o produto PF bem próximo da identidade e, conseqüentemente,  $\hat{f}$  bem próximo de f. Para transformar esse problema em um problema de controle ótimo  $\mathcal{H}_{\infty}$ , adota-se como objetivo do projeto a minimização do sinal de erro dado pela diferença entre o sinal de estimativa da falha e o sinal de falha real. A Figura 4.2 mostra como pode ser esse sinal de erro.

Para tornar o projeto robusto é necessário incluir como entrada da planta um sinal de distúr-

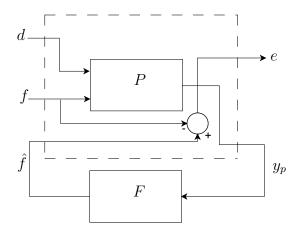


Figura 4.3: Estrutura de projeto  $\mathcal{H}_{\infty}$  de um sistema para estimação de falhas.

bios. Seja a planta definida pelo seguinte sistema linear e invariante no tempo:

$$\begin{cases} \dot{x}_p = A_p x_p + B_p d + F_p f \\ y_p = C_p x_p + D_p d + H_p f \end{cases}$$

onde  $x_p \in \mathbb{R}^{n_p}$  é o vetor de estados,  $d \in \mathbb{R}^{n_d}$  é o vetor de distúrbios,  $f \in \mathbb{R}^{n_f}$  é o sinal de falha,  $y_p \in \mathbb{R}^{n_y}$  é a saída da planta e  $A_p$ ,  $B_p$ ,  $C_p$ ,  $D_p$ ,  $F_p$  e  $H_p$  são matrizes conhecidas de dimensões apropriadas.

A formulação padrão  $\mathcal{H}_{\infty}$ , previamente mencionada no Capítulo 3 e novamente transcrita por conveniência, utiliza a seguinte planta generalizada:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \\ z = C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ y = C_2 x + D_{21} w + D_{22} u \end{cases}$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $w \in \mathbb{R}^{n_w}$  é o vetor de entradas exógenas,  $u \in \mathbb{R}^{n_u}$  é o sinal proveniente do filtro (ou controlador),  $y \in \mathbb{R}^{n_y}$  é a saída da planta,  $z \in \mathbb{R}^{n_z}$  é o sinal de desempenho e A,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $D_{11}$ ,  $D_{12}$ ,  $D_{21}$  e  $D_{22}$  são matrizes conhecidas de dimensões apropriadas.

O problema de estimação de falha pode ser resolvido considerando-se:  $w = \begin{bmatrix} d^T & f^T \end{bmatrix}$ ,  $u = \hat{f}, z = e = \hat{f} - f$  e  $y = y_p$ . Nota-se que o sinal  $\hat{f}$  é a estimativa do sinal de falha e o sinal e é o erro de estimativa. Essa estrutura de projeto é ilustrada pela Figura 4.3.

Agora, a planta generalizada G mostrada na Figura 4.4 pode ser escrita como:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_p x + \begin{bmatrix} B_p & F_p \end{bmatrix} w + [0]\hat{f} \\ e = [0]x + \begin{bmatrix} 0 & -I \end{bmatrix} w + [I]\hat{f} \\ y = C_p x + \begin{bmatrix} D_p & H_p \end{bmatrix} w + [0]\hat{f} \end{cases}$$

$$(4.1)$$

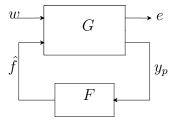


Figura 4.4: Estrutura generalizada do projeto  $\mathcal{H}_{\infty}$ .

Em notação compacta, a planta generalizada G é então definida por:

$$G = \begin{bmatrix} A_p & \begin{bmatrix} B_p & F_p & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} 0 & -I \end{bmatrix} & I \\ C_p & \begin{bmatrix} D_p & H_p & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \tag{4.2}$$

# 4.2.2 Solução do problema

Considere, de forma ilustrativa, um sistema de ordem n estável, linear, invariante no tempo, com representação no espaço de estados:

$$\dot{x}_s = A_s x_s + B_1 w$$

$$e = D_{11} w + r$$

$$y = C_s x_s + D_{21} w$$

$$(4.3)$$

onde  $x_s$  é o vetor de estado, y é o vetor de saída, w o vetor de entrada de distúrbio. Para esse sistema o objetivo é projetar um filtro dinâmico linear e estável, com representação no espaço de estados:

$$\dot{x}_f = K_f x_f + L_f y 
r = M_f x_f + N_f y$$
(4.4)

cuja saída r deve estimar a falha. O método utilizado para o projeto é baseado no Lema do Limite Real (A.25) e para a sua aplicação basta escrever a planta generalizada do problema e então aplicar a metodologia de projeto  $\mathcal{H}_{\infty}$  já descrita. A seguir serão apresentados desenvolvimentos baseados naqueles já mostrados na seção A.2.

Definindo  $x^T = \begin{bmatrix} x_s^T & x_f^T \end{bmatrix}$  como o vetor de estado do sistema de malha fechada, o sistema (4.3) é descrito pelas seguintes equações de espaço de estado:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} A_s & 0 \\ L_f C_s & K_f \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} B_1 \\ L_f D_{21} \end{bmatrix} w$$

$$e = \begin{bmatrix} N_f C_s & M_f \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} D_{11} + N_f D_{21} \end{bmatrix} w.$$
(4.5)

Adotando-se a formulação  $\mathcal{H}_{\infty}$  mostrada na seção A.2, define-se:

$$\dot{x} = (A + BFM)x + (D + BFE)w$$

$$e = (C + HFM)x + (G + HFE)w,$$
(4.6)

onde foi definido que:

$$A = \begin{bmatrix} A_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}; \quad M = \begin{bmatrix} C_s & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix};$$

$$D = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad E = \begin{bmatrix} D_{21} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad H = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}; \quad G = D_{11},$$

$$(4.7)$$

para o filtro desconhecido definido como  $F = \left[ egin{array}{cc} N_f & M_f \\ L_f & K_f \end{array} \right].$ 

Ainda seguindo a formulação do problema  $\mathcal{H}_{\infty}$  mostrada na seção A.2, aplica-se o Lema do Limite Real (Lema 8) e a desigualdade (A.25) se torna:

$$\begin{bmatrix} P(A+BFM) + (A+BFM)^T P & P(D+BFE) & (HFM))^T \\ (D+BFE)^T P & -\gamma I & (G+HFE)^T \\ (HFM)) & (G+HFE) & -\gamma I \end{bmatrix} < 0.$$
 (4.8)

Colocando-se a desigualdade anterior na forma adequada para a aplicação do Lema da Projeção (Lema 7), obtém-se:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} PB \\ 0 \\ H \end{bmatrix},\tag{4.9}$$

$$\Lambda = \left[ \begin{array}{ccc} M & E & 0 \end{array} \right], \tag{4.10}$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} PA + A^T P & PD & 0 \\ D^T P & -\gamma I & G^T \\ 0 & G & -\gamma I \end{bmatrix}.$$
 (4.11)

Aplicam-se então as desigualdades (A.17) do Lema da Projeção, com alguns ajustes algébricos. Para aplicar a primeira desigualdade de (A.17), particiona-se a matriz P como  $P^{-1}$  =

$$\begin{bmatrix} Z & Z_{12} \\ Z_{12}^T & Z_{22} \end{bmatrix}$$
, fazendo  $X = Z^{-1}$ . Para a segunda desigualdade de (A.17) particiona-se  $P$  como 
$$P = \begin{bmatrix} Y & Y_{12} \\ Y_{12}^T & Y_{22} \end{bmatrix}.$$
 Assim, aplica-se o Teorema 2:

**Teorema 2** [27] Existe um filtro F de ordem  $n_f$  para resolver o problema  $\mathcal{H}_{\infty}$   $\gamma$ -sub-ótimo do filtro DIF se, e somente se, existirem as matrizes X e Y com  $Y \geq X > 0$  tais que as seguintes condições são satisfeitas:

$$\begin{bmatrix} XA_s + A_s^T X & XB_1 \\ B_1^T X & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \tag{4.12}$$

$$\begin{bmatrix} C_2^T \\ D_{21}^T \end{bmatrix}^{\perp} \begin{bmatrix} YA_s + A_s^T Y & YB_1 \\ B_1^T Y & D_{11}^T D_{11} - \gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_s^T \\ D_{21}^T \end{bmatrix}^{\perp T} < 0, \tag{4.13}$$

$$rank(X - Y) \ge n_f, \tag{4.14}$$

Calculadas as matrizes X e Y, obtém-se a matriz P através da expressão  $P = \begin{bmatrix} X & I \\ I & (X - Y)^{-1} \end{bmatrix}$ . Assim, o filtro F é determinado resolvendo-se a LMI (A.16), novamente transcrita:

$$\Gamma F \Lambda + (\Gamma F \Lambda)^T + \Theta < 0. \tag{4.15}$$

## 4.2.3 Algoritmo de projeto de um filtro de DIF usando a metodologia de [27,28]

- 1. Obter o modelo matemático no espaço de estados para a planta e escrevê-la conforme (4.1).
- 2. Escrever a planta generalizada conforme (4.2).
- 3. Calcular as matrizes X e Y através do Teorema 2 e então determinar P.
- 4. Determinada P, encontrar  $\Gamma$ ,  $\Lambda \in \Theta$ .
- 5. Resolver a LMI (4.15) para determinar o filtro F de detecção de falhas.
- 6. Verificar a estabilidade do filtro e do sistema de detecção, ou seja, planta e filtro conectados, através da análise dos respectivos pólos. No caso de instabilidade, ajustar parâmetros do solver utilizado e retornar ao passo 3.

#### 4.3 Filtro para gerar sinal de resíduo

A seguir será apresentada a metodologia de projeto disponível no artigo de Henry e Zolghadri [14], no qual foi projetado um filtro para gerar um sinal de resíduo robusto com relação aos distúrbios e ao mesmo tempo sensível às falhas. Para garantir esse compromisso de robustez a distúrbios e sensibilidade a falhas, foram utilizadas técnicas de projeto baseadas na norma  $\mathcal{H}_{\infty}$  (robustez a distúrbios) e no índice  $H_{-}$  (sensibilidade a falhas).

### 4.3.1 Formulação do problema

O problema geral de projeto de um filtro gerador de resíduos é mostrado na Figura 4.5. O sistema é representado por um modelo nominal linear e invariante no tempo interligado a um bloco de incertezas  $\Delta \in \underline{\Delta} : \|\Delta\|_{\infty} \le 1$ , que atua sobre esse modelo nominal. Assume-se que todas as incertezas de modelagem (incertezas paramétricas e dinâmicas não modeladas) são representadas por  $\Delta$ . Distúrbios exógenos são denotados por d e f é usado para representar as falhas que afetam a planta. Os sinais  $\eta$  e  $\epsilon$  são internos ao modelo e K representa o controlador conhecido.

O filtro de detecção e isolamento de falhas (DIF) a ser projetado é F. Sua saída  $\hat{z}$  é uma estimativa de  $z=M_yy+M_uu$ , um subconjunto da saída medida da planta e do sinal de controle.  $M_y$  e  $M_u$  são duas matrizes de estruturação de dimensões apropriadas. Assume-se que K e F são representados pelas seguintes equações de estado:

$$K: \begin{cases} \dot{x}_{K} = A_{K}x_{K} + B_{K}y \\ u = C_{K} + D_{K}y \end{cases},$$

$$F: \begin{cases} \dot{x}_{F} = A_{F}x_{F} + B_{F} \begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix} \\ \hat{z} = C_{F} + D_{F} \begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix} \end{cases}, \tag{4.16}$$

onde  $A_K, B_K, C_K, D_K$  são conhecidos. As dimensões do problema são  $x_K \in \mathbb{R}^{n_K}, x_F \in \mathbb{R}^{n_F}, y \in \mathbb{R}^p, u \in \mathbb{R}^m, z \in \mathbb{R}^q$ .

Um dos objetivos de projeto é garantir que sejam produzidos sinais de resíduo sensíveis ao sinal de falha. Para lidar com esse problema, é utilizado o índice  $H_-$ , que em oposição à norma  $\mathcal{H}_\infty$  trabalha com os valores singulares mínimos. Nesse caso, não se aplica a terminologia norma porque se trabalha dentro de um conjunto limitado em frequência. A seguir é formalizada a definição do índiece  $H_-$ .

**Definição 1** (Índice  $H_-$ ) Seja  $\underline{\sigma}(P(j\omega))$  o mínimo valor singular não nulo da matriz  $P(j\omega)$  e

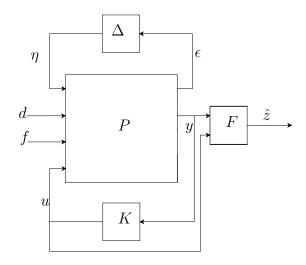


Figura 4.5: O problema de detecção de falhas.

 $\Omega = [\omega_1; \omega_2]$  a faixa de freqüência na qual  $\underline{\sigma}(P(j\omega)) \neq 0$ . Então:

$$||P||_{-} = \inf_{\omega \in \Omega} \underline{\sigma}(P(j\omega)). \tag{4.17}$$

A partir da definição do índice  $H_{-}$  percebe-se que ruídos provenientes de um possível modelo identificado experimentalmente podem ser evitados devido ao fato de se trabalhar com uma faixa restrita de freqüências. O problema de projeto do filtro FDI pode ser formulado conforme mostrado a seguir.

**Problema 1** O objetivo é encontrar um filtro estável com matrizes de estado  $A_F \in \mathbb{R}^{n_F \times n_F}$ ,  $B_F \in \mathbb{R}^{n_F \times (p+m)}$ ,  $C_F \in \mathbb{R}^{q \times n_F}$ ,  $D_F \in \mathbb{R}^{q \times (p+m)}$  e matrizes  $M_y \in \mathbb{R}^{q \times p}$  e  $M_u \in \mathbb{R}^{q \times m}$  tais que o sinal de resíduo r definido por:

$$r = z - \hat{z} = M_y y + M_u u - \hat{z} \tag{4.18}$$

respeite os seguintes requisitos:

- 1.  $||T_{rd}||_{\infty} < \gamma_1$ , para todas as incertezas de modelagem  $\Delta \in \underline{\Delta} : ||\Delta||_{\infty} \le 1$ , onde  $T_{rd}$  denota a função de transferência de malha fechada entre r e d.
- 2.  $||T_{rf}||_{-} > \gamma_2$  em uma faixa de freqüência  $\Omega$  específica, para todas as incertezas de modelagem  $\Delta \in \underline{\Delta} : ||\Delta||_{\infty} \le 1$ .  $T_{rf}$  denota a função de transferência de malha fechada entre r e f.  $\Omega$  é a faixa de freqüência na qual se espera que a energia das falhas esteja concentrada.

A especificação 1 representa o pior caso de robustez do resíduo aos distúrbios exógenos atuando sobre o modelo, em termos da norma  $\mathcal{H}_{\infty}$ . Na presença de incertezas de modelagem, os efeitos dos distúrbios sobre o resíduo podem ser grandes, prejudicando o desempenho da detecção

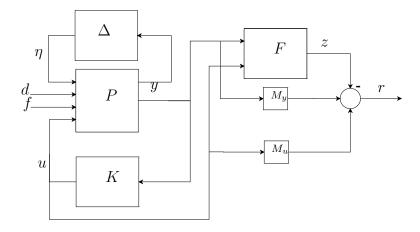


Figura 4.6: Esquema do sistema de geração de resíduos.

de falhas. Por isso, uma especificação de sensibilidade a falhas robusta é necessária para manter dentro do desejável o desempenho da unidade de DIF. Desse modo, a especificação 2 utiliza a formulação  $H_{-}$  para garantir sensibilidade do resíduo a falhas. Assim, o sistema de detecção de falhas será da forma mostrada na Figura 4.6.

# 4.3.2 Adaptação do problema para o projeto $\mathcal{H}_{\infty}$

Uma solução para o Problema 1 será encontrada a seguir. O elemento central dos desenvolvimentos subsequentes é que os parâmetros livres (as matrizes do filtro  $A_F$ ,  $B_F$ ,  $C_F$  e  $D_F$  e as matrizes de estruturação  $M_y$  e  $M_u$ ) são otimizados através de técnicas baseadas em desigualdades matriciais lineares (LMI) com o objetivo de encontrar um resíduo ótimo.

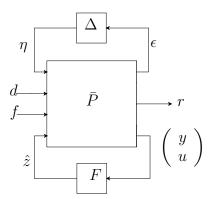


Figura 4.7: Esquema de projeto do filtro de detecção de falhas.

A inclusão do controlador K na planta P permite que seja montada a estrutura mostrada na Figura 4.7, onde a matriz de transferência  $\bar{P}$  é deduzida a partir das realizações no espaço de estados de P e K, utilizando transformações lineares fracionais (LFT). Os requisitos 1 e 2 do Problema 1

devem ser escritos em função dos ganhos desejados para as apropriadas funções de transferência de malha fechada. Esses requisitos são atingidos com filtros de ponderação. Sendo assim, definem-se dois filtros de ponderação  $W_d$  e  $W_f$  tais que:

$$||W_d||_{\infty} \le \gamma_1, \quad ||W_f||_{-} \ge \gamma_2.$$
 (4.19)

Assume-se que  $W_d$  e  $W_f$  são invertíveis e definidos de acordo com os ganhos das respostas  $T_{rd}$  e  $T_{rf}$ . Assim, se a condição

$$||T_{rd}W_d^{-1}||_{\infty} \le 1. \tag{4.20}$$

for satisfeita, o requisito de robustez especificado em 1 será atingido.

Ainda é necessário transformar o requisito 2 de sensibilidade a falhas em uma restrição  $H_{\infty}$ .

**Lema 6** [14] Considere a especificação 2 de sensibilidade robusta a falhas e o filtro  $W_f$  definido de acordo com (4.19). Introduz-se  $W_F$ , uma matriz de transferência tal que  $\|W_f\|_{-} = \frac{\gamma_2}{\lambda} \|W_F\|_{-}$  e  $\|W_F\|_{-} > \lambda$ , onde  $\lambda = 1 + \gamma_2$ . Define-se o sinal  $\tilde{r}$  tal que  $\tilde{r} = r - W_F f$ . Então uma condição suficiente para a especifiação 2 é:

$$||T_{rf} - W_F||_{\infty} < 1 \Leftrightarrow ||T_{\tilde{r}f}||_{\infty} < 1. \tag{4.21}$$

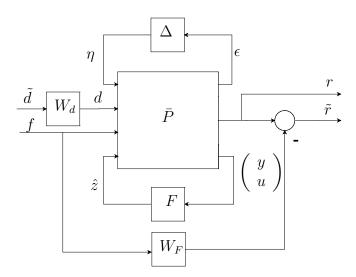


Figura 4.8: Esquema de projeto do filtro de detecção de falhas com filtros de ponderação.

Seguindo as equações (4.20) e (4.21), o problema de projeto pode ser redefinido de acordo com a estrutura mostrada na Figura 4.8, onde  $\tilde{d}$  e  $\tilde{r}$  são dois sinais tais que  $\tilde{d} = W_d d$  e  $\tilde{r} = r - W_F f$ . Então, incluindo  $W_d$  e  $W_F$  em  $\bar{P}$  obtém-se o diagrama de blocos equivalente mostrado na Figura 4.9, onde a matriz de transferência  $\tilde{P}$  é deduzida a partir de transformações lineares fracionais com  $W_d^{-1}$ ,  $W_F$  e  $\bar{P}$ .

**Problema 2** O problema da geração de resíduos pode agora ser formulado de acordo com a formulação  $\mathcal{H}_{\infty}$  clássica, combinando os requisitos (4.20) e (4.21) em uma restrição  $\mathcal{H}_{\infty}$ . Usando o Teorema do Ganho Pequeno (ver Teorema 8), pode ser verificado que uma condição suficiente para que as condições (4.20) e (4.21) sejam satisfeitas para todas as perturbações de modelo  $\Delta \in \underline{\Delta} : \|\Delta\|_{\infty} \leq 1$  é:

$$\|(\tilde{P} \star F)\|_{\infty} < 1,\tag{4.22}$$

onde  $\tilde{P}\star F$  indica a matriz de malha fechada resultante da transformação linear fracional entre  $\tilde{P}$  e F.

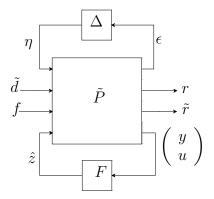


Figura 4.9: Esquema padrão de projeto do filtro de detecção de falhas com filtros de ponderação incluídos na planta.

#### 4.3.3 Solução do problema através de LMI

Considera-se o problema de síntese de filtro ilustrado na Figura 4.5 e o filtro de ponderação  $W_d$  definido em (4.19). Incluindo-se  $W_d$  no modelo da planta P obtém-se uma nova configuração, onde P é substituído por  $W_dP$  e o sinal d é substituído por  $\tilde{d}$ , onde  $\tilde{d}$  é definido conforme mostra a Figura 4.8. Assume-se então que  $W_dP$  admite as seguintes equações no espaço de estados:

$$\begin{cases}
\dot{x} = Ax + B_1 \eta + B_2 u + B_{2d} \tilde{d} + B_{2f} f, \\
\epsilon = C_1 x + D_{11} \eta + D_{12} u + D_{12d} \tilde{d} + D_{12f} f, \\
y = C_2 x + D_{21} \eta + D_{22} u + D_{22d} \tilde{d} + D_{22f} f,
\end{cases}$$
(4.23)

onde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\eta \in \mathbb{R}^v$ ,  $\epsilon \in \mathbb{R}^w$ ,  $\tilde{d} \in \mathbb{R}^k$ ,  $f \in \mathbb{R}^l$ . Seja  $(A_w, B_w, C_w, D_w)$  a realização de estados da matriz de transferência  $W_F$  definida no Lema 6 de modo que  $A_w \in \mathbb{R}^{n_w \times n_w}$ ,  $B_w \in \mathbb{R}^{n_w \times l}$ ,  $C_w \in \mathbb{R}^{q \times n_w}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{q \times l}$ . Então, verifica-se que a realização de estados  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$  do modelo  $\tilde{P}$  mostrado na Figura 4.9 pode ser escrita como em (4.24), (4.25), (4.26) e (4.27), onde  $\mathcal{M} =$ 

 $(I-D_{22}D_K)^{-1}$  é uma matriz constante. Nota-se que, por construção,  $\tilde{B}_2=0$  e  $\tilde{D}_{22}=0$ , já que o filtro F está em malha aberta com relação ao sistema monitorado.

Com a definição de  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ , pode-se notar que o problema de otimização  $\mathcal{H}_{\infty}$  formulado em (4.22) é não linear porque envolve termos não lineares entre as matrizes de estruturação  $M_y$  e  $M_u$  e as matrizes de estado do filtro  $(A_F, B_F, C_F, D_F)$ , todas variáveis do problema.

