

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR *Alysson Fernandes*
Mazoni..... E APROVADA
PELA COMISSÃO JULGADORA EM *22* / *02* / *2008*

Alberto Luiz Serpa
.....
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Estudo de técnicas de controle H-infinito para estruturas flexíveis com incertezas

Autor: Alysson Fernandes Mazoni
Orientador: Alberto Luiz Serpa

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

Estudo de técnicas de controle H-infinito para estruturas flexíveis com incertezas

Autor: Alysson Fernandes Mazoni

Orientador: Alberto Luiz Serpa

Curso: Engenharia Mecânica

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Dissertação de mestrado acadêmico apresentada à Comissão de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2008

SP - Brasil

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

M458e Mazoni, Alysson Fernandes
Estudo de técnicas de controle H-infinito para estruturas flexíveis com incertezas / Alysson Fernandes Mazoni. --Campinas, SP: [s.n.], 2008.

Orientador: Alberto Luiz Serpa
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Teoria dos sistemas dinâmicos. 2. Programação convexa. 3. Sistema de controle por realimentação. I. Serpa, Alberto Luiz. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Título em Inglês: A study on H – infinity control techniques for uncertain flexible structures

Palavras-chave em Inglês: Theory of dynamical systems, Convex programming, Feedback control systems

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica

Banca examinadora: Décio Crisol Donha, Juan Francisco Camino dos Santos

Data da defesa: 22/02/2008

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

**Estudo de técnicas de controle H-infinito
para estruturas flexíveis com incertezas**

Autor: Alysson Fernandes Mazoni

Orientador: Alberto Luiz Serpa

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta dissertação:



Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa, presidente

Faculdade de Engenharia Mecânica – UNICAMP



Prof. Dr. Décio Crisól Donha

Escola Politécnica – USP



Prof. Dr. Juan Francisco Camiño dos Santos

Faculdade de Engenharia Mecânica – UNICAMP

Campinas, 22 de fevereiro de 2008.

Agradecimentos

Agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa do estado de São Paulo (FAPESP) pelo apoio financeiro (Processo: 2005/03530-4).

Resumo

MAZONI, Alysson Fernandes. *Estudo de técnicas de controle \mathcal{H}_∞ para estruturas flexíveis com incertezas*. Dissertação de Mestrado. Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas. 2007.

Esta dissertação aborda técnicas modernas de controle robusto \mathcal{H}_∞ para sistemas dinâmicos lineares. Com isso pretende-se dizer que são usados como ferramentas matemáticas os resultados da teoria de controle de sistemas lineares para o caso com incertezas de vários tipos admitidas sobre o modelo. Os modelos são primariamente estruturas flexíveis e os métodos de projeto são implementados usando exclusivamente a solução de problemas sujeitos a desigualdades matriciais lineares. São abordadas as incertezas paramétrica, dinâmica e politópica com o objetivo de apresentar métodos matemáticos de projeto de controladores para os sistemas incertos. Para o caso de incerteza dinâmica, apresenta-se a técnica de filtros de ponderação. Em contraposição a essa abordagem, os resultados recentes da literatura sobre o lema generalizado de Kalman-Yakubovič-Popov e o \mathcal{H}_∞ restrito na frequência também são usados como métodos de controle independentes de filtros de ponderação. Os métodos são comparados usando modelos de simulação e experimentos no âmbito de estruturas flexíveis.

Palavras-chave

Teoria dos sistemas dinâmicos, Programação Convexa, Sistema de controle por realimentação

Abstract

MAZONI, Alysson Fernandes. *A study on \mathcal{H}_∞ control techniques for uncertain flexible structures*. Master thesis. Faculty of Mechanical Engineering, State University of Campinas. 2007.

This dissertation deals with modern techniques from the Robust \mathcal{H}_∞ Control of Linear Dynamic Systems. By this it is meant that the results from linear control systems theory are used as mathematical tools when considering several kinds of uncertainty on the models. These models are mostly of flexible structures and the design methods are implemented using solely the solution of problems subjected to linear matrix inequalities. The types of uncertainty approached are: parametric, dynamic and polytopic; this is done aiming to present mathematical design methods for the uncertain systems considered. When dealing with dynamic uncertainty, the weighting functions are introduced. In contrast with this approach, recent results from literature on the generalised Kalman-Yakubovič-Popov lemma and frequency restricted \mathcal{H}_∞ are also used as control design methods whose application is independent of weighting functions. All methods are compared using simple simulation models and experiments with flexible structures.

Keywords

Theory of dynamical systems, Convex programming, Feedback control systems

Sumário

1	Introdução e revisão bibliográfica	1
1.1	Introdução	1
1.2	Revisão bibliográfica	2
1.3	Estrutura do trabalho	4
2	Controle \mathcal{H}_∞	5
2.1	Resumo	5
2.2	Definição	5
2.3	Controlador \mathcal{H}_∞	7
2.4	Lema do Limite Real	7
2.5	Desigualdades matriciais e controle	8
2.6	Controlador \mathcal{H}_∞ usando desigualdes matriciais lineares	9
2.7	Relação entre o controle \mathcal{H}_∞ e o controle robusto	13
2.8	Comentários	14
3	Modelagem de incertezas	15
3.1	Resumo	15
3.2	Representações de incertezas	16
3.3	Incetezas paramétricas	17
3.4	Incetezas não estruturadas ou dinâmicas	22
3.5	Incetezas estruturadas	24
3.6	Representação politópica	25
3.7	Comentários	28
4	Controle robusto	29
4.1	Resumo	29
4.2	Definição	30
4.3	Robustez \mathcal{H}_∞	30
4.4	Problema misto \mathcal{H}_∞	32

4.5	Filtros de ponderação	33
4.6	Filtros de ponderação usados no projeto	35
4.7	Projeto de controle robusto com filtros de ponderação	36
4.8	Projeto de controle robusto com incerteza politópica	36
4.9	Comentários	38
5	Controle restrito em frequência	39
5.1	Resumo	39
5.2	Utilidade do método de restrições em frequência	39
5.3	Lema de Kalman-Yakubovič-Popov (KYP)	42
5.4	Lema generalizado de Kalman-Yakubovič-Popov (GKYP)	46
5.5	Realimentação de saída com restrições em frequência	49
5.5.1	Aplicação a um sistema em malha fechada	50
5.5.2	Transformação em uma restrição convexa	51
5.6	Controle multiobjetivo	58
5.7	Condição de estabilidade ou localização de pólos	59
5.8	Projeto de controle	62
5.9	Comentários	64
6	Resultados	65
6.1	Resumo	65
6.2	Métodos de projeto	65
6.3	Sistema massa-mola-amortecedor de 3 graus de liberdade	67
6.3.1	Projeto de controle \mathcal{H}_∞	69
6.3.2	Consideração de robustez	71
6.3.3	Projeto de controle robusto com filtro	72
6.3.4	Projeto usando incerteza politópica	77
6.4	Modelo experimental de uma viga metálica	81
6.4.1	Projeto de controle \mathcal{H}_∞	81
6.4.2	Consideração de robustez	85
6.4.3	Projeto de controle robusto com filtros	86
6.4.4	Projeto usando o lema GKYP	90
6.5	Comentários	93
7	Experimento com sistema torcional	94
7.1	Resumo	94

7.2	Planta	94
7.2.1	Descrição	94
7.2.2	Aquisição de dados e controle	96
7.2.3	Modelo matemático	97
7.2.4	Identificação do sistema	100
7.3	Projeto de controle \mathcal{H}_∞ usando o lema GKYP	103
7.4	Simulação	104
7.5	Experimento de controle	107
8	Conclusão	109
A	Modelo experimental da viga engastada	111
A.1	Modelo de ordem 12	112
A.2	Modelo de ordem 16	112
B	Modelos de controladores	113
B.1	Matrizes dos controladores para o modelo de três graus de liberdade	113
B.1.1	Projeto \mathcal{H}_∞ simples	113
B.1.2	Projeto com filtros de ponderação	114
B.1.3	Projeto usando incerteza politópica	114
B.2	Matrizes dos controladores para o modelo da viga	114
B.2.1	Projeto \mathcal{H}_∞ simples	114
B.2.2	Projeto com filtros de ponderação	116
B.2.3	Projeto baseado no lema GKYP	117
B.3	Controladores para bancada torcional (lema GKYP)	117
B.3.1	Controlador 1	117
B.3.2	Controlador 2	117
C	Principais funções implementadas	118
C.1	Projeto com incerteza politópica	118
C.2	Projeto com desigualdades em frequência	120

Lista de Figuras

2.1	Diagrama genérico de malha fechada.	7
2.2	Planta com realimentação de um sistema desconhecido.	14
3.1	Filtros que permitem ajustar a limitação da incerteza.	16
3.2	Diagrama de blocos com sistema e incerteza associada.	17
3.3	Diagrama de blocos de um sistema de segunda ordem com incertezas.	18
3.4	Diagrama de blocos de um sistema de segunda ordem com as incertezas na forma de realimentação.	19
3.5	Diagrama de blocos de um sistema de segunda ordem com as incertezas na forma padrão.	19
3.6	Diagrama de bloco do exemplo com a incerteza.	21
3.7	Diagrama com a incerteza convertido para forma de transformação linear fracional.	21
3.8	Diagrama de blocos do exemplo na forma padrão, renomeando os sinais da figura 3.7.	21
3.9	Comparação das respostas ao impulso entre planta e aproximação.	23
3.10	Comparação dos valores singulares entre planta e aproximação.	24
3.11	Politopo de incerteza.	26
4.1	Configuração entre sistema incerto e controlador.	30
4.2	Diagrama das transformações lineares fracionais para incerteza e controlador.	30
4.3	Problema de robustez \mathcal{H}_∞ .	31
4.4	Exemplo para aplicação da sensibilidade mista \mathcal{H}_∞ .	34
4.5	Exemplo de colocação de filtros de ponderação e filtros associados à incerteza.	34
4.6	Conexões dos filtros usados para o projeto de controle.	35
5.1	Filtro de ponderação para incerteza.	40
5.2	Desigualdade em frequência para incerteza.	41
6.1	Sistema de três graus de liberdade de massas, molas e amortecedores.	67
6.2	Comparação entre com e sem controle para o sistema de três graus de liberdade.	69

6.3	Comparação da resposta temporal para o sistema de três graus de liberdade controlado e não controlado.	70
6.4	Sinal de controle no tempo para o sistema de três graus de liberdade do exemplo.	70
6.5	Diagrama de valor singular do controlador \mathcal{H}_∞ para o sistema de três graus de liberdade.	71
6.6	Diagrama do sistema com três graus de liberdade com as incertezas.	72
6.7	Configuração de controle para o sistema de três graus de liberdade.	73
6.8	Valores singulares da planta e do filtro para o sistema de três graus de liberdade.	74
6.9	Respostas em frequência com e sem controle para o modelo de três graus de liberdade usando filtros.	74
6.10	Resposta temporal para o sistema de três graus de liberdade com controle projetado com filtros.	75
6.11	Sinal de controle para o sistema de três graus de liberdade do controlador projetado com filtros.	76
6.12	Diagrama de valor singular do controlador para o modelo de três graus de liberdade projetado com filtros.	76
6.13	Respostas em frequência com e sem controle para o modelo de três graus de liberdade usando incerteza politópica.	78
6.14	Respostas em frequência com e sem controle para o modelo de três graus de liberdade usando incerteza politópica.	78
6.15	Resposta temporal para o sistema de três graus de liberdade com controle projetado com incerteza politópica.	79
6.16	Sinal de controle para o sistema de três graus de liberdade do controlador projetado com incerteza politópica.	79
6.17	Diagrama de valor singular do controlador para o modelo de três graus de liberdade projetado com incerteza politópica.	80
6.18	Esquema da viga engastada.	81
6.19	Valores singulares antes e depois do controle para a viga.	82
6.20	Resposta a uma varredura senoidal para a viga.	82
6.21	Valor singular do controlador da viga.	83
6.22	Sinal de controle para a viga.	84
6.23	Valores singulares dos modelos da viga com ordens 12 e 16.	84
6.24	Incerteza dinâmica da viga.	86
6.25	Valores singulares da viga e dos filtros de ponderação.	87
6.26	Valores singulares com e sem controle da viga no projeto com filtros.	88
6.27	Resposta da viga no projeto de controle com filtros.	88

6.28	Sinal de controle da viga no projeto com filtros.	89
6.29	Valor singular do controlador da viga no projeto com filtros.	89
6.30	Valor singular com e sem controle da viga no projeto pelo lema GKYP.	91
6.31	Resposta da viga no projeto de controle do lema GKYP.	91
6.32	Sinal de controle da viga no projeto com filtros.	92
6.33	Valor singular do controlador da viga usando o projeto pelo lema GKYP.	92
7.1	Diagrama de montagem das componentes da bancada torcional.	95
7.2	Bancada torcional.	95
7.3	Esquema para modelagem da bancada torcional.	98
7.4	Diagrama de valor singular do modelo com e sem freios.	102
7.5	Valor singular do primeiro controle.	105
7.6	Valor singular do segundo controle.	105
7.7	Resposta temporal do primeiro controle.	106
7.8	Resposta temporal do segundo controle.	106
7.9	Resultados dos testes de controle.	108
A.1	Dimensões da viga.	111

Notação

Ao longo do texto letras maiúsculas em negrito denotam matrizes e letras minúsculas em negrito representam vetores. Letras em fonte normal são escalares.

Os gráficos que representam respostas em frequência são sempre apresentados como diagramas de valor singular, mesmo no caso de sistemas de uma entrada e uma saída.

\otimes Produto de Kronecker.

$\text{diag}(\cdot)$ Matriz bloco diagonal construída a partir dos seus blocos como argumentos. Por exemplo,

$$\text{diag}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix}.$$

\mathbf{I} Matriz identidade.

\mathbf{A}^T Matriz \mathbf{A} transposta.

\mathbf{A}^* Matriz \mathbf{A} conjugada e transposta. Define-se também que uma matriz \mathbf{A} é hermitiana quando $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$.

\mathbf{A}^\perp Matriz do espaço nulo de \mathbf{A} . Suas colunas são base para o espaço nulo de \mathbf{A}^T . Sabe-se que $\mathbf{A}\mathbf{A}^\perp = \mathbf{0}$.

j Unidade imaginária ($j = \sqrt{-1}$).

s Variável do domínio da transformada de Laplace.

$\bar{\sigma}(\mathbf{A})$ O maior valor singular da matriz \mathbf{A} . Por definição, os valores singulares de uma matriz são os autovalores de $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ ao quadrado.

$\sigma(\cdot)$ Função auxiliar usada no capítulo 5 definida como

$$\sigma(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Sigma}) = \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}^* \mathbf{\Sigma} \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

$\rho(\cdot)$ Função auxiliar usada no capítulo 5 definida como

$$\rho(\Gamma, \Sigma) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \Gamma \end{bmatrix} \Sigma \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \Gamma \end{bmatrix}^*.$$

$\|\mathbf{x}(t)\|_2$ Norma \mathcal{L}_2 . Para uma função $\mathbf{x}(t)$,

$$\|\mathbf{x}(t)\|_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \|\mathbf{x}(t)\|^2 dt.$$

$>$, $<$, \geq , \leq Esses símbolos possuem dois usos. Significam simultaneamente as relações de precedência usuais como também são associados às desigualdades em matrizes como segue. Se se diz que $\mathbf{A} > 0$, quer dizer que a matriz \mathbf{A} é positivo-definida, ou seja, $\mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ (com $>$ no sentido de maior) para qualquer $\mathbf{x} \in \mathbb{C}$. Ainda, para \mathbf{A} e \mathbf{B} simétricas, $\mathbf{A} > \mathbf{B}$ significa que $\mathbf{A} - \mathbf{B} > 0$. Definições análogas são usadas para $<$, \geq e \leq .

Capítulo 1

Introdução e revisão bibliográfica

1.1 Introdução

Uma das principais dificuldades enfrentadas em aplicações da teoria de controle está justamente nas imperfeições dos sistemas físicos ao serem modelados como sistemas lineares. Devido às necessidades de precisão nos sistemas dinâmicos controlados atualmente é desejável que a performance e principalmente a estabilidade sejam tolerantes a essas imperfeições. A teoria de controle robusto tem o objetivo de mensurar essas variações e garantir critérios de resposta mesmo na presença delas.

Os erros na análise de modelos lineares de sistemas reais podem ser de pelo menos quatro tipos: erros na ordem do modelo; erros devido a perturbações; erros devido a não-linearidades e erros nos parâmetros.

Rigorosamente falando, todos os tipos de erros sempre existem em maior ou menor grau. Os erros na ordem no modelo dizem respeito ao sistema real possuir uma ordem maior do que a sua representação matemática. Neste caso, negligencia-se uma parcela de dinâmica mas que é considerada pequena o suficiente nas frequências de interesse para não ser representada. No estudo de estruturas flexíveis, a modelagem analítica a partir de equações diferenciais parciais prevê respostas que são combinações de infinitos termos senoidais. Ou seja, modelar uma estrutura flexível de forma linear leva a uma boa representação se a redução para um número finito de modos expressar bem a dinâmica na faixa de frequência desejada.

A ordem truncada do modelo é um erro sempre presente em modelos de estruturas flexíveis, porém este erro pode ser introduzido deliberadamente com alguma vantagem sobre o modelo completo. Isso significa que um modelo bastante preciso da planta pode ser matematicamente reduzido e ter sua ordem diminuída para facilitar o projeto de um controlador. No contexto de projeto usando problemas convexos e desigualdades matriciais lineares, a ordem do controlador está ligada à ordem da planta. Muitos algoritmos produzem controladores iguais em ordem à planta. A redução de ordem da planta é vantajosa tanto porque a convergência dos algoritmos utilizados para projetar controladores pode se tornar difícil ou mesmo impraticável quanto devido ao controlador exigir

memória e processamento de um sistema microprocessado para ser implementado na prática.

Outro tipo de erro que altera o comportamento de sistemas lineares é o que diz respeito a sinais, forças, momentos e atuações dos mais diversos tipos que não podem ser controlados ou monitorados. Além disso, podem estar relacionados a erros de medida e atuação na instrumentação utilizada no sistema de controle. Alguns projetos de controle orientam-se exclusivamente para tornar o sistema controlado insensível a distúrbios.

Erros associados a não-linearidades surgem porque o sistema real possui uma dinâmica não-linear e a aproximação linear não torna o erro negligenciável. Algumas sub-áreas do controle tentam lidar com esse problema de maneira indireta como o controle adaptativo e a própria manipulação de incertezas. Evidentemente, quando as adaptações do controle linear falham na tentativa de lidar com o erro de modelagem devido à não-linearidade, técnicas de controle não-linear devem ser tentadas.

Ainda, um modelo linear obtido a partir de leis físicas ou mesmo pelo método dos elementos finitos, possui parâmetros que não são conhecidos com precisão suficiente. No caso de estruturas flexíveis, parâmetros como módulo de elasticidade, densidade, amortecimento, entre outros, podem conter um erro que não seja desprezível na análise.

Uma dinâmica não-linear corresponde a um erro na resposta em frequência com relação a um modelo linear aproximado, a qual pode ser considerada uma ordem mais elevada do modelo linear que não foi incluída. Erros devido a perturbações externas ao sistema podem ser modelados como imprecisões de parâmetros e assim por diante. Isso é verdade desde que as propriedades matemáticas das formas de representação escolhidas permaneçam válidas.

Conforme citado em [40] e [35] em seus capítulos introdutórios, a consideração de robustez de um sistema de controle qualquer está historicamente ligada ao conceito de realimentação. A afirmação que resume esse ponto de vista é a de que se o conhecimento do sistema fosse perfeito (os distúrbios fossem exatamente conhecidos e o modelo livre de erros), não haveria necessidade de realimentação, pois seria possível projetar um controlador que produziria um sinal de controle que otimiza a resposta simplesmente a partir do modelo do sistema. Isso potencializa a visão do controle robusto como uma seqüência natural do controle clássico.

1.2 Revisão bibliográfica

Este trabalho aborda a utilização da teoria do controle do ponto de vista moderno (modelos de estados) para o controle de estruturas flexíveis. Neste caso, serão considerados como solução dos problemas propostos aqui apenas controladores robustos, ou seja, que incluam de alguma maneira a hipótese de imperfeições do modelo matemático do sistema. Além disso, o caso de estudo das estruturas flexíveis, pela forma como o controle é realizado na prática, exige controladores por

realimentação de saída, pois se considera que os estados do modelo não são disponíveis para realimentação.

Uma técnica amplamente usada de projeto robusto é a chamada de análise μ . Por essa técnica, os projetos são avaliados por um critério chamado valor singular estruturado (μ). Essa abordagem está detalhadamente fundamentada em [35, 40, 48], que também lidam com o projeto de controle robusto de maneira extensiva sob outros pontos de vista. As principais desvantagens levantadas contra essa abordagem são a complexidade do controlador robusto projetado para lidar com a incerteza e o custo computacional das soluções.

Mais recentemente, uma série de trabalhos tem se voltado a utilizar a teoria das desigualdades matriciais lineares (da programação semidefinida, como em [10, 14, 42]), em larga escala já utilizada para o projeto de várias formas de controle (vide [5, 36, 37]), e adaptada para lidar com a incerteza de modelagem.

A utilização de desigualdades matriciais lineares na literatura para lidar com sistemas incertos é em geral baseada no conceito de estabilidade quadrática sobre toda a região de incerteza (ver [37]). Supõe-se, em todos os casos de projeto robusto por essa abordagem, que as incertezas que corrompem as matrizes do modelo podem ser representadas na forma politópica, que é uma forma diferente da usual de incerteza como uma transformação linear fracional sobre a planta (como esclarecido em [5, 32]). Isso introduz um conservadorismo para o qual se buscam alternativas como as funções de Lyapunov dependentes de variáveis extras. Essa abordagem, iniciada em [17] no tempo contínuo e [11] para o caso discreto, é melhorada somente para o caso contínuo de sistemas estritamente próprios em [38], e próprios em [34, 45]. Ainda, estendendo tal raciocínio para o projeto de controladores robustos com realimentação de estados, tem-se os trabalhos [26] e [33].

Desse ponto de vista, as características das estruturas e a necessidade quase ubíqua de filtros de ponderação (também chamados funções de ponderação) no projeto de controladores associados às técnicas da programação semidefinida levaram ao desenvolvimento de métodos de projeto cujos critérios podem ser ajustados em frequência sem o uso de filtros de ponderação, o que exige tempo longo de ajuste dos parâmetros e, principalmente, produzem um modelo de controlador de ordem aumentada. O aumento da ordem é agravado quando se lidam com sistemas em que se deseja separar modos próximos, que exigem filtros de ordem maior. Essa abordagem que dispensa funções de ponderação é baseada no chamado lema generalizado de Kalman-Yakubovič-Popov. Apresentação e tratamento para ela são encontradas em trabalhos recentes como [20–23].

Por outro lado, a modelagem de estruturas flexíveis é um assunto maduro para o caso linear. Exposições detalhadas do método dos elementos finitos são encontradas em [2, 8]. O controle desse tipo de sistema é uma área também já explorada, haja vista [15] e um exemplo de estudos mais recentes em [9]. O grupo de pesquisa do Departamento de Mecânica Computacional da Faculdade

de Engenharia Mecânica da Unicamp já explorou esse tema em [28] e [24, 25]. A partir deste ponto, busca-se uma versão robusta dos projetos de controle. Os problemas práticos surgidos de experimentos já apontam para o tratamento da incerteza dinâmica usando a técnica dos filtros de ponderação, como em [24, 29]. Particularmente em [29], considera-se também a incerteza limitada em norma. Uma generalização e tratamento mais detalhado desses problemas, incluindo outras formas de incerteza, serão considerados neste trabalho baseando-se no estado atual da literatura sobre o projeto robusto usando a programação semidefinida.

1.3 Estrutura do trabalho

O Capítulo 2 apresenta os fundamentos do projeto de controladores \mathcal{H}_∞ . Em consonância com o restante do trabalho é apresentada a abordagem usando desigualdades matriciais lineares. A seguir, considera-se que os modelos das plantas que são objetos de controle podem possuir incertezas que devem ser levadas em conta. O Capítulo 3 lida com as formas de representar matematicamente tais incertezas e o Capítulo 4 apresenta o projeto robusto dos controladores usando a técnica dos filtros para incerteza dinâmica e filtros de ponderação.

O controle \mathcal{H}_∞ é generalizado no Capítulo 5 levando em conta resultados recentes da literatura sobre a norma \mathcal{H}_∞ limitada em frequência para o projeto de controladores sem a utilização de funções de ponderação. O Capítulo 6 mostra dois exemplos de projeto abordados pelas técnicas apresentadas na ordem em que elas surgem no trabalho. Inicia-se com projetos \mathcal{H}_∞ simples e em seguida, projetos com incertezas e usando os resultados do Capítulo 5. O Capítulo 7 descreve um experimento de controle usando uma bancada didática, no qual as técnicas expostas no Capítulo 5 foram postas em prática.

Capítulo 2

Controle \mathcal{H}_∞

2.1 Resumo

O problema de controle \mathcal{H}_∞ consiste em projetar um controlador para minimizar o pico do valor singular da matriz de transferência de um sistema. Visto desse ponto de vista, trata-se de um problema de otimização em que a variável a ser determinada para o ponto ótimo é o controlador (neste caso, através de alguma parametrização ou transformação de variáveis). As abordagens baseadas em desigualdades matriciais lineares fazem uso dessa interpretação, convertendo o projeto \mathcal{H}_∞ em um problema de otimização convexa sujeito a restrições também convexas, assumindo variáveis matriciais e desigualdades generalizadas definidas pelo cone das matrizes positivo-definidas (conforme [5, 6]).

2.2 Definição

Seja um sistema dinâmico linear descrito na forma usual do problema \mathcal{H}_∞ ,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\mathbf{u} \\ \mathbf{z} &= \mathbf{C}_1\mathbf{x} + \mathbf{D}_{11}\mathbf{w} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w} + \mathbf{D}_{22}\mathbf{u}.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Essa forma separa as entradas exógenas (\mathbf{w}) e o sinal de controle (\mathbf{u}). Ainda, \mathbf{x} é o vetor de estado, \mathbf{y} é o conjunto de saídas medidas da planta e \mathbf{z} , o vetor de desempenho.

Supõe-se $\mathbf{D}_{22} = \mathbf{0}$ sem perda de generalidade, uma vez que o controlador obtido pode ser ajustado para o caso com essas matrizes não nulas (ver [35]).

O sistema (2.1) admite uma função de transferência no domínio de Laplace entre a entrada de distúrbio e a saída de desempenho (a função cuja norma se deseja minimizar),

$$\mathbf{H}_{\mathbf{z}\mathbf{w}}(s) = \mathbf{C}_1(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}_1 + \mathbf{D}_{11}.$$

A norma \mathcal{H}_∞ é escrita como

$$\|\mathbf{H}_{\mathbf{z}\mathbf{w}}(s)\|_\infty := \sup_{\omega} \bar{\sigma}(\mathbf{H}_{\mathbf{z}\mathbf{w}}(j\omega)), \quad (2.2)$$

sendo $\bar{\sigma}(\cdot)$ o maior valor singular de uma matriz. Em termos de desempenho, a norma \mathcal{H}_∞ representa o pico do valor singular da matriz de transferência no domínio de Fourier, ou da frequência. No domínio da análise de vibrações, a norma \mathcal{H}_∞ mede a maior intensidade de amplificação na frequência, caracterizando o pico de ressonância de maior amplitude.

Ainda, essa norma pode ser escrita em termos da energia dos sinais de entrada e saída (ver [39]) como

$$\|\mathbf{H}_{\mathbf{z}\mathbf{w}}(s)\|_\infty = \max_{\mathbf{w}(t) \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{z}(t)\|_2}{\|\mathbf{w}(t)\|_2} = \max_{\|\mathbf{w}(t)\|_2=1} \|\mathbf{z}(t)\|_2, \quad (2.3)$$

de onde se interpreta que a norma \mathcal{H}_∞ corresponde à energia do sinal de saída com relação a uma entrada de energia limitada. Ou seja, o problema de encontrar o máximo da razão entre as energias de dois sinais tem o mesmo valor ótimo de encontrar o valor máximo do primeiro deles com a restrição de a energia do segundo estar limitada a um valor unitário (ver [40]).

No caso do problema de projeto de controlador, deseja-se minimizar a norma \mathcal{H}_∞ encontrando o controlador, que faz parte da expressão da função de transferência de malha fechada.

O controlador a ser obtido é também um modelo dinâmico linear descrito na forma padrão tendo \mathbf{y} como entrada e \mathbf{u} como saída,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_c &= \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{B}_c \mathbf{y}, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{D}_c \mathbf{y}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

A obtenção de um controlador na forma (2.4) é o objetivo final dos problemas aqui tratados. O controlador é suposto como um modelo dinâmico independente que exige da planta apenas medidas externas, na forma do vetor de saídas \mathbf{y} e produz o vetor de sinal de controle \mathbf{u} . Chama-se a isso realimentação dinâmica de saída. Configurações alternativas seriam a realimentação estática de saída e a realimentação de estados (na qual o controlador depende da leitura de um subconjunto dos estados da planta). Devido a questões práticas da dificuldade de medir os estados de uma planta de estrutura flexível (conforme [15]), a realimentação dinâmica de saída será a forma de controlador considerada útil ou viável para os propósitos deste trabalho.

As matrizes de transferência que representam a planta e o controlador serão chamadas genericamente de $\mathbf{P}(s)$ e $\mathbf{K}(s)$. Assim, o diagrama da Figura 2.1 representa a malha fechada, ou seja, a interconexão entre planta generalizada e controlador.

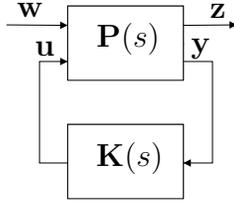


Figura 2.1: Diagrama genérico de malha fechada.

2.3 Controlador \mathcal{H}_∞

A maneira original de se encontrar o controlador, obtida como solução da equação algébrica de Riccati, é mostrada em [15, 35]. Essa forma de solução não é o objeto de investigação neste trabalho.

2.4 Lema do Limite Real

Uma ferramenta teórica importante para converter o problema do projeto de controladores em um problema de otimização convexa com restrições matriciais lineares é o chamado Lema do Limite Real (*Bounded Real Lemma*, ver [39, 48]). O teorema pode ser escrito baseado na representação do sistema linear

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{w} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{w},\end{aligned}\tag{2.5}$$

que permite escrevê-lo como segue:

Lema 1. *Seja um sistema descrito como em (2.5). Este possui uma norma \mathcal{H}_∞ limitada por $\gamma > 0$ se e somente se existir uma matriz simétrica positivo-definida \mathbf{Q} tal que*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{QA} + \mathbf{A}^T\mathbf{Q} & \mathbf{QB} & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{B}^T\mathbf{Q} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0.\tag{2.6}$$

A seguir, uma argumentação deste lema mostrará a necessidade, mas não a suficiência do resultado.

Pelo lema complementar de Schur (ver [37]) e multiplicando por γ , a Desigualdade (2.6) pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{QA} + \mathbf{A}^T\mathbf{Q} & \mathbf{QB} \\ \mathbf{B}^T\mathbf{Q} & -\gamma^2\mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T \\ \mathbf{D}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} < 0.\tag{2.7}$$

Pode-se multiplicar (2.7) à esquerda por um vetor composto dos estados e das entradas exógenas e

à direita pelo seu transposto,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{QA} + \mathbf{A}^T \mathbf{Q} & \mathbf{QB} \\ \mathbf{B}^T \mathbf{Q} & -\gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T \\ \mathbf{D}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}^T < 0,$$

e desenvolvendo tem-se

$$\mathbf{x}^T \mathbf{Q} (\mathbf{Ax} + \mathbf{Bw}) + (\mathbf{Ax} + \mathbf{Bw})^T \mathbf{Qx} - \gamma^2 \mathbf{w}^T \mathbf{w} + (\mathbf{Cx} + \mathbf{Dw})^T (\mathbf{Cx} + \mathbf{Dw}) < 0$$

$$\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{Qx} - \gamma^2 \mathbf{w}^T \mathbf{w} + \mathbf{z}^T \mathbf{z} < 0$$

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{x}^T \mathbf{Qx}) - \gamma^2 \mathbf{w}^T \mathbf{w} + \mathbf{z}^T \mathbf{z} < 0.$$

Integrando tem-se

$$\mathbf{x}^T \mathbf{Qx} \Big|_0^\infty - \gamma^2 \int_0^\infty \mathbf{w}^T \mathbf{w} dt + \int_0^\infty \mathbf{z}^T \mathbf{z} dt < 0,$$

que devido à hipótese de estabilidade (os estados tendem a zero para tempo longo) e ao estado inicial nulo leva a

$$\frac{\int_0^\infty \mathbf{z}^T \mathbf{z} dt}{\int_0^\infty \mathbf{w}^T \mathbf{w} dt} < \gamma^2.$$

Isso leva à Equação (2.3), que estabelece que a norma \mathcal{H}_∞ corresponde ao ganho de energia, e que esta é limitada como

$$\|\mathbf{H}_{\mathbf{zw}}\|_\infty < \gamma.$$

2.5 Desigualdades matriciais e controle

A Desigualdade (2.6) obtida do Lema do Limite Real para sistemas lineares envolve as matrizes da representação em espaço de estados e tem como variável uma matriz. De forma geral, os problemas de controle podem ser escritos como problemas matemáticos dessa maneira, com variáveis matriciais. Os passos são os que seguem:

- Tem-se uma planta linear representada por suas matrizes de estado e se deseja projetar um controlador (estático ou dinâmico, realimentando estados ou saída).
- A representação do controlador é concatenada com a da planta produzindo as matrizes de malha fechada.
- Em seguida, as matrizes de malha fechada são submetidas a um teste matricial de estabilidade, pela teoria de Lyapunov ou pelo Teorema do Ganho Pequeno; isso constitui uma condição matemática que as matrizes do controlador devem respeitar.

- A inequação matricial resultante é a expressão a ser satisfeita para estabilidade da malha fechada. As variáveis dessa inequação são as matrizes do controlador e a matriz original da desigualdade de Lyapunov. Se for possível encontrar tais matrizes, o problema é factível.
- Sujeitas à inequação anterior, as matrizes do controlador e da planta são usadas para estabelecer algum objetivo de controle.
- Assim, o problema consiste em encontrar as matrizes do controlador que satisfazem à desigualdade matricial e minimizam o objetivo de controle escolhido.

Na literatura da desigualdades matriciais lineares aplicadas a problemas de controle (por exemplo [5]), tenta-se aplicar uma transformação de variáveis à desigualdade matricial que envolve as matrizes com as quais se projeta o controlador em uma desigualdade que seja linear em suas variáveis matrizes. Quando nesse formato, o problema é dito de desigualdade matricial linear. Dessa maneira tem-se a otimização de uma função linear sujeita a uma desigualdade linear de variáveis matriciais.

O método computacional utilizado para o projeto de controladores neste trabalho é o de utilizar algoritmos da programação semidefinida, a qual lida com a solução de problemas da forma

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{sujeito a} & \mathbf{F}(\mathbf{x}) > 0, \end{array}$$

em que $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ representa o objetivo linear e $\mathbf{F}(\mathbf{x}) > 0$, a inequação matricial. Diversos problemas da teoria de controle podem ser reduzidos para essa forma de acordo com [5, 39] seguindo os passos dados acima.

Sabe-se que problemas que dependem das variáveis matriciais de forma linear podem ser resolvidos por algoritmos numéricos amplamente implementados em pacotes computacionais (ver [41]), bastando para isso, escrever os problemas na forma das LMIs (*Linear Matrix Inequalities* — Desigualdades Matriciais Lineares). Ou seja, dado um problema de controle representado por uma desigualdade matricial como o \mathcal{H}_∞ , a substituição das matrizes de malha fechada na desigualdade produz uma desigualdade não linear que depende das matrizes do controlador e da matriz de Lyapunov. Se for possível encontrar uma mudança de variáveis que torne essa desigualdade linear, tem-se uma LMI.

2.6 Controlador \mathcal{H}_∞ usando desiguales matriciais lineares

Nesta seção, apresenta-se uma maneira de se converter o projeto \mathcal{H}_∞ em um problema convexo: um problema de otimização sujeito a desigualdades matriciais lineares.

Escolheu-se utilizar neste trabalho a transformação de variáveis fornecida em [7], que unifica vários problemas de controle, inclusive o \mathcal{H}_∞ .

A substituição das matrizes de malha fechada dos sistemas com controlador \mathcal{H}_∞ em sua desigualdade matricial pode ser linearizada (utilizando o procedimento adotado em [37]) se forem aplicadas transformações utilizando as matrizes definidas a seguir, sendo \mathbf{Q} a matriz de Lyapunov (com \mathbf{X} , \mathbf{Y} e \mathbf{Q} simétricas). A matriz \mathbf{Q} pode ser escrita como

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{N} \\ \mathbf{N}^T & * \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M}^T & * \end{bmatrix},$$

em que o sinal * indica que a matriz naquela posição não será usada nas definições a seguir e não é nomeada.

Definem-se as matrizes $\mathbf{\Pi}_1$ e $\mathbf{\Pi}_2$ como

$$\mathbf{\Pi}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{I} \\ \mathbf{M}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{\Pi}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{Y} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}^T \end{bmatrix},$$

de onde vem

$$\mathbf{Q}\mathbf{\Pi}_1 = \mathbf{\Pi}_2,$$

com

$$\mathbf{X}\mathbf{Y} + \mathbf{M}\mathbf{N}^T = \mathbf{I}. \quad (2.8)$$

Para o problema \mathcal{H}_∞ , a transformação usada é definida pela matriz $\text{diag}(\mathbf{\Pi}_1, \mathbf{I}, \mathbf{I})$ aplicada sobre a desigualdade matricial (2.6). Usando as matrizes de malha fechada, como segue:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{\Pi}_1^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{A} & \mathbf{Q} \mathbf{B} & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{B}^T \mathbf{Q} & -\gamma \mathbf{I} & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} & -\gamma \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\Pi}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} \mathbf{\Pi}_1^T \mathbf{A}^T \mathbf{Q} \mathbf{\Pi}_1 + \mathbf{\Pi}_1^T \mathbf{Q} \mathbf{A} \mathbf{\Pi}_1 & \mathbf{\Pi}_1^T \mathbf{Q} \mathbf{B} & \mathbf{\Pi}_1^T \mathbf{C}^T \\ \mathbf{B}^T \mathbf{Q} \mathbf{\Pi}_1 & -\gamma \mathbf{I} & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{C} \mathbf{\Pi}_1 & \mathbf{D} & -\gamma \mathbf{I} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

As matrizes de malha fechada, substituindo (2.4) em (2.1), são:

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 & \mathbf{B}_2 \mathbf{C}_c & \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{21} \\ \mathbf{B}_c \mathbf{C}_2 & \mathbf{A}_c & \mathbf{B}_c \mathbf{D}_{21} \\ \hline \mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12} \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{12} \mathbf{C}_c & \mathbf{D}_{11} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{21} \end{array} \right].$$

Devem-se expandir os termos $\Pi_1^T Q A \Pi_1$, $\Pi_1^T Q B$, $C \Pi_1$ e $\Pi_1^T Q \Pi_1$, conforme a seguir.

$$\Pi_1^T Q A \Pi_1 = \Pi_2^T A \Pi_1,$$

o que leva à Expressão (2.10).

$$\Pi_1^T Q A \Pi_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}_2 \hat{\mathbf{C}} & \mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \hat{\mathbf{D}} \mathbf{C}_2 \\ \hat{\mathbf{A}} & \mathbf{Y}\mathbf{A} + \hat{\mathbf{B}} \mathbf{C}_2 \end{bmatrix},$$

em que foram feitas as substituições:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}} &= \mathbf{N}\mathbf{A}_c \mathbf{M}^T + \mathbf{N}\mathbf{B}_c \mathbf{C}_2 \mathbf{X} + \mathbf{Y}\mathbf{B}_2 \mathbf{C}_c \mathbf{M}^T + \mathbf{Y}(\mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2) \mathbf{X} \\ \hat{\mathbf{B}} &= \mathbf{N}\mathbf{B}_c + \mathbf{Y}\mathbf{B}_2 \mathbf{D}_c \\ \hat{\mathbf{C}} &= \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 \mathbf{X} + \mathbf{C}_c \mathbf{M}^T \\ \hat{\mathbf{D}} &= \mathbf{D}_c, \end{aligned} \tag{2.12}$$

as quais correspondem as relações que podem ser isoladas para obter as matrizes do controlador \mathbf{A}_c , \mathbf{B}_c , \mathbf{C}_c e \mathbf{D}_c .