A desigualdade (A.25), do Lema do Limite Real, fornece uma condição necessária e suficiente para a existência de uma solução da desigualdade (4.22). Entretanto, no presente contexto, (A.25) não pode ser diretamente utilizada na determinação das matrizes de estruturação  $M_y$  e  $M_u$  do resíduo e nem das matrizes de estado  $(A_F, B_F, C_F, D_F)$  do filtro, porque (A.25) não prevê a existência das variáveis  $M_y$  e  $M_u$ . Portanto, será primeiro necessário determinar  $M_y$  e  $M_u$  para apenas posteriormente proceder a aplicação de (A.25) e determinar as matrizes de estado do filtro. A seguir será mostrada uma forma de determinar essas matrizes de estruturação.

**Teorema 3 (Zolghadri)** [14] Seja  $\tilde{P}$  definido por  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ . Seja ainda W uma base ortonormal do espaço nulo de  $(\tilde{C}_2, \tilde{D}_{21})$ . Então existe uma solução para (A.25) se e somente se existirem  $M_y \in \mathbb{R}^{q \times p}$ ,  $M_u \in \mathbb{R}^{q \times m}$  e duas matrizes simétricas R,  $S \in \mathbb{R}^{(n+n_w+n_K)\times(n+n_w+n_K)}$  satisfazendo o conjunto de LMIs (4.28), (4.29) e (4.30), onde  $\hat{C}_1$  e  $\hat{D}_{11}$  são definidos como em (4.31) e (4.32).

Calculadas  $M_y$  e  $M_u$  através da aplicação do Teorema 3, é possível aplicar a desigualdade (A.25) do Lema do Limite Real e determinar as matrizes de estado  $(A_F, B_F, C_F, D_F)$  do filtro. Para resolver a desigualdade (A.25), aplica-se a metodologia adotada por Scherer apresentada na seção 3.3.1.

# 4.3.4 Algoritmo do projeto de um filtro DIF usando a metodologia de [14,15]

Para encontrar uma solução numérica para o Teorema 3, o seguinte procedimento computacional pode ser considerado:

- 1. Colocar a planta na forma de estados representada por (4.23).
- 2. Primeiramente resolve-se o conjunto de LMIs (4.28-4.30), minimizando  $\gamma$ , para se obter uma solução ótima para R, S,  $M_y$  e  $M_u$ . Assim, estará determinada a planta  $\tilde{P}$ , definida por  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ .
- 3. De posse da planta  $\tilde{P}$ , as matrizes de estados do filtro podem ser deduzidas a partir da aplicação do Teorema 1.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix}
A + B_2 D_K \mathcal{M} C_2 & 0 & B_2 C_K + B_2 D_K \mathcal{M} D_{22} C_K \\
0 & A_w & 0 \\
B_K \mathcal{M} C_2 & 0 & A_K + B_K \mathcal{M} D_{22} C_K
\end{pmatrix}, (4.24)$$

$$\tilde{B} = (\tilde{B}_1 | \tilde{B}_2) = \\
= \begin{pmatrix}
B_1 + B_2 D_K \mathcal{M} D_{21} & B_{2d} + B_2 D_K \mathcal{M} D_{22d} & B_{2f} + B_2 D_K \mathcal{M} D_{22f} & 0 \\
0 & 0 & B_w & 0 \\
B_K \mathcal{M} D_{21} & B_K \mathcal{M} D_{21} & B_K \mathcal{M} D_{21}
\end{pmatrix}, (4.25)$$

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix}
\tilde{C}_1 (M_y, M_u) \\
\tilde{C}_2
\end{pmatrix} = \\
= \begin{pmatrix}
C_1 + D_{12} D_K \mathcal{M} C_2 & 0 & D_{12} (I + D_K \mathcal{M} D_{22}) C_K \\
(M_y + M_u D_K) \mathcal{M} C_2 & 0 & (M_y + M_u D_K) \mathcal{M} D_{22} C_K + M_u C_K \\
\overline{M} C_2 & 0 & M D_{22} C_K
\end{pmatrix}, (4.26)$$

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix}
\tilde{D}_{11} (M_y, M_u) & \tilde{D}_{12} \\
D_K \mathcal{M} C_2 & 0 & C_K + D_K \mathcal{M} D_{22} C_K
\end{pmatrix} = \\
\begin{pmatrix}
D_{11} + D_{12} D_K \mathcal{M} D_{21} & D_{12d} + D_{12} D_K \mathcal{M} D_{22d} & D_{12f} + D_{12} D_K \mathcal{M} D_{22f} & 0 \\
(M_y + M_u D_K) \mathcal{M} D_{21} & (M_y + M_u D_K) \mathcal{M} D_{22d} & (M_y + M_u D_K) \mathcal{M} D_{22f} & -I \\
(M_y + M_u D_K) \mathcal{M} D_{21} & (M_y + M_u D_K) \mathcal{M} D_{22d} & (M_y + M_u D_K) \mathcal{M} D_{22f} - D_w & -I \\
\overline{M} D_{21} & \overline{M} D_{22d} & \overline{M} D_{22f} & 0 \\
D_K \mathcal{M} D_{21} & D_K \mathcal{M} D_{22d} & D_K \mathcal{M} D_{22f} & 0
\end{pmatrix}. (4.27)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}R + R\tilde{A}^T & R\hat{C}_1^T & \tilde{B}_1\\ \hat{C}_1R & -\gamma I & \hat{D}_{11}\\ \tilde{B}_1^T & \hat{D}_{11}^T & -\gamma I \end{pmatrix} < 0 \tag{4.28}$$

$$\begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}^{T} \begin{pmatrix} \tilde{A}^{T}S + S\tilde{A} & S\tilde{B}_{1} & \tilde{C}_{1}^{T}(M_{y}, M_{u}) \\ \tilde{B}_{1}^{T}S & -\gamma I & \tilde{D}_{11}^{T}(M_{y}, M_{u}) \\ \tilde{C}_{1}(M_{y}, M_{u}) & \tilde{D}_{11}(M_{y}, M_{u}) & -\gamma I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} < 0, \tag{4.29}$$

$$\begin{pmatrix}
R & I \\
I & S
\end{pmatrix} > 0,$$
(4.30)

$$\hat{C}_1 = (C_1 + D_{12}D_K \mathcal{M}C_2 \quad 0 \quad D_{12}(I + D_K \mathcal{M}D_{22})C_K)$$
(4.31)

$$\hat{D}_{11} = \begin{pmatrix} D_{11} + D_{12}D_K \mathcal{M} C_2 & D_{12d} + D_{12}D_K \mathcal{M} D_{22d} & D_{12f} + D_{12}D_K \mathcal{M} D_{22f} \end{pmatrix}$$
(4.32)

4. Verificar a estabilidade do filtro e do sistema de detecção, ou seja, planta e filtro conectados, através da análise dos respectivos pólos. No caso de instabilidade, ajustar parâmetros do método númérico utilizado e retornar ao passo 2.

# 4.3.5 Comentários

Nesse capítulo foram apresentadas duas metodologias de projeto de filtros para detecção de falhas. A primeira abordagem produz um filtro cuja saída é uma estimativa do sinal de falha robusta com relação a distúrbios de atuação. Para a garantia de robustez foram utilizados critérios baseados na norma  $\mathcal{H}_{\infty}$ . A segunda abordagem produz um filtro cuja saída é uma sinal a ser processado em conjunto com duas matrizes de estruturação  $M_y$  e  $M_u$ , também projetadas, de forma a fornecer um sinal de resíduo robusto a distúrbios de atuação e incertezas de modelagem e ao mesmo tempo sensível ao sinal de falha. Para a garantia de robustez foram utilizados critérios baseados na norma  $\mathcal{H}_{\infty}$  e para a garantia de sensibilidade foram utilizados critérios baseados no índice  $H_-$ , que pode ser transformado em um critério baseado na norma  $\mathcal{H}_{\infty}$ .

# Capítulo 5

# Resultados

Nesse capítulo são apresentados resultados provenientes de simulações e experimentos com filtros projetados de acordo com as metodologias apresentadas no Capítulo 4. Na seção 5.1 foram projetados filtros para estimar o sinal de falha seguindo o algoritmo descrito na subseção 4.2.3. Os sistemas utilizados para teste foram um massa-mola-amortecedor e uma viga. Os filtros foram projetados de acordo com duas abordagens  $\mathcal{H}_{\infty}$  diferentes: uma usando filtros de ponderação e outra usando o lema GKYP. Também nessa seção foram projetados filtros para uma bancada torcional, com projeto  $\mathcal{H}_{\infty}$  usando o lema GKYP. Os filtros projetados foram testados em simulações.

Já na seção 5.2, foram projetados filtros para gerar um sinal de resíduo seguindo o algoritmo descrito na subseção 4.3.4. O sistema de teste foi a mesma viga utilizada na seção 5.1, mas o modelo de estados não é o mesmo porque a viga foi identificada de forma diferente. Nesse caso, o projeto foi realizado levando em consideração a presença de sinais de incerteza atuando sobre o modelo, com o objetivo de obter filtros robustos às eventuais incertezas de modelagem. Os filtros projetados foram testados em simulações.

Na seção 5.3 são apresentados os resultados provenientes de experimentos com a viga e com a bancada torcional. Nos experimentos com a viga foram testados os filtros geradores de sinais de resíduo projetados na seção 5.2. Já nos experimentos com a bancada torcional foram testados os filtros estimadores de sinais de falha projetados para o sistema torcional na seção 5.1.

#### 5.1 Filtros para estimar o sinal de falha

# 5.1.1 Massa-mola-amortecedor usando filtros de ponderação

O sistema massa-mola-amortecedor com três graus de liberdade mostrado na Figura 5.1, com duas entradas (falha e distúrbio) e duas saídas (posição e velocidade), foi retirado da referência [13]. O modelo de estados dessa planta está descrito na Tabela C.1. As curvas com as respostas em freqüência desse sistema são mostradas na Figura 5.2.

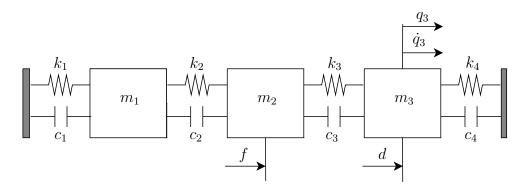


Figura 5.1: Sistema massa-mola-amortecedor de três graus de liberdade. Dados:  $m_1 = 3$ ,  $m_2 = 4$ ,  $m_3 = 0.5$ ,  $k_1 = 20$ ,  $k_2 = 30$ ,  $k_3 = 200$ ,  $k_4 = 0$ . O amortecimento é considerado proporcional, de tal forma que a matriz de amortecimento do sistema é dada por D = 0,004K + 0,001M, onde K é a matriz de rigidez e M é a matriz de massa.

Tabela 5.1: Parâmetros dos filtros de ponderação utilizados no sistema massa-mola-amortecedor. Esses filtros de ponderação foram definidos de acordo com o padrão [42] descrito no Apêndice D.

filtro	$\epsilon$	M	$\omega_c$	k	tipo
$W_d$	0,1	10000	3	1	passa baixa
$W_f$	0,0001	10	3	1	passa alta
$W_e$	0,0001	100	4	3	passa baixa

## **Projeto**

Para esse sistema, foi projetado um filtro para estimar o sinal de falhas através da implementação do algoritmo de projeto descrito na seção 4.2.3 e da utilização da função hinfsyn do MATLAB. Foram utilizados os filtros de ponderação com esquema mostrado na Figura 5.3 e descritos na Tabela 5.1, onde  $\epsilon$  indica o ganho na rejeição, M o ganho na passagem,  $\omega_c$  a freqüência de corte e k a ordem do filtro, conforme especificado na referência [42]. As respostas em freqüência desses filtros de ponderação podem ser verificadas na Figura 5.2. A escolha (e ajuste) desses filtros de ponderação foi feita a partir da imposição de que a falha deveria atuar em torno da terceira freqüência natural e o distúrbio em torno da primeira. Ressalta-se que a ordem do filtro estimador de falhas será igual à ordem da planta mais a ordem dos filtros de ponderação. O modelo de estados do filtro obtido está descrito na Tabela C.2.

# Análise

A Figura 5.4 mostra o esquema de simulação do sistema de detecção de falhas, ou seja, o sistema massa-mola-amortecedor com a inclusão do filtro, onde as entradas são o sinal de distúrbio

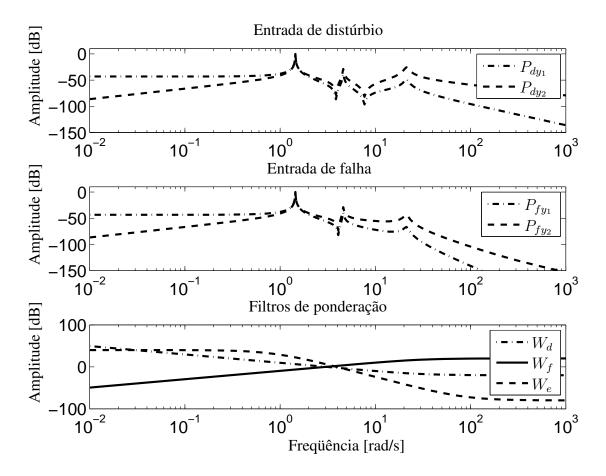


Figura 5.2: Resposta em freqüência do sistema massa-mola-amortecedor com respectivas saídas. A saída  $y_1$  é a posição da terceira massa  $(m_3)$  e a saída  $y_2$  é a velocidade da mesma massa. Os gráficos representam as respostas em freqüência das funções de transferência entre cada entrada d e f e cada saída  $y_1$  e  $y_2$ , ou seja,  $P_{dy_1}$ ,  $P_{fy_1}$ ,  $P_{dy_2}$  e  $P_{fy_2}$ . A resposta em freqüência mostrada está normalizada pela norma  $\mathcal{H}_{\infty}$  do sistema. São mostrados também os filtros de ponderação  $W_e$ ,  $W_d$  e  $W_f$  utilizados no projeto.

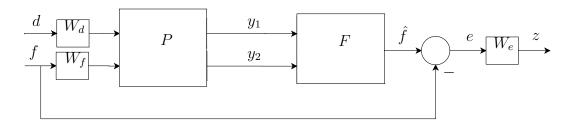


Figura 5.3: Esquema de projeto do sistema de detecção de falhas usando filtros de ponderação aplicado ao sistema massa-mola-amortecedor. Os filtros de ponderação indicam as regiões em freqüência nas quais os sinais envolvidos atuam. Nesse caso, o filtro de ponderação relacionado ao desempenho  $(W_e)$  é aquele que mais interfere no problema em termos do desempenho do filtro projetado.

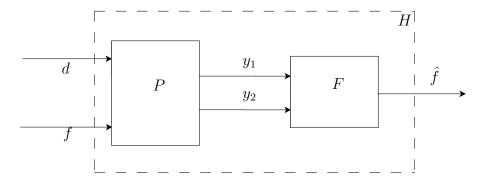


Figura 5.4: Esquema de simulação do sistema de detecção de falhas aplicado ao sistema massamola-amortecedor.

(d) e o sinal de falha (f) e saída é o sinal de estimativa da falha (f). Esse sistema H foi normalizado pela norma  $\mathcal{H}_{\infty}$  de  $H_{ff}$  e o ganho correspondente à normalização foi incluído no modelo do filtro projetado. Através da Figura 5.5 é possível perceber que, conforme desejado, o sistema de detecção de falhas é sensível ao sinal de falha com distribuição em freqüência em torno da terceira freqüência natural da planta e insensível ao sinal de distúrbio com distribuição em freqüência em torno da primeira freqüência natural. A seguir são mostradas simulações que permitem analisar respostas temporais do problema.

Consideração importante: qualquer sinal introduzido em um sistema de forma abrupta induz a indesejável excitação de certos modos de vibração. Para evitar isso e garantir que somente as freqüências de interesse sejam excitadas, nesse trabalho alguns sinais são janelados. A forma de janelamento utilizada foi a seguinte: multiplicar o sinal de interesse por cos(t). Assim, qualquer referência a janelamento de sinais nesse texto deve remeter a essa consideração.

Para realizar as simulações foi utilizado um sinal de distúrbio (d) descrito por uma varredura senoidal janelada variando de 1 a 2 rad/s. Dois sinais de falha foram utilizados para testes, uma varredura senoidal e um trem de pulsos. Para o caso sem sinal de falha, a Figura 5.6 mostra os sinais de entrada (distúrbio e falha), saída da planta e estimativa da falha. Como era de se esperar, o sinal de estimativa da falha é praticamente nulo. Para um sinal de falha descrito por uma varredura senoidal intermitente janelada variando de 15 a 30 rad/s, a Figura 5.7 mostra os resultados obtidos e confirma a capacidade do filtro de fornecer estimativas do sinal de falha de forma satisfatória.

Com os mesmos parâmetros de simulação anteriores, foi testado também o caso de um sinal de falha descrito por pulsos, sinal de testes usual na literatura, conforme pode ser verificado na Figura 5.8. Percebe-se que o filtro não é capaz de estimar o sinal de falha adequadamente, pois não foi projetado para estimar esse tipo de falha. Apesar disso, o sinal de estimativa gerado é capaz de indicar transições de estados com falha para estados sem falha (ou o contrário).

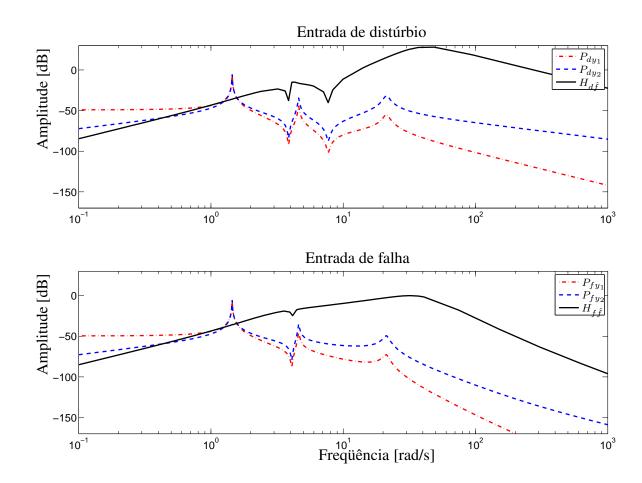


Figura 5.5: Comparação entre as respostas em freqüência do sistema massa-mola-amortecedor (P) e do sistema com inclusão do filtro que estima o sinal de falha projetado usando filtros de ponderação (H). As respostas em freqüência das funções de transferência  $P_{fy_1}$  e  $P_{fy_2}$ , normalizadas pela norma  $\mathcal{H}_{\infty}$  de P, indicam que a planta é mais sensível a sinais de falha com freqüências em torno da primeira freqüência de ressonância. A função de transferêcia  $H_{f\hat{f}}$  indica que o filtro projetado inverte essa relação e faz com que o sistema de detecção (planta e filtro conectados) seja mais sensível a sinais de falha em torno da terceira freqüência de ressonância, conforme o requisito de projeto.

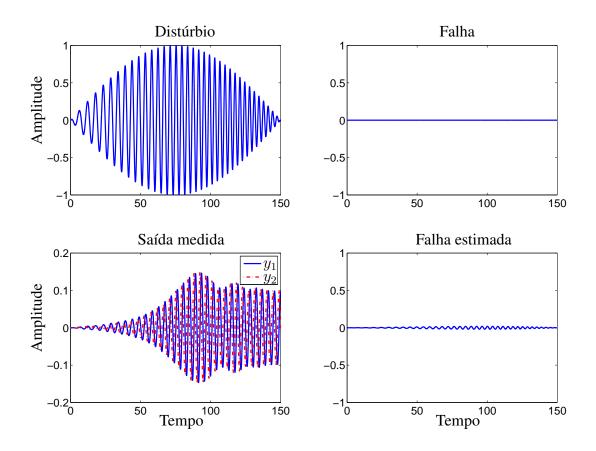


Figura 5.6: Resposta temporal do sistema massa-mola-amortecedor sem sinal de falha para teste do filtro que estima o sinal de falha projetado usando filtros de ponderação. Nesse caso, o sinal de falha é nulo e por isso o sinal de falha estimado é próximo de zero, a não ser pela existência de uma oscilação residual decorrente da impossibilidade de desacoplamento total com o distúrbio.

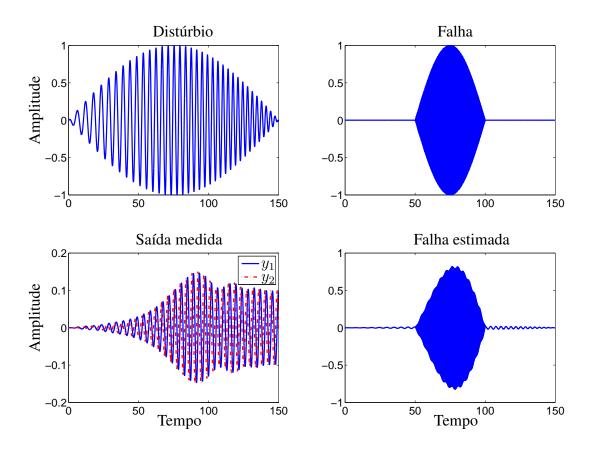


Figura 5.7: Resposta temporal do sistema massa-mola-amortecedor com sinal de falha do tipo varredura senoidal intermitente para teste do filtro que estima o sinal de falha projetado usando filtros de ponderação. O sinal de falha é uma varredura senoidal intermitente e o distúrbio apenas uma varredura senoidal, mas ambos são sinais janelados. A estimativa do sinal de falha é satisfatória.

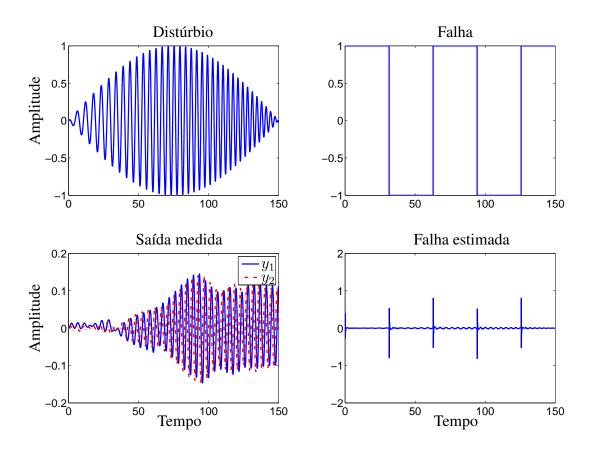


Figura 5.8: Resposta temporal do sistema massa-mola-amortecedor com sinal de falha do tipo pulsos para teste do filtro que estima o sinal de falha projetado usando filtros de ponderação. O sinal de falha é descrito por pulsos que indicam presença de falha e ausência de falha de modo intermitente. A estimativa da falha não é adequada, entretanto o sinal gerado pode ser utilizado para detectar essas transições nas quais o sistema sai de um estado sem falha para outro com falha, e vice-versa.

#### 5.1.2 Massa-mola-amortecedor usando o lema GKYP

Com o objetivo de comparar duas diferentes metodologias de projeto, o mesmo sistema massa-mola-amortecedor da subseção anterior foi novamente utilizado. O intuito foi novamente determinar um filtro cuja saída fosse a estimativa do sinal de falha, mas sem a necessidade da utilização de filtros de ponderação.

# **Projeto**

Aqui, o filtro  $\mathcal{H}_{\infty}$  para detecção de falhas foi projetado usando o lema GKYP. Assim, não foram necessários filtros de ponderação. O algoritmo descrito na subseção 3.5.5 foi implementado no MATLAB com o auxílio dos pacotes *yalmip* e *sdpt3* para resolver as LMIs. A planta utilizada para o projeto foi a mesma da subseção anterior, ou seja, o sistema massa-mola-amortecedor cujo modelo de estados está descrito na Tabela C.1. Os parâmetros de projeto foram: faixa de freqüência entre  $10 \, \mathrm{e} \, 30 \, \mathrm{rad/s}$  (em torno da terceira freqüência natural da planta),  $p = 0,001 \, \mathrm{e} \, q = 1$ . O modelo de estados do filtro obtido está descrito na Tabela C.3. Percebe-se que esse filtro é de ordem menor que aquele projetado usando filtros de ponderação.

#### Análise

A Figura 5.4 mostra o esquema de simulação do sistema de detecção de falhas, ou seja, o sistema massa-mola-amortecedor com a inclusão do filtro, onde as entradas são o sinal de distúrbio (d) e o sinal de falha (f) e a saída é o sinal de estimativa da falha  $(\hat{f})$ . Novamente o sistema H foi normalizado pela norma  $\mathcal{H}_{\infty}$  de  $H_{\hat{f}f}$  e o ganho correspondente à normalização foi incluído no modelo do filtro projetado. A Figura 5.9 mostra a comparação entre as curvas de resposta em freqüência da planta e do sistema de detecção, cuja saída é a estimativa do sinal de falha. Seria desejável que a sensibilidade à falha do sistema com filtro fosse grande na região em torno da terceira freqüência natural, preferencialmente muito maior que nas demais regiões. Entretanto isso não foi possível. Analisando-se então a planta, percebe-se que o pico relativo à primeira freqüência natural é muito maior que o pico relativo à terceira freqüência natural, o que sugere que o filtro projetado deveria ser capaz de reduzir consideravelmente a sensibilidade a sinais de falha com distribuição em freqüência em torno da primeira freqüência de ressonância e elevar a sensibilidade a sinais de falha com distribuição em freqüência em torno da terceira freqüência de ressonância. Isso não foi obtido, o que não permite concluir que qualquer projeto utilizando o lema GKYP seja

ineficiente, uma vez que essa planta de teste, com picos tão distantes em amplitude, impõe grandes dificuldades por ser praticamente insensível ao sinal de falha.

As respostas temporais, utilizando para a simulação o mesmo sinal de distúrbio da subseção anterior, são mostradas a seguir. A Figura 5.10 mostra que para a condição sem sinal de falha, a estimativa do sinal de falha está muito longe de ser nula. Na verdade, a estimativa do sinal de falha é uma estimativa do sinal de distúrbio, o que era previsto da análise das curvas da resposta em freqüência do sistema com filtro da Figura 5.9. Quando o sinal de falha é uma varredura senoidal janelada intermitente entre 15 e 30 rad/s, o resultado é o mesmo anterior, ou seja, o filtro produz um sistema praticamente insensível ao sinal de falha, assim como a planta. Isso pode ser verificado na Figura 5.11. Já para um sinal de falha descrito por pulsos, a Figura 5.12 mostra que há uma certa sensibilidade ao sinal de falha no sinal de estimativa. Para essa situação já é possível retirar alguma informação sobre o sinal de falha a partir da estimativa gerada.

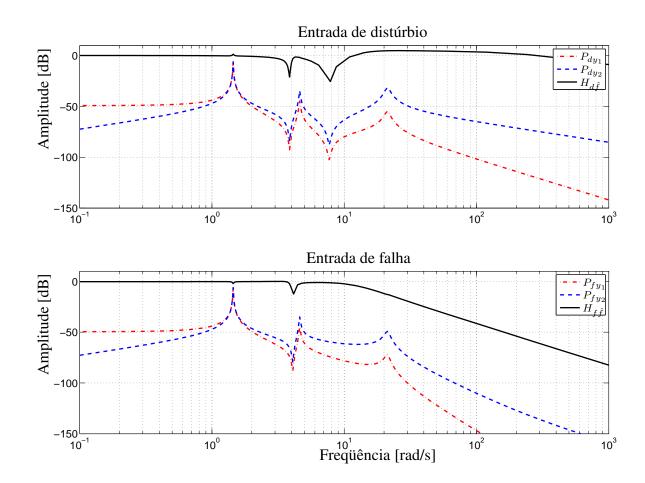


Figura 5.9: Comparação entre as respostas em freqüência do sistema massa-mola-amortecedor (P) e do sistema com inclusão do filtro que estima o sinal de falha projetado usando o lema GKYP (H). As respostas em freqüência das funções de transferência  $P_{fy_1}$  e  $P_{fy_2}$ , normalizadas pela norma  $\mathcal{H}_{\infty}$  de P, indicam que a planta é mais sensível a sinais de falha com freqüências em torno da primeira freqüência de ressonância. A função de transferêcia  $H_{f\hat{f}}$  indica que o filtro projetado não é capaz de inverter essa relação e fazer com que o sistema de detecção (planta e filtro conectados) seja mais sensível a sinais de falha em torno da terceira freqüência de ressonância, conforme o requisito de projeto.

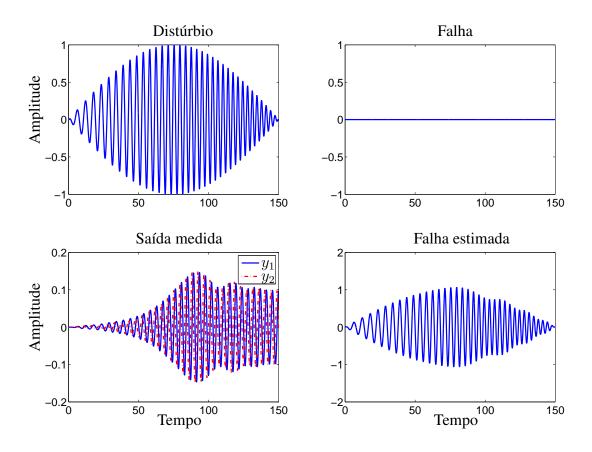


Figura 5.10: Resposta temporal do sistema massa-mola-amortecedor sem sinal de falha para teste do filtro que estima o sinal de falha projetado usando o lema GKYP. Nesse caso, o sinal de falha é nulo e por isso o sinal de falha estimado deveria ser próximo de zero. Entretanto o sinal de falha estimado é praticamente uma estimativa do sinal de distúrbio, ou seja, o filtro projetado aparentemente é ineficaz.

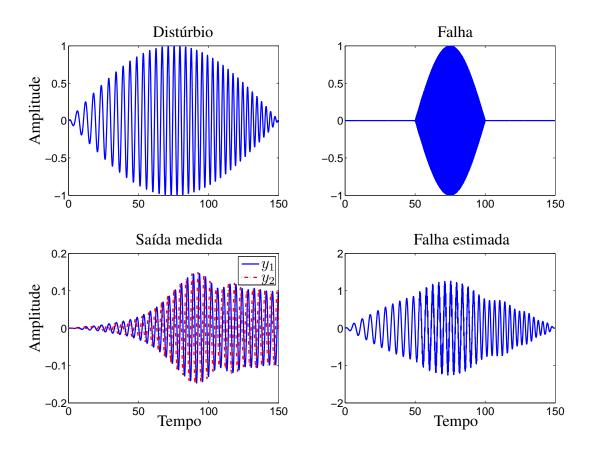


Figura 5.11: Resposta temporal do sistema massa-mola-amortecedor com sinal de falha do tipo varredura senoidal intermitente para teste do filtro que estima o sinal de falha projetado usando o lema GKYP. O sinal de falha é uma varredura senoidal intermitente e o sinal de distúrbio apenas uma varredura senoidal, mas ambos são sinais janelados. O sinal de falha estimado mostra que o filtro é insensível a falhas e sua saída nada mais é do que uma estimativa do sinal de distúrbio.

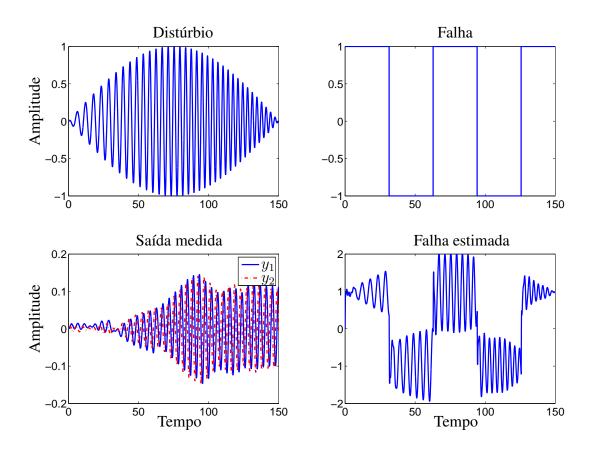


Figura 5.12: Resposta temporal do sistema massa-mola-amortecedor com sinal de falha do tipo pulsos para teste do filtro que estima o sinal de falha projetado usando o lema GKYP. O sinal de falha é descrito por pulsos que indicam presença de falha e ausência de falha de modo intermitente. A estimativa pode ser considerada muito ruim, mas já é possível perceber alguma sensibilidade à falha.

Tabela 5.2: Parâmetros do filtro de ponderação utilizado para o projeto do filtro estimador de falhas da viga de ordem 16. Novamente, segue-se o mesmo padrão especificado na referência [42]

filtro	$\epsilon$	M	$\omega_c$	k	tipo
$W_e$	0,0001	10000	3000	6	passa alta

# 5.1.3 Viga de ordem 16 usando filtros de ponderação

Para avaliar melhor os métodos de projeto utilizados nas duas subseções anteriores, é utilizada uma estrutura de teste um pouco mais complexa, ou seja, uma viga de alumínio de ordem 16. Essa viga é mostrada na Figura 5.13 e apresenta duas entradas, uma de distúrbio e outra de falha, e uma saída. As duas entradas são momentos e a saída é a aceleração da extremidade livre. Na etapa de projeto é adicionada uma entrada de ruído, que se soma à saída medida. O modelo de estados dessa viga está descrito na Tabela C.4. As curvas de resposta em freqüência das funções de transferência dessa estrutura são mostradas na Figura 5.14.

## **Projeto**

Para o projeto do filtro estimador do sinal de falha é implementado o algoritmo da subseção  $4.2.3~{\rm com}$  o auxílio da função hinfsyn do MATLAB. O esquema de projeto com filtros de ponderação é mostrado na Figura 5.15, onde apenas o sinal de erro é ponderado pelo filtro de ponderação  $W_e$  com parâmetros mostrados na Tabela 5.2. O objetivo é colocar o sinal de falha com distribuição em freqüência em torno da segunda freqüência natural e o sinal de distúrbio com distribuição em freqüência em torno das três últimas freqüências naturais. O modelo de estados do filtro obtido está descrito na Tabela C.5.

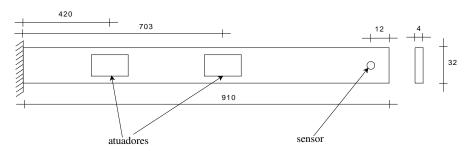


Figura 5.13: Viga utilizada para testar o filtro de detecção de falhas.

#### Análise

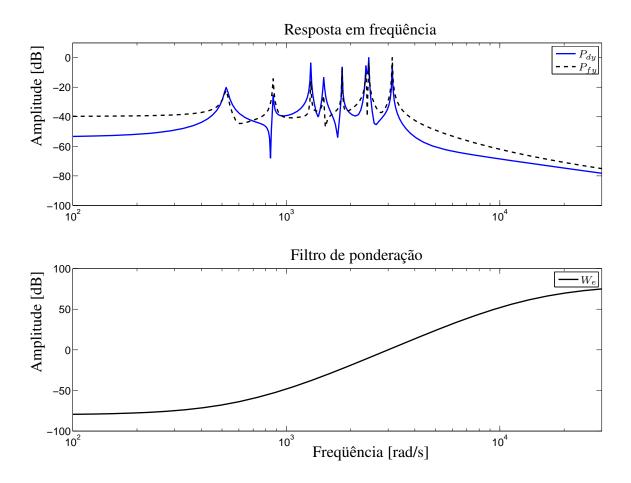


Figura 5.14: Resposta em frequência das funções de transferência da viga com respectivas saídas. O modelo da viga é de ordem 16. Pode ser verificado também o filtro de ponderação  $W_e$  utilizado no projeto.

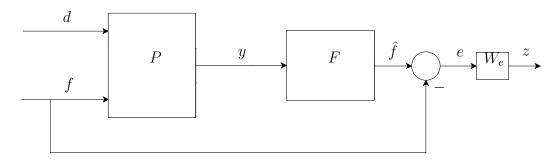


Figura 5.15: Esquema de projeto do sistema de detecção de falhas usando filtros de ponderação aplicado à viga. Nesse caso, um filtro de ponderação relacionado ao desempenho  $(W_e)$  é utilizado. Outros filtros de ponderação não foram utilizados porque os resultados apenas com  $W_e$  foram satisfatórios.

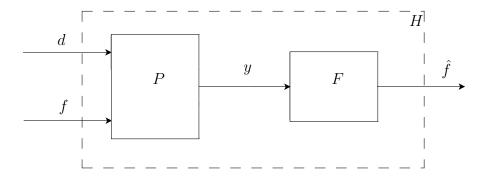


Figura 5.16: Esquema de simulação do sistema de detecção de falhas aplicado à viga.

A Figura 5.16 mostra o esquema de simulação do sistema de detecção de falhas, ou seja, a viga com a inclusão do filtro, onde as entradas são o sinal de distúrbio (d) e o sinal de falha (f) e a saída é o sinal de estimativa da falha  $(\hat{f})$ . Novamente o sistema H é noramlizado pela norma  $\mathcal{H}_{\infty}$  de  $H_{\hat{f}f}$  e o ganho correspondente a essa normalização incluído no modelo do filtro. O resultado fornecido pelo filtro de detecção de falhas projetado pode ser verificado através das curvas de resposta em freqüência mostradas na Figura 5.17. Percebe-se que o sistema é bastante sensível a sinais de falha com distribuição em freqüência em torno da segunda freqüência natural e pouco sensível a sinais de distúrbio com distribuição em freqüência em torno das três últimas freqüências naturais, ou seja, o filtro projetado produz resultado satisfatório.

A resposta temporal pode ser verificada impondo como sinal de distúrbio uma varredura senoidal janelada de freqüência entre 2000 e 4000 rad/s. Dois sinais de falha são aplicados, uma varredura senoidal e um trem de pulsos. Para o caso sem falha, a resposta pode ser verificada na Figura 5.18. A estimativa do sinal de falha é nula, como era de se esperar. Para um sinal de falha representado por uma varredura senoidal intermitente janelada entre 846 e 890 rad/s, conforme verificado na Figura 5.19, a estimativa do sinal de falha é muito boa. O mesmo ocorre para um sinal de falha do tipo pulsos, conforme verificado na Figura 5.20. Assim, está comprovada a eficácia do filtro projetado.

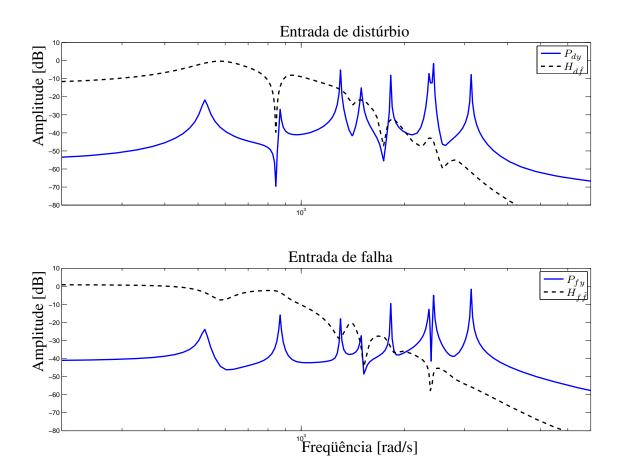


Figura 5.17: Comparação entre as respostas em freqüência da viga (P) e do sistema de detecção de falhas com inclusão do filtro que estima o sinal de falha projetado usando filtros de ponderação (H). Os requisitos de projeto foram sinal de falha com distribuição em freqüência em torno da segunda freqüência de ressonância e sinal de distúrbio com distribuição em freqüência em torno das três últimas freqüências de ressonância. O sistema com o filtro de detecção mostra-se sensível ao sinal de falha  $(H_{f\hat{f}})$  e insensível ao sinal de distúrbio  $(H_{d\hat{f}})$  nas regiões em freqüência de interesse, ou seja, sensível aos sinais de falha nas primeiras freqüências de ressonância e insensível aos sinais distúrbio nas últimas freqüências de ressonância.

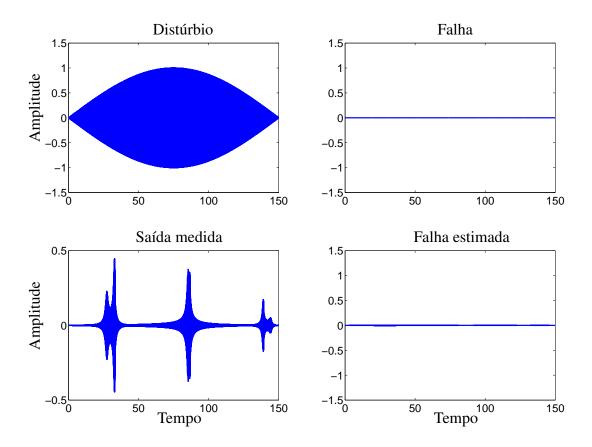


Figura 5.18: Resposta temporal para a viga sem sinal de falha para teste do filtro que estima o sinal de falha projetado usando filtros de ponderação. Nesse caso não há sinal de falha e o sinal de falha estimado é praticamente nulo, conforme desejado.

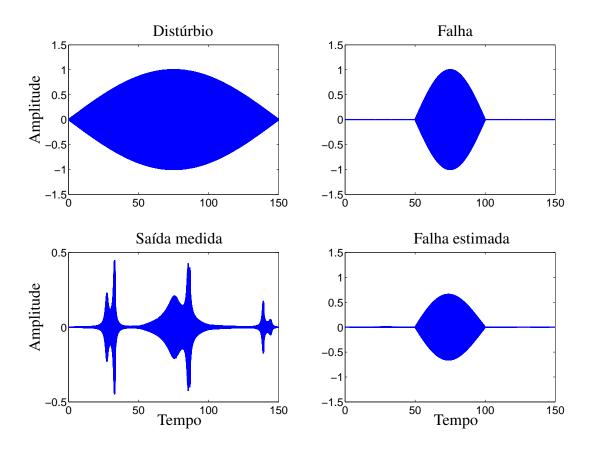


Figura 5.19: Resposta temporal para a viga com sinal de falha do tipo varredura senoidal intermitente para teste do filtro que estima o sinal de falha projetado usando filtros de ponderação. O sinal de falha é uma varredura senoidal intermitente janelada e o sinal de distúrbio é uma varredura senoidal também janelada. A estimativa do sinal de falha produzida é excelente e o filtro projetado é adequado para o uso em um sistema de detecção de falhas.

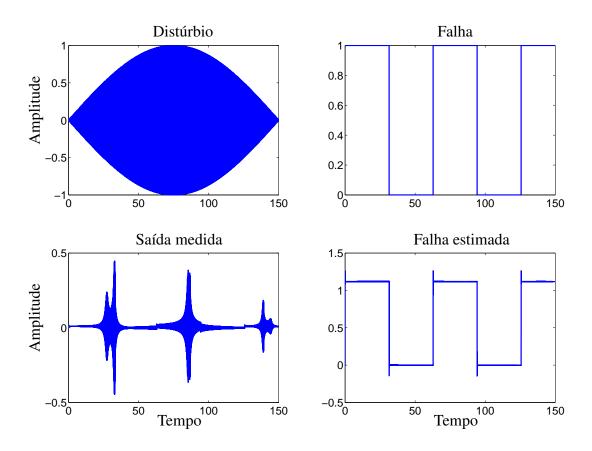


Figura 5.20: Resposta temporal para a viga com sinal de falha do tipo pulsos para teste do filtro que estima o sinal de falha projetado usando filtros de ponderação. O sinal de falha é representado por pulsos que representam de forma intermitente a presença e ausência de falhas. A estimativa do sinal de falha produzida novamente foi muito boa.

# 5.1.4 Viga de ordem 16 usando o lema GKYP

Para a viga da subseção anterior, ou seja, viga com modelo de estados descrito na Tabela C.4, também foi refeito o projeto utilizando-se a técnica baseada no lema GKYP, ou seja, não foram utilizados filtros de ponderação.

# **Projeto**

O algoritmo descrito na subseção 3.5.5 foi implementado no MATLAB com o auxílio dos pacotes *yalmip* e *sdpt3* para resolver as LMIs. Os parâmetros de projeto são: faixa de freqüência para minimizar o erro de estimativa entre 500 e 2000 rad/s, p = 100 e q = -10. O modelo de estados do filtro projetado está descrito na Tabela C.6.

#### Análise

A Figura 5.16 mostra o esquema de simulação do sistema de detecção de falhas, ou seja, a viga com a inclusão do filtro, onde as entradas são o sinal de distúrbio (d) e o sinal de falha (f) e saída é o sinal de estimativa da falha  $(\hat{f})$ . Aqui também o sistema H é normalizado pela norma  $\mathcal{H}_{\infty}$  de  $H_{\hat{f}f}$  e o ganho correspondente incluído no modelo do filtro. A Figura 5.21 mostra que o filtro foi capaz de elevar a sensibilidade do sistema a sinais de falha com distribuição em freqüência em torno da segunda freqüência natural e reduzir a sensibilidade a sinais de distúrbio com distribuição em freqüência em torno das três últimas freqüência naturais. Entretanto, o resultado não foi tão eficaz quanto o obtido com projeto baseado em filtros de ponderação. Isso ocorre porque normalmente os filtros de ponderação são mais poderosos quando o objetivo é alterar toda a resposta em freqüência. Entretanto, em algumas situações apenas pequenas atenuações nos picos podem ser suficientes para a obtenção dos resultados desejados (principalmente se o problema for de controle). Nesses casos a utilização da formulação baseada no lema GKYP pode ser mais adequada porque gera filtros da mesma ordem da planta enquanto os filtros de ponderação elevam a ordem dos filtros projetados.