Os outros termos a ser expandidos são:

$$\Pi_1^T Q B = \Pi_2^T B = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{21} \\ \mathbf{Y}\mathbf{B}_1 + \mathbf{Y}\mathbf{B}_2 \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{21} + \mathbf{N}\mathbf{B}_c \mathbf{D}_{21} \end{bmatrix}$$

$$\Pi_2^T B = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 \hat{\mathbf{D}} \mathbf{D}_{21} \\ \mathbf{Y}\mathbf{B}_1 + \hat{\mathbf{B}} \mathbf{D}_{21} \end{bmatrix},$$

$$C \Pi_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \mathbf{X} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 \mathbf{X} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{C}_c \mathbf{M}^T & \mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12} \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 \end{bmatrix}$$

$$C \Pi_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \mathbf{X} + \mathbf{D}_{12} \hat{\mathbf{C}} & \mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12} \hat{\mathbf{D}} \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \quad \text{e}$$

$$\Pi_1^T Q \Pi_1 = \Pi_1^T \Pi_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{X}\mathbf{Y} + \mathbf{M}\mathbf{N}^T \\ \mathbf{I} & \mathbf{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{Y} \end{bmatrix},$$

em que foi usada (2.8).

Pelas relações encontradas acima podem-se substituir os termos $\Pi_1^T Q A \Pi_1$, $\Pi_1^T Q B$ e $C \Pi_1$ em (2.9). Dessa forma, tem-se a desigualdade matricial que constitui a restrição para o problema de otimização da norma \mathcal{H}_∞ .

A restrição do problema, graças à mudança de variáveis definida em (2.12), é dada na Inequação (2.11).

$$\begin{aligned}
\Pi_1^T Q \tilde{A} \Pi_1 &= \Pi_2^T \tilde{A} \Pi_1 \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}_2 \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 \mathbf{X} + \mathbf{B}_2 \mathbf{C}_c \mathbf{M}^T & \mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{N} \mathbf{B}_c \mathbf{C}_2 \mathbf{X} + \mathbf{N} \mathbf{A}_c \mathbf{M}^T + \mathbf{Y}^T \mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{Y}^T \mathbf{B}_2 \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 \mathbf{X} + \mathbf{Y}^T \mathbf{B}_2 \mathbf{C}_c \mathbf{M}^t & \mathbf{N} \mathbf{B}_c \mathbf{C}_2 + \mathbf{Y}^T \mathbf{A} + \mathbf{Y}^T \mathbf{B}_2 \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \quad (2.10)
\end{aligned}$$

12

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}^T + \mathbf{B}_2 \hat{\mathbf{C}} + \hat{\mathbf{C}}^T \mathbf{B}_2^T & \hat{\mathbf{A}}^T + \mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \hat{\mathbf{D}} \mathbf{C}_2 & \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 \hat{\mathbf{D}} \mathbf{D}_{21} & \mathbf{X} \mathbf{C}_1^T + \hat{\mathbf{C}}^T \mathbf{D}_{12}^T \\ \hat{\mathbf{A}} + \mathbf{A}^T + \mathbf{C}_2^T \hat{\mathbf{D}}^T \mathbf{B}_2^T & \mathbf{A}^T \mathbf{Y} + \mathbf{Y} \mathbf{A} + \hat{\mathbf{B}} \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_2 \hat{\mathbf{B}}^T & \mathbf{Y} \mathbf{B}_1 + \hat{\mathbf{B}} \mathbf{D}_{21} & \mathbf{C}_1^T + \mathbf{C}_2^T \hat{\mathbf{D}}^T \mathbf{D}_{12}^T \\ \mathbf{B}_1^T + \mathbf{D}_{21}^T \hat{\mathbf{D}}^T \mathbf{B}_2^T & \mathbf{B}_1^T \mathbf{Y} + \mathbf{D}_{21}^T \hat{\mathbf{B}}^T & -\gamma \mathbf{I} & \mathbf{D}_{11}^T + \mathbf{D}_{21}^T \hat{\mathbf{D}}^T \mathbf{D}_{12}^T \\ \mathbf{C}_1 \mathbf{X} + \mathbf{D}_{12} \hat{\mathbf{C}} & \mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12} \hat{\mathbf{D}} \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{11} + \mathbf{D}_{12} \hat{\mathbf{D}} \mathbf{D}_{21} & -\gamma \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.11)$$

Projeto 1 (\mathcal{H}_∞). O problema de otimização da norma \mathcal{H}_∞ em malha fechada consiste em acrescentar a função objetivo de minimização na norma, ou seja,

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && \gamma \\ & \text{sujeito a} && (2.11). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Nesse ponto, tem-se um problema de programação semidefinida, no qual se deseja minimizar uma função linear sujeita a restrições que dependem linearmente de matrizes variáveis. O problema de otimização determina como resultado as variáveis $\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{B}}$, $\hat{\mathbf{C}}$, $\hat{\mathbf{D}}$, \mathbf{X} e \mathbf{Y} .

Assim, permite-se encontrar as matrizes do controlador projetado pelas relações (2.12) como a seguir:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\mathbf{N}^T &= \mathbf{I} - \mathbf{X}\mathbf{Y} \\ \mathbf{D}_c &= \hat{\mathbf{D}} \\ \mathbf{C}_c &= (\hat{\mathbf{C}} - \mathbf{D}_c\mathbf{C}_2\mathbf{X})\mathbf{M}^{-T} \\ \mathbf{B}_c &= \mathbf{N}^{-1}(\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{Y}\mathbf{B}_2\mathbf{D}_c) \\ \mathbf{A}_c &= \mathbf{N}^{-1}[\hat{\mathbf{A}} - \mathbf{N}\mathbf{B}_c\mathbf{C}_2\mathbf{X} - \mathbf{Y}\mathbf{B}_2\mathbf{C}_c\mathbf{M}^T - \mathbf{Y}(\mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{D}_c\mathbf{C}_2)\mathbf{X}]\mathbf{M}^{-T}, \end{aligned} \tag{2.14}$$

para \mathbf{M} e \mathbf{N} não singulares satisfazendo a primeira das relações (2.14). Escolhe-se uma das matrizes (\mathbf{M} ou \mathbf{N}) e determina-se a outra.

2.7 Relação entre o controle \mathcal{H}_∞ e o controle robusto

Supõe-se um sistema em que a entrada e a saída são interligadas por uma realimentação mostrada na Figura 2.2, o que corresponde a um sistema como em (2.1) em que está presente a conexão

$$\mathbf{w}(s) = \mathbf{\Delta}(s)\mathbf{z}(s),$$

no domínio de Laplace. A função de transferência $\mathbf{\Delta}(s)$ representa a incerteza. O sistema de \mathbf{w} para \mathbf{z} pode ser convertido para o domínio de Laplace a partir de (2.1) resultando em

$$\mathbf{H}_{\mathbf{z}\mathbf{w}}(s) = \mathbf{C}_1(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}_1 + \mathbf{D}_{11}.$$

Um resultado bastante conhecido e apresentado em [48] é o seguinte:

Teorema 2 (ver [48]). A estabilidade assintótica é preservada quando, para um $\gamma > 0$, as seguintes condições são satisfeitas:

$$\|\mathbf{H}_{\mathbf{z}\mathbf{w}}(s)\|_\infty < \gamma \quad e \quad \|\mathbf{\Delta}(s)\|_\infty \leq \frac{1}{\gamma}.$$

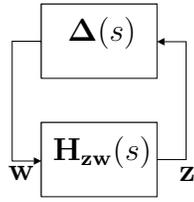


Figura 2.2: Planta com realimentação de um sistema desconhecido.

Neste ponto uma interpretação importante pode ser feita: ao se garantir a norma \mathcal{H}_∞ de um sistema (por exemplo, projetando um controlador, e neste caso considera-se o sistema em malha fechada, com planta e controlador), tem-se um limitante para a norma \mathcal{H}_∞ da incerteza. De acordo com o teorema, variações que violam esse limite podem resultar em malha fechada instável. Para que o projeto de controle se beneficie disso, basta que as variações desconhecidas no modelo do sistema sejam contempladas na forma de uma realimentação de um sistema desconhecido, como na Figura 2.2. Esse aspecto será abordado mais detalhadamente ao longo do trabalho.

A partir das interpretações para o teorema, verifica-se que o critério \mathcal{H}_∞ está relacionado a dois tipos de robustez. A norma \mathcal{H}_∞ representa um limitante para o máximo ganho do sistema quando afetado por um distúrbio, o que estabelece a robustez do sistema às entradas exteriores ao modelo. O segundo tipo de robustez verificado quando erros na própria representação do modelo são contemplados na forma de uma realimentação por um sistema desconhecido. Neste caso, a norma \mathcal{H}_∞ define um limitante para garantir estabilidade.

2.8 Comentários

Apresentou-se aqui um método para projeto de controladores \mathcal{H}_∞ usando desigualdades matriciais lineares. As interpretações para a otimização da norma levam à conexão que existe entre a norma \mathcal{H}_∞ e a robustez da planta ou de um projeto de controle. Abordagem que escreve o projeto de controle como um problema de minimização sujeito a restrições matriciais lineares é a ferramenta fundamental deste trabalho. Isso permite o uso de pacotes computacionais disponíveis para solução desses problemas.

Capítulo 3

Modelagem de incertezas

3.1 Resumo

Utilizando-se por hipótese da capacidade de projetar controladores abordada no Capítulo 2, tratam-se aqui de configurações diferentes de como o sistema desconhecido pode se conectar com o sistema conhecido. A forma padronizada para representar a relação entre a parte conhecida e a incerteza é a conhecida transformação linear fracional (ver [18, 40, 48]). Essas conversões têm a função de manipulações algébricas (e de diagramas de blocos) que posicionam a parte desconhecida em uma configuração padrão para aplicação dos métodos de projeto de controladores robustos.

Há dois tipos básicos de incertezas: incertezas estáticas (ou paramétricas) e incertezas dinâmicas. Como citado no Capítulo 1, as incertezas paramétricas são aquelas que se devem ao desconhecimento do valor exato de parâmetros que compõem a matriz de transferência do sistema. As incertezas dinâmicas podem ser originadas de imperfeições na estrutura do modelo, pela ausência da representação de algum efeito físico ou pelo uso de hipóteses simplificadoras.

Uma outra maneira mais recente de representar incertezas é a de supor um conjunto de modelos possíveis para o sistema determinado por um polítopo. No caso das incertezas politópicas (ver [38, 45]) apresentam-se neste capítulo apenas sua definição e a relação com a estabilidade quadrática.

Adota-se a convenção de que sistemas são descritos em geral na forma de matrizes de transferência no domínio de Laplace, evitando a notação de espaço de estados neste capítulo exceto ao se tratar de incertezas politópicas, em que o contexto deixará claro qual a representação utilizada. Neste capítulo supõem-se as seguintes definições:

- $\tilde{P}(s)$: sistema conhecido ou nominal;
- $P(s)$: sistema real ou incerto;
- $\Delta(s)$: incerteza.

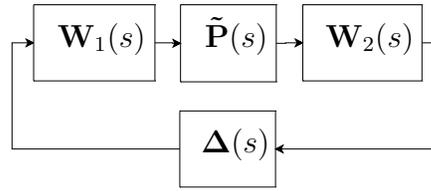


Figura 3.1: Filtros que permitem ajustar a limitação da incerteza.

3.2 Representações de incertezas

A maneira clássica de se descrever um sistema incerto é supor que existe uma função de transferência incerta entre canais de entrada e de saída da planta, como foi utilizado na relação entre robustez e norma \mathcal{H}_∞ na Seção 2.7. A função de transferência é desconhecida e isso requer, em princípio, que a incerteza seja levada em conta no projeto de um controlador sob a forma de um limitante constante ou um filtro simples que representa, para cada valor de frequência, um limite superior.

Assim, a incerteza pode ter a sua conexão com o sistema intermediada por filtros, os quais têm a função de garantir que a limitação na sua norma assuma uma forma descrita por eles.

Na Figura 3.1 vê-se uma configuração possível para os filtros que ponderam a incerteza, colocados antes e depois da parte incerta do sistema e chamados $W_1(s)$ e $W_2(s)$. As restrições do controle robusto, conforme visto no Capítulo 2, impõem um limitante para a norma \mathcal{H}_∞ da incerteza. Quando se deseja enfatizar a incerteza em uma faixa de frequência usam-se os filtros citados.

Porém, outras formas podem ser propostas. Citam-se neste caso as representações de sistemas como combinações lineares convexas de um conjunto de sistemas. Dessa forma, o conjunto de sistemas possíveis é interpretado como um politopo do qual se conhecem os vértices. Utilizando a notação padrão para espaço de estados, toma-se um conjunto

$$\mathcal{S} := \{(A_i, B_i, C_i, D_i) \mid i = 1, \dots, p\},$$

com p o número de sistemas, sendo A_i , B_i , C_i e D_i as matrizes de estado.

Os resultados para sistemas com incertezas em sua formulação são obtidos supondo uma representação que separa em blocos diferentes o sistema e a sua incerteza. A forma padrão para sistema dinâmicos lineares é a chamada *transformação linear fracional* (do inglês *linear fractional transformation*), e corresponde ao diagrama de blocos da Figura 3.2.

A representação da incerteza Δ descreve a forma como o sistema pode variar. Δ pode ser um valor constante ou um sistema dinâmico, o que representa uma incerteza que possui forma definida no domínio da frequência, e é um limitante para a variação do sistema. É padrão que se escolha Δ de modo que a incerteza assumira uma norma no máximo unitária, $\|\Delta\|_\infty < 1$. Variações fora dessa

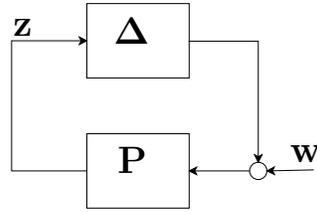


Figura 3.2: Diagrama de blocos com sistema e incerteza associada.

norma são incluídas como fatores adicionais na representação do sistema (**P**), ou seja, supõe-se a incerteza normalizada.

O resultado fundamental da análise robusta é o chamado *teorema do ganho pequeno* (Teorema 2). Pode-se dizer que, em geral, a análise consiste em adaptar o teorema para uma configuração particular de sistema e incerteza para determinar as condições necessárias para a estabilidade robusta.

O Teorema 2 é utilizado para analisar a estabilidade de um sistema incerto da seguinte forma: uma vez que se possui a representação de incerteza e sua relação matemática com o sistema (possivelmente na forma de um diagrama de blocos) adapta-se o sistema à configuração da Figura 3.2 de modo que o resultado que garanta estabilidade seja a aplicação direta do teorema.

3.3 Incertezas paramétricas

No modelo de um sistema dinâmico linear torna-se necessário conhecer valores de alguns parâmetros. Neste ponto introduz-se uma imprecisão devido ao método (melhor ou pior) para estimar o seu valor “real”. Ainda, o parâmetro estimado pode possuir uma variação ao longo do tempo não representada pelo modelo. Isso pode ser contemplado na forma de uma incerteza.

Alguns exemplos são mostrados a seguir.

Exemplo 1

Um exemplo simples que ilustra a utilidade da representação é apresentado a seguir (à semelhança de [18]). Supondo o modelo clássico de um sistema de segunda ordem de massa (m), mola (rigidez k) e amortecedor (amortecimento c), tem-se a equação de movimento para a posição x da massa e uma força $f(t)$ aplicada sobre ela:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t).$$

Admite-se então uma incerteza em cada parâmetro, na ordem, δ_m , δ_c e δ_k , e a equação torna-se:

$$(m + \delta_m)\ddot{x} + (c + \delta_c)\dot{x} + (k + \delta_k)x = f(t).$$

Esse sistema leva ao diagrama de blocos da Figura 3.3 e é descrito pelo modelo de estados:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{m + \delta_m} [-(k + \delta_k)x_1 - (c + \delta_c)x_2 + f(t)] \\ y &= x_1\end{aligned}$$

em que y é a saída do sistema e x_1 e x_2 são os estados.

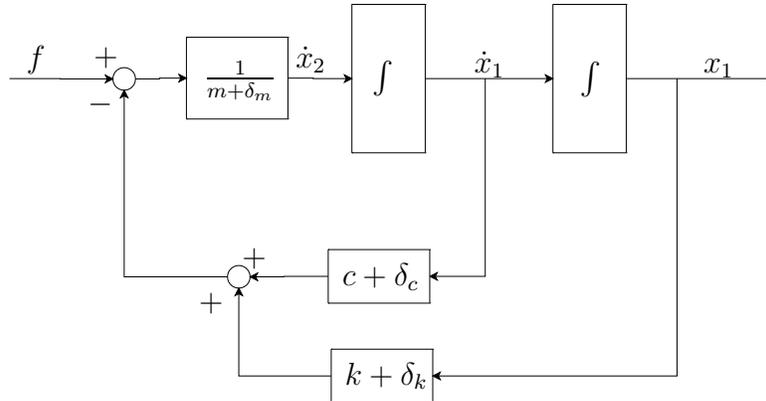


Figura 3.3: Diagrama de blocos de um sistema de segunda ordem com incertezas.

O mesmo diagrama pode ser convertido para a forma mostrada na Figura 3.4. Nessa forma, as incertezas são colocadas na forma de realimentação sobre seus parâmetros nominais. Isso viabiliza converter o diagrama para a forma padrão de representação de incertezas, neste caso, apresentada na Figura 3.5.

No diagrama da Figura 3.5 são realizadas as suposições sobre a dinâmica da incerteza e de que ela é influenciada apenas pela saída do sistema e produz um sinal \mathbf{d} que afeta o sistema na forma de uma entrada. Aqui está-se fazendo uso da ambigüidade entre saída incerta e sinal de desempenho. O critério \mathcal{H}_∞ sobre o par entrada e saída (\mathbf{w} e \mathbf{z}) na interpretação permitida pelo teorema do ganho pequeno pode significar tanto intensidade de resposta em frequência quanto pode ser um limitante para incerteza.

O sistema $\Delta(s)$ (uma matriz constante na variável de Laplace para incertezas paramétricas) é visto como externo e $\tilde{\mathbf{P}}(s)$ como um sistema precisamente determinado em que um conjunto de entradas é o vetor $\mathbf{d} = [d_1 \ d_2 \ d_3]^T$, as quais foram obtidas como saída de um sistema desconhecido que tem $\mathbf{z} = [z_1 \ z_2 \ z_3]^T$ como entradas. Isso significa interpretar as perturbações do modelo como um conjunto de entradas vindas de um sistema externo e incerto. Esse sistema é representado pela

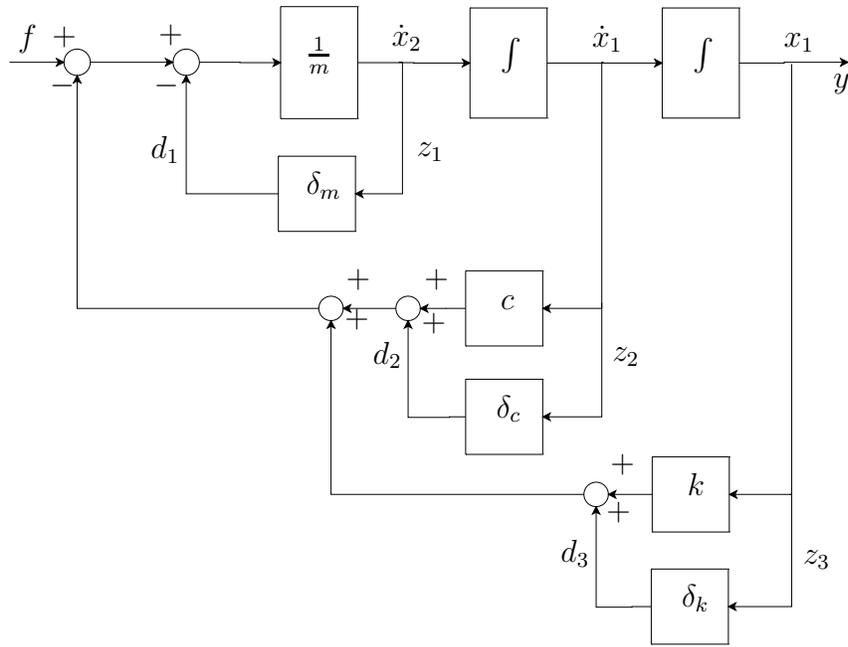


Figura 3.4: Diagrama de blocos de um sistema de segunda ordem com as incertezas na forma de realimentação.

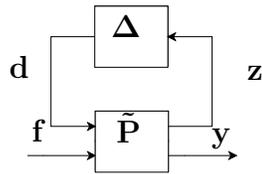


Figura 3.5: Diagrama de blocos de um sistema de segunda ordem com as incertezas na forma padrão.

matriz de transferência (neste caso constante) dada por

$$\Delta = \begin{bmatrix} \delta_m & 0 & 0 \\ 0 & \delta_c & 0 \\ 0 & 0 & \delta_k \end{bmatrix}.$$

O modelo de estados incluindo a incerteza assim descrita (como saída de um sistema externo

em realimentação) pode ser obtido a partir do diagrama da Figura 3.4:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{m} & -\frac{1}{m} & -\frac{1}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} f \\
 \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{m} & -\frac{1}{m} & -\frac{1}{m} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} f \\
 y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \\
 \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \delta_m & 0 & 0 \\ 0 & \delta_c & 0 \\ 0 & 0 & \delta_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Nesse modelo, o sinal vetorial de desempenho \mathbf{z} tem como primeira componente a perturbação causada pela incerteza e como outras duas componentes respectivamente o segundo e o primeiro estados do modelo. Ou seja, tem-se que $\mathbf{d}(s) = \mathbf{\Delta}(s)\mathbf{z}(s)$, como na Figura 3.5.

Um detalhe interessante do diagrama mostrado na Figura 3.4 é que ele pode ser generalizado para o caso de um sistema de segunda ordem com massa, mola e amortecimento de vários graus de liberdade (ver [18]), bastando considerar que os parâmetros são matrizes de massa, rigidez e amortecimento e as incertezas são também matrizes com as mesmas posições relativas dos elementos. Nesse caso, as operações de soma e integração são efetuadas no sentido matricial. Isso é mostrado nos exemplos da Seção 6.3.2.

Exemplo 2

Considera-se ainda o sistema incerto

$$P(s) = \frac{1}{s + 3(2 + \delta)}, \quad \text{com } |\delta| < 1,$$

o que leva a uma planta nominal (incerteza nula) dada por

$$\tilde{P}(s) = \frac{1}{s + 6}.$$

A colocação da incerteza e da função de ponderação que a ajusta relativamente à planta nominal caracteriza uma subdivisão das representações de incerteza bastante explorada na literatura (ver [40]). Para este caso tem-se o que se chama de incerteza multiplicativa inversa. A planta real com

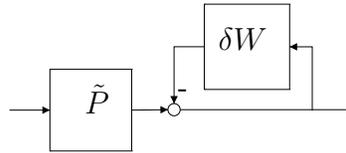


Figura 3.6: Diagrama de bloco do exemplo com a incerteza.

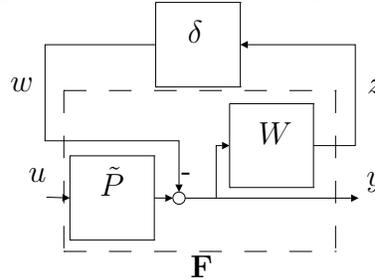


Figura 3.7: Diagrama com a incerteza convertido para forma de transformação linear fracional.

esse tipo de incerteza é escrita como:

$$P(s) = \frac{\tilde{P}(s)}{1 + \delta W(s)}.$$

A relação

$$\frac{1}{s + 3(2 + \delta)} = \frac{\tilde{P}(s)}{1 + \delta W(s)},$$

leva à função que pondera o parâmetro incerto

$$W(s) = \frac{3}{s + 6}.$$

Na forma de diagrama de blocos isso pode ser representado como na Figura 3.6, a partir do qual, rearranjando entradas e saídas, pode-se construir o diagrama da Figura 3.7 que mostra o mesmo caso na forma de transformação linear fracional, a exemplo da Figura 3.5.

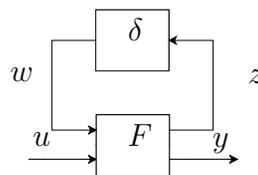


Figura 3.8: Diagrama de blocos do exemplo na forma padrão, renomeando os sinais da figura 3.7.

Para esse caso, a Figura 3.8 mostra uma matriz de transferência de duas entradas e duas saídas. A planta generalizada (também chamada planta aumentada) $F(s)$, é representada pela matriz

de transferência entre essas entradas e saídas,

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -W(s) & W(s)\tilde{P}(s) \\ -1 & \tilde{P}(s) \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}(s)} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}.$$

Esse raciocínio de construção da planta aumentada para produzir a transformação linear fracional ($\mathbf{F}(s) = \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{P}}(s), \mathbf{W}(s))$) é análogo para outras formas de incerteza e é obtido a partir do mapeamento da planta incerta com a planta nominal e a incerteza: $\mathbf{P}(s) = \mathbf{P}(\tilde{\mathbf{P}}(s), \mathbf{\Delta}(s))$.

Outro comentário pertinente sobre a função $\mathbf{W}(s)$ usada para definir a forma da incerteza no domínio da frequência é a de que neste último caso de exemplo, a incerteza foi modelada para ser vista da saída do sistema $\mathbf{F}(s)$. Na equação do sistema de segunda ordem, as incertezas em cada parâmetro foram colocadas tomando como entrada e saída os pontos da função de transferência em que apareciam, desfazendo a necessidade de uma função de s .

3.4 Incertezas não estruturadas ou dinâmicas

Um caso mais geral do que o das incertezas paramétricas é admitir que não há apenas variações nos parâmetros do sistema mas também na dinâmica do sistema. Isso constitui o que se conhece por incerteza não estruturada. Nessa forma, a única condição imposta sobre o modelo da incerteza é a limitação em norma. As variações dinâmicas do sistema podem ser especificadas por funções de transferência. Na literatura descreve-se que esse tipo de incerteza ocorre quando efeitos físicos são negligenciados na modelagem, seja na falta de equações que os descrevam ou no truncamento do modelo linear para uma ordem menor do que a prescrita pelas equações obtidas de leis físicas (ver [48]). Ou seja, quando há uma dinâmica do sistema real com espectro diferente do considerado pelo modelo.

No caso de estruturas flexíveis, os modelos obtidos das equações da mecânica do contínuo são rigorosamente de *dimensão infinita* (veja [15, 35]), o que significa que representá-los por modelos lineares com número finito de graus de liberdade introduz um erro proveniente das ordens mais elevadas que foram desconsideradas.

As funções de transferência que especificam a incerteza dinâmica podem ser interpretadas como filtros de ponderação, o que na forma padrão é representado pelo diagrama da Figura 3.1.

Exemplo 3

Tome por exemplo a planta de uma entrada e uma saída a seguir:

$$P(s) = \frac{1}{80} \frac{s + 2}{(s + 0,05)(s + 0,1)(s + 1)(s + 5)}.$$

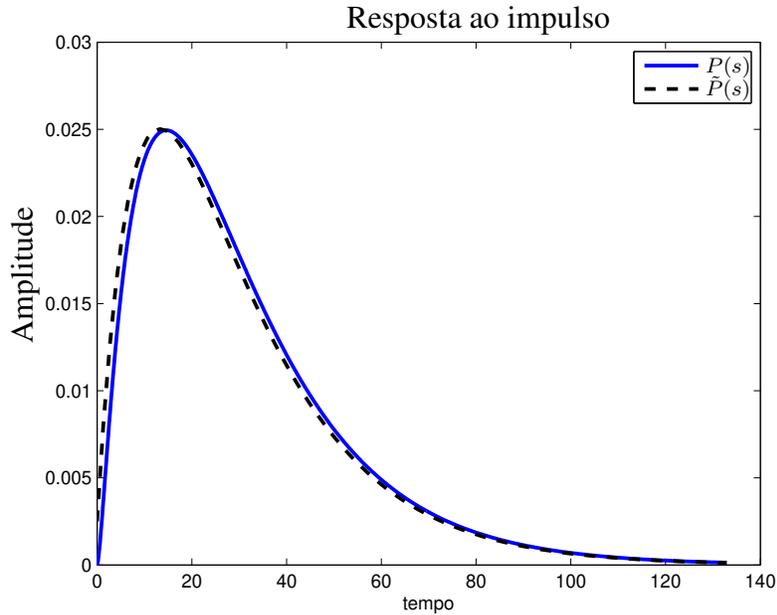


Figura 3.9: Comparação das respostas ao impulso entre planta e aproximação.

Supõe-se que tal modelo não é determinado de forma completa, ou que por dificuldades computacionais o modelo utilizado para representá-la é

$$\tilde{P}(s) = \frac{1}{400} \frac{s + 2}{(s + 0,05)(s + 0,1)},$$

um modelo de segunda ordem.

Esse modelo foi escolhido de modo a que as componentes do domínio da frequência de maior importância na resposta sejam mantidas.

A planta simplificada pode ser vista como a planta original filtrada, ou seja,

$$\tilde{P}(s) = W(s)P(s),$$

em que o filtro é dado por

$$W(s) = (s + 1)(s + 5).$$

Nota-se nas figuras 3.9 e 3.10 a comparação entre a planta e a planta aproximada em termos de resposta ao impulso e resposta em frequência. Nesse caso, a função $W(s)$ representa a incerteza do sistema. Em geral, a incerteza não possui forma conhecida, e geralmente pode-se determinar apenas uma função da frequência que seja um limitante superior para ela. Nesse exemplo, usa-se uma função de magnitude maior do que esse filtro para qualquer frequência.

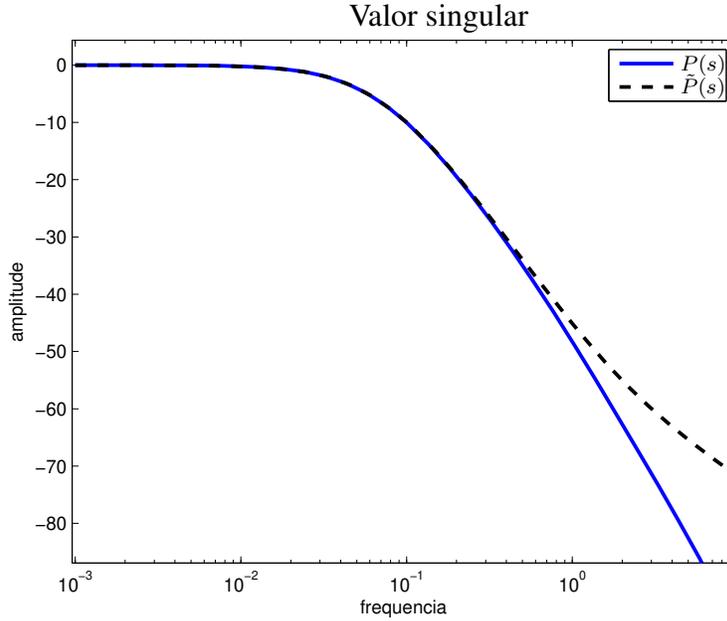


Figura 3.10: Comparação dos valores singulares entre planta e aproximação.

3.5 Incertezas estruturadas

Quando se considera uma estrutura para as variações admissíveis do sistema tem-se a incerteza estruturada. Dessa forma, pode-se representar variações lineares arbitrárias em faixas de frequência diferentes. O objetivo é sempre diminuir o conservadorismo do projeto, permitindo que o controlador acesse uma região de soluções estáveis maior.

Na notação usada aqui, estruturar a incerteza significa particionar a matriz Δ e supô-la na forma bloco diagonal, ou seja,

$$\Delta = \text{diag} [\delta_1 \mathbf{I}_{r_1} \cdots \delta_s \mathbf{I}_{r_q} \Delta_1 \cdots \Delta_l], \quad (3.2)$$

em que q é o número de blocos diagonais e l o número de blocos cheios.

Considera-se a mesma Figura 3.5 usada no caso de incertezas paramétricas. Porém, Δ não é constante em q e possui uma estrutura como a definida em (3.2). Se, nessa figura, se supõe que entre cada par de um elemento z e um de d há uma função de transferência incerta particular, tem-se a incerteza estruturada.

As incertezas paramétricas podem ser vistas como um caso particular de incerteza estruturada. Basta que, na definição 3.2, sejam tomados $l = 0$, $r_i = 1$, com $i = 1, \dots, q$ e q igual ao número de parâmetros incertos. Em outros casos quaisquer tem-se a incerteza como uma função da variável de Laplace e, conseqüentemente, da frequência.

Exemplo 4

No exemplo do sistema de segunda ordem em (3.1), pode-se supor uma incerteza estruturada dinâmica (pois a incerteza paramétrica é um tipo de estrutura particular independente de s). Se a incerteza da rigidez for considerada variável com a frequência, maior em altas frequências aumentando a partir de 10 rad/s até 100 rad/s, pode-se representar uma incerteza dinâmica estruturada da forma a seguir:

$$\Delta(s) = \begin{bmatrix} \delta_m & 0 & 0 \\ 0 & \delta_c & 0 \\ 0 & 0 & \delta_k \frac{s+10}{s+100} \end{bmatrix}.$$

3.6 Representação politópica

A representação de incerteza politópica é aquela que escreve o conjunto de todos os sistemas possíveis como uma combinação convexa de sistemas perfeitamente conhecidos, ou seja,

$$\mathcal{P} := \left\{ (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}) = \sum_{i=1}^p \alpha_i (\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i, \mathbf{C}_i, \mathbf{D}_i) \mid \sum_{i=1}^p \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \right\}.$$

Nesta definição utilizou-se a notação de conjunto, na qual $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ representa o conjunto com as matrizes de estado do sistema.

A estabilidade nesse caso pode, e geralmente é, expressa como um corolário da equação de Lyapunov (um resultado clássico, [5, 39], conhecendo a matriz \mathbf{A} do sistema),

$$\mathbf{Q}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{Q} < 0,$$

para sistemas contínuos, sempre garantindo $\mathbf{Q} > 0$.

Essa equação, quando nela substituídas as relações de malha fechada, representa a restrição a ser satisfeita para estabilidade. A forma usual para resolver tais problemas matemáticos é aplicar transformações sobre essas desigualdades de modo a que elas se tornem lineares em suas variáveis, levando às *desigualdades matriciais lineares*. Um caso particular desse tipo de restrição é o projeto de controlador \mathcal{H}_∞ apresentado no Capítulo 2.

Uma vez que se tem um sistema incerto descrito por um politopo com sistemas extremos nos seus vértices, a primeira abordagem é a de adotar uma restrição para cada vértice e resolver um problema matemático que inclui todas as restrições. Em termos da equação de Lyapunov para sistemas contínuos, se o sistema incerto pertence a um politopo de vértices \mathbf{A}_i , este é estável se

$$\mathbf{Q}\mathbf{A}_i + \mathbf{A}_i^T\mathbf{Q} < 0, \quad i = 1, \dots, p.$$

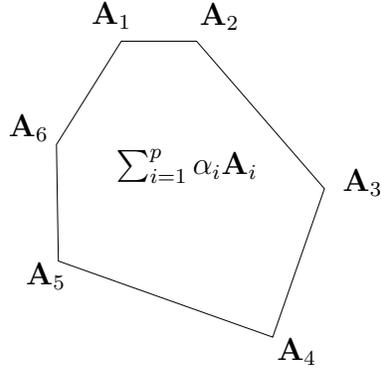


Figura 3.11: Politopo de sistemas possíveis para representar a um sistema incerto como combinação convexa de sistemas conhecidos (\mathbf{A}_i).

Isso é verdade pois, uma vez que uma matriz incerta pode ser escrita como $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^p \alpha_i \mathbf{A}_i$, para algum α_i , tem-se

$$\mathbf{Q}\mathbf{A}_i + \mathbf{A}_i^T \mathbf{Q} < 0, \quad i = 1, \dots, p \quad (3.3)$$

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i (\mathbf{Q}\mathbf{A}_i + \mathbf{A}_i^T \mathbf{Q}) < 0 \quad (3.4)$$

$$\mathbf{Q} \sum_{i=1}^p \alpha_i \mathbf{A}_i + \sum_{i=1}^p \alpha_i \mathbf{A}_i^T \mathbf{Q} < 0, \quad (3.5)$$

uma vez que $\alpha_i \geq 0$.

Essa abordagem é chamada de estabilidade quadrática (ver [39]).

O projeto de controladores depende da variável \mathbf{Q} , que descreve a função de Lyapunov quadrática cuja existência garante a estabilidade do sistema linear, como no caso \mathcal{H}_∞ . Se o controlador fosse projetado para o sistema que corresponde a um vértice do politopo, ele seria otimizado para essa condição. Uma vez que se acrescentam restrições para que o controlador as satisfaça em todos os vértices, tem-se um projeto que não é ótimo em nenhum ponto específico. Ou seja, introduz-se um conservadorismo inevitável, pois o sistema real muito provavelmente saltará como um modelo completo (com velocidade arbitrária) de um ponto do politopo para outro. Quando esse tipo de suposição é levada em conta, tem-se um sistema chaveado (na literatura, *switched system*), abordado como uma classe particular de problemas, como em [16].

No caso do projeto \mathcal{H}_∞ , visto no Capítulo 2, a restrição do problema (2.11) seria substituída por um conjunto de p restrições, cada uma para ser satisfeita de modo a garantir a estabilidade e a limitação em norma de cada um dos sistemas que são vértices do politopo.

Exemplo 5

O sistema de segunda ordem em (3.1) pode ser reutilizado aqui. Em um caso particular, supõe-se $\delta_m = 0$, $|\delta_c| \leq 1$ e $|\delta_k| \leq 1$. Para representar isso na notação politópica basta escrever o modelo de estados para cada um dos valores extremos dos parâmetros em todas as combinações possíveis dos extremos dos outros parâmetros. Ou seja, obter o modelo de estados para os conjuntos de valores das variações a seguir:

δ_c	δ_k
-1	-1
-1	1
1	-1
1	1

Verifica-se que o modelo de estados nominal do exemplo é representado pelas matrizes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{D} = 0.$$

Uma vez que as matrizes \mathbf{B} , \mathbf{C} e \mathbf{D} não dependem das incertezas, modifica-se apenas a matriz \mathbf{A} . Diferentes \mathbf{A} s representam diferentes sistemas nos vértices de um politopo:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{(k-1)}{m} & -\frac{(c-1)}{m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{(k-1)}{m} & -\frac{(c+1)}{m} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{(k+1)}{m} & -\frac{(c-1)}{m} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{(k+1)}{m} & -\frac{(c+1)}{m} \end{bmatrix}.$$

É necessário notar que se houvesse incerteza também no parâmetro da massa, os sistemas extremos produzidos constituiriam um poliedro multidimensional, mas que não seria necessariamente um politopo, pois não haveria convexidade garantida.

Uma abordagem usual para essa perda de convexidade, assim como para o caso de o conjunto original já não ser convexo, é a de tomar os sistemas extremos da representação politópica e determinar aqueles que compõem seu *envelope convexo*. Isso pode ser feito usando um algoritmo clássico para a determinação dos pontos do envelope. Inevitavelmente, ao fazer isso, aumenta-se a região sobre a qual se estabelece a estabilidade e acrescentando conservadorismo.