A resposta temporal ajuda a avaliar melhor o filtro projetado. Para tanto, é usado o mesmo sinal de distúrbio da subseção anterior. Para o caso sem falha, a Figura 5.22 mostra que a estimativa apresenta um resíduo proveniente da sensibilidade ao distúrbio. Quando o sinal de falha é uma varredura senoidal intermitente entre 846 e 890 rad/s, a estimativa da falha é razoável e pode ser vista na Figura 5.23. Essa estimativa é um pouco prejudicada pela sensibilidade ao distúrbio, mas se percebe que o filtro é capaz de fazer uma separação entre falha e distúrbio. Quando a falha é descrita por pulsos a estimativa da falha é inadequada, conforme mostrado na Figura 5.24. Mas

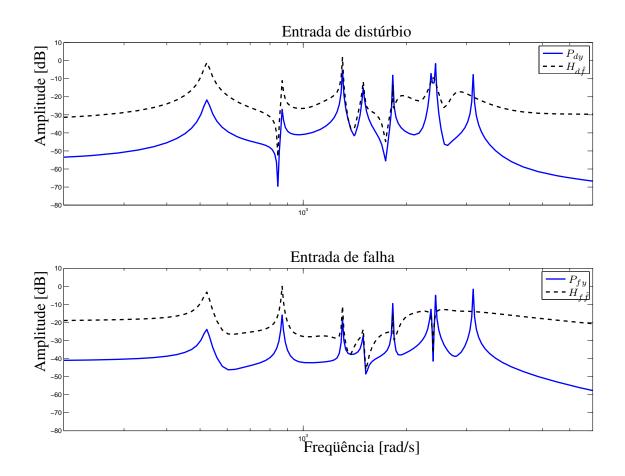


Figura 5.21: Comparação entre as respostas em freqüência da viga (P) e do sistema com inclusão do filtro que estima o sinal de falha projetado usando o lema GKYP (H). Os requisitos de projeto foram sinal de falha com distribuição em freqüência em torno da segunda freqüência de ressonância e sinal de distúrbio com distribuição em freqüência em torno das três últimas freqüências de ressonância. O sistema com o filtro de detecção mostra-se mais sensível ao sinal de falha (ver  $H_{f\hat{f}}$ ) do que ao sinal de distúrbio (ver  $H_{d\hat{f}}$ ) nas regiões em freqüência de interesse, ou seja, sensível ao sinal de falha nas primeiras freqüências naturais e insensível ao sinal de distúrbio nas últimas freqüências naturais.

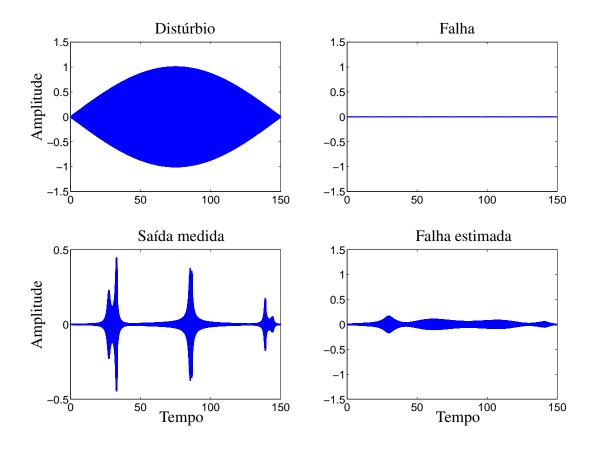


Figura 5.22: Resposta temporal para a viga sem sinal de falha para teste do filtro que estima o sinal de falha projetado usando o lema GKYP. Nesse caso, o sinal de falha é nulo mas mesmo assim a estimativa da falha não o é, ou seja, o filtro apresenta certa sensibilidade ao distúrbio.

isso não é relevante porque o filtro foi projetado para estimar falhas em uma faixa específica (em torno da segunda freqüência natural) e o sinal do tipo pulso excita todas as freqüências naturais da estrutura.

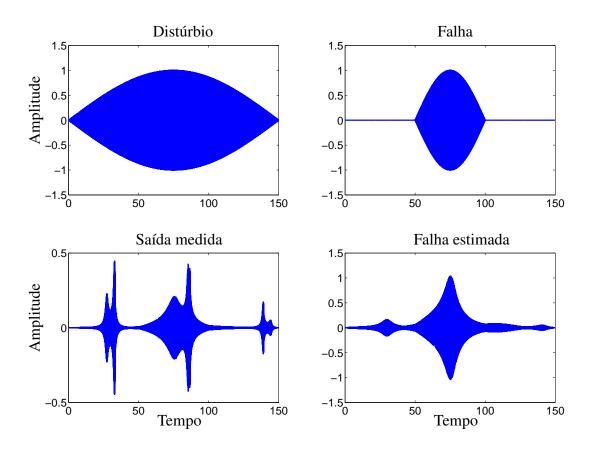


Figura 5.23: Resposta temporal para a viga com sinal de falha do tipo varredura senoidal intermitente para teste do filtro que estima o sinal de falha projetado usando o lema GKYP. O sinal de falha é uma varredura senoidal intermitente e o sinal de distúrbio é uma varredura senoidal apenas. O filtro consegue produzir uma estimativa razoável do sinal de falha, apesar de não rejeitar totalmente os efeitos do sinal de distúrbio.

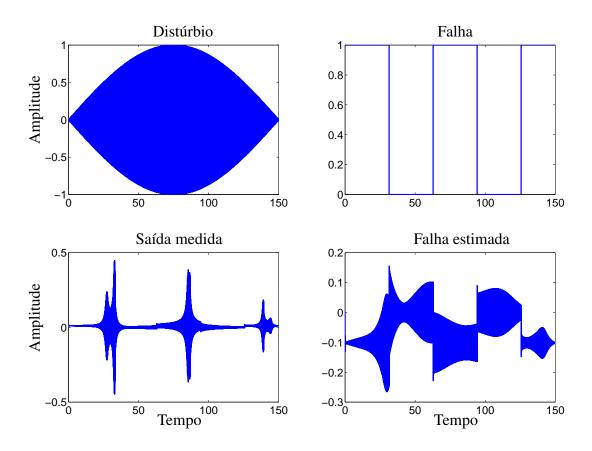


Figura 5.24: Resposta temporal para a viga com sinal de falha do tipo pulsos para teste do filtro que estima o sinal de falha projetado usando o lema GKYP. O sinal de falha do tipo pulsos intermitentes não permite que o filtro produza uma estimativa do sinal de falha razoável.



Figura 5.25: Bancada torcional.

#### 5.1.5 Bancada torcional

A Figura 5.25 mostra a bancada torcional utilizada para teste de filtros estimadores de falhas projetados a partir da formulação do problema  $\mathcal{H}_{\infty}$  baseada no lema GKYP. Na Figura 5.26 há uma representação esquemática que mostra de forma mais detalhada as unidades funcionais da bancada. Para essa planta, onde o freio desligado pode ser considerado uma incerteza no parâmetro amortecimento, foram projetados dois filtros, um levando em consideração a presença do sinal de incerteza e outro sem essa consideração.

# Modelo matemático da bancada

O modelo matemático é obtido a partir do esquema da Figura 5.26, sendo necessário escrever as equações mecânicas de movimento para cada um dos discos e a equação elétrica do motor. Os símbolos mostrados na figuras são definidos na Tabela 5.1.5.

Para o motor, o torque é dado por  $K_t i$  e a força contra-eletromotriz, por  $K_m \dot{\theta}_1$ . Como é usual para motores de corrente contínua, supõe-se que as duas constantes do motor são iguais,  $K_m = K_t = K$ .

Tabela 5.3: Parâmetros e variáveis do modelo matemático da bancada.

a	1 J.J. 1 arametros e variaveis do modero matematico da os				
	Símbolo	Significado			
	$J_1$ e $J_2$	momentos de inércia dos discos			
	$c_1$ e $c_2$	constantes de amortecimento dos discos			
	$C_1$ e $C_2$	constantes de amortecimento dos freios			
	k	constante elástica da mola			
	$\theta_1$ e $\theta_2$	posições dos discos			
	$V$ , $V_{f_1}$ e $V_{f_2}$	tensões no motor e nos freios			
	K	constante mecânica do motor			
	R	resistência do motor			
	L	indutância do motor			

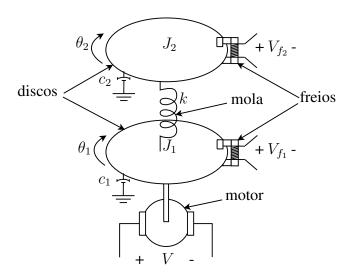


Figura 5.26: Esquema para modelagem da bancada torcional.

As equações para a bancada são:

$$L\dot{i} + Ri + K\dot{\theta}_1 = V, \tag{5.1}$$

$$J_1\ddot{\theta}_1 + c_1\dot{\theta}_1 + k(\theta_1 - \theta_2) = Ki - CV_{f_1}\dot{\theta}_1, \tag{5.2}$$

$$J_2\ddot{\theta}_2 + c_2\dot{\theta}_2 + k(\theta_2 - \theta_1) = -CV_{f_2}\dot{\theta}_2. \tag{5.3}$$

Os freios produzem um torque resistente proporcional à corrente que passa por eles e à velocidade dos discos (ver [3]). Por isso, esse torque é escrito como o produto de uma constante pela tensão de alimentação pela velocidade. Dessa forma, pode-se escrever que o torque do freio é proporcional à velocidade apenas quando se supõe que a alimentação é um parâmetro arbitrário. Na prática, a alimentação será regulada para que o efeito do freio seja o de variar o amortecimento do sistema: com um freio ligado, tem-se um sistema mais amortecido do que sem freio. Esse efeito é modelado por uma constante para cada um deles,  $C_1$  e  $C_2$ .

O modelo é escrito então como

$$L\dot{i} + Ri + K\dot{\theta}_1 = V, \tag{5.4}$$

$$J_1\ddot{\theta}_1 + (c_1 + C_1)\dot{\theta}_1 + k(\theta_1 - \theta_2) = Ki, \tag{5.5}$$

$$J_2\ddot{\theta}_2 + (c_2 + C_2)\dot{\theta}_2 + k(\theta_2 - \theta_1) = 0. {(5.6)}$$

Este modelo da bancada é simplificado para este trabalho de duas maneiras. Uma simplificação que reduz uma equação dinâmica é a de desprezar a dinâmica elétrica do motor, supondo que o tempo de resposta necessário para carregar a indutância de armadura é muita menor do que os outros tempos considerados. Dessa forma, a indutância do motor é desprezada L=0. A outra simplificação é algébrica, em vez de incluir no modelo como estados as posições e velocidades dos discos, inclui-se apenas o deslocamento angular (diferença das posições) e as velocidades. Essa simplificação é sugerida em [1].

Ao desprezar a indutância na equação (5.4), esta se torna uma equação algébrica e a variável da corrente pode ser eliminada como

$$i = \frac{V - K\dot{\theta}_1}{R}. ag{5.7}$$

A equação (5.5) passa a ser

$$J_1\ddot{\theta}_1 + \left(c_1 + C_1 + \frac{K^2}{R}\right)\dot{\theta}_1 + k(\theta_1 - \theta_2) = \frac{K}{R}V.$$
 (5.8)

Para obter o modelo da forma padrão de espaço de estados, definem-se os estados

$$x_1 = \theta_1 - \theta_2,$$

$$x_2 = \dot{\theta}_1,$$

$$x_3 = \dot{\theta}_2.$$

$$(5.9)$$

A partir dos estados definidos em (5.9) e das equações (5.7), (5.8) e (5.6) o modelo de estados é dado por (definindo u = V)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -\frac{k}{J_1} & -\frac{(c_1 + C_1 + K^2/R)}{J_1} & 0 \\ \frac{k}{J_2} & 0 & -\frac{c_2 + C_2}{J_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K}{RJ_1} \\ 0 \end{bmatrix} u,$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$
(5.10)

em que se considerou o deslocamento angular na mola como saída.

Pode-se considerar a atuação dos freios como um parâmetro que varia por influência externa, e neste caso, as constantes  $C_1$  e  $C_2$  no modelo, que valem para valores particulares de alimentação  $V_{f_1}$  e  $V_{f_2}$  devem variar quando se variarem as tensões. Define-se, para facilitar os projetos, uma entrada para cada freio entre 0 e 1 que representa uma fração da alimentação em cada freio para a qual o amortecimento encontrado é o fornecido pela constante  $C_1$  ou  $C_2$ .

Com essas novas entradas,  $f_1$  e  $f_2$ , o modelo é escrito como

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -\frac{k}{J_1} & -\frac{(c_1+K^2/R)}{J_1} & 0 \\ \frac{k}{J_2} & 0 & -\frac{c_2}{J_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K}{RJ_1} \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{C_1}{J_1} \\ 0 \end{bmatrix} f_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{C_2}{J_2} \\ 0 \end{bmatrix} f_2,$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$
(5.11)

Os valores identificados para os parâmetros do modelo são mostrados na Tabela 5.1.5. Esses

# 

Figura 5.27: Resposta em frequência do modelo com e sem freios. O freio 1 atua sobre o disco inferior, diretamente no motor. O freio 2, no disco superior.

10<sup>1</sup>

Freqüência [rad/s]

10<sup>2</sup>

10<sup>3</sup>

10<sup>0</sup>

-80

-90

10

parâmetros identificados estavam disponíveis no laboratório didático da Faculdade de Engenharia Mecância da Universidade Estadual de Campinas onde se encontra a bancada e a metodologia de identificação não será descrita nesse trabalho. Apesar de estar disponível o valor da indutância do motor L, este foi desprezado, conforme visto na formulação usada. Os dados identificados produzem um modelo linear cujo diagrama de valores singulares é mostrado na Figura 5.27 para os casos sem freio e com os freios acionados.

Para projeto de filtros geradores de estimativas dos sinais de falha, foi utilizado um modelo identificado com o freio 1 ligado e o freio 2 desligado. Considerando que um sinal que liga ou desliga o freio 1 é responsável por introduzir incerteza nesse sistema, o modelo com o freio 1 ligado é o nominal e o sinal de incerteza pode ser considerado uma perturbação no amortecimento. Para o projeto de filtro de detecção de falha foi utilizado o modelo nominal sob duas configurações de projeto: uma sem considerar a entrada de incerteza e outra considerando a entrada de incerteza. O modelo de estados desse sistema está descrito na Tabela C.7, onde a primeira entrada é o sinal de distúrbio (d) que entra no motor, a segunda entrada é o sinal de incerteza  $(\eta)$  que liga ou desliga o

Tabela 5.4: Valores dos parâmetros do modelo da bancada.

Parâmetros	Valor
$J_1$	$5,4625$ e- $5 \text{ kg.m}^2$
$J_2$	$5,4088e-5 \text{ kg.m}^2$
$c_1$	4, 2208e-5 N.m/s
$c_2$	9, 1906e-5 N.m/s
k	0,0256 N/m
R	$7,8431~\Omega$
L	$0,0784\mathrm{H}$
K	0,0349 N.m/A
$C_1$	3, 2223e-4 N.m/s
$C_2$	5, 1921e-04 N.m/s

freio 1, a terceira entrada é o sinal de falha (f) que é adicionado ao sinal de saída, sendo esse sinal de saída dado pela diferença entre as posições angulares dos discos, medidas por *encoders*.

**Importante:** para a planta nominal considera-se o sinal de incerteza nulo, ou seja,  $\eta = 0$ .

#### **Falha**

O sinal de falha utilizado para os testes nesse sistema torcional foi um trem de pulsos adicionado ao sinal de saída da planta, que é a diferença entre as posições angulares entre os discos 1 e 2, medidas por *encoders*. Dessa forma, trabalha-se com falhas de sensores.

#### **Projeto**

Aqui, os filtros  $\mathcal{H}_{\infty}$  para detecção de falhas foram projetado através do lema GKYP. O algoritmo descrito na subseção 3.5.5 foi implementado no MATLAB com o auxílio dos pacotes *yalmip* e *kypd* [39] para resolver as LMIs. O primeiro filtro projetado trata o problema da incerteza introduzida pelo sinal de freio, imposta pelo desligamento do freio eletromagnético, e o projeto leva em consideração três critérios de desempenho baseados na norma  $\mathcal{H}_{\infty}$ :

- 1. função de transferência entre o erro de estimativa e o sinal de falha;
- 2. função de transferência entre o sinal de falha estimado e o sinal de distúrbio;
- 3. função de transferência entre o sinal de incerteza e a velocidade do disco 1 (segunda variável de estado).

Tabela 5.5: Parâmetros dos projetos de detecção. Filtro 1 projetado considerando sinal de incerteza atuando sobre o modelo e Filtro 2 projetado sem considerar a atuação do sinal de incerteza.

Critério de desempenho	Parâmetro	Filtro 1	Filtro 2
Primeiro critério de desempenho	$\omega_1$	0	0
	$\omega_2$	100	100
Segundo critério de desempenho	$\omega_1$	0	0
	$\omega_2$	35	35
Terceiro critério de desempenho	$\omega_1$	0	-
	$\omega_2$	35	-
-	p	1	1
-	q	-1	-1

Os parâmetros de projeto foram faixas de freqüência restritas entre 0 e 100 rad/s (primeiro critério), entre 0 e 35 rad/s (segundo critério) e entre 0 e 35 rad/s (terceiro critério); p=1 e q=-1. O modelo de estados do filtro obtido está descrito na Tabela C.8. Esse modelo representa o filtro projetado multiplicado por um ganho estátio k=80, para ajuste de dimensões.

O segundo filtro projetado não leva em consideração a incerteza oriunda do freio eletromagnético e o projeto é realizado com os mesmos critérios de desempenho do filtro anterior, a não ser pela ausência do terceiro critério, relacionado à robustez ao sinal de incerteza. Os parâmetros de projeto foram faixas de freqüência restritas entre 0 e 100 rad/s (primeiro critério) e entre 0 e 35 rad/s (segundo critério); p=1 e q=-1. O modelo de estados do filtro obtido está descrito na Tabela C.9. Esse modelo representa o filtro projetado multiplicado por um ganho estátio k=500, para ajuste de dimensões.

#### Análise

A Figura 5.28 mostra o esquema de simulação do sistema de detecção de falhas considerandose a bancada torcional (P) e o filtro estimador de falha (F). Foram realizadas duas simulações: uma para o filtro projetado levando-se em consideração a presença do sinal de incerteza (Filtro 1) e outra para o filtro projetado sem levar em consideração o sinal de incerteza (Filtro 2). Em ambas, os sinais de distúrbio utilizados foram varreduras senoidais entre 27 e 32 rad/s e os sinais de falha pulsos. Para o caso com o Filtro 1 foi introduzido um sinal de incerteza do tipo pulso, ou seja, o freio foi ligado e desligado de forma intermitente. Já para o caso com o Filtro 2 o sinal de incerteza foi imposto nulo. Os resultados de detecção em termos da resposta temporal são mostrados na Figura 5.29. Além da estimativa do sinal de falha, a saída medida da planta em cada uma das configurações de teste também pode ser verificada.

Os resultados mostram que o filtro projetado é capaz de estimar o sinal de falha em ambos os

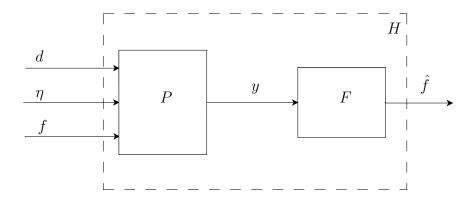


Figura 5.28: Esquema de simulação do sistema de detecção de falhas aplicado ao sistema torcional com incerteza introduzida pelo freio eletromagnético. A planta nominal é aquela com sinal de incerteza  $\eta$  nulo.

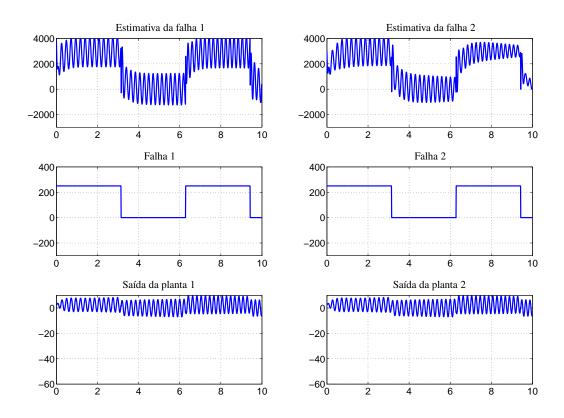


Figura 5.29: Simulações com os filtros projetados para estimar o sinal de falha aplicado ao sistema torcional. Os gráficos representam duas configurações de simulação: 1) Filtro 1, projetado para ser robusto ao sinal de incerteza, e sistema com de sinal de incerteza, ou seja, o freio 1 é ligado e desligado de forma intermitente através de sinal do tipo pulso; 2) Filtro 2, projetado sem levar em consideração o sinal de incerteza, e sistema sem a presença de sinal de incerteza, ou seja, o freio 1 permanece ligado o tempo todo.

projetos, apesar da existência de oscilações residuais provenientes do sinal de distúrbio.	

## 5.2 Filtros para gerar o sinal de resíduo

A seguir são mostrados alguns exemplos de esquemas de detecção de falhas seguindo a metodologia apresentada na seção 4.3, onde a saída do filtro de detecção é um sinal a ser processado de forma a fornecer um sinal de resíduo. O sistema utilizado para o projeto de filtros foi a mesma viga mostrada na Figura 5.13, aqui identificada de outra forma e com respostas em freqüência do modelo mostradas na Figura 5.30. O modelo  $P_4$ , de ordem 4, é o modelo nominal utilizado noo projeto mas o modelo  $P_{16}$ , de ordem 16, é utilizado na verificação dos resultados, ou seja, é considerado o modelo real. Dessa forma o modelo utilizado no projeto apresenta incerteza de modelagem. Esses modelos de estado da viga estão descritos nas tabelas C.10 e C.12.

Também foi projetado um controlador  $\mathcal{H}_{\infty}$  para a viga de ordem 4, utilizando-se a função hinfsyn do MATLAB e filtros de ponderação. O projeto do controlador não é o interesse aqui e portanto sua descrição será omitida. Considera-se, então, que a planta já estava em operação com o referido controlador incluído no sistema. O modelo de estados desse controlador está descrito na Tabela C.11.

Ressalta-se ainda que deve ser considerada no projeto a presença da incerteza de modelagem proveniente da utilização de um modelo reduzido da planta. Com esse cuidado, foram projetados três filtros geradores de resíduo diferentes. Os projetos foram feitos considerando-se primeiramente incerteza de norma limitada, depois incerteza dinâmica e, por fim, incerteza dinâmica e politópica modal. As incertezas dinâmicas são levadas em conta na forma de filtros de ponderação acrescentados à entrada de incerteza e a incerteza politópica modal se caracteriza por introduzir pequenas variações nas frequências naturais e amplitudes dos picos do modelo nominal. A problema de tratamento da incerteza não está no escopo desse trabalho e não será detalhado, mas breves comentários sobre incertezas estão presentes no Apêndice E.

Para esse sistema, foram projetados esses três filtros para gerar o sinal de resíduo através da implementação do algoritmo de projeto descrito na seção 4.3.4 e da utilização dos pacotes *yalmip* e *sedumi* do MATLAB para resolver as LMIs.

O diagrama esquemático do sistema de detecção empregado em conjunto com a viga pode ser verificado na Figura 5.31.

## 5.2.1 Incerteza de norma $\mathcal{H}_{\infty}$ limitada

O primeiro filtro foi projetado para detectar falha em torno da segunda freqüência natural, estando o sistema sujeito a disbúrbios em torno da primeira freqüência natural e incerteza de modelagem em alta freqüência, ou seja, falha entre 690 e 760 rad/se e distúrbio entre 1 e 400 rad/s.

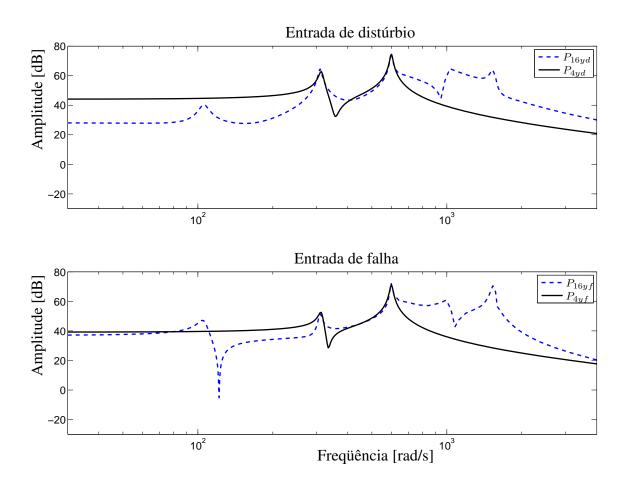


Figura 5.30: Resposta em frequência das funções de transferência da viga usada no projeto do gerador de resíduos. Estão sobrepostos os diagramas de dois modelos identificados: um de ordem 4, o modelo nominal utilizado durante o projeto, e outro de ordem 16, o modelo considerado real e utilizado na simulação para detecção de falhas, caracterizando então um problema com incerteza dinâmica.

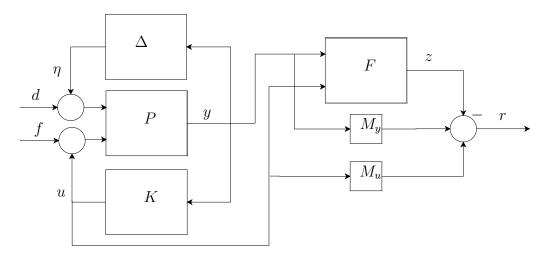


Figura 5.31: Esquema do problema de geração de resíduos da viga. A viga possui duas entradas: na primeira entra o sinal dado pela adição do sinal de distúrbio ao sinal de incerteza; na segunda entra o sinal dado pela adição entre o sinal de falha e o sinal de controle.

Tabela 5.6: Parâmetros dos filtros de ponderação utilizados para o projeto do filtro gerador de

resíduos considerando-se incerteza de norma limitada.

filtro	$\epsilon$	M	$\omega_c$	k	tipo
$W_d$	$0,01\gamma_{1}$	$10\gamma_1$	524 rad/s	2	passa baixa
$W_F$	$0,001(1+\gamma_2)$	$1+\gamma_2$	700 rad/s	2	passa alta

Ressalta-se que o projeto foi realizado para o modelo de ordem 4, sendo a diferença desse modelo para o modelo real uma fonte de incertezas, aqui considerada de norma  $\mathcal{H}_{\infty}$  limitada. Os parâmetros de projeto são  $\gamma_1=50$  e  $\gamma_2=0,1$  (seção 4.3). São utilizados os filtros de ponderação descritos na Tabela 5.6. Como o projeto considera apenas incerteza com norma  $\mathcal{H}_{\infty}$  limitada (nesse caso, menor que 1), portanto, não há filtro de ponderação associado ao sinal de incerteza  $\eta$ . O modelo de estados do filtro obtido está descrito na Tabela C.13.

#### Análise

O esquema de simulação pode ser verificado na Figura 5.32. As curvas com as respostas em frequência da planta e do sistema com filtro de detecção podem ser verificadas na Figura 5.33.

A seguir é verificada a resposta temporal através da Figura 5.34. O sinal de falha é uma varredura senoidal intermitente janelada com freqüência variando de 690 a 760 rad/s. O sinal de distúrbio considerado é um varredura senoidal entre 1 e 400 rad/s. Percebe-se que o sinal de resíduo gerado é capaz de separar distúrbio e falha, além de ser um sensível ao sinal de distúrbio. Assim, conclui-se que o filtro é adequado para a esquemas de detecção de falhas nessas condições.

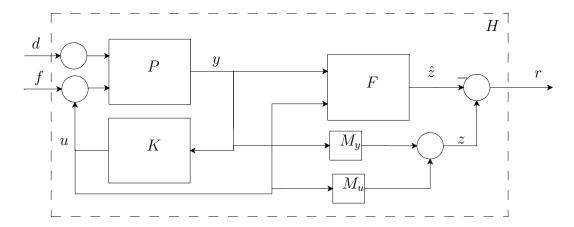


Figura 5.32: Esquema de simulação do problema de geração de resíduos da viga. A viga possui duas entradas: na primeira entra o sinal de distúrbio; na segunda entra o sinal dado pela adição entre o sinal de falha e o sinal de controle. Para a simulação não é considerado o sinal de incerteza  $\eta$ , sendo o problema da incerteza dinâmica dado pela diferença entre o modelo nominal, ordem 4, e o modelo real, ordem 16.

Tabela 5.7: Parâmetros dos filtros de ponderação utilizados para o projeto do filtro gerador de

resíduos considerando incerteza dinâmica.

filtro	$\epsilon$	M	$\omega_c$	k	tipo
$W_d$	$0,01\gamma_1$	$10\gamma_1$	524 rad/s	1	passa baixa
$W_F$	$0,001(1+\gamma_2)$	$1+\gamma_2$	700 rad/s	2	passa alta
$W_{\eta}$	$0,01\gamma_{1}$	$10\gamma_1$	942 rad/s	1	passa alta

## 5.2.2 Projeto com filtros de ponderação para contemplar incerteza dinâmica

O segundo filtro é projetado para detectar falhas em torno da segunda freqüência natural, estando o sistema sujeito a disbúrbios em torno da primeira freqüência natural e incerteza de modelagem em alta freqüência, ou seja, falha entre 690 e 760 rad/se e distúrbio entre 1 e 400 rad/s. Os parâmetros de projeto são  $\gamma_1=0,008$  e  $\gamma_2=100$ . São utilizados os filtros de ponderação mostrados na Tabela 5.7. O filtro  $W_\eta$  é o responsável pelo tratamento de incertezas dinâmicas. O modelo de estados do filtro obtido está descrito na Tabela C.14.

#### Análise

O esquema de simulação também pode ser verificado na Figura 5.32. As curvas com as respostas em freqüência da planta e do sistema com filtro de detecção podem ser verificadas na Figura 5.35.

A seguir é verificada a resposta temporal através da Figura 5.36. O sinal de falha é uma

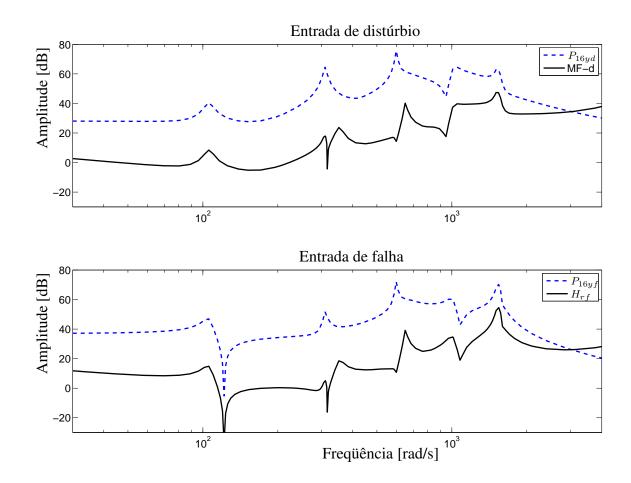


Figura 5.33: Resposta em freqüência das funções de transferência da viga  $(P_{16})$  e do sistema de detecção (H), ou seja, planta mais filtro, para o projeto considerando incerteza de norma  $\mathcal{H}_{\infty}$  limitada.

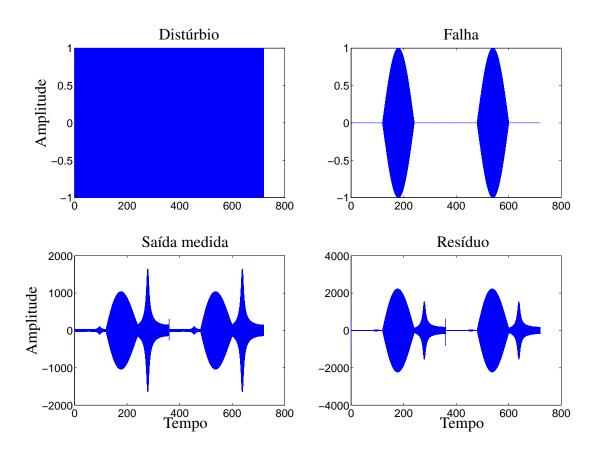


Figura 5.34: Respostas temporais da viga para o filtro projetado considerando incerteza de norma  $\mathcal{H}_{\infty}$  limitada.

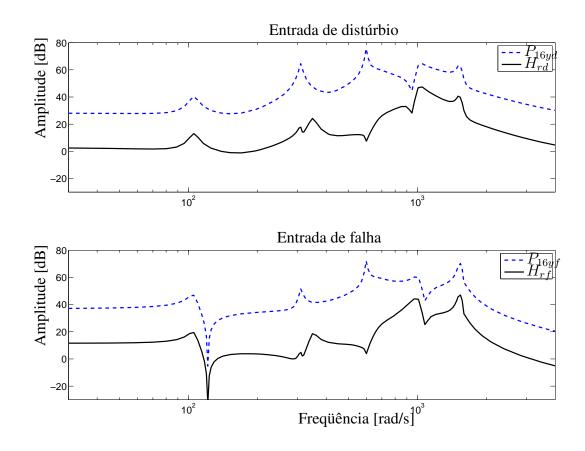


Figura 5.35: Resposta em frequência das funções de transferência da viga  $(P_{16})$  e do sistema de detecção (H), ou seja, planta mais filtro, para o projeto com filtros de ponderação para contemplar incerteza dinâmica.

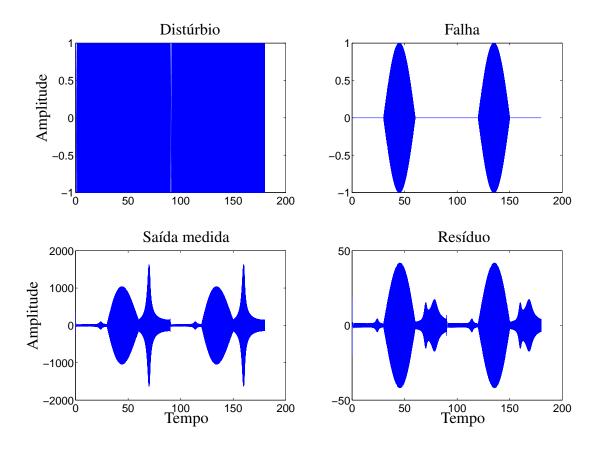


Figura 5.36: Respostas temporais da viga para o filtro projetado levando em consideração incerteza dinâmica.

varredura senoidal intermitente janelada com freqüência variando de 690 a 760 rad/s. O sinal de distúrbio considerado é um varredura senoidal entre 1 e 400 rad/s. Percebe-se que o sinal de resíduo gerado é capaz de separar distúrbio e falha, além de ser mais sensível ao sinal de falha do que ao sinal de distúrbio. O filtro projetado é adequado para a detecção de falhas nessas condições.

#### 5.2.3 Projeto levando em consideração incerteza politópica modal

O terceiro filtro é projetado para detectar falhas em torno da segunda freqüência natural, estando o sistema sujeito a disbúrbios em torno da primeira freqüência natural, ou seja, falha entre 690 e 760 rad/se e distúrbio entre 1 e 400 rad/s, sinal de incerteza atuando em alta freqüência e, ainda, incerteza politópica modal. Uma breve consideração acerca da incerteza politópica modal pode ser verificada no Apêndice E. Os parâmetros de projeto são  $\gamma_1 = 0,009$  e  $\gamma_2 = 100$ . São utilizados os mesmos filtros de ponderação da subseção anterior mostrados na Tabela 5.7, inclusive o filtro de ponderação que contempla as incertezas dinâmicas. A incerteza politópica modal é

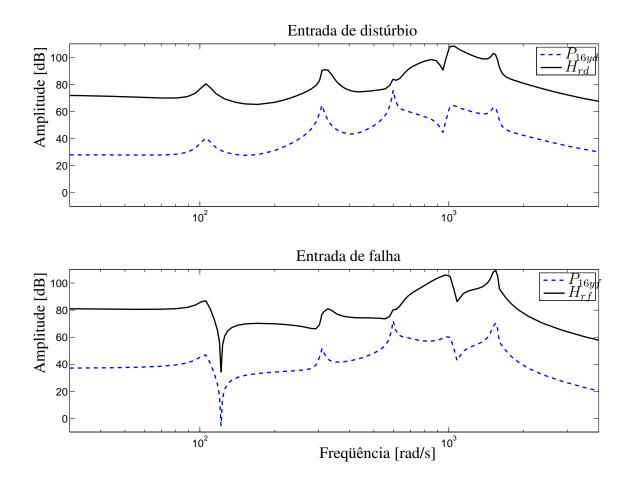


Figura 5.37: Resposta em frequência das funções de transferência da viga  $(P_{16})$  e do sistema de detecção (H), ou seja, planta mais filtro, para o projeto levando em consideração incerteza dinâmica e politópica modal.

acrescentada impondo-se variações de 10% nas freqüências naturais e 15% nos picos. O modelo de estados do filtro obtido está descrito na Tabela C.15.

## Análise

O esquema de simulação novamente pode ser verificado na Figura 5.32. As curvas de resposta em freqüência da planta e do sistema com filtro de detecção podem ser verificadas na Figura 5.37.

A seguir é verificada a resposta temporal através da Figura 5.38. O sinal de falha é uma varredura senoidal intermitente janelada com freqüência variando de 690 a 760 rad/s. O sinal de distúrbio considerado é um varredura senoidal entre 1 e 400 rad/s. Percebe-se que o sinal de resíduo gerado é capaz de separar distúrbio e falha, além de ser mais sensível ao sinal de falha do que ao sinal de distúrbio. O filtro projetado é adequado para a detecção de falhas nessas condições.

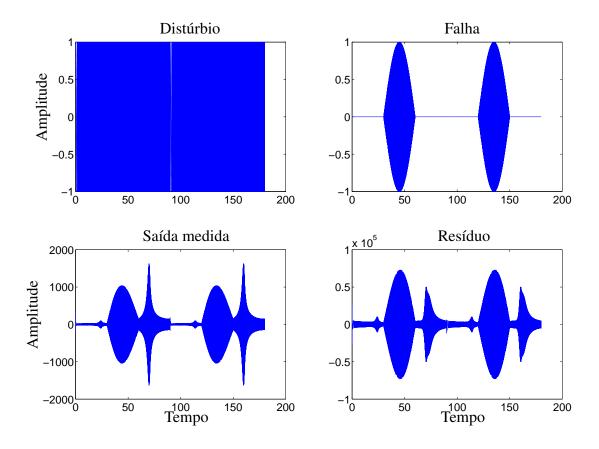


Figura 5.38: Respostas temporais da viga para o filtro projetado levando em consideração incertezas dinâmica e politópica.

Entretanto, o resultado é inferior ao obtido quando o projeto foi realizado para considerar apenas incerteza dinâmica.

## 5.3 Experimentos

### 5.3.1 Viga experimental

A planta experimental utilizada aqui é uma viga de alumínio de perfil retangular engastada em uma extremidade. O objetivo final é gerar um sinal de resíduo a ser avaliado por um procedimento qualquer que possibilite a detecção de falhas. A etapa de avaliação do resíduo não está no escopo desse trabalho. Com essa finalidade, a planta é instrumentada com dois pares de atuadores e um sensor, conforme mostrado na Figura 5.39. Essa viga é a mesma utilizada nas simulações.

Os quatros atuadores são fitas piezoelétricas construídas internamente de material cerâmico, colocadas em par em lados opostos da viga. Esse tipo de atuador recebe um sinal de tensão e o converte em uma distensão proporcional. Em cada par de atuadores um deles recebe um sinal de excitação que é o oposto do recebido pelo outro.

Na extremidade final da viga está localizado um acelerômetro uniaxial. O acelerômetro mede o sinal que será realimentado para o controlador. O processamento de sinais é realizado por um sistema de aquisição de dados fabricado pela dSPACE e integrado em software com o MATLAB.

O par de atuadores mais próximo da extremidade engastada foi escolhido para receber o sinal de falha, a ser detectado através de um sinal de resíduo. O segundo par recebe um sinal de distúrbio. Dessa forma, tem-se uma planta com duas entradas e uma saída. O sistema final em malha fechada (viga e filtro de detecção) terá as mesmas duas entradas mas a saída será o sinal de resíduo, obtido a partir da saída do filtro.

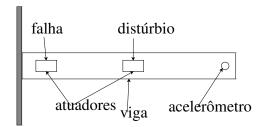


Figura 5.39: Posições dos atuadores e do sensor na planta.

### Filtros projetados

Foram realizados três experimentos, um para cada filtro gerador de resíduo projetado na seção 5.2. Para a realização dos experimentos, foram utilizados os mesmos dados de entrada nos três casos. O sinal de distúrbio utilizado foi uma varredura senoidal entre 1 e 400 rad/s e o sinal de falha foi uma varredura senoidal intermitente entre 690 e 760 rad/s.

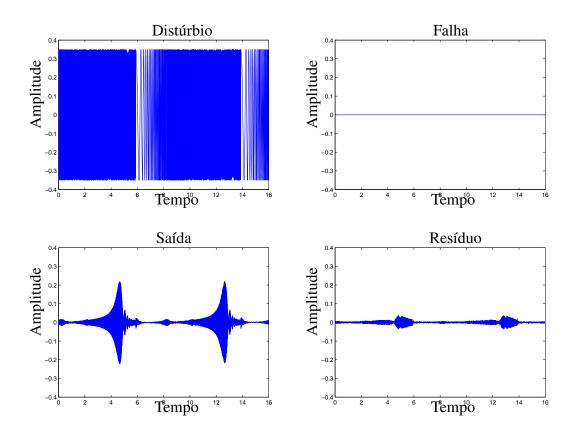


Figura 5.40: Projeto considerando incerteza de norma  $\mathcal{H}_{\infty}$  limitada. O filtro foi projetado para uma planta nominal de ordem 4 mas a planta real é de ordem maior, caracterizando a presença de incerteza dinâmica. Caso sem sinal de falha.

## Experimento 1 - Incerteza de norma $\mathcal{H}_{\infty}$ limitada

O filtro de detecção é aquele projatado na subseção 5.2.1 e descrito na Tabela C.13. Com esse filtro foi testado o efeito da falha do tipo varredura senoidal intermitente, conforme pode ser verificado na Figura 5.41. Para esse caso, também foi verificado o efeito da falha do tipo trem de pulsos, conforme pode ser verificado na Figura 5.42. O caso sem falha pode ser verificado na Figura 5.40.

#### Experimento 2 - Projeto com filtros de ponderação para contemplar incerteza dinâmica

O filtro de detecção é aquele projatado na subseção 5.2.2 e descrito na Tabela C.14. Com esse filtro foi testado o efeito da falha do tipo varredura senoidal intermitente, conforme pode ser verificado na Figura 5.44. O caso sem falha pode ser verificado na Figura 5.43.

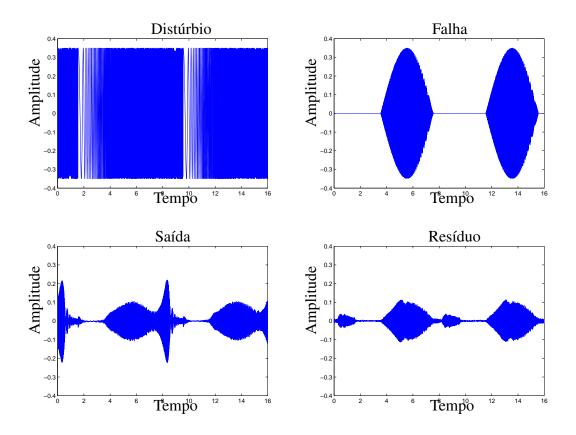


Figura 5.41: Projeto considerando incerteza de norma  $\mathcal{H}_{\infty}$  limitada. O filtro foi projetado para uma planta nominal de ordem 4 mas a planta real é de ordem maior, caracterizando a presença de incerteza dinâmica. O sinal de falha é uma varredura senoidal intermitente entre 690 e 760 rad/s.

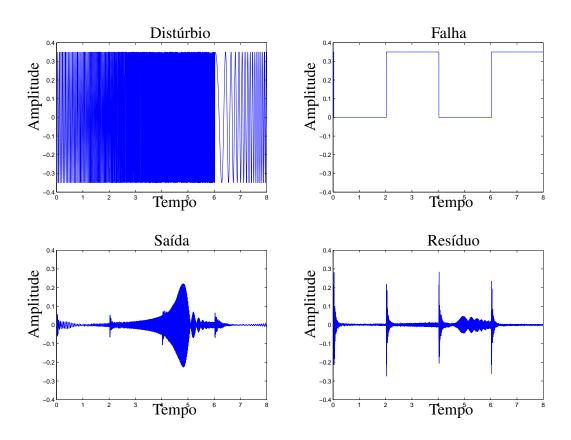


Figura 5.42: Projeto considerando incerteza de norma  $\mathcal{H}_{\infty}$  limitada. O sinal de falha é um trem de pulsos.