3.7 Comentários

Este capítulo mostrou algumas maneiras de representar a incerteza associada a um sistema dinâmico. Foram abordadas as formas de incertezas paramétrica, estruturada, não estruturada e politópica. Alguns sistemas simples foram usados para exemplificar os conceitos.

Capítulo 4

Controle robusto

4.1 Resumo

Este capítulo apresenta uma idéia concisa do método comum de projeto de controle robusto linear. Pode-se dividir o projeto robusto nas seguintes etapas principais:

- Descrição do modelo e das incertezas.
- Definição dos critérios de robustez e desempenho.
- Escolha dos filtros de ponderação e incorporação na planta, produzindo um modelo aumentado.
- Ajuste iterativo dos filtros de ponderação e projeto do controlador por algum algoritmo disponível. Este passo é repetido até que o desempenho e a robustez sejam considerados satisfatórios ou não seja possível melhora.
- Teste do controle em malha fechada com o controlador projetado e a planta original em condições de simulação tão próximas da realidade quando possível.
- Se necessário, mudar o modelo ou a estrutura das incertezas e refazer o projeto.

Na simulação devem ser acrescentados sinais de distúrbio e incerteza e, se possível, simular o controlador com um modelo de planta mais complexo do que o usado no projeto. No caso de estruturas flexíveis isso significa usar modelos com mais modos de vibração, correspondendo à incerteza dinâmica.

A planta generalizada é chamada de $F(s)$, quando colocada no formato padrão de controle robusto com as entradas de distúrbio e controle e as saídas de desempenho e medição na ordem usual.

4.2 Definição

O controle robusto tem por objetivo projetar um controlador $\mathbf{K}(s)$ que estabilize e garanta desempenho para todas as plantas possíveis $\mathbf{P}(s)$ dadas as incertezas. Ilustrando o conceito, na Figura 4.1, \mathbf{K} representa o controlador e \mathbf{P} um conjunto de plantas possíveis dadas as incertezas do sistema. O controlador colocado no ramo direto recebe uma realimentação negativa e produz o sinal de controle para um sistema incerto. Desse modo, dada uma planta nominal $\tilde{\mathbf{P}}$ e uma representação associada de incertezas Δ , tem-se a planta real $\mathbf{P}(s) = \mathbf{P}(\tilde{\mathbf{P}}, \Delta)$.

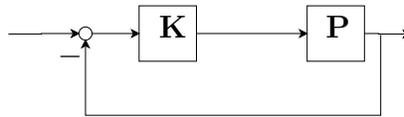


Figura 4.1: Configuração entre sistema incerto e controlador.

Para aplicação do Teorema 2, na Seção 2.7, o projeto do controle robusto é visto na forma da transformação linear fracional tanto da incerteza quanto do controlador. Usualmente, representa-se a incerteza na parte superior e o controlador na parte inferior, como na Figura 4.2.

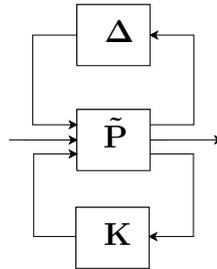


Figura 4.2: Diagrama das transformações lineares fracionais para incerteza e controlador.

Em linhas gerais, se o Teorema 2 é satisfeito para o par de entrada e saída de realimentação que constitui a incerteza, garante-se robustez (dada por uma norma) sob variações do modelo. Ao se fazer satisfazer o teorema para o par de entrada e saída do sistema em malha fechada, tem-se garantido um desempenho do sistema, ou, em outras palavras, a robustez na rejeição de perturbações externas.

4.3 Robustez \mathcal{H}_∞

Utilizando o resultado do Teorema 2, o controle \mathcal{H}_∞ pode ser convertido em uma ferramenta de garantia de estabilidade de um sistema controlado. Como já descrito, e ilustrado na Figura 3.1, uma incerteza pode ser intercalada por funções de ponderação que ajustam seu comportamento

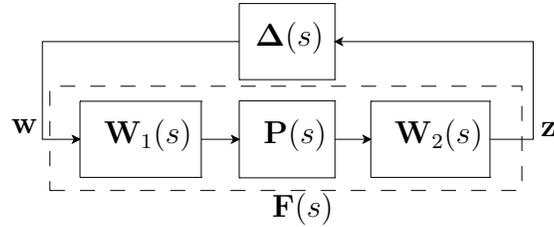


Figura 4.3: Problema de robustez \mathcal{H}_∞ .

em frequência e ganho. Porém, se a entrada do bloco de incerteza for considerada uma saída de desempenho e a sua saída, uma entrada de distúrbio, converte-se o problema de projeto \mathcal{H}_∞ em um problema de controle robusto. Isso é verdade porque a limitação em norma garantida pelo Teorema 2 se converte em limitação para a norma da incerteza, o que garante a estabilidade pelo teorema.

A interpretação da robustez \mathcal{H}_∞ é mostrada na Figura 4.3. Por ela, o limitante para a norma \mathcal{H}_∞ da função de transferência do distúrbio (w) para a saída de desempenho (z) torna-se o inverso do limitante de estabilidade para a norma da incerteza, como prescreve o Teorema 2. Projetar um controlador com o objetivo de estabilizar o sistema com incertezas dessa forma é o chamado problema de robustez \mathcal{H}_∞ . Basta ajustar os filtros $W_1(s)$ e $W_2(s)$ para especificar a forma em frequência da incerteza e o ganho entre a incerteza real e a imposta pelo teorema com o parâmetro γ .

O Capítulo 2 apresentou o chamado problema de desempenho \mathcal{H}_∞ , no qual o objetivo é reduzir a norma \mathcal{H}_∞ de uma função de transferência particular interpretando a norma como intensidade de vibração. Aqui, a norma \mathcal{H}_∞ é usada em conjunto com o Teorema 2 para assegurar limitantes nas incertezas presentes no sistema real tais que a estabilidade esteja garantida.

Exemplo 6

Considera-se o exemplo já abordado do sistema de dois graus de liberdade (na Seção 3.3, Exemplo 1). Se o objetivo for obter um controlador para garantir estabilidade sob incertezas dos parâmetros, o problema de robustez \mathcal{H}_∞ pode ser aplicado como segue. Supondo que as variações desejadas nos parâmetros sejam de v_m unidades na massa, v_c no coeficiente de amortecimento e v_k na constante de rigidez, o modelo de estados que separa as incertezas paramétricas como um sistema externo

seria alterado para garantir que as incertezas seriam limitadas à unidade, ou seja,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{m} & -\frac{1}{m} & -\frac{1}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} f \\ \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{k}{m}v_m & -\frac{c}{m}v_m \\ 0 & v_c \\ v_k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{v_m}{m} & -\frac{v_m}{m} & -\frac{v_m}{m} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{v_m}{m} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} f \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Para o sistema assim definido, ao projetar um controlador \mathcal{H}_∞ por um dos métodos quaisquer, o controlador terá garantido que o sistema continuará estável mesmo dentro das variações escolhidas dos parâmetros. Se não for possível projetar tal controlador, o problema matemático de projeto será infactível.

4.4 Problema misto \mathcal{H}_∞

Quando tanto o objetivo de garantir robustez quanto o de otimizar o desempenho concorrem em um projeto de controlador tem-se o problema misto \mathcal{H}_∞ . Simplificadamente, a norma que é objetivo de minimização ao projetar o controlador passa a ser avaliada sobre um sinal vetorial aumentado que contém tanto o sinal de desempenho original quanto o sinal associado à incerteza.

Assim, ao projetar um controlador sobre o novo critério de desempenho que contém tanto o sinal sobre o qual se tinha o critério de desempenho original quanto sobre o sinal que expressa a incerteza, tem-se um controlador que agrega dois objetivos de controle (desempenho e robustez).

Exemplo 7

Para ilustrar o conceito de sensibilidade mista considera-se um sistema incerto com a incerteza $|\delta| < 1$,

$$P(s) = \frac{1}{s^2 + (2 + \delta)10^{-2}s + 1}.$$

O sistema é mostrado na Figura 4.4 já com a incerteza posicionada na forma padrão externa ao sistema nominal. Pode-se definir o sinal original de entrada como u e de saída como x . A incerteza acrescenta uma nova entrada, a ser chamada de w e uma nova saída, z_2 . A saída original torna-se um índice de desempenho z_1 que deve ser influenciado pelo controlador concomitantemente com z_2 , que deve ser usado para garantir robustez.

A matriz de transferência do sistema assim construído pode ser obtida diretamente da Figura

4.4:

$$\mathbf{F}(s) = \begin{bmatrix} P_{z_1w} & P_{z_1u} \\ P_{z_2w} & P_{z_2u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{s^2+2\cdot 10^{-2}s+1} & \frac{1}{s^2+2\cdot 10^{-2}s+1} \\ \frac{-10^{-2}s}{s^2+2\cdot 10^{-2}s+1} & \frac{10^{-2}s}{s^2+2\cdot 10^{-2}s+1} \end{bmatrix}.$$

A matriz de transferência é obtida usando o princípio da superposição considerando cada par de entrada e saída (cada elemento da matriz) e anulando as entradas não consideradas para cada caso.

O objetivo de desempenho consiste em minimizar a norma \mathcal{H}_∞ da função de transferência P_{z_1u} , e o de robustez, em minimizar a norma de P_{z_2w} . Ou seja, o objetivo do projeto de controlador considerando estes dois aspectos pode ser escrito como a minimização de

$$\left\| \begin{bmatrix} P_{z_1u} \\ P_{z_2w} \end{bmatrix} \right\|_\infty.$$

Assim, a desigualdade $|\delta| < 1$, para a garantir a estabilidade no sentido do Teorema 2, induz a limitação em norma $\|P_{z_2w}\|_\infty < 1$, a qual está incluída na limitação em norma

$$\left\| \begin{bmatrix} P_{z_1u} \\ P_{z_2w} \end{bmatrix} \right\|_\infty < \gamma,$$

com $\gamma = 1$.

Quanto menor a norma, maior a incerteza admissível, com o limite dado pela unidade. Ou seja, usando $\gamma = 1$ no Teorema 2.

4.5 Filtros de ponderação

Uma entrada de distúrbio em um sistema pode afetar o sinal de desempenho de maneira não desejada. Essa influência pode ser interpretada como uma incerteza entre as entradas e saídas envolvidas. Assim, a influência de um distúrbio externo pode ser modelada da mesma forma que uma incerteza e incluída em um problema de sensibilidade mista \mathcal{H}_∞ . E de forma análoga, funções que ajustam a variação em frequência desses sinais de distúrbio (como $\mathbf{W}_1(s)$ e $\mathbf{W}_2(s)$) podem ser acrescentados, essas são chamadas funções ou filtro de ponderação.

Os filtros de ponderação são comumente usados para garantir rejeição de um sinal de distúrbio em uma faixa de frequência em particular e para limitar os sinais de controle e de saída em intensidade e velocidade. São uma ferramenta matemática de projeto e não estão presentes no problema de controle físico. Todos os seus parâmetros são ajustados usualmente por um procedimento de tentativa e erro a partir de valores iniciais razoáveis para cada problema.

Exemplo 8

A Figura 4.5 mostra uma configuração de incerteza ponderada e filtros para ajustar a rejeição de

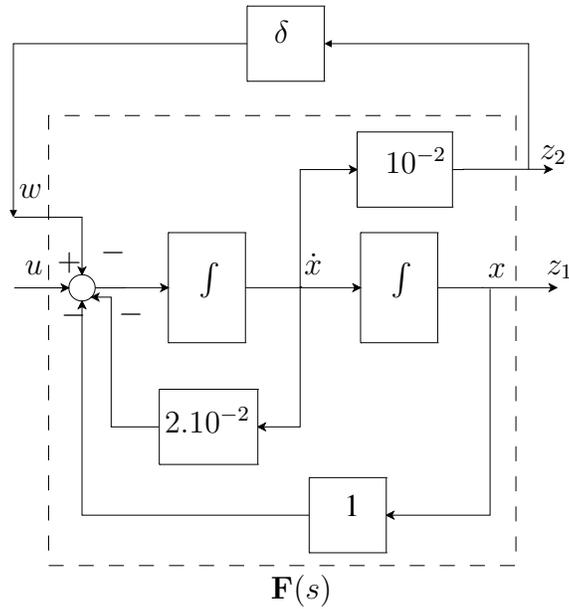


Figura 4.4: Exemplo para aplicação da sensibilidade mista \mathcal{H}_∞ .

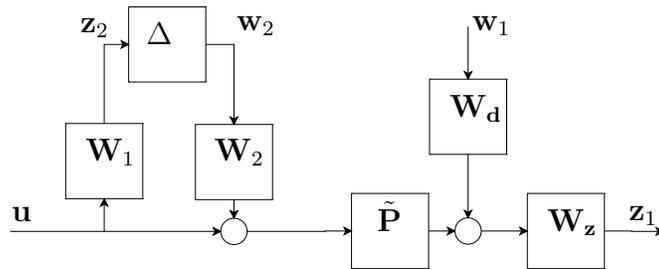


Figura 4.5: Exemplo de colocação de filtros de ponderação e filtros associados à incerteza.

um distúrbio w_1 (filtro W_d) e a faixa de frequência do sinal de desempenho z_1 (W_z). Há filtros também para a incerteza (W_1 e W_2).

Para essa configuração, a matriz de transferência com os filtros é dada por

$$\mathbf{F}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{z_1 w_1} & \mathbf{F}_{z_1 w_2} & \mathbf{F}_{z_1 u} \\ \mathbf{F}_{z_2 w_1} & \mathbf{F}_{z_2 w_2} & \mathbf{F}_{z_2 u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_z \mathbf{W}_d & \mathbf{W}_z \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{W}_2 & \mathbf{W}_z \tilde{\mathbf{P}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{W}_1 \end{bmatrix}.$$

Isso pode ser obtido por inspeção na Figura 4.5 de cada par de entrada e saída da matriz de transferência usando a linearidade do sistema.

Os filtros de ponderação enfatizam certos comportamentos desejados. Por exemplo, se se deseja minimizar a resposta em frequência da saída de desempenho de um sistema controlado em uma faixa limitada a uma certa frequência, esta saída deve ser intermediada por um filtro passa

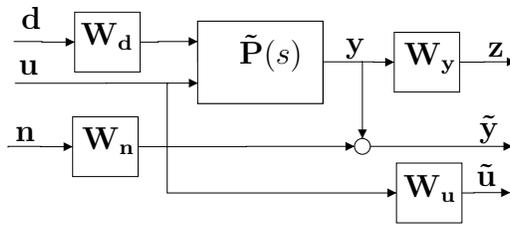


Figura 4.6: Conexões dos filtros usados para o projeto de controle.

baixa.

De maneira similar, é comum colocar o sinal de controle entre os sinais de desempenho com um filtro passa alta. Isso ressalta as altas frequências do sinal de controle na saída, forçando o controlador projetado a possuir um comportamento de saída mais relevante em frequências mais baixas.

Evidentemente as frequências determinadas como baixa ou alta dependem de cada problema e esse parâmetro, bem como a ordem do filtro usado são escolhas de projeto frequentemente dependentes de tentativa e erro.

4.6 Filtros de ponderação usados no projeto

Neste trabalho, estudam-se projetos de controle \mathcal{H}_∞ usando como sistema as plantas aumentadas com os filtros de ponderação e de incerteza, chamadas genericamente de $F(s)$.

O esquema de utilização dos filtros é mostrado na Figura 4.6.

O filtro W_d contém uma especificação da região em frequência em que o sinal de distúrbio é maior, com a banda de passagem compatível com essa região. O mesmo vale para o filtro W_n no caso do sinal de ruído.

Os filtros W_y e W_u têm a função de “filtros inversos”. Eles têm a banda de passagem posicionada na região em que não se deseja que seus respectivos sinais existam no projeto final, porque eles estão na saída da malha fechada. Assim, o controlador projetado (uma vez que esses filtros estão posicionados na saída) será gerado de forma a minimizar esses sinais com maior peso nas regiões de frequência em que os filtros possuem maiores valores.

Ainda, o filtro W_y possui a função de limitar a região em que a planta é conhecida. Ou seja, sua banda de rejeição encobre os modos não modelados do sistema, sendo responsável pela incerteza dinâmica. O filtro W_u , ao limitar a frequência do sinal de controle, ajuda a fornecer estabilidade ao controlador. Isso porque a limitação em frequência no sinal de controle impede banda de passagem infinita, característica de um sistema instável. Ao se limitar sua frequência também se viabilizam implementar atuadores para o controle com velocidades de resposta factíveis.

Nos exemplos a seguir foi usado um modelo padronizado para os filtros apresentado em [47].

Para um filtro passa baixa:

$$W(s) = \left(\frac{s \sqrt[k]{M} + \omega_c}{s + \omega_c \sqrt[k]{\epsilon}} \right)^k,$$

e para um filtro passa alta

$$W(s) = \left(\frac{s + \omega_c \sqrt[k]{M}}{\sqrt[k]{\epsilon} s + \omega_c} \right)^k.$$

Nessa definição ϵ representa o ganho na rejeição, M representa o ganho na passagem, ω_c é frequência de cruzamento com ganho unitário (ou 0 dB) e k é a ordem do filtro. Apenas filtros passa alta e passa baixa são contemplados por essas definições, os únicos tipos usados nos exemplos deste trabalho.

4.7 Projeto de controle robusto com filtros de ponderação

Usando os conceitos desenvolvidos até aqui, pode-se escrever o problema de projeto de controle \mathcal{H}_∞ usando filtros de ponderação como um problema de otimização convexa.

Projeto 2 (\mathcal{H}_∞ usando filtros de ponderação). *Para o projeto, escolhem-se os filtros de acordo com os critérios da Seção 4.6. Monta-se o sistema linear concatenando a planta original com os filtros, como na Figura 4.6.*

Em seguida, realiza-se o projeto \mathcal{H}_∞ usual, do Projeto 1. Se o resultado for satisfatório do ponto de vista de atenuação, ordem do controlador e robustez, o projeto está terminado. Se não, mudam-se os parâmetros dos filtros e se repete o projeto.

4.8 Projeto de controle robusto com incerteza politópica

Se as incertezas do sistema forem descritas na forma de valores extremos para as matrizes do sistema, então se escreve um sistema para cada extremo, e se tem a representação politópica.

Projeto 3 (\mathcal{H}_∞ com incerteza politópica). *Para cada sistema extremo i com as matrizes de estado $(\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_{1i}, \mathbf{B}_{2i}, \mathbf{C}_{1i}, \mathbf{C}_{2i}, \mathbf{D}_{12i}, \mathbf{D}_{21i})$ escreve-se uma restrição dada por (4.2) e com o controlador determinado pelas mesmas expressões apresentadas no Projeto 1 em (2.14).*

Desse modo, tem-se o problema convexo:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && \gamma \\ & \text{sujeito a} && (4.2) \text{ para cada } i. \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{bmatrix}
\mathbf{A}_i \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{A}_i^T + \mathbf{B}_{2i} \hat{\mathbf{C}} + \hat{\mathbf{C}}^T \mathbf{B}_{2i}^T & \hat{\mathbf{A}}^T + \mathbf{A}_i + \mathbf{B}_{2i} \hat{\mathbf{D}} \mathbf{C}_{2i} & \mathbf{B}_{1i} + \mathbf{B}_{2i} \hat{\mathbf{D}} \mathbf{D}_{21i} & \mathbf{X} \mathbf{C}_{1i}^T + \hat{\mathbf{C}}^T \mathbf{D}_{12i}^T \\
\hat{\mathbf{A}} + \mathbf{A}_i^T + \mathbf{C}_{2i}^T \hat{\mathbf{D}}^T \mathbf{B}_{2i}^T & \mathbf{A}_i^T \mathbf{Y} + \mathbf{Y} \mathbf{A}_i + \hat{\mathbf{B}} \mathbf{C}_{2i} + \mathbf{C}_{2i} \hat{\mathbf{B}}^T & \mathbf{Y} \mathbf{B}_{1i} + \hat{\mathbf{B}} \mathbf{D}_{21i} & \mathbf{C}_{1i}^T + \mathbf{C}_{2i}^T \hat{\mathbf{D}}^T \mathbf{D}_{21i}^T \\
\mathbf{B}_{1i}^T + \mathbf{D}_{21i}^T \hat{\mathbf{D}}^T \mathbf{B}_{2i}^T & \mathbf{B}_{1i}^T \mathbf{Y} + \mathbf{D}_{21i}^T \hat{\mathbf{B}}^T & -\gamma \mathbf{I} & \mathbf{D}_{11i}^T + \mathbf{D}_{21i}^T \hat{\mathbf{D}}^T \mathbf{D}_{21i}^T \\
\mathbf{C}_{1i} \mathbf{X} + \mathbf{D}_{21i} \hat{\mathbf{C}} & \mathbf{C}_{1i} + \mathbf{D}_{21i} \hat{\mathbf{D}} \mathbf{C}_{2i} & \mathbf{D}_{11i} + \mathbf{D}_{21i} \hat{\mathbf{D}} \mathbf{D}_{21i} & -\gamma \mathbf{I}
\end{bmatrix} < 0 \quad (4.2)$$

4.9 Comentários

Neste capítulo apresentaram-se formas de representação de incertezas visando ao projeto de controladores. Considerando o problema da limitação em frequência de certos sinais do sistema de controle em malha fechada foi apresentada a alternativa de empregar os filtros de ponderação.

Esses filtros (de incertezas e de ponderação) acrescentados ao modelo da planta a ser controlada são ferramentas de projeto. Uma vez obtido um controlador que satisfaça aos requisitos de malha fechada implicitamente impostos por esses filtros, o controlador deve ter seu desempenho testado com a planta original ou com um modelo do sistema real ainda mais complexo do que aquele utilizado para o projeto. Isso possibilita que a simulação apresente características mais próximas da realidade e se tenha o sistema de controle testado em um ambiente com incertezas.

Capítulo 5

Controle com restrições no domínio da frequência

5.1 Resumo

O Capítulo 4 apresentou a abordagem mais usual do controle robusto, utilizando especificações dinâmicas na forma de filtros de ponderação. Porém, a fim de evitar as dificuldades da especificação destes filtros e o aumento na ordem do modelo do controle imposto por eles, métodos recentes baseados em desigualdades matriciais lineares foram desenvolvidos. A idéia geral é permitir o projeto robusto com especificações de desempenho e robustez (principalmente do ponto de vista \mathcal{H}_∞) que variam com a frequência de uma maneira pré-estabelecida e embutida no algoritmo de projeto.

Uma vez que as especificações em frequência usualmente são conhecidas na forma de limitantes, é interessante que o método de projeto possa lidar diretamente com elas, evitando a abordagem indireta que as funções de ponderação permitem.

Os resultados deste capítulo são baseados em [22] e [20]. Nestes trabalhos, como em vários outros da mesma linha (ver [21, 23]) utiliza-se o lema de Kalman-Yakubovič-Popov, que permite escrever diversos critérios de controle na forma de restrições matriciais. Uma generalização deste resultado é utilizada neste trabalho para permitir critérios de controle com uma região de frequência limitada.

Esclarece-se que neste capítulo a letra \mathbf{P} é usada para representar uma matriz simétrica real, e não uma matriz de transferência.

5.2 Utilidade do método de restrições em frequência

No Capítulo 4 foi apresentado o método pelo qual se garante estabilidade robusta de um projeto de controle com especificações de incerteza que variam com a frequência no sentido da norma \mathcal{H}_∞ . Neste capítulo é mostrado como as especificações em faixas de frequência diferentes para a norma podem ser escritas diretamente sem o uso de filtros de ponderação.

A aplicação no contexto de incertezas e controle robusto é a de substituir os filtros usados

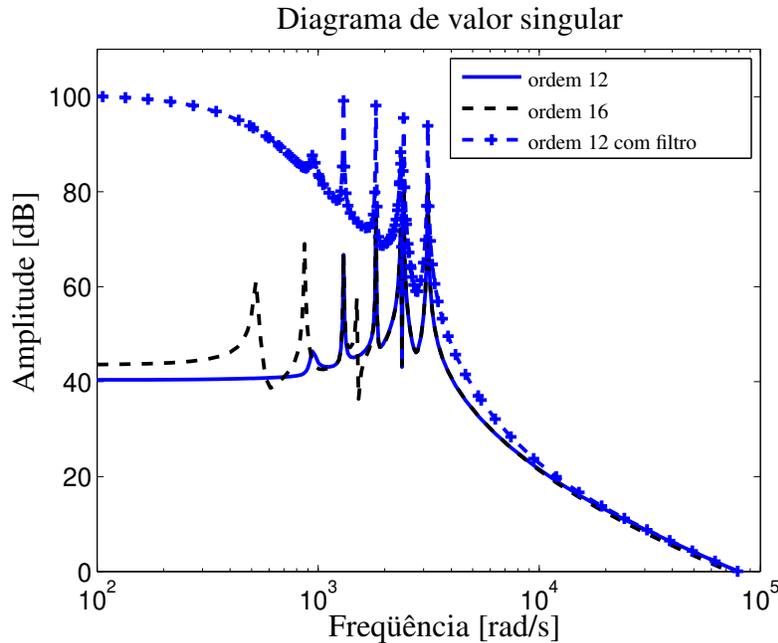


Figura 5.1: Uso do filtro de ponderação para contemplar a incerteza de baixa frequência entre o modelo de ordem 12 (usado para projeto) e o modelo de ordem 16. Trata-se de uma viga engastada, apresentada no Apêndice A.

para levar em conta a incerteza dinâmica na forma de restrições de projeto. Ou seja, para o projeto de um controlador robusto na forma padrão da Figura 4.2 não há necessidade de filtros posicionados como na Figura 4.3. Se se deseja garantir uma limitação da norma \mathcal{H}_∞ de um sistema apenas para frequências acima de um certo valor, isso corresponde a ajustar um filtro com essa frequência como banda de passagem e garantir uma norma \mathcal{H}_∞ para o critério de robustez assim obtido.

A diferença entre o tratamento de incertezas por filtros e por desigualdades em frequência é ilustrada pela comparação entre as figuras 5.1 e 5.2. A substituição de filtros por desigualdades em frequência simplifica o projeto robusto mas é insensível a especificações de forma na frequência. Ou seja, se se deseja garantir variações contínuas na frequência (no caso de projeto com filtro de desempenho), a técnica dos filtros pode se revelar melhor, garantindo que a ordem do controlador projetado não seja um fator limitante.

Na Figura 5.1, o filtro de ponderação aplicado à planta de ordem 12 encobre a incerteza dinâmica (modos de vibração não modelados) em relação ao modelo de ordem 16. A garantia da limitação da norma sobre esse modelo ponderado garante robustez à sua diferença em relação ao modelo mais completo. A Figura 5.2 apresenta uma limitação direta para a variação do modelo, sem acrescentar uma função à planta de ordem 12, à maneira das restrições em frequência.

Usando os resultados do lema generalizado de Kalman-Yakubovič-Popov, apresentados a seguir, cria-se o critério de robustez para o qual se deseja minimizar a norma sem usar funções de

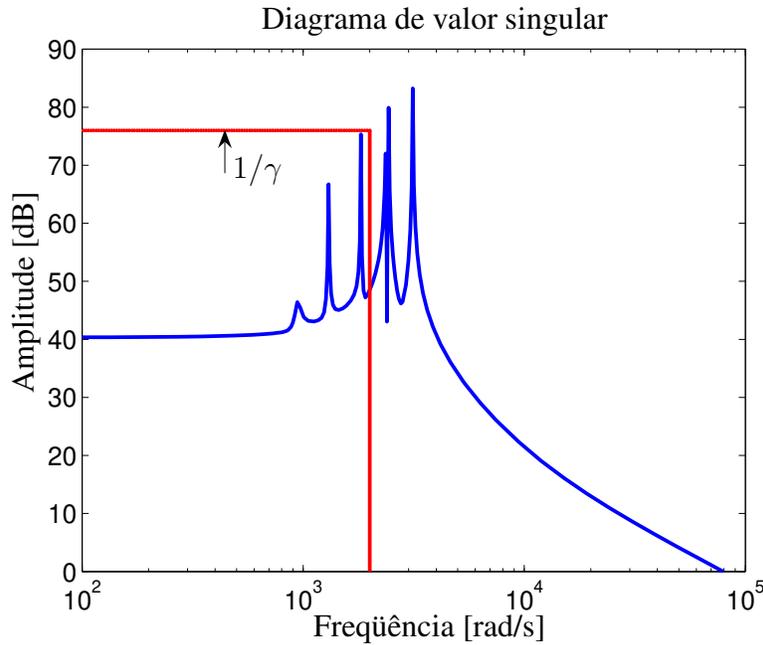


Figura 5.2: Especificação de uma desigualdade em freqüência para incluir a incerteza de baixa freqüência entre o modelo considerado (ordem 12) e o modelo mais próximo da realidade (ordem 16). O modelo é de uma viga engastada e é apresentado no Apêndice A.

ponderação. A restrição matricial obtida depende diretamente da freqüência de corte e se impõe uma limitação em norma apenas para as freqüências a partir do valor escolhido, por exemplo.

As vantagens evidentes dessa abordagem são: obter o controlador projetado da mesma ordem da planta (e não a ordem aumentada pelos filtros) e a especificação direta do comportamento em freqüência, sem o processo iterativo e longo de ajuste de filtros de ponderação.

De um outro ponto de vista, isso significa uma menor ordem do controlador, o que facilita sua implementação em muitos casos. Porém, isso também significa que o controlador possui uma distinção menos precisa das freqüências próximas. O controlador como um sistema linear, possui um comportamento de resposta em freqüência que, para variar bruscamente de uma freqüência para outra próxima, requer um modelo complexo, de ordem elevada. Assim, um controlador projetado com filtros de ponderação, principalmente com filtros de ordem elevada, é potencialmente capaz de produzir um sistema em malha fechada que separe freqüências próximas no sentido de não afetar uma resposta em uma certa faixa, mas reduzindo outra.

No caso de controle de vibração, essa característica não se configura em uma limitação, pois sempre se deseja minimizar a resposta e a especificação em freqüências não tem a função de manter a resposta original (sem controle) inalterada nas faixas de freqüência não restritas.

A seguir apresentam-se os resultados matemáticos relevantes do lema de Kalman-Yakubovič-Popov e as passagens que convertem as retrições matriciais que esses resultados produzem em

desigualdades matriciais para o projeto usando algoritmos da programação semidefinida.

5.3 Lema de Kalman-Yakubovič-Popov (KYP)

O lema de Kalman-Yakubovič-Popov (KYP) original pode ser escrito como segue, aplicado ao sistema dinâmico $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$.

Lema 3 (KYP, [20]). *Dadas as matrizes de estado \mathbf{A} e \mathbf{B} e uma matriz hermitiana Θ , a desigualdade em frequência*

$$\begin{bmatrix} (j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}^* \Theta \begin{bmatrix} (j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

é válida se e somente se

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \Theta < 0$$

admitir uma solução hermitiana para \mathbf{P} .

O lema de KYP torna possível converter uma desigualdade válida para todos os valores em frequência em uma condição de existência independente da frequência, que pode ser avaliada apenas com as matrizes de estado. Dessa forma, o lema é usado para obter restrições do tipo desigualdade matricial linear para problemas de síntese e análise de controle quando a restrição possui uma definição no domínio da frequência.

Se se supõe

$$\Theta = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}^* \Xi \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix},$$

tem-se o corolário do lema de KYP a seguir.

Corolário 1. *Dadas as matrizes de estado \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} e \mathbf{D} e uma matriz hermitiana Ξ , a desigualdade em frequência*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}(j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}^* \Xi \begin{bmatrix} \mathbf{C}(j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

é válida se e somente se

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}^* \Xi \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (5.1)$$

admitir uma solução hermitiana para \mathbf{P} .

Esse corolário facilita a especificação de critérios em frequência sobre a saída do sistema.

Por exemplo, o caso da limitação da norma \mathcal{H}_∞ de uma função de transferência $\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$ pode ser convertido em uma desigualdade matricial usando o lema de KYP se for garantido

$$\|\mathbf{H}(s)\|_\infty < \gamma, \quad (5.2)$$

que é equivalente a

$$\mathbf{H}^*(s)\mathbf{H}(s) < \gamma^2\mathbf{I} \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (5.3)$$

Essa equivalência entre (5.2) e (5.3) pode ser confirmada sabendo que os autovalores de uma matriz $\mathbf{S} + \alpha\mathbf{I}$ são os autovalores de \mathbf{S} somados de α . Logo, o maior autovalor de $\mathbf{H}^*(s)\mathbf{H}(s) - \gamma^2\mathbf{I}$ é o maior autovalor de $\mathbf{H}^*(s)\mathbf{H}(s)$ subtraído de γ^2 . A definição de valor singular diz que o maior valor singular de \mathbf{H} é o maior autovalor de $\mathbf{H}^*(s)\mathbf{H}(s)$ ao quadrado. De (2.2) sabe-se que a norma \mathcal{H}_∞ é obtida pelo máximo na frequência do maior valor singular. Assim, pode-se escrever $\mathbf{H}^*(s)\mathbf{H}(s) < \gamma^2\mathbf{I}$ para qualquer frequência ($s = j\omega$) inclusive para a frequência em que a resposta em frequência é máxima e se tem o valor exato na norma \mathcal{H}_∞ .

Aplicando algumas transformações em (5.3), tem-se,

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^*(s)\mathbf{H}(s) - \gamma^2\mathbf{I} &< 0 \\ \begin{bmatrix} \mathbf{H}(j\omega) \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} \mathbf{H}(j\omega) \\ -\gamma^2\mathbf{I} \end{bmatrix} &< 0 \\ \begin{bmatrix} \mathbf{H}(j\omega) \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\gamma^2\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H}(j\omega) \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} &< 0 \\ \begin{bmatrix} \mathbf{H}(j\omega) \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}^* \Xi \begin{bmatrix} \mathbf{H}(j\omega) \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} &< 0, \end{aligned}$$

em que

$$\Xi = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\gamma^2\mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

Usando o lema de KYP (e lembrando que as matrizes de estado são reais), a Desigualdade

(5.1) pode ser aplicada de modo que

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \\
\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} & \mathbf{P} \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T \mathbf{P} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T \mathbf{C} & \mathbf{C}^T \mathbf{D} \\ \mathbf{D}^T \mathbf{C} & \mathbf{D}^T \mathbf{D} - \gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \\
\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} & \mathbf{P} \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T \mathbf{P} & -\gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T \mathbf{C} & \mathbf{C}^T \mathbf{D} \\ \mathbf{D}^T \mathbf{C} & \mathbf{D}^T \mathbf{D} \end{bmatrix} < 0 \\
\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} & \mathbf{P} \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T \mathbf{P} & -\gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T \\ \mathbf{D}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} < 0 \\
\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} & \mathbf{P} \mathbf{B} & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{B}^T \mathbf{P} & -\gamma^2 \mathbf{I} & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0,
\end{aligned}$$

em que foi usado o lema de Schur (ver [5]). Nota-se que foi obtida a restrição que garante a limitação da norma \mathcal{H}_∞ por γ . Essa restrição coincide com a obtida no Capítulo 2 com o Lema do Limite Real. É interessante notar que a estabilidade do sistema considerado está contemplada do ponto de vista de Lyapunov, pois para que essa matriz seja negativo-definida, o primeiro bloco também é, ou seja,

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} < 0,$$

desde que se garanta $\mathbf{P} > 0$ concomitantemente.

Exemplo 9

Usando o lema de KYP, outras formas de restrição podem ser contempladas com diferentes matrizes Ξ . O caso da análise positivo-real também pode ser usado como exemplo. Em uma série de aplicações de controle é interessante garantir que a resposta em frequência de um sistema esteja limitada ao semiplano complexo direito. Isso é equivalente aos conceitos de hiper-estabilidade (ver [15]) e passividade (ver [37]) e é garantido pelo chamado lema positivo-real. Porém, esse resultado pode ser visto como um caso particular do lema de KYP.

A positividade real é garantida quando $\text{Re}(\mathbf{H}(j\omega)) > 0 \forall \omega \in \mathbb{R}$, o que equivale a

$$\mathbf{H}(j\omega) + \mathbf{H}^*(j\omega) > 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

O sistema deve ter números iguais de entradas e saídas para que isso seja válido. De outra forma,

não seria possível somar $\mathbf{H}(j\omega) + \mathbf{H}^*(j\omega)$. Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(j\omega) + \mathbf{H}^*(j\omega) &> 0 \\ -\mathbf{H}(j\omega) - \mathbf{H}^*(j\omega) &< 0 \\ \begin{bmatrix} \mathbf{H}(j\omega) \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} -\mathbf{I} \\ -\mathbf{H}(j\omega) \end{bmatrix} &< 0 \\ \begin{bmatrix} \mathbf{H}(j\omega) \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H}(j\omega) \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} &< 0. \end{aligned}$$

Ou seja, basta escolher

$$\Xi = \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix}$$

para que o lema de KYP se converta no resultado do lema positivo-real:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} & \mathbf{P} \mathbf{B} - \mathbf{C}^T \\ \mathbf{B}^T \mathbf{P} - \mathbf{C} & -\mathbf{D}^T - \mathbf{D} \end{bmatrix} < 0.$$

Como o sistema tem números iguais de entradas e saídas, é possível somar $\mathbf{D}^T + \mathbf{D}$.

Outras regiões em frequência podem ser especificadas usando diferentes matrizes Ξ . O produto

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}(j\omega) \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}^* \Xi \begin{bmatrix} \mathbf{H}(j\omega) \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

permite especificar regiões quadráticas sobre $\mathbf{H}(j\omega)$. Ou seja, regiões quaisquer que possam ser escritas como funções quadráticas e complexas da função de transferência, como no exemplo a seguir.

Exemplo 10

Considerando por exemplo o caso de uma entrada e uma saída e a restrição de que o diagrama de

Nyquist do sistema pertença a um círculo de raio r e centro em H_c .

$$\begin{aligned}
|H(j\omega) - H_c|^2 &< r^2 \\
(H - H_c)^*(H - H_c) - r^2 &< 0 \\
H^*H - H^*H_c - H_c^*H + H_c^*H_c - r^2 &< 0 \\
\begin{bmatrix} H \\ 1 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} H - H_c \\ -H_c^*H + |H_c|^2 - r^2 \end{bmatrix} &< 0 \\
\begin{bmatrix} H \\ 1 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 1 & -H_c \\ -H_c^* & |H_c|^2 - r^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ 1 \end{bmatrix} &< 0
\end{aligned}$$

Para essa restrição utiliza-se a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -H_c \\ -H_c^* & |H_c|^2 - r^2 \end{bmatrix}.$$

Em [20] apresenta-se como escolher matrizes Ξ de modo a especificar regiões cônicas pré-estabelecidas para o caso de uma entrada e uma saída.

5.4 Lema generalizado de Kalman-Yakubovič-Popov (GKYP)

Para escrever o lema GKYP será definido o conjunto:

$$\Lambda(\Phi, \Psi) = \{s \in \mathbb{C} \mid \sigma(s, \Phi) = 0, \sigma(s, \Psi) \geq 0\},$$

em que

$$\sigma(\Gamma, \Sigma) = \begin{bmatrix} \Gamma \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}^* \Sigma \begin{bmatrix} \Gamma \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

Esse conjunto pode ser convertido em diversas especificações de região de frequência escolhendo convenientemente as matrizes Φ e Ψ . Por exemplo, para que o conjunto Λ do domínio complexo s represente toda a resposta em frequência ajusta-se a matriz Φ para satisfazer

$$\text{Re}(s) = 0.$$

Isso equivale a resposta em frequência porque $s = j\omega$. A matriz Φ considerada neste trabalho é a mesma para todos os problemas, pois são considerados apenas sistemas em tempo contínuo.

Assim,

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re}(s) &= 0 \\
 s + s^* &= 0 \\
 \begin{bmatrix} s \\ 1 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} &= 0 \\
 \begin{bmatrix} s \\ 1 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ 1 \end{bmatrix} &= 0,
 \end{aligned}$$

em que se tem

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz Ψ contém a informação da região de frequência de interesse. Os casos possíveis são: todas as frequências, baixa frequência, alta frequência e média frequência (com limitantes inferior e superior).

Para que se tenha todo o eixo $j\omega$ a matriz Ψ é simplesmente a matriz nula $\mathbf{0}$ de dimensão 2×2 . No caso de baixa frequência, ou seja, mapear a resposta com a frequência limitada por um valor positivo, $|\omega| \leq \omega_b$, Ψ pode ser encontrada pelos seguintes passos:

$$\begin{aligned}
 |\omega| &\leq \omega_b \\
 \omega^2 &\leq \omega_b^2 \\
 \omega^2 - \omega_b^2 &\leq 0 \\
 -\omega^2 + \omega_b^2 &\geq 0 \\
 -\omega^2 + \omega_b^2 + j\omega - j\omega &\geq 0 \\
 \begin{bmatrix} j\omega \\ 1 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} -j\omega + 1 \\ j\omega + \omega_b^2 \end{bmatrix} &\geq 0 \\
 \begin{bmatrix} j\omega \\ 1 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & \omega_b^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j\omega \\ 1 \end{bmatrix} &\geq 0 \\
 \sigma(j\omega, \Psi) &\geq 0.
 \end{aligned}$$

Assim, para que o conjunto Λ mapeie a resposta em frequência até uma frequência ω_b , escolhem-se as matrizes

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Psi = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & \omega_b^2 \end{bmatrix}.$$

O mesmo raciocínio pode ser aplicado para os casos de alta (limitada pela frequência ω_a) e média frequência (limitada por ω_1 e ω_2 , com $\omega_2 > \omega_1$).

Para a limitação em baixa frequência,

$$\begin{aligned}
 |\omega| &\geq \omega_a \\
 \omega^2 &\geq \omega_a^2 \\
 \omega^2 - \omega_a^2 &\geq 0 \\
 \omega^2 - \omega_a^2 + j\omega - j\omega &\geq 0 \\
 \begin{bmatrix} j\omega \\ 1 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} j\omega + 1 \\ j\omega - \omega_a^2 \end{bmatrix} &\geq 0 \\
 \begin{bmatrix} j\omega \\ 1 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\omega_a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j\omega \\ 1 \end{bmatrix} &\geq 0 \\
 \sigma(j\omega, \Psi) &\geq 0.
 \end{aligned}$$

E neste caso,

$$\Psi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\omega_a^2 \end{bmatrix}.$$

Para limitação em uma faixa, nota-se que a desigualdade quadrática $(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2) \leq 0$ equivale a $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$, se $\omega_2 \geq \omega_1$.

$$\begin{aligned}
 (\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2) &\leq 0 \\
 \omega^2 - (\omega_1 + \omega_2)\omega + \omega_1\omega_2 &\leq 0 \\
 -\omega^2 + \omega_c\omega + \omega_c\omega - \omega_1\omega_2 &\geq 0 \\
 \begin{bmatrix} j\omega \\ 1 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} -j\omega + j\omega_c \\ \omega\omega_c - \omega_1\omega_2 \end{bmatrix} &\geq 0 \\
 \begin{bmatrix} j\omega \\ 1 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} -1 & j\omega_c \\ -j\omega_c & -\omega_1\omega_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j\omega \\ 1 \end{bmatrix} &\geq 0 \\
 \sigma(j\omega, \Psi) &\geq 0,
 \end{aligned}$$

para a qual

$$\Psi = \begin{bmatrix} -1 & j\omega_c \\ -j\omega_c & -\omega_1\omega_2 \end{bmatrix},$$

definindo $\omega_c = (\omega_1 + \omega_2)/2$.

Pode-se verificar também que no caso em que se deseja uma especificação rejeitando uma faixa de frequência, ou seja, válida em todo o eixo exceto entre dois valores finitos, pode-se usar o

oposto da matriz Ψ associada a uma faixa.

A partir desses fundamentos, o lema GKYP pode ser apresentado.

Lema 4 (GKYP, [20]). *Dadas as matrizes de estado \mathbf{A} e \mathbf{B} e as matrizes hermitianas Θ , Φ e Ψ , a desigualdade*

$$\begin{bmatrix} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}^* \Theta \begin{bmatrix} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0, \quad \forall s \in \Lambda(\Phi, \Psi)$$

é válida se e somente se existirem $\mathbf{Q} > 0$ e \mathbf{P} matrizes hermitianas tais que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^* (\Phi \otimes \mathbf{P} + \Psi \otimes \mathbf{Q}) \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \Theta < 0.$$

A especificação de uma região de frequência está incluída na matriz Ψ (assim como a restrição de resposta em frequência contínua está na matriz Φ). Determinando-se tais matrizes e especificando o tipo de restrição nessa região de frequência, através de Ξ , pode-se aplicar o lema GKYP e obter uma desigualdade matricial simples, independente da variável ω , à semelhança do lema de KYP.

Similarmente ao lema de KYP, este lema admite um corolário imediato para que a restrição seja dada sobre a função de transferência $\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$.

Corolário 2 (GKYP). *Dadas matrizes de estado \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} e \mathbf{D} e matrizes hermitianas Ξ , Φ e Ψ , a desigualdade*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}^* \Xi \begin{bmatrix} \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0, \quad \forall s \in \Lambda(\Phi, \Psi)$$

é válida se e somente se existirem $\mathbf{Q} > 0$ e \mathbf{P} matrizes hermitianas tais que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^* (\Phi \otimes \mathbf{P} + \Psi \otimes \mathbf{Q}) \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}^* \Xi \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0.$$

5.5 Realimentação de saída com restrições em frequência

O lema GKYP é uma ferramenta que permite construir problemas de projeto de controladores com restrições em frequência. Da mesma forma que o lema de KYP leva à condição para o controlador \mathcal{H}_∞ para todas as frequências, usando o lema GKYP com um conjunto Λ particular, tem-se uma condição para projeto com norma \mathcal{H}_∞ limitada (ou minimizada) apenas para a região especificada. Isso pode ser visto como uma forma de levar em conta aspectos de incertezas dinâmicas do

problema.

Em ambos os casos, é usual aplicar uma série de transformações matemáticas sobre a restrição obtida para torná-la linear nas variáveis matriciais, viabilizando a aplicação dos algoritmos de solução de desigualdades matriciais lineares. Esse conjunto de transformações para o caso \mathcal{H}_∞ padrão foi mostrado no Capítulo 2. Salienta-se que com diferentes matrizes Ξ são encontradas restrições para diferentes projetos além do \mathcal{H}_∞ . Toda a argumentação usada nesta seção para o problema de projeto é baseada nos trabalhos [20] e [22].

5.5.1 Aplicação a um sistema em malha fechada

Para a aplicação do lema GKYP consideram-se as matrizes do sistema em malha fechada (usando as matrizes de estado e do controlador apresentadas no Capítulo 2) transcritas a seguir:

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{D}_c\mathbf{C}_2 & \mathbf{B}_2\mathbf{C}_c & \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2\mathbf{D}_c\mathbf{D}_{21} \\ \mathbf{B}_c\mathbf{C}_2 & \mathbf{A}_c & \mathbf{B}_c\mathbf{D}_{21} \\ \hline \mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12}\mathbf{D}_c\mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{12}\mathbf{C}_c & \mathbf{D}_{11} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{D}_c\mathbf{D}_{21} \end{array} \right].$$

Considera-se então, para fins de projeto, a aplicação do lema GKYP sobre as matrizes de estado \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} e \mathbf{D} .

Define-se a função

$$\rho(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Sigma}) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{\Gamma} \end{bmatrix} \mathbf{\Sigma} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{\Gamma} \end{bmatrix}^*.$$

Comparando com a definição da função $\sigma(\cdot)$ em (5.4) verifica-se que elas são iguais invertendo os blocos do segundo argumento, pois

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{\Gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\Pi}_{22} & \mathbf{\Pi}_{12}^* \\ \mathbf{\Pi}_{12} & \mathbf{\Pi}_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{\Gamma} \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} \mathbf{\Pi}_{11} & \mathbf{\Pi}_{12} \\ \mathbf{\Pi}_{12}^* & \mathbf{\Pi}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

Dada sua estrutura em comparação com a função $\sigma(\cdot)$, o conjunto Λ pode ser redefinido como Λ_p

$$\Lambda_p(\mathbf{\Phi}_p, \mathbf{\Psi}_p) = \{s \in \mathbb{C} \mid \rho(s, \mathbf{\Phi}_p) = 0, \rho(s, \mathbf{\Psi}_p) \geq 0\} = \Lambda(\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Psi}).$$

Essas definições (ρ e Λ_p) fazem que as matrizes de dimensão 2×2 $\mathbf{\Phi}$ e $\mathbf{\Psi}$ tenham seus elementos trocados ao longo das diagonais e são chamadas $\mathbf{\Phi}_p$ e $\mathbf{\Psi}_p$. O mesmo acontece com os blocos da matriz Ξ , que passa a se chamar $\mathbf{\Pi}$ com essa mudança, isto é,

$$\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Pi}_{11} & \mathbf{\Pi}_{12} \\ \mathbf{\Pi}_{12}^* & \mathbf{\Pi}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Xi}_{22} & \mathbf{\Xi}_{12}^* \\ \mathbf{\Xi}_{12} & \mathbf{\Xi}_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{\Xi} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

$$\Phi_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Phi \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Psi_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Psi \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Essa transformação tem a função de simplificar as operações matriciais a seguir e evitar aplicações sucessivas da operação de transposição.

O Corolário 2 será convertido para uma forma a ser usada para transformá-lo em uma restrição convexa de projeto por realimentação de saída. Fazendo as substituições $\mathcal{X} = (\Phi \otimes \mathbf{P} + \Psi \otimes \mathbf{Q})$ e $\mathcal{X}_p = (\Phi_p \otimes \mathbf{P} + \Psi_p \otimes \mathbf{Q})$ para simplificar as passagens, podem ser feitas as operações mostradas em (5.5). As matrizes \mathbf{P} e \mathbf{Q} para \mathcal{X} e \mathcal{X}_p são diferentes, mas uma vez que o problema lida com condição de existência dessas matrizes, a desigualdade continua válida e as mesmas letras serão usadas.

Desse modo, transpondo e conjugando a última desigualdade em (5.5), pode-se escrever o seguinte corolário.

Corolário 3 (ver [22]). *Para o sistema em malha fechada $\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$ e matrizes hermitianas $\mathbf{\Pi}$, Φ_p e Ψ_p , a desigualdade*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{H}(s) \end{bmatrix} \mathbf{\Pi} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{H}(s) \end{bmatrix}^* < 0, \quad \forall s \in \Lambda_p(\Phi_p, \Psi_p)$$

é válida se e somente se existirem $\mathbf{Q} > 0$ e \mathbf{P} matrizes hermitianas tais que

$$\mathbf{F}\mathbf{\Omega}\mathbf{F}^* < 0,$$

sendo

$$\mathbf{F} := \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} & \mathbf{I} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{\Omega} := \begin{bmatrix} \Phi_p \otimes \mathbf{P} + \Psi_p \otimes \mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Pi} \end{bmatrix}.$$

Assim, dadas as matrizes que definem a região de frequência Φ e Ψ e o critério sobre o qual se deseja o controle, contido na matriz $\mathbf{\Pi}$, basta encontrar as matrizes \mathbf{P} e \mathbf{Q} e as matrizes de estado do controlador \mathbf{A}_c , \mathbf{B}_c , \mathbf{C}_c e \mathbf{D}_c de que são funções as matrizes de malha fechada \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} e \mathbf{D} .

5.5.2 Transformação em uma restrição convexa

O Corolário 3 não produz uma restrição convexa (matricial linear) para uma desigualdade em frequência. No que segue, aplicam-se transformações com a finalidade de conseguir uma restrição convexa.

A primeira transformação aplicada é o conhecido lema da projeção (ver [39]). Esse lema pode ser escrito como segue.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix}^* \chi \begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & I \end{bmatrix}^* \Xi \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} A^* \chi A + \chi & A^* \chi B \\ B^* \chi A & B^* \chi B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C^* \Xi_{11} C & C^* \Xi_{11} D + C^* \Xi_{12} \\ D^* \Xi_{11}^* C + \Xi_{12}^* C & D^* \Xi_{11} D + D^* \Xi_{12} + \Xi_{12}^* D + \Xi_{22} \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} A^* \chi A + \chi + C^* \Xi_{11} C & A^* \chi B + C^* \Xi_{11} D + C^* \Xi_{12} \\ B^* \chi A + D^* \Xi_{11}^* C + \Xi_{12}^* C & B^* \chi B + D^* \Xi_{11} D + D^* \Xi_{12} + \Xi_{12}^* D + \Xi_{22} \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} [I \ A^*] \chi_p [I \ A^T]^T + C^* \Xi_{11} C & [I \ A^*] \chi_p [0 \ B^T]^T + C^* \Xi_{11} D + C^* \Xi_{12} \\ [0 \ B^*] \chi_p [I \ A^T]^T + D^* \Xi_{11}^* C + \Xi_{12}^* C & [0 \ B^*] \chi_p [0 \ B^T]^T + D^* \Xi_{11} D + D^* \Xi_{12} + \Xi_{12}^* D + \Xi_{22} \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} I & A^* & 0 & C^* \\ 0 & B^* & I & D^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_p [I \ A^T]^T & \chi_p [0 \ B^T]^T \\ \Xi_{12}^* C & \Xi_{12}^* D + \Xi_{22} \\ \Xi_{11} C & \Xi_{12} + \Xi_{11} D \end{bmatrix} < 0 \quad (5.5)$$

$$\begin{bmatrix} I & A^* & 0 & C^* \\ 0 & B^* & I & D^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_p & 0 & 0 \\ 0 & \Xi_{22} & \Xi_{12}^* \\ 0 & \Xi_{12} & \Xi_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A & B \\ 0 & I \\ C & D \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} I & A^* & 0 & C^* \\ 0 & B^* & I & D^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_p & 0 \\ 0 & \Pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A & B \\ 0 & I \\ C & D \end{bmatrix} < 0.$$

Lema 5 (Projeção, [39]). *Para as matrizes Υ , Σ , \mathbf{J} e Λ , as condições*

$$\Upsilon + \Lambda^* \Sigma \mathbf{J} + (\Lambda^* \Sigma \mathbf{J})^* < 0$$

e

$$\Lambda^{*\perp} \Upsilon \Lambda^\perp < 0 \quad e \quad \mathbf{J}^{*\perp} \Upsilon \mathbf{J}^\perp < 0$$

são equivalentes.

O Lema 5 será usado para transformar o Corolário 3. Definindo

$$\mathbf{F}_A = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{I} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{F}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{D} \end{bmatrix},$$

nota-se que \mathbf{F} pode ser escrita como

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \mathbf{F}_A^{\perp*} [\mathbf{I} \ \mathbf{F}_B].$$

Supondo a existência de matrizes \mathbf{W} e \mathbf{R} escreve-se a seguinte desigualdade

$$[\mathbf{I} \ \mathbf{F}_B] \Omega [\mathbf{I} \ \mathbf{F}_B]^* < \mathbf{F}_A \mathbf{W} \mathbf{R} + (\mathbf{F}_A \mathbf{W} \mathbf{R})^*.$$

Aplicando o lema da projeção (Lema 5) com $\Lambda^* = -\mathbf{F}_A$, $\Upsilon = [\mathbf{I} \ \mathbf{F}_B]$, $\Sigma = \mathbf{W}$ e $\mathbf{R} = \mathbf{J}$ produz-se a equivalência do corolário a seguir.

Corolário 4 (ver [22]). *Dados o modelo de estados em malha fechada nas matrizes \mathbf{F}_A e \mathbf{F}_B , a matriz hermitiana Ω e duas matrizes \mathbf{W} e \mathbf{R} , as desigualdades simultâneas*

$$\mathbf{F} \Omega \mathbf{F}^* < 0 \tag{5.6}$$

e

$$\mathbf{R}^{\perp*} [\mathbf{I} \ \mathbf{F}_B] \Omega [\mathbf{I} \ \mathbf{F}_B]^* \mathbf{R}^\perp < 0, \tag{5.7}$$

são equivalentes a

$$[\mathbf{I} \ \mathbf{F}_B] \Omega [\mathbf{I} \ \mathbf{F}_B]^* < \mathbf{F}_A \mathbf{W} \mathbf{R} + (\mathbf{F}_A \mathbf{W} \mathbf{R})^*. \tag{5.8}$$

A Condição (5.8) foi produzida para que a aplicação do lema da projeção levasse à condição original de projeto (5.6). Sua aplicação produziu também a Condição (5.7). Assim, se forem

encontradas matrizes \mathbf{P} , \mathbf{Q} , \mathbf{W} , \mathbf{R} e matrizes de estado do controlador que satisfaçam (5.8), a condição original (5.6) está satisfeita, porém satisfazendo também (5.7), sendo uma restrição extra, que constitui um conservadorismo com relação ao projeto.

A equivalência entre (5.6) e (5.8) só seria exata se (5.7) estivesse obrigatoriamente satisfeita pela escolha de \mathbf{R} . Essa equivalência exata não é atingida. Porém, (5.7) é usada em [22] para obter uma matriz \mathbf{R} fixa antes do projeto que garante um conservadorismo tipicamente menor do que o obtido com uma matriz arbitrária.

Nesse ponto, substitui-se a condição de projeto (5.6) por (5.8). Nesta última, as matrizes acrescentadas \mathbf{W} e \mathbf{R} e mais uma transformação de congruência são usadas para converter o problema em uma forma linear.

Para tornar a Restrição (5.8) linear usa-se para a matriz \mathbf{W} a estrutura proposta em [12]:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & * \\ \mathbf{U} & * \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{W}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{V} \\ * & * \end{bmatrix}^* \quad (5.9)$$

A relação $\mathbf{W}\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{W} = \mathbf{I}$ permite encontrar os blocos preenchidos por * acima.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & (\mathbf{I} - \mathbf{X}\mathbf{Y}^*)\mathbf{V}^{-*} \\ \mathbf{U} & -\mathbf{U}\mathbf{Y}^*\mathbf{V}^{-*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}^* & (\mathbf{I} - \mathbf{Y}^*\mathbf{X})\mathbf{U}^{-1} \\ \mathbf{V}^* & -\mathbf{V}^*\mathbf{X}\mathbf{U}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

Ainda, será aplicada uma transformação de congruência \mathbf{T} que satisfaz com \mathbf{R} a restrição $\mathbf{R}\mathcal{T}^* = \mathbf{T}^*\mathcal{R}$, supondo a existência de uma matriz \mathcal{R} como condição, o que é abordado no final desta seção. As matrizes \mathbf{T} e \mathcal{T} são definidas como:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Y} & \mathbf{V} \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

$$\text{e} \quad \mathcal{T} = \text{diag}(\mathbf{T}, \mathbf{T}, \mathbf{I}).$$

Ao usar a transformação \mathcal{T} na Condição (5.8), tem-se

$$\begin{aligned} & [\mathbf{I} \ \mathbf{F}_B] \boldsymbol{\Omega} [\mathbf{I} \ \mathbf{F}_B]^* < \mathbf{F}_A \mathbf{W} \mathbf{R} + (\mathbf{F}_A \mathbf{W} \mathbf{R})^* \\ & [\mathcal{T} \ \mathcal{T} \mathbf{F}_B] \boldsymbol{\Omega} [\mathcal{T} \ \mathcal{T} \mathbf{F}_B]^* < \mathcal{T} \mathbf{F}_A \mathbf{W} \mathbf{R} \mathcal{T}^* + (\mathcal{T} \mathbf{F}_A \mathbf{W} \mathbf{R} \mathcal{T}^*)^* \\ & [\mathbf{I} \ \mathcal{T} \mathbf{F}_B] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi} \otimes \mathcal{T}_e \mathbf{P} \mathcal{T}_e^* + \boldsymbol{\Psi} \otimes \mathcal{T}_e \mathbf{Q} \mathcal{T}_e^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Pi} \end{bmatrix} [\mathbf{I} \ \mathcal{T} \mathbf{F}_B]^* < \mathcal{T} \mathbf{F}_A \mathbf{W} \mathbf{T}^* \mathcal{R} + (\mathbf{F}_A \mathbf{W} \mathbf{T}^* \mathcal{R})^* \\ & [\mathbf{I} \ \mathcal{B}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi} \otimes \mathcal{P} + \boldsymbol{\Psi} \otimes \mathcal{Q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Pi} \end{bmatrix} [\mathbf{I} \ \mathcal{B}]^* < \mathcal{A} \mathcal{R} + (\mathcal{A} \mathcal{R})^*, \end{aligned} \quad (5.11)$$

onde foram substituídos $\mathcal{A} = \mathcal{T}\mathbf{F}_A\mathbf{W}\mathbf{T}^*$, $\mathcal{B} = \mathcal{T}\mathbf{F}_B$, $\mathcal{P} = \mathcal{T}_e\mathbf{P}\mathcal{T}_e^*$ e $\mathcal{Q} = \mathcal{T}_e\mathbf{Q}\mathcal{T}_e^*$, com $\mathcal{T}_e = \text{diag}(\mathbf{T}, \mathbf{T})$.

Para que essa condição torne-se linear basta garantir então que os termos transformados \mathcal{A} e \mathcal{B} sejam lineares, uma vez que \mathcal{P} e \mathcal{Q} passam a ser variáveis da restrição e \mathcal{R} é assumida constante.

A transformação do termo $\mathcal{A} = \mathcal{T}\mathbf{F}_A\mathbf{W}\mathbf{T}^*$ será feita por partes, como mostrado a seguir.

$$\mathcal{T}\mathbf{F}_A = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{I} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}\mathbf{A} \\ -\mathbf{T} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix}.$$

O termo $\mathbf{T}\mathbf{A}$ foi desenvolvido em (5.12). A partir disso,

$$\mathcal{A} = \mathcal{T}\mathbf{F}_A\mathbf{W}\mathbf{T}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}_2\mathbf{H} & \mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{L}\mathbf{C}_2 \\ \mathbf{M} & \mathbf{Y}\mathbf{A} + \mathbf{G}\mathbf{C}_2 \\ -\mathbf{X} & -\mathbf{I} \\ -\mathbf{Z} & -\mathbf{Y} \\ \mathbf{C}_1\mathbf{X} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{H} & \mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12}\mathbf{L}\mathbf{C}_2 \end{bmatrix},$$

em que foram feitas as substituições

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{Y}\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{Y}\mathbf{B}_2\mathbf{D}_c\mathbf{C}_2\mathbf{X} + \mathbf{V}\mathbf{B}_c\mathbf{C}_2\mathbf{X} + \mathbf{Y}\mathbf{B}_2\mathbf{C}_c\mathbf{U} + \mathbf{V}\mathbf{A}_c\mathbf{U} \\ \mathbf{G} &= \mathbf{Y}\mathbf{B}_2\mathbf{D}_c + \mathbf{V}\mathbf{B}_c \\ \mathbf{H} &= \mathbf{D}_c\mathbf{C}_2\mathbf{X} + \mathbf{C}_c\mathbf{U} \\ \mathbf{L} &= \mathbf{D}_c \\ \mathbf{Z} &= \mathbf{Y}\mathbf{X} + \mathbf{V}\mathbf{U}. \end{aligned}$$

As quatro primeiras variáveis podem ser encontradas em uma mesma equação matricial como se mostra em (5.13).

Essas substituições tornam a restrição linear nas variáveis substituídas e permitem obter o controlador invertendo-as, através da equação matricial (5.14).

Para o termo $\mathcal{B} = \mathcal{T}\mathbf{F}_B$, tem-se

$$\mathcal{B} = \mathcal{T}\mathbf{F}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{D} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{TA} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Y} & \mathbf{V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}_1\mathbf{D}_c\mathbf{C}_2 & \mathbf{B}_2\mathbf{C}_c \\ \mathbf{B}_c\mathbf{C}_2 & \mathbf{A}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}_1\mathbf{D}_c\mathbf{C}_2 & \mathbf{B}_2\mathbf{C}_c \\ \mathbf{YA} + \mathbf{YB}_2\mathbf{D}_c\mathbf{C}_2 + \mathbf{VB}_c\mathbf{C}_2 & \mathbf{YB}_2\mathbf{C}_c\mathbf{VA}_c \end{bmatrix}. \\
\mathbf{WT}^* &= \begin{bmatrix} \mathbf{X} & (\mathbf{I} - \mathbf{XY}^*)\mathbf{V}^{-*} \\ \mathbf{U} & -\mathbf{UY}^*\mathbf{V}^{-*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{Y}^* \\ \mathbf{0} & \mathbf{V}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{I} \\ \mathbf{U} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \\
\mathcal{TF}_A\mathbf{WT}^* &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{D}_c\mathbf{C}_2 & \mathbf{B}_2\mathbf{C}_c \\ \mathbf{YA} + \mathbf{YB}_2\mathbf{D}_c\mathbf{C}_2 + \mathbf{VB}_c\mathbf{C}_2 & \mathbf{YB}_2\mathbf{C}_c\mathbf{VA}_c \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{Y} & -\mathbf{V} \\ \mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12}\mathbf{D}_c\mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{12}\mathbf{C}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{I} \\ \mathbf{U} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \tag{5.12} \\
\mathcal{TF}_A\mathbf{WT}^* &= \begin{bmatrix} \mathbf{AX} + \mathbf{B}_2\mathbf{D}_c\mathbf{C}_2\mathbf{X} + \mathbf{B}_2\mathbf{C}_c\mathbf{U} & \mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{D}_c\mathbf{C}_2 \\ \mathbf{YAX} + \mathbf{YB}_2\mathbf{D}_c\mathbf{C}_2\mathbf{X} + \mathbf{VB}_c\mathbf{C}_2\mathbf{X} + \mathbf{YB}_2\mathbf{C}_c\mathbf{U} + \mathbf{VA}_c\mathbf{U} & \mathbf{YA} + \mathbf{YA} + \mathbf{YB}_2\mathbf{D}_c\mathbf{C}_2 + \mathbf{VB}_c\mathbf{C}_2 \\ -\mathbf{X} & -\mathbf{I} \\ -\mathbf{YX} - \mathbf{VU} & -\mathbf{Y} \\ \mathbf{C}_1\mathbf{X} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{D}_c\mathbf{C}_2\mathbf{X} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{C}_c\mathbf{U} & \mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12}\mathbf{D}_c\mathbf{C}_2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{G} \\ \mathbf{H} & \mathbf{L} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{YAX} + \mathbf{YB}_2\mathbf{D}_c\mathbf{C}_2\mathbf{X} + \mathbf{VB}_c\mathbf{C}_2\mathbf{X} + \mathbf{YB}_2\mathbf{C}_c\mathbf{U} + \mathbf{VA}_c\mathbf{U} & \mathbf{YB}_2\mathbf{D}_c + \mathbf{VB}_c \\ \mathbf{D}_c\mathbf{C}_2\mathbf{X} + \mathbf{C}_c\mathbf{U} & \mathbf{D}_c \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{YAX} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{YB}_2\mathbf{D}_c\mathbf{C}_2\mathbf{X} + \mathbf{VB}_c\mathbf{C}_2\mathbf{X} + \mathbf{YB}_2\mathbf{C}_c\mathbf{U} + \mathbf{VA}_c\mathbf{U} & \mathbf{YB}_2\mathbf{D}_c + \mathbf{VB}_c \\ \mathbf{D}_c\mathbf{C}_2\mathbf{X} + \mathbf{C}_c\mathbf{U} & \mathbf{D}_c \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{YAX} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{V} & \mathbf{YB}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_c\mathbf{C}_2\mathbf{X} + \mathbf{A}_c\mathbf{U} & \mathbf{B}_c \\ \mathbf{D}_c\mathbf{C}_2\mathbf{X} + \mathbf{C}_c\mathbf{U} & \mathbf{D}_c \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{G} \\ \mathbf{H} & \mathbf{L} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{YAX} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{V} & \mathbf{YB}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_c & \mathbf{B}_c \\ \mathbf{C}_c & \mathbf{D}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_2\mathbf{X} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \tag{5.13}
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_c & \mathbf{B}_c \\ \mathbf{C}_c & \mathbf{D}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V} & \mathbf{YB}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{G} \\ \mathbf{H} & \mathbf{L} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{YAX} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_2\mathbf{X} & \mathbf{I} \end{bmatrix}^{-1}. \tag{5.14}$$

Desenvolvendo \mathbf{TB} ,

$$\mathbf{TB} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Y} & \mathbf{V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{21} \\ \mathbf{B}_c \mathbf{D}_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{21} \\ \mathbf{YB}_1 + \mathbf{YB}_2 \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{21} + \mathbf{VB}_c \mathbf{D}_{21} \end{bmatrix}.$$

Usando as mesmas substituições anteriores obtém-se:

$$\mathcal{B} = \mathcal{TF}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 \mathbf{L} \mathbf{D}_{21} \\ \mathbf{YB}_1 + \mathbf{GD}_{21} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_{11} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{L} \mathbf{D}_{21} \end{bmatrix}.$$

Assim, o problema de projeto de controle por realimentação de saída com faixa de frequência limitada pode ser resolvido através de um problema de desigualdade matricial linear em que a desigualdade a ser resolvida é (5.11), cujas variáveis são as matrizes reais \mathbf{M} , \mathbf{G} , \mathbf{H} , \mathbf{L} , \mathbf{X} , \mathbf{Y} , \mathbf{Z} e \mathbf{W} e as matrizes hermitianas \mathcal{P} e \mathcal{Q} , dado que $\mathcal{Q} > 0$. As variáveis \mathbf{V} e \mathbf{U} são quaisquer satisfazendo a relação $\mathbf{Z} = \mathbf{YX} + \mathbf{VU}$ e as matrizes de estado do controlador são encontradas pela Equação (5.14).

É necessário lembrar que a matriz \mathbf{R} , discutida em [22] e recomendada para o caso de o conjunto Λ_p ser todo o eixo de frequência (com $\epsilon > 0$ pequeno o suficiente para garantir estabilidade), é

$$\mathbf{R} = [\mathbf{I} \ \epsilon \mathbf{I} \ \mathbf{0}].$$

Para o caso de limitação entre duas frequências ω_1 e ω_2 , com $\omega_c = (\omega_1 + \omega_2)/2$ tem-se

$$\mathbf{R} = [\mathbf{I} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0}],$$

e para restrição em todo eixo exceto uma faixa entre ω_1 e ω_2 , tem-se

$$\mathbf{R} = [j\omega_c \mathbf{I} \ \mathbf{I} \ \mathbf{0}].$$

Para esses três casos a restrição $\mathbf{RT}^* = \mathbf{T}^* \mathcal{R}$ está satisfeita.

5.6 Controle multiobjetivo

Se há várias restrições em frequência diferentes no mesmo problema, o mesmo projeto pode ser aplicado usando a restrição matricial linear deduzida na seção anterior tantas vezes quantas desejado. Assim, para se restringir ou otimizar faixas particulares de frequência por critérios dife-

rentes, as faixas são especificadas por matrizes Φ_p e Ψ_p e as relações de entrada e saída sobre as quais elas se aplicam são especificadas pelas matrizes \mathbf{B}_1 , \mathbf{C}_1 , \mathbf{D}_{11} e \mathbf{D}_{12} .

Portanto, para o projeto de controle com várias restrições em regiões de frequência diferentes, basta resolver o conjunto de desigualdades (uma para cada índice k),

$$[\mathbf{I} \ \mathbf{B}_k] \begin{bmatrix} \Phi_k \otimes \mathcal{P}_k + \Psi_k \otimes \mathcal{Q}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Pi}_k \end{bmatrix} [\mathbf{I} \ \mathbf{B}_k]^* < \mathcal{A}_k \mathcal{R}_k + (\mathcal{A}_k \mathcal{R}_k)^* \quad (5.15)$$

nas variáveis \mathbf{X} , \mathbf{Y} , \mathbf{Z} , \mathbf{M} , \mathbf{G} , \mathbf{H} , \mathbf{L} , \mathcal{P}_k e \mathcal{Q}_k para cada restrição k , descrita por matrizes Φ_k , Ψ_k e $\mathbf{\Pi}_k$ e uma relação particular de entrada e saída dadas por matrizes \mathbf{B}_{1k} , \mathbf{C}_{1k} , \mathbf{D}_{11k} e \mathbf{D}_{12k} .

Assim, se se deseja minimizar a norma \mathcal{H}_∞ para uma faixa de frequência como único objetivo, escolhe-se a matriz $\mathbf{\Pi}$ conveniente (que depende do limitante para a norma, γ) e resolve-se o problema a seguir:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && \gamma \\ &\text{sujeito a} && (5.15), \end{aligned}$$

em que a Restrição (5.15) é única ($k = 1$ apenas).

Para minimizar simultaneamente em duas faixas de frequência, pode-se escolher um limitante para cada uma delas, ou o mesmo limitante γ . Ainda, ao se usar a norma \mathcal{H}_∞ como medida para as variações admissíveis do modelo e garantir robustez a perturbações (como explicitado na Seção 2.7), acrescenta-se um limitante particular (γ_0) para a faixa considerada e o par de entrada e saída no qual está modelada a incerteza (dado por matrizes \mathbf{B}_{1k} , \mathbf{C}_{1k} , \mathbf{D}_{11k} e \mathbf{D}_{12k} particulares) na forma de uma restrição como (5.15) garantindo esse limitante ($\gamma_0 < 1$).

Quando há mais de um objetivo de controle, optou-se neste trabalho por realizar uma combinação particular deles, simplesmente escrevendo a função de minimização como a soma de todos os objetivos. Isso corresponde a aplicar o mesmo peso a todos eles.

Usando essas idéias, o problema de projeto com restrições em frequência pode ser genericamente escrito como

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && \sum_k \gamma_k \\ &\text{sujeito a} && \text{uma restrição (5.15) para cada faixa de frequência.} \end{aligned} \quad (5.16)$$

Desse modo, podem ser considerados vários sinais de desempenho a ser otimizados usando vários limitantes γ_k .

5.7 Condição de estabilidade ou localização de pólos

O lema GKYP (assim como o KYP) não impõe a estabilidade ao sistema em malha fechada. É preciso incluir em qualquer projeto a condição de estabilidade na forma de uma restrição extra

como na seção anterior. Os exemplos simples usados neste capítulo para explicar os lemas possuem a estabilidade garantida pelo teorema de Lyapunov, bastando garantir a matriz da função de Lyapunov positiva definida. Isso ocorria devido à forma que a restrição matricial tomava com uma desigualdade de estabilidade do tipo $\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}$ no primeiro bloco.

A estabilidade é considerada aqui como um caso particular da alocação dos pólos de malha fechada. Deseja-se garantir que os pólos de malha estejam no interior de uma região dada por

$$\rho(s, \Phi_p) = \begin{bmatrix} 1 & s \end{bmatrix} \Phi_p \begin{bmatrix} 1 & s \end{bmatrix}^* < 0.$$

Para

$$\Phi_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

essa restrição corresponde a $\text{Re}(s) < 0$, ou seja, estabilidade. Para matrizes Φ_p diferentes são especificadas outras regiões para os pólos.

A desigualdade de Lyapunov para estabilidade pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} &< 0 \\ \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A} \end{bmatrix}^* &< 0 \\ \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \Phi_p \otimes \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A} \end{bmatrix}^* &= \rho(\mathbf{A}, \Phi_p \otimes \mathbf{P}) < 0. \end{aligned}$$

É útil notar que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A} \end{bmatrix}^\perp = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} p\mathbf{I} \\ q\mathbf{I} \end{bmatrix}^\perp = \begin{bmatrix} -q\mathbf{I} & p\mathbf{I} \end{bmatrix},$$

em que p e q são explicitados a seguir.

Usa-se o lema da projeção (Lema 5) com suas matrizes substituídas como

$$\Upsilon = -\mathbf{W}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} -q\mathbf{I} & p\mathbf{I} \end{bmatrix},$$

de modo que se tem a equivalência entre a condição de existência de \mathbf{W} e $\mathbf{P} > 0$ tais que

$$\Phi_p \otimes \mathbf{P} < \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{W} \begin{bmatrix} -q\mathbf{I} & p\mathbf{I} \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{W} \begin{bmatrix} -q\mathbf{I} & p\mathbf{I} \end{bmatrix} \right)^*$$

e as desigualdades

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \Phi_p \otimes \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A} \end{bmatrix}^* < 0 \quad \text{e} \\ \begin{bmatrix} p\mathbf{I} \\ q\mathbf{I} \end{bmatrix} \Phi_p \otimes \mathbf{P} \begin{bmatrix} p\mathbf{I} \\ q\mathbf{I} \end{bmatrix}^* < 0. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Porém, ao contrário do problema com a matriz \mathbf{R} apresentado na Seção 5.5.2, p e q podem ser escolhidos de modo que a Desigualdade (5.17) seja satisfeita para quaisquer Φ_p e \mathbf{P} hermitianas com $\mathbf{P} > 0$, ou seja,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} p\mathbf{I} & q\mathbf{I} \end{bmatrix} \Phi_p \otimes \mathbf{P} \begin{bmatrix} p\mathbf{I} & q\mathbf{I} \end{bmatrix}^* < 0 \\ \begin{bmatrix} p\mathbf{I} & q\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p\mathbf{I} & q\mathbf{I} \end{bmatrix}^* < 0 \\ \begin{bmatrix} p\mathbf{I} & q\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q^*\mathbf{P} & p^*\mathbf{P} \end{bmatrix}^* < 0 \\ (pq^* + qp^*)\mathbf{P} < 0 \\ pq^* + qp^* < 0 \\ \begin{bmatrix} p & q \end{bmatrix} \Phi_p \begin{bmatrix} p & q \end{bmatrix}^* < 0, \end{aligned}$$

com o Φ_p definida para estabilidade e sabendo que $\mathbf{P} > 0$.

Desse modo, produz-se o seguinte corolário:

Corolário 5 (ver [22]). *As seguintes afirmações são equivalentes para uma dada matriz de sistema \mathbf{A} :*

- *Existe $\mathbf{P} = \mathbf{P}^* > 0$ tal que $\rho(\mathbf{A}, \Phi_p \otimes \mathbf{P}) < 0$.*
- *Existem $\mathbf{W} = \mathbf{W}^*$ e $\mathbf{P} = \mathbf{P}^* > 0$ tais que*

$$\Phi_p \otimes \mathbf{P} < \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{W} \begin{bmatrix} -q\mathbf{I} & p\mathbf{I} \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{W} \begin{bmatrix} -q\mathbf{I} & p\mathbf{I} \end{bmatrix} \right)^*.$$

O Corolário 5 pode ser convertido em uma condição linear se \mathbf{W} for definida como em (5.9) e for usada a transformação de congruência $\mathcal{T}_e = \text{diag}(\mathbf{T}, \mathbf{T})$ com \mathbf{T} na forma (5.10). Obtêm-se as mesmas expressões que as obtidas para o projeto com a diferença de que a matriz $[\mathbf{A}^T \quad -\mathbf{I}]^T$ é igual a \mathbf{F}_A a menos do último bloco \mathbf{C} , ou seja,

$$\mathcal{J}\mathbf{F}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{I} \end{bmatrix},$$

com $\mathcal{J} = [\mathbf{I} \ \mathbf{0}]$. Assim tem-se

$$\mathcal{J} \mathcal{T} \mathbf{F}_A \mathbf{W} \mathbf{T}^* = \mathcal{T}_e \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{W} \mathbf{T}^*.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_e \Phi_p \otimes \mathbf{P} \mathcal{T}_e^* &< \mathcal{T}_e \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{W} \begin{bmatrix} -q\mathbf{I} & p\mathbf{I} \end{bmatrix} \mathcal{T}_e^* + \left(\mathcal{T}_e \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{W} \begin{bmatrix} -q\mathbf{I} & p\mathbf{I} \end{bmatrix} \mathcal{T}_e^* \right)^* \\ \Phi_p \otimes \mathcal{P}_e &< \mathcal{J} \mathbf{A} \mathbf{S} + (\mathcal{J} \mathbf{A} \mathbf{S})^*, \end{aligned}$$

em que $\mathbf{S} = [-q\mathbf{I} \ p\mathbf{I}]$.