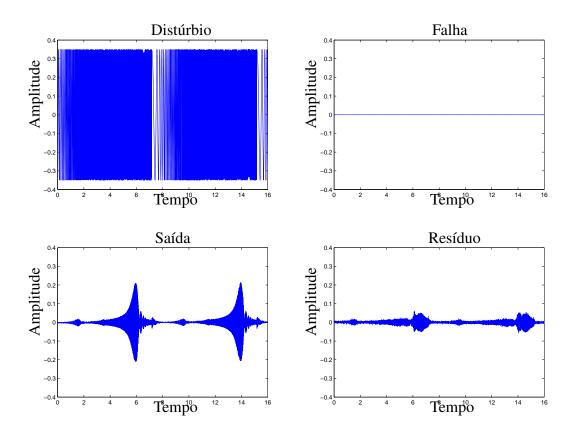


Figura 5.43: Projeto com filtros de ponderação para contemplar incerteza dinâmica em altas freqüências. O filtro foi projetado para uma planta nominal de ordem 4 mas a planta real é de ordem maior, caracterizando a presença de incerteza dinâmica. Caso sem sinal de falha.

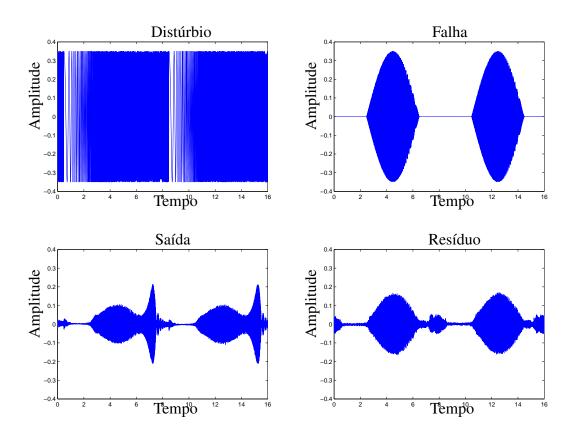


Figura 5.44: Projeto com filtros de ponderação para contemplar incerteza dinâmica em altas freqüências. O filtro foi projetado para uma planta nominal de ordem 4 mas a planta real é de ordem maior, caracterizando a presença de incerteza dinâmica. O sinal de falha é uma varredura senoidal intermitente entre 690 e 760 rad/s.

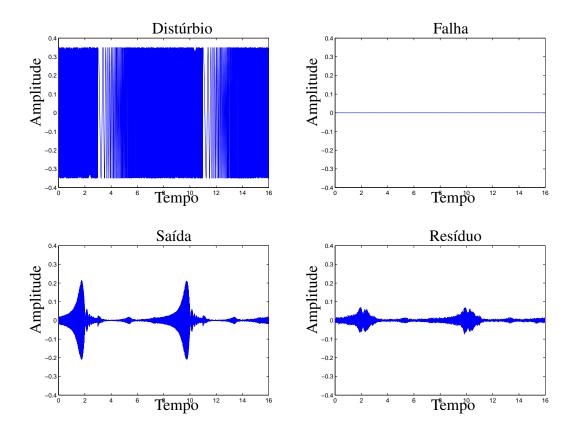


Figura 5.45: Projeto com filtros de ponderação para contemplar incerteza dinâmica em altas freqüências além da presença de incerteza politópica modal. O filtro foi projetado para uma planta nominal de ordem 4 mas a planta real é de ordem maior, caracterizando a presença de incerteza dinâmica. Caso sem sinal de falha.

### Experimento 3 - Projeto levando em consideração incerteza politópica modal

O filtro de detecção é aquele projetado na subseção 5.2.3 e descrito na Tabela C.15. Com esse filtro foi testado o efeito da falha do tipo varredura senoidal intermitente, conforme pode ser verificado na Figura 5.46. O caso sem falha pode ser verificado na Figura 5.45.

## 5.3.2 Análise dos resultados dos experimentos com a viga

Os gráficos mostrados nas figuras 5.40, 5.41, 5.42, 5.43, 5.44, 5.45 e 5.46 mostram os resultados encontrados experimentalmente. Há concordância com os resultados das simulações da seção 5.2, com os filtros mostrando-se robustos à incerteza dinâmica decorrente do fato de os projetos terem sido realizados para um modelo nominal de ordem 4 sendo que o modelo real utilizado no

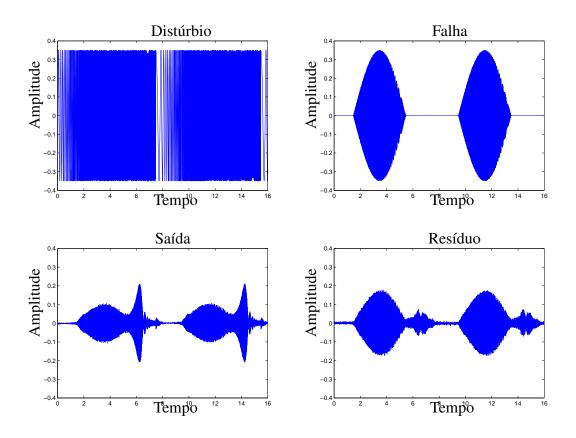


Figura 5.46: Projeto considerando incerteza dinâmica em altas freqüências além da presença de incerteza politópica modal. O filtro foi projetado para uma planta nominal de ordem 4 mas a planta real é de ordem maior, caracterizando a presença de incerteza dinâmica. O sinal de falha é uma varredura senoidal intermitente entre 690 e 760 rad/s.

experimento é de ordem muito maior.

Os filtros geradores de resíduo mostraram-se sensíveis aos sinais de falha cujas distribuições em freqüência se situam em torno da faixa para a qual foram projetados, ou seja, entre 690 e 760 rad/s. Além disso, os filtros mostraram-se mais sensíveis ao sinal de falha do que ao sinal de distúrbio, mesmo sendo a saída da planta mais sensível ao sinal de distúrbio do que ao sinal de falha. Isso é obtido ajustando-se a otimização dos índices  $\mathcal{H}_{\infty}$ , para robustez a distúrbios, e  $\mathcal{H}_{-}$ , para sensibilidade a falhas.

Verificou-se que a região de freqüencia de atuação da falha deve ser previamente conhecida e ajustada para a sensibilidade através de um filtro de ponderação. Garantido isso e o uso de filtros de ponderação para contemplar a incerteza dinâmica no projeto do filtro consegue-se obter sensibilidade à falha e insensibilidade relativa aos sinais de distúrbios e à incerteza dinâmica de modelagem.

A principal dificuldade do projeto consiste em ajustar os filtros de ponderação que determinam as freqüências de existência do distúrbio, da falha e das incertezas, que devem ser encontrados por tentativa e erro em sucessivos projetos em simulação. Deve-se também encontrar dessa forma um compromisso conveniente entre os limitantes  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , também ajustados iterativamente.

#### 5.3.3 Bancada torcional

Para a realização do experimento, os filtros projetados na seção 5.1.5 foram discretizados com tempo de amostragem de 0,01 s. O modelo discretizado foi implementado usando o LabVIEW e testado com a bancada real. Assim como nas simulações, foram usados um sinal de varredura senoidal com a freqüência crescendo linearmente entre 27 e 32 rad/s para o distúrbio, um sinal de onda quadrada de amplitude 0,5 para a incerteza e um sinal também de onda quadrada para a falha.

Os dois filtros apresentaram resultados de identificação do sinal de falha adequados, conforme pode ser verificado na Figura 5.47. No entanto, o sistema real parece ser mais amortecido que o modelo utilizado, possivelmente devido à estrutura simplificada escolhida para identificação. Por isso, os resultados experimentais são melhores que os resultados simulados. A oscilação residual presente na simulação, devida ao distúrbio, na prática é rapidamente anulada por esse amortecimento maior que o previsto. Outro fato notável é que a falha pouco influencia na saída de deformação da planta mas as medidas de posição lidas pelos *encoders* não correspondem à realidade.

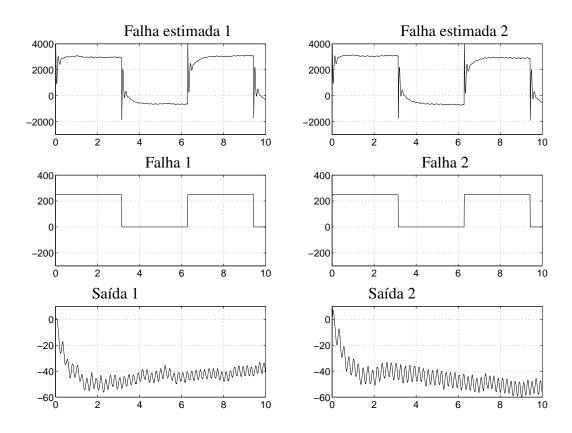


Figura 5.47: Experimentos com os filtros projetados para estimar o sinal de falha aplicado ao sistema torcional. Os gráficos representam duas configurações de teste: 1) Filtro 1, projetado para ser robusto ao sinal de incerteza, e sistema com de sinal de incerteza, ou seja, o freio 1 é ligado e desligado de forma intermitente através de sinal do tipo pulso; 2) Filtro 2, projetado sem levar em consideração o sinal de incerteza, e sistema sem a presença de sinal de incerteza, ou seja, o freio 1 permanece ligado o tempo todo.

## Capítulo 6

## Conclusões

A aplicação da teoria de controle tem se mostrado bastante útil quando se trabalha com o problema de detecção de falhas em tempo real. As técnicas de controle robusto, mais precisamente controle  $\mathcal{H}_{\infty}$ , foram aplicadas neste trabalho em um sistema simples, como massa-mola-amortecedor, e em um sistema um pouco mais complexo, como estrutura flexível do tipo viga. Foram avaliadas técnicas de projeto que produzem dois tipos de filtros: filtro para estimar o sinal de falha e filtro para gerar sinal de resíduo.

Primeiramente foram projetados filtros  $\mathcal{H}_{\infty}$ , sob a abordagem de desigualdades matriciais lineares (LMI), com o objetivo de estimar um sinal de falha. Em situações realísticas, é necessário introduzir durante a etapa de projeto restrições adicionais que garantam desempenho, dadas as limitações em freqüência específicas relacionadas à planta. Por exemplo, os sinais de distúrbio, falha e ruído, além dos sinais que representam incerteza de modelagem dinâmica, normalmente atuam em regiões conhecidas limitadas em freqüência. Para levar isso em consideração, foram utilizadas duas abordagens diferentes: o uso de filtros de ponderação e a aplicação do lema generalizado de Kalman-Yakubovič-Popov (GKYP).

Uma grande dificuldade de projeto foi ajustar os filtros de ponderação, determinados, às vezes, por tentativa e erro em sucessivos projetos. Justamente para contornar essa dificuldade é que se optou por utilizar também o lema Generalizado de Kalman-Yakubovič-Popov, que introduz as limitações em freqüência diretamente nas restrições (LMI) do problema de otimização.

As duas abordagens cumpriram eficientemente o objetivo de estimar sinais de falha. A abordagem usando o lema GKYP produz filtros de ordem igual à da planta, enquanto aquela usando filtros de ponderação produz filtros de ordem igual à da planta acrescida da ordem desses filtros de ponderação. Quando se objetivou um sistema de detecção (formado por planta mais filtro) com característica espectral bastante distinta daquela da planta, a metodologia usando filtros de ponderação se mostrou mais eficaz, propiciando grandes reduções de sensibilidade aos distúrbios em certas faixas de freqüência e grandes elevações de sensibilidade a falhas em outras faixas de freqüências de forma simultânea. Esse tipo de resultado não foi possível para filtros projetados usando o lema GKYP. Além disso, o projeto com o lema GKYP mostrou-se mais pesado computacionalmente.

Foram ainda projetados filtros  $\mathcal{H}_{\infty}$  com o objetivo de gerar um sinal a ser processado e interpretado como um sinal de resíduo. Nesse caso, o sistema de teste foi uma viga, para qual além de simulações foram realizados experimentos para avaliar os filtros. Para a eficiência dos filtros projetados, percebeu-se que a região em freqüencia de atuação da falha deve ser previamente conhecida, com distribuição em freqüência diferente do distúrbio, e ajustada para a sensibilidade através de um filtro de ponderação. Da mesma forma, a robustez a distúrbios também deve ser tratada com filtros de ponderação. Com isso e o uso de filtros de ponderação para incerteza de modelagem dinâmica no projeto do filtro, consegue-se obter sensibilidade à falha e insensibilidade relativa aos distúrbios e às incertezas. Deve-se também encontrar um compromisso conveniente entre os limitantes  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , parâmetros ligados às normas  $\mathcal{H}_{\infty}$  e  $\mathcal{H}_{-}$  que garantem robustez a distúrbios e sensibilidade a falhas. O ajuste desses parâmetros  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  é uma tarefa tediosa assim como o ajuste dos filtros de ponderação. Os filtros projetados mostraram-se eficientes tanto em simulação quanto em experimentos.

Uma bancada torcional também foi utilizada para testes experimentais. Nesse caso foram projetados filtros para estimar um sinal de falha, especificado como sendo um sinal adicionado ao sinal medido por um *encoder*. Foi usada a formulação usando o lema GKYP. Os resultados foram satisfatórios.

Os filtros projetados nessa dissertação de mestrado são capazes de fornecer sinais de resíduo e estimativas do sinal de falha. Apenas isso não é suficiente para um sistema automático de detecção de falhas que seja capaz de dizer se houve ou não falha (detectar) e onde ela ocorreu (isolar). Sendo assim, para a continuidade do trabalho seria interessante estudar critérios de avaliação dos sinais produzidos pelos filtros, por exemplo, estabelecer limiares que indicam a ocorrência de falha. Estão descritas na literatura diversas formas de estabelecer esses limiares [32]. Além disso, seria interessante estudar modelos com falhas reais e avaliar a utilização desses modelos no projeto dos filtros, por exemplo, identificando claramente qual é o efeito de uma falha real sobre a resposta em freqüência do sistema. Nota-se que nesse trabalho as falhas abordadas eram apenas sinais de entrada não avaliados de forma a estabelecer uma relação criteriosa com falhas reais. Outra possibilidade seria estudar métodos de localização (isolamento) da falha, ou seja, determinar as unidades funcionais do sistema, os sensores ou os atuadores que apresentam falha.

## **Apêndice A**

## Outras abordagens do controle $\mathcal{H}_{\infty}$

## A.1 Controle $\mathcal{H}_{\infty}$ por Riccati

Originalmente os controladores  $\mathcal{H}_{\infty}$  foram desenvolvidos a partir da equação algébrica de Riccati. Para introduzir o conceito desses controladores, seja o sistema representado em forma compacta pela matriz P escrita na forma:

$$P = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}. \tag{A.1}$$

O problema de controle  $\mathcal{H}_{\infty}$  pode ser assim definido:

**Problema ótimo**  $\mathcal{H}_{\infty}$  [27]: Encontrar um controlador real e racional próprio K que estabilize a planta generalizada P de modo a minimizar J, dado por:

$$J = \|T_{zw}\|_{\infty} = \max_{\omega} \bar{\sigma}[T_{zw}(j\omega)]$$

onde  $\bar{\sigma}(\cdot)$  é o máximo valor singular.

Desse modo, o controlador ótimo  $\mathcal{H}_{\infty}$  minimiza o valor de pico da matriz de transferência  $T_{zw}$  entre a entrada de distúrbios (w) e a saída de desempenho (z), considerando a resposta em freqüência. Entretanto, encontrar o controlador ótimo  $\mathcal{H}_{\infty}$  pode ser muito complicado. Desse modo, é comum satisfazer os requisitos para o controlador utilizando-se uma solução sub-ótima, a ser melhorada iterativamente até que se atinja o desempenho desejado. Define-se assim o problema sub-ótimo.

**Problema sub-ótimo**  $\mathcal{H}_{\infty}$  [27]: Encontrar um controlador real e racional próprio K que estabilize internamente a planta generalizada P e que, dado um  $\gamma > 0$ , satisfaça a condição:

$$||T_{zw}||_{\infty} < \gamma$$
.

Para se resolver o problema sub-ótimo o seguinte teorema pode ser utilizado [42].

**Teorema 4** Seja o sistema definido pela matriz de transferência P(s) e considere válidas as condições:

**C.1** o sistema  $(A, B_1)$  é estabilizável e o sistema  $(C_2, A)$  é detectável;

**C.2** o sistema  $(A, B_2)$  é estabilizável e o sistema  $(C_1, A)$  é detectável;

**C.3** 
$$C_{12}^T D_{12} = 0$$
  $e B_1 D_{21}^T = 0$ ;

**C.4**  $I - D_{12}^T D_{12} e I - D_{21} D_{21}^T$  possuem posto ("rank") completo.

Então existe um controlador que estabiliza a malha fechada e garante a norma  $\mathcal{H}_{\infty}$  limitada  $\|T_{zw}\|_{\infty} < \gamma$  dado pelo modelo de estado:

$$A_c = A_{\infty} \tag{A.2}$$

$$B_c = \begin{bmatrix} -Z_{\infty}L_{\infty} & Z_{\infty}B_2 \end{bmatrix}$$
 (A.3)

$$C_c = \begin{bmatrix} V_{\infty} \\ -C_2 \end{bmatrix} \tag{A.4}$$

$$D_c = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \tag{A.5}$$

onde são feitas as substituições

$$A_{\infty} = A - \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_{\infty} + B_2 F_{\infty} + Z_{\infty} L_{\infty} C_2$$
 (A.6)

$$F_{\infty} = -B_2^T X_{\infty} \tag{A.7}$$

$$L_{\infty} = -Y_{\infty}C_2^T \tag{A.8}$$

$$Z_{\infty} = (I - \gamma^{-2} Y_{\infty} X_{\infty})^{-1} \tag{A.9}$$

Em que  $X_{\infty} > 0$  e  $Y_{\infty} > 0$  são soluções das equações de Riccati:

$$A^{T}X_{\infty} + X_{\infty}A + X_{\infty}(\gamma^{-2}B_{1}B_{1}^{T} - B_{2}B_{2}^{T})X_{\infty} - C_{1}C_{1}^{T} = 0$$
 (A.10)

$$A^{T}Y_{\infty} + Y_{\infty}A + Y_{\infty}(\gamma^{-2}C_{1}C_{1}^{T} - C_{2}C_{2}^{T})Y_{\infty} - B_{1}B_{1}^{T} = 0$$
 (A.11)

$$com \ \rho(X_{\infty}Y_{\infty}) < \gamma^2.$$

## A.1.1 Algoritmo do projeto $\mathcal{H}_{\infty}$ por Riccati

Um algoritmo para resolver o problema de controle  $\mathcal{H}_{\infty}$  por Riccati é:

- 1. Escrever o problema na forma de estados padrão (3.1).
- 2. Escolher a norma  $\mathcal{H}_{\infty}$  a ser garantida  $(\gamma)$ .
- 3. Resolver as equações de Riccati (A.10) e (A.11) e obter  $X_{\infty}$  e  $Y_{\infty}$ .
- 4. Calcular as matrizes auxiliares  $A_{\infty}$ ,  $F_{\infty}$ ,  $L_{\infty}$  e  $Z_{\infty}$  definidas em (A.6), (A.7), (A.8) e (A.9).
- 5. Encontrar o controlador definido pelas matrizes de estado  $A_c$ ,  $B_c$ ,  $C_c$  e  $D_c$  definidas em (A.2), (A.3), (A.4) e (A.5).
- 6. Diminuir  $\gamma$  e voltar para 2 enquanto estiver mantida a estabilidade do controlador e da malha fechada.

## A.2 Formulação de Skelton, Iwasaki e Grigoriadis [36]

Como o objetivo de escrever o sistema em uma forma que facilite a aplicação de técnicas adequadas para a solução do problema, reescreve-se o modelo de estados da malha fechada, equivalente a (3.4), da seguinte forma:

$$\dot{x} = (A_0 + BKM)x + (B_0 + BKE)w 
z = (C_0 + HKM)x + (D_0 + HKE)w.$$
(A.12)

onde

$$A_{0} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B_{0} = \begin{bmatrix} B_{2} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C_{0} = \begin{bmatrix} C_{1} & 0 \end{bmatrix};$$

$$D_{0} = D_{11}; \quad B = \begin{bmatrix} B_{2} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}; \quad H_{0} = \begin{bmatrix} D_{12} & 0 \end{bmatrix};$$

$$M = \begin{bmatrix} C_{2} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}; \quad E = \begin{bmatrix} D_{21} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad K = \begin{bmatrix} D_{k} & C_{k} \\ B_{k} & A_{k} \end{bmatrix}.$$

Os problemas de controle ótimo devem fornecer como solução controladores que garantam estabilidade e um certo desempenho desejado. Assim, as LMIs devem ser formuladas levando em consideração esses dois aspectos.

#### A.2.1 Estabilidade

A desigualdade de Lyapunov estabelece um conceito de estabilidade de um modo mais geral que o tradicional, uma vez que pode ser estendido para incluir sistemas não lineares. Esse conceito será brevemente apresentado a seguir.

**Teorema 5** O sistema de entrada nula  $\dot{x} = Ax$  é assintoticamente estável se, e somente se,  $\exists P > 0$  tal que:

$$A^T P + PA < 0. (A.13)$$

**Teorema 6** (Lyapunov) Um sistema (possivelmente não linear) é assintoticamente estável se existe uma função V(x) > 0 para todo  $x \neq 0$  tal que  $\dot{V}(x) < 0$  ao longo de todas as trajetórias do sistema.

Considerando o caso em que  $\dot{x} = Ax$  e fazendo  $V(x) = x^T Px$  conclui-se que

$$P > 0 \Rightarrow V(x) > 0. \tag{A.14}$$

Calculando  $\dot{V}(x)$ , obtém-se

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T (A^T P + P A) x.$$

Portanto, se  $A^TP + PA < 0$  então  $\dot{V}(x) < 0$ . Assim, um sistema estável deve satisfazer a desigualdade (A.13).

Aplicando a condição (A.13) ao sistema de malha fechada (A.12) obtém-se:

$$P(A_0 + BKM)^T + (A_0 + BKM)P < 0$$
  
 $P > 0$ 

A desigualdade pode ser expandida para:

$$PA_0^T + A_0P + PM^TK^TB^T + BKMP < 0 P > 0.$$
 (A.15)

Para resolver a desigualdade acima, o seguinte teorema, conhecido como *Lema da Projeção* será útil para permitir a sua transformação em uma LMI. Esse teorema é de importância fundamental para esse e outros problemas tratados via LMI.