Esta última condição é linear nas variáveis e permite escrever o corolário que inclui a restrição de estabilidade no projeto. Outras regiões para os pólos também podem ser especificadas usando outras matrizes Φ_p e \mathbf{S} .

Corolário 6 (ver [22]). *As seguintes restrições são equivalentes para matriz de sistema \mathbf{A} e dados Φ_p , p e q :*

- *Todos os pólos de \mathbf{A} estão contidos na região $\rho(s, \Phi_p) < 0$.*
- *Existe uma matriz hermitiana $\mathcal{P}_e > 0$ tal que*

$$\Phi_p \otimes \mathcal{P}_e < \mathcal{J} \mathbf{A} \mathbf{S} + (\mathcal{J} \mathbf{A} \mathbf{S})^*,$$

desde que $\mathbf{r}^* \Phi_p \mathbf{r} < 0$ com $\mathbf{r} = [p \ q]^T$.

5.8 Projeto de controle

Usando os resultados apresentados (mostrados em (5.16) e no Corolário 6) até aqui pode-se escrever o problema de projeto com restrições em frequência de uma forma convexa como segue.

Projeto 4 (\mathcal{H}_∞ pelo lema GKYP). *O problema é definido por especificações de restrições em frequência na forma de limites superior e inferior (podendo ser nulos ou infinitos) como ω_{1k} e ω_{2k} e uma matriz Ψ_k , com um k para cada restrição.*

Em cada k , se se tratar de uma restrição para garantir robustez, o correspondente valor γ_k é definido como uma constante que limita a incerteza. No caso de desempenho, γ_k é uma variável e a própria função objetivo a ser minimizada. Minimiza-se a soma de todos os γ_k quando a há mais de um desempenho.

Para cada k há uma restrição de que existem matrizes hermitianas \mathcal{P}_k e $\mathcal{Q}_k > 0$ tais que

$$[\mathbf{I} \ \mathcal{B}_k] \begin{bmatrix} \Phi_p \otimes \mathcal{P}_k + \Psi_k \otimes \mathcal{Q}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Pi}_k \end{bmatrix} [\mathbf{I} \ \mathcal{B}_k]^* < \mathcal{A}_k \mathcal{R}_k + (\mathcal{A}_k \mathcal{R}_k)^*.$$

Para garantir a estabilidade do sistema em malha fechada há a restrição de que existe uma matriz hermitiana $\mathcal{P}_e > 0$ tal que

$$\Phi_p \otimes \mathcal{P}_e < \mathcal{JAS} + (\mathcal{JAS})^*,$$

desde que $\mathbf{r}^* \Phi_p \mathbf{r} < 0$ com $\mathbf{r} = [p \ q]^T$, $\mathbf{S} = [-q\mathbf{I} \ p\mathbf{I}]$ e

$$\Phi_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ainda, as definições de $\mathbf{\Pi}_k$, Φ_k e Ψ_k são construídas como explicitado neste capítulo. Para projeto \mathcal{H}_∞ ,

$$\mathbf{\Pi}_k = \begin{bmatrix} -\gamma_k^2 \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

Para especificações em baixa frequência ($\omega_{1k} = 0$)

$$\Psi_k = \begin{bmatrix} \omega_{2k}^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

em alta frequência ($\omega_{2k} = \infty$),

$$\Psi_k = \begin{bmatrix} -\omega_{1k}^2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

e em uma faixa de frequência,

$$\Psi_k = \begin{bmatrix} -\omega_{1k}\omega_{2k} & -j(\omega_{1k} + \omega_{2k})/2 \\ j(\omega_{1k} + \omega_{2k})/2 & -1 \end{bmatrix}.$$

E as matrizes \mathcal{A}_k e \mathcal{B}_k são definidas como

$$[\mathcal{A}_k \mid \mathcal{B}_k] = \left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{AX} + \mathbf{B}_2\mathbf{H} & \mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{LC}_2 & \mathbf{B}_{1k} + \mathbf{B}_2\mathbf{LD}_{21} \\ \mathbf{M} & \mathbf{YA} + \mathbf{GC}_2 & \mathbf{YB}_{1k} + \mathbf{GD}_{21} \\ -\mathbf{X} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{Z} & -\mathbf{Y} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{1k}\mathbf{X} + \mathbf{D}_{12k}\mathbf{H} & \mathbf{C}_{1k} + \mathbf{D}_{12k}\mathbf{LC}_2 & \mathbf{D}_{11k} + \mathbf{D}_{12k}\mathbf{LD}_{21} \end{array} \right],$$

nas variáveis X , Y , Z , M , G , H e L . As matrizes B_{1k} , C_{1k} , D_{11k} e D_{12k} são particulares para cada restrição k .

5.9 Comentários

O projeto de controladores baseado no lema GKYP mostra-se uma ferramenta versátil de projeto, que permite especificar critérios diferentes em faixas de frequência diferentes e mesmo combinar vários deles em um mesmo projeto. Pode ser usado para garantir robustez ou desempenho, pois cada restrição é escrita na maneira como é conhecida, desfazendo a necessidade de especificar filtros de ponderação que levam tempo para ser ajustados. Outra vantagem do método é que o controlador projetado possui a ordem da planta original. Ao usar filtros de ponderação, o controlador possuiria a ordem da planta aumentada, maior do que a original pelas ordens dos filtros. O método é apresentado aqui em uma formulação matricial linear que é o enfoque deste trabalho.

Ao usar programas disponíveis para solução de tais problemas, nota-se que as restrições criadas pelo lema de KYP produzem um grande número de variáveis auxiliares. Esse problema numérico é estudado no trabalho [43] e um pacote computacional implementa as alterações da estrutura do problema propostas ali. O pacote chama-se KYPD e está disponível para a interface Yalmip (ver [27]).

Uma característica da abordagem com os filtros de ponderação é que esta permite uma especificação que varia continuamente com a frequência. Isso pode ser preferível quando a restrição não é especificada como uma região em frequência mas como uma ponderação.

Capítulo 6

Resultados

6.1 Resumo

São realizados projetos de controle com e sem incertezas usando os conceitos apresentados para duas configurações de sistemas mecânicos. Estes sistemas são um sistema de três graus de liberdade de massas, molas e amortecedores e uma viga engastada.

Os projetos realizados seguem a ordem de apresentação das metodologias ao longo do trabalho. Assim, realizaram-se um projeto \mathcal{H}_∞ simples, um projeto com filtros de ponderação e o projeto usando as restrições obtidas do lema GKYP. A seqüência ilustra os conceitos apresentados respectivamente nos capítulos 2, 4 e 5.

Em todos os casos, realizou-se o projeto de controladores \mathcal{H}_∞ por realimentção de saída. Nos casos de projeto de controle simples e com filtro, foi usada a função de projeto do Matlab `hinfsyn`, sempre com os valores padronizados de seus parâmetros, exceto pelo fato de usar o método de solução por desigualdades matriciais lineares. Para o projeto usando o lema GKYP, o problema de otimização com restrições matriciais lineares foi implementado e resolvido usando os pacotes de solução de problemas semidefinidos para Matlab chamados SeDuMi ([41]) e KYPD ([44]) usando a interface de problemas de otimização para Matlab chamada Yalmip ([27]).

Os modelos de estados dos controladores projetados neste capítulo são mostrados no Apêndice B.

6.2 Métodos de projeto

São consideradas três abordagens principais de projeto de controle robusto nos exemplos de simulação, além do projeto sem robustez:

- *Projeto simples sem consideração de incerteza*

Considera-se, para comparação, o projeto \mathcal{H}_∞ sem robustez, conforme mostrado no Projeto 1, na Seção 2.6. Porém, foi implementado usando a função `hinfsyn` do Matlab, usando o parâmetro de solução através de desigualdades matriciais lineares.

- *Projeto com filtros de ponderação*

O projeto \mathcal{H}_∞ pode ser obtido pela solução do problema apresentado no Capítulo 2, na forma do Problema (2.13). Neste trabalho, a solução deste problema foi encontrada usando a função do Matlab `hinfsyn` com o parâmetro que escolhe a solução do problema por desigualdades matriciais lineares. Ao realizar o projeto com filtros de ponderação, portanto, usa-se a mesma função sobre a planta aumentada (planta original com os filtros incluídos). A planta aumentada é construída de acordo com a descrição da Seção 4.6 e a Figura 4.6. A solução é descrita no Projeto 2, na Seção 4.7.

- *Projeto com incerteza politópica*

Ao usar incerteza politópica, implementou-se o Problema (2.13) de projeto \mathcal{H}_∞ em que há uma restrição de desigualdade matricial (2.11) para cada vértice do politopo (uma restrição para cada sistema), encontrando um único controlador. Uma função de Matlab usada para essa finalidade é apresentada no Apêndice C implementando o Projeto 3, na Seção 4.8.

- *Projeto com restrições em frequência*

Para o caso do projeto sujeito a restrições em frequência a partir do lema GKYP (apresentado no Capítulo 5), o problema a ser resolvido é dado por (5.16). Para o projeto com restrições em frequência é necessário incluir a condição de estabilidade, juntamente com a restrição advinda do lema GKYP. Isso é feito acrescentando em cada problema de projeto a restrição do Corolário 6. A descrição geral é a do Projeto 4, na Seção 5.8. É conveniente ressaltar que os parâmetros p e q apresentados no Projeto 4 se referem à condição de estabilidade e não afetam diretamente o desempenho do controlador, apenas a estabilidade numérica da implementação.

Para solução numérica foram implementadas diretamente em código de Matlab as desigualdades matriciais lineares correspondentes usando a interface Yalmip. A solução foi obtida usando os pacotes de programação semidefinida SeDuMi, e KYPD. É necessário notar que o KYPD é um pacote orientado a problemas derivados do lema de KYP, o qual aplica transformações que melhoram o condicionamento numérico do problema antes de repassá-lo para que o SeDuMi o resolva (ver [43]). A principal função implementada para essa abordagem é mostrada no Apêndice C.

Se for considerado conveniente, essas abordagens podem ser combinadas em um mesmo problema.

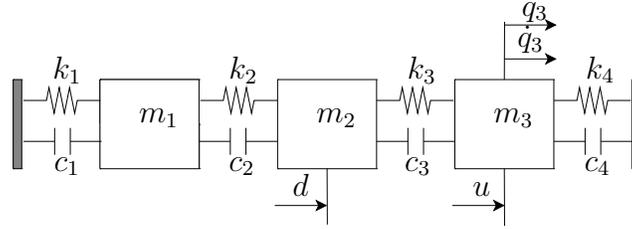


Figura 6.1: Sistema de três graus de liberdade de massas, molas e amortecedores.

6.3 Sistema massa-mola-amortecedor de 3 graus de liberdade

O caso fundamental de estudo deste trabalho é o de estruturas flexíveis. Essas possuem modelos obtidos usualmente na forma

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} &= \mathbf{B}_0\mathbf{f} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_q\mathbf{q} + \mathbf{C}_v\dot{\mathbf{q}}, \end{aligned} \quad (6.1)$$

em que se tem as conhecidas matrizes de massa (\mathbf{M}), amortecimento (\mathbf{G}) e rigidez (\mathbf{K}). Ainda, \mathbf{B}_0 é uma matriz que define o vetor de entrada de forças nos graus de liberdade do sistema e \mathbf{C}_q e \mathbf{C}_v são matrizes que definem no vetor de saídas \mathbf{y} as posições e velocidades que se deseja monitorar. O vetor \mathbf{q} corresponde aos deslocamentos dos graus de liberdade do modelo da estrutura e $\dot{\mathbf{q}}$ às velocidades.

O objetivo deste trabalho é utilizar técnicas da programação semidefinida para tratar desses problemas de incertezas no modelo da planta com o objetivo de projetar controladores robustos. Serão abordados sistemas lineares descritos pela forma conhecida das equações de estado:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}, \end{aligned}$$

sendo \mathbf{x} o vetor de estado. É comum usar a seguinte representação em espaço de estados para (6.1):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{G} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_0 \end{bmatrix} \mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_q & \mathbf{C}_v \end{bmatrix} \mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Neste caso, a matriz \mathbf{D} é nula.

Considera-se o sistema mostrado na Figura 6.1, extraído de [15].

Para valores particulares dos parâmetros ($m_1 = 3$, $m_2 = 4$, $m_3 = 0,5$, $c_1 = 0,035$, $c_2 = 0,020$, $c_3 = 0,160$, $c_4 = 0,005$, $k_1 = 8$, $k_2 = 5$, $k_3 = 40$ e $k_4 = 0$) tem-se as matrizes de massa,

rigidez e amortecimento, mostradas a seguir na forma (6.1):

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0,0550 & -0,0200 & 0 \\ -0,0200 & 0,1840 & -0,1600 \\ 0 & -0,1600 & 0,1605 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 13 & -5 & 0 \\ -5 & 45 & -40 \\ 0 & -40 & 40 \end{bmatrix},$$

e as matrizes de entrada e saída,

$$\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{C}_v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

As unidades de todas as grandezas neste exemplo são supostas no sistema internacional.

O sistema possui duas entradas (d e u , distúrbio e sinal de controle) como forças no segundo e no terceiro grau de liberdade e duas saídas que são respectivamente a posição e a velocidade do terceiro grau de liberdade (q_3 e \dot{q}_3). Isso é mostrado na Figura 6.1. Isso leva ao modelo (na forma das Equações (2.1) usando a conversão em (6.2)) dado por

$$\left[\begin{array}{c|cc} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \hline \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{0} \end{array} \right] =$$

$$= \left[\begin{array}{cccccc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4,3333 & 1,6667 & 0 & -0,0183 & 0,0067 & 0 & 0 & 0 \\ 1,2500 & -11,2500 & 10,0000 & 0,0050 & -0,0460 & 0,0400 & 0 & 0,25 \\ 0 & 80,0000 & -80,0000 & 0 & 0,3200 & -0,3210 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Nesta forma, supõe-se que a saída medida acessível para o controlador é a velocidade do terceiro grau de liberdade (\dot{q}_3) e o desempenho a ser otimizado é a posição do mesmo grau (q_3). As comparações antes e depois de aplicação do controle visam a verificar a mudança de comportamento entre o distúrbio e o desempenho.

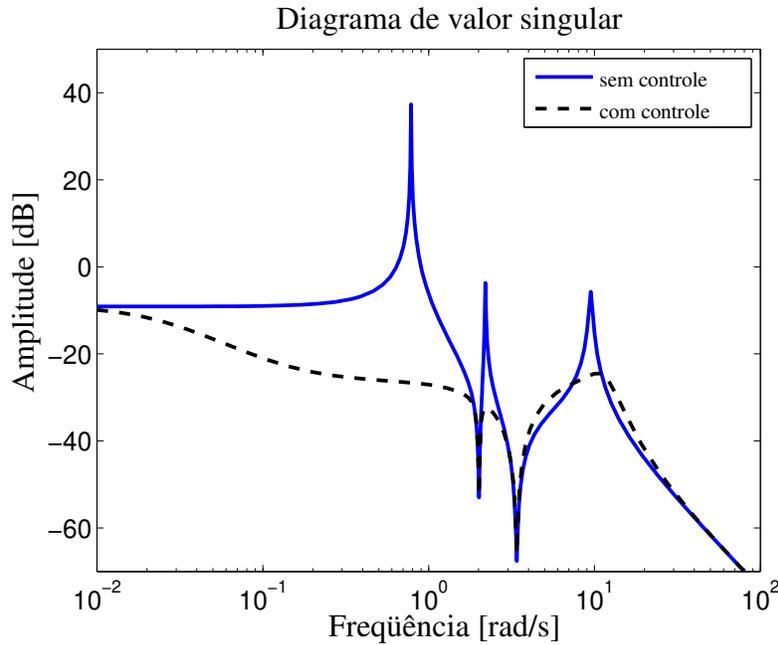


Figura 6.2: Comparação entre os valores singulares com e sem controle para o exemplo do sistema de três graus de liberdade de três graus de liberdade.

6.3.1 Projeto de controle \mathcal{H}_∞

Projitou-se um controlador \mathcal{H}_∞ com realimentação de saída usando a função `hinfsyn` do pacote de funções de controle robusto do programa Matlab. A função foi usada com os parâmetros nos seus valores padronizados. A malha fechada resulta num sistema cujo comportamento na frequência é mostrado na Figura 6.2. Nota-se a grande redução do pico de resposta (a norma \mathcal{H}_∞). Na verdade, houve eliminação completa dos três picos de resposta do sistema. O mesmo comportamento é confirmado pela resposta no tempo a uma varredura senoidal até a frequência de 20 rad/s (Figura 6.3). A redução relativa na norma é (chamando de $\mathbf{P}(s)$ o sistema original e $\mathbf{H}(s)$ a malha fechada com o controlador)

$$\frac{\|\mathbf{H}(s)\|_\infty}{\|\mathbf{P}(s)\|_\infty} = 4,7670\text{E-}3.$$

No entanto, esse resultado não é realista do ponto de vista da maior parte dos experimentos possíveis. Isso se deve principalmente ao sinal de controle, que para um projeto como esse se torna de intensidade muito elevada em alguns instantes e muito rápido (contendo componentes de frequências muito altas). Isso torna difícil especificar um atuador capaz de produzir tal sinal, visualizado nas figuras 6.4 e 6.5. Particularmente, a Figura 6.5 mostra que o máximo valor singular do controlador possui componentes de frequência muito elevada, não nulas até a ordem de $1\text{E}5$ rad/s.

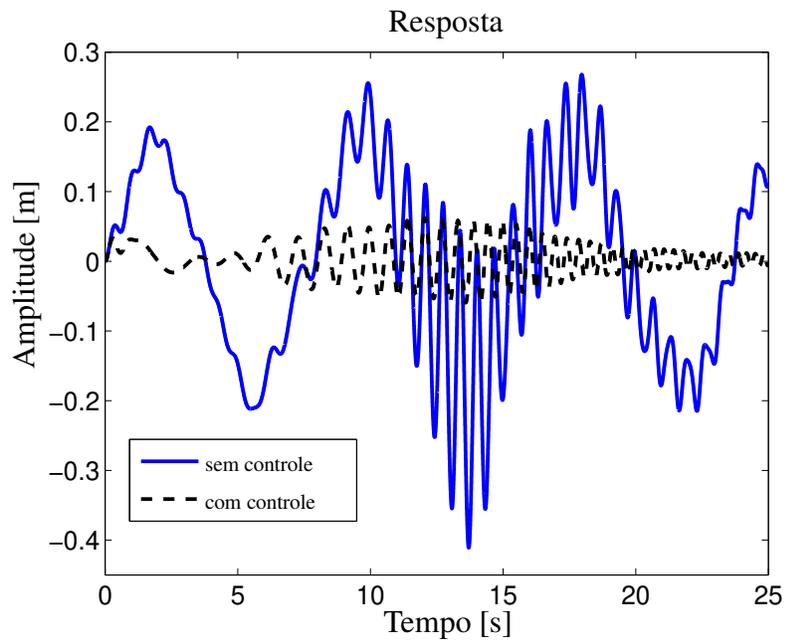


Figura 6.3: Comparação da resposta temporal a uma varredura senoidal até 20 rad/s para o sistema de três graus de liberdade entre os casos controlado e não controlado.

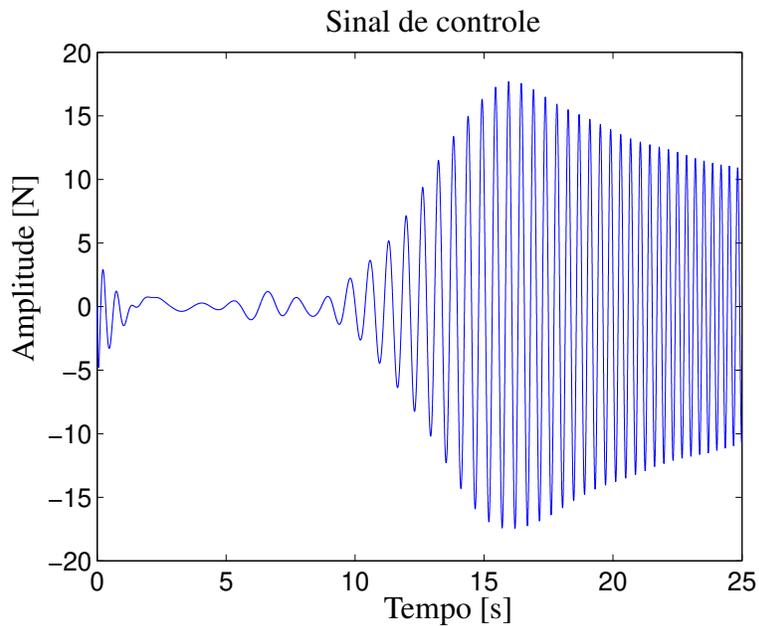


Figura 6.4: Sinal de controle no tempo quando a entrada é uma varredura senoidal até 20 rad/s para o sistema de três graus de liberdade do exemplo. O sinal de controle é rápido, com componentes de frequência bastante elevada.

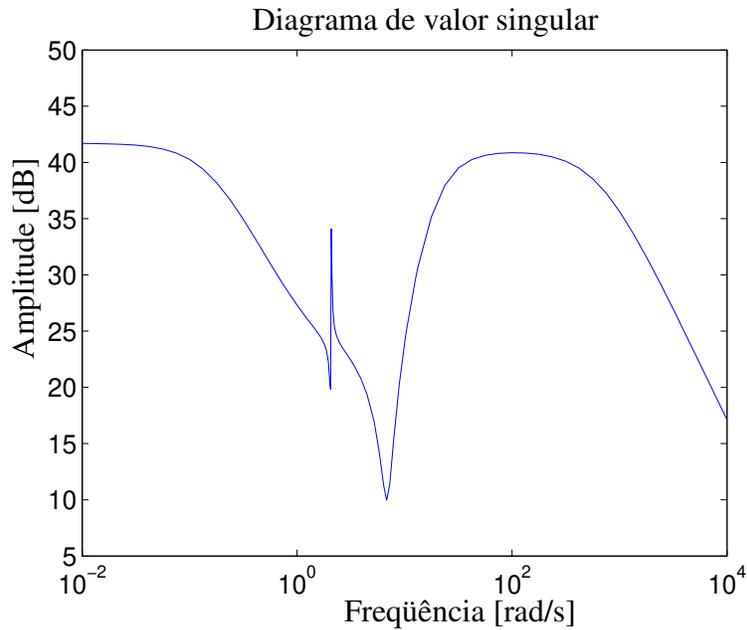


Figura 6.5: Diagrama de valor singular do controlador \mathcal{H}_∞ projetado para o sistema de três graus de liberdade. Esse diagrama mostra a banda de passagem do controlador ultrapassando a frequência de 1E4 rad/s.

6.3.2 Consideração de robustez

Em analogia com a Figura 3.4, o sistema de três graus de liberdade pode ser representado na forma de um diagrama de blocos em que os parâmetros de massa, rigidez e amortecimento são matriciais, bem como as incertezas. Uma alteração sobre esse diagrama leva ao diagrama correspondente com as incertezas convenientemente posicionadas para serem escritas como uma realimentação na forma de transformação linear fracional, como se vê na Figura 6.6.

A Figura 6.6 explicita a relação de realimentação entre o sistema nominal com as saídas e entradas extras relacionadas às incertezas (\mathbf{F}) e o sistema externo, que representa as incertezas (Δ). Esse modelo visa projetar um controlador que considere as variações e obtenha redução na vibração. O sistema modelado dessa forma possui entradas de distúrbio externo (\mathbf{d} , neste caso de dimensão 1), de incerteza (\mathbf{w} , de dimensão 3) e de controle (\mathbf{u} , de dimensão unitária). Dessa forma, pela idéia de incluir desempenho de vibração e robustez em um mesmo critério de norma \mathcal{H}_∞ (a que chamamos sensibilidade mista), produzem-se dois critérios de desempenho (\mathbf{z}_1 para incerteza e \mathbf{z}_2 , para vibração). As equações correspondentes a este diagrama podem ser escritas

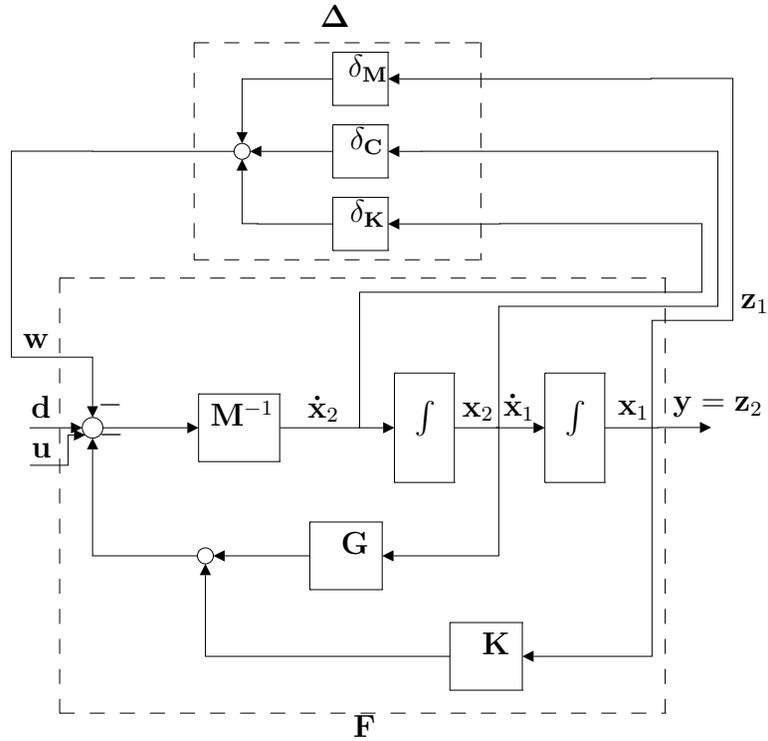


Figura 6.6: Diagrama de blocos do sistema com três graus de liberdade incluindo as incertezas.

como:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} & [\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ d \\ u \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{G} \\ \mathbf{C}_q & \mathbf{C}_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} & [\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_0] \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ d \\ u \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

Utilizando as matrizes já conhecidas do sistema, podem-se escrever as matrizes de representação de estados na forma padrão para este sistema com a realimentação de incertezas. Ao realizar um projeto \mathcal{H}_∞ simples com a configuração de incertezas mostrada, pode-se garantir estabilidade para variações com norma \mathcal{H}_∞ da incerteza Delta limitadas à unidade.

6.3.3 Projeto de controle robusto com filtro

Para contornar os problemas de um projeto sobre o sistema nominal, tenta-se o projeto robusto. Para esse sistema de três modos, optou-se por minimizar a vibração garantindo robustez

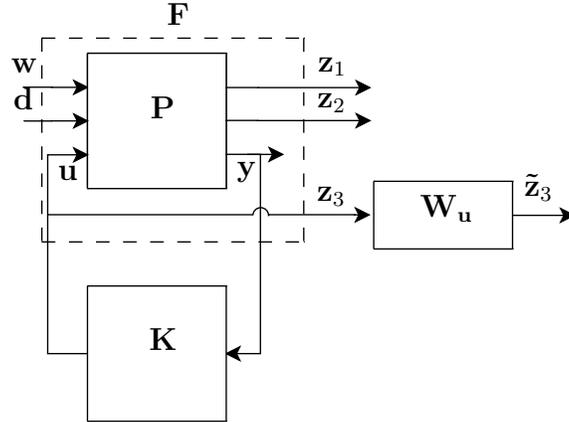


Figura 6.7: Configuração de controle no projeto robusto para o sistema de três graus de liberdade. O filtro de controle é colocado no sinal z_3 convertendo-o em um sinal de desempenho \tilde{z}_3 .

Tabela 6.1: Parâmetros do filtro usado no sistema de três graus de liberdade no projeto \mathcal{H}_∞ com filtros.

filtro	ϵ	M	ω_c	k	tipo
\mathbf{W}_u	1	1000	5	6	passa alta

às incertezas descritas na Seção 6.3.2. Se se supõem variações paramétricas, independentes da frequência, não há necessidade de filtros para a incerteza. Entretanto, para garantir limitação no esforço de controle, usa-se um filtro (\mathbf{W}_u), que produz mais um sinal de desempenho a ser considerado. O filtro para o sinal de controle admite uma colocação com a planta descrita pelas Equações (6.3) como mostrada na Figura 6.7 e comparada na frequência na Figura 6.8.

A Tabela 6.1 mostra os parâmetros utilizados para o filtro, de acordo com a definição fornecida na Seção 4.6 e em [47].

O resultado para o sistema controlado é mostrado na Figura 6.9, com uma redução relativa na norma \mathcal{H}_∞ de

$$\frac{\|\mathbf{H}(s)\|_\infty}{\|\mathbf{P}(s)\|_\infty} = 7,5303\text{E-}3.$$

O projeto garante redução da vibração mesmo sob variações de massa, rigidez e amortecimento e garante limitação no esforço de controle. A redução é conseqüentemente menor do que no caso não robusto. É, porém, factível. O primeiro pico é muito mais relevante e é mais afetado do que os outros.

A resposta à varredura senoidal até 20 rad/s é mostrada na Figura 6.10, mostrando a redução na vibração no domínio do tempo. A frequência mais baixa de pico é praticamente eliminada, de acordo com a Figura 6.9. Resta a componente associada ao segundo pico, menos afetado pelo controle.

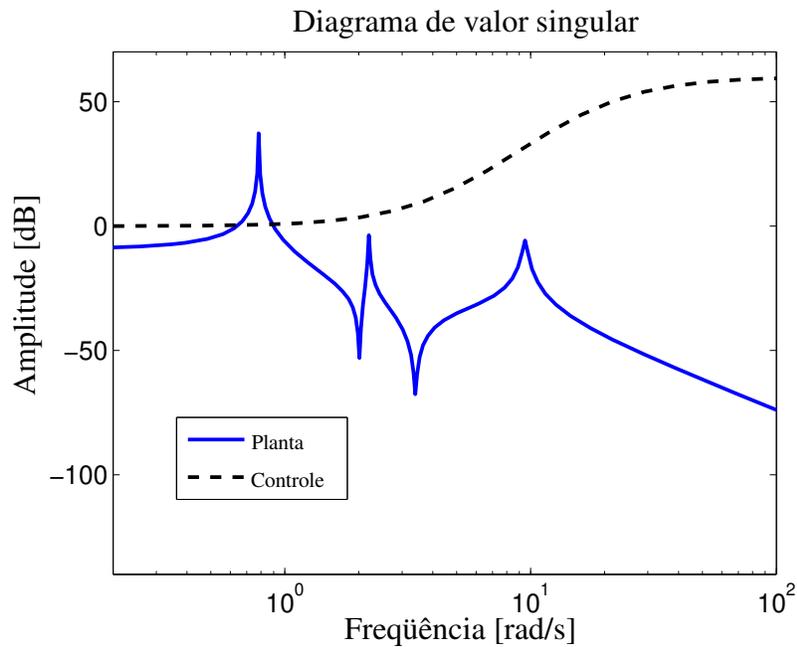


Figura 6.8: Comparação entre os valores singulares da planta e do filtro de ponderação W_u para o sistema de três graus de liberdade. O filtro é colocado no sinal de controle como na Figura 6.7 para garantir um projeto factível, com esforço limitado.

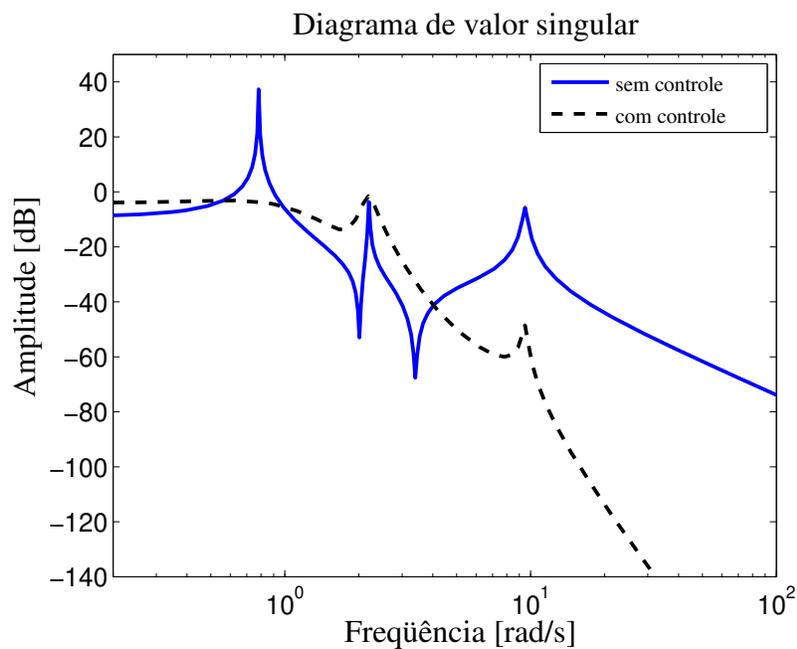


Figura 6.9: Comparação das respostas em frequência antes e depois do controle para o modelo de três graus de liberdade.

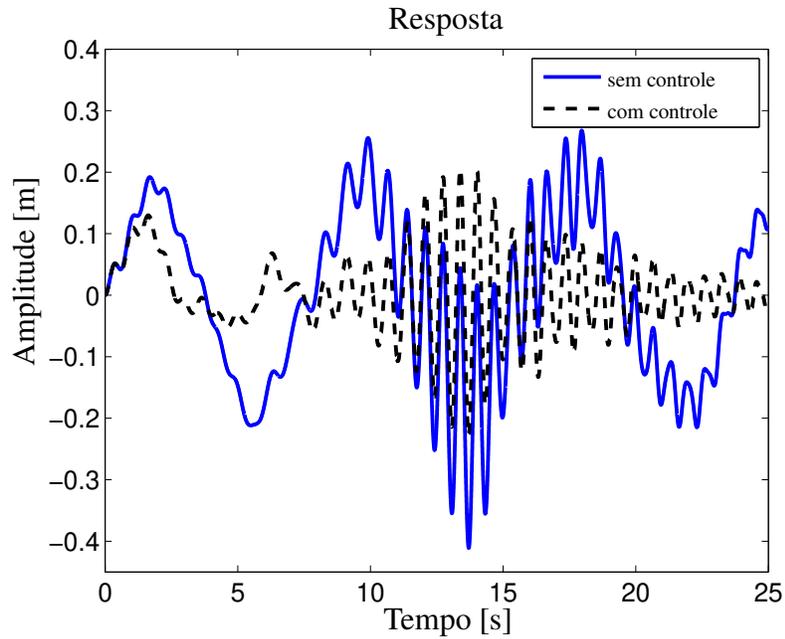


Figura 6.10: Resposta temporal com uma entrada em varredura senoidal até 20 rad/s para o sistema de três graus de liberdade.

O correspondente sinal de controle está na Figura 6.11. A amplitude é consideravelmente menor em comparação com o projeto sem filtros da Seção 6.3.1 e o sinal de controle é também mais lento.

É interessante notar a limitação em frequência proveniente do emprego do filtro de ponderação: o valor singular do controlador (mostrado na Figura 6.12) está abaixo de -10 dB a partir de 10 rad/s e decresce significativamente com a frequência. Isso indica um projeto de controle passível de implementação, pois o atuador necessário para produzir o sinal de controle não necessita de energia ou velocidade demasiadamente elevadas. A banda de passagem do controle é significativamente reduzida em comparação com o projeto \mathcal{H}_∞ simples.

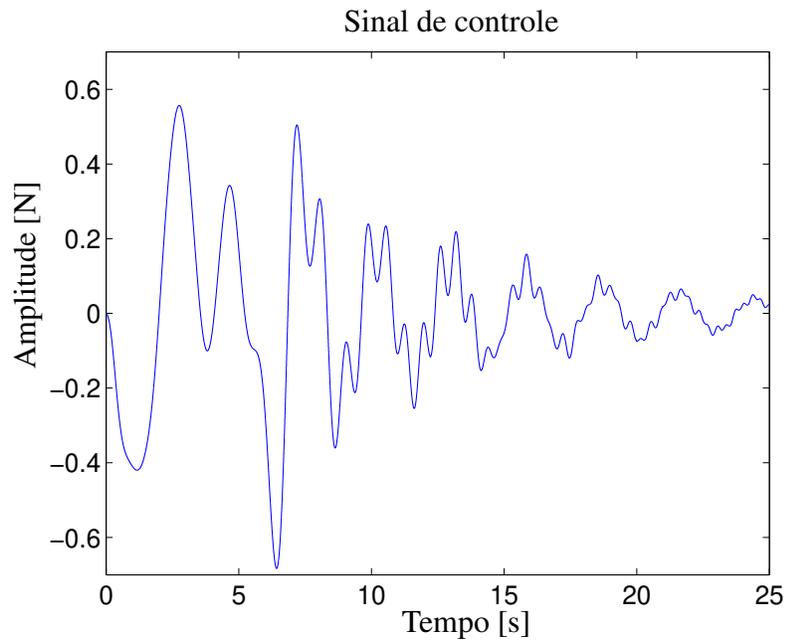


Figura 6.11: Sinal de controle no domínio do tempo para o sistema de três graus de liberdade sob a varredura senoidal até 20 rad/s.

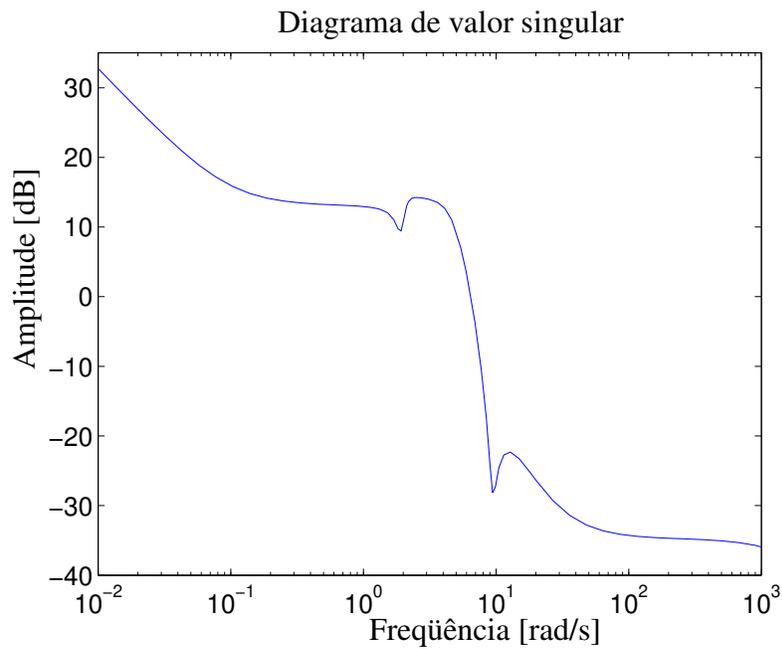


Figura 6.12: Diagrama de valor singular do controlador para o modelo de três graus de liberdade.

Tabela 6.2: Parâmetros do filtro usado no sistema de três graus de liberdade no projeto com incerteza politópica.

filtro	ϵ	M	ω_c	k	tipo
\mathbf{W}_u	0,1	100	50	3	passa alta

6.3.4 Projeto usando incerteza politópica

Uma maneira de considerar a incerteza nos parâmetros de massa, rigidez e amortecimento é utilizar a incerteza politópica. Como se tratam de parâmetros matriciais, seria possível considerar a variação de cada elemento independentemente. Porém, isso levaria a um número computacionalmente proibitivo de vértices para o politopo de incertezas. Para este exemplo de simulação, consideraram-se variações simultâneas nos elementos de cada matriz com 1% para a matriz de rigidez e 5% para a matriz de amortecimento.

A geração do politopo consiste em aplicar essas variações percentuais para mais e para menos em cada matriz e produzir um novo sistema linear em cada caso. Ao final, tem-se quatro sistemas que são vértices do politopo de sistemas possíveis.

O resultados são mostrados com dois sistemas dos vértices do politopo, na ordem:

- 1 Modelo com a matriz de rigidez reduzida de 1%.
- 2 Modelo com a matriz de amortecimento reduzida de 5%.

Para garantir limitação do esforço de controle, usa-se um filtro na forma da Figura 6.7, porém sem os canais de incerteza (\mathbf{w} e \mathbf{z}_1), uma vez que a variação é considerada na forma politópica. Os dados do filtro de ponderação são mostrados na Tabela 6.2. A redução relativa na norma \mathcal{H}_∞ é de

$$\frac{\|\mathbf{H}(s)\|_\infty}{\|\mathbf{P}(s)\|_\infty} = 5,3309\text{E-}2.$$

Os resultados de controle são mostrados nas figuras 6.13 e 6.14. O projeto garante redução da vibração sob variações de rigidez e amortecimento e garante limitação no esforço de controle. O projeto mostra conservadorismo em relação aos outros. São apresentados dois vértices do politopo para teste.

A resposta à varredura senoidal até 20 rad/s é mostrada na Figura 6.15, e o sinal de controle está na Figura 6.16. O projeto é menos eficiente (ou mais conservador) no sentido de redução da vibração.

A Figura 6.17 mostra que o sinal de controle possui frequência limitada. A introdução do filtro de controle no projeto garante essa restrição e a estabilidade do controlador.

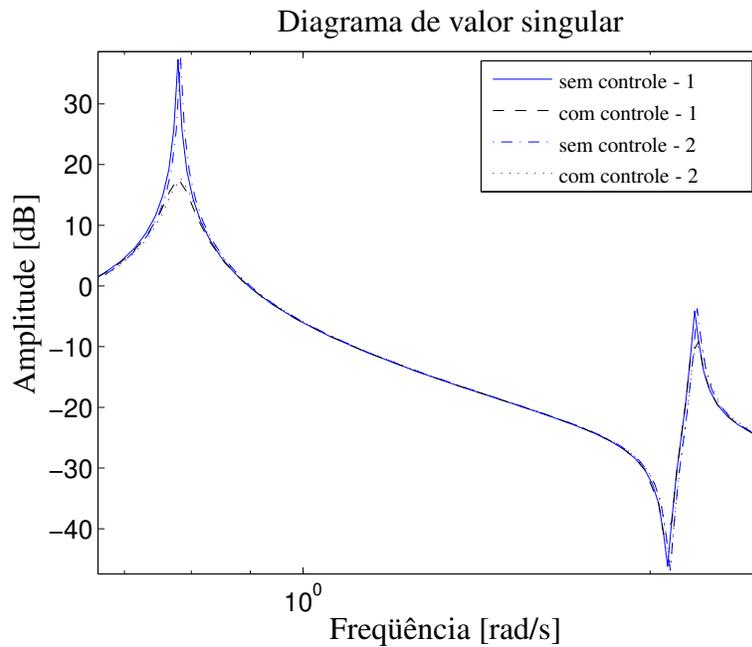


Figura 6.13: Comparação das respostas em frequência antes e depois do controle para o modelo de três graus de liberdade.

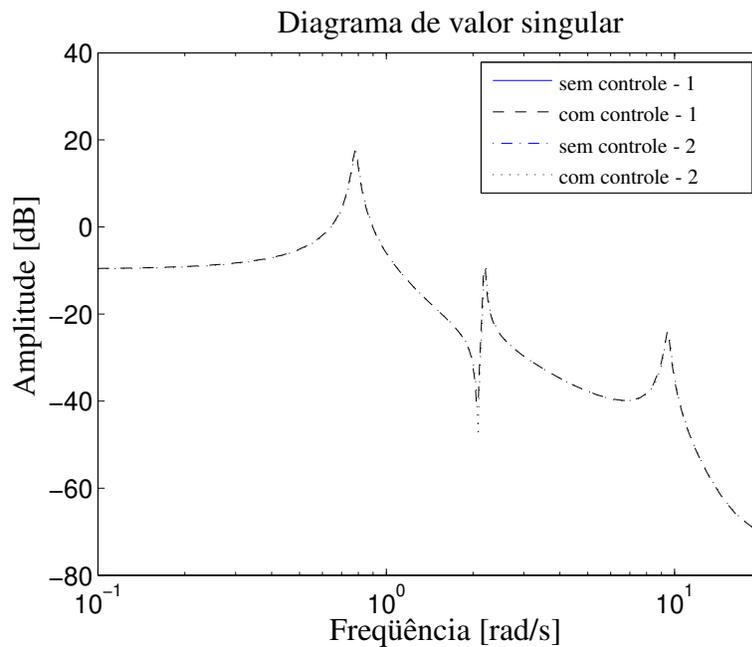


Figura 6.14: Comparação das respostas em frequência antes e depois do controle para o modelo de três graus de liberdade. Detalhes dos picos mais afetados são evidenciados na Figura 6.13.

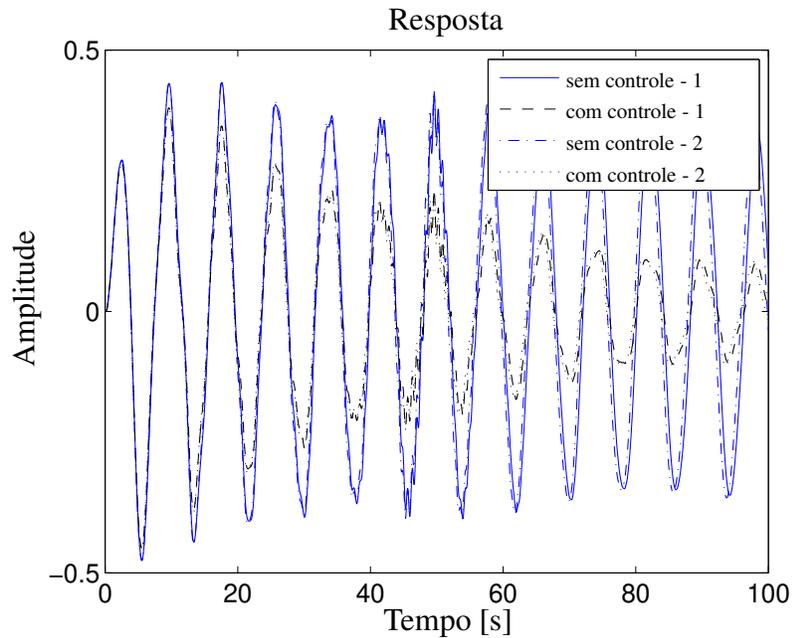


Figura 6.15: Resposta temporal com uma entrada em varredura senoidal até 20 rad/s para o sistema de três graus de liberdade. Novamente, são mostrados os resultados de atenuação para a malha fechada com dois vértices do politopo.

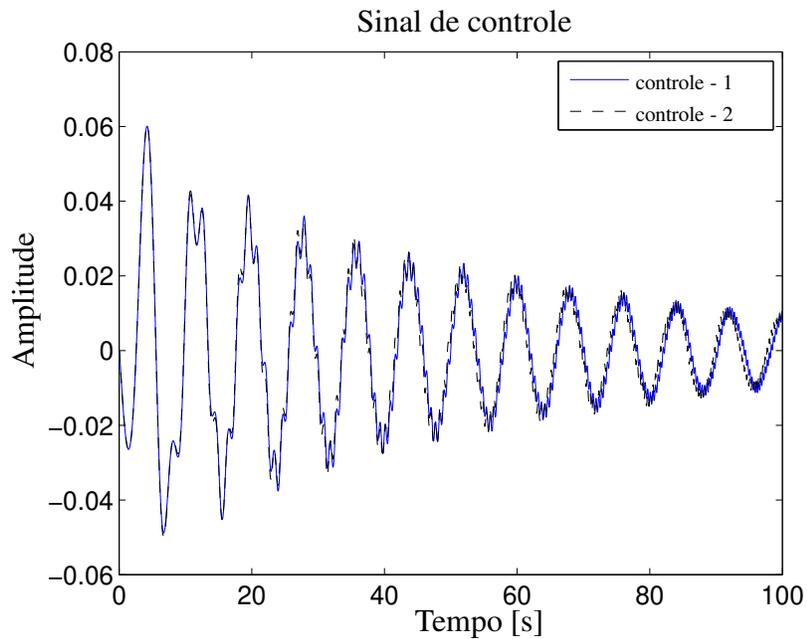


Figura 6.16: Sinal de controle no domínio do tempo para o sistema de três graus de liberdade sob a varredura senoidal até 20 rad/s. A limitação em amplitude e velocidade do sinal de controle foi obtida.

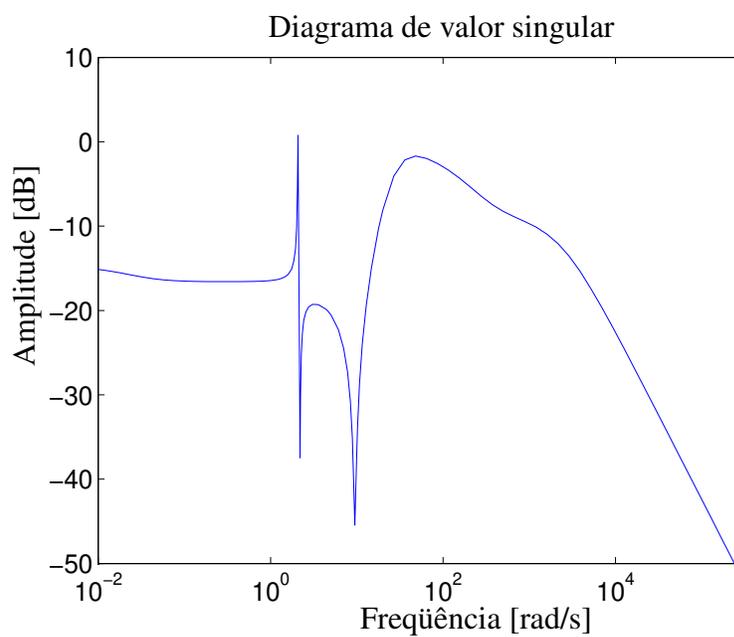


Figura 6.17: Diagrama de valor singular do controlador para o modelo de três graus de liberdade. As características de limitação estão presentes (banda de passagem e amplitude limitadas).

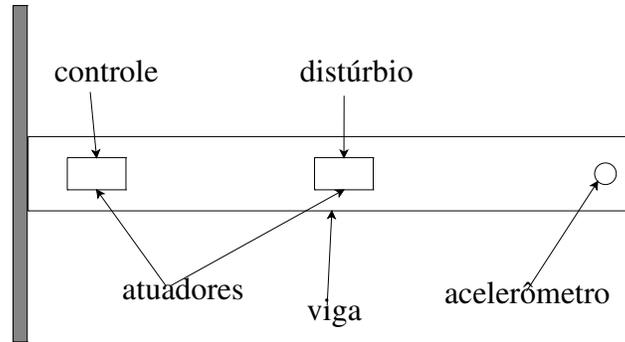


Figura 6.18: Esquema da viga engastada.

6.4 Modelo experimental de uma viga metálica

Uma análise semelhante pode ser conduzida para um sistema um pouco mais complexo e mais próximo dos problemas encontrados no controle de vibrações em estruturas flexíveis. Toma-se uma viga simplesmente engastada atuada por cerâmicas piezoelétricas e tendo como saída a medida da aceleração na extremidade através de um acelerômetro, já explorada no trabalho [25], que descreve a configuração e a montagem do equipamento. O modelo encontrado por meio de um algoritmo de identificação comum para estruturas flexíveis (algoritmo de realização de autosistemas, implementado conforme [4, 46]) é mostrado no Apêndice A. Um esquema da planta é mostrado na Figura 6.18.

Salienta-se que a ordem desse modelo (12) foi escolhida usando o algoritmo de identificação de modo a contemplar a faixa de frequência desejada.

No projeto de controle para essa planta, o objetivo é minimizar a vibração medida pelo acelerômetro. Sabe-se que a planta real possui infinitos modos de vibração e o projeto deve garantir robustez a essa variação. Ainda, outra restrição é a de que o controlador deve produzir um sinal passível de implementação, com limitação em amplitude e velocidade.

Assim, o primeiro projeto realizado a seguir visa minimizar a vibração sem consideração de incerteza. Em seguida, é possível o projeto robusto impondo restrições sobre a variação da saída da planta e do esforço de controle.

6.4.1 Projeto de controle \mathcal{H}_∞

Usando o projeto de controle \mathcal{H}_∞ convencional, mostrado no Projeto 1, a resposta do sistema pode ser comparada entre os casos com e sem controle utilizando o módulo da função de resposta em frequência e a resposta temporal a uma varredura senoidal. Nota-se o efeito do controle observando as figuras 6.19 e 6.20.

O resultado é excelente do ponto de vista de controle de vibração, com a relação entre as

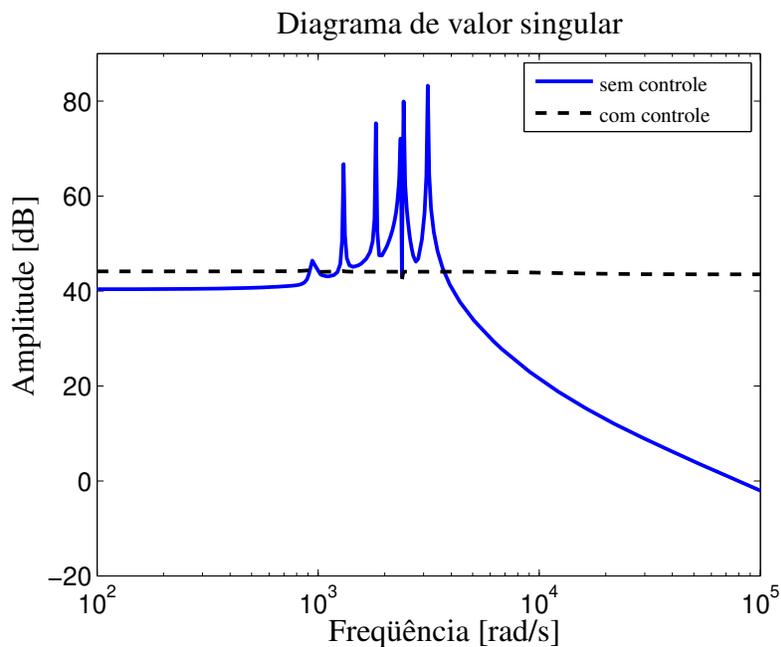


Figura 6.19: Comparação das respostas em frequência antes e depois do controle para o modelo da viga.

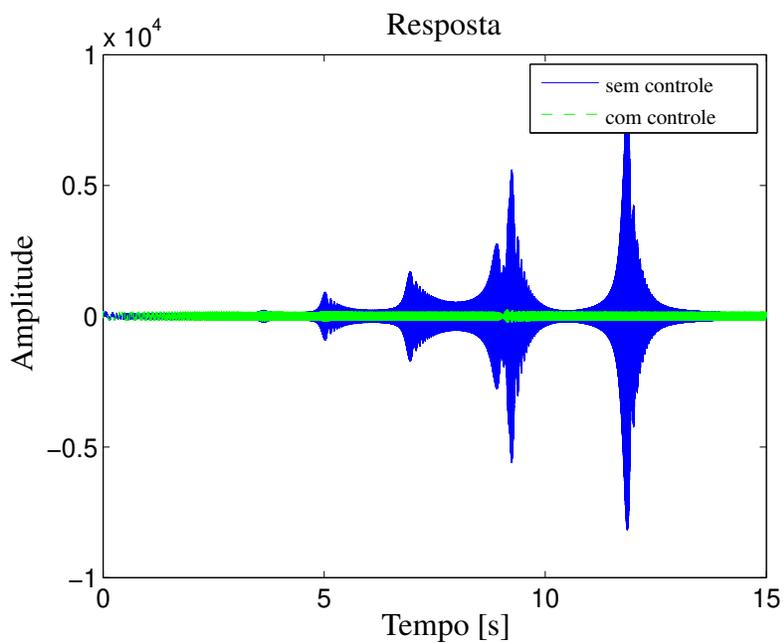


Figura 6.20: Resposta temporal com uma entrada em varredura senoidal linear de 0 até 4000 rad/s para o modelo da viga.

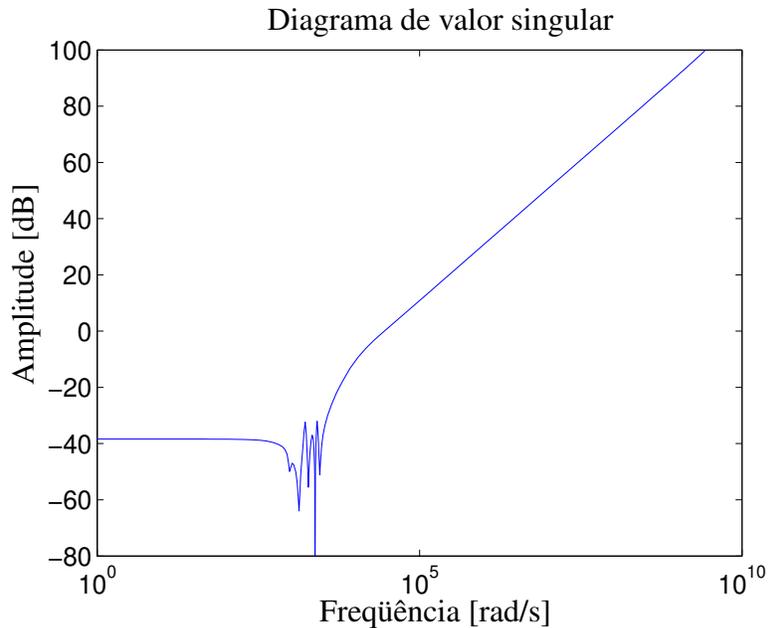


Figura 6.21: Diagrama de valor singular do controlador mostrando a banda de passagem para o exemplo da viga. O sinal de controle produzido por esse controlador não é passível de implementação devido a sua velocidade.

normas dada por

$$\frac{\|\mathbf{H}(s)\|_{\infty}}{\|\mathbf{P}(s)\|_{\infty}} = 0,01115.$$

Porém, como no exemplo da Seção 6.3.1, o sinal de controle possui comportamento muito rápido, como pode ser visto nas figuras 6.21 e 6.22. Observa-se na Figura 6.21 que o controlador possui resposta de grande intensidade para frequências muito elevadas.

Neste caso, uma vez que se trata de um modelo obtido de dados experimentais e pela instrumentação utilizada para o controle, sabe-se (de acordo com [25, 28]) que tal sinal de controle não pode ser reproduzido pelos atuadores usuais. Assim, o controlador projetado não é passível de implementação prática.

Outra questão de importância é o fato de que a planta modelada aqui é uma estrutura flexível real e possui, como já dito, *ordem infinita*. O controlador projetado para essa planta pode não estabilizar a planta real que possui mais modos de vibração e mais picos. Para ilustrar isso, toma-se o controlador projetado anteriormente e, em simulação, tenta-se fechar a malha com outro modelo representando a mesma planta porém, com ordem mais elevada, ou seja, incluindo comportamento da planta real em outras frequências.

Vê-se na Figura 6.23 a comparação das funções de resposta em frequência para as duas entradas do sistema com os dois modelos identificados.

Ao montar a configuração de controle usando o controlador anterior com a planta de ordem

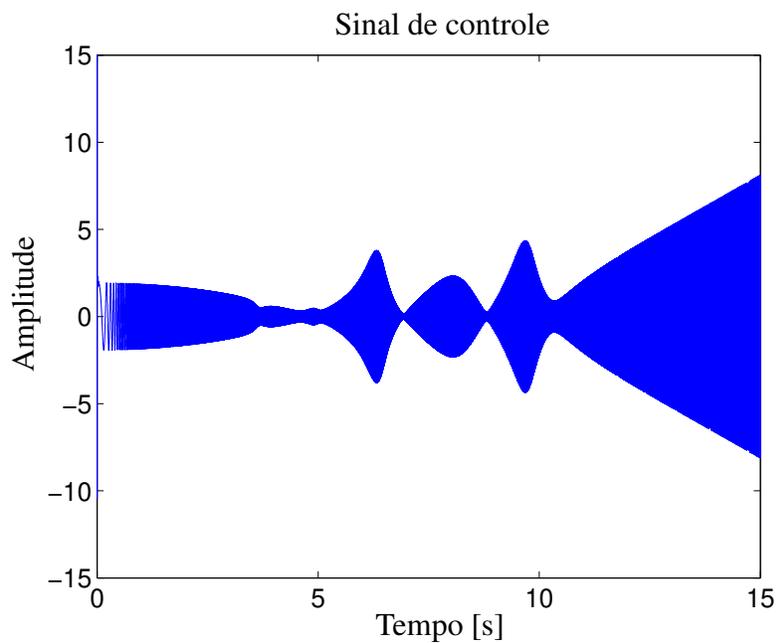


Figura 6.22: Sinal de controle no domínio do tempo para o modelo da viga como resultado da varredura senoidal linear de distúrbio de 0 até 4000 rad/s.

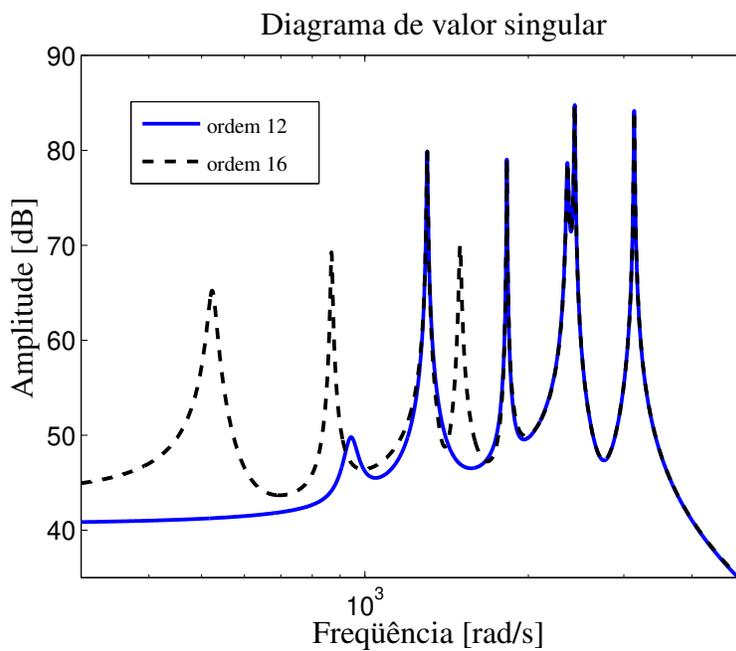


Figura 6.23: Comparação dos modelos identificados para a viga com ordens 12 e 16. Nota-se um modelo mais complexo e com ordem maior.

16 (que representa, em princípio, o mesmo sistema) obtém-se um sistema em malha fechada com os seguintes pólos:

$$\begin{bmatrix} -9,15 \pm 5,23e2j \\ -3,36 \pm 8,68e2j \\ -7,82e1 \pm 9,63e2j \\ -2,81 \pm 1,30e3j \\ -6,84 \pm 1,50e3j \\ -6,06e1 \pm 1,69e3j \\ -2,03 \pm 1,83e3j \\ -1,78e2 \pm 2,21e3j \\ -9,60 \pm 2,36e3j \\ -4,53 \pm 2,43e3j \\ -7,54e1 \pm 2,59e3j \\ -5,16 \pm 3,13e3j \\ 7,78e3 \pm 4,11e3j \\ -3,37e4 \\ -5,48e15 \end{bmatrix}$$

o que revela um sistema instável.

Este resultado corresponde a um controlador projetado que não contempla a *incerteza dinâmica* da planta. Esse problema constitui uma das questões centrais do controle robusto.

6.4.2 Consideração de robustez

Como já dito, o sistema original, a partir do qual se obteve este modelo, contém modos de vibração não modelados. Ou seja, pólos e zeros da representação que não estão incluídos no modelo. Para ilustrar este fenômeno chamado de incerteza dinâmica, pode-se truncar o modelo presente, reproduzindo a situação em que o sistema tivesse sido identificado com ordem ainda menor. A comparação entre os dois modelos no diagrama de valor singular mostra os modos desprezados. Para o caso da Figura 6.24 o modelo de ordem 12 é comparado com um modelo de ordem 6, e na Figura 6.23 compara-se o modelo usado no projeto com um de ordem maior.

A incerteza dinâmica corresponde a essa parcela da função de transferência desprezada. Essa diferença pode ser resultado de uma simplificação feita para reduzir o sistema matematicamente e tornar o projeto de controladores e a análise mais tratáveis ou pode advir da falta de conhecimento completo sobre sistema, como já citado. Nas seções 6.4.3 e 6.4.4 verifica-se que considerar a incerteza dinâmica, na forma de filtros de ponderação ou usando restrições em frequência, permite obter projetos estáveis.

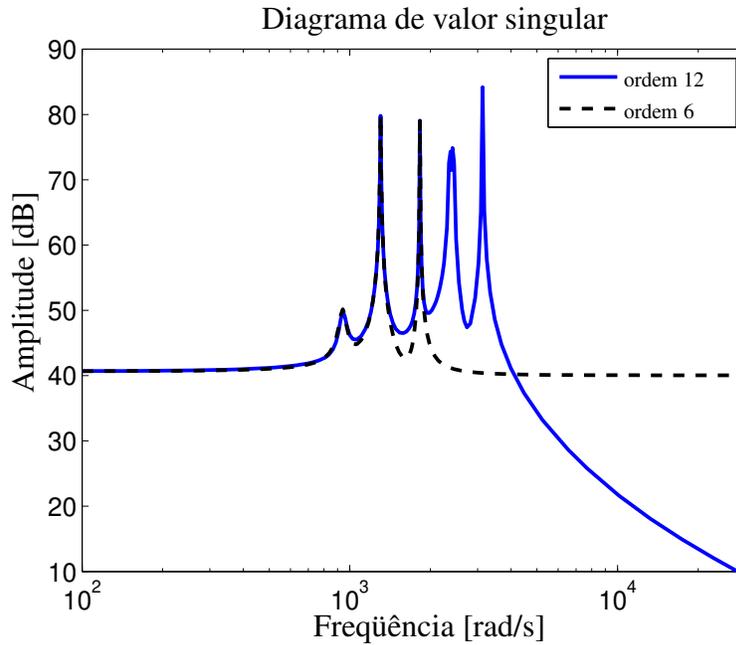


Figura 6.24: Incerteza dinâmica no modelo da viga quando são comparados os modelos de ordens diferentes.

6.4.3 Projeto de controle robusto com filtros

Um projeto robusto também pode ser adotado para o modelo da viga. Foram projetados os filtros, projetou-se o controlador e os resultados são mostrados nas figuras 6.25, 6.26, 6.27, 6.28 e 6.29. Essas figuras apresentam respostas de malha fechada usando o modelo de ordem 16 com o controlador projetado sobre o modelo de ordem 12, o que configura a incerteza dinâmica. Ambos os modelos para a viga são apresentados no Apêndice A.

Na Figura 6.25 nota-se que neste modelo os modos estão mais próximos uns dos outros do que no exemplos da Seção 6.3.3. Por isso, filtros de quarta ordem foram usados. Foi suposto que tal configuração era suficiente, em que se objetivou controlar os modos que aparecem neste modelo de ordem 12, considerando os outros na representados neste modelo como incerteza dinâmica. A influência do controle é desigual entre os picos, como se vê nas figuras 6.26 e 6.27.

A redução da norma \mathcal{H}_∞ é dada por

$$\frac{\|\mathbf{H}(s)\|_\infty}{\|\mathbf{P}(s)\|_\infty} = 0,13460.$$

Os parâmetros que definem os filtros de ponderação deste exemplo são mostrados na Tabela 6.3. Os filtros de saída e de distúrbio (\mathbf{W}_y e \mathbf{W}_d) são escolhidos do tipo passa-baixa para concentrar o esforço de controle na região dos picos modelados e garantir robustez. O filtro de controle (\mathbf{W}_u) é escolhido um passa-alta para limitar a amplitude do sinal de controle em altas frequências.

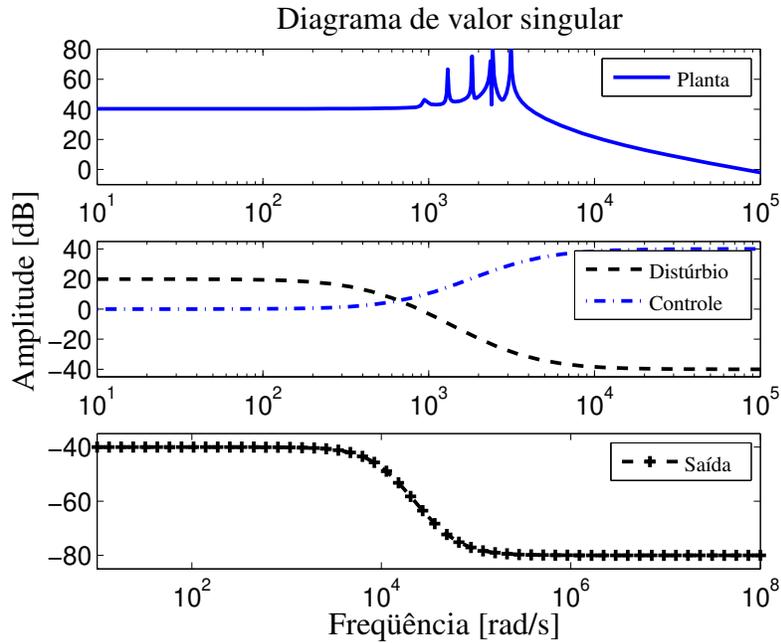


Figura 6.25: Comparação entre os valores singulares da planta e dos filtros para o modelo da viga. Assim, como no exemplo anterior, enfatiza-se tanto a otimização da saída quanto o esforço de controle sobre uma certa região. São mostrados os filtros de distúrbio (\mathbf{W}_d), de controle (\mathbf{W}_u) e de saída (\mathbf{W}_y).

Tabela 6.3: Parâmetros dos filtros usados no modelo da viga.

filtro	ϵ	M	ω_c	k	tipo
\mathbf{W}_y	1E-4	0,01	4E3	4	passa baixa
\mathbf{W}_u	1	100	1E3	4	passa alta
\mathbf{W}_d	0,01	10	1E3	4	passa baixa
\mathbf{W}_n	0,01	0,01	-	0	constante

Supõe-se ainda que o ruído de medição é uniformemente distribuído, escolhendo uma constante para o filtro \mathbf{W}_n .

O controlador obtido com esse projeto é implementável usando atuadores de cerâmica piezoelétrica, como usados na identificação.

É necessário lembrar que a mesma varredura em frequência usando uma senóide de frequência linearmente variável até 4000 rad/s é o sinal de entrada nas figuras 6.27 e 6.28.

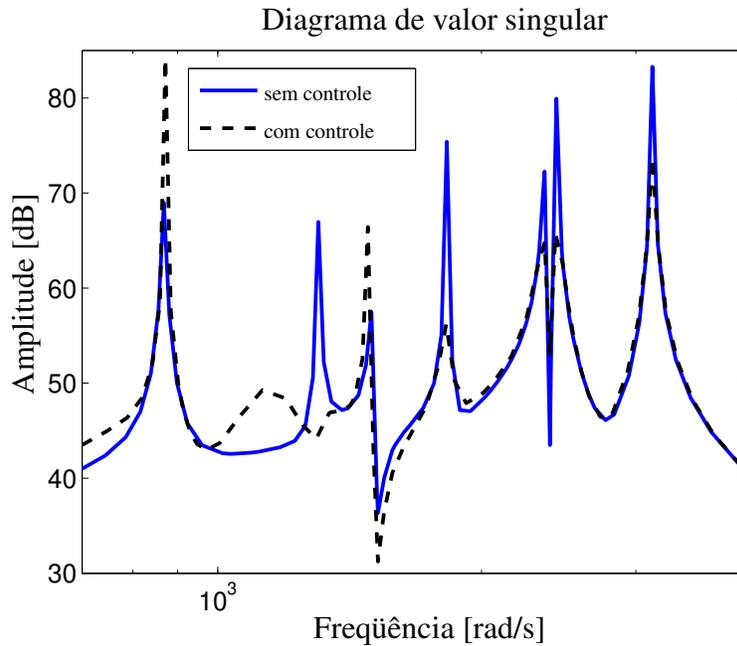


Figura 6.26: Comparação das respostas em frequência antes e depois do controle para o modelo da viga. O controlador apresentou um efeito maior nos últimos picos, relativos ao modelo de ordem 12, para o qual foi projetado. Houve ampliação de picos não modelados.

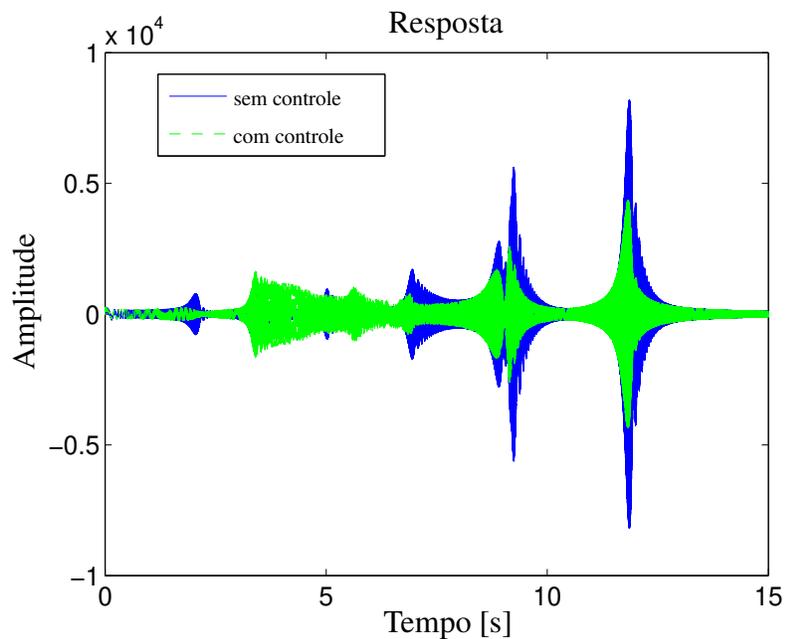


Figura 6.27: Resposta temporal com uma entrada em varredura senoidal linear de 0 até 4000 rad/s para o modelo da viga. Neste gráfico, em que a frequência varia com o tempo, torna-se nítido quais picos são mais afetados pelo controle: o sexto e o sétimo, com um resultado menor nos outros.

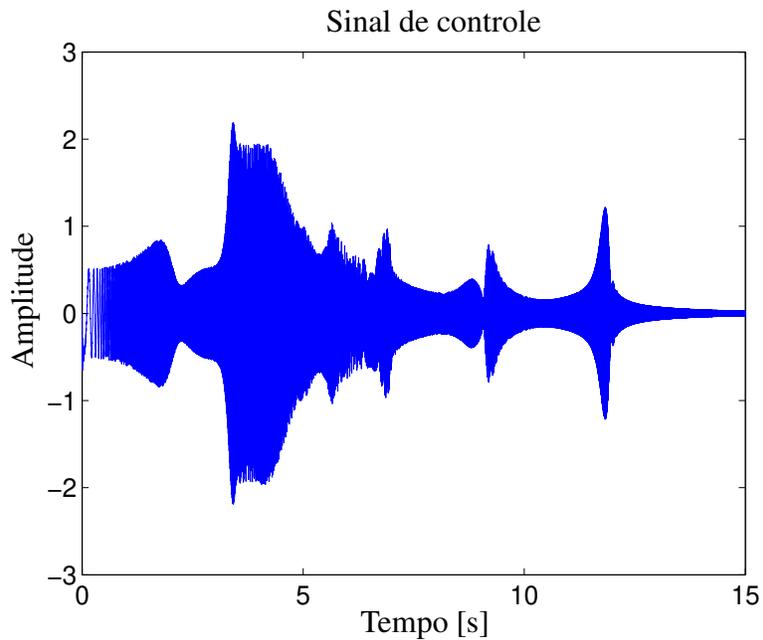


Figura 6.28: Sinal de controle no domínio do tempo para a entrada de varredura senoidal até 4000 rad/s no modelo da viga. A amplitude é menor em comparação com o projeto sem filtros e a intensidade diminui nas frequências mais altas.

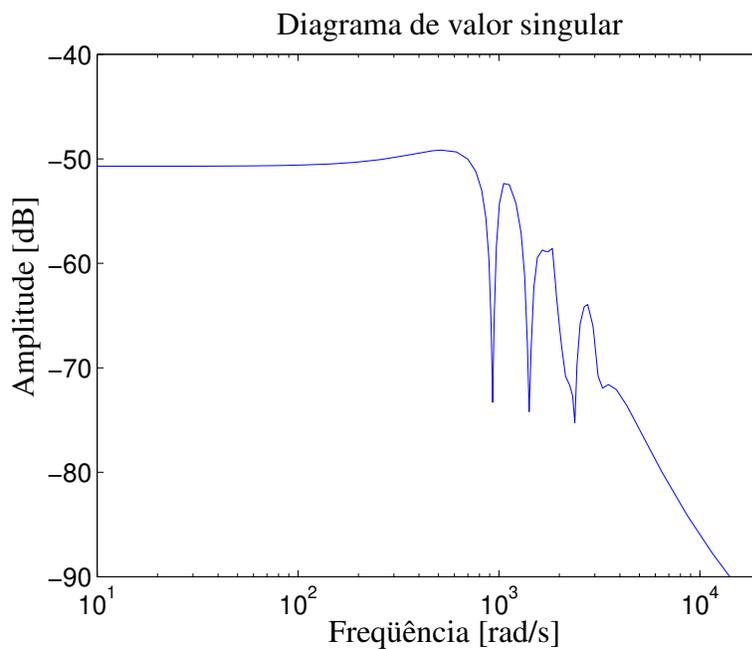


Figura 6.29: Diagrama de valor singular do controlador para o modelo da viga. Em todo o eixo, a intensidade é baixa (abaixo de -45 dB) e decresce abruptamente para frequências muito altas.

6.4.4 Projeto usando o lema GKYP

O método descrito neste capítulo para o projeto foi aplicado ao exemplo da viga metálica já abordado. Considerou-se o \mathcal{H}_∞ como critério de controle e duas saídas de desempenho com faixas de frequência diferentes para cada desempenho.

Para otimização da resposta, aplicou-se a minimização da norma \mathcal{H}_∞ sobre a aceleração da planta entre as frequências 1000 e 4000 rad/s. Como segundo sinal de desempenho foi usado o sinal de controle com o objetivo de otimizá-lo nas frequências a partir de 1E4 rad/s, com a intenção de limitar sua atuação. Os parâmetros para o critério de estabilidade usados no Projeto 4 são $p = 0,002$ e $q = -550$ usando o programa KYPD. Esses parâmetros têm pouca influência no desempenho, afetam a estabilidade numérica do projeto e são encontrados por tentativa e erro a partir de valores iniciais 1 e -1 .

A Figura 6.30 mostra o resultado de controle obtido e a Figura 6.33 mostra a limitação do esforço do controlador obtida com o segundo critério de desempenho. A Figura 6.30 mostra a redução de todos os picos, exceto do primeiro, que era o mais fraco. A redução da norma \mathcal{H}_∞ é dada por

$$\frac{\|\mathbf{H}(s)\|_\infty}{\|\mathbf{P}(s)\|_\infty} = 0,10800.$$

Ainda, as figuras 6.31 e 6.32 apresentam a resposta e o sinal de controle para a varredura senoidal linear até 4000 rad/s.

É importante notar mais uma vez que este controlador possui a ordem da planta e não uma ordem aumentada pelos filtros de ponderação.