Lema 7 (Lema da Projeção [36]) Considere a seguinte desigualdade matricial:

$$\Gamma X \Lambda + (\Gamma X \Lambda)^T + \Theta < 0. \tag{A.16}$$

onde as matrizes  $\Gamma$ ,  $\Lambda$  e  $\Theta$  são conhecidas e X é desconhecida. A designaldade tem uma solução para X se, e somente se, as seguintes condições forem satisfeitas:

$$\Gamma^{\perp}\Theta\Gamma^{\perp T} < 0$$

$$\Lambda^{T\perp}\Theta\Lambda^{T\perp T} < 0$$
(A.17)

onde  $\Gamma^{\perp}$  é base do subespaço ortogonal de  $\Gamma$ , ou seja,  $\Gamma^{\perp}\Gamma = 0$  e  $\Gamma^{\perp}\Gamma^{\perp T} > 0$ .

Aplicando-se o Lema da Projeção na desigualdade (A.15), percebe-se que a mesma tem solução para P caso as seguintes desigualdades sejam satisfeitas:

$$B^{\perp}(A_0P + PA_0^T)B^{\perp T} < 0;$$
 (A.18)

$$(MP)^{T\perp}(A_0P + PA_0^T)(MP)^{T\perp T} < 0 (A.19)$$

Para transformar as desigualdades (A.18) e (A.19) em LMI, a seguinte escolha das matrizes P e  $P^{-1}$  é adequada [27]:

$$P = \begin{bmatrix} X & I \\ I & (X - Y)^{-1} \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} Y & Y_{12} \\ Y_{12}^T & Y_{22} \end{bmatrix}. \tag{A.20}$$

Assim, as seguintes LMI são obtidas:

$$B_2^T (AX + XA^T) B_2^{\perp T} < 0; (A.21)$$

$$C_2^{T\perp}(YA + A^TY)C_2^{T\perp T} < 0.$$
 (A.22)

onde existe a seguinte condição para X e Y:

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \ge 0. \tag{A.23}$$

Observa-se que as três últimas desigualdades constituem LMI nas incógnitas X e Y. A factibilidade dessas LMI determinará a existência de um controlador que estabiliza o sistema de malha fechada.

#### A.2.2 Desempenho nominal

O problema de desempenho do sistema pode ser definido como: achar um controlador K que minimize a norma  $\mathcal{H}_{\infty}$  do sistema de tal forma que [27]:

$$||T_{zw}(K)||_{\infty} < \gamma. \tag{A.24}$$

Para encontrar a solução para o problema descrito, pode-se adotar a condição determinada pelo Lema do Limite Real (*Bounded Real Lemma*), descrito a seguir.

**Lema 8** (*Lema do Limite Real* [36]) Considerando o modelo de malha fechada e um dado escalar real  $\gamma > 0$ , para que a condição (A.24) seja satisfeita deve existir  $P = P^T > 0$  tal que:

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}^T P + P\tilde{A} & P\tilde{B} & \tilde{C}^T \\ \tilde{B}^T P & -\gamma^2 I & \tilde{D}^T \\ \tilde{C} & \tilde{D} & -I \end{bmatrix} < 0$$
(A.25)

onde as matrizes  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$ ,  $\tilde{C}$ ,  $\tilde{D}$  são as matrizes de estado do sistema de malha fechada.

Assim, deve-se iterar sobre  $\gamma$  para atingir o menor valor possível que admita solução para a LMI (A.25). Substituindo as matrizes do modelo de malha fechada (A.12) na desigualdade (A.25), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} (A_0 + BKM)^T P + P(A_0 + BKM) & P(B_0 + BKE) & (C_0 + HKM))^T \\ (B_0 + BKE)^T P & -\gamma^2 I & (D_0 + HKE)^T \\ (C_0 + HKM)) & (D_0 + HKE) & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (A.26)$$

A desigualdade acima pode ser reescrita de modo a tornar possível a aplicação das desigualdades (A.17) do Lema da Projeção:

$$\begin{bmatrix} PB \\ 0 \\ H \end{bmatrix} K \begin{bmatrix} M & E & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M^TB \\ E^T \\ 0 \end{bmatrix} K^T \begin{bmatrix} B^TP & 0 & H^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_0^TP + PA_0 & PB_0 & C_0^T \\ B_0^TP & -\gamma^2 I & D_0^T \\ C_0 & D_0 & -I \end{bmatrix} < 0, \tag{A.27}$$

onde P > 0. Daí conclui-se que

$$\Gamma = \begin{bmatrix} PB \\ 0 \\ H \end{bmatrix}, \tag{A.28}$$

$$\Lambda = \left[ \begin{array}{ccc} M & E & 0 \end{array} \right], \tag{A.29}$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} A_0^T P + P A_0 & P B_0 & C_0^T \\ B_0^T P & -\gamma^2 I & D_0^T \\ C_0 & D_0 & -I \end{bmatrix}.$$
 (A.30)

Agora, a aplicação das desigualdades (A.17) do Lema da Projeção leva ao seguinte resultado:

**Teorema 7** [27] Considerando o sistema definido em (3.3) e dado um escalar real  $\gamma > 0$ , existe um controlador de ordem n que estabiliza o sistema e assegura  $||T_{zw}||_{\infty} < \gamma$  se, e somente se, existirem as matrizes  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tais que:

$$\begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{bmatrix}^{\perp} \begin{bmatrix} AX + XA^T + B_1B_1^T & XC_1^T + B_1D_{11}^T \\ C_1X + D_{11}B_1^T & D_{11}D_{11}^T - \gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{bmatrix}^{\perp T} < 0, \tag{A.31}$$

$$\begin{bmatrix} C_2^T \\ D_{21}^T \end{bmatrix}^{\perp} \begin{bmatrix} YA + A^TY + C_1^TC_1 & YB_1 + C_1^TD_{11} \\ B_1^TY + D_{11}^TC_1 & D_{11}^TD_{11} - \gamma^2I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2^T \\ D_{21}^T \end{bmatrix}^{\perp T} < 0,$$
 (A.32)

$$\begin{bmatrix} X & \gamma I \\ \gamma I & Y \end{bmatrix} \ge 0, \tag{A.33}$$

Em resumo, o problema de controle  $\mathcal{H}_{\infty}$  sob essa abordagem consiste em determinar X e Y tais que as desigualdades (A.31), (A.32) e (A.33) sejam satisfeitas e, ainda,  $\gamma$  seja o menor possível. Determinados X e Y, calcula-se P conforme (A.20) e então se resolve a desigualdade (A.27) para se determinar o controlador.

## A.2.3 Algoritmo do projeto $\mathcal{H}_{\infty}$ seguindo a metodologia de Skelton, Iwasaki e Grigoriadis

Um algoritmo para resolver o problema de controle  $\mathcal{H}_{\infty}$  seguindo a metodologia de Skelton, Iwasaki e Grigoriadis é:

- 1. Escrever o problema na forma de estados padrão (3.1).
- 2. Determinar X e Y de modo que as desigualdades (A.31), (A.32) e (A.33) sejam satisfeitas para o menor  $\gamma$  possível.
- 3. Calcular P conforme descrito em (A.20).
- 4. Determinar  $\Gamma$ ,  $\Lambda$  e  $\Theta$  e encontrar o filtro K através da resolução da desigualdade (A.27).
- 5. Verificar a estabilidade do controlador projetado e da malha fechada. Em caso de instabilidade, voltar para o passo 2, ajustar parâmetros do pacote computacional utilizado e proceder os cálculos novamente.

## **Apêndice B**

## Prova do Lema que transforma $H_-$ em $\mathcal{H}_{\infty}$

A seguir será apresentada uma prova do lema que permite transformar o critério de desempenho dado pelo índice  $H_-$  em um critério  $\mathcal{H}_{\infty}$ .

**Lema 9** [14] Seja P uma matriz de transferência cujos sinais de entrada e saída são, respectivamente, f e r, ou seja, r = Pf. Sejam  $W_F$  e  $W_f$  duas matrizes de transferência tais que  $\|W_F\|_- > \lambda$  e  $\|W_f\|_- \ge \beta$ , onde  $\lambda$  e  $\beta$  são dois escalares positivos tais que  $\lambda > \beta$ . Suponha que  $W_F$  admita uma matriz inversa direita. Define-se o sinal  $\tilde{r}$  tal que  $\tilde{r} = r - W_F f$ . Se  $\|W_f\|_- = (\beta \lambda) \|W_F\|_-$ , então uma condição suficiente para que  $\|P\|_- > \|W_f\|_-$  é:

$$||P - W_F||_{\infty} < \lambda - \beta. \tag{B.1}$$

**Prova 1** Primeiramente, nota-se que

$$\underline{\sigma}(W_F) - \bar{\sigma}(P - W_F) \le \underline{\sigma}(P) \quad \forall \omega \in \Omega.$$
 (B.2)

Como  $W_F$  é suposto invertível, a equação (B.2) pode ser escrita como:

$$(1 - \bar{\sigma}(P - W_F)\bar{\sigma}(W_F^+))\underline{\sigma}(W_F) \le \underline{\sigma}(P) \quad \forall \omega \in \Omega,$$
(B.3)

onde  $W_F^+$  denota a inversa direita de  $W_F$ , ou seja,  $W_FW_F^+ = I$ . Se (B.1) é satisfeita e como, por suposição,  $||W_F||_- > \lambda$ , a seguinte relação é válida:

$$\bar{\sigma}(P - W_F)\bar{\sigma}(W_F^+) < \frac{\lambda - \beta}{\lambda} \quad \forall \omega \in \Omega.$$
 (B.4)

Ainda, com (B.3)

$$\frac{\beta}{\lambda}\underline{\sigma}(W_F) < \underline{\sigma}(P) \quad \forall \omega \in \Omega. \tag{B.5}$$

Se  $||W_f||_- = (\beta \lambda) ||W_F||_-$ , então  $||P||_- > ||W_f||_-$ , o que completa a prova.

# **Apêndice C**

# Dados dos modelos e dos filtros projetados

A seguir são apresentados os modelos de estados das plantas utilizadas e dos filtros projetados nessa dissertação de mestrado. Para caracterizar a matriz A de cada modelo de estados, são apresentados os amortecimentos e as freqüências naturais de cada modo. São apresentadas ainda as matrizes B, C e D de cada um dos modelos, dentro de uma única tabela para cada sistema.

Tabela C.1: Sistema massa-mola-amortecedor usado no projeto de filtro para estimar o sinal de falha.

A	A		D =		
$\omega_n$	ξ	1	3	C	T
1,4461901e+00	3,2381163e-03	-7,4625556e-02	5,5494974e-03	4,6101505e-03	-1,5380814e+00
1,4461901e+00	3,2381163e-03	-4,1817174e-02	-6,3007675e-03	-3,2615455e-02	-6,9794683e-04
1,4461901e+00	3,2381163e-03	3,4773415e-01	7,7092820e-02	-2,8260355e-03	-5,2427453e-02
1,4461901e+00	3,2381163e-03	-4,6669558e-03	-1,6610332e-03	7,9585237e-03	-9,4281000e-02
4,6053861e+00	9,3193407e-03	2,2321603e-03	5,4412627e-02	-3,0157463e-02	1,6295480e-02
4,6053861e+00	9,3193407e-03	-7,9782744e-02	5,5634007e-03	-1,3435812e-03	-2,6567884e-02
4,6053861e+00	9,3193407e-03	-4,1862674e-03	-8,6705872e-02	-1,9284500e-02	-2,4519711e-02
4,6053861e+00	9,3193407e-03	3,5248524e-02	6,9141112e-03	-3,4216576e-03	2,6696633e-02
2,1233596e+01	4,2490741e-02	2,6814041e-02	-2,0066015e-01	-6,6213316e-02	-1,8382312e-02
2,1233596e+01	4,2490741e-02	-8,1073804e-02	-9,2100888e-02	1,4729054e-02	-5,2398772e-02
2,1233596e+01	4,2490741e-02	-7,1866367e-03	1,8553508e-01	-5,5349716e-02	2,4702576e-02
2,1233596e+01	4,2490741e-02	1,4159082e-01	-9,1418803e-02	1,8163668e-02	4,0810712e-02

Tabela C.2: Filtro para estimar sinal de falha aplicado ao sistema massa-mola-amortecedor, projetado usando filtros de ponderação. Nota-se que o filtro apresenta ordem superior à ordem da planta.

A		$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$		
$\omega_n$	ξ	1	3	$C^T$
1,4379043e+00	1,0000000e+00	-1,5922896e+04	-4,7597992e+05	1,5533760e+00
1,4461887e+00	3,7118645e-03	9,0954077e+01	5,5436924e+03	6,1988330e+01
1,4461887e+00	3,7118645e-03	2,0198671e+01	2,3839555e+02	-1,3225400e+03
3,0381827e+00	6,1956867e-01	3,4311190e-01	1,8751309e+02	-2,9360088e+02
3,0381827e+00	6,1956867e-01	-4,2174292e+04	-1,1688459e+06	-2,6513685e+00
4,0684058e+00	3,5143057e-02	2,5665773e+04	6,8994722e+05	-2,3833699e+00
4,0684058e+00	3,5143057e-02	-1,2606995e-02	-4,3473641e-03	-4,7421076e-04
4,6053859e+00	9,3199316e-03	-3,3776927e-02	3,6010838e-04	-3,5119671e-05
4,6053859e+00	9,3199316e-03	-2,9651952e+00	-6,8350388e+01	5,7380562e-01
2,1233597e+01	4,2490763e-02	-7,5583340e+01	1,8200130e+01	6,6177976e-02
2,1233597e+01	4,2490763e-02	-5,0483256e+02	-6,6476510e+02	1,4134360e-01
3,6290537e+01	1,0000000e+00	2,7044783e+00	-6,7828570e+02	-9,0702626e-02
3,7859803e+01	4,8862491e-01	-1,4047746e+02	-1,3938242e+02	5,1259097e-02
3,7859803e+01	4,8862491e-01	1,4724266e+01	1,6479152e+00	4,4118942e-05
4,0100868e+01	1,0000000e+00	-1,3667271e+00	1,2678599e+01	2,5888656e-05
4,1890250e+01	5,8661036e-01	2,2693659e-03	6,5899244e-02	3,5866001e-05
4,1890250e+01	5,8661036e-01	-3,6441783e-01	1,6918522e-04	-2,1245862e-05

Tabela C.3: Filtro para estimar sinal de falha aplicado ao sistema massa-mola-amortecedor, projetado usando o lema GKYP. Nota-se que o filtro apresenta a mesma ordem da planta.

A		D = 1.0e + 04 [1.3560 0]		,3417
$\omega_n$	ξ	I	3	$C^T$
1,4460072e+00	1,5560246e-02	-5,9110294e+01	3,0811271e+02	-2,5280854e+03
1,4460072e+00	1,5560246e-02	-4,1306281e+01	-2,8290926e+00	1,5309212e+00
4,0104798e+00	5,8844137e-02	-5,0126969e+01	3,4072933e+00	-2,6715567e-01
4,0104798e+00	5,8844137e-02	-3,0984604e+02	-5,2033406e+01	4,1042819e+02
4,6052017e+00	9,4473756e-03	1,0788153e+02	-9,2972323e+00	-1,4678969e+02
4,6052017e+00	9,4473756e-03	5,9405399e+01	-6,4790639e+00	-6,5684538e+02
1,1640661e+01	6,2147954e-01	1,5011563e+00	3,9574204e+01	1,0449206e+00
1,1640661e+01	6,2147954e-01	3,5250907e+01	-7,9249212e-01	-1,7383985e-01
1,3917643e+01	1,0000000e+00	-9,8891644e+00	-4,0669267e+00	-2,0788035e-01
2,1237012e+01	4,2483722e-02	1,7290612e+01	-4,1358597e+00	-1,3069493e-01
2,1237012e+01	4,2483722e-02	-1,0212188e+01	-7,8504668e-02	-5,8654015e+01
2,2059936e+02	1,0000000e+00	-3,4898693e+00	1,1532813e+00	4,2069215e+01

Tabela C.4: Viga de ordem 16 usada no projeto de filtro para estimar o sinal de falha.

A			$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$	
$\omega_n$	ξ	I	3	$C^T$
5,2341115e+02	1,7488863e-02	1,5111546e+00	5,4967459e+00	-1,0601297e+00
5,2341115e+02	1,7488863e-02	-1,9824267e+00	-2,7910137e+00	-1,5811558e+00
8,6796514e+02	3,8764025e-03	-9,7425370e-01	-4,4620382e-02	1,0504836e+00
8,6796514e+02	3,8764025e-03	-4,4561663e+00	-3,1807196e+00	-1,6567967e+00
1,3023493e+03	2,1584109e-03	-1,2551486e+00	1,0633142e+00	-1,4420070e+00
1,3023493e+03	2,1584109e-03	-4,6797388e+00	2,5813704e+00	1,3927136e+00
1,4972693e+03	4,5697492e-03	1,8190063e+00	-1,4289202e+00	-9,5000715e-01
1,4972693e+03	4,5697492e-03	-4,9137757e-01	6,1691967e-01	3,7116567e-01
1,8257836e+03	1,1122001e-03	-6,2844052e-01	7,7355510e-01	-1,0137875e+00
1,8257836e+03	1,1122001e-03	1,6267983e+00	-1,2360543e+00	2,4120718e-01
2,3606697e+03	4,0649459e-03	-2,7157443e-01	1,1331504e+00	-7,6456697e-01
2,3606697e+03	4,0649459e-03	3,7427810e-01	-1,2553092e+00	2,3442024e-01
2,4342913e+03	1,8625943e-03	-8,3632913e-01	-9,2991280e-02	5,4214262e-01
2,4342913e+03	1,8625943e-03	2,4436439e+00	-5,9922919e-01	-9,5980042e-01
3,1333979e+03	1,6453964e-03	-1,7606803e+00	-4,8233456e-01	3,7159275e-01
3,1333979e+03	1,6453964e-03	-2,2778394e+00	-5,3220854e-01	1,2306977e+00

Tabela C.5: Filtro para estimar sinal de falha aplicado à viga de ordem 16, projetado usando filtros de ponderação. Nota-se que a ordem do filtro é superior à ordem da planta.

	1	D =	$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$
$\omega_n$	ξ	В	$C^T$
5,7945196e+02	1,8433523e-01	-8,9681223e+03	1,9310094e-02
5,7945196e+02	1,8433523e-01	3,8154642e+03	-1,4419064e-02
8,6802932e+02	7,1626781e-02	7,2975320e+03	1,4906763e-02
8,6802932e+02	7,1626781e-02	-1,6442856e+03	3,2300836e-02
8,8505504e+02	4,1008547e-01	-1,1991647e+02	3,0088027e-02
8,8505504e+02	4,1008547e-01	6,6482080e+02	1,4862536e-02
1,0809572e+03	8,3115414e-01	2,6765257e+04	-1,4967759e-02
1,0809572e+03	8,3115414e-01	1,6092799e+03	-4,0686580e-02
1,2022997e+03	9,8281106e-01	7,6115646e+06	-1,3267659e-02
1,2022997e+03	9,8281106e-01	2,9695590e+05	-2,2202788e-02
1,4041451e+03	4,8550494e-02	-1,4918591e+06	-6,2019173e-03
1,4041451e+03	4,8550494e-02	-2,4891892e+05	2,3822555e-02
1,5413330e+03	1,4621055e-01	-2,3285956e+05	-3,2039388e-02
1,5413330e+03	1,4621055e-01	-4,7801571e+04	-3,0230271e-02
1,8133152e+03	4,8431891e-02	-1,2411018e+05	-1,2265679e-02
1,8133152e+03	4,8431891e-02	2,3738068e+05	2,7800933e-02
2,3960815e+03	2,7095661e-02	-7,8994863e+04	-3,7357950e-02
2,3960815e+03	2,7095661e-02	-2,1113377e+05	-1,9399523e-02
2,7414555e+03	7,9068366e-02	-4,1292377e+04	-3,7659653e-02
2,7414555e+03	7,9068366e-02	-2,2228030e+06	-1,9388112e-02
7,2819995e+03	7,7592422e-01	8,4708639e+06	1,6880792e-02
7,2819995e+03	7,7592422e-01	2,8495664e+06	-3,7579028e-02

Tabela C.6: Filtro para estimar sinal de falha aplicado à viga de ordem 16, projetado usando o lema GKYP. Nota-se que a ordem do filtro é a mesma ordem da planta.

	4	D = [71]	14,6146
$\omega_n$	ξ	В	$C^T$
1,9402504e+02	1,0000000e+00	2,9789511e+05	-4,0372552e+02
1,1978326e+03	1,6220009e-01	-4,1475707e+04	-9,2208382e+01
1,1978326e+03	1,6220009e-01	-2,4802551e+03	6,4555289e+01
1,4709363e+03	5,1935432e-02	1,1216691e+02	-4,6754672e+01
1,4709363e+03	5,1935432e-02	1,8493429e+02	2,4522131e+01
1,8770369e+03	1,0000000e+00	8,9828627e+02	-4,9622943e+01
1,8937751e+03	5,9779796e-02	5,0165313e+02	-4,0133728e+01
1,8937751e+03	5,9779796e-02	-1,9061019e+01	-3,1885609e+00
2,2516335e+03	3,0981735e-01	4,2242328e+00	-1,0718236e+01
2,2516335e+03	3,0981735e-01	-8,0468488e+01	-5,5945772e+00
2,3964434e+03	1,7131830e-02	-6,1552138e+01	-9,9330815e+00
2,3964434e+03	1,7131830e-02	4,8151405e+01	2,8626819e+01
2,7748676e+03	7,5055543e-02	3,9388552e+01	-7,3440861e+00
2,7748676e+03	7,5055543e-02	5,0052457e+01	-2,8580119e+01
1,1810657e+04	1,0000000e+00	1,1946482e+01	6,0350875e+00
1,2466878e+05	1,0000000e+00	2,0700913e+01	-2,5088653e+01

Tabela C.7: Bancada torcional utilizada no projeto de filtro para estimar sinal de falha. No caso nominal, a segunda entrada (sinal de incerteza) deve ser nula.

	4	$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,01 \end{bmatrix}$			$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,01 \end{bmatrix}$		
$\omega_n$	ξ	В			$C^T$		
5,7146867e+00	1,0000000e+00	-6,4129262e+00	-4,6499916e-01	0,0000000e+00	1,1502383e+00		
3,0470770e+01	9,0114633e-02	-1,6215086e+00	-1,1757505e-01	0,0000000e+00	-7,7994388e+00		
3,0470770e+01	9,0114633e-02	7,0753743e+00	5,1303305e-01	0,0000000e+00	-7,4490247e-01		

Tabela C.8: Filtro para estimar sinal de falha aplicado à bancada torcional com sinal de incerteza imposto pelo freio eletromagnético.