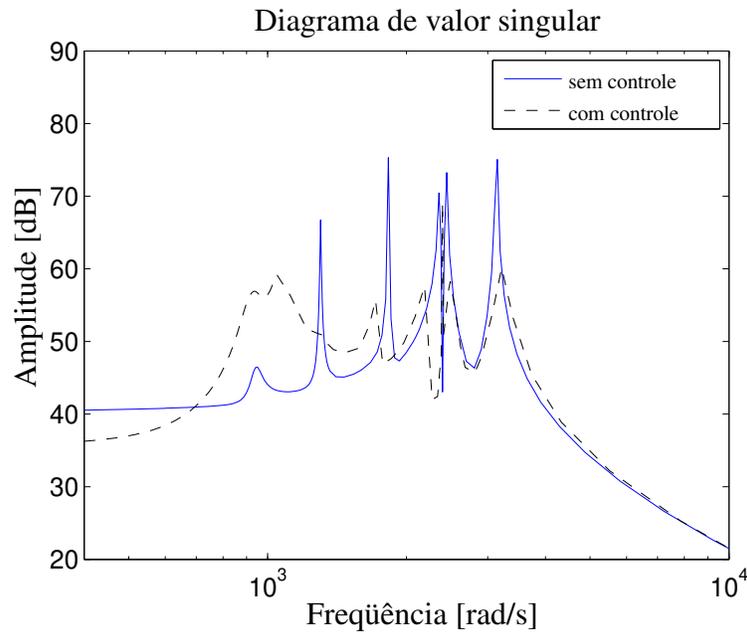


Figura 6.30: Resposta antes e depois do controle usando o método baseado no lema GKYP para o modelo da viga. A região de projeto para minimizar a vibração foi entre 1000 e 4000 rad/s e limitar o sinal de controle a partir de 1E4 rad/s. Todos os picos foram reduzidos, exceto o primeiro, que foi ampliado.

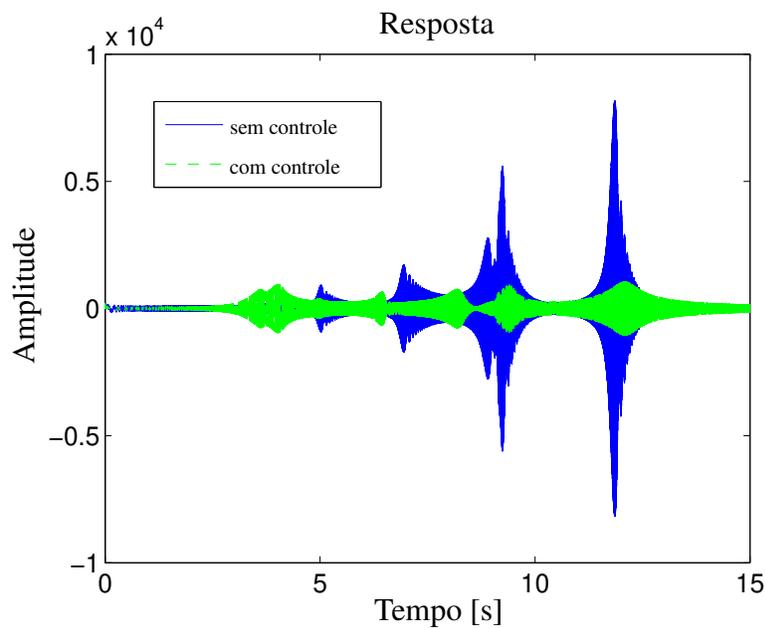


Figura 6.31: Resposta temporal com uma entrada em varredura senoidal linear de 0 até 4000 rad/s para o modelo da viga. O mesmo efeito de controle mostrado na Figura 6.30 é evidenciado no domínio do tempo.

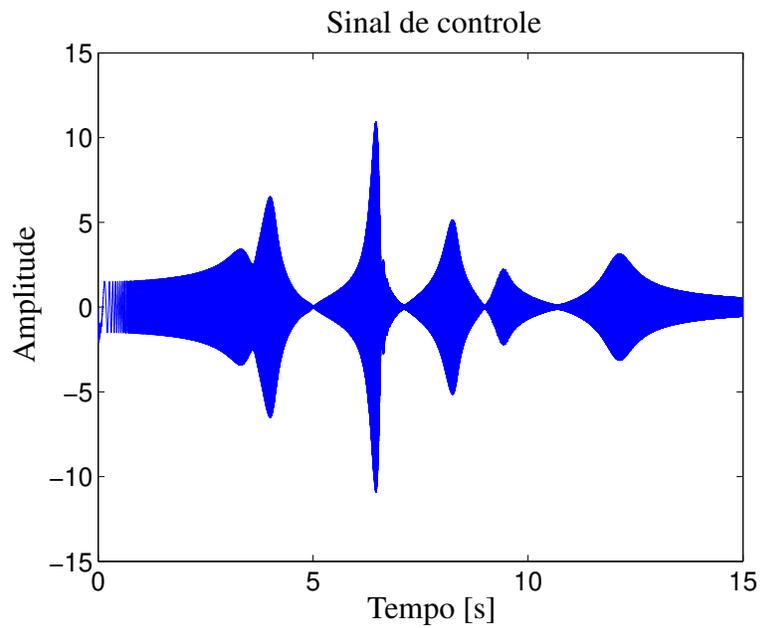


Figura 6.32: Sinal de controle no domínio do tempo para a entrada de varredura senoidal até 4000 rad/s no modelo da viga. Considera-se o projeto de controle do lema GKYP. O sinal do controlador é baixo para altas frequências.

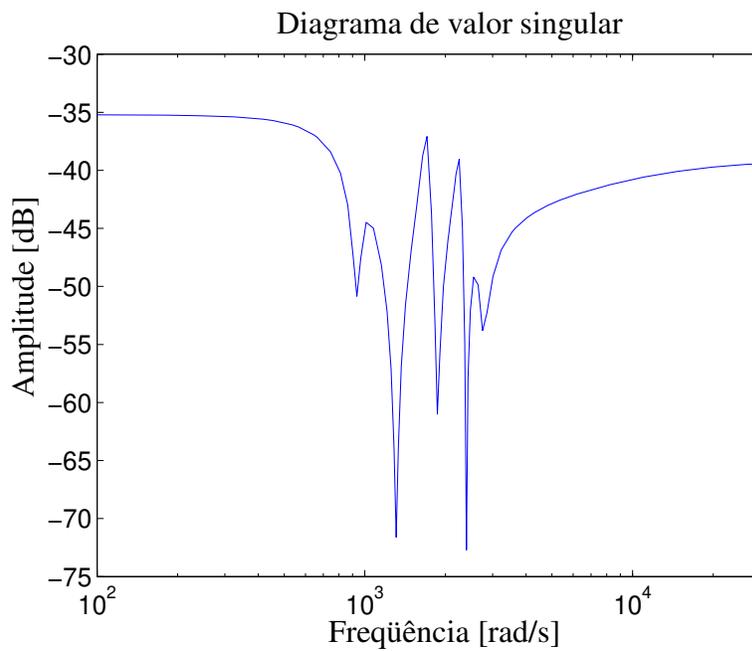


Figura 6.33: Valores singulares do controlador projetado pelo método baseado no lema GKYP para a viga.

6.5 Comentários

Este capítulo apresentou dois exemplos de plantas sobre as quais foram executados projetos \mathcal{H}_∞ com diferentes abordagens e níveis de complexidade. Apoiado nos conceitos apresentados em outros capítulos, mostrou-se a necessidade de se contemplar incertezas no projeto de controle e como tal consideração é aplicada. As vantagens da abordagem mais recente, apresentada no Capítulo 5, baseada no lema GKYP são mostradas comparando os projetos qualitativamente.

Capítulo 7

Experimento de controle com uma bancada de sistema torcional

7.1 Resumo

Apresenta-se uma bancada para testes de projeto de controle para a qual foi testado o método apresentado no Capítulo 5: o controle \mathcal{H}_∞ com restrições em frequência. Trata-se de um sistema de dois graus de liberdade (dois discos) com uma mola torcional entre eles. Cada disco possui um freio magnético e um dos discos é acionado por um motor elétrico de corrente contínua. As posições são medidas usando transdutores do tipo *encoders*. O sistema é operado usando um sistema de aquisição de dados em computador e o programa LabVIEW. Circuitos de potência de regulação de largura de pulso são usados no acionamento tanto do motor quanto dos freios.

7.2 Planta

7.2.1 Descrição

Descreve-se aqui um bancada desenvolvida na Faculdade de Engenharia Mecânica da Unicamp com o objetivo de ser usada para testes de controle e aquisição de dados e em aulas das disciplinas de Laboratório de de Controle de Sistemas e Aquisição de Dados para o curso de graduação em Engenharia de Controle e Automação.

O esquema de montagem mostrado na Figura 7.1 é descrito a seguir e a bancada é mostrada na Figura 7.2.

Montagem mecânica

A bancada consiste de dois discos unidos por uma mola de torção posicionados verticalmente. Os discos representam graus de liberdade do sistema dinâmico. O disco inferior está acoplado de forma rígida a um motor de corrente contínua. Os discos são instrumentados por *encoders* acoplados por correias aos respectivos eixos. A bancada possui dois freios magnéticos, um para cada grau de liberdade. O uso desses freios é descrito a seguir.

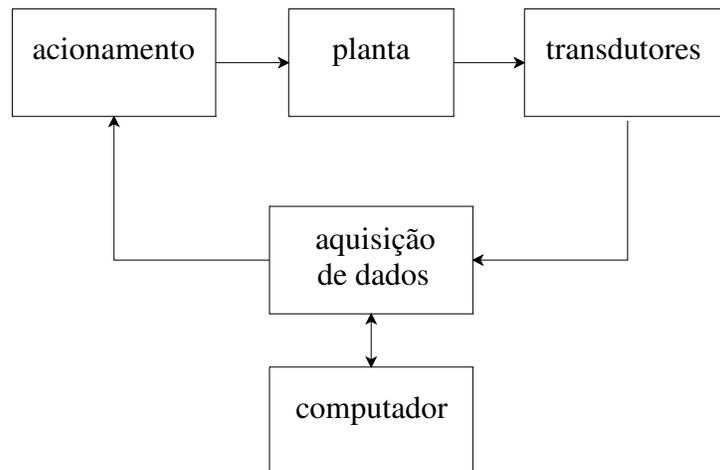


Figura 7.1: Diagrama de montagem das componentes da bancada torcional.

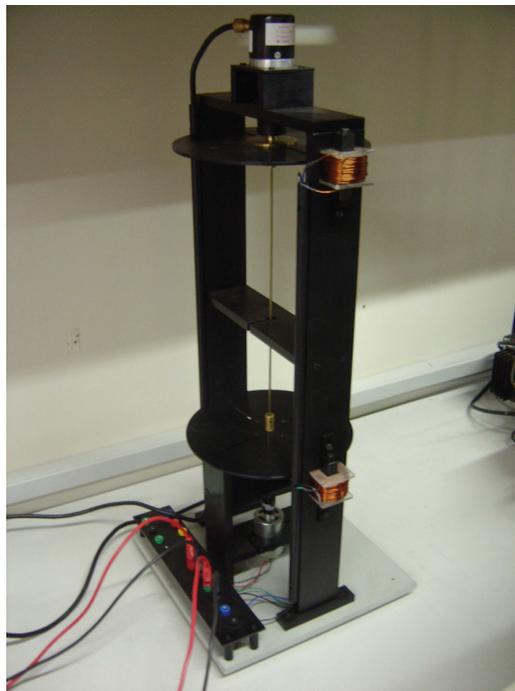


Figura 7.2: Bancada torcional.

Acionamento

Para acionar eletricamente tanto o motor quanto os freios são usados circuitos de potência baseados em modulação de largura de pulso (PWM - *Pulse Width Modulation*). O mesmo circuito é usado em todos os casos e possui três entradas de sinal, a entrada de alimentação bipolar e dois pólos de saída de alimentação que devem ser ligados ao que se deseja acionar.

Os três sinais de controle são chamados PWM, direção e terra. O sinal de terra é a referência de tensão fornecida para os outros dois, o sinal chamado PWM é um sinal de características de lógica digital (TTL), entre 0 e 5 V, de uma onda quadrada que se supõe que será de período constante mas de ciclo de trabalho (razão entre tempo em sinal alto e período) controlado de modo a regular a saída de alimentação. O sinal de direção indica se a alimentação é positiva ou negativa. Assim, a saída de alimentação será um sinal de potência que tem a tensão aproximadamente igual à alimentação de entrada e tem forma de um sinal em modulação de largura de pulso do sinal PWM de entrada e o sinal de tensão (positiva ou negativa) dado pelo sinal de direção.

Usando esse circuito de acionamento, os sinais analógicos são convertidos em sinais de PWM. Supõe-se um sinal limitado entre -1 e 1. A polaridade desse sinal (qualidade de ser positivo ou negativo) é transferido para o sinal de direção na entrada do circuito na forma de 0 ou 5 V. O módulo desse sinal é interpretado como uma porcentagem do ciclo de trabalho. Desse modo, a potência fornecida pelo circuito é proporcional ao módulo do sinal de entrada original, ou seja, ao ciclo de trabalho do sinal de PWM. Uma consequência dessa abordagem é que os sinais destinados ao controle do acionamento devem estar limitados entre -1 e 1.

Por exemplo, se se deseja que o motor gire com máxima potência para um dada tensão, alimenta-se o circuito de acionamento com essa tensão e se produzem tanto o sinal de direção igual a 0 ou 5 V (conforme o sentido de rotação) quanto o sinal de PWM que é uma onda quadrada de 100% de ciclo de trabalho, que corresponde ao um sinal constante de 5 V. Para uma alimentação variável, variam-se os sinais de PWM e direção. Para produzir tais variações e ainda medir os sinais de posição dos *encoders*, utiliza-se um sistema de aquisição de dados.

7.2.2 Aquisição de dados e controle

O sistema de aquisição de dados é contido na placa PCI-6521 (ver [31]) fabricada pela National Instruments e integrado com o programa do mesmo fabricante, o LabVIEW, na versão 8.0. Esse programa permite uma programação visual baseada no conceito de *orientação ao fluxo de informações* (ver [30]), usando um diagrama elaborado no monitor. Usando o LabVIEW foram programadas interfaces que permitem acesso às posições medidas nos encoders, à corrente e tensão medidas nos motores e ainda gerar os sinais que controlam os circuitos de acionamento. Isso é feito usando a lógica particular da programação visual, e implementa a comunicação com o *hardware*

Tabela 7.1: Parâmetros e variáveis do modelo matemático da bancada.

Símbolo	Significado
J_1 e J_2	momentos de inércia dos discos
c_1 e c_2	constantes de amortecimento dos discos
C_1 e C_2	constantes de amortecimento dos freios
k	constante elástica da mola
θ_1 e θ_2	posições dos discos
V , V_{f_1} e V_{f_2}	tensões no motor e nos freios
K	constante mecânica do motor
R	resistência do motor
L	indutância do motor

de aquisição e as operações matemáticas necessárias.

No caso do projeto de controle descrito a seguir, o controlador resume-se a uma função matemática das saídas medidas (posições) para produzir da maneira indireta descrita na Seção 7.2.1 os sinais que controlam os circuitos de acionamento. Outros sinais também são gerados com a função de entradas exógenas ao controle.

A implementação do controlador no programa é facilitada pelo pacote do LabVIEW específico para controle de sistemas dinâmicos (*Control Systems Toolbox*, [19]). Sem tal pacote seria necessário implementar o controlador usando operações matemáticas mais elementares, presentes no programa.

7.2.3 Modelo matemático

O modelo matemático da bancada é obtido a partir do esquema da Figura 7.3. É suficiente escrever as equações mecânicas de movimento para cada um dos discos e a equação elétrica do motor. Os símbolos mostrados na figura são definidos na Tabela 7.1. A modelagem é a comum para motores de corrente contínua, apresentada em [13].

Para o motor, o torque é dado como produto da constante eletromecânica pela corrente ($K_t i$) e a força contra-eletromotriz, como a constante de conversão eletromagnética pela velocidade angular ($K_m \dot{\theta}_1$). Como é usual para motores de corrente contínua, supõe-se que as duas constantes do motor são iguais, $K_m = K_t = K$.

As equações para a bancada são:

$$L\dot{i} + Ri + K\dot{\theta}_1 = V, \quad (7.1)$$

$$J_1\ddot{\theta}_1 + c_1\dot{\theta}_1 + k(\theta_1 - \theta_2) = Ki - CV_{f_1}\dot{\theta}_1, \quad (7.2)$$

$$J_2\ddot{\theta}_2 + c_2\dot{\theta}_2 + k(\theta_2 - \theta_1) = -CV_{f_2}\dot{\theta}_2. \quad (7.3)$$

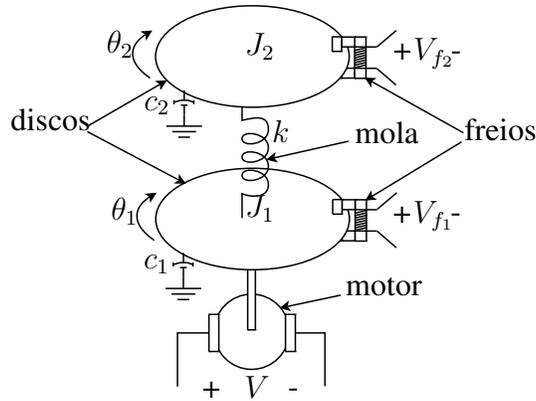


Figura 7.3: Esquema para modelagem da bancada torcional.

Os freios produzem um torque resistente proporcional à corrente que passa por eles e à velocidade dos discos (ver [3]). Por isso, esse torque é escrito como o produto de uma constante pela tensão de alimentação pela velocidade. Dessa forma, pode-se escrever que o torque do freio é proporcional a velocidade apenas quando se supõe que a alimentação é um parâmetro arbitrário. Na prática, a alimentação será regulada para que o efeito do freio seja o de variar o amortecimento do sistema: com um freio ligado, tem-se um sistema mais amortecido do que sem freio. Esse efeito é modelado por uma constante para cada um deles. Desse modo, $C_1 = CV_{f_1}$ e $C_2 = CV_{f_2}$.

O modelo é escrito então como

$$Li + Ri + K\dot{\theta}_1 = V, \quad (7.4)$$

$$J_1\ddot{\theta}_1 + (c_1 + C_1)\dot{\theta}_1 + k(\theta_1 - \theta_2) = Ki, \quad (7.5)$$

$$J_2\ddot{\theta}_2 + (c_2 + C_2)\dot{\theta}_2 + k(\theta_2 - \theta_1) = 0. \quad (7.6)$$

Este modelo da bancada é simplificado para este trabalho de duas maneiras. Uma simplificação que reduz uma equação dinâmica é a de desprezar a dinâmica elétrica do motor, supondo que o tempo de resposta necessário para carregar a indutância de armadura é muito menor do que os outros tempos considerados. Dessa forma, a indutância do motor é desprezada, $L = 0$. A outra simplificação é algébrica, e em vez de incluir no modelo como estados as posições e velocidades dos discos, inclui-se apenas o deslocamento angular (diferença das posições) e as velocidades. Isso é viável porque o objeto de controle a seguir será a diferença angular e não as posições. Essa simplificação é sugerida em [1].

Ao desprezar a indutância na Equação (7.4), esta se torna uma equação algébrica na variável da corrente e esta pode ser eliminada como

$$i = \frac{V - K\dot{\theta}_1}{R}. \quad (7.7)$$

A Equação (7.5) passa a ser

$$J_1 \ddot{\theta}_1 + \left(c_1 + C_1 + \frac{K^2}{R} \right) \dot{\theta}_1 + k(\theta_1 - \theta_2) = \frac{K}{R} V. \quad (7.8)$$

Para obter o modelo da forma padrão de espaço de estados, definem-se os estados

$$\begin{aligned} x_1 &= \theta_1 - \theta_2, \\ x_2 &= \dot{\theta}_1, \\ x_3 &= \dot{\theta}_2. \end{aligned} \quad (7.9)$$

A partir dos estados definidos em (7.9) e das equações (7.7), (7.8) e (7.6), o modelo de estados é dado por (definindo a entrada $u = V$)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -\frac{k}{J_1} & -\frac{(c_1 + C_1 + K^2/R)}{J_1} & 0 \\ \frac{k}{J_2} & 0 & -\frac{c_2 + C_2}{J_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K}{RJ_1} \\ 0 \end{bmatrix} u, \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (7.10)$$

em que se considerou a diferença angular da mola como saída.

Pode-se considerar a atuação dos freios como um parâmetro que varia por influência externa, e neste caso, as constantes C_1 e C_2 no modelo, que valem para valores particulares de alimentação V_{f_1} e V_{f_2} devem variar quando se variarem as tensões. Define-se, para facilitar os projetos, uma entrada para cada freio entre 0 e 1 que representa uma fração da alimentação em cada freio para a qual o amortecimento encontrado é máximo, ou seja, aquele fornecido pela constante C_1 ou C_2 .

Com essas novas entradas, f_1 e f_2 , o modelo é escrito como

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -\frac{k}{J_1} & -\frac{(c_1+K^2/R)}{J_1} & 0 \\ \frac{k}{J_2} & 0 & -\frac{c_2}{J_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K}{RJ_1} \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{C_1}{J_1} \\ 0 \end{bmatrix} f_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{C_2}{J_2} \\ 0 \end{bmatrix} f_2, \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (7.11)$$

7.2.4 Identificação do sistema

Os parâmetros do modelo mostrado em (7.11) foram determinados usando testes que os isolavam. Para os parâmetros do motor (L , R e K), foram realizados os testes comuns para motores de corrente contínua, apresentados em [13].

Para o restante dos parâmetros (J_1 , J_2 , c_1 , c_2 e k), foram realizados três testes. Um deles com o motor ligado e esperando o sistema atingir regime permanente, com os freios desligados. Para esse caso, as acelerações dos discos são nulas ($\ddot{\theta}_1 = \ddot{\theta}_2 = 0$), as velocidades são constantes e iguais ($\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = \dot{\theta}$) e as posições possuem uma diferença também constante ($\theta_1 - \theta_2 = \Delta\theta$).

Assim, as equações de movimento para regime permanente de aceleração tornam-se as seguintes equações:

$$\left(c_1 + \frac{K^2}{R}\right)\dot{\theta} + k\Delta\theta = \frac{KV}{R}, \quad (7.12)$$

$$c_2\dot{\theta} - k\Delta\theta = 0. \quad (7.13)$$

Somando as equações (7.12) e (7.13) tem-se

$$c_1\dot{\theta} + c_2\dot{\theta} = \frac{K}{R}(V - K\dot{\theta}). \quad (7.14)$$

Os outros dois testes, também com os freios desligados, foram realizados da seguinte maneira: primeiro prende-se o disco superior (disco 2) e se aplica manualmente uma condição inicial ao disco inferior com o motor desligado para medir parâmetros de frequência natural e fator de amortecimento. Em seguida, repete-se o procedimento com os discos invertidos. Nas equações de

movimento, as respostas às respectivas condições iniciais são descritas como

$$J_1 \ddot{\theta}_1 + \left(c_1 + \frac{K^2}{R} \right) \dot{\theta}_1 + k\theta_1 = 0, \quad (7.15)$$

$$J_2 \ddot{\theta}_2 + c_2 \dot{\theta}_2 + k\theta_2 = 0. \quad (7.16)$$

As freqüências naturais e fatores de amortecimentos medidos nas respostas levam às relações:

$$k = \omega_{n1}^2 J_1, \quad (7.17)$$

$$k = \omega_{n2}^2 J_2, \quad (7.18)$$

$$c_1 = 2\xi_1 \omega_{n1} J_1 - \frac{K^2}{R}, \quad (7.19)$$

$$c_2 = 2\xi_2 \omega_{n2} J_2. \quad (7.20)$$

As equações (7.14), (7.17), (7.18), (7.19) e (7.20) constituem cinco equações lineares nas cinco incógnitas J_1 , J_2 , c_1 , c_2 e k . Tem-se portanto, um sistema linear cuja solução fornece os valores dos parâmetros dependentes das duas freqüências naturais, dos dois fatores de amortecimento e da velocidade em regime permanente.

Para descobrir as constantes associadas aos freios C_1 e C_2 é suficiente refazer os testes aplicando condições iniciais nos discos e encontrar outros valores de freqüências naturais e fatores de amortecimento. Com a hipótese de que a rigidez da mola (k) e as inércias (J_1 e J_2) são as mesmas, as equações (7.19) e (7.20) pode ser usadas para encontrar os novos fatores de amortecimento, que são comparados com o caso sem freios como segue:

$$C_1 = 2\xi_{f1} \omega_{nf1} J_1 - c_1 - \frac{K^2}{R}, \quad (7.21)$$

$$C_2 = 2\xi_{f2} \omega_{nf2} J_2 - c_2, \quad (7.22)$$

sendo que ξ_{f1} , ξ_{f2} , ω_{nf1} e ω_{nf2} são os parâmetros da resposta medidos para o caso com freios atuando em cada um dos discos correspondentes.

Os valores identificados dessa forma para os parâmetros do modelo são mostrados na Tabela 7.2. Apesar de ter sido determinado o valor da indutância do motor L , este foi desprezado, conforme visto na formulação usada. Os dados identificados produzem um modelo linear cujo diagrama de valores singulares é mostrado na Figura 7.4 para os casos sem freio e com os freios acionados. Nota-se que o freio 1, que atua sobre o disco 1 acoplado ao motor, além de amortecer o pico de resposta, tem o efeito de reduzir a resposta nas baixas freqüências. O freio 2, relativamente ao modelo nominal, eleva a resposta nas baixas freqüências (baixas significando antes do pico).

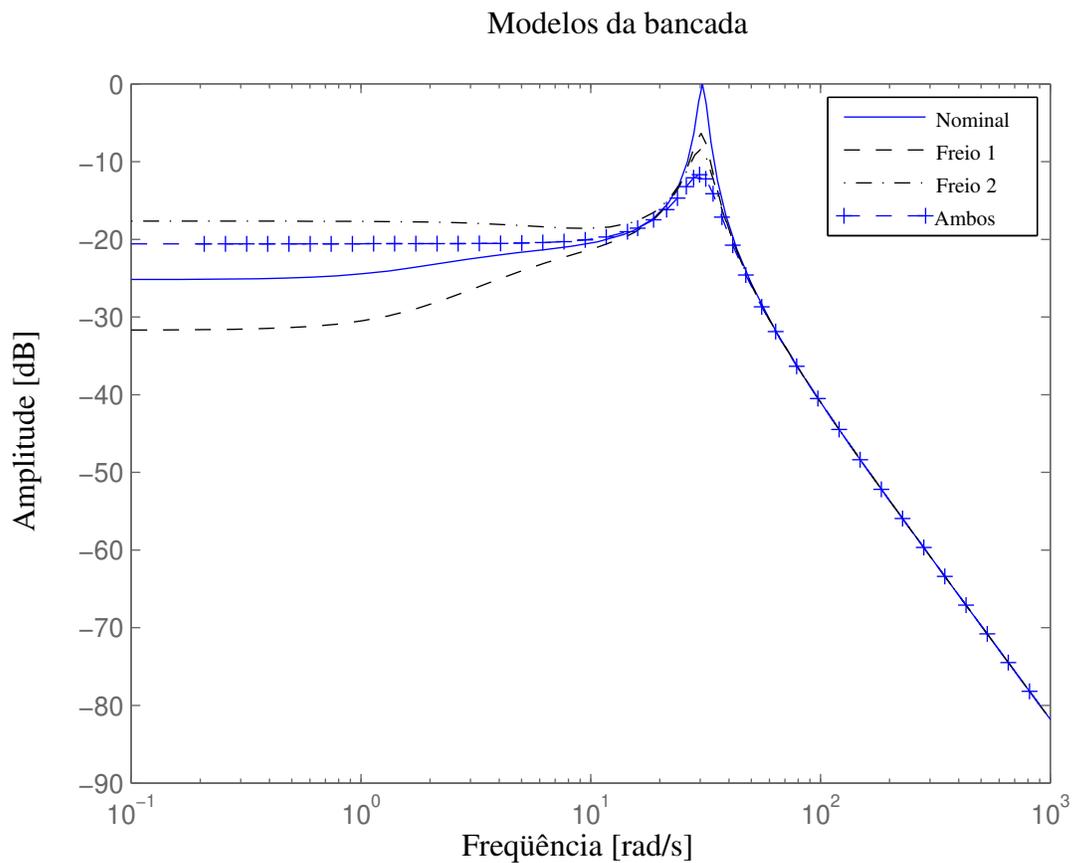


Figura 7.4: Diagrama de valor singular do modelo considerando ou não a presença dos freios. O freio 1 atua sobre o disco inferior, diretamente no motor. O freio 2, no disco superior.

Tabela 7.2: Valores dos parâmetros identificados para modelo da bancada.

Parâmetros	Valor
J_1	$5,4625e-5 \text{ kg.m}^2$
J_2	$5,4088e-5 \text{ kg.m}^2$
c_1	$4,2208e-5 \text{ N.m/s}$
c_2	$9,1906e-5 \text{ N.m/s}$
k	$0,0256 \text{ N/m}$
R	$7,8431 \Omega$
L	$0,0784 \text{ H}$
K	$0,0349 \text{ N.m/A}$
C_1	$3,2223e-4 \text{ N.m/s}$
C_2	$5,1921e-4 \text{ N.m/s}$

7.3 Projeto de controle \mathcal{H}_∞ usando o lema GKYP

O projeto de controle usando o lema GKYP depende de definir as faixas de frequência que são objetivo de controle. No caso da bancada, com uma frequência de pico de 30,7 rad/s, é natural que um controlador projetado tenha o objetivo de minimização em torno deste pico, concentrando ali o esforço de controle.

É considerado o caso de interesse da realimentação de saída, embora no caso desta bancada a realimentação de estado também seja possível usando o equipamento disponível. É usada como saída do modelo apenas a medida de deslocamento angular da mola, como explicitado na Seção 7.2.3.

O projeto de controle \mathcal{H}_∞ robusto baseia-se na notação padrão da transformação linear fracionária, mostrada na Figura 4.2. A redução da vibração é estabelecida sobre o par de entrada e saída z_2 e w_2 . É prevista uma incerteza limitada em norma dada por Δ no par de entrada e saída z_1 e w_1 , que também é um critério sobre o qual aplicar o \mathcal{H}_∞ . O controlador é representado pelo modelo K e planta por P . y é o sinal de saída medido e u é o sinal de controle.

O controlador projetado pelas restrições apresentadas a seguir deve minimizar a norma \mathcal{H}_∞ do par z_2 e w_2 e garantir uma norma limitada para a incerteza entre z_1 e w_1 . Ou seja, é estável para as variações da incerteza dentro da limitação da norma.

Para o teste realizado neste trabalho, considerou-se apenas a variação do primeiro freio, o que representa uma incerteza limitada em norma entre a saída da velocidade do primeiro disco e a entrada do primeiro freio, mostrada no modelo em (7.11). O mesmo caso seria para o segundo freio. A incerteza associada a ele seria considerada como entre a velocidade do segundo disco e a entrada associada a ele. Ainda, o distúrbio w_2 foi imposto diretamente sobre o motor, somando ao sinal de controle. Um modelo considerado para o projeto de controle é

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -\frac{k}{J_1} & -\frac{(c_1+K^2/R)}{J_1} & 0 \\ \frac{k}{J_2} & 0 & -\frac{c_2}{J_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{C_1}{J_1} \\ 0 \end{bmatrix} w_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K}{RJ_1} \\ 0 \end{bmatrix} w_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K}{RJ_1} \\ 0 \end{bmatrix} u, \\ \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Outra configuração testada para o projeto foi a de inverter o papel do freio 1. Ou seja, supor que o modelo contém o freio ligado o tempo todo e a incerteza consiste em diminuir a sua potência.

Tabela 7.3: Parâmetros dos projetos de controle.

Parâmetro	Controlador 1	Controlador 2
Primeiro objetivo: ω_1	0	25
Primeiro objetivo: ω_2	35	35
Segundo objetivo: ω_1	0	35
Segundo objetivo: ω_2	35	∞
p	10	1
q	-1	-1

Isso tem o efeito de que o modelo nominal é mais amortecido do que as suas variações. Portanto, as variações são mais difíceis de controlar em princípio. Essa configuração é representada pelas equações em (7.24).

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -\frac{k}{J_1} & -\frac{(c_1+C_1+K^2/R)}{J_1} & 0 \\ \frac{k}{J_2} & 0 & -\frac{c_2}{J_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{C_1}{J_1} \\ 0 \end{bmatrix} w_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K}{RJ_1} \\ 0 \end{bmatrix} w_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K}{RJ_1} \\ 0 \end{bmatrix} u, \\
 \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{7.24}$$

7.4 Simulação

Foram projetados dois controladores de acordo com os dados da Tabela 7.3 e simulados usando o ambiente Matlab para verificação dos resultados. Os dois projetos foram realizados usando dois objetivos de controle, um deles sobre o desempenho e outro sobre a robustez, como descrito na Seção 7.3. O sinal de distúrbio foi simulado com uma varredura senoidal linear entre 0,0063 e 62,8 rad/s (0,001 e 10 Hz) e a incerteza é representada por uma onda quadrada na entrada de incerteza do modelo, de amplitude 1 e período 20 s. A simulação total é de 100 s.

Os resultados de controle em termos dos valores singulares são mostrados nas figuras 7.5 e 7.6 e nas figuras 7.7 e 7.8 como resposta temporal. Os controladores foram projetados usando o modelo e a realização de entrada e saída de (7.24). No caso de resposta temporal, para as figuras 7.7 e 7.8, o distúrbio é uma varredura senoidal linear entre 0,063 e 62,8 rad/s (0,01 e 10 Hz) e a incerteza é uma onda quadrada de amplitude unitária e período de 20 s.

Os gráficos mostram um projeto de controle bastante eficiente do ponto de vista de eliminação

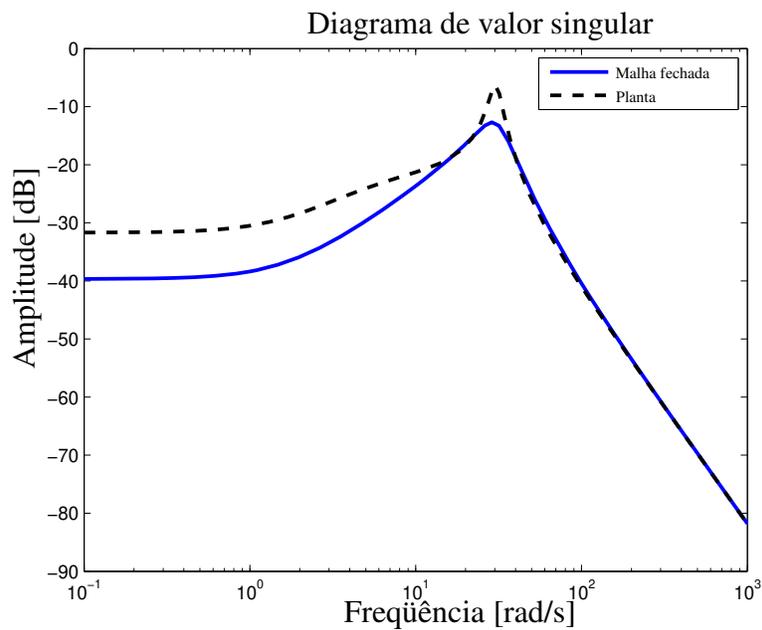


Figura 7.5: Diagrama de valor singular do primeiro projeto de controle: com o desempenho entre as frequências 0 e 35 rad/s e a incerteza na mesma faixa, limitada na unidade .

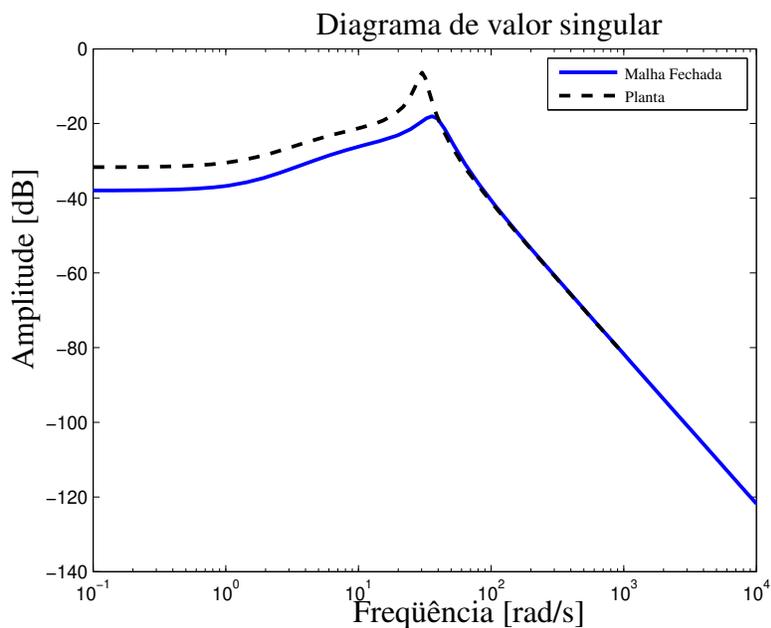


Figura 7.6: Diagrama de valor singular do segundo projeto de controle: com o desempenho entre as frequências 25 e 35 rad/s e a incerteza limitada acima de 35 rad/s.

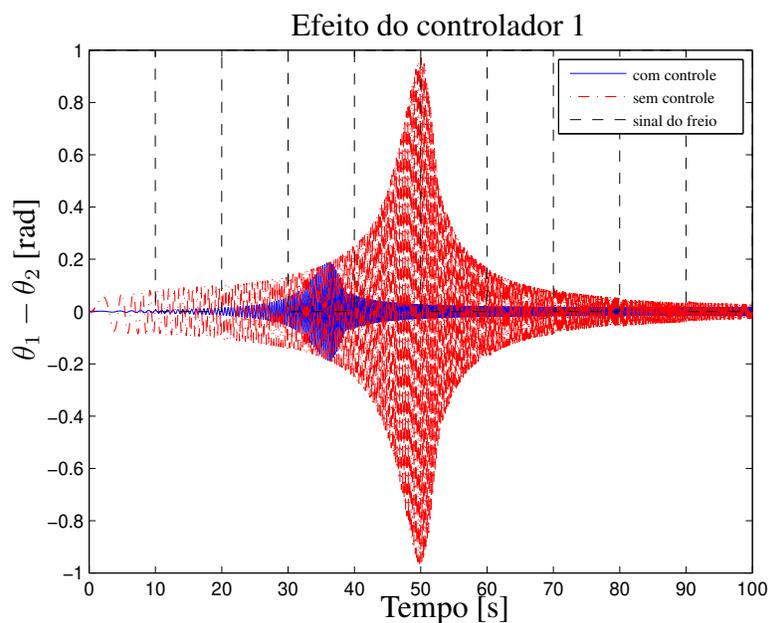


Figura 7.7: Resposta temporal do primeiro projeto de controle: com o desempenho entre as frequências 0 e 35 rad/s e a incerteza limitada na mesma faixa.

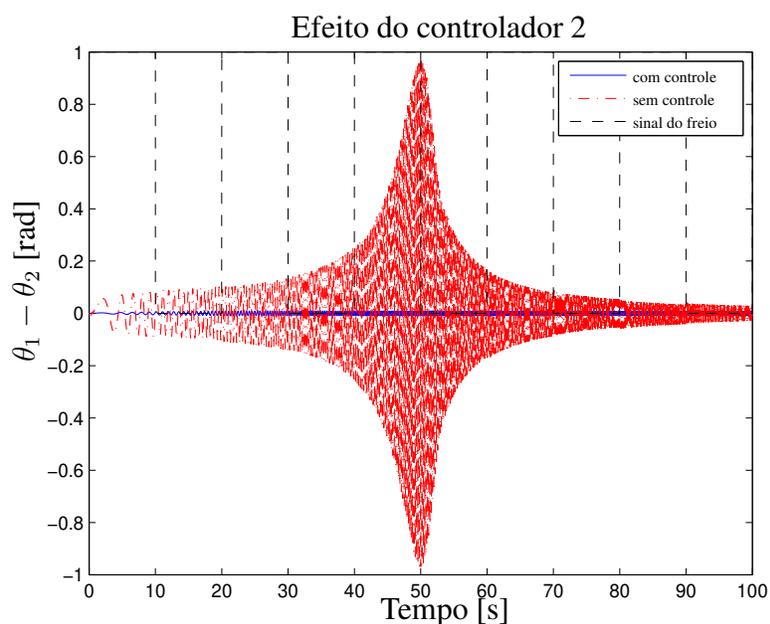


Figura 7.8: Resposta temporal do segundo projeto de controle: com o desempenho entre as frequências 25 e 35 rad/s e a incerteza limitada acima de 35 rad/s.