1	4	$D = \begin{bmatrix} 1,5 \end{bmatrix}$	[362e+03]
$\omega_n$	ξ	B	$C^T$
3,2420458e+00	1,0000000e+00	2,2742827e+02	-4,3332434e+01
4,6205669e+01	2,9580609e-01	7,4885700e+01	-2,8863065e+02
4,6205669e+01	2,9580609e-01	9,9419635e+01	1,7112737e+01

Tabela C.9: Filtro para estimar sinal de falha aplicado à bancada torcional sem incerteza de modelagem imposta pelo freio eletromagnético.

	$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	1,2	141e+03	
$\omega_n$	ξ	B		$C^T$
2,7126266e+00	1,0000000e+00	2,9282587e+	-02	-7,8986282e+01
4,7328592e+01	2,7609623e-01	-2,6983631e+	<b>⊦</b> 01	1,6432700e+02
4,7328592e+01	2,7609623e-01	-6,7034436e+	<b>⊦</b> 01	-2,6343958e+01

Tabela C.10: Viga de ordem 4 usada no projeto de filtro gerador de resíduo.

A	1		$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$	
$\omega_n$	ξ	В		$C^{T}$
3,1342172e+02	1,8914108e-02	7,8795571e+01	-5,7333477e+01	3,0939351e+02
3,1342172e+02	1,8914108e-02	-2,2720830e+02	1,5874056e+02	-5,9892518e+01
5,9865993e+02	1,1960985e-02	-7,0282861e+00	7,0912188e+00	-1,3680280e+02
5,9865993e+02	1,1960985e-02	1,1659292e+02	-3,4493005e+01	2,4398699e+01

Tabela C.11: Controlador da viga utilizado no projeto de filtro gerador de resíduo.

1	4	D =	[ 0 ]
$\omega_n$	$\omega_n$ $\xi$		$C^T$
7,4953763e+00	1,0000000e+00	-1,5219257e-13	-2,1684043e-17
4,0902244e+01	1,0000000e+00	2,1734232e-04	-2,2367627e-09
1,4897073e+02	1,0000000e+00	-6,2812495e-02	-4,0429125e-01
3,1432179e+02	2,0761749e-02	1,9926452e-02	3,4381136e-01
3,1432179e+02	2,0761749e-02	-7,1018254e-03	8,6339491e-02
6,0222812e+02	1,2620498e-01	-1,3956178e-03	7,4218403e-03
6,0222812e+02	1,2620498e-01	1,6098444e-04	-6,1788127e-02
1,4890000e+03	1,0000000e+00	5,6191021e-01	-8,4314477e-02
1,4890047e+03	1,0000000e+00	1,4097059e-01	2,9042659e-01

Tabela C.12: Viga de ordem 16 utilizada na simulação com filtro gerador de resíduo.

A	A		$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$	
$\omega_n$	ξ	I	3	$C^{T}$
1,0566519e+02	4,0381867e-02	-1,5858721e+02	3,5483341e+02	4,1583779e+02
1,0566519e+02	4,0381867e-02	-6,0244983e+01	2,5560106e+02	4,0089850e+01
3,0953327e+02	1,4787463e-02	-3,2134015e+00	-1,9204122e+02	9,8134077e+01
3,0953327e+02	1,4787463e-02	2,2747490e+01	-1,6104975e+00	-1,5760401e+02
5,9775823e+02	8,9369749e-03	1,2550995e+02	1,9776296e+02	-5,5802040e+02
5,9775823e+02	8,9369749e-03	-5,9016240e+02	1,4447923e+02	-1,2882035e+02
6,5154065e+02	1,2262041e-01	-1,9697822e+02	-3,2271264e+01	1,7109632e+02
6,5154065e+02	1,2262041e-01	-2,9101246e+02	-2,1222676e+02	-3,3097036e+02
1,0128989e+03	3,7687348e-02	6,3126770e+01	-3,6076424e+01	2,7527284e+02
1,0128989e+03	3,7687348e-02	-2,0453034e+02	1,2961166e+02	-4,0733561e+01
1,1733168e+03	2,3792249e-01	-2,1154815e+02	1,9358781e+02	-1,4373165e+02
1,1733168e+03	2,3792249e-01	-9,6457230e+01	1,4628141e+02	-3,1654372e+02
1,5298510e+03	1,8727567e-02	1,1322335e+02	-2,1071228e+01	4,7774330e+00
1,5298510e+03	1,8727567e-02	-6,2163953e+00	-1,4977286e-02	1,3112544e+02
1,5693384e+03	7,4641722e-03	6,2102949e+00	3,5960392e+01	-1,7915831e+01
1,5693384e+03	7,4641722e-03	-1,1396931e+01	-8,0217371e+00	-4,9670443e+01

Tabela C.13: Filtro para gerar sinal de resíduo aplicado à viga na presença de incerteza de modelagem não estruturada.

A		$D = 1.0e + 03 \times \begin{bmatrix} 4.8980 & 3.0836 \end{bmatrix}$		
$\omega_n$	ξ	I	3	$C^T$
3,6732772e+00	1,0000000e+00	2,5642988e+02	2,1411747e+01	-1,1224938e+04
1,7712338e+01	9,9999925e-01	8,4667309e+01	1,4341340e+02	-1,1358358e+04
1,7712338e+01	9,9999925e-01	-2,9635536e+01	-5,4421609e+01	5,8733814e-06
1,8264724e+01	1,0000000e+00	-2,4634335e+01	-1,0122148e+01	4,7120967e-06
1,3695089e+02	1,0000000e+00	1,0021330e+01	-3,1669482e+04	-1,4212260e+01
1,4784965e+02	7,9643995e-01	-1,8332103e+01	-4,5223179e+04	-7,1224841e+00
1,4784965e+02	7,9643995e-01	-7,5767471e+01	-2,7912936e+01	3,8983280e+01
3,1450035e+02	4,6089709e-03	-3,2408620e+01	-2,1941210e+02	2,0674406e+02
3,1450035e+02	4,6089709e-03	1,3481841e+00	-1,6349647e+04	1,0675414e+00
3,4317312e+02	4,9289306e-02	-3,1356021e+00	2,8437718e+04	1,7158778e+00
3,4317312e+02	4,9289306e-02	-2,0356703e+01	9,0140917e+01	1,6340329e+03
6,5082964e+02	7,7817956e-03	4,3096786e+01	3,5289134e+02	-7,5093295e+02
6,5082964e+02	7,7817956e-03	-3,8071201e+01	2,3574608e+03	2,9612423e+00
1,2978382e+03	5,3464814e-01	3,9627427e+01	3,5355305e+03	1,8327483e+03
1,2978382e+03	5,3464814e-01	-3,0612715e+04	4,8760516e+06	-1,1525614e+03
1,4890000e+03	1,0000000e+00	-3,5487589e+02	5,4718012e+04	1,2080489e+03
1,4890047e+03	1,0000000e+00	3,0817220e+04	-4,8966445e+06	-1,1333224e+03

Tabela C.14: Filtro para gerar sinal de resíduo aplicado à viga na presença de incerteza de modelagem dinâmica.

A		D =	19,4407 -309.99	950
$\omega_n$	ξ	1	3	$C^T$
4,2338816e+00	1,0000000e+00	-1,6363459e+01	2,3565162e+00	-3,4240092e+02
1,9614845e+01	1,0000000e+00	1,6506832e+01	-1,1856516e+00	-4,2487265e+02
1,3855830e+02	1,0000000e+00	1,3073233e-01	-1,6293108e+01	2,6791653e-09
1,4293275e+02	1,0000000e+00	9,7012035e-02	-1,2708875e+01	-3,7031757e-05
3,1451987e+02	4,6012869e-03	-7,5796078e+00	-7,3441497e-01	-3,5930636e+01
3,1451987e+02	4,6012869e-03	-6,9183385e-01	5,3142945e+00	6,6102834e+01
3,4930790e+02	3,7166406e-02	7,1807790e-01	-2,9296470e+00	2,0333186e+02
3,4930790e+02	3,7166406e-02	3,0455501e-01	-1,2025676e+03	3,2657986e+01
6,4845236e+02	9,6111982e-03	-7,6876533e-01	-1,4944842e+03	3,8271946e+00
6,4845236e+02	9,6111982e-03	5,9436905e+01	9,8239389e-01	3,1744668e+00
7,0279382e+02	1,0000000e+00	1,8769502e+01	-1,4940535e+00	5,9384160e+00
7,0279502e+02	1,0000000e+00	-9,6548406e-02	6,3436837e+02	-1,1822738e+00
9,0092401e+02	1,0000000e+00	8,4368539e-02	-1,5089652e+03	1,2550226e+00
9,9906408e+02	1,5587978e-01	-2,9814964e+01	4,1863773e+00	-8,6781914e+01
9,9906408e+02	1,5587978e-01	-1,2558883e+01	-7,6296340e+01	2,0682012e+01
1,4890000e+03	1,0000000e+00	-2,6996162e+00	2,8954962e+02	-1,6441455e+01
1,4890047e+03	1,0000000e+00	-2,2551466e+00	-1,5275079e+02	1,4434104e+01

Tabela C.15: Filtro para gerar sinal de resíduo aplicado à viga na presença de incerteza de modelagem dinâmica e politópica modal.

A		$D = \begin{bmatrix} 19,4407 & -309.99 \end{bmatrix}$		950
$\omega_n$	ξ	1	3	$C^T$
5,5195831e+00	1,0000000e+00	-2,4566092e+03	-2,2735262e+02	4,2105240e+04
2,0142614e+01	1,0000000e+00	-2,0472545e+03	-2,9734997e+02	-3,6128706e+04
1,3734832e+02	1,0000000e+00	-1,1767553e+01	3,0015812e+02	-2,3480261e-03
1,5030648e+02	1,0000000e+00	8,0476546e+00	-3,3838457e+02	-3,6430316e-07
3,1456140e+02	2,7291677e-03	1,9053949e+03	-9,3791343e+02	3,0257403e+03
3,1456140e+02	2,7291677e-03	2,6290113e+01	9,1959618e+04	9,4195631e+02
3,2359893e+02	5,0823261e-02	3,7771675e+01	-6,6581553e+04	-3,4138386e+03
3,2359893e+02	5,0823261e-02	5,3117320e+02	5,6447814e+02	3,0934052e-01
6,5244961e+02	9,7818220e-03	-1,0468082e+02	-2,3923725e+02	-2,1031038e+00
6,5244961e+02	9,7818220e-03	2,5950468e+02	-1,0677014e+01	2,5277597e+03
7,0031493e+02	1,0000000e-00	1,9112660e+03	-1,6373876e+02	-1,4200135e+03
7,0031493e+02	1,0000000e-00	6,8998001e+00	-5,9078945e+04	-3,0565825e+02
9,0128987e+02	1,0000000e+00	-6,0291474e+00	2,7190380e+04	8,8784989e+01
9,3791209e+02	1,1358953e-01	7,7343477e+03	-1,8839934e+02	6,6311565e+03
9,3791209e+02	1,1358953e-01	6,9239464e+02	-6,8936046e+03	-2,4730616e+03
1,4890000e+03	1,0000000e+00	-2,3203457e+01	2,1735400e+04	1,6549415e+03
1,4890047e+03	1,0000000e+00	1,7497325e+02	5,8067264e+03	1,6439581e+03

### **Apêndice D**

# Estrutura dos filtros de ponderação

Foi adotado nesse trabalho um modelo padronizado para os filtros de ponderação, de acordo com a referência [42]. Para um filtro passa baixa:

$$W(s) = \left(\frac{s\sqrt[k]{M} + \omega_c}{s + \omega_c\sqrt[k]{\epsilon}}\right)^k \tag{D.1}$$

e para um filtro passa alta:

$$W(s) = \left(\frac{s + \omega_c \sqrt[k]{M}}{s \sqrt[k]{\epsilon} + \omega_c}\right)^k. \tag{D.2}$$

Nessa definição  $\epsilon$  representa o ganho na rejeição, M representa o ganho na passagem,  $\omega_c$  é a freqüência de cruzamento com ganho unitário (ou 0 dB), e k é a ordem do filtro.

## **Apêndice E**

### **Incertezas**

### E.1 Teorema do Ganho Pequeno

O Teorema do Ganho Pequeno é um resultado fundamental para o estudo da estabilidade robusta e será apresentado a seguir.

**Teorema 8 (Teorema do Ganho pequeno [42])** Seja  $M \in \mathcal{RH}_{\infty}$ . Então o sistema mostrado na Figura E.1 é estável para todo  $\Delta(s) \in \mathcal{RH}_{\infty}$  com:

- (a)  $\|\Delta\|_{\infty} \leq \frac{1}{\gamma}$  se e somente se  $\|M\|_{\infty} < \gamma$ ;
- (b)  $\|\Delta\|_{\infty} < \frac{1}{\gamma}$  se e somente se  $\|M\|_{\infty} \le \gamma$ ,

### E.2 Incerteza politópica

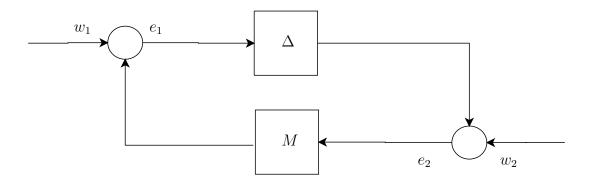


Figura E.1: Esquema para a apresentação do Teorema do Ganho Pequeno.

A representação de incerteza politópica é aquela que escreve o conjunto de todos os possíveis sistemas como uma combinação convexa de sistemas perfeitamente conhecidos, ou seja,

$$\mathcal{P} := \left\{ (A, B, C, D) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i (A_i, B_i, C_i, D_i) \mid \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1, \ \alpha_i > 0 \right\},\,$$

onde se utilizou a notação de conjunto, na qual (A, B, C, D) representa o conjunto com as matrizes de estado do sistema.

Uma vez que se tem um politopo descrito por sistemas extremos nos seus vértices, uma abordagem possível é a de adotar uma restrição para cada vértice e resolver um problema matemático que inclui todas as restrições. Assim, no projeto  $\mathcal{H}_{\infty}$ , as restrições do tipo LMI devem ser satisfeitas para todos os sistemas nos vértices do politopo, ou seja, cada restrição de projeto deve ser escrita para cada um dos sistemas que são vértices do politopo.

#### E.2.1 Incerteza politópica modal

Nesse trabalho foi utilizada a representação de incerteza politópica modal para viga utilizada na verificação da metologia de projeto de filtros geradores de resíduo. Dessa forma, a geração do politopo modal consiste em aplicar variações para mais e para menos nos picos em amplitude e nas freqüências naturais que descrevem cada modo de vibração da estrutura. No caso específico da viga, com dois modos, foi aplicada uma variação de 10% nas freqüências naturais e 15% nos picos em amplitude, gerando assim 8 sistemas que são vértices do politopo.

### Referências Bibliográficas

- [1] ÅSTRÖM, K. J., AND WITTENMARK, B. Computer-controlled systems: theory and design. Prentice Hall, 1997.
- [2] BASKIOTIS, C., RAYMOND, J., AND RAULT, A. Parameter identification and discriminant analysis for jet engine mechanica state diagnosis. In 1979 18th IEEE Conference on Decision and Control including the Symposium on Adaptive Processes (Fort Lauderdale, USA, 1979), vol. 18, pp. 648–650.
- [3] BASTOS, J. P. A. *Eletromagnetismo para engenharia: estática e quase-estática*. Editora da UFSC, 2004.
- [4] BEARD, R. V. Failure accommodation in linear system through self reorganization. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology (MIT), Massachusetts, USA, 1971.
- [5] CHEN, J., PATTON, R. J., AND ZHANG, H. Y. Design of unknown input observers and robust fault detection filters. *International Journal of Control* 63 (1996), 85–105.
- [6] CHOW, E. Y., AND WILLSKY, A. S. Issues in the development of a general algorithm for reliable failure detection. In 1980 19th IEEE Conference on Decision and Control including the Symposium on Adaptive Processes (Albuquerque, USA, 1980), vol. 19, pp. 1006–1012.
- [7] CLARK, R. N., FOSTH, D. C., AND WALTON, V. M. Detecting instrument malfunctions in control systems. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems* 11 (1975), 465–473.
- [8] EMAMI-NAEINI, A. E., AKHTER, M. M., AND ROCK, S. M. Effect of model uncertainty on failure detection: the threshold selector. *IEEE Transactions on Automatic Control* 33, 12 (1988).
- [9] FRANK, P. M. Fault diagnosis in dynamic systems using analytical and knowledge-based redundancy A survey and some new results. *Automatica* 26, 3 (1990), 459–474.
- [10] FRANK, P. M. Enhancement of robustness in observer-based fault detection. *International Journal of Control* 59 (1994), 955–981.

- [11] FRANK, P. M., AND KELLER, L. Sensitivity discriminating observer design for instrument failure detection. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronics Systems* 19 (1981), 460–467.
- [12] GAHINET, P., NEMIROVSKI, A., LAUB, A. J., AND CHILALI, M. *LMI Control Toolbox User's Guide*. The MathWorks Inc., 1995.
- [13] GAWRONSKI, W. K. *Dynamics and control of structures: a modal approach*. Mechanical engineering series. Springer, Berlin, Germany, 1998.
- [14] HENRY, D., AND ZOLGHADRI, A. Design and analysis of robust residual generators for systems under feedback control. *Automatica* 41 (2005), 251–264.
- [15] HENRY, D., AND ZOLGHADRI, A. Norm-based design of robust FDI schemes for uncertain systems under feedback control: Comparison of two approaches. *Control Engineering Practice 14*, 9 (2006).
- [16] IWASAKI, T., AND HARA, S. Generalized KYP lemma: unified frequency domain inequalities with design applications. *IEEE Transactions on Automatic Control* 50 (2005), 41–59.
- [17] IWASAKI, T., AND HARA, S. Feedback control synthesis of multiple frequency domain specifications via generalized KYP lemma. *International Journal of Robust Nonlinear Control* 17 (2007), 415–434.
- [18] JR., E. G. C., AND SONG, T. Robust  $\mathcal{H}_{\infty}$  estimation and fault detection of uncertain dynamic systems. *Journal of Guidance, Control and Dynamics* 23, 5 (2000), 857–864.
- [19] LEININGER, G. G. Model degradation effects on sensor failure detection. In *Proceedings of the 1981 Joint Amer. Control Conference* (Charlottesville, 1981), vol. 3, pp. FP–3A.
- [20] LI, H., AND FU, M. A linear matrix inequality approach to robust  $\mathcal{H}_{\infty}$  filtering. *IEEE Transactions on signal processing 45*, 9 (1997).
- [21] LÖFBERG, J. Yalmip: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In *Proceedings* of the CACSD Conference (Taipei, Taiwan, 2004).
- [22] LOU, X., WILLSKY, A. S., AND VERGHESE, G. C. Optimally robust redundancy relations for failure detection in uncertain systems. *Automatica* 22, 3 (1986), 333–344.
- [23] MANGOUBI, R. S. Robust estimation and Failure detection for linear systems. PhD thesis, MIT, 1995.

- [24] MEHRA, R. K., AND PESCHON, J. An innovations approach to fault detection and diagnosis in dynamic systems. *Automatica* 7 (1971), 637–640.
- [25] MIRONOVSKI, L. A. Functional diagnosis of linear dynamic systems. *Automn Remote Control* 40 (1979), 1198–1205.
- [26] NIEMANN, H. H., AND STOUSTRUP, J. Filter design for failure detection and isolation in the presence of modeling errors and disturbance. In *Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control* (December 1996), pp. 1155–1160.
- [27] NÓBREGA, E. G. O. *Detecção robusta de falhas usando inequações matriciais lineares*. Tese de livre docência, Faculdade de Engenharia Mecânica (FEM) Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), 2002.
- [28] NÓBREGA, E. G. O., ABDALLA, M. O., AND GRIGORIADIS, K. M. LMI-based filter design for fault detection and isolation. In *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control* (December 2000), pp. 4329–4334.
- [29] NOURA, H., SAUTER, D., HAMELIN, F., AND THEILLIOL, D. Fault-Tolerant Control in Dynamic Systems: Application to a Winding Machine. *IEEE Control Systems Magazine* (2000).
- [30] OLIVEIRA, M. C., GEROMEL, J. C., AND BERNUSSOU, J. Extended  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_{\infty}$  characterizations and controller parametrizations for discrete-time systems. *International Journal of Control* 6, 75 (2002), 666–679.
- [31] PATTON, R. J., AND CHEN, J. Advances in fault diagnosis using analytical redundancy. In *IEE Colloquium on Plant Optimisation for Profit (Integrated operations management and control)* (January 1993), pp. 6/1–6/12.
- [32] PATTON, R. J., AND CHEN, J. Robust model-based fault diagnosis for dynamic systems. Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [33] PATTON, R. J., CHEN, J., AND ZHANG, H. Y. Modelling methods for improving robustness in fault diagnosis of jet engine system. In *1992 31st IEEE Conference on Decision and Control* (Tucson, USA, 1992), vol. 31, pp. 2330–2335.
- [34] PATTON, R. J., WILLCOX, S. W., AND WINTER, S. J. A parameter insensitive technique for aircraft sensor fault analysis. In *Proc. of the AIAA Conf. ond Guidance, Navigation and Control* (Williamsburg, USA, 1986).

- [35] SCHERER, C., GAHINET, P., AND CHILALI, M. Multiobjective output-feedback control via lmi optimization. *IEEE Transactions on Automatic Control* 42, 7 (1997).
- [36] SKELTON, R. E., IWASAKI, T., AND GRIGORIADIS, K. An unified algebraic approach to linear control design. Taylor and Francis, 1998.
- [37] TOH, K. C., TODD, M. J., AND TUTUNCU, R. SDPT3 a Matlab software package for semidefinite programming. *Optimization Methods and Software 11* (1999), 545–581.
- [38] VISWANADHAM, N., SARMA, V. V. S., AND SINGH, M. G. Reliability of Computer and Control Systems. *North Holland System and Control Series* 8 (1987).
- [39] WALLIN, R. User's guide to KYPD solver, April 2003.
- [40] WATANABE, K., AND HIMMELBLAU, D. M. Instrument fault detection in systems with uncertainties. *International Journal os Systems Science* 13, 2 (1982), 137–158.
- [41] ZAMES, G. Feedback of optimal sensitivity: model reference transformations, multiplicative semi-norms and approximate inverses. *IEEE Transactions on Automatic Control* 26 (1981), 301–320.
- [42] ZHOU, K., AND DOYLE, J. C. Essentials of robust control. Prentice-Hall, 1998.