Tabela 7.4: Variâncias das curvas da Figura 7.9.

controle	sem incerteza	com incerteza
sem controle	-	0,0677
Controlador 1	0,0548	0,0227
Controlador 2	0,0222	0,0187

de deslocamento angular dentro de um incerteza limitada pela unidade. A principal razão para tal desempenho é a colocação do controle, ou seja, o fato de que um dos distúrbios e o sinal de controle estão posicionadas na mesma entrada.

Os controladores encontrados são mostrados no Apêndice B, na Seção B.3.

7.5 Experimento de controle

Para a realização do experimento os controladores projetados na Seção 7.3 foram discretizados com tempo de amostragem de 0,01 s. O modelo discretizado foi implementado usando o LabVIEW e testado com a bancada real. Assim como nas simulações, foram usados um sinal de varredura senoidal com a frequência crescendo linearmente entre 0,063 e 43,96 rad/s (0,01 e 7 Hz) para o distúrbio e um sinal de onda quadrada de amplitude 0,5 para a incerteza.

Os dois controladores apresentaram resultados de controle compatíveis, que reduziram o valor absoluto da deformação da mola. No entanto, o sistema real parece ser mais amortecido que o seu modelo, possivelmente devido à estrutura simplificada escolhida para identificação. O efeito dos freios é de amortecer o sistema com relação ao modelo original, conforme se vê nos resultados da Figura 7.9. Nessa figura também se nota, no teste do controlador 1, que o alto amortecimento, associado ao efeito do controle, fez que o esforço de motor se equiparasse ao atrito estático no início do teste, produzindo um atraso de transporte no início, o qual não influenciou significativamente o controlador.

A Tabela 7.4 compara as variâncias dos gráficos da Figura 7.9, ilustrando de maneira concisa os resultados de controle. Todos representam reduções da deslocamento angular em comparação com o caso sem controle.

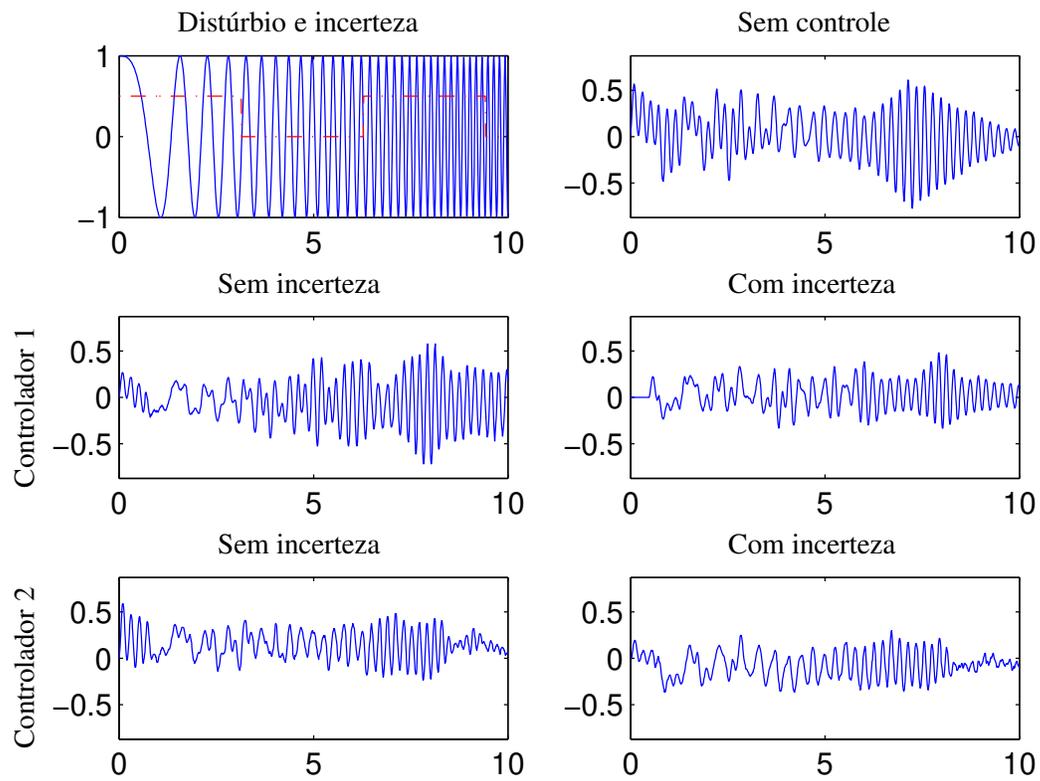


Figura 7.9: Resultados dos testes de controle. O primeiro projeto apresentou um atraso no teste com incerteza. Todas as curvas de resposta estão em dimensão de radianos.

Capítulo 8

Conclusão

Foi apresentado neste trabalho um subconjunto de técnicas do controle robusto orientadas à representação de incertezas em sistemas dinâmicos lineares. O foco central do trabalho está em torno do controle robusto \mathcal{H}_∞ na forma como este emerge de três resultados: o teorema do ganho pequeno, na sua maneira de limitar a norma de incertezas afetando o sistema; a estabilidade quadrática, que garante a estabilidade de um conjunto de sistemas delimitado por um politopo com sistemas nos vértices; e os resultados derivados do lema generalizado de Kalman-Yakubovič-Popov, levando a projetos com restrições em frequência.

Em todos os casos, considerou-se o projeto de controladores por realimentação de saída usando técnicas da programação semidefinida, acessadas por meio dos pacotes computacionais disponíveis, grande parte deles em licença gratuita. O foco do trabalho foram as estruturas flexíveis e suas dificuldades particulares no projeto foram abordadas em simulação e em um caso de estudo experimental.

A consideração da incerteza é indispensável no projeto de controle para estruturas flexíveis, devido principalmente a particularidades apresentadas de sua modelagem. Aqui, a incerteza dinâmica modelada na forma de desigualdades em frequência apresenta vantagens de implementação (na limitação da ordem do controlador e especificação direta das restrições) sobre os filtros de ponderação. Ainda, os filtros de ponderação permanecem úteis na medida que se desejar ponderar de maneira contínua sinais do sistema em malha fechada (como o esforço de controle).

A abordagem de incerteza politópica representa uma área ativa na literatura e uma alternativa à representação na forma de uma transformação linear fracional. A abordagem apresentada de projeto usando a estabilidade quadrática carrega um conservadorismo no caso do projeto de controle por realimentação de saída de sistemas contínuos. No entanto, ela permite o projeto satisfatório quando a especificação politópica representar as variações da planta de maneira mais direta.

A principal oposição apresentada é entre as abordagens de projeto robusto usando filtros de ponderação e usando o lema GKYP. Já foi notado que a abordagem usando filtros de ponderação permite especificações de forma na frequência. Isto é, ponderações que variam continuamente. Neste caso, diferenciar comportamentos próximos em frequência, como modos de vibração pró-

ximos em que alguns devem ser tratados como incerteza e outros como objetivo de desempenho, exigem filtros de ordem elevada. O controlador robusto projetado sobre uma planta aumentada (planta original com filtros) possui ordem maior do que a planta original.

A abordagem de projeto usando o lema GKYP permite especificar regiões de frequência sobre as quais considerar robustez ou desempenho isoladamente. Isso é possível a partir de uma especificação direta das faixas de frequência. Ainda, o controlador projetado possui a ordem da planta original. A implementação computacional do projeto de controle é mais complexa e portanto, mais sujeita a erros numéricos. É verificado que essa forma de projeto cria também um grande número de variáveis, requerendo implementação cuidadosa.

Este trabalho pode ser estendido em vários sentidos. A abordagem de se utilizar o controle \mathcal{H}_∞ com desigualdades em frequência baseadas no lema GKYP pode ser testada experimentalmente em estruturas flexíveis mais complexas, como placas e montagens mais realistas. Desse modo, seria possível levantar as dificuldades de aplicação do método em modelos de ordem maior.

Ainda, a implementação do método baseado no lema GKYP pode ser melhorada no sentido de se tornar numericamente estável e de menor custo computacional. Haja vista o fato de que há grande variação de desempenho entre os pacotes de solução de problemas de desigualdades matriciais lineares quando aplicados a esse tipo de problema.

O lema GKYP pode também ser abordado no sentido de uma comparação direta de características matemáticas com o método dos filtros de ponderação para determinar critérios objetivos para orientar a escolha entre um deles para casos específicos.

Apêndice A

Modelo experimental da viga engastada

As dimensões da viga engastada de alumínio usada como planta para controle são mostradas na Figura A.1.

As matrizes que descrevem os modelos da viga com ordem 12 e 16, identificadas usando o algoritmo de realização de autosistemas são mostradas a seguir. Para tornar a representação concisa é utilizada a forma modal das matrizes de estado na maneira como implementada na função `canon` do Matlab. A matriz **A** é apresentada na forma do fator de amortecimento ξ e frequência natural ω_n de cada pólo. No caso de um pólo real, o amortecimento é unitário.

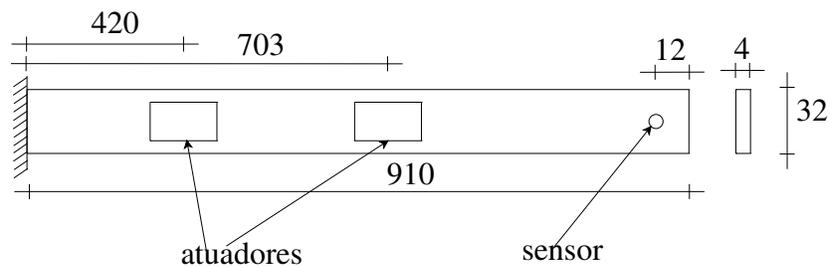


Figura A.1: Esquema com as dimensões da viga engastada (em milímetros).

A.1 Modelo de ordem 12

A		D = [0 0]		
ω_n	ξ	B		C^T
9,4204731e2	3,0592626e-2	-2,2603436e2	-1,5957970e2	-2,8623254e2
9,4204731e2	3,0592626e-2	4,3918722e2	1,1646138e2	-1,9209253e2
1,3022812e3	2,2191074e-3	-2,5592303e2	-3,5663122e2	-2,9996163e2
1,3022812e3	2,2191074e-3	3,2915895	7,7551597e1	-1,8949026e2
1,8257970e3	1,1204604e-3	-8,6121666e1	1,0449281e2	2,6361914e2
1,8257970e3	1,1204604e-3	-2,0866050e2	3,7857998e2	-2,5453865e2
2,3606928e3	4,1954573e-3	4,8550594e1	-3,5453500e1	6,6436664e1
2,3606928e3	4,1954573e-3	-1,1529792e2	1,4650596e2	-1,7206727e2
2,4342745e3	1,8602354e-3	4,3389974e1	1,8418229e2	-2,2711003e2
2,4342745e3	1,8602354e-3	-3,6804643e1	-1,4382615e2	6,1995653e1
3,1333593e3	1,6495422e-3	6,3830012e1	3,3898550e1	-8,5896016e1
3,1333593e3	1,6495422e-3	1,0171521e2	-4,3074929e1	-1,3462685e2

A.2 Modelo de ordem 16

A		D = [0 0]		
ω_n	ξ	B		C^T
5,2341115e2	1,7488863e-2	-4,4275217e2	-1,2117867e2	1,9190397e2
5,2341115e2	1,7488863e-2	2,2481072e2	1,5896973e2	2,8621977e2
8,6796514e2	3,8764025e-3	-2,5620076e2	-3,5733758e2	-2,9991223e2
8,6796514e2	3,8764025e-3	3,5940849	7,8124879e1	-1,9015785e2
1,3023493e3	2,1584109e-3	-8,5647888e1	1,0064969e2	2,6103115e2
1,3023493e3	2,1584109e-3	-2,0792436e2	3,7526574e2	-2,5210810e2
1,4972693e3	4,5697492e-3	4,9691677e1	-3,9403303e1	6,7188163e1
1,4972693e3	4,5697492e-3	1,1509674e2	-1,4586514e2	1,7196966e2
1,8257836e3	1,1122001e-3	-7,6745361	-6,6315904e1	9,7468809e1
1,8257836e3	1,1122001e-3	-4,8237584e1	1,9621133e2	-1,7411584e2
2,3606697e3	4,0649459e-3	4,2620130e1	1,8175603e2	-2,2235030e2
2,3606697e3	4,0649459e-3	-3,9121716e1	-1,4234149e2	6,8681966e1
2,4342913e3	1,8625943e-3	-6,2200877e1	5,0253504e1	1,8346928e2
2,4342913e3	1,8625943e-3	-9,9627049e1	1,3050486e2	4,3861157e1
3,1333979e3	1,6453964e-3	-9,0631200e1	2,1586981e1	1,3813218e2
3,1333979e3	1,6453964e-3	1,0168310e2	-3,0149124e1	-4,3310162e1

Apêndice B

Modelos de controladores

Os modelos de estados dos controladores projetados são apresentados no mesmo formato usado no apêndice A.

B.1 Matrizes dos controladores para o modelo de três graus de liberdade

B.1.1 Projeto \mathcal{H}_∞ simples

A_c		$D_c = 0$	
ω_n	ξ	B_c	C_c^T
1,5801704e-1	1,0000000	-3,6801412e2	2,0468929e2
2,0813341	5,2848430e-3	1,5761887e1	1,2058779e2
2,0813341	5,2848430e-3	-3,1565086	-5,2573322e2
1,8906246e1	7,9301111e-1	-1,0343468e-1	-5,9996410e-2
1,8906246e1	7,9301111e-1	8,4357723e-2	-9,8231079
6,3338144e2	1,0000000	1,5631773	-1,1012490e1

B.1.2 Projeto com filtros de ponderação

A_c		$D_c = 0$	
ω_n	ξ	B_c	C_c^T
2,8232809e-8	1,0000000	-2,6105631e2	2,0987572
1,6983729	1,2412307e-1	2,4239457e1	-1,1860722e-1
1,6983729	1,2412307e-1	-1,5416818e1	-2,1158976e-1
3,6389992	2,6251187e-1	2,6068432e1	-5,2753739e-1
3,6389992	2,6251187e-1	-6,9664087	-6,1048251e-1
8,9641747	9,8691253e-1	-1,2475591e1	1,1064066e-3
8,9641747	9,8691253e-1	-2,9549427e1	2,4873716e-1
9,2696880	7,6058525e-1	-1,2200901e-1	-7,0446827e1
9,2696880	7,6058525e-1	-2,7175075e-1	-1,7805074e1
1,0963069e1	8,2710105e-1	-1,2729915e-1	-1,0190759e1
1,0963069e1	8,2710105e-1	-3,7374200e-2	4,4549748e1
1,3509233e4	1,0000000	-2,0259130e-2	-9,4667701e1

B.1.3 Projeto usando incerteza politópica

A_c		$D_c = 0$	
ω_n	ξ	B_c	C_c^T
2,0043223e-2	1,0000000	-2,3984923e1	2,9047201e1
2,0819827	6,2886853e-3	-3,2346118e1	9,5113505e-1
2,0819827	6,2886853e-3	-5,5844357e1	4,2134812e-1
2,6404770e1	6,8672998e-1	1,9854143e2	-2,3338062e-1
2,6404770e1	6,8672998e-1	-2,7586061e2	-1,2931942e-1
5,6959652e1	1,0000000	8,8450537e1	6,6700849e-2
1,7456818e2	9,0658145e-1	7,8385731e-1	4,0681946e-3
1,7456818e2	9,0658145e-1	-2,0922933e-2	-3,3013255e-2
2,1818359e3	1,0000000	-3,7426402e-1	1,7923642e-3

B.2 Matrizes dos controladores para o modelo da viga

B.2.1 Projeto \mathcal{H}_∞ simples

Esse controlador foi encontrado pela função `hinfsyn` do Matlab. Essa função pode, conforme critérios informados na documentação, reduzir a ordem do controlador encontrado se verificar que não há necessidade da ordem maior. Foi o que aconteceu neste caso, em que para um planta de ordem 12, tem-se um controlador de ordem 11.

A_c		$D_c = 0$	
ω_n	ξ	B_c	C_c^T
9,6645985e2	8,0662623e-2	1,0696646e11	1,5382099e11
9,6645985e2	8,0662623e-2	2,0160754e1	1,5253760e1
1,6907781e3	3,6058101e-2	-7,2865071e1	5,5110080
1,6907781e3	3,6058101e-2	7,1424524e-1	-2,7596886
2,2103507e3	8,0655160e-2	3,5900027e-1	-3,7163029
2,2103507e3	8,0655160e-2	-1,0944470	2,7359986
2,5880958e3	2,8600430e-2	4,5117051e-1	6,2834528
2,5880958e3	2,8600430e-2	5,9690957e-1	2,9408217
9,8106202e3	-8,3196286e-1	-6,0115132e-1	2,1810678
9,8106202e3	-8,3196286e-1	-4,6941985e-2	1,6151361
2,1713382e13	1,0000000	1,4390055e-1	-3,3151199

B.2.2 Projeto com filtros de ponderação

A_c		$D_c = 0$	
ω_n	ξ	B_c	C_c^T
7,8968851e2	6,4840936e-1	-7,3986511e-1	-1,9766151e-4
7,8968851e2	6,4840936e-1	-1,0544793e-1	-1,7950547e-4
8,7348271e2	9,9095666e-1	4,7810679e-2	-2,3271842e-4
8,7348271e2	9,9095666e-1	7,0014813e-1	-2,1840874e-4
9,6824928e2	1,0915534e-1	1,6713529	1,1810675e-1
9,6824928e2	1,0915534e-1	-6,0542335e-1	-6,0616330e-1
1,4382938e3	1,1584247e-1	1,2475420e-1	5,7014283e-1
1,4382938e3	1,1584247e-1	2,3760079e-1	4,2595715e-1
1,7822096e3	9,8101739e-1	5,4682847	-7,0167695e-1
1,7822096e3	9,8101739e-1	-1,6305306	2,3260013e-1
1,8477976e3	3,2333938e-2	2,3454362e-1	9,2413154e-2
1,8477976e3	3,2333938e-2	2,7557601e-1	1,3975162e-1
1,9162006e3	7,2697802e-1	9,9852321e-1	-9,6289903e-1
1,9162006e3	7,2697802e-1	-8,3446394	-8,9402939e-1
2,3960618e3	3,8696635e-2	5,1846820e-1	1,7652705e-1
2,3960618e3	3,8696635e-2	-5,0327343	-1,3923612
2,4508577e3	2,7197050e-1	5,8987057e-1	-1,0245450
2,4508577e3	2,7197050e-1	7,0690668e-1	-5,9474577e-1
2,9611347e3	9,0465253e-2	9,4813985e-1	-1,6096165
2,9611347e3	9,0465253e-2	4,1305518e-1	-3,4642194
1,2218658e4	9,9914524e-1	-1,6950056	2,4804753
1,2218658e4	9,9914524e-1	-5,4060405e-1	2,9322868
1,3097334e4	9,9975917e-1	-1,0800783	7,7633608e-1
1,3097334e4	9,9975917e-1	5,5293657e-2	8,3861250e-1

B.2.3 Projeto baseado no lema GKYP

A_c		$D_c = -1,2197$	
ω_n	ξ	B_c	C_c^T
7,9584614e2	4,5707400e-1	2,3445848e3	1,4729404e2
7,9584614e2	4,5707400e-1	1,7889792e1	-3,9946749e
9,7374410e2	9,6618596e-2	-2,0731394e-1	1,2825010e
9,7374410e2	9,6618596e-2	-8,9909605e-2	-8,8017456e
1,7283366e3	2,5225942e-2	2,7650161e-4	2,0633440e1
1,7283366e3	2,5225942e-2	-4,7416059e-2	-2,8024215e
2,2976606e3	8,7584792e-3	1,8799614e-2	-4,5492760e1
2,2976606e3	8,7584792e-3	2,9117039e-2	2,4322293e1
2,7135342e3	6,8065723e-2	-2,5580161e-1	-2,7959604e1
2,7135342e3	6,8065723e-2	-6,3097979e-1	-8,4613450e
9,3692433e3	1,0000000	2,2802812e-2	-1,5388210e1
1,4071553e6	1,0000000	-8,4179437e-2	1,9843252e1

B.3 Controladores para bancada torcional (lema GKYP)

B.3.1 Controlador 1

A_c		$D_c = -108,3$	
ω_n	ξ	B_c	C_c^T
1,6999567	1,0000000	-2,9470102e2	1,7819005e1
4,6942260e1	1,0000000	-2,1248821e1	-3,8532467e2
1,7702495e2	1,0000000	-2,4626625e1	5,7668463e1

B.3.2 Controlador 2

A_c		$D_c = -2117$	
ω_n	ξ	B_c	C_c^T
1,6991737	1,0000000	-7,6675932e3	8,9135263e2
1,1629393e3	1,0000000	-1,2658033e1	6,1812687e1
9,1971559e3	1,0000000	5,1898508e2	6,1911434e3

Apêndice C

Principais funções implementadas

Duas funções mais relevantes implementadas para os testes de controle no trabalho são mostradas a seguir. São funções implementadas em linguagem do programa Matlab (na versão 7.2) e pressupõem a instalação dos pacotes citados ao longo do trabalho para resolver problemas com desigualdades matriciais lineares e as derivações do lema GKYP.

Os pacotes acrescentados ao Matlab para este trabalho são:

Yalmip interface para problemas de otimização, facilita a descrição do problema, ver [27].

SeDuMi pacote para solução de problemas de programação semidefinida, ver [41].

KYPD pacote para conversão de problemas derivados do lema KYP para uma formulação numericamente mais eficiente, internamente, o pacote converte o problema para a sua forma dual, ver [44].

C.1 Projeto com incerteza politópica

Esta função obtém o controlador \mathcal{H}_∞ para um politopo de sistemas usando estabilidade quadrática, conforme o Projeto 3.

```
function K = hinf_politopo(P,ny,nu)
% H-infinito por LMI com estabilidade quadrática
% no politopo de incerteza.
% K = hinf_politopo(P,ny,nu)
% P - lista com o politopo; um sistema em cada
%     elemento da lista
% ny - número de medidas
% nu - número de controle

N = length(P);
```

```

[A,B,C,D] = ssdata(P{1});
n = length(A);

mu = sdpvar(1,1);
Y = sdpvar(n,n);
X = sdpvar(n,n);
L = sdpvar(n,ny,'full');
F = sdpvar(nu,n,'full');
M = sdpvar(n,n,'full');

r = set([Y eye(n); eye(n) X] > 0);

for i = 1:N

    [A,B,C,D] = ssdata(P{i});
    [s,e] = size(D);
    nw = e - nu;
    nz = s - ny;

    B1 = B(:,1:nw);
    B2 = B(:,nw+1:nw+nu);
    C1 = C(1:nz,:);
    C2 = C(nz+1:nz+ny,:);
    D11 = D(1:nz,1:nw);
    D12 = D(1:nz,nw+1:nw+nu);
    D21 = D(nz+1:nz+ny,1:nw);
    D22 = D(nz+1:nz+ny,nw+1:nw+nu);

    if ~(D11 == 0 & D22 == 0)
        error('Matrizes D11 e D22 devem ser nulas.');
```

end

```

r = r + set([A*Y+B2*F+Y*A.'+F.'*B2.' A + M.'...
            Y*C1'+F.'*D12.' B1;...
            A.' + M X*A+L*C2+A.'*X+C2.'*L.'...
            C1.' X*B1+L*D21;...

```

```

        C1*Y+D12*F          C1...
        -eye (nz)          zeros (nz,nw) ; ...
        B1.'              B1.'*X+D21.'*L.' ...
        zeros (nw,nz)     -mu*eye (nw) ] <0) ;

end

options = sdpsettings('solver','sedumi');
d = solvesdp(r,mu,options)

gama = sqrt(double(mu));
X = double(X);
Y = double(Y);
L = double(L);
F = double(F);
M = double(M);

U = eye(n);
V = inv(U.')*(eye(n)-X*Y);

Dc = zeros(nu,ny);
Cc = F*inv(V);
Bc = inv(U.')*L;
Ac = inv(U.')*(M-X*A*Y-X*B2*F-L*C2*Y)*inv(V);

if eig(Ac)>0
    eig(Ac)
    error('Controlador instável.')
end

K = ss(Ac,Bc,Cc,Dc);

```

C.2 Projeto com desigualdades em frequência

Esta função implementa o projeto de controlador robusto usando o lema GKYP com restrições em frequência, na forma do Projeto 4.

```

function K = gkyp_multiobjetivo_freq(A,B1,B2,C1,C2,D11,D12,...
    D21,D22,P,om1,om2,tau,tipo,mostra,op)
% Projeto de controlador por realimentação de saída
% usando lema de KYP generalizado.
% K = gkyp_multiobjetivo_freq(A,B1,B2,C1,C2,D11,D12,D21,D22,P,...
%     om1,om2,tau,tipo,mostra,op);
% Parâmetros de projeto.
% - Modelo do sistema (A,B1,B2,C1,C2,D11,D12,D21,D22), todas
%   as matrizes como listas de matrizes. Cada lista deve
%   conter o mesmo número de sistemas. Os sistemas representam
%   diferentes configurações de entrada e saída a ser restritos
%   em cada faixa de frequência. Apenas as matrizes
%   A, C2 e D22 não são listas pois não representam diferentes
%   configurações de entrada e saída para a malha fechada.
% - P - planta com a configuração de entradas e saídas padrão
%   para fechar a malha
% - Limites em frequência - vetores om1 e om2.
% - tau = 1 - dentro da faixa, tau = -1 - fora da faixa
% - tipo - tipo da restrição: 1 - desempenho, 0 - robustez.
% - mostra - mostra ou não os teste de estabilidade e valor
%   singular.
% - op - estrutura gerada pela função sdpsettings para os
%   parâmetros de solução.
%
% Referência:
% Iwasaki, T. Hara, S. Feedback control synthesis of multiple
% frequency domain specifications via generalized KYP lemma.
% Int. J. Robust Nonlinear Control 2007; 17:415-434

global p q

np = size(A,1);
[ny,nu] = size(D22);

%% Projeto de controlador dinâmico.

```

```

% Variáveis do problema.
nc = np;
n = np+nc;
X = sdpvar(np,np,'full');
Y = sdpvar(np,np,'full');
Z = sdpvar(np,np,'full');
M = sdpvar(nc,nc,'full');
G = sdpvar(nc,ny,'full');
H = sdpvar(nu,nc,'full');
L = sdpvar(nu,ny,'full');

LMI = set([]);

k = 1;
c = 0;
d = 0;
for k = 1:length(om1)
    [nz,nw] = size(D11{k});
    % Tipo de projeto - forma da limitação da FRF.
    Om = [0 1; 1 0];
    Rl = [eye(n) zeros(n,n+nz)];
    if (om2(k) == Inf) && (om1(k) == 0)
        Om = [0 0; 0 0];
        Psi = [-1 0; 0 1];
        Rl = [zeros(n,n) eye(n) zeros(n,nz)];
    elseif (om2(k) == Inf)
        Psi = [-om1(k)*om1(k) 1; 1 1];
    elseif (om1(k) == 0)
        Psi = [om2(k)*om2(k) 1; 1 -1];
    else
        omc = (om1(k)+om2(k))/2;
        Psi = tau(k)*[-om1(k)*om2(k) -j*omc; j*omc -1];
    end

    robustez = set([]);

```

```

% Definindo Pi.
if tipo(k) == 0
    % Critério de robustez.
    gama_l{d+1} = sdpvar(1,1);
    Pi = [-gama_l{d+1}*eye(nz) zeros(nz,nw);...
          zeros(nw,nz) eye(nw)];
    robustez = robustez + set(gama_l{d+1}<1);
    d = d + 1;
else %tipo(k) == 1
    % Critério de desempenho.
    gama{c+1} = sdpvar(1,1);
    Pi = [-gama{c+1}*eye(nz) zeros(nz,nw);...
          zeros(nw,nz) eye(nw)];
    c = c+1;
end
Pi11 = Pi(1:nz,1:nz);
Pi12 = Pi(1:nz,nz+1:nz+nw);
Pi22 = Pi(nz+1:nz+nw,nz+1:nz+nw);

P1{k} = sdpvar(n,n,'hermitian','complex');
Q1{k} = sdpvar(n,n,'hermitian','complex');

A1 = [A*X+B2*H      A+B2*L*C2;
      M              Y*A+G*C2;
      -X             -eye(np);
      -Z             -Y;
      C1{k}*X+D12{k}*H  C1{k}+D12{k}*L*C2];
B1 = [B1{k}+B2*L*D21{k};
      Y*B1{k}+G*D21{k};
      zeros(np,nw);
      zeros(np,nw);
      D11{k}+D12{k}*L*D21{k}];

T = [zeros(2*n,nw); Pi12];

% Lado esquerdo da desigualdade 13.

```

```

if Om == [0 0; 0 0]
    R11 = kron(Psi,Ql{k});
else
    R11 = kron(Om,Pl{k})+kron(Psi,Ql{k});
end
R11 = [R11 zeros(2*n,nz); zeros(nz,2*n) Pi11];
W1 = R11 + T*B1' + B1*T';

% Lado direito da desigualdade 13.
W2 = A1*R1+(A1*R1)';

% Desigualdade 13.
Res = [W1-W2 B1; B1' -inv(Pi22)];

LMI = LMI + set(Res<0)+set(Ql{k}>0);
LMI = LMI + robustez;

end

Pl{k+1} = sdpvar(n,n,'hermitian','complex');

Ale = [A*X+B2*H A+B2*L*C2;
        M Y*A+G*C2;
        -X -eye(np);
        -Z -Y];

% Desigualdade 20 - estabilidade.
J = [eye(2*n)];

S = [-q*eye(n) p*eye(n)];
Om = [0 1; 1 0];
estabilidade = kron(Om,Pl{k+1})-(Ale*S + S.'*Ale. ');

LMI = LMI + set(estabilidade<0) + set(Pl{k+1}>0);

obj = [];

```

```

for k = 1:c
    obj = obj + gama{k};
end

% Solução.
solvesdp(LMI,obj,op);

% Obtendo o controlador.
X = double(X);
Y = double(Y);
Z = double(Z);
M = double(M);
G = double(G);
H = double(H);
L = double(L);

for k = 1:c
    gama{k} = double(gama{k});
end

VU = Z - Y*X;
U = eye(nc);
V = VU*inv(U);

K = inv([V Y*B2; zeros(nu,np) eye(nu)])*...
    ([M G; H L] - [Y*A*X zeros(nc,ny); ...
    zeros(nu,nc) zeros(nu,ny)])*...
    inv([U zeros(np,ny); C2*X eye(ny)]);

Ac = K(1:nc,1:nc);
Bc = K(1:nc,nc+1:nc+ny);
Cc = K(nc+1:nc+nu,1:nc);
Dc = K(nc+1:nc+nu,nc+1:nc+ny);

K = ss(Ac,Bc,Cc,Dc);

```

```
%% Teste do controlador.  
if (mostra)  
    disp('Pólos do controlador:')  
    damp(K)  
  
    MF = lft(P,K,ny,nu);  
    disp('Pólos da malha fechada:')  
    damp(MF)  
  
    eig(double(estabilidade))  
  
end
```

Referências Bibliográficas

- [1] ÅSTRÖM, K. J., E WITTENMARK, B. *Computer-controlled systems: theory and design*. Prentice Hall Information and System Sciences. Prentice Hall, 1997.
- [2] AKIN, J. E. *Finite Elements for Analysis and Design*. Computational Mathematics and Applications. Academic Press: Harcourt Brace and Company, Publishers, 1994.
- [3] BASTOS, J. P. A. *Eletromagnetismo para engenharia: estática e quase-estática*. Editora da UFSC, 2004.
- [4] BÁZAN, F. S. V. Eigensystem realization algorithm (ERA): reformulation and system pole perturbation analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 274 (2004), 433–444.
- [5] BOYD, S., GHAOUI, L. E., FERON, E., E BALAKRISHNAM, V. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.
- [6] BOYD, S., E VANDENBERGHE, L. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2004.
- [7] C. SCHERER, P. G., E CHILALI, M. Multiobjective output-feedback control via LMI optimization. *IEEE Transactions on Automatic Control* 42, 7 (1997), 896–911.
- [8] COOK, R. D., MALKUS, D. S., E PLESHA, M. E. *Concepts and applications of finite element analysis*. John Wiley and Sons, Inc., 1989.
- [9] DE FARIAS, D. P., DE OLIVEIRA, M. C., E GEROMEL, J. C. Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control of flexible structures. *Mathematical Problems in Engineering* 6 (2001), 557–598.
- [10] DE OLIVEIRA, M. C. Algoritmos de pontos interiores e desigualdades matriciais lineares, 1996. Dissertação de mestrado - FEEC - Unicamp.
- [11] DE OLIVEIRA, M. C., BERNUSSOU, J., E GEROMEL, J. C. A new discrete-time robust stability condition. *Systems and control letters* 37 (1999), 261–265.
- [12] DE OLIVEIRA, M. C., GEROMEL, J. C., E BERNUSSOU, J. Extended \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ characterizations and controller parametrizations for discrete-time systems. *International Journal on Control* 9, 75 (2002), 666–679.

- [13] E A. G. B. PALHARES, J. C. G. *Análise Linear de Sistemas Dinâmicos: Teoria, Ensaios Práticos e Exercícios*. Editora Edgard Blucher Ltda, 2004.
- [14] GAHINET, P., E NEMIROVSKI, A. The projective method for solving linear matrix inequalities. *The Mathematical Programming, Inc.* 77 (1997), 163–190.
- [15] GAWRONSKI, W. *Dynamics and control of flexible structures*. Springer-Verlag, 1998.
- [16] GEROMEL, J. C., E COLANERI, P. Stability and stabilization of continuous time switched linear systems, 2005. www.dt.fee.unicamp.br/~geromel/switched_sicon_rev.pdf.
- [17] GEROMEL, J. C., DE OLIVEIRA, M. C., E HSU, L. LMI characterization of structural and robust stability. *Linear Algebra and its Applications*, 285 (1998), 69–80.
- [18] GU, D. W., PETKOV, P. H., E KONSTANTINOV, M. M. *Robust Control Design with Matlab*. Springer, 2006.
- [19] INSTRUMENTS, N. *Control Systems toolbox user's guide*, 2006.
- [20] IWASAKI, T., E HARA, S. Generalized KYP lemma: unified characterization of frequency domain inequalities with applications to system design. Tech. rep., Department of Mathematical Informatics - University of Tokyo, August 2003.
- [21] IWASAKI, T., E HARA, S. Conic S-procedure and constrained dissipativity for linear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 17 (2007), 405–413.
- [22] IWASAKI, T., E HARA, S. Feedback control synthesis of multiple frequency domain specifications via generalized KYP lemma. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 17 (2007), 415–434.
- [23] IWASAKI, T., MEINSMA, G., E FU, M. Generalized S-procedure and finite frequency KYP lemma. *Mathematical Problems in Engineering* 6 (2000), 305–320.
- [24] JÚNIOR, F. S. Síntese de controladores \mathcal{H}_∞ de ordem reduzida com aplicação no controle ativo de estruturas flexíveis, 2006. Dissertação de mestrado. Faculdade de Engenharia Mecânica - Universidade Estadual de Campinas.
- [25] JÚNIOR, F. S., E SERPA, A. L. Reduced model in \mathcal{H}_∞ vibration control using linear matrix inequalities. *Shock and vibration* 13 (2005), 469–484.
- [26] KOROGUI, R. H. Análise de estabilidade e realimentação de estado de sistemas dinâmicos politópicos via multiplicadores, 2006. Dissertação de mestrado. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação - Universidade Estadual de Campinas.

- [27] LÖFBERG, J. Yalmip : A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In *Proceedings of the CACSD Conference* (Taipei, Taiwan, 2004).
- [28] MAZONI, A. F. Controle \mathcal{H}_2 , \mathcal{H}_∞ e misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ de estruturas flexíveis, 2005. Relatório de Trabalho de Graduação - Faculdade de Engenharia Mecânica - Universidade Estadual de Campinas.
- [29] MOREIRA, F. J. O. Um controlador \mathcal{H}_∞ de banda limitada para o controle ativo de vibração estrutural, 1998. Tese de doutorado. Faculdade de Engenharia Mecânica - Universidade Estadual de Campinas.
- [30] NATIONAL INSTRUMENTS. *LabVIEW 8.0 user's guide*, 2006.
- [31] NATIONAL INSTRUMENTS. *National Instruments PCI-6521 board datasheet*, 2006.
- [32] NÓBREGA, E. G. O. Detecção robusta de falhas usando inequações matriciais lineares, 2001. Tese de livre-docência. Faculdade de Engenharia Mecânica - Universidade Estadual de Campinas.
- [33] OLIVEIRA, R. C. L. Estudo de robustez em sistemas lineares por meio de relaxações em termos de desigualdades matriciais lineares, 2006. Tese de doutorado. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação - Universidade Estadual de Campinas.
- [34] OLIVEIRA, R. C. L. F., E PERES, P. L. D. Stability of polytopes of matrices via affine parameter-dependent Lyapunov functions: asymptotically exact LMI conditions. *Linear Algebra and its Applications*, 405 (2005), 209–228.
- [35] SÁNCHEZ-PEÑA, R. S., E SZNAIER, M. *Robust Systems: Theory and Applications*. John Wiley and Sons, 1998.
- [36] SCHERER, C. Robust mixed control and LPV control with full block scalings, 1999. cite-seer.ist.psu.edu/scherer99robust.html.
- [37] SCHERER, C., E WEILAND, S. Linear matrix inequalities in control. <http://www.dsc.tudelft.nl/cscherer/2416/lmi05.pdf>, 2004.
- [38] SHAKED, U. Improved LMI representations for the analysis and design of continuous-time systems with polytopic type uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control* 46, 4 (2001), 652–656.
- [39] SKELTON, R. E., IWASAKI, T., E GRIGORIADIS, K. *An Unified Algebraic Approach to Linear Control Design*. Taylor and Francis, 1998.

- [40] SKOGESTAD, S., E POSTLETHWAITE, I. *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*. John Wiley and Sons, Inc., 1996.
- [41] STURM, J. K. *Using SeDuMi: a Matlab Toolbox for optimization over symmetric cones*, 2001. <http://sedumi.mcmaster.ca>.
- [42] VANANTWERP, J. G., E BRAATZ, R. D. A tutorial on linear and bilinear matrix inequalities. *Journal of Process Control* 10, 1 (2000), 363–385.
- [43] VANDENBERGHE, L., BALAKRISHNAN, V. R., WALLIN, R., E HANSSON, A. On the implementation of primal-dual interior-point methods for semidefinite programming problems derived from the KYP lemma. In *Proceedings fo the 42nd IEEE Conference on Decision and Control* (December 2003).
- [44] WALLIN, R. *User's guide to KYPD solver*, April 2003. <http://www.control.isy.liu.se/research/reports/2003/2517.pdf>.
- [45] WEI, J. B., E LEE, L. Futher improvement on LMI representations for the analysis and design of continous-time systems with polytopic type uncertainty. *5th Asian Control Conference* (2004), 1130–1136.
- [46] YANG, Q. J., ZHANG, P. Q., LI, C. Q., E WU, X. P. A system theory approach to multi-input multi-output modal parameters identification methods. *Mechanical systems and signal processing* 2, 8 (1994), 159–174.
- [47] ZHOU, K., E DOYLE, J. C. *Essentials of Robust Control*. Prentice-Hall, 1998.
- [48] ZHOU, K., DOYLE, J. C., E GLOVER, K. *Robust and Optimal Control*. Prentice-Hall, 1996